

ციალა კიკიბური თემურ ჩილაჩავა

მათემატიკური მოდელები ეკოლოგიასა და მედიცინაში



**ციალა კიკიბური
თეზურ ჩილაჩავა**

**მათემატიკური მოდელები
ეკოლოგიასა და მედიცინაში**

**თბილისი
2011**

ციალა ძიძიგური, თემურ ჩილაჩავა: „მათემატიკური მოდელები ეკოლოგიასა და მედიცინაში“. საგამომცემლო სახლი „ინოვაცია“, თბილისი 2011, გვ. 336.

წიგნში განხილულია ფართოდ და ნაკლებად ცნობილი, ასევე ორიგინალური უწყვეტი, დისკრეტული და ლოგიკური მოდელები ეკოლოგიასა და მედიცინაში.

წიგნი განკუთვნილია უმაღლესი სასწავლებლების ზუსტი და საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტების ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის სტუდენტებისთვის. იგი სასარგებლო იქნება შესაბამისი დარგის დოქტორანტებისთვის და მეცნიერ-თანამშრომლებისთვის, რომლებიც თავიანთ სამეცნიერო, თუ პრაქტიკულ საქმიანობაში იყენებენ მათემატიკურ და კომპიუტერულ მოდელებს.

რედაქტორი — ჰამლეტ მელაქი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა
 დოქტორი, პროფესორი

რეცენზენტი — დავით გორდუზიანი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა
 დოქტორი, პროფესორი

© ციალა ძიძიგური, თემურ ჩილაჩავა:

„მათემატიკური მოდელები ეკოლოგიასა და მედიცინაში“.

© საგამომცემლო სახლი „ინოვაცია“

ISBN 978-9941-0-3706-1

შინაარსი

წინასიტყვაობა 6

შესავალი 8

თავი I. მათემატიკური მოდელები ეკოლოგიაში 14

§ 1.1. ბალანსის მეთოდი. მალთუსის მოდელი 24

§ 1.2. პოპულაციის ევოლუციის ფერხიულსტ-პერლის მოდელი 33

§ 1.3. დინამიური სისტემების ხარისხობრივი კვლევა 42

§ 1.4. ბიოცენოზის დინამიკა 60

1.4.1. შიგადახეობრივი კონკურენციის მოდელი 63

1.4.2. ორი პოპულაციის - „მტაცებელი-მსხვერპლის“ განვითარების მოდელი 68

1.4.3. ამოცანა ინსექტიციდებით მწერების მოწამვლის შესახებ 78

1.4.4. „მტაცებელი-მსხვერპლის“ მოდელი შიგადახეობრივი კონკურენციის გათვალისწინებით 81

1.4.5. ლოტკა-ვოლტერას ერთი მოდელის ხარისხობრივი ანალიზი 89

1.4.6. სახეობათა შორის კონკურენციის მოდელი 96

1.4.7. მოდელი „მტაცებელი-მსხვერპლი-საკვები“ 107

§ 1.5. არასასურველ სახეობასთან ბრძოლის კურასაოს მოდელი 109

§ 1.6. პოპულაციის ევოლუციის დისკრეტული მოდელები 113

§ 1.7. ლესლის დისკრეტული მოდელი 142

§ 1.8. ხის ზრდის მოდელი 155

§ 1.9. ფოთლის ზრდის მოდელი 160

| | |
|---|-----|
| § 1.10. ტერმინატორის გარეთ ჭიანჭველათა სიმკვრივის განმსაზღვრელი მოდელი | 163 |
| § 1.11. კასპიის ზღვის მოდელი | 173 |
| § 1.12. ორგანული ნარჩენებით წყლის დაბინძურების მოდელი | 177 |
| § 1.13. სხეულის გაცევის პროცესის მოდელი | 180 |
| 1.13.1. ყაუის გაცევის ამოცანა | 183 |
| 1.13.2. კრიმინალისტიკის ამოცანა | 187 |
| § 1.14. მოდელირება ქიმიურ რეაქციებში | 198 |
| 1.14.1. შაქრის ინვერსიის მოდელი | 217 |
| 1.14.2. ბიოქიმიური პროცესების მოდელი | 221 |
| § 1.15. რხვეითი პროცესები ქიმიურ რეაქციებში | 228 |
| 1.15.1. ბრიუსელატორის მოდელი | 238 |
| 1.15.2. გლიკოლიზი | 241 |
| 1.15.3. ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის მოდელი | 243 |

თავი II. მათემატიკური მოდელები

| | |
|--|-----|
| მედიცინაში | 246 |
| § 2.1. ბეილის არაწრფივი ეპიდემიოლოგიური მოდელები | 248 |
| 2.1.1. ეპიდემიის უმარტოვები მოდელი | 248 |
| 2.1.2. ეპიდემიის მოდელი მკურნალობის გათვალისწინებით | 250 |
| 2.1.3. ეპიდემიის მოდელები ბუნებრივი გამრავლებისა და ინფიცირებულთა ლექტალურობის გათვალისწინებით | 252 |
| 2.1.4. ეპიდემიის მოდელები ინფექციის გადამტანების გათვალისწინებით | 253 |
| § 2.2. მალარიის გაურცელების არაწრფივი მოდელი | 261 |
| § 2.3. წრფივი ეპიდემიოლოგიური მოდელი | 269 |

| | |
|--|-----|
| § 2.4. ლოგიკური მოდელები სისხლის ჯგუფების შესახებ | 275 |
| § 2.5. ოპტიმალური მკურნალობის მოდელი | 281 |
| § 2.6. შაქრიანი დიაბეტის მოდელი | 285 |
| § 2.7. გულის ენერგეტიკული მოდელი | 290 |
| § 2.8. იმუნოლოგიის ერთი დისკრეტული მოდელი ხანგრძლივი ავადმყოფობის შემთხვევაში | 300 |
| § 2.9. გლუკოზით შიგაგენური კვების მოდელი | 303 |
| § 2.10. იმუნური პროცესების მოდელირება | 305 |
| 2.10.1. ინფექციური დაავადების მოდელი | 306 |
| 2.10.2. ამოცანა ორგანიზმზე ანტიბიოტიკის ერთ-ერთი ზემოქმედების შესახებ | 312 |
| § 2.11. ინფექციური დაავადების მარჩუკის მოდელი | 315 |
| § 2.12. ეპიდემიის გაურცელებისა და იმუნური რეაქციების მოდელები | 324 |

| | |
|------------------|-----|
| ლიტერატურა | 329 |
|------------------|-----|

ედლებზე მათემატიკოსების
პროფესორ რეზა აბსაგასა
და იპოლიტი ჩილაჩავას
ნათელ ხსონას

წინასიტყვაობა

მათემატიკური მოდელირება – ადამიანის ხანგრძლივი ინტელექტუალური მოღვაწეობისა და გარემო პირობების აღქმის შედეგად წარმოიშვა. ადამიანი თავიდანვე ცდილობდა აღწერა სამყარო, მოცემული დროისთვის ცნობილი კატეგორიებისა და ცოდნის საფუძველზე. ცოდნის დაგროვებასთან ერთად იცვლებოდა შესაბამისი მოდელიც და სამყაროს სურათიც. მათემატიკის განვითარებამ განაპირობა შესაბამისი ცოდნისა და გამოცდილების მოქცევა და აღწერა მათემატიკური სიმბოლოებისა და მეთოდების ფარგლებში.

დიდძეხსიერებიანი და სწრაფმოქმედი კომპიუტერების გამოჩენამ და განუწყვეტელმა სრულყოფამ გამოიწვია მეცნიერების სხვადასხვა დარგის ჭეშმარიტად რევოლუციური გარდაქმნა. კოლოსალურად გაიზარდა მნიშვნელოვანი სამეცნიერო-ტექნიკური პრობლემების გადაწყვეტის შესაძლებლობები. ამ შესაძლებლობების რეალიზება შეიძლება მხოლოდ შესასწავლი რთული პროცესისა, თუ მოვლენის მათემატიკური მოდელის დამუშავებისა და შემდგომ გამოთვლითი ალგორითმების საშუალებით სათანადო მათემატიკური ამოცანის კომპიუტერზე ამოხსნის საფუძველზე. ასე, თანდათან, წარმოიშვა მეცნიერების ის მძლავრი მიმართულება, რომელსაც მათემატიკურ მოდელირებას უწოდებენ.

მათემატიკური მოდელირების ჭერქვეშ ხშირად აერთიანებენ, როგორც თვით მათემატიკური მოდელირების შედეგების

ტექნოლოგიასა და ტექნიკას, ასევე, შესაბამისი მოდელირების ანალიზისა და პარამეტრების გამოთვლების მეთოდებს.

ადრე ჩვენ მიერ გამოცემულია მრავალწახნაგოვანი წიგნი „მათემატიკური მოდელირება“, რომელშიც პირველად ქართულ ენაზე მოკლედ სისტემატიზებული იყო მათემატიკური მოდელირები ეკოლოგიიდან ასტროფიზიკამდე [9].

შემდგომი მუშაობისთვის მიზნად დავისახეთ აღნიშნული წიგნის ყოველი თავი უფრო ვრცლად და გამდიდრებულად გაგვეშუქებინა.

წინამდებარე წიგნში ვრცლად განხილულია ფართოდ და ნაკლებად ცნობილი, აგრეთვე ორიგინალური მოდელირები ეკოლოგიასა და მედიცინაში.

ნაშრომს საფუძვლად დაედო სალექციო კურსები, რომლებიც წლების განმავლობაში იკითხებოდა და იკითხება ავტორების მიერ სოხუმის, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის, წმიდა ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართულ, ილია ჭავჭავაძის სახელობის უნივერსიტეტების ბაკალავრიატში, მაგისტრატურასა და დოქტორანტურაში, აგრეთვე მათი სამეცნიერო კვლევათა შედეგების ნაწილი.

ამ წიგნში ბევრ სასარგებლო მასალას შეხვდებიან ისინიც, ვინც მეცნიერულ, თუ პრაქტიკულ მათემატიკურ მოდელირებას საქმიანობაში იყენებენ.

ზოგიერთი პარაგრაფის ბოლოს მოთავსებულია სავარჯიშოები, რომელთა შესრულებაც დაეხმარება მკითხველს წიგნში გადმოცემული მასალის ღრმად და საფუძვლიანად დაუფლებაში.

მადლობა გვინდა გადავუხადოთ რედაქტორს პროფ. ჰამლეტ მელაძეს, რეცენზენტს პროფ. დავით გორდუზიანს სასარგებლო დისკუსიებისა და სასიკეთო რჩევებისთვის.

დღეს თანამედროვე მეცნიერებაში და პრაქტიკაში ბუნებრივ მოვლენად ითვლება, რომ ეკოლოგიისა და მედიცინის ბევრი პრობლემა გადაიჭრება მათემატიკური მოდელირების საფუძველზე. გალილეო გალილეის აზრით, ბუნების კანონები დაწერილია მათემატიკის ენაზე. ბუნების შესწავლა და მისი კანონების შემეცნება ჩვეულებრივ დამოკიებულია მათი მათემატიკური მოდელის აგებასა და თვისებების გამოკვლევაზე [9, 25, 33, 61, 62, 64, 65, 66, 69, 70].

საზოგადოებამ, როგორც არასდროს შეიგნო, რომ საბუნებისმეტყველო და სოციალურ მეცნიერებებში ცოდნა ზდება ზუსტი მხოლოდ მაშინ, როცა მისი მოვლენების აღსაწერად გამოიყენება მათემატიკური მოდელი [24].

თანამედროვე სამყაროში ადამიანის განუყოფელ ნაწილად იქცა კომპიუტერი. კომპიუტერის დამსახურებაა არა მარტო ინფორმაციული რევოლუცია (უზარმაზარი და ყველაზე განსხვავებულ ინფორმაციათა მასივების შენახვა და საჭირო ინფორმაციის სწრაფი და ეფექტური ძებნა), არამედ პროგნოზირება (კომპიუტერი რთული სისტემების იმიტაციური მოდელების აგების, სცენარების გათამაშებისა და პროგნოზირების გაკეთების საშუალებას იძლევა) და ოპტიმიზაცია (ადამიანის ნებისმიერი სახის მოღვაწეობა ითხოვს მოქმედებათა მუდმივ ოპტიმიზაციას).

კომპიუტერი მუშაობს არა თვით სისტემასთან, არამედ მოდელთან. მოდელი – ეს ობიექტის ასლია რაიმე გაგებით, რომელიც უშვებს მანიპულირებას დროსა და სივრცეში. ადამიანის მთელი ინტელექტუალური მოღვაწეობა დაკავშირებულია მის გარშემო არსებული სამყაროს მოდელირებასთან. სამყაროს შესახებ ჩვენი წარმოდგენები კაცობრიობის განვითარებისა და დაგროვილი ცოდნის მიხედვით იცვლებიან. მოცემული პროცესის სქემატურ აღწერას, რაც საშუალებას იძლევა ვიწინასწარმეტყველოთ მოვლენის ძირითადი კანონზომიერებები და რიცხ-

ვითი მახასიათებლები, მოდელირება ეწოდება.

თანამედროვე მეცნიერება განასხვავებს მოდელირების სამ ძირითად მიმართულებას: ფიზიკური მოდელირება; იმიტაციური მოდელირება; მათემატიკური მოდელირება.

ფიზიკური მოდელი – არის ნატურალურ ზომებში, ან მასშტაბებში შეცვლილი მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ პროცესი ექსპერიმენტულად.

იმიტაციური მოდელი – კომპიუტერული მოდელია, რომელიც გაითამაშებს მოცემულ პროცესს განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და ვიზუალურად გვიჩვენებს მოსალოდნელ შედეგებს.

მათემატიკური მოდელი – არის მათემატიკური მეთოდების ერთობლიობით პროცესის განმსაზღვრელ პარამეტრებს შორის დამყარებული კავშირი, რომელიც საშუალებას იძლევა მოცემული სიზუსტით განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის ვიწინასწარმეტყველოთ მოვლენის სურათი. მოდელის ფორმულირებისას განმსაზღვრელია თვით ობიექტი, მოდელირების მიზანი და მეთოდი (საშუალება).

მოდელირების მეთოდს წარმოადგენს დინამიური სისტემების მეთოდები, საშუალებები – დიფერენციალური და სხვაობიანი განტოლებები, დიფერენციალური განტოლებების ხარისხობრივი თეორიის მეთოდები, კომპიუტერული სიმულაცია.

მოდელირების მიზნებია:

1. სისტემის ელემენტებს შორის ურთიერთქმედების მექანიზმების გამოკვლევა;
2. ექსპერიმენტული მონაცემების მიხედვით მოდელის პარამეტრების იდენტიფიცირება;
3. სისტემის (მოდელის) მდგრადობის შეფასება;
4. სისტემის ქცევის პროგნოზირება გარედან შემოქმედების დროს, მართვის განსხვავებული მეთოდების დროს და ა.შ.;
5. სისტემის ოპტიმალური მართვა ოპტიმალობის არჩეული კრიტერიუმების შესაბამისად.

მათემატიკური მოდელი — ეს არის გარე სამყაროს რომელიმე მოვლენის მიახლოებითი აღწერა, გამოსახული მათემატიკური სიმბოლოების მეშვეობით. *მათემატიკური მოდელირება* შემეცნებისა და პროგნოზირების მართვის მეთოდია.

ჩვეულებრივ განასხვავებენ მათემატიკური მოდელების შემდეგ ტიპებს:

ა) *პირდაპირი ამოცანა* — როდესაც განხილული სისტემის შიგნით მოქმედი კანონებით (ფიზიკის, ქიმიის, ბიოლოგიის, ეკონომიკის და ა.შ.) უნდა გაეცეს პასუხი კითხვაზე, როგორ მოიქცევა სისტემა მთლიანად. ამ შემთხვევაში გამოსაკვლევი სისტემის ყველა პარამეტრი ცნობილია და ხდება მოდელის შესწავლა სხვადასხვა პირობებში;

ბ) *შებრუნებული ამოცანა* — მოდელის პარამეტრების განსაზღვრა დაკვირვების შედეგად მიღებული მონაცემებისა და მოდელირების შედეგების ერთმანეთთან შედარებით ხდება. ძალიან ხშირად რეალური პროცესები, რომლებიც მიმდინარეობენ განხილულ ობიექტში, ცნობილი არ არის, მაგრამ გვაქვს ირიბი დაკვირვებები. დაკვირვებათა შედეგებით ცდილობენ დაადგინონ, რომელი პროცესები განაგებენ ობიექტის ქცევას და განსაზღვრავენ მოდელის განმსაზღვრელ პარამეტრებს. *შებრუნებულ ამოცანაში* მოდელის პარამეტრების მნიშვნელობების დადგენაა საჭირო სისტემის, როგორც მთელის, ცნობილი ქცევის მეშვეობით;

გ) *მართვადი სისტემების პროექტირება* — ეს მოდელირების სრულიად განსაკუთრებული დარგია, რომელსაც საქმე აქვს ავტომატიზებულ ინფორმაციულ სისტემებთან და მართვის ავტომატიზებულ სისტემებთან.

მათემატიკური მოდელის აგების ეტაპები:

- მოდელის ძირითადი ობიექტების შემაკავშირებელი კანონების ფორმულირება;
- მათემატიკური ამოცანის გამოკვლევა;

- შემოწმება, აკმაყოფილებს თუ არა მოდელი პრაქტიკის კრიტერიუმებს;

- მოდელის ანალიზი და მისი მოდიფიცირება.

მათემატიკური მოდელების შესწავლის ეტაპებია:

— *ხარისხობრივი (საბაზო) მოდელის შექმნა* — ამ ეტაპზე ხდება მოქმედ სისტემაში კანონების ხასიათისა და კავშირების გამოვლენა. მოდელის ბუნებიდან გამომდინარე, ეს კანონები შეიძლება იყოს ფიზიკური, ქიმიური, ბიოლოგიური, ეკონომიკური და ა.შ. ამ ურთიერთობებიდან უნდა გამოიყოს მთავარი, გამოვლინდეს განმსაზღვრელი თავისებურებები;

— *მათემატიკური მოდელების შექმნა* — ამ ეტაპზე ჩვენი წარმოდგენები იმაზე, თუ რა ხდება სისტემაში, დებულობენ მათემატიკურ ფორმულირებას. მათემატიკური გამოსახულება შეიძლება იყოს განტოლებათა სისტემა, ასევე დიფერენციალური განტოლება და წესთა ერთობლიობა. თუ მოდელი აღწერილია დიფერენციალური განტოლებებით, მაშინ, ასეთ მოდელს ეწოდება დიფერენციალური. ზოგადად, თუ მოდელი აღიწერება რაიმე განტოლებით, მაშინ ამბობენ, რომ მოდელი დეტერმინირებულია. თუ მოდელი აღიწერება რაიმე ალბათური კანონებით, მაშინ ამბობენ, რომ მოდელი სტოქასტურია;

— *მათემატიკური მოდელის შესწავლა* — ამ ეტაპზე ხდება მოდელის ხარისხობრივი კვლევა. უნდა გამოვლინდეს მისი ქცევა განსაკუთრებულ და ზღვრულ სიტუაციებში. ძალიან ხშირად ასეთი ექსტრემალური სიტუაციების შესწავლა შეიძლება ანალიზურად (ან მიახლოებით). ხარისხობრივი კვლევის შედეგები ხელს გვიწყობენ ზოგად შემთხვევაში სისტემების ქცევის განჭვრეტაში, ასევე გვეხმარებიან გამოთვლების შედეგად მიღებული შედეგების შემოწმებაში;

— *ალგორითმის დამუშავება* — ძალიან ხშირად მიღებული მათემატიკური ამოცანა ზოგად შემთხვევაში არ ამოიხსნება ანალიზური მეთოდებით, მაშინ ხდება მოდელის რიცხო-

ბრივი კვლევა, ტარდება კომპიუტერული ექსპერიმენტი. იმ ამოცანებისთვის, რომლებიც ხშირად გვხვდება, დამუშავებულია მაღალეფექტური ალგორითმები;

- პროგრამების შექმნა და რეალიზება;
- მიღებული შედეგების გამოყენება.

დღეს ტერმინები მათემატიკური მოდელირება და კომპიუტერული მოდელირება თითქმის სინონიმებია. მართლაც, უმეტესი მათემატიკური მოდელისა საჭიროებს კომპიუტერზე გათვლებს, ანუ, როგორც ამბობენ, კომპიუტერულ ექსპერიმენტს. მეორეს მხრივ, ნებისმიერი გათვლები, შესაძლებელია მხოლოდ რაიმე მათემატიკური მოდელის საფუძველზე.

კომპიუტერული მოდელირება შეუცვლელია მაშინ, როდესაც ნატურში ექსპერიმენტის ჩატარება შეუძლებელია ან დიდ სიძნელეებს წარმოადგენს. მაგალითად, შეუძლებელია ექსპერიმენტის ჩატარება ისტორიაში და ა.შ., თუმცა ამის გაკეთება კომპიუტერზე შეიძლება. ან, მაგალითად, ინფექციური დაავადების პროვოცირება დაკვირვების მიზნით მკვლევარს თავში აზრადაც არ მოუვა.

მათემატიკური მეთოდების შეღწევა ადამიანის მოღვაწეობის ყველაზე ნაირსახეობრივ და მოულოდნელ სფეროებში (მაგალითად, სოციოლოგია) ნიშნავს, ახალი, როგორც წესი, კვლევის ფრიად ნაყოფიერი საშუალებების გამოყენებისა და მნიშვნელოვანი პრაქტიკული შედეგების მიღების შესაძლებლობას [11, 12, 58 - 60].

უნდა აღინიშნოს, რომ ქართულ ენაზე დაწერილია რამდენიმე სახელმძღვანელო მეცნიერების ცალკეულ დარგში მათემატიკური მეთოდების (მოდელები) გამოყენების შესახებ [3, 7, 13, 14].

წინამდებარე ნაშრომში განხილულია ფართოდ და ნაკლებად ცნობილი, აგრეთვე ორიგინალური უწყვეტი, დისკრეტული და ლოგიკური მოდელები ეკოლოგიასა და მედიცინაში.

წიგნი ორი თავისგან შედგება:

პირველი თავი ეძღვნება მათემატიკურ მოდელირებას ეკოლოგიაში და მასში განხილულია: ბალანსის მეთოდი; დინამიური სისტემების ხარისხობრივი კვლევა; ერთი, ან ორი პოპულაციის ევოლუციის წრფივი და არაწრფივი მოდელები; ხის ან მცენარის ფოთლის ზრდის მოდელები; კასპიის ზღვის მოდელი; არასასურველ სახეობასთან ბრძოლის მოდელი; სხეულის გაცივების მოდელი; კრიმინალისტიკის ამოცანა; შაქრის ინვერსიის მათემატიკური მოდელი; ბიოქიმიური პროცესების მათემატიკური მოდელი; ორგანული ნარჩენებით წყლის დაბინძურების მოდელი, რხევითი პროცესები ქიმიურ რეაქციებში და სხვა.

მეორე თავი ეძღვნება მათემატიკურ მოდელირებას მედიცინაში და მასში განხილულია: წრფივი და არაწრფივი ეპიდემიოლოგიური მოდელები; მალარიის მოდელი; ინფექციური დაავადების მოდელი; შაქრიანი დიაბეტის მოდელი; გულის ენერგეტიკული მოდელი; ოპტიმალური მკურნალობის მოდელი; სისხლის ჯგუფის დადგენის ლოგიკური მოდელი, ეპიდემიის გავრცელებისა და იმუნური რეაქციების მოდელები და სხვა.

წიგნს საფუძვლად დაედო სალექციო კურსები, რომლებიც წლების განმავლობაში იკითხებოდა და იკითხება ავტორების მიერ რიგი წამყვანი უნივერსიტეტების ბაკალავრიატში, მაგისტრატურასა და დოქტორანტურაში, აგრეთვე მათი სამეცნიერო კვლევათა შედეგების ნაწილი.

წიგნის გამოყენება შეეძლება როგორც მასწავლებლებს, ისე სტუდენტებს (ბაკალავრიატის, მაგისტრატურის და დოქტორანტურის). მასში ბევრ სასარგებლო მასალას შეხვდებიან ის პირებიც, რომლებიც მეცნიერულ, თუ პრაქტიკულ საქმიანობაში იყენებენ მათემატიკურ და კომპიუტერულ მოდელირებას.

ზოგიერთი პარაგრაფის ბოლოს მოთავსებულია საგარჯიშოები, რომელთა შესრულებაც დაეხმარება მკითხველს წიგნში გადმოცემული მასალის ღრმად და საფუძვლიანად დაუფლებაში.