

თეორეზები

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b},$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}},$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a}{b-c} \cdot (\sqrt{b} \mp \sqrt{c}),$$

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{c}}} = \frac{a}{b^2-c} \cdot \sqrt{(b^2-c)(b-\sqrt{c})}$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}} = \frac{a}{b \pm c} \cdot (\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2})$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_j = a_1 + j \cdot d;$$

$$S_n = \sum_{j=1}^n a_j = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1))$$

$$P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)m$$

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

$$C_m^n = C_m^{m-n} = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$d^2 = 3a^2; V = a^3$$

$$V = a \cdot b \cdot c;$$

$$S_0 = 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R H$$

მათემატიკა

აბიტურიენტებისათვის

თბილისი
2015

თეიმურაზ ორმოცაძე

მათემატიკა

აბიტურიენტებისათვის

(თეორია და პრაქტიკა)

თბილისი 2015

წიგნი რომელიც თქვენ გიჭირავთ ხელში, არ წარმოადგენს სასწავლო-მეთოდურ სახელმძღვანელოს ტრადიციული გაგებით. ის განკუთვნილია მათთვის ვისაც აქვს დიდი სურვილი მათემატიკის გამოცდებისათვის **დამოუკიდებლად** მოემზადოს. ის განსაკუთრებით დაეხმარება იმათ, ვისაც ამ თუ იმ მიზეზით არა აქვს საშუალება მოემზადონ ძვირად ღირებულ (**არაფრისმომცემ**) მოსამზადებელ კურსებზე ან გამოცდილ რეპეტიტორებთან.

ამ წიგნის დანერა არ ისახავდა მიზნად, შეეცვალა ის უამრავი ბრწყინვალე გამოცემები, რომლებიც სკოლის სახელმძღვანელოებთან ერთად წლების განმავლობაში საუკეთესო შედეგს აძლევდა მოსწავლეებს საატესტატო გამოცდების და აბიტურიენტებს ერთიანი ეროვნული გამოცდების ჩაბარებისას.

წიგნში გადმოცემულია ის მცირეოდენი თეორიული მასალა, რომელიც გათვალისწინებულია ერთიანი ეროვნული გამოცდების პროგრამაში. ყველა კითხვაზე მოცემულია ამომწურავი პასუხები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ერთიანი ეროვნული გამოცდების მოთხოვნას. ასევე წიგნი საშუალებას აძლევს მოსწავლეს ან აბიტურიენტს მარტივად მონახონ ესა თუ ის საკითხი და მიღებული თეორიული ცოდნა განამტკიცონ პრაქტიკული ამოცანებით.

წინამდებარე ნაშრომი განკუთვნილია ელემენტარული მათემატიკის სასკოლო კურსის თანმიმდევრული სწავლებით დაინტერესებული პირებისათვის. ამდენად მის მომხმარებლად, უპირველეს ყოვლისა, მოიაზრებიან **საშუალო სკოლის VII-XII კლასების** მოსწავლეები და მათი მასწავლებლები. ჩვენი აზრით, მას შეუძლია დიდი დახმარება გაუწიოს აბიტურიენტებსაც საფუძვლიანად მოემზადონ ერთიანი ეროვნული გამოცდებისათვის მათემატიკაში. ამის თქმის საშუალებას გვაძლევს მასში თავმოყრილი ამოცანების წყობის თავისებურება, რომელიც პრინციპულად განსხვავდება საქართველოში აბიტურიენტებისათვის დღემდე გამოცემული ყველა დამხმარე სახელმძღვანელოსა და ამოცანების კრებულებისაგან.

წიგნი შედგება ორი ნაწილისაგან **ალგებრა** და **გეომეტრია**, თითოეულ მათგანს გააჩნია თეორიული და პრაქტიკული მხარე. ზოგან საჭიროდ მივიჩნიეთ, მხოლოდ ფორმულების გადმოცე-მით შემოვფარგლულიყავით, ზოგან კი სრულად გადმოგვეცა თეორიული მასალა, რომელიც - **სრულ შესაბამისობაშია სკოლის ელემენტარული მათემატიკის კურსთან**.

რედაქტორი: თეიმურაზ ორმოცაძე-პედაგოგიკურ მეცნიერებათა კანდიდატი 13.00.02

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი.
თბილისის 116 საჯარო სკოლის წამყვანი მასწავლებელი.

რეცენზენტები: ალექო გუმბერიძე - თბილისის 116 საჯარო სკოლის სერთიფიცირებული მასწავლებელი.

ლევან კირთაძე - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი. დოქტორი.

ავტორის წერილობითი თანხმობის გარეშე აკრძალულია წიგნის გადაბეჭდვა, ასლის დამზადება და მისი რეალიზაცია.

© გამომცემლობა - "დამანი"

ISBN 978-9941-0-8133-0

შესავლი

შესავალში გადმოცემულია ის საკითხები, რომლის ცოდნა (განმარტების დონეზე მაინც) მოეთხოვება ყველას, ვისაც ეს წიგნი უჭირავს ხელში და აქვს სურვილი დამოუკიდებლად შეისწავლოს ელემენტარული მათემატიკა. ამასთან, მოსწავლე უნდა ფლობდეს ელემენტალურ უნარ ჩვევებს, რომლებიც წლების განმავლობაში უყალიბდებათ საჯარო სკოლაში. არ დავინცებთ იმის შესენებას, რომ ჯერჯერობით მისაღები გამოცდები ისევ კონკურსის საფუძველზე მიმდინარეობს და თქვენი წარმატება დამოკიდებული იქნება იმაზე, თუ რამდენად საფუძვლიანად მოემზადებით გამოცდებისათვის.

1⁰. თუ n არის ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვი, ხოლო a -ნებისმიერი რიცხვი, მაშინ

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-ჯერ}}$$

a -ს ხარისხის ფუძე ეწოდება; n -ს ხარისხის მაჩვენებელი; a^n -ს ხარისხი

მაგ.: ა) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; ბ) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; გ) $\pi^4 = \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi$.

2⁰. თუ $n = 1$ და a -ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ

$$a^1 = a.$$

მაგ.: ა) $7^1 = 7$; ბ) $x^1 = x$; გ) $1003^1 = 1003$.

3⁰. თუ $n = 0$ და a არის ნულისაგან განსხვავებული რიცხვია, მაშინ

$$a^0 = 1$$

მაგ.: ა) $5^0 = 1$; ბ) $1002^0 = 1$; გ) $\pi^0 = 1$.

4⁰. თუ n არის მთელი უარყოფითი რიცხვი, ხოლო a ნულისაგან განსხვავებული რიცხვი, მაშინ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

მაგ.: ა) $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$; ბ) $8^{-1} = \frac{1}{8}$; გ) $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ თუ $a \neq 0$.

5⁰. ტოლ ფუძიანი ხარისხები რომ გადავამრავლოთ ამისათვის საჭიროა ფუძე უცვლელად გადავიტანოთ და ხარისხის მაჩვენებლები შევკრიბოთ

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ სადაც $a \neq 0$, m და n რაციონალური რიცხვებია.

მაგ.: ა) $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$; ბ) $a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7$;
გ) $b^{-3} \cdot b^4 = b^{-3+4} = b^1 = b$ დ) $x^{0,5} \cdot x^{1\frac{2}{3}} = x^{0,5+1\frac{2}{3}} = x^{2\frac{1}{6}}$.

6⁰. ტოლ ფუძიანი ხარისხები რომ გავყოთ ამისათვის საჭიროა ფუძე უცვლელად გადავიტანოთ და ხარისხის მაჩვენებლები გამოვაკლოთ

$a^m : a^n = a^{m-n}$ სადაც $a \neq 0$, m და n რაციონალური რიცხვებია.

მაგ.: ა) $3^2 : 3^3 = 3^{2-3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$; ბ) $a^6 : a^4 = a^{6-4} = a^2$;
გ) $b^{-3} : b^4 = b^{-3-4} = b^{-7} = \frac{1}{b^7}$ დ) $x^{0,5} : x^{1\frac{2}{3}} = x^{0,5-1\frac{2}{3}} = x^{-\frac{1}{6}}$.

7⁰. ხარისხი რომ ავახარისხოთ, ამისათვის საჭიროა ფუძე უცვლელად გადავიტანოთ, ხოლო ხარისხის მაჩვენებლები გადავამრავლოთ

$(a^m)^n = a^{mn}$ სადაც $a \neq 0$, m და n რაციონალური რიცხვებია.

მაგ.: ა) $(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$; ბ) $(a^6)^{-1} = a^{-6}$; გ) $(a^3)^{\frac{2}{3}} = a^{3 \cdot \frac{2}{3}} = a^2$

8⁰. წილადი რომ ავახარისხოთ, ამისათვის საჭიროა მრიცხველი და მნიშვნელი ავახარისხოთ ცალცალკე და შესაბამისად დავწეროთ მრიცხველში და მნიშვნელში.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ სადაც $a \neq 0$ და $b \neq 0$, n რაციონალური რიცხვია.

მაგ.: ა) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$; ბ) $\left(2\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{11}{4}\right)^{-2} = \frac{121}{16} = 7\frac{9}{16}$;
გ) $\left(\frac{2a}{3x^3}\right)^2 = \frac{4a^2}{9x^6}$; დ) $\left(\frac{2a}{3x^3}\right)^{-2} = \frac{9x^6}{4a^2}$.

9⁰. ნამრავლი რომ ავახარისხოთ, თითოეული თანამამრავლი უნდა ავახარისხოთ ცალცალკე

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$ სადაც $a \neq 0$ და $b \neq 0$, n რაციონალური რიცხვია.

მაგ.: ა) $(2x^3)^2 = 2^2 \cdot (x^3)^2 = 4x^6$; ბ) $\left(-\frac{1}{3}yz^2\right)^2 = \frac{1}{9}y^2z^4$;
გ) $(-3xy^3)^3 = -27x^3y^9$; დ) $(-0,3x^3y^4)^3 = -0,027x^9y^{12}$.

რიცხვებისა და ცვლადებისაგან შედგენილ გამოსახულებებს, რომლებშიც გამოყენებულია შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების მოქმედებები, მთელ

გამოსახულებებს უწოდებენ. ამასთან ერთნაირი მამრავლების ნამრავლი შეიძლება ხარისხის სახით ჩაიწეროს. მთელ გამოსახულებებს მიეკუთვნება ისეთ გამოსახულებებიც, რომლებშიც გარდა შეკრებისა, გამოკლებისა და გამრავლების მოქმედებებისა, გამოიყენება გაყოფა ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე. მაგალითად, $a^2 + ab - 3c^3b$, $(x + y)(2x - y^3)$, $\frac{m}{3} - a^2$, $x:5$ გამოსახულებები მთელია. რიცხვებისა და ცვლადებისაგან შედგენილ გამოსახულებებს, რომლებშიც გარდა შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლებისა, გამოყენებულია გაყოფა ცვლადიან გამოსახულებაზე, წილადურ გამოსახულებებს უწოდებენ. მაგალითად, $x + \frac{1}{x}$, $\frac{b-2}{a}$, $4m:n$ - წილადური გამოსახულებებია.

მთელ და წილადურ გამოსახულებებს **რაციონალური გამოსახულებები** ეწოდება. მთელ გამოსახულებას აზრი აქვს მასში შემავალი ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. წილადურ გამოსახულებას კი ცვლადების ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის შეიძლება აზრი არ ჰქონდეს. მაგალითად, $x + \frac{1}{x}$ გამოსახულებას აზრი არა აქვს, როცა $x = 0$, $\frac{1}{a+3}$ გამოსახულებას კი როცა $a = -3$.

ცვლადების იმ მნიშვნელობებს, რომლებისთვისაც გამოსახულებას აზრი აქვს, ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობები ეწოდება.

ტოლობას, რომელიც მართებულია მასში შემავალი ცვლადების ყველა დასაშვები მნიშვნელობისათვის **იგივეობა** ეწოდება.

ორ გამოსახულებას, რომლებიც ტოლ მნიშვნელობებს ღებულობს ცვლადების ყველა დასაშვები მნიშვნელობისათვის, უწოდებენ იგივეურად ტოლ გამოსახულებებს, ხოლო ერთი გამოსახულების შეცვლას მისი იგივეური გამოსახულებით - გამოსახულების იგივეურ გარდაქმნას.

ერთწევრი ეწოდება რიცხვების, ცვლადების და მათი ხარისხების ნამრავლს, აგრეთვე თვით რიცხვებს, ცვლადებს და მათ ხარისხებს **ერთწევრი** ეწოდება. მაგალითად, $7x^3y$; $-0,2abc^2$; 24 ; n^{2014} ; ab^3ba^5c - ერთწევრიებია.

ერთწევრს, რომელშიც გამრავლების ოპერაცია შესრულებულია **სტანდარტული** სახის ერთწევრი ეწოდება.

ორ ერთწევრს ეწოდება მსგავსი თუ მათ ერთნაირი ასოითი თანამამრავლები გააჩნიათ. მაგალითად, $-7x^2y$ და $0,2x^2y$ მსგავსი ერთწევრებია.

ერთწევრის ხარისხი ეწოდება მასში შემავალი ყველა ცვლადის ხარისხების ჯამს. მაგალითად, $\frac{1}{2}x^2y^3$ -ერთწევრის ხარისხია 5-ი, xy^2 -ის კი 3-ი.

ერთწევრების ჯამს მრავალწევრი ეწოდება. მაგალითად, $14x^5 + x^3y^3 - 23y^4$ - მრავალწევრია.

მრავალწევრის ხარისხი ეწოდება მასში შემავალ ერთწევრების ხარისხებიდან უდიდესს. მაგალითად, $14x^5 + x^3y^3 - 23y^4$ - მრავალწევრის ხარისხი 5-ის ტოლია.

მრავალწევრს ეწოდება სტანდარტული სახის თუ მასში მსგავსი ერთწევრები შეერთებულია.

იმ მრავალწევრის ხარისხი, რომელც არ არის ჩანერილი სტანდარტული სახით, ეწოდება მისი იგივეურად ტოლი სტანდარტული სახის მრავალწევრის ხარისხს.

მრავალწევრების შეკრებისას იყენებენ ფრჩხილების გახსნის წესს: თუ ფრჩხილების წინ (მარცხნივ) დგას ნიშანი "პლიუსი" (+), მაშინ ფრჩხილებში მოთავსებულ ყველა წევრს უნდა შეუნარჩუნოთ ნიშანი ანუ უბრალოდ ფრჩხილები გამოვტოვოთ. მაგალითად,

$$(3x^2 - 4xy) + (xy - x^2 + 1) = 3x^2 - 4xy + xy - x^2 + 1 = 2x^2 - 3xy + 1.$$

მრავალწევრების გამოკლებისას იყენებენ ფრჩხილების გახსნის წესს: თუ ფრჩხილების წინ (მარცხნივ) დგას ნიშანი "მინუსი" (-), მაშინ ფრჩხილებში მოთავსებულ ყველა წევრს უნდა შეუცვალოთ ნიშანი სპირიპიროთი ანუ უბრალოდ ფრჩხილები გამოვტოვოთ და ფრჩხილებში მოთავსებულ თითოეულ შესაკრებს ნიშანი შეუცვალოთ. მაგალითად,

$$(3x^2 - 4xy) - (xy - x^2 + 1) = 3x^2 - 4xy - xy + x^2 - 1 = 4x^2 - 5xy - 1.$$

ერთწევრი რომ მრავალწევრზე გავამრავლოთ, საჭიროა ერთწევრი გავამრავლოთ მრავალწევრის თითოეულ წევრზე და მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ. მაგალითად, $2t^2(3x^3 - t + 4) = 6t^2x^3 - 2t^3 + 8t^2$.

მრავალწევრი რომ მრავალწევრზე გავამრავლოთ, საჭიროა ერთი მრავალწევრის ყველა წევრი გავამრავლოთ მეორე მრავალწევრის თითოეულ წევრზე და მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ. მაგალითად,

$$(3a - 2)(a^2 + a - 5) = 3a^3 + 3a^2 - 15a - 2a^2 - 2a + 10.$$

შემოკლებული გამრავლების ფორმულები:

1) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

ორი გამოსახულების სხვაობისა და მათივე ჯამის ნამრავლი ამ გამოსახულებათა კვადრატების სხვაობის ტოლია.

$$2) \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ორი გამოსახულების სხვაობის კვადრეტი უდრის პირველი გამოსახულების კვადრატს გამოკლებული პირველი და მეორე გამოსახულების გაორკვეცებული ნამრავლი და მიმატებული მეორე გამოსახულების კვადრეტი.

$$3) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ორი გამოსახულების ჯამის კვადრეტი უდრის პირველი გამოსახულების კვადრატს მიმატებული პირველი და მეორე გამოსახულების გაორკვეცებული ნამრავლი და მიმატებული მეორე გამოსახულების კვადრეტი.

$$4) \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

ორი გამოსახულების ჯამისა და მათივე სხვაობის არასრული კვადრატის ნამრავლი უდრის ამ გამოსახულებათა კუბების ჯამს.

$$5) \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

ორი გამოსახულების სხვაობისა და მათივე ჯამის არასრული კვადრატის ნამრავლი უდრის ამ გამოსახულებათა კუბების სხვაობას.

$$6) \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ორი გამოსახულების ჯამის კუბი ტოლია პირველი გამოსახულების კუბს, მიმატებული გასამკვეცებული ნამრავლი პირველის კვადრატისა მეორეზე, მიმატებული გასამკვეცებული ნამრავლი პირველისა მეორის კვადრატზე და მიმატებული მეორე გამოსახულების კვადრეტი.

$$7) \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ორი გამოსახულების სხვაობის კუბი ტოლია პირველი გამოსახულების კუბს, გამოკლებული გასამკვეცებული ნამრავლი პირველის კვადრატისა მეორეზე, მიმატებული გასამკვეცებული ნამრავლი პირველისა მეორის კვადრატზე და გამოკლებული მეორე გამოსახულების კვადრეტი.

მრავალწევრის წარმოდგენას მრავალწევრების ნამრავლის სახით, მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა ეწოდება.

არსებობს მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის სუბსტრუქტურა ხერხი: მამრავლის გატანა ფრჩხილებს გარეთ, დაჯგუფება შემოკლებული მამრავლების ფორმულების გამოყენება. მაგალითად, $10a^3 - 6ab$ მრავალწევრი მამრავლებად დაიშლება, თუ $2a$ -ერთწევრს ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ: $10a^3 - 6ab = 2a(5a^2 - 3b)$.

$2xy + 10y - 3x - 15$ მრავალწევრის მამრამლებად დასაშლელად შეიძლება დაჯგუფების ხერხის გამოყენება:

$$\begin{aligned} 2xy + 10y - 3x - 15 &= (2xy + 10y) - (3x + 15) = 2y(x + 5) - 3(x + 5) = \\ &= (x + 5)(2y - 3). \end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ შემოკლებული გამრავლების ფორმულას, მაშინ $x^2 - 16y^2$ მრავალწევრი მამრავლებად ასე დაიშლება $x^2 - 16y^2 = (x - 4y)(x + 4y)$.

$\frac{a}{b}$ სახის რაციონალურ გამოსახულებას რაციონალური წილადი ეწოდება.

a -ს, b -ს და c -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, სადაც $b \neq 0$ და $c \neq 0$, გვაქვს $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. ამ იგივეობით გამოსახულ წილადის თვისებას წილადის ძირითადი თვისება ეწოდება. წილადის ძირითადი თვისება გამოიყენება წილადების შესაკვეცად. მაგალითად,

$$\frac{x^2 + 2xy}{4y^2 + 2xy} = \frac{x(x + 2y)}{2y(x + 2y)} = \frac{x}{2y}$$

ან

$$\frac{x^3 - 27}{2x^2 + 6x + 18} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{2(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x - 3}{2}$$

თუ წილადის მრიცხველს ან მნიშვნელს ნიშანს შეუცვლით, მაშინ თვით წილადსაც შეეცვლება ნიშანი ე.ი.

$$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b}; \quad \frac{a}{b} = -\frac{a}{-b}$$

მოქმედებები რაციონალურ წილადებზე:

თუ $c \neq 0$, მაშინ

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{და} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

ერთმნიშვნელიანი წილადები რომ შევკრიბოთ, საჭიროა შევკრიბოთ მათი მრიცხველები, ხოლო მნიშვნელი უცვლელად დავტოვოთ. მაგალითად,

$$\frac{3x - 8y}{5xy} + \frac{2x - 7y}{5xy} = \frac{3x - 8y + 2x - 7y}{5xy} = \frac{5x - 15y}{5xy} = \frac{5(x - 3y)}{5xy} = \frac{x - 3y}{xy}$$

ერთმნიშვნელოვანი წილადების გამოკლებისას, პირველი წილადის მრიცხველს უნდა გამოვაკლოთ მეორე წილადის მრიცხველი, ხოლო მნიშვნელი უცვლელად დავტოვოთ. მაგალითად,

$$\frac{x^2}{3x-6} - \frac{4}{3x-6} = \frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)} = \frac{x+2}{3}$$

სხვადასხვამნიშვნელოვანი წილადების შეკრების ან გამოკლებისას, ისინი ჯერ უნდა გავაერთმნიშვნელოვანოთ, ხოლო შემდეგ გამოვიყენოთ ერთნაირმნიშვნელოვანი წილადების შეკრების ან გამოკლების წესი. მაგალითად,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{xy-y^2} + \frac{y^2}{xy-x^2} - \frac{y}{x} &= \frac{x^2}{y(x-y)} + \frac{y^2}{x(y-x)} - \frac{y}{x} = \frac{x^3 - y^3 - xy^2 + y^3}{xy(x-y)} = \\ &= \frac{x^3 - xy^2}{xy(x-y)} = \frac{x(x^2 - y^2)}{xy(x-y)} = \frac{(x-y)(x+y)}{xy(x-y)} = \frac{x+y}{xy} \end{aligned}$$

თუ $b \neq 0$ და $c \neq 0$ მაშინ

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

წილადი რომ წილადზე გავამრავლოთ, ამისათვის საჭირო მრიცხველები გავამრავლოთ ერთმანეთზე და დავწეროთ მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელების ნამრავლი დავწეროთ მნიშვნელად. მაგალითად,

$$\frac{a^2-4}{a^2} \cdot \frac{a}{3a-6} = \frac{a(a^2-4)}{a^2(3a-6)} = \frac{a(a-2)(a+2)}{3a^2(a-2)} = \frac{a+2}{3a}$$

თუ $b \neq 0$, $c \neq 0$ და $d \neq 0$ მაშინ

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

წილადი რომ წილადზე გავყოთ, ამისათვის საჭირო პირველი წილადი გავამრავლოთ მეორე წილადის შებრუნებულზე. მაგალითად,

$$\frac{x^2-25}{12x} : \frac{x+5}{6} = \frac{x^2-25}{12x} \cdot \frac{6}{x+5} = \frac{6(x-5)(x+5)}{12x(x+5)} = \frac{x-5}{2x}$$

a რიცხვიდან კვადრატული ფესვი ეწოდება ისეთ რიცხვს, რომლის კვადრატი a -ს ტოლია.

a რიცხვიდან არითმეტიკული კვადრატული ფესვი ეწოდება ისეთ არაუარყოფით რიცხვს, რომლის კვადრატი a -ს ტოლია. a -დან არითმეტიკული კვადრატული ფესვი

ასე აღინიშნება: \sqrt{a} , ფესვის ნიშნის ქვეშ მდგომ გამოსახულებას **ფესვეჭემა გამოსახულება** ეწოდება.

$$\text{თუ } a \geq 0 \text{ და } b \geq 0, \text{ მაშინ } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

ფესვი არაუარყოფითი მამრავლების ნამრავლიდან ამ მამრავლებიდან ფესვების ნამრავლის ტოლია.

$$\text{თუ } a \geq 0 \text{ და } b \geq 0, \text{ მაშინ } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

ფესვი წილადიდან, რომლის მრიცხველი არაუარყოფითია, ხოლო მნიშვნელი - დადებითი, უდრის ფესვს მრიცხველიდან გაყოფილს ფესვზე მნიშვნელიდან.

$$a\text{-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის } \sqrt{a^2} = |a|.$$

ერთცვლადიანი განტოლების ამონახსენი (ფესვი) ეწოდება ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც განტოლება მართებულ ტოლობად გადაიქცევა. მაგალითად, $2^x - 1 = \sqrt{3}^x$ განტოლების ამონახსენია 2, რადგან $2^2 - 1 = \sqrt{3}^2$ ტოლობა მართებულია.

ერთცვლადიანი განტოლების ამოხსნა ნიშნავს, ვიპოვოთ მისი ყველა ამონახსენი ან დავამტკიცოთ, რომ მას ამონახსენი არა აქვს.

განტოლებას, რომელის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები რაციონალური გამოსახულებებია, **რაციონალური** ეწოდება. თუ რაციონალური განტოლების მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები მთელი გამოსახულებებია, მაშინ განტოლებას **მთელი** ეწოდება. რაციონალურ განტოლებას, რომლის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები წილადური გამოსახულებებია, **წილადური** ეწოდება.

ისეთ ერთცვლადიან განტოლებებს, რომლებსაც ერთნაირი ამონახსენები აქვს, ტოლფასი განტოლებები ეწოდება. მაგალითად, $x^2 = 16$ და $(x - 4)(x + 4) = 0$ განტოლებები ტოლფასია. თითოეულ მათგანს ორი ამონახსენი აქვს: -4 და 4. ტოლფასი ეწოდება ასევე განტოლებებსაც, რომლებსაც ამონახსენები არა აქვს.

განტოლების თვისებები:

1⁰. თუ განტოლების ორივე მხარეს მიუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, მივიღებთ მოცემულის ტოლფას განტოლებას.

2⁰. თუ განტოლების ორივე მხარეს გავამრვლებთ ან გავყოფთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთსა და იმავე რიცხვზე, მივიღებთ მოცემულის ტოლფას განტოლებას.

განტოლებებში შეგვიძლია შესაკრებების გადატანა ერთი ნაწილიდან მეორეში, მაგრამ მათ ამ შემთხვევაში ნიშანი უნდა შეუცვალოთ.

a რიცხვი b რიცხვზე მეტია, თუ $a - b$ სხვაობა დადებითი რიცხვია, ვნერთ $a > b$.

a რიცხვი b რიცხვზე ნაკლებია, თუ $a - b$ სხვაობა უარყოფითი რიცხვია, ვნერთ $a < b$.

თუ $a > b$, მაშინ $b < a$; თუ $a < b$, მაშინ $b > a$.

თუ a მეტია b -ზე ან a არის b -ს ტოლი, ვნერთ $a \geq b$.

თუ a ნაკლებია b -ზე ან a არის b -ს ტოლი, ვნერთ $a \leq b$.

$[a; b]$ რიცხვითი შუალედი არის ყველა იმ რიცხვის სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $a \leq x \leq b$ ორმაგ უტოლობას.

$]a; b]$ რიცხვითი შუალედი არის ყველა იმ რიცხვის სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $a < x \leq b$ ორმაგ უტოლობას.

$]a; b[$ რიცხვითი შუალედი არის ყველა იმ რიცხვის სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $a < x < b$ ორმაგ უტოლობას.

$[a; +\infty[$ ან $]a; +\infty[$ რიცხვითი შუალედი არის ყველა იმ რიცხვების სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს შესაბამისად $x \geq a$ ან $x > a$ უტოლობას.

$]-\infty; b]$ ან $]-\infty; b[$ რიცხვითი შუალედი არის ყველა იმ რიცხვების სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს შესაბამისად $x \leq b$ ან $x < b$ უტოლობას.

$(-\infty; +\infty)$ რიცხვითი შუალედი არის ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე.

თუ დასმულია ამოცანა რამდენიმე უტოლობის საერთო ამონახსენთა ჰოვნის შესახებ, მაშინ ამბობენ, რომ უნდა ამოიხსნას უტოლობათა სისტემა.

x ცვლადის დამოკიდებულებას y ცვლადზე ეწოდება ფუნქცია, თუ x -ის ყოველ მნიშვნელობას y -ის ერთადერთი მნიშვნელობა შეესაბამება. x ცვლადს ეწოდება დამოუკიდებელი ცვლადი ანუ არგუმენტი, ხოლო y ცვლადს - დამოკიდებული ცვლადი. შეიძლება ასეც ითქვას: y არის x -ის ფუნქცია. ამას წერენ $y = f(x)$ სახის ფორმულით.

ყველა ის მნიშვნელობა, რომლის მიღებაც დამოუკიდებელ ცვლადს შეუძლია, ქმნის ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა აბსცისები არგუმენტის მნიშვნელობებია, ხოლო ორდინატები ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები.

იმისათვის, რომ პასუხი გავცეთ კითხვას, თუ არგუმენტის რომელი მნიშვნელობებისათვის $y = f(x)$ ხდება ფუნქცია ნულის ტოლი, რომელ შუალედში ღებულობს იგი დადებით მნიშვნელობებს და რომელში უარყოფითს, საჭიროა ამოიხსნას $f(x) = 0$ განტოლება და შესაბამისად $f(x) < 0$ და $f(x) > 0$ უტოლობა.

ფუნქციას რაიმე შუალედში ეწოდება ზრდადი, თუ ამ შუალედიდან არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას ფუნქციის მეტი მნიშვნელობა შეესაბამება. თუ ფუნქცია იზრდება განსაზღვრის მთელ სიმრავლეზე, მაშინ მას ზრდად ფუნქციას უწოდებენ.

ფუნქციას რაიმე შუალედში ეწოდება კლებადი, თუ ამ შუალედიდან არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას ფუნქციის ნაკლები მნიშვნელობა შეესაბამება. თუ ფუნქცია კლებადია განსაზღვრის მთელ სიმრავლეზე, მაშინ მას კლებად ფუნქციას უწოდებენ.

ნაწილი I

§1. ნატურალური, რაციონალური და ნამდვილი რიცხვები

განსაზღვრება: თვლის შედეგად მიღებულ 1, 2, 3, ... რიცხვებს ნატურალური რიცხვები ეწოდება. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს აღნიშნავენ N ასოთი. ე.ი. $N = \{1, 2, 3, \dots\}$.

განსაზღვრება: $(-m)$ სახის რიცხვებს, სადაც m -ნატურალური რიცხვია, უარყოფითი მთელი რიცხვები ეწოდება.

განსაზღვრება: სიმრავლეს, რომელიც შედგება ყველა ნატურალური, უარყოფითი მთელი რიცხვებისა და ნულისაგან, მთელ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება, თვით რიცხვებს კი მთელი რიცხვები ეწოდება. მთელ რიცხვთა სიმრავლეს აღნიშნავენ Z ასოთი. ე.ი. $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

მთელი რიცხვებისათვის განსაზღვრულია შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციები, რომელთა შედეგად მიიღება ისევ მთელი რიცხვები. რაც შეეხება გაყოფას, ამ ოპერაციის შემდეგ აუცილებლად მთელი რიცხვი არ მიიღება.

განსაზღვრება: მთელი a რიცხვი გავყოთ ნატურალურ m რიცხვზე ნაშთით, ნიშნავს ვიპოვოთ ისეთი q და r მთელი რიცხვები, რომ ადგილი ქონდეს $a = mq + r$ ტოლობას,

სადაც r (ნაშთი) აკმაყოფილებს $0 \leq r < m$ პირობას. თუ $r = 0$, მაშინ ამბობენ, რომ მთელი a რიცხვი იყოფა m ნატურალურ რიცხვზე უნაშთოდ.

თეორემა: ვთქვათ, a -ნებისმიერი მთელი რიცხვია და m -ნებისმიერი ნატურალურ რიცხვი. მაშინ არსებობს ერთადერთი წყვილი q და r მთელი რიცხვებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ $a = mq + r$ და $0 \leq r < m$ პირობებს.

შედეგი 1: ნებისმიერი ლუწი a რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს $a = 2q$, სადაც q - მთელი რიცხვია.

შედეგი 2: ნებისმიერი კენტი a რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს $a = 2q + 1$, სადაც q - მთელი რიცხვია.

შედეგი 3: ნებისმიერი მთელი a რიცხვი, რომელის უნაშთოდ იყოფა რაიმე ნატურალურ k რიცხვზე, შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი $a = kq$ სახით, სადაც q - მთელი რიცხვია.

შედეგი 4: ნებისმიერი მთელი a რიცხვი, რომელის უნაშთოდ არ იყოფა რაიმე ნატურალურ k რიცხვზე, შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი $a = kq + r$ სახით, სადაც r ერთერთია $1, 2, 3, \dots, (k - 1)$ რიცხვებიდან, ხოლო q - მთელი რიცხვია.

განსაზღვრება: $\frac{m}{n}$ სახის რიცხვებს, სადაც m - მთელი რიცხვია, ხოლო n -ნატურალური რაციონალური რიცხვები ეწოდება. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს აღნიშნავენ Q ასოთი. ე.ი. $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N \right\}$. თვით რიცხვებს კი რაციონალური რიცხვები ეწოდება.

ცხადია, რომ $N \subset Z \subset Q$.

ორ ტოლი $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ წილადები წარმოადგენენ ერთი და იგივე რაციონალური რიცხვის ჩანაწერს (ისინი ტოლია როცა $mq = np$).

თვლის ათობით სისტემაში რაციონალური რიცხვები შეიძლება ჩაიწერონ სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადების სახით.

რაციონალურ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებები სრულდება შემდეგი წესების მიხედვით:

$$1. \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq} \quad 2. \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq} \quad 3. \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q} \quad 4. \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}$$

მაგ: ა) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$; ბ) $\frac{2}{7} - \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 - 3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{8 - 21}{28} = -\frac{13}{28}$; გ) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{27}$;

დ) $\frac{4}{5} : \frac{5}{8} = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{5} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 5} = \frac{32}{25} = 1 \frac{7}{25}$;

$$\text{ვ) } 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} = 5\frac{2+3}{6} = 5\frac{5}{6} \quad \text{ახ} \quad 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} = \frac{7}{3} + \frac{7}{2} = \frac{7 \cdot 2 + 7 \cdot 3}{6} = \frac{14 + 21}{6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$$

$$\text{ვ) } 5\frac{2}{3} - 3\frac{1}{4} = 2\frac{8-3}{12} = 2\frac{5}{12} \quad \text{ახ} \quad 5\frac{2}{3} - 3\frac{1}{4} = \frac{17}{3} - \frac{13}{4} = \frac{17 \cdot 4 - 13 \cdot 3}{12} = \frac{68 - 39}{12} = \frac{29}{12} = 2\frac{5}{12}$$

$$\text{ზ) } 4\frac{1}{5} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{21}{5} \cdot \frac{5}{3} = 7; \quad \text{თ) } 2\frac{2}{7} : 3\frac{3}{4} = \frac{16}{7} : \frac{15}{4} = \frac{16}{7} \cdot \frac{4}{15} = \frac{240}{28} = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}$$

განსაზღვრება: წილადს, რომლის მნიშვნელია 10^n , სადაც $n \in \mathbb{N}$, ათწილადი ეწოდება.

ათწილადს მნიშვნელის გარეშე გამოსახავენ. წერენ მხოლოდ მრიცხველს და მარჯვნიდან მძიმით გამოყოფენ იმდენ ციფრს, რამდენი ნულიცაა მნიშვნელში.

მაგ.: ა) $\frac{51}{10} = 5,1$; ბ) $\frac{147}{100} = 1,47$; გ) $\frac{9}{10000} = 0,0009$; დ) $-\frac{215}{10} = -2,15$.

ათწილადების შეკრება-გამოკლება სრულდება მთელ რიცხვებზე მოქმედებების ანალოგიურად, ე.ი. სრულდება შესაბამისი თანრიგების შეკრება-გამოკლება.

მაგ.:
$$\begin{array}{r} + 23,56 \\ 1,345 \\ \hline 24,905 \end{array}; \quad \begin{array}{r} - 65,06 \\ 1,845 \\ \hline 63,215 \end{array}$$

ათწილადი რომ ათწილადზე გავამრავლოთ, საჭიროა გადავამრავლოთ ისინი, როგორც მთელი რიცხვები, ისე რომ მძიმე ყურადღება არ მივაქციოთ და მიღებულ ნამრავლში მარჯვნიდან გამოვყოთ იმდენი ციფრი, რამდენი ათწილადი ნიშანისაა ორივე თანამამრავლში ერთად.

მაგ.:
$$\begin{array}{r} \times 12,37 \\ 3,5 \\ \hline + 6185 \\ 3711 \\ \hline 43,295 \end{array}$$

ათწილადი რომ გავყოთ მთელზე, საჭიროა ჯერ ათწილადის მთელი ნაწილი გავყოთ მთელზე რაც მოგვცემს განაყოფის მთელ ნაწილს, შემდეგ, ვწერთ მძიმეს, ნაშთს მიუწეროთ პირველ ათწილად ნიშანს, მიღებულ რიცხვს ვყოფთ გამყოფზე, რაც მოგვცემს განაყოფის პირველ ათწილად ნიშანს და ყოველი შემდეგი ათწილადი ნიშნის მისაღებად ვიქცევით ანალოგიურად.

მაგ.:
$$\begin{array}{r} - 71,28:9 \\ 63 \\ \hline - 82 \\ 81 \\ \hline - 18 \\ 18 \\ \hline 0 \end{array} \quad 71,28:9=7,92$$

განსაზღვრება: წმინდა პერიოდული ათწილადი, რომ გადავაქციოთ ჩვეულებრივ წილადად, ამისათვის საჭიროა, მთელი დავწეროთ მთელად, მის მარჯვნივ წილადის მრიცხველში დავწეროთ რიცხვი რომელიც მოცემულია პერიოდში, ხოლო მნიშვნელში იმდენი ცხრიანი რამდენი ციფრისაა პერიოდში.

მაგ.: ა) $2, (32) = 2\frac{32}{99}$; ბ) $12, (3) = 12\frac{3}{9} = 12\frac{1}{3}$.

განსაზღვრება: შერეული პერიოდული ათწილადი, რომ გადავაქციოთ ჩვეულებრივ წილადად, ამისათვის საჭიროა, მთელი დავწეროთ მთელად, მის მარჯვნივ წილადის მრიცხველში რიცხვს მძიმედან პერიოდის ბოლომდე, გამოვაკლოთ რიცხვი მძიმედან პერიოდამდე, ხოლო მნიშვნელში იმდენ ცხრიანს რამდენი ციფრისაა პერიოდში, მიუწეროთ იმდენი ნული რამდენი ციფრისაა მძიმედან პერიოდამდე.

მაგ.: ა) $2,1(23) = 2\frac{123-1}{990} = 2\frac{122}{990} = 2\frac{61}{495}$; ბ) $1,2(3) = 1\frac{23-2}{90} = 1\frac{21}{90} = 1\frac{7}{30}$.

განსაზღვრება: ირაციონალური ეწოდება რიცხვს, რომლებიც შეიძლება წარმოდგენილ იქნას უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით. ანუ თუ რიცხვი არ არის რაციონალური ის ირაციონალურია. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს აღნიშნავენ I ასოთი.

განსაზღვრება: რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს აღნიშნავენ R ასოთი. ე.ი. $R = Q \cup I$. თვით რიცხვებს კი ნამდვილი რიცხვები ეწოდება.

ნამდვილი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ძირითადი კანონებია:

1. $a + b = b + a$ (შეკრების კომუტაციურობა)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (შეკრების ასოციაციურობა)
3. $ab = ba$ (ნამრავლის კომუტაციურობა)
4. $(ab)c = a(bc)$ (ნამრავლის ასოციაციურობა)
5. $(a + b)c = ac + bc$ (შეკრების დისტრიბუციულობა)

ნამდვილ a რიცხვს გამოვაკლოთ ნამდვილი b რიცხვი, ნიშნავს ვიპოვოთ ისეთი c ნამდვილი რიცხვი, რომ ადგილი ქონდეს $b + c = a$ ტოლობას.

ნამდვილ a რიცხვი გავყოთ ნულისაგან განსხვავებულ ნამდვილ b რიცხვზე, ნიშნავს ვიპოვოთ ისეთი d ნამდვილი რიცხვი, რომ ადგილი ქონდეს $bd = a$ ტოლობას.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ნულზე გაყოფა არ შეიძლება.

1.1. გამოთვალეთ:

ა) $(537 + 72) - (661 - 172)$

ბ) $(372 - 242) - (139 - 99)$

გ) $(375 - 25) - (237 - 67)$

დ) $748 - 132 - 116 - (232 + 268)$

1.2. გამოთვალეთ:

ა) $(291 : 3 - 31 \cdot 3) \cdot 5$

ბ) $(125 \cdot 3 - 115 \cdot 2) : 13$

გ) $(372 : 3 - 775 : 25) : 31$

დ) $(270 : 3 + 180 : 5) : 7$

1.3. გამოთვალეთ:

ა) $(3570 \cdot 100 - 25000) : 1000$

ბ) $(550 \cdot 10 + 27 \cdot 100) : 410$

გ) $200 : (100 - 50) + 800 : (500 - 400)$

დ) $30 \cdot (200 - 100) + 20 \cdot (350 - 150)$

1.4. გამოთვალეთ:

ა) $(9 + 1)^2 - (9 - 1)^2$

ბ) $(15 - 5)^2 + (15 + 5)^2$

გ) $(13 - 17)^2 + (27 - 17)^2$

დ) $(29 - 17)^2 - (10 + 2)^2$

1.5. შერეული რიცხვი ჩაწერეთ წილადის სახით:

ა) $5\frac{1}{3}$

ბ) $17\frac{2}{3}$

გ) $13\frac{4}{5}$

დ) $171\frac{1}{5}$

ე) $11\frac{9}{11}$

ვ) $100\frac{4}{7}$

1.6. ჩაწერეთ წილადი შერეული რიცხვის სახით:

ა) $\frac{10}{3}$

ბ) $\frac{17}{4}$

გ) $\frac{87}{5}$

დ) $\frac{90}{4}$

ე) $\frac{375}{11}$

ვ) $\frac{287}{9}$

1.7. მოცემული ათწილადი ჩაწერეთ წილადის სახით:

ა) 0,7

ბ) 0,8

გ) 0,05

დ) 0,16

ე) 0,125

ვ) 0,375

ზ) 1,5

თ) 3,8

ი) 3,8

კ) 5,16

ლ) 11,25

მ) 15,16

ნ) 50,15

1.8. მოცემული წილადი ჩაწერეთ ათწილადის სახით:

ა) $\frac{3}{5}$

ბ) $\frac{1}{4}$

გ) $\frac{7}{8}$

დ) $\frac{3}{20}$

ე) $\frac{17}{5}$

ვ) $\frac{23}{2}$

ზ) $\frac{55}{4}$

თ) $\frac{113}{8}$ ი) $\frac{51}{16}$ კ) $\frac{123}{20}$ ლ) $\frac{147}{50}$ მ) $\frac{107}{25}$ ნ) $\frac{453}{200}$ თ) $\frac{117}{10}$

1.9. შეკვეცეთ წილადები:

ა) $\frac{10}{20}$ ბ) $\frac{27}{45}$ გ) $\frac{8}{56}$ დ) $\frac{7}{63}$ ე) $\frac{51}{68}$ ვ) $\frac{64}{48}$ ზ) $\frac{88}{64}$ თ) $\frac{33}{121}$ ი) $\frac{132}{246}$

1.10. რომელია მეტი:

ა) $\frac{3}{7}$ თუ $\frac{5}{7}$ ბ) $\frac{5}{9}$ თუ $\frac{2}{9}$ გ) $\frac{3}{5}$ თუ $\frac{3}{11}$ დ) $\frac{7}{25}$ თუ $\frac{7}{15}$ ე) $\frac{4}{9}$ თუ $\frac{1}{3}$

ვ) $\frac{3}{7}$ თუ $\frac{4}{9}$ ზ) $\frac{2}{3}$ თუ $\frac{5}{7}$ თ) $\frac{3}{4}$ თუ $\frac{7}{8}$ ი) $\frac{5}{9}$ თუ $\frac{9}{20}$ კ) $\frac{3}{31}$ თუ $\frac{4}{41}$

ლ) $\frac{3}{77}$ თუ $\frac{2}{53}$ მ) $\frac{3}{34}$ თუ $\frac{2}{23}$ ნ) 0,57 თუ 0,63 თ) 2,17 თუ 2,171

პ) $\frac{4}{5}$ თუ 0,91 ჟ) $\frac{2}{3}$ თუ 0,6 რ) $\frac{3}{7}$ თუ 0,51 ს) $-\frac{4}{9}$ თუ -0,91.

1.11. გამოთვალეთ:

1) ა) $\frac{5}{7} + \frac{2}{7}$ ბ) $\frac{5}{13} + \frac{2}{13}$ გ) $\frac{7}{12} - \frac{5}{12}$ დ) $\frac{13}{20} - \frac{3}{20}$.

2) ა) $1 - \frac{1}{3}$ ბ) $2 + \frac{1}{2}$ გ) $1 + \frac{2}{3}$ დ) $2 - \frac{1}{2}$ ე) $1 - \frac{5}{6}$ ვ) $2 - \frac{3}{4}$

ზ) $3 - 1\frac{1}{3}$ თ) $5 - 2\frac{3}{7}$ ი) $4 - 1\frac{1}{5}$ კ) $6 + 2\frac{1}{7}$ ლ) $1 + 5\frac{1}{8}$ მ) $16 - 12\frac{1}{7}$.

3) ა) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ ბ) $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ გ) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ დ) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{27}$ ე) $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4}$.

ვ) $\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}$ ზ) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{24}$ თ) $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{1}{18}$ ი) $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$ კ) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$

ლ) $\frac{1}{3} - \frac{1}{7}$ მ) $\frac{3}{5} - \frac{1}{4}$ ნ) $\frac{5}{6} + \frac{3}{5}$ თ) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ პ) $\frac{5}{6} + \frac{2}{5} - \frac{3}{4}$ ჟ) $\frac{2}{9} - \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$

რ) $\frac{2}{7} + \frac{4}{5} - \frac{1}{2}$ ს) $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{1}{12}$.

4) ა) $2\frac{1}{4} + 3$ ბ) $3\frac{1}{3} + 1$ გ) $5\frac{2}{3} - 2$ დ) $7\frac{1}{3} - 3$.

5) ა) $3\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ ბ) $2\frac{1}{12} + 3\frac{1}{12}$ გ) $9\frac{4}{7} - 2\frac{3}{7}$ დ) $6\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4}$ ე) $5\frac{2}{5} - 3\frac{3}{5}$

$$\begin{array}{llll} \text{ვ) } 4\frac{1}{8} - 2\frac{5}{8} & \text{ზ) } 8\frac{2}{11} - 5\frac{7}{11} & \text{თ) } 5\frac{2}{7} - 3\frac{4}{7} & \text{ი) } 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} & \text{კ) } 4\frac{2}{5} + 1\frac{3}{4} \\ \text{ლ) } 5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3} & \text{ძ) } 7\frac{3}{5} - 2\frac{1}{2} & \text{ბ) } 7\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4} & \text{თ) } 9\frac{2}{7} - 2\frac{3}{5} & \text{პ) } 85\frac{1}{3} - 80\frac{3}{8} \\ \text{ჟ) } 47\frac{2}{15} - 40\frac{1}{2} . \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{6) ა) } \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} & \text{ბ) } \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} & \text{გ) } \frac{9}{17} \cdot \frac{34}{57} & \text{დ) } \frac{5}{19} \cdot \frac{57}{60} . \\ \text{7) ა) } \frac{3}{8} : \frac{9}{16} & \text{ბ) } \frac{4}{7} : \frac{3}{14} & \text{გ) } \frac{3}{25} : \frac{2}{5} & \text{დ) } \frac{9}{68} : \frac{3}{17} . \\ \text{8) ა) } 5\frac{2}{3} \cdot 1\frac{5}{34} & \text{ბ) } 3\frac{1}{6} \cdot 1\frac{1}{57} & \text{გ) } 5\frac{1}{4} : 2\frac{5}{8} & \text{დ) } 21\frac{1}{4} : 2\frac{1}{8} . \\ \text{9) ა) } 1,7 + 3,5 & \text{ბ) } 4,9 + 2,6 & \text{გ) } 2,25 + 7,75 & \text{დ) } 25,27 + 24,23 . \\ \text{10) ა) } 17,21 - 2,11 & \text{ბ) } 37,6 - 8,9 & \text{გ) } 79,5 - 8,75 & \text{დ) } 15 - 3,28 \\ \text{ე) } 25 + 8,27 & \text{ვ) } 0,243 + 3,553 & \text{ზ) } 27 - 2,325 & \text{თ) } 2,281 - 2,381 . \\ \text{11) ა) } 2,5 \times 0,5 & \text{ბ) } 3,7 \times 0,6 & \text{გ) } 3,75 \times 0,4 & \text{დ) } 9,24 \times 0,5 . \\ \text{12) ა) } 3,75 : 0,5 & \text{ბ) } 3,81 : 0,3 & \text{გ) } 4,25 : 0,25 & \text{დ) } 27,99 : 0,09 . \\ \text{13) ა) } 3,021 \times 100 & \text{ბ) } 17,21 \times 10 & \text{გ) } 15,2 \times 0,1 & \text{დ) } 75,5 \times 0,01 . \\ \text{14) ა) } 27,2 : 10 & \text{ბ) } 70,1 : 100 & \text{გ) } 25,5 : 0,01 & \text{დ) } 27 : 0,1 . \\ \text{15) ა) } 1000 \times 0,01 & \text{ბ) } 0,001 \times 100 & \text{გ) } 10 : 0,01 & \text{დ) } 0,01 : 100 . \\ \text{16) ა) } 0,01 \times 0,02 & \text{ბ) } 0,03 \times 0,08 & \text{გ) } 0,003 : 0,01 & \text{ე) } 0,001 : 0,0001 . \end{array}$$

1.12. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } 3\frac{4}{5} - 2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{5} & \text{ბ) } 4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3} - 5\frac{1}{2} & \text{გ) } 5\frac{2}{3} : 3\frac{7}{9} - 1\frac{1}{2} . \\ \text{დ) } 4 - 7\frac{1}{3} : 2\frac{1}{5} & \text{ე) } \left(3\frac{1}{2} - \frac{3}{5} : \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{4}{5} & \text{ვ) } \left(5\frac{2}{3} \cdot 1\frac{4}{9} - 8\frac{3}{5}\right) \cdot 1\frac{1}{4} \\ \text{ზ) } \left(0,75 \cdot 2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3}\right) : \frac{2}{3} & \text{თ) } \left(3,6 \cdot 2\frac{7}{9} - 7\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{6}{7} & \text{ი) } (2,4 : 0,03 - 7,8 : 0,1) \times 0,5 \\ \text{კ) } (0,63 : 0,003 - 0,42 : 0,006) \times 0,05 & \text{ლ) } (3,24 \times 10 - 0,254 \times 100) : 0,1 \end{array}$$

$$მ) (225 \times 0,01 + 37,5 \times 0,1) : 0,1$$

$$ბ) 2,45 \times 100 - 23 : 0,01$$

$$\begin{array}{l}
 \text{კ) } \frac{12,8 : 0,64 + 3,05 : 0,05}{8\frac{2}{3} : 1\frac{7}{9} - 1}; \quad \text{ჰ) } \frac{1\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - 15,5 : 2}{\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{3} : \frac{4}{5}}; \quad \text{ყ) } \frac{5\frac{2}{5} \cdot 2\frac{2}{9} - 2,5 : \left(-\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 : 4,5 - 1,25 \cdot 2,4}
 \end{array}$$

$$\text{რ) } \frac{333\frac{1}{3} \cdot 1,5 + 25\frac{1}{4} : 0,05}{6,25 : 3\frac{1}{8} + 4 : (-0,4)}.$$

1.13. იპოვეთ წილადი, რომლის მნიშვნელია 16 და რომელიც მოთავსებულია $\frac{7}{9}$ -სა და 1-ს შორის.

1.14. იპოვეთ უდიდესი წილადი, რომლის მნიშვნელია 25 და რომელიც მოთავსებულია $\frac{1}{5}$ -სა და $\frac{3}{5}$ -ს შორის.

1.15. იპოვეთ უმცირესი წილადი, რომლის მნიშვნელია 30 და რომელიც მოთავსებულია 0,3-სა და 0,4-ს შორის.

1.16. იპოვეთ წილადი, რომლის მნიშვნელია 12 და რომელიც მოთავსებულია 0,4-სა და 0,5-ს შორის.

§2. გაყოფადობის ნიშნები

განსაზღვრება: ნატურალური n რიცხვი გავყოთ ნატურალურ m რიცხვზე, ნიშნავს ვიპოვოთ ისეთი მთელი q რიცხვი, რომ $n = mq$. თუ ასეთი რიცხვი არსებობს, მაშინ m და q რიცხვებს ეწოდებათ n რიცხვის გამყოფები და ასე აღნიშნავენ:

$$q = n : m ; \quad m = n : q .$$

ნატურალური რიცხვები ან მარტივია, ან შედგენილი.

განსაზღვრება: ნატურალური რიცხვს ეწოდება მარტივი, თუ მას მხოლოდ ორი გამყოფი გააჩნია (ერთიანი და თავისი თავი), წინააღმდეგ შემთხვევაში ნატურალურ რიცხვს შედგენილი რიცხვი ეწოდება.

რიცხვი 1 არც მარტივია და არც შედგენილი.

ერთადერთი ლუნი მარტივი რიცხვია-2, ყველა დანარჩენი მარტივი რიცხვი კი კენტი.

მარტივი რიცხვებია - 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 და ა. შ..(შეეცადეთ დამოუკიდებლად ამოწეროთ ყველა ორნიშნა მარტივი რიცხვები).

ლუნი ეწოდება რიცხვებს, რომლებიც ლუნი 0, 2, 4, 6, 8 ციფრებით ბოლოვდება.

კენტი ეწოდება რიცხვებს, რომლებიც კენტი 1, 3, 5, 7, 9 ციფრით ბოლოვდება.

- 2-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები რომლებიც ლუნია.
- 3 -ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომელთა ციფრთა ჯამი იყოფა 3-ზე.

მაგალითად: რიცხვი 1002 იყოფა 3-ზე რადგან $1+0+0+2=3$ ის კი იყოფა 3-ზე.

- 4-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომელთა ჩანაწერის ბოლო ორი ციფრით შემდგარი რიცხვი იყოფა 4-ზე.

მაგალითად: რიცხვი 40124 იყოფა 4-ზე, რადგან 24 იყოფა 4-ზე.

- 5-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომელთა ჩანაწერიც ბოლოვდება 0 - ით ან 5-ით.

მაგალითად: რიცხვი 80125 ან 77760 იყოფა 5-ზე, რადგან პირველი რიცხვი ბოლოვდება 5-ით, ხოლო მეორე კი 0-ით.

- 6-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც ლუნია და იყოფიან 3-ზე.

მაგალითად: რიცხვი 1002 იყოფა 6-ზე რადგან ის ლუნია და იყოფა 3-ზე.

- 9-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომელთა ციფრთა ჯამი იყოფა 9-ზე.

მაგალითად: რიცხვი 6102 იყოფა 9-ზე, რადგან $6+1+0+2=9$ იყოფა 9-ზე.

10-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც ბოლოვდებიან ნულით.

2.1. დაადგინეთ იყოფა თუ არა 2 -ზე.

- ა) 123456 ბ) 700002 გ) -22544 დ) 123123 ე) 1976791 ვ) -45319 ზ) 6430
თ) 206712 ი) 650329 კ) 144115 ლ) 529052.

2.2. დაადგინეთ იყოფა თუ არა 3-ზე.

ა) 123456 ბ) 100002 გ) -22544 დ) 123123 ე) 1876781 ვ) -45319 ზ) 7430
თ) 206812 ი) 650329 კ) 111115 ლ) 729032.

2.3. დაადგინეთ იყოთა თუ არა 4-ზე.

ა) 123456 ბ) 10032 გ) -22544 დ) 123163 ე) 5876788 ვ) -45624 ზ) 7480
თ) 206814 ი) 650355 კ) 111115 ლ) 119038.

2.4. დაადგინეთ იყოთა თუ არა 5-ზე.

ა) 123456 ბ) 100002 გ) -22545 დ) 555553 ე) 1876780 ვ) -45559 ზ) 1430
თ) 206852 ი) 550320 კ) 511115 ლ) 729037.

2.5. დაადგინეთ იყოთა თუ არა 6-ზე.

ა) 123456 ბ) 10002 გ) -22574 დ) 123123 ე) 2876782 ვ) -42239 ზ) 1450
თ) 2206812 ი) 260329 კ) 111015 ლ) 442032.

2.6. დაადგინეთ იყოთა თუ არა 9-ზე.

ა) 123456 ბ) 106002 გ) -25544 დ) 123823 ე) 1874781 ვ) -45219 ზ) 8480
თ) 206840 ი) 650329 კ) 140115 ლ) 729037.

§3. უდიდესი საერთო გამყოფი და უმცირესი საერთო ჯერადი

თეორემა: ნებისმიერი შედგენილი ნატურალური რიცხვის წარმოდგენა შეიძლება მისი მარტივი გამყოფების ნამრავლის სახით და ეს წარმოდგენა ერთადერთია.

შედგენილი რიცხვის მარტივ მამრავლებად გასაშლელად, მოსახერხებელია ე.წ. ვერტიკალური დიაგრამა. რიცხვი იწერება ვერტიკალური ხაზის მარცხნივ მისი უმცირესი გამყოფი კი მარჯვნივ მის გასწვრივ, განაყოფი კი რიცხვის ქვეშ და ა. შ. როგორც ეს ნაჩვენებია შემდეგ დიაგრამაზე:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 425 & 5 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

ე.ი. $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ და $420 = 5 \cdot 5 \cdot 17 = 5^2 \cdot 17$.

ორი ან მეტი ნატურალური რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება მათ საერთო გამყოფებს შორის უდიდესს. მის საპოვნელად საჭიროა დავშალოთ თითოეული მათგანი მარტივ მამრავლებად, ამოვწეროთ საერთო მამრავლები და გადავამრავლოთ. უდიდესი საერთო გამყოფი აღინიშნება შემოკლებული სახით - უ.ს.გ. ან D-ასოთი.

მაგალითად: ვიპოვოთ 28-ისა და 42-ის უდიდესი საერთო გამყოფი.

I-ხერხი: 28-ის გამყოფებია - 1; 2; 4; 7; 14; 28.

42-ის გამყოფებია - 1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42.

საიდანაც ცხადია, რომ უ.ს.გ.(28;42)=14 ანუ $D(28;42)=14$.

II - ხერხი: დავშალოთ თითოეული რიცხვი მარტივ მამრავლებად

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

უ.ს.გ.(28;42) = $2 \cdot 7 = 14$ ანუ $D(28;42) = 2 \cdot 7 = 14$.

ორი ან მეტი ნატურალური რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი ეწოდება მათ საერთო ჯერადებს შორის უმცირესს. მის საპოვნელად საჭიროა დავშალოთ თითოეული მათგანი მარტივ მამრავლებად, ამოვწეროთ ერთერთი რიცხვის მარტივი მამრავლები, მიუწეროთ მათ სხვა დანაშალებიდან ის მარტივი მამრავლები რომლებიც ამონერილი არა გვაქვს და გადავამრავლოთ. უმცირესი საერთო ჯერადი აღინიშნება შემოკლებული სახით - უ.ს.ჯ. ან K-ასოთი.

მაგალითად: ვიპოვოთ 28-ისა და 42-ის უმცირესი საერთო ჯერადი.

I-ხერხი: 28-ის ჯერადებია - 28; 56; 84; 112; 140; ...

42-ის ჯერადებია - 42; 84; 126; 168; 210; ...

საიდანაც ცხადია, რომ უ.ს.ჯ.(28;42)=84 ანუ $K(28;42)=84$.

II -ხერხი: დავშალოთ თითოეული რიცხვი მარტივ მამრავლებად

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

უ.ს.ჯ.(28;42) = $2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 = 84$ ანუ $K(28;42) = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 = 84$.

აღვილი აქვს შემდეგ სასარგებლო ტოლობას:

$$\text{უ.ს.გ.}(a; b) \cdot \text{უ.ს.ჯ.}(a; b) = a \cdot b$$

$$D(a; b) \cdot K(a; b) = a \cdot b$$

3.1 იპოვეთ მოცემული რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი:

ა) 12 და 18

ვ) 20; 28 და 84

ბ) 42 და 35

ზ) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$ და $3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10$

გ) 56 და 60

თ) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$ და $4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10$

დ) 98 და 70

ი) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ და $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

ე) 60; 80 და 140

კ) $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 12$ და $3 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 15$

3.2. იპოვეთ მოცემული რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი:

ა) 20 და 15

ვ) 8; 20 და 60

ბ) 15 და 14

ზ) $2 \cdot 3 \cdot 5$ და $3 \cdot 4 \cdot 6$

გ) 12 და 16

თ) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6$ და $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10$

დ) 24 და 15

ი) $2^3 \cdot 3^2$ და $2^2 \cdot 3^3$

ე) 15; 20 და 25

კ) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ და $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

§4. რიცხვითი უტოლობის თვისებები

რიცხვითი ღერძი ეწოდება, ისეთ წრფეს რომელზედაც მონიშნულია სათავე, დადებითი მიმართულება და მასშტაბი (ერთეულოვანი მონაკვეთი). რიცხვითი ღერძის ნებისმიერ წერტილს შეესაბამება რაიმე ნამდვილი რიცხვი. დადებით მიმართულებად ჩვენ ჩავთვლით მარცხნიდან მარჯვნივ.

ნებისმიერი ორი ნამდვილი a და b რიცხვებისათვის განსაზღვრულია შედარების ოპერაცია, რომლის შედეგად სამართლიანია ერთ-ერთი შემდეგი სამი პირობიდან:

1. a მეტია b -ზე. $(a > b)$.

2. a უდრის b -ს. $(a = b)$.

3. a ნაკლებია b -ზე. $(a < b)$.

თვისება 1⁰. თუ $a > b$, მაშინ $b < a$.

თვისება 2⁰. თუ $a < b$ და $b < c$, მაშინ $a < c$.

თვისება 3⁰. თუ c ნებისმიერი რიცხვია და $a > b$, მაშინ $a + c > b + c$.

თვისება 4⁰. თუ c ნებისმიერი დადებითი რიცხვია და $a > b$, მაშინ $ac > bc$.

თვისება 5⁰. თუ c ნებისმიერი უარყოფითი რიცხვია და $a > b$, მაშინ $ac < bc$.

თვისება 6⁰. თუ $a > b$ და $c > d$, მაშინ $a + c > b + d$.

თვისება 7⁰. თუ $a > b$ და $c < d$, მაშინ $a - c > b - d$.

თვისება 8⁰. თუ $a > b > 0$ და $c > d > 0$ მაშინ, $ac > bd$.

თვისება 9⁰. თუ $a > b > 0$, მაშინ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

თვისება 10⁰. თუ $a > b > 0$, მაშინ $a^n > b^n$, სადაც $n \in \mathbb{N}$.

შენიშვნა: ნებისმიერი დადებითი a რიცხვისათვის და ნატურალურ n რიცხვისათვის $a > 1$ უტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია $a^n > 1$ უტოლობა.

- 4.1. რა შუალედში იცვლება $2a$, თუ $a \leq 2$.
- 4.2. რა შუალედში იცვლება $2a$, თუ $a > -1$.
- 4.3. რა შუალედში იცვლება $2a$, თუ $-3 < a < 1$.
- 4.4. რა შუალედში იცვლება $2a$, თუ $3 \leq a \leq 6$.
- 4.5. რა შუალედში იცვლება $-5a$ თუ $a < 1$
- 4.6. რა შუალედში იცვლება $-5a$, თუ $a \geq -2$.
- 4.7. რა შუალედში იცვლება $-5a$, თუ $0 < a < 2$.
- 4.8. რა შუალედში იცვლება $-5a$, თუ $-3 \leq a \leq 2$.
- 4.9. რა შუალედში იცვლება $a + b$ თუ $a \leq 1, b \leq 2$
- 4.10. რა შუალედში იცვლება $a + b$, თუ $a > 3, b < 1$.
- 4.11. რა შუალედში იცვლება $a + b$, თუ $-2 < a < 3, -3 < b < -1$.
- 4.12. რა შუალედში იცვლება $a + b$, თუ $-5 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$.
- 4.13. რა შუალედში იცვლება $a - b$, თუ $a > 3, b < -2$.
- 4.14. რა შუალედში იცვლება $a - b$, თუ $a \leq 2, b \geq 5$.
- 4.15. რა შუალედში იცვლება $a - b$, თუ $2 < a < 6, -1 < b < 3$.
- 4.16. რა შუალედში იცვლება $a - b$, თუ $-4 \leq a \leq 0, -3 < b < 2$.
- 4.17. რა შუალედში იცვლება $4a + 3b$ თუ $a > -2, b \geq 1$.
- 4.18. რა შუალედში იცვლება $4a + 3b$, თუ $a \leq 2, b \geq 5$.
- 4.19. რა შუალედში იცვლება $4a + 3b$, თუ $-3 < a < 1, 2 \leq b < 3$.
- 4.20. რა შუალედში იცვლება $4a + 3b$, თუ $0 \leq a \leq 3, -4 < b \leq 1$.

§5. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები

ნებისმიერი a ; b და c რიცხვებისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

ამ ტოლობებს ეწოდება შემოკლებული გამრავლების ფორმულები. მათი დამტკიცება არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს

მაგალითად: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

როგორც ვხედავთ ტოლობის დასამტკიცებლად სრულიად საკმარისია ნამრავლში ფრჩხილების გახსნა და მსგავსი წევრების შეერთება. ანალოგიურად მტკიცდება ყველა სხვა დანარჩენი ტოლობებიც.

5.1. შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით შეასრულეთ მოქმედებები:

1) $(a + 2)(a - 2)$ 2) $(1 + x)(1 - x)$ 3) $(x + 2y)(x - 2y)$ 4) $(3a - 2b)(3a + 2b)$

5) $(y + 0,3)(y - 0,3)$ 6) $(x + 0,1)(x - 0,1)$ 7) $(5a + 0,2b)(5a - 0,2b)$

8) $(0,1x - 2y)(0,1x + 2y)$ 9) $(2xy - 1)(2xy + 1)$ 10) $\left(2a - \frac{1}{3}\right)\left(2a + \frac{1}{3}\right)$

11) $(2,3a-b)(2,3a+b)$ 12) $(3x^2y-2)(3x^2y+2)$ 13) $(a+2)^2$ 14) $(x-1)^2$

15) $(2a-1)^2$ 16) $(2a+3)^2$ 17) $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2$ 18) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ 19) $a^2x^2-ax^3$

20) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2$ 21) $\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{4}\right)^2$ 22) $(a^2+b^2)^2$ 23) $(2a^2-3)^2$ 24) $(x^3-y^3)^2$

25) $(x^2+2y^3)^2$ 26) $(2a^2b-ab^2)^2$ 27) $\left(\frac{1}{2}xy^2-1\right)^2$ 28) $(1,2x^2-5y)^2$

29) $(-2,5a^2b+1)^2$ 30) $(a+b)^2-(a-b)^2$ 31) $(x-2)^2+(x+2)^2$

32) $(m+1)^2+(m-1)^2-(m-1)(m+1)$ 33) $(x+2)^2-(x+2)(x-2)$

5.2. დაშალეთ მამრავლებად:

1) x^2-9 2) $25-a^2$ 3) $4a^2-25$ 4) $9x^2-1$ 5) $x^2-0,09$ 6) $2,25-a^2$ 7) $0,01b^2-1$

8) $3,24x^2-y^2$ 9) $1,21x^2-0,81y^2$ 10) $0,25a^2-0,01b^2$ 11) $2,25m^2-6,25n^2$

12) $4,41p^2-5,76q^2$ 13) $\frac{1}{4}x^2-1$ 14) $\frac{1}{9}-a^2$ 15) $\frac{1}{16}a^2-4b^2$

16) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{25}y^2$ 17) $(3a-2b)^2-1$ 18) $(x-y)^2-9$ 19) $(2m-1)^2-9m^2$

20) $(3a+1)^2-4a^2$ 21) $(x+2)^2-\frac{1}{4}x^2$ 22) $(c-1)^2-\frac{1}{9}c^2$ 23) $(a+3)^2-0,09a^2$

24) $(x+1)^2-0,01x^2$ 25) $a^2-(a-1)^2$ 26) $4x^2-(x+1)^2$ 27) $16x^2-(x+1)^2$

28) $49a^2-(a-2)^2$ 29) $\frac{1}{4}a^2-(a+1)^2$ 30) $\frac{1}{9}x^2-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$ 31) $0,25m^2-(1-m)^2$

32) $0,49n^2-(2n-1)^2$ 33) a^2+2a+1 34) a^2+4a+4 35) $4a^2-4a+1$

36) $9x^2-6x+1$ 37) $\frac{1}{4}m^2-m+1$ 38) $\frac{1}{9}n^2-2n+9$ 39) $0,25m^2-0,4m+0,16$

40) $0,01x^2-0,4x+4$ 41) $4a^2+12ab+9b^2$ 42) $25x^2-20xy+4y^2$

43) $\frac{1}{9}x^2-2xy+9y^2$ 44) $\frac{1}{16}m^2+mn+4n^2$ 45) $a^4+2a^2b^2+b^4$ 46) $x^4-2x^2y^2+y^4$

47) $x^6 - 2x^3 + 1$ 48) $a^6 + 2a^3b^3 + b^6$ 49) $a^4 + 3,6a^2 + 3,24$ 50) $x^4 - 3x^2y^2 + 2,25y^2$

5.3. გამოთვალეთ:

1) $201^2 - 101^2$ 2) $405^2 - 305^2$ 3) $139^2 - 129^2$ 4) $125^2 - 115^2$ 5) $63^2 - 62^2$.

5.4. კვადრატების სხვაობა დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $x^2 - 0,01$; ბ) $4m^2 - 25$; გ) $144b^4 - 81b^2c^4$;
 დ) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - x^2$; ე) $a^6 - b^6$; ვ) $\left(\frac{x^2}{9} + 9 - 2x\right)^2 - \frac{4x^2}{9}$.

5.5. დაშალეთ მამრავლებად: (გამოიყენეთ კუბების სხვაობის ფორმულა)

ა) $a^6 - b^6$; ბ) $y^6 - x^3$; გ) $125x^6y^{-3} - 3\frac{3}{8}y^3$; დ) $(x+y)^3 - (x-y)^3$.

5.6. წარმოადგინეთ სტანდარტული სახის მრავალწევრის სახით:

ა) $(6x-1)^2 + 12x$; ბ) $(3x+5)(x-3)(x+3)$;
 გ) $(2a^2+3)^2 + (a^2-3)(a^2+3)$; დ) $(a-2(a+2)(a^2+4) - (a^2-4)^2$.

5.7. დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $(2b-1)^2 - 16(b-5) = (2b-9)^2 + 16b$;
 ბ) $(a^2+1)(a^2-1)(a^4+1) + 2 = (a^4-1)^2 + 2a^4$;
 გ) $(c^2-c-2)(c^2+2-2) = c^4 - 5c^2 + 4$;
 დ) $\left((x+1)^2 - x\right)\left((x-1)^2 + x\right) = x^4 + x^2 + 1$.

5.8. დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $4x^2 - x^7y + x^4$; ბ) $2x + y - 2x(2x + y)$; გ) $x^4 + 4y + x(x^2 + 4y)$;
 დ) $3p + 2 + 9ps + 6s$; ე) $m - 3n + km - 3kn$; ვ) $4p - 3 - 8pq + 6q$.

5.9. დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $9x^4 - (x^2 + 1)^2$; ბ) $a^4b^8 - (a^2b^4 - 1)^2$;
 გ) $(1+x)^2 - (3x-5)^2$; დ) $9(3x+y)^2 - 25(x+2y)^2$.

5.10. დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $x^6y^3 - 8z^9$; ბ) $a^9 - (a^2 + 1)^3$;
 გ) $(3x+1)^3 - (2x-1)^3$; დ) $(2-3b)^3 + (5b-1)^3$.

5.11. დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $b^2 - 3b + 6y - 4y^2$; ბ) $a^2 - b^2 + 10b - 25$;

გ) $9x^2 + 36y - 16y^2 + 27x$; დ) $x^2 - x^2y - xy^2 + y^2 + 2xy$.

5.12. დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $3a^2 4ab + b^2$; ბ) $a^2 + 2ab - 48b^2$;

გ) $x^4 + 4y^4$; დ) $x^8 + 64y^8$.

5.13. შეკვეცეთ წილადი:

ა) $\frac{a^2 - ab}{a^3 - b^3}$; ბ) $\frac{(3y - 6x)^2}{4(2x - y)^2}$; გ) $\frac{12x^2 - x - 1}{4x^2 - 15x - 4}$;

დ) $\frac{a^4 + 4}{(a - 1)^2 + 1}$; ე) $\frac{2^{2n} - 1}{2^n - 1}$.

5.14. შეკვეცეთ წილადი:

ა) $\frac{a^3 - b^3}{(a + b)^2 + 1}$; ბ) $\frac{8x^6 + y^3}{4x^4 - y^2}$;

გ) $\frac{a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3}{a^3 - 4a^2b + 4ab^2}$; დ) $\frac{27x^3 - 12xy^2 - 18x^2y + 8y^3}{12x^2y - 9x^3 - 4xy^2}$.

5.15. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $\frac{a + 5}{a^2 - 9} : \left(\frac{a + 2}{a^2 - 3a + 9} - \frac{2(a + 8)}{a^3 + 27} \right)$; ბ) $\frac{9x^2 - 1}{x + 3} \cdot \left(\frac{1}{9x^2 - 6x + 1} - \frac{1}{9x^2 - 1} \right)$;

გ) $\frac{a^4 - b^4}{4a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 3b^3} : \frac{a + b}{16a^2 - 9b^2} - b(3a - 2b)$;

დ) $\frac{4x^2 - y^2}{x + y} \cdot \frac{3xy}{2x^3 - x^2y + 2xy^2 - y^3} - \frac{3xy}{x^2 + y^2}$.

5.16. დაამტკიცეთ, რომ

$$\left(\frac{2x + 1}{4x} + \frac{4}{2x + 3} - 2 \right) : \frac{2x + 1}{2x + 3} - \frac{4x^2 - 10x + 3}{4x}$$

გამოსახულების მნიშვნელობა უარყოფითია x -ის ნებისმიერი, 1-ზე მეტი მნიშვნელობისათვის.

§6. წრფივი ფუნქციის თვისებები და მისი გრაფიკი

განსაზღვრება: $y = ax + b$ სახის ფუნქციას, სადაც a და b რაიმე რიცხვებია წრფივი ფუნქცია ეწოდება.

როცა $a = 0$ წრფივი ფუნქცია გარდაიქმნება მუდმივ ფუნქციად და $y = b$.

როცა $a \neq 0$, მაშინ

1. ფუნქციის განსაზღვრის არე. $ax + b$ - გამოსახულების მნიშვნელობა ცალსახადაა განსაზღვრული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისათვის. ე.ი. $D(ax + b) = R$.

2. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე. $E(ax + b) = R$.

3. პერიოდულობა. თუ $a \neq 0$, მაშინ $y = ax + b$ წრფივი ფუნქცია არაპერიოდულია, ხოლო თუ $a = 0$, მაშინ $y = ax + b$ წრფივი ფუნქცია პერიოდულია ნებისმიერი პერიოდით.

4. ლუნ-კენტონება. $y = ax + b$ წრფივი ფუნქცია ლუნია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a = 0$ და კენტია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $b = 0$.

5. საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. $y = ax + b$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი Oy ღერძს კვეთს წერტილში, რომლის კოორდინატებია $(0; b)$.

თუ $a \neq 0$, მაშინ $y = ax + b$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი Ox ღერძს კვეთს წერტილში, რომლის კოორდინატებია $(-\frac{b}{a}; 0)$.

თუ $a = 0$, მაშინ $y = ax + b$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი ემთხვევა Ox ღერძს (როცა $b = 0$) ან არა აქვს საერთო წერტილი Ox ღერძთან (როცა $b \neq 0$).

6. ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები. ა) თუ $a > 0$, მაშინ წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობა უარყოფითია $x < -\frac{b}{a}$ -სათვის და დადებითია $x > -\frac{b}{a}$ -სათვის.

ბ) თუ $a < 0$, მაშინ წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობა უარყოფითია $x > -\frac{b}{a}$ -სათვის და დადებითია $x < -\frac{b}{a}$ -სათვის.

გ) თუ $a = 0$, მაშინ წრფივი ფუნქცია ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობას და აქედან გამომდინარე არ იცვლის ნიშანს თავის განსაზღვრის არეზე.

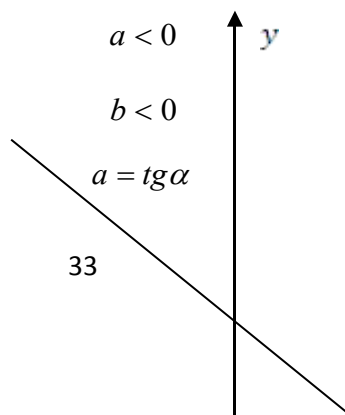
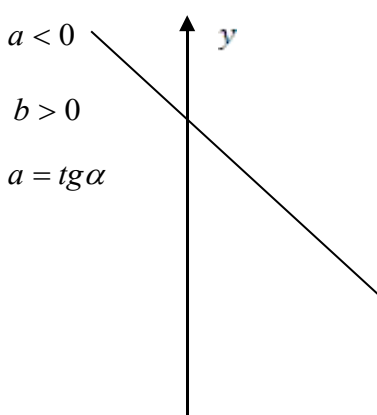
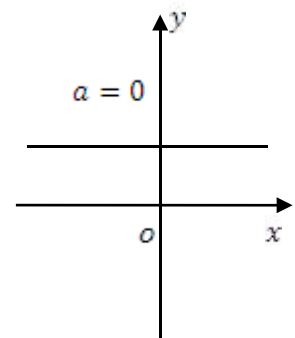
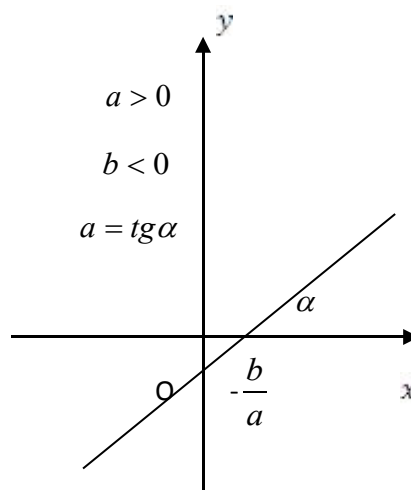
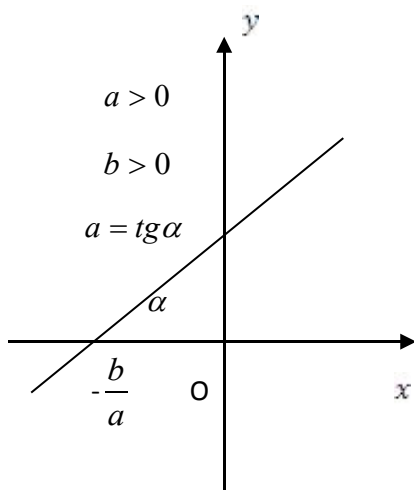
7. უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა. თუ $a \neq 0$, მაშინ არ არსებობს უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა, რადგან ამ შემთხვევაში წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. თუ $a = 0$, მაშინ უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა ეთმანეთს ემთხვევა და b -ს ტოლია.

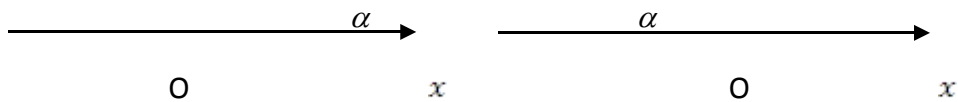
8. ზრდადობის და კლებადობის შუალედები. თუ $a > 0$, მაშინ წრფივი ფუნქცია ზრდადია. თუ $a < 0$, მაშინ წრფივი ფუნქცია კლებადია. თუ $a = 0$, მაშინ წრფივი ფუნქცია მუდმივია.

9. ასიმტოტები. წრფივი ფუნქციის ასიმტოტაა $y = ax + b$.

წრფივი ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს წრფე, რომელიც Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს φ კუთხეს, სადაც $tg\varphi = a$.

a და b -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ფუნქციის გრაფიკები გამოსახულია ნახაზზე.





6.1. გამოიკვლიეთ და ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკები:

- ა) $y = 2x - 6$ ბ) $y = -3x + 4$ გ) $y = 0,2x + 1$ დ) $y = x + 5$ ე) $y = \frac{1}{2}x - 3$
 ვ) $y = -0,3x$ ზ) $y = -6$ თ) $y = 2x$ ი) $x = -6$ კ) $x = \frac{1}{3}$ ლ) $y = 0$ მ) $y = 0,4x + \frac{1}{3}$
 ნ) $y = |3x|$ თ) $y = |x - 1|$ პ) $y = |2x + 3|$ ყ) $y = 2|x - 0,5|$
 რ) $y = 2|x| - 2$

წრფივი განტოლება და უტოლობა

პირველი ხარისხის (წრფივ) განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$ax = b \quad \text{ან} \quad ax - b = 0 \quad (a \neq 0)$$

მისი ამონახსენია $x = \frac{b}{a}$.

- თუ $a = 0$ და $b = 0$, მაშინ x ნებისმიერი რიცხვია.
- თუ $a = 0$ და $b \neq 0$, მაშინ ამონახსენი არა აქვს.

წრფივი უტოლობის ამოხსნის დროს უნდა გვახსოვდეს:

თუ $x > a$ ეს ნიშნავს $x \in]a; +\infty[$ ანუ რიცხვით ღერძზე a -ს შესაბამისი წერტილიდან მარჯვნივ მდებარე რიცხვების სიმრავლე.

თუ $x < a$ ეს ნიშნავს $x \in]-\infty; a[$ ანუ რიცხვით ღერძზე a -ს შესაბამისი წერტილიდან მარცხნივ მდებარე რიცხვების სიმრავლე.

თუ $x \geq a$ ეს ნიშნავს $x \in [a; +\infty[$ ანუ რიცხვით ღერძზე a -ს შესაბამისი წერტილიდან მარჯვნივ მდებარე რიცხვების სიმრავლე a -ს ჩათვლით.

თუ $x \leq a$ ეს ნიშნავს $x \in]-\infty; a]$ ანუ რიცხვით ღერძზე a -ს შესაბამისი წერტილიდან მარცხნივ მდებარე რიცხვების სიმრავლე a -ს ჩათვლით.

თუ უტოლობაში წევრს გადავიტანთ უტოლობის ერთი მხარიდან მეორეში ნიშანი ეცვლება საპირისპიროთი.

თუ უტოლობის ორივე მხარეს ვამრავლებთ უარყოფით რიცხვზე უტოლობის ნიშანი იცვლება საპირისპიროთი.

6.2. ამოხსენით განტოლება

- 1) $2x - 3 = 5$; 2) $3 - 2x = 5$; 3) $\frac{1}{3} - 0,2x = 5$; 4) $5 - 3y = -7$; 5) $-12 + 5a = 8$;
6) $-16 - p = -2p$; 7) $-3 - 4x = -7x + 6$; 8) $2x + 3 = x - 6$; 9) $3 - 5x = 5 - 4x$;
10) $10x - 3 - 5 = 5x + x$; 11) $3(x - 2) = 5x$; 12) $5(y + 3) = 10$; 13) $-2(x + 3)2x - 1$;
14) $9(z - 3) = 5(z + 5)$; 15) $-(3x - 4) = 3x - 8$; 16) $0,8x - 3,5 = -1,2x + 0,5$;
17) $1,3(k - 0,6) = 1,8k$; 18) $8,6t - 3,7 = 7,6t - 5$; 19) $1,1y + 1 = x - 2$;
20) $\frac{1}{3}x + 6 = 2$; 21) $\frac{1}{2}(4s - 2) = -7$; 22) $\frac{5}{6}x + 3 = \frac{1}{6}x$; 23) $\frac{1}{3}x - 2 = x$;
24) $x - 5 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; 25) $3x - 4 + 2x = 6 + 2x - 4$; 26) $50 - 7x - 16 = 3x - 16$;
27) $-6p + 16 = 4p - 6p - 24$; 28) $5y - 6 - y = 2(y - 1)$; 29) $2(a - 6) - a = 3a + 4a$;
30) $\frac{3}{4}y - 12 = -5 - \frac{1}{4} - 12$; 31) $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}t = \frac{2}{5} - \frac{1}{10}t + 3$; 32) $0,7x + \frac{2}{3}x - 1 = 0,7x$;
33) $0,5(2x + 4) = x + 3$; 34) $3(2x - 1) + 7 = 5(x - 1) + 7$;
35) $3,1(1 - 3d) + d = 0,4(t - 14)$; 36) $0,8(0,5 - 2a) = 2a + 0,4$;
37) $-5(x - 7) = 30 - (2x + 1)$; 38) $-2(x + 5) + 3 = 2 - 3(x + 1)$;
39) $3(2x - 1) + 6x = 10x - 7$; 40) $\frac{4n - 2(n+7)}{3} = \frac{2n - 2(n-1)}{3}$

6.3. ამოხსენით წრფივი უტოლობა:

- 1) $x - 1 > 2$ 2) $2x + 6 > 3$ 3) $3x + 1 > 2$ 4) $0,2 + 1,2x > 1$ 5) $\frac{1}{3} + x > 1$
6) $12 - 5x \leq 0$ 7) $12 - 11x \leq 34$ 8) $23 - 2x \leq -1$ 9) $12x + 0,5 < 13x - 2$

§7. კვადრატული განტოლების ფესვთა ფორმულა

განსაზღვრება: $ax^2 + bx + c = 0$ სახის განტოლებებს, სადაც x - უცნობია, a , b და c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან $a \neq 0$ - კვადრატული ეწოდება.

თუ $a = 1$, მაშინ კვადრატულ განტოლებას ეწოდება დაყვანილი კვადრატული განტოლება. არასრული ეწოდება კვადრატულ განტოლებას, თუ ერთერთი კოეფიციენტი b ან c ნულის ტოლია.

განსაზღვრება: α რიცხვს ეწოდება $F(x) = G(x)$ განტოლების ამონახსენი ანუ ფესვი, თუ ის ეკუთვნის განტოლების განსაზღვრის არეს და მისი განტოლებაში ჩასმით x ცვლადის ადგილას მიიღება ჭეშმარიტი $F(\alpha) = G(\alpha)$ ტოლობა.

გამოვიყვანოთ კვადრატული განტოლების ფესვთა ფორმულა ზოგადი შემთხვევისათვის. ამისათვის

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

განტოლება გავყოთ ნულისაგან განსხვავებულ a რიცხვზე. მიღებული განტოლების

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (2)$$

ამოსახსნელად, ტოლობის მარცხენა მხრიდან გამოვყოთ სრული კვადრატი:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \\ &= \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

$b^2 - 4ac$ - გამოსახულებას დისკრიმინანტი ეწოდება და აღინიშნება D ასოთი. ამ აღნიშვნებით (2) ტოლობა ასე ჩაიწერება

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0 \quad (3)$$

შესაძლებელია სამი შემთხვევა: 1) $D > 0$, 2) $D = 0$, 3) $D < 0$.

შემთხვევა 1. თუ $D > 0$, მაშინ შესაძლებელია კვადრატული ფესვის ამოღება D -დან და D ჩაიწეროს შემდეგნაირად $D = (\sqrt{D})^2$, მაშინ

$$\frac{D}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a} \right)^2$$

ამიტომ (3) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a} \right)^2 = 0$$

საიდანაც კვადრატების სხვაობის ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = \left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right) = 0$$

რადგან ნამრავლი უდრის ნულს, როცა ერთერთი თანამამრავლი მაინც უდრის ნულს, ამიტომ ამ განტოლებას აქვს ორი ნამდვილი ფესვი:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{და} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

ანუ

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (4)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $D = b^2 - 4ac$ მაშინ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

შემთხვევა 2. თუ $D=0$, მაშინ (3) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

საიდანაც, გამომდინარეობს რომ (1) განტოლებას აქვს ერთი ფესვი $x_1 = \frac{-b}{2a}$. ის შეიძლება მივიღოთ (4) ფორმულიდან თუ მასში შევიტანთ $D=0$.

შენიშვნა: ამ შემთხვევაში შეიძლება ვთქვათ, რომ კვადრატულ განტოლებას აქვს ტოლი ფესვები ანუ ჯერადი ფესვები.

შემთხვევა 3. თუ $D < 0$, მაშინ $-D > 0$ ამიტომ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(-D)}{4a^2}$ გამოსახულება წარმოადგენს ორი შესაკრების ჯამს, რომელთაგან პირველი არაუარყოფითია, მეორე კი დადებითი. მაშასადამე, მათი ჯამი არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი. ე.ი. მე-(3) განტოლებას არა აქვს ფესვი, საიდანაც ვასკვნით, რომ (1) განტოლებასაც არა აქვს ფესვი.

როცა $b = 0$, მაშინ (1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს $ax^2 + c = 0$, რომლის ამონახსენებაც ასე ჩაიწერება $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

როცა $c = 0$, მაშინ (1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს $ax^2 + bx = 0$, რომლის ამოხსნა ხდება შემდეგნაირად:

ტოლობის მარცხენა მხარეში, საერთო მამრავლი x გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

ნამრაველი უდრის ნულს, როცა ერთერთი თანამამრაველი მაინც უდრის ნულს

$$x = 0 \quad \text{ან} \quad ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

ე. ი. როცა $c = 0$, (1) განტოლებას აქვს ორი ამონახსენი 0 და $-\frac{b}{a}$.

7.1. ამოხსენით განტოლებები

$$1) x^2 = 25 \quad 2) x^2 = 9 \quad 3) x^2 - 16 = 0 \quad 4) x^2 - 100 = 0 \quad 5) \frac{1}{2}x^2 - 128 = 0$$

$$6) \frac{1}{3}x^2 - 27 = 0 \quad 7) 4x^2 - 25 = 0 \quad 8) 16x^2 - 121 = 0 \quad 9) (2x-1)(x+2) - x^2 = 16$$

$$10) (x-11)(x+8) = 0 \quad 11) y^3 - 25y = 0 \quad 12) x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \quad 13) x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

$$14) x^2 + 7x - 8 = 0 \quad 15) 6x^2 + 5x - 7 = 0 \quad 16) x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

$$17) x^4 + 4x^2 - 32 = 0 \quad 18) x^2 - 7x - 8 = 0 \quad 19) 3x^2 + 11x - 4 = 0$$

$$20) x^2 + 3x - 4 = 0 \quad 21) 7x^2 + 20x - 3 = 0 \quad 22) 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$23) 3x^2 - 8x + 5 = 0 \quad 24) 36x^2 - 12x + 1 = 0 \quad 25) 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$26) 2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad 27) x^2 + 9x + 20,25 = 0 \quad 28) x^2 - 12x + 32 = 0$$

$$29) 3x^2 - 10x + 3 = 0 \quad 30) x^2 - 8x - 84 = 0 \quad 30) 16x^2 + 8x + 1 = 0$$

$$31) x^2 + 14x + 33 = 0 \quad 32) 0,6x^2 - 3,6x = 0 \quad 33) 2x^2 + 7x = 0$$

$$34) (x-1)^2 + (x-1)^2 = (x+2)^2 - 2x + 2$$

$$35) (2x-3)(2x+3-1) = 5x + (x-2)^2$$

$$36) 3(x+4)^2 = 10x + 32 \quad 37) 31x + 77 = 15(x+1)^2 \quad 38) \frac{x^2-1}{2} - 11x = 11$$

$$39) \frac{x^2+x}{2} = \frac{8x-7}{3} \quad 40) \frac{x}{x+4} + \frac{4}{x-4} = \frac{20}{x^2-16}$$

7.2. ამოხსენით განტოლება:

$$ა) 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$$

$$ბ) (x+4)^2(x+1)^2 + (x+2)^2(x+3)^2 = 4$$

$$გ) 5\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+7}{x}\right)^2 - 8\frac{(x-1)(x+7)}{x(x-2)} = 0$$

$$დ) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{10}{9}$$

§8. კვადრატული სამწევრის დაშლა წრფივ მამრავლებად

განსაზღვრება: მეორე ხარისხის მრავალწევრს $ax^2 + bx + c$, სადაც x - ცვლადია, a , b და c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან $a \neq 0$ - კვადრატული სამწევრი ეწოდება.

განსაზღვრება: კვადრატული სამწევრის ფესვები ეწოდება შესაბამისი კვადრატული განტოლების ფესვებს.

თეორემა: თუ $ax^2 + bx + c$ კვადრატული სამწევრის ფესვებია x_1 და x_2 , მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

იმ შემთხვევაში, როცა კვადრატული სამწევრს აქვს ერთი ფესვი x_1 , მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

თუ კი კვადრატულ სამწევრს არა აქვს ფესვები, მაშინ ის არ იშლება წრფივ მამრავლებად.

8.1. დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $a^2 + 2a + 1$

ბ) $a^2 + 4a + 4$

გ) $4a^2 - 4a + 1$

დ) $9x^2 - 6x + 1$

ე) $\frac{1}{4}m^2 - m + 1$

ვ) $\frac{1}{9}n^2 - 2n + 9$

ზ) $0,25m^2 - 0,4m + 0,16$

თ) $12a^2 + a - 6$

ი) $x^2 - 4x + 3$;

კ) $20x^2 - 11x - 3$;

ლ) $12a^2 - 7a + 1$;

მ) $0,01x^2 - 0,4x + 4$.

8.2. დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $x^2 + 3x - 4$

ბ) $7x^2 + 20x - 3$

გ) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

დ) $3x^2 - 8x + 5$

ე) $36x^2 - 12x + 1$

ვ) $3x^2 - 3x + 1$

ზ) $2x^2 - 5x - 3$

თ) $x^2 + 9x + 20,25$

ი) $x^2 - 12x + 32$

კ) $3x^2 - 10x + 3$

ლ) $x^2 - 8x - 84$

მ) $16x^2 + 8x + 1$

ბ) $x^2 + 14x + 33$ ო) $0,6x^2 - 3,6x$ ჰ) $2x^2 + 7x$.

§9. ვიეტას თეორემა

თეორემა (ვიეტა): $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების x_1 და x_2 ფესვებსა და მის კოეფიციენტებს შორის არსებობს შემდეგი თანაფარდობები

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

დამტკიცება: ვთქვათ, რიცხვები x_1 და x_2 განტოლების ფესვებია, მაშინ ცხადია, რომ

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} - b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა: კვადრატული განტოლების ფესვების ჯამისა და ნამრავლის ფორმულები

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ და $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ სამართლიანია მაშინაც კი როცა კვადრატულ განტოლებას ერთი ფესვი აქვს.

თეორემა (ვიეტას თეორემის შებრუნებული თეორემა): თუ მოცემული x_1 და x_2 რიცხვები ისეთია, რომ

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{და} \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

მაშინ x_1 და x_2 რიცხვები წარმოადგენენ დაყვანილი კვადრატული $x^2 + px + q = 0$ განტოლების ფესვებს.

დამტკიცება: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$ ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$x^2 + px + q = x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2$$

მაგრამ

$$x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = (x - x_1)(x - x_2),$$

ამიტომ

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

საიდანაც ცხადია, რომ $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ განტოლებას აქვს მხოლოდ ორი x_1 და x_2 ფესვები. მაშასადამე, მის ტოლფას $x^2 + px + q = 0$ განტოლებასაც აქვს ორი x_1 და x_2 ფესვები.

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა: ვიეტას პირდაპირი თეორემა შეიძლება ჩამოყალიბებული იქნას როგორც ზოგადი კვადრატული განტოლებისთვის ასევე დაყვანილი კვადრატული განტოლებისთვის, ხოლო ვიეტას თეორემის შებრუნებული თეორემა მხოლოდ დაყვანილი კვადრატული განტოლებისთვის. ეს აიხსნება იმით, რომ ორივე ფესვის ცოდნა არ იძლევა კვადრატული განტოლების სამივე კოეფიციენტის ცალსახად განსაზღვრის საშუალებას, ამიტომ სიცხადისათვის უშვებენ $a = 1$.

9.1. განტოლების ამოუხსნელად იპოვეთ შემდეგი განტოლების ფესვთა ჯამი და ფესვთა ნამრავლი.

ა) $x^2 + 3x - 4 = 0$ ბ) $x^2 + 4x - 5 = 0$ გ) $2x^2 + 3x - 1 = 0$ დ) $3x^2 + 4x - 5 = 0$

ე) $3x^2 + 8x + 4 = 0$ ვ) $0,5x^2 + 3,1x - 4 = 0$ ზ) $\frac{1}{3}x^2 + 3\frac{2}{5}x - 1 = 0$ თ) $x^2 + 3x = 0$

ი) $8x^2 + x - 2 = 0$ კ) $x^2 - 4 = 0$ ლ) $5x^2 - 9x + 4 = 0$ მ) $2x^2 + 3x + 1 = 0$.

§10. კვადრატული ფუნქციის თვისებები და მისი გრაფიკი

განსაზღვრება: $y = ax^2 + bx + c$ სახის ფუნქციას, სადაც $a \neq 0$ - კვადრატული ფუნქცია ეწოდება.

1. ფუნქციის განსაზღვრის არე. $ax^2 + bx + c$ გამოსახულების მნიშვნელობა ცალსახადაა განსაზღვრული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისათვის. ე.ი. $D(ax^2 + bx + c) = R$.

2. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე. გამოვყოთ კვადრატული ფუნქციიდან სრული კვადრატი

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a(x - x_0)^2 + y_0$$

სადაც გამოყენებულია აღნიშვნები

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$(x - x_0)^2$ - გამოსახულებას შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი არაუარყოფითი მნიშვნელობა, რომელიც დამოკიდებული იქნება x -ზე. ამიტომ, $a(x - x_0)^2 + y_0$ გამოსახულების მნიშვნელობათა სიმრავლე ყველა ნამდვილი x -ისთვის იქნება

ა) თუ $a > 0$, $[y_0; +\infty[$ - შუალედი,

ბ) თუ $a < 0$, $] +\infty; y_0]$ - შუალედი.

3. პერიოდულობა. კვადრატული ფუნქცია არაა პერიოდული, რადგან, მაგალითად, $y = y_0$ მნიშვნელობას ის ღებულობს მხოლოდ ერთადერთ $x = x_0$ წერტილში.

4. ლუნ-კენტოვნება. კვადრატული ფუნქცია ლუნია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $b = 0$.

5. საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. როცა $x = 0$ კვადრატული ფუნქცია ღებულობს c ტოლ მნიშვნელობას. ე.ი. კვადრატული ფუნქციის ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია $(0; c)$.

ფუნქციის გრაფიკის აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილების აბსცისებს წარმოადგენს $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ფესვები. ფესვები გააჩნია მხოლოდ მაშინ, როცა $D = b^2 - 4ac \geq 0$.

თუ $D < 0$, მაშინ აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილები არ არსებობს.

თუ $D = 0$, მაშინ აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის ერთი წერტილი არსებობს, რომლის კოორდინატებია $(x_0; 0)$. (ანუ ფუნქციის გრაფიკი ეხება აბსცისთა ღერძს $(x_0; 0)$ წერტილში).

თუ $D > 0$, მაშინ კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ფესვი, რომლებიც გამოითვლება ფორმულით

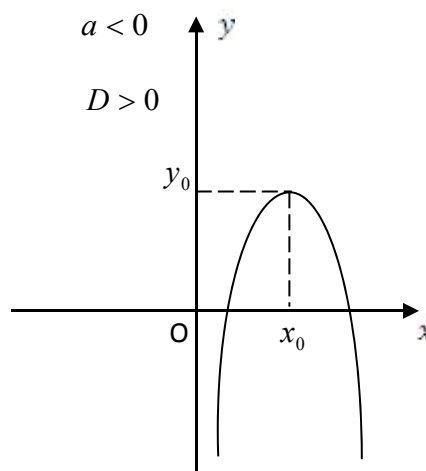
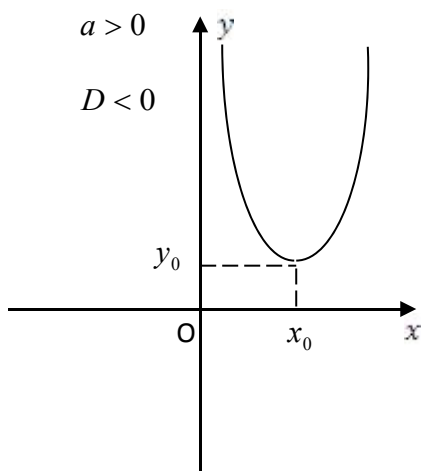
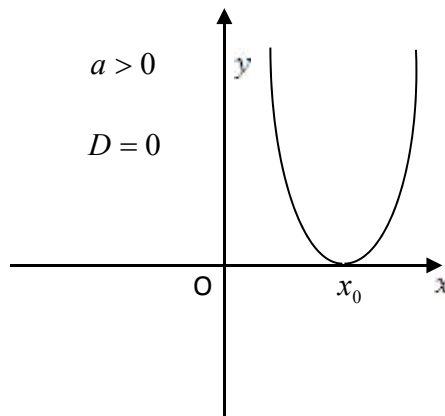
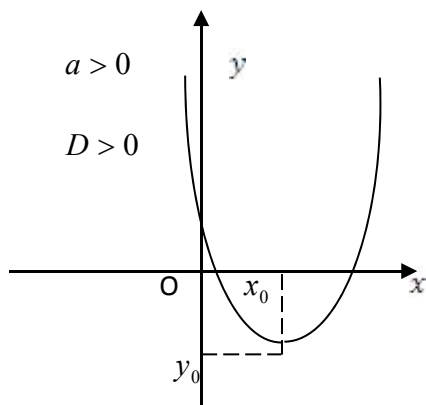
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{და} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

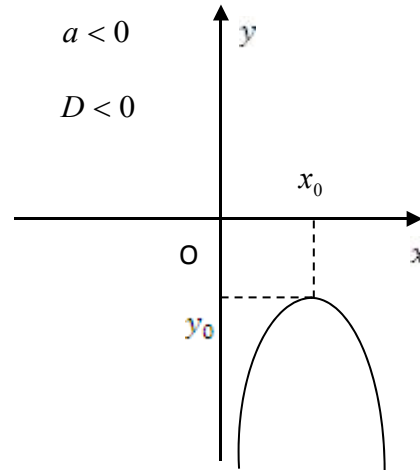
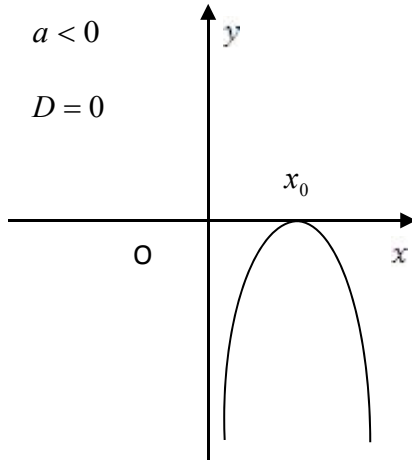
ამიტომ, აბსცისთა ღერძთან ორი გადაკვეთის წერტილი აქვს, რომლის კოორდინატებია $(x_1; 0)$ და $(x_2; 0)$.

6. ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები. თუ $a > 0$ და $D < 0$, მაშინ კვადრატული ფუნქცია ყოველთვის ღებულობს დადებით მნიშვნელობებს. თუ $a > 0$ და $D \geq 0$, მაშინ

როცა $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ფუნქციის მნიშვნელობები დადებითია, ხოლო როცა $x \in (x_1; x_2)$ ფუნქციის მნიშვნელობები უარყოფითია.

თუ $a < 0$ და $D < 0$, მაშინ კვადრატული ფუნქცია ყოველთვის ღებულობს უარყოფით მნიშვნელობებს. თუ $a < 0$ და $D \geq 0$, მაშინ როცა $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ფუნქციის მნიშვნელობები უარყოფითია, ხოლო როცა $x \in (x_1; x_2)$ ფუნქციის მნიშვნელობები დადებითი.





7. უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა.

თუ $a > 0$, მაშინ უდიდესი მნიშვნელობა არ არსებობს, უმცირეს მნიშვნელობას ის ღებულობს $x = x_0$ წერტილში და ის $y = y_0$ ტოლია. ე.ი. $\min_{x_0} y = y_0$.

თუ $a < 0$, მაშინ უმცირესი მნიშვნელობა არ არსებობს, უდიდეს მნიშვნელობას ის ღებულობს $x = x_0$ წერტილში და ის $y = y_0$ ტოლია. ე.ი. $\max_{x_0} y = y_0$.

8. ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.

თუ $a > 0$, მაშინ კვადრატული ფუნქცია ზრდადია როცა $x \geq x_0$ ანუ $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$ შუალედში და კლებადია როცა $x \leq x_0$ ანუ $(-\infty; -\frac{b}{2a})$ შუალედში.

თუ $a < 0$, მაშინ კვადრატული ფუნქცია ზრდადია როცა $x \leq x_0$ ანუ $(-\infty; -\frac{b}{2a})$ შუალედში და კლებადია როცა $x \geq x_0$ ანუ $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$ შუალედში.

9. ასიმტოტები. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკს ასიმტოტა არ გააჩნია.

კვადრატული ფუნქციის გრაფიკს პარაბოლა ეწოდება. $(x_0; y_0)$ წერტილს პარაბოლას წვერო ეწოდება.

10.1. მოცემულია კვადრატული ფუნქცია: $y = -2x^2 + 5x - 2$. იპოვეთ:

ა) ფუნქციის გრაფიკის Ox და Oy ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები;

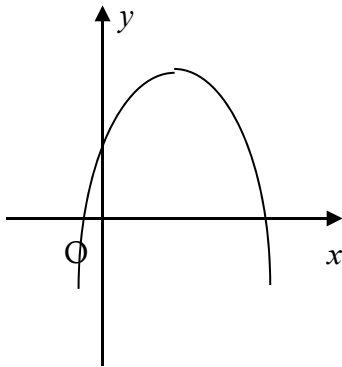
ბ) x -ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებსთვისაც ფუნქციის მნიშვნელობები უარყოფითია;

- გ) ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე;
 დ) ფუნქციის ზრდადობის შუალედი.

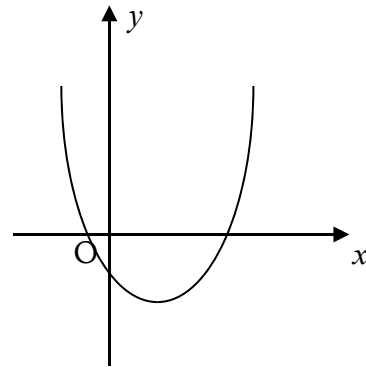
10.2. იპოვეთ m -ის ყველაის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y = (m - 2)x^2 - 6x + m + 6$ ფუნქციის გრაფიკი ორ წერტილში კვეთს აბსცისთა ღერძს.

10.3. ცნობილია, რომ (იხ. ნახ. 1) სურათზე მოცემულია $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკი. შეადარეთ ნულს a , b და c .

10.4. ცნობილია, რომ (იხ. ნახ. 2) სურათზე მოცემულია $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკი. შეადარეთ ნულს a , b და c .



(ნახ.1)



(ნახ.2)

10.5. გამოიკვლიეთ და ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი

- 1) $y = 2x^2$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2$; 3) $y = -4x^2$; 4) $y = -0,2x^2$; 5) $y = x^2 + 1$; 6) $y = 2x^2 - 1$;
 7) $y = -3x^2 + 2$; 8) $y = -5x^2 - 4$; 9) $y = (x + 2)^2$; 10) $y = 0,2(x - 2)^2$;
 11) $y = -0,5(x - 3)^2$; 12) $y = -(x - 1)^2$; 13) $y = (x + 2)^2 - 3$; 14) $y = 2(x + 3)^2 - 1$;
 15) $y = -(x + 1,2)^2 - 0,3$; 16) $y = -(x + 0,5)^2 + \frac{1}{2}$; 17) $y = x^2 + 2x$;
 18) $y = -x^2 - 2x$; 19) $y = -3x^2 + 6x$; 20) $y = x^2 + 2x + 1$; 21) $y = x(x - 1)$;
 22) $y = x^2 + 4x + 4$; 23) $y = -x^2 - 4x + 3$; 24) $y = -x^2 + 4x + 45$;
 25) $y = -4x^2 + 4x - 1$; 26) $y = 3x^2 + 2x - 5$; 27) $y = -3x^2 + 5x - 2$;
 28) $y = 3x^2 + 7x + 2$; 29) $y = -0,9x^2 + x - 0,1$; 30) $y = x^2 + 4x + 1$;

$$31) y = 4x^2 + 3x + 2; \quad 32) y = -12x^2 + 2x - 1; \quad 33) y = -20x^2 + 7x + 6;$$

$$34) y = |3x^2 + 1|; \quad 35) y = |-x^2 + 3|; \quad 36) y = |-x^2 - 2|; \quad 37) y = |3x^2 - 2x - 1|;$$

$$38) y = |(x - 2)^2 - 3|; \quad 39) y = x^2 - 4|x| + 3; \quad 40) y = \left| x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right| - 2.$$

§11. $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის თვისებები და მისი გრაფიკი

ჩვენ განვიხილავთ $k \neq 0$ შემთხვევას. ამ შემთხვევაში $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციას უკუპროპორციულობის ფუნქცია ეწოდება.

შენიშვნა: თუ $k = 0$, მაშინ $y = \frac{k}{x}$ ფორმულით მოიცემა ფუნქცია რომელიც ღებუ-ლობს ნულოვან მნიშვნელობებს ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული x -ისათვის. ნულში ფუნქცია განსაზღვრული არაა.

1. ფუნქციის განსაზღვრის არე. $y = \frac{k}{x}$ - გამოსახულების მნიშვნელობა ცალსახადაა განსაზღვრული ნებისმიერი ნამდვილი $x \neq 0$ რიცხვისათვის, ხოლო $x = 0$ -სათვის არაა განსაზღვრული. ე.ი. $D\left(\frac{k}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს ნულის გარდა. ე.ი. $E\left(\frac{k}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. პერიოდულობა. $y = \frac{k}{x}$ ფუნქცია არაპერიოდულია, რადგან ის თითოეულ თავის მნიშვნელობებს ღებულობს მხოლოდ ერთხელ.

4. ლუნ-კენტონება. $y = \frac{k}{x}$ ფუნქცია კენტია, რადგან ნებისმიერი $x \neq 0$ მნიშვნელობებისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$y(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -y(x).$$

5. საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. რადგან $\frac{k}{x} = 0$ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს, ამიტომ $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი არ გადაკვეთს აბსცისთა

ღერძს. ასევე, რადგან წერტილი ნული არ ეკუთვნის ფუნქციის განსაზღვრის არეს, ფუნქციის გრაფიკი არ გადაკვეთს ორდინატთა ღერძს.

6. ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები. თუ $k > 0$, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა დადებითია $x > 0$ -სათვის და უარყოფითია $x < 0$ -სათვის.

თუ $k < 0$, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა დადებითია $x < 0$ -სათვის და უარყოფითია $x > 0$ -სათვის.

7. უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა. $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციას მაქსიმუმი ან მინიმუმი არ გააჩნია.

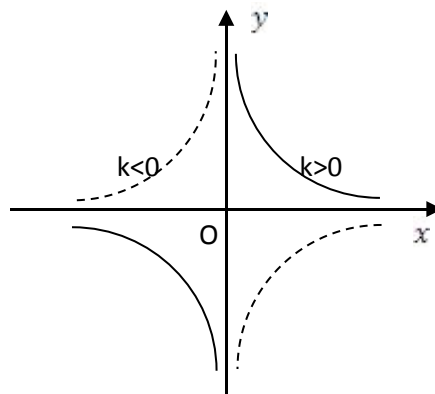
8. ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.

თუ $k > 0$, მაშინ $y = \frac{k}{x}$ ფუნქცია ზრდადია $(-\infty; 0) \cup (0, +\infty)$ შუალედში.

თუ $k < 0$, მაშინ $y = \frac{k}{x}$ ფუნქცია კლებადია $(-\infty; 0) \cup (0, +\infty)$ შუალედში.

9. ასიმტოტები. $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციას აქვს ორი ასიმტოტა ვერტიკალური $x = 0$ (ორდინატთა ღერძი) და ჰორიზონტალური $y = 0$ (აბსცისთა ღერძი).

$y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ჰიპერბოლა ეწოდება. მისი შტოები მოთავსებულია I და III მეოთხედებში თუ $k > 0$, და მოთავსებულია II და IV მეოთხედებში თუ $k < 0$.



11.1. ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი

1) $y = \frac{3}{x}$; 2) $y = \frac{-2}{x}$; 3) $y = \frac{3}{2x}$; 4) $y = -\frac{1}{2x}$; 5) $y = \frac{3}{x-1}$; 6) $y = \frac{-1}{x-1}$; 7) $y = \frac{3}{x} - 3$;

8) $y = \frac{3}{x-1} + 2$; 9) $y = -\frac{3}{x} - 2$; 10) $y = \left| \frac{3}{|x|} \right|$; 11) $y = -\frac{3}{|x|}$; 12) $y = \frac{2}{|x|} - 1$;

$$13) y = \frac{3}{|x-1|} + 1; \quad 14) y = \frac{1}{|x+2|} - 2; \quad 15) y = \frac{3}{|2x-1|} - 4; \quad 16) y = -\left| \frac{3}{|3-x|} + 1 \right|.$$

§12. კავშირი ორი რიცხვის საშუალო არითმეტიკულსა და გეომეტრიულს შორის

საშუალო

განსაზღვრება: ორი a და b რიცხვის საშუალო არითმეტიკული ეწოდება $\frac{a+b}{2}$ რიცხვს.

განსაზღვრება: ორი არაუარყოფითი a და b რიცხვის საშუალო გეომეტრიული ეწოდება \sqrt{ab} რიცხვს.

თეორემა: ორი ნებისმიერი არაუარყოფითი a და b რიცხვის საშუალო არითმეტიკული მეტია ან ტოლი მათ საშუალო გეომეტრიულზე, ამასთან ტოლობა სრულდება მხოლოდ $a = b$ -სათვის.

დამტკიცება: რადგან a და b არაუარყოფითი რიცხვებია, ამიტომ \sqrt{a} და \sqrt{b} მნიშვნელობები განსაზღვრულია, მაშასადამე

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a - \sqrt{ab} + b) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

ე.ი.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

თეორემის მეორე ნაწილის სამართლიანობა კი გამომდინარეობს იქედან, რომ ზემო აღნიშნულ მტკიცებულებაში ტოლობა შესაძლებელია როცა $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, საიდანაც ცხადია, რომ $a = b$.

თეორემა დამტკიცებულია.

$\frac{1}{a} \quad a \neq 0$ რიცხვის შებრუნებული ეწოდება $\frac{1}{a}$ -რიცხვს.

შედეგი 1. ვთქვათ $a > 0$, მაშინ $a + \frac{1}{a} \geq 2$. ტოლობას ადგილი აქვს, როცა $a = 1$.

ამ წინადადების სამართლიანობი საჩვენებლად, საკმარისია გემოაღნიშნულ თეორემაში b -ს ნაცვლად შევიტანოთ $\frac{1}{a}$.

§13. არითმეტიკული პროგრესია და მისი თვისებები

განსაზღვრება: რიცხვთა (a_n) მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი დანწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრზე ერთი და იგივე d რიცხვის დამატებით არითმეტიკული პროგრესია ეწოდება. ამ ერთი და იგივე d რიცხვს, არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია (a_n) არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა გამოითვლება ფორმულებით:

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}; \quad d = \frac{a_m - a_n}{m - n}.$$

არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

სადაც a_n - არითმეტიკული პროგრესიის მე- n -ე წევრია, a_1 - პროგრესიის პირველი წევრია და d - პროგრესიის სხვაობა.

განსაზღვრება: არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის სხვაობა მეტია ნულზე ზრდადი არითმეტიკული პროგრესია ეწოდება.

განსაზღვრება: არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის სხვაობა ნაკლებია ნულზე კლებადი არითმეტიკული პროგრესია ეწოდება.

რიცხვთა მიმდევრობა წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ნებისმიერი წევრი დაწყებული მეორედან წარმოადგენს მის წინა და მომდევნო წევრების საშუალო არითმეტიკულს. ე.ი. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

თუ საკორდინატო სიბრტყეზე აღვნიშნავთ წერტილებს $(n; a_n)$ კოორდინატებით, მაშინ ყველა წერტილი მოთავსებული იქნება $y = d(x - 1) + a_1$ წრფეზე, სადაც d - არითმეტიკულ პროგრესიის სხვაობაა, a_1 - არითმეტიკულ პროგრესიის პირველი წევრი, n - წევრის ნომერი და b_n - არითმეტიკული პროგრესიის მე- n -ე წევრი. ეს კი ნიშნავს, რომ არითმეტიკული პროგრესია წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე.

არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი გამოითვლება ფორმულებით:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n \quad \text{და} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

13.1. (a_n) არითმეტიკული პროგრესიაში მოცემულია

- ა) $a_1 = -3$; $d = -2$ იპოვეთ a_{10} .
- ბ) $a_9 = 20$ იპოვეთ S_{17} .
- გ) $S_{16} = 128$; $d = 2$ იპოვეთ a_1 .
- დ) $a_{32} = 76$; $d = 3$ იპოვეთ a_{15} .
- ე) $a_1 = 4$; $a_9 = -12$ იპოვეთ S_{15} .
- ვ) $a_1 = -12$; $d = 6$; $a_n = 144$ იპოვეთ n .
- ზ) $a_1 = -10$; $S_8 = 88$ იპოვეთ d .
- თ) $a_5 = 7$; $a_9 = 19$ იპოვეთ a_{15} .
- ი) $a_7 + a_{11} + a_{14} + a_{16} = 120$ იპოვეთ a_{12} .
- კ) $S_n = 3n^2 - n$ იპოვეთ d .

13.2. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის უდიდესი უარყოფითი წევრი, თუ $a_1 = 42$ და $d = -1\frac{1}{2}$.

13.3. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესის უმცირესი დადებითი წევრი, თუ $a_1 = -42$ და $d = 1\frac{1}{2}$.

13.4. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესის ყველა დადებითი წევრის ჯამი, თუ $a_1 = 40$ და $d = -\frac{3}{5}$.

13.5. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესის ყველა უარყოფითი წევრის ჯამი, თუ $a_1 = -35\frac{3}{4}$ და $d = \frac{3}{4}$.

13.6. ამოხსენით განტოლება: ა) $1 + 3 + 5 + \dots + (x + 1) = 400$

$$ბ) 2 + 4,5 + 7 + \dots + (x + 30) = 515$$

13.7. მორბენალმა პირველ წუთში გაირბინა 10 მეტრი, ხოლო ყოველ შემდეგ წუთში 1 მეტრით მეტი ვიდრე წინაში. რამდენ წუთში გაირბენს მორბენალი 280 მეტრს?.

§14. გეომეტრიული პროგრესია და მისი თვისებები

განსაზღვრება: რიცხვთა (b_n) მიმდევრობას $(b_1 \neq 0)$, რომლის ყოველი წევრი დანყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრზე ერთი და იგივე $q \neq 0$ რიცხვის გამრავლებით გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება. ამ ერთი და იგივე q რიცხვს, გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია (b_n) გეომეტრიული პროგრესია $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$.

გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი გამოითვლება ფორმულებით:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}}; \quad q^{m-n} = \frac{b_m}{b_n}.$$

გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

სადაც, b_n - გეომეტრიული პროგრესიის მე- n -ე წევრია, b_1 - პროგრესიის პირველი წევრია და q - პროგრესიის მნიშვნელი.

განსაზღვრება: გეომეტრიულ პროგრესიას ეწოდება ზრდადი თუ $b_1 > 0$, $q > 1$ ან $b_1 < 0$, $0 < q < 1$.

განსაზღვრება: გეომეტრიულ პროგრესიას ეწოდება კლებადი თუ $b_1 < 0$, $q > 1$ ან $b_1 > 0$, $0 < q < 1$.

შენიშვნა: თუ $q < 0$, მაშინ გეომეტრიული პროგრესია არც ზრდადია და არც კლებადი, რადგან მისი წევრების ნიშანმონაცვლეობითი ნიშნები აქვს.

რიცხვთა მიმდევრობა წარმოადგენს გეომეტრიული პროგრესიას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ნებისმიერი წევრი დაწყებული მეორედან წარმოადგენს მის წინა და მომდევნო წევრების საშუალო გეომეტრიულს. ე.ი. $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

თუ საკორდინატო სიბრტყეზე აღვნიშნავთ წერტილებს $(n; b_n)$ კოორდინატებით, მაშინ ყველა წერტილი მოთავსებული იქნება $y = b_1 \cdot q^{x-1}$ ფორმულით მოცემული ფუნქციის გრაფიკზე, სადაც q -გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელია, b_1 -გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი, n -წევრის ნომერი და b_n -გეომეტრიული პროგრესიის მე- n -ე წევრი. ეს კი ნიშნავს, რომ გეომეტრიული პროგრესია როცა

$q > 0$ წარმოადგენს ხარისხოვან ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე.

გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი გამოითვლება ფორმულებით:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} \text{ როცა } q \neq 1 \text{ და } S_n = n \cdot b_1 \text{ როცა } q = 1$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ როცა } q \neq 1$$

უსასრულოთ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამი გამოითვლება ფორმულით

$$S = \frac{b_1}{1 - q} \text{ როცა } |q| < 1$$

14.1. გეომეტრიულ პროგრესიაში: ა) $b_1 = \frac{1}{4}$; $q = 2$ იპოვეთ b_6

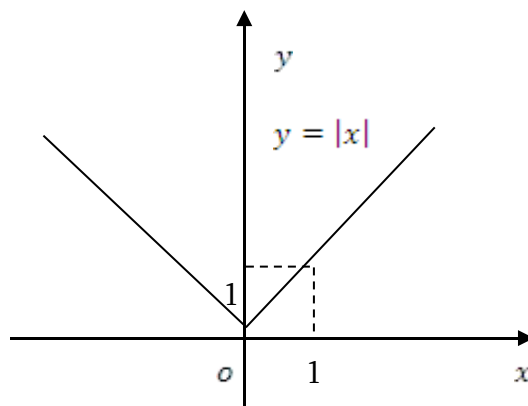
ბ) $b_1 = 3$; $b_2 = 6$ იპოვეთ S_5

გ) $b_1 = 3$; $q = -2$ იპოვეთ S_6

დ) $b_8 = -640$; $q = -2$ იპოვეთ b_4 .

1. ფუნქციის განსაზღვრის არე. მოდული ცალსახადაა განსაზღვრული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისათვის. ე.ი. $D(|x|) = R$.
2. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე. $E(|x|) = [0; +\infty[$.
3. პერიოდულობა. $y = |x|$ ფუნქცია არაპერიოდულია, რადგან ნულის ტოლ მნიშვნელობას ფუნქცია ღებულობს მხოლოდ $x = 0$ -ში.
4. ლუნ-კენტონება. $y = |x|$ ფუნქცია ლუნია, რადგან ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის სამართლიანია $|-x| = x$ ტოლობა.
5. საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. $y = |x|$ ფუნქციის გრაფიკი საკოორდინატო ღერძებს კვეთს წერტილში, რომლის კოორდინატებია $(0; 0)$.
6. ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები. განსაზღვრების თანახმად მოდული ღებულობს არაუარყოფით მნიშვნელობებს.
7. უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა. $y = |x|$ ფუნქციას უდიდესი მნიშვნელობა არ გააჩნია, რადგან მისი მნიშვნელობა უსასრულოდ იზრდება x -ის ზრდასთან ერთად. უმცირესი მნიშვნელობა ნულის ტოლია.
8. ზრდადობის და კლებადობის შუალედები. $y = |x|$ ფუნქცია ზრდადია $x \in [0; +\infty[$ შუალედში (რადგან ამ შუალედში ის ემთხვევა წრფივი $y = x$ ფუნქციას) და კლებადია $x \in]-\infty; 0]$ შუალედში (რადგან ამ შუალედში ის ემთხვევა წრფივი $y = -x$ ფუნქციას).
9. ასიმტოტები. $y = |x|$ ფუნქციის ასიმტოტაა $y = \pm x$.

ფუნქციის გრაფიკები გამოსახულია ნახაზზე.



15.1. მოცემული ორმაგი უტოლობები ჩაწერეთ მოდულის ნიშნის გამოყენებით:

ა) $-3 \leq x \leq 3$; ბ) $-5 < x - 1 < 5$; გ) $3 \leq x \leq 11$; დ) $-7 < x < -1$.

15.2. ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $y = -|x|$ ბ) $y = |x| + 2$ გ) $y = -|2x + 1|$ დ) $y = |3x - 2|$

ე) $y = |x^2 - 4|$ ვ) $y = |-x^2 + 1|$ ზ) $y = |x^2 + 3x - 4|$ თ) $y = \frac{1}{|x+1|}$

ი) $y = \frac{2}{|x+3|} - 1$ კ) $y = |-|1 - x||$ ლ) $y = |-|1 + 2x||$ მ) $y = |-|x^2 + 3|x| - 4||$.

15.3. გამოთვალეთ:

ა) $|3 - 2\sqrt{3}| + |5 - 2\sqrt{3}|$; ბ) $|1 - 3\sqrt{2}| + |1 - 3\sqrt{2}|$; გ) $|3 - 2\sqrt{5}| + |5 - 2\sqrt{5}|$;

დ) $\left| \frac{2\sqrt{3}-2}{3} - \frac{1}{2} \right| - \left| \frac{2\sqrt{3}-1}{3} - 1 \right|$; ე) $\left| \frac{5\sqrt{5}-7}{5} - 1 \right| - \left| \frac{3\sqrt{5}-4}{3} - 1 \right|$; ვ) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}$;

ზ) $\sqrt{(\sqrt{7}-4)^2} + \sqrt{(4-2\sqrt{7})^2}$; თ) $\sqrt{19-8\sqrt{3}} - \sqrt{12-6\sqrt{3}}$.

15.4. ა) თუ $x < 0$; $y > 0$ მაშინ რას უდრის $|x - 2y| - |x - y|$ გამოსახულების

მნიშვნელობა.

ბ) თუ $x < 0$; $y > 0$ მაშინ რას უდრის $\frac{|x^3 - y^3|}{x^2 + xy + y^2}$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

გ) იპოვეთ $|a - b|$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა თუ

$$2 \leq a \leq 5; \quad 7 \leq b \leq 9.$$

§16. ხარისხი ნატურალური, მთელი და რაციონალური მაჩვენებლით

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-ჯერ}};$$

$$a^1 = a;$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n}.$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

$$a^0 = 1 \text{ თუ } a \neq 0;$$

$$1^n = 1.$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n;$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}.$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a};$$

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}.$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ თუ } b \neq 0;$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = \begin{cases} a & \text{როცა } a \geq 0 \\ -a & \text{როცა } a < 0 \end{cases}$$

16.1. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

$$\text{ა) } 0,3^{-3} + \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} + (-0,5)^{-2} \cdot \frac{3}{4} + (-1)^8 \cdot 6;$$

$$\text{ბ) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} + \left(\frac{6}{17}\right)^0 \cdot \frac{1}{8} - 0,25^{-2} \cdot 16.$$

16.2. გამოთვალეთ:

$$\text{ა) } \frac{27^{\frac{1}{3}} - 81^{\frac{1}{4}} \cdot 5}{36^{-\frac{1}{2}}};$$

$$\text{ბ) } \frac{8^{\frac{2}{3}} - 121^{\frac{1}{2}}}{10 \cdot 2,25^{\frac{1}{2}} + (-1)^3 \left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 5\frac{1}{3}}$$

$$\text{გ) } \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 1\frac{2}{3}}{\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} - 7 \cdot 2^{-2}};$$

$$\text{დ) } \frac{16^{\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{2,5^2}.$$

16.3. იპოვეთ $2\frac{1}{2}a^{-2}b^4 \cdot 3,2a^6b^{-6}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $a = 1,5$ და $b = 0,5$.

16.4. გამოთვალეთ:

$$\text{ა) } \left(1\frac{1}{2}\right)^2 ab^{-3} \cdot 4a^5b^{-5};$$

$$\text{ბ) } \left(\frac{4a^{-3}}{b^6}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{4a^3}{b^2}\right)^2;$$

$$\text{ბ) } \left(\frac{1}{x^{-1}} - 2 \cdot (x-1)^{-1} \right)^{-1} \cdot (1 - (x-1)^{-1}); \quad \text{ფ) } \left(a + (a - a^{-1})^{-1} \right) : \frac{(a+1)^{-1}}{a^{-3}}.$$

16.5. გამოთვალოთ:

$$\begin{aligned} & 1) \sqrt{25} \quad 2) \sqrt{36} \quad 3) \sqrt{225} \quad 4) \sqrt{\frac{16}{25}} \quad 5) \sqrt{2\frac{14}{25}} \quad 6) \sqrt{0} \quad 7) \sqrt{0.01} \quad 8) \sqrt{7^2} \quad 9) \sqrt{(-4)^2} \\ & 10) \sqrt{(1-4)^2} \quad 11) \sqrt{(7-21)^2} \quad 12) -\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} \quad 13) \sqrt{(5-4)^2} \quad 14) \sqrt{5-2\sqrt{6}} \\ & 15) \sqrt{3+2\sqrt{2}} \quad 16) -3\sqrt{(-4)^2} \quad 17) \sqrt[3]{5^3} \quad 18) \sqrt[3]{6^3} \quad 19) \sqrt[4]{7^4} \quad 20) \sqrt[5]{3^5} \\ & 21) \sqrt[3]{(-7)^3} \quad 22) \sqrt[4]{(-6)^4} \quad 23) \sqrt[5]{5^5} \quad 24) \sqrt[6]{(-2)^2} \quad 25) \sqrt[3]{(-3)^3} \quad 26) \sqrt[3]{(-27)^3} \\ & 27) \sqrt[5]{5^3} \quad 28) \sqrt[3]{(-7)^7} \quad 29) \sqrt[3]{64} \quad 30) \sqrt[4]{81} \quad 31) \sqrt[5]{3\frac{3}{8}} \quad 32) \sqrt[3]{8 \cdot 27} \quad 33) \sqrt[4]{16 \cdot 0,0001} \\ & 35) \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} \quad 36) \sqrt{27} \cdot \sqrt{12} \quad 37) \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} \quad 38) \sqrt{50} : \sqrt{2} \quad 39) \sqrt{\frac{243}{98}} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}} \\ & 40) \sqrt{40} \cdot \sqrt{3,6} - \sqrt{9 \cdot (-5)^2}. \end{aligned}$$

16.6. გამოიტანეთ მამრავლი ფესვის გარეთ

$$\begin{aligned} & 1) \sqrt{32} \quad 2) \sqrt{56} \quad 3) \sqrt{90} \quad 4) \frac{1}{2}\sqrt{54} \quad 5) \sqrt{12,1} \quad 6) \sqrt{0,001} \quad 7) \sqrt{75x^3} \\ & 8) \sqrt{-x^7 \cdot y^2} \quad \text{თუ } x < 0; y \geq 0; \quad 9) \sqrt{-2x^7 \cdot y^3} \quad \text{თუ } x < 0; y \geq 0; \\ & 10) \sqrt{a^5 \cdot b^3} \quad \text{თუ } a < 0; b < 0; \quad 11) \sqrt{\frac{4xy^3}{27}} \quad \text{თუ } x < 0; y < 0; \\ & 12) \sqrt{\frac{x^5}{y^2}} \quad 13) \sqrt{\frac{x^5}{a^2b^2}} \quad 14) \sqrt{3y^5z^3} \quad 15) \sqrt{9y^7z^9}. \end{aligned}$$

16.7. შეიტანეთ მამრავლი ფესვის შიგნით

$$\begin{aligned} & 1) 3\sqrt{2} \quad 2) 2\sqrt{6} \quad 3) 9\sqrt{10} \quad 4) \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad 5) 4\sqrt{0,1} \quad 6) 5\sqrt{0,01} \quad 7) 7\sqrt{5x^3} \\ & 8) x\sqrt{-x^4 \cdot y^3} \quad \text{თუ } x < 0; y \geq 0; \quad 9) -y\sqrt{-2x^2 \cdot y^5} \quad \text{თუ } x < 0; y \geq 0; \\ & 10) a\sqrt{a^3 \cdot b^6} \quad \text{თუ } a < 0; b < 0; \quad 11) -x\sqrt{\frac{xy^3}{7}} \quad \text{თუ } x < 0; y < 0; \\ & 12) \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x^5}{y^2}} \quad 13) -a\sqrt{\frac{x^5}{a^2b^2}} \quad 14) -y\sqrt{3y^2z^3} \quad 15) x^2y^3\sqrt{y^6z^9}. \end{aligned}$$

16.8. მოსპეთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში

$$1) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 2) \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} \quad 3) \frac{3}{\sqrt[3]{8}} \quad 4) \frac{a}{\sqrt{40}} \quad 5) \frac{xy}{\sqrt{2^3}} \quad 6) \frac{5}{\sqrt[3]{11}} \quad 7) \frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad 8) \frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \quad 9) \frac{1}{\sqrt[3]{4+1}} \quad 10) \frac{2x}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}}.$$

16.9. გამოთვალეთ:

- 1) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{16}$; 2) $\sqrt{36} \cdot \sqrt[4]{81}$; 3) $\sqrt{16} \cdot \sqrt[5]{8}$; 4) $\sqrt{49} \cdot \sqrt[5]{32}$; 5) $\sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[5]{243}$;
- 6) $2\sqrt{18} - 3\sqrt{8} + 3\sqrt{32} - \sqrt{50}$; 7) $2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{80}$; 8) $2\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128}$;
- 9) $(2\sqrt{18} + 3\sqrt{50}) \cdot 2\sqrt{2}$; 10) $(\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}) \cdot \sqrt[3]{32}$; 11) $(3\sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{54}) : 3\sqrt[3]{2}$;
- 12) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}} : \sqrt{\frac{3}{28}}$; 13) $\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{2+\sqrt{3}}{3}$; 14) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 15) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}}$; 16) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;
- 17) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{5^{12}}}$; 18) $\sqrt{\sqrt[3]{1024}}$; 19) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{64}}$; 20) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$.

16.10. შესრულეთ მოქმედებები შემოკლებული გამრავლების ფორმულებით:

- 1) $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$; 2) $(6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3})$; 3) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$;
- 4) $(3 - 4\sqrt{2})(3 + 4\sqrt{2})$; 5) $(1 - \sqrt{7})^2$; 6) $(2\sqrt{3} - \sqrt{7})^2$; 7) $(\sqrt{2} + 1)^2$;
- 8) $\sqrt{5 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{3} + 5}$; 9) $\sqrt{8 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{8 + 2\sqrt{3}}$; 10) $\sqrt[4]{7 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{7 + \sqrt{33}}$;
- 11) $\sqrt[5]{10 - \sqrt{73}} \cdot \sqrt[5]{10 + \sqrt{73}}$; 12) $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{27})$;
- 13) $\sqrt{4 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}}$; 14) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[5]{7 + 4\sqrt{3}}$; 15) $\sqrt[5]{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$.

16.11. დაალაგეთ ზრდის მიხედვით:

- 1) $\sqrt{49}, \sqrt{50}, 4\sqrt{3}$; 2) $4\sqrt{2}, 6, \sqrt{33}$; 3) $\sqrt{0,5}, \frac{1}{2}, \sqrt[3]{0,5}$; 4) $2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}$.

16.12. გაამარტივეთ და გამოთვალეთ:

- 1) $(1 - \frac{1}{x^2}) : \frac{x+1}{x^2}$ თუ $x = \sqrt{3} + 1$;
- 2) $(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}) \cdot \frac{x^2 y^2}{x-y}$ თუ $x = 3 + \sqrt{5}, y = 2 - \sqrt{5}$;
- 3) $\frac{5x^3 y + 5xy^3}{x^4 - y^4} \cdot (\frac{1}{x^2 - y^2})^{-1}$ თუ $x = \sqrt{6}, y = \sqrt{\frac{2}{3}}$;
- 4) $(\frac{\sqrt[3]{4x^3-1}}{\sqrt[3]{2x-1}} - 1)^6 \cdot x^{-2}$ თუ $x = \sqrt{\sqrt[3]{3}}$.

§17. ხარისხოვანი ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

განსაზღვრება: $y = x^n$ სახის ფუნქციას, სადაც n მთელი რიცხვია ეწოდება ხარისხოვანი ფუნქცია მთელი მაჩვენებლით.

შევნიშნოთ, რომ ხარისხოვანი ფუნქციის კერძო შემთხვევებია უკუპროპორციულობის $y = \frac{1}{x}$ ($n = -1$) ფუნქცია, წრფივი $y = x$ ($n = 1$) ფუნქცია, კვადრატული $y = x^2$ ($n = 2$) ფუნქცია. როცა $n = 0$ ფუნქცია იგიურად ერთის ტოლია, გარდა $x = 0$ წერტილისა, სადაც ფუნქცია განსაზღვრული არაა.

ხარისხოვანი ფუნქციის თვისებები დამოკიდებულია n -ის მნიშვნელობებზე. განვიხილოთ ოთხი შემთხვევა:

- 1) n რიცხვი დადებითია და ლუწი,
- 2) n რიცხვი დადებითია და კენტი,
- 3) n რიცხვი უარყოფითია და ლუწი,
- 4) n რიცხვი უარყოფითია და კენტი.

1. ხარისხის მაჩვენებელი n დადებითია და ლუწი

ხარისხოვანი ფუნქცია ამ შემთხვევაში $y = x^{2k}$ ფორმულით მოიხსნება, სადაც k ნატურალური რიცხვია.

1. ფუნქციის განსაზღვრის არე. x^{2k} - გამოსახულების მნიშვნელობა ცალსახადაა განსაზღვრული ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის, ამიტომ ხარისხოვანი ფუნქციის განსაზღვრის $n = 2k$ -სათვის არის ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. ე.ი. $D(x^{2k}) = R$.

2. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს წარმოადგენს $[0; +\infty[$. ე.ი. $E(x^{2k}) = [0; +\infty[$.

3. პერიოდულობა. $y = x^{2k}$ ფუნქცია არაპერიოდულია, რადგან ის ნულის ტოლ მნიშვნელობას ღებულობს მხოლოდ ერთხელ კერძოდ $x = 0$ წერტილში.

4. ლუნ-კენტოვნება. $y = x^{2k}$ ფუნქცია ლუწია, რადგან

$$y(-x) = (-x)^{2k} = (-1)^{2k} x^{2k} = x^{2k} = y(x).$$

5. საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. რადგან $x^{2k} = 0$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსენი ($x = 0$), ამიტომ $y = x^{2k}$ ფუნქციის გრაფიკი

საკორდინატო ღერძებს გადაკვეთს $(0;0)$ წერტილში (საკორდინატო სობრტყის სათავეში).

6. ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები. $y = x^{2k}$ ფუნქცია ღებულობს დადებით მნიშვნელობებს $x \neq 0$. როცა $x = 0$ წერტილში ის ნულის ტოლია.

7. უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა. $y = x^{2k}$ ფუნქციას მაქსიმუმი არ გააჩნია. მინიმუმი კი ნულის ტოლია.

8. ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.

$y = x^{2k}$ ფუნქცია ზრდადია $[0, +\infty[$ შუალედში და კლებადია $]-\infty; 0]$.

9. ასიმტოტები. $y = x^{2k}$ ფუნქციას ასიმტოტა არა აქვს.

2. ხარისხის მაჩვენებელი n დადებითია და კენტი

ხარისხოვანი ფუნქცია ამ შემთხვევაში $y = x^{2k+1}$ ფორმულით მოიცემა, სადაც k ნატურალური რიცხვია.

1. ფუნქციის განსაზღვრის არე. $D(x^{2k+1}) = R$.

2. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს წარმოადგენს მთელ რიცხვთა სიმრავლე.

ე.ი. $E(x^{2k+1}) = R$.

3. პერიოდულობა. $y = x^{2k+1}$ ფუნქცია არაპერიოდულია.

4. ლუნ-კენტოვნება. $y = x^{2k+1}$ ფუნქცია კენტია.

$$y(-x) = (-x)^{2k+1} = (-1)^{2k+1}x^{2k+1} = -x^{2k+1} = -y(x).$$

5. საკორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. ამიტომ $y = x^{2k+1}$ ფუნქციის გრაფიკი საკორდინატო ღერძებს გადაკვეთს $(0;0)$ წერტილში (საკორდინატო სობრტყის სათავეში).

6. ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები. $y = x^{2k+1}$ ფუნქცია ღებულობს დადებით მნიშვნელობებს, როცა $x > 0$ და უარყოფით მნიშვნელობებს როცა $x < 0$.

7. უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა. $y = x^{2k+1}$ ფუნქციას მაქსიმუმი და მინიმუმი არ გააჩნია.

8. ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.

$y = x^{2k+1}$ ფუნქცია ზრდადია მთელ რიცხვით ღერძზე $]-\infty; +\infty[$.

9. ასიმტოტები. $y = x^{2k+1}$ ფუნქციას ასიმტოტაა არა აქვს.

3. ხარისხის მაჩვენებელი n უარყოფითია და ლუწი

ხარისხოვანი ფუნქცია ამ შემთხვევაში $y = \frac{1}{x^{2k}}$ ფორმულით მოიცემა, სადაც k ნატურალური რიცხვია.

1. ფუნქციის განსაზღვრის არე. $D\left(\frac{1}{x^{2k}}\right) = R \setminus \{0\}$.

2. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს წარმოადგენს მთელ რიცხვთა სიმრავლე. ე.ი. $E\left(\frac{1}{x^{2k}}\right) = R$.

3. პერიოდულობა. $y = \frac{1}{x^{2k}}$ ფუნქცია არაპერიოდულია.

4. ლუწ-კენტოვნება. $y = \frac{1}{x^{2k}}$ ფუნქცია ლუწია.

5. საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. $y = \frac{1}{x^{2k}}$ ფუნქციის გრაფიკი საკოორდინატო ღერძებს არ გადაკვეთს.

6. ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები. $y = \frac{1}{x^{2k}}$ ფუნქცია ღებულობს დადებით მნიშვნელობებს, როცა $x \neq 0$.

7. უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა. $y = \frac{1}{x^{2k}}$ ფუნქციას მაქსიმუმი და მინიმუმი არ გააჩნია.

8. ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.

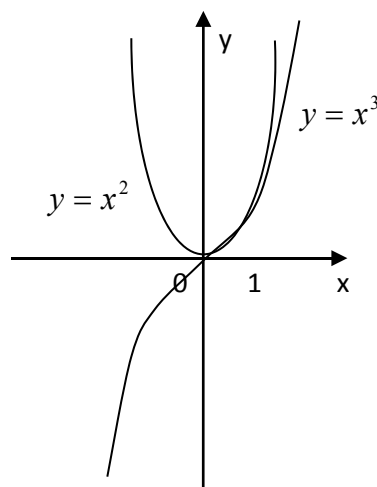
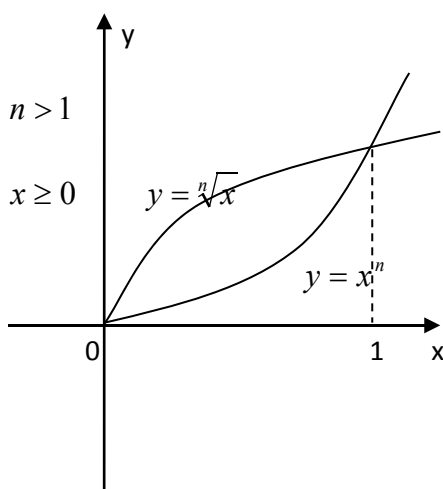
$y = \frac{1}{x^{2k}}$ ფუნქცია ზრდადია $(-\infty; 0)$ შუალედში და კლებადია $(0; +\infty)$ შუალედში.

9. ასიმტოტები. $y = \frac{1}{x^{2k}}$ ფუნქციის ასიმტოტებია $x = 0$ და $y = 0$ წრფეები.

4. ხარისხის მაჩვენებელი n უარყოფითია და კენტია

ხარისხოვანი ფუნქცია ამ შემთხვევაში $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$ ფორმულით მოიცემა, სადაც k ნატურალური რიცხვია.

1. ფუნქციის განსაზღვრის არე. $D\left(\frac{1}{x^{2k-1}}\right) = R \setminus \{0\}$.
2. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს წარმოადგენს მთელ რიცხვთა სიმრავლე. ე.ი. $E\left(\frac{1}{x^{2k}}\right) = R \setminus \{0\}$.
3. პერიოდულობა. $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$ ფუნქცია არაპერიოდულია.
4. ლუნ-კენტოვნება. $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$ ფუნქცია კენტია.
5. საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$ ფუნქციის გრაფიკი საკოორდინატო ღერძებს არ გადაკვეთს.
6. ფუნქციის ნიშანშეცვლის შუალედები. $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$ ფუნქციის მნიშვნელობები უარყოფითია, როცა $x < 0$ და დადებითია, როცა $x > 0$.
7. უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა. $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$ ფუნქციას მაქსიმუმი და მინიმუმი არ გააჩნია.
8. ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.
 $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$ ფუნქცია კლებადაა $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ შუალედში.
9. ასიმტოტები. $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$ ფუნქციის ასიმტოტებია $x = 0$ და $y = 0$ წრფეები.



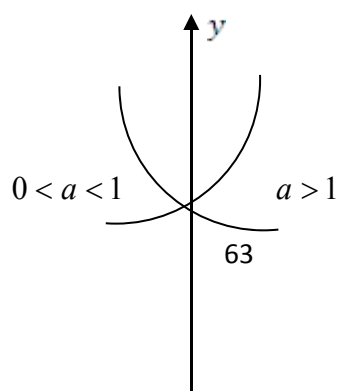
17.1. ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკები:

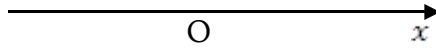
- 1) $y = x^4$; 2) $y = 2x^2$; 3) $y = \frac{1}{2}x^3$; 4) $y = x^5$; 5) $y = \sqrt[3]{x}$; 6) $y = (x - 1)^2$;
 7) $y = -x^3$; 8) $y = -x^6$; 9) $y = -\sqrt[3]{x}$; 10) $y = -x^4 + 1$; 11) $y = \sqrt{x} - 1$.

§18. მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

განსაზღვრება: $y = a^x$ სახის ფუნქციას, სადაც $a > 0$, $a \neq 1$ მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება.

- ფუნქციის განსაზღვრის არე. მაჩვენებლიანი ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვითა სიმრავლე. ე.ი. $D(a^x)$.
- ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე. მაჩვენებლიანი ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე. ე.ი. $E(a^x) = F$
- პერიოდულობა. მაჩვენებლიანი $y = a^x$ ფუნქცია არაპერიოდულია.
- ლუნ-კენტოვნება. მაჩვენებლიანი $y = a^x$ ფუნქცია არც კენტია და არც ლუნი.
- საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. მაჩვენებლიანი $y = a^x$ ფუნქციის გრაფიკი ორდინატთა ღერძს კვეთს $(0; 1)$ წერტილში, აბსცისთა ღერძს არ გადაკვეთს.
- ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები. მაჩვენებლიანი $y = a^x$ ფუნქციის მნიშვნელობები დადებითია ნებისმიერი x -სათვის.
- უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა. მაჩვენებლიან $y = a^x$ ფუნქციას მაქსიმუმი და მინიმუმი არ გააჩნია.
- ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.
როცა $a > 1$, მაჩვენებლიანი $y = a^x$ ფუნქცია ზრდადია.
როცა $0 < a < 1$, მაჩვენებლიანი $y = a^x$ ფუნქცია კლებადია.
- ასიმტოტები. მაჩვენებლიანი $y = a^x$ ფუნქციის ასიმტოტაა $y = 0$ წრფე (Ox ღერძი).





$$a^x = a^y \Rightarrow x = y.$$

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b.$$

როცა $1 < a < b$, მაშინ $a^x < b^x$ თუ $x > 0$ და $a^x > b^x$ თუ $x < 0$.

როცა $0 < a < b < 1$, მაშინ $a^x < b^x$ თუ $x > 0$ და $a^x > b^x$ თუ $x < 0$.

18.1. ამოხსენით განტოლება:

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } \sqrt[6]{4^{2x-1}} = 2; & \text{ბ) } 2^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 8; & \text{გ) } 15^x \cdot 5^{-x} = 27; \\ \text{დ) } \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{x-1} = \frac{3}{8}; & \text{ე) } 4^x \cdot 3^x = \frac{1}{12} \cdot 12^{5x-5}; & \text{ვ) } 4^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{64}\right)^x; \\ \text{ზ) } 5 \cdot 2^{3x-3} - 12 \cdot 2^{3-3x} + 7 = 0; & \text{თ) } 7 \cdot 4^{x-1} + 14^{x-1} = 8 \cdot 49^{x-1}; & \text{ი) } 2^{x-3} - 2^x = -7; \\ \text{კ) } 7^{x+2} + 7^x = 350; & \text{ლ) } 25^x + 5^x - 2 = 0; & \text{მ) } 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0; \\ \text{ნ) } 6^{x-4} + 6^{x-3} + 6^{x-2} = 43. & & \end{array}$$

18.2. ამოხსენით უტოლობა:

$$\begin{array}{l} 1) 5^{4x-x^2} \geq 1; \quad 2) \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}; \quad 3) 3 \cdot 25^x - 2 \cdot 15^x - 5 \cdot 9^x \leq 0; \quad 4) 4^x < 2; \quad 5) 7^x \geq 1; \\ 8) \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 1; \quad 9) 5^{-x+2} < 25; \quad 10) 4^{-x} \geq \frac{1}{64}; \quad 11) 0,3^{2x+1} < 0,09; \quad 12) \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-1} \leq \frac{8}{27}; \\ 13) 3^{x+1} \cdot 2^{2x+2} = 144; \quad 14) 2^{\sqrt{x}} \cdot 7^{\sqrt{x}} < 2^x \cdot 7^x; \quad 15) \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{x-2} > \frac{25}{4}. \end{array}$$

18.3. ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი:

$$\begin{array}{l} 1) y = 2^x; \quad 2) y = -3^x; \quad 3) y = \left(\frac{1}{5}\right)^x; \quad 5) y = 2^{x-1}; \quad 6) y = 3^{2-x}; \quad 7) y = 5^{-x}; \\ 8) y = 2^{-x+1}; \quad 9) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x-1}; \quad 10) y = 2^x + 1; \quad 11) y = -2^x - 1; \quad 12) y = -0,3^x + 1 \end{array}$$

;

$$13) y = -\left(\frac{1}{8}\right)^x + \frac{1}{8}; \quad 14) y = -|7^x + 1|; \quad 15) y = -|-6^{|x|} + 1|$$

18.4. ამოხსენით სისტემა:

$$\begin{array}{llll}
 \text{ა)} \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9} \\ y - x = 2 \end{cases} &
 \text{ბ)} \begin{cases} 7^{x+1} \cdot 2^y = 4 \\ y - x = 3 \end{cases} &
 \text{გ)} \begin{cases} 5^{-x} \cdot 2^y = 200 \\ y + x = 1 \end{cases} &
 \text{დ)} \begin{cases} 27^x = 9^y \\ 81^x \cdot 3^{-y} = 243 \end{cases}
 \end{array}$$

§19. ლოგარითმული ფუნქცია და მისი თვისებები

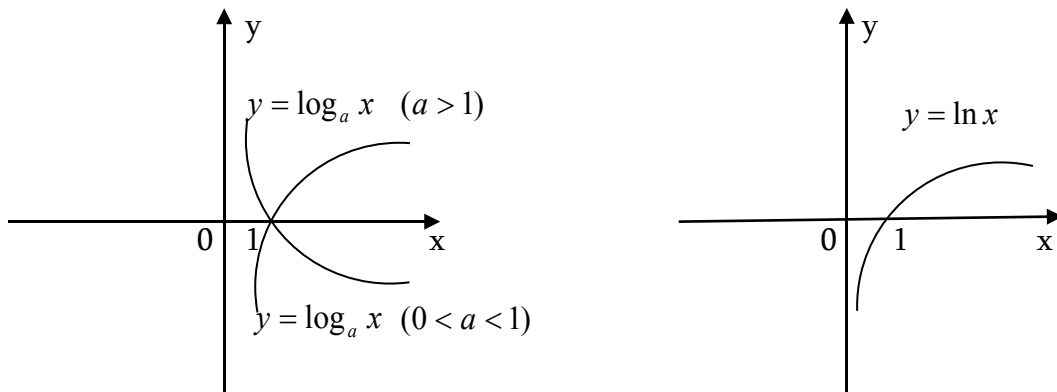
განსაზღვრება: x ცვლადის ლოგარითმი მოცემული a ფუძით, ეწოდება ასახვას რომელიც x -ს შეესაბამებს $-\log_a x$ რიცხვს, სადაც $a > 0; a \neq 1$.

- ფუნქციის განსაზღვრის არე. ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა დადებით რიცხვთა სიმრავლე. ე.ი. $D(\log_a x) = (0, +\infty)$.
- ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე. ლოგარითმული ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. ე.ი. $E(\log_a x) = \mathbb{R}$.
- პერიოდულობა. ლოგარითმული $y = \log_a x$ ფუნქცია არაპერიოდულია.
- ლუნ-კენტოვნება. ლოგარითმული $y = \log_a x$ ფუნქცია არც კენტია და არც ლუნი.
- საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. ლოგარითმული $y = \log_a x$ ფუნქციის გრაფიკი ორდინატთა ღერძს არ კვეთს, აბსცისთა ღერძს გადაკვეთს $(1; 0)$ წერტილში.
- ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები.
როცა $a > 1$, ლოგარითმული $y = \log_a x$ ფუნქცია უარყოფითია $(0, 1)$ შუალედში და დადებითია $(1, +\infty)$ შუალედში.
როცა $0 < a < 1$, ლოგარითმული $y = \log_a x$ ფუნქცია დადებითია $(0, 1)$ შუალედში და უარყოფითია $(1, +\infty)$ შუალედში.
- უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა. ლოგარითმული $y = \log_a x$ ფუნქციას მაქსიმუმი და მინიმუმი არ გააჩნია.
- ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.

როცა $a > 1$, ლოგარითმული $y = \log_a x$ ფუნქცია ზრდადია,

როცა $0 < a < 1$, ფუნქცია კლებადია.

9. ასიმტოტები. ლოგარითმული $y = \log_a x$ ფუნქციას ასიმტოტაა $x = 0$ წრფე (Oy ღერძი).



ლოგარითმის თვისებები

$$\log_{10} x = \lg x; \quad \log_e x = \ln x; \quad \ln x = \frac{\lg x}{\lg e}; \quad e = 2,718\dots$$

$$\lg a = \frac{\ln a}{\ln 10} = \ln a \cdot \lg e.$$

$$a^x = b \Rightarrow \log_a b = x \quad (a \neq 1, a > 0, b > 0).$$

$$a^{\log_a b} = b; \quad 10^{\lg b} = b; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a 1 = 0; \quad \log_a (a^k) = k$$

$$\ln a = 2.3026 \cdot \lg a$$

$$\lg a = 0.4343 \cdot \ln a$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y ; \quad \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y ;$$

$$\log_a (b^c) = c \cdot \log_a b ; \quad \log_a k b^m = \frac{m}{k} \log_a b.$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} ; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} ; \quad \log_{a^c} b = \frac{1}{c} \cdot \log_a b$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a} ; \quad \frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y} .$$

როცა $1 < a < b$, მაშინ $\log_a x < \log_b x$ თუ $x > 1$ და $\log_a x > \log_b x$ თუ $0 < x < 1$.

როცა $0 < a < b < 1$, მაშინ $\log_a x < \log_b x$ თუ $x > 1$ და $\log_a x > \log_b x$ თუ $0 < x < 1$.

19.1. გამოთვალეთ:

ა) $\log_3 81 - \log_2 6$;

ბ) $4^{\log_2 3} + \log_4 64$;

გ) $\log_2 16 - \log_{\frac{1}{2}} 8$;

დ) $5^{\log_{0.2} \frac{1}{3}} + \log_5 125$;

ე) $9^{\log_3 7} + \log_{\frac{1}{3}} 9$;

ვ) $\left(\frac{1}{4} \right)^{\log_4 3} - \log_{\sqrt{2}} 4$;

ზ) $81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \lg 2} \cdot 2^{\log_{\sqrt{2}} 2}$;

თ) $\frac{\log_2 27 - \log_{\frac{1}{3}} 8}{\log_3 2 - \log_{\frac{1}{2}} 3}$;

ი) $\frac{\log_{\frac{1}{3}} 64 + \frac{1}{2} \log_2 125}{\log_3 \frac{1}{64} + \log_{\sqrt[3]{4}} 5}$;

კ) $\log_7 \log_2 \log_4 16$;

ლ) $\log_9 \log_2 \log_5 25$;

მ) $9^{\log_3 \sqrt{4-\sqrt{15}}} \cdot 16^{\log_4 \sqrt{4+\sqrt{15}}}$;

ნ) $\sqrt{10^{2-\frac{1}{2} \lg 16}}$;

თ) $\log_{2.5} 10 \cdot \lg^{\sqrt{2.5}}$;

პ) $(12 + 2^{1+\log_2 5}) \log_2 \sqrt{3} \cdot \log_3 8$;

ჟ) $(10^{\lg 10 - \lg 5} - 5^{\log_5 4 - \log_{\sqrt{5}} 4}) : 5^{\frac{1}{\log_5 7}}$; რ) $\frac{\lg^2 18 - 1}{\lg 180}$; ს) $\frac{\lg 4}{\lg 32}$; ტ) $\log_5 45 + \log_{0.2} 9$;

ყ) $\sqrt{3^{4-6 \log_2 2}}$; ფ) $\left(\frac{1}{5} \right)^{\log_5 15}$.

19.2. ამოხსენით განტოლებას

ა) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$;

ბ) $\lg(2x-1) = 1$;

გ) $\log_5(1 + \log_3 x) = 0$;

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -1; \quad \log_3(2 - 3x) = 1; \quad \log_3(4 - \log_2 x) = 1;$$

$$\log_{3\sqrt[3]{3}} x = \frac{4}{5}; \quad \lg(3x + 97) = 2; \quad \log_4 \log_2(x + 3) = 0$$

$$\text{ა) } \lg(2x - 3) + \frac{1}{2} \lg 9 = \lg(4x + 9); \quad \text{გ) } \log_2(4 - x) + \log_2 5 = 1 + \log_2(7x - 9);$$

$$\text{ბ) } \log_3 x + \log_3 x^2 + \log_3 x^3 = 12; \quad \text{დ) } 4 \log_3 x^3 - \log_3 x = 33;$$

$$\text{თ) } \log_5(5 - 3x) - \log_5(17 + x) = 2; \quad \text{ი) } \log_5(5^{-x} + 4) = x + 1;$$

$$\text{კ) } \frac{1}{2} \log_{\sqrt{10}}(2x - 1) - \log_{\frac{1}{10}}(x - 9) = 2; \quad \text{ლ) } \log_2(14 + 2^x) = 5 - x;$$

$$\text{მ) } \log_3 \frac{2}{|x+2|-3} = 0; \quad \text{ნ) } 2 \log_3 x + \log_3 x^2 - \log_3 x^3 = -2; \quad \text{ო) } \log_2 x^2 + \log_2 x^4 = 18;$$

$$\text{პ) } \lg(x + 3) + \log_{0.1}(x - 3) = 1 + \lg \frac{2}{5}; \quad \text{ჟ) } \log_2(5x - 4) = 1 + \log_2 3 + \log_2(3x - 5);$$

$$\text{რ) } \log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2 = 0; \quad \text{ს) } \frac{1}{12} \lg^2(x - 1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \lg(x - 1); \quad \text{ტ) } \frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1;$$

$$\text{ყ) } 4 \log_4^2(-x) + 2 \log_4 x^2 + 1 = 0; \quad \text{ფ) } 2 \log_2^2(-x - 1) - 3 \log_2(x + 1)^2 + 4 = 0;$$

$$\text{ქ) } -\log_3^2(-x - 2) + 3 \log_3(x + 2)^2 - 9 = 0.$$

19.3. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის განსაზღვრის არე:

$$\text{ა) } y = \lg \frac{2-x}{3x+5}; \quad \text{ბ) } y = \frac{x-1}{\lg x - \lg 5}; \quad \text{გ) } y = \log_3(|x-4|-3); \quad \text{დ) } y = \sqrt{\frac{2-x}{\lg x}}.$$

19.4. ამოხსენით უტოლობა:

$$\text{ა) } \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 5x + 7) < 0; \quad \text{ბ) } \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x - 2) > -2; \quad \text{გ) } \log_{\frac{1}{3}} \log_2(x - 2) < 0;$$

$$\text{დ) } \log_{0.5}^2 x + \log_{0.5} x - 2 \leq -2; \quad \text{ე) } \log_3(9 - 3^{x+3}) < x; \quad \text{ვ) } \frac{\sqrt{\log_2(x-1)}}{x^2 - 4x - 5} > 0.$$

$$\text{თ) } \log_3 x < 2; \quad \text{ი) } \log_{0.3} x > -2; \quad \text{კ) } \log_4 x > 0; \quad \text{ლ) } \log_{\frac{1}{5}} x < -1;$$

მ) $\log_3(x-2) < 2$; ბ) $\log_{0.2}\left(2\frac{1}{5}-2x\right) < 1$; ც) $\lg(x+2) > \lg(6-x)$;

ჰ) $\log_{\frac{1}{5}}(x-1) > \log_{\frac{1}{5}}(5-x)$; ე) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+5) > \log_{\frac{1}{5}}(2x-1)$;

ვ) $\log_2(x^2+3x) < 2$; ბ) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+x-2) > -2$;

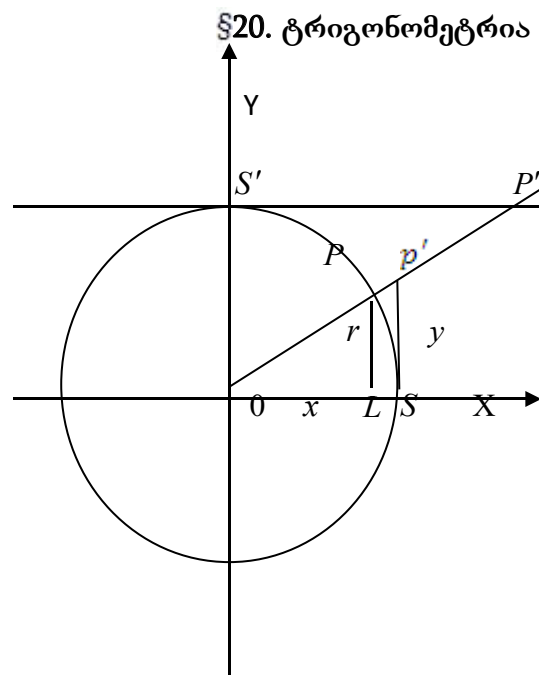
ტ) $\log_{0.6}(x^2+1) < \log_{0.6}(2x-5)$;

უ) $\log_{\frac{2}{3}}x + 2\log_3x - 3 \leq 0$; ფ) $\log_4(2^{x+1}-8) \leq \frac{x}{2}$.

19.5. იპოვეთ $\log_{\frac{1}{5}}28$, თუ $\log_72 = a$.

19.6. იპოვეთ $\log_{\frac{1}{4}}100$, თუ $\log_52 = p$.

19.7. ამოხსენით სისტემა: ა) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 3^x \cdot 9^y = 81 \\ 2 \lg(x+y) - \lg x = 2 \lg 3 \end{cases}$



მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის სინუსი უდრის მოპირდაპირე კათეტის შეფარლებას ჰიპოტენუზასთან.

მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის კოსინუსი უდრის მიმდებარე კათეტის შეფარლებას ჰიპოტენუზასთან.

მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის ტანგენსი უდრის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდებას მიმდებარე კათეტთან.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}, \quad \sec \alpha = \frac{r}{x},$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y}.$$

თუ $r=1$ მაშინ $\sin x$ -ის ხაზია PL , $\cos x$ -ის ხაზია OL ,

$\operatorname{tg} x$ -ის ხაზია $P'S$, $\operatorname{ctg} x$ -ის ხაზია $S'P''$.

§21. დამოკიდებულება ერთი და იგივე არგუმენტის

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \qquad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ტრიგონომეტრიის ძირითადი ტოლობა.

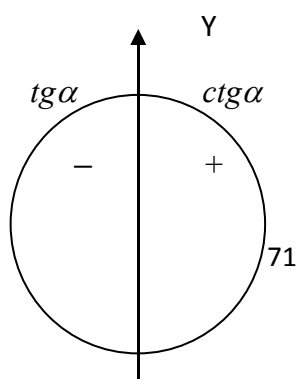
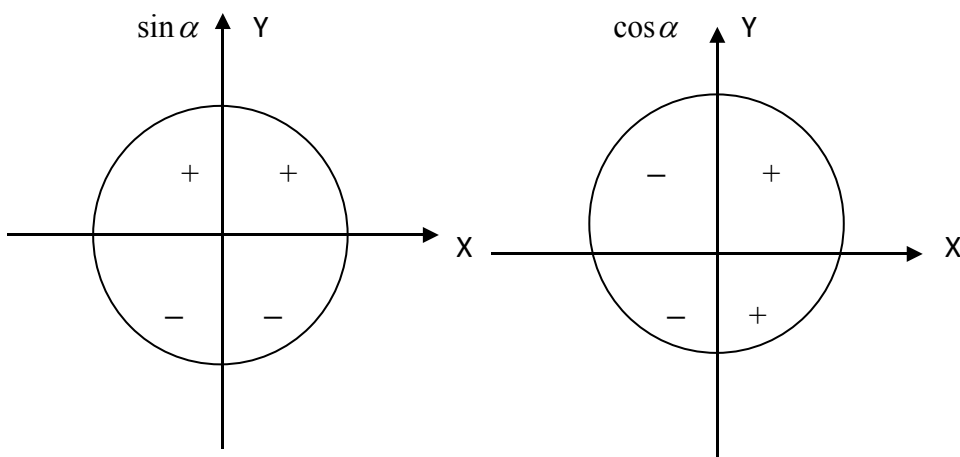
$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

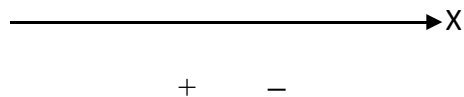
$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

§22. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნიშნები საკოორდინატო მეთხედების

მიხედვით





22.1. რომელი მეოთხედის კუთხეა:

- ა) 87° ; ბ) 123° ; გ) 156° ; დ) 207° ; ე) 248° ; ვ) -271° ; ზ) 309° ; თ) -8° ; ი) 8105° ;
 კ) 2878° ; ლ) $\frac{5\pi}{3}$; მ) $\frac{7\pi}{3}$; ნ) $-\frac{11\pi}{36}$; თ) $\frac{4\pi}{3}$; პ) $\frac{\pi}{13}$; ყ) $\frac{5\pi}{31}$; რ) $-\frac{51\pi}{63}$; ს) $\frac{7\pi}{6}$.

22.2 დაადგინეთ გამოსახულების ნიშანი:

- ა) $203 \cdot \cos 275^{\circ} \cdot \sin 103^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 32^{\circ}$; ბ) $23 \cdot \cos 576^{\circ} \cdot \sin 73^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 312^{\circ}$;
 გ) $\operatorname{ctg} 225^{\circ} \cdot \cos 275^{\circ} \cdot \sin(-103^{\circ}) \cdot \operatorname{tg} 32^{\circ}$;
 დ) $2 \cdot \cos(-175^{\circ}) \cdot \sin(-803) \cdot \operatorname{tg}(-302^{\circ})$.
 ე) $\operatorname{ctg} 195^{\circ} \sin 45^{\circ} \cos 114^{\circ}$; ვ) $\operatorname{tg} 115^{\circ} \sin 123^{\circ} \cos 35^{\circ}$;

§23. კუთხის გრადუსული ზომის გადაყვანა რადიანებში და პირიქით

$$\alpha = \frac{\alpha^{\circ}}{180} \cdot \pi; \quad \alpha^{\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180^{\circ}$$

$\alpha =$ რადიანული ზომა; α° - გრადუსული.

ფუნქცია	კუთხე, გრადუსი				
	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$

ctg	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$
cosec	$+\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
რადიანი	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

23.1. მოცემული კუთხეები გამოსახეთ რადიანებში:

- 1) 30° ; 2) 60° ; 3) 45° ; 4) 120° ; 5) 150° ; 6) 135° ; 7) -30° ; 8) -45° ; 9) -60° ;
 10) -225° ; 11) -270° ; 12) 390° ; 13) 540° ; 14) -1000° ; 15) 3600° .

23.2. გამოსახეთ გრადუსებში:

- 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $-\frac{3\pi}{2}$; 6) 7π ; 7) $\frac{5}{4}\pi$; 8) $-\frac{3}{2}\pi$; 9) 2; 10) $-\pi$.

23.3. გამოთვალეთ:

- 1) $\frac{\sin^2 60^{\circ} + \cos^2 30^{\circ}}{\operatorname{ctg}^2 45^{\circ}}$; 2) $\frac{\sin^2 30^{\circ} + \cos^2 60^{\circ}}{\operatorname{tg}^2 45^{\circ}}$; 3) $\cos^2 75^{\circ} - \sin^2 75^{\circ}$;
 4) $2 \sin 75^{\circ} \cos 75^{\circ}$; 5) $2 \cos \frac{\pi}{3} + \sin \pi$; 6) $2 \sin \frac{\pi}{6} + \cos \pi$;
 7) $\operatorname{tg} 315^{\circ} + \sin 150^{\circ}$; 8) $2\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} + \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4}$;
 9) $\frac{4 \cos 330^{\circ} - 3 \operatorname{tg} 330^{\circ}}{6 \operatorname{tg} 210^{\circ} - 4 \sin 240^{\circ}}$; 10) $\frac{\left(2 \sin \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right)^2}{16 \sin^2 \frac{\pi}{6} - 3 \cos 0^{\circ}}$; 11) $\frac{7 \cos \frac{7\pi}{3} - 5 \sin \frac{17\pi}{6}}{\operatorname{tg} \frac{9\pi}{4}}$;
 12) $\sin 40^{\circ} + \sin 20^{\circ} - \sin 80^{\circ}$; 13) $\left(2 \sin 9^{\circ} \cos 36^{\circ} + \sin 27^{\circ}\right)^2$.

23.4. რომელია მეტი:

$$\operatorname{ctg}195^{\circ} \sin 45^{\circ} \cos 114^{\circ} \quad \text{თუ} \quad \operatorname{tg}115^{\circ} \sin 123^{\circ} \cos 35^{\circ};$$

23.5. იპოვეთ α კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები, თუ

$$\sin \alpha = -0,8 \quad \text{და} \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

23.6. იპოვეთ α კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები, თუ

$$\sin \alpha = 0,6 \quad \text{და} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

23.7. გაამარტივეთ:

$$1) \frac{\operatorname{ctg} a}{\operatorname{tg} a} + 1; \quad 2) \frac{\cos a + \operatorname{ctg} a}{1 + \sin a}; \quad 3) (\sin a + \cos a)^2; \quad 4) \frac{\cos 5a + \cos a}{\sin 5a - \sin a}; \quad 6) \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{ctg} a} + 1;$$

$$7) \frac{\sin a + \operatorname{tg} a}{1 + \cos a}; \quad 8) (\sin a - \cos a)^2; \quad 9) \frac{\sin 7a + \sin a}{\cos 7a + \cos a}; \quad 10) \frac{\cos^2 15^{\circ} - \sin^2 15^{\circ}}{\sin 18^{\circ} \cos 12^{\circ} + \cos 18^{\circ} \sin 12^{\circ}};$$

$$11) (\sin a - 1)(\sin a + 1); \quad 12) \frac{\sin 28^{\circ} \cos 32^{\circ} + \cos 28^{\circ} \sin 32^{\circ}}{2 \sin 15^{\circ} \cos 15^{\circ}}; \quad 13) (1 - \cos a)(1 + \cos a);$$

$$14) (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha ;$$

$$15) \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a}; \quad 16) \frac{1 - \cos 2a}{\sin 2a}; \quad 17) \frac{(\sin a + \cos a)^2 - 2 \sin 2a}{1 - \sin^2 2a};$$

$$18) \frac{(\sin a - \cos a)^2 + 2 \sin 2a}{1 - \sin^2 2a}; \quad 19) \frac{1}{\cos \alpha} - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha; \quad 20) \frac{1}{\sin \alpha} - \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$21) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 3 \operatorname{ctg}(\pi + \alpha); \quad 22) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 4 \operatorname{tg}(\pi + \alpha); \quad 23) \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 3\alpha}$$

$$24) (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) + \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$$

$$25) \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \quad 26) \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

23.8. გამოთვალეთ:

$$1) \cos 75^{\circ}; \quad 2) \sin 75^{\circ}; \quad 3) \sin 405^{\circ} + \cos 225^{\circ}; \quad 4) \cos \frac{13\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{3}; \quad 5) \sin 15^{\circ}; \quad 6) \cos 105^{\circ}.$$

23.9. იპოვეთ $\sin \alpha$, თუ $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ და $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

23.10. იპოვეთ $\sin \alpha$, თუ $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ და $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

23.11. იპოვეთ $\operatorname{ctg} \alpha$, თუ $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ და $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

23.12. იპოვეთ $\operatorname{tg} \alpha$, თუ $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ და $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

23.13. იპოვეთ $\sin 2\alpha$, თუ $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,4$.

23.14. იპოვეთ $\sin 2\alpha$, თუ $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,2$.

23.15. იპოვეთ $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, თუ $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,4$.

23.16. რას უდრის $\cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha \cos \beta$ -ს მნიშვნელობა, თუ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ და $\beta = \frac{\pi}{6}$.

23.17. რას უდრის $\sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos \beta$ -ს მნიშვნელობა, თუ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ და $\beta = \frac{\pi}{6}$.

23.18. იპოვეთ $\sin \alpha$, თუ ა) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; ბ) $\cos \alpha = -\frac{7}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

23.19. იპოვეთ $\cos \alpha$, თუ ა) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; ბ) $\sin \alpha = -\frac{9}{41}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

23.20. იპოვეთ $\operatorname{tg} \alpha$, თუ ა) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; ბ) $\cos \alpha = \frac{40}{41}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

23.21. იპოვეთ $\cos \alpha$, თუ ა) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; ბ) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

23.22. იპოვეთ $\sin \alpha$, თუ ა) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; ბ) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

23.23. იპოვეთ $\sin 2\alpha$, თუ $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

23.24. იპოვეთ $\cos 2\alpha$, თუ $\sin \alpha = \frac{5}{7}$.

23.25. იპოვეთ $\sin \frac{\alpha}{2}$, თუ $\cos \alpha = 0,28$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

23.26. იპოვეთ $\cos \frac{\alpha}{2}$, თუ $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

23.27. იპოვეთ $\sin \alpha$, თუ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 5$.

23.28. იპოვეთ $\sin(\alpha + 45^\circ)$, თუ $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

23.29. იპოვეთ $y = \sin 2x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

23.30. იპოვეთ $y = \cos \frac{x}{3}$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

23.31. გაამარტივეთ $\frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$ გამოსახულება და გამოთვალეთ მისი მნიშვნელობა

$$\text{თუ } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

§24. ორმაგი, სამმაგი და ოთხმაგი არგუმენტის

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin 4\alpha = 8 \cos^3 \alpha \cdot \sin \alpha - 4 \cos \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$$

$$\operatorname{tg}4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 6\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{4\operatorname{ctg}^3\alpha - 4\operatorname{ctg}\alpha}.$$

§25. ნახევარი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - 4 \sin 3\alpha)$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + 4 \cos 3\alpha)$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3)$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3)$$

§26. დაყვანის ფორმულები

ფუნქცია	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
			78	

$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{3}{2}\pi + \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$2\pi + \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

დაყვანის ფორმულები

გრადუსი	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$90^\circ - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

$90^\circ + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$180^\circ - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$270^\circ - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$270^\circ + \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$360^\circ - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$360^\circ + \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

26.1. დაყვანის ფორმულების საშუალებით გამოთვალეთ:

- 1) $\sin 225^\circ$; 2) $\sin 315^\circ$; 3) $\sin 390^\circ$; 4) $\sin(-225^\circ)$; 5) $\cos 135^\circ$; 6) $\cos 165^\circ$;
- 7) $\cos 240^\circ$; 8) $\sin 330^\circ$; 9) $\operatorname{tg} 210^\circ$; 10) $\operatorname{ctg} 245^\circ$; 11) $\operatorname{tg}(-330^\circ)$; 12) $\cos(-765^\circ)$;
- 13) $\sin 1500^\circ$; 14) $\operatorname{tg} 405^\circ$; 15) $\operatorname{ctg}(-270^\circ)$; 16) $\cos 2220^\circ$; 17) $\operatorname{ctg}(-1980^\circ)$;
- 18) $\operatorname{tg} 1485^\circ$; 19) $\sin 2190^\circ$; 20) $\sin 2250^\circ + \cos(-2220^\circ) - \operatorname{tg} 420^\circ$;
- 21) $5\sin 1845^\circ + 2\cos(-2940^\circ) - 3\operatorname{ctg} 1170^\circ$; 22) $\frac{2\sin(-2490^\circ) - 3\cos 570^\circ}{2\operatorname{tg} 1020^\circ}$;

$$23) \frac{4\sin^2\frac{\pi}{4} + 5\cos^2\frac{7\pi}{4}}{\operatorname{tg}^2\frac{11\pi}{4}};$$

$$24) \frac{4\sin^2\frac{11\pi}{6} + 5\cos^2\frac{7\pi}{3}}{5\operatorname{ctg}^2\frac{21\pi}{4}} + 1;$$

$$25) \frac{4\sin^2\frac{14\pi}{3} + 5\cos^2\frac{15\pi}{4}}{7\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4} + 3}.$$

§27. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გამოსახვა იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების საშუალებით

მოცემულია	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
-----------	----------	----------	-----------------------	------------------------

$\sin x = a$	a	$\pm \sqrt{1-a^2}$	$\pm \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\pm \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
$\cos x = a$	$\pm \sqrt{1-a^2}$	a	$\pm \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\pm \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$
$tgx = a$	$\pm \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	a	$\frac{1}{a}$
$ctgx = a$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\frac{1}{a}$	a

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha} = \frac{1}{1 + ctg^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha} = \frac{1}{1 + tg^2 \alpha}$$

$$tg^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$ctg^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$$

§28. არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული

ფუნქციები

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta}.$$

28.1. გამოთვალეთ:

ა) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$; ბ) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 60^\circ$;

გ) $\sin 40^\circ \cos 41^\circ + \sin 41^\circ \cos 40^\circ - \sin 81^\circ$; დ) $\cos 72^\circ \cos 22^\circ + \sin 72^\circ \sin 22^\circ$;

ე) $\cos \frac{7\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{10} \sin \frac{\pi}{5}$; ვ) $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{8\pi}{7}$; ზ) $\frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}$;

თ) $\frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ}$;

ი) $\frac{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}$;

კ) $\frac{\operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 80^\circ \operatorname{tg} 35^\circ + 1} + 4$;

§29. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ჯამის

გარდაქმნა ნამრავლად

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha \pm \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} \mp \alpha \right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$$

§30. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნამრავლის

გარდაქმნა ჯამად

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

30.1. გარდაქმენით ნამრავლი ჯამად:

ა) $\sin 20^\circ \cdot \sin 10^\circ$ ბ) $\sin 5x \cdot \sin 2x$; გ) $\sin 4\alpha \cdot \cos \alpha$ დ) $\sin 2x \cdot \sin(x + y)$

ე) $\sin 40^\circ \cdot \sin 5^\circ$ ვ) $\sin 11^\circ \cdot \sin 41^\circ$ ჰ) $\sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$ 8) $2 \sin 6^\circ \cdot \sin 24^\circ$

$$\begin{aligned}
\arcsin(-x) &= -\arcsin x & \arccos(-x) &= \pi - \arccos x & \operatorname{arctg}(-x) &= -\operatorname{arctg}x \\
\operatorname{arcctg}(-x) &= \pi - \operatorname{arcctg}x & & & \arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2} \\
\operatorname{arctg}x + \operatorname{arcctg}x &= \frac{\pi}{2} & \sin(\arcsin x) &= x & \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2} \\
\sin(\arccos x) &= \sqrt{1-x^2} & \cos(\arccos x) &= x & \sin(\operatorname{arctg}x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
\cos(\operatorname{arctg}x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \sin(\operatorname{arcctg}x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \cos(\operatorname{arcctg}x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
\operatorname{tg}(\arcsin x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \operatorname{ctg}(\arcsin x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \operatorname{tg}(\arccos x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\
\operatorname{ctg}(\arccos x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x) &= x & \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x) &= \frac{1}{x} \\
\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}x) &= \frac{1}{x} & & & & \\
& & \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x) &= x & &
\end{aligned}$$

31.1. გამოთვალეთ:

ა) $\arcsin 0 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin 1;$

ბ) $\arcsin 0 + \arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \arccos(-1);$

გ) $5\arccos(-1) - 14\arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos 1;$

დ) $\arcsin 0 + \operatorname{arctg} 1 - 2\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + 0,5\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2};$

ე) $\sin(\arcsin 0,7);$ ვ) $\cos(\arcsin(\sqrt{5}));$ ზ) $\arccos(\cos 3);$ თ) $\arccos(\sin 5);$

ი) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2);$ კ) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \sqrt{3}).$

§32. უმარტივესი ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა

ამონახსენი

1. თუ $\sin x = a$; $|a| \leq 1$, მაშინ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$.

კერძო შემთხვევებში კი იქნება:

ა) $\sin x = 0$

ბ) $\sin x = 1$

გ) $\sin x = -1$

$x = \pi k$, $k \in Z$.

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

2. თუ $\cos x = a$; $|a| \leq 1$, მაშინ $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$.

კერძო შემთხვევებში კი იქნება:

ა) $\cos x = 0$

ბ) $\cos x = 1$

გ) $\cos x = -1$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

$x = 2\pi k$, $k \in Z$.

$x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$

3. თუ $\operatorname{tg} x = a$, მაშინ $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in Z$.

4. თუ $\operatorname{ctg} x = a$, მაშინ $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in Z$.

32.1. ამოხსენით ელემენტარული ტრიგონომეტრიული განტოლებები:

ა) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\sin x = -\frac{1}{2}$; გ) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $\sin(x - 20^\circ) = -1$;

ე) $\sin(3x - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; ვ) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$; ზ) $\sin \frac{x}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; თ) $\cos x = 0$;

ი) $\cos 3x = -1$; კ) $\cos(3 - x) = \frac{1}{2}$; ლ) $\cos\left(\frac{x}{2} - 36^\circ\right) = 1$; მ) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ნ) $\cos(4x - 3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; თ) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; პ) $\operatorname{tg} 3x = -1$; ყ) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 2$;

რ) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; ს) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

32.2. ამოსწავნილი განტოლებები:

ა) $\sin^2 x - \sin x = 0$; ბ) $\sin 2x - 3\cos x = 0$; გ) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0,5$;

დ) $\sin x + 4\cos\frac{x}{2} = 0$; ე) $\sin 6x - \sin 4x = 0$; ვ) $\cos 5x = \cos x$;

ზ) $\sqrt{3}\sin x = 1 + \cos x$; თ) $\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x = 0$;

ი) $2\sin^2 x = \sqrt{6}\sin 2x - 3\cos^2 x$; კ) $1 - 3\cos^2 x = 2\sin x \cdot \cos x$;

ლ) $3\sin^4 x + 4\cos^4 x = 13\sin^2 x \cos^2 x$; მ) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 3$;

ნ) $\sin^2 x - 1 = 2\cos x$; თ) $\cos^2 - 2\cos x - 3 = 0$; ჰ) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$;

ყ) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 - 4\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$; რ) $2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 4 = 0$;

ს) $\frac{1}{\cos^2 x} - 4\operatorname{tg} x + 2 = 0$; ტ) $\cos\frac{x}{2} = 1 + \cos x$; უ) $2\sin\frac{x}{2} = 1 - \cos x$;

ფ) $\sin x - \cos\frac{x}{2} = 0$; ქ) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

§33. სხვადასხვა არგუმენტების ტრიგონომეტრიულ

ფუნქციათა ტოლობები

1. თუ $\sin x = \sin y$, მაშინ $x = (-1)^k y + \pi k$, $k \in Z$.

2. თუ $\cos x = \cos y$, მაშინ $y = \pm x + 2\pi k$, $k \in Z$.

3. თუ $\sin x = \cos y$, მაშინ

$$\left. \begin{array}{l} x + y = \frac{\pi}{2}(4k + 1), \quad k \in Z, \quad \text{-----} \quad \cos x \cdot \sin y \geq 0 \\ x - y = \frac{\pi}{2}(4k + 1), \quad k \in Z, \quad \text{-----} \quad \cos x \cdot \sin y \leq 0 \end{array} \right\}.$$

4. თუ $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$ მაშინ $x - y = \pi k$, $k \in Z$.

5. თუ $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y$ მაშინ $x - y = \pi k$, $k \in Z$.

6. თუ $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y$ მაშინ $x + y = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k \in Z$.

33.1. ამოხსენით განტოლება:

ა) $\sin 6x = \sin x$; ბ) $\cos 2x = \cos x$; გ) $\cos 3x = \sin x$; დ) $\cos 4x + \cos x = 0$;

ე) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 0$; ვ) $\sin 6x - \sin 4x = 0$; ზ) $\operatorname{tg} 4x = \operatorname{ctg} 3x$.

$$\text{სადაც } a_1^2 + b_1^2 \neq 0, \quad a_2^2 + b_2^2 \neq 0.$$

I) განტოლებათა (*) სისტემას აქვს ერთი ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

II) განტოლებათა (*) სისტემას არა აქვს ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

III) განტოლებათა (*) სისტემას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

წრფივი განტოლებათა სისტემის ამოხსნის სკოლაში გავრცელებული ხერხებიდან გამოვყოფთ - ჩასმის ხერხს, შეკრების ხერხს და გრაფიკულ ხერხს.

$$\text{ამოხსენით შემდეგი განტოლებათა სისტემა} - \begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}$$

I - ხერხი (ჩასმის ხერხი)

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 - 2y \\ 5x - 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 - 2y \\ 5(11 - 2y) - 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 - 2y \\ 55 - 10y - 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 11 - 2y \\ -13y = -52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 - 2y \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

პასუხი: (3; 4).

II - ხერხი (შეკრების ხერხი)

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 11 & |3 \\ 5x - 3y = 3 & |2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 6y = 33 \\ 10x - 6y = 6 \end{cases}$$

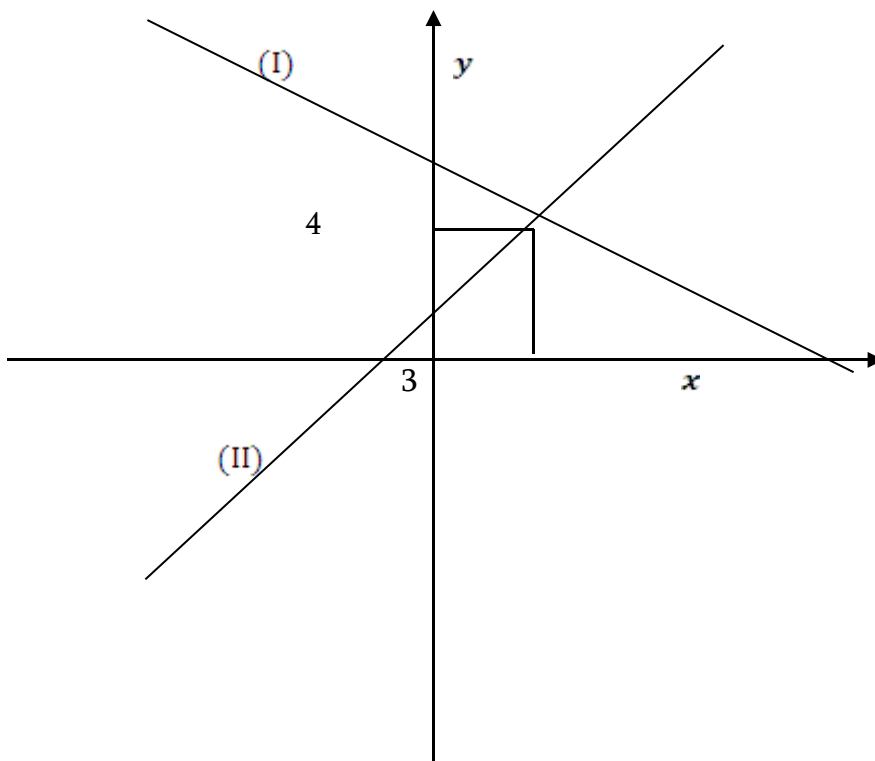
$$\begin{aligned} 3+2y &= 11 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13x &= 39 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

პასუხი: (3; 4).

III - ხერხი (გრაფიკული ხერხი)

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \\ y = 1\frac{2}{3}x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0; 5\frac{1}{2}); (11; 0) & \text{(I)} \\ (0; -1); (\frac{3}{5}; 0) & \text{(II)} \end{cases}$$



34.1. ამოხსენით წრფივი განტოლებათა სისტემა ჩასმის ხერხით:

$$\text{ა) } \begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - 2y = -8 \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} x + 2y = 4 \\ y - 3x = 7 \end{cases} \quad \text{დ) } \begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$\text{ე) } \begin{cases} 2x - 5(y + 1) = 10y - 3x + 12 \\ 2(x - 1) + 3(y + 2) = x - 2y \end{cases} \quad \text{ვ) } \begin{cases} 2(x - 2) + 3y + 1 = 3x - 12y \\ 3(3 - y) + 2(x - 1) = 6y + 10 \end{cases}$$

34.2. ამოხსენით წრფივი განტოლებათა სისტემა შეკრების ხერხით:

$$\text{ა) } \begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \quad \text{დ) } \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 5y = 19 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{ფ) } \begin{cases} 4x - 3y = -19 \\ 6x + 5y = 38 \end{cases} \quad \text{ვ) } \begin{cases} 5x + 3y = -3 \\ -4x + 9y = 10 \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} 15(x + 1) = 5 - 2y \\ 4(y + 1) = 2 - 3x \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{თ) } \begin{cases} 5(1 - y) + 12 = -4x \\ 7(x - 1) = 3y - 8 \end{cases} \quad \text{ი) } \begin{cases} 1,5x - 0,5y = -2,5 \\ 3x + y = -1 \end{cases} \quad \text{კ) } \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 8 \end{cases}
 \end{array}$$

34.3. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა გრაფიკული ხერხით:

$$\begin{array}{l}
 \text{ა) } \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + y = 11 \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} 4x + y = 6 \\ 5x - y = 3 \end{cases} \quad \text{დ) } \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}
 \end{array}$$

34.4. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{array}{l}
 \text{ა) } \begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ 9x - 5y = 13 \end{cases}; \quad \text{ბ) } \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 5 \\ \frac{y}{4} - \frac{x}{5} = 6,9 \end{cases}; \quad \text{გ) } \begin{cases} \frac{2x - y}{2} + \frac{x - 2y}{3} = -6 \\ \frac{2x - y + 1}{5} - \frac{1 - x + 2y}{2} = 4 \end{cases};
 \end{array}$$

$$\text{დ) } \begin{cases} \frac{2(x + y) - 3}{7} + \frac{5x - y}{3} = 4 \\ \frac{4(5x - y)}{7} - \frac{x + y - 3}{6} = 14 \end{cases}$$

34.5. მოცემულ $\begin{cases} (2a - 1)x + 3y = 7a \\ ax - 2y = \frac{4}{3} \end{cases}$ სისტემას a რა მნიშვნელობებისათვის

ა) აქვს ერთი ამონახსნი?; ბ) აქვს უამრავი ამონახსნი?; გ) არა აქვს ამონახსნი?.

34.6. a -ს რა მნიშვნელობებისათვის აქვს სისტემას ერთი ამონახსნი:

$$\begin{array}{l}
 \text{ა) } \begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ 2x + ay = 5 \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} 3x + 8y = 10 \\ x - ay = 7 \end{cases}
 \end{array}$$

34.7. a -ს რა მნიშვნელობებისათვის არა აქვს სისტემას ამონახსნი:

$$\begin{array}{l}
 \text{ა) } \begin{cases} (a + 3)x + 4y = 5 - 3a \\ 2x + (a + 5)y = 8 \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} (3a + 10)x + (5a + 6)y = 16 \\ (a + 5)x + (2a + 3)y = 7 \end{cases}
 \end{array}$$

34.8. a -ს რა მნიშვნელობებისათვის აქვს სისტემას ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე:

$$\begin{array}{l}
 \text{ა) } \begin{cases} (a + 4)x + 6y = 10 + 2a \\ 8x + (12 - 3a)y = 20 \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} (2a - 1)x + (a + 1)y - (a - 1) = 0 \\ (3a + 1)x + (a + 5)y - (a + 1) = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

34.9. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\text{ა) } \begin{cases} 2y - x = 14 \\ x^2 - 4xy + 2y^2 = 194 \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} x + 3y = -2 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 7 \end{cases} \quad \text{დ) } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x^3 - 8y^3 = 35 \end{cases}$$

34.10. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\text{ა) } \begin{cases} (x+y)^2 - 10(x+y) = 39 \\ (x-y)^2 + 2(x-y) = 15 \end{cases}; \quad \text{ბ) } \begin{cases} \frac{2}{x+y-5} + \frac{3}{x-y-2} = 5 \\ \frac{4}{x+y-5} + \frac{5}{2-x+y} = 1 \end{cases}.$$

34.11. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\text{ა) } \begin{cases} \frac{x}{2y} + \frac{2y}{x} = \frac{10}{3} \\ x^2 - y = 1 \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ \frac{x}{5} - y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 y + xy^2 = 12 \end{cases} \quad \text{დ) } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x + y + x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$$

34.12. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\text{ა) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{13}{6} \\ x - y + xy = 31 \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} x + \sqrt{xy} = 6 \\ 3\sqrt{xy} + 4y = 10 \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5 \\ x + y = 35 \end{cases}$$

$$\text{დ) } \begin{cases} 2(x+y) = 3(\sqrt[3]{x^2 y} + \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \end{cases}.$$

34.13. c -ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს ამონახსენი $\begin{cases} x^2 + y^2 = 64 \\ x + y = c \end{cases}$ განტოლებათა სისტემას?

34.14. k -ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს ამონახსენი $\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \\ x + y = 8 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემას?

34.15. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\text{ა) } \begin{cases} x^2 + y = 7 \\ x + y^2 = 11 \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} x^2 y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0 \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} x^2 - xy^2 + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y \end{cases}$$

$$\text{დ) } \begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$$

34.16. ამოსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{array}{lll}
 \text{ა)} \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases} &
 \text{ბ)} \begin{cases} xy = 2 \\ xz = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} &
 \text{გ)} \begin{cases} y - x = 3 \\ y - z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 30 \end{cases}
 \end{array}$$

34.17. ამოსენით უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{array}{llll}
 \text{ა)} \begin{cases} 3x + 6 > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} &
 \text{ბ)} \begin{cases} 3x - 2 > x + 5 \\ 4x - 21 \leq 14 - x \end{cases} &
 \text{გ)} \begin{cases} 2x - 7 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} &
 \text{დ)} \begin{cases} 11x - 3 \leq 9x + 7 \\ 13 - 4x < x - 2 \end{cases} \\
 \text{ე)} \begin{cases} 3(x - 1) - 2 > 2(x + 4) \\ 8 - 2x \geq 5 - 4x \end{cases} &
 \text{ვ)} \begin{cases} 3(x - 4) < 4(0,5 - x) \\ 2(0,5x - 1,5) < 3(x - 1) \end{cases} &
 & \\
 \text{ზ)} \begin{cases} \frac{7-x}{2} - 3 < \frac{3+4x}{5} - 4 \\ \frac{5}{3}x + 5(4-x) < 2(4-x) \end{cases} &
 \text{თ)} \begin{cases} x - 4 < 12 \\ 2x + 5 < 13 \\ 3 - x > 1 \end{cases} &
 \text{ი)} \begin{cases} 2x - 4 < x + 1 \\ 2x + 5 < x + 3 \\ 3 - 3x > 0 \end{cases} &
 \end{array}$$

34.18. ამოსენით უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{array}{lll}
 \text{ა)} \begin{cases} 2x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 21 < 0 \end{cases} &
 \text{ბ)} \begin{cases} 4x^2 - 3 \geq 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} &
 \text{გ)} \begin{cases} (x - 1)(x + 4) \geq 0 \\ (x + 6)(3x - 1) < 0 \end{cases} \\
 \text{დ)} \begin{cases} x(2x + 1) < 0 \\ -(x + 0,1)(x + 0,4) < 0 \end{cases} &
 \text{ე)} \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ 5x^2 - 7x > 0 \end{cases} &
 \text{ვ)} \begin{cases} 5x^2 + 19x - 30 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases} \\
 \text{ზ)} \begin{cases} 2x^2 > 1 \\ x^2 - 2x + 1 \leq 0 \end{cases} &
 \text{თ)} \begin{cases} 4x^2 - 8x - 5 > 0 \\ (3 - x)(4x + 1) \leq 0 \end{cases} & \\
 \text{ი)} \begin{cases} (x - \sqrt{5} + 1)(x - 1) \geq 0 \\ x(\sqrt{3} - x) > 0 \end{cases} &
 \text{კ)} \begin{cases} x^2 - x + 2 > 0 \\ 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \end{cases} &
 \end{array}$$

34.19. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

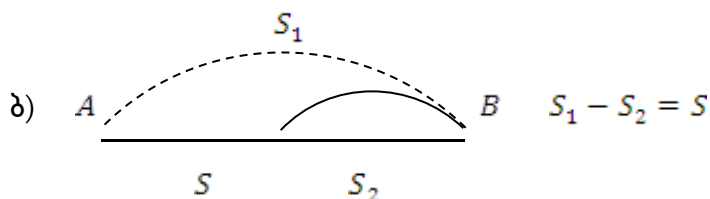
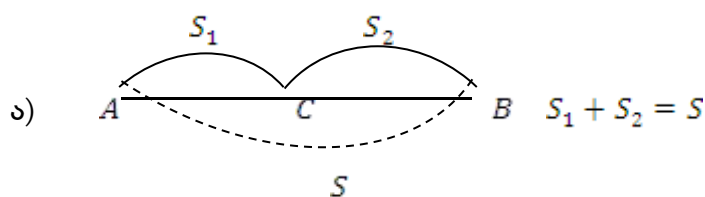
$$\begin{array}{lll}
 \text{ა)} y = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} &
 \text{ბ)} y = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} &
 \text{გ)} y = \sqrt{\frac{(9x^2 - 6x + 1)(4x^2 - 1)}{x^2 + 4x}} \\
 \text{დ)} y = \sqrt[4]{\frac{(x^2 + x)(x^2 + 2x)}{-1,3(x - 2)(2x + 3)}} &
 \text{ე)} y = \frac{123}{\sqrt{x(x+1)(x-2)(3-x)}} &
 \text{ვ)} y = \sqrt{\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 9}} \\
 \text{ზ)} y = \frac{2x + 6}{\sqrt{x^2 + x - 2}} &
 \text{თ)} y = \frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} + \sqrt[4]{2x + 1} &
 \text{ი)} y = \sqrt{\frac{x^2}{0,1x - 4}}.
 \end{array}$$

§35. სხვადასხვა ტიპის ამოცანები

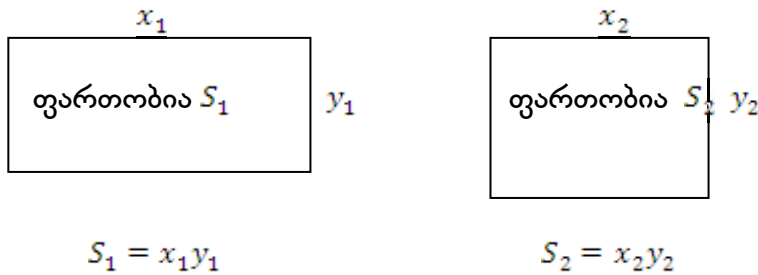
ამოცანის ამოხსნისას განტოლების ან განტოლებათა სისტემის შედგენა იწყება უცნობი სიდიდის გამოყოფით. ამოცანის ამოხსნისას მიღებულია გარკვეული დაშვებები; მაგალითად, ქალაქს, ავტომობილს, ტურისტს წერტილად მივიჩნევთ; მოძრაობას, ვთვლით თანაბარ მოძრაობად თუ მისი აღწერა არა წარმოდგენილი ამოცანაში; თუ რაიმე დამატებითი ინფორმაცია არაა მოცემული, მუშაობას ვთვლით თანაბარ მუშაობად (დროის ტოლ შუალედში ტოლი მოცულობის მუშაობა სრულდება); ხსნარს "თანაბრად განაწილებულად"- თუ მოცულობის ყოველ ნაწილში ხსნარი ერთნაირი შემადგენლობისაა; მდინარის დინებას - თანაბრად მოძრაობად.

ამოცანაში მითითებულ ერთ-ერთ სიდიდეს x -ით (ან სხვა ასოთი) აღვნიშნავთ, მეორეს y -ით. მათი საშუალებით გამოვსახავთ ამოცანაში მოცემულ სიდიდეებს და მათ შორის არსებული დამოკიდებულების მიხედვით შევადგენთ განტოლებას ან განტოლებათა სისტემას. მისი ამოხსნით, ამონახსნების გამოკვლევით ამოცანაში დასმულ კითხვებზე სრულ პასუხს მივიღებთ.

პირობა, რომლის მიხედვით უნდა შედგეს განტოლება, შეიძლება მითითებული არ იყოს, მას სხვადასხვა მოსაზრებების გამოყენებით ვწერთ:



ბ)



თუ $S_1 = S_2$ მაშინ $x_1 y_1 = x_2 y_2$.

ტოლი ფართობების მქონე (ტოლდიდი) მართკუთხედების გვერდები უკუპროპორციულია, უკუპროპორციული სიდიდეების თვისება - მათი ნამრავლი მუდმივია.

35.1 რამდენი წყალი უნდა დავამატოთ 40 ლ სპირტს, რომლის სიმაგრე 90° -ია, რომ მიღოთ 50° -იანი სიმაგრის სპირტი?.

35.2. ერთი მეტრი ქსოვილის ფასის 10%-ით შემცირების შემდეგ 36 ლარი ღირს. რა ღირდა ერთი მეტრი სოვილი ფასის შემცირებამდე?.

35.3. ნიკამ 40 გვერდიანი წიგნი ორ დღეში წაიკითხა. პირველ დღეს მან 2-ი გვერდით მეტი წაიკითხა ვიდრე მეორე დღეს, რამდენი გვერდი წაუკითხია ნიკას პირველ დღეს?.

35.4. სალომემ, ნინიმ და ანიმ 40 სოკო შეაგროვეს. ისე, რომ მათი შეგროვილი სოკოების რაოდენობა 2-ის, 3-ისა და 3-ის პროპორციულია შესაბამისად. რამდენი სოკო შეაგროვა ნინიმ.

35.5. იპოვეთ ორი რიცხვიდან უდიდესი. თუ მათი საშუალო 30-ის ტოლია და ის მეორეზე 2-ჯერ მეტია.

35.6. ბოთლი საცობით ღირს 40 თეთრი, ბოთლი საცობზე 38-ი თეთრით მეტი ღირს. რა ღირს ბოთლი და რა ღირს საცობი.

35.7. რამდენი პროცენტით შემცირდება კვადრატის ფართობი, თუ მის გვერდს შევამცირებთ 40%-ით.

35.8. რამდენი პროცენტით გაიზარდება კვადრატის ფართობი, თუ მის გვერდს გაზარდით 40%-ით.

35.9. რამდენი პროცენტით შემცირდება წრის ფართობი, თუ მის რადიუსს შევამცირებთ 40%-ით.

35.10. ორნიშნა რიცხვის ათეულების ციფრი 4-ით მეტია ერთეულების ციფრზე, ხოლო ამ ორნიშნა რიცხვის ნამრავლი მისივე ციფრების ჯამზე 160-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვი.

- 35.11. ერთი პუნქტიდან მეორეში, რომელთა შორის მანძილი 160 კმ-ია, ერთდროულად ორი ავტომობილი გაემგზავრა. პირველის სიჩქარე 8კმ/სთ-ით მეტი იყო მეორის სიჩქარეზე. ამიტომ იგი დანიშნულების ადგილზე 40 წთ-ით ადრე მივიდა. იპოვეთ ავტომობილების სიჩქარე.
- 35.12. 2 საათში მსუბუქმა ავტომობილმა 40 კმ-ით მეტი გაიარა, ვიდრე სატვირთო ავტომობილმა. მსუბუქის სიჩქარე 1,5-ჯერ მეტი იყო სატვირთოს სიჩქარეზე. იპოვეთ თითოეული ავტომობილის სიჩქარე.
- 35.13. ტურისტმა მეორე დღეს გაიარა რა პირველ დღეს გავლილი გზის $\frac{1}{3}$ ნაწილი, ორივე დღეს გავლილი მანძილი 40 კმ აღმოჩნდა. რამდენი კილომეტრი გაიარა მან მეორე დღეს?
- 35.14. ქსოვილის ფასმა მოიმატა თავისი ფასის 10%-ით და გახდა 44 ლარი. რამდენი ლარი ღირდა ქსოვილი გაძვირებამდე?
- 35.15. ბოსტნეულის ფასმა მოიკლო ჯერ 40%-ით, შემდეგ კი - 20%-ით. რამდენი პროცენტით უნდა მოიმატოს ფასმა, რომ იგი გაუტოლდეს თავდაპირველ ფასს?
- 35.16. ოსტატმა შეკვეთილი სამუშაოს 20% შეასრულა 8 საათში. რამდენ საათში შესრულებს ის მთელ სამუშაოს?
- 35.17. იყიდეს 40 კგ სოკო, რომელშიც გადაიხადეს 180 ლარი. გაშრობისას სოკომ თავისი წონის 40 % -ი დაკარგა. რა ფასად უნდა გაიყიდოს 1 კგ გამშრალი სოკო, რომ თანხაში არც მოიგონ და არც წააგონ.
- 35.18. ბავშვმა ჩაიფიქრა რიცხვი. ეს რიცხვი მან ჯერ შეამცირა 200-ით, შემდეგ კი შამცირა 15-ჯერ და პასუხად მიიღო 40. რა რიცხვი ჩაიფიქრა ბავშვმა?
- 35.19. ერთი პუნქტიდან მეორეში, რომელთა შორის მანძილი 160 კმ-ი, ერთდროულად ორი მოტოციკლეტისტი გაემგზავრა. პირველის სიჩქარე 8 კმ/სთ-ით მეტი იყო მეორის სიჩქარეზე, ამიტომ იგი დანიშნულების ადგილზე 40 წთ-ით ადრე მივიდა. იპოვეთ მოტოციკლისტების სიჩქარეები.
- 35.20. სადგურიდან 12 კმ-ით დაშორებული სოფლისაკენ გავიდა ტრაქტორი. ნახევარი საათის შემდეგ სადგურიდან იმავე მიმართულებით გავიდა სატვირთო ავტომანქანა. როცა ავტომანქანა სოფელში მივიდა ტრაქტორს კიდევ დარჩენილი ჰქონდა 3 კმ გასავლელი. იპოვეთ ტრაქტორის და ავტომანქანის სიჩქარეების ჯამი, თუ ცნობილია, რომ მანქანის სიჩქარე 20 კმ/სთ-ით მეტია ტრაქტორის სიჩქარეზე.

35.21. სკოლის 400 მოსწავლიდან თითოეული სწავლობს ინგლისურ და გერმანულ ენებიდან ერთ-ერთს მაინც. 250 მოსწავლე სწავლობს ინგლისურს. 190- გერმანულს. რამდენი სწავლობს ორივე ენას?

35.22. სკოლის 50 მასწავლებლიდან 40 ქალია, 10 - მამაკაცი. ქალების საშუალო ასაკი 40 წელია, მამაკაცებისა - 30 წელი. რისი ტოლია ყველა მასწავლებლის საშუალო ასაკი?

35.23. კლასში 40 მოსწავლეა. მათ 5%-ს აქვს თითო ფანქარი. დანარჩენი 95% -ის ნახევარს აქვს ორ-ორი ფანქარი, ხოლო მეორე ნახევარს - არც ერთი. სულ რამდენი ფანქარი აქვთ მოსწავლეებს?

35.24. ტურისტულ ჯგუფში წევრთა $\frac{2}{9}$ ნაწილი ინგლისელია, $\frac{1}{3}$ ნაწილი - გერმანელი, $\frac{1}{9}$ ნაწილი - ფრანგი. მათ გარდა ჯგუფში არიან რუსები, რომელთა რაოდენობა 10-ით მეტია ფრანგი ტურისტების რაოდენობაზე, სულ რამდენი რუსი, გერმანელი და ინგლისელი ტურისტი ამ ჯგუფში.

35.25. აკვარიუმის ნახევარი წყლით არის სავსე. 10 ლიტრი წყლის დამატების შემდეგ აივსო აკვარიუმის $\frac{3}{4}$ - ნაწილი. რისი ტოლია აკვარიუმის მოცულობა?

35.26. (2006-II-36) დიასახლისმა ნამცხვრის ცომის მოსაზღვლად 4:5 შეფარდებით ერთმანეთს შეურია შაქარი და ფქვილი. როდესაც მან ნამცხვრის რეცეპტი სამზარეულოს წიგნით შეამოწმა, აღმოჩნდა, რომ შაქარი და ფქვილი 2:7 შეფარდებით უნდა აეღო. საჭირო პროპორციის მისაღებად მან ცომის მასალას დაუმატა 40გ შაქარი და 500გ ფქვილი. სულ რამდენი გრამი შაქარი და რამდენი გრამი ფქვილი გამოიყენა დიასახლისმა ნამცხვრის მოსამზადებლად?

35.26. (2006-II-40) მოწავლემ განიხილა $10x^2 - px + p = 0$ სახის კვადრატული განტოლებები, სადაც p პარამეტრი ღებულობს ყველა მნიშვნელობას -20-დან 80-ის ჩათვლით. ამ განტოლებებიდან მან ამოხსნა ყველა ის განტოლება, რომელთაც ორ-ორი ამონახსენი გააჩნდა. შემდეგ კი მან იპოვა ყველა მიღებული ამონახსენების ჯამი. რისი ტოლია ეს ჯამი?

35.27. ორ საათში მსუბუქმა ავტომობილმა 40კმ-ით მეტი გაიარა ვიდრე სათვიროთომ. მსუბუქის სიჩქარე 1,5-ჯერ მეტი იყო ვიდრე სატვიროთოსი. იპოვეთ სატვიროთოს სიჩქარე.

35.28. აუზის $\frac{1}{3}$ ნაწილი არის სავსე. შემდეგ მასში ჩაასხეს 40 ლიტრი წყალი რის შემდეგაც აუზი ნახევრამდე შეიივსო. რამდენი ლიტრ წყალს იტევს აუზი?

35.28. მატარებელს 840კმ უნდა გაეგლო. შუა გზაზე იგი შეჩერებული იქნა 30წთ-ით და ამიტომ, დროზე რომ მისულიყო დანიშნულ ადგილზე სიჩქარე უნდა გაედიდებინა 2კმ-

ით საათში. იპოვეთ მატარებლის თავდაპირველი სიჩქარე და დრო რომელიც დასჭირდა მატარებელს მთელი გზის გასავლელად.

35.29. დავითი სამი წლის წინ 5-ჯერ დიდი იყო გიორგიზე. ორი წლის წინ - 3-ჯერ დიდი. რამდენი წლისაა თითოეული მათგანი? (დათო - 8წ. გიორგი - 4წ.).

35.30. კაბა და ქურქი ერთად 220 ლარი ღირდა, ქურქზე 25%-იანი და კაბაზე 12%-იანი ფასდაკლების შემდეგ ორივეს ფასი ერთად 175 ლარი და 40 თეთრი გახდა. იპოვეთ კაბისა და ქურქის თავდაპირველი ფასები.

35.31. მასწავლებელმა ბავშვებს 40 ბარათი ისე გაუნაწილა, რომ ბარათის გარეშე არც ერთი მათგანი არ დარჩენილა. თითოეულს ერთმანეთისგან განსხვავებული რაოდენობის ბარათი შეხვდა. მაქსიმუმ რის ტოლი შეიძლება ყოფილიყო ბავშვების რაოდენობა?.

35.32. მარილის ორი ხსნარი, რომელთაგან პირველში მარილის შემცველობა ხსნარის მასის 12%-ია, მეორეში - 18%. ერთმანეთს შეურიეს I ხსნარის 3 კგ და II ხსნარის 2 კგ. რამდენი პროცენტი მიღებულ ხსნარში მარილის შემცველობა?.

35.33. კატერი მდინარის მიმართულებით გარკვეული მანძილის გავლას 30 საათით ნაკლებს ანდომებს, ვიდრე ტივი. ტბაზე ამავე მანძილს კატერი $5\frac{5}{6}$ საათში გაივლის. რამდენ საათში გაივლის აღნიშნულ მანძილს მდინარის დინების მიმართულებით ტივი?.

35.34. ორ ქალაქს შორის 600კმ-ია. ავტომობილი ერთი ქალაქიდან მეორეში ჩავიდა. უკან დაბრუნებისას კი მან სიჩქარე 20 კმ/სთ-ით გაზარდა, რის გამოც დაბრუნებას 1 სთ-ით კაკლები დრო მოანდომა. იპოვეთ ავტომობილის თავდაპირველი სიჩქარე.

35.35. ოსტატმა და შეგირდმა სამუშაო 8 საათში დაამთავრეს. ცნობილია, რომ მონათვე 2-ჯერ ნელა მუშაობს. რამდენ საათში შეძლებს ამ სამუშაოს შესრულებას ოსტატი მარტო მუშაობით?(12სთ).

35.36. A და B პუნქტებიდან, რომელთა შორის მანძილი 200 კმ-ია, გამოვიდა ორი ავტომობილი. ისინი ერთ საათში შეხვდნენ ერთმანეთს. შეხვედრის შემდეგ B -დან გამოსული A -ში 50 წუთით ადრე ჩავიდა, ვიდრე A -დან გამოსული B -ში. იპოვეთ ავტომობილების სიჩქარეები.

35.37. თუთიის, სპილენძის და ნიკელის შენადნობის მასა 1კგ-ია. ამ ლითონების მასები შენადნობში, შესაბამისად, 3:3:2 შეფარდებითა. რამდენი გრამი ასეთი შენადნობი უნდა ავიღოთ, რომ იგი შეიცავდეს 150 გრამ თუთიას?.

35.38. გვაქვს თუთიის და სპილენძის ორი შენადნობი. პირველში ამ ლითონების მასები შესაბამისად 1:2 შეფარდებითაა, მეორეში – 3:5 შეფარდებით. რამდენი გრამი პირველი და რამდენი გრამი მეორე შენადნობი უნდა ავიღოთ, რომ მივიღოთ 1 კგ მასის ახალი შენადნობი, რომელშიც თუთიისა და სპილენძის მასები შესაბამისად 11:20 შეფარდებით იქნება.

§36. ირაციონალური განტოლება

განტოლებას, რომელიც უცნობს რადიკალის ნიშნის ქვეშ შეიცავს, ირაციონალური განტოლება ეწოდება.

მისი ამოხსნის ძირითადი ხერხი განტოლების ორივე მხარის ერთი და იმავე ხარისხში ახარისხება. ახარისხების შემდეგ მიიღება განტოლება, რომელიც მოცე-მული განტოლების ტოლფასი განტოლება შეიძლება არ იყოს. ამიტომ აუცილებელია მიღებული ფესვების შემოწმება.

36.1. ამოხსენით განტოლება:

$$ა) \sqrt{2x-3} = 5; \quad ბ) \sqrt[3]{x+2} = 2; \quad გ) \sqrt{2x+2\sqrt{x}} = 2; \quad დ) \sqrt{x^2+5x+7} = 2-x.$$

$$ე) \sqrt{x^2-1} = 3 \quad ე) \sqrt{x^2-1} = 1+x \quad ვ) \sqrt{x^2-1} = 1-x \quad ზ) \sqrt{1-7x}=6$$

$$თ) 2 + \sqrt{5-x}=6 \quad ი) \sqrt{3,1x+5} = \sqrt{5\frac{1}{5}x-1,5} \quad კ) \sqrt{x-3} = \frac{4-x}{\sqrt{x-2}}$$

36.2. აჩვენეთ, რომ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს:

$$ა) \sqrt{3+\sqrt{x-1}} = 1; \quad ბ) \sqrt{x^2+5x+7} = x-2; \quad გ) \sqrt{2x-5} - 2\sqrt{4-3x} = 3;$$

$$დ) \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-3x+2} - 4\sqrt{2-x} = 2.$$

36.3. ამოხსენით განტოლება:

$$ა) \sqrt{2x-5} + \sqrt{x-3} = \frac{x-2}{\sqrt{2x-5}}; \quad ბ) \sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3} = 1+x; \quad გ) \sqrt{-2x} + 2\sqrt{3+x} = 4;$$

$$დ) \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$$

$$ე) \sqrt{13 - 4x} = 2 - x$$

$$ვ) \sqrt[3]{1 - x} = 2$$

$$ზ) \sqrt[4]{2,1 + x} = 1$$

$$თ) \sqrt[3]{2x - 3} = 2.$$

36.4. ამოხსენით განტოლება ახალი ცვლადის შემოტანით:

$$ა) \frac{3}{x^2 - 4x + 1} - x^2 = 3 - 4x; \quad ბ) (2x + 1)^2 = \frac{2}{4x(x + 1) + 3} - 1; \quad გ) x^2 - 3x + 8 = \sqrt{5x^2 - 15x + 124};$$

$$დ) (2x - 3)(x - 1) + 5\sqrt{2x^2 - 5x + 1} = 16.$$

§37. სხვადასხვა ტიპის უტოლობა

ორ უტოლობას ტოლფასი ეწოდება, თუ მათი ამონახსნების სიმრავლეები ტოლია. უტოლობის ამოხსნისას ტოლფას უტოლობაზე გადასვლა უტოლობათა შემდეგი თვისებების გამოყენებით მიმდინარეობს:

1⁰. თუ უტოლობის ერთი ნაწილიდან მეორეში გადავიტანთ რაიმე წევრს, მიიღება მოცემულის ტოლფასი უტოლობა.

2⁰. თუ უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ, ან გავყოთ ერთსა და იმავე დადებით რიცხვზე, მოცემულის ტოლფასი უტოლობა მიიღება.

3⁰. თუ უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ, ან გავყოთ ერთსა და იმავე უარყოფით რიცხვზე და მეტობის (ნაკლებობის) ნიშანს ნაკლებობის (მეტობის) ნიშნით შევცვლით, მაშინ მოცემულის ტოლფას უტოლობას მივიღებთ.

37.1. $1,8 - (3,2 - 4y) < 5$ უტოლობის ამონახსნებს შორის იპოვეთ უდიდესი მთელი რიცხვი.

37.2. ამოხსენით უტოლობა:

$$ა) (2x - 17)^2 > 0; \quad ბ) kx < 5, \text{ თუ } k < 0.$$

37.3. ამოხსენით უტოლობათა სისტემა:

$$\text{ა) } \begin{cases} 2x+1 \geq -3 \\ 1-7x < 5 \end{cases}; \quad \text{ბ) } \begin{cases} 4x-1 > 6 \\ 5-6x > -13 \end{cases}; \quad \text{გ) } \begin{cases} -3x+1 < 2x+0,1 \\ 2x+3 > 5 \\ 1-3x > 8+x \end{cases}; \quad \text{დ) } \begin{cases} 7x+1 \geq 2x+5 \\ 5 < 3x-7 \\ 9x+2 < 6,5x+27 \end{cases}.$$

37.4. იპოვეთ a -ს რა მნიშვნელობები, რომელთათვისაც $2x-3 = a+4$ განტოლების ფესვი დადებითი რიცხვია.

37.5. მოცემული ორმაგი უტოლობები ჩაწერეთ მოდულის ნიშნის გამოყენებით:

$$\text{ა) } -3 \leq x \leq 3; \quad \text{ბ) } -5 < x-1 < 5; \quad \text{გ) } 3 \leq x \leq 11; \quad \text{დ) } -7 < x < -1.$$

37.6. ამოხსენით უტოლობა:

$$\text{ა) } \frac{2-x}{x+3} \leq 1 - \frac{x}{2}; \quad \text{ბ) } x^4 + 2x^3 - 8x - 16 < 0; \quad \text{გ) } \frac{x(x-2)^2}{(x-1)(x+3)(x+4)} \leq 0; \quad \text{დ) } \frac{2x^2 + 15x + 13}{x^2 + 7x + 10} \leq 2;$$

$$\text{ე) } \frac{6}{(x-1)(x-2)} + \frac{8}{(x+1)(x-4)} > 1; \quad \text{ვ) } \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{5}{3 + 14x - 5x^2} < 0.$$

37.7. ამოხსენით უტოლობა:

$$\text{ა) } (x^2 - 9)(x-5)^2 \leq 0; \quad \text{ბ) } (x^2 - 49)(x-5)^2 < 0; \quad \text{გ) } (x^2 - 49)(x-5)^2 \geq 0, \\
 \text{დ) } (x^2 - 5x + 4)(x^2 + 2x - 3) < 0; \quad \text{ე) } (x^2 - 5x + 4)(x^2 + 2x - 3) \geq 0.$$

37.8. ამოხსენით ორმაგი უტოლობა:

$$\text{ა) } 1 < \frac{x-5}{2} < 5; \quad \text{ბ) } -4 \leq x^2 \leq 2,4; \quad \text{გ) } 9(x-2) \leq x^2 \leq 2(5x-8); \\
 \text{დ) } -1 < \frac{4x^2 - x - 3}{x^2 + 3} < 3; \quad \text{ე) } 3 < |2x-1| < 7; \quad \text{ვ) } 1 \leq \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| < 2.$$

37.9. ამოხსენით უტოლობა:

$$\text{ა) } x^2 - 7|x| + 6 < 0; \quad \text{ბ) } 3x^2 - 8|x| - 3 < 0; \quad \text{გ) } \left| \frac{4x-1}{2x+3} \right| < 2; \quad \text{დ) } |2x^2 - 3x - 1| < 1.$$

37.10. x -ის რა მნიშვნელობებისათვისა ჭეშმარიტი

$$|3 + 2x - x^2| = 3 + 2x - x^2$$

ტოლობა?.

37.11. x -ის რა მნიშვნელობებისათვისა ჭეშმარიტი ტოლობა:

$$ა) \sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 2x - 3;$$

$$ბ) \left| \frac{2x-1}{x+3} \right| = \frac{1-2x}{x+3}.$$

37.12. ამოხსენით უტოლობა:

$$ა) |2x - 1| > 3 \quad ბ) |2x^2 - 5x - 3| > 0; \quad გ) |2x^2 - 5x - 3| \leq 0 \quad დ) |3x - 1,3| < -1.$$

37.13. საკოორდინატო სიბრტყეზე დაპტრიხეთ იმ $(x; y)$ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$ა) \begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq 3 \end{cases};$$

$$ბ) \begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 2 \end{cases};$$

$$გ) y \geq x;$$

$$დ) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x \geq 0 \end{cases};$$

$$ე) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4x \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases};$$

$$ვ) x + y \leq 1.$$

37.14. a -ს რა მნიშვნელობებისათვისაა ჭეშმარიტი მოცემული უტოლობა ნებისმიერი x -სთვის?

$$ა) (a^2 - 7a + 6)x < a^2 - 4a - 5;$$

$$ბ) (a^2 - a)x \leq a^2 - 2a - 3.$$

37.15. m -ს რა მნიშვნელობებისათვისაა ჭეშმარიტი მოცემული უტოლობა ნებისმიერი x -სთვის?

$$ა) 9x^2 + 3mx + 3m - 5 > 0;$$

$$ბ) (m-1)x^2 - (2m-3)x + m + 1 > 0;$$

$$გ) mx^2 + (4m+1)x + 4m - 1 < 0;$$

$$დ) (2m^2 - 21m + 6)x^2 + 4x < 1 - 2mx.$$

37.16. m -ს რა მნიშვნელობებისათვის არა აქვს

$$(3-m)x^2 + (2m-1)x - m + 2 < 0$$

უტოლობას ამონახსენი?.

37.17. იპოვეთ m -ის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც

$$2x^2 + (3m-4)x + 2m^2 - m + 2 < 0$$

უტოლობას აქვს ამონახსენი?.

37.18. ამოხსენით უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} 3x + \frac{2}{5} > \frac{7}{8}(2x-5) \\ \frac{x-2}{8} < 0,3 - \frac{2x+1}{4} \\ |x| < 1 \end{cases}$$

37.19. იპოვეთ a -ს ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც

$$\begin{cases} ax - 1 \leq 0 \\ x - 4a \geq 0 \end{cases}$$

სისტემას აქვს ერთადერთი ამონხსენი.

37.20. ამოხსენით უტოლობა:

ა) $\sqrt{2x-3} \geq 4$ ბ) $\sqrt{2,4x-5} \geq -1$ გ) $\sqrt{4-x} \leq 3$ დ) $\sqrt{25-x^2} > -3$

ე) $\sqrt{4x-6} < \sqrt{x+3}$ ვ) $\sqrt{4-x} < \sqrt{x+4}$ ზ) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} > 0$

თ) $(x-3)\sqrt{\frac{8+x}{x+6}} \leq 0$ ი) $\sqrt{9x-20} < x$ კ) $\sqrt{x+3} > x+1$

ლ) $\sqrt{x^2+5x+4} > x+2$ მ) $\sqrt{x^2-4x-12} < x-1$.

ნაწილი II

§1. მონაკვეთი. ტეხილი.

მოსაზღვრე და ვერტიკალური კუთხეები.

განსაზღვრება: წრფის ნაწილს რომელიც, მასზე მოთავსებულ ორ წერტილს შორის მდებარე წერტილებისგან შედგება მონაკვეთი ეწოდება. მონაკვეთი აღინიშნება $[AB]$ სიმბოლოთი და იკითხება - AB მონაკვეთი. A წერტილს AB მონაკვეთის საწყისი წერტილი ეწოდება, ხოლო B -ს ბოლო.

მონაკვეთის სიგრძე მისი ნაწილების სიგრძეთა ჯამის ტოლია.

განსაზღვრება: თუ ერთი მონაკვეთის ბოლო წერტილი წარმოადგენს მეორე მონაკვეთის საწყის წერტილს, მეორე მონაკვეთი ბოლო წერტილი წარმოადგენს მესამე მონაკვეთის საწყის წერტილს და ა. შ. ტეხილი ეწოდება.

განსაზღვრება: თუ ტეხილის საწყისი და ბოლო წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა ტეხილს შეკრული ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში ღია.

წრფეზე მდებარე A წერტილი, წრფეს ყოფს ორ სიმრავლედ, რომლებსაც ნახევარ წრფეები ეწოდება ანუ A წერტილის ერთ მხარეს მდებარე წერტილთა სიმრავლეს ნახევარ წრფეები ეწოდება. ნახევარ წრფეს A წერტილთან ერთად სხივი ეწოდება. ამ A წერტილს სხივის სათავე ეწოდება და ამბობენ, რომ სხივი A

წერტილიდან გამოდის. ერთი წრფის, საერთო სათავის მქონე ორ სხივს ურთიერთდამატებითი სხივები ეწოდება.

საერთო სათავის მქონე ორ სხივი სიბრტყეს, რომელშიც ისინი მდებარეობენ, ყოფენ მას ორ ნაწილად. თითოეულ მათგანს (სხივების ჩათვლით) კუთხე ეწოდება. სხივებს კუთხის გვერდები ეწოდება, ხოლო წერტილს საიდანაც ისინი გამოდიან კუთხის წვერო ეწოდება.

თუ სხივები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ერთ-ერთ კუთხეს ნულოვანი კუთხე ეწოდება, ხოლო მეორეს სრული კუთხე. თუ სხივები ურთიერთდამატებით სხივებს წარმოადგენენ, მაშინ კუთხეს გაშლილი კუთხე ეწოდება.

განსაზღვრება: ორ კუთხეს ეწოდება ტოლი, თუ ერთმანეთზე დადების შემთხვევაში ისინი ერთმანეთს შეუთავსდება.

ვთქვათ, OC სხივი მდებარეობს AOB კუთხის შიგნით. $OA; OC$ და $OB; OC$ სხივთა წყვილები თავის მხრივ ადგენენ ორ კუთხეს. ამ ორი კუთხის ჯამს წარმოადგენს AOB კუთხე. ე.ი. $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

განსაზღვრება: სხივი რომელიც კუთხის წვეროდან გამოდის და ყოფს მას ორ ტოლ კუთხედ ბისექტრისა ეწოდება.

განსაზღვრება: წრეწირის ორი რადიუსით შედგენილ კუთხეს ცენტრალური კუთხე ეწოდება.

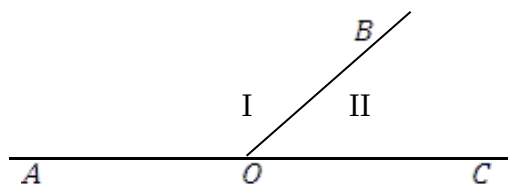
კუთხის საზომი ერთეულია - ერთი გრადუსი, რომელიც წარმოადგენს წრეწირის $\frac{1}{360}$ ნაწილს ან გაშლილი კუთხის $\frac{1}{180}$ ნაწილს. მაშასადამე, გაშლილი კუთხის გრადუსული ზომა 180° -ია.

განსაზღვრება: გაშლილი კუთხის ნახევარს მართი კუთხე ეწოდება.

განსაზღვრება: მართ კუთხეზე ნაკლებ კუთხეს მახვილი კუთხე ეწოდება.

განსაზღვრება: მართ კუთხეზე მეტ და გაშლილ კუთხეზე ნაკლებ კუთხეს ბლაგვი კუთხე ეწოდება.

განსაზღვრება: საერთო სათავის მქონე ორ კუთხეს ეწოდება მოსაზღვრე კუთხეები, თუ მათ ერთი გვერდი საერთო აქვთ, ხოლო დანარჩენი ორი ურთიერთდამატებით სხივებს წარმოადგენენ.



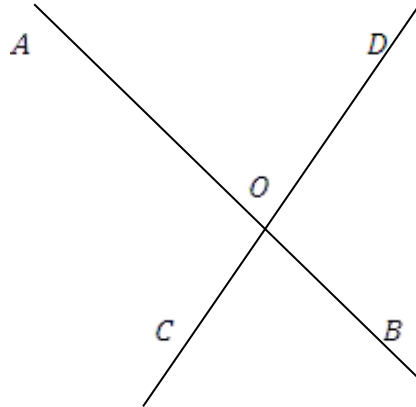
$\angle AOB$ და $\angle BOC$ მოსაზღვრე კუთხეებია,

$\angle I$ და $\angle II$ მოსაზღვრე კუთხეებია,

თეორემა: მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180° -ია.

$$\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ \quad \angle I + \angle II = 180^\circ$$

განსაზღვრება: საერთო სათავის მქონე ორ კუთხეს ეწოდება ვერტიკალური კუთხეები, თუ მათ საერთო წვერო აქვთ, ხოლო გვერდები ურთიერთდამატებით სხივებს წარმოადგენენ.



ცხადია, რომ $\angle AOC$ და $\angle DOB$ ვერტიკალური კუთხეებია, ასევე $\angle AOD$ და $\angle COB$ ვერტიკალური კუთხეებია.

თეორემა: ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.

$$\angle AOC = \angle DOB \quad \angle AOD = \angle COB.$$

სავარჯიშო ტესტი №1

1.1. სიბრტყეზე მონიშნულია ხუთი წერტილი A , B , C , D და E ისე, რომ ორი მათგანი განლაგებულია a წრფის ერთ მხარეს, ხოლო დანარჩენი სამი კი მეორე მხარეს. რამდენჯერ შეუძლია გადაკვეთოს a წრფე $ABCDE$ ტეხილმა.

- ა. 1, 2, 3, 4 ბ. 1, 3, 4, 5 გ. 2, 3, 4, 5 დ. 1, 2, 3, 5

1.2. რა მაქსიმალური რაოდენობის ნაწილად შეუძლია დაყოს სიბრტყე ოთხმა წრფემ.

- ა. 8 ბ. 9 გ. 10 დ. 11

1.3. რამდენი განსხვავებული სხივის გავლება შეიძლება მოცემული 6 წერტილიდან 2 წერტილზე, თუ ამ წერტილებიდან არც ერთი სამეული არ მდებარეობს ერთ წრფეზე.

- ა. 10 ბ. 20 გ. 30 დ. 40

1.4. A , B და C წერტილები მიეკუთვნებიან ერთ წრფეს, თანაც BC მონაკვეთი 4-ჯერ მეტია AC მონაკვეთზე, ხოლო AB მონაკვეთი 4,6 სმ-ით ნაკლებია BC მონაკვეთზე. იპოვეთ AC მონაკვეთი.

ა. 2,3სმ ბ. 4,6სმ გ. 6,9სმ დ. 9,2სმ

1.5. წრფეზე მოცემულია A, B, C და D წერტილები. ცნობილია, რომ $AB = 4$ სმ, $BC = 7$ სმ და $CD = 12$ სმ. იპოვეთ მანძილი AC და BD მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის.

ა. 2სმ ბ. 4სმ გ. 6სმ დ. 8სმ

1.6. AB მონაკვეთის სიგრძე 48 სმ-ია. C წერტილი AB მონაკვეთის შიგა წერტილია, თანაც $AC : CB = 5 : 11$. იპოვეთ AC და BC მონაკვეთებიდან ნაკლების სიგრძე.

ა. 15სმ ბ. 17სმ გ. 19სმ დ. 21სმ

1.7. 96 სმ. სიგრძის მონაკვეთი დაყოფილია სამ ნაწილად 3, 5 და 8-ის პროპორციულ ნაწილებად. იპოვეთ მანძილი კიდურა მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის.

ა. 38სმ ბ. 49სმ გ. 56სმ დ. 63სმ

1.8. AB მონაკვეთი C და D წერტილებით დაყოფილია სამ ნაწილად ისე, რომ $AC : CD : DB = 3 : 5 : 7$, თანაც მანძილი AC და BD მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის 25 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე.

ა. 22,5სმ ბ. 30სმ გ. 37,5სმ დ. 45სმ

1.9. AB მონაკვეთი C წერტილით იყოფა $5 : 7$ შეფარდებით A წერტილის მხრიდან, ხოლო D წერტილით კი $5 : 11$ შეფარდებით B წერტილის მხრიდან. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ CD მონაკვეთის სიგრძე 39სმ-ია.

ა. 66სმ ბ. 84სმ გ. 112სმ დ. 144სმ

1.10. AB მონაკვეთი გაგრძელებულია ერთი და იმავე წრფის სხვადასხვა მხარეს BC და AD მონაკვეთებით ისე, რომ მათი სიგრძეები შესაბამისად 11-ჯერ და 7-ჯერ მეტია AB მონაკვეთის სიგრძეზე. იპოვეთ $AC : BD$ შეფარდების მნიშვნელობა.

ა. 0,5 ბ. 1 გ. 1,5 დ. 2

1.11. სიბრტყეზე მონიშნულია ექვსი წერტილი A, B, C, D, E და F ისე, რომ ოთხი მათგანი განლაგებულია a წრფის ერთ მხარეს, ხოლო დანარჩენი ორი კი მეორე მხარეს. რამდენჯერ შეუძლია გადაკვეთოს a წრფე $ABCDEF$ ტეხილმა.

ა. 1, 2, 3, 4 ბ. 1, 3, 4, 5 გ. 2, 3, 4, 5 დ. 2, 3, 5, 6

1.12. რა მაქსიმალური რაოდენობის ნაწილად შეუძლია დაყოს სიბრტყე სამმა წრფემ.

ა. 8 ბ. 9 გ. 7 დ. 6

1.13. რამდენი განსხვავებული სხივის გავლება შეიძლება მოცემული 5 წერტილიდან 2 წერტილზე, თუ ამ წერტილებიდან არც ერთი სამეული არ მდებარეობს ერთ წრფეზე.

- ა. 10 ბ. 20 გ. 30 დ. 40

1.14. A, B და C წერტილები მიეკუთვნებიან ერთ წრფეს, თანაც AC მონაკვეთი 4-ჯერ ნაკლებია BC მონაკვეთზე, ხოლო BC მონაკვეთი 3,2 სმ-ით მეტია მონაკვეთზე. იპოვეთ AC მონაკვეთი.

- ა. 1,6სმ ბ. 2,4სმ გ. 4,8სმ დ. 3,2სმ

1.15. წრფეზე მოცემულია A, B, C და D წერტილები. ცნობილია, რომ $AB = 5$ სმ, $BC = 8$ სმ და $CD = 15$ სმ. იპოვეთ მანძილი AC და BD მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის.

- ა. 3სმ ბ. 5სმ გ. 7სმ დ. 9სმ

1.16. AB მონაკვეთის სიგრძე 32 სმ-ია. C წერტილი AB მონაკვეთის შიგნით წერტილია, თანაც $AC : CB = 3 : 5$. იპოვეთ AC და BC მონაკვეთებიდან მეტის სიგრძე.

- ა. 20სმ ბ. 22სმ გ. 24სმ დ. 26სმ

1.17. 78სმ. სიგრძის მონაკვეთი დაყოფილია სამ ნაწილად 2, 4 და 7-ის პროპორციულ ნაწილებად. იპოვეთ მანძილი კიდურა მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის.

- ა. 48სმ ბ. 51სმ გ. 28სმ დ. 35სმ

1.18. AB მონაკვეთი C და D წერტილებით დაყოფილია სამ ნაწილად ისე, რომ $AC : CD : DB = 2 : 5 : 9$, თანაც მანძილი AC და BD მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის 42 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე.

- ა. 40სმ ბ. 48სმ გ. 56სმ დ. 64სმ

1.19. AB მონაკვეთი C წერტილით იყოფა 4:5 შეფარდებით A წერტილის მხრიდან, ხოლო D წერტილით კი 5:7 შეფარდებით B წერტილის მხრიდან. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ CD მონაკვეთის სიგრძე 25სმ-ია.

- ა. 156სმ ბ. 164სმ გ. 180სმ დ. 192სმ

1.20. AB მონაკვეთი გაგრძელებულია ერთი და იმავე წრფის სხვადასხვა მხარეს BC და AD მონაკვეთებით ისე, რომ მათი სიგრძეები შესაბამისად 5-ჯერ და 3-ჯერ ნაკლებია AB მონაკვეთის სიგრძეზე. იპოვეთ $AC : BD$ შეფარდების მნიშვნელობა.

- ა. 0,9 ბ. 1,6 გ. 2,4 დ. 3,7

1.21. რას უდრის კუთხე, თუ ის თავისი მოსაზღვრე კუთხეზე 36° -ით მეტია?

- ა. 64° ბ. 108° გ. 126° დ. 138°

1.22. რას უდრის კუთხე, თუ ის თავისი მოსაზღვრე კუთხეზე 11-ჯერ ნაკლებია?

- ა. 15° ბ. 27° გ. 32° დ. 46°

1.23. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ორი კუთხის ჯამი 68° -ის ტოლია. იპოვეთ ამ კუთხეებიდან უდიდესი.

- ა. 98° ბ. 114° გ. 146° დ. 152°

1.24. საერთო წვეროს მქონე ბლაგვი და მახვილი კუთხეების გვერდები მართობულია. იპოვეთ მახვილი კუთხის გრადუსული ზომა, თუ ბლაგვი კუთხის გრადუსული ზომა 124° -ის ტოლია.

- ა. 24° ბ. 32° გ. 48° დ. 56°

1.25. AB წრფის რომელიღაც O წერტილიდან მის სხვადასხვა მხარეს აღებულია C და D წერტილები. კუთხე AOD 3-ჯერ მეტია კუთხეზე, თანაც $\angle BOD = 111^\circ$. იპოვეთ AOC კუთხის გრადუსული ზომა.

- ა. 23° ბ. 31° გ. 35° დ. 49°

1.26. კუთხეები AOB და COB ერთმანეთის მოსაზღვრეა. OD სხივი AOB კუთხის ბისექტრისაა, თანაც კუთხე 7-ჯერ მეტია COB კუთხეზე. იპოვეთ DOB კუთხის გრადუსული ზომა.

- ა. 56° ბ. 63° გ. 84° დ. 98°

1.27. სიბრტყის რომელიღაც O წერტილიდან გავლებულია სამი განსხვავებული OA , OB და OC სხივი ისე, რომ $\angle AOB - \angle COB = 28^\circ$ და $\angle AOB - \angle COA = 26^\circ$ იპოვეთ AOB კუთხის გრადუსული ზომა.

- ა. 86° ბ. 92° გ. 124° დ. 138°

1.28. AB და CD წრფეები იკვეთებიან O წერტილში. OK სხივი AOD კუთხის ბისექტრისაა, თანაც $\angle COK = 146^\circ$. იპოვეთ BOD კუთხის გრადუსული ზომა.

- ა. 96° ბ. 102° გ. 108° დ. 112°

1.29. სამი წრფე, რომლებიც ერთ წერტილში იკვეთება, სიბრტყეს ექვს კუთხედ ყოფს, რომელთაგანაც უდიდესი დანარჩენებზე 12° -ით და 21° -ით მეტია. იპოვეთ საშუალო სიდიდის კუთხის გრადუსული ზომა.

- ა. 59° ბ. 62° გ. 47° დ. 76°

1.30. ოთხი წრფე, რომლებიც ერთ წერტილში იკვეთება, სიბრტყეს რვა კუთხედ ყოფს, რომელთაგან ოთხი ისე შეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3:6:7. იპოვეთ საშუალო კუთხეებიდან მეტის გრადუსული ზომა.

ა. 50° ბ. 60° გ. 70° დ. 80°

1.31. რას უდრის კუთხე, თუ ის თავისი მოსაზღვრე კუთხეზე 48° -ით ნაკლებია?

ა. 36° ბ. 42° გ. 54° დ. 98°

1.32. რას უდრის კუთხე, თუ ის თავისი მოსაზღვრე კუთხეზე 14-ჯერ ნაკლებია?

ა. 172° ბ. 168° გ. 114° დ. 96°

1.33. ორი წრეთის გადაკვეთისას მიღებული ორი კუთხის სხვაობა 56° -ის ტოლია. იპოვეთ ამ კუთხეებიდან უმცირესი.

ა. 98° ბ. 84° გ. 76° დ. 62°

1.34. საერთო წვეროს მქონე ბლაგვი და მახვილი კუთხეების გვერდები მართობულია. იპოვეთ ბლაგვი კუთხის გრადუსული ზომა, თუ მახვილი კუთხის გრადუსული ზომა 33° -ის ტოლია.

ა. 24° ბ. 32° გ. 48° დ. 56°

1. 35. AB წრეთის რომელიღაც O წერტილიდან მის სხვადასხვა მხარეს აღებულია C და D წერტილები. კუთხე AOD 5-ჯერ ნაკლებია AOC კუთხეზე, თანაც $\angle BOD = 164^\circ$. იპოვეთ AOC კუთხის გრადუსული ზომა.

ა. 124° ბ. 112° გ. 108° დ. 96°

1.36. კუთხეები AOB და COB ერთმანეთის მოსაზღვრეა. OD სხივი AOB კუთხის ბისექტრისაა, თანაც AOD კუთხე 10-ჯერ ნაკლებია COB კუთხეზე. იპოვეთ DOB კუთხის გრადუსული ზომა.

ა. 15° ბ. 13° გ. 17° დ. 9°

1.37. სიბრტყის რომელიღაც O წერტილიდან გავლებულია სამი განსხვავებული OA , OB და OC სხივი ისე, რომ $\angle AOB - \angle COB = 16^\circ$ და $\angle AOB - \angle COA = 29^\circ$ იპოვეთ AOB კუთხის გრადუსული ზომა.

ა. 89° ბ. 97° გ. 135° დ. 141°

1.38. AB და CD წრეები იკვეთებიან O წერტილში. OK სხივი AOD კუთხის ბისექტრისაა, თანაც $\angle COK = 98^\circ$. იპოვეთ BOD კუთხის გრადუსული ზომა.

ა. 16° ბ. 20° გ. 28° დ. 32°

1.39. სამი წრეე, რომლებიც ერთ წერტილში იკვეთება, სიბრტყეს ექვს კუთხედ ყოფს, რომელთაგანაც უმცირესი დანარჩენებზე 27° -ით და 36° -ით ნაკლებია. იპოვეთ საშუალო სიდიდის კუთხის გრადუსული ზომა.

ა. 18⁰

ბ. 25⁰

გ. 44⁰

დ. 39⁰

1.40. ოთხი წრე, რომლებიც ერთ წერტილში იკვეთება, სიბრტყეს რვა კუთხედ ყოფს, რომელთაგან ოთხი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:8:9:14 . იპოვეთ საშუალო კუთხეებიდან ნაკლების გრადუსული ზომა.

ა. 30⁰

ბ. 35⁰

გ. 40⁰

დ. 45⁰

§2. სამკუთხედი. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებები.

განსაზღვრება: სიბრტყის ნაწილს, რომელიც შემოსაზღვრულია არა გადამკვეთი ტეხილით მრავალკუთხედი ეწოდება.

განსაზღვრება: ტეხილის გვერდებს მრავალკუთხედის გვერდები ეწოდება.

განსაზღვრება: მრავალკუთხედის ორი გვერდით შექმნილ კუთხეს მრავალკუთხედის კუთხე ეწოდება.

განსაზღვრება: მრავალკუთხედის კუთხის წვეროს მრავალკუთხედის წვერო ეწოდება.

განსაზღვრება: არამეზობელი წვეროების შემაერთებელ მონაკვეთს დიაგონალი ეწოდება.

თეორემა: მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი არის $180^{\circ}(n-2)$, სადაც n გვედების რიცხვია.

განსაზღვრება: მრავალკუთხედს რომელსაც ყველა გვერდი და ყველა კუთხე ტოლი აქვს წესიერი მრავალკუთხედი ეწოდება.

თეორემა: მრავალკუთხედის გარე კუთხეების ჯამი 360° -ის ტოლია.

თეორემა: მრავალკუთხედის ერთი წვეროდან შეიძლება $(n-3)$ დიაგონალის გავლება.

თეორემა: n -კუთხედში შეიძლება $\frac{n(n-3)}{2}$ დიაგონალის გავლება.

თეორემა: წესიერი n -კუთხედის ცენტრალური კუთხე $\frac{360^{\circ}}{n}$ -ის ტოლია.

თეორემა: წესიერი n -კუთხედის კუთხე $\frac{(n-2) \cdot 180^{\circ}}{n}$ -ის ტოლია.

თეორემა: წესიერი n -კუთხედის გვერდი $a_n = 2R \sin \frac{180^{\circ}}{n}$, სადაც R შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.

თეორემა: წესიერი n -კუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი $r = R \cos \frac{180^{\circ}}{n}$.

თეორემა: წესიერ ერთსახელა მრავალკუთხედების პერიმეტრები ისე შეეფადება ერთმანეთ, როგორც შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსები

$$\frac{p}{p_1} = \frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1}.$$

თეორემა: წესიერ ერთსახელა მრავალკუთხედების ფართობები ისე შეეფადება ერთმანეთ, როგორც შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსების კვადრატები

$$\frac{S}{S_1} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2}.$$

განსაზღვრება: მრავალკუთხედს რომელსაც, სამი გვერდი აქვს სამკუთხედი ეწოდება.

სამკუთხედებს განასხვავებენ მისი გვერდებისა და კუთხეების მიხედვით. გვერდების მიხედვით სამკუთხედები არსებობენ: **სხვადასხვა** გვერდა, როცა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები ერთმანეთისგან განსხვავებულია; **ტოლფერდა** როცა ორი გვერდის სიგრძე ტოლია, ტოლ გვერდებს ფერდები ეწოდება, ხოლო მესამე გვერდს ფუძე და **ტოლგვერდა** როცა სამკუთხედის ყველა გვერდი ტოლი სიგრძისაა. კუთხეების მიხედვით სამკუთხედები არსებობენ: მახვილკუთხა, როცა სამკუთხედის სამივე კუთხე მახვილია; მართკუთხა, როცა სამკუთხედის ერთი კუთხე მართია და ბლაგვკუთხა როცა სამკუთხედის ერთი კუთხე ბლაგვია.

განსაზღვრება: სამკუთხედის წვეროდან მოპირდაპირე გვერდზე ან მის გაგრძელებაზე დაშვებულ მართობს, სამკუთხედის სიმაღლე ეწოდება.

ცხადია, სამკუთხედს აქვს სამი სიმაღლე. სამკუთხედის სიმაღლეები ან მათი შემცველი წრფეები ერთ წერტილში იკვეთებიან.

განსაზღვრება: სამკუთხედის წვეროსა და მოპირდაპირე გვერდის შუა წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს სამკუთხედის მედიანა ეწოდება.

ცხადია, სამკუთხედს აქვს სამი მედიანა. სამკუთხედის მედიანები ერთ წერტილში იკვეთებიან.

განსაზღვრება: სამკუთხედის წვეროდან გამოსული ბისექტრისის ნაწილს, რომელიც სამკუთხედის წვეროს აერთებს მოპირდაპირე გვერდთან სამკუთხედის ბისექტრისა ეწოდება.

ცხადია, სამკუთხედს აქვს სამი ბისექტრისა. სამკუთხედის ბისექტრისები ერთ წერტილში იკვეთებიან.

მიღებულია შემდეგი აღნიშვნები: სიმაღლე - h_a, h_b, h_c ; მედიანა - m_a, m_b, m_c ბისექტრისა - l_a, l_b, l_c სადაც ინდექსი მიგვეითითებს თუ სამკუთხედის რომელ გვერდზეა დაშვებული თითოეული მათგანი.

თეორემა: ტოლფერდა სამკუთხედში, წვეროდან გავლებული სიმაღლე მედიანაცაა და ბისექტრისაც.

თეორემა: ტოლფერდა სამკუთხედში, ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.

თეორემა: სამკუთხედში მედიანების გადაკვეთის წერტილი მედიანებს ყოფს შეფარდებით 2:1 წვეროს მხრიდან.

სავარჯიშო ტესტი №2

2.1. ABC სამკუთხედში გავლებულია BD მედიანა, თანაც $BD = DC$ და $\angle A = 73^\circ$. იპოვეთ კუთხე C .

ა. 17°

ბ. 25°

გ. 32°

დ. 46°

2.2. ABC სამკუთხედში A და C კუთხეები ერთმანეთის ტოლია, ხოლო AD სიმაღლე BC გვერდს ორ ტოლ ნაწილად ჰყოფს. იპოვეთ AC , თუ $BD = 7,6$ სმ.

ა. 8,4სმ ბ. 15,2სმ გ. 23,6სმ დ. 36,8სმ

2.3. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 56სმ-ის ტოლია, თანაც ფერდი 8სმ-ით ნაკლებია ფუძეზე. იპოვეთ სამკუთხედის ფუძე.

ა. 9სმ ბ. 16სმ გ. 24სმ დ. 37სმ

2.4. ABC ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 88სმ-ის ტოლია. იპოვეთ AC ფუძეზე დაშვებული BD სიმაღლე, თუ BDC სამკუთხედის პერიმეტრია 55სმ.

ა. 11სმ ბ. 22სმ გ. 33სმ დ. 44სმ

2.5. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე ოთხჯერ მეტია წვეროსთან მდებარე კუთხეზე. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი კუთხე.

ა. 27° ბ. 48° გ. 63° დ. 80°

2.6. ABCD მართკუთხედში AB გვერდი ორჯერ გრძელია BC გვერდზე. იპოვეთ DMC კუთხე, თუ M არის AB გვერდის შუაწერტილი.

ა. 15° ბ. 30° გ. 90° დ. 75°

2.7. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი გარე კუთხე 60° -ის ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხე.

ა. 110° ბ. 120° გ. 100° დ. 130°

2.8. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 24სმ-ის ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის ფუძე, თუ ის 3სმ-ით მეტია ფერდზე.

ა. 8სმ ბ. 13სმ გ. 10სმ დ. 21სმ

2.9. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფუძეა AC, გავლებულია BD სიმაღლე. იპოვეთ მისი სიგრძე, თუ ABC სამკუთხედის პერიმეტრია 60სმ., ხოლო ABD სამკუთხედის კი 40სმ.

ა. 25სმ ბ. 20სმ გ. 15სმ დ. 10სმ

2.10. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდია 16სმ, ხოლო პერიმეტრი კი 44სმ. იპოვეთ მისი ფუძე.

ა. 24სმ ბ. 18სმ გ. 14სმ დ. 12სმ

2.11. ABC სამკუთხედში გავლებულია BD მედიანა, თანაც $BD = DC$ და $\angle A = 64^{\circ}$ იპოვეთ კუთხე C.

ა. 18° ბ. 26° გ. 35° დ. 47°

2.12. ABC სამკუთხედში A და C კუთხეები ერთმანეთის ტოლია, ხოლო AD ბისექტრისა BC გვერდს ორ ტოლ ნაწილად ჰყოფს. იპოვეთ AC, თუ $BD = 11,3$ სმ.

ა. 16,6სმ ბ. 47,2სმ გ. 35,8სმ დ. 22,6სმ

2.13. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 56სმ-ის ტოლია, თანაც ფუძე 6სმ-ით მეტია ფერდზე. იპოვეთ სამკუთხედის ფერდი.

ა. 12სმ ბ. 23სმ გ. 34სმ დ. 47სმ

2.14. ABC ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 66სმ-ის ტოლია. იპოვეთ AC ფუძე დაშვებული BD ბისექტრისა, თუ BDC სამკუთხედის პერიმეტრია 44სმ.

ა. 44სმ ბ. 33სმ გ. 22სმ დ. 11სმ

2.15. ტოლფერდა სამკუთხედში წვეროსთან მდებარე კუთხე შვიდჯერ ნაკლებია ფუძესთან მდებარე კუთხეზე. იპოვეთ სამკუთხედის უმცირესი კუთხე.

ა. 10° ბ. 24° გ. 12° დ. 26°

2.16. ABCD მართკუთხედში AB გვერდი ორჯერ მოკლეა BC გვერდზე. იპოვეთ AMC კუთხე, თუ M არის BC გვერდის შუაწერტილი.

ა. 90° ბ. 65° გ. 40° დ. 25°

2.17. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი გარე კუთხე 80° -ის ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის ფერდებთან მდებარე კუთხე.

ა. 20° ბ. 30° გ. 40° დ. 50°

2.18. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 36სმ-ის ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის ფერდი, თუ ის 6სმ-ით ნაკლებია ფუძეზე.

ა. 11სმ ბ. 16სმ გ. 24სმ დ. 31სმ

2.19. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფუძეა AC, გავლებულია BD ბისექტრისა. იპოვეთ მისი სიგრძე, თუ ABC სამკუთხედის პერიმეტრია 55სმ, ხოლო ABD სამკუთხედის კი 37სმ.

ა. 9სმ ბ. 14სმ გ. 22სმ დ. 31სმ

2.20. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა 24სმ., ხოლო პერიმეტრი კი 50სმ. იპოვეთ მისი ფერდი.

ა. 10სმ ბ. 13სმ გ. 16სმ დ. 19სმ

§3. სამკუთხედი. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებები.

თუ სამკუთხედში: სამკუთხედის გვერდებია - a, b, c ;

სიმაღლეები - h_a, h_b, h_c ; მედიანები - m_a, m_b, m_c ;

ბისექტრისები - l_a, l_b, l_c ; შიგა კუთხეები - α, β, γ ;

r - ჩახაზული წრეწირის რადიუსი; R - შემოხაზული წრეწირის რადიუსი;

$p = \frac{a+b+c}{2}$ - ნახევარპერიმეტრი; S - სამკუთხედის ფართობი.

მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ თანატოლობებს:

1. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

2. $a + b > c$, $a + c > b$, $c + b > a$.

3. $h_a \leq l_a \leq m_a$, $h_b \leq l_b \leq m_b$, $h_c \leq l_c \leq m_c$.

4. $h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

5. $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$, $m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$,

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

6. $l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$, $l_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)}$,

$$l_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}.$$

$l_a = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc(b+c)^2 - a^2}$, $l_b = \frac{1}{a+c} \sqrt{ac(a+c)^2 - b^2}$,

$$l_a = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab(a+b)^2 - c^2}$$

სავარჯიშო ტესტი №3

3.1. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში $\angle C = 106^\circ$. მასში გავლესულია AM სიმაღლე. იპოეთ MAB კუთხე.

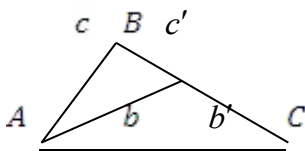
- ა. 38° ბ. 53° გ. 74° დ. 87°
- 3.2. ABC სამკუთხედში B კუთხე 2,5-ჯერ ნაკლებია A კუთხეზე, ხოლო C კუთხე 18° -ით ნაკლები B კუთხეზე. იპოვეთ A კუთხე.
- ა. 44° ბ. 53° გ. 62° დ. 75°
- 3.3. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისები ერთმანეთთან გადაკვეთისას ადგენენ 52° -იან კუთხეს. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხე.
- ა. 22° ბ. 38° გ. $(12x-3y)^\circ$ დ. 76°
- 3.4. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეებს შორის უდიდესი, თუ მათი გრადუსული ზომები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს როგორც 2:3:4.
- ა. 65° ბ. 85° გ. 105° დ. 125°
- 3.5. სამკუთხედის ორი კუთხე 68° -ის და 47° -ის ტოლია. იპოვეთ მისი გარე კუთხეებს შორის უმცირესი.
- ა. 68° ბ. 84° გ. 106° დ. 112°
- 3.6. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძისადმი გავლებულ მედიანასა და ფერდს შორის კუთხე 30° -ით ნაკლებია ფუძესთან მდებარე კუთხეზე. იპოვეთ წვეროსთან მდებარე კუთხე.
- ა. 45° ბ. 60° გ. 75° დ. 90°
- 3.7. ტოლფერდა მახვილკუთხა სამკუთხედში ფერდის სიმაღლესა და მეორე ფერდს შორის კუთხე 18° -ით ნაკლებია ფუძესთან მდებარე კუთხეზე. იპოვეთ ფუძესთან მდებარე კუთხე.
- ა. 54° ბ. 62° გ. 68° დ. 76°
- 3.8. ABC სამკუთხედში A და C კუთხეების ბისექტრისები M წერტილში იკვეთებიან. იპოვეთ B კუთხე, თუ ის AMC კუთხეზე 8-ჯერ მეტია.
- ა. 36° ბ. 24° გ. 12° დ. 8°
- 3.9. სამკუთხედის ერთ-ერთი შიგა კუთხე 70° -ის ტოლია, ხოლო ერთ-ერთი გარე კუთხე კი 85° -ის. იპოვეთ სამკუთხედის უმცირესი შიგა კუთხე.
- ა. 5° ბ. 15° გ. 25° დ. 35°
- 3.10. ABC სამკუთხედში B წვეროსთან მდებარე გარე კუთხე 7-ჯერ მეტია A კუთხეზე და 20° -ით მეტია C კუთხეზე. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი შიგა კუთხე.
- ა. 136° ბ. 132° გ. 124° დ. 120°
- 3.11. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში $\angle C = 112^\circ$. მასში გავლებულია AM სიმაღლე. იპოვეთ MAB კუთხე.
- ა. 26° ბ. 51° გ. 46° დ. 73°

- 3.12. ABC სამკუთხედში B კუთხე 15° -ჯერ ნაკლებია A კუთხეზე, ხოლო C კუთხე 16° -ით მეტი B კუთხეზე. იპოვეთ A კუთხე.
- ა. 27° ბ. 36° გ. 41° დ. 52°
- 3.13. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისები ერთმანეთთან გადაკვეთისას ადგენენ 112° -იან კუთხეს. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხე.
- ა. 44° ბ. 52° გ. 68° დ. 76°
- 3.14. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეებს შორის უმცირესი, თუ მათი გრადუსული ზომები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს როგორც $4:5:6$.
- ა. 39° ბ. 48° გ. 96° დ. 107°
- 3.15. სამკუთხედის ორი კუთხე 69° -ის და 52° -ის ტოლია. იპოვეთ მისი გარე კუთხეებს შორის უდიდესი.
- ა. 86° ბ. 97° გ. 128° დ. 135°
- 3.16. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძისადმი გაგლებულ მედიანასა და ფერდს შორის კუთხე 10° -ით მეტია ფუძესთან მდებარე კუთხეზე. იპოვეთ წვეროსთან მდებარე კუთხე.
- ა. 70° ბ. 80° გ. 90° დ. 100°
- 3.17. ტოლფერდა ბლაგვკუთხა სამკუთხედში ფერდის სიმაღლესა და მეორე ფერდს შორის კუთხე 26° -ით მეტია ფუძესთან მდებარე კუთხეზე. იპოვეთ ფუძესთან მდებარე კუთხე.
- ა. 29° ბ. 37° გ. 43° დ. 51°
- 3.18. ABC სამკუთხედში A და C კუთხეების ბისექტრისები M წერტილში იკვეთებიან. იპოვეთ B კუთხე, თუ ის AMC კუთხეზე 5° -ჯერ მეტია.
- ა. 20° ბ. 30° გ. 40° დ. 50°
- 3.19. სამკუთხედის ერთ-ერთი შიგა კუთხე 40° -ის ტოლია, ხოლო ერთ-ერთი გარე კუთხე კი 60° -ის. იპოვეთ სამკუთხედის უმცირესი შიგა კუთხე.
- ა. 38° ბ. 32° გ. 26° დ. 20°
- 3.20. ABC სამკუთხედში B წვეროსთან მდებარე გარე კუთხე 5° -ჯერ მეტია A კუთხეზე და 15° -ით მეტია C კუთხეზე. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი შიგა კუთხე.
- ა. 105° ბ. 110° გ. 115° დ. 120°

§4. სამკუთხედის ფართობი.

სამკუთხედის ბისექტრისის თვისებები.

$$1. l_a^2 = bc - b'c', \quad \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$



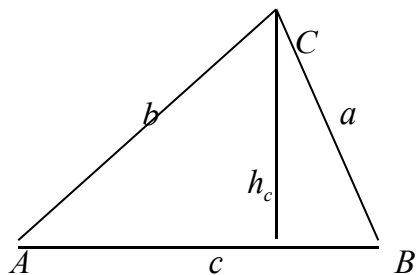
თეორემა: სამკუთხედის ფართობი მისი ერთი გვერდისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

$$1. S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c.$$

$$2. S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad - \text{ჰერონის ფორმულა}$$



$$3. S = \frac{1}{2} ab \sin \angle C;$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \angle A;$$

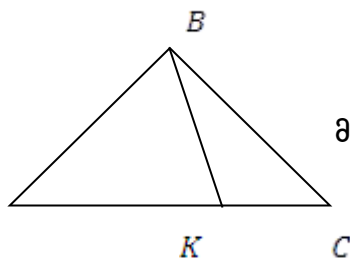
$$S = \frac{1}{2} ac \sin \angle B.$$

$$4. S = r \cdot p, \quad r = \frac{S}{p};$$

$$5. S = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}, \quad \text{სადაც } \angle A = \alpha; \angle B = \beta; \angle C = \gamma.$$

$$6. S = \frac{abc}{4R}, \quad R = \frac{abc}{4S};$$

$$7. S = \frac{r}{\sqrt{3}} (h_a + h_b + h_c);$$



მე- (10)-სი

$$8. S = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot h_a \cdot h_b \cdot h_c}, \quad R = 1; \quad A \quad K \quad C$$

$$9. S = \frac{p}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}};$$

$$10. S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK \cdot \sin \alpha$$

$$11. S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right) \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)}}$$

სავარჯიშო ტესტი №4

- 4.1. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 28 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მისი ფართობი.
- ა. 82 სმ² ბ. 98 სმ² გ. 106 სმ² დ. 114 სმ²
- 4.2. სამკუთხედის ფართობია 56 სმ². მისი ერთ-ერთი გვერდი მასზე დაშვებულ სიმაღლეზე 7-ჯერ ნაკლებია. იპოვეთ ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.
- ა. 28სმ ბ. 31სმ გ. 37სმ დ. 42სმ
- 4.3. სამკუთხედის ერთ-ერთ გვერდზე დაშვებულ სიმაღლე მასზე 3-ჯერ მეტია. იპოვეთ ამ გვერდის სიგრძე, თუ სამკუთხედის ფართობი 216 სმ²-ის ტოლია.
- ა. 9სმ ბ. 8სმ გ. 12სმ დ. 13სმ
- 4.4. ABC სამკუთხედის ფართობი 88 სმ²-ის ტოლია. მის AC გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ $AD : DC = 3 : 8$. იპოვეთ ABD და CBD სამკუთხედების ფართობებიდან მეტის მნიშვნელობა.
- ა. 76 სმ² ბ. 72 სმ² გ. 68 სმ² დ. 64 სმ²
- 4.5. სამკუთხედის გვერდებია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ. უმცირეს გვერდზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე 12 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ დანარჩენი ორი სიმაღლის სიგრძეების ჯამი.
- ა. 17,3სმ ბ. 19,4სმ გ. 21,5სმ დ. 23,2სმ
- 4.6. სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი ერთ-ერთი გვერდიდან დაშორებულია 7 სმ-ით, ხოლო გვერდების სიგრძეები 12 სმ-ის, 15 სმ-ის და 21 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.
- ა. 168 სმ² ბ. 172 სმ² გ. 176 სმ² დ. 184 სმ²
- 4.7. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების ნამრავლი 12-ჯერ მეტია ჰიპოტენუზაზე. იპოვეთ მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე.
- ა. 9 ბ. 12 გ. 15 დ. 18
- 4.8. სამკუთხედის ფართობი 64 სმ²-ის ტოლია. ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი ერთ-ერთი გვერდიდან დაშორებულია 4 სმ-ით. იპოვეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი.
- ა. 18სმ ბ. 24სმ გ. 26სმ დ. 32სმ
- 4.9. მოცემული O წერტილიდან ერთი და იმავე წრფისადმი გავლებულია AO და BO დახრილები, რომლებიც მასთან ადგენენ 30° და 60° -იან კუთხეებს. იპოვეთ AOB სამკუთხედის ფართობის შესაძლო მნიშვნელობებიდან უდიდესი, თუ $AO = 17$ სმ. და $BO = 21$ სმ.
- ა. 160 სმ² ბ. 162, 5 სმ² გ. 178, 5 სმ² დ. 180 სმ²
- 4.10. წრფიდან 12 სმ-ის ტოლ მანძილზე აღებული O წერტილიდან ამ წრფისადმი გავლებულია AO და BO დახრილები, რომლებიც წრფესთან ადგენენ შესაბამისად 30° და 60° -იან კუთხეებს. იპოვეთ AOB სამკუთხედის ფართობის შესაძლო მნიშ-

ვნელობებიდან უმცირესი, თუ სხვაობა გეგმილების სიგრძეებს შორის 7 სმ-ის ტოლია.

- ა. 34 სმ² ბ. 48 სმ² გ. 42 სმ² დ. 54 სმ²

4.11. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი 18 სმ²-ის ტოლია. იპოვეთ მისი ჰიპოტენუზა.

- ა. 12 სმ ბ. 15 სმ გ. 16 სმ დ. 19 სმ

4.12. სამკუთხედის ფართობია 147 სმ². მისი ერთ-ერთი გვერდი მასზე დაშვებულ სიმაღლეზე 6-ჯერ მეტია. იპოვეთ ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.

- ა. 5სმ ბ. 7სმ გ. 9სმ დ. 11სმ

4.13. სამკუთხედის ერთ-ერთ გვერდზე დაშვებულ სიმაღლე მასზე 4-ჯერ ნაკლებია. იპოვეთ ამ გვერდის სიგრძე, თუ სამკუთხედის ფართობი 128 სმ²-ის ტოლია.

- ა. 14სმ ბ. 26სმ გ. 28სმ დ. 32სმ

4.14. ABC სამკუთხედის ფართობი 91 სმ²-ის ტოლია. მის AC გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ $AD : DC = 4 : 9$. იპოვეთ ABD და CBD სამკუთხედების ფართობებიდან ნაკლების მნიშვნელობა.

- ა. 16 სმ² ბ. 22 სმ² გ. 28 სმ² დ. 30 სმ²

4.15. სამკუთხედის გვერდებია 16 სმ, 19 სმ და 22 სმ. უდიდეს გვერდზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე 18 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ დანარჩენი ორი სიმაღლის სიგრძეების ჯამი.

- ა. 36,3სმ ბ. 39,4სმ გ. 42,7სმ დ. 45,6სმ

4.16. სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი ერთ-ერთი გვერდიდან დაშორებულია 8 სმ-ით, ხოლო გვერდების სიგრძეები 13 სმ-ის, 18 სმ-ის და 25 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

- ა. 216 სმ² ბ. 224 სმ² გ. 228 სმ² დ. 234 სმ²

4.17. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების ნამრავლი 25-ჯერ მეტია მართი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეზე. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

- ა. 25 ბ. 30 გ. 35 დ. 40

4.18. სამკუთხედის პერიმეტრი 56 სმ-ის ტოლია. ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი ერთ-ერთი გვერდიდან დაშორებულია 9 სმ-ით. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

- ა. 228 სმ² ბ. 236 სმ² გ. 244 სმ² დ. 252 სმ²

4.19. მოცემული O წერტილიდან ერთი და იმავე წრფისადმი გავლებულია AO და BO დახრილები, რომლებიც მასთან ადგენენ 30° და 60° -იან კუთხეებს. იპოვეთ AOB სამკუთხედის ფართობის შესაძლო მნიშვნელობებიდან უმცირესი, თუ $AO = 14$ სმ. და $BO = 19$ სმ.

- ა. 38 სმ² ბ. 44, 5 სმ² გ. 52 სმ² დ. 66, 5 სმ²

4.20. წრფიდან 15 სმ-ის ტოლ მანძილზე აღებული O წერტილიდან ამ წრფისადმი გავლებულია AO და BO დახრილები, რომლებიც წრფესთან აღგენენ შესაბამისად 30° და 60° -იან კუთხეებს. იპოვეთ AOB სამკუთხედის ფართობის შესაძლო მნიშვნელობებიდან უდიდესი, თუ სხვაობა გეგმილების სიგრძეებს შორის 9 სმ-ის ტოლია.

- ა. 120 სმ² ბ. 125 სმ² გ. 130 სმ² დ. 135 სმ²

§5. სამკუთხედების მსგავსება

1. თუ $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ მაშინ:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{(AB)^2}{(A_1B_1)^2} = \frac{h_a^2}{h_{a_1}^2} = \frac{h_b^2}{h_{b_1}^2} = \frac{h_c^2}{h_{c_1}^2} = \frac{m_a^2}{m_{a_1}^2} = \frac{m_b^2}{m_{b_1}^2} = \frac{m_c^2}{m_{c_1}^2} = \frac{l_a^2}{l_{a_1}^2} = \frac{l_b^2}{l_{b_1}^2} = \frac{l_c^2}{l_{c_1}^2}$$

$$\frac{p_{\triangle ABC}}{p_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{h_a}{h_{a_1}} = \frac{h_b}{h_{b_1}} = \frac{h_c}{h_{c_1}} = \frac{m_a}{m_{a_1}} = \frac{m_b}{m_{b_1}} = \frac{m_c}{m_{c_1}} = \frac{l_a}{l_{a_1}} = \frac{l_b}{l_{b_1}} = \frac{l_c}{l_{c_1}}$$

სავარჯიშო ტესტი №5

5.1. ABC მართკუთხა სამკუთხედში მართკუთხის წვეროდან გავლებულია CD სიმაღლე. იპოვეთ BD მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AB = 9$ სმ და $AC = 6$ სმ.

- ა. 5სმ ბ. 7სმ გ. 6სმ დ. 8სმ

5.2. ორი სამკუთხედის ერთმანეთის მსგავსია. ერთ-ერთი მათგანის გვერდების სიგრძეები 6 სმ-ის, 8 სმ-ის და 13 სმ-ის ტოლია, ხოლო მეორისა კი 12 სმ-ის, 9 სმ-ის და x სმ. იპოვეთ x -ის მნიშვნელობა.

- ა. 18სმ ბ. 19,5სმ გ. 20,5სმ დ. 21სმ

5.3. ABC სამკუთხედში AC ფუძის პარალელურად გავლებულია წრფე, რომელიც AB და BC ფერდებს გადაკვეთს შესაბამისად E და F წერტილებში. იპოვეთ AB , თუ $AE = 6$ სმ, $EF = 20$ სმ და $AC = 24$ სმ.

- ა. 24სმ ბ. 32სმ გ. 36სმ დ. 48სმ

5.4. პარალელოგრამის სიმაღლეების სიგრძეებია 6 სმ. და 10 სმ., ხოლო პერიმეტრი 48 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ პარალელოგრამის უმცირესი გვერდის სიგრძე.

- ა. 6სმ ბ. 8სმ გ. 7სმ დ. 9სმ

5.5. ტრაპეციაში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილით მისი მცირე დიაგონალი 6 სმ-ის და 22 სმ-ის ტოლ მონაკვეთებად იყოფა. იპოვეთ დიდი ფუძის სიგრძე, თუ ამ ტრაპეციის შუახაზის სიგრძე 49 სმ-ია.

- ა. 77სმ ბ. 79სმ გ. 65სმ დ. 63სმ

5.6. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:4:5. იპოვეთ მისი მსგავსი სამკუთხედის უმცირესი გვერდი, თუ ამ უკანასკნელის პერიმეტრი 55 სმ-ის ტოლია.

- ა. 12სმ ბ. 10სმ გ. 18სმ დ. 16სმ

5.7. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის შუაწერტილზე გავლებულია ერთ-ერთი ფერდის პარალელური წრფე. იპოვეთ მოკვეთილი სამკუთხედის ფართობი, თუ მოცემული სამკუთხედის ფართობი 96 სმ²-ის ტოლია.

- ა. 36 სმ² ბ. 48 სმ² გ. 54 სმ² დ. 60 სმ²

5.8. ABC სამკუთხედში AC ფუძის პარალელურად გავლებული წრფე, AB და BC ფერდებს კვეთს შესაბამისად E და F წერტილებში, თანაც $AE:EB=6:5$. იპოვეთ $AEFC$ ტრაპეციის ფართობი, თუ ABC სამკუთხედის ფართობია 242 სმ².

- ა. 168 სმ² ბ. 176 სმ² გ. 184 სმ² დ. 192 სმ²

5.9. $ABCD$ პარალელოგრამის BC გვერდზე აღებულია E წერტილი ისე, რომ $BE:EC=4:7$. გავლებულია DE წრფე, რომელიც AB გვერდის გაგრძელებას კვეთს F წერტილში. იპოვეთ BF გვერდის სიგრძე, თუ $AB=280$ სმ.

- ა. 140სმ ბ. 150სმ გ. 160სმ დ. 170სმ

5.10. $ABCD$ ტრაპეციაში AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთებიან, თანაც BOC და AOD სამკუთხედების ფართობები შესაბამისად 4 სმ²-ის და 9 სმ²-ის ტოლია. იპოვეთ $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი.

- ა. 13 სმ² ბ. 25 სმ² გ. 28 სმ² დ. 36 სმ²

5.11. ABC მართკუთხა სამკუთხედში მართიკუთხის წვეროდან გავლებულია CD სიმაღლე. იპოვეთ BD მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AB=12$ სმ და $BC=6$ სმ.

- ა. 8სმ ბ. 9სმ გ. 10სმ დ. 11სმ

5.12. ორი სამკუთხედის ერთმანეთის მსგავსია. ერთ-ერთი მათგანის გვერდების სიგრძეები 7 სმ-ის, 12 სმ-ის და 16 სმ-ის ტოლია, ხოლო მეორისა კი 40 სმ-ის, 30 სმ-ის და x სმ. იპოვეთ x -ის მნიშვნელობა.

- ა. 17,5სმ ბ. 18,0სმ გ. 18,5სმ დ. 19სმ

5.13. ABC სამკუთხედში AC ფუძის პარალელურად გავლებულია წრფე, რომელიც AB და BC ფერდებს გადაკვეთს შესაბამისად E და F წერტილებში. იპოვეთ EF , თუ $AE=5$ სმ, $AB=5$ სმ და $AC=36$ სმ.

- ა. 15სმ ბ. 17სმ გ. 19სმ დ. 48სმ

5.14. პარალელოგრამის სიმაღლეების სიგრძეებია 12 სმ. და 16 სმ., ხოლო პერიმეტრი 98 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ პარალელოგრამის უდიდესი გვერდი.

- ა. 22სმ ბ. 24სმ გ. 28სმ დ. 30სმ

5.15. ტრაპეციაში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილით მისი დიდი დიაგონალი 7 სმ-ის და 17 სმ-ის ტოლ მონაკვეთებად იყოფა. იპოვეთ მცირე ფუძის სიგრძე, თუ ამ ტრაპეციის შუახაზის სიგრძე 36 სმ-ია.

- ა. 19სმ ბ. 21სმ გ. 29სმ დ. 31სმ

5.16. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4:5:6. იპოვეთ მისი მსგავსი სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ამ უკანასკნელის უდიდესი გვერდი 12 სმ-ის ტოლია.

- ა. 30სმ ბ. 28სმ გ. 24სმ დ. 20სმ

5.17. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის შუაწერტილზე გაგლებულია ერთ-ერთი ფერდის პარალელური წრფე. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის ფართობი, თუ მოკვეთილი სამკუთხედის ფართობი 27 სმ^2 -ის ტოლია.

- ა. 72 სმ^2 ბ. 64 სმ^2 გ. 56 სმ^2 დ. 48 სმ^2

5.18. ABC სამკუთხედში AC ფუძის პარალელურად გაგლებული წრფე, AB და BC ფერდებს კვეთს შესაბამისად E და F წერტილებში, თანაც $CF : FB = 3 : 1$. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $AEFC$ ტრაპეციის ფართობია 72 სმ^2 .

- ა. 79 სმ^2 ბ. 87 სმ^2 გ. 81 სმ^2 დ. 93 სმ^2

5.19. $ABCD$ პარალელოგრამის BC გვერდზე აღებულია E წერტილი ისე, რომ $BE : EC = 3 : 8$. გაგლებულია AE წრფე, რომელიც DC გვერდის გაგრძელებას კვეთს F წერტილში. იპოვეთ CD გვერდის სიგრძე, თუ $CF = 240$ სმ.

- ა. 70სმ ბ. 75სმ გ. 85სმ დ. 90სმ

5.20. $ABCD$ ტრაპეციაში AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთებიან, თანაც BOC და AOD სამკუთხედების ფართობები შესაბამისად 25 სმ^2 -ის და 49 სმ^2 -ის ტოლია. იპოვეთ $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი.

- ა. 116 სმ^2 ბ. 128 სმ^2 გ. 132 სმ^2 დ. 144 სმ^2

წნ. თანათარღობანი სამკუთხედის ელემენტებს შორის

მართკუთხა სამკუთხედი

1. სინუსების თეორემა

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

2. კოსინუსების თეორემა

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

3. ტანგენტების თეორემა

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}.$$

4. ნახევარი კუთხის თეორემა

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

5. კოსინუსების ფორმულა

$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha.$$

6. ტანგენტების ფორმულა

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{c \cdot \sin \alpha}{b - c \cdot \cos \alpha} = \frac{c \cdot \sin \beta}{a - c \cdot \cos \beta}.$$

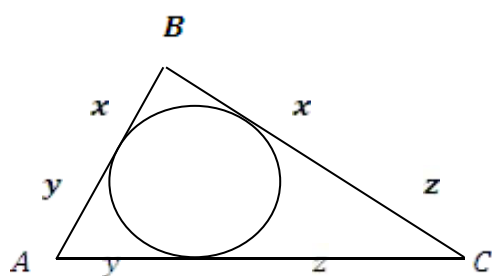
$$7. S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = 2 \cdot R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = r \cdot p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$$

$$8. R = \frac{p}{4 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma};$$

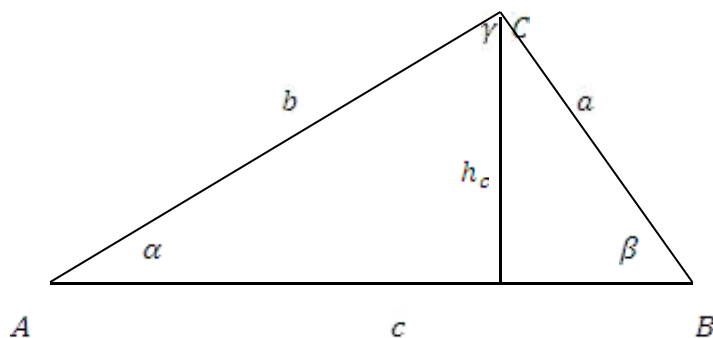
$$9. R = \frac{2S}{a+b+c} \qquad R = \frac{abc}{4S}; \qquad R = \frac{a}{2 \sin A}$$

$$10. r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = p \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 4 \cdot R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

$$11. \text{თუ (იხ. ნახაზი) მაშინ } S = \sqrt{xyz(x+y+z)}$$



მართკუთხა სამკუთხედი



$$1. h_a = b, h_b = a, h_c = \frac{ab}{c} \qquad 2. h_c^2 = a_c \cdot b_c \qquad 3. c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{პითაგორას თეორემა})$$

$$4. a = c \cdot \sin \alpha, \quad b = c \cdot \sin \beta, \quad a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad a = c \cdot \cos \beta, \quad b = c \cdot \cos \alpha, \quad a = b \cdot \operatorname{ctg} \beta.$$

$$5. r = \frac{a+b-c}{2}, \qquad r = p-c, \qquad R = \frac{c}{2}$$

$$6. m_a = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 + a^2}, \qquad m_b = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + b^2}, \qquad m_c = R = \frac{c}{2}.$$

$$7. S = \frac{ab}{2} = \frac{b^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{c^2 \cdot \sin 2\alpha}{4}.$$

8. მართკუთხა სამკუთხედში 30° – იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია: $a = \frac{c}{2}$, ხოლო მეორე კათეტი $b = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

სავარჯიშო ტესტი №6

6.1. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:2. ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე ყოფს მას ორ მონაკვეთად, რომელთაგან ერთი 4 სმ-ით მეტია მეორეზე. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

ა. 9,5სმ ბ. 10,4სმ გ. 11,7სმ დ. 12,6სმ

6.2. მართკუთხა სამკუთხედის ერთი კათეტი 7 სმ-ით მოკლეა მეორეზე. ჰიპოტენუზის პატარა კათეტთან შეფარდებაა 17:8. იპოვეთ დიდი კათეტი.

ა. 15სმ ბ. 16სმ გ. 18სმ დ. 19სმ

6.3. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეები 8 სმ-ის და 15 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილიდან ჰიპოტენუზამდე.

ა. 2,0სმ ბ. 2,5სმ გ. 3სმ დ. 3,5სმ

6.4. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე 8 სმ-ით მეტია ფუძეზე და 4 სმ-ით ნაკლებია ჰიპოტენუზაზე.

ა. 118სმ ბ. 126სმ გ. 132სმ დ. 144სმ

6.5. მახვილკუთხა სამკუთხედის გვერდებია 13 სმ., 14 სმ. და 15 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედის უმცირესი სიმაღლე.

ა. 11,2სმ ბ. 13,4სმ გ. 12,6სმ დ. 9,8სმ

6.6. მართკუთხედის ერთი გვერდი 8 სმ-ით ნაკლებია მეორე გვერდზე, ხოლო დიაგონალის გადაკვეთის წერტილიდან მის გვერდებამდე მანძილების ჯამი 28 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ მართკუთხედის დიაგონალი.

ა. 28სმ ბ. 32სმ გ. 36სმ დ. 40სმ

6.7. პარალელოგრამის ერთ-ერთი დიაგონალი გვერდის მართობულია, ხოლო მეორე დიაგონალის სიგრძე 24 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ პარალელოგრამის დიდი გვერდი, თუ მისი პატარა გვერდი 9 სმ-ია.

ა. $2\sqrt{46}$ სმ ბ. $3\sqrt{21}$ სმ გ. $3\sqrt{37}$ სმ დ. $4\sqrt{26}$ სმ

6.8. რომბის დიაგონალები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 7:24, ხოლო მისი პერიმეტრი 150 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ რომბის ფართობი.

ა. 167 სმ^2 ბ. 172 სმ^2 გ. 176 სმ^2 დ. 189 სმ^2

6.9. ტრაპეციის ფერდებია 20 სმ. და 13 სმ., ხოლო პატარა ფუძე 10 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის დიდი ფუძე, თუ მისი სიმაღლე 12 სმ-ის ტოლია.

ა. 27სმ ბ. 31სმ გ. 33სმ დ. 42სმ

- 6.10. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 5 სმ. და 21 სმ., ხოლო სიმაღლე 15 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფერდი.
- ა. 17სმ ბ. 18სმ გ. 20სმ დ. 21სმ
- 6.11. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:7. ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე ყოფს მას ორ მონაკვეთად, რომელთაგან ერთი 10 სმ-ით ნაკლებია მეორეზე. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.
- ა. 10,5სმ ბ. 13,4სმ გ. 16,7სმ დ. 19,6სმ
- 6.12. მართკუთხა სამკუთხედის ერთი კათეტი 7 სმ-ით გრძელია მეორეზე. ჰიპოტენუზის დიდ კათეტთან შეფარდებაა 5:4. იპოვეთ პატარა კათეტი.
- ა. 7სმ ბ. 9სმ გ. 10სმ დ. 12სმ
- 6.13. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეები 12 სმ-ის და 16 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან ჰიპოტენუზამდე.
- ა. 1,6სმ ბ. 2,4სმ გ. 2,8სმ დ. 3,2სმ
- 6.14. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე 6 სმ-ით მეტია ფუძეზე და 3 სმ-ით ნაკლებია ჰიპოტენუზაზე.
- ა. 96სმ ბ. 104სმ გ. 108სმ დ. 112სმ
- 6.15. ბლაგვეკუთხა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია 10 სმ., 17 სმ. და 21 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედის უდიდესი სიმაღლე.
- ა. 17,2სმ ბ. 16,8სმ გ. 16,4სმ დ. 15,6სმ
- 6.16. მართკუთხედის ერთი გვერდი 4 სმ-ით მეტია მეორე გვერდზე, ხოლო დიაგონალის გადაკვეთის წერტილიდან მის გვერდებამდე მანძილების ჯამი 14 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ მართკუთხედის დიაგონალი.
- ა. 16სმ ბ. 17სმ გ. 20სმ დ. 21სმ
- 6.17. პარალელოგრამის ერთ-ერთი დიაგონალი გვერდის მართობულია, ხოლო მეორე დიაგონალის სიგრძე 23 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ პარალელოგრამის პატარა გვერდი, თუ მისი დიდი გვერდი 13 სმ-ია.
- ა. $5\sqrt{5}$ სმ ბ. $4\sqrt{10}$ სმ გ. $3\sqrt{20}$ სმ დ. $2\sqrt{30}$ სმ
- 6.18. რომბის დიაგონალები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 8:15, ხოლო მისი ფართობი 240 სმ^2 -ის ტოლია. იპოვეთ ამ რომბის პერიმეტრი.
- ა. 56სმ ბ. 62სმ გ. 68სმ დ. 74სმ
- 6.19. ტრაპეციის ფერდებია 17 სმ. და 25 სმ., ხოლო დიდი ფუძე 29 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის პატარა ფუძე, თუ მისი სიმაღლე 15 სმ-ის ტოლია.
- ა. 5სმ ბ. 7სმ გ. 8სმ დ. 10სმ
- 6.20. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 6 სმ. და 20 სმ., ხოლო ფერდი კი 25 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის სიმაღლე.
- ა. 20სმ ბ. 24სმ გ. 26სმ დ. 28სმ

§7. ტოლგვერდა სამკუთხედი

1. $a = R\sqrt{3}$, $a = 2\sqrt{3}r$. a -ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდია.

2. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $R = 2r$.

3. $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $r = \frac{R}{2}$.

4. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$, $S = 3\sqrt{3}r^2$.

სავარჯიშო ტესტი №7

7.1. ABC სამკუთხედში გავლებულია BD მედიანა. BD სხივზე აღებულია ისეთი E წერტილი, რომ $BD = DE$. იპოვეთ AEC სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ $AB = 7$ სმ, $BC = 8$ სმ და $AC = 13$ სმ.

ა. 14სმ ბ. 21სმ გ. 28სმ დ. 35სმ

7.2. ტოლი სიგრძის AB და CD მონაკვეთები O წერტილში გადაიკვეთებიან, თანაც $AO : OB = DO : OC$. იპოვეთ BD მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AC = 15$ სმ.

ა. 10სმ ბ. 15სმ გ. 20სმ დ. 25სმ

7.3. AC და BD წრეფეები O წერტილში იკვეთებიან. ტოლი სიგრძის OM და ON მონაკვეთები შესაბამისად AOB და COD სამკუთხედების სიმაღლეებია, თანაც $AM = 6,3$ სმ და $DN = 4,7$ სმ. რას უდიდესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს CD მონაკვეთის სიგრძემ.

ა. 5,9სმ ბ. 7,4სმ გ. 9,7სმ დ. 11სმ

7.4. AB მონაკვეთის O შუაწერტილზე გავლებულია წრფე. ამ წრფეზე O წერტილის სხვადასხვა მხარეს აღებულია C და D წერტილები ისე, რომ $\angle CAB = \angle DBA$. იპოვეთ CD მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AB = 15$ სმ და $AO : OC = 3 : 4$.

ა. 14სმ ბ. 18სმ გ. 24სმ დ. 20სმ

7.5. A და C წერტილები ერთ წრფეს მიეკუთვნებიან, ხოლო B და D წერტილები ამ წრფის სხვადასხვა მხარეს ძეგს, თანაც $AB = CD$ და $CB = AD$. იპოვეთ $\angle ABC$, თუ $\angle CDA = 36^\circ$.

ა. 18° ბ. 26° გ. 36° დ. 48°

7.6. ABC და MNK სამკუთხედები ტოლია. MN გვერდი 3-ჯერ მეტია NK გვერდზე, ხოლო MK 7 სმ-ით ნაკლებია MN გვერდზე. იპოვეთ ABC სამკუთხედის უმცირესი გვერდი, თუ მისი პერიმეტრი 56 სმ-ის ტოლია.

- ა. 6სმ ბ. 9სმ გ. 17სმ დ. 21სმ

7.7. ABC და KPM სამკუთხედებში გავლებულია BO და PE ბისექტრისები, თანაც $\Delta ABO = \Delta KPE$. იპოვეთ EM მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AC = 37$ სმ და EM მონაკვეთი 15 სმ-ით მეტია KE მონაკვეთზე.

- ა. 26სმ ბ. 29სმ გ. 31სმ დ. 35სმ

7.8. ABC და EFG სამკუთხედებში გავლებულია BM და FE მედიანები, თანაც $\Delta ABM = \Delta EFN$. იპოვეთ FG მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AC = 28$ სმ და ის 2-ჯერ ნაკლებია GN მონაკვეთზე.

- ა. 12სმ ბ. 10სმ გ. 7სმ დ. 9სმ

7.9. ABC და APK სამკუთხედები ერთმანეთის ტოლია, თანაც $AB = 8$ სმ, $AC = AP = 9$ სმ და $AK = 6$ სმ. იპოვეთ BC და PK მონაკვეთების სიგრძეების ჯამი.

- ა. 12სმ ბ. 14სმ გ. 15სმ დ. 17სმ

7.10. ABC და MNK ტოლფერდა სამკუთხედებში ფერდებზე დაშვებულია AE და MF სიმაღლეები, თანაც $\Delta AEC = \Delta MFK$. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედების პერიმეტრთა ჯამი, თუ ერთ-ერთი მათგანის ფუძე 23 სმ-ის ტოლია, ხოლო მეორის ფერდი კი 32სმ.

- ა. 129სმ ბ. 156სმ გ. 147სმ დ. 174სმ

7.11. ABC სამკუთხედში გავლებულია BD მედიანა. BD სხივზე აღებულია ისეთი E წერტილი, რომ $BD = DE$. იპოვეთ AEC სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ $AB = 12$ სმ, $BC = 17$ სმ და $AC = 22$ სმ.

- ა. 42სმ ბ. 51სმ გ. 64სმ დ. 73სმ

7.12. ტოლი სიგრძის AB და CD მონაკვეთები O წერტილში გადაიკვეთებიან, თანაც $AO : OB = DO : OC$. იპოვეთ BD მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AC = 20$ სმ.

- ა. 30სმ ბ. 25სმ გ. 20სმ დ. 15სმ

7.13. AC და BD წრეფეები O წერტილში იკვეთებიან. ტოლი სიგრძის OM და ON მონაკვეთები შესაბამისად AOB და COD სამკუთხედების სიმაღლეებია, თანაც $AM = 9,4$ სმ და $DN = 5,3$ სმ. რას უმცირესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს CD მონაკვეთის სიგრძემ.

- ა. 4,1სმ ბ. 5,4სმ გ. 8,3სმ დ. 9,6სმ

7.14. AB მონაკვეთის O შუაწერტილზე გავლებულია წრფე. ამ წრფეზე O წერტილის სხვადასხვა მხარეს აღებულია C და D წერტილები ისე, რომ $\angle CAB = \angle DBA$. იპოვეთ CD მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AB = 24$ სმ და $AO : OC = 4 : 7$.

- ა. 21სმ ბ. 26სმ გ. 37სმ დ. 32სმ

7.15. A და C წერტილები ერთ წრფეს მიეკუთვნებიან, ხოლო B და D წერტილები ამ წრფის სხვადასხვა მხარეს ძევს, თანაც $AB = CD$ და $CB = AD$. იპოვეთ $\angle ABC$, თუ $\angle CDA = 63^\circ$.

- ა. 47° ბ. 55° გ. 63° დ. 71°

7.16. ABC და MNK სამკუთხედები ტოლია. MN გვერდი 4-ჯერ ნაკლებია NK გვერდზე, ხოლო MK 6 სმ-ით მეტია MN გვერდზე. იპოვეთ ABC სამკუთხედის უდიდესი გვერდი, თუ მისი პერიმეტრი 21 სმ-ის ტოლია.

- ა. 10სმ ბ. 18სმ გ. 8სმ დ. 12სმ

7.17. ABC და KPM სამკუთხედებში გავლებულია BO და PE ბისექტრისები, თანაც $\triangle ABO = \triangle KPE$. იპოვეთ EM მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AC = 46$ სმ და EM მონაკვეთი 18 სმ-ით ნაკლებია KE მონაკვეთზე.

- ა. 11სმ ბ. 14სმ გ. 16სმ დ. 19სმ

7.18. ABC და EFG სამკუთხედებში გავლებულია BM და FN მედიანები, თანაც $\triangle ABM = \triangle FEN$. იპოვეთ FG მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AC = 48$ სმ და ის 3-ჯერ მეტია GN მონაკვეთზე.

- ა. 45სმ ბ. 54სმ გ. 63სმ დ. 72სმ

7.19. ABC და APK სამკუთხედები ერთმანეთის ტოლია, თანაც $AB = 11$ სმ, $AC = AP = 17$ სმ და $AK = 23$ სმ. იპოვეთ BC და PK მონაკვეთების სიგრძეების ჯამი.

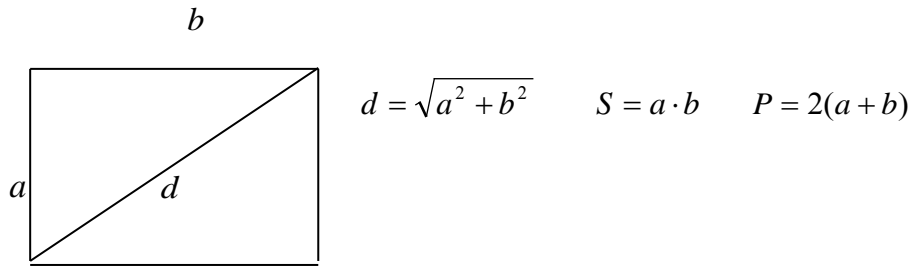
- ა. 22სმ ბ. 28სმ გ. 34სმ დ. 40სმ

7.20. ABC და MNK ტოლფერდა სამკუთხედებში ფერდებზე დაშვებულია AE და MF სიმაღლეები, თანაც $\triangle AEC = \triangle MFK$. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედების პერიმეტრთა ჯამი, თუ ერთ-ერთი მათგანის ფუძე 14 სმ-ის ტოლია, ხოლო მეორის ფერდი კი 23 სმ.

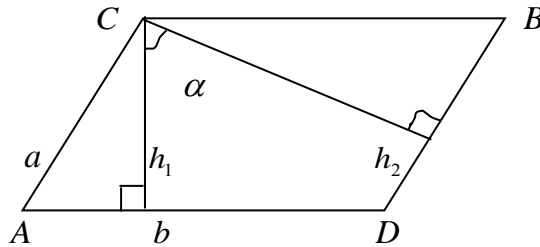
- ა. 115სმ ბ. 120სმ გ. 97სმ დ. 88სმ

წ8. მართკუთხედი. პარალილოგრამი.

მართკუთხედი



პარალილოგრამი



$ABCD$ პარალელოგრამში $AB = CD = a$, $BC = AD = b$.

1. $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$

2. $S = a \cdot h_1$, $S = b \cdot h_2$.

3. $S = a \cdot b \cdot \sin A$.

4. $S = \frac{h_1 \cdot h_2}{\sin \alpha}$.

5. პარალელოგრამში ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლეებს შორის კუთხე პარალელოგრამის მახვილი კუთხის ტოლია.

6. პარალელოგრამში მახვილი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლეებს შორის კუთხე პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის ტოლია.

სავარჯიშო ტესტი №8

8.1. პარალელოგრამის ორი კუთხის სხვაობა 48° -ის ტოლია. იპოვეთ მისი ბლაგვი კუთხის გრადუსული ზომა.

ა. 132° ბ. 144° გ. 128° დ. 116°

8.2. პარალელოგრამის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $2:7$. იპოვეთ კუთხე პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლესა და ბისექტრისას შორის.

ა. 132° ბ. 144° გ. 128° დ. 116°

8.3. პარალელოგრამის მახვილი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეებს შორის კუთხე უდრის 118° -ს. იპოვეთ პარალელოგრამის მახვილი კუთხე.

ა. 10° ბ. 15° გ. 20° დ. 25°

8.4. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს ყოფს შეფარდებით $3:5$ (მახვილი კუთხის წვეროს მხრიდან). იპოვეთ პარალელოგრამის მცირე გვერდი, თუ მისი პერიმეტრი 88 სმ-ს ტოლია.

ა. 12 სმ ბ. 18 სმ გ. 26 სმ დ. 34 სმ

8.5. პარალელოგრამის გვერდებია 7 სმ და 20 სმ. მის დიდ გვერდთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისები მოპირდაპირე გვერდს ყოფენ სამ ნაწილად. იპოვეთ ამ ნაწილებიდან უმცირესი.

ა. 4 სმ ბ. 6 სმ გ. 5 სმ დ. 7 სმ

8.6. $ABCD$ პარალელოგრამში გავლებულია B კუთხის ბისექტრისა, რომელიც AD გვერდს E წერტილში კვეთს. იპოვეთ AE და ED მონაკვეთების სიგრძეებიდან უმცირესი, თუ $CD = 5$ სმ და $BC = 9$ სმ.

ა. 7 სმ ბ. 5 სმ გ. 4 სმ დ. 3 სმ

8.7. $ABCD$ პარალელოგრამში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გავლებული წრფე, რომელიც AB და CD გვერდებზე ჩამოჭრის მონაკვეთებს $AE = 2$ სმ და $DF = 7$ სმ. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე.

ა. 3 სმ ბ. 5 სმ გ. 7 სმ დ. 9 სმ

8.8. $ABCD$ პარალელოგრამის პერიმეტრია 20 სმ. იპოვეთ BD დიაგონალის სიგრძე, თუ ABD სამკუთხედის პერიმეტრი 15 სმ-ს ტოლია.

ა. 10 სმ ბ. 12 სმ გ. 14 სმ დ. 16 სმ

8.9. მართკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი 3 -ჯერ უფრო შორსაა მცირე გვერდიდან ვიდრე დიდიდან. მართკუთხედის პერიმეტრი 96 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ სხვაობა დიდსა და მცირე გვერდების სიგრძეებს შორის.

ა. 18 სმ ბ. 24 სმ გ. 26 სმ დ. 32 სმ

8.10. მართკუთხედის წვეროდან დიაგონალზე დაშვებული პერპენდიკულარი მართ კუთხეს ყოფს შეფარდებით $2:3$. იპოვეთ კუთხე ამ პერპენდიკულარსა და მეორე დიაგონალს შორის.

- ა. 16° ბ. 18° გ. 22° დ. 24°
- 8.11. პარალელოგრამის ორი კუთხის ჯამი 216° -ის ტოლია. იპოვეთ მისი მახვილი კუთხის გრადუსული ზომა.
- ა. 72° ბ. 84° გ. 68° დ. 56°
- 8.12. პარალელოგრამის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $4:11$. იპოვეთ კუთხე პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლესა და ბისექტრისას შორის.
- ა. 24° ბ. 28° გ. 32° დ. 36°
- 8.13. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეს შდორის კუთხე უდრის 26° -ს. იპოვეთ პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხე.
- ა. 138° ბ. 146° გ. 154° დ. 162°
- 8.14. პარალელოგრამის მახვილი კუთხის ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს ყოფს შეფარდებით $3:5$ (ბლაგვი კუთხის წვეროს მხრიდან). იპოვეთ პარალელოგრამის დიდი გვერდი, თუ მისი პერიმეტრი 132 სმ-ს ტოლია.
- ა. 37 სმ ბ. 45 სმ გ. 49 სმ დ. 53 სმ
- 8.15. პარალელოგრამის გვერდებია 8 სმ და 13 სმ. მის დიდ გვერდთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისები მოპირდაპირე გვერდს ყოფენ სამ ნაწილად. იპოვეთ ამ ნაწილებიდან უმცირესი.
- ა. 4 სმ ბ. 2 სმ გ. 5 სმ დ. 3 სმ
- 8.16. $ABCD$ პარალელოგრამში გავლებულია C კუთხის ბისექტრისა, რომელიც AD გვერდს E წერტილში კვეთს. იპოვეთ AE და ED მონაკვეთების სიგრძეებიდან უდიდესი, თუ $AB = 3$ სმ და $BC = 8$ სმ.
- ა. 3 სმ ბ. 5 სმ გ. 8 სმ დ. 10 სმ
- 8.17. $ABCD$ პარალელოგრამში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გავლებული წრფე, რომელიც BC და AD გვერდებზე ჩამოჭრის მონაკვეთებს $CE = 3$ სმ და $DF = 10$ სმ. იპოვეთ BC მონაკვეთის სიგრძე.
- ა. 7 სმ ბ. 9 სმ გ. 13 სმ დ. 11 სმ
- 8.18. $ABCD$ პარალელოგრამის პერიმეტრია 40 სმ. იპოვეთ AC დიაგონალის სიგრძე, თუ ACD სამკუთხედის პერიმეტრი 30 სმ-ს ტოლია.
- ა. 10 სმ ბ. 15 სმ გ. 25 სმ დ. 20 სმ
- 8.19. მართკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი 5 -ჯერ უფრო ახლოსაა დიდ გვერდიდან ვიდრე მცირედან. მართკუთხედის პერიმეტრი 168 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ სხვაობა დიდსა და მცირე გვერდების სიგრძეებს შორის.
- ა. 48 სმ ბ. 54 სმ გ. 56 სმ დ. 62 სმ
- 8.20. მართკუთხედის წვეროდან დიაგონალზე დაშვებული პერპენდიკულარი მართ კუთხეს ყოფს შეფარდებით $7:8$. იპოვეთ კუთხე ამ პერპენდიკულარსა და მეორე დიაგონალს შორის.

ა. 6°

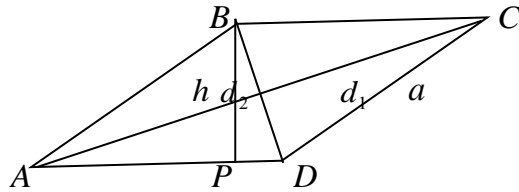
ბ. 12°

გ. 16°

დ. 22°

§9. რომბი. კვადრატი.

რომბი



$y = \ln x$ რომბში $AB = BC = CD = AD = a$, $AC \perp BD$,

$AC = d_1$, $BD = d_2$, სიმაღლე $BP = h$.

1. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ ანუ $AC^2 + BD^2 = 4a^2$.

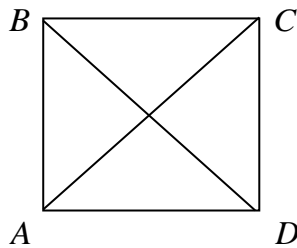
2. $S = a \cdot h$

3. $S = a^2 \sin \angle A$

4. $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$

5. $BD = 2a \sin \frac{\angle A}{2}$, $AC = 2a \cos \frac{\angle A}{2}$.

კვადრატი



$ABCD$ კვადრატში $AB = BC = CD = AD = a$, $AC \perp BD$, $AC = d_1$, $BD = d_2$

1. $a = R\sqrt{2}$; $a = 2r$.

2. $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

$R = \sqrt{2}r$. $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

3. $r = \frac{a}{2}$.

4. $S = a^2$, $S = 2R^2$, $S = 4r^2$.

საგარჯიშო ტესტი №9

9.1. რომბის გვერდის მიერ დიაგონალებთან შედგენილი კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4:15. იპოვეთ რომბის მახვილი კუთხის გრადუსული ზომა.

ა. 14° ბ. 48° გ. 26° დ. 32°

9.2. რომბის კუთხეების გრადუსულ ზომათა ჯამი 88° -ის ტოლია. იპოვეთ მისი გვერდების მიერ დიაგონალებთან შედგენილი კუთხეებიდან უდიდესი.

ა. 46° ბ. 52° გ. 68° დ. 74°

9.3. იპოვეთ რომბის მახვილი კუთხე, თუ მისი ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლეები ერთმანეთთან ადგენენ 42° -იან კუთხეს.

ა. 42° ბ. 21° გ. 56° დ. 68°

9.4. რომბის პერიმეტრია 76 სმ, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალის სიგრძე 19 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ რომბის ბლაგვი კუთხე.

ა. 98° ბ. 106° გ. 112° დ. 120°

9.5. რომბის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე მცირე დიაგონალთან ადგანს 15° -იან კუთხეს. იპოვეთ რომბის პერიმეტრი, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე 7 სმ-ის ტოლია.

ა. 38სმ ბ. 44სმ გ. 56სმ დ. 62სმ

9.6. რომბის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან მის ერთ-ერთ გვერდისადმი გავლებული მართობი ისე შეეფარდება დიდ დიაგონალს, როგორც 1:4. იპოვეთ მცირე დიაგონალის სიგრძე, თუ რომბის პერიმეტრია 76 სმ.

ა. 26სმ ბ. 38სმ გ. 42სმ დ. 54სმ

9.7. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის მახვილი კუთხეა 60° , ჩახაზულია 4 სმ სიგრძის გვერდის მქონე რომბი ისე, რომ ეს კუთხე მათ საერთო აქვთ, ხოლო რომბის ყველა წვერო სამკუთხედის გვერდებზე მდებარეობს. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი გვერდი.

ა. 12სმ ბ. 18სმ გ. 25სმ დ. 29სმ

9.8. კვადრატში ჩახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ მისი გვერდები კვადრატის დიაგონალების პარალელურია. იპოვეთ კვადრატის დიაგონალი, თუ მართკუთხედის პერიმეტრია 44 სმ.

ა. 11სმ ბ. 22სმ გ. 33სმ დ. 44სმ

9.9. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია კვადრატი, რომელსაც სამკუთხედთან საერთო მართი კუთხე აქვს და ერთ-ერთი წვერო ჰიპოტენუზაზე დევს. იპოვეთ კვადრატის პერიმეტრი, თუ სამკუთხედის კათეტი 14 სმ-ის ტოლია.

ა. 48სმ ბ. 42სმ გ. 32სმ დ. 28სმ

9.10. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია კვადრატის იხე, რომ მისი ორი წვერო პიპოტენუზაზე მდებარეობს, დანარჩენი კი კათეტებზე. იპოვეთ სამკუთხედის პიპოტენუზა, თუ კვადრატის პერიმეტრია 8 სმ.

ა. 6სმ ბ. 4სმ გ. 8სმ დ. 10სმ

9.11. რომბის გვერდის მიერ დიაგონალებთან შედგენილი კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 7:11. იპოვეთ რომბის ბლაგვი კუთხის გრადუსული ზომა.

ა. 100° ბ. 105° გ. 110° დ. 115°

9.12. რომბის კუთხეების გრადუსულ ზომათა სხვაობა 24° -ის ტოლია. იპოვეთ მისი გვერდების მიერ დიაგონალებთან შედგენილი კუთხეებიდან უდიდესი.

ა. 51° ბ. 62° გ. 68° დ. 71°

9.13. იპოვეთ რომბის ბლაგვი კუთხე, თუ მისი მახვილი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლეები ერთმანეთთან აღგენენ 118° -იან კუთხეს.

ა. 96° ბ. 102° გ. 104° დ. 118°

9.14. რომბის პერიმეტრია 84 სმ, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალის სიგრძე 21 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ რომბის მახვილი კუთხე.

ა. 60° ბ. 68° გ. 74° დ. 82°

9.15. რომბის მახვილი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე დიდ დიაგონალთან აღგანს 75° -იან კუთხეს. იპოვეთ რომბის პერიმეტრი, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე 8 სმ-ის ტოლია.

ა. 58სმ ბ. 64სმ გ. 76სმ დ. 82სმ

9.16. რომბის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან მის ერთ-ერთ გვერდისადმი გავლებული მართობი ისე შეეფარდება მცირე დიაგონალს, როგორც 1:4. იპოვეთ დიდი დიაგონალის სიგრძე, თუ რომბის პერიმეტრია 148 სმ.

ა. 48სმ ბ. 56სმ გ. 62სმ დ. 74სმ

9.17. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის მახვილი კუთხეა 60° , ჩახაზულია 6 სმ სიგრძის გვერდის მქონე რომბი ისე, რომ ეს კუთხე მათ საერთო აქვთ, ხოლო რომბის ყველა წვერო სამკუთხედის გვერდებზე მდებარეობს. იპოვეთ სამკუთხედის უმცირესი გვერდი.

ა. 7სმ ბ. 9სმ გ. 12სმ დ. 14სმ

9.18. კვადრატში ჩახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ მისი გვერდები კვადრატის დიაგონალების პარალელურია. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი, თუ კვადრატის დიაგონალია 16 სმ.

ა. 16სმ ბ. 24სმ გ. 32სმ დ. 48სმ

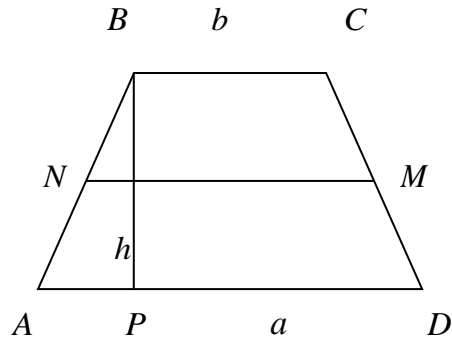
9.19. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია კვადრატი, რომელსაც სამკუთხედთან საერთო მართი კუთხე აქვს და ერთ-ერთი წვერო ჰიპოტენუზაზე დევს. იპოვეთ სამკუთხედის კათეტი, თუ კვადრატის პერიმეტრია 36 სმ.

ა. 14სმ ბ. 18სმ გ. 26სმ დ. 32სმ

9.20. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია კვადრატი ისე, რომ მისი ორი წვერო ჰიპოტენუზაზე მდებარეობს, დანარჩენი კი კათეტებზე. იპოვეთ კვადრატის პერიმეტრი, თუ სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 12 სმ-ის ტოლია.

ა. 12სმ ბ. 14სმ გ. 16სმ დ. 18სმ

§10. ტრაპეცია



$ABCD$ ტრაპეციაში ფუძეებია $AD = a$, $BC = b$, ფერდებია $AB = c$ და $CD = d$, სიმაღლე $BP = h$, AC და BD დიაგონალებია, $MN = m$ -კი ტრაპეციის შუახაზი.

- $MN = \frac{a+b}{2}$.

- $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

- როცა $AB = CD$ მაშინ $AP = \frac{a-b}{2}$, $PD = \frac{a+b}{2} = MN$,

$$S = (a - c \cdot \cos \angle A) \cdot c \cdot \sin \angle A = (b + c \cdot \cos \angle A) \cdot c \cdot \sin \angle A$$

- თუ ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია, მაშინ სიმაღლე შუამონაკვეთის ტოლია $h = \frac{a+b}{2}$ და $S = h^2$.

სავარჯიშო ტესტი №10

10.1. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $2:7:9$, ხოლო მისი პერიმეტრი 90 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ იმ სამკუთხედის უმცირესი გვერდის სიგრძე, რომლის წვეროები მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებია.

- ა. 5სმ ბ. 3სმ გ. 9სმ დ. 7სმ

10.2. $ABCD$ პარალელოგრამის პერიმეტრია 64 სმ, თანაც $\angle A = 120^\circ$ და $AC = CD$. იპოვეთ EBF სამკუთხედის პერიმეტრი, სადაც E და F წერტილები შესაბამისად BC და BA გვერდების შუაწერტილებია.

- ა. 18სმ ბ. 22სმ გ. 24სმ დ. 32სმ

10.3. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $7:8:9$. იმ სამკუთხედის პერიმეტრი, რომლის წვეროებიც მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებია, უდრის 48 სმ-ს. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის უდიდესი გვერდი.

- ა. 27სმ ბ. 29სმ გ. 32სმ დ. 36სმ

10.4. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის შუა წერტილი კათეტებიდან 7 სმ-ით და 4 სმ-ით არის დაშორებული. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

- ა. 108 სმ^2 ბ. 112 სმ^2 გ. 118 სმ^2 დ. 124 სმ^2

10.5. ABC სამკუთხედის AB გვერდის შუა წერტილიდან AC წრფისადმი გაკლებულია მართობი 8 სმ-ია. იპოვეთ AC გვერდის სიგრძე, თუ ABC სამკუთხედის ფართობი 64 სმ^2 -ის ტოლია.

- ა. 8სმ ბ. 9სმ გ. 11სმ დ. 12სმ

10.6. ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეებია 13 სმ. და 21 სმ. იპოვეთ მანძილი ტრაპეციის ფერდების შუაწერტილებს შორის.

- ა. 18სმ ბ. 19სმ გ. 17სმ დ. 16სმ

10.7. ტრაპეციის შუახაზის სიგრძე 18 სმ-ის ტოლია, ხოლო დიდი ფუძე 5-ჯერ მეტია მცირეზე. იპოვეთ დიდი ფუძე.

- ა. 26სმ ბ. 28სმ გ. 30სმ დ. 32სმ

10.8. ტოლფერდა ტრაპეციის მცირე ფუძე 5სმ-ის ტოლია, ხოლო შუახაზი 12 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძე.

- ა. 17სმ ბ. 24სმ გ. 21სმ დ. 19სმ

10.9. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალი მახვილი კუთხის ბისექტრისა. იპოვეთ ამ ტრაპეციის შუახაზი, თუ მისი პერიმეტრი 36 სმ-ია, ხოლო ფერდი კი 7 სმ.

- ა. 11სმ ბ. 13სმ გ. 15სმ დ. 17სმ

10.10. $ABCD$ ტრაპეციაში BC და AD ფუძეების სიგრძეები შესაბამისად 17 სმ-ის და 29 სმ-ის ტოლია. ფუძეების პარალელურად გავლებულია EF და MN მონაკვეთები ისე, რომ E და M წერტილები მიეკუთვნებიან AB გვერდს, ხოლო F და N წერტილები კი CD გვერდს. იპოვეთ EF მონაკვეთის სიგრძე, თუ $BE = EM = MA$.

- ა. 19სმ ბ. 21სმ გ. 22სმ დ. 24სმ

10.11. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:4:8, ხოლო მისი პერიმეტრი 75 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ იმ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე, რომლის წვეროები მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებია.

- ა. 35სმ ბ. 40სმ გ. 45სმ დ. 50სმ

10.12. $ABCD$ პარალელოგრამის პერიმეტრია 56 სმ., თანაც $\angle D = 120^\circ$ და $BD = AD$. იპოვეთ ECF სამკუთხედის პერიმეტრი, სადაც E და F წერტილები შესაბამისად CB და CD გვერდების შუაწერტილებია.

- ა. 21სმ ბ. 28სმ გ. 33სმ დ. 36სმ

10.13. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 6:7:9. იმ სამკუთხედის პერიმეტრი, რომლის წვეროებიც მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებია, უდრის 88 სმ-ს. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის უმცირესი გვერდი.

- ა. 36სმ ბ. 44სმ გ. 48სმ დ. 52სმ

10.14. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის შუა წერტილი კათეტებიდან 9 სმ-ით და 12 სმ-ით არის დაშორებული. იპოვეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი.

- ა. 56სმ ბ. 64სმ გ. 68სმ დ. 72სმ

10.15. ABC სამკუთხედის AB გვერდის შუა წერტილიდან AC წრფისადმი გავლებულია მართობი 7 სმ-ია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ AC გვერდის სიგრძე 5 სმ-ის ტოლია.

- ა. 28 სმ² ბ. 35 სმ² გ. 42 სმ² დ. 56 სმ²

10.16. ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეებია 17 სმ. და 25 სმ. იპოვეთ მანძილი ტრაპეციის ფერდების შუაწერტილებს შორის.

- ა. 18სმ ბ. 19სმ გ. 21სმ დ. 23სმ

10.17. ტრაპეციის შუახაზის სიგრძე 24 სმ-ის ტოლია, ხოლო მცირე ფუძე 3-ჯერ ნაკლებია დიდზე. იპოვეთ მცირე ფუძე.

- ა. 8სმ ბ. 9სმ გ. 7სმ დ. 6სმ

10.18. ტოლფერდა ტრაპეციის მცირე ფუძე 5სმ-ის ტოლია, ხოლო შუახაზი 12 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძე.

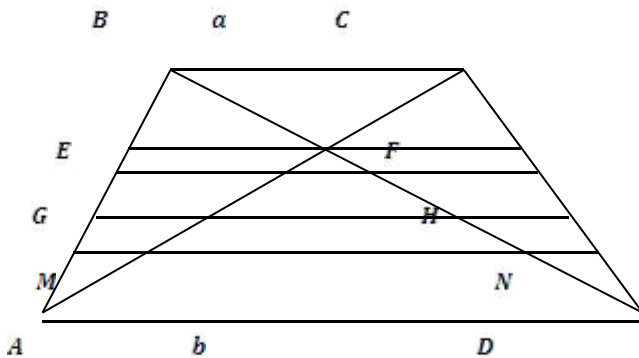
- ა. 17სმ ბ. 24სმ გ. 21სმ დ. 19სმ

10.19. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალი ბლაგვი კუთხის ბისექტრისა. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფერდი, თუ მისი პერიმეტრი 82 სმ-ია, ხოლო შუახაზი კი 20 სმ.

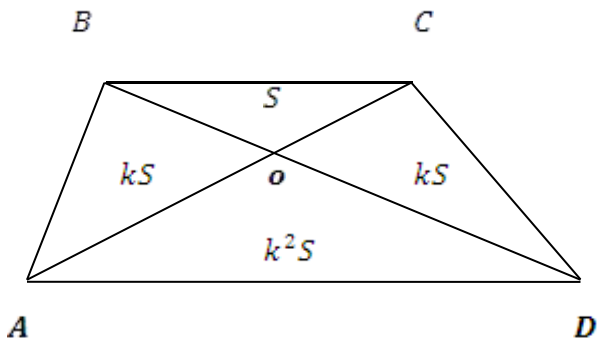
- ა. 12სმ ბ. 14სმ გ. 17სმ დ. 19სმ

10.20. $ABCD$ ტრაპეციაში BC და AD ფუძეების სიგრძეები შესაბამისად 12 სმ-ის და 21 სმ-ის ტოლია. ფუძეების პარალელურად გავლებულია EF და MN მონაკვეთები ისე, რომ E და M წერტილები მიეკუთვნებიან AB გვერდს, ხოლო F და N წერტილები კი CD გვერდს. იპოვეთ MN მონაკვეთის სიგრძე, თუ $CF = FN = ND$.

- ა. 18სმ ბ. 19სმ გ. 25სმ დ. 26სმ



- 1) საშუალო არითმეტიკული - $\frac{a+b}{2}$, გამოსახულია GH მონაკვეთით, სადაც $AG = GB$.
- 2) საშუალო გეომეტრიული - \sqrt{ab} , გამოსახულია KL მონაკვეთით, სადაც $\frac{KL}{a} = \frac{b}{KL}$.
- 3) საშუალო ჰარმონიული - $\frac{2ab}{a+b}$, გამოსახულია EF მონაკვეთით (დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გამავალი).
- 4) საშუალო კვადრატული - $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, გამოსახულია MN მონაკვეთით, სადაც MN მონაკვეთი $ABCD$ ტრაპეციას ორ ტოლდიდ ნაწილად ყოფს.



თუ $ABCD$ ტრაპეციაში $S_{BOC} = S$ და $\frac{AD}{BC} = k$ მაშინ

$$S_{ABCD} = (1 + k)^2 \cdot S;$$

$$S_{AOB} = k \cdot S; S_{COD} = k \cdot S; S_{AOD} = k^2 \cdot S.$$

10.21. ტრაპეციის ფუძესთან მდებარე კუთხეებია 58° და 72° . იპოვეთ დანარჩენ კუთხეებს შორის უდიდესი.

- ა. 108° ბ. 122° გ. 134° დ. 146°

10.22. რაც უდრის ტოლფერდა ტრაპეციის ბლაგვი კუთხე, თუ სხვაობა მოპირდაპირე კუთხეებს შორის 34° -ის ტოლია .

- ა. 101° ბ. 107° გ. 114° დ. 120°

10.23. $ABCD$ ტრაპეციის AC დიაგონალი CD ფერდის მართობულია, ხოლო AB ფერდი BC ფუძის ტოლია. იპოვეთ $\angle B$, თუ $\angle D = 17^\circ$.

- ა. 34° ბ. 42° გ. 48° დ. 56°

10.24. ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი 12 სმ-ია, ხოლო ერთ-ერთი კუთხე 60° -ის ტოლია. იპოვეთ მცირე ფუძე, თუ მისი პერიმეტრია 46 სმ.

- ა. 5სმ ბ. 8სმ გ. 12სმ დ. 15სმ

10.25. ტრაპეციის მცირე ფუძე 7 სმ-ის ტოლია. ერთ-ერთ წვეროზე გაკლებულია ფერდის პარალელური წრფე და მიღებულია სამკუთხედი. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ სამკუთხედის პერიმეტრი 16 სმ-ის ტოლია.

- ა. 23სმ ბ. 27სმ გ. 30სმ დ. 39სმ

10.26. ტოლფერდა ტრაპეციის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გაკლებული სიმაღლე დიდ ფუძეს ყოფს შეფარდებით $7:9$. რამდენჯერაა ნაკლები მცირე ფუძე დიდ ფუძეზე.

- ა. 4,5 ბ. 5 გ. 6,5 დ. 8

10.27. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალი მახვილი კუთხის ბისექტრისაა. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ მისი ფუძეების სიგრძეებია 14 სმ და 22 სმ.

- ა. 48სმ ბ. 56სმ გ. 64სმ დ. 72სმ

10.28. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალი მის ბლაგვ კუთხეს შუაზე ყოფს. ტრაპეციის მცირე ფუძე 4 სმ-ის ტოლია, ხოლო პერიმეტრი კი 28 სმ-ის. იპოვეთ დიდი ფუძის სიგრძე.

- ა. 15სმ ბ. 13სმ გ. 10სმ დ. 8სმ

10.29. მართკუთხა ტრაპეციის დახრილი ფერდი 18 სმ-ია და ერთ-ერთი კუთხე 60° -ის ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფუძე, თუ დიდი ფუძის სიგრძე 13 სმ-ს უდრის.

- ა. 4სმ ბ. 6სმ გ. 9სმ დ. 11სმ

10.30. მართკუთხა ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეებია 8 სმ. და 10 სმ., ხოლო მართი ფერდი 9 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ ერთ-ერთი კუთხე 150° -ის ტოლია.

ა. 41სმ ბ. 43სმ გ. 45სმ დ. 49სმ

10.31. ტრაპეციის ფუძესთან მდებარე კუთხეებია 96° და 112° . იპოვეთ დანარჩენ კუთხეებს შორის უმცირესი.

ა. 56° ბ. 62° გ. 68° დ. 74°

10.32. რაც უდრის ტოლფერდა ტრაპეციის მახვილი კუთხე, თუ სხვაობა მოპირდაპირე კუთხეებს შორის 46° -ის ტოლია .

ა. 59° ბ. 67° გ. 79° დ. 81°

10.33. $ABCD$ ტრაპეციის AC დიაგონალი CD ფერდის მართობულია, ხოლო AB ფერდი BC ფუძის ტოლია. იპოვეთ $\angle D$, თუ $\angle B = 118^\circ$.

ა. 59° ბ. 67° გ. 63° დ. 85°

10.34. ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი 8 სმ-ია, ხოლო ერთ-ერთი კუთხე 120° -ის ტოლია. იპოვეთ დიდი ფუძე, თუ მისი პერიმეტრია 34 სმ.

ა. 8სმ ბ. 13სმ გ. 17სმ დ. 22სმ

10.35. ტრაპეციის მცირე ფუძე 9 სმ-ის ტოლია. ერთ-ერთ წვეროზე გავლებულია ფერდის პარალელური წრფე და მიღებულია სამკუთხედი. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ტრაპეციის პერიმეტრი 87 სმ-ის ტოლია.

ა. 47სმ ბ. 51სმ გ. 57სმ დ. 69სმ

10.36. ტოლფერდა ტრაპეციის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე დიდ ფუძეს ყოფს შეფარდებით 3:5. რამდენჯერაა მეტი დიდი ფუძე მცირე ფუძეზე.

ა. 2 ბ. 2,5 გ. 3,5 დ. 4

10.37. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალი ბლაგვი კუთხის ბისექტრისაა. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ მისი ფუძეების სიგრძეებია 13 სმ და 25 სმ.

ა. 64სმ ბ. 76სმ გ. 88სმ დ. 92სმ

10.38. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალი მის მახვილი კუთხეს შუაზე ყოფს. ტრაპეციის დიდი ფუძე 8 სმ-ის ტოლია, ხოლო პერიმეტრი კი 26 სმ-ის. იპოვეთ მცირეფუძის სიგრძე.

ა. 4სმ ბ. 6სმ გ. 7სმ დ. 5სმ

10.39. მართკუთხა ტრაპეციის დახრილი ფერდი 16 სმ-ია და ერთ-ერთი კუთხე 120° -ის ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძე, თუ მცირე ფუძის სიგრძე 17 სმ-ს უდრის.

ა. 25სმ ბ. 27სმ გ. 33სმ დ. 39სმ

10.40. მართკუთხა ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეებია 5 სმ. და 7 სმ., ხოლო დახრილი ფერდი 14 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ ერთ-ერთი კუთხე 30° -ის ტოლია.

ა. 27სმ ბ. 29სმ გ. 33სმ დ. 41სმ

§11. წრე და წრეწირი. შემოსახული და ჩახახული ოთკუთხედები.

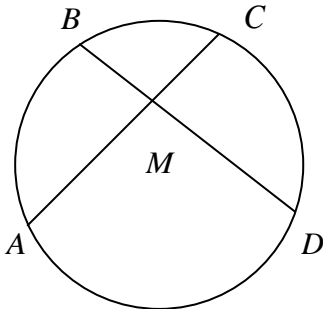
წრეწირი, წრე.

წრეწირის სიგრძის შეფარდება დიამეტრთან ყველა წრეწირისათვის ერთი და იგივე რიცხვია. ეს რიცხვი აღინიშნება π ასოთი. $\pi = 3,1415\dots$. $\pi = \frac{C}{2R}$, სადაც $C = 2\pi R$ წრეწირის სიგრძეა, წრის ფართობი $S = \pi R^2$.

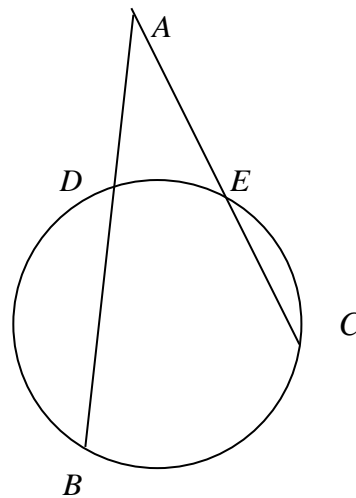
$$S = \pi \cdot r^2 = \frac{C \cdot d}{4} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} ; \pi = \frac{C}{d} = 3,14 ;$$

$$C = 2\pi \cdot R = \pi \cdot d = 2\sqrt{\pi \cdot S} ;$$

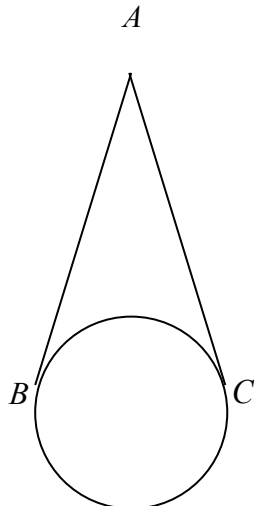
$$R = \frac{C}{2\pi} = \sqrt{\frac{S}{\pi}} ; d = \frac{C}{\pi} = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 1,13\sqrt{S}$$



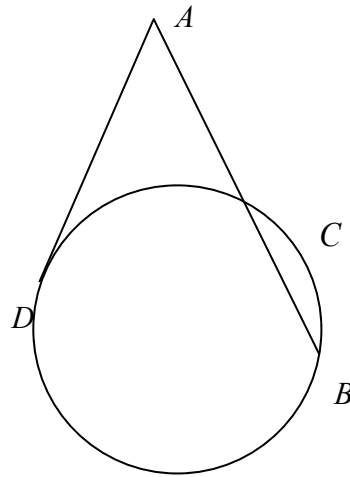
(ბახ.1)



(ბახ.2)



(ნახ.3)



(ნახ.4)

1. ჩახაზული კუთხე იზომება იმ რკალის ნახევრით, რომელსაც იგი ეყრდნობა (ნახ.1)

$$\angle AMD = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}).$$

2. მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე იზომება მათ შორის მოთავსებული რკალის ნახევრით.
3. მხებებს შორის მოთავსებული $\angle BAC = 180^\circ - \overset{\frown}{BDC}$, (ნახ.3).
4. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, (ნახ.1).
5. AD მხების მონაკვეთია, $AD^2 = AB \cdot AC$, (ნახ.4).
6. $AB \cdot AD = AC \cdot AE$, (ნახ.2).

შემოხაზული და ჩახაზული ოთკუთხედები.

1. წრეწირზე შემოხაზული $ABCD$ ოთკუთხედისათვის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია

$$AB + CD = AD + BC.$$

2. წრეწირში ჩახაზული $ABCD$ ოთკუთხედისათვის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი ტოლია

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D.$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad \text{სადაც } p = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

3. ოთკუთხედის ფართობი დიაგონალებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია

$$S = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \sin \alpha.$$

სავარჯიშო ტესტი №11

11.1. მანძილი წრეწირის ცენტრიდან AB ქორდამდე 12სმ-ის ტოლია. ქორდის ბოლოებზე გავლებული რადიუსები ურთიერთმართობულია. იპოვეთ AB ქორდის სიგრძე.

- ა. 20სმ ბ. 22სმ გ. 24სმ დ. 28სმ

11.2. წრეწირის ქორდა მის დიამეტრს კვეთს 60° -იანი კუთხით და დიამეტრით იყოფა 11 სმ-ის და 7სმ-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ მანძილი ქორდის ბოლოებიდან დიამეტრზე დაშვებული მართობების ფუძეებს შორის.

- ა. 6სმ ბ. 9სმ გ. 11სმ დ. 14სმ

11.3. წრეწირის ქორდა მის დიამეტრს კვეთს 30° -იანი კუთხით და ყოფს მას 8სმ-ის და 12 სმ-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ მანძილი ქორდის შუაწერტილიდან დიამეტრამდე.

- ა. 1სმ ბ. 3სმ გ. 4სმ დ. 6სმ

11.4. მანძილი წრეწირის ცენტრიდან ქორდამდე 13სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ ქორდის სიგრძე, თუ მის ბოლოებზე გავლებული დიამეტრები ურთიერთმართობულია.

- ა. 14სმ ბ. 17სმ გ. 19სმ დ. 26სმ

11.5. წრეწირის B წერტილიდან გავლებულია ურთიერთმართობული BA და BC ქორდები. მანძილები ცენტრიდან ამ ქორდებამდე შესაბამისად 7სმ-ის და 12სმ-ის ტოლია. იპოვეთ AB და BC ქორდებს შორის უდიდესის სიგრძე.

- ა. 14სმ ბ. 21სმ გ. 19სმ დ. 24სმ

11.6. ორი წრეწირი შიგნიდან ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ ამ წრეწირების რადიუსები, თუ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 3:8, ხოლო მანძილი მათ ცენტრებს შორის 15 სმ-ის ტოლია.

- ა. 3სმ,8სმ ბ. 9სმ,24სმ გ. 6სმ,19სმ დ. 12სმ,32სმ

11.7. AB მონაკვეთი გადის წრეწირის ცენტრზე და კვეთს მას M და N წერტილებში (M უფრო ახლოსაა A -სთან). იპოვეთ MB და NA მონაკვეთების სიგრძეები, თუ წრეწირის რადიუსი 8სმ-ის ტოლია, ხოლო A და B წერტილები ცენტრიდან დაშორებულია 13სმ-ით და 19სმ-ით შესაბამისად.

- ა. 21სმ,27სმ ბ. 15სმ,19სმ გ. 23სმ,27სმ დ. 11სმ,17სმ

11.8. ორი კონცენტრული წრეწირის რადიუსები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:8, ხოლო დიდი წრეწირის დიამეტრი მცირე წრით იყოფა სამ ნაწილად, რომელთა შორის უდიდესის სიგრძე 20სმ-ია. იპოვეთ ამ წრეწირების რადიუსების სიგრძეების ჯამი.

- ა. 18სმ ბ. 24სმ გ. 26სმ დ. 32სმ

11.9. წრეწირი მოთავსებულია მეორე წრეწირის შიგნით. დიდი წრეწირის დიამეტრი, რომელიც მცირე წრეწირის ცენტრზე გადის, მცირე წრეწირით სამ ნაწილად იყოფა, რომელთაგან ორი კიდურა მონაკვეთის სიგრძეებია 28სმ და 16სმ. იპოვეთ მანძილი წრეწირების ცენტრებს შორის.

- ა. 4სმ ბ. 6სმ გ. 8სმ დ. 10სმ

11.10. A, B, C და D წერტილები (ამ თანმიმდევრობით) ერთ წრეზე მდებარეობენ, თანაც $AC = 24$ სმ და $BD = 38$ სმ. იპოვეთ მანძილი იმ წრეწირების ცენტრებს შორის, რომელთა დიამეტრებია AB და CD მონაკვეთები.

- ა. 25სმ ბ. 27სმ გ. 31სმ დ. 33სმ

11.11. მანძილი წრეწირის ცენტრიდან AB ქორდამდე 17სმ-ის ტოლია. ქორდის ბოლოებზე გავლებული დიამეტრები ურთიერთმართობულია. იპოვეთ AB ქორდის სიგრძე.

- ა. 34სმ ბ. 36სმ გ. 42სმ დ. 44სმ

11.12. წრეწირის ქორდა მის დიამეტრს კვეთს 60° -იანი კუთხით და დიამეტრით იყოფა 16სმ-ის და 22სმ-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ მანძილი ქორდის ბოლოებიდან დიამეტრზე დაშვებული მართობების ფუძეებს შორის.

- ა. 17სმ ბ. 19სმ გ. 21სმ დ. 23სმ

11.13. წრეწირის ქორდა მის დიამეტრს კვეთს 30° -იანი კუთხით და ყოფს მას 13სმ-ის და 25სმ-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ მანძილი ქორდის შუაწერტილიდან დიამეტრამდე.

- ა. 1სმ ბ. 2სმ გ. 3სმ დ. 4სმ

11.14. მანძილი წრეწირის ცენტრიდან ქორდამდე 22სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ ქორდის სიგრძე, თუ მის ბოლოებზე გავლებული დიამეტრები ურთიერთმართობულია.

- ა. 32სმ ბ. 38სმ გ. 40სმ დ. 44სმ

11.15. წრეწირის B წერტილიდან გავლებულია ურთიერთმართობული BA და BC ქორდები. მანძილები ცენტრიდან ამ ქორდებმდე შესაბამისად 6სმ-ის და 13სმ-ის ტოლია. იპოვეთ AB და BC ქორდებს შორის უმცირესის სიგრძე.

- ა. 12სმ ბ. 19სმ გ. 21სმ დ. 26სმ

11.16. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ ამ წრეწირების რადიუსები, თუ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც $4:7$, ხოლო მანძილი მათ ცენტრებს შორის 22 სმ-ის ტოლია.

- ა. 4 სმ, 7 სმ ბ. 12 სმ, 21 სმ გ. 8 სმ, 14 სმ დ. 16 სმ, 28 სმ

11.17. AB მონაკვეთი გადის წრეწირის ცენტრზე და კვეთს მას M და N წერტილებში (N უფრო ახლოსაა B -სთან). იპოვეთ MB და NA მონაკვეთების სიგრძეები, თუ წრეწირის რადიუსი 6 სმ-ის ტოლია, ხოლო A და B წერტილები ცენტრიდან დაშორებულია 9 სმ-ით და 11 სმ-ით შესაბამისად.

- ა. 13 სმ, 15 სმ ბ. 15 სმ, 17 სმ გ. 19 სმ, 21 სმ დ. 17 სმ, 19 სმ

11.18. ორი კონცენტრული წრეწირის რადიუსები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $4:7$, ხოლო დიდი წრეწირის დიამეტრი მცირე წრით იყოფა სამ ნაწილად, რომელთა შორის უდიდესის სიგრძე 21 სმ-ია. იპოვეთ ამ წრეწირების რადიუსების სიგრძეების ჯამი.

- ა. 53 სმ ბ. 65 სმ გ. 69 სმ დ. 77 სმ

11.19. წრეწირი მოთავსებულია მეორე წრეწირის შიგნით. დიდი წრეწირის დიამეტრი, რომელიც მცირე წრეწირის ცენტრზე გადის, მცირე წრეწირით სამ ნაწილად იყოფა, რომელთაგან ორი კიდურა მონაკვეთის სიგრძეებია 20 სმ და 6 სმ. იპოვეთ მანძილი წრეწირების ცენტრებს შორის.

- ა. 6 სმ ბ. 7 სმ გ. 8 სმ დ. 9 სმ

11.20. A, B, C და D წერტილები (ამ თანმიმდევრობით) ერთ წრეწილზე მდებარეობენ, თანაც $AC = 31$ სმ და $BD = 43$ სმ. იპოვეთ მანძილი იმ წრეწირების ცენტრებს შორის, რომელთა დიამეტრებია AB და CD მონაკვეთები.

- ა. 37 სმ ბ. 41 სმ გ. 33 სმ

11.21. იპოვეთ $6\sqrt{3}$ სმ-ის ტოლი სიგრძის ქორდის მიერ მოჭიმული რკალის სიგრძე, თუ მისი გრადუსული ზომა 120° -ია.

- ა. 4π სმ ბ. $3,6\pi$ სმ გ. 2π სმ დ. $2,4\pi$ სმ

11.22. იპოვეთ 3π სმ-იანი რკალის მომჭიმავი ქორდის სიგრძე, თუ რკალის რადიანული ზომა $\frac{\pi}{3}$.

- ა. 6 სმ ბ. 9 სმ გ. 3 სმ დ. 12 სმ

11.23. წრეწირში გავლებულია ქორდა, რომელიც ჭიმავს 3π სმ-ს ტოლი სიგრძის რკალს. იპოვეთ რკალის გრადუსული ზომა, თუ წრეწირის დიამეტრია 8 სმ.

- ა. 105° ბ. 120° გ. 135° დ. 150°

11.24. იპოვეთ წრის ფართობი, თუ შესაბამისი წრეწირის სიგრძე $6\sqrt{\pi}$ სმ-ის ტოლია.

- ა. 36 სმ^2 ბ. 4 სმ^2 გ. 16 სმ^2 დ. 9 სმ^2

11.25. იპოვეთ $\frac{12}{\sqrt{\pi}}$ სმ-ის ტოლი რადიუსის წრიული სექტორის ფართობი, თუ მისი შესა-

ბამის ცენტრალური კუთხის რადიანული ზომა $\frac{5}{6}\pi$ -ია.

- ა. 55 სმ^2 ბ. 60 სმ^2 გ. 50 სმ^2 დ. 65 სმ^2

11.26. იპოვეთ წრიული სექტორის რადიუსი, თუ მისი ფართობია $5\pi \text{ სმ}^2$ და ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა 72° -ის ტოლია. .

- ა. 5სმ ბ. $2,5\text{სმ}$ გ. 10სმ დ. $7,5\text{სმ}$

11.27. იპოვეთ წრიული სექტორის ცენტრალური კუთხის რადიანული ზომა, თუ სექტორის ფართობი ისე შეეფარდება წრის ფართობს, როგორც 3:8.

- ა. $\frac{2\pi}{3}$ ბ. $\frac{3\pi}{5}$ გ. $\frac{5\pi}{6}$ დ. $\frac{3\pi}{4}$

11.28. ტრაპეცია, რომლის პერიმეტრი 48 სმ -ს უდრის ისეთია, რომ შეიძლება მასში ჩაიხაზოს და მასზე შემოიხაზოს წრეწირი. იპოვეთ შემოხაზული და ჩახაზული წრეების ფართობთა ჯამი, თუ ტრაპეციის დიდი ფუძე 3-ჯერ მეტია პატარა ფუძეზე.

- ა. $85\pi \text{ სმ}^2$ ბ. $97\pi \text{ სმ}^2$ გ. $111\pi \text{ სმ}^2$ დ. 123 სმ^2

11.29. რომში ჩახაზულია წრეწირი. მისი მცირე დიაგონალის სიგრძეა 4 სმ , ხოლო მახვილი კუთხის გრადუსული ზომა 60° -ის ტოლია. იპოვეთ რომის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია წრეწირის გარეთ.

- ა. $(8\sqrt{3} - 3\pi) \text{ სმ}^2$ ბ. $(7\sqrt{2} - 2\pi) \text{ სმ}^2$ გ. $(4\sqrt{3} - 3\pi) \text{ სმ}^2$ დ. $(3\sqrt{2} - 2\pi) \text{ სმ}^2$

11.30. ორი ურთიერთგადამკვეთი წრეწირის ქორდა, რომლის სიგრძეა 36 სმ -ის ტოლია, არის ერთ წრეწირში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდი და მეორე წრეწირში ჩახაზული კვადრატის გვერდი. იპოვეთ შესაბამისი წრეების საერთო ნაწილის პერიმეტრი.

- ა. $(8\sqrt{3} - 9\sqrt{2}) \pi \text{ სმ}$ ბ. $(8\sqrt{3} + 9\sqrt{2}) \pi \text{ სმ}$ გ. $(9\sqrt{2} - 8\sqrt{3}) \pi \text{ სმ}$
 დ. $(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2}) \pi \text{ სმ}$.

11.31. იპოვეთ 12 სმ -ის ტოლი სიგრძის ქორდის მიერ მოჭიმული რკალის სიგრძე, თუ მისი რადიანული ზომა $\frac{\pi}{3}$ -ია .

ა. $3,2\pi$ სმ ბ. 4π სმ გ. $2,8\pi$ სმ დ. 2π სმ

11.32. იპოვეთ $2\sqrt{3}\pi$ სმ-იანი რკალის მომჭიმავი ქორდის სიგრძე, თუ რკალის გრადუსული ზომა 120° .

ა. 6სმ ბ. 7სმ გ. 9სმ დ. 8სმ

11.33. წრეწირში გაველებულია ქორდა, რომელიც ჭიმავს 10π სმ-ს ტოლი სიგრძის რკალს. იპოვეთ რკალის რადიანული ზომა, თუ წრეწირის დიამეტრია 24 სმ.

ა. $\frac{4}{5}\pi$ ბ. $\frac{3}{4}\pi$ გ. $\frac{2}{3}\pi$ დ. $\frac{5}{6}\pi$

11.34. იპოვეთ წრეწირის სიგრძე, თუ შესაბამისი წრის ფართობი 36 სმ²-ის ტოლია.

ა. 12π სმ ბ. 9π სმ გ. 6π სმ დ. 4π სმ

11.35. იპოვეთ $\frac{9}{\sqrt{\pi}}$ სმ-ის ტოლი რადიუსის წრიული სექტორის ფართობი, თუ მისი შესაბამისი ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა 120° -ია.

ა. 24 სმ² ბ. 18 სმ² გ. 27 სმ² დ. 36 სმ²

11.36. იპოვეთ წრიული სექტორის რადიუსი, თუ მისი ფართობია 6π სმ² და ცენტრალური კუთხის რადიანული ზომა $\frac{3\pi}{4}$ -ის ტოლია. .

ა. 4სმ ბ. 3,5სმ გ. 4,5სმ დ. 3სმ

11.37. იპოვეთ წრიული სექტორის ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა, თუ სექტორის ფართობი ისე შეეფარდება წრის ფართობს, როგორც 2:15.

ა. 36° ბ. 48° გ. 54° დ. 62°

11.38. ტრაპეცია, რომლის პერიმეტრი 96 სმ-ს უდრის ისეთია, რომ შეიძლება მასში ჩაიხაზოს და მასზე შემოიხაზოს წრეწირი. იპოვეთ შემოხაზული და ჩახაზული წრეების ფართობთა სხვაობა, თუ ტრაპეციის პატარა ფუძე 3-ჯერ ნაკლებია დიდ ფუძეზე .

ა. 182π სმ² ბ. 236π სმ² გ. 294π სმ² დ. 348 სმ²

11.39. რომში ჩახაზულია წრეწირი. მისი დიდი დიაგონალის სიგრძეა 6 სმ, ხოლო ბლაგვი კუთხის გრადუსული ზომა 120° -ის ტოლია. იპოვეთ რომბის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია წრეწირის გარეთ.

ა. $2(5\sqrt{2} - 2\pi)$ სმ² ბ. $3(8\sqrt{3} - 3\pi)$ სმ² გ. $2(8\sqrt{3} - 3\pi)$ სმ²
დ. $3(5\sqrt{2} - 2\pi)$ სმ²

11.40. ორი ურთიერთგადამკვეთი წრეწირის ქორდა, რომლის სიგრძეა 12 სმ-ის ტოლია, არის ერთ წრეწირში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდი და მეორე წრეწირში ჩახაზული კვადრატის გვერდი. იპოვეთ შესაბამისი წრეების საერთო ნაწილის ფართობი.

- ა. $(17\pi + 18 - 6\sqrt{3})$ სმ² ბ. $(17\pi + 18 + 6\sqrt{3})$ სმ² გ. $2(17\pi - 18 - 6\sqrt{3})$ სმ²
 დ. $2(17\pi - 18 + 6\sqrt{3})$ სმ²

11.41. კვადრატის წვეროებზე გავლებულია მისი დიაგონალების პარალელური წრფეები. იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი, თუ მოცემული კვადრატის დიაგონალის სიგრძე 4 სმ-ია.

- ა. 9 სმ² ბ. 16 სმ² გ. 25 სმ² დ. 36 სმ²

11.42. მართკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:5. იპოვეთ ამ მართკუთხედის ფართობი, თუ მისი პერიმეტრი 16 სმ-ის ტოლია.

- ა. 108 სმ² ბ. 112 სმ² გ. 120 სმ² დ. 136 სმ²

11.43. სამკუთხედში ჩახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ მისი დიდი გვერდი ფუძეზე მდებარეობს, ორი წვერო კი ფერდებზეა მოთავსებული. სამკუთხედის სიმაღლე 6 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფუძე კი 18 სმ-ის. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი, თუ მისი ერთი გვერდი 3-ჯერ მეტია მეორეზე.

- ა. 27 სმ² ბ. 31 სმ² გ. 35 სმ² დ. 43 სმ²

11.44. რომბის სიმაღლე 17 სმ-ის ტოლია, ხოლო პერიმეტრი კი 84 სმ. იპოვეთ ამ რომბის ფართობი.

- ა. 195 სმ² ბ. 236 სმ² გ. 288 სმ² დ. 357 სმ²

11.45. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლეები 3 სმ-ის და 7 სმ-ის ტოლია, ხოლო მათ შორის კუთხე 30° -ია. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

- ა. 21 სმ² ბ. 31, 5 სმ² გ. 42 სმ² დ. 53, 5 სმ²

11.46. პარალელოგრამის ფართობი 24 სმ²-ის ტოლია. იპოვეთ მისი პერიმეტრი, თუ პარალელოგრამის სიმაღლეები 3 სმ-ის და 8 სმ-ის ტოლია.

- ა. 18 სმ ბ. 22 სმ გ. 24 სმ დ. 28 სმ

11.47. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეები 42 სმ-ის და 54 სმ-ის ტოლია, ხოლო დიდ ფუძესთან მდებარე კუთხე 45° -ს უდრის. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

- ა. 215 სმ² ბ. 220 სმ² გ. 235 სმ² დ. 250 სმ²

1148. ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდის სიგრძე 8 სმ-ის ტოლია, ხოლო პატარა ფუძესთან მდებარე კუთხე 150° -ს უდრის. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფართობი, თუ მის პერიმეტრი 29 სმ-ია.

- ა. 26 სმ^2 ბ. 30 სმ^2 გ. 38 სმ^2 დ. 42 სმ^2

1149. ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეები 10 სმ-ის და 35 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფართობი 225 სმ^2 -ია. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე.

- ა. 8 სმ ბ. 10 სმ გ. 12 სმ დ. 14 სმ

1150. ტრაპეციის ერთ-ერთი ფუძის სიგრძე 9 სმ-ის ტოლია, ხოლო სიმაღლე კი 6 სმ-ია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის მეორე ფუძე, თუ მისი ფართობი 45 სმ^2 -ს უდრის.

- ა. 6 სმ ბ. 7 სმ გ. 12 სმ დ. 13 სმ

1151. კვადრატის წვეროებზე გავლებულია მისი დიაგონალების პარალელური წრფეები. იპოვეთ მოცემული კვადრატის დიაგონალი, თუ მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი 81 სმ^2 -ია.

- ა. 7 სმ ბ. 9 სმ გ. 11 სმ დ. 13 სმ

1152. მართკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:7. იპოვეთ ამ მართკუთხედის პერიმეტრი, თუ მისი ფართობი 126 სმ^2 -ის ტოლია.

- ა. 54 სმ ბ. 62 სმ გ. 68 სმ დ. 76 სმ

1153. სამკუთხედში ჩახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ მისი მცირე გვერდი ფუძეზე მდებარეობს, ორი წვერო კი ფერდებზეა მოთავსებული. სამკუთხედის სიმაღლე 32 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფუძე კი 8 სმ-ის. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი, თუ მისი ერთი გვერდი 4-ჯერ ნაკლებია მეორეზე.

- ა. 56 სმ^2 ბ. 68 სმ^2 გ. 64 სმ^2 დ. 72 სმ^2

1154. რომბის სიმაღლე 9 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფართობი კი 27 სმ^2 . იპოვეთ ამ რომბის პერიმეტრი.

- ა. 34 სმ ბ. 27 სმ გ. 21 სმ დ. 12 სმ

1155. პარალელოგრამის მახვილი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლეები 8 სმ-ის და 12 სმ-ის ტოლია, ხოლო მათ შორის კუთხე 150° -ია. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

- ა. 108 სმ^2 ბ. 112 სმ^2 გ. 116 სმ^2 დ. 124 სმ^2

1156. პარალელოგრამის პერიმეტრი 70 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მისი ფართობი, თუ პარალელოგრამის სიმაღლეები 2 სმ-ის და 5 სმ-ის ტოლია.

- ა. 50 სმ^2 ბ. 60 სმ^2 გ. 80 სმ^2 დ. 90 სმ^2

1157. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეები 36 სმ-ის და 54 სმ-ის ტოლია, ხოლო მცირე ფუძესთან მდებარე კუთხე 135° -ს უდრის. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

- ა. 285 სმ^2 ბ. 370 სმ^2 გ. 390 სმ^2 დ. 405 სმ^2

1158. ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდის სიგრძე 12 სმ-ის ტოლია, ხოლო დიდ ფუძესთან მდებარე კუთხე 30° -ს უდრის. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფართობი, თუ მის პერიმეტრი 31 სმ-ია.

- ა. 11 სმ^2 ბ. 14 სმ^2 გ. 16 სმ^2 დ. 19 სმ^2

1159. ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეები 18 სმ-ის და 28 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფართობი 161 სმ^2 -ია. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე.

- ა. 7 სმ ბ. 8 სმ გ. 11 სმ დ. 12 სმ

1160. ტრაპეციის ერთ-ერთი ფუძის სიგრძე 7 სმ-ის ტოლია, ხოლო სიმაღლე კი 8 სმ-ია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის მეორე ფუძე, თუ მისი ფართობი 48 სმ^2 -ს უდრის.

- ა. 4 სმ ბ. 5 სმ გ. 9 სმ დ. 8 სმ

§12. წესიერი ექვსკუთხედი

თუ წესიერი ექვსკუთხედის გვერდია a .

$$1. a = R, \quad a = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

$$2. R = a, \quad R = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

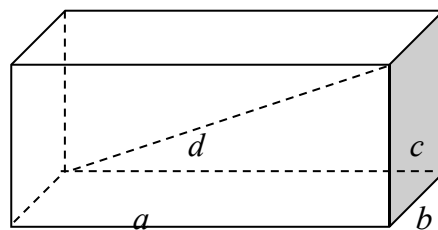
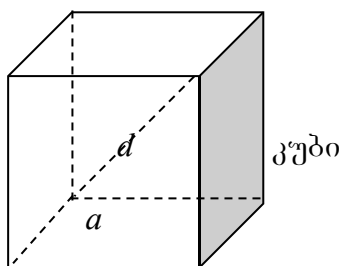
$$3. r = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R.$$

$$4. S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}, \quad S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}, \quad S = 2\sqrt{3}r^2.$$

§13. მართკუთხა პარალელებიპედი

მართკუთხა პარალელებიპედის დიაგონალის კვადრატი უდრის მისი სამი განზომილების კვადრატების ჯამს

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



$$d^2 = 3a^2; \quad V = a^3 ;$$

$$S_{\text{გვერდი}} = 4 \cdot a^2$$

$$S_{\text{სრული}} = 6 \cdot a^2$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2; \quad V = a \cdot b \cdot c;$$

$$S_{\text{გვერდი}} = 2(b \cdot c + a \cdot c)$$

$$S_{\text{სრული}} = 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$$

1. პრიზმის გვერდით ზედაპირის ფართობი პერპენდიკულარული კვეთის პერიმეტრის წიბოზე ნამრავლის ტოლია.
2. მართი პრიზმის ზედაპირის ფართობი უდრის ფუძის პერიმეტრის ნამრავლს წიბოზე.

სავარჯიშო ტესტი №13

13.1. კუბის გვერდითი ზედაპირის ფართობი 27 სმ^2 -ია. იპოვეთ მისი დიაგონალის სიგრძე.

- ა. $4,5 \text{ სმ}$ ბ. 5 სმ გ. $6,5 \text{ სმ}$ დ. 7 სმ

13.2. კუბის წიბოს სიგრძე 4 სმ -ია. იპოვეთ ქვედა ფუძის დიაგონალისა და ზედა ფუძის ორი მოსაზღვრე გვერდის შუაწეტილებზე გამავალი კვეთის პერიმეტრი.

- ა. $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) \text{ სმ}$ ბ. $2(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}) \text{ სმ}$ გ. $2(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) \text{ სმ}$ დ. $4(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}) \text{ სმ}$

13.3. იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მისი დიაგონალის სიგრძე 13 სმ -ია, ხოლო გვერდითი წახნაგების დიაგონალების სიგრძეები $4\sqrt{10} \text{ სმ}$ -ის და $3\sqrt{17} \text{ სმ}$ -ის ტოლია.

- ა. 82 სმ^3 ბ. 98 სმ^3 გ. 106 სმ^3 დ. 144 სმ^3

13.4. მართიპარალელეპიპედის ფუძე რომბია, რომლის დიაგონალების სიგრძეები 6 სმ -ის და 8 სმ -ის ტოლია. იპოვეთ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წახნაგის დიაგონალის სიგრძე 13 სმ -ია.

- ა. 234 სმ^2 ბ. 288 სმ^2 გ. 316 სმ^2 დ. 352 სმ^2

13.5. მართი პარალელეპიპედის ფუძე პარალელოგრამია, რომლის გვერდების სიგრძეები 6 სმ -ის და 8 სმ -ის ტოლია, ხოლო მისი მახვილი კუთხეა 60° . იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მისი დიაგონალი ფუძის დიდი დიაგონალის ტოლია.

- ა. $172\sqrt{3} \text{ სმ}^3$ ბ. $196\sqrt{2} \text{ სმ}^3$ გ. $288\sqrt{2} \text{ სმ}^3$ დ. $244\sqrt{3} \text{ სმ}^3$

13.6. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდის სიგრძე 6 სმ -ის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი წიბოს სიგრძე, თუ მისი მოცულობა $24\sqrt{3} \text{ სმ}^3$ უდრის.

- ა. 8 სმ ბ. 14 სმ გ. 18 სმ დ. 24 სმ

13.7. მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ფართობი 18 სმ^2 -ის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე $(2 - \sqrt{2}) \text{ სმ}$ -ია.

ა. 16 სმ^2 ბ. 12 სმ^2 გ. 24 სმ^2 დ. 28 სმ^2

13.8. მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ფართობი 4 სმ^2 -ია, ხოლო გვერდითი წახნაგების ფართობებია 9 სმ^2 , 10 სმ^2 და 17 სმ^2 . იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

ა. 16 სმ^3 ბ. 14 სმ^3 გ. 12 სმ^3 დ. 10 სმ^3

13.9. მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის გვერდების სიგრძეები 11 სმ -ის და 21 სმ -ის ტოლია, ხოლო ფერდის კი 13 სმ . იპოვეთ პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ მისი დიაგონალური კვეთის ფართობი 180 სმ^2 -ს უდრის.

ა. 786 სმ^2 ბ. 826 სმ^2 გ. 874 სმ^2 დ. 906 სმ^2

13.10. $ABCDEFMN$ მართი ოთკუთხა პრიზმის ფუძეში $ABCD$ მართი ტრაპეციაა: $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ADC = 45^\circ$, $AD = 12 \text{ სმ}$. ფუძეში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია 3 სმ . იპოვეთ $AFMD$ კვეთის ფართობი, თუ პრიზმის მოცულობა $4356\sqrt{3} \text{ სმ}^3$ -ს უდრის.

ა. 124 სმ^2 ბ. 108 სმ^2 გ. 96 სმ^2 დ. 92 სმ^2

13.11. კუბის გვერდითი ზედაპირის ფართობი 50 სმ^2 -ია. იპოვეთ მისი წახნაგის დიაგონალის სიგრძე.

ა. 4 სმ ბ. 5 სმ გ. 6 სმ დ. 7 სმ

13.12. კუბის წიბოს სიგრძე 4 სმ -ია. იპოვეთ ქვედა ფუძის დიაგონალისა და ზედა ფუძის ორი მოსახდურე გვერდის შუაწეტილებზე გამავალი კვეთის ფართობი.

ა. 9 სმ^2 ბ. 12 სმ^2 გ. 15 სმ^2 დ. 18 სმ^2

13.13. იპოვეთ მართკუთხა პარალელებიპედის დიაგონალი, თუ მისი მოცულობა 144 სმ^3 , ხოლო წახნაგების დიაგონალების სიგრძეები $4\sqrt{10} \text{ სმ}$ -ის და $3\sqrt{17} \text{ სმ}$ -ის ტოლია.

ა. 13 სმ ბ. 15 სმ გ. 17 სმ დ. 19 სმ

13.14. მართი პარალელებიპედის ფუძე რომბია, რომლის დიაგონალების სიგრძეები 6 სმ -ის და 8 სმ -ის ტოლია. იპოვეთ პარალელებიპედის გვერდითი წახნაგის დიაგონალის სიგრძე, თუ მისი სრული ზედაპირის ფართობი 288 სმ^2 -ია.

ა. 21 სმ ბ. 17 სმ გ. 13 სმ დ. 9 სმ

13.15. მართი პარალელებიპედის ფუძე პარალელოგრამია, რომლის დიაგონალების სიგრძეები 6 სმ -ის და 8 სმ -ის ტოლია, ხოლო მათ შორის მდებარე კუთხეა 30° . იპოვეთ პარალელებიპედის მოცულობა, თუ მისი მცირე დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან 45° -იან კუთხეს ქმნის.

ა. 56 სმ^3 ბ. 64 სმ^3 გ. 68 სმ^3 დ. 72 სმ^3

13.16. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდის სიგრძე 8 სმ -ის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი წიბოს სიგრძე, თუ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობი 192 სმ^2 -ს უდრის.

ა. 4 სმ ბ. $3,5 \text{ სმ}$ გ. $2,5 \text{ სმ}$ დ. 2 სმ

13.17. მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის $6\sqrt{2}$ სმ-ის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე $3\sqrt{2}$ სმ-ია.

- ა. $36\sqrt{2}$ სმ³ ბ. $48\sqrt{2}$ სმ³ გ. $54\sqrt{2}$ სმ³ დ. $62\sqrt{2}$ სმ³

13.18. მართი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა 12 სმ³, ხოლო გვერდითი წახნაგების ფართობებია 9 სმ², 10 სმ² და 17 სმ². იპოვეთ პრიზმის ფუძის ფართობი.

- ა. 18 სმ² ბ. 14 სმ² გ. 8 სმ² დ. 4 სმ²

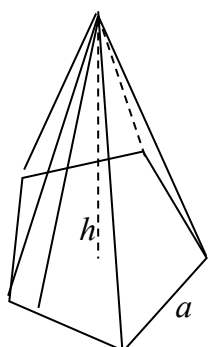
13.19. მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის გვერდების სიგრძეები 11 სმ-ის და 21 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფერდის კი 13 სმ. იპოვეთ პრიზმის დიაგონალური კვეთის ფართობი, თუ მისი სრული ზედაპირის ფართობი 906 სმ²-ს უდრის.

- ა. 120 სმ² ბ. 160 სმ² გ. 180 სმ² დ. 240 სმ²

13.20. $ABCDEFMN$ მართი ოთკუთხა პრიზმის ფუძეში $ABCD$ მართი ტრაპეციაა: $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ADC = 45^\circ$, $AD = 12$ სმ. ფუძეში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია 3 სმ. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $AFMD$ კვეთის ფართობი 108 სმ²-ს უდრის.

- ა. $4356\sqrt{3}$ სმ³ ბ. $3754\sqrt{2}$ სმ³ გ. $3292\sqrt{3}$ სმ³ დ. $2864\sqrt{2}$ სმ³

§14. პირამიდა



1. წესიერი პირამიდისათვის

$$S_{\text{გვერდი}} = \frac{P \cdot a}{2} \text{ სადაც } P - \text{ფუძის პერიმეტრია, } a - \text{აპოთემა.}$$

2. წესიერი წაკვეთილი პირამიდისათვის $S_{\text{გვერდი}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot a$, სადაც P_1 და P_2 ფუძეების პერიმეტრია, a - აპოთემა.

3. პირამიდის მოცულობა $V = \frac{1}{3} \cdot Q \cdot h$ სადაც Q - ფუძის ფართობია, h - პირამიდის სიმაღლეა.

4. წაკვეთილი პირამიდის მოცულობაა $V = \frac{1}{3} h(Q + \sqrt{Q \cdot q} + q)$.

სადაც h წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლეა, Q - ქვედა ფუძის ფართობი, q - ზედა ფუძის ფართობი.

5. პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი $S_{\text{სრული}} = S_{\text{გვერდი}} + S_{\text{ფუძე}}$

სავარჯიშო ტესტი №14

14.1. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი 288 სმ^2 -ია. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე, თუ მისი აპოთემის სიგრძე 8 სმ -ს უდრის.

- ა. 4 სმ ბ. 5 სმ გ. 7 სმ დ. 8 სმ

14.2. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოს სიგრძე 5 სმ -ს ტოლია, ხოლო სრული ზედაპირის ფართობი 112 სმ^2 -ია. იპოვეთ პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძე.

- ა. 12 სმ ბ. 8 სმ გ. 10 სმ დ. 6 სმ

14.3. წესიერ სამკუთხა პირამიდის გვერდით წახნაგში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია $\frac{3}{2} \text{ სმ}$, ხოლო წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხის სინუსი $0,96$ -ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

- ა. $5\sqrt{31} \text{ სმ}^3$ ბ. $3\sqrt{33} \text{ სმ}^3$ გ. $3\sqrt{39} \text{ სმ}^3$ დ. $5\sqrt{37} \text{ სმ}^3$

14.4. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის ცენტრიდან გვერდით წახნაგანდე მანძილი 4 სმ -ის ტოლია, ხოლო ფუძის გვერდის სიგრძე 10 სმ -ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

- ა. 212 სმ^3 ბ. 214 სმ^3 გ. 218 სმ^3 დ. 222 სმ^3

14.5. $KABCD$ პირამიდის ფუძეში $ABCD$ მართკუთხედია. AK გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყის მართობულია, ხოლო CKD გვერდითი წახნაგის ფართობი 48 სმ^2 -ია და იგი ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $AD = 8 \text{ სმ}$.

- ა. $116\sqrt{2} \text{ სმ}^3$ ბ. $128\sqrt{3} \text{ სმ}^3$ გ. $132\sqrt{3} \text{ სმ}^3$ დ. $144\sqrt{2} \text{ სმ}^3$

14.6. პირამიდის ფუძეში ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფერდის და ფუძის სიგრძეები შესაბამისად 5 სმ -ის და 8 სმ -ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ მისი თითოეული გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ადგენს.

ა. $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ სმ³ ბ. $\frac{25\sqrt{2}}{2}$ სმ³ გ. $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ სმ³ დ. $\frac{50\sqrt{2}}{2}$ სმ³

14.7. $KABC$ პირამიდის ფუძეში ABC მართკუთხა სამკუთხედია: $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$ სმ, $BC = 8$ სმ და $AK = CK = 5$ სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ AKC გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყის მართობულია.

ა. 24 სმ³ ბ. 36 სმ³ გ. 32 სმ³ დ. 48 სმ³

14.8. პირამიდის ფუძე სამკუთხედია, რომლის გვერდების სიგრძეებია 8 სმ., 15 სმ. და 17 სმ. თითოეული გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ მისი წვერო ფუძეში გეგმილდება.

ა. $48\sqrt{3}$ სმ³ ბ. $56\sqrt{2}$ სმ³ გ. $56\sqrt{3}$ სმ³ დ. $60\sqrt{3}$ სმ³

14.9. პირამიდის ფუძეში რომბია, რომლის დიაგონალების სიგრძეები 6 სმ-ის და 8 სმ-ის ტოლია. თითოეული გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან 45° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა. $24\sqrt{2}$ სმ² ბ. $24\sqrt{3}$ სმ² გ. $36\sqrt{2}$ სმ² დ. $36\sqrt{3}$ სმ²

14.10. პირამიდის ფუძეში ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის ფერდის სიგრძე 8 სმ-ის ტოლია, ხოლო მახვილი კუთხე 60° -ს უდრის. თითოეული გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან 45° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

ა. 24 სმ³ ბ. 32 სმ³ გ. 36 სმ³ დ. 48 სმ³

14.11. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი 288 სმ²-ია. იპოვეთ პირამიდის აპოთემა, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე 8 სმ-ს უდრის.

ა. 6სმ ბ. 8სმ გ. 7სმ დ. 9სმ

14.12. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძე 16 სმ-ს ტოლია, ხოლო სრული ზედაპირის ფართობი 736 სმ²-ია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი წიბოს სიგრძე.

ა. 17სმ ბ. 19სმ გ. 23სმ დ. 25სმ

14.13. წესიერ სამკუთხა პირამიდის გვერდით წახნაგზე შემოსახული წრეწირის რადიუსია $\frac{25}{8}$ სმ, ხოლო წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხის კოსინუსი $0,28$ -ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

ა. $5\sqrt{31}$ სმ³ ბ. $3\sqrt{33}$ სმ³ გ. $5\sqrt{37}$ სმ³ დ. $3\sqrt{39}$ სმ³

14.14. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის ცენტრიდან გვერდით წიბომდე მანძილი $4,8$ სმ-ის ტოლია, ხოლო ფუძის გვერდის სიგრძე $6\sqrt{2}$ სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

ა. 174 სმ³ ბ. 178 სმ³ გ. 192 სმ³ დ. 196 სმ³

14.15. $KABCD$ პირამიდის ფუძეში $ABCD$ მართკუთხედაა. AK გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყის მართობულია, ხოლო CKD გვერდითი წახნაგის ფართობი $42\sqrt{3}$ სმ²-ია და იგი ფუძის სიბრტყესთან 30° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $AD = 9$ სმ.

- ა. $116\sqrt{3}$ სმ³ ბ. $124\sqrt{2}$ სმ³ გ. $126\sqrt{3}$ სმ³ დ. $144\sqrt{2}$ სმ³

14.16. პირამიდის ფუძეში ტოლფერდა სამკუთხედაა, რომლის ფერდის და ფუძის სიგრძეები შესაბამისად 5 სმ-ის და 8 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ მისი თითოეული წიბო პირამიდის სიმაღლესთან 30° -იან კუთხეს ადგენს.

- ა. $\frac{25\sqrt{2}}{2}$ სმ³ ბ. $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ სმ³ გ. $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ სმ³ დ. $\frac{50\sqrt{2}}{2}$ სმ³

14.17. $KABC$ პირამიდის ფუძეში ABC მართკუთხა სამკუთხედაა: $\angle C = 90^\circ$, $AB = 25$ სმ, $BC = 7$ სმ და $AK = CK = 13$ სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ AKC გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყის მართობულია.

- ა. 280 სმ³ ბ. 240 სმ³ გ. 260 სმ³ დ. 220 სმ³

14.18. პირამიდის ფუძე სამკუთხედაა, რომლის გვერდების სიგრძეებია 9 სმ., 40 სმ. და 41 სმ. თითოეული გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ მისი წვერო ფუძეში გეგმილდება.

- ა. $216\sqrt{3}$ სმ³ ბ. $224\sqrt{2}$ სმ³ გ. $224\sqrt{3}$ სმ³ დ. $240\sqrt{3}$ სმ³

14.19. პირამიდის ფუძეში რომბია, რომლის დიაგონალების სიგრძეები 16 სმ-ის და 30 სმ-ის ტოლია. თითოეული გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან 45° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

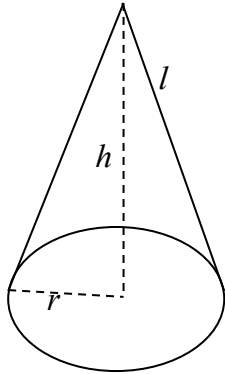
- ა. $180\sqrt{2}$ სმ² ბ. $180\sqrt{3}$ სმ² გ. $240\sqrt{2}$ სმ² დ. $240\sqrt{3}$ სმ²

14.20. პირამიდის ფუძეში ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის ფერდის სიგრძე 12 სმ-ის ტოლია, ხოლო ბლაგვი კუთხე 120° -ს უდრის. თითოეული გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან 45° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

- ა. 86 სმ³ ბ. 92 სმ³ გ. 94 სმ³ დ. 108 სმ³

§15. კონუსი. ცილინდრი.

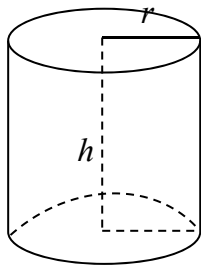
კონუსი



$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}; \quad S_{\text{სრუ}} = \pi \cdot r \cdot (r+l); \quad S_{\text{გვ}} = \pi \cdot r \cdot l = \pi \cdot l \cdot \sqrt{r^2 + h^2} .$$

ცილინდრი

ცილინდრის სიმაღლეა h , ფუძის წრეწირის რადიუსი r , მსახველი l .



$$S_{\text{გვ}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h; \quad V = \pi \cdot r^2 \cdot h; \quad S_{\text{სრუ}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r+h); \quad S_{\text{სრუ}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l + 2 \cdot \pi \cdot r^2 .$$

სავარჯიშო ტესტი №15

15.1. ცილინდრის ფუძის რადიუსი 1 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ მისი ზედაპირის ფართობი 48 სმ^2 .

- ა. 18 სმ^3 ბ. 24 სმ^3 გ. 26 სმ^3 დ. 32 სმ^3

15.2. ცილინდრის მოცულობა $9\pi \text{ სმ}^3$, ხოლო ღერძული კვეთის დიაგონალის სიგრძე 5 სმ-ია. იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლე.

- ა. 4სმ ბ. 4,5სმ გ. 5,5სმ დ. 6სმ

15.3. A და B ცილინდრის ქვედა ფუძის წრეწირის ისეთი წერტილებია, რომ $AB = 6 \text{ სმ}$ და AB რკალის გრადუსული ზომაა 120° . იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე 8 სმ-ის ტოლია.

- ა. $72\pi \text{ სმ}^3$ ბ. $48\pi \text{ სმ}^3$ გ. $96\pi \text{ სმ}^3$ დ. $54\pi \text{ სმ}^3$

15.4. ცილინდრის ღერძის პარალელურად მისგან $8\sqrt{3}$ სმ-ის მანძილზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის წრეწირს ყოფს 1:2 შეფარდებით. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ ცილინდრის სიმაღლეა 12 სმ.

- ა. 384 სმ^2 ბ. 428 სმ^2 გ. 492 სმ^2 დ. 576 სმ^2

15.5. ცილინდრის ზედა ფუძის ქორდაზე გავლებულია ფუძის მართობული კვეთა, რომელიც ფუძის ცენტრიდან დაშორებულია 3სმ-ით და რომლის ფართობია 48 სმ^2 . იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ ქორდის სიგრძე 8 სმ-ის ტოლია.

- ა. $80\pi \text{ სმ}^2$ ბ. $90\pi \text{ სმ}^2$ გ. $110\pi \text{ სმ}^2$ დ. $120\pi \text{ სმ}^2$

15.6. A და B წერტილები ცილინდრის განსხვავებულ ფუძეებს მიეკუთვნებიან, თანაც $AB = 13 \text{ სმ}$. იპოვეთ მანძილი AB მონაკვეთის ცილინდრის ღერძამდე, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე 5 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფუძის დიამეტრი 20 სმ-ია.

- ა. 8სმ ბ. 14სმ გ. 16სმ დ. 22სმ

15.7. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი $15\pi \text{ სმ}^2$ -ის ტოლია. იპოვეთ კონუსის ღერძული კვეთის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე 4 სმ-ია.

- ა. 8 სმ^2 ბ. 16 სმ^2 გ. 12 სმ^2 დ. 14 სმ^2

15.8. კონკურსის მოცულობა $3\sqrt{3} \text{ სმ}^3$ -ის ტოლია. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი მსახველი ფუძის სიბრტყესთან 30° -იან კუთხეს ადგენს.

ა. $5\sqrt{2}\pi$ სმ² ბ. $6\sqrt{3}\pi$ სმ² გ. $7\sqrt{2}\pi$ სმ² დ. $8\sqrt{3}\pi$ სმ²

15.9. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ორჯერ მეტია მისი ფუძის ფართობზე, ხოლო ღერძული კვეთის ფართობი $9\sqrt{3}$ სმ²-ია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

ა. $6\sqrt{2}\pi$ სმ³ ბ. $6\sqrt{3}\pi$ სმ³ გ. $9\sqrt{2}\pi$ სმ³ დ. $9\sqrt{3}\pi$ სმ³

15.10. კონუსის სიმაღლეზე აღებული წერტილი სიმაღლეს ყოფს 1:3 შეფარდებით წვეროს მხრიდან. ამ წერტილზე გავლებულია ფუძის პარალელური კვეთა, რომლის ფართობი 4π სმ²-ია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ მისი მსახველის სიგრძე 10 სმ-ის ტოლია.

ა. 114π სმ³ ბ. 128π სმ³ გ. 136π სმ³ დ. 142π სმ³

15.11. ცილინდრის ფუძის რადიუსი 1 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ცილინდრის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი მოცულობა 24 სმ³.

ა. 34 სმ² ბ. 46 სმ² გ. 48 სმ² დ. 52 სმ²

15.12. ცილინდრის მოცულობა 48π სმ³, ხოლო ღერძული კვეთის დიაგონალის სიგრძე 8 სმ-ია. იპოვეთ ცილინდრის რადიუსი.

ა. $2\sqrt{3}$ სმ ბ. $3\sqrt{2}$ სმ გ. $4\sqrt{3}$ სმ დ. $5\sqrt{2}$ სმ

15.13. A და B ცილინდრის ზედა ფუძის წრეწირის ისეთი წერტილებია, რომ $AB = 8$ სმ და AB რკალის გრადუსული ზომაა 300° . იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე 9 სმ-ის ტოლია.

ა. 28π სმ³ ბ. 36π სმ³ გ. 48π სმ³ დ. 54π სმ³

15.14. ცილინდრის ღერძის პარალელურად მისგან $9\sqrt{3}$ სმ-ის მანძილზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის წრეწირს ყოფს 1:5 შეფარდებით. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ ცილინდრის სიმაღლეა 7 სმ.

ა. 102 სმ² ბ. 114 სმ² გ. 118 სმ² დ. 126 სმ²

15.15. ცილინდრის ქვედა ფუძის ქორდაზე გავლებულია ფუძის მართობული კვეთა, რომელიც ფუძის ცენტრიდან დაშორებულია 5 სმ-ით და რომლის ფართობია 84 სმ². იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ ქორდის სიგრძე 24 სმ-ის ტოლია.

ა. 360π სმ² ბ. 420π სმ² გ. 480π სმ² დ. 520π სმ²

15.16. A და B წერტილები ცილინდრის განსხვავებულ ფუძეებს მიეკუთვნებიან, თანაც $AB = 25$ სმ. იპოვეთ მანძილი AB მონაკვეთის ცილინდრის ღერძამდე, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე 7 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფუძის დიამეტრი 26 სმ-ია.

ა. 5სმ ბ. 7სმ გ. 6სმ დ. 8სმ

15.17. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი 15π სმ²-ის ტოლია. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე, თუ მისი ღერძული კვეთის ფართობი 4 სმ-ია.

ა. 2სმ

ბ. 4სმ

გ. 3სმ

დ. 5სმ

15.18. კონკურსის მოცულობა $9\sqrt{3}$ სმ³-ის ტოლია. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი მსახველი ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ადგენს.

ა. 12π სმ²

ბ. 16π სმ²

გ. 18π სმ²

დ. 24π სმ²

15.19. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი შვიდჯერ მეტია მისი ფუძის ფართობზე, ხოლო ღერძული კვეთის ფართობი $24\sqrt{3}$ სმ²-ია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

ა. $24\sqrt{2}\pi$ სმ³

ბ. $24\sqrt{3}\pi$ სმ³

გ. $28\sqrt{2}\pi$ სმ³

დ. $28\sqrt{3}\pi$ სმ³

15.20. კონუსის მსახველზე აღებული წერტილი მსახველს ყოფს 3:5 შეფარდებით წვეროს მხრიდან. ამ წერტილზე გავლებულია ფუძის პარალელური კვეთა, რომლის ფართობი 6π სმ²-ია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე 18 სმ-ის ტოლია.

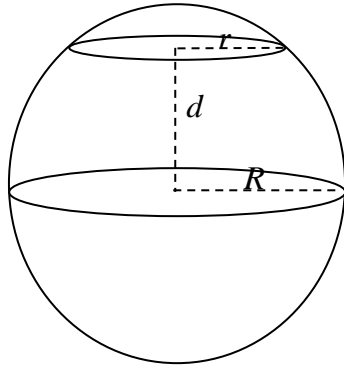
ა. 234π სმ³

ბ. 248π სმ³

გ. 256π სმ³

დ. 262π სმ³

§16. სფერო-ბირთვი.



1. თუ სფეროს რადიუსია R , კვეთის რადიუსი r , მანძილი სფეროს ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყემდე d , მაშინ

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} .$$

2. სფეროს ზედაპირის ფართობი $S = 4\pi R^2$.

3. სფერული სარტყლის ზედაპირის ფართობი $S = 2\pi \cdot R \cdot H$,

სადაც H - სფერული სარტყლის სიმაღლეა.

4. სფერული სექტორის ზედაპირის ფართობი

$$S = \pi \cdot R(2H + \sqrt{2RH - H^2}) ,$$

სადაც H - სფერული სექტორის სიმაღლეა.

5. სფერული სექტორის მოცულობა

$$V = \frac{4}{3}\pi RH .$$

6. ბირთვის მოცულობა $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

7. სფერული სეგმენტის მოცულობა

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H \right).$$

სავარჯიშო ტესტი №16

16.1. სფეროს ზედაპირის ფართობია 16 სმ^2 . იპოვეთ დიდი წრის ფართობი.

- ა. 4 სმ^2 ბ. 6 სმ^2 გ. 8 სმ^2 დ. 12 სმ^2

16.2. იპოვეთ ბირთვის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი მოცულობა $36\pi \text{ სმ}^3$ -ის ტოლია.

- ა. $27\pi \text{ სმ}^2$ ბ. $36\pi \text{ სმ}^2$ გ. $45\pi \text{ სმ}^2$ დ. $54\pi \text{ სმ}^2$

16.3. იპოვეთ იმ ბირთვის რადიუსი, რომლის ზედაპირის ფართობი 6-ჯერ მეტია მის მოცულობაზე.

- ა. $3,5\text{სმ}$ ბ. $2,5\text{სმ}$ გ. $1,5\text{სმ}$ დ. $0,5\text{სმ}$

16.4. სფერო გადაკვეთილია სიბრტყით, რომელიც მისი ცენტრიდან დაშორებულია 9 სმ -ით. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ სფეროს რადიუსი 13 სმ -ის ტოლია.

- ა. $74\pi \text{ სმ}^2$ ბ. $86\pi \text{ სმ}^2$ გ. $88\pi \text{ სმ}^2$ დ. $92\pi \text{ სმ}^2$

16.5. ბირთვის რადიუსის პერპენდიკულარულად გავლებული ორი სიბრტყე რადიუსს ეოფს შეფარდებით $2:3:7$ (თანმიმდევრულად). იპოვეთ მიღებული სარტყლის ზედაპირის ფართობი, თუ ბირთვის რადიუსი 6 სმ -ის ტოლია.

- ა. $14\pi \text{ სმ}^2$ ბ. $18\pi \text{ სმ}^2$ გ. $24\pi \text{ სმ}^2$ დ. $28\pi \text{ სმ}^2$

16.6. ბირთვის რადიუსის სიგრძე 2 სმ -ის ტოლია. მისი რადიუსის ბოლოზე გავლებულია კვეთა, რომელიც ამ რადიუსთან 30° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი.

- ა. $3\pi \text{ სმ}^2$ ბ. $4\pi \text{ სმ}^2$ გ. $5\pi \text{ სმ}^2$ დ. $6\pi \text{ სმ}^2$

16.7. სფეროს რადიუსია 15 სმ . წერტილი, რომელიც ძვეს მხებ სიბრტყეზე შესების წერტილიდან დაშორებულია 8 სმ -ით. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი ამ წერტილიდან სფეროს ზედაპირამდე.

- ა. $2,5\text{სმ}$ ბ. $1,5\text{სმ}$ გ. 2სმ დ. 1სმ

16.8. 5 სმ -ის ტოლი რადიუსის ბირთვი ეხება სამკუთხედის ყველა გვერდს, რომელთა სიგრძეებია 13სმ , 14 სმ . და 15 სმ . იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

ა. 12სმ ბ. 9სმ გ. 6სმ დ. 3სმ

16.9. ბირთვის ზედაპირზე მდებარე სამ წერტილს შორის მანძილებია 6სმ, 8სმ. და 10 სმ. ბირთვის რადიუსი 13 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან ამ წერტილებზე გამავალ სიბრტყემდე.

ა. 13სმ ბ. 12სმ გ. 16სმ დ. 19სმ

16.10. ბირთვის ზედაპირის ორ წერტილზე გავლებულ რადიუსებს შორის კუთხე 60° -ია, ხოლო ამ წერტილებს შორის უმოკლესი მანძილი ზედაპირის გასწვრივ 5π სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ბირთვის რადიუსი.

ა. 8სმ ბ. 13სმ გ. 15სმ დ. 20სმ

16.11. დიდი წრის ფართობია 2 სმ^2 . იპოვეთ სფეროს ზედაპირის ფართობია.

ა. 6 სმ^2 ბ. 8 სმ^2 გ. 7 სმ^2 დ. 9 სმ^2

16.12. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა, თუ მისი ზედაპირის ფართობი $100\pi \text{ სმ}^2$ -ის ტოლია.

ა. $\frac{500}{3} \pi \text{ სმ}^3$ ბ. $\frac{400}{3} \pi \text{ სმ}^3$ გ. $100\pi \text{ სმ}^3$ დ. $\frac{200}{3} \pi \text{ სმ}^3$

16.13. იპოვეთ იმ ბირთვის რადიუსი, რომლის ზედაპირის ფართობი 4-ჯერ ნაკლებია მის მოცულობაზე.

ა. 6სმ ბ. 8სმ გ. 12სმ დ. 14სმ

16.14. სფერო გადაკვეთილია სიბრტყით, რომელიც მისი ცენტრიდან დაშორებულია 12 სმ-ით. იპოვეთ სფეროს რადიუსი, თუ კვეთის ფართობი $256\pi \text{ სმ}^2$ -ის ტოლია.

ა. 10სმ ბ. 12სმ გ. 18სმ დ. 20სმ

16.15. ბირთვის რადიუსის პერპენდიკულარულად გავლებული ორი სიბრტყე რადიუსს ყოფს შეფარდებით $3:4:5$ (თანმიმდევრულად). იპოვეთ ბირთვის რადიუსი, თუ მიღებული სარტყლის ზედაპირის ფართობი $24\pi \text{ სმ}^2$ -ის ტოლია.

ა. 6სმ ბ. 7სმ გ. 8სმ დ. 9სმ

16.16. ბირთვის რადიუსის სიგრძე 2 სმ-ის ტოლია. მისი რადიუსის ბოლოზე გავლებულია კვეთა, რომელიც ამ რადიუსთან 60° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი.

ა. $3\pi \text{ სმ}^2$ ბ. $4\pi \text{ სმ}^2$ გ. $5\pi \text{ სმ}^2$ დ. $6\pi \text{ სმ}^2$

16.17. სფეროს რადიუსია 40 სმ. წერტილი, რომელიც ძვეს მხებ სიბრტყეზე შეხების წერტილიდან დაშორებულია 9 სმ-ით. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი ამ წერტილიდან სფეროს ზედაპირამდე.

ა. 2,5სმ ბ. 2სმ გ. 1,5სმ დ. 1სმ

16.18. 13 სმ-ის ტოლი რადიუსის ბირთვი ეხება სამკუთხედის ყველა გვერდს, რომელთა სიგრძეებია 15სმ., 20 სმ. და 25 სმ. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

ა. 19სმ

ბ. 16სმ

გ. 12სმ

დ. 15სმ

16.19. ბირთვის ზედაპირზე მდებარე სამ წერტილს შორის მანძილებია 10სმ., 24სმ. და 26 სმ. ბირთვის რადიუსი $5\sqrt{10}$ სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან ამ წერტილებზე გამავალ სიბრტყემდე.

ა. 5სმ

ბ. 8სმ

გ. 9სმ

დ. 7სმ

16.20. ბირთვის ზედაპირის ორ წერტილზე გავლებულ რადიუსებს შორის კუთხე 120° -ია, ხოლო ამ წერტილებს შორის უმოკლესი მანძილი ზედაპირის გასწვრივ 6π სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ბირთვის რადიუსი.

ა. 6სმ

ბ. 7სმ

გ. 8სმ

დ. 9სმ

§17. ბრუნვითი სხეულები

სავარჯიშო ტესტი №17

17.1. ტოლფერდა სამკუთხედი ბრუნავს თავისი ფერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობა, თუ სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხე 120° -ის ტოლია, ხოლო ფუძის სიგრძე 10 სმ-ია.

- ა. 125π სმ³ ბ. 140π სმ³ გ. 180π სმ³ დ. 250π სმ³

17.2. მართკუთხა სამკუთხედი ბრუნავს თავისი ჰიპოტენუზის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობა, თუ ჰიპოტენუზის სიგრძე 8 სმ-ის ტოლია, ხოლო ერთ-ერთი კუთხე 30° -ია.

- ა. 16π სმ³ ბ. 32π სმ³ გ. 36π სმ³ დ. 72π სმ³

17.3. კვადრატი ბრუნავს თავისი ერთ-ერთი გვერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი მოცულობა 216π სმ³-ის ტოლია.

- ა. 52π სმ² ბ. 56π სმ² გ. 72π სმ² დ. 76π სმ²

17.4. მართკუთხედი ბრუნავს თავისი დიდი გვერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობის შეფარდება მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობთან, თუ მართკუთხედის გვერდების სიგრძეები 6 სმ-ის და 8 სმ-ის ტოლია.

- ა. 3 ბ. 4 გ. 3,5 დ. 4,5

17.5. რომბი ბრუნავს თავისი გვერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ რომბის დიაგონალების სიგრძეები 5 სმ-ის და 12 სმ-ის ტოლია.

- ა. 160π სმ² ბ. 180π სმ² გ. 220π სმ² დ. 240π სმ²

17.6. ABCD პარალელოგრამი ბრუნავს A წვეროზე AD გვერდის მართობულად გავლებული წრფის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობა, თუ $AB = 5$ სმ, $BC = 9$ სმ და $\cos \angle BAD = 0,6$.

- ა. 362π სმ³ ბ. 396π სმ³ გ. 432π სმ³ დ. 464π სმ³

17.7. ABCD ტოლფერდა ტრაპეცია ბრუნავს A წვეროზე ფუძეების მართობულად გავლე-ბული წრფის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობა, თუ ტრაპეცი-ის ფუძეების სიგრძეები 6 სმ-ის და 12 სმ-ის ტოლია, ხოლო მახვილი კუთხე 60° -ია.

- ა. $324\sqrt{3}\pi$ სმ³ ბ. $296\sqrt{3}\pi$ სმ³ გ. $272\sqrt{3}\pi$ სმ³ დ. $256\sqrt{3}\pi$ სმ³

17.8. ABC სამკუთხედი ბრუნავს C წვეროზე BD სიმაღლის პარალელურად გავლებული წრფის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობა, თუ $AB = 15$ სმ, $AC = 14$ სმ და $BC = 13$ სმ.

- ა. 976π სმ³ ბ. 1064π სმ³ გ. 1082π სმ³ დ. 1128π სმ³

17.9. კვადრატი ბრუნავს თავისი დიაგონალის გარშემო. იპოვეთ მისი გვერდის სიგრძე, თუ მიღებული ფიგურის მოცულობა 18π სმ³-ის ტოლია.

- ა. $3\sqrt{2}$ სმ ბ. $2\sqrt{3}$ სმ გ. $6\sqrt{5}$ სმ დ. $5\sqrt{6}$ სმ

17.10. კვადრატი ბრუნავს თავისი ერთ-ერთი წვეროზე დიაგონალის პარალელურად გავლე-ბული წრფის გარშემო. იპოვეთ მისი გვერდის სიგრძე, თუ მიღებული ფიგურის გვერდითი ზედაპირის ფართობი $64\sqrt{2}\pi$ სმ²-ის ტოლია.

- ა. 2სმ ბ. 4სმ გ. 6სმ დ. 8სმ

17.11. ტოლფერდა სამკუთხედი ბრუნავს თავისი ფუძის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობა, თუ სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხე 60° -ის ტოლია, ხოლო ფერდის სიგრძე 4 სმ-ია.

- ა. 12π სმ³ ბ. 16π სმ³ გ. 24π სმ³ დ. 28π სმ³

17.12. მართკუთხა სამკუთხედი ბრუნავს თავისი ჰიპოტენუზის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობა, თუ კათეტების სიგრძეები 3 სმ-ის და $\sqrt{3}$ სმ-ის ტოლია.

- ა. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$ სმ³ ბ. $3\sqrt{2}\pi$ სმ³ გ. $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ სმ³ დ. $3\sqrt{3}\pi$ სმ³

17.13. კვადრატი ბრუნავს თავისი ერთ-ერთი გვერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობი 72π სმ²-ის ტოლია.

- ა. 156π სმ³ ბ. 176π სმ³ გ. 216π სმ³ დ. 236π სმ³

17.14. მართკუთხედი ბრუნავს თავისი მცირე გვერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობის შეფარდება მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობთან, თუ მართკუთხედის გვერდების სიგრძეები 6 სმ-ის და 8 სმ-ის ტოლია.

- ა. 2,5 ბ. 3 გ. 3,5 დ. 4

17.15. რომში ბრუნავს თავისი გვერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ რომბის გვერდის სიგრძე 8 სმ-ის ტოლია, ხოლო ერთ-ერთი კუთხე 60° -ია..

- ა. $64\sqrt{2}\pi$ სმ² ბ. $64\sqrt{3}\pi$ სმ² გ. $76\sqrt{2}\pi$ სმ² დ. $76\sqrt{3}\pi$ სმ²

17.16. ABCD პარალელოგრამი ბრუნავს A წვეროზე AD გვერდის მართობულად გავლენ-ბული წრფის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობა, თუ $AB = 5$ სმ., $BC = 9$ სმ და $\cos \angle BAD = -0,6$.

- ა. 220π სმ³ ბ. 240π სმ³ გ. 260π სმ³ დ. 280π სმ³

17.17. ABCD ტოლფერდა ტრაპეცია ბრუნავს A წვეროზე ფუძეების მართობულად გავლენ-ბული წრფის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობა, თუ ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეები 5 სმ-ის და 11 სმ-ის ტოლია, ხოლო ბლაგვი კუთხე 150° -ია.

- ა. $76\sqrt{3}\pi$ სმ³ ბ. $84\sqrt{3}\pi$ სმ³ გ. $88\sqrt{3}\pi$ სმ³ დ. $92\sqrt{3}\pi$ სმ³

17.18. ABC სამკუთხედი ბრუნავს A წვეროზე BC გვერდის პარალელურად გავლენ-ბული წრფის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის მოცულობა, თუ $AB = 15$ სმ, $AC = 13$ სმ და $BC = 14$ სმ.

- ა. 1154π სმ³ ბ. 1276π სმ³ გ. 1296π სმ³ დ. 1344π სმ³

17.19. კვადრატს ბრუნავს თავისი დიაგონალის გარშემო. იპოვეთ მისი გვერდის სიგრძე, თუ მიღებული ფიგურის გვერდითი ზედაპირის ფართობი $9\sqrt{\pi}$ სმ²-ის ტოლია.

- ა. 2სმ ბ. 3სმ გ. 8სმ დ. 9სმ

17.20. კვადრატს ბრუნავს თავისი ერთ-ერთი წვეროზე დიაგონალის პარალელურად გავლენ-ბული წრფის გარშემო. იპოვეთ მისი გვერდის სიგრძე, თუ მიღებული ფიგურის მოცულობა 256π სმ³-ის ტოლია.

- ა. $3\sqrt{2}$ სმ ბ. $4\sqrt{3}$ სმ გ. $4\sqrt{2}$ სმ დ. $5\sqrt{3}$ სმ

§18. ფიგურათა კომბინაცია

სავარჯიშო ტესტი №18

18.1. კუბი ჩახაზულია სფეროში. იპოვეთ სფეროს მოცულობა, თუ კუბის გვერდითი ზედაპირის ფართობი 24 სმ^2 -ის ტოლია.

- ა. $2\sqrt{3}\pi \text{ სმ}^3$ ბ. $3\sqrt{2}\pi \text{ სმ}^3$ გ. $4\sqrt{3}\pi \text{ სმ}^3$ დ. $5\sqrt{2}\pi \text{ სმ}^3$

18.2. წესიერი ტეტრაედრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი $12\sqrt{3} \text{ სმ}^2$ -ია. იპოვეთ მასში ჩახაზული კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

- ა. $3\pi \text{ სმ}^2$ ბ. $4\pi \text{ სმ}^2$ გ. $8\pi \text{ სმ}^2$ დ. $9\pi \text{ სმ}^2$

18.3. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი, რომლის მახვილი კუთხე 60° -ს უდრის. იპოვეთ მასში ჩახაზული ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი $32\sqrt{3} \text{ სმ}^2$ -ის ტოლია.

- ა. $6\pi \text{ სმ}^2$ ბ. $8\pi \text{ სმ}^2$ გ. $10\pi \text{ სმ}^2$ დ. $12\pi \text{ სმ}^2$

18.4. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გარშემო შემოხაზულია სფერო. იპოვეთ მისი რადიუსი, თუ პირამიდის ფუძის გვერდისა და სიმაღლის სიგრძეები შესაბამისად 6 სმ -ის და 8 სმ -ის ტოლია.

- ა. $4,75\text{სმ}$ ბ. 5სმ გ. $5,5\text{სმ}$ დ. $6,25\text{სმ}$

18.5. ნახევარსფეროში ჩახაზულია ცილინდრი ისე, რომ მისი ერთ-ერთი ფუძე ნახევარსფეროს დიამეტრალურ სიბრტყეზე ძევს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობის შეფარდება ნახევარსფეროს მოცულობასთან, თუ ცილინდრის სიმაღლე 2-ჯერ ნაკლებია ნახევარსფეროს დიამეტრზე.

- ა. $\frac{3}{4}$ ბ. $\frac{9}{16}$ გ. $\frac{5}{8}$ დ. $\frac{5}{9}$

18.6. კონუსში ჩახაზულია ბირთვი, რომლის მოცულობა $36\pi \text{ სმ}^3$ -ის ტოლია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე 8 სმ -ია.

- ა. $74\pi \text{ სმ}^3$ ბ. $82\pi \text{ სმ}^3$ გ. $96\pi \text{ სმ}^3$ დ. $108\pi \text{ სმ}^3$

18.7. კონუსში ჩახაზულია კუბი ისე, რომლისი ოთხი წვერო კონუსის ფუძეზე ძევს, ხოლო დანარჩენი ოთხი კი გვერდით ზედაპირზე. იპოვეთ კუბის წიბო, თუ კონუსის

ფუძის რადიუსის და სიმაღლის სიგრძეები შესაბამისად 4 სმ-ის და $12\sqrt{3}$ სმ-ის ტოლია.

- ა. $3\sqrt{2}$ სმ ბ. $2\sqrt{3}$ სმ გ. $3\sqrt{5}$ სმ დ. $5\sqrt{3}$ სმ

18.8. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდაში ჩახაზულია ბირთვი, რომლის მოცულობა 288π სმ³-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე 15 სმ-ია.

- ა. 92 სმ³ ბ. 76 სმ³ გ. 84 სმ³ დ. 100 სმ³

18.9. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდაში ჩახაზულია კუბი. იპოვეთ კუბის წიბო, თუ პირამიდის გვერდის და პირამიდის სიმაღლის სიგრძეები შესაბამისად 7 სმ-ის და 3 სმ-ის ტოლია.

- ა. 2,1სმ ბ. 2,9სმ გ. 3,5სმ დ. 3,7სმ

18.10. კუბის გარშემო შემოხაზულია ცილინდრი. იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ კუბის მოცულობა $\sqrt{5\sqrt{2} - 7}$ სმ³-ის ტოლია.

- ა. $0, 5\pi$ სმ² ბ. π სმ² გ. $1, 5\pi$ სმ² დ. 2π სმ²

18.11. კუბი ჩახაზულია სფეროში. იპოვეთ სფეროს ზედაპირის ფართობი, თუ კუბის მოცულობა 24 სმ³-ის ტოლია.

- ა. $9\sqrt[3]{6\pi}$ სმ² ბ. $9\sqrt[3]{9\pi}$ სმ² გ. $12\sqrt[3]{6\pi}$ სმ² დ. $12\sqrt[3]{9\pi}$ სმ²

18.12. წესიერი ტეტრაედრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი $30\sqrt{3}$ სმ²-ია. იპოვეთ მასში ჩახაზული კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

- ა. 10π სმ² ბ. 15π სმ² გ. 20π სმ² დ. 25π სმ²

18.13. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი, რომლის ბლაგვი კუთხე 120° -ს უდრის. იპოვეთ მასში ჩახაზული ცილინდრის მოცულობა, თუ პარალელეპიპედის მოცულობა $24\sqrt{3}$ სმ³-ის ტოლია.

- ა. 3π სმ³ ბ. 8π სმ³ გ. 9π სმ³ დ. 16π სმ³

18.14. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გარშემო შემოხაზულია სფერო. იპოვეთ მისი რადიუსი, თუ პირამიდის ფუძის გვერდისა და სიმაღლის სიგრძეები შესაბამისად 9 სმ-ის და 10 სმ-ის ტოლია.

- ა. 5სმ ბ. 5,65სმ გ. 6,35სმ დ. 7,5სმ

18.15. ნახევარსფეროში ჩახაზულია ცილინდრი ისე, რომ მისი ერთ-ერთი ფუძე ნახევარსფეროს დიამეტრალურ სიბრტყეზე ძევს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობის შეფარდება ნახევარსფეროს მოცულობასთან, თუ ცილინდრის სიმაღლე 3-ჯერ ნაკლებია ნახევარსფეროს დიამეტრზე.

ა. $\frac{4}{9}$ ბ. $\frac{2}{3}$ გ. $\frac{9}{25}$ დ. $\frac{9}{16}$

18.16. კონუსში ჩახაზულია ბირთვი, რომლის მოცულობა 288π სმ³-ის ტოლია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე 15 სმ-ია.

ა. 600π სმ³ ბ. 700π სმ³ გ. 800π სმ³ დ. 900π სმ³

18.17. კონუსში ჩახაზულია კუბი ისე, რომლის ოთხი წვერო კონუსის ფუძეზე ძევს, ხოლო დანარჩენი ოთხი კი გვერდით ზედაპირზე. იპოვეთ კუბის წიბო, თუ კონუსის ფუძის რადიუსის და სიმაღლის სიგრძეები შესაბამისად 5 სმ-ის და $20\sqrt{2}$ სმ-ის ტოლია.

ა. $3\sqrt{2}$ სმ ბ. $4\sqrt{2}$ სმ გ. $4\sqrt{3}$ სმ დ. $3\sqrt{3}$ სმ

18.18. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდაში ჩახაზულია ბირთვი, რომლის მოცულობა 36π სმ³-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლის სიგრძე 9 სმ-ია.

ა. 28 სმ³ ბ. 34 სმ³ გ. 36 სმ³ დ. 42 სმ³

18.19. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდაში ჩახაზულია კუბი. იპოვეთ კუბის წიბო, თუ პირამიდის გვერდის და პირამიდის სიმაღლის სიგრძეები შესაბამისად 8 სმ-ის და 12 სმ-ის ტოლია.

ა. 4,2სმ ბ. 4,8სმ გ. 5,4სმ დ. 5,6სმ

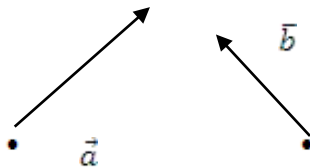
18.20. კუბის გარშემო შემოხაზულია ცილინდრი. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ კუბის ზედაპირის ფართობი 24 სმ²-ის ტოლია.

ა. $2, 6\pi$ სმ³ ბ. 3π სმ³ გ. $3, 4\pi$ სმ³ დ. 4π სმ³

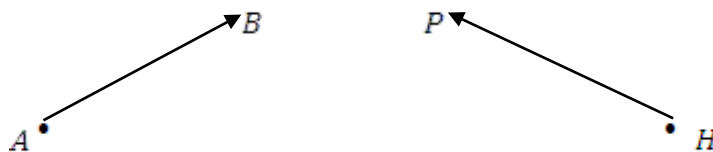
§19. ვექტორები სიბრტყესა და სივრცეში

სიდიდებს, რომლებიც განისაზღვრებიან მათი რიცხვითი მნიშვნელობებით სკალარული სიდიდეები ეწოდება. სკალარული სიდიდეებია: სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, ტემპერატურა და ა. შ.. არსებობენ სხვა სახის სიდიდეები, რომელთა განსაზღვრისათვის გარდა რიცხვითი მნიშვნელობისა საჭიროა აგრეთვე მიმართულების ცოდნა. ასეთ სიდიდეებს ვექტორული სიდიდეები ეწოდება.

განსაზღვრება: მიმართულ მონაკვეთს ვექტორი ეწოდება. ვექტორის აღნიშვნისათვის გამოიყენება ლათინური ანბანის პატარა ასოები თავზე პატარა ისრით ან ხაზით:



ასევე ვექტორს გამოსახავენ მისი მონაკვეთის ბოლოებზე მითითებული წერტილების საშუალებით. ამ შემთხვევაში პირველ ადგილზე ყოველთვის ვექტორის საწყისი წერტილი იწერება, რომელსაც სათავე ან მოდების წერტილი ეწოდება, მონაკვეთის მეორე ბოლოს ვექტორის ბოლო ეწოდება.



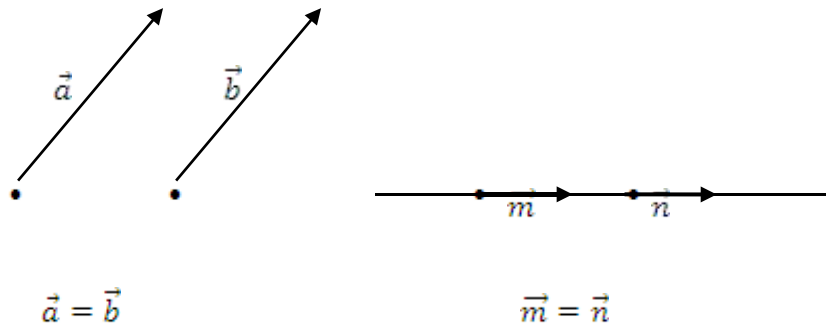
ნახაზზე გამოსახულია \overline{AB} და \overline{HP} ვექტორები.

განსაზღვრება: თუ ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, მას ნულოვანი ვექტორი ეწოდება. ნულოვანი ანუ ნულ ვექტორი ასე აღინიშნება: $\vec{0}$.

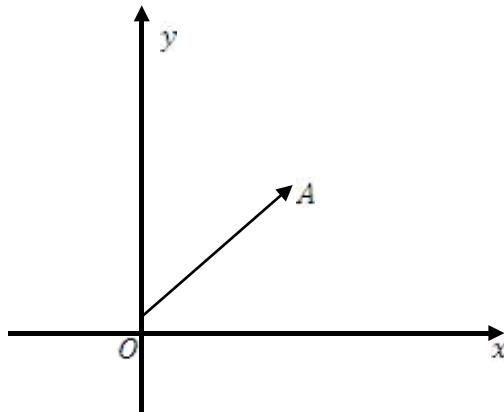
განსაზღვრება: ვექტორის გამომსახველი მონაკვეთის სიგრძეს, ანუ მანძილს მის სათავესა და ბოლოს შორის ვექტორის სიგრძე ეწოდება.

ვექტორის სიგრძეს ვექტორის **აბსოლუტურ** სიდიდესაც უწოდებენ. \vec{a} ვექტორის სიგრძე ჩაიწერება ასე: $|\vec{a}|$. ნულოვანი ვექტორის სიგრძე ნულის ტოლია.

თუ ვექტორები ერთნაირად არიან მიმართული და ტოლი სიგრძეები აქვთ, მაშინ მათ **ტოლი** ვექტორები ეწოდება. მაგალითად:



თუ ვექტორი მოდებულია კოორდინატთა სათავეზე, მაშინ მისი ბოლო წერტილის კოორდინატები წარმოადგენენ ამ ვექტორის კოორდინატებს. მაგალითად:



თუ A წერტილის კოორდინატებია $(x_0; y_0)$, მაშინ \vec{OA} ვექტორის კოორდინატებიც იქნება $(x_0; y_0)$, ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება - $\vec{OA} = (x_0; y_0)$ ან $\vec{OA}(x_0; y_0)$.

ანალოგიურად სივრცეში, თუ A წერტილის კოორდინატებია $(x_0; y_0; z_0)$, მაშინ \vec{OA} ვექტორის კოორდინატებიც იქნება $(x_0; y_0; z_0)$, ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება - $\vec{OA} = (x_0; y_0; z_0)$ ან $\vec{OA}(x_0; y_0; z_0)$.

თუ $A(x_1; y_1)$ და $B(x_2; y_2)$ მაშინ $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, მისი სიგრძე კი გამოითვლება ფორმულით $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

ანალოგიურად, თუ $A(x_1; y_1; z_1)$ და $B(x_2; y_2; z_2)$ მაშინ $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$,
 მისი სიგრძე კი გამოითვლება ფორმულით
 $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

ორი ვექტორის ჯამი (სხვაობა) ეწოდება ვექტორს, რომლის კოორდინატები წარმოადგენენ მოცემული ვექტორების კოორდინატების ჯამს (სხვაობას). მაგალითად:

თუ მოცემულია $\vec{a}(x_1; y_1)$ და $\vec{b}(x_2; y_2)$ მაშინ

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1; y_1) - (x_2; y_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$$

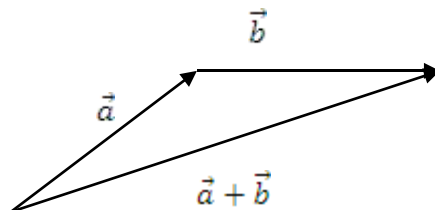
ანალოგიურად სივრცეში, თუ მოცემულია $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ და $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ მაშინ

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$$

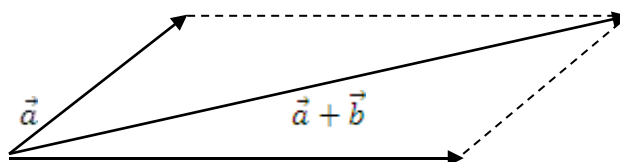
$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1; y_1; z_1) - (x_2; y_2; z_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).$$

ახლა გამოვიყენოთ ვექტორების შეკრების გეომეტრიული ილუსტრაცია.

ა) ვექტორების შეკრების **სამკუთხედის** წესი: თუ \vec{a} ვექტორის ბოლოში მოვდებთ \vec{b} ვექტორის საწყის წერტილს, მაშინ \vec{a} ვექტორის საწყისი და \vec{b} ვექტორის ბოლო წერტილის შემაერთებელი ვექტორი წარმოადგენს $\vec{a} + \vec{b}$ ვექტორს. მაგალითად:



ბ) ვექტორების შეკრების **პარალელოგრამის** წესი: თუ \vec{a} ვექტორსა და \vec{b} ვექტორს ერთ წერტილში მოვდებთ და მათზე როგორც გვერდებზე ავაგებთ პარალელოგრამს, მაშინ ამ პარალელოგრამის დიაგონალი, რომელიც ამ წერტილიდან გამოდის წარმოადგენს $\vec{a} + \vec{b}$ ვექტორს. მაგალითად:



\vec{b}

\vec{a} ვექტორის რაიმე $\lambda \neq 0$ რიცხვზე ნამრავლი $\lambda \vec{a}$ ეწოდება ისეთ \vec{b} ვექტორს, რომლის სიგრძე $|\vec{b}| = |\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, ხოლო მიმართულება ემთხვევა \vec{a} ვექტორის მიმართულებას, თუ $\lambda > 0$ და აქვს საწინააღმდეგო მიმართულება, თუ $\lambda < 0$.

ვექტორების შეკრებისა და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის ოპერაციები აკმაყოფილებენ შემდეგ თვისებებს:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$$

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = \lambda_2(\lambda_1\vec{a})$$

თუ მოცემულია $M(x_1; y_1)$ და $N(x_2; y_2)$ წერტილები, მაშინ MN მონაკვეთის შუა C წერტილის კოორდინატებია $(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$.

ანალოგიურად, თუ მოცემულია $M(x_1; y_1; z_1)$ და $N(x_2; y_2; z_2)$ წერტილები, მაშინ MN მონაკვეთის შუა C წერტილის კოორდინატებია $(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2})$.

ორი ვექტორის ნამრავლი წარმოადგენს რიცხვს, რომელიც მიიღება ერთსახელა კოორდინატების ნამრავლების შეკრებით.

თუ მოცემულია $\vec{a}(a_1; b_1)$ და $\vec{b}(a_2; b_2)$ მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი ჩაინერება და გამოითვლება შემდეგნაირად $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_1a_2 + b_1b_2$.

ანალოგიურად სივრცეში, თუ მოცემულია $\vec{a}(a_1; b_1; c_1)$ და $\vec{b}(a_2; b_2; c_2)$ მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი ჩაინერება და გამოითვლება შემდეგნაირად

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

სამართლიანია თოლობები:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

ვთქვათ, მოცემულია \vec{a} და \vec{b} ვექტორები. მათი სკალარული ნამრავლისათვის სამართლიანია ფორმულა: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$, სადაც φ არის \vec{a} და \vec{b} ვექტორებს შორის კუთხე.

კერძო შემთხვევებში კი ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

ა) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ როცა ვექტორები ერთნაირადა მიმართული.

ბ) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ როცა ვექტორები მართობულნი არიან.

გ) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$ როცა ვექტორები საპირისპიროდ არიან მიმართული.

სავარჯიშო ტესტი №19

19.1. $ABCD$ პარალელოგრამში AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთებიან. იპოვეთ $\vec{BC} + \vec{OA}$ ვექტორი.

ა. \vec{OC} ბ. \vec{BO} გ. \vec{OB} დ. \vec{CO}

19.2. ABC სამკუთხედში გავლებულია AD მედიანა. იპოვეთ $\vec{DC} - \vec{AB}$ ვექტორი.

ა. \vec{BD} ბ. \vec{BC} გ. \vec{DB} დ. \vec{CB}

19.3. იპოვეთ \vec{AB} ვექტორის სიგრძე, თუ $A(-5;3)$ და $B(2;-4)$.

ა. $2\sqrt{10}$ ბ. $\sqrt{10}$ გ. $2\sqrt{7}$ დ. $\sqrt{7}$

19.4. ვექტორის სათავე მოთავსებულია $A(2;3)$ წერტილში, ხოლო ბოლო კი $B(13;y)$ წერტილში. იპოვეთ y -ის მნიშვნელობა, თუ \vec{AB} ვექტორის სიგრძეა 11.

ა. 3 ბ. 4 გ. 6 დ. 7

19.5. ვექტორები $\vec{a}(7;24)$ და $\lambda \cdot \vec{a}$ თანამიმართული არიან, თანაც $|\lambda \vec{a}| = 125$. იპოვეთ λ სკალარის მნიშვნელობა.

ა. -2 ბ. 4 გ. -3 დ. 5

19.6. ABC სამკუთხედის მედიანები M წერტილში იკვეთებიან. იპოვეთ $\vec{MA} + \vec{MB}$ ვექტორი.

ა. \vec{AM} ბ. \vec{CM} გ. \vec{BM} დ. \vec{MC}

19.7. იპოვეთ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ $\vec{a}(1;-3)$ და $\vec{b}(-2;6)$.

- ა. $(-1;3)$ ბ. $(5;7)$ გ. $(7;-21)$ დ. $(-3;-8)$

19.8. სააკორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია წერტილები $A(-1;3)$, $B(2;-5)$ და $C(3;4)$. იპოვეთ $\overline{AB} + 2\overline{BC}$ ვექტორის სიგრძე.

- ა. $3\sqrt{5}$ ბ. $4\sqrt{5}$ გ. $4\sqrt{3}$ დ. $5\sqrt{5}$

19.9. ცნობილია, რომ $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$ და $|\vec{b}| = 4$. იპოვეთ $4\vec{a} + 2\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე.

- ა. $6\sqrt{2}$ ბ. $8\sqrt{2}$ გ. $2\sqrt{6}$ დ. $4\sqrt{6}$

19.10. ცნობილია, რომ $\overline{AB} = \overline{CD}$, თანაც $A(3;5)$ და $B(7;13)$. იპოვეთ CD მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები, თუ C და D წერტილები შესაბამისად OY და OX საკოორდინატო ღერძებს ეკუთვნიან.

- ა. $(2;4)$ ბ. $(-2;-4)$ გ. $(-2;4)$ დ. $(2;-4)$

19.11. $ABCD$ პარალელოგრამში AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთებიან. იპოვეთ $\overline{AB} - \overline{OC}$ ვექტორი.

- ა. \overline{OB} ბ. \overline{OD} გ. \overline{CD} დ. \overline{AB}

19.12. ABC სამკუთხედში გავლებულია AD მედიანა. იპოვეთ $\overline{CB} + \overline{DC}$ ვექტორი.

- ა. \overline{AD} ბ. \overline{DB} გ. \overline{BA} დ. \overline{BD}

19.13. იპოვეთ \overline{AB} ვექტორის სიგრძე, თუ $A(2;-4)$ და $B(-3;5)$.

- ა. $\sqrt{78}$ ბ. $\sqrt{84}$ გ. $\sqrt{92}$ დ. $\sqrt{106}$

19.14. ვექტორის სათავე მოთავსებულია $A(-3;-1)$ წერტილში, ხოლო ბოლო კი $B(x;-6)$ წერტილში. იპოვეთ x -ის მნიშვნელობა, თუ \overline{AB} ვექტორის სიგრძეა 5.

- ა. -5 ბ. -6 გ. -4 დ. -3

19.15. ვექტორები $\vec{a}(-9;-40)$ და $\lambda \cdot \vec{a}$ საწინააღმდეგო მიმართული არიან, თანაც $|\lambda \vec{a}| = 82$. იპოვეთ λ სკალარის მნიშვნელობა.

- ა. 4 ბ. 5 გ. -2 დ. 3

19.16. ABC სამკუთხედის მედიანები M წერტილში იკვეთებიან. იპოვეთ $\overline{MA} + \overline{MC}$ ვექტორი.

- ა. \overline{BM} ბ. \overline{CM} გ. \overline{AM} დ. \overline{MB}

19.17. იპოვეთ $4\vec{a} - 5\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ $\vec{a}(-2;6)$ და $\vec{b}(3;5)$.

- ა. (7;49) ბ. (-15;48) გ. (12;-18) დ. (-23;-1)

19.18. სააკორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია წერტილები $A(2;-1)$, $B(-1;4)$ და $C(-3;-2)$. იპოვეთ $2\overline{AB} + \overline{BC}$ ვექტორის სიგრძე.

- ა. $2\sqrt{5}$ ბ. $3\sqrt{3}$ გ. $4\sqrt{5}$ დ. $5\sqrt{3}$

19.19. ცნობილია, რომ $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$ და $|\vec{b}| = 5$. იპოვეთ $5\vec{a} + 3\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე.

- ა. $15\sqrt{2}$ ბ. $13\sqrt{6}$ გ. $8\sqrt{2}$ დ. $6\sqrt{2}$

19.20. ცნობილია, რომ $\overline{AB} = \overline{CD}$, თანაც $A(-4;-6)$ და $B(-10;-18)$. იპოვეთ CD მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები, თუ C და D წერტილები შესაბამისად OY და OX საკოორდინატო ღერძებს ეკუთვნიან.

- ა. (3;6) ბ. (3;-6) გ. (-3;6) დ. (-3;-6)

19.21. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ კუბია. იპოვეთ $\overline{AA_1} + \overline{B_1 C_1} - \overline{C_1 D_1}$ ვექტორი.

- ა. $\overline{C_1 A_1}$ ბ. \overline{AC} გ. \overline{BD} დ. $\overline{A_1 C_1}$

19.22. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ კუბია. გამოსახეთ $\vec{a} = \overline{AD}$, $\vec{b} = \overline{AB}$ და $\vec{c} = \overline{AA_1}$ ვექტორების საშუალებით $2\overline{MK}$ ვექტორი, სადაც M და K შესაბამისად $A_1 D_1$ და CC_1 წიბოების შუაწერტილებია.

- ა. $2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ ბ. $2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ გ. $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ დ. $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$

19.23. იპოვეთ $2\overline{AB} + 3\overline{CD}$ ვექტორის სიგრძე, თუ $A(-3;2;-1)$, $B(2;-1;-3)$, $C(2;-1;-3)$ და $D(-1;2;-2)$.

- ა. $\sqrt{433}$ ბ. $\sqrt{521}$ გ. $\sqrt{487}$ დ. $\sqrt{395}$

19.24. იპოვეთ \overline{AB} და \overline{CD} ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი თუ $A(3;-2;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(2;-3;3)$ და $D(-1;1;-2)$.

- ა. 0,75 ბ. 0,6 გ. 0,7 დ. 0,64

19.25. იპოვეთ x ცვლადის ის მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომლისათვისაც ვექტორები $\vec{a}(6-x;x;2)$ და $\vec{b}(-3;5+5x;-9)$ ურთიერთმართობულია.

- ა. 2 ბ. 1,5 გ. 3,5 დ. 3

19.26. იპოვეთ y ცვლადის ის მნიშვნელობა, რომლისათვისაც \overline{AB} და \overline{CD} ვექტორები კოლინიალურია, თუ $A(-2;-1;2)$, $B(4;-3;6)$, $C(-1;y-1;1)$ და $D(-4;-1;y)$.

19.27. გამოსახეთ $\overline{AB}(1;2;3)$ ვექტორი $\vec{a}(1;1;0)$, $\vec{b}(1;0;1)$ და $\vec{c}(0;1;1)$ ვექტორების საშუალებით.

ა. $\vec{a} - 2\vec{b}$ ბ. $2\vec{b} + \vec{c}$ გ. $\vec{b} + 2\vec{c}$ დ. $\vec{a} + 2\vec{c}$

19.28. იპოვეთ $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ ვექტორის სიგრძე, თუ $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=90^\circ$, $\angle(\vec{b}, \vec{c})=60^\circ$ და $\angle(\vec{a}, \vec{c})=120^\circ$.

ა. $3\sqrt{2}$ ბ. $\sqrt{11}$ გ. $\sqrt{13}$ დ. $2\sqrt{3}$

19.29. ცნობილია, რომ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$ და $\angle(\vec{a}, \vec{b})=60^\circ$. იპოვეთ $\cos \alpha$, სადაც α არის კუთხე $\vec{a} - \vec{b}$ და \vec{b} ვექტორებს შორის.

ა. 0,7 ბ. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ გ. $\frac{\sqrt{17}}{17}$ დ. 0,8

19.30. იპოვეთ $\vec{a}(5;12;13)$ და $\vec{b}(9;40;41)$ ვექტორებზე მოჭიმული სამკუთხედის ფართობი.

ა. $\sqrt{59}$ ბ. $\sqrt{61}$ გ. $\sqrt{47}$ დ. $\sqrt{53}$

19.31. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ კუბია. იპოვეთ $\overline{AA_1} - \overline{DC_1} + \overline{BC}$ ვექტორი.

ა. $\overline{BC_1}$ ბ. \overline{BD} გ. \overline{DB} დ. $\overline{C_1 B}$

19.32. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ კუბია. გამოსახეთ $\vec{a} = \overline{AA_1}$, $\vec{b} = \overline{AD}$ და $\vec{c} = \overline{AB}$ ვექტორების საშუალებით $2\overline{MK}$ ვექტორი, სადაც M და K შესაბამისად CC_1 და AD წიბოების შუაწერტილებია.

ა. $-\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$ ბ. $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ გ. $-\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ დ. $\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$

19.33. იპოვეთ $3\overline{AD} - 2\overline{CD}$ ვექტორის სიგრძე, თუ $A(-4;-3;-1)$, $B(-1;-2;3)$, $C(2;-1;-2)$ და $D(0;-2;3)$.

ა. $\sqrt{329}$ ბ. $\sqrt{413}$ გ. $\sqrt{397}$ დ. $\sqrt{366}$

19.34. იპოვეთ \overline{AB} და \overline{CD} ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი თუ $A(-1;-1;-4)$, $B(-3;-1;0)$, $C(-2;2;5)$ და $D(2;-3;1)$.

ა. 0,8 ბ. -0,5 გ. -0,7 დ. 0,6

19.35. იპოვეთ x ცვლადის ის მინიმალური მნიშვნელობა, რომლისათვისაც ვექტორები $\vec{a}(4;x-1;x)$ და $\vec{b}(-2;4;3-x)$ ურთიერთ მართობულია.

ა. -2 ბ. 3 გ. 2 დ. -3

19.36. იპოვეთ y ცვლადის ის მნიშვნელობა, რომლისათვისაც \overline{AB} და \overline{CD} ვექტორები კოლინეალურია, თუ $A(-3;2;4)$, $B(1;-4;2)$, $C(1;-2;y)$ და $D(-1;y+3;-1)$.

19.37. გამოსახეთ $\overline{AB}(1;3;2)$ ვექტორი $\vec{a}(1;1;0)$, $\vec{b}(1;0;1)$ და $\vec{c}(0;1;1)$ ვექტორების საშუალებით.

ა. $\vec{a} + \vec{b}$ ბ. $2\vec{b} - \vec{a}$ გ. $2\vec{b} - \vec{c}$ დ. $\vec{a} + 2\vec{c}$

19.38. იპოვეთ $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ ვექტორის სიგრძე, თუ $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$ და $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 120^\circ$.

ა. $3\sqrt{3}$ ბ. $\sqrt{29}$ გ. $\sqrt{31}$ დ. $\sqrt{33}$

19.39. ცნობილია, რომ $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ და $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. იპოვეთ $\cos \alpha$, სადაც α არის კუთხე \vec{a} და $\vec{a} + \vec{b}$ ვექტორებს შორის.

ა. 0,4 ბ. $\frac{\sqrt{7}}{14}$ გ. $\frac{\sqrt{11}}{18}$ დ. 0,6

19.40. იპოვეთ $\vec{a}(8;15;17)$ და $\vec{b}(12;35;37)$ ვექტორებზე მოჭიმული სამკუთხედის ფართობი.

ა. $3\sqrt{976}$ ბ. $2\sqrt{1048}$ გ. $3\sqrt{1162}$ დ. $2\sqrt{1254}$

გამოწვეული ლიტერატურა

1. **თეიმურაზ ორმოცაძე** - მათემატიკის ამოცანათა კრებული. მეთოდური სახელმძღვანელო. გამომცემლობა - "შორი". თბილისი. 2005.
2. **თეიმურაზ ორმოცაძე** - მათემატიკის ამოცანათა კრებული. (გადამუშავებული) მეთოდური სახელმძღვანელო. გამომცემლობა - "შორი". თბილისი. 2006.
3. **ახალაია შოთა, ორმოცაძე თეიმურაზი** - მათემატიკა. გამომცემლობა - "შორი". თბილისი. 2006.
4. **თეიმურაზ ორმოცაძე** - კონტროლი მათემატიკურ ცოდნაზე. დიდაქტიკური მასალები ელემენტარულ მათემატიკაში. გამომცემლობა - "დამანი". თბილისი. 2011.
5. **ახალაია შოთა, ორმოცაძე თეიმურაზი** - მათემატიკა. ცნობარი აბიტურიენტთათვის. მეორე გამოცემა. გამომცემლობა - "დამანი". თბილისი. 2012.
6. **გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.**- გავიმეოროთ მათემატიკა. ნაწილი I. გამომცემლობა ინტელექტი. 2008.
7. **გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.**- გავიმეოროთ მათემატიკა. ნაწილი II (გეომეტრია). გამომცემლობა ინტელექტი. 2008.
8. **ღვამბერიძე ბ., დვალისხვილი ფ., მოსიძე ა., გელაშვილი კ., სირბილაძე გ.** - მათემატიკა. ალგებრა და ანალიზის საწყისები. თბილისი. 20014.
9. **ღვამბერიძე ბ., დვალისხვილი ფ., მოსიძე ა., გელაშვილი კ., სირბილაძე გ.** - მათემატიკა. გეომეტრია. თბილისი. 20014.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი ----- 3

აღგებრა. ნაწილი I

1. ნატურალური, რაციონალური და ნამდვილი რიცხვები ----- 12
2. გაყოფადობის ნიშნები -----19
3. უდიდესი საერთო გამყოფი და უმცირესი საერთო ჯერადი -----21
4. რიცხვითი უტოლობის თვისებები -----23
5. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები -----25
6. წრფივი ფუნქციის თვისებები და მისი გრაფიკი
(წრფივი განტოლება და უტოლობა) -----29
7. კვადრატული განტოლების ფესვთა ფორმულა -----33
8. კვადრატული სამწევრის დაშლა წრფივ მამრავლებად -----36
9. ვიეტას თეორემა -----37
10. კვადრატული ფუნქციის თვისებები და მისი გრაფიკი ----- 39
11. $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის თვისებები და მისი გრაფიკი ----- 43
12. კავშირი ორი რიცხვის საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო
გეომეტრიულს შორის -----45
13. არითმეტიკული პროგრესია და მისი თვისებები -----46
14. გეომეტრიული პროგრესია და მისი თვისებები -----48
15. ნამდვილი რიცხვის მოდული -----50
16. ხარისხი ნატურალური, მთელი და რაციონალური მაჩვენებლით ----- 52
17. ხარისხოვანი ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი -----55
18. მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი -----60

19. ლოგარითმული ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი ----- 62

ტრიგონომეტრია

20. ტრიგონომეტრია ----- 66

21. დამოკიდებულება ერთი და იგივე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს

შორის -----
67

22. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნიშნები საკოორდინატო მეთხედვის

მიხედვით ----- 68

23. კუთხის გრადუსული ზომის გადაყვანა რადიანებში და პირიქით ----- 69

24. ორმაგი, სამმაგი და ოთხმაგი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ---73

25. ნახევარი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები -----74

26. დაყვანის ფორმულები ----- 75

27. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გამოსახვა იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიული

ფუნქციების საშუალებით -----78

28. არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ----- 79

29. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ჯამის გარდაქმნა ნამრავლად ----- 80

30. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნამრავლის გარდაქმნა ჯამად ----- 81

31. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ----- 82

32. უმარტივესი ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამონახსენი ----- 83

33. სხვადასხვა არგუმენტების ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ტოლობები ----- 85

34. განტოლებათა სისტემა ----- 86

35. სხვადასხვა ტიპის ამოცანები ----- 92

36. ირაციონალური განტოლება ----- 97

37. სხვადასხვა ტიპის უტოლობა ----- 98

გეომეტრია. ნაწილი II

1. მონაკვეთი. ტეხილი -----	101
2. მოსაზღვრე და ვერტიკალური კუთხეები -----	108
3. სამკუთხედი. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებები -----	112
4. სამკუთხედის ფართობი. სამკუთხედის ბისექტრისის თვისებები.-----	115
5. სამკუთხედების მსგავსება-----	118
6. თანაფარდობანი სამკუთხედის ელემენტებს შორის. მართკუთხა სამკუთხედი --	121
7. ტოლგვერდა სამკუთხედი -----	125
8. მართკუთხედი. პარალილოგრამი -----	128
9. რომბი. კვადრატი -----	131
10. ტრაპეცია -----	135
11. წრე და წრეწირი. შემოხაზული და ჩახაზული ოთკუთხედები -----	141
12. წესიერი ექვსკუთხედი -----	151
13. მართკუთხა პარალელეპიპედი -----	152
14. პირამიდა -----	156
15. კონუსი . ცილინდრი -----	160
16. სფერო-ბირთვი -----	164
17. ბრუნვითი სხეულები -----	168
18. ფიგურათა კომბინაცია -----	174
19. ვექტორები სიბრტყესა და სივრცეში-----	180
20. გამოყენებული ლიტერატურა -----	183
21. სარჩევი -----	184