ელიზბარ ნადარაია
მზევინარ ფაცაცია
რევაზ აბსავა

ალბათობის თეორია

ალბათობის თეორია

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ელიზბარ ნადარაია,
მზევინარ ფაცაცია, რევაზ აბსავა

ალბათობის თეორია

მეორე შესწორებული გამოცემა

უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

წიგნი წარმოადგენს ალბათობის თეორიის სახელმძღვანელოს, რომელშიც ალბათობის თეორიის მასალის გადმოცემა ეყრდნობა კოლმოგოროვის აქსიომატიკურ მიდგომას. სახელმძღვანელოს მეორე გამოცემა (პირველი გამოიცა 2009 წ.) გადამუშავებულია, გასწორებულია ზოგიერთი უზუსტობა და გაზრდილია სავარჯიშო ამოცანათა რაოდენობა.

სახელმძღვანელო, რომელსაც თან ერთვის სავარჯიშო ამოცანები, განკუთვნილია უნივერსიტეტების მათემატიკის მიმართულების სტუდენტებისთვის.

რედაქტორი: ივ. ჯავახიშვილის სახ.ელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ასისტ. პროფესორი,
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი
პ. ბაბილუა

რეცენზენტები: ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ასოც. პროფესორი,
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი
ო. ფურთუხია

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ასოც. პროფესორი,
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
ბ. დოჭვირი

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით.

ISBN 978-9941-13-628-3 (pdf)

ეძღვნება თანაავტორის –
პროფ. რევაზ აბსავას ხსოვნას

შესავალი

მეცნიერებისა და ტექნიკის თითქმის ყველა სფეროში ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როდესაც ესა თუ ის ექსპერიმენტი (ცდა) ან დაკვირვება შეიძლება ერთნაირ პირობებში მრავალჯერ განმეორდეს. ცდა ვუწოდოთ პირობათა რაიმე განსაზღვრული **G** კომპლექსის (ერთობლიობის) განხორციელებას. ცდის შედეგი შეიძლება იყოს რიცხვი ან რაიმე აბსტრაქტული ელემენტი. თუ ცდის შედეგი ეკუთვნის რაიმე **A** სიმრავლეს, მაშინ ამბობენ, რომ ადგილი აქვს **A** ხდომილობას, თუ პირობათა **G** კომპლექსის განხორციელებისას **A** ხდომილობას ადგილი ექნება აუცილებლად, ანდა მისი მოხდენა შეუძლებელია, მაშინ, შესაბამისად, **A** ხდომილობას უწოდებენ აუცილებელს ან შეუძლებელს. მაგალითად, **G** პირობათა კომპლექსი იყოს ორი სათამაშო კამათლის გაგორება, მაშინ ხდომილობა $\mathbf{A=\{i+j\geq 2;\ \ i, j = \overline{1,6}\}}$ — აუცილებელი ხდომილობაა, ხოლო $\mathbf{B=\{i+j\geq 13\}}$ — შეუძლებელი.

ხდომილობას, რომელიც პირობათა გარკვეული კომპლექსის განხორციელებისას ხან ხდება, ხან არა, ეწოდება შემთხვევითი. მოვიყვანოთ შემთხვევითი ხდომილობის მაგალითები:

1. **G** პირობათა კომპლექსი იყოს მონეტის ერთჯერ აგდება, ხოლო **A** — „გერბის“ მოსვლა.

2. **G** პირობათა კომპლექსი იყოს რაიმე ფიზიკური სიდიდის გაზომვა, ხოლო **A** — გაზომვის შედეგი $\in [a,\mathbf{b}]$.

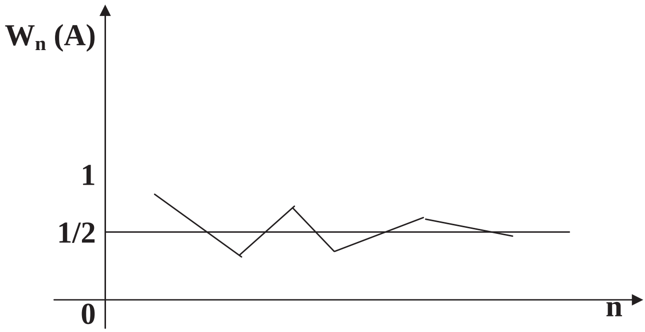
3. G პირობათა კომპლექსი იყოს ქთბილისში დაბადებულ ბავშვთა სქესის რეგისტრაცია, ხოლო A — ახალშობილი ვაჟია.

4. პირობათა G კომპლექსი იყოს ბურთის ამოღება ყუთიდან, რომელშიაც m_1 თეთრი და m_2 წითელი ბურთია, ხოლო A — ამოღებული ბურთი წითელია.

მოყვანილი მაგალითებიდან ჩანს, რომ პირობათა გარკვეული კომპლექსის განხორციელებამდე არ შეგვიძლია წინასწარ ვთქვათ, ცდის რომელ კონკრეტულ შედეგს ექნება ადგილი, ე.ი. მათი შედეგები ცალსახად არ განისაზღვრება პირობათა კომპლექსის განხორციელებით. ალბათობის თეორია სწორედ ასეთ ექსპერიმენტთა მათემატიკურ მოდელებს შეისწავლის. ცალკეული ცდის ან დაკვირვების შედეგით ძნელია რაიმე კანონზომიერების შემჩნევა, მაგრამ თუ განვიხილავთ ცდათა მიმდინარეობას მთლიანობაში, მაშინ შესაძლებელია გარკვეული კანონზომიერების შემჩნევა, რომელიც *სტატისტიკური მდგრადობის*, ანუ ფარდობით სიხშირეთა მდგრადობის თვისებაში ვლინდება. ეს თვისება აღიწერება შემდეგნაირად: A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე n-ჯერ ჩატარებულ ცდაში ეწოდება $W_n(A)=\nu_A/n$ წილადს, სადაც ν_A იმ ცდათა რაოდენობაა, რომლის დროსაც ადგილი ჰქონდა A ხდომილობას. ცხადია, რომ $0 \le W_n(A) \le 1$, ხოლო თუ A აუცილებელი ან შეუძლებელი ხდომილობაა, მაშინ, შესაბამისად, $W_n(A)=1$ და $W_n(A)=0$.

ფარდობით სიხშირეთა მდგრადობა იმაში მდგომარეობს, რომ თუ n საკმარისად დიდია, ფარდობითი სიხშირე $W_n(A)$ მცირედ „ირხევა“ (n-ის ცვლილებისას) გარკვეული P(A) რიცხვის გარშემო, ე.ი. ახლოს იქნება P(A) რიცხვთან. P(A) რიცხვს A ხდომილობის *ალბათობას* უწოდებენ. ის არის A ხდომილობის მოხდენის შესაძლებლობის რაოდენობრივი *ზომა*. ნათქვამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი. ავაგოთ გრაფიკი: აბსცი-

სთა ღერძზე აღვნიშნოთ ცდათა რიცხვი **n**, ხოლო ორდინატთა ღერძზე – ფარდობითი სიხშირე $\mathbf{W_n(A)=\nu_n/n}$. შევნიშნავთ, რომ ტეხილი, რომელიც აერთებს წერტილებს $\mathbf{(n,\ W_n(A))}$ **n**-ის ზრდასთან ერთად, ძალიან სწრაფად უახლოვდება წრფეს $\mathbf{W_n(A)=1/2}$.



ფარდობით სიხშირეთა მდგრადობის ეს თვისება შემჩნეული იყო ჯერ კიდევ XVII საუკუნეში ალბათობის თეორიის საწყისების შემქმნელების მიერ. ასე, მაგალითად, ბიუფონმა (XVII ს.) მონეტა ააგდო 4040–ჯერ, მათ შორის გერბი (A ხდომილობა) მოვიდა ν_A=2048–ჯერ და, მაშასადამე, $\mathbf{W_n(A)=0,508}$. პირსონმა იგივე ცდა ჩაატარა: **n**=24000, ν_A=12012, ე.ი.

$$W_n(A)=0,5005.$$

ხდომილობის ალბათობის ზემოთ მოცემული განმარტება არ არის მათემატიკურად მკაცრი. რაგინდ დიდი არ უნდა იყოს ცდათა რიცხვი **n**, ჩვენ ვერ ვიპოვით **P(A)** ალბათობას ზუსტად. **P(A)** არ წარმოადგენს ფარდობით სიხშირეთა მიმდევრობის ზღვარს ჩვეულებრივი გაგებით. მართლაც, ფარდობით სიხშირეთა მიმდევრობა $\mathbf{\{W_n(A)\}}$ ცდათა ერთი სერიისათვის განსხვავებული იქნება, როგორც წესი, ცდათა მეორე სერიის შესაბამის ფარდობით

სიხშირეთა მიმდევრობისაგან. გარდა ამისა, სინამდვილეში ჩვენ გვექნება არა ფარდობით სიხშირეთა უსასრულო მიმდევრობა, არამედ მხოლოდ მისი ელემენტების სასრული რაოდენობა. ამგვარად, როგორც ჩანს, ალბათობა უნდა განისაზღვროს სხვანაირად, მაგრამ ისე, რომ ფარდობითი სიხშირის აღნიშნული თვისება შენარჩუნებულ იქნას, ე.ი. რაიმე აზრით ფარდობითი სიხშირე ცდათა რიცხვის ზრდისას უნდა უახლოვდებოდეს შესაბამისი ხდომილობის ალბათობას (რა აზრით უნდა იყოს მიახლოება, ჩვენ ამას შემდგომში გავეცნობით!).

თავი I
ელემენტარულ ხდომილობათა დისკრეტული სივრცე

§1. ალბათობის განსაზღვრა და თვისებები

ალბათობის თეორიის მეთოდებით რაიმე G ცდასთან დაკავშირებული რეალური ამოცანის შესწავლისას, უპირველეს ყოვლისა, გამოყოფენ ცდის შედეგთა სრულად აღმწერ Ω სიმრავლეს, ე.ი. გამოყოფენ შემთხვევითი ექსპერიმენტის ყველა შესაძლო შედეგთა Ω სიმრავლეს. ამ სიმრავლის ყოველ ω ელემენტს ელემენტარული ხდომილობა ეწოდება, ხოლო თვით Ω სიმრავლეს — ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე. Ω სივრცეს მარტივი სახე აქვს იმ შემთხვევაში, როდესაც შესაბამისი ექსპერიმენტის შესაძლო შედეგთა სიმრავლე სასრული ან თვლადია. ამ თავში მხოლოდ ასეთ ს ი ვ რ ც ე ე ბ ს განვიხილავთ.

შემოვიღოთ შემდეგი:

განსაზღვრა 1.1. ელემენტარულ ხდომილობათა დისკრეტული სივრცე ეწოდება ნებისმიერ სასრულ ან თვლად სიმრავლეს

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2,....\}$$

მაგალითი 1.1. ვთქვათ, მონეტას აგდებენ ერთჯერ. ამ ცდის აღმწერი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შედგება ორი ელემენტისაგან

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\},\ \ \omega_1=ს,\ \ \omega_2=გ.$$

სადაც „ს“ ნიშნავს საფასურს, ხოლო „გ“ — გერბს.

მაგალითი 1.2. ვთქვათ, მონეტას აგდებენ ორჯერ. შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება ასეთი

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

სადაც ω_1=გგ, ω_2=გს, ω_3=სგ, ω_4=სს.

მაგალითი 1.3. ორი k_1 და k_2 პირი რიგრიგობით აგდებს მონეტას. ვთქვათ, თამაშს იწყებს k_1 და იგებს ის, ვისაც პირველად მოუვა საფასური. ამ ექსპერიმენტის შესაბამისი ელემენტა-

რულ ხდომილობათა სივრცე შედგება ელემენტთა თვლადი რაოდენობისაგან:

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2,....\},$$

სადაც

$$\omega_1=ს,\ \omega_2=გს,\ ...\ ,\ \omega_k=\underbrace{გგ...გ}_{k-1}ს,...$$

ელემენტარული ხდომილობათა დისკრეტული Ω სივრცის ნებისმიერ A ქვესიმრავლეს შემთხვევითი ხდომილობა ეწოდება. A-ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა აღინიშნება $\overline{A}$–თი და ის ნიშნავს A-ს არმოხდენას, ე.ი.

$$\overline{A}=\{\omega\in\Omega:\omega\notin A\}.$$

თუ A ხდომილობის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B ხდომილობას, მაშინ წერენ

$$A\subseteq B,\ (\omega\in A\Rightarrow\omega\in B\Rightarrow A\subseteq B).$$

A და B ხდომილობათა გაერთიანება ეწოდება ყველა იმ ელემენტარული ხდომილობათა სიმრავლეს, რომლებიც A და B ხდომილობიდან ერთს მაინც ეკუთვნიან და აღინიშნება $A\bigcup B$ ან $A+B$ სიმბოლოთი. ორი A და B ხდომილობის თანაკვეთა (ნამრავლი) ეწოდება ყველა იმ ელემენტარული ხდომილობათა სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნიან როგორც A, ისე B ხდომილობას და აღინიშნება $A\bigcap B$ ან AB სიმბოლოთი. A და B ხდომილობათა სხვაობას უწოდებენ A ხდომილობის ყველა იმ ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლეს, რომლებიც B-ს არ ეკუთვნიან და აღინიშნება $A\backslash B$ სიმბოლოთი, ან $A-B$. Ω-ს უწოდებენ აუცილებელ ხდომილობას, ხოლო ცარიელ $\varnothing$ სიმრავლეს — შეუძლებელს.

ცხადია, რომ

$$\overline{A}=\Omega\backslash A,\ \ A\backslash B=A\bigcap\overline{B}.$$

ხდომილობებისათვის ადგილი აქვს: ა) $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$;

ბ) $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

ᲒᲐᲜᲡᲐᲖᲦᲕᲠᲐ 1.2. **A** და **B** ხდომილობებს უთავსადი ეწოდება, თუ $A \cap B = \varnothing$.

ᲛᲐᲒᲐᲚᲘᲗᲘ 4. ვთქვათ, ცდა მდგომარეობს სათამაშო კამათლის ერთხელ გაგორებაში. შესაბამისი ელემენტარული ხდომილობათა სივრცე იქნება

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \text{ სადაც } \omega_k = k,\ k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

ვთქვათ,

$$A = \{\omega_6\},\ B = \{\omega_3\},\ C = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \text{ და } D = \{\omega_3, \omega_6\}.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$A \subset C,\ A \cup B = D,\ C \cap D = A,\ A \cap B = \varnothing,\ \overline{C} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}.$$

ხდომილობებზე ზემოთ მოყვანილი ოპერაციები ტრადიციულად ალბათობის თეორიის ტერმინებში გამოითქმის შემდეგნაირად: თუ **A** ხდომილობის მოხდენა იწვევს **B** ხდომილობას, მაშინ ვიტყვით, რომ **B** მოიცავს **A**-ს და ეს გარემოება ასე ჩაიწერება $A \subset B$. მაგალითად, **A** იყოს ხდომილობა — შემთხვევით არჩეული ქალი დედაა, ხოლო **B** — შემთხვევით არჩეული ადამიანი ქალია. ცხადია, $A \subset B$.

ორი **A** და **B** ხდომილობის გაერთიანება $A \cup B$ (ჯამი) ნიშნავს ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც **A** და **B** ხდომილობებიდან ერთი მაინც ხდება.

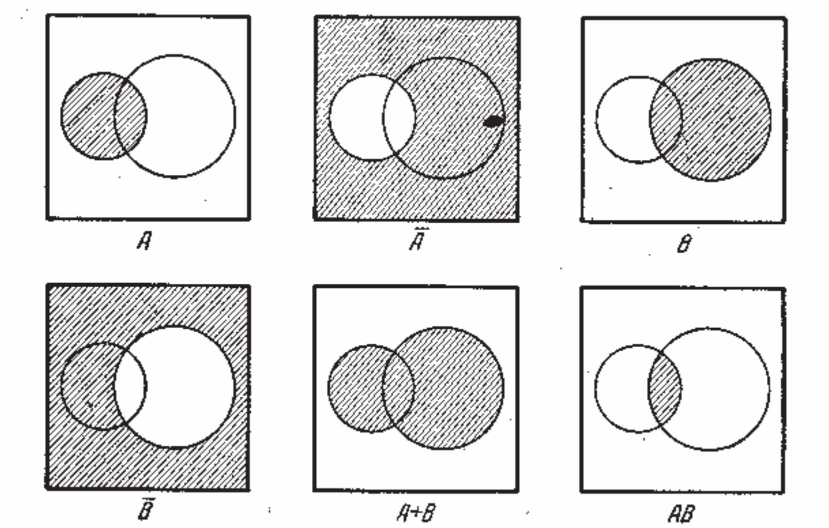
A და **B** ხდომილობათა თანაკვეთა $A \cap B$ (ნამრავლი) ეწოდება ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც **A** და **B** ერთად ხდება.

A და **B** ხდომილობათა $A \setminus B$ სხვაობა ეწოდება ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება **A** და არ ხდება **B**.

ᲒᲐᲜᲡᲐᲖᲦᲕᲠᲐ 1.3. ამბობენ, რომ მოცემულია $\omega \in \Omega$ ელემენტარული ხდომილობათა ალბათობები, თუ Ω-ზე განსაზღვრულია არაუარყოფითი რიცხვითი ფუნქცია $P(\omega)$, $\omega \in \Omega$ ისეთი, რომ $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$.

განსაზღვრა 1.4. **A** ხდომილობის **P(A)** ალბათობა ეწოდება **A**–ში შემავალი ელემენტარული ხდომილობების ალბათობათა ჯამს:

$$\mathbf{P(A)} = \sum_{\omega\in A} \mathbf{P(\omega)}.$$



განსაზღვრა 1.5. სამეულს $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$, სადაც $\mathcal{F}$ ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასია, ეწოდება დისკრეტული *ალბათური მოდელი*, ანუ დისკრეტული *ალბათური სივრცე*.

შემთხვევითი ექსპერიმენტის შესაბამისი ალბათური მოდელის აგებისას, პირველ რიგში, გამოყოფენ Ω სივრცეს; შემდეგ $\mathcal{F}$–ის ყოველ ელემენტს, რაიმე მოსაზრებიდან გამომდინარე, მიაწერენ ალბათობას. ალბათობის მოცემა უფრო ძნელია, ვიდრე Ω სივრცის აგება. თუ **A** ხდომილობის მოხდენის ფაქტზე დაკვირვება შესაძლებელია, ასეთ დაკვირვებას ვერ ჩავატარებთ მის შესაბამის **P(A)** ალბათობაზე. **P(A)** ალბათობის ობიექტურ არსებობაზე მიგვითითებს ფარდობითი სიხშირის მდგრადობა, რომელიც განსაზღვრული გვქონდა შესავალში.

ალბათობის თეორიას არ აინტერესებს თუ რამდენად სწორადაა აგებული ალბათური მოდელი $(\Omega,\mathcal{F},P)$. მოდელის სისწორის საკითხს, ე.ი. რამდენად ეთანხმება რაიმე ექსპერიმენტის შედეგს, რომლისთვისაც იყო იგი შედგენილი, იკვლევს მათემატიკური სტატისტიკა.

შევნიშნოთ, რომ ყველა ექსპერიმენტი არ შეიძლება აღიწეროს დისკრეტულ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცით. ასე, მაგალითად, შესავლის მეორე მაგალითში მოყვანილი ექსპერიმენტის შედეგები შეიძლება ავსებდნენ რაიმე $[a,b]$ ინტერვალს რიცხვთა ღერძზე. ცხადია, ამ ექსპერიმენტის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე $\Omega=[a,b]$ არ არის დისკრეტული. ასევე, თუ G პირობათა კომპლექსი (ცდა) ავადმყოფისაგან ელექტროკარდიოგრამის აღებაში მდგომარეობს, მაშინ, ცხადია, ექსპერიმენტის შედეგი რაიმე ფუნქციონალური სივრცის ელემენტს წარმოადგენს. ასეთი ექსპერიმენტებისათვის საჭიროა აიგოს უფრო ზოგადი ალბათური მოდელი.

ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრებებიდან შეგვიძლია მარტივად დავადგინოთ ალბათობის შემდეგი თვისებები:

1. $P(\Omega)=1,\ P(\varnothing)=0$;

2. $P(A\cup B)=\sum\limits_{\omega\in A\cup B}P(\omega)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$;

3. (ადიტიურობის თვისება) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, თუ $A\cap B=\varnothing$;

4. $P(\overline{A})=1-P(A)$;

5. თუ $A_k\in\mathcal{F}$ $k=1,2...$ და $A_k\cap A_j=\varnothing$. $k\neq j$, მაშინ

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k). \qquad (1.1)$$

(1.1) ტოლობა გამომდინარეობს

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k) \qquad (1.2)$$

ტოლობიდან ((1.2) ტოლობა თავის მხრივ მიიღება მე–3 თვისებიდან ინდუქციის წესით) და იქიდან, რომ

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} \mathbf{A}_j\Big) \to 0, \text{ როცა } \mathbf{n}\to\infty.$$

(1.1)-ს ალბათობის σ (სიგმა)–ადიტიურობას, ანუ თვლადად ადიტიურობას უწოდებენ.

6. (ნახევრად ადიტიურობა). მეორე თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) \le \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}). \tag{1.3}$$

(1.3) უტოლობას ადგილი აქვს ხდომილობათა თვლადი რაოდენობისთვისაც, ანუ ალბათობა σ–ნახევრად ადიტიურია:

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbf{A}_j\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{A}_j).$$

7. თუ $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$, მაშინ $\mathbf{P}(\mathbf{B}\setminus\mathbf{A})=\mathbf{P}(\mathbf{B})-\mathbf{P}(\mathbf{A})$.

აქედან გამომდინარეობს ალბათობის მონოტონურობა:

თუ $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$, მაშინ $\mathbf{P}(\mathbf{A})\le\mathbf{P}(\mathbf{B})$.

ამგვარად, 1–7 თვისებები გვიჩვენებს, ალბათობა ისე იქნა განსაზღვრული, რომ მას შერჩენოდა შესავალში განმარტებული ხდომილობის ფარდობითი სიხშირის ადვილად საჩვენებელი თვისებები:

$$\mathbf{W_n}(\Omega)=1,\ \mathbf{W_n}(\varnothing)=0,$$

$$\mathbf{W_n}\Big(\bigcup_{k} \mathbf{A}_k\Big) = \sum_{k} \mathbf{W_n}(\mathbf{A}_k), \text{ თუ } \mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j = \varnothing \quad \mathbf{i} \ne \mathbf{j}.$$

§2. კლასიკური სქემა

ვთქვათ, ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე შედგება $\mathbf{N}$ ელემენტისგან $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ და ყველა ელემენტარული ხდომილობა ტოლალბათურია, ე.ი.

$$\mathbf{P}(\omega_1)=\mathbf{P}(\omega_2)=\dots=\mathbf{P}(\omega_N).$$

განსაზღვრა 1.3–ის ძალით $\mathbf{P}(\omega_k)=1/\mathbf{N}$, $\mathbf{k}=1,2,\dots,\mathbf{N}$.

თუ ახლა A ხდომილობაში შემავალ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობას N(A) სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, 1.4. განსაზღვრიდან მიიღება

განსაზღვრა 2.1. თუ ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე შედგება N ტოლალბათური ელემენტარული ხდომილობისაგან, მაშინ

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}, \qquad (2.1)$$

სადაც $A\in\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ კლასში 2^N ელემენტია). ალბათურ მოდელს $(\Omega,\mathcal{F},P)$ უწოდებენ კ ლ ა ს ი კ უ რ ს.

(2.1) ტრადიციულად იკითხება ასე: კლასიკური სქემის შემთხვევაში $A\in\mathcal{F}$ „ხდომილობის ალბათობა ტოლია ხელშემწყობ შემთხვევათა N(A) რიცხვი გაყოფილი ყველა შესაძლო შემთხვევათა $N=N(\Omega)$ რიცხვზე“. მას ალბათობის კლასიკურ განსაზღვრასაც უწოდებენ.

კლასიკური სქემა ისეთი ექსპერიმენტის აღმწერია, რომელსაც გააჩნია ერთნაირად მოსალოდნელ შედეგთა სასრული რაოდენობა. განვიხილოთ ზ ო გ ი ე რ თ ი დ ი ს კ რ ე ტ უ ლ ი ა ლ ბ ა თ უ რ ი მ ო დ ე ლ ი.

1. მონეტის ერთჯერ აგდების შემთხვევაში (იგულისხმება მონეტა „სწორია“) ალბათურ მოდელს (2.1)-ის ძალით ექნება სახე:

$$\Omega=\{\text{გ},\text{ს}\};\ P(\{\text{გ}\})=1/2,\ P(\{\text{ს}\})=1/2,\ N(\Omega)=2.$$

მონეტის ორჯერ აგდების შემთხვევაში

$$\Omega=\{\text{გგ},\text{გს},\text{სგ},\text{სს}\},$$

$$P(\text{გგ})=P(\text{სგ})=P(\text{გს})=P(\text{სს})=1/4,$$

$$N(\Omega)=4.$$

A ხდომილობის — „ერთხელ მაინც დაჯდება გერბი“ — ალბათობა (2.1)-ის ძალით ტოლია 3/4, ე.ი. $P(A)=3/4$ და ა.შ. მონეტის n-ჯერ აგდების შემთხვევაში კი — $\Omega=\{\omega\}$, $\omega=(\omega_1, \omega_2,\dots, \omega_n)$, სადაც $\omega_k=$„გ“ ან „ს“ $N(\Omega)=2^n$, $P(\omega)=2^{-n}$.

2. მაგალითი 1.3-ის შესაბამის ალბათურ მოდელს ექნება სახე:

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,....\},\ P(\omega_1)=1/2,....\ P(\omega_k)=2^{-k}...$$

ვიპოვოთ **A** ხდომილობის — „k_1 პირი მოიგებს“ — ალბათობა. ცხადია,

$$A=\{\omega_1,\ \omega_3,....\ \omega_{2n+1},...\},$$

და განსაზღვრა 1.4-ის ძალით გვექნება

$$P(A)=\sum_{n=0}^{\infty} P(\omega_{2n+1})=2/3.$$

3. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ელემენტთა სასრული სიმრავლეები:

$$E_i=\{a_{n_1}^{(i)},...,a_{n_i}^{(i)}\},\quad i=1,2,...,r.$$

E_i სახის სიმრავლეს ვუწოდოთ n_i მოცულობის გენერალური ერთობლიობა. განვიხილოთ შემდეგი სახის G ექსპერიმენტი: თითოეული E_i სიმრავლიდან შემთხვევით „ვიღებთ“ თითო ელემენტს. ამ ექსპერიმენტის შესაბამისი ალბათური მოდელი იქნება:

$$\Omega=\{\omega\},\qquad \omega=(a_{j_1}^{(1)},...,a_{j_n}^{(r)}),\qquad 1\le j_k\le n_k,\qquad k=\overline{1,r},$$

$$N=N(\Omega)=n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdots n_r.\ (\text{დაამტკიცეთ!}),\ P(\omega)=1/N(\Omega).$$

4. ვთქვათ, მოცემულია გენერალური ერთობლიობა $E=\{a_1,...,a_n\}$. E გენერალური ერთობლიობიდან s მოცულობის შერჩევა ეწოდება დალაგებულ მიმდევრობას $(a_{j_1},...,a_{j_s})$. შერჩევა შეიძლება ორნაირად ვაწარმოოთ:

ვთქვათ, ჩვენი G ექსპერიმენტი მდგომარეობს იმაში, რომ E სიმრავლიდან შემთხვევით „ვიღებთ“ რომელიღაც a_{j_1} ელემენტს, შემდეგ $E\setminus\{a_{j_1}\}$ სიმრავლიდან – რომელიმე a_{j_2} ელემენტს და ა.შ. დასასრულ, $E\setminus\{a_{j_1},...,a_{j_{s-1}}\}$ სიმრავლიდან „ვიღებთ“ რომელიმე a_{j_s} $(s\le n)$ ელემენტს. ასეთ პროცესს განუმეორებელი შერჩევა ეწოდება, ხოლო თვით ექსპერიმენტის შედეგს $\omega=(a_{j_1},...,a_{j_s})$ —

s მოცულობის განუმეორებელი შემთხვევითი შენარჩევი. ცხადია, განუმეორებელ შერჩევათა რაოდენობა არის n–ელემენ–ტისაგან s–ელემენტიანი წყობა $A_n^s=(n)_S=n(n-1)....(n-s+1)$. მაშა–სადამე, განხილული ექსპერიმენტის შესაბამის ალბათურ მოდელს აქვს სახე:

$$\omega=(a_{j_1},...,a_{j_S}),\ N(\Omega)=(n)_S,\ P(\omega)=1/(n)_S.$$

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ s მოცულობის განუმეორე–ბელ შენარჩევში რიგით პირველი და მეორე შესაბამისად a_1 და a_2 ელემენტია (ხდომილობა A). ხდომილობა A ისეთი ω ელემენ–ტარული ხდომილობებისაგან შედგება, რომელთათვის

$$a_{j_1}=a_1, a_{j_2}=a_2:\ \text{ე.ი.}\ A=\{\omega: a_{j_1}=a_1, a_{j_2}=a_2\}.$$

თუ შერჩევაში ორი ელემენტი ფიქსირებულია, მაშინ დანარ–ჩენი s-2 ადგილი შეიძლება დაიკავოს გენერალური ერთობლი–ობის ნებისმიერმა n-2 ელემენტმა $(n-2)_{s-2}$-ნაირად.

ამიტომ $N(A)=(n-2)_{s-2}$.

ამრიგად, $P(A)=\dfrac{(n-2)_{s-2}}{(n)_s}=1/n(n-1)$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც შერჩევა დაულაგებელია (შერჩევაში შემავალი ელემენტების რიგს არა აქვს მნიშვნელობა), მაშინ Ω სივრცე შეიცავს $N(\Omega)=C_n^s$ ელემენტს. მართლაც, ყოველი არა–დაულაგებელი შერჩევიდან $(a_{j_1},...,a_{j_s})$, რომელიც შეიცავს სხვა–დასხვა ელემენტს, შეიძლება მივიღოთ s! დალაგებული შერჩევა.

მაშასადამე, $s!N(\Omega)=(n)_s$, ე.ი. $N(\Omega)=(n)_s/s!=C_n^s$.

შენიშვნა. განუმეორებელი შერჩევა თვალსაჩინოდ შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ყუთში მოთავსებული n გადანომრილი ბურთის მიმდევრობით ამოღება. ამოღებული ბურთი ყუთში არ და–ბრუნდება. თუ ბურთებს გავუიგივებთ მათ ნომრებს, მაშინ ნომრე–ბის მიმდევრობა $(j_1,...,j_s)$ იძლევა განუმეორებელ შერჩევას, ამა–სთან, $j_1,...,j_s$ რიცხვები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

განვიხილოთ შემდეგი სახის ექსპერიმენტი: $E=\{a_1,\dots,a_n\}$ გენერალური ერთობლიობიდან ელემენტების ამორჩევა შეიძლება განმეორებითაც, სახელდობრ, ჩავინიშნოთ პირველი ამორჩეული ელემენტის ნომერი j_1; დავაბრუნოთ იგი გენერალურ ერთობლიობაში და გავიმეოროთ ამორჩევა. მეორე ელემენტის j_2 ნომერიც ჩავინიშნოთ და ა.შ. გავიმეორებთ ამ ცდას s-ჯერ (იგულისხმება ექსპერიმენტი ორგანიზებულია ისე, რომ თითოეული ელემენტის ამორჩევა ერთნაირად მოსალოდნელია). ასეთ პროცესს განმეორებითი შერჩევა ეწოდება, ხოლო თვით ექსპერიმენტის შედეგს $\omega=(j_1,j_2,\dots,j_s)$ s-მოცულობის განმეორებითი შენარჩევი.

ცხადია, $j_1,\dots,j_S$ რიცხვებიდან შესაძლოა რამდენიმე ტოლიც იყოს. განმეორებით ამონარჩევთა რაოდენობა n^S-ის ტოლია. ეს გამომდინარეობს მე-3 მოდელიდან, თუ იქ დავუშვებთ $E_1=E_2=\dots=E_s=E$.

ამრიგად, განხილული ექსპერიმენტის შესაბამისი ალბათური მოდელია:

$$\Omega=\{\omega\};\quad \omega=(j_1,j_2,\dots,j_s).\quad N=N(\Omega)=n^s,\quad P(\omega)=1/N(\Omega).$$

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ s ($s\le n$) მოცულობის განმეორებით შერჩევაში ყველა ელემენტი ერთმანეთისგან განსხვავებული იქნება (ხდომილობა A). ცხადია, ხდომილობა $A=\{\omega: j_1\ne j_2\ne\dots\ne j_s\}$ იმდენ ω ელემენტარულ ხდომილობებს შეიცავს Ω-დან, რამდენსაც E-დან განუმეორებელი შერჩევის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე: $N(A)=(n)_S$.

ამრიგად,

$$P(A)=(n)_s/n^s.$$

მაგალითი 2.1. ვთქვათ, ყუთში n გადანომრილი ბურთია, რომელთაგან m თეთრია, დანარჩენი n-m ბურთი კი, ვთქვათ, – შავი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ s მოცულობის განმეორებით შენარჩევში ზუსტად k ($k\le s$) ბურთი თეთრია (ხდომილობა A_k).

ცხადია,

$$N=N(\Omega)=n^s.$$

ვიპოვოთ A_k ხდომილობაში შემავალი ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა $N(A_k)$. წარმოვიდგინოთ, რომ შერჩევაში რი-

გით j_1-ური, j_2-ური, ... , j_k-ური ბურთები თეთრია, დანარჩენი კი — შავი. რიგით $j_1,...,j_k$ ბურთები თეთრი შეიძლება იყოს m^k-ნაირად, ხოლო დანარჩენ s-k ადგილებზე შავი ბურთების არჩევა შეიძლება $(n-m)^{s-k}$-ნაირად. მაშასადამე, შერჩევათა რაოდენობა, ე.ი. $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_s)$ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა, რომელშიაც რიგით $j_1, j_2,\ldots,j_k$ ბურთები თეთრია, ტოლია $m^k(n-m)^{s-k}$-ის. მაგრამ, k-რიგის არჩევისათვის არსებობს C_s^k ვარიანტი (C_s^k არის s-ელემენტიანი სიმრავლის k-ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა).

ამიტომ

$$N(A_k)=C_s^k m^k(n-m)^{s-k}.$$

ამრიგად,

$$P(A_k)=\frac{N(A_k)}{N(\Omega)}=C_s^k\left(\frac{m}{n}\right)^k\left(1-\frac{m}{n}\right)^{s-k},$$

$$C_s^k=\frac{s!}{k!(s-k)!}.$$

რიცხვთა ერთობლიობას $P(A_k)$, $k=\overline{1,s}$ ეწოდება ბინომიალური განაწილება, რომელიც მიღებულია კლასიკური სქემის ფარგლებში. ეს ბინომიალური განაწილების კერძო შემთხვევაა. ზოგად სქემას ჩვენ განვიხილავთ ამ თავის §4-ში.

მაგალითი 2.2. ვთქვათ, ყუთი იმავე შემადგენლობისაა, რაც წინა მაგალითში. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ s მოცულობის განუმეორებელ შერჩევაში ზუსტად k ბურთი თეთრი იქნება, s-k კი — შავი (ხდომილობა A).

რადგანაც ჩვენ გვაინტერესებს შენარჩევის მხოლოდ შემადგენლობა და არა რიგი, ამიტომ ამ მაგალითის ამოსახსნელად არ არის საჭირო განვიხილოთ განუმეორებელი შერჩევის აღმწერ ელემენტარულ ხდომილობათა მთლიანი სივრცე. საკმარისია ავაგოთ მხოლოდ მისი ქვესივრცე შემდეგნაირად: თუ ბურთებს გავუიგივებთ მათ ნომრებს, მაშინ ელემენტარულ ხდომილობად (შერჩევად) შეგვიძლია ავიღოთ $\{1,2,...,n\}$ სიმრავლის s-ელემენტიანი რაიმე ქვესიმრავლე და, მაშასადამე,

$$\Omega=\{\omega\},\ \ \omega=(j_1,...,j_s),\ \ 1\le j_r\le n,\ \ r=\overline{1,s},\ \ N(\Omega)=C_n^s.$$

ახლა ვიპოვოთ A_k ხდომილობაში შემავალი ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა $N(A_k)$. k თეთრი ბურთი m თეთრი ბურთებიდან შეიძლება შევარჩიოთ C_m^k–ნაირად. დანარჩენი s-k შავი ბურთი n-m შავი ბურთებიდან შეიძლება შევარჩიოთ C_{n-m}^{s-k}–ნაირად. k თეთრი ბურთების ნებისმიერ ერთობლიობას შეესაბამოთ s-k შავი ბურთების ნებისმიერი ერთობლიობა.

მივიღებთ

$$N(A_k)=C_m^k C_{n-m}^{s-k}.$$

ამრიგად,

$$P_{m,n}(k,s)\equiv P(A_k)=\frac{C_m^k C_{n-m}^{s-k}}{C_n^s},\qquad k=\overline{0,s}. \qquad (2.2)$$

რიცხვთა ერთობლიობას $(P_{m,n}(0,s),\ P_{m,n}(1,s),\ \ldots,\ P_{m,n}(s,s))$ ჰიპერგეომეტრიული განაწილება ეწოდება.

(2.2) ფორმულას შეიძლება მიეცეს უფრო მარტივი სახე:

$$P_{m,n}(k,s)=\frac{s!\,m!\,(n-m)!\,(n-s)!}{k!\,(s-k)!\,(m-k)!\,[n-m-(s-k)]!\,n!}. \qquad (2.3)$$

ახლა დავადგინოთ $P_{m,n}(k,s)$-ის ასიმპტოტური ყოფაქცევა, როდესაც $n\to\infty$. s მუდმივია და $m/n=p=\mathrm{const}\in[0,1]$ (მაგალითად, თუ $n=2n_1$ და $m=n_1$, მაშინ $p=1/2$). (2.3)-ის მნიშვნელი და მრიცხველი გავყოთ n^S–ზე, მივიღებთ:

$$P_{m,n}(k,s)=C_s^k\,\frac{p(p-\frac{1}{n})...(p-\frac{k-1}{n})(1-p)...(1-p-\frac{s-k-1}{n})}{n(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{s-1}{n})/n}.$$

აქედან, როცა $n\to\infty$ გვაქვს*

---

* სიმბოლო a_n~b_n, სადაც $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ რიცხვითი მიმდევრობებია, აღნიშნავს $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$.

$$P_{m,n}(s,k) \sim C_s^k p^k (1-p)^{s-k}, \quad k=\overline{0,s}. \quad (2.4)$$

(2.4) თანაფარდობიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, სახელდობრ, შემდეგი: როცა გენერალური ერთობლიობის მოცულობა n საკმარისად დიდია, მაშინ პრაქტიკულად განუმეორებელი შერჩევა არ განსხვავდება განმეორებითი შერჩევისაგან. (2.4) ჰიპერგეომეტრიული განაწილებისათვის ცნობილია ზ ღ ვ ა რ ი თ ი თეორემების სახელწოდებით.

ვთქვათ, ხდება ლატარია „სპორტლოტოს“ გათამაშება. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ თამაშში მონაწილე გამოიცნობს სპორტის ექვსივე სახეობას (ხდომილობა A).

ცხადია, აქ საქმე გვაქვს ჰიპერგეომეტრიულ განაწილებასთან. გენერალური ერთობლიობის მოცულობაა $n=49$, ხოლო „თეთრი“ ბურთების რაოდენობა $m=6$.

ამგვარად,

$$P(A)=P_{6,49}(6,6)\approx 7{,}2\cdot 10^{-8}.$$

§3. ხდომილობათა გაერთიანების ალბათობა

ვთქვათ, მოცემულია დისკრეტული ალბათური სივრცე $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

თეორემა 3.1. ვთქვათ, $A_k\in\mathcal{F}$; $k=\overline{1,n}$, მაშინ,

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)-\sum_{1\le k\le j\le n} P(A_k\cap A_j)+$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\ldots+(-1)^{n-1}P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) \qquad (3.1)$$

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. ვთქვათ, $A\in\mathcal{F}$ და $B\in\mathcal{F}$, მაშინ (იხ.§1)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \qquad (3.2)$$

ამგვარად, თეორემა სამართლიანია, როცა $n=2$. ახლა დავუშვათ, რომ თეორემა სამართლიანია, როცა $n=m$ და ვაჩვენოთ, რომ იგი სამართლიანია, როცა $n=m+1$.

აღვნიშნოთ

$$\mathbf{B}=\bigcup_{j=1}^{m}\mathbf{A}_j,\quad \mathbf{C}_j=\mathbf{A}_j\cap\mathbf{A}_{m+1},\quad j=\overline{1,m}.$$

დაშვების ძალით

$$P(B)=\sum_{j=1}^{m}P(A_j)-\sum_{1\le i<j\le m}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{m-1}P(\bigcap_{j=1}^{m}A_j),$$

$$P(\bigcup_{j=1}^{m}C_j)=\sum_{j=1}^{m}P(C_j)-\sum_{1\le i<j\le m}P(C_i\cap C_j)+\ldots+(-1)^{m-1}P(\bigcap_{j=1}^{m}C_j).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (3.2)-დან გამომდინარე

$$P(\bigcup_{j=1}^{(m+1)}A_j)=P(B\cup A_{m+1})=P(B)+P(A_{m+1})-P(\bigcap_{j=1}^{m}C_j)$$

გამოსახულებაში, მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას. ▲*

(3.1) ფორმულას **ბულის ფორმულა** ეწოდება.

ბულის ფორმულის გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ე.წ. **თანამთხვევის ამოცანა**: გარკვეული მიმდევრობით განლაგებული n საგანი შემთხვევით გადაანაცვლეს. თუ რომელიმე საგანი ერთი და იმავე ადგილას დარჩა, მაშინ ვიტყვით, რომ ადგილი აქვს თანამთხვევას. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთხელ მაინც ექნება ადგილი თანამთხვევას.

სიმარტივისათვის გავუიგივოთ საგნები მათ ნომრებს, საწყისი დალაგება იყოს {1,2,...n}. ცხადია, ამ შემთხვევით ექსპერიმენტთან, რომელიც მდგომარეობს საგანთა გადანაცვლებაში, დაკავშირებული ალბათური მოდელი იქნება

$$\Omega=\{\omega\},\ \omega=(j_1,j_2,\ldots,j_n),\ N=N(\Omega)=n!,\ P(\omega)=1/N.$$

ვთქვათ, A_k არის ხდომილობა, რომელიც გვიჩვენებს იმას, რომ თანამთხვევას ადგილი აქვს k-ურ ნომერზე: $A_k=\{\omega:\ j_k=k\}$, საძიებელია $P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)$. ამისათვის გამოვიყენოთ ბულის ფორმულა

* ▲ სიმბოლო ნიშნავს დამტკიცების დასასრულს.

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n-1} S_n, \quad \text{სადაც} \quad S_k = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P\Big(\bigcap A_{i_t}\Big).$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$N(A_{i_1}) = (n-1)!,\, N(A_{i_2} \cap A_{i_1}) = (n-2)!, \ldots, N\Big(\bigcap_{t=1}^{k} A_{i_t}\Big) = (n-k)!$$

გვაქვს

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

ხოლო $S_k = 1/k!$ (ვინაიდან S_k ჯამში C_n^k წევრია, რომლებიც სათითაოდ $(n-k)!/n!$ ტოლია).

ამრიგად,

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} =$$

$$= 1 - \Big(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\Big) \sim 1 - e^{-1}, \quad n \to \infty.$$

ე.ი.

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \sim 1 - e^{-1} \approx 0{,}63212. \qquad \blacktriangle$$

ამ პარაგრაფის დასასრულს, ბულის ფორმულის გამოყენების საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ აგრეთვე განლაგების ამოცანა, რომელსაც გამოყენება აქვს მათემატიკურ სტატისტიკაში არაპარამეტრულ ჰიპოთეზათა შემოწმებისათვის კრიტერიუმის ასაგებად.

განლაგების ამოცანა: ვთქვათ, n ყუთში შემთხვევით ვარდება s ბურთი. დავუშვათ, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული ბურთის ჩავარდნა j-ურ ყუთში, $j \in E = \{1,2,\ldots n\}$, ერთნაირად არის მოსალოდნელი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ

1. ერთი ყუთი მაინც დარჩება ცარიელი (ხდომილობა B).
2. ყველა ყუთი დაკავებულია (ხდომილობა B_0).

3. ყუთების k რაოდენობა დარჩება ცარიელი (ხდომილობა B_k).

ბურთების ყოველი ფიქსირებული განლაგება ყუთებში შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც s მოცულობის განმეორებითი შენარჩევი E={1,2,...n} გენერალური ერთობლიობიდან. ცხადია, რომ

$$\Omega=\{\omega\},\ \ \omega=(j_1,\dots,j_s),\ \ 1\le j_k\le n,\ \ k=\overline{1,n},$$

$$N(\Omega)=n^s,\ P(\omega)=n^{-s}.$$

ვთქვათ, A_i ხდომილობა ნიშნავს, რომ i-ური ყუთი ცარიელია. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$B=\bigcup_{k=1}^{n}A_k,\quad B_0=\Omega\backslash B$$

და

$$B_k=\bigcup_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots A_{i_k}\cap\overline{A}_{j_1}\cap\dots\cap\overline{A}_{j_{n-k}}),\quad (3.3)$$

სადაც $\{j_1,j_2,\dots,j_{n-k}\}=E\backslash\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$.

რადგანაც $N(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k})=(n-k)^s$

და $P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k})=(n-k)^s/n^s=(1-\frac{k}{n})^s,\qquad k=\overline{1,n}.$

ამიტომ ბულის ფორმულის ძალით მივიღებთ:

$$P(B)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sigma_j,\qquad (3.4)$$

სადაც $\sigma_j=C_n^j(1-j/n)^s$. (3.4)-დან გვაქვს

$$P_0(s,n)=P(B_0)=1-P(B)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}C_n^{\nu}(1-\nu/n)^s.\qquad (3.5)$$

ვიპოვოთ ახლა $P_k(s,n)\equiv P(B_k)$. ვთქვათ, i_1-ური, i_2-ური,...i_k-ური ყუთები ცარიელია; მაშინ s ბურთი დარჩენილ n-k ყუთში შეიძლება განლაგდეს ისე, რომ ყველა n-k ყუთი დაკავებული იყოს, $(n-k)^sP_0(s,n-k)$-ნაირად. მაშასადამე,

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k}\cap\overline{A}_{j_1}\cap\dots\cap\overline{A}_{j_{n-k}})=\frac{(n-k)^sP_0(s,n-k)}{n^s}.$$

თუ გამოვიყენებთ ალბათობის ადიტიურობის თვისებას, გვექნება

$$P_k(s,n) \equiv P(B_k) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} (n-k)^s P_0(s,n-k)n^{-s} =$$

$$= C_n^k (n-k)^s P_0(s,n-k)n^{-s} = .$$

$$= C_n^k \sum_{\nu=0}^{n-k} (-1)^\nu C_{n-k}^\nu (1-\nu/(n-k))^s \qquad (3.6)$$

გამოთვლების თვალსაზრისით საინტერესოა შევისწავლოთ $P_k(s,n)$-ის ასიმპტოტური ყოფაქცევა, როცა $n\to\infty$ და $s\to\infty$ ისე, რომ $s/n=a+\ln n$, სადაც $a=\text{const}$. ამისათვის ჯერ დავამტკიცოთ ორი მარტივი ლემა.

ლემა 1. თუ $t\in(0,1)$, მაშინ

$$e^{-\frac{t}{1-t}} < 1-t < e^{-t}.$$

დამტკიცება. ფუნქცია $f(t)=\ln\frac{1}{1-t}$, $t\in(0,1)$ გავშალოთ მწკრივად

$$\ln\frac{1}{1-t} = t+\frac{t^2}{2}+\ldots \qquad (3.7)$$

ახლა, თუ $t\in(0,1)$, მაშინ (3.7)-დან გვაქვს

$$\ln\frac{1}{1-t} > t$$

და

$$\ln\frac{1}{1-t} < t+t^2+\ldots+ = \frac{t}{1-t}.$$

აქედან

$$-\frac{t}{1-t} < \ln(1-t) < -t, \qquad 0<t<1. \qquad \blacktriangle$$

განვიხილოთ სასრული ჯამთა ორი უსასრულო რიცხვითი მიმდევრობა

$$T_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{N(n)} a_j(n) \text{ და } T_n^{(2)} = \sum_{j=1}^{N(n)} b_j(n),\ n=1,2,\ldots$$

სადაც

$$N(n)\to\infty, \text{ როცა } n\to\infty,$$

და

$$a_j(n)>0,\ b_j(n)>0,\ j=\overline{1,N(n)}.$$

ლემა 2. თუ $\{T_n^{(2)}\}$ მიმდევრობა კრებადია L სასრული რიცხვისაკენ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n^{(2)}=L$ და, გარდა ამისა, ყოველი რაგინდ მცირე დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი $n(\varepsilon)$, რომ

$$\left|\frac{a_j(n)}{b_j(n)}-1\right|<\varepsilon,$$

როცა $n>n(\varepsilon)$, თანაბრად ყველა j-სათვის, $1\le j\le N(n)$, მაშინ $\{T_n^{(1)}\}$ მიმდევრობასაც აქვს ზღვარი და იგი L-ის ტოლია:

$$\lim_{n\to\infty} T_n^{(1)}=L.$$

დამტკიცება. ცხადია,

$$T_n^{(1)}-L=(T_n^{(1)}-T_n^{(2)})+(T_n^{(2)}-L).$$

აქედან

$$\left|T_n^{(1)}-L\right|\le\left|T_n^{(1)}-T_n^{(2)}\right|+\left|T_n^{(2)}-L\right|. \tag{3.8}$$

რადგან $\{T_n^{(2)}\}$ მიმდევრობა კრებადია, ამიტომ ყოველი $\eta>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი $M(\eta)$, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left|T_n^{(2)}-L\right|<\frac{\eta}{2}\ , \text{ როცა } n>M(\eta). \tag{3.9}$$

გვაქვს $$T_n^{(1)}-T_n^{(2)}=\sum_{j=1}^{N(n)}(a_j(n)-b_j(n))=\sum_{j=1}^{N(n)}b_j(n)\left(\frac{a_j(n)}{b_j(n)}-1\right).$$

აქედან

$$\left|T_n^{(1)}-T_n^{(2)}\right| \le \sum_{j=1}^{N(n)} b_j(n)\left|\frac{a_j(n)}{b_j(n)}-1\right|. \qquad (3.10)$$

დავუშვათ,

$$\varepsilon=(\eta/2)/(L+\eta/2)$$

და გამოვიყენოთ ლემის მეორე პირობა. მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს $n>n(\varepsilon)$, გვაქვს

$$\left|\frac{a_j(n)}{b_j(n)}-1\right| < \frac{\eta/2}{L+\eta/2} \qquad (3.11)$$

თანაბრად ყველა j-სათვის, $1\le j\le N(n)$.

ახლა აღვნიშნოთ $M'(\eta)$-ით უდიდესი $M(\eta)$ და $n(\varepsilon)$-ს შორის, ე.ი.

$$M'(\eta)=\max(M(\eta),\ n(\varepsilon)).$$

მაშინ (3.10) და (3.11)-დან დავასკვნით, რომ

$$\left|T_n^{(1)}-T_n^{(2)}\right| \le \frac{\eta/2}{L+\eta/2}\sum_{j=1}^{N(n)} b_j(n) = \frac{\eta/2}{L+\eta/2}T_n^{(2)},$$

როცა $n>M'(\eta)$, ხოლო (3.9)-დან კი

$$T_n^{(2)} \le L+\frac{\eta}{2}, \text{ როცა } n>M'(\eta)$$

და, მაშასადამე,

$$\left|T_n^{(1)}-T_n^{(2)}\right| < \frac{\eta}{2}, \text{ როცა } n>M'(\eta). \qquad (3.12)$$

(3.8), (3,9) და (3.12) თანაფარდობიდან მივიღებთ უტოლობას

$$\left|T_n^{(1)}-L\right| < \eta, \text{ როცა } n>M'(\eta). \qquad \blacktriangle$$

შევისწავლოთ

$$\sigma_\nu(n) = C_n^\nu\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^s \text{-ის}$$

ასიმპტოტიკა.

ვინაიდან

$$(n-\nu)^\nu < (n)_\nu < n^\nu \quad \text{და} \quad (n)_\nu = \nu!\,C_n^\nu,$$

ამიტომ, ცხადია, გვაქვს

$$n^\nu\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^{\nu+s} < \nu!\,\sigma_\nu(n) < n^\nu\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^s.$$

თუ გამოვიყენებთ პირველ ლემას $t=\dfrac{\nu}{n}$-სათვის, მივიღებთ:

$$\left(ne^{-\frac{\nu+s}{n-\nu}}\right)^\nu < \nu!\,\sigma_\nu(n) < \left(ne^{-\frac{s}{n}}\right)^\nu. \qquad (3.13)$$

დაშვების თანახმად **s/n=*a*+lnn**, ამიტომ (3.13) მიიღებს სახეს:

$$e^{-\frac{\nu^2(a+\ln n-1)}{n-\nu}} < \frac{\sigma_\nu(n)\cdot\nu!}{\lambda_0^\nu} < 1, \qquad (3.14)$$

სადაც $\lambda_0=ne^{-s/n}=ne^{-(a+\ln n)}=e^{-a}$.

(3.14)-დან ჩანს, რომ ყოველი ფიქსირებული ν-სათვის

$$\sigma_\nu(n) \le \frac{\lambda_0^\nu}{\nu!} \qquad \text{და} \qquad \sigma_\nu(n) \to \frac{\lambda_0^\nu}{\nu!}\ , \ \text{როცა}\ n\to\infty \qquad (3.15)$$

გვაქვს

$$P_0(s,m) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{\lambda_0}{\nu!} + T_n^{(1)} - T_n^{(2)} + R_n =$$

$$= e^{-\lambda_0} + T_n^{(1)} - T_n^{(2)} + R_n, \qquad (3.16)$$

სადაც $\qquad T_n^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{N(n)=[n^\alpha]}(-1)^\nu\sigma_\nu(n),$

$$T_n^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{[n^\alpha]} (-1)^\nu \frac{\lambda_0^\nu}{\nu!}$$

$$R_n = \sum_{\nu=[n^\alpha]}^{n} (-1)^\nu \sigma_\nu(n) - \sum_{\nu=[n^\alpha]}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda_0^\nu}{\nu!}$$

([x] ნიშნავს x-ის მთელ ნაწილს) და $0<\alpha<1/2$. ცხადია,

$$\left|R_n\right| \le \sum_{\nu=[n^\alpha]}^{n} \sigma_\nu(n) + \sum_{\nu=[n^\alpha]}^{\infty} \frac{\lambda_0^\nu}{\nu!} \le 2 \sum_{\nu=[n^\alpha]}^{\infty} \frac{\lambda_0^\nu}{\nu!} \to 0, \text{ როცა } n\to\infty. \quad (3.17)$$

$T_n^{(1)}$ და $T_n^{(2)}$ ჯამები აკმაყოფილებენ მე-2 ლემის პირობებს.

მართლაც, პირველი პირობა სრულდება ტრივიალურად:

$$\lim_{n\to\infty} T_n^{(2)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{[n^\alpha]} (-1)^\nu \frac{\lambda_0^\nu}{\nu!} = e^{-\lambda_0}, \qquad \lambda_0 > 0. \qquad (3.18)$$

შემდეგ, თუ (3.14)-ის მარცხენა მხარეში ν-ს შევცვლით მისი უდიდესი n^α მნიშვნელობით, მივიღებთ

$$e^{-\frac{a+\ln n-1}{n^{1-2^\alpha}-n^{-\alpha}}} < \frac{\sigma_\nu(n)\cdot\nu!}{\lambda_0^\nu} < 1.$$

ახლა ავიღოთ რაგინდ მცირე დადებითი ε რიცხვი. მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი დადებითი $n(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ

$$\left|\frac{\nu!\,\sigma_\nu(n)}{\lambda_0^\nu} - 1\right| < \varepsilon,$$

როცა $n>n(\varepsilon)$, თანაბრად ყველა ν-სთვის, $0<\nu<[n^\alpha]$. ლემის მეორე პირობაც შესრულდა. ამრიგად,

$$\lim_{n\to\infty} T_n^{(1)} = e^{-\lambda_0}, \qquad (3.19)$$

(3.16), (3.17), (3.18) და (3.19) თანაფარდობებიდან ვღებულობთ, რომ

$$P_0(s,n) \to e^{-\lambda_0}, \text{ როცა } n\to\infty.$$

ასევე ადვილი მისახვედრია, რომ ყოველი ფიქსირებული k–სათვის (k≤n)

$$P_0(s, n-k) \to e^{-\lambda_0}, \text{ როცა } n \to \infty.$$

გარდა ამისა, $P_0(s, n-k)$-ს მამრავლი (3.6)-ში შეგვიძლია გადავწეროთ როგორც $\sigma_k(n)$, მაგრამ (3.15)-ის ძალით

$$\sigma_k(n) \to \frac{\lambda_0^k}{k!}, \text{ როცა } n \to \infty.$$

ამრიგად, დამტკიცდა შემდეგი:

თეორემა 3.2. თუ $s/n=a+\ln n$, სადაც a მუდმივი რიცხვია, მაშინ ყოველი ფიქსირებული k-სათვის

$$P_k(s, n) \approx \frac{\lambda_0^k}{k!} e^{-\lambda_0}, \qquad \text{როცა } n \to \infty. \tag{3.20}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Pi(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad \lambda > 0, \quad k = 1,2,\ldots$$

რიცხვთა ამ ერთობლიობას პუასონის განაწილება ეწოდება. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pi(k, \lambda) = 1.$$

ამგვარად, $P_k(s,n)$ — ალბათობა იმისა, რომ n ყუთიდან ცარიელი აღმოჩნდება k ყუთი, ასიმპტოტურად (როცა $n\to\infty$) უახლოვდება პუასონის განაწილებას $\Pi(k,\lambda_0)$, $k=1,2,\ldots$.

§4. ბინომიალური განაწილება

ვთქვათ, ვაწარმოებთ ორელემენტიანი გენერალური ერთობლიობიდან n-ჯერ განმეორებით შერჩევას. ერთ-ერთ ელემენტს დავარქვათ „წარმატება“ და აღვნიშნოთ 1-ით, ხოლო მეორე ელემენტს — „მარცხი“ და აღვნიშნოთ იგი 0-ით. ამ ექსპერიმენტის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე იქნება შემდეგი სტრუქტურის:

$$\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,\dots,a_n),a_i=0,1\},\qquad N(\Omega)=2^n.$$

მივუწეროთ ყოველ ელემენტარულ $\omega=(a_1, \dots, a_n)$ ხდომილობას ალბათობა

$$P(\omega)=p^{\sum a_i}q^{n-\sum a_i},$$

სადაც p და q ისეთი არაუარყოფითი რიცხვებია, რომ $p+q=1$. იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ $P(\omega)$, $\omega\in\Omega$ აკმაყოფილებენ განსაზღვრა 1.3 პირობებს, უნდა დავამტკიცოთ

$$\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)=1$$

ტოლობის სამართლიანობა.

მართლაც, განვიხილოთ Ω-დან ელემენტარულ $\omega=(a_1, \dots, a_n)$ ხდომილობათა ისეთი სიმრავლე, რომელთათვისაც

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=k,\quad k=\overline{0,n}.$$

ცხადია, ეს სიმრავლე შეიცავს ელემენტთა C_n^k რაოდენობას. ამიტომ

$$P(\Omega)=\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1.$$

ამრიგად, Ω სივრცე ყველა მისი ქვესიმრავლეთა $\mathcal{F}$ სისტემით და $P(A)=\sum_{\omega\in A}P(\omega)$, $A\in\mathcal{F}$ ალბათობით, განსაზღვრავს რაიმე ალბათურ მოდელს, რომელიც შეესაბამება ორელემენტიანი გენერალური ერთობლიობიდან n-ჯერ განმეორებით შერჩევას.

ვთქვათ, $n=1$, მაშინ Ω სივრცე შეიცავს ორ წერტილს: $\omega=1$ („წარმატება“) და $\omega=0$ („მარცხი“). ალბათობას $P(\{1\})=p$ ვუწოდოთ „წარმატების“ ალბათობა.

ჩვენ ვნახავთ (§3, თავი II), რომ განხილული ალბათური მოდელი, რომელიც აღწერს ორელემენტიანი გენერალური ერთობლიობიდან n-ჯერ განმეორებით შერჩევას, შეიძლება მიღებულ იქნეს როგორც n „დამოუკიდებელ“ ცდათა შედეგი „წარმატების“ p ალბათობით, რომელიც ცდიდან ცდამდე უცვლელია, ე.ი. „წარ-

მატების“ (1) მოსვლის ალბათობა შენარჩევის ყოველ ფიქსირებულ ადგილზე p-ს ტოლია.

ახლა ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შერჩევაში იქნება ზუსტად k ერთიანი (ხდომილობა A_k), ე.ი. ალბათობა იმისა, რომ ზუსტად ექნება ადგილი k „წარმატებას“. ცხადია, რომ

$$P(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,\dots,n\,.$$

ვინაიდან ისეთი ω-ების რაოდენობა, რომლებიც ზუსტად k ერთიანებს შეიცავს, ემთხვევა n ადგილიდან k ადგილის არჩევათა რაოდენობას, რაც C_n^k-ის ტოლია.

რიცხვთა ერთობლიობას

$$b(k,n,p) = P(A_k) \quad k = \overline{0,n}$$

ეწოდება ბინომიალური განაწილება.

შენიშვნები:

1. ბინომიალური განაწილების კერძო სახე მივიღეთ §2-ში (მაგალითი 1) კლასიკური სქემის საშუალებით. მართლაც, თუკი იმ მაგალითში თეთრი ბურთის გამოჩენას „წარმატებით“ (1) აღვნიშნავთ, შავი ბურთის გამოჩენას კი — „მარცხით“ (0), თითოეული ცდისათვის გვექნებოდა $p=m/n$ და, შესაბამისად, $q=1-m/n$ ალბათობების მქონე ორი ელემენტარული ხდომილობისაგან შემდგარი სივრცე.

2. იმავე პარაგრაფის მეორე მაგალითში ჩვენ შემოვიტანეთ ჰიპერგეომეტრიული განაწილება $P_{n,m}(k,s)$, $k=0,1,\dots,s$. ვთქვათ, $n\to\infty$, $m\to\infty$ ისე, რომ $m/n \to p\in [0,1]$, მაშინ

$$P_{m,n}(k,s) \sim C_s^k p^k (1-p)^{s-k} \qquad (4.1)$$

(4.1) მტკიცდება (2.4)-ის ანალოგიურად.

თავი II

ელემენტარულ ხდომილობათა ნებისმიერი სივრცე

§1. კოლმოგოროვის აქსიომატიკა

პირველ თავში ჩვენ განვიხილეთ ისეთი შემთხვევითი ექსპერიმენტი, რომელთა შესაძლო შედეგთა Ω სიმრავლე სასრული ან თვლადი იყო. $A\subset\Omega$ ხდომილობის $P(A)$ ალბათობა განვსაზღვრეთ ω ელემენტარულ ხდომილობათა $P(\omega)$ ალბათობით და სამეულს $(\Omega,\mathcal{F},P)$, სადაც $\mathcal{F}$ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეა, ვუწოდეთ დისკრეტული ალბათური მოდელი, ანუ *დისკრეტული ალბათური სივრცე*. მაგრამ, როგორც აღნიშნული იყო იმავე თავში, ყველა ექსპერიმენტი არ შეიძლება აღიწეროს ელემენტარულ ხდომილობათა დისკრეტული სივრცით. მაგალითად, განვიხილოთ ექსპერიმენტი, რომელიც მდგომარეობს სიმეტრიული მონეტის უსასრულოდ აგდებაში. ცხადია, ამ ექსპერიმენტის აღმწერი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა

$$\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,\dots,a_n,\dots),a_i=0,1\},$$

ე.ი. ყველა $(a_1,a_2,\dots)$ მიმდევრობათა ერთობლიობა, რომელთა ელემენტები ღებულობენ მნიშვნელობებს 0 ან 1.

ცნობილია, რომ ყოველი $a\in[0,1]$ რიცხვი შეიძლება ცალსახად გავშალოთ უსასრულო ორწილადად

$$a=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\dots\qquad(a_i=0,1).$$

აქედან ცხადია, რომ Ω-ს წერტილებსა და $[0,1)$ ინტერვალის წერტილებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა. ამგვარად, Ω სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.

ცხადია, განხილული ექსპერიმენტი ეკვივალენტურია ექსპერიმენტისა, რომელიც მდგომარეობს $[0,1]$ ინტერვალიდან წერტილის შემთხვევით არჩევაში. სიმეტრიულობის მოსაზრებიდან გა-

მიმდინარე, ცხადია, რომ ექსპერიმენტის ყველა შედეგი უნდა იყოს „ტოლალბათური“, მაგრამ [0,1] სიმრავლე არათვლადია და, თუ ჩავთვლით, რომ მისი ალბათობა 1-ის ტოლია, მაშინ ყოველი $\omega\in[0,1)$ შედეგის $\mathbf{P}(\omega)$ ალბათობა უეჭველად 0-ის ტოლი უნდა იყოს. მაგრამ, ასე ალბათობის მოცემა ($\mathbf{P}(\omega)=0,\ \omega\in[0,1)$ არაფერს გვაძლევს. საქმე ის არის, რომ ჩვენ დაინტერესებული ვართ არა იმით, რა ალბათობით მოხდება ესა თუ ის შედეგი, არამედ იმით, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგი მიეკუთვნება რაიმე მოცემულ $\mathbf{A}$ სიმრავლეს $[0,1)$-დან. დისკრეტული სივრცის შემთხვევაში $\mathbf{P}(\omega)$ ალბათობებით განვსაზღვრეთ $\mathbf{A}$ ხდომილობის $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ ალბათობა:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \sum_{\omega\in\mathbf{A}} \mathbf{P}(\omega).$$

მაგრამ განსახილველ შემთხვევაში $\mathbf{P}(\omega)=0,\ \omega\in[0,1)$ ტოლობიდან არ შეგვიძლია განვსაზღვროთ, მაგალითად, ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული წერტილი ეკუთვნის $[0,1/2)$ სიმრავლეს. ამავე დროს ინტუიციურად ცხადია, რომ ეს ალბათობა 1/2-ის ტოლია.

ეს შენიშვნები მიგვანიშნებს, რომ ალბათური მოდელის აგების დროს, იმ შემთხვევაში, როდესაც Ω არათვლადია, ალბათობა უნდა იყოს მოცემული არა ცალკეული ელემენტარული ხდომილობებისათვის, არამედ გარკვეულ კლასში შემავალი სიმრავლეებისათვის. ასეთი სიმრავლეთა კლასი უნდა შეადგინონ დაკვირვებადმა ხდომილობებმა და ეს კლასი უნდა იყოს ჩაკეტილი გაერთიანების, თანაკვეთისა და დამატების ოპერაციების მიმართ, როგორც ეს იყო დისკრეტული სივრცის შემთხვევაში. ამ მიზნით საჭიროა შემოვიტანოთ

განსაზღვრა 1.1. ვთქვათ, ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე ნებისმიერი სიმრავლეა. Ω სივრცის რაიმე ქვესიმრავლეთა $\mathbf{A}$ კლასს ა ლ გ ე ბ რ ა ეწოდება, თუ შესრულებულია პირობები:

1. $\Omega\in\mathbf{A}$,
2. თუ $\mathbf{E}_1\in\mathbf{A},\ \mathbf{E}_2\in\mathbf{A}$, მაშინ $\mathbf{E}_1\cup\mathbf{E}_2\in\mathbf{A},\ \mathbf{E}_1\cap\mathbf{E}_2\in\mathbf{A}$,
3. თუ $\mathbf{E}\in\mathbf{A}$, მაშინ $\overline{\mathbf{E}}\in\mathbf{A}$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ 2 პირობაში მოვითხოვთ მხო-ლოდ ერთ-ერთი თანაფარდობის შესრულებას, მაშინ მეორეც შე-სრულდება 3-ის ძალით.

მაგალითი 1. ვთქვათ, $\Omega=[a,b)$, $-\infty\le a$, $b<\infty$. $\mathcal{A}_{[a,b]}$ იყოს ისეთ ქვესიმრავლეთა კლასი $[a,b]$-დან, რომელთაგან თითოეული შედ-გება $[c_1,c_2)$, $[c_1,c_2]$, $(c_1,c_2]$, (c_1,c_2) ტიპის ინტერვალთა სასრული გაერთიანებისგან. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\mathcal{A}_{[a,b]}$ ალგებ-რაა. $\mathcal{A}_{[a,b]}$ ალგებრას უწოდებენ ბორელის ალგებრას $[a,b]$ ინტერვალში. კერძოდ, $\mathcal{A}^{(1)}=\mathcal{A}_{(-\infty,\infty)}$ უწოდებენ ბორელის ალგე-ბრას ნამდვილ რიცხვთა $R^{(1)}$ ღერძზე.

მაგალითი 2. ვთქვათ, $\Omega=I^{(n)}_{[a,b)}=\prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j)$, $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$, $b=(b_1,b_2,\dots b_n)$, $-\infty\le a_i$, $b_i\le\infty$, $i=1,\dots,n$, n-განზომილებიანი ინტერ-ვალია ევკლიდეს $R^{(n)}$ სივრცეში. $\mathcal{A}^{(n)}_{\Omega}$ იყოს ისეთ ქვესიმრავლეთა კლასი $I^{(n)}_{[a,b)}$-დან, რომელთაგან თითოეული შედგება $[c_1,d_1)\times\dots\times$ $\times[c_n,d_n)$, $[c_1,d_1]\times\dots\times[c_n,d_n]$, $(c_1,d_1)\times\dots\times(c_n,d_n)$, $(c_1,d_1)\times\dots\times(c_n,d_n)$ ტიპის ინტერვალთა სასრული გაერთიანებისაგან. $\mathcal{A}^{(n)}_{[a,b)}$ კლასი ალგებრაა; მას ეწოდება ბორელის ალგებრა $I^{(n)}_{[a,b)}$-ში. კერძოდ, $\mathcal{A}^{(n)}_{(-\infty,\infty)}$-ს უწოდებენ ბორელის ალგებრას ევკლიდეს n განზომი-ლებიდან $R^{(n)}$-სივრცეში.

განსაზღვრა 1.2. Ω-ს ქვესიმრავლეთა $\mathcal{F}$ კლასს ეწოდება σ-ალგებრა, თუ ის ალგებრაა და, გარდა ამისა, შესრულებულია პირობა:

2^1 თუ $A_1,\dots,A_n,\dots\in\mathcal{F}$, მაშინ $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathcal{F}$ და $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathcal{F}$.

შენიშვნა 1. 2^1 პირობაში ორი თანაფარდობიდან ერთ-ერთის მოთხოვნა სავსებით საკმარისია, ვინაიდან

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A_k} \quad \text{და} \quad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}.$$

თუ $\mathcal{A}$ რაიმე სიმრავლეთა კლასია Ω-დან, მაშინ არსებობს $\mathcal{F}_{\alpha}$ σ-ალგებრები, რომლებიც მას შეიცავენ. σ-ალგებრათა ასეთი

კლასი არაცარიელია, ვინაიდან Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე, რომელიც σ-ალგებრაა, შეიცავს $\mathcal{A}$-ს.

ახლა განვიხილოთ $\mathcal{F}=\bigcap\limits_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha}$.*

ცხადია, რომ

1^0. $\mathcal{F}$ σ–ალგებრაა,

2^0. $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}$,

3^0. $\mathcal{F}\subseteq \mathcal{F}_{\alpha}$ ყველა α-სთვის, ე.ი. $\mathcal{F}$-ზე უფრო „მცირე“ σ–ალგებრა, რომელიც შეიცავს $\mathcal{A}$-ს, არ არსებობს, ვინაიდან $\mathcal{F}$ ერთ–ერთი $\mathcal{F}_{\alpha}$-ს ტოლია.

1^0–3^0 თვისება გვაძლევს საფუძველს $\mathcal{F}$-ს ვუწოდოთ $\mathcal{A}$-ს შემცველი უ მ ც ი რ ე ს ი σ-ალგებრა და მას აღვნიშნავთ ასე:

$$\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{A}).$$

განსაზღვრა 1.3. ბორელის $\mathcal{A}_{[a,b]}$ ალგებრის შემცველ უმცირეს σ-ალგებრას $\mathcal{B}_{[a,b]}=\sigma(\mathcal{A}_{[a,b]})$ ეწოდება ბ ო რ ე ლ ი ს σ-ალგებრა, ანუ ბორელის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა $[a,b]$ ინტერვალში. კერძოდ, უმცირეს σ-ალგებრას $\mathcal{B}^{(1)}$, რომელიც შეიცავს $\mathcal{A}_{(-\infty,\infty)}$ ალგებრას, ეწოდება ბორელის σ-ალგებრა $R^{(1)}=(-\infty,\infty)$-ში.

ახლა ვნახოთ, რამდენად „მდიდარია“ $\mathcal{B}_{[a,b]}$ ბორელის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა, ჩვენთვის ცნობილი რა სიმრავლეები შედის ამ სიგმა ალგებრაში? მაგალითად:

1. ცალკეული წერტილი ბორელის ქვესიმრავლეა. მართლაც, თუ $c\in[a,b]$, მაშინ მოიძებნება ისეთი N_0 რიცხვი, რომ

$$(c-1/N,c+1/N)\in[a,b],\ N\geq N_0,$$

ამიტომ

$$\{c\}=\bigcap_{N=N_0}^{\infty}(c-1/N,c+1/N)\in\mathcal{B}_{[a,b]}.$$

* სიმრავლეთა კლასებში ჩართვის ოპერაცია, თანაკვეთა და გაერთიანება ჩვეულებრივად გაიგება.

2. რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე ბორელის სიმრავლეა, როგორც ცალკეულ წერტილთა თვლადი გაერთიანება.

3. ირაციონალურ წერტილთა სიმრავლე ბორელის სიმრავლეა, ე.ი. როგორც რაციონალურ წერტილთა სიმრავლის დამატება.

4. ნებისმიერი ღია სიმრავლე ეკუთვნის $\mathcal{B}_{[a,b]}$-ს, ვინაიდან ღია სიმრავლე თანაუკვეთ ინტერვალთა სასრული ან თვლადი რაოდენობის გაერთიანებაა.

5. ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლე ბორელის სიმრავლეა $[a,b]$-ში, როგორც ღია სიმრავლის დამატება.

6. თუ $f(\omega)$ არის უწყვეტი ფუნქცია $[a,b]$-ზე, მაშინ ნებისმიერი ნამდვილი x-სათვის $\{\omega: f(\omega)\le x\}\in\mathcal{B}_{[a,b]}$, რადგან $\{\omega: f(\omega)\le x\}$ ჩაკეტილი სიმრავლეა (დაამტკიცეთ).

საკმაოდ ძნელია მოვიყვანოთ ისეთი სიმრავლის მაგალითი $[a,b]$-დან, რომელიც $\mathcal{B}_{[a,b]}$-კლასს არ ეკუთვნის. ამგვარად, $\mathcal{B}_{[a,b]}$ კლასი იმდენად მდიდარია, რომ ის უეჭველად საკმარისია პრაქტიკული მიზნებისათვის. 1.3. განსაზღვრა განვაზოგადოთ:

განსაზღვრა 1.4. ბორელის $\mathcal{A}^{(n)}_{(a,b)}$ ალგებრის შემცველ უმცირეს σ-ალგებრას $\mathcal{B}^{(n)}_{[a,b)}=\sigma(\mathcal{A}^{(n)}_{(a,b)})$ ეწოდება ბორელის σ-ალგებრა, ანუ ბორელის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა $I^{(n)}_{[a,b)}$ (იხ. მაგალითი 2) n-განზომილებიან ინტერვალში, კერძოდ, $\mathcal{B}^{(n)}=\mathcal{B}^{(n)}_{(-\infty,\infty)}$ უმცირეს σ-ალგებრას, რომელიც $\mathcal{A}^{(n)}_{(-\infty,\infty)}$-ს შეიცავს, ეწოდება ბორელის σ-ალგებრა ევკლიდეს n განზომილებიდან $R^{(n)}$ სივრცეში.

შენიშვნა 2. თუ Ω სივრცე თვლადია, მაშინ უმცირესი σ-ალგებრა, რომელიც შეიცავს Ω-ს ცალკეული წერტილებისგან შედგენილ კლასს, ემთხვევა Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს.

შენიშვნა 3. ვთქვათ, $\Omega=(-\infty,\infty)$. $\mathcal{A}$ იყოს ისეთ ქვესიმრავლეთა კლასი $(-\infty,\infty)$-დან, რომელთაგან თითოეული შედგება $[a,b)$ ტიპის თანაუკვეთ ინტერვალთა სასრული გაერთიანებისაგან. $\mathcal{A}$ ალგებრაა და $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{B}^{(1)}$.

შენიშვნა 4. $(\Omega, \mathcal{F})$ წყვილს, სადაც $\mathcal{F}$-ალგებრაა ან σ-ალგებრა, ეწოდება ზ ო მ ა დ ი სივრცე. მაგალითად, $(\mathbf{R}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$ ზომადი სივრცეა.

ვთქვათ, G რაიმე შემთხვევითი ექსპერიმენტია. ამ ექსპერიმენტებთან დაკავშირებული ამა თუ იმ ალბათური ამოცანის ფორმალიზებისათვის საჭიროა G-ს შევუსაბამოთ $(\Omega, \mathcal{F})$ ზომადი სივრცე. Ω აღნიშნავს ექსპერიმენტის შედეგთა სიმრავლეს. სიმრავლეთა $\mathcal{F}$ ალგებრის ან σ-ალგებრის გამოყოფა Ω-დან განპირობებულია, ერთი მხრივ, განსახილავი ამოცანის არსით, მეორე მხრივ, Ω სიმრავლის ბუნებით. ისევე როგორც I თავში, $\mathcal{F}$-ში შემავალ სიმრავლეებს ხდომილობებს ვუწოდებთ; თვით Ω სიმრავლეს – აუცილებელ ხდომილობას. $\mathcal{F}$-ის განსაზღვრიდან ცხადია, რომ ცარიელი სიმრავლე $\varnothing \in \mathcal{F}$; მას შეუძლებელ ხდომილობას უწოდებენ. $\overline{A}$-ს ეწოდება A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა. თუ $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ და $A \cap B = \varnothing$, მაშინ A და B ხდომილობებს უთავსებადი ეწოდება, ე.ი. მათი ერთად მოხდენა შეუძლებელია.

ახლა შეგვიძლია გადავიდეთ ალბათობის განმსაზღვრავი აქსიომების ჩამოყალიბებაზე. ამ მიზნით განვიხილოთ $(\Omega, \mathcal{A})$ ზომადი სივრცე, სადაც $\mathcal{A}$ ალგებრაა.

განსაზღვრა 1.5. $\mathcal{A}$ ალგებრაზე განსაზღვრულ $\mathbf{P}(\cdot)$ ფუნქციას ეწოდება ალბათობა $(\Omega, \mathcal{A})$ ზომად სივრცეზე, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbf{P(A) \geq 0}$; (**P**-ს არაუარყოფითობის აქსიომა);
2. $\mathbf{P(\Omega)=1}$, (ნორმირების აქსიომა);
3. თუ $\{A_n\}$ ხდომილობათა მიმდევრობა $\mathcal{A}$-დან ისეთია, რომ

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}, \quad A_k \cap A_j = \varnothing, \ k \neq j,$$

მაშინ

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_j). \tag{1.1}$$

მესამე აქსიომის ეკვივალენტურია (1.1)-ის შესრულება ხდომილობათა სასრული რიცხვისათვის და შემდეგი უწყვეტობის აქსიომა:

3^1. ვთქვათ, $\{B_n\}$ ხდომილობათა მიმდევრობა ისეთია, რომ

$$B_{n+1}\subset B_n \text{ და } \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B \in \mathcal{A},$$

მაშინ

$$P(B_n)\to P(B), \text{ როცა } n\to\infty.$$

ეკვივალენტურობის დამტკიცება. ვთქვათ, შესრულებულია მე-3 აქსიომა და

$$B_{n+1}\subset B_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B,$$

მაშინ B, $C_k = B_k \cap \overline{B}_{k+1}$ ხდომილობათა მიმდევრობა წყვილ-წყვილად უთავსებადია და

$$B_n = B \cup \Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k\Big),\ n=1,2,\ldots\ .$$

მე-3 აქსიომის ძალით მივიღებთ, რომ მწკრივი

$$P(B_1) = P(B) + \sum_{k=1}^{\infty} P(C_k)$$

კრებადია. ეს კი ნიშნავს, რომ, როცა $n\to\infty$

$$P(B_n) = P(B) + \sum_{j=n}^{\infty} P(C_j) \to P(B).$$

ამგვარად, 3^1 აქსიომა შესრულებულია.

შებრუნებით, თუ $\{A_n\}$ უთავსებადი ხდომილობათა მიმდევრობაა, მაშინ

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) + P\Big(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\Big)$$

და 3^1 აქსიომის ძალით ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} P(A_j) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big\{P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) - P\Big(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\Big)\Big\} = P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big). \qquad \blacktriangle$$

$(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$-სამეულს ეწოდება ალბათური მოდელი ფართო აზრით, ანუ *ალბათური სივრცე ფართო აზრით*.

თუ $\mathcal{F}$ ალგებრა არის σ-ალგებრა, $(\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{F}))$, მაშინ მე-3 აქსიომაში $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$ პირობა ($(\Omega,\mathcal{F})$-ზე განსაზღვრული ალბათობისათვის) შესრულდება ავტომატურად.

$(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$-სამეულს, სადაც $\mathcal{F}$ σ-ალგებრაა, ეწოდება უბრალოდ ალბათური მოდელი, ანუ *ალბათური სივრცე*.

ამგვარად, ალბათური სივრცის აგება ნიშნავს $(\Omega,\mathcal{F})$ ზომად სივრცეზე ისეთი არაუარყოფითი თვლადად-ადიტიური $\mathrm{P}(\cdot)$ ზომის მოცემას, რომლისთვისაც $\mathrm{P}(\Omega)=1$. ალბათობის თეორიის აქსიომატიკა ამ სახით იქნა ჩამოყალიბებული აკადემიკოს *ა. კოლმოგოროვის* მიერ.

ახლა დავუბრუნდეთ განსაზღვრა 1.5-ს. ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ ალბათური სივრცეა ($\mathcal{A}$-ალგებრაა). როგორც ვნახეთ, ყოველ ალგებრას შეიძლება დავუკავშიროთ $\mathcal{A}$-ს მომცველი $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{A})$ უმცირესი σ-ალგებრა. ბუნებრივად ისმება კითხვა: $\mathcal{A}$-ზე მოცემული ალბათური P ზომა განსაზღვრავს თუ არა ზომას $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{A})$-ზე და ეს განსაზღვრა ცალსახაა? სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ ალბათური სივრცის აგებისათვის საკმარისია თუ არა P-ს მოცემა მხოლოდ რომელიმე $\mathcal{A}$ ალგებრაზე, რომლისთვისაც $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{A})$. პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა *კარათეოდორის* თეორემა, რომელსაც ჩვენ დამტკიცების გარეშე მოვიყვანთ.

კარათეოდორის თეორემა. ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ ალბათური სივრცეა ფართო გაგებით. მაშინ არსებობს $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{A})$-ზე განსაზღვრული ისეთი ერთადერთი ალბათური Q ზომა, რომ

$$\mathrm{Q}(A)=\mathrm{P}(\mathcal{A}),\ \text{როცა}\ A\in\mathcal{A}.$$

ამგვარად, ყოველი $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ ალბათური სივრცე ფართო აზრით განსაზღვრავს ერთადერთ $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ ალბათურ სივრცეს, სადაც $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{A})$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ ჩვენ გვაქვს აგებუ-

ლი $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ალბათური სივრცე ფართო აზრით, შეგვიძლია მაშინვე ვიგულისხმოთ, რომ P ზომა მოცემულია არა მარტო $\mathcal{A}$-ზე, არამედ $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{A})$-ზედაც.

ახლა დავუბრუნდეთ ზემოთ განხილულ ექსპერიმენტს, რომელიც $0\le\omega\le1$ მონაკვეთზე წერტილის შემთხვევით არჩევაში მდგომარეობს. აღვწეროთ ამ ექსპერიმენტის შესაბამისი ალბათური სივრცე. ცხადია, რომ $\Omega=[0,1]$. აგრეთვე ცხადია, რომ ხდომილობებად უნდა ჩაითვალოს ელემენტარული ხდომილობათა ის სიმრავლეები, რომლებიც ბუნებრივად დაკვირვებადია ექსპერიმენტის დროს. ასე, მაგალითად, $\mathcal{A}_{[0,1]}$ ალგებრის სიმრავლეები დაკვირვებად ხდომილობებად უნდა ჩაითვალოს. ამგვარად, ამ ექსპერიმენტის შესაბამისი ზომადი სივრცეა $(\Omega,\mathcal{B}_{[0,1]})$.

ინტუიციურად ცხადია, მაგალითად, ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული წერტილი მოხვდება $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$ და (a,b) ტიპის რომელიმე $<a,b>$ ინტერვალში, $b-a$-ს ტოლია. ზუსტად ასევე, ალბათობა იმისა, რომ წერტილი მოხვდება $\mathcal{A}_{[0,1]}$ ალგებრის რომელიმე $A=\bigcup\limits_{j=1}^{n}<a_j,b_j>$ სიმრავლეზე, $\sum\limits_{j=1}^{n}(b_j-a_j)$-ის ტოლია. აქედან გამომდინარე, $A_{[0,1]}$ ალგებრაზე, ბუნებრივია, P ალბათობა განისაზღვრება ასე:

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j),\quad A=\bigcup_{j=1}^{n}<a_j,b_j>\in\mathcal{A}_{[0,1]}.$$

P-ზომა თვლადად ადიტიურია (ამის დასამტკიცებლად III თავის თეორემა 3.1-ში უნდა დავუშვათ, რომ $F(x)=x$, $x\in[0,1]$). კარათეოდორის თეორემის ძალით P ალბათური ზომა $\mathcal{B}_{[0,1]}$-ზედაც იქნება განსაზღვრული. $\mathcal{B}_{[0,1]}$-ზე ასეთნაირად განსაზღვრულ ზომას უწოდებენ ლ ე ბ ე გ ი ს μ ზომას. მაშასადამე, განხილული ექსპერიმენტის შესაბამისი ალბათური სივრცეა $([0,1],\mathcal{B}_{[0,1]},\mu)$.

ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ $\Omega=[0,1]$-ზე $\mathcal{F}$-ის განსაზღვრა, დისკრეტული მოდელის ანალოგიურად ($\mathcal{F}$-ყველა ქვესიმრავლეთა კლასია $[0,1]$-დან), გარკვეულ სიძნელეებს იწვევს. მართლაც, $\mathcal{F}$-ზე

μ ზომის მოცემა ისე, რომ $<a,b>$ ინტერვალისათვის მის სიგრძეს ემთხვეოდეს, ე.ი. $\mu(<a,b>)=b-a$, შეუძლებელია, ვინაიდან $\mathcal{F}$-ში არსებობს ისეთი სიმრავლეები, რომლებიც μ ზომადი არ არიან, ე.ი. μ განსაზღვრული არ არის ასეთ სიმრავლეებზე (იხ. **И.П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, 1974, ст.80).**

ცხადია,

$$\mu(\{\omega\})=0, \quad \omega\in[0,1].$$

ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგი რაციონალური რიცხვია, ნულის ტოლია. მართლაც, ვთქვათ, $\mathbf{A} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{\mathbf{r}_j\}$ რაციონალურ წერტილთა სიმრავლეა $[0,1]$-დან. როგორც ვიცით, $\mathbf{A} \in \mathcal{B}_{[0,1]}$, ამიტომ მე-3 აქსიომის ძალით

$$\mu(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu(\{\mathbf{r}_j\}) = \mathbf{0}.$$

განსაზღვრა 1.6. ამბობენ, რომ გვაქვს ამოცანა გეომეტრიული ალბათობის შესახებ, თუ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე ევკლიდეს $\mathbf{R}^{(n)}$ სივრცის ბორელის ქვესიმრავლე $\Omega\in\mathcal{B}^{(n)}$, რომელსაც სასრული ლებეგის ზომა გააჩნია, ე.ი. $0<\mu^{(n)}(\Omega)<\infty$, ($\mu^{(n)}$ ლებეგის $\mathbf{n}$ განზომილებიანი ზომაა, რომელიც „პარალელეპიპედზე“ მის მოცულობას ემთხვევა), ხოლო მისი ნებისმიერი $\mathbf{A}\in\Omega$ ქვესიმრავლის ($\mathbf{A}\in\mathcal{B}^{(n)}$) ალბათობა

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\mu^{(n)}(\mathbf{A})}{\mu^{(n)}(\Omega)}$$

ფორმულით მოიცემა.

მაგალითი 3. („შეხვედრის ამოცანა“) ორი Γ_1 და Γ_2 მოქალაქე შეთანხმდა გარკვეულ ადგილას შეხვდნენ ერთმანეთს, საღამოს 8-დან 9 საათამდე. თითოეული მათგანი მიდის ამ ადგილას ერთიმეორისაგან დამოუკიდებლად. ის მოქალაქე, რომელიც მივიდოდა დანიშნულ ადგილას, 20 წუთის (1/3) საათის) განმავლობაში უცდის მეორეს და მერე მიდის. ვიპოვოთ Γ_1 და Γ_2 მოქალაქეთა შეხვედრის ალბათობა.

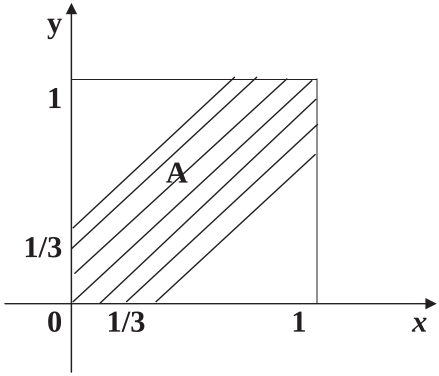
ცხადია, ამ ექსპერიმენტის შესაძლო შედეგია $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ კვადრატის ყოველი (x,y) წერტილი, სადაც x და y აღნიშნავს შესაბამისად Γ_1-ისა და Γ_2-ის მოსვლის მომენტს, ხოლო შესაბამისი ალბათური სივრცეა $(\Omega, \mathcal{B}_{\Omega}^{(2)}, P)$, სადაც $\mathcal{B}_{\Omega}^{(2)}$ აღნიშნავს კვადრატის ყველა ბორელის ქვესიმრავლეთა კლასს (იხ. განსაზღვრა 1.4) და

$$P(A)=\frac{\mu^{(2)}(A)}{\mu^{(2)}(\Omega)}.$$

ცხადია, ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობაა

$$A=\left\{(x,y):|x-y|\le\frac{1}{3}\right\}\in\mathcal{B}_{\Omega}^{(2)},$$

ხოლო მისი ალბათობა კი $P(A)=5/9$.



§2. ალბათობის თვისებები

1. $P(\varnothing)=0$. ეს გამომდინარეობს $\varnothing+\Omega=\Omega$ ტოლობიდან და მე-2 და მე-3 აქსიომიდან.

2. $P(\overline{A})=1-P(A)$, რადგან $A\cup\overline{A}=\Omega$ და $A\cap\overline{A}=\varnothing$.

3. თუ $A\subset B$, მაშინ $P(A)\le P(B)$. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ

$$P(A)+P(\overline{A}\cap B)=P(B).$$

4. $P(A) \le 1$, ვინაიდან $A \subset \Omega$.

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, რადგან

$A \cup B = A \cup (B \setminus A \cap B)$ და $P(B \setminus AB) = P(B) - P(A \cap B)$.

6. $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$.

7. $P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$,

სადაც $S_j = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_j})$.

ეს ფორმულა ჩვენ დავამტკიცეთ (თავი I, თეორემა 3.1.) დისკრეტული სივრცის შემთხვევაში. იგი ანალოგიურად დამტკიცდება ნებისმიერი Ω სივრცის შემთხვევაშიც.

8. (σ-ნახევრად ადიტიურობა) $P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2),\ \ldots,\ B_j = A_j \setminus (\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k),\ \ldots,\ j \ge 2.$$

ცხადია, რომ $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ და $B_k \cap B_j = \varnothing$, $k \ne j$.

ამრიგად, $P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$, ვინაიდან $A_j \supset B_j$. ▲

9. თუ $\{A_n\}$ სიმრავლეთა მონოტონურად ზრდადი მიმდევრობაა, ე.ი.

$$A_k \subset A_{k+1} \text{ და } A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \text{ მაშინ } \lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $\{B_n = A \setminus A_n\}$ სიმრავლეთა მიმდევრობა. ცხადია, რომ $B_{n+1} \subset B_n$ და $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \varnothing$. უწყვეტობის აქსიომის ძალით მივიღებთ $P(A \setminus A_n) = P(A) - P(A_n) \to 0$, როცა $n \to \infty$. ▲

§3. პირობითი ალბათობა. ხდომილობათა დამოუკიდებლობა

ვთქვათ, რაიმე ცდის აღმწერი სივრცე $(\Omega,\mathcal{F},P)$ დისკრეტულია, ხოლო **A** და **B** ამ ცდასთან დაკავშირებული რაიმე ხდომილობებია, ე.ი. $A\in\mathcal{F}$, $B\in\mathcal{F}$. დავუშვათ აგრეთვე, რომ **B** ხდომილობას ჰქონდა ადგილი ამ ექსპერიმენტის დროს. რა შეიძლება ითქვას ამის შემდეგ **A** ხდომილობის ალბათობაზე? მას ჩვენ აღვნიშნავთ $P(A/B)$ ან $p_B(A)$ სიმბოლოთი (იკითხება: „**A** ხდომილობის პირობითი ალბათობა იმ პირობით, რომ ხდომილობა **B** მოხდა“).

გვაქვს რა ინფორმაცია იმის შესახებ, რომ განხორციელდა **B** ხდომილობა, განვიხილოთ ახლა არა ყველა ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სიმრავლე, არამედ მხოლოდ ყველა ელემენტარული ხდომილობის ერთობლიობა **B**-დან და ყოველ $\omega_j\in B$ ელემენტარულ ხდომილობას შევუსაბამოთ რაიმე არაუარყოფითი $P(\omega_j/B)$ რიცხვი (ω_j-ს ალბათობა **B** პირობით) ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\sum_{\omega_j\in B} P(\omega_j/B)=1. \tag{3.1}$$

პირობითი ალბათობები $P(\omega_j/B)$, $j=1,2,\ldots$, რომლებიც აკმაყოფილებენ (3.1) მოთხოვნას, შეიძლება მივიღოთ, მაგალითად, $P(\omega_j)$-ის $P(B)$-ზე გაყოფით, ე.ი.

$$P(\omega_j/B)=\frac{P(\omega_j)}{P(B)},\quad j=1,2,\ldots .$$

ცხადია, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული $P(\omega_j/B)$ ალბათობები (3.1) მოთხოვნას აკმაყოფილებს.

ამრიგად, იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $P(A/B)$ პირობითი ალბათობა, საჭიროა ავჯამოთ (თავი I განსაზღვრა 1.4) პირობითი $P(\omega_j/B)$ ალბათობები ყველა იმ ω_j ელემენტარული ხდომილობებისათვის, რომლებიც მიეკუთვნებიან **A** და **B**-ს ერთდროულად ან, რაც იგივეა – $A\bigcap B$ ხდომილობას. აქედან მივიღებთ

$$P(A/B)=\sum_{\omega_j\in A\bigcap B}P(\omega_j/B)=\frac{1}{P(B)}\sum_{\omega_j\in A\bigcap B}P(\omega_j)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}.$$

კლასიკური ალბათური სივრცის შემთხვევაში გვექნება:

$$P(A/B)=\frac{N(A\cap B)}{N(B)}.$$

მაგალითი 1. ვთქვათ, ყუთში მოთავსებულია N ბურთი, რომელთაგან N_1 – თეთრია, ხოლო N–N_1 – შავი. რას უდრის $P(A/B)$ ალბათობა იმისა, რომ მეორედ ამოღებული ბურთი თეთრია (A ხდომილობა), იმ პირობით, რომ პირველად ამოღებული ბურთი თეთრია (B–ხდომილობა), ცხადია, რომ

$$N(\Omega)=N(N\text{-}1),\ N(A\cap B)=N_1(N_1\text{-}1) \text{ და } N(B)=N_1(N\text{-}1).$$

ამიტომ

$$P(A/B)=\frac{N_1-1}{N-1}.$$

მაგალითი 2. ვთქვათ, 3–ჯერ ვაგდებთ სიმეტრიულ მონეტას. მაშინ $\Omega=\{\omega\}$, $\omega=(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$, $N(\Omega)=8$, სადაც $\omega_i=1$ იმ შემთხვევაში, როდესაც ადგილი ექნება „წარმატებას“ (გერბი), $\omega_i=0$ „მარცხის“ (საფასურის) შემთხვევაში. A იყოს ხდომილობა იმისა, რომ ზუსტად ერთხელ ექნება ადგილი „წარმატებას“, ე.ი.

$$A=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\},$$

ხოლო ხდომილობა B – კენტრიცხვჯერ ექნება ადგილი „წარმატებას“, ე.ი.

$$B=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (1,1,1)\}.$$

ცხადია, რომ

$$P(A/B)=3/4.$$

ახლა შეგვიძლია გადავიდეთ $P(A/B)$-ს ზოგად განსაზღვრაზე.

განსაზღვრა 3.1. ვთქვათ, მოცემულია $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათური სივრცე და A და B ნებისმიერი ხდომილობებია $\mathcal{F}$–დან. თუ $P(B)>0$, მაშინ A ხდომილობის პირობითი ალბათობა B ხდომილობის მოხდენის პირობით (B პირობით) ეწოდება სიდიდეს

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \tag{3.2}$$

ამ განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს პირობითი ალბათობის შემდეგი თვისებები:

$P(B/B)=1,\ P(\varnothing/B)=0,$

$P(A/B)=1,\ B\subseteq A,$

$P(A_1\cup A_2/B)=P(A_1/B)+P(A_2/B)$, თუ $A_1\cap A_2=\varnothing$.

(3.2)-დან, მივიღებთ აგრეთვე, რომ ორი ხდომილობის ერთად მოხდენის ალბათობა ტოლია ერთ-ერთი მათგანის ალბათობის ნამრავლისა მეორის პირობით ალბათობაზე პირველის პირობით, ე.ი.

$$P(A\cap B) = P(B)P(A / B) = P(A)P(B / A). \qquad (3.3)$$

განსაზღვრა 3.2. A და B ხდომილობებს დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ სრულდება

$$P(A\cap B) = P(A)P(B) \qquad (3.4)$$

ტოლობა.

მოვიყვანოთ დამოუკიდებელ ხდომილობათა ზოგიერთი თვისება.

1. თუ $P(B)>0$, მაშინ A და B ხდომილობების დამოუკიდებლობა ეკვივალენტურია $P(A/B)=P(A)$ ტოლობის. დამტკიცება ცხადია.

ხდომილობათა დამოუკიდებლობის აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ დამოუკიდებელ ხდომილობათაგან ერთ-ერთის მოხდენა არავითარ გავლენას არ ახდენს მეორე ხდომილობის ალბათობაზე.

2. თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ დამოუკიდებელია $\overline{A}$ და B ხდომილობები.

მართლაც,

$$P(\overline{A}\cap B) = P(B \setminus A\cap B) = P(B) - P(A\cap B) =$$

$$= P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A}).$$

შედეგი. თუ A და B ხდომილობები დამოუკიდებელია, მაშინ დამოუკიდებელია $\overline{A}$ და $\overline{B}$ ხდომილობებიც. მაშასადამე, შეგვიძლია დავასკვნათ: თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ დამოუკიდებელია აგრეთვე ყოველი ორი ხდომილობა $(\overline{A}, B)$, $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, \overline{B})$.

შენიშვნა. ხშირად ერთმანეთში ურევენ ხდომილობათა დამოუკიდებლობისა და უთავსებადობის ალბათურ აზრს; შეიძლება ეს გამოწვეული იყოს დამოუკიდებლობისა და უთავსებადობის ტერმინის ფონეტიკურად გარკვეული სიახლოვით. დავუშვათ, **A** და **B** ისეთი ხდომილობებია, რომ **P(A)>0, P(B)>0.** თუ **A** და **B** ხდომილობები უთავსებადია, მაშინ $A\cap B=\varnothing$ და ამიტომ $P(A\cap B)=0$. მაგრამ თუ $P(A\cap B)=0$, მაშინ (3.4)-ს არ ექნება ადგილი და, მაშასადამე, **A** და **B** ხდომილობები არ იქნებიან დამოუკიდებელი. შებრუნებით, თუ **A** და **B** ხდომილობებს აქვთ დადებითი ალბათობა და დამოუკიდებელია, ე.ი. სრულდება (3.4) ტოლობა, მაშინ $P(A\cap B)>0$ და ამიტომ **A** და **B** ხდომილობები არ იქნებიან უთავსებადი.

მაგალითი 3. ვთქვათ, **A** ხდომილობა აღნიშნავდეს სიმეტრიული მონეტის ორჯერ ზედიზედ აგდებისას ($N(\Omega)=4$) პირველად „წარმატების" მოსვლას (იხ. მაგალითი 2), ხოლო **B** – მეორედ „მარცხის" მოსვლას. ცხადია,

$$N(A)=2,\ N(B)=2 \text{ და } N(A\cap B)=1.$$

ამიტომ

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)P(B).$$

ამრიგად, **A** და **B** ხდომილობები დამოუკიდებელია.

მაგალითი 4. ვთქვათ, ექსპერიმენტი მდგომარეობს ორი მონეტის უსასრულო რაოდენობით აგდებაში ან, რაც იგივეა, ერთეულოვანი კვადრატიდან წერტილის შემთხვევით „არჩევაში" (იხ. §1, თავი 2).

ცხადია, ამ ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური სივრცეა $(\Omega,\mathcal{F},P)$, სადაც $\Omega=[0,1]\times[0,1]$. $\mathcal{F}$-ბორელის სიმრავლეთა კლასია Ω-დან, ხოლო $P=\mu^{(2)}$ ორგანზომილებიანი ლებეგის ზომაა. ვთქვათ, $a,\ b\in[0,1]$ და განვიხილოთ ხდომილობები:

$$A=\{(x,y):x\geq a,\ (x,y)\in\Omega\},\ B=\{(x,y):y\geq b,\ (x,y)\in\Omega\}.$$

ცხადია, რომ

$$P(A\cap B)=\mu^{(2)}(A\cap B)=(1-a)(1-b)=P(A)P(B).$$

მაშასადამე, A და B ხდომილობები დამოუკიდებელია.

განსაზღვრა 3.3. $A_i\in\mathcal{F}$, $i=1,2,\ldots$ ხდომილობებს ეწოდება ერთობლივად დამოუკიდებელი, თუ მათ შორის ნების-მიერი $m(2\le m<n)$ ხდომილობებისათვის სრულდება

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\Big)=\prod_{j=1}^{m} P(A_{i_j}) \text{ თანაფარდობა.}$$

შევნიშნოთ, რომ ხდომილობათა წყვილ-წყვილად დამოუკიდებ-ლობა არ ნიშნავს ერთობლივად დამოუკიდებლობას. მართლაც, ვთქვათ,

$$\Omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)$$

და თითოეული ω_i, $i=\overline{1,4}$, ტოლად შესაძლებელია, ე.ი.

$$P(\omega_i)=1/4,\ i=\overline{1,4},$$

მაშინ ხდომილობები

$$A_1=\{\omega_1,\omega_2\},\ A_2=\{\omega_1,\omega_3\} \text{ და } A_3=\{\omega_1,\omega_4\}$$

წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია, მაგრამ

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=\frac{1}{4}\neq\left(\frac{1}{2}\right)^3=P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

ერთობლივად დამოუკიდებელ ხდომილობათა მიმდევრობის მა-გალითად შეიძლება დავასახელოთ n-ჯერ ჩატარებული ცალკეუ-ლი ცდის შედეგთა მიმდევრობა, რომელიც განხილული იყო I თავის §4-ში. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საჭიროა შემოვიყვანოთ ცდათა დამოუკიდებლობის ცნება.

განვიხილოთ $(\Omega_1,\mathcal{F}_1,P_1),\ldots,(\Omega_m,\mathcal{F}_m,P_m)$ ალბათური სივრცეები, რომლებიც აღწერენ შესაბამისად $G_1,G_2,\ldots,G_m$ ექსპერიმენტებს. განვიხილოთ აგრეთვე „რთული" G ექსპერიმენტი, ანუ სხვანაი-რად „შედგენილი" ექსპერიმენტი, რომლის აღმწერი ალბათური სივრცე იყოს $(\Omega,\mathcal{F},P)$, სადაც $\Omega=\Omega_1\times\ldots\times\Omega_m$ არის $\Omega_1,\ldots,\Omega_m$ სი-ვრცეთა პირდაპირი ნამრავლი, ანუ

$$\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_m),\ \omega_k=\Omega_k,\ k=\overline{1,m}, \text{ ელემენტთა სიმრავლე,}$$

ხოლო $\mathcal{F}$ არის უმცირესი σ–ალგებრა, წარმოქმნილი

$$A=\{\omega:\omega=(\omega_1,...,\omega_m),\ \omega_1\in A_1,...,\omega_m\in A_m\}=A_1\times...\times A_m,\ A_k\in\mathcal{F}_k,\ k=\overline{1,m}$$

სახის „მართკუთხედებისაგან“.

ვიტყვით, რომ G_1, G_2, ..., G_m ცდები დამოუკიდებელია, თუ ნებისმიერი $A=A_1\times...\times A_m$, $A_k\in\mathcal{F}_k$, $k=\overline{1,m}$, „მართკუთხედებისათ–ვის“ სრულდება ტოლობა

$$P(A) = P_1(A_1)\times... \times P_m(A_m)\ . \qquad (3.5)$$

ხდომილობა, რომელიც i–ურ ცდას უკავშირდება, შეიძლება აღი–წეროს არა მარტო როგორც $\mathcal{F}_i$ კლასის სიმრავლე, არამედ რო–გორც $\mathcal{F}$ კლასის სიმრავლეც. ამისათვის მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ვთქვათ, $A_i\in\mathcal{F}_i$, $i=\overline{1,m}$ და განვიხილოთ $\mathcal{F}$–დან სიმრავლეები:

$$B_j = \Omega_1\times...\times\Omega_{j-1}\times A_j\times\Omega_{j+1}\times...\times\Omega_m,\quad j=\overline{1,m}\,.$$

B_j–ის სახის სიმრავლეებს უწოდებენ ცილინდრულს A_j ფუ–ძით. (3.5)–დან ცხადია, რომ

$$P(B_i)=P_i(A_i),\ i=\overline{1,m}$$

და ხდომილობები $B_1,B_2,...,B_m$ ერთობლივად დამოუკიდებელია. მართლაც, ვთქვათ, $k\le m$. ვინაიდან

$$B_1\cap...\cap B_k=A_1\times ... \times A_k\times\Omega_{k+1}\times ... \times\Omega_m$$

(3.5)–დან გვაქვს $P(B_1\cap...\cap B_k)=P(B_1)...P(B_k)$.

ამრიგად, ცალკეულ ცდებთან დაკავშირებული ხდომილობები, რომლებიც აღიწერება ერთი $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათური სივრცის ხდო–მილობების საშუალებით, დამოუკიდებელი აღმოჩნდა.

ახლა დავუბრუნდეთ I თავის §4–ში განხილულ ბერნულის სქემას. ამ პარაგრაფში განხილული ალბათური სივრცე $(\Omega,\mathcal{F},P)$, სადაც

$$\Omega=\{\omega:\ \omega=(a_1,...,a_n)\},\ a_j = 0,1,\ \mathcal{F}=\{A:A\subset\Omega\} \quad \text{და}$$

$$P(\omega) = p^{\sum a_k}q^{n-\sum a_k}\,,$$

რომელიც აღწერს ორელემენტიანი გენერალური ერთობლიობიდან **n**-ჯერ განმეორებით ამორჩევას, წარმოადგენს რთული **G** ექსპერიმენტის შედეგს. მართლაც, აქ განხილულ ყოველ ცალკეულ ცდას ორი შედეგი აქვს – „წარმატება“ (1) და „მარცხი“ (0). წარმატების ალბათობაა $\mathbf{p}$, „მარცხისა“ კი – $\mathbf{q=1-p}$. ამრიგად, რიგით $\mathbf{i}$-ური ცდა $\mathbf{G_i}$ აღიწერება $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ ალბათური სივრცით, სადაც

$$\Omega_i=\{0,1\},\ \mathcal{F}_i=\{\{0\}, \{1\}, \varnothing, \Omega_i\},\ P_i(\{1\})=p,\ P_i(\{0\})=q=1-p.$$

რთული **G** ექსპერიმენტის აღმწერი $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათური სივრცის კონსტრუქციიდან ჩანს, რომ ის წარმოადგენს $\mathbf{G_i}$ ექსპერიმენტის აღმწერი $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ ალბათურ სივრცეთა პირდაპირ ნამრავლს:

$$(\Omega=\Omega_1\times\ldots\times\Omega_n,\quad \mathcal{F}=\{A:A\subset\Omega\},\ P),$$

სადაც

$$P(A)=\sum_{\{\omega=(a_1,\ldots,a_n)\in A\}} p^{\sum a_i} q^{n-\sum a_i},\ A\in\mathcal{F},\ a_i=0,1.$$

ცდათა $G_1, G_2, \ldots, G_n$ მიმდევრობა დამოუკიდებელია, ვინაიდან ასეთნაირად აგებული **P** ალბათური ზომა აკმაყოფილებს (3.5) მოთხოვნას.

ვაჩვენოთ, რომ „წარმატების“ (1) მოსვლის ალბათობა ცდის ყოველ $\mathbf{k}$-ურ ფიქსირებულ ადგილზე $\mathbf{p}$-ს ტოლია, ე.ი. ვაჩვენოთ, რომ

$$P\{\omega: a_k=1\}=p, \text{ მართლაც, } P\{\omega: a_k=1\}=\sum_{\{\omega: a_k=1\}} p^{\sum a_i} q^{n-\sum a_i}=$$

$$=p\sum_{(a_1+\ldots+a_{k-1}+a_{k+1}\ldots+a_n)} p^{a_1+\ldots+a_{k-1}+a_{k+1}\ldots+a_n} q^{n-1-(a_1+\ldots+a_{k-1}+a_{k+1}\ldots+a_n)}=$$

$$=p\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^{j} q^{(n-1)-j}=p.$$

ასევე მიიღება, რომ $P\{\omega: a_k=0\}=q=1-p$.

ამრიგად, განხილულ ცდათა მიმდევრობა $G_1,G_2,\ldots G_n$, რომლებსაც ორ-ორი შედეგი აქვს — „წარმატება“ და „მარცხი“, დამოუკი-

დებელია, ხოლო „წარმატების“ ალბათობა ცდიდან ცდამდე უცვლელია. ასეთ ცდებს ბერნულის დამოუკიდებელ ცდათა სქემას უწოდებენ ან, უბრალოდ, ბერნულის სქემას. ი. ბ ე რ ნ უ ლ ი იყო პირველი, რომელმაც შეისწავლა ხსენებული ალბათური მოდელი და დაამტკიცა მისთვის დიდ რიცხვთა კანონის სამართლიანობა.

§4. ჯამის ალბათობის გამოთვლა ურთიერთდამოუკიდებელი ხდომილობებისათვის

ვთქვათ, $A_1,A_2,\ldots,A_n$ დამოუკიდებელი ხდომილობებია. განმარტების თანახმად, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ნიშნავს ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება ერთი მაინც A_k, $k=\overline{1,n}$, ხდომილობათაგანი. ამ ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა იქნება $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$, ვინაიდან

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega \setminus \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}.$$

ამიტომ ვწერთ

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right)=1.$$

აქედან

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=1- P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right).$$

პირობის თანახმად, $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ხდომილობანი დამოუკიდებელნი არიან, ამიტომ დამოუკიდებელნი იქნებიან აგრეთვე მათი საწინააღმდეგო ხდომილობანი $\overline{A_1},\overline{A_2},\ldots,\overline{A_n}$. ვიცით, რომ დამოუკიდებელ ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა თანამამრავლთა ალბათობების ნამრავლის ტოლია და ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_n}).$$

საბოლოოდ, დამოუკიდებელ ხდომილობათა ჯამის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = 1 - \prod_{j=1}^{n}\big(1 - P(A_j)\big). \qquad \blacktriangle$$

§5. სრული ალბათობის ფორმულა. ბაიესის ფორმულა

განსაზღვრა 5.1. ვიტყვით, რომ $A_1, A_2, \dots, A_n$ ხდომილობათა სისტემა $\mathcal{F}$-დან ხდომილობათა სრული სისტემაა, თუ

1^0. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$,

2^0. $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$.

თეორემა 5.1. თუ $A_1, A_2, \dots, A_n$ ხდომილობათა სრული სისტემაა და $P(A_j) > 0$, $j = \overline{1,n}$, მაშინ ნებისმიერი B-თვის $\mathcal{F}$-დან ადგილი აქვს

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j) \qquad (5.1)$$

ტოლობას.

(5.1)-ს უწოდებენ სრული ალბათობის ფორმულას. თეორემის დამტკიცებისათვის შევნიშნოთ, რომ

$$B = B \cap \Omega = \bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap B).$$

2^0 – პირობის ძალით $A_j \cap B$ უთავსებადი ხდომილობებია, ამიტომ

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j). \qquad \blacktriangle$$

შევნიშნოთ, რომ (5.1) ფორმულა სამართლიანია ხდომილობათა თვლადი სისტემისათვისაც, თუკი ამ შემთხვევაში 1^0 და 2^0 პირობები სრულდება.

სრული ალბათობის (5.1) ფორმულის გამოყენების საილუსტ-რაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ვთქვათ, გვაქვს ერთნაირი **n** ყუთი. ცნობილია, რომ **i**-ურ ნომრიან ყუთში მოთავსებულია m_i თეთრი და N_i-m_i შავი ბურთი. შემთხვევით ვირჩევთ ყუთს, ხოლო იქიდან კი – ბურთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთი თეთრი ფერისაა (ხდომილობა **B**)?

ვთქვათ, A_i-ხდომილობაა, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ შერჩეული ყუთი **i**-ური ნომრისაა, ცხადია, რომ

$$P(A_i)=\frac{1}{n},\ P(B/A_i)=\frac{m_i}{N_i}.$$

მაშასადამე, სრული ალბათობის (5.1) ფორმულის ძალით და-ვწერთ:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_j)P(B/A_j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{N_i}.$$

ჩვენ **B** ხდომილობის ალბათობა გამოვთვალეთ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის აუგებლად. ახლა შევეცადოთ **P(B)** გა-მოვთვალოთ პირდაპირი გზით, I თავში მოყვანილი განსაზღვრა 1.4-ის გამოყენებით.

წარმოვიდგინოთ, რომ **i**-ურ ($i=\overline{1,n}$) ყუთში მოთავსებული ბუ-რთების ნომრებია $i_1, i_2, , , i_{N_i}$. ცხადია, ექსპერიმენტის შედეგი იქნება (i, i_k) წყვილი. ამრიგად,

$$\Omega=\{(i, i_k),\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,N_i}\}.$$

გარკვეული მოსაზრებებიდან გამომდინარე, თითოეულ $\omega=(i, i_k)$ ელემენტარულ ხდომილობას შეგვიძლია მივუწეროთ $\frac{1}{n}\frac{1}{N_i}$ ალ-ბათობა და, მაშასადამე,

$$P(B)=\sum_{\omega\in B}\frac{1}{n}\frac{1}{N_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{N_i}.\qquad\blacktriangle$$

ვთქვათ, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – ხდომილობათა სრული სისტემაა, ხოლო $B \in \mathcal{F}$. ცხადია, შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა

$$P(A_j)P(B/A_j)=P(B)P(A_j/B),$$

საიდანაც

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{P(B)}.$$

ანდა, თუ $P(B)$-ს შევცვლით (5.1)-ით, მივიღებთ:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j)}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (5.2)$$

ეს უკანასკნელი (5.2) ფორმულა წარმოადგენს ბ ა ი ე ს ი ს ფორმულას. ცხადია,

$$\sum_{j=1}^{n} P(A_j/B) = 1.$$

მაგალითი 2. ორ ფაბრიკაში მზადდება ერთი და იგივე სახის პროდუქცია. ამასთან, მეორე ფაბრიკის მიერ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა k-ჯერ აღემატება პირველი ფაბრიკისას. ვთქვათ, პირველი ფაბრიკის წუნდებული პროდუქციის ხვედრია P_1, ხოლო მეორესი – P_2. დავუშვათ, რომ დროის ერთსა და იმავე მონაკვეთში ფაბრიკების მიერ გამოშვებული პროდუქცია ერთმანეთში აურიეს და გაიტანეს გასაყიდად ბაზარზე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ შეიძინეთ მეორე ფაბრიკის მიერ დამზადებულ პროდუქციას, თუ ის აღმოჩნდა წუნდებული (A–ხდომილობა)?

ვთქვათ, B_1 აღნიშნავდეს ხდომილობას იმისა, რომ თქვენი ამორჩეული პროდუქცია არის პირველი ფაბრიკის მიერ დამზადებული, ხოლო B_2 – მეორე ფაბრიკის მიერ. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$P(B_1) = \frac{1}{k+1}, \; P(B_2) = \frac{k}{k+1}; \; P(A/B_1) = P_1, \; P(A/B_2) = P_2.$$

(5.2) ფორმულის ძალით დავწერთ

$$P(B_2/A)=\frac{\dfrac{k}{k+1}P_2}{\dfrac{1}{k+1}P_1+\dfrac{k}{k+1}P_2}=\frac{kP_2}{P_1+kP_2}.$$

ანალოგიურად,

$$P(B_1/A)=\frac{P_1}{P_1+kP_2}. \qquad \blacktriangle$$

$P(A_j/B)$, $j=\overline{1,n}$ ალბათობებს უწოდებენ აპოსტერიორულ ალბათობებს იმის შემდეგ, რაც მოხდა B ხდომილობა, ხოლო $P(A_j)$ ალბათობებს – აპრიორულს.

თავი III

შემთხვევითი სიდიდე და განაწილების ფუნქცია

§1. შემთხვევითი სიდიდე

ალბათობის თეორიის ერთ–ერთ ძირითად ცნებას წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის ცნება.

ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ ალბათური სივრცე და $(\mathbf{R}^{(1)}, \mathcal{B}^{(1)})$ ბორელის წრფე, სადაც $\mathbf{R}^{(1)}$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, ხოლო $\mathcal{B}^{(1)}$ – ბორელის სიმრავლეთა σ – ალგებრაა.

განსაზღვრა 1.1. Ω სიმრავლეზე განსაზღვრულ ნამდვილ $\xi=\xi(\omega)$ ფუნქციას, $\omega\in\Omega$, ეწოდება $\mathcal{F}$ – ზომადი ანუ შემთხვევითი სიდიდე, თუ ნებისმიერი $\mathbf{B}\in\mathcal{B}^{(1)}$ სიმრავლისათვის

$$\{\omega:\xi(\omega)\in B\}=\xi^{-1}(B)\in\mathcal{F} \qquad (1.1)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $\Omega=\mathbf{R}^{(1)}$, $\xi(\omega)$ შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ ბორელის ფუნქციას ან უბრალოდ $\mathcal{B}^{(1)}$ – ზომადს.

მოვიყვანოთ შემთხვევით სიდიდეთა მაგალითები.

1. $\mathbf{A}\in\mathcal{F}$ სიმრავლის ინდიკატორი $\mathbf{I_A}(\omega)$, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად

$$\mathbf{I}_{\mathbf{A}}(\omega)=\begin{cases}\mathbf{1}, & \text{თუ } \omega\in \mathbf{A},\\ \mathbf{0}, & \text{თუ } \omega\notin \mathbf{A},\end{cases}$$

შემთხვევითი სიდიდეა.

2. ვთქვათ,

$$\Omega=\{\omega_i, i=\overline{1,4}\}$$

ლითონის მონეტის ორჯერ აგდების ექსპერიმენტის აღმწერი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა, ხოლო $\mathcal{F}$ – მისი ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი. დავუშვათ, $\xi(\omega)$ ტოლი იყოს ω–ში შემავალ „გერბთა“ რაოდენობის. ცხადია, $\xi(\omega)$-ს მნიშვნელობათა სიმრავლე $\{0,1,2\}$. ასეთნაირად განსაზღვრული $\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდეა.

3. Ω-ზე განსაზღვრული მარტივი ფუნქცია შემთხვევითი სიდიდეა. $\xi(\omega)$ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება მარტივი, თუ ის წარმოიდგინება შემდეგნაირად:

$$\xi(\omega)=\sum_{j=1}^{n}x_j I_{A_j}(\omega),$$

სადაც

$$A_j=\{\omega:\cdot\xi(\omega)=x_j\},\ \ \bigcup_{j=1}^{n}A_j=\Omega,\ \ A_j\in\mathcal{F},\ \ A_j\cap A_i=\varnothing,\quad i\neq j.$$

Ω-ზე განსაზღვრული $\xi(\omega)$ ფუნქციის ზომადობის დასადგენად თურმე საჭიროა შევამოწმოთ (1.1)-ის შესრულება მხოლოდ $\mathcal{B}^{(1)}$-ში შემავალ სიმრავლეთა „ვიწრო" კლასისათვის. სახელდობრ, სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 1.1. ვთქვათ, E სიმრავლეთა ისეთი კლასია, რომ $\sigma(E)=\mathcal{B}^{(1)}$. $\xi(\omega)$ ფუნქცია რომ იყოს შემთხვევითი სიდიდე ($\mathcal{F}$-ზომადი), აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერი $A\in E$ სიმრავლისათვის $\xi^{-1}(A)\in\mathcal{F}$.

დამტკიცება. თეორემის აუცილებლობა ცხადია. დავამტკიცოთ საკმარისობა. D-თი აღვნიშნოთ ბორელის C სიმრავლეთა კლასი, რომელთათვის $\xi^{-1}(C)\in\mathcal{F}$. ვინაიდან, სრული წინასახის აღების ოპერაცია და სიმრავლეთა თეორიის ოპერაციები გადასმადია:

$$\xi^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha}A_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha}\xi^{-1}(A_\alpha),$$

$$\xi^{-1}\Big(\bigcap_{\alpha}A_\alpha\Big)=\bigcap_{\alpha}\xi^{-1}(A_\alpha),$$

$$\xi^{-1}(\overline{A})=\overline{\xi^{-1}(A)},$$

სადაც α ინდექსთა ნებისმიერ სიმრავლეს გაირბენს, ამიტომ D σ-ალგებრაა. ამგვარად,

$$E\subseteq D\subseteq\mathcal{B}^{(1)}\ \text{და}\ \ \sigma(E)\subseteq\sigma(D)=D\subseteq\mathcal{B}^{(1)}.$$

მაგრამ პირობის ძალით

$$\sigma(E)=\mathcal{B}^{(1)},$$

მაშასადამე,

$$D=\mathcal{B}^{(1)}. \qquad \blacktriangle$$

შედეგი. იმისათვის, რომ $\xi(\omega)$ ფუნქცია იყოს შემთხვევითი სიდიდე, აუცილებელი და საკმარისია $\{\omega:\xi(\omega)<x\}\in\mathcal{F}$ ყოველი ნამდვილი x რიცხვისათვის.

დამტკიცება გამომდინარეობს იქიდან, რომ სიმრავლეთა

$$E=\{x:x<c,\ c\in R^{(1)}\}$$

სისტემა ქმნის (წარმოშობს) $\mathcal{B}^{(1)}$ σ – ალგებრას, ე.ი.

$$\sigma(E)=\mathcal{B}^{(1)} \quad \text{(იხ. თავი II §1.).}$$

თეორემა 1.2. თუ $y=\varphi(x)$, $x\in R^{(1)}$ ბორელის ფუნქციაა, ხოლო $\xi=\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ $\varphi(\xi)=\varphi(\xi(\omega))$ რთული ფუნქცია წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A\in\mathcal{B}^{(1)}$. ვინაიდან $\varphi^{-1}(A)\in\mathcal{B}^{(1)}$, ამიტომ დავწეროთ

$$\{\omega:\varphi(\xi(\omega))\in A\}=\{\omega:\xi(\omega)\in\varphi^{-1}(A)\}=\xi^{-1}(\varphi^{-1}(A))\in\mathcal{F}. \qquad \blacktriangle$$

დამტკიცებული თეორემა გვიჩვენებს, რომ თუ $\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ ფუნქციები

$$\xi^n(\omega),\ \xi^+(\omega)=\frac{|\xi(\omega)|+\xi(\omega)}{2}$$

და

$$\xi^-(\omega)=\frac{|\xi(\omega)|-\xi(\omega)}{2}$$

აგრეთვე შემთხვევითი სიდიდეებია ($\xi^+(\omega)$ და $\xi^-(\omega)$ ფუნქციებს, შესაბამისად, $\xi(\omega)$-ის დადებითი და უარყოფითი ნაწილები ეწოდება).

მოვიყვანოთ შემთხვევით სიდიდეთა ზოგიერთი თვისება.

1. $\xi(\omega)=C=const$ – შემთხვევითი სიდიდეა.

2. თუ $\xi(\omega)$ და $\eta(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$\{\omega:\xi(\omega)<\eta(\omega)\}\in\mathcal{F},\ \{\omega:\xi(\omega)\le\eta(\omega)\}\in\mathcal{F},\ \{\omega:\xi(\omega)=\eta(\omega)\}\in\mathcal{F}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $Z=\{r_k\}$ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა, მაშინ

$$\{\omega:\xi(\omega)<\eta(\omega)\}=\bigcap_{r_k\in Z}\{\omega:\xi(\omega)<r_k<\eta(\omega)\}.$$

ვინაიდან

$$\{\omega:\xi(\omega)<r_k<\eta(\omega)\}=\{\omega:\xi(\omega)<r_k\}\bigcap\{\omega:\eta(\omega)>r_k\}\in\mathcal{F},$$

ამიტომ

$\{\omega:\xi(\omega)<\eta(\omega)\}\in\mathcal{F}$. შემდეგ, ცხადია, რომ

$$\{\omega:\xi(\omega)=\eta(\omega)\}=\{\omega:\xi(\omega)\le\eta(\omega)\}\bigcap\{\omega:\xi(\omega)\ge\eta(\omega)\}\in\mathcal{F}.\ \blacktriangle$$

3. თუ $\xi(\omega)$ და $\eta(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $c_1\xi(\omega)+c_2\xi_\eta(\omega)$, $\xi(\omega)\eta(\omega)$ და $\xi(\omega)/\eta(\omega)$ აგრეთვე შემთხვევითი სიდიდეებია (უკანასკნელ შემთხვევაში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $P\{\omega:\eta(\omega)\neq 0\}=1$).

დამტკიცება გამომდინარეობს მეორე თვისებიდან.

4. თუ $\{\xi_n(\omega)\}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, მაშინ ფუნქციები $\sup\limits_n \xi_n(\omega), \inf\limits_n \xi_n(\omega)$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\xi_n(\omega)=\lim_{n\to\infty}\sup_n \xi_n(\omega)=\inf_n \sup_{m\ge n}\xi_m(\omega),$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\xi_n(\omega)=\lim_{n\to\infty}\inf_n \xi_n(\omega)=\sup_n \inf_{m\ge n}\xi_m(\omega)$$

აგრეთვე შემთხვევითი სიდიდეებია.

დამტკიცებისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ

$$\left\{\omega:\sup_n \xi_n(\omega)\ge c\right\}=\bigcup_n\{\omega:\xi_n(\omega)\ge c\},$$

$$\left\{\omega:\inf_n \xi_n(\omega)<C\right\}=\bigcap_n\{\omega:\xi_n(\omega)<C\}.$$

5. თუ $\{\xi_n(\omega)\}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა და ყოველი ω ელემენტისათვის არსებობს ზღვარი

$$\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega),$$

მაშინ $\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდეა.

დამტკიცება გამომდინარეობს მე-4 თვისებიდან და

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \inf \xi_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sup \xi_n(\omega)$$

ტოლობიდან.

თეორემა 1.3. ყოველი არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ზღვარი არაუარყოფით მარტივ შემთხვევით სიდიდეთა ზრდადი მიმდევრობისა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$, არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდეა. $\xi_n(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდე განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\xi_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n} I_{A_i}(\omega) + n I_{\{\omega:\xi(\omega)\geq n\}}(\omega), \text{ სადაც}$$

$$A_i = \left\{\omega : \frac{i-1}{2^n} \leq \xi(\omega) < \frac{i}{2^n}\right\}.$$

ცხადია, $\xi_n(\omega)$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. $\xi_n(\omega)\geq 0$, $n=1,2, \ldots,$

2. $\xi_1(\omega)\leq\xi_2(\omega)\leq. \ldots,$

3. $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega),\ldots$ მარტივი შემთხვევითი სიდიდეებია, ვინაიდან

$$A_i = \left\{\omega:\xi(\omega) < \frac{i}{2^n}\right\} \setminus \left\{\omega:\xi(\omega) < \frac{i-1}{2^n}\right\} \in \mathcal{F}, \ i=1,2\ldots \ .$$

თუ $\xi(\omega)<\infty$, მაშინ ყოველი ნატურალური n-თვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $n> \xi(\omega)$, გვაქვს

$$0<\xi(\omega)- \xi_n(\omega)\leq 2^{-n},$$

ხოლო თუ $\xi(\omega)=\infty$, მაშინ ყოველი ნატურალური n-თვის გვაქვს $\xi_n(\omega)=n$, და, მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \infty.$$

ამრიგად, ორივე შემთხვევაში

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega). \qquad \blacktriangle$$

თეორემა 1.4. ყოველი შემთხვევითი სიდიდე წარმოიდგინება, როგორც მარტივ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის ზღვარი.

დამტკიცება გამომდინარეობს მე-3 თეორემიდან და შემდეგი ტოლობიდან

$$\xi(\omega)= \xi^{+}(\omega)-\xi^{-}(\omega).$$

§2. შემთხვევითი სიდიდის განაწილება

ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ რაიმე ალბათური სივრცე და $\xi=\xi(\omega)$ მასზე განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდეა.

თანახმად შემთხვევითი სიდიდის განსაზღვრისა, ნებისმიერი ბორელის $B\in\mathcal{B}^{(1)}$ სიმრავლისათვის

$$\xi^{-1}(B)=\{\omega:\xi(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}.$$

მაშასადამე, $\xi^{-1}(B)$ სიმრავლეს გააჩნია P-ზომა და ის აღვნიშნოთ $P_\xi(B)$ სიმბოლოთი, ე.ი.

$$P_\xi(B)= P\{\xi^{-1}(B)\}= P\{\omega:\xi(\omega)\in B\}.$$

$P_\xi(B)$ ბორელის სიმრავლეთა $\mathcal{B}^{(1)}$ კლასზე განსაზღვრული ალბათური ზომაა. მართლაც,

$$P_\xi(R^{(1)})=P(\Omega)=1,$$

ხოლო წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი B_1, B_2,... სიმრავლეებისთვის $\mathcal{B}^{(1)}$-დან:

$$P_\xi\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = P\Big(\xi^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big)\Big) = P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \xi^{-1}(B_j)\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} P\left\{\xi^{-1}(B_j)\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} P_\xi(B_j). \qquad \blacktriangle$$

ამრიგად, $P_\xi(\cdot)$ ზომა ქმნის (წარმოშობს) ბორელის წრფეზე $(R^{(1)}, \mathscr{B}^{(1)}, P_\xi)$ ალბათურ სივრცეს.

$P_\xi(\cdot)$ ალბათურ ზომას $\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება ეწოდება.

განსაზღვრა 2.1. ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრულ

$$F_\xi(x)=P_\xi(-\infty,x)=P\{\omega:\xi(\omega)<x\}$$

ფუნქციას ეწოდება $\xi=\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია.

მაგალითი 1. განვიხილოთ ბერნულის სქემა „წარმატების“ p ალბათობით და n მოცულობის შერჩევით (იხ. თავი I, §4). როგორც ცნობილია, ამ შემთხვევისათვის ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე არის სიმრავლე n „სიგრძის“ ყოველნაირი მიმდევრობისა, რომელთა ელემენტებია 1 ან 0. $\mathcal{F}$ ალგებრად ავიღოთ Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი. Ω-ზე განვსაზღვროთ $\xi=\xi(\omega)$ ფუნქცია შემდეგნაირად: $\xi(\omega)=k$, $k=\overline{0,n}$, თუ $\omega=(a_1, a_2,\dots a_n)$, $a_j=0,1$, ელემენტარულ ხდომილობაში 1-ების რიცხვი k-ს ტოლია. ცხადია, რომ

$$\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\begin{cases}\varnothing, & \text{თუ } x\le 0,\\ \bigcup\limits_{k<x} A_k, & \text{თუ } 0<x\le n,\\ \Omega, & \text{თუ } x>n,\end{cases}$$

სადაც $A_k=\{\omega:\sum\limits_{j=1}^{n} a_j=k\}\in\mathcal{F}$.

$\xi(\omega)$-ს ბერნულის შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება, ხოლო მისი განაწილების

$$F_\xi(x)=P_\xi(-\infty,x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le 0\\ \sum\limits_{k<x} P(A_k), & \text{თუ } 0<x\le n,\\ 1, & \text{თუ } x>n,\end{cases}$$

ფუნქციას, სადაც $P(A_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $k=\overline{0,n}$, ბერნულის განაწილების ფუნქცია.

მაგალითი 2. ვთქვათ, ექსპერიმენტი მდგომარეობს $[a,b]$ ინტერვალიდან წერტილის შემთხვევით არჩევაში. როგორც ვიცით (იხ. თავი II. §1.), ამ ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური სივრცეა

$$\left(\Omega=[a,b],\ \mathcal{F}=\mathcal{B}_{[a,b]},\ P=\frac{\mu}{b-a}\right),$$

სადაც μ ლებეგის ზომაა. განვსაზღვროთ $\xi(\omega)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$\xi(\omega)=\omega,\ \omega=[a,b].$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\begin{cases}\emptyset, & \text{თუ } x\le a,\\ [a,x), & \text{თუ } a<x\le b,\\ \Omega, & \text{თუ } x>b.\end{cases}$$

მაშასადამე, $\{\omega:\ \xi(\omega)<x\}\in\mathcal{F}$ ყოველი x რიცხვისათვის $R^{(1)}$-დან, ე.ი. $\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდეა.

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{თუ } a<x\le b,\\ 1, & \text{თუ } x>b.\end{cases}$$

ამგვარად, განსაზღვრულ ფუნქციას ეწოდება თანაბარი განაწილების ფუნქცია.

მაგალითი 3. ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ რაიმე ალბათური სივრცეა,

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j,\ B_j\cap B_i=\emptyset,\ i\neq j,\ B_j\in\mathcal{F}$$

და

$$P(B_k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda>0,\ k=0,1,2,\ \dots$$ (იხ. თავი II, §1).

შემთხვევითი სიდიდე განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\xi(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}kI_{B_k}(\omega),\ \ \omega\in\Omega.$$

ცხადია, რომ

$$\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\begin{cases}\varnothing, & \text{თუ } x\le 0,\\ \bigcup\limits_{k<x} B_k, & \text{თუ } x>0.\end{cases}$$

და, მაშასადამე,

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le 0,\\ \sum\limits_{k<x} P(B_k), & \text{თუ } x>0.\end{cases}$$

$F_\xi(x)$-ს ეწოდება *პუასონის განაწილების* ფუნქცია.

§3. განაწილების ფუნქციის თვისებები

ვთქვათ, $F_\xi(x)$ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა. მას აქვს შემდეგი თვისებები:

1^0. თუ $x_1<x_2$, მაშინ,

$$P\{\omega:x_1\le\xi(\omega)<x_2\}=F_\xi(x_2)-F_\xi(x_1). \tag{3.1}$$

მართლაც, თუ $x_1<x_2$, მაშინ

$$\{\omega:x_1\le\xi(\omega)<x_2\}=\{\omega:\xi(\omega)<x_2\}\setminus\{\omega:\xi(\omega)<x_1\}.$$

შემდეგ, რადგანაც

$$\{\omega:\xi(\omega)<x_1\}\subseteq\{\omega:\xi(\omega)<x_2\},$$

ამიტომ ადგილი აქვს (3.1)-ს.

(3.1)-დან გამომდინარეობს, რომ $F_\xi(x)$ *არაკლებადი* ფუნქციაა, ე.ი. თუ $x_1<x_2$, მაშინ

$$F_\xi(x_1)\le F_\xi(x_2).$$

2^0. $\lim\limits_{x\to-\infty}F_\xi(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}F_\xi(x)=1.$

საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}F_\xi(x_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}F_\xi(y_n)=1,$$

სადაც $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ ნებისმიერი მიმდევრობებია, ისეთი, რომ

$$x_{n+1}<x_n,\ \lim_{n\to\infty}x_n=-\infty,\ y_{n+1}>y_n,\ \lim_{n\to\infty}y_n=\infty.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega:\xi(\omega)<x_n\}=\varnothing$$

და

$$\{\omega:\xi(\omega)<x_{n+1}\}\subseteq\{\omega:\xi(\omega)<x_n\}$$

ალბათური ზომის უწყვეტობის გამო დავწერთ:

$$0=P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega:\xi(\omega)<x_n\})=\lim_{n\to\infty}P\{\omega:\xi(\omega)<x_n\}=\lim_{n\to\infty}F_\xi(x_n).$$

შემდეგ შევნიშნოთ, რომ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega:\xi(\omega)<y_n\}=\Omega$$

და

$$\{\omega:\xi(\omega)<y_n\}\subseteq\{\omega:\xi(\omega)<y_{n+1}\},$$

ამიტომ ალბათური ზომის უწყვეტობის თვისებიდან მივიღებთ

$$1=P(\Omega)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega:\xi(\omega)<y_n\})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\{\omega:\xi(\omega)<y_n\}=\lim_{n\to\infty}F_\xi(y_n). \qquad \blacktriangle$$

3^0. $F_\xi(x)$ განაწილების ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან. მართლაც, ვთქვათ, $\{x_n\}$ ისეთი ნებისმიერი ზრდადი მიმდევრობაა, რომ $x_n\to x$, $x_n<x$.

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}F_\xi(x_n)=F_\xi(x).$$

ადგილი აქვს ტოლობას

$$\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega:\xi(\omega)<x_n\}.$$

შემდეგ, ვინაიდან

$$\{\omega:\xi(\omega)<x_n\}\subseteq\{\omega:\xi(\omega)<x_{n+1}\},$$

ამიტომ ალბათური ზომის უწყვეტობის ძალით მივიღებთ

$$F_\xi(x)=P\{\omega:\xi(\omega)<x\}=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega:\xi(\omega)<x_n\}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\{\omega:\xi(\omega)<x_n\}=\lim_{n\to\infty}F_\xi(x_n). \qquad \blacktriangle$$

ამგვარადვე დამტკიცდება შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:

ა) $P\{\omega:\xi(\omega)\le x\}=F_\xi(x+o)$.

მართლაც, განსაზღვრის თანახმად

$$F_\xi(x+o)=\lim_{n\to\infty}F_\xi(x_n),$$

სადაც $\{x_n\}$ ისეთი მიმდევრობაა, რომ

$$x_{n+1}<x_n,\ \ x_n\to x,\ \ x_n>x.$$

ვინაიდან

$$\{\omega:\xi(\omega)\le x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega:\xi(\omega)<x_n\}$$

და $\{\omega:\xi(\omega)<x_n\}$ მონოტონურად კლებად ხდომილობათა მიმდევრობაა, ამიტომ

$$P\{\omega:\xi(\omega)\le x\}=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega:\xi(\omega)<x_n\}\right)=\lim_{n\to\infty}P\{\omega:\xi(\omega)<x_n\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}F_\xi(x_n)=F_\xi(x+o). \qquad \blacktriangle$$

ბ) $P\{\omega:\xi(\omega)=x\}=F_\xi(x+o)-F_\xi(x)$.

მართლაც, ვინაიდან

$$\{\omega:\xi(\omega)=x\}=\{\omega:\xi(\omega)\le x\}\setminus\{\omega:\xi(\omega)<x\} \quad \text{და}$$
$$\{\omega:\xi(\omega)<x\}\subset\{\omega:\xi(\omega)\le x\},$$

ამიტომ

$$P\{\omega:\xi(\omega)=x\}=P\{\omega:\xi(\omega)\le x\}-P\{\omega:\xi(\omega)<x\}=F_\xi(x+o)-F_\xi(x). \quad \blacktriangle$$

ამრიგად, თუ $F_\xi(x)$ განაწილების ფუნქცია უწყვეტია x წერტილზე, მაშინ

$$P\{\omega:\xi(\omega)=x\}=0.$$

შენიშვნა 1. $R^{(1)}$-ზე განსაზღვრული ყოველი არაკლებადი $F_1(x)$ ფუნქცია, რომლისათვის $F_1(-\infty)=0$ და $F_1(\infty)=1$, განსაზღვრავს $F(x)$ განაწილების ფუნქციას შემდეგნაირად: $F(x)=F_1(x)$ და $F(x)=F_1(x\text{-}o)$ შესაბამისად $F_1(x)$-ის უწყვეტობისა და წყვეტის წერტილებზე. ცხადია, $F(x)$ განაწილების ფუნქციაა.

ვთქვათ, D რაიმე ყველგან მკვრივი სიმრავლეა $R^{(1)}$-ში (მაგალითად, რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე) და ვთქვათ, $F_D(x)$ არის D-ზე არაკლებადი და მარცხნიდან უწყვეტი ფუნქცია, ამასთან, $F_D(-\infty)=0$ და $F_D(+\infty)=1$. ყოველი x წერტილისათვის $R^{(1)}$-დან არსებობს ისეთი $\{x_n\}\in D$Øიმდევრობა, რომ $x_n\to x$, $x_n<x$, ამას გარდა, $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} F_D(x_n),\ \ x_n\in D,\ \ x_n\uparrow x \text{ ტოლობით,}$$

განაწილების ფუნქციაა. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ორი განაწილების ფუნქცია ემთხვევა ერთმანეთს ყველგან მკვრივ სიმრავლეზე $R^{(1)}$-ში, მაშინ ისინი ემთხვევიან ერთმანეთს ყველგან.

შენიშვნა 2. ყოველი შემთხვევითი სიდიდე ცალსახად განსაზღვრავს მის განაწილების ფუნქციას, მაგრამ არსებობს ერთმანეთისაგან განსხვავებული შემთხვევითი სიდიდეები, რომლებსაც აქვს ერთი და იგივე განაწილების ფუნქცია. ასე, მაგალითად, ვთქვათ, $\xi(\omega)$ ღებულობს მხოლოდ ორ -1 და 1 მნიშვნელობას, ამასთან,

$$P\{\omega:\xi(\omega)=1\}=P\{\omega:\xi(\omega)=-1\}=1/2.$$

ვთქვათ, $\eta(\omega)=-\xi(\omega)$, მაშინ, ცხადია, $\xi(\omega)$ განსხვავებულია $\eta(\omega)$-გან. მიუხედავად ამისა, როგორც ეს ადვილი შესამჩნევია,

$$F_\eta(x)=F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ} \quad x\le -1,\\ 1/2, & \text{თუ} \quad -1<x\le 1,\\ 1, & \text{თუ} \quad x>1.\end{cases}$$

თეორემა 3.1. თუ რაიმე $F(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს განაწილების ფუნქციის 1^0–3^0 თვისებებს, მაშინ არსებობს $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათური სივრცე და მასზე განსაზღვრული $\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდე ისეთი, რომ

$$F_\xi(x)=F(x),\ \ x\in R^{(1)}.$$

დამტკიცება. თავდაპირველად ავაგოთ $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათური სივრცე. Ω სიმრავლედ ავიღოთ ნამდვილ რიცხვთა $R^{(1)}$ სიმრავლე, ხოლო $\mathcal{F}$ σ-ალგებრად – ბორელის სიმრავლეთა $\mathcal{B}^{(1)}$ σ-ალგებრა. როგორც ვიცით (იხ. §1, თავი II), $\mathcal{B}^{(1)}=\sigma(\mathcal{A})$, სადაც $\mathcal{A}$ – ალგებრაა, რომლის თითოეული A სიმრავლე შედგება $[a,b)$, $-\infty\le a$, $b\le\infty$, ტიპის თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული გაერთიანებისაგან:

$$A=\bigcup_{k=1}^{n}[a_k,b_k).$$

განვსაზღვროთ $\mathcal{A}$-ალგებრაზე $P_0(A)$ სიმრავლის ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$P_0(A)=\sum_{k=1}^{n}[F(b_k)-F(a_k)],\ \ A\in\mathcal{A}. \tag{3.2}$$

თუ A სიმრავლისათვის დავუშვებთ სხვანაირ წარმოდგენას,

$$A=\bigcup_{k=1}^{m}[a'_k,b'_k),$$

მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\sum_{k=1}^{n}[F(b_k)-F(a_K)]=\sum_{k=1}^{m}[F(b'_k)-F(a'_k)].$$

ამგვარად, ჩვენ $\mathcal{A}$-ალგებრაზე ცალსახად განვსაზღვრეთ სასრული ადიტიური $P_0(\cdot)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ალბათური ზომის I და II აქსიომებს. უფრო მეტიც, ის წარმოადგენს თვლადად ადიტიურსაც, ანუ უწყვეტს $\mathcal{A}$-ალგებრაზე. ვაჩვენოთ ეს.

ვთქვათ,

$$A_n\in\mathcal{A},\ A_{n+1}\subset A_n,\ \ \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing.$$

ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}P_0(A_n)=0.$$

თავდაპირველად დავუშვათ, რომ ყველა A_n ეკუთვნის $[-N,N]$, $N<\infty$ ჩაკეტილ ინტერვალს. ვინაიდან A_n წარმოადგენს $[a,b)$ ტი-პის თანაუკვეთი ინტერვალების სასრულ გაერთიანებას და $F(x)$ უწყვეტია მარცხნიდან

$$P[a',b)=F(b)-F(a')\to F(b)-F(a)=P_0[a,b),$$

როცა $a'\uparrow a$, ამიტომ ყოველი A_n-თვის მოიძებნება ისეთი სიმრავ-ლე $B_n\in \mathcal{A}$, რომ მისი ჩაკეტვა

$$[B_n]\subseteq A_n \text{ და } P_0(A_n\setminus B_n) \le \varepsilon\cdot 2^{-n},$$

სადაც, ε ნებისმიერი წინასწარ მოცემული რიცხვია.

თანახმად დაშვებისა

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$$

და, მაშასადამე,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [B_n] = \varnothing .$$

მაგრამ $[B_n]$, $n=1,2,\ldots$, ჩაკეტილი სიმრავლეებია, ამიტომ მო-იძებნება ისეთი სასრული $n_0=n_0(\varepsilon)$ ნომერი, რომ

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} [B_n] = \varnothing \ . \qquad (3.3)$$

დავამტკიცოთ (3.3). $[-N,N]$ – კომპაქტია, ხოლო სიმრავლეთა $\{[-N,N]\setminus[B_n]\}_{n\ge1}$ სისტემა ქმნის ამ კომპაქტის ღია დაფარვას.

ამიტომ, ჰაინე-ბორელის ლემის ძალით არსებობს სასრული ქვედაფარვა:

$$\bigcup_{n=1}^{n_0} ([-N,N]\setminus[B_n])=[-N,N].$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} [B_n] = \varnothing .$$

რადგან

$$A_{n_0} \subseteq A_{n_0-1} \subseteq \ldots \subseteq A_1$$

(3.3)-დან მივიღებთ:

$$P_0(A_{n_0}) = P_0\Big(A_{n_0} \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\Big) + P_0\Big(\bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\Big) = P_0\Big(A_{n_0} \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\Big) \le$$

$$\le P_0\Big(\bigcup_{k=1}^{n_0} (A_k \setminus B_k)\Big) \le \sum_{k=1}^{n_0} (P_0(A_k \setminus B_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-k} \le \varepsilon,$$

ამიტომ

$$P_0(A_n)\downarrow 0, \text{ როცა } n\to\infty.$$

ვთქვათ, ახლა, ყველა A_n არ ეკუთვნის [-N,N] ჩაკეტილ ინტერვალს რომელიღაც N-თვის. მოცემული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი N, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$P_0([-N,N])>1-\varepsilon/2.$$

რადგანაც

$$A_n = \{A_n \cap [-N, N)\} \cup \{A_n \cap \overline{[-N, N)}\},$$

ამიტომ

$$P_0(A_n) = P_0(A_n \cap [-N,N)) + P_0(A_n \cap \overline{[-N,N)}) \le$$

$$\le P_0(A_n \cap [-N,N)) + \varepsilon/2. \qquad (3.4)$$

თუ ზემოთ ჩატარებულ მსჯელობაში A_n-ს შევცვლით $A_n \cap [-N,N)$-ით, საკმარისად დიდი n-ებისათვის მივიღებთ, რომ

$$P_0(A_n \cap [-N, N)) < \varepsilon / 2.$$

აქედან და (3.4)-დან გამომდინარეობს, რომ კვლავ $P_0(A_n)\downarrow 0$, როცა $n\to\infty$.

ამგვარად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ $P_0(\cdot)$ $\mathcal{A}$-ალგებრაზე თვლადად ადიტიური. ახლა, თუ გამოვიყენებთ თეორემას ზომის გაგრძელების შესახებ (კარათეოდორის თეორემა, იხ. თავი II, §1), მივიღებთ ერთადერთ $P(\cdot)$ ზომას $\mathcal{B}^{(1)}=\sigma(\mathcal{A})$, σ-ალგებრაზე, რომელიც ემთხვევა $P_0(\cdot)$-ს $\mathcal{A}$ -ალგებრაზე. მაშასადამე, ავაგეთ $(R^{(1)}, \mathcal{B}^{(1)}, P)$ ალბათური სივრცე. ამ ალბათურ სივრცეზე განვსაზღვროთ $\xi(\omega)$, $\omega\in R^{(1)}$ შემთხვევითი სიდიდე შემდეგნაირად:

$$\xi(\omega)=\omega,\ \ \omega\in R^{(1)}.$$

ცხადია, რომ

$$F_{\xi}(x)=P\{\omega:\xi(\omega)<x\}=P\{-\infty,x)=F(x). \qquad \blacktriangle$$

დამტკიცებული თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ: $F_{\xi}(x)$ განაწილების ფუნქციასა და $P_{\xi}(\cdot)$ განაწილებას შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა. ამასთან, $F(x)$ განაწილების ფუნქციის საშუალებით აგებულ $P(\cdot)$ ზომას უწოდებენ ლებეგ-სტილტიესის ალბათურ ზომას.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ის შემთხვევა, როდესაც

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ თუ } & x\le 0, \\ x, \text{ თუ } & 0<x\le 1, \\ 1, \text{ თუ } & x>1. \end{cases}$$

ამ შემთხვევის შესაბამის ალბათურ ზომას (აღვნიშნოთ იგი μ-თი) უწოდებენ $[0,1]$ მონაკვეთზე ლებეგის ზომას.

ცხადია,

$$\mu(<a,b>)=b-a,$$

სადაც $<a,b>$ აღნიშნავს $[a,b)$, $[a,b]$, $(a,b]$, (a,b), ინტერვალებიდან რომელიმეს.

შენიშვნა 3. ვთქვათ, $G(x)$ ნებისმიერი არაუარყოფითი, არაკლებადი და მარცხნიდან უწყვეტი ფუნქციაა $R^{(1)}$-ზე. ანალოგიურად, ზემოთ დამტკიცებულ თეორემაში ალბათური ზომის აგებისა, ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ μ ზომა $\mathcal{B}^{(1)}$-ზე, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\mu([a,b))=G(b)-G(a).$$

ასეთნაირად განსაზღვრულ $\mu(\cdot)$ ზომას უწოდებენ ლებეგ-სტილტიესის σ-სასრულ ზომას. ($\mathcal{F}$-კლასზე მოცემულ $\mu(\cdot)$ ზომას σ-სასრული ეწოდება, თუ $\mathcal{F}$-ში არსებობს ისეთი A_1, A_2,... სიმრავლეები, რომ

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j, A_i\bigcap A_j=\varnothing, \quad i\ne j, \mu(A_j)<\infty, \quad j=1,2,\dots).$$

მნიშვნელოვანია ის შემთხვევა, როდესაც $G(x)=x$. ამ შემთხვევის შესაბამის μ ზომას ეწოდება ლებეგის ზომა $(R^{(1)}, \mathcal{B}^{(1)})$ ბორელის რიცხვთა ღერძზე.

განაწილების ფუნქციათა შესწავლისას დამტკიცებული თეორემის საფუძველზე, ხშირად იყენებენ ხელსაყრელ $(\mathbf{R}^{(1)}, \mathcal{B}^{(1)}, \mathbf{P}_\xi)$ ალბათური სივრცის მოდელს: თვლიან, რომ Ω ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}^{(1)}$ სიმრავლეა, $\mathcal{F}$ – ბორელის სიმრავლეთა $\mathcal{B}^{(1)}$ σ-ალგებრა, ხოლო

$$\mathbf{P}_\xi(\mathbf{A})=\mathbf{P}\{\omega:\xi(\omega)\in \mathbf{A}\}, \quad \mathbf{A}\in \mathcal{B}^{(1)} .$$

ამ დაშვებათა გამოყენებით, ჩვენ შეგვიძლია გავაგრძელოთ განაწილების ფუნქციათა მაგალითების სია.

მაგალითი 1. ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი   გ ა ნ ა წ ი ლ ე ბ ა (ნორმალური კანონი, ანუ გაუსის კანონი).

ნორმალური კანონის განაწილების ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$\mathbf{F(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(\mathbf{t}-a)^2}{2\sigma^2}\right)\mathbf{dt},$$

სადაც a ნებისმიერი, ხოლო σ დადებითი რიცხვია. იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ, რომ $\mathbf{F(x)}$ განაწილების ფუნქციაა, საჭიროა შევამოწმოთ განაწილების ფუნქციის 1^0–3^0 თვისებები. თვისება 3^0 ცხადია, ვინაიდან $\mathbf{F(x)}$ უწყვეტი ფუნქციაა. 1^0 და 2^0 თვისებები გამომდინარეობს იქიდან, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია დადებითია და

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\mathbf{t}-a)^2}{2\sigma^2}\right)\mathbf{dt} = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

როცა $a=0$ და $\sigma=1$, ნორმალურ განაწილებას უწოდებენ ს ტ ა ნ დ ა რ ტ უ ლ ს.

შემდეგში ჩვენ ნორმალური განაწილების ფუნქციას აღვნიშნავთ $\mathbf{N}(a, \sigma)$ სიმბოლოთი.

მაგალითი 2. კ ო შ ი ს   გ ა ნ ა წ ი ლ ე ბ ა. კოშის განაწილების ფუნქცია განისაზღვრება

$$\mathbf{F(x)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathbf{dt}}{1+\mathbf{t}^2}$$

ფორმულით.

როგორც წინა მაგალითში, ისე ამ შემთხვევაშიაც ადვილად შემოწმდება 1^0–3^0 თვისებათა სამართლიანობა.

ყველა განაწილება, რომლებიც ზემოთ იყო მოყვანილი მაგალითების სახით, შეიძლება დაიყოს ტიპებად: *დისკრეტულ* *და აბსოლუტურად უწყვეტ* განაწილებად.

დისკრეტული განაწილება. დისკრეტული განაწილებები შეესაბამებიან შემთხვევით სიდიდეებს, რომელთა მნიშვნელობათა სიმრავლე არა უმეტეს თვლადია. ასეთ შემთხვევით სიდიდეებს უწოდებენ დისკრეტულს. 1 და 3 მაგალითი ეკუთვნის დისკრეტულ ტიპს. თუ $\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება დისკრეტულია, მაშინ $P_\xi(\cdot)$ ზომა მოთავსებულია არა უმეტეს თვლად წერტილთა $E=\{x_1, x_2,....\}$ სიმრავლეზე $R^{(1)}$-დან და შეიძლება წარმოდგენილი იყოს შემდეგნაირად:

$$P_\xi(A) = \sum_{\{k: x_k \in A\}} P_k\,, \quad P_\xi(E)=1, \qquad (3.5)$$

სადაც

$$P_k=P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}=\Delta F_\xi(x)=F_\xi(x_k+0)-F_\xi(x_k).$$

ცხადია, სამართლიანია შებრუნებული დებულება: თუ $P_\xi(\cdot)$ წარმოიდგინება (3.5)-ის სახით, მაშინ $\xi(\omega)$ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა. დისკრეტული განაწილება ხშირად მოხერხებულია დავახასიათოთ $\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots \\ P_1, & P_2, & \ldots \end{pmatrix}$ ცხრილის საშუალებით, რომლის პირველ სტრიქონში მოცემულია შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები, ხოლო მეორე სტრიქონში ყოველი x_k-ის ქვეშ მოცემულია P_k ალბათობა იმისა, რომ $\xi(\omega)$ მიიღებს x_k მნიშვნელობას. ცხადია, რომ

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_j=\sum_{j=1}^{\infty} P\{\omega:\xi(\omega)=x_j\}=1.$$

აბსოლუტურად უწყვეტი განაწილება. $\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის $P_\xi(\cdot)$ განაწილებას ეწოდება აბსოლუტურად უწყვეტი, თუ არსებობს ისეთი $f_\xi(x)$ არაუარყოფითი ბორელის ფუნქცია, რომ ყოველი $B\in \mathcal{B}^{(1)}$ სიმრავლისათვის

$$P_\xi(B)=P(\xi\in B)=\int_B f_\xi(x)dx\,,$$

სადაც

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1.$$

თეორემა 3.1-ის დამტკიცებიდან ნათლად ჩანს, რომ ზემოთ მოყვანილი აბსოლუტურად უწყვეტობის განსაზღვრა ეკვივალენტურია $F_\xi(x)$ განაწილების ფუნქციის შემდეგი წარმოდგენის

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt, \quad x \in R^{(1)} \qquad (3.6)$$

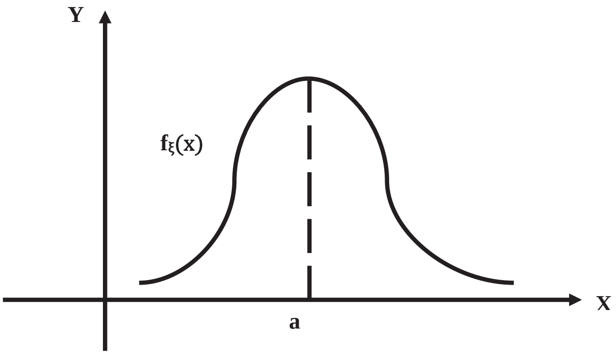
განაწილების ფუნქციებს, რომლებიც წარმოიდგინებიან (3.6)-ის სახით, აგრეთვე უწოდებენ აბსოლუტურად უწყვეტს. ასეთი განაწილებები ჩვენ მოვიყვანეთ მე-2, მე-4 და მე-5 მაგალითებში.

$f_\xi(x)$ ფუნქციას ეწოდება $\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე და ნულოვანი ლებეგის ზომის სიმრავლემდე სიზუსტით განისაზღვრება. თითქმის ყველგან (ლებეგის ზომის აზრით) ადგილი აქვს ტოლობას

$$f_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}.$$

მაგალითად, $N(a,\sigma)$ – ნორმალური კანონისათვის

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$



§4. ვექტორული შემთხვევითი სიდიდე

ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათური სივრცეა და მასზე მოცემულია $\xi_1=\xi_1(\omega)$, $\xi_2=\xi_2(\omega),\ldots$, $\xi_n=\xi_n(\omega)$, $\omega\in\Omega$ შემთხვევითი სიდიდეები. ეს ზომადი ფუნქციები ყოველ ω-ს შეუსაბამებს n-განზომილებიან $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\ldots,\xi_n(\omega))$ ვექტორს. გადასახვას $\xi:\Omega\to R^{(n)}$ ეწოდება ვექტორული შემთხვევითი სიდიდე ანუ შემთხვევითი ვექტორი.

გადასახვა $\xi:\Omega\to R^{(n)}$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ზომადი ასახვა:

$$\xi^{-1}(B)=\{\omega:\xi(\omega)\in B\}\in\mathcal{F},$$

სადაც B ნებისმიერი ბორელის სიმრავლეა $R^{(n)}$-ში.

ვინაიდან $\mathcal{B}^{(n)}$ კლასის სიმრავლეები $A^{(n)}=\{x=(x_1,\ldots,x_n): a_i\le x_i\le b_i,\ i=\overline{1,n}\}$ ინტერვალების შემცველი მინიმალური σ-ალგებრის ელემენტებია, ამიტომ ზემოთ მოყვანილი ზომადობის განსაზღვრა ეკვივალენტურია $\xi^{-1}(A^{(n)})\in\mathcal{F}$ პირობის შესრულების.

განსაზღვრა 4.1. $R^{(n)}$ სივრცის ბორელის სიმრავლეთა $\mathcal{B}^{(n)}$ σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ

$$P_\xi(B)=P\{\xi^{-1}(B)\}=P\{\omega:\xi(\omega)\in B\}$$

ზომას ეწოდება ξ შემთხვევითი ვექტორის განაწილება, ხოლო თვით $(R^{(n)},\mathcal{B}^{(n)},P_\xi(\cdot))$ ალბათურ სივრცეს – $\xi(\omega)$ ვექტორის მიერ ინდუცირებული (წარმოქმნილი) ალბათური სივრცე.

განსაზღვრა 4.2. n ცვლადის ფუნქციას

$$F_\xi(x)=P(B_x)=P\{\omega:\xi_1(\omega)<x_1,\ldots,\xi_n(\omega)<x_n\}=$$

$$=P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}(\omega:\xi_j(\omega)<x_j)\right\},\quad B_x=\prod_{j=1}^{n}(-\infty,x_j),\quad x=(x_1,\ldots,x_n),$$

ეწოდება $\xi(\omega)$ ვექტორის განაწილების ფუნქცია.

$F_\xi(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, განაწილების ფუნქციის საშუალებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ $P_\xi(I^{(n)})$, სადაც $I^{(n)}=\prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j)$. უფრო ზუსტად, $F_\xi(x)$-ის საშუალებით ადვილად გამოითვლება ალბათობა იმისა, რომ $\xi(\omega)$ შემთხვევითი ვექტორი მიიღებს მნიშვნელობას $I^{(n)}$ ინტერვალიდან:

$$P_\xi(I^{(n)})=P\{\omega: a_1\le\xi_1(\omega)<b_1,...,a_n\le\xi_n(\omega)<b_n\}=\Delta^{I^{(n)}}F_\xi(x)=$$

$$=F_\xi(b_1,...b_n)-\sum_{j=1}^{n}P_j+\sum_{i<j}P_{ij}+...+(-1)^nF_\xi(a_1,a_2,...,a_n), \qquad (4.1)$$

სადაც $P_{ij...k}$ აღნიშნავს $F_\xi(x_1,...,x_n)$ ფუნქციის მნიშვნელობას, როცა $x_i=a_i$, $x_j=a_j$,....,$x_k=a_k$ და დანარჩენი x_s ტოლია b_s-ის.

(4.1)-ს ფუნქციათა თეორიაში უწოდებენ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ნაზრდს n-განზომილებიან ინტერვალზე. იგი შეიძლება უფრო მარტივად ჩაიწეროს ასე:

$$\Delta^{I^{(n)}}F_\xi(x)=\Delta_{I_1}^{(1)}\Delta_{I_2}^{(2)}...\Delta_{I_n}^{(n)}F_\xi(x), \qquad (4.2)$$

სადაც

$$I_k=[a_k,b_k)$$

და

$$\Delta_{I_k}^{(k)}F_\xi(x)=F_\xi(x_1,...,x_{k-1},b_k,x_{k+1},...,x_n)-$$
$$-F_\xi(x_1,...,x_{k-1},a_k,x_{k+1},...,x_n).$$

დავამტკიცოთ (4.2) ფორმულა $n=2$ შემთხვევისათვის. აღვნიშნოთ

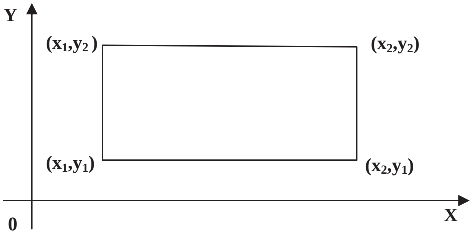
$I=[x_1,x_2)\times[y_1,y_2)$,

$I_{(x_2,y_2)}=(-\infty,x_2)\times(-\infty,y_2)$,

$I_{(x_1,y_2)}=(-\infty,x_1)\times(-\infty,y_2)$,

$I_{(x_1,y_1)}=(-\infty,x_1)\times(-\infty,y_1)$,

$I_{(x_2,y_2)}=(-\infty,x_2)\times(-\infty,y_2)$.



ცხადია, რომ

$$I = I_{(x_2,y_2)} \setminus (I_{(x_1,y_2)} \cup (I_{(x_2,y_1)} \setminus I_{(x_1,y_1)})) \qquad (4.3)$$

ალბათური ზომის ერთ-ერთი თვისების ძალით (4.3)-დან დავწერთ:

$$\Delta^I F_\xi(x)=P_\xi(I)=P_\xi(I_{(x_2,y_2)})-P_\xi(I_{(x_1,y_2)} \cup (I_{(x_2,y_1)} \setminus I_{(x_1,y_1)}))=$$

$$=P_\xi(I_{(x_2,y_2)})- P_\xi(I_{(x_2,y_1)})- P_\xi(I_{(x_1,y_2)})+ P_\xi(I_{(x_1,y_1)})=$$

$$=F_\xi(x_2,y_2)- F_\xi(x_2,y_1)- F_\xi(x_1,y_2)+ F_\xi(x_1,y_1).$$

ამგვარად,

$$P\{\omega:(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))\in [x_1,x_2)\times[y_1,y_2)\}=\Delta^I F_\xi(x)=$$

$$=F_\xi(x_2,y_2)- F_\xi(x_2,y_1)- F_\xi(x_1,y_2)+ F_\xi(x_1,y_1) \qquad (4.4)\ \blacktriangle$$

$F_\xi(x)=F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n)$ განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისებები:

I. $F_\xi(x)$ ფუნქცია თითოეული ცვლადის მიმართ არაკლებადია;

$$\lim_{x_i \downarrow -\infty} F_\xi(x_1,...,x_n) = 0;$$

$$\lim_{x_1\uparrow\infty,...,x_n\uparrow\infty} F_\xi(x_1,...,x_n) = 1.$$

II. $\Delta^I F_\xi(x)\geq 0$;

III. $F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან;

IV. $F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n)$ განაწილების ფუნქცია აკმაყოფილებს აგრეთვე შემდეგ (აუცილებელ) შ ე თ ა ნ ხ მ ე ბ უ ლ ო ბ ი ს პირობებს:

ა) $F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n)=F_{(\xi_{i1},...,\xi_{in})}(x_{i_1},...,x_{i_n})$,

სადაც

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & ..., & n \\ i_1, & i_2, & ..., & i_n \end{pmatrix} \text{ – ნებისმიერი ჩასმაა.}$$

ბ) $F_{(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)}(x_1,...,x_k,\infty,...,\infty) = F_{(\xi_1,\xi_2,...,\xi_k)}(x_1,...,x_k)$.

თეორემა 4.1. თუ მრავალი ცვლადის ფუნქცია $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ აკმაყოფილებს I–IV თვისებებს (მას ხშირად უწოდებენ n–განზომილებიან განაწილების ფუნქციას), მაშინ არსებობს ალბათური სივრცე $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$ და მასზე განსაზღვრული ისეთი ვექტორული შემთხვევითი სიდიდე $\xi(\omega)$, რომ

$$F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n)= F(x_1, x_2, ..., x_n),$$

ანუ

$$P_\xi(I^{(n)}) = \Delta^{(1)}_{I_1}\Delta^{(2)}_{I_2}...\Delta^{(n)}_{I_n}F(x_1,...,x_n).$$

4.1. თეორემას ჩვენ არ დავამტკიცებთ, ვინაიდან ის 3.1. თეორემის დამტკიცების ანალოგიურია.

შენიშვნა. ჩვენ ვნახეთ, რომ ერთი განზომილების შემთხვევაში, თუ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის თვისებებს, მაშინ ის წარმოადგენს რაიმე შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას. მრავალი განზომილების შემთხვევაში ასეთ დებულებას რომ ჰქონდეს ადგილი, გარდა I, III და IV პირობებისა, უნდა მოვითხოვოთ ფუნქციის ნაზრდი ნებისმიერ I ინტერვალზე მეტი ან ტოლი იყოს ნულის:

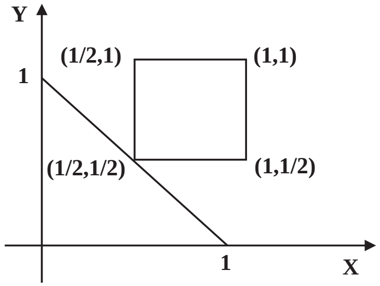
$$\Delta^I F(x) \geq 0.$$

მოვიყვანოთ მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელიც აკმაყოფილებს I, III და IV პირობებს, მაგრამ

$$\Delta^I F(x)<0,$$

ე.ი. ის არ წარმოადგენს განაწილების ფუნქციას:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ თუ } \; x \leq 0, \text{ ან } \; x+y \leq 1, \text{ ან } \; y \leq 0, \\ 1, \text{ ყველა დანარჩენ შემთხვევაში.} \end{cases}$$



(4.4) ფორმულის გამოყენება გვაძლევს

$$\Delta^{\mathrm{I}} F = F(1,1) - F(1,\frac{1}{2}) - F(\frac{1}{2},1) + F(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = -1,$$

სადაც

$$\Delta = [\frac{1}{2},1) \times [\frac{1}{2},1).$$

მაგალითები: 1. ვთქვათ, $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$, $x \in R^{(1)}$, ერთგა-ნზომილებიანი განაწილების ფუნქციებია და

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = =F_1(x_1)F_2(x_2) \dots F_n(x_n).$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\Delta^{\mathrm{I}} F = \prod_{k=1}^{n} (F_k(b_k) - F_k(a_k)) \geq 0, \quad I^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j)$$

და, აგრეთვე, ის აკმაყოფილებს n–განზომილებიანი განაწილე-ბის ფუნქციის სხვა თვისებებსაც. განსაკუთრებით მნიშვნელო-ვანია ის შემთხვევა, როდესაც'

$$F_k(x_k) = \begin{cases} 0, & x_k \leq 0, \\ x_k, & 0 < x_k \leq 1, \\ 1, & x_k > 1. \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში ნებისმიერი x_k–თვის, $x_k \in [0,1)$, $k=\overline{1,n}$,

$$F(x_1 \, x_2 \dots x_n) = x_1 \, x_2 \dots x_n. \tag{4.5}$$

(4.5)-ის შესაბამის ალბათურ ზომას უწოდებენ ლებეგის n-განზომილებიან ზომას $[0,1)^n$ ინტერვალში, ხოლო მის შესაბამის $\xi(\omega)$ შემთხვევით ვექტორს ეწოდება თანაბრად განაწილებული $[0,1)^n$ -ში.

2. ვიტყვით, რომ $\xi(\omega)$ შემთხვევითი ვექტორი განაწილებულია ნორმალურად, თუ

$$\mathbf{F}_\xi(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \mathbf{f}_\xi(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n)\mathbf{dt}_1\mathbf{dt}_2\dots\mathbf{dt}_n, \qquad (4.6)$$

სადაც

$$\mathbf{f}_\xi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \mathbf{exp}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{Q}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\right),$$

სადაც

$$\mathbf{Q} = \sum_{i,j} a_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$$

დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა, ხოლო $|\mathbf{A}|$ არის $\|a_{ij}\|$ მატრიცის დეტერმინანტი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\int_{R^{(n)}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = 1.$$

ისევე, როგორც ერთი განზომილების შემთხვევაში, ჩვენ შემთხვევითი ვექტორის განაწილებას მივაკუთვნებთ დისკრეტულ ტიპს, თუ შემთხვევითი ვექტორი ღებულობს სასრულ ან თვლადი რაოდენობის მნიშვნელობებს.

$\xi(\omega)$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილებას მივაკუთვნებთ აბსოლუტურად უწყვეტ ტიპს, თუ ნებისმიერი ბორელის **B** სიმრავლისათვის $(\mathbf{B} \in \mathcal{B}^n)$ მისი განაწილება წარმოიდგინება შემდეგნაირად:

$$\mathbf{P}_\xi(\mathbf{B}) = \mathbf{P}\{\xi \in \mathbf{B}\} = \int_{B} \mathbf{f}_\xi(\mathbf{x})\mathbf{dx},$$

ცხადია,

$$\mathbf{f}_\xi(\mathbf{x}) \geq 0 \qquad \text{და} \qquad \int_{R^n} \mathbf{f}_\xi(\mathbf{x})\mathbf{dx} = 1.$$

ეს განსაზღვრა შეიძლება შეიცვალოს ეკვივალენტური განსაზღვრით:

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_\xi(u_1,u_2,\dots,u_n)du_1\dots du_n, \qquad (4.7)$$

სადაც $f_\xi(x_1, \dots, x_n)$ არაუარყოფითი ფუნქციაა და

$$\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{-\infty} f_\xi(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = 1.$$

შევნიშნოთ, რომ ზოგად შემთხვევაში ინტეგრალი (4.7) გაიგება როგორც ლებეგის ინტეგრალი. $f_\xi(x)$ ფუნქციას ეწოდება ξ-ს განაწილების სიმკვრივე, ანუ $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ შემთხვევითი სიდიდეთა ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე. თითქმის ყველა x-თვის (ლებეგის ზომის მიმართ) ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{\partial^{(n)}F_\xi(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n} = f_\xi(x_1,\dots,x_n).$$

მაგალითად, ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი ვექტორის განაწილების სიმკვრივეა

$$f_\xi(x_1,\dots,x_n)=\sqrt{\frac{|A|}{(2\pi)^n}}\exp(-\frac{1}{2}Q(x_1,\dots,x_n)).$$

შენიშვნა. რიმანის აზრით პრაქტიკაში გამოსაყენებელი სიმკვრივეები ჩვეულებრივ ინტეგრებადნი არიან, ამიტომ ალბათობის თეორიის გამოყენებაში შეიძლება (4.7) ინტეგრალი გაგებულ იქნეს როგორც რიმანის ინტეგრალი.

§5. შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა

ვთქვათ, $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდეები განსაზღვრულნი არიან $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათურ სივრცეზე.

განსაზღვრა 5.1. $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ შემთხვევით სიდიდეებს დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ ნებისმიერი $B_1, B_2, \dots, B_n$ ბორელის სიმრავლეებისათვის $R^{(1)}$-დან ადგილი აქვს ტოლობას:

$$P(\xi_1(\omega)\in B_1, \dots, \xi_n(\omega)\in B_n) = P(\bigcap_{j=1}^{n} (\xi_j(\omega)\in B_j)) =$$

$$=P(\xi_1(\omega)\in B_1)\dots P(\xi_n(\omega)\in B_n). \qquad (5.1)$$

შეიძლება შემოვიტანოთ აგრეთვე შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის დამოუკიდებლობის ცნება. $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ ნებისმიერი ნატურალური n-თვის ადგილი აქვს (5.1) ტოლობას.

თეორემა 5.1. ვთქვათ, $\xi=(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ვექტორის განაწილების ფუნქციაა $F_\xi(x_1, \dots, x_n)$. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$. შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n)=F_{\xi_1}(x_1)\dots F_{\xi_n}(x_n) \qquad (5.2)$$

როგორიც არ უნდა იყოს $x_1, x_2, \dots, x_n$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან.

დამტკიცება. (5.2) პირობის აუცილებლობა ცხადია. საკმარისობის დასამტკიცებლად დავაფიქსიროთ $x_1, x_2, \dots, x_n$ და განვიხილოთ $\mathcal{B}^{(1)}$-ზე ორი Q_1 და Q_1' ზომა:

$$Q_1(B) = P\{\xi_1(\omega)\in B; \xi_2(\omega)<x_2, \dots, \xi_n(\omega)<x_n\}, B \in \mathcal{B}^{(1)},$$

$$Q_1'(B) = P\{\xi_1(\omega)\in B\}P\{\xi_2(\omega)<x_2, \dots, \xi_n(\omega)<x_n\}.$$

(5.2) პირობის ძალით ზომები Q_1 და Q_1' ემთხვევიან ერთმანეთს $[a,b)$ ტიპის ინტერვალებზე და, მაშასადამე, კარათეოდორის თეორემის ძალით ისინი ემთხვევიან ერთმანეთს $B\in\mathcal{B}^{(1)}$ ბორელის ნებისმიერ სიმრავლეზე, ე.ი.

$$Q_1'(B) = Q_1(B), \ B \in \mathcal{B}^{(1)}.$$

ახლა დავაფიქსიროთ $B \in \mathcal{B}^{(1)}$, $x_3, x_4, \dots, x_n$ და განვიხილოთ ზომები:

$$Q_2(B) = P\{\xi_1(\omega)\in B_1; \xi_2(\omega)\in B, \xi_3(\omega)<x_3, \dots, \xi_n(\omega)<x_n\},$$

$$Q_2'(B) = P\{\xi_1(\omega)\in B_1\} P\{\xi_2(\omega)\in B\}P\{\xi_3(\omega)<x_3, \dots, \xi_n(\omega)<x_n\}.$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ Q_2 და Q_2' ემთხვევიან ერთმანეთს ბორელის სიმრავლეებზე, ე.ი.

$$Q_2(B) = Q_2'(B),\ \ B \in \mathcal{B}^{(1)}.$$

თუ გავიმეორებთ ამ პროცესს n–ჯერ, მაშინ (5.2)–დან მივიღებთ (5.1). ▲

თეორემა 5.2. ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. თუ ξ_k–ს, $k = \overline{1,n}$, განაწილება აბსოლუტურად უწყვეტია, მაშინ $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილება აბსოლუტურად უწყვეტია. შებრუნებით, თუ $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$, ვექტორის განაწილება აბსოლუტურად უწყვეტია, მაშინ ξ_k–ს, $k = \overline{1,n}$, განაწილებაც აბსოლუტურად უწყვეტი იქნება და, ამასთან, თითქმის ყველგან (ლებეგის ზომის აზრით)

$$f_\xi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2)\ldots f_{\xi_n}(x_n), \qquad (5.3)$$

სადაც $f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n}$ განაწილების სიმკვრივეებია შესაბამისად $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$–თვის.

დამტკიცება. ვინაიდან ξ_k–ს, $k = \overline{1,n}$, განაწილების ფუნქცია ეკუთვნის აბსოლუტურად უწყვეტ ტიპს, ამიტომ

$F_{\xi_k}(x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} f_{\xi_k}(t_k)dt_k$, $k = \overline{1,n}$, პირობის ძალით, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, ამიტომ (5.2) ტოლობის ძალით დავწერთ:

$$F_\xi(x_1,x_2,\ldots x_n) = F_{\xi_1}(x_1)\ldots F_{\xi_n}(x_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} f_{\xi_1}(t_1)dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} f_{\xi_2}(t_2)dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_n}(t_n)dt_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\ldots\int_{-\infty}^{x_n} f_\xi(t_1,t_2,\ldots,t_n)dt_1 dt_2\ldots dt_n, \qquad (5.4)$$

სადაც $f_\xi(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{\xi_j}(t_j)$.

მაგრამ (5.4) წარმოდგენა ნიშნავს, რომ ξ ვექტორის განაწილების ფუნქცია ეკუთვნის აბსოლუტურად უწყვეტ ტიპს.

პირიქით, ვთქვათ, ξ ვექტორის განაწილების ფუნქცია ეკუთვნის აბსოლუტურად უწყვეტ ტიპს (აქ არ არის აუცილებელი მოვითხოვოთ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა), ე.ი.

$$F_\xi(x_1, x_2, \dots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_\xi(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n .$$

n–განზომილებიანი განაწილების ფუნქციის ერთ–ერთი თვისების ძალით დავწერთ:

$$F_{\xi_1}(x_1) = F_\xi(x_1, \infty, \dots, \infty) = \lim_{\substack{x_j \to \infty \\ j=\overline{2,n}}} F_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n \Big) dt_1 = \int_{-\infty}^{x_1} f_\xi(t_1) dt_1 \quad (5.5),$$

სადაც
$$f_{\xi_1}(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_2 \dots dt_n .$$

(5.5) ნიშნავს, რომ ξ_1–ის განაწილების ფუნქცია $F_{\xi_1}(x_1)$ ეკუთვნის აბსოლუტურად უწყვეტ ტიპს, ასევე დამტკიცდება $\xi_2, \dots, \xi_n$ შემთხვევითი სიდიდეებისთვისაც, დაბოლოს, (5.3) ტოლობის სამართლიანობა პირდაპირ გამომდინარეობს განმარტებიდან. ▲

შენიშვნა. თეორემა 5.2–დან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი ვექტორი $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$–ის კომპონენტები დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a_{ij} = 0$, $i \neq j$.

§6. შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების ფუნქცია

ვთქვათ, ξ_1 და ξ_2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, ე.ი.

$$F_{(\xi_1, \xi_2)}(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) .$$

ვიპოვოთ $\zeta = \xi_1 + \xi_2$–ის განაწილების ფუნქცია. თუ გამოვიყენებთ ფუბინის თეორემას, მივიღებთ:

$$F_\zeta(z)=P\{\xi_1+\xi_2<z\}=\int\limits_{\{(x,y):x+y<z\}} dF_{\xi_1}(x)\cdot dF_{\xi_2}(y)=$$

$$=\int\limits_{R^2} I_{\{x+y<z\}}(x,y)dF_{\xi_1}(x)dF_{\xi_2}(y)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} dF_{\xi_1}(x)\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{\{x+y<z\}}(x,y)dF_{\xi_2}(y)\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_2}(z-x)dF_{\xi_1}(x) \qquad (6.1)$$

და ანალოგიურად

$$F_\zeta(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_1}(z-x)dF_{\xi_2}(x) \qquad (6.2)$$

(6.1)-ის, (6.2)-ის მარჯვენა მხარეს აღნიშნავენ ასე:

$$F_{\xi_1} * F_{\xi_2} = F_{\xi_2} * F_{\xi_1}$$

და ეწოდება F_{ξ_1}-ისა და F_{ξ_2}-ის ხ ვ ე უ ლ ი ა ნ უ კ ო მ პ ო ზ ი ც ი ა.

ახლა დავუშვათ, რომ ξ_1 და ξ_2 შემთხვევით სიდიდეებს გააჩ- ნიათ სიმკვრივეები $f_{\xi_1}(x)$ და $f_{\xi_2}(x)$. მაშინ (6.2)-დან, ფუბინის თეორემის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$F_\zeta(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{z-y} f_{\xi_1}(u)du\right]f_{\xi_2}(y)dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{z} f_{\xi_1}(u-y)du\right]f_{\xi_2}(y)dy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{z}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(u-y)f_{\xi_2}(y)dy\right]du,$$

აქედან,

$$f_\zeta(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(z-y)f_{\xi_2}(y)dy, \qquad (6.3)$$

ანალოგიურად

$$f_\zeta(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(z-x)f_{\xi_1}(x)dx. \qquad \blacktriangle$$

ვთქვათ, ξ_1, ξ_2, ... , ξ_n დამოუკიდებელი და [-1,1] ინტერვალზე თანაბარი განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია, ე.ი.

$$f_{\xi_1}(x)=f_{\xi_2}(x)=...=f_{\xi_n}(x)=\begin{cases}1/2, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

(6.3)–დან მივიღებთ:

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x)=\begin{cases}\dfrac{2-|x|}{4}, & |x|\le 2\\ 0, & |x|>2\end{cases}$$

$$f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x)=\begin{cases}\dfrac{(3-|x|)^2}{16}, & 1\le|x|\le 3,\\ \dfrac{3-x^2}{8}, & 0\le|x|\le 1,\\ 0, & |x|>3\end{cases}$$

ინდუქციის წესით დავინდებთ, რომ

$$f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n(n-1)!}\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n+x}{2}\right]}(-1)^k C_n^k(n+x-2k)^{n-1}, & |x|\le n,\\ 0, & |x|>n.\end{cases}$$

ვთქვათ, ეხლა ξ_1 და ξ_2 განაწილებულია ნორმალური კანონით, პარამეტრებით (m_1, σ_1^2) და (m_2, σ_2^2), ე.ი.

$$f_{\xi_1}(x)=\varphi\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\frac{1}{\sigma_1},\quad f_{\xi_2}(x)=\varphi\left(\frac{x-m_2}{\sigma_2}\right)\frac{1}{\sigma_2},$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

(6.3)–დან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\varphi\left(\frac{x-(m_1+m_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right).$$

ამრიგად, ორი დამოუკიდებელი და ნორმალურად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეთა ჯამი განაწილებულია კვლავ ნორმალურად, პარამეტრებით $(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

თავი IV

შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვითი მახასიათებლები

§1. მათემატიკური ლოდინი

1. ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ალბათური სივრცეა და $\xi=\xi(\omega)$ მასზე განსაზღვრული მარტივი შემთხვევითი სიდიდეა, ე.ი. $\xi(\omega)$ შემთხვევით სიდიდეს ერთმანეთისგან განსხვავებული მნიშვნელობათა სასრული რაოდენობა გააჩნია,

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}(\omega), \tag{1.1}$$

სადაც

$$A_k=\{\omega:\xi(\omega)=x_k\},\ k=\overline{1,n},\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k=\Omega,\ A_i\cap A_j=\varnothing,\ j\neq i.$$

განსაზღვრა 1.1. $\xi(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}(\omega)$ მარტივი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k) \tag{1.2}$$

ჯამს. განსაზღვრა 1.1 კორექტულია, ე.ი. $M\xi$ არ არის დამოკიდებული $\xi(\omega)$ მარტივი ფუნქციის (1.1) წარმოდგენაზე. მართლაც, ვთქვათ, გვაქვს ერთი და იმავე $\xi(\omega)$ მარტივი ფუნქციის ორნაირი წარმოდგენა

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(\omega) = \sum_{i=1}^{m} y_i I_{B_i}(\omega),\quad A_i \cap A_j = \varnothing,$$

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega,\quad B_i \cap B_j = \varnothing,\ i\neq j,\quad \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \Omega,$$

$$A_i=\{\omega:\xi(\omega)=x_i\},\ i=\overline{1,n},\ B_j=\{\omega:\xi(\omega)=y_j\},\ j=\overline{1,m}.$$

ვინაიდან

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$$

ყოველი $\mathbf{i}$-თვის და

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{n} (B_j \cap A_i)$$

ყოველი $\mathbf{j}$-თვის, აგრეთვე,

$$\xi(\omega)=x_i=y_j, \text{ როცა } \omega = A_i \cap B_j.$$

ამიტომ

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i P(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} y_j P(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(B_j). \qquad \blacktriangle$$

მოვიყვანოთ მარტივი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ძირითადი თვისებები:

1^0. თუ $\xi(\omega)\geq 0$ მაშინ, $M\xi(\omega)\geq 0$;

2^0. $M(a\xi+b\eta)=aM\xi+bM\eta$, a და b – მუდმივი რიცხვებია;

3^0. თუ $\xi(\omega)\geq\eta(\omega)$, მაშინ $M\xi\geq M\eta$;

4^0. $M|\xi| \geq |M\xi|$;

5^0. თუ ξ და η დამოუკიდებელია, მაშინ $M\xi\eta = M\xi M\eta$;

6^0. თუ $\xi=I_A(\omega)$, მაშინ $M\xi = P(A)$.

1^0 და 6^0 თვისებების დამტკიცება ცხადია. დავამტკიცოთ 2^0. ვთქვათ, $\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}(\omega)$, $\eta(\omega) = \sum_{j=1}^{m} y_j I_{B_j}(\omega)$, მაშინ

$$a\xi(\omega) + b\eta(\xi) = a\sum_{i,j} x_i I_{A_i \cap B_j}(\omega) + b\sum_{i,j} y_j I_{A_i \cap B_j}(\omega) =$$

$$= \sum_{i,j} (ax_i + by_j) I_{A_i \cap B_j}(\omega).$$

მათემატიკური ლოდინის (1.1) განსაზღვრის თანახმად,

$$M(a\xi+b\eta)=\sum_{i,j}(ax_i+by_j)P(A_i\cap B_j)=$$

$$\sum_i ax_iP(A_i)+\sum_j by_jP(B)=aM\xi+bM\eta. \qquad \blacktriangle$$

3^0 თვისება გამომდინარეობს 1^0 და 2^0-დან.
4^0 თვისება ცხადია, ვინაიდან

$$|M\xi|\le\sum_j |x_j|P(A_j)=M|\xi|.$$

დავამტკიცოთ 5^0. პირობის ძალით ξ და η დამოუკიდებელი მარტივი შემთხვევითი სიდიდეებია, ამიტომ

$$A_i=\{\omega:\ \xi(\omega)=x_i\},\ \ B_j=\{\omega:\eta(\omega)=y_j\}$$

ხდომილობები დამოუკიდებელია, გვაქვს

$$M\xi\eta=M\left(\sum_{i=1}^n x_iI_{A_i}(\omega)\right)\left(\sum_{j=1}^m y_jI_{B_j}(\omega)\right)=M\sum_{i,j}x_iy_jI_{A_i\cap B_j}(\omega)=$$

$$=\sum_{i,j}x_iy_jP(A_i)P(B_j)=\sum_i x_iP(A_i)\sum_j y_jP(B_j)=M\xi M\eta. \ \blacktriangle$$

2. ვთქვათ, ახლა $\xi=\xi(\omega)$ არაუარყოფითი ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდეა და განვსაზღვროთ მისთვის მათემატიკური ლოდინი $M\xi$. როგორც ვიცით, ყოველი არაუარყოფითი $\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ზღვარი $\{\xi_n(\omega)\}_{n\ge1}$ არაუარყოფით მარტივ შემთხვევით სიდიდეთა ზრდადი მიმდევრობისა. ვინაიდან $M\xi_n\le M\xi_{n+1}$ (იხ. თვისება 3^0), ამიტომ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}M\xi_n$, რომელიც შეიძლება იყოს ∞-ის ტოლიც.

განსაზღვრა 1.2. $\xi(\omega)$ არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება

$$M\xi=\lim_{n\to\infty}M\xi_n \qquad (1.3)$$

რიცხვს, სადაც $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ არის ξ-საკენ კრებადი მარტივი შემთხვევითი სიდიდეების ზრდადი მიმდევრობა: $\xi_n\uparrow\xi$.

იმისათვის, რომ ეს განსაზღვრა იყოს კორექტული, უნდა ვაჩვენოთ, რომ (1.3) ზღვრის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული

ξ-საკენ კრებადი, ზრდად, მარტივ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის არჩევაზე. დავუშვათ, რომ $\{\xi_n\}$ და $\{\eta_n\}$ მარტივ შემთხვევით სიდიდეთა ξ-საკენ კრებადი ორი ზრდადი მიმდევრობაა. უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n = \lim_{n\to\infty} M\eta_n = M\xi. \tag{1.4}$$

მართლაც, ვინაიდან

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \geq \eta_k(\omega), \quad k=1,2,...,$$

ამიტომ (1.4)-ის დამტკიცებისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $k=1,2,...$-თვის

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n \geq M\eta_k. \tag{1.5}$$

დავუშვათ, რომ

$$c = \max_k \eta_k(\omega) < \infty.$$

ვთქვათ, $\varepsilon>0$ და

$$A_n=\{\omega:\xi_n(\omega)>\eta_k(\omega)-\varepsilon\}.$$

ვინაიდან $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \geq \eta_k(\omega)$,

ამიტომ $A_n \uparrow \Omega$ და

$$\xi_n(\omega) = \xi_n(\omega)I_{A_n}(\omega) + \xi_n(\omega)I_{\overline{A}_n}(\omega) \geq \xi_n(\omega)I_{A_n}(\omega) \geq$$
$$\geq (\eta_k(\omega)-\varepsilon)I_{A_n}(\omega).$$

თუკი გამოვიყენებთ მარტივი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის თვისებებს, დავწერთ:

$$M\xi_n \geq M\xi_n I_{A_n} \geq M[\eta_k-\varepsilon] I_{A_n} = M\eta_k I_{A_n} - \varepsilon M I_{A_n} = M\eta_k(1-I_{\overline{A}_n}) -$$
$$-\varepsilon P(A_n) = M\eta_k - M\eta_k I_{\overline{A}_n} - \varepsilon P(A_n) \geq M\eta_k - cP(\overline{A}_n) - \varepsilon P(A_n). \tag{1.6}$$

(1.6)-ში ჯერ n მივასწრაფოთ ∞-საკენ, ხოლო შემდეგ $\varepsilon\to 0$-საკენ, მივიღებთ (1.5) უტოლობას.

ვთქვათ, ახლა $c=\infty$ და განვიხილოთ $\eta_k(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის ნაცვლად

$$\eta_k^{(N)}(\omega)=\begin{cases}\eta_k(\omega), & \text{თუ } \eta_k(\omega)<\infty,\\ N, & \text{თუ } \eta_k(\omega)=\infty\end{cases}$$

შემთხვევითი სიდიდე. გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n \ge M\eta_k^{(N)} = M\eta_k I_{\{\omega:\eta_k(\omega)<\infty\}} + NP\{\omega:\eta_k(\omega)=\infty\}.$$

აქედან

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n \ge M\eta_k. \qquad \blacktriangle$$

ამგვარად, არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის მათემატიკური ლოდინი განსაზღვრულია. ახლა გადავიდეთ ზოგად შემთხვევაზე. ვთქვათ, $\xi(\omega)$–შემთხვევითი სიდიდეა, ხოლო

$$\xi^+(\omega)=\xi(\omega)I_{\{\omega:\xi(\omega)\ge 0\}}$$

და

$$\xi^-(\omega)=|\xi(\omega)|I_{\{\omega:\xi(\omega)<0\}}$$

მისი დადებითი და უარყოფითი ნაწილი.

ცხადია,

$$\xi(\omega)=\xi^+(\omega)-\xi^-(\omega)$$

და, გარდა ამისა, ეს წარმოდგენა ერთადერთია.

განსაზღვრა 1.3. $\xi=\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება

$$M\xi = M\xi^+ - M\xi^- \tag{1.7}$$

რიცხვს, თუკი ერთი მაინც $M\xi^+$ ან $M\xi^-$ სასრულია. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $M\xi$ მათემატიკური ლოდინი არსებობს, ანუ განსაზღვრულია. თუკი $M\xi^+= M\xi^-=\infty$, მაშინ ამბობენ, რომ $M\xi$ არ არსებობს.

განსაზღვრა 1.4. ვიტყვით, რომ $\xi=\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი სასრულია, თუ $M\xi^+<\infty$ და

$M\xi^{-}<\infty$, ცხადია, რომ $M\xi$ სასრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სასრულია $M|\xi|$, რაც გამომდინარეობს $|\xi| = \xi^{+} + \xi^{-}$ წარმოდგენიდან და ქვემოთ მოყვანილი V თვისებიდან.

მათემატიკური ლოდინის 1.3 განსაზღვრა კორექტულია, რადგანაც $\xi(\omega) = \xi^{+}(\omega) - \xi^{-}(\omega)$ დაშლა ერთადერთია და დაშვების ძალით $M\xi^{+}$ და $M\xi^{-}$-დან ერთ-ერთი მაინც სასრულია.

§2. მათემატიკური ლოდინის თვისებები

ზემოთ განსაზღვრულ $M\xi$ მათემატიკურ ლოდინს აქვს შემდეგი თვისებები:

I. ვთქვათ, C მუდმივი სიდიდეა და $M\xi$ არსებობს, მაშინ არსებობს აგრეთვე $M(C\xi)$ და

$$M(C\xi)=CM\xi. \qquad (2.1)$$

დამტკიცება. მარტივი შემთხვევითი სიდიდისათვის (2.1) დამტკიცება ცხადია (იხ. თვისება 2^0).

ვთქვათ, ახლა

$$\xi(\omega)\geq 0,\ \xi_n\uparrow\xi,$$

სადაც ξ_n მარტივი შემთხვევითი სიდიდეებია და $C\geq 0$.

ცხადია, $C\xi_n\uparrow C\xi$ და, მაშასადამე,

$$M(C\xi) = \lim_{n\to\infty} M(C\xi_n) = C\lim_{n\to\infty} M\xi_n = CM\xi.$$

ზოგად შემთხვევაში უნდა გავიხილოთ $\xi=\xi^{+}-\xi^{-}$ წარმოდგენა და, ამასთან, უნდა შევნიშნოთ, რომ დადებით C-თვის

$$(C\xi)^{+} = C\xi^{+},\ (C\xi)^{-} = C\xi^{-},$$

ხოლო უარყოფითი C-თვის

$$(C\xi)^{+}=-C\xi^{-},\ (C\xi)^{-}=-C\xi^{+}. \qquad \blacktriangle$$

II. ვთქვათ, $\xi(\omega)\leq\eta(\omega)$, მაშინ $M\xi\leq M\eta$.

იმ აზრით, რომ თუ $-\infty<M\xi$, მაშინ $-\infty<M\eta$ და $M\xi<M\eta$ ან თუ $M\eta<\infty$, მაშინ $M\xi<\infty$ და $M\xi<M\eta$.

დამტკიცება. თუ $0 \le \xi \le \eta$, მაშინ $M\xi$ და $M\eta$ განსაზღვრულია და $M\xi \le M\eta$ უტოლობა გამომდინარეობს ინტეგრალის განმარტებიდან. ვთქვათ, ახლა $M\xi > -\infty$, მაშინ $M\xi^- < \infty$. თუ $\xi < \eta$, მაშინ $\xi^+ \le \eta^+$ და $\xi^- \ge \eta^-$, ამიტომ $M\eta^- \le M\xi^- < \infty$. მაშასადამე, $M\eta$ განსაზღვრულია და

$$M\xi = M\xi^+ - M\xi^- \le M\eta^+ - M\eta^- = M\eta.$$

ანალოგიურად განიხილება ის შემთხვევა, როდესაც $M\eta < 0$. ▲

III. თუ $M\xi$ არსებობს, მაშინ

$$|M\xi| \le M|\xi|.$$

დამტკიცება. ვინაიდან $-|\xi| \le \xi \le |\xi|$, ამიტომ, I და II თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$-M|\xi| \le M\xi \le M|\xi|, \quad \text{ე.ი.} \quad |M\xi| \le M|\xi|. \qquad ▲$$

IV. თუ $M\xi$ არსებობს, მაშინ ყოველი $A \in \mathcal{F}$-სათვის არსებობს $M\xi I_A$; თუ $M\xi$ სასრულია, მაშინ $M\xi I_A$ აგრეთვე სასრულია.

დამტკიცება გამომდინარეობს II თვისებიდან და იმ ფაქტიდან, რომ

$$(\xi I_A)^+ = \xi^+ I_A \le \xi^+, \quad (\xi I_A)^- = \xi^- I_A \le \xi^-. \qquad ▲$$

V. თუ ξ და η არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდეებია ან ისეთია, რომ $M|\xi| < \infty, M|\eta| < \infty$, მაშინ $M(\xi+\eta) = M\xi + M\eta$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\xi \ge 0$, $\eta \ge 0$ და $\{\xi_n\}$ და $\{\eta_n\}$ მარტივ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი მიმდევრობებია, რომ $\xi_n \uparrow \xi$, $\eta_n \uparrow \eta$.

2^0 თვისების ძალით

$$M(\xi_n + \eta_n) = M\xi_n + M\eta_n$$

და ლოდინის განმარტების საფუძველზე დავწერთ:

$$M\xi_n \uparrow M\xi, \; M\eta_n \uparrow M\eta$$

და, მაშასადამე,

$$M(\xi+\eta) = M\xi + M\eta.$$

$M|\xi| < \infty, M|\eta| < \infty$ შემთხვევა დაიყვანება ზემოთ განხილულზე, თუ გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ

$$\xi=\xi^{+} - \xi^{-}\ ,\ \eta=\eta^{+} - \eta^{-}\ ,\ \xi^{+} \le |\xi|,\ \eta^{+} \le |\eta|$$

და $\xi^{-} \le |\xi|,\ \eta^{-} \le |\eta|$. ▲

VI. თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთაც გააჩნიათ მათემატიკური ლოდინი, ე.ი. $M|\xi|<\infty$, $M|\eta|<\infty$, მაშინ

$$M\xi\eta= M\xi M\eta. \tag{2.2}$$

დამტკიცება. თუ ξ და η დამოუკიდებელი მარტივი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$M\xi\eta=M\xi M\eta$$ (იხ. 5^0 თვისება).

დავუშვათ, რომ $\xi\ge 0$, $\eta\ge 0$ და განვიხილოთ მარტივ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{\{\omega: \frac{k-1}{2^n}<\xi(\omega)\le\frac{k}{2^n}\}}(\omega),$$

$$\eta_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{\{\omega: \frac{k-1}{2^n}<\eta(\omega)\le\frac{k}{2^n}\}}(\omega).$$

ξ და η შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობის გამო

$$M\xi_n \eta_n = M\xi_n M\eta_n.$$

ვინაიდან $\xi_n\uparrow\xi, \eta_n\uparrow\eta$, ამიტომ $\xi_n \eta_n \uparrow \xi\eta$ და $M\xi_n \eta_n \uparrow M\xi\eta$.

ამგვარად, (2.2) ტოლობა დამტკიცებულია არაუარყოფითი ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებისათვის. ნებისმიერი ნიშნის ξ-სა და η-თვის გამოვიყენებთ

$$\xi=\xi^{+} - \xi^{-},\ \eta=\eta^{+} - \eta^{-}$$ და

$$\xi\eta=\xi^{+} \eta^{+} - \xi^{-}\eta^{-}-(\xi^{+}\eta^{-} + \xi^{-}\eta^{+})$$

წარმოდგენას.

(ξ^{+}, ξ^{-}) წყვილი დამოუკიდებელია (η^{+}, η^{-}) წყვილისაგან.

ამიტომ

$$
\begin{aligned}
M\xi\eta &= M\xi^+\eta^+ - M\xi^+\eta^- - M\xi^-\eta^+ + M\xi^-\eta^- = \\
&= M\xi^+\, M\eta^+ - M\xi^+\, M\eta^- - M\xi^- M\eta^+ + \\
&+ M\xi^- M\eta^- = (M\xi^+ - M\xi^-)(M\eta^+ - M\eta^-) = M\xi M\eta. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}
$$

შედეგი. თუ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ დამოუკიდებელი და სასრული მათემატიკური ლოდინის მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$M\,\xi_1\cdot\xi_2\cdot \dots \cdot\xi_n = M\,\xi_1\cdot M\,\xi_2\cdot \dots \cdot M\,\xi_n.$$

ვიტყვით, რომ $(\Omega,\mathcal{F},P)$ სივრცეზე განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდის შესახებ გამოთქმული რაიმე წინადადება ჭეშმარიტია „P — თითქმის აუცილებლად“ (თ.ა) ან „1 ალბათობით“, თუ იმ ω წერტილთა E სიმრავლე, სადაც წინადადება მცდარია, ნულოვანი P ზომისაა: $P(E)=0$. ვინაიდან $P(E)=0$ ნიშნავს $P(\overline{E})=1$ ტოლობას, ამიტომ $\overline{E}=\Omega\setminus E$ იმ ω წერტილთა სიმრავლეა, რომელთათვის წინადადება ჭეშმარიტია. ქვემოთ მოყვანილი მათემატიკური ლოდინის ზოგიერთი თვისება სწორედ დაკავშირებულია „P-თითქმის აუცილებლად“ (თ.ა.) ცნებასთან.

VII. თუ $\xi(\omega)=0$ (თ.ა.), მაშინ $M\xi=0$.

დამტკიცება. თუ ξ მარტივი შემთხვევითი სიდიდეა, $\xi=\sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}(\omega)$ და $x_k\neq 0$, მაშინ, პირობის ძალით $P(A_k)=0$. ეს კი ნიშნავს $M\xi=0$. თუკი $\xi\geq 0$ და $0\leq\eta\leq\xi$, სადაც η მარტივი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ $\eta(\omega)=0$ (თ.ა.) და $M\eta=0$. მაშასადამე, მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრის ძალით $M\xi=0$. ზოგადი შემთხვევა დაიყვანება განხილულზე, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\xi=\xi^+-\xi^- \text{ და } \xi^+\leq|\xi|,\ \xi^-\leq|\xi| \text{ და } |\xi|=0 \text{ (თ.ა.)}.$$

VIII. თუ $\xi(\omega)=\eta(\omega)$ (თ.ა.) და $M|\xi|<\infty$, მაშინ $M|\eta|<\infty$ და $M\xi=M\eta$.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$E=\{\omega:\xi(\omega)\neq\eta(\omega)\},$$

მაშინ

$$P(E)=0 \text{ და } \xi=\xi I_E+\xi I_{\overline{E}},\ \eta=\eta I_E+\eta I_{\overline{E}}.$$

V და VII თვისებების ძალით დავწერთ:

$$M\xi= =M\xi I_E+M\xi I_{\overline{E}}=M\xi I_E=M\eta I_{\overline{E}}.$$

მაგრამ

$$M\eta I_{\overline{E}}=0,$$

ამიტომ V თვისების ძალით

$$M\xi=M\eta I_E+M\eta I_{\overline{E}}=M\eta. \qquad \blacktriangle$$

IX. ვთქვათ, $\xi(\omega)\geq 0$ და $M\xi=0$, მაშინ $\xi=0$ თ. ა.

ᲓᲐᲛᲢᲙᲘᲪᲔᲑᲐ. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$A=\{\omega:\xi(\omega)>0\},\ A_n= =\{\omega:\xi(\omega)\geq\frac{1}{n}\},$$

ცხადია, რომ $A_n\uparrow A$ და $0\leq\xi I_{A_n}<\xi I_{A_n}$.

ამიტომ II თვისების ძალით

$$0\leq M\xi I_{A_n}\leq M\xi=0.$$

მაშასადამე,

$$0\leq M\xi I_{A_n}\geq\frac{1}{n}P(A_n).$$

აქედან

$$P(A_n)=0,\ n=1,2,\ldots.$$

მეორე მხრივ,

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(A),$$

ამიტომ $P(A)=0$. $\blacktriangle$

X. ვთქვათ, $M|\xi|<\infty$, $M|\eta|<\infty$ და ნებისმიერი $A\in\mathcal{F}$-თვის $M\xi I_A\leq M\eta I_A$, მაშინ $\xi(\omega)\leq\eta(\omega)$ (თ.ა.).

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$B=\{\omega:\xi(\omega)>\eta(\omega)\},$$

მაშინ

$$M\eta I_B \le M\xi I_B \le M\eta I_B$$

და, მაშასადამე,

$$M\xi I_B = M\eta I_B.$$

V თვისების ძალით

$$M(\xi-\eta)I_B = 0,$$

ხოლო IX თვისების თანახმად

$$(\xi-\eta)I_B = 0, \ \text{(თ.ა.)},$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ $P(B)=0$. ▲

ლებეგის ინტეგრალი. ჩვენ მიერ ზემოთ მოცემული მათემატიკური ლოდინის განმარტება სხვა არა არის რა, თუ არა ლებეგის ინტეგრალი $\xi=\xi(\omega)$ ფუნქციიდან P ალბათური ზომის მიმართ. ლებეგის ინტეგრალს $\xi(\omega)$ ფუნქციიდან აღნიშნავენ ჩვეულებრივ $\int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega)$ ან $\int_\Omega \xi(\omega)dP(\omega)$ სიმბოლოთი, ასე რომ,

$$M\xi = \int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega).$$

ლებეგის ინტეგრალი, გავრცელებული A სიმრავლეზე ($A\in\mathcal{F}$), განისაზღვრება როგორც $\xi(\omega)I_A(\omega)$ ფუნქციიდან ინტეგრალი, ე.ი.

$$\int_A \xi(\omega)P(d\omega) = M\xi I_A = \int_\Omega \xi(\omega)I_A(\omega)P(d\omega).$$

ახლა დავუშვათ, რომ $(\Omega, \mathcal{F})$ ზომიან სივრცეზე განსაზღვრულია ნებისმიერი σ-სასრული μ ზომა, ხოლო $\xi=\xi(\omega)$ $\mathcal{F}$-ზომადია. ამ შემთხვევაში $\int_\Omega \xi(\omega)\mu(d\omega)$ ლებეგის ინტეგრალი განისაზღვრება იმავე წესით: თავდაპირველად განვსაზღვრავთ ინტეგრალს მარტივი ფუნქციისათვის, ხოლო ზოგად შემთხვევაში კი

$$\int_\Omega \xi(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega \xi^+(\omega)\mu(d\omega) - \int_\Omega \xi^-(\omega)\mu(d\omega)$$

ფორმულით, თუკი $\int\limits_{\Omega}\xi^{+}(\omega)\mu(d\omega)$ და $\int\limits_{\Omega}\xi^{-}(\omega)\mu(d\omega)$ ინტეგრალი-დან ერთი მაინც სასრულია.

მათემატიკური ანალიზისათვის მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როდესაც $(\Omega,\ \mathcal{F})=(R^{(n)},\ \mathcal{B}^{(n)})$, ხოლო μ–ლებეგის n-განზომილებიანი ზომაა. ამ შემთხვევაში $\int\limits_{R^{(n)}}\xi(x)\mu(dx)$, $x=(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n)$ ინტეგრალს აღნიშნავენ

$$\int\limits_{R^{(n)}}\xi(x)dx \quad \text{ან} \quad (L)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi(x_1,x_2,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n \quad \text{სიმბოლოთი.}$$

ამ უკანასკნელ აღნიშვნას ხმარობენ იმისათვის, რათა ლებეგის ინტეგრალი განასხვაონ რიმანის ინტეგრალისაგან. თუკი μ ლებეგ-სტილტიესის ზომაა, რომელიც წარმოქმნილია $F(x)$, $x=(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)$ ფუნქციისაგან, მაშინ $\int\limits_{R^{(n)}}\xi(x)\mu(dx)$ ინტეგრალს უწოდებენ ლებეგ-სტილტიესის ინტეგრალს და აღნიშნავენ $(L\text{-}S)\int\limits_{R^{(n)}}\xi(x)dF(x)$ სიმბოლოთი, რათა იგი განასხვაონ რიმან–სტილტიესის

$$(R\text{-}S)\int\limits_{R^{(n)}}\xi(x)dF(x) \quad \text{ინტეგრალისაგან.}$$

ვთქვათ,

$$A=[a_1,\ b_1)\mathrm{x}\dots\mathrm{x}[a_n,\ b_n),$$

მაშინ

$$\int\limits_{A}\xi(x)\mu(dx)=\int\limits_{R^{(n)}}\xi(x)I_A(x)\mu(dx) \quad \text{და} \quad \int\limits_{R^{(n)}}\xi(x)I_A(x)\mu(dx)\text{–ის}$$

ნაცვლად დავწერთ:

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_n}^{b_n}\xi(x_1,x_2,\dots,x_n)\mu(dx_1\dots dx_n).$$

თუ $F(x)=x_1x_2\ \dots\ x_n$, მაშინ μ ზომა ჩვეულებრივ ლებეგის n–განზომილებიანი ზომაა $R^{(n)}$–ში და $\mu(dx_1,\ \dots,\ dx_n)$–ის ნაცვლად დავწერთ უბრალოდ $dx_1\ \dots\ dx_n$.

§3. კრებადობის თეორემები

დავამტკიცოთ მათემატიკური ლოდინის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის ორი თეორემა, რომლებიც მათემატიკურ ანალიზში ცნობილია მონოტონური და მაჟორირებული კრებადობის სახელწოდებით.

თეორემა 1. (თეორემა მონოტონური კრებადობის შესახებ).

თუ $0 \le \xi_n \uparrow \xi$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n = M\xi$$

ან, რაც იგივეა

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} \xi_n(\omega)P(d\omega) = \int_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega).$$

დამტკიცება. პირობის თანახმად, $0 \le \xi_n \le \xi$, ამიტომ $0 \le M\xi_n \le M\xi$ და

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n \le M\xi. \tag{3.1}$$

დავაფიქსიროთ n, $n=1, 2, \dots$, და $\xi_n(\omega)$-თვის ავაგოთ ისეთი არაუარყოფითი მარტივ შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_n^{(k)}(\omega)$ მიმდევრობა, რომ $\xi_n^{(k)}(\omega) \uparrow \xi_n(\omega)$, როცა $k\to\infty$.

აღვნიშნოთ $\eta_k = \max\limits_{1\le n\le k} \xi_n^{(k)}(\omega)$.

ცხადია, რომ η_k მარტივი შემთხვევითი სიდიდეა და

$$0 \le \eta_k = \max_{1\le n\le k} \xi_n^{(k)}(\omega) \le \max_{1\le n\le k+1} \xi_n^{(k+1)}(\omega) = \eta_{k+1}.$$

ე.ი. η_k მიმდევრობა მონოტონურად ზრდადია. ვთქვათ, $\lim\limits_{k\to\infty}\eta_k = \eta$. ყოველი k-თვის $\eta_k \le \xi_k$, ამიტომ

$$\lim_{k\to\infty} M\eta_k = M\eta \le \lim_{k\to\infty} M\xi_k. \tag{3.2}$$

შემდეგ, როცა $n \le k$, მაშინ $\xi_n^{(k)} \le \eta_k \le \eta$;

ახლა k მივასწრაფოთ ∞–კენ, გვექნება $\xi_n \le \eta$ ყოველი n–თვის, საიდანაც დავწერთ $\xi \le \eta$ და $M\xi \le M\eta$, რომელიც (3.1) და (3.2)–თან ერთად გვაძლევს თეორემის დამტკიცებას. ▲

შედეგი 1. თუ $\xi_n \ge 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ მაშინ

$$M\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} M\xi_k. \tag{3.3}$$

დამტკიცება. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k$ მწკრივის კერძო ჯამთა $\eta_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს პირველი თეორემის პირობებს, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} M\eta_n = M \lim_{n\to\infty} \eta_n,$$

ეს კი (3.3) ტოლობის მეორენაირი ჩაწერაა. ▲

კერძოდ, თუ

$$\xi_n(\omega)=\xi(\omega)I_{A_n}(\omega), \ \xi(\omega)\ge 0,$$

სადაც $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \ne j$, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega$,

მაშინ

$$\int_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \xi(\omega)P(d\omega).$$

უფრო მეტიც, ვთქვათ,

$$A \in \mathcal{F} \text{ და } A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \ A_i \cap A_j = \varnothing, \ i \ne j,$$

მაშინ

$$\int_{A} \xi(\omega)dP(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \xi(\omega)P(d\omega).$$

აღვნიშნოთ

$$Q(A) = \int_{A} \xi(\omega)P(d\omega), \tag{3.4}$$

მაშინ

$$Q(A)=\sum_{j=1}^{\infty} Q(A_j).$$

ამგვარად, სიმრავლის ფუნქცია $Q(\cdot)$ თვლადად ადიტიურია. ადვილი შესამჩნევია, რომ ქს თვისება სამართლიანია, აგრეთვე, ნებისმიერი ნიშნის $\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში, თუკი $M\xi$ სასრულია.

შედეგი 2. თუ $M\eta$ სასრულია და A_n, $n=1, 2, \ldots$, ხდომილობათა ისეთი მიმდევრობაა, რომ $A_n \downarrow \varnothing$ მაშინ,

$$\lim_{n\to\infty} M\eta I_{A_n}=0. \tag{3.5}$$

დამტკიცება. თუ $|M\eta|<\infty$, მაშინ $M|\eta|<\infty$. $|\eta|$ წარმოვადგინოთ $\eta_n'+\eta_n$ ჯამის სახით,

სადაც

$$\eta_n=|\eta| I_{A_n},\ \ \eta_n'=|\eta| I_{\bar{A}_n},$$

მაშინ

$$M|\eta|=M|\eta_n|+M|\eta_n'| \ \text{ და } \ 0\le \eta_n' \uparrow |\eta|.$$

პირველი თეორემის ძალით

$$\lim_{n\to\infty} M\eta_n'=M|\eta|.$$

ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty} M\eta_n=0$.

აქედან და

$$|M\eta I_{A_n}|\le M|\eta| I_{A_n}$$

უტოლობიდან გამომდინარეობს (3.5). ▲

თეორემა 2. (ლებეგის თეორემა მაჟორირებული მიმდევრობის კრებადობის შესახებ).

თუ

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)=\xi(\omega) \ \ (\text{თ.ა.})$$

და

$$|\xi_n(\omega)| \le \eta(\omega),$$

სადაც $M\eta<\infty$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n = M\xi. \qquad (3.6)$$

დამტკიცება. ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის

$$A_n = \{\omega : \sup_{m>n} |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\}$$

ხდომილობათა მიმდევრობა ისეთია, რომ $\overline{A}_n \downarrow \emptyset$.

შემდეგ,

$$\xi_n = \xi_n I_{A_n} + \xi_n I_{\overline{A}_n}$$

ჯამის შესაკრებები შეფასდება ასე:

$$\xi I_{A_n} - \varepsilon \le I_{A_n}\xi_n \le \xi I_{A_n} + \varepsilon,$$

$$-\eta I_{\overline{A}_n} \le \xi_n I_{\overline{A}_n} \le \eta I_{\overline{A}_n}.$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\xi - \varepsilon - \xi I_{\overline{A}_n} - \eta I_{\overline{A}_n} \le \xi_n \le \xi + \varepsilon + \eta I_{\overline{A}_n} - \xi I_{\overline{A}_n},$$

$$M\xi - \varepsilon - 2M\eta I_{\overline{A}_n} \le M\xi_n \le M\xi + \varepsilon + 2M\eta I_{\overline{A}_n}. \qquad (3.7)$$

(3.7)-ში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $n\to\infty$ და გამოვიყენოთ პირველი თეორემის მე-2 შედეგი, მივიღებთ:

$$M\xi - \varepsilon \le \varliminf_{n\to\infty} M\xi_n \le \varlimsup_{n\to\infty} M\xi_n \le M\xi + \varepsilon.$$

ვინაიდან $\varepsilon>0$ ნებისმიერი რიცხვია, აქედან მივიღებთ (3.6)-ის დამტკიცებას. ▲

შედეგი. თუ $|\xi_n| \le \eta$, $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ და $M\eta^p<\infty$, $p>0$,

მაშინ $M|\xi|^p < \infty$ და $M|\xi_n - \xi| \xrightarrow{P} 0$, როცა $n\to\infty$.

დამტკიცებისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ

$$|\xi| \le \eta, \qquad |\xi_n - \xi|^p \le (|\xi_n| + |\xi|)^p \le (2\eta)^p. \qquad ▲$$

§4. ლებეგის ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობა

ვთქვათ, $\xi(\omega)\geq 0$, $\omega\in\Omega$. როგორც ვიცით, $Q(A)=\int\limits_A \xi(\omega)P(d\omega)$, $A\in\mathcal{F}$ სიმრავლის ფუნქცია თვლადად ადიტიური ზომაა. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $Q(A)$ ზომას აქვს P–ზომის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტობის მეტად მნიშვნელოვანი თ ვ ი ს ე ბ ა: თუ $P(A)=0$, მაშინ $Q(A)=0$, $A\in\mathcal{F}$ (ეს თვისება მოკლედ ჩაიწერება ასე: $Q<<P$). მართლაც, ვთქვათ,

$$\xi=\sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}(\omega)$$

მარტივი არაუარყოფითი ფუნქციაა და $P(A)=0$, მაშინ

$$Q(A)=M(\xi I_A)=\sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k\cap A)=0.$$

ვთქვათ, ახლა $\{\xi_n\}$ არაუარყოფითი და ზრდადი მარტივ ფუნქციათა ისეთი მიმდევრობაა, რომ $\xi_n\uparrow\xi\geq 0$, მაშინ მონოტონური კრებადობის თეორემის ძალით

$$Q(A)=M(\xi I_A)=\lim_{n\to\infty} M(\xi_n I_A)=0,$$

ვინაიდან $M(\xi_n I_A)=0$ ყოველი $n\geq 1$-თვის. ▲

ამგვარად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ სასრული $Q(\cdot)$ ზომები, რომლებიც მოიცემა ლებეგის ინტეგრალით, აბსოლუტურად უწყვეტი ყოფილა P ზომის მიმართ. თურმე ადგილი აქვს შესანიშნავ შებრუნებულ დებულებას; ნებისმიერი ν (სასრული) ზომა, რომელიც აბსოლუტურად უწყვეტია რაიმე μ ზომის მიმართ, წარმოიდგინება ლებეგის ინტეგრალით. უფრო ზუსტად, ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

რადონ-ნიკოდიმის თეორემა. ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F})$ ზომად სივრცეზე მოცემულია ორი ν და μ სასრული ზომა და, ამასთან, $\nu<<\mu$. მაშინ არსებობს არაუარყოფითი სასრული ზომადი ინტეგრებადი $f(\omega)$ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\nu(E)=\int_E f(\omega)\mu(d\omega)$$

ყოველი $E\in\mathcal{F}$ სიმრავლისათვის.

f(ω) ფუნქცია ერთადერთია იმ აზრით, რომ თუ

$$\nu(E)=\int_E g(\omega)\mu(d\omega)$$

ნებისმიერი $E\in\mathcal{F}$-თვის, მაშინ $f(\omega)=g(\omega)$ თითქმის ყველგან μ-ზომით, ე.ი.

$$\mu\{\omega:f(\omega)\neq g(\omega)\}=0.$$

რადონ-ნიკოდიმის თეორემა სამართლიანია აგრეთვე იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ν და μ σ-სასრული ზომებია და $\nu<<\mu$. ამ შემთხვევაში არ უნდა მოველოდეთ, რომ $f(\omega)$ ფუნქცია აუცილებლად იქნება ინტეგრებადი.

$f(\omega)$ ფუნქციას უწოდებენ ν ზომის წარმოებულს μ ზომის მიმართ და აღნიშნავენ $\frac{d\nu}{d\mu}(\omega)$ სიმბოლოთი. $\frac{d\nu}{d\mu}(\omega)$ განისაზღვრება ცალსახად მხოლოდ ნულოვანი μ ზომის სიმრავლემდე სიზუსტით.

$P_\xi(\cdot)$-ის აბსოლუტურად უწყვეტი განაწილების განსაზღვრებიდან და ზემოთ მოყვანილი რადონ-ნიკოდიმის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $P_\xi(\cdot)$ როგორც ალბათური ზომა $(R^{(n)},\ \mathcal{B}^{(n)})$-ში, აბსოლუტურად უწყვეტი ყოფილა ლებეგის $\mu^{(n)}$ ზომის მიმართ, ხოლო $f_\xi(x)=\frac{dP_\xi}{d\mu^{(n)}}(x)$ განაწილების სიმკვრივე – განსაზღვრული ნულოვანი ლებეგის ზომის სიმრავლემდე.

$f_\xi(x),\ x\in R^{(n)}$, განაწილების სიმკვრივეს აქვს ადვილად შესამჩნევი თვისებები:

1. $f_\xi(x),\ x\in R^{(n)}$ განაწილების სიმკვრივე არაუარყოფითია, ე.ი. $f_\xi(x)\geq 0,\ x\in R^{(n)}$.

2. $$\int_{R^{(n)}} f_\xi(x)\mu^{(n)}(dx)=P_\xi(R^{(n)})=P\{\omega:\xi(\omega)\in R^{(n)}\}=1.$$

§5. ლებეგის ინტეგრალში ცვლადთა გარდაქმნის შესახებ

თეორემა 5.1. ვთქვათ, $P_\xi(\cdot)$, $\xi:\Omega\to R^{(n)}$ შემთხვევითი ვექტორისაგან ინდუცირებული ზომაა, ხოლო $h(x)$, $x\in R^{(n)}$ $(h:R^{(n)}\to R^{(1)})$ ბორელის აზრით, რაიმე ზომადი ფუნქციაა, მაშინ

$$\int_{\xi^{-1}(S)} h(\xi(\omega))P(d\omega) = \int_S h(x)P_\xi(dx), \quad S\in \mathcal{B}^{(n)} \tag{5.1}$$

ამასთან, მარცხენა და მარჯვენა მხარეები ერთდროულად არსებობს ან არ არსებობს.

კერძოდ, 1. თუ $S=R^{(n)}$, მაშინ

$$Mh(\xi) = \int_\Omega h(\xi(\omega))P(d\omega) = \int_{R^{(n)}} h(x)P_\xi(dx). \tag{5.2}$$

2. თუ $n=1$, $S=R^{(1)}$, $h(x)\equiv x$, მაშინ

$$M\xi = \int_{R^{(1)}} xP_\xi(dx). \tag{5.3}$$

დამტკიცება. თუ $S\in \mathcal{B}^{(n)}$ და $h(x)=I_S(x)$, მაშინ (5.1)-ის მარჯვენა მხარე $P_\xi(S)$-ის ტოლია, ხოლო მარცხენა $P\{\omega:\xi(\omega)\in S\}$-ის, მაგრამ $P_\xi(\cdot)$-ის განსაზღვრის თანახმად

$$P_\xi(S) = P\{\omega:\xi(\omega)\in S\}.$$

ინდიკატორის შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია, რაც იმას ნიშნავს, რომ თეორემა სამართლიანია მარტივი ფუნქციებისათვის. დაბოლოს, ზღვარზე გადასვლა მოგვცემს თეორემის სამართლიანობას. ▲

როგორც ვიცით, $P_\xi(\cdot)$ განაწილება ცალსახად აიგება $F_\xi(x)$ განაწილების ფუნქციის საშუალებით. ამიტომ, $\int_{R^{(n)}} h(x)P_\xi(dx)$ ლებეგის ინტეგრალს ხშირად $\int_{R^{(n)}} h(x)dF_\xi(x)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ და უწოდებენ ლებეგ-სტილტიესის ინტეგრალს $F_\xi(x)$ განაწილების ფუნქციის მიმართ. მაშასადამე, თუ $\xi:\Omega\to R^{(n)}$, მაშინ

$$Mh(\xi) = \int_{R^{(n)}} h(x)dF_\xi(x), \tag{5.2^1}$$

ხოლო თუ $\xi:\Omega\to R^{(1)}$, მაშინ

$$M\xi=\int_{R^{(1)}} x dF_{\xi}(x). \qquad (5.3^{1})$$

ვთქვათ, $F_{\xi}(x)$, $x\in R^{(1)}$, ξ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა, ხოლო x_k, $k=1, 2, \ldots$, ξ-ს მნიშვნელობებია, ამასთან,

$$P_k=P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}=F_{\xi}(x_k+)-F_{\xi}(x_k),$$

მაშინ

$$Mh(\xi)=\int_{R^{(1)}} h(x)dF_{\xi}(x)=\sum_{i} h(x_i)P_i. \qquad (5.4)$$

კერძოდ, თუ $h(x)=x$, მაშინ

$$M\xi=\sum_{i} x_i p_i.$$

ახლა, ვთქვათ, $F_{\xi}(x)$ განაწილების ფუნქციას გააჩნია სიმკვრივე $f(x)$ და ე.ი.

$$F_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{x} f_{\xi}(t)dt, \text{ ანუ } f_{\xi}(x)=F'(x)$$

თითქმის ყველა x-თვის ლებეგის ზომის მიმართ, მაშინ

$$Mh(\xi)=\int_{R^{(1)}} h(x)f_{\xi}(x)dx, \qquad (5.5)$$

ე.ი. ლებეგ-სტილტიესის ინტეგრალი $h(x)$ ფუნქციიდან $F_{\xi}(x)$ ფუნქციის მიმართ ტოლია $h(x)f_{\xi}(x)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალის.

კერძოდ, თუ $h(x)=x$, მაშინ

$$M\xi=\int_{R^{(1)}} x f_{\xi}(x)dx, \qquad (5.5^{1})$$

დავამტკიცოთ (5.5). ცხადია, არაუარყოფითი მარტივი $h(x)$ ფუნქციისათვის ის სამართლიანია. ახლა, ვთქვათ, $h(x)$ არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა და $h_n(x)$ არაუარყოფით მარტივ ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობაა ისეთი, რომ

$$h_n(x)\to h(x),$$

მაშინ

$$h_n(x)f_\xi(x)\uparrow h(x)f_\xi(x).$$

ამიტომ

$$\int_{R^{(1)}} h_n(x)dF_\xi(x) = \int_{R^{(1)}} h_n(x)f_\xi(x)dx$$

ტოლობაში შეიძლება გადავიდეთ ზღვარზე ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მონოტონური კრებადობის თეორემის გამოყენებით.

ზოგადი შემთხვევა მიიღება $h(x)=h^+(x)-h^-(x)$ წარმოდგენიდან. ▲

შენიშვნა. (5.4) და (5.5) ფორმულები სამართლიანია მრავალი განზომილების შემთხვევაშიც. ასე, მაგალითად, თუ

$$\xi:\Omega\to R^{(n)}$$

და

$$f_\xi(x)=\frac{\partial^n F_\xi(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n}$$

თითქმის ყველა $x=(x_1, ..., x_n)$-თვის ლებეგის ზომის მიმართ, მაშინ

$$Mh(\xi)=\int_{R^{(n)}} h(x)f_\xi(x)dx, \quad (dx=dx_1 ... dx_n). \quad (5.6)$$

§6. რიმან-სტილტიესისა და ლებეგ-სტილტიესის ინტეგრალების შედარება

როგორც აღვნიშნეთ, $\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდე ინდუცირებს $P_\xi(\cdot)$ ალბათობის ზომას, რომელიც მოიცემა

$$P_\xi([x,y))=F_\xi(y) - F_\xi(x)$$

ტოლობით და (5.1) ტოლობის საფუძველზე დავწერთ:

$$\int_{\xi^{-1}([a,b))} h(\xi(\omega))P(d\omega)=\int_{[a,b)} h(x)P_\xi(dx)=\int_{[a,b)} h(x)F_\xi(dx). \quad (6.1)$$

(6.1)-ის მარჯვენა მხარის ინტეგრალი არის ლებეგ-სტილტიე-სის ინტეგრალი $h(x)$- ფუნქციიდან $F_\xi(x)$ ფუნქციის მიმართ.

ახლა შემოვიღოთ რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის განსაზღვრა, რომელიც წარმოადგენს განზოგადებულ ჩვეულებრივ რიმანის

ინტეგრალური ჯამების ზღვარს. განვიხილოთ $[a,b)$ ინტერვალის რაიმე დანაწილება

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

ყოველ $[x_{k-1}, x_k)$ ინტერვალზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი:

$$S=\sum_{k=1}^{n} h(\xi_k)[F_\xi(x_k)-F_\xi(x_{k-1})]. \qquad (6.2)$$

ცხადია, რომ ეს ჯამი დამოკიდებულია როგორც ξ_k წერტილების შერჩევაზე, ისე $[a,b)$ ინტერვალის დანაწილებაზე.

რიმან–სტილტიესის ინტეგრალი $(R-S)\int_a^b h(x)dF_\xi(x)$ არის S ჯამის ზღვარი ξ_k წერტილების ნებისმიერი არჩევისა და დაყოფის ინტერვალთა მაქსიმალური სიგრძის ნულისაკენ კრებადობისას, როცა დაყოფის ინტერვალთა რაოდენობა უსასრულოდ იზრდება (ამ განსაზღვრაში არ არის აუცილებელი $F_\xi(x)$ იყოს მაინცდამაინც განაწილების ფუნქცია; ის შეიძლება იყოს ნებისმიერი მონოტონური $G(x)$ ფუნქცია. ჩვეულებრივი რიმანის ინტეგრალი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც კერძო შემთხვევა რიმან–სტილტიესის ინტეგრალისა, თუკი $G(x)=x$).

თეორემა. თუ $h(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ ლებეგ–სტილტიესის ინტეგრალი რიმან–სტილტიესის ინტეგრალს ემთხვევა, ე.ი.

$$(L-S)\int_{[a,b)} h(x)dF_\xi(x)=(R-S)\int_a^b h(x)dF_\xi(x).$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{h_n(x)\}$ ნებისმიერ მარტივ ფუნქციათა მონოტონური მიმდევრობაა კრებადი $h(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ, როგორც ვიცით,

$$(L-S)\int_{[a,b]} h(x)dF_\xi(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} h_n(x)dF_\xi(x).$$

ვინაიდან ლებეგ–სტილტიესის ინტეგრალი უწყვეტი ფუნქციისათვის ყოველთვის არსებობს (აჩვენეთ!), ამიტომ მის განსაზღვ–

რაში ჩვენ შეგვიძლია h(x)-ის ნაცვლად ავიღოთ ორი $h_n^*(x)$ და $h_n^{**}(x)$ მარტივ ფუნქციათა მიმდევრობა, განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$h_n^*(x) = h_k^* = \sup_{t\in\Delta_k} h(t), \qquad x\in \Delta_k = [x_{k-1}, x_k),$$

$$h_n^{**}(x) = h_k^{**} = \inf_{t\in\Delta_k} h(t), \qquad x\in \Delta_k = [x_{k-1}, x_k),$$

ცხადია, რომ $h_n^*(x)$ და $h_n^{**}(x)$ მონოტონურად კრებადია ერთი და იმავე h(x) ფუნქციისაკენ და, მაშასადამე,

$$(L-S)\int_{[a,b]} h(x)dF_\xi(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} h_n^*(x)F_\xi(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} h_n^{**}(x)F_\xi(dx).$$

მაგრამ ყოველი $\xi_k\in\Delta_k$ წერტილისათვის

$$h_k^{**} \le h(\xi_k) \le h_k^*.$$

მაშასადამე,

$$\int_{[a,b]} h_n^{**}(x)dF_\xi(x) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} h(\xi_k)[F_\xi(x_k) - F_\xi(x_{k-1})] \le \int_{[a,b]} h_n^*(x)dF_\xi(x).$$

ეს უტოლობები ამტკიცებს ორივე ინტეგრალის თანხვედრას.

რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი უწყვეტი g(x) ფუნქციიდან შესაძლებელია არ ემთხვეოდეს ლებეგ-სტილტიესის ინტეგრალს უსასრულო სიგრძის ინტერვალზე. მართლაც, რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი $R^{(1)}=(-\infty, \infty)$-ში განისაზღვრება

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b g(x)dF(x) \text{ ტოლობით,}$$

თუკი ეს ზღვარი არსებობს და სასრულია. მაგრამ, შეიძლება მოხდეს, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dF(x) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b |g(x)| dx = \infty,$$

ე.ი. $|g(x)|$ და, მაშასადამე, $g(x)$-ც არ არის ინტეგრებადი ლებეგ-სტილტიესის აზრით. ასეთი მაგალითები ცნობილია. მაგალითად, $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ინტეგრალი არსებობს რიმანის აზრით, $\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ ინტეგრალი კი – არა. მაგრამ თუ $g(x)$ ინტეგრებადია ლებეგ-სტილტიესის აზრით, მაშინ, ცხადია, ორივე ინტეგრალი ერთმანეთს ემთხვევა. ამგვარად, უწყვეტ ფუნქციათა კლასი, რომელთათვის არსებობს და სასრულია რიმან-სტილტიესის არასაკუთრივი ინტეგრალი $F(x)$ ფუნქციის მიმართ, მოიცავს ლებეგ-სტილტიესის აზრით, $F(x)$ ფუნქციის მიმართ ინტეგრებად უწყვეტ ფუნქციათა კლასს.

§7. მომენტები

ξ შემთხვევითი სიდიდის n-ური რიგის **მომენტი** ეწოდება $M\xi^n$-ს. (5.2^1) ფორმულის თანახმად

$$M\xi^n = \int_{R^{(1)}} x^n dF_\xi(x).$$

თუ $F_\xi(x)$ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა, მაშინ (5.4) ფორმულის ძალით

$$M\xi^n = \sum_i x_i^n p_i,$$

სადაც

$$p_i = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\},$$

ხოლო თუ $F_\xi(x)$-ს გააჩნია სიმკვრივე $f_\xi(x)$, მაშინ

$$M\xi^n = \int_{R^{(1)}} x^n f_\xi(x) dx.$$

ξ შემთხვევითი სიდიდის n-ური რიგის **აბსოლუტური მომენტი** ეწოდება $M|\xi|^n$-ს. აღვნიშნოთ $M\xi = a$.

n–ური რიგის ცენტრალური მომენტი ეწოდება $M(\xi-a)^n$-ს, ხოლო n–ური რიგის აბსოლუტური ცენტრალური მომენტი — $M|\xi-a|^n$-ს.

მეორე რიგის ცენტრალურ მომენტს ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია და აღინიშნება Dξ სიმბოლოთი, ე.ი.

$$D\xi=M(\xi-a)^2.$$

დისპერსიიდან კვადრატულ ფესვს $\sqrt{D\xi}$ კი ეწოდება საშუალო კვადრატული გადახრა.

შენიშვნა. დისპერსია არის განაწილების „გაფანტულობის“ ზომა. ის წრფეზე ერთეულოვანი მასის განაწილების ინერციის მომენტის ტოლია. დისპერსია შეიძლებოდა განგვესაზღვრა ასედაც:

$$D\xi=\min_b M(\xi-b)^2.$$

მართლაც, ვინაიდან b^2-$2bM\xi$ აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას, როცა $b=M\xi$, ამიტომ

$$D\xi=M\xi^2+\min_b(b^2-2M\xi b)=M\xi^2-(M\xi)^2.$$

ამ ფაქტიდან გამომდინარეობს, რომ $b=M\xi$ რიცხვი არის ξ შემთხვევითი სიდიდის საუკეთესო შეფასება (მიახლოება) საშუალო კვადრატული აზრით.

დისპერსიას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $D\xi\geq0$ და $D\xi=0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს ისეთი მუდმივი c სიდიდე, რომ

$$P\{\omega:\omega(\xi)=c\}=1.$$

დამტკიცება გამომდინარეობს მათემატიკური ლოდინის IX თვისებიდან, რადგანაც

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2 \text{ და } (\xi-M\xi)^2\geq0.$$

2. ნებისმიერი c მუდმივისათვის

$$D(c\xi)=c^2D\xi, \quad D(\xi+c)=D\xi.$$

3. თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i. \qquad (7.1)$$

დამტკიცება. დავამტკიცოთ (7.1) ორი დამოუკიდებელი ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებისათვის. ზოგადი შემთხვევა მიიღება ინდუქციის წესით.

გვაქვს

$$D(\xi+\eta)=M((\xi+\eta)-M(\xi+\eta))^2=M((\xi-M\xi)+(\eta-M\eta))^2=$$
$$=M(\xi-M\xi)^2+M(\eta-M\eta)^2+2M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta).$$

რადგანაც ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, ამიტომ ξ-$M\xi$ და η-$M\eta$ აგრეთვე დამოუკიდებელია.

მაშასადამე,

$$M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)=M(\xi-M\xi)M(\eta-M\eta)=0.$$

გამოვთვალოთ მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია ზოგიერთი შემთხვევითი სიდიდისათვის.

მაგალითი 1. ვთქვათ, ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად $N(a, \sigma^2)$.

გვაქვს

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} t f_\xi(t)dt =$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt + a = a.$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma^2.$$

ამრიგად, ნორმალური განაწილების a და σ^2 პარამეტრები, შესაბამისად, მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის ტოლია.

მაგალითი 2. ვთქვათ, $\xi=S_n$ ბინომიალური შემთხვევითი სიდიდეა, ე.ი. წარმატებათა რაოდენობა n დამოუკიდებელ ორშედე-

გიან ცდაში. როგორც ვიცით, S_n წარმოადგენს n ერთობლივად დამოუკიდებელ და ერთი და იგივე განაწილების მქონე შემთხვევით სიდიდეთა ჯამს:

$$S_n = =\xi_1 + \xi_2 + ... +\xi_n,$$

სადაც

$$P\{\omega:\xi_j = 1\} = p, P\{\omega:\xi_j = 0\} = q = 1-p, j=\overline{1,n}.$$

ცხადია, რომ

$$M\xi_j=p,$$

ხოლო

$$D\xi_j = M\xi_j^2 - (M\xi_j)^2 = p - p^2 = pq.$$

ამიტომ

$$MS_n = np, DS_n = npq.$$

მაგალითი 3. ვთქვათ, ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონით, ე.ი.

$$P\{\omega : \xi(\omega) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0,1,2,... \ .$$

გვაქვს

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda,$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

მაგალითი 4. ვთქვათ, ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია თანაბრად $[a,b]$ ინტერვალზე.

გვაქვს

$$M\xi=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{a+b}{2}.$$

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{12}.$$

მაგალითი 5. ვთქვათ, ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\tag{7.2}$$

სადაც $\alpha>0$ და $\lambda>0$ პარამეტრებია, ხოლო

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx\ \text{ – გამა-ფუნქციაა.}$$

განაწილებას, რომლის სიმკვრივეა (7.2), ეწოდება გამა-განაწილება.

გვაქვს

$$M\xi=\int_0^\infty\frac{x^\alpha\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty u^\alpha e^{-u}du=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\lambda},$$

$$M\xi^2=\int_0^\infty\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda^2\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha+1}e^{-x}dx=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2},\qquad D\xi=\frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

§8. კოვარიაცია. კორელაციის კოეფიციენტი. უტოლობები

წინა პარაგრაფის (7.1) ფორმულის დამტკიცებისას დაგვჭირდა გამოგვეთვალა $M[(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)]$. ამ სიდიდეს ეწოდება ξ_1 და ξ_2 შემთხვევითი სიდიდეების კ ო ვ ა რ ი ა ც ი ა და $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ამრიგად,

$$\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = M[(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)].$$

აქედან მათემატიკური ლოდინის თვისებათა გამოყენებით ადვილი მისაღებია შემდეგი ფორმულა:

$$\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = M\xi_1 \xi_2 - M\xi_1 M\xi_2.$$

ცხადია, რომ

$$\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_1) = D\xi_1$$

და ნებისმიერი $\xi_1, \dots, \xi_n$ შემთხვევითი სიდიდეებისათვის

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

(7.1) ფორმულის დამტკიცებისას ვაჩვენეთ, რომ თუ ξ_1 და ξ_2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ ადგილი აქვს

$$\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0 \qquad (8.1)$$

ტოლობას. შებრუნებული დებულება სამართლიანი არაა. შესაძლოა, შემთხვევით სიდიდეებს შორის ფუნქციონალური კავშირიც კი არსებობდეს, მაგრამ კოვარიაცია მაინც ნულის ტოლი იყოს. ვთქვათ, მაგალითად, ξ_1 და ξ_2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და, ამასთან,

$$M\xi_1 = M\xi_2 = 0.$$

აღვნიშნოთ $\xi_3 = \xi_1\xi_2$. ცხადია, ξ_1 და ξ_3 დამოკიდებული შემთხვევითი სიდიდეებია (გარდა იმ ტრივიალური შემთხვევისა, როდესაც $\xi_1 = \mathrm{const}$), მაგრამ

$$\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_3) = M\xi_1 \xi_3 - M\xi_1 M\xi_3 = M\xi_1^2 M\xi_2 = 0.$$

ამგვარად, თუ $\mathbf{cov}(\xi_1, \xi_2) \neq 0$, მაშინ ξ_1 და ξ_2 შემთხვევითი სიდიდეები დამოკიდებულია. ξ_1 და ξ_2 შემთხვევით სიდიდეთა დამოკიდებულების ხარისხის რიცხობრივ მახასიათებლად გამოიყენება კორელაციის $\rho = \rho(\xi_1, \xi_2)$ კოეფიციენტი, რომელიც განისაზღვრება

$$\rho(\xi_1,\xi_2) = \frac{\mathbf{cov}(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_1\mathbf{D}\xi_2}} \qquad (8.2)$$

ტოლობით.

კორელაციის კოეფიციენტის თვისებები

1^0. $|\rho| \leq 1$.

2^0. თუ ξ_1 და ξ_2 შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$.

3^0. $|\rho| = 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ξ_1-სა და ξ_2-ს შორის ერთის ტოლი ალბათობით არსებობს წრფივი კავშირი, ე.ი. მოიძებნება ისეთი $a \neq 0$ და $\mathbf{b}$ მუდმივები, რომ $\xi_1 = a\xi_2 + \mathbf{b}$ (თ.ა.).

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\eta_1 = \frac{\xi_1 - \mathbf{M}\xi_1}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_1}},$$

$$\eta_2 = \frac{\xi_2 - \mathbf{M}\xi_2}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_2}}.$$

ცხადია, რომ

$$\mathbf{M}\eta_1 = \mathbf{M}\eta_2 = 0, \quad \mathbf{D}\eta_1 = \mathbf{D}\eta_2 = 1.$$

ადვილი შესამჩნევია აგრეთვე, რომ

$$\mathbf{M}\eta_1\eta_2 = \frac{\mathbf{cov}(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_1\mathbf{D}\xi_2}} = \rho(\xi_1,\xi_2).$$

1^0 თვისება გამომდინარეობს

$$0\le \mathbf{D}(\eta_1\pm\eta_2) = \mathbf{M}(\eta_1\pm\eta_2)^2 = \mathbf{M}\eta_1^{\ 2} + \mathbf{M}\eta_2^{\ 2}\pm 2\mathbf{M}\eta_1\eta_2 =$$

$$= 2(1\pm\rho(\xi_1, \xi_2))$$

უტოლობიდან, ხოლო 2^0 თვისება კი (8.1) და (8.2)–დან.

დავამტკიცოთ მე–3^0 თვისება. ვთქვათ, ξ_1 და ξ_2 შემთხვევით სიდიდეებს შორის წრფივი კავშირი არსებობს:

$$\xi_1 = a\xi_2 + \mathbf{b} \text{ (თ.ა.) } a \neq 0.$$

აღვნიშნოთ

$$\mathbf{M}\xi_2 = \alpha \text{ და } \sqrt{\mathbf{D}\xi_2} = \beta;$$

მაშინ

$$\rho(\xi_1,\xi_2) = \mathbf{M}\,\frac{\xi_2-\alpha}{\beta}\cdot\frac{a\xi_2+\mathbf{b}-a\alpha-\mathbf{b}}{|a|\mathbf{b}} = \frac{a}{|a|}.$$

ახლა დავუშვათ, რომ $|\rho| = 1$. ვთქვათ, მაგალითად, $\rho=1$. ცხადია, რომ

$$\mathbf{D}(\eta_1 - \eta_2) = 2(1-\rho(\xi_1, \xi_2))=0.$$

აქედან და დისპერსიის 1 თვისებიდან მივიღებთ, რომ $\eta_1 - \eta_2 = = \mathbf{const}$ (თ.ა.). სავსებით ანალოგიურად, ერთის ტოლი ალბათობით წრფივი კავშირი არსებობს მაშინაც, როდესაც

$$\rho = -1:\ \eta_1 - \eta_2 = \mathbf{const}. \text{ (თ.ა.).} \qquad \blacktriangle$$

უტოლობები

ამ პუნქტში ჩვენ მოვიყვანთ მნიშვნელოვან უტოლობებს მათემატიკური ლოდინისათვის, რომლებიც სისტემატურად გამოიყენება როგორც ალბათობის თეორიაში, ისე მათემატიკურ ანალიზში.

1. ჩებიშევის უტოლობა. ყოველი დადებითი $\mathbf{x}$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$\mathbf{P}\{\omega : |\xi(\omega)| \ge \mathbf{x}\} \le \frac{\mathbf{M}|\xi|}{\mathbf{x}}. \tag{8.3}$$

$$\mathbf{P}\{\omega : |\xi(\omega) - \mathbf{M}\xi| \geq x\} \leq \frac{\mathbf{D}\xi}{x^2}. \tag{8.4}$$

დამტკიცება. გვაქვს

$$|\xi| = |\xi|\mathbf{I}_{\{\omega:|\xi| \geq x\}} + |\xi|\mathbf{I}_{\{\omega:|\xi| < x\}} \geq |\xi|\mathbf{I}_{\{\omega:|\xi| \geq x\}} \geq x\mathbf{I}_{\{\omega:|\xi(\omega)| \geq x\}}$$

საიდან

$$\mathbf{M}\xi \geq x\mathbf{M}\mathbf{I}_{\{\omega:|\xi(\omega)| \geq x\}} = x\mathbf{P}\{\omega : |\xi(\omega)| \geq x\}.$$

(8.4) უტოლობა მიიღება პირველი უტოლობიდან ელემენტარული გარდაქმნებით. ▲

ჩებიშევის უტოლობა (8.4) გვიჩვენებს, რომ თუ დისპერსია მცირეა, მაშინ 1-თან ახლოს ალბათობით შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობანი თავს იყრის $\mathbf{M}\xi$-ის მახლობლობაში:

$$\mathbf{P}\{\omega : |\xi - \mathbf{M}\xi| < x\} \geq 1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{x^2}.$$

2. შვარცი-კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა

ვთქვათ, ξ_1 და ξ_2 ისეთი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომ $\mathbf{M}\xi_1^2<\infty$, $\mathbf{M}\xi_2^2<\infty$, მაშინ $\mathbf{M}|\xi_1\xi_2| < \infty$ და

$$\left(\mathbf{M}|\xi_1\xi_2|\right)^2 \leq \mathbf{M}\xi_1^2\mathbf{M}\xi_2^2. \tag{8.5}$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\mathbf{M}\xi_1^2>0$, $\mathbf{M}\xi_2^2>0$; მაშინ (8.5) უტოლობა მიიღება $2|ab| \leq a^2 + b^2$ უტოლობიდან, თუ მასში ჩავსვამთ

$$a = \frac{\xi_1}{\sqrt{\mathbf{M}\xi_1^2}}, \quad b = \frac{\xi_2}{\sqrt{\mathbf{M}\xi_2^2}}$$

და შემდეგ ავიღებთ ორივე ნაწილის მათემატიკურ ლოდინს. თუკი $\mathbf{M}\xi_1^2=0$, მაშინ მათემატიკური ლოდინის VII და IX თვისების ძალით $\mathbf{M}\xi_1\xi_2=0$, ე.ი. (8.5) აგრეთვე შესრულებულია. ▲

3. იენსენის უტოლობა

თუ $\mathbf{M}\xi$ არსებობს და $g(x), x\in R^{(1)}$ ამოზნექილი ფუნქციაა, მაშინ

$$g(\mathbf{M}\xi)\leq \mathbf{M}(g(\xi)). \tag{8.6}$$

ᲓᲐᲛᲢᲙᲘᲪᲔᲑᲐ. თუ $g(x)$, $x\in R^{(1)}$ ფუნქციას გააჩნია $g'(x)$, $g''(x)$ წარმოებულები, მაშინ $g(x)$ ფუნქციის ამოზნექილობიდან გამომდინარეობს $g''(x)\geq 0$ ნებისმიერი x წერტილისათვის. მაშასადამე, ნებისმიერი a წერტილისათვის

$$g(\xi)\geq g(a) + g'(a)(\xi-a). \tag{8.7}$$

თუ ამ უტოლობაში a=Mξ და ავიღებთ მიღებული უტოლობის ორივე ნაწილის მათემატიკურ ლოდინს, მივიღებთ (8.6)-ს. ზოგად შემთხვევაში (8.7)-ის ნაცვლად უნდა გამოვიყენოთ ის ფაქტი, რომ ყოველი ამოზნექილი $g(x)$ ფუნქციისათვის და ყოველი a წერტილისათვის მოიძებნება ისეთი c მუდმივი რიცხვი, რომ ნებისმიერი x-თვის

$$g(x)\geq g(a)+c(x-a). \qquad \blacktriangle$$

4. ᲚᲘᲐᲞᲣᲜᲝᲕᲘᲡ ᲣᲢᲝᲚᲝᲑᲐ

დავუშვათ, რომ $0<\alpha<\beta$, მაშინ

$$\left(M|\xi|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\leq\left(M|\xi|^{\beta}\right)^{1/\beta}.$$

დამტკიცებისათვის იენსენის უტოლობაში უნდა ავიღოთ $g(x)=x^{\beta/\alpha}$ ამოზნექილი ფუნქცია და $|\xi|^{\alpha}$ შემთხვევითი სიდიდე. $\blacktriangle$

ლიაპუნოვის უტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი ფაქტი: თუ ξ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია k-ური რიგის სასრული მომენტი, მაშინ მას გააჩნია k-ზე ნაკლები რიგის $M\xi^m$, $m=1, 2,..., k-1$ მომენტები.

§9. ᲞᲘᲠᲝᲑᲘᲗᲘ ᲒᲐᲜᲐᲬᲘᲚᲔᲑᲐ ᲓᲐ ᲞᲘᲠᲝᲑᲘᲗᲘ ᲛᲐᲗᲔᲛᲐᲢᲘᲙᲣᲠᲘ ᲚᲝᲓᲘᲜᲘ

1. ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათური სივრცეა და ხდომილობა $B\in\mathcal{F}$ ისეთია, რომ $P(B)>0$.

განვიხილოთ ახალი ალბათური სივრცე $(\Omega, \mathcal{F}, P_B(\cdot))$, სადაც $P_B(A)=P(A|B)$, $A\in\mathcal{F}$.

ვთქვათ, $\xi=\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ სივრცეზე განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდეა. ცხადია, იგი იქნება აგრეთვე შემთხვევითი სიდიდე $(\Omega, \mathcal{F}, PB)$ ალბათურ სივრცეზედაც.

განსაზღვრა 9.1. $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$ ალბათურ სივრცეზე ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს ეწოდება პირობითი მათემატიკური ლოდინი B პირობით და აღინიშნება სიმბოლოთი $M(\xi|B)$:

$$M(\xi \mid B) = \int_{\Omega} \xi(\omega) P_B(d\omega).$$

$P_B(\cdot)$ ზომის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ

$$M(\xi \mid B) = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega \mid B) = \frac{1}{P(B)} \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega \cap B) =$$

$$= \frac{1}{P(B)} \int_{B} \xi(\omega) P(d\omega).$$

აღვნიშნოთ

$$M(\xi; B) = \int_{B} \xi(\omega) P(d\omega),$$

ე.ი.

$$M(\xi \mid B) = \frac{1}{P(B)} M(\xi; B).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ფუნქცია

$$F_{\xi}(x \mid B) = P_B(\xi < x) = P\{\xi < x \mid B\}$$

არის $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$-ზე განხილული ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია.

განსაზღვრა 9.2. $F_\xi(x|B)$ ფუნქციას ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობითი განაწილების ფუნქცია B – პირობით.

$M(\xi|B)$ შეიძლება ჩაიწეროს, აგრეთვე, შემდეგი სახით:

$$M(\xi|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x \mid B).$$

თუ σ-ალგებრა $\sigma(\xi)$ ($\sigma(\xi)$ არის σ-ალგებრა წარმოქმნილი ყველა $\xi^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}^{(1)}$, სახის სიმრავლეთა ერთობლიობისაგან, $\mathcal{B}^{(1)}$ – ბორელის σ-ალგებრაა ღერძზე) დამოუკიდებელია B ხდო-

მილობაზე (ე.ი. $I_A(\omega)$, $A\in\sigma(\xi)$ და $I_B(\omega)$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია), მაშინ

$$P_B(A)\equiv P(A)$$

ნებისმიერი $A\in\sigma(\xi)$ ხდომილობისათვის.

მაშასადამე,

$$F_\xi(x\,|\,B)\equiv F_\xi(x),\;\; M(\xi\,|\,B)=M\xi,\;\; M(\xi;B)=P(B)M\xi.$$

ვთქვათ, $\{B_n\}$ ხდომილობათა ისეთი მიმდევრობაა, რომ

$$\bigcup_{k=1}^{m}B_k=\Omega,\; B_k\cap B_j=\varnothing,\; k\neq j,\; P(B_k)>0,\quad \forall_k\,,\text{ მაშინ}$$

$$M\xi=\int_{\Omega}\xi(\omega)dP=\sum_{k=1}^{m}\int_{B_k}\xi(\omega)dP=\sum_{k=1}^{m}M(\xi;B_k)=\sum_{k=1}^{m}P(B_k)M(\xi/B_k).$$

ჩვენ მივიღეთ მათემატიკური ლოდინისათვის სრული ალბათობის ფორმულა.

მაგალითი. ვთქვათ, ξ შემთხვევითი სიდიდით იზომება რაიმე სისტემის (მექანიზმის) ფუნქციონირების დრო. ცნობილია, რომ სისტემამ იმუშავა a დროის განმავლობაში. როგორია სისტემის მუშაობის დარჩენილი ხანგრძლივობის განაწილება? რას უდრის მისი მათემატიკური ლოდინი?

ცხადია, ჩვენ უნდა მოვძებნოთ $P\{\xi-a\geq x|\xi\geq a\}$ და $M\{\xi-a|\xi\geq a\}$. დავუშვათ, რომ $P(a)=P\{\xi\geq a\}>0$. მაშინ ზემოთ მოყვანილი ფორმულების ძალით დავწერთ:

$$P\{\xi-a\;|\;\xi\geq a\}=\frac{P(x+a)}{P(a)},$$

$$M(\xi-a\,|\,\xi\geq a)=\frac{1}{P(a)}\int_0^\infty x\,dF(x+a).$$

მოვიყვანოთ ექსპონენციალური განაწილების მეტად საინტერესო თვისება. ვთქვათ, ξ განაწილებულია ექსპონენციალური კანონით:

$$F_\xi(x)=P\{\xi<x\}=\begin{cases}0, & \text{როცა}\;\; x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{როცა}\;\; x\geq 0,\;\lambda>0.\end{cases}$$

თუ სისტემის ფუნქციონირების დრო ξ განაწილებულია ექს-
პონენციალური კანონით, მაშინ

$$P\{\xi - a \geq a \mid \xi \geq a\} = \frac{P(x+a)}{P(a)} = \frac{e^{-\lambda(x+a)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda x} = P(x).$$

როგორც ვხედავთ, ტოლობის მარჯვენა მხარე არ არის დამოკიდებული a-ზე, ე.ი. სისტემის მუშაობის დარჩენილი ხანგრძლივობის განაწილება ემთხვევა ახალი სისტემის მუშაობის ხანგრძლივობის განაწილებას.

2. ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათურ სივრცეზე მოცემულია ორი $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d)\in R^d$ და $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_m)\in R^m$ შემთხვევითი ვექტორი. თუ $P(\eta=x\}>0$, მაშინ პირობითი ალბათობის ფორმულის ძალით დავწერთ:

$$P\{\xi\in B \mid \eta = x\} = \frac{P\{(\xi\in B)\cap(\eta=x)\}}{P\{\eta=x\}}.$$

ეს ფორმულა კარგავს აზრს, როცა $P\{\eta=x\}=0$. პირობითი ალბათობის ზოგადი განსაზღვრა ნულის ტოლი ალბათობის მქონე ხდომილობათა კლასების მიმართ იყენებს ზომათა თეორიის რთულ აპარატს და აქ მოყვანილი არ იქნება. დავუშვათ, რომ ξ და η ვექტორებს გააჩნიათ ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე

$$f(x,y)=f_{(\xi,\eta)}(x,y),\ x\in R^d,\ y\in R^m.$$

ვთქვათ, K_ε, $K_\varepsilon\in R^m$ კუბია ცენტრით y – წერტილზე და 2ε სიგრძის წიბოთი. დავუშვათ, რომ

$$P\{\eta\in K_\varepsilon\}>0,\ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0).$$

მაშინ

$$P\{\xi\in B \mid \eta\in K_\epsilon\} = \frac{\int_{K_\epsilon}\int_B f(x,y)dxdy}{\int_{K_\epsilon}\int_{R^d} f(x,y)dxdy}. \qquad (9.1)$$

ვთქვათ, $\varepsilon\to 0$. თითქმის ყველა (ლებეგის ზომის აზრით) y-თვის არსებობს (9.1)-ის ზღვარი და ის ტოლია

$$\frac{\int\limits_B f(x,y)dx}{\int\limits_{R^d} f(x,y)dx} = \frac{\int\limits_B f(x,y)dx}{f_\eta(y)}, \qquad (9.2)$$

სადაც $f_\eta(y)$ არის η – შემთხვევითი ვექტორის განაწილების სიმკვრივე.

ბუნებრივია მიღებული გამოსახულება უნდა მივიღოთ პირობითი ალბათობის განსაზღვრებად.

განსაზღვრა 9.3. $\{\xi\in B\}$, $B\in\mathscr{B}^d$, ხდომილობის პირობითი ალბათობა $\{\eta=y\}$ პირობით ეწოდება გამოსახულებას

$$P\{\xi\in B \mid \eta=y\} = \frac{\int\limits_B f(x,y)dx}{f_\eta(y)}, \qquad (9.3)$$

სადაც

$$f_\eta(y) = \int\limits_{R^d} f(x,y)dx.$$

(9.2)-ის მარჯვენა მხარე კარგავს აზრს, როცა $f_\eta(y)=0$. მაგრამ ალბათობა იმისა, რომ η ვექტორის მნიშვნელობა „ჩავარდება“ $N_\eta=\{y:f_\eta(y)=0\}$ სიმრავლეში ნულის ტოლია:

$$P\{\eta\in N_\eta\} = \int\limits_{N_\eta} f_\eta(y)dy = 0.$$

ეს გარემოება გვაძლევს საშუალებას იგნორირებული იყოს (9.3) ფორმულის განუსაზღვრელობა და შემდეგში ჩავთვლით, რომ

$$P\{\xi\in B|\eta=y\}=0, \text{ თუ } f_\eta(y)=0.$$

(9.3) ფორმულას შეიძლება მივცეთ შემდეგი ინტერპრეტაცია: თუ შემთხვევით ვექტორთა წყვილს (ξ,η) აქვს განაწილების სიმკვრივე $f(x,y)$, მაშინ არსებობს $f_{\xi|\eta}(x|y)$ პირობითი სიმკვრივე ξ ვექტორის განაწილებისა $\eta=y$ პირობით და ის განისაზღვრება ფორმულით:

$$f_{\xi|\eta}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}. \qquad (9.4)$$

(9.4) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$f(x,y)=f_{\xi|\eta}(x\,|\,y)f_{\eta}(y)=f_{\xi|\eta}(y\,|\,x)f_{\xi}(x).$$

პირობითი განაწილების სიმკვრივე $f_{\eta|\xi}(x\,|\,y)$ წარმოადგენს რაიმე განაწილების სიმკვრივეს R^d-ში:

$$F_{\xi|\eta}(A\,|\,\eta)=\int_A f_{\xi|\eta}(x\,|\,y)dx;\quad \int_{R^d} f_{\xi|\eta}(x\,|\,y)dx=1,\ \text{როცა}\ y\notin N.$$

განსაზღვრა 9.4. $\xi\in R^1$ შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი $\eta=y$ პირობით ეწოდება გამოსახულებას

$$m(y)=M(\xi\,|\,\eta=y)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi|\eta}(x\,|\,y)dx,$$

ხოლო პირობითი დისპერსია –

$$D(\xi\,|\,\eta=y)=M((\xi-M(\xi\,|\,\eta=y))^2\,/\,\eta=y).$$

თუ $M|\xi|<\infty$, მაშინ პირობითი მათემატიკური ლოდინი $M(\xi|\eta=y)$, განსაზღვრულია ყველა $y\notin N_1$-სათვის, სადაც N_1 ისეთი სიმრავლეა, რომ $P\{\eta\in N_1\}=0$. მართლაც,

$$M(\xi\,|\,\eta=y)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dx}{f_{\eta}(y)},$$

ამასთან,

$$\int\!\!\int|\,x\,|\,f(x,y)dxdy=\int|\,x\,|\,f_{\xi}(x)dx<\infty,$$

ასე რომ,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dx\right|<\infty\ \ \text{თითქმის ყველა}\ y\text{-სათვის.}$$

$z=M(\xi|\eta=y)$-ს ეწოდება ξ-ის η-ზე რეგრესიის ზედაპირის განტოლება. ამ ფუნქციის აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ η შემთხვევითი ვექტორის მნიშვნელობის პირობით განისაზღვრება ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობითი საშუალო მნიშვნელობა.

3. პირობითი მათემატიკური ლოდინი, როგორც შემთხვევითი სიდიდე. განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდეები:

$$f_\xi(x\,|\,\eta) = f_{\xi|\eta}(x,y)\Big|_{y=\eta},\quad M(\xi\,|\,\eta) = M(\xi\,|\,\eta=y)\Big|_{y=\eta}.$$

მათ უწოდებენ პირობითი განაწილების სიმკვრივეს და პირობით მათემატიკურ ლოდინს η პირობით. მასთან ის გარემოება, რომ $f_{\xi|\eta}(x|y)$ ფუნქცია $\{y:y\in N_\eta\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია, ნებისმიერად არ თამაშობს განსაკუთრებულ როლს, ვინაიდან $P\{\eta\in N_\eta\}=0$. გავიხსენოთ, რომ შემთხვევით სიდიდეთა ტოლობა ნიშნავს მათ ეკვივალენტობას.

$M(\xi|\eta)$-ის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $M(\xi|\eta)=g(\eta)$, $g(y)$, $y\in R^m$ ბორელის ფუნქციაა. მას გააჩნია შემდეგი თვისება: ნებისმიერი შემოსაზღვრული $h(y), y\in R^m$, ბორელის ფუნქციისათვის

$$Mh(\eta)\xi=Mh(\eta)g(\eta). \qquad (9.5)$$

მართლაც,

$$Mh(\eta)g(\eta) = \int_{R^m} h(y)g(y)f_\eta(y)dy =$$
$$= \int_{R^m}\int_{R^d} h(y)xf(x,y)dxdy = Mh(\eta)\xi\ .$$

შევნიშნოთ, რომ (9.5) ტოლობა ცალსახად განსაზღვრავს $g(\eta)$ შემთხვევით სიდიდეს. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ (9.5) სრულდება ორი $g(y)$ და $\tilde{g}(y)$ ფუნქციისათვის, როგორც არ უნდა იყოს ზომადი შემოსაზღვრული $h(x)$, $x\in R^m$ ფუნქცია, მაშინ ერთის ტოლი ალბათობით $g(\eta)=\tilde{g}(\eta)$. დავამტკიცოთ ეს.

გვაქვს

$$Mh(\eta)\xi = Mh(\eta)g(\eta) = Mh(\eta)\tilde{g}(\eta),$$

აქედან

$$Mh(\eta)(g(\eta)-\tilde{g}(\eta)) = 0.$$

დავუშვათ, რომ,

$$h(\eta) = [g(\eta)-\tilde{g}(\eta)]\cdot I_c(\omega)$$

სადაც $I_c(\omega)=1$, თუ $|g(\eta)|\le c$ და $|\tilde{g}(\eta)|\le c$ და $I_c(\omega)=0$ წინააღმდეგ შემთხვევაში.

მივიღებთ

$$\mathbf{MI_c\,|\,g(\eta)-\tilde g(\eta)\,|^2=0\,,}$$

საიდანაც

$$\mathbf{I_c\,|\,g(\eta)-\tilde g(\eta)\,|=0}$$

თითქმის აუცილებლად. გადავიდეთ ამ ტოლობაში ზღვარზე, როცა $\mathbf{c\to\infty}$, მივიღებთ $\mathbf{g(\eta)=\tilde g(\eta)}$ თითქმის აუცილებლად. ▲

ის ფაქტი, რომ (9.5) ტოლობა ცალსახად განსაზღვრავს $\zeta=\mathbf{g(\eta)}$ შემთხვევით სიდიდეს, გვაძლევს საშუალებას მოვიყვანოთ $\mathbf{M(\xi|\eta)}$-ის ზოგადი განსაზღვრა.

განსაზღვრა 9.5. ξ შემთხვევითი სიდიდის $\mathbf{M(\xi|\eta)}$ პირობითი მათემატიკური ლოდინი η პირობით ეწოდება $\mathbf{g(\eta)}$ შემთხვევით სიდიდეს, სადაც $\mathbf{g(y)}$ ისეთი ბორელის ფუნქციაა, რომ ნებისმიერი შემოსაზღვრული $\mathbf{h(x)}$ ბორელის ფუნქციისათვის სრულდება (9.5) ტოლობა.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ, როცა $\mathbf{M|\xi|<\infty}$ პირობითი მათემატიკური ლოდინი $\mathbf{M(\xi|\eta)}$ ყოველთვის არსებობს.

თუ $\varphi\mathbf{(x)}$, $\mathbf{x\in R^d}$, რაიმე ბორელის ფუნქციაა, რომლისთვისაც $\mathbf{M|\varphi(\xi)|<\infty}$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\mathbf{M(\varphi(\xi)\,|\,\eta)=\int_{R^d}\varphi(x)f_{\xi|\eta}(x\,|\,\eta)dx} \qquad (9.6)$$

დამტკიცებისათვის საკმარისია შევამოწმოთ, რომ (9.6)-ის მარჯვენა გამოსახულება აკმაყოფილებს განსაზღვრა 9.5-ს.

(9.6)-ის მარჯვენა მხარე აღვნიშნოთ $\mathbf{g(\eta)}$-ით. გვაქვს

$$\mathbf{Mh(\eta)g(\eta)=\int_{R^m}h(y)g(y)f_\eta(y)dy=\int_{R^m}\int_{R^d}h(y)\varphi(x)\times}$$

$$\mathbf{\times f_{\xi|\eta}(x\,|\,y)f_\eta(y)dydx=\int_{R^m}\int_{R^d}h(y)\varphi(x)f(x,y)dydx=Mh(\eta)\varphi(\xi)\,.}$$

ამგვარად, $\mathbf{g(\eta)}$ სიდიდე აკმაყოფილებს $\varphi(\xi)$ შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინის η –პირობით განსაზღვრას. თუ (9.5) ტოლობაში $\mathbf{h(y)\equiv1}$, მაშინ მივიღებთ:

$$\mathbf{MM(\xi|\eta)=M\xi.} \qquad (9.7)$$

ჩამოვთვალოთ პირობითი მათემატიკური ლოდინის თვისებები:

1. $M(C|\eta)=C$; 2) $M(C\xi|\eta)=CM(\xi|\eta)$;

3. $M(C_1\xi_1+C_2\xi_2|\eta)=C_1M(\xi_1|\eta)+C_2M(\xi_2|\eta)$;

4. თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $M(\xi|\eta)=M\xi$;

5. $M(\xi h(\eta)|\eta)=h(\eta)M(\xi|\eta)$; 6) $MM(\xi|\eta)=M\xi$.

პირობითი მათემატიკური ლოდინი მნიშვნელოვან როლს თამაშობს. ეს როლი დაკავშირებულია ერთ ექსტრემალურ თვისებასთან.

ვთქვათ, $\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots,\eta_k$ შემთხვევითი სიდიდეებია, ამასთან, ვექტორი $\eta=(\eta_1, \ldots,\eta_k)$ დაკვირვებადია, ხოლო ξ შემთხვევითი სიდიდე არადაკვირვებადი. საჭიროა შევაფასოთ ξ-ის მნიშვნელობა η-ვექტორის საშუალებით.

ეს ნიშნავს, რომ უნდა მოიძებნოს $m(x)=m(x_1,\ldots,x_k)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $\hat{\xi} = m(\eta)$ შემთხვევითი სიდიდე რაც შეიძლება ნაკლებად განსხვავდებოდეს ξ-გან. $\hat{\xi} \cong \xi$ მიახლოების სიზუსტის ზომად გამოვიყენოთ $M\,|\,\hat{\xi}-\xi\,|^2$ – საშუალო კვადრატული გადახრა და ამოცანა ჩამოვაყალიბოთ ასე: ვთქვათ, $M|\xi|^2<\infty$. k – ცვლადის ბორელის ფუნქციათა H კლასში, რომელთათვის $M|h(\eta)|^2<\infty$ $\forall h\in H$, უნდა მოიძებნოს ისეთი $m(x)\in H$, რომ

$$M|\xi-m(\eta)|^2\leq M|\xi-h(\eta)|^2,\ \forall h\in H.$$

ასეთი $m(x)$, $x\in R^m$, ფუნქცია არსებობს და ის $M(\xi|\eta_1=x_1, \eta_2=x_2,\ldots,\eta_k=x_k)$ რეგრესიის ფუნქციის ტოლია. მართლაც,

$$M|\xi-h(\eta)|^2=M|\xi-m(\eta)|^2+M((\xi-m(\eta)(m(\eta)-h(\eta))+M(m(\eta)-(\eta))^2.$$

(5) და 6) თვისების ძალით, მივიღებთ:

$$M(\xi-m(\eta))(m(\eta)-h(\eta))=M(m(\eta)-h(\eta))M(\xi-m(\eta)|\eta)=0.$$

მაშასადამე,

$$M|\xi-h(\eta)|^2=M|\xi-m(\eta)|^2+M|m(\eta)-h(\eta)|^2\geq M|(\xi-m(\eta)|^2. \qquad \blacktriangle$$

ვთქვათ, (ξ,η) განაწილებულია ნორმალური კანონით, რომლის განაწილების სიმკვრივეა

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

(9.4) ფორმულის ძალით დავწერთ:

$$f_{\xi|\eta}(x\,|\,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)\sigma_1^2}}\exp\left\{-\frac{(x-m(y))^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right\},$$

სადაც

$$m(y)=m_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(y-m_2).$$

მაშინ განსაზღვრა 9.4-ის ძალით მივიღებთ:

$$M(\xi\,|\,\eta=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\xi|\eta}(x\,|\,y)dx=m(y).$$

თუ $D\eta>0$, მაშინ ξ-ის ოპტიმალური შეფასება η-თი იქნება:

$$M(\xi\,|\,\eta)=M\xi+\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D\eta}(\eta-M\eta).$$

ჩვენ III თავში ინტეგრირების გზით მივიღეთ ორი ξ_1 და ξ_2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეთა ჯამის განაწილების ფუნქციის გამოსათვლელი (6.1) ფორმულა. იგივე ფორმულის მიღება შეიძლება უფრო მარტივად (9.7) ფორმულის გამოყენებით.

მართლაც, $P\{\xi_1+\xi_2<x\}$ არის $I(\xi_1+\xi_2<x)$ (I-ინდიკატორია) შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი. ვინაიდან

$$M(I(\xi_1+\xi_2<x)\,|\,\xi_1=t)=M(I(t+\xi_2<x)=$$
$$=P\{t+\xi_2<x\}=F_{\xi_2}(x-t),$$

ამიტომ

$$P\{\xi_1+\xi_2<x\}=M[MI(\xi_1+\xi_2<x)\,|\,\xi_1]=\int_{-\infty}^{\infty}dF_{\xi_1}(t)F_{\xi_2}(x-t).\quad\blacktriangle$$

თავი V

შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის კრებადობის სახეები

§1. ალბათობით კრებადობა

განსაზღვრა 1.1. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ მიმდევრობას ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ ალბათობით კრებადი, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის

$$P\{\omega: |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|>\varepsilon\}\to 0, \text{ როცა } n\to\infty.$$

შემთხვევით სიდიდეთა ξ_n მიმდევრობის ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ ალბათობით კრებადობას აღვნიშნავთ ასე: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.
მოვიყვანოთ ალბათობით კრებადობის ძირითადი თვისებები.

1^0. ვთქვათ, $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ და $f(x), x\in R^1$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ

$$f(\xi_n) \xrightarrow{P} f(\xi).$$

მართლაც, ვთქვათ, I ისეთი სასრული ინტერვალია, რომ

$$P\{\omega: \xi(\omega)\in I\} = 1-\frac{\eta}{2}$$

და

$$P\{\omega: |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\delta\} > 1-\frac{\eta}{2} \text{ როცა } n>n_0.$$

შემდეგ

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon, \text{ თუ } |x_1-x_2|<\delta \text{ და } x_1\in I.$$

აქედან დავწერთ:

$$P\{\omega: |f(\xi_n)-f(\xi)|<\varepsilon\} \ge P\{\omega: |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\delta, \xi(\omega)\in I\} \ge$$

$$P\{\omega: |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\delta\} - P\{\omega: \xi(\omega)\in I\} \ge 1-\eta, \text{ როცა } n\ge n_0,$$

ან რაც იგივეა

$$P\{\omega: |f(\xi_n)-f(\xi)|\ge\varepsilon\} < \eta, \text{ როცა } n>n_0.$$

1^0-დან გამომდინარეობს, რომ თუ

$$\xi_n \xrightarrow{P} c = const$$

და $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ

$$f(\xi_n) \xrightarrow{P} f(c).$$

2^0. ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა და

$$\xi_n - \eta_n \xrightarrow{P} 0, \ \eta_n \xrightarrow{P} \eta,$$

მაშინ $f(\xi_n) - f(\eta) \xrightarrow{P} 0$ (დაამტკიცეთ!).

3^0. ვთქვათ, მოცემულია m შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_n^{(k)}, k = \overline{1,m}$ მიმდევრობა და, ამასთან,

$$\xi_n^{(k)} \xrightarrow{P} \xi^{(k)}.$$

თუ $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ $R^{(m)}$-ზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ

$$\Phi(\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \dots, \xi_n^{(m)}) \xrightarrow{P} \Phi(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(m)}).$$

3^0-ის დამტკიცება 1^0-ის ანალოგიურია.

4^0. თუ $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ და $P\{\omega : |\xi_n(\omega)| \le c\} = 1$ ყოველი n-თვის და რომელიმე $c>0$ რიცხვებისათვის, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n = M\xi.$$

შევნიშნოთ, რომ ასევე

$$P\{\omega : |\xi(\omega)| \le c\} = 1.$$

მართლაც, ვთქვათ, $f(x)$ ისეთი უწყვეტი ფუნქციაა, რომ $f(x)=0$, როცა $|x| \le c$ და $f(x)>0$, როცა $|x| > c$.

მაშინ

$$P\{\omega: f(\xi_n)=0\}=1 \text{ და } 1^0\text{-ის ძალით } f(\xi_n)\xrightarrow{P} f(\xi),$$

მაშასადამე,

$$P\{\omega: f(\omega)=0\}=1 \text{ და } P\{\omega: |\xi(\omega)| \le c\}=1.$$

ვთქვათ, ახლა $I_n(\delta)$ ინდიკატორია $\{\omega: |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| \ge \delta\}$ სიმრავლის, მაშინ

$$|\xi_n-\xi| \le \delta + 2cI_n(\delta).$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$|M\xi_n - M\xi| \le M|\xi_n-\xi| \le \delta + 2cMI_n(\delta) \le$$

$$\le \delta + 2cP\{\omega: |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| > \delta\},$$

მაშასადამე,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|M\xi_n - M\xi| < \delta$$

როგორიც არ უნდა იყოს $\delta>0$. ▲

განსაზღვრა 1.2. ამბობენ, რომ შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ, თუ

$$M|\xi_n| < \infty, \; M|\xi| < \infty \text{ და } \lim_{n\to\infty} M|\xi_n-\xi| = 0.$$

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n = M\xi.$$

5^0. თუ $\xi_n \to \xi$ საშუალოდ, მაშინ $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. დამტკიცება მიიღება ჩებიშევის უტოლობიდან:

$$P\{\omega: |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon} M|\xi_n-\xi|. \qquad ▲$$

განსაზღვრა 1.3. ამბობენ, რომ ξ_n შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა საშუალო კვადრატული აზრით კრებადია ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ, თუ

$$M\xi_n^2 < \infty, \; M\xi^2 < \infty \text{ და } \lim_{n\to\infty} M|\xi_n-\xi|^2 = 0.$$

6^0. თუ $\xi_n \to \xi$ საშუალო კვადრატული აზრით, მაშინ $\xi_n \to \xi$ საშუალოდ და, მაშასადამე, აგრეთვე $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. ეს გამომდინარეობს

$$M|\xi_n - \xi| \le \left(M|\xi_n - \xi|^2\right)^{1/2}$$

უტოლობიდან.

7^0. თუ $\xi_n \to \xi$ საშუალო კვადრატული აზრით, მაშინ

$$M\xi_n \to M\xi \quad \text{და} \quad M\xi_n^2 \to M\xi^2.$$

დამტკიცება. $M\xi_n \to M\xi$ გამომდინარეობს 6^0-დან. მეორის დამტკიცებისათვის შევნიშნავთ, რომ

$$\xi_n^2 = [\xi + (\xi_n - \xi)]^2 \le 2(\xi^2 + (\xi_n - \xi)^2),$$

მაშასადამე,

$$M\xi_n^2 \le 2[M\xi^2 + M(\xi_n - \xi)^2].$$

ამიტომ

$$\begin{aligned}
\left|M\xi_n^2 - M\xi^2\right| &= \left|M(\xi_n - \xi)(\xi_n + \xi)\right| \le \\
&\le \left[M(\xi_n - \xi)^2\right]^{1/2}\left[M(\xi_n + \xi)^2\right]^{1/2} \le \\
&\le \left[M(\xi_n - \xi)^2\right]^{1/2}\left[2(M\xi_n^2 + M\xi^2)\right]^{1/2} \le \\
&\le \left[M(\xi_n - \xi)^2\right]^{1/2}\left[5M\xi^2 + 4M(\xi_n - \xi)^2\right]^{1/2} \to 0. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

8^0. იმისათვის, რომ ξ_n მიმდევრობა კრებადი იყოს c მუდმივისაკენ საშუალო კვადრატული აზრით, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$M\xi_n \to c, \quad D\xi_n \to 0.$$

მართლაც, თუ $\xi_n \to c$ საშუალო კვადრატული აზრით, მაშინ

$$M\xi_n \to Mc = c, \quad M\xi_n^2 \to c^2,$$

ამიტომ

$$D\xi_n = M\xi_n^2 - (M\xi_n)^2 \to 0.$$

შებრუნებით, თუ $M\xi_n \to c$, $D\xi_n \to 0$, მაშინ

$$M(\xi_n - c)^2 = M(\xi_n - M\xi_n)^2 + (M\xi_n - c)^2 \to 0. \qquad \blacktriangle$$

§2. დიდ რიცხვთა კანონი

ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, რომელთაც აქვთ სასრული მათემატიკური ლოდინი.

განსაზღვრა 2.1. ჩვენ ვიტყვით, რომ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა ემორჩილება დიდ რიცხვთა კანონს, თუ

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k \xrightarrow{P} 0.$$

ჩებიშევის თეორემა. თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ შემთხვევითი სიდიდეები წყვილ–წყვილად დამოუკიდებელია და $D\xi_j \le c < \infty$, $j=1, 2, \ldots$, მაშინ

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M\xi_j \xrightarrow{P} 0.$$

დამტკიცება. დავამტკიცოთ უფრო მეტი, რომ $Z_n \to 0$ საშუალო კვადრატული აზრით. ვინაიდან $MZ_n=0$, ამიტომ წინა პარაგრაფის 8^0-ის საფუძველზე საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $DZ_n \to 0$.

რადგანაც $\xi_1, \xi_2, \ldots$ შემთხვევითი სიდიდეები წყვილ–წყვილად დამოუკიდებელია, ამიტომ

$$DZ_n = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}D\xi_j + \frac{1}{n^2}\sum_{i\pm j}^{n}M[\xi_j - M\xi_j][\xi_j - M\xi_j] =$$

$$= n^{-2}\sum_{j=1}^{n}D\xi_j \le \frac{c}{n} \to 0. \qquad \blacktriangle$$

შედეგი. თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ შემთხვევითი სიდიდეები წყვილ–წყვილად დამოუკიდებელია,

$$M\xi_1 = M\xi_2 = \ldots = a \text{ და } D\xi_j \le c < \infty,\ j=1, 2, \ldots,$$

მაშინ

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j \xrightarrow{P} a. \qquad (2.1) \qquad \blacktriangle$$

უკანასკნელ დებულებას განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს გაზომვათა თეორიაში, სახელდობრ, ვიგულისხმოთ, რომ ვაწარმოებთ რაიმე ფიზიკური სიდიდის გაზომვას. თუ ერთსა და იმავე პირობებში ჩავატარებთ n–ჯერ გაზომვას, მივიღებთ რამდენადმე მაინც ერთმანეთისაგან განსხვავებულ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობებს. ჭეშმარიტი მნიშვნელობის პირველ მიახლოებად მიიჩნევენ გაზომვის შედეგად მიღებულ სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკულს

$$a \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j .$$

თუკი გაზომვის დროს თავისუფალი ვართ სისტემატური ცდომილებებისაგან, ე.ი. თუ $Mx_1=Mx_2=\ldots=Mx_n=a$, მაშინ n-ის საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისათვის (2.1)-ის თანახმად, თითქმის ერთის ტოლი ალბათობით ნაჩვენები გზით შეგვიძლია მივიღოთ მნიშვნელობა, რომელიც რაგინდ ახლოს იქნება a საძიებ მნიშვნელობასთან.

ბერნულის თეორემა. ვთქვათ, S_n – „წარმატებათა“ რაოდენობაა n დამოუკიდებელ ორშედეგიან ცდაში, ხოლო p – „წარმატების“ ალბათობა ცალკეულ ცდაში. მაშინ წარმატებათა ფარდობითი სიხშირე ალბათობით იკრიბება წარმატების ალბათობისაკენ, ე.ი.

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p .$$

დამტკიცება. როგორც ვიცით,

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

სადაც $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია საერთო $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1-p, & p \end{pmatrix}$ განაწილებით და, ამასთან,

$$M\xi_k=p,\ D\xi_k=p(1-p)\le\frac{1}{4},\ k=1, 2, \ldots .$$

როგორც ვხედავთ, ჩებიშევის თეორემის შედეგში მოთხოვნილი პირობები ამ შემთხვევაში სრულდება და, მაშასადამე,

$$\mathbf{P}\{\omega: \left|\frac{S_n}{n}-p\right| \geq \varepsilon\} = \mathbf{P}\{\omega: \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M\xi_j\right| > \varepsilon\} \to 0,$$

როცა $n \to \infty$. ▲

მარკოვის თეორემა. თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ შემთხვევითი სიდი-დეების მიმდევრობისათვის

$$\frac{1}{n^2} D\sum_{j=1}^{n}\xi_j \to 0, \text{ როცა } n \to \infty,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M\xi_j\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

დამტკიცება გამომდინარეობს ჩებიშევის უტოლობიდან, მართლაც

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M\xi_j\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)}{\varepsilon^2}. \qquad ▲$$

შენიშვნა. თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ არიან წყვილ-წყვილად ურთიერ-თდამოუკიდებელი, მაშინ მარკოვის პირობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} D\xi_j \to 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ჩებიშევის თეორემა წარმოადგენს მარკოვის თეორემის კერძო შემთხვევას.

ხინჩინის თეორემა. თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ დამოუკიდებელი და ერთი და იგივე განაწილებისა და სასრული მათემატიკური ლოდინის $a = M\xi_n$ მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{P} a.$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ ე.წ. „წაკვეთის" მეთოდით ახალი η_k და ζ_k შემთხვევითი სიდიდეები:

$$\eta_k = \begin{cases} \xi_k, & \text{თუ } |\xi_k| < n\delta, \\ 0, & \text{თუ } |\xi_k| \ge n\delta, \end{cases}$$

$$\zeta_k = \begin{cases} 0, & \text{თუ } |\xi_k| < n\delta, \\ \xi_k, & \text{თუ } |\xi_k| \ge n\delta, \end{cases}$$

სადაც δ დადებითი ფიქსირებული რიცხვია. ცხადია, რომ ნებისმიერი k-თვის $(1 \le k \le n)$ $\xi_k = \eta_k + \zeta_k$. η_k შემთხვევითი სიდიდისათვის არსებობს მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია:

$$a_n = M\eta_k = \int_{-n\delta}^{n\delta} x\,dF_{\xi_1}(x),$$

$$D\eta_k = \int_{-n\delta}^{n\delta} x^2 dF_{\xi_1}(x) - a_n^2 \le n\delta \int_{-n\delta}^{n\delta} |x|\,dF_{\xi_1}(x) \le n\delta b,$$

სადაც

$$b = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,dF_{\xi_1}(x).$$

ჩებიშევის უტოლობის ძალით

$$P\left\{\omega : \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k(\omega) - a_n \right| \ge \varepsilon \right\} \le \frac{b\delta}{\varepsilon^2} \quad . \qquad (2.3)$$

შემდეგ, ვინაიდან $a_n \to a$, როცა $n \to \infty$, ამიტომ ყოველი რაგინდ მცირე დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N_1, რომ $|a_n - a| < \varepsilon$, როცა $n > N_1$. აქედან, (2.3) უტოლობის თანახმად,

$$P\left\{\omega : \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k(\omega) - a \right| \ge 2\varepsilon \right\} \le P\left\{\omega : \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k - a_n \right| + \right.$$

$$\left. + |a_n - a| \ge 2\varepsilon \right\} \le P\left\{\omega : \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k - a \right| \ge \varepsilon \right\} \le b\delta/\varepsilon^2, \quad n \ge N_1. \quad (2.4)$$

(2.4) უტოლობისა და $\xi_k = \eta_k + \zeta_k$ წარმოდგენიდან მივიღებთ:

$$P\left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - a\right| \geq 4\varepsilon\right\} \leq P\left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k - a\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\zeta_k\right| \geq 4\varepsilon\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k - a\right| \geq 2\varepsilon\right\} + P\left\{\omega : \sum_{k=1}^{n}\zeta_k \neq 0\right\} \leq$$

$$\leq \frac{\delta b}{\varepsilon^2} + P\left\{\omega : \sum_{k=1}^{n}\zeta_k \neq 0\right\} \leq \frac{\delta b}{\varepsilon^2} + \sum_{k=1}^{n} P\left\{\omega : \sum_{k=1}^{n}\zeta_k \neq 0\right\}, \ n > N_1. \quad (2.5)$$

ახლა შევაფასოთ $P\left\{\omega : \sum_{k=1}^{n}\zeta_k \neq 0\right\}$, შევნიშნოთ, რომ

$$P\{\omega : \zeta_k \neq 0\} = \int_{|x|\geq n\delta} dF_{\xi 1}(x) \leq \frac{1}{n\delta}\int_{|x|\geq n\delta} |x|\, dF_{\xi 1}(x)$$

პირობის ძალით

$$\int_{|x|\geq n\delta} |x|\, dF_{\xi_1}(x) \to 0,$$

ამიტომ არსებობს ისეთი $N_2>0$ რიცხვი, რომ

$$\int_{|x|\geq n\delta} |x|\, dF_{\xi_1}(x) < \delta^2, \ n>N_2,$$

ე.ი.

$$P\{\omega : \zeta_k \neq 0\} \leq \frac{\delta}{n}, \text{ როცა } n>N_2. \quad (2.6)$$

საბოლოოდ (2.5) და (2.6) თანაფარდობებიდან ვღებულობთ:

$$P\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| \geq 4\varepsilon\} \leq \delta + \frac{b\delta}{\varepsilon^2}, \text{ როცა } n>\max(N_1, N_2). \quad (2.7)$$

რადგანაც δ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ (2.7)-ის მარჯვენა მხარე შეგვიძლია გავხადოთ რაგინდ მცირე რიცხვზე ნაკლები. ▲

შენიშვნა. 1. საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ ჩებიშევის თეორემისაგან განსხვავებით, ხინჩინის თეორემაში არ მოითხოვება მეორე რიგის მომენტის არსებობა.

2. ვთქვათ, საჭიროა გამოითვალოს $\int_0^1 g(x)dx$ ინტეგრალი, სადაც $g(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა. ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ დამოუკიდებელი და $[0,1]$ ინტერვალზე თანაბარი განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია. თუ გავიხსენებთ მე-IV თავის (5.5) თანაფარდობას, დავწერთ:

$$Mg(\xi_n) = \int_{R^{(1)}} g(x) f_{\xi_n}(x) dx,$$

სადაც

$$f_{\xi_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \notin [0,1], \\ 1, & \text{თუ } x \in [0,1]. \end{cases}$$

საიდანაც

$$Mg(\xi_n) = \int_0^1 g(x) dx.$$

ხინჩინის თეორემის თანახმად,

$$\frac{g(\xi_1) + g(\xi_2) + \ldots + g(\xi_n)}{n} \xrightarrow{P} \int_0^1 g(x) dx, \qquad (2.8)$$

(2.8) თანაფარდობაზე დაყრდნობით $\int_0^1 g(x)dx$ ინტეგრალის სტატისტიკურ შეფასებად იღებენ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ შემთხვევითი სიდიდეთა კონკრეტული რეალიზაციისას

$g(\xi_1)$, $g(\xi_2)$, ... , $g(\xi_n)$ სიდიდეთა $\frac{g(\xi_1) + g(\xi_2) + \ldots + g(\xi_n)}{n}$

საშუალო არითმეტიკულს, ე.ი.

$$\int_0^1 g(x) dx \approx \frac{g(\xi_1) + g(\xi_2) + \ldots + g(\xi_n)}{n}.$$

დიდ რიცხვთა კანონი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის პოლინომებით თანაბარი მიახლოების შესახებ ვეიერშტრასის თეორემის დასამტკიცებლად.

ვთქვათ, S_n–„წარმატებათა“ რაოდენობაა ორშედეგიან n დამოუკიდებელ ცდაში (ბერნულის სქემა!), „წარმატების ალბათობა“ x-ის ტოლი იყოს, $0<x<1$, ხოლო $f(x)$ $[0,1]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციაა.

როგორც ვიცით,

$$P\{\omega : S_n = k\} = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = \overline{0,n},$$

ამიტომ

$$B_n(x) = Mf\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

ამ პოლინომს $f(x)$ ფუნქციისათვის ბ ე რ ნ შ ტ ე ი ნ ი ს პ ო ლ ი ნ ო მ ი ეწოდება.

ბერნშტეინის თეორემა. $B_n(x)$ პოლინომთა მიმდევრობა კრებადია თანაბრად $[0,1]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისაკენ, ე.ი.

$$\max_{0\le x\le 1}\left|f(x) - B_n(x)\right| \to 0, \text{ როცა } n\to\infty.$$

დამტკიცება. ვინაიდან $f(x)$ ფუნქცია $[0,1]$ სეგმენტზე უწყვეტია, იგი შემოსაზღვრულია და, ამასთანავე, თანაბრად უწყვეტი. მაშასადამე, ერთი მხრივ, გვაქვს $|f(x)| < c < \infty$, $0\le x\le 1$, ხოლო, მეორე მხრივ, ნებისმიერად მცირე დადებითი ε-თვის მოიძებნება ისეთი დადებითი δ, რომ $[0,1]$ სეგმენტის მთელ მანძილზე ყოველი x' და x''-თვის, რომელთათვისაც $|x'-x''| < \delta$, ადგილი ექნება უტოლობას

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1,$$

მაშინ შეიძლება დაიწეროს:

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right\} C_n^k x_k (1-x)^{n-k},$$

და, მაშასადამე,

$$\left|B_n(x)-f(x)\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x_k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x_k (1-x)^{n+k} +$$

$$+ \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x_k (1-x)^{n-k} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2}+2c\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta}C_n^k x_k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}+2cP\left\{\omega:\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\ge\delta\right\}, \quad (2.8)$$

საიდანაც ბერნულის თეორემის ძალით გამომდინარეობს, რომ ფიქსირებული x-თვის,

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x). \qquad (2.9)$$

ახლა ვაჩვენოთ უფრო მეტი: (2.9)-ს კრებადობა თანაბარია x-ის მიმართ. თუ გავიხსენებთ ჩებიშევის უტოლობას, გვექნება:

$$P\left\{\omega:\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\ge\delta\right\} = P\{\omega:\left|S_n(\omega)-nx\right|\ge n\delta\} \le \frac{DS_n}{n^2\delta^2} =$$

$$= \frac{nx(1-x)}{n^2\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2}. \qquad (2.10)$$

ვინაიდან

$$\max_{0\le x\le 1}(1-x)x \le 1/4.$$

ვთქვათ, N>0 ისეთია, რომ $\dfrac{1}{4n\delta^2} < \varepsilon/2$.

როცა N≤n, მაშინ (2.8) და (2.10) ძალით დავწერთ

$$\sup_{0\le x\le 1}\left|B_n(x)-f(x)\right| < \varepsilon, \text{ როცა } N\le n. \qquad \blacktriangle$$

§3. დიდ რიცხვთა კანონისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

თეორემა. იმისათვის, რომ შემთხვევით სიდიდეთა ნებისმიერი ξ_1, ξ_2, ... , ξ_n, ... მიმდევრობისათვის ადგილი ჰქონდეს დიდ რიცხვთა კანონს, ე.ი. ნებისმიერი დადებითი ε-სათვის

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M\xi_j\right|<\varepsilon\right\}=1 \tag{3.1}$$

აუცილებელია და საკმარისი

$$M\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-M\xi_j)\right)^2}{n^2+\left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-M\xi_j)\right)^2}\to 0,\ \text{როცა}\ n\to\infty. \tag{3.2}$$

დამტკიცება. დავამტკიცოთ (3.2)-ის საკმარისობა: შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Phi_n(x)=P\{\mu_n<x\},$$

სადაც

$$\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-M\xi_j).$$

მაშინ

$$P\{|\mu_n|\geq\varepsilon\}=\int_{|x|\geq\varepsilon}d\Phi_n(x)\leq\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}d\Phi_n(x)\leq$$

$$\leq\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}d\Phi_n(x). \tag{3.3}$$

ვინაიდან,

$$M(f(\xi))=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dF_\xi(x),$$

ამიტომ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}d\Phi_n(x)=M\frac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}. \tag{3.4}$$

(3.3) და (3.4)-დან გამომდინარეობს თეორემის პირობის საკმარისობა.

ვაჩვენოთ, რომ (3.2) წარმოადგენს აუცილებელ პირობას.

გვაქვს

$$P\{|\mu_n| \geq \varepsilon\} = \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} d\Phi_n(x) \geq \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) - \int\limits_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) \geq M\frac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2} - \varepsilon^2,$$

ე.ი.

$$0 \leq M\frac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2} \leq \varepsilon^2 + P\{|\mu_n| \geq \varepsilon\}. \qquad (3.5)$$

(3.5)-დან კი გამომდინარეობს თეორემის პირობის აუცილებლობა. ▲

ცხადია, რომ ნებისმიერი n და ξ_n-ისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\frac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2} \leq \mu_n^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - M\xi_j)\right)^2,$$

საიდანაც

$$M\frac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2} \leq M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - M\xi_j)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{j=1}^{n} M(\xi_j - M\xi_j)^2 + 2\sum_{j\neq i}^{n} M(\xi_j - M\xi_j)(\xi_j - M\xi_j)\right\} =$$

$$= \frac{1}{n^2} D\sum_{j=1}^{n}\xi_j .$$

აქედან, თუ მარკოვის პირობა შესრულებულია, მაშინ შესრულებულია (3.2) პირობა.

§4. ბორელ-კანტელის თეორემა. თითქმის აუცილებელი კრებადობა

ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათურ სივრცეზე მოცემულია ხდომილობათა

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \tag{4.1}$$

მიმდევრობა. ყველა იმ $\omega\in\Omega$ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც აღებული მიმდევრობის უსასრულოდ ბევრ წევრს ეკუთვნის, ამ მიმდევრობის *ზედა ზღვარი* ეწოდება და აღინიშნება $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ ან $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ სიმბოლოთი. ყველა იმ $\omega\in\Omega$ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც აღებული მიმდევრობის თითქმის ყველა სიმრავლეში შედის (თითქმის ყველა ნიშნავს ყველას, გარდა, შესაძლებელია, სასრული რიცხვისა), ამ A_n მიმდევრობის *ქვედა ზღვარი* ეწოდება და აღინიშნება $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ ან $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subseteq \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n .$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{k\ge n}^{\infty} A_k ,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\ge n}^{\infty} A_k .$$

ამიტომ, ცხადია,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \mathcal{F} \qquad \text{და} \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \mathcal{F},$$

ე.ი. ხდომილობებია.

თუ $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, მაშინ ხდომილობათა (4.1) მიმდევრობას კრებადი მიმდევრობა ეწოდება და საერთო ზღვრულ სიმრავლეს აღნიშნავენ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ სიმბოლოთი. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ სიმრავლეს ეწოდება სიმრავლეთა (4.1) მიმდევრობის ზღვარი.

თუ (4.1) მიმდევრობა მონოტონურია, მაშინ იგი კრებადია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ,$$

როდესაც მიმდევრობა ზრდადია, ე.ი. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ და ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k ,$$

როდესაც მიმდევრობა კლებადია, ე.ი. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, ყველა ამ შემთხვევაში უწყვეტობის აქსიომიდან შესაბამისად გამომდინარეობს, რომ

$$P(A_n) \uparrow P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \text{ და } P(A_n) \downarrow P\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

ბორელ-კანტელის თეორემა. ვთქვათ, $A_1, A_2, \ldots$ ხდომილობათა მიმდევრობაა.

თუ

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty ,$$

მაშინ

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0 .$$

თუ $A_1, A_2, \ldots$ დამოუკიდებელია და

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty ,$$

მაშინ

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 1 .$$

დამტკიცება. ვინაიდან

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\ge n} A_m ,$$

ამიტომ ყოველი n-თვის

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subseteq \bigcup_{m>n}^{\infty} A_m$$

და

$$P\{\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\} \le \sum_{m\ge n} P(A_m) \to 0, \text{ როცა } n\to\infty.$$

თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი. ვთქვათ, A_k, $k=1, 2, \ldots$ დამოუკიდებელი ხდომილობებია და

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty.$$

რადგანაც

$$\bigcup_{k\ge n} A_k \supset \bigcup_{k\ge n+1} A_k, \quad k=1, 2, \ldots.$$

და

$$P\{\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\} \le \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{m\ge n} A_m\Big) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcap_{m\ge n} \overline{A}_m\Big),$$

ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcap_{m\ge n} \overline{A}_m\Big) = 0.$$

თუ $A_1, A_2, \ldots$ ხდომილობები დამოუკიდებელია, მაშინ დამოუკი- დებელი იქნება $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots$ ხდომილობები, ამიტომ

$$P\Big(\bigcap_{m\ge n} \overline{A}_m\Big) = \prod_{m\ge n} P(\overline{A}_m) = \prod_{m\ge n} (1 - P(A_m)).$$

თუ გამოვიყენებთ

$$\ln(1-x) \le -x, \quad 0 \le x \le 1$$

უტოლობას, მივიღებთ:

$$\ln \prod_{m\ge n} [1 - P(A_k)] = \sum_{m\ge n} \ln[1 - P(A_m)] \le -\sum_{m\ge n} P(A_m) = -\infty.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი n-თვის

$$P(\bigcap_{m\ge n}\overline{A}_m)=0.$$

საიდანაც

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)=1-\lim_{n\to\infty}P(\bigcap_{m\ge n}\overline{A}_m)=1. \qquad \blacktriangle$$

შედეგი. თუ $A_1, A_2, \ldots$ დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ $P(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)$ ალბათობას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა: 0 ან 1, იმისდა მიხედვით, კრებადია თუ განშლადი $\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)$ მწკრივი.

განსაზღვრა 4.1. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \xi_2, \ldots$ მიმდევრობას ეწოდება თითქმის აუცილებლად (თ.ა.), ანუ 1-ის ტოლი ალბათობით კრებადი ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ, თუ

$$P\{\omega:\lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=\xi(\omega)\}=1, \qquad (4.1)$$

ან რაც იგივეა, იმ ω წერტილთა N სიმრავლე, სადაც $\lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)\neq\xi(\omega)$ ნულოვანი P ზომისაა: $P(N)=0$.

ξ_n შემთხვევით სიდიდეთა თითქმის აუცილებლად კრებადობას ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ აღვნიშნავთ ასე:

$$\xi_n \xrightarrow{\text{თ.ა}} \xi.$$

თეორემა 4.1. შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \xi_2, \ldots$ მიმდევრობა თ.ა. კრებადია ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის

$$P\{\omega:\sup_{m\ge n}|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\ge\varepsilon\}=0, \text{ როცა } n\to\infty. \qquad (4.2)$$

დამტკიცება. ხდომილობა $\{\omega:\xi_n(\omega)\to\xi(\omega)\}$ შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\{\omega:\xi_n(\omega)\to\xi(\omega)\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m\ge n}\{\omega:|\xi_m-\xi|\le\frac{1}{k}\}. \qquad (4.3)$$

მართლაც, ხდომილობა

$$A_{n,k} = \bigcap_{m\ge n} \{\omega : |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| \le \frac{1}{k}\}$$

ნიშნავს $|\xi_m - \xi| \le k^{-1}$ უტოლობის შესრულებას, როცა $m\ge n$, $B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,k}$ ხდომილობა ნიშნავს ისეთი n-ის არსებობას, რომ შეს- რულდება $|\xi_m - \xi| \le k^{-1}$ უტოლობა, როცა $m\ge n$, ხოლო $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ ხდომილობა – ყველა k-თვის არსებობს ისეთი n, რომ როცა $m\ge n$ შესრულებულია $|\xi_m - \xi| \le k^{-1}$ უტოლობა, ე.ი.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \{\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\}.$$

(4.3) ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობაა

$$\{\omega : \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\ge n} \{\omega : |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| > k^{-1}\}.$$

იმისათვის, რომ

$$P\{\omega : \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\} = 0,$$

აუცილებელი და საკმარისია, რომ ყველა k-თვის

$$P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\ge n} \{\omega : |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| > k^{-1}\right\} = 0, \qquad (4.4)$$

ხოლო, რადგანაც

$$\bigcup_{m\ge n} \{\omega : |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| > k^{-1}\} = \{\omega : \sup_{m\ge n} |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| > k^{-1}\},$$

ამიტომ (4.4)-დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $k\ge 1$-თვის

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega : \sup_{m\ge n} |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| > k^{-1}\} = 0,$$

რომელიც (4.2)-ის ტოლძალოვანია. ▲

თეორემა 4.2. თუ მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\omega: |\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|>\varepsilon\}$$

ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის კრებადია, მაშინ

$$\xi_n \xrightarrow{\text{თ.ა}} \xi.$$

დამტკიცება გამომდინარეობს თეორემა (4.1)-დან, ვინაიდან

$$P\{\bigcup_{k\ge n}\{\omega: |\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|>\varepsilon\}\le \sum_{k=n}^{\infty} P\{\omega: |\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|>\varepsilon\}\to 0,$$

როცა $n\to\infty$. ▲

შენიშვნა. თ.ა. კრებადობიდან გამომდინარეობს ალბათობით კრებადობა, მართლაც,

$$\{\omega: |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|>\varepsilon\}\subseteq\{\omega: \sup_{m\ge n}|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|>\varepsilon\}.$$

შებრუნებით დებულებას ადგილი არა აქვს. მოვიყვანოთ მაგალითი.

ვთქვათ, ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე

$$(\Omega = [0,1],\ \mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]},\ P = \mu).$$

აღვნიშნოთ

$$A_n = \left(\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n+1-2^k}{2^k}\right)$$

და ვთქვათ, $2^k \le n \le 2^{k+1}$.

განვიხილოთ შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_n(\omega) = I_{A_n}(\omega)$ მიმდევრობა. რადგანაც $(0,1)$ ინტერვალში მოთავსებული ნებისმიერი ε რიცხვისათვის ადგილი აქვს

$$P\{\omega: |\xi_n(\omega)|>\varepsilon\} = 2^{-k}$$

ტოლობას, ამიტომ

$$\xi_n(\omega)\xrightarrow{P} 0,$$

მაგრამ, ამავე დროს,

$$P\{\omega: \xi_n(\omega)\not\to 0\} = 1.$$

თეორემა (4.2) გამოყენების საილუსტრაციოდ დავამტკიცოთ ბორელის თეორემა, რომელიც ფარდობითი სიხშირის თ.ა. კრებადობაში მდგომარეობს. ეს თეორემა კოლმოგოროვის გაძლიერებულ დიდ რიცხვთა კანონის კერძო შემთხვევასაც წარმოადგენს, რომელსაც გავეცნობით მომდევნო პარაგრაფში.

ბორელის თეორემა. ვთქვათ, S_n – „წარმატებათა“ რაოდენობაა ორშედეგიანი n დამოუკიდებელი ცდის დროს, ხოლო p – „წარმატების“ ალბათობა ცალკეული ცდის დროს,

მაშინ

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\text{თ.ა}} p.$$

დამტკიცება. S_n წარმოვადგინოთ n ურთიერთდამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის სახით:

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n,$$

სადაც

$$P\{\omega:\xi_j(\omega)=1\}=p,\ P\{\omega:\xi_j(\omega)=0\}=1-p,\ j=\overline{1,n}.$$

ვისარგებლოთ S_n-ის ასეთი ჯამის სახის წარმოდგენით და შევაფასოთ

$$M\left(\frac{S_n}{n}-p\right)^4. \text{ გვაქვს } M\left(\frac{S_n}{n}-p\right)^4=\frac{1}{n^4}M\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\xi_j-p\right)\right)^4=$$

$$=\frac{1}{n^4}\sum_{j_1+\dots+j_n=4}\frac{4!}{j_1!\,j_2!\dots j_n!}M(\xi_1-p)^{j_1}\dots(\xi_n-p)^{j_n}. \qquad (4.5)$$

(4.5) ჯამში ის წევრები, რომლებიც ერთ თანამამრავლს მაინც შეიცავს პირველ ხარისხში, ნულია. ეს გამომდინარეობს $\xi_1, \xi_2, \dots$ შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობიდან და $M(\xi_j - p) = 0$ ტოლობიდან. ამგვარად, (4.5) ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$M\left(\frac{S_n}{n}-p\right)^4=n^{-4}\sum_{j=1}^{4}M\left(\xi_j-p\right)^4+6n^{-4}\sum_{1\le i\le j\le n}M(\xi_i-p)^2M(\xi_j-p)^2=$$

$$=n^{-3}M(\xi_1-p)^4+3\frac{n(n-1)}{n^4}(M(\xi_1-p)^2)^2=$$

$$= n^{-3}(pq^4 + 2p^4) + 3\frac{n(n-1)}{n^4}(pq)^2 \le cn^{-2}, \qquad c=const.$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ ჩებიშევის უტოლობას, ყოველი $\varepsilon>0$-თვის გვექნება:

$$P\left\{\omega : \left|\frac{S_n}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right\} = P\left\{\omega : \left|\frac{S_n}{n} - p\right|^4 \ge \varepsilon^4\right\} \le \frac{M\left|\frac{S_n}{n} - p\right|^4}{\varepsilon^4} \le \frac{c}{n^2\varepsilon^2}.$$

აქედან ცხადია, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\omega : \left|\frac{S_n}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right\}$$

მწკრივი კრებადია ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის და, მაშასადამე, ზემოთ დამტკიცებული 4.2 თეორემის ძალით მივიღებთ, რომ

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{თ.ა}} p. \qquad \blacktriangle$$

§5. გაძლიერებულ დიდ რიცხვთა კანონი

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათურ სივრცეზე მოცემულია სასრული მათემატიკური ლოდინის მქონე შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \xi_2, \ldots$ მიმდევრობა.

განსაზღვრა 5.1. ჩვენ ვიტყვით, რომ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა ემორჩილება **გაძლიერებულ დიდ რიცხვთა კანონს**, თუ

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - n^{-1}\sum_{j=1}^{n}M\xi_j \xrightarrow{\text{თ.ა}} 0. \qquad (5.1)$$

მარტივ საკმარის პირობას (5.1) თანაფარდობის შესრულებისათვის იძლევა კოლმოგოროვის თეორემა, რომლის დამტკიცება ეყრდნობა მისივე უტოლობას, რომელიც წარმოადგენს ჩვენთვის კარგად ცნობილი ჩებიშევის უტოლობის განზოგადებას.

თეორემა 5.1. (კოლმოგოროვის უტოლობა). თუ ურთიერთდამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეებს $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ გააჩნია სასრული მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, მაშინ

$$P\{\omega : \max_{1\le k\le n} \left|\zeta_k(\omega) - M\zeta_k(\omega)\right| \ge x\} \le \frac{D\zeta_n}{x^2}, \qquad (5.2)$$

სადაც

$$\zeta_k = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k, \;\; k = \overline{1,n}.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$M\xi_k = 0, \; k = \overline{1,n};$$

ყოველთვის შეიძლება ξ_k-დან გადავიდეთ $\xi_k - M\xi_k$-ზე. განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე:

$$\nu = \min_{1\le k\le n}\{k : |\zeta_k| \ge x\}.$$

თუკი $\max\limits_{1\le k\le n}|\zeta_k| < x$, მაშინ დავუშვებთ, რომ $\nu = n + 1$. რადგანაც

$$\zeta_n^2 \ge \zeta_n^2 \sum_{k=1}^{n} I_{\{\nu=k\}}, \text{ ამიტომ } M\zeta_n^2 \ge \sum_{k=1}^{n} M\zeta_n^2 I_{\{\nu=k\}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k + \xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 I_{\{\nu=k\}} \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n} M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k)^2 I_{\{\nu=k\}} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n} M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k) I_{\{\nu=k\}} \cdot (\xi_{k+1} + \dots + \xi_n).$$

შემთხვევითი სიდიდე $I_{\{\nu=k\}}$ დამოკიდებულია მხოლოდ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ შემთხვევით სიდიდეებზე, ამიტომ $(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k)\, I_{\{\nu=k\}}$ არ არის დამოკიდებული $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n$ შემთხვევით სიდიდეებზე და, ამიტომ

$$M(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k)I_{\{\nu=k\}}\cdot(\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n)=$$
$$=M(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k)I_{\{\nu=k\}}\;M(\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n)=0.$$

ვინაიდან $\zeta_k \ge x$, როცა $\omega \in \{\omega:\ \nu=k\}$ და

$$P\{\omega:\nu\le n\}=P\{\omega:\max_{1\le k\le n}|\zeta_k|\ge x\},$$

ამიტომ

$$M\zeta_n^2\ge\sum_{k=1}^{n}M\zeta_n^2 I_{\{\nu=k\}}\ge x^2P\{\omega:\nu\le n\}=$$

$$=x^2P\{\omega:\max_{1\le k\le n}|\zeta_k|\ge x\},\ \text{ე.ი.}\quad P\{\omega:\max_{1\le k\le n}|\zeta_k|\ge x\}\le\frac{D\zeta_n^2}{x^2}.\quad\blacktriangle$$

ახლა დავამტკიცოთ გაძლიერებულ დიდ რიცხვთა კანონის შესახებ **კოლმოგოროვის თეორემა 5.2.** ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია,

$$M\xi_n=0,\ D\xi_n=\sigma_n^2\ \text{ და }\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2}<\infty,$$

მაშინ

$$\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}\xrightarrow{\text{თ.ა}}0. \tag{5.3}$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$. ამავე თავის (4.2) თეორემის საფუძველზე (5.3) კრებადობა ტოლძალოვანია

$$P\{\omega:\sup_{k\ge n}\left|\frac{\zeta_k}{k}\right|\ge\varepsilon\}\to0,\ n\to\infty \tag{5.4}$$

პირობის შესრულების. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A_n=\{\omega:\max_{2^{n-1}\le k\le 2^n}\left|\frac{\zeta_k}{k}\right|>\varepsilon\}.$$

მაშინ (5.4) ტოლძალოვანია

$$P\{\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\}\to0,\ \ n\to\infty \tag{5.5}$$

პირობის შესრულების. კოლმოგოროვის უტოლობის ძალით

$$P(A_n) \le P\{\omega : \max_{2^{n-1} \le k \le 2^n} |\zeta_k| > \varepsilon 2^{n-1}\} \le$$

$$\le P\{\omega : \max_{1 \le k \le 2^n} |\zeta_k| > \varepsilon 2^{n-1}\} \le 4 \frac{D\zeta_{2^n}}{\varepsilon^2 2^{2n}}.$$

შემდეგ

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \le 4\varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} \sum_{n=1}^{2^k} \sigma_n{}^2 \le 4\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n{}^2 \cdot \sum_{\{k:2^k \ge n\}} 2^{-2k} \le$$

$$\le 8\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n{}^2}{n^2} < \infty, \text{ რადგანაც } \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-2k} \le 2 \cdot 2^{-2k_0}.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს (5.5), ვინა-იდან

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0, n \to \infty. \qquad \blacktriangle$$

შედეგი. თუ ξ_n შემთხვევით სიდიდეთა დისპერსიები შემოსაზ-ღვრულია ერთი და იმავე c მუდმივებით, მაშინ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ დამოუ-კიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა ემორჩილება გაძლი-ერებულ დიდ რიცხვთა კანონს.

ამ შედეგიდან ტრივიალურად გამომდინარეობს ბორელის თეორემა, რადგანაც

$$D\xi_k = p(1-p) \le \frac{1}{4}, k=1, 2, \ldots.$$

ლემა 5.1. ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი სასრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega : |\xi(\omega)| \ge n\} < \infty.$$

დამტკიცება. როგორც ვიცით, თუ $M\xi$ სასრულია, სასრუ-ლია $M|\xi|$ და პირიქით, ცხადი უტოლობებიდან

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P\{\omega : n-1 < |\xi(\omega)| \le n\} \le M|\xi| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} nP\{\omega : n-1 < |\xi(\omega)| \le n\}$$

და თანაფარდობებიდან

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP\{\omega : n-1 < |\xi(\omega)| \le n\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\omega : |\xi(\omega)| > n\} \le$$

$$\le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega : |\xi(\omega)| > n\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P\{\omega : n-1 < |\xi(\omega)| \le n\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{\omega : n-1 < |\xi(\omega)| \le n\} -$$

$$- P\{\omega : \xi(\omega) > 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega : |\xi(\omega)| > n\}$$

გამომდინარეობს უტოლობები

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega : |\xi(\omega)| > n\} \le M|\xi| \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega : |\xi(\omega)| > n\},$$

საიდან კი – ლემის დამტკიცება. ▲

თეორემა 5.3. ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია და ერთნაირადაა განაწილებული. იმისათვის, რომ

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{თ.ა}} a$$

აუცილებელი და საკმარისია $M\xi_n = a$ იყოს სასრული.

დამტკიცება. საკმარისობა. შემოვიღოთ ე.წ. „წაკვეთილი" შემთხვევითი სიდიდეები:

$$\eta_n = \begin{cases} \xi_n, & \text{თუ } |\xi_n| \le n, \\ 0, & \text{თუ } |\xi_n| > n. \end{cases}$$

ავღნიშნოთ

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, \quad \overline{\zeta}_n = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n.$$

შემთხვევითი სიდიდეები $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ დამოუკიდებელია. ცხადია ტოლობა:

$$\frac{\zeta_n}{n} - a = E_1 + E_2 + E_3,$$

$$E_1 = \frac{\zeta_n - \overline{\zeta}_n}{n},$$

$$E_2 = \frac{\overline{\zeta}_n - M\overline{\zeta}_n}{n},$$

$$E_3 = \frac{M\overline{\zeta}_n}{n} - a.$$

თეორემის სამართლიანობა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ $E_i \xrightarrow{\text{თ.ა}} 0$, i=1, 2, 3.

E_3 არაშემთხვევითია და შტოლცის[1] თეორემის ძალით

$$\lim_{n\to\infty} E_3 = -\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k I_{\{\omega:|\xi_k|<k\}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} E_3 = -\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k I_{\{\omega:|\xi_k|<k\}} = -\lim_{n\to\infty} M\xi_n I_{\{\omega:|\xi_n|\geq n\}} =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq n} x dF_{\xi_1}(x) = 0.$$

აღვნიშნოთ

$$A_n=\{\omega:\xi_n(\omega)\neq\eta_n(\omega)\}.$$

გვაქვს

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega: |\xi_n(\omega)| > n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega: |\xi_1| > n\},$$

---

[1] შტოლცის თეორემა. ვთქვათ, $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ რიცხვითი მიმდევრობებია. თუ $y_{n+1}>y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ და არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n)$ და ადგი- ლი აქვს ტოლობას $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

სადაც უკანასკნელი მწკრივი კრებადია $M\xi_1$ სასრულობის გამო (იხ. ლემა 5.1), ამიტომ ბორელ–კანტელის თეორემის ძალით მხოლოდ სასრული რიცხვი n ნომრებისათვის $\eta_n \neq \xi_n$. ამგვარად, $E_1 \xrightarrow{\text{თ.ა}} 0$. დაგვრჩა ვაჩვენოთ $E_2 \xrightarrow{\text{თ.ა}} 0$. გამოვიყენოთ თეო–რემა 5.2. ამისათვის დავამტკიცოთ, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\eta_n}{n^2} < \infty .$$

გვაქვს

$$D\eta_n \le M\eta_n^2 = \int_{-n}^{n} x^2 dF_{\xi_1}(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{-n}^{n} x^2 dF_{\xi_1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1<|x|\le k} x^2 dF_{\xi_1}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1<|x|\le k} x^2 dF_{\xi}(x) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1<|x|\le k} |x| dF_{\xi_1}(x) k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} .$$

ვინაიდან

$$k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le k\left(\frac{1}{k^2} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \le k\left(\frac{1}{k^2} + \int_{k}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \right) =$$

$$= k\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} \right) \le c = \text{const} ,$$

ხოლო

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1<|x|\le k} |x| dF_{\xi_1}(x) = M|\xi_1| < \infty ,$$

ამიტომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} D\eta_n < \infty .$$

ამგვარად, თეორემა 5.2-ის ძალით

$$E_2 \xrightarrow{\text{თ.ა}} 0 .$$

აუცილებლობა. თუ $\dfrac{\zeta_n}{n} \xrightarrow{\text{თ.ა}} a$, მაშინ

$$\frac{\xi_n}{n} = \frac{\zeta_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{\zeta_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{\text{თ.ა}} 0,$$

ე.ი. 1-ის ტოლი ალბათობით ადგილი აქვს მხოლოდ სასრულ რიცხვ $\left\{\omega : \left|\dfrac{\xi_n(\omega)}{n}\right| > 1\right\}$ ხდომილობებს. ბორელ-კანტელის თეორემის თანახმად აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega : |\xi_n(\omega)| > n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega : |\xi_1(\omega)| > n\} < \infty.$$

მაშასადამე, ამ პარაგრაფის ლემის ძალით $M\xi_1$ სასრულია. ▲

შედეგი. დამტკიცებული თეორემიდან ტრივიალურად გამომდინარეობს ბორელის თეორემა.

თავი VI

ზღვარითი თეორემები ბერნულის სქემაში

როგორც ვიცით, ბერნულის ცდები ისეთი დამოუკიდებელი ცდებია, რომლებსაც ორ-ორი შედეგი აქვთ — „წარმატება“ (1) და „მარცხი“ (0). „წარმატების“ ალბათობა **p** ცდიდან ცდამდე უცვლელია. აღვნიშნოთ S_n-ით „წარმატებათა“ რაოდენობა **n** დამოუკიდებელ ცდაში, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ $S_n=k$, $k=0,1,2,\dots,n$. გამოითვლება ფორმულით:

$$b(k;n,p)=P\{S_n=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}. \qquad (1.1)$$

(1.1) ფორმულას მარტივი სახე აქვს, მაგრამ მისი გამოყენება $P\{S_n=k\}$ ალბათობის გამოსათვლელად დიდი **n** და **k**-თვის, ცხადია, სიძნელეებთან არის დაკავშირებული. უფრო მეტი სიძნელე წარმოიშობა, როდესაც საჭიროა გამოვთვალოთ ბერნულის სქემასთან დაკავშირებული რაიმე რთული ხდომილობის ალბათობა. ასე, მაგალითად, ხშირად საინტერესოა S_n-ის რაიმე $[k_1, k_2]$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობის ცოდნა:

$$P\{k_1\le S_n\le k_2\}=\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}. \qquad (1.2)$$

რომელიც გრძელი $[k_1,k_2]$ ინტერვალისა და დიდი **n**-თვის საკმაოდ მძიმე გამოსათვლელია. მაგალითად, ვთქვათ, $n=300$, $k_1=200$, $k_2=250$; მაშინ უნდა გამოვიანგარიშოთ ისეთი სახის ალბათობანი, როგორიც არის $b(k_1, k_2, p)$ და შემდეგ ყველა ალბათობა შევკრიბოთ, მაგრამ ამას ძალიან დიდი დრო დასჭირდება.

ჩვენი მიზანია ამ თავში მოვიყვანოთ ასიმპტოტური ფორმულები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს მიახლოებით გამოვთვალოთ (1.1) და (1.2) ალბათობები n, k, k_1 და k_2-ის დიდი მნიშვნელობებისათვის. ასეთ მიახლოებით ფორმულებს გვაძლევს ზ ღ ვ ა რ ი თ ი თ ე ო რ ე მ ე ბ ი, რომლებიც მუავრ-ლაპლასისა და პუასონის სახელთან არის დაკავშირებული.

§1. პუასონის თეორემა

განვიხილოთ ბერნულის ცდათა სერიების მიმდევრობა: **n**-ურ სერიაში წარმატების ალბათობა იყოს p_n, ე.ი. დამოკიდებული იყოს სერიის ნომერზე, მაშინ

$$\mathbf{P(S_n = k) = b(k, n, p_n).}$$

თეორემა 1.1. (პუასონის თეორემა). ვთქვათ, $n\to\infty$ და $p_n\to 0$ ისე, რომ $np_n\to\lambda$, სადაც λ ფიქსირებული დადებითი რიცხვია. მაშინ ნებისმიერი ფიქსირებული k რიცხვისათვის, $k=0, 1, 2, \ldots$, როცა $n\to\infty$

$$b(k,n,p_n) \to \Pi(k,\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \qquad (1.3)$$

დამტკიცება. რადგან

$$np_n\to\lambda\,,$$

ამიტომ

$$p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

ცხადია, რომ

$$b(k,n,p_n) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^k (1-p_n)^{-k}\left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}(1+o(1))^k\left(1-\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n (1-p_n)^{-k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \quad (1.4)$$

თუ გამოვიყენებთ ანალიზიდან ცნობილ ფაქტს:

$$\left(1+\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to e^x,$$

როცა $n\to\infty$, (1.4)-დან მივიღებთ:

$$\lim_{n\to\infty} b(k,n,p_n) = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}(1+o(1))^k \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}(1-p_n)^{-k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \qquad \blacktriangle$$

შევნიშნოთ, რომ $\Pi(k, np_n)\to\Pi(k, \lambda)$, როცა $n\to\infty$, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}(b(k,n,p_n) - \Pi(k,np_n)) = 0. \qquad (1.5)$$

(1.5) თანაფარდობაში ცნობილია კრებადობის სიჩქარე:

$$\max_{0\le k\le n}\left|b(k,n,p_n)-\Pi(k,np_n)\right| \le \frac{a^2}{n}, \qquad a = np_n.$$

ადვილი დასადგენია, რომ $\Pi(k, \lambda)$, $k=0, 1, \dots$ სიდიდეები აკმაყოფილებს

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Pi(k,\lambda)=1$$

ტოლობას. შევისწავლოთ $\Pi(k, \lambda)$-ს ყოფაქცევა, როგორც k-ს ფუნქცია. ამ მიზნით განვიხილოთ ფარდობა:

$$\frac{\Pi(k,\lambda)}{\Pi(k-1,\lambda)} = \quad = \frac{\lambda}{k}.$$

როგორც ჩანს, თუ $k>\lambda$, მაშინ $\Pi(k, \lambda)<\Pi(k-1, \lambda)$, თუკი $k<\lambda$, მაშინ $\Pi(k,\lambda)>\Pi(k-1,\lambda)$, დაბოლოს, თუ $k=\lambda$, მაშინ $\Pi(k,\lambda)=$ $=\Pi(k-1,\lambda)$. აქედან შემდეგი დასკვნის გაკეთება შეიძლება: $\Pi(k,\lambda)$ თავიდანვე k-ს ზრდასთან ერთად იზრდება მანამ, სანამ k არ გახდება λ-ს მთელი ნაწილის ტოლი; ამ უკანასკნელი მნიშვნელობისათვის $\Pi(k,\lambda)$ მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს, ხოლო შემდეგ კი იწყებს კლებას. თუ λ მთელი რიცხვია, მაშინ $\Pi(k, \lambda)$-ს აქვს ორი მაქსიმალური მნიშვნელობა: როცა $k=\lambda$-ს და როცა $k=\lambda-1$-ს.

მაგალითი: ცალკეული გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,001. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 5000 გასროლისას მიზანს ორჯერ მაინც მოხვდება.

ამოხსნა. ყოველი გასროლა მივიღოთ ცდად, ხოლო მიზანში მოხვედრა — „წარმატებად“. უნდა გამოვთვალოთ ალბათობა $P\{S_n \geq 2\}$, სადაც S_n წარმატებათა რაოდენობაა $n=5000$ დამოუკიდებელ ცდაში. ამ ალბათობის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ პუასონის (1.3) ასიმპტოტური ფორმულა. განხილულ მაგალითში $\lambda = np = 5$ და საძიებელი $P\{S_n \geq 2\}$ ალბათობა ტოლია

$$P\{S_n \geq 2\} = \sum_{k=2}^{\infty} P_n(k) = 1 - P_n(0) - P_n(1),$$

პუასონის თეორემის ძალით

$$P_n(0) \approx \Pi(0,5) = e^{-5}, \; P_n(1) \approx \Pi(1,5) = 5e^{-5}.$$

ამგვარად,

$$P\{S_n \geq 2\} \approx 1 - 6e^{-5} \approx 0,9596.$$

ზუსტი ფორმულით გამოთვლა გვაძლევს:

$$b(0;\, 5000;\, 0,001) \approx 0,0067, \; b(1;\, 5000;\, 0,001) \approx 0,0335,$$

და, მაშასადამე,

$$P\{S_n \geq 2\} = 0,9597.$$

ამგვარად, ასიმპტოტური ფორმულით სარგებლობისას დაშვებული ცდომილება გამოსათვლელი სიდიდის 0,01%-ზე ნაკლებია.

§2. მუავრ-ლაპლასის ლოკალური ზღვარითი თეორემა

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p}; \qquad p^* = \frac{k}{n}.$$

თეორემა 2.1. როცა $n \to \infty$, $k \to \infty$ და $n-k \to \infty$, მაშინ

$$b(k,n,p) = P\{S_n = k\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}} \exp(-nH(p^*)\left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right) + 0\left(\frac{1}{k}\right) + 0\left(\frac{1}{n-k}\right)\right). \quad (2.1)$$

დამტკიცება. ამ თეორემების დასამტკიცებლად ვისარგებლოთ სტირლინგის ასიმპტოტური ფორმულით: როცა $m\to\infty$, მაშინ

$$m! = \sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m} e^{\theta_m}, \qquad \theta_m = 0\left(\frac{1}{m}\right).$$

გვაქვს

$$P\{S_n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\, \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} p^k (1-p)^{n-k} e^{\theta_n - \theta_k - \theta_{n-k}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n p^*(1-p^*)}} \exp\{-n(p^* \ln p^* + (1-p^*)\ln(1-p^*) -$$

$$- p^* \ln p - (1-p^*)\ln(1-p))\} \exp(\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n p^*(1-p^*)}} \exp(-nH(p^*)\left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right) + 0\left(\frac{1}{k}\right) + 0\left(\frac{1}{n-k}\right)\right). \ \blacktriangle$$

შენიშვნა. როცა $n\to\infty$, $k\to\infty$ და $n-k\to\infty$, მაშინ (2.1) თანაფარდობიდან მიიღება $b(k, n, p)$-სათვის ასიმპტოტური ფორმულა:

$$b(k,n,p) = P\{S_n = k\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n p^*(1-p^*)}} e^{-nH(p^*)}.$$

აღნიშვნა $\alpha_n \sim \beta_n$, სადაც $\{\alpha_n\}$ და $\{\beta_n\}$ – ორი რიცხვითი მიმდევრობაა, ნიშნავს $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$ თანაფარდობის შესრულებას.

თეორემა 2.2. (მუავრ-ლაპლასის ლოკალური ზღვარითი თეორემა). თუ $0<p<1$ და $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $q=1-p$, მაშინ

$$b(k,n,p) = P\{S_n = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

როცა $n\to\infty$, (2.2)

თანაბრად ყველა **k**-თვის, რომელთა შესაბამისი **x** რიცხვები რაიმე სასრულ **[*a*,b]** ინტერვალშია მოთავსებული.

დამტკიცება. შევამოწმოთ, სრულდება თუ არა თეორემა 1-ის პირობები: **k→∞** და **n-k→∞**. მართლაც, ცხადია, რომ

$$\mathbf{k = np + x\sqrt{npq} = np\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right),} \qquad (2.3)$$

$$\mathbf{n - k = nq - x\sqrt{npq} = nq\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).}$$

რადგან **x** სასრულ ინტერვალში იცვლება, ამიტომ **k→∞** და **n-k→∞**, როცა **n→∞**. ეს გვაძლევს საშუალებას დავწეროთ:

b(k,n,p) =

$$\mathbf{= \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}}\exp(-nH(p^*)\left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right) + 0\left(\frac{1}{k}\right) + 0\left(\frac{1}{n-k}\right)\right).} \qquad (2.4)$$

ვინაიდან $x \in [a,b]$, (2.3)-დან მივიღეთ:

$$\mathbf{k \ge np\left(1 + \mathit{a}\sqrt{\frac{q}{np}}\right), \ \ n - k \ge nq\left(1 - b\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).}$$

ე.ი.

$$\mathbf{0\left(\frac{1}{k}\right) + 0\left(\frac{1}{n-k}\right) = 0\left(\frac{1}{n}\right).} \qquad (2.5)$$

თანაბრად ყველა **x**-თვის **[*a*,b]**-დან. ასევე, თუ გამოვიყენებთ (2.3) ტოლობებს, მივიღებთ:

$$\mathbf{p^* = \frac{k}{n} = p\left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right), \ q^* = \frac{n-k}{n} = q\left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right),}$$

ე.ი. $$\mathbf{\frac{1}{\sqrt{np^*q^*}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right), \ q^* = 1 - p^*,} \qquad (2.6)$$

თანაბრად ყველა **x**-თვის **[*a*,b]**-დან.

$H(x)$ ფუნქცია ანალიზურია $(0,1)$ ინტერვალში და

$$H'(x) = \ln\frac{x}{p} - \ln\frac{1-x}{1-p}, \quad H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}. \qquad (2.7)$$

ვინაიდან $p^* - p \to 0$, როცა $n \to \infty$, ამიტომ დავწერთ:

$$H(p^*) = H(p) + H'(p)(p - p^*) +$$

$$+\frac{1}{2}H''(p)(p^* - p)^2 + 0(|p^* - p|^3). \qquad (2.8)$$

(2.7)-ის თანახმად,

$$H(p) = H'(p) = 0 \text{ და } H''(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{pq},$$

ამიტომ (2.8) მიიღებს სახეს:

$$H(p^*) = \frac{1}{2pq}(p^* - p)^2 + 0(|p^* - p|^3). \qquad (2.9)$$

მაგრამ

$$p^* - p = \frac{k - np}{n} = x\sqrt{\frac{pq}{n}},$$

ხოლო

$$0(|p^* - p|^3) = 0(n^{-3/2})$$

თანაბრად ყველა x-თვის $[a,b]$ ინტერვალიდან. თუ ამათ გავითვალისწინებთ, (2.9)-დან გვექნება:

$$H(p^*) = \frac{x^2}{2n} + 0(n^{-3/2}) \qquad (2.10)$$

დაბოლოს, (2.5), (2.6) და (2.10) ჩავსვათ (2.4)-ში, მივიღებთ:

$$b(k,n,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}(1 + 0(n^{-1}))e^{-\frac{x^2}{2} + 0(n^{-1/2})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{x^2}{2}}(1 + 0(n^{-1/2}))$$

თანაბრად ყველა x-თვის [a,b]–დან. ამრიგად, ჩვენ b(k,n,p)-სთვის მივიღეთ

$$b(k,n,p) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

ასიმპტოტური ფორმულა, სადაც

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad \blacktriangle$$

§3. მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური ზღვარითი თეორემა

$P\{k_1 \le S_n \le k_2\}$ ალბათობის მიახლოებით გამოსათვლელად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს შემდეგი

თეორემა 3.1. (მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური ზღვარითი თეორემა). n–ის უსასრულოდ ზრდისას

$$P\{a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx \to 0$$

თანაბრად ყველა a და b–სათვის $(-\infty \le a < b \le \infty)$.

დამტკიცება. თავდაპირველად დავუშვათ, რომ $|a| \le c$, $|b| \le c$, სადაც c რაიმე დადებითი სასრული რიცხვია. ვთქვათ, k_1 ისეთი უმცირესი მთელი რიცხვია, რომ $k_1 \ge np + a\sqrt{npq}$, ხოლო k_2 ისეთი უდიდესი მთელი რიცხვია, რომ $k_2 \le np + b\sqrt{npq}$.

მაშინ

$$P\{a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} P\{S_n = k\}. \qquad (3.1)$$

დაშვების თანახმად, a და b სასრული რიცხვებია, ე.ი. შესრულებულია თეორემა 2.1–ის პირობა, ამიტომ შეგვიძლია (3.1)–ში $P\{S_n = k\}$ შევცვალოთ (2.2)–ით:

$$P\{a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} \Delta x_k (1 + 0(n^{-\frac{1}{2}})), \qquad (3.2)$$

სადაც

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{და} \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

(3.2)-ის მარჯვნივ დგას ინტეგრალური ჯამი, რომელიც a და b-ს მიმართ თანაბრად კრებადია $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx$ ინტეგრალისაკენ, როცა $n \to \infty$. ვთქვათ, ახლა a და b ნებისმიერია. აღვნიშნოთ

$$\xi_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}.$$

ცხადია, რომ

$$P\{|\xi_n| > c\} = 1 - P\{|\xi_n| \le c\}. \qquad (3.3)$$

ცნობილია, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi},$$

ამიტომ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-c}^{c} e^{-x^2/2}dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>c} e^{-x^2/2}dx. \qquad (3.4)$$

(3.3) და (3.4)-დან მივიღებთ:

$$\left| P\{|\xi_n| > c\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>c} e^{-x^2/2}dx \right| = \left| P\{|\xi_n| \le c\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-c}^{c} e^{-x^2/2}dx \right|. \qquad (3.5)$$

ახლა, ვთქვათ, ε ნებისმიერი მცირე დადებითი რიცხვია, მოიძებნება ისეთი c რიცხვი (ეს რიცხვი დავაფიქსიროთ), რომ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>c} e^{-x^2/2}dx < \frac{\varepsilon}{8}. \qquad (3.6)$$

ახლახან დამტკიცებულის თანახმად, მოიძებნება ისეთი n_0 რიცხვი, რომ ყოველი $n \ge n_0$-სთვის შესრულდება უტოლობა:

$$\left| P\{|\xi_n| \le c\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-c}^{c} e^{-x^2/2}dx \right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

აქედან, (3.3) და (3.6)-ის ძალით

$$P\{|\xi_n| > c\} \le \frac{\varepsilon}{4}, \qquad n \ge n_0 . \tag{3.7}$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი $[a,b]$ ინტერვალი და აღვნიშნოთ

$$[A,B]= =[a,b]\cap[-C,C],$$

რადგან $-C\le A<B\le C$, ამიტომ, როგორც ჩვენ ეს უკვე დავამტკი-ცეთ, მოიძებნება ისეთი n_1 რიცხვი, რომ ყოველი $n>n_1$-სათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left| P\{\xi_n \in [A,B]\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B e^{-x^2/2}dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.8}$$

(3.6) – (3.8)-ის ძალით, უტოლობიდან

$$\left| P\{\xi_n \in [a,b]\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx \right| \le$$

$$\le \left| P\{|\xi_n| > c\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>c} e^{-x^2/2}dx \right| + \left| P\{\xi_n \in [A,B]\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B e^{-x^2/2}dx \right|$$

მივიღებთ, რომ

$$\left| P\{\xi_n \in [a,b]\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx \right| < \varepsilon$$

თანაბრად ყველა a და b-სათვის ($a\le b$). ▲

თავი VII

მახასიათებელი ფუნქციები

§1. მახასიათებელი ფუნქციის განსაზღვრა და მისი უმარტივესი თვისებები

ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ბევრი ამოცანა დაკავშირებულია დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის შესწავლაზე. ჩვენ უკვე ნაწილობრივ გავეცანით ასეთ ამოცანებს, როდესაც განვიხილავდით დიდ რიცხვთა კანონის შესაბამის თეორემებს. მეტად მნიშვნელოვან ამოცანას წარმოადგენს მოვძებნოთ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ჯამის განაწილება და შევისწავლოთ მისი ყოფაქცევა, როდესაც შესაკრებთა რიცხვი საკმარისად დიდია. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების მოძებნა შეიძლება ყოველთვის შესაკრებთა განაწილების კანონით, კომპოზიციის ფორმულის გამოყენებით. ცხადია, შემთხვევით სიდიდეთა ჯამების ამ გზით შესწავლა მეტად რთულ გამოთვლებთან არის დაკავშირებული. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა შეჯამებადობის საკითხი შედარებით მარტივად ხერხდება ე.წ. მახასიათებელ ფუნქციათა მეთოდით, ანდა, როგორც მას უწოდებენ, ფურიეს გარდაქმნათა მეთოდით. მისი განსაზღვრისათვის ჩვენ დაგვჭირდება განვსაზღვროთ მათემატიკური ლოდინის ცნება კომპლექსურ შემთხვევით სიდიდეებზე. კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება $\zeta(\omega)=\xi(\omega)+i\eta(\omega)$ სიდიდეს, სადაც $\xi(\omega)$ და $\eta(\omega)$ სასრული მათემატიკური ლოდინის მქონე ნამდვილი შემთხვევითი სიდიდეებია. $\zeta=\zeta(\omega)$ კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება

$$\mathbf{M}\zeta = \mathbf{M}\xi + \mathbf{i}\mathbf{M}\eta \tag{1.1}$$

ჯამს. მათემატიკური ლოდინის ძირითადი თვისებები ბუნებრივად გადაიტანება (1.1) შემთხვევაზე, შევჩერდეთ მხოლოდ ორი თვისების დამტკიცებაზე.

თუ $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, $k=\overline{1,s}$ დამოუკიდებელ კომპონენტიანი შემთხვევითი სიდიდეებია, (ζ_k, $k=\overline{1,s}$ კომპლექსურ შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა ნიშნავს (ξ_k, η_k) $k=\overline{1,s}$, შემთხვევით ვექტორთა დამოუკიდებლობას), მაშინ

$$M(\zeta_1 \cdot \ldots \cdot \zeta_s) = \prod_{k=1}^{s} M\zeta_k . \qquad (1.2)$$

მართლაც, სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $s = 2$; ζ_1 , ζ_2 -ის დამოუკიდებლობის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ξ_i და η_j, $i\neq j$, შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია,

ამიტომ

$$M(\xi_i \cdot \eta_j) = M\xi_i M\eta_j.$$

ამავე მიზეზით

$$M\xi_1\xi_2 = M\xi_1 M\xi_2 \text{ და } M\eta_1\eta_2 = M\eta_1 M\eta_2.$$

გვაქვს

$$M\zeta_1\zeta_2 = M((\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2) + i(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)) = M(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2) +$$

$$+ iM(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) = (M\xi_1 + iM\eta_1)(M\xi_2 + iM\eta_2) = M\zeta_1 M\zeta_2 . \quad \blacktriangle$$

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი უტოლობა

$$|M\zeta| \le M|\zeta|. \qquad (1.3)$$

მართლაც, ვთქვათ, ζ მარტივი კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდეა, ე.ი. ის ღებულობს სასრულ რიცხვ $\zeta = z_k = x_k + iy_k$ მნიშვნელობებს, ამასთან,

$$P\{\omega: \zeta(\omega) = z_k\} = p_k.$$

ამ შემთხვევაში (1.3) არის კომპლექსური რიცხვის მოდულის თვისების პირდაპირი შედეგი:

$$|M\zeta| \le \sum_k |z_k| p_k = M|\zeta|. \qquad (1.4)$$

ვთქვათ, ახლა

$$\xi = \xi^{+} - \xi^{-}, \qquad \eta = \eta^{+} - \eta^{-},$$

ხოლო $\xi_n^{\pm}, \eta_n^{\pm}$ შესაბამისად $\xi^{\pm}, \eta^{\pm}$-სკენ კრებადი ზრდადი მარტივ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა.

ცხადია, რომ

$$\xi_n = \xi_n^{\ +} - \xi_n^{\ -} \to \xi, \ \eta_n = \eta_n^{\ +} - \eta_n^{\ -} \to \eta$$

და, მაშასადამე, $\zeta_n \to \zeta$; $M\xi$ და $M\eta$-ს განსაზღვრის ძალით დავწერთ

$$M\zeta = \lim_{n\to\infty} M\zeta_n,$$

სადაც $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$.

შემდეგ (1.4)-ის ძალით

$$\left|M\zeta_n\right| \le M\left|\zeta_n\right| \text{ ნებისმიერი } n\text{-სათვის.}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} M\left|\zeta_n\right| = M\left|\zeta\right|.$$

მართლაც,

$$\left|\zeta_n\right| \le \left|\xi_n\right| + \left|\eta_n\right| = \xi_n^{+} + \xi_n^{-} + \eta_n^{+} + \eta_n^{-} \le \xi^{+} + \xi^{-} + \eta^{+} + \eta^{-} = \left|\xi\right| + \left|\eta\right|$$

და $\zeta_n \to \zeta$-დან მაჟორირებული კრებადობის ლებეგის თეორემის ძალით მივიღებთ, რომ

$$M\left|\zeta_n\right| \to M\left|\zeta\right|. \qquad \blacktriangle$$

განსაზღვრა 1.1. ξ შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია ეწოდება ნამდვილი t ცვლადის

$$\varphi_{\xi}(t) = Me^{it\xi} \tag{1.5}$$

ფუნქციას. ეილერის $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ფორმულის თანახმად (1.5)-დან მივიღებთ:

$$\varphi_{\xi}(t) = M\cos t\xi + iM\sin t\xi. \tag{1.6}$$

თუ $F_\xi(x)$ არის ξ-ის განაწილების ფუნქცია, ხოლო $f_\xi(x)$ მისი სიმკვრივე (თუ ის არსებობს!), მაშინ მათემატიკური ლოდინის გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულიდან დავწერთ:

$$\varphi_\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF_\xi(x),\quad \varphi_\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f_\xi(x)dx. \tag{1.7}$$

თუ ξ-ის განაწილება დისკრეტულია, მაშინ

$$\varphi_\xi(t)=\sum_k e^{itx_k}P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}. \tag{1.8}$$

(1.7) და (1.8)-დან ჩანს, რომ $\varphi_\xi(t)$ მახასიათებელი ფუნქცია სავსებით განისაზღვრება ξ შემთხვევითი სიდიდის $F_\xi(x)$ განაწილების ფუნქციით.

მახასიათებელი ფუნქციის თ ვ ი ს ე ბ ე ბ ი:

1^0. $\varphi_\xi(0)=1$ და $|\varphi_\xi(t)|\le 1,\ t\in R^{(1)}$.

დამტკიცება. ცხადია, რომ $\varphi_\xi(0)=1$. ვინაიდან $|e^{it\xi}|=1$, (1.3) უტოლობიდან მივიღებთ:

$$|\varphi_\xi(t)|=|Me^{it\xi}|\le M|e^{it\xi}|=1. \qquad \blacktriangle$$

2^0. $\varphi_\xi(t)$ მახასიათებელი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია მთელ წრფეზე.

ამ თვისების დამტკიცებისათვის თავდაპირველად დავადგინოთ შემდეგი ლემის სამართლიანობა, რომელსაც ჩვენ შემდეგშიაც გამოვიყენებთ.

ლემა 1.1. ნამდვილი θ-ს და ნებისმიერი $n\ge 1$ -თვის ადგილი აქვს

$$\left|e^{i\theta}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(i\theta)^k}{k!}\right|\le\frac{|\theta|^n}{n!} \tag{1.9}$$

უტოლობას.

დამტკიცება. (1.9) დავამტკიცოთ ინდუქციის წესით. ვთქვათ, $n=1$ და ვაჩვენოთ, რომ

$$|e^{i\theta}-1|\le|\theta|.$$

მართლაც,

$$\frac{1}{i}(e^{i\theta}-1)=\int_0^{\theta} e^{iu}du, \text{ ამიტომ } \left|e^{i\theta}-1\right|\le|\theta|.$$

ვთქვათ, ახლა ლემა სამართლიანია $n=m-1$-სთვის და ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა $n=m$-სთვისაც. მართლაც,

$$\frac{1}{i}\left(e^{i\theta}-\sum_{k=0}^{m}\frac{(i\theta)^k}{k!}\right)=\int_0^{\theta}\left(e^{iu}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(iu)^k}{k!}\right)du,$$

ამიტომ

$$\left|e^{i\theta}-\sum_{k=0}^{m}\frac{(i\theta)^k}{k!}\right|=\left|\int_0^{\theta}\left(e^{iu}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(iu)^k}{k!}\right)du\right|\le\int_0^{|\theta|}\frac{|u|^m}{m!}du=\frac{|\theta|^{m+1}}{(m+1)!}. \quad \blacktriangle$$

2^0-ის **დამტკიცება.** განვიხილოთ $A=\{\omega:|\xi|<X\}$ ხდომილობა. გვაქვს

$$|\varphi_\xi(t+h)-\varphi_\xi(t)|=\left|Me^{i(t+h)\xi}-Me^{it\xi}\right|=\left|Me^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)\right|=$$

$$=\left|Me^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)I_A+Me^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)I_{\overline{A}}\right|\le M_1+M_2,$$

სადაც

$$M_1=M\left|e^{ih\xi}-1\right|I_A,\quad M_2=M\left|e^{ih\xi}-1\right|I_{\overline{A}},$$

ხოლო I_A და $I_{\overline{A}}$, A და $\overline{A}$ ხდომილობების ინდიკატორებია. შევაფასოთ ცალ-ცალკე M_1 და M_2; M_1-ის შესაფასებლად გამოვიყენოთ ლემა 1.1.

გვაქვს,

$$M_1\le|h|M|\xi|I_A\le X|h|MI_A=X|h|P(A)\le X|h|.$$

რადგანაც $\left|e^{i\xi h}-1\right|\le 2$, ამიტომ

$$M_2\le 2MI_{\overline{A}}=2P(\overline{A})=2P\{\omega:|\xi(\omega)\ge X\}|=$$

$$=2(1-P\{\omega:|\xi(\omega)|<X\})=2(1-F_\xi(X)+F_\xi(-X)).$$

ვთქვათ, $\varepsilon>0$. თავდაპირველად ავარჩიოთ ისეთი $X = X_0$, რომ

$$1 - F_\xi(X_0) + F_\xi(-X_0) < \frac{\varepsilon}{4}$$

(ეს ყოველთვის შეიძლება,ვინაიდან $F_\xi(X) \to 1$ და $F_\xi(-X) \to 0$, როცა $X \to \infty$), ე.ი. $M_2 \le \frac{\varepsilon}{2}$, ხოლო შემდეგ h ისეთი ავიღოთ, რომ $|h| \le \delta = \varepsilon / 2X_0$, გვექნება $M_1 \le \frac{\varepsilon}{2}$.

მაშასადამე,

$$|\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)| < \varepsilon, \text{ როცა } |h| \le \delta. \qquad \blacktriangle$$

3^0. თუ $\eta = \alpha\xi + \beta$, სადაც α და β ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ

$$\varphi_\eta(t) = e^{i\beta t}\varphi_\xi(\alpha t).$$

მართლაც,

$$\varphi_\eta(t) = Me^{it\eta} = Me^{it(\alpha\xi+\beta)} = e^{it\beta}\varphi_\xi(\alpha t). \qquad \blacktriangle$$

4^0. თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k}(t), \qquad (1.10)$$

ე.ი. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის მახასიათებელი ფუნქცია ცალ-ცალკე შესაკრებთა მახასიათებელ ფუნქციათა ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობიდან გამომდინარეობს $e^{it\xi_1}, e^{it\xi_2}, \ldots, e^{it\xi_n}$ კომპლექსურ შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა; მათემატიკური ლოდინის მე-6 თვისების ძალით მივიღებთ:

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(t) = Me^{it\sum_{k=1}^{n}\xi_k} = M\prod_{k=1}^{n}e^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^{n}Me^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k}(t). \qquad \blacktriangle$$

5^0. $\varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)}$.

დამტკიცება გამომდინარეობს $\overline{e^{it\xi}} = e^{-it\xi}$ ტოლობიდან და 3^0–თვისებიდან.

6^0. აღვნიშნოთ $a_n = M\xi^n$. თუ a_n სასრულია, მაშინ არსებობს n რიგამდე ყველა $\varphi_\xi^{(k)}(t)$ წარმოებული $k\le n$ და ადგილი აქვს

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k M(\xi^k) \qquad (1.11)$$

ტოლობას. გარდა ამისა, სამართლიანია

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} a_k + R_n(t) \qquad (1.12)$$

გაშლა, სადაც $R_n(t) = o(t^n)$, როცა $t \to 0$.

დამტკიცება. თუ ჩვენ ფორმალურად გავაწარმოებთ (1.5)-ს k–ჯერ, მივიღებთ ტოლობას

$$\varphi_\xi^{(k)}(t) = i^k M\xi^k e^{it\xi} = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} dF_\xi(x). \qquad (1.13)$$

თუ (1.13)–ში ჩავსვამთ $t=0$, მივიღებთ (1.11)-ს. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოების შესაძლებლობის სამართლიანობის დასადგენად გამოვიყენოთ ინდუქციის წესი. ვთქვათ, (1.13) ფორმულა სამართლიანია $k<n$-თვის და ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა $k+1$-თვის. ვინაიდან

$$\frac{\varphi_\xi^{(k)}(t+h) - \varphi_\xi^{(k)}(t)}{h} = i^k M\xi^k \frac{e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)}{h}, \qquad (1.14)$$

და

$$\left| \xi^k e^{it\xi} \frac{(e^{ih\xi}-1)}{h} \right| \le |\xi|^{k+1}, \ \ M|\xi|^{k+1} < \infty,$$

ამიტომ მაჟორირებული კრებადობის ლებეგის თეორემის ძალით (1.14)-ის მარჯვენა მხარეში მათემატიკური ლოდინის ნიშნის ქვეშ შეგვიძლია გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $h \to 0$. ამგვარად, ჩვენ დავამტკიცეთ (1.13)-ის სამართლიანობა $k+1$-თვის. (1.12)-ში $R_n(t)$

დამატებითი წევრის შესაფასებლად გამოვიყენოთ ამ პარაგრაფის ლემა 1.1. გვაქვს

$$\left|R_n(t)\right| = \left|M\left(e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(it\xi)^k}{k!}\right)\right| \le M\left|\left(e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(it\xi)^k}{k!}\right)\right| = L_1 + L_2,$$

სადაც

$$L_1 = M\left|e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(it\xi)^k}{k!}\right| I_A, \quad L_2 = M\left|e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(it\xi)^k}{k!}\right| I_{\bar{A}},$$

ხოლო ხდომილობა A იგივეა, რაც განსაზღვრული იყო 2^0 თვისების დამტკიცებისას. შევაფასოთ L_1 და L_2 ცალ-ცალკე:

$$L_1 \le M\frac{|t\xi|^{n+1}}{(n+1)!} I_A \le \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} X^{n+1},$$

$$L_2 \le M\left(\left|e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it\xi)^k}{k!}\right| + \frac{|t\xi|^n}{n!}\right) I_{\bar{A}} \le$$

$$\le 2|t|^n M|\xi|^n I_{\bar{A}} = 2\frac{|t|^n}{n!}\int_{|x|\ge X}|x|^n dF_\xi(x).$$

რადგან $|a_n| < \infty$, ამიტომ

$$\int_{|x|\ge X}|x|^n dF_\xi(x) \to 0, \text{ როცა } X\to\infty.$$

ვთქვათ, $\varepsilon>0$. ავარჩიოთ თავდაპირველად X ისეთი, რომ

$$\int_{|x|\ge X}|x|^n dF_\xi(x) < \frac{\varepsilon}{4},$$

ხოლო შემდეგ

$$\delta = \frac{(n+1)\varepsilon}{2X},$$

მაშინ $L_1 \le \frac{|t|^n}{n!}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$, როცა $|t| < \delta$ და $L_2 \le \frac{|t|^n}{n!}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$.

ამგვარად,

$$|R_n(t)| \le \frac{|t|^n}{n!} \cdot \varepsilon. \qquad \blacktriangle$$

§2. ზოგიერთი განაწილების მახასიათებელი ფუნქცია

1. *ბერნულის განაწილების მახასიათებელი ფუნქცია.* ვთქვათ, $\xi = S_n$, სადაც S_n ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეა:

$$S_n = \xi_1 + + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

სადაც $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და

$$P\{\omega : \xi_i(\omega)=1\}=p, \ P\{\omega : \xi_i(\omega)=0\}=1-p, \ i=1,2,\ldots,n.$$

მახასიათებელი ფუნქციის 4^0–თვისებების ძალით

$$\varphi_{S_n}(t) = (\varphi_{\xi_1}(t))^n,$$

სადაც

$$\varphi_{\xi_1}(t) = pe^{it} + q, \quad q = 1 - p.$$

მაშასადამე,

$$\varphi_{S_n}(t) = (pe^{it} + q)^n. \qquad (2.1)$$

(2.1) ფორმულის საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ S_n–ის მომენტები 6^0 თვისების ძალით.

ასე, მაგალითად,

$$MS_n = \frac{1}{i}\varphi'_{S_n}(0) = np.$$

ასევე გამოითვლება S_n–ის დისპერსია:

$$DS_n = npq.$$

2. *პუასონის განაწილების მახასიათებელი ფუნქცია.* ვთქვათ, ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პუასონის კა–ნონით:

$$P\{\omega : \xi(\omega) = n\} = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, \ n=0,1,\ldots$$

ფორმულა (1.7)-ის თანახმად

$$\varphi_\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{itn}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^n}{n!}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

აქედან მახასიათებელი ფუნქციის 6^0 თვისების ძალით

$$M\xi=\lambda,\ D\xi=\lambda.$$

3. *ნორმალური განაწილების მახასიათებელი ფუნ-ქცია.*

ვთქვათ, ξ შემთხვევით სიდიდეს აქვს $N(0,1)$ სტანდარტული ნორმალური განაწილება, ე.ი.

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

რადგანაც $\sin tx$ კენტი ფუნქციაა, ხოლო $\sin tx\cdot f_\xi(x)$ ინტეგრირებადი, ამიტომ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin txf_\xi(x)dx=0,$$

და, მაშასადამე,

$$\varphi_\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f_\xi(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cos txf_\xi(x)dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\sin txf_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\cos txf_\xi(x)dx. \qquad (2.2)$$

გავაწარმოოთ (2.2) ტოლობის ორივე მხარე t-თი:

$$\varphi'_\xi(t)=-\int_{-\infty}^{\infty}x\sin txf_\xi(x)dx.$$

ნაწილობითი ინტეგრირებით მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\varphi'_\xi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin txd(e^{-x^2/2})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin txe^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos txe^{-x^2/2}dx=-t\int_{-\infty}^{\infty}\cos txf_\xi(x)dx=-t\varphi_\xi(t).$$

თუ ამოვხსნით $\varphi'_\xi(t) = -t\varphi_\xi(t)$ დიფერენციალურ განტოლებას $\varphi_\xi(0)=1$ საწყისი პირობით, მივიღებთ, რომ

$$\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{2.3}$$

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა, როდესაც ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად $N(a, \sigma^2)$ პარამეტრებით, ე.ი.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

ცხადია, $\eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma}$ შემთხვევითი სიდიდე კვლავ განაწილებულია ნორმალურად $(0,1)$ პარამეტრებით. მახასიათებელი ფუნქციის 3^0 თვისებიდან, (2.3) ფორმულიდან და $\xi = \sigma\eta + a$ წარმოდგენიდან მივიღებთ

$$\varphi_\xi(t) = \exp\left(iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \tag{2.4}$$

აქედან (1.12) ფორმულის ძალით, დავწერთ

$$M\xi = a,\ D\xi = \sigma^2.$$

4. *(a,b) ინტერვალზე თანაბარი განაწილების მახასიათებელი ფუნქცია.*

თუ ξ შემთხვევითი სიდიდე თანაბრადაა განაწილებული (a,b) შუალედეში, მაშინ, როგორც ვიცით მისი სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \ge b. \end{cases}$$ ამრიგად,

$$\varphi_\xi(t) = \int_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}. \tag{2.5}$$

ვთქვათ, ახლა $a = -h;\ b = h$,
მაშინ

$$\varphi_\xi(t)=\frac{\sinh t}{ht}.$$

(2.5) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$M\xi=\frac{a+b}{2},$$

$$D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

§3. შებრუნების ფორმულა მახასიათებელი ფუნქციისათვის. ერთადერთობის თეორემა

როგორც ვნახეთ, ყოველ $F_\xi(x)$ განაწილების ფუნქციას შეესაბამება $\varphi_\xi(t)$ მახასიათებელი ფუნქცია. ისმის კითხვა: მახასიათებელი ფუნქციის საშუალებით აღდგება თუ არა განაწილების ფუნქცია და ეს აღდგენა ცალსახაა? ამ კითხვაზე დადებითი პასუხის გაცემა შემდეგი თეორემის საშუალებით ხერხდება.

თეორემა 3.1. (შებრუნების ფორმულა). თუ $F_\xi(x)$ განაწილების ფუნქციაა, ხოლო $\varphi_\xi(t)$ შესაბამისი განაწილების მახასიათებელი ფუნქცია, მაშინ $F_\xi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის ყოველი $\alpha<\beta$ წერტილისათვის

$$F_\xi(\beta)-F_\xi(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\sigma\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\xi(t)e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot\frac{e^{-it\beta}-e^{-it\alpha}}{-it}dt. \qquad (3.1)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, η_σ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა $(0,\sigma^2)$ პარამეტრებით, ხოლო მისი განაწილების ფუნქცია $\Phi_\sigma(x)$-ით აღვნიშნოთ.

დავუშვათ, რომ ξ და η_σ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და განვიხილოთ $\zeta_\sigma=\xi+\eta_\sigma$ ჯამი. ζ_σ-ს განაწილების ფუნქცია $F_\sigma(x)$-ით აღვნიშნოთ (იხ. თავი III, §6).

$$F_{\sigma}(x) = F_{\xi}(x) * \Phi_{\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi}(x-y)d\Phi_{\sigma}(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\sigma}(x-y)dF_{\xi}(y). \quad (3.2)$$

ვინაიდან ξ და η_σ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, ამიტომ მახასიათებელი ფუნქციის 4^0 თვისების ძალით დავწერთ:

$$\varphi_{\zeta_\sigma}(t) = \varphi_{\xi}(t)\varphi_{\eta_\sigma}(t).$$

(2.4) ფორმულის თანახმად,

$$\varphi_{\eta_\sigma}(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

ხოლო $\varphi_{\zeta_\sigma}(t)$ ფუნქცია ინტეგრებადია, ვინაიდან

$$\left|\varphi_{\zeta_\sigma}(t)\right| = \left|\varphi_{\xi}(t)\right|\left|\varphi_{\zeta_\sigma}(t)\right| \le \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right).$$

გვაქვს

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx)\varphi_{\zeta_\sigma}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx)\varphi_{\xi}(t)\varphi_{\eta_a}(t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A(x,y)dF_{\xi}(y),$$

სადაც

$$A(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(y-x)}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(\frac{x-y}{\sigma})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\right).$$

ამგვარად,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_{\zeta_\sigma}(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} dF_{\xi}(y). \quad (3.4)$$

განვიხილოთ (3.4) ტოლობა. თუ შევადარებთ (3.4) და (3.2) ტოლობებს, ვნახავთ, რომ (3.4)-ის მარჯვენა მხარე არის $F'_\sigma(x)$, ე.ი.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_{\zeta_\sigma}(t)dt = F'_\sigma(x). \tag{3.5}$$

აქედან ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ:

$$F_\sigma(\beta) - F_\sigma(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\xi(t)\exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)\left(\int_\alpha^\beta e^{-itx}dx\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\xi(t)\exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)\frac{e^{-it\beta} - e^{-it\alpha}}{-it}dt. \tag{3.6}$$

თეორემის დამტკიცების დამთავრებისათვის ისღა დაგვრჩენია ვაჩვენოთ, რომ $F_\xi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის ყოველი x წერტილისათვის

$$\lim_{\sigma\to 0} F_\sigma(x) = F_\xi(x). \tag{3.7}$$

ვაჩვენოთ (3.7). ვთქვათ, $\delta > 0$.

გვაქვს

$$\left|F_\sigma(x) - F_\xi(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}(F_\xi(x-y) - F_\xi(x))d\Phi_\sigma(y)\right| \le$$

$$\le \int_{|y|\le\delta}\left|F_\xi(x-y) - F_\xi(x)\right|d\Phi_\sigma(y) + \int_{|y|>\delta}\left|F_\xi(x-y) - F_\xi(x)\right|d\Phi_\sigma(y) \le$$

$$\le \sup_{|y|\le\delta}\left|F_\xi(x-y) - F_\xi(x)\right|\int_{|y|\le\delta}d\Phi_\sigma(y) + 2\int_{|y|>\delta}d\Phi_\sigma(y) = I_1 + I_2. \tag{3.8}$$

ყოველი დადებითი ε-სთვის შეიძლება შევარჩიოთ ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ

$$\sup_{|y|\le\delta}\left|F_\xi(x-y) - F_\xi(x)\right| \le \varepsilon,$$

ე.ი.

$$I_1 \le \varepsilon\int_{|y|\le\delta}d\Phi_\sigma(y) \le \varepsilon. \tag{3.9}$$

შემდეგ ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით დავწერთ:

$$I_2 = 2\int_{|y|\geq\delta} d\Phi_\sigma(y) = 2P\{x : |\eta_\sigma| \geq \delta\} \leq \frac{D\eta_\sigma}{\delta^2} = 2\sigma^2/\delta^2 < \varepsilon, \quad (3.10)$$

როცა $\sigma < \sigma_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\delta$.

(3.9) და (3.10)-ის გათვალისწინებით, (3.8)-დან მივიღებთ

$$|F_\sigma(x) - F_\xi(x)| \leq 2\varepsilon, \ \sigma < \sigma_0.$$

ამგვარად, თუ (3.6) ტოლობის ორივე მხარეს გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\sigma \to 0$, მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას. ▲

თეორემა 3.2. (ერთადერთობის თეორემა). შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია ცალსახად განსაზღვრავს მის განაწილებას.

დამტკიცება. (3.1) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $F_\xi(x)$-ის ყოველ უწყვეტობის წერტილზე

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to-\infty}\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\xi(t)e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{-it}dt,$$

სადაც $y\to-\infty$ $F_\xi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილთა სიმრავლეზე. ამგვარად, $F_\xi(x)$ მისი უწყვეტობის წერტილთა სიმრავლეზე ცალსახად გამოისახება $\varphi_\xi(t)$ მახასიათებელი ფუნქციით, ხოლო ვინაიდან ნებისმიერ y წერტილზე

$$F_\xi(y) = \lim_{x\uparrow y} F_\xi(x),$$

სადაც $x\uparrow y$ $F_\xi(x)$-ის უწყვეტობის წერტილებზე, ამიტომ $F_\xi(x)$ ცალსახად განისაზღვრება $\varphi_\xi(t)$-თი. ▲

მაგალითი 3.1. თუ ξ_1 და ξ_2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები განაწილებულია ნორმალურად, მაშინ $\xi_1 + \xi_2$ ჯამიც განაწილებულია ნორმალურად.

მართლაც, თუ

$$M\xi_1 = a_1, \qquad D\xi_1 = \sigma_1^2,$$
$$M\xi_2 = a_2, \qquad D\xi_2 = \sigma_2^2,$$

მაშინ

$$\varphi_{\xi_1}(t)=\exp(ita_1-\frac{\sigma_1^2t^2}{2}),\qquad \varphi_{\xi_2}(t)=\exp(ita_2-\frac{\sigma_2^2t^2}{2}).$$

მახასიათებელი ფუნქციის 4^0 თვისების თანახმად

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)=\varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t)=\exp(a_1+a_2)it-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}).$$

ეს კი წარმოადგენს მახასიათებელ ფუნქციას ისეთი ნორმალური განაწილებისა, რომლის მათემატიკური ლოდინი (a_1+a_2)–ის, ხოლო დისპერსია $(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$–ის ტოლია.

ერთადერთობის თეორემის საფუძველზე დავასკვნით, რომ $\xi_1+\xi_2$ ჯამის განაწილების ფუნქცია ნორმალურია. ▲

მაგალითი 3.2. დამოუკიდებელი ξ_1 და ξ_2 შემთხვევითი სიდიდეები პუასონის კანონის მიხედვით არიან განაწილებული, ამასთან,

$$P\{\omega:\xi_1(\omega)=k\}=\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!},$$

$$P\{\omega:\xi_2(\omega)=k\}=\frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!},\ k=0,1,2,\dots$$

დავამტკიცოთ, რომ $\xi=\xi_1+\xi_2$ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებული იქნება პუასონის კანონით $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ პარამეტრით.

$$\varphi_{\xi_1}(t)=\exp(\lambda_1(e^{it}-1)),$$

$$\varphi_{\xi_2}(t)=\exp(\lambda_2(e^{it}-1)).$$

მახასიათებელი ფუნქციის 4^0 თვისების ძალით გვექნება:

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)=\exp((\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)),\tag{3.11}$$

ე.ი. ჯამის მახასიათებელი ფუნქცია პუასონის კანონის მახასიათებელ ფუნქციას წარმოადგენს. ერთადერთობის თეორემის თანახმად, ერთადერთი განაწილება, რომლის მახასიათებელი ფუნქცია არის (3.11), პუასონის განაწილებაა, რომლისთვისაც

$$P\{\omega : \xi(\omega) = k\} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}, \ k\geq 0.$$

თეორემა 3.3. $\varphi_\xi(t)$ მახასიათებელი ფუნქცია ნამდვილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც შესაბამისი $F_\xi(x)$ განაწილების ფუნქცია სიმეტრიულია, ე.ი. $F_\xi(x) = 1 - F_\xi(-x+0)$ ან, თუ $F_\xi(x)$-ს გააჩნია $f_\xi(x)$ სიმკვრივე, $f_\xi(x) = f_\xi(-x)$.

დამტკიცება. თუ ξ-ს აქვს სიმეტრიული განაწილების ფუნქცია, მაშინ ξ და $-\xi$ განაწილებულია ერთნაირად და, მაშასადამე,

$$\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi} = Me^{-it\xi} = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)}.$$

ე.ი. $\varphi_\xi(t)$ ნამდვილია. ახლა დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი. დავუშვათ, რომ $\varphi_\xi(t)$ ნამდვილია და განვიხილოთ $\eta = -\xi$ შემთხვევითი სიდიდე. η-ს განაწილების ფუნქცია $G(x)$-ით აღვნიშნოთ. მაშინ, განმარტების თანახმად,

$$G(x)=P\{\omega:\eta(\omega)<x\}=P\{\omega:\xi(\omega)>-x\}=1 - F_\xi(-x+0).$$

$\varphi_\xi(t)$ და $\varphi_\eta(t)$ მახასიათებელი ფუნქციები დაკავშირებულია ერთმანეთთან

$$\varphi_\eta(t) = Me^{it\eta} = Me^{-it\xi} = \overline{Me^{it\xi}} = \overline{\varphi_\xi(t)}$$

თანაფარდობით. მაგრამ, პირობის ძალით

$$\overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_\xi(t), \ \text{ე.ი.} \ \varphi_\eta(t) = \varphi_\xi(t).$$

ახლა ერთადერთობის თეორემის გამოყენებით დავასკვნით, რომ η და ξ შემთხვევით სიდიდეებს ერთი და იგივე განაწილების ფუნქცია აქვთ, ე.ი.

$$F_\xi(x) = 1 - F_\xi(-x+0). \qquad \blacktriangle$$

თეორემა 3.4. თუ $\varphi_\xi(t)$ მახასიათებელი ფუნქცია ეკუთვნის ფუნქციათა $L_1(-\infty,\infty)$ კლასს $\left(\text{ე.ი.} \ \int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_\xi(t)|dt < \infty\right)$, მაშინ $F_\xi(x)$-ს აქვს $f_\xi(x)$ სიმკვრივე და

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_\xi(t)dt.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$\tilde{f}_\xi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi_\xi(t)dt.$$

ვინაიდან $\varphi_\xi(t)\in L_1$, ამიტომ (3.1) ფორმულაში შეიძლება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\sigma\to 0$. მივიღებთ:

$$F_\xi(\beta)-F_\xi(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\xi(t)\frac{e^{-it\beta}-e^{-it\alpha}}{-it}dt=\int_\alpha^\beta\tilde{f}(x)dx.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$F'_\xi(x)=\tilde{f}_\xi(x).$$ ▲

§4. განაწილების ფუნქციათა მიმდევრობის სუსტად კრებადობა

V თავში განვიხილეთ ერთსა და იმავე ალბათურ სივრცეზე მოცემულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის კრებადობის სხვადასხვა სახე: ალბათობით კრებადობა ($\xrightarrow{P}$), თითქმის აუცილებელი (თ.ა) კრებადობა და საშუალო კვადრატული აზრით კრებადობა. ამ სახის კრებადობათა გარდა შემთხვევითი სიდიდეები (არ არის სავალდებულო შემთხვევითი სიდიდეები მოცემული იყოს ერთი და იგივე ალბათურ სივრცეზე) შესაძლოა ერთმანეთს „დაუახლოვდნენ“ მათი განაწილების ფუნქციათა კრებადობის აზრით. ამ მიზნით შემოვიღოთ

განსაზღვრა 4.1. ჩვენ ვიტყვით, რომ $F_n(x)$ განაწილების ფუნქციათა მიმდევრობა ს უ ს ტ ა დ კრებადია $F(x)$ განაწილების ფუნქციისაკენ, და დავწერთ $F_n(x)\Rightarrow F(x)$ თუ $F_n(x)\to F(x)$, $F(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის $C(F)$ წერტილთა სიმრავლეზე.

ეს განსაზღვრა კორექტულია, ე.ი. თუ არსებობს სუსტი ზღვარი, ის ერთადერთია. მართლაც, $F_n(x)\Rightarrow F_1(x)$ და $F_n(x)\Rightarrow F_2(x)$, მაშინ $F_1(x)==F_2(x)$, $x\in C(F_1)\cap C(F_2)$ დანარჩენ წერტილთა სიმრავლეზე, რომელიც თვლადია, $F_1(x)=F_2(x)$ მარცხნიდან უწყვეტობის გამო. ▲

თუ $F_n(x)$ ფუნქცია ξ_n-ის განაწილების ფუნქციაა, ხოლო $F(x)$ ξ-ის განაწილების ფუნქცია, მაშინ ვიტყვით აგრეთვე, რომ ξ_n სუსტად კრებადია ξ-კენ, რაც $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ სიმბოლოთი აღინიშნება; ზოგჯერ ამბობენ, რომ ξ_n კრებადია ξ-კენ განაწილებით. ცხადია, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ კრებადობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$P\{\omega: x_1 \le \xi_n(\omega) < x_2\} \xrightarrow[n\to\infty]{} P\{\omega: x_1 \le \xi(\omega) < x_2\},$$

თუკი $P\{\xi=x_1\}=P\{\xi=x_2\}=0$.

ახლა ავხსნათ $F_n(x) \Rightarrow F(x)$ კრებადობის განსაზღვრაში, თუ რატომ მოითხოვება კრებადობა მხოლოდ $F(x)$-ის უწყვეტობის წერტილებზე და არა ყველა x-სათვის. $F_{\xi_n}(x)$ განაწილების ფუნქციის $F_\xi(x)$ განაწილების ფუნქციისაკენ ყოველ x წერტილში კრებადობის მოთხოვნა არ იქნებოდა კარგი, ვინაიდან უგულებელვყოფდით ξ_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილებასთან ბუნებრივი სიახლოვის ბევრ შემთხვევას. ამის ნათელსაყოფად მოვიყვანოთ

მაგალითი. ვთქვათ, $\xi_n = \xi - \dfrac{1}{n}$ და ξ რაიმე შემთხვევითი სიდიდეა.

$$F_{\xi_n}(x) = P\left\{\omega : \xi(\omega) < x + \frac{1}{n}\right\} = F_\xi\left(x + \frac{1}{n}\right) \to F_\xi(x+0),$$

როცა $n\to\infty$. საკმარისია $F_\xi(x)$ წყვეტილი იყოს x წერტილში, რომ $F_{\xi_n}(x) \not\to F(x)$. მეორე მხრივ, $\xi_n \to \xi$ ზემოთ ჩამოთვლილი ყველა კრებადობის აზრით.

თეორემა 4.1. თუ $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, მაშინ $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x'<x$ და $x,\ x' \in C(F_\xi)$. ვინაიდან

$$\{\omega:\xi(\omega)<x'\}=\{\omega:\xi_n(\omega)<x,\quad \xi(\omega)<x'\}+\{\omega:\xi_n(\omega)\ge x,\ \xi(\omega)<x'\}\subset$$
$$\subset\{\omega:\xi_n(\omega)<x\}+\{\omega:\xi_n(\omega)\ge x,\ \xi(\omega)<x'\}.$$

ამიტომ

$$F_\xi(x') \le F_{\xi_n}(x) + P\{\omega:\xi_n(\omega)\ge x,\ \xi(\omega)<x'\}.$$

პირობის ძალით

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi,$$

$$P\{\omega:\xi_n(\omega)\geq x,\ \xi(\omega)<x'\}\leq P\{\omega:|\xi_n-\xi|\geq x-x'\}\to 0,\ n\to\infty.$$

მაშასადამე,

$$F_\xi(x') \leq \lim_{n\to\infty}\inf_{x} F_{\xi_n}(x). \qquad (4.1)$$

ანალოგიურად, თუ შევუცვლით ადგილებს ξ და ξ_n-ს, მივი-ღებთ:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x} F_{\xi_n}(x) \leq F_\xi(x''), \qquad x < x''.$$

ამგვარად:

$$F_\xi(x') \leq \lim_{n\to\infty}\inf F_{\xi_n}(x) \leq \lim_{n\to\infty}\sup F_{\xi_n}(x) \leq F_\xi(x'').$$

და თუ $x\in C(F_\xi)$, $x'\uparrow x$ და $x''\downarrow x$, მაშინ მივიღებთ

$$F_\xi(x) = \lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x). \qquad \blacktriangle$$

თეორემა 4.2. თუ

$$\xi_n - \xi_n' \xrightarrow{P} 0 \quad \text{და} \quad F_{\xi_n'}(x) \Rightarrow F_\xi(x),$$

მაშინ

$$F_{\xi_n}(x) \Rightarrow F_\xi(x).$$

დამტკიცება. თეორემა 4.1-ის ანალოგიურია, თუკი იქ ξ_n'-ზე გამოვიყენებთ ξ-ზე ჩატარებულ მსჯელობას.

თეორემა 4.3. ვთქვათ, ξ_n, η_n, $n = 1, 2,\ldots$ შემთხვევითი სი-დიდეთა მიმდევრობებია. გვაქვს

ა) თუ $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ და $\eta_n \xrightarrow{P} 0$, მაშინ $\eta_n\xi_n \xrightarrow{P} 0$.

ბ) თუ $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} C$,

მაშინ

$$\xi_n+\eta_n \xrightarrow{d} \xi+C, \quad \xi_n\eta_n \xrightarrow{d} C\,\xi, \quad \frac{\xi_n}{\eta_n} \xrightarrow{d} \frac{\xi}{C}, \quad C \neq 0.$$

დამტკიცება. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ (ა), განვიხილოთ

$$P\{\omega : |\xi_n(\omega)\eta_n(\omega)| > \varepsilon\} = P\left\{\omega : |\xi_n(\omega)\eta_n(\omega)| > \varepsilon,\ \ |\eta_n(\omega)| < \frac{\varepsilon}{K}\right\} +$$

$$+ P\{\omega : |\xi_n(\omega)\eta_n(\omega)| > \varepsilon,\ \ |\eta_n(\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{K}\} \leq$$

$$\leq P\{\omega : |\xi_n(\omega)| > K\} + P\left\{\omega : |\eta_n(\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{K}\right\}$$ უტოლობები.

აქედან კი

$$\limsup_{n\to\infty} P\{\omega : |\xi_n(\omega)\eta_n(\omega)| > \varepsilon\} \leq P\{\omega : |\xi(\omega)| > K\}, \quad (4.2)$$

ყოველი ფიქსირებული დადებითი K-სთვის. მაგრამ, K ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ (4.2)-ის მარჯვენა მხარე K-ს არჩევით შეგვიძლია გავხადოთ რაგინდ მცირე რიცხვზე ნაკლები. მაშასადამე,

$$P\{\omega : |\xi_n(\omega)\eta_n(\omega)| > \varepsilon\} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

(ბ)-ს დამტკიცებისათვის შევნიშნოთ, რომ თუ

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi,$$

მაშინ

$$\xi_n + C \xrightarrow{d} \xi + C,$$

$$(\xi_n+\eta_n)-(\xi_n+C) = \eta_n - C \xrightarrow{P} 0.$$

აქედან, თუ გამოვიყენებთ 4.2 თეორემას, მივიღებთ

$$\xi_n+\eta_n \xrightarrow{d} \xi + C.$$

გარდა ამისა,

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi,$$

ამიტომ

$$C\xi_n \xrightarrow{d} C\xi.$$

შემდეგ (ა) თვისების თანახმად

$$\xi_n\eta_n - C\xi_n = \xi_n(\eta_n - C) \xrightarrow{P} 0.$$

აქედან კი, 4.2 თეორემის ძალით,

$$\xi_n\eta_n \xrightarrow{d} C\xi.$$

ანალოგიურად,

$$\xi_n/\eta_n \xrightarrow{d} C/\xi. \qquad \blacktriangle$$

თეორემა 4.4. (პოიას თეორემა). თუ $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, სადაც $F(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ კრებადობა თანაბარია:

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. $F(x)$-ის უწყვეტობის ძალით მოიძებნება ისეთი $x_1<x_2<\ldots<x_m$ რიცხვები, რომ

$$F(x_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad F(x_{k+1}) - F(x_k) < \frac{\varepsilon}{2}, \ k=1,2,\ldots,m-1, \ 1 - F(x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

შემდეგ, ვინაიდან ყოველი ფიქსირებული x-სთვის $F_n(x) \to F(x)$, ამიტომ არსებობს ისეთი N, რომ, როცა $n>N$

$$|F_n(x_k) - F(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ k=1,2,\ldots,m.$$

თუ $x \in [x_k, x_{k+1})$, $k=1,2,\ldots,m-1$, მაშინ $F_n(x)$-ის და $F(x)$-ის არაკლებადობის გამო,

$$F_n(x)-F(x) \le F_n(x_{k+1})-F(x_k) = [F_n(x_{k+1})-F(x_{k+1})]+[F(x_{k+1})-F(x_k)] < \varepsilon,$$

$$F_n(x)-F(x) \ge F_n(x_k)-F(x_{k+1}) > -\varepsilon.$$

ამიტომ $|F_n(x)-F(x)| < \varepsilon$, როცა $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k=1,2,\ldots,m-1$.
თუ ახლა $x<x_1$, მაშინ

$$F_n(x)-F(x) \le F_n(x_1)-F(x_1)+F(x_1) < \varepsilon$$

და

$$F_n(x)\text{-}F(x) \geq \text{-}\ F(x) \geq \text{-}F(x_1) > -\frac{\varepsilon}{2},$$

ე.ი. როცა $x<x_1$, $|F_n(x)\text{-}F(x)| < \varepsilon$, $n>N$. ანალოგიურად განიხილება შემთხვევა, როდესაც $x \geq x_m$. ამგვარად,

$$\sup_{-\infty<x\infty} |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon, \text{ როცა } n>N. \qquad \blacktriangle$$

ლემა 4.1. თუ $F_n(x) \to F(x)$ რაიმე ყველგან მკვრივ D სიმრავლეზე, მაშინ

$$F_n(x) \Rightarrow F(x) .$$

დამტკიცება. ვთქვათ, x $F(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილია, $x',x'' \in D$ და $x'<x<x''$.

გვაქვს

$$F_n(x') \leq F_n(x) \leq F_n(x'')$$

და

$$\begin{aligned} F(x') = \lim_{n\to\infty} F_n(x') \leq \varliminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq \\ \leq \lim_{n\to\infty} F_n(x'') = F(x''). \end{aligned} \qquad (4.3)$$

თუ $x' \uparrow x$ და $x'' \downarrow x$ მაშინ (4.3)-დან მივიღებთ

$$F(x) \leq \varliminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x)$$

ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x). \qquad \blacktriangle$$

თეორემა 4.5. (ჰელის პირველი თეორემა). განაწილების ფუნქციათა ყოველი $\{F_n\}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სუსტად კრებადი ქვემიმდევრობა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $D=\{x_k\}$ წრფეზე ყველგან მკვრივი თვლადი სიმრავლეა. ჩავსვათ $\{F_n(x)\}$ მიმდევრობაში $x=x_1$, მივი-

ღებთ რიცხვთა შემოსაზღვრულ მიმდევრობას: $0\le F_n(x_1)\le 1$. ამიტომ მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი $F_{1n}(x_1)$ ქვემიმდევრობა, რომლის ზღვარი $F(x_1)$-ით აღვნიშნოთ. $\{F_{2n}(x_2)\}$ შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან გამოვყოთ კრებადი $F_{2n}(x_2)$ ქვემიმდევრობა: $F_{2n}(x_2)\to F(x_2)$ და ა.შ. შემდეგ გამოვყოფთ დიაგონალურ $F_{nn}(x)$ ქვემიმდევრობას, რომლისთვისაც $F_{nn}(x_k)\to F(x_k)$ ნებისმიერი x_k-თვის, რომელიც ეკუთვნის D-ს. ლემა 4.1-ის ძალით, აქედან გამომდინარეობს, რომ $F_{nn}(x)\Rightarrow F(x)$. ▲

შენიშვნა. შეიძლება $F(x)$ არ იყოს განაწილების ფუნქცია. მაგალითად, თუ $F_n(x)=0$, როცა $x<n$ და $F_n(x)=1$, როცა $x\ge n$, მაშინ $F_n(x)\Rightarrow F(x)\equiv 0$.

თეორემა 4.6. (ჰელის მეორე თეორემა). თუ $g(x)$ რიცხვთა ღერძზე უწყვეტი, შემოსაზღვრული ფუნქციაა და

$$F_n(x)\Rightarrow F(x),\ F(\infty)-F(-\infty)=1,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x). \qquad (4.4)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $a,b\in C(F)$, ამასთან, $a<b$. თავდაპირველად დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b} g(x)dF_n(x)=\int_{a}^{b} g(x)dF(x). \qquad (4.5)$$

ვთქვათ, $\varepsilon>0$, ყოველთვის მოიძებნება $[a,b]$ ინტერვალის $F(x)$ ფუნქციის $a=x_0,x_1,\dots,x_{N-1},x_N=b$ უწყვეტობის წერტილებით $[x_{k-1},x_k]$ ინტერვალებად ისეთნაირად დაიყოფა, რომ $|g(x)-g(x_k)|<\varepsilon$, $x\in[x_{k-1},x_k]$. ამის გაკეთება ყოველთვის შეიძლება, ვინაიდან $g(x)$ თანაბრად უწყვეტია $[a,b]$ ინტერვალზე, ხოლო $F(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილები $[a,b]$-ში განლაგებულია ყველგან მკვრივად. განვსაზღვროთ $g_\varepsilon(x)$ ფუნქცია: $g_\varepsilon(x)=g(x_k)$, როცა $x\in[x_{k-1},x_k]$. ცხადია, $a\le x\le b$ ინტერვალის ყოველი x წერტილისათვის სამართლიანია $|g(x)-g_\varepsilon(x)|\le\varepsilon$ უტოლობა. გვაქვს

$$\left|\int_a^b g(x)dF_n(x) - \int_a^b g(x)dF(x)\right| \le \int_a^b |g(x) - g_\varepsilon(x)|dF_n(x) +$$

$$+\left|\int_a^b g_\varepsilon(x)dF_n(x) - \int_a^b g_\varepsilon(x)dF(x)\right| + \int_a^b |g(x) - g_\varepsilon(x)|dF(x) \le$$

$$\le 2\varepsilon + L\sum_{k=1}^{N}[F_n(x_k) - F(x_k) - (F_n(x_{k-1}) - F(x_{k-1}))],$$

სადაც $L = \sup\limits_x |g(x)|$.

უკანასკნელი შესაკრები შეგვიძლია გავხადოთ რაგინდ მცირე, როცა $n \to \infty$, საიდანაც გამომდინარეობს (4.5). (4.4)-ის დამტკიცებისათვის ავარჩიოთ ისეთი $A>0$, რომ

$$F(-A) < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad 1 - F(A) < \frac{\varepsilon}{4}$$

და, ამასთან, $\pm A$ $F(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილები იყოს: $\pm A \in C(F)$.

მაშინ, ვინაიდან

$$F_n(\pm A) \to F(\pm A),$$

შეგვიძლია ავარჩიოთ ისეთი n_0, რომ

$$F_n(-A) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{და} \quad 1 - F_n(A) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{როცა } n > n_0.$$

შევაფასოთ

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) \quad \text{სხვაობა.}$$

გვაქვს

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)\right| \le \left|\int_{-A}^{A} g(x)dF(x) - \int_{-A}^{A} g(x)dF_n(x)\right| +$$

$$\left|\int_{|x|>A} g(x)dF_n(x)\right| + \left|\int_{|x|>A} g(x)dF(x)\right| \le \tag{4.6}$$

$$\le \left|\int_{-A}^{A} g(x)dF(x) - \int_{-A}^{A} g(x)dF_n(x)\right| + L\varepsilon + \frac{L\varepsilon}{2}$$

(4.5)-ის გამოყენებით (4.6)-ის მარჯვენა მხარე შეგვიძლია გავხადოთ რაგინდ მცირე. ▲

§5. მახასიათებელი ფუნქციისათვის ზღვარითი თეორემები

§3-ში დავადგინეთ ურთიერთცალსახა თანადობა განაწილების ფუნქციათა $\{F_\xi(x)\}$ სიმრავლესა და $\{\varphi_\xi(t)\}$ მახასიათებელ ფუნქციათა სიმრავლეს შორის. ამ პარაგრაფის მიზანია ვაჩვენოთ, რომ ეს თანადობა არა მარტო ურთიერთცალსახაა, არამედ ურთიერთუწყვეტიც.

თეორემა 5.1. (პირდაპირი თეორემა). თუ $F_n(x)\Rightarrow F(x)$, მაშინ ყოველ t წერტილზე $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$, როცა $n\to\infty$.

დამტკიცება. ჰელის მე-2 თეორემის თანახმად, $F_n(x)\Rightarrow F(x)$-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF_n(x)\to\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x)=\varphi(t). \qquad ▲$$

თეორემა 5.2. (შებრუნებული თეორემა). თუ მახასიათებელ ფუნქციათა $\{\varphi_n(t)\}$ მიმდევრობა კრებადია ყოველ t წერტილზე რომელიმე $\varphi(t)$ ფუნქციისაკენ, რომელიც უწყვეტია ნულ წერტილზე, მაშინ $F_n(x)\Rightarrow F(x)$ და $\varphi(t)$ არის $F(x)$ განაწილების მახასიათებელი ფუნქცია.

დამტკიცება. ჰელის პირველი თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია ავარჩიოთ $\{F_n(x)\}$-დან ქვემიმდევრობა $\{F_{n_k}(x)\}$, რომელიც სუსტად კრებადია რომელიღაც $F^*(x)$ ფუნქციისაკენ: $F_{n_k}(x)\Rightarrow F^*(x)$. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $F^*(x)$ უწყვეტია მარცხნიდან. ვაჩვენოთ, რომ $F^*(-\infty)=0$ და $F^*(+\infty)=1$. ამისათვის ჩვენ გამოვიყენებთ უტოლობას:

$$P\{\omega:|\xi(\omega)|\le X\}\ge\frac{\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\varphi_\xi(t)dt\right|-\frac{1}{\tau X}}{1-\frac{1}{\tau X}}, \qquad (5.1)$$

სადაც $X > 0, \tau > 0$.

კერძოდ, თუ $\tau X = 2$, (5.1)-დან მივიღებთ:

$$P\{\omega : |\xi(\omega)| \le X\} \ge 2\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\varphi_{\xi}(t)dt\right| - 1. \qquad (5.2)$$

დავამტკიცოთ (5.1). გვაქვს

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\varphi_{\xi}(t)dt\right| = \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}Me^{it\xi}dt\right| = \left|M\frac{\sin\tau\xi}{\tau\xi}\right| = \left|M\frac{\sin\tau\xi}{\tau\xi}\Big(I_{\{\omega:|\xi(\omega)|\le X} +\right.$$

$$\left. + I_{\{\omega:|\xi(\omega)|>X}\Big)\right| \le MI_{\{\omega:|\xi(\omega)|\le X} + \frac{1}{\tau X}MI_{\{\omega:|\xi(\omega)|>X\}} = P\{\omega : |\xi(\omega)| \le X\} +$$

$$+\frac{1}{\tau X}P\{\omega : |\xi(\omega)| > X\} = P\{\omega : |\xi(\omega)| \le X\} + \frac{1}{\tau X}\big(1 - P\{\omega : |\xi(\omega)| \le X\}\big).$$

აქედან გამომდინარეობს (5.1). პირობის თანახმად $\varphi(t)$ უწყვეტია $t = 0$ წერტილზე. ამიტომ არსებობს ისეთი $\tau_0 > 0$, რომ, როცა $0 < \tau < \tau_0$,

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\varphi(t)dt\right| \ge 1 - \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (5.3)$$

რადგანაც ყოველ t წერტილზე $\varphi_{n_k}(t) \to \varphi(t)$, ამიტომ არსებობს ისეთი k_0, რომ

$$\left|\int_{-\tau}^{\tau}\varphi_{n_k}(t)dt - \int_{-\tau}^{\tau}\varphi(t)dt\right| < \frac{\varepsilon\tau}{2}, \quad k \ge k_0. \qquad (5.4)$$

(აქ გამოყენებულია ლებეგის თეორემა მაჟორირებული კრებადობის შესახებ). (5.3) და (5.4)-დან დავწერთ

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\varphi_{n_k}(t)dt\right| \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

და, მაშასადამე, (5.2) უტოლობიდან

$$P\{\omega : |\xi_{n_k}(\omega)| \le \frac{2}{\tau}\} = F_{n_k}\left(\frac{2}{\tau}\right) - F_{n_k}\left(-\frac{2}{\tau}\right) \ge 2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - 1 = 1 - \varepsilon,$$

ე.ი.

$$F_{n_k}\left(\frac{2}{\tau}\right) - F_{n_k}\left(-\frac{2}{\tau}\right) \geq 1-\varepsilon \quad , \; k \geq k_0.$$

ამგვარად,

$$F^*(+\infty) = 1, \;\; F^*(-\infty) = 0.$$

ახლა დავამტკიცოთ

$$F_n(x) \Rightarrow F^*(x).$$

დავუშვათ, რომ

$$F_n(x) \not\Rightarrow F^*(x).$$

მაშინ არსებობს ორი $\{F_{n'}(x)\}$ და $\{F_{n''}(x)\}$ ქვემიმდევრობა ისეთი, რომ

$$F_{n'}(x) \Rightarrow F^*(x), \;\; F_{n''}(x) \Rightarrow F^{**}(x),$$

პირდაპირი თეორემის ძალით

$$\varphi_{n'}(t) \to \varphi^*(t), \;\; \varphi_{n''}(t) \to \varphi^{**}(t):$$

მაგრამ, ვინაიდან

$$\varphi_n(t) \to \varphi(t),$$

ამიტომ

$$\varphi^*(t) = \varphi^{**}(t) = \varphi(t). \qquad \blacktriangle$$

თავი VIII

ცენტრალური ზღვარითი თეორემა

§1. ცენტრალური ზღვარითი თეორემა ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის

ბერნულის სქემაში „წარმატებათა“ S_n რაოდენობას აქვს შემდეგი ზღვარითი თვისება:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} < x\right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du, \qquad (1.1)$$

სადაც

$$MS_n=pn,\ DS_n=npq,\ 0<p<1,\ q=1-p.$$

(1.1) წარმოადგენს ე.წ. ცენტრალური ზღვარითი თეორემის უმარტივეს შემთხვევას.

განსაზღვრა 1.1. ჩვენ ვიტყვით, რომ დამოუკიდებელი შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \xi_2, \ldots$ მიმდევრობისათვის შესრულებულია ცენტრალური ზღვარითი თეორემა, თუ ნებისმიერი x-თვის სამართლიანია შემდეგი ზღვარითი თანაფარდობა:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\zeta_n - M\zeta_n}{\sqrt{D\zeta_n}} < x\right\} = \Phi(x), \qquad (1.2)$$

სადაც $\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$.

რადგანაც $\Phi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რიცხვით ღერძზე, ამიტომ აქ კრებადობა თანაბარია x-ის მიმართ პოიას თეორემის თანახმად (იხ. თავი VII, თეორემა 4.4).

ვინაიდან ბერნულის სქემაში „წარმატებათა“ S_n რაოდენობა წარმოიდგინება დამოუკიდებელი და ერთი და იმავე განაწილების მქონე $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ შემთხვევითი სიდიდეების ჯამად:

$$S_n=\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n,$$

სადაც

$$P\{\omega:\eta_i(\omega)=1\}=p,\quad P\{\omega:\eta_i(\omega)=0\}=1-p.$$

ამიტომ (1.1) წარმოადგენს ცენტრალური ზღვარითი თეორემის კერძო შემთხვევას. ცენტრალური ზღვარითი თეორემის სამართლიანობისათვის $\xi_1, \xi_2, \ldots$ შემთხვევით სიდიდეებს უნდა მოეთხოვოს გარკვეული დამატებითი პირობების შესრულება. ამ პირობების ახსნისათვის ჩვენ გავეცნობით ცენტრალური ზღვარითი თეორემების რამდენიმე ვარიანტს.

თავდაპირველად დავამტკიცოთ ცენტრალური ზღვარითი თეორემა ერთი და იმავე განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებისათვის.

თეორემა 1.1. თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთაც სასრული მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია გააჩნია, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n-na}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\}=\Phi(x), \quad (1.3)$$

სადაც $a=M\xi_i$, $\sigma^2=D\xi_i$.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n, \quad \tilde{\xi}_i=\xi_i-a; \quad \tilde{\zeta}_n=\frac{\zeta_n-na}{\sigma\sqrt{n}},$$

მაშინ

$$\tilde{\zeta}_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\xi}_k .$$

ვთქვათ, $\varphi(t)=\varphi_{\tilde{\xi}_k}(t)$ $\tilde{\xi}_k$-ს მახასიათებელი ფუნქციაა.

ვინაიდან

$$\tilde{\xi}_k = 0 \text{ და } M\tilde{\xi}_k^2 = D\tilde{\xi}_k = \sigma^2,$$

ამიტომ წინა თავის პირველი პარაგრაფის 6^0 თვისების ძალით დავწერთ:

$$\varphi(u) = 1-\frac{u^2\sigma^2}{2}+o(u^2), \text{ როცა } u\to 0$$

და, მაშასადამე, ნებისმიერი ფიქსირებული t-სთვის გვაქვს

$$\varphi_{\tilde{\zeta}_n}(t)=\left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n=\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n\to$$

$$\to\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),\ n\to\infty\ . \tag{1.4}$$

ამრიგად, (1.4)-ში მივიღეთ N(0,1) ნორმალური განაწილების მახასიათებელი ფუნქცია, რაც უწყვეტობის თეორემის ძალით (1.3)-ს ნიშნავს. ▲

§2. ცენტრალური ზღვარითი თეორემა ნებისმიერად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის

ახლა დავადგინოთ, თუ რა პირობებში აქვს ადგილი ცენტრალურ ზღვარით თეორემას ნებისმიერად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობისათვის.

ვთქვათ, დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1,\xi_2,\ldots$ მიმდევრობის ყოველ წევრს გააჩნია სასრული მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. აღვნიშნოთ

$$F_k(x)=F_{\xi_k}(x),\quad M\xi_k=a_k,\quad D\xi_k=b_k^2<\infty,\ k=1,2,\ldots,n\ldots,$$

$$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}b_k^2\ .$$

დავსვათ ამოცანა: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ $\xi_1,\ \xi_2,\ldots$ სიდიდეები, რომ

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a_k) \tag{2.1}$$

ჯამის განაწილების ფუნქცია $\Phi(x)$ ნორმალური განაწილების ფუნქციისაკენ იკრიბებოდეს ან, რაც იგივეა, სრულდებოდეს ამ თავის პირველი პარაგრაფის (1.2) ზღვარითი თანაფარდობა. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ამისათვის საკმარისია ლინდებერგის პირობის შესრულება: ყოველი $\tau>0$ რიცხვისათვის

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\tau) = 0, \qquad (2.2)$$

სადაც

$$L_n(\tau) = \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|\ge\tau B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x).$$

ჯერ გავერკვეთ ლინდებერგის პირობის არსში.

აღვნიშნოთ

$$A_k=\{\omega: |\xi_k(\omega)-a_k| \ge \tau B_n\},\ \ k=1,2,\ldots$$

და შევაფასოთ ალბათობა

$$P\left\{\max_{1\le k\le n}|\xi_k - a_k| \ge \tau B_n\right\}.$$

რადგანაც

$$P\left\{\max_{1\le k\le n}|\xi_k - a_k| \ge \tau B_n\right\} = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \quad \text{და}$$

$$P(A_k)=\int_{|x-a_k|\ge\tau B_n} dF_k(x) \le \frac{1}{(\tau B_n)^2}\int_{|x-a_k|\ge\tau B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x),$$

ამიტომ მივიღებთ უტოლობას:

$$P\left\{\max_{1\le k\le n}|\xi_k - a_k| \ge \tau B_n\right\} \le \frac{1}{(\tau B_n)^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|\ge\tau B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x).$$

ლინდებერგის (2.2) პირობის თანახმად, როგორიც არ უნდა იყოს $\tau>0$, როცა $n\to\infty$, უკანასკნელი ჯამი მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამგვარად, ლინდებერგის პირობა წარმოადგენს (2.1) ჯამის $\dfrac{\xi_k - a_k}{B_n}$, $k=1,2,\ldots$. შესაკრებთა თანაბარი სიმცირის მოთხოვნას ალბათური კრებადობის აზრით.

ახლა დავამტკიცოთ

თეორემა 2.1. (ლინდებერგის თეორემა). თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობისათვის სრულდება პირობა:

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\tau) = 0,\ \ \tau > 0,$$

მაშინ

$$P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) < x\right\} \to$$

$$\to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$ თანაბრად x-ის მიმართ.

დამტკიცება. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - a_k}{B_n}, \; F_{nk}(x)=P\{\xi_{nk}<x\}, \; \varphi_{nk}(t) = \varphi_{\xi_{nk}}(t).$$

ცხადია, რომ

$$M\xi_{nk}=0, \; D\xi_{nk} = b_k^2 / B_n^2$$

და, მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{n} D\xi_{nk} = 1. \qquad (2.3)$$

ჩვენი ამ აღნიშვნებით $L_n(\tau)$ და ლინდებერგის პირობა მიიღებს სახეს:

$$L_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geq\tau} x^2 dF_{nk}(x) \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (2.2^1)$$

$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) = \sum_{k=1}^{n}\xi_{nk}$ -ის მახასიათებელი ფუნქცია $\varphi_n(t)$-თი აღვნიშნოთ, ცხადია, რომ

$$\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{nk}(t).$$

ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = e^{-t^2/2} \qquad (2.4)$$

და შებრუნებული თეორემის თანახმად ლინდებერგის თეორემა დამტკიცებული იქნება. ამისათვის ჩვენ დაგვჭირდება

$$\left|e^{i\theta} - 1 - i\theta\right| \le \frac{\theta^2}{2}, \tag{2.5}$$

$$\left|e^{i\theta} - 1 - i\theta + \frac{\theta^2}{2}\right| \le \frac{|\theta|^3}{6} \tag{2.6}$$

უტოლობები (იხ. თავი VII, უტოლობა (1.9)) და აგრეთვე

$$|\ln(1 + \alpha) - \alpha| \le |\alpha|^2 \tag{2.7}$$

უტოლობა $\{\alpha: |\alpha| < 1/2\}$ წრეში მოთავსებული კომპლექსური რიცხვებისათვის (**ln** ლოგარითმის მთავარი ნაწილია); (2.7) უტოლობა ლოგარითმის გაშლის შედეგია:

$$|\ln(1+\alpha) - \alpha| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{K}\alpha^k - \alpha\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{K}\alpha^k\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}|\alpha|^k = \frac{|\alpha|^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha|^k \le \frac{|\alpha|^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k} = |\alpha|^2.$$

დავუბრუნდეთ (2.4)-ის დამტკიცებას. ამ მიზნისათვის პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ $\max\limits_{1 \le k \le n}|\varphi_{nk}(t) - 1| \to 0$, როცა $n \to \infty$, თანაბრად **t**-ს მიმართ, $|t| < T < \infty$. იმის გამო, რომ $M\xi_{nk} = 0$, (2.5) უტოლობიდან მივიღებთ:

$$|\varphi_{nk}(t) - 1| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx} - 1 - itx)dF_{nk}(x)\right| \le$$

$$\le \frac{t^2}{2}\left(\int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) + \int_{|x|\ge\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x)\right) \le \frac{T^2}{2}\left(\varepsilon^2 + L_n(\varepsilon)\right).$$

უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრები, ლინდებერგის პირობის თანახმად, როცა **n** საკმარისად დიდია, შეგვიძლია გავხადოთ ε^2-ზე ნაკლები, ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le n}|\varphi_{nk}(t) - 1| = 0 \tag{2.8}$$

თანაბრად t-ს მიმართ, $|t| < T < \infty$. ამრიგად, დაწყებული გარკვეული n-დან

$$\max_{1 \le k \le n} |\varphi_{nk}(t) - 1| < \frac{1}{2},$$

რომელიც, თავის მხრივ, გვაძლევს საშუალებას დავწეროთ

$$|\ln\varphi_{nk}(t) - (\varphi_{nk}(t) - 1)| \le |\varphi_{nk}(t) - 1|^2.$$

განვიხილოთ ახლა $\varphi_n(t)$ მახასიათებელი ფუნქცია. გვაქვს

$$\ln\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \ln\varphi_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_{nk}(t) - 1) + R_n, \qquad (2.9)$$

სადაც

$$|R_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} [\ln\varphi_{nk}(t) - (\varphi_{nk}(t) - 1)]\right| \le \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{nk}(t) - 1|^2 \le$$

$$\le \max_{1 \le k \le n} |\varphi_{nk}(t) - 1| \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{nk}(t) - 1|,$$

ამასთან,

$$\sum_{k=1}^{n} |\varphi_{nk}(t) - 1| \le \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) dF_{nk}(x)\right| \le$$

$$\le \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} D\xi_{nk} \le \frac{T^2}{2}.$$

ამგვარად, (2.8) თანაფარდობის ძალით, t-ს მიმართ თანაბრად ნებისმიერ სასრულ $|t| < T$ ინტერვალში, მივიღებთ:

$$R_n \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (2.10)$$

მაგრამ

$$\sum_{k=1}^{n} (\varphi_{nk}(t) - 1) = -\frac{t^2}{2} + \rho_n, \qquad (2.11)$$

სადაც

$$\rho_n = \frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\varphi_{nk}(t) - 1) = \frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) dF_{nk}(x).$$

ვთქვათ, τ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, მაშინ (2.3)-ის თანახმად გვაქვს

$$\left|\rho_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2x^2}{2}\right)dF_{nk}(x)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<\tau}\left|e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2x^2}{2}\right|dF_{nk}(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\ge\tau}\left|e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2x^2}{2}\right|dF_{nk}(x) = I_1 + I_2.$$

I_2-ის შესაფასებლად გამოვიყენოთ (2.5) უტოლობა:

$$I_2 \le \sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\ge\tau}\left|e^{itx} - 1 - itx\right|dF_{nk}(x) + \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\ge\tau}x^2dF_{nk}(x) \le$$

$$\le \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\ge\tau}x^2dF_{nk}(x) + \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\ge\tau}x^2dF_{nk}(x) =$$

$$= t^2L_n(\tau) \le T^2L_n(\tau).$$

I_1 – შევაფასოთ (2.6)-ის გამოყენებით:

$$I_1 \le \sum_{k=1}^{n}\frac{|t|^3}{6}\int_{|x|\le\tau}|x|^3dF_{nk}(x) \le \frac{|t|^3}{6}\tau\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\le\tau}x^2dF_{nk}(x) \le \frac{|t|^3}{6}\tau \le \frac{T^3}{6}\tau,$$

მაშასადამე, $\left|\rho_n\right| \le \frac{T^3}{6}\tau + T^2L_n(\tau)$. მოცემული ε რიცხვისათვის τ ისე შევარჩიოთ, რომ $T^3\tau \le 3\varepsilon$. ამ τ-ს კი ისეთი N_0 შევუსაბამოთ, რომ $T^3L_n(\tau) \le \frac{\varepsilon}{2}$, როცა $n>N_0$ (ეს ყოველთვის შეიძლება $L_n(\tau)\to 0$ პირობის გამო), ე.ი. $\left|\rho_n\right| < \varepsilon$, როცა $n>N_0$ და $|t| < T$. ეს უტოლობა იმას გვიჩვენებს, რომ ყოველ სასრულ ინტერვალში t-ს მნიშვნელობის მიმართ თანაბრად

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n = 0. \qquad (2.12)$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.9),(2.10), (2.11) და (2.12) თანაფარდობებს, მივიღებთ t-ს მიმართ თანაბრად ყოველ სასრულ $(-T,T)$ ინტერვალში $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\varphi_n(t) = -\frac{t^2}{2}$ ან, რაც იგივეა: $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, საიდანაც შებრუნებული თეორემის ძალით

$$P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) < x\right\} \to \Phi(x). \qquad (2.13)$$

$\Phi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია მთელ რიცხვთა ღერძზე, ამიტომ (2.13)-ში თანაბარ კრებადობას იძლევა პოიას თეორემა. ▲

შენიშვნა 1. ლინდებერგის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$P\{\zeta_n < x\} - \Phi\left(\frac{x - M\zeta_n}{B_n}\right) \to 0, \qquad (2.14)$$

სადაც

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

(2.14) ზღვარით თანაფარდობას ხშირად გამოთქვამენ ასე: საკმარისად დიდი n-თვის ζ_n სიდიდე მიახლოებით განაწილებულია ნორმალურად $M\zeta_n$ მათემატიკური ლოდინით და $B_n^2 = D\zeta_n$ დისპერსიით.

ახლა შევჩერდეთ რამდენიმე კერძო შემთხვევაზე, რომელშიაც ლინდებერგის პირობა შესრულებულია და, მაშასადამე, სამართლიანია ცენტრალური ზღვარითი თეორემა.

ა) ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია $a = M\xi_1$ მათემატიკური ლოდინით და $0 < b^2 = D\xi_1 < \infty$ დისპერსიით. მაშინ

$$L_n(\tau) = \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n}(x - a_k)^2\, dF_k(x) =$$

$$= \frac{1}{b^2}\int\limits_{|x-a|>\tau b\sqrt{n}}(x - a)\, dF_1(x) \to 0,$$

ვინაიდან

$$\{x : |x - a| > \tau b\sqrt{n}\} \downarrow \varnothing,$$

$$n \to \infty, \tau > 0, \text{ ხოლო } b^2 = M|\xi_1 - a|^2 < \infty.$$

ამგვარად, ლინდებერგის პირობა შესრულებულია და, მაშასადამე, ლინდებერგის თეორემიდან გამომდინარეობს ჩვენ მიერ უკვე დამტკიცებული თეორემა 1.1.

ბ) ვთქვათ, ξ_1, ξ_2, ... ისეთი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომ $|\xi_k| < C < \infty$ თ.ა. $k=1, 2...$, და $B_n \to \infty$, როცა $n \to \infty$, მაშინ სამართლიანია ცენტრალური ზღვარითი თეორემა.

ჩებიშევის უტოლობიდან მივიღებთ:

$$\int\limits_{|x-a_k| \geq \tau B_n} |x - a_k|^2 dF_k(x) = M\left[(\xi_k - a_k)^2 I_{\{\omega: |\xi_k - a_k| \geq \tau B_n\}}\right] \leq$$

$$\leq 4C^2 P\{|\xi_k - a_k| \geq \tau B_n\} \leq 4C^2 \frac{b_k^2}{\tau^2 B_n^2}, \text{ ე.ი.}$$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k| \geq \tau B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x) \leq \frac{4C^2}{\tau^2 B_n^2} \to 0, \ n \to \infty,$$

მაშასადამე, კვლავ შესრულებულია ლინდებერგის პირობა.

თეორემა 2.2 (ლიაპუნოვის თეორემა). თუ $\xi_1, \xi_2, ...$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის არსებობს $2+\delta$ რიგის აბსოლუტური მომენტი, სადაც δ რაიმე დადებითი რიცხვია და

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} M|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \to 0, \ n \to \infty, \qquad (2.15)$$

მაშინ

$$P\left\{\frac{1}{B_n} \sum_{n=1}^{n} (\xi_k - a_k) < x\right\} \to \Phi(x) \text{ თანაბრად } x\text{-ის მიმართ.}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\varepsilon > 0$,

მაშინ

$$\mathbf{M}\left|\xi_k - a_k\right|^{2+\delta} = \int_{-\infty}^{\infty}\left|x - a_k\right|^{2+\delta} dF_k(x) \geq \int_{\left|x-a_k\right| \geq \varepsilon B_n}\left|x - a_k\right|^{2+\delta} dF_k(x) \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 B_n^{\delta} \int_{\left|x-a_k\right| \geq B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x),$$

ე.ი.

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\left|x-a_k\right| \geq \varepsilon B_n} (x - a_k)^2 dF_k(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\left|\xi_k - a_k\right|^{2+\delta} \to 0.$$

მაშასადამე, ლიაპუნოვის (2.15) პირობა მოიცავს ლინდებერგის პირობას და ამით თეორემა დამტკიცებულია. ▲

შენიშვნა 2. ვინაიდან ზემოთ მოყვანილ ყველა თეორემაში $\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k)$ ჯამის განაწილების ფუნქცია კრებადია ნორმა–ლური განაწილების $\Phi(x)$ ფუნქციისაკენ თანაბრად x–ის მიმართ, ამიტომ ბუნებრივია დაისვას საკითხი კრებადობის სიჩქარის შესახებ. იმ შემთხვევაში, როდესაც ξ_1, ξ_2,... დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია და, ამასთან, , ამ კითხვაზე პასუხი მოიცემა ბერი–ესენის უტოლობით:

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_n - na}{b\sqrt{n}} < x\right\} - \Phi(x)\right| \leq \frac{C\mathbf{M}\left|\xi_1 - a\right|^3}{b^3\sqrt{n}},$$

სადაც

$$a = \mathbf{M}\xi_1,\ b^2 = \mathbf{D}\xi_1 \quad \text{და} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < C < 0{,}8.$$

ამ უტოლობის დამტკიცება მოყვანილი იქნება §3–ში.

შენიშვნა 3. §2–ში ლინდებერგის პირობას მივეცით მარტივი ფორმა, რომელიც განსაკუთრებით ხელსაყრელია „სერიათა სქემის“ შემთხვევაში.

ვთქვათ, $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ დამოუკიდებელი შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა,

$$a_k=M\xi_k,\ \ b_k^2=D\xi_k,\ \ B_n^2=\sum_{k=1}^{n}b_k^2>0,\ \ n\geq 1,\ \ \xi_{nk}=\frac{\xi_k-a_k}{B_n}.$$

ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით ლინდებერგის (2.2) პირობა მიიღებს (2.2') სახეს ან რაც იგივეა:

$$\sum_{k=1}^{n}M\left[\xi_{nk}^2 I(|\,\xi_{nk}\,|\geq\varepsilon\right]\to 0,\ \ n\to\infty, \qquad (2.16)$$

თუ $S_n=\xi_{n1}+\dots+\xi_{nn}$, მაშინ $DS_n=1$ და თეორემა 2.1 ჩამოყალიბდება ასე: თუ (2.16) პირობა შესრულებულია, მაშინ

$$P\{S_n<x\}\to\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du,\ n\to\infty,$$

ან მოკლედ:

$$S_n\xrightarrow{d}N(0,1),$$

სადაც $\xrightarrow{d}$ აღნიშნავს განაწილებით კრებადობას (იხ. თავი VII, §4), ხოლო $N(0,1)$ – ნორმალურად (0,1) პარამეტრებით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს.

ცენტრალურ ზღვარით თეორემას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ზოგად „სერიათა სქემისათვის“, ე.ი. არ არის სავალდებულო ξ_{nk}-ს ჰქონდეს $\dfrac{\xi_k-a_k}{B_n}$ სახე. სახელდობრ, ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2.3. ვთქვათ, ყოველი $n\geq 1$-სათვის $\xi_{n1},\ \xi_{n2},\ \dots,\ \xi_{nn}$, ისეთი დამოუკიდებელი შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, რომ $M\xi_{nk}=0$, $DS_n=1$. მაშინ ლინდებერგის (2.16) პირობის შესრულება საკმარისია იმისათვის, რომ

$$S_n\xrightarrow{d}N(0,1),\ \ n\to\infty,$$

სადაც

$$S_n=\xi_{n1}+\dots+\xi_{nn}.$$

ეს თეორემა მტკიცდება სიტყვასიტყვით 2.1 თეორემის ანალოგიურად და ამიტომ მას არ მოვიყვანთ.
ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\max_{1\le k\le n} M\xi_{nk}^2 \le \varepsilon^2 + \sum_{k=1}^{n} M\left[\xi_{nk}^2 I(|\xi_{nk}| \ge \varepsilon\right].$$

ამიტომ, ცხადია, ლინდებერგის (2.16) პირობიდან გამომდინარეობს

$$\max_{1\le k\le n} M\xi_{nk}^2 \to 0,\ \ n\to\infty. \tag{2.17}$$

ადგილი აქვს მნიშვნელოვან თეორემას.

თეორემა 2.4. ვთქვათ, ყოველი $n\ge1$-სათვის $\xi_{n1},\dots,\xi_{nn}$ ისეთი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეთა მიმდევრობაა, რომ $M\xi_{nk}=0$, $DS_n=1$, სადაც $S_n=\xi_{n1}+\dots+\xi_{nn}$. დავუშვათ (2.17) პირობა შესრულებულია. მაშინ ლინდებერგის პირობა აუცილებელი და საკმარისია ცენტრალური ზღვარითი თეორემის სამართლიანობისათვის,

$$S_n \xrightarrow{d} N(0,1).$$

დამტკიცება. საკმარისობა 2.3 თეორემიდან გამომდინარეობს. აუცილებლობის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება შემდეგი ლემა.

ლემა. ვთქვათ, $F(x)$ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა, $M\xi=0$, $D\xi=\gamma>0$, მაშინ ყოველი $a>0$-სათვის

$$\int_{|x|\ge a^{-1}} x^2 dF(x) \le \frac{1}{a^2}\left[\operatorname{Re}\varphi(\sqrt{6}a) - 1 + 3\gamma a^2\right], \tag{2.18}$$

სადაც

$$\varphi(t)=Me^{it\xi}.$$

დამტკიცება. გვაქვს

$$\operatorname{Re}\varphi(t) - 1 + \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2}\gamma t^2 - \int_{-\infty}^{\infty}[1-\cos tx]dF(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma t^2 - \int_{|x|<\frac{1}{a}}[1-\cos tx]dF(x) - \int_{|x|\ge\frac{1}{a}}[1-\cos tx]dF(x) \ge$$

$$\geq \frac{1}{2}\gamma t^2 - \frac{1}{2}t^2 \int\limits_{|x|<\frac{1}{a}} x^2 dF(x) - 2a^2 \int\limits_{|x|\geq\frac{1}{a}} x^2 dF(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma t^2 - \frac{1}{2}t^2 (\gamma - \int\limits_{|x|\geq\frac{1}{a}} x^2 dF(x)) - 2a^2 \int\limits_{|x|\geq\frac{1}{a}} x^2 dF = (\frac{1}{2}t^2 - 2a^2) \int\limits_{|x|\geq\frac{1}{a}} x^2 dF(x)$$

თუ აქ ჩავსვამთ $t=a\sqrt{6}$ მივიღებთ (2.18). ▲

გადავიდეთ თეორემის დამტკიცებაზე.

ვთქვათ,

$$F_{nk}(x) = P\{\xi_{nk} < x\}, \ \ \varphi_{nk}(t) = Me^{it\xi_{nk}},$$

$$M\xi_{nk}=0,\ D\xi_{nk}=\gamma_{nk},\ \sum_{k=1}^{n}\gamma_{nk} = 1$$

$$\max_{1\leq k\leq n}\gamma_{nk} = \max_{1\leq k\leq n} M\xi_{nk}^2 \to 0. \qquad (2.19)$$

$\ln Z$–ით აღვნიშნოთ Z კომპლექსური რიცხვის ლოგარითმის მთავარი მნიშვნელობა (ე.ი. $\ln Z=\ln|Z|+i\arg Z$, $-\pi<\arg Z\leq\pi$).

გვაქვს

$$\ln\prod_{k=1}^{n}\varphi_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{n}\ln\varphi_{nk}(t) + 2\pi i m,$$

სადაც $m=m(n,t)$ რაიმე მთელი რიცხვია.

მაშასადამე,

$$\mathrm{Re}\ln\prod_{k=1}^{n}\varphi_{nk}(t) = \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\ln\varphi_{nk}(t). \qquad (2.20)$$

შემდეგ, ვინაიდან

$$\prod_{k=1}^{n}\varphi_{nk}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}},\ \ n\to\infty$$

ამიტომ

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\varphi_{nk}(t)\right| \to e^{-\frac{t^2}{2}},\ \ n\to\infty,$$

ე.ი. $$\mathbf{Re}\ln\prod_{k=1}^{n}\varphi_{nk}(t)=\mathbf{Re}\ln\left|\prod_{k=1}^{n}\varphi_{nk}(t)\right|\to-\frac{1}{2}t^2,\ n\to\infty. \quad (2.21)$$

როგორც ვიცით (იხ. ამავე თავის (2.7) უტოლობა),

$$|\ln(1+z)-z|\le|z|^2,\ |z|\le\frac{1}{2}. \qquad (2.22)$$

(2.19)-ის ძალით, ყოველი ფიქსირებული t-თვის და საკმარი-სად დიდი n-ებისათვის, გვაქვს

$$|\varphi_{nk}(t)-1|\le\frac{1}{2}\gamma_{nk}t^2\le\frac{1}{2},\ k=1,2... \qquad (2.23)$$

ამიტომ (2.22) და (2.23)-დან მივიღებთ:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{\ln[1+(\varphi_{nk}(t)-1)]-(\varphi_{nk}(t)-1)\}\right|\le\sum_{k=1}^{n}|\varphi_{nk}(t)-1|^2\le$$

$$\le\frac{t^4}{4}\max_{1\le k\le n}\gamma_{nk}\cdot\sum_{k=1}^{n}\gamma_{nk}=\frac{t^4}{4}\max_{1\le k\le n}\gamma_{nk}\to 0$$

და, მაშასადამე,

$$\left|\mathbf{Re}\sum_{k=1}^{n}\ln\varphi_{nk}(t)-\mathbf{Re}\sum_{k=1}^{n}(\varphi_{nk}(t)-1)\right|\to 0,\ n\to\infty. \qquad (2.24)$$

(2.20), (2.21) და (2.24)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\mathbf{Re}\sum_{k=1}^{n}(\varphi_{nk}(t)-1)+\frac{1}{2}t^2=\sum_{k=1}^{n}\left[\mathbf{Re}\,\varphi_{nk}(t)-1+\frac{1}{2}t^2\gamma_{nk}\right]\to 0$$

თუ აქ ჩავსვამთ $t=a\sqrt{6}$, მაშინ ყოველი $a>0$-სათვის მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\mathbf{Re}\,\varphi_{nk}(a\sqrt{6})-1+3a^2\gamma_{nk}\right]\to 0,\ n\to\infty. \qquad (2.25)$$

დაბოლოს, (2.18) და (2.25)-დან, როცა $a=\frac{1}{\varepsilon}$, მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^{n}M\left[\xi_{nk}^2 I(|\xi_{nk}|\ge\varepsilon)\right]=\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\ge\varepsilon}x^2dF_{nk}(x)\le$$

$$\le\varepsilon^2\sum_{k=1}^{n}\left[\mathbf{Re}\,\varphi_{nk}(a\sqrt{6}-1+3a^2\gamma_{nk}\right]\to 0,\ n\to\infty. \qquad \blacktriangle$$

§3. ცენტრალურ ზღვარით თეორემაში კრებადობის სიჩქარის შესახებ

ვთქვათ, $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია

და, ამასთან,

$$M\xi_1=0,\ D\xi_1=\sigma^2>0,\ M|\xi_1|^3<\infty.$$

აღვნიშნოთ

$$F_n(x)=P\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\}.$$

როგორც ვიცით,

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x)-\Phi(x)\right|\to 0,\ \ n\to\infty. \tag{3.1}$$

ბუნებრივად ისმის კითხვა: რა სიჩქარითაა კრებადობა (3.1)-ში? ამ კითხვაზე პასუხი მოიცემა ბ ე რ ი - ე ს ე ნ ი ს შესანიშნავი თეორემით.

თეორემა (ბერი-ესენი). ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\sup_x\left|F_n(x)-\Phi(x)\right|\le C\frac{M|\xi_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}, \tag{3.2}$$

სადაც

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\le C<0{,}8.$$

(3.2)-ის დამტკიცებისათვის დაგვჭირდება ესენის თეორემა (მას მოვიყვანთ დაუმტკიცებლად):

თეორემა (ესენის უტოლობა). ვთქვათ, $F(x)$ და $G(x)$ განაწილების ფუნქციებია, ხოლო $f(t)$ და $g(t)$ – შესაბამისი მახასიათებელი ფუნქციები. ვთქვათ, $G(x)$-ს გააჩნია წარმოებული და

$$\sup_x\left|G'(x)\right|\le C<\infty.$$

მაშინ ყოველი T>0-სათვის

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|F(x)-G(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^T\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt+\frac{24}{\pi T}\sup_x|G'(x)|. \qquad (3.3)$$

თუ (3.3)-ში $F(x)\equiv F_n(x)$, $G(x)\equiv \Phi(x)$,

მაშინ

$$\sup_x|F_n(x)-\Phi(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^T\left|\frac{\varphi_n(t)-\varphi(t)}{t}\right|dt+\frac{2\pi}{\pi T}\cdot\frac{1}{2\pi} \qquad (3.4)$$

სადაც

$$\varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}},\ \varphi_n(t)=\left[\varphi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n,\ \varphi_1(t)=Me^{it\xi_1}.$$

შევაფასოთ $|\varphi_n(t)-\varphi(t)|$. ვთქვათ, სიმარტივისათვის $\sigma^2=1$, $\beta_3=M|\xi_1|^3$. ტეილორის ფორმულის ძალით დავწერთ:

$$(M\xi_1=0,\ M\xi_1^2=1,\ M|\xi_1|^3<\infty):$$

$$\varphi_1(t)=Me^{it\xi_1}=1-\frac{t^2}{2}+\frac{(it)^3}{6}\left[M\xi_1^3(\cos\theta_1 t\xi_1+i\sin\theta_2 t\xi_1)\right].$$

$$|\theta_1|\le 1,\ |\theta_2|\le 1 \qquad (3.5)$$

ამიტომ

$$\varphi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=1-\frac{t^2}{2n}+\frac{(it)^3}{6n^{\frac{3}{2}}}\left[M\xi_1^3(\cos\theta_1\frac{t}{\sqrt{n}}\xi_1+i\sin\theta_2\frac{t}{\sqrt{n}}\xi_2)\right].$$

თუ

$$|t|\le T=\frac{\sqrt{n}}{5\beta_3},$$

და გავითვალისწინებთ, რომ $\beta_3\ge\sigma^2=1$ (იხ. თავი IV, §8), მაშინ მივიღებთ:

$$1-\left|\varphi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|\le\left|1-\varphi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|\le\frac{t^2}{2n}+\frac{|t|^3\beta_3}{3n^{3/2}}\le\frac{1}{25}.$$

მაშასადამე, როცა $|t|\le T$, შესაძლებელია

$$\left[\varphi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = e^{n\ln\varphi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \tag{3.6}$$

წარმოდგენა.

რადგანაც $\beta_3<\infty$, ტეილორის ფორმულის ძალით დავწერთ:

$$\ln\varphi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \frac{it}{\sqrt{n}}\left[\ln\varphi_1{}'(t)\right]_0 + \frac{(it)^2}{2n}\left[\ln\varphi_1{}''(t)\right]_0 +$$

$$+\frac{(it)^3}{6n^{3/2}}(\ln\varphi_1)''\left(\theta\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{2n} + \frac{(it)^3}{6n^{3/2}}(\ln\varphi_1)'''\left(\theta\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ |\theta|\le 1. \tag{3.7}$$

შემდეგ,

$$(\ln\varphi_1(s))''' = \frac{\varphi_1'''(s)\varphi_1^2(s) - 3\varphi_1''(s)\varphi_1'(s)\varphi_1(s) + 2(\varphi_1'(s))^2}{\varphi_1^3(s)} =$$

$$\frac{M\left[(i\xi_1)^3 e^{i\xi_1 s}\right]\varphi_1^2(s) - 3M\left[(i\xi_1)^2 e^{i\xi_1 s}\right]M\left[(i\xi_1)e^{i\xi_1 s}\right]\varphi_1(s) + 2M\left[(i\xi_1)e^{i\xi_1 s}\right]^3}{\varphi_1^3(s)}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\left|\varphi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \ge \frac{24}{25},$$

როცა $|t|\le T$ და $|\varphi_1(s)|\le 1$, აქედან მივიღებთ:

$$\left|(\ln\varphi_1)'''\left(\theta\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le \frac{\beta_3 + 3\beta_1\beta_2 + 2\beta_1^3}{\left(\frac{24}{25}\right)^3} \le 7\beta_3. \tag{3.8}$$

($\beta_k = E|\xi_1|^k$, $k=1,2,3$; $\beta_1 \le \beta_2^{1/2} \le \beta_3^{1/3}$, იხ. თავი IV, §8).

(3.6)-(3.8)-დან, $|e^{Z}-1|\le|z|e^{|z|}$ უტოლობის გამოყენებით მივი-ღებთ:

$$\left|\left[\varphi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| = \left|e^{n\ln\varphi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \le$$

$$\le \frac{7}{6}\frac{\beta_3|t|^3}{\sqrt{n}}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}+\frac{7}{6}|t|^3\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}\right\} \le \frac{7}{6}\frac{\beta_3|t|^3}{\sqrt{n}}e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

ამ უტოლობის გათვალისწინებით, (3.4) უტოლობიდან მიიღება (3.2) უტოლობა. ▲

შენიშვნა. (3.2)-ის შეფასების რიგი არ შეიძლება გაუმჯობე-სებული იქნას. მართლაც, ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ დამოუკიდებელი და ბერნულის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია:

$$P\{\xi_k = +1\} = P\{\xi_k = -1\} = \frac{1}{2}.$$

სიმეტრიის ძალით, ცხადია, რომ

$$2P\left\{\sum_{k=1}^{2n}\xi_k < 0\right\} + P\left\{\sum_{k=1}^{2n}\xi_k = 0\right\} = 1.$$

სტირლინგის ფორმულის (იხ. თავი VI, §2) გამოყენებით

$$\left|P\left\{\sum_{k=1}^{2n}\xi_k < 0\right\} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}P\left\{\sum_{k=1}^{2n}\xi_k = 0\right\} = \frac{1}{2}C_{2n}^{n}\cdot 2^{-2n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n\pi}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(2n)}}$$

აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ C მუდმივი, რომელიც შედის (3.2)-ში, არ არის ნაკლები $(2\pi)^{-1/2}$-ზე და

$$P\left\{\sum_{k=1}^{2n}\xi_k = 0\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \to \infty. \qquad ▲$$

თავი IX

მრავალგანზომილებიანი მახასიათებელი ფუნქციები

§1. განსაზღვრა და თვისებები

ვთქვათ, $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილების ფუნქციაა

$$F_{(\xi_1,...\xi_n)} = F_\xi(x)=P\{\xi_1<x_1,...,\xi_n<x_n\},\ x=(x_1,...,x_n).$$

ანალოგიურად, განაწილების სიმკვრივე $f_{\xi_1,...\xi_n}(x_1,...,x_n)$, თუ ის არსებობს, აღვნიშნოთ $f_\xi(x)$-ით. ξ შემთხვევითი ვექტორის მახასიათებელი ფუნქცია ეწოდება

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{(\xi_1,...\xi_n)}(t_1,...,t_n) = Me^{i(t,\xi)}, \tag{1.1}$$

სადაც

$$t=(t_1,...,t_n),\ (t,\xi) = \sum_{i=1}^{n} t_i\xi_i .$$

მახასიათებელი ფუნქცია განსაზღვრულია ყველა t-სათვის, რომელთა კომპონენტები t_k ნამდვილი რიცხვებია. (1.1) მახასიათებელი ფუნქცია $F_\xi(x)$ და $f_\xi(x)$-ით განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\varphi_\xi(t) = \int_{R^n} e^{i(t,x)}dF_\xi(x),\ \ \varphi_\xi(t) = \int_{R^n} e^{i(t,x)}f_\xi(x)dx .$$

მახასიათებელი ფუნქციის თვისებები

1. $|\varphi_\xi(t)|\le 1\ \ \forall t\in R^n,\ \ \ \varphi_\xi(0)=1.$
2. $\varphi_\xi(t)$ თანაბრად უწყვეტია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $A=\{\omega:|\xi_k(\omega)|\le X,\ k=\overline{1,n}\}$. გვაქვს:

$$|\varphi_\xi(t+h)-\varphi_\xi(t)|=|Me^{i(t,\xi)}(e^{i(h,\xi)}-1)|\le M|e^{i(h,\xi)}-1|=M|e^{i(h,\xi)}-1|I_A+$$

$$+M|e^{i(h,\xi)}-1|\cdot I_{\overline{A}}\le M|(h,\xi)|\cdot I_A+2MI_{\overline{A}}\le X|h|+2P\{\xi\notin[-X,X]^n\},$$

სადაც

$$|h|=\sum_{k=1}^{n} h_k \text{ და } [-X,X]^n=\{x:|x_k|\le X,\ k=\overline{1,n}\}.$$

ვთქვათ, $\varepsilon>0$. თავდაპირველად შევარჩიოთ X ისე, რომ

$$P\{\omega:\xi\notin[-X,X]^n\}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

მაშინ ყოველი h-სთვის, რომლისთვისაც $|h|<\frac{\varepsilon}{2X}$, მივიღებთ

$$|\varphi_\xi(t+h)-\varphi_\xi(t)|<\varepsilon. \qquad \blacktriangle$$

3. თუ $\xi(1), \xi(2),\dots,\xi(m)$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი ვექტორებია და $\zeta=\xi(1)+\dots+\xi(m)$, მაშინ

$$\varphi_\zeta(t)=\prod_{k=1}^{m}\varphi_{\xi(k)}(t).$$

დამტკიცება გამომდინარეობს მათემატიკური ლოდინის ერთ-ერთი თვისებიდან.

4. $(\xi_1,\dots,\xi_k)$, $k<n$ ვექტორის მახასიათებელი ფუნქცია მიიღება $\varphi_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(t_1,t_2,\dots,t_n)$ მახასიათებელი ფუნქციისაგან:

$$\varphi_{\xi_1,\dots,\xi_k}(t_1,t_2,\dots,t_k)=\varphi_{\xi_1,\dots,\xi_n}(t_1,t_2,\dots,t_k,0,0,\dots,0).$$

5. $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_k$ შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\varphi_{\xi_1,\dots,\xi_k}(t_1,t_2,\dots,t_k)=\prod_{j=1}^{k}\varphi_{\xi_j}(t_j)$$

აუცილებლობა გამომდინარეობს მათემატიკური ლოდინის ერთ-ერთი თვისებიდან, ხოლო საკმარისობა ქვემოთ მოყვანილი შებრუნების ფორმულიდან.

6. $\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t)=\varphi_{\xi_1,\dots,\xi_n}(t,t,\dots,t)$

დამტკიცება გამომდინარეობს $\sum_{j=1}^{n}\xi_j\cdot t=t\sum_{j=1}^{n}\xi_j$ ტოლობიდან.

7. თუ $\eta=C\xi$ წრფივი გარდაქმნაა

$$\eta_k=\sum_{j=1}^{n}C_{kj}\xi_j,\ k=1,2,...,m,$$

$$C=\|C_{ij}\|,\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ \text{მაშინ}\ \varphi_\eta(t)=\varphi_\xi(C^*t),$$

სადაც C^* მატრიცი C მატრიცის შეუღლებულია.

დამტკიცება. გვაქვს

$$Me^{i(t,\eta)}=Me^{i\sum\limits_{\alpha=1}^{m}t_\alpha\eta_\alpha}=Me^{i(t,C_\xi)}=Me^{i\sum\limits_{\alpha=1}^{m}t_\alpha\cdot\sum\limits_{\beta=1}^{n}C_{\alpha\beta}\xi_\beta}=$$

$$=Me^{i\sum\limits_{\beta=1}^{n}\xi_\beta\cdot\sum\limits_{\alpha=1}^{m}C_{\alpha\beta}t_\alpha}=Me^{i(C^*t,\xi)}=\varphi_\xi(C^*t).\qquad\blacktriangle$$

შენიშვნა 1. თუ $m=n$ და დეტერმინანტი $|C|\neq 0$ და არსებობს $f_\xi(x)$ სიმკვრივე, მაშინ $\eta=C\xi$-საც აგრეთვე აქვს სიმკვრივე $f_\eta(y)$, რომელიც $f_\xi(x)$-თან დაკავშირებულია ფორმულით:

$$f_\eta(y)=\frac{1}{|C|}f_\xi(C^{-1}y).\qquad(1.2)$$

მართლაც, ნებისმიერი $A\in\mathcal{B}^n$-თვის გვაქვს

$$P\{\xi\in A\}=\int_A f_\xi(x)dx.$$

მოვახდინოთ აქ ცვლადთა გარდაქმნა: $x=C^{-1}y$, მივიღებთ:

$$P\{\xi\in A\}=\int_{CA}f_\xi(C^{-1}y)\,|C^{-1}|\,dy=P\{\eta\in CA\}=\int_{CA}f_\eta(y)dy.$$

აქედან მიიღება (1.2).

შენიშვნა 2. $\eta=C\xi+b$ გარდაქმნის დროს 3) და 7)-დან მიიღება $\varphi_\xi(t)$ და $\varphi_\eta(t)$ შორის შემდეგი კავშირი:

$$\varphi_\eta(t)=e^{i(t,b)}\varphi_\xi(C^*t).$$

8. $\varphi_\xi(-t)=\overline{\varphi_\xi(t)}=\varphi_{-\xi}(t)$.

აღვნიშნოთ

$$m_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}=M\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\dots\xi_n^{\alpha_n}$$

მას ეწოდება $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ რიგის მომენტი.

9. თუ სასრულია ყველა $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=r$ რიგის $m_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ მომენტები, მაშინ

$$m_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}=i^\alpha\frac{\partial^\alpha\varphi_\xi(0,\dots,0)}{\partial t_1^{\alpha_1}\dots\partial t_n^{\alpha_n}},\quad \alpha=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n\le r \tag{1.3}$$

და

$$\varphi_\xi(t)=\sum_{\alpha=0}^{r}i^\alpha\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=\alpha}\frac{t_1^{\alpha_1}\dots t_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\dots\alpha_n!}m_{\alpha_1\dots\alpha_n}+R_r(t), \tag{1.4}$$

სადაც

$$R_r(t)=0(|t|^r),\ |t|=|t_1|+\dots+|t_n|\to 0.$$

დამტკიცება. (1.3) ტოლობის დამტკიცება ერთი განზომილების შემთხვევის ანალოგიურია.

(1.4)-ის დამტკიცებისათვის განვიხილოთ ხდომილობა

$$A=\{|\xi_\alpha|\le X,\ \alpha=1,2,\dots,n\}.$$

გვაქვს:

$$|R_r(t)|=|M(e^{i(t,\xi)}-\sum_{\alpha=0}^{r}\frac{i^\alpha(t,\xi)^\alpha}{\alpha!})|\le$$

$$\le M|e^{i(t,\xi)}-\sum_{\alpha=0}^{r}\frac{i^\alpha(t,\xi)^\alpha}{\alpha!}|(I_A+I_{\overline{A}}).$$

თუ გამოვიყენებთ

$$|e^{i\theta}-\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{(i\theta)^\alpha}{\alpha!}|\le\frac{|\theta|^{l+1}}{(l+1)!}$$

უტოლობას, როცა l=r და l=r-1, მივიღებთ:

$$|R_r(t)|\leq M\frac{|(t,\xi)|^{r+1}}{(r+1)!}I_A+2M\frac{|(t,\xi)|^r}{r!}I_{\overline{A}}\leq$$

$$\leq\frac{X^{r+1}|t|^{r+1}}{(r+1)!}+2\frac{|t|^r}{r!}M(|\xi_1|+...+|\xi_n|)^r\cdot I_{\overline{A}}.$$

ყოველი $\varepsilon>0$-სათვის შევარჩიოთ ისეთი X, რომ მეორე წევრი იყოს $<\varepsilon\frac{|t|^r}{2}$-ზე.

შემდეგ, როდესაც

$$|t|\leq t_0=\frac{\varepsilon(r+1)!}{2X^{r+1}},$$

მივიღებთ

$$|R_r(t)|\leq\varepsilon|t|^r. \qquad \blacktriangle$$

შებრუნების ფორმულა. ვთქვათ, $\Delta=\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k,b_k)$ რაიმე ინტერვალია R^n-ში. თუ ალბათობა იმისა, რომ ξ შემთხვევითი ვექტორი მიიღებს მნიშვნელობას Δ-ს საზღვრებზე ნულის ტოლია, მაშინ

$$P\{\xi\in\Delta\}=\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-it_k a_k}-e^{-it_k b_k}}{it_k}\cdot e^{-t_k^2\sigma^2}\right)\cdot\varphi_\xi(t)dt_1...dt_n$$

ამ ფორმულიდან მიიღება შემდეგი:

თეორემა 1.1. $\varphi_\xi(t)$ მახასიათებელი ფუნქციით ცალსახად განისაზღვრება ξ-ის განაწილების ფუნქცია.

უწყვეტობის თეორემა 1.2. იმისათვის, რომ $\{F_n\}$ განაწილების ფუნქციათა მიმდევრობა სუსტად კრებადი იყოს $F(x)$ განაწილების ფუნქციისაკენ, აუცილებელი და საკმარისია, რათა შესაბამის მახასიათებელ ფუნქციათა $\{\varphi_n(t)\}$ მიმდევრობა ყოველ $t\in R^n$-სათვის კრებადი იყოს ზღვარითი $\varphi(t)$ ფუნქციისაკენ, რომელიც უწყვეტია $t=0$ წერტილზე. მასთან $\varphi(t)$ არის $F(x)$-ის მახასიათებელი ფუნქცია.

ჩამოყალიბებული თეორემების დამტკიცება ემთხვევა ერთი განზომილების შემთხვევაში ანალოგიური თეორემების დამტკიცებას. ამის გამო, ჩვენ ამ თეორემების დამტკიცებას არ მოვიყვანთ.

§2. მრავალგანზომილებიანი ნორმალური განაწილება და მასთან დაკავშირებული განაწილებები

III თავის მე–4 პარაგრაფში განვსაზღვრეთ $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ შემთხვევითი ვექტორის ნორმალური განაწილების სიმკვრივე:

$$f_\xi(x)=\frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2}Q(x)},$$

სადაც

$$Q(x)=xAx'=\sum_{i,j}^{n}a_{ij}x_ix_j\,,$$

$|A|$ დადებითად განსაზღვრული $A=\|a_{ij}\|$ მატრიცის დეტერმინანტია. ეს ცენტრირებული ნორმალური განაწილებაა, რომლისთვისაც $M\xi=0$. ნებისმიერი a ვექტორისათვის $\xi+a$ ვექტორის განაწილებასაც ეწოდება აგრეთვე ნორმალური. ვიპოვოთ ξ შემთხვევითი ვექტორის მახასიათებელი ფუნქცია. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ

$$\varphi_\xi(t)=e^{-\frac{1}{2}tMt'},\tag{2.1}$$

სადაც $M=A^{-1}$, A^{-1} არის A-ს შებრუნებული მატრიცა, რომელიც $\|m_{ij}\|$ მატრიცის ტოლია, სადაც $m_{ij}=M\xi_i\xi_j$.

მართლაც,

$$\varphi_\xi(t)=\frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx'-\frac{1}{2}xAx'}dx_1dx_2\dots dx_n\,.$$

ვთქვათ, C ისეთი ორთოგონალური მატრიცაა, რომ $CAC'=E$, E –დიაგონალური მატრიცაა $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$ ელემენტებით. მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა: $x=yC$ და $t=vC$. მაშინ

$$|A|=|E|=\prod_{k=1}^{n}\mu_k,\ itx'-\frac{1}{2}xAx'=ivy'-\frac{1}{2}yEy'=$$

$$=i\sum_{k=1}^{n} v_k y_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu_k y_k^2,$$

ამიტომ

$$\varphi_\xi(t)=\frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{n/2}}\prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iv_k y_k-\frac{1}{2}\mu_k y_k^2}dy_k=$$

$$=\sqrt{|A|}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}e^{-\frac{1}{2}\frac{v_k^2}{\mu_k}}=e^{-\frac{1}{2}VE^{-1}V'}=e^{-\frac{1}{2}tC'E^{-1}Ct'}=e^{-\frac{1}{2}tA^{-1}t'}.$$

მეორე მხრივ, ვინაიდან ξ-ს ყველა მომენტი არსებობს, ამიტომ **t=0** წერტილის მიდამოში

$$\varphi_\xi(t)=1-\frac{1}{2}tA^{-1}t'+0(\sum_{k=1}^{n}t_k^2)=$$

$$=1+itM\xi'+\frac{i^2}{2}tMt'+0(\sum_{k=1}^{n}t_k^2).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$M\xi=0,\ A^{-1}=M. \qquad ▲$$

(2.1) დამტკიცებული ფორმულიდან გამომდინარეობს ნორმა–ლური განაწილების შემდეგი თვისება: $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ ვექტორის კო–მპონენტები დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც კორელაციის კოეფიციენტი $\rho(\xi_i,\xi_j)=0$, $i\neq j$. მართლაც, თუ **M** დიაგონალური მატრიცაა, მაშინ $A=M^{-1}$ აგრეთვე დიაგონალური იქნება და $f_\xi(x)$ სიმკვრივეთა ნამრავლის ტოლია. შებრუნებით, თუ $\xi_1,\dots,\xi_n$ დამოუკიდებელია, მაშინ **A** მატრიცა დიაგონალურია და, მაშასადამე, **M**-იც დიაგონალური იქნება. ▲

ნორმალური განაწილების ერთ–ერთი მნიშვნელოვანი თვისება აგრეთვე მდგომარეობს შემდეგში: ნორმალურად განაწილებული ξ ვექტორის ($M\xi=0$, $\|cov(\xi_i,\xi_j)\|=B$) ნებისმიერი წრფივი $\eta=C\xi$ გარდაქმნა აგრეთვე განაწილებულია ნორმალურად

$$(M\eta=0,\ \|cov(\eta_\alpha,\eta_\beta)\|=CBC^*).$$

ეს გამომდინარეობს მახასიათებელი ფუნქციის 7) თვისებიდან:

$$\varphi_\eta(t)=\varphi_\xi(C^*t)=e^{-\frac{1}{2}(BC^*t,C^*t)}=e^{-\frac{1}{2}(CBC^*t,t)}. \qquad \blacktriangle$$

დავუშვათ, რომ **B** მატრიცის რანგი **n**-ის ტოლია (როცა რანგი <**n**-ზე ამ შემთხვევას არ განვიხილავთ). ვთქვათ, **C** ისეთი ორთოგონალური მატრიცაა, რომ

$$CBC^*=\begin{Vmatrix} d_{11} & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & d_{nn} \end{Vmatrix}=D, \quad d_{\alpha\alpha}>0$$

მაშინ

$$\varphi_\eta(t)=e^{-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}d_{\alpha\alpha}t_\alpha^2},$$

ე.ი. $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. ამასთან η_α-ს აქვს ნორმალური განაწილება პარამეტრებით $(0,d_\alpha)$. ამ შემთხვევაში η-ს განაწილების სიმკვრივე იქნება:

$$f_\eta(y_1,...,y_n)=\prod_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}d_{\alpha\alpha}^{1/2}}e^{-y_\alpha^2/2d_{\alpha\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{D}}e^{-\frac{1}{2}(D^{-1}y,y)}.$$

შემდეგ, ვინაიდან $\xi=C^{-1}\eta$ და $|C|=1$, ამიტომ (1.2) ფორმულის ძალით გვექნება:

$$f_\xi(x_1,...,x_n)=f_\eta(Cx)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{D}}e^{-1/2(D^{-1}Cx,Cx)}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|B|}}e^{-\frac{1}{2}(C^*D^{-1}Cx,x)}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|B|}}e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}x,x)}, \qquad (2.2)$$

რადგანაც $B^{-1}=C^*D^{-1}C$, $|B|=|D|$.

თუ B დიაგონალური მატრიცაა ერთი და იგივე ელემენტით, მაშინ ნორმალურ განაწილებას ეწოდება სფერული. ამ შემთხვევაში (2.2) სიმკვრივე დამოკიდებულია მხოლოდ O წერტილსა და x წერტილს შორის მანძილზე, ე.ი.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}. \qquad (2.3)$$

ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი თვისება ნორმალური განაწილებისა მდგომარეობს იმაში, რომ ის წარმოადგენს საკმარისად ზოგადი სქემის დამოუკიდებელი შემთხვევით ვექტორთა ჯამის ზღვარით განაწილებას. ჩვენ მახასიათებელ ფუნქციათა მეთოდით დავამტკიცებთ შემდეგ ზღვარით თეორემას.

თეორემა 2.1. ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, .., \xi_n$ დამოუკიდებელი და ერთნაირი განაწილების მქონე შემთხვევითი ვექტორთა მიმდევრობაა,

$$\xi_n = (\xi_{n1}, .., \xi_{nd},),$$

ამასთან,

$$M\xi_n = a \text{ და } \mathrm{cov}(\xi_{n\alpha}, \xi_{n\beta}) = b_{\alpha\beta}$$

სასრულია.

აღვნიშნოთ

$$\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

მაშინ

$$\bar{\zeta}_n = \frac{\zeta_n - na}{\sqrt{n}}$$

შემთხვევითი ვექტორის განაწილების ფუნქცია სუსტად კრებადია ნულოვანი მათემატიკური ლოდინისა და $B=||b_{\alpha\beta}||$ კოვარიაციული მატრიცის მქონე ნორმალური განაწილებისაკენ.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $\varphi(t)$-თი $\tilde{\xi}_n = \xi_n - a$ შემთხვევითი ვექტორის მახასიათებელი ფუნქცია.

რადგანაც $M\tilde{\xi}_n = 0$ და $M\tilde{\xi}_{n\alpha}\tilde{\xi}_{n\beta} = b_{\alpha\beta}$, ამიტომ 9) თვისების ძალით (იხ. ამავე თავის §1) დავწერთ:

$$\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{2n}\sum_{\alpha,\beta=1}^{d} b_{\alpha,\beta} t_\alpha t_\beta + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

აქედან მივიღებთ:

$$\varphi_{\bar{\zeta}_n}(t)=\left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \to e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\beta}^{d} b_{\alpha,\beta}t_\alpha t_\beta}$$

აქედან და თეორემა 2-ის გამოყენებით მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას. ▲

(2.3) სფერული ნორმალური განაწილებიდან ჩვენ მივიღებთ ცნობილ სტანდარტულ განაწილებებს, რომლებსაც მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვთ მათემატიკურ სტატისტიკაში.

χ^2 – **განაწილება.** ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2,.., \xi_n$ დამოუკიდებელი და (0,1) პარამეტრების მქონე ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია. ცხადია, $\xi=(\xi_1,.., \xi_n)$ ვექტორის განაწილების სიმკვრივე მოიცემა (2.3) ფორმულით, როცა $\sigma=1$. ჩვენი ამოცანაა მოვძებნოთ $\chi_n^2=\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ვთქვათ,

$$K_n(x)=P\{\chi_n^2<x\}.$$

ცხადია, რომ $K_n(x)=0$, როცა $x<0$. დავუშვათ $x\geq 0$, მაშინ

$$K_n(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\leq x}\cdots\int e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}dx_1...dx_n. \qquad (2.4)$$

ვიპოვოთ $K_n(x)$-ის წარმოებული.

გვაქვს

$$K_n(x+h)-K_n(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{x<\sum_{i=1}^{n}x_i^2\leq x+h}\cdots\int e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}dx_1...dx_n,$$

სადაც ინტეგრირების არე შემოსაზღვრულია ორი $G_{n,x}$ და $G_{n,x+h}$ კონცენტრირებული სფეროს ზედაპირებით. საშუალო მნიშვნელობის თეორემის გამოყენება გვაძლევს

$$K_n(x+h)-K_n(x)=(2\pi)^{-n/2}e^{-\frac{1}{2}(x+\theta h)}\int\limits_{x<\sum_{i=1}^{n}x_i^2\le x+h}\!\!\!\dots\!\int dx_1\dots dx_n \qquad (2.5)$$

აქ $e^{-1/2(x+\theta h)}$ $(0<\theta<1)$ არის ინტეგრალქვეშა $e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$ ფუნქციის რაიმე საშუალო მნიშვნელობა ინტეგრირების ხსენებულ არეში.

აღვნიშნოთ

$$S_n(x)=\int\limits_{x_1^2+\dots+x_n^2<x}\!\!\!\dots\!\int dx_1\dots dx_n \qquad (2.6)$$

მაშინ (2.5) ჩაიწერება ასე:

$$K_n(x+h)-K_n(x)=(2\pi)^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}(x+\theta h)}\left[S_n(x+h)-S_n(x)\right]. \qquad (2.7)$$

(2.6) ინტეგრალში მოვახდინოთ ცვლადთა $x_i=\sqrt{x}y_i$ გარდაქმნა, გვექნება:

$$S_n(x)=(\sqrt{x})^n\int\limits_{\sum_{k=1}^{n}y_k^2\le 1}\!\!\!\dots\!\int dy_1\dots dy_n=C_{n,1}x^{\frac{n}{2}}, \qquad (2.8)$$

სადაც $C_{n,1}$ ერთეულოვანი რადიუსის მქონე სფეროს მოცულობაა.

(2.7) და (2.8)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{(K_n x+h)-K_n(x)}{h}=C_{n,2}e^{-1/2(x+\theta h)}\frac{(x+h)^{\frac{n}{2}}-x^{\frac{n}{2}}}{h}$$

უკანასკნელ ტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $h\to 0$, მივიღებთ:

$$k_n(x)=K_n'(x)=C_{n,3}\cdot x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}.$$

$C_{n,3}$-ის მნიშვნელობა ვიპოვოთ პირობიდან:

$$\int_0^{\infty}k_n(x)dx=1.$$

ე.ი.

$$C_{n,3}\int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1.$$

ამ ინტეგრალში მოვახდინოთ ჩასმა $\frac{x}{2} = u$, მივიღებთ:

$$2^{\frac{n}{2}} C_{n,3}\int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du = 1,$$

$$C_{n,3} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\alpha-1} dz,\ \alpha > 0$$

ამრიგად,

$$k_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < 0 \\ \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & \text{როცა } x \geq 0. \end{cases} \qquad (2.9)$$

განაწილებას, (2.9) სიმკვრივით, ეწოდება χ^2 განაწილება n თავისუფლების ხარისხით. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$M\chi_n^2 = n,\ D\chi_n^2 = 2n.$$

სტიუდენტის განაწილება. მათემატიკური სტატისტიკის მრავალი ამოცანა დაიყვანება

$T_n = \frac{Z\sqrt{n}}{\sqrt{V}}$ სიდიდის განაწილების მოძებნამდე. აქ Z და V დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მასთან Z განაწილებულია ნორმალურად $(0,1)$ პარამეტრებით, ხოლო V ემორჩილება χ^2 განაწილებას n თავისუფლების ხარისხით. T_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე მოიცემა ფორმულით:

$$S_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{\chi^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

დავამტკიცოთ ეს. ცხადია, Z და V-ს ერთობლივი განაწილების სიმკვრივეა

$$Ce^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y}{2}}y^{\frac{n}{2}-1},$$

სადაც

$$C=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

შემდეგ,

$$S_n(x)=P\{T_n<x\}=P\{\frac{Z\sqrt{n}}{\sqrt{V}}<x\}=C\int\int_{u\le\frac{x}{\sqrt{n}}\sqrt{v}} e^{-\frac{u^2}{2}-\frac{v}{2}}v^{\frac{n}{2}-1}dudv.$$

ორჯერ შევასრულოთ ინტეგრება, პირველად u-თი -∞-დან $\frac{x}{\sqrt{n}}\sqrt{v}$-მდე, ხოლო შემდეგ v-თი 0-დან ∞-მდე, ჩვენ მივიღებთ:

$$S_n=C\int_0^{\infty} v^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{v}{2}}dv\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{n}}\sqrt{v}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x-ით (რომელიც სამართლიანია), მივიღებთ:

$$s_n(x)=S_n'(x)=\frac{C}{\sqrt{n}}\int_0^{\infty} v^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{v}{2}(1+\frac{x^2}{n})}dv=$$

$$=\frac{C}{\sqrt{n}}\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n}{2}+1}}\int_0^{\infty} u^{\frac{n-1}{2}}e^{-u}du=$$

$$=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n}}C\Gamma(\frac{n+1}{2})(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}=B_n(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}},$$

$$B_n=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}}.$$ ▲

შევნიშნოთ, რომ

$$s_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ როცა } n\to\infty.$$

თუ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ დამოუკიდებელი და $(0,1)$ ნორმალური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია,

მაშინ

$$t_n = \frac{\xi_0\sqrt{n}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2\right)^{1/2}}$$

შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია n თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის კანონით.

F – განაწილება. ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m$ დამოუკიდებელი და $(0,1)$ ნორმალური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია. აღვნიშნოთ

$$F_{nm} = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^2}{\frac{1}{m}\sum\limits_{\alpha=1}^{m} \eta_\alpha^2}.$$

F_{nm}-ის განაწილებას აქვს სიმკვრივე:

$$n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \cdot \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(m+nx)^{\frac{n+m}{2}}}, \quad x\geq 0 \qquad (2.10)$$

და მას ეწოდება ფიშერის F-განაწილების სიმკვრივე. (2.10)-ის მისაღებად გამოვიყენოთ ის ფაქტი, რომ $\frac{n}{m}F_{nm}$ წარმოადგენს ორი დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ფარდობას, რომლებსაც აქვთ შესაბამისად χ^2 განაწილება n და m თავისუფლების ხარისხით. ამიტომ

$$P\{\frac{n}{m}F_{nm} < x\} = \frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \iint\limits_{\substack{\frac{u}{v}\leq x \\ u\geq 0, v\geq 0}} u^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{u+v}{2}}\,du\,dv.$$

მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა u=yz, v=z, მივიღებთ:

$$\iint\limits_{\substack{\frac{u}{v}\le x\\ u\ge 0,v\ge 0}} u^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{u+v}{2}} du dv = \int_0^x y^{\frac{n}{2}-1} dy \int_0^\infty z^{\frac{n+m}{2}-1} \cdot e^{-\frac{z(1+y)}{2}} dz =$$

$$= 2^{\frac{n+m}{2}} \Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right) \int_0^x \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{(1+y)^{\frac{n+m}{2}}} dy,$$

ე.ი.

$$P\{\frac{n}{m} F_{nm} < x\} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^x \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{(1+y)^{\frac{n+m}{2}}} dy.$$

აქედან უკვე ძნელი არ არის მივიღოთ (2.10). ▲

სავარჯიშო ამოცანები

კომბინატორული ანალიზის ელემენტები

1. *კომბინატორიკის ძირითადი ფორმულა (გამრავლების წესი);*

ვთქვათ, მოცემულია $A_1, A_2, ..., A_k$ სიმრავლეები, ყოველი A_i სიმრავლე შეიცავს n_i რაოდენობის ელემენტს $(i = 1,2,...,k)$. თითოეული A_i სიმრავლიდან შემთხვევით ვარჩევთ თითო ელემენტს და ამ ელემენტებისაგან ვადგენთ ახალ სიმრავლეს, ასეთი გზით მიღებული ყველა, განსხვავებული სიმრავლეების რაოდენობა აღვნიშნოთ N სიმბოლოთი:

$$N = n_1 . n_2 ... n_k .$$

ამოცანა 1. ჯგუფში 25 სტუდენტია, საჭიროა ავირჩიოთ ჯგუფხელი და ჯგუფხელის მოადგილე. ასეთი არჩევის რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

ამოხსნა. A_1 – შედგება 25 სტუდენტისაგან; A_2 – 24 სტუდენტისაგან; (ჯერ აირჩევა ჯგუფხელი 25 სტუდენტისაგან, მერე 24 სტუდენტისაგან ჯგუფხელის მოადგილე) $N= 25 . 24=600$;

2. *შეკრების წესი.* A_i სიმრავლიდან ერთი ელემენტის არჩევის n_i შესაძლებლობა არსებობს. ვთქვათ A_i და A_j $(i \neq j)$ სიმრავლეებს საერთო ელემენტები არ გააჩნიათ, მაშინ ერთი ელემენტის არჩევის შესაძლებლობათა რაოდენობა A_1-დან ან A_2-დან ან , . . . ან A_k-დან ტოლია

$$N = n_1 + n_2 + ... + n_k ;$$

ამოცანა 2. ყუთში 50 დეტალია, მათ შორის 10 – პირველი ხარისხის, 20 – მეორე ხარისხის, დანარჩენი მესამე ხარისხის. არჩევენ პირველი ან მეორე ხარისხის ერთ დეტალს. რამდენი ვარიანტი არსებობს?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ პირველი ხარისხის დეტალების სიმრავლე A_1-ით, ხოლო მეორე ხარისხის – A_2-ით. $n_1=10$, $n_2=20$;

$$N=10+20=30;$$

ამოცანა 3. ორმა ფოსტალიონმა უნდა დაარიგოს 10 წერილი 10 მისამართზე. რამდენი შესაძლებლობა არსებობს, იმისა, რომ მათ გაინაწილონ ეს სამუშაო?

ამოხსნა. ერთი წერილისთვის არსებობს ორი შესაძლებლობა (ან პირველი ფოსტალიონი მიიტანს წერილს აღნიშნულ მისამართზე ან მეორე) $\mathbf{n_1 = 2}$, ასევე მეორე წერილისთვის $\mathbf{n_2 = 2}$, მესამეს–თვის – $\mathbf{n_3 = 2}$, და ა. შ. $\mathbf{n_{10} = 2}$.

პასუხი: $N = 2.2.2. \ldots 2 = 2^{10}$.

დალაგებული სიმრავლეები

ვთქვათ, მოცემულია სასრული რაოდენობის ელემენტებისაგან შედგენილი სიმრავლე $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, ვუწოდოთ მას გენერალური ერთობლიობა. $\mathbf{n}$-ს ვუწოდოთ ამ ერთობლიობის მოცულობა.

ცდა მდგომარეობს იმაში, რომ ამ გენერალური ერთობლიობიდან მიმდევრობით ვირჩევთ $\mathbf{k}$ რაოდენობის ელემენტს და ვალაგებთ მათ ამორჩევის რიგით. შესაძლებელია ორი სიტუაცია:

I. არჩეული ელემენტი, შემდეგი ამორჩევის დაწყების წინ არაა დაბრუნებული გენერალურ ერთობლიობაში. ასეთ ამორჩევას ეწოდება ამორჩევა დაბრუნების გარეშე ან $\mathbf{n}$ ელემენტისაგან $\mathbf{k}$ ელემენტიანი წყობა.

ამოცანა 4. მოცემულია {1, 2, 3} სიმრავლე. ნებისმიერად ვირჩევთ ორ ელემენტს, დაწერეთ ყველა შესაძლო ორნიშნა რიცხვი.

პასუხი: 12; 13; 23; 21; 31; 32.

$\mathbf{n}$ ელემენტისაგან $\mathbf{k}$ ელემენტიანი (დაბრუნების გარეშე) შერჩევათა რაოდენობა, ანუ წყობა აღინიშნება $\mathbf{A_n^k}$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ პირველი ელემენტის არჩევის შესაძლებლობათა რაოდენობა $\mathbf{n_1 = n}$, მეორე ელემენტის — $\mathbf{n_2 = n-1}$ მესამე ელემენტის — $\mathbf{n_3 = n-2}$, და ა.შ. $\mathbf{n_k = n-(k-1)}$.

გამრავლების წესის თანახმად

$$\mathbf{N = A_n^k = n.(n-1).(n-2)\ldots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}}.$$

თუ $k = n$, მაშინ $A_n^n = n!$, ასეთ ამორჩევას ეწოდება გადანაცვლება, ის აღინიშნება P_n სიმბოლოთი. $P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdots\ n = n!$

II. ამორჩევა დაბრუნებით (განმეორებით). თუ ამორჩეული ელემენტი ყოველი ამორჩევის წინ არის უკან დაბრუნებული, მაშინ საქმე გვაქვს დაბრუნებით ამორჩევასთან. ასეთი ცდის შედეგად n ელემენტისაგან k ელემენტის ამორჩევის ყველა შესაძლებელი რაოდენობა აღვნიშნოთ $\overline{A}_n^k$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ ყოველი ელემენტის ამორჩევის შესაძლებელი რაოდენობა ყოველი ცდის შედეგად არის n, ამიტომ $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_k = n$ ე.ი.

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

ამოცანა 5. მოცემულია {1, 2, 3} სიმრავლე. ნებისმიერად ვირჩევთ ორ ელემენტს, შემდეგი წესით: ჯერ ავირჩევთ ერთ ელემენტს, ჩავაბრუნებთ უკან და შემდეგ ისევ ავირჩევთ ერთ ელემენტს; რამდენი შესაძლებლობა არსებობს? დაწერეთ ყველა შესაძლო ორნიშნა რიცხვი.

ამოხსნა. ცხადია, რომ საქმე გვაქვს დაბრუნებით ამორჩევასთან, ამიტომ

$$\overline{A}_3^2 = 9.$$

პასუხი: ყველა შესაძლო ორნიშნა რიცხვებია: 11; 22; 33; 12; 13; 23; 21; 31; 32.

ამოცანა 6. კონკურსში 10 კინოფილმი მონაწილეობს 4 ნომინაციისათვის. პრიზის განაწილების რამდენი ვარიანტი არსებობს, თუ ყოველი ნომინაციისათვის დადგენილია განსხვავებული პრემიები.

ამოხსნა. ყოველ ფილმს შეუძლია მიიღოს პრიზი სხვადასხვა ნომინაციიდან, ე.ი. ერთი და იგივე ფილმი შეიძლება განმეორდეს, ამიტომ

$$\overline{A}_{10}^4 = 10^4.$$

პასუხი: $\overline{A}_{10}^4 = 10^4.$

არადალაგებული ერთობლიობა
(ერთდროული ამორჩევა)

თუ **n** ელემენტისაგან შექმნილი **k** ელემენტიანი კომბინაციები განსხვავდებიან მხოლოდ შემადგენელი ელემენტებით, მაშინ ისინი განიხილებიან, როგორც ერთდროული არადალაგებული ამორჩევები **k** რაოდენობის ელემენტებისა **n** მოცულობის მქონე გენერალური ერთობლიობიდან და ეწოდებათ **n** ელემენტისაგან **k** ელემენტებიანი ჯუფდება (არა განმეორებითი). სხვა სიტყვებით, ჯუფდება არის არადალაგებულ ელემენტთა ერთობლიობა, რომლებიც განსხვავდებიან მხოლოდ შემადგენელი ელემენტებით.

n ელემენტისაგან **k** ელემენტიანი განუმეორებელი ჯუფდება აღინიშნება C_n^k სიმბოლოთი და

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ამ ფორმულის საშუალებით ადვილად მიიღება ჯუფდების შემდეგი თვისებები:

$$C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1};$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1;$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

თუ **n** ელემენტისაგან **k** ელემენტიან ჯუფდებაში რამდენიმე ელემენტი ან მთლიანად ყველა **k** ელემენტი აღმოჩნდა ერთი და იგივე, მაშინ ასეთ ჯუფდებას ეწოდება განმეორებითი ჯუფდება და აღინიშნება $\overline{C}_n^k$-სიმბოლოთი, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

ამოცანა 7. მე-6 ამოცანის პირობებში განსაზღვრეთ პრიზის განაწილების რამდენი ვარიანტი არსებობს, თუ ყოველი ნომინაციისათვის დაწესებულია ერთი და იგივე პრიზი.

ამოხსნა. რადგანაც ყოველი ნომინაციისათვის დაწესებულია ერ-თი და იგივე პრიზი, ამიტომ ფილმების დალაგებას 5 პრიზის კომბინაციისათვის არ აქვს მნიშვნელობა. ვიყენებთ განმეორებითი ჯუფდების ფორმულას

$$\overline{C}_{10}^4 = C_{10+4-1}^4 = C_{13}^4 = \frac{13!}{4!9!} = 715.$$

პასუხი: 715.

ამოცანა 8. ჭადრაკის ტურნირში მონაწილეობს 12 ადამიანი. რა-მდენი პარტია გათამაშდება ტურნირში, თუ ტურნირის ნებისმი-ერი მონაწილე თამაშობს ერთ პარტიას.

ამოხსნა: ყოველი პარტია თამაშდება ორ მოჭადრაკეს შორის 12 მონაწილედან, ამიტომ გათამაშებულ პარტიათა რაოდენობა იქნე-ბა ჯუფდება 12 ელემენტისაგან 2 ელემენტიანი, ე.ი.

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!10!} = 66.$$

პასუხი: 66.

სიმრავლის დაყოფა ჯგუფებად

თუ სიმრავლე, რომელიც შედგება n განსხვავებული ელემენ-ტისაგან, დაყოფილია k რაოდენობის ჯგუფად ისე, რომ პირველ ჯგუფში მოხვდება n_1 ელემენტი, მეორეში — n_2, და ა.შ. k-ურში n_k, თან სრულდება პირობა $n_1+n_2+...n_k=n$, მაშინ ასეთი ჯგუფთა რაოდენობა აღინიშნება $N_n(n_1,n_2,..n_k)$ სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$N_n(n_1,n_2,..n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

ამოცანა 9. რამდენი შესაძლებლობა არსებობს, რომ 20 სტუდენ-ტი დავყოთ 4, 7 და 9-სტუდენტიან 3 ქვეჯგუფად?

ამოხსნა. ცხადია, რომ $N_{20}(4,7,9)=\dfrac{20!}{4!7!9!}$.

პასუხი: $N_{20}(4,7,9)=\dfrac{20!}{4!7!9!}$.

ამოცანა 10. რამდენი შვიდნიშნა რიცხვი არსებობს 4, 5 და 6 ციფრებისაგან შედგენილი, რომელშიც ციფრი 4 მეორდება 3–ჯერ; ციფრები 5 და 6 ორ–ორჯერ;

ამოხსნა: ყოველი შვიდნიშნა რიცხვი განსხვავდება ერთმანეთისა–გან მასში შემავალი ციფრების დალაგებით, ამიტომ, ფაქტობრი–ვად, ეს შვიდი ადგილი დაყოფილია სამ ჯგუფად, ე.ი. $n=7$; $n_1=3,\ n_2=2, n_3=2$;

$$N_7(3,2,2)=\frac{7!}{3!2!2!}=210.$$

პასუხი: $N_7(3,2,2)=\dfrac{7!}{3!2!2!}=210.$

ამოცანები

1. ყუთში 5 წითელი და 4 მწვანე ვაშლია. ყუთიდან 3 ვაშლის ამოღების რამდენი საშუალება არსებობს?

პასუხი: 84

2. მონეტას აგდებენ სამჯერ. რამდენი განსხვავებული შედეგია მოსალოდნელი?

პასუხი: 2^3

3. კარტის დასტიდან, რომელიც შედგება 36 კარტისაგან, ამოაქვთ 2 კარტი. ორი აგურის მასტის ამოღების რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: 36

4. ათი ადამიანი ერთმანეთს ხელის ჩამორთმევით ესალმება. გაიგეთ ხელის ჩამორთმევათა რაოდენობა.

პასუხი: 45.

5. ფაილის გახსნა შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ შევიყვანთ სწორ პაროლს, რომელიც არის ხუთი ციფრისაგან შედგენილი სამნიშნა რიცხვი. მაქსიმალური რამდენი ცდაა საჭირო იმისათვის, რომ გამოვიცნოთ პაროლი?

პასუხი: 125

6. ათი ენციკლოპედიის გადაადგილების რამდენი შესაძლებლობა არსებობს წიგნის თაროზე?

პასუხი: 10!

7. ათი ენციკლოპედიის გადაადგილების რამდენი შესაძლებლობა არსებობს წიგნის თაროზე ისე, რომ მეცხრე და მეათე ტომები არ მოხვდეს ერთმანეთის გვერდით?

პასუხი: 9!.8

8. ათკაციანი ჯგუფი უნდა გაიყოს ორ არაცარიელ ჯგუფად. რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: 1024

9. ათკაციანი ჯგუფი უნდა გაიყოს ორ ჯგუფად ისე, რომ პირველ ჯგუფში იყოს 6 კაცი, ხოლო მეორეში – 4. რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: 210.

10. 16–კაციანი ჯგუფი უნდა გაიყოს სამ ჯგუფად ისე, რომ პირველ ჯგუფში იყოს 5 კაცი, ხოლო მეორეში – 7 და მესამეში – 4. რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: $\dfrac{16!}{5!7!4!}$

11. რამდენი ორნიშნა რიცხვი არსებობს, რომელიც ან 2-ის ჯერადია, ან 5-ის ჯერადი, ან ამ ორივე რიცხვის ჯერადია ერთდროულად?

პასუხი: 54

12. ექიმთა 14–კაციანი ბრიგადა ყოველდღიურად 7 დღის განმავლობაში სამორიგეოდ ნიშნავს ორ ექიმს. მორიგეობის რამდენი განსხვავებული ცხრილი არსებობს, თუ ყოველი ექიმი მხოლოდ ერთჯერ მორიგეობს?

პასუხი: $\dfrac{14!}{2^7}$

13. კენტი ციფრებისაგან შედგენილი რამდენი ოთხნიშნა რიცხვი არსებობს, თუ ცნობილია, რომ ციფრი 3 შედის ამ რიცხვში (ციფრები არ მეორდება)?

პასუხი: $A_5^4 - A_4^4 = 96$

14. რვა შეკვრა თეთრეული მიეწოდება ხუთსართულიან სასტუმროს. სართულებზე თეთრეულის შეკვრის განაწილების რამდენი საშუალება არსებობს? მეხუთე სართულზე ერთი შეკვრის მიწოდების რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: 5^8, $8 \cdot 4^7$

15. ორმა მბეჭდავმა 16 გვერდი უნდა დაბეჭდოს. ამ სამუშაოს გადანაწილების რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: 2^{16}

16. მეტროს მატარებელს აქვს 16 გაჩერება. რამდენი საშუალებით განაწილდება 100 მგზავრი ამ გაჩერებებს შორის, თუ ისინი მატარებელში ჩასხდნენ ბოლო გაჩერებაზე?

პასუხი: 16^{100}

17. კომპანიის სააქციო საზოგადოების კრებაზე 50 კაციდან უნდა აირჩიონ კომპანიის პრეზიდენტი, დირექტორთა საბჭოს თავმჯდომარე და დირექტორთა საბჭოს 10 წევრი. რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: $50 \cdot 49 \cdot C_{48}^{10}$

18. ფირმიდან, რომელშიც მუშაობს 10 ადამიანი, 5 თანამშრომელი უნდა წავიდეს მივლინებაში. ასეთი ჯგუფის შედგენის რამდენი შესაძლებლობა არსებობს, თუ ცნობილია, რომ ფირმის დირექტორი, მისი მოადგილე და ბუღალტერი ერთდროულად ვერ დატოვებს ფირმას?

პასუხი: $C_{10}^{5} - C_{7}^{2} = 231$

19. სატელევიზიო სტუდიაში მუშაობს 3 რეჟისორი, 4 ხმის რეჟისორი, 5 ოპერატორი, 7 კორესპონდენტი და 2 მუსიკალური რედაქტორი. უნდა შეიქმნას ჯგუფი, რომელშიც შევა ერთი რეჟისორი, 2 ოპერატორი, ერთი ხმის რეჟისორი და 2 კორესპოდენტი. ასეთი ჯგუფის შექმნის რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: 2520

20. ჯგუფში 25 სტუდენტია. უნდა აირჩეს ჯგუფხელი და სტუდკავშირის 3 წევრი. ასეთი ჯგუფის შექმნის რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: 50600

21. მეორე კურსის 6 სტუდენტი უნდა გადანაწილდეს 3 ჯგუფში. ასეთი გადანაწილების რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: 3^{6}

22. ლიფტი, რომლის კაბინაში 6 ადამიანია, ჩერდება 7 სართულზე. ამ მგზავრთა სართულებზე გადანაწილების რამდენი საშუალება არსებობს?

პასუხი: 7^{6}

23. რვა ავტორმა უნდა დაწეროს 16 თავისაგან შემდგარი წიგნი. ამ სამუშაოს გადანაწილების რამდენი შესაძლებლობა არსებობს, თუ ორმა ავტორმა უნდა დაწეროს სამ-სამი თავი, 4-მა – ორ-ორი და ორმა – თითო-თითო?

პასუხი: $\dfrac{16!}{2!2!2!2!3!3!}$

24. რამდენი ხუთნიშნა ტელეფონის ნომერი არსებობს, რომელშიც არის ციფრები 1 და 2?

პასუხი: 15700

25. 7 ვაშლი და 3 ფორთოხალი უნდა მოთავსდეს ორ პაკეტში ისე, რომ ყოველ პაკეტში იყოს ერთი ფორთოხალი მაინც და ორივე პაკეტში ხილი იყოს ერთი და იგივე რაოდენობის. რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: $2\cdot N_3(2,1)\cdot N_7(3,4)=210$

26. ციფრებიდან: 1,2,3,4,5,6,7,8,9 შედგენილია ყველა შესაძლო ხუთნიშნა რიცხვი (ერთი და იგივე ციფრები არ მონაწილეობს). განსაზღვრეთ იმ რიცხვების რაოდენობა, რომლებშიც ერთდროულად არის ციფრები: 2, 4 და 5.

პასუხი: 1800

27. ბაიტი არის ინფორმაციის ერთეული, რომელიც შედგება 8 ბიტისაგან. ყოველი ბიტი უდრის ან ნულს ან ერთს. რამდენი სიმბოლოს კოდირება შეიძლება ბაიტით?

პასუხი: 256

28. ავტომანქანის ნომერი შედგება სამი ასოსა და სამი ციფრისაგან. რამდენი განსხვავებული ნომერი შეიძლება შევადგინოთ, თუ გამოვიყენებთ 30 ასოსა და 10 ციფრს?

პასუხი: $30^3\cdot 10^3$

29. მებაღემ 10 დღის განმავლობაში უნდა დარგოს 10 ნერგი. დღეების მიხედვით სამუშაოს გადანაწილების რამდენი შესაძლებლობა არსებობს, თუ ის დღეში რგავს არანაკლებ ერთ ნერგს?

პასუხი: $C_9^2 = 36$

30. ყუთში 10 წითელი და 5 მწვანე ვაშლია. ირჩევენ 1 წითელ და 2 მწვანე ვაშლს. არჩევის რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: **100**

31. 10 მოსწავლეზე განაწილდა საკონტროლო წერის ორი ვარიანტი. ორ რიგად მოსწავლეთა დაჯდომის რამდენი ვარიანტი არსებობს ისე, რომ ერთ რიგში მჯდომებს არ ჰქონდეთ ერთი და იგივე ვარიანტი, ხოლო ერთმანეთის გვერდით მჯდომებს ჰქონდეთ ერთი და იგივე?

პასუხი: $2\cdot C_{10}^{5}\ .(5!)^2$

32. ჯგუფი, რომელშიც 24 სტუდენტია (12 გოგონა და 12 ვაჟი), უნდა გაიყოს ორ ტოლ ქვეჯგუფად ისე, რომ თითოეულ ქვეჯგუფში გოგონებისა და ვაჟების რაოდენობა თანაბარი იყოს. რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: $(C_{12}^{6})^2$

33. ლიფტი, რომელსაც აჰყავს 9 მგზავრი, ჩერდება 10 სართულზე. მგზავრები გამოდიან ჯგუფებად (2, 3, 4 მგზავრი). რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: $A_{10}^{3}\cdot N_9(2,3,4)=\frac{10!}{4}$

34. ჯგუფი, რომელშიც 27 სტუდენტია, წერს საკონტროლო სამუშაოს, რომელიც შედგება 3 ვარიანტისაგან (ყოველ ვარიანტს წერს 9-9 სტუდენტი). თითოეული ჯგუფიდან 5 სტუდენტის არჩევის რამდენი შესაძლებლობა არსებობს ისე, რომ მათ შორის იყოს სამივე ვარიანტი?

პასუხი: $3C_9^3C_9^1C_9^1+3C_9^2C_9^2C_9^1=55404$

35. 10 სტუდენტიანი ჯგუფი რიგში უნდა დავაყენოთ ისე, რომ ორ **A** და **B** სტუდენტს შორის აღმოჩნდეს ორი სტუდენტი. რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

პასუხი: **14·8!**

36. მოცემულია განსხვავებული თეატრების 3 ბილეთი. ამ ბილეთების განაწილების რამდენი საშუალება არსებობს 25 სტუდენტს შორის, თუ თითოეულს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ერთი ბილეთი?

პასუხი: $\mathbf{A_{25}^{3} = 13800}$

37. 25-კაციან ჯგუფს მიეცა გასანაწილებლად 3 მოსაწვევი ბარათი. განაწილების რამდენი საშუალება არსებობს, თუ თითოეულს შეუძლია მიიღოს არაუმეტეს ერთი ბილეთისა?

პასუხი: $\mathbf{C_{25}^{3} = 2300}$

38. მოცემულია 7 ბილეთი: 3 – ერთი თეატრის და 4 – მეორესი. ამ ბილეთების განაწილების რამდენი საშუალება არსებობს 25 სტუდენტს შორის?

პასუხი: $\mathbf{C_{22}^{4} \cdot C_{25}^{3} = 16824500}$

ხდომილობებზე ოპერაციები. ალბათობის თვისებები

1. ვთქვათ **A** და **B** ნებისმიერი ხდომილობებია და ვთქვათ სრულდება ტოლობა $\mathbf{A \cup B = A}$. რა დასკვნა გამომდინარეობს ამ შემთხვევაში?

ა) $\mathbf{A = B}$; ბ) $\mathbf{A \subset B}$; გ) $\mathbf{A \supset B}$; დ) $\mathbf{B = \varnothing}$.

2 ვთქვათ, **A** და **B** ხდომილობებია. იპოვეთ ყველა **X** ხდომილობა, რომელთათვის **AX=AB.**

ა) **X=B**; ბ) $\mathbf{X=\varnothing}$; გ) **X=A**; დ) $\mathbf{X=\Omega}$;

3. იპოვეთ ყველა ის ხდომილობა **X**, რომელთათვის

$$\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \overline{A})} = B,$$

სადაც **A** და **B** რაიმე ხდომილობებია.

ა) **X = B**; ბ) $\mathbf{X = \overline{B}}$; გ) $\mathbf{X = \overline{A}}$; დ) $\mathbf{X = A \cup B}$;

4. დაამტკიცეთ ტოლობები:

ა) $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A \cup B$; ბ) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = AB$; გ) $A \cup B = AB \cup (A \Delta B)$;

დ) $\overline{A\Delta B} = AB \cup \overline{A} \cdot \overline{B}$; ე) $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i$; ვ) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i$.

Δ – ნიშნავს სიმეტრიულ სხვაობას: $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

5 სამართლიანია თუ არა ტოლობები:

ა) $A\cup B=AB\Delta(A\Delta B)$; ბ) $A\setminus B=A\Delta(AB)$;

გ) $\overline{\overline{A} \setminus \overline{B}} = A \setminus B$; დ) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$;

ე) $(A\cup B)\setminus C=A\cup(B\setminus C)$; ვ) $\left(A \cup \overline{B}\right)\Delta\left(\overline{A} \cup B\right)= A\Delta B$.

6. აუცილებელია თუ არა $A=B$, თუ:

ა) $\overline{A} = \overline{B}$; ბ) $A\cup C=B\cup C$ (C – რაიმე ხდომილობაა);

გ) $A(A\cup B)=B(A\cup B)$; დ) $A\setminus B=\varnothing$;

ე) $A(A\setminus B)=B(A\setminus B)$.

7. ვთქვათ, A,B,C რაიმე ხდომილობებია. დაამტკიცეთ, რომ

ა) $AB\cup BC\cup AC\supset ABC$; ბ) $AB\cup BC\cup AC\subset A\cup B\cup C$.

8. ორი მოჭადრაკე თამაშობს ჭადრაკს. A იყოს ხდომილობა, რომ მოიგებს პირველი მოჭადრაკე, ხდომილობა B – მოიგებს მეორე. რას ნიშნავს ხდომილობები:

ა) $A\Delta\overline{B}$; ბ) $\overline{A}\Delta B$; გ) $\overline{A} \cap \overline{B}$; დ) $\overline{B} \setminus A$; ე) $\overline{A} \setminus B$.

9. სამიზნე შედგება 10 კონცენტრირებული r_k-რადიუსიანი $(k=\overline{1,10})$ წრისაგან, ამასთან, $r_1<r_2<...<r_{10}$. ხდომილობა A_k – „r_k-რადიუსიან წრეში მოხვედრა“. რას ნიშნავს ხდომილობები:

$$B = \bigcup_{k=1}^{6} A_k ,\ C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k ,\ D=A_5\Delta A_6$$

10. დაამტკიცეთ, თუ $A\Delta B=C\Delta D$, მაშინ $A\Delta C=B\Delta D$.

11. დაამტკიცეთ, A და B ხდომილობა თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სამი ხდომილობის $A\cup B$, $\overline{A} \cup B$ და $A \cup \overline{B}$ თანაკვეთა არაცარიელია.

12. A და B ნებისმიერი ხდომილობებია. ჩაწერეთ ამ ხდომილობებით ხდომილობა – მოხდა მხოლოდ A ხდომილობა.

ა) $A \cup B$; ბ) $A \setminus B$; გ) $A \cap B$; დ) $A \cup \overline{B}$;

13. A და B ნებისმიერი ხდომილობებია. ჩაწერეთ ამ ხდომილობებით ხდომილობა – მოხდა ორივე ხდომილობა.

ა) $A \cup B$; ბ) $A \setminus B$; გ) $A \cap B$; დ) $A \cup \overline{B}$;

14. A და B ნებისმიერი ხდომილობებია. ჩაწერეთ ამ ხდომილობებით ხდომილობა – არცერთი ხდომილობა არ მოხდა.

ა) $\overline{A} \cap \overline{B}$; ბ) $A \setminus B$; გ) $A \cap B$; დ) $A \cup \overline{B}$;

15. A და B ნებისმიერი ხდომილობებია. ჩაწერეთ ამ ხდომილობებით ხდომილობა – მოხდა მხოლოდ ერთ-ერთი ხდომილობა.

ა) $A \cup B$; ბ) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$; გ) $A \cap B$; დ) $A \cup \overline{B}$;

16. A, B, C ნებისმიერი ხდომილობებია. ჩაწერეთ ამ ხდომილობებით ხდომილობა – მოხდა მხოლოდ A ხდომილობა.

ა) $A \cup B \cup C$; ბ) $(A \setminus B) \cup C$; გ) $A \cap \overline{A} \cap \overline{B}$; დ) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;

17. A, B, C ნებისმიერი ხდომილობებია. ჩაწერეთ ამ ხდომილობებით ხდომილობა – მოხდა მხოლოდ A და C ხდომილობა.

ა) $A \cup B \cup C$; ბ) $(A \setminus B) \cup C$; გ) $A \cap \overline{A} \cap \overline{B}$; დ) $A \cap B \cap \overline{C}$;

18. ერთ-ერთ აუდიტორიაში მოგროვდნენ სტუდენტები. მათგან შემთხვევით ირჩევენ ერთს. ხდომილობა A ნიშნავს, რომ ამორჩეული სტუდენტი ყველაზე უმცროსია, ხოლო B ნიშნავს, რომ ის ცხოვრობს საერთო საცხოვრებელში. C ნიშნავს, რომ ის არ ეწევა; აღწერეთ ხდომილობა $AB\overline{C}$;
როდის არის სამართლიანი შემდეგი ტოლობები:

ა) $AB\overline{C} = A$; ბ) $\overline{C} \subseteq B$; გ) $\overline{A} = B$; დ) $\overline{B} = B$;

19. მიზანში ისვრიან სამჯერ. განიხილება ხდომილობა A_i – i-ურ გასროლაზე მიზნის დაზიანება (i= 1, 2, 3). წარმოადგინეთ შემდეგი ხდომილობები A_i და $\overline{A_i}$ ხდომილობათა ჯამისა და ნამრავლის სახით:

A – მიზნის დაზიანება სამჯერ;
B – მიზანში სამჯერ აცდენა;
C – მიზნის ერთჯერ მაინც დაზიანება;
D – მიზანში ერთჯერ მაინც აცდენა;
E – მიზნის ორჯერ მაინც დაზიანება;
F – მიზნის არაუმეტეს ერთი დაზიანება;
G – მესამე გასროლამდე მიზნის არ დაზიანება;

20. **B** ხდომილობის განხორციელება აუცილებლად იწვევს **A** ხდომილობის განხორციელებას. რას უდრის მათი ჯამი და ნამრავლი?

21. დაკვირვება ხდება ოთხი ობიექტისაგან შედგენილ ჯგუფზე. ყოველ მათგანზე დაკვირვების დროს შედეგი შეიძლება ან დაფიქსირდეს ან არა. განიხილება ხდომილობები:

A – ოთხი ობიექტიდან დაფიქსირდა მხოლოდ ერთზე დაკვირვების შედეგი;
B – დაფიქსირდა ერთ ობიექტზე მაინც დაკვირვების შედეგი;
C – დაფიქსირდა არაუმეტეს ორ ობიექტზე დაკვირვების შედეგი;
D – დაფიქსირდა ზუსტად ორ ობიექტზე დაკვირვების შედეგი;
E – დაფიქსირდა ზუსტად სამ ობიექტზე დაკვირვების შედეგი;
F – დაფიქსირდა ოთხივე ობიექტზე დაკვირვების შედეგი;

რას ნიშნავს შემდეგი ხდომილობები:
1. A+ B 2. A +B; 3. B+C; 4. BC; 5. D+F+E; 6. BF;

პასუხი: **1. A+ B=B 2. AB=A; 3. B+C=B; 4. BC=C; 5. D+F+E=C; 6. BF=F.**

22. ცდა მდგომარეობს ორი მონეტის აგდებაში. განიხილება შემდეგი ხდომილობები:

A – პირველ მონეტაზე ღერბის მოსვლა;
B – პირველ მონეტაზე საფასურის მოსვლა;

C – მეორე მონეტაზე ღერბის მოსვლა;
D – მეორე მონეტაზე საფასურის მოსვლა;
E – ერთი ღერბის მაინც მოსვლა;
F – ერთი საფასურის მაინც მოსვლა;
G – ერთი ღერბის და ერთი საფასურის მოსვლა;
H – არცერთი ღერბის მოსვლა;
K – ორი ღერბის მოსვლა;

განსაზღვრეთ აღნიშნული ხდომილობებიდან რომელია ქვემოთ მოყვანილი ხდომილობების ტოლძალოვანი: **1. A+C; 2. AC; 3. EF; 4. G+E; 5. GE; 6. BD; 7. E+K;**

23. ვთქვათ **B** და **C** ხდომილობებია. დავუშვათ $A_n = B$, თუ n ლუწია და $A_n = C$, თუ n კენტია. დაწერეთ ხდომილობა, რომელიც ნიშნავს:
ა) A_n ხდომილობებს შორის განხორციელდა უსასრულოდ ბევრი ხდომილობა;
ბ) A_n ხდომილობებს შორის განხორციელდა სასრული რაოდენობის ხდომილობა;
გ) A_n ხდომილობებს შორის განხორციელდა ყველა ხდომილობა;

24. დაამტკიცეთ, რომ თუ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შედგება n ელემენტისაგან, მაშინ Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე შედგება 2^n ელემენტისაგან.

25. ვთქვათ Ω ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა, **A** მისი ნებისმიერი ქვესიმრავლეა $A \neq \Omega$ და $A \neq \varnothing$. დაამტკიცეთ, რომ:
ა) $F=\{\Omega, \varnothing\}$; ბ) $F=\{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\}$ σ-ალგებრაა.

26. ვთქვათ $\Omega=R$ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა, **A** მისი ქვესიმრავლეთა სიმრავლეა. დაამტკიცეთ, რომ $A=\{\Omega, \varnothing, [0,1], \{0\}\}$ არ არის σ-ალგებრა.

27. ვთქვათ F არის ისეთი $A \subseteq R$ ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე, რომ A ან $R \backslash A$ შედგება სასრული რაოდენობის ელემენტებისაგან. არის თუ არა F σ-ალგებრა?

28. ვთქვათ F არის $[0,2^{-n})$ სახის ნახევრად ღია ინტერვალების სიმრავლე R-ში, სადაც $n \in Z^{+}$. არის თუ არა F σ-ალგებრა? გაიგეთ უმცირესი σ-ალგებრა, რომელიც წარმოქმნილია F-საგან.

29. ვთქვათ F – არის $[0,n)$ – სახის ნახევრად ღია ინტერვალების სიმრავლე R-ში, სადაც $n \in Z^{+}$. არის თუ არა F σ-ალგებრა? გაიგეთ უმცირესი σ-ალგებრა, რომელიც წარმოქმნილია F-საგან.

30. ვთქვათ F_1 არის $B \times R$ სახის ქვესიმრავლეთა სიმრავლე R^2-ში, სადაც $B \subseteq R$ და ზომადია ბორელის აზრით, ხოლო F_2 – არის $R \times B$ სახის. არიან თუ არა F_1 და F_2 σ-ალგებრები? გაიგეთ უმცირესი σ-ალგებრა, რომელიც წარმოგმნილია $F_1 \cup F_2$-საგან.

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება

1. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთი კამათლის გაგორებისას 3-ზე არანაკლები რიცხვი მოვა?
ა) 1/6; ბ) 5/6; გ) 2/5; დ) 2/3.

2. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთი კამათლის გაგორებისას 3-ის ჯერადი რიცხვი მოვა?
ა) 1/6; ბ) 5/6; გ) 2/5; დ) 1/3.

3. აგორებენ ერთ კამათელს და ერთ მონეტას. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათელზე ლუწი რიცხვი მოვა.
ა) 1/6; ბ) 1/2; გ) 2/5; დ) 1/3.

4. აგორებენ 2 წესიერ კამათელს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ყველა კამათელზე გამოჩნდება ერთნაირი რიცხვი?
ა) 1/6; ბ) 1/36; გ) 1/12; დ) 1/4.

5. ყუთში 4 ერთნაირი კარტია, რომლებსაც შესაბამისად აწერია 2,4,7,11. შემთხვევით იღებენ ორ კარტს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მიღებული რიცხვებისაგან შედგენილი წილადი კვეცადია?
ა) 1/6; ბ) 1/4; გ) 2/3; დ)3/4.

6. აგორებენ 2 წესიერ კამათელს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ყველა კამათელზე გამოჩნდება ერთნაირი რიცხვი?
ა) 1/6; ბ) 1/36; გ) 1/12; დ) 1/4.

7. აგორებენ 2 წესიერ კამათელს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მოსულ ქულათა ჯამი არაა ნაკლები 11-ზე.
ა) 1/6; ბ) 1/36; გ) 1/12; დ) 1/4.

8. აგორებენ 2 წესიერ კამათელს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მოსულ ქულათა ჯამი არაა ნაკლები 5-ზე და არაა მეტი 10-ზე.
ა) 1/6; ბ) 1/36; გ) 1/18; დ) 7/18.

9. ყუთში 1-დან 25-მდე გადანომრილი ერთნაირი ბურთულებია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ალალბედზე ამოღებული ბურთულის ნომერი გაიყოფა 3-ზე?
ა) 5/6; ბ) 8/25; გ) 6/25; დ)3/4.

10. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე დასახელებული ორნიშნა რიცხვი 10-ის ჯერადი იქნება?
ა) 1/9; ბ) 5/9; გ) 2/45; დ) 1/10.

11. მონეტა აგდეს ორჯერ, რა არის ალბათობა იმისა, რომ ერთჯერ მაინც მოვა საფასური?
ა) 1/3; ბ) 5/7; გ) 3/4; დ) 2/3.

12. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამი კამათლის გაგორებისას სამივეზე მოვა ექვსიანი?
ა) 1/216; ბ) 5/6; გ) 3/64; დ) 6/65.

13. მოცემულია 4 მონაკვეთი, რომელთა სიგრძეებია 3, 6, 8, 10 ერთეული. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათგან ალალბედზე აღებული სამი მონაკვეთისაგან აიგება სამკუთხედი?
ა) 1/3; ბ) 5/8; გ) 2/5; დ) 3/4.

14. ყუთში აწყვია 15 დეტალი, მათგან ათი დეფექტურია. ალალბედზე იღებენ სამ დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სამივე დეფექტური იქნება?
ა) 21/91; ბ) 5/96; გ) 24/91; დ) 1/64.

15. ყუთში აწყვია 100 დეტალი, მათგან ათი სტანდარტულია. ალალბედზე იღებენ ოთხ დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ არცერთი არ იქნება სტანდარტული?
ა) 1/20; ბ) 5/91; გ) 2/91; დ) 15/64.

16. აგორებენ 3-ჯერ წესიერ კამათელს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ერთხელ მაინც გამოჩნდება „6“-იანი?
ა) 91/216; ბ) 5/36; გ) 6/91; დ) 1/6.

17. აგორებენ 3-ჯერ წესიერ კამათელს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ „6“-იანი გამოჩნდება ზუსტად ერთხელ?
ა) 91/216; ბ) 25/72; გ) 5/36; დ) 1/6.

18. აგორებენ n-ჯერ წესიერ კამათელს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ერთხელ მაინც გამოჩნდება „6“-იანი?
ა) $1-(1/6)^n$ ბ) 1/2; გ) $(1/6)^n$ დ) 5/6;

19. ყუთში აწყვია 10 დეტალი, მათგან 6 შეღებილია. ალალბედზე იღებენ 3 დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სამივე შეღებილი იქნება.
ა) 1/6; ბ) 1/2; გ) 1/3; დ) 2/3;

20. ყუთში აწყვია 10 დეტალი, მათგან 6 შეღებილია. ალალ-ბედზე იღებენ 3 დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მათ-გან ორი შეღებილი იქნება.
ა) 1/6; ბ) 1/2; გ) 1/3; დ) 2/3.

21. 15 სტუდენტს შორის 10 ფრიადოსანია. ალალბედზე აირჩი-ეს 8 სტუდენტი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 5 იქნება ფრიადოსანი.
ა) 56/143; ბ) 35/142; გ) 2/3; დ) 1/3;

22. წიგნის თაროზე შემთხვევით დალაგებულია **n** წიგნი, რომე-ლთა შორის არის მათემატიკის ორტომეული. ჩავთვალოთ, რომ წიგნების გადაადგილება ტოლალბათურია. გაიგეთ ალბათობა იმი-სა, რომ ორივე ტომი განლაგდება ერთმანეთის გვერდით, პირვე-ლი ტომი მარცხნივ მეორისაგან.
ა) **1/n**; ბ) **1/(n-1)**; გ) **1/(n-2)**; დ) **3/(n-3)**;

23. **N** რაოდენობის ადამიანი ჯდება მრგვალი მაგიდის ირგვლივ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ:
1) მეგობრები **A** და **B**, დაჯდებიან ერთმანეთის გვერდით, **A** მა-რჯვნივ **B**-საგან.
ა) **1/(N-1)**; ბ) **1/(N-1)**; გ) **1/(N-2)**; დ) **2/N**.

2) **A**, **B** და **C** მეგობრები დაჯდებიან ერთმანეთის გვერდით ისე, რომ **A** მარცხნივ **B**-საგან და **C** მარცხნივ **A**-საგან.
ა) **1/(N-1)(N-2)**; ბ) **1/(N-1)**; გ) **1/(N-2)**; დ) **2/N(N-1)**.

24. **N** რაოდენობის ადამიანი, რომელთა შორის არის **A** და **B**, დგას რიგში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ **A** და **B**-ს შო-რის აღმოჩნდება **r** ადამიანი.
ა) **2(N-r-1)/(N-1)**; ბ) **1/(N-1)(N-2)**; გ) **1/(N-2)**; დ) **2r/N(N-1)**.

25. რიცხვები 1, 2, 3,... **n**. Øდალაგებულია შემთხვევითი რიგით. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 1 და 2 განლაგებულნი იქნებიან ჩაწერილი რიგით;
ა) **1/n**; ბ) **1/(n-1)**; გ) **1/(n-2)**; დ) **3/(n-3)**;

26. რიცხვები 1, 2, 3,... **n.** დალაგებულია შემთხვევითი რიგით. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: 1, 2, 3; განლაგებულნი იქნებიან ჩაწერილი რიგით.
ა) **1/n**; ბ) **1/(n-1)**; გ) **1/(n-2)**; დ) **1/n(n-1)**;

27. 7-სართულიანი სახლის ლიფტში, პირველ სართულზე, შევიდა სამი პიროვნება, თითოეულ მათგანს ერთნაირი ალბათობით შეუძლია გამოსვლა მეორე სართულიდან დაწყებული ნებისმიერ სართულზე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამივე პიროვნება მესამე სართულზე გამოვა.
ა) 1/15; ბ) 1/729; გ) 1/36; დ) 5/9;

28. 7-სართულიანი სახლის ლიფტში, პირველ სართულზე შევიდა სამი პიროვნება, თითოეულ მათგანს ერთნაირი ალბათობით შეუძლია გამოსვლა მეორე სართულიდან დაწყებული ნებისმიერ სართულზე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამივე პიროვნება ერთსა და იმავე სართულზე გამოვა.
ა) 1/15; ბ) 1/243; გ) 1/36; დ) 5/9;

29. 7-სართულიანი სახლის ლიფტში, პირველ სართულზე, შევიდა სამი პიროვნება, თითოეულ მათგანს ერთნაირი ალბათობით შეუძლია გამოსვლა მეორე სართულიდან დაწყებული ნებისმიერ სართულზე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამივე პიროვნება სხვადასხვა სართულზე გამოვა.
ა) 1/15; ბ) 1/216; გ) 20/243; დ) 5/9;

30. საამქროში მიიღეს 4550 დეტალი. მათ შორის რამდენი დეტალი იქნება სტანდარტული, თუ არასტანდარტულ დეტალთა ფარდობითი სიხშირე 0,1-ის ტოლია.
ა) 4005; ბ) 4200; გ) 455; დ) 3200.

31. ბავშვი თამაშობს კუბიკებით, რომლებსაც აწერია ასოები ი, ი, წ, გ, ნ (იგულისხმება, რომ ერთი კუბიკის ყველა წახნაგს აწერია ერთი ასო). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ბავშვი დაალაგებს კუბიკებს მიმდევრობით და წავიკითხავთ სიტყვას „წიგნი“.
ა) 1/60; ბ) 2/9; გ) 1/120; დ) 15/68.

32. ლატარია შედგება 200 ბილეთისაგან, რომელთაგან 20 მომგებიანია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 50 ნაყიდი ბილეთიდან ერთი მაინც მოიგებს?

პასუხი: $1-\frac{C_{150}^{50}}{C_{200}^{50}}$

33. სათამაშო კარტის კომპლექტიდან (36 კარტი) შემთხვევით იღებენ სამ კარტს. იპოვეთ:

ა) ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ერთი არის ტუზი;

ბ) ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის აღმოჩნდება ერთი მაინც ტუზი.

პასუხი: ა) 496/1785; ბ)109/357

34. ვთქვათ, ყუთში მოთავსებულია 1-დან 10-მდე გადანომრილი ერთნაირი ზომის ბურთი. ყუთიდან რიგრიგობით ვიღებთ 5 ბურთს ისე, რომ ერთხელ ამოღებულს უკან არ ვაბრუნებთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ხუთივე ამოღებული ბურთი იქნება ლუწი ნომრის.

პასუხი: 1/252

35. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი სამი გასროლიდან მიზანში ერთხელ მაინც მოახვედრებს, არის 0,875. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება პირველივე გასროლისას.

პასუხი: 0,5

36. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთდროულად 6 კამათლის გაგორებისას სხვადასხვა რიცხვი დაჯდება.

პასუხი: 5/324

37. კუბი, რომლის წახნაგები შეღებილია, დაიყო 1000 ერთნაირი ზომის კუბებად. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერად არჩეულ კუბს ექნება შეღებილი ზუსტად ორი წახნაგი.

პასუხი: 0,096

38. კარტის კომპლექტი (36 კარტი) გაყოფილია შემთხვევით ორ ტოლ ნაწილად. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ:

ა) თითოეულ ნაწილში აღმოჩნდება ორ-ორი ტუზი;

ბ) ერთ-ერთ ნაწილში აღმოჩნდება ოთხივე ტუზი?

პასუხი: ა)162/385; ბ) 4/77

39. ყუთში არის 10 წითელი და 6 ლურჯი ღილი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ორივე ღილი იქნება ერთნაირი ფერის?

პასუხი: 1/2

40. ყუთში არის 90 ვარგისი და 10 დაზიანებული ვინტილი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებულ 10 ვინტილს შორის არცერთი არ იქნება დაზიანებული?

პასუხი: $\dfrac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}}$

41. ფაკულტეტის სტუდენტთა საბჭოში 3 პირველკურსელია, 5 მეორეკურსელი და 7 მესამეკურსელი. შემთხვევით არჩევენ 5 სტუდენტს კონფერენციისათვის. რას უდრის შემდეგი ხდომილობების ალბათობა?

A – {არჩეულ იქნება ერთი მესამე კურსელი};

B – {ყველა პირველკურსელი იქნება არჩეული კონფერენციისათვის};

C – {არც ერთი მეორეკურსელი არ იქნება არჩეული}.

პასუხი: $P(A)=\dfrac{1}{143}$, $P(B)=\dfrac{2}{91}$, $P(C)=\dfrac{12}{143}$.

42. ყუთში მოთავსებულია m_1+m_2 ბირთვი, რომელთაგან m_1 თეთრია და m_2 შავი. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ m ბირთვს $(m \le \min(m_1,m_2))$. იპოვეთ შემდეგი ხდომილობების ალბათობა:

A – {ყველა ბირთვი თეთრია}.

B – { ამოღებული ბირთვებიდან ზუსტად k თეთრია, $k \le m$}.

პასუხი: $P(A)=C_{m_1}^{m} \Big/ C_{m_1+m_2}^{m}$, $P(B)=\dfrac{C_{m_1}^{k} C_{m_2}^{m-k}}{C_{m_1+m_2}^{m}}$.

43. **2n**-ადგილიან მრგვალ მაგიდასთან შემთხვევით იკავებს ადგილს **n** მამაკაცი და **n** ქალი. იპოვეთ ალბათობა შემდეგი ხდომილობებისა:

A={არცერთი მამაკაცი ერთმანეთის გვერდით არ მოხვდება}.

B={ყველა მამაკაცი ერთმანეთის გვერდით დაჯდება}.

პასუხი: $\mathbf{P(A) = 2(n!)^2/(2n)!; P(B) = (n+1)(n!)^2/(2n)!}$

44. ქალაქში ჩამოსული 10 მამაკაცი, რომელთა შორის მიხო და პეტრეა, უნდა განთავსდნენ სასტუმროს ორ სამადგილიან და ერთ ოთხადგილიან ნომრებში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მიხო და პეტრე ოთხადგილიან ნომერში მოხვდებიან?

პასუხი: **2/15**

45. ალბათობის თეორიაში 25 საგამოცდო ბილეთს შორის 5 ბილეთი არის „ბედნიერი“, ხოლო დანარჩენი – „არაბედნიერი“. რომელ სტუდენტს აქვს უფრო მეტი ალბათობა აიღოს „ბედნიერი“ ბილეთი: (A_1) – იმას, ვინც პირველი მივიდა ბილეთის ასაღებად, თუ (A_2) – იმას, ვინც მეორე მივიდა?

პასუხი: $\mathbf{P(A_1)=P(A_2)}$

46. ვთქვათ, 10 ერთმანეთის ახლოს მდებარე მაღაზიაში 8 კაცი შევიდა. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ყველა სხვადასხვა მაღაზიაში აღმოჩნდება?

პასუხი: $\mathbf{P(A)=A_{10}^{8}/10^{8}}$

47. აგორებენ წესიერ კამათელს და წესიერ მონეტას. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათელზე მოვა სამიანი და მონეტაზე – საფასური.

პასუხი: **1/12**

48. 2000 ახალშობილიდან 1100 ვაჟია. განსაზღვრეთ გოგოს დაბადების ფარდობითი სიხშირე.

პასუხი: **0,009**

49. პირველ 4000 ნატურალურ რიცხვს შორის 551 მარტივი რიცხვია. განსაზღვრეთ მარტივი რიცხვის ფარდობითი სიხშირე.

პასუხი: **0,13775.**

50. ყოველ 1000 დეტალში საშუალოდ 4 წუნდებულია. დაახ–ლოებით რამდენი წუნდებული დეტალი იქნება 2400 დეტალში?

პასუხი: 9

51. რვასართულიან სახლის ლიფტში პირველ სართულზე ხუთი კაცი შევიდა. როგორია ალბათობა იმისა, რომ: ა) ხუთივე გა–მოვა მეოთხე სართულზე; ბ) ხუთივე გამოვა ერთსა და იმავე სართულზე. გ) ხუთივე გამოვა სხვადასხვა სართულზე;

პასუხი: ა) $1/7^5$; ბ) $1/7^4$ გ) $A_7^5/7^5$

52. რიცხვთა $E=\{1,2,\ldots,n\}$ სიმრავლიდან „ირჩევენ“ ორ რიცხვს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მეორე რიცხვი მეტია პირველ რიცხვზე, თუ შერჩევა ხდება: ა) დაუბრუნებლად; ბ) დაბრუნე–ბით.

პასუხი: ა)1/2; ბ) $(n-1)/2n$.

53. ყუთში, რომელშიც თეთრი და შავი ბირთვებია, უკან დაბრუ–ნებით იღებენ ორ ბირთვს. დაამტკიცეთ: ალბათობა იმისა, რომ ბირთვები ერთი ფერისაა, 1/2–ზე მეტია.

54. n სხვადასხვა ბირთვი უნდა განალაგონ N ყუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთებში, რომლის ნომრებია 1, 2, ..., N აღმოჩნდება შესაბამისად $n_1, n_2, \ldots, n_N$ ბირთვი $(n_1+n_2+\ldots+n_N=n)$.

პასუხი: $P(A)=N!/(n^N\cdot n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!)$

55. n ყუთში უნდა განალაგონ n ბირთვი, ისე რომ, ყოველი ბირ–თვი ერთნაირად შესაძლებელია მოხვდეს ნებისმიერ ყუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ არცერთი ყუთი ცარიელი არ იქნება.

პასუხი: $n!/n^n$

56. კარტის დასტიდან იღებენ ორ კარტს, რომელთაგან ერთ–ერთი ათიანია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ ორი კარ–ტიდან შემთხვევით ამოღებული კარტი ათიანია?

პასუხი: 17/33

57. ხარისხის სახელმწიფო ინსპექტორი ამოწმებს სასურსათო მაღაზიაში რძის პროდუქტებს. ცნობილია, რომ 20 პაკეტიდან ორი ამჟავებულია. ინსპექტორი შემთხვევით ირჩევს გასასინჯად 2 პაკეტს 20-დან. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის:

ა) არცერთი არ იქნება ამჟავებული;

ბ) მხოლოდ ერთი იქნება ამჟავებული;

გ) ორივე იქნება ამჟავებული.

პასუხი: ა) 306/380; ბ)72/380; გ)2/380

58. სტუდენტმა 25 საგამოცდო ბილეთიდან იცის მხოლოდ 5 ბილეთი. რომელი უფრო მოსალოდნელია, რომ მას მომზადებული ბილეთი შეხვდება პირველ ნომრად თუ მეორე ნომრად?

პასუხი: ერთნაირი ალბათობა აქვთ

ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრა

1. ორი მეგობარი შეთანხმდა შეხვედრაზე თეატრის ფოიეში შემდეგი პირობით: უნდა მისულიყვნენ ფოიეში საღამოს 17 საათიდან 18 საათამდე და პირველად მისული მეორეს დაელოდებოდა მხოლოდ 10 წუთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ისინი შეხვდებიან ერთმანეთს თუ ცნობილია, რომ თითოეულ პიროვნებას შეუძლია მივიდეს თეატრის ფოიეში ნებისმიერ დროს აღნიშნული 1 საათის განმავლობაში.

პასუხი: 11/36

2. ერთი დღე–ღამის განმავლობაში ორი გემი უნდა მიადგეს ერთსა და იმავე ნავსადგურს, რომელსაც მხოლოდ ერთი მისადგომი აქვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთ გემს მოუწევს მეორეზე დალოდება, თუ მათი მოსვლა დროის ნებისმიერ მონაკვეთში თანაბარშესაძლებელია, ხოლო დგომის დრო შესაბამისად არის 1 და 2 საათი.

პასუხი: $\frac{45}{1058}$

3. ორი მეგობარი შეთანხმდა შეხვედრაზე თეატრის ფოიეში შემდეგი პირობით: უნდა მისულიყვნენ ფოიეში საღამოს 17 საათიდან 18 საათამდე და პირველი პიროვნება მეორეს დაელოდებოდა მხოლოდ 10 წუთს, ხოლო მეორე პიროვნება პირველს – მხოლოდ 15 წუთი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ისინი შეხვდებიან ერთმანეთს თუ ცნობილია, რომ თითოეულ პიროვნებას შეუძლია მივიდეს თეატრის ფოიეში ნებისმიერ დროს აღნიშნული 1 საათის განმავლობაში.

პასუხი: 107/288

4. **R**-რადიუსიან წრეში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი, ოთხკუთხედი, ხუთკუთხედი და ექვსკუთხედი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით ჩაგდებული წერტილი მოხვდება:

ა) სამკუთხედის შიგნით; პასუხი: $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$;

ბ) ოთხკუთხედის შიგნით; პასუხი: $\dfrac{2}{\pi}$;

გ) ხუთკუთხედის შიგნით; პასუხი: $\dfrac{5\sin 72}{2\pi}$;

დ) ექვსკუთხედის შიგნით და შეადარეთ ისინი. პასუხი: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$;

5. კვადრატიდან, რომლის წვეროს კოორდინატებია (0,0), (1,0), (0,1) და (1,1) შემთხვევით არჩევენ **M(x,y)** წერტილს. რას უდრის $\mathbf{A=\{(x,y):\ x^2+y^2\le \mathit{a},\ \mathit{a}>0\}}$ ხდომილობის ალბათობა.

$$\text{პასუხი:}\ \mathbf{P(A)}=\begin{cases}\dfrac{\pi a^2}{4}, & 0\le a\le 1\\ \sqrt{a^2-1}+a^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\arccos\dfrac{1}{a}\right), & 1<a\le\sqrt{2}\\ 1, & \sqrt{2}<a.\end{cases}$$

6. **[-1,1]** ინტერვალიდან შემთხვევით ირჩევენ ორ წერტილს. ვთქვათ, ამ წერტილების კოორდინატებია **p** და **q**. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $\mathbf{x^2+px+q=0}$ კვადრატულ განტოლებას აქვს ნამდვილი ფესვები.

პასუხი: $\mathbf{P(A)=\dfrac{13}{24}}$.

7. წრეში ჩახაზულია კვადრატი. წრეში წერტილი „ვარდება" შემთხვევით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წერტილი ჩავარდება კვადრატში.

პასუხი: $\mathbf{P=\dfrac{2}{\pi}}$.

8. მონაკვეთზე შემთხვევით „ვარდება" ერთმანეთის მიყოლებით სამი წერტილი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თვლით მესამე წერტილი ჩავარდება პირველი და მეორე წერტილებს შორის.

პასუხი: $\mathbf{P=\dfrac{1}{3}}$.

9. წრეწირზე შემთხვევით აღებულია სამი **A,B,C** წერტილი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ **ABC** სამკუთხედი მახვილკუთხაა.

პასუხი: $\mathbf{P=\frac{1}{4}}$.

10. l სიგრძის მქონე მონაკვეთიდან შემთხვევით ირჩევენ $\mathbf{M_1}$ და $\mathbf{M_2}$ წერტილს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამი მიღებული მონაკვეთით ავაგებთ სამკუთხედს.

პასუხი: $\mathbf{P=\frac{1}{4}}$.

11. მოცემულია ორი კონცენტრული წრეწირი, რომელთა რადიუსებია $\mathbf{r_1}$ და $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_1<r_2}$. დიდ წრეწირზე შემთხვევით იღებენ ორ **A** და **B** წერტილს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მონაკვეთი არ გადაკვეთს პატარა წრეწირს.

პასუხი: $\mathbf{P(A)=1-\frac{2}{\pi}\arccos\frac{r_1}{r_2}}$.

12. კვადრატში, რომლის წვეროების კოორდინატებია (0;0), (0;1), (1;0), (1;1), შემთხვევით „ვარდება" წერტილი, რომლის კოორდინატია (ξ,η). დაამტკიცეთ რომ ნებისმიერი $0\le x,y\le 1$-სათვის

$\mathbf{P\{\xi<x,\ \eta<y\}=P\{\xi<x\}\cdot P\{\eta<y\}=xy}$.

იპოვეთ:

ა) $\{|\xi-\eta|<z$ პასუხი: $2z-z^2$, როცა $0\le z\le 1$

ბ) $\{\min(\xi,\eta)<z\}$; პასუხი: $2z-z^2$, როცა $0\le z\le 1$

გ) $\{\xi\cdot\eta<z\}$; პასუხი: $z(1-\ln z)$, როცა $0\le z\le 1$

დ) $\{\max(\xi,\eta)<z\}$; პასუხი: z^2, როცა $0\le z\le 1$

ე) $\{(\xi+\eta)/2<z\}$; პასუხი: z^2, როცა $0\le z\le 1/2$
$4z-2z^2-1$, როცა $1/2\le z\le 1$;

ვ) $\{\xi+2\eta<z\}$. პასუხი: $z^2/4$, როცა $z\le 1$;
$(4z-1)/4$, როცა $1\le z\le 2$;
$(6z-z^2-5)/4$, როცა $2\le z\le 3$.

13. მოცემულია მართკუთხედი, რომლის გვერდებია 1 სმ და 2 სმ. ამ მართკუთხედში შემთხვევით არჩევენ წერტილს. გავიგოთ ალბათობა იმისა, რომ მანძილი წერტილიდან:

ა) მის ახლოს მდებარე გვერდამდე არაა მეტი x-ზე;

პასუხი: 1, როცა $x \geq 1/2$

$3x-2x^2$, როცა $0 \leq x \leq 1/2$;

ბ) თითოეულ გვერდამდე არაა მეტი x-ზე;

პასუხი: 0 როცა $x \leq 1$;

$x-1$, როცა $1 \leq x \leq 2$;

$3x-x^2$, როცა $x \geq 2$;

გ) თითოეულ დიაგონალამდე არაა მეტი x-ზე.

პასუხი: 1, როცა $x \geq \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$5x^2/2$, როცა $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$;

$1-(2-x\sqrt{5})^2/2$, როცა $\frac{1}{\sqrt{5}} 0 \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$;

14. წერტილი (ξ,η) შემთხვევით არჩეულია $[0,1]^2$ კვადრატში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ $x^2+\xi x+\eta=0$ განტოლების ფესვები:

ა) ნამდვილია; პასუხი: 1/12.

ბ) დადებითებია; პასუხი: 0.

გ) სხვადასხვა ნიშნისაა; პასუხი: 0.

15. წერტილი (ξ,η,ζ) შემთხვევით არჩეულია $[0,1]^3$ კუბში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ $\xi x^2+\eta x+\zeta=0$ განტოლების ფესვები ნამდვილია.

პასუხი: $\frac{5}{32}+\frac{\ln 2}{6}$.

16. უსასრულო ჭადრაკის დაფაზე, რომელშიც თითოეული დანაყოფის სიგრძეა $2a$, შემთხვევით აგდებენ ნემსს სიგრძით $2r$. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ:

ა) ნემსი ჩავარდება მთლიანად უჯრაში?

პასუხი: $1-r(4a-r)/\pi a^2$

ბ) ნემსი გადაკვეთს ერთ–ერთ წრფეს?

პასუხი: $r(4a-r)/\pi a^2$

17. სიბრტყეზე მოცემულია ორი პარალელური წრფე, რომლებიც დაშორებული არიან ერთმანეთისაგან $2a$ მანძილით. სიბრტყეზე შემთხვევით აგდებენ მონეტას, რომლის რადიუსია $r<a$. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მონეტა გადაკვეთს ერთ–ერთ წრფეს.
პასუხი: r/a

პირობითი ალბათობა.
ხდომილობათა დამოუკიდებლობა. ჯამის ალბათობა

1. დაამტკიცეთ, რომ
   $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B)$.

2. ვთქვათ, $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$. დაამტკიცეთ, რომ $P(AB)=P(\overline{A}\cdot\overline{B})$.

3. დაამტკიცეთ, რომ
   $P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(AB)=P(A+B)-P(AB)$.

4 ვთქვათ A, B და C რაიმე ხდომილობებია. დაამტკიცეთ, რომ
   ა) $P(AB)+P(AC)+P(BC)\geq P(A)+P(B)+P(C)-1$
   ბ) $P(AB)+P(AC)-P(BC)\leq P(A)$.

5. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი A, B და C ხდომილობებისათვის
   $P(A\Delta B)\leq P(A\Delta C)+P(C\Delta B)$.

6. ცდა მდგომარეობს ორი მონეტის მიმდევრობით აგდებაში.
   განიხილება ხდომილობები:
   A – პირველ მონეტაზე ღერბის მოსვლა;
   B – ერთი ღერბის მაინც მოსვლა;
   C – ერთი ციფრის მაინც მოსვლა;
   D – მეორე მონეტაზე ღერბის მოსვლა;
   შემოხაზეთ დამოუკიდებელი ხდომილობათა წყვილები:
   ა) A და C; ბ) A და D; გ) B და C; დ) B და D;

7. კარტის სრული დასტიდან ამოაქვთ ერთი კარტი.
   განიხილება ხდომილობები:
   A – ამოღებულია ტუზი;
   B – ამოღებულია წითელი მასტის კარტი;
   C – ამოღებულია ყვავის ტუზი;
   D – ამოღებულია ათიანი;

შემოხაზეთ დამოუკიდებელი ხდომილობათა წყვილები:

ა) **A** და **B**; ბ) **A** და **C**; გ) **B** და **C**; დ) **C** და **D**;

8. კარტის სრული დასტიდან ამოაქვთ ერთი კარტი. განიხილება ხდომილობები:

A – ამოღებულია ტუზი;

B – ამოღებულია წითელი მასტის კარტი;

C – ამოღებულია ყვავის ტუზი;

D – ამოღებულია ათიანი;

შემოხაზეთ დამოკიდებული ხდომილობათა წყვილები:

ა) **A** და **B**; ბ) **A** და **C**; გ) **B** და **D**;

9. დამოუკიდებელია თუ დამოკიდებული:

ა) არათავსებადი ხდომილობები;

ბ) ხდომილობები, რომლებიც ქმნიან სრულ სისტემას;

გ) ტოლძალოვანი ხდომილობები.

10. **A** და **B** ხდომილობების არათავსებადობიდან გამომდინარეობს თუ არა მათი დამოუკიდებლობა.

11. ვთქვათ **A** და **B** ხდომილობები არათავსებადია, მაშინ:

ა) **A** და **B** ხდომილობები დამოუკიდებელია;

ბ) **A** და **B** ხდომილობები დამოკიდებულია;

გ) დამოუკიდებელია, თუ **P(A)=0** ან **P(B)=0**;

დ) არასდროს არ არიან დამოუკიდებლები.

12. ყუთში a თეთრი და b შავი ერთნაირი ბურთია. ალალბედზე ამოაქვთ ორი ბურთი (ჩაუბრუნებლად). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე იქნება თეთრი.

ა) $a\,b/(a+b)$; ბ) $a\,(a-1)/(a+b-1)$;

გ) $a\,(a-1)/(a+b)$; დ) $a\,(a-1)/(a+b-1)(a+b)$.

13. ყუთში a თეთრი და b შავი ერთნაირი ბურთია. ალალბედზე ამოაქვთ ორი ბურთი (ჩაუბრუნებლად). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე იქნება სხვადასხვა ფერის.

ა) $a\,b/(a+b)$; ბ) $2\,a\,b/(a+b)\,(a+b-1)$;

გ) $a\,(a-1)/(a+b-1)$; დ) $a\,b/(a+b)\,(a+b-1)$.

14. ყუთში a თეთრი და b შავი ერთნაირი ბურთია. ალალბედზე ამოაქვთ ორი ბურთი (ჩაბრუნებით). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე იქნება თეთრი.

ა) $(a/(a+b))^2$; ბ) $a\,b/(a+b)^2$;

გ) $a\,(a-1)/(a+b-1)$; დ) $a\,b/(a+b)\,(a+b-1)$.

15. ყუთში a თეთრი და b შავი ერთნაირი ბურთია. ალალბედზე ამოაქვთ ორი ბურთი (ჩაბრუნებით). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე იქნება სხვადასხვა ფერის.

ა) $(a/(a+b))^2$; ბ) $2a\,b/(a+b)^2$;

გ) $a\,(a-1)/(a+b-1)$; დ) $a\,b/(a+b)\,(a+b-1)$.

16. ყუთში a თეთრი და b შავი ერთნაირი ბურთია. მიმდევრობით ალალბედზე ამოაქვთ ბურთები. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ რიგით მეორე ამოღებული იქნება თეთრი ფერის ბურთი.

ა) $a/(a+b)$; ბ) $a\,b/(a+b)\,(a+b-1)$;

გ) $a\,(a-1)/(a+b-1)$; დ) $2a\,b/(a+b)\,(a+b-1)$.

17. ყუთში a თეთრი, b შავი და c წითელი ერთნაირი ბურთია. ალალბედზე ამოაქვთ სამი ბურთი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ორი მაინც იქნება ერთნაირი ფერის.

ამოხსნა: A იყოს ხდომილობა — ორი მაინც ერთნაირი ფერის ბურთია. ცხადია, რომ $\bar{A}$ ხდომილობა იქნება — ამოღებული ბურთები სხვადასხვა ფერისაა.

$P(\bar{A}) = P(\text{თწშ}+\text{წთშ}+\text{წშთ}+\text{თშწ}+\text{შთწ}+\text{შწთ}) = 6a/(a+b+c)\times b/(a+b+c-1)\times c/(a+b+c-2)$, სადაც „თწშ" ნიშნავს რიგით პირველი ამოღებულია თეთრი, მეორე — წითელი, მესამე — შავი ბურთი და ა.შ. ვღებულობთ $P(A)=1-6\,a/(a+b+c)\times b/(a+b+c-1)\times c/(a+b+c-2)$.

18. ვთქვათ, $P(A/B)>P(B/A)$ და $P(A)>0$, $P(B)>0$.
იქნება თუ არა $P(A)>P(B)$?.

პასუხი: კი

19. სამართლიანია თუ არა ტოლობა $P(A/B)+P(A/\bar{B})=1$?

პასუხი: ზოგადად, არა.

20. სტუდენტმა 25 საგამოცდო ბილეთიდან 20 იცის. გამომცდელი მისთვის 3 საკითხს არჩევს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტმა სამივე საკითხი იცის.

პასუხი: 57/115

21. კარტის კომპლექტიდან (36 ცალი) მიმდევრობით ამოაქვთ 2 კარტი. გაიგეთ:

ა) ალბათობა იმისა, რომ მეორე კარტი იქნება ტუზი (უცნობია, რომელი კარტია ამოღებული პირველად);

პასუხი: 1/9;

ბ) ალბათობა იმისა, რომ მეორე კარტი იქნება ტუზი, თუ ცნობილია, რომ პირველად ამოღებულიც არის ტუზი.

პასუხი: 1/105

22. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{P(A/B) \geq 1 - \dfrac{P(\overline{A})}{P(B)}}$.

23. ყუთში მოთავსებულია ერთი ბირთვი, რომლის შესახებ ცნობილია, რომ ის თეთრია ან შავი ერთი და იგივე ალბათობით. ყუთში ათავსებენ ერთ თეთრ ბირთვს და შემდეგ შემთხვევით იღებენ ყუთიდან ერთ ბირთვს. ის აღმოჩნდა თეთრი ფერის. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ყუთში დარჩენილი ბირთვი თეთრი ფერისაა?

პასუხი: 2/3

24. ყუთიდან, რომელშიაც 3 თეთრი და 7 წითელი ბირთვია, შემთხვევით მიმდევრობით და უკანდაუბრუნებლად იღებენ ორ ბირთვს. განიხილება ხდომილობები: $\mathbf{A} =$ {პირველი ბირთვი თეთრია}, $\mathbf{B} =$ {მეორე ბირთვი თეთრია}, $\mathbf{C} =$ {ერთი მაინც ამოღებული ბირთვი თეთრია}. იპოვეთ $\mathbf{P(B/A), P(A/B)}$ და $\mathbf{P(A/C)}$.

პასუხი: 2/9; 2/9; 9/16

25. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\mathbf{P(A/B)=P(A/\overline{B})}$, მაშინ **A** და **B** ხდომილობები დამოუკიდებელია.

26. ვთქვათ, **A** და **B** დამოუკიდებელი ხდომილობებია, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, $P(A\Delta B)=p$ და $P(A\setminus B)<p$. იპოვეთ $P(A)$, $P(B)$ და $P(A\setminus B)$.

პასუხი: $P(A)=0$, $P(B)=p$, $P(A\setminus B)=0$

27. ვთქვათ, **A** ხდომილობა ისეთია, რომ ის არ არის დამოკიდებული თავის თავზე. აჩვენეთ, რომ $P(A)=0$ ან 1.

28. ვთქვათ, **A** ხდომილობა ისეთია, რომ $P(A)=0$ ან $P(A)=1$. აჩვენეთ, რომ **A** და ნებისმიერი **B** ხდომილობა დამოუკიდებელია.

29. ვთქვათ, **A** და **B** დამოუკიდებელი ხდომილობებია და $P(A\cup B)=1$. დაამტკიცეთ, რომ ან **A** ან **B**-ს ალბათობა ერთის ტოლია.

30. ვთქვათ, **A** და **B** დამოუკიდებელი ხდომილობებია. დაამტკიცეთ, რომ თუ $A\cup B$ და $A\cap B$ დამოუკიდებელია, მაშინ ან $P(A)=1$, ან $P(B)=1$, ან $P(A)=0$, ან $P(B)=0$.

31. როგორი შეიძლება იყოს **A** და **B** ხდომილობები, თუ **AB** და **A+B** დამოუკიდებელი ხდომილობებია.

32. მიმდევრობით აგდებენ სამ მონეტას. დაადგინეთ დამოუკიდებელია თუ დამოკიდებულია შემდეგი ხდომილობები: **A**={ღერბის მოსვლა პირველ მონეტაზე}, **B**={ერთი საფასურის მაინც მოსვლა}.

33. აგორებენ ორ კამათელს. განვიხილოთ შემდეგი ხდომილობები: **A** – პირველ კამათელზე მოვიდა კენტი რიცხვი; **B** – მეორე კამათელზე მოვიდა კენტი რიცხვი; **C** – ორივე კამათელზე მოსულ რიცხვთა ჯამი კენტია. შეამოწმეთ დამოუკიდებელია თუ არა **A**, **B**, **C** ხდომილობები: ა) ერთობლივად; ბ) წყვილ-წყვილად.

34. $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ წერტილი შემთხვევით არჩეულია $[0,1]^2$-კვადრატში. **r**-ის რა მნიშვნელობისათვის არის დამოუკიდებელი შემდეგი ხდომილობები: $A=\{|\xi_1-\xi_2|\geq r\}$ და $B=\{\xi_1+\xi_2\leq 3r\}$?

35. $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ წერტილი შემთხვევით არჩეულია $[0,1]^2$–კვადრა-ტში. განვიხილოთ ხდომილობები: $A=\{\xi_1\le1/2\}$, $B=\{\xi_2\le1/2\}$ და $C=\{(\xi_1-1/2)(\xi_2-1/2)\le0\}$. შეამოწმეთ ეს ხდომილობები დამოუკიდე-ბელია თუ დამოკიდებული:

ა) ერთობლივად; ბ) წყვილ-წყვილად.

36. მოცემულია A,B,C წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი ხდომი-ლობები და $P(C)>0$. სწორია თუ არა ტოლობა $P(A\cup B/C)= =P(A\cup B)$?

37. ვთქვათ, A, B და C ერთობლივად დამოუკიდებელია, ამას-თან, ყოველ ამ ხდომილობებს აქვთ ალბათობა განსხვავებული ნულისაგან და ერთისაგან. შეიძლება თუ არა AB, BC და AC იყოს ერთობლივად დამოუკიდებელი? წყვილ-წყვილად დამოუკი-დებელი?

38. აჩვენეთ, რომ

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

ტოლობიდან არ გამომდინარეობს A_1, A_2 და A_3-ის წყვილ-წყვი-ლად დამოუკიდებლობა.

39. A და B ხდომილობა დამოუკიდებელია. აქედან გამომდინა-რეობს თუ არა A და B უთავსადია? მოიყვანეთ მაგალითი.

40. ყუთში 5 თეთრი, 6 შავი და 10 წითელი ბურთია. შემთხვე-ვით ამოაქვთ სამი ბურთი. გაიგეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი მაინც იქნება ერთნაირი ფერის?

პასუხი: 103/133

41. გვაქვს ყუთი, რომელშიც მოთავსებულია 9 ახალი ერთნაირი ტენისის ბურთი. სათამაშოდ იღებენ სამ ბურთს; თამაშის შემდეგ ბურთებს აბრუნებენ ყუთში. ნათამაშევი და არანათამაშევი ბურ-თები არ განსხვავდებიან. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამი თამაშის შემდეგ ყუთში არ დარჩება არანათამაშევი ბურთი?

პასუხი: $(1\cdot C_6^3\cdot C_3^3)/(C_9^3)^2=5/1764$.

42. ბინიდან გასვლისას N სტუმარი სიბნელეში იცვამს ფეხსაცმელს (იგულისხმება, რომ ყველა ფეხსაცმელი ერთნაირია). ყოველი მათგანი განსხვავდება მხოლოდ მარჯვენა მარცხენისაგან. ვიპოვოთ შემდეგი ხდომილობების ალბათობები: **A** – ყოველი სტუმარი თავის ფეხსაცმელს ჩაიცვამს; **B** – ყოველი სტუმარი იპოვის წყვილ ფეხსაცმელს (შეიძლება თავისი არ იყოს).

პასუხი: $P(A)=1/(N!)^2$; $P(B)=1/N!$

43. დაკვირვებით დადგენილია, რომ სექტემბერში საშუალოდ 12 დღე არის წვიმიანი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სექტემბრის თვის ნებისმიერი 8 დღიდან 3 დღე იქნება წვიმიანი?

პასუხი: $C_8^3(2/5)^3(3/5)^5$.

44. ყუთში $2n$ თეთრი და $2n$ შავი ბურთია. შემთხვევით ამოაქვთ (ჩაბრუნებით) $2n$ ბურთი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული თეთრი და შავი ბურთების რაოდენობა თანაბარია.

პასუხი: $C_{2n}^n\cdot(1/2)^{2n}$.

45. 2 ადამიანიდან თითოეული ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად აგდებს მონეტას n-ჯერ. გაიგეთ ალბათობა იმისა, რომ თითოეული ღერბს „მიიღებს" ერთნაირ რიცხვჯერ.

პასუხი: $C_{2n}^n\cdot(1/2)^{2n}$.

46. გამოიყვანეთ ბერნულის სქემის ფორმულა და დაამტკიცეთ, რომ:

ა) $2^n=\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i$; ბ) $C_{2n}^n=\sum\limits_{i=0}^{n} (C_n^i)^2$.

47. გამოიკვლიეთ $= n_3 = \ldots = n_k = n$, $p_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, $q=1-p$, როგორც m-ის ფუნქცია მუდმივი n-სთვის $(0\le m\le n)$.

მითითება: განიხილეთ შეფარდება $\dfrac{p_m(m+1)}{p_n(m)}$ და დაადგინეთ, როდის აღწევს $p_n(m)$ ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას, აგრეთვე დაამტკიცეთ, რომ $\dfrac{p_n(1)}{p_n(0)}\ge\dfrac{p_n(2)}{p_n(1)}\ge\ldots\ge\dfrac{p_n(n)}{p_n(n-1)}$.

48. ორი ტოლძლოვანი მოთამაშე თამაშობს ჭადრაკს, რომლის ალბათობა იქნება მეტი: ა) 7 პარტიიდან 3-ის მოგება, თუ 5-დან 2-ის; ბ) 7 პარტიიდან არანაკლებ 5-ის მოგება, თუ არა უმეტეს 3-ის.

49. ბერნულის სქემისათვის, როცა $p=\frac{1}{2}$, დაამტკიცეთ, რომ

ა) $\frac{1}{2\sqrt{n}} \le p_{2n}(n) \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_{2n}(n \pm h)}{p_{2n}(n)} = e^{-z^2}$, სადაც $\frac{h}{\sqrt{n}} = z$. $(0 \le z < +\infty)$.

მითითება: გამოიყენეთ სტირლინგის ფორმულა $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}$.

50. დაამტკიცეთ, რომ თუ $x>0$, მაშინ ფუნქცია $\int_x^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\frac{x}{1+x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \le \int_x^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \le \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

51. გაიგეთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტის n-ჯერ აგდების შედეგად გერბის მოსვლათა რაოდენობა მიახლოებით ტოლია საფასურის მოსვლათა რაოდენობის, როცა $n\to\infty$.

52. მიზანში მოხვედრის ალბათობა, ყოველი გასროლისას, უდრის 4/5-ს. რამდენჯერ უნდა მოვახდინოთ გასროლა, რომ მიზანში მოხვედრის რაოდენობის უალბათესი რიცხვი იყოს 20-ს ტოლი?

პასუხი: 26.

53. მიზანში მოხვედრის ალბათობა უდრის 1/5-ს. რას უდრის მიზანში ორჯერ მაინც მოხვედრის ალბათობა ათი დამოუკიდებელი გასროლისას?

პასუხი: $1-14/5.(4/5)^9$

54. სამ ყუთში ოც-ოცი დეტალია. სტანდარტული დეტალების რაოდენობა პირველ, მეორე და მესამე ყუთში შესაბამისად არის 20, 15 და 10. შემთხვევით აღებული ყუთიდან ამოღებული დეტალი აღმოჩნდა სტანდარტული, რომელსაც აბრუნებენ უკან ყუთში და იმეორებენ ცდას. ამოღებული დეტალი ისევ აღმოჩნდა სტანდარტული. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დეტალი ამოღებული იყო მესამე ყუთიდან?

პასუხი: 4/29

55. ყუთში არის 10 შაშხანა, რომელთაგან ოთხს აქვს ოპტიკური სამიზნე. ოპტიკური შაშხანიდან სამიზნის დაზიანების ალბათობა ტოლია 0,95-ის, ხოლო არაოპტიკურიდან – 0,8-ს. მსროლელმა ნებისმიერად აღებული შაშხანით დააზიანა სამიზნე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანებულია ოპტიკურსამიზნიანი შაშხანით.

პასუხი: 19/43

56. ორ დაზგაზე მზადდება ერთნაირი დეტალები, რომლებსაც ატარებენ ერთად, ერთ კონვეიერში. პირველი დაზგის შრომისუნარიანობა ორჯერ მეტია მეორისაზე. პირველი დაზგა უშვებს 60% ხარისხიან პროდუქციას, ხოლო მეორე 84%-ს. კონვეიერიდან შემთხვევით ამოღებული დეტალი აღმოჩნდა ხარისხიანი.

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალი დამზადებულია პირველ დაზგაზე.

პასუხი: 10/47

57. გასაყიდად მიიღეს სამი ქარხნის მიერ გამოშვებული ტელევიზორები. პირველი ქარხნის პორდუქცია 20% წუნდებულს შეიცავს, მეორე ქარხნის – 10%-ს და მესამესი კი – 5%-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შეიძენთ გამართულ ტელევიზორს, თუ მაღაზიაში მიიღეს პირველი ქარხნიდან 30% პროდუქცია, 20% –მეორე ქარხნიდან და 50% – მესამე ქარხნიდან.

პასუხი: **0,895**

58. სამი მგზავრი ჩაჯდა მატარებლის 6 ვაგონიდან შემთხვევით არჩეულ ვაგონებში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათგან ერთი მაინც ჩაჯდება პირველ ვაგონში, თუ ცნობილია, რომ მგზავრები სხვადასხვა ვაგონებში ჩასხდნენ?

პასუხი: 0,5

59. 6 ბურთი შემთხვევით თავსდება 3 ყუთში. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთებში აღმოჩნდება ბურთების განსხვავებული რაოდენობა, თუ ცნობილია, რომ არცერთი ყუთი არაა ცარიელი?

პასუხი: 0,67

60. ორი თანაბარძალოვანი მოჭადრაკე თამაშობს 4 პარტიას. გაიგეთ ალბათობა იმისა, რომ მოიგებს პირველი მოჭადრაკე, თუ ცნობილია, რომ თითოეულმა მოიგო ერთხელ მაინც?

პასუხი: 2/7

61. 5 მგზავრი შემთხვევით ირჩევს მატარებლის 7 ვაგონიდან რომელიმეს. ცნობილია, რომ რომელიღაც ორი ვაგონი ცარიელი დარჩა. ამ პირობებში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველი და მეორე ვაგონები დაკავებულია.

პასუხი: 0.476

62. ყუთში 5 თეთრი და 10 შავი ბურთია. შემთხვევით ამოიღეს 6 ბურთი (დაბრუნებით). ცნობილია, რომ მათ შორის არის თეთრი ბურთი. ამ პირობებში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის იქნება 2 მაინც შავი ბურთი?

პასუხი: 0,95

63. 7 მგზავრი შემთხვევით ირჩევს მატარებლის 9 ვაგონიდან რომელიმეს. ცნობილია, რომ ისინი ჩასხდნენ სხვადასხვა ვაგონებში. ამ პირობებში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველი სამი ვაგონით იმგზავრებს სამი მგზავრი?

პასუხი: 0.5

64. 5 ბურთი შემთხვევით თავსდება 3 ყუთში. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ პირველ ყუთში აღმოჩნდება ერთი ბურთი, თუ ცნობილია, რომ არცერთი ყუთი არაა ცარიელი?

პასუხი: 0,4(6)

65. მოცემულია 12 სტუდენტისაგან შედგენილი 3-3 4 ჯგუფი (თითოეულში 3-3). ოლიმპიადისათვის არჩევენ 5 სტუდენტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის იქნება ოთხივე ჯგუფის წარმომადგენელი?

პასუხი: 9/22

66. რამდენჯერ უნდა გავაგოროთ კამათელი, რომ 0,95%-ით ვიყოთ დარწმუნებული იმაში, რომ ერთხელ მაინც მოვა 6-იანი?

პასუხი: $n \geq 17$

67. ცნობილია, რომ ტელეფონის ნომერი შედგება ხუთნიშნა განსხვავებული ციფრებისაგან. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის არის ციფრები 1 და 2?

პასუხი: 2/9

68. აგორებენ სამ კამათელს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთზე მაინც მოვა ექვსიანი, თუ ცნობილია, რომ განსხვავებული რიცხვები მოვიდა?

პასუხი: 0,5

69. ფირმა მონაწილეობს 4 პროექტში. ყოველი პროექტის წარმატების ალბათობაა 0,9. ერთი პროექტის წარუმატებლობის შემთხვევაში ფირმის გაკოტრების ალბათობა არის 20%, ორი პროექტის წარუმატებლობის შემთხვევაში – 50%, სამის წარუმატებლობის შემთხვევაში – 70%, ოთხის წარუმატებლობის შემთხვევაში – 90%. იპოვეთ ფირმის გაკოტრების ალბათობა.

პასუხი: 0,085

70. პირველ ყუთში 1 თეთრი და 3 შავი ბურთია, მეორეში კი 2 თეთრი და 1 შავი ბურთი. პირველი ყუთიდან მეორეში გადაიტა-

ნეს ერთი ბურთი, შემდეგ კი ისევ ერთი ბურთი გადაიტანეს მეორედან პირველში. ამის შემდეგ პირველიდან ამოიღეს ერთი ბურთი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბურთი იქნება თეთრი?

პასუხი: 0,328

71. ნაკეთობას აქვს წუნი ალბათობით 0,2. ალბათობა იმისა, რომ წუნიანი ნაკეთობა გამოვა წყობიდან უდრის 0,75-ს, ხოლო არაწუნიანი – 0,15. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ნაკეთობას ჰქონდა წუნი, თუ ის გამოვიდა მწყობრიდან?

პასუხი: 055

72. ყუთიდან, რომელშიც იყო 4 თეთრი და 6 შავი ბურთი, დაიკარგა ერთი ბურთი (ფერი არაა ცნობილი). ამის შემდეგ ამ ყუთიდან ამოღებული (დაბრუნების გარეშე) ორი ბურთი აღმოჩნდა თეთრი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დაკარგული იყო შავი ფერის ბურთი?

პასუხი: 0,75

73. ფირმას ამოწმებენ სამი სქემიდან შემთხვევით ამორჩეული სქემით (თითოეული სქემის ამორჩევის ალბათობა თანაბარია). ალბათობა იმისა, რომ შესამოწმებელი ფირმა განთავისუფლებული იქნება გადასახადისაგან არის 0,4. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ფირმა განთავისუფლებული იქნება გადასახადისაგან მესამე სქემით, თუ პირველი ორი სქემით დარღვევა არ დაფიქსირდა?

პასუხი: 0,182

74. საწარმოო წუნის ალბათობაა 0,4. ყოველ ნაკეთობას ამოწმებს ორი კონტროლიორიდან ერთი, თანაბარი ალბათობით.

ალბათობა იმისა, რომ პირველი კონტროლიორი აღმოაჩენს წუნს, არის 0,982. ხოლო მეორე კონტროლიორი – 0,98. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ვარგისად ჩათვლილი ნაკეთობა აღმოჩნდება წუნიანი.

პასუხი: 0,0,00207

75. ალბათობა იმისა, რომ ფირმა დაარღვევს კანონს, არის 0,25, ხოლო აუდიტი აღმოაჩენს დარღვევას ალბათობით 0,75. ერთ-ერთი შემოწმების დროს მათ დარღვევა ვერ აღმოაჩინეს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სინამდვილეში დარღვევა არსებობს.

პასუხი: 0,077

76. პირველი მსროლელი აზიანებს მიზანს 0,6 ალბათობით, მეორე – 0,5 ალბათობით, მესამე – 0,4 ალბათობით. მათ ერთდროულად გაისროლეს, მაგრამ მხოლოდ ორი ტყვია მოხვდა მიზანს. რომელი უფრო ალბათურია მეორე მსროლელის მიზანში მოხვედრა, თუ არმოხვედრა?

პასუხი: მოხვედრა

77. გამოთვლითი ლაბორატორიისათვის შეიძინეს 9 კომპიუტერი, ამასთან თითოეული კომპიუტერი იფუჭება წუნიანი ალბათობით 0,1. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კომპიუტერის გამოცვლა მოგვიწევს?

პასუხი: 0,05

78. საგამოცდო ტესტი შედგება 10 საკითხისაგან. ყოველ საკითხს აქვს პასუხების 4 ვარიანტი, რომელთა შორის უნდა აირჩეს სწორი პასუხი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოუმზადებელი სტუდენტი სწორად შემოხაზავს 6 საკითხს მაინც?

პასუხი: 0,019

79. ოსტატი და მოსწავლე მონაწილეობენ ჭადრაკის ტურნირში. ოსტატი მოიგებს ტურნირს თუ ის მოიგებს ყველა პარტიას, ხოლო მოსწავლე მოიგებს ტურნირს თუ ის მოიგებს ერთ პარტიას მაინც. რამდენი პარტიისაგან უნდა შედგებოდეს ტურნირი, რომ ოსტატისა და მოსწავლის მოგების შანსები ტოლი იყოს, თუ ოსტატის მოგების ალბათობა ერთ პარტიაში უდრის 0,9, ხოლო მოსწავლის – 0,1?

პასუხი: 7

80. ცდა ნიშნავს 3 კამათლის აგდებას. რამდენი ცდა უნდა ჩავატაროთ, რომ არაუმეტეს 0,95 ალბათობით ერთხელ მაინც მოვიდეს სამი ერთიანი?

პასუხი: **n>645**

81. ალბათობა იმისა, რომ ორი გასროლიდან მიზანი ერთხელ მაინც დაზიანდება, არის 0,96. ვიპოვოთ 4 გასროლიდან მიზნის 3-ჯერ დაზიანების ალბათობა?

პასუხი: 0,4096

82. რამდენჯერ უნდა ვესროლოთ მიზანს წარმატების ალბათობით 0,7, რომ უალბათესი რიცხვი უდრიდეს 15-ს?

პასუხი: 21

83. რამდენჯერ უნდა გავაგოროთ კამათელი, რომ ლუწი რიცხვის მოსვლის უალბათესი რიცხვი იყოს 6?

პასუხი: 11; 12; 13

84. რამდენი პარტია უნდა გათამაშდეს ჭადრაკში ერთ პარტიაში მოგების ალბათობით 1/3, რომ უალბათესი რიცხვი იყოს 5?

პასუხი: 16; 17

85. ამოცანათა კრებული შედგება 400 ამოცანისაგან პასუხებით. ყოველ პასუხში შეიძლება იყოს შეცდომა ალბათობით 0,01. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კრებულში შეტანილი ამოცანების პასუხების 99% უშეცდომოა?

პასუხი: 0,195

86. სადაზღვევო ფირმამ გააფორმა 10000 ხელშეკრულება. თითოეული დაზღვეული შემთხვევის გამოყენების ალბათობა წლის განმავლობაში არის 0,02. გაიგეთ ალბათობა იმისა, რომ ასეთი შემთხვევების რაოდენობა იქნება არაუმეტეს 250.

პასუხი: 0,9998 (ლაპლასის მუავრის ინტეგრალური ფორმულა)

87. ტექსტის აკრეფისას სიტყვაში შეცდომის დაშვების ალბათობა არის 0,0001. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ აკრეფილი 5000 სიტყვიდან იქნება არაუმეტეს 5 შეცდომა?

პასუხი: 0,265

88. პარტიაში არის 768 საზამთრო. ყოველი მათგანი აღმოჩნდება მოუმწიფებელი ალბათობით 0,25. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მწიფე საზამთროების რაოდენობა იქნება 564-დან 600-მდე?

პასუხი: 0,8185

89. წუნიანი დეტალის გამოშვების ალბათობა არის 0,02. ყუთში ალაგებენ 100 დეტალს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ: ა) ყუთში არ აღმოჩნდება არცერთი წუნიანი დეტალი; ბ) წუნიანი დეტალების რაოდენობა იქნება არანაკლებ 2?

პასუხი: ა) 0,13; ბ) 0,27

90. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მონეტის 100-ჯერ აგდების შედეგად საფასურის და ღერბის მოსვლათა რაოდენობა ერთმანეთს ემთხვევა?

პასუხი: 0,0797

91. ყუთში 3 დეტალია. ყოველ მათგანში წუნიანი დეტალის ალბათობა არის 0,1. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 10 ყუთიდან არანაკლებ 8 ყუთში არ იქნება წუნიანი დეტალი?

პასუხი: 0,463

92. გაყიდული კალკულატორების 1% წუნიანია. ფირმამ იყიდა 500 კალკულატორი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ფირმას მოუწევს 4 კალკულატორის გამოცვლა?

პასუხი: 0,175

93. სამეცნიერო კონფერენციაში მიწვეული 100 მეცნიერიდან ყოველი მათგანი მიიღებს მონაწილეობას ალბათობით 0,7. სტუმ-

რებისათვის შეკვეთილია სასტუმროს 65 ადგილი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყველა სტუმარი შესახლდება სასტუმროში?

პასუხი: 0,1379

94. ალბათობა იმისა, რომ დილერი გაყიდის ფასიან ქაღალდს, არის 0,6. რამდენი უნდა იყოს ფასიანი ქაღალდი, რომ გაყიდული ქაღალდების წილი გადახრილი იყოს 0,6-საგან არაუმეტეს 0,05 ალბათობით?

პასუხი: 634

95. არჩევნებზე მოსახლეობის 40% მხარს უჭერს მერის კანდიდატს. საზოგადოებრივი აზრის გასაგებად გამოკითხეს 1000 ამომრჩეველი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ ამომრჩევლებიდან იმ ადამიანების წილი, რომლებიც მხარს უჭერენ კანდიდატს, განსხვავდება მხარდამჭერთა ნამდვილი წილისაგან არა უმეტეს 0,05-ით?

პასუხი: 0,998

96. მონეტას აგდებენ 500-ჯერ. რას უდრის გადახრა ღერბის მოსვლათა სიხშირისა 0,5-საგან ალბათობით 0,99?

პასუხი: ε=0,057

97. რაიონის მოსახლეობის წილი, წარმოების დასაქმებაში, არის 0,4. რა საზღვრებშია 10000 შემთხვევით არჩეულ ადამიანების წარმოებაში დასაქმებულთა რაოდენობა ალბათობით 0,95?

პასუხი: 3904 – 4096

98. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული დეტალი აღმოჩნდება მეორე ხარისხის, არის 3/8. რამდენი დეტალი უნდა ავიღოთ, რომ 0,995 ალბათობით (შეიძლება ველოდოთ) მეორე ხარისხის დეტალთა წილის განსხვავება ალბათობისაგან ნაკლები იყოს 0,001-ზე?

პასუხი: $n \geq 18504$

99. 6 ხელნაწერი შემთხვევით ნაწილდება 5 საქაღალდეში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ზუსტად ერთი საქაღალდე დარჩება ცარიელი?

პასუხი: 0,4992

100. 5 კლიენტი შემთხვევით მიმართავს 5 ფირმას. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ ფირმას არავინ არ მიმართა?

პასუხი: 0,384

101. ორი მოჭადრაკე ერთმანეთს შეხვდა 50-ჯერ. პირველმა მოიგო 15-ჯერ, მეორემ – 10-ჯერ, 25 პარტია დამთავრდა ფრედ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 10 პარტიიდან პირველი მოიგებს 3 პარტიას, მეორე – 2 პარტიას, ხოლო 5 პარტია დამთავრდება ფრედ?

პასუხი: 0,08505

102. მაღაზიამ მიიღო 1 კოსტუმი მეორე ზომის, 2 კოსტუმი მესამე ზომის, 3 კოსტუმი მეოთხე ზომის. მეორე ზომის კოსტუმებზე მოთხოვნის ალბათობა არის 0,2, მესამე ზომის კოსტუმებზე – 0,3, მეოთხე ზომის კოსტუმებზე – 0,5. მაღაზიაში შევიდა 3 მყიდველი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი მაინც არ იყიდის კოსტუმს?

პასუხი: 0,131

103. ლიფტი იწყებს მოძრაობას 7 მგზავრით და ჩერდება მე-10 სართულზე. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 3 მგზავრი გამოვა ერთ სართულზე, 2 მგზავრი სხვა სართულზე, ხოლო ბოლო ორი მგზავრი ისევ ერთ სართულზე?

პასუხი: 0,00756

შემთხვევითი სიდიდეები. განაწილების ფუნქცია. მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია

1. ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათური სივრცეა. $\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$, Ω-ზე განსაზღვრული ნამდვილი ფუნქციაა, ისეთი, რომ ყოველი C ნამდვილი რიცხვისათვის $A_C=\{\omega: \xi(\omega)=C, \omega\in\Omega\}\in\mathcal{F}$. შეიძლება ξ იყოს შემთხვევითი სიდიდე?

2. ვთქვათ, A და B ერთი და იგივე ალბათური სივრცის ხდომილობებია. I_A და I_B მათი ინდიკატორებია. აჩვენეთ, რომ

$$I_{A\Delta B}=(I_A-I_B)^2$$

3. ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათური სივრცეა, სადაც $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}$ – ბორელის σ-ალგებრაა $[0,1]$-დან, ხოლო $p=\mu$ ლებეგის ზომა. აღწერეთ $\xi=\begin{cases}1/4, & \omega\in[0,1/4)\\ 1/2, & \omega\in[1/4,3/4)\\ 1, & \omega\in[3/4,1]\end{cases}$ შემთხვევითი სიდიდის მიერ წარმოქმნილი σ-ალგებრა.

4. ხელსაწყო შედგება სამი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მომუშავე ელემენტისაგან. ერთი ცდისას ყოველი ელემენტის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა ტოლია 0,1-ს. შეადგინეთ ერთ ცდაში მწყობრიდან გამოსულ ელემენტთა რიცხვის (ξ – შემთხვევითი სიდიდის) განაწილების კანონი.

5. 10 ხელსაწყოდან 8 არის სტანდარტული. შემთხვევით იღებენ ორ ხელსაწყოს. შეადგინეთ შერჩეულ ხელსაწყოებს შორის სტანდარტულების რიცხვის განაწილების კანონი.

6. $I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \text{როცა } \omega\in A,\\ 0, & \text{როცა } \omega\notin A.\end{cases}$

ინდიკატორისათვის შეამოწმეთ შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა

$$I_\varnothing=0,\ I_\Omega=1,\ I_A+I_{\overline{A}}=1,\ I_{AB}=I_AI_B,\ I_{A\cup B}=I_A+I_B-I_{AB},$$

$$I_{\bigcup_{j=1}^{n} A_j} = 1-\prod_{j=1}^{n}(1-I_{A_j}),\ I_{\overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j}} = \prod_{j=1}^{n}(1-I_{A_j}),$$

$$I_{\sum_{j=1}^{n} A_j} = \sum_{j=1}^{n} I_{A_j},\ I_{A\Delta B}=(I_A-I_B)^2,$$

სადაც $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$-ს სიმეტრიული სხვაობა ეწოდება.

7. ვთქვათ, $(\Omega,,\mathcal{F})=(R', \mathcal{B}_1)$ და $\xi(\omega)=|\omega|$. აჩვენეთ, რომ $\xi(\omega)$ არის შემთხვევითი სიდიდე.

8. ლითონის ფულს აგდებენ 3-ჯერ. შეადგინეთ გერბის მოსვლათა განაწილების კანონი.

9. მიზანში ისვრიან ერთხელ, მოხვედრის ალგებრა უდრის 0,4. იპოვეთ მიზანში მოხვედრათა რიცხვის განაწილების ფუნქცია, ააგეთ გრაფიკი.

10. ურნაში რვა ბურთულაა, რომელთაგან 5 თეთრია, დანარჩენი შავი. შემთხვევით აირჩიეთ 3 ბურთულა. ξ შემთხვევითი სიდიდე არის არჩეულ სამ ბურთულაში თეთრების რაოდენობა. იპოვეთ ξ შემთხვევით სიდიდის განაწილების კანონი და ალბათობა $P[\xi\geq 2]$.

11. ლატარიის ბილეთის მოგების ალბათობა არის 0,1. მყიდველმა იყიდა 5 ბილეთი. იპოვეთ მოგებულ ბილეთთა რაოდენობის განაწილების კანონი.

12. მსროლელის მიერ ერთი გასროლით მიზნის დაზიანების ალბათობაა 0,7. ის ისვრის პირველ დაზიანებამდე, მაგრამ გასროლათა რაოდენობა არაა ნაკლები 3-ზე. იპოვეთ გასროლათა რიცხვის განაწილების კანონი.

13. მოწყობილობა შედგება ორი დეტალისაგან. პირველი დეტალის წუნის ალბათობაა 0,1, ხოლო მეორესი – 0,05. შემთხვევით

აირჩიეს 4 მოწყობილობა. მოწყობილობა ითვლება წუნიანად, თუ მასში არის ერთი მაინც წუნიანი დეტალი. დაწერეთ წუნიანი მოწყობილობების რაოდენობის განაწილების კანონი არჩეულ 4 მოწყობილობაში.

14. ორი მსროლელი ისვრის მიზანში, პირველი აზიანებს მიზანს ალბათობით 0,8, ხოლო მეორე ალბათობით – 0,9. დაწერეთ მიზანში მოხვედრათა რაოდენობის განაწილების კანონი, თუ პირველი მსროლელი ისვრის ერთხელ, ხოლო მეორე – 2-ჯერ.

15. 5 ნათურიდან ყოველი შეიძლება იყოს წუნიანი ალბათობით 0,1. წუნიანი ნათურა ქსელში ჩართვისას მაშინვე იწვება და იცვლება ახლით. დაწერეთ ვარგის ნათურათა რაოდენობის განაწილების კანონი.

16. 5 საკეტს შორის ორი აღებს კარს. საკეტებს ამოწმებენ მიმდევრობით სანამ არ გააღებენ კარს. დაწერეთ შემოწმებულ (აპრობირებულ) საკეტთა რაოდენობის განაწილების კანონი.

17. მონეტას აგდებენ მანამ, სანამ გერბი ორჯერ არ მოვა. ცდას ატარებენ არაუმეტეს 4-ჯერ. დაწერეთ ჩატარებულ ცდათა რაოდენობის განაწილების კანონი.

18. 10 დეტალს შორის 2 არის საჭირო ზომის. დეტალებს იღებენ მიმდევრობით მანამ, სანამ არ ამოიღებენ ორი საჭირო ზომის დეტალს. აკეთებენ არაუმეტეს 4 მცდელობას. დაწერეთ ამოღებულ დეტალთა რაოდენობის განაწილების კანონი.

19. დაამტკიცეთ, რომ p პარამეტრით გეომეტრიულად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი $M\xi=1/p$, ხოლო დისპერსია $D\xi= q/p^2$.

20. დაამტკიცეთ, რომ n და p პარამეტრებით ბერნულის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი $M\xi=np$, ხოლო დისპერსია $D\xi=npq$.

21. დაამტკიცეთ, რომ λ პარამეტრით პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი $M\xi=\lambda$, დისპერსია $D\xi=\lambda$.

22. წარმოების მიერ უმაღლესი ხარისხის ნაკეთობის გამოშვების ალბათობაა 0,2. კონვეირიდან შემთხვევით იღებენ ნაკეთობას მანამ, სანამ არ იქნება არჩეული უმაღლესი ხარისხის ნაკეთობა. იპოვეთ არჩევათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი

პასუხი: 5.

23. კამათელს აგორებენ მანამ, სანამ მეორეჯერ არ „მოვა" სამიანი. იპოვეთ კამათლის გაგორებათა საშუალო რაოდენობა.

პასუხი: 12.

24. იპოვეთ 4 კამათლის გაგორებისას მოსული ქულათა ჯამის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

პასუხი: $MX=14$; $DX= 35/3$.

25. მოცემულია $M\xi=a$, $D\xi=\sigma^2$. იპოვეთ $\eta=\dfrac{\xi-a}{\sigma}$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

პასუხი: $MX=0$; $DX= 1$.

26. რადიომიმღების 6 ნათურიდან ერთი გადაიწვა. ნათურის ახლით შეცვლა ხდება მიმდევრობით მანამ, სანამ რადიომიმღები არ ამუშავდება. იპოვეთ მიმდევრობაში გამოცვლილი ნათურის რიგის რაოდენობის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

პასუხი: $MX=3,99$.

27. მსროლელი ისვრის მოძრავ მიზანში პირველ დაზიანებამდე და მხოლოდ 4 გასროლას ასწრებს. იპოვეთ მიზანში გასროლათა რაოდენობის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, თუ მიზნის დაზიანების ალბათობა ყოველ გასროლისას არის 0,6.

პასუხი: $MX=1,624$; $DX=0,811$.

28. აგორებენ 2 კამათელს. ვთქვათ ξ_1 და ξ_2 შესაბამისად პირველ და მეორე კამათელზე მოსულ ქულათა რაოდენობებია, ხოლო $\eta=\max\{\xi_1, \xi_2\}$. დაწერეთ ξ_1 და η შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონი.

29. მოცემულია (ξ,η) შემთხვევითი სიდიდის ერთობლივი განაწილების კანონი.

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
-1	1/16	1/8	1/16
1	3/16	3/8	3/16

დაწერეთ: $\xi+\eta$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი და გამოთვალეთ **COV**$(\xi\eta, \xi+\eta)$. დაადგინეთ ξ და η შემთხვევით სიდიდეთა დამოკიდებულება.

30. მოცემულია (ξ,η) შემთხვევითი სიდიდის ერთობლივი განაწილების კანონი.

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
-1	1/12	1/4	1/6
1	1/4	1/12	1/6

დაწერეთ: $\xi\eta$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი და გამოთვალეთ **COV**$(2\xi-3\eta, \xi+2\eta)$ დაადგინეთ ξ და η შემთხვევით სიდიდეთა დამოკიდებულება.

31. მოცემულია (ξ,η) შემთხვევითი სიდიდის ერთობლივი განაწილების კანონი.

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
0	1/10	1/5	1/5
-1	1/5	1/10	1/5

დაწერეთ: ξ-η შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი და გამოთვალეთ **COV($\xi+\eta$, $\xi-\eta$).** დაადგინეთ ξ და η შემთხვევით სიდიდეთა დამოკიდებულება.

32. მოცემულია განაწილების კანონები

$$\xi\begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0,3} & \mathbf{0,7} \end{cases} \qquad \text{და} \qquad \eta\begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0,8} & \mathbf{0,2} \end{cases}$$

შეადგინეთ $\xi+\eta$, $\xi-\eta$, $\xi\cdot\eta$ შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონები, იპოვეთ მათი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

33. მონეტას ვაგდებთ **n**–ჯერ; განიხილება ξ შემთხვევითი სიდი–დე – გერბების მოსვლათა რაოდენობა. შეადგინეთ განაწილების კანონი და იპოვეთ მისი რიცხობრივი მახასიათებლები: **M** ξ, **D** ξ, σ_ξ.

$$M\xi = \frac{n}{2},\ D\xi = \frac{n}{4},\ \ \sigma_\xi = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

34. ξ – შემთხვევითი სიდიდე ემორჩილება კოშის განაწილების კანონს $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. იპოვეთ η–შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე, თუ

ა) $\eta=1-\xi^3$, ბ) $\eta=\ln\xi^2$, გ) $\eta=\mathrm{arctg}\,\xi$, დ) $\eta=1/\xi$.

35. ξ – შემთხვევითი სიდიდე ემორჩილება თანაბარი განაწილე–ბის კანონს $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$. იპოვეთ $\eta = \arcsin\dfrac{2\xi}{T}$ შემთხვევითი სი–დიდის განაწილების სიმკვრივე.

36. ვთქვათ, ξ და η ეკვივალენტური შემთხვევითი სიდიდეებია, ე.ი. **P{$\xi\neq\eta$}=0.** აჩვენეთ, რომ თუ არსებობს **Mξ**, მაშინ არსებობს **Mη** და **Mξ=Mη.**

37. დაამტკიცეთ, რომ $M\xi^2=0$-დან გამომდინარეობს $P\{\xi=0\}=1$.

38. ვთქვათ, ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებია. იქნებიან თუ არა ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები, თუ ξ^2 და η^2 დამოუკიდებელია.

39. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი განაწილების ფუნქციისათვის და ნებისმიერი n და k-სათვის

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^k(x)dF^n(x) = \frac{n}{n+k}.$$

40. ვთქვათ, ξ შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის განაწილების ფუნქცია $F(x)$ უწყვეტი და ზრდადია. იპოვეთ $F(\xi)$-ის განაწილების ფუნქცია.

41. ξ – შემთხვევითი სიდიდე ემორჩილება თანაბარი განაწილების კანონს $[0,1]$. იპოვეთ η – შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე, თუ $\xi = \frac{1}{2}(1+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\frac{t^2}{2}}dt)$.

42. ξ — შემთხვევითი სიდიდე ემორჩილება ბინომიალური განაწილების კანონს $P(\xi=m)=C_n^m P^m(1-p)^{n-m}$, $(m=0,1,2,...,n)$. იპოვეთ მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია $Y=e^{\xi}$ — შემთხვევითი სიდიდის.

43. მოცემულია დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები ξ და η, რომელთა განაწილების სიმკვრივეებია: $f_\xi(x)=f_\eta(x)=0$, როცა $x\geq 0$. $f_\xi(x)=C_1x^{\alpha}e^{-\beta x}$, $f_\eta(x)=C_2x^{\nu}e^{-\beta x}$, როცა $x>0$. $(\alpha>0, \beta>0, \nu>0)$.
იპოვეთ: ა) C_1 და C_2; ბ) $\xi+\eta$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე.

44. დაამტკიცეთ, რომ თუ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელნი არიან და მათი განაწილების სიმკვრივეები

ტოლია და $f_\xi(x)= f_\eta(x)=\begin{cases} e^{-k}, \text{როცა} & x \ge 0,\\ 0, \text{როცა} & x < 0, \end{cases}$ მაშინ $\xi+\eta$ და $\dfrac{\xi}{\eta}$ შემთხვევითი სიდიდეებიც იქნებიან ურთიერთდამოუკიდებელნი.

45. ξ და η ურთიერთდამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია, სიმკვრივით $f_\xi(x)= f_\eta(x)=\dfrac{C}{1+x^4}$. იპოვეთ C და დაამტკიცეთ, რომ შემთხვევითი სიდიდე $\dfrac{\xi}{\eta}$ ემორჩილება კოშის განაწილებას.

46. შემთხვევითი სიდიდეები ξ და η დამოუკიდებელნი არიან, მათი განაწილების სიმკვრივეებია $f_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, როცა $|x|<1$; $(0$, როცა $|x|\ge 1)$; $f_\eta(x)=\begin{cases} 0, \text{როცა} & x \ge 0,\\ xe^{-\frac{x^2}{2}}, \text{როცა} & x > 0 \end{cases}$. დაამტკიცეთ, რომ შემთხვევითი სიდიდე $\xi\eta$ ემორჩილება ნორმალური განაწილების კანონს.

47. (ξ_1,ξ_2) ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის ნორმალური განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right)\right).$$

იპოვეთ (ξ_1,ξ_2) შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია.

მითითება: ისარგებლეთ ფორმულით

$$b_{\eta k} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}(x_i - M\xi_i)(x_k - M\xi_k)f(x_1\dots x_n)dx_1\dots dx_n$$

სადაც $(1\le k\le n)(1\le i\le n)$.

48. შეიძლება თუ არა განაწილების ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე ყველგან მკვრივი იყოს რიცხვთა ღერძზე?

49. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი განაწილების ფუნქციისათვის სამართლიანია:

$$\lim_{x\to\infty} x\int_x^{\infty} \frac{dF(y)}{y} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} x\int_{-\infty}^{x} \frac{dF(y)}{y} = 0.$$

50. ξ შემთხვევითი სიდიდე იღებს მხოლოდ მთელ არაუარყოფით მნიშვნელობებს. დაამტკიცეთ, რომ

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi \ge k\}.$$

51. ვთქვათ, არაუარყოფითი ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი სასრულია. აჩვენეთ, რომ

$$M\xi = \int_0^{\infty} \left[1 - F_{\xi}(x)\right]dx.$$

52. $(0,l)$ – ინტერვალში შემთხვევით „ვარდება“ ორი წერტილი. იპოვეთ მათ შორის მანძილის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

53. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად. იპოვეთ $M|\xi-a|$, სადაც $a=M\xi$.

54. ξ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებია $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. ცნობილია, რომ $M\xi=2,3$; $D\xi=0,41$. იპოვეთ რა ალბათობებით იღებს შემთხვევითი სიდიდე ამ მნიშვნელობებს.

55. მოცემულია $P_1=0,3$; $P_2=0,7$; $M\xi=0,4$; $D\xi=0,84$.
იპოვეთ x_1 და x_2 $(x_1 < x_2)$.

56. ვთქვათ, $\xi=2\xi_1-2\xi_2+\xi_3$. იპოვეთ $M\xi$ და $D\xi$, თუ $M\xi_1=2$, $M\xi_2=1$, $M\xi_3=2$, $D\xi_1=9$, $cov(\xi_1, \xi_2)=5$, $D\xi_2=25$, $cov(\xi_1, \xi_3)=7$, $D\xi_3=16$, $cov(\xi_3, \xi_2)=8$.

57. დაამტკიცეთ, რომ თუ ξ და η დამოუკიდებელია, მაშინ

$$D(\xi\cdot\eta)=D\xi\cdot D\eta+(M\xi)^2 D\eta+(D\eta)^2 D\xi.$$

58. დავუშვათ, რომ $\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_n$ დამოუკიდებელი და $(0,1)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია. აღვნიშნოთ $U_n = \min\limits_{1\le k\le n} \xi_k$, $V_n = \max\limits_{1\le k\le n} \xi_k$ Ø$D_n=V_n-U_n$.

აჩვენეთ, რომ:

ა) $F_{V_n}(x) = x^n$, $f_{V_n}(x) = nx^{n-1}$, $0<x<1$

$$MV_n = \frac{n}{n+1},\ DV_n = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2};$$

ბ) $F_{U_n}(x) = 1-(1-x)^n$, $f_{U_n}(x) = n(1-x)^{n-1}$, $0<x<1$

$$MU_n = \frac{1}{n+1},\ DU_n=DV_n.$$

გ) $F_{D_n}(x) = nx^{n-1}-(n-1)x^n$, $f_{D_n}(x) = n(n-1)\left[x^{n-2}-x^{n-1}\right]$,

$n\ge 2$, $0<x<1$

$$MD_n = \frac{n-1}{n+1},\ VarD_n = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

დ) $cor(U_n, V_n) = \frac{1}{n}$.

ე) $\lim\limits_{n\to\infty} P\{nU_n < x\} = 1-e^{-x}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} P\{n(1-V_n) < x\} = 1-e^{-x}$.

59. ვთქვათ, ξ_1 და ξ_2 დამოუკიდებელი და ერთი და იგივე ექსპონენციალური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია: $P\{\xi_i<x\}=1-e^{-\lambda x}$, $\forall x$, $\lambda>0$, $i=1,2$.

აჩვენეთ, რომ

ა) $\frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}$ შემთხვევითი სიდიდე $(0,1)$ ინტერვალში თანაბრადაა განაწილებული.

ბ) $\frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}$ და $\xi_1+\xi_2$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.

60. ვთქვათ, ξ ისეთი შემთხვევითი სიდიდეა, რომ $E\xi^2<\infty$. აჩვენეთ, რომ

$$\mathbf{M(\xi-c)^2\geq M(\xi-c_0)^2,\ c_0=M\xi,\ \forall c.}$$

61. ვთქვათ, $\mathbf{M\xi^2<\infty, M\eta^2<\infty}$. აჩვენეთ, რომ

$$\mathbf{M(\eta-\mathit{a}\xi-b)^2\geq M(\eta-\mathit{a}_0\xi-b_0)^2=(1-\rho^2)D\eta,}$$

სადაც $\boldsymbol{a_0=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}}$, $\mathbf{b_0=E\eta-\mathit{a}_0M\xi,\ \rho=cor(\xi,\eta).}$

თუ $\mathbf{D\xi=0}$, მაშინ $\boldsymbol{a_0=0}$.

62. ვთქვათ, ξ – შემთხვევითი სიდიდე ისეთია, რომ $\mathbf{P\{0<\xi<1\}=1}$. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{D\,\xi<M\,\xi}$. მართლაც, $\mathbf{P\{\xi^2<\xi\}=1}$ და, მაშასადამე,

$$\mathbf{D\,\xi=M\,\xi^2-(M\,\xi)^2<M\,\xi^2<M\,\xi.}$$

63. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებისათვის, რომლებსაც გააჩნიათ სასრული დისპერსია, სამართლიანია უტოლობა

$$\left(\sqrt{\mathbf{D}\xi}-\sqrt{\mathbf{D}\eta}\right)^2\leq \mathbf{D}(\xi+\eta)\leq\left(\sqrt{\mathbf{D}\xi}+\sqrt{\mathbf{D}\eta}\right)^2.$$

64. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები, რათა შესრულდეს ტოლობა

$$\mathbf{D\xi\eta=D\xi\cdot D\eta.}$$

65. ვთქვათ, ξ – შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი 0-ის ტოლია და დისპერსია სასრულია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\mathbf{M}\,|\,\xi\,|\le \frac{1}{2}\left(\mathbf{D}\xi+1\right)$$

მითითება: $0\le M(|\xi|-1)^2=M\xi^2-2M|\xi|+1$.

66. ξ – შემთხვევითი სიდიდე თანაბრად განაწილებულია $[a,b]$ ინტერვალზე. იპოვეთ a და b თუ $M\,\xi^2=1$ და $M\,\xi=-M\,\xi^3$.

67. ვთქვათ, $\xi_1,\ldots,\xi_n$ დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილე-ბული შემთხვევითი სიდიდეების σ^2 დისპერსიით. გამოთვალეთ

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\overline{\xi}\right)^2$$

შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, სადაც $\overline{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$.

68. ვთქვათ, ξ ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდეა, ამასთან, $M\xi=0$, $D\xi=\sigma^2$. დაამტკიცეთ, რომ $F_\xi(x)\le\frac{\sigma^2}{x^2+\sigma^2}$, როცა $x<0$;

$$F_\xi(x)\ge\frac{x^2}{x^2+\sigma^2},\ \text{როცა}\ x>0.$$

69. $(\xi,\ \eta)$ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემა ემორჩილება ნორმა-ლური განაწილების კანონს სიმკვრივით $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$. იპოვეთ (R,A) შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის განაწილების სიმ-კვრივე, თუ $\xi=R\cos A$, $\eta=R\sin A$.

მითითება. ცნობილია, რომ $f(r,\varphi)=f(x(r,\varphi),y(r,\varphi))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|$,

სადაც $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}.$$

70. ურთიერთდამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ მიმდევრობა ემორჩილება ერთსა და იმავე განაწილების კანონს, განაწილების ფუნქციით $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$. შეამოწმეთ, მოცემული მიმდევრობისათვის ადგილი აქვს თუ არა ხინჩინის თეორემას.

71. ξ – შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნახევარ ელიფსზე, ე.ი. $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, & \text{როცა } x \in (-a, a), \\ 0, & \text{როცა } x \notin (-a, a) \end{cases}$ a – ცნობილია.

იპოვეთ b, $F_\xi(x)$ და $P(-1 \le \xi < 1)$.

72. ξ – შემთხვევითი სიდიდე ემორჩილება ნორმალური განაწილების კანონს პარამეტრებით $(0, \sigma^2)$. იპოვეთ $Me^{-\xi}$ და $De^{-\xi}$.

73. ξ – შემთხვევითი სიდიდე თანაბრად განაწილებულია $[0,2]$ ინტერვალზე. იპოვეთ $\eta = -(\xi+1)^{1/2}$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე.

74. ξ – შემთხვევით სიდიდეს აქვს ნორმალური განაწილება პარამეტრებით a და σ^2. დაამტკიცეთ, რომ შემთხვევითი სიდიდე $\frac{\xi - a}{\sigma}$ განაწილებულია ნორმალურად პარამეტრებით 0 და 1.

75. ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე (ξ, η) თანაბრად განაწილებულია სამკუთხედში $\{(x,y):\ x>0,\ y>0,\ x+y<2\}$. გამოთვალეთ

$$P(\xi > \eta).$$

ჩებიშევის უტოლობა. დიდ რიცხვთა კანონი

1. ბანკის საშუალო ანაბარი არის 60000 ლარი. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული ანაბარი არ გადააჭარბებს 10000 ლარს?

(ვიყენებთ ჩებიშევის უტოლობას $P(|\xi|\geq\varepsilon)\leq\frac{M|\xi|}{\varepsilon}$)

პასუხი: $P(\xi\leq 10000)\geq 0{,}4$

2. დამოუკიდებელ ცდათა რაოდენობაა 400. წარმატების ალბათობა ყოველ ცდაში არის 0,8. ჩებიშევის უტოლობის საშუალებით შეაფასეთ, რომ ამ ცდაში სხვაობა წარმატების რაოდენობასა და წარმატებათა საშუალო რაოდენობას შორის არ გადააჭარბებს 20-ს?

ამოხსნა: წარმატების საშუალო რაოდენობა $\xi=np=400.0{,}8=320$, ხოლო $D\xi=npq=400.0{,}8.0{,}2=64$. ჩებიშევის უტოლობის ძალით

$$P(|\xi-320|<20)\geq 1-\frac{D\xi}{20^2}=0{,}84$$

გამოვთვალოთ იგივე ალბათობა ლაპლას-მუავრის ინტეგრალური ფორმულით

$$P(|\xi-320|<20)=P(|\xi-np|<\varepsilon)=P\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}<\frac{\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)=$$

$$=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)=2\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{64}}\right)=2\Phi(2{,}5)=2\cdot 0{,}4938=0{,}9876.$$

ეს უკანასკნელი გვიჩვენებს, რომ ჩებიშევის უტოლობა გვაძლევს საკმაოდ უხეშ შეფასებას.

3. სატელეფონო სადგურში შემოსულ ზართა საშუალო რაოდენობა ერთი საათის განმავლობაში არის 300. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ შემდეგ საათში შემოსულ ზართა რაოდენობა გადააჭარბებს 400-ს?

პასუხი: $P(\xi>400)\leq 0{,}75.$

4. ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ დამოუკიდებელი შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, ამასთან, ξ_n ღებულობს $\sqrt{n}$, $0, -\sqrt{n}$ მნიშვნელობებს შესაბამისად $\frac{1}{2n}$, $1-\frac{1}{n}$, $\frac{1}{2n}$ ალბათობებით. ამ მიმდევრობისათვის სრულდება თუ არა დიდ რიცხვთა კანონი (დ.რ.კ.)?

5. ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ დამოუკიდებელი შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, ამასთან,

$$P\{\xi_n = -n\} = \frac{1}{2n^2},\ P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^2},\ P\{\xi_n = n\} = \frac{1}{2n^2}$$

$\{\xi_k\}$-სათვის სრულდება თუ არა დ.რ.კ.?

6. ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ დამოუკიდებელი შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა,

$$P\{\xi_n = \pm 2^n\} = 2^{-(2n+1)},\ P\{\xi_n = 0\} = 1 - 2^{-2n}$$

$\{\xi_k\}$-სათვის სრულდება თუ არა დ.რ.კ.?

7. ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, ამასთან,

$$P\{\xi_n = 2^n\} = P\{\xi_n = -2^n\} = \frac{1}{2}.$$

$\{\xi_k\}$-სათვის სრულდება თუ არა დ.რ.კ.?

8. α-ს რა მნიშვნელობებისათვის არის სამართლიანი დ.რ.კ. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ დამოუკიდებელი შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობისათვის, თუ

$$P\{\xi_n = n^\alpha\} = P\{\xi_n = -n^\alpha\} = \frac{1}{2},\ \alpha > 0.$$

9. ვთქვათ მოცემულია $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, სადაც ყოველი ξ_i არის წარმატებათა რიცხვი ბერნულის ერთ ცდაში (ე.ი. არის 1 წარმატების შემთხვევაში და 0 – არა წარმატების შემთხვევაში). თითოეულ შემთხვევით სიდიდეს აქვს შემდეგი განაწილების კანონი:

ξ_i	0	1
p	**q**	**p**

ამ მიმდევრობისათვის შეიძლება თუ არა დიდ რიცხვთა გამოყენება?

ამოხსნა:

ცხადია, რომ მოცემული მიმდევრობა აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონის მოთხოვნებს და $M\xi_i=p$, $D\xi_i=pq$, მაშინ საშუალო არითმეტიკული – $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ უდრის წარმატებათა რიცხვს **n** დამოუკიდებელ ცდაში, ხოლო დიდ რიცხვთა კანონი ამტკიცებს, რომ წარმატებათა ფარდობითი სიხშირე მიისწრაფვის წარმატების **p** ალბათობისაკენ, თუ ცდათა რაოდენობა მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.

10. ვთქვათ მოცემულია $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, რომლებსაც აქვთ შემდეგი განაწილების კანონი:

ξ_i	**-n**	**n**
p	**1/2**	**1/2**

ამ მიმდევრობისათვის შეიძლება თუ არა დიდ რიცხვთა გამოყენება?

ზღვარითი თეორემები

1. ცალკეული ცდისას **A** ხდომილობის ალბათობა $P(A) = \frac{1}{2}$. შეიძლება თუ არა **0,97**-ზე მეტი ალბათობით, **1000** ცდისას, **A** ხდომილობის მოხდენათა რაოდენობა მოთავსდეს **400**-სა და **600**-ს შორის.

2. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ **243** ურთიერთდამოუკიდებელი ცდისას **A** ხდომილობას ადგილი ექნება ზუსტად **70**–ჯერ, თუ ცალკეული ცდისას **P(A)=0,25.**

3. ყოველი 100 ურთიერთდამოუკიდებელი ცდისას A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა **P(A)=0,8.** იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობას ადგილი ექნება არანაკლებ 75-ჯერ და არა უმეტეს 90-ჯერ.

4. ცალკეული ურთიერთდამოუკიდებელი ცდისას **P(A)=0,8.** ცდათა რა რაოდენობისთვის არის მოსალოდნელი A ხდომილობის მოხდენა არანაკლებ 75-ჯერ, 0,9 ტოლი ალბათობით.

5. დეტალის ხმარებისას, მისი მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა 0,05 ტოლია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 100 დეტალის ხმარებისას მწყობრიდან გამოვა:

ა) არანაკლებ ხუთი დეტალისა $(m\geq 5)$,
ბ) არა უმეტეს ხუთი დეტალისა $(m\leq 5)$,
გ) ხუთიდან 10 დეტალამდე $(5\leq m \leq 10)$.

6. ξ – შემთხვევითი სიდიდე ემორჩილება ნორმალური განაწილების კანონს პარამეტრებით (a ,σ^2), იპოვეთ $P(\alpha<\xi<\beta)$.

$$\text{პასუხი:}\quad P(\alpha<\xi<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

სადაც $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – ლაპლასის ფუნქციაა.

7. 625-ჯერ ჩატარებული ურთიერთდამოუკიდებელი თითოეული ცდისას A ხდომილობის ალბათობა **P(A)=0,8.** იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა ფარდობით სიხშირესა და A-ს ალბათობას შორის არ აღემატება 0,04-ს.
მითითება: ისარგებლეთ ფორმულით:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

8. 100 დამოუკიდებელ ცდაში ხდომილობის განხორციელების ალბათობა მუდმივია და 0,8-ის ტოლია. ნორმალური აპროქსიმაციის გამოყენებით იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა 100 ცდაში განხორციელდება:

ა) არა უმცირეს 75-ჯერ და არა უმეტეს 90-ჯერ;

ბ) არა უმცირეს 75-ჯერ;

გ) არა უმეტეს 90-ჯერ.

9. ვთქვათ, ξ_1, ξ_2 დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია, $M\xi_1=0$. ვთქვათ, $d_1^2, d_2^2, \ldots$ მუდმივი სიდიდეებია ისეთი, რომ $d_n=o(D_n)$, $D_n^2=\sum_{k=1}^{n} d_k^2$. აჩვენეთ შემთხვევით სიდიდეთა $d_1\xi_1, d_2\xi_2 ..$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს ცენტრალურ ზღვარით თეორემას:

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} d_k\xi_k \xrightarrow{d} N(0,1)$$

10. ვთქვათ, ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონით λ-პარამეტრით. აჩვენეთ, რომ ზღვარითი განაწილება $\frac{\xi-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$-ის, როცა $\lambda\to\infty$, არის ნორმალური.

11. ვთქვათ, ξ_n განაწილებულია χ^2 – კანონით n-თავისუფლების ხარისხით. აჩვენეთ, რომ $\eta_n=\frac{\xi_n-n}{\sqrt{2n}}$-ის განაწილება ასიმპტოტურად ნორმალურია, როცა $n\to\infty$.

12. შემთხვევითი სიდიდე ξ ემორჩილება გამა-განაწილებას, ე.ი.

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}, & \text{როცა} \quad x>0 \\ 0, \text{ როცა} & x\le 0\end{cases} \quad (\alpha>0)$$

იპოვეთ ξ-ის მახასიათებელი ფუნქცია $\varphi_\xi(t)$.

13. იპოვეთ $\varphi = \frac{\chi}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i^2}$ შემთხვევითი სიდიდის განა-წილების სიმკვრივე.

14. იპოვეთ $\varphi = \frac{\xi}{\eta}$, შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრი-ვე, თუ ისინი ურთიერთდამოუკიდებელნი არიან და $f_\xi(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}e^{-\frac{nx^2}{2}}$ (ნორმალური განაწილების კანონი). $f_\eta(x) = \frac{\sqrt{2n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} e^{-\frac{nx^2}{2}}$, როცა $x>0$ ($\eta = \frac{\chi}{\sqrt{n}}$-ს განაწილების სიმკვრივე).

15. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\varphi_\xi(t)$ მახასიათებელი ფუნქციაა, მაშინ $\mathrm{Re}\varphi_\xi(t)$-ც იქნება მახასიათებელი ფუნქცია.

16. იპოვეთ $\frac{\chi^2}{n}$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების: ა) სიმკვ-რივე, ბ) მახასიათებელი ფუნქცია, გ) პირველი სამი რიგის საწ-ყისი და ცენტრალური მომენტები.

ცხრილები

ნორმალური განაწილების ფუნქცია და ნორმალური განაწილების სიმკვრივე

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2},\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,5000	45	3605	6736	0,90	0,2661	0,8159
01	3989	5040	46	3589	6772	91	2637	8186
02	3989	5080	47	3572	6808	92	2613	8212
03	3988	5120	48	3555	6844	93	2589	8238
04	3986	5160	49	3538	6879	94	2565	8264
05	3984	5199	0,50	0,3521	0,6915	95	2541	8289
06	3982	5239	51	3503	6950	96	2516	8315
07	3980	5279	52	3485	6985	97	2492	8340
08	3977	5319	53	3467	7019	98	2468	8365
09	3973	5359	54	3448	7054	99	2444	8389
0,10	0,3970	0,5398	55	3429	7088	1,00	0,2420	0.8413
11	3965	5438	56	3410	7123	01	2396	8438
12	3961	5478	57	3391	7157	02	2371	8461
13	3956	5517	58	3372	7190	03	2347	8485
14	3951	5557	59	3352	7224	04	2323	8508
15	3945	5596	0,60	0,3332	0,7257	05	2299	8531
16	3939	5636	61	3312	7291	06	2275	8554
17	3932	5675	62	3292	7324	07	2251	8577
18	3925	5714	63	3271	7357	08	2227	8599
19	3918	5753	64	3251	7389	09	2203	8621
0,20	0,3910	0,5793	65	3230	7422	0,10	0,2179	0,8643
21	3902	5832	66	3209	7454	11	2155	8665
22	3894	5871	67	3187	7486	12	2131	8686
23	3885	5910	68	3166	7517	13	2107	8708
24	3876	5948	69	3144	7549	14	2083	8729
25	3867	5987	0,70	0,3123	0,7580	15	2059	8749
26	3857	6026	71	3101	7611	16	2036	8770
27	3847	6064	72	3079	7642	17	2012	8790
28	3836	6103	73	3056	7673	18	1989	8810
29	3825	6141	74	3034	7703	19	1965	8830
0,30	0,3814	0,6179	75	3011	7734	1,20	0,1942	0,8849
31	3802	6217	76	2989	7764	21	1919	8869
32	3790	6265	77	2966	7794	22	1895	8888
33	3778	6293	78	2943	7823	23	1872	8907
34	3765	6331	79	2920	7852	24	1849	8925
35	3752	6368	0,80	0,2897	0,7881	25	1826	8944
36	3739	6406	81	2874	7910	26	1804	8962
37	3725	6443	82	2850	7939	27	1881	8980
38	3712	6480	83	2827	7967	28	1858	8997
39	3697	6517	84	2803	7995	29	1836	9015
0,40	0,3683	0,6557	85	2780	8023	1,30	0,1714	0,9032
41	3668	6591	86	2756	8051	31	1691	9049
42	3653	6628	87	2732	8078	32	1669	8066
43	3637	6664	88	2709	8106	33	1647	9082
44	3621	6700	89	2685	8133	34	1626	9099

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
35	1604	9115	1,80	0,0790	0,9641	50	0175	9938
36	1582	9131	81	0775	9649	52	0167	9941
37	1561	9147	82	0761	9656	54	0158	9945
38	1539	9162	83	0748	9664	56	0151	9948
39	1518	9177	84	0734	9671	58	0143	9951
1,40	0,1497	0,9192	85	0721	9678	2,60	0,0136	0,9953
41	1476	9207	86	0707	9686	62	0129	9956
42	1456	9222	87	0694	9693	64	0122	9959
43	1435	9236	88	0681	9699	66	0116	9961
44	1415	9251	89	0669	9706	68	0110	9963
45	1394	9265	1,90	0,0656	0,9713	70	0104	9965
46	1374	9279	91	0644	9719	72	0099	9967
47	1354	9292	92	0632	9729	74	0093	9969
48	1334	9306	93	0620	9732	76	0088	9971
49	1315	9319	94	0608	9738	78	0084	9973
1,50	0,1295	0,9332	95	0596	9744	2,80	0,0079	0,9974
51	1276	9345	96	0584	9750	82	0075	9976
52	1257	9357	97	0573	9756	84	0071	9977
53	1238	9370	98	0562	9761	86	0067	9979
54	1219	9382	99	0551	9767	88	0063	9980
55	1200	9394	2,00	0,0540	0,9772	90	0,0060	0,9981
56	1182	9406	02	0519	9783	92	0056	9982
57	1163	9418	04	0498	9793	94	0053	9984
58	1145	9429	06	0478	9803	96	0050	9985
59	1127	9441	08	0459	9812	98	0047	9986
1,60	0,1109	0,9452	10	0440	9821	3,00	00443	0,99965
61	1092	9463	12	0422	9830	3,10	00327	99903
62	1074	9474	14	0404	9838	3,20	00238	99931
63	1057	9484	16	0387	9846	3,30	00172	99951
64	1040	9495	18	0371	9854	3,40	00123	99966
65	1023	9505	2,20	0,0355	0,9861	3,50	00087	99976
66	1006	9515	22	0339	9868	3,60	00061	69984
67	0989	9525	24	0325	9875	3,70	00042	99989
68	0973	9535	26	0310	9881	3,80	00029	99993
69	0957	9545	28	0297	9887	3,80	00020	99995
1,70	0,0940	5,9554	30	0283	9893	4,00	0,0001338	0,999968
71	0925	9564	32	0270	9898	4,50	0000160	999997
72	0909	9573	34	0258	9904	5,00	0000015	99999997
73	0893	9583	36	0246	9909			
74	0878	9591	38	0235	9913			
75	0863	9599	2,40	0,0224	0,9918			
76	0848	9608	42	0213	9922			
77	0833	9616	44	0203	9927			
78	0818	9625	46	0194	9931			
79	0804	9633	48	0184	9934			

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \text{ ფუნქცია}$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,45	0,34729	0,90	0,63188
01	00798	46	35448	91	63718
02	01596	47	36164	92	64243
03	02393	48	36877	93	64763
04	03191	49	37587	94	65278
05	03988	0,50	0,38292	95	65789
06	04784	51	38995	96	66294
07	05581	52	39694	97	66795
08	06376	53	40389	98	67291
09	07171	54	41080	99	67783
0,10	0,07966	55	41768	1,00	0,68269
11	08759	56	42452	01	68750
12	09552	57	43132	02	69227
13	10343	58	43809	03	69699
14	11134	59	44481	04	70166
15	11924	0,60	0,45149	05	70628
16	12712	61	45814	06	71086
17	13499	62	46474	07	71538
18	14285	63	47131	08	71986
19	15069	64	47783	09	72429
0,20	0,15852	65	48431	1,10	0,72867
21	16633	66	49075	11	73300
22	17413	67	49714	12	73729
23	18191	68	50350	13	74152
24	18967	69	50981	14	74571
25	19741	0,70	0,51607	15	74986
26	20514	71	52230	16	75395
27	21284	72	52848	17	75800
28	22052	73	53461	18	76200
29	22818	74	54070	19	76595
0,30	0,23582	75	54675	1,20	0,76986
31	24344	76	55275	21	77372
32	25103	77	55870	22	77754
33	25860	78	56461	23	78130
34	26614	79	57047	24	78502
35	27366	0,80	0,57629	25	78870
36	28115	81	58206	26	79233
37	28862	82	58778	27	79592
38	29605	83	59346	28	79945
39	30346	84	59909	29	80295
0,40	0,31084	85	60468	1,30	0,80640
41	31819	86	61021	31	80980
42	32552	87	61570	32	81316
43	33280	88	62114	33	81642
44	34006	89	62653	34	81975

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,35	0,82298	1,85	0,93569	2,35	0,98123
36	82617	86	93711	36	98172
37	82931	87	93852	37	98221
38	83241	88	93989	38	98269
39	83547	89	94124	39	98315
1,40	0,83849	1,90	0,94257	2,40	0,98360
41	84146	91	94387	41	98405
42	84439	92	94514	42	98448
43	84728	93	94639	43	98490
44	85013	94	94762	44	98531
45	85294	95	94882	45	98571
46	85571	96	95000	46	98611
47	85844	97	95116	47	98649
48	86113	98	95230	48	98686
49	86578	99	95341	49	98723
1,50	0,86639	2,00	0,95450	2,50	0,08758
51	86696	01	95557	51	98793
52	87149	02	95662	52	98826
53	87398	03	95764	53	98859
54	87644	04	95865	54	98891
55	87886	05	95964	55	98923
56	88124	06	96060	56	98953
57	88358	07	96155	57	98983
58	88589	08	96247	58	99012
59	88817	09	96338	59	99040
1,60	0,89040	2,10	0,96427	2,60	0,99068
61	89260	11	96514	61	99095
62	89477	12	96599	62	99121
63	89690	13	96683	63	99146
64	89899	14	96765	64	99171
65	90106	15	96844	65	99195
66	90309	16	96923	66	99219
67	90508	17	96999	67	99241
68	90704	18	97074	68	99263
69	90897	19	97148	69	99285
1,70	0,91087	2,20	0,97219	2,70	0,99307
71	91273	21	97289	71	99327
72	91452	22	97358	72	99347
73	91637	23	97425	73	99367
74	91814	24	97491	74	99386
75	91988	25	97555	75	99404
76	92159	26	97618	76	99422
77	92327	27	97679	77	99439
78	92492	28	97739	78	99456
79	92655	29	97798	79	99473
1,80	0,92814	2,30	0,97855	2,80	0,99489
81	92970	31	97911	81	99505
82	93124	32	97966	82	99520
83	93275	33	98019	83	99535
84	93423	34	98072	84	99549

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,85	0,99563	3,25	0.99885	3,65	0,99974
86	99576	26	99889	66	99975
87	99590	27	99892	67	99976
88	99602	28	99896	68	99977
89	99615	29	99900	69	99978
2.90	0,99627	3,30	0,99903	3,70	0,99978
91	99639	31	99907	71	99979
92	99650	32	99610	72	99980
93	99661	33	99913	73	99981
94	99672	34	99916	74	99982
95	99682	35	99919	75	99982
96	99692	36	99922	76	99983
97	99702	37	99925	77	99984
98	99712	38	99928	78	99984
99	99721	39	99930	79	99985
3.00	0,99730	3,40	0,99933	3,80	0,99986
01	99739	41	99935	81	99936
02	99747	42	99937	82	99987
03	99755	43	99940	83	99987
04	99763	44	99942	84	99988
05	99771	45	99944	85	99988
06	99779	46	99946	86	99989
07	99786	47	99948	87	99989
08	99793	48	99950	88	99990
09	99800	49	99952	89	99990
3,10	0,99806	3.50	0,99953	3,90	0,99990
11	99813	51	99955	91	99991
12	99819	52	99957	92	99991
13	99825	53	99958	93	99992
14	99831	54	99960	94	99992
15	99837	55	99961	95	99992
16	99842	56	99963	96	99992
17	99848	57	99964	97	99993
18	99853	58	99966	98	99993
19	99858	59	99967	99	99993
3,20	0,99863	3,60	0,99968		
21	99867	61	99969		
22	99872	62	99971		
23	99876	63	99972		
24	99880	64	99973		

პუასონის ფუნქცია

$$P_n(m) \simeq \frac{a^m e^{-a}}{m!}$$

m \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0.000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7					0,000001	0,000003

m \ a	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0,168031
5	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8		0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008101
9				0,000001	0,000191	0,002701
10					0,000038	0,000810
11					0.000007	0.000221
12					0,000001	0,000055
13						0,000013
14						0,000003
15						0,000001

m \ a	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,027717	0,091604	0,060727
6	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118085
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18		0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19		0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20			0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21			0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22				0,000003	0,000022	0,000108
23				0,000001	0,000008	0,000042
24					0.000003	0,000016
25					0,000001	0,000006
26						0,000002
27						0,000001

ლიტერატურა

1. ალბათობის თეორია. ქართული საბჭოთა ენციკლოპედია. ტ. I, თბ., „საბჭოთა საქართველო“, 1975.

2. ნადარაია ე., აბსავა რ., ფაცაცია მ. ალბათობის თეორია. თსუ გამომცემლობა, 2005.

3. ნადარაია ე., აბსავა რ., ფაცაცია მ. ალბათობის თეორია. თსუ გამომცემლობა, 2009.

4. მანია გ. ალბათობის თეორიის კურსი. თბ., თსუ გამომცემლობა, 1962.

5. მანია გ. ალბათობა. ქართული საბჭოთა ენციკლოპედია. ტ. I, თბ., „საბჭოთა საქართველო“, 1975.

6. შერვაშიძე თ. ალბათობის თეორია (ლექციათა კურსი). თსუ გამომცემლობა, თბ., 1980.

7. **Боровков А.А. Теория вероятностей, М., “Наука”, 1986.**

8. **Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей, М., “Наука”, 1965.**

9. **Крамер Г. Математические методы статистики, М., “Мир”, 1975.**

10. **Лоэв М. Теория вероятностей, М., “ИЛ”, 1962.**

11. **Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики, М., “Наука”, 1982.**

11\. **Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. I-II, М., “Мир”, 1967.**

12\. **Ширяев А.Н. Вероятность, М., “Наука”, 1980.**

13\. **Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М., “Физматгиз”, 1962.**

14\. **Халмош П. Теория меры, М., “ИЛ”, 1953.**

15\. **Натансон И.П. Теория функции вещественной переменной, М., “Наука”, 1974.**

16\. **Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев, 1979.**

სარჩევი

შესავალი 5

თავი I

ელემენტარულ ხდომილობათა დისკრეტული სივრცე 9

§1. ალბათობის განსაზღვრა და თვისებები 9

§2. კლასიკური სქემა 14

§3. ხდომილობათა გაერთიანების ალბათობა 21

§4. ბინომიალური განაწილება 30

თავი II

ელემენტარულ ხდომილობათა ნებისმიერი სივრცე 33

§1. კოლმოგოროვის აქსიომატიკა 33

§2. ალბათობის თვისებები 43

§3. პირობითი ალბათობა. ხდომილობათა დამოუკიდებლობა 45

§4. ჯამის ალბათობის გამოთვლა ურთიერთდამოუკიდებელი ხდომილობებისათვის 52

§5. სრული ალბათობის ფორმულა. ბაიესის ფორმულა 53

თავი III

შემთხვევითი სიდიდე და განაწილების ფუნქცია 57

§1. შემთხვევითი სიდიდე 57

§2. შემთხვევითი სიდიდის განაწილება 62

§3. განაწილების ფუნქციის თვისებები 65

§4. ვექტორული შემთხვევითი სიდიდე 76

§5. შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა 82

§6. შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების ფუნქცია 85

თავი IV

შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვითი მახასიათებლები 88

§1. მათემატიკური ლოდინი 88

§2. მათემატიკური ლოდინის თვისებები 93

§3. კრებადობის თეორემები 100

§4. ლებეგის ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობა 104

§5. ლებეგის ინტეგრალში ცვლადთა გარდაქმნის შესახებ 106

§6. რიმან–სტილტიესისა და ლებეგ–სტილტიესის ინტეგრალების შედარება 108

§7. მომენტები 111

§8. კოვარიაცია. კორელაციის კოეფიციენტი. უტოლობები 116
§9. პირობითი განაწილება და პირობითი მათემატიკური ლოდინი 120

თავი V
შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის კრებადობის სახეები 130
§1. ალბათობით კრებადობა 130
§2. დიდ რიცხვთა კანონი 134
§3. დიდ რიცხვთა კანონისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობა 142
§4. ბორელ–კანტელის თეორემა. თითქმის აუცილებელი კრებადობა 144
§5. გაძლიერებულ დიდ რიცხვთა კანონი 151

თავი VI
ზღვარითი თეორემები ბერნულის სქემაში 159
§1. პუასონის თეორემა 160
§2. მუავრ–ლაპლასის ლოკალური ზღვარითი თეორემა 162
§3. მუავრ–ლაპლასის ინტეგრალური ზღვარითი თეორემა 166

თავი VII
მახასიათებელი ფუნქციები 169
§1. მახასიათებელი ფუნქციების განსაზღვრა და მისი უმარტივესი თვისებები 169
§2. ზოგიერთი განაწილების მახასიათებელი ფუნქცია 177
§3. შებრუნების ფორმულა მახასიათებელი ფუნქციისათვის. ერთადერთობის თეორემა 180
§4. განაწილების ფუნქციათა მიმდევრობის სუსტად კრებადობა 186
§5. მახასიათებელი ფუნქციისათვის ზღვარითი თეორემები 194

თავი VIII
ცენტრალური ზღვარითი თეორემა 197
§1. ცენტრალური ზღვარითი თეორემა ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის 197
§2. ცენტრალური ზღვარითი თეორემა ნებისმიერად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის 199

§3. ცენტრალურ ზღვარით თეორემაში კრებადობის სიჩქარის შესახებ 212

თავი IX
მრავალგანზომილებიანი მახასიათებელი ფუნქციები 216
§1. განსაზღვრა და თვისებები 216
§2. მრავალგანზომილებიანი ნორმალური განაწილება და მასთან დაკავშირებული განაწილებები 221
სავარჯიშო ამოცანები 231
ცხრილები 298
ლიტერატურა 305

CONTENTS

Introduction 5

CHAPTER I
Discrete sample space of elementary events 9
§1. Definition of probability and properties 9
§2. The classic scheme 14
§3. Probability of the union of events 21
§4. Binomial distribution 30

CHAPTER II
Arbitrary sample space of elementary events 31
§1. Kolmogorov axioms 31
§2. Properties of a probability 43
§3. Conditional probability. Indepedence of events 45
§4. Calculation of probability for the sum of independent events 52
§5. Formula of total probability. Bayes' formula 53

CHAPTER III
Random variable and distribution function 57
§1. Random variable 57
§2. Distribution function of a random variable 62
§3. Properties of distribution function 65
§4. Vector-valued random variables 76
§5. Independence of vector-valued random variables 82
§6. Distribution function of the sum of random variables 85

CHAPTER IV
Numerical characteristics of random variables 88
§1. Mathematical Expectation 88
§2. Properties of mathematical expectation 93
§3. Convergence theorems 100
§4. Absolute continuity of the Lebesgue's integral 104
§5. Change of variables in the Lebesgue integral 106
§6. Comparison of the Lebesgue – Stieltjes and Riemann-Stieltjes integrals 108

§7. Moments 111
§8. Covariance. Coefficient of Correlation. Inequalities 116
§9. Conditional distribution and Conditional Expectation 120

CHAPTER V
Types of Convergence of sequences of random variables 130
§1. Convergence in Probability 131
§2. The law of numbers 134
§3. Necessary and sufficient condition for the law of
large numbers 142
§4. Borel-Cantelli theorem. Almost Sure convergence 144
§5. Strong law of large numbers 151

CHAPTER VI
Limit theorems for Bernoulli scheme 159
§1. Poisson's theorem 160
§2. De Moivre-Laplace's Local Limit Theorem 162
§3. De Moivre-Laplace's Integral Limit Theorem 166

CHAPTER VII
Characteristic Functions.. 169
§1. Definition of Characteristic Functions and
their simplest properties 169
§2. Characteristic Functions of some distributions 177
§3. Inversion Formula for Characteristic Function.
Uniqueness Theorem 180
§4. The weak convergence of a sequence of
distribution functions 186
§5. Limit theorems for Characteristic Function 194

CHAPTER VIII
The Central Limit Theorem 197
§1. The Central Limit Theorem for identically distributed
independent random variables 197
§2. The Central Limit Theorem for arbitrarily distributed
independent random variables 199
§3. On the speed of convergence in the central limit theorem 212

CHAPTER IX
Multidimensional Characteristic Functions **216**
§1. Definition and properties 216
§2. Multidimensional normal distribution and
related distributions 221
Exercise Tasks **231**
Tables **298**
Literature **305**

გამომცემლობის რედაქტორები — მაია ეჯიბია
მარინე ჭყონია

გარეკანის დიზაინი — მარიამ ებრალიძე

კომპ. უზრუნველყოფა — ლალი კურდღელაშვილი

გამოცემის მენეჯერი — მარიკა ერქომაიშვილი

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14

14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179

Tel: 995(32) 225 14 32

www.press.tsu.edu.ge