ლ. მძინარიშვილი, ა. დავითაძე, ზ. მჭედლიძე,
ბ. ჯავახიშვილი

ბატონ. თ. [illegible]
სიყვარულით და პატივისცემით
[illegible]

უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული

ნაწილი II

საქართველოს რესპუბლიკის განათლების სამინისტრომ დაამტკიცა დამხმარე სახელმძღვანელოდ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

პროფესორ ლ. მძინარიშვილის რედაქციით.

თბილისი 1999

წინასიტყვაობა

უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, რომელიც სამ ნაწილად გამოდის, მომზადებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საავიაციო ინსტიტუტში. წინამდებარე ნაწილი შეიცავს შემდეგ თავებს: ორი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა, ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალური აღრიცხვა, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები.

კრებულის სტრუქტურა ასეთია. ყოველი პარაგრაფი შეიცავს თეორიულ ცნებათა განმარტებებს, თეორემებსა და მათგან გამომდინარე შედეგების ფორმულირებებს. თეორიული მასალის შესაბამისად მოცემულია შემდეგი სახის პრაქტიკული მასალა: ამოცანებისა და მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები მეთოდური მითითებებით, საკონტროლო მაგალითები პასუხებით, ინდივიდუალური დავალებები დამოუკიდებელი სამუშაოებისთვის, ბილეთები საკონტროლო სამუშაოების ჩასატარებლად, საგამოცდო ბილეთების ნიმუშები.

კრებული შედგენილია უმაღლესი მათემატიკის მოქმედი პროგრამის შესაბამისად სტუ-ს საინჟინრო და ეკონომიკური სპეციალობებისა და საავიაციო ინსტიტუტის სამხედრო-საავიაციო ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე სხვა უმაღლესი სასწავლებლების პედაგოგებს სტუდენტებთან მუშაობაში.

კრებულში შეტანილია ამოცანები, რომლებიც შეიცავენ მათემატიკური მოდელირების ელემენტებს, რაც, ავტორთა აზრით დაეხმარება სტუდენტებს გამოიმუშაონ მათემატიკური აპარატის გამოყენების ჩვევები შემდგომ სწავლებაში.

ავტორები გულწრფელ მადლობას უხდიან რეცენზენტებს - საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის წამყვან მეცნიერ-თანამშრომელს, პროფესორ ვ. პაატაშვილს და სტუ-ს უმაღლესი მათემატიკის №3 კათედრის დოცენტს ი. ბეჟუაშვილს.

გვინდა მადლიერებით აღვნიშნოთ სტუ-ს საავიაციო ინსტიტუტის დირექტორის, პროფესორ ს. ტეფნაძის მხარდაჭერა და ყურადღება წიგნის მომზადების ყველა ეტაპზე.

კრებულის შემდგომი გაუმჯობესებისას გავითვალისწინებთ დაინტერესებულ პირთა საქმიან შენიშვნებსა და წინადადებებს.

ავტორები

თავი I

ორი ცვლადის ფუნქცია

1.1. ფუნქციის განსაზღვრის არე

დავადგინოთ და დავშტრიხოთ $F = f(x, y)$ ფუნქციათა განსაზღვრის არეები.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. $Z = \sqrt{2x - y + 6}$

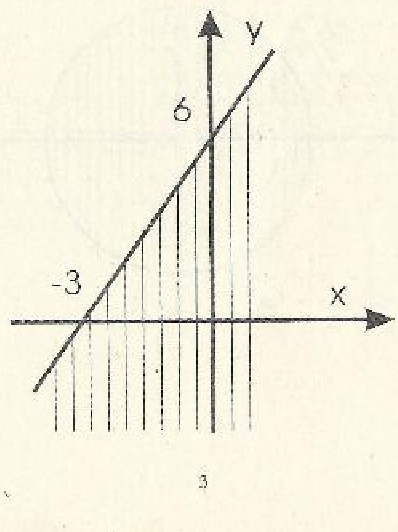
ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა იმ (x, y) წერტილთა სიმრავლე, რომლის კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას:

$$2x - y + 6 \geq 0$$

ანუ

$$y \leq 2x - 6$$

გამოვსახოთ ეს სიმრავლე სიბრტყეზე.



2. $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$

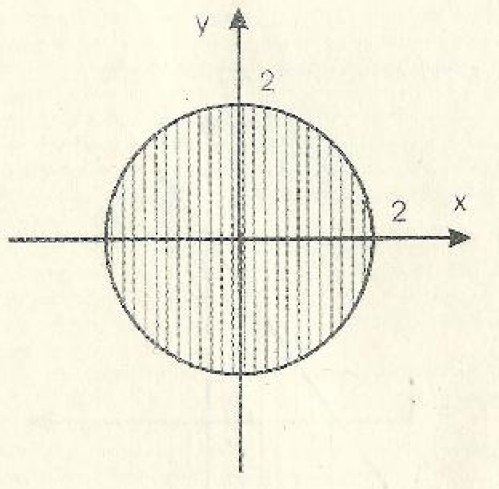
ეს ფუნქცია განსაზღვრულია მაშინ, როცა

$$4 - x^2 - y^2 > 0$$

ანუ

$$x^2 + y^2 < 4$$

გამოვსახოთ ეს სიმრავლე სიბრტყეზე



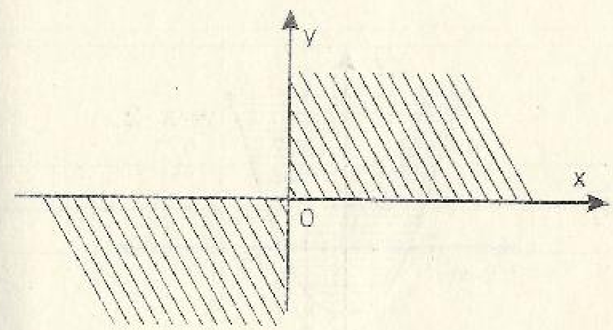
3. $z = \sqrt{xy}$

ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე მოიძებნება $xy \geq 0$ უტოლობიდან.

გვექნება:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

გამოვსახოთ ეს სიმრავლე სიბრტყეზე



4. $z = \frac{1}{\sqrt{y - x^2 + 2}}$

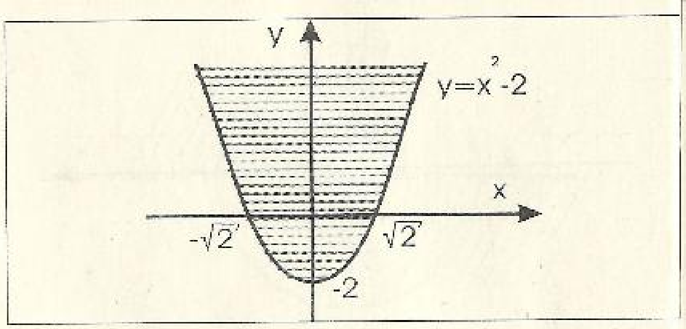
ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა

$$y - x^2 + 2 > 0$$

ანუ

$$y > x^2 - 2$$

გამოვსახოთ ეს სიმრავლე სიბრტყეზე



5. $z = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{4 - y^2}$

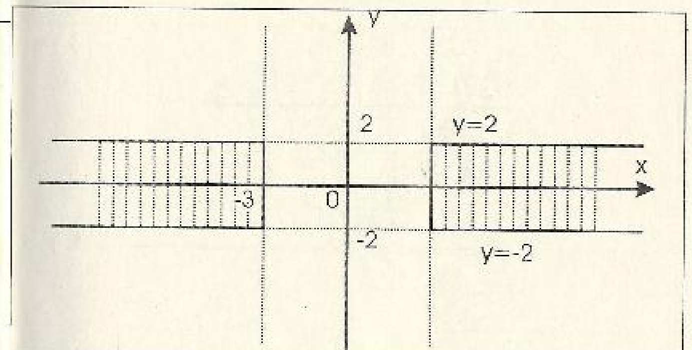
ფუნქციის განსაზღვრის არე მოიძებნება შემდეგი სისტემიდან

$$\begin{cases} x^2 - 9 \ge 0, \\ 4 - y \ge 0 \end{cases}$$

რომლის ამოხსნაც მოგვცემს

$$\begin{cases} x \le -3 \qquad x > 3 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases}$$

გამოვსახოთ მიღებული სიმრავლე სიბრტყეზე

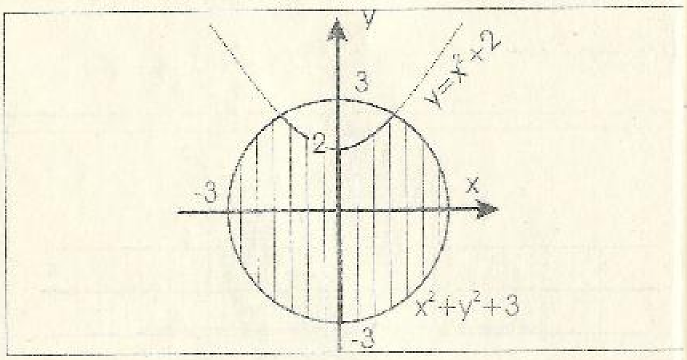


6. $z=\ln(x^2+2-y)+\sqrt{9-x^2-y^2}$

მოვძებნოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე

$$\begin{cases} x^2+2-y>0 \\ 9-x^2-y^2\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y<x^2-2 \\ x^2+y^2\le 9 \end{cases}$$

გამოვსახოთ მიღებული სიმრავლე სიბრტყეზე

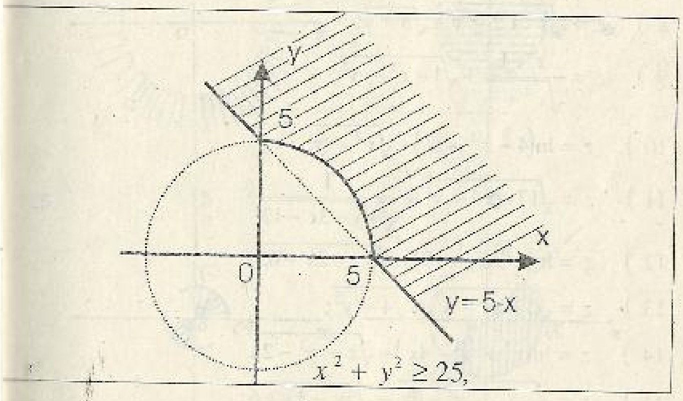


7. $z=\sqrt{x^2+y^2-25}+\sqrt{x+y-5}$

მოვძებნოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე შემდეგი სისტემიდან.

$$\begin{cases} x^2+y^2-25\ge 0, \\ x+y-5\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2\ge 25, \\ y\ge 5+x \end{cases}$$

გამოვსახოთ ეს არე სიბრტყეზე



მაგალითები

მოძებნეთ და დახაზეთ შემდეგ ფუნქციათა განსაზღვრის არეები:

1) $z=\ln\left(y-x^2+1\right);$

2) $z=\sqrt{y+3x-1};$

3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-16}};$

4) $z=\ln\left(7-x^2-y^2\right);$

5) $z=\sqrt{3-x^2-y^2}+\ln(xy);$

6) $z=\ln(x-y)+\sqrt{5-x^2-y^2};$

7) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{y-2x^2}};$

8) $z=\sqrt{x^2+2-y}+\sqrt{3-y};$

9) $z=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-y}}+\sqrt{1-x^2-y^2};$

10) $z=\ln\left(4-x^2-y^2\right)+\sqrt{x^2-y};$

11) $z=\sqrt{17-x^2-y^2}-\dfrac{1}{\sqrt{4y-3x-12}};$

12) $z=\ln\left(x^2+y^2-9\right)+\sqrt{3y-2x+6};$

13) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}+\sqrt{4-y^2};$

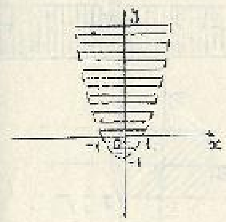
14) $z=\ln\left(x^2+y^2-4x\right)+\sqrt{x-y^2-2};$

15) $z=\sqrt{-x^2-y^2-6x}+\sqrt{5x-3y+6};$

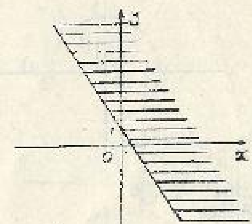
16) $z=\ln\left(y-x^2+4\right)+\sqrt{1-y^2};$

პასუხები

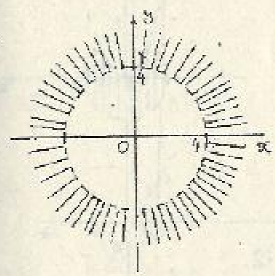
1.



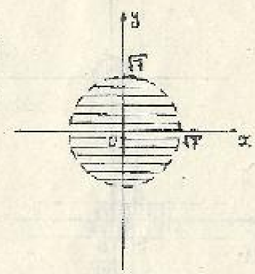
2.



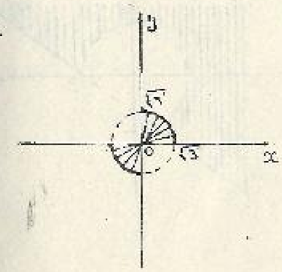
3.



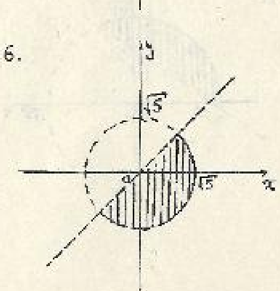
4.



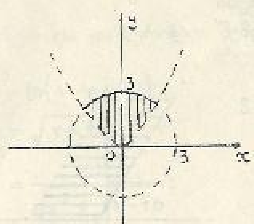
5.



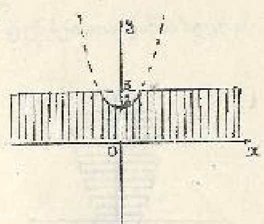
6.



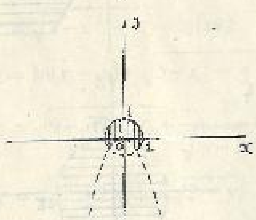
7.



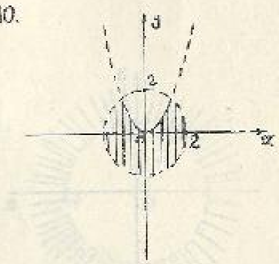
8



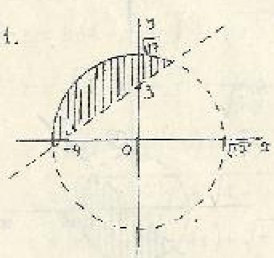
9.



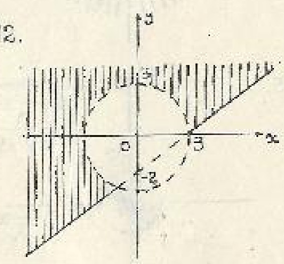
10.



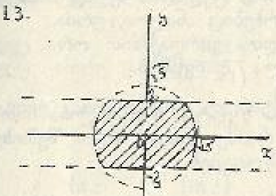
11.



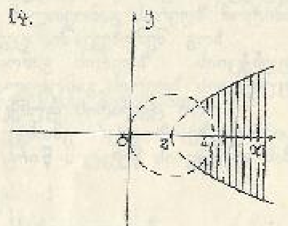
12.



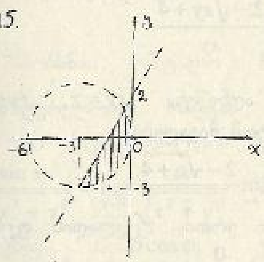
13.



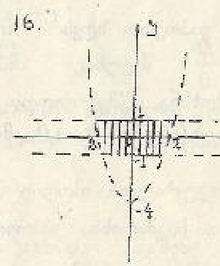
14.



15.



16.



1.2. ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

ყველა თეორემა ზღვრებზე ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის მართებულია ორი ცვლადის ფუნქციისათვისაც, ამიტომ ზღვრის გამოთვლის ხერხებიც ანალოგიურია.

ზოგ შემთხვევაში, ცვლადთა გარდაქმნით ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვრის გამოთვლა დაიყვანება ერთი ცვლადის ფუნქციის ზღვრის გამოთვლაზე.

ორი ცვლადის ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე სიბრტყეზე ზოგჯერ ქმნიდეს რაიმე წირს. ასეთ შემთხვევაში მას ფუნქციის წყვეტის წირს უწოდებენ.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. გამოთვლეთ ზღვარი $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $xy=z$, რომელსაც $x\to0, y\to0$, მაშინ $z\to0$ ამიტომ მივიღებთ

$$\lim_{z\to0}\frac{2-\sqrt{z+4}}{z}$$

ე.ი. საკმარისია გამოვთვალოთ ერთი z ცვლადის ფუნქციის ზღვარი. უშუალო ჩასმა გვაძლევს $\dfrac{0}{0}$ ტიპის განუსაზღვრელობას. ამ განუსაზღვრელობის ასაცილებლად გავამრავლოთ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი $\left(2+\sqrt{z+4}\right)$-ზე:

$$\lim_{z\to0}\frac{2-\sqrt{z+4}}{z}=\lim_{z\to0}\frac{\left(2-\sqrt{z+4}\right)\left(2+\sqrt{z+4}\right)}{z\left(2+\sqrt{z+4}\right)}=\lim_{z\to0}\frac{-z}{z\left(2+\sqrt{x+4}\right)}=$$

$$\lim_{z\to0}\frac{-1}{2+\sqrt{z+4}}=-\frac{1}{4}$$

2. გამოთვლეთ ზღვარი $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{\ln(x+y)}{(x+y-1)}$

ამოხსნა. შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი $z=x+y$, რომელსაც $x\to1$ და $y\to0$, მაშინ $z\to1$ ე.ი. ამოცანა დავიყვანეთ შემდეგი ზღვრის გამოთვლაზე

$$\lim_{z\to1}\frac{\ln z}{(z-1)}$$

თუ გამოვიყენებთ ლოპიტალის წესს, მივიღებთ

$$\lim_{z\to1}\frac{\ln z}{(z-1)}=\lim_{z\to1}\frac{(\ln z)'}{(z-1)'}=\lim_{z\to1}\frac{\frac{1}{z}}{1}=1$$

3. გამოთვლეთ ზღვარი $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

ამოხსნა. უშუალო ჩასმა გვაძლევს $\dfrac{0}{0}$ ტიპის განუსაზღვრელობას. რადგან $xy\to0$ შეგვიძლია დავწეროთ $\sin xy\sim xy$ (ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეები), მაშინ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. შემოვიღოთ პოლარული კოორდინატები: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, მაშინ პირობა $(x,y)\to(0,0)$ ტოლფასია პირობისა $\rho\to0$ და:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}=$$

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}=\lim_{\rho\to0}\rho\cos\varphi\sin\varphi=0$$

4. ვიპოვოთ ზღვარი $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

ამოხსნა. უშუალო ჩასმა გვაძლევს 1^∞ ტიპის განუსაზღვრელობას. აღვნიშნოთ $x=\frac{1}{t}$, მაშინ პირობა $x\to\infty, y\to 3$ ეკვივალენტურია პირობისა $(t,y)\to(0,3)$ და

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 3}}\frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{(t,y)\to(0,3)}\frac{\ln(1+t)}{t(1+ty)}}=e^{\lim\limits_{(t,y)\to(0,3)}\frac{1}{1+ty}}=e.$$

5. ვიპოვოთ წყვეტის წერტილთა სიმრავლე ფუნქციისა

$$z=\frac{1}{(x-4)^2+y^2}.$$

ამოხსნა. ფუნქცია განსაზღვრულია xoy სიბრტყის ყოველ წერტილში, გარდა $P(4,0)$ წერტილისა. ამიტომ $P(4,0)$ წერტილი მოცემული ფუნქციის წყვეტის წერტილია.

6. ვიპოვოთ წყვეტის წერტილთა სიმრავლე ფუნქციისა

$$z=\frac{xy+1}{x^2-y}$$

ამოხსნა. ფუნქცია კარგავს აზრს იმ წერტილებში, სადაც $x^2-y=0$, ანუ $y=x^2$. აქედან ვასკვნით, რომ ფუნქციას გააჩნია წყვეტის წირი, რომელიც წარმოადგენს $y=x^2$ პარაბოლას.

7. ვიპოვოთ წყვეტის წერტილთა სიმრავლე ფუნქციისა

$$z=\frac{1}{(x-1)(y+1)}$$

ამოხსნა. ფუნქციის მნიშვნელი უტოლდება ნულს, როდესაც $x=1$ ან $y=-1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია განიცდის წყვეტას $x=1$ და $y=-1$ წრფეების

წერტილებში. ეს წრფეები მოცემული ფუნქციის წყვეტის წირებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y^3}{x-y}$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{x}$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}$.
7. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}\left(1+\frac{y}{x}\right)^x$.
8. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}}\left(1+\frac{3x}{y}\right)^y$.
9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos xy}{\sin^2 x\,tg^2 y}$.
10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{5-\sqrt{xy+25}}$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წყვეტის წერტილთა სიმრავლეები.

11. $z=\frac{1}{x-y}$.
12. $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

13. $z=\dfrac{1}{9-x^2-y^2}$. 14. $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

15. $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$. 16. $z=\cos\dfrac{1}{xy}$.

17. $z=\dfrac{4}{(x-y)^2}$. 18. $z=\dfrac{1}{y-(x-2)^2+2}$.

19. $z=-\dfrac{1}{y-e^x}$. 20. $z=\dfrac{1}{(x-5)(y-1)}$.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი .

1. 0. 2. 3. 3. 0. 4. 0. 5. 2. 6. $\frac{1}{2}$. 7. e. 8. 9 9. $\frac{1}{2}$. 10. 10. 11. წყვეტის წირია $y=x$ წრფე. 12. წყვეტის წერტილია (0;0). 13. წყვეტის წირია $x^2+y^2=9$ წრეწირი. 14. წყვეტის წირებია $y=x$ და $y=-x$ წრფეები. 15. წყვეტის წერტილია (0;0). 16. წყვეტის წირებია $x=0$ და $y=0$ წრფეები. 17. წყვეტის წირია $y=x$ წრფე. 18. წყვეტის წირია $y=(x-2)^2-2$ პარაბოლა. 19. წყვეტის წირია $y=e^x$ ექსპონენტა. 20. წყვეტის წირებია $x=5$ და $y=1$ წრფეები.

1.3. ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები და სრული დიფერენციალი. მაღალი რიგის წარმოებულები და დიფერენციალები

1. $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო ნაზრდები x-ით და y-ით და მისი სრული ნაზრდი (x,y) წერტილში ეწოდება შესაბამისად შემდეგ სხვაობებს:

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$
$$\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y),$$

(1.3.1)

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

2. $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები (x,y) წერტილში x-ით და y-ით ეწოდება შესაბამისად შემდეგ ზღვრებს (თუ ეს ზღვრები არსებობენ):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

ამ განმარტებების თანახმად ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულის მოსაძებნად ერთ-ერთი ცვლადით, შეგვიძლია ვისარგებლოთ გაწარმოების ჩვეულებრივი ფორმულებით, ვინაიდან მეორე ცვლადი განიხილება როგორც მუდმივი სიდიდე.

3. $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები თავის მხრივ წარმოადგენენ ორი x,y ცვლადის ფუნქციებს; მათ კერძო წარმოებულებს $z=f(x,y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები ეწოდებათ. ასეთი წარმოებულები ოთხი სახისაა:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \text{ან} \quad z''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \qquad \text{ან} \quad z''_{yy} \qquad (1.3.2.)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \qquad \text{ან} \quad z''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}, \qquad \text{ან} \quad z''_{yx}$$

4. $z=f(x,y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი (x,y) წერტილში გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad (1.3.3.)$$

ხოლო მისი მეორე რიგის დიფერენციალი ფორმულით

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

(1.3.4.)

ეს ფორმულები შეიძლება ჩაიწეროს სიმბოლური სახით:

$$dz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)z,$$

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$$

და ზოგადად

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$

სადაც იგულისხმება, რომ მარჯვენა ნაწილი უნდა გაიშალოს ბინომიალური კანონით.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. ვიპოვოთ $z=xy^2$ ფუნქციის კერძო და სრული ნაზრდები (1;2) წერტილში, თუ $\Delta x=0,1$ და $\Delta y=0,2$.

ამოხსნა. (1.3.1) ფორმულებიდან ვპოულობთ

$$\Delta_x z=f(1,1;2)-f(1;2)=(x+\Delta x)^2y^2-xy^2=(1,1)^2\times 4-1\times 4=0,4.$$

$$\Delta_y z=f(1;2,2)-f(1;2)=x(y+\Delta y)^2-xy^2=1\times(2,2)^2-1\times 2^2=0,84.$$

$$\Delta z=f(1,1;2,2)-f(1;2)=(x+\Delta x)(y+\Delta y)^2-xy^2=1,1\times(2,2)^2-1\times 2^2=$$

2. ვიპოვოთ ფუნქციის კერძო წარმოებულები თუ

$$z=x^2y+\sin(x^2+2y^2)$$

ამოხსნა კერძო წარმოებული — z'_x ვიპოვოთ როგორც ამ ფუნქციის წარმოებული x-ით იმ პირობით, რომ y მუდმივი სიდიდეა

$$z'_x=2xy+\cos(x^2+2y^2)2x,$$

ანალოგიურად ვიპოვოთ z'_y იმ პირობით, რომ x მუდმივია

$$z'_y=x^2+\cos(x^2+2y^2)4y.$$

3. ვიპოვოთ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებული თუ

$$z=\sin(x^2+y^2)$$

ამოხსნა. ვიპოვოთ კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\cos(x^2+y^2).$$

ვიპოვოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\cos\left(x^2+y^2\right)\right) = 2\cos\left(x^2+y^2\right) - 4x^2\sin\left(x^2+y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y\cos\left(x^2+y^2\right)\right) = 2\cos\left(x^2+y^2\right) - 4y^2\sin\left(x^2+y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\cos\left(x^2+y^2\right)\right) = -4xy\sin\left(x^2+y^2\right)$$

4. დავამტკიცოთ იგივეობა $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2,$ თუ $z = \ln\left(x^2+xy+y^2\right)$

ვიპოვოთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y+x}{x^2+xy+y^2}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები მოცემულ ტოლობაში

$$x\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2} + y\frac{2y+x}{x^2+xy+y^2} = 2$$

$$\frac{2(x^2+xy+y^2)}{(x^2+xy+y^2)} = 2$$

$$2 = 2$$

იგივეობა დამტკიცებულია.

5. ვიპოვოთ ფუნქციის სრული და მეორე რიგის დიფერენციალები, თუ

$$z = e^{xy}$$

ამოხსნა. ვიპოვოთ კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (1.3.3)-ში

$$dz = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy.$$

ვიპოვოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{xy}\right) = y^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{xy}\right) = x^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{xy}\right) = (1+xy)e^{xy}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (1.3.4.)-ში

$$d^2z = e^{xy}\left(y^2dx^2 + 2(1-xy)dxdy + x^2dy^2\right)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1. იპოვეთ ფუნქციის კერძო და სრული ნაზრდები (1.2)წერტილში, თუ

$$z = xy, \quad \Delta x = 0{,}2, \quad \Delta y = 0{,}3.$$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების კერძო წარმოებულები:

2. $z = x^2\sin^2 y$

3. $z = x^{y^2}$

4. $z = \ln\sin(x-2y)$

5. $z = e^{x\sin\frac{y}{x}}$

6. დაამტკიცეთ იგივეობა

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z, \qquad \text{თუ} \qquad z = xy + xe^{\frac{y}{x}}.$$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

7. $z = 5x^4 - 3xy^2 + 8x^2 - xy + 5$

8. $z = \dfrac{y^2}{2x + y}$

9. დაამტკიცეთ იგივეობა

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{თუ} \qquad z = arctg\frac{y}{x}.$$

10. იპოვეთ ფუნქციის სრული ნაზრდისა და სრული დიფერენციალის სხვაობა (1.2) წერტილში, თუ

$$z = \frac{y}{x}, \quad \Delta x = 0.1, \quad \Delta y = 0.2.$$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების სრული დიფერენციალები

11. $z = x^2 y^3$ 12. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

13. $z = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)$ 14. $z = \sin^2 x + \cos^2 y$

15. $z = e^{x^2 + y^2}$ 16. $z = arctg\frac{y}{x} + arctg\frac{x}{y}$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების მეორე რიგის დიფერენციალები

17. $z = 3x^2 y - 2xy + y^2 - 1$ 18. $z = x(\ln y - \ln x)$

19. $z = \ln(x - y)$ 20. $z = x\sin^2 y$

პასუხები

1. 0,76 2. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin^2 y, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 \sin 2y.$

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 x^{y^2 - 1}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^{y^2}\, 2y\ln x.$

4. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ctg(x - 2y), \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2ctg(x - 2y).$

5. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2y}{x\sqrt{x^4 - y^2}} e^{\arcsin\frac{y}{x^2}}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{x^4 - y^2}} e^{\arcsin\frac{y}{x^2}}.$

7. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 60x^2 + 16, \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6x, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -6y - 1.$

8. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{8y^2}{(2x + y)^3}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{8x^2}{(2x + y)^3}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{-8xy}{(2x + y)^3}.$

10. $dz - \Delta z = 0{,}004$. 11. $dz = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy.$

12. $dz = 3(x^2 - y)dx + 3(y^2 - x)dx.$ 13.

$dz = \dfrac{x}{x^2 + y^2}dx + \dfrac{y}{x^2 + y^2}dy.$

14. $dz = \sin 2x dx - \sin 2y dy.$ 15. $dz = 2e^{x^2 - y^2}(xdx + ydy).$

16. $dz = 0.$

17. $d^2 z = 6y dx^2 + 4(3x - 1)dxdy + 2dy^2$. 18.

$d^2 z = -\dfrac{(ydx - xdy)^2}{xy^2}.$

19. $d^2 z = -\dfrac{dx^2 - 2dxdy + dy^2}{(x - y)^2}$. 20.

$d^2 z = 2\sin 2y dxdy + 2x\cos 2y dy^2.$

1.4. რთული ფუნქციის წარმოებული. სრული წარმოებული

თუ მოცემულია ორი ცვლადის $z = F(x,y)$ ფუნქცია, სადაც $x = f(u,v)$ $y = \varphi(u,v)$ და თუ F, f და φ ფუნქციები დიფერენცირებადია, მაშინ კერძო წარმოებულებ[ი] $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$ მოიძებნებიან ფორმულებით:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned} \qquad (1.4.1.)$$

თუ $x = \varphi(t)$ და $y = \vartheta(t)$, მაშინ $z = f(\varphi(t), \vartheta(t))$ ფუნქცია იქნება t-ს მიმართ რთული ფუნქცია და ე.წ. სრული წარმოებულს $\frac{dz}{dt}$-ს ვპოულობთ ფორმულით:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (1.4.2)$$

თუ $t = x$ და $y = \varphi(x)$, მაშინ (1.4.2)-დან მივიღებთ:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad (1.4.3)$$

ბევრ შემთხვევაში შეგვიძლია y-ის მნიშვნელობ[ა] თავიდანვე ჩავსვათ მოცემულ ფუნქციაში და მოვახდინოთ ერთ[ი] ცვლადის რთული ფუნქციის გაწარმოება, მაგრამ ასეთი ჩასმ[ა] ხშირად ართულებს ფუნქციის სახეს და არ არი[ს] რეკომენდირებული ამ წესის გამოყენება, უფრო მეტიც, რო[ცა] გამოვიყენებთ (1.4.2) ფორმულას, შემდეგში არ მოგვიწევს x-ი[სა] და y-ის მნიშვნელობების შეტანა.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ $z = 2^{x^2+y^2}$ ფუნქციის წარმოებული $\frac{dz}{dx}$, თუ $y = \cos^2 x$-ს.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (1.4.3) ფორმულა. პირველ რიგში მოვძებნოთ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, შემდეგ $\frac{dy}{dx}$ წარმოებული, მათი მნიშვნელობები ჩავსვათ (1.4.3)-ში, ამასთან ბოლოს შედეგში შევიტანოთ $y = \cos^2 x$-ის მნიშვნელობა, რათა გამოსახულება დამოკიდებული იყოს მხოლოდ x არგუმენტზე.

$$\frac{dz}{dx} = 2^{x^2+y^2}\ln 2\cdot 2x, \qquad \frac{\partial t}{\partial y} = 2^{x^2+y^2}\ln 2\cdot 2y,$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos(-\sin x) = -\sin 2x$$

$$\frac{dz}{dx} = 2^{x^2+y^2}\ln 2\cdot 2x + 2^{x^2+y^2}\ln 2\cdot 2y(-\sin 2x) =$$

$$2^{x^2+y^2}\ln 2\cdot(2x - 2\cos^2 x\sin 2x).$$

2. $z = x^4 + y^3$, $x = t^3$, $y = t^4$. მოვნახოთ $\frac{dz}{dt}$.

ვპოულობთ $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$, $\frac{dx}{dt} = 3t^2$, $\frac{dy}{dt} = 4t^3$.

ახლა გამოვიყენოთ (1.4.2) ფორმულა

$$\frac{dz}{dt} = 4x^3\cdot 3t^2 + 3y^2\cdot 4t^3 = 4t^9\cdot 3t^2 + 3t^8\cdot 4t^3 = 12t^{11} + 12t^{11} = 24t^{11}.$$

3. $z = x\sin\frac{x}{y}$, $x = 1 + 3t$, $y = \sqrt{1+t^2}$ ვიპოვოთ $\frac{dz}{dt}$.

პასუხები:

1. $\frac{dz}{dx}=\frac{3}{x}-\sin x-\frac{3(3x^2+2)}{x^3+2x}$. 2. $\frac{dz}{dx}=\frac{1+\ln x}{x^3\ln^2 x-2x\ln x+2}$.

3. $\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x^2+4}$. 4. $\frac{dz}{dx}=-\frac{1+\ln x}{x^2\ln^2 x+2x\ln x+2}$.

5. $\frac{dz}{dt}=4t^3\sin\frac{t^4}{t^3-1}+t^3\cos\frac{t^3}{t+1}\cdot\frac{4t^9-3t^5+4t^3}{(t^3+1)^2}$.

6. $\frac{dz}{dt}=4t^3-9t^2+10t-3$. 7. $\frac{dz}{dt}=9t^8-11t^{10}+3t^2$.

8. $\frac{dz}{dt}=\sin(6t^2+4t^3-16t^2)\cdot(32t-24t^3-12t^2)$.

9. $\frac{dz}{dt}=e^{(t+\ln t)\cos^2 t}\cdot\left(\frac{(t+1)\cos^2 t}{t}-(t+\ln t)\sin 2t\right)$

10. $\frac{dz}{dt}=\frac{t}{\sqrt{\sin^2 t-t^4}}(2-tctgt)$.

11. $\frac{dz}{dt}=t^2\sin^2 t(3\sin t+4\cos t)$.

12. $\frac{\partial Z}{\partial U}=\frac{24(4=v)(24+v)}{v^2}$, $\frac{\partial Z}{\partial V}=-\frac{24^2(4+v)}{v^3}$.

13. $\frac{\partial Z}{\partial U}=24\cos 2v$, $\frac{\partial Z}{\partial V}=-24^2\sin 2v$.

14. $\frac{\partial Z}{\partial U}=\frac{u\cos^2 v-v^2\sin u\cos u}{\sqrt{u^2\cos^2 v+v^2\cos^2 u}}$, $\frac{\partial Z}{\partial V}=\frac{v\cos^2 u-u^2\sin v\cos v}{\sqrt{u^2\cos^2 v+v^2\cos^2 u}}$.

15. $\frac{\partial Z}{\partial U}=1$, $\frac{\partial Z}{\partial V}=0$.

16. $\frac{\partial Z}{\partial U}=3u^2\sin v\cos v(\cos v-\sin v)$,

$\frac{\partial Z}{\partial V}=u^3(\sin v+\cos v)(1-\sin v\cos v)$.

17. $\frac{\partial Z}{\partial U}=\frac{2(u-2v)(3v-U)}{(v+2u)^2}$, $\frac{\partial Z}{\partial V}=\frac{(2v-u)(4v-2u^2+u-2v)}{(v+2u)^2}$.

18. $\frac{\partial Z}{\partial U}=4u^3v^2+v$, $\frac{\partial Z}{\partial V}=2u^4v+u$.

1.5. არაცხადი ფუნქციის გაწარმოება

ვთქვათ, უწყვეტი y ფუნქცია მოცემულია არაცხადი განტოლებით

$$F(x,y)=0 \qquad (1.5.1)$$

სადაც $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$ და $F'_y(x,y)$ რაიმე D არეში უწყვეტი ფუნქციებია და, რომ D არის ყოველი $(x;y)$ წერტილი აკმაყოფილებს (1.5.1) განტოლებას, ამასთან $F'_y(x,y)\neq 0$, მაშინ y ფუნქციის წარმოებული x-ის მიმართ გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'x(x,y)}{F'y(x,y)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial X}}{\frac{\partial F}{\partial Y}} \cdots\cdots (1.5.2)$$

არაცხადი ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულები კი გამოითვლება (1.5.2.) ტოლობის მიმდევრობითი გაწარმოებით, ამასთან ყოველთვის მხედველობაში მიიღება, რომ y არის x-ის ფუნქცია.

ანალოგიურად, თუ არაცხადი $z = z(x, y)$ ფუნქცია მოცემულია $F(x, y, z) = 0$ განტოლებით,სადაც $F(x, y, z)$ არის x, y და z ცვლადების წარმოებადი ფუნქცია და $F'_z(x, y, z) \neq 0$, მაშინ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \qquad (1.5.3)$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1, განტოლება $x^2 + y^2 - 1 = 0$ განსაზღვრავს y ს როგორც x ცვლადის არაცხად ფუნქციას. მოვძებნოთ მისი წარმოებული.

ამოხსნა. მოცემულ შემთხვევაში $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ მისი წარმოებული გამოითვლება (1.5.2.) ფორმულით. მოვძებნოთ ამ ფუნქციის კერძო წარმოებულები x-ით და y-ით:

$$F'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 2x; \quad F'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 2y.$$

მაშინ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

2. განტოლება $e^y - e^x + xy = 0$ განსაზღვრავს y-ს, როგორც x-ის არაცხად ფუნქციას. მოვნახოთ მისი წარმოებული.

ამოხსნა: მოცემულ შემთხვევაში $F(x, y) = e^y - e^x + xy$, მაშინ

$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x$ და (1.5.2.) ფორმულის ძალით

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}$$

3. განტოლება $\sqrt{x^2 + 3y^2} = 5 - y^2x^3$ განსაზღვრავს y-ს, როგორც x-ის არაცხად ფუნქციას. ვიპოვოთ მისი წარმოებული.

ამოხსნა. $F(x, y) = y^2x^3 + \sqrt{x^2 + 3y^2} - 5.$

ისევ გამოვიყენოთ (1.5.2.) ფორმულა.

$F'_x = 3x^2y^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}; \quad F'_y = 2x^3y + \frac{3y}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$, მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2y^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}}{2x^3y + \frac{3y}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}} = \frac{3x^5y^4 - 15x^2y^2 - x}{10x^3y - 2x^6y^3 + 3y}$$

(აქ გამოვიყენეთ, რომ $\sqrt{x^2 - 3y^2} = 5 - y^2x^3$)

4. $z = z(x, y)$ ფუნქცია არაცხადადაა მოცემული განტოლებით:

$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz = 4 - x$. მოვნახოთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ და მათი მნიშვნელობები წერტილში $M_0(1;2;1)$

ამოხსნა: მოცემული განტოლებისათვის

$F(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4$

გამოვიყენოთ (1.5.3) ფორმულები

$F'_x = 8x + y + 1, \qquad F'_y = 4y + x - z, \qquad F'_z = -6z - y,$

მაშინ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8x + y + 1}{6z + y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y + x - z}{6z + y}.$$

მოვძებნოთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$-ის მნიშვნელობები $M_0(1;2;1)$ წერტილში

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;2;1)}=\frac{8+2+1}{6+2}=\frac{11}{8},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;2;1)}=\frac{8+1-1}{6+2}=1.$$

5. ვიპოვოთ $xe^y+ye^z+ze^x=a$ ტოლობით მოცემული $z=z(x,y)$ არაცხადი ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ (1.5.3) ფორმულები. ამ შემთხვევაში

$$F(x,y,z)=xe^y+ye^z+ze^x-a,$$

$$F'_x=e^y+ye^z+ze^x,\quad F'_y=xe^y+e^z,\quad F'_z=e^x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{e^y+ye^z+ze^x}{e^x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{xe^y+e^z}{e^x}.$$

6. ვიპოვოთ $z=x+arctg\frac{y}{z-x}$ ტოლობით მოცემული $z=z(x,y)$ არაცხადი ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: მოცემულ შემთხვევაში

$$F(x,y,z)=z-x-arctg\frac{y}{z-x},$$

$$F'_x=-1-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{z-x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{(z-x)^2}\cdot(-1)\right)=\frac{-(z-x)^2-y^2-y}{(z-x)^2+y^2},$$

$$F'_y=-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{z-x}\right)^2}\cdot\frac{1}{z-x}=-\frac{z-x}{(z-x)^2+y^2},$$

$$F'_z=1-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{z-x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{(z-x)^2}\right)=\frac{(z-x)^2+y^2+y}{(z-x)^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-(z-x)^2-y^2-y}{(z-x)^2+y^2}:\frac{(z-x)^2+y^2+y}{(z-x)^2+y^2}=1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-z}{(z-x)^2+y^2}:\frac{(z-x)^2+y^2+y}{(z-x)^2+y^2}=\frac{x-z}{(z-x)^2+y^2+y}.$$

მაგალითები

I. განტოლება $F(x,y)=0$ განსაზღვრავს y-ს როგორც x ცვლადის არაცხად ფუნქციას. მოვნახოთ მისი წარმოებული

1. $x+y=e^{x-y}$.
2. $ye^x+e^y=0$.
3. $\ln x=x^3y^2-5\ln y$.
4. $tgxy=x^3y^2+\sqrt{y}$.
5. $y=x+a\sin y$.
6. $arctg\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.
7. $xy+1=\ln\left(e^{\frac{x}{y}}+e^{-\frac{y}{x}}\right)$.
8. $e^{5x}+e^{-3y}=2y^3$.
9. $e^{2y}=6x^3y^2$.
10. $x^2-2y^2+3x^2y-y^2\sqrt{x}+y=0$.

II. z ფუნქცია არაცხადადაა მოცემული განტოლებით $F(x,y,z)=0$. მოძებნეთ ამ ფუნქციის კერძო წარმოებულები და მათი მნიშვნელობები $M_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილში.

11. $5x^2+3y^2-2z^2+4xz=0,\quad M_0(1;2;3).$
12. $3xy-5\ln z+4\sin x=0,\quad M_0(0;2;2).$
13. $3x^2z-5z^2y+4xz+y^3=0,\quad M_0(0;2;3).$
14. $x^2-5xy=z^3-4\ln z+2,\quad M_0(1;2;1).$
15. $\sqrt{x^2-3y^2}=z^2-3xz+y^2,\quad M_0(5;1;0).$
16. $\sqrt{3x^2-5xy}=z^3-4yz^2-5x;\quad M_0(2;1;1).$
17. $e^{y^2+2z}=3x^2-5xy;\quad M_0(1;1;3).$
18. $tg(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{x}-5xz;\quad M_0(1;0;0).$
19. $xy^2-5xz+4z^3=3xy-5x^2y^3+z^4;\quad M_0(1;1;1).$
20. $x^3-4xy+5xz-z^2+2yz=2;\quad M_0(1;2;1).$

პასუხები:

1. $y'=\frac{x+y-1}{x+y+1}.$ 2. $y'=\frac{y}{y-1}.$ 3. $y'=\frac{x(5-2x^2y^2)}{y(2x^2y^2-5)}.$

4. $y'=-\frac{y-3x^2y^2\cos^2 xy}{x-(2x^3y+\frac{1}{2\sqrt{y}})\cos^2 xy}.$

5. $y'=\frac{1}{1-a\cos y}.$ 6. $y'=\frac{x+y}{x-y}.$

7. $y'=-\frac{y}{x}.$ 8. $y'=\frac{5e^{5x}-ye^{-xy}}{xe^{-xy}+6y^2}.$ 9. $y'=\frac{18x^2y^2}{7e^{7y}-12x^3y}.$

10. $y'=\frac{2x-6xy-\frac{y^2}{2\sqrt{x}}}{4y-3y^2-2\sqrt{x}y-1}.$

11. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{5x+2z}{2x-2z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3y}{2x-3z},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;2;3)}=-\frac{11}{4},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;2;3)}=-2.$

12. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z(3y+4\cos x)}{5},$
$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3xy}{5},\ \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0;2;2)}=4,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0;2;2)}=0.$

13. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4z-6xz}{3x^2-10zy+4x}.$
$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3y^2-5z^2}{3x^2-10zy+4x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0;2;3)}=-\frac{1}{5},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0;2;3)}=\frac{11}{20}.$

14. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z(2y-2x)}{4-3z^3},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{5xz}{4-3z^3},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;2;1)}=2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;2;1)}=5.$

15. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x+3z\sqrt{x^2-3y^2}}{(3x-2z)\sqrt{x^2-3y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3y+3y^2\sqrt{x^2-3y^2}}{(3x-2z)\sqrt{x^2-3y^2}},$
$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(5;1;0)}=\frac{1}{3\sqrt{22}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(5;1;0)}=\frac{1+\sqrt{22}}{5\sqrt{22}}.$

16. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{6x-5y+10\sqrt{3x^2-5xy}}{2\sqrt{3x^2-5xy}(-3z^2+8yz)},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-5x+8z^2\sqrt{3x^2-5xy}}{2\sqrt{3x^2-5xy}(-3z^2-8yz)},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2;1;1)}=\frac{7+10\sqrt{2}}{10\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2;1;1)}=\frac{-5+4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}.$$

17. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{9x^2-2xe^{x^2+2z}}{2e^{x^2+2z}+5y}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-5z}{2e^{x^2+2z}+5y},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;1;3)}=\frac{9-2e^7}{2e^7+5},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;1;3)}=-\frac{15}{2e^7+5}.$$

18. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x^3+1+(1+5z)(x^2+y^2+z^2)^2}{2z+5x\left[1+(x^2+y^2+z^2)^2\right]},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{2z+5x\left[1+(x^2+y^2+z^2)^2\right]},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;0;0)}=\frac{2}{5},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;0;0)}=0.$$

19. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2-5z-3y-10xy^3}{5x-8z+4z^3},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xy-3x+15x^3y^2}{5x-8z+4z^3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;1;1)}=3,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;1;1)}=14.$$

20. $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3x^2-4y+5z}{5x-2z+2y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2z-4y}{5x-2z+2y},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;2;1)}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;2;1)}=\frac{6}{7}.$$

1.6. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი

ვთქვათ, ზედაპირი მოცემულია განტოლებით $z=f(x,y)$, მაშინ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილზე (სადაც $z_0=f(x_0,y_0)$) გამავალი მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებებს შესაბამისად აქვთ შემდეგი სახე

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0), \quad (1.6.1.)$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \quad (1.6.2)$$

თუ ზედაპირის განტოლება მოცემულია არაცხადი ფუნქციის სახით $F(x,y,z)=0$, მაშინ ამ ზედაპირზე მდებარე $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილში მხები სიბრტყის განტოლებას აქვს სახე:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+$$
$$+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0, \quad (1.6.3)$$

ნორმალი კი განისაზღვრება განტოლებით:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}, \quad (1.6.4)$$

თუ ზედაპირის რომელიმე $M(x;y;z)$ წერტილში $F'_x=F'_y=F'_z=0$, მაშინ M წერტილს განსაკუთრებული წერტილი ეწოდება და ზედაპირს ამ წერტილში არ ექნება მხები სიბრტყე და მაშასადამე, ნორმალიც.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. დავწეროთ $z=2x^2+y^2$ ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები წერტილში, რომლის აბსცისა $x=1$, ხოლო ორდინატი $y=1$-ს.

ამოხსნა: პირველ რიგში გამოვთვალოთ შეხების წერტილის აპლიკატა. ჩავსვით ზედაპირის განტოლებაში $x=1$ და $y=1$, მივიღებთ $z=2\cdot1^2+1^2=3$, მაშასადამე შეხების წერტილია $M_0(1;1;3)$. შემდეგ გამოვთვალოთ კერძო წარმოებულები f'_x და f'_y და მათი მნიშვნელობები M_0 წერტილში, ბოლოს გამოვიყენოთ (1.6.1) და (1.6.2) ფორმულები

$$f'_x=4x,\qquad f'_y=2y,$$

$$f'_x\Big|_{(1;1)}=4,\quad f'_y\Big|_{(1;1)}=2.$$

$z-3=4(x-1)+2(y-1)$ ანუ $4x+2y-z-3=0$ (მხების განტოლება)

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-1}.\qquad \text{(ნორმალის განტოლება)}$$

2. მოვძებნოთ $x^2+y^2-z^2=0$ ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $N(0;1;1)$ წერტილში.

ამოხსნა. აქ $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$,

$$F'_x=2x,\quad F'_y=2y,\quad F'_z=-2z.$$

$$F'_x\Big|_{(0;1;1)}=0,\quad F'_y\Big|_{(0;1;1)}=2,\quad F'_z\Big|_{(0;1;1)}=-2.$$

(1.6.3) ფორმულის გამოყენებით მხები სიბრტყის განტოლება იქნება

$2(y-1)-2(z-1)=0$ ანუ $y-z=0$.

(1.6.4) ფორმულის ძალით კი ნორმალის განტოლება იქნება

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2}.$$

შენიშვნა: მოცემული ზედაპირისათვის $O(0;0;0)$ წერტილში $F'_x=F'_y=F'_z=0$, ე.ი. O წერტილი განსაკუთრებული წერტილია და ზედაპირს ამ წერტილში არ გააჩნია მხები სიბრტყე და ნორმალი.

3. შევადგინოთ მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$ ზედაპირისა $M_0(3;-1;5)$ წერტილში.

ამოხსნა: აქ ზედაპირის განტოლება მოცემულია არაცხადი სახით, ამასთან:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5,$$

$$F'_x=2x-2,\quad F'_y=2y+4,\quad F'_z=2z-6,$$

$$F'_x\Big|_{(3;-1;5)}=2\cdot3-2=4,\quad F'_y\Big|_{(3;-1;5)}=2\cdot(-1)+4=2,$$

$$F'_z\Big|_{(3;-1;5)}=2\cdot5-6=4.$$

ვისარგებლოთ (1.6.3) და (1.6.4) ფორმულებით:

$$4(x-3)+2(y+1)+4(z-5)=0,$$

$2x-y+2z-15=0$, (მხების განტოლება)

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-5}{4}.\qquad \text{(ნორმალის განტოლება)}$$

მაგალითები

შევადგინოთ ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები მოცემულ წერტილში:

1. $z=5xy^4-2y^2-3$, $M_0(1;1;0)$.
2. $z=4x^2-9y^2$, $M_0(1;1;-5)$.
3. $z=4x^2y-3x^2-5$, $M_0(1;2;0)$.
4. $z=3xy^2+x^3-5$, $M_0(2;0;3)$.
5. $z=xy^2+y^4-5$, $M_0(1;1;-3)$;
6. $z=e^{x\cos y}$, $M_0(1;0;e)$.
7. $z=e^{y\sin x}$, $M_0\left(\frac{\pi}{2};-2;\frac{1}{e^2}\right)$
8. $z=8\sin2x\cos3y$, $M_0\left(\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{12};4\right)$

9. $z=6\sin 3x\cos 2y,\quad M_0\left(\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};3\right)$

10. $z=8tg3xctg2x,\quad M_0\left(\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};8\right)$.

11. $z^3y^2x+5y^2=1,\quad M_0\left(-\frac{1}{2};-1;2\right)$

12. $y^2(x-z)+z^2=3,\quad M_0(3;1;1)$.

13. $x(y+z^2)-7y=4,\quad M_0(1;0;2)$.

14. $yz^2+xz-zx-6,\quad M_0(2;3;0)$.

15. $2x^2+3y^2-4z^2=9,\quad M_0(1;-1;1)$.

16. $x^2+y^2-z^2=0,\quad M_0(34;5)$.

პასუხები:

1. $5x+11y-z=16,\quad \frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{11}=\frac{z}{-1}$.

2. $8x-18y-z+5=0,\quad \frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{-18}=\frac{z+5}{-1}$.

3. $4x+4y-z=12,\quad \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{-1}$.

4. $12x-z=21,\quad \frac{x-2}{12}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{-1}$.

5. $x+6y-z=10,\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+3}{-1}$.

6. $ex-z+e=1,\quad \frac{x-1}{e}=\frac{y}{0}=\frac{z-e}{-1}$.

7. $y-e^2z-3=0,\quad \frac{x-\frac{\pi}{2}}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-e^{-2}}{-e^2}$.

1.7. ლოკალური ექსტრემუმები

1. $z=f(x,y)$ ფუნქციას (x_0,y_0) წერტილში გააჩნია ლოკალური მაქსიმუმი (მინიმუმი), თუ არსებობს ამ წერტილის მიდამო, რომლის ყოველი (x,y) წერტილისათვის $((x,y)\neq(x_0,y_0))$ სრულდება უტოლობა

$f(x,y)<f(x_0,y_0)$ $\qquad (f(x,y)>f(x_0,y_0))$,

ანუ რაც იგივეა

$\Delta z<0 \quad (\Delta z>0)$

მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილებს უწოდებენ ექსტრემუმის წერტილებს. თუ $z=f(x,y)$ ფუნქციას გააჩნია ექსტრემუმი (x_0,y_0) წერტილში, მაშინ ორივე კერძო წარმოებული, თუ ისინი არსებობენ, ნულის ტოლია (სტაციონარული წერტილები) ან ერთი მაინც არ არსებობს ამ წერტილში (ფუნქციის კრიტიკული წერტილები).

2. $z=f(x,y)$ ფუნქციას გააჩნია ექსტრემუმი (x_0,y_0) წერტილში, თუ მეორე რიგის დიფერენციალი $d^2z((x_0,y_0),dx,dy)$, როგორც dx და dy-ის ფუნქცია ინარჩუნებს ნიშანს.მათი არაერთდროულად ტოლი მნიშვნელობებისათვის. კერძოდ გააჩნია მაქსიმუმი,თუ $d^2z<0$ და მინიმუმი, თუ $d^2z>0$.

3. ვთქვათ, (x_0,y_0) სტაციონარულ წერტილში $z=f(x,y)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულები უწყვეტი ფუნქციებია და

$$\Delta=-\begin{vmatrix} f''_{x^2}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0)\\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{y^2}(x_0,y_0)\end{vmatrix}.$$

მაშინ:

ა) თუ $\Delta<0$, ფუნქციას გააჩნია ექსტრემუმი, კერძოდ მაქსიმუმი, როცა $f''_{x^2}(x_0,y_0)<0$ და მინიმუმი, როცა $f''_{x^2}(x_0,y_0)>0$.

ბ) თუ $\Delta > 0$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია;

გ) თუ $\Delta = 0$, ექსტრემუმის საკითხი საჭიროებს დამატებით გამოკვლევას.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. ვიპოვოთ $z = \dfrac{x^2}{2} - xy - 2x + 5y$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი.

ამოხსნა. მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები. ამისათვის გავუტოლოთ ნულს პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და ამოვხსნათ მიღებული განტოლებათა სისტემა x და y ცვლადების მიმართ, გვექნება

$$\begin{cases} z'_x = x - y - 2 = 0, \\ z'_y = -x + 2y + 5 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -3. \end{cases}$$

ფუნქციის ექსტრემუმის დასადგენად გამოვიყენოთ მესამე საკმარისი პირობა. ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები და გამოვთვალოთ მათი მნიშვნელობები (-1;-3) წერტილში.

$z''_{x^2} = 1, \quad z''_{xy} = -1, \quad z''_{y^2} = 2.$

შევამოწმოთ ექსტრემუმის საკმარისი პირობები.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

ხოლო $z''_{x^2} = 1 > 0$. მაშასადამე, მოცემულ ფუნქციას (-1;-3) წერტილში გააჩნია მინიმუმი

$z_{min} = z(-1;-3) = 6{,}5.$

2. ვიპოვოთ $z = x + y + \dfrac{25}{x} + \dfrac{4}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი.

ამოხსნა. მოვძებნოთ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები შემდეგი სისტემიდან

$$\begin{cases} z'_x = 1 - \dfrac{25}{x^2} = 0, \\ z'_y = 1 - \dfrac{4}{y^2} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 5, \\ y = \pm 2. \end{cases}$$

ამგვარად, მივიღეთ ოთხი სტაციონარული წერტილი (5;2), (-5;-2), (5;-2) და (-5;2). ახლა მოვძებნოთ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები და გამოვთვალოთ მათი მნიშვნელობები თითოეულ წერტილში და შევამოწმოთ ექსტრემუმის საკმარისი პირობები.

სიმარტივისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები

$A = z''_{x^2}(x_0, y_0), \quad B = z''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = z''_{y^2}(x_0, y_0),$

მაშინ ცხადია

$\Delta = B^2 - AC.$

რადგან

$z''_{x^2} = \dfrac{50}{x^3}, \quad z''_{xy} = 0, \quad z''_{y^2} = \dfrac{8}{y^3}.$

შესაბამისად დავწეროთ (5;2) წერტილში:

$A = \dfrac{2}{5} > 0, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad B^2 - AC = -\dfrac{2}{5} < 0,$

$$z_{min} = z(5;2) = 14.$$

(-5;-2) წერტილში:

$A = -\dfrac{2}{5} < 0, \quad B = 0, \quad C = -1, \quad B^2 - AC = -\dfrac{2}{5} < 0,$

$$z_{max} = z(-5;-2) = -14.$$

(5;-2) წერტილში

$A = \dfrac{2}{5} > 0, \quad B = 0, \quad C = -1, \quad B^2 - AC = \dfrac{2}{5} > 0.$

ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია.

(-5;2) წერტილში

$A = -\dfrac{2}{5} < 0, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad B^2 - AC = \dfrac{2}{5} > 0.$

ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია.

3. ვიპოვოთ $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

ამოხსნა. მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის კერძო წარმოებულები

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

ეს წარმოებულები ნულის ტოლი არ ხდებიან, ხოლო (0;0) წერტილში ისინი არ არსებობენ. მართლაც

$$z'_x = \lim_{x\to 0}\frac{z(x,0)-z(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \begin{cases} 1, & x \to +0, \\ -1, & x \to -0. \end{cases}$$

$$z'_y = \lim_{y\to 0}\frac{z(0,y)-z(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y^2}}{y} = \begin{cases} 1, & y \to +0, \\ -1, & y \to -0. \end{cases}$$

როგორც ვხედავთ,ორივე წარმოებული (0,0) წერტილში არ არსებობს, რაც იმას ნიშნავს, რომ (0,0) კრიტიკული წერტილია. ექსტრემუმის დასადგენად ამ შემთხვევაში უნდა დავადგინოთ ფუნქციის სრული ნაზრდის ნიშანი (0;0) წერტილის რაიმე მცირე მიდამოში. გვექნება

$$\Delta z = z(0+\Delta x;0+\Delta y) - z(0;0) = 2-\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}-2$$

$$= -\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} < 0,$$

ე.ი. ფუნქციას გააჩნია (0;0) წერტილში მაქსიმუმი $z_{max} = 2$.

მაგალითები

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ლოკალური ექსტრემუმები

1. $z = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - x - 2y.$
2. $z = x^2 + xy + y^2 - 5x - 10y + 50.$
3. $z = -x^2 - xy - \frac{y^2}{2} - x - 3y + \frac{25}{2}.$
4. $z = 6x^2 - x^3 + y^2 - 8y.$

5. $z = \frac{x^3}{3} - x^2 - y^2 + 2y + 5.$
6. $z = x^3 - 3x^2 - 2y^2 + 4y.$
7. $z = x + y + \frac{16}{x} + \frac{9}{y}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$
8. $z = x + y + \frac{1}{4x} + \frac{1}{y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$
9. $z = x + y + \frac{1}{x} + \frac{25}{y}, \quad x < 0, \quad y < 0.$
10. $z = xy(3 - x + y), \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$
11. $z = xy(y + x - 1), \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$
12. $z = x^2 + y^2 - 18\ln x - 32\ln y, \quad x > 0, \quad y > 0.$
13. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 8\ln y, \quad x > 0, \quad y > 0.$
14. $z = xy + \frac{5}{x} + \frac{25}{y}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$
15. $z = xy + \frac{3}{x} + \frac{9}{y}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$
16. $z = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}.$
17. $z = -\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}.$
18. $z = 4 + \sqrt{x^2 + y^2}.$
19. $z = 5 - \sqrt{x^2 + y^2}.$

პასუხები:

1. $z_{min} = z(0;1) = -1.$
2. $z_{min} = z(0;5) = 25.$
3. $z_{max} = z(2;-5) = 19.$
4. $z_{min} = z(0;4) = -16.$
5. $z_{max} = z(0;1) = 6.$

6. $z_{max}=z(0;1)=2.$

7. $z_{min}=z(4;3)=14,\ z_{max}=z(-4;-3)=-14.$

8. $z_{min}=z\left(\frac{1}{2};1\right)=3.$

9. $z_{max}=z(-1;-5)=-12.$

10. $z_{min}=z(1;-1)=-1.$

11. $z_{min}=z\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}.$

12. $z_{min}=z(3;4)=25-18\ln 3-32\ln 4.$

13. $z_{min}=z(1;2)=5-8\ln 2.$

14. $z_{min}=z(1;5)=15.$

15. $z_{min}=z(1;3)=9.$

16. $z_{min}=z(2;2)=0.$

17. $z_{max}=z(3;3)=0.$

18. $z_{min}=z(0;0)=4.$

19. $z_{max}=z(0;0)=5.$

1.8 პირობითი ექსტრემუმი

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $z=f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი იმ პირობით, რომ $\varphi(x,y)=0$, საჭიროა შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

სადაც λ უცნობი რიცხვითი მამრავლია და მოვძებნოთ ჩვეულებრივი უპირობო ლოკალური ექსტრემუმი.

ფუნქციის სტაციონარული წერტილები მოიძებნებიან შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან

$$\left.\begin{aligned}&L'_x(x,y,\lambda)=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0,\\&L'_y(x,y,\lambda)=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0,\\&\varphi(x,y)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1.8.1.)$$

ხოლო $z=f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი $\varphi(x,y)=0$ პირობით, განისაზღვრება შემდეგი დებულებით:

თუ (x_0,y_0) წერტილი და λ_0 (1.8.1.) სისტემის ამონახსნია და

$$\Delta=-\begin{vmatrix}0 & \varphi'_x(x_0,y_0) & \varphi'_y(x_0,y_0)\\ \varphi'_x(x_0,y_0) & L''_{x^2}(x_0,y_0) & L''_{xy}(x_0,y_0)\\ \varphi'_y(x_0,y_0) & L''_{xy}(x_0,y_0) & L''_{y^2}(x_0,y_0)\end{vmatrix},\qquad(1.8.2.)$$

მაშინ, თუ $\Delta<0$ ფუნქციას გააჩნია (x_0,y_0) წერტილში პირობითი მაქსიმუმი, ხოლო თუ $\Delta>0$ პირობითი მინიმუმი.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები.

1. ვიპოვოთ $z=3x+y$ ფუნქციის ექსტრემუმი $x^2+y^2=10$ პირობით.

ამოხსნა. შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L(x,y,\lambda)=3x+y+\lambda\left(x^2+y^2-10\right)$$

(1.8.1.) განტოლებათა სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} 3+2\lambda x=0, \\ 1+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნებია: $\lambda_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_1=3$, $y_1=1$ და $\lambda_2=\dfrac{1}{2}$, $x_2=-3$, $y_2=-1$.

დავადგინოთ ფუნქციის ექსტრემუმი მეორე რიგის დიფერენციალის d^2L-ის ნიშნის განსაზღვრით. რადგან

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda,\quad \frac{d^2 L}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\lambda,$$

ამიტომ

$$d^2L=2\lambda\left(dx^2+dy^2\right)$$

პირველი ამონახსნისათვის $d^2L=-\left(dx^2+dy^2\right)<0$, ხოლო მეორე ამონახსნისათვის $d^2L=\left(dx^2+dy^2\right)>0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (3;1) წერტილში მოცემულ ფუნქციას გააჩნია პირობითი მაქსიმუმი $z_{max}=z(3;1)=10$, ხოლო წერტილში პირობითი მინიმუმი $z_{min}=z(-3;-1)=-10$.

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, პირობითი ექსტრემუმი შეგვიძლია დავადგინოთ (1.8.2) ფორმულით მოცემული Δ-ს ნიშნის საშუალებით. ვიპოვოთ აღნიშნულ ფორმულაში შემავალი ელემენტები

$$\varphi'_x=2x,\quad \varphi'_y=2y,\quad L''_{x^2}=2\lambda,\quad L''_{xy}=0,\quad L''_{y^2}=2\lambda,$$

და გამოვთვალოთ მათი მნიშვნელობები (1.8.1) სისტემის ორივე ამონახსნებისათვის. გვექნება:

$\lambda_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_1=3$, $y_1=1$ ამონახსნისათვის: $\varphi'_x(3;1)=6$, $\varphi'_y(3;1)=2$, $L''_{x^2}\left(3,1,-\dfrac{1}{2}\right)=-1$, $\lambda''_{xy}=0$, $L''_{y^2}\left(3,1,-\dfrac{1}{2}\right)=-1$.

ამონახსნისათვის: $\varphi'_x(-3,-1)=-6$, $\varphi'_y(-3,-1)=-2$, $L''_{x^2}\left(-3,-1,\dfrac{1}{2}\right)=L''_{y^2}\left(-3,-1,\dfrac{1}{2}\right)=1$, $L''_{xy}=0$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ პირველი ამონახსნისათვის

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-40<0,$$

ხოლო მეორე ამონახსნისათვის $\Delta=40>0$.

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (3;1) წერტილში მოცემულ ფუნქციას გააჩნია პირობითი მაქსიმუმი, ხოლო $(-3,-1)$ წერტილში პირობითი მინიმუმი.

2. ვიპოვოთ $z=2x^2-y^2$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი $x+y-2=0$ პირობით.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის მოძებნა წინა მაგალითისაგან განსხვავებით, უფრო მოსახერხებელია, თუ ფუნქციაში შევიტანთ $x+y-2=0$ პირობიდან განსაზღვრულ რომელიმე ცვლადის მნიშვნელობას და მიღებულ ერთი ცვლადის ფუნქციას გამოვიკვლევთ ექსტრემუმზე.

ვთქვათ, $y=2-x$, მაშინ $z(x)=x^2+4x-4$.

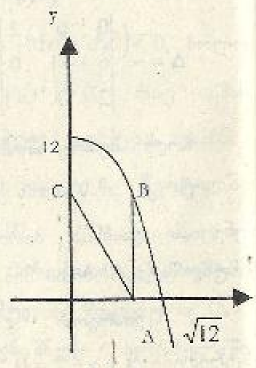
$z'=2x+4=0 \Rightarrow x=-2;\quad z''(x)=2>0.$

ამგვარად, ფუნქციას გააჩნია $(-2;4)$ წერტილში მინიმუმი

$$z_{\min}=z(-2;4)=-8.$$

ბევრი საინტერესო ამოცანა მიიყვანება პირობითი ექსტრემუმის მოძებნაზე. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

3. ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოცემულია ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y+x^2-12=0$ $(0\le x\le\sqrt{12})$ პარაბოლით და საკოორდინატო ღერძებით $x\ge 0$, $y\ge 0$, ჩავხაზოთ ამ ფიგურაში უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის მართი



ნახ. 1

კუთხის B წვერო მდებარეობს პარაბოლაზე, ხოლო კათეტები პარალელურია საკოორდინატო ღერძების (ნახ.1).

ამოხსნა. ვთქვათ, x და y – B წვეროს კოორდინატებია, მაშინ ABC სამკუთხედის ფართობი $S=S(x,y)=\frac{1}{2}xy$.

რადგან x და y ცვლადები აკმაყოფილებენ $y=12-x^2$ პარაბოლის განტოლებას, ამიტომ დასმული ამოცანა მიიყვანება $S(x,y)=\frac{1}{2}xy$ ფუნქციის პირობითი მაქსიმუმის მოძებნაზე $y=12-x^2$ პირობით.

გამოვიყენოთ მეორე მაგალითის ამოხსნის ხერხი. შევიტანოთ $y=12-x^2$ გამოსაკვლევ ფუნქციაში და გავამარტივოთ. გვექნება

$$S(x)=\frac{1}{2}(12x-x^3).$$

მოვძებნოთ მიღებული ერთი ცვლადის ფუნქციის მაქსიმუმი.

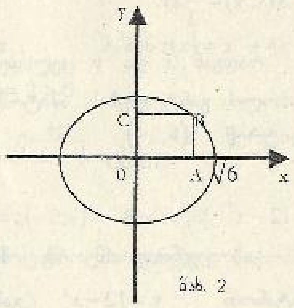
$S'(x)=\frac{3}{2}(4-x^2)=0\Rightarrow x=2,$ (რადგან ამოცანის პირობით $x\ge 0$); $S''(x)=-3x;$ $S''(2)=-6<0.$

ამგვარად ფუნქციას გააჩნია მაქსიმუმი $(2;8)$ წერტილში:

$$S_{\max}=S(2;8)=8.$$

მაშასადამე, საძიებელი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია $AB = 8$ და $BC = 2$.

4. ვთქვათ xoy სიბრტყეზე მოცემულია ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $5x^2 + y^2 = 30$ $\left(0 \le x \le \sqrt{6}\right)$ ელიფსით და საკოორდინატო ღერძებით $x \ge 0$ და $y \ge 0$. ჩავხაზოთ ამ ფიგურაში უდიდესი პერიმეტრის მქონე მართკუთხედი, რომლის ერთ-ერთი B წვერო მდებარეობს ელიფსზე, ხოლო მისი მოპირდაპირე წვერო O-კოორდინატთა სისტემის სათავეში (ნახ. 2).



ნახ. 2

ამოხსნა. ვთქვათ, x და y B წვეროს კოორდინატებია, მაშინ მართკუთხედის პერიმეტრი $P = P(x, y) = 2(x + y)$. ამრიგად, უნდა მოვძებნოთ $P(x, y) = 2(x + y)$ ფუნქციის პირობითი მაქსიმუმი $5x^2 + y^2 - 30 > 0$ პირობით.

შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L(x, y, \lambda) = 2x + 2y + \lambda\left(5x^2 + y^2 - 30\right)$$

და გამოვიკვლიოთ იგი. ამოვხსნათ

შემდეგი სისტემა.

$$\left.\begin{array}{l} L'_x = 2 + 10\lambda x = 0, \\ L'_y = 2 + 2\lambda y = 0, \\ 5x^2 + y^2 = 30. \end{array}\right\}$$

ამ სისტემის ამონახსნებია: $\lambda_1 = \frac{1}{5}$, $x_1 = -1$, $y_1 = -5$ და $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = 1, y_2 = 5$. რადგან $x \ge 0$ და $y \ge 0$, ამიტომ მათგან უნდა ავირჩიოთ მეორე ამონახსნი. შევამოწმოთ მაქსიმუმის არსებობის საკმარისი პირობა რადგან $\varphi'_x = 10x$, $\varphi'_y = 2y$, $L''_{x^2} = 10\lambda$, $L''_{y^2} = 2\lambda$, $L''_{xy} = 0$,

ამიტომ

$$\varphi'_x(1;5) = 10, \quad \varphi'_y(1;5) = 10, \quad L''_{xy} = 0 \quad L''_{x^2}\left(1{,}5, -\frac{1}{5}\right) = -2,$$

$$L''_{y^2}\left(1{,}5, -\frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{5}$$

და

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 10 & -2 & 0 \\ 10 & 0 & -2/5 \end{vmatrix} = -240 < 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $P(x,y)$ ფუნქციას $(1,5)$ წერტილში გააჩნია მაქსიმუმი, მაშასადამე საძიებელი მართკუთხედის გვერდებია $AB=5, BC=1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების პირობითი ექსტრემუმები:

1. $z=x^2-y^2$, თუ $x+2y-3=0$.
2. $z=5x+2y-9$, თუ $x^2+y^2=29$.
3. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, თუ $x+y-2=0$.
4. $z=x+3y$, თუ $x^2+9y^2=10$.
5. $z=xy$, თუ $x+2y-4=0$.
6. $z=x+2y$, თუ $x^2+y^2-5=0$.
7. $z=5-4x-3y$, თუ $x^2+y^2=1$.
8. $z=4-3x-7y$, თუ $3x^2+y=52$.
9. $z=4x-9y-12$, თუ $3y^2-x^2=11$.
10. $z=4xy^2+4x-3y-5$, თუ $3y-4x+7=0$;
11. $z=xy^2-x-3y$, თუ $3y-x+3=0$.
12. $z=8+4x+3y$, თუ $y^2+4x^2=13$.
13. $z=2x-5y-16$, თუ $y^2-4x^2=24$.

14. $z=14-8x-6y$, თუ $2x^2+3y^2=11$.
15. $z=2x+y$, თუ $x^2+y^2=1$.
16. ჩახაზეთ $y+x^2-6\le 0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ არეში უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი, რომლის ორი გვერდი პარალელურია საკოორდინატო ღერძების, ხოლო ერთი წვერო $y=6-x^2$ პარაბოლაზე ძევს.
17. ჩახაზეთ $y+x^2-12\le 0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ არეში უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ორი გვერდი პარალელურია საკოორდინატო ღერძების, ხოლო მართი კუთხის წვერო ძევს $y=12-x^2$ პარაბოლაზე.
18. ჩახაზეთ $5x^2+y^2\le 30$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ არეში უდიდესი პერიმეტრის მქონე მართკუთხედი, რომლის ორი გვერდი პარალელურია საკოორდინატო ღერძების, ხოლო ერთი წვერო $5x^2+y^2=30$ ელიფსზე ძევს.
19. წინა ამოცანის პირობაში მოცემული არე შევცვალოთ შემდეგი არით $2y^2+3x^2\le 30$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.
20. მეთექვსმეტე ამოცანის პირობაში არე შევცვალოთ შემდეგი არით $2x+3y-6\le 0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი

1. $z_{\min}=z(-1;2)=-3$. 2. $z_{\min}=z(-5;-2)=-38$, $z_{\max}=z(5;2)=20$.

$$\left.\begin{aligned}&2x-2+2\lambda x=0,\\&2y+4+2\lambda y=0,\\&x^2+y^2=5.\end{aligned}\right\} \Rightarrow (1;-2),(-1;2).$$

(1;-2) წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა უკვე გამოთვლილი გვაქვს, ამიტომ გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა (-1;2) წერტილში.

$$z(-1;2)=11.$$

მოცემული ფუნქციის მიღებული მნიშვნელობების შედარება მოგვცემს

$$z_{უმც}=z(1;2)=-5.$$

$$z_{უდ}=z(-1;2)=11.$$

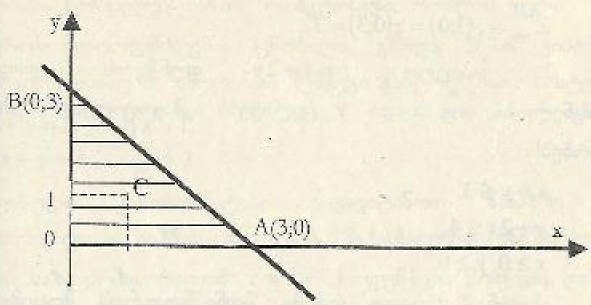
2. ვიპოვოთ $z=x^2+y^2-2x-2y$ ფუნქციის გლობალური ექსტრემუმები შემდეგ არეში

$$\begin{cases}x+y\le 3,\\x>0,\ y\ge 0.\end{cases}$$

ამოხსნა. მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის სტაციონარული წერტილები შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან

$$\begin{cases}2x-2=0,\\2y-2=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$$

ახლა ავაგოთ მოცემული არე და განვსაზღვროთ $C(1;1)$ წერტილის მდებარეობა მის მიმართ ნახ.3-დან ჩანს, რომ C წერტილი ამ არის შიგა წერტილია. გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობა ამ წერტილში $z(1;1)=-2$.



ნახ. 3

ახლა გამოვიკვლიოთ მოცემული ფუნქცია არის საზღვარზე ე.ი. OA, AB და OB მონაკვეთებზე. გვექნება:

$$OA:\ \ y=0,\quad z=x^2-2x,\quad z'=2x-2=0\Rightarrow x=1;$$

$$z(0;0)=0,\quad z(1;0)=-1,\quad z(3;0)=3.$$

AB:

$$y=3-x,\quad z=2x^2-6x+3,\quad z'=4x-6=0\Rightarrow x=3/2;$$

$$z\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2},\quad z(0;3)=3,\quad z(3;0)=3.$$

$$OB:\ \ x=0,\quad z=y^2-2y,\quad z'=2y-2=0\Rightarrow y=1;$$

$$z(0;1)=-1\quad z(0;0)=0\quad z(0;3)=3.$$

მოცემული ფუნქციის მიღებულ მნიშვნელობათა შედარება კი მოგვცემს

$$Z_{უმც}=z(1;1)=-2.$$

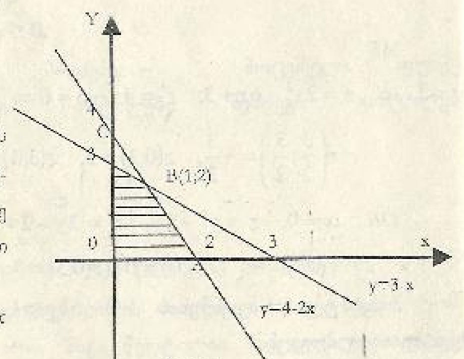
$$Z_{\text{უდ}} = z(3;0) = z(0;3) = 3.$$

3. ვიპოვოთ $z = x + 2y$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, თუ x და y ცვლადები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$x + y \le 3,$$
$$y + 2x \le 4,$$
$$x \ge 0, y \ge 0.$$

ამოხსნა. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ მოცემული ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობის მოძებნა, ანუ როგორც მას უწოდებენ, მიზნის ფუნქციის მაქსიმიზაცია (შემდგომში მას ასე ჩავწერთ $z = x + 2y \to \max$), როგორც ამას ქვემოთ ვნახავთ, დიდ სირთულეებთან არ არის დაკავშირებული, მაგრამ ასეთი სახის მაგალითების შესწავლა იმით არის საინტერესო, რომ ბევრი ეკონომიკური მათემატიკური მოდელის ამოხსნა მიიყვანება სწორედ ამ ტიპის მაგალითებზე. ამოვხსნათ იგი.

ავაგოთ x და y ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე და დავშტრიხოთ იგი. როგორც ნახ. 4-დან ჩანს, x და y ცვლადთა დასაშვებ მნიშვნე-



ნახ. 4

ლობათა სიმრავლეა $OABC$ ოთხკუთხედი, რომლის ყველა წვეროს კოორდინატები ცნობილია, გარდა B-სი. ვიპოვოთ ისინიც. ამისათვის ამოვხსნათ შემდეგი განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + y = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

მიღებული კოორდინატები გადავიტანოთ ნახაზზე და გამოვთვალოთ მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა არის საზღვარზე, რადგან $z = x + 2y$ ფუნქცია წრფივია და მას არის შიგნით სტაციონარული წერტილი არ გააჩნია.

$OA: y = 0, \quad z = x; \quad z' = 1 > 0,$ ე.ი. ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ

$$z_{\text{უდ}} = z(2;0) = 2.$$

$BA: y = 4 - 2x; \quad z = 8 - 3x; \quad z' = -3 < 0,$ ფუნქცია კლებადია, ამიტომ

$$z_{\text{უდ}} = z(1;2) = 5.$$

$$CB: y = 3 - x, \quad z = 6 - x; \quad z' = -1 < 0,$$

$$z_{\text{უდ}} = z(0;3) = 6.$$

$OC: x = 0, \quad z = 2y; \quad z' = 2 > 0,$ ფუნქცია ზრდადია, მაგრამ (0;3) წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა უკვე გამოთვლილი გვაქვს.

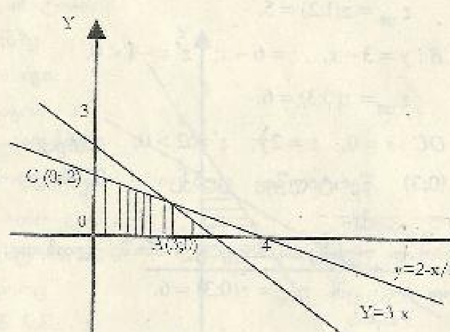
ამრიგად, ფუნქციის მიღებულ მნიშვნელობათა შედარება საბოლოოდ მოგვცემს $z_{\text{უდ}} = z(0;3) = 6$.

აქვე შევნიშნოთ, რომ რადგან $z_{უმ.} = (-z)_{უდ.}$ ამიტომ შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ფუნქციათა მაქსიმიზაციას

4. ვიპოვოთ $z = 3x + 4y$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, თუ x და y ცვლადები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

$$x + y \le 3, \quad 2y + x \le 4, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

ამოხსნა. ავაგოთ x და y ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე (ნახ.5) ნახაზზე მოცემული B წერტილის კოორდინატები შემდეგ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებია:



ნახ. 5

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა დაშტრიხული არის საზღვარზე. გვაქნება

$OA: \quad y = 0, \quad z = 3x, \quad z' = 3 > 0 \quad z_{უდ.} = z(3;0) = 9$

$BA: \quad y = 3 - x, \quad z = 9, \quad z' = 0,$ ე.ი. ფუნქცია მუდმივია ამ მონაკვეთზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ იგი უდიდეს მნიშვნელობას აღწევს ნის ნებისმიერ წერტილში A და B წერტილების ჩათვლით.

$$z_{უდ.} = z(3;0) = z(2;1) = 9.$$

$CB: \quad y = 2 - x/2, \quad z = 3x/2 + 6, \quad z' = 3/2 > 0 \quad z_{უდ.} = z(2;1) = 9.$

$OC: \quad x = 0, \quad z = 3y; \quad z' = 3 > 0; \quad z_{უდ.} = z(0;2) = 6.$

მიღებული შედეგების შედარება საბოლოოდ მოგვცემს

$z_{უდ.} = 9.$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

იპოვეთ ფუნქციათა გლობალური ექსტრემუმი მოცემულ არეებში

1. $z = x^2 + y^2 - 12x - 16y, \qquad x^2 + y^2 \le 25.$
2. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y, \qquad x^2 + y^2 \le 52.$
3. $z = x^2 + y^2 - 8x - 4y, \qquad x^2 + y^2 \le 80.$

4. $z = x^2 + y^2 - 2x - y,$ $\qquad x + y \le 3, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$

5. $z = x^2 + y^2 - 2x - 6y,$ $\qquad x + y \le 5, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$

6. $z = \dfrac{y^2}{2} - x^2 - 2y - 4x,$ $\qquad x + y \le 6, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$

მოახდინეთ ფუნქციათა მაქსიმიზაცია

7. $\begin{array}{l} 3y + x \le 9, \\ y + x < 5, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0, \end{array} \qquad z = 3x + 2y \to \max.$

8. $\begin{array}{l} 3y + 2x \le 18, \\ y + x \le 7, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0, \end{array} \qquad z = 3x + 5y \to \max;$

9. $\begin{array}{l} 3y + x \le 9, \\ y + 2x \le 8, \\ x \ge 0, \quad y = 0, \end{array} \qquad z = 3x + 4y \to \max;$

10. $\begin{array}{l} x + y \le 7, \\ 2x + 5y \le 20, \\ x \ge 0, \quad y > 0, \end{array} \qquad z = 4x + 10y \to \max.$

11. $\begin{array}{l} x + y \le 4, \\ 3x + y \le 6, \\ x \ge 0, \quad y > 0, \end{array} \qquad z = 3x + 3y \to \max.$

12. $\begin{array}{l} 2y + x < 5, \\ y - x \le 4, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0, \end{array} \qquad z = 6x + 6y \to \max.$

13. $\begin{array}{l} x + y < 5, \\ 2x + 3y \le 12, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0, \end{array} \qquad z = 5x + 3y \to \max.$

14. $\begin{array}{l} 4x + 3y \le 15, \\ 2x + 3y \le 9, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0, \end{array} \qquad z = 4x + 9y \to \max.$

15. $\begin{array}{l} 3x + y \le 6, \\ x + y \le 4, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0, \end{array} \qquad z = 8x + 5y \to \max;$

16. $\begin{array}{l} 3 + 2y \le 14, \\ x + 2y \le 10, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0, \end{array} \qquad z = 6x + 10y \to \max.$

პ ა ს უ ხ ე ბ ი:

1. $z_{\text{უმც}} = z(3;-4) = -75, \quad z_{\text{უდ}} = z(-3;4) = 125.$

2. $z_{\text{უმც}} = z(3;-2) = -13, \quad z_{\text{უდ}} = z(-6;4) = 104.$

3. $z_{\text{უმც}} = z(4;2) = -20, \quad z_{\text{უდ}} = z(-8;-4) = 169.$

4. $z_{\text{უმც}} = z\left(1;\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{4}, \quad z_{\text{უდ}} = z(7/4;5/4) = 73/4.$

5. $z_{\text{უმც}} = z(1;3) = -10, \quad z_{\text{უდ}} = z(5;0) = 15.$

6. $z_{\text{უმც}} = z(6;0) = -12, \quad z_{\text{უდ}} = z(0;6) = 6.$

7. $z_{\text{უდ}} = z(5;0) = 15.$ 8. $z_{\text{უდ}} = z(0;6) = 3.$

9. $z_{\text{უდ}} = z(3;2) = 17.$ 10. $z_{\text{უდ}} = z(2-2v;5-v) = 40.$

11. $z_{\text{უმ}} = z(1-\upsilon;3+\upsilon) = 12.$ 12. $z_{\text{უმ}} = z(3-\upsilon;1-\upsilon) = 24.$

13. $z_{\text{უმ}} = z(5;0) = 25.$ 14. $z_{\text{უდ}} = z(0;3) = 27.$

15. $z_{\text{უდ}} = z(1;3) = 23.$ 16. $z_{\text{უდ}} = z(2;4) = 52.$

თ ა ვ ი 2.

განუსაზღვრელი ინტეგრალი.

1. ფუნქციის პირველადი. $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველადი მოცემულ შუალედში, თუ ამ შუალედის ყოველ წერტილში სრულდება ტოლობა
$$F'(x) = f(x).$$
2. განუსაზღვრელი ინტეგრალი. $f(x)$ ფუნქციის ყველა პირველადის $F(x)+C$ ერთობლიობას მოცემულ შუალედში ეწოდება ამ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი და აღინიშნება $\int f(x)dx$. ე.ი.
$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$
ამ ფორმულაში $f(x)$ ინტეგრალქვეშა ფუნქციაა, x - ინტეგრების ცვლადია, ხოლო C -ნებისმიერი მუდმივი.

ინტეგრალის ძირითადი თვისებები:

I. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, სადაც k მუდმივია.

II. $\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx.$

III. $\int df(x) = f(x) + C.$

IV. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$ $(a \neq 0)$

განუსაზღვრელი ინტეგრალების ცხრილი:

1. $\int dx = x + C.$ 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n-1} + C,$ $(n \neq 1).$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$ 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$ $(a>0,\ a \neq 1)$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$ 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos dx = \sin x + C.$ 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$ 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-2}{x+a}\right| + C.$

2.1 უშუალო ინტეგრება

უშუალო ინტეგრებაში იგულისხმება ინტეგრალის პოვნა ელემენტარული გზით: ინტეგრალქვეშა ფუნქციის იგივური გარდაქმნებით და ინტეგრალის I-IV თვისებების გამოყენებით.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I = \int \left(5\cos x + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1} - 3x^2 + 2\right)dx.$

ამოხსნა: თუ ვისარგებლებთ ინტეგრალის I და II თვისებებით, მოცემული ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I = 5\int \cos x dx + \int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x^2+1} - 3\int x^2 dx + 2\int dx.$$

მიღებული ინტეგრალები წარმოადგენენ ცხრილის ინტეგრალებს, ამიტომ

$$I = 5\sin x - \ln|x| - 4arctgx - x^2 + 2x + C.$$

2. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I = \int \frac{2\sqrt[3]{x} + 3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} dx.$

ამოხსნა: გარდავქმნათ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია

$$\frac{2\sqrt[3]{x} + 3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}} + \frac{3x \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = 2x^{\frac{1}{12}} + 3x^{\frac{5}{4}}.$$

მაშინ:

$$I = \int\left(2x^{\frac{1}{12}} + 3x^{\frac{5}{4}}\right)dx = 2\int x^{\frac{1}{12}}dx + 3\int x^{\frac{5}{4}}dx = \frac{24}{13}x^{\frac{13}{12}} + \frac{4}{3}x^{\frac{9}{4}} + C.$$

საბოლოოდ:

$$I = \frac{24}{13}x\sqrt[12]{x} + \frac{4}{3}x^2\sqrt[4]{x} + C.$$

3. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I = \int \frac{4x}{2x-7} dx.$

ამოხსნა: რადგან

$$\frac{4x}{2x-7} = 2\frac{2x}{2x-7} = 2\frac{2x-7+7}{2x-7} = 2(1 + \frac{7}{2x-7})$$

ამიტომ:

$$I = 2\int (1 + \frac{7}{2x-7})dx = 2\int dx + 14\int \frac{dx}{2x-7}.$$

თუ მეორე შესაკრების მიმართ გამოვიყენებთ IV თვისებას მივიღებთ საბოლოოდ

$$I = 2x + 7\ln|2x-7| + C.$$

4. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I = \int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx.$

ამოხსნა: ინტეგრალქვეშა გამოსახულების იგივური გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$\frac{2^x + 5^x}{10^x} = \frac{2^x}{10^x} + \frac{5^x}{10^x} = \left(\frac{2}{10}\right)^x + \left(\frac{5}{10}\right)^x = \frac{1}{5^x} + \frac{1}{2^x} = 5^{-x} + 2^{-x}.$$

მაშინ, თუ ვისარგებლებთ IV თვისებით, მივიღებთ:

$$I = \int(5^{-x} + 2^{-x})dx = \int 5^{-x} dx + \int 2^{-x} dx = -\frac{1}{5^x \ln 5} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C.$$

5. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I = \int \frac{x^6}{x-1} dx.$

ამოხსნა: ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს რაციონალურ წილადს, რომლის მრიცხველის ხარისხი აღემატება მნიშვნელის ხარისხს. თუ გავყოფთ მრიცხველს მნიშვნელზე, მივიღებთ:

$$\frac{x^6}{x-1}=x^5+x^4+x^3+x^2-x+1+\frac{1}{x-1}.$$

მაშინ:

$$I=\int x^5dx+\int x^4dx-\int x^3dx+\int x^2dx+\int xdx+\int dx+\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C.$$

სავარჯიშოები:

იპოვეთ ინტეგრალები:

1. $\int(x+\sqrt{x})dx.$
2. $\int(x^2-1)^2dx.$
3. $\int x(x-1)(x-2)dx.$
4. $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)dx.$
5. $\int\left(\frac{1+x}{x}\right)^2dx.$
6. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x}}.$
7. $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)dx.$
8. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$
9. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx.$
10. $\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx.$
11. $\int\frac{4-x^2}{3+x^2}dx.$
12. $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx.$
13. $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx.$
14. $\int\frac{dx}{2x^2+3}.$
15. $\int\frac{dx}{3x^2-7}.$
16. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+5}}.$

17. $\int(5^x-2^x)^2dx.$
18. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx.$
19. $\int\frac{e^{3x}-1}{e^x-1}dx.$
20. $\int tg^2xdx.$

პასუხები:

1. $\frac{x^2}{2}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C.$
2. $\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x+C.$
3. $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2+C.$
4. $\ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}+C.$
5. $-\frac{1}{x}+2\ln|x|+x+C.$
6. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C.$
7. $-\frac{1}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+2x+C.$
8. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$
9. $\sqrt{x}-\frac{1}{10}x^2\sqrt{x}+C.$
10. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$
11. $-x+\frac{7}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$
12. $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$
13. $arctgx-\frac{1}{x}+C.$
14. $\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\sqrt{\frac{2}{3}}x+C.$
15. $\frac{1}{2\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{7}}{\sqrt{3}x+\sqrt{7}}\right|+C.$
16. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+5}\right|+C.$
17. $\frac{25^x}{\ln 25}-\frac{2\cdot 10^x}{\ln 10}+\frac{4^x}{\ln 4}+C.$
18. $\frac{1}{2}x+\frac{\sin x}{2}+C.$
19. $\frac{e^{2x}}{2}+e^x-x+C.$
20. $tgx-x+C.$

ინტეგრების ამ ხერხს უწოდებენ ინტეგრებას დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ შეტანით.

4. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\sqrt{\sin x}\cos x dx$.

ამოხსნა: პირველი ხერხი:

$$I=\left|\begin{matrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \end{matrix}\right|=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C=\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}+C$$

მეორე ხერხი: შევიტანოთ $\cos x$ დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ

$$I=\left|\cos x dx=d\sin x\right|=\int\sqrt{\sin x}\,d\sin x=\int(\sin x)^{\frac{1}{2}}d\sin x=$$

$$=\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}+C$$

5. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\frac{xdx}{1+x^4}$.

ამოხსნა: პირველი ხერხი:

$$I=\left|\begin{matrix} t=x^2 \\ dt=2xdx \end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}arctgt+C=\frac{1}{2}arctgx^2+C.$$

მეორე ხერხი:

$$I=\left|xdx=\frac{1}{2}dx^2\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{1+x^4}=arctgx^2+C.$$

6. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

ამოხსნა: $\frac{1}{2}$ და $\frac{1}{3}$ წილადების საერთო მნიშვნელი არის 6

ამიტომ გამოვიყენოთ ჩასმა $x=t^6$

$$I=\left|\begin{matrix} x=t^6, & \sqrt{x}=t^3 \\ dx=6t^5dt, & \sqrt[3]{x}=t^2 \end{matrix}\right|=\int\frac{t^3\cdot 6t^5\cdot dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^6}{t-1}dt=$$

$$=t^6-\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$

$$=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$$

7. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

ამოხსნა: ინტეგრალის საპოვნელად შეიძლება გამოყენებულ იქნას, როგორც ტრიგონომეტრიული ჩასმა $x=2\cos t$. ასევე ჩასმა $z=\frac{1}{x}$. ვისარგებლოთ უკანასკნელით:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\left|\begin{matrix} z=\frac{1}{x} \\ dz=-\frac{1}{x^2}dx \end{matrix}\right|=-\int\frac{z^2dz}{z^2\sqrt{4-\frac{1}{z^2}}}=-\int\frac{zdz}{\sqrt{4z^2-1}}=$$

$$=\left|\begin{matrix} 4z^2-1=t \\ 8zdz=dt \end{matrix}\right|=-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{4}\sqrt{t}+C=-\frac{1}{4}\sqrt{4z^2-1}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C.$$

8. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $I=\int\frac{\sqrt{x^2-4}\cdot dx}{x^3}$.

ამოხსნა:

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}\cdot dx}{x^3}=\left|\begin{matrix} x=\frac{2}{\cos t} \\ dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t} \end{matrix}\right|=\int\frac{\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4}\cdot\cos^3 t\cdot 2\sin t}{8\cos^2 t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin^2 tdt=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2t)dt=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t+C.$$

გამოვსახოთ t და $\sin 2t$, x-ის მეშვეობით:

$$t=\arccos\frac{2}{x},$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sqrt{1-\cos^2 t}\cos t = 2\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}\cdot\frac{2}{x} = \frac{4}{x^2}\sqrt{x^2-4}$$

ამის გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ:

$$I = \frac{1}{4}\arccos\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2} + C.$$

მაგალითები:

იპოვეთ ინტეგრალები ჩასმის ხერხით:

1. $\int \cos 5x dx.$
2. $\int \sin(ax+b)dx.$
3. $\int (ax+b)^m dx.$
4. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}.$
5. $\int \frac{dx}{3x-7}.$
6. $\int e^{ax+b}dx.$
7. $\int a^{\sin x}\cos x dx.$
8. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}.$
9. $\int \sqrt{x^2+1}\,x dx.$
10. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}.$
11. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}.$
12. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}.$
13. $\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx.$
14. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx.$
15. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$
16. $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctgx}.$
17. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}.$
18. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

19. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}.$

პასუხები:

1. $\frac{\sin 5x}{5} + C.$
2. $-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$
3. $\frac{1}{a(m+1)}(ax+b)^{m+1} + C.$
4. $-\frac{ctg 3x}{3} + C.$
5. $\frac{1}{3}\ln|3x-7| + C.$
6. $\frac{1}{a}e^{ax+b} + C.$
7. $\frac{1}{\ln a}a^{\sin x} + C.$
8. $2e^{\sqrt{x}} + C.$
9. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$
10. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + C.$
11. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C.$
12. $-\frac{1}{\sin x} + C.$
13. $\frac{tg^2 x}{2} + C.$
14. $\frac{\ln^3 x}{3} + C.$
15. $\frac{\arcsin 2x}{2} + C.$
16. $\ln|arctgx| + C.$
17. $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x) + C.$
18. $\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C.$
19. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$
20. $4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C.$

2.3 ნაწილობითი ინტეგრება

ვთქვათ, $\mu(x)$ და $\upsilon(x)$ განსაზღვრული და დიფერენცირებადი არიან რაიმე X შუალედზე და ვთქვათ, $\mu'(x)$ და $\upsilon'(x)$-ს გააჩნიათ პირველადები ამავე შუალედზე, მაშინ X შუალედზე $\mu(x)$ და $\upsilon'(x)$-ს ასევე გააჩნიათ პირველადები და სამართლიანია ფორმულა:

$$\int \mu(x)\cdot\upsilon'(x)dx = \mu(x)\cdot\upsilon(x) - \int \upsilon(x)\cdot\mu'(x)dx.$$

რადგან $\upsilon'(x)dx = d\upsilon(x)$ და $\mu'(x)dx = d\mu(x)$, ამიტომ ზედა ფორმულას მოკლედ ასე წერენ:

$$\int \mu d\upsilon = \mu\upsilon - \int \upsilon d\mu. \qquad (2.3.1)$$

ამ ფორმულას ეწოდება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და საშუალებას იძლევა $\int \mu d\upsilon$ შევცვალოთ ინტეგრალით $\int \upsilon d\mu$, რომელიც შეიძლება გამოსათვლელად აღმოჩნდეს შედარებით მარტივი.

განვიხილოთ ინტეგრალი $\int p(x)\cdot f(x)dx$ და მივუთითოთ ზოგიერთი ის შემთხვევა, როცა ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი ეფექტიანად გამოიყენება.

1) თუ $f(x)$ ერთ-ერთია შემდეგი ფუნქციებიდან: $e^{\lambda x}$, $a^{\lambda x} (a > 0)$, $\sin\lambda x$, $\cos\lambda x$, ხოლო $p(x)$ მრავალწევრია, მაშინ μ-თი აღვნიშნოთ $p(x)$, $d\upsilon$-თი კი $f(x)dx$.
2) თუ $f(x)$ ერთ-ერთია შემდეგი ფუნქციებიდან: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, ხოლო $p(x)$ მრავალწევრია, მაშინ μ-თი აღვნიშნოთ $f(x)$, $d\upsilon$-თი კი $p(x)dx$.
3) თუ $p(x) = e^{\lambda x}$, $f(x) = \sin\beta x$, ან $f(x) = \cos\beta x$, მაშინ ინტეგრალი ამოიხსნება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის ორჯერადი გამოყენებით, ამასთან μ და $d\upsilon$-ს საწყისი არჩევები ნებისმიერია.

შენიშვნა: 1) შემთხვევაში ნაწილობითი ინტეგრების ხერხის გამოყენება მოგვიწევს იმდენჯერ, რამდენი რიგიც აქვს $p(x)$ მრავალწევრს.

1. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int xe^x dx$.

ამოხსნა:

$$\int xe^x dx = \left| \begin{array}{ll} \mu = x, & d\mu = dx \\ d\upsilon = e^x dx, & \upsilon = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int x^2 \cos x dx$.

ამოხსნა: რადგანაც $p(x)$ მეორე რიგის მრავალწევრია, ამიტომ (2.3.1) ფორმულის გამოყენება მოგვიხდება ორჯერ:

$$\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} \mu = x^2, & d\mu = 2xdx \\ d\upsilon = \cos x dx, & \upsilon = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \mu = x, & d\mu = dx \\ d\upsilon = \sin x dx, & \upsilon = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \sin x + 2\cos x - 2\int \cos x dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2\cos x - 2\sin x + C.$$

3. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int (x^2 - 3x + 5)\ln 7x dx$.

ამოხსნა: გამოსათვლელი ინტეგრალი მე-2 ტიპისაა, ამიტომ

$$\int (x^2 - 3x + 5)\ln 7x dx = \left| \begin{array}{ll} \mu = \ln 7x, & d\mu = \frac{1}{x}dx \\ d\upsilon = (x^2 - 3x + 5)dx, & \upsilon = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x \end{array} \right| =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 5x\right)\ln 7x - \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x\right)\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{1}{6}(2x^3 - 9x^2 - 30x)\ln 7x - \int \frac{x^2}{2}dx + \int \frac{3x}{2}dx - \int 5dx =$$

$$= \frac{1}{6}(2x^3 - 9x^2 - 30x)\ln 7x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 5x + C.$$

4. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int \arcsin 6x dx$.

ამოხსნა: საძებნი ინტეგრალი მე-2 ტიპისაა, ამასთან $p(x)=1$, მაშინ გამოვიყენებთ რა (23.1) ფორმულის მიხედვით:

$$\int \arcsin 6x dx = \left| \begin{matrix} \mu = \arcsin 6x, & d\mu = \dfrac{6}{\sqrt{1-36x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\arcsin 6x - \int \frac{6x dx}{\sqrt{1-36x^2}} = x\arcsin 6x - \frac{6}{72}\int (1-36x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-36x^2) =$$

$$= x\arcsin 6x - \frac{1}{12}\frac{(1-36x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = x\arcsin 6x - \frac{1}{6}\sqrt{1-36x^2} + C.$$

5. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int e^x \cos 2x dx$.

ამოხსნა:

$$\int e^x \cos 2x dx = \left| \begin{matrix} \mu = e^x, & d\mu = e^x dx \\ dv = \cos 2x dx, & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x \sin 2x - \int e^x \sin 2x dx\right) = \left| \begin{matrix} \mu = e^x, & d\mu = e^x dx \\ dv = \sin 2x dx, & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x \sin 2x - \frac{1}{2}\left(-e^x \cos 2x + \int e^x \cos 2x dx\right)\right).$$

ამრიგად:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) - \frac{1}{4}\int e^x \cos x 2x dx.$$

აქედან:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{2}{5}e^x\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C.$$

მაგალითები:

იპოვეთ ინტეგრალები:

1. $\int x\sin x dx$.
2. $\int x\cos 3x dx$.
3. $\int x \cdot 2^x dx$.
4. $\int x^2 e^x dx$.
5. $\int x^3 e^{-x^2} dx$.
6. $\int x^2 \sin x dx$.
7. $\int x^2 \sin 2x dx$.
8. $\int x e^{2x} dx$.
9. $\int x\cos(5x-7) dx$.
10. $\int x\cos x dx$.
11. $\int x^2 \ln x dx$.
12. $\int x\ln x dx$.
13. $\int \ln(x^2+1) dx$.
14. $\int x\,arctgx dx$.
15. $\int x^3 \ln x dx$.
16. $\int x\ln(x-1) dx$.
17. $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$.
18. $\int arctgx dx$.
19. $\int \ln^2 x dx$.

პასუხები:

1. $\sin x - x\cos x + C$.
2. $\dfrac{x\sin 3x}{3} + \dfrac{\cos 3x}{9} + C$.
3. $\dfrac{2^x(x\ln 2 - 1)}{\ln^2 2} + C$.
4. $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.
5. $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) - C$.
6. $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$.
7. $\dfrac{1-2x^2}{4}\cos 2x + \dfrac{7}{2}\sin 2x + C$.
8. $\dfrac{1}{2}e^{2x}(x - \dfrac{1}{2}) + C$.
9. $\dfrac{x}{5}\sin(5x-7) + \dfrac{1}{25}\cos(5x-7) + C$.
10. $x\sin x + \cos x + C$.
11. $\dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9} + C$.
12. $\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$.
13. $x\ln(x^2+1) - 2x + 2arctgx + C$.
14. $\dfrac{x^2+1}{2}arctgx - \dfrac{x}{2} + C$.

15. $\frac{x^6}{6}\ln x-\frac{x^6}{36}+C.$ *16.* $\frac{x^2}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)\right]+C.$

17. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C.$ *18.* $x\,\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

19. $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C.$

2.4 კომპლექსური რიცხვები

$z=a+bi$ სახის რიცხვებს, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $i=\sqrt{-1}$ (ე.წ. წარმოსახვითი ერთეული) ეწოდება კომპლექსური რიცხვი. a-ს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი და აღინიშნება ასე: $a=\mathrm{Re}\,z$ ხოლო b-ს კი წარმოსახვითი ნაწილი და აღინიშნება ასე: $b=\mathrm{Im}\,z$.

ორი კომპლექსური რიცხვი ითვლება ტოლად თუ მათ ტოლი აქვთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები. კომპლექსური რიცხვებისათვის მეტ-ნაკლებობა არ განისაზღვრება.

$z=a+bi$ და $z=c+di$ ორი კომპლექსური რიცხვისათვის, იმის გათვალისწინებით, რომ $i^2=-1$, არითმეტიკული ოპერაციები განიმარტებიან შემდეგნაირად:

$$z+z'=(a+c)+(b+d)i \qquad (2.4.1),$$

$$z-z'=(a-c)+(b-d)i \qquad (2.4.2),$$

$$z\cdot z'=(ac-bd)+(ad+bc)i \qquad (2.4.3),$$

$$\frac{z}{z'}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \qquad (2.4.4).$$

ამათთან შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები არიან კომუტატიური და ასოციატიურნი და დაკავშირებულნი არიან ერთმანეთთან დისტრიბუტიულობის კანონით:

$z=a+bi$ და $\bar z=a-bi$ კომპლექსურ რიცხვებს ეწოდებათ შეუღლებულები და მათი ნამრავლი $z\cdot\bar z=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$ ნამდვილი რიცხვებია.

ადვილი საჩვენებელია, რომ:

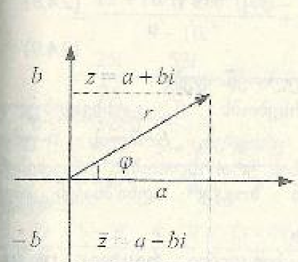
$$\overline{z\pm z'}=\bar z\pm\bar z',\quad \overline{z\cdot z'}=\bar z\cdot\bar z',\quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar z}{\bar z'},$$

თუ z არის ნამდვილკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლების ფესვი, მაშინ ამავე განტოლების ფესვია აგრეთვე $\bar z$.

ხშირად კომპლექსურ რიცხვებს გეომეტრიულად შეუსაბამებენ სიბრტყის წერტილებს. სახელდობრ $z=a+bi$-ს გამოხატავენ წერტილით, რომლის აბსცისაა a, ხოლო ორდინატა b.

z და $\bar z$ წერტილები სიმეტრიულნი არიან აბსცისთა ღერძის მიმართ, ხოლო z და $-z=-a-bi$ წერტილები კი კოორდინატთა სათავის მიმართ.

კომპლექსური რიცხვი $z=a+bi$ შეგვიძლია გავიაზროთ აგრეთვე სიბრტყეზე ვექტორით, რომლის სათავე $O(0;0)$ წერტილში, ხოლო ბოლო კი, $(a;b)$ წერტილში (ნახ. 2.4.1)



ნახ. 2.4.1.

კომპლექსური რიცხვებისათვის შეკრებისა და გამოკლების ოპერაციები ვექტორული ალგებრის ენაზე შეგვიძლია გადავიტანოთ პარალელოგრამის წესის გამოყენებით.

თუ სიბრტყეზე შემოვიტანთ პოლარულ კოორდინატთა სისტემას და ამ დროს $z=a+bi$ რიცხვის შესაბამისი

წერტილის კოორდინატებია $(r;\varphi)$, მაშინ r-ს ეწოდება z-ის მოდული, ხოლო $\varphi = \arg z$-ს არგუმენტი. გვაქვს

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad a=r\cos\varphi,\quad b=r\sin\varphi.$$

ამიტომ:

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad (2.4.5)$$

და მას ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა.

არგუმენტის მნიშვნელობანი მოცემული კომპლექსური რიცხვისათვის განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან 2π-ს ჯერადობით. ჩვეულებრივ გამოიყენება არგუმენტის მნიშვნელობა განსაზღვრული დამატებითი პირობით $-\pi < \arg z \le z$.

კომპლექსური რიცხვის მაჩვენებლიან ფორმას აქვს სახე

$$z=re^{i\varphi} \qquad (2.4.6)$$

(2.4.5) წარმოდგენის საშუალებით ადვილდება კომპლექსური რიცხვების გამრავლება, გაყოფა და ახარისხება. კერძოდ:

$$z\cdot z'=r\cdot r'\left[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')\right] \qquad (2.4.7)$$

$$\frac{z'}{z}=\frac{r'}{r}\left[\cos(\varphi'-\varphi)+i\sin(\varphi'-\varphi)\right],\quad r>0 \qquad (2.4.8)$$

$$z^n=z^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \qquad (2.4.9)$$

(2.4.9) ფორმულას მუავრის ფორმულა ეწოდება.

თუ $z\neq 0$, მაშინ არსებობს n განსხვავებული $z_0, z_1, \cdots z_{n-1}$, კომპლექსური რიცხვი, რომლის n-ური ხარისხი ტოლია z-ის. ამ რიცხვების ერთობლიობას უწოდებენ n-ური ხარისხის ფესვს z-დან. ზოგჯერ აღნიშნავენ ასე: $z_k=(\sqrt[n]{z})_k$.

თუ z არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ არსებობს ერთადერთი არაუარყოფითი რიცხვი, რომლის n-ური ხარისხია z, მას უწოდებენ არითმეტიკულ ფესვს z-დან; და აღნიშნავენ სიმბოლოთი: $_+\sqrt[n]{z}$ ან ზოგჯერ $\sqrt[n]{z}$-ით.

ნებისმიერი $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვიდან ფესვების მნიშვნელობები გამოითვლება ფორმულით:

$$(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{z}\,(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}), \qquad (2.4.10)$$

$k=0,1,\cdots n-1,$

(2.4.10) ტოლობით მოცემულ ერთობლიობას აღნიშნავენ ერთიანი სიმბოლოთი $\sqrt[n]{z}$.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. შევასრულოთ მოქმედება:

$$\frac{4+3i}{3-4i}+\frac{7-2i}{2+7i}-\frac{2}{i}.$$

სიმარტივისათვის პირველი ორი წილადის მნიშვნელი გავამრავლოთ შეუღლებულებზე, მესამე წილადის მნიშვნელი კი i-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{4-3i}{3-4i}+\frac{7-2i}{2+7i}-\frac{2}{i}=\frac{(4+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\frac{(7-2i)(2-7i)}{(2+7i)(2-7i)}-\frac{2i}{i\cdot i}=$$

$$=\frac{12+16i-9i+12i^2}{9-16i^2}+\frac{14-49i-4i+14i^2}{4-49i^2}-\frac{2i}{i^2}=$$

$$=\frac{25i}{25}+\frac{-53i}{53}+2i=i-i+2i=2i.$$

2. გავამარტივოთ:

$$\frac{3+7i}{4+2i}-\frac{5-3i}{7-2i}+\frac{4-3i}{i}.$$

გვაქვს:

$$\frac{3+7i}{4+2i}-\frac{5-3i}{7-2i}+\frac{4-3i}{i}=\frac{(3+7i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}-\frac{(5-3i)(7+2i)}{(7-2i)(7+2i)}+\frac{(4-3i)i}{i\cdot i}=$$

$$=\frac{26+22i}{20}-\frac{41-11i}{53}-(4-3i)i=\frac{1378+1166i-840+220i-4240i-3180}{1060}=$$

$$=\frac{-2622-2854i}{1060}=-\frac{2622}{1060}-\frac{2854}{1060}i=-\frac{1311}{530}-\frac{1427}{530}i.$$

3. ვისარგებლოთ მუავრის ფორმულით და ჩავწეროთ ალგებრული ფორმით რიცხვი:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{18}.$$

პირველ რიგში $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ კომპლექსურ რიცხვს მივცეთ ტრიგონომეტრიული სახე:

$$a=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad b=\frac{1}{2},\quad r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1.$$

$$\varphi=arctg\frac{b}{a}=arctg\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}.$$

მაშინ:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}.$$

(2.4.9) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{18}=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{18}=\cos 18\frac{\pi}{6}+i\sin 18\frac{\pi}{6}=$$
$$=\cos 3\pi+i\sin 3\pi=-1+0i.$$

4. $z=-4$ კომპლექსური რიცხვი წარმოვადგინოთ ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით:

რადგან

$$z=-4=-4+oi,\ \text{ამიტომ}\ a=-4,\ \text{და}\ b=0.$$

მაშინ:

$$r=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4,\quad \sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{0}{-4}=0,\quad \cos\varphi=\frac{-4}{4}=-1.$$

$$\begin{cases}\sin\varphi=0\\ \cos\varphi=-1\end{cases}\Rightarrow\quad \varphi=\pi.$$

მაშინ:

$$z=4(\cos\pi+i\sin\pi)\ \text{და}\ z=4e^{i\pi}.$$

5. მივცეთ ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი სახე $z+\bar{z}$ კომპლექსურ რიცხვს, თუ $z=(5-3i)e^{2i}$.

ეილერის ფორმულით $e^{2i}=\cos 2+i\sin 2$,

მაშინ:

$$z=(5-3i)(\cos 2+i\sin 2)=5\cos 2+5i\sin 2-3i\cos 2-3(i^2)\cdot\sin 2=$$
$$=(5\cos 2+3\sin 2)-(3\cos 2-5\sin 2)i.$$
$$\bar{z}=(5\cos 2+3\sin 2)-(3\cos 2-5\sin 2)i.$$
$$z+\bar{z}=(5\cos 2+3\sin 2)+(3\cos 2-5\sin 2)i+(5\cos 2+3\sin 2)-$$
$$-(3\cos 2-5\sin 2)i=2(5\cos 2+3\sin 2)$$
$$r=|z+\bar{z}|=\sqrt{\left[2(5\cos 2+3\sin 2)\right]^2+0^2}=2|5\cos 2+3\sin 2|$$

$$tg\varphi=\frac{0}{r}=0,\quad \varphi=0,\ \text{ან}\ \varphi=\pi\text{-ს}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $5\cos 2+3\sin 2>0$, ამიტომ:

$$r=|z+\bar{z}|=10\cos 2+6\sin 2.$$

მაშინ:

$$z+\bar{z}=(10\cos 2+6\sin 2)(\cos 0+i\sin 0).\ \text{და}$$
$$z+\bar{z}=(10\cos 2+6\sin 2)e^{i0}.$$

6. ვიპოვოთ $\sqrt[4]{-4}$-ის ყველა მნიშვნელობა:

მაგალითი 4-ის ძალით $-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$

(2.4.10.) ძალით:

$$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i.$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i.$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i.$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 - i.$$

მაშასადამე:

$z_0 = 1 + i, \quad z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = 1 - i.$

7. ამოვხსნათ განტოლება:

$$x^2 + 3x + 3 = 0.$$

$$D = 9 - 12 = -3, \quad \sqrt{-3} = \sqrt{3\cdot(-1)} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{3}\cdot i.$$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

8. ამოვხსნათ განტოლება: $x^4 + 1 = 0.$

$$x^4 = -1, \quad x = \sqrt[4]{-1}.$$

$$-1 = -1 + 0i, \quad r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \begin{cases} \cos\varphi = -1 \\ \sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \pi.$$

$$x_0 = 1\left(\cos\frac{\pi+0}{4} + i\sin\frac{\pi+0}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$x_1 = \cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i).$$

$$x_2 = \cos\frac{\pi+3\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i).$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

შენიშვნა: მაგალითი 7 შეგვეძლო ამოგვეხსნა მაგალითი 8-ის ამოხსნის ანალოგიურად.

მაგალითები:

შეასრულეთ მოქმედებანი:

1. $\dfrac{2-3i}{2+5i} - \dfrac{3-4i}{3+2i} - \dfrac{3}{i}.$

2. $\dfrac{2+3i}{5-7i} + \dfrac{2i+3}{i+1} - \dfrac{5-i}{2+i}.$

3. $\dfrac{2-5i}{3i} + \dfrac{7+3i}{1-i} + \dfrac{3i+1}{5}.$

4. $\dfrac{3-2i}{4+2i} + \dfrac{5-2i}{6-7i} - \dfrac{3i-2}{2+3i}.$

5. $\dfrac{-41+63i}{50} - \dfrac{6i+1}{1-7i}.$

6. $\dfrac{13+12i}{6i-8} + \dfrac{(2i+1)^2}{i+2}.$

აახარისხეთ:

7. $(3+\sqrt{3}i)^6.$

8. $(\sqrt{3}+i)^{24}.$

9. $(2+i)^6.$ 10. $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2.$

მიეცით ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი სახე:

11. $z = 6.$

12. $z = (3+2i)^5.$

ამოხსენით განტოლება:

13. $x^2+5x+8=0$. *14.* $x^2+9=0$.

15. $x^2-3x-12=0$. *16.* $2x^2+2x+9=0$.

17. $x^4+5=0$. *18.* $x^5+3=0$.

პასუხები:

1. $-\frac{84}{145}+\frac{877}{145}i$. *2.* $-\frac{17}{15}+\frac{74}{15}i$. *3.* $-\frac{811}{743}+\frac{45}{743}i$.

4. $\frac{719}{1105}-\frac{349}{442}i$. *5.* i. *6.* $-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$.

7. $-2^6\cdot 3^9$. *8.* -2^{21}. *9.* $-117+44i$.

10. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. *11.* $z=6(\cos 0^0+i\sin 0^0)$, $z=6\cdot e^{0i}$.

12. $(6\cos 5-4\sin 5)(\cos 0^0+i\sin 0^0)$, $z=(6\cos 5-4\sin 5)e^{0i}$.

13. $x_1=\frac{-5+\sqrt{7}i}{2}$, $x_2=\frac{-5-\sqrt{7}i}{2}$. *14.* $x_1=3i$, $x_2=-3i$.

15. $x_1=\frac{3+\sqrt{39}i}{2}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{39}i}{2}$.

16. $x_1=\frac{-2+\sqrt{68}i}{4}$, $x_2=\frac{-2-\sqrt{68}i}{4}$.

17. $x_0=\frac{\sqrt[4]{20}}{2}(1+i)$, $x_1=\frac{\sqrt[4]{20}}{2}(-1+i)$, $x_2=\frac{\sqrt[4]{20}}{2}(-1-i)$,

$x_3=\frac{\sqrt[4]{20}}{2}(1-i)$

18. $x_0=\sqrt[5]{3}(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$, $x_1=\sqrt[5]{3}(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5})$,

$x_2=\sqrt[5]{3}(-\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5})$, $x_3=-\sqrt[5]{3}$, $x_4=\sqrt[5]{3}(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5})$.

2.5 უმარტივესი წილადების ინტეგრება

უმარტივესი წილადები ეწოდება შემდეგი სახის წესიერ რაციონალურ წილადებს

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, (K-მთელი დადებითი რიცხვია)

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px-q}$, (მნიშვნელის ფესვები კომპლექსურია, ე.ი. $\frac{p^2}{4}-q<0$)

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, (მნიშვნელის ფესვები კომპლექსურია, $k\geq 2$)

განვიხილოთ ინტეგრალები პირველი სამი უმარტივესი წილადიდან. (ინტეგრებას წილადის მნიშვნელის ჯერადი კომპლექსური ფესვების შემთხვევაში არ განვიხილავთ).

I. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$.

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-A)^{-k+1}}{-k+1}+C =$
$= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+q} =$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-AP}{\sqrt{4q-p^2}}\, arctg\frac{2x+P}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

შენიშვნა: III ინტეგრალის ამოხსნისას გამოვიყენეთ კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფის წესი, კერძოდ,

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] =$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right],$$

სადაც შემოტანილია აღნიშვნა $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$, აქ ნიშანი პლიუსი აიღება მაშინ, როცა სამწევრის ფესვები კომპლექსურია, მინუსი კი მაშინ როცა სამწევრის ფესვები ნამდვილია.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int \frac{(\sqrt{7}-1)dx}{(\sqrt{5}+1)x-1}$.

საპოვნი ინტეგრალი I ტიპისაა, ამიტომ

$$\int \frac{(\sqrt{7}-1)dx}{(\sqrt{5}+1)x-1} = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{5}+1}\ln\left|(\sqrt{5}-1)x-1\right|+C.$$

2. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int \frac{100dx}{(3-50x)^7}$

შემოვიღოთ ჩასმა: $3-50x=t,\ \ x=\frac{3-t}{50},\ \ dx=-\frac{1}{50}dt.$

მაშინ მოცემული ინტეგრალი მივა II ტიპის ინტეგრალზე

$$\int \frac{100dx}{(3-50x)^7} = 100\int \frac{-\frac{1}{50}dt}{t^7} = -2\int t^{-7}dt = -2\frac{t^{-6}}{-6}+C = \frac{1}{3t^6}+C =$$

$$= \frac{1}{3(3-50x)^6}+C.$$

3. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int \frac{5dx}{5x^2-6x+8}$.

იმისათვის, რომ ადვილად გამოვყოთ სრული კვადრატი მნიშვნელიდან, წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ x^2-ის კოეფიციენტის გაოთხკეცებულ ნამრავლზე

$$\int \frac{dx}{5x^2-6x+8} = \int \frac{20dx}{100x^2-120x+160} = \int \frac{20dx}{(10x-6)^2+160-36}.$$

შემოვიღოთ ჩასმა: $10x-6=t$, აქედან $x=\frac{t+6}{10}$, $dx=\frac{1}{10}dt$, მაშინ

$$\int \frac{dx}{5x^2-6x+8} = 20\int \frac{\frac{1}{10}dt}{t^2+124} = 2\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{124})^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{124}}arctg\frac{t}{\sqrt{124}}+C = \frac{2}{\sqrt{124}}arctg\frac{10x-6}{\sqrt{124}}+C.$$

4. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx.$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10} = \int \frac{3x+5}{(x+1)^2+10-1}\,dx = \int \frac{3x+5}{(x+1)^2+9}\,dx.$$

შემოვიტანოთ ჩასმა: $x+1=t$, მაშინ $x=t-1$, $dx=dt$ და

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx = \int \frac{3(t-1)+5}{t^2+3^2}dt = \int \frac{3t+2}{t^2+3^2}dx = \int \frac{3tdt}{t^2+3^2} +$$

$$+\int \frac{2dt}{t^2+3^2} = \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} + 2\int \frac{dt}{t^2+3^2} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right| + \frac{2}{3}arctg\frac{t}{3} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right| + \frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3} + C.$$

5. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx.$

მნიშვნელიდან სრული კვადრატის გამოყოფის გასაადვილებლად წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ x^2-ის კოეფიციენტის გაოთხკეცებულ ნამრავლზე:

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+48-25}dx =$$

$$= \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}.$$

შემოვიტანოთ ჩასმა: $6x-5=t$, აქედან $x=\frac{t+5}{6}$, $dx=\frac{1}{6}dt$

მაშინ

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84\cdot\frac{t+5}{6}-24}{t^2+23}\cdot\frac{1}{6}dt = \frac{1}{6}\int \frac{14t+46}{t^2+23}dt =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{14tdt}{t^2+23} + \frac{46}{6}\int \frac{dt}{t^2+23} = \frac{14}{2\cdot 6}\int \frac{d(t^2+23)}{t^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{23})^2} =$$

$$= \frac{7}{6}\ln\left|t^2+23\right| + \frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\frac{t}{\sqrt{23}} + C = \frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| +$$

$$+ \frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C$$

სავარჯიშოები:

1. $\int \frac{3dx}{x-\sqrt{2}}$. 2. $\int \frac{3dx}{5x+8}$. 3. $\int \frac{\sqrt{3}dx}{\sqrt{5}x-12}$. 4. $\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{8}x-3}$.

5. $\int \frac{5dx}{\sqrt{5}x-\sqrt{3}}$. 6. $\int \frac{(\sqrt{3}-1)dx}{(\sqrt{3}+1)x-1}$. 7. $\int \frac{\sqrt{5}dx}{5\sqrt{5}x-3\sqrt{3}}$.

8. $\int \frac{dx}{(3x-5)^4}$. 9. $\int \frac{6dx}{(2-10x)^3}$. 10. $\int \frac{42dx}{(7x-4)^7}$.

11. $\int \frac{50dx}{(10x-4)^8}$. 12. $\int \frac{100dx}{(2x-50x)^3}$. 13. $\int \frac{20dx}{(2-10x)^3}$.

14. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$. 15. $\int \frac{dx}{9x^2-6x+2}$. 16. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$.

17. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+7}$. 18. $\int \frac{dx}{16x^2-8x+3}$. 19. $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$.

20. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$. 21. $\int \frac{dx}{3x^2-5x+4}$. 22. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

23. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$. 24. $\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$. 25. $\int \frac{8x+3}{2x^2-6x+7}dx$.

26. $\int \frac{x-3}{x^2+4x+7}dx$. 27. $\int \frac{8x+3}{4x^2+12x+11}dx$.

28. $\int \frac{5x+3}{3x^2-6x+7}dx$. 29. $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx$.

30. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$. 31. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$.

პასუხები:

1. $3\ln\left|x-\sqrt{2}\right|+C$. 2. $\frac{3}{5}\ln|5x+8|+C$. 3. $\sqrt{\frac{3}{5}}\ln\left|\sqrt{5}x-12\right|+C$

4. $\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{8}x-3\right|+C$. 5. $\sqrt{5}\ln\left|\sqrt{5}x-\sqrt{3}\right|+C$.

6. $\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\ln\left|(\sqrt{3}+1)x-1\right|+C$. 7. $\frac{1}{5}\ln\left|5\sqrt{5}x-3\sqrt{3}\right|+C$.

8. $-\frac{1}{9(3x-5)^3}+C$. 9. $-\frac{1}{4(6x-3)^4}+C$.

10. $-\frac{1}{(7x-4)^6}+C$. 11. $-\frac{1}{(10x-4)^5}+C$. 12. $\frac{1}{(2-50x)^2}+C$.

13. $\frac{1}{(2-10x)^2}+C$. 14. $\frac{1}{2}arctg\frac{x+3}{2}+C$.

15. $\frac{1}{3}arctg(3x-1)+C$. 16. $arctg(x-3)+C$.

17. $\frac{2}{\sqrt{47}}arctg\frac{4x-3}{\sqrt{47}}+C$. 18. $\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{4x-1}{\sqrt{2}}+C$.

19. $\frac{2}{\sqrt{31}}arctg\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C$. 20. $\frac{2}{\sqrt{11}}arctg\frac{6x-1}{\sqrt{11}}+C$.

21. $\frac{2}{\sqrt{23}}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}}+C$. 22. $\frac{1}{2}arctg(2x-1)+C$.

23. $\frac{1}{3\sqrt{\frac{5}{3}}}arctg\frac{x}{\sqrt{\frac{5}{3}}}+C$. 24. $\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C$.

25. $3\sqrt{5}arctg\frac{2x-3}{\sqrt{5}}+2\ln\left|2x^2-6x+7\right|+C$.

26. $\frac{1}{6}\ln\left|x^3+4x+7\right|-\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{3}}+C$.

27. $\ln\left|4x^2+12x+11\right|-\frac{9}{2\sqrt{2}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{2}}+C$.

28. $\frac{5}{6}\ln\left|3x^2-6x+7\right|+\frac{7}{\sqrt{13}}arctg\frac{\sqrt{3}(x-1)}{2}+C$.

29. $3\ln\left|x^2+4x+9\right|-\frac{7}{\sqrt{5}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C$.

30. $\frac{5}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right|-arctg\frac{x+1}{3}+C$.

31. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{1}{2}arctg\frac{x-1}{2}+C$.

2.6 რაციონალური წილადები და მათი დაშლა უმარტივეს წილადებად

ფუნქციას $\frac{P(x)}{Q(x)}$, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია, ეწოდება რაციონალური ფუნქცია. თუ, $P(x)$ მრავალწევრის რიგი (x-ის უმაღლესი ხარისხი) მეტია ან ტოლი $Q(x)$ მრავალწევრის რიგზე, მაშინ მოვახდენთ მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფას და მივიღებთ:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

სადაც $W(x)$ იქნება რაიმე მრავალწევრი, ხოლო $\frac{R(x)}{Q(x)}$ კი წესიერი რაციონალური წილადი (ე.ი. მრიცხველის რიგი ნაკლები იქნება მნიშვნელის რიგზე).

მაგალითად: $\frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1}=x^2+3-\frac{2x^2-6x+2}{x^3-2x+1}$

ბეზუს თეორემის თანახმად, ყოველი $Q(x)$ მრავალწევრი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას შემდეგი სახის ნამრავლად:

$$Q(x)=A(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot\dots\cdot(x-\delta)\cdot\dots\qquad(2.6.1)$$

სადაც A არის $Q(x)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი, $\alpha,\beta,\ldots\delta$ - $Q(x)=0$ განტოლების ფესვები, $(x-\alpha),(x-\beta),\ldots,(x-\delta)$ ორწევრებს კი უწოდებენ ელემენტარულ მამრავლებს. თუ ელემენტარულ მამრავლებს შორის არის თანმთხვეული თანამამრავლები, მაშინ მივიღებთ $Q(x)$-ის შემდეგ წარმოდგენას:

$$Q(x)=A(x-\alpha)^r\cdot(x-\beta)^s\cdots\cdots(x-\delta)^t \qquad (2.6.2)$$

სადაც $r,s,\cdots t$ მთელი რიცხვებია და $r+s+\cdots t=n$, აქ n არის $Q(x)$ მრავალწევრის რიგი.

მაგალითად: $Q(x)=3(x-2)^3(x+4)^2$ არის მეხუთე რიგის მრავალწევრი, ამასთან $\alpha=2$ ფესვის ჯერადობა არის 3, ხოლო $\beta=-4$ ფესვის ჯერადობა კი 2.

(2.6.2) წარმოდგენაში $\alpha,\beta,\ldots\delta$ ფესვებს შორის ზოგიერთი ფესვი შეიძლება იყოს კომპლექსური.

ცნობილია, რომ თუ კომპლექსური რიცხვი $\alpha=a+bi$ არის ნამდვილ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ფესვი, მაშინ ამავე მრავალწევრის ფესვია აგრეთვე მისი შეუღლებული $\overline{\alpha}=a-bi$ კომპლექსური რიცხვიც, ამასთან რა ჯერადობაც აქვს α-ს, იგივე ექნება $\overline{\alpha}$-ს. ე.ი. თუ (2.6.2) დაშლაში შედის $(x-\alpha)^2$, მაშინ დაშლა შეიცავს აგრეთვე $(x-\overline{\alpha})^2$ თანამამრავლსაც. თუ ამ თანამამრავლებს გადავამრავლებთ მივიღებთ:

$$(x-\alpha)^2(x-\overline{\alpha})^2=\{[x-(a+bi)][x-(a-bi)]\}^2=$$

$$=\left[x^2-x(a+bi)-(a-bi)+a^2+b^2\right]^2=$$

$$=\left(x^2-2ax+a^2+b^2\right)^2=\left(x^2+2px+q\right)^2$$

სადაც $p=-a$, $q=a^2+b^2$ და $p^2-q<0$

ამრიგად, იმ თანამამრავლების ნაცვლად, რომლებიც შეუღლებული კომპლექსური ფესვებისაგან შედგებიან შეიძლება წარმოვიდგინოთ ნამდვილ-კოეფიციენტებიანი კვადრატული სამწევრის სახით, მაშინ (2.6.2) ფორმულა ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრისათვის მიიღებს სახეს:

$$Q(x)=A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\cdots(x^2+2px+q)^e\cdot(x^2+2ux+v)^f+\cdots \qquad (2.6.3)$$

წილადებს: $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{(x-b)^n}$, $\frac{Mx-N}{(x^2+px+q)}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$,

სადაც n>1 და $p^2-4q<0$, ეწოდებათ უმარტივესი წილადები.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თუ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ რაციონალური ფუნქცია წესიერია და მისი მნიშვნელი წარმოდგება (2.6.3) სახით, მაშინ ეს ფუნქცია ერთადერთი სახით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots\frac{A_r}{(x-\alpha)^r}+\cdots\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+ \qquad (2.6.4)$$

$$+\frac{M_2x-N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots\frac{M_tx-N_t}{(x^2+px+q^2)^t}+\cdots$$

სადაც $A_1,A_2,\cdots A_r,M_1,N_1,N_2,\cdots N_t,\cdots$ ნამდვილი რიცხვებია. (2.6.4) წარმოდგენას უწოდებენ რაციონალური ფუნქციის დაშლას უმარტივეს წილადებად.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $A_1,A_2,\cdots M_t,N_t$ რიცხვები, საჭიროა (2.6.4) დაშლის ორივე მხარე გავამრავლოთ $Q(x)$-ზე. მივიღებთ ორი მრავალწევრის ტოლობას. ორი მრავალწევრი ტოლია ნიშნავს ერთნაირი ხარისხების წევრთა კოეფიციენტები ტოლია. ზემოთქმულის გათვალისწინებით მივიღებთ წრფივ თავსებად განტოლებათა სისტემას, საიდანაც ვიპოვით საძიებელ განუსაზღვრელ კოეფიციენტებს. ამ მეთოდს ეწოდება განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდი.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. წარმოვადგინოთ $\frac{x-3}{(x-5)(x+7)}$ რაციონალური ფუნქცია უმარტივესი წილადების ჯამად.

(2.6.4) ფორმულის ძალით $\frac{x-3}{(x-5)(x+7)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+7}$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $(x-5)(x+7)$-ზე, მივიღებთ:

$$x-3=A(x+7)+B(x-5)$$
ანუ
$$x-3=(A+B)x+7A-5B$$
საიდანაც დავწერთ სისტემას
$$\begin{cases} A+B=1 \\ 7A-5B=-3 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{6},\quad B=\frac{5}{6},$$ მაშინ
$$\frac{x-3}{(x-5)(x+7)}=\frac{\frac{1}{6}}{x-5}+\frac{\frac{5}{6}}{x+7}$$

2. დავშალოთ $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ რაციონალური ფუნქცია უმარტივეს წილადების ჯამად.

რადგან
$$x^2-5x+6=(x-2)(x+3),$$
ამიტომ
$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{2x-1}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$
ტოლობის ორივე მხარის $(x-2)(x-3)$-ზე გამრავლებით მივიღებთ:
$$2x-1=A(x-2)+B(x-3)$$
ანუ
$$2x-1=(A+B)x+(-2A-2B)$$
$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A+3B=1 \end{cases}$$ საიდანაც $A=5,\quad B=-3.$

ამრიგად
$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}$$

3. დავშალოთ $\frac{2x^3+5x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}$ რაციონალური წილადი უმარტივესი წილადების ჯამად.

რადგან მოცემული რაციონალური წილადი არაწესიერია, ამიტომ ჩავატაროთ

მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა, რის შედეგადაც მივიღებთ:
$$\frac{2x^3-5x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}=x+1+\frac{-3x+4}{2x^2+3x-2}$$

$$2x^2+3x-2=0,\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm5}{4},\quad x_1=\frac{1}{2};\quad x_2=-2$$
ამიტომ
$$2x^2+3x-2=2(x-\frac{1}{2})(x+2)=(2x-1)(x+2).$$
ახლა დავშალოთ უმარტივეს წილადებად ფუნქცია $\frac{-3x+4}{(2x-1)(x+2)}$.
$$\frac{-3x+4}{(2x-1)(x+2)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+2}$$
ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $(2x-1)(x+2)$-ზე
$$-3x+4=A(x+2)+B(2x-1)$$
ანუ
$$-3x+4=(A+2B)x+(2A-B)$$
აქედან
$$\begin{cases} A+2B=-3 \\ 2A-B=4 \end{cases} \Rightarrow A=-1,\quad B=-2$$
და საბოლოოდ,
$$\frac{2x^3+5x^2-2x-2}{2x^2+3x-2}=x+1+\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{x+2}.$$

4. დავშალოთ $\frac{x}{x^3+1}$ რაციონალური ფუნქცია უმარტივესი წილადების ჯამად.
$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ x^3+1-ზე მივიღებთ:

$$x = A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$$

$$x=(A+B)x^2+(C+B-A)x+A+C$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C+B-A=1 \\ A+C=0 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{1}{3},\quad B=\frac{1}{3},\quad C=\frac{1}{3}.$$

მაშინ

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}.$$

5. დავშალოთ $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ რაციონალური ფუნქცია უმარტივესი წილადების ჯამად

x^2+1 ორწევრს აქვს კომპლექსური ფესვები, ამიტომ (2.6.4) ფორმულის ძალით: $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $x(x^2+1)^2$-ზე, მივიღებთ:

$$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)x+(Dx+E)x,$$

ანუ

$$x^2-1=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A$$

კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 2A+B+D=0 \\ C+E=0 \\ A=-1 \end{cases}$$

სისტემის ამოხსნით მივიღებთ:

$A=-1,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=1,\quad E=0,$ ამიტომ საძებნ დაშლას ექნება სახე:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

მაგალითები:

დავშალოთ უმარტივეს წილადების ჯამად შემდეგი რაციონალური ფუნქციები:

1. $\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$. 2. $\dfrac{5x^2+23x-19}{(x+1)(2x-1)(x+2)}$. 3. $\dfrac{7x-4}{(x-7)(x+8)}$.

4. $\dfrac{6x^2-44x+28}{(x-3)(x+2)(x-5)}$. 5. $\dfrac{-2x^2-3}{x^2(x+1)}$. 6. $\dfrac{6x^2-27x+8}{(x^2-1)(x-3)}$.

7. $\dfrac{-7x^2+8x+7}{(x-1)^3(x+3)}$. 8. $\dfrac{-2x^2+19x-51}{(x-2)^2(x+5)}$. 9. $\dfrac{5x^2-59x+62}{(x^2-x-20)(x-2)}$.

10. $\dfrac{10x^2+x-24}{x^3+x^2-12x}$. 11. $\dfrac{17x^2+2}{x^3-4x}$. 12. $\dfrac{x^3-5x+7}{x^2-5x+6}$.

13. $\dfrac{16x^3+11x^2+8x+3}{(x^2+x)(x^2+1)}$. 14. $\dfrac{-3x^4-7x^3+4x^2-15x+25}{(x+1)(x^2+3)(x^2+2)}$.

15. $\dfrac{8x^3+34x^2+35x+25}{x(x+5)(x^2+5)}$. 16. $\dfrac{3x^3-31x^2-31x-24}{(x+2)(x-3)(2x^2-3)}$.

17. $\dfrac{4x^2+5x+14}{x(2x^2+7)}$. 18. $\dfrac{-2x^3-5x+2}{(x^2-4)(x^2+5)}$.

პასუხები:

1. $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}$. 2. $\frac{3}{x-1}+\frac{5}{2x-1}-\frac{3}{x+2}$. 3. $\frac{3}{x-7}+\frac{4}{x+8}$.

4. $\frac{5}{x-3}+\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-5}$. 5. $\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x+1}$.

6. $\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x+1}+\frac{2}{x-3}$. 7. $\frac{-2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{-5}{x+3}$.

8. $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{(x-2)^2}+\frac{4}{x-5}$. 9. $\frac{7}{x+4}+\frac{-4}{x-5}+\frac{2}{x-2}$.

10. $\frac{2}{x}-\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x+4}$. 11. $5x-\frac{1}{2x}+\frac{33}{2(x-2)}+\frac{33}{2(x+2)}$.

12. $x+5+\frac{10}{x-3}+\frac{3}{x-2}$. 13. $\frac{3}{x}+\frac{5}{x+1}+\frac{8x}{x^2+1}$.

14. $\frac{4}{x+1}-\frac{5x+1}{x^2+3}-\frac{2x-1}{x^2-2}$. 15. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+5}+\frac{5x+4}{x^2+5}$.

16. $\frac{2}{x+2}+\frac{-3}{x-3}+\frac{5x-2}{2x^2+5}$. 17. $\frac{2}{x}+\frac{5}{2x^2+7}$.

18. $\frac{3x+2}{x^2+4}-\frac{5x+2}{x^2+5}$.

2.7 რაციონალური წილადების ინტეგრება

2.6-ში განხილულია რაციონალური წილადის დაშლა უმარტივესი წილადების ჯამად, ხოლო 2.5-ში კი ინტეგრება უმარტივესი წილადებიდან. ამიტომ როცა ვიხილავთ ინტეგრებას რაციონალური წილადიდან, პირველ რიგში მას დავშლით უმარტივესი წილადების ჯამად და გამოვიყენებთ 2.5-ში განხილულ წესებს უმარტივესი წილადების ინტეგრების შესახებ.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \frac{x-3}{(x-5)(x+7)}dx$.

2.6-ის მაგალითი 1-ის ძალით

$$\frac{x-3}{(x-5)(x+7)}=\frac{\frac{1}{6}}{(x-5)}+\frac{\frac{5}{6}}{(x+7)}$$

ამიტომ

$$\int\frac{x-3}{(x-5)(x+7)}dx=\int\frac{\frac{1}{6}}{(x-5)}dx+\int\frac{\frac{5}{6}}{(x-7)}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d(x-5)}{x-5}+\frac{5}{6}\int\frac{d(x+7)}{x+7}=\frac{1}{6}\ln|x-5|+\frac{5}{6}\ln|x+7|+C.$$

2. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}dx$

2.6-ის მაგალითი 2-ის ძალით

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{2x-1}{(x-3)(x-2)}=\frac{5}{x-3}-\frac{5}{x-2}$$

ამიტომ

$$\int\frac{2x-1}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{5dx}{x-3}-\int\frac{3dx}{x-2}=$$

$$5\ln|x-3|-\ln|x-2|+C$$

3. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int\frac{2x^3+5x^2-2x+2}{2x^2-3x-2}dx$.

2.6-ის მაგალითი 3-ის ძალით

$$\frac{2x^3+5x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}=x+1+\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{x+2}$$

ამიტომ

$$\int\frac{2x^3+5x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}dx = \int\left(x+1+\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|2x-1|-2\ln|x+2|+C.$$

4. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int\frac{x}{x^3+1}dx$

2.6-ის მაგალითის 4-ის ძალით $\frac{x}{x^3+1}=\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}$

ამიტომ

$$\int\frac{x}{x^3+1}dx=\int\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}dx+\int\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}=$$

$$= [\text{ 2.5-ის III-ის ძალით }] =$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|\right)+\frac{1}{3}\frac{2+1}{\sqrt{4-1}}\,arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{4-1}}=$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+1$$

5. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int\frac{-2x^3-5x+2}{(x^2+4)(x^2+5)}dx$

დავშალოთ $\frac{-2x^3-5x+2}{(x^2+4)(x^2+5)}$ რაციონალური წილადი

უმარტივეს წილადების ჯამად. (2.6.4)-ის ძალით

$$\frac{-2x^3-5x+2}{(x^2-4)(x^2+5)} = \frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+5}=$$

$$=\frac{(Ax+B)(x^2+5)+(Cx+D)(x^2+4)}{(x^2+4)(x^2+5)}=$$

$$=\frac{Ax^3+Bx^2+5Ax+5B+Cx^3+Dx^2+4Cx+4D}{(x^2+4)(x^2+5)}=$$

$$=\frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+(5A+4C)x+(5B+4D)}{(x^2+4)(x^2+5)}$$

საიდანაც ვღებულობთ სისტემას

$$\begin{cases} A+C=-2 \\ B+D=0 \\ 5A+4C=-5 \\ 5B+4D=2 \end{cases} \rightarrow A=3,\quad B=2,\quad C=-5,\quad D=-2.$$

მაშინ

$$\int\frac{-2x^3-5x+2}{(x^2+4)(x^2+5)}dx=\int\frac{3x+2}{x^2+4}dx-\int\frac{5x+2}{x^2+2}dx=$$

$$=3\int\frac{xdx}{x^2+4}+2\int\frac{dx}{x^2+4}-5\int\frac{xdx}{x^2+5}-2\int\frac{dx}{x^2+5}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2+4|+arctg\,\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\ln|x^2+5|-\frac{2}{\sqrt{5}}\,arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

მაგალითები:

1. $\int\frac{x^3dx}{(x+2)^2(x+4)^3}$. 2. $\int\frac{x^2+2}{(x-1)(x+2)^2}dx$. 3. $\int\frac{x^2+1}{x(x-1)^3}dx$.

4. $\int\frac{x^2-4x+7}{(x^2-1)(x-1)}dx$. 5. $\int\frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2(x+1)}dx$.

6. $\int\frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2}dx$. 7. $\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$.

8. $\int\frac{5x^4-x^3+4x^2+8}{x^3-8}dx$. 9. $\int\frac{x^2dx}{(x-2)^4}$. 10. $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

11. $\int\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$. 12. $\int\frac{(x^3-1)dx}{4x^3-x}$. 13. $\int\frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$.

14. $\int\frac{7x^2-9}{x^4-5x^3+6x^2}dx$. 15. $\int\frac{x^5-x+1}{x^6-x^5}dx$.

16. $\int\frac{6x+5}{x^2-4x+9}dx$. 17. $\int\frac{5x^2+3x-9}{x^3-3x^2+2x}dx$.

18. $\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$ 19. $\int\frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx$

20. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$. 21. $\int\frac{dx}{(x-2)(x^2-4x+5)}$.

22 $\int\frac{dx}{x^4-8x}$. 23. $\int\frac{x^2-7x-6}{(x^2+9)(x-3)}dx$. 24. $\int\frac{x^3-7x^2-3}{x^2(x^2+4)}dx$.

25. $\int\frac{4x^2-5x+9}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$. 26. $\int\frac{3-7x}{(x^2+3)(6x^2+7x+15)}dx$.

27. $\int\frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$. 28. $\int\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx$.

29. $\int\frac{x^3dx}{(x^2+3)(x^2-1)}$.

პასუხები:

1. $2ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2-6x+8}+C$.

2. $\frac{3}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\ln\left|(x+1)(x-1)^3\right|+C$.

3. $\frac{-1}{(x-1)^2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$.

4. $\frac{3}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-3|-\ln|x-4|+C$.

5. $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+2\ln|x|-\ln|x+1|+C$.

6. $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C$.

7. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-3}\right|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2(x-2)}+C$.

8. $\frac{5x^2}{2}-x+8\ln|x-2|-2\ln|x^2+2x+4|+\frac{20}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$.

9. $-\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{(x-2)^3}+\frac{x}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}\right)+C$.

10. $-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

11. $\frac{1}{33}\ln\left|\frac{(3x+1)^9(2x-3)^2}{x^{11}}\right|+C$.

12. $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$

13. $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C.$

14. $\frac{3}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+20\ln|x-3|-\frac{47}{4}\ln|x-2|+C.$

15. $\frac{x^{-4}}{4}+\ln|x-1|+C.$

16. $3\ln(x^2+4x+9)-\frac{7}{\sqrt5}arctg\frac{x+2}{\sqrt5}+C.$

17. $\frac{9}{2}\ln|x|-17\ln|x-1|+\frac{35}{2}\ln|x-2|+C.$

18. $\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}+C.$

19. $x^2+\ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|+C.$

20. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$

21. $\ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2-4x+5}}+C.$

22. $\frac{1}{24}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{1}{24}\ln(x^2-2x+4)+C.$

23. $\ln(x^2+9)-\ln|x-3|-\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C.$

24. $\frac{3}{4x}+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|-\frac{25}{4}arctg|x^2+4|+C.$

25. $\ln|x-1|+\frac{3}{4}\ln|x^2-4x+13|-\frac{1}{3}arctg\frac{x-1}{3}+C.$

26. $\frac{12}{\sqrt{311}}arctg\frac{12x+7}{\sqrt{311}}-\frac{1}{\sqrt3}arctg\frac{x}{\sqrt3}+C.$

27. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}+arctgx+\frac{1}{\sqrt2}arctg\frac{x}{\sqrt2}+C.$

28. $\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt3}arctg\frac{x}{\sqrt3}+\frac{2}{\sqrt3}arctg\frac{2x-1}{\sqrt3}+C.$

29. $\frac{1}{8}\ln|x^2-1|+\frac{3}{8}\ln(x^2+3)+C.$

2.8 ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა ინტეგრება.

1. $\int\sin mx\cos nxdx$, $\int\sin mx\sin nxdx$, $\int\cos mx\cos nxdx$ - სახის ინტეგრალები დაიყვანება ცხრილის ინტეგრალებზე, თუ ვისარგებლებთ შემდეგი ტრიგონომეტრიული ფორმულებით:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x], \qquad (2.8.1)$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x], \qquad (2.8.2)$$

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]. \qquad (2.8.3)$$

$\int R(\sin x,\cos x)dx$ სადაც R წარმოადგენს $\sin x$-ს და $\cos x$-ს რაციონალურ ფუნქციას.

ამ ტიპის ინტეგრალების მოძებნა შეიძლება დაყვანილ იქნეს t ცვლადის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებაზე $tg\frac{x}{2}=t$ ჩასმით, რომელსაც უნივერსალურ ჩასმას უწოდებენ, ამ შემთხვევაში:

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \qquad (2.8.4)$$

3. $\int \sin^m x\cos^n x dx$, სადაც m და n არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია.

თუ ამ ტიპის ინტეგრალში m კენტია, მაშინ გამოდგება ჩასმა $\cos x=t$, ხოლო თუ n არის კენტი, მაშინ $\sin x=t$. თუ m და n ლუწი რიცხვებია, შედეგს იძლევა შემდეგი ტრიგონომეტრიული ფორმულების გამოყენება:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad (2.8.5)$$

$\int\frac{\cos^n xdx}{\sin^m x}$, $\int\frac{\sin^n xdx}{\cos^m x}$, სადაც m,n მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია.

თუ ამ ტიპის ინტეგრალებში n კენტია, ხოლო m ნებისმიერი, მაშინ პირველი ინტეგრალისთვის იყენებენ $\sin x=t$ ჩასმას, ხოლო მეორე ინტეგრალისთვის $\cos x=t$ ჩასმას.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \sin 9x\sin xdx$.

ამოხსნა: (2.8.2) ფორმულის თანახმად

$$\sin 9x\sin x=\frac{1}{2}(\cos 8x-\cos 10x),$$

მაშინ,

$$\int\sin 9x\sin xdx=\frac{1}{2}\int\cos 8xdx-\frac{1}{2}\int\cos 10xdx=$$

$$=\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{20}\sin 10x+C$$

2. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int\sin^{10} x\cos^3 xdx$.

ამოხსნა: წარმოვადგინოთ $\cos^3 x$ შემდეგი სახით

$$\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x.$$

და გამოვიყენოთ ჩასმა $\sin x=t$, მაშინ $\cos xdx=dt$, ამიტომ

$$\int\sin^{10} x\cos^3 xdx=\int\sin^{10} x(1-\sin^2 x)\cos xdx=\int t^{10}(1-t^2)dt=$$

$$=\frac{t^{11}}{11}-\frac{t^{13}}{13}+C=\frac{\sin^{11} x}{11}-\frac{\sin^{13} x}{13}+C.$$

3. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$.

ამოხსნა: ვისარგებლოთ (2.8.5) ფორმულით

$$\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos xdx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C.$$

4. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int\sin^5 xdx$.

ამოხსნა: გარდავქმნათ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია

$$\sin^5 x=\sin^4 x\sin x=(\sin^2 x)^2\sin x=(1-\cos^2 x)^2\sin x,$$

და გამოვიყენოთ ჩასმა $\cos x=t$, მაშინ $\sin xdx=dt$, და

$$\int\sin^5 xdx=\int(1-\cos^2 x)^2\sin xdx=-\int(1-t^2)^2dt=-\int(1-2t^2+t^4)dt=$$

$$=-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{t^5}{5}+C=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

5. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ ჩასმა $\sin x = t$, მაშინ $\cos x dx = dt$, და

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C.$$

6. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx$.

ამოხსნა: გარდავქმნათ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2+\cos x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{2+\cos x}$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $\cos x = t$, მაშინ $\sin x dx = dt$,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx = \int \frac{1-t^2}{t+2}(-dt) = \int \frac{t^2-1}{t+2} dt = \int (t-2+\frac{3}{t+2})dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln(t+2) + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

7. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ უნივერსალური ჩასმა $tg\frac{x}{2} = t$, მაშინ dx, $\sin x$ და $\cos x$ გამოვსახოთ (2.8.4)-დან და შევიტანოთ ინტეგრალში:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C =$$

$$= \ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

მაგალითები:

ამოხსენით ინტეგრალები:

1. $\int \cos^3 dx$.
2. $\int \sin^2 dx$.
3. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.
4. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.
5. $\int \sin^4 x dx$.
6. $\int \cos^4 x dx$.
7. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$.
8. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$.
9. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^3 x}$.
10. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$.
11. $\int \cos 4x \cos 7x dx$.
12. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} dx$.
13. $\int \sin x \sin 3x dx$.
14. $\int \sin 3x \cos 5x dx$.
15. $\int \frac{dx}{\sin x}$.
16. $\int \frac{dx}{\cos x}$.
17. $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx$.
18. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$.
19. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.
20. $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx$.

პასუხები:

1. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

2. $\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$

3. $\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$

4. $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

5. $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$

6. $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$

7. $\frac{1}{\cos x} + C.$

8. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C.$

9. $\frac{1}{2\cos^2 x} + 2\ln|\cos x| - \frac{\cos^2 x}{2} + C.$

10. $\cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$

11. $\frac{\sin 3x}{6} + \frac{\sin 11x}{22} + C.$

12. $3\sin\frac{x}{6} + \frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6} + C.$

13. $\frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + C.$

14. $-\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$

15. $\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

16. $\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$

17. $x - \cos x + C.$

18. $\frac{1}{2}(tgx + x) + C.$

19. $-ctgx - tgx + C.$

20. $3tgx + 2ctgx + C.$

თავი 3

განსაზღვრული ინტეგრალი

ძირითადი თვისებები

I. $\int_a^b dx = b - a.$

II. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$ სადაც k მუდმივია.

III. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx.$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ სადაც a, b, c ნებისმიერი რიცხვებია.

3.1 უმარტივესი ინტეგრალების გამოთვლა ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით.

თუ $F(x)$ არის უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველადი ფუნქცია, მაშინ მართებულია ტოლობა:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (3.1.1)$$

რომელსაც ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა ეწოდება. ეს ფორმულა საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი განუსაზღვრელი ინტეგრალის შემწეობით.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:
გამოთვალეთ ინტეგრალები:

1. $\int_0^1 (6x^2+3)dx = (2x^3+3x)\Big|_0^1 = 5.$

2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-1}^1 = arctgx1 - arctgx(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$

3. $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

4. $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{\frac{\sqrt2}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt2}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4}.$

5. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt3}.$

6. $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx = 3e^{\frac{x}{3}}\Big|_0^3 = 3e - 3 = 3(e-1).$

მაგალითები:
გამოთვალეთ ინტეგრალი:

1. $\int_0^1 x^3dx.$ *2.* $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx.$ *3.* $\int_0^4 \sqrt{x}dx.$

4. $\int_0^1 x^3dx.$ *5.* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx.$ *6.* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

7. $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ *8.* $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tgxdx.$ *9.* $\int_0^e \frac{dx}{x}.$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx.$ *11.* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx.$ *12.* $\int_0^e e^{\frac{x}{3}}dx.$

13. $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx.$ *14.* $\int_3^5 \frac{dx}{(x-2)^2}.$ *15.* $\int_0^6 \sqrt{x-2}dx.$

16. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy.$ *17.* $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$ *18.* $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}.$

19. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$ *20.* $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

პასუხები:

1. $\frac{1}{4}.$ *2.* $\frac{7}{3}.$ *3.* $\frac{16}{3}.$ *4.* $e-1.$ *5.* 1.

6. $\frac{\pi}{4}.$ *7.* $\frac{\pi}{4}.$ *8.* $\ln 2.$ *9.* 1. *10.* $\frac{\pi}{4}.$

11. $\frac{\pi}{4}.$ *12.* $3(e-1).$ *13.* $\frac{2}{3}(\sqrt8-1).$ *14.* $\frac{2}{3}.$ *15.* $\frac{16}{3}.$

16. $\frac{7}{4}.$ *17.* $arctg3 - arctg2.$ *18.* $\ln\frac{4}{3}.$

19. $arctge-\frac{\pi}{4}$.   20. $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

3.2 ჩასმის ხერხი

ვთქვათ, გამოსათვლელია ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$, რომელშიც $f(x)$ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციაა. შემოვიტანოთ t ცვლადი ფორმულით $x=\varphi(t)$. თუ $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $\varphi(t)$ და მისი წარმოებული უწყვეტი ფუნქციებია $[t_1,t_2]$ სეგმენტზე, $\varphi(t_1)=a$, $\varphi(t_2)=b$ და $a\le\varphi(t)\le b$, მაშინ მართებულია შემდეგი ფორმულა:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

ინტეგრალის ასეთ გარდაქმნას ჩასმის ხერხს უწოდებენ. ფუნქცია $\varphi(t)$ უნდა შეირჩეს ისე, რომ (3.2.1)-ის მარჯვენა ნაწილი ადვილად ინტეგრებადი იყოს. t_1 და t_2-ის მნიშვნელობებს ვპოულობთ შესაბამისად $\varphi(t_1)=a$ და $\varphi(t_2)=b$ განტოლებებიდან.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ ჩასმა: $x=t^2$, მაშინ $dx=2tdt$. ვიპოვოთ ახალი საზღვრები: თუ $x=0$, $t=0$, თუ: $x=9$, $t=3$, და

$$\int_0^9\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_0^3\frac{2tdt}{1+t}=2\int_0^3\frac{t+1-1}{t+1}dt=$$

$$=2\int_0^3 dt-2\int_0^3\frac{dt}{t+1}=2t\Big|_0^3-2\ln|t+1|\Big|_0^3=6-2\ln 4=6-\ln 16.$$

2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$.

ამოხსნა: $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\left|\begin{matrix}x=2\sin t, & dx=2\cos tdt\\ t_1=0, & t_2=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt=2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$.

ამოხსნა: $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx=\left|\begin{matrix}1+x=t^2, & dx=2tdt\\ t_1=1, & t_2=2\end{matrix}\right|=$

$$=\int_1^2(t^2-1)t\cdot 2tdt=2\int_1^2 t^4dt-\int_1^2 2t^2dt=\frac{116}{15}.$$

3.3 ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი.

თუ $\mu = \mu(x)$ და $\upsilon = \upsilon(x)$ ფუნქციები უწყვეტნი არიან თავის წარმოებულებთან ერთად $[a,b]$-სეგმენტზე, მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალისათვის ადგილი აქვს ნაწილობითი ინტეგრების შემდეგ ფორმულას:

$$\int_a^b \mu d\upsilon = \mu\upsilon\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon d\mu. \qquad (3.3.1)$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int_0^1 xe^x dx.$

ამოხსნა: გამოვიყენოთ (3.3.1) ფორმულა:

$$\int_0^1 xe^x dx = \begin{bmatrix} \mu = x, & d\mu = dx \\ d\upsilon = e^x dx, & \upsilon = e^x \end{bmatrix} = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1.$$

2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int_0^\pi x\sin x dx.$

ამოხსნა: გამოვიყენოთ (3.3.1) ფორმულა:

$$\int_0^\pi x\sin x dx = \begin{bmatrix} \mu = x, & d\mu = dx \\ d\upsilon = \sin x dx, & \upsilon = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$-x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int_0^1 \arcsin x dx.$

ამოხსნა:

$$\int_0^1 \arcsin x dx = \begin{bmatrix} \mu = \arcsin x, & d\mu = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ d\upsilon = dx, & \upsilon = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin 1 - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$

ამოხსნა:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \begin{bmatrix} \mu = x, & d\mu = dx \\ d\upsilon = \dfrac{dx}{\cos^2 x}, & \upsilon = tgx \end{bmatrix} =$$

$$= xtgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx dx = \frac{\pi}{4} - \ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int_0^e \ln x dx.$

ამოხსნა:

$$\int_1^e \ln x dx = \begin{bmatrix} \mu = \ln x, & d\mu = \dfrac{dx}{x} \\ d\upsilon = dx, & \upsilon = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e\ln e - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

6. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int_0^\pi e^x \sin x dx.$

ამოხსნა:

$$I = \int_0^\pi e^x \sin x dx = \begin{bmatrix} \mu = \sin x, & d\mu = \cos x dx \\ d\upsilon = e^x dx, & \upsilon = e^x \end{bmatrix} =$$

$$= e^x \sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx = -\int_0^\pi e^x \cos x dx.$$

ე.ი. მივიღეთ: $I = -\int_0^{\pi} e^x \cos x dx.$

კვლავ გამოვიყენოთ (3.3.1) ფორმულა:

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = \begin{bmatrix} \mu = \cos x, & d\mu = -\sin x dx \\ d\upsilon = e^x dx, & \upsilon = e^x \end{bmatrix}$$

მაშინ მივიღებთ:

$$I = -(e^x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x dx) = e^{\pi} + 1 - I.$$

აქედან:

$$2I = e^{\pi} + 1$$

$$I = \frac{e^{\pi} + 1}{2}.$$

პასუხი:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \frac{e^{\pi} + 1}{2}.$$

7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int_1^e (1 + \ln x)^2 dx.$

ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენება ორჯერ მოგვიხდება

$$\int_1^e (1 + \ln x)^2 dx = \begin{bmatrix} \mu = (1 + \ln x)^2, & d\mu = \frac{2(1 + \ln x)}{x} dx \\ d\upsilon = dx, & \upsilon = x \end{bmatrix} =$$

$$= x(1 + \ln x)^2 \Big|_1^e - 2\int_1^e (1 + \ln x) dx = \begin{bmatrix} \mu = 1 + \ln x, & d\mu = \frac{dx}{x} \\ d\upsilon = dx, & \upsilon = x \end{bmatrix} =$$

$$= e(1 + \ln e)^2 - (1 + \ln 1)^2 - 2(x(1 + \ln x)\Big|_1^e - \int_1^e dx) =$$

$$= 4e - 1 - 2\left(e(1 + \ln e) - (1 + \ln 1) - x\Big|_1^e\right) = 2e - 1.$$

მაგალითები:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx.$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{5}} x \sin 5x dx.$ 3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x dx.$

4. $\int_0^{3\pi} x \cos \frac{x}{6} dx.$ 5. $\int_0^{\frac{7\pi}{2}} (2x - 1) \sin \frac{x}{7} dx.$ 6. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (x + 2) \cos 4x dx.$

7. $\int_0^{e^2} x^3 \ln x dx.$ 8. $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$ 9. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$

10. $\int_0^{\ln 16} e^{\frac{x}{4}} dx.$ 11. $\int_0^{\ln 2} x e^{2x} dx.$ 12. $\int_1^3 arcg \sqrt{x} dx.$

13. $\int_0^1 \arcsin \sqrt{x} dx.$ 14. $\int_0^3 arctg x dx.$ 15. $\int_1^2 x^2 \ln x dx.$

16. $\int_0^e \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}.$ 17. $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx.$

პასუხები:

1. $\frac{1}{2}.$ 2. $\frac{\pi}{25}.$ 3. $\frac{1}{9}.$ 4. $18(\pi - 2).$

5. $91.$ 6. $\frac{1}{32}(\pi - 14).$ 7. $\frac{1}{16}(15e^4 + 1).$ 8. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2).$

9. $4\pi.$ 10. $16(\ln 4 - 1).$ 11. $\ln 4 - \frac{3}{4}.$ 12. $\frac{\pi}{6} - \sqrt{3} + 1.$

13. $\frac{\pi}{4}.$ 14. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$ 15. $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$ 16. $2(\sqrt{2} - 1).$

17. $\frac{3}{5}(e^{\pi} - 1).$

3.4 განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გამოყენება

1. ბრტყელი ფიგურის ფართობი.

ა) თუ ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია უწყვეტი და არაუარყოფითი $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, Ox ღერძის $[a,b]$ მონაკვეთითა და $x = a$, $x = b$ წრფეებით (ნახ. 1), მაშინ მიღებული ფიგურის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3.4.1)$$

ბ) თუ ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია $y = f_1(x)$ და $y = f_2(x)$ $\left[f_2(x) \ge f_1(x)\right]$ უწყვეტ ფუნქციათა გრაფიკებით და $x = a$, $x = b$ წრფეებით (ნახ.2), მაშინ ამ ფიგურის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

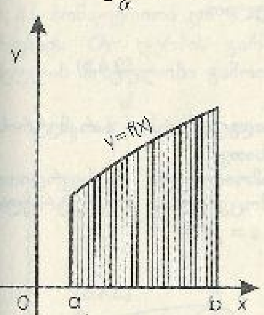
$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx. \qquad (3.4.2)$$

გ) თუ ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია პარამეტრული ფორმით მოცემული $y = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $(t_1 \le t \le t_2)$ ფუნქციის გრაფიკით, Ox ღერძის $[a,b]$ მონაკვეთითა და $x = a = \varphi(t_1)$, $x = b = \varphi(t_2)$ წრფეებით, მაშინ მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

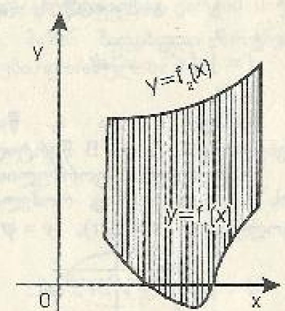
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (3.4.3)$$

დ) თუ ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია პოლარულ კოორდინატებში მოცემული $r = r(\varphi)$, $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ ფუნქციის გრაფიკით და $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ სხივებით (ნახ.3) მიღებული მრუდწირული სექტორის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

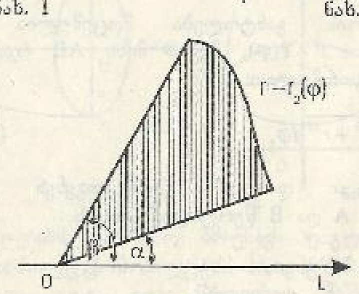
$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (3.4.4)$$



ნახ. 1



ნახ. 2



ნახ. 3

2. წირის რკალის სიგრძე

ა) თუ წირის განტოლებაა $y = f(x)$, მაშინ მისი AB რკალის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (3.4.4)$$

სადაც a და b წარმოადგენენ A და B წერტილების აბსცისებს.

ბ) თუ ბრტყელი წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული ფორმით $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ მაშინ მისი AB რკალის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt, \qquad (3.4.5)$$

სადაც t_1 და t_2 წარმოადგენენ t პარამეტრის მნიშვნელობებს A და B წერტილებისათვის.

ანალოგიური ფორმულით გამოითვლება იმ სივრცითი წირის რკალის სიგრძე, რომელიც მოცემულია პარამეტრული განტოლებებით $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$.

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt, \qquad (3.4.6)$$

გ) თუ წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=r(\varphi)$, მაშინ მისი AB რკალის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi, \qquad (3.4.7)$$

სადაც α და β წარმოადგენენ φ კუთხის მნიშვნელობებს A და B წერტილებისათვის.

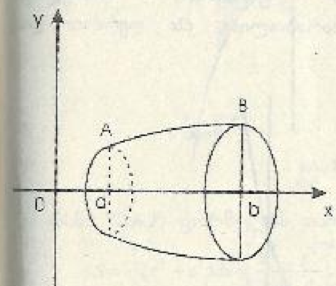
3. ბრუნვითი სხეულის მოცულობა:

ა) თუ მრუდწირული ტრაპეცია $aABb$ (ნახ. 4) შემოსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, Ox ღერძის $[a,b]$ მონაკვეთითა და $x=a$, $x=b$ წრფეებით ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო, მაშინ მიღებული ბრუნვითი სხეულის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

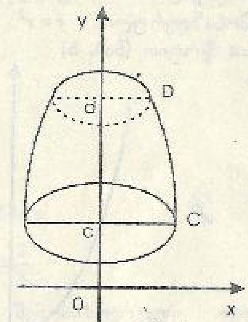
$$V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx. \qquad (3.4.8)$$

ბ) თუ მრუდწირული ტრაპეცია $cCDd$ (ნახ. 5), შემოსაზღვრული $x=\varphi(y)$ ფუნქციის გრაფიკით, Oy ღერძის $[c,d]$ მონაკვეთითა და $y=c$, $y=d$ წრფეებით ბრუნავს Oy ღერძის გარშემო, მაშინ მიღებული ბრუნვითი სხეულის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

$$V_y=\pi\int_c^d x^2\,dy. \qquad (3.4.9)$$



ნახ. 4



ნახ. 5

გ) თუ Ox ღერძის გარშემო ბრუნავს ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $[f_2x\geq f_1(x)\geq 0]$ ფუნქციათა გრაფიკებით და $x=a$, $x=b$ წრფეებით, მაშინ მიღებული ბრუნვითი სხეულის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

$$V=\pi\int_a^b (f_2^{\,2}(x)-f_1^{\,2}(x))\,dx. \qquad (3.4.10)$$

4. წერტილის მიერ გავლილი მანძილი.

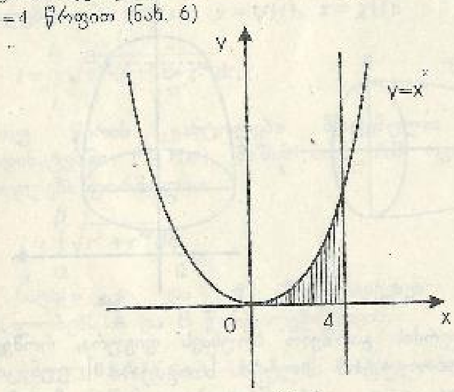
თუ წერტილი მოძრაობს რაიმე წირის გასწვრივ და მოცემულია მისი სიჩქარის დამოკიდებულება დროზე, ე.ი. ცნობილია ფუნქცია $V=f(t)$, მაშინ წერტილის მიერ

დროის $[t_1,t_2]$ მონაკვეთში გავლილი მანძილი გამოითვლება ფორმულით:

$$l=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \qquad (3.4.11)$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. გამოვთვალოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2$ პარაბოლით, Ox ღერძით და $x=4$ წრფით (ნახ. 6)

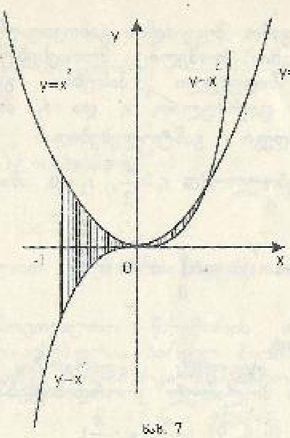


ნახ. 6

ამოხსნა: (3.4.1) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$S=\int_0^4 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^4=\frac{64}{3}=21\frac{1}{3}.$$

2. გამოვთვალოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^3$, $y=x^2$ წირებით და $x=-1$, $x=1$ წრფეებით (ნახ. 7)

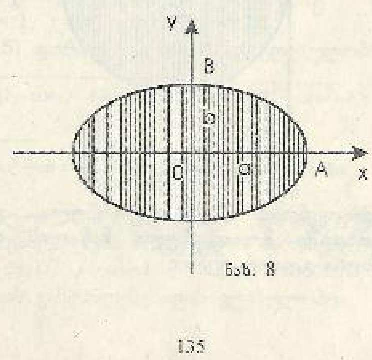


ნახ. 7

ამოხსნა: (3.4.2) ფორმულის თანახმად:

$$S=\int_{-1}^{1}(x^2-x^3)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$$

3. გამოვთვალოთ ელიფსით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი, თუ ელიფსი მოცემულია პარამეტრული ფორმით: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ (ნახ. 8)



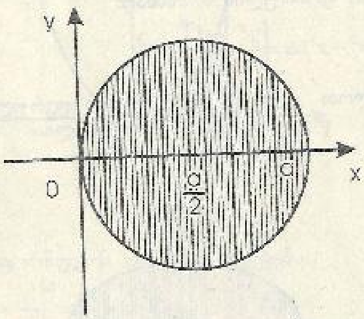
ნახ. 8

ამოხსნა: სიმეტრიის გამო შეგვიძლია გამოვთვალოთ ფიგურის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში და მიღებული პასუხი გავაოთხკეცოთ. ვისარგებლოთ (3.4.3) ფორმულით, t_1 და t_2 მნიშვნელობები განვსაზღვროთ შემდეგი განტოლებებიდან $a\cos t_1 = 0$, $a\cos t_2 = a$ საიდანაც ვპოულობთ $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 0$. ამიტომ

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot a(-\sin t)\,dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi ab}{4}.$$

და საბოლოოდ: $S = \pi ab$.

4. გამოვთვალოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირით: $r = a\cos\varphi$. (ნახ. 9) $(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$.



ნახ. 9

ამოხსნა: გამოვიყენოთ (3.4.4) ფორმულა, გამოვთვალოთ პირველ მეოთხედში მოთავსებული ნაწილის ფართობი და მიღებული პასუხი გავაორკეცოთ:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi a^2}{8}.$$

საბოლოოდ: $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

5. გამოვთვალოთ წრეწირის სიგრძე, თუ მისი განტოლებაა $x^2 + y^2 = R^2$.

ამოხსნა: გამოვთვალოთ წრეწირის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში და მიღებული პასუხი გავაოთხკეცოთ. ამ რკალის განტოლებაა

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \le x \le R$, აქედან:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

ამიტომ (4) ფორმულის თანახმად

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = \int_0^R \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = R\frac{\pi}{2}.$$

მაშინ, წრეწირის სიგრძისათვის ვიღებთ $l = 2\pi R$.

6. გამოვთვალოთ წირის რკალის სიგრძე, რომლის განტოლება მოცემულია პარამეტრული ფორმით:

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

ამოხსნა: (3.4.5) ფორმულის თანახმად ვღებულობთ:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

7. გამოვთვალოთ იმ სივრცითი წირის რკალის სიგრძე, რომლის განტოლება მოცემულია პარამეტრული ფორმით:

$x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = amt$, $0 \le t \le 2\pi$.

ამოხსნა: წირის განტოლებებიდან ვღებულობთ

$$x' = -a\sin t, \quad y' = a\cos t, \quad z' = am.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (3.4.6) ფორმულაში:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2m^2}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+m^2}\,dt = 2\pi a\sqrt{1+m^2}.$$

8. გამოვთვალოთ წირწირის სიგრძე, თუ მისი განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში:

$$r = a\cos\varphi, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

ამოხსნა: (3.4.7) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$l = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,d\varphi = a\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a\pi.$$

9. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x = y^2$ წირით, Oy ღერძის $[0,2]$ მონაკვეთით და $y = 2$ წრფით, ბრუნავს Oy ღერძის გარშემო. გამოვთვალოთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

ამოხსნა: წირის განტოლებიდან ვღებულობთ: $x^2 = y^4$, ამიტომ (3.4.9) ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$V_y = \pi\int_0^2 y^4\,dy = \pi\frac{y^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$

10. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = x^2$ და $y = \sqrt{x}$ პარაბოლებით ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო (ნახ. 10). გამოვთვალოთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

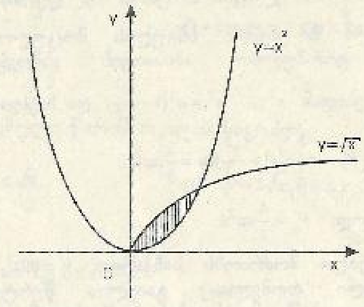
ამოხსნა: ვიპოვოთ მოცემული პარაბოლების გადაკვეთის წერტილები: $\sqrt{x} = x^2$, საიდანაც $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

მოცულობის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (3.4.10) ფორმულა:

$$V = \pi\int_0^1 (x - x^4)\,dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{10}\pi.$$

10'. სხეულის მოცულობა, რომლის განივკვეთის ფართობი Q(x) ცნობილია, გამოითვლება ფორმულით:

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx.$$



ნახ. 10

11. გამოვთვალოთ იმ სხეულთა მოცულობები, რომლებიც მიიღებიან $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის ბრუნვით Ox და Oy ღერძების გარშემო (ნახ. 8).

ამოხსნა: ელიფსი სიმეტრიულია Ox და Oy ღერძთა მიმართ, ამიტომ როცა ელიფსი ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო, საკმარისია ვიპოვოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება OAB ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო და მიღებული პასუხი გავაორმაგოთ.

ელიფსის განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

მაშინ (3.4.8) ფორმულის თანახმად:

$$\frac{1}{2}V_x = \pi\int_0^a b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2\int_0^a dx - \frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^a x^2\,dx =$$

$$= \pi b^2 \cdot x\Big|_0^a - \frac{\pi b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \pi ab^2 - \frac{\pi b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}\pi ab^2.$$

საბოლოოდ $V_x = \frac{4}{3}\pi ab^2$.

ბრუნვის ზედაპირის ფართობი

$$S = 2\pi\int_0^L y(s)\,ds$$

პარამეტრული სახით

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

ცხადი სახით

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

თუ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსი ბრუნავს Oy ღერძის გარშემო, მაშინ მიღებული ბრუნვითი სხეულის მოცულობა გამოითვლება (3.4.9) ფორმულით. ამისათვის გამოვსახოთ ელიფსის განტოლებიდან x^2. $x^2=a^2(1-\frac{y^2}{b^2})$ და ჩავსვათ (3.4.9) -ში.

$$\frac{1}{2}V_y=\pi\int_0^b a^2(1-\frac{x^2}{b^2})dy=\frac{2}{3}\pi a^2 b.$$

საბოლოოდ $V_y=\frac{4}{3}\pi a^2 b.$

12. წერტილი მოძრაობს სიჩქარით $V=0,1t^3$ მ/წმ. ვიპოვოთ მანძილი რომელსაც გაივლის წერტილი 10 წმ-ის განმავლობაში მოძრაობის დაწყებიდან და მისი საშუალო სიჩქარე დროის ამ მონაკვეთში.

ამოხსნა: (3.4.11) ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$l=\int_0^{10}0,1t^3dt=0,1\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^{10}=250 \text{ მ.}$$

საშუალო სიჩქარის გამოსათვლელად გავლილი მანძილი გავყოთ შესაბამის დროის მონაკვეთზე:

$$V_{\text{საშ}}=\frac{250}{10}=25 \text{ მ/წმ.}$$

სავარჯიშოები:

გამოთვალეთ მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი:

1. $y=\ln x,\quad x=e,\quad y=0.$
2. $y=e^x,\quad y=e^{-x},\quad x=1.$
3. $xy=4,\quad x=1,\quad x=3,\quad y=0.$
4. $y=x^2,\quad y=\frac{x^2}{2},\quad y=2x.$
5. $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad y=0,\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$

6. $r=\cos 2\varphi,\quad -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}.$
7. $r=a(1+\cos\varphi),\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$
8. $r=a\sin 2\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

გამოთვალეთ მოცემული წირის რკალის სიგრძე:

9. $y=\ln x,\quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}.$
10. $y=2\sqrt{x},\quad 0\le x\le 1.$
11. $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$
12. $x=t,\quad y=t^2,\quad z=\frac{2}{3}t^3,\quad 0\le t\le 3.$
13. $r=a(1+\cos\varphi),\quad 0\le\varphi\le\pi.$
14. $r=2a\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi.$

გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით მითითებული ღერძის გარშემო.

15. $y=x^3,\quad y=8,\quad x=0,$ (Oy ღერძი)
16. $y=\sin x,\quad (0\le x\le\pi),\quad y=0,$ (Ox ღერძი).
17. $y=x^2,\quad x=y^2,$ (Ox ღერძი).
18. $y=\frac{1}{1+x^2},\quad x=1,\quad x=-1,$ (Ox ღერძი).
19. $y^2=x^3,\quad x=1,\quad y=0.$ (Ox ღერძი)
20. წერტილი მოძრაობს $V=0,001t^4$ მ/წმ სიჩქარით.

გამოვთვალოთ მანძილი, რომელსაც წერტილი გაივლის მოძრაობის დაწყებიდან 10 წამის განმავლობაში და მისი საშუალო სიჩქარე დროის ამ მონაკვეთში.

პასუხები:

1. 1. *2.* $e-\frac{1}{e}-2$. *3.* $4\ln 3$. *4.* 4.

5. $3\pi a^2$. *6.* $\frac{\pi a^2}{2}$. *7.* $\frac{3\pi a^2}{2}$. *8.* $\frac{\pi a^2}{8}$.

9. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. *10.* $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. *11.* $\frac{3a}{2}$. *12.* 21.

13. $4a$. *14.* $2\pi a$. *15.* $\frac{96\pi}{5}$. *16.* $\frac{\pi}{4}$.

17. $\frac{3\pi}{10}$. *18.* $\frac{(\pi+2)}{4}\pi$. *19.* $\frac{\pi}{4}$.

20. $l = 200$ მ, $V_{საშ.} = 20$ მ/წმ.

3.5 არასაკუთრივი ინტეგრალები

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტი $[a, +\infty]$ შუალედზე, მაშინ ნებისმიერი b-სათვის, $b\in[a, +\infty]$, განისაზღვრება არასაკუთრივი ინტეგრალი შემდეგნაირად:

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (3.5.1)$$

ანალოგიურად, თუ $b\in[-\infty, a]$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \quad \text{და} \qquad (3.5.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx. \qquad (3.5.3)$$

სადაც c-არის $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალის ნებისმიერი წერტილი (ხშირად ავიღებთ $c=0$).

თუ არასაკუთრივი ინტეგრალი არსებობს და სასრულია, მაშინ მას ეწოდება კრებადი არასაკუთრივი ინტეგრალი, წინააღმდეგ შემთხვევაში ინტეგრალს ქვია განშლადი.

ვთქვათ, $y=f(x)$ უწყვეტია $[a, c)\cup(c, b]$ სიმრავლეზე და $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ ცხადია, $f(x)$ ინტეგრებადი იქნება $[a, c-\varepsilon)\cup(c+\eta, b]$ მონაკვეთზე $(\varepsilon>0,\ \eta>0)$, მაშინ განიმარტება არასაკუთრივი ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to 0}\int_{c+\eta}^{b} f(x)dx. \qquad (3.5.4)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $c=b$ ან $c=a$, გვაქვს:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (3.5.5)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0}\int_{a-\eta}^{b} f(x)dx. \qquad (3.5.6)$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}.$$

2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int_0^{\infty} e^{-3x}dx$.

არასაკუთრივი ინტეგრალის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}(e^{-3b}-1) = \frac{1}{3}.$$

3. გამოთვალეთ ინტეგრალი: $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

განსაზღვრის ძალით გვაქვს:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

შემოვიტანოთ ჩასმა: $\sqrt{x}=t$, მაშინ $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2dt$.

ინტეგრალის ახალი საზღვრები იქნება 1 და $\sqrt{b}$ და

$$\int\limits_1^{b}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\int\limits_1^{\sqrt{b}}\frac{2dt}{1+t^2}=2arctgt\Big|_1^{\sqrt{b}}=2arctg\sqrt{b}-\frac{\pi}{2}.$$

ბოლოს:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}(2arctg\sqrt{b}-\frac{\pi}{2})=2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

4. გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}$.

ავიღოთ (3.5.3) ტოლობაში $C=0$, მივიღებთ

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^{0}\frac{dx}{x^2-6x+10}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{dx}{x^2-6x+10}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}arctg(x-3)\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}(x-3)\Big|_0^b=\lim_{a\to-\infty}(arctg(-3)-arctg(a-3))+$$

$$+\lim_{b\to+\infty}(arctg(b-3)-arctg(-3))=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi.$$

5. შევისწავლოთ კრებადობაზე არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, სადაც, α რაიმე რიცხვია.

(3.5.1) ტოლობის ძალით გვაქვს:

ა) თუ $\alpha\neq1$, მაშინ ნებისმიერი $b>0$ თვის

$$\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1).$$

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}-\frac{1}{1-\alpha} & \alpha>1\\ & \text{თუ}\\ \infty & \alpha<1\end{cases}$$

ბ) თუ $\alpha=1$, მაშინ $b>0$-სთვის

$$\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\ln b,\qquad \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\infty.$$

ამრიგად: $\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ კრებადია, როცა $\alpha>1$ და განშლადია, როცა $\alpha<1$.

6. გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$.

ამოხსნა: ცხადია $\frac{1}{e}<1<e$, ამიტომ თუ გამოვიყენებთ (3.5.4) ტოლობას მივიღებთ:

$$\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}+\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}},\quad \varepsilon>0.$$

შემოვიტანოთ ჩასმა $\ln x=u$, მაშინ $du=\frac{dx}{x}$, ამიტომ

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}=\int\frac{du}{\sqrt[3]{u^2}}=\int u^{-\frac{2}{3}}du=\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=3\sqrt[3]{\ln x}+C.$$

მაშინ:

$$\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}=\lim_{\varepsilon\to0}\left[3\sqrt[3]{\ln(1-\varepsilon)}-3\sqrt[3]{\ln\frac{1}{e}}\right]+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to0}\left[3\sqrt[3]{\ln e}-3\sqrt[3]{\ln(1+\varepsilon)}\right]=0-3(-1)+3\cdot1-0=6.$$

მაგალითები:

ა) გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალი უსასრულო ზღვარით (1-13)

ბ) გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან (14-25)

1. $\int\limits_0^{\infty} x \cdot 5^{-x}\,dx.$ 2. $\int\limits_0^{\infty} x \cdot 3^{-x}\,dx.$ 3. $\int\limits_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}\,dx.$

4. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}.$ 5. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+8}.$ 6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}.$

7. $\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-x+6}.$ 8. $\int\limits_3^{\infty} \frac{5x-1}{x^2-3x-2}\,dx.$ 9. $\int\limits_1^{\infty} \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}\,dx.$

10. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+8}.$ 11. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx.$ 12. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^2}.$

13. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$ 14. $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{(3-x)^2}.$ 15. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

16. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{1-2\cos x}.$ 17. $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}.$ 18. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 2x}.$

19. $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ 20. $\int\limits_1^{2} \frac{3x-4}{\sqrt{x-2}}\,dx.$ 21. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}.$

22. $\int\limits_0^{2} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ 23. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}.$ 24. $\int\limits_0^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^3}.$

25. $\int\limits_{\frac{2}{3}}^{2} \frac{6x+1}{\sqrt{3x-2}}\,dx.$

პასუხები:

1. $\frac{1}{\ln^2 5}.$ 2. $\frac{1}{\ln^2 3}.$ 3. $2.$ 4. $1.$

5. $\frac{\pi}{2}.$ 6. $\frac{4\sqrt{31}}{31}\pi.$ 7. $\frac{1}{5}\ln 6.$ 8. $\ln 4+\frac{1}{2}.$

9. $\pi.$ 10. $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}-\frac{1}{24}\ln 3.$ 11. $\ln 3-\frac{1}{3}.$ 12. $\frac{\pi}{8}.$

13. $\frac{\pi}{2}.$ 14. განშლადია 15. $\frac{\pi}{2}.$ 16. განშლადია

17. განშლადია 18. განშლადია 19. $2\sqrt{2}.$ 20. $0.$

21. $\frac{\pi}{2}.$ 22. $\frac{16}{3}.$ 23. $\frac{\pi}{3}.$ 24. განშლადია

25. $\frac{92}{9}.$

თავი 4

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა:

$$F(x,y,y')=0 \quad \text{ან} \quad y'=f(x,y).$$

სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, $y=y(x)$ უცნობი ფუნქციაა, y'-მისი წარმოებული, ხოლო $f(x,y)$ მოცემული ფუნქცია.

$y=\varphi(x)$ ფუნქციას, რომელიც მოცემულ განტოლებას აქცევს იგივეობად, ეწოდება მისი ამონახსნი, ხოლო ამ ფუნქციის გრაფიკს ინტეგრალური წირი.

$y=\varphi(x,C)$ ფუნქციას, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ეწოდება მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ იგი C მუდმივის ნებისმიერი რიცხვითი მნიშვნელობისათვის წარმოადგენს განტოლების ამონახსნს და $f(x,y)$ ფუნქციის განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი (x_0,y_0) წერტილისათვის არსებობს მუდმივის ისეთი C_0 მნიშვნელობა, რომ $y=\varphi(x,C_0)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს საწყის პირობას: $\varphi(x_0,C_0)=y_0$. $y=\varphi(x,C_0)$ ფუნქციას ეწოდება განტოლების კერძო ამონახსნი.

მოცემული განტოლების ამონახსნი მოიცემა არაცხადი ფუნქციის სახითაც $\Phi(x,y,C)=0$, რომელსაც ეწოდება ზოგადი ინტეგრალი, ხოლო $\Phi(x,y,C_0)=0$ ტოლობას - კერძო ინტეგრალი.

მოცემული განტოლების ამონახსნს ეწოდება განსაკუთრებული, თუ მისი შესაბამისი ინტეგრალური წირის ყოველ წერტილზე გადის განტოლების სხვა, მისი შემხები, ინტეგრალური წირი. განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი ვერ მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან C მუდმივის შერჩევით.

4.1 დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით

ვთქვათ, დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y). \qquad (4.1.1)$$

ვთქვათ, $f_2(y)\neq 0$. მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება. გვექნება:

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx.$$

მიღებული ტოლობის ინტეგრება მოგვცემს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C.$$

ხოლო თუ $f_2(y_0)=0$, მაშინ $y=y_0$ ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს განტოლების ამონახსნს, შესაძლებელია არც შედიოდეს ზოგად ამონახსნში. ამიტომ შემოწმების შედეგად, თუ დავრწმუნდით, რომ აღნიშნული კერძო ამონახსნი არ შედის მიღებულ ზოგად ამონახსნში, ჩავრთოთ ის მასში C მუდმივის შერჩევის გზით. წინააღმდეგ შემთხვევაში ის იქნება განსაკუთრებული ამონახსნი.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები.

1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y'=\frac{3x^2}{4y^3+5}.$$

ამოხსნა: მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{4y^3+5}\rightarrow(4y^3+5)dy=3x^2dx.$$

მისი ინტეგრება მოგვცემს ზოგად ინტეგრალს:

$$\int(4y^3+5)dy=\int 3x^2dx+C,$$

$$y^4+5y=x^3+C,$$

$$y^4+5y-x^3-C=0.$$

2. ვიპოვოთ $y' = 2x(y^2+1)$ განტოლების ამონახსნი.

ამოხსნა: რადგან $y^2+1 \neq 0$, გვექნება

$$\frac{dy}{y^2+1} = 2x\,dx,$$

საიდანაც მივიღებთ ზოგად ამონახსნს:

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int 2x\,dx + C \Rightarrow arctgy = x^2 + C \Rightarrow y = tg(x^2 + C).$$

3. ვიპოვოთ $y' = \frac{y}{x}$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა: ვთქვათ, $y \neq 0$, მაშინ გვექნება

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

ამ ტოლობის ინტეგრება მოგვცემს:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|C_2|$$

$$(C_2 \neq 0) \Rightarrow y = C_2 x.$$

$y = 0$ მოცემული განტოლების ამონახსნია, მხოლოდ იგი არ შედის მიღებულ ამონახსნთა სიმრავლეში, ვინაიდან $C_2 \neq 0$. მაგრამ თუ შემოვიღებთ ახალ C მუდმივს, რომელიც C_2-საგან განსხვავებით მიიღებს ნულოვან მნიშვნელობასაც, გვექნება ზოგადი ამონახსნი:

$$y = Cx, \qquad C \in (-\infty, \infty).$$

4. ვიპოვოთ $y' = 2\sqrt{y}$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა: ვთქვათ, $y \neq 0$, მაშინ გვექნება

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx + C \Rightarrow \sqrt{y} = x + C \Rightarrow y = (x + C)^2.$$

როგორც მესამე მაგალითში, აქაც $y = 0$ წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსნს, მაგრამ მისგან განსხვავებით იგი ვერ მიიღება ჩვენს მიერ აგებული ზოგადი ამონახსნისაგან C მუდმივის ვერცერთი რიცხვითი მნიშვნელობისათვის. იგი განსაკუთრებული ამონახსნია.

5. ვიპოვოთ $y' = \cos(x + y)$ განტოლების ამონახსნი.

ამოხსნა: მოცემული განტოლება არ არის განცალებადცვლადებიანი, მაგრამ $x + y = t$ ჩასმით მიიყვანება

განცალებადცვლადებიანზე. მართლაც, რადგან ჩასმიდან გამომდინარეობს, რომ $1 + y' = t'$, ამიტომ მოცემული განტოლება ასე ამოიხსნება:

$$\frac{dt}{1+\cos t} = dx \Rightarrow \int \frac{dt}{2\cos^2 \frac{t}{2}} = \int dx + C \Rightarrow$$

$$tg\frac{t}{2} = x + C \Rightarrow tg\frac{x+y}{2} - x = C.$$

მაგალითები:

ამოხსენით დიფერენციალური განტოლებები

1. $y' = \frac{y-1}{x}$.
2. $x\,dx + \frac{dy}{1+y^2} = 0$.
3. $x\,dx + y\,dy = 0$.
4. $2xyy' = 2 - 3x^2$.
5. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$.
6. $ctgy\,dx - tgx\,dy = 0$.
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+1)}{(y-1)x}$.
8. $ye^{2x}dx = (1+e^{2x})dy$.
9. $xy\,dx + dy = 0$.
10. $2xy\,dx + (1+x^2)dy = 0$
11. $\frac{x\,dx}{y} = \frac{dy}{1+y^2}$.
12. $2x(1+y^2)dx + dy = 0$.
13. $y' = \cos 2(x+y)$.
14. $y' = \frac{1}{3x+y}$.

პასუხები:

1. $y = Cx + 1$.
2. $y = tg(c - \frac{x^2}{2})$.
3. $x^2 + y^2 = C$.
4. $y^2 = 2\ln|x| - x^2 + C$.
5. $\frac{x+y}{1-xy} = C$.
6. $\sin x \cdot \cos y = C$.

7. $x-y+\ln|xy|=C$. 8. $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$ 9. $y=Ce^{-x^2/2}$.

10. $y=\frac{C}{1+x^2}$. 11. $y^2=Cx^2-1$. 12. $y=tg(C-x^2)$.

13. $tg2(x+y)-2x=C$. 14. $3y+9x+1=Ce^{3y}$.

4.2 ერთგვაროვანი და მასზე მიყვანადი დიფერენციალური განტოლებები

$y=f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება k რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, თუ ნებისმიერი $t\ne 0$-თვის სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$f(tx,ty)=t^k f(x,y).$$

განტოლებას

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \qquad (4.2.1)$$

სადაც $M(x,y)$ და $N(x,y)$ ერთი და იმავე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია,
ეწოდება ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. იგი ახალი უცნობი $t=\frac{y}{x}$ ფუნქციის მიმართ მიიყვანება განცალებადცვლადებიან განტოლებაზე.

ვთქვათ, მოცემულია განტოლება:

$$y'=\frac{a_1x+b_1x+C_1}{a_2x+b_2x+C_2}, \qquad (4.2.2)$$

სადაც C_1 და C_2 მუდმივებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი წარმოადგენს (4.2.1) სახის განტოლებას.
როცა:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1, & b_1\\ a_2, & b_2\end{vmatrix}\ne 0.$$

(4.2.2) განტოლება ჩასმით

$$\begin{cases}x=x_1+\alpha,\\ y=y_1+\beta,\end{cases}$$

სადაც α და β მუდმივები განისაზღვრებიან სისტემიდან:

$$\begin{cases}a_1\alpha+b_1\beta+C_1=0\\ a_2\alpha+b_2\beta+C_2=0\end{cases}$$

მიიყვანება (4.2.1) განტოლებაზე x_1 და y_1 ცვლადების მიმართ.

როცა $\Delta=0$, (ანუ რაც იგივეა $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$), მაშინ $z=a_1x+b_1y$ ჩასმით იგი მიიყვანება განცალებადცვლადებიან (4.1.1) განტოლებაზე.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$(x-y)dx+xdy=0.$$

ამოხსნა: შემოვიღოთ ჩასმა: $t=\frac{y}{x}$, მაშინ $y=tx$ და $dy=tdx+xdt$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები მოცემულ განტოლებაში და გავამარტივოთ:

$$(x-xt)dx+x(tdx+xdt)=0\Rightarrow(1-t)dx+tdx+xdt=0\Rightarrow dx+xdt=0.$$

ამოვხსნათ მიღებული განცალებადცვლადებიანი განტოლება. გვექნება:

$$\frac{dx}{x}+dt=0\Rightarrow\int\frac{dx}{x}+\int dt=C\Rightarrow\ln|x|+t=C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|x|+\frac{y}{x}=C\Rightarrow y=Cx-x\ln|x|.$$

2. მოვძებნოთ $(y^2-x^2)dx=xydy$ განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის (1;2) წერტილზე.
ამოხსნა: როგორც პირველ მაგალითში, აქაც შევიტანოთ მოცემულ განტოლებაში $y=tx$ და $dy=tdx+xdt$ მნიშვნელობები და გავამარტივოთ იგი. გვექნება:

$$(t^2-1)dx=t(tdx+xdt),$$

$$dx+txdt=0.$$

მიღებული განტოლება განცალებადცვლადიანია. ამოვხსნათ იგი და $t=\frac{y}{x}$-ის ჩასმით დავუბრუნდეთ ძველ ცვლადს. მივიღებთ:

$$\int \frac{dx}{x} + \int t\,dt = C.$$

$$\ln|x| + \frac{t^2}{2} = C.$$

$$y^2 = x^2(C - 2\ln|x|).$$

საწყისი პირობის საშუალებით განვსაზღვროთ C მუდმივის მნიშვნელობა

$$4 = 1 \cdot (C - 2\ln 1).$$

$$C = 4.$$

ამგვარად, საძიებელი წირის განტოლებაა:

$$y^2 = x^2(4 - 2\ln|x|).$$

3. ვიპოვოთ $y' = \dfrac{y-1}{x-y+1}$ განტოლების ამონახსნი

ამოხსნა: რადგან,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

ამიტომ, შემოვიღოთ ჩასმა $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$. α და β უცნობი მუდმივები მოვძებნოთ შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან

$$\begin{cases} \beta + 1 = 0 \\ \alpha - \beta + 1 = 0 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $\alpha = 0$ და $\beta = -1$. შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები ჩასმაში, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 - 1 \end{cases}$$

რადგან ამ ტოლობებიდან $dx = dx_1$ და $dy = dy_1$, ამიტომ მათი ჩასმით მოცემული განტოლება მიიყვანება ერთგვაროვან განტოლებაზე.

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1}{x_1 - y_1}.$$

შემოვიღოთ ჩასმა:

$$z = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow y_1 = zx_1 \Rightarrow dy_1 = z\,dx_1 + x_1\,dz$$

და ამოვხსნათ იგი, გვექნება:

$$z\,dx_1 + x_1\,dz = \frac{zx_1\,dx_1}{x_1 - zx_1} \Rightarrow (1-z)(z\,dx_1 + x_1\,dz) = z\,dx_1 \Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} + \frac{1-z}{z^2}\,dz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx_1}{x_1} + \int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dz}{z} = C \Rightarrow \ln|x_1| - \frac{1}{z} - \ln|z| = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{x_1}{y_1} + \ln|y_1| = C \Rightarrow \ln|y+1| = \frac{x}{y+1} + C.$$

4. ვიპოვოთ $y' = -\dfrac{x+y-1}{2x+2y-3}$ განტოლების კერძო ამონახსნი შემდეგი საწყისი პირობით $y|_{x=0} = 1$.

ამოხსნა: რადგან,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

შემოვიღოთ ჩასმა $z = x + y$, მაშინ $y' = z' - 1$. მათი ჩასმით მოცემული განტოლება მიიყვანება განცალებადცვლადებიან განტოლებაზე.

$$z' = \frac{z-2}{2z-3}.$$

ამოვხსნათ იგი, გვექნება:

$$\frac{2z-3}{z-2}\,dz = dx \Rightarrow 2z + \ln|z-2| = x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2y + \ln|x+y-2| = C.$$

შევიტანოთ ზოგად ამონახსნში საწყისი პირობები, გვექნება

$$2 = C.$$

ამგვარად, მივიღეთ შემდეგი კერძო ინტეგრალი:

$$x + 2y + \ln|x+y-2| - 2 = 0.$$

სავარჯიშოები:

ამოხსენით დიფერენციალური განტოლებები:

1. $(x+y)dx + x\,dy = 0$.

2. $(x^2+y^2)dx = 2xy\,dy$.

3. $(x-y)ydx = x^2dy.$

4. $x^3dx-(3x^3+2y^2)ydy=0.$

5. $ydx-(x-2\sqrt{xy})dy.$

6. $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0.$

7. $y'=e^{y/x}+\frac{y}{x}.$

8. $y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}.$

9. $y'=\frac{x+4y-3}{4x-y+5}.$

10. $y'=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}.$

11. $y'=\frac{x+y-2}{y-x-4}.$

12. $y'=-\frac{x+y+1}{2x+2y-1}.$

13.

$y'=\frac{x+2y+1}{2x-3},\quad x_0=2,\quad y_0=-2.$

14. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx,\quad x_0=0,\quad y_0=-\frac{1}{2}.$

15. $y'=\frac{x-y+1}{3x-3y+1}.$

16. $y'=\frac{2x+y-6}{4x+2y+3}.$

17. $y'=\frac{x-y}{x+y},\quad x_0=1,\quad y_0=0.$

18. $y'=\frac{y-x}{x},\quad x_0=1,\quad y_0=1.$

19. $(y+2)dx-(2x+y-4)dy=0,\quad x_0=5,\quad y_0=-3.$

20. $xy'=y\ln\frac{y}{x},\quad x_0=1,\quad y_0=1.$

პასუხები:

1. $(2y+x)x=C.$

2. $y^2=x^2+Cx.$

2. $x=Ce^{y/x}.$

4. $x^2+2y^2=C\sqrt{x^2+y^2}.$

5. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln y=C.$

6. $y^2=Cx^2+x^4.$

7. $\ln Cx+e^{y/x}=0.$

8. $y=\frac{2x}{1-Cx^2}.$

9. $8arctg\frac{y-1}{x+1}+\ln\left[(x+1)^2+(y-1)^2\right]=C.$

10. $x^2-xy+y^2+x-y=C.$

11. $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C.$

12. $x+2y+3\ln|x+y-2|=C.$

13. $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=3.$

14. $1+2y-x^2=C.$

15. $x-3y+\ln|x-y|=C.$

16. $2y-x+3\ln|2x+y|=C.$

17. $x^2-2xy-y^2=1.$

18. $xe^{y/x}=e.$

19. $x+y-1=(y+2)^2.$

20. $y=xe^{1-x}.$

4.3 წრფივი და მასზე მიყვანადი განტოლებები

პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება წრფივი, თუ იგი შეიცავს y და y' ფუნქციებს პირველ ხარისხში. მისი ზოგადი სახეა

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{4.3.1}$$

სადაც, $P(x)$ და $Q(x)$ მოცემული ფუნქციებია.

თუ $Q(x)=0$, მაშინ (4.3.1) განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, წინააღმდეგ შემთხვევაში - არაერთგვაროვანი.

ერთგვაროვანი განტოლება $y'+P(x)y=0$ წარმოადგენს განტოლებას განცალებადი ცვლადებით და მისი ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$y=Ce^{-\int P(x)dx},$$

ხოლო (4.3.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი კი - ფორმულით

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right) \qquad (4.3.2)$$

ბერნულის განტოლება, რომლის ზოგადი სახეა

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

სადაც, $n \in R (n \neq 0,\ n \neq 1)$ $z = y^{1-n}$ ჩასმით მიიყვანება წრფივ განტოლებაზე.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. ამოვხსნათ განტოლება: $y' - 4x^3y = e^{x^4}$

ამოხსნა: შევიტანოთ (4.3.2) ფორმულაში $P(x) = -4x^3$ და $Q(x) = e^{x^4}$ მნიშვნელობები და ჩავატაროთ საჭირო გამოთვლები გვექნება:

$$y = e^{\int 4x^3dx}\left(C + \int e^{x^4}\cdot e^{-\int 4x^3dx}dx\right) = e^{x^4}\left(C + \int e^{x^4}\cdot e^{-x^4}dx\right) = e^{x^4}(C + x).$$

ე.ი. მოცემული განტოლების ზოგადი ამოხსნაა:

$$y = e^{x^4}(C + x).$$

2. ვიპოვოთ: $y' + y\,tgx = \frac{1}{\cos x}$ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: $x_0 = 0,\ y_0 = 1$.

ამოხსნა: შევიტანოთ (4.3.2) ფორმულაში $P(x) = tgx$ და $Q(x) = \frac{1}{\cos x}$ მნიშვნელობები და მოვძებნოთ ზოგადი ამონახსნი, გვექნება:

$$y = e^{-\int tgx dx}\left(C + \int \frac{1}{\cos x}\cdot e^{\int tgx dx}dx\right) = e^{\int\frac{d\cos x}{\cos x}}\left(C + \int \frac{1}{\cos x}\cdot e^{-\int\frac{d\cos x}{\cos x}}dx\right) =$$

$$= e^{\ln\cos x}\left(C + \int \frac{1}{\cos x}\cdot e^{-\ln\cos x}dx\right) = \cos x\left(C + \int \frac{dx}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= \cos x(C + tgx) = C\cos x + \sin x.$$

ამგვარად, მივიღეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

$$y = C\cos x + \sin x.$$

კერძო ამონახსნის მისაღებად შევიტანოთ ზოგად ამონახსნში საწყისი პირობები და განვსაზღვროთ c მუდმივის რიცხვითი მნიშვნელობა:

$$1 = C\cos 0 - \sin 0 \Rightarrow C = 1.$$

ამგვარად, საძიებელი კერძო ამონახსნია:

$$y = \cos x - \sin x.$$

3. ვიპოვოთ: $y' - \frac{3}{x}y = -x^3y^2$ განტოლების ამონახსნი.

ამოხსნა: შემოვიღოთ ჩასმა $z = y^{-1}$, მაშინ $z' = -y^{-2}y'$. ცხადია, განტოლება ასე გადაიწერება:

$$z' + \frac{3}{x}z = x^3,$$

რომელიც უკვე წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას z-ის მიმართ. მისი ამოხსნა მოგვცემს:

$$z = e^{-\int\frac{3dx}{x}}\left(C + \int x^3\cdot e^{\int\frac{3dx}{x}}dx\right) = e^{-3\ln x}\left(C + \int x^3\cdot e^{3\ln x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(C + \int x^6dx\right) = \frac{1}{x^3}\left(C - \frac{x^7}{7}\right).$$

ახლა თუ დავუბრუნდებით ძველ ცვლადს, მივიღებთ საძიებელ ამონახსნს:

$$y = \frac{7x^3}{C + x^7}.$$

4. ვიპოვოთ: $3dy = (1 - 3y^3)y\sin x dx$ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობებს: $x_0 = \frac{\pi}{2},\ y_0 = 1$.

ამოხსნა: ჩავწეროთ მოცემული განტოლება შემდეგი სახით:

$$y' - \frac{\sin x}{3}y = -y^4\sin x.$$

იგი წარმოადგენს ბერნულის განტოლებას. გავყოთ განტოლების ორივე მხარე y^4-ზე, გვექნება:

$$y^{-4}y' - \frac{\sin x}{3}y^{-3} = -\sin x.$$

ჩავსვათ მიღებულ განტოლებაში შემდეგი მნიშვნელობები $z = y^{-3}$, $-3y^{-4}y' = z'$, გვექნება:

$$z' + \sin x \cdot z = 3\sin x.$$

მივიღეთ წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება z-ის მიმართ. მისი ამოხსნა მოგვცემს ზოგად ამონახსნს.

$$z = e^{-\int \sin x dx}\left(C + 3\int \sin x \cdot e^{\int \sin x dx}dx\right) = e^{\cos x}\left(C + 3\int \sin x \cdot e^{-\cos x}dx\right) =$$

$$= e^{\cos x}\left(C + 3\int e^{-\cos x}d(-\cos x)\right) = e^{\cos x}\left(C + 3 \cdot e^{-\cos x}\right) = Ce^{\cos x} + 3.$$

ახლა თუ დავუბრუნდებით y ცვლადს, მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ამონახსნს.

$$y^3(Ce^{\cos x} + 3) = 1,$$

საიდანაც მოვძებნით C მუდმივის რიცხვით მნიშვნელობას საწყისი პირობების გათვალისწინებით.

$$C + 3 = 1 \Rightarrow C = -2.$$

ამგვარად, საძიებელი კერძო ამონახსნი იქნება:

$$y^3(3 - 2e^{\cos x}) = 1.$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{3 - 2e^{\cos x}}}.$$

მაგალითები:

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები

1. $y' + \frac{y}{x} = 3.$
2. $y' + 2y = e^x.$
3. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}.$
4. $xy' - 2y = -x^2.$
5. $(xy' - 1)\ln x = 2y.$
6. $y' + y = -x^2.$
7. $y' + xy = xy^3.$
8. $y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}.$
9. $y' + xy = x^3.$
10. $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}.$
11. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}.$
12. $y' + y = x\sqrt{y}.$
13. $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 5.$

14. $(1 - x^2)y' + xy = 1, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 2.$
15. $y' = 2y + e^x - x, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1/4.$
16. $ydx + (x - \frac{x^2y}{2})dy = 0, \quad x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = 1.$
17. $(1 - x^2)y' - xy = xy^2, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{1}{7}.$
18. $xy' + y = y^2\ln x, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1.$

პასუხები:

1. $2xy = 2x^2 + C.$
2. $3y = (e^x + Ce^{-2x}).$
3. $xy = (x^3 + C)e^{-x}.$
4. $y = x^2(C - \ln x).$
5. $y = C\ln^2 x - \ln x.$
6. $y = 2(x-1) - x^2 + Ce^{-x}.$
7. $y = x^2 - 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$
8. $y = e^{-x^2}(C + 2/3\, x^3).$
9. $y^2(Ce^{x^2} + 1) = 1.$
10. $y = x^4(C + 1/2 \ln x)^2.$
11. $y = e^{-2x^2}(C + \frac{x^2}{2})^2.$
12. $y(x + Ce^{-x/2} - 2)^2.$
13. $y = \frac{5}{x} + x\ln x.$
14. $y = 2\sqrt{1 - x^2} + x.$
15. $y = e^{2x} - e^x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$
16. $x^2(y + 3y^2) = 1.$
17. $y(8\sqrt{1 - x^2} - 1) = 1.$
18. $y(\ln x + 1) = 1.$

4.4 განტოლება სრულ დიფერენციალებში

თუ,

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

განტოლებისათვის სრულდება შემდეგი პირობა:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

მაშინ მას ეწოდება განტოლება სრულ დიფერენციალებში, ხოლო ზოგადი ამონახსნი მოიცემა $\mu(x,y)=C$ ტოლობით, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო $\mu(x,y)$ ფუნქცია განისაზღვრება:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mu(x,y)}{\partial x}=P(x,y),\\[2mm] \dfrac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}=Q(x,y),\end{cases}$$

განტოლებათა სისტემიდან.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ, $(4x+5y)dx+(5x-y)dy=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P(x,y)=4x+5y,\qquad Q(x,y)=5x-y$$

და ვიპოვოთ

$$\frac{\partial P}{\partial y}=5,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=5.$$

ე.ი. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ გვაქვს განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაშინ

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y)=4x+5y,$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)=5x-y.$$

ვაინტეგროთ პირველი განტოლება x ცვლადით (ე.ი. y ჩავთვალოთ მუდმივად), გვექნება

$$u(x,y)=\int(4x-5y)dx=2x^2-5xy+\varphi(y).$$

ახლა ვიპოვოთ $\frac{\partial u}{\partial y}$ და გავუტოლოთ $Q(x,y)$-ის მნიშვნელობას

$$5x+\varphi'(y)=5x-y,$$

საიდანაც:

$$\varphi(y)=-\frac{y^2}{2}.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$u(x,y)=2x^2+5xy-\frac{y^2}{2}.$$

მაშასადამე, მოცემულ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$2x^2+5xy-\frac{y^2}{2}=C.$$

2. ვიპოვოთ:

$$\frac{y}{x}dx+(3y^2+\ln x)dy=0$$

განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის (1;2) წერტილზე.

ამოხსნა. რადგან $P(x,y)=\frac{y}{x}$, $Q(x,y)=3y^2+\ln x$ და $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x}$, ხოლო $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{x}$,

მაშასადამე, განტოლება სრულ დიფერენციალებშია. მოვძებნოთ $u(x,y)$ ფუნქცია. ვაინტეგროთ x ცვლადით.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{y}{x}$$

ტოლობა, მივიღებთ:

$$u(x,y)=\int\frac{y}{x}dx=y\ln x+\varphi(y)$$

მოვძებნოთ $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ და გავუტოლოთ $Q(x,y)$ ფუნქციას

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\ln x+\varphi'(y)=3y^2+\ln x$$

საიდანაც

$$\varphi(y) = y^3.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$u(x, y) = y \ln x + y^3$$

მაშინ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y \ln x + y^3 = C.$$

რადგან ეს წირი უნდა გადიოდეს (1;2) წერტილზე, ამიტომ ზოგადი ამონახსნიდან მივიღებთ: $C = 8$.
ამგვარად, საძიებელი ინტეგრალური წირის განტოლება იქნება:

$$y \ln x + y^3 = 8.$$

3. ვიპოვოთ:

$$2(x - xy^2)dx + 2(y - x^2 y)dy = 0$$

განტოლების კერძო ამონახსნი, შემდეგი საწყისი პირობით $x_0 = 1, \quad y_0 = 1.$

ამოხსნა. ადვილი შესამოწმებელია, რომ მოცემული განტოლება სრულ დიფერენციალებშია. ვიპოვოთ $u(x, y)$. გვექნება:

$$u(x, y) = \int (2x - 2xy^2)dx = x^2 - x^2 y^2 + \varphi(y)$$

ხოლო

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -2x^2 y + \varphi'(y) = 2y - 2x^2 y.$$

საიდანაც $\varphi(y) = y^2$.
განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$x^2 - x^2 y + y^2 = C.$$

ხოლო საძიებელი კერძო ამონახსნი:

$$x^2 - x^2 y + y^2 = 1.$$

მაგალითები:

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები

1. $(2xy - 3)dx + (x^2 + 1)dy = 0.$
2. $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0.$
3. $(x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0.$
4. $(2xye^{x^2} + \ln y)dx + (e^{x^2} + \frac{x}{y})dy = 0.$
5. $(x^2 + y - ye^x)dx + (x + 2y - e^x)dy = 0.$
6. $(x - \cos y)dx + (x \sin y + \cos y)dy = 0.$
7. $(2x^3 + 4y)dx + (3x^2 y^2 + 4x - 2y)dy = 0.$
8. $(3x^2 y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2 y + 12y^3)dy = 0.$
9. $e^y dx + (xe^y - 3y^2)dy = 0.$
10. $(x^2 \cos 3y + 2x)dx - (x^3 \sin y - 4y^3)dy = 0.$
11. $(x + e^{x/y})dx + e^{x/y}(1 - \frac{x}{y})dy = 0, \quad x_0 = 0, \quad y = 2.$
12. $(1 - \frac{y}{x^2})dx + (1 + \frac{1}{x})dy = 0, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 2.$
13. $(x + \ln y)dx + (\frac{x}{y} + \sin y)dy = 0, \quad x_0 = 0, \quad y = \pi.$
14. $(3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy = 0, \quad x_0 = 1, \quad y = 1.$

პასუხები:

1. $x^2y-3x+y=C.$
2. $\frac{x^3}{3}+y^2x+xy+e^y=C.$
3. $\frac{x^2}{2}\cos 2y+x=C.$
4. $ye^{x^2}+x\ln y=C.$
5. $\frac{x^3}{3}+yx-ye^x+y^2=C.$
6. $\frac{x^2}{2}-x\cos y+\sin y=C.$
7. $x^2y^3+4xy+y^2=C.$
8. $x^2y-2x^2y^2+3y^4=C.$
9. $xe^y-y^3=C.$
10. $\frac{x^3}{3}\cos 3y+x^2+y^4=C.$
11. $\frac{x^2}{2}+ye^{x/y}=2.$
12. $x+y+\frac{y}{x}=5.$
13. $\frac{x^2}{2}-x\ln y-\cos y=1.$
14. $x^3-x^2y+xy^2-y^3=0.$

4.5 მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები, რომელთა რიგის დაწევა შესაძლებელია

ა) $y^{(n)}=f(x)$ სახის განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება n-ჯერადი ინტეგრებით.

ბ) $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\dots,y^{(n)})=0$ სახის განტოლება, რომელიც არ შეიცავს უცნობ ფუნქციასა და მის წარმოებულებს $(k-1)$ რიგამდე ჩათვლით, $z=y^{(k)}$ ჩასმით დაიყვანება $(n-k)$ რიგის განტოლებაზე. ცხადია ეს ჩასმა ეფექტურია მეორე რიგის განტოლებისათვის, ვინაიდან იგი მიიყვანება ჩვენს მიერ უკვე შესწავლილ პირველი რიგის განტოლებამდე.

გ) $F(y,y',y'')=0$ სახის განტოლება, რომელიც ცხადად არ შეიცავს დამოუკიდებელ x ცვლადს, $y'=P(y)$, $y''=P'y=P\cdot P'$ ჩასმით დაიყვანება პირველი რიგის განტოლებაზე.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ $y''=6x$ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობებს

$$y(1)=6,\quad y'(1)=5.$$

ამოხსნა. მოცემული განტოლების ინტეგრება მოგვცემს

$$y'=\int 6x\,dx=3x^2+C_1,$$

ხოლო მისი ინტეგრება კი:

$$y=\int(3x^2+C_1)dx=x^3+C_1x+C_2.$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=x^3+C_1x+C_2.$$

განტოლების კერძო ამონახსნის მოსაძებნად C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან

$$\begin{cases}6=1+C_1+C_2,\\ 5=3+C_1.\end{cases}$$

შევიტანოთ ამ სისტემის ამონახსნი $C_1=2$ და $C_2=3$ ზოგად ამონახსნში. მივიღებთ საძიებელ კერძო ამონახსნს

$$y=x^3+2x+3.$$

2. ვიპოვოთ $y'''=\frac{6}{x^3}$ განტოლების კერძო ამონახსნი შემდეგი საწყისი პირობებით

$$y(1)=6,\quad y'(1)=11,\quad y''(1)=3.$$

ამოხსნა. მოვახდინოთ მოცემული განტოლების 3-ჯერ ინტეგრება, გვექნება

$$y''=\int\frac{6dx}{x^3}=-\frac{3}{x^2}+C_1,$$

$$y'=-\int\frac{3dx}{x^2}+\int C_1dx=\frac{3}{x}+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\frac{3dx}{x}+\int C_1x\,dx+\int C_2\,dx=3\ln|x|+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

C_1, C_2 და C_3 მუდმივების განსასაზღვრავად მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} 3 = -3 + C_1, \\ 11 = 3 + C_1 + C_2, \\ 6 = \dfrac{C_1}{2} + C_2 + C_3. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია

$$C_1 = 6, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 1.$$

ამგვარად კერძო ამონახსნი იქნება

$$y = 3\ln|x| + 3x^2 + 2x + 1.$$

3. ვიპოვოთ $xy'' + y' = x^2$ განტოლების ამონახსნი.

ამოხსნა. ეს განტოლება არ შეიცავს y ფუნქციას. შემოვიღოთ ჩასმა $z = y'$, მაშინ $z' = y''$. თუ მათ შევიტანთ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ

$$z' + \frac{1}{x}z = x,$$

რომელიც წარმოადგენს პირველი რიგის წრფივ განტოლებას. მისი ამოხსნა მოგვცემს

$$z = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(C_1 + \int x e^{\int\frac{dx}{x}}dx\right) = \frac{1}{x}\left(C_1 + \frac{x^3}{3}\right).$$

ახლა დავუბრუნდეთ ძველ ცვლადს, მივიღებთ

$$y = \int\frac{C_1}{x}dx + \int\frac{x^2dx}{3} = C_1\ln|x| + \frac{x^3}{9} + C_2.$$

4. ვიპოვოთ $y''(x^2+1) = 2xy'$ განტოლების კერძო ამონახსნი, შემდეგი საწყისი პირობებით:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $z = y'$, მაშინ მოცემული განტოლება ასე გადაიწერება

$$z'(x^2+1) = 2xz,$$

რომელიც წარმოადგენს განტოლებას განცალებადი ცვლადებით. მისი ამოხსნა მოგვცემს

$$\frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{x^2+1} \rightarrow \ln z = \ln(x^2+1) + C_1 \rightarrow z = C_1(x^2+1).$$

დავუბრუნდეთ ძველ ცვლადს, მივიღებთ განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$y = C_1\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C_2.$$

კერძო ამონახსნის მოსაძებნად განვსაზღვროთ C_1 და C_2 მუდმივები, გვექნება:

$$C_1 = 3, \quad C_2 = 1.$$

ამგვარად, საძიებელი კერძო ამონახსნი იქნება

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

5. ამოვხსნათ განტოლება: $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $z = y'$, მაშინ $z' = y''$ და მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს

$$z' = \sqrt{1 - z^2}.$$

იგი განცალებადცვლადებიანი განტოლებაა. ვიგულისხმოთ, რომ $1 - z^2 \neq 0$ და ამოვხსნათ იგი, გვექნება:

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = dx \Rightarrow \arcsin z = x + C_1 \Rightarrow z = \sin(x + C_1).$$

თუ დავუბრუნდებით ძველ ცვლადს, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x + C_1),$$

რომლის ამოხსნაც მოგვცემს

$$y = C_2 - \cos(x + C_1).$$

როცა $1 - z^2 = 0$, მაშინ $y = \pm x$ წარმოადგენს განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

6. ამოვხსნათ განტოლება $y \cdot y'' = y'^2$.

ამოხსნა, განტოლება არ შეიცავს ცხადად x დამოუკიდებელ ცვლადს, ე.ი. უნდა მოვახდინოთ შემდეგი ჩასმა $y' = P(y)$, მაშინ $y'' = P \cdot P'$ და განტოლება მიიღებს სახეს:

$$yPP' = P^2,$$

ვთქვათ, $P \neq 0$, მაშინ

$$yP' = P$$

განტოლების ამოხსნა მოგვცემს

$$\frac{dP}{P} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|P| = \ln|y| + C_1 \Rightarrow P = C_1 y.$$

გადავიდეთ ძველ ცვლადზე და მიღებული განტოლება ამოვხსნათ. მივიღებთ

$$y' = C_1 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = C_1 \int dx + C_2 \Rightarrow \ln|y| = C_1 x + C_2 \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x}.$$

როცა, $P=0$, მაშინ $y=C_2$, ამონახსნი მიიღება ზოგადიდან, როცა $C_1=0$.

მაშასადამე, განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

7. ვიპოვოთ $y'' - y'^2 = 0$ განტოლების ამონახსნი.

ამოხსნა. შემოვიტანოთ ჩასმა $y' = P$, მაშინ $y'' = P \cdot P'$, გვექნება

$$P \cdot P' - P^2 = 0.$$

ვთქვათ, $P \neq 0$, მაშინ $P' = P$,

რომლის ამოხსნაც მოგვცემს

$$\frac{dP}{dy} = P \Rightarrow \frac{dP}{P} = dy \Rightarrow \ln|P| = y + C_1 \Rightarrow P = C_1 e^{y}.$$

გადავიდეთ ძველ ცვლადზე და მიღებული განტოლება ამოვხსნათ, გვექნება

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^{y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{y}} = C_1 dx \Rightarrow -e^{-y} = C_1 x + C_2 \Rightarrow y = -\ln|C_1 x + C_2|.$$

როცა $P=0$, მაშინ $C_1 = 0$ და $y = -\ln|C_2|$.

ამგვარად, განტოლების ამონახსნია $y = -\ln|C_1 x + C_2|$.

მაგალითები:

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი

1. $y'' = 20x^3$, $\quad y(1) = 2$, $\quad y'(1) = 2$.
2. $y'' = -\dfrac{2}{x^2}$, $\quad y(1) = 4$, $\quad y'(1) = 3$.
3. $y'' = 4\cos 2x$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 0$.
4. $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 1$.

5. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\ln 2}{2}$, $\quad y'(\dfrac{\pi}{4}) = 1$.
6. $y'' = \sin 3x$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$.
7. $y''' = xe^{-x}$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 2$, $\quad y''(0) = 2$.
8. $y''' = e^{-x}$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 0$, $\quad y''(0) = 0$.
9. $y'' = x + \sin x$, $\quad y(0) = 3$, $\quad y'(0) = 1$.
10. $y''' = 8e^{2x+1}$, $\quad y(-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{5}{4}$, $\quad y'(-\dfrac{1}{2}) = 3$, $\quad y''(-\dfrac{1}{2}) = 6$.

პასუხები:

1. $y = x^5 - 3x + 4$.
2. $y = 2\ln|x| + x + 3$.
3. $y = 1 - \cos 2x$.
4. $y = x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln\sqrt{1+x^2} + x$.
5. $y = -\ln|\cos x|$.
6. $y = -\dfrac{\sin 3x}{9} + \dfrac{4}{3}x$.
7. $y = -(x+3)e^{-x} + \dfrac{3}{2}x^2 + 3$.
8. $y = -e^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - x + 1$.
9. $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + 2x + 3$.
10. $y = e^{2x+1} + x^2 + 2x + 1$.

ამოხსენით განტოლებები:

11. $x^2 y'' + xy' = 1$.
12. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.
13. $(1+e^x)y'' + y' = 0$.
14. $y'' + 2xy'^2 = 0$.
15. $x^2 y'' = y'^2$.
16. $y'' - y' = e^{2x}$.
17. $y'' = \dfrac{y'^2}{x^2} - \dfrac{y'}{x}$.
18. $y'' = (x - y')^2 + 1$.

19. $xy''=y'+\sqrt{x^2+y'^2}$.

20. $xy''=y'+x^2$.

21. $xy''+xy'^2=y'$, $y(2)=2$, $y'(2)=1$.

22. $3x^2y'=(1+x^3)y''$, $y(0)=3$, $y'(0)=3$, $y'(0)=2$.

პასუხები:

11. $y=\dfrac{\ln^2|x|}{2}+C_1\ln|x|+C_2$.

12. $y=\dfrac{C_1}{x}\ln x+C_2$.

13. $y=C_1(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+x^2+C_2$.

14. $y=\dfrac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{C_1}+C_2$.

15. $y=\dfrac{x}{C_1}-\dfrac{1}{C_1^2}\ln|1+C_1x|+C_2$.

16. $y=C_1e^x+\dfrac{e^{2x}}{2}+C_2$.

17. $y=\dfrac{1}{C_1}\ln|1-C_1x|+C_2$.

18. $y=\dfrac{x^2}{2}-\ln|x+C_1|+C_2$.

19. $y=C_1\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x}{2C_1}+C_2$.

20. $y=C_1\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+C_2$.

21. $y=2-\ln\dfrac{x^2}{4}$.

22. $y=2x+\dfrac{x^2}{2}+3$.

ამოხსენით განტოლებები:

23. $(1-y)y''+2y'^2=0$.

24. $yy''-y'^2=1$.

25. $y''+3y'^2=0$.

26. $y''=5y'^2$.

27. $y''+\operatorname{tg}y-2y'^2=0$.

28. $(8-y)y''+2y'^2=0$.

29. $(y-3)y''+2y'^2=0$.

30. $2yy''-y'^2=0$.

31. $(y-4)y''-2y'^2=0$.

32. $(y-7)y''=y'^2$.

33. $(2-y)y''+y'^2=0$.

34. $(y-8)y''+y'^2=0$.

პასუხები:

23. $y=1+\dfrac{1}{C_1x+C_2}$.

24. $y^2=(x+C_2)^2+C_1$.

25. $y=\dfrac{1}{3}\ln|3x+C_2|+C_1$, $y=C$.

26. $y=-\dfrac{1}{5}\ln|C_2-5x|+C_1$, $y=C$.

27. $y=\operatorname{arctg}(C_2-C_1x)$.

28. $y=8-\dfrac{1}{C_1x+C_2}$.

29. $y=3+\sqrt[3]{C_1x+C_2}$.

30. $y=(C_1x-C_2)^2$.

31. $y=4-\dfrac{1}{C_1x-C_2}$.

32. $y=7+\sqrt[3]{C_1x+C_2}$.

33. $y=2-e^{C_1x+C_2}$.

34. $y=8+\sqrt{C_1x+C_2}$.

4.6 მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება

განტოლებას $y''+py'+qy=f(x)$, სადაც p და q ნამდვილი რიცხვებია, ეწოდება წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლების ზოგადი ამოხსნა ტოლია შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამოხსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების რაიმე კერძო ამოხსნის ჯამისა.

განვიხილოთ ერთგვაროვანი განტოლება $y''+py'+qy=0$ და მისთვის შედგენილი ე.წ. მახასიათებელი განტოლება $k^2+pk+q=0$.

	მახასიათებელი განტოლების ფესვები	კერძო ამოხსნები	ზოგადი ამოხსნა
1.	$K_1\neq K_2$, $(D>0)$.	$y_1=e^{K_1x}$, $y_2=e^{K_2x}$.	$y(x)=C_1e^{K_1x}+C_2e^{K_2x}$.

2.	$K_1=K_2$, $(D=0)$.	$y_1=e^{K_1x}$, $y_2=xe^{K_1x}$	$y(x)=e^{K_1x}(C_1+C_2x)$.
3.	$K_1=\alpha+\beta i$, $K_2=\alpha-\beta i$, $(D<0)$	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$,	$y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+$ $+C_2\sin\beta x)$.

მაგალითი 1. ამოხსენით განტოლება $y''-5y'+6y=0$.
ამოხსნა: მახასიათებელი განტოლებაა
$k^2-5k+6=0$, $K_1=2$, $K_2=3$.
რადგან მახასიათებელ განტოლებას აქვს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ამონახსენი, ამიტომ:

$$y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

მაგალითი 2. ამოხსენით განტოლება $y''+4y'+4y=0$.
ამოხსნა: მახასიათებელი განტოლებაა $k^2+4k+4=0$, $K_1=K_2=-2$.
მაშინ:

$$y(x)=e^{-2x}(C_1+C_2x).$$

მაგალითი 3. ამოხსენით განტოლება $y''+y'+y=0$.
ამოხსნა: მახასიათებელი განტოლებაა $k^2+k+1=0$, რომელსაც აქვს კომპლექსური ფესვები: $K_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, და $K_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
რადგან, $\alpha=-\frac{1}{2}$, და $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ამიტომ განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$y(x)=e^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

განვიხილოთ არაერთგვაროვანი განტოლების შემთხვევა

$$y''+py'+qy=f(x).$$

ამ განტოლების კერძო ამონახსნი $\bar{y}(x)$ მოვძებნოთ მისი მარჯვენა მხარის $f(x)$-ის სხვადასხვა სპეციალური სახის შემთხვევაში.

I. $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, მაშინ განტოლების კერძო ამონახსნს $\bar{y}(x)$-ს ეძებენ სახით

$$\bar{y}(x)=Q_n(x)\cdot x^r$$

სადაც $Q_n(x)$ არის იმავე რიგის მრავალწევრი, რა რიგისაცაა $P_n(x)$, ოღონდ განუსაზღვრელი კოეფიციენტებით, ხოლო r-კი მახასიათებელი განტოლების 0-ის ტოლი ფესვების რიცხვია.

II $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, მაშინ $\bar{y}(x)=Q_n(x)\cdot x^r\cdot e^{\alpha x}$.
სადაც, $Q_n(x)$ არის განუსაზღვრელი კოეფიციენტებიანი მრავალწევრი $P_n(x)$ მრავალწევრის რიგით, r კი მახასიათებელი განტოლების იმ ფესვების რიცხვი, რომლების ემთხვევიან α-ს.

III $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$, მაშინ $\bar{y}(x)=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)x^r$, სადაც A და B განუსაზღვრელი კოეფიციენტებია, ხოლო r კი მახასიათებელი განტოლების იმ ფესვების რიცხვი, რომლებიც ემთხვევიან βi-ს.

IV. $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+P_m(x)\sin\beta x\right]$ მაშინ
$f(x)=x^re^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x\right]$
სადაც Q_1 და Q_2 არიან s რიგის მრავალწევრები, $s=\max\{m,n\}$ ხოლო r არის მახასიათებელი განტოლების იმ ფესვების რიცხვი, რომლებიც ემთხვევიან $\alpha+\beta i$-ს.

მაგალითი 4. ამოხსენით განტოლება $y''-2y'+y=x+1$.
ამოხსნა: პირველ რიგში ვიპოვოთ მოცემული დიფერენციალური განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების $y''-2y'+y=0$ ზოგადი ამონახსნი. მახასიათებელი განტოლება იქნება $k^2-2k+1=0$, $k_1=k_2=1$.
მაშინ

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^x.$$

ვიპოვოთ არაერთგვაროვანის კერძო ამონახსნი.
რადგან $f(x)=x+1$ არის პირველი რიგის მრავალწევრი და მახასიათებელი განტოლების არცერთი ფესვი არ არის ნულის ტოლი, ამიტომ I-ის ძალით,

$$\bar{y}(x)=(Ax+B)x^0=Ax+B.$$

გამოვთვალოთ $\bar{y}'$ და $\bar{y}''$ და ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$-2A + Ax + B = x - 1.$$

ერთნაირი ხარისხის წევრთა კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ

$$A = 1, \quad B = 3$$

ე.ი. $\bar{y}(x) = x + 3$ მაშინ ზოგადი ამონახსნი,

$$y = y(x) + \bar{y}(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + x + 3.$$

მაგალითი 5. ამოხსენით განტოლება $y'' - 4y' + 3 = xe^x$.

შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^2 - 4k + 3 = 0, \text{ საიდანაც } K_1 = 1, \quad K_2 = 3.$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

მოცემული განტოლების მარჯვენა მხარეში გვაქვს პირველი რიგის მრავალწევრისა და e^x მაჩვენებლიანი ფუნქციის ნამრავლი. რადგან მახასიათებელი განტოლების ერთ-ერთი ფესვი ტოლია 1-ის და მოცემულ შემთხვევაში $\alpha = 1$-ს, ამიტომ $r = 1$-ს, და

$$\bar{y}(x) = (Ax + B)x^1 e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

$$\bar{y}'(x) = (2Ax + B + Ax^2 + Bx)e^x.$$

$$\bar{y}''(x) = (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x.$$

მოცემულ განტოლებაში $\bar{y}(x)$, $\bar{y}'(x)$, $\bar{y}''(x)$-ის ჩასმით და კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

მაშინ $\bar{y} = -\frac{1}{4}(x^2 + x)e^x$ და $y = y(x) + \bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x$.

მაგალითი 6. ამოხსენით განტოლება $y'' + y = \sin x$.

ამოხსნა: მახასიათებელი განტოლებაა $k^2 + 1 = 0$, $K_1 = i$, $K_2 = -i$.

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

განტოლების მარჯვენა მხარეში გვაქვს ტრიგონომეტრიული ფუნქცია $\sin x$ ე.ი. გვაქვს III შემთხვევა. $\alpha = 0$, $b = 1$, $\beta = 1$.

რადგან $i\beta = i \cdot 1 = i$ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, ამიტომ $r = 1$. მაშინ კერძო ამონახსნს ექნება სახე

$$\bar{y}(x) = (A\cos x + B\sin x)x.$$

$\bar{y}(x)$-ის ორჯერ გაწარმოებით და $\bar{y}(x)$, $\bar{y}'$ $\bar{y}''$-ის მოცემულ განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ $2(-A\sin x + B\cos x) = \sin x$.

საიდანაც მივიღებთ, რომ $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$.

(აქ ვისარგებლებთ ცნობილი ფაქტით, რომ თუ $\alpha\sin Kx + \beta\cos Kx = \chi\sin Kx + \delta\cos Kx$ მაშინ $\alpha = \chi$ და $\beta = \delta$.)

მაშინ კერძო ამონახსნი იქნება

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{2}x\cos x$$

ხოლო არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x.$$

მაგალითი 7. ამოხსენით განტოლება $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$.

აქ მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2 - 1 = 0. \text{ საიდანაც } K_1 = 1, \quad K_2 = -1.$$

და ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ნულოვანი რიგის მრავალწევრის, მაჩვენებლიანი და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნამრავლს, ასე რომ: $P_n(x) = 3$, $P_m(x) = 0$, $S = 0$, რიცხვი $\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 1$ არ წარმოადგენს მახასიათებელი განტოლების ფესვს, ამიტომ $r = 0$-ს. მაშინ

$$\bar{y}(x) = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$$

ვიპოვით რა $\bar{y}'(x)$, და $\bar{y}''(x)$ და $-\bar{y}(x)$-თან ერთად ჩავსვამთ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$(2A + 4B)\cos x - (2B - 4A)\sin x = 3\cos x$$

$\sin x$ და $\cos x$-ის კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ

$$\begin{cases} 2A + 4B = 3 \\ -4A + 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{3}{10}, \quad B = \frac{3}{5}.$$

ამრიგად, კერძო ამონახსნი იქნება

$$\tilde{y}(x)=e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x-\frac{3}{5}\sin x\right)$$

ზოგადი ამონახსნი კი

$$y=\tilde{y}(x)+y(x)=e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x\right)+C_1e^{x}+C_2e^{-x}.$$

ვარჯიშები:

ამოხსენით დიფერენციალური განტოლებები

1. $3y''+5y'-3y=0.$ *2.* $y''-8y'+16y=3x^2-5.$

3. $y''-y'=3x-4.$ *4.* $2y''-5y'+2y=x^2-2x.$

5. $2y''+7y'-15y=x+1.$ *6.* $2y''-4y'+3y=3x^2-1.$

7. $y''-8y'+16y=xe^{4x}.$ *8.* $y''-4y'-12y=8xe^{-2x}.$

9. $y''-4y'+3y=(8x+2)e^{x}.$ *10.* $y''-7y'+10y=(8x^2+4x+2)e^{x}.$

11. $3y''+2y'-8y=(10x+7)e^{-2x}.$ *12.* $y''-5y'-6y=14x2^{-x}.$

13. $y''+y'-2y=8\sin 2x.$ *14.* $y''+y'+2.5y=25\cos 2x.$

15. $y''-4y=\sin 2x.$ *16.* $y''-4y'=e^{2x}\sin 2x.$

17. $y''+3y=\sin 2x+2\cos 2x.$ *18.* $y''-2y'+2y=e^{x}\sin x.$

19. $y''+y=10e^{x}\sin 2x.$ *20.* $y''+y=\cos x+\cos 2x.$

პასუხები:

1. $y=C_1e^{\frac{-5+\sqrt{61}}{6}x}+C_2e^{\frac{-5-\sqrt{61}}{6}x}.$ *2.* $y=(C_1+C_2x)e^{4x}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+1.$

3. $y=C_1+C_2e^{x}-\frac{3}{2}x^2-7x.$ *4.* $C_1e^{2x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{11}{4}.$

5. $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{\frac{3}{2}x}-\frac{x}{15}-\frac{7}{225}.$

6. $y=e^{x}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}.$

7. $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^3}{6}\right)e^{4x}.$ *8.* $y=C_1e^{6x}+\left(C_2-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{8}\right)e^{-2x}.$

9. $y=C_1e^{3x}+(C_2-2x^2+3x)e^{x}.$

10. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}+(2x^2+6x+7)e^{x}.$

11. $y=C_1e^{\frac{4}{3}x}+\left(C_2-\frac{x^2}{2}-x\right)e^{-2x}.$ *12.* $y=C_1e^{6x}+\left(C_2-x^2-\frac{2}{7}x\right)e^{-x}.$

13. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{5}(6\sin 2x+2\cos 2x).$

14. $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{3x}{2}+C_2\sin\frac{3x}{2}\right)+6\cos 2x+8\sin 2x.$

15. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x}{4}\cos 2x.$

16. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-e^{2x}\frac{2\sin^2 x+\sin 2x}{20}.$

17. $y=C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x-2\cos 2x+\sin 2x.$

18. $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)-\frac{1}{2}xe^{x}\cos x.$

19. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-e^{x}(2\cos 2x+\sin 2x).$

20. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x.$

დავალებები დამოუკიდებელი სამუშაოებისათვის

ორი ცვლადის ფუნქციები

1. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე.
2. იპოვეთ ა) ფუნქციის ზღვარი, ბ) ფუნქციის წყვეტის წერტილები ან წყვეტის წირები.
3. იპოვეთ ა) სრული დიფერენციალი (dz), ბ) მეორე რიგის დიფერენციალი (d^2z).
4. ა), ბ), გ) იპოვეთ რთული ფუნქციის კერძო წარმოებულები.
5. იპოვეთ არაცხადი ფუნქციის წარმოებული.
6. შეადგინეთ მოცემული ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები მოცემულ წერტილში.
7. იპოვეთ ა) ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი, ბ) ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი, გ) ფუნქციის გლობალური ექსტრემუმი, დ) ფუნქციის გლობალური მაქსიმუმი.

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

8. იპოვეთ ინტეგრალი უშუალო ინტეგრებით.
9. იპოვეთ ინტეგრალი ჩასმის ხერხით.
10. იპოვეთ ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.
11. ა), ბ) შეასრულეთ მოქმედებანი კომპლექსური რიცხვებისათვის, გ) წარმოადგინეთ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით, დ) ამოხსენით განტოლება.
12. ა), ბ), გ) რაციონალური წილადები წარმოადგინეთ უმარტივესი წილადების ჯამად.
13. ა), ბ), გ), დ) იპოვეთ ინტეგრალები უმარტივესი წილადებიდან.
14. ა), ბ), გ) იპოვეთ ინტეგრალები რაციონალური წილადებიდან.
15. იპოვეთ ინტეგრალი ტრიგონომეტრიული გამოსახულებიდან.

განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი გამოყენება

16. გამოთვალეთ ინტეგრალი.
17. გამოთვალეთ ინტეგრალი ჩასმის ხერხით.
18. გამოთვალეთ წირის რკალის სიგრძე.

19. გამოთვალეთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია მოცემული წირებით.
20. გამოთვალეთ სხეულის მოცულობა, თუ იგი მიღებულია მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით ერთ-ერთი საკოორდინატო ღერძის გარშემო.
21. გამოთვალეთ წერტილის მიერ დროის მოცემულ მონაკვეთში გავლილი მანძილი და მისი საშუალო სიჩქარე, თუ ცნობილია მისი სიჩქარის დამოკიდებულება დროზე.

დიფერენციალური განტოლებები

22. ამოხსენით პირველი რიგის განტოლებები: ა) ერთგვაროვანი, ბ) წრფივი, გ) სრულ დიფერენციალებში.
23. ა), ბ), გ) ამოხსენით განტოლებები რიგის დაწევის გზით.
24. ა), ბ), გ) ამოხსენით მეორე რიგის განტოლებები.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТАЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Функции двух переменных

1. Найти область определения функции.
2. а) Найти предел функции, б) Найти точки разрыва функции.
3. а) Найти полный дифференциал функции, (dz), б) Найти дифференциал второго порядка (d^2z).
4. а), б), в) Найти частные производные сложных функций.
5. Найти производную неявной функции.
6. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности в заданной точке.
7. Найти а) локальный экстремум, б) условный экстремум, в) глобальный экстремум, г) глобальный максимум.

Неопределенный интеграл

8. Найти интеграл непосредственным интегрированием.
9. Найти интеграл методом подстановки.
10. Найти интеграл методом интегрирования по частям.

11. а), б) Выполнить действия над комплексными числами, в) Представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах, г) Решить уравнения.
12. а), б), в) Представить рациональные дроби в виде суммы простейших дробей.
13. а), б), в), г) Найти интегралы от простейших дробей.
14. а), б), в) Найти интегралы от рациональных дробей.
15. Найти интеграл от тригонометрической функции.

Определенный интеграл и его применения

16. Вычислить интеграл.
17. Вычислить интеграл методом подстановки.
18. Вычислить длину дуги кривой.
19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми.
20. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг одной из координатных осей плоской фигуры, ограниченной данными кривыми.
21. Найти путь, пройденный точкой за данный промежуток времени и ее среднюю скорость, если известна зависимость скорости от времени.

Дифференциальные уравнения

22. Решить уравнения первого порядка: а) однородные, б) линейные, в) в полных дифференциалах.
23. а), б), в) Решить уравнения путем понижения порядка.

а), б), в) Решить уравнения второго порядка.

ბილეთი № 1

1. $z = \ln(1-\ln(xy)) + \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. 2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{\ln(x+y)}{5(x-y+3)}$,

ბ) $z = \dfrac{3}{x(y-2)}$. 3. ა) $z = 3x^3 + 4xy^2 - 2y^4$, ბ) $z = 3e^{2xy}$.

გ) $z = tg^3 xy$, თუ $y = \cos^2 x$.

4. ბ) $z = 2^{xy}$, თუ $x = \cos^2 t$, $y = t^2 + 5t$.

გ) $z = 3x^2y^2 - 2\sqrt{xy}$, $x = uv^2$, $y = v^3u$.

5. $z = xy^3 - 4xy^2 + x^4 + 4x + 4y^4$.

6. $x^2 + 3y^2 - 17z^2 - 5x - 5z = 0$, $M_0(2,2,1)$.

7. ა) $z = -x^2 + xy - y^2 + 3x + 6y$, ბ) $z = x + 2y - 3$, $x^2 + y^2 = 5$.

გ) $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y$, $x + y \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

დ) $2y + x \le 12$, $2x - y \le 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z = 3x + y \to \max$.

8. $\int \dfrac{4^x - 2^x}{8^x}\,dx$. 9. $\int \sin^4 x \cos x\,dx$. 10. ა) $\int (x^2 - x)e^{5x}\,dx$,

ბ) $\int (x^2 - 3x + 2)\ln 7x\,dx$, გ) $\int 5^{3x}\cos 2x\,dx$.

11. ა) $\dfrac{7-2i}{4+3i} + \dfrac{3-2i}{4-3i} + \dfrac{3+4i}{3-2i}$, ბ) $(\sqrt{2} - 5i)^{13}$,

გ) $z = -4$, დ) $4x^2 + 81 = 0$.

12. ა) $\dfrac{5x+2}{(x+2)(x+3)}$, ბ) $\dfrac{3x^4 - 5x^2 + 2x + 1}{x^2 + 7x + 10}$, გ) $\dfrac{3x-5}{(x+2)(x^2+3x+5)}$.

13. ა) $\int \dfrac{\sqrt{5}\,dx}{\sqrt{3x-13}}$, ბ) $\int \dfrac{\sin x\,dx}{(\cos x - 5)^5}$,

გ) $\int \dfrac{dx}{x^2 + 2x + 5}$, დ) $\int \dfrac{3x-5}{x^2 + 4x + 10}\,dx$.

14. ა) $\int \frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$, ბ) $\int \frac{x^3-3x^2-1}{x^2-1}dx$,

გ) $\int \frac{3x+1}{(x^2+2)(x^2-4)}dx$. 15. $\int \sin^6 x \cos^3 x dx$.

16. $\int_0^1 (8x^2+5x-1)dx$. 17. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

18. $r = 2\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. 19. $r = 3\sin\varphi$.

20. $x = 2y^2$, $x = 0$, $y = 2$, (ox ღერძი)

21. $V = 0.07t^6$ მ/წმ, $T = 10$ წმ.

22. ა) $xy' = 3x - y$, ბ) $y' + y = \frac{xe^{-x}}{3x^2-1}$,

გ) $(8x - 4y)dx - (5y - 4x)dy = 0$.

23. ა) $(1+x^2)y'' + (y')^2 = -1$, ბ) $xy'' + y' = x + 1$,

გ) $2(y')^2 = y''(y-1)$.

24. ა) $2y'' - 5y' + 2y = 3x^2 - 6x$, ბ) $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$,

გ) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

ბილეთი № 2

1. $z = \sqrt{1 + \ln y^2 - 2\ln x} + \sqrt{y - x}$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\ln(x+3y)}{x+3y-1}$, ბ) $z = \frac{2x+3y}{x^2+(y+3)^2}$.

3. ა) $z = \frac{x^4}{4} + xy - 2y^2$, ბ) $z = -5e^{\frac{xy}{2}}$.

ა) $z = \cos^2 x\sqrt{y}$, თუ $y = x^3 - 3x$.

4. ბ) $z = e^{x^2+y^2}$, თუ $x = \ln t$, $y = \cos^2 t$.

გ) $z = 2x^3 - y^2$, თუ $x = u + v^2$, $y = u^2v^2$.

5. $x = z^4 - 3x^2y^3 - 5z^3 - arctg\frac{z}{x-y}$.

6. $3^{\frac{3x-2}{z}} + 4^{\frac{y+2}{z}} = 25$, $M_0(2,1,2)$.

7. ა) $z = x^2 + xy + \frac{y^2}{2} + x - 3y - 10$, ბ) $z = 3x + 2y$, $x^2 + y^2 = 13$.

გ) $z = x^2 - y^2 - 6x + 4y$, $x + y \le 2$, $x > 0$, $y \ge 0$.

დ) $y + 2x \le 10$, $3y + 2x \le 18$, $x \ge 0$, $y > 0$, $z = 3x + 4y \to \max$.

8. $\int \frac{5^x - 4}{10^x}dx$. 9. $\int \frac{2xdx}{1+x^4}$.

10. ა) $\int x\sin 2x dx$, ბ) $\int x^2 \ln 2x dx$, გ) $\int e^{2x}\sin x dx$.

11. ა) $\frac{3-2i}{2+4i} + \frac{4+2i}{3-2i} + \frac{1}{i}$, ბ) $(8-3i)^9$,

გ) $z = -15$. დ) $x^3 + 64 = 0$.

12. ა) $\frac{5x+2}{(x+2)(x+3)}$, ბ) $\frac{3x^4-5x^2+2x+1}{x^2+7x+10}$, გ) $\frac{3x-5}{(x+2)(x^2+3x+5)}$.

13. ა) $\int\frac{\sin x dx}{\cos x+3}$, ბ) $\int\frac{dx}{(x-2)^7}$,

გ) $\int\frac{dx}{3x^2-x+4}$, დ) $\int\frac{7x-2}{x^2-3x+7}dx$.

14. ა) $\int\frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$, ბ) $\int\frac{x^3-3x^2-1}{x^2-1}dx$,

გ) $\int\frac{3x+1}{(x^2+2)(x^2-4)}dx$.

15. $\int\cos^6 x\sin^3 x dx$. 16. $\int\limits_0^2(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$. 17. $\int\limits_0^{16}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

18. $x=\sqrt{2}\cos t$, $y=\sqrt{2}\sin t$, $z=\sqrt{2}t$, $0\le t\le 2\pi$.

19. $y=3x^2$, $y=0$, $x=3$.

20. $y=\frac{3}{x}$, $y=0$, $x=3$, (ox ღერძი)

21. $V=0.06t^3$ მ/წმ, $T=10$ წმ

22. ა) $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$, ბ) $y'-y=\frac{e^x}{x^2+2}$,

გ) $(2x^2+3x^2y)dx+(7y^2+x^3)dy=0$.

23. ა) $xy'''+y''=1+x$, ბ) $(1+x^2)y''=2xy'$,

გ) $y^2+(y')^2+2y\cdot y''=0$.

24. ა) $y''-8y'+16y=3x^2-3$, ბ) $y''-5y'+6y=e^{2x}$,

გ) $y''+9y=\sin 3x$.

ბილეთი № 3

1. $z=\sqrt{25-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-2}$. 2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin 3xy}{\sqrt{3x^2+3y^2}}$,

ბ) $z=\frac{xy}{x^2+(y-5)^2}$. 3. ა) $z=3x+4x^3y^3-y$, ბ) $z=4e^{5xy}$.

ა) $z=5\ln xy+tg^2x$, თუ $y=x^3+x$.

4. ბ) $z=3^{\ln xy}$, თუ $x=5t^2-3t$, $y=2t^3-t^2$.

გ) $z=3x^2y-4\sqrt[3]{xy^2}$, თუ $x=u+v^2$, $y=u^2v^2$.

5. $x^2z^2=5xy^2+arctg\frac{z}{z^2-x^2}$. 6. $z=3x^2-5y^2$, $x=2$, $y=1$.

7. ა) $z=x^2+xy+\frac{y^2}{2}-8x-7y+16$.

ბ) $z=2-5x-2y$, $x^2+y^2=29$.

გ) $z=-x^2+y^2+x-2y$, $4x+y\le 2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

დ) $y+x\le 7$, $2x-5y\le 20$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z=2x+5y\to\max$.

8. $\int\frac{2^x-3^x}{6^x}dx$. 9. $\int\sqrt[5]{\cos x}\sin x dx$.

10. ა) $\int(2x+1)\cos 3x dx$, ბ) $\int(3x-1)\ln 5x dx$, გ) $\int e^{3x}\cos 2x dx$.

11. ა) $\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-2i}{4-2i}+\frac{3-2i}{4-2i}$, ბ) $(3-8i)^{15}$,

გ) $z=15$, დ) $x^4+5=0$.

12. ა) $\frac{4x^2-5x+2}{(x+1)(x-5)(x-3)}$, ბ) $\frac{3x^3-4x^2+2x+4}{x^2-x-20}$,

გ) $\dfrac{7x^2-3x+1}{(x+2)(x^2+5)}$.

13. ა) $\int \dfrac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{6x-5}}$, ბ) $\int \dfrac{\cos 2x dx}{(5-\sin 2x)^5}$,

გ) $\int \dfrac{dx}{x^2+6x-10}$, დ) $\int \dfrac{x-5}{x^2+3x+5}dx$.

14. ა) $\int \dfrac{5x+1}{(3x+5)(x-3)}dx$. ბ) $\int \dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2-2x}dx$,

გ) $\int \dfrac{3-4x}{(x^2+3)(3x^2+3x+15)}dx$.

15. $\int \cos^4 x \sin x dx$. 16. $\int\limits_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$. 17. $\int\limits_0^{25} \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

18. $x=5(t-\sin t)$, $y=5(1-\cos t)$. $0 \le t \le 2\pi$.

19. $r = 4\cos\varphi$.

20. $x=3y^2$, $x=0$, $y=4$, (oy ღერძი)

21. $V = 0.05t^4$ მ/წმ, $T = 10$ წმ

22. ა) $(x-y)dx+(x+y)dy=0$, ბ) $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{4x-1}{x^3}$,

გ) $(x^4-xy^2)dx+(y^2-x^2y)dy=0$.

23. ა) $y''-y'=x$, ბ) $e^x y''+e^x y'=3$.

გ) $y \cdot y''+(y')^2=1$.

24. ა) $3y''-5y'=-3x+1$, ბ) $y''-4y'+4y=2e^{2x}$,

გ) $y''+3y=\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

ბილეთი № 4

1. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(x-1)$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+2y)}{2(x+2y-1)}$, ბ) $z=\dfrac{5}{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

3. ა) $z=5x^6-\dfrac{x}{y}+y^2$, ბ) $z=\dfrac{1}{2}e^{\frac{xy}{\ln 2}}$.

ა) $z=3\ln x^2y^3+\cos x$, თუ $y=x^3$.

4. ბ) $z=2^{x^2y^2}$, თუ $x=t^3$, $y=\sin t$.

გ) $z=x+y^3$, თუ $x=u^2\cos v$, $y=v^2\sin u$.

5. $xz=xy^3+\arcsin\dfrac{y}{z-x}$. 6. $z=5x^2-3x^3$, $x=1$, $y=2$.

7. ა) $z=-\dfrac{x^2}{2}-xy-y^2$ $x-2y-17$,

ბ) $z=2x+14y-1$, $x^2+y^2=50$,

გ) $z=-x^2-y^2+2x+y$. $3x+4y\le 12$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

დ) $y+x\le 10$, $3x+5y\le 40$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z=6x+10y\to\max$.

8. $\int \dfrac{3^x+5^x}{15^x}dx$. 9. $\int \sqrt[3]{\sin x}\cos x dx$.

10. ა) $\int (3x-5)\sin 3x dx$, ბ) $\int \dfrac{\ln x}{x^3}dx$, გ) $\int 2^x \sin 9x dx$.

11. ა) $\dfrac{3+2i}{4+3i}+\dfrac{4+5i}{3-2i}+\dfrac{1}{2i+3}$, ბ) $(\sqrt{5}-\sqrt{7}i)^4$,

გ) $z=-13$, დ) $x^4+81=0$.

12. ა) $\frac{3x-1}{x^2-5x+6}$, ბ) $\frac{7x^4-3x^3+1}{x^3-x^2}$, გ) $\frac{x-5}{x(x^2+4)}$.

13. ა) $\int\frac{e^x dx}{e^x+3}$, ბ) $\int\frac{dx}{(5x-7)^4}$,

გ) $\int\frac{dx}{x^2-2x+10}$, დ) $\int\frac{x-7}{4x^2+12x+13}dx$.

14. ა) $\int\frac{x^2-2x+5}{(x+2)(x-3)(x+5)}dx$, ბ) $\int\frac{2x^3-5x^2+4x}{3x^2-3x}dx$,

გ) $\int\frac{5x^2+2x}{(x-3)(x^2+4x+11)}dx$.

15. $\int\sin^8 x\cos x dx$. 16. $\int\limits_0^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-2\sqrt{x^3}\right)dx$. 17. $\int\limits_0^{36}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

18. $r=2\sin\varphi$, $0<\varphi\leq\pi$. 19. $x=5\cos t$, $y=2\sin t$.

20. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, ($ox$ ღერძზე)

21. $V=0.6t^3$ მ/წმ, $T=10$ წმ.

22. ა) $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0$, ბ) $y'-\frac{y}{x+5}=\frac{x+5}{x^2+3}$,

გ) $(2xy-3)dx+(x^2+4)dy=0$.

23. ა) $y''+2x(y')^2=0$, ბ) $2(y')^2=y''(y-1)$,

გ) $y'^2+3y\cdot y''=0$.

24. ა) $y''+5y'=2x+1$, ბ) $y''-3y'+2y=(x^2+x)e^{3x}$,

გ) $y''-2y'+2y=\sin 5x$.

ბილეთი № 5

1. $z=\sqrt{3-x^2-y^2}+\ln(y-1)$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{5-\sqrt{2xy+25}}{3xy}$, ბ) $z=\frac{2}{(x+1)(y-5)}$.

3. ა) $z=\sqrt[3]{x}-x^2y^5+y^2$, ბ) $z=2e^{4xy}$.

ა) $z=\cos^3 xy$, თუ $y=\sqrt{\ln x}$.

4. ბ) $z=3^{x^2-y^2}$, თუ $x=t^2-4t$, $y=e^{2t}$.

გ) $z=y\ln x+x\ln y$, თუ $x=u^2v$, $y=v^2u$.

5. $z=xy^2+arctg\frac{y^2}{z-x}$. 6. $z=3x^2-5y^2$, $x=1$, $y=2$.

7. ა) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y+15$,

ბ) $z=3-4x-y$, $x^2+y^2=17$.

გ) $z=x^2+2y^2-2x-12y$, $x+y\leq 5$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

დ) $y+x\leq 7$, $3y+2x\leq 18$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z=4x+3y\to\max$.

8. $\int\frac{2^x-1}{4^x}dx$. 9. $\int 2^{\sin x}\cos x dx$.

10. ა) $\int x^2\cos 2x dx$, ბ) $\int\ln x dx$, გ) $\int 3^x\cos 2x dx$.

11. ა) $\frac{3-2i}{2-3i}+\frac{4+5i}{5-4i}+\frac{5+4i}{7-3i}$, ბ) $(\sqrt{2}-3\sqrt{3}i)^5$,

გ) $z=-11$, დ) $x^4+16=0$.

12. ა) $\frac{2x-7}{(x-4)(x+2)(x-5)}$, ბ) $\frac{3x^3-4x^2+2x+4}{x^2-x-20}$,

გ) $\frac{7x^3-3x-1}{(x+2)(x^2+5)}$.

13. ა) $\int \frac{3dx}{\sqrt{3x}-\sqrt{2}}$, ბ) $\int \frac{e^{4x}dx}{(e^{4x}-5)^7}$,

გ) $\int \frac{dx}{x^2-5x+7}$, დ) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+12}dx$.

14. ა) $\int \frac{3x^2-2x+1}{(x-3)(x+5)(x+7)}dx$. ბ) $\int \frac{4x^4-3x^3-5x+1}{x^3-2x^2}dx$.

გ) $\int \frac{3x^2-2x+1}{(x^2+4)(x^2+2)}dx$.

15. $\int \cos^3 3x dx$. 16. $\int_0^4 \sqrt{8x}dx$. 17. $\int_0^{49} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

18. $x^2+y^2=25$ 19. $y=3x^3$, $y=3x^2$, $x=-1$, $x=1$.

20. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, (ox ღერძი)

21. $V=0.7t^5$ მ/წმ, $T=10$ წმ.

22. ა) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$, ბ) $y'+y=\frac{e^{-x}}{3x+1}$.

გ) $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$.

23. ა) $x^2y'''=(y'')^2$, ბ) $y''(-1+\ln x)+\frac{1}{x}y'=2+\ln x$,

გ) $y\cdot y''=(y')^2$.

24. ა) $3y''-5y'+8y=2x^2-3x-1$, ბ) $y''+2y'+y=e^{2x}$,

გ) $y''+2y'+5y=2x\sin 2x$.

ბილეთი № 6

1. $z=\ln(5-x^2-y^2)+\sqrt{y-3x^2}$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin\frac{xy}{2}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$, ბ) $z=\frac{2xy+3}{x^2-2y}$.

3. ა) $z=x^3-\frac{x^2}{y^3}+\sqrt{y}$, ბ) $z=6e^{\frac{1}{2}xy}$.

ა) $z=e^{x^2+y^2}$, თუ $y=x^3+\ln x$.

4. ბ) $z=\sqrt{xy}-\ln xy$, თუ $x=t^3+3$, $y=2^t$.

გ) $z=3x^3-5xy+y^3$, თუ $x=u^2+v$, $y=v^2+u^2$.

5. $\sqrt{5}xy^2-x^3y^3-5x^3z^4+yz^3-7x=3xy^2z+5$.

6. $z=3x^3+y^2$, $x=1$, $y=3$.

7. ა) $z=3x^2-y^3-12x+2y+21$,

ბ) $z=6x+2y-3$, $x^2+y^2=10$.

გ) $z=2x^2-y^2-12x+2y$, $2x+3y\le 6$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

დ) $3y+x\le 9$, $y+2x\le 8$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z=5x+y\to \max$.

8. $\int \frac{5x}{4x-5}dx$. 9. $\int \frac{dx}{1+x^9}$.

10. ა) $\int (x^2+2x)\sin x dx$, ბ) $\int \arcsin 2x dx$,

გ) $\int e^{2x}\sin 3x dx$.

11. ა) $\frac{4-2i}{3-2i}-\frac{5+4i}{3+7i}+\frac{4i}{3-7i}$, ბ) $(\sqrt{2}-3i)^7$,

გ) $z=13$, დ) $x^3+8=0$.

12. ა) $\dfrac{4x^2-7}{(x-4)(x-2)(x-5)}$, ბ) $\dfrac{4x^4-3x^3+1}{x^2-4}$, გ) $\dfrac{3x+2}{x(x^2+4)}$.

13. ა) $\int\dfrac{\sin\omega x}{\cos\omega x-2a}dx$, ბ) $\int\dfrac{100dx}{(3-50x)^3}$,

გ) $\int\dfrac{dx}{3x^2-6x+8}$, დ) $\int\dfrac{3x+2}{2x^2-2x+9}dx$.

14. ა) $\int\dfrac{2x-1}{(x+2)(x-5)^2}dx$, ბ) $\int\dfrac{3x^3-4x+1}{x^2-3x}dx$,

გ) $\int\dfrac{2x+1}{(x+2)(x^2+9)}dx$.

15. $\int\sin^4 x dx$. 16. $\int_0^1\dfrac{dx}{x^2+3x+6}$. 17. $\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$.

18. $r=6\cos\varphi$, $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$. 19. $r=5\cos\varphi$.

20. $y=2x^2$, $y=0$, $x=2$. (ox ღერძი)

21. $V=0.5t^4$ მ/წმ. $T=10$ წმ.

22. ა) $(y+\sqrt{x^2-y^2})dx=xdy$, ბ) $y'+3x^2y=e^{-x^3}$,

გ) $(x\cos 2y+1)dx - x^2\sin 2y dy=0$.

23. ა) $y''+2xy'^2=0$, ბ) $(x-1)y''-2y'=(x-1)^4$,

გ) $y\cdot y''+y'^2=3$.

24. ა) $5y''+2y'-3y=2x+1$, ბ) $y''-7y'+12y=-e^{4x}$,

გ) $y''+3y'+2y=2x\cos 2x$.

ბილეთი № 7

1. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}}$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{5-\sqrt{2xy+25}}{4xy}$, ბ) $z=\dfrac{3}{(x+1)(y-5)}$.

3. ა) $z=x^5+\sqrt{xy}-2y$, ბ) $z=-15e^{\frac{xy}{3}}$.

ა) $z=\cos^3 xy$, თუ $y=\ln x$.

4. ბ) $z=3^{xy}$, თუ $x=\cos^2 t$, $y=tg^2 t$.

გ) $z=x^2+y^2$, თუ $x=v^2\sin u$, $y=u^2\cos v$.

5. $3xy^2-5xz^3+2yz^5-z^3+3xyz=5-x$.

6. $z=3x^2+2y^2$, $x=2$, $y=3$.

7. ა) $z=\dfrac{x^3}{2}+xy+y^2-x-2y+25$, ბ) $z=3x+5y$, $x^2+y^2=34$.

გ) $z=x^2+5y^2-4x-5y$, $x+2y\le 3$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

დ) $y+2x\le 6$, $y+x\le 5$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z=3x+5y\to\max$.

8. $\int\dfrac{8x}{4x-3}dx$. 9. $\int\ln^4 x\dfrac{dx}{x}$.

10. ა) $\int(3x-7)e^{2x}dx$, ბ) $\int\ln(x^2+1)dx$, გ) $\int e^{5x}\cos 2x dx$.

11. ა) $\dfrac{5+2i}{3-2i}-\dfrac{3-2i}{4+2i}-\dfrac{5+4i}{2+7i}$, ბ) $(4-5\sqrt{3}i)^{10}$,

გ) $z=11$, დ) $x^5+32=0$.

12. ა) $\dfrac{4x^2-7}{(x-4)(x+2)(x-5)}$, ბ) $\dfrac{4x^4-3x^3+1}{x^2-4}$,

გ) $\dfrac{3x+2}{x(x^2+4)}$.

13. ა) $\int \frac{4dx}{5x-\sqrt{3}}$, ბ) $\int \frac{\ln x dx}{(\frac{1}{x}-3)^{10}}$,

გ) $\int \frac{dx}{4x^2-5x+9}$, დ) $\int \frac{5x+1}{3x^2-5x+7} dx$.

14. ა) $\int \frac{5x^2+2x+1}{(x-2)(x+3)^2} dx$, ბ) $\int \frac{5x^3-4x+7}{x^2-2x} dx$,

გ) $\int \frac{3x-7}{(x-5)(x^2+3x+7)} dx$.

15. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$. 16. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$. 17. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$.

18. $x=\sqrt{5}\cos t$, $y=\sqrt{5}\sin t$, $z=\sqrt{5}t$, $0 \le t \le 2\pi$.

19. $y=5x^2$, $y=0$, $x=4$.

20. $y-\frac{5}{x}$, $y=0$, $x=5$, (ox ღერძის)

21. $V=0.08t^2$ მ/წმ, $T=10$ წმ.

22. ა) $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$, ბ) $y'+tgxy=\sin 2x$,

გ) $(e^{x+y}+3x^2)dx=(e^{x+y}+4y^3)dy$.

23. ა) $xy'''=y''$, ბ) $xy''+y'=x+1$,

გ) $y \cdot y''+(y')^2=0$.

24. ა) $y''-2y'+y=x^2-3x+1$, ბ) $y''-3y'+2y=(3-4x)e^x$,

გ) $y''-5y'+6y=13\sin 3x$.

ბილეთი № 8

1. $z=\sqrt{x^2-y+4}+\frac{1}{\sqrt{y-2}}$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{\ln(x+y)}{5(x+y-1)}$, ბ) $z=\frac{5}{x(y-5)}$.

3. ა) $z=2x^2-\frac{x}{y^4}+\sqrt[3]{y}$, ბ) $z=-8e^{8xy}$.

ა) $z=x^4-3xy$, თუ $y=\sqrt{\ln x}$.

4. ბ) $z=2^{x^2+y^2}$, თუ $x=(t-1)^2$, $y=(2t-3)^2$.

გ) $z=x+y^2$, თუ $x=v\cos u$, $y=u^2\sin v$.

5. $5x^3+4x^2y-4xz-x^3z^2+yz-3=0$.

6. $2x^3-3y-12xy+5z-5x+5=0$, $x=1$, $y=1$.

7. ა) $z=-\frac{x^2}{2}+xy-y^2+5x-7y+3$,

ბ) $z=5-x-5y$, $x^2+y^2=26$,

გ) $z=2x^2-3y^2-8x+3y$, $x+4y\le 7$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

დ) $6y+5x \le 35$, $2y+x\le 11$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z=x+7y \to \max$.

8. $\int \frac{7x}{3x-1} dx$. 9. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

10. ა) $\int (5x-8)\cos 3x dx$, ბ) $\int x^2 \ln 5x dx$, გ) $\int 2^{3x} \sin 2x dx$.

11. ა) $\frac{4+8i}{3-5i}+\frac{4+2i}{5+3i}-\frac{4-3i}{7-4i}$, ბ) $(3-\sqrt{3}i)^9$,

გ) $z=-10$, დ) $x^4+16=0$.

12. ა) $\frac{2x-7}{x^2+8x+15}$, ბ) $\frac{5x^3-3x^2+1}{x^2-1}$, გ) $\frac{2x+1}{(x^2+5)(x^2+8)}$.

13. ა) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{3x}-12}$, ბ) $\int \frac{dx}{(5x-7)^4}$,

გ) $\int \frac{dx}{5x^2-2x+1}$, დ) $\int \frac{2x-9}{2x^2-3x+8}dx$.

14. ა) $\int \frac{3x+8}{(x-3)(x+2)^2}dx$, ბ) $\int \frac{3x^4-5x^2+1}{x^2-4x}dx$,

გ) $\int \frac{2x-7}{(x+2)(2x^2+5)}dx$.

15. $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$. 16. $\int_0^1 \frac{dx}{4+x^2}$. 17. $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$.

18. $x = 2(t-\sin t)$, $y = 2(1-\cos t)$ $0 \le t \le 2\pi$.

19. $r - 6\cos\varphi$.

20. $x = 5y^2$, $x = 0$, $y = 3$, (oy ღერძი)

21. $V = 0.02t^6$ მ/წმ, $T = 10$ წმ.

22. ა) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$, ბ) $y' + \frac{y}{x} = -e^{x^2}$,

გ) $(2x\ln y - \frac{1}{\cos^2 x})dx + (\frac{x^2}{y} - \sin y)dy = 0$.

23. ა) $xy'' = \sqrt{1-y'^2}$, ბ) $xy''' + 2y'' = x^3$,

გ) $y \cdot y'' + (y')^2 = 1$.

24. ა) $5y'' + 4y' - 3y = 2x - 3$, ბ) $y'' - 4y' = xe^{2x}$,

გ) $y'' + 5y' + 6y = \cos 2x$.

ბილეთი № 9

1. $z = \sqrt{y-x^2-3} + \sqrt{5-y}$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin 5xy}{5\sqrt{x^2+y^2}}$, ბ) $z = \frac{9}{(x-1)y}$.

3. ა) $z - 5x^6 - \frac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt[3]{y}$, ბ) $z = 12e^{\frac{xy}{\sqrt{2}}}$.

ა) $z = \cos^2 xy$, თუ $y = x^2 + 2x$.

4. ბ) $z = 2^{x^2 y}$, თუ $x - 3t^2$, $y = \cos^3 t$.

გ) $z = xy^2 + yx^2$ $x = u^2 + uv$, $y = u^2v^2$.

5. $3x^2 - 5y^2 - 4z^2 + 3x^2y - y^2z + x - z = 0$.

6. $x^2z + x^2y + z^4 + 1 = 0$, $M_0(2,2,1)$.

7. ა) $z = -x^2 + xy - \frac{y^2}{2} - 2x + 4y - 3$,

ბ) $z = 4 - 10x - y$, $x^2 + y^2 = 101$.

გ) $z = -4x^2 + y^2 - 4x - 2y$, $4x + 2y \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

დ) $2y - x \le 8$, $8y + x \le 8$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z = 8x + 4y \to \max$.

8. $\int \frac{5x}{x-4}dx$. 9. $\int \ln x \frac{dx}{x}$.

10. ა) $\int (x^2-3x)e^{3x}dx$, ბ) $\int \arcsin 3x dx$. გ) $\int \sin 2x \cdot e^{7x}dx$.

11. ა) $\frac{3+4i}{2-3i} + \frac{4+2i}{5-3i} + \frac{4i}{3+7i}$, ბ) $(\sqrt{3}+4i)^8$,

გ) $z = 10$, დ) $x^3 + 27 - 0$.

12. ა) $\frac{4x^2-3x+7}{(x+2)(x+3)(x+5)}$, ბ) $\frac{3x^2-5x+1}{x^2-9}$,

გ) $\frac{4x+7}{(x+5)(x^2+8)}$.

13. ა) $\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3x-11}}$, ბ) $\int \frac{\cos 5x dx}{(\sin 5x-3)^4}$,

გ) $\int \frac{dx}{3x^2-4x+7}$, დ) $\int \frac{3x-7}{x^2-5x+12}dx$.

14. ა) $\int \frac{3x-11}{(x+1)(x+2)^2}dx$, ბ) $\int \frac{x^4-2x^3+1}{x^3+3x^2}dx$,

გ) $\int \frac{7x-2}{(x-4)(x^2+3x+5)}dx$.

15. $\int \sin 4x \sin 5x dx$. 16. $\int_1^2 \sqrt{36-x^2}\,dx$. 17. $\int_1^2 \sqrt{1+2x}\,dx$.

18. $r = 6\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$. 19. $x = 6\cos t$, $y = 4\sin t$.

20. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. (ox ღერძი)

21. $V = 0.006t^5$ მ/წმ, $T = 10$ წმ.

22. ა) $y^2dx+(x^2+xy)dy=0$, ბ) $y'-\frac{y}{x}=e^x y^3$,

გ) $(2xye^{x^2}+\ln y)dx+(e^{x^2}+\frac{x}{y})dy=0$.

23. ა) $x^2y'''=(y'')^2$, ბ) $(1+x^2)y''=2xy'$,

გ) $2y\cdot y''-3(y')^2=4y^2$.

24. ა) $3y''+4y'+5y=5x^2+2x-1$, ბ) $3y''-2y'+4y=(5x-1)e^x$,

გ) $y''-2y'+2y=\sin 3x$.

ბილეთი № 10

1. $z=\ln(9-x^2-y^2)+\sqrt{x+y+2}$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4-\sqrt{xy+16}}{4xy}$, ბ) $z=\frac{1}{(x+1)^2(y-2)^2}$.

3. ა) $z=xy-x\sqrt{y}-\frac{x}{y}$, ბ) $z=2e^{\frac{xy}{5}}$.

4. ა) $z=3^{x+y}$, $y=\sqrt{x^2+2x+5}$.

ბ) $z=\sin x^2y$, $x=5t^2$, $y=5t^4-3t$.

გ) $z=4x\ln y+\sqrt{y}$, $x=u^2v^3$, $y=\sqrt{uv}$.

5. $\sin xy=\sqrt{3x^2-\ln xy}$. 6. $3xyz^2+z^3+4y=0$, $M_0(-1,3,-2)$.

7. ა) $z=-x^2-xy-y^2+6x+12y-9$,

ბ) $z=4x-7y-3$, $x^2+y^2=65$.

გ) $z=-3x^2-3y^2+3x+6y$, $6x+y\le 5$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

დ) $5y+3x\le 15$, $y+x\le 4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z=6x+10y\to\max$.

8. $\int \frac{x}{x+5}dx$. 9. $\int \ln^2 x\frac{dx}{x}$.

10. ა) $\int(2x^2-5x)\cos 5x dx$, ბ) $\int \arcsin 5x dx$, გ) $\int \sin 2x e^{9x}dx$.

11. ა) $\frac{3+4i}{3-2i}+\frac{5-4i}{2+7i}+\frac{4-3i}{5+2i}$, ბ) $(3-4i)^5$,

გ) $z=-9$, დ) $9x^2+16=0$.

12. ა) $\frac{2x-7}{(x-3)(x-2)(x+4)}$, ბ) $\frac{7x^3-4x^2+12x-1}{x^2+8x+15}$,

გ) $\frac{4x^2-8x+5}{(x-3)(x^2+7x+9)}$.

13. ა) $\int \frac{\sin 9x dx}{\cos 9x - e^2}$, ბ) $\int \frac{13 dx}{(3-26x)^7}$,

გ) $\int \frac{dx}{8x^2-2x+9}$, დ) $\int \frac{5x+2}{x^2+6x+10} dx$.

14. ა) $\int \frac{5x-3}{(x-3)(x+4)^2} dx$, ბ) $\int \frac{x^4-2x^2+3}{x^2-5x} dx$,

გ) $\int \frac{3x-8}{(x+4)(x^2+7)} dx$.

15. $\int \cos 8x \cos 7x dx$. 16. $\int_2^5 \frac{dx}{(x-1)^2}$. 17. $\int_0^7 \sqrt{49-x^2}\, dx$.

18. $x^2+y^2=4$. 19. $y=2x^3$, $y=2x^2$, $x=-1$, $x=1$.

20. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$, (oy ღერძით)

21. $V=0.005t^4$ მ/წმ, $T=10$ წმ.

22. ა) $(y-x)ydx+x^2dy=0$, ბ) $y'-y=\frac{e^x}{x^2+2}$,

გ) $(2xy^3+4y)dx+(3x^2y^2+4x)dy=0$,

23. ა) $y''=y'+x$, ბ) $y'''=2(y''-1)tgx$,

გ) $yy''=(y')^2$.

24. ა) $2y''-3y'+2y=3x-5$, ბ) $y''-7y'+10y=(8x^2+4x+1)e^x$,

გ) $y''-4y'+4y=\cos x$.

ბილეთი № 11

1. $z=\sqrt{\ln(5-x^2-y^2)}-\sqrt{x+y-2}$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{6-\sqrt{3xy+36}}{xy}$, ბ) $z=-\frac{1}{(x+y)^2(y-1)^2}$.

3. ა) $z=3x^4+4x^2y-5y^4$, ბ) $z=-3e^{4xy}$,

ა) $z=5\ln^2 xy+\sin x$, თუ $y=x^2$.

4. ბ) $z=\sin xy$, თუ $x=2t^2-3t$, $y=5t^3-4t$.

გ) $z=x^2y^3$, თუ $x=u^2+v^2$, $y=\ln u^2 v$.

5. $\sin xy=\sqrt{3x^2-\ln xy}$. 6. $4xy^2z+z^4+2=0$, $M_0(3,\frac{1}{2},-1)$.

7. ა) $z=-x^2+4xy-y^2-3x-8y$, ბ) $z=4x+9y$, $x^2+y^2=117$.

გ) $z=-2x^2-5y^2+8x+20$, $3x+y\le 3$, $x\ge 0$, $y\ge 0$,

დ) $x+y\le 6$, $2y+x\le 9$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z=10x+3y\to \max$.

8. $\int \frac{x^2\sqrt{x}-2x}{\sqrt[3]{x}} dx$. 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}+7}$.

10. ა) $\int (3x^2-5x+4)e^{2x} dx$, ბ) $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$, გ) $\int 3^x \cos x dx$.

11. ა) $\frac{1}{i}+\frac{1+i}{3i+5}+\frac{3+4i}{3-2i}$, ბ) $(\sqrt{3}-5i)^9$,

გ) $z=-12$, დ) $3x^2+4=0$.

12. ა) $\frac{3x^2-4x+5}{x^3-5x^2+6x}$, ბ) $\frac{4x^3-5x^2+3x+2}{x^3-x^2}$, გ) $\frac{5x-8}{(3x-5)(x^2+4)}$.

13. ა) $\int \frac{4dx}{3x-8}$, ბ) $\int \frac{5^{2x} dx}{(5^{2x}-3)^{12}}$,

გ) $\int \frac{dx}{x^2-4x+11}$, დ) $\int \frac{5x-1}{x^2+3x+9} dx$.

14. ა) $\int \frac{3x-7}{(x+2)(x-3)^2}\,dx$, ბ) $\int \frac{3x^3-3x+9}{x^3-3x^2+2x}\,dx$,

გ) $\int \frac{2x^2-3x+1}{(x^2+2)(x-1)}\,dx$.

15. $\int \sin 5x \cos 2x\,dx$. 16. $\int_1^4 \sqrt{4x-1}\,dx$. 17. $\int_0^8 x\sqrt{1+x}\,dx$.

18. $r=\varphi\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. 19. $r=4\sin\varphi$.

20. $y=3x^2$, $y=0$, $x=3$, (ox ღერძი)

21. $V=0.014t^6$ მ/წმ, $T=10$ წმ.

22. ა) $y'=\frac{x+2y+1}{x-3}$, ბ) $y'-4x^3y=-e^{x^4}$,

გ) $(e^y+2)dx+(1-xe^{-y})dy=0$.

23. ა) $xy''=y'$, ბ) $2xy'=(1+x^2)y''$,

გ) $y''+2y(y')^2=0$.

24. ა) $5y''-5y'+3y=2x-3$, ბ) $3y''+2y'-8y=(10x+7)e^{-2x}$,

გ) $y''+3y'+5y=\cos 3x$.

ბილეთი № 12

1. $z=\sqrt{x^2+3-y}+\ln(y-x)$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+3y)}{x+3y-1}$, ბ) $z=\frac{9}{(x-1)y}$.

3. ა) $z=3x+4x^3y^2-y$, ბ) $z=5e^{3xy}$.

ა) $z=3\ln xy^2+tgx$, თუ $y=x^3$.

4. ბ) $z=3^{x+y}$, თუ $x=3t^2$, $y=t^2+4t$.

გ) $z=3x^4y^2-3\sqrt{xy}$, $x=uv^2$, $y=v^3u$.

5. $\ln xy=\sqrt{x^3-xy^2}$.

6. $3^{\frac{z}{x}}+3^{\frac{z}{y}}=36$, $M_0(2,3,6)$.

7. ა) $z=x^2+xy+\frac{y^2}{2}+x+3y-0.5$,

ბ) $z=1-x-6y$, $x^2+y^2=37$.

გ) $z=3x^2+y^2-3x-4y$, $4x+y\le 4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

დ) $4y-5x\le 35$, $7y+5x\le 50$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z=3x+10y\to\max$.

8. $\int\left(\frac{\sqrt{x}}{3x}-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}\right)dx$. 9. $\int\frac{5dx}{\sqrt{5x+6}-8}$.

10. ა) $\int(3x-5)\cos 7x\,dx$, ბ) $\int(4x^3+6x-7)\ln x\,dx$,

გ) $\int 3^{2x}\cos 3x\,dx$.

11. ა) $\frac{5+2i}{3-2i}+\frac{4-5i}{3+4i}-\frac{4+2i}{3+3i}$, ბ) $(\sqrt{2}+5i)^{12}$,

გ) $z=6$, დ) $2x^4+7=0$.

12. ა) $\frac{2x^2-5x-7}{(x-1)(x^2+x-12)}$, ბ) $\frac{3x^3-4x+1}{3x^2-9x}$, გ) $\frac{3x^2-4x+1}{(x-7)(x^2+9)}$.

13. ა) $\int \frac{2^x dx}{2^x-5}$, ბ) $\int \frac{3dx}{(3x-7)^7}$,

გ) $\int \frac{dx}{5x^2-2x-7}$, დ) $\int \frac{5x+2}{2x^2-6x+7}dx$.

14. ა) $\int \frac{2x-7}{(x-3)(x+2)^2}dx$, ბ) $\int \frac{x^4-2x^3+12x+6}{x^3-6x^2}dx$,

გ) $\int \frac{3x^2-4x+5}{(x+1)(x^2+2x+5)}dx$.

15. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$. 16. $\int_2^3 \frac{\sqrt[3]{y}-y^2}{y}dy$. 17. $\int_0^{15} x\sqrt{1+x}dx$.

18. $x=\sqrt{3}\cos t$, $y=\sqrt{3}\sin t$, $z=\sqrt{3}t$, $0\le t\le 2\pi$.

19. $y=7x^2$, $y=0$, $x=4$.

20. $x=5y^2$, $x=0$, $y=3$, (Oy ღერძი)

21. $V=0.012t^5$ მ/წმ, $T=10$ წმ

22. ა) $y'=\frac{x-2y+5}{2x-y+4}$, ბ) $y'+y=\frac{e^{-x}}{1+x^2}$,

გ) $(3x^2\ln y-x^2)dx+(\frac{x^3}{y}-y^2)dy=0$.

23. ა) $y''-2ctgx\cdot y'=\sin^2 x$, ბ) $(1+x^2)y''=2xy'$,

გ) $y'y''+(y')^2=0$.

24. ა) $3y''-5y'+4y=2x^2+5$, ბ) $3y''+2y'-8y=(10x+7)e^{-3x}$,

გ) $y''+3y'+4y=\frac{1}{3}\cos x$.

ბილეთი № 13

1. $z=\sqrt{x^2+2-y}+\ln(y+2)$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin 3xy}{\sqrt{3x^2+3y^2}}$, ბ) $z=\frac{5}{x(y-5)}$.

3. ა) $z=\frac{x^4}{4}+5xy-3y^2$, ბ) $z=-3e^{\frac{xy}{8}}$.

ა) $z=5\ln(x+y^2)+\cos^2 x$, თუ $y=x^2+3x$.

4. ბ) $z=5^{2x+y^2}$, თუ $x=5t^2$, $y=t^3-3t$.

გ) $z=2x^3y-3\sqrt{xy}$, $x=u^2v^2$, $y=v^3+uv^2$.

5. $\sqrt{5x-4xy^2}=x^3y-4xy$. 6. $4^{\frac{x}{z}}+4^{\frac{y}{z}}=10$, $M_0(1,3,2)$.

7. ა) $z=x^2-xy+y^2-5x+y$, ბ) $z=8x+2y+5$, $x^2+y^2=17$.

გ) $z=-5x^2+4y^2+10x-8y$, $3x+2y\le 6$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

დ) $5x+2y\le 25$, $3y+2x\le 21$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z=2x+7y\to\max$.

8. $\int(\frac{x}{2\sqrt{x}}+\frac{x^2\sqrt{x}}{2})dx$. 9. $\int \frac{2dx}{\sqrt{3x-4}-5}$.

10. ა) $\int(x^2+x)\sin 5xdx$, ბ) $\int \arcsin 3xdx$, გ) $\int e^{2x}\cos 5xdx$.

11. ა) $\frac{5+2i}{2+5i}+\frac{3+2i}{2-3i}-\frac{3+2i}{2+3i}$, ბ) $(3-8i)^{10}$,

გ) $z=-4$, დ) $x^3+8=0$.

12. ა) $\frac{4x^3-5x+2}{(x-3)(x+2)^3}$, ბ) $\frac{4x^3-5x+2}{5x^2-10x}$, გ) $\frac{5x^2-3x+4}{(x+2)(x^2+3x+5)}$.

13. ა) $\int \frac{(\sqrt{2}-1)dx}{(\sqrt{3}+1)x-1}$, ბ) $\int \frac{\sin 3xdx}{(2-\cos 3x)^4}$,

გ) $\int \frac{dx}{3x^2-5x-12}$, დ) $\int \frac{4x-1}{x^2+3x+9}dx$.

14. ა) $\int \frac{2x^2-3}{(x-1)(x+4)^2}dx.$ ბ) $\int \frac{3x^4-x^2-1}{x^3-x}dx,$

გ) $\int \frac{5x^2-3x+2}{(x-7)(x^2+3x+4)}dx.$

15. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}.$ 16. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+7}.$ 17. $\int_3^8 x\sqrt{1+x}dx.$

18. $x=3(t-\sin t),\ \ y=\sqrt{3}\sin t,\ \ z=\sqrt{3}t\ \ 0\le t\le 2\pi.$

19. $r=5\cos\varphi.$

20. $x=4y^2,\ \ x=0,\ \ y=1,$ (*oy ღერძი*)

21. $V=0.016t^3$ მ/წმ, $T=10$ წმ.

22. ა) $y'=\frac{3x-y+5}{x+y-1},$ ბ) $y'-\frac{y}{x+2}=x^5(x+2)^2,$

გ) $(x^2+\sin y)dx+(x\cos y+1)dy=0.$

23. ა) $xy''=y'\ln\frac{y'}{x},$ ბ) $y''=\frac{1}{x}(y'-1),$

გ) $y''tgy=2(y')^2.$

24. ა) $5y''-7y'+4y=3x-7,$ ბ) $y''+10y'+21y=(3x+1)e^{-2x},$

გ) $y''-4y'+5y=2\sin 3x.$

ბილეთი № 14

1. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{2x-3y+6}.$

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4xy}{2-\sqrt{xy+4}},$ ბ) $z=\frac{1}{xy}.$

3. ა) $z=3x^7-\frac{x}{y^2}+y^3,$ ბ) $z=\frac{1}{3}e^{\frac{xy}{\ln 2}}.$

ა) $z=arctg\frac{x^2}{y},$ თუ $y=x^4.$

4. ბ) $z=e^{xy},$ თუ $x=t^3+2t,\ \ y=\sin^2 t.$

გ) $z=3y\ln x+\sqrt{xy},$ თუ $x=u^2v,\ \ y=u^2+v^2.$

5. $\sqrt{3x^2-4y^2}=3-x^2y^3-xy.$ 6. $3^{\frac{x}{z}}+3^{\frac{y}{z}}=12,$ $M_0(2,1,1).$

7. ა) $z=\frac{x^2}{2}-xy-\frac{y^2}{2}-2x+4y,$ ბ) $z=9x+y-3,\ \ x^2+y^2=82.$

გ) $z=-x^2-2y^2+6x+12y,\ \ 2x+3y\le 12,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0.$

დ) $y+x\le 5,\ \ 2y+3x\le 12,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z=3x+4y\to \max.$

8. $\int \frac{2\sqrt[3]{x}+3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx.$ 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+1}.$

10. ა) $\int(\sin 7x(x^2-2x+3))dx,$ ბ) $\int \arcsin 5x dx,$ გ) $\int e^{4x}\sin 3x dx.$

11. ა) $\frac{5+4i}{3-i}+\frac{2-3i}{5i+2}+\frac{2-3i}{1-i},$ ბ) $(\sqrt{3}+2i)^5,$

გ) $z=9,$ დ) $x^2+4x+8=0.$

12. ა) $\frac{2x-7}{(x-2)(x+3)(x+5)},$ ბ) $\frac{x^2-3x+4}{x^2-2x},$ გ) $\frac{7x+2}{(x+1)(x^2+4)}.$

13. ა) $\int \frac{(\sqrt{2}-1)dx}{(\sqrt{3}-5)x-3}$, ბ) $\int \frac{40dx}{(10x-15)^9}$,

გ) $\int \frac{dx}{4x^2-4x+7}$, დ) $\int \frac{3x-2}{x^2+2x+10}dx$.

14. ა) $\int \frac{2x^2-5x+1}{(x+2)(x+4)^2}dx$, ბ) $\int \frac{4x^5-3x^4-8}{x^2-4x}dx$,

გ) $\int \frac{3x^2-5x+9}{(x-2)(x^2-4x+9)}dx$.

15. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x}$. 16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx$. 17. $\int_3^5 x\sqrt{2+x}dx$.

18. $r = 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$. 19. $x = 10\cos t$, $y = 3\sin t$.

20. $y = \frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = 5$. (ox ღერძი)

21. $V = 0.025t^4$ მ/წმ, $T = 10$ წმ.

22. ა) $y' = -\frac{2x-3y-1}{4x+6y-1}$, ბ) $y' - \frac{y}{x} = \frac{4x-1}{x^3}$,

გ) $(y + x\ln y)dx + (\frac{x^2}{2y} + x + 1)dy = 0$.

23. ა) $xy''' = y''$, ბ) $e^x y'' + e^x y' = 1$,

გ) $1 + (y')^2 = 2y \cdot y''$.

24. ა) $4y'' + 7y' + 4y = 2x - 1$, ბ) $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$,

გ) $y'' + 3y' + y = 3x\cos 2x$.

ბილეთი № 15

1. $z = \sqrt{2 - y - x^2} + \ln\left(4x^2 + 4y^2 - 1\right)$

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\ln(x+2y)}{2(x+2y-1)}$, ბ) $z = \frac{2x+3y}{x^2+(y+3)^2}$.

3. ა) $z = \sqrt[3]{x} - x^5 y^4 + y^7$, ბ) $z = 3e^{5xy}$.

ა) $z = arctg\frac{x^2}{y}$, თუ $y = x^5$.

4. ბ) $z = e^{xy}$, თუ $x = t^2 + 2t$, $y = \sin^2 t$.

გ) $z = 3y\ln x + \sqrt{xy}$, თუ $x = u^2 v$, $y = u^2 + v^3$.

5. $\sqrt{x^2 - 3y^2} = x^2 - 3x + y^4 - 5$.

6. $2^{\frac{2x}{y}} + 3^{\frac{x-1}{z}} = 29$, $M_0(3,1,1)$.

7. ა) $z = -x^2 - xy - y^2 + 5x + 10y$,

ბ) $z = 17 - 2x - 11y$, $x^2 + y^2 = 125$.

გ) $z = x^2 - 4y^2 - 2x + 2y$, $x + 8y \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

დ) $x + y \le 3$, $y + 2x \le 4$, $x > 0$, $y \ge 0$, $z = 3x + 5y \to \max$.

8. $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$. 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$.

10. ა) $\int (x^2 - 3x + 5)\cos 2x dx$, ბ) $\int (x - \frac{1}{x})\ln x dx$,

გ) $\int e^{2x}\cos 3x dx$.

11. ა) $\frac{2-5i}{4+2i}+\frac{3-2i}{3+4i}-\frac{2+3i}{i}$; ბ) $(\sqrt{2}-3i)^4$,

გ) $z=7$. დ) $x^3+7=0$.

12. ა) $\frac{3x+5}{x(x-2)^2}$, ბ) $\frac{x^4-5x^2-1}{x^2-5x+6}$, გ) $\frac{x^2-2x+5}{x(x^2+2x-9)}$.

13. ა) $\int\frac{\sin 7x dx}{\cos 7x-9}$, ბ) $\int\frac{2^x dx}{(1-2^x)^8}$,

გ) $\int\frac{dx}{3x^2-2x+8}$. დ) $\int\frac{1-4x}{x^2-3x+5}dx$.

14. ა) $\int\frac{2x^3-3x^2+2x-1}{x^3(x+1)}dx$, ბ) $\int\frac{5x^4-x+2}{x^3-x^2}dx$,

გ) $\int\frac{3-5x}{(x^2+3)(6x-12)}dx$.

15. $\int\frac{\cos 2x dx}{\sin x\cos x}$. 16. $\int_0^2\frac{dx}{9+x^2}$. 17. $\int_8^{15}x\sqrt{1+x}dx$.

18. $x^2+y^2=16$, 19. $y=x^3$, $y=x^2$, $x=-1$, $x=1$.

20. $x=2y^2$, $x=0$, $y=5$, (oy ღერძი)

21. $V=0.036t^5$ მ/წმ, $T=10$ წმ.

22. ა) $y'=\frac{x+4y-3}{4x-y+5}$, ბ) $y'-\frac{y}{x}=\frac{4x-1}{x^3}$,

გ) $(y+x\ln y)dx+(\frac{x^2}{2y}+x+1)dy=0$.

23. ა) $x^2y''+xy'=1$, ბ) $y'''+\frac{1}{x}y''=x+1$,

გ) $y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$.

24. ა) $4y''+7y'+4y=3x-2$, ბ) $y''-2y'+y=2e^x$,

გ) $y''+5y'+4y=(3x+1)\cos 3x$.

ბილეთი № 16

1. $z=\sqrt{\ln(81-x^2-y^2)}+\sqrt{x^2+4y-1}$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin\frac{xy}{2}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$, ბ) $z=\frac{xy}{x^2+(y-5)^2}$.

3. ა) $z=x^4-\frac{x^2}{y^3}+\sqrt{y}$, ბ) $z=3e^{\frac{1}{3}xy}$.

ა) $z=arctg\frac{x^2}{y^3}$, თუ $y=x^3+3$.

4. ბ) $z=e^{x^2y}$, თუ $x=3t^3+2t^2$, $y=\cos^2 t$.

გ) $z=3x\ln y+\sqrt{xy}$, თუ $x=u^2v$, $y=u^3+v^2$.

5. $e^{2x}-e^{3xy}-5xy^3-y^2+x^2$. 6. $z=e^{2y\sin x}$, $M_0(\frac{\pi}{2},2,e^4)$.

7. ა) $z=x^2-4xy+y^2+x+12y+3$,

ბ) $z=15-2x-10y$, $x^2+y^2=23$.

გ) $z=x^2+9y^2-2x-9y$, $x+6y\le 6$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

დ) $x+y\le 3$, $y+2x\le 4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z=x+7y\to\max$.

8. $\int(\frac{5}{\sqrt{x^2-9}}+x^5-2\cdot 3^x-\frac{1}{2})dx$. 9. $\int(5x-6)^5dx$.

10. ა) $\int(x^2-2x+7)e^{7x}dx$, ბ) $\int\ln(x^2+5)dx$, გ) $\int e^{x+1}\cos x dx$.

11. ა) $\frac{7-2i}{4+3i}+\frac{4+5i}{3+4i}-\frac{3-2i}{3+4i}$, ბ) $(3-i\sqrt{3})^8$,

გ) $z=-1$. დ) $x^4+2=0$.

12. ა) $\frac{4x+2}{x^2(x-3)}$, ბ) $\frac{x^3-3x^2+5x+1}{x^3-2x^2}$, გ) $\frac{4x-2}{(x-3)(x^2+2)}$.

13. ა) $\int \frac{\sin 4x dx}{\cos 4x - e}$, ბ) $\int \frac{20 dx}{(5-10x)^4}$,

გ) $\int \frac{dx}{5x^2-2x+12}$; დ) $\int \frac{2-3x}{2x^2+4x+7} dx$.

14. ა) $\int \frac{x^2-2x+1}{(x-3)(x+5)(x+1)} dx$, ბ) $\int \frac{5x^2+5x+1}{6x^3-7x^2-3x} dx$,

გ) $\int \frac{2x-5}{(x^2+3)(x^2+5)} dx$.

15. $\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x}$. 16. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{10}} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$. 17. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

18. $r = 8\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. 19. $r = 2\sin\varphi$.

20. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, (ox ღერძი)

21. $V = 0.049t^6$ მ/წმ, $T = 10$ წმ.

22. ა) $y' = \frac{x+y+1}{2x+2y-1}$; ბ) $y' - \frac{4y}{x} = \frac{x^4}{\sqrt{4-x^2}}$,

გ) $(3xy^2-5y)dx + (3x^2y-5x)dy = 0$.

23. ა) $x^2y'' + xy' = 1$, ბ) $y''' + \frac{2}{x}y'' = 3$,

გ) $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.

24. ა) $7y'' - 3y' + 3y = 5x^2 + 1$, ბ) $y'' + 3y' + 2y = (9x+1)e^x$,

გ) $y'' + 5y' + 8y = \sin 3x$.

ბილეთი № 17

1. $z = \sqrt{(4-x^2-y^2)} - \sqrt{1-2\ln x + \ln y}$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{5-\sqrt{2xy+25}}{4xy}$, ბ) $z = \frac{1+x}{2x^2-y+4}$.

3. ა) $z = x^3 + \sqrt{xy} - 3y$, ბ) $z = -15e^{\frac{xy}{2}}$.

ა) $z = 3^{x^2-y^2}$, თუ $y = \sin^2 x$.

4. ბ) $z = 3x^2y^3 - x^4$, თუ $x = (t+1)^2$, $y = 3t^2 - 5t$.

გ) $z = 3x^2 - 5xy + \sqrt{y}$, თუ $x = u^2 + v$, $y = v^2 + u$.

5. $3^{xy} - 5^{2xy^2} - 5xy^3 = 4x$. 6. $z = e^{3x\cos 2y}$; $M_0(\frac{1}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{e})$.

7. ა) $z = \frac{1}{2}x^2 - 5xy + y^2 - x - 4y + 3$,

ბ) $z = 10 - 2x - 2y$, $x^2 + y^2 = 2$.

გ) $z = -2x^2 + 3y^2 + 8x - 36y$, $2x + y \le 14$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

დ) $y + x \le 4$, $3y + x \le 6$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z = 4x + 4y \to \max$.

8. $\int (\frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{4x}{\sqrt{x^2+9}}) dx$. 9. $\int (7x+15)^{18} dx$.

10. ა) $\int (3x-5)\cos 5x dx$, ბ) $\int (2x+1)\ln 3x dx$, გ) $\int e^{3x+2}\sin 2x dx$.

11. ა) $\frac{3+2i}{2-3i} - \frac{5+2i}{3-2i} + \frac{1}{2i+3}$, ბ) $(5-2i)^{14}$,

გ) $z = -5$, დ) $x^2 + 3 = 0$.

12. ა) $\frac{x^2+2x+1}{(x+3)(x+2)^2}$, ბ) $\frac{x^4-5x+1}{3x^2-6x}$, გ) $\frac{5x+7}{(x-5)(x^2+7)}$.

13. ა) $\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{5x-3}}$,   ბ) $\int \frac{e^{2x}dx}{(1-e^{2x})^{10}}$,

გ) $\int \frac{dx}{3x^2-x+5}$,   დ) $\int \frac{5-7x}{3x^2-4x+9}dx$.

14. ა) $\int \frac{x+3x^2}{(x-2)(x+3)^2}dx$,   ბ) $\int \frac{2x^3-3x-3}{x^3-3x^2+2x}dx$,

გ) $\int \frac{x^3}{(x^2+2)(x-1)}dx$.

15. $\int \cos^2 x \sin 2x dx$.   16. $\int_1^3 \frac{y+\sqrt{y}}{y^3}dy$.   17. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

18. $x=\sqrt{7}\cos t$, $y=\sqrt{7}\sin t$, $z=\sqrt{7}t$, $0 \le t \le 2\pi$.

19. $y=5x^2$, $y=0$, $x=5$.

20. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$,   (oy ღერძი)

21. $V=0.064t^7$ მ/წმ, $T=10$ წმ.

22. ა) $y'=\frac{x-y+4}{3x-3y+4}$,   ბ) $y'-\frac{3y}{x}=\frac{x^3}{x^2+3}$,

გ) $(4x^3 y\ln y-5)dx+(\frac{x^4}{y}+2y)dy=0$.

23. ა) $2xy'y''=(y')^2+2$,   ბ) $e^x y''+e^x y'=1$,

გ) $2yy''+3(y')^2=4y^2$.

24. ა) $3y''-5y'+4y=3x+4$,   ბ) $y''-2y'-6=6xe^x$,

გ) $y''+y=\cos 5x$.

ბილეთი № 18

1. $z=\ln(y-x^2+4)+\sqrt{3-y}$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{\ln(x+y)}{5(x+y-1)}$,   ბ) $z=\frac{2x+y}{y^2-x}$.

3. ა) $z=3x^2-\frac{x}{y^3}+\sqrt[3]{y}$,   ბ) $z=-3e^{3xy}$.

ა) $z=2^{x^2+y^2}$, თუ $y=\cos^2 x$.

4. ბ) $z=5x^2y^4-3x^3$, თუ

$x=(t+1)^2$, $y=5t^2-3t+2$.

გ) $z=\cos^2 xy$, თუ $x=u+2v$, $y=v+2u$.

5. $2^{3xy}-5^{xy^2}-e^{4xy^2}=3x+y^3$.   6. $z=e^{2\sqrt{x}\cos xy}$, $M_0(1,0,e^2)$.

7. ა) $z=\frac{x^2}{2}-xy+y^2+3x+8y+3$.

ბ) $z=5x+4y-3$, $x^2+y^2=41$.

გ) $z=-x^2-7y^2+4x+14y$, $x+2y\le 4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

დ) $y+2x\le 6$, $2y+x\le 6$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z=3x+3y\to \max$.

8. $\int(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4}{4+x^2}-8\cos x-3)dx$.   9. $\int(5x-1)^{17}dx$.

10. ა) $\int(x^2-2x)e^{4x}dx$,   ბ) $\int(3x^2+5x+2)\ln 5x dx$,

გ) $\int e^{3x-3}\cos 3x dx$.

11. ა) $\frac{3-2i}{2-3i}+\frac{3-2i}{4+5i}+\frac{3+4i}{3-2i}$,   ბ) $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})^{10}$,

გ) $z=2$,   დ) $x^3+1=0$.

12. ა) $\dfrac{x-3}{(x+3)(x+5)^2}$, ბ) $\dfrac{x^4-3x^3-5x+1}{2x^2-5x}$, გ) $\dfrac{3x^2-4x+8}{(x+1)(x^2+9)}$.

13. ა) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x\,dx}{\sin 2x-5}$, ბ) $\displaystyle\int\frac{60\,dx}{(4-5x)^8}$,

გ) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2-5x+4}$. დ) $\displaystyle\int\frac{6-7x}{3x^2-2x+7}dx$.

14. ა) $\displaystyle\int\frac{2x^2-3x+5}{x(x-2)(x+5)}dx$, ბ) $\displaystyle\int\frac{5x^4-x^2+3}{x^3-3}dx$.

გ) $\displaystyle\int\frac{3x-5}{(x-1)(x^2+3)}dx$.

15. $\displaystyle\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$. 16. $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[3]{y^2}-1}{y^3}dy$. 17. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+8x+17}$.

18. $x=4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

19. $r=2\cos\varphi$.

20. $y=3x^2$, $y=0$, $x=6$, (ox ღერძი)

21. $V=0.09t^2$ მ/წმ, $T=10$ წმ.

22. ა) $y'=\dfrac{2x+y-2}{4x+2y+1}$, ბ) $y'+\dfrac{2x}{x^2+4}y=x$,

გ) $(x^2+y^2+y)dx+(2xy+x+e^y)dy=0$.

23. ა) $x^3y''+x^2y'=1$, ბ) $e^xy''+e^xy'=1$,

გ) $yy''+(y')^2=1$.

24. ა) $3y''-3y'+2y=5x+4$, ბ) $y''-2y'=(x^2+x-3)e^x$,

გ) $y''+y'-2y=\varphi\sin 2x$.

ბილეთი № 19

1. $z=\sqrt{\ln(x+1)-\ln y}-\sqrt{1-x^2-y^2}$.

2. ა) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin 5xy}{5\sqrt{x^2+y^2}}$. ბ) $z=\dfrac{5}{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

3. ა) $z=5x^6-\dfrac{x}{\sqrt{y}}+\sqrt[4]{y}$, ბ) $z=5e^{\frac{xy}{\sqrt{3}}}$.

ა) $z=\arcsin\sin\dfrac{y}{x}$, თუ $y=\sqrt{x^2+3}$.

4. ბ) $z=x^2-4xy$, თუ $x=t^3+1$, $y=3t^2+1$.

გ) $z=3x^3-4\sqrt[3]{xy}$ თუ $x=u^2v$, $y=uv^2$.

5. $e^{xy}-2^{3x}-5e^y+xy^2=0$. 6. $z=e^{2\sqrt{xy\sin x}}$, $M_0(\dfrac{\pi}{2},2\pi,e^{2\pi})$.

7. ა) $z=-\dfrac{x^2}{2}+xy-\dfrac{y^2}{2}-x-7y$, ბ) $z=15-6x-2y$, $x^2+y^2=10$.

გ) $z=2x^2-y^2-12x-6y$, $x+y\le 8$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

დ) $2y+x\le 12$, $5x-2y\le 20$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z=4x+8y\to\max$.

8. $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}+2e^x-\frac{4}{\cos^2 x}-3\right)dx$. 9. $\displaystyle\int(4x-7)^9dx$.

10. ა) $\displaystyle\int(3x-7)\cos 2x\,dx$, ბ) $\displaystyle\int(3x^3-5x^2+2x)\ln 4x\,dx$.

გ) $\displaystyle\int 4^x\cos 7x\,dx$.

11. ა) $\dfrac{5+2i}{2+5i}+\dfrac{3-2i}{2+3i}+\dfrac{1-i}{2i}$, ბ) $(\sqrt{3}-3i)^6$,

გ) $z=-2$, დ) $x^6+5=0$.

12. ა) $\dfrac{4x+1}{x(x+2)(x+1)}$, ბ) $\dfrac{x^3-3x^2+2}{3x^2-7x}$, გ) $\dfrac{4x-9}{(x-3)(x^2+x+5)}$.

13. ა) $\int \frac{\sqrt{3}dx}{\sqrt{5x-2}}$, ბ) $\int \frac{7^{2x}dx}{(1-7^{3x})^{12}}$,

გ) $\int \frac{dx}{5x^2-3x+7}$, დ) $\int \frac{3x+4}{x^2+2x+9}dx$.

14. ა) $\int \frac{3x-8}{x^2(x-3)^2}dx$, ბ) $\int \frac{2x^5-3x^4-1}{x^3-4x}dx$,

გ) $\int \frac{2x-7}{(x-3)(x^2+2x+7)}dx$.

15. $\int tg^2 x dx$. 16. $\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^3}$. 17. $\int_0^4 \frac{dx}{x^2+10x+26}$.

18. $r = 12\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$. 19. $x = 9\cos t$, $y = 4\sin t$.

20. $x = 8y^2$, $x = 0$, $y = 4$, (oy ღერძი)

21. $V = 0{,}015t^4$ მ/წმ, $T = 10$ წმ.

22. ა) $y' = \frac{3x-y+3}{9x-3y+1}$, ბ) $y' - \frac{y}{x-3} = (x-3)\sin 5x$,

გ) $(x-\cos 2y)dx + (2x\sin y + y^2)dy = 0$.

23. ა) $xy'' = \sqrt{1+(y')^2}$, ბ) $(x-1)y'' - 2y' = (x-1)^4$,

გ) $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0$.

24. ა) $5y'' + 3y' + 4y = 2x - 7$, ბ) $2y'' - 5y' + 2y = (x^2 - 2x)e^x$,

გ) $y'' + y = \cos 7x$.

ბილეთი № 20

1. $z = \sqrt{\ln(x^2+y^2) - \ln 9} + \frac{1}{x-y}$.

2. ა) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{4-\sqrt{xy+16}}{4xy}$, ბ) $z = \frac{2xy+1}{x^2-2y}$.

3. ა) $z = x^2y - x\sqrt{y} - \frac{x^2}{y}$, ბ) $z = 2e^{\frac{xy}{3}}$.

ა) $z = arctg\frac{x^3}{y^2+1}$, თუ $y = x^3$.

4. ბ) $z = e^{x^2+y^2}$, თუ $x = 3t^2$, $y = \cos^3 t$.

გ) $z = 3x^2 - 5xy + 2y^2$, თუ $x = u^3 + v^2$, $y = u^2v^3$.

5. $e^{2y} - e^{3x} + xy^3 = 3$. 6. $z = e^{3\sqrt{2y}\sin xy}$, $M_0(25\pi, \frac{1}{5\pi}, e)$.

7. ა) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y + 4$,

ბ) $z = 7x + 2y + 1$, $x^2 + y^2 = 53$.

გ) $z = x^2 - 3y^2 - 6x + 24y$, $2x + y \le 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

დ) $3y + x \le 9$, $y + x \le 5$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z = 3x + 4y \to \max$.

8. $\int (2\sin x + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + 3)dx$. 9. $\int (2x+3)^{13} dx$.

10. ა) $\int (5x-8)e^{3x}dx$, ბ) $\int (x^2-4x+1)\ln 5x dx$,

გ) $\int 3^{2x}\cos 2x dx$.

11. ა) $\frac{3-2i}{4-5i} + \frac{4+2i}{3-2i} + \frac{1}{i}$, ბ) $(\sqrt{3}+3i)^{12}$,

გ) $z = -3$ დ) $x^4 + 3 = 0$.

12. ა) $\dfrac{3x-7}{x^2(x-3)}$, ბ) $\dfrac{3x^3-4x+5}{4x^2-14x}$, გ) $\dfrac{5x^2-3x-5}{(x-4)(x^2+2x+7)}$.

13. ა) $\int\dfrac{\sin 3x dx}{\cos 3x-5}$; ბ) $\int\dfrac{20dx}{(5-4x)^8}$,

გ) $\int\dfrac{dx}{2x^2-3x+9}$, დ) $\int\dfrac{2x+3}{x^2-4x+11}dx$.

14. ა) $\int\dfrac{2x^2-4x-1}{(x-3)(x+2)(x+4)}dx$, ბ) $\int\dfrac{3x^3-2x+3}{x^3-3x^2+2x}dx$,

გ) $\int\dfrac{4x-13}{(x+5)(x^2+3x+9)}dx$.

15. $\int ctg^2 x dx$. 16. $\int_0^4(\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})dx$. 17. $\int_0^1\dfrac{dx}{x^2+12x+37}$.

18. $x^2+y^2=9$.

19. $y=5x^2$, $y=4x^2$, $x=-1$, $x=1$.

20. $y=\dfrac{8}{x}$; $y=0$, $x=4$. *(ox ღერძი)*

21. $V=0.018t^3$ *მ/წმ*, $T=10$ *წმ*.

22. ა) $y'=\dfrac{4x+y+4}{8x+2y-1}$, ბ) $y'+ytgx=\cos^2 x$,

გ) $(5x^4\ln y-e^x)dx+(\dfrac{x^5}{y}+e^y)dy=0$.

23. ა) $xy''+y''=2-x$, ბ) $xy''+y'=x^4$,

გ) $2y\cdot y''-(y')^2=0$.

24. ა) $5y''+4y'+3y=3x-8$, ბ) $y''-8y'+16y=(3x^2-5)e^{2x}$,

გ) $y''-7y'+5y=\sin 4x$.

საკონტროლო სამუშაო №1

ორი ცვლადის ფუნქციები, განუსაზღვრელი ინტეგრალი

1. 1) იპოვეთ რთული ფუნქციის კერძო წარმოებულები,
   2) იპოვეთ ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის სრული დიფერენციალები.
2. იპოვეთ $z=f(x,y)$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი.
3. იპოვეთ ინტეგრალი უშუალო ინტეგრებით ან ჩასმით.
4. იპოვეთ ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.
5. იპოვეთ ინტეგრალი რაციონალური წილადიდან.

Контрольная работа №1

функции двух переменных, неопределенный интеграл

1. 1/ Найти частные производные сложной функции;
   2/ Найти полные дифференциалы первого и второго порядка данной функции.
2. Найти локальный экстремум данной функции.
3. Найти интеграл непосредственным интегрированием или подстановкой.
4. Найти интеграл методом интегрирования по частям.
5. Найти интеграл от рациональной функции.

ბილეთი №1

1) 1. $z = \sqrt{x^3 + y^3 - 3xy}$, $x = \cos\frac{u}{v}$, $y = u^2$.

2. $z = x^2 - y^2 - 3xy - 27$.

3. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+2}$.

4. $\int x 2^{3x} dx$.

5. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+2)^2}$.

2) 1. $z = y^x$.

2. $z = 3xy + x^3 + y^3$.

3. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

4. $\int e^x \sin x dx$.

5. $\int \frac{x^4 dx}{(2+x)(x^2-1)}$

ბილეთი №2

1) 1. $z = arctg \frac{x^2}{y}$, $x = \frac{u}{\cos v}$, $y = \frac{v}{\sin u}$.

2. $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$.

3. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x + 1}}$.

4. $\int \ln(1-x)dx$.

5. $\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx$.

2) 1. $z = 2^{\sin xy}$.

2. $z = x^2 + y^2 - 2x$.

3. $\int x(2x+5)^{10} dx$.

4. $\int \frac{x}{e^x} dx$.

5. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

ბილეთი №3

1) 1. $z = xarctgy$, $x = \frac{u^3}{1+v^2}$, $y = \frac{v^3}{1+u^2}$.

2. $z = x^3 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$.

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tgx - 1}}$.

4. $\int x^{5} \ln x dx$.

5. $\int \frac{2x-1}{(x-2)(x-1)} dx$.

2) 1. $z = x\ln\frac{y}{x}$.

2. $z = x^2 - xy + y^2 - 3x - 2y + 2$;

3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. $\int \ln(x^2+1)dx$.

5. $\int \frac{dx}{x^3 + x}$.

ბილეთი №4

1) 1. $z = \ln\sin\frac{x+y}{2}, x = e^{uv}$, $y = \frac{u}{v}$.

2. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

3. $\int \frac{xdx}{a^4 + x^4}$.

4. $\int \arccos(5x-2)dx$.

2) 1. $z = x\ln\frac{y}{x}$.

2. $z = x^4 + y^2 - 2x + 2y - 3$.

3. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

5. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$. 5. $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}$.

ბილეთი №5

1) 1. $z=(x+y)^v$, $x=2^{uv}$, $y=uv$.

2) 1. $z=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^y$.

2. $z=4x^2+2xy-y^2-4x+y$. 2. $z=e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right)$.

3. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

4. $\int x^3 \ln x dx$. 4. $\int x \cos^2 x dx$.

5. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. 5. $\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$.

ბილეთი №6

1) 1. $z=x^{y^2}$, $x=u+\frac{v}{u}$, $y=v+\frac{u}{v}$.

2) 1. $z=e^{x^2+y^2}$.

2. $z=(x-1)^2+y^2$. 2. $z=x^3+y^3-9xy+3$.

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$. 3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

4. $\int x\cos(5x-7)dx$. 4. $\int x2^x dx$.

5. $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}dx$. 5. $\int \frac{(x-1)dx}{(x+1)(x^2+x-1)}$.

ბილეთი №7

1) 1. $z=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^2$, $x=\ln\frac{u}{v}$, $y=uv$.

2) 1. $z=arctg\frac{y}{x}$.

2. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$. 2. $z=x^3+y^3+9xy+27$.

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}$. 3. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$.

4. $\int \arcsin 3x dx$. 4. $\int \ln^2 x dx$.

5. $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$. 5. $\int \frac{(x^2+1)dx}{x(x-1)^2}$.

ბილეთი №8

1) 1. $z=\cos\ln(x+y)$, $x=u^2+v$, $y=\frac{u}{v-2}$.

2) 1. $z=\cos xy$.

2. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$. 2. $z=x^2-y^2+2e^{-x^2}$.

3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$. 3. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$.

4. $\int x\,arctg\,4x dx.$ 4 $\int arctg\sqrt{x}dx.$

5. $\int\frac{x\cdot dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$ 5. $\int\frac{x\cdot dx}{(x^2+1)(x-1)}.$

ბილეთი №9

1) 1. $z=y^{\ln x},\quad x=u^2+v^2,\quad y=1+u+v.$

2) 1. $z=\ln(x^2+y).$

2. $z=(x-2)^2+4y^2.$ 2. $z=x^3+3xy^2-15x-12y.$

3. $\int\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx.$ 3. $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos x}}.$

4. $\int x\arcsin 2xdx.$ 4. $\int x\sin^2 xdx.$

5. $\int\frac{(x-4)dx}{(x-2)(x-3)^2}.$ 5. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

ბილეთი №10.

1) 1. $z=arctg\frac{y}{x},\quad x=\frac{\sin v}{u},\quad y=\frac{u^2}{v-1}.$

2) 1. $z=\ln(x^3+y^2).$

2. $z=x^2-xy+y^2-3x-2y+2.$ 2. $z=e^{2x}(x+y^2+2y).$

3. $\int\frac{\sin xdx}{\cos^3 x}.$ 3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

4. $\int arctg\,3xdx.$ 4. $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}.$

5. $\int\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx.$ 5. $\int\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx.$

ბილეთი №11

1) 1. $z=\frac{x^2+xy}{y^2-xy},\quad x=tg\frac{u}{v},\quad y=\frac{\ln u}{v}.$

2) 1. $z=\frac{y^2}{2x+y}.$

2 $z=x^2+xy+y^2+x-y-1.$ 2. $z=x^3-3x+y^2.$

3. $\int\frac{arctg\,2xdx}{1+4x^2}.$ 3. $\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx.$

4. $\int x^8\ln xdx.$ 4. $\int e^{2x}\cos 3xdx.$

5. $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx.$ 5. $\int\frac{x^5dx}{x^3+1}.$

ბილეთი №12

1) 1. $z = e^{x^2-3y^2}$, $x = \ln(u^2+v)$, $y = \frac{u}{v}$.

2) 1. $z = tg\frac{x+y}{y}$.

2. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

2. $z = x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1$.

3. $\int\frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$. 3. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

4. $\int\arcsin(2x+3)dx$. 4. $\int\frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$. 5. $\int\frac{x^3+x+1}{x^4-1}dx$.

ბილეთი №13

1) 1. $z = (1+x^2)^y$, $x = u^2 + \sin v$, $y = \ln(u+v)$.

2) 1. $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$.

2. $z = (x-1)^2 + y^2$. 2. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

3. $\int\frac{\ln 2x}{x}dx$. 3. $\int\frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

4. $\int x\sin(2x+3)dx$. 4. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

5. $\int\frac{xdx}{2x^2-3x-2}$. 5. $\int\frac{dx}{x^4-13x^2+36}$.

ბილეთი №14

1) 1. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x = v^2\sin u$, $y = u^2\sin v$.

2) 1. $z = \frac{x^2}{1-2y}$.

2. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y$. 2. $z = e^x(2x+y^2)$.

3. $\int\frac{e^x dx}{3+4e^x}$. 3. $\int\frac{tg\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$.

4. $\int(x-5)\cos(4x+5)dx$. 4. $\int(x^2-x)e^{2x}dx$.

5. $\int\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$. 5. $\int\frac{1}{x^4-1}dx$.

ბილეთი №15

1) 1. $z=\left(1-tg\frac{y}{x}\right)^{3}$, $x=tg\frac{v}{u}$, $y=\ln\frac{u}{v}$.

2) 1. $z=(x-2)^{y}$.

2. $z=1+6x-x^{2}-xy-y^{2}$.

2. $z=3x^{2}-x^{3}+3y^{2}+4y$.

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^{2}}}$.

4. $\int x\,arctgx\,dx$.

5. $\int\frac{(x^{3}+1)dx}{(x^{2}-1)(x^{2}-4)}$.

3. $\int\cos^{5}x\sqrt{\sin x}\,dx$.

4. $\int(x^{3}-3x+2)\ln 7x\,dx$.

5. $\int\frac{x^{2}dx}{x^{2}-6x+10}$.

საკონტროლო სამუშაო №1

ეკონომიკური პროფილის სპეციალობებისათვის

(ორი ცვლადის ფუნქციები)

1. იპოვეთ და დახაზეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე.
2. იპოვეთ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმები
3. იპოვეთ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმები
4. იპოვეთ ფუნქციის გლობალური ექსტრემუმები
5. მოახდინეთ ფუნქციის მაქსიმიზაცია, იპოვეთ ფუნქციის გლობალური მაქსიმუმი

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Для специальностей экономического профиля

(Функции двух переменных)

1. Найти и изобразить область определения функции
2. Найти локальный экстремум функции
3. Найти условный экстремум функции
4. Найти глобальный экстремум функции
5. Найти глобальный максимум функции.

ბილეთი №1

1. $z=\dfrac{y-1}{\sqrt{1-y^2-x}}+\sqrt[4]{x^2+3x}$

2. $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$, $x\neq 0$ $y\neq 0$.

3. $z=8-2x-4y$, $x^2+2y^2=12$

4. $z=3x^2+3y^2-2x-3y+11$, $x^2+y^2\leq 13$

5. $5y+3x\leq 15$, $y+x\leq 4$ $x\geq 0$ $y\geq 0$ $z=6x+10y\to \max$.

ბილეთი №2

1. $z=14x+16y-x^2-y^2$, $4x^2+4y^2\leq 113$.
2. $x\neq 0$, $y\neq 0$.
3. $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y-4)$, $2x^2+2y^2=1$.
4. $z=-2x^2-2y^2+16x+24y-4$, $x^2+y^2\leq 13$.
5. $x+y\leq 7$, $2y+x\leq 12$, $x>0$, $y\geq 0$, $z=2x-2y\to \max$.

ბილეთი №3

1. $z=\sqrt[4]{y^2-x}+\dfrac{\sqrt[3]{3x}}{\sqrt{2y-x^2-y^2}}$.

2. $z=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+y^2+4y$.

3. $z=x+2y-4$, $x^2+y^2=5$.

4. $z=x^2+y^2-2x-4y$, $x^2+y^2\leq 20$.

5. $2y+x\leq 12$, $2x+y\leq 12$, $x>0$, $y\geq 0$, $z=3x+y\to \max$.

ბილეთი №4

1. $z=\ln(1-3y-3x^2)+\sqrt{1-4x^2-4y^2}$.
2. $z=x^2+y^2-18\ln x-32\ln y$.
3. $z=x+4y+5$, $x^2+y^2=17$.
4. $z=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}+4x+8y$, $x^2+y^2\leq 280$.
5. $x-y\leq 4$, $x+3y\leq 6$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z=3x+3y\to \max$.

ბილეთი №5

1. $z=\sqrt[4]{81-x^2-y^2}+\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x^2+y-1}}$.

2. $z=\dfrac{x^3}{3}-x^2-y^2+8y$.

3. $z=5x+2y-7$, $x^2+y^2=29$.

4. $z=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}-5x-7y-13$, $9x^2-9y^2\leq 74$.

5. $4y+5x\leq 35$, $7y+5x\leq 50$, $x\geq 0$, $y\geq 0$,

$z=3x+5y\to \max$

ბილეთი №6

1. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(2y-x^2-1)$.

2. $z=xy+\dfrac{12}{x}+\dfrac{18}{y}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

3. $z=x+3y-10$, $x^2+y^2=10$.

4. $z = 14x + 16y - x^2 - y^2, \quad 4x^2 + 4y^2 \leq 113.$

5. $2y + 5x \leq 25, \quad 3y + 2x \leq 21, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z = 2x + y \to \max.$

ბილეთი №7

1. $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} + \dfrac{\ln(x^2 + 4)}{\sqrt[4]{y^3 - x}}.$
2. $z = 6x^2 - x^3 + y^2 - 8.$
3. $z = x^2 - y^2, \quad x + 2y - 6 = 0.$
4. $z = y^2 - \dfrac{x^2}{2} - 3x - 8y, \quad x + y \leq 7, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$
5. $x + 3y \leq 9, \quad x + y \leq 5, \quad x \geq 0, \quad y > 0, \quad z = 3x + 2y \to \max.$

ბილეთი №8

1. $z = \ln(1 - y - x) + \sqrt{2y - x^2 - y^2}.$
2. $z = x^3 - 2x + 3y^2 - y^3.$
3. $z = xy, \quad x + 2y - 4 = 0.$
4. $z = 2y^2 + x^2 - 8x - 8y + 9, \quad x - y \leq 3, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$
5. $2y + x \leq 12, \quad 5x + 2y \leq 20, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z = 4x + 8y \to \max.$

ბილეთი №9

1. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} - \ln(y + x^2 + 3).$
2. $z = x + y + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{9y}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$
3. $z = 2x + 3y, \quad x^2 - y^2 = 13.$
4. $z = 4x^2 - y^2 - 4x + y - \dfrac{5}{4}, \quad x + y \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$

5. $x + y \leq 7, \quad 3y - 2x \leq 18, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z = 4x + 3y \to \max.$

ბილეთი №10

1. $z = \dfrac{\sqrt[3]{1 - x}}{\sqrt{4 - y - x^2}} + \sqrt[4]{2y - x + 2}.$
2. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$
3. $z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1.$
4. $z = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} - 3x + 2y - 3, \quad 4x^2 + 4y^2 \leq 13.$
5. $y + 2x \leq 6, \quad y + x \leq 5, \quad x \geq 0, \quad y > 0, \quad z = 3x + 5y \to \max.$

ბილეთი №11

1. $z = \sqrt{1 - 4x^2} + \ln(2x - x^2 - y^2).$
2. $z = x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{81}{y}, \quad x < 0, \quad y < 0.$
3. $z = 2x - y - 1, \quad x^2 + y^2 = 5.$
4. $z = x^2 + y^2 - 5x - 3y + 12, \quad x^2 + y^2 \leq 34.$
5. $3y + x \leq 9, \quad y + 2x \leq 8, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z = 3x + 2y \to \max.$

ბილეთი №12

1. $z = \ln(4 - y - x^2) + \sqrt[4]{4x^2 + 4y^2 - 1}.$
2. $z = xy(3 - x - y), \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$
3. $z = x + y + 5, \quad x^2 + y^2 = 2.$
4. $z = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y + 10, \quad x + y \leq 8, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$

5. $2y+x\le 8,\quad y+3x\le 18,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z=8x+4y\to\max.$

ბილეთი №13

1. $z=\dfrac{4x}{\sqrt{y-x^2+3}}+\sqrt[4]{4-y^2}.$
2. $z=-\dfrac{x^2}{2}+xy-y^2-x-2y+4.$
3. $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\quad x+y=2.$
4. $z=x^2-y^2-6x+y+5,\quad x+y\le 4,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0.$
5. $y+2x\le 6,\quad 2y+x\le 6,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z=2x+2y\to\max.$

ბილეთი №14

1. $z=\ln(16-x^2-y^2)+\dfrac{2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$
2. $z=x^2+xy+\dfrac{y^2}{2}-8x-7y-26.$
3. $z=x+2y,\quad x^2+y^2=5.$
4. $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-7x-2y-8,\quad x+y\le 6,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0.$
5. $x+y\le 7,\quad 2x+5y\le 20,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z=4x+10y\to\max.$

ბილეთი №15

1. $z=\ln(x-y-4)+\dfrac{1}{\sqrt{x-y^2+2}}.$
2. $z=x^2+xy+\dfrac{y^2}{2}+x-3y+5.$
3. $z=6-4x-3y,\quad x^2+y^2=25.$
4. $z=2x^2-\dfrac{y^2}{2}-8x+5y,\quad x+y\le 8,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0.$
5. $x+y\le 6,\quad 2y+x\le 9,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z=2x+4y\to\max.$

ბილეთი №16

1. $z=\sqrt{3-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2-4}}.$
2. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y.$
3. $z=x^2+y^2,\quad 3x+2y=6.$
4. $z=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}+5x+3y,\quad x+y\le 7,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0.$
5. $6y+5x\le 35,\quad 2y-x\le 11,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z=x+5y\to\max.$

ბილეთი №17

1. $z=\ln(y+x)+\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2-y^2}}$.
2. $z=x^2+xy+y^2-2x-4y+8$.
3. $z=8-3x-4y\,,\quad x^2+y^2=1$.
4. $z=2x^2-3y^2-8x+12y-5,\quad x+y\le 3,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$.
5. $x-y\le 10,\quad 3x+5y\le 40,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z=6x+10y\to\max$.

ბილეთი №18

1. $z=\sqrt[4]{y-x-2}+\dfrac{4x-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.
2. $z=-x^2+xy-\dfrac{y^2}{2}-2x+4y$.
3. $z=3x+y-10,\quad x^2+y^2=10$.
4. $z=y^2-3x^2+3x-2y,\quad x+y\le 2,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$.
5. $y+2x\le 10,\quad 3y+2x\le 18,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z=3x+4y\to\max$.

ბილეთი №19

1. $z=\sqrt{x^2-3}+\dfrac{1}{\sqrt{y-x^2+3}}$.
2. $z=-x^2-xy-y^2+3x+6y-11$.
3. $z=2x-y+9,\quad x^2+y^2=5$.
4. $z=-3x^2-y^2+6x+y+9,\quad x+y\le 5,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$.
5. $x+y\le 3,\quad y+3x\le 4,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z=x+2y\to\max$.

ბილეთი №20

1. $z=\ln(y^2-16)+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$.
2. $z=x^2+xy+\dfrac{y^2}{2}-2x-4y$.
3. $z=4x+y-12,\quad x^2+y^2=17$.
4. $z=5x^2+5y^2-10x-20y-16,\quad x^2+y^2\le 500$.
5. $y+x\le 5,\quad 2y+3x\le 12,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z=3x+y\to\max$.

საკონტროლო სამუშაო №2

განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი გამოყენება, დიფერენციალური განტოლებები

1. ა.გამოთვალეთ ინტეგრალი, ბ. გამოთვალეთ ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით;
2. ა. გამოთვალეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი, ბ. გამოთვალეთ წირის რკალის სიგრძე;
3. ა. ამოხსენით დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით, ბ. ამოხსენით ერთგვაროვანი განტოლება.
4. ა. ამოხსენით პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება, ბ. ამოხსენით ბერნულის განტოლება;
5. ამოხსენით მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Определенный интеграл и его применения; дифференциальные уравнения

1. а. Вычислить интеграл; б. Вычислить интеграл методом интегрирования по частям.
2. а. Найти площадь фигуры, ограниченной данными кривыми; б. Найти длину дуги кривой.
3. а. Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными; б. Решить однородное уравнение.
4. а. Решить линейное уравнение первого порядка; б. Решить уравнение Бернулли.
5. а. Решить линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

ბილეთი № 1

ა)

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx,$
2. $y=0, \quad x=1, \quad x=\ln 7,$
3. $xy'+2y=xy-y',$
4. $y'+y=e^{-x},$
5. $y''+2y'+y=-2x-3.$

ბ)

1. $\int\limits_2^3 (x^2+2x)\ln x dx,$
2. $y=\ln(x^2-3), \quad 3\le x\le 5,$
3. $2x^3y'=y(2x^2-y^2),$
4. $3y'+y=\frac{1}{y^2},$
5. $y''-4y'+5y=e^{2x}(\sin x+2\cos x).$

ბილეთი № 2

ა)

1. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctg dx,$
2. $y=x^3, \quad y=0, \quad x=1, \quad x=3.$
3. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0,$
4. $y'+2xy=xe^{-x^2},$
5. $y''-6y'+9y=2x^3-x+3.$

ბ)

1. $\int\limits_2^3 (5x^2-3x+1)\ln 4x dx,$
2. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(t^2-2)\cos t-2t\sin t, \end{cases} \quad 0\le t\le\pi.$
3. $y'=\frac{y}{x}-1,$
4. $y'+2y=y^2e^x,$
5. $y''+y'=x^2-e^{-x}+e^x.$

ბილეთი № 3

ა)

1. $\int\limits_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx.$
2. $y=x^2-2x, \quad y=x+1.$
3. $y'-xy^3=2xy.$
4. $y'-\dfrac{2x-1}{x^2}y=2.$
5. $y''-3y'=6x+1.$

ბ)

1. $\int\limits_1^3 arctg\sqrt{x}\,dx.$
2. $y=\sqrt{9-x^2}, \quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}.$
3. $(x-y)dx+xdx=0.$
4. $y'-3xy=5x^3y^3.$
5. $y''+y'=x+1-2e^{-x}.$

ბილეთი № 4

ა)

1. $\int\limits_0^4 \sqrt[4]{x^2+9}\,dx.$
2. $y=6x-x^2, \quad y=0.$
3. $(1+y^2)dx+xydy=0.$
4. $y'+y=\cos x.$
5. $y''-2y-y=x^3.$

ბ)

1. $\int\limits_0^{3\pi} x^3\cos dx.$
2. $\begin{cases} x=2(3\cos t-\cos 3t) \\ y=2(3\sin t-\sin 3t) \end{cases} \quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}.$
3. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-2.$
4. $y'+2y=y^2e^x.$
5. $y''-2y'+y=\sin x+\cos x.$

ბილეთი №5

ა)

1. $\int\limits_1^e \dfrac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$
2. $y=x^4, \quad y=0, \quad x=1, \quad x=2.$
3. $y'tgx=y.$
4. $y'+2y=4x.$
5. $y''+4y=4x^3-14x-4.$

ბ)

1. $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx.$
2. $y=\ln(x^2-1), \quad 2\le x\le 5.$
3. $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}.$
4. $y'=\dfrac{x}{2y}-\dfrac{1}{2x}.$
5. $y''-2y'+9y=3e^{-x}+2\sin 3x.$

ბილეთი№ 6

ა)

1. $\int\limits_0^4 \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}.$
2. $y=2^x, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=4.$
3. $y'+\dfrac{x\sin x}{y\cos y}=0.$
4. $xy'-2y=x^3\cos x.$
5. $y''-2y'=3x^2-5x+1.$

ბ)

1. $\int\limits_2^5 (2x^3-3x+1)\ln 2x\,dx.$
2. $\begin{cases} x=3\cos^3 t \\ y=3\sin^3 t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$
3. $(x-y)dx+(x+y)dy=0.$
4. $y'x^3\sin y=xy'-2y.$
5. $y''+2y'+2y=(5x+4)e^x+e^{-x}.$

ბილეთი № 7

ა)

1. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$
2. $y = 7x - 3x^2 - 2, \quad y = 0.$
3. $ye^{2x}dx + (1+e^{2x})dy = 0.$
4. $y' - \frac{2y}{x} = 2x^3.$
5. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 - 3x + 2.$

ბ)

1. $\int\limits_2^5 xe^{2x}dx.$
2. $y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}, \quad 0 \le x \le 9.$
3. $(x-y)ydx - x^2dy = 0.$
4. $2y' + 3y = \frac{1}{y^3}.$
5. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}.$

ბილეთი № 8

ა)

1. $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}.$
2. $y = x^2, \quad y = 2x - x^2.$
3. $y' = \frac{2x}{3y^2+1}.$
4. $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}.$
5. $y'' + 4y' + 4y = 5x - 3.$

ბ)

1. $\int\limits_2^3 (3x^2 - 5x + 2)\ln 2x dx.$
2. $y = \sqrt{25 - x^2}, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$
3. $y^2 + x^2y' = xyy'.$
4. $y' - ytgx = -y^2 \cos x.$
5. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 17\sin 2x.$

ბილეთი № 9

ა)

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}.$
2. $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 3x - \frac{1}{2}x^2.$
3. $2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2).$
4. $y' + 2y = e^{3x}.$
5. $y'' - 2y' = 3x^2 - 5x + 1.$

ბ)

1. $\int\limits_0^1 \arccos dx.$
2. $y = 2\sqrt{1+e^{\frac{x}{2}}}, \quad \ln 9 \le x \le \ln 64.$
3. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0.$
4. $xy' + y = y^2 \ln x.$
5. $y'' - 6y' + 10y = 2(\sin x + x\cos x)e^{3x}.$

ბილეთი № 10

ა)

1. $\int\limits_2^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$
2. $y = 4x - x^2, \quad y = 0.$
3. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy.$
4. $(2x+1)y' = 4x + 2y.$
5. $y'' - 5y' + 4y = 4x^3 + x + 1.$

ბ)

1. $\int\limits_2^5 (x^2 - 3x + 2)\ln 5x dx$
2. $\begin{cases} x = 5(\cos t + t\sin t) \\ y = 5(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$
3. $xy^2y' = x^3 + y^3.$
4. $y' - 3y = 2y^2e^x.$
5. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 17\sin 2x.$

ბილეთი № 11

ა)

1. $\int_0^3 x\sqrt{27+x^2}\,dx.$
2. $y = x^2 + 4x, \quad y = x + 4.$
3. $2x^2yy' + y^2 = 2.$
4. $y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$
5. $y'' - 2y' - 3y = 5x - 3.$

ბ)

1. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{xdx}{\cos^2 x}.$
2. $y = \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}.$
3. $(x^2 + y^2)y' = 2xy.$
4. $y' - yx^2 = 2xy^2.$
5. $y'' + 4y = \cos^2 x.$

ბილეთი № 12

ა)

1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{dx}{2+\cos x}.$
2. $y = 2x + x^2, \quad y = x.$
3. $xydx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$
4. $y' - ye^x = 2xe^x.$
5. $y'' + 4y' + 4y = 3x^2 - 5x + 2.$

ბ)

1. $\int_1^3 (x^2+2x)e^x\,dx.$
2. $y = \sqrt{4-x^2}, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{8}.$
3. $y' = \dfrac{x-y}{x+y}.$
4. $y' + 2xy = 2x^3y^3.$
5. $y'' - y = 2e^x - x^2.$

ბილეთი № 13

ა)

1. $\int_1^9 \dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}-1}\,dx.$
2. $y = x^2 + 2x, \quad y = x + 2.$
3. $y - xydx + (x+1)dy = 0.$
4. $y' - 4x^3y = 4(x^3+1)e^{-4x}.$
5. $y'' + 9y = 5x^2 - 3x + 2.$

ბ)

1. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx.$
2. $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}, \quad 1 \le x \le 3.$
3. $(x+3y)dx - xdy = 0.$
4. $xy' + 2y = 3y^2 \ln x.$
5. $y'' + 5y = 3(\sin 2x + \cos 2x).$

ბილეთი № 14

ა)

1. $\int_0^4 \dfrac{dx}{1+\sqrt{8x}}.$
2. $y = x^2 + 9, \quad y = x + 3.$
3. $xydx + (x+3)dy = 0.$
4. $y' - \dfrac{3y}{x} = 5x^3.$
5. $y'' - y' - 2y = (1-2x)$

ბ)

1. $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$
2. $y = \ln(x - \sqrt{x^2-1}, \quad 2 \le x \le 4.$
3. $xdy - ydx = ydy.$
4. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = -2y^2\mathrm{tg}\,x.$
5. $2y'' + 5y' = 100xe^{-x}\cos x.$

ბილეთი № 15

ა)

1. $\int\limits_1^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx.$
2. $y = x, \quad y = 2x, \quad x = 0, \quad x = 4.$
3. $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0.$
4. $y' + \frac{y}{x} = x.$
5. $y'' - 5y' + 6y = 6x + 1.$

ბ)

1. $\int\limits_1^3 x^2 \ln x dx.$
2. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$
3. $(x+2y)dx - xdy = 0.$
4. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}.$
5. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x}\cos x.$

საკონტროლო სამუშაო № 2

ეკონომიკური პროფილის სტუდენტებისათვის

განუსაზღვრელი ინტეგრალი, განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი გამოყენება

1. იპოვეთ ინტეგრალი ჩასმის ხერხით.
2. იპოვეთ ინტეგრალი რაციონალური წილადიდან.
3. იპოვეთ ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.
4. იპოვეთ მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.
5. იპოვეთ წირის რკალის სიგრძე.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Для специальностей экономического профиля

Неопределенный интеграл, определенный интеграл и его применения

1. Найти интеграл методом подстановки.
2. Найти интеграл от рациональной дроби.
3. Найти интеграл методов интегрирования по частям.
4. Найти площадь фигуры, ограниченной данным кривыми.
5. Найти длину дуги кривой.

ბილეთი № 1

ა)

1. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+2}$.
2. $\int \frac{dx}{(2x-1)(1-5x)}$.
3. $\int xe^{x}\,dx$.
4. $y = 2x + x^{2}$,
5. $y = e^{x}, \quad 0 \le x \le \frac{\ln 15}{2}$

ბ)

1. $\int \sqrt{4-x^{2}}\,dx$.
2. $\int \frac{2x-22}{(x-3)^{2}(3x-1)}\,dx$.
3. $\int_{0}^{\ln 2} xe^{2x}\,dx$.
4. $y = x^{2} + 4x$,
5. $y = \frac{x^{2}}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \le x \le e^{2}$.

ბილეთი № 2

ა)

1. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x + 1}}$.
2. $\int \frac{dx}{2x^{2} - 3x + 8}$.
3. $\int x^{4} \ln x\,dx$.
4. $y = 2x + x^{2}, \quad y = x$
5. $y = \frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^{3}}$, $-2 \le x < 1$.

ბ)

1. $\int \sqrt{3-x^{2}}\,dx$.
2. $\int \frac{7x+3}{(x+1)(x^{2}+3)}\,dx$.
3. $\int_{1}^{\sqrt{2}} x^{2} \ln x\,dx$
4. $y = (x+2)^{2}, \quad 2x + y - 4 = 0$, $y = 0$.
5. $x = 2\cos^{3} t, \quad y = 2\sin^{3} t$, $0 \le t \le \frac{\Pi}{2}$.

ბილეთი № 3

ა)

1. $\int \frac{dx}{\cos^{2} x \sqrt{tgx - 1}}$.
2. $\int \frac{dx}{(3x+4)(5x+1)}$.
3. $\int x \cos(3x-1)\,dx$.
4. $y = 2x - x^{2}, \quad y = 0$.
5. $z = 4\cos\varphi$.

ბ)

1. $\int \sqrt{x^{2} - 2}\,dx$.
2. $\int \frac{x+1}{(x-2)^{2}(2x-3)}\,dx$.
3. $\int_{0}^{\frac{\Pi}{18}} x \cos 9x\,dx$.
4. $y = \sqrt{-x}, \quad y = x + 2, \quad y = 0$.
5. $y = \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\Pi}{6}$.

ბილეთი № 4

ა)

1. $\int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.
2. $\int \frac{dx}{2x^{2} + 5x + 2}$.
3. $\int x \cos 3x\,dx$;
4. $y = 2^{x}, \quad y = 0$, $x = 0, \quad x = 4$.
5. $9y^{2} = 4(1-x)^{3}, \quad 0 \le x \le 1$.

ბ)

1. $\int \sqrt{9 - x^{2}}\,dx$.
2. $\int \frac{x+11}{(x+1)(x^{2}-5x+4)}\,dx$.
3. $\int_{0}^{\ln 27} xe^{\frac{x}{3}}\,dx$.
4. $y = \sqrt{x}, \quad x + y = 6, \quad y = 0$.
5. $x = 5(t - \sin t)$, $y = 5(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\Pi$.

ბილეთი № 5

ა)

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

2. $\int \frac{dx}{(7x-1)(4-5x)}$.

3. $\int x^4 \ln x dx$.

4. $y = 6 + 5x - x^2$, $y = 0$.

5. $y = e^x$, $0 \le x \le \frac{\ln 24}{2}$

ბ)

1. $\int \frac{dx}{3\cos x + 2}$.

2. $\int \frac{x+9}{(2x-3)(x^2+3)} dx$.

3. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$.

4. $y = (x+1)^2$, $3y + x = 3$, $y = 0$.

5. $r = 4(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \Pi$.

ბილეთი № 6

ა)

1. $\int \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx$.

2. $\int \frac{dx}{3x^2-10x+3}$.

3. $\int x2^{4x}dx$.

4. $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

5. $y = 2\sqrt{x^3}$, $0 \le x \le 2$.

ბ)

1. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. $\int \frac{3x+5}{(4x+1)(x^2+1)}dx$

3. $\int_0^{\frac{\Pi}{4}} e^{3x}\sin 4x dx$.

4. $x^2 + y^2 = 8$, $y = -\sqrt{2}x$, $y = 0$.

5. $y = \ln\sin x$, $\frac{\Pi}{4} \le x \le \frac{\Pi}{2}$.

ბილეთი № 7

ა)

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$.

2. $\int \frac{dx}{4x^2+x-15}$.

3. $\int x^7 \ln x dx$.

4. $y = x^2 - 2x$, $y = x + 1$

5. $r = 2\sin\varphi$.

ბ)

1. $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$.

2. $\int \frac{1-2x}{(2x+5)^2(x+4)}dx$

3. $\int_0^1 x \, arctg x dx$.

4. $x^2 + y^2 = 5$, $2x - 3y + 4 = 0$, $y = 0$.

5. $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$, $\sqrt{2} \le x \le \sqrt{5}$.

ბილეთი № 8

ა)

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}}dx$.

2. $\int \frac{dx}{(10x-1)(4-5x)}$.

3. $\int x\cos 4x dx$.

4. $y = \frac{x^2}{4}$, $y = 3x - \frac{x^2}{2}$.

5. $9y^2 = x^3$, $0 \le x \le 4$.

ბ)

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

2. $\int \frac{3x+7}{(x-2)(x^2+5)}dx$.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x dx$.

4. $2x - 3y + 6 = 0$, $x + y = 2$, $y = 0$.

5. $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

ბილეთი № 9

ა)

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.
2. $\int \frac{dx}{2x^2-5x+2}$.
3. $\int x\sin(4-3x)dx$.
4. $y=x$, $y=2x$, $x=0$, $x=4$.
5. $y=e^x$, $0<x\le\ln 7$.

ბ)

1. $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$.
2. $\int \frac{3x+5}{(4x+1)(x^2+1)}dx$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos 3x dx$.
4. $y=(x-2)^2$, $x-y+4=0$, $y=0$.
5. $y=\ln(x^2-1), 2\le x\le 5$.

ბილეთი № 10

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.
2. $\int \frac{dx}{x^2-5x+17}$.
3. $\int x^4\ln x dx$.
4. $y=3x-x^2$, $y=x$.
5. $r=1-\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

1. $\int\sqrt{16-x^2}dx$.
2. $\int \frac{x+1}{(x-2)^2(2x-3)}dx$.
3. $\int_0^{\ln 3} xe^{2x}dx$.
4. $2x-y+2=0$, $2x-5y=10$, $y=0$.
5. $y=\frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5}$, $0\le x\le 9$.

ბილეთი № 11

1. $\int \frac{dX}{1+\sqrt{x+1}}$.
2. $\int \frac{dx}{(1-3x)(5x+8)}$.
3. $\int x\sin x dx$.
4. $y=x^2+2x$, $y=x+2$.
5. $y=e^x$.

1. $\int\sqrt{16-x^2}dx$.
2. $\int \frac{x+1}{(x-2)^2(2x-3)}dx$.
3. $\int_0^{\ln 3} xe^{2x}dx$.
4. $2x-y+2$, $2x+5y=10$, $y=0$.
5. $y=\frac{4x^{5/4}}{5}$, $0\le x\le 9$.

ბილეთი № 12

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-9}}$.
2. $\int \frac{dx}{3x^2+7x+20}$.
3. $\int x3^{2x}dx$.
4. $y=x^2+9x$, $y=x+3$.
5. $r=1-\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\Pi$.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$.
2. $\int \frac{3x-9}{(x-1)(x^2+5)}dx$.
3. $\int_0^{\frac{\Pi}{8}} x\cos 4x dx$.
4. $y=-2\sqrt{x}$, $x+y=3$, $y=0$.
5. $\sqrt{9-x^2}$, $0\le x\le\frac{\Pi}{2}$.

საგამოცდო ბილეთის ნიმუშები

ბილეთი № 1

1. იპოვეთ ზღვარი

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{x}$$

2. იპოვეთ ფუნქციის ექსტრემუმი

$$z=x^2+y^2-3xy-27.$$

3. იპოვეთ განსაზღვრული ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების წესით.

$$\int xe^{-2x}dx.$$

4. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი რაციონალური ფუნქციიდან

$$\int \frac{dx}{x(1+x)^2}$$

5. გამოთვალეთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით

$$y=1-e^x, \quad x=2, \quad y=0.$$

6. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2$ და $y=\sqrt{x}$ წირებით ბრუნავს Ox

ღერძის გარშემო. გამოთვალეთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

7. ამოხსენით წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

8. ამოხსენით წრფივი, მუდმივკოეფიციენტებიანი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

$$y'' - 4y' + 4y = x^2 \sin x.$$

ბილეთი № 2

ეკონომიკური პროფილის სტუდენტებისათვის

1. იპოვეთ და გამოსახეთ სიბრტყეზე ფუნქციის განსაზღვრის არე

$$z=\sqrt{3-y^2}-\ln\left(y+x^2-4\right)$$

2. იპოვეთ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი

$$z=x^2-2x+3y^2-y^3.$$

3. იპოვეთ ფუნქციის გლობალური ექსტრემუმი

$$z=x^2+y^2-2x-4y, \; x^2+y^2<0$$

4. $2y+x\le 12, \; 2x+y\le 12, \; x\ge 0, \; y\ge 0;$

$$z = 3x + y \to \max.$$

5. იპოვეთ ინტეგრალები:

$$1. \int \frac{x+9}{(2x-3)(x^2+3)}dx, \qquad 2. \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

6. გამოთვალეთ ინტეგრალები

$$1.\ \int_0^{\ln 5}(4x-3)e^{2x}dx, \qquad 2.\ \int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{5-x^2}}.$$

7. გამოთვალეთ ბრტყელი ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წრფეებით.

$3x+4y-12=0,\quad 5x-y+3=0,\quad y=0.$

ძირითადი ფორმულები

ორი ცვლადის ფუნქციები

$z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები x-ით და y-ით

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

თუ $z=f(x,y)$ რთული ფუნქციისათვის:

1) $x=\varphi(u,v)$, $y=g(u,v)$, მაშინ

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

2) $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

3) $y=y(x)$, , მაშინ ფუნქციის I და II რიგის დიფერენციალები, n-ური რიგის დიფერენციალი

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

$$d^2z=d(dz)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

ტეილორის ფორმულა $z=f(x,y)$ ფუნქციისათვის

$$\Delta f=df(x_0,y_0)+\frac{d^2f(x_0,y_0)}{2!}+\dots+\frac{d^nf(x_0,y_0)}{n!}+\frac{d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)}{(n+1)!},\qquad 0<\theta<1.$$

განუსაზღვრელი და განსაზღვრული ინტეგრალები.

1. $\int dx=x+c.$ 2. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c(\alpha\neq-1).$

3. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c.$ 4. $\int a^xdx=\frac{a^x}{\ln a}+c.$

5. $\int e^xdx=e^x+c.$ 6. $\int\sin xdx=-\cos x+c.$

7. $\int\cos xdx=\sin x+c.$ 8. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+c.$

$$9.\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c. \quad 10.\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$$

$$11.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c. \quad 12.\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{x}{a} + c.$$

$$13.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c.$$

ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b, \qquad \text{სადაც } F'(x) = f(x).$$

ცვლადთა გარდაქმნა განუსაზღვრელ და განსაზღვრულ ინტეგრალში.

$$\int f(x)dx = \left|\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix}\right| = \int f(f\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \qquad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი

1. $s = \int_a^b f(x)dx$, როცა $0 < y \leq f(x), \quad a \leq x \leq b.$

2. $s = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$ როცა $f_1(x) \leq y \leq f_2(x), \quad a \leq x \leq b.$

3. $s = \int_\alpha^\beta g(t)\varphi'(t)dt$, როცა $x = \varphi(t), \quad y = g(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$

მრუდწირული სექტორის ფართობი

$$s = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)dx, \qquad r = r(\varphi), \qquad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

წირის რკალის სიგრძე

1. $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx, \quad L: y = f(x), \quad a \leq x \leq b.$

2. $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + g'^2(t)}dt, \quad L: x = \varphi(t), \quad y = g(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$

3. $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi, \quad L: r = r(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta.$

იმ სხეულის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიღებულია $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$ მრუდწირული ტრაპეციის ბრუნვით ox ღერძის გარშემო.

$$v_x = \Pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

$$s = 2\Pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

დიფერენციალური განტოლებები

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

ა) განცალებადცვლადებიანი განტოლება

$$y' = f_1(x)f_2(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c$$

ბ) ერთგვაროვანი განტოლება $y' = f(\frac{y}{x})$

$y = tx, \quad dy = tdx + xdt$ ჩასმით მიიყვანება განცალებადცვლადებიან განტოლებაზე

$$t' = \frac{f(t) - t}{x}.$$

გ) წრფივი განტოლება $y' + p(x)y = Q(x)$.

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

დ) განტოლება სრულ დიფერენციალებში

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = o$, თუ $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, მაშინ განტოლების ამონახსნია $u(x,y) = c$, სადაც $u(x,y)$ ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

1. განტოლებები, რომელთა რიგის დაწევა შესაძლებელია

ა) $y^{(n)}=f(x)$ სახის განტოლება ამოიხსნება n-ჯერადი ინტეგრებით.

ბ) $F(x,y',y'')=0$ სახის განტოლება $y'=z(x)$ ჩასმით დაიყვანება პირველი რიგის განტოლებაზე:

$$F(x, z, z')=0$$

გ) $F(y, y', y'')=0$ სახის განტოლება $p(y)=y'$, $pp'=y''$ ჩასმით დაიყვანება პირველი რიგის განტოლებაზე

$$F(y,p,p')=0$$

2. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება

$$y''+py'+qy=0, \quad p,q\in R$$

№	მახასიათებელი განტოლების ფესვები	ზოგადი ამონახსნი
1	$K_1 \neq K_2$, $(D>0)$	$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$
2	$K_1 = K_2$, $(D=0)$	$y=e^{kx}(C_1+C_2x)$
3	$K=\alpha\pm i\beta$ $(D<0)$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

3. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

№	დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარე f(x)	მახასიათებელი განტოლების ფესვები	კერძო ამონახსნის სახე
1	$P_n(x)$	რიცხვი 0 არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი	$R_n(x)$
		რიცხვი 0 არის მახასიათებელი განტოლების k ჯერადი ფესვი	$x^k R_n(x)$
2	$P_0 e^{\alpha x}$	რიცხვი α არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი	$Be^{\alpha x}$
		რიცხვი α არის მახასიათებელი განტოლების k ჯერადი ფესვი	$Bx^k e^{\alpha x}$
3	$e^{\alpha x}P_n(x)$	რიცხვი α არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი	$e^{\alpha x}R_n(x)$
		რიცხვი α არის მახასიათებელი განტოლების k ჯერადი ფესვი	$x^k e^{\alpha x}R_n(x)$
4	$P_n(x)\cos\beta x$ ან $P_n(x)\sin\beta x$	$\pm i\beta$ რიცხვები არ არიან მახასიათებელი განტოლების ფესვები	$R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x$
		$\pm i\beta$ რიცხვები არიან მახასიათებელი განტოლების k ჯერადი ფესვები	$x^k Rn(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x]$
5	$e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$ ან $e^{\alpha x}P_n(x)\sin\beta x$	$\alpha \pm i\beta$ რიცხვები არ არიან მახასიათებელი განტოლების ფესვები	$e^{\alpha x}[R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x]$
		$\alpha \pm i\beta$ რიცხვები არიან მახასიათებელი განტოლების k ჯერადი ფესვები	$x^k e^{\alpha x}[R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x]$
6	$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$	$\alpha \pm i\beta$ რიცხვები არ არიან მახასიათებელი განტოლების ფესვები	$e^{\alpha x}[R_\mu(x)\cos\beta x + S_\mu(x)\sin\beta x]$ $\mu=\max(n,m)$
		$\alpha \pm i\beta$ რიცხვები არიან მახასიათებელი განტოლების k ჯერადი ფესვები	$x^k e^{\alpha x}[R_\mu(x)\cos\beta x + S_\mu(x)\sin\beta x]$ $\mu=\max(n,m)$

შენიშვნა. $P_n(x)$ და $Q_m(x)$ შესაბამისად n და m ხარისხების მოცემული მრავალწევრებია. $R_n(x)$ და $S_n(x)$ n ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრებია.

სარჩევი

წინამდებარე კრებული განკუთვნილია სტუ-ს საინჟინრო და ეკონომიკური სპეციალობების და საავიაციო ინსტიტუტის სამხედრო-საავიაციო ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. იგი შედგენილია უმაღლესი მათემატიკის მოქმედი პროგრამის მიხედვით და მოიცავს შემდეგ საკითხებს: ორი ცვლადი ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა, ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალური აღრიცხვა, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები. კრებულში შეტანილია ამოცანები, რომლებიც შეიცავენ მათემატიკური მოდელირების ელემენტებს.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე სხვა უმაღლესი სასწავლებლების სტუდენტებსაც.

რეცენზენტები: 1. საქ. მეცნიერებათა აკადემიის ა.რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის წამყვანი მეცნ. თანამშრომელი, პროფესორი ვ.მამაცაშვილი

2. საქ. ტექნიკური უნივერსიტეტის უმაღლესი მათემატიკის №3 კათედრის დოცენტი ი. ბეჟუაშვილი

კრებულის აწყობასთან დაკავშირებული შრომატევადი სამუშაოებისათვის ავტორები მადლობას უხდიან სტუ-ს საავიაციო ინსტიტუტის კომპიუტერული ცენტრის თანამშრომლებს დ. ბულბულაშვილს, ე. ბარბაქაძეს, მ. კაკილაშვილს, ნ. ჯავახიძეს, და "აბსოლუტ ბანკის" თანამშრომელს ნ. დავითაძეს.