თეიმურაზ ორმოცაძე

რიცხვების იდუმალი სამყარო

თბილისი 2009

თეიმურაზ ორმოცაძე

რიცხვების იდუმალი სამყარო

თბილისი 2009

51(076)(077)
ო-606

თ. ორმოცაძე
ო-606 რიცხვების იდუმალი სამყარო

ISBN 978-99940-17-90-4

ჩვენი აზრით, წიგნი განკუთვნილია იმ ადამიანებისთვის ვისაც ელემენტარული მათემატიკა სერიოზულად აინტერესებს. მასში გადმოცემული საკითხები საუკეთესო საშუალებაა მათემატიკისადმი მოსწავლეების ინტერესის ამაღლების, განვლილი მასალის თავისებური განმეორების, ამოცანების ამოხსნის სრულფასოვანი გააზრებისა და შესწავლისათვის.

ასევე წინამდებარე წიგნი დაეხმარება ყველას, ვისაც უყვარს ელემენტარული მათემატიკა და გონების ვარჯიში.

რედაქტორი - ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა კანდიდატი ასისტენტ-პროფესორი **მ.ჭელიძე**

ORMOCADZE@MAIL.RU

ISBN 978-99940-17-90-4

§1. რიცხვების კურიოზული და საინტერესო თვისებები

ადამიანს აქვს უნარი, შეამჩნიოს მის გარემომცველ სამყაროში არსებული საგნების თვისებები და განასხვაოს ისინი ერთმანეთისაგან, ცალკეული ნიშნის მიხედვით.

თითოეული საგნის განსაკუთრებული (ინდივიდუალური) თვისება, იმალება საგნების საერთო თვისებებში. ამიტომა-ცაა, რომ განსაკუთრებული თვისების გამოყოფა სირთულე-ებთანაა დაკავშირებული.

საგნების ზოგად თვისებებიდან მთავარს (ჩვენი აზრით) წარმოადგენს ის, რომ საგნები შეიძლება ***დავთვალოთ*** ან ***გავზომოთ***. საგნების ამ თვისებას ჩვენ ავსახავთ რიცხვების ცნებაში.

თვლისა და გაზომვის მოთხოვნა ადამიანებს თანდათან გაუჩნდათ, განვითარების ადრეულ ეტაპზე. რიცხვების წარმოშობასა და განვითარების კვალდაკვალ შეიქმნა, შესანიშნავი მეცნიერება, რომელსაც – ***რიცხვთა თეორია*** ჰქვია.

რიცხვებზე, სხვადასხვა მათემატიკური მოქმედებისას, ჩვენ ვამჩნევთ არა მარტო მათ ზოგად თვისებებს – რომლებსაც სწავლობს ***რიცხვთა თეორია*** – არამედ განსაკუთრებულ თვისებებსაც, რომლებიც ახასიათებს მხოლოდ ცალკეულ რიცხვებს ან რიცხვთა ჯგუფებს. ისინი რაიმე დიდ ტეორიულ ღირებულებებს არ წარმოადგენენ, თუმცა საკმაოდ საინტერესოა. იმდენად საინტერესო, რომ მოსწავლეებში და არა მარტო მათში იწვევს მათემატიკით

დაინტერესებას და საგნის ღრმად შესწავლის სურვილს. თუ შეძლებთ დროის გამონახვას და უსასრულოდ დიდ რიცხვთა "ოკეანეში" მოგზაურობას თქვენ (ჩვენის დახმარებით) აღმოაჩენთ რიცხვების საინტერესო და საოცარ, "ველურ" და სასაცილო, მოულოდნელ და კურიოზულ თვისებებს. შეხვდებით ე.წ. **უნიკუმ** რიცხვებს, ანუ ისეთ რიცხვებს, რომლის მსგავსი არ არის სხვა რიცხვებს შორის. მაგალითად, შეიძლება ვთქვათ, რომ 2 – უნიკუმია, რამეთუ არ არსებობს სხვა ლუწი მარტივი რიცხვი.

§2. საოცარი რიცხვები. მეგობრული რიცხვები. ტყუპი-მარტივი რიცხვები

ყველა თქვენგანს მრავალჯერ დასჭირვებია რიცხვების მამრავლებად დაშლა, მაგრამ ცოტას თუ შეუმჩნევია ისეთი რიცხვები, რომელის ყველა გამყოფების ჯამი (თვით ამ რიცხვის გარდა) ამ რიცხვის ტოლია. ასეთ რიცხვებს სრულყოფილ რიცხვებს უწოდებენ.

პითაგორა ამბობდა: "ჩემი მეგობარია ის, ვინც ჩემ მეორე მეს წარმოადგენს, როგორც რიცხვები 220 და 284-ი". ეს ორი რიცხვი აღსანიშნავია იმით, რომ ერთ რიცხვის გამყოფების ჯამი მეორე რიცხვის ტოლია. ასეთ რიცხვებს მეგობრული რიცხვები ეწოდება. საინტერესოა, რომ შემდეგი 17296 და 18416 მეგობრული რიცხვების წყვილი 1636 წელს

აღმოაჩინა ფერმამ (1601-1665), თუმცა ახლახან გაირკვა, რომ ამ რიცხვების შესახებ მარაკანელი მეცნიერის იბნ ალ-ბანნი (1256-1321) ნაშრომში ნანახი იქნა შემდეგი სტრიქონები: “რიცხვები 17296 და 18416 მეგობრულ რიცხვებს წარმოადგენენ... ალაჰი ყოვლის შემძლეა”. დიდი ხნით ადრე, ვიდრე იბნ ალ-ბანნი არაბმა მეცნიერმა იბნ კურამ (836-901), ჩამოაყალიბა ზოგიერთი მეგობრული რიცხვების პოვნის ალგორითმი: თუ სამი რიცხვი $p = 3 \cdot 2^{n-1}$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ და $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ მარტივია, მაშინ $A = 2^n pq$ და $B = 2^n r$ რიცხვები მეგობრული რიცხვები იქნებიან. როცა $n = 2$ და $n = 4$ მიიღება რიცხვები, რომლებიც შესაბამისად მიიღეს პითაგორამ და იბნ ალ-ბანნიმ. როცა $n = 7$, მაშინ მიიღება 9363584 და 9437056

რიცხვები, რომლებიც მიიღო 1638 წელს რენე დეკარტმა (1596-1650), ისე რომ არავითარი წარმოდგენა არ ქონდა იბნ კურის თეორემის შესახებ. ამ სამი შემთხვევით ამოიწურება $n \leq 20000$-სათვის მეგობრული რიცხვების პოვნა იბნ კურის თეორემის გამოყენებით. მას შემდეგ ბევრი ავტორი ცდილობდა მეგობრული რიცხვების შესახებ რაიმე მონაცემის მოპოვებას, მაგრამ ღირებული ვერავინ შეძლო. მათ ნაშრომებში ასეთ რეცეპტები იკითხება მხოლოდ: “რომ მიაღწიოთ თანაგრძნობას სიყვარულში საჭიროა, რაიმეზე დაწეროთ 220 და 284, პატარა მიეცით შეყვარებულს, ხოლო დიდი შეჭამეთ თვითონ”.

ლეონარდ ეილერმა (1707-1783) დეკარტის შედეგ პირველმა, მიიღო მეგობრული რიცხვების 59 წყვილი, მათ

შორის იყო კენტი რიცხვების წყვილიც: $A = 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107$ და $B = 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2699$. მან ჩამოაყალიბა მეგობრული რიცხვების პოვნის ხუთი სხვადასხვა მეთოდი. დღეისთვის ცნობილია 1100 წყვილი მეგობრული რიცხვებისა, ყველაზე დიდი მათ შორის არის

$$A = 90\ 2364653062\ \ 3313066515\ \ 5201592687\ \ 0786444130\ \ 4548569003\ \ 8961540360\ \ 5363719932\ \ 5828701918\ \ 5759580345\ \ 2747004992\ \ 7532312907\ \ 0333233826\ \ 7840675607\ \ 3892061566\ \ 6452384945$$

$$B = 86\ 2593766501\ \ 4359638769\ \ 0953818787\ \ 1666597148\ \ 4088835777\ \ 4281383581\ \ 6831022646\ \ 6591332953\ \ 3162256868\ \ 3649647747\ \ 2706738497\ \ 3129580885\ \ 3683841099\ \ 1321499127\ \ 6380031055$$

ძველ ბერძენ – მათემატიკოსებს აინტერესებდათ მარტივი რიცხვები, ისეთი რიცხვები რომლებსაც, მხოლოდ ორი გამყოფი გააჩნიათ. მათ შორის ისინი გამოყოფდნენ ე.წ. ტყუპ-მარტივ რიცხვებს, ანუ ისეთ მარტივ რიცხვებს რომელთა სხაობა 2-ის ტოლია. მაგალითად, 3 და 5; 5 და 7; 11 და 13; 17 და 19; და ა. შ.

კი მართალია, ჯერ დამტკიცებული არა, რომ ტყუპი-მარტივი რიცხვების რაოდენობა უსასრულოდ ბევრია, მაგრამ მათი რაოდენობა მოცემულ $[x; x+a]$ შუალედზე დიდი სიზუსტით გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$N = \frac{a \cdot C}{(\text{ლნ}x)^2},\ \text{სადაც}\ C = 1{,}3203236316\ \ldots$$

§3. ათი ციფრი (დაკვირვება)

თითქმის მთელ მსოფლიოში იყენებენ თვლის ერთიან სისტემას – ათობითს. ამ სისტემაში გამოიყენება ათი ციფრი **0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9** და ეს ციფრები საკმარისია ნებისმიერი რიცხვის ცასაწერად. მაგალითისთვის ჩავწეროთ ყველაზე დიდი ათნიშნა რიცხვი, რომელშიც ციფრები არ მეორდება: **9876543210** – ცხრა მილიარდ, 876 მილიონ, 543 ათას, 210-ი. ციფრების ნებისმიერი გადანაცვლება გამოიწვევს ამ რიცხვების შემცირებას, მაგრამ საინტერესოა ალბათ, რამდენი განსხვავებული რიცხვის მიღება შესაძლებელი ამ რიცხვში ციფრების გადაადგილებით, ისე რომ არცეთი ციფრი არ განმეორდეს? – **<u>3265920.</u>**

ამ სამ მილიონზე მეტი რიცხვიდან ავარჩიოთ მხოლოდ ექვსი:

1 037 246 958,	**1 046 389 752,**	**1 286 375 904;**
1 307 624 958,	**1 370 258 694,**	**1 462 938 570.**

თითქოს ეს ექვსი რიცხვი არაფრით განსხვავდება სხვა ათნიშნა რიცხვებისაგან, მაგრამ თუ თითოეულს გავყოფთ 2-ზე, ხოლო მიღებულ განაყოფს 9-ზე, ნახავთ, რომ ამ გზით მიღებული რიცხვებშიც ციფრები არ მეორდება, მხოლოდ მეორე მოქმედების შემდეგ “იკარგება” თვით 9-იანი. თუმცა ასეთ მოქმედებებით მიღებულ რიცხვს თუ მიუწერთ 9-იანს მივიღებთ ათნიშნა რიცხვს, რომელიც სრულ კვადრატს წარმოადგენს.

განვიხილოთ უმცირესი და უდიდესი ცხრა ნიშნა რიცხვები, რომლებში ციფრები არ მეორდება და 0-ი მონაწილეობას არ ღებულობს

$$a = 123456789 \qquad b = 987654321$$

სხვაობა $b-a$ ისევ ამ ცხრა ციფრებისგან შედგება, მართლაც

$$987654321 - 123456789 = 864197532$$

თუ a რიცხვს გავამრავლებთ 2, 4, 5, 7, 8-ზე თითოეულ შემთთხვევაში მიიღება რიცხვი, რომელიც ჩაიწერება მხოლოდ 1-დან 9-მდე ციფრების გამოყენებით, ხოლო თუ b რიცხვს გავამრავლებთ 2, 4, 5, 7, ან 8-ზე მიღებული რიცხვები ჩაიწერება ათივე ციფრის გამოყენებით, და ბოლოს თუ a და b რიცხვებს გავამრავლებთ 3, 6 ან 9-ზე ასევე საინტერესო რიცხვები მიიღება.

<u>მოსაზრება:</u>

- თქვენ თვითონ აღმოაჩინეთ a ან b რიცხვების 3, 6 ან 9-ზე გავამრავლებთ მიღებული რიცხვების საინტერესო თვისება.

† $123456789 \cdot 8 + 9 = 987654321$ ანუ $a \cdot 9 = b$ ე.ი. თუ a რიცხვს გავამრავლებთ 8-ზე და მიუმატებთ 9-ს მივიღებთ b-ს.

† თუ 12345679 რიცხვს, რომელშიც ციფრები დალაგებულია ზრდის მიხედვით (მაგრამ 8-იანს გარდა) გავამრავლებთ რაიმე ერთნიშნა რიცხვზე, ხოლო შედეგს გავამრავლებთ 9-ზე, მაშინ ნამრავლში მივიღებთ რიცხვს, რომლის ყველა ციფრი იქნება პირველი ერთნიშნა რიცხვი. მაგალითად:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times \quad 6 \\ \hline 74074074 \\ \times \quad 9 \\ \hline 666666666 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times \quad 8 \\ \hline 98765432 \\ \times \quad 9 \\ \hline 888888888 \end{array}$$

† თუ რიცხვს 9801 გავწყვეტთ შუაზე, მიღებულ ნაწილებს შევკრიბავთ და ავახარისხებთ კვადრატში ისევ ამ რიცხვს მივიღებთ. მაგალითად: $(98+01)^2 = 9801$ ასეთივე რიცხვია 3025-ი, მართლაც $(30+25)^2 = 3025$.

<u>მოსაზრება:</u>

- ოთხნიშნა რიცხვებში, გარდა განხილული რიცხვებისა კიდევ არსებობს მხოლოდ ერთი ასეთი რიცხვი, რომლის პოვნასაც მკითხველი შეძლებს.

ჩავწეროთ ერთი მეორის ქვეშ, რიცხვთა მიმდევრობები, შემდეგი სახით:

A

1	3	5	7	9	11	13	. . .
1	4	7	10	13	16	19	. . .
1	5	9	13	17	21	25	. . .
1	6	11	16	21	26	31	. . .
1	7	13	19	25	31	37	. . .
1	8	15	22	29	36	43	. . .
1	9	17	25	33	41	49	. . .

- -

B

თითოეულ სტრიქონში პირველი რიცხვი ერთიანია, ხოლო ყოველი შემდგომი მეტია წინაზე – პირველ სტრიქონში 2-ით, მეორე სტრიქონში 3-ით, მესამეში 4-ით და ა. შ.. ცხადია, თითოეულ სტრიქონში და სვეტში ჩაწერილი რიცხვები წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას. ასეთ დალაგებულ რიცხვთა ცხრილში გავავლებთ პუნქტირულ წირებს, მივიღებთ ე. წ. რიცხვთა ლაბირინთს. რომლის თითოეულ კორიდორში მოთავსებული რიცხვების ჯამი წარმოადგენს, კორიდორის ნომრის კუბს. ასე მაგალითად:

$$1+4+1=2^3; \qquad 1+5+9+7+5=3^3.$$

†. AB დიაგონალზე მოთავსებული რიცხვები წარმოადგენენ იმ სტრიქონის (სვეტის) ნომრის კვადრატს რომელშიც იმყოფებიან.

†. ლაბირნითის ნებისმიერ კვადრატში – რომლის დიაგონალი წარმოადგენს AB დიაგონალის რაღაც ნაწილს – რიცხვების ჯამი ასევე რაიმე რიცხვის კვადრატია. მაგალითად: იმ რიცხვების ჯამი, რომლებიც მოთავსებულია კვადრატში დიაგონალით 4, 9 და 16 არის

$$4+7+10+5+9+13+6+11+16=81=9^2.$$

მოსაზრება:

- შეამოწმეთ ეს თვისება AB დიაგონალის სხვა ნაწილებისათვის.
- თვითონ მოიფიქრეთ რაიმე რიცხვთა ცხრილი ანალოგიური ან სხვა რაიმე საინტერესო თვისებით.
- აღმოაჩინეთ რაიმე საინტერესო თვისება შემდეგი ცხრილისათვის:

1	3	5	7	9	11	13	. . .
1	5	9	13	17	21	25	. . .
1	7	13	19	25	31	37	. . .
1	9	17	25	33	41	49	. . .

- -

§4. რიცხვი 37-ის თვისებები

1. თუ 37-ს გავამრავლებთ 3-ზე ან 3-ის ჯერად რიცხვზე 27-მდე ჩათვლით, მივიღებთ რიცხვს რომლის ჩანაწერშიც მონაწილეობს მხოლოდ ერთი ციფრი. ამასთან მიიღება ყველა სამნიშნა რიცხვი რომლებშიც ციფრები მეორდება, 111, 222, . . . , 888, 999.
2. თუ 37-ის ციფრთა კვადრატების ჯამს გამოვაკლებთ ამ ციფრების ნამრავლს მივიღებთ 37-ს.

$$(3^2 + 7^2) - 3 \cdot 7 = 37$$

3. 37-ის ნამრავლი მისი ციფრების ჯამზე წარმოადგენს მისივე ციფრების კუბების ჯამს.

$$37 \cdot (3 + 7) = 3^3 + 7^3$$

4. კიდევ ერთი საყურადღებო თვისება: ავიღოთ ნებისმიერი სამნიშნა რიცხვი, რომელიც 37-ის ჯერადია. მაგალითად; $37 \cdot 7 = 259$. ყველა რიცხვი, რომლებიც მიიღება 259-ის ციფრების წრიული გადაადგილებით ასევე იყოფა 37-ზე. წრიული გადაადგილება ნიშნავს ბოლო ციფრის პირველ ადგილზე გადმოტანას ანუ მიიღება 952 და 592. ამიტომ,

$$952 : 37 = 25 \;\; ; 592 : 37 = 16 .$$

ანალოგიური თვისებით გამოირჩევა 41-ის ჯერადი ხუთნიშნა რიცხვებიც. ასე, მაგალითად, 15498, 81549, 98154, 49815, 54981 – რიცხვები მიიღება წრიული გადაადგილებით და თითოეული მათგანი 41-ის ჯერადია.

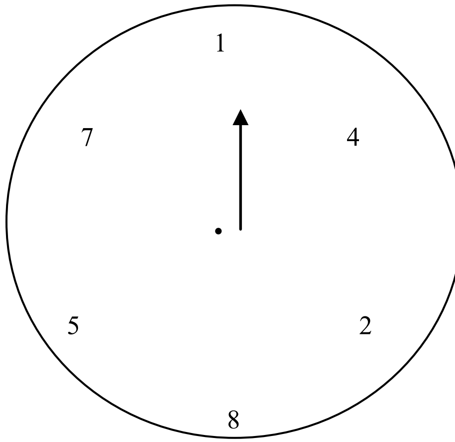
მოსაზრება:

- თვითონ შეამოწმეთ.
- თუ აღნიშნული თვისებები სამართლიანია ყველა სამნიშნა 37-ის ჯერადი რიცხვებისათვის, მაშინ ეს თვისება გადაიქცევა სწორ მათემატიკურ წინადადებად (თეორემად). ჩამოალალიბეთ და შეეცადეთ დაამტკიცოთ მიღებული თეორემა.

• განვიხილოთ რიცხვი 142857. თუ მის ციფრებს განვალაგებთ წრიულ ციფერბლატზე (იხ. ნახ.1) ჩანაწერში მოცემული თანმიმდევრობით და მას გავამრავლებთ 1-ზე, 2-ზე, 3-ზე, 4-ზე, 5-ზე და 6-ზე მივიღებთ:

$$142857 \times 1 = 142857$$
$$142857 \times 2 = 285714$$
$$142857 \times 3 = 428571$$
$$142857 \times 4 = 571428$$
$$142857 \times 5 = 714285$$
$$142857 \times 6 = 857142$$

თუ კარგად დავაკვირდებით მოყვანილ გამრავლების ცხრილს, აღმოვაჩენთ, რომ შედეგში იგივე ციფრები მონაწილეობს, რაც პირველ თანამამრავლში, ყველა მათგანი მიიღება ციფერბლატზე განლაგებული რიცხვების თანმიმდევრული ამოწერით ანუ 142857 – რიცხვში წრიული გადაადგილებით.



გავაგრძელოთ 142857 –ის მთელ რიცხვების ნამრავლზე დაკვირვება. (7-ზე ცოტა ქვემოთ)

$142857 \times 8 = 1142856$ $\qquad (142856 + 1 = 142857)$

$142857 \times 9 = 1285713$ $\qquad (285713 + 1 = 285714)$

$142857 \times 10 = 1428570$ $\qquad$ . . . .

$142857 \times 11 = 1571427$ $\qquad$ . . . .

- -

$142857 \times 69 = 9857133$ $\qquad (857133 + 9 = 857142)$

როგორც ვხედავთ მიიღება შვიდნიშნა რიცხვები, მაგრამ ისევ განსაკუთრებული: თუ თითეულ ამ ნამრავლში წავშლით პირველ ადგილზე მდგომ ციფრს და დარჩენილს მიუმატებთ ისევ ამ წაშლილ რიცხვს მივიღებთ 142857-ის წრიული გადადგილებით მიღებულ ერთ-ერთ რიცხვს.

რაც შეეხება 142857-ის ნამრავლს 7-ზე; ის შედგება მხოლოდ 9-იანებისაგან

$$142857 \times 7 = 999999$$

ზუსტად ეს ფაქტი ჰფენს ნათელს ამ – 142857 რიცხვის წარმოშობას და მასთან დაკავშირებულ თითქოსდა საიდუმლო თვისებებს.

გავყოთ 1-თი 7-ზე:

$$\begin{array}{r|l}
1 & 7 \\ \cline{2-2}
-\,10 & 0,142857 \\
7 & \\ \cline{1-1}
-\,30 & \\
28 & \\ \cline{1-1}
-\,20 & \\
14 & \\ \cline{1-1}
-\,60 & \\
56 & \\ \cline{1-1}
-\,40 & \\
35 & \\ \cline{1-1}
-\,50 & \\
49 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

ბოლო ნაშთი განმეორდა, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ განაყოფში იგივე თანმიმდევრობით იგივე ციფრები განმეორდება. ე. ი. $\frac{1}{7} = 0,(142857)$ ანუ 142857 წარმოადგენს $\frac{1}{7}$ წილადის პერიოდს ათწილადად გადაქცევისას. იმის გასარკვევად, თუ რატომ მიიღება 142857 რიცხვის 1-ზე; 2-ზე; 3-ზე; 4-ზე; 5-ზე და 6-ზე გამრავლების შედეგად

რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს მისივე წრიულ გადანაცვლებას, დაუბრუნდეთ 1-ის 7-ზე გაყოფის პროცესს. ეს პროცესი შეიძლება დავყოთ რამდენიმე ეტაპად:

$$\frac{1}{7}=0,1+\frac{3}{7}\cdot 10^{-1}=0,14+\frac{2}{7}\cdot 10^{-2}=0,142+\frac{6}{7}\cdot 10^{-3}=$$

$$=0,1428+\frac{4}{7}\cdot 10^{-4}=0,14285+\frac{5}{7}\cdot 10^{-5}=$$

$$=0,142857+\frac{1}{7}\cdot 10^{-6}=...$$

ამის შემდეგ იგივე ციფრები მეორდება. აქედან კი ჩანს, რომ $\frac{3}{7}$ წილადის პერიოდი ათწილადად გადაყვანისას იქნება 428571 ამიტომ, ცხადია $142857\times 3=428571$ რადგან $\frac{3}{7}=\frac{1}{7}\cdot 3$ და ასე შემდეგ.

ცნობილია, რომ თუ $\frac{a}{b}$ წილადის ათწილადად გადაქცევისას მიიღება პერიოდული ათწილადი, პერიოდში არ შეიძლება იყოს $(b-1)$ ციფრზე მეტი. მართლაც, გაყოფისას ნაშთი არ შეიძლება იყოს გამყოფზე მეტი ან ტოლი, მაგრამ ნატურალური რიცხვები, რომლებიც b-ზე ნაკლებია სასრულია, კერძოთ კი ესენია $1,2,3,...,(b-1)$.

$\frac{1}{7}$-სათვის პერიოდის მაქსიმალური სიგრძეა 6 ციფრი.

პერიოდს ეწოდება სრული, თუ ის შედგება მაქსიმალური რაოდენობა შესაძლო ციფრებისაგან. ცხადია, ყველა წილადს არა აქვას სრული პერიოდი. მაგალითად:

$$\frac{1}{39}=0,025641025641...$$

მაშასადამე, გავარკვიეთ, რომ 142857-ის "წრიული" თვისებები გამოწვეულია $\frac{1}{7}$-ის სრული პერიოდულობის გამო. ამიტომ, აღნიშნული "წრიული" თვისებები სამართლიანი იქნება ყველა სრული "პერიოდისათვის", ასეთი რიცხვებია $\frac{1}{17}$; $\frac{1}{29}$;

$\frac{1}{17}=0,(0588235294117647)$ – პერიოდი შეიცავს 16 ციფრს;

$\frac{1}{29}=0,(0344827586206896551724137931)$ – პერიოდი შეიცავს 29 ციფრს;

მოსაზრება:

- მოიფიქრეთ როგორ გავამრავლოთ 142857-ი სამნიშნა რიცხვზე ან თუნდაც ორნიშნა რიცხვზე ზეპირად.

§5. რიცხვითი ორნამენტები

დააკვირდით, ქვემოთ მოყვანილ ჩვეულებრივ (ქვეშ-მიწერით) გამრავლების მოქმედებებს, რომლებიც გამოთვლილია თავისებურად, მაგრამ შედეგი ჭეშმარიტია.

1.

77
77
49
4949
49
5929

ან

77
77
7
777
847×7=5929

2.

666
666
36
3636
363636
3636
36
43556

ან

666
666
6
666
66666
73926×6=443556

3.

777777777777

777777777777

49

4949

494949

49494949

4949494949

494949494949

49494949494949

4949494949494949

494949494949494949

49494949494949494949

4949494949494949494949

494949494949494949494949

4949494949494949494949

49494949494949494949

494949494949494949

4949494949494949

49494949494949

494949494949

4949494949

49494949

494949

4949

49

604938271603728395061729

ან

777777777777

777777777777

7

777

77777

7777777

777777777

77777777777

7777777777777

777777777777777

77777777777777777

7777777777777777777

777777777777777777777

77777777777777777777777

864197530862469135802247

× 7

604938271603728395061729

† რვა საუკეთესო ნამრავლი:

1738×4=6952	483×12=5796
1963×4=7852	297×18=5346
198×27=5346	157×28=4396
138×42=5796	186×39=7254

ისინი იმით გამოირჩევიან, რომ თითოეულ ნამრავლში ყვე-
ლა ციფრი გვხვდება (ნულის გარდა) 1-დან 9-მდე.

† • ჭეშმარიტი ტოლობები, რომელთა ორივე მხარეში ერთი და იგივე ციფრები გვხვდება:

$42 : 3 = 4 \cdot 3 + 2$

$63 : 3 = 6 \cdot 3 + 3$

$95 : 5 = 9 + 5 + 5$

$(2 + 7) \cdot 2 \cdot 16 = 272 + 16$

$5^{6-2} = 625$

$(8 + 9)^2 = 289$

$2^{10} - 2 = 1022$

$2^{8-1} = 128$

$4 \cdot 2^3 = 4^3 : 2 = 34 - 2$

$\sqrt{121} = 12 - 1$

$\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4}$

$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9} = 9 - \sqrt{4}$

$\sqrt{169} = 16 - \sqrt{9} = \sqrt{16} + 9$

$\sqrt{256} = 2 \cdot 5 + 6$

$\sqrt{324} = 3 \cdot (2 + 4)$

$\sqrt{11881} = 118 - 8$

$\sqrt{1936} = -1 + 9 + 35$

$\sqrt[3]{1331} = 1 + 3 + 3 + 1$

<u>მოსაზრება:</u>

- შეეცადეთ აღმოაჩინოთ ასეთივე სილამაზე სხვა რიცხვებისათვის.

† ჩვენს მიერ ზემოთ მოყვანილ 37-ის თვისებებში, ხაზი გაუსვით, რომ

$$37\times(3+7)=3^3+7^3 .$$

აი, კიდევ რამდენიმე ასეთი თვისების მქონე რიცხვები:

$$48\times(4+8)=4^3+8^3$$

$$147\times(14+7)=14^3+7^3$$

$$148\times(14+8)=14^3+8^3$$

$$111\times(11+1)=11^3+1^3$$

$$1\cdot 2\cdot 3\times(1+2+3)=1^3+2^3+3^3$$

§6. მაგიური "სტუმარი" 15-ი და კეთილი "მასპინძელი" 16-ი

$$16=4^2$$

თუ 16-ში 1-სა და 6-ს შორის ჩავსვამთ 15-ს მიღებული რიცხვიც სრული კვადრატი აღმოჩნდება, მართლაც

$$1116=34^2$$

ამ რიცხვშიც, თუ ჩავსვამთ 15-ს შუა ადგილზე ისიც სრული კვადრატი იქნება

$$111556 = 334^2$$

და თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ მივიღებთ

$$11115556 = 3334^2$$

$$1111155556 = 33334^2$$

ეს პროცესი ალბათ ასევე გრძელდება, მაგრამ მისი სამართლიანობის დასადგენად საჭიროა, მკაცრი მათემატიკური დამტკიცება შემდეგი წინადადებისა:

თუ $N = \underbrace{111..11}_{n}\underbrace{555...55}_{n-1}6$ მაშინ ის წარმოადგენს რაიმე რიცხვის კვადრატს.

მოსაზრება:

- დაამტკიცეთ, ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისთვის

  1) $\dfrac{10^n+2}{3}$ – ნატურალურია

  2) $\dfrac{10^n+2}{3} = \underbrace{333...33}_{6} + 1$

- ამის შემდეგ ვფიქრობთ, არ გაგიჭირდებათ იმის ჩვენება, რომ N არის $\dfrac{10^n+2}{3}$ რიცხვის კვადრატი.

§7. ის რაც ყველას უკეთებია

იმისათვის, რომ ჩავწეროთ ყველა რიცხვი 1-დან 26-მდე საკმარისია ათი ციფრი 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. მაგრამ, არა აუცილებელი. სურვილისამებრ, შეიძლება ყველა რიცხვი 1-დან 26-მდე მიღებულ იქნას მხოლოდ 2-იანის საშუალებით, ამასთან გამოყენებულ იქნება მხოლოდ ხუთი ცალი 2-იანი, ოთხი არითმეტიკული მოქმედება, ფრჩხილები და კვადრატში ახარისხება.

მაგალითისთვის მოვიყვანთ პირველ ათეულს:

$$1 = 2 + 2 - 2 - \frac{2}{2}$$

$$2 = 2 + 2 + 2 - 2 - 2$$

$$3 = 2 + 2 - 2 + \frac{2}{2}$$

$$4 = 2 \times 2 \times 2 - 2 - 2$$

$$5 = 2 + 2 + 2 - \frac{2}{2}$$

$$6 = 2 + 2 + 2 + 2 - 2$$

$$7 = 22 : 2 - 2 - 2$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 - 2$$

$$9 = 2 \times 2 \times 2 + \frac{2}{2}$$

$$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

მოსაზრება:

- მოყვანილი მაგალითების ანალოგიურად ჩაწერეთ ყველა რიცხვი 11-დან 26-მდე ჩათვლით.
- ოთხი 4-იანით მიიღეთ 1-დან 10-მდე ყველა რიცხვი.

✝. თავსატეხთა მოყვარულებისათვის განვაზოგადოთ წინა ამოცანა.

გამოსახეთ ნატურალური რიცხვი ზუსტად ოთხი ნებისმიერი ციფრით და მათემატიკური სიმბოლოებით. რაც ნიშნავს: გამოსახეთ რიცხვი ოთხი ციფრით ისე, რომ ამ ოთხი ციფრის სხვა ციფრით (გარდა ნულისა) ჩანაცვლებისას მივიღოთ ისევ თავდაპირველი რიცხვი.

მაგალითისთვის გამოვსახოთ 3-იანი ოთხი 4-იანის საშუალებით

$$3 = (4 + 4 + 4) : 4$$

ამასთანავე, თუ 4-ს შევცვლით ციფრი 5-ით არაფერი არ შეიცვლება

$$3 = (5 + 5 + 5) : 5$$

ან ზოგადად

$$3 = (n + n + n) : n; \qquad n \neq 0 .$$

მაგრამ

$$5 = (4 \times 4 + 4) : 4$$

ტოლობაში 4-იანის ჩანაცვლება არ შეიძლება სხვა რაიმე ციფრით, ამიტომ უნდა ვეძებოთ გამოსახვის სხვა მეთოდი. ნებადართულია გამოყენებულ იქნას $+$; $-$; $\times$; $:$ და ფრჩხილები. თუ ესენი არ აღმოჩნდა საკმარისი შესაძლებელია:

- $\sqrt{}$ – ნიშნის გამოყენება (რომლის ქვეშ იგულისხმება არითმეტიკული ფესვი).

- **!** – ფაქტორიალი, რომელიც იწერება რიცხვი ბოლოს და აღნიშნავს ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლს ამ რიცხვამდე ჩათვლით.
- წერტილი რიცხვის წინ ხაზის დონეზე, მაგალითად: $.4$, აღნიშნავს $0,4$. ე.ი. $.4 = 0,4$ (ეს აღნიშვნა დღესაც მიღებულია ბევრ ქვეყანაში)
- წერტილი რიცხვის ზემოთაც (თავზე) მაგალითად: $.\dot{4}$ აღნიშნავს $0,(4)$ პერიოდს, შეგახსენებთ, რომ $0,(n) = \frac{n}{9}$.

თუ გამოვიყენებთ ზემოთ თქმულს შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$1 = (n : n) \times (n : n)\,; \qquad 5 = \frac{n + .\dot{n}}{.\dot{n} + .\dot{n}}\,; \qquad 16 = \frac{n}{.n} + \left(\sqrt{\frac{n}{.\dot{n}}}\right)!$$

სადაც n ნებისმიერი ციფრია 1-დან 9-მდე.

მართლაც, თუ ბოლო ტოლობაში დაუშვებთ, რომ $n = 7$ გვექნება

$$\frac{7}{.7} + \left(\sqrt{\frac{7}{.\dot{7}}}\right)! = \frac{7}{0,7} + \left(\sqrt{\frac{7}{0,(7)}}\right)! = 10 + \left(\sqrt{9}\right)! = 10 + 3\,! = 16\,.$$

მოსაზრება:

- იპოვეთ ანალოგიური ტოლობები 1-დან 21-მდე ყველა რიცხვისთვის.
- რაც შეეხება 14-ის წარმოდგენას, თუ მოიფიქროთ მეც შემატყობინეთ.

მაშ ასე: თუ ციფრი 2 გამოყენებული ხუთჯერ და ციფრი 4 გამოყენებული ოთხჯერ, საკმარისია ყველა რიცხვის ჩასაწერად 1-დან 9-მდე; არც ციფრები 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 რჩებიან "ვალში" და მათისაშუალებით შესაძლებელია ყველა ციფრის მიღება. მაგალითად:

$$2 = \frac{13458}{6729}; \qquad 4 = \frac{15768}{3942}.$$

თითოეული ეს არაწესიერი წილადი შეიცავს ყველა ციფრს (გარდა ნულისა) და ამასთან თითოეული მათგანი, მხოლოდ ერთხელ ღებულობს მონაწილეობას.

მოსაზრება:

- შეეცადეთ 3, 5, 6, 7, 8 და 9 წარმოადგინოთ არაწესიერი წილადების, სახით ისე, რომ მათში ციფრები არ განმეორდეს.
- რაც შეეხება 1-იანს, ამისათვის სხვა მიდგომა დაგჭირდებათ.

†. თუ ციფრებს 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 დაუბრუნებთ ციფრ 0-ს, მაშინ ათი ციფრის საშუალებით შესაძლებელია ყველა ერთნიშნა რიცხვი გამოსახული იქნას მათი საშუალებით. მაგალითად:

$$9 = \frac{97524}{10836} = \frac{95823}{10647} = \frac{57429}{06381}$$

ამ წილადებში მონაწილეობას ღებულობს ყველა ციფრი და ამასთან თითოჯერ.

<u>მოსაზრება:</u>

- წარმოადგინეთ სხვა ციფრები ანალოგიური ხერხით.
- ცხრიანისათვის იპოვეთ კიდევ სამი წარმოდგენა, რომლებშიც ყველა ციფრი იქნება გამოყენებული.

§8. რიცხვთა თანავარსკვლავედი

რიცხვებს შორის უამრავი საინტერესო კავშირებია. ზოგიერთი მათგანი იმდენად მნიშვნელოვანია, რომ წარმოადგენენ სერიოზული კვლევის საგანს, ზოგიერთნი კი – მხოლოდ და მხოლოდ ინტერესის გაღვივებას ემსახურებიან. რიცხვებს რომლებიც ასეთი კავშირებით არიან დაკავშირებული – რიცხვთა თანავარსკვლავედი უწოდოთ.

†. მთელ რიცხვებს შორის შემჩნეულია ისეთი რიცხვთა წყვილები, რომელთა ჯამი და ნამრავლი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ რიცხვები ჩანაწერში ციფრთა თანმიმდევრობით. მაგალითად:

$9+9=18$	$9\times 9=81$
$24+3=27$	$24\times 3=72$
$47+2=49$	$47\times 2=94$
$263+2=265$	$263\times 2=526$
$497+2=499$	$497\times 2=994$

†. შემდეგი ორნიშნა რიცხვთა წყვილები აღსანიშნავია სულ სხვა თვისების გამო: ორი რიცხვის ნამრავლი არ იცვლება, თუ თითოეულ მათგანში ციფრებს გადავაადგილებთ.

$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$ $\quad$ $24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$

$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36$ $\quad$ $24 \cdot 84 = 42 \cdot 48$

$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48$ $\quad$ $26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$

$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$ $\quad$ $36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$

$23 \cdot 96 = 32 \cdot 69$ $\quad$ $46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$

მოსაზრება:

- არის კიდევ ოთხი წყვილი ორნიშნა რიცხვებისა, რომლებიჩ ამ თვისებით ხასიათდებიან, იპოვეთ ისინი.

†• აი კიდევ სამი წყვილი მომდევნო რიცხვებისა, რომელთა კვადრატები იწერება ერთი და იგივე ციფრებით, ოღონდ სხვადასხვა თანმიმდევრობით:

$13^2 = 169$ $\quad$ $157^2 = 24649$ $\quad$ $913^2 = 833569$

$14^2 = 196$ $\quad$ $158^2 = 24964$ $\quad$ $914^2 = 835396$

მოსაზრება:

- არსებობს თუ არა ისეთი მთელი რიცხვი (თუნდაც ერთი), რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:
    1. ის წარმოადგენს მისი შემადგენელი ციფრების მე-4 ხარისხების ჯამს. (აქედან გამომდინარეობს, რომ ის უნდა წარმოადგენდეს რაიმე რიცხვის ზუსტ კვადრატს).

2. თუ ამ რიცხვს დავყოფთ 3 ნაწილად თითოეულში 2-ი ციფრით, მაშინ ამ ორნიშნა რიცხვების ჯამი, რომ წარმოადგენდეს რაიმე რიცხვის სრულ კვადრატს.
3. თუ ამავე რიცხვს ჩავწერთ უკუთანმიმდევრობით და დავყოფთ 3 ნაწილად თითოეულში 2-ი ციფრით, მაშინ ამ ორნიშნა რიცხვების ჯამიც უნდა წარმოადგენდეს რაიმე რიცხვის სრულ კვადრატს.

†. "თანავარსკვლავედი" 2; 3; 7; 1; 5; 6 რიცხვების ექვსეულისა, საინტერესოა იმით, რომ პირველი სამი რიცხვის ჯამი უდრის ბოლო სამი რიცხვის ჯამისა, მაგრამ კვადრატების ჯამიც ტოლია

$$2+3+7=1+5+6$$
$$2^2+3^2+7^2=1^2+5^2+6^2$$

<u>მოსაზრება:</u>

- ასეთი "თანავარსკვლავედი" უამრავია, აღმოაჩინეთ ერთ მაინც, დროის რაც შეიძლება მოკლე მონაკვეთში.

† • კიდევ უფრო ბრწყინვალეა შემდეგი რვა რიცხვიანი “თანავარსკვლავედი”

0; 5; 5; 10; 1; 2; 8; 9

და ათ რიცხვიანი “თანავარსკვლავედი”

1; 4; 12; 13; 20; 2; 3; 10; 16; 19.

მათ გააჩნიათ ექვსეული “თანავარსკვლავედის” თვისებები და გარდა ამისა პირველ ნახევარში შემავალი ციფრების კუბების ჯამი ტოლიას, მეორე ნახევარში შემავალი რიცხვების კუბების ჯამისა.

$$\left\{\begin{array}{l} 0+5+5+10=1+2+8+9 \\ 0^2+5^2+5^2+10^2=1^2+2^2+8^2+9^2 \\ 0^3+5^3+5^3+10^3=1^3+2^3+8^3+9^3 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1+4+12+13+20=2+3+10+16+9 \\ 1^2+4^2+12^2+13^2+20^2=2^2+3^2+10^2+16^2+9^2 \\ 1^3+4^3+12^3+13^3+20^3=2^3+3^3+10^3+16^3+9^3 \end{array}\right\}$$

მოსაზრება:

- აუცილებლად არსებობენ რიცხვთა ჯგუფები, რომლებიც ასეთივე თვისებებით ხასიათდებიან. როგორ ვიპოვოთ ისინი?

ზემოთ მოყვანილი “თანავარსკვლავედთა” საიდუმლო, პირველად აღმოაჩინეს დაახლოებით 260 წლის წინ (1750-1751) გოლდბახმა და ეილერმა. მათ შეძლეს ზოგიერთი ფორმულის გამოყვანა, რომლებიც წარმოადგენენ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში, ისეთი სისტემების ამონახსნებს, რომლებსაც მივყავართ აღნიშნულ “თანავარსკვლავედამდე”. მაშ ასე პირველი “თანავარსკვლავედის” რიცხვების შერჩევისავის

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \end{cases}$$

ხელსაყრელი აღმოჩნდა შემდეგი ფორმულები:

$$x_1 = a + c \qquad x_2 = b + c \qquad x_3 = 2a + 2b + c$$
$$y_1 = c \qquad y_2 = 2a + b + c \qquad y_3 = a + 2b + c$$

ამ ფორმულებში საჭიროა ასოები $a; b$ და c შევცვალოთ ნებისმიერი რიცხვებით და მიიღებთ აღნიშნულ “თანავარსკვლავედს” (რამდენსაც გვინდა).

ასევე პირველი ”თანავარსკვლავედისათვის” ეილერმა მოგვცა შემდეგი ფორმულები:

$$x_1 = ad \qquad x_2 = ac + bd \qquad x_3 = bc$$
$$y_1 = ac \qquad y_2 = ad + bc \qquad y_3 = bd$$

სადაც $a;b;c$ და d ნებისმიერი რიცხვებია.

მეორე "თანავარსკვლავედისათვის" კი

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3 \end{cases}$$

გამოიყენება შემდეგი ფორმულები

$$x_1 = a \qquad x_2 = b \qquad x_3 = 3a + 3b \qquad x_4 = 2a + 4b$$
$$y_1 = 2a + b \qquad y_2 = a + 3b \qquad y_3 = 3a + 4b \qquad y_4 = 0$$

ეილერის შემდეგ აღმოჩენილ იქნა "უბრწყინვალესი", (ჩვენი აზრით) რიცხვთა "თანავარსკვლავედი" შემდეგი თორმეტი რიცხვისაგან, რომელთა ყველა ხარისხი ერთიდან ხუთამდე პირველი ექვსი რიცხვისა, ტოლია შემდეგი ექვსი რიცხვის შესაბამისი ხარისხების ჯამისა.

ეს "თანავარსკვლავედია" :

1; 6; 7; 17; 18; 23; 2; 3; 11; 13; 21; 22

$$1+6+7+17+18+23=2+3+11+13+21+22$$
$$1^2+6^2+7^2+17^2+18^2+23^2=2^2+3^2+11^2+13^2+21^2+22^2$$
$$1^3+6^3+7^3+17^3+18^3+23^3=2^3+3^3+11^3+13^3+21^3+22^3$$
$$1^4+6^4+7^4+17^4+18^4+23^4=2^4+3^4+11^4+13^4+21^4+22^4$$
$$1^5+6^5+7^5+17^5+18^5+23^5=2^5+3^5+11^5+13^5+21^5+22^5$$

ასეთივე “თანავარსკვლავედების” მისაღებად საკმარისია შემდეგი “ჯადოსნური” ტოლობა

$$a^n+(a+4b+c)^n+(a+b+2c)^n+(a+9b+4c)^n+$$
$$+(a+6b+5c)^n+(a+10b+6c)^n=$$
$$(a+b)^n+(a+c)^n+(a+6b+2c)^n+(a+4b+4c)^n+$$
$$+(a+10b+5c)^n+(a+9b+6c)^n$$

†. ავიღოთ შემდეგი ტოლობები

$$4^2+5^2+6^2=8^2+3^2+2^2$$
$$48^2+53^2+62^2=26^2+35^2+84^2$$
$$43^2+52^2+68^2=86^2+25^2+34^2$$

და ა.შ.

<u>მოსაზრება:</u>

- ამ ტოლობებში უამრავი თავსატეხი და გასართობია, შეეცადეთ დამოუკიდებლად აღმოჩინეთ.

†. რაც შეეხება წინა მაგალითებში, რიცხვების სიმეტრიულ განლაგებას ტოლობების მიმართ, მათ გადაადგილებებს და ა. შ. ამ მხრივ საყურადღებოა შემდეგი ტოლობებიც:

$$13+42+53+57+68+97=79+86+75+35+24+31$$

ა) $$13^2+42^2+53^2+57^2+68^2+97^2=79^2+86^2+75^2+35^2+24^2+31^2$$

$$13^3+42^3+53^3+57^3+68^3+97^3=79^3+86^3+75^3+35^3+24^3+31^3$$

$$12+32+43+56+67+87=78+76+65+34+23+21$$

ბ) $$12^2+32^2+43^2+56^2+67^2+87^2=78^2+76^2+65^2+34^2+23^2+21^2$$

$$12^3+32^3+43^3+56^3+67^3+87^3=78^3+76^3+65^3+34^3+23^3+21^3$$

მოსაზრება:

- ამ ტოლობების შემოწმება არც თუ ისე ხელწამოსაკრავი საქმეა (შეეცადეთ).

†. კიდევ ერთი აღმოჩენა! 145-ი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას მისივე ციფრების ფაქტორიალების ჯამის სახით $145 = 1! + 4! + 5!$ ისევე როგორც $1 = 1!$ და $2 = 2!$.
ერთერთმა სტუდენტმა დაამტკიცა, რომ ამ თვისებების მატარებელი სხვა რიცხვები არ არსებობენ. მაგრამ თუ მივიღებთ, რომ $0! = 1$ მაშინ მოიძებნება კიდევ ერთი რიცხვი.

<u>მოსაზრება:</u>

- იპოვეთ ეს რიცხვი, რომელიც ზემოთ აღნიშნულ პირობას აკმაყოფილებს.

†. არსებობს მხოლოდ ორი ცალი სამნიშნა რიცხვი, რომელთა ნებისმიერი ნატურალური ხარისხი ბოლოვდება იმავე სამი ციფრით და იმავე თანმიმდევრობით:

$$376^2 = 141376 \qquad 376^3 = 531573376$$
$$625^2 = 390625 \qquad 625^3 = 244140625$$

<u>მოსაზრება:</u>

- როგორ აღმოაჩინეს ეს რიცხვები და როგორ დაადგინეს, რომ ისინი მხოლოდ ორია? ამ კითხვაზე პასუხის მოძებნა არ უნდა გაგიჭირდეთ.

§9. სიმეტრიული ჯამი

დაწერეთ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი 2; 3 ან მეტი ციფრით. მიუმატეთ მას რიცხვი ჩაწერილი უკუ თანმიმდევრობით. იგივე მოქმედება გააკეთეთ მიღებული რიცხვის მიმართ. გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ ამ მოქმედების რამდენჯერმე გამეორება მიგვიყვანს სიმეტრიულ რიცხვამდე ანუ ისეთ რიცხვამდე, რომელიც ერთნაირად იკითხება, როგორც მარცხნიდან მარჯვნივ ასევე მარჯვნიდან მარცხნივ; მაგალითად:

$$\begin{array}{r} 38 \\ +\ 83 \\ \hline 121 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 139 \\ +\ 931 \\ \hline 1070 \\ +\ 0701 \\ \hline 1771 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48017 \\ +\ 71084 \\ \hline 119101 \\ +\ 101911 \\ \hline 221012 \\ +\ 210122 \\ \hline 431134 \end{array}$$

ხანდახან სიმეტრიულ რიცხვამდე მისასვლელად, საჭიროა ბევრი "ნაბიჯის" გადადგმა. ასე, მაგალითად; თქვენ თუ დაიწყებთ რიცხვი 89-ით, 24-ი ნაბიჯის გადადგმა დაგჭირდე-ბათ.

<u>მოსაზრება:</u>

- დარწმუნდით.
- შეიძლება მოინახოს ისეთი რიცხვი, რომ მან არასდროს "მიგვიყვანოს" სიმეტრიულ რიცხვამდე?. როგორც ჩანს არა, მაგრამ ეს ჯერ არავის დაუმტკიცებია.

§10. სწრაფი შეკრება

†. თქვენს წინაშეა რიცხვების ორი სვეტი:

123456789	1
12345678	12
1234567	123
123456	1234
12345	12345
1234	123456
123	1234567
12	12345678
1	123456789

თუ კარგად დააკვირდებით, შეამჩნევთ, რომ მეორე სვეტის რიცხვები არის პირველ სვეტში მოცემული რიცხვები ჩაწერილი უკუთანმიმდევრობით.

შეადარეთ, რომელ სვეტში მოცემული რიცხვების ჯამია მეტი?

მოსაზრება:

- ჯერ ზეპირად, შემდეგ კი ქვეშმიწერით.

†. მოცემულია შესაკრებთა რვა ექვსნიშნა რიცხვი

$$
\begin{array}{r}
328645 \\
491221 \\
816304 \\
+\quad 117586 \\
671355 \\
508779 \\
183696 \\
882414 \\
\hline
\end{array}
$$

ისინი შერჩეულია ისე, რომ მათ შესაკრებად საკმარისია 8 წამი. გაქვთ თუ არა სათანადო სიჩქარე?.

<u>მოსაზრება:</u>

- აღმოაჩინეთ ამ რიცხვებს შორის რაიმე კანონზომიერება და შეკრებაც არ გაგიჭირდებათ.

†. დაწერეთ ერთმანეთის ქვეშ ორი რიცხვი, მე მათ მიუწერ მესამე რიცხვს და შევკრებ სამივეს თვალის დახამხამებაში. მაგალითად:

72603294

51273081

მე, კი მივუწერ 48726918 და ჯამიც მზადაა 172603293 .

<u>მოსაზრება:</u>

- რა რიცხვი უნდა მიუწეროთ მესამედ და როგორ ვიპოვოთ ჯამი?.

§11. სწრაფი გამოთვლის ალგორითმი

ელემენტარული ალგებრა, რომელსაც საშუალო სკოლაში შევისწავლით, საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ნატურალურ რიცხვებზე ართმეტიკული გამოთვლების სწრაფად შესრულების ალგორითმი.

რიცხვების შეკრების, გამრავლებისა ან კვადრატში აყვანის ყველასთვის კარგად ცნობილი წესები მოსწავლე-ებს მათემატიკის სწავლების საწყის ეტაპზე გადაეცემათ და მთელი სიცოცხლის მანძილზე გაჰყვება მათ. ჩვენ კი შემოგთავაზებთ სწრაფი (ზეპირი) გამოთვლის რამდენიმე ალგორითმს, რომელიც მოსწავლეებს გონებას განუვითარებს ზემო აღნიშნული წესების პარალელურად და იმედია, რომ ზოგიერთი მათგანის მათემატიკისადმი გულგრილი დამოკი-დებულების ტენდენცია სასიკეთოდ შეიცვლება.

წინასწარ გავაკეთოთ მცირედი შენიშვნა.

ზეპირი ანგარიშისას მოსახერხებელია რიცხვების თუ შეიძლება ასე ითქვას "ტელეფონური ხერხით" წაკითხვა. სახელდობრ, მოცემული რიცხვი იყოფა 1 ან 2 ციფრიან ნაწილებად (ხანდახან სამ ციფრიანადაც) და თითოეული ნაწილი იკთხება როგორც ცალკეული რიცხვი.

მაგალითად: 1) 1994 – შეიძლება წავიკითხოთ ასე – ცხრამეტი, ოთხმოცდათოთხმეტი.

2) 12345 – ერთი, ოცდასამი, ორმოცდახუთი.

სწრაფი ზეპირი გამოთვლების ჩატარებისას სასურველია ვიხელმძღვანელოთ შემდეგი გამოსახულებით:

«მოცემულ *a* რიცხვს მიუწეროთ ორი ციფრით (სამი ციფრით და ა.შ.) სხვა მოცემული *b* რიცხვი»

რაც შემდეგს ნიშნავს

«*a* რიცხვი გავამრავლოთ 100-ზე (შესაბამისად 1000-ზე და ა.შ.) და მიღე-ბულს მიუმატოთ *b* რიცხვი».

მაგალითად: **« 38-ს მიუწეროთ ორი ციფრით 9»** ნიშნავს, რომ **«დავწეროთ 3809»,** ხოლო **« 38-ს მიუწეროთ ორი ციფრით 142»** კი ნიშნავს

$$3800+142=3942$$

რაც, სიმოკლისათვის შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$3\overset{1}{8}42=3942.$$

†. განვიხილოთ ალგორითმი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს, გონებაში გადავამრავლოთ ორი რიცხვი, რომლიც ახლოს არიან 100-თან.

რატომ მაინცდამაინც 100-თან ახლოს? იმიტომ რომ ნებისმიერ მოსწავლეს, რომ ვკითხოთ, რომელი ორნიშნა რიცხვების გადამრავლებაა რთული, უდავოდ ყველა მათგანი იტყვის: "რიცხვები რომლებიც 100-თან ახლოსაა, მაგალითად $97\cdot98$." სინამდვილეში კი, ასეთი რიცხვების გადამრავლება, გონებაშიც კი ძალზე მარტივია. მართლაც, ვთქვათ უნდა გადავამრავლოთ 94 და 97 (ვწერთ ან გონებაში ზეპირად)

$$\underset{6}{94}\cdot\underset{3}{97}=9118$$ - ოთხმოცდათერთმეტი თვრამეტი.

რა გავაკეთეთ ამისათვის? ვიპოვეთ თითოეული თანამამრავლის ***ნარჩენი*** 100-მდე. პირველი თანამამრავლის არის 6, მეორესი კი - 3. შემდეგ, რომელიმე თანამამრა-ვლს გამოვაკლოთ მეორე თანამამრავლის ***ნარჩენი*** 100-მდე. მივიღებთ 91-ს. მიღებულ შედეგს მიუწეროთ 6-ისა და 3-ს ნამრავლი ე.ი. 18.

ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ალგორითმი:

თუ გვსურს, რომ გადავამრავლოთ 100-თან ახლოს მდებარე ორი ორნიშნა რიცხვი მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

ბიჯი1. ვიპოვოთ თანამამრავლების ***ნარჩენი*** 100-მდე.

ბიჯი2. ერთ-ერთ თანამამრავლს გამოვაკლოთ მეორე თანამამრავლის ***ნარჩენი*** 100-მდე.

ბიჯი3. მე-2 ბიჯში მიღებულ რიცხვს მივუწეროთ ორი ციფრით ბიჯი1-ში მიღებული რიცხვების ნამრავლი.

განვიხილოთ მაგალითები:

1 2

$$92 \cdot 85 = 7720 = 7820 \;;\; 88 \cdot 79 = 6752 = 6952 \;;$$

8 15 12 21

$$97 \cdot 98 = 9506 .$$

3 2

რატომ შეიძლება ასე გადამრავლება? – ამ კითხვაზე პასუხს გვაძლევს **ალგებრა**.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი ორნიშნა რიცხვი x და y. ისინი ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$x = 100 - a \quad \text{და} \quad y = 100 - b$$

სადაც a და b, შესაბამისად, x და y რიცხვების ***ნარჩენებია*** 100-მდე.

$$x \cdot y = (100 - a) \cdot (100 - b) = (100 - a) \cdot 100 - 100 \cdot b + a \cdot b =$$
$$= (100 - a - b) \cdot 100 + a \cdot b = (x - b) \cdot 100 + a \cdot b$$

ან

$$x \cdot y = (100 - a) \cdot (100 - b) = (100 - a) \cdot 100 - 100 \cdot b + a \cdot b =$$
$$= (100 - a - b) \cdot 100 + a \cdot b = (y - a) \cdot 100 + a \cdot b$$

ე.ი. x და y რიცხვების ნამრავლში $(x - b)$ ან $(y - a)$ ასეული და $a \cdot b$ ერთეულია. აქედან გამომდინარეობს ჩვენი ალგორითმის სისწორე.

†. ორმოცდაათთან ახლო რიცხვების კვადრატი.

ორმოცდაათთან ახლო რიცხვები ორი ტიპისაა, კერძოდ, ერთი მეტია 50-ზე, ხოლო მეორე - ნაკლები.

ჯერ განვიხილოთ 50-თან ახლოს მდებარე და მასზე მეტი რიცხვების ზეპირად კვადრატში აყვანის ალგორითმი.

ვთქვათ, კვადრატში უნდა ავიყვანოთ x რიცხვი, რომელიც ახლოსაა 50-თან და მეტია მასზე. ეს რიცხვი ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$x = 50 + a$$

სადაც a ***ანარჩენია*** 50-ზე.

მაშინ გვექნება,

$$x^2 = \left(50 + a\right)^2 = 2500 + 100 \cdot a + a^2 = \left(25 + a\right) \cdot 100 + a^2 =$$
$$= \left(25 + x - 50\right) \cdot 100 + a^2 = \left(x - 25\right) \cdot 100 + a^2.$$

რადგან $a = x - 50$.

საიდანაც შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ორმოცდაათთან ახლო და მასზე მეტი რიცხვების კვადრატში აყვანის ალგორითმი.

ბიჯი1. კვადრატში ასაყვან რიცხვს გამოვაკლოთ 25-ი.

ბიჯი2. პირველი ბიჯის შედეგს ორი ციფრით მივუწეროთ 50-ზე ***ანარჩენის*** კვადრატი.

მაგალითად:

1) $58^2 = 3364$, რადგან $58 - 25 = 33$, $8^2 = 64$.

2) $64^2 = 4096$, რადგან

$64 - 25 = 39$, $64 - 50 = 14$, $14^2 = 196$ და

საბოლოოდ $$64^2 = \overset{1}{3996} = 4096.$$

ზემოთ თქმულის ანალოგიურად, თქვენ ადვილად შეძლებთ 50-თან ახლო მდებარე და მასზე ნაკლები რიც-ხვის კვადრატში აყვანის ალგორითმის პოვნას.

<u>მოსაზრება:</u>

წიგნში მოყვანილი ზეპირი (სწრაფი) გამოთვლის ალგორითმების განსამტკიცებლად, შეიძლება მოყვანილ იქნას უამრავი მაგალითი, ხოლო თვით ალგორითმის საპოვნელად გამოვყოფთ რამდენიმე ამოცანას.

<u>ამოცანა 1.</u> ელემენტარული ალგებრის გამოყენებით, ჩამოაყალიბეთ 1000-თან ახლო მდებარე ორი სამნიშნა რიცხვების სწრაფი გადამრავლების ალგორითმი. აჩვენეთ მისი სისწორე $997 \cdot 936$ რიცხვების ნამრავლზე.

<u>ამოცანა 2.</u> მოიფიქრეთ 100-თან ახლო მდებარე სამნიშნა რიცხვის კვადრატში აყვანის სწრაფი ალგორითმი.

<u>ამოცანა 3.</u> იგივე, რაც **<u>ამოცანა 2</u>**-ში 100-თან ახლო მდებარე ორნიშნა რიც-ხვებისათვის.

§12. ზეპირი ანგარიში ორნიშნა რიცხვებზე

†. ორნიშნა რიცხვის გამრავლება 11-ზე.

ა) ერთნიშნა რიცხვის გამრავლება 11-ზე ტრივიალური შემთხვევაა.

მაგ: $5\times 11=55$

ბ) თუ ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამი 10-ზე ნაკლებია, მაშინ ამ რიცხვის ციფრთა ჯამს ჩავსვამთ ამავე რიცხვის ციფრებს შორის და მივიღებთ ამ რიცხვის 11-ზე ნამრავლს.

მაგ: გავამრავლოთ 54 ორნიშნა რიცხვი 11-ზე.

რადგან $5+4=9<10$ ამიტომ 9 ჩავსვათ 5-სა და 4-ს შორის, მივიღებთ 594რიცხვს, რომელიც არის 54×11. ე.ი. $54\times 11=594$.

გ) თუ ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამი 10-ზე მეტია, მაშინ ამ რიცხვის ციფრთა ჯამის ერთეულს ჩავსვამთ ამავე რიცხვის ციფრებს შორის და აღებული რიცხვის პირველ ციფრს (ათეულს) გავადიდებთ 1-ით. მივიღებული რიცხვი იქნება 11-ზე ნამრავლი.

მაგ: გავამრავლოთ 98 ორნიშნა რიცხვი 11-ზე.

რადგან $9+8=17>10$ ამიტომ 7-ს ჩავსვათ 9-სა და 8-ს შორის ისე, რომ 9-ს გავადიდებთ 1-ით. გახდება 10. ე.ი. $98\times 11=1078$.

†. ნულით დაბოლოებული ორნიშნა რიცხვის 5-ზე გაყოფა.

ნულით დაბოლოებული ორნიშნა რიცხვი რომ 5-ზე გავყოთ, საჭიროა ამ რიცხვს ნული ჩამოვაშოროთ და დარჩენილი ციფრი გავაორკეცოთ, რომელიც იქნება განაყოფი.

მაგ: 70 გავყოთ 5-ზე.

70-ს ჩამოვაშოროთ 0 და დარჩება 7.

$2 \times 7 = 14$. აი ეს რიცხვი არის განაყოფი.

ე.ი. 70:5=14.

†. ავახარისხოთ კვადრატში 5-ით დაბოლოებული ორნიშნა რიცხვი.

5-ით დაბოლოებული ორნიშნა რიცხვი, რომ ავახარისხოთ კვადრატში, საჭიროა ათეულების ციფრი გავამრავლოთ მის მომდევნო ციფრზე და მიღებულ ნამრავლს მიუწეროთ 25.

მაგ: 65 ავიყვანოთ კვადრატში.

რადგან 6-ის მომდევნო ციფრია 7 და $6 \times 7 = 42$. ამიტომ 42-ი მიუწეროთ 25 და მივიღებთ საძიებელ ხარისხს. ე.ი. $65^2 = 4225$.

†. ავიყვანოთ კვადრატში ორნიშნა რიცხვი, რომლის პირველი ციფრია 5.

ორნიშნა რიცხვი, რომლის პირველი ციფფრია 5, რომ ავიყვანოთ კვადრატში, საჭიროა 25-ს დაუმატოთ ამ რიცხვის

ერთეული და მიღებულ ჯამს მიუწეროთ იმავე ერთეულის კვადრატი.

მაგ: ვიპოვოთ 56-ის კვადრატი.

ცხადია, 25+6=31 და $6^2 = 36$. მაშინ $56^2 = 3136$.

თუ ერთეულების კვადრატი ერთნიშნაა, მაშინ მიღებულ კვადრატს მიუწერთ 0-ს და პროცესი ანალოგიურად განმეორდება.

მაგ: ვიპოვოთ 53-ს კვადრატი.

ახლა 25+3=28 და $3^2 = 9$ (აქ “9” ერთნიშნა). მაშინ 28-ს მიუწეროთ არა 9, არამედ 09-ს. ე.ი. $53^2 = 2809$.

†. არსებობს იმ ორნიშნა რიცხვის კვადრატის მოძებნის წესი, რომლის პირველი ციფრი (ათეული) 4-ია. ასევე, იმ ორნიშნა რიცხვის კვადრატი, რომლის მეორე ციფრი (ერთეული) არის 1

†. ორნიშნა რიცხვი 9-ზე რომ გავამრავლოთ, საჭიროა ამ რიცხვს გამოვაკლოთ 1-ით გადიდებული ათეულების რიცხვი და მიღებულ შედეგს მიუწეროთ 10-ისა და აღებული რიცხვის ერთეულის სხვაობა. მივიღებთ 9-ზე გამრავლებულ რიცხვს.

მაგ: 47 გავამრავლოთ 9-ზე.

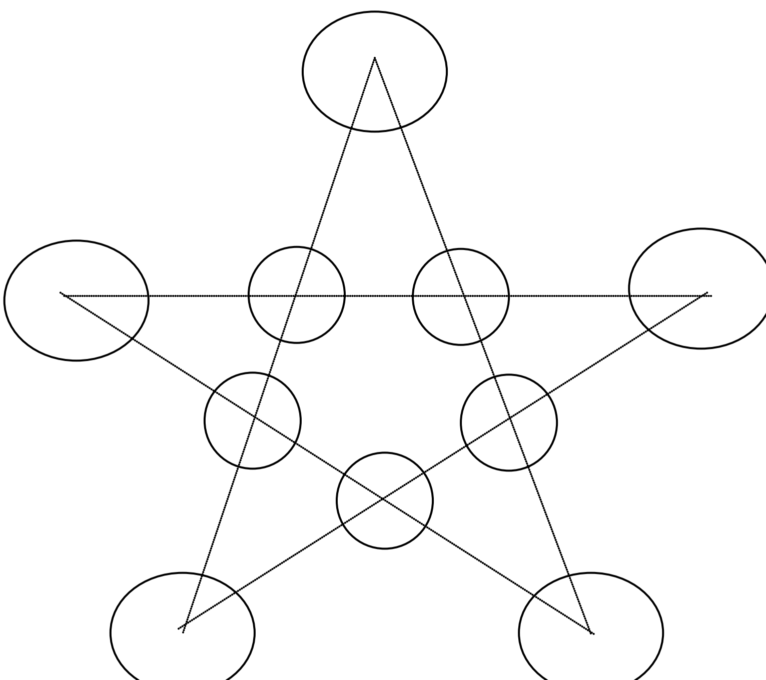
აქ ათეულების ციფრს 4-ს თუ გავადიდებთ 1-ით, მივიღებთ 5-ს. ეს გამოვაკლოთ აღებულ რიცხვს 47-ს მივიღებთ 42-ს. რიცხვ 47-ში ერთეულია 7. ახლა 10-7=3

ამიტომ (მაშინ) $47 \times 9 = 423$

ანალოგიურად, გავამრავლოთ რიცხვი 63 9-ზე.

რადგან 63-(6+1)=56 და 10-3=7, ამიტომ $63 \times 9 = 567$.

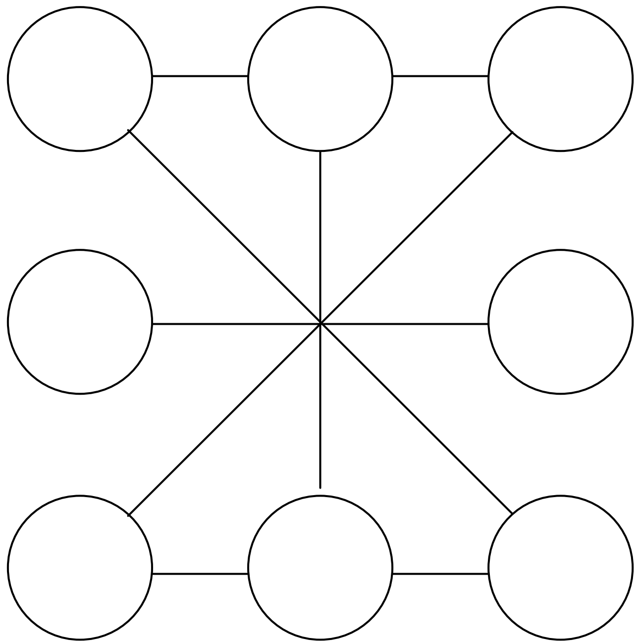
✝. შეიძლება თუ არა ნახატზე მოცემული ვარსკვლავის წრეებში, ათი ერთმანეთისაგან განსხვავებული რიცხვი ჩაისვას, ისე რომ ხუთივე წრფის გასწვრივ ოთხივე რიცხვის ჯამი ერთი და იგივე იყოს.



✝. იპოვეთ უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომელიც ბოლოვდება 56-ით, იყოფა 56-ზე და ციფრთა ჯამიც 56-ის ტოლია.

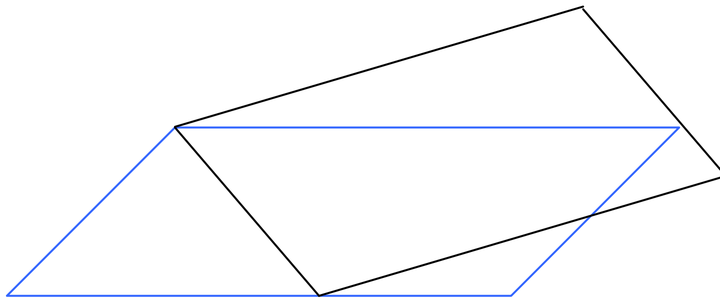
ამოხსნა: საძიებელი რიცხვი უნდა ვეძებოთ შემდეგი $A \cdot 100 + 56$ სახით. რადგან $A \cdot 100$ უნდა იყოფოდეს 56-ზე, ამიტომ A რიცხვი 14-ის ჯერადია, ანუ ის ლუწია და იყოფა 7-ზე. ამასთან A რიცხვის ციფრთა ჯამი $56 - (5 + 6) = 45$ -ის ტოლია. ასეთი უმცირესი ლუწი რიცხვი რომლის ციფრთა ჯამი 45-ია არის 199998 რომელიც 7-ზე არ იყოფა. შემდეგი ასეთი რიცხვები იქნება 289998 და 298998. პირველი მათგანი არ იყოფა 7-ზე, ხოლო მეორე იყოფა, ამიტომ ამოცანის პასუხს წარმოადგენს 29899856 რიცხვი.

✝. განალაგეთ 1-დან 8-მდე რიცხვები წრეებში ისე, რომ სამივე ჰორიზონტალურ რიგში ჩაწერილი რიცხვი წარმოადგენდეს სრულ კვადრატს, ხოლო ცენტრალურ-სიმეტრიულად განლაგებულ წრეებში მოთავსებული რიცხვების ჯამი ერთი და იგივე რიცხვი იყოს.



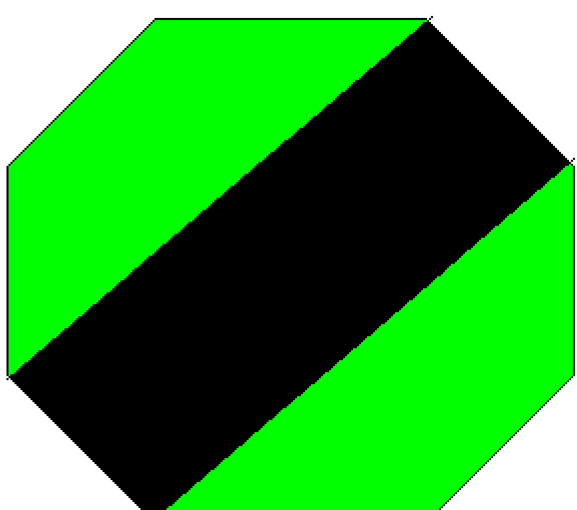
†. გაყოფის შემდეგ მაგალითში ყველა ციფრი განსხვავებულია, გაშიფრეთ ის:

```
***|**
 **|*
---
  *
```

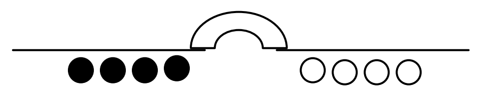


†. მოცემულია ორი პარალელოგრამი, რომლებსაც ერთი საერთო წვერო აქვს და კიდევ, თითო წვერო მეორე პარალელოგრამის გვერდზე დევს. დაამტკიცეთ, რომ ამ პარალელოგრამების ფართობები ტოლია.

†. წესიერ რვაკუთხედში გავლებულია ორი პარალელური დიაგონალი. დაამტკიცეთ რომ ამ გზით მიღებული მართკუთხედის ფართობი ორჯერ ნაკლებია წესიერ რვაკუთხედის ფართობზე.

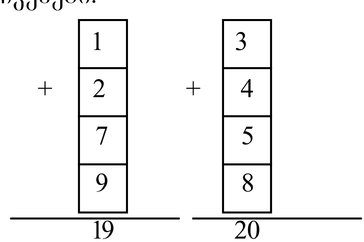


† ვიწრო არხში მოთავსებულია 8-ბურთულა; 4-შავი და 4-თეთრი. მის შუა ადგილზე არის პატარა ნიშა, რომელშიც შეიძლება მოთავსდეს მხოლოდ ერთი ბურთულა. მხოლოდ აქაა შესაძლებელი ორმა ბურთულამ გვერდი აუარონ ერთმანეთს. როგორ შეუცვალოთ ადგილები თეთრ და შავ ბურთულებს.



† შეეცადეთ ოთკუთხა ოთახში 10 სკამი განალაგოთ, ისე რომ თითოეულ კედელთან თანაბარი რაოდენობის სკამები ელაგოს.

† კვადრატული ფორმის ფურცლებზე დაწერეთ, რიცხვები 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 და დააწყვეთ ისე როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები.



გადაანაცვლეთ მხოლოდ ორი ფურცელი, ისე რომ თითოეულ სვეტში რიცხვთა ჯამი ტოლი იყოს.

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. ნ. ჩუბინიძე და სხვა. აბა მოისაზრეთ. თბილისი. 1964.

2. ნ. მაჭარაშვილი, ვ. ბართაია. სასკოლო სახალისო ამოცანები. პირველი ნაწილი. თბილისი, “ლეგია”, 1994.

3. თ. ორმოცაძე. გარანტირებული გრანტისათვის. თბილისი “შორი” 2007.

4. Балк М.Б, Балк Г.Д. – Математика после уроков. М.,«Просвещение», 1971.

5. Перелман Я. И. - [1] Занимательная арифметика М.,Детгиз, 1954.
-[2] Занимательная арифметика М.-Л.,ГИТТЛ, 1950.

6. Яглом И.М. – Необыкновенная алгебра. М., «Наука»,1968.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

გამომცემლობა "ჯისიაი"

ტირაჟი 200ც.

ISBN 978-99940-17-90-4