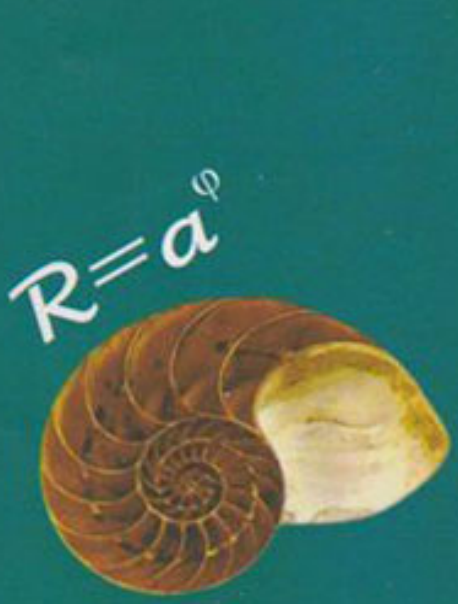
უმაღლესი განათლება

ციალა ძიძიგური

მათემატიკა საბუნებისმეტყველო სპეციალობებისთვის



თბილისი
2006

ციალა ძიძიგური

მათემატიკა

საბუნებისმეტყველო სპეციალობებისათვის

სახელმძღვანელო

თბილისი
2006

ციალა ძიძიგური

მათემატიკა

საბუნებისმეტყველო სპეციალობებისათვის

სახელმძღვანელო

"ინოვაცია"
თბილისი
2006

უაკ (UDC) 51(075.8)
ძ 631

სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი სასწავლებლების საბუნებისმეტყველო სპეციალობების სტუდენტებისათვის.

სახელმძღვანელო შეიცავს ანალიზური გეომეტრიისა და მათემატიკური ანალიზის საფუძვლებს. ყველა ძირითადი ცნება ილუსტრირებულია მაგალითებით, განხილულია მათემატიკური მოდელები საბუნებისმეტყველო დისციპლინებიდან და მოცემულია სავარჯიშოები ყველა განხილული საკითხისათვის.

რედაქტორი – ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
ჰამლეტ მელაძე

რეცენზენტები – ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალის პროფესორი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
თემურ ჩილაჩავა

- ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის უფროსი მეცნიერ თანამშრომელი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი
ხიმური რუხაია

© ციალა ძიძიგური. მათემატიკა საბუნებისმეტყველო სპეციალობებისათვის. გვ.312. თბილისი. 2006.
© საგამომცემლო სახლი "ინოვაცია"
ISBN 99940-58-59-2

სარჩევი

გვ.

შესავალი 7

პირველი ნაწილი 9

თავი 1. ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები 9

§1.1. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე 9

§1.2. პოლარული კოორდინატები 13

§1.3. წრფე 14

§1.4. მეორე რიგის მრუდები 23

§1.5. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში 29

§1.6. ცილინდრული და სფერული კოორდინატები 31

§1.7. ანალიზური გეომეტრიის ელემენტების გამოყენება ბუნებისმეტყველებაში 32

სავარჯიშოები 39

თავი 2. წრფივი და ვექტორული ალგებრის ელემენტები 50

§2.1. მატრიცები და მოქმედებები მათზე 50

§2.2. დეტერმინანტები 54

§2.3. წრფივ განტოლებათა სისტემები 58

§2.4. ვექტორის ცნება და წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე 67

§2.5. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი 73

§2.6. ვექტორული ნამრავლი 75

§2.7. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი 79

§2.8. წრფივი და ვექტორული ალგებრის ელემენტების გამოყენება ბუნებისმეტყველებაში 81

სავარჯიშოები 87

თავი 3. ანალიზური გეომეტრია სივრცეში 99

§3.1. სიბრტყე 99

§3.2. წრფე სივრცეში 102

§3.3. ძირითადი ამოცანები სიბრტყესა და წრფეზე სივრცეში 107
§3.4. მეორე რიგის ზედაპირების კანონიკური განტოლებები 108
სავარჯიშოები 110

მეორე ნაწილი

თავი 4. ფუნქციები, ზღვრები, უწყვეტობა 113
§4.1. ფუნქციის განსაზღვრა და მათი კლასიფიკაციები . . . 113
§4.2. ელემენტარულ ფუნქციათა თვისებები და მათი გრაფიკები 116
§4.3. ფუნქციის ზღვარი 120
§4.4. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები 123
§4.5. ძირითადი თეორემები ზღვართა შესახებ და მათი გამოყენება 125
§4.6. ფუნქციის უწყვეტობა 131
§4.7. ფუნქციებისა და ზღვრების ზოგიერთი გამოყენების შესახებ ბუნებისმეტყველებაში 134
სავარჯიშოები 146

თავი 5. დიფერენციალური აღრიცხვა 152
§5.1. წარმოებულის ცნება და მისი გეომეტრიული შინაარსი 152
§5.2. გაწარმოების წესები და ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულები 157
§5.3. ფუნქციის დიფერენციალი 162
§5.4. მაღალი რიგის წარმოებულები და დიფერენციალები . 165
§5.5. ფუნქციის მოცემა პარამეტრული სახით და მისი დიფერენცირება 167
§5.6. დიფერენცირებად ფუნქციათა თვისებები 167
§5.7. ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა. მაქსიმუმი და მინიმუმი. ასიმპტოტები 171
§5.8. ფუნქციის გრაფიკის აგება 177
§5.9. ტეილორის ფორმულა 180

§5.10. წარმოებულის როლის შესახებ ბუნებისმეტყველებაში 182
სავარჯიშოები 186

თავი 6. მრავალი ცვლადის ფუნქციები 198
§6.1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრა და ძირითადი თვისებები 198
§6.2. კერძო წარმოებულები. სრული დიფერენციალი 201
§6.3. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი 205
§6.4. მათემატიკური აზროვნების განვითარების შესახებ . . 207
სავარჯიშოები 213

თავი 7. კომპლექსური რიცხვები 218
§7.1. კომპლექსური რიცხვების განსაზღვრა და ძირითადი ოპერაციები მათზე 218
§7.2. კომპლექსური რიცხვების გეომეტრიული გამოსახვა სიბრტყეზე 219
§7.3. ტრიგონომეტრიული სახით წარმოდგენილი ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლი და ფარდობა . . . 220
§7.4. კომპლექსური რიცხვის ახარისხება. ფესვის ამოღება კომპლექსური რიცხვიდან 221
სავარჯიშოები 223

თავი 8. ინტეგრალური აღრიცხვა 224
§8.1. პირველყოფილი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი 224
§8.2. ინტეგრების ძირითადი მეთოდები 227
§8.3. წილად-რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება 231
§8.4. ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული გამოსახულების ინტეგრება 233
§8.5. განსაზღვრული ინტეგრალი 234
§8.6. განსაზღვრული ინტეგრალის ძირითადი თვისებები . . 236
§8.7. არასაკუთრივი ინტეგრალები და მათი კრებადობა . . 240
§8.8. განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გამოყენების შესახებ 242
სავარჯიშოები 249

თავი 9. დიფერენციალური განტოლებები 255
§9.1. ამოცანები, რომლებიც დაიყვანება დიფერენციალურ განტოლებებამდე 255
§9.2. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები. ზოგადი ამონახსნი. საწყისი პირობები 257
§9.3. განტოლებანი განცალებადი ცვლადებით 258
§9.4. ერთგვაროვანი განტოლებები 261
§9.5. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები 262
§9.6. დიფერენციალური განტოლებების გამოყენება ბუნებისმეტყველებაში 263
§9.7. დიფერენციალური განტოლებები ქიმიურ რეაქციებში 272
§9.8. ბიოლოგიური პროცესების მათემატიკური მოდელები 277
სავარჯიშოები 298

ელემენტარული მათემატიკის ზოგიერთი ფორმულა 302

ლიტერატურა 307

vuZRvni Cemi meuRlis,
რევაზ აბსავას,
naTel xsovnas

შესავალი

მათემატიკა - ბერძნული წარმოშობის სიტყვაა. ის, რასაც ბერძნებმა უწოდეს **mathema**- შემეცნება, მეცნიერება, ცნობილი იყო, დიდი ხნით ადრე. ბერძნებმა პირველებმა შეძლეს და შესაბამისად შეაფასეს ეს ცოდნა, მისცეს მას სისტემური ხასიათი და ჩართეს ფილოსოფიის საწყის ცნებაში - ცნება "ყოფა", რის საშუალებითაც ისინი გამოხატავდნენ სამყაროს ერთიანობის იდეას. მათემატიკა, ასტრონომიასთან, მედიცინასთან, ბიოლოგიასთან, ქიმიასთან, არქიტექტურასთან და სხვა მეცნიერებებთან ერთად დგას თანამედროვე მეცნიერების საწყისებთან.

უძველესი დროიდან დაწყებული, მათემატიკას გამოიყენებდნენ ადამიანთა სოციალურ პრაქტიკაში, მაგალითად, მშენებლობაში, სამხედრო საქმეში.

ინფორმატიკასთან და თანამედროვე კომპიუტერებთან შეთავსებით მათემატიკა ხდება საგანთშორისი მაკავშირებელი, რომელიც ორ ძირითად ფუნქციას ასრულებს: პირველი, გვაძლევს საშუალებას განვსაზღვროთ ადამიანთა მოქმედების მიზნები და მათი მიღწევების პირობები; მეორე, გავაანალიზოთ შესაძლო სიტუაციათა ფართო სპექტრი და მათემატიკური მოდელების გამოყენებით დავსახოთ მათი ოპტიმალური გადაწყვეტა.

საბუნებისმეტყველო დისციპლინათა მათემატიზირება ორიენტირებულია არა მარტო მათემატიკური აზროვნების სწავლებისკენ, არამედ, მათემატიკის გამოყენებით ბუნებისმეტყველების ყველაზე პროფესიული აზროვნების განვითარებისაკენ. ამასთან დაკავშირებით საბუნებისმეტყველო სპეციალობებზე მათემატიკის სწავლების პრიორიტეტულ ამოცანად მიიჩნევა არა მათემატიკის საფუძვლების სწავლება, არამედ, ზოგადინტელექტუალური განვითარება - მათემატიკის სწავლების პროცესში მოხდეს სტუდენტების აზროვნების ისეთი ფორმირება, რომელიც აუცილებელია თანამედროვე საზოგადოებაში ადამიანის სრულყოფილი ფუნქციონირებისათვის. წინამდებარე სახელ-

მძღვანელოში ასახულია ბაკალავრების მომზადების თავისებურებები ბუნებისმეტყველებისათვის ("ბიოლოგია", "ქიმია", "ბიოსამედიცინო, ეკოლოგიური გენეტიკა", "გეოგრაფია").

სახელმძღვანელო შედგება ორი ნაწილისაგან. პირველ ნაწილში განხილულია ანალიზური გეომეტრიის, წრფივი და ვექტორული ალგებრის ელემენტები. მეორე ნაწილი მიძღვნილია დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტებისათვის.

ორივე ნაწილში წარმოდგენილი თავები დაყოფილია პარაგრაფებად. ყოველ პარაგრაფში გადმოცემული ახალი მასალა ილუსტრირებულია დიდი რაოდენობის გამოყვანილი მაგალითებითა და ამოცანებით. როგორც წესი, ყოველ თავში, არის თითო პარაგრაფი, რომლის დანიშნულებაა სტუდენტების დაინტერესება. ნაჩვენებია განხილული საკითხების გამოყენება ბუნებისმეტყველების ამოცანების მაგალითზე და მათემატიკის განვითარების მოკლე ისტორიული ასპექტები. ყოველი თავის შემდეგ დამოუკიდებელი მუშაობისათვის მოცემულია სავარჯიშოები.

"ადამიანებს, რომლებმაც აითვისეს მათემატიკის პრინციპები,
აქვთ ერთით მეტი გრძნობის ორგანო,
ვიდრე ჩვეულებრივ მოკვდავთ."

რ.დარვინი

პირველი ნაწილი

თავი I. ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები

§1.1. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე

1. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები.

განსაზღვრა 1.1. საერთო **O** სათავის მქონე **Ox** და **Oy** ურთიერთმართობულ კოორდინატთა ღერძებს არჩეული მასშტაბის ერთეულით, სიბრტყეზე *დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა* ეწოდება (რენე დეკარტი (1596-1650) იყო ფრანგი მათემატიკოსი, ანალიზური გეომეტრიის ფუძემდებელი). სიბრტყის ყოველ **M** წერტილს შეესაბამება **x** და **y** ნამდვილ რიცხვთა წყვილი და, პირიქით, ყოველ **x** და **y** ნამდვილ რიცხვთა წყვილს შეესაბამება სიბრტყის ერთი წერტილი. **x** - *აბსცისა* და **y** - *ორდინატი* **M**-ის *კოორდინატებია*, **M(x;y)**.

Ox და **Oy** ღერძები სიბრტყეს ყოფენ 4 მეოთხედად (კვადრანტად). კოორდინატთა ნიშნები მეოთხედების მიხედვით მოცემულია ცხრილში:

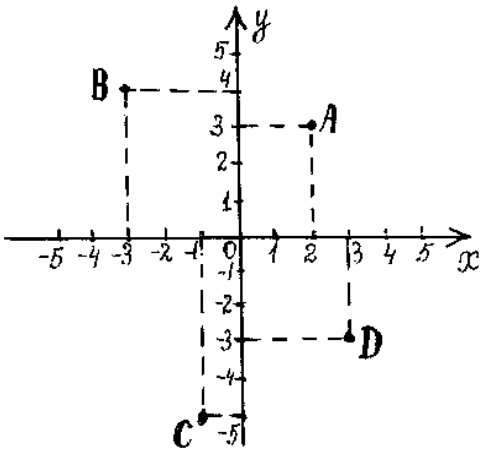
	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

მაგალითი 1. ავაგოთ წერტილები: **A(2;3)**, **B(-3;4)**, **C(-1;-5)**, **D(3;-3)** (ნახ.1.1).

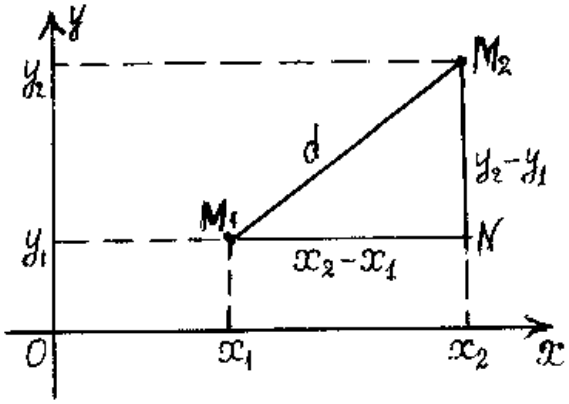
2. მანძილი ორ წერტილს შორის.

$M_1(x_1;y_1)$ და $M_2(x_2;y_2)$ წერტილებს შორის მანძილი **d** გამოითვლება ფორმულით (ნახ.1.2)

$$M_1M_2 = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (1.1)$$



ნახ.1.1



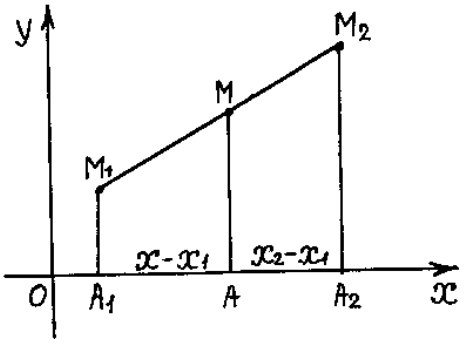
ნახ.1.2

მაგალითი 2. ვიპოვოთ მანძილი A(-1;-3) და B(-4;+1) წერტილებს შორის.

ამოხსნა: $AB = \sqrt{(-4-(-1))^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

პასუხი: [AB=5].

3. მონაკვეთის დაყოფა მოცემული შეფარდებით.



ნახ. 1.3,ა

მოცემულია $M_1(x_1;y_1)$ და $M_2(x_2;y_2)$ წერტილები. $M(x;y)$ წერტილის კოორდინატები, რომელიც M_1M_2 მონაკვეთს ყოფს $M_1M:MM_2=\lambda$-ს ტოლი შეფარდებით, გამოითვლება ფორმულებით (ნახ.1.3,ა):

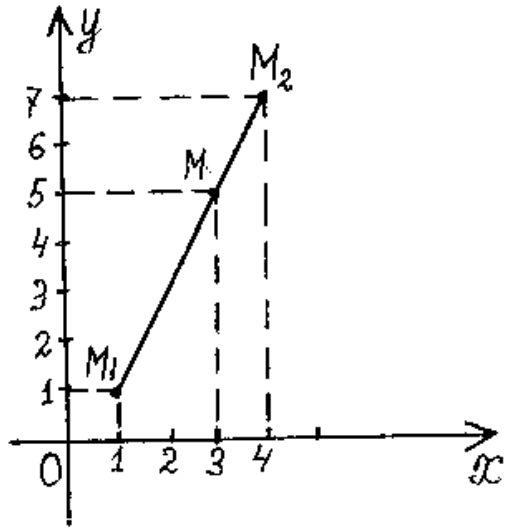
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\quad \lambda \neq -1. \qquad (1.2)$$

როცა $\lambda=1$ (1.2)-დან ვღებულობთ M_1M_2 მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატებს:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (1.3)$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $M(x;y)$-ის კოორდინატები, რომლებიც M_1M_2 მონაკვეთს ყოფს შეფარდებით $\frac{M_1M}{MM_2}=2$, თუ $M_1(1;1)$ და $M_2(4;7)$.

ამოხსნა: (1.2) ფორმულების ძალით გვაქვს (ნახ. 1.3,ბ):



ნახ.1.3,ბ

$$x=\frac{1+2\cdot 4}{1+2}=3;$$
$$y=\frac{1+2\cdot 7}{1+2}=5.$$

პასუხი: [M(3;5)].

4. ოქროს კვეთა.

განსაზღვრა 1.2. თუ მონაკვეთი დაყოფილია ორ ნაწილად ისე, რომ უდიდესი ნაწილის შეფარდება მთელ მონაკვეთთან ტოლია უმცირესი ნაწილის უდიდესთან შეფარდების, *ოქროს კვეთა* ეწოდება.

ნახ.1.4

ე.ი. $\frac{CB}{AC}=\frac{AC}{AB}$ პროპორციას *ოქროს კვეთა, ან, ღვთიური პროპორცია* ეწოდება. თუ $AB=1$ და $AC=x$, $CB=1-x$, მაშინ პროპორცია მიიღებს სახეს:

$$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1},$$

საიდანაც $x^2+x-1=0$.

ამ განტოლების დადებითი ფესვია

$$x_+=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0{,}618339...\approx 0{,}62.$$

შეფარდება $\frac{AB}{AC}$ კი ტოლია: $\frac{1}{x_+}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618.$

მაგალითი 4. MN მონაკვეთს D(x;y) კვეთს ოქროს კვეთით. ვიპოვოთ D-ს კოორდინატები, თუ M(-2;1), N(4;7).

ამოხსნა: პირობის თანახმად, $\lambda\approx 0{,}6$. გამოვიყენოთ (1.2) ფორმულები:

$$x=\frac{-2+0{,}6\cdot 4}{1+0{,}6}=0{,}25;\quad y=\frac{1+0{,}6\cdot 7}{1+0{,}6}=3{,}25.$$

პასუხი: [D(0,25; 3,25).]

5. მასათა სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

თუ $m_1, m_2,...,m_n$ მასები მოთავსებულია წერტილებში $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2),...,N(x_n;y_n)$, მაშინ, ამ მასათა სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია:

$$\begin{cases} x=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2+...+m_nx_n}{m_1+m_2+...+m_n}, \\ y=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2+...+m_ny_n}{m_1+m_2+...+m_n}. \end{cases} \qquad (1.4)$$

შენიშვნა: სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს მედიანების გადაკვეთის წერტილში.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ ABC სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები თუ A(1;-1) B(6;4) და C(2;6).

ამოხსნა: ვიყენებთ (1.4) ფორმულებს, როცა $m_1=m_2=...=m_n$, მაშინ (1.4) ღებულობს სახეს:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2+...+y_n}{n}. \end{cases} \qquad (1.5)$$

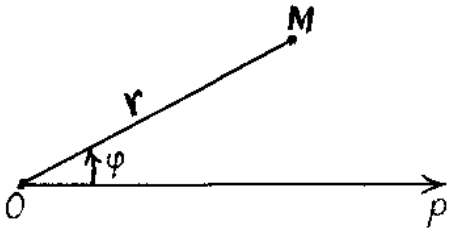
ამიტომ $x=\frac{1+6+2}{3}=3;\ \ y=\frac{-1+4+6}{3}=3.$

პასუხი: [D(3;3).]

§1.2. პოლარული კოორდინატები

1. პოლარული კოორდინატების განსაზღვრა.

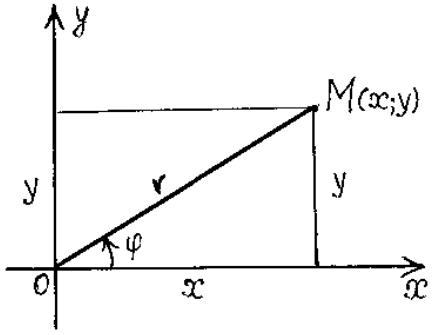
O - პოლუსისა და **Op** - პოლარული ღერძის მიმართ, რომელზედაც არჩეულია ერთეულოვანი მასშტაბი, სიბრტყის ნებისმიერი **M** წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება **r** *პოლარული რადიუსით*, რომელიც ტოლია **O** პოლუსიდან **M**-მდე მანძილის და *პოლარული კუთხით* φ, რომელიც ტოლია **Op** სხივისა და **OM** წრფეს შორის კუთხის - $\pi<\varphi\le\pi$. **M(r,φ)** ნიშნავს, რომ **M**-ის პოლარული კოორდინატებია **r** და φ (ნახ.1.5).



ნახ.1.5

2. კავშირი მართკუთხა და პოლარულ კოორდინატებს შორის.

M(x;y) (**M(r;φ)**) წერტილის მართკუთხა და პოლარულ კოორდინატებს შორის შემდეგი დამოკიდებულებაა (ნახ.1.6):



ნახ.1.6

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad (1.6)$$

და

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \qquad (1.7)$$

3. მანძილი ორ წერტილს შორის პოლარულ კოორდინატებში.

თუ მოცემულია $A(r_1;\varphi_1)$ და $B(r_2;\varphi_2)$ წერტილები, მაშინ

$$AB = d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \qquad (1.8)$$

მაგალითი 1. მოცემულია **A(1;1)**, ე.ი. **x=1, y=1**. ვიპოვოთ **A**-ს პოლარული კოორდინატები.

ამოხსნა. (1.7) ფორმულებით $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{1} = 1$.

$\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ და $\varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$. ვარჩევთ $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, რადგანაც **A** მდებარეობს I

მეოთხედში. ე.ი. A-ს პოლარული კოორდინატებია: $A(\sqrt{2};\frac{\pi}{4})$.

პასუხი: [$A(\sqrt{2};\frac{\pi}{4})$.]

მაგალითი 2. B-ს პოლარული კოორდინატებია r=2, $\varphi=\frac{\pi}{2}$. ვიპოვოთ მართკუთხა კოორდინატები.

ამოხსნა. (1.6) ფორმულით ვპოულობთ:

$$x=2\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad y=2\sin\frac{\pi}{2}=2.$$

პასუხი: [B(0;2).]

მაგალითი 3. ვიპოვოთ მანძილი $M(3;\frac{\pi}{4})$ და $N(4;\frac{3\pi}{4})$ წერტილებს შორის.

ამოხსნა. (1.8) ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$d=\sqrt{3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})}=\sqrt{25-24\cos\frac{\pi}{2}}=5.$$

პასუხი: [5.]

§1.3. წრფე

განსაზღვრა 1.3. სიბრტყეზე წირის განტოლება მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ეწოდება

$$f(x,y)=0 \qquad (1.9)$$

განტოლებას.

x და y ცვლადებს "*მიმდინარე წერტილის*" კოორდინატები ეწოდებათ.

სიბრტყეზე განვიხილავთ წრფის შემდეგი სახის განტოლებებს:

I. წრფის ზოგადი განტოლება. x და y ცვლადების მიმართ პირველი რიგის ყოველი განტოლება, ე.ი.

$$Ax+By+C=0 \qquad (1.10)$$

(სადაც A, B, C - მუდმივი კოეფიციენტებია და $A^2+B^2\neq0$) სახის განტოლება, სიბრტყეზე წრფეს განსაზღვრავს.

ამ განტოლებას *წრფის ზოგადი განტოლება* ეწოდება.

კერძო შემთხვევები:

1. **C=0; A≠0; B≠0.** წრფე, რომელიც განსაზღვრულია განტოლებით **Ax+By=0** გადის კოორდინატთა სათავეზე;

2. **A=0; B≠0; C≠0.** წრფე, რომელიც განსაზღვრულია განტოლებით **By+C=0**, პარალელურია **Ox** ღერძის;

3. **B=0; A≠0; C≠0.** წრფე, რომელიც განსაზღვრულია განტოლებით **Ax+C=0**, პარალელურია **Oy** ღერძის;

4. **B=C=0, A≠0.** წრფე, რომელიც განსაზღვრულია განტოლებით **Ax=0**, ემთხვევა **Oy** ღერძს;

5. **A=C=0, B≠0.** წრფე, რომელიც განსაზღვრულია განტოლებით **By=0**, ემთხვევა **Ox** ღერძს.

II. წრფის განტოლებას საკუთხო კოეფიციენტით აქვს შემდეგი სახე:

$$y=kx+b. \qquad (1.11)$$

ეს უკანასკნელი შეიძლება მივიღოთ ზოგადი განტოლების (როცა **B≠0**) შესაბამისი გარდაქმნით (**k= –A/B, b= –C/B**). **k=tgφ**, **k**-ს ეწოდება *წრფის საკუთხო კოეფიციენტი*, სადაც φ არის **Ox**-ის დადებით მიმართულებასა და წრფეს შორის კუთხე. თავისუფალი წევრი **b** არის **Oy** ღერძთან გადაკვეთის წერტილის ორდინატა.

III. წრფის განტოლებას ღერძთა მონაკვეთებში აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (1.12)$$

(აქ **a = –C/A; b = –C/B**). (1.12) მიიღება წრფის ზოგადი განტოლებიდან (როცა **C≠0**) შესაბამისი გარდაქმნებით.

a და **b** ამ განტოლებაში არის წრფის მიერ **Ox** და **Oy** ღერძებზე მოკვეთილი მონაკვეთები.

IV. წრფის განტოლებას საკუთხო კოეფიციენტით, რომელიც გადის მოცემულ წერტილზე, აქვს შემდეგი სახე:

$$y-y_1=k(x-x_1), \qquad (1.13)$$

სადაც $(x_1;y_1)$ მოცემული წერტილის კოორდინატებია, **k** - საკუთხო კოეფიციენტი.

V. მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (1.14)$$

სადაც $(x_1;y_1)$ და $(x_2;y_2)$ მოცემული წერტილების კოორდინატებია.

VI. წრფის ნორმალური განტოლება.

თუ ზოგადი სახის განტოლებას $Ax+By+C=0$ გავამრავლებთ რიცხვზე $\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ (რომელსაც მანორმალებელი მამრავლი ეწოდება და რადიკალის წინ ავიღებთ C-ს მოპირდაპირე ნიშანს) მივიღებთ

$$A_0x+B_0y+C_0=0 \qquad (1.15)$$

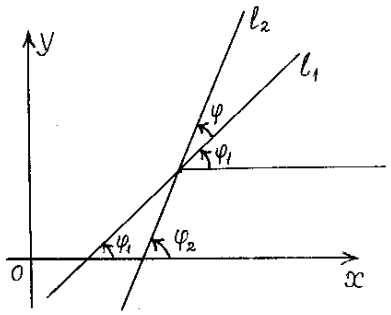
სახის განტოლებას, ამ უკანასკნელს ჩაწერენ ასედაც:

$$x\cdot\cos\varphi+y\cdot\sin\varphi-p=0. \qquad (1.16)$$

(1.15) და (1.16) წრფის *ნორმალური განტოლებები* ეწოდება. აქ p არის კოორდინატთა სათავიდან წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარის სიგრძე, ხოლო φ - კუთხე, რომელსაც ადგენს ეს პერპენდიკულარი Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

VII. კუთხე წრფეებს შორის.

განსაზღვრა 1.4. $l_1(y=k_1x+b_1)$ და $l_2(y=k_2x+b_2)$ წრფეებს შორის კუთხე $\left(\hat{l_1,l_2}\right)=\varphi$ ეწოდება იმ დადებით კუთხეს, რომელზედაც უნდა მოვაბრუნოთ l_1 წრფე წრფეთა გადაკვეთის წერტილის გარშემო, რომ l_1 დაემთხვეს l_2-ს $(0\le\varphi<\pi)$.



ნახ.1.7

ნახაზი 1.7-დან ჩანს, რომ $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ და $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_1}$,

ანუ

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}, \qquad (1.17)$$

სადაც $k_1=\operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2=\operatorname{tg}\varphi_2$.

l_1 და l_2 წრფეებს შორის მახვილი კუთხე გამოითვლება ფორმულით

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (1.18)$$

VIII. წრფეთა ურთიერთმდებარეობა სიბრტყეზე:

თუ $l_1(y=k_1x+b_1)$ და $l_2(y=k_2x+b_2)$ წრფეები *პარალელურებია*, მაშინ უნდა სრულდებოდეს პირობა:

$$k_1=k_2, \text{ ანუ } \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}. \qquad (1.19)$$

(1.19) ტოლობიდან გამომდინარე, ორი წრფის *პარალელურობის პირობა* შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$A_1B_2-A_2B_1=0. \qquad (1.20)$$

ხოლო, როცა l_1 *მართობულია* l_2-ის

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}. \qquad (1.21)$$

ზოგადი განტოლების შემთხვევაში წრფეთა *მართობულობის* ($l_1 \perp l_2$-ის) პირობა ჩაიწერება ტოლობით:

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \qquad (1.22)$$

ორი წრფე ერთმანეთს ემთხვევა, თუ

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (1.23)$$

l_1 და l_2 *იკვეთება*, თუ

$$A_1B_2-A_2B_1\neq 0. \qquad (1.24)$$

IX. მანძილი წერტილიდან წრფემდე გამოითვლება ფორმულით

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad (1.25)$$

სადაც (x_0, y_0) მოცემული წერტილის კოორდინატებია.

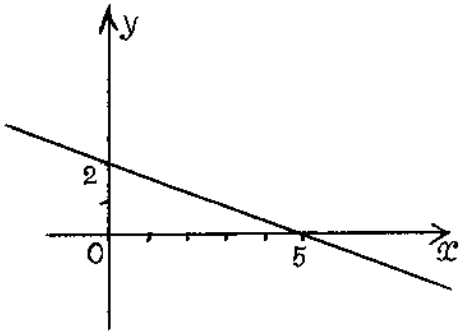
X. წრფეთა კონის განტოლება.

განსაზღვრა 1.5. თუ $A_1x+B_1y+C_1=0$ და $A_2x+B_2y+C_2=0$ ურთიერთგადამკვეთი წრფეებია, მაშინ

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0, \qquad (1.26)$$

არის ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე გამავალი *წრფეთა კონის* განტოლება. λ - რიცხვითი მამრავლია, რომელიც განსაზღვრავს ამ კონის კონკრეტულ წრფეს.

მაგალითი 1. წრფის ზოგადი სახის განტოლება $2x+5y-10=0$ ჩავწეროთ ღერძთა მონაკვეთებში და ავაგოთ (ნახ.1.8).



ნახ. 1.8

ამოხსნა:

$2x+5y=10, \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1. \quad a=5, b=2.$

პასუხი: $\left[\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1.\right]$

მაგალითი 2. შევადგინოთ წრფის განტოლება, რომელიც ორდინატთა ღერძზე მოკვეთს $b= -3$ მონაკვეთს და Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს $\varphi=\frac{\pi}{6}$-ის ტოლ კუთხეს.

ამოხსნა: ვპოულობთ $k=tg\varphi=tg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; გამოვიყენოთ განტოლება (1.11) და ვწერთ $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-3$. ამ უკანასკნელს მივცეთ ზოგადი სახე: $x-\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=0$.

პასუხი: $[x-\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=0.]$

მაგალითი 3. შევადგინოთ წრფის ზოგადი განტოლება, რომელიც Ox და Oy ღერძებზე შესაბამისად მოკვეთს $a=\frac{2}{5}$ და $b=-\frac{1}{10}$-ის ტოლ მონაკვეთებს.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ (1.12) განტოლება

$$\frac{x}{2/5}+\frac{y}{-1/10}=1.$$

გარდავქმნათ, მივიღებთ: $\frac{5x}{2}-\frac{10y}{1}=1, \quad 5x-20y-2=0.$

პასუხი: [5x-20y-2=0.]

მაგალითი 4. მოცემულია წრფის ზოგადი სახის განტოლება x-2y+10=0. ჩავწეროთ ნორმალური სახის განტოლება.

ამოხსნა:

ვპოულობთ მანორმალებელ მამრავლს

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

და ზოგად განტოლებას წევრ-წევრად ვამრავლებთ მასზე:

$-\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{10}{\sqrt{5}} = 0$, აქ $A_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $B_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $C_0 = -\frac{10}{\sqrt{5}}$.

ან (1.16)-ის ძალით

$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $p = -\frac{10}{\sqrt{5}}$.

პასუხი: $\left[-\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{10}{\sqrt{5}} = 0.\right]$

მაგალითი 5. განვსაზღვროთ წრფეთა წყვილების ურთიერთმდებარეობები:

ა) 3x+4y-1=0 და 2x+3y-1=0; ბ) 2x-y+2=0 და 4x-2y-1=0;

გ) x+y+1=0 და 3x+3y+3=0; დ) 3x-4y+8=0 და 4x+3y-9=0.

ამოხსნა:

ა) ვამოწმებთ $A_1B_2-A_2B_1$ გამოსახულების მნიშვნელობას. $3\cdot3-2\cdot4\neq0$. ე.ი. წრფეები *იკვეთება*. გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებს ვგებულობთ $\begin{cases}3x+4y-1=0,\\2x+3y-1=0\end{cases}$ სისტემის ამოხსნით, ვღებულობთ x= -1, y=1.

ბ) სრულდება პირობა $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, $\left(\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{2}{-1}\right)$, ამიტომ ისინი *პარალელურია*.

გ) წრფეები ერთმანეთს *ემთხვევა*, რადგანაც სრულდება პირობა $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, $\left(\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\right)$.

დ) წრფეები *ურთიერთპერპენდიკულარულია*, რადგანაც სრულდება პირობა $A_1A_2+B_1B_2=0$, $(3\cdot4+(-4)\cdot3=0)$.

პასუხი: [ა) იკვეთება (-1;1) წერტილში; ბ) პარალელურია; გ) ემთხვევა; დ) ურთიერთპერპენდიკულარულია.]

მაგალითი 6. ვიპოვოთ მანძილი $M_0(-6;3)$ წერტილიდან $3x-4y+15=0$ წრფემდე.

ამოხსნა: გამოვიყენებთ (1.25) ფორმულას

$$d=\frac{|3(-6)-4\cdot 3+15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3.$$

პასუხი: [d=3.]

მაგალითი 7. ვაჩვენოთ, რომ წრფეები $4x-6y+7=0$ და $20x-30y-11=0$ პარალელურებია.

ამოხსნის II ხერხი: განვსაზღვროთ მათი საკუთხო კოეფიციენტები: $k_1=\frac{2}{3}$; $k_2=\frac{2}{3}$. რადგანაც $k_1=k_2$, ამიტომ წრფეები პარალელურია.

მაგალითი 8. ვაჩვენოთ, რომ წრფეები $3x-5y+7=0$ და $10x+6y-3=0$ ურთიერთპერპენდიკულარულია.

ამოხსნა: ჩავწეროთ განტოლებები საკუთხო კოეფიციენტებით

$$y=\frac{3}{5}x+\frac{7}{5},\ k_1=\frac{3}{5};\quad y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{2},\ k_2=-\frac{5}{3}.$$

სრულდება პირობა (1.21) $k_1=-\frac{1}{k_2}$, ე.ი. მოცემული წრფეები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

მაგალითი 9. დავწეროთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(-1;8)$ წერტილზე და საკუთხო კოეფიციენტი $k=1$.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ (1.13) ფორმულა $y-y_0=k(x-x_0)$, მივიღებთ: $y-8=1(x-(-1))$, ანუ $x-y+9=0$.

პასუხი: [x-y+9=0.]

მაგალითი 10. დავწეროთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის წერტილებზე $A(-3;4)$ და $B(-2;-1)$.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ (1.14) ფორმულა

$$\frac{x-(-3)}{-2-(-3)}=\frac{y-4}{-1-4},\quad \frac{x+3}{1}=\frac{y-4}{-5},\ 5x+y+11=0.$$

პასუხი: [5x+y+11=0.]

მაგალითი 11. ვიპოვოთ $l_1(y=3x+5)$ და $l_2(y=-2x+7)$ წრფეებს შორის კუთხე.

ამოხსნა: l_1-ის $k_1=3$. l_2-ის $k_2=-2$ გამოვიყენოთ (1.17) ფორმულა: $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\dfrac{-2-3}{1+3(-2)}=1$, $\varphi=\operatorname{arctg}1$; $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

პასუხი: $[\varphi=\dfrac{\pi}{4}.]$

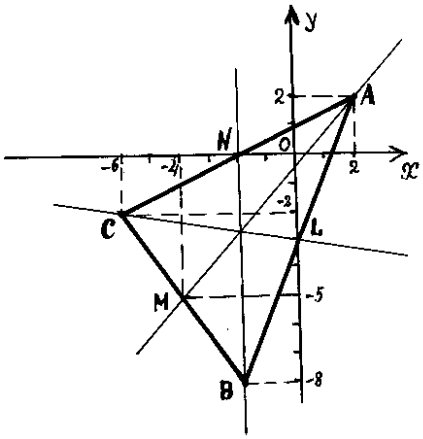
მაგალითი 12. ვიპოვოთ წრფე, რომელიც ეკუთვნის $2x+3y+5+\lambda(x+8y+6)=0$ წრფეთა კონას და გადის $M(1;1)$ წერტილზე.

ამოხსნა: M-ის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს საძებნი წრფის განტოლებას, ამიტომ, λ-ს მოსაძებნად ვღებულობთ განტოლებას $2\cdot1+3\cdot1+5+\lambda(1+8\cdot1+6)=0$, $10+15\lambda=0$, $\lambda=-\dfrac{2}{3}$.

ჩავსვათ λ-ს ეს მნიშვნელობა წრფეთა კონის განტოლებაში, მივიღებთ საძებნი წრფის განტოლებას $2x+3y+5-\dfrac{2}{3}(x+8y+6)=0$, $4x-7y+3=0$.

პასუხი: $[4x-7y+3.]$

მაგალითი 13. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(2;2)$, $B(-2;-8)$ და $C(-6;-2)$. შევადგინოთ სამკუთხედის მედიანების განტოლებები (ნახ.1.9):



ნახ.1.9

ამოხსნა: ვიპოვოთ BC, AC და AB გვერდების შუაწერტილების კოორდინატები:

$x'=\dfrac{-2-6}{2}=-4$, $y'=\dfrac{-8-2}{2}=-5$;

ე.ი. $M(-4;-5)$.

$x''=\dfrac{2-6}{2}=-2$, $y''=\dfrac{2-2}{2}=0$; $N(-2;0)$.

$x'''=\dfrac{2-2}{2}=0$, $y'''=\dfrac{2-8}{2}=-3$; $L(0;-3)$.

(1.14)-ის გამოყენებით ვპოულობთ AM მედიანის განტოლებას:

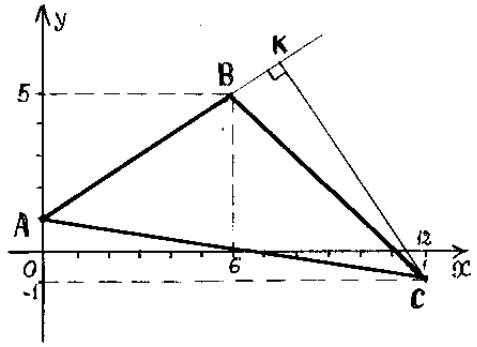
$\dfrac{x-2}{-4-2}=\dfrac{y-2}{-5-2}$, $7x-6y-2=0$.

რადგანაც B და N-ის აბსცისები ერთნაირია, ამიტომ, BN Oy-ის პარალელურია და მისი განტოლებაა x=-2, ანუ, x+2=0, ხოლო CL-ის განტოლება იქნება:

$$\frac{x+6}{0+6}=\frac{y+2}{-3+2},\qquad x+6y+18=0.$$

პასუხი: $\begin{bmatrix} AM: & 7x-6y-2=0; \\ BN: & x+2=0; \\ CL: & x+6y+18=0. \end{bmatrix}$

მაგალითი 14. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები A(0;1), B(6;5) და C(12;-1). შევადგინოთ C წვეროდან დაშვებულ სიმაღლეზე გამავალი წრფის განტოლება და ვიპოვოთ სიმაღლე (ნახ.1.10).



ნახ.1.10

ამოხსნა: დავწეროთ AB გვერდზე გამავალი წრფის განტოლება და ვიპოვოთ მისი საკუთხო კოეფიციენტი: $\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-1}{5-1}$, ანუ, $2x-3y+3=0$, $y=\frac{2}{3}x$, ე.ი. $k=\frac{2}{3}$.

AB-ზე დაშვებული სიმაღლის საკუთხო კოეფიციენტი ტოლი იქნება:

$$k_1=-\frac{1}{2/3}=-\frac{3}{2}.$$

ახლა ვეძებოთ C(12;-1) წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, რომლის $k=-\frac{3}{2}$. გვექნება: $y-(-1)=-\frac{3}{2}(x-12)$, $3x+2y-34=0$ - საძებნი წრფის განტოლებაა. CK - სიგრძე რომ გავიგოთ, გამოვიყენოთ (1.25) ფორმულა

$$d=\frac{|2\cdot 12-3(-1)+3|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{30}{\sqrt{13}}\approx 8{,}3.$$

პასუხი: $\begin{bmatrix} 3x+2y-34=0, \\ CK\approx 8{,}3. \end{bmatrix}$

§1.4. მეორე რიგის მრუდები

მეორე რიგის მრუდები ეწოდება წირებს, რომელთა განტოლებები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (1.26)$$

სადაც **A, B, C, D, E, F** - რაიმე ნამდვილი რიცხვებია, რომელთაც განტოლების კოეფიციენტები ეწოდება და ამავე დროს **A, B** და **C**-დან ერთი მაინც უნდა იყოს ნულისგან განსხვავებული.

მეორე რიგის წირებს ეკუთვნის *წრეწირი, ელიფსი, ჰიპერბოლა* და *პარაბოლა*. ისინი დიდ როლს ასრულებენ მათემატიკაში, ბუნებისმეტყველებაში და ტექნიკაში.

1. წრეწირის განტოლება.

განსაზღვრა 1.6. *წრეწირი* არის სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული სიბრტყის ფიქსირებული წერტილიდან. მას წრეწირის *ცენტრი* ეწოდება.

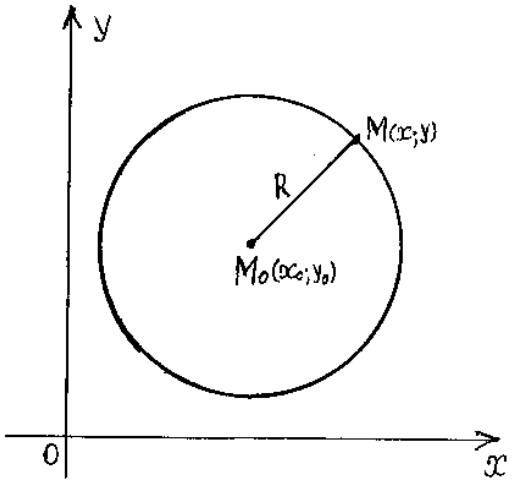
წრეწირის განტოლებას, რომლის ცენტრი $M_0(x_0;y_0)$ წერტილში მდებარეობს და რადიუსი **R**-ის ტოლია, აქვს შემდეგი სახე (ნახ.1.11):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (1.27)$$

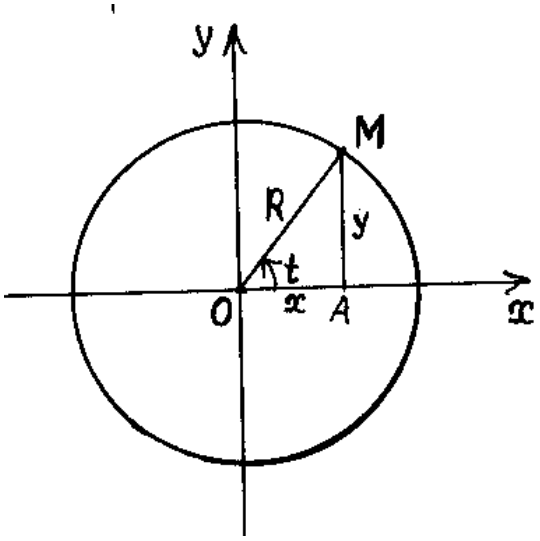
ფორმულა (1.27) არის წრეწირის კანონიკური (ე.ი. უმარტივესი) განტოლება.

თუ ცენტრი მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში $O(0;0)$, მაშინ განტოლება (1.27) მიიღებს შემდეგ სახეს (ნახ.1.12):

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (1.28)$$



ნახ. 1.11



ნახ. 1.12

მაგალითი 1. დავწეროთ წრეწირის განტოლება, რომლის რადიუსია **R=4**, ხოლო ცენტრი მდებარეობს წერტილში **A(2;1)**. (1.27)-ის თანახმად გვაქვს

$$(x-2)^2+(y-1)^2=16.$$

პასუხი: $[(x-2)^2+(y-1)^2=16.]$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ წრეწირის კანონიკური განტოლება.

ამოხსნა. ტოლობის მარცხენა ნაწილში გამოვყოთ სრული კვადრატები **x** და **y** ცვლადების მიმართ:

$$(x^2-2\cdot 2x+2^2)-2^2+(y^2+2\cdot 3y+3^2)-3^2-3=0,\quad (x-2)^2+(y+3)^2=16\,.$$

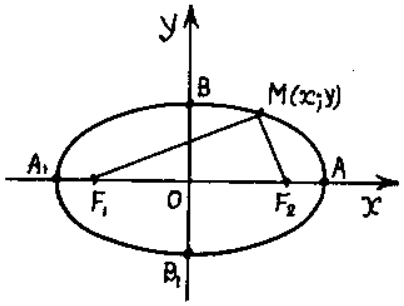
ცენტრის კოორდინატებია **(2;-3)**; **R=4.**

პასუხი: $[(x-2)^2+(y+3)^2=4^2.]$

წრეწირის (ნახ.1.12) *პარამეტრულ განტოლებას* აქვს შემდეგი სახე: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $0\le t<2\pi$. *პოლარულ კოორდინატებში* კი $r=R$, როცა ცენტრი პოლუსშია და $r=2R\cos\varphi$, როცა ცენტრი $(R;0)$ წერტილშია.

2. ელიფსის კანონიკური განტოლება.

განსაზღვრა 1.7. *ელიფსი* ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილ-



ნახ.1.13

თა სიმრავლეს, რომელთათვის სიბრტყის ორ ფიქსირებულ F_1 და F_2 წერტილებამდე მანძილთა ჯამი მუდმივი სიდიდეა და $2a$-ს ტოლია. F_1 და F_2 წერტილებს ელიფსის *ფოკუსები* ეწოდება.

ელიფსის განსაზღვრების თანახმად, გვაქვს ძირითადი ტოლობა $F_1M+F_2M=2a$. რადგანაც $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, წერტილებს შორის მანძილის ფორმულით ვღებულობთ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a, \qquad (1.29)$$

რომლის შესაბამისი გარდაქმნების შედეგად ვღებულობთ ელიფსის კანონიკურ განტოლებას:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1.30)$$

$2a$ - დიდი ღერძია, $2b$ - მცირე ღერძი, ხოლო $2c$ - ფოკუსებს შორის მანძილი.

a, b და c-ს შორის დამოკიდებულება ასეთია:

$$a^2-c^2=b^2. \qquad (1.31)$$

განსაზღვრა 1.8. ელიფსის *ექსცენტრისიტეტი* ეწოდება ფოკუსებს შორის მანძილის შეფარდებას დიდ ღერძთან, ე.ი.

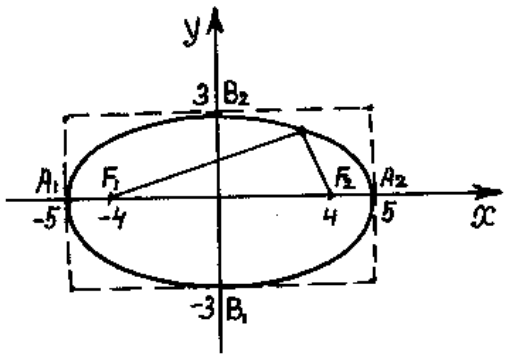
$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a} \quad \text{და} \quad 0\le\varepsilon<1. \qquad (1.32)$$

ექსცენტრისიტეტი ელიფსის შეკუმშულობის მახასიათებელია.

შენიშვნა: წრეწირი ელიფსის კერძო შემთხვევაა, როცა $a=b=R$, (1.30)-დან ვღებულობთ წრეწირის $x^2+y^2=R^2$ განტოლებას.

მაგალითი 3. ელიფსის განტოლება მოცემულია შემდეგი სახით: $9x^2+25y^2=225$. ვიპოვოთ ელიფსის პარამეტრები და ავაგოთ.

ამოხსნა: განტოლება ჩავწეროთ კანონიკური სახით (ნახ.1.14):



ნახ. 1.14

$$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=1, \qquad \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

აქედან გვაქვს, რომ a=5, b=3, (1.31)-ის გამოყენებით

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4,$$

$$c=4,\ \varepsilon=\frac{4}{5}.$$

ფოკუსებია $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$, ხოლო წვეროები კი $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;-3)$, $B_2(0;3)$.

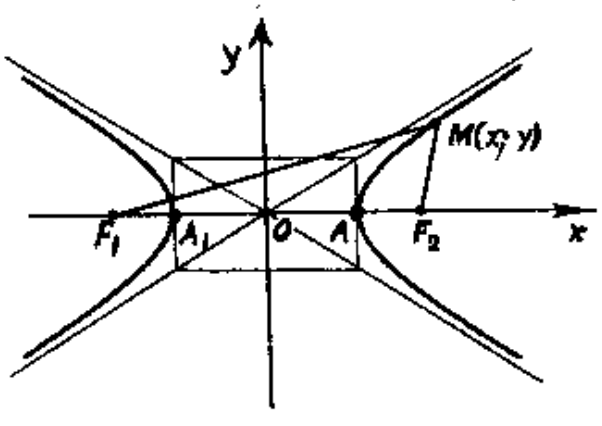
პასუხი: $[a=5, b=3, c=4, \varepsilon=\frac{4}{5}.]$

3. ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება.

განსაზღვრა 1.9. *ჰიპერბოლა* ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვის სიბრტყის ორ ფიქსირებულ F_1 და F_2 წერტილებამდე მანძილთა სხვაობის მოდული მუდმივი სიდიდეა და 2a-ს ტოლია. F_1 და F_2 წერტილებს ჰიპერბოლის *ფოკუსები* ეწოდება (ნახ.1.15).

ჰიპერბოლის განსაზღვრების თანახმად, დგება ძირითადი განტოლება

$$|F_1M-F_2M|=2a. \qquad (1.33)$$



ნახ. 1.15

წინა პუნქტის მსგავსი გარდაქმნებით ვღებულობთ ჰიპერბოლის *კანონიკურ განტოლებას*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1.34)$$

a, b, c-ს შორის დამოკიდებულება ასეთია:

$$c^2-a^2=b^2. \qquad (1.35)$$

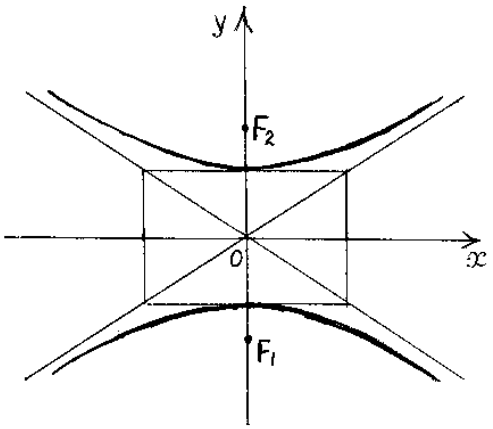
ჰიპერბოლა არის წირი, რომელიც ორი ნაწილისაგან შედგება, მათ *შტოები* ეწოდება.

განსაზღვრა 1.10. რაიმე წირის *ასიმპტოტა* ეწოდება წრფეს, რომელიც უსასრულოდ უახლოვდება ამ წირს, მაგრამ, არასდროს არ კვეთს მათ, როცა x იზრდება აბსოლუტური სიდიდით.

ჰიპერბოლას გააჩნია ასიმპტოტები, მათი განტოლებებია:

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \qquad (1.36)$$

(1.34) ჰიპერბოლა არ კვეთს Oy ღერძს.



ნახ. 1.16

2a - არის ნამდვილი ღერძი; **2b** – წარმოსახვითი ღერძი; **2c** – ფოკუსებს შორის მანძილი; $\varepsilon = \frac{c}{a}(\varepsilon>1)$ - ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი.

თუ ფოკუსები მოვათავსეთ Oy ღერძზე, ანუ $F_1(0;-c)$ და $F_2(0;c)$ წერტილებში, მაშინ, (1.34) განტოლება მიიღებს სახეს (ნახ.1.16):

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1.37)$$

(1.37) ჰიპერბოლას (1.34)-ის *შეუღლებული* ეწოდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ $9x^2-25y^2=225$ ჰიპერბოლის პარამეტრები.

ა მ ო ხ ს ნ ა: ჯერ მივცეთ განტოლებას კანონიკური სახე:

$$\frac{9x^2}{225}-\frac{25y^2}{225}=1, \qquad \frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{3^2}=1, \quad \text{ე.ი. } a=5,\ b=3.$$

(1.35)-დან $c^2=a^2+b^2$, ე.ი. $c=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$, $c\approx5{,}8$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{34}}{5}$.

ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{3}{5}x$.

2a=10 - ნამდვილი ღერძია; **2b=6** - წარმოსახვითი ღერძი.

პასუხი: $[a=5,\ b=3,\ c\approx5{,}8,\ \varepsilon=\frac{\sqrt{34}}{5},\ y=\pm\frac{3}{5}x.]$

თუ (1.34) ჰიპერბოლაში a=b, მაშინ ჰიპერბოლას ეწოდება *ტოლგვერდა* და მისი განტოლებაა

$$x^2-y^2=a^2. \qquad (1.38)$$

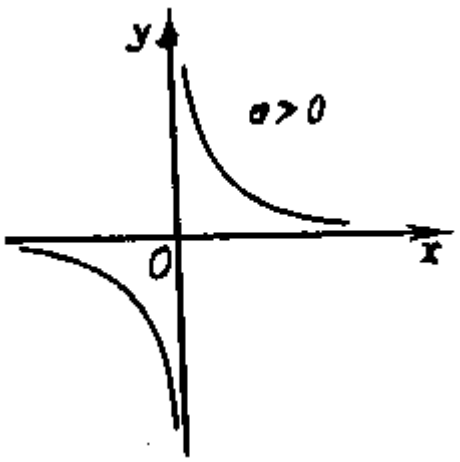
მისი ასიმპტოტებია

$$y=\pm x. \qquad (1.39)$$

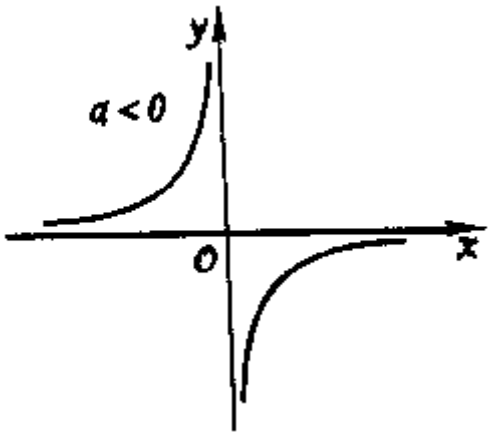
იმ შემთხვევაში, როცა ასიმპტოტებად მივიღებთ Ox და Oy ღერძებს (რადგანაც y=x და y=-x წრფეები ასევე ურთიერთმართობულია), მაშინ, შესაბამისი გათვლებით ჰიპერბოლის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$xy=a \qquad (1.40)$$

და როცა a>0 მისი გრაფიკი (ნახ.1.17) განთავსდება I და III საკოორდინატო მეოთხედებში, ხოლო როცა a<0, II და IV-ში (ნახ.1.18).



ნახ. 1.17



ნახ. 1.18

4. პარაბოლის კანონიკური განტოლება.

განსაზღვრა 1.11. *პარაბოლა* ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული სიბრტყის ფიქსირებული F (რომელსაც *ფოკუსი* ეწოდება) წერტილიდან და *l* წრფიდან (რომელსაც *დირექტრისა* ეწოდება).

თუ მსჯელობა ჩატარდება ისე, რომ *l*-ის განტოლება იყოს $x=-\frac{p}{2}$, $F(\frac{p}{2},0)$ და M(x,y) პარაბოლის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ, (ნახ.1.19)

$$MF=MA. \qquad (1.41)$$

(1.41)-ის შესაბამისი გარდაქმნებით ვღებულობთ კანონიკურ განტოლებას

$$y^2=2px. \qquad (1.42)$$

(1.42)-ით მოცემული პარაბოლა მდებარეობს მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში, თუ $F(-\frac{p}{2},0)$ და $x=\frac{p}{2}$ (დისექტრისა), მაშინ (ნახ. 1.20)

$$y^2=-2px \qquad (1.43)$$

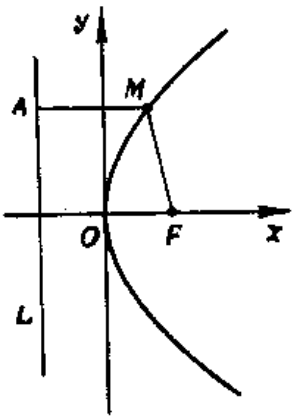
და მისი გრაფიკი განთავსდება მარცხენა ნახევარსიბრტყეში.

თუ პარაბოლის ფოკუსს მოვათავსებთ Oy ღერძზე, მაშინ, (ნახ.1.21) შესაბამისად განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

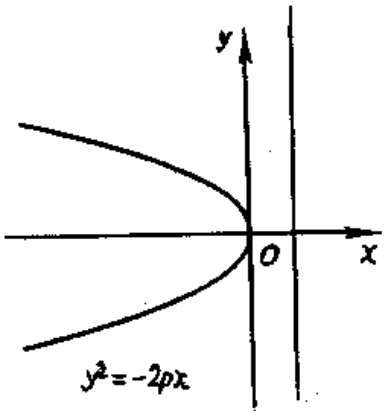
$$x^2=2py \qquad (1.44)$$

და

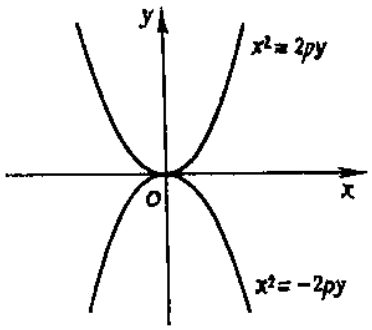
$$x^2=-2py. \qquad (1.45)$$



ნახ.1.19



ნახ.1.20



ნახ.1.21

მაგალითი 5. პარაბოლა, რომლის წვერო მდებარეობს O(0;0)-ზე გადის A(9;3) წერტილზე და სიმეტრიულია Ox-ის. დავწეროთ მისი განტოლება.

ამოხსნა: $y^2=2px$ განტოლებაში ჩავსვათ A(9;3) კოორდინატები $3^2=2p\cdot 9$, $9=2\cdot p\cdot 9$, $p=\frac{1}{2}$, ე.ი. $y^2=2\cdot\frac{1}{2}x=x$, $y^2=x$.

პასუხი: $[y^2=x.]$

მაგალითი 6. მოცემულია პარაბოლა $x^2=-6y$. დავწეროთ დირექტრისის განტოლება და ფოკუსი.

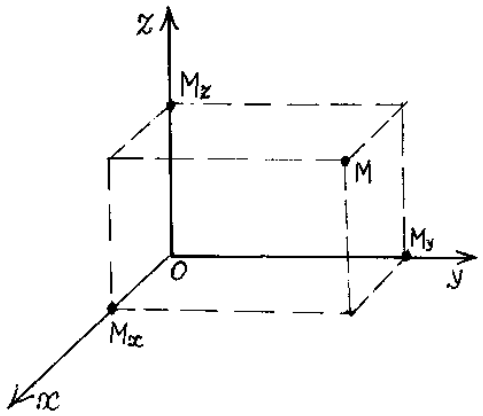
ამოხსნა: $2p=-6$, $p=-3$, დირექტრისა: $y=\frac{3}{2}$; $F(0;-\frac{3}{2})$.

პასუხი: $\left[y=\frac{3}{2};\ F(0;-\frac{3}{2}).\right]$

§1.5. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

განსაზღვრა 1.12. *დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში* ეწოდება საერთო **O** სათავის მქონე სამ ურთიერთმართობულ ღერძთა სისტემას, რომელთაგან განსაზღვრულია რომელია პირველი, მეორე და მესამე და რომლებზედაც სიგრძის ერთი და იგივე მასშტაბია აღებული. ღერძების გადაკვეთის წერტილს ეწოდება *კოორდინატთა სისტემის სათავე* და აღინიშნება **O** ასოთი. პირველ ღერძს აღნიშნავენ **Ox**-ით და მას *აბსცისათა* ღერძი ეწოდება, მეორე ღერძს აღნიშნავენ **Oy**-ით და მას *ორდინატთა* ღერძი ეწოდება, ხოლო, მესამე ღერძს აღნიშნავენ **Oz**-ით და მას *აპლიკატთა* ღერძი ეწოდება.

განსაზღვრა 1.13. სივრცის **M** წერტილის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები ეწოდება **M** წერტილის შესაბამისი **OM** მონაკვეთის გეგმილებს შესაბამისად **Ox, Oy** და **Oz** ღერძებზე, მათ უწოდებენ *აბსცისას, ორდინატსა* და *აპლიკატს* და სიმბოლურად ასე ჩაიწერება **M(x;y;z)**. (ნახ.1.22).



ნახ.1.22

კოორდინატთა სისტემის სამი ურთიერთმართობული ღერძი განსაზღვრავს სამ ურთიერთმართობულ **Oxy, Oyz** და **Oxz** სიბრტყეს, რომელთაც *კოორდინატთა სიბრტყეები* ეწოდება.

ზემოთ აღნიშნული კოორდინატთა სამი სიბრტყე, მთელ სივრცეს ყოფს რვა ოქტანტად. ყოველ ოქტანტს შეესაბამება კოორდინატთა ნიშნების სამი კომბინაცია.

კოორდინატები	ოქტანტები							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+

y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

მაგალითი 1. მოცემულია წერტილები **A(4;3;5), B(-3;2;1), C(2;-3;0)** და **D(0;0;3)**. ვიპოვოთ ამ წერტილების გეგმილების კოორდინატები: ა) **Oxy** სიბრტყეზე; ბ) **Oxz** სიბრტყეზე; გ) **Oyz** სიბრტყეზე; დ) აბსცისათა ღერძზე; ე) ორდინატთა ღერძზე; ვ) აპლიკატთა ღერძზე.

ამოხსნა: ნახ. 1.22-ის გამოყენებით ვპოულობთ:

ა) **Oxy**-ზე **A'(4;3;0), B'(-3;2;0), C'(2;-3;0), D'(0;0;0).**

შენიშვნა: **C** -ს კოორდინატები უცვლელია, რადგანაც ის თვითონ ძევს **Oxy** სიბრტყეზე.

ბ) **Oxz** სიბრტყეზე: **A''(4;0;5), B''(-3;0;1), C''(2;0;0)** და **D''(0;0;3).**

შენიშვნა: **D** - ძევს **Oxz**-ზე, ამიტომ მისი კოორდინატები არ იცვლება.

გ) **Oyz**-სიბრტყეზე: **A'''(0;3;5), B'''(0;2;1), C'''(0;-3;0)** და **D'''(0;0;3).**

შენიშვნა: **D** მდებარეობს **Oyz**-ზე, ამიტომ მისი კოორდინატები არ იცვლება.

დ) **Ox** ღერძზე: $A_{Ox}(4;0;0)$, $B_{Ox}(-3;0;0)$, $C_{Ox}(2;0;0)$, $D_{Ox}(0;0;0)$.

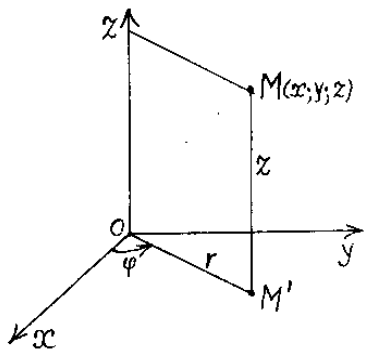
ე) **Oy** ღერძზე: $A_{Oy}(0;3;0)$, $B_{Oy}(0;2;0)$, $C_{Oy}(0;-3;0)$, $D_{Oy}(0;0;0)$.

ვ) **Oz** ღერძზე: $A_{Oz}(0;0;5)$, $B_{Oz}(0;0;1)$, $C_{Oz}(0;0;0)$, $D_{Oz}(0;0;3)$.

შენიშვნა: **D** წერტილი მდებარეობს აპლიკატთა ღერძზე, ამიტომ, მისი კოორდინატები არ იცვლება.

§1.6. ცილინდრული და სფერული კოორდინატები

კოორდინატთა *ცილინდრულ* სისტემაში სივრცის **M** წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება **xOy** სიბრტყეზე **M** წერტილის **M'** გეგმილის **r** და **φ** პოლარული კოორდინატებითა და თვით **M** წერტილის **z** აპლიკატით. რიცხვებს **r, φ, z** წერტილის *ცილინდრული კოორდინატები* ეწოდება ($r\geq 0$, $0\leq\varphi<2\pi$ და **z** ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია).

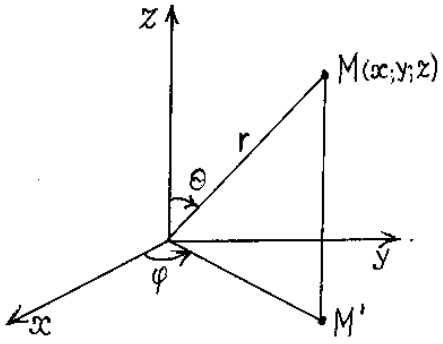


ნახ. 1.23

ნახ. 1.23-დან ჩანს, ცილინდრულ და დეკარტის კოორდინატებს შორის დამოკიდებულება

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \qquad (1.46)$$

კოორდინატთა *სფერულ* სისტემაში სივრცის M წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება O სათავიდან M წერტილამდე r მანძილით, Ox ღერძის დადებით მიმართულებასა და xOy სიბრტყეზე OM მონაკვეთის გეგმილს შორის φ კუთხით, Oz ღერძის დადებით მიმართულებასა და OM მონაკვეთს შორის θ კუთხით (ნახ.1.24). რიცხვებს r, φ, θ ეწოდება M წერტილის *სფერული კოორდინატები*, ან სივრცეში *პოლარული კოორდინატები* ($r\geq 0$, $0\leq\varphi<2\pi$, $0\leq\theta\leq\pi$).



ნახ.1.24

ნახ.1.24-დან ჩანს კავშირი სფერულ კოორდინარებსა და დეკარტის კოორდინატებს შორის:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \qquad (1.47)$$

საიდანაც,

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}, \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}. \end{cases} \qquad (1.48)$$

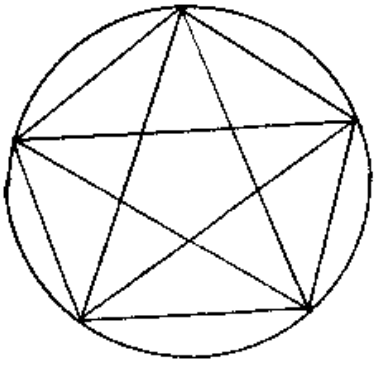
"მათემატიკის გაკვეთილზე, როდესაც
მოწყენილობისაგან ჰაერიც კი გაყინულია,
შეიძლება კლასში შემოფრინდეს პეპელა."

ა.ჩეხოვი

§1.7. ანალიზური გეომეტრიის ელემენტების გამოყენება ბუნებისმეტყველებაში

პირველი წერილობითი ლიტერატურული წყარო, რომელმაც ჩვენამდე მოაღწია და რომელშიც მონაკვეთის ოქროს კვეთის პროპორციით გაყოფა გვხვდება, ევკლიდეს ცნობილი "საწყისებია" (III საუკუნე ჩვენს წელთაღრიცხვამდე). საწყისების უკვე მეორე წიგნში, რომლის შინაარსსაც გეომეტრიული ალგებრა შეადგენს (სულ ნაშრომი 13 წიგნისაგან შედგება), ევკლიდე იძლევა ინფორმაციას მონაკვეთის ოქროს კვეთის პროპორციით დაყოფის შესახებ, რასაც იგი შემდგომში იყენებს წესიერი ხუთ და ათკუთხედების ასაგებად [2].

შევნიშნოთ, რომ სახაზავისა და ფარგლის საშუალებით გეომეტრიული ფიგურების აგების ამოცანებს ძალზე დიდი ყურადღება ექცეოდა ძველი საბერძნეთის მეცნიერების მიერ და ასეთი აგების ხელოვნებამ დიდ სიმაღლეებს უკვე მაშინ მიაღწია. ასეთი ამოცანების ამოხსნისას საკმაოდ დიდ როლს სწორედ მონაკვეთების ოქროს კვეთის პროპორციით დაყოფა თამაშობდა. ერთ-ერთ ასეთ ფიგურათაგანს წარმოადგენს პენტოგრამა - წესიერი ხუთკუთხედის დიაგონალებით შედგენილი ხუთქიმიანი ვარსკვლავი. ამ ფიგურის განსაკუთრებულობა მდგომარეობს იმაში, რომ ნებისმიერი დიაგონალი მეზობელ წვეროდან გამოსახულ ორივე დიაგონალს ოქროს კვეთით ყოფს (ნახ.1.25).



ნახ.1.25

პენტოგრამა ცნობილი იყო ძველი ბაბილონელისათვისაც. ამრიგად, ოქროს კვეთას კარგად იცნობდნენ ევკლიდემდეც. კერძოდ, იგი ცნობილი იყო პითაგორასა და მისი მოწაფეებისათვის (VI საუკუნე ჩვენს წელთაღრიცხვამდე). პითაგორა და მისი მიმდევრები რიცხვებში, მო-

ნაკვეთების შეფარდებებში ეძიებდნენ მაგიურსა და ზებუნებრივს. დიდი პატივისცემით სარგებლობდა ოქროს კვეთა, რომელიც პითაგორელების ღრმა რწმენით, ესთეტიკურად ყველაზე სრულყოფილი პროპორცია და, ამდენად, თვალისათვის მეტად სასიამოვნო იყო.

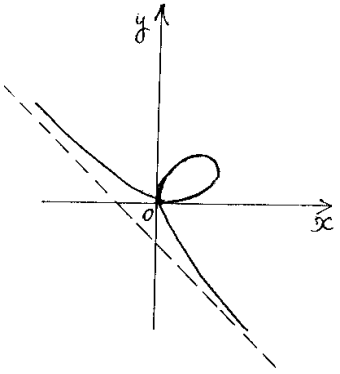
განსაკუთრებული მნიშვნელობა მოიპოვა ოქროს კვეთის პროპორციამ იტალიური რენესანსის ეპოქაში, როდესაც ის მიჩნეული იყო "სრულყოფილებისა და ჰარმონიის უმაღლეს გამოვლინებად ბუნებასა და ხელოვნებაში". მას ხშირად იყენებდნენ არა მარტო გეომეტრიაში, არამედ, ხელოვნებაში და განსაკუთრებით არქიტექტურაში. ამიტომ სრულებით არ არის შემთხვევითი, რომ სწორედ ამ პერიოდში (XV საუკუნის დასასრულს) დაიწერა სპეციალური წიგნი ოქროს კვეთის შესახებ. მისმა ავტორმა, იმ ეპოქის ერთ-ერთმა შესანიშნავმა მათემატიკოსმა *ლუკა პაჩოლიმ*, წიგნს სათაურად დაარქვა "*ღვთაებრივი პროპორცია*". საინტერესოა, რომ წიგნის დაწერის ერთ-ერთი სულისჩამდგმელი და მისი მხატვრულად გამფორმებელი იყო გენიალური ლეონარდო და ვინჩი. სხვათაშორის, არსებობს მოსაზრება, რომ თვით ტერმინი "ოქროს კვეთა" შემოღებული იყო ლეონარდოს მიერ.

ოქროს კვეთას იყენებენ ხუროთმოძღვრებასა და ხელოვნების სხვადასხვა დარგში. აზომვის შედეგად ხელოვნებათმცოდნეებმა დაადგინეს, რომ ბევრი შედევრი არქიტექტურასა და მხატვრობაში სწორედ ოქროს კვეთის პროპორციას ემყარება. ოქროს კვეთის პროპორციის პრინციპია განხორციელებული ფრიგის აკლდამებსა და ათენის პართენონში, პეტრეს ბაზილიკაში რომში, ტიციანის "ღვთისმშობლის მოგზაურობა ზეცაში". ლეონარდო და ვინჩის შედევრში "მონა ლიზა". რაფაელის მადონაში სიქსტის კაპელადან ვატიკანში და მთელ რიგ სხვა შედევრში. დასაბუთებულია, რომ მცხეთის ჯვრის დიდებული მონასტერი ოქროს კვეთის პროპორციის მიხედვითაა აგებული.

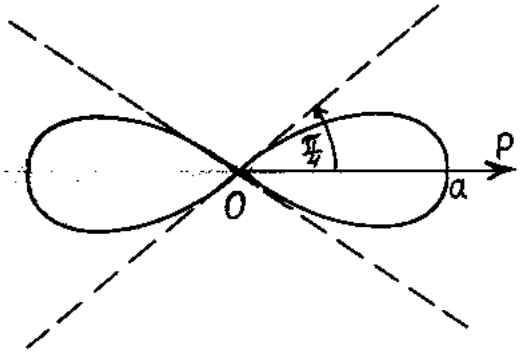
რაც შეეხება პოეზიას, როგორც აკადემიკოსი გიორგი წერეთელი აღნიშნავს, "პოეზიაში რუსთაველი პირველია მსოფლიოში და შეიძლება ერთადერთი, რომელმაც ოქროს კვეთაზე ააგო ესოდენ დიდი მოცულობის პოეტური ნაწარმოები. მისი პოემის 1587 სტროფიდან 863 ოქროს კვეთაზეა აგებული". მეცნიერები თვლიან, რომ ადამიანის ესთეტიკური კრიტერიუმის ფორმირება ბუნებრივი ობიექტების კანონზომიერების გავლენით ხდება.

ცოცხალი ბუნების გეომეტრიული თავისებურებები უძველესი დროიდან იპყრობდა მკვლევარების ყურადღებას. ჯერ კიდევ ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსებმა მიაქციეს ყურადღება ზოგიერთი მცენარის ფორმასა და იმ დროისათვის არსებულ წირებს შორის მსგავსებას. დეკარტის კოორდინატთა სისტემის შემოტანის შემდეგ შეიქმნა შესაძლებელი მრუდთა კლასების აღწერა ანალიზურად. კერძოდ, თვითონ დეკარტმა ჟასმინის ფოთოლის ფორმის (ნახ.1.26,ა) აღსაწერად შემოიტანა ასეთი ფორმულა:

$$x^3-y^3-3axy=0, \quad a>0. \qquad (1.49)$$



ნახ. 1.26, ა



ნახ.1.26, ბ

ამ მრუდს ამჟამად ეწოდება *დეკარტის ფოთოლი* (ჟასმინის ფოთოლიც).

ბერნულის ლემნისკატას (ნახ.1.26,ბ) განტოლება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში არის:

$$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0, \; a>0, \qquad (1.50)$$

ხოლო პოლარულ კოორდინატებში:

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}\,. \qquad (1.51)$$

ბიოლოგიაში პოპულარულია პოლარული კოორდინატთა სისტემა.

გერმანელმა მეცნიერმა ბ. ჰაბენიხტმა მცენარის ფოთლებისა და ნაყოფების ფორმის გამომსახველი ფორმულები შეადგინა პოლარულ კოორდინატებში [20]. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი: კარგადაა ცნობილი *ბალახი სამყურა* (ნახ.1.27). ამ მცენარის ფოთოლს აქვს ფორმა, რომლის განტოლებას პოლარულ კორდინატებში აქვს შემდეგი სახე:

$$r=4(1+\cos 3\varphi+\sin^2 3\varphi). \qquad (1.52)$$

სუროს ფოთლის ფორმულაა

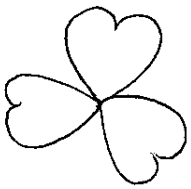
$$r=3(1+\cos^2\varphi)+2\cos\varphi+\sin^2\varphi-2\sin^2 3\varphi\cos^4\frac{\varphi}{2}; \qquad (1.53)$$

მჟაუნას ფოთლის ფორმას აღწერს ფორმულა

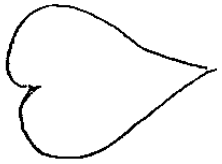
$$r=4(1+\cos 3\varphi-\sin^2 3\varphi), \qquad (1.54)$$

ხოლო *იასამნის* ფოთლისას (ნახ.1.28) კი

$$r=a(5+2\cos\varphi+3\sin^{71}\varphi). \qquad (1.55)$$



ნახ.1.27



ნახ.1.28

ნახ. 1.29

რთულყვავილოვანი ოჯახიდან ყვავილების ფორმის ფურმულას კი აქვს სახე:

$$r=a\sin k\varphi, \qquad (1.56)$$

(სადაც **a** და **k** დადებითი რიცხვებია). ამ ფორმულის შესაბამის მრუდებს ეწოდება *გვიდო გრანდის ვარდები* (ნახ.1.29 როცა **k=5** და $k=\frac{5}{3}$).

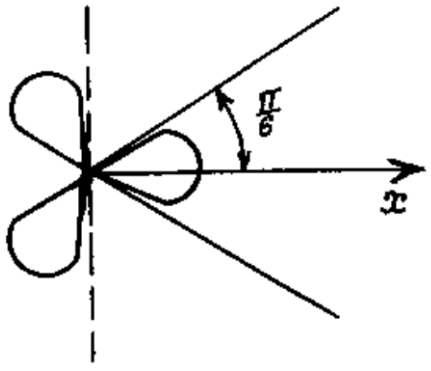
სამფოთლიანი ვარდის (ნახ.1.30) განტოლებას პოლარულ კოორდინატებში აქვს შემდეგი სახე:

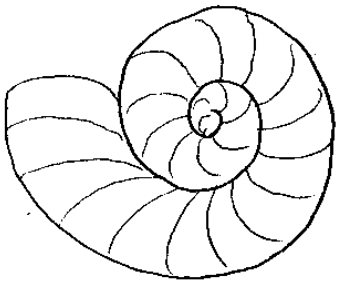
$$r=a\cdot\cos 3\varphi, \quad \text{სადაც } a>0. \qquad (1.57)$$

ბიოლოგიური ობიექტების ფორმის აღწერაში დიდი დატვირთვა აქვს ე.წ. "სპირალებს". ლოგარითმული სპირალის ფორმულას ასეთი სახე აქვს:

$$r=a^{\varphi}. \qquad (1.58)$$

სწორედ ამ წირით არის შემოხაზული ნიჟარა (მაგ. **haliotis splendes**) (ნახ.1.31).





ნახ.1.30 ნახ. 1.31

ანალიზური გეომეტრიის საკითხების სწავლების შემდეგ სასურველია განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა მათემატიკური მოდელის აგებაზე, რომლის საშუალებითაც მოხდება გავლილი საკითხების განმეორება – განმტკიცება [21].

ამოცანა დიეტაზე.

ქალბატონმა უნდა განახორციელოს დიეტა მხოლოდ ორი **P** და **Q** პროდუქტის მიღებით. ამ პროდუქტებით დღიური კვება უნდა გვაძლევდეს არა უმეტეს ცხიმის 14 ერთეულს, მაგრამ, არა ნაკლებ 300 კალორიას. 1 კგ **P** პროდუქტი, შეიცავს ცხიმის 15 ერთეულს და 150 კალორიას, ხოლო 1 კგ **Q** პროდუქტი შეიცავს 4 ერთეულ ცხიმს და 200 კალორიას. 1 კგ **P** პროდუქტის ფასია 15 ლარი, ხოლო 1 კგ **Q** პროდუქტისა - 25 ლარი.

რა პროპორციით უნდა იყიდოს ქალბატონმა ეს პროდუქტები და დახარჯოს რაც შეიძლება ნაკლები თანხა?

ა მ ო ხ ს ნ ა : ეს პირობები გადავიყვანოთ მათემატიკური სიმბოლოების ენაზე: **P** პროდუქტის საჭირო რაოდენობა აღვნიშნოთ **x** კგ-ით, ხოლო **Q** პროდუქტისა **y** კგ-ით.

საჭირო პროდუქტების ცხიმის რაოდენობა მასაში **15x+4y** ერთეული იქნება და პირობის თანახმად, ის არ აღემატება 14-ს, ამიტომ,

$$15x+4y\le 14.$$

ანალოგიური მსჯელობით კალორიების რაოდენობა იქნება **150x+200y** და უნდა შეასრულოს პირობა

$$150x+200y\ge 300,$$

პროდუქტების ფასი კი იქნება **a=15x+25y** ლარი. პირობის თანახმად ის უნდა იყოს მინიმალური, ეს ასე ჩავწეროთ **a=15x+25y→min**.

მათემატიკურ ენაზე მოდელი ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} 15x+4y\le 14, \\ 150x+200y\ge 300, \\ x\ge 0, y\ge 0. \end{cases}$$

$$a=15x+25y\to \min.$$

ამოვხსნათ გრაფიკული მეთოდით.

ცხადია, რომ $x\geq 0$ და $y\geq 0$ პირობები სრულდება I მეოთხედში, ხოლო სიბრტყის იმ ნაწილის დასადგენად, რომელიც აკმაყოფილებს სისტემის პირველი ორი უტოლობის პირობებს, ჯერ ავაგოთ წრფეები $15x+4y=14$ და $150x+200y=300$. ამისათვის ისინი ჩავწეროთ ღერძთა მონაკვეთებში:

$$\frac{x}{14/15}+\frac{y}{7/2}=1 \qquad \text{და} \qquad \frac{x}{2}+\frac{y}{3/2}=1.$$

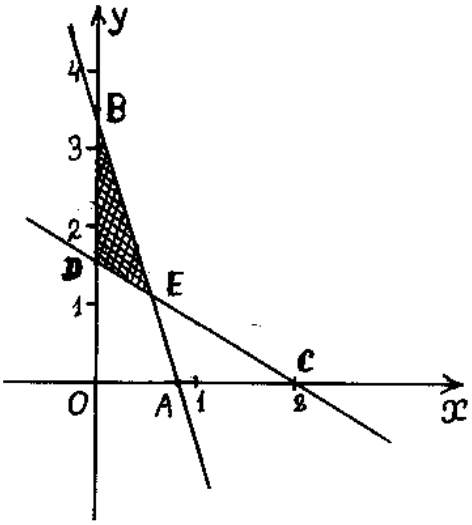
შესაბამისად ეს წრფეები Ox და Oy ღერძებს კვეთენ წერტილებზე:

$A(\frac{14}{15};0)$, $B(0;\frac{7}{2})$ და $C(2;0)$, $D(0;\frac{3}{2})$.

განხილულ წრფეთა გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებს ვპოულობთ

$$\begin{cases}15x+4y=14,\\ 3x+4y=6\end{cases}$$

სისტემის ამოხსნით $E(\frac{2}{3};1)$.



ნახ. 1.32

ამოსახსნელ უტოლობათა სისტემას შეესაბამება სიბრტყის ნაწილი, რომელიც ΔDBE-თია მოცემული (ნახ.1.32). როცა $a=0$, $a=15x+25y$ განტოლებიდან ვღებულობთ $15x+25y=0$, ანუ $3x+5y=0$. ეს არის კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფის განტოლება, რომლის $k_1=-\frac{3}{5}$ და II და IV მეოთხედებში გადის. a–ს მნიშვნელობის გაზრდით ეს წრფე გადაინაცვლებს თავის თავის პარალელურად ზევით და გარკვეულ მომენტში შეეხება ΔDEB-ს.

DE-ს განტოლებაა $3x+4y=6$ და მისი $k_2=-\frac{3}{4}$, რადგანაც $-\frac{3}{4}<-\frac{3}{5}$, ამიტომ, $3x+5y=a$ წრფის დახრის კუთხე Ox-ის დადებით

მიმართულებასთან მეტია, ვიდრე, $3x+4y=6$ წრფისა, ამიტომ $3x+5y=a$, a-ს გარკვეულ მნიშვნელობაზე პირველად ΔDEB-ს E წვეროს შეეხება. ცხადია, a-ს მინიმალურ მნიშვნელობას მოგვცემს სწორედ E-ს კოორდინატების ჩასმა გამოსახულებაში $15x+25y=a$, ანუ $a_{min}=15\cdot\frac{2}{3}+25\cdot 1=35$. $x=\frac{2}{3}$, $y=1$. ქალბატონმა პროდუქტები უნდა იყიდოს შეფარდებით: $x:y=\frac{2}{3}:1$, ანუ 2:3.

პასუხი: [$a_{min}=35$; 2:3].

"მე ვისმენ, და მე მავიწყდება,
მე ვხედავ, და მე ვიმახსოვრებ.
მე ვაკეთებ, და მე მესმის."

ჩინური ანდაზა

სავარჯიშოები

1. ააგეთ და იპოვეთ მანძილები წერტილებს შორის:
   ა) $A(-3;9)$ და $B(3;1)$; ბ) $A(2;-1)$ და $B(5;3)$;
   გ) $A(12;0)$ და $B(0;-5)$; დ) $A(-4;0)$ და $B(0;3)$;
   ე) $A(-2;-7)$ და $B(3;-2)$; ვ) $O(0;0)$ და $A(-8;6)$.

   [ა) 10; ბ) 5; გ) 13; დ) 5; ე) $5\sqrt{2}$; ვ) 10.]

2. იპოვეთ კვადრატის ფართობი, თუ მისი ორი მოსაზღვრე წვეროა $A(3;-7)$ და $B(-1;4)$.

   [137.]

3. მოცემულია კვადრატის ორი მოპირდაპირე წვერო $A(3;5)$ და $C(1;-3)$. გამოთვალეთ კვადრატის ფართობი.

   [34.]

4. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები, თუ მისი წვეროებია: A(3;2), B(-1;-1) და C(11;-6)

[5; 13 და $8\sqrt{2}$.]

5. აჩვენეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია A(-3;-2) B(0;-1) და C(-2;5), მართკუთხაა.

6. რომბის გვერდი $5\sqrt{10}$-ის ტოლია. მისი ორი მოპირდაპირე წვეროა A(4;9) და C(-2;1). გამოთვალეთ რომბის ფართობი.

[S=150 კვ.ერთ.]

7. იპოვეთ AB მონაკვეთის შუა წერტილის, C-ს, კოორდინატები, თუ: ა) A(5;-4) და B(-1;2), ბ) A(6;-3) და B(-2;-7).

[ა) C(2;-1); ბ) C(2;-5).]

8. მოცემულია სამკუთხედი A(-7;4), B(-5;2) და C(6;-3) წვეროებით. იპოვეთ ყველა გვერდის შუა წერტილები.

[(-6;3), (-0,5;0,5), (0,5;-0,5).]

9. იპოვეთ C წერტილის კოორდინატები, რომელიც AB მონაკვეთს ყოფს შეფარდებით 1:2, თუ A(1;2) და B(-1;4).

$$\left[C=\frac{1}{3};\frac{8}{3}.\right]$$

10. AB მონაკვეთი (A წერტილიდან) C(4;1) წერტილით გაყოფილია $\lambda=\frac{1}{4}$-ის ტოლი შეფარდებით. იპოვეთ A-ს კოორდინატები, თუ B(8;5)-ია.

[(3;0).]

11. პარალელოგრამის სამ წვეროს მიმდევრობით აქვს კოორდინატები: A(3;-3), B(-1;1), C(1;6). იპოვეთ: ა) მე-4 წვეროს, D-ს, კოორდინატები; ბ) BD-ს სიგრძე.

[ა) D(5;2), ბ) $\sqrt{37}$.]

12. იპოვეთ K(x,y)-ს კოორდინატები, თუ ის MN-ს ოქროს კვეთით კვეთს, თუ M(-3;-4), N(5;6).

[K(0;-0,25).]

13. იპოვეთ სამკუთხედის ფორმის ერთგვაროვანი დაფის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ A(-2;1), B(3;6), C(5;2).

[O(2;3).]

14. ააგეთ წერტილები, რომელთა (r, φ) პოლარული კოორდინატებია: A(3;0), B(2;$\frac{\pi}{4}$), C(0;$\frac{\pi}{2}$), D(2;π), E(3;$\frac{3\pi}{2}$).

15. ააგეთ წერტილები A(2;-$\frac{\pi}{2}$), B(3;-$\frac{\pi}{2}$), C(4;-$\frac{\pi}{4}$), D(3;$\frac{2}{3}\pi$), M(6;0), N(2;$\frac{\pi}{2}$), K(3;$\frac{3}{4}\pi$), L(4;π).

16. A და B წერტილის პოლარული კოორდინატებია (1;$\frac{\pi}{4}$) და (2;$\frac{\pi}{6}$). იპოვეთ მათი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები:

$\left[A(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}), B(\sqrt{3};1).\right]$

17. M და N წერტილების დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებია M(-1;1) და N(1;$\sqrt{3}$). იპოვეთ პოლარული კოორდინატები.

$\left[M(2;\frac{3}{4}\pi),\ N(2;\frac{\pi}{3}).\right]$

18. იპოვეთ შემდეგი წერტილების: A(2$\sqrt{3}$;2), B(0;-3), C(-4;4), D($\sqrt{2}$;-$\sqrt{2}$), E(-$\sqrt{2}$;-$\sqrt{6}$), F(-7;0) პოლარული კოორდინატები.

$\left[A(4;\frac{\pi}{6}), B(3;-\frac{\pi}{2}), C(4\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}), D(2;-\frac{\pi}{4}),\right.$
$\left. E(2\sqrt{2};\frac{4\pi}{3}), F(7;\pi).\right]$

19. იპოვეთ შემდეგი წერტილების: A(10; $\frac{\pi}{4}$), B(2; $\frac{5\pi}{4}$), C(0; $\frac{\pi}{10}$), D(1;-$\frac{\pi}{4}$), E(-1;$\frac{\pi}{4}$), F(-1;-$\frac{\pi}{4}$) დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები.

[A(0;10), B(-$\sqrt{2}$;-$\sqrt{2}$), C(0;0), D($\sqrt{2}$/2);-$\sqrt{2}$/2),

$E(-\sqrt{2}/2;-\sqrt{2}/2)$, $F(-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$.]

20. იპოვეთ A და B წერტილებს შორის მანძილი, თუ წერტილები მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში: $A(2\sqrt{3};\frac{3}{4}\pi)$, $B(2;\frac{\pi}{4})$.

[d=4.]

21. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(x_0;y_0)$ წერტილზე და აქვს საკუთხო კოეფიციენტი k:

ა) $M(1;2)$, $k=1$; ბ) $M(3;2)$, $k=\frac{4}{3}$; გ) $M(-4;5)$, $k=-\frac{3}{2}$.

[ა) $y=x+1$, ბ) $y=\frac{4}{3}x-2$, გ) $y=-\frac{3}{2}x-1$.]

22. ააგეთ წრფეები:

I. ა) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$; ბ) $-\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$; გ) $-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$; დ) $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$.

II. 1) $x-2y+5=0$; 2) $2x+3y=0$; 3) $5x-2=0$; 4) $2y+7=0$.

23. წრფე გადის A და B წერტილებზე:

ა) A(0;3) და B(4;0); ბ) A(-2;0) და B(0;-5);

გ) A(0;1) და B(-2;0); დ) A(-3;0) და B(0;-2).

დაწერეთ წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში

$$\begin{bmatrix} \text{ა)}\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1; & \text{ბ)}\ -\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1; \\ \text{გ)}\ -\frac{x}{2}+y=1; & \text{დ)}\ -\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1. \end{bmatrix}$$

24. იპოვეთ $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$ წრფის იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებს შორის.

[10.]

25. განსაზღვრეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შედგენილია საკოორდინატო ღერძებითა და $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ წრფით.

[9.]

26. რომბის დიაგონალები ემთხვევა კოორდინატთა ღერძებს. განსაზღვრეთ რომბის ფართობი, თუ ერთ-ერთი მისი გვერდის განტოლება მოცემულია ფორმულით $\frac{x}{2,5}+\frac{y}{10}=1$.

[50.]

27. როგორი კუთხეებით იკვეთებიან წრფეები:

ა) $x-2y-2=0$ და $y=\frac{1}{2}x+3$; ბ) $3x+y-2=0$ და $x-3y+1=0$.

[ა) 0; ბ) $\frac{\pi}{2}$.]

28. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის A(2;3) წერტილზე და პარალელურია $y=2x+5$ წრფის.

[$2x-y-1=0$.]

29. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის A(-3;2) წერტილზე და პერპენდიკულარულია $7x+4y-11=0$ წრფის.

[$4x-7y+26=0$.]

30. პარალელურია თუ არა წრფეები:

ა) $2x+3y-7=0$ და $2x+3y+9=0$; ბ) $y=2x+3$ და $4y-8x=1$;

გ) $3x-5y=0$ და $6x+10y+5=0$.

[ა) დიახ; ბ) დიახ; გ) არა.]

31. პერპენდიკულარულია თუ არა წრფეები:

ა) $3x-y-3=0$ და $x+3y-17=0$; ბ) $2x+5y-6=0$ და $5x+2y-3=0$.

[ა) დიახ; ბ) არა.]

32. იპოვეთ $4x-3y-10=0$ წრფის გადაკვეთის წერტილი: ა) Ox ღერძთან; ბ) Oy ღერძთან.

$\left[\text{ა) } \left(\frac{5}{2};0\right); \text{ ბ) } \left(0;-\frac{10}{3}\right).\right]$;

33. იპოვეთ ორი წრფის გადაკვეთის წერტილები:

ა) $3x-2y-4=0$ და $x+3y-5=0$; ბ) $7x-9y+15=0$ და $19x+12y-20=0$.

[ა) (2;1); ბ) $(0;\frac{5}{3})$.]

34. $2x-y-3=0$ და $x-3y-4=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გავლებულია $x+y=1$ წრფის პარალელური წრფე. იპოვეთ გავლებული წრფის განტოლება.

[$x+y=0$.]

35. $x+2y+2=0$ და $3x+4y+9=0$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე გავლებულია $2x+3y-6=0$ წრფის მართობული წრფე. დაწერეთ გავლებული წრფის განტოლება.

[$3x-2y+18=0$.]

36. მოცემულია სამკუთხედის გვერდების განტოლებები: $2x-5y=3$; $x+3y=7$ და $3x-2y+1=0$. დაწერეთ $2x-5y=3$ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის განტოლება.

[$5x+2y-9=0$.]

37. $A(6;9)$ წერტილიდან გაშვებულია სხივი Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან 45^0-იანი კუთხით; მივა რა სხივი Ox ღერძთან, ის აირეკლება მისგან. იპოვეთ დაცემული და არეკლილი სხივების განტოლებები:

[$x-y+3=0$; $x+y+3=0$.]

მითითება: სხივის დაცემის კუთხე არეკვლის კუთხის ტოლია.

38. იპოვეთ $O(0;0)$, $A(1;2)$, $B(-2;1)$ წერტილებიდან $3x-4y+10=0$ წრფემდე მანძილები.

[2; 1; 0.]

39. მოცემულია სამკუთხედის გვერდების განტოლებები $x-3y+5=0$; $3x+4y+2=0$ და $5x-2y-14=0$. იპოვეთ $3x+4y+2=0$ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

[5,2.]

40. მოცემულია ABC სამკუთხედის წვეროები $A(0;2)$, $B(7;3)$ და $C(1;6)$. განსაზღვრეთ $B\hat{A}C=\alpha$ კუთხე.

[$\operatorname{tg}\alpha=\frac{27}{11}$.]

41. იპოვეთ აბსცისათა ღერძზე წერტილი, საიდანაც $8x+15y+10=0$ წრფემდე მანძილი 1-ის ტოლია.

$$\left[\left(\frac{7}{8};0\right) \text{ და } \left(-\frac{27}{8};0\right).\right]$$

42. იპოვეთ წრფეები, რომლებიც ეკუთვნიან კონას $2x+3y+6+\lambda(x-5y-6)=0$ და პერპენდიკულარულები არიან ძირითად წრფეებთან.

[$3x-2y=0$; $5x+y+6=0$.]

43. დაწერეთ წრეწირის განტოლება, რომლის რადიუსი $R=5$ და ცენტრი მდებარეობს $A(-4;3)$ წერტილში.

[$(x+4)^2+(y-3)^2=25$.]

44. ააგეთ წრეწირები:

ა) $(x+3)^2+(y-2)^2=16$; ბ) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$; გ) $x^2+(y-4)^2=25$.

45. მოცემულია წრეწირი $(x-3)^2+(y+5)^2=16$. გადის თუ არა ის წერტილებზე $A(3;-1)$, $B(3;-9)$ და $C(0;-3)$?

[A და B-ზე გადის, C-ზე არ გადის.]

46. დაწერეთ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია $A(1;0)$-ში და გადის $O(0;0)$-ზე.

[$(x-1)^2+y^2=1$.]

47. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება Ox ღერძს კოორდინატთა სათავეში და გადის წერტილზე $A(0;-8)$.

[$x^2+(y+4)^2=16$.]

48. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია $(4;2)$ წერტილში და გადის $(3;-2)$ წერტილზე.

[$(x-4)^2+(y-2)^2=17$.]

49. მოცემულია წრეწირის განტოლებები ზოგადი სახით, ჩაწერეთ ისინი კანონიკური განტოლებით და ავაგოთ:

ა) $x^2+y^2+4x-4y=0$; ბ) $x^2+y^2-8x=0$; გ) $x^2+y^2+4y=0$.

[ა) $(x+2)^2+(y-2)^2=(2\sqrt{2})^2$;

ბ) $(x-4)^2+y^2=4^2$; გ) $x^2+(y+2)^2=2^2$.]

50. დაწერეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება, თუ მისი ნახევარღერძებია $a=3$ და $b=4$.

$$\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.\right]$$

51. შეამოწმეთ, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ ელიფსზე მდებარეობს თუ არა წერტილები: $A(0;2)$, $B(3;0)$, $C(1;2)$.

[არა, დიახ, არა.]

52. მოცემულია ელიფსი $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. იპოვეთ მისი ნახევარღერძები და მანძილი ფოკუსებს შორის.

[a=5, b=3, 2c=8.]

53. ააგეთ ელიფსი $x^2+4y^2=16$, იპოვეთ ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი.

$$\left[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\ a=4,\ b=2,\right.$$

$$\left.F_1(-2\sqrt{3};0);\ F_2(2\sqrt{3};0),\ \varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}.\right]$$

54. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის ორი წვერო მდებარეობს $x^2+5y^2=20$ ელიფსის ფოკუსებში, ხოლო დანარჩენი ორი ემთხვევა პატარა ღერძის ბოლოებს.

[16 კვ.ერთ.]

55. მოცემულია ელიფსი $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$. იპოვეთ ღერძთა სიგრძეები, წვეროს კოორდინატები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი.

[2a=26, 2b=24, $A_1(-13;0)$, $A_2(13;0)$,

$B_1(0;-12)$, $B_2(0;12)$, $F_1(-5;0)$, $F_2(5,0)$, $\varepsilon=\frac{5}{13}$.]

56. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ორი წვეროა $A_1(-8;0)$ და $A_2(8;0)$, ხოლო ფოკუსებია $F_1(-5;0)$ და $F_2(5;0)$.

$$\left[\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1.\right]$$

57. იპოვეთ $4x^2+9y^2=180$ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი.

$$\left[\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}.\right]$$

58. დედამიწის მოძრაობის ტრაექტორიაა ელიფსი, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში მდებარეობს მზე. დედამიწიდან მზემდე უმცირესი მანძილი მიახლოებით უდრის 147,5 მლნ კმ-ს, ხოლო უდიდესი მანძილი კი არის 152,5 მლნ კმ. იპოვეთ დიდი ნახევარღერძი და დედამიწის ორბიტის ექსცენტრისიტეტი.

$$[a=150 \text{ მლნ. კმ; } \varepsilon=\frac{1}{60}.]$$

59. დაწერეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ
ა) $a=6, b=2$; ბ) $a=8, c=10$; გ) $b=5, c=13$.

$$\left[\text{ა) } \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1;\ \text{ბ) } \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1;\ \text{გ) } \frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1.\right]$$

60. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}=1$ ჰიპერბოლაზე მდებარეობენ თუ არა $A(8;6\sqrt{3})$, $B(6;3\sqrt{5})$ და $C(3;2\sqrt{6})$ წერტილები?

[A და B მდებარეობს, C არ მდებარეობს.]

61. მოცემულია ჰიპერბოლა $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. იპოვეთ მისი ღერძები და მანძილი ფოკუსებს შორის.

$$[2a=6;\ 2b=10;\ 2c=2\sqrt{34}.]$$

62. ააგეთ ჰიპერბოლა $x^2-4y^2=16$ და მისი ასიმპტოტები. იპოვეთ ფოკუსები, ექსცენტრისიტეტი და კუთხე ასიმპტოტებს შორის.

$$\left[\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2},\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}.\right]$$

63. დაწერეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ მისი წვეროები $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსის ფოკუსებშია, ხოლო ფოკუსები კი ელიფსის წვეროებში.

$$\left[\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.\right]$$

64. დაწერეთ პარაბოლის განტოლება, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია, ხოლო მისი ფოკუსია:
ა) F(3;0); ბ) F(0;-5); გ) F(-2;0); დ) F(0;4).

[ა) $y^2=12x$, ბ) $x^2=-20y$, გ) $y^2=-8x$, დ) $x^2=16y$.]

65. შეამოწმეთ მდებარეობს თუ არა A(2;-2) და B(1;2) წერტილები $y^2=2x$ პარაბოლაზე?

[A მდებარეობს; B არ მდებარეობს.]

66. განსაზღვრეთ პარაბოლის ფოკუსები და დირექტრისები:
ა) $y^2=16x$; ბ) $x^2=-10y$; გ) $y^2=-8x$; დ) $x^2=6y$.

[ა) F(4;0), x=-4; ბ) $F(0;-\frac{5}{2})$, $y=\frac{5}{2}$;

გ) F(-2;0), x=2; დ) $F(0;\frac{3}{2})$, $y=-\frac{3}{2}$.]

67. დაწერეთ პარაბოლის განტოლება, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია და მისი დირექტრისაა:
ა) x=-2; ბ) x=3.

[$y^2=8x$; $y^2=-12x$.]

68. დაწერეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია, სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ და გადის A(4;-2) წერტილზე.

[$y^2=x$.]

69. იპოვეთ A(2;3;1), B(5;-3;2), C(-3;2;-1) წერტილთა სიმეტრიული წერტილების კოორდინატები შემდეგი სიბრტყეების, ღერძებისა და წერტილის მიმართ: 1) Oxy სიბრტყის მიმართ; 2) Oxz სიბრტყის მიმართ; 3) Oyz სიბრტყის მიმართ; 4) აბსცისათა ღერძის მიმართ; 5) ორდინატთა ღერძის მიმართ; 6) აპლიკატთა ღერძის მიმართ; 7) კოორდინატთა სათავის მიმართ.

$$\begin{bmatrix} 1) & (2;3;-1), & (5;-3;-2), & (-3;2;1); \\ 2) & (2;-3;1), & (5;3;2), & (-3;-2;-1); \\ 3) & (-2;3;1), & (-5;-3;2), & (3;2;-1); \\ 4) & (2;-3;-1), & (5;3;-2), & (-3;-2;1); \\ 5) & (-2;3;-1), & (-5;-3;-2), & (3;2;1); \\ 6) & (-2;-3;1), & (-5;3;2), & (3;-2;-1); \\ 7) & (-2;-3;-1), & (-5;3;-2), & (3;-2;1). \end{bmatrix}$$

70. ამოცანა მკურნალობის მეთოდის შერჩევის შესახებ [13].

არსებობს კიბოს მკურნალობის ორი მეთოდი – სხივური და ქიმიური თერაპია. ორივე მეთოდის ეფექტურობა გამოისახება რაიმე საერთო ერთეულებში. მაგ., მედიკამენტური პრეპარატის ეფექტურობა არის 1000 ერთეული ერთ გრამ პრეპარატზე, ხოლო დასხივებისა – 1000 ერთეული წუთში. ვთქვათ, ავადმყოფს გამოჯანმრთელებისთვის სჭირდება ეფექტურობის არანაკლებ 3000 ერთეულისა. აღსანიშნავია, რომ ორივე მეთოდი ტოქსიკურია. ამიტომ, არც ერთი მეთოდი არ შეიძლება გამოვიყენოთ განუსაზღვრელად. ვთქვათ, ტოქსიკურობაც გამოისახება ერთსადაიმავე ერთეულებში.

მაგალითად, წამლების ტოქსიკურობა ტოლია 400 ერთეულის გრამზე, ხოლო გამოსხივების ტოქსიკურობა 1000 ერთეულია წთ-ში.

დავუშვათ, რომ ავადმყოფმა არ უნდა მიიღოს 2000 ერთეულზე მეტი ტოქსიკურობა. დავუშვათ ისიც, რომ ერთი გრამი წამლის შეყვანა 3-ჯერ უფრო მეტ უარყოფით შედეგს იძლევა, ვიდრე დასხივება ერთ წუთში. ე.ი., თუკი შევიყვანთ x_1 წონის ერთეულ წამალს და დავასხივებთ ავადმყოფს x_2 წთ-ის განმავლობაში, მაშინ, ორგანიზმი ღებულობს უარყოფით შედეგს, რომელიც საერთო ჯამში ტოლია

$$z=3x_1+x_2.$$

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ შევარჩიოთ ორივე მეთოდის ისეთი თანაფარდობა, რომელიც დააკმაყოფილებს ზემოთ ფორმულირებულ შეზღუდვებს, ამავე დროს ეს უარყოფითი ზეგავლენა იყოს რაც შეიძლება უმცირესი. ასეთ თანაფარდობას *ოპტიმალური* ეწოდება.

პასუხი: [$z_{min}\approx 6.3$. ზეგავლენა ოპტიმალური იქნება,

თუ შევიყვანთ პრეპარატის $\frac{5}{3}$ ერთეულს

და დავასხივებთ $\frac{4}{3}$ წთ-ის განმავლობაში.]

"მათემატიკის უმაღლესი დანიშნულებაა –
ვიპოვოთ წესრიგი იმ ქაოსში,
რომელიც ჩვენს გარშემოა".

ნ.ვინერი

თავი 2. წრფივი და ვექტორული ალგებრის ელემენტები

§2.1. მატრიცები და მოქმედებები მათზე

განსაზღვრა 2.1. a_{ij} ელემენტების ცხრილს

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

რომელსაც გააჩნია **m** სტრიქონი და **n** სვეტი, **m×n** განზომილებიანი *მატრიცა* ეწოდება. ის მოკლედ ასე ჩაიწერება:

(a_{ij}), i=1,2,3,...,m; j=1,2,3,...,n.

a_{ij} რიცხვებს ეწოდება მისი *ელემენტები*. თუ მატრიცაში:

1) **m=n**, მატრიცას ეწოდება *კვადრატული*;
2) **m≠n** - მართკუთხოვანი;
3) **m>1, n=1** - მატრიცა სვეტი;
4) **m=1, n>1** - მატრიცა სტრიქონი.

მეორე რიგის კვადრატულ მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad (2.2)$$

ხოლო მესამე რიგის კვადრატულ მატრიცას კი

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (2.3)$$

სიმარტივისათვის მატრიცას აღნიშნავენ ერთი ასოთი, მაგ., **A, B, C,...** .

განსაზღვრა 2.2. მატრიცა, რომელიც მიიღება მოცემული **A** მატრიცის სტრიქონების შეცვლით იგივე ნომრის სვეტებით, *ტრანსპონირებული* ეწოდება და აღინიშნება $\mathbf{A}^T$-თი.

განსაზღვრა 2.3. ორი **A** და **B** მატრიცა *ტოლია* (**A=B**), თუ ისინი ერთნაირი განზომილებისაა და შესაბამისი ელემენტები ერთმანეთის ტოლია. ასე, მაგალითად, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12}\\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22}\end{pmatrix}$ და $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12}\\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22}\end{pmatrix}$, მაშინ **A=B**, თუ $\mathbf{a}_{11}=\mathbf{b}_{11}$, $\mathbf{a}_{12}=\mathbf{b}_{12}$, $\mathbf{a}_{21}=\mathbf{b}_{21}$, $\mathbf{a}_{22}=\mathbf{b}_{22}$.

განსაზღვრა 2.4. ორი ერთნაირგანზომილებიანი მატრიცების ჯამი (**A+B**) (სხვაობა (**A-B**)) ეწოდება **C** მატრიცას, რომლის ელემენტები არის **A** და **B** შესაბამისი ელემენტების ჯამი (სხვაობა), ე.ი. **A+B=C, (A-B=C).**

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{11}+\mathbf{b}_{11} & \mathbf{a}_{12}+\mathbf{b}_{12}\\ \mathbf{a}_{21}+\mathbf{b}_{21} & \mathbf{a}_{22}+\mathbf{b}_{22}\end{pmatrix}\quad\left(\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{11}-\mathbf{b}_{11} & \mathbf{a}_{12}-\mathbf{b}_{12}\\ \mathbf{a}_{21}-\mathbf{b}_{21} & \mathbf{a}_{22}-\mathbf{b}_{22}\end{pmatrix}\right). \qquad (2.4)$$

განსაზღვრა 2.5. მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულია, ეწოდება *მატრიცა-ნული* და აღინიშნება (0)-ით.

განსაზღვრა 2.6. **A** მატრიცის ნამრავლი λ რიცხვზე ეწოდება მატრიცას, რომლის ელემენტები არის **A** მატრიცის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლი λ-ზე. ე.ი.

$$\lambda\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda\mathbf{a}_{11} & \lambda\mathbf{a}_{12}\\ \lambda\mathbf{a}_{21} & \lambda\mathbf{a}_{22}\end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

ზემოთ ჩამოთვლილ მოქმედებებს აქვთ შემდეგი თვისებები:

1) **A+B=B+A;**
2) **(A+B)+C=A+(B+C);**
3) **A+0=A;**
4) **λ(A+B)= λA+λB.**

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\mathbf{A}^T$, თუ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

ამოხსნა: $\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

პასუხი: $\left[\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}.\right]$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ მატრიცების ჯამი:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 2+4 & 3+1\\ 2+3 & 4+0 & 5+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 4\\ 5 & 4 & 10\end{pmatrix}.$$

A მატრიცა რომ გავამრავლოთ **B** მატრიცაზე უნდა სრულდებოდეს პირობა: **A**-ს სვეტების რიცხვი ტოლი უნდა იყოს **B**-ს სტრიქონების რიცხვის (ანუ **A**-ს მეორე განზომილება ტოლი უნდა იყოს **B**-ს პირველი განზომილების).

განსაზღვრა 2.7. **A** მატრიცის ნამრავლი **B** მატრიცაზე ტოლია ისეთი **C** მატრიცის, რომლის ელემენტები მიიღება **A** მატრიცის თითოეული სტრიქონისა და **B** მატრიცის სათითაოდ ყველა სვეტის შესაბამისი ელემენტების წყვილ-წყვილად ნამრავლთა ჯამით.

ე.ი. თუ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ და $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$,

მაშინ

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}.$$

ზოგადად

$$c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}. \qquad (2.6)$$

მაგალითი 3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$.

ე.ი. $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8\\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$,

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot1+6\cdot3 & 5\cdot2+6\cdot4\\ 7\cdot1+8\cdot3 & 7\cdot2+8\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{pmatrix},$$

ე.ი. **AB≠BA.**

სამართლიანია თვისება **A(BC)=(AB)C** (შემოწმება შეიძლება).

თუ **m×n** განზომილებიანი მატრიცა მრავლდება **n×k** განზომილებიან მატრიცაზე, ნამრავლში მიიღება **m×k** განზომილებიანი მატრიცა.

განსაზღვრა 2.8. კვადრატულ მატრიცას, რომლის მთავარ დიაგონალზე მდებარეობენ 1-ები, ხოლო ყველა დანარჩენი ელემენტი 0-ია, *ერთეულოვანი მატრიცა* ეწოდება. მას აღნიშნავენ **E**-თი:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad (2.7)$$

მაგალითი 4. $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

განვიხილოთ

$$AE=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 1\\ a_{21}\cdot 1+a_{22}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=A,$$

$$EA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot a_{11}+0\cdot a_{21} & 1\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}\\ 0\cdot a_{11}+1\cdot a_{21} & 0\cdot a_{12}+1\cdot a_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=A.$$

ე.ი. $AE=EA=A$. (2.8)

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $2A+5B$, თუ

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

ამოხსნა:

$$2A=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 8 & 2\end{pmatrix}, \quad 5B=\begin{pmatrix}10 & 15\\ 5 & -10\end{pmatrix}, \quad 2A+5B=\begin{pmatrix}16 & 25\\ 13 & -8\end{pmatrix}.$$

პასუხი: $\left[\begin{pmatrix}16 & 25\\ 13 & -8\end{pmatrix}.\right]$

განსაზღვრა 2.9. ორ **A** და **B** მატრიცას ეწოდება *ექვივალენტური*, თუ ერთი მათგანი მიიღება მეორის ელემენტარული გარდაქმნებით და აღინიშნება ასე: $A\sim B$.

მატრიცების *ელემენტარულ გარდაქმნებს* ეკუთვნის:

- მატრიცის ორი სტრიქონის ადგილების გაცვლა;
- მატრიცის რომელიმე სტრიქონის ყველა ელემენტის გამრავლება ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე;
- მატრიცის ერთი სტრიქონის ყველა ელემენტზე სხვა სტრიქონის შესაბამისი ელემენტების მიმატება, რომლებიც ნულისგან განსხვავებულ რიცხვზეა გამრავლებული.

§2.2. დეტერმინანტები

განსაზღვრა 2.10. მეორე რიგის *დეტერმინანტი* ეწოდება $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ მატრიცის შესაბამის სიდიდეს, რომელიც ტოლია $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ - ის. დეტერმინანტს აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ან მოკლედ $|A|$, ან Δ. ე.ი.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad (2.9)$$

a_{11}, a_{22} ელემენტები ქმნიან მთავარ დიაგონალს, a_{12}, a_{21} - კი დამხმარე დიაგონალს.

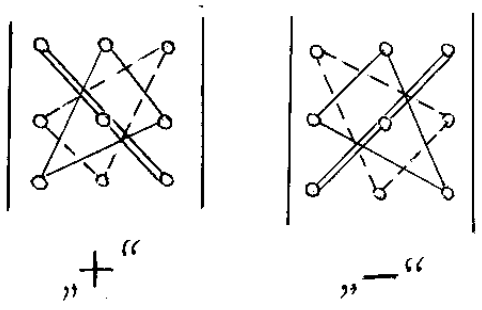
მაგალითი 1. გამოვთვალოთ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=14-12=2.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ:

$$|E|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

განსაზღვრა 2.11. მესამე რიგის დეტერმინანტი ეწოდება $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ მატრიცის შესაბამის სიდიდეს, რომელიც გამოითვლება სამკუთხედის წესის მიხედვით, რომლის დამახსოვრება ადვილია სქემა 1-ის გამოყენებით



სქემა 1

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (2.10)$$

მაგალითი 3.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=15+24+24-27-20-16=0.$$

პასუხი: [Δ=0.]

განსაზღვრა 2.12. |A| დეტერმინანტის რომელიმე ელემენტის *მინორი* ეწოდება დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება იმ სტრიქონისა და სვეტის ამოშლით, რომლებსაც ეკუთვნის მოცემული ელემენტი.

|A| დეტერმინანტის a_{ik} ელემენტის მინორს აღნიშნავენ M_{ik}-თი.

განსაზღვრა 2.13. |A| დეტერმინანტის a_{ik} ელემენტის *ალგებრული დამატება* ეწოდება მის მინორს $(-1)^{i+k}$ ნიშნით. მას აღნიშნავენ სიმბოლოთი A_{ik}, ე.ი.

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik} \quad . \quad (2.11)$$

ნებისმიერი რიგის დეტერმინანტს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

დეტერმინანტის სიდიდე:

1) არ შეიცვლება, თუ მის სტრიქონებს შევცვლით შესაბამისი სვეტებით;
2) არ შეიცვლება, თუ რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს მივუმატებთ სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამის ელემენტებს, გამრავლებულს ერთსა და იგივე რიცხვზე;
3) იცვლის ნიშანს, თუ შევუცვლით ადგილს ორ სტრიქონს, ან, სვეტს;
4) იზრდება k-ჯერ, თუ რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს გავამრავლებთ k-ზე, ე.ი. რომელიმე სტრიქონის (სვეტის)

ელემენტების საერთო მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ;

5) უდრის ნულს, თუ რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი ნულია;

6) ტოლია ნულის, თუ ორი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტები პროპორციულია;

7) ტოლია რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების ნამრავლთა ჯამისა მათ ალგებრულ დამატებებზე.

მე-7 თვისებას ეწოდება *დეტერმინანტის დაშლა რომელიმე სტრიქონის (სვეტის)* ელემენტების მიხედვით.

ეს უკანასკნელი მესამე რიგის დეტერმინანტისათვის ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \\ |A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \\ \dots \\ |A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \end{cases} \qquad (2.12)$$

დეტერმინანტის დაშლა ხელსაყრელია იმ სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების მიხედვით, რომელიც მეტ ნულებს შეიცავს.

მაგალითი 4.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -54.$$

პასუხი: [Δ=-54.]

განსაზღვრა 2.14. კვადრატულ A მატრიცას ეწოდება *გადაგვარებული*, თუ მისი |A| დეტერმინანტი ნულის ტოლია, წინააღმდეგ შემთხვევაში A მატრიცას ეწოდება *არაგადაგვარებული*.

განსაზღვრა 2.15. არაგადაგვარებული A მატრიცის *შებრუნებული* მატრიცა A^{-1} ეწოდება მატრიცას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}, \qquad (2.13)$$

სადაც A_{ik} არის a_{ik} ელემენტის ალგებრული დამატება.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ A^{-1}, თუ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A მატრიცის დეტერმინანტი

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-9.$$

რადგანაც $|A|\neq 0$, ამიტომ A მატრიცა არაგადაგვარებულია და მას გააჩნია შებრუნებული A^{-1} მატრიცა. გამოვთვლით ალგებრულ დამატებებს:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-6;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3;\ A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-4.$$

შევადგინოთ მატრიცა

$$C=\begin{pmatrix} -\frac{3}{9} & \frac{6}{9} & -\frac{3}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

მიღებული მატრიცის ელემენტები გავამარტივოთ და მოვახდინოთ მატრიცის *ტრანსპონირება,* ანუ, მისი სტრიქონები შევცვალოთ შესაბამისი სვეტებით, მივიღებთ A^{-1} მატრიცას:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

პასუხი: $\left[A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}. \right]$

§2.3. წრფივ განტოლებათა სისტემები

1. n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემა.

n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \qquad (2.14)$$

$x_1, x_2,\ldots,x_n$ უცნობებია, a_{ik} რიცხვები (2.14) სისტემის კოეფიციენტები, ხოლო $b_1, b_2, \ldots, b_n$ რიცხვები - თავისუფალი წევრებია. (2.14) სისტემას ეწოდება *ერთგვაროვანი,* თუ $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

A მატრიცას ეწოდება (2.14) *სისტემის მატრიცა*, ხოლო მის დეტერმინანტს |A| - სისტემის *მთავარი დეტერმინანტი*.

(2.14) *სისტემის ამონახსნი* ეწოდება $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადთა მნიშვნელობებს, რომლებიც აქცევენ სისტემის განტოლებებს იგივეობებად.

სისტემა, რომელსაც გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი *თავსებადი* ეწოდება. სისტემა, რომელსაც არ გააჩნია ამონახსნი - *არათავსებადი* ეწოდება.

ვთქვათ, $|A|\neq 0$.

უცნობებით შედგენილი მატრიცა - სვეტი აღვნიშნოთ X-ით, ხოლო თავისუფალი წევრების მატრიცა - სვეტი B-თი.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (2.16)$$

მატრიცათა გამრავლების წესის თანახმად AX ტოლია (2.14) სისტემის განტოლებათა მარცხენა ნაწილების. მატრიცათა ტოლობის თანახმად კი

$$AX=B. \qquad (2.17)$$

(2.17) ეწოდება *მატრიცული განტოლება*, რადგანაც $|A|\neq 0$, ამიტომ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა A^{-1} არსებობს. (2.17) ტოლობის ორივე მხარე მარცხნიდან გადავამრავლოთ A^{-1}-ზე.

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B,$$
$$(A^{-1}A)X=A^{-1}B,$$

რადგანაც $A^{-1}A=E$, და $EX=X$, ამიტომ

$$X=A^{-1}B. \qquad (2.18)$$

(2.18) არის (2.17)-ის ამონახსნი.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემა მატრიცულად.

ამოხსნა:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

$A^{-1}=-9$ (იხილეთ §2.2-ის მაგალითი 5)

(2.18) ტოლობის თანახმად

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\cdot 10 + \frac{4}{9}\cdot 23 - \frac{2}{9}\cdot 13 \\ \frac{2}{3}\cdot 10 - \frac{2}{9}\cdot 23 + \frac{1}{9}\cdot 13 \\ -\frac{1}{3}\cdot 10 + \frac{1}{9}\cdot 23 + \frac{4}{9}\cdot 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

პასუხი: $[x_1=4; \; x_2=3; \; x_3=5.]$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ სისტემა: $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$

ამოხსნა:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

$AX=B$, $X=A^{-1}B$. ვიპოვოთ A^{-1}.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14; \; A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5; \; A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-10;\ A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-4;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=8;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1;\ A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\ -10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix};$$

$$X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\ -10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}126+70-208\\ -90-56+128\\ -18+14+16\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-12\\ -18\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -2\end{pmatrix}.$$

პასუხი: [x=2, y=3, z=-2.]

2. კრამერის ფორმულები (კრამერი (1704-1752) – შვეიცარიელი მათემატიკოსი).

n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემის (2.14) ამოხსნა მატრიცული მეთოდის გარდა, ხელსაყრელია დეტერმინანტების გამოყენებით. ამ მეთოდს *კრამერის* მეთოდი ეწოდება.

კრამერის ფორმულები ჩაიწერება ასე:

$$x_i=\frac{\Delta x_i}{\Delta},\ i=1,2,...,n, \qquad (2.19)$$

სადაც Δ არის (2.14) სისტემის *მთავარი დეტერმინანტი,* Δ_{x_i} არის *დამხმარე დეტერმინანტები,* რომლებიც მიიღება მთავარ დეტერმინანტში x_i, $i=\overline{1,n}$ უცნობის კოეფიციენტების რიგ-რიგობით შეცვლით თავისუფალი წევრებით.

განიხილება შემდეგი შემთხვევები:

1) $\Delta\neq 0$, (2.14) - აქვს ერთადერთი ამონახსნი;

2) $\Delta=0$, $\Delta_{x_i}\ (i=\overline{1,n})$-დან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ (2.14) სისტემა არათავსებადია (არა აქვს ამონახსნი).

3) $\Delta=0$, $\Delta_{x_i}=0$ $(i=\overline{1,n})$. (2.14) სისტემას აქვს უსასრულოდ მრავალი ამონახსნი (ანუ განუსაზღვრელია).

მაგალითი 3. ამოვხსნათ სისტემა: $\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=2. \end{cases}$

ამოხსნა:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

ამიტომ აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-2=-3;\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1;\ x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{3}{2};\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-\frac{1}{2}.$$

პასუხი: $\left[x=\frac{3}{2};\ y=-\frac{1}{2}.\right]$

3. n უცნობიანი n წრფივი ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა.

n უცნობიან n წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0. \end{cases} \qquad (2.20)$$

ეს სისტემა ყოველთვის თავსებადია, რადგანაც მას ყოველთვის გააჩნია *ტრივიალური*, ანუ, *ნულოვანი* ამონახსნი $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, რადგანაც დეტერმინანტის თვისების თანახმად, ყველა $\Delta_{x_i}=0$ (დეტერმინანტი, რომელსაც აქვს ნულოვანი სტრიქონი (სვეტი) ნულის ტოლია).

მაგალითი 4. ამოვხსნათ სისიტემა $\begin{cases} 5x+2y=0, \\ 7x+4y=0. \end{cases}$

ამოხსნა: $\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=6\neq 0$, $\Delta x=\Delta y=0$, ამიტომ $x=y=0$.

პასუხი: [x=0; y=0.]

იმ შემთხვევაში, როცა (2.14) და (2.20) სისტემები განუსაზღვრელია, მათი ზოგადი ამონახსნის საპოვნელად მთავარი დეტერმინანტიდან განვსაზღვროთ მაქსიმალური რიგის, ნულის არატოლი მინორი, შემდეგ მოცემული სისტემიდან დავტოვოთ ის განტოლებები, რომელთა კოეფიციენტები მონაწილეობენ მინორში. ახლად მიღებული სისტემა გადავწეროთ ისე, რომ მინორში მონაწილე კოეფიციენტების შესაბამისი უცნობები დავტოვოთ ტოლობის მარცხენა მხარეს, დანარჩენები კი გადავიტანოთ ტოლობის მარჯვენა მხარეს ნიშნის შეცვლით.

ტოლობის მარჯვენა მხარეს მიღებული გამოსახულებები ჩავთვალოთ თავისუფალ წევრებად და სისტემა ამოვხსნათ ჩვეულებრივად კრამერის ფორმულებით, ან მატრიცულად.

მაგალითი 5. ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ 2x-y+3z=0, \\ x+3y-4z=0. \end{cases}$$

ამოხსნა: Δ-ს მნიშვნელობა გამოვთვალოთ დეტერმინანტის თვისებების გამოყენებით:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{I სვ}+3\cdot\text{III სვ} \\ \text{II სვ}+2\cdot\text{III სვ} \end{matrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 3+3(-1) & 2+2(-1) & -1 \\ 2+3\cdot 3 & -1+2\cdot 3 & 3 \\ 1+3(-4) & 3+2(-4) & -4 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 11 & +5 & 3 \\ -11 & -5 & -4 \end{vmatrix} =-1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 11 & +5 \\ -11 & -5 \end{vmatrix} =0,$$

$\Delta=0$, ასევე $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$.

ამ შემთხვევაში, გარდა ტრივიალური ნულოვანი ამონახსნისა, სისტემას აქვს უსასრულოდ მრავალი ამონახსნი.

შევამოწმოთ მინორი. მაგალითად, ზედა მარცხენა კუთხეში

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, ამიტომ შევინარჩუნოთ პირველი და მეორე განტოლება და სისტემა გადავწეროთ ასე:

$$\begin{cases} 3x + 2y = z, \\ 2x - y = -3z. \end{cases} \qquad \Delta = -7 \neq 0.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} z & 2 \\ -3z & -1 \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = (-1+6)z = 5z,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & z \\ 2 & -3z \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-9-2)z = -11z,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{5}{7}z, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{11}{7}z.$$

(*შენიშვნა*: ამ შემთხვევაში z-ს უწოდებენ თავისუფალ უცნობს, მას შეუძლია ნებისმიერი მნიშვნელობის მიღება, შესაბამისად x, y-ც ღებულობს უსასრულოდ მრავალ მნიშვნელობას).

პასუხი: $\left[x = -\frac{5}{7}z;\ y = \frac{11}{7}z. \right]$

კერძო ამონახსნებია, მაგალითად:

x	y	z
0	0	0
-5	11	7
-10	22	14
$-\frac{5}{7}$	$\frac{11}{7}$	1

და ა.შ.

4. n უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა კრამერის ფორმულებით.

როცა n>m-ზე, მაშინ სისტემაში n-m რაოდენობის უცნობები უნდა გადავიტანოთ ტოლობის მარჯვენა მხარეს იმ პირობით, რომ მიღებული m-ური რიგის მთავარი დეტერმინანტი განსხვავებული იყოს ნულიდან. შემდეგ კი ამოხსნა ხდება ზემოთ განხილული მეთოდის გამოყენებით.

მაგალითი 6. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x+3y-z=3. \end{cases}$$

ამოხსნა:

$$\begin{cases} x-2y=4-z, \\ 2x+3y=3+z. \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=7\neq 0;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4-z & -2 \\ 3+z & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=18-z;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 4-z \\ 2 & 3+z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-5+3z.$$

პასუხი: $\left[x=\frac{18-z}{7};\quad y=\frac{-5+3z}{7}.\right]$

5. n უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{2.21}$$

განსაზღვრა 2.15. მატრიცის *რანგი* ეწოდება მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული მინორის უდიდეს რიგს.

ელემენტარული მოქმედებების შედეგად მატრიცის რანგი არ იცვლება.

ელემენტარული მოქმედებების ქვეშ გვესმის:

1) სტრიქონების შეცვლა სვეტებით და პირიქით;
2) მატრიცის სტრიქონების ადგილის შეცვლა;
3) ნულოვანი სტრიქონის ამოშლა;
4) რომელიმე სტრიქონის ელემენტების გამრავლება ნულისაგან განსხვავებულ რაიმე რიცხვზე;
5) ერთი სტრიქონის ელემენტებზე სხვა სტრიქონის ელემენტების მიმატება.

მაგალითი 7. ვიპოვოთ A მატრიცის რანგი, თუ

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}.$$

ამოხსნა:

შევამოწმოთ მე-3 რიგის მინორები:

$$\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&4\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1&2&0\\0&0&2\\2&4&0\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&2\\2&0&0\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}0&2&0\\1&0&2\\0&4&0\end{vmatrix}=0.$$

რადგან ესენი 0-ის ტოლია, გავაგრძელოთ დანარჩენების შემოწმება. სულ შესაძლებელია ათი მესამე რიგის მინორის შედგენა. დავრწმუნდებით, რომ ყველა მე-3 რიგის მინორი 0-ის ტოლია, ახლა უნდა შევამოწმოთ მე-2 რიგის მინორები, ერთ-ერთი მათგანია

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

რადგანაც პირველივე მინორი $\neq 0$, ამიტომ, დანარჩენს არ ვამოწმებთ და ვასკვნით: A მატრიცის რანგი 2-ის ტოლია, ანუ, $r(A)=2$.

პასუხი: [r(A)=2.]

რანგის პოვნის ეს მეთოდი შრომატევადია. უფრო მარტივად მივაღწევთ მიზანს, თუ ელემენტარული გარდაქმნებით მატრიცას გარდავქმნით ისე, რომ მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტები იყოს ნულისაგან განსხვავებული, ხოლო მათ ქვევით ყველა ელემენტი ვაქციოთ ნულებად. ამ გარდაქმნების შედეგად მიღებული არანულოვან სტრიქონთა რიცხვი *მატრიცის რანგის ტოლია.*

მაგალითი 8.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\III\text{სტრ}-2\cdot I\text{სტრ}\\\sim\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

არანულოვანი სტრიქონების რიცხვი 2-ის ტოლია

ე.ი. $r(A)=2$.

პასუხი: [r(A)=2.]

(2.21) სისტემის *მთავარი მატრიცა* ეწოდება (2.15)-ს, ხოლო *გაფართოებული მატრიცა*

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \qquad (2.22)$$

კრონეკერ-კაპელის თეორემა. იმისათვის, რომ (2.21) სისტემა იყოს თავსებადი, აუცილებელია და საკმარისი სისტემის მატრიცის (2.15) რანგი ტოლი იყოს გაფართოებული მატრიცის (2.22) რანგის. როცა $r=n$, მაშინ, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როცა $r<n$ უსასრულოდ მრავალი ამონახსნი.

ამ თეორემის გამოყენებით სისტემის ამოსხნას *გაუსის მეთოდს* უწოდებენ. ეს მეთოდი განვიხილოთ მაგალითებზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 9 . ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა : ვადგენთ გაფართოებულ მატრიცას:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A_1)=3$, $n=3$, $r=n$.

სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, სისტემა ჩავწეროთ ასე:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 - 3x_3 = -7, \\ x_3 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 6 - 2 - 3 = 1, \\ x_2 = -7 + 3\cdot 3 = 2, \\ x_3 = 3. \end{array}$$

პასუხი: $[x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3.]$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1 0 .

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 10. \end{cases}$$

ამოხსნა:

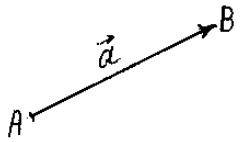
$$A_1=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\2&1&-1&3\\3&3&2&10\end{array}\right)\overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\underset{\text{III}-3\cdot\text{I}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&-3&-7&-5\\0&-3&-7&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&3&7&5\\0&0&0&3\end{array}\right).$$

$r(A)=2,\ r(A_1)=3,\ r(A)\neq r(A_1)$

პასუხი: [სისტემა არათავსებადია.]

§2.4. ვექტორის ცნება და წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე

განსაზღვრა 2.16. მიმართულ მონაკვეთს *ვექტორი* ეწოდება.



ნახ.2.1

ის აღინიშნება ასე: $\vec{AB}$ ან $\vec{a}$.

A - არის ვექტორის საწყისი, B - კი ბოლო წერტილი.

განსაზღვრა 2.17. ვექტორის სიგრძეს ვექტორის *მოდული* ეწოდება და აღინიშნება ასე: $|\vec{AB}|$ ან $|\vec{a}|$.

განსაზღვრა 2.18. ვექტორებს ეწოდებათ *კოლინეარული*, თუ ისინი მდებარეობენ ერთსა და იმავე წრფეზე, ან, პარალელურ წრფეებზე.

განსაზღვრა 2.19. $\vec{a}=\vec{b}$ თუ: 1) მათ აქვთ ტოლი მოდულები; 2) კოლინეარული არიან და 3) ორივე ერთ მხარეს არის მიმართული.

განსაზღვრა 2.20. ვექტორს, რომლის სიგრძე 1-ს უდრის, ერთეულოვანი ვექტორი ეწოდება და აღინიშნება $\vec{e}$-თი ($|\vec{e}|=1$).

განსაზღვრა 2.21. ვექტორს, რომლის საწყისი და ბოლო წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, *ნულოვანი ვექტორი* ეწოდება და აღნიშნავენ $\vec{0}$.

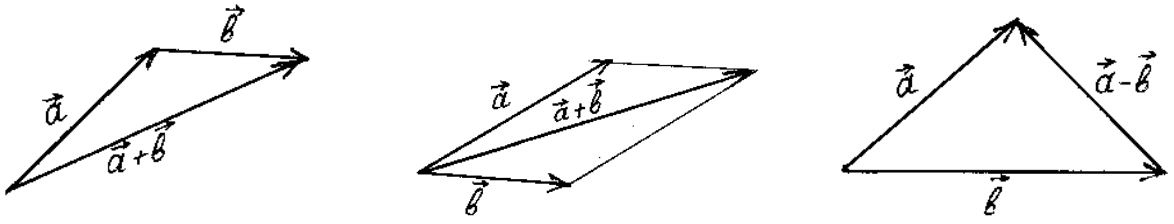
განსაზღვრა 2.22. ორ ვექტორს ეწოდება ურთიერთსაწინააღმდეგო, თუ მათ აქვთ ტოლი მოდულები, კოლინეარულები არიან და აქვთ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება.

$\vec{AB}$-ს მოპირდაპირე ვექტორია $\vec{BA}$, $\vec{a}$-სი კი $-\vec{a}$.

განსაზღვრა 2.23. $\vec{a}$ ვექტორის *ნამრავლი* m სკალარზე ეწოდება ახალ ვექტორს, რომლის სიგრძეა $a|m|$ და აქვს $\vec{a}$-ს მიმართულება, (თუ $m>0$) ან $\vec{a}$-ს საწინააღდეგო მიმართულება (როცა $m<0$).

განსაზღვრა 2.24. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების *ჯამი* ეწოდება ვექტორს, რომლის საწყისი მდებარეობს $\vec{a}$-ს საწყის წერტილში, ბოლო წერტილი კი $\vec{b}$–ს ბოლო წერტილში, იმ პირობით, რომ $\vec{b}$-ს საწყისი წერტილი ემთხვევა $\vec{a}$-ს ბოლო წერტილს და აღინიშნება სიმბოლოთი $\vec{a}+\vec{b}$ (ნახ.2.2ა). ასევე $\vec{a}+\vec{b}$ ჯამი განისაზღვრება როგორც $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალი (ნახ.2.2ბ).

განსაზღვრა 2.25. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების *სხვაობა* არის $\vec{a}$ და $(-\vec{b})$ ვექტორების ჯამი (ნახ.2.3).



ა) ბ)

ნახ.2.2 ნახ.2.3

განსაზღვრა 2.26. ვექტორებს $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ ეწოდებათ *წრფივად დამოკიდებული*, თუ არსებობს ერთდროულად ნულის არატოლი რიცხვები $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, რომელთათვისაც ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_n\vec{a}_n=0. \qquad (2.23)$$

განსაზღვრა 2.27. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ ვექტორებს ეწოდებათ *წრფივად დამოუკიდებელი*, თუ (2.23) ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$.

განსაზღვრა 2.28. გამოსახულებას, $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_n\vec{a}_n$, ეწოდება $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ *ვექტორების წრფივი კომბინაცია.*

თუ რამდენიმე ვექტორი წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ მათგან ერთი მაინც შეიძლება წარმოვიდგინოთ დანარჩენის წრფივი კომბინაციის სახით.

განსაზღვრა 2.29. თუ $\vec{a}$ ვექტორი **Ox** ღერძთან ადგენს φ-ს ტოლ კუთხეს ($\left(\widehat{Ox,\vec{a}}\right)=\varphi$), მაშინ $\vec{a}$-ს პროექცია (გეგმილი) **Ox**-ზე გამოითვლება ფორმულით:

$$\text{გეგმ. } \vec{a}_{Ox}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi=|\vec{a}|\cdot\cos\left(\widehat{Ox,\vec{a}}\right). \qquad (2.24)$$

განსაზღვრა 2.30. $\vec{AB}$ ვექტორის პროექციებს **Ox, Oy, Oz** ღერძებზე აღნიშნავენ **X, Y, Z**-ით,

$$(X=\text{გეგმ}_{Ox}\vec{AB},\ Y=\text{გეგმ}_{Oy}\vec{AB},\ Z=\text{გეგმ}_{Oz}\vec{AB}),$$

უწოდებენ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის *კოორდინატებს* და ჩაწერენ ასე:

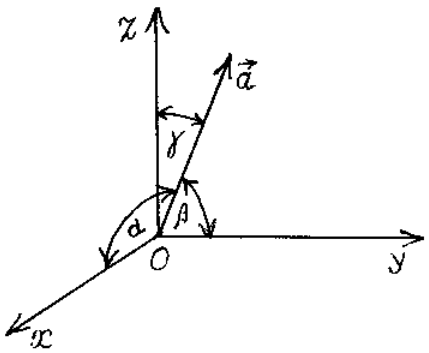
$$\vec{AB}=\{X;Y;Z\}. \qquad (2.25)$$

თუ $A(x_1;y_1;z_1)$ და $B(x_2;y_2;z_2)$ ვექტორის საწყისი და ბოლო წერ-ტილებია, მაშინ მისი კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$X=x_2-x_1,\quad Y=y_2-y_1,\quad Z=z_2-z_1\ . \qquad (2.26)$$

თუ $\vec{a}=\{X,Y,Z\}$, მაშინ $|\vec{a}|$ კოორდინატებში გამოისახება ფორმულით

$$|\vec{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ . \qquad (2.27)$$



ნახ.2.4

$\vec{a}$-სა და Ox, Oy, Oz ღერძების დადებით მიმართულებებთან კუთხეები აღვნიშნოთ α, β და γ-თი:

$$(\vec{a},\hat{Ox})=\alpha,\quad (\vec{a},\hat{Oy})=\beta,\quad (\vec{a},\hat{Oz})=\gamma.$$

(2.24) და (2.27)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ შემდეგ ფორმულებს (ნახ.2.4):

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};\quad \cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \qquad (2.28)$$

განსაზღვრა 2.31. cosα, cosβ, cosγ-ს $\vec{a}$ ვექტორის *მიმმართველი კოსინუსები* ეწოდება.

(2.28)-დან ვღებულობთ, რომ

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (2.29)$$

ვექტორებზე წრფივი ოპერაციები კოორდინატებში გამოისახება შემდეგი სახით:

1) თუ $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ და $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$, მაშინ

$$\vec{a}+\vec{b}=\{X_1+X_2;\quad Y_1+Y_2;\quad Z_1+Z_2\}; \qquad (2.30)$$

2) თუ $\vec{a}=\{X;Y;Z\}$, მაშინ

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda X;\ \lambda Y;\ \lambda Z\} \qquad (2.31)$$

ნებისმიერი λ-თვის;

3) $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ და $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$ ვექტორების კოლინეარობის პირობაა

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1}. \qquad (2.32)$$

განსაზღვრა 2.32. თუ $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ვექტორები ისეთია, რომ $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, და $\vec{i}$ ძევს Ox-ზე, $\vec{j}$ - Oy-ზე და $\vec{k}$ - Oz-ზე და

ყოველი მათგანის მიმართულება ემთხვევა აღნიშნული ღერძის დადებით მიმართულებას, მაშინ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ვექტორთა სამეულს *ბაზისი* ეწოდება.

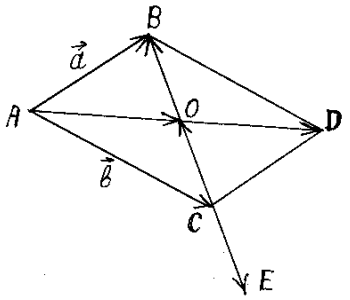
ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორი შეიძლება დაიშალოს $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ბაზისის მიხედვით, ანუ წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\vec{a}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k} \qquad (2.33)$$

სადაც X, Y, Z $\vec{a}$-ს კოორდინატებია.

მაგალითი 1. ABC სამკუთხედში $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AC}=\vec{b}$.

ავაგოთ: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$; 3) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$; 4) $-\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$.



ნახ.2.5

ამოხსნა: გამოვიყენოთ პარალელოგრამის მეთოდი. ვექტორებზე წრფივი ოპერაციების განსაზღვრების თანახმად ვასკვნით, რომ:

1) $\vec{AD}=\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{AO}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$;

3) $\vec{CB}=\vec{a}-\vec{b}$; 4) $\vec{CE}=-\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$.

მაგალითი 2. მოცემულია $\vec{AB}=\{2;-3;4\}$ და $\vec{BC}=\{-1;0;-2\}$ ვექტორები. განვსაზღვროთ: 1) $3\cdot\vec{AB}$; 2) $\vec{AB}+\vec{BC}$; 3) $2\cdot\vec{AB}-3\cdot\vec{BC}$ ვექტორების კოორდინატები:

ამოხსნა: (2.30) და (2.31) ფორმულების გამოყენებით ვპოულობთ:

1) $3\cdot\vec{AB}=\{3\cdot2;\ 3(-3);\ 3\cdot4\}=\{6;\ -9;\ 12\}$;

2) $\vec{AB}+\vec{BC}=\{2+(-1);\ -3+0;\ 4+(-2)\}=\{1;\ -3;\ 2\}$;

3) $2\cdot\vec{AB}-3\cdot\vec{BC}=\{2\cdot2-3(-1);\ 2(-3)-3\cdot0;\ 2\cdot4-3\cdot(-2)\}=\{7;\ -6;\ 14\}$.

პასუხი: [{6;-9;12}; {1;-3;2}; {7;-6;14}.]

მაგალითი 3. მოცემულია $A(1;2;3)$ და $B(3;5;9)$. ვიპოვოთ $\vec{AB}$ ვექტორის კოორდინატები, მისი სიგრძე და მიმმართველი კოსინუსები. შევამოწმოთ (2.29) ფორმულის სისწორე.

ამოხსნა: (2.26) ფორმულებით ვპოულობთ ვექტორის კოორდინატებს: X=3-1=2; Y=5-2=3; Z=9-3=6,

ანუ $\vec{AB}=\{X;Y;Z\}=\{2;3;6\}$.

(2.26)-ის გამოყენებით ვპოულობთ ვექტორის სიგრძეს:

$$|\vec{AB}|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7,$$

ხოლო (2.28)-ის გამოყენებით კი მიმმართველ კოსინუსებს:

$$\cos\alpha=\frac{2}{7};\ \cos\beta=\frac{3}{7};\ \cos\gamma=\frac{6}{7}.$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{4+9+36}{49}=1.$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა უჩვენებს (2.29) ფორმულის სამართლიანობას, ე.ი. მიმმართველი კოსინუსების კვადრატების ჯამი 1-ის ტოლია.

პასუხი: $[AB=\{2;3;6\};\ |\vec{AB}|=7;\ \cos\alpha=\frac{2}{7};\ \cos\beta=\frac{3}{7};\ \cos\gamma=\frac{6}{7}.]$

მაგალითი 4. კოლინეარულია თუ არა $\vec{AB}$ და $\vec{DC}$ ვექტორები, თუ A(1;2;1), B(4;5;0), C(0;-1;7), D(-2;-3;6). დავშალოთ $\vec{AB}+\vec{DC}$ ვექტორი $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ბაზისის მიხედვით.

ამოხსნა: $\vec{AB}=\{4-1;\ 5-2;\ 0-1\}=\{3;\ 3;\ -1\};$

$\vec{DC}=\{0-(-2);\ -1-(-3);\ 7-6\}=\{2;\ 2;\ 1\};$

გამოვიყენოთ (2.32) ფორმულა.

$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\neq\frac{-1}{1}$. (2.32) პირობა არ სრულდება, ე.ი. $\vec{AB}$ არ არის $\vec{DC}$-ს კოლინეარული. ვიპოვოთ $\vec{AB}+\vec{DC}$ ვექტორის კოორდინატები:

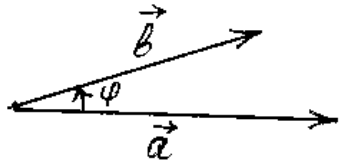
$\vec{AB}+\vec{DC}=\{3+2;\ 3+2;\ 1+1\}=\{5;\ 5;\ 2\}.$

$\vec{AB}+\vec{DC}=5\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}.$

პასუხი: $[$არ არის კოლინეარული; $5\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}]$.

§2.5. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

განსაზღვრა 2.33. ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის *სკალარული ნამრავლი* ეწოდება ამ ვექტორთა სიგრძეების ნამრავლს მათ შორის φ კუთხის კოსინუსზე (ნახ.2.6).



ნახ. 2.6

სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a}\cdot\vec{b}$-თი, ან $(\vec{a}\cdot\vec{b})$. მაშასადამე, განმარტების ძალით გვაქვს

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (2.34)$$

რადგანაც $|\vec{a}|\cos\varphi=\text{გეგმ}_{\vec{b}}\vec{a}$, ხოლო

$|\vec{b}|\cos\varphi=\text{გეგმ}_{\vec{a}}\vec{b}$, ამიტომ (2.34) შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{გეგმ}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\text{გეგმ}_{\vec{a}}\vec{b}.$$

1. სკალარული ნამრავლის თვისებები:

1^0. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ვექტორთა გადაადგილებით არ იცვლება);

2^0. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (ჯუფდებადობის კანონი რიცხვზე გამრავლების მიმართ);

3^0. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (განრიგებადობის თვისება ვექტორთა ჯამის მიმართ);

4^0. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ ($\vec{a}$-ს სკალარული კვადრატი);

5^0. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, თუ $\vec{a}\perp\vec{b}$, და პირიქით, $\vec{a}\perp\vec{b}$, თუ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ როცა $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$.

მე-4 და მე-5 თვისებებიდან $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ბაზის-ვექტორებისათვის ვღებულობთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0.$$

2. ვექტორთა სკალარული ნამრავლის გამოსახვა კოორდინატებში.

თუ $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ და $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$, მაშინ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2. \quad (2.35)$$

(2.27), (2.34) და (2.35)-დან ვღებულობთ, რომ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის გამოითვლება ფორმულით

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \quad (2.36)$$

მაგალითი 1. მოცემულია $\vec{a}=\{3;4;7\}$ და $\vec{b}=\{2;-5;2\}$. ვიპოვოთ სკალარული ნამრავლი $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

ამოხსნა: (2.35)-ის თანახმად

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot2+4\cdot(-5)+7\cdot2=0.$$

მე-5 თვისების ძალით $\vec{a}\perp\vec{b}$.

პასუხი: [$\vec{a}\perp\vec{b}$.]

მაგალითი 2. ვიპოვოთ კუთხე $\vec{a}=\{1;1;0\}$ და $\vec{b}=\{1;0;1\}$ ვექტორებს შორის.

ამოხსნა: (2.36) ფორმულის თანახმად

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

$$\varphi=\arccos\frac{1}{2},\qquad \varphi=60^0.$$

პასუხი: [$\varphi=60^0=\frac{\pi}{3}$.]

§2.6. ვექტორული ნამრავლი

განსაზღვრა 2.34. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებს ეწოდება *კომპლანარული*, თუ ისინი მდებარეობენ ერთ სიბრტყეზე, ან, პარალელურ სიბრტყეებზე.

განსაზღვრა 2.35. ვექტორთა სამეულს ეწოდება *დალაგებული*, თუ ნაჩვენებია, რომელია პირველი, რომელი მეორე, რომელი - მესამე.

განსაზღვრა 2.36. არაკომპლანარულ დალაგებულ ვექტორთა სამეულს ეწოდება *მარჯვენა*, თუ მათი ერთ სათავეში მოყვანის შემდეგ მესამე ვექტორის ბოლოდან პირველი ვექტორიდან მეორისაკენ უმოკლესი მობრუნება ჩანს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ვექტორთა სამეულს ეწოდება *მარცხენა სამეული*.

განსაზღვრა 2.37. $\vec{a}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი $\vec{b}$ ვექტორზე ეწოდება ისეთ $\vec{c}$ ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი სამი პირობით:

1. $|\vec{c}|$-ის მოდული მოცემული ვექტორების მოდულებისა და მათ შორის მოთავსებული კუთხის სინუსის ნამრავლის ტოლია

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha, \qquad (\hat{\vec{a}},\vec{b})=\alpha \tag{2.37}$$

2. $\vec{c}$ ვექტორი ცალ-ცალკე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების მართობულია.

3. $\vec{c}$ ვექტორის მიმართულება $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების მიმართ ისეთია, როგორც კოორდინატთა Oz ღერძის მიმართულება Ox და Oy ღერძების მიმართ, ანუ ქმნიან მარჯვენა სამეულს.

სიმბოლურად ასე ჩაწერენ:

$\vec{a}\times\vec{b}$, ან $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$, ან კიდევ $[\vec{a},\vec{b}]$.

1. ვექტორულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

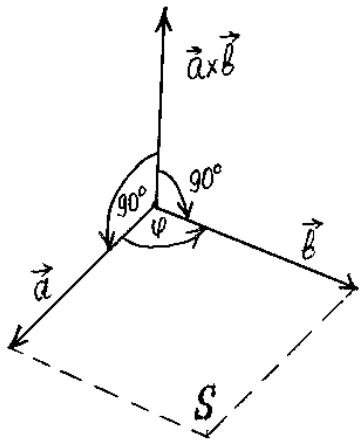
1^0. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ - კოლინეარული ვექტორებია;

2^0. არაკოლინეარულ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორთა ვექტორული ნამრავლის მოდული ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის S ფართობის ტოლია;

3^0. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$;

4^0. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

5^0. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.



ნახ. 2.7

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ბაზისური ვექტორებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს (ნახ.2.7):

$$\begin{cases} \vec{i}\times\vec{i}=0; & \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}; & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}; \\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}; & \vec{j}\times\vec{j}=0; & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}; \\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}; & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}; & \vec{k}\times\vec{k}=0. \end{cases} \quad (2.38)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $|\vec{m}\times\vec{n}|$, თუ $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, $(\hat{\vec{m}},\vec{n})=\frac{\pi}{4}$;

$$|\vec{m}\times\vec{n}|=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\sin\frac{\pi}{4}=2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{2}.$$

პასუხი: $[3\sqrt{2}.]$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომელიც აგებულია $\vec{a}+3\vec{b}$ და $3\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორებზე, თუ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ და კუთხე მათ შორის $\alpha=30^0$.

ამოხსნა: ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრებისა და თვისებების თანახმად, გვაქვს:

$$(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\times3\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+3\vec{b}\times3\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=$$

$$=3(\vec{a}\times\vec{a})+\vec{a}\times\vec{b}-9(\vec{a}\times\vec{b})+3(\vec{b}\times\vec{b})=3\cdot0-8(\vec{a}\times\vec{b})+3\cdot0=-8(\vec{a}\times\vec{b}).$$

(რადგანაც $\vec{a}\times\vec{a}=0$, $\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})$);

$$S=8|\vec{a}\times\vec{b}|=8|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin30^0=8\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=4.$$

პასუხი: $[S=4.]$

2. ვექტორული ნამრავლის გამოსახვა ვექტორთა კოორდინატებით

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები მოცემულია კოორდინატებით $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ და $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$, მაშინ $\vec{a}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი $\vec{b}$-ზე გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{a}\times\vec{b}=\{(Y_1Z_2-Y_2Z_1);\quad (Z_1X_2-Z_2X_1);\quad (X_1Y_2-X_2Y_1)\}. \tag{2.39}$$

ეს ფორმულა მე-2 რიგის დეტერმინანტების მეშვეობით ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\right\}. \tag{2.40}$$

$\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$ და $\vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}$ ვექტორების ვექტო-რული ნამრავლის პოვნა მოხერხებულია შემდეგი ფორმულის გამოყე-ნებით

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}. \tag{2.41}$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ ვექტორის ერთეულო-ვანი ვექტორი.

ამოხსნა: რადგანაც $\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, და $|a|=\sqrt{1+4+4}=3$

ამიტომ $\vec{e}=\dfrac{1}{3}\vec{i}+\dfrac{2}{3}\vec{j}+\dfrac{2}{3}\vec{k}$.

პასუხი: $\left[\vec{e}=\dfrac{1}{3}\vec{i}+\dfrac{2}{3}\vec{j}+\dfrac{2}{3}\vec{k}.\right]$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ და $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ (2.41) ფორმულა

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix};$$

ე.ი.

$$\vec{a}\times\vec{b}=-7\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}=\{-7;3;1\}.$$

პასუხი: [{-7;3;1}.]

მაგალითი 5. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}=\{2;5;7\}$ და $\vec{b}=\{1;2;4\}$. ვიპოვოთ $\vec{a}\times\vec{b}$ ვექტორული ნამრავლის X, Y, Z კოორდინატები.

ამოხსნა: (2.40) ფორმულებით ვპოულობთ:

$$X=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 2 & 4\end{vmatrix}=6;\quad Y=\begin{vmatrix}7 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-1;\quad Z=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1,$$

ე.ი. $\vec{a}\times\vec{b}=\{6;-1;-1\}$.

პასუხი: [{6;-1;-1}.]

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომელიც აგებულია ვექტორებზე $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ და $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$.

ამოხსნა: (2.41)-ის გამოყენებით ვპოულობთ $\vec{a}\times\vec{b}$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 6\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}6 & -2\\ 3 & 6\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}6 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=14\vec{i}-42\vec{j}-21\vec{k}.$$

რადგანაც $|\vec{a}\times\vec{b}|=S$, ამიტომ $S=\sqrt{14^2+42^2+21^2}=49$ (კვ.ერთ).

პასუხი: [S=49 კვ.ერთ.]

ვექტორებზე მოქმედებების გამოყენებით მიიღება სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა მისი წვეროს კოორდინატების მეშვეობით.

თუ სამკუთხედის წვეროებია $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ და $C(x_3,y_3)$, მაშინ

$$S_{\Delta ABC}=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|, \qquad (2.42)$$

ხოლო, თუ სამკუთხედის წვეროები სივრცეშია მოცემული, მაშინ სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება შემდეგნაირად. განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. მოცემულია სამკუთხედი წვეროებით: $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$. ვიპოვოთ $S_{\Delta ABC}$.

ა მ ო ხ ს ნ ა: ვპოულობთ ვექტორებს $\vec{AB}$ და $\vec{AC}$. $\vec{AB}=\{1;2;3\}$, $\vec{AC}=\{3;2;1\}$. ვპოულობთ

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{16+64+16}=\sqrt{24}$$ კვ.ერთ.

პასუხი: [$\sqrt{24}$ კვ.ერთ.]

§2.7. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი

განსაზღვრა 2.38. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ სამი ვექტორის *შერეული ნამრავლი* ეწოდება რიცხვს, რომელიც მიიღება $\vec{a}$ ვექტორის სკალარული გამრავლებით $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების ვექტორულ ნამრავლზე, ე.ი.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

თეორემა. შერეული ნამრავლი უდრის იმ პარალელეპიპედის მოცულობას, რომელიც აგებულია $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ვექტორებზე "+" ნიშნით, თუ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ მარჯვენა სამეულია, ხოლო "-" ნიშნით, თუ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - მარცხენა სამეულია. თუ ისინი კომპლანარული ვექტორებია, მაშინ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს ტოლობა $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, ამიტომ შერეულ ნამრავლს მარტივად ჩაწერენ ასე: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

თუ $a=\{X_1;Y_1;Z_1\}$, $b=\{X_2;Y_2;Z_2\}$ და $c=\{X_3;Y_3;Z_3\}$, მაშინ abc კოორდინატებში განისაზღვრება შემდეგი III რიგის დეტერმინანტის საშუალებით

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.43)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\vec{a}=\{2;-1;-1\}$ და $\vec{b}=\{1;3;-1\}$ და $\vec{c}=\{1;1;4\}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი.

ამოხსნა: (2.43)-ის გამოყენებით

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=33$$

პასუხი: [33.]

მაგალითი 2. იპოვეთ სამკუთხა პირამიდის მოცულობა, რომლის წვეროებია A(2;2;2), B(4;3;3), C(4;5;4) და D(5;5;6).

ამოხსნა: $V_{\text{პირ}}=\frac{1}{6}V_{\text{პარალელეპ.}}$, რომლებიც აგებულია $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ და $\vec{AD}$ ვექტორებზე. ვიპოვოთ ვექტორები: $\vec{AB}=\{2;1;1\}$, $\vec{AC}=\{2;3;2\}$, $\vec{AD}=\{3;3;4\}$.

(2.43) ფორმულით ვპოულობთ $\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}$.

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}=7.$$

$[V_{\text{პირ}}=\frac{7}{6}$ კუბ.ერთ.].

"მათემატიკის საგანი იმდენად სერიოზულია,
რომ სასარგებლოა ხელიდან არ გავუშვათ
შემთხვევა გავხადოთ ის ცოტათი სახალისო".
ბ.პასკალი

§2.8. ᲒᲠᲤᲘᲕᲘ ᲓᲐ ᲕᲔᲥᲢᲝᲠᲣᲚᲘ ᲐᲚᲒᲔᲑᲠᲘᲡ ᲔᲚᲔᲛᲔᲜᲢᲔᲑᲘᲡ ᲒᲐᲛᲝᲧᲔᲜᲔᲑᲐ ᲑᲣᲜᲔᲑᲘᲡᲛᲔᲢᲧᲕᲔᲚᲔᲑᲐᲨᲘ

1. *პირველი და მეორე რიგის კონტაქტები ეპიდემიოლოგიაში* [7]. ვთქვათ, არის ადამიანთა 3-კაციანი, 6-კაციანი და 7-კაციანი ჯგუფები. დავუშვათ, რომ პირველი ჯგუფის სამი ადამიანი გადამდები ავადმყოფობით გახდა ავად. ადამიანთა მეორე ექვსკაციან ჯგუფს გამოკითხავენ იმ მიზნით, რომ გაირკვეს, მათგან ვის ჰქონდა კონტაქტი ავადმყოფთან. შემდგომ გამოკითხავენ მესამე შვიდკაციან ჯგუფს იმის გასარკვევად, თუ მათგან ვის ჰქონდა კონტაქტი მეორე ექვსკაციან ჯგუფთან.

განვსაზღვროთ $A=(a_{ij})$ 3x6 განზომილებანი მატრიცა ისე, რომ $a_{ij}=1$, თუ II ჯგუფის j-ური ადამიანი კონტაქტში იყო I ჯგუფის i-ურ ავადმყოფთან, და $a_{ij}=0$ წინააღმდეგ შემთხვევაში. ანალოგიურად განვსაზღვროთ 6×7 განზომილებანი $B=(b_{ij})$ მატრიცა, ჩავთვალოთ რა $b_{ij}=1$, თუ III ჯგუფის j-ური ადამიანი კონტაქტში იყო II ჯგუფის i-ურ ადამიანთან და წინააღმდეგ შემთხვევაში $b_{ij}=0$. ეს ორი მატრიცა აღწერს ჯგუფებს შორის პირველი რიგის კონტაქტებს. მაგალითად, შეიძლება ყოფილიყო, რომ

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&1\\0&0&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

$a_{24}=1$ ნიშნავს, რომ II ჯგუფის მე-4 ადამიანი კონტაქტში იყო I ჯგუფის მე-2 ავადმყოფთან. ანალოგიურად $b_{33}=0$ ნიშნავს, რომ III

ჯგუფის მე-3 ადამიანი არ იყო კონტაქტში II ჯგუფის მე-3 ადამიანთან.

ჩვენ ასევე გვაინტერესებს არაპირდაპირი კონტაქტები, ანუ მეორე რიგის კონტაქტები III ჯგუფის 7 ადამიანსა და პირველი ჯგუფის სამ ავადმყოფს შორის.

ამ მეორე რიგის კონტაქტებს აღწერს $C=AB$ მატრიცათა ნამრავლი.

ელემენტი

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{6} a_{ik} b_{kj} \qquad (2.44)$$

გვაძლევს მეორე რიგის კონტაქტების რაოდენობას III ჯგუფის j-ური ადამიანისა და I ჯგუფის i-ურ ავადმყოფთან.

მოცემული A და B მატრიცებისათვის გვექნება

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ელემენტი $C_{23}=2$ გვიჩვენებს, რომ III ჯგუფის მე-3 ადამიანს აქვს მეორე რიგის 2 კონტაქტი მე-2 ინფიცირებულ ავადმყოფთან. შევნიშნოთ, რომ III ჯგუფის მე-6 ადამიანს აქვს 1+1+2=4 არაპირდაპირი კონტაქტი ინფიცირებულ ჯგუფთან. ასეთი კონტაქტები არა აქვს მხოლოდ III ჯგუფის მე-5 ადამიანს.

2. *რაციონთა მატრიცები* [7]. ვთქვათ, ცხოველის სიცოცხლისათვის აუცილებელ ნივთიერებას შეიცავს საკვები. ვთქვათ, ეს იყოს A ვიტამინი და α_i აღნიშნავს ამ ვიტამინის რაოდენობას 1 კგ i-ურ საკვებში ($i=1,2,...,n$). მაშინ ვექტორ-სტრიქონი

$$\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$$

იძლევა ვიტამინის განაწილებას საკვებებში. ვთქვათ, განხილული ცხოველი ჭამს პირველი საკვების x_1 კგ-ს, მე-2 საკვების x_2 კგ-ს, n-ური საკვების x_n კგ-ს. როგორ გამოვთვალოთ A ვიტამინის რაოდენობა, რომელსაც ცხოველი ღებულობს დღეში?

ცხადია, ამისათვის საკმარისია $\vec{a}$ ვექტორი სკალარულად გადავამრავლოთ $\vec{X} = (x_1, x_2, .., x_n)$ ვექტორზე:

$$\vec{a}\,\vec{X} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n. \qquad (2.45)$$

(2.45) სკალარული ნამრავლი ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მატრიცათა ნამრავლის კერძო შემთხვევა, როგორც **(1xn)** განზომილებიანი **a** მატრიცის გამრავლება **(nx1)** განზომილებიან **X** მატრიცაზე. მატრიცათა გამრავლების წესით გვექნება

$$(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n).$$

მარჯვენა ნაწილში ჩვენ მივიღეთ ერთ ელემენტიანი მატრიცა. მისი ელემენტის სიდიდე გვიჩვენებს **A** ვიტამინის რაოდენობას, რომელსაც ცხოველი მიიღებს ერთ დღეში.

ეხლა განვიხილოთ უფრო რთული შემთხვევა [13]. ვთქვათ, გვაინტერესებს სამი ვიტამინი **A, B, C**. ვთქვათ, **(3xn)** განზომილებიანი მატრიცა $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & ... & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & ... & \gamma_n \end{pmatrix}$ გვიჩვენებს საკვებში ვიტამინების რაოდენობას. ყოველი სტრიქონი შეესაბამება ცალკეულ ვიტამინს, ხოლო ყოველი სვეტი ცალკეულ საკვებს. ამრიგად, №1 საკვები 1 კგ შეიცავს α_1 რაოდენობის ვიტამინ **A**-ს, β_1 - ვიტამინ **B**-ს და γ_1 ვიტამინ **C**-ს და ა.შ. ვთქვათ, **X** მატრიცა – სვეტი $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ არის დღე-ღამეში საკვების მოხმარების მაჩვენებელი.

რომ გავიგოთ ცხოველის მიერ დღე-ღამეში მიღებული ვიტამინების რაოდენობა, უნდა ვიპოვოთ **M** და **X** მატრიცების ნამრავლი:

$$\mathbf{MX} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & ... & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & ... & \gamma_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + ... + \gamma_n x_n \end{pmatrix}. \quad \textbf{(2.46)}$$

მივიღეთ მატრიცა - სვეტი, რომლის I ელემენტი არის **A** ვიტამინის საერთო რაოდენობა, II ელემენტი **B**-ს საერთო რაოდე-

ნობა და III კი C-ს რაოდენობა, რასაც ღებულობს დღე-ღამეში ცხოველი.

ამოცანა 1. ცხოველთა a, b და c დასახელების საკვებების თითო კგ შეიცავს 2, 4 და 5 (ერთ.) ვიტამინს. რა რაოდენობის (ერთ.) ვიტამინებს მიიღებს დღეში ცხოველი, თუ დღეში იღებს საკვების სახით a დასახელების 8 კგ-ს, b დასახელების 6 კგ-ს და c დასახელების 5 კგ-ს.

ამოხსნა: ვადგენთ $\vec{a}=\{2;4;5\}$ და $\vec{x}=\{8;6;5\}$ ვექტორებს. $\vec{a}$ გვიჩვენებს ვიტამინების განაწილებას საკვებებში, ხოლო $\vec{x}$ ვექტორი ცხოველთა დღიურ რაციონს. ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი მოგვცემს საძებნ სიდიდეს.

$$\vec{a}\,\vec{x}=2\cdot 8+4\cdot 6+5\cdot 5=65 \text{ ერთ.}$$

ამოხსნის II ხერხი: $\vec{a}$ და $\vec{x}$ ვექტორები უნდა განვიხილოთ, როგორც a=(2 4 5) მატრიცა-სტრიქონი და $x=\begin{pmatrix}8\\6\\5\end{pmatrix}$ მატრიცა-სვეტი.

$$\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\6\\5\end{pmatrix}=2\cdot 8+4\cdot 6+5\cdot 5=65.$$

პასუხი: [65 ერთ.]

ამოცანა 2. M მატრიცით მოცემულია A,B და C ვიტამინების რაოდენობა სამი დასახელების საკვებში

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\\2 & 5 & 2\end{pmatrix}.$$

(ყოველი სტრიქონი შეესაბამება ცალკეულ ვიტამინს, ხოლო ყოველი სვეტი ცალკეულ საკვებს) დღე-ღამეში საკვების მოხმარების მაჩვენე-

ბელია $x = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ მატრიცა-სვეტი (I დასახელების 10 კგ, II დასახელების 7 კგ-ს და III დასახელების 8 კგ-ს მიიღებს დღე-ღამეში).

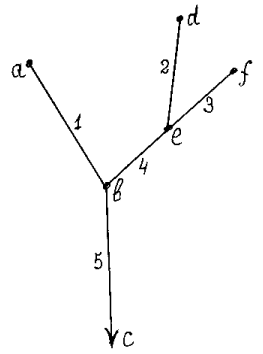
განვსაზღვროთ ვიტამინების მიღების დღიური ნორმა საჭიროებების მიხედვით.

ამოხსნა: განვსაზღვროთ **MA** ნამრავლი.

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 10 + 2\cdot 7 + 3\cdot 8 \\ 3\cdot 10 + 2\cdot 7 + 1\cdot 8 \\ 2\cdot 10 + 5\cdot 7 + 2\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 52 \\ 71 \end{pmatrix}.$$

პასუხი: [A-48 ერთ, B-52 ერთ, C-71 ერთ].

3. *მატრიცები და ქსელები.* მატრიცებს ფართო გამოყენება აქვს გეოგრაფიული ქსელების შესწავლის საქმეში. მაგალითისათვის განვიხილოთ მდინარეთა ქსელები. მდინარის ქსელის რაიმე უბანი შეიძლება წარმოვიდგინოთ მატრიცული ფორმით შენაერთების რაოდენობისა (წიბო) და მათი შეერთების წერტილების (საკვანძო წერტილები) მეშვეობით. მდინარეთა ქსელის გამოსახატავად ასეთი მატრიცა შეიძლება შევადგინოთ როგორც წიბოების, ასევე კვანძების გამოყენებით.



ნახ.2.8

მარტივი სახის იდეალიზებული მდინარეთა ქსელი გამოხატულია ნახაზზე 2.8.

წიბოები წარმოდგენილია რიცხვებით 1-დან 5-მდე, ხოლო კვანძები - ასოებით a-დან f-მდე. მოყვანილია მატრიცები, რომლებიც გამოხატავენ მოცემული მდინარის ქსელს წიბოებისა და კვანძების მეშვეობით.

1 2 3 4 5 **a b c d e f**

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

წიბოთა მატრიცაში **0** ნიშნავს, რომ შესაბამისი შენაკადები უშუალოდ ერთმანეთს არ უერთდებიან, ხოლო 1 - იმას რომ ისინი ერთმანეთს უერთდებიან. ჩანს, რომ შენაკადი 2 უშუალოდ უერთდება 3 და 4-ს, და არა 1-სა და 5-ს. კვანძთა მატრიცაში გამოყენებულია იგივე აღნიშვნები. მაგალითად, **d** კვანძი უშუალოდ კავშირშია კვანძ **e**-თან, მაგრამ, არ არის კავშირში სხვა კვანძებთან, ხოლო **b** კვანძი კავშირშია **a**,**c** და **e** კვანძებთან. ყოველი ამ მატრიცათაგანი *სიმეტრიულია* (კვადრატულ მატრიცას ეწოდება სიმეტრიული, თუ ის სიმეტრიულია მთავარი დიაგონალის მიმართ), მაგრამ ცხადია, რომ მდინარეთა ქსელისათვის არ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს სიმეტრიას, რადგანაც წყლის თვისების თანახმად, ის ფერდობზე ქვევიდან ზევით ვერ იდინებს. ამიტომ, ჩვენ რამენაირად უნდა ვუჩვენოთ, რომ კავშირი ერთი რომელიმე მიმართულებით შეუძლებელია. პირობა, რომელიც ასახავს ამ მომენტს და გადააქცევს არასიმეტრიულად, მდგომარეობს იმაში, რომ სტრიქონები წარმოადგენს დინებას **a**-დან **b**-დან, **c**-დან და ა.შ., ხოლო სვეტები დინებებს **a**-ში, **b**-ში, **c**-ში (კენ) და ა.შ. რადგანაც კავშირები შესაძლებელია მხოლოდ 1-დან 5-კენ, ან **f**-დან **e**-კენ, ამიტომ, ყოველ მატრიცაში ზოგიერთი კავშირები გაუქმდება. შედეგად მატრიცებს ექნება სახე:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ყოველ სვეტში ჯამი გვაძლევს შენაერთების რაოდენობას, რომლებიც უერთდება ყოველ მდინარეს. ჩვენს შემთხვევაში 2-2 შენაერთია 4 და 5 წიბოში და 2-2 შენაერთი **b** და **e** კვანძებში.

"ცოდნა და სწავლება ერთადერთი ღონისძიებაა
უსაქმურობისაგან თავის დაღწევისა და
ბუნებრივი ნიჭის გამდიდრებისა".

მონტენი

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ შემდეგ მატრიცათა ჯამი:

ა) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

ბ) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left[\text{ა)} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}; \text{ ბ) } \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \right]$

2. იპოვეთ მატრიცები: ა) **A+2B**, ბ) **3A-B**, თუ

$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$\left[\text{ა)} \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}; \text{ ბ) } \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}. \right]$

3. გამოთვალეთ მატრიცათა ნამრავლი **AB**, თუ:

ა) $A= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ბ) $A= \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\left[\text{ა)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}; \text{ ბ) } \begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \\ 37 & 9 \end{pmatrix}. \right]$

4. იპოვეთ მატრიცათა ნამრავლი **AB** და **BA**, თუ:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\left[AB=\begin{pmatrix}8 & 0 & 7\\ 16 & 10 & 4\\ 13 & 5 & 7\end{pmatrix}; BA=\begin{pmatrix}4 & 6 & 6\\ 1 & 7 & 3\\ 8 & 11 & 14\end{pmatrix}.\right]$$

5. გამოთვალეთ 1) **AB**, 2) A^TB^T; თუ:

ა) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;

ბ) $A=\begin{pmatrix}0 & -5 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\left[\text{ა)1)}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ 2)\begin{pmatrix}5 & 1 & 5\\ 6 & 0 & 3\\ -5 & -1 & -5\end{pmatrix};\right.$$

$$\left.\text{ბ) 1)}\begin{pmatrix}-4 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\ 2)\begin{pmatrix}-3 & 0 & -3 & 1\\ -5 & -5 & -5 & -4\\ 3 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\right]$$

შენიშვნა: A^T - ნიშნავს **A** ტრანსპონირებულს.

გამოთვალეთ დეტერმინანტები:

6. $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 6\end{vmatrix}$. [26.] 7. $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & -10\end{vmatrix}$. [-38.]

8. $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}$. [1.] 9. $\begin{vmatrix}105 & 55\\ 245 & 154\end{vmatrix}$. [2695.]

10. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$. [72.]

11. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. [-10.]

12. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$. [-240.]

13. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$. [513.]

14. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$. [$-2b^2$.]

15. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$. [$-4a^3$.]

იპოვეთ x შემდეგი განტოლებებიდან:

16. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. [$x_1=2$, $x_2=3$.]

17. $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$. [$x_1=0$, $x_2=-2$.]

18. იპოვეთ მოცემული მატრიცების შებრუნებული მატრიცები:

ა) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

[ა) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.]

19. იპოვეთ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, თუ

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. [$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3,5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$.]

20. იპოვეთ შემდეგი მატრიცების შებრუნებული მატრიცები:

ა) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; ბ) $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 8 & 0\end{pmatrix}$;

გ) $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; დ) $D=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

$$\left[\text{ა)}A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix};\ \text{ბ)}\ B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32}\end{pmatrix};\right.$$

$$\left.\text{გ)}\ C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 11\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ \text{დ)}\ D^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}.\right]$$

21. იპოვეთ უცნობი მატრიცა X განტოლებებიდან:

ა) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; $\left[\begin{pmatrix}16 & -32\\ -6 & 13\end{pmatrix}.\right]$

ბ) $X\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$; $\left[\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -4 & 5 & -2\\ -5 & 3 & 0\end{pmatrix}.\right]$

გ) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$; $\left[\begin{pmatrix}24 & 13\\ -34 & -18\end{pmatrix}.\right]$

დ) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}5 & 2\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $\left[\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{6}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\right]$

ე) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; [არა აქვს ამონახსნი.]

ვ) $X\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. [არა აქვს ამონახსნი, რადგან $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0$,

ე.ი. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ მატრიცა გადაგვარებულია და მას არა აქვს შებრუნებული მატრიცა.]

22. ამოხსენით სისტემა მატრიცული მეთოდით:

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1,\\ 3x_1+2x_2-2x_3=1,\\ x_1-x_2+2x_3=5.\end{cases}$$

[$x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.]

ამოხსენით სისტემები კრამერის ფორმულებით:

23. $\begin{cases}2x-3y+z-2=0,\\ x+5y-4z+5=0,\\ 4x+y-3z+4=0.\end{cases}$

[5; 6; 10.]

24. $\begin{cases}2x-y+3z=1,\\ x-2y+4z=3,\\ 3x-y+5z=2.\end{cases}$

[-1; 0; 1.]

25. $\begin{cases}2x-5y+2z=0,\\ x+4y-3z=0.\end{cases}$

[7k; 8k; 13k.]

26. $\begin{cases}3x+2y-z=0,\\ 2x-y+3z=0,\\ x+y-3=0.\end{cases}$

[x=y=z=0.]

27. $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+4y+6z=3, \\ 3x+y-z=1. \end{cases}$

[არათავსებადია.]

28. $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+y-z=3, \\ 3x+3y+2z=7. \end{cases}$

განუსაზღვრელია $\left[x=\frac{2+5z}{3};\ y=\frac{5-7z}{3}.\right]$

29. $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+y-z=3, \\ 3x+3y+2z=10. \end{cases}$

[არათავსებადია.]

30. მოცემულია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები. ააგეთ ვექტორები:
1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

31. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}$ და $\vec{b}$. ააგეთ ვექტორები:
1) $2\vec{a}$; 2) $\frac{1}{2}\vec{a}$; 3) $-\frac{3}{2}\vec{a}$; 4) $-2(\vec{a}+\vec{b})$; 5) $3(\vec{a}-\vec{b})$.

32. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}=\{2;3;0\}$, $\vec{b}=\{-1;2;2\}$ და $\vec{c}=\{3;1;0\}$. იპოვეთ შემდეგი ვექტორების კოორდინატები:
1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}+\vec{c}$; 3) $3\vec{a}$; 4) $\vec{a}-2\vec{c}$; 5) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

[1) {1;5;2}; 2) {5;4;0}; 3) {6;9;0}; 4) {-4;1;0}; 5) {-2;4;2}.]

33. კოლინეარულია თუ არა ვექტორები:
1) $\vec{a}\{1;-1;2\}$ და $\vec{b}\{2;2;-4\}$;
2) $\vec{a}\{2;3;-1\}$ და $\vec{b}\{-4;-6;2\}$.

[1) არა; 2) დიახ.]

34. მოცემულია წერტილები: A(3;-1;2) და B(-1;2;1). იპოვეთ $\vec{AB}$ და $\vec{BA}$ ვექტორების კოორდინატები.

[{-4;3;-1}; {4;-3;1}.]

35. მოცემულია წერტილები: A(1;2;3) და B(3;-4;6). იპოვეთ $|\vec{AB}|$ სიგრძე და მიმმართველი კოსინუსები.

[7; $\cos\alpha = \frac{2}{7}$; $\cos\beta = \frac{-6}{7}$; $\cos\gamma = \frac{3}{7}$.]

36. იპოვეთ $\vec{a}$={2;-3;-1} ვექტორის საწყისი წერტილი, თუ მისი ბოლო წერტილი ემთხვევა (1;-1;2) წერტილს.

[(-1;2;3).]

37. შეიძლება თუ არა ვექტორი საკოორდინატო ღერძებთან ადგენდეს კუთხეებს:

1) $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$, $\gamma=120^0$;
2) $\alpha=45^0$, $\beta=135^0$, $\gamma=60^0$;
3) $\alpha=90^0$, $\beta=150^0$, $\gamma=60^0$?

[1) შეიძლება; 2) არ შეიძლება; 3) შეიძლება.]

38. კოლინეარულია თუ არა $\vec{AB}$ და $\vec{CD}$ ვექტორები, თუ A(-2;3;1), B(1;5;-2), C(4;5;-8), D(1;3;-5)?

[დიახ.]

39. მოცემულია ორი ვექტორი: $\vec{a}$={3;-2;6} და $\vec{b}$={-2;1;0}. იპოვეთ შემდეგი ვექტორების კოორდინატები: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a}+3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$.

[1) {1;-1;6}; 2) {5;-3;6}; 3) {6;-4;12}; 4) $\{1;-\frac{1}{2};0\}$; 5){0;-2;12}; 6) $\{3;-\frac{5}{3};2\}$.]

40. შეამოწმეთ $\vec{a}$={2;-1;3} და $\vec{b}$={-6;3;-9} ვექტორების კოლინეარულობა. დაადგინეთ რომლის სიგრძეა მეტი და

რამდენჯერ, როგორ არიან ისინი მიმართული - ერთ მხარეს, თუ ურთიერთსაწინააღმდეგოდ.

[$\vec{b}$-ს სიგრძე 3-ჯერ მეტია $\vec{a}$-ს სიგრძეზე, ისინი მიმართული არიან ურთიერთსაწინააღმდეგო მხარეს.]

41. განსაზღვრეთ α და β-ს რომელი მნიშვნელობისთვის არიან $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ და $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ ვექტორები კოლინეარული?

[$\alpha=4$; $\beta=-1$.]

42. იპოვეთ შემდეგი ვექტორების სკალარული ნამრავლი:

1) $\vec{a}=\{4;-2;1\}$ და $\vec{b}=\{1;2;3\}$;
2) $\vec{a}=\{1;-1;3\}$ და $\vec{b}=\{1;1;0\}$;
3) $\vec{a}=\{2;3;-4\}$ და $\vec{b}=\{1;1;1\}$.

[1) 3; 2) 0; 3) 1.]

43. ურთიერთმართობულია თუ არა ეს ვექტორები:

1) $\vec{a}=\{1;1;-3\}$ და $\vec{b}=\{3;1;-2\}$;
2) $\vec{a}=\{3;2;1\}$ და $\vec{b}=\{2;-3;0\}$.

[1) არა; 2) დიახ.]

44. იპოვეთ კუთხე ვექტორებს შორის:

1) $\vec{a}=\{2;-2;1\}$ და $\vec{b}=\{-4;1;1\}$;
2) $\vec{a}=\{1;1;0\}$ და $\vec{b}=\{0;1;1\}$.

[1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$.]

45. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}=\{m;3;4\}$ და $\vec{b}=\{4;m;-7\}$. m-ის რა მნიშვნელობისათვის იქნებიან ისინი ურთიერთმართობულნი?

[m=4.]

46. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}=\{2;2;1\}$ და $\vec{b}=\{6;3;2\}$. იპოვეთ $\text{გეგმ}_{\vec{a}}\vec{b}$ და $\text{გეგმ}_{\vec{b}}\vec{a}$.

[გეგმ$_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{20}{3}$; გეგმ$_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{20}{7}$.]

47. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ და $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.
განსაზღვრეთ $\vec{a}\cdot\vec{b}$-ზე.

[8.]

48. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}=\{4;-2;-4\}$, $\vec{b}=\{6;-3;2\}$.
გამოთვალეთ: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; 3) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 4) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.
[1) 22; 2) -200; 3) 129; 4) 41.]

49. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}=\{2;-4;4\}$ და $\vec{b}=\{-3;2;6\}$ ვექტორებს შორის.

[$\arccos\frac{5}{21}$.]

50. გახსენით ფრჩხილები შემდეგ გამოსახულებაში:
$(2\vec{i}-\vec{j})\cdot\vec{j}+(\vec{j}-2\vec{k})\cdot\vec{k}+(\vec{i}-2\vec{k})^2$.

[2.]

51. გამოთვალეთ ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ A(7;3;4), B(1;0;6) და C(4;5;-2).

[24,5.]

52. გამოთვალეთ $\vec{a}=2\vec{j}+\vec{k}$ და $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი.

[$\sqrt{21}$ კვ.ერთ.]

53. გახსენით ფრჩხილები და გაამარტივეთ გამოსახულება:
1) $\vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k})-\vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$;
2) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}+(\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a}$;
3) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b})$;
4) $2\vec{i}\,(\vec{j}\times\vec{k})+3\vec{j}\cdot(\vec{i}\times\vec{k})+4\vec{k}\,(\vec{i}\times\vec{j})$.

[1) $2(\vec{k}-\vec{i})$; 2) $2\vec{a}\times\vec{c}$; 3) $\vec{a}\times\vec{c}$; 4) 3.]

54. $(\hat{\vec{a};\vec{b}})=45^0$. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$. იპოვეთ $\vec{a}-2\vec{b}$ და $3\vec{a}+2\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული სამკუთხედის ფართობი.

[$S=50\sqrt{2}$.]

55. იპოვეთ იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომელიც აგებულია ვექტორებზე $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ და $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, სადაც $\vec{m}$ და $\vec{n}$ ერთეულოვანი ვექტორებია, მათ შორის კუთხე 30^0-ია.

[S=1,5 კვ.ერთ.]

56. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}=\{2;3;5\}$ და $\vec{b}=\{1;2;1\}$. იპოვეთ მათი ვექტორული $\vec{a}\times\vec{b}$ ნამრავლის კოორდინატები.

$\vec{a}\times\vec{b}=\{-7;3;1.\}$

57. გამოთვალეთ იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომელიც აგებულია ვექტორებზე
$\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ და $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$.

[S=49 კვ.ერთ.]

58. იპოვეთ $\vec{a}=\{1;-1;1\}$, $\vec{b}=\{1;1;1\}$ და $\vec{c}=\{2;3;4\}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი.

[4.]

59. იპოვეთ სამკუთხა პირამიდის მოცულობა, რომლის წვეროებია A(0;0;1), B(2;3;5), C(6;2;3) და D(3;7;2).

[20.]

60. იპოვეთ იმ პარალელეპიპედის მოცულობა, რომელიც აგებულია ვექტორებზე $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{j}+5\vec{k}$. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ ვექტორთა სამეული მარჯვენა თუ მარცხენა სამეულია?

[V=51 კუბ.ერთ. მარცხენა სამეული.]

61. აჩვენეთ, რომ $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ ვექტორები კომპლანარულია.

[$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$.]

62. აჩვენეთ, რომ A(2;-1;-2), B(1;2;1), C(2;3;0) და D(5;0;-6) წერტილები მდებარეობენ ერთ სიბრტყეზე.

$$[(\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD})=0.]$$

63. ამოცანა ა). არის ადამიანთა სამი ჯგუფი:

I. ინფიცირებულ ადამიანთა 3 კაციანი ჯგუფი.

II. არაინფიცირებულ ადამიანთა 5 კაციანი ჯგუფი.

III. არაინფიცირებულ ადამიანთა 4 კაციანი ჯგუფი.

ცნობილია A და B მატრიცები.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}.$$

A მატრიცა უჩვენებს პირველი რიგის კონტაქტებს II და I ჯგუფებს შორის;

B მატრიცა უჩვენებს პირველი რიგის კონტრაქტებს III და II ჯგუფებს შორის.

განსაზღვრეთ მეორე რიგის კონტაქტები III და I ჯგუფებს შორის.

რა დასკვნის გაკეთება შეიძლება?

$$\left[AB=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\1&1&1&1\\1&2&1&0\end{pmatrix}.\right]$$

[III ჯგუფის მე-2 და მე-3 ადამიანებს აქვთ ავად გახდომის ერთნაირად დიდი შესაძლებლობა. მათ აქვთ 4-4 მეორე რიგის კონტაქტი, ხოლო პირველ და მე-4-ს კი 2-2 კონტაქტი.]

ამოცანა ბ). არის ადამიანთა სამი ჯგუფი:

I. ინფიცირებულ ადამიანთა 3 კაციანი ჯგუფი;

II. არაინფიცირებულ ადამიანთა 4 კაციანი ჯგუფი;

III. არაინფიცირებულ ადამიანთა 5 კაციანი ჯგუფი.

ცნობილია A და B მატრიცები

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

A მატრიცა უჩვენებს პირველი რიგის კონტაქტებს II და I ჯგუფებს შორის;

B მატრიცა უჩვენებს პირველი რიგის კონტაქტებს III და II ჯგუფებს შორის.

განსაზღვრეთ მეორე რიგის კონტაქტები III და I ჯგუფებს შორის.

რა დასკვნის გაკეთება შეიძლება?

$$\left[AB=\begin{pmatrix}0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\1&0&0&1&2\end{pmatrix}.\right]$$

[III ჯგუფის მე-4 ადამიანს აქვს მეორე რიგის 4 კონტაქტი, მე-3 და მე-5 ადამიანებს კი 3-3 კონტაქტი პირველ და მე-2 ადამიანებს თითო-თითო კონტაქტი.]

64. ცხოველის დღიური რაციონი უნდა შეიცავდეს გარკვეული რაოდენობის 3 დასახელების ვიტამინების ჯგუფს. ამისათვის მან დღეში უნდა მიიღოს ოთხი დასახელების საკვები: I - 4 კგ, II - 5 კგ, III - 6 კგ, IV - 7 კგ. თითოეული დასახელების საკვები შესაბამისად შეიცავს **A, B** და **C** ვიტამინებს შემდეგი რაოდენობით (ერთ.)

I. (1 2 3); II. (3 2 1); III. (4 5 6); IV. (3 6 4).

რა რაოდენობის ვიტამინების რაოდენობას უნდა შეიცავდეს დღიური რაციონი?

$$\left[\begin{pmatrix}64\\84\\77\end{pmatrix};\quad\begin{matrix}A-\text{ვიტამინი } 64 \text{ ერთ.};\\B-\text{ვიტამინი } 84 \text{ ერთ.};\\C-\text{ვიტამინი } 77 \text{ ერთ.}\end{matrix}\right]$$

"მათემატიკა იმისათვის უნდა ვისწავლოთ,
რომ მას გონება მოჰყავს წესრიგში".

მ.ლომონოსოვი

თავი 3. ანალიზური გეომეტრია სივრცეში

§3.1. სიბრტყე

1. ზედაპირის განტოლება.

განსაზღვრა 3.1. **Oxyz** მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში

$$f(x,y,z)=0 \qquad (3.1)$$

განტოლებას ეწოდება *ზედაპირის განტოლება*, ხოლო **x,y,z** *კოორდინატებს, მიმდინარე კოორდინატები.*

განსაზღვრა 3.2. ზედაპირს ეწოდება *ცილინდრული*, თუ ის მიიღება წრფის პარალელური გადატანით რომელიმე **L** წირის მიმართ. ამ წირს ეწოდება ცილინდრული ზედაპირის *მიმმართველი*, ხოლო მოძრავი წრფის ნებისმიერ მდებარეობას – მისი *მსაზველები.*

2. სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის მოცემულ წერტილზე მოცემული ვექტორის პერპენდიკულარულად.

თუ მოცემულია წერტილი $M(x_0;y_0;z_0)$ და ვექტორი $\vec{n}=\{A,B,C\}$ მაშინ, საძებნი სიბრტყის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (3.2)$$

სადაც $M(x;y;z)$ არის ამ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი.

($\vec{n}$ ვექტორს უწოდებენ ამ სიბრტყის *ნორმალურ ვექტორს*).

3. სიბრტყის ზოგადი განტოლება.

მიმდინარე კოორდინატების მიმართ ყოველი პირველი რიგის განტოლება განსაზღვრავს სიბრტყეს

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (3.3)$$

(3.3)-ს ეწოდება *სიბრტყის ზოგადი* განტოლება.

4. სიბრტყის არასრული განტოლებები.

თუ (3.3)-ში **A, B, C, D** კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც ნულის ტოლია, მაშინ, *არასრული* განტოლება გვექნება.

განვიხილოთ ყველა შესაძლო შემთხვევა:

1) **D=0; Ax+By+Cz=0** სიბრტყე გადის კოორდინატთა სათავეზე;

2) **A=0; By+Cz+D=0** სიბრტყე არის **Ox** ღერძის პარალელური;

3) **B=0; Ax+Cz+D=0** არის **Oy**-ის პარალელური;

4) **C=0; Ax+By+D=0** არის **Oz**-ის პარალელური;

5) **A=0, B=0, Cz+D=0** სიბრტყე არის **xOy** საკოორდინატო სიბრტყის პარალელური;

6) **A=0, C=0; By+D=0** სიბრტყე არის **xOz** საკოორდინატო სიბრტყის პარალელური,

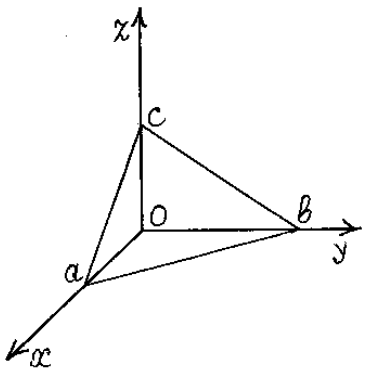
7) **B=0, C=0; Ax+D=0** სიბრტყე არის **yOz** საკოორდინატო სიბრტყის პარალელური სიბრტყე;

8) **A=0, B=0, D=0; Cz=0** განსაზღვრავს **xOy** საკოორდინატო სიბრტყეს;

9) **A=0, C=0, D=0; By=0** განსაზღვრავს **xOz** საკოორდინატო სიბრტყეს;

10) **B=0, C=0, D=0; Ax=0** განსაზღვრავს **yOz** საკოორდინატო სიბრტყეს.

5. სიბრტყის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში.



ნახ.3.1

(3.3)-დან შესაბამისი გარდაქმნებით მიიღება

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (3.4)$$

განტოლება, სადაც $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ და ეწოდება სიბრტყის განტოლება *ღერძთა მონაკვეთებში.* **a, b, c** არის ის მონაკვეთები, რომელსაც სიბრტყე მოკვეთს შესაბამისად **Ox, Oy, Oz** ღერძებზე (ნახ.3.1).

6. მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე.

მანძილი $M_1(x_1;y_1;z_1)$ წერტილიდან (3.3) სიბრტყემდე გამოითვლება ფორმულით:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.5)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ მანძილი $M_1(1;0;-2)$ წერტილიდან $2x-y+2z-4=0$ სიბრტყემდე.

ამოხსნა: (3.5) ფორმულის თანახმად

$$d=\frac{|2\cdot 1-1\cdot 0+2(-2)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=2.$$

პასუხი: [d=2.]

7. კუთხე სიბრტყეებს შორის. სიბრტყეთა პარალელობისა და მართობულობის პირობა.

ვთქვათ, მოცემული სიბრტყეების განტოლებებია:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad (3.6)$$

განსაზღვრა 3.3. *სიბრტყეებს შორის კუთხე* ეწოდება მათ შორის (ორიდან ერთ-ერთ) ორწახნაგა კუთხეს. ერთ-ერთი ეს კუთხე ტოლია ამ სიბრტყეების ნორმალურ ვექტორებს შორის კუთხის, ამიტომ

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (3.7)$$

(3.7) არის საძებნი ფორმულა.

მაგალითი 2. განვსაზღვროთ კუთხე $x-z=0$ და $y-z=0$ სიბრტყეებს შორის.

ამოხსნა: აქ $\vec{n}_1=\{1;0;-1\}$, $\vec{n}_2=\{0;1;-1\}$ (3.7) ფორმულით ვპოულობთ კუთხეს

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 0+0\cdot 1+(-1)(-1)}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

$\cos\varphi=\frac{1}{2}$, ე.ი. $\varphi=\frac{\pi}{3}$. მოცემულ სიბრტყეებს შორის ერთ-ერთი მოსაზღვრე ორწახნაგა კუთხე $\frac{\pi}{3}$-ის ტოლია.

პასუხი: $\left[\frac{\pi}{3}.\right]$

(3.6) სიბრტყეების *პარალელობის პირობა* ემთხვევა $\vec{n}_1$ და $\vec{n}_2$ ვექტორების კოლინეარობის პირობას, ამიტომ

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (3.8)$$

ანალოგიური მსჯელობით ვღებულობთ სიბრტყეთა *ურთიერთდამთხვევის პირობას*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}. \qquad (3.9)$$

ხოლო (3.6) *სიბრტყეების მართობულობის პირობა* იქნება:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (3.10)$$

მაგალითი 3. მოცემულია სიბრტყეები

ა) $3x+2y-7z+8=0$ და $3x+2y-7z+32=0$,

ბ) $2x+3y-2z-4=0$ და $13x-8y+z+44=0$.

განვსაზღვროთ მათი ურთიერთმდებარეობა.

ამოხსნა:

ა) $\frac{3}{3}=\frac{2}{2}=\frac{-7}{-7}\neq\frac{8}{32}$.

სრულდება (3.8) პირობა, არ სრულდება (3.9) პირობა, ამიტომ ისინი პარალელური სიბრტყეებია.

ბ) ამ შემთხვევაში (3.8) და (3.9) პირობები არ სრულდება, სრულდება პირობა (3.10)

$$2\cdot13+3\cdot(-8)-2\cdot1=26-24-2=0.$$

[ა) პარალელურია; ბ) პერპენდიკულარულია.]

§3.2. წრფე სივრცეში

1. წირის განტოლება სივრცეში.

$$\begin{cases}f_1(x,y,z)=0,\\ f_2(x,y,z)=0.\end{cases}$$

სისტემით ზოგადად მოიცემა *წირის განტოლება სიბრტყეში* (ორი ზედაპირის თანაკვეთა).

ზოგად შემთხვევაში წირის განტოლებას *პარამეტრულად* აქვს სახე: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

2. წრფის ზოგადი განტოლება.

პირველი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (3.11)$$

არის *წრფის ზოგადი განტოლება*. თუ (3.11)-ში მოცემული სიბრტყეების ნორმალი ვექტორები $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$ და $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$ არ არიან კოლინეარული, ან არ ემთხვევიან ერთმანეთს.

3. წრფის კანონიკური განტოლება.

მოცემულია $M_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილი და არანულოვანი $\vec{S}=\{m;p;q\}$ ვექტორი. l წრფის განტოლებას, რომელიც გადის M_0 წერტილზე და არის $\vec{S}$ ვექტორის პარალელური, აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{q}. \qquad (3.12)$$

(3.12) განტოლებას ეწოდება l წრფის *კანონიკური განტოლება*. $\vec{S}$ ვექტორს წრფის *მიმმართველი ვექტორი* ეწოდება.

მაგალითი 4. დავწეროთ იმ წრფის კანონიკური განტოლება, რომელიც გადის $M_0(-2;-3;-1)$ წერტილზე და მიმმართველი ვექტორი არის $\vec{S}=\{3;2;4\}$.

ამოხსნა: (3.12) განტოლების თანახმად გვაქვს:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{4};$$

პასუხი: $\left[\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{4}.\right]$

4. წრფის პარამეტრული განტოლება სივრცეში.

თუ (3.12)-ში ყოველ შეფარდებას აღვნიშნავთ t-თი, მივიღებთ

$$x-x_0=mt; \quad y-y_0=pt; \quad z-z_0=qt$$

ანუ

$$x=x_0+mt; \qquad y=y_0+pt; \qquad z=z_0+qt. \tag{3.13}$$

(3.13) არის *წრფის პარამეტრული განტოლება.*

მაგალითი 5. შევადგინოთ წრფის პარამეტრული განტოლება, რომელიც გადის $M_0(2;-3;-7)$ წერტილზე და აქვს მიმმართველი ვექტორი $\vec{S}=\{4;-6;5\}$.

ამოხსნა: (3.13) ფორმულების ძალით გვაქვს

$$x=2+4t;\ y=-3-6t;\ z=-7+5t.$$

პასუხი: $[x=2+4t;\ y=-3-6t;\ z=-7+5t.]$

5. კუთხე წრფეებს შორის.

თუ ორი წრფე მოცემულია განტოლებებით:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{p_1}=\frac{z-z_1}{q_1} \quad \text{და} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{p_2}=\frac{z-z_2}{q_2}, \tag{3.14}$$

მაშინ მათ შორის კუთხის განსაზღვრა დაიყვანება მათ ნორმალურ ვექტორებს, $\vec{S}_1=\{m_1;p_1;q_1\}$, $\vec{S}_2=\{m_2;p_2;q_2\}$, შორის კუთხეების პოვ-ნაზე, ამიტომ

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+p_1p_2+q_1q_2}{\sqrt{m_1^2+p_1^2+q_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+p_2^2+q_2^2}}. \tag{3.15}$$

მაგალითი 6. განვსაზღვროთ კუთხე

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1} \qquad \text{და} \qquad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$$

წრფეებს შორის.

ამოხსნა: აქ $S_1=\{1;-4;1\}$ და $S_2=\{2;-2;-1\}$.

(3.15) ფორმულით ვპოულობთ კუთხეს

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot2+(-4)(-2)+1(-1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

საიდანაც $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

პასუხი: $\left[\varphi=\frac{\pi}{4}.\right]$

(3.14) წრფეების *პარალელობის პირობაა*:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}. \qquad (3.16)$$

ამავე დროს, თუ პირველი წრფის $M_1(x_1;y_1;z_1)$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს მეორე წრფის განტოლებას, მაშინ, ეს წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა. ე.ი. *ორი წრფე ერთმანეთს ემთხვევა*, თუ სრულდება პირობა

$$\frac{x_1-x_2}{m_2}=\frac{y_1-y_2}{p_2}=\frac{z_1-z_2}{q_2}. \qquad (3.17)$$

(3.14) წრფეების *პერპენდიკულარობის* პირობაა:

$$m_1m_2+p_1p_2+q_1q_2=0. \qquad (3.18)$$

მაგალითი 7. განვსაზღვროთ შემდეგი წრფეთა წყვილების ურთიერთმდებარეობა.

ა) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{4}$ და $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{4}$;

ბ) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{4}$ და $\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{4}$;

გ) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{-13}$ და $\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+2}{2}$.

ამოხსნა:

ა) სრულდება პირობა (3.16), არ სრულდება პირობა (3.17)

$$\frac{3}{3}=\frac{2}{2}=\frac{4}{4} \quad \text{და} \quad \frac{-2-7}{3}\neq\frac{3-2}{2}\neq\frac{-1}{4}.$$

ამიტომ მოცემული გვაქვს პარალელური წრფეები.

ბ) ამ შემთხვევაში სრულდება (3.16) და (3.17) პირობები ერთდროულად

$$\frac{3}{3}=\frac{2}{2}=\frac{4}{4} \quad \text{და} \quad \frac{-2+5}{3}=\frac{+3-1}{2}=\frac{-1+5}{4}=+1.$$

ამიტომ წრფეთა წყვილი ერთმანეთს ემთხვევა.

გ) სრულდება პირობა (3.18):

$$2\cdot3+4\cdot5+(-13)\cdot2=0.$$

მოცემულ წრფეთა წყვილი ურთიერთპერპენდიკულარულია.

პასუხი: [ა) პარალელურია; ბ) ემთხვევა; გ) ურთიერთპერპენდიკულარულია.]

6. წრფისა და სიბრტყის პერპენდიკულარულობის პირობა.

თუ მოცემულია წრფე განტოლებით

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{q} \qquad (3.19)$$

და სიბრტყე

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (3.20)$$

მაშინ (3.19) წრფე იქნება (3.20) სიბრტყის პარალელური, თუ წრფის მიმმართველი ვექტორი $\vec{S}=\{m;p;q\}$ პერპენდიკულარული იქნება (3.20) სიბრტყის ნორმალი ვექტორის $\vec{n}=\{A;B;C\}$. ამიტომ (3.19) *წრფისა* და (3.20) *სიბრტყის პარალელურობის პირობას* აქვს შემდეგი სახე:

$$Am+Bp+Cq=0. \qquad (3.21)$$

(3.19) *წრფისა* და (3.20) *სიბრტყის მართობულობის პირობას* ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{p}=\frac{C}{q}. \qquad (3.22)$$

(3.19) წრფე ეკუთვნის (3.20) სიბრტყეს, თუ (3.19)-ის $M_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილი ეკუთვნის (3.20)-ს და (3.19), (3.20)-ის პარალელურია, ანუ სრულდება პირობა:

$$\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \\ Am+Bp+Cq=0. \end{cases} \qquad (3.23)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. მოცემულია წრფისა და სიბრტყის წყვილები:

ა) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ და $3x-y+2z-8=0$;

ბ) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{-1}$ და $6x+4y-2z-9=0$;

გ) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ და $3x-y+2z-7=0$.

განვსაზღვროთ მათი ურთიერთმდებარეობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა: ა) სრულდება პირობა (3.21), მაგრამ არ სრულდება (3.23)

$$1\cdot3+1\cdot(-1)+(-1)\cdot2=0;\quad 3\cdot2+(-1)\cdot(-1)+2\cdot0\neq0,$$

ამიტომ მოცემული წრფე სიბრტყის პარალელურია.

ბ) სრულდება პირობა (3.22)

$\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}$, ამიტომ წრფე სიბრტყის პერპენდიკულარულია;

გ) სრულდება პირობები (3.21) და (3.23)

$3\cdot1+(-1)\cdot1+2\cdot(-1)=0$ და $M_0(2;-1;0)$-ის კოორდინატები აკმაყოფილებს (3.23)-ს

$$3\cdot2-1\cdot(-1)+2\cdot0-7=0,$$

ე.ი. წრფე მდებარეობს სიბრტყეზე.

პასუხი: [ა) პარალელურია; ბ) პერპენდიკულარულია; გ) წრფე ძევს სიბრტყეზე.]

§3.3. ძირითადი ამოცანები სიბრტყესა და წრფეზე სივრცეში

1. ნებისმიერი სიბრტყის განტოლებას, რომელიც მოცემულ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილზე გადის, აქვს შემდეგი სახე:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \quad (3.24)$$

2. ნებისმიერ წრფის განტოლებას, რომელიც გადის $M_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილზე აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{q}. \quad (3.25)$$

3. წრფის განტოლებას, რომელიც გადის ორ მოცემულ $M_1(x_1;y_1;z_1)$ და $M_2(x_2;y_2;z_2)$ წერტილზე, აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (3.26)$$

4. სიბრტყის განტოლებას, რომელიც გადის სამ წერტილზე $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ (რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ), აქვს შემდეგი სახე: ($M(x;y;z)$ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია)

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \quad (3.27)$$

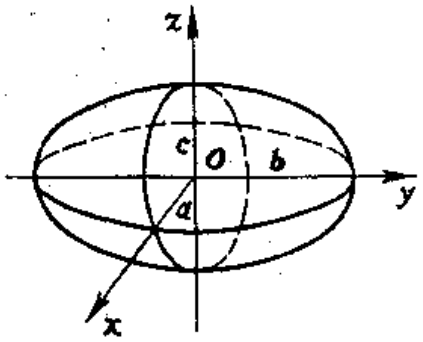
(ანუ ეს არის $\vec{M_1M}$, $\vec{M_1M_2}$, $\vec{M_1M_3}$ ვექტორების კომპლანარობის პირობა).

§3.4. მეორე რიგის ზედაპირების კანონიკური განტოლებები

1. ელიფსოიდები და ჰიპერბოლოიდები.

განსაზღვრა 3.4. **Oxyz** კოორდინატთა სისტემაში *ელიფსოიდი* ეწოდება ზედაპირს, რომელიც მოცემულია განტოლებით (ნახ.3.2)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3.28)$$



ნახ. 3.2

a, b, c სიდიდეებს ეწოდება ელიფსოიდის *ნახევარღერძები.* კოორდინატთა სიბრტყეები ელიფსოიდისათვის წარმოადგენენ სიმეტრიის სიბრტყეებს, კოორდინატთა სათავე კი - სიმეტრიის ცენტრს.

თუ ელიფსოიდის ორი ნახევარღერძი ტოლია, მაგალითად **a=b**, ვღებულობთ განტოლებას

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3.29)$$

ასეთი ელიფსოიდი შეიძლება მივიღოთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ელიფსის, რომელიც **xOz** სიბრტყეზე მდებარეობს, ბრუნვით **Oz** ღერძის გარშემო. (3.29)-ს ეწოდება *ბრუნვითი ელიფსოიდი.*

თუ (3.28) ელიფსოიდში **a=b=c**, ვღებულობთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ *სფეროს*, რომელიც არის ელიფსოიდის კერძო შემთხვევა.

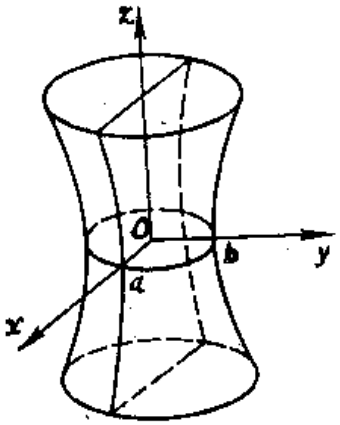
განსაზღვრა 3.5.

ერთკალიანი ჰიპერბოლოიდი ეწოდება ზედაპირს (ნახ.3.3), რომელიც მოცემულია განტოლებით

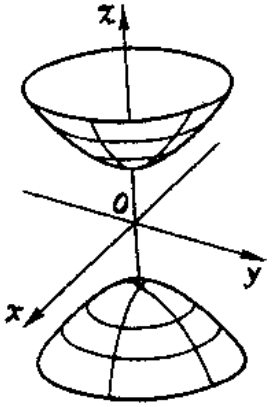
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3.30)$$

ხოლო *ორკალთიანი* ჰიპერბოლოიდი (ნახ.3.4) ზედაპირს, რომელიც განისაზღვრება განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (3.31)$$



ნახ. 3.3



ნახ. 3.4

(3.30) და (3.31) - განტოლებებს ეწოდებათ ჰიპერბოლოიდის კანონიკური განტოლებები. სიდიდეებს **a,b,c** ეწოდებათ *ნახევარღერძები.*

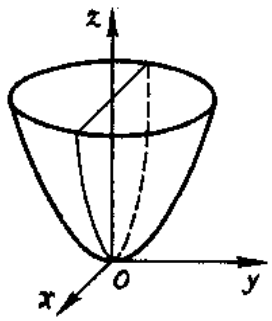
2. პარაბოლოიდი.

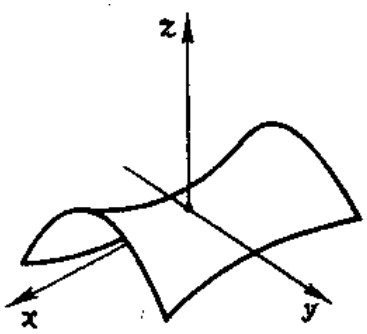
განსაზღვრა 3.6. *ელიფსური პარაბოლოიდი* ეწოდება ზედაპირს (ნახ.3.5), რომელიც **Oxyz** მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია განტოლებით

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}, \qquad (3.32)$$

ხოლო *ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი* – ზედაპირს (ნახ.3.6), რომელიც მოცემულია განტოლებით

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \qquad (3.33)$$





ნახ. 3.5 ნახ. 3.6

როცა **a=b** (3.32)-ს ეწოდება *ბრუნვითი პარაბოლოიდი.* ის მიიღება $z = \frac{x^2}{a^2}$, **y=0 Oz** ღერძის გარშემო ბრუნვით.

"წიგნია ალფა და ომეგა ყოველი ცოდნისა,
საწყისი, საწყისი, ყოველი მეცნიერებისა".

სტეფან ცვაიგი

სავარჯიშოები

1. ეკუთვნის თუ არა **3x-5y+2z-17=0** სიბრტყეს შემდეგი წერტილები: ა) (4;1;2); ბ) (2;-1;3); გ) (7;1;2); დ) (3;0;4);) (0;-4;2)?
[ა) არა; ბ) დიახ; გ) არა; დ) დიახ; ე) არა.]

2. მოცემულია წერტილები $M_1(0;-1;3)$ და $M_2(1;3;5)$. დაწერეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_1 წერტილზე და პერპენდიკულარულია $\vec{M_1M_2}$ ვექტორის.
[x+4y+2z=2.]

3. დაწერეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_1(2;-1;3)$ წერტილზე და კოორდინატთა ღერძებზე მოკვეთს ტოლ მონაკვეთებს.
[x+y+z=4.]

4. დაწერეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის **A(-4;0;4)** წერტილზე და **Ox** და **Oy** ღერძებზე **a=4** და **b=3** მონაკვეთებს მოკვეთს.
$\left[\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1.\right]$

5. ააგეთ სიბრტყეები:
ა) **2x+y-z+6=0**; ბ) **2x-2y+z-6=0**; გ) **y-2z+8=0**; დ) **x+z=1**;
ე) **x-y-z=0**; ვ) **7x-5=0**; ზ) **y+z=0**.

6. იპოვეთ მანძილი **A(5;1;-1)** წერტილიდან **x-2y-2z+4=0** სიბრტყემდე.
[3.]

7. იპოვეთ მანძილი A(1;2;3) წერტილიდან 2x-2y+z-3=0 სიბრტყემდე.

$[\frac{2}{3}.]$

8. იპოვეთ კუთხე x-2y+2z-8=0 და x+z-6=0 სიბრტყეებს შორის.

$[\frac{\pi}{4}.]$

9. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლებები, რომლებიც გადიან მოცემულ სამ წერტილზე: ა) (7;6;7), (5;10;5); (-1;8;9); ბ) (2;4;8), (-3;1;5), (6;-2;7).

[ა) 3x+5y+7z=100;
ბ) 15x+17y-42z+238=0.]

10. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის A(4;3;0) წერტილზე $\vec{S}$={-1;1;1} ვექტორის პარალელურად.

$$\left[\frac{x-4}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}.\right]$$

11. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის წერტილებზე A(3;-2;-1) და B(5;4;5).

$$\left[\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{3}.\right]$$

12. იპოვეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და A(a;b;c) წერტილებზე.

$$\left[\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.\right]$$

13. იპოვეთ $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{-12}=\frac{z-1}{3}$ წრფის მიმმართველი კოსინუსები.

$$[\cos\alpha=\frac{4}{13};\cos\beta=-\frac{12}{13};\cos\gamma=\frac{3}{13}.]$$

14. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის A(2;-3;-8) წერტილზე; ა) Oz ღერძის პარალელურად;

ბ) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+3}{5}$ წრფის პარალელურად.

[ა) $\frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{0}=\frac{z+8}{1}$;

ბ) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+8}{5}$.]

15. აჩვენეთ, რომ $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ წრფე $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$ წრფის პერპენდიკულარულია.

16. დაწერეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის A(3;-2;-1) წერტილზე $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}$ წრფის პერპენდიკულარულად.

[4x-y+3z-11=0.]

17. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის A(1;2;3) წერტილზე და პერპენდიკულარულია 4x-5y-8z+21=0 სიბრტყის.

$\left[\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-3}{-8}.\right]$

"მათემატიკის ცოდნის გარეშე შეუძლებელია გავიგოთ როგორც თანამედროვე ტექნიკის საფუძვლები, ასევე ისიც, თუ როგორ სწავლობენ მეცნიერები ბუნებრივ და სოციალურ მოვლენებს".

ანდრია კოლმოგოროვი

მეორე ნაწილი

მათემატიკური ანალიზი

თავი 4. ფუნქციები, ზღვრები, უწყვეტობა

§4.1. ფუნქციის განსაზღვრა და მათი კლასიფიკაციები

1. ნამდვილი რიცხვები.

განსაზღვრა 4.1. **x** რიცხვს ეწოდება *რაციონალური*, თუ მისი წარმოდგენა შეიძლება $\mathbf{x=\frac{m}{n}}$, $\mathbf{X\in Z}$, $\mathbf{n\in N}$ წილადის სახით. ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ *უსასრულო პერიოდული ათწილადის* სახით.

განსაზღვრა 4.2. **x** რიცხვს ეწოდება *ირაციონალური*, თუ მისი წარმოდგენა შეიძლება *უსასრულო არაპერიოდული* ათწილადის სახით (მაგალითად, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π და ა.შ.)

განსაზღვრა 4.3. რაციონალურ **(Q)** და ირაციონალურ **(I)** რიცხვთა სიმრავლეების ერთობლიობას *ნამდვილ რიცხვთა (R) სიმრავლე ეწოდება.*

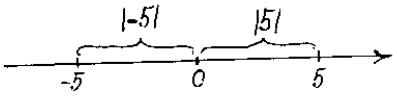
ნამდვილი რიცხვები **Ox** რიცხვთა ღერძზე აღინიშნება წერტილებით. ამავე დროს, ყოველ ნამდვილ რიცხვს რიცხვით ღერძზე შეესაბამება გარკვეული წერტილი და პირიქით, რიცხვითი ღერძის ყოველ წერტილს შეესაბამება გარკვეული ნამდვილი რიცხვი. ამიტომ, "ნამდვილი რიცხვის" ნაცვლად შეიძლება ვთქვათ "წერტილი".

განსაზღვრა 4.4. **x** ნამდვილი რიცხვის *აბსოლუტური სიდიდე*, ანუ, მოდული, ეწოდება არაუარყოფით $|\mathbf{x}|$ რიცხვს, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ თუ } x \geq 0, \\ -x, \text{ თუ } x < 0. \end{cases} \qquad (4.1)$$

ნამდვილი რიცხვის მოდულს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $|-x| = |x|$;
2. $|-x| \leq x \leq |x|$;
3. უტოლობები $|x| \leq a$ და $-a \leq x \leq a$ ტოლფასია;
4. $|x+y| \leq |x| + |y|$;
5. $|x-y| \geq |x| - |y|$;
6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
7. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.



ნახ.4.1.

x ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტური სიდიდის (მოდულის) *გეომეტრიული შინაარსი* მდგომარეობს შემდეგში: $|x|$ არის მანძილი რიცხვით ღერძზე სათავიდან x-ის გამომსახველ წერტილამდე. მაგ., $|0| = 0$; $|5| = 5$; $|-5| = 5$.

განსაზღვრა 4.5. ვთქვათ, მოცემულია ორი, X და Y, სიმრავლე. თუ X სიმრავლის ყოველ ელემენტს, რაიმე წესით, შეესაბამება Y სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი y, მაშინ ამბობენ, რომ X სიმრავლეზე მოცემულია *ფუნქცია* და აღნიშნავენ

$$y=f(x). \qquad (4.2)$$

x ელემენტს ($x \in X$) ეწოდება *არგუმენტი*, ანუ, დამოუკიდებელი ცვლადი, ხოლო y-ს ($y \in Y$) - *ფუნქცია*, ანუ, დამოკიდებული ცვლადი. X სიმრავლეს ეწოდება (4.2) ფუნქციის *განსაზღვრის არე*, Y - სიმრავლეს (4.2) ფუნქციის *მნიშვნელობათა სიმრავლე*. მათ შესაბამისად აღნიშნავენ ასევე $D(y)$-ით და $E(y)$-ით.

განსაზღვრა 4.6. $y=f(x)$ *ფუნქციის გრაფიკი* ეწოდება xOy სიბრტყის ყველა იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვისაც $y=f(x)$, სადაც $x \in D(y)$.

თუ $y=f(x)$ ფუნქცია შექცევადია, მაშინ მის შექცეულ ფუნქციას აქვს სახე: $x=f^{-1}(y)$.

ურთიერთშექცეულ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია იმ წრფის მიმართ, რომელიც პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებს შეადგენს.

ფუნქციის მოცემის ძირითადი ხერხებია: *ცხრილური, გრაფიკული* და *ანალიზური*, ანუ, ფორმულებით.

განსაზღვრა 4.7. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *ზრდადი (კლებადი)* რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1<x_2$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა: $f(x_1)<f(x_2)$, $(f(x_1)>(fx_2))$, ანუ ფუნქცია ზრდადია (კლებადია), თუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას შეესაბამება ფუნქციის მეტი (ნაკლები) მნიშვნელობა.

განსაზღვრა 4.8. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *არაკლებადი (არაზრდადი)* რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1<x_2$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა: $f(x_1)\le f(x_2)$, $(f(x_1)\ge (fx_2))$.

ზრდად და კლებად ფუნქციებს *მონოტონური* ეწოდება.

განსაზღვრა 4.9. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული* რაიმე სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი M (m) რიცხვი, რომ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x რიცხვისათვის: $f(x)\le M$, $(f(x)\ge m))$.

განსაზღვრა 4.10. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *შემოსაზღვრული* რაიმე *სიმრავლეზე*, თუ ამ სიმრავლეზე იგი შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ასევე ქვემოდან.

განსაზღვრა 4.11. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *ლუწი (კენტი)*, თუ ნებისმიერი $x\in D(y)$-თვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(-x)=f(x);\quad (f(-x)=-f(x)).$$

ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, კენტისა კი კოორდინატთა სათავის მიმართ.

განსაზღვრა 4.12. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *პერიოდული*, პერიოდით $l\neq 0$, თუ ნებისმიერი $x\in D(y)$-თვის რიცხვები $x\pm l\in D(y)$ და მართებულია ტოლობა

$$f(x+l)=f(x).$$

§4.2. ელემენტარულ ფუნქციათა თვისებები და მათი გრაფიკები

1. მთელი რაციონალური ფუნქცია.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m \qquad (4.3)$$

სახის მრავალწევრს ($a_0, a_1,...,a_m$ - მუდმივი რიცხვებია და ეწოდებათ მრავალწევრის კოეფიციენტები; m - ნატურალური რიცხვია და ეწოდება მრავალწევრის ხარისხი) *მთელი რაციონალური ფუნქცია* ეწოდება. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

მაგალითი 1. $y=kx+b$ - წრფივი ფუნქცია არის (4.3)-ის კერძო შემთხვევა, როცა $x=1$ (იხ. §1.3-ის პ.II).

2. წილად-რაციონალური ფუნქცია.

ორი მრავალწევრის შეფარდებას *წილად-რაციონალური* ფუნქცია ეწოდება.

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n}. \qquad (4.4)$$

(4.4) ფუნქცია განსაზღვრულია ყველგან გარდა x-ის იმ მნიშვნელობებისა, რომლებიც მნიშვნელს აქცევენ ნულად.

მაგალითი 2. $y = \frac{k}{x}$ არის წილად-რაციონალური ფუნქცია. მისი გრაფიკი ტოლგვერდა ჰიპერბოლაა (იხ. §1.4, პ.3, ნახ.1.17, 1.18).

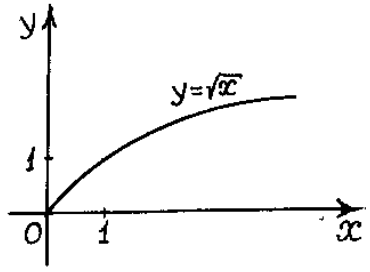
3. ხარისხოვანი ფუნქცია.

ხარისხოვანი ფუნქცია ეწოდება $y=x^\alpha$ სახის ფუნქციას, სადაც α - ნამდვილი რიცხვია. თუ $\alpha=n$, მისი განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე R.

მაგალითი 3. $y=ax^2$, მისი გრაფიკი არის პარაბოლა (იხ. §1.4, პ.4, ნახ.1.21)

თუ $\alpha = \frac{1}{q}$ და $q \in N$, მაშინ $y = \sqrt[q]{x}$. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი x-თვის, თუ q - კენტია და არაუარყოფითი x-თვის, თუ q - ლუწია.

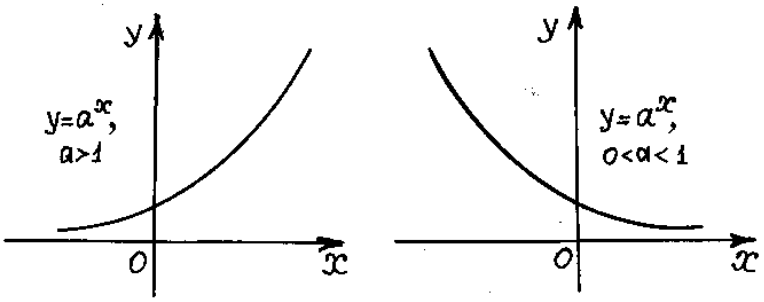
მაგალითი 4.



ნახ.4.2.

$y = \sqrt{x}$, ამ ფუნქციის გრაფიკი არის $y^2=x$ პარაბოლის ზედა ნაწილი (ნახ.4.2).

4. მაჩვენებლიანი ფუნქცია (ნახ.4.3).



ზრდადია კლებადია

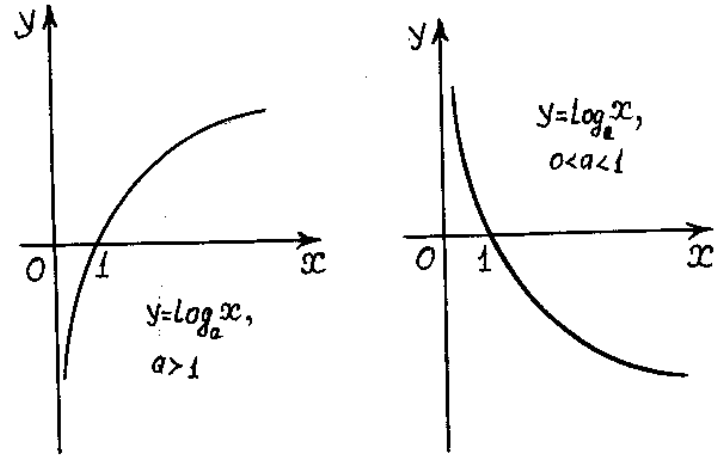
ნახ.4.3.

$y=a^x$ სახის ფუნქციას, სადაც $a>0$ და $a\neq1$, *მაჩვენებლიანი ფუნქცია* ეწოდება (ნახ.4.3).

$D(a^x)=R$,

$E(a^x)=(0; +\infty)$.

5. ლოგარითმული ფუნქცია (ნახ.4.4).



ზრდადია კლებადია

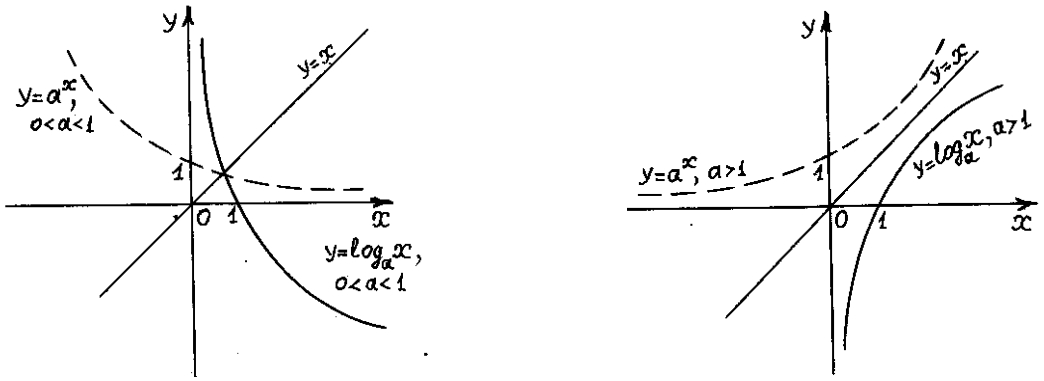
ნახ.4.4.

ფუნქციას $y=\log_a x$, სადაც $a>0$, $a\neq1$, *ლოგარითმული ფუნქცია* ეწოდება (ნახ.4.4).

$D(\log_a x)=(0; +\infty)$,

$E(\log_a x)=R$.

ლოგარითმული ფუნქცია არის მაჩვენებლიანი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, ამიტომ, მათი გრაფიკები სიმეტრიულია y=x წრფის მიმართ (ნახ.4.5). ზრდადი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია ზრდადია, კლებადის კი კლებადი. მაგალითად $y=2^x$ და $y=\log_2 x$ ფუნქციები ურთიერთშექცეული ფუნქციებია.



ნახ.4.5

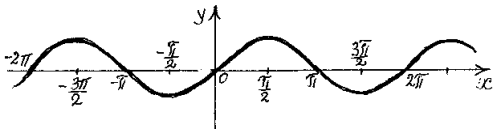
7. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია.

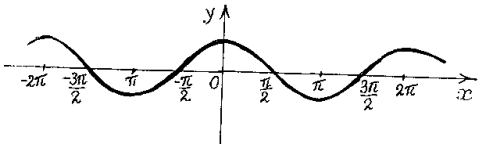
y=sinx და **y=cosx**-ის **D(y)=R, E(y)=[-1;1]** ორივეს უმცირესი დადებითი პერიოდია **2π**. **y=sinx** კენტია **sin(-x)=-sinx**, ხოლო **y=cosx** ლუწი **cos(-x)=cosx**. მათ გრაფიკებს შესაბამისად ეწოდებათ *სინუსოიდა* (ნახ.4.6) და *კოსინუსოიდა* (ნახ.4.7). ორივე ფუნქცია შემოსაზღვრულია.

$$-1\le \sin x\le 1,\quad -1\le \cos x\le 1.$$

გრაფიკებს აქვთ შემდეგი სახე:



ნახ.4.6



ნახ.4.7

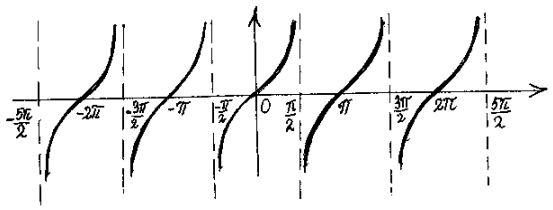
y=tgx-ის **D(y)=R,** $x\neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

y=ctgx-ის **D(y)=R, x≠πk, k∈Z.**

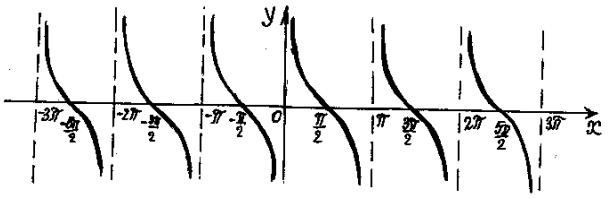
ორივე ფუნქცია კენტია **tg(-x)=-tgx; ctg(-x)=-ctgx.**

უმცირესი დადებითი პერიოდია **π**.

E(tgx)=E(ctgx)=R. გრაფიკებს ეწოდება შესაბამისად *ტანგენსოიდა* (ნახ.4.8) და *კოტანგესოიდა* (ნახ.4.9).



ნახ.4.8.



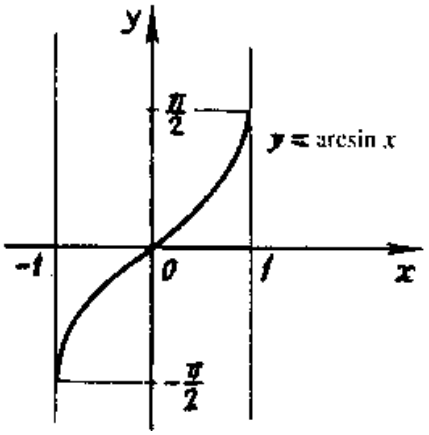
ნახ.4.9.

8. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

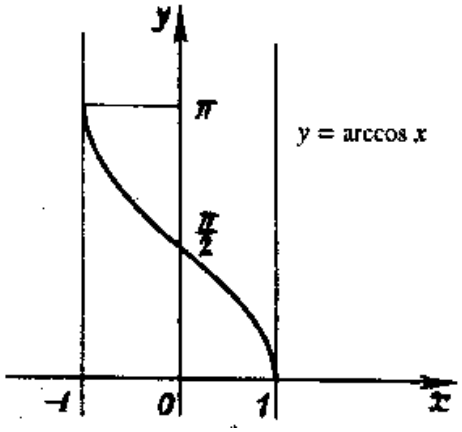
ფუნქცია y=arcsinx, ეს არის კუთხე, რომლის სინუსი უდრის x, ე.ი. x=siny $\left(|y| \le \frac{\pi}{2}\right)$. D(y) არის |x|≤1 (ნახ.4.10).

ფუნქცია y=arccosx ნიშნავს, რომ x=cosy, როცა |x|≤1 და 0≤y≤π, გრაფიკი ნახ.4.11

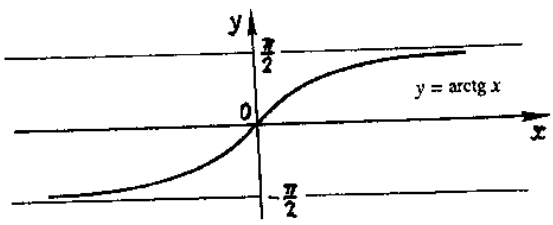
ფუნქცია y=arctgx ნიშნავს, რომ x=tgy, როცა x - ნებისმიერია და $|y| < \frac{\pi}{2}$ (ნახ.4.12), ხოლო ფუნქცია y=arcctgx არის კუთხე, რომელიც ctgx-ის ტოლია, ე.ი. x=ctgy, სადაც x - ნებისმიერია და 0<y<π. (ნახ.4.13).



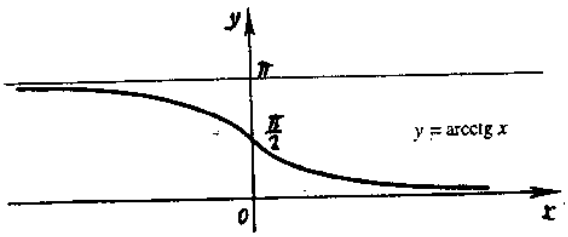
ნახ.4.10



ნახ.4.11



ნახ.4.12



ნახ.4.13

§4.3. ფუნქციის ზღვარი

1. რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი.

განსაზღვრა 4.13. *უსასრულო რიცხვითი მიმდევრობა* ეწოდება $a_n=f(n)$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე $N=\{1,2,...,n,...\}$. $a_1,a_2,...,a_n,...$ ეწოდება მიმდევრობის *წევრები.*

$a_n=f(n)$ მიმდევრობას ზოგჯერ აღნიშნავენ ასე: $\{a_n\}$. ეს ნიშნავს, რომ მოცემულია მიმდევრობა ზოგადი წევრით a_n, მოვიყვანოთ მაგალითები:

1) $\{(-1)^n \cdot n\}$; $-1,2,-3,...$;
2) $\{3n+1\}$; $4,7,10,...$;
3) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},...$;
4) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$; $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4},...$;
5) $\{(-1)^n\}$; $-1,1,-1,...$;
6) $\left\{\frac{n+1}{2n}\right\}$; $1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3},...$;
7) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$; $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3},...$;

რიცხვითი მიმდევრობის გრაფიკი არის ცალკეული წერტილები.

განსაზღვრა 4.14. $\{a_n\}$ რიცხვით მიმდევრობას ეწოდება *არაზრდადი (არაკლებადი)*, თუ ნებისმიერი ნომერი n-თვის სამართლიანია უტოლობა $a_n \geq a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$).

განსაზღვრა 4.15. $\{a_n\}$ რიცხვით მიმდევრობას ეწოდება *კლებადი* (*ზრდადი*), თუ ნებისმიერი ნომერი n-თვის სამართლიანია უტოლობა $a_n > a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$). მაგალითად, მიმდევრობები 2), 4) ზრდადია, ხოლო 3) და 6) კლებადია.

განსაზღვრა 4.16. $\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება *შემოსაზღვრული ზემოდან (ქვემოდან),* თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი (m რიცხვი), რომ ნებისმიერი ნომერი n-თვის სრულდება უტოლობა $a_n \leq M$ ($m \leq a_n$). მაგალითად მიმდევრობები 2), 4) შემოსაზღვრულია ქვემოდან, ხოლო 3) და 6) შემოსაზღვრულია ზემოდან.

განსაზღვრა 4.17. თუ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია როგორც ქვემოდან, ასევე ზემოდან, *შემოსაზღვრული ეწოდება.* მაგალითად, მიმდევრობები 3), 4), 5), 6) შემოსაზღვრული მიმდევრობებია.

განსაზღვრა 4.18. a რიცხვს ეწოდება $\{a_n\}$ რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი, თუ ყოველი წინასწარ აღებული დადებითი ε

რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნომერი $N=N(\varepsilon)$, საზოგადოდ დამოკიდებული ε რიცხვზე, რომ როცა $n>N$, ადგილი აქვს უტოლობას:

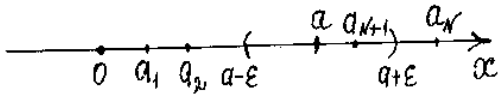
$$|a_n-a|<\varepsilon. \qquad (4.1)$$

სიმბოლურად ამას ასე აღნიშნავენ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a;\ \text{ან კიდევ } a_n\to a,\ \text{როცა } a\to\infty. \qquad (4.2)$$

ამ შემთხვევაში $\{a_n\}$-ს ეწოდება *კრებადი* a რიცხვისაკენ.

(4.1) უტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა $-\varepsilon<a_n-a<\varepsilon$, ანუ $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$, როცა $n>N$.



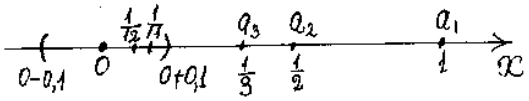
ნახ.4.14

ამრიგად, როგორიც უნდა იყოს $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ შუალედი, მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული a_{N+1}-დან, მოთავსდება $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ შუალედის შიგნით, ხოლო მის გარეთ წევრთა სასრული რაოდენობა (ნახ.4.14).

განსაზღვრა 4.19. ისეთ მიმდევრობას, რომელიც კრებადი არ არის, *განშლადი* მიმდევრობა ეწოდება.

მაგალითი 1. ავიღოთ მიმდევრობა $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$;

$$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{3},\ldots,\ a_n=\frac{1}{n},\ldots$$



ნახ.4.15

ვთქვათ, $\varepsilon=0,1$ $N=10$, $n>N$-თვის მიმდევრობის წევრთა უსასრულო რაოდენობა მოთავსდება $(0-0,1;\ 0+0,1)$ შუალედში (ნახ.4.15).

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ მიმდევრობის წევრები იკრიბება 0-თან, ამიტომ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

ე.ი. მიმდევრობა 3) იკრიბება 0-კენ, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ კლებადობით,

4) იკრიბება 1-კენ, ანუ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ ზრდადობით,

7) იკრიბება 0-კენ, ანუ $\lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}=0$ (ხან იზრდება, ხან კლებულობს).

მიმდევრობას $\{(-1)^n\}$ ვერ ექნება ზღვარი, რადგანაც თუ განვიხილავთ წერტილს 1, (-1), ამ წერტილში თავს იყრის მიმდევრობის უსასრულო წევრები, მაგრამ, ამ წერტილის ε მიდამოს გარეთ ვერ იქნება სასრულო წევრები.

მიმდევრობას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ერთი ზღვარი. ყოველ არაზრდად (არაკლებად) ქვემოდან (ზემოდან) შემოსაზღვრულ მიმდევრობას გააჩნია ზღვარი.

მიმდევრობის კრებადობის *აუცილებელი პირობა* მდგომარეობს იმაში, რომ ეს მიმდევრობა იყოს შემოსაზღვრული, მაგრამ, ეს პირობა არ არის საკმარისი.

მაგ., $\{(-1)^n\}$ ნიშანცვლადი, რყევითი, მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაგრამ ზღვარი არ გააჩნია.

2. რიცხვი e.

განვიხილოთ რიცხვითი მიმდევრობა

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

მტკიცდება, რომ ეს მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული. ასეთ მიმდევრობას გააჩნია ზღვარი.

განსაზღვრა 4.20. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარს აღნიშნავენ e ასოთი, უწოდებენ *მეორე შესანიშნავ ზღვარს.* ამ რიცხვს *ნეპერის რიცხვი* ეწოდება (ჯონ ნეპერი (1550-1617), შოტლანდიელი მათემატიკოსი, ლოგარითმების გამომგონებელი), აღნიშვნა ეკუთვნის ლ.ეილერს, ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \qquad (4.3)$$

რიცხვი e არის ირაციონალური რიცხვი და მიახლოებით ტოლია **2,71828 (e=2,71828182...).**

3. ნატურალური ლოგარითმი.

განსაზღვრა 4.21. ლოგარითმებს, რომლებსაც ფუძედ აქვთ ნეპერის რიცხვი **e**, *ნატურალური ლოგარითმები* ეწოდება. **N** რიცხვის ნატურალურ ლოგარითმს აღნიშნავენ სიმბოლოთი **lnN**, ანუ $\log_e N = \ln N$.

4. ფუნქციის ზღვარი.

ვთქვათ, **y=f(x)** განსაზღვრულია **x=a** წერტილის რაიმე მიდამოში, გამონაკლისს შეიძლება შეადგენდეს თვით **a** წერტილი.

განსაზღვრა 4.22. **A** რიცხვს ეწოდება **f(x)** ფუნქციის ზღვარი **x=a** წერტილზე, თუ ყოველი წინასწარ აღებული დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი δ(ε) რიცხვი (საზოგადოდ დამოკიდებული ε-ზე), რომ ყველა **x≠a**-თვის, როცა

$$|x-a|<\delta,$$

ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x)-A|<\varepsilon. \qquad (4.4)$$

ამას აღნიშნავენ ასე: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, ანუ $f(x)\to A$, როცა $x\to a$ (4.5)

განსაზღვრა 4.23. **A** რიცხვს ეწოდება **f(x)** ფუნქციის ზღვარი, როცა **x** მიისწრაფის უსასრულობისაკენ, თუ ნებისმიერი **ε>0** რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი **N**, რომ ნებისმიერი **x**-თვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას **|x|>N**, ადგილი აქვს უტოლობას **|f(x)-A|<ε**. ამას ასე ჩაწერენ: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

§4.4. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები

1. უსასრულოდ მცირეები და მათი თვისებები.

განსაზღვრა 4.24. $\{a_n\}$ რიცხვით მიმდევრობას ეწოდება *უსასრულოდ მცირე*, თუ მისი ზღვარი ნულის ტოლია: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

მაგალითი 1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ და $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$ მიმდევრობები უსასრულოდ მცირეებია, რადგანაც $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ და $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$.

განსაზღვრა 4.25. $\alpha(x)$ ფუნქციას ეწოდება *უსასრულოდ მცირე*, როცა $x\to a$, თუ $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, ანუ, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta>0$, რომ ნებისმიერი x-თვის, რომელთათვისაც $0<|x-a|<\delta$, სრულდება უტოლობა $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

მაგალითი 2. ფუნქცია $y=x^2-1$ უსასრულოდ მცირეა, რადგანაც $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$.

უსასრულოდ მცირე ფუნქციების ძირითადი თვისებები სამართლიანია უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებისთვისაც.

თვისება 4.1. თუ $\alpha_1(x)$ და $\alpha_2(x)$ უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია, მაშინ $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ ასევე უსასრულოდ მცირეა.

განსაზღვრა 4.26. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *შემოსაზღვრული*, როცა $x\to a$, თუ არსებობენ ისეთი M და δ დადებითი რიცხვები, რომ როცა $0<|x-a|<\delta$, სრულდება უტოლობა $f(x)\le M$.

მაგალითი 3. მოცემული ადგილისათვის ჰაერის ტემპერატურა T არის t დროის შემოსაზღვრული ფუნქცია. იცვლება რა დღისით თუ ღამით, ზამთარში თუ ზაფხულში, ის არასდროს არ მიაღწევს $+100^0C$ და -100^0C. ამრიგად $|T(t)|\le 100$.

თვისება 4.2. შემოსაზღვრული ფუნქციის ნამრავლი უსასრულოდ მცირე ფუნქციაზე არის უსასრულოდ მცირე ფუნქცია.

თვისება 4.3. მუდმივის ნამრავლი უსასრულოდ მცირე ფუნქციაზე არის უსასრულოდ მცირე.

თვისება 4.4. ორი უსასრულოდ მცირე ფუნქციის ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა.

2. უსასრულოდ დიდი სიდიდეები.

განსაზღვრა 4.27. $\{a_n\}$ რიცხვით მიმდევრობას ეწოდება *უსასრულოდ დიდი*, თუ ნებისმიერი დადებითი M რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ ნებისმიერი $n>N$-თვის სრულდება უტოლობა $|a_n|>M$. ამას ჩაწერენ ასე:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty.$$

მაგალითი 4. მიმდევრობები $\{n\}$, $\{(-1)^n\cdot n\}$ უსასრულოდ დიდები არიან.

განსაზღვრა 4.28. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ დიდი, როცა $x\to a$, თუ ნებისმიერი $M>0$ არსებობს ისეთი $\delta>0$, რომ

$|f(x)|>M$ ყველა x-თვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $0<|x-a|<\delta$. ამას ასე აღნიშნავენ:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty .$$

თუ $f(x)$ დადებითია (უარყოფითია) a წერტილის მიდამოში, მაშინ წერენ ასე:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty , \quad (\lim_{x\to a} f(x) = -\infty).$$

შენიშვნა. უსასრულობა (∞) ეს არ არის რიცხვი, არამედ, სიმბოლოა, რომელიც გვიჩვენებს, რომ შესაბამისი ფუნქცია არის უსასრულოდ დიდი.

უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ მცირე ფუნქციები მჭიდრო კავშირშია ერთმანეთთან.

1. თუ $f(x)$ ფუნქცია უსასრულოდ დიდია, მაშინ, $\frac{1}{f(x)}$ უსასრულოდ მცირეა.

2. თუ $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირე ფუნქციაა, მაშინ, $\frac{1}{\alpha(x)}$ არის უსასრულოდ დიდი ფუნქცია.

§4.5. ძირითადი თეორემები ზღვართა შესახებ და მათი გამოყენება

1. ძირითადი თეორემები ზღვართა შესახებ.

თეორემა 4.1. იმისათვის, რომ A რიცხვი იყოს $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to a$ $\left(\lim_{x\to a} f(x) = A\right)$ აუცილებელია და საკმარისი ამ ფუნქციის წარმოდგენა შეიძლებოდეს შემდეგი სახით:

$$f(x)=A+\alpha(x), \qquad (4.6)$$

სადაც $\alpha(x)$ - უსასრულოს მცირეა.

თეორემა 4.2. მუდმივის ზღვარი თვით მუდმივის ტოლია.

თეორემა 4.3. თუ $f(x)\geq 0$ $(f(x)\leq 0))$ ნებისმიერი x-თვის a წერტილის რაიმე მიდამოში, შესაძლებელია, გამონაკლისი იყოს თვით a წერტილი, და a წერტილში აქვს ზღვარი, მაშინ $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0, \ \left(\lim_{x\to a} f(x) \leq 0\right)$.

თეორემა 4.4. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს აქვთ ზღვრები, როცა

$x \to a$, $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B\right)$, მაშინ ასევე ზღვარი ექნება ამ ფუნქციათა ჯამს $f(x)+g(x)$, ნამრავლსა $f(x)\cdot g(x)$ და შეფარდებას $\frac{f(x)}{g(x)}$, როცა $x \to a$, იმ პირობით, რომ $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ და ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

ა) $$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A + B; \qquad (4.7)$$

ბ) $$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B; \qquad (4.8)$$

გ) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B},\ B \neq 0. \qquad (4.9)$$

შედეგი 1. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ზღვარი $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = A)$, როცა $x \to a$, მაშინ

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = A^n.$$

შედეგი 2. მუდმივი მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ ზღვრის ნიშნის გარეთ

$$\lim_{x\to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x\to a} f(x),\ C = \text{const}.$$

თეორემა 4.5. თუ $f(x)$, $g(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებისათვის რაიმე შუალედში სრულდება პირობა $f(x) \le g(x) \le \varphi(x)$ და $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$, მაშინ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

2. მაგალითები ზღვართა გამოთვლაზე.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+1)$.

თუ გამოვიყენებთ 4, 2 თვისებებს და 1, 2 შედეგებს, ეს მაგალითი მიიღებს სახეს:

$$\lim_{x\to 1}(2x^2+1) = \lim_{x\to 1} 2x^2 + \lim_{x\to 1} 1 = 2\left(\lim_{x\to 1} x\right)^2 + 1 = 2\cdot 1 + 1 = 3.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-5x+1}{x^3+1}$. იგივე თეორემებისა და შედეგების გამოყენებით ვპოულობთ

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+1}{x^3+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}5x+\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}x^3+\lim\limits_{x\to 1}1}=$$

$$=\frac{(\lim\limits_{x\to 1}x)^2-5\lim\limits_{x\to 1}x+1}{(\lim\limits_{x\to 1}x)^3+1}=\frac{1-5+1}{1+1}=-\frac{3}{2}.$$

თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებიდან ერთს მაინც არა აქვს სასრულო ზღვარი, მაშინ ფორმულები (4.7), (4.8), (4.9) კარგავენ აზრს. ფორმულა (4.9) აზრს კარგავს, როცა მნიშვნელი ნულის ტოლია. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) მრიცხველის ზღვარი ნულს არ უდრის

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5}{2x-6}$.

$\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)=2\cdot 3-6=0$, ამიტომ (4.9) ფორმულას ვერ გამოვიყენებთ. ფუნქცია $\frac{2x-6}{5}\to 0$, როცა $x\to 3$ (იხ. §4.4), ამიტომ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5}{2x-6}=\infty$ (უსასრულოდ მცირის შებრუნებული სიდიდე უსასრულოდ დიდია).

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{1-x^2}$. გვაქვს: $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)=0$. ამიტომ (4.9) ფორმულა არ გამოგვადგება, რადგანაც

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)}{\lim\limits_{x\to 1}x^2}=\frac{0}{1}=0.$$

ვინაიდან, ფუნქცია $\frac{1-x^2}{x^2}$ უსასრულოდ მცირეა, როცა $x\to 1$, ამიტომ, ფუნქცია $\frac{x^2}{1-x^2}$ არის უსასრულოდ დიდი, როცა $x\to 1$, ე.ი.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{1-x^2}=\infty.$$

შეიძლება აღვნიშნოთ, რომ, როცა x მიისწრაფის 1-კენ მარცხნიდან, ე.ი. ისე, რომ რჩება 1-ზე ნაკლები (ამას ასე ჩაწერენ

$x \to 1-0$), ფუნქცია $\frac{x^2}{1-x^2}$ რჩება ყოველთვის დადებითი. ამას ასე ჩაწერენ: $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x^2}{1-x^2} = +\infty$.

თუ x უახლოვდება 1-ს მარჯვნიდან, ე.ი. ისე, რომ რჩება 1-ზე მეტი (ამას ასე ჩაწერენ $x \to 1+0$), ფუნქცია რჩება ყოველთვის უარყოფითი. ამ შემთხვევას ასე ჩაწერენ:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^2}{1-x^2} = -\infty .$$

ამ ტიპის ზღვრებს *ცალმხრივ ზღვრებს* უწოდებენ.

ბ) მრიცხველის ზღვარი ნულის ტოლია.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{x^2+x}$.

აქ $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+3x) = 0$ და $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x) = 0$.

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გვაქვს $\frac{0}{0}$ სახის *განუსაზღვრელობა*. განუსაზღვრელობის მოსახსნელად უნდა გარდავქმნათ წილადი, გავყოთ რა ისინი x-ზე, რაც შესაძლებელია, რადგანაც ზღვარზე გადასვლამდე x-ის მნიშვნელობა $x \neq 0$. შესაბამისად, მივიღებთ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+3)}{x(x+1)} = 3.$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ ზღვარი $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x}$.

გვაქვს განუსაზღვრელობა $\frac{0}{0}$. განუსაზღვრელობის მოსახსნელად წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ მრიცხველის შეუღლებულზე, ანუ $\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x}\right)$-ზე:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x})(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})} = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})} = -\frac{1}{2}.$$

მაგალითი 7. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{3x+2}$. ცხადია $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2) = \infty$,

ამიტომ $\frac{1}{3x+2} \to 0$, უსასრულოდ მცირე გამრავლებული სასრულო 4-ზე იქნება ასევე უსასრულოდ მცირე, ე.ი. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{3x+2} = 0$.

მაგალითი 8. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+5}{4x+1}$. ამ შემთხვევაში გვაქვს $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა. განუსაზღვრელობის მოსახსნელად მრიცხველი და მნიშვნელი წევრ-წევრად გავყოთ x-ზე, მივიღებთ:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{4x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}} = \frac{3}{4}.$$

ანალოგიურად გამოითვლება წილად-რაციონალური ფუნქციის ზღვარი

$$y = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}$$

განუსაზღვრელობის მოსახსნელად მრიცხველსა და მნიშვნელს წევრ-წევრად ვყოფთ x-ის უდიდეს ხარისხზე, შედეგად გვექნება შემდეგი სამი შემთხვევიდან ერთ-ერთი:

$\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$, როცა $m<n$,

$\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$, როცა $m>n$,

$\lim\limits_{x\to\infty} y = \frac{a_0}{b_0}$, როცა $m=n$.

3. პირველი შესანიშნავი ზღვარი.

სამართლიანია ტოლობა

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (4.10)$$

ამ ტოლობას უწოდებენ *პირველ შესანიშნავ ზღვარს*. მისი გამოყენებით შეიძლება გამოითვალოს ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისა და x-ის ხარისხების შემცველი ზღვრები.

4. უსასრულოდ მცირეების შედარება.

ვთქვათ, $\alpha=\alpha(x)$ და $\beta=\beta(x)$ უსასრულოდ მცირეებია, როცა $x\to a$. დავუშვათ, არსებობს მათი შეფარდების ზღვარი, როცა $x\to a$. განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ α უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა ვიდრე β.

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=A$. ამ შემთხვევაში α და β ერთნაირი რიგის უსასრულოდ მცირეებია.

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\infty$. ამ შემთხვევაში α უფრო დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე β.

მოვიყვანოთ შესაბამისი მაგალითები:

მაგალითი 9. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x-2}=0$. $(x-2)^2$ უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე $x-2$, როცა $x\to 2$.

მაგალითი 10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{x^2}=5$. $5x^2$ და x^2 არიან ერთნაირი რიგის უსასრულოდ მცირეები.

მაგალითი 11. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)^2}=\infty$. $(x+1)$ უფრო დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე $(x-1)(x+1)^2$, როცა $x\to -1$.

განსაზღვრა 4.29. თუ α და β ერთი და იგივე რიგის უსასრულოდ მცირეებია და $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=1$, მაშინ მათ ეწოდებათ *ექვივალენტური უსასრულოდ მცირეები* და სიმბოლურად ასე ჩაწერენ: $\alpha\sim\beta$.

მაგალითი 12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (ს. 3), ე.ი. $\sin x\sim x$, როცა $x\to 0$.

მაგალითი 13. რადგანაც

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1,$$ ე.ი.

$tgx\sim x$, როცა $x\to 0$.

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4.6. თუ არსებობს ორი უსასრულოდ მცირის შეფარდების ზღვარი, მაშინ, ის უდრის მათი შესაბამისი ექვივალენტური უსასრულოდ მცირეების შეფარდების ზღვარს, ე.ი.

თუ $\alpha\sim\alpha_1$, $\beta\sim\beta_1$ და არსებობს $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}$, მაშინ $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

მაგალითი 14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$, რადგანაც $\sin 5x\sim 5x$, როცა $x\to 0$.

მაგალითი 15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$, რადგანაც $\sin 5x\sim 5x$ და $tg3x\sim 3x$, როცა $x\to 0$.

§4.6. ფუნქციის უწყვეტობა

1. უწყვეტობის ცნება.

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე შუალედში და ამ შუალედში მოცემულია არგუმენტის ორი ნებისმიერი x_0 და x მნიშვნელობა. მაშინ, $x-x_0=\Delta x$ სხვაობას *არგუმენტის ნაზრდს* უწოდებენ, ხოლო

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \qquad (4.11)$$

სხვაობას ფუნქციის ნაზრდს უწოდებენ.

განსაზღვრა 4.30. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *უწყვეტი* x_0 წერტილში, თუ არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს (Δx) x_0 წერტილში შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი (Δy), ე.ი. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$.

მაგალითი 1. ფუნქცია $y=x$ უწყვეტია $x=x_0$ ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, რადგანაც $\Delta y=x_0+\Delta x-x_0=\Delta x$ და $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$.

მაგალითი 2. $y=\sin x$ უწყვეტია ნებისმიერი $x=x_0$-თვის.

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}=$$

$$=\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\Delta x.$$

აქედან $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\cos x_0\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$.

განსაზღვრა 4.31. ფუნქციას ეწოდება *უწყვეტი რაიმე ინტერვალში*, თუ ის უწყვეტია ამ ინტერვალის ნებისმიერ წერტილში.

თეორემა 4.7. თუ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციები უწყვეტია x_0 წერტილში, მაშინ ამ წერტილში უწყვეტია მათი ალგებრული ჯამი $f_1(x)\pm f_2(x)$, ნამრავლი $f_1(x)\cdot f_2(x)$ და შეფარდება $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, თუ $f_2(x_0)\neq 0$.

სამართლიანია

თეორემა 4.8. ყველა ძირითადი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია იქ, სადაც ისინი განსაზღვრულია.

თუ ფუნქცია $f(x)$ არ არის უწყვეტი x_0 წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ x_0-ზე $f(x)$ ფუნქცია *განიცდის წყვეტას.*

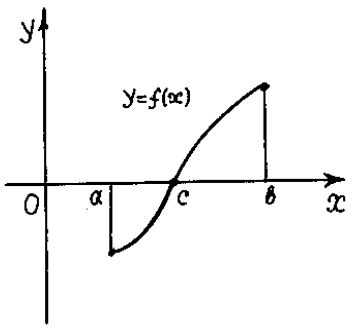
$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში მარცხნიდან (მარჯვნიდან), თუ $\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$, ($\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$).

თუ x_0 წერტილში მარცხენა ზღვარი არ უდრის მარჯვენა ზღვარს, $\lim_{x\to x_0-0}f(x)\neq\lim_{x\to x_0+0}f(x)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილში *განიცდის წყვეტას.*

2. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციების თვისებები.

1. თუ $f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში და ამ წერტილში არ უდრის ნულს, მაშინ, ამ წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x_0)$ ინარჩუნებს ნიშანს.

2. თუ $f(x)$ უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და მის ბოლოებზე ღებულობს სხვადასხვა ნიშნის მნიშვნელობებს, მაშინ, a და b-ს შორის მოიძებნება ისეთი c წერტილი, სადაც $f(c)=0$.



ნახ.4.16

ამ თვისების გეომეტრიული შინაარსი ჩანს (ნახ.4.16).

3. თუ $f(x)$ უწყვეტია $[a,b]$-ზე, მაშინ, შემოსაზღვრულია ამ შუალედში. ე.ი. არსებობს ისეთი დადებით M რიცხვი, რომ $|f(x)|\leq M$, როცა $a\leq x\leq b$.

4. თუ $f(x)$ უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტზე მოიძებნება ისეთი წერტილები x_1 და x_2, რომ $f(x_1)$ და $f(x_2)$

შესაბამისად იქნებიან ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

მრიცხველი და მნიშვნელი წევრ-წევრად გავყოთ x^4-ზე.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x^7}+\dfrac{4}{x^8}}}=3.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$.

აქ გვაქვს $\infty-\infty$ ტიპის განუსაზღვრელობა. განუსაზღვრელობის მოსახსნელად გავამრავლოთ და გავყოთ მოცემული გამოსახულების შეუღლებულზე.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}{(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}=2.$$

მაგალითი 5.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

მაგალითი 6.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n/4}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4=$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n/4} \right)^{\frac{n}{4}} \right]^4 = e^4.$$

მაგალითი 7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1,$$

ე.ი. $\ln(1+x) \sim x$, როცა $x \to 0$. ამიტომ ამ მაგალითის ამოხსნას მოკლედ ექნებოდა შემდეგი სახე:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

მაგალითი 8.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-8x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-8x}{x} = 8,$$ რადგანაც $\ln(1-8x) \sim 8x$, როცა $x \to 0$.

"თანამედროვე ცხოვრებაში მათემატიკა იჭრება აზროვნების განსაკუთრებული სტილით".

ბორის გნედენკო

§4.7. ფუნქციებისა და ზღვრების ზოგიერთი გამოყენების შესახებ ბუნებისმეტყველებაში

1. ცოცხალ სამყაროში მათემატიკის ადგილის შესახებ.

ცოცხალ სამყაროში მათემატიკის ადგილის წარმოსაჩენად მოვიყვანოთ ზოგიერთი ფაქტი [21]:

მზესუმზირის ღეროზე ფოთლები განლაგებულია შემდეგნაირად. ყოველი მომდევნო ფოთლის ყუნწი ღეროზე 72^0-იანი კუთხის მობრუნებით მდებარეობს ე.წ. სპირალურ წირზე. ბოტანიკაში ასეთი ხვეულწირიანი ღეროს მოცემა მიღებულია წილადის სახით, რომლის მნიშვნელში დგას ბრუნთა რიცხვი ფოთოლთა ციკლში, ხოლო მრიცხველში - ფოთოლთა რიცხვი ამ ციკლში. ამ მეთოდით მზესუმზირის ფოთოლთა მდებარეობა ღეროზე განისაზღვრება $\frac{5}{1}$

წილადით. მსგავსი ბოტანიკური წილადები შემჩნეულია სხვა მცენარეებზეც:

$\left(\frac{2}{1}\right)$ - მარცვლეულები, ცაცხვი, წიფელა, არყის ხე;

$\left(\frac{3}{1}\right)$ - ტიტა, თხილი, ვაზს, თხმელა;

$\left(\frac{5}{2}\right)$ - მუხა, ალუბალი, მოცხარი, ქლიავი;

$\left(\frac{8}{3}\right)$ - კომბოსტო, ჟოლო, მსხალი, ბოლოკი, სელი, ვერხვი;

$\left(\frac{13}{5}\right)$ - ნაძვი, ნუში, ქაცვი, ჟასმინი.

წიწვიანების გირჩებისათვის ტიპიურია წილადები:

$\left(\frac{21}{8}\right)$, $\left(\frac{34}{13}\right)$, $\left(\frac{55}{21}\right)$.

ბოტანიკური წილადების მრიცხველები და მნიშვნელები

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (4.13)

მიმდევრობის ელემენტებია.

ამ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულაა:

$$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}\ ,\ n=3,4,... \qquad (4.14)$$

მის ელემენტებს *ფიბონაჩის რიცხვები* ეწოდება.

ფიბონაჩის მიმდევრობის უმნიშვნელოვანესი თვისება არის ის, რომ იმ წილადთა მიმდევრობა, რომლებიც მიიღება ყოველი წევრის გაყოფით მომდევნოზე, ე.ი. მიმდევრობა $1,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},...$ მიისწრაფის ე.წ. ოქროს კვეთისაკენ (იხ. §1.1, პ.4), რომლის ზუსტი მნიშვნელობაა $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=0,618...$.

ყველა ცნობილ ბიოლოგიურ წილადში, რომლებიც აღწერენ მცენარეთა სპირალურ სიმეტრიას, მონაწილეობენ ფიბონაჩის რიცხვები.

არსებობს ბიოლოგიური წილადების ორი სახის მიმდევრობა. ისინი აგებულია ასე: ორივე მიმდევრობაში მრიცხველები არის ფიბონაჩის რიცხვები დაწყებული მესამედან:

I. $\left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{3}\right), \left(\frac{8}{5}\right), \left(\frac{13}{8}\right), \left(\frac{21}{13}\right), \left(\frac{34}{21}\right),...$

II. $\left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{3}{1}\right), \left(\frac{5}{2}\right), \left(\frac{8}{3}\right), \left(\frac{13}{5}\right), \left(\frac{21}{8}\right), \left(\frac{34}{13}\right),...$

I მიმდევრობის მნიშვნელში ფიბონაჩის რიცხვები მიმდევრობის მეორე წევრიდან არის დაწყებული, ხოლო II მიმდევრობის მნიშვნელში კი პირველი წევრიდანაა დაწყებული.

თუ ამ წილადებს ჩავწერთ ათწილადებად, შესაბამისად, გვექნება:

2,0; 1,5; 1,6666667; 1,6; 1,625; 1,6153846; ...

2,0; 3,0; 2,5; 2,6666667; 2,6; 2,625; ...

თუ გავაგრძელებთ ანგარიშს, სულ უფრო მივუახლოვდებით რიცხვებს:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339...,$$

ანუ

$$\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad n=2,3,... \qquad (4.15)$$

სადაც u_{n+1} და u_n ფიბონაჩის მიმდევრობის ორი მეზობელი წევრია;

$$\Phi_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}6180339...$$

და შესაბამისად

$$\Phi_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n}, \quad n=1,2,... \qquad (4.16)$$

$$\Phi_1=\Phi+1, \quad \text{ასევე} \quad \Phi = \frac{1}{x_+}, \quad \left(x_+ = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}62\right).$$

ასეთია ოქროს კვეთასა და Φ-ს შორის დამოკიდებულება. ოქროს კვეთა მჭიდროდაა დაკავშირებული ჩვენს გარშემო მყოფ ობიექტებთან, რომლებიც განსაკუთრებულ ესთეტიკურ შთაბეჭდილებას ახდენენ.

Φ-თი აღნიშვნა შემოიტანეს უძველესი საბერძნეთის სკულპტორის ფიდიას (ჩვ.წ.ა. V ს-ის) პატივსაცემად, რომელმაც გამოიყენა ოქროს კვეთა მსოფლიოში ცნობილი ათენის ტაძრის "პარფენონი"-ს პროექტირებაში.

ოქროს კვეთის პრინციპი საფუძვლად უდევს მსოფლიო ხელოვნების ბევრ ნიმუშს, უმთავრესად აღორძინებისა და ანტიკური ხანის არქიტექტურაში (იხ. §1.7). ლეონარდო და ვინჩი Φ-ს პოულობდა ადამიანის სხეულის პროპორციებში.

2. ფიბონაჩის ამოცანა ბოცვერებზე.

1202 წელს გამოვიდა *ლეონარდო პიზანელის* (ზედმეტსახელად ფიბონაჩი) "*წიგნი აბაკზე*", რომელშიც მოყვანილია ერთი პრაქტიკული ამოცანა [20]. ეს წიგნი ფიბონაჩიმ გამოუშვა როგორც სახელმძღვანელო ვაჭრებისათვის და წარმოადგინა ფართო ტრაქტი არითმეტიკასა და ალგებრაში. ის იმ დროისათვის ერთგვარი მათემატიკური ენციკლოპედიის მაგვარი რამ იყო (ჩვენამდე მოაღწია მხოლოდ 1228 წლის გამოცემამ).

ამოცანის შინაარსი მდგომარეობს შემდეგში: ბოცვრების წყვილი მოათავსეს ყოველი მხრიდან შემოღობილ არეში, რომ გაეგოთ წლის განმავლობაში გამრავლებული ბოცვერების რაოდენობა, თუ ბოცვერის ბუნება ისეთია, რომ ერთი თვის შემდეგ წყვილი აჩენს მეორე წყვილს. ბოცვერები ბადებენ თავიანთი დაბადებიდან მეორე თვეს. რადგანაც პირველი წყვილი პირველ თვეს გვაძლევს შთამომავლობას, გაორმაგდა და ახლა არის 2 წყვილი; მათგან პირველი წყვილი მრავლდება შემდეგ თვეშიც, ასე რომ, მეორე თვეს გახდა 3 წყვილი; ამათგან შემდეგ თვეს 2 წყვილი მოგვცემს შთამომავლობას, ასე რომ, III თვეს გაჩნდა 2 წყვილი და ახლა არის 5 წყვილი; ამათგან 3 წყვილი ამ თვეს მოგვცემს შთამომავლობას და IV თვეს უკვე გახდა 8 წყვილი; ამათგან 5 წყვილი მოგვცემს კიდევ 5 წყვილს და V თვეს გვექნება 13 წყვილი. VI თვეს მრავლდება 8 წყვილი და შედეგად გვექნება 21 წყვილი და ა.შ.

ბოცვერების გამრავლების სქემა შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

I. $1+1=2$;
II. $1\cdot2+1=3$;
III. $2\cdot2+1=5$;
IV. $3\cdot2+2=8$;
V. $5\cdot2+3=13$;
VI. $8\cdot2+5=21$;
VII. $13\cdot2+8=34$;
VIII. $21\cdot2+13=55$;
IX. $34\cdot2+21=89$;
X. $55\cdot2+34=144$;
XI. $89\cdot2+55=233$;
XII. $144\cdot2+89=377$.

მივიღეთ რიცხვები: 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, რომლებსაც ფიბონაჩის რიცხვებს უწოდებენ და თუ დავაკვირდებით $a_{n+1}=a_{n-1}+a_n$.

ფიბონაჩის რიცხვები, ასეთი სახელწოდება დაიმკვიდრა ამ რიცხვთა მიმდევრობამ XIX ს-ში. ფიბონაჩის რიცხვები თავისი განსაკუთრებული თვისებების გამო იპყრობენ მათემატიკოსების ყურადღებას და თავს წამოყოფენ ყველაზე მოულოდნელ ადგილებში.

3. π, e რიცხვები და "ოქროს კვეთა".

თუ ვინ მიხვდა, რომ წრეწირის სიგრძესა და დიამეტრს შორის არსებობს ასეთი შესანიშნავი კავშირი, დღემდე უცნობია [15]. სამაგიეროდ დაბეჯითებით ვიცით, რომ ეს სიდიდე π ასოთი აღნიშნეს XVII საუკუნეში. იმის შემდეგ, რაც ლეონარდ ეილერმა გამოიყენა ეს აღნიშვნა თავის ნაშრომებში, საერთაშორისო სტანდარტებში დამკვიდრდა ეს სიმბოლო **π=3,141592....**

π რიცხვის თვისებების შემდგომი შესწავლა შესაძლებელი გახდა მისი მოულოდნელი "მოკავშირის" - რიცხვი e-ს წყალობით (იხ.§4.3, ჰ.2).

ისევე როგორც π, e-ც ირაციონალურია, გამოისახება უსასრულო პერიოდული ათწილადით. კომპიუტერით დღეისათვის ნაპოვნია e-ს მილიონზე მეტი ციფრი **e=2,718281828459045...**

ეს რიცხვი შესანიშნავია თავისი მნიშვნელობით. მისთვის არსებობს ლამაზი წარმოდგენა ეილერის მწკრივის სახით (იხ.თავი 5):

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots; \qquad (4.17)$$

(აქ $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$).

e ასევე შეიძლება წარმოვადგინოთ ჯაჭვური წილადის სახით:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ldots}}}}}; \qquad (4.18)$$

π და Φ რიცხვები მჭიდრო კავშირშია: Φ არის იმ წრეწირის რადიუსი, რომელიც შემოწერილია წესიერ ათკუთხედზე, რომლის

გვერდის სიგრძე 1-ის ტოლია, ან კიდევ, ეგვიპტის ხეოფსის პირამიდაში სრულდება თანაფარდობა

$$\frac{2H}{L} \approx \Phi, \quad \frac{2L}{H} \approx \pi, \qquad (4.19)$$

სადაც **L** - ფუძის პერიმეტრი, **H** - პირამიდის სიმაღლე.

ულამაზესი ნიჟარის **Nautilus** (ნახ. წიგნის გარეკანზე) ზრდის წესი ჩაიწერება ფორმულით:

$$R = \sqrt{\Phi} \cdot e^{a^{\frac{2\ln\sqrt{\Phi}}{\pi}}}, \qquad (4.20)$$

რომელიც აერთიანებს **Φ**, **e** და **π**-ს. ამ განტოლებას ჰქვია *ოქროს სპირალის განტოლება.*

4. უწყვეტი და წყვეტილი ფუნქციები ბიოლოგიაში.

ვუჩვენოთ რამდენიმე მარტივი ბიოლოგიური მოვლენა, რომელთა აღწერა ხდება უწყვეტი და წყვეტილი ფუნქციებით [11].

უპირველეს ყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ სმენა, მხედველობა, ულტრაბგერის აღქმა, რომლებსაც გამოიყენებს ბევრი ბიოლოგიური სახეობა - ყველა ეს მოვლენა დაკავშირებულია რხევით პროცესებთან, რომელთა გამოსახვა ხდება **y=sinx** და **y=cosx** ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით.

კონკრეტულ ექსპერიმენტში ისეთ სიდიდეებს, როგორიცაა: გზა, პოპულაციის ბიომასა, პოპულაციის რაოდენობა (ინდივიდთა რაოდენობა პოპულაციაში), ტემპერატურა, დრო და ა.შ., არ შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვის ტოლი მნიშვნელობა. ასე, მაგალითად, გზა, სიტუაციიდან გამომდინარე, იზომება კილომეტრებით, ან, მილიმეტრებით; ბიომასა იზომება ტონებით, ან, მილიგრამის მეათედებით; დრო – წლებით, ან, წამის მეასედებით, და, ფორმალურად რომ ვთქვათ, აღნიშნული ფუნქციების განსაზღვრის არეები და მნიშვნელობათა სიმრავლეები არ წარმოადგენენ რაიმე შუალედებს, არამედ, წარმოადგენენ რაიმე სკალებს, შესაძლოა, ძალიან მცირე, მაგრამ, სტანდარტული დანაყოფებით. ამ დანაყოფების სიდიდე დამოკიდებულია ექსპერიმენტის ხასიათზე და ხელსაწყოების სიზუსტეზე. მსხვილი ცხოველების ასაკს ვზომავთ წლებით, ხოლო, ზოგიერთი ელემენტარული ნაწილაკების სიცოცხლის ხანგრძლივობას - წამების მემილიონედი ნაწილებით.

ცხადია, როცა საქმე გვაქვს ასეთ ფუნქციებთან, არ შეიძლება ვისაუბროთ უწყვეტობაზე. რომ შევძლოთ მათემატიკური ანალიზის აპარატის გამოყენება, სადაც ეს მოსახერხებელია, ფუნქციებს, რომლებიც მოცემულია სკალაზე, ვცვლით მათ უწყვეტი ანალოგებით. ცხადია, ეს ყოველთვის არ არის მოსახერხებელი და მიზანშეწონილი. მაგალითად, თუ ფუნქციის განსაზღვრის არე შედგება მხოლოდ ორი ელემენტისაგან, მიზანშეწონილი არ არის მისი შეცვლა შუალედით. მაგრამ, თუ განსაზღვრის არეები და მნიშვნელობათა სიმრავლეები შედგებიან თუმცა სასრულო, მაგრამ, საკმაოდ დიდი რაოდენობის ელემენტებისაგან, რომლებიც რაიმე აზრით "ერთმანეთთან ახლოს განლაგებულები" არიან (როგორც წვრილი დანაყოფები სკალაზე), მაშინ, ჩვენ შეგვიძლია შევცვალოთ ისინი შუალედებით და ფუნქცია განსაზღვრული ერთ შუალედზე და მნიშვნელობებით მეორე შუალედზე, ჩავთვალოთ უწყვეტად. შევისწავლით ამ სამოდელო ფუნქციას და შემდგომ შეიძლება მივიღოთ შესაბამისი დასკვნები იმ ფუნქციის მიმართ, რომელიც ფიგურირებს ექსპერიმენტში. ეს იდეა უდევს საფუძვლად უწყვეტი ფუნქციების გამოყენებით მათემატიკური მოდელების აგებას. სწორედ ასეთ მათემატიკურ მოდელებს მოვიყვანთ მომავალში, ამიტომ, განხილულ ფუნქციებს ვიგულისხმებთ უწყვეტად, ისე, რომ ყოველთვის ამას არ აღვნიშნავთ.

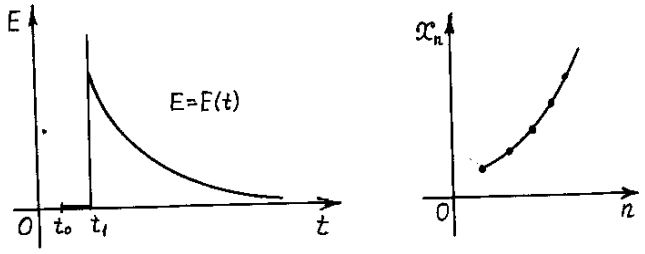
უჯრედების დაყოფის გზით მიკროორგანიზმების რაოდენობის ზრდის შესწავლა ხდება ხარისხოვანი ფუნქციის $f(t)=ae^{kt}$ (აქ t არის არგუმენტი) მეშვეობით.

$f(x)=Ax^{\alpha}$ სახის ხარისხოვანი ფუნქცია ასახავს ცხოველის წონასა და ნივთიერებათა ძირითადი ცვლის ინტენსიურობას შორის დამოკიდებულებას. აქ x - არის ცხოველის წონა, $f(x)$ - ჟანგბადის რაოდენობა, რომელსაც დროის ერთეულში შთანთქავს ცხოველი. A და α არის პარამეტრები, რომლებიც ცოცხალი არსებების მოცემული კლასისათვის მუდმივია. ძუძუმწოვრებისათვის და ფრინველებისათვის, მაგალითად, $\alpha=0,74$, $A=70$, ხოლო თევზებისათვის $\alpha=0,8$, $A=0,3$.

მოვიყვანოთ წყვეტადი ფუნქციის მაგალითები.

მაგალითი 1. ვარდნილი სხეულის სიჩქარე, ზოგადად დროის უწყვეტი ფუნქციაა, მაგრამ, მიწაზე დაცემის მომენტისათვის ის მყისიერად ხდება ნულის ტოლი, ე.ი. განიცდის წყვეტას.

მაგალითი 2. განვიხილოთ უჯრედი, რომლის აგზნება შეიძ-



ნახ.4.17

ლება გარეგანი ზემოქმედებით. მაგალითად, ნერვიული უჯრედი, კუნთის უჯრედი და სხვა. თუ აგზნებადობის **E** სიდიდეს გავზომავთ ამა თუ იმ ერთეულით, მაშინ, აგზნებადობის **E=E(t)** გრაფიკს აქვს სახე (ნახ.4.17).

t_0 მომენტში უჯრედი ღებულობს სიგნალს, მაგრამ, აგზნება ხდება რაიმე $t_1>t_0$ მომენტში. $[t_0;t_1]$ შუალედს ეწოდება *ლატენტური პერიოდი.* t_1 მომენტში უჯრედის აგზნება ხდება მყისიერად მაქსიმალურ მნიშვნელობამდე, ხოლო შემდგომ თანდათან კლებულობს მანამდე, სანამ არ იქნება ახალი სიგნალი. თუ სიგნალი არ არის საკმაოდ დიდხანს, მაშინ, აგზნებადობა უტოლდება ნულს.

ამგვარად, ფუნქციას, რომელიც გამოხატავს აგზნებადობის სიდიდის დამოკიდებულებას დროზე, აქვს წყვეტები ლატენტური პერიოდების ბოლოებში.

მაგალითი 3. განვიხილოთ ისეთი მიკროორგანიზმების ბიომასების ცვლილებები, რომლებიც მგრძნობიარენი არიან ტემპერატურული ცვლილებების მიმართ. ტემპერატურის ზრდასთან ერთად საერთო ბიომასა **m**, როგორც წესი, იზრდება - სითბო ხელს უწყობს გამრავლებას, მაგრამ, როცა ტემპერატურა ძალიან მაღალია, პრაქტიკულად მთელი კოლონია იღუპება; **m**-ის მნიშვნელობა ნახტომისებურად ხდება ნულის ტოლი. თითქმის იგივე ხდება ტემპერატურის დაცემისას: როგორც კი ის მიაღწევს რაიმე ქვედა საზღვარს, მიკროორგანიზმები კვდებიან. რეალურ პირობებში ტემპერატურა იცვლება დროზე დამოკიდებულებით - ხან იზრდება, ხან კლებულობს. ამიტომ, დროზე დამოკიდებული ბიომასის ცვლილება შეიძლება იყოს წყვეტილი. წყვეტის წერტილები შეესაბამებიან დროის იმ მომენტებს, როცა ტემპერატურა გახდა ან ძალიან დიდი, ან, ძალიან მცირე.

ახლა ვაჩვენოთ რა როლს ასრულებს ფუნქციის მნიშვნელობათა არის პოვნა, მაგალითად, ეკოლოგიურ ამოცანაში.

მაგალითი 4. რაიმე ეკოლოგიურ სისტემაში ცვლილება ექვემდებარება პერიოდულობისა და ციკლურობის პრინციპს (მდელო-ჭაობი, ჭაობი-მდელო). ცნობილია კანონი, რომლის თანახმადაც ხდება ეს ცვლილება $h(t) = -4\cos^2 t \cdot \sin^2 t + \cos^2 2t + 7$, სადაც t დროა. უნდა

ვიპოვოთ სხვაობა „ჭაობი“ და „მდელო“ მდგომარეობებს შორის $h(t)$ ფუნქციის გრაფიკზე.

ამოხსნა: ჩავთვალოთ, რომ $h(t)$ ფუნქციის უდიდეს მნიშვნელობას შეესაბამება მდგომარეობა „მდელო“, ხოლო უმცირესს - „ჭაობი“. გარდავქმნათ ფუნქცია $h(t)$.

$$h(t) = -(2\sin t\cos t)^2 + \cos^2 2t + 7 =$$

$$= -\sin^2 2t + \cos^2 2t + 7 = \cos 4t + 7.$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, აუცილებელია ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე. რადგანაც $-1 \le \cos 4t \le 1$, ამიტომ, $6 \le \cos 4t + 7 \le 8$, ე.ი. $h(t) \in [6,8]$, სადაც 8 ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა („მდელო“), ხოლო 6 – უმცირესი მნიშვნელობა („ჭაობი“).

ამრიგად სხვაობა უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის არის 8-6=2.

პასუხი: [2.]

5. ხალხთა განსახლების დისკრეტული მათემატიკური მოდელი.

რიცხვით მიმდევრობათა კლასიფიკაციისა და თვისებების შემდეგ შეიძლება განვიხილოთ ამოცანა ხალხთა განსახლების შესახებ. ავაგოთ მარტივი დინამიური მოდელი, რომელიც მოგვცემს საშუალებას გავაკეთოთ მომავლის პროგნოზი და ჩავიხედოთ წარსულში. დინამიური მოდელი ნიშნავს, რომ მასში შედიან სიდიდეები, რომლებიც დროში იცვლებიან [20].

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში.

წარმოვიდგინოთ XVIII ს.-ის ცენტრალური ევროპის ერთ-ერთი სოფელი. სოფლის ეკლესიის მრევლია მეზობელი სოფლების მცხოვრებლები. მღვდელმა შეამჩნია, რომ ტაძარი ვიწრო გახდა მორწმუნეთათვის. ის ფიქრობს, თუ მოსახლეობის რიცხვი გაიზარდა მომავალშიც გაიზარდა, აუცილებელი იქნება ახალი ეკლესიის აშენება, რისთვისაც დიდი თანხაა საჭირო და შეუდგა ანგარიშს. მისი მსჯელობა შეიძლება ჩავწეროთ თანამედროვე აღნიშვნებით.

მოდელის აგება:

ვთქვათ, n წლის ბოლოს მრევლის რაოდენობა x_n-ია, ხოლო

(n+1) წლის ბოლოსათვის კი x_{n+1}. ამ ერთი წლისათვის მოსახლეობის ნაზრდი იქნება

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

ეს ცვლილება ხდება ორი ბუნებრივი მიზეზით - ხალხი იბადება და ხალხი კვდება (ჩავთვალოთ, რომ იმ პერიოდისათვის მიგრაციის სენი არ არსებობს). მღვდელმა დაბადებულთა რიცხვს წლების მიხედვით შეუსაბამა $b_1, b_2, .., b_k$ და გარდაცვლილთა რიცხვს $d_1, d_2, ..., d_k$ რიცხვები, ხოლო მრევლის რიცხვი შესაბამისაც არის $x_1, x_2, ..., x_k$.

მღვდელმა შეამჩნია, რომ $\frac{b_1}{x_1}, \frac{b_2}{x_2}, ..., \frac{b_k}{x_k}$ და $\frac{d_1}{x_1}, \frac{d_2}{x_2}, ..., \frac{d_k}{x_k}$ შეფარდებები წლიდან წლამდე უმნიშვნელოდ იცვლება. მსჯელობის სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ ეს სიდიდეები მუდმივია და აღვნიშნოთ ისინი შესაბამისად α და β მუდმივებით.

αx_n - იქნება n-ურ წელს დაბადებულთა რიცხვი, βx_n –გარდაცვლილთა რიცხვი.

მოსახლეობის ცვლილება n-ურ წელიწადს იქნება

$$\Delta x_n = \alpha x_n - \beta x_n, \qquad (4.21)$$

ანუ $x_{n+1} - x_n = \alpha x_n - \beta x_n$, $x_{n+1} = x_n + \alpha x_n - \beta x_n$,

$$x_{n+1} = x_n(1 + \alpha - \beta). \qquad (4.22)$$

დავუშვათ $\gamma = 1 + \alpha - \beta$, მაშინ

$$x_{n+1} = \gamma \cdot x_n \qquad (4.23)$$

მოდელი აგებულია.

გავაანალიზოთ აგებული მოდელი:

1) $\gamma > 1$ ($\alpha - \beta > 0$ - იბადება მეტი, ვიდრე კვდება) - მოსახლეობა იზრდება წლითიწლობით;

2) $\gamma = 1$ ($\alpha - \beta = 0$ - კვდება იმდენივე, რამდენიც იბადება) - მოსახლეობის რაოდენობა უცვლელი რჩება;

3) $\gamma < 1$ ($\alpha - \beta < 0$ - კვდება მეტი, ვიდრე იბადება) - მოსახლეობის რაოდენობა კლებულობს.

ნებისმიერი $\gamma > 1$-თვის x_n იზრდება ექსპონენციალურად (ნახ.4.18).

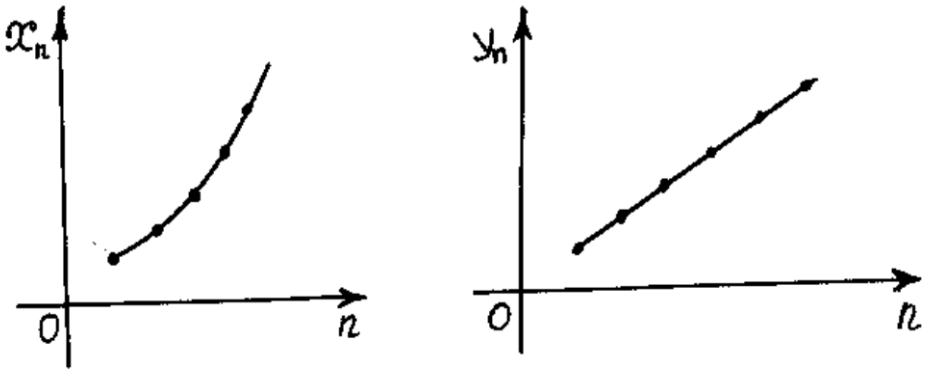
აღსანიშნავია, რომ 1820 წელს ლონდონში გამოქვეყნდა მალთუსის ნაშრომი, რომელშიც ნათქვამი იყო, რომ ბიოლოგიური თავისებურებებიდან გამომდინარე, მოსახლეობას აქვს ტენდენცია გამრავლდეს გეომეტრიული პროგრესიით

$$x_{n+1} = \gamma \cdot x_n, \quad \gamma > 1,$$

მაშინ, როდესაც რეალურად არსებობის პირობები გადიდდნენ მხოლოდ არითმეტიკული პროგრესიით (ნახ. 4.18)

$$y_{n+1} = y_n + d, \quad d > 0.$$

ცვლილებების სიჩქარის ასეთი სხვაობა შეუძლებელია შემჩნეული არ ყოფილიყო, რამაც აღნიშნული თეორიის მკაცრი კრიტიკა და პოლიტიზირებული პოლემიკა გამოიწვია.



ნახ.4.18.

ცხადია, სიტუაციის გამარტივებული აღწერის დროს, ზოგიერთი სიტუაცია უნდა უგულვებელვყოთ, ჩავთვალოთ, რა ისინი არამნიშვნელოვნად. აქედან გამომდინარე, (4.23) ფორმულა საკმაოდ რეალურ სურათს იძლევა, მაგრამ, ხანგრძლივვადიანი პროგნოზი (4.23) წესით მცდარია. ამიტომ, უნდა იქნეს ნაჩვენები საზღვრები, სადაც ამა თუ იმ მოდელის გამოყენება შეიძლება.

მოკლედ რომ ვთქვათ, ყოველ მოდელს გააჩნია თავისი რესურსი.

ჩვენ შეგნებულად განვიხილეთ ხალხთა განსახლების აღწერილი მოდელი, იმიტომ, რომ ის არის ამ ტიპის ერთ-ერთი პირველი მოდელი.

6. ჯანმრთელობისთვის საშიში საკვების დღიური ნორმის დადგენა.

1. ამოცანა რეალური ცხოვრებიდან.

ცნობილია, რომ მცენარეთა კვების ნებისმიერი ელემენტი, რომელიც ჭარბადაა, შეიძლება იქცეს ტოქსინებად და ზიანი მოუტანოს თვით მცენარეებსაც და ყოველივე ცოცხალს. დავადგინოთ ადამია-

ნისათვის ნაადრევად მოსული (დამწიფებული) კიტრის ჯიშის ყოველდღიური დასაშვები დოზა.

2. მათემატიკური მოდელი.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

a - ადამიანის 1 კგ წონაზე დასაშვები ნიტრატების უდიდესი დოზა;

b - ადამიანის წონა;

k - 1 კგ ბოსტნეულში ნიტრატების რაოდენობა;

n - ბოსტნეულის დასაშვები მასა.

ყოველი ადამიანისთვის ნიტრატების უდიდესი დასაშვები დოზა არის **ab**, ხოლო **n** კგ ბოსტნეულში ნიტრატების დოზა არის **kn**, მაშინ

$$kn=ab$$

ეს არის განხილული ამოცანის მათემატიკური მოდელი.

3. მათემატიკური შედეგები.

ამ ეტაპზე ბოსტნეულის დასაშვები რაოდენობა იქნება $n=\frac{ab}{k}$.

4. რეალური სამყარო.

ადამიანი რომ არ მოიწამლოს ტოქსინით, უნდა სრულდებოდეს უტოლობა $n\le\frac{ab}{k}$.

"მათემატიკა არის ენა, რომელზეც ღმერთი ესაუბრება ადამიანებს".

პლატონი

სავარჯიშოები

1. მოცემულია $f(x)=\frac{2x^2-1}{x+3}$. იპოვეთ f(1).

$$\left[f(1)=\frac{1}{4}.\right]$$

2. მოცემულია $f(x)=x^2-5x+6$. აჩვენეთ, რომ f(2)-f(3)=0.

3. იპოვეთ $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1}$ ფუნქციის მნიშვნელობები, როცა არგუმენტი ტოლია: -1; 0; 1; 2.

$$\left[f(-1)=-\frac{1}{2};\ f(0)=1;\ f(1)=\frac{3}{2};\ f(2)=1.\right]$$

4. მოცემულია $f(x)=\cos 2x$, გამოთვალეთ: $f(0); f\left(\frac{\pi}{2}\right);\ f\left(\frac{\pi}{4}\right);\ f\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\left[f(0)=1;\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1;\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0;\ f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.\right]$$

5. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არეები:

ა) $y=3\sqrt{4-x^2}$; [(-2;2).]

ბ) $y=\frac{2}{\sqrt{25-x^2}}$; [(-5;5).]

გ) $y=\frac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$; [(2;5).]

დ) $y=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$; [(-3;7).]

ე) $y=\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[5]{x-3}$; [(-∞; +∞).]

ვ) $y=x\arcsin x$; [(-1;1).]

ზ) $y=2^x$; [(-∞; +∞).]

თ) $y=\frac{1+x}{1-x}$. [x≠1.]

6. ააგეთ შემდეგი რიცხვითი მიმდევრობების გრაფიკები, რომელთა ზოგადი წევრებია:

ა) $a_n = \frac{1}{n+1}$; ბ) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$;

გ) $a_n = \frac{1}{n^2}$; დ) $a_n = \frac{n+1}{2n}$;

ე) $a_n = \frac{3n+1}{n}$.

გამოთვალეთ მოცემული ზღვრები:

7. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+6x+8)$. [0.]

8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x+3}{x^2+1}$. [3.]

9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$. [-1.]

10. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$. [3.]

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2-x}{7x}$. $\left[-\frac{1}{7}.\right]$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$. [2.]

13. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$. $\left[\frac{1}{3}.\right]$

14. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$. $\left[\frac{2}{3}.\right]$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$. $\left[\frac{3}{2}.\right]$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$. [-8.]

17. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$. [6.]

18. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$. [-1.]

19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$. [0,5.]

20. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$. [4.]

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-1}{x^3-1}$. [2.]

22. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-10x-11}{x^2-1}$. [6.]

23. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$. $\left[\dfrac{1}{7}.\right]$

24. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2x^2-3x-9}$. $\left[\dfrac{2}{3}.\right]$

25. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

26. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$. [12.]

27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-4x}{3x^2+x-14}$. $\left[\dfrac{4}{13}.\right]$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$. $\left[\dfrac{1}{3}.\right]$

30. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+x}$. $\left[\dfrac{1}{3}.\right]$

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$. [1.]

33. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

34. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$. $\left[\dfrac{1}{4}.\right]$

35. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$. $\left[-\dfrac{1}{3}.\right]$

36. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. $\left[\dfrac{3}{2}.\right]$

37. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$. [3.]

38. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$. $\left[-\dfrac{1}{56}.\right]$

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. [1.]

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$. $\left[\dfrac{15}{2}.\right]$

41. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$. [3.]

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$. $\left[\dfrac{5}{2}.\right]$

43. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$. $\left[\dfrac{12}{5}.\right]$

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-n+1}{2n^3+n^2}$. $\left[\dfrac{3}{2}.\right]$

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n-1}{n^4+2n}$. [0.]

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^3+7x-1}$. [0.]

47. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x+3}{x^3-8x+5}$. [∞.]

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1}$. $\left[\dfrac{2}{3}.\right]$

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+n+1}{2n^3+n^2}$. $\left[\dfrac{5}{2}.\right]$

50. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3+n-1}{n^4+2n+3}$. [0.]

51. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x+8}{x^3+8x+5}$. [∞.]

52. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^3+5}{5x^4+5x^2+1}$. $\left[\dfrac{2}{5}.\right]$

53. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-7x-5x^3}{x^3+x^2+1}$. [-5.]

54. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+8}{6x^3-5x^2+1}$. [0.]

55. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x^2+3x-1}{1-2x+3x^2-7x^4}$. $\left[-\dfrac{1}{7}.\right]$

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$. [e.]

57. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$. $\left[\dfrac{1}{e}.\right]$

58. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. [e.]

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. [e.]

60. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x-1}$. $\left[\dfrac{1}{e}.\right]$

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n}$. [$e^2$.]

62. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x}$. $\left[\dfrac{1}{e^2}.\right]$

63. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-5}$. [$e^6$.]

64. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$. $\left[\frac{1}{e^4}.\right]$

65. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$. [2.]

66. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+10x)}{x}$. [10.]

67. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{x}$. [-1.]

68. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg2x}{x}$. [2.]

69. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$. $\left[\frac{m}{n}.\right]$

70. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 2x}$. $\left[\frac{1}{2}.\right]$

71. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin \pi x}{\sin 11x}$. $\left[\frac{\pi}{11}.\right]$

72. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 10x}{tg8x}$. $\left[\frac{5}{4}.\right]$

73. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg3x}{\sin 5x}$. $\left[\frac{3}{5}.\right]$

74. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$. [1.]

75. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{tgx}$. [1.]

76. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{\sin 2x}$. $\left[-\frac{1}{2}.\right]$

გამოიკვლიეთ უწყვეტობაზე შემდეგი ფუნქციები:

77. f(x)=x+1, წერტილებში: x=1 და x=-1.

[ორივე წერტილში უწყვეტია.]

78. f(x)=2x+1, წერტილებში x=1 და x=-1.

[ორივე წერტილში უწყვეტია.]

"მე არ ვიცი რა ვგონივარ სამყაროს, მაგრამ მე თვითონ ჩემი თავი მიმაჩნია ბიჭუნად, რომელიც თამაშობს ზღვის სანაპიროზე და პოულობს უფრო ბრტყელ ქვას, ან უფრო ლამაზ ნიჟარას, ვიდრე ჩვეულებრივია, მაშინ როდესაც ჩემს წინ ძევს ჭეშმარიტების უდიდესი ამოუცნობი ოკეანე".

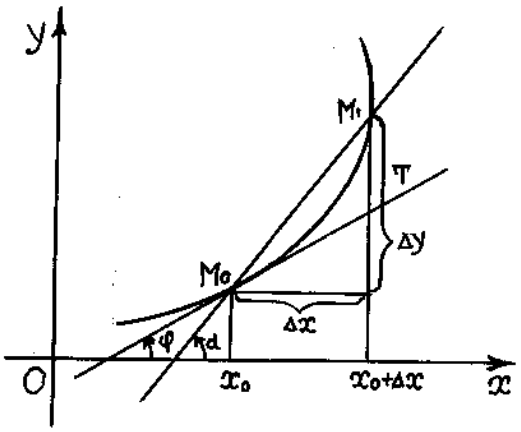
ი.ნიუტონი

თავი 5. დიფერენციალური აღრიცხვა

§5.1. წარმოებულის ცნება და მისი გეომეტრიული შინაარსი

1. ამოცანები, რომლებსაც მივყავართ წარმოებულის ცნებამდე.

ამოცანა მოცემული მრუდის მხების შესახებ.



ნახ.5.1

ვთქვათ, **xOy** სიბრტყეზე მოცემულია **y=f(x)** ფუნქცია და ამ ფუნქციის გრაფიკის **$M_0(x_0;f(x_0))$** წერტილში უნდა გავავლოთ მხები. ამოცანის გადასაწყვეტად, საჭიროა ვიპოვოთ მხების საკუთხო კოეფიციენტი **k=tgφ**, სადაც φ არის მხების მიერ **Ox** ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე.

M_0, $M_1(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ წერტილებზე გავავლოთ მკვეთი (ნახ.5.1) **M_0M_1**, რომელიც **Ox** ღერძთან ადგენს α-ს ტოლ კუთხეს. **$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$**, სადაც **$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$**. ცხადია, **$M_0$**-ზე გავლებული მხები იქნება **M_0M_1** მკვეთის ზღვრული მდებარეობა, როცა **$\Delta x\to 0$**. ზღვარზე გადასვლისას გვექნება ასეთი სურათი:

$\Delta x\to 0, \Rightarrow M_1\to M_0, \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$, სადაც **$(\hat{MT},Ox)=\varphi$**.

ე.ი. **$\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$**.

tgφ კი არის M_0T მხების საკუთხო კოეფიციენტი. მხების განტოლებას ვიპოვით (1.13) ფორმულის გამოყენებით.

ამოცანა მოძრავი სხეულის სიჩქარის შესახებ.

ვთქვათ, $S=S(t)$ არის მატერიალური წერტილის წრფივად მოძრაობის კანონი. თუ ΔS-ით აღვნიშნავთ მატერიალური წერტილის მიერ დროის Δt დროში გავლილ მანძილს (t-დან $t+\Delta t$ მომენტამდე), მაშინ $\Delta S=S(t+\Delta)-S(t)$. $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ შეფარდებას ეწოდება წერტილის *საშუალო სიჩქარე* Δt დროში. რაც უფრო მცირეა Δt, მით უფრო უკეთესად ახასიათებს საშუალო სიჩქარე წერტილის სიჩქარეს დროის t მომენტში. ამიტომ, ბუნებრივია ეს სიჩქარე განვიხილოთ როგორც ზღვარი

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

v-ს უწოდებენ მოძრავი წერტილის *მყისიერ სიჩქარეს* დროის t მომენტში.

ამოცანა ქიმიური რეაქციის სიჩქარის შესახებ.

ვთქვათ, მოცემულია $m=m(t)$ ფუნქცია, სადაც m არის t მომენტისათვის ქიმიურ რეაქციაში ჩართული ნივთიერების რაოდენობა. ცხადია, Δt-ს შეესაბამება Δm. შეფარდება $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ არის ქიმიური რეაქციის საშუალო სიჩქარე დროის Δt შუალედში. $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$ არის ქიმიური რეაქციის სიჩქარე დროის t მომენტში.

ამ ამოცანების მსგავსად განიხილება *ამოცანა პოპულაციის ზრდის შესახებ*. ვთქვათ, $P=P(t)$ არის ბაქტერიების პოპულაციის სიდიდე დროის t მომენტში. თუ ვიმსჯელებთ ისე, როგორც წინა ამოცანებში, მაშინ $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t}$ არის ბაქტერიების პოპულაციის ზრდის სიჩქარე დროის მოცემულ t მომენტში.

2. წარმოებულის განსაზღვრა.

ზემოთ მოყვანილი ამოცანების გადასაწყვეტად სრულდება ერთი და იგივე მათემატიკური მოქმედება. თუ განვაზოგადებთ მსჯელობას

$y=f(x)$-თვის, რომლის $D(y)=(a,b)$ და ნებისმიერი $x\in(a,b)$-თვის $x+\Delta x\in(a,b)$, ანალოგიურად კონკრეტული ამოცანებისა ვღებულობთ გამოსახულებას

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

რომელიც Δx-ის ფუნქციას წარმოადგენს.

განსაზღვრა 5.1. თუ არსებობს ფუნქციის ნაზრდის (Δy) შეფარდების ზღვარი არგუმენტის ნაზრდთან (Δx), როცა არგუმენტის ნაზრდი Δx მიისწრაფის ნულისაკენ, ამ ზღვარს $y=f(x)$ ფუნქციის *წარმოებული* ეწოდება x წერტილში და აღვნიშნავთ y'-ით, ან $f'(x)$-ით (იკითხება "იგრეკ შტრიხი", ან "ეფ იქსის შტრიხი").

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (5.1)$$

წარმოებულს ასევე აღნიშნავენ შემდეგი სიმბოლოთი $\frac{dy}{dx}$ (იკითხება "დე იგრეკი დე იქსით").

ფუნქციის წარმოებულის პოვნას ეწოდება ფუნქციის *დიფერენცირება*, ხოლო ფუნქციას, რომელსაც აქვს წარმოებული x წერტილში, *დიფერენცირებადი*.

განსაზღვრა 5.2. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი (a,b) შუალედში, თუ ის დიფერენცირებადია ამ შუალედის ყოველ წერტილში.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y=x^2$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში.

ამოხსნა: 1) ვპოულობთ ფუნქციის მნიშვნელობას $(x+\Delta x)$ წერტილში. გვაქვს:

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

2) ვპოულობთ ფუნქციის ნაზრდს, Δy-ს:

$$\Delta y=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

3) ვპოულობთ შეფარდებას $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

4) ვპოულობთ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ის ზღვარს, როცა $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=2x+0=2x.$$

ე.ი. $y'=2x$, ანუ $(x^2)'=2x$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ y', თუ $y=C$. ანალოგიურად წინა მაგალითისა ვპოულობთ

$y+\Delta y=C$, $\Delta y=C-y=C-C=0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0,\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$$

ე.ი. $y'=0$, ანუ $C'=0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ y', თუ $y=x$.

§4.6-ის მაგ.1-ის თანახმად გვაქვს: $\Delta y=\Delta x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$.

ე.ი. $y'=1$, ანუ $(x)'=1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ y', თუ $y=\sin x$.

§4.6-ის მაგ.2-ის თანახმად $\Delta y=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x,$$

ე.ი. $y'=\cos x$, ანუ $(\sin x)'=\cos x$.

ზემოთ განხილული ამოცანებიდან გამომდინარეობს:

1. წრფივი მოძრაობის სიჩქარე v არის S გზის წარმოებული t დროთი: $v=\frac{dS}{dt}$. ეს არის წარმოებულის *მექანიკური შინაარსი*. ქიმიური რეაქციის სიჩქარე არის ნივთიერების m რაოდენობის წარმოებული t დროთი: $v=\frac{dm}{dt}$. პოპულაციის ზრდის სიჩქარე არის პოპულაციის P რაოდენობის წარმოებული t დროთი: $v=\frac{dP}{dt}$.

ანალოგიით, ნებისმიერი ფუნქციის წარმოებულს ხშირად ამ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს უწოდებენ.

2. წარმოებულის *გეომეტრიული შინაარსი* მდგომარეობს შემდეგში: $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $f'(x)$ არის ამ ფუნქციის გრაფიკისადმი იმ წერტილში, რომლის აბსცისა x-ია, გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტი.

ამოცანა 1. წერტილი მოძრაობს წრფივად $S=t$ კანონით, სადაც S - გზაა (სმ), ხოლო t - დროა (წმ). ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის სიჩქარე დროის $t=3$ მომენტში.

ამოხსნა: გვაქვს $v=\frac{dS}{dt}=S'=1$. (იხ. მაგალითი 3). კერძოდ, როცა $t=3$, $v=1$ (სმ/წმ).

პასუხი: [$v=1$ სმ/წმ.]

ამოცანა 2. პოპულაციის რაოდენობა დროის t (სთ) მომენტში არის $P(t)=3000+100t^2$. ვიპოვოთ პოპულაციის ზრდის სიჩქარე $t=5$ მომენტში.

ამოხსნა: $$P'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3000+100(t+\Delta t)^2-3000-100t^2}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{100(2t+\Delta t)\Delta t}{\Delta t}=100\lim_{\Delta t\to 0}(2t+\Delta t)=200t.$$

კერძოდ, როცა $t=5$, $v=200\cdot 5=1000$, ე.ი. პოპულაციის ზრდის სიჩქარე არის 1000 ბაქტერია საათში, როცა $t=5$.

პასუხი: [$v=1000$ ბაქტ/სთ.]

ამოცანა 3. ვიპოვოთ $y=x^2+1$ მრუდისადმი $A(1;2)$ წერტილში გავლებული მხებისა და ნორმალის განტოლებები.

(*ნორმალი* არის წრფე, რომელიც გაივლის მრუდის A წერტილზე ამავე წერტილზე გავლებული მხების პერპენდიკულარულად).

ამოხსნა: ვიპოვოთ $y=x^2+1$ ფუნქციის წარმოებული

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{((x+\Delta x)^2+1)-(x^2+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=$$

$\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$, ე.ი. $y'=2x$.

A წერტილის $x=1$, ამიტომ მხების საკუთხო კოეფიციენტი ამ წერტილში $k_1=2\cdot 1=2$, ხოლო ნორმალისა კი $k_2=-\frac{1}{2}$. გამოვიყენებთ ფორმულას (§1.3 (1.13)). საძებნი განტოლებები მიიღებს სახეს:

$y - 2=2(x - 1)$ და $y - 2= -\frac{1}{2}(x-1)$,

ანუ $y=2x$ და $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

პასუხი: $[y=2x,\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.]$

სამართლიანია

თეორემა: თუ $y=f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია რაიმე x წერტილში, მაშინ ის უწყვეტია ამ წერტილში.

შენიშვნა. შებრუნებული დებულება არ არის სამართლიანი, რაც შემდეგი მაგალითიდან ჩანს.

მაგალითი 5. $y=|x|$ ფუნქციის გრაფიკი უწყვეტია $x=0$ წერტილში, მაგრამ ამ წერტილში წარმოებული არ გააჩნია, რადგანაც მოცემული ფუნქციის გრაფიკს $x=0$ წერტილში ცალსახად განსაზღვრული მხები არა აქვს.

§5.2. გაწარმოების წესები და ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულები

1. გაწარმოების ზოგადი წესების მიღება.

ვთქვათ, $u=u(x)$ და $v=v(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია და აქვთ წარმოებულები u' და v'.

ჯამის წარმოებული. ვთქვათ, $y=u+v$. მაშინ გვექნება:

$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)$, $\Delta y=\Delta u+\Delta v$,

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$,

ე.ი. $y'=u'+v'$, ანუ $(u+v)'=u'+v'$. (5.2)

მაგალითი 1. $(x+\sin x)'=x'+(\sin x)'=1+\cos x$.

შენიშვნა. ფორმულა (5.2) სამართლიანია სასრულო რაოდენობის შესაკრებებისათვის.

ნამრავლის წარმოებული. ვთქვათ, $y=u\cdot v$, მაშინ გვაქვს:

$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)=uv+v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v$,

$\Delta y=v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v$,

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+\frac{\Delta v}{\Delta x}u+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=u'v+uv'+u'\cdot 0.$$

ე.ი. $y'=u'v+uv'$, ანუ $(uv)'=u'v+uv'$ (5.3)

მაგალითი 2.

$(x\cdot\sin x)'=x'\sin x+x(\sin x)'=1\cdot\sin x+x\cdot\cos x=\sin x+x\cos x.$

მუდმივი მამრავლის გატანა წარმოებულის ნიშნის გარეთ. თუ $y=C\cdot u$, (5.2) ფორმულის ძალით ვღებულობთ $y'=C\cdot u'$, ანუ

$$(Cu)'=C\cdot u'. \qquad (5.4)$$

შეფარდების წარმოებული. ვთქვათ $y=\frac{u}{v}$, სადაც $v\neq 0$, მაშინ გვაქვს:

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{(u+\Delta u)v-u(v+\Delta v)}{(v+\Delta v)v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{(v+\Delta v)v},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)v}=\frac{vu'-uv'}{(v+0)v},$$

ე.ი. $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, ანუ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$. (5.5)

მაგალითი 3.

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{(x-1)'(x+1)-(x+1)'(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}.$$

რთული ფუნქციის წარმოებული. ვთქვათ, $y=f(u)$, სადაც $u=\varphi(x)$. $f(u)$-ს აქვს წარმოებული u-ს მიხედვით, ხოლო $\varphi(x)$-ს x-ის მიხედვით. მაშინ y არის x-ის რთული ფუნქცია $y=f(\varphi(x))$. ჩვენ გვინდა $\frac{dy}{dx}$-ის პოვნა. ცხადია, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$, საიდანაც

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

ე.ი. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$, $y'_x=y'_u\cdot u'_x$. (5.6)

(y'_x იკითხება y-ის წარმოებული x-ით).

მაგალითი 4. ვიპოვოთ y=sin3x-ის წარმოებული, თუ u=3x, მაშინ y=sinu, შესაბამისად, (5.6)-ის ძალით

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin u}{du}\cdot\frac{d(3x)}{dx}=(\cos u)\cdot 3=3\cos 3x.$$

შენიშვნა. საკმაო გამოცდილების შემდეგ u-ს არ წერენ, მას წარმოიდგენენ გონებაში.

შექცეული ფუნქციის წარმოებული. ვთქვათ, y=f(x) და x=φ(y) ურთიერთშექცეული ფუნქციებია. მაშინ $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$, ანუ

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}, \qquad (5.7)$$

რადგანაც $\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

2. ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულები.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებულები

თუ §5.1-ის მაგალითი 4)-ის მიმართ (sinx)'=cosx გამოვიყენებთ (5.6) ფორმულას, გვექნება:

$$(\sin u)'=u'\cdot\cos u, \qquad (5.8)$$

სადაც u არის x-ის ფუნქცია და აქვს წარმოებული u'.

y=cosx-ის წარმოებულს ვპოულობთ (5.8)-ის გამოყენებით.

$$(\cos x)'=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]'=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x.$$

(5.6) ფორმულის თანახმად კი გვექნება

$$(\cos u)'=-u'\sin u. \qquad (5.9)$$

y=tgx, ვიპოვოთ y'.

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

ანალოგიურად წინა შემთხვევებისა გვექნება

$$(\mathrm{tgu})'=\frac{u'}{\cos^2 u}, \qquad (5.10)$$

ხოლო y=ctgx-თვის კი $(\mathrm{ctgx})'=-\frac{1}{\sin^2 x}$, ხოლო

$$(\mathrm{ctgu})'=-\frac{u'}{\sin^2 u}. \qquad (5.11)$$

ლოგარითმის წარმოებული. ვთქვათ y=lnx, მაშინ გვაქვს:

$y+\Delta y=\ln(x+\Delta x)$, $\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

გამოვიყენოთ ზღვარი $e=\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}$ (§4.3 (4.3)), გვექნება,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}.$$

ე.ი. $y'=\frac{1}{x}$, ანუ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. (5.12)

თუ $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, მაშინ $a^y=x$. აქედან $y\ln a=\ln x$, ანუ $y=\frac{\ln x}{\ln a}$, საიდანაც (5.12)-ის თანახმად $y'=\frac{1}{x\ln a}$, ანუ

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}. \qquad (5.13)$$

(5.12) და (5.13)-დან (5.6)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}, \qquad (5.14)$$

$$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}. \qquad (5.15)$$

მაგალითი 5. $y=\ln(\cos x)$, $y'=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\mathrm{tgx}$.

ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული.

ვთქვათ $y=x^\alpha$ (α - ნამდვილი რიცხვია, $x>0$), მაშინ, $\ln y=\alpha\ln x$. (5.14)-ის თანახმად

$\frac{1}{y}y' = \alpha\frac{1}{x}$, აქედან $y' = y\cdot\alpha\frac{1}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha}\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$, ე.ი.

$$(x^{\alpha})' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}. \qquad (5.16)$$

(5.16)-დან (5.6)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$(u^{\alpha})' = \alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'. \qquad (5.17)$$

მაგალითი 6. $y=\sin^2 x$, აქ $u=\sin x$.

$$y' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული.

ვთქვათ, $y=a^x$, $(0<a\neq 1)$, მაშინ $x=\log_a y$. (5.7)-ის ძალით $(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = x\ln a$, ხოლო (5.6)-ის თანახმად

$$(a^u)' = a^u \ln a\cdot u', \qquad (5.18)$$

კერძოდ, კი $(e^u)' = e^u\cdot u'$.

მაგალითი 7. $y=e^{2x}$, $y' = e^{2x}(2x)' = e^{2x}2 = 2e^{2x}$.

მაგალითი 8.

$y=3^{\sin x}$, $y' = 3^{\sin x}(\sin x)'\ln 3 = 3^{\sin x}\cos x\cdot\ln 3$.

შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებულები: $y=\arcsin x$, არის $x=\sin y$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, ამიტომ (5.7)-ის თანახმად გვაქვს:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{y}{2}\right).$$

ანალოგიურად მივიღებთ ფორმულებს:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

(5.6) ფორმულის გამოყენებით კი მივიღებთ ფორმულებს:

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\ ; \qquad (5.20)$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \qquad (5.21)$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}; \qquad (5.22)$$

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}. \qquad (5.23)$$

მაგალითი 9. $(\arccos 3x)' = -\frac{(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}$.

ზემოთ მიღებული ფორმულები წარმოვადგინოთ ერთი ცხრილის სახით:

გაწარმოების წესები და ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულები

1. $(C)'=0$.
2. $(u+v)'=u'+v'$.
3. $(uv)'=u'v+uv'$.
4. $(Cu)'=C\cdot u'$.
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.
6. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.
7. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$.
8. $(a^u)'=a^u \cdot \ln a \cdot u'$.
9. $(e^u)'=e^u \cdot u'$.
10. $(\log_a u) = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$.
11. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
12. $(\sin u)'=\cos u \cdot u'$.
13. $(\cos u)'=-\sin u \cdot u'$.
14. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.
15. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.
16. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
17. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
18. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$.
19. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

შენიშვნა. $u=u(x)$ და $v=v(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია. $y=f(x)$ და $x=\varphi(y)$ ურთიერთშექცეული ფუნქციებია და $y=f(x)$-ის წარმოებული არ უდრის ნულს.

§5.3. ფუნქციის დიფერენციალი

1. დიფერენციალის ცნება.

წარმოებულის განსაზღვრების თანახმად

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

და §4.5 თეორემა 4.1-ის თანახმად გვაქვს

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \qquad (5.24)$$

სადაც $\alpha=\alpha(\Delta x)\to 0$, როცა $\Delta x\to 0$.

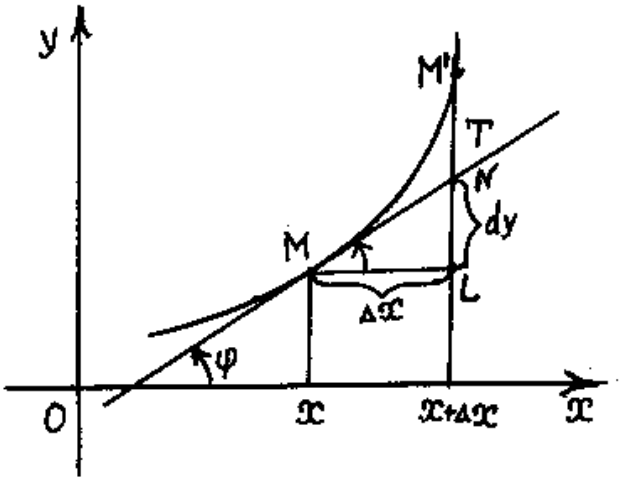
(5.24)-დან $\Delta y = y'\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$.

ვთქვათ, $y'\neq 0$, მაშინ ამ უკანასკნელი ტოლობის მეორე შესაკრები უფრო მაღალი რიგის უსასრულო მცირეა, ვიდრე, პირველი შესაკრები, ამიტომ, შესაკრები $y'\cdot\Delta x$ არის ფუნქციის ნაზრდის, Δy-ის, *მთავარი* ნაწილი.

განსაზღვრა 5.3. ფუნქციის ნაზრდის მთავარ ნაწილს ფუნქციის დიფერენციალს უწოდებენ და აღნიშნავენ სიმბოლოთი **dy**, ანუ **df(x)**.

ე.ი. $$dy = y'\cdot\Delta x. \qquad (5.25)$$

2. დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი.



ნახ.5.2

განვიხილოთ ნახ.5.2. რადგანაც $y'=tg\varphi$, ამიტომ (5.25) მიიღებს სახეს: $dy=tg\varphi\cdot\Delta x$. ამიტომ ΔMLN-დან ჩანს, რომ ფუნქციის დიფერენციალი **dy** არის Δx-ის შესაბამისი ორდინატის ნაზრდი მხებისათვის.

დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენციალი მისი ნაზრდის ტოლია $dx=x'\cdot\Delta x=\Delta x$,

ე.ი. $$dy = y'dx. \qquad (5.26)$$

ამგვარად, ფუნქციის დიფერენციალი მისი წარმოებულისა და დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენციალის ნამრავლის ტოლია.

(5.26)-დან ვღებულობთ $y'=\frac{dy}{dx}$, ანუ, ფუნქციის წარმოებული ფუნქციის დიფერენციალის არგუმენტის დიფერენციალთან შეფარდების ტოლია.

3. რთული ფუნქციის დიფერენციალი.

თუ რთული ფუნქციაა $y=f(u)$, სადაც $u=\varphi(x)$, მაშინ, ფუნქციის დიფერენციალს აქვს შემდეგი სახე:

$$dy = f_u'(u)\varphi'(x)dx. \qquad (5.27)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ dy, თუ $y=\sin u$, $u=x^2$.

ამოხსნა: $dy=\cos u\cdot du=\cos x^2\cdot(x^2)'dx=2x\cos x^2dx$.

4. დიფერენციალების ცხრილი.

დიფერენციალის განსაზღვრების თანახმად მივიღებთ, რომ

$d(u+v)=(u+v)'dx=u'dx+v'dx=du+dv$, ე.ი.

$d(u+v)=du+dv$.

ანალოგიურად მიიღება დიფერენციალების სხვა ფორმულები, შედეგად გვექნება შემდეგი ცხრილი:

1. $dC=0$.
2. $d(u+v)=du+dv$.
3. $d(uv)=vdu+udv$.
4. $d(Cu)=Cdu$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$.
6. $d(u^\alpha)=\alpha u^{\alpha-1}du$.
7. $d(a^u)=a^u\cdot\ln a du$.
8. $d(e^u)=e^u du$.
9. $d(\log_a u)=\frac{du}{u\ln a}$.
10. $d(\ln u)=\frac{du}{u}$.
11. $d(\sin u)=\cos u du$.
12. $d(\cos u)=-\sin u du$.
13. $d(tgu)=\frac{du}{\cos^2 u}$.
14. $d(ctgu)=-\frac{du}{\sin^2 u}$.
15. $d(\arcsin u)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $d(\arccos u)=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.
17. $d(arctgu)=\frac{du}{1+u^2}$.
18. $d(arcctgu)=-\frac{du}{1+u^2}$.

5. დიფერენციალის გამოყენება მიახლოებითი გამოთვლებისათვის.

დიფერენციალის განსაზღვრებიდან (5.24) და (5.25)-დან გამომდინარეობს, რომ $\Delta y\approx dy$, ანუ

$$\Delta y\approx y'\cdot\Delta x. \qquad (5.28)$$

(528) ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ ფუნქციის ნაზრდის მიახლოებითი გამოთვლისათვის.

ამოცანა. კუბის წიბო 30 სმ-ია. გაზარდეს ის 0,1 სმ-ით. უნდა გავიგოთ კუბის მოცულობის ცვლილება.

ამოხსნა: კუბის წიბო აღვნიშნოთ x-ით, მაშინ მისი მოცულობა იქნება $V=x^3$. აქედან $dV=3x^2\Delta x$. ჩვენს შემთხვევაში $\Delta x=0,1$.

ე.ი. $dV=3\cdot(30)^2\cdot 0,1$. შესაბამისად

$$\Delta V\approx 270 \text{ (სმ}^3\text{)}.$$

პასუხი: [270 (სმ^3).]

ასევე მიახლოებითი გამოთვლების მიზნით შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულები:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x.$$

აქედან

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x. \qquad (5.29)$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\sqrt{16,02}$. ავიღოთ ფუნქცია $f(x)=\sqrt{x}$, გვაქვს $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. ახლა დავუშვათ, რომ $x=16$, $\Delta x=0,02$ (5.29)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\sqrt{16,02}\approx\sqrt{16}+\frac{1}{2\sqrt{16}}\cdot 0,02=4+\frac{1}{8}\cdot 0,02=4+0,0025=4,0025.$$

პასუხი: [4,0025.]

§5.4. მაღალი რიგის წარმოებულები და დიფერენციალები

1. მაღალი რიგის წარმოებულები.

$y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $f'(x)$ წარმოადგენს ისევ x არგუმენტის ფუნქციას.

განსაზღვრა 5.4. თუ $f'(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული, მაშინ, ამ წარმოებულს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და აღინიშნება ასე: $y''=(y')'$ ან $f''(x)$. თუ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს აქვს წარმოებული, მაშინ, მას ეწოდება *მესამე რიგის წარმოებული* და აღინიშნება ასე:

$y'''=(y'')'$, ან $f'''(x)$ და ა.შ.

n-ური წარმოებული აღინიშნება ასე: $y^{(n)}$ ანუ $f^{(n)}(x)$.

მაგალითი 1. $y=e^{kx}$, $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$, ..., $y^{(n)}=k^ne^{kx}$.

მაგალითი 2. $y=\sin x$, $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$, $y'''=-\cos x$, $y^{IV}=\sin x$, ...

მაგალითი 3. $y=5x^3-8x^2+2x+3$, $y'=15x^2-16x+2$, $y''=30x-16$, $y'''=30$, $y^{IV}=0$.

$y=f(x)$ ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულებს კიდევ ასე აღვნიშნავთ:

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$$ ("დე ორი იგრეკ დე იქს კვადრატი")

$$y'''=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}$$ ("დე სამი იგრეკ დე იქს კუბი")

და ა.შ.

2. მეორე რიგის წარმოებულის ფიზიკური შინაარსი.

ვთქვათ, ნივთიერი წერტილი M მოძრაობს წრფეზე $S=S(t)$ კანონით. ჩვენ დავადგინეთ, რომ M წერტილის მყისი სიჩქარე დროის t მომენტში ტოლია: $v=\frac{dS}{dt}=S'(t)$.

ეს სიჩქარე არის დროის ფუნქცია. თუ განვიხილავთ $\frac{dv}{dt}$ (ისევე როგორც §5.1-ის პ.1-ში), დავადგენთ, რომ ეს არის დროის t მომენტში M-ის *აჩქარება*.

ამრიგად, *წრფეზე მოძრავი წერტილის აჩქარება a დროის t მომენტში არის გავლილი S მანძილის მეორე რიგის წარმოებული t დროთი.*

ასეთია მეორე რიგის წარმოებულის ფიზიკური შინაარსი.

3. მაღალი რიგის დიფერენციალები.

განსაზღვრა 5.5. ფუნქციის დიფერენციალის დიფერენციალს მეორე რიგის დიფერენციალი ეწოდება, ან, ამ ფუნქციის მეორე დიფერენციალი და აღინიშნება d^2y-ით.

$$d(dy)=d^2y=(f'(x)dx)'dx=f''(x)dx^2.$$

მეორე რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს *მესამე დიფერენციალი* ეწოდება

$$d^3y=d(d^2y)=(f''(x)dx^2)'dx=f'''(x)dx^3$$

და ა.შ.

§5.5. ფუნქციის მოცემა პარამეტრული სახით და მისი დიფერენცირება

ვიტყვით, რომ ფუნქცია მოცემულია *პარამეტრული სახით*, თუ ორივე ცვლადი x და y მოცემულია, როგორც მესამე t, ცვლადის ფუნქცია: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. t ცვლადს *პარამეტრს* უწოდებენ.

თუ განვიხილავთ ფუნქციას ცხადი სახით $y=y(x)$, მისი წარმოებულია $y'(x)=\frac{dy}{dx}$, მაგრამ

$$dy=\psi'(t)dt,\ dx=\varphi'(t)dt. \qquad (5.30)$$

ამიტომ ვღებულობთ:

$$y'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \qquad (5.31)$$

მაგალითი. მოცემულია $y(x)$ ფუნქცია პარამეტრულად $x=R\cos t$, $y=R\sin t$.

$dx=-R\sin t$, $dy=R\cos t$.

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{R\cos t}{-R\sin t}=-\operatorname{ctg} t.$$

§5.6. დიფერენცირებად ფუნქციათა თვისებები

თეორემები მოგვყავს დამტკიცების გარეშე გეომეტრიული იტერპრეტაციით.

1. ფერმას თეორემა. (პიერ ფერმა (1601-1665) - ფრანგი მათემატიკოსი).

თუ $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(a;b)$ შუალედში და ამ ინტერვალის რაიმე c წერტილში აღწევს უდიდეს (ან უმცირეს) მნიშვნელობას და არსებობს წარმოებული $f'(c)$, მაშინ

$$f'(c)=0. \qquad (5.32)$$

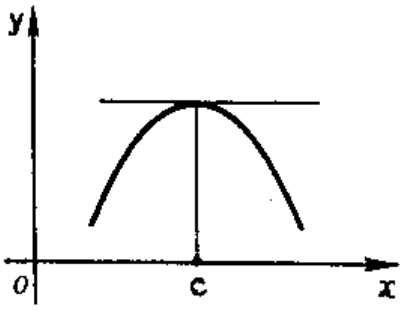
ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი c-აბსცისიან წერტილში გავლებული მხები, Ox აბსცისათა ღერძის პარალელურია (ნახ.5.3).

2. როლიას თეორემა. (მიშელ როლია (1652-1719) - ფრანგი მათემატიკოსი).

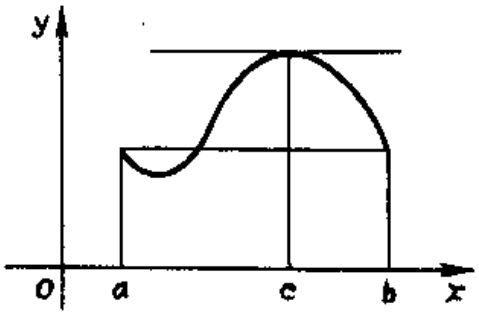
თუ $y=f(x)$ უწყვეტია $[a,b]$ შუალედში, დიფერენცირებადია (a,b) ინტერვალში და ამ სეგმენტის ბოლო წერტილებში აქვს ტოლი

მნიშვნელობები f(a)=f(b), მაშინ (a,b) ინტერვალში არსებობს ისეთი c წერტილი, სადაც f'(c)=0.

გეომეტრიულად ეს თეორემა ნიშნავს შემდეგს: თუ y=f(x) - მრუდის ბოლო წერტილების ორდინატები ტოლია, მაშინ, მრუდზე მოიძებნება წერტილი, სადაც მხები Ox-ის პარალელურია (ნახ.5.4).



ნახ.5.3.

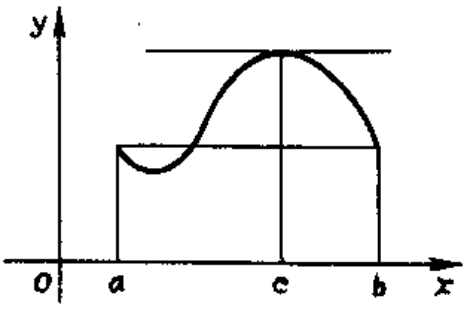


ნახ.5.4.

3. ლაგრანჟის თეორემა (ჟოზეფ-ლუი ლაგრანჟი (1736-1813) - ფრანგი მათემატიკოსი და მექანიკოსი).

თუ y=f(x) ფუნქცია უწყვეტია [a;b] სეგმენტზე და დიფერენცირებადი (a;b) ინტერვალში, მაშინ, (a;b) ინტერვალში მოიპოვება ისეთი წერტილი c, რომ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \qquad (5.33)$$



ნახ.5.5

ლაგრანჟის თეორემას აქვს მარტივი გეომეტრიული აზრი. y=f(x) ფუნქციის გრაფიკს A და B წერტილებს შორის აქვს ისეთი C წერტილი, რომ ამ წერტილზე გავლებული მხები არის AB მკვეთის პარალელური (ნახ.5.5). (5.33)-ის მარცხენა მხარე არის AB ქორდის საკუთხო კოეფიციენტი, ხოლო მარჯვენა მხარე - C წერტილზე გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტია.

შენიშვნა. ლაგრანჟის თეორემა არის როლიას თეორემის განზოგადება, რადგანაც, თუ f(a)=f(b), მაშინ, (5.33) ტოლობიდან ვღებულობთ f'(c)=0.

(5.33) ფორმულას ეწოდება ლაგრანჟის ფორმულა, ან *სასრულო ნაზრდის ფორმულა.* (5.33)-ის ჩაწერა შეიძლება ასეთი სახით:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \qquad (5.34)$$

§4.5-ში ჩვენ განვიხილეთ $\frac{0}{0}$ და $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობების მოხსნის ზოგიერთი მეთოდი. აქ განვიხილავთ *ლოპიტალის* (გილიომ ლოპიტალი (1661-1704) - ფრანგი მათემატიკოსი) *წესს.* განვიხილავთ $\frac{f(x)}{g(x)}$ შეფარდებას, სადაც $f(x)$ და $g(x)$ განსაზღვრული და დიფერენცირებადი ფუნქციებია a წერტილის რაიმე შუალედში და ეს ფუნქციები ერთდროულად უსასრულოდ მცირეებია, ან უსასრულოდ დიდები.

4. ლოპიტალის თეორემა.

ორი უსასრულოდ მცირე, ან, უსასრულოდ დიდი ფუნქციების შეფარდების ზღვარი ტოლია მათი წარმოებულების შეფარდების ზღვრის, ე.ი., თუ $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$, როცა $x\to a$, ($f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$, როცა $x\to a$).

ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (5.35)$$

მაგალითი 1.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x^2+5x+6)'}{(x^3+8)'}=\lim_{x\to -2}\frac{2x+5}{3x^2}=\frac{1}{12}.$$

მაგალითი 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{\cos x}=\ln 2.$$

ზოგჯერ ლოპიტალის წესი უნდა გამოვიყენოთ რამდენჯერმე.

მაგალითი 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

სხვა სახის განუსაზღვრელობები $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$ იგივური გარდაქმნების მეშვეობით დაიყვანება $\frac{0}{0}$ და $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობებამდე და შემდეგ გამოიყენება ლოპიტალის წესი.

მაგალითი 4. $\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln x$. აქ გვაქვს $0\cdot\infty$ ტიპის განუსაზღვრელობა. მოცემული გამოსახულება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$, ვღებულობთ $\dfrac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობას, გამოვიყენოთ ლოპიტალის წესი.

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0+0} x=0.$$

მაგალითი 5. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx-\dfrac{1}{x})$. აქ გვაქვს ∞-∞ სახის განუსაზღვრელობა. გარდავქმნათ:

$$\lim_{x\to 0}(ctgx-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}.$$

მივიღეთ $\dfrac{0}{0}$ ტიპის განუსაზღვრელობა, გამოვიყენოთ ლოპიტალის წესი.

$$\lim_{x\to 0}(ctgx-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=-\frac{0}{2}=0.$$

მაგალითი 6. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$. აქ არის 0^0 სახის განუსაზღვრელობა. გავალოგარითმოთ $y=x^x$: $\ln y=x\ln x$, გადავიდეთ ზღვარზე. ლოგარითმული ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვექნება შემდეგი ტოლობები:

$\ln\lim\limits_{x\to 0+0} y=\lim\limits_{x\to 0+0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x=0$, ე.ი.

$\ln\lim\limits_{x\to 0+0} y=0$, აქედან $\lim\limits_{x\to 0+0} y=e^0=1$, ე.ი. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x=1$.

გალოგარითმების ეს მეთოდი გამოიყენება ∞^0, 1^∞, განუსაზღვრელობების შემთხვევაშიც.

§5.7. ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა. მაქსიმუმები და მინიმუმები. ასიმპტოტები

1. ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა.

განსაზღვრებები იხილეთ §4.1-ში.

სამართლიანია შემდეგი თეორემები (მოგვყავს დამტკიცების გარეშე).

თეორემა 5.1. თუ $y=f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (a,b) ინტერვალში, არაკლებადია (არაზრდადია) მასზე, მაშინ მისი წარმოებული ამ ინტერვალზე არის არაუარყოფითი (არადადებითი), ე.ი.

$f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$.

თეორემა 5.2. თუ $y=f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $(a;b)$ ინტერვალში და ამ შუალედში სრულდება პირობა $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, მაშინ ეს ფუნქცია ზრდადია (კლებადია) $(a;b)$ ინტერვალზე.

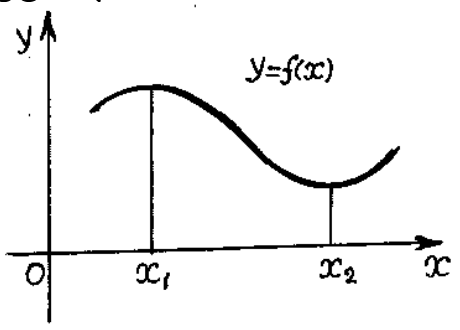
მაგალითი 1. $y=e^x$ ფუნქცია ყველგან ზრდადია, რადგანაც $y'=e^x>0$ ნებისმიერი x-თვის (ნახ.4.3, ნახ.5.8).

მაგალითი 2. $y=x^2$ ფუნქცია კლებადია $(-\infty,0)$ შუალედში, რადგანაც ამ შუალედში $y'=2x<0$. ზრდადია $(0,+\infty)$ შუალედში, რადგანაც ამ შუალედში $y'=2x>0$.

2. ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი.

განსაზღვრა 5.6. ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია მაქსიმუმი (მინიმუმი), თუ არსებობს x_0-ის რაიმე δ მიდამო $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, რომ ნებისმიერი $x\neq x_0$-თვის ამ შუალედიდან, სრულდება უტოლობა

$f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$.



ნახ.5.6

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს *მაქსიმუმი (მინიმუმი)*, თუ საკმაოდ მცირე Δx-თვის სრულდება უტოლობა $f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$, $(f(x_0+\Delta x)>f(x_0))$.

ფუნქციის მაქსიმუმს და მინიმუმს ფუნქციის *ექსტრემუმს* უწოდებენ. $y=f(x)$ ფუნქციას (ნახ.5.6) x_1 წერტილში აქვს მაქსიმუმი, x_2-ში კი მინიმუმი.

თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია, მაშინ, წარმოებულის თვისებების შესწავლა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ფუნქციის ექსტრემუმი.

თეორემა 5.3. (ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა). თუ $f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $(a;b)$ შუალედში და x_0, $a<x_0<b$, წერტილში აქვს ექსტრემუმი, მაშინ, მისი წარმოებული ამ წერტილში ნულის ტოლია.

$$f'(x_0)=0. \qquad (5.36)$$

ეს თეორემა არის ფერმას თეორემის შედეგი. (5.36) პირობა აუცილებელი პირობაა, მაგრამ, არასაკმარისი ექსტრემუმის არსებობისათვის. განვიხილოთ

თეორემა 5.4. (ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა). თუ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში ნულის ტოლია და ამ წერტილზე გადასვლისას (მარცხნიდან მარჯვნივ) იცვლის ნიშანს პლიუსი (მინუსი) მინუსზე (პლიუსზე), მაშინ, x_0 წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი (მინიმუმი). თუ x_0-ზე გადასვლისას $f(x)$ ფუნქცია არ იცვლის ნიშანს, მაშინ, ამ წერტილში ფუნქციას ექსტრემუმი არა აქვს.

მაგალითი 3. $y=x^3$ არა აქვს ექსტრემუმი $x_0=0$ წერტილში, თუმცა მისი წარმოებული $y'=3x^2$ ამ წერტილში ნულის ტოლია (რადგანაც არგუმენტის ნიშნის შეცვლასთან ერთად წარმოებული ნიშანს არ იცვლის).

ზემოთ ნათქვამიდან გამომდინარეობს პირველი რიგის წარმოებულის საშუალებით ფუნქციის ექსტრემუმის პოვნის წესი. ვთქვათ, ფუნქცია $f(x)$ დიფერენცირებადია (a,b)-ზე:

1) ვპოულობთ მის წარმოებულს $f'(x)$;

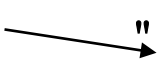
2) ვპოულობთ $f'(x)=0$ განტოლების ფესვებს (ამ ფესვებს *სტაციონალური* წერტილები ეწოდება;

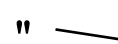
3) ვარკვევთ $f'(x)$-ის ნიშანს ყოველი ფესვის მარცხნივ და მარჯვნივ და ამის მიხედვით გამოგვაქვს დასკვნა;

4) ვპოულობთ ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში.

მაგალითი 4. გამოვიკვლიოთ ექსტრემუმზე $f(x)=e^x-x$ ფუნქცია: ვპოულობთ $f'(x)=e^x-1$; ვხსნით განტოლებას $e^x-1=0$, $e^x=1$, $x=0$. შემდეგ ვადგენთ $f'(x)$-ის ნიშანს $x<0$ და $x>0$-თვის. შესაბამისად გვაქვს $f'(x)<0$ და $f'(x)>0$. ამიტომ $f(x)=e^x-x$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს მინიმუმი და $f(0)=e^0-0=1$.

მაგალითი 5. გამოვიკვლიოთ $f(x)=x^3-3x+2$ ფუნქცია ექსტრემუმზე: $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$, $f'(x)=0$, როცა $x=1$; $x=-1$, შემდგომ დადგენილი წესის მიხედვით ვიკვლევთ და ვავსებთ შემდეგ ცხრილს (ასე უფრო მოხერხებულია კვლევა).

x	$x<-1$	$x_1=-1$	$-1<x<1$	$x_2=1$	$x>1$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)		4		0	

" " ნიშნავს ზრდადობას, "  " კი კლებადობას კვლევის ეს შედეგი ასე შეიძლება ჩავწეროთ

$$\max_{x=-1} f(x)=4,\ \min_{x=1} f(x)=0.$$

3. ფუნქციის გამოკვლევა ექსტრემუმზე მეორე რიგის წარმოებულის გამოყენებით.

ექსტრემუმის არსებობის მეორე საკმარისი პირობაა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.5. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას აქვს x_0 წერტილსა და მის მიდამოში უწყვეტი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები და $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია მინიმუმი (მაქსიმუმი), თუ $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$).

ეს თეორემა გვაძლევს საშუალებას ჩამოვაყალიბოთ ექსტრემუმის პოვნის მეორე წესი, რომელშიც იცვლება მხოლოდ პუნქტი 3. ეს პუნქტი შეიცვლება შემდეგით: ვპოულობთ მეორე წარმოებულს $f''(x)$, ვპოულობთ მის ნიშანს სტაციონარულ წერტილებში და თეორემა 5.5-ის თანახმად გამოგვაქვს დასკვნა.

ამ მეთოდით კვლევა უფრო ადვილია, ვიდრე პირველით, თუ $f''(x_0)\neq 0$.

მაგალითი 6. $f(x)=e^x-x$ ფუნქცია გამოვიკვლიოთ ექსტრემუმზე მეორე წარმოებულით: $f'(x)=e^x-1$, $e^x-1=0$, $x=0$. $f''(x)=e^x$, $f'(0)=0$, $f''(0)=e^0=1\neq 0$. $1>0$, ამიტომ $x=0$-ზე ფუნქციას აქვს მინიმუმი (იხ.მაგ.4).

4. ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა მონაკვეთზე.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ შუალედში, მაშინ, ამ შუალედში ის აღწევს უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს (იხ. §4.6, პ.2). მაგალითისათვის, რომ ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $[a;b]$ მონაკვეთზე, ამისათვის $(a;b)$ შუალედში უნდა ვიპოვოთ ამ ფუნქციის ყველა მაქსიმუმი, შემდეგ გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები $f(a)$ და $f(b)$, ე.ი. მონაკვეთის ბოლოებში. ამ მნიშვნელობებიდან უდიდესი იქნება ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $[a,b]$ მონაკვეთზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვიპოვოთ $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა $\left[\frac{3}{4};3\right]$ მონაკვეთზე. გამოვიკვლიოთ ექსტრემუმზე:

$f'(x)=6x^2-18x+12$,

$6x^2-18x+12=0$, ანუ $x^2-3x+2=0$,

$x_1=1$, $x_2=2$. $f''(x)=12x-18$, მაშინ $f''(1)=-6<0$ და $f''(2)=6>0$, ამიტომ $x=1$ წერტილში $f(x)$-ს აქვს მაქსიმუმი და $f(1)=2$, ხოლო როცა $x=2$, ფუნქციას აქვს მინიმუმი და $f(2)=1$. ვპოულობთ ფუნქციის მნიშვნელობებს მონაკვეთის ბოლოებზე:

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3-9\left(\frac{3}{4}\right)^2+12\cdot\left(\frac{3}{4}\right)-3=1\frac{25}{32};$$

$f(3)=2\cdot3^3-9\cdot3^2+12\cdot3-3=6$.

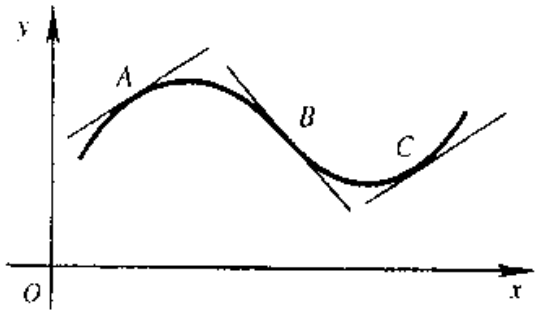
ამგვარად, განხილული ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $\left[\frac{3}{4};3\right]$ მონაკვეთზე არის 6, ხოლო უმცირესი მნიშვნელობა კი 1.

(ექსტრემუმზე ამოცანები ბუნებისმეტყველებიდან იხილე §5.10-ში).

5. ფუნქციის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გადაღუნვის წერტილი.

განსაზღვრა 5.7. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს რაიმე შუალედში ეწოდება *ამოზნექილი* (*ჩაზნექილი*), თუ ამ შუალედის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული მხების ქვევით (ზემოთ) მოთავსდება გრაფიკის ამ უბნის დანარჩენი წერტილები.

განსაზღვრა 5.8. წერტილს, სადაც ამოზნექილობა გადადის ჩაზნექილობაში, *გადაღუნვის* წერტილი ეწოდება (ამ წერტილზე გავლებუ-



ნახ.5.7

ლი მხები გრაფიკს კვეთს). ნახ.5.7-ში **A** არის ამოზნექილობის წერტილი, **C** – ჩაზნექილობის წერტილი, **B** გადაღუნვის წერტილი.

მოვიყვანოთ თეორემები, რომლებიც ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედების, ასევე გადაღუნვის წერტილის პოვნის საშუალებას იძლევა.

თეორემა 5.6. თუ $y=f(x)$ ფუნქციის მეორე წარმოებული $f''(x)$ დადებითია (უარყოფითია) $(a;b)$ შუალედში, მაშინ, ამ ინტერვალში ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია (ამოზნექილია).

თეორემა 5.7. თუ $y=f(x)$ ფუნქციის მეორე წარმოებული x_0 წერტილში ნულის ტოლი ხდება $f''(x_0)=0$ და ამ წერტილზე გადასვლისას იცვლის ნიშანს, მაშინ, მოცემული ფუნქციის გრაფიკის $(x_0;f(x_0))$ წერტილი გადაღუნვის წერტილია.

აქედან გამომდინარეობს ორჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციის გამოკვლევის სქემა ამოზნექილობაზე და ჩაზნექილობაზე:

1) ვპოულობთ მეორე წარმოებულს $f''(x)$ და ვხსნით განტოლებას

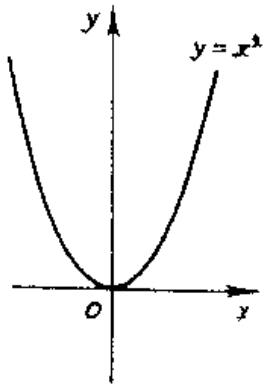
$$f''(x)=0; \qquad (5.37)$$

2) ეს ფესვები ყოფენ ფუნქციის განსაზღვრის არეს ინტერვალებად, ყოველ მათგანზე $f''(x)$ ინარჩუნებს გარკვეულ ნიშანს. თუ $f''(x)<0$, გრაფიკის ეს უბანი ამოზნექილია, ხოლო თუ $f''(x)>0$, მაშინ ჩაზნექილი. (5.37) განტოლების ფესვები, რომელზე გადასვლისას მეორე წარმოებული იცვლის ნიშანს, არის გადაღუნვის წერტილი.

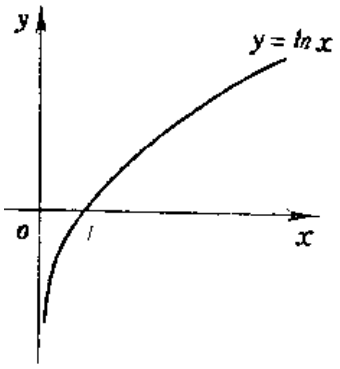
მაგალითი 8. $y=x^2$ ჩაზნექილია ყველგან, რადგანაც $y'=2x$, $y''=2>0$ ყველგან (ნახ.5.8).

მაგალითი 9. $y=\ln x$ ამოზნექილია $(0;+\infty)$ შუალედში, რადგანაც $y'=\frac{1}{x}$, $y'=-\frac{1}{x^2}<0$ ნებისმიერი x-თვის (ნახ.5.9).

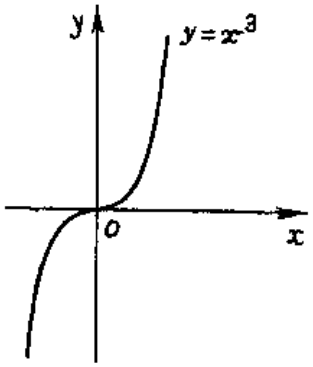
მაგალითი 10. $y=x^3$; $y''=6x<0$, როცა $x<0$ და $6x>0$, როცა $x>0$. ამიტომ, გრაფიკი ჩაზნექილია $(0;+\infty)$ შუალედში, ხოლო $(-\infty;0)$ შუალედში კი ამოზნექილი, $x=0$ გადაღუნვის წერტილია (ნახ. 5.10).



ნახ.5.8



ნახ.5.9



ნახ.5.10

გადალუნვის წერტილის გამოყენება ბიოქიმიაში იხ. §5.10-ში.

6. ასიმპტოტები.

§1.4-ში განვიხილეთ ასიმპტოტის ცნება. განიხილავენ ორგვარ ასიმპტოტებს: ვერტიკალურს (ე.ი. ორდინატთა ღერძის მიმართ პარალელურს) და დახრილს (ე.ი. ორდინატთა ღერძის მიმართ არაპარალელურს).

განსაზღვრა 5.9. $x=a$ წრფეს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტა, თუ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ ზღვრებიდან ერთ-ერთის მნიშვნელობა მაინც ტოლია უსასრულობის, ე.ი. ტოლია $+\infty$ ან $-\infty$-ს.

მაგალითი 11. $x=0$ წრფე არის $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტა, რადგანაც $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty$.

განსაზღვრა 5.10.

$$y=kx+b \qquad (5.39)$$

წრფეს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის *დახრილი ასიმპტოტა*, როცა $x\to+\infty$, თუ ამ ფუნქციის წარმოდგენა შეიძლება

$$f(x)=kx+b+\alpha(x) \qquad (5.40)$$

სახით, სადაც

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0. \qquad (5.41)$$

თეორემა 5.8. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, როცა $x\to+\infty$ აქვს დახრილი ასიმპტოტა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს შემდეგი ორი ზღვარი:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \qquad (5.42)$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b. \qquad (5.43)$$

შენიშვნა 1. ანალოგიურად განისაზღვრება დახრილი ასიმპტოტა, როცა $x\to-\infty$.

შენიშვნა 2. როცა $k=0$ დახრილ (5.39) ასიმპტოტას ეწოდება ჰორიზონტალური ასიმპტოტა, როცა $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

მაგალითი 12. ვიპოვოთ $y=\sqrt{x^2+1}$ ფუნქციის დახრილი ასიმპტოტა. განვიხილოთ ზღვარი $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$, ე.ი. $k=1$.

ეხლა კი ვიპოვოთ ზღვარი (5.43)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0,$$

ე.ი. $b=0$. დახრილი ასიმპტოტას განტოლებაა $y=x$.

მაგალითი 13. ვიპოვოთ $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტა. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ ამიტომ, ჰორიზონტალური ასიმპტოტაა წრფე $y=0$.

§5.8. ფუნქციის გრაფიკის აგება

გრაფიკის აგება ფუნქციის კვლევის შემაჯამებელი ეტაპია, სადაც გამოიყენება კვლევის ყველა შედეგი. ფუნქციის გრაფიკის აგება ხდება შემდეგი სქემის მიხედვით:

I. ვპოულობთ ფუნქციის განსაზღვრის არეს, ვიკვლევთ ფუნქციას ლუწობაზე, კენტობაზე და პერიოდულობაზე;

II. ვპოულობთ წყვეტის წერტილებს და ამ წერტილებში ვანგარიშობთ ცალმხრივ ზღვრებს;

III. ვპოულობთ ფუნქციის გრაფიკის გადაკვეთის წერტილებს საკოორდინატო ღერძებთან;

IV. ვარკვევთ ფუნქციის ქცევას უსასრულობაში;

V. ვპოულობთ ზრდადობისა და კლებადობის შუალედებს;

VI. ვიკვლევთ ფუნქციას ექსტრემუმზე;

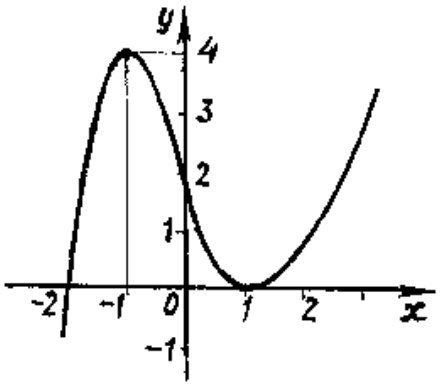
VII. ვიკვლევთ ფუნქციას ამოზნექილობასა და ჩაზნექილობაზე, ვპოულობთ გადაღუნვის წერტილს;

VIII. ვპოულობთ ასიმპტოტების განტოლებებს, თუ ფუნქციის გრაფიკს გააჩნია ასიმპტოტები;

IX. ვაგებთ ფუნქციის გრაფიკს.

შევნიშნოთ, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში საკმარისია ჩავატაროთ ნაწილობრივი გამოკვლევა, გამოვტოვებთ რა ზოგიერთ პუნქტს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ავაგოთ $y=x^3-3x+2$ ფუნქციის გრაფიკი.



ნახ.5.11

1) $D(y)=(-\infty;\infty)$.

2) ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი, რადგანაც

$(-x)^3-3(-x)+2=-x^3+3x+2$,

$f(-x)\neq f(x)$ და $f(-x)\neq -f(x)$.

3) Oy ღერძს კვეთს წერტილში $x=0$, $y=2$, ხოლო Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები იქნება $x^3-3x+2=0$ განტოლების ფესვები.

სამწევრი დავშალოთ მამრავლებად.

$x^3-3x+2=x^3-x-2x+2=x(x^2-1)-2(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)=0$.

ამ განტოლების ფესვებია $x_1=x_2=1$, $x_3=-2$.

4) როცა $x\to+\infty$, $y\to+\infty$, ხოლო როცა $x\to-\infty$, $y\to-\infty$.

5) $y'=3x^2-3=3(x^2-1)$.

$3(x^2-1)=0$, $x_1=-1$, $x_2=1$.

ეს წერტილები განსაზღვრის არეს ყოფს სამ შუალედად (იხ. §5.7-ის მაგ.5).

x	x<-1	x=-1	-1<x<1	x=1	x>1
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗	4	↘	0	↗
		max		min	

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$, $f(1)=13-3\cdot1+2=0$.

ე.ი. $(-\infty,-1)$ შუალედი ზრდადობის შუალედებია, ხოლო $(-1;1)$ კი კლებადობის.

6) $y''=6x<0$, როცა $x<0$ და $y''=6x>0$, როცა $x>0$. ე.ი. $y''<0$ $(-\infty,0)$ შუალედში და იქ ის ამოზნექილია, ხოლო $y''>0$ $(0;+\infty)$ შუალედში და ის იქ ჩაზნექილია. $y''=0$, $6x=0$, $x=0$. $x=0$ არის გადაღუნვის წერტილის აბსცისა, $y(0)=2$. ე.ი. გადაღუნვის წერტილია $(0;2)$.

7) ასიმპტოტები არ გააჩნია.

8) ვაგებთ ნახაზს (ნახ.5.11).

მაგალითი 2. ავაგოთ $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკი.

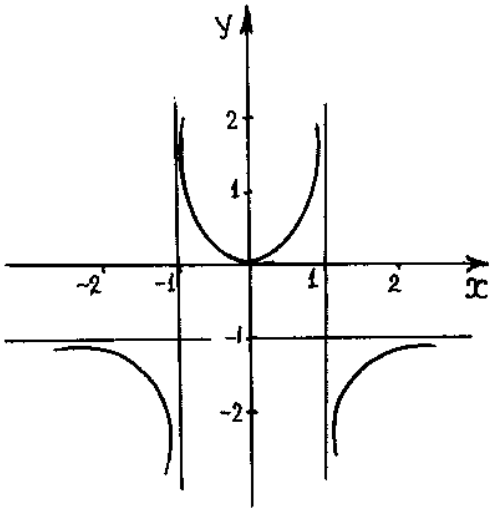
$$D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$$

არის ლუწი, რადგანაც $\dfrac{(-x)^2}{1-(-x)^2}=\dfrac{x^2}{1-x^2}$, ე.ი. $f(-x)=f(x)$.

ამიტომ საკმარისია მისი გრაფიკი ავაგოთ Oy ღერძის ერთ მხარეს, მაგალითად Oy-ის მარჯვნივ, რადგანაც ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ.

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{1-x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{1-x^2}=-\infty.$$

ეს ნიშნავს, რომ $x=1$ არის ვერტიკალური ასიმპტოტა. ღერძთან გადაკვეთის წერტილია $x=0$; $y=0$, როცა $x\to+\infty$, $y\to -1$. ე.ი. ჰორიზონტალური ასიმპტოტაა $y=-1$.



ნახ.5.12

$y'=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$, $y'=0$, როცა $x=0$. $(0;1)$ და $(1;+\infty)$ შუალედებში $y'>0$, ე.ი. y ზრდადია. $y''=\dfrac{2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$, $y''\neq0$ ნებისმიერი x-თვის, ე.ი. გადაღუნვის წერტილი არ გააჩნია. $(0;1)$ შუალედში $y''>0$, შესაბამისად ფუნქცია ჩაზნექილია, ხოლო $(1;+\infty)$ შუალედში $y''<0$, ამიტომ ფუნქცია ამოზნექილია. $x=0$ წერტილში $y(0)=0$ ფუნქციის მინიმუმია. კვლევის შედეგების მიხედვით ვაგებთ გრაფიკს მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში, მისი სიმეტრიულიც უნდა ავაგოთ Oy-ის მიმართ (ნახ. 5.12).

§5.9. ტეილორის ფორმულა

1. ტეილორის ფორმულა ლაგრანჟის სახის დამატებითი წევრით.

თეორემა 5.9. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას $(\alpha;\beta)$ შუალედში აქვს $(n+1)$ რიგის (ჩათვლით) წარმოებული. მაშინ ნებისმიერი x-თვის ამ ინტერვალიდან და ფიქსირებული a-თვის ამ ინტერვალიდან ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (5.44)$$

აქ c მდებარეობს x-ს და a-ს შორის, ე.ი. $c=a+\theta(x-a)$, სადაც $0<\theta<1$.

(5.44) ეწოდება *ტეილორის ფორმულა* (ბრუკ ტეილორი - (1685-1731) - ინგლისელი მათემატიკოსი), ხოლო ბოლო შესაკრებს ტეილორის ფორმულის *ლაგრანჟის სახის დამატებითი წევრი.*

2. ტეილორის ფორმულების გამოყენება ელემენტარული ფუნქციებისათვის. მიახლოებითი ფორმულები.

ტეილორის ფორმულის კერძო შემთხვევა, რომელიც შეესაბამება $a=0$-ს, არის ფორმულა

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (5.45)$$

სადაც $c=\theta x$. ამ ფორმულას ხშირად უწოდებენ *მაკლორენის ფორმულას* (კოლინ მაკლორენი (1698-1746) - შოტლანდიელი მათემატიკოსი). აქ დამატებითი წევრია

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქცია დავშალოთ ამ ფორმულით.

1) $f(x)=e^x$.

(5.45) ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c. \qquad (5.46)$$

(5.46)-დან ვღებულობთ მიახლოებით ფორმულას

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}.$$

კერძოდ, როცა x=1, ვღებულობთ e-ს მიახლოებით მნიშვნელობას.

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

2) f(x)=sinx. f'(x)=cosx, f''(x)=-sinx, f'''=-cosx, f^{IV}=sinx, f^{V}=cosx, ... შესაბამისად f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1, $f^{IV}(0)=0$, $f^{V}(0)=1$ და ა.შ.

(5.45) ფორმულით (თუ n=2m) გვაქვს

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{(m-1)} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos c \qquad (5.47)$$

(5.47)-დან ვღებულობთ მიახლოებით მნიშვნელობას

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{(m-1)} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

3) f(x)=cosx-თვის, გვაქვს

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos c. \qquad (5.48)$$

საიდანაც ვღებულობთ მიახლოებითი მნიშვნელობის ფორმულას.

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

4) $f(x)=(1+x)^n$, სადაც n - ნატურალური რიცხვია. ვღებულობთ:

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}$, $f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$, ...,

$f^{(k)}(x)=n(n-1)...(n-k+1)(1+x)^{n-k}$,...$f^{(n)}(x)=n!$

(n-ზე მაღალი რიგის წარმოებულები ყველა ნულის ტოლია). აქედან f(0)=1, f'(0)=n, f''(0)=n(n-1),..., $f^{(k)}$=n(n-1)...(n-k+1), ..., $f^{(n)}(0)=n!$.

(5.45) ფორმულით გვექნება

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}x^k + ... + x^n, \qquad (5.49)$$

რომელსაც *ნიუტონის ბინომი* ეწოდება.

"მათემატიკის მეშვეობით ადამიანი
ბუნებასა და თავის თავს მართავს".

ანდრია კოლმოგოროვი

§5.10. წარმოებულის როლის შესახებ ბუნებისმეტყველებაში

1. წარმოებულების ზოგიერთი გამოყენება ბუნებისმეტყველების ამოცანებში.

თანამედროვე პერიოდის მათემატიკას ახასიათებს მეცნიერულ ცოდნათა ინტეგრაცია და სინთეზი. შესაბამისად, მთელი მსოფლიოს მეცნიერული სურათის წარმოდგენა არის მეცნიერების ყველა დარგის ინტეგრაციული ფორმა. განსაკუთრებით ეფექტურია მათემატიკის ეს როლი ბუნებისმეტყველებაში, რადგანაც ყველა სხეულს, პროცესს, ბუნების მოვლენას აქვს რაოდენობრივი და თვისებრივი მახასიათებლები და დიალექტიკურ ერთიანობაში არიან. ბუნების შესახებ მეცნიერებათა მათემატიზება ძალიან დიდ როლს ასრულებს თანამედროვე ბუნებისმეტყველების ინტეგრებაში და მეცნიერულ ცოდნათა სინთეზში, რაც სამყაროს შემეცნების საფუძველს წარმოადგენს.

სწავლების მიზანი უნდა იყოს საგანთა შორის კავშირის განმტკიცება, საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა სწავლების ერთობლიობის ფორმირება, მათემატიკური ცოდნის გამოყენება გარემომცველი სამყაროს კანონზომიერების შესწავლის საქმეში და მათემატიკური დასკვნების მიღება.

ამ მიზნის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ამოცანები ფუნქციის *წარმოებულის გამოყენებაზე*, რომლებიც კავშირს ამყარებენ მათემატიკასა და ბუნებისმეტყველებას შორის.

ამოცანა 1. (მიკროორგანიზმთა პოპულაციის რაოდენობის უდიდესი მნიშვნელობის შესახებ) არსებობისათვის განსაზღვრულ გარემოში შემოჰყავთ 100 ბაქტერიისაგან შემდგარი პოპულაცია. პოპულაციის რაოდენობა იზრდება კანონით: $Z(t) = 100 + \frac{100t}{1+t^2}$, სადაც t გამოისახება საათებით.

ვიპოვოთ პოპულაციის უდიდესი მნიშვნელობა.

ამოხსნა: ვიპოვოთ $Z(t)$–ს წარმოებული

$$Z'(t) = (100 + \frac{100t}{1+t^2})' = \frac{100(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

$Z'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1,$ მაგრამ -1 არ აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას. ამიტომ, უნდა დავადგინოთ ნიშანი $t = 1$–ის მიდამოში. ცხადია, $t = 1$ არის მაქსიმუმის წერტილი.

ეს კი ნიშნავს, რომ $t = 1$ (სთ) მომენტისათვის პოპულაციას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა,

ე. ი. $Z(1) = 100 + \frac{100}{2} = 150$ (ბაქტერია).

პასუხი: [150 ბაქტერია.]

ფუნქციის ნაზრდისა და დიფერენციალების პოვნაზე განვიხილოთ ამოცანები.

ამოცანა 2. კონცენტრირებულ გოგირდის მჟავაში მოათავსეს სპილენძის კუბი, რომლის წიბოა 5 სმ. გარკვეული დროის შემდეგ კუბის მასა 0,96 გ-ით შემცირდა. რამდენით შემცირდა წიბო, თუ სპილენძის ρ სიმკვრივე 8 გ/სმ^3–ია (სპილენძი გადადიოდა ხსნარში ყველა მხრიდან)

ამოხსნა: რადგანაც სპილენძი გადადის ხსნარში ყველა წახნაგიდან თანაბრად, ამიტომ, რეაქციის განსაზღვრულ მომენტში მჟავაში იქნება უფრო მცირე ზომის კუბი.

ვთქვათ, x კუბის წიბოა, მისი მოცულობა $V = x^3$, რადგანაც $V = \frac{m}{\rho}$ (m – მასა, ρ - სიმკვრივე), მაშინ, კუბის მოცულობის ცვლილება $\Delta V = \frac{0,96}{8} = 0,12$ სმ^3, Δx არის კუბის წიბოს ნაზრდი. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $V' = \frac{dv}{dx} = 3x^2, dx \approx \Delta x$ და $dv \approx \Delta v = 0,12,$ რადგანაც $x = 5,$ ამიტომ $\frac{0,12}{\Delta x} = 3 \cdot 5^2.$ აქედან $\Delta x = \frac{0,12}{3 \cdot 25} = 0,0016$ (სმ).

პასუხი: [0,0016 სმ.]

ამოცანა 3. აირი შედგება აზოტ (II) ოქსიდის (NO) და ჟანგბადისაგან (O_2). უნდა ვიპოვოთ O_2–ის კონცენტრაცია, რომლის დროსაც შენაერთში მყოფი NO იჟანგება უდიდესი სიჩქარით.

ამოხსნა: $2NO + O_2 = 2NO_2$ რეაქციის სიჩქარე გამოისახება $v = kx^2y$–ით, სადაც x არის NO–ს კონცენტრაცია დროის ნებისმიერ მომენტში, y კი – O_2-ის კონცენტრაცია, k - რეაქციის სიჩქარის კონსტანტა, რომელიც არ არის დამოკიდებული კომპონენტთა კონცენტრაციაზე და დამოკიდებულია მხოლოდ ტემპერატურაზე. აირის კონცენტრაციას გამოვსახავთ მოცულობით პროცენტებით.

ამ შემთხვევაში. $y = 100 - x$, $v = kx^2(100 - x) = v(x)$. ცხადია, $0 < x < 100$. წარმოებულს $v' = k(200x - 3x^2)$ აქვს ერთადერთი ფესვი 0-სა და 100-ს შორის. $x = x_1 = 66{,}67$. $v(0) = v(100) = 0$, შესაბამისად რეაქციის სიჩქარე უდიდესია, როცა $x = 66{,}67\%$ და $y = 33{,}33\%$.

2. გადაღუნვის წერტილის გამოყენება ბიოქიმიაში.

გადაღუნვის წერტილები მნიშვნელოვანია ბიოქიმიაში, რადგანაც ისინი განსაზღვრავენ პირობებს, რომლის დროსაც რომელიმე სიდიდე, მაგალითად, პროცესის სიჩქარე, მეტად (ან ნაკლებად) მგრძნობიარეა რაიმე ზემოქმედების მიმართ. განვიხილოთ *ბუფერის* შესაძლებლობა შეაფერხოს pH ცვლილება ($pH=-lg[H^+]$), რომელიც შეიძლება განპირობებული იყოს, მაგალითად ტუტის დამატებით. ეს სიტუაცია ჩაიწერება განტოლებით

$$pH = pK_\alpha + \lg\frac{[\text{მარილი}]}{[\text{მჟავა}]} \qquad (5.50)$$

($pK_\alpha=-lgK_\alpha$, K_α - მჟავის დისოციაციის კონსტანტა). *ბუფერისათვის*, რომელიც მიღებულია x მოლი/ლიტრი NaOH-ის დამატებით ძმარმჟავას HOA_c ხსნარისათვის (სიმარტივისათვის A_c-თი აღნიშნულია CH_3CO), რომლის საწყისი კონცენტრაცია A-ს ტოლია, ჩვენ გვექნება

$$pH = pK_\alpha + \lg\frac{[NaOA_c]}{[HOA_c]} = pK_\alpha + 0{,}4343\ln\frac{[NaOA_c]}{[HOA_c]} = \\ = pK_\alpha + 0{,}4343\ln\frac{x}{A-x}. \qquad (5.51)$$

ვინაიდან, მანამ, სანამ x ნაკლებია A-ზე, OH^--ის ყველა დამატებული იონი სტექიომეტრიულად გადააქცევს HOA_c-ის მოლეკულებს OA_c^--ს იონებად. მოვახდინოთ დიფერენცირება x-ით, მივიღებთ

$$\frac{dpH}{dx} = 0{,}4343\frac{A-x}{x}\cdot\frac{A-x+x}{(A-x)^2} = \frac{0{,}4343A}{x(A-x)}. \qquad (5.52)$$

ეს პირველი წარმოებული არის pH-ის მგრძნობელობის საზომი ტუტის მოქმედების მიმართ. ცხადია, რომ ბუფერი უფრო ეფექტურია, როცა წარმოებული მინიმალურია (ან მისი შებრუნებული სიდიდე, რომელიც ცნობილია ბუფერული მოცულობის სახელწოდებით, მაქსიმალურია). x-ის მნიშვნელობის საპოვნელად, რომლის დროსაც $\frac{dpH}{dx}$ მინიმალურია, საჭიროა ავიღოთ მეორე წარმოებული

$$\frac{d^2pH}{dx^2} = -0{,}4343A\frac{A-2x}{(Ax-x^2)^2}. \qquad (5.53)$$

აქედან ცხადია, რომ მეორე წარმოებული ტოლია ნულის, როცა $x = \frac{A}{2}$ და მასზე გადასვლისას x-ის ზრდადობის მიმართულებით იცვლის ნიშანს "მინუსს", "პლუსზე", შესაბამისად $\frac{dpH}{dx}$ მინიმალურია pH ფუნქციის გადაღუნვის წერტილში. x-ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (5.51)-ში, მივიღებთ, რომ

$$pH = pK_\alpha + 0{,}4343\ln\frac{2A}{2A} = pK_\alpha.$$

ამგვარად, ბუფერი უფრო ეფექტურია ნიტრირებაში მონაწილე pH-თვის, რომელიც pK_α-ს ტოლია.

"ჭეშმარიტად სერიოზული მისწრაფება რაიმე მიზნისაკენ, ეს უკვე სანახევროდ მიღწეული მიზანია".

ვილჰელმ ჰუმბოლტი

სავარჯიშოები

წარმოებულის განსაზღვრების გამოყენებით იპოვეთ ფუნქციის წარმოებულები.

1. $y=3x$. $[y'=3.]$
2. $y=8-x^2$. $[y'=-2x.]$
3. $y=\sqrt{x}$. $\left[y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\right]$
4. $y=\frac{x^3}{3}$. $[y'=x^2.]$

წარმოებულის ცხრილის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

5. $y=3x^2+x-1$. $[y'=6x+1.]$
6. $y=6x^3+x^2$. $[y'=18x^2+2x.]$
7. $y=2x^4-\frac{x^2}{3}+1$. $\left[y'=8x^3-\frac{2}{3}x.\right]$
8. $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+3x+4$. $[y'=21x^{\frac{5}{2}}+10x^{\frac{3}{2}}+3.]$
9. $y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x}$. $\left[y'=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{x^2}.\right]$
10. $y=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+7$. $\left[y'=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}.\right]$
11. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{x^3}$. $\left[y'=x^2-\frac{9}{x^4}.\right]$
12. $y=x^2(2x-1)$. $[y'=6x^2-2x.]$
13. $y=(x^3+3)(4x^2-5)$. $[y'=20x^4-15x^2+24x.]$
14. $y=(1+4x^3)(1+2x^2)$. $[y'=4x(1+3x+10x^3).]$
15. $y=(2x-1)(x^2-6x+3)$. $[y'=6x^2-26x+12.]$
16. $y=(x-5)^4(x+3)^5$. $[y'=(x-5)^3(x+3)^4(9x-13).]$
17. $y=(x-1)\sqrt{x}$. $\left[y'=\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}.\right]$

18. $y=\frac{1-x}{1+x}$. $\left[y'=-\frac{2}{(1+x)^2}.\right]$

19. $y=\frac{2x^4}{1-x^2}$. $\left[y'=\frac{4x^3(2-x^2)}{(1-x^2)^2}.\right]$

20. $y=\frac{x^3-3}{5-x^2}$. $\left[y'=-\frac{x^4-15x^2+6x}{(5-x^2)^2}.\right]$

21. $y=\frac{(x+4)^2}{x+3}$. $\left[y'=\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}.\right]$

22. $y=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3$. $\left[y'=-6\frac{(1-x)^2}{(1+x)^4}.\right]$

23. $y=(2x^2-3)^3$. $[y'=12x(2x^2-3)^2.]$

24. $y=(x^2+1)^6$. $[y'=12x(x^2+1)^5.]$

25. $y=\sqrt[3]{6x^2-5}$. $\left[y'=\frac{4x}{\sqrt[3]{(6x^2-5)^2}}.\right]$

26. $y=x\sqrt{1+x^2}$. $\left[y'=\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}.\right]$

27. $y=(1-x)\sqrt{1-x}$. $\left[y'=-\frac{3}{2}\sqrt{1-x}.\right]$

28. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. $\left[y'=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.\right]$

29. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. $\left[y'=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.\right]$

30. $y=\sin^3 x$. $[y'=3\sin^2 x\cdot\cos x.]$

31. $y=\sin x^2$. $[y'=2x\cdot\cos x^2.]$

32. $y=\cos^2\frac{x}{2}$. $\left[y'=-\frac{\sin x}{2}.\right]$

33. $y=\sin x+2\cos 3x$. $[y'=\cos x-6\sin 3x.]$

34. $y=x\sin x+\cos x$. $[y'=x\cos x.]$

35. $y=x^2\cdot\cos x$. $[y'=x(2\cos x-x\sin x).]$

36. $y=\sin 2x\cdot\cos 3x$. $[y'=2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x.]$

37. $y=\frac{\sin 2x}{\cos 3x}$. $\left[y'=\frac{5\cos x-\cos 5x}{2\cos^2 3x}.\right]$

38. $y=(x^2-2)\sin x+2x\cos x$. $[y'=x^2\cos x.]$

39. $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$. $\left[y'=\frac{1}{1-\sin x}.\right]$

40. $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$. $\left[y'=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}.\right]$

41. $y=\operatorname{tg}(2x+1)$. $\left[y'=\frac{2}{\cos^2(2x+1)}.\right]$

42. $y=\operatorname{ctg}^2 3x$. $\left[y'=-6\operatorname{ctg}3x\cdot\frac{1}{\sin^2 3x}.\right]$

43. $y=x-\operatorname{tg}x$. $[y'=-\operatorname{tg}^2 x.]$

44. $y=\ln(ax+b)$. $\left[y'=\frac{a}{ax+b}.\right]$

45. $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$. $\left[y'=\frac{2}{1-x^2}.\right]$

46. $y=\ln^2 x$. $\left[y'=\frac{2\ln x}{x}.\right]$

47. $y=\ln x^2$. $\left[y'=\frac{2}{x}.\right]$

48. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. $\left[y'=\frac{1}{\sin x}.\right]$

49. $y=\sin(\ln x)$. $\left[y'=\frac{1}{x}\cos(\ln x).\right]$

50. $y=\ln(1+\sin^2 x)$. $\left[y'=\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}.\right]$

51. $y=(x-1)e^x$. $[y'=xe^x.]$

52. $y=(x^2-4x+8)\cdot e^{\frac{x}{2}}$. $\left[y'=\frac{x^2}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}.\right]$

53. $y=x(\ln x-1)$. $[y'=\ln x.]$

54. $y=\sqrt{x}+\ln x$. $\left[y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}.\right]$

55. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. $\left[y'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.\right]$

56. $y=e^{x\ln x}$. $[y'=e^{x\ln x}(1+\ln x).]$

57. $y=x^2\cdot 2^x$. $[y'=(2x+x^2\ln 2)\cdot 2^x.]$

58. $y=e^{\sqrt{x}}$. $\left[y'=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.\right]$

59. $y=\ln\frac{x^3-9}{x^3-1}$. $\left[y'=\frac{24x^2}{(x^3-9)(x^3-1)}.\right]$

60. $y=x-\operatorname{arctg}x$. $\left[y'=\frac{x^2}{1+x^2}.\right]$

61. $y=\ln\frac{3-x^2}{2-x^2}$. $\left[y'=\frac{2x}{x^4-5x^2+6}.\right]$

62. $y=\ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$. $\left[y'=-\frac{2}{(x+1)^2}\operatorname{ctg}\frac{2x+4}{x+1}.\right]$

63. $y=\arcsin(e^{x^2})$. $\left[y'=\frac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}.\right]$

64. $y=\ln\frac{e^x}{1+e^x}$. $\left[y'=\frac{1}{1+e^x}.\right]$

65. $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. $\left[y'=\frac{1}{\cos x}.\right]$

66. $y=\arcsin\frac{x-2}{3}$. $\left[y'=\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}.\right]$

67. $y=e^{-x}$. $[y'=-e^{-x}.]$

68. $y=e^{-x^2}$. $\left[y'=-2xe^{-x^2}.\right]$

69. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. $\left[y'=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}.\right]$

70. $y=x\cdot e^{-x}$. $[y'=(1-x)e^{-x}.]$

71. $y=x^2e^x$. $[y'=xe^x(2+x).]$

72. $y=2^x$. $[y'=2^x\ln 2.]$

73. $y=e^{2x^2}$. $\left[y'=4x\cdot e^{2x^2}.\right]$

74. $y=e^x(x^2-2x+2)$. $[y'=x^2e^x.]$

75. $y = 3^{x^2}$. $\left[y' = 3^{x^2}\cdot 2x\cdot \ln 3.\right]$

76. $y=e^{\sin x}$. $[y'=e^{\sin x}\cdot\cos x.]$

77. $y = \arcsin\frac{x}{2}$. $\left[y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.\right]$

78. $y=e^x\cdot\sin 2x$. $[y'=e^x(\sin 2x+2\cos 2x).]$

79. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. $\left[y' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.\right]$

80. $y=(\arcsin x)^2$. $\left[y' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.\right]$

81. $y=\arccos(\ln x)$. $\left[y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.\right]$

82. $y=\arccos(x^2)$. $\left[y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.\right]$

83. $y=\operatorname{arctg}(x^2+1)$. $\left[y' = \frac{2x}{1+(x^2+1)^2}.\right]$

84. $y=2^{\operatorname{arctg} x}$. $\left[y' = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2^{\operatorname{arctg} x}\cdot \ln 2.\right]$

85. დაწერეთ $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის $A(2;4)$ წერტილში გავლებული მხების განტოლება.

$[y=4x-4.]$

86. დაწერეთ $y=\sin x$ სინუსოიდის $(\pi;0)$ წერტილში გავლებული მხების განტოლება.

$[y=\pi-x.]$

87. იპოვეთ $y=5-3x^2$ მრუდის $x=-2$ აბსცისიან წერტილზე გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტი.

$[k=12.]$

88. დაწერეთ $y^2=2x$ პარაბოლის $A(8;4)$ წერტილში გავლებული ნორმალის განტოლება.

$[4x+y-36=0.]$

89. დაწერეთ $x^2+y^2=25$ წრეწირის $A(3;-4)$ წერტილში გავლებული ნორმალის განტოლება.

$[4x+3y=0.]$

90. ჩართვის შემდეგ ლიფტი მუშაობს კანონით $s=1,5t^2+2t+12$, სადაც s - მანძილია (მეტრებში), t - დრო (წამებში). იპოვეთ ლიფტის სიჩქარე $t=2$ მომენტში.

[8 მ/წმ.]

91. წერტილის წრფივი მოძრაობა ხდება კანონით $s=t^3-3t^2+3t+5$, სადაც s - გზა (მეტრებში), t - დრო (წამებში). დროის რა მომენტში იქნება v სიჩქარე ნულის ტოლი.

[$v=0$, როცა $t=1$ წმ.]

92. რაიმე ქიმიური ნივთიერების დაშლა მიმდინარეობს $m=m_0e^{-kt}$ ტოლობით, სადაც m - ნივთიერების რაოდენობაა დროის t მომენტში, k - დადებითი მუდმივია. იპოვეთ ნივთიერების დაშლის v სიჩქარე და გამოსახეთ ის ორგორც m-ის ფუნქცია.

[$v=-km$.]

93. Q რაოდენობის ნივთიერების დამოკიდებულება t დროზე, რომელიც მიიღება ქიმიური რეაქციის შედეგად, მოცემულია ფორმულით $Q=a(1+be^{-kt})$. განსაზღვრეთ რეაქციის სიჩქარე v და გამოსახეთ ის როგორც Q-ს ფუნქცია.

[$v=k(a-Q)$.]

94. ზღვის დონიდან h სიმაღლეზე ჰაერის ატმოსფერული წნევა p შეიძლება გამოითვალოს ფორმულით $p=p_0e^{-\frac{h}{a}}$, სადაც p_0 - წნევაა ზღვის დონეზე და a - მუდმივია. იპოვეთ წნევის ცვლილების სიჩქარე v და გამოსახეთ როგორც p-ს ფუნქცია.

$$\left[v=-\frac{p}{a}.\right]$$

95. მწერების პოპულაციის სიდიდე დროის t მომენტში (გამოისახება დღეებში) მოცემულია სიდიდით $p(t)=10000-9000(1+t)^{-1}$. გამოთვალეთ პოპულაციის ზრდის სიჩქარე $p'(t)$ დროის t მომენტში.

$$\left[p'(t)=\frac{9000}{(1+t)^2}.\right]$$

96. ბაქტერიების პოპულაციის სიდიდე დროის t მომენტში (გამოისახება საათებში) მოცემულია სიდიდით $p(t)=10^6+10^4t-10^3t^2$. იპოვეთ პოპულაციის ზრდის სიჩქარე, როცა $t=1$ სთ.

[8000 ბაქტერია სთ-ში.]

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის დიფერენციალები:

97. $y=\ln 2x.$ $\left[dy=\frac{dx}{x}.\right]$

98. $y=\operatorname{arctg}(x^2).$ $\left[dy=\frac{2xdx}{1+x^4}.\right]$

99. $y=(2x-3)(4x+5).$ $[dy=(16x-2)dx.]$

100. $y=\frac{3x-4}{2x+3}.$ $\left[dy=\frac{17dx}{(2x+3)^2}.\right]$

101. $y=3^x.$ $[dy=3^x\cdot\ln 3\cdot dx.]$

102. $y=\sin(2x-4).$ $[dy=2\cos(2x-4)dx.]$

103. $y=\arccos(3x).$ $\left[dy=-\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}.\right]$

104. $y=e^x\cdot\cos 2x.$ $[dy=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)dx.]$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების მაღალი რიგის წარმოებულები:

105. $y=3x^5-4x^4+x^3-5x^2+10,\quad y'''=?$ $[y'''=180x^2-96x+6.]$

106. $y=x^6-3x^2+1,\quad y^{IV}=?$ $[y^{IV}=360x^2.]$

107. $y=x^3-3x^2+16,\quad y^{V}=?$ $[y^{V}=0.]$

108. $y=x\ln x,\quad y''=?$ $\left[y''=\frac{1}{x}.\right]$

109. $y=e^x+x^2,\quad y''=?$ $[y''=e^x+2.]$

110. $y=\sin 2x,\quad y''=?$ $[y''=-4\sin 2x.]$

ლოპიტალის წესის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:

111. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 9x}.$ $\left[\frac{1}{3}.\right]$

112. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos x}.$ $[-5.]$

113. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$ $\left[\frac{1}{2}.\right]$

114. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}.$ $[1.]$

115. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$ $[1.]$

116. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}.$ $\left[\frac{3}{5}.\right]$

117. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}.$ $[0.]$

118. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}.$ $[0.]$

119. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$. [+∞.]

120. $\lim\limits_{x\to0+0} x^n \ln x$, (n>0). [0.]

121. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$. $\left[\dfrac{1}{6}.\right]$

122. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$. [0.]

123. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx}{x}$. [1.]

124. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{tg5x}$. $\left[-\dfrac{3}{5}.\right]$

125. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$. $\left[\dfrac{1}{n}.\right]$

126. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. [2.]

127. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$. [1.]

128. $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\ln x}{1/x}$. [0.]

129. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x}$. [+∞.]

130. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$. $\left[\dfrac{a^2}{b^2}.\right]$

131. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{tgx-1}{\sin 4x}$. $\left[-\dfrac{1`}{2}.\right]$

132. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$. [2.]

133. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$. [1.]

134. $\lim\limits_{x\to0} x\cdot ctg2x$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

135. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$. $\left[\dfrac{2}{\pi}.\right]$

136. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x}$. [0.]

137. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. $\left[-\dfrac{1}{2}.\right]$

138. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. $\left[-\dfrac{1}{2}.\right]$

139. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$. $\left[\dfrac{1}{5}.\right]$

140. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. [0.]

141. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$. [1.]

142. $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^x$. [1.]

143. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\ln x}$. [1.]

144. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\sin 2x}$. [1.]

145. $\lim\limits_{x\to0} x^{\sin x}$. [1.]

146. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. $\left[e^{-\frac{1}{2}}.\right]$

147. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{\cos x}$. [1.]

148. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)^{\frac{1}{x}}$. [1.]

149. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\right]$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები:

150. $y=3x-x^3$.

[კლებადია $(-\infty;1)$ და $(1;+\infty)$, ზრდადია $(-1;1)$ შუალედებში.]

151. $y=x^2+2x-1$.

[კლებადია $(-\infty;-1)$-ზე და ზრდადია $(-1;+\infty)$-ზე.]

152. $y=x^3-3x+1$.

[კლებადია $(-1;1)$-ზე და ზრდადია $(-\infty;-1)$ და $(1;+\infty)$-ზე.]

153. $y=\dfrac{2}{3}x^3-2x+1$.

[კლებადია $(-1;1)$-ზე, ზრდადია $(-\infty;-1)$-ზე და $(1;+\infty)$-ზე.]

გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები ექსტრემუმებზე:

154. $y=2x^2-8$.

[მინიმუმი, როცა $x=0$.]

155. $y=2x-x^2$.

[მაქსიმუმი, როცა $x=1$.]

156. $y=x^3-9x^2+15x-3$.

[მინიმუმი, როცა $x=5$; მაქსიმუმი, როცა $x=1$.].

157. $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$.

[მინიმუმი, როცა $x=-1$ და $x=3$; მაქსიმუმი, როცა $x=0$.].

158. $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+5$.

[მინიმუმი, როცა $x=-2$ და $x=2$; მაქსიმუმი, როცა $x=0$.]

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები:

159. $y=x^4-8x^2+3$ $[-2;2]$ მონაკვეთზე.

[-13 და 3.]

160. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3$ [-1;2] მონაკვეთზე.

$\left[-\frac{7}{3}\text{ და }3.\right]$

161. $y=\frac{1}{x^2-1}$, $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ შუალედში.

$\left[-\frac{4}{3}\text{ და }-1.\right]$

162. $y=x^2+\frac{16}{x}-16$ [1;4] შუალედში.

[-4 და 4.]

163. $y=4-x-\frac{4}{x^2}$ [1;4] შუალედში.

$\left[-1;-\frac{1}{4}.\right]$

164. იპოვეთ ისეთი უდიდესი დადებითი x რიცხვი, რომ სხვაობა $x-x^2$ იყოს უდიდესი.

[0,5.]

165. იპოვეთ რიცხვი, რომელიც თავის კვადრატთან ჯამში გვაძლევს უმცირეს მნიშვნელობას.

[-0,5.]

166. მატერიალური წერტილი სწორხაზოვნად მოძრაობს კანონით $S(t)=18t+9t^2-t^3$, სადაც S გზაა (მეტრებში), t - დრო (წამებში). t დროის რა მომენტში იქნება v სიჩქარე უდიდესი და როგორია ამ სიჩქარის მნიშვნელობა.

[t=3 წმ; v=45 მ/წმ.]

167. x პოპულაციის ზრდის სიჩქარე მოცემულია ფორმულით $y=0,01x(100-x)$, როცა დრო გამოისახება დღეებით. პოპულაციის რა მნიშვნელობისათვის არის ეს სიჩქარე მაქსიმალური?

[50.]

168. ორგანიზმის რეაქცია ორ წამალზე, როგორც t დროის ფუნქცია (დრო - საათებში) წარმოადგენს $r_1(t)=te^{-t}$ და $r_2(t)=t^2e^{-t}$. რომელ წამალს აქვს მაქსიმალური რეაქცია უფრო დიდი?

[მეორე წამალს აქვს მაქსიმალური რეაქცია უფრო დიდი.]

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების გადაღუნვის წერტილები, ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები:

169. $y=x^5$.

[გადაღუნვის წერტილი (0;0), ამოზნექილია $(-\infty;0)$-ში და ჩაზნექილია $(0;+\infty)$-ზე.]

170. $y=-x^3+15x^2-x-250$.

[გადაღუნვის წერტილი (5;5), ამოზნექილია $(5;+\infty)$-ში და ჩაზნექილია $(-\infty;5)$-ში.]

171. $y=\frac{5}{x}$.

[ამოზნექილია $(-\infty;0)$-ზე და ჩაზნექილია $(0;+\infty)$-ზე.]

იპოვეთ შემდეგი მრუდების ასიმპტოტები:

172. $y=1-\frac{4}{x^2}$. [$x=0$ და $y=1$.]

173. $y=\frac{x^2+1}{x}$. [$x=0$ და $y=x$.]

174. $y=\frac{x^2}{x+1}$. [$x=-1$ და $y=x-1$.]

გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები და ააგეთ გრაფიკები:

175. $y=x^3-3x$.

[D(y): $(-\infty;+\infty)$ კენტი ფუნქციაა; არაპერიოდული; გრაფიკი Ox ღერძს კვეთს წერტილებში $(-\sqrt{3};0)$; $(0;0)$, $\sqrt{3};0)$; კლებადია $(-1;1)$-ზე, ზრდადია $(-\infty;-1)$ და $(1;+\infty)$ შუალედებში; $y_{\min\limits_{x=1}}=-2$; $y_{\max\limits_{x=-1}}=2$ ამოზნექილია $(-\infty;0)$-ზე და ჩაზნექილია $(0;+\infty)$-ზე $x=0$ არის გადაღუნვის წერტილის აბსცისა.]

176. $y=2x^3-12x^2+18x$.

[D(y); $(-\infty;+\infty)$ ფუნქცია არც კენტია და არც ლუწი; გრაფიკი გადის $(0;0)$-ზე და გარდა ამისა Ox ღერძს კვეთს $(3;0)$ წერტილზე; კლებადია $(1;3)$-ზე, ზრდადია $(-\infty;1)$ და $(3;+\infty)$ შუალედებში;

$y_{\max\limits_{x=1}} = 8$; $y_{\min\limits_{x=3}} = 0$; ამოზნექილია $(-\infty;2)$-ში და ჩაზნექილი $(2;+\infty)$-ში; $x=2$ გადაღუნვის წერტილია, გრაფიკს ასიმპტოტები არა აქვს.]

177. $y=x\cdot e^{-x}$.

[D(y): $(-\infty;+\infty)$ ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი; ასევე არაპერიოდულია; გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე; კლებადია $(1+\infty)$-ში, ზრდადია $(-\infty;1)$-ში, $y_{\max\limits_{x=1}} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$; ამოზნექილია $(-\infty;2)$-ში და ჩაზნექილი $(2;+\infty)$-ში; $x=2$ არის გადაღუნვის წერტილის აბსცისა.]

178. $y = \frac{x}{x^2+16}$.

[D(y): $(-\infty;+\infty)$ ფუნქცია კენტია. გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე; კლებადია $(-\infty;-4)$ და $(4;+\infty)$-ში; ზრდადია $(-4;4)$-ში. $y_{\max\limits_{x=4}} = \frac{1}{8}$; $y_{\min\limits_{x=-4}} = -\frac{1}{8}$; ამოზნექილია $\left(-\infty;-4\sqrt{3}\right)$ და $(0;4\sqrt{3})$ შუალედებში, ჩაზნექილია $(4\sqrt{3};+\infty)$ და $(-4\sqrt{3};0)$-ში; $x=-4\sqrt{3}$, $x=0$ და $x=4\sqrt{3}$ გადაღუნვის წერტილების აბსცისებია; $y=0$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია, როცა $x\to+\infty$ $(x\to\infty)$.]

"მათემატიკა არის სამეცნიერო შემოქმედებისა და ბუნების საიდუმლოებებში შეღწევის უმძლავრესი იარაღი".
ილია ვეკუა

თავი 6. მრავალი ცვლადის ფუნქციები

§6.1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრა და ძირითადი თვისებები

1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრა.

ბუნებაში არსებულ ყველა დამოკიდებულებას ერთი ცვლადის ფუნქცია ვერ აღწერს. ყველაზე მარტივ ამოცანებშიც კი გვხვდება სიდიდეები, რომელთა მნიშვნელობები რამდენიმე სიდიდის მნიშვნელობათა ერთობლიობით განისაზღვრება.

მაგალითი 1. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა **V**, რომლის წიბოებია **x,y,z**, გამოითვლება ფორმულით **V=x·y·z**. აქ მოცულობა **V** სამი ცვლადის **x, y** და **z**-ის ფუნქციაა.

მაგალითი 2. მოცემულ პოპულაციაში ბაქტერიების გამრავლების სიჩქარე არის ტემპერატურისა და საკვების კონცენტრაციის ფუნქცია. აქ სიჩქარე არის ორი ცვლადის ფუნქცია.

მაგალითი 3. **S** ნიადგის ტიპი დამოკიდებულია **c** კლიმატზე, **v** მცენარეულობაზე, **o** ორგანიზმების სიცოცხლისუნარიანობაზე, **p** ქანებზე, **r** ნალექებსა და **t** დროზე. მოკლედ ეს ფუნქცია ჩაიწერება ასე: **S=f(c,v,o,p,r,t).**

რადგანაც მრავალი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ყველა ძირითადი ფაქტი შეინიშნება ორი ცვლადის ფუნქციებზეც, ამიტომ, ჩვენ შემოვიფარგლებით ორი ცვლადის ფუნქციების განხილვით.

განსაზღვრა 6.1. **z** ცვლადს ეწოდება *ორი **x** და **y** დამოუკიდებელი ცვლადების ფუნქცია*, თუ **x** და **y** მნიშვნელობების რაიმე წყვილს გარკვეული წესით შეესაბამება **z**-ის განსაზღვრული მნიშვნელობა. სიმბოლურად ორი ცვლადის ფუნქცია ჩაიწერება ასე: **z=f(x,y), z=φ(x,y), z=z(x,y)** და ა.შ.

განსაზღვრა 6.2. **x** და **y** ცვლადების შესაძლო მნიშვნელობათა წყვილებს ფუნქციის *განსაზღვრის არე ეწოდება*. **x** და **y** ცვლადებს **z** ფუნქციის *არგუმენტები* ეწოდება. **z**-ის მნიშვნელობებს, რომლებსაც ის ღებულობს განსაზღვრის არეში, **z** ფუნქციის *მნიშვნელობათა არე*

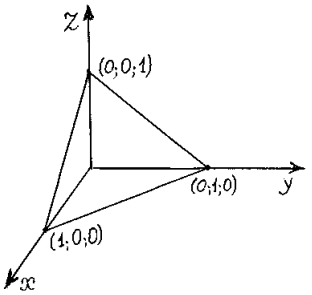
ეწოდება.

მაგალითი 4. $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა (x;y) წყვილთა ყველა სიმრავლე, ანუ მთელი xOy სიბრტყე, ხოლო მნიშვნელობათა არე [0;+∞] შუალედი.

2. ორი ცვლადის ფუნქციის გეომეტრიული გამოსახვა.

შესაძლებელია ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკული ილუსტრაცია. xOy სიბრტყის წერტილთა რაიმე D სიმრავლეზე განსაზღვრული z=f(x,y) ფუნქციის *გრაფიკი* ეწოდება სივრცის (x;y;z) წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა (x;y) წყვილები ეკუთვნის D-ს და z=f(x;y). უმარტივეს შემთხვევებში გრაფიკი არის რაიმე ზედაპირი.

მაგალითი 5.



ნახ.6.1

z=1-x-y ფუნქციის გრაფიკი არის სიბრტყე, რომელიც გადის (1;0;0), (0;1;0) და (0;0;1) წერტილებზე (ნახ.6.1).

მაგალითი 6. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ (ნახევარსფერო).

მაგალითი 7. $z=x^2+y^2$ (ბრუნვითი პარაბოლოიდი, იხ. ნახ.3.5).

სამი ცვლადისა და უფრო მეტი ცვლადების ფუნქციებს არა აქვთ თვალსაჩინო გეომეტრიული წარმოდგენა.

ხშირ შემთხვევაში ორი ცვლადის ფუნქციების გრაფიკების აგება რთულია. ამიტომ, ხელსაყრელია ორი ცვლადის ფუნქცია აღვწეროთ გეომეტრიულად ისე, რომ არ გავიდეთ სამგანზომილებიან სივრცეში. ასეთი აღწერის საშუალებაა *დონის წირები.* xOy სიბრტყეზე აღვნიშნოთ ყველა (x;y) წერტილი, რომელთათვისაც ფუნქცია f(x,y) ღებულობს ერთსა და იმავე მნიშვნელობას, მაგალითად, C-ს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, აღვნიშნოთ ის (x,y) წერტილები, რომელთათვისაც

$$f(x, y)=C. \qquad (6.1)$$

განტოლება (6.1) არის დონის წირების განტოლება. თუ C-ს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობებს და ყველა შემთხვევაში ავაგებთ

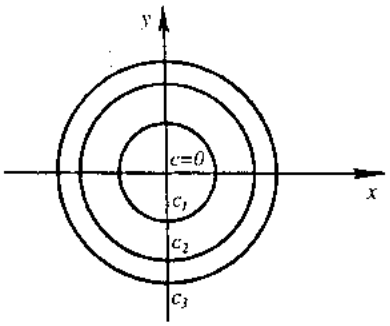
წირს (6.1) განტოლებით, მივიღებთ *დონის წირების ოჯახს.* ეს ოჯახი ნათლად ასახავს $f(x,y)$ ფუნქციას. ჩვეულებრივ C-ს გვერდით წერენ C-ს იმ მნიშვნელობას, რომელსაც ის შეესაბამება (იხ. ამოცანა დიეტაზე, §1.6).

მაგალითი 8. ავაგოთ

$$z=x^2+y^2 \qquad (6.2)$$

ფუნქციის დონის წირები.

ამოხსნა. გადავკვეთოთ (6.2) ზედაპირი $z=C$ $(0\le C<+\infty)$ სიბრტყით. C-ს მივცეთ მნიშვნელობები, მაგალითად $C=0, 1, 2, 3,..$, მივიღებთ დონის წირების ოჯახს, რომლებიც წრეწირებს წარმოადგენენ (ნახ.6.2)



ნახ.6.2

დონის წირებით გეოგრაფიულ რუკებზე აღნიშნავენ ზღვების სიღრმესა და მთების სიმაღლეს. ანალოგიური წირები აღნიშნავენ ნიადაგში ამა თუ იმ ნივთიერების განლაგებას, საშუალო დღე-ღამური ტემპერატურის გავრცელებას და სხვა.

3. ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა.

ვთქვათ, $z=f(x,y)$ განსაზღვრულია D არეში. ავიღოთ წერტილი $M_0(x_0;y_0)\in D$ და მივცეთ x_0 და y_0-ს ნაზრდები Δx და Δy ისე, რომ $(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ ასევე ეკუთვნოდეს D-ს. სხვაობას,

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0), \qquad (6.3)$$

ეწოდება $z=f(x;y)$ *ფუნქციის სრული ნაზრდი* $(x_0;y_0)$ წერტილში.

განსაზღვრა 6.3. ანალოგიურად ერთი ცვლადის ფუნქციისა, $z=f(x;y)$ ფუნქციას ეწოდება *უწყვეტი* $(x_0;y_0)$ წერტილში, თუ მისი სრული ნაზრდი Δz მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა $\Delta x\to 0;\ \Delta y\to 0$, ე.ი.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0))=0. \qquad (6.4)$$

მაგალითი 9. $z=x^2+y^2$ ფუნქცია უწყვეტია xOy სიბრტყის ნებისმიერ წერტილში, რადგანაც x და y-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) = 0.$$

§ 6.2. კერძო წარმოებულები. სრული დიფერენციალი

1. პირველი რიგის კერძო წარმოებულები.

რამდენიმე ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებული რომელიმე ცვლადის მიმართ განხილულ წერტილში ეწოდება ჩვეულებრივ წარმოებულს ამ ცვლადის მიმართ, თუ ჩავთვლით, რომ დანარჩენი ცვლადები მუდმივებია. მაგალითად, $z=f(x;y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები განისაზღვრება ასე;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x;y)-f(x,y)}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x;y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}, \qquad (6.5)$$

თუ ეს ზღვრები არსებობს. გამოიყენება სხვა აღნიშვნებიც:

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ z'_x,\ f'_x(x;y),\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z'_y,\ f'_y(x;y).$$

ამ განსაზღვრებიდან ნათელია, რომ კერძო წარმოებულის გამოთვლის წესი იგივეა, რაც ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულის, ოღონდ, უნდა გვახსოვდეს რომელი ცვლადის მიმართ ვეძებთ წარმოებულს.

მაგალითი 10. თუ $z=x^2+y^2$, მაშინ $z'_x = 2x,\ z'_y = 2y$.

მაგალითი 11. $z=xy+xy^2-1$, მაშინ $z'_x = y + y^2,\ z'_y = x + 2xy$.

2. სრული დიფერენციალი.

ვთქვათ, $z=f(x;y)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები z'_x და z'_y.

$z'_y \cdot \Delta x$ ნამრავლს უწოდებენ z *ფუნქციის კერძო დიფერენციალს* x-ით და აღნიშნავენ სიმბოლოთი $d_x z = z'_x \cdot \Delta x$, ანუ $d_x z = z'_x dx$, სადაც $dx=\Delta x$ დამოუკიდებული x ცვლადის ნაზრდია. ანალოგიურად $d_y z = z'_y dy$, სადაც $dy=\Delta y$.

განსაზღვრა 6.4. z ფუნქციის კერძო დიფერენციალების ჯამს მისი *სრული დიფერენციალი* ეწოდება და აღინიშნება სიმბოლოთი dz. ამგვარად,

$$dz = z'_x dx + z'_y dy. \qquad (6.6)$$

მაგალითი 12. თუ $z=(x+y)^2$, მაშინ $z'_x = z'_y = 2(x+y)$, ამიტომ $dz=2(x+y)dx+2(x+y)dy=2(x+y)(dx+dy)$.

3. რთული ფუნქციის წარმოებულები და დიფერენციალები.

ვთქვათ, $z=f(x;y)$, სადაც $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. შედეგად z არის ერთი t ცვლადის ფუნქცია. დავუშვათ z'_x, z'_y უწყვეტებია და $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ არსებობენ. ვპოულობთ $\frac{dz}{dt}$. შესაბამისი გარდაქმნებით ვპოულობთ:

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x;y)\frac{dx}{dt} + f'_y(x;y)\frac{dy}{dt},$$

ანუ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (6.7)$$

(6.7)-ს ეწოდება *რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულა.*

მაგალითი 13. თუ $z=xy$, სადაც $x=x(t)$ და $y=y(t)$, მაშინ $z'_x = y$, $z'_y = x$, ხოლო

$$\frac{dz}{dt} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}.$$

4. არაცხადი ფუნქციები და მათი გაწარმოება.

განსაზღვრა 6.5. *არაცხადი ფუნქცია* ეწოდება

$$F(x,y)=0 \qquad (6.8)$$

სახის განტოლებას.

თუ ეს განტოლება ამოხსნილია y-ის მიმართ, მაშინ მას *ცხადი სახით მოცემული ფუნქცია* ეწოდება. ხშირად, არაცხადი ფუნქციის ამოხსნა y-ის მიმართ შეუძლებელია, ან მიზანშეწონილი არ არის (მაგალითად, $2^y-2y+x^2-1=0$). (6.1) ფუნქციის წარმოებულის საპოვნელად, მოცემულ იგივეობას ვაწარმოებთ x-ის მიმართ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის მიხედვით, ვღებულობთ:

$$F'_x(x,y)dx + F'_y(x,y)dy = 0,$$

სადაც $y=f(x)$, ანუ

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

აქედან, როცა $F'_y(x,y)\neq 0$, ვღებულობთ *არაცხადი ფუნქციის გაწარმოების ფორმულას*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \qquad (6.9)$$

მაგალითი 14. ვთქვათ, x-ის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით: e^{xy}-x-y=0. ვიპოვოთ $\frac{dy}{dx}$. რადგანაც F(x,y)=e^{xy}-x-y-თვის გვაქვს

$$F'_x(x,y)=ye^{xy}-1,\ F'_y(x,y)=xe^{xy}-1,$$

(6.9) ფორმულის ძალით ვღებულობთ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-ye^{xy}}{xe^{xy}-1}.$$

5. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები.

მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები თვითონ არიან ამ ცვლადების ფუნქციები და შეიძლება ჰქონდეთ კერძო წარმოებულები. საწყისი ფუნქციისათვის ეს უკანასკნელი წარმოებულები იქნება მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. ასე, მაგალითად z=f(x,y) ფუნქციისათვის შეიძლება განისაზღვროს ოთხი მეორე რიგის წარმოებული, რომლებიც შემდეგი სიმბოლოებით ჩაიწერება:

$$z''_{x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ z''_{y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

კერძო წარმოებულებს z''_{xy} და z''_{yx} ეწოდებათ *მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულები.* სამართლიანია დებულება: მაღალი რიგის უწყვეტი შერეული წარმოებულები არ არის დამოკიდებული გაწარმოების რიგზე, ე.ი. ადგილი აქვს ტოლობას:

$$z''_{xy}=z''_{yx}. \qquad (6.10)$$

მაგალითი 15. ვიპოვოთ z=e^{x-2y} ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

ამოხსნა: $z'_x=e^{x-2y},\ z'_y=-2e^{x-2y},$

$$z''_{x^2}=e^{x-2y},\ z''_{xy}=-2e^{x-2y},\quad z''_{yx}=-2e^{x-2y},\ z''_{y^2}=4e^{x-2y}.$$

მაგალითი 16. ვიპოვოთ $z=x\cdot\sin y$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

ამოხსნა: $z'_x=\sin y,\ z'_y=x\cdot\cos y,\ z''_{x^2}=0,$

$z''_{xy}=\cos y,\ z''_{yx}=\cos y,\ z''_{y^2}=-x\sin y.$

ორივე შემთხვევაში

$$z''_{xy}=z''_{yx}.$$

6. სრული დიფერენციალის ნიშანი.

გავარკვიოთ რა შემთხვევაში წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს გამოსახულება

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy \qquad (6.11)$$

სადაც $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ თავიანთი პირველი რიგის კერძო წარმოებულებთან ერთად უწყვეტები არიან.

თეორემა 6.1. გამოსახულება (6.11) არის სრული დიფერენციალი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება ტოლობა

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (6.12)$$

მაგალითი 17. ვთქვათ, მოცემულია გამოსახულება

$$(4x^3y^2+y)dx+(2xy^3-x)dy.$$

ამოხსნა: აქ

$$P(x,y)=4x^3y^2+y,\ Q(x,y)=2xy^3-x.$$

ვპოულობთ

$$\frac{\partial P}{\partial y}=8x^3y+1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2y^3-1,$$

რადგანაც აქ არ სრულდება (6.12) ტოლობა, მოცემული გამოსახულება არ არის სრული დიფერენციალი.

მაგალითი 18. არის თუ არა გამოსახულება

$$(3x^2y^2+\cos x)dx+(2x^3y-\frac{1}{y})dy$$

სრული დიფერენციალი?

ამოხსნა: $P(x,y)=3x^2y^2+\cos x,\qquad Q(x,y)=2x^3y-\frac{1}{y}.$

$\frac{\partial P}{\partial y}=6x^2y;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y$ ე.ი. სრულდება (6.12) ტოლობა, ამიტომ მოცემული გამოსახულება წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს.

§6.3. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

1. ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა.

თეორემა 6.2. თუ $z=f(x,y)$ ფუნქციას $M_0(x_0;y_0)$ წერტილში აქვს ექსტრემუმი და ამ წერტილში არსებობს სასრულო წარმოებულები z'_x და z'_y, მაშინ

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0. \qquad (6.13)$$

2. ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა.

მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვის ექსტრემუმის არსებობის საკმარის პირობას აქვს უფრო რთული სახე, ვიდრე ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის. მოვიყვანოთ ეს პირობა ორი ცვლადის ფუნქციებისათვის.

თეორემა 6.3. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია თავისი პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულებთან ერთად $M_0(x_0;y_0)$ წერტილის რაიმე მიდამოში აკმაყოფილებენ პირობას:

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0.$$

აღვნიშნავთ: $A=f''_{x^2}(x_0;y_0),\ B=f''_{xy}(x_0;y_0),$

$$C=f''_{y^2}(x_0;y_0),\ D=AC-B^2. \qquad (6.14)$$

მაშინ: 1) თუ $D>0$, მაშინ M_0 წერტილში $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი, კერძოდ, მაქსიმუმი, თუ $A<0$ და მინიმუმი, თუ $A>0$.

2) თუ $D<0$, მაშინ $f(x,y)$ ფუნქციას M_0 წერტილში ექსტრემუმი არა აქვს.

მაგალითი 19. გამოვიკვლიოთ $z=x^3+y^3-3xy$ ფუნქცია ექსტრემუმზე.

ამოხსნა: მისი კერძო წარმოებულები $z'_x=3x^2-3y$ და $z'_y=3y^2-3x$ ნულის ტოლებია $M_1(0;0)$ და $M_2(1;1)$ წერტილებში. მისი მეორე რიგის წარმოებულებია $z''_{x^2}=6x,\ z''_{xy}=-3,\ z''_{y^2}=6y$. M_1

წერტილში $A=0$, $C=0$, $B=-3$, შესაბამისად $D=0\cdot0-9=-9<0$, ე.ი. M_1 წერტილში ექსტრემუმი არ არის. M_2 წერტილისათვის გვაქვს: $A=6$, $C=6$, $B=-3$, შესაბამისად $D=6\cdot6-(-3)^2=27>0$ და რადგანაც $A=6>0$, ამიტომ M_2 წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

შენიშვნა. როცა $D=0$ ფუნქციას შეიძლება გააჩნდეს ან არ გააჩნდეს ექსტრემუმი.

ამოცანა 1. ქიმიურ რეაქციაში მონაწილეობს სამი ნივთიერება x, y და z კონცენტრაციით. რეაქციის სიჩქარე დროის ნებისმიერ მომენტში გამოიხატება კანონით

$$v=kx^2yz.$$

ვიპოვოთ x, y და z კონცენტრაციები, რომლის დროსაც რეაქციის სიჩქარე, v, მაქსიმალურია.

ამოხსნა: ვთქვათ, $x+y+z=100$ (%).

აქედან $z=100-x-y$

და
$$v=kx^2y(100-x-y). \qquad (6.15)$$

ვიპოვოთ (6.15)-ის კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=k(200xy-3x^2y-2xy^2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=k(100x^2-x^3-2x^2y).$$

მიღებულ გამოსახულებებს ვუტოლებთ ნულს:

$$\begin{cases}200xy-3x^2y-2xy^2=0,\\ 100x^2-x^3-2x^2y=0.\end{cases}$$

$x=0$, $y=0$ მნიშვნელობები (6.15) ფუნქციის მაქსიმუმს არ გვაძლევს. ვამარტივებთ სისტემას:

$$\begin{cases}3x+2y=200,\\ x+2y=100.\end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ $x=50$, $y=25$, მაშინ $z=25$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $M_0(50,25)$ წერტილში $D>0$ და $A<0$.

შესაბამისად $x=50\%$, $y=25\%$ და $z=25\%$ კონცენტრაციისათვის რეაქციის v სიჩქარე მაქსიმალურია.

ამოცანა 2. x ერთეული წამლის ინექციის რეაქცია აღწერილია ფორმულით $y=x^2(a-x)te^{-t}$, სადაც t გამოისახება საათებში

ინექციის მომენტიდან. მოცემული დოზის დროს წამლის რეაქცია როდის მიაღწევს მაქსიმუმს?

$$\frac{\partial y}{\partial t} = x^2(a-x)\frac{\partial}{\partial t}(t\cdot e^{-t}) = x^2(a-x)(1-t)\cdot e^{-t}.$$

წამლის მოცემული x დოზისათვის y მაქსიმალურია, როცა $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$. ეს მოხდება როცა $t=1$, ე.ი. ინექციიდან 1 სთ-ის შემდეგ, რადგანაც $t=1$-ზე გადასვლისას ფუნქციის წარმოებული ნიშანს იცვლის "+"-ს "-"-ზე (მარცხნიდან მარჯვნივ).

"მათემატიკა - ეს არის იარაღი, სპეციალურად მორგებული იმისათვის, რომ საქმე გვქონდეს ნებისმიერი სახის განყენებულ ცნებებთან და ამ საქმეში მის შესაძლებლობებს არ აქვს საზღვარი".

პ.დირაკი

§6.4. მათემატიკური აზროვნების განვითარების შესახებ

აკადემიკოსი ა.კოლმოგოროვი (XX საუკუნის უდიდესი მათემატიკოსი (1903-1987)) მათემატიკური ცოდნის განვითარების ისტორიას ოთხ ძირითად ეტაპად ყოფდა [16].

მათემატიკის ჩასახვის პერიოდი, *პირველია*, რომელიც გრძელდებოდა ჩვ.წ.ა. VI-V საუკუნეებამდე, ე.ი. იმ დრომდე, როცა მათემატიკა გახდა დამოუკიდებელი მეცნიერება, რომელსაც აქვს საკუთარი საგანი და მეთოდი.

ჯერ კიდევ სამი ათასი წლით ადრე ახალ ერამდე, ბაბილონელებმა იცოდნენ კვადრატული განტოლების ამოხსნა და იცნობდნენ თეორემას, რომელსაც ამჟამად პითაგორას თეორემას უწოდებენ. მათ შეეძლოთ პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნა: მიწის ნაკვეთების გაზომვა, კალენდრების შედგენა, მშენებლობა და ა.შ. სამწუხაროდ, ჩვენამდე ვერ მოაღწია იმ წყაროებმა, რის საფუძველზეც შეიძლება გვემსჯელა, თუ როგორ მიიღეს იმ დროისათვის გამოყენებული მათემატიკური ცოდნა.

მათემატიკის განვითარების *მეორე* ეტაპი არის ელემენტარული მათემატიკის პერიოდი. ჩვ.წ.ა. VI-V ს.ს.-დან XVI საუკუნის ჩათვლით. მათემატიკა, როგორც ლოგიკური შედეგი და ბუნების შემეცნების საშუალება - არის ძველი ბერძნების შემოქმედება (ჩვ.წ.ა. VI-V ს.ს.). არ შემოგვრჩა საბუთები იმისა, რომლებიც მოგვითხრობდა რამ აიძულა ძველი ბერძნები მისულიყვნენ მათემატიკის ახლებურ გაგებამდე. ა.კოლმოგოროვი თვლის, რომ მათემატიკური მეცნიერების ხასიათის შეცვლა უნდა ავხსნათ ბერძნული სახელმწიფოს საზოგადოებრივ-პოლიტიკური და კულტურული ცხოვრებით, რომლის მახასიათებელია დიალექტიკის მაღალი განვითარება, კამათის წაყვანის ხელოვნება. ბერძნებს იმ დროისათვის ჩამოუყალიბდათ განსაკუთრებული მსოფლმხედველობა იმისა, რომ ბუნება მოწყობილია რაციონალურად, ხოლო ყველა მისი მოვლენა მიმდინარეობს მკაცრი და უცვლელი გეგმით, რომელიც საბოლოო ანგარიშით არის მათემატიკური. პითაგორელები (VI ს.ჩვ.წ.ა) საგანთა და მოვლენათა არსს ხედავდნენ რიცხვებსა და რიცხვთა ურთიერთობებში. რიცხვი მათთვის იყო პირველი პრინციპი ბუნების აღწერაში, სწორედ ის ითვლებოდა მატერიალურად და სამყაროს ფორმად.

პირველმა მათემატიკურმა თეორიებმა (კონკრეტული ამოცანებიდან), შექმნეს აუცილებელი და საკმარისი წინაპირობები მათემატიკის დამოუკიდებლობისა და თავისებურების აღქმაში. ამან უბიძგა ანტიკურ მათემატიკოსებს მისი საფუძვლების სისტემატიზაციისა და ლოგიკური თანმიმდევრობის ჩამოყალიბებისაკენ. დედუქციური თეორიის ჩამოყალიბება პირველ რიგში დაკავშირებულია არისტოტელეს (384-322 წ.წ. ჩვ.წ.ა) სახელთან. მათემატიკის (გეომეტრიის) პირველი დედუქციური ჩამოყალიბება ეკუთვნის ევკლიდეს (დაახლოებით 300 წ. ჩვ.წ.ა.). გეომეტრიული სისტემა, რომელიც ცნობილია ევკლიდეს "საწყისების" სახელწოდებით, იყო ბრწყინვალე, შეუცვლელი 20 საუკუნის (XIX საუკუნემდე) განმავლობაში.

ამგვარად, ძველ საბერძნეთში მოხდა პრაქტიკული გეომეტრიიდან თეორიულში გადასვლა.

მესამე პერიოდი - ცვლადი სიდიდეების მათემატიკის პერიოდი (XVII, XVIII ს.ს. - XIX ს.-ის დასაწყისი) აღსანიშნავია რ. დეკარტის (1596-1650) ანალიზურ გეომეტრიაში ცვლადი სიდიდეების შემოტანით და ი. ნიუტონისა (1642-1727) და ჰ. ლეიბნიცის (1646-1716) შრომებში დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის

შექმნით. ნიუტონის სამეცნიერო მოღვაწეობის ძირითადი მიმართულებები იყო ფიზიკა, მექანიკა, ასტრონომია და მათემატიკა. ნიუტონის მეცნიერულ შეხედულებათა სისტემაში მათემატიკა იყო ბუნების შესახებ მთელი მეცნიერების ნაწილი და ფიზიკურ კვლევათა იარაღი.

ლეიბნიცის მათემატიკური შრომები მჭიდრო კავშირში იყო მის ფილოსოფიურ მსოფლმხედველობასთან, კერძოდ, მეცნიერული შემეცნების უნივერსალური მეთოდების შექმნასთან. ლეიბნიცს მათემატიკა ესმოდა როგორც მეცნიერება ყოველგვარი კავშირების ასახვისა, ელემენტთა ურთიერთდამოკიდებულებისა, ფორმულების სახით დამოკიდებულებებისა, დიფერენციალური - განსაკუთრებული აღრიცხვისა. ახალ აღრიცხვას საფუძვლად დაედო უსასრულოდ მცირე სიდიდის ცნება. მიუხედავად იმისა, რომ ნიუტონისა და ლეიბნიცის სკოლებში საკმარისად არ იყო დამუშავებული უსასრულოდ მცირეების აღრიცხვა, მაინც მათი მეშვეობით ამოიხსნა გეომეტრიის, მექანიკის, ფიზიკისა და გამოყენებითი მეცნიერებების უმნიშვნელოვანესი ამოცანები.

მხოლოდ XIX საუკუნეში, როცა შეიქმნა ნამდვილ რიცხვთა თეორია, შესაძლებელი გახდა მკაცრ ლოგიკურ საფუძველზე მათემატიკური ანალიზის სახლის მშენებლობა.

მეოთხე, მათემატიკის განვითარების თანამედროვე პერიოდი, იწყება XIX საუკუნის მეორე ნახევრიდან.

XVII და XVIII ს.ს.-ში დაგროვილმა დიდმა მასალამ მიგვიყვანა ლოგიკური ანალიზის გაღრმავებასთან და მათ გაერთიანებასთან ახალი ხედვით. მათემატიკის კავშირი ბუნებისმეტყველებასთან იღებს სულ უფრო რთულ ფორმებს. ახალი თეორიები წარმოიქმნა არა მარტო ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკის უშუალო მოთხოვნილებით, არამედ, მათემატიკის შინაგანი მოთხოვნილებითაც.

ამ პერიოდის მათემატიკის განვითარების მეორე თავისებურება დაკავშირებულია მათემატიკის გამოყენების სფეროს გადიდებასთან. მათემატიკის როლი ზოგადსაკაცობრიო სისტემაში უდიდესია. უნდა აღინიშნოს, რომ სწავლება, რომელიც ქმნიდა ახალი დონის მათემატიკას, განიხილებოდა როგორც სამყაროს შემეცნების საშუალება.

მათემატიკის ადგილი ცხოვრებაში და მეცნიერებაში განისაზღვრება იმით, რომ მას შეუძლია გადაიყვანოს "ზოგადსაყოფაცხოვრებო", სინამდვილესთან ინტუიციური მიდგომა ზუსტ განსაზღვრათა და

ფორმულათა ენაზე, საიდანაც შეიძლება რაოდენობრივი შედეგების მიღება. შემთხვევით არ ამბობენ, რომ ამა თუ იმ დისციპლინის მეცნიერულობა მეტყველებს იმაზე, თუ მასში რამდენად გამოიყენება მათემატიკა.

მათემატიკა არის ზოგადსაკაცობრიო კულტურის ნაწილი. ადამიანთა საზოგადოების განვითარების რამდენიმე ათასწლეულის მანძილზე მიმდინარეობდა მათემატიკური ფაქტების დაგროვება, რამაც მიგვიყვანა დაახლოებით ორნახევარი ათასწლეულის წინ მათემატიკის, როგორც მეცნიერების წარმოშობასთან. საზოგადოებისათვის მათემატიკის მნიშვნელობაზე ლაპარაკობს ის ფაქტი, რომ ევკლიდეს "საწყისები" გამოიცა ძალიან ბევრჯერ.

მათემატიკა ხელს უწყობს მეცნიერული მსოფლმხედველობის გამომუშავებასა და აუცილებელი ზოგადკულტურული დონის ამაღლებას. უდიდესი მათემატიკური იდეების წარმოქმნის ისტორია და გამოჩენილი მათემატიკოსების (არქიმედეს, გალუა, პასკალი, გალილეი, გაუსი, ეილერი, კოვალევსკაია, ჩებიშევი და სხვები) ბედი გვაძლევს გონებისა და გულის საკვებს.

მათემატიკური მსჯელობა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ მიზეზ-შედეგობრივი კავშირები, რაც უნდა იცოდეს ყოველმა ადამიანმა. მათემატიკის გადმოცემის სტილი, მისი ენა ზეგავლენას ახდენს მეტყველებაზე. ყოველ კულტურულ ადამიანს უნდა ჰქონდეს წარმოდგენა მათემატიკის ძირითად ცნებებზე, ისეთებზე როგორიცაა, რიცხვი, ფუნქცია, მათემატიკური მოდელი, ალგორითმი, ალბათობა, ოპტიმიზაცია, დისკრეტული და უწყვეტი ფუნქციები, უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები. საუბარია ძირითად ცნებებზე და იდეებზე და არა კონკრეტული თეორემისა და ფორმულების ერთობლიობაზე.

დღეს ვერავის გააკვირვებ სიტყვათა წყობით "მათემატიკური ლინგვისტიკა", "მათემატიკური ბიოლოგია", "მათემატიკური ეკონომიკა" და სხვა.

მათემატიკას უკავია საზოგადოების ცხოვრებაში თვალსაჩინო ადგილი. რას გვაძლევს მათემატიკა, რომელიც არ აღმოაჩენს ენერგიის ახალ წყაროს, როგორც ფიზიკა და არ ქმნის ახალ ნივთიერებებს, როგორც ქიმია? რატომ არის რომ მათემატიკური მეთოდების გამოჩენა მეცნიერების რომელიმე სფეროში ნიშნავს მისი განვითარების ახალ ეტაპს?

არც თუ დიდი ხნის წინათ ამ კითხვაზე პასუხი იყო, რომ მათემატიკა საშუალებას გვაძლევს ციფრული მონაცემების მათემატიკურ დამუშავებას. სინამდვილეში კი, თანამედროვე სამყაროს მათემატიზების მიზეზების ახსნაში მათემატიკის ეს დანიშნულება არ არის მთავარი.

ამ პროცესის მთავარი მიზეზი ასეთია:

მათემატიკა გვაწოდებს ზოგად და საკმაოდ მკაფიო ლოგიკურ მოდელებს ჩვენს გარშემო არსებული სინამდვილის შესასწავლად. ასეთ მოდელებს მათემატიკა გვაწვდის თავისი განსაკუთრებული ენის - რიცხვებისა და სხვადასხვა სიმბოლოების საშუალებით. მათემატიკის კვლევის ობიექტს წარმოადგენს ლოგიკური მოდელები, რომლებიც აგებულია ბუნების ტექნიკის, საზოგადოების მოვლენების აღსაწერად. თუ მათემატიკური მოდელი სწორად ასახავს მოცემული მოვლენის არსს, მაშინ ის გვაძლევს საშუალებას ვიპოვოთ (აღმოვაჩინოთ, გამოვავლინოთ) წინათ უცნობი კანონზომიერებები, გავაკეთოთ პირობის მათემატიკური ანალიზი, რომლის დროსაც შესაძლებელია თეორიული თუ პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნა, რომლებიც წარმოიშობა ამ მოვლენის კვლევის დროს.

ცნობილია, რომ მათემატიკა არის ზოგადსაკაცობრიო კულტურის ნაწილი, ისეთივე განუყოფელი ნაწილი, როგორც სამართალი, მედიცინა, ბუნებისმეტყველება და სხვა.

მათემატიკის მნიშვნელობა ამით არ ამოიწურება. გავიხსენოთ *მ.ლომონოსოვის* სიტყვები: "მათემატიკა იმისათვის უნდა ისწავლო, რომ მას გონება მოყავს წესრიგში".

შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ მათემატიკა გვასწავლის სხვადასხვა სახის წესების, კანონების ზუსტ ფორმულირებას.

გარდა ამისა, მათემატიკური მეთოდების გამოყენება ზრდის ნებისმიერი სპეციალისტის შესაძლებლობებს, მნიშვნელოვან როლს ასრულებს სტატისტიკა, ინფორმაციის სწორედ დამუშავების ცოდნა, არსებული სტატისტიკური მასალის საფუძველზე გაკეთდეს ჭეშმარიტი დასკვნა, ან პროგნოზი.

ჩვენ ვცხოვრობთ მათემატიკის საუკუნეში. **XX** საუკუნის დასაწყისიდან ის აქტიურად შეიჭრა ადამიანური ცოდნის ყველა სფეროში, ამტკიცებს რა *კ.მარქსის* სიტყვებს: "მეცნიერება მხოლოდ მაშინ აღწევს სრულყოფას, როცა ის ახერხებს მათემატიკით სარგებლობას".

მათემატიკა - ეს არის ზოგადსაკაცობრიო კულტურის ფენომენი, მასში ასახულია საზოგადოებრივი აზროვნების განვითარების ისტორია. მათემატიკა თავისი სიმკაცრითა და სიზუსტით აყალიბებს პიროვნებას, აწვდის მას უმნიშვნელოვანეს რესურსებს, რაც აუცილებელია საუკეთესო მომავლის უზრუნველყოფისათვის.

ამგვარად, მათემატიკური განათლება მნიშვნელოვანია სხვადასხვა თვალსაზრისით:

ლოგიკური - მათემატიკის სწავლება არის ადამიანის გონებრივი შესაძლებლობებისა და მისი აქტიური ინტელექტუალური განვითარების საშუალება და წყარო;

შემეცნება - მათემატიკის საშუალებებით ხდება სამყაროს შემეცნება, მისი სივრცობრივი და რაოდენობრივი თანაფარდობის დადგენა;

გამოყენებითი - მათემატიკა არის ის ბაზა, რომელიც უზრუნველყოფს ადამიანის მზადყოფნას როგორც მოსაზღვრე დისციპლინების, ასევე, ბევრი სხვა პროფესიების ათვისებისათვის, ხელმისაწვდომს ხდის უწყვეტ განათლებასა და თვითგანათლებას.

ისტორიული - მათემატიკის განვითარების ისტორიის მაგალითებზე ასახულია არა მარტო მისი განვითარების, არამედ, მთლიანობაში ადამიანთა საზოგადოების კულტურის განვითარებისა ისტორია.

ფილოსოფიური - მათემატიკა გვეხმარება გავიაზროთ სამყარო, რომელშიაც ჩვენ ვცხოვრობთ, რეალური ფიზიკური სივრცის შესახებ ადამიანს ჩამოუყალიბდეს განვითარებადი მეცნიერული შეხედულებები.

"სიბრძნის დაუფლება გვამაღლებს და გვაქცევს ძლიერ, დიდსულოვან ადამიანებად".

იან ამოს კომენსკი

სავარჯიშოები

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის განსაზღვრის არეები:

1. $x=4-x+2y$.

[მთელი xOy სიბრტყე.]

2. $z=\frac{3}{x^2+y^2}$.

[მთელი (xOy სიბრტყე, გარდა $(0;0)$ წერტილისა.]

3. $z=\frac{1}{\sqrt{xy}}$.

[I და III მეოთხედები: $x>0, y>0$ და $x<0, y<0$.]

4. $z=\arccos(x+y)$.

[ზოლი $-1\le x+y\le 1$.]

5. $z=\arcsin(x^2+y^2)$.

[წრე $x^2+y^2\le 1$.]

6. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

[მთელი xOy სიბრტყე, გარდა Ox და Oy ღერძებისა.]

7. $z=\ln x\cdot\ln y$.

[I მეოთხედი, $x>0, y>0$.]

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების პირველი რიგის კერძო წარმოებულები:

8. $z=x^3+3x^2y-y^3$.

$$\left[z'_x=3x^2+6xy,\ z'_y=3x^2-3y^2.\right]$$

9. $z=\sqrt{x+3y}$.

$$\left[z'_x=\frac{1}{2\sqrt{x+3y}},\ z'_y=\frac{3}{2\sqrt{x+3y}}.\right]$$

10. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

$$\left[z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2},\ z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}.\right]$$

11. $z=x^3y^2+2x\ln y+x^y$.

$$\left[z'_x = 3x^2y^2 + 2\ln y + yx^{y-1},\ z'_y = 2x^3y + \frac{2x}{y} + x^y \ln x.\right]$$

12. $z=x^3\sin y+y^4$.

$$\left[z'_x = 3x^2 \sin y,\ z'_y = x^3 \cos x + 4y^3.\right]$$

13. $z=x^6-y^4$.

$$\left[z'_x = 6x^5,\ z'_y = -4y^3.\right]$$

შემდეგ მაგალითებში იპოვეთ z ფუნქციის z'_x და z'_y-ის მნიშვნელობები მოცემულ წერტილში:

14. $z = \frac{x+y}{x-y}$; $A(2;1)$.

[A(2;1) წერტილში z'_x= -2, z'_y=4.]

15. $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; $C(\sqrt{2};1)$.

$$[C(\sqrt{2};1) \text{ წერტილში } z'_x = \frac{\sqrt{2}}{3},\ z'_y = \frac{1}{3}.]$$

16. $z = \frac{1-xy}{1+xy}$; $A(0;1)$.

$$[A(0;1) \text{ წერტილში } z'_x = -2,\ z'_y = 0.]$$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების სრული დიფერენციალები:

17. $z = \frac{2x+y}{3x-y}$.

$$\left[dz = \frac{5(-ydx+xdy)}{(3x-y)^2}.\right]$$

18. $z=\ln(3x+2y)$.

$$\left[dz = \frac{3dx+2dy}{3x+2y}.\right]$$

19. $z=e^{4x+5y}$.

$[dz=4dx+5dy)e^{4x+5y}.]$

20. $z=x\ln y$.

$$\left[dz=\ln y dx+\frac{x}{y}dy.\right]$$

21. $z=e^{2x}\cdot\sin 3y$.

$[dz=e^{2x}(2\sin 3y dx+3\cos 3y dy.]$

22. $z=x^3+2xy$.

$[dz=(3x^2+2y)dx+2xdy.]$

23. $z=x^2-2xy-y^2$.

$[dz=2((x-y)dx-(x+y)dy).]$

24. $z=x^y$.

$$\left[dz=x^y\left(\frac{y}{x}dx+\ln x dy\right).\right]$$

25. $z=\ln(xy)$.

$$\left[dz=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}.\right]$$

შემდეგ მაგალითებში ჩათვალეთ, რომ $x=x(t)$, $y=y(t)$ და იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$.

26. $z=ye^x+1$.

$$\left[\frac{dz}{dt}=e^x\left(y\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right).\right]$$

27. $z=\cos\frac{x}{y}$.

$$\left[\frac{dz}{dt}=\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}\right).\right]$$

28. $z=\ln(4+x^2+y^2)$.

$$\left[\frac{dz}{dt}=\frac{2}{4+x^2+y^2}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right).\right]$$

არაცხადი ფუნქციებიდან იპოვეთ $\frac{dy}{dx}$:

29. $x^3+y^3-3xy=0.$

$$\left[\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y^2-x}.\right]$$

30. $xy-\ln y=0.$

$$\left[\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-xy}.\right]$$

31. $ye^x+e^y=0.$

$$\left[\frac{dy}{dx}=-\frac{ye^x}{e^x+e^y}.\right]$$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

32. $z=x^3-4x^2y+5y^2.$

$$\left[z''_{x^2}=6x-8y;\ z''_{xy}=-8x;\ z''_{y^2}=10.\right]$$

33. $z=e^x\cdot\ln y.$

$$\left[z''_{x^2}=e^x\ln y;\ z''_{xy}=\frac{e^x}{y};\ z''_{y^2}=-\frac{e^x}{y^2}.\right]$$

34. $z=\sin(x+y).$

$$\left[z''_{x^2}=z''_{xy}=z''_{y^2}=-\sin(x+y).\right]$$

35. $z=1+x+y.$

$$\left[z''_{x^2}=z''_{xy}=z''_{y^2}=0.\right]$$

36. $z=e^{-\frac{y}{x}}.$

$$\left[z''_{x^2}=\frac{y}{x^3}e^{-\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x}-2\right);\ z''_{xy}=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right);\ z''_{y^2}=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{y}{x}}.\right]$$

37. $z=y\ln x.$

$$\left[z''_{x^2}=-\frac{y}{x^2};\ z''_{xy}=\frac{1}{x};\ z''_{y^2}=0.\right]$$

განსაზღვრეთ, შემდეგი გამოსახულებებიდან
რომელი წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს:

38. ა) $(x^2+y^2)dx+2xydy$;

ბ) $\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy$;

გ) $2ydx-2xdx$.

[ა) და ბ) არის სრული დოფერენციალი,
გ) არ არის სრული დიფერენციალი.]

გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე შემდეგი ფუნქციები:

39. $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

[$\left(1;\frac{1}{2}\right)$ წერტილში აქვს მინიმუმი ($z_{min}=4$);
(0;0) წერტილში არა აქვს ექსტრემუმი.]

40. $z=(x-1)^2+2y^2$.

[(1;0) წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი ($z_{min}=0$).]

41. $z=2x^3-x^2+xy^2-4x+3$.

[$\left(-\frac{2}{3};0\right)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი $\left(z_{max}=4\frac{17}{27}\right)$,
(1;0) წერტილში - მინიმუმი ($z_{min}=0$);
(0;-2) და (0;2)წერტილებში ექსტრემუმი არა აქვს.]

42. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.

[(-4;1) წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი ($z_{min}=-1$).]

43. $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$.

[(0;3) წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი ($z_{max}=9$.]

44. ქიმიურ რეაქციაში მონაწილეობს სამი ნივთიერება x, y და z კონცენტრაციებით. რეაქციის სიჩქარე v დროის ნებისმიერ მომენტში გამოისახება კანონით $v=kxy^2z$.

იპოვეთ x, y და z კონცენტრაციები, რომლის დროსაც რეაქციის მიმდინარეობის სიჩქარე მაქსიმალურია.

[x=25%; y=50%, z=25%.]

"სწორედ მატემატიკა გვიცავს ჩვენ გრძნობებში მოტყუებისაგან".

ლეონარდ ეილერი

თავი 7. კომპლექსური რიცხვები

§7.1. კომპლექსური რიცხვების განსაზღვრა და ძირითადი ოპერაციები მათზე

კომპლექსური რიცხვის ქვეშ გვესმის გამოსახულება

$$z=x+iy, \qquad (7.1)$$

სადაც **x** და **y** - ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო **i** - *წარმოსახვითი ერთეული.*

კომპლექსური რიცხვის ცნებასთან ჩვეულებრივ მივყავართ $x^2+1=0$ განტოლების განხილვას. ცხადია, არ არსებობს ნამდვილი რიცხვი, რომელიც დააკმაყოფილებს ამ განტოლებას. ამ განტოლების ფესვები $(\pm i)$ (ისევე როგორც მთელი რიგი სხვა განტოლებების) არის კომპლექსური რიცხვები. ის გარემოება, რომ $i^2=-1$, საშუალებას გვაძლევს **i** სიმბოლოზე ვიმოქმედოთ ისე, როგორც ჩვეულებრივ რიცხვზე. კერძოდ, **i**-ს სხვადასხვა ხარისხებისათვის გვექნება ფორმულები:

$i^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i$, $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$,

$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$, $i^6=i^5\cdot i=i\cdot i=i^2=-1$, $i^7=i^6\cdot i=-1\cdot i=-i$ და ა.შ.

საზოგადოდ ნებისმიერი ნატურალური **n**-სათვის გვექნება:

$i^{4n}=(i^4)^n=1^n=1$, $i^{4n+1}=i^{4n}\cdot i=i$, $i^{4n+2}=i^{4n}\cdot i^2=i^2=-1$, $i^{4n+3}=i^{4n}\cdot i^3=i^3=-i$.

x-ს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის *ნამდვილი ნაწილი* და აღინიშნება სიმბოლოთი $x=\mathrm{Re}\, z$, ხოლო **y**-ს *წარმოსახვითი ნაწილი* და აღინიშნება ასე: $y=\mathrm{Im}\, z$.

ნამდვილი რიცხვი კომპლექსური რიცხვის კერძო შემთხვევაა.

z კომპლექსური რიცხვის *მოდული* ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

z რიცხვის *შეუღლებული* ეწოდება კომპლექსურ რიცხვს $\overline{z}=x-iy$.

ორი კომპლექსური რიცხვი $z_1=x_1+iy_1$ და $z_2=x_2+iy_2$ *ტოლია* მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1=x_2$ და $y_1=y_2$.

კომპლექსური რიცხვების *ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი* და *შეფარდება* განისაზღვრება შემდეგნაირად.

1. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.
2. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

   კერძოდ: $i^2 = (0+i1)(0+i1) = (0-1) + i(0+0) = -1$.

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

3. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \neq 0.$$

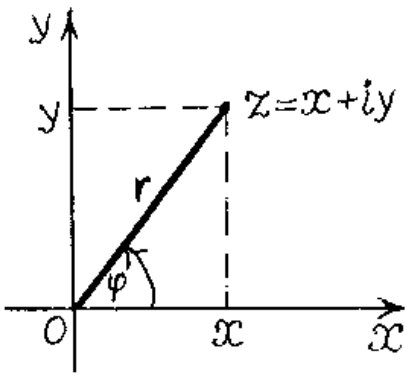
მაგალითი 1. თუ $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1-4i$, მაშინ

$z_1 + z_2 = (2+1) + i(3+(-4)) = 3-i$, $z_1 - z_2 = (2-1) + i(3-(-4)) = 1+7i$,

$z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot 1 - 3(-4)) + i(2(-4) + 1 \cdot 3) = 9-5i$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(2+3i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{(2 \cdot 1 + 3 \cdot 4) + i(1 \cdot 3 - 2 \cdot 4)}{1^2 + 4^2} = \frac{14-5i}{5}.$$

§7.2. კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული გამოსახვა სიბრტყეზე



ნახ.7.1

რადგანაც კომპლექსური რიცხვი $z=x+iy$ არის ნამდვილ რიცხვთა წყვილი (x,y) და ყოველ (x,y) წყვილს შეესაბამება სიბრტყის ერთი წერტილი და პირიქით, ამიტომ, სიბრტყის ყოველი წერტილი (x,y) შეიძლება მივიღოთ $z=x+iy$ კომპლექსური რიცხვის გამოსახვად (ნახ.7.1). სიბრტყეს, რომლის წერტილები გამოსახავენ კომპლექსურ რიცხვებს, ეწოდება *კომპლექსურ რიცხვთა სიბრტყე*. კოორდინატთა სათავეს ეწოდება *ნულოვანი წერტილი*. **Ox** ღერძს ეწოდება *ნამდვილ რიცხვთა ღერძი*, ხოლო **Oy** ღერძს კი *წარმოსახვით რიცხვთა ღერძი*.

ცხადია, რომ მანძილი z წერტილიდან სათავემდე ტოლია

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (7.2)$$

z-ის მდებარეობა სიბრტყეზე გარდა დეკარტის კოორდინატებისა შეიძლება r და φ პოლარული კოორდინატებით გამოისახოს, ამავე დროს

$$x=r\cos\varphi\,,\quad y=r\sin\varphi. \tag{7.3}$$

φ-ს უწოდებენ z კომპლექსური რიცხვის *არგუმენტს* და გამოიყენება აღნიშვნა φ=argz.

(7.2) და (7.3)-დან ვღებულობთ:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\,,\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}. \tag{7.4}$$

კომპლექსური რიცხვის მოდული განისაზღვრება ცალსახად, ხოლო არგუმენტი φ განისაზღვრება $2\pi k$ შესაკრების სიზუსტით. argz-ის მნიშვნელობას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $-\pi<\arg z\le\pi$, *მთავარი* ეწოდება.

§7.3. ტრიგონომეტრიული სახით წარმოდგენილი ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლი და ფარდობა

(7.1) და (7.3) ფორმულებიდან ვღებულობთ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიულ ფორმას

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{7.5}$$

განვიხილოთ ორი კომპლექსური რიცხვი z_1 და z_2, რომელიც წარმოდგენილია ტრიგონომეტრიული სახით:

$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$,

მაშინ მათი ნამრავლი იქნება

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]=$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \tag{7.6}$$

ხოლო შეფარდება კი

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2}=$$
$$=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos(-\varphi_2)+i\sin(-\varphi_2))}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}[(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],\qquad r_2\neq0. \tag{7.7}$$

ამრიგად, კომპლექსური რიცხვების გამრავლებისათვის, საჭიროა მათი მოდულები გადავამრავლოთ, ხოლო არგუმენტები შევკრიბოთ. კომპლექსური რიცხვების გაყოფის შესასრულებლად, საჭიროა მათი მოდულების გაყოფა, ხოლო არგუმენტების გამოკლება.

მაგალითი 2. შემდეგი კომპლექსური რიცხვები ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული ფორმით:

1) $z=3$, 2) $z=3i$, 3) $z=2-2i$, 4) $z=\sqrt{3}+i$.

ამოხსნა:

1) $z=3=3+0\cdot i$. (7.4) ფორმულების გამოყენებით ვპოულობთ:

$$r=\sqrt{3^2+0^2}=3;\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{0}{3}=0,\ \varphi=0,\ z=3(\cos 0^0+i\sin 0^0);$$

2) $z=3i$, $z=\sqrt{0+3^2}=3$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{0}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $z=3(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$;

3) $z=2-2i$, $r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2}{2}=-1$, $\varphi=-\frac{\pi}{4}$,

$$z=2\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

4) $z=\sqrt{3}+i$, $r=\sqrt{3+1}=2$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$,

$$z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}).$$

§7.4. კომპლექსური რიცხვის ახარისხება. ფესვის ამოღება კომპლექსური რიცხვიდან

(7.6) ფორმულის შედეგია ფორმულა

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \qquad (7.8)$$

(n - ნატურალური რიცხვია).

ამრიგად, კომპლექსური რიცხვი რომ ავიყვანოთ მთელ დადებით n ხარისხში, საჭიროა მისი მოდული ავიყვანოთ ამავე ხარისხში, ხოლო არგუმენტი გავამრავლოთ n-ზე.

თუ (7.8)-ში $r=1$, მივიღებთ ფორმულას

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi, \qquad (7.9)$$

რომელსაც *მუავრის ფორმულას* (ა.მუავრი (1667-1754) იყო ფრანგი მათემატიკოსი) უწოდებენ.

კომპლექსური $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq 0$ რიცხვიდან n-ური ხარისხის ფესვს ყოველთვის აქვს n სხვადასხვა მნიშვნელობა, რომელიც მიიღება ფორმულით

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad (7.10)$$

როცა $k=0,1,2,...,n-1$.

ვინაიდან, ნამდვილი რიცხვი წარმოადგენს კომპლექსური რიცხვის კერძო მნიშვნელობას, ამიტომ, ნებისმიერი ნამდვილი $a\neq0$ რიცხვიდან n-ური ხარისხის ფესვს აქვს n სხვადასხვა მნიშვნელობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. $(1+i)^{10}$ გამოთვალეთ მუავრის ფორმულით.

$z=1+i,\ r=\sqrt{2},\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$

$$(1+i)^{10}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10}=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{10}{4}\pi+i\sin\frac{10}{4}\pi\right)=$$

$$=32\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=32(0+i)=32i.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. იპოვეთ $\omega=\sqrt{-1}$. რადგანაც $-1=\cos\pi+i\sin\pi$, მაშინ $\sqrt{-1}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}$, $k=0,1$.

აქედან $\omega_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,\ \omega_1=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$

პასუხი: $[\omega_0=i,\ \omega_1=-i.]$

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გამოსახვა მაჩვენებლიანი ფუნქციით შესაძლებელია შემდეგი ფორმულით:

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}, \qquad (7.11)$$

რომელსაც *ეილერის ფორმულა* (ლეონარდ ეილერი, (1707-1783) - წარმოშობით შვეიცარიელი, რომელმაც ცხოვრების უდიდესი ნაწილი გაატარა რუსეთში) ეწოდება.

(7.11) ფორმულიდან, როცა $\varphi=\pi$, მიიღება ლამაზი ფორმულა,

$$e^{i\pi}=-1, \qquad (7.12)$$

რომელიც ერთ "თაიგულში" კრავს მნიშვნელოვან მათემატიკურ მუდმივებს $1, \pi, e$ და i. ეილერის იგივეობა (7.12) გამოქვეყნდა 1748 წელს. ამჟამად ის ამოტვიფრულია პარიზის მათემატიკურ აღმოჩენათა სასახლის კარებზე.

"როცა ადამიანი კითხვას წყვეტს,
აზროვნებასაც წყვეტს".

დენი დიდრო

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ **(3+5i)(4-i).** **[17+17i.]**
2. იპოვეთ **(6+11i)(7+3i).** **[9+95i.]**
3. იპოვეთ $\frac{3-i}{4+5i}$. $[\frac{7-19i}{41}.]$
4. იპოვეთ ა) $(4-7i)^2$; ბ) i^{10}.

[ა) -33-56i; ბ) –1.]

5. წარმოიდგინეთ ტრიგონომეტრიული ფორმით შემდეგი რიცხვები: **i; -2; -i; 1+i; 1-i.**

$$\left[\begin{array}{l} i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}, \\ -2=2(\cos\pi+i\sin\pi), \\ -i=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}), \\ 1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}), \\ 1-i=\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})). \end{array}\right]$$

იპოვეთ შემდეგი რადიკალების ყველა მნიშვნელობა:

6. $\sqrt[3]{1}$.

$$\left[1;\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\right]$$

7. $\sqrt[4]{1}$.

[1; i; -1; -i.]

"ყველა სხვა მეცნიერებებს შორის მათემატიკა სარგებლობს განსაკუთრებული პატივისცემით".

ალბერტ აინშტაინი

თავი 8. ინტეგრალური აღრიცხვა

§8.1. პირველყოფილი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი

1. პირველყოფილი ფუნქციისა და განუსაზღვრელი ინტეგრალის ცნება.

დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული, ანუ, დიფერენციალი. ახლა განვიხილოთ ამ ამოცანის შებრუნებული ამოცანა; განვსაზღვროთ ფუნქცია, თუ მოცემულია ამ ფუნქციის წარმოებული. ამ საკითხის გადაწყვეტა შეადგენს ინტეგრალური აღრიცხვის ამოცანას.

ამრიგად, ჩვენს მიზანს შეადგენს განვსაზღვროთ ისეთი $F(x)$ ფუნქცია, რომლის წარმოებული რაიმე შუალედში მოცემული $f(x)$ ფუნქციის ტოლია

$$F'(x)=f(x), \tag{8.1}$$

ანუ, რაც იგივეა

$$dF(x)=f(x)dx. \tag{8.2}$$

განსაზღვრა 8.1. $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$-ის პირველყოფილი მოცემულ შუალედში, თუ ამ შუალედში ადგილი აქვს (8.1) ტოლობას.

მაგალითი. ფუნქცია $F(x)=x^2$ არის $f(x)=2x$-ის პირველყოფილი მთელ რიცხვთა ღერძზე, რადგანაც ნებისმიერი x-თვის $(x^2)'=2x$. $f(x)=2x$-ის პირველყოფილს წარმოადგენს ასევე ფუნქცია $\Phi(x)=x^2+C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, რადგანაც $(x^2+C)'=2x$.

სამართლიანია (ამ და სხვა თეორემებს ვღებულობთ დაუმტკიცებლად)

თეორემა 8.1. თუ $F_1(x)$ და $F_2(x)$ რაიმე შუალედში $f(x)$-ის პირველყოფილებია, მაშინ მათ შორის სხვაობა მუდმივის ტოლია.

განსაზღვრა 8.2. გამოსახულებას $F(x)+C$, სადაც $F(x)$ არის $f(x)$-ის პირველყოფილი და C ნებისმიერი მუდმივია, ეწოდება *განუსაზღვ-*

რელი ინტეგრალი $f(x)$-დან და აღინიშნება სიმბოლოთი $\int f(x)dx$. $f(x)$-ს ეწოდება *ინტეგრალქვეშა ფუნქცია*, $f(x)dx$ - *ინტეგრალქვეშა გამოსახულება*, x - ინტეგრების ცვლადი, ნიშანს $\int$ - ინტეგრალის ნიშანი. ამრიგად, განსაზღვრების თანახმად

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \qquad (8.3)$$

თუ $F'(x)=f(x)$.

ისმება კითხვა: ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციიდან არსებობს ინტეგრალი? ამასთან დაკავშირებით სამართლიანია

თეორემა 8.2. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტზე არსებობს $f(x)$-ის პირველყოფილი.

ქვემოთ საუბარი გვექნება მხოლოდ უწყვეტ ფუნქციებზე.

2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებები.

განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თვისებებიდან პირველი ორი.

1. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$, ანუ $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
2. $\int F'(x)dx = F(x)+C$, ანუ $\int dF(x) = F(x)+C$.
3. მუდმივი მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad k\neq 0. \qquad (8.4)$$

4. ორი ფუნქციის ალგებრული ჯამიდან ინტეგრალი უდრის ამ ფუნქციებიდან ინტეგრალების ალგებრულ ჯამს.

$$\int [f_1(x)\pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx. \qquad (8.5)$$

3. ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი.

ცხრილი შეიცავს ინტეგრალებს, რომელთა სამართლიანობა ადვილად მოწმდება უშუალო დიფერენცირებით.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n\neq -1$ $(\int dx = x+C)$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$.

4. $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}\cdot e^{kx} + C.$

5. $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$

6. $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}tgax + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}ctgax + C.$

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

11. $\int \frac{xdx}{x^2 + a} = \frac{1}{2}\ln|x^2 + a| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

4. უშუალო ინტეგრების მაგალითები.

მაგალითი 1.

$$\int (4x^3 - 3x^2 + 5)dx = 4\int x^3dx - 3\int x^2dx + 5\int dx =$$

$$= 4\frac{x^4}{4} + C_1 - 3\frac{x^3}{3} + C_2 + 5x + C_3 = x^4 - x^3 + 5x + C.$$

მაგალითი 2.

$$\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2}dx = \int (x^4 - x^3 + x^{-2})dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C.$$

მაგალითი 3.

$$\int (2\sin 3x + 3\cos 2x)dx = 2\int \sin 3xdx + 3\int \cos 2xdx =$$

$$= -\frac{2}{3}\cos 3x + \frac{3}{2}\sin 2x + C.$$

მაგალითი 4.

$$\int (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3}+C=$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C.$$

მაგალითი 5.

$$\int \sin^2\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos x dx=$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C.$$

მაგალითი 6.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=tgx-ctgx+C.$$

§ 8.2. ინტეგრების ძირითადი მეთოდები

1. ჩასმის ხერხი.

ეს მეთოდი ხშირად სასარგებლოა იმ შემთხვევებში, როცა, $\int f(x)dx$ უშუალოდ არ დაიყვანება ცხრილის ინტეგრალამდე. ვაკეთებთ ჩასმას $x=\varphi(t)$, სადაც $\varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადია, მაშინ: $f(x)=f(\varphi(t))$, $dx=\varphi'(t)dt$ და

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (8.6)$$

(8.6) არის განუსაზღვრელ ინტეგრალში *ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულა.*

მაგალითი 1. $\int(ax+b)^n dx$, $n\neq -1$, $a\neq 0$, b მუდმივია.

მოვახდინოთ ჩასმა $t=ax+b$, $dt=adx$, $dx=\frac{1}{a}dt$, მაშინ

$$\int(ax+b)^n dx=\int t^n\cdot\frac{1}{a}dt=\frac{1}{a}\int t^n dt=\frac{1}{a}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}+C.$$

ამრიგად, $\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C.$

მაგალითი 2. $\int \frac{dx}{(x-a)^k}$, a და k მუდმივებია (k>0).

ჩაწერა ვაწარმოოთ შემდეგი სტილით:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \left| \begin{array}{l} x-a=t \\ x=a+t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^k} = \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{1}{(1-k)\cdot(x-a)^{k-1}} + C.$$

მაგალითი 3.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x=t^2 \\ dx=2tdt \\ \sqrt{x}=t \end{array} \right| = \int \frac{e^t 2tdt}{t} = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

მაგალითი 4.

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \left| \begin{array}{l} e^x=t \\ e^x dx=dt \\ dx=\frac{dt}{t} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+t^{-1}} = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \text{arctgt} + C = \text{arctge}^x + C.$$

ხშირ შემთხვევაში აუცილებელი არ არის ახალი ცვლადის შემოტანა. გამოთვლები შეიძლება ვაწარმოოთ ისე, როგორც შემდეგ მაგალითებშია ნაჩვენები:

მაგალითი 5.

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

მაგალითი 6.

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

მაგალითი 7.

$$\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

მაგალითი 8.

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int \ln^3 x d(\ln x) = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

სასარგებლოა დავიმახსოვროთ შემდეგი ფორმულები:

თუ $\int f(x)dx = F(x) + C$, მაშინ

1. $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C;$

2. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C;$

3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

მაგალითი 9.

$$\int \sin(3x+5)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x+5) + C.$$

მაგალითი 10.

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x+2)} = \operatorname{tg}(x+2) + C.$$

2. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი.

ვთქვათ, $u=u(x)$ და $v=v(x)$ წარმოადგენენ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციებს. ნამრავლის დიფერენციალის წესის თანახმად

$d(uv)=udv+vdu$, აქედან $udv=d(uv)-vdu$.

ამ უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრებით ვღებულობთ:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

ანუ

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (8.7)$$

(8.7) არის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა (მუდმივი C აქ იგულისხმება შესაკრებში $\int vdu$). ამ მეთოდის გამოყენება მაშინაა მიზანშეწონილი, როცა (8.7)-ის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი უფრო მარტივია, ვიდრე, საწყისი ინტეგრალი.

მაგალითი 11.

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = \left|\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{array}\right| = x\cdot\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

იმ ინტეგრალთა რიცხვს, რომლებიც (8.7) ფორმულით ამოიხსნება, მიეკუთვნება შემდეგი ტიპის ინტეგრალები:

$$\int p(x)f(x)dx,$$

სადაც $p(x)$ - მრავალწევრია, $f(x)$ კი შემდეგი ფუნქციებიდან ერთერთი: e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$, $\ln x$, $arctgx$, $arcctgx$, $\arcsin x$, $\arccos x$. ამასთან $\int p(x)e^{ax}dx$, $\int p(x)\sin axdx$, $\int p(x)\cos axdx$ სახის ინტეგრალების დროს u-დ მიიღება $p(x)$ მრავალწევრი, dv-დ კი სხვა დანარცენი ინტეგრალქვეშა გამოსახულებიდან. $\int p(x)\ln xdx$, $\int p(x)arctgxdx$, $\int p(x)arcctgxdx$, $\int p(x)\arcsin xdx$, $\int p(x)\arccos xdx$ სახის ინტეგრალების დროს კი u-დ მიიღება $\ln x$, $arctgx$, $arcctgx$, $\arcsin x$, $\arccos x$, dv-დ კი $p(x)dx$.

მაგალითი 12.

$$\int xe^x dx = \left|\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x dx \\ du = dx \\ v = e^x \end{array}\right| = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C.$$

მაგალითი 13.

$$\int x\cos x dx = \left|\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x dx \\ du = dx \\ v = \sin x \end{array}\right| = \dot{x}\sin x - \int \sin dx = \dot{x}\sin x + \cos x + C.$$

მაგალითი 14.

$$\int arctgxdx = \left|\begin{array}{l} u = arctgx \\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{array}\right| = x \cdot arctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \dot{x}arctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

მაგალითი 15.

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \\ du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}(\ln x - \frac{1}{3}) + C.$$

ზოგჯერ საჭირო ხდება ნაწილობითი ინტეგრების განმეორებით გამოყენება.

§8.3. წილად-რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

წილად-რაციონალურ ფუნქციას $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ეწოდება წესიერი, თუ $P(x)$-ის ხარისხი, ნაკლებია $Q(x)$-ის ხარისხზე. მაგალითად, წილადები $\frac{x+2}{x^2-1}$, $\frac{x^5}{x^7+5}$ - წესიერია, ხოლო წილადები $\frac{x^5}{x^2+1}$, $\frac{x^3-1}{x+1}$ - არაწესიერი.

არაწესიერი წილადების ინტეგრების დროს წილადი წინასწარ უნდა ვაქციოთ წესიერ წილადად.

განვიხილოთ წესიერი წილადის ინტეგრების უმარტივესი შემთხვევები.

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C, \quad k=2,3,4,...$

(იხ. §8.2-ის მაგ.2).

3. $I = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$

ამ უკანასკნელი ინტეგრალის გამოთვლისას უნდა განვასხვაოთ ორი ძირითადი შემთხვევა:

ა) x^2+px+q არის სრული კვადრატი. მაშინ I ინტეგრალი დაიყვანება 1 და 2 შემთხვევამდე.

ბ) x^2+px+q არ არის სრული კვადრატი. მაშინ, მას ავსებენ სრულ კვადრატამდე, რის შემდეგაც I ინტეგრალი დაიყვანება ცხრილის მე-9 და მე-11 ან მე-11 და მე-13 ინტეგრალებამდე.

განვიხილოთ ეს მაგალითებზე:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.

$$\int \frac{2x-1}{x^2-8x+16}dx=\int \frac{2x-1}{(x-4)^2}dx=2\int \frac{(x-4)+4-\frac{1}{2}}{(x-4)^2}dx=$$

$$=2\int \frac{dx}{x-4}+7\int \frac{dx}{(x-4)^2}=2\ln|x-4|-\frac{7}{x-4}+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.

$$I=\int \frac{2x-2}{x^2-x+1}dx=\int \frac{2x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx=\left|\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=t \\ x=\frac{1}{2}+t \\ dx=dt \end{array}\right|=$$

$$=\int \frac{2t-1}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\int \frac{2t}{t^2+\frac{3}{4}}dt-\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\ln(t^2+\frac{3}{4})-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\ln(x^2-x+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.

$$I=\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx=\int \frac{x+1}{(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}}dx=\left|\begin{array}{l} x-\frac{5}{2}=t \\ x=\frac{5}{2}+t \\ dx=dt \end{array}\right|=$$

$$=\int \frac{t+\frac{7}{2}}{t^2-\frac{1}{4}}dt=\int \frac{tdt}{t^2-\frac{1}{4}}dt-\frac{7}{2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{1}{4}}=$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2 - \frac{1}{4}| + \frac{7}{2}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= 4\ln|t-\frac{1}{2}| - 3\ln|t+\frac{1}{2}| + C = 4\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C.$$

შენიშვნა. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ ინტეგრალის განხილვისას სასარგებლოა $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right)$ იგივეობის გამოყენება. ამ იგივეობის გამოყენებით გვექნება:

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{b-a}\left(\int \frac{dx}{x-b} - \int \frac{dx}{x-a}\right) = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right| + C.$$

§8.4. ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული გამოსახულების ინტეგრება

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ ტიპის ინტეგრალები, სადაც $R(u,v)$, u და v - არგუმენტების რაციონალური ფუნქციაა, $t = tg\frac{x}{2}$-ის ჩასმით შეიძლება დაყვანილ იქნეს t ცვლადის რაციონალურ ფუნქციად. მართლაც,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$t = tg\frac{x}{2}$ ჩასმიდან გამომდინარეობს, რომ $x=2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

ამრიგად,

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt,$$

სადაც $R_1(t)$ t-ს რაციონალური ფუნქციაა.

მაგალითი.

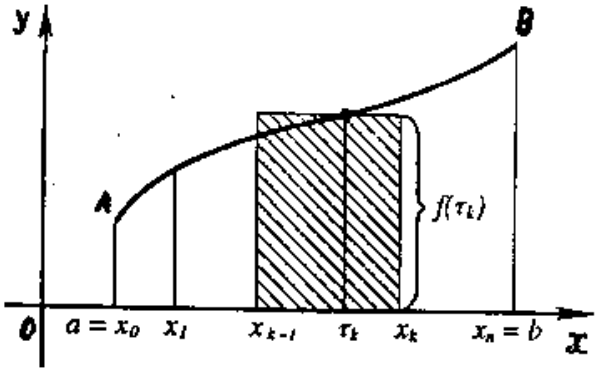
$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

§8.5. განსაზღვრული ინტეგრალი

1. ამოცანები, რომლებსაც მივყავართ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებამდე.

ამოცანებს: განვლილი გზის შესახებ, რეაქციაში ჩართული ნივთიერების რაოდენობის შესახებ, მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის შესახებ და სხვას მივყავართ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებამდე. განვიხილოთ ერთ-ერთი.

ამოცანა მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის შესახებ.



ნახ. 8.1

ვთქვათ, საპოვნი გვაქვს aABb ბრტყელი ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია [a;b]-ზე უწყვეტი და არაუარყოფითი y=f(x) ფუნქციის გრაფიკით და y=0, x=a, x=b წრფეებით. ამ ფიგურას ეწოდება *მრუდწირული ტრაპეცია.* [a;b] მონაკვეთი დავყოთ n ნაწილად $a=x_0<x_1<...<x_n=b$. ვთქვათ, $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, k=1,2,...,n., ამ მონაკვეთებიდან უდიდესი აღვნიშნოთ λ-თი: $\lambda=\max\Delta x_k$.

ყოველ კერძო შუალედში $[x_{k-1};x_k]$, k=1,2,...,n ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი τ_k, $x_{k-1}\le\tau_k\le x_k$. ნამრავლი $f(\tau_k)\cdot\Delta x_k$ მოგვცემს ფართობს, რომლის ფუძეა Δx_k და სიმაღლე $f(\tau_k)$, ხოლო ჯამი $\sum_{k=1}^{n}f(\tau_k)\cdot\Delta x_k$ მიახლოებით ტოლია aABb მრუდწირული ტრაპეციის S ფართობის, ანუ

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k) \cdot \Delta x_k .$$

მიუხედავად იმისა, რომ ყველა ამოცანის შინაარსი განსხვავდება ერთმანეთისაგან, მათი ამოხსნის მათემატიკური აპარატი ერთი და იგივე სახისაა:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k) \cdot \Delta x_k . \qquad (8.8)$$

2. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება.

განსაზღვრა 8.3. თუ არსებობს (8.8) გამოსახულების სასრული ზღვარი, რომელიც არ არის დამოკიდებული [a;b] მონაკვეთის დაყოფის წესზე და τ_k წერტილის არჩევაზე, მაშინ, ამ ზღვარს [a;b] სეგმენტზე f(x) ფუნქციიდან *განსაზღვრული ინტეგრალი* ეწოდება და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k) \cdot \Delta x_k . \qquad (8.9)$$

f(x)-ს ეწოდება *ინტეგრალქვეშა ფუნქცია*, f(x)dx-ს *ინტეგრალქვეშა გამოსახულება*, a და b-ს *ინტეგრალის საზღვრები* (a - ქვედა საზღვარი, b - ზედა საზღვარი), ჯამს $\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k) \cdot \Delta x_k$ - *ინტეგრალური ჯამი.*

ე.ი. განსაზღვრული ინტეგრალი ჩვენ ვუწოდეთ (8.8) ინტეგრალური ჯამის ზღვარს.

განსაზღვრული ინტეგრალის არსებობის შესახებ პასუხს იძლევა

თეორემა 8.3. თუ f(x) ფუნქცია უწყვეტია [a;b] სეგმენტზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია ამავე სეგმენტზე.

3. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობა.

განსაზღვრული ინტეგრალი [a;b] სეგმენტზე უწყვეტი, არაუარყოფითი f(x) ფუნქციიდან არის იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია y=f(x) ფუნქციის გრაფიკითა და წრფეებით: y=0, x=a, x=b.

§8.6. განსაზღვრული ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

1. განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები.

განვიხილავთ $[a;b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციას. განსაზღვრულ ინტეგრალს $\int_a^b f(x)dx$ აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0.$
2. $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$
3. $\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ სადაც $a<c<b.$

2. ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა.

(ისააკ ნიუტონი (1643-1727) - ინგლისელი მათემატიკოსი და ფიზიკოსი; გოლფრიდ ლეიბნიცი (1646-1716) - გერმანელი ფილოსოფოსი და მათემატიკოსი. ნიუტონმა და ლეიბნიცმა შექმნეს დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა).

თეორემა 8.4. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე და $F(x)$ არის $f(x)$-ის პირველყოფილი ფუნქცია ამ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (8.10)$$

(8.10) ფორმულას ეწოდება *ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა*. ის ამყარებს კავშირს განსაზღვრულ და განუსაზღვრელ ინტეგრალებს შორის.

სიმარტივისთვის ხმარობენ აღნიშვნას: $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (იკითხება: "ჩასმა a-დან b-მდე").

მაგალითი 1.

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

მაგალითი 2.

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\ \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

მაგალითი 3.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4}.$$

მაგალითი 4.

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a},\ a>0,\ b>0.$$

ამოცანა 1. სხეულის მოძრაობის სიჩქარე მოცემულია განტოლებით $v=12t-3t^2$ (მ/წმ). იპოვეთ მანძილი, რომელიც გაიარა სხეულმა მოძრაობის დაწყებიდან გაჩერებამდე.

ამოხსნა: სიჩქარე ნულის ტოლია მოძრაობის დაწყებისა და გაჩერების მომენტებში. ვიპოვოთ სხეულის გაჩერების მომენტი, ამისათვის ამოვხსნათ განტოლება $12t-3t^2=0$, $t(4-t)=0$, $t_1=0$, $t_2=4$.

საძებნი მანძილი ტოლი იქნება:

$$S = \int_0^4 (12t - 3t^2)dt = (6t^2 - t^3)\Big|_0^4 = 32\ \text{(მ)}.$$

პასუხი: [32 მ.]

ამოცანა 2. ცნობილია, რომ ქიმიური რეაქციის სიჩქარე შეიძლება გამოსახული იყოს ფორმულით: $v(t) = \frac{\sqrt{t}-1}{2\sqrt{t}}$, სადაც t დროა (წთ), რომლის განმავლობაში მიმდინარეობს რეაქცია. უნდა ვიპოვოთ ნივთიერების მასა (გ), რომელიც მონაწილეობს რეაქციაში დროის [4;16] შუალედში.

ამოხსნა: ცნობილია, რომ $V'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}$, სადაც Δm ნივთიერების მასის ნაზრდია, რომელიც მონაწილეობს რეაქციაში Δt დროის ნაზრდის შესაბამისად. ამრიგად, მოცემული ზღვარი არის მასის წარმოებული დროით.

ჩვენს შემთხვევაში ცნობილია რეაქციის სიჩქარის ფუნქციონალური დამოკიდებულება დროზე. რეაქციაში ჩართული ნივთიერების მასა შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით: $m = \int_{t_0}^{T} v(t)dt$, სადაც $[t_0, T]$ დროის შუალედია, რომლის დროსაც მიმდინარეობს რეაქცია. საჭიროა ნივთიერების მასის პოვნა, რომელიც ჩაერთო რეაქციაში დროის შუალედში, [4,16] წთ-ში, მაშინ $t_0 = 4, T = 16$.

ვიანგარიშოთ

$$m = \int_4^{16} \frac{\sqrt{t}-1}{2\sqrt{t}}dt = \int_4^{16}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)dt = \left(\frac{1}{2}t - \sqrt{t}\right)\Big|_4^{16} = 8 - 4 = 4\,(\text{გ}).$$

პასუხი: [4 გ.]

3. განსაზღვრული ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით.

ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[a;b]$ მონაკვეთზე. განვიხილოთ ინტეგრალი $\int_a^x f(t)dt$, სადაც $x \in [a;b]$.

თუ $F'(x)=f(x)$, მაშინ ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულის თანახმად გვაქვს: $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

აქედან $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = f(x)$.

ამრიგად, ცვლადი ზედა საზღვრით განსაზღვრული ინტეგრალის წარმოებული ტოლია ინტეგრალქვეშა ფუნქციისა ამ ცვლადით.

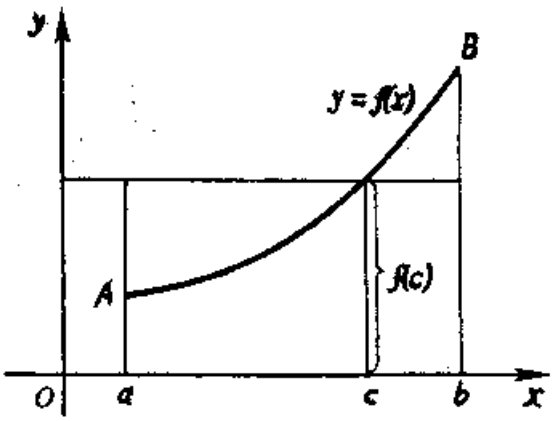
მაგალითი 5.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \sqrt{t}dt = \sqrt{x}.$$

4. თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ.

თეორემა 8.5. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე, მაშინ $(a;b)$ შუალედში მოიძებნება ისეთი c წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c). \qquad (8.11)$$



ნახ.8.2

ფორმულა (8.11)-ს აქვს მარტივი გეომეტრიული ახსნა: **aABb** მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი ტოლია იმ მართკუთხედის ფართობისა, რომელსაც ფუძედ აქვს იგივე **ab** მონაკვეთი, ხოლო სიმაღლეა **f(c)**.

სიდიდე **f(c)=μ**-ს უწოდებენ **f(x)** *ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობას* **[a;b]** სეგმენტზე. (8.11) ფორმულიდან გვაქვს:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \qquad (8.12)$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $f(x)=\sqrt{x}$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა [1;9] შუალედში. (8.12)-ის გამოყენებით გვაქვს:

$$\mu = \frac{1}{9-1}\int_1^9 \sqrt{x}dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = 2\frac{1}{6}.$$

5. ცვლადთა გარდაქმნა განსაზღვრულ ინტეგრალში.

ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულას განსაზღვრულ ინტეგრალში აქვს შემდეგი სახე:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (8.13)$$

(8.13) სამართლიანია შემდეგი პირობების გათვალისწინებით: **f(x)** უწყვეტია **[a,b]**-ზე; **F'(x)=f(x)**; **x=φ(t)** უწყვეტად წარმოებულია **[α,β]**-ზე; **a≤φ≤b**; **φ(α)=a**; **φ(β)=b**.

მაგალითი 7.

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \left|\begin{array}{l} x = e^t \\ dx = e^t dt \\ \ln x = t \\ x = 1, t = 0 \\ x = e, t = 1 \end{array}\right| = \int_0^1 \frac{e^t dt}{e^t(1+t^2)} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctgt}\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4}.$$

6. ნაწილობითი ინტეგრება.

განსაზღვრული ინტეგრალისათვის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu, \qquad (8.13)$$

სადაც $u=u(x)$ და $v=v(x)$ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია $[a;b]$ სეგმენტზე.

მაგალითი 8.

$$\int_0^{\pi} x\cdot\cos x dx = \left|\begin{array}{c} u = x \\ dv = \cos x dx \\ du = dx \\ v = \sin x \end{array}\right| = (x\sin x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx =$$

$$= \cos x\Big|_0^{\pi} = -1-1 = -2.$$

მაგალითი 9.

$$\int_0^1 x\cdot e^x dx = \left|\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x dx \\ du = dx \\ v = e^x \end{array}\right| = (xe^x)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$$

$$= e - e^x\Big|_0^1 = e - e + e^0 = 1.$$

§8.7. არასაკუთრივი ინტეგრალები და მათი კრებადობა

განსაზღვრული ინტეგრალის განხილვისას ვგულისხმობთ, რომ ინტეგრების საზღვრები a და b სასრულია, ხოლო ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე. ამ პირობიდან ერთი მაინც თუ არ სრულდება, მაშინ, ინტეგრალს ეწოდება *არასაკუთრივი.*

განვიხილოთ ინტეგრალები, რომლის საზღვრებია უსასრულობა.

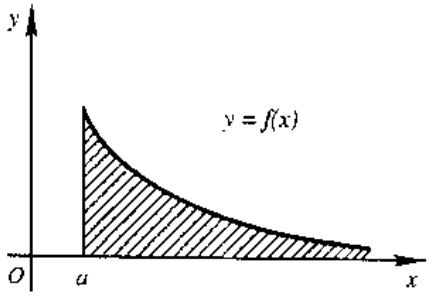
ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტია $a \le x < +\infty$ შუალედში, ე.ი. $x \ge a$-თვის. თუ არსებობს ზღვარი

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx, \qquad (8.14)$$

მაშინ მას *არასაკუთრივ ინტეგრალს* უწოდებენ.

თუ (8.14) ზღვარი სასრულოა, მაშინ ამბობენ, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი *იკრიბება*. წინააღმდეგ შემთხვევაში (ზღვარი (8.14) უსასრულოა, ან საერთოდ არ არსებობს) არასაკუთრივი ინტეგრალი *განშლადია*.

მაგალითი 1.



ნახ.8.3

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{x\to+\infty} \left[1 - e^{-b}\right] = 1.$$

არასაკუთრივი ინტეგრალი იკრიბება. გეომეტრიულად ის არის (ნახ.8.3) იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y=e^{-x}$, $x=0$ და $y=0$ წირებს შორის.

მაგალითი 2.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty.$$

ეს ინტეგრალი განშლადია.

მაგალითი 3.

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \sin b.$$

ეს ზღვარი არ არსებობს, ე.ი. არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია. ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულას (8.14) ინტეგრალისათვის აქვს შემდეგი სახე: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \left[F(b) - F(a)\right]$.

(8.14) სახის კრებადი ინტეგრალისათვის გვაქვს განზოგადებული ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a). \qquad (8.15)$$

ყველაფერი ზემოთქმული სამართლიანია ინტეგრალისათვის:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (8.16)$$

და, ბოლოს,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (8.17)$$

სადაც c - ნებისმიერი რიცხვია.

(8.17) ტოლობა უნდა გვესმოდეს ასე: თუ ტოლობის მარჯვნივ მდებარე ყოველი ინტეგრალი კრებადია, მაშინ კრებადია ტოლობის მარცხენა ინტეგრალიც.

"მეცნიერება მხოლოდ მაშინ აღწევს სრულყოფას,
როცა ის შეძლებს მათემატიკის გამოყენებას".

კარლ მარქსი

§8.8. განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გამოყენების შესახებ

I. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება გეომეტრიაში

1. *ბრტყელი ფიგურების ფართობის გამოთვლა.*

ვთქვათ, f(x) უწყვეტია [a;b] სეგმენტზე, f(x)≥0 [a;b]-ზე, მაშინ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, შემოსაზღვრული y=f(x), y=0, x=a, x=b წირებით, ტოლია ინტეგრალის

$$S = \int_{a}^{b} f(x)dx, \qquad (8.18)$$

თუ f(x)≤0, მაშინ

$$S = \left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right|. \qquad (8.19)$$

თუ y=f(x) მრუდი კვეთს Ox ღერძს, მაშინ [a;b] სეგმენტი უნდა დავყოთ ნაწილებად, რომელ საზღვრებშიც f(x) არ იცვლის ნიშანს და ყოველი უბნისათვის გამოვიყენოთ (8.18) და (8.19)-დან ის, რომელიც მას შეესაბამება.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით: $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=3$.

(8.18) ფორმულის გამოყენებით

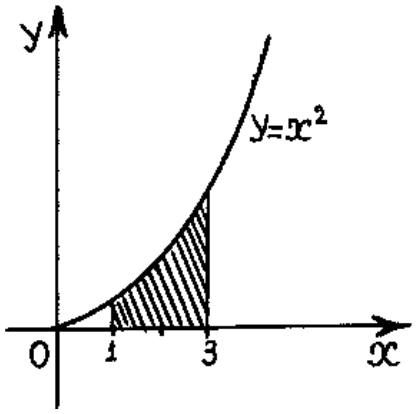
$$S=\int_1^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=9-\frac{1}{3}=8\frac{2}{3}\ \text{(კვ.ერთ)}$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკით და Ox ღერძით, თუ $0\le x\le 2\pi$ (ნახ.8.5).

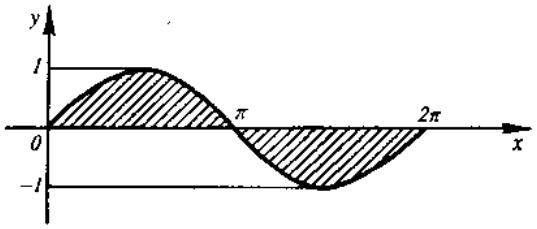
$[0;2\pi]$ სეგმენტი დავყოთ ორ სეგმენტად $[0;\pi]$ და $[\pi;2\pi]$.

პირველ სეგმენტზე $\sin x\ge 0$, მეორეზე კი $\sin x\le 0$, ამიტომ

$$S=\int_0^\pi \sin x dx+\left|\int_\pi^{2\pi}\sin x dx\right|=-\cos x\Big|_0^\pi+\left|-\cos x\Big|_\pi^{2\pi}\right|=1+1+1+1=4.$$



ნახ.8.4



ნახ.8.5

თუ წირის განტოლება მოცემულია $r=r(\varphi)$ სახით, მაშინ *ფართობი პოლარულ კოორდინატებში* გამოითვლება ფორმულით:

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (8.20)$$

2. *რკალის სიგრძისა და ბრუნვითი ზედაპირის ფართობის გამოთვლა.*

თუ AB რკალი მოცემულია $y=f(x)$-ით, და $[a;b]$ სეგმენტზე აქვს უწყვეტი წარმოებული, მაშინ რკალის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx. \qquad (8.21)$$

თუ მრუდი AB მოცემულია პარამეტრული სახით

$$x=x(t),\ y=y(t),\ (\alpha\le t\le\beta) \qquad (8.22)$$

და ამ შუალედში $x'(t)$ და $y'(t)$ უწყვეტი წარმოებულებია, მაშინ (8.21) განტოლება ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt. \qquad (8.23)$$

თუ AB რკალი მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში

$$r=r(\varphi),\quad (\alpha\le\varphi\le\beta), \qquad (8.24)$$

მაშინ ვღებულობთ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi. \qquad (8.25)$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ რკალის სიგრძე $0\le x\le 1$ შუალედში, რომელიც მოცემულია განტოლებით $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$. ვპოულობთ

$y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ და (8.21) ფორმულით ვპოულობთ:

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(e^x+e^{-x})dx=$$

$$=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ R რადიუსიანი წრეწირის სიგრძე. წრეწირის განტოლება ჩავწეროთ პოლარულ კოორდინატებში: $r=R$, როცა $0\le\varphi\le 2\pi$.

(8.25) ფორმულით ვღებულობთ $l=\int_0^{2\pi}Rd\varphi=2\pi R$.

ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი, როცა რკალი მოცემულია $y=f(x)$-ით, გამოითვლება ფორმულით:

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \qquad (8.26)$$

თუ ფუნქცია მოცემულია (8.22) ტოლობით, მაშინ

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt, \qquad (8.27)$$

ხოლო თუ მოცემულია (8.24) ტოლობით, მაშინ

$$S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r\sin\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi. \qquad (8.28)$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ სფერული ზედაპირის ფართობი, როცა $x^2+y^2=R^2$ წრეწირის რკალი ბრუნავს Ox-ის გარშემო. $a\le x\le b$, $(-R\le a<0,\ 0<b\le R)$. აქ $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = -\frac{x}{y}$, $1 + y'^2 = \frac{R^2}{y^2}$ და (8.26) ფორმულით $S = 2\pi R\int_a^b dx = 2\pi R(b-a)$.

კერძოდ, როცა $a=-R$, $b=R$ ვღებულობთ სფერული ზედაპირის ფართობს $S=4\pi R^2$.

3. *მოცულობის გამოთვლა.*

თუ სხეული მიღებულია $y=f(x)$ წირის ბრუნვით Ox-ის გარშემო $a\le x\le b$ შუალედში, მაშინ, ბრუნვითი სხეულის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx. \qquad (8.29)$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ R რადიუსიანი სფეროს მოცულობა. (8.29) ფორმულით, როცა $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ვღებულობთ:

$$V = \pi\int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi(R^2x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

II. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება ბიოლოგიაში

1. პოპულაციის როდენობა

პოპულაციას უწოდებენ ინდივიდთა განსაზღვრული რაოდენობის ერთობლიობას (შესაძლოა განსხვავდებოდნენ ასაკითა და სქესით) და არა რაიმე ფიზიკური თვისებების მნიშვნელობათა შედეგების ერთობლიობას. ინდივიდთა რაოდენობა პოპულაციაში დროის მიხედვით იცვლება. თუ პოპულაციისათვის ხელშემწყობი პირობებია, მაშინ ინდივიდთა დაბადების რიცხვი მეტია სიკვდილიანობის რიცხვზე და ამიტომ ინდივიდთა რიცხვი იზრდება დროის მიხედვით. დროის ერთეულში ინდივიდთა ნაზრდს ვუწოდოთ პოპულაციის ზრდის სიჩქარე. აღვნიშნოთ ეს სიჩქარე $V = V(t)$. „ძველ“ პოპულაციაში, რომელიც დიდი ხანია დამკვიდრებულია მოცემულ მიდამოში, პოპულაციის ზრდის $V(t)$ სიჩქარე დაბალია და ნელა მიისწრაფვის 0-საკენ. მაგრამ, თუ პოპულაცია ახალგაზრდაა, მაშინ, ადამიანის შეგნებულად ჩარევის შედეგად $V(t)$ შეიძლება მნიშვნელოვნად იზრდებოდეს, ან, მცირდებოდეს. თუ ვიცით პოპულაციის ზრდის სიჩქარე $V(t)$, მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ დროის შუალედში, t_0–დან T–მდე, პოპულაციის ნაზრდი. $V(t)$–ს განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ის არის პოპულაციის რაოდენობის $N(t)$ წარმოებული t მომენტში, ე. ი. პოპულაციის $N(t)$ რაოდენობა არის $V(t)$–ს პირველყოფილი, ამიტომ

$$N(T) - N(t_0) = \int_{t_0}^{T} V(t)dt. \qquad (8.30)$$

ცნობილია, რომ კვების რესურსების განუსაზღვრელ პირობებში ბევრი პოპულაციის ზრდის სიჩქარე იზრდება ექსპონენციალურად, ე.ი. $V(t) = ae^{kt}$. ამ შემთხვევაში პოპულაცია თითქმის „არ ბერდება“. ასეთი პირობები შეიძლება შევუქმნათ, მაგალითად, მიკროორგანიზმებს, თუ დროთა განმავლობაში განვითარებად კულტურებს გადავრგავთ ახალ ადგილებში მკვებავი გარემოთი. თუ გამოვიყენებთ (8.30) ფორმულას, ამ შემთხვევაში მივიღებთ:

$$N(T) = N(t_0) + a\int_{t_0}^{T} e^{kt}dt = N(t_0) + \frac{a}{k}(e^{kT} - e^{kt_0}). \qquad (8.31)$$

(8.31)-ის მსგავსი ფორმულებით ანგარიშობენ იმ ობისებრი სოკოების რაოდენობას, რომლებიც პენიცილინს გამოყოფს.

2. *პოპულაციის ბიომასა.*

განვიხილოთ ისეთი პოპულაცია, როდესაც ინდივიდის მასა საგრძნობლად იცვლება სიცოცხლის განმავლობაში. გამოვთვალოთ პოპულაციის ზოგადი ბიომასა.

ვთქვათ, δ არის ასაკი რაიმე დროის ერთეულში, ხოლო $N(\delta)$ - პოპულაციის ინდივიდთა რიცხვი, რომელთა ასაკი δ–ს ტოლია. ვთქვათ, $P(\delta)$ არის δ ასაკის ინდივიდის საშუალო მასა, ხოლო $M(\delta)$ - ბიომასა ყველა ინდივიდის, რომელთა ასაკია 0-დან δ-მდე.

$N(\delta)\cdot P(\delta)$ ნამრავლი არის δ ასაკის ყველა ინდივიდის ბიომასა. განვიხილოთ სხვაობა: $M(\delta+\Delta\delta)-M(\delta)$, სადაც $\Delta\delta>0$. ცხადია, ეს სხვაობა, რომელიც უდრის ყველა ინდივიდის ბიომასას δ–დან $\delta+\Delta\delta$– მდე, აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს:

$$\overset{\vee}{N}(\delta)\overset{\vee}{P}(\delta)\Delta\delta \le M(\delta+\Delta\delta)-M(\delta) \le \hat{N}(\delta)\hat{P}(\delta)\Delta\delta, \qquad (8.32)$$

სადაც $\overset{\vee}{N}(\delta)\overset{\vee}{P}(\delta)$ უმცირესია, ხოლო $\hat{N}(\delta)\hat{P}(\delta)$ – უდიდესი მნიშვნელობა $N(\delta)P(\delta)$ ფუნქციისა $[\delta,\delta+\Delta\delta]$ შუალედში. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\Delta\delta>0$ (8.32)-დან, გვაქვს:

$$\overset{\vee}{N}(\delta)\overset{\vee}{P}(\delta) \le \frac{M(\delta+\Delta\delta)-M(\delta)}{\Delta\delta} \le \hat{N}(\delta)\hat{P}(\delta). \qquad (8.33)$$

$N(\delta)$ და $P(\delta)$–ს უწყვეტობის გამო,

$$\lim_{\Delta\delta\to 0}[\overset{\vee}{N}(\delta)\overset{\vee}{P}(\delta)] = \lim_{\Delta\delta\to 0}[\hat{N}(\delta)\hat{P}(\delta)] = N(\delta)P(\delta).$$

აქედან გამომდინარე, $\lim\limits_{\Delta\delta\to 0}\dfrac{M(\delta+\Delta\delta)-M(\delta)}{\Delta\delta} = N(\delta)P(\delta)$,

ანუ $\dfrac{dM(\delta)}{d\delta} = N(\delta)\cdot P(\delta)$.

ამრიგად, $M(\delta)$ ბიომასა არის $N(\delta)P(\delta)$–ს პირველყოფილი.

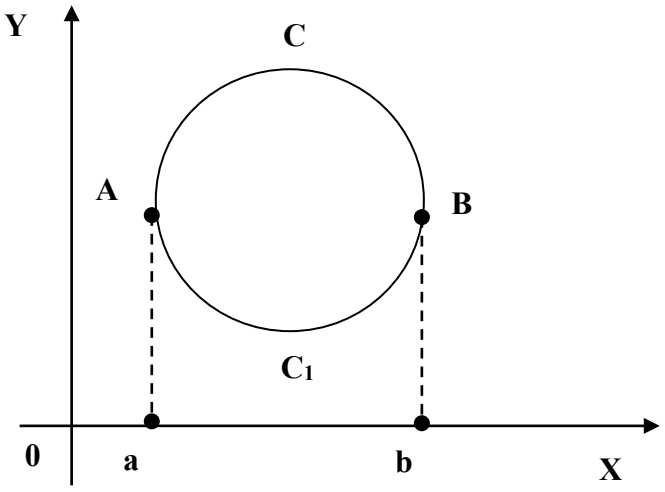
აქედან $M(T)-M(0)=\int\limits_0^T N(\delta)\cdot P(\delta)d\delta$,

სადაც T არის ინდივიდის მაქსიმალური ასაკი მოცემულ პოპულაციაში, რადგანაც $M(0)=0$, ამიტომ, საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$M(T) = \int_0^T N(\delta) \cdot P(\delta) d\delta. \qquad (8.34)$$

3. *გაფრენის საშუალო სიგრძე.*

ზოგიერთი გამოკვლევის დროს აუცილებელია გავიგოთ საშუალო გარბენის, ან გაფრენის სიგრძე, რომელსაც გაივლის ესა თუ ის ცხოველი ფიქსირებულ მონაკვეთში. მოვიყვანოთ შესაბამისი გამოთვლა ფრინველებისათვის. კვლევის უბანი იყოს **R** - რადიუსიანი წრე, **R** ძალიან დიდი არ არის. ფრინ-ველს შეუძლია ნებისმიერ წერტილში ნებისმიერი კუთხით გადაკვე-თოს წრეწირი. ამიტომ, წრეზე მათი გადაფრენის სიგრძე 0–დან 2**R**–მდე შუალედში მოთავსდება. ჩვენ გვაინტერესებს საშუალო გაფრენის სიგრძე; აღვნიშნოთ ის **L**–ით: განვიხილოთ იმ ფრინველთა ფრენა, რომლებიც **Oy**–ის პარალელურად მიფრინავენ (ნახ.8.6).



ნახ. 8.6.

ფრენის საშუალო სიგრძე – საშუალო მანძილი **ACB** და **AC1B** რკალებს შორის. სხვა სიტყვებით, ეს არის $f_1(x) - f_2(x)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა, სადაც $y = f_1(x)$ არის ზედა რკალის განტოლება, ხოლო $y = f_2(x)$ ქვედა რკალის, ე. ი.

$$L = \frac{\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx}{b-a} \quad \text{ანუ} \quad L = \frac{\int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx}{b-a}. \qquad (8.35)$$

რადგანაც $\int_a^b f_1(x)dx = S_{aACBb}$, მრუდწირული ტრაპეციის ფართობია, ხოლო $\int_a^b f_2(x)dx = S_{aAC_1Bb}$. ამათი სხვაობა უდრის წრის ფართობს, ანუ πR^2, ხოლო $b-a=2R$. თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (8.35)–ში, მივიღებთ $L = \frac{\pi R^2}{2R} = \frac{\pi}{2}R$.

"არსებობს ერთი მეცნიერება, ურომლისოდაც ვერ იარსებებდა ვერც ერთი სხვა – ეს არის მათემატიკა".

სერგეი სობოლევი

სავარჯიშოები

1. $\int x^5 dx.$ $\left[\frac{x^6}{6}+C.\right]$

2. $\int \sqrt[3]{x}dx.$ $\left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C.\right]$

3. $\int \frac{dx}{x^4}.$ $\left[-\frac{1}{3x^3}+C.\right]$

4. $\int (x-x^3)dx.$ $\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C.\right]$

5. $\int (x^5-4x^3+x-5)dx.$ $\left[\frac{x^6}{6}-x^4+\frac{x^2}{2}-5x+C.\right]$

6. $\int (2x-3\sqrt{x})dx.$ $\left[x^2-2x\sqrt{x}+C.\right]$

7. $\int \left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{x^3}\right)dx.$ $\left[\frac{x^4}{12}-\frac{3}{2x^2}+C.\right]$

8. $\int \frac{(2+x)}{x}dx.$ $[2\ln|x|+x+C.]$

9. $\int x^2(1+2x)dx.$ $\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+C.\right]$

10. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3}dx.$ $\left[2\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C.\right]$

11. $\int e^{-5x}dx.$ $\left[-\frac{1}{5}e^{-5x}+C.\right]$

12. $\int (e^x+e^{-x})^2 dx.$ $\left[\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})-2x+C.\right]$

13. $\int \frac{dx}{x^2+16}.$ $\left[\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C.\right]$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$. $\left[\arcsin\frac{x}{5}+C.\right]$

15. $\int \sin 7x dx$. $\left[-\frac{1}{7}\cos 7x+C.\right]$

16. $\int 3^x dx$. $\left[\frac{3^x}{\ln 3}+C.\right]$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$. $\left[\ln|x+\sqrt{x^2-5}|+C.\right]$

18. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$. $\left[\frac{1}{3}tg3x+C.\right]$

19. $\int \cos 9x dx$. $\left[\frac{1}{9}\sin 9x+C.\right]$

20. $\int \frac{dx}{x^2-9}$. $\left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C.\right]$

21. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$. $\left[-\frac{1}{2}ctg2x+C.\right]$

22. $\int (3+x-\sin x)dx$. $\left[3x+\frac{x^2}{2}+\cos x+C.\right]$

23. $\int e^{2x+1}dx$. $\left[\frac{1}{2}e^{2x+1}+C.\right]$

24. $\int 3^x\cdot 2^{2x}dx$. $\left[\frac{12^x}{\ln 12}+C.\right]$

25. $\int (x+5)^3 dx$. $\left[\frac{1}{4}(x+5)^4+C.\right]$

26. $\int \sqrt{1+2x}dx$. $\left[\frac{1}{3}(1+2x)\sqrt{1+2x}+C.\right]$

27. $\int x(x^2-1)^3 dx$. $\left[\frac{1}{8}(x^2-1)^4+C.\right]$

28. $\int (x^2+5)^7 2xdx$. $\left[\frac{1}{8}(x^2+5)^8+C.\right]$

29. $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx.$ [-ln(1+e^{-x})+C.]

30. $\int e^{x^3+x^2-x+1}(3x^2+2x-1)dx.$ $\left[e^{x^3+x^2-x+1}+C.\right]$

31. $\int \frac{dx}{4x^2+9}.$ $\left[\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}+C.\right]$

32. $\int \frac{dx}{9x^2-4}.$ $\left[\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|+C.\right]$

33. $\int (\cos 3x-\sin 2x)dx.$ $\left[\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{2}\cos 2x+C.\right]$

34. $\int (\sin 3x+\cos 5x)dx.$ $\left[-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+C.\right]$

35. $\int \cos(x+4)dx.$ [sin(x+4)+C.]

36. $\int \sin^3 x\cos x dx.$ $\left[\frac{\sin^4 x}{4}+C.\right]$

37. $\int \cos^5 x\sin x dx.$ $\left[-\frac{\cos^6 x}{6}+C.\right]$

38. $\int (1-\sin^2 x)dx.$ $\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.\right]$

39. $\int (1-\cos^2 x)dx.$ $\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.\right]$

40. $\int \sin 2x\cos 2x dx.$ $\left[-\frac{1}{8}\cos 4x+C.\right]$

ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდის გამოყენებით გამოთვალეთ ინტეგრალები:

41. $\int (2x-5)e^{-3x}dx.$ $\left[\frac{13-6x}{9}e^{-3x}+C.\right]$

42. $\int x\cos 2x dx.$ $\left[\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.\right]$

43. $\int xe^{-2x}dx.$ $\left[-\frac{2x+1}{4}e^{-2x}+C.\right]$

44. $\int (2x-3)\sin\frac{x}{2}dx.$ $\left[(6-4x)\cos\frac{x}{2}+8\sin\frac{x}{2}+C.\right]$

45. $\int \arccos 2x dx.$ $\left[x\cdot\arccos 2x-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C.\right]$

წილად-რაციონალური ფუნქციებიდან
გამოთვალეთ ინტეგრალები:

46. $\int \frac{x}{x+2}dx.$ [2-2ln|x+2|+C.]

47. $\int \frac{dx}{(x+1)^4}.$ $\left[-\frac{1}{3(x+1)^3}+C.\right]$

48. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.\right]$

49. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}.$ $\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C.\right]$

50. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}.$ $\left[\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.\right]$

გამოთვალეთ ინტეგრალები შემდეგი
ტრიგონომეტრიული ფუნქციებიდან:

51. $\int\frac{dx}{5-3\cos x}.$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2})+C.\right]$

52. $\int\frac{dx}{2+3\cos x}.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{5}}\right|+C.\right]$

ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულის გამოყენებით
გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალები:

53. $\int_0^1 x^4 dx.$ $\left[\frac{1}{5}.\right]$

54. $\int_1^4 \sqrt{x}dx.$ $\left[4\frac{2}{3}.\right]$

55. $\int_{-1}^1 (x^2+1)dx.$ $\left[2\frac{2}{3}.\right]$

56. $\int_1^2 \frac{dx}{x}.$ [ln2.]

57. $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx.$ $\left[\frac{e^2-1}{2}.\right]$

58. $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx.$ [0.]

59. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$ [1.]

60. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$ [1.]

61. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ $\left[\frac{\pi}{6}.\right]$

62. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$ $\left[\frac{\pi}{3}.\right]$

ჩასმის მეთოდით გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალები:

63. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx.$ $\left[\frac{4-\pi}{2}.\right]$

64. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx.$ $\left[\frac{\pi}{4}.\right]$

65. $\int_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x}dx.$ $\left[64\frac{2}{3}.\right]$

66. $\int_{-3}^1 e^{-x}dx.$ $\left[e^3-\frac{1}{e}.\right]$

ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდით
გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალები:

67. $\int_1^e \ln^2 x dx.$ [e^{-2}.]

68. $\int_1^e x^2 \ln x dx$. $\left[\frac{2e^3+1}{9}.\right]$

69. $\int_0^2 (3-2x)e^{-3x}dx$. $\left[\frac{5e^{-6}+7}{9}.\right]$

70. იპოვეთ ბრტყელი ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2+1$ პარაბოლით, Ox ღერძითა და წრფეებით $x=1$, $x=4$.

[24.]

71. იპოვეთ ბრტყელი ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით: $y=\ln x$, $y=0$, $x=1$, $x=e$.

[1.]

72. იპოვეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება Ox ღერძის გარშემო $y^2=4x$ პარაბოლის ბრუნვით, $0\le x\le 3$.

$\left[\frac{56}{3}\pi.\right]$

73. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება Ox-ის გარშემო ბრტყელი ფიგურის ბრუნვით, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით: $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

$\left[\frac{\pi}{8}(e^2+e^{-2})+\frac{\pi}{2}.\right]$

"არავინ შეაფასოს ჩემი ნამუშევრები,
ვინც არ იცის მათემატიკა".

ლეონარდო და ვინჩი

თავი 9. დიფერენციალური განტოლებები

§9.1. ამოცანები, რომლებიც დაიყვანება დიფერენციალურ განტოლებებამდე

მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგებში ხშირად გვხვდება ისეთი ამოცანები, რომელთა გადაჭრისათვის საჭიროა ამოიხსნას ერთი ან რამდენიმე განტოლება, რომელიც შეიცავს საძებნი ფუნქციის წარმოებულს. ასეთ განტოლებებს *დიფერენციალური განტოლებები* ეწოდება. განვიხილოთ ამოცანები, რომლებიც დაიყვანება დიფერენციალურ განტოლებებამდე.

ამოცანა 1. **xOy** სიბრტყეზე ვიპოვოთ მრუდი, რომელიც გადის **O(0;0)** წერტილზე, რომლისთვისაც მის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტი უდრის შეხების წერტილის გაორმაგებულ აბსცისას.

ამოხსნა: ვთქვათ, **y=f(x)** არის საძებნი მრუდის განტოლება. ამოცანის პირობის თანახმად, ყოველ **M(x;f(x))** წერტილში მრუდისადმი გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტი უდრის **2x**, ე.ი.

$$f'(x)=2x,$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx}=2x. \qquad (9.1)$$

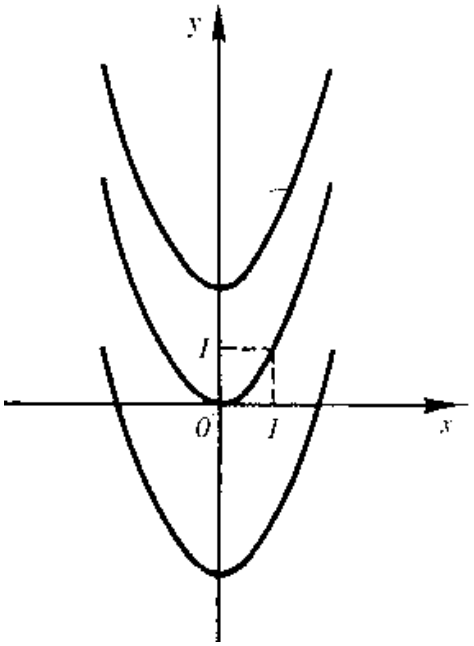
(9.1) არის დიფერენციალური განტოლება, რადგანაც შეიცავს წარმოებულს. (9.1)-დან გამომდინარეობს, რომ **y** არის **2x**-ის პირველყოფილი ფუნქცია. შესაბამისად

$$y=\int 2xdx+C,$$

ანუ

$$y=x^2+C, \qquad (9.2)$$

სადაც **C** ნებისმიერი მუდმივია.



ნახ.9.1

(9.2)-დან გამომდინარეობს, რომ (9.1) დიფერენციალურ განტოლებას აქვს უსასრულოდ მრავალი ამონახსნი. ე.ი. (9.1)-ის ამონახსნი არის უსასრულოდ მრავალი პარაბოლა. ამ მრუდებიდან რომ ამოვირჩიოთ ჩვენთვის სასურველი, ამისათვის უნდა ვისარგებლოთ პირობით, რომ ის გადის $O(0;0)$ წერტილზე. ამ წერტილის კოორდინატებმა უნდა დააკმაყოფილოს (9.2) განტოლება. აქედან $C=0$. ე.ი. საძებნი პარაბოლა არის $y=x^2$ (ნახ.9.1).

ამოცანა 2. ვიპოვოთ სიცარიელეში თავისუფლად ვარდნილი სხეულის მოძრაობის კანონი, თუ საწყისი სიჩქარე არის 0 და გავლილი გზა აღირიცხება $t=0$ მომენტიდან. სიჩქარე ამ დროს გამოითვლება ფორმულით $v=gt$.

ამოხსნა: როგორც ცნობილია, წრფივი მოძრაობის სიჩქარე არის გზის წარმოებული დროის მიხედვით, ე.ი.

$$v=\frac{ds}{dt}=g(t). \qquad (9.3)$$

(9.3)-დან გამომდინარეობს, რომ S ფუნქცია არის gt-ს პირველყოფილი, ე.ი.

$$S=\int gtdt+C,$$

ანუ

$$S=\frac{gt^2}{2}+C, \qquad (9.4)$$

C-ს გასაგებად გავითვალისწინებთ, რომ $S=0$, $t=0$, ამიტომ (9.4)-დან გამომდინარეობს $C=0$. ე.ი.

$$S=\frac{gt^2}{2}.$$

ამ ამოცანებში მიღებული განტოლებები $\frac{dy}{dx}=\varphi(x)$ არის *უმარტივესი დიფერენციალური განტოლებები.*

განსაზღვრა 9.1. *დიფერენციალური განტოლება* ეწოდება დამოკიდებულებას, რომელიც აკავშირებს დამოუკიდებელ **x** ცვლადს, საძებნ **y=f(x)** ფუნქციას და მის წარმოებულებს. თუ საძებნი ფუნქცია არის ერთი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქცია, მაშინ, განტოლებას ეწოდება *ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება.* წარმოებულის უდიდეს რიგს ეწოდება მოცემული *განტოლების რიგი.* შესაბამისად, **n**-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})=0. \qquad (9.5)$$

ყოველ **y=f(x)** ფუნქციას, რომელიც (9.5)-ს აქცევს იგივეობად, ეწოდება ამ განტოლების *ამონახსნი.*

§9.2. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები. ზოგადი ამონახსნი და საწყისი პირობები

პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე: **F(x, y, y')=0**, ან (თუ ამ განტოლების ამოხსნა შეიძლება **y'**-ის მიმართ)

$$y'=f(x,y). \qquad (9.6)$$

(9.6)-ში **x, y** განიხილება როგორც **xOy**-ზე დეკარტის კოორდინატები. თუ **y=φ(x)** არის (9.6)-ის ამონახსენი, მაშინ **y=φ(x)**-ის გრაფიკს ეწოდება (9.6) განტოლების *ინტეგრალური მრუდი.* განვიხილოთ ინტეგრალურ მრუდზე **M(x;y)** წერტილი. ამ წერტილში წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსით გვაქვს

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha,$$

სადაც α არის კუთხე, რომელსაც ადგენს **M** წერტილში ამ მრუდისადმი გავლებული მხები **Ox** ღერძის დადებით მიმართულებასთან, ამიტომ, (9.6)-დან გამომდინარეობს $tg\alpha=f(x,y)$, სადაც **x, y** არის **M**-ის კოორდინატები.

ამრიგად, (9.6) განსაზღვრავს ინტეგრალური მრუდის ყოველ წერტილში გავლებული მხების მიმართულებას.

თუ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნში ფიგურირებს მუდმივი **C**, მაშინ, მას განტოლების *ზოგადი ამონახსნი* ეწოდება. ანალოგიურად, (9.6)-ის ამონახსნს, რომელიც შეიცავს **C**-ს,

$$y=\varphi(x,C), \qquad (9.7)$$

ეწოდება დიფერენციალური განტოლების *ზოგადი ამონახსნი.* ზოგჯერ ასეთ ამონახსნს აქვს არაცხადი სახე $\Phi(x,y,C)=0$, ან $\psi(x,y)=C$. ამ შემთხვევაში $\Phi(x,y,C)=0$ ეწოდება (9.6)-ის *ზოგადი ინტეგრალი.*

ამოვხსნათ, ანუ *გავაინტეგრალოთ* მოცემული დიფერენციალური განტოლება - ნიშნავს ვიპოვოთ მისი ზოგადი ამონახსნი ამა თუ იმ ფორმით.

ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან რაიმე ფიქსირებული C-თვის, ეწოდება *კერძო ამონახსნი.* მაგ., $y=x^2$ და $S=\frac{gt^2}{2}$ არის (9.1) და (9.3)-ის კერძო ამონახსნები.

(9.6) განტოლებისათვის სამართლიანია თეორემა, რომელსაც დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ თეორემას უწოდებენ.

თეორემა 9.1. თუ (9.6)-ში $f(x;y)$ და მისი კერძო წარმოებული $f'_y(x,y)$ უწყვეტებია xOy სიბრტყის რაიმე D არეში, რომელიც შეიცავს რაიმე $(x_0;y_0)$ წერტილს, მაშინ, არსებობს ამ განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $y=\varphi(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას, როცა $x=x_0$, $y=y_0$.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ არსებობს და ამავე დროს ერთადერთი ფუნქცია $y=\varphi(x)$, რომლის გრაფიკიც გადის (x_0,y_0)-ზე.

$x=x_0$-ს ეწოდება *საწყისი პირობა.*

საწყისი პირობა გვაძლევს საშუალებას გამოვყოთ ზოგადიდან კერძო ამონახსნი. მართლაც, $y_0=\varphi(x_0,C)$ განტოლებიდან ვპოულობთ $C=C_0$ კონკრეტულ მნიშვნელობას და მაშინ კონკრეტული კერძო ამონახსნი ჩაიწერება $y=\varphi(x,C_0)=\psi(x)$ სახით.

§9.3. განტოლებანი განცალებადი ცვლადებით

(9.6) განტოლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\ \text{ანუ}\ dy=f(x,y)dx.$$

ასეთ განტოლებას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \qquad (9.8)$$

დავუშვათ, რომ $M(x,y)$ და $N(x,y)$ შეიძლება წარმოვიდგინოთ

$$M(x,y)=M_1(x)M_2(y),$$
$$N(x,y)=N_1(x)N_2(y),$$

სახით, სადაც თანამამრავლები დამოკიდებული არიან მხოლოდ თითო ცვლადზე. მაშინ, (9.8) გადაიწერება ასეთი სახით:

$$M_1(x)M_2(y)dx+ \qquad N_1(x)N_2(y)dy=0. \tag{9.9}$$

თუ ამ უკანასკნელს წევრ-წევრად გავყოფთ $M_2(y)N_1(x)$ ნამრავლზე, მივიღებთ

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0. \tag{9.10}$$

(9.10)-ში dx-ის თანამამრავლი მხოლოდ x-ზეა დამოკიდებული, ხოლო dy-ის თანამამრავლი მხოლოდ y-ზე.

(9.10)-ს ეწოდება განტოლება *განცალებული ცვლადებით*, ხოლო (9.9)-ს განტოლება *განცალებადი ცვლადებით.*

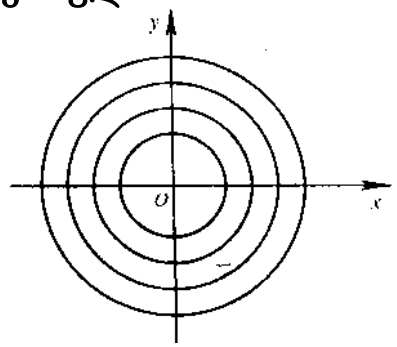
სადაც

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=C \tag{9.11}$$

არის (9.10) და (9.9)-ის *ზოგადი* (ამონახსნი) *ინტეგრალი.*

შენიშვნა. ზოგად შემთხვევაში, როდესაც ჩვენ ვყოფთ $M_2(y)N_1(x)$-ზე გვაქვს საშიშროება დავკარგოთ (9.9) განტოლების ის ფესვები, რომლებიც აქცევენ ამ ნამრავლს ნულად. უშუალო ჩასმით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ $y=b$ ფუნქცია, სადაც b არის $M_2(y)=0$-ის ფესვი, არის ასევე (9.9)-ის ფესვი. ანალოგიურად, ფუნქცია $x=a$, სადაც a არის $N_1(x)=0$-ის ფესვი, არის (9.9)-ის ამონახსნიც.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ $xdx+ydy=0$ განტოლება. ინტეგრებით ვპოულობთ

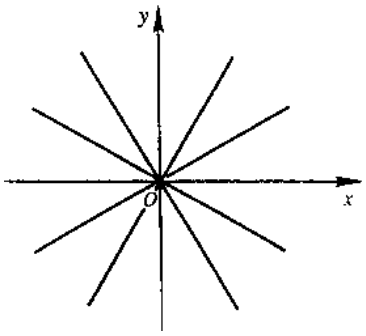


ნახ.9.2

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C_1.$$

რადგანაც მარცხენა მხარე არაუარყოფითია, მაშინ, მარჯვენა მხარეც უნდა იყოს არა-უარყოფითი. თუ აღვნიშნავთ $2C_1=C^2$, გვექ-ნება $x^2+y^2=C^2$. ეს არის კონცენტრირებულ წრე-წირთა ოჯახი, ცენტრით კოორდინატთა სა-თავეში და C რადიუსით (ნახ.9.2).

მაგალითი 2. ამოვხსნათ $xdy=ydx$, განვაცალკევოთ ცვლადები: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$, გავაინტეგრალოთ, გვექნება:



ნახ.9.3

$$\ln|y|=\ln|x|+\ln C,\quad C>0. \qquad (9.12)$$

(9.12)-ის პოტენცირებით, მივიღებთ ზოგად ამონახსნს

$y=x\cdot C$, ანუ $y=C\cdot x$.

ეს კი არის კოორდინატთა სათავეზე გამავალ წრფეთა კლასი (ნახ.9.3).

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $(1+y^2)dx=xydy$ განტოლების კერძო ამონახსნი, თუ $y=1$, როცა $x=2$.

განვაცალკევოთ ცვლადები:

$$\frac{dx}{x}=\frac{y}{1+y^2}dx.$$

გავაინტეგრალოთ

$$\ln|x|=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\ln C.$$

პოტენცირების შემდეგ გვექნება:

$$2\ln|x|=\ln(1+y^2)+2\ln C, \qquad x^2=(1+y^2)\cdot C^2.$$

თუ გამოვიყენებთ საწყის პირობებს, გვექნება

$$4=2C^2, \Rightarrow C^2=2.$$

ამრიგად,

$$x^2=2(1+y^2), \quad y^2=\frac{x^2}{2}-1, \quad y=\sqrt{\frac{x^2}{2}-1}.$$

ეს უკანასკნელი არის მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი $y=1$, $x=2$ საწყისი პირობების გათვალისწინებით.

ამოცანებს საწყისი პირობებით, ხშირად, *კოშის ამოცანებს* უწოდებენ.

§9.4. ერთგვაროვანი განტოლებები

$f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება m რიგის *ერთგვაროვანი* ფუნქცია, თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(tx,ty)=t^m\cdot f(x,y).$$

მაგალითი 1. ფუნქცია

$$f(x,y)=x^2+2y^2-xy$$

არის მეორე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, რადგანაც

$$(tx)^2+2(ty)^2-(tx\cdot ty)=t^2(x^2+2y^2-xy).$$

ერთგვაროვანი ფუნქციის ცნებასთანაა დაკავშირებული ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ცნება. განტოლებას

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (9.13)$$

ეწოდება *პირველი რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება*, თუ $M(x,y)$ და $N(x,y)$ არიან ერთიდაიგივე ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციები.

$y=ux$ ჩასმით, სადაც u არის x-ის ახალი ფუნქცია, (9.13) ადვილად მიიყვანება განტოლებამდე განცალებადი ცვლადებით. შევნიშნოთ, რომ

$$dy=udx+xdu.$$

ზოგჯერ მიზანშეწონილია $y=ux$ ჩასმის ნაცვლად გამოვიყენოთ ჩასმა $x=uy$.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ

$$(y^2-3x^2)dx+2xydy=0,$$

თუ $y=0$, როცა $x=0$.

გამოვიყენოთ ჩასმა $y=ux$, გვაქვს

$$(u^2x^2-3x^2)dx+2x^2u(udx+xdu)=0,$$

საიდანაც

$$3(u^2-1)dx+2xudu=0.$$

განვაცალკევოთ ცვლადები და გავაინტეგრალოთ:

$$\frac{3dx}{x}+\frac{2udu}{u^2-1}=0, \qquad 3\ln x+\ln(u^2-1)=\ln C$$

პოტენცირებით ვღებულობთ:

$$x^3(u^2-1)=C.$$

რადგანაც $u=\frac{y}{x}$, ამიტომ $x^3\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)=0$ და ზოგადი ინტეგრალი $x(y^2-x^2)=C$.

თუ გამოვიყენებთ საწყის პირობებს, მივიღებთ $C=0$. ამიტომ საძებნი კერძო ამონახსნებია

$$y=\pm x.$$

§9.5. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

$$y'+py=q \qquad (9.14)$$

განტოლებას, სადაც $p=p(x)$ და $q=q(x)$ (a, b) ინტერვალში უწყვეტი ფუნქციებია, *პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები* ეწოდება.

(9.14) სახის განტოლების ამოსახსნელად გამოიყენება

$$y=e^{-\int pdx}\left[\int q\cdot e^{\int pdx}dx+C\right]. \qquad (9.15)$$

შენიშვნა. თუ ფორმულა (9.14)-ში $q(x)=0$, მაშინ მას ეწოდება პირველი რიგის *წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება*, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$y'+py=0. \qquad (9.16)$$

(9.15)-დან გამომდინარეობს, რომ (9.16)-ის ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=C\cdot e^{-\int pdx}. \qquad (9.17)$$

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'-\frac{y}{x}=x,$$

აქ $p=-\frac{1}{x}$, $q=x$.

(9.15)-ის თანახმად გვაქვს

$$y=e^{\int\frac{dx}{x}}\left[C+\int x\cdot e^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right]=e^{\ln x}\left[C+\int x\cdot e^{-\ln x}dx\right]=x\left(C+\int dx\right)=Cx+x^2.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ $y'+2xy=0$.

აქ $p=2x$. (9.17)-ის თანახმად გვაქვს

$$y=C\cdot e^{-\int 2xdx}=C\cdot e^{-x^2}.$$

"რა არის ჭეშმარიტება? ჩვენი განსჯის თანხმობა სინამდვილესთან, რაც ბუნებას შეუქმნია".

დენი დიდრო

§9.6. დიფერენციალური განტოლებების გამოყენება ბუნებისმეტყველებაში

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი, როდესაც ბუნებისმეტყველებიდან ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება დიფერენციალურ განტოლებამდე განცალებადი ცვლადებით [8].

ამოცანა 1. (სხეულის გაცივების შესახებ). ჰაერში სხეულის გაცივების სიჩქარე სხეულის ტემპერატურისა და ჰაერის ტემპერატურის სხვაობის პროპორციულია. ჰაერის ტემპერატურა არის 20^0C. ცნობილია, რომ 20 წთ-ის განმავლობაში სხეული ცივდება 100^0-დან 60^0C-მდე. განვსაზღვროთ სხეულის θ ტემპერატურის ცვლილების კანონი t დროზე დამოკიდებულებით.

ამოხსნა: ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს

$$\frac{d\theta}{dt} = k(\theta - 20), \qquad (9.18)$$

სადაც k არის პროპორციულობის კოეფიციენტია. განვაცალკევოთ ცვლადები და გავაინტეგრიროთ, მივიღებთ

$$\ln|\theta-20| = kt + \ln C.$$

პოტენცირების შემდეგ განვსაზღვროთ θ:

$$\theta = 20 + C\cdot e^{kt}. \qquad (9.19)$$

C-ს განსასაზღვრავად გამოვიყენოთ საწყისი პირობა, როცა t=0, მაშინ $\theta = 100^0$C.

$$100 = 20 + C\cdot 1, \qquad C = 80^0\text{C}.$$

ამიტომ $\theta = (20 + 80\cdot e^{kt})^0$C.

პროპორციულობის k კოეფიციენტს განვსაზღვრავთ შემდეგი დამატებითი პირობებიდან: როცა $t=20$, $\theta = 60^0$, აქედან,

$$e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}. \qquad (9.20)$$

ამგვარად, საძებნი ფუნქციაა

$$\theta = \left(20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \right)^{0} C. \qquad (9.21)$$

ამოცანა 2. (ბაქტერიების გამრავლების სიჩქარის შესახებ). ბაქტერიების გამრავლების სიჩქარე მისი რაოდენობის პროპორციულია. $t=0$ საწყის მომენტში 100 ბაქტერია იყო, ხოლო 3 სთ-ის განმავლობაში მათი რაოდენობა გაორმაგდა. ვიპოვოთ ბაქტერიათა რაოდენობის დამოკიდებულება დროსთან. რამდენჯერ გადიდდება ბაქტერიათა რაოდენობა 9 სთ-ში?

ამოხსნა: ვთქვათ, x არის ბაქტერიათა რაოდენობა მოცემულ მომენტში. მაშინ, პირობის თანახმად

$$\frac{dx}{dt} = kx, \qquad (9.22)$$

k - პროპორციულობის კოეფიციენტია. (9.22)-დან ვღებულობთ

$$x=C\cdot e^{kt}. \qquad (9.23)$$

C-ს განსასაზღვრავად გამოვიყენოთ საწყისი პირობები: $t=0$, $x=100$. მივიღებთ, რომ $C=100$, ე.ი.

$$x=100\cdot e^{kt}.$$

k განვსაზღვროთ დამატებითი პირობებიდან:

$$t=3, \quad x=200, \quad e^{k} = 2^{\frac{1}{3}}.$$

ამგვარად, საძებნი ფუნქცია არის

$$x = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}, \qquad (9.24)$$

საიდანაც, როცა $t=9$, $x=800$.

ამგვარად, 9 სთ-ის განმავლობაში ბაქტერიები გადიდდება 8-ჯერ.

პასუხი: [8 ჯერ.]

ამოცანა 3. (ფერმენტების რაოდენობის გადიდების შესახებ). ლუდის საფუარის კულტურაში მოქმედი ფერმენტის რაოდენობის ზრდის სიჩქარე მისი საწყისი x რაოდენობის პროპორციულია. ფერმენტების საწყისი a რაოდენობა 1 სთ-ის განმავლობაში გაორმაგდება. რამდენჯერ გადიდდება ის 3 სთ-ის შემდეგ?

ამოხსნა: ამოცანის პირობის თანახმად, ამ პროცესის დიფერენციალური განტოლება, მსგავსად ამოცანა 2-ისა, არის $\frac{dx}{dt} = kx$ (k პროპორციულობის კოეფიციენტია) და ზოგადი ამონახსნია $x=C\cdot e^{kt}$.

C-ს განსასაზღვრად გამოვიყენოთ პირობა: $t=0$, $x=a$, საიდანაც $a=C\cdot e^0$, ე.ი. $C=a$.

ამრიგად,

$$x=a\cdot e^{kt}. \qquad (9.25)$$

k ვიპოვოთ დამატებითი პირობებიდან: $t=1$ სთ, $x=2a$, გვაქვს: $2a=a\cdot e^k$,

აქედან $e^k=2$, ამიტომ $x = a(e^k)^t = a\cdot 2^t$, როცა $t = 3$ სთ, $x=a\cdot 2^3=8a$, $x=8a$. ე.ი. 3 სთ-ში ფერმენტი გადიდდება 8-ჯერ.

პასუხი: [8-ჯერ გადიდდება.]

ამოცანა 4. (ხსნარის კონცენტრაციის შესახებ). რეზერვუარში, რომელიც შეიცავს 10 კგ მარილს 100 ლ შენაერთზე, ყოველ წუთში ჩადის 30 ლ წყალი და გამოდის 20 ლ შენაერთი. განვსაზღვროთ, მარილის რა რაოდენობა დარჩება რეზერვუარში t წუთის შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ შენაერთი უცბად აირევა [6].

ამოხსნა: ვთქვათ, x არის მარილის რაოდენობა რეზერვუარში t მომენტში, $-dx$ არის მარილის რაოდენობა, რომელიც გამოდის რეზერვუარიდან dt დროში (ნიშანი "-" განპირობებულია იმით, რომ x არის დროის კლებადი ფუნქცია). ნაერთის მოცულობა რეზერვუარში დროის t მომენტში იქნება

$$v=100+30t-20t=100+10t. \qquad (9.26)$$

ამიტომ, მარილის კონცენტრაცია (ე.ი. მარილის რაოდენობა 1 ლ ნარევში) დროის t მომენტში იქნება

$$\frac{x}{100+10t}.$$

შესაბამისად, დროის მოკლე dt შუალედში მარილის რაოდენობა შემცირდება

$$\frac{x}{100+10t}\cdot 20dt \text{-თი}.$$

აქედან გვაქვს დიფერენციალური განტოლება

$$-dx=\frac{20xdt}{100+10t}. \qquad (9.27)$$

განვაცალკევოთ ცვლადები, ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\ln x = -2\ln(10+t) + \ln C,$$

აქედან

$$x = \frac{C}{(10+t)^2}. \qquad (9.28)$$

როცა $t=0$, $x=10$, მაშინ $C=1000$.

ამგვარად, რეზერვუარში მარილის ცვლილების კანონი, t(წთ) დროზე დამოკიდებული, მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$x = \frac{1000}{(10+t)^2}. \qquad (9.29)$$

შევნიშნოთ, რომ, თუ ვიცით რეზერვუარში დარჩენილი მარილის რაოდენობა, მაშინ, ამ უკანასკნელი ტოლობიდან შეიძლება განვსაზღვროთ რა დრო გავიდა პროცესის დაწყებიდან. ამ იდეაზეა დამყარებული ზღვებისა და ოკეანეების ასაკის განსაზღვრა.

ახლა განვიხილოთ ამოცანები, რომელსაც მივყავართ ერთგვაროვან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებამდე.

ამოცანა 5 (ორგანიზმთა იზოლირებული კოლონიების შესახებ). განვიხილოთ მიკროორგანიზმთა კოლონიები, რომლებიც ბინადრობენ განუსაზღვრელი საკვები რესურსების პირობებში; დავუშვათ, რომ ეს კოლონიები არ ითრგუნება არანაირი სხვა სახეობით. მათი გამრავლებისა და სიკვდილიანობის გამო მათი რიცხვი იცვლება დროის მიხედვით. ვიპოვოთ ამ ცვლილების კანონი [10].

ამოხსნა: ეს დაშვებანი არსებითად არის პირველი ნაბიჯები ცოცხალი ორგანიზმების რეალური კოლონიიდან, რაღაც ხელოვნურ აბსტრაქტულ პოპულაციაზე გადასვლისა. სინამდვილეში ბუნებაში და ლაბორატორიაშიც, შეუძლებელია დაკვირვება ისეთ პოპულაციაზე, რომელიც დიდი ხნის განმავლობაში იცხოვრებდა საკვების განუსაზღვრელი რესურსების პირობებში. მაგრამ, ჩვენ ვიხილავთ არა რეალურ პოპულაციას, არამედ, მის მოდელს. ვთქვათ, $x=x(t)$ არის ცოცხალი ორგანიზმების რაოდენობა t მომენტში, ხოლო $x(t+\Delta t)$ - კი $t+\Delta t$ მომენტში, მაშინ სხვაობა

$$x(t+\Delta t)-x(t)=\Delta x \qquad (9.30)$$

იძლევა $x(t)$ ფუნქციის ნაზრდს t–დან $t+\Delta t$-მდე. რისგან შედგება ეს ნაზრდი?

Δt–ში ყველა ზრდასრული სახეობა, ან, მისი ნაწილი წარმოქმნის შთამომავლობას. ნაწილი შეიძლება დაიღუპოს, ამრიგად,

$$\Delta x=G-H, \qquad (9.31)$$

სადაც G არის Δt-ში დაბადებულთა რიცხვი, ხოლო H - ამ დროის მონაკვეთში დაღუპულთა რიცხვი.

G-ს რაოდენობა დამოკიდებულია Δt-ს სიგრძეზე და "მშობელთა" რაოდენობაზე. ამრიგად,

$$G=\Phi(x, \Delta t), \qquad (9.32)$$

სადაც ეს ფუნქცია იზრდება x-სა და Δt-ს ზრდასთან ერთად და უდრის 0-ს, თუ ამ ცვლადებიდან ერთ-ერთი 0-ის ტოლია.

უბრალო ექსპერიმენტები გვიჩვენებს, რომ Δt ფუნქციაში უნდა შედიოდეს წრფივად, ამიტომ,

$$\Phi(x, \Delta t)=f(x)\cdot\Delta t. \qquad (9.33)$$

f(x) ფუნქციის ხასიათი უფრო რთულია. ჩვენ მხოლოდ ვიცით, რომ ის იზრდება მონოტონურად x-ის ზრდასთან ერთად და ეს დამოკიდებულია გამოსაკვლევ ბიოლოგიურ ინდივიდთა თავისებურებებზე: ამის აღსაწერად შეიძლება შემოვიფარგლოთ შემთხვევით, როცა შთამომავლობის რიცხვი "მშობელთა" რიცხვის პროპორციულია, ე.ი. $f(x)=\alpha x$, სადაც $\alpha=const$. ასეთი დამოკიდებულება გვაქვს უჯრედების დაყოფის შემთხვევაში.

ამრიგად, $G=\alpha x\cdot\Delta t$. ანალოგიურად $H=\beta x\cdot\Delta t$ და შესაბამისად

$$\Delta x=\alpha x\Delta t-\beta x\Delta t,$$

ანუ

$$\Delta x=\gamma x\Delta t, \qquad (9.34)$$

სადაც $\gamma=\alpha-\beta$.

(9.34)-ის ორივე მხარე გავყოთ Δt–ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta t\to 0$.

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\gamma x$, მაგრამ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$, ამიტომ გვაქვს $\frac{dx}{dt}=\gamma x$, ანუ

$$\frac{dx}{dt}-\gamma x=0. \qquad (9.35)$$

(9.35) არის წრფივი დიფერენციალური განტოლება, (იხ.§9.5, 9.17) რომლის ზოგადი ამონახსნის ფორმულის ძალით გვაქვს

$$x=C\cdot e^{\gamma t}. \qquad (9.36)$$

საწყისი პირობები: $t=t_0$ და $x=x(t_0)$, სადაც t_0 არის დაკვირვების დაწყების მომენტი, $x(t_0)=x_0$ საწყის მომენტში ცოცხალი ორგანიზმე-

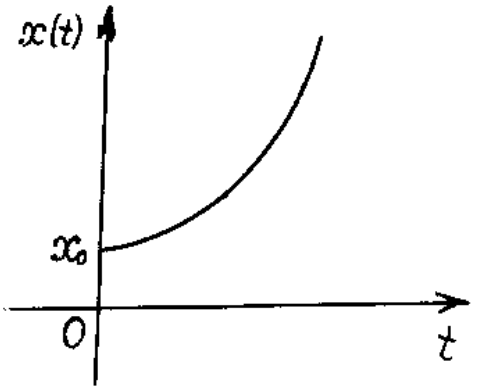
ბის რაოდენობა. თუ გამოვიყენებთ ამ პირობებს, (9.36)-დან მივიღებთ:

$$C = x_0 \cdot e^{-\gamma t_0}. \qquad (9.37)$$

(9.37) ჩავსვათ (9.36)-ში

$$x = x_0 \cdot e^{-\gamma t_0} \cdot e^{\gamma t} = x_0 e^{\gamma (t - t_0)}. \qquad (9.38)$$

(9.38) არის დროის შუალედში ორგანიზმების ცვლილების კანონი.



ნახ.9.4

მაგრამ, მიღებულ კანონს აქვს სავარაუდო ხასიათი, თუ რამდენად შეესაბამება ეს მოდელი რეალობას, ამაზე პასუხს გაგვცემს ექსპერიმენტული შემოწმება. (9.38)-დან გამომდინარეობს, რომ t-ს ზრდასთან ერთად განუსაზღვრელად იზრდება ცოცხალ არსებათა რაოდენობა. თუ ამ ფუნქციას გამოვხატავთ გრაფიკულად, მივიღებთ ასეთ მრუდს (ნახ.9.4).

რა თქმა უნდა, არცერთი ბუნებრივი პოპულაცია არ იზრდება ასეთი მრუდით. დედამიწაზე სიცოცხლის ჩასახვის მომენტიდან გავიდა მილიარდ წელზე მეტი და არც ერთმა პოპულაციამ არ მიაღწია იმ ასტრონომიულ სიდიდეს, რომელსაც წინასწარმეტყველებს (9.38) ფორმულა. ამ ფორმულას აქვს თეორიული მნიშვნელობა, რადგანაც თავიდანვე პოპულაციაზე გავაკეთეთ ისეთი დაშვებანი, რომელიც ბუნებაში პრაქტიკულად არასდროს არ სრულდება. ლაბორატორიაში შესაძლებელია თუნდაც რამდენიმე ხნით შეიქმნას ისეთი პირობები, როცა კოლონია არ ნადგურდება სხვა სახეობით და აქვს განუსაზღვრელი საკვები რესურსები.

ამ მხრივ ძლიერ დამახასიათებელია პენიცილინის ისტორია. როცა აღმოჩენილ იქნა ეს ანტიბიოტიკი, მისი გამომყოფი სოკოები, დაიწყეს პენიცილინის სოკოების გამრავლება საუკეთესო პირობებში. მათ განუსაზღვრელად კვებავდნენ, ყურადღებას აქცევდნენ, რომ არ ყოფილიყვნენ ვიწროდ და, რა თქმა უნდა, იცავდნენ მავნე სახეობებისაგან. ამ პირობებში სავსებით შესაძლებელი იყო სოკოების რაოდენობა შეცვლილიყო (9.38) ფორმულით, და მართლაც, მრავლ-

დებოდნენ რა ექსპონენციალურად, პენიცილინის სოკოებმა მცირე ხანში მთელი მსოფლიო აღჭურვეს ძვირფასი წამლებით.

ამოცანა 6. (სეზონური ზრდის მოდელი). პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)\cos t,$$

სადაც r – დადებითი მუდმივია, შეიძლება განვიხილოთ როგორც სეზონური ზრდის მარტივი მოდელი. $x(t)$ პოპულაციის ზრდის სიჩქარე $\frac{dx}{dt}$ ხდება ხან დადებითი, ხან უარყოფითი, და პოპულაცია ხან იზრდება, ხან კლებულობს. ეს შეიძლება გამოწვეული იყოს ისეთი სეზონური ფაქტორებით, როგორიცაა, საკვების მოპოვება.

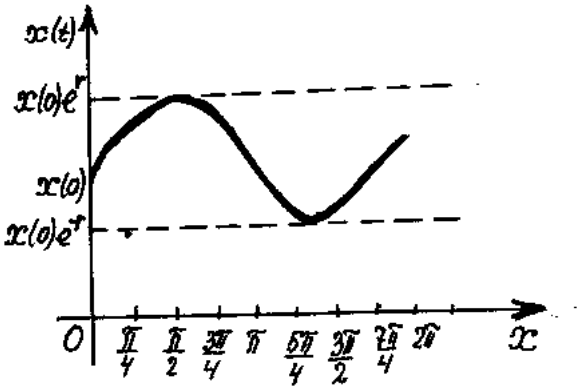
განტოლება (9.39) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{dx}{dt} - (r\cos t)x = 0. \qquad (9.40)$$

(9.17)-ის თანახმად ვღებულობთ:

$$x = Ce^{\int r\cos t dt} = Ce^{r\sin t}.$$

დავუშვათ $t=0$, მივიღებთ $C=x(0)$, ე.ი. t მომენტში პოპულაციის სიდიდე $x=x(0)e^{r\sin t}$. პოპულაციის უდიდესი მნიშვნელობა, $e^r x(0)$-ის ტოლი, მიიღება როცა $\sin t=1$, ანუ როცა $t = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$. მინიმალური მნიშვნელობა, $e^{-r}x(0)$-ის ტოლი, მიიღება როცა $\sin t=-1$, ანუ როცა $t = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$.



ნახ.9.5

ამ მოდელში პოპულაციის მნიშვნელობა იცვლება $e^r x(0)$-დან $e^{-r}x(0)$-მდე 2π პერიოდით. დროის მომენტები $t=0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ შეიძლება ჩავთვალოთ დიდი რაოდენობით საკვების მოპოვების სეზონების შუალედებად (ზაფხულის სეზონები), ხოლო $t=\pi, 3\pi, \ldots$ მომენტები შეესაბამებიან ყველაზე უფრო საკვების უკმარისობის სე-

ზონების შუაგულებს (ზამთრის სეზონი). ერთი წელი შეესაბამება 2π-ს (ნახ.9.5).

განვიხილოთ კიდევ ორი ამოცანა, რომელსაც მივყავართ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებამდე.

ამოცანა 7. (შიგავენური კვება გლუკოზით). გლუკოზის შეყვანა სისხლის მამოძრავებელ სისტემაში მკურნალობის მნიშვნელოვანი პროცედურაა. ამ პროცესის შესასწავლად $\tau=\tau(t)$-თი აღვნიშნოთ დროის t მომენტში პაციენტის სისხლში გლუკოზის რაოდენობა. ვთქვათ, გლუკოზა შეყავთ სისხლში c (გრ/წთ) სიჩქარით. ამასთანავე გლუკოზა იხსნება და სისხლის მოძრაობის სისტემას შორდება სიჩქარით, რომელიც გლუკოზის რაოდენობის პროპორციულია [11].

ამოხსნა: ვთქვათ, c_1 - სიჩქარეა, რითაც გლუკოზა შორდება სისხლის მამოძრავებელ სისტემას და $\tau(0)$ - პაციენტის სისხლში გლუკოზის საწყისი რაოდენობაა. ჭეშმარიტია ტოლობა

$$\tau(t)= \tau(0)+ct-c_1t, \qquad (9.41)$$

გავაწარმოებთ რა ამ ტოლობას, გვექნება

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = c - c_1, \qquad (9.42)$$

მაგრამ დაშვების თანახმად $c_1=k\tau(t)$, სადაც k მუდმივია.

ამგვარად, გვაქვს:

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = c - k\tau(t),$$

ანუ

$$\frac{d\tau(t)}{dt} + k\tau(t) = c. \qquad (9.43)$$

მივიღეთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება, მისი ზოგადი სახეა $y'+py=q$, ხოლო მისი ზოგადი ამონახსენი მოიცემა ფორმულით (9.15) (იხ.§9.5).

ე.ი. მიღებული განტოლება (9.43)-ის ამონახსნია

$$\tau = e^{-\int kdt}\left[C+\int ce^{\int kdt}dt\right]= e^{-\int kdt}\left[C+c\int e^{kt}dt\right]=$$

$$= e^{-kt}\left[C+\frac{c}{k}e^{kt}\right]= C\cdot e^{-kt}+\frac{c}{k}.$$

მუდმივი C შეიძლება გამოვსახოთ სისხლში გლუკოზის საწყისი $\tau(0)$ რაოდენობით. ვღებულობთ $\tau(0)=C+\frac{c}{k}$, აქედან $C=\tau(0)-\frac{c}{k}$.

ერთადერთი ამონახსენი საბოლოოდ ღებულობს სახეს:

$$\tau(t)=\frac{c}{k}+\left[\tau(0)-\frac{c}{k}\right]e^{-kt}. \qquad (9.44)$$

t-ს ზრდასთან ერთად სიდიდე $\tau(t)$ უახლოვდება $\frac{c}{k}$ ზღვარს. ეს არის სისხლში გლუკოზის წონასწორული რაოდენობა.

ამოცანა 8. სიჩქარე v, გზა s და დრო t დამოკიდებულია ფორმულით v·cost+s·sint=1. იპოვეთ მოძრაობის კანონი, თუ t=0, s=2.

ამოხსნა: რადგანაც $v=\frac{ds}{dt}$, მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{ds}{dt}\cos t+s\cdot\sin t=1,$$

ანუ

$$\frac{ds}{dt}+s\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{1}{\cos t}$$

(9.15) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$s=e^{-\int\frac{\sin t}{\cos t}dt}\left[C+\int\frac{1}{\cos t}e^{\int\frac{\sin t}{\cos t}dt}dt\right]=e^{\int\frac{d\cos t}{\cos t}}\left[C+\int\frac{1}{\cos t}e^{-\int\frac{d\cos t}{\cos t}}dt\right]=$$

$$=e^{\ln|\cos t|}\left[C+\int\frac{1}{\cos t}e^{-\ln|\cos t|}dt\right]=\cos t\cdot\left[C+\int\frac{dt}{\cos^2 t}\right]=$$

$$=\cos t\cdot(C+\operatorname{tg}t)=C\cdot\cos t+\sin t.$$

როცა t=0, s=2, მაშინ C=2. ამგვარად, საძებნი მოძრაობის კანონია

$$s=\sin t+2\cos t.$$

"იკითხო და ვერ გაიგო - იგივეა, არ იკითხო...
სიბრძნის დაუფლება გვამაღლებს და
გვაქცევს ძლიერ, დიდსულოვან ადამიანებად".

იან ამოს კომენსკი

§9.7. დიფერენციალური განტოლებები ქიმიურ რეაქციებში

ქიმიური რეაქციების რიგი ტოლია მოლეკულების საერთო რიცხვისა, რომელიც შედის ქიმიური განტოლების მარცხენა მხარეში. რეაქცია **RaB→RaC** პირველი რიგისაა. რეაქციის სიჩქარე არის სიჩქარე **v**, რომლითაც მარცხენა მხარის კომპონენტები გარდაიქმნებიან განტოლების მარჯვენა მხარის კომპონენტთა სისტემაში. მოქმედი მასა, ამ მოქმედი **A** ნივთიერების კონცენტრაცია არის ამ ნივთიერების მოლის რაოდენობა მოცულობის ერთეულში. მოქმედ მასათა კანონის თანახმად, რეაქციის სიჩქარე მოცემულ მომენტში მოქმედი მასის პროპორციულია [11].

ნივთიერების *მოლი* (ანუ, გრამმოლეკულა), არის ამ ნივთიერების გრამების რაოდენობა, რომელიც უდრის მის მოლეკულურ წონას. მაგ., ჟანგბადის 1 მოლი უდრის 16 გრ, წყლის 1 მოლი უდრის 18 გრ.

1. პირველი რიგის ქიმიური რეაქციები.

თუ **a** არის **A** ნივთიერების საწყისი კონცენტრაცია, **x** - ლიტრში მოლების რაოდენობა, რომლებიც მოქმედებენ **t** დროის განმავლობაში რეაქციის დაწყებიდან, მაშინ რეაქციის სიჩქარეა $\frac{dx}{dt}$, ხოლო მოქმედი მასა ამ მომენტისათვის **a-x**. მოქმედ მასათა შესახებ კანონის თანახმად

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x), \qquad (9.45)$$

სადაც **k** - პროპორციულობის კოეფიციენტია (სიჩქარის კონსტანტა), რომელიც დამოკიდებულია ქიმიური პროცესის პირობებზე და საზეზე. (9.45)-ში ცვლადთა განცალკევების შემდეგ $\frac{dx}{a-x}=kdt.$

$$\int \frac{dx}{a-x} = \int k dt,$$

$$-\ln|a-x| + \ln C = kt,$$

ანუ

$$\ln\left|\frac{C}{a-x}\right| = kt.$$

C-ს განსასაზღვრავად გამოვიყენოთ პირობები t=0, x=0, მაშინ $\ln\frac{C}{a}=0$, $\frac{C}{a}=1$ აქედან C=a.

მაშასადამე,

$$\ln\left|\frac{a}{a-x}\right| = kt,$$

საიდანაც

$$\frac{a}{a-x} = e^{kt}$$

და

$$x = a(1-e^{-kt}). \qquad (9.46)$$

ამოცანა 1. რადიოაქტიური ელემენტი RaB 26,7 წთ-ში იშლება ნახევრად და წარმოქმნის რადიოაქტიურ ელემენტს RaC. ვიპოვოთ 0,2 საწყისი რაოდენობის RaB-ის დაშლის დრო.

ამოხსნა: აქ გვაქვს პირველი რიგის რეაქცია: RaB→RaC. ამიტომ რეაქციის დიფერენციალური განტოლება არის

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)$$

და, მაშასადამე

$$\ln\left|\frac{a}{a-x}\right| = kt,$$

საიდანაც

$$t = \frac{1}{k}\ln\left|\frac{a}{a-x}\right|.$$

პროპორციულობის k კოეფიციენტს განვსაზღვრავთ დამატებითი პირობებიდან t=26,7 წთ, $x=\frac{a}{2}$,

$$26{,}7=\frac{1}{k}\ln\frac{a}{a-\frac{a}{2}}=\frac{1}{k}\ln 2,\qquad \text{ანუ}\quad k=\frac{\ln 2}{26{,}7}.$$

ახლა კი საძებნი დრო

$$t=\frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{a}{a-0{,}2a}=\frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{1}{0{,}8}=\frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{5}{4}\approx 8{,}6\ \ (\text{წთ}).$$

პასუხი: [t≈8,6 წთ.]

ამოცანა 2. A ნივთიერება გარდაიქმნება B ნივთიერებად. რეაქციის დაწყებიდან 1 სთ-ის შემდეგ დარჩა A ნივთიერების 44,8 გ, ხოლო 3 სთ-ის შემდეგ 11,2 გ. განვსაზღვროთ A ნივთიერების საწყისი რაოდენობა a და დრო, როდესაც ამ ნივთიერების ნახევარი დარჩება.

ამოხსნა: აქ გვაქვს პირველი რიგის რეაქცია. ამიტომ გვაქვს დიფერენციალური განტოლება (9.45) და შესაბამისად (9.46)

$$x=a(1-e^{-kt}).$$

გამოვიყენოთ დამატებითი პირობები: t=1, x=a - 44,8 და როცა t=3, x=a - 11,2.

ვღებულობთ სისტემას:

$$\begin{cases} a-44{,}8=a(1-e^{-k}),\\ a-11{,}2=a(1-e^{-3k}) \end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases} 44{,}8=a\cdot e^{-k},\\ 11{,}2=a\cdot e^{-3k}. \end{cases}$$

აქედან $e^{-k}=2^{-1}=\frac{1}{2}$ და a=89,6.

ახლა ვპოულობთ საძებნ დროს: (9.46)-ში ვსვამთ $x=\frac{a}{2}$ და $e^{-k}=2^{-t}$-ს.

$$\frac{a}{2}=a(1-2^{-t})\Rightarrow 2^{-t}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2^{-t}=2^{-1}\Rightarrow t=1.$$

პასუხი: [a=89,6; t=1.]

2. მეორე რიგის ქიმიური რეაქციები.

ვთქვათ, **a** და **b** არის **A** და **B** ნივთიერებების საწყისი კონცენტრაციები, **x** - კი **t** მომენტისათვის **A** ნივთიერების მოლების რაოდენობა, რომლებმაც რეაგირება განიცადეს, და შესაბამისად, **B** ნივთიერების მოლების რაოდენობა, რადგანაც **A**-ს ყოველი მოლი უერთდება **B**-ს მოლს, და ამიტომ ორივე ნივთიერების რეაგირებაში შესული მოლების რაოდენობა ტოლია. **t** მომენტში რეაქციის სიჩქარე იქნება $\frac{dx}{dt}$. **A** ნივთიერების მოქმედი მასა არის **(a-x)**-ის ტოლი, ანალოგიურად, **B** ნივთიერებისა იქნება **(b-x)**.

მოქმედ მასათა კანონის თანახმად,

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x), \qquad (9.47)$$

სადაც **k** არის პროპორციულობის კოეფიციენტი. განვაცალკევოთ ცვლადები და ინტეგრებით, მივიღებთ:

$$\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=k\int dt+C.$$

თუ **a=b**, მაშინ,

$$\int\frac{dx}{(x-a)^2}=k\int dt+C \quad \text{და} \quad \frac{1}{a-x}=kt+C.$$

როცა **t=0, x=0**, მაშინ, $\frac{1}{a}=C$, და ამიტომ

$\frac{1}{a-x}=kt+\frac{1}{a}$, აქედან, $x=a-\frac{a}{akt+1}$.

თუ **a≠0**, მაშინ, (§8.3-ში შენიშვნის თანახმად)

$$\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right|+C.$$

ამრიგად, $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right|=kt+C.$

როცა **t=0, x=0**, მაშინ

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a}=C$$

და ამიტომ,

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x}=kt+\frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a},$$

ანუ

$$kt=\frac{1}{b-a}\left[\ln\frac{b-x}{a-x}-\ln\frac{b}{a}\right]=\frac{1}{b-a}\ln\frac{a(b-x)}{b(a-x)}, \qquad (9.48)$$

საიდანაც $\frac{b-x}{a-x}=\frac{b}{a}\cdot e^{kt(b-a)}$ და $x=\frac{ab(e^{kt(b-a)}-1)}{be^{kt(b-a)}-a}$.

ამოცანა 3. ნატრიუმის ჰიდროქსიდით ძმარმჟავა ეთილის ეთერის გასაპვნის რეაქციაში

$CH_3COOC_2H_5$	+	$NaOH$	$\rightarrow$	CH_3COONa	+	C_2H_5OH
ძმარმჟავა ეთერი		ნატრიუმის ჰიდროქსიდი		ნატრიუმის აცეტატი		ეთილის სპირტი

ძმარმჟავა ეთილის ეთერის და ნატრიუმის ჰიდროქსიდის საწყისი კონცენტრაციები შესაბამისად არის $a=0,01$ და $b=0,002$ (მოლ/ლ). 23 წთ-ის შემდეგ ძმარმჟავა ეთილის ეთერში კონცენტრაცია შემცირდა 10%-ით. რა დროში შემცირდება ის 15%-ით?

ამოხსნა: აქ გვაქვს მეორე რიგის რეაქცია. ამიტომ, რეაქციის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე (9.47):

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$$

და როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ (9.48)

$$kt=\frac{1}{b-a}\ln\frac{a(b-x)}{b(a-x)}.$$

k პროპორციულობის კოეფიციენტს განვსაზღვრავთ დამატებითი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t=23$ წთ, $x=0,01\cdot0,1=0,001$,

გვაქვს

$$23\cdot k=\frac{1}{0,002-0,01}\ln\frac{0,01(0,002-0,001)}{0,002(0,01-0,001)},$$

ანუ

$$k=\frac{125}{23}\ln 1,8.$$

(9.48)-ის გამოყენებით ვპოულობთ საძებნ დროს:

$$\frac{125\cdot\ln 1{,}8}{23}\cdot t=\frac{1}{0{,}002-0{,}01}\ln\frac{0{,}01(0{,}002-0{,}0015)}{0{,}002(0{,}01-0{,}0015)},$$

ანუ $t=23\dfrac{\ln 3{,}4}{\ln 1{,}8}\approx 47{,}9$ (წთ).

პასუხი: [t≈47,9 (წთ).]

"ბუნებაში არსებობს მისთვის შინაგანად დამახასიათებელი ფარული ჰარმონია, რომელიც ჩვენს გონებაში მათემატიკის მარტივი კანონების სახით აისახება".

ჰერმან ვაილი

§9.8. ბიოლოგიური პროცესების მათემატიკური მოდელები

განვიხილოთ ზოგიერთი ბიოლოგიური პროცესის მათემატიკური მოდელი. ესენია: ფერხიულსტ-პერლის მოდელი პოპულაციის რაოდენობის დინამიკაში, ინფექციის გადაცემის პროცესი ეპიდემიათა თეორიაში, ჭიანჭველათა სიმკვრივე ტერმინატორის გარეთ, მცენარეთა ფოთლის ზრდა, ხის ზრდა, ინსექტიციდებით მწერების მოწამვლა (მტაცებელი-მსხვერპლი), ინფექციური დაავადებების უმარტივესი მათემატიკური მოდელი.

პოპულაციის რაოდენობრიობის დინამიკა (ე.ი. ცოცხალ ინდივიდთა საერთო რაოდენობის ცვლილება პოპულაციაში დაბადებასა და სიკვდილიანობასთან კავშირში) – არის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი საკითხი პოპულაციის ეკოლოგიაში. ჩვენ უკვე განვიხილეთ ამ საკითხის უმარტივესი ამოცანა. (ამოცანა 5, §9.7) ნაჩვენები იყო, რომ, თუ ჩავთვლით პოპულაციას იზოლირებულად, კვების რესურსების განუსაზღვრელად, ხოლო ახალი თაობის ნაზრდს ზრდასრულ ინდივიდთა რაოდენობის პროპორციულად, მაშინ, პოპულაციის რაოდენობრიობის დინამიკა ხასიათდება დიფერენციალური განტოლებით

$$\frac{dx}{dt}=\gamma x,$$

სადაც $x=x(t)$ არის პოპულაციის რაოდენობა დროის t მომენტში.

ამ განტოლების ამონახსნი არის

$$x = x_0 e^{\gamma(t-t_0)}$$

ფუნქცია, სადაც x_0 არის პოპულაციის რაოდენობა საწყის t_0 მომენტში. როგორც აღინიშნა ამ განტოლებას აქვს აზრი ან თეორიულ ასპექტში, ან, აღწერს ხელოვნურად შექმნილი პოპულაციის დინამიკას.

1. ფერხიულსტ-პერლის მოდელი პოპულაციის რაოდენობის დინამიკაში.

პოპულაციის განვითარების უფრო ზუსტ აღწერას იძლევა ფერხიულსტ-პერლის განტოლება, რომელიც მიღებულია 1845 წ. ის ითვალისწინებს პოპულაციაში შიდასახეობათა კონკურენციას [13]. ეს ფაქტორი, რომელიც პოპულაციის ზრდის სიჩქარეს აფერხებს, აიხსნება ბევრი მიზეზით: ბრძოლა ადგილისა და საკვებისათვის, ინფექციის გავრცელებით და ა.შ. თუ გვინდა გავითვალისწინოთ ეს ფაქტორი, Δx-ის გამოთვლისას $\gamma x \Delta t$ სიდიდეს უნდა გამოვაკლოთ რაიმე სიდიდე $h(x,\Delta t)$

$$\Delta x = \gamma x \Delta t - h(x, \Delta t).$$

ფუნქცია $h(x,\Delta t)$ ბევრი პოპულაციისათვის შეიძლება ავიღოთ შემდეგი სახით

$$h(x,\Delta t)=\delta x^2 \Delta t,$$

სადაც δ - თვითმოწამლვის კოეფიციენტია, (ანუ პოპულაციაში შიდა ბრძოლის). სიდიდე $h(x,\Delta t)$ უჩვენებს პოპულაციის ზრდის სიჩქარის დაქვეითებას შიგასახეობათა კონკურენციის გამო. მაგრამ, კონკურენცია მით მეტია, რაც მეტია ინდივიდთა შორის შეხვედრები, ხოლო შეხვედრათა რიცხვი პროპორციულია $x \cdot x$ ნამრავლის, ე.ი. x^2-ის ამგვარად,

$$\Delta x = \gamma x \Delta t - \delta x^2 \Delta t, \qquad (9.49)$$

(9.49) გავყოთ წევრ-წევრად Δt-ზე:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \gamma x - \delta x^2,$$

გადავიდეთ ზღვარზე $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (\gamma x - \delta x^2)$,

ვღებულობთ

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - \delta x^2. \qquad (9.50)$$

(9.50) არის *ფერხიულსტ-პერლის განტოლება.*

ამ განტოლებას ხშირად წერენ შემდეგი სახით: მარჯვენა ნაწილიდან ფრჩხილებს გარეთ გავიტანოთ γx, მივიღებთ:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x\left(1 - \frac{\delta}{\gamma}x\right),$$

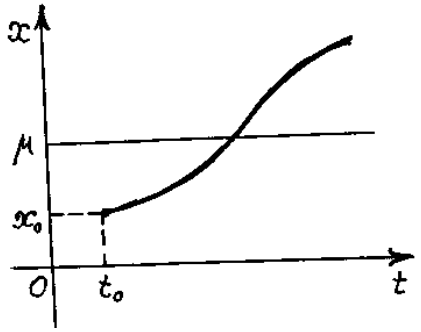
ანუ

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \cdot \frac{\frac{\gamma}{\delta} - x}{\frac{\gamma}{\delta}}. \qquad (9.51)$$

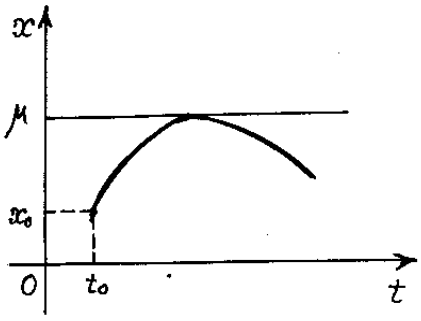
შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\frac{\gamma}{\delta} = \mu$, (9.51) გადაიწერება ასე:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \cdot \frac{\mu - x}{\mu}. \qquad (9.52)$$

μ სიდიდეს აქვს გარკვეული ბიოლოგიური აზრი. ახლა აღვნიშნოთ, რომ თუ $x_0<\mu$, მაშინ, დროის ნებისმიერი მომენტისათვის $t>t_0$, $x(t)<\mu$ (9.52)-დან ჩანს, რომ სანამ $x(t)<\mu$, წარმოებული $\frac{dx}{dt} > 0$, და შესაბამისად $x(t)$ იზრდება. აქედან გამომდინარეობს, რომ როცა იზრდება $x(t)=\mu$ ან მისი გრაფიკი კვეთს $x=\mu$ წრფეს (იხ. ნახ.9.6), ან ეხება ამ წრფეს (იხ.ნახ.9.7).



ნახ. 9.6



ნახ. 9.7

პირველ შემთხვევაში გადაკვეთის წერტილის მარჯვნივ გვაქვს, რომ $x(t)>\mu$ და $x'(t)>0$. ეს ეწინააღმდეგება (9.52)-ს. მე-2 შემთხვევაში მხების წერტილის მარჯვნივ $x(t)<\mu$ და $x'(t)<0$, ესეც ეწინააღმდეგება (9.52)-ს.

განვაცალკევოთ ცვლადები, მივიღებთ:

$$\frac{\mu dx}{x(\mu - x)} = \gamma dt,$$

საიდანაც

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\mu - x}\right)dx = \gamma dt.$$

თუ ჩავთვლით, რომ $x_0<\mu$, ინტეგრების შემდეგ გვექნება:

$$\ln|x| - \ln|\mu - x| = \gamma t + \ln C,$$

პოტენცირებით მივიღებთ:

$$\ln\left|\frac{x}{\mu - x}\right| = \gamma t + \ln C.$$

$$\frac{x}{\mu - x} = e^{\gamma t + \ln C} = e^{\gamma t} \cdot e^{\ln C} = e^{\gamma t} \cdot C = C \cdot e^{\gamma t}. \qquad (9.53)$$

ვთქვათ, სიმარტივისათვის $t_0=0$ და $x(0)=x_0<\mu$. თუ ჩავსვამთ ამ საწყის პირობებს (9.53)-ში, მივიღებთ

$$\frac{x_0}{\mu - x_0} = C \cdot e^{\gamma \cdot 0} = C \cdot 1,$$

ე.ი.

$$C = \frac{x_0}{\mu - x_0}.$$

C-ს ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (9.53)-ში, მივიღებთ:

$$x = \frac{x_0 \mu e^{\gamma t}}{\mu - x_0 + x_0 e^{\gamma t}}. \qquad (9.54)$$

ეს არის საძებნი კანონი (ფერხიულსტ-პერლის მოდელი).

გამოვიკვლიოთ ამ ფუნქციის გრაფიკი. (9.52)-დან ჩანს, რომ რადგანაც $x<\mu$, მაშინ $x'(t)$ ყველგან დადებითია. (9.52)-ის დიფერენცირებით ვღებულობთ:

$$x''(t) = \left(\gamma\frac{\mu - x}{\mu} - \frac{x\gamma}{\mu}\right)x'(t) = \gamma\left(1 - \frac{2x}{\mu}\right)x'(t).$$

ჩავსვათ ამაში x-ის გამოსახულება (9.54)-დან, მივიღებთ:

$$x''(t) = \gamma\left(\frac{\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t}}{\mu - x_0 + x_0 e^{\gamma t}}\right)x'(t), \qquad (9.55)$$

აქედან ჩანს, რომ როცა $\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t}>0$, მაშინ $x''(t)>0$, და, შესაბამისად $x(t)$ ფუნქცია ჩაზნექილია; როცა $\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t}<0$, მაშინ

$x''(t)<0$ და $x(t)$ ამოზნექილია. პირველი უტოლობიდან ვპოულობთ ჩაზნექილობის შუალედს:

$$\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t} > 0, \text{ ე.ი. } e^{\gamma t} < \frac{\mu - x_0}{x_0}.$$

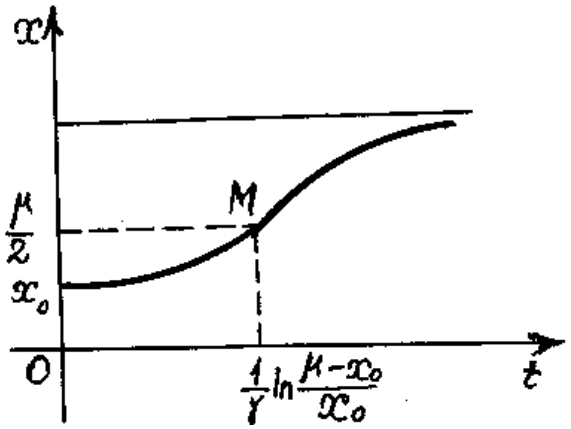
ამიტომ ჩაზნექილობის შუალედი განისაზღვრება

$$0 < t < \frac{1}{\gamma} \ln \left| \frac{\mu - x_0}{x_0} \right|.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება ამოზნექილობის შუალედი

$$\frac{1}{\gamma} \ln \left| \frac{\mu - x_0}{x_0} \right| < t < +\infty.$$

რადგანაც, როცა $x''(t)=0$, $t = \frac{1}{\gamma} \ln \left| \frac{\mu - x_0}{x_0} \right|$ და $x = \frac{\mu}{2}$, მაშინ წერტილი $M\left(\frac{1}{\gamma} \ln \left| \frac{\mu - x_0}{x_0} \right|; \frac{\mu}{2} \right)$ არის გადაღუნვის წერტილი.



ნახ. 9.8

რადგანაც $x'(t)>0$, ნებისმიერი t-თვის, ამიტომ $x(t)$-ს არსად არა აქვს ექსტრემუმი. და ბოლოს (9.54)-დან $x<\mu$-ს გათვალისწინებით ჩანს, რომ $x(t) \to \mu$ ქვევიდან, როცა $t \to +\infty$, ხოლო საწყისი პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ როცა $t=0$, $x(0)=x_0$. ყველაფერი ეს საკმარისია, რომ წარმოვიდგინოთ მრუდის სახე (ნახ.9.8).

2. დიფერენციალური განტოლებები ეპიდემიათა თეორიაში.

ჩვენ შემოვიფარგლებით უმარტივესი ეპიდემიის განხილვით. დავუშვათ, რომ განსახილველ ავადმყოფობას აქვს ხანგრძლივი პერიოდი, ასე რომ, ინფექციის გადაცემის პროცესი ბევრად უფრო სწრაფია, ვიდრე, ავადმყოფობის მიმდინარეობა. ჩვენ გვაინტერესებს ინფექციის გადაცემის პროცესი და ვუშვებთ, რომ დაავადებული ინდივიდები არ გადიან კოლონიიდან და ინფექციას გადასცემენ ჯანმრთელ ინდივიდებს [12].

ვთქვათ, a არის ინფიცირებულთა რაოდენობა, ხოლო n – არაინფიცირებულთა რაოდენობა საწყისი მომენტისათვის. x=x(t) არის არაინფიცირებულთა რაოდენობა t მომენტისათვის, ხოლო y=y(t) ინფიცირებულთა რაოდენობა t მომენტისათვის. ყველა მომენტისათვის $0 \le t \le T^*$ შუალედიდან ადგილი აქვს ტოლობას

$$x+y=n+a, \qquad (9.56)$$

რადგანაც ინფექცია გადაეცემა ინფიცირებულთა და არაინფიცირებულთა შეხვედრის დროს, ამიტომ არაინფიცირებულთა რაოდენობა კლებულობს შეხვედრათა რაოდენობის პროპორციულად, ე.ი. xy ნამრავლის პროპორციულად. ამიტომ, არაინფიცირებულთა რაოდენობის შემცირების სიჩქარე ტოლია:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy, \qquad (9.57)$$

სადაც β - არის პროპორციულობის კოეფიციენტი. განვსაზღვროთ (9.56)-დან y-ის მნიშვნელობა და ჩავსვათ (9.57)-ში, მივიღებთ:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(n+a-x). \qquad (9.58)$$

განვაცალკევოთ ცვლადები

$$\frac{dx}{x(n+a-x)} = -\beta dt,$$

საიდანაც

$$\frac{dx}{x} + \frac{dx}{n-x+a} = -\beta(n+a)dt.$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\ln|x| - \ln|n-x+a| = -\beta(n+a)t + \ln C,$$

$$\frac{x}{n-x+a} = C \cdot e^{-\beta(n+a)t}.$$

C-ს განსასაზღვრავად გამოვიყენოთ საწყისი პირობები: როცა t=0, არაინფიცირებულთა რაოდენობა არის n, ე.ი. როცა t=0, x=n: გვაქვს:

$C = \frac{n}{a}$, ე.ი. $\frac{x}{n-x+a} = \frac{n}{a} \cdot e^{-\beta(n+a)t}$,

განვსაზღვროთ აქედან x, საბოლოოდ მივიღებთ:

---

* [O; T] შუალედი უნდა იყოს ერთი თაობის სიცოცხლის ხანგრძლივობაზე ნაკლები

$$x = \frac{n(n+a)}{n + a \cdot e^{\beta(n+a)t}}. \qquad (9.59)$$

(9.59) გვაძლევს x-ის კლების კანონს დროის ცვლილებასთან დაკავშირებით.

3. ჭიანჭველათა სიმკვრივე ტერმინატორის (ჭიანჭველათა ბუდის) გარეთ.

კარგადაა ცნობილი, რომ ჭიანჭველები მოპოვებულ საკვებს, ან საშენ მასალას ადგილზე არ მოიხმარენ, არამედ მიაქვთ ტერმინატორში (ბუდეში). ამიტომ, ტერმინატორის ახლოს ჭიანჭველები ყოველთვის მეტია, ვიდრე მისგან შორის.

სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ, რომ ტერმინატორის ფუძე არის a რადიუსიანი წრე, ხოლო მის გარეთ სივრცე ერთგვაროვანია, ამიტომ, ჭიანჭველათა სიმკვრივე r რადიუსიან წრეში იქნება ერთი და იგივე (ნახ.9.9).

სიმარტივისათვის განვიხილოთ სტაციონარული შემთხვევა, ე.ი. ისეთი, რომ დროთა განმავლობაში სიმკვრივე არ იცვლება [10].

განვიხილოთ ორი მეზობელი წერტილი, რომელიც ერთ სხივზე მდებარეობს: A წერტილი, რომელიც ტერმინატორის ცენტრიდან r მანძილითაა დაშორებული და წერტილი B, რომელიც მდებარეობს $r+\Delta r$ მანძილზე (ნახ.9.9). ვთქვათ, A წერტილის მიდამოებში ჭიანჭველათა რიცხვი არის $Q(r)$, ხოლო B წერტილის მიდამოში – $Q(r+\Delta r)$. საკვების ძებნაში ჭიანჭველები დარბიან სხვადასხვა მიმართულებით, მაგრამ, არც ერთ მიმართულებას არა აქვს უპირატესობა, რადგანაც გარემო ერთგვაროვანია. თუ A-ს მიდამოდან B-ს მიმართულებით გავიდა $\alpha \cdot Q(r)$, $\alpha<1$ ჭიანჭველა, მაშინ, B-დან A-კენ გავა $\alpha \cdot Q(r+\Delta r)$ ჭიანჭველა. აქ მნიშვნელოვანია ის, რომ ორივე შემთხვევაში α არის ერთი და იგივე.

თუმცა, ყველა ჭიანჭველა, რომელიც გავიდა A-დან, არ მივა B-მდე. მათგან ნაწილი, რომელიც გზაში იპოვის საკვებს, დაბრუნდება ტერმინატორში. ცხადია, რომ ეს ნაწილი მით მეტი იქნება, რაც მეტია Δr. ამგვარად, ჭიანჭველათა რაოდენობა, რომელიც გავიდა A-დან B-ს მიმართულებით და მივიდა B-მდე, გამოისახება შემდეგი სხვაობით

$$Q_{AB} = \alpha Q(r) - \beta\alpha Q(r)\Delta r,$$

სადაც β არის პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომელიც განსაზღვრავს დაბრუნებულთა წილს. რადგანაც სივრცე ერთგვაროვნად გვაქვს მიღებული, ამიტომ, β იქნება მუდმივი.

რაც შეეხება $\alpha\cdot Q(r+\Delta r)$ სიდიდეს, ამ შემთხვევით რაოდენობას მიემატება ის ჭიანჭველები, რომლებიც გავიდნენ **B**-ს მიდამოდან არა **A**-კენ, მაგრამ, გზაში რამე იპოვეს, შეიცვალეს მიმართულება და წავიდნენ ტერმინატორისაკენ. ასეთი ჭიანჭველები, რომლებმაც ვერ მოასწრეს გასვლა **OMN** სექტორიდან, ასევე მოხვდებიან **A**-ს მიდამოებში, და ასეთები იქნება მით მეტი, რაც მეტია Δr. ამგვარად, იმ ჭიანჭველათა რიცხვი, რომლებიც გამოვიდნენ **B**-ს მიდამოდან და მოხვდნენ **A**-ს მიდამოში, გამოისახება ჯამით:

$$Q_{BA}=\alpha Q(r+\Delta r)+\beta_1\alpha Q(r+\Delta r)\Delta r,$$

სადაც β_1 - არის პროპორციულობის კოეფიციენტი, განსაზღვრავს ჭიანჭველათა იმ ნაწილს, რომლებმაც შეიცვალეს მიმართულება ტერმინატორის მიმართულებით.

რადგანაც ჩვენ განვიხილავთ სტაციონალურ შემთხვევას, ამიტომ უნდა სრულდებოდეს ტოლობა $Q_{AB}=Q_{BA}$, ე.ი.

$$\alpha Q(r)-\beta\,\alpha Q(r)\Delta r=\alpha Q(r+\Delta r)+\beta_1\alpha Q(r+\Delta r)\Delta r.$$

ეს არის ძირითადი საბალანსო თანაფარდობა. აქედან მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას. რადგანაც ჭიანჭველათა რაოდენობა ტოლია სიმკვრივისა და ფართის ნამრავლის, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$n(r)S_A+\beta n(r)S_A\Delta r=n(r+\Delta r)S_B+\beta_1 n(r+\Delta r)S_B\Delta r$$

(9.60)

სადაც $n(r)$ და $n(r+\Delta r)$ არის **A** და **B**-ს მიდამოებში სიმკვრივე; S_A და S_B ამ მიდამოების ფართობი. პოლარულ კოორდინატებში ეს ფართობები ტოლი იქნება

$$S_A\approx hr\Delta\Phi;\quad S_B\approx h(r+\Delta r)\Delta\Phi.$$

თუ ამ გამოსახულებებს ჩავსვამთ (9.60) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$n(r)hr\Delta\Phi-\beta n(r)hr\Delta\Phi\Delta r=$$

$$=n(r+\Delta r)\cdot h(r+\Delta r)\Delta\Phi+\beta_1 n(r+\Delta r)h(r+\Delta r)\Delta\Phi\Delta r.$$

თუ ამ უკანასკნელს შევკვეცავთ $h\Delta\Phi$-ზე და დავაჯგუფებთ შესაკრებებს, მივიღებთ:

$$(r+\Delta r)n(r+\Delta r)-r\cdot n(r)=-\left[\beta_1 n(r+\Delta r)(r+\Delta r)+\beta n(r)r\right]\Delta r.$$

გავყოთ ეს ტოლობა Δr-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta r \to 0$, მივიღებთ:

$$\frac{d}{dr}(r \cdot n(r)) = -(\beta_1 + \beta) \cdot rn(r). \qquad (9.61)$$

აღვნიშნოთ $\beta_1+\beta=\gamma$ და გადავწეროთ (9.61)

$$\frac{d[r \cdot n(r)]}{r \cdot n(r)} = -\gamma \cdot dr \qquad (9.62)$$

სახით. ჩვენ მივიღეთ დიფერენციალური განტოლება $n(r)$ სიმკვრივისათვის.

ვთქვათ, $n(a)$ არის ჭიანჭველათა სიმკვრივე ტერმინატორის საზღვარზე ($r=a$). (9.62)-ის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\ln|r \cdot n(r)| = -\gamma r + C. \qquad (9.63)$$

თუ გამოვიყენებთ საწყის პირობას ($r=a$), მივიღებთ:

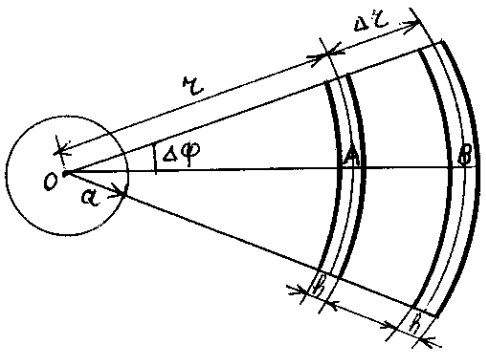
$C = \ln|a \cdot n(a)| + \gamma a$. ჩავსვათ ეს (9.63)-ში, მივიღებთ:

$$\ln\frac{r \cdot n(r)}{a \cdot n(a)} = -\gamma(r - a),$$

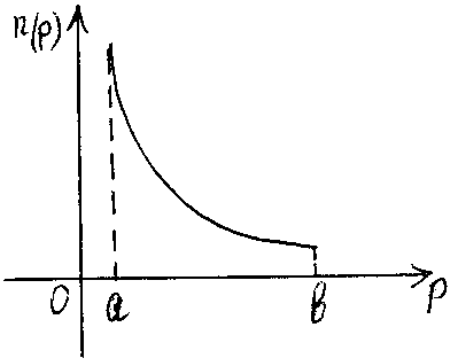
საიდანაც

$$n(r) = \frac{a}{r} n(a) e^{-\gamma(r-a)}. \qquad (9.64)$$

(9.64) არის საძებნი მრუდის განტოლება. მისი გრაფიკის აგება ადვილია, თუ ვიცით a, $n(a)$ და γ (ნახ.9.10). ეს მრუდი კლებადია r-ის ზრდასთან ერთად. a და $n(a)$ სიდიდეებს ადვილად განსაზღვრავენ ექსპერიმენტით, γ-ს გამოთვლა კი უფრო ძნელია.



ნახ. 9.9



ნახ. 9.10

(9.64) სამართლიანია ნებისმიერი $r>a$-სათვის და კერძოდ $r=b$. ჩავსვათ (9.64)-ში r-b, მივიღებთ:

$$n(b) = \frac{a}{b} n(a) e^{-\gamma(b-a)},$$

საიდანაც

$$\gamma = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{a \cdot n(a)}{b \cdot n(b)} \right|. \qquad (9.65)$$

n(b)–ს ისევე ვიპოვით ექსპერიმენტით, როგორც **n(a)**-ს, შემდეგ **γ**-ს მნიშვნელობას ჩავსვამთ (9.64)-ში და მივიღებთ **n(r)** სიმკვრივის კონკრეტულ მრუდს.

4. მცენარეთა ფოთლების ზრდა.

ვიქტორიის ახალგაზრდა ფოთლის ფართობის ზრდის სიჩქარე, რომელსაც აქვს წრის ფორმა, ფოთლის წრეწირის სიგრძისა და მასზე დაცემული მზის სხივების რაოდენობის პროპორციულია. ეს უკანასკნელი კი პროპორციულია ფოთლის ფართობისა და იმ კუთხის კოსინუსის, რომელსაც ადგენს სხივის მიმართულება ფოთლის პერპენდიკულართან. ვიპოვოთ დამოკიდებულება ფოთლის **S** ფართობისა და **t** დროს შორის, თუ დილის 6 სთ-ზე ეს ფართობი უდრიდა 1600 სმ^2, ხოლო იმავე დღის 18 სთ-ზე 2500 სმ^2-ს.

მივიღოთ, რომ კუთხე მზის სხივსა და ვერტიკალს შორის 6 სთ-ზე და 18 სთ-ზე (ნიშნის გარეშე) იყო 90^0, ხოლო შუადღეზე 0^0.

ვთქვათ, **t** არის დრო ათვლილი შუაღამიდან. თუ **S** არის ფოთლის ცვლადი ფართი, მაშინ ფოთლის ზრდის სიჩქარე იქნება

$$\frac{dS}{dt} = k_1 2\pi r Q.$$

სადაც $2\pi r$ წრეწირის სიგრძეა, **Q** - მზის სხივების რაოდენობა, k_1 - პროპორციულობის კოეფიციენტი.

ფოთლის ფართი $S=\pi r^2$, საიდანაც

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

მაშინ:

$$\frac{dS}{dt} = k_1 \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \sqrt{S} Q. \qquad (9.66)$$

პირობის თანახმად:

$$Q = k_2 S \cos\alpha, \qquad (9.67)$$

სადაც α - კუთხეა მზის სხივის მიმართულებასა და ვერტიკალს შორის, k_2 - პროპორციულობის კოეფიციენტი. კუთხე α არის t არგუმენტის ზრდადი წრფივი ფუნქცია.

$$\alpha = k_3 t + b.$$

k_3 და b პარამეტრებს ვპოულობთ დამატებითი პირობებიდან:

როცა $t=6$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; როცა $t=12$, $\alpha = 0$; როცა $t=18$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

ორი უკანასკნელი პირობიდან გვაქვს:

$$\begin{cases} 0 = 12k_3 + b, \\ \frac{\pi}{2} = 18k_3 + b. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ:

$k_3 = \frac{\pi}{12}$, $b=-\pi$. შესაბამისად, $\alpha = \frac{\pi}{12}(t-12)$.

α-ს მნიშვნელობა ჩავსვათ (9.67)-ში:

$$Q = k_2 S \cos\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right].$$

ჩავსვათ ეს (9.66)-ში, მივიღებთ:

$$\frac{dS}{dt} = k_1 k_2 \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} S\sqrt{S} \cos\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right].$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $k=k_1 \cdot k_2$, შემდეგ განვაცალკევოთ ცვლადები

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}} = k\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \cos\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right] dt.$$

ამ უკანასკნელის ინტეგრებით, მივიღებთ:

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{24k}{\sqrt{\pi}} \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right] + C. \qquad (9.68)$$

საწყისი პირობები, როცა $t=6$, $S=1600$ და როცა $t=18$, $S=2500$. აქედან:

$$\begin{cases} -\frac{1}{20} = -\frac{24k}{\sqrt{\pi}} + C, \\ -\frac{1}{25} = \frac{24k}{\sqrt{\pi}} + C. \end{cases}$$

თუ ამოვხსნით ამ სისტემას, მივიღებთ:

$$C = -\frac{9}{200}, \quad k = \frac{\sqrt{\pi}}{24 \cdot 200}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (9.68)-ში, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$S = \frac{160000}{\left\{9 - \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right]\right\}^2}. \qquad (9.69)$$

5. ხის ზრდა.

რატომ არის, რომ ყველაზე ხელსაყრელ პირობებშიც ხის სიმაღლე არ აღემატება გარკვეულ ზღვარს? რატომ არის რომ ყველა ხე, განურჩევლად ბუნებისა, ვერ იზრდება სწრაფად, შემდეგ კი ზრდის სიჩქარე ნელდება, მანამ, სანამ საბოლოოდ სულ არ შეწყდება?

ინტუიტიურად ცხადია, რომ მერქნის ზრდასთან ერთად ერთი მხრივ ხდება ენერგიის მოზღვავება ფოტოსინთეზის წყალობით, ხოლო, მეორეს მხრივ, იზრდება სიძნელეები, რომლებიც დაკავშირებულია, მაგალითად, საკვები ნივთიერებების ტრანსპორტირებასთან, და შესაბამისად, იზრდება მსგავს საჭიროებებზე ენერგიის ხარჯვა. ბოლოს და ბოლოს, მიღებული ენერგია ვერ ფარავს დანახარჯს და ხე წყვეტს ზრდას.

ამ მოსაზრებებს ეყრდნობა მათემატიკური მოდელის აგება.

1. ზრდის პროცესში მცენარე ინარჩუნებს გეომეტრიულ მსგავსებას. ეს ნიშნავს, რომ მომწიფებული მცენარე სიმაღლეში ზრდასთან ერთად ინარჩუნებს გეომეტრიულ ზომათა თანაფარდობას, მაგ., სიმაღლის შეფარდება დიამეტრთან და სხვა.

2. თავისუფალ ენერგიას მცენარე იღებს მხოლოდ ფოტოსინთეზით.

3. თავისუფალი ენერგია იხარჯება ფოტოსინთეზში, ცოცხალი ქსოვილის აგებაში (სიმაღლე) და ნიადაგიდან სითხის ატანაში, ამოტუმბვაში.

4. საშუალოდ დროის დიდ მონაკვეთში მცენარე ღებულობს მუდმივი რაოდენობის სინათლეს ზედაპირის ერთეულზე და შეუძლია შთანთქას აუცილებელი ნივთიერებები განუსაზღვრელი მარაგიდან.

შევადგინოთ ენერგიის ბალანსის განტოლება.

ვთქვათ, x არის მცენარის წრფივი ზომა. ეს ნიშნავს, რომ სიმაღლეა x, ფოთლების ზედაპირების ფართობი x^2-ით იზომება, და ბოლოს, მცენარის მოცულობა გამოისახება x^3 სიდიდით. ცხადია x იცვლება დროში, ე.ი. $x=x(t)$. ვთქვათ $x(t_0)=0$. შევეცადოთ ყველა სიდიდე, რომელიც შედის ბალანსის განტოლებაში, გამოვსახოთ x-ით.

ჯერ ვიპოვოთ თავისუფალი ენერგიის E–ს გამოსახვა. ეს ენერგია წარმოიშობა ფოტოსინთეზის მეშვეობით მცენარის მწვანე ნაწილში, და ის მით მეტია, რაც მეტია მწვანე ზედაპირის ფართობი, ამგვარად, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ E არის x^2-ის პროპორციული: $E=\alpha x^2$, სადაც α - პროპორციულობის კოეფიციენტია (ის დამოკიდებულია ფოთლების ფორმაზე, ზომაზე და ფოტოსინთეზის ინტენსივობაზე).

ენერგიის სხვა წყარო, ჩვენი დაშვებით არ არის, და ჩვენ უნდა დავაკვირდეთ, სად იხარჯება ეს ენერგია. ენერგია პირველ რიგში იხარჯება თვით ფოტოსინთეზის პროცესში. ეს ხარჯვა ასევე პროპორციულია x^2-ის, ეს შეიძლება ჩავწეროთ βx^2-ის სახით, სადაც β პროპორციულობის კოეფიციენტია და $\beta<\alpha$.

შემდგომ ენერგია იხარჯება მცენარის ყველა ნაწილში საკვები სითხის ტრანსპორტირებაში. ეს ხარჯი მით მეტი იქნება, რაც დიდია მცენარე. გარდა ამისა, ეს ხარჯი დამოკიდებულია სიმძიმის ძალის დაძლევაზე. ის მით მეტი იქნება, რაც უფრო მაღალია მცენარე. ამგვარად, ეს ხარჯი პროპორციულია როგორც მოცულობის x^3, ასევე სიმაღლის x, ე.ი. ის პროპორციულია მათი ნამრავლის $\gamma x^3 \cdot x$.

და ბოლოს, ენერგია იხარჯება მცენარის მასის გადიდებაში (ე.ი. ზრდაში). ეს ხარჯი პროპორციულია ზრდის სიჩქარის, ე.ი. $m=\rho x^3$ მასის წარმოებულისა დროით (ρ - მცენარის საშუალო სიმკვრივე, x^3 – მოცულობა). ამგვარად, ეს დანახარჯი იქნება $\delta\dfrac{d(\rho x^3)}{dt}$, δ - პროპორციულობის კოეფიციენტია).

ენერგიის მუდმივობის კანონის ძალით

$$E = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta\frac{d(\rho x^3)}{dt},$$

ანუ

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + 3\delta\rho x^2\frac{dx}{dt}. \qquad (9.70)$$

(9.70) არის *ბალანსის საძებნი განტოლება.*

(9.70) გავყოთ $3\delta\rho x^2$-ზე და შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\frac{\alpha-\beta}{3\delta\rho}=a,\quad \frac{\gamma}{3\delta\rho}=b,$$

მივიღებთ:

$$\frac{dx}{dt}=a-bx^2,\quad a>0,\ b>0. \tag{9.71}$$

რადგანაც ხე იზრდება, $\frac{dx}{dt}>0$, ეს ნიშნავს, რომ $a-bx^2>0$, ე.ი. $x^2<\frac{a}{b}$. ამიტომ (9.71) გადავწეროთ ასე:

$$-\frac{dx}{b\left(x^2-\frac{a}{b}\right)}=dt,$$

გავაინტეგრალოთ, მივიღებთ:

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}+x}{\sqrt{\frac{a}{b}}-x}\right|=t+C.$$

გამოვიყენოთ საწყისი პირობა: $x(t_0)=0$, მივიღებთ $C=-t_0$, და ე.ი.

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}+x}{\sqrt{\frac{a}{b}}-x}\right|=t-t_0. \tag{9.72}$$

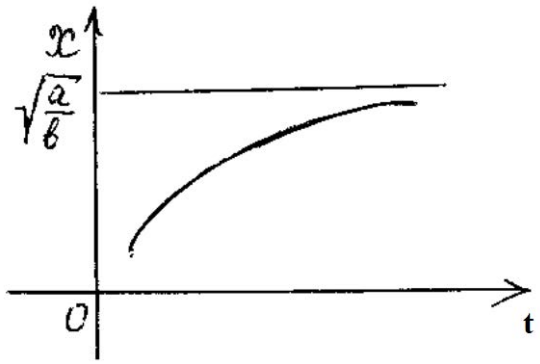
ამოვხსნათ x-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$x=\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{-1+e^{2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1+e^{2\sqrt{ab}(t-t_0)}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{1-e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1+e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}. \tag{9.73}$$

(9.73) გვაძლევს ხის ზრდის კანონს. თუ ვიცით a, b და t_0 (ეს სიდიდეები დამოკიდებულია ხის ჯიშზე), მაშინ (9.73) ფორმულით შეიძლება ვიანგარიშოთ ხის ზრდის საშუალო სიდიდე, რომელიც დამოკიდებულია ხის ჯიშზე და ასაკზე (ე.ი. t დროზე).

(9.73) გამოვიკვლიოთ, ვიცით, რომ $\frac{dx}{dt} > 0$. (9.71)-ის დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2bx. \qquad (9.74)$$



ნახ. 9.11

რადგანაც, როცა $t>t_0$, $x(t)>0$ (ეს ხის სიმაღლეა). ამიტომ (9.74)-დან $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$. ამგვარად (9.73) მრუდი ზრდადია და ამოზნექილი, ხოლო თვით (9.73)-დან ჩანს, რომ $x(t) \to \sqrt{\frac{a}{b}}$, როცა $t \to +\infty$. ე.ი. გრაფიკს ექნება სახე (ნახ. 9.11).

სიმაღლე $\sqrt{\frac{a}{b}}$ შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა მთელი მიღებული ენერგია იხარჯება ფოტოსინთეზში და საკვების ტრანსპორტირებაში. ამ დროს ხე არ იზრდება. ეს მრუდი რამდენად ზუსტად აჩვენებს ხის ზრდის პროცესს? ამ კითხვაზე პასუხი რომ მიეღოთ, მუხის საშუალო სიმაღლე 40 წლის ასაკში და 200 წლის ასაკში წარმოიდგინეს (9.73) ფორმულით, შემდეგ სისტემიდან იპოვეს **a** და **b** და მიღებული გრაფიკი ძალიან დიდი სიზუსტით დაემსგავსა (9.73)-ის გრაფიკს. ეს ფაქტი მეტყველებს იმაზე, რომ მოდელი კარგადაა აგებული.

ეკოლოგია შეისწავლის ცოცხალი ორგანიზმებისა და მათი დაჯგუფებების დამოკიდებულებას ერთმანეთთან და გარემოსთან. ის სწრაფად განვითარებადი დარგია. იგი შეიჭრა არა მარტო ბიოლოგიის ყველა დარგში, არამედ, სხვა საბუნებისმეტყველო მიმართულებებში (ფიზიკა, ქიმია, გეოგრაფია, გეოლოგია), იგი მჭიდროდ დაუკავშირდა მედიცინასა და სოფლის მეურნეობის მრავალ დარგს [4].

ეკოსისტემა არის ცოცხალი ორგანიზმების (მიკროორგანიზმები, მცენარეები, ცხოველები) და მათი გარემოს ფუნქციური ურთიერთდამოკიდებულების მდგრადი სისტემა.

ეკოსისტემა ორი კომპონენტისაგან შედგება, ცოცხალი ორგანიზმების ერთობლიობისაგან, მას *ბიოცენოზი* ეწოდება და არაცოცხალი ბუნების ელემენტთა ერთობლიობისაგან, რომელსაც *ეკოტიპი* ეწოდება.

გენოფონდი ნიშნავს ცოცხალ ორგანიზმთა მთელ ერთობლიობას გამომჟღავნებული და პოტენციური შთამომავლობითი მონაცემებით. ადამიანი დგას ამოცანის წინაშე ისწავლოს პოპულაციის რაოდენობის მართვა, განსაზღვროს რაოდენობის მინიმალური დონე გადაშენებადი სახეობებისათვის, დააზუსტოს სიჩქარე და სახეობათა ევოლუციის მიმართულება ანტროპოგენური ფაქტორების მოქმედებების პირობებში.

6. ინსექტიციდებით მწერების მოწამვლა (მტაცებელი-მსხვერპლი)

1. ამოცანა რეალური ცხოვრებიდან.

დედამიწის დიდი ნაწილი იწამლება ინსექტიციდებით. ისინი იხმარება რაიმე ტიპის მწერების მოსასპობად, რომელიც სხვა მწერებისათვის (მტაცებელი) წარმოადგენს საკვებს [12].

ვთქვათ, ინსექტიციდები სპობენ ორივე სახეობის (მტაცებელი – მსხვერპლი) მწერებს გარკვეული რაოდენობით. ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ გავარკვიოთ როგორ ეკოლოგიურ ცვლილებამდე მიგვიყვანს ეს?

მათემატიკოსი *ვ.ვოლტერა* ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნას შეუდგა 1930 წელს.

2. მათემატიკური მოდელი.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

H(t) - მსხვერპლის პოპულაციის რაოდენობა დროის **t** მომენტში;

P(t) - მტაცებლის პოპულაციის რაოდენობა იმავე დროს.

Δt დროში ინდივიდთა ნაწილმა შეიძლება წარმოქმნან შთამომავლობა, ხოლო ნაწილი დაიღუპოს. ამგვარად, **ΔH=C-T**, სადაც **C** დაბადებულთა რიცხვია **Δt** დროში, ხოლო **T** კი იმავე დროში დაღუპულთა რიცხვი. დაბადებულთა რიცხვი დამოკიდებულია **Δt**-ზე და მშობელთა რაოდენობაზე, ე.ი.

$$C=kH(t)\Delta t, \qquad k=const.$$

დაღუპულთა რაოდენობა დამოკიდებულია **Δt** შუალედის სიდიდეზე, მსხვერპლის რაოდენობაზე და მტაცებლების რაოდენობაზე.

$$T=l\cdot H(t)P(t)\,\Delta t, \qquad l=const.$$

შესაბამისად, $\Delta H = kH(t)\Delta t - lH(t)P(t)\Delta t$. გავყოთ ორივე მხარე Δt-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta t \to 0$, მივიღებთ

$$\frac{dH}{dt} = kH(t) - lH(t)P(t),$$

$\frac{dH}{dt}$ არის მსხვერპლის პოპულაციის ცვლილების სიჩქარე დროის t მომენტში. ანალოგიური მსჯელობით მტაცებლების პოპულაციისათვის კი გვექნება

$$\frac{dP}{dt} = mP(t)H(t) - nP(t), \quad m=const;\ n=const.$$

რადგანაც ორივე პოპულაცია არსებობს ერთდროულად, ამიტომ გვაქვს სისტემა

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = kH(t) - lH(t)P(t), \\ \frac{dP}{dt} = mP(t)H(t) - nP(t). \end{cases} \tag{9.74}$$

ორი პოპულაცია არსებობს ბუნებრივ წონასწორობაში, თუ $\frac{dH}{dt} = 0$ და $\frac{dP}{dt} = 0$. ამ შემთხვევაში (9.74)–დან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{cases} kH(t) - lH(t)P(t) = 0 \\ mP(t)H(t) - nP(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(t) = \frac{k}{l}; \\ H(t) = \frac{n}{m}. \end{cases} \tag{9.75}$$

მიღებულ მნიშვნელობებს ეწოდება *პოპულაციის წონასწორობის მნიშვნელობები* და აღინიშნება P_0 და H_0-ით. ამგვარად, $P_0 = \frac{k}{l}$; $H_0 = \frac{n}{m}$. დავუშვათ, რომ ორი პოპულაცია არის წონასწორობაში და მათი რაოდენობები არის H_0 და P_0. ახლა განვიხილოთ ფაქტორი (ინსექტიციდი), რომელიც კლავს $h>0$ ინდივიდს მსხვერპლის პოპულაციიდან და $p>0$ ინდივიდს მტაცებლის პოპულაციიდან, ამავე დროს, მთლიანად არ სპობს არც ერთ პოპულაციას. ამ ფაქტორის ზემოქმედების შემდეგ პოპულაციების რაოდენობები იქნება $H_0-h>0$ (მსხვერპლი), $P_0-p>0$ (მტაცებელი).

3. მათემატიკური შედეგები:

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dt} = k(H_0 - h) - \dot{l}(H_0 - h)(P_0 - p), \\ \dfrac{dP}{dt} = m(H_0 - h)(P_0 - p) - n(P_0 - p). \end{cases} \qquad (9.76)$$

$$\frac{dH}{dt} = k(H_0 - h) - l(H_0 - h)(P_0 - p) = (H_0 - h)\left[k - l(P_0 - p)\right] =$$

$$= (H_0 - h)\left[k - l\left(\frac{k}{l} - p\right)\right] = (H_0 - h)p\,l,$$

$$\frac{dP}{dt} = m(H_0 - h)(P_0 - p) - n(P_0 - p) = (P_0 - p)\left[m(H_0 - h) - n\right] =$$

$$= (P_0 - p)\left[m\left(\frac{n}{m} - h\right) - n\right] = (P_0 - p)(-mh).$$

რადგანაც H_0-h>0, l, p>0, ამიტომ $\frac{dH}{dt} > 0$

P_0-p>0, m>0, h>0, ამიტომ $\frac{dP}{dt} < 0$.

ამგვარად, ჩვენი მათემატიკური შედეგი მდგომარეობს იმაში, რომ

$$\frac{dH}{dt} > 0, \qquad \frac{dP}{dt} < 0. \qquad (9.77)$$

4. რეალური სამყარო.

ჩვენ დავუშვით, რომ საწყის პირობებში მტაცებელი და მსხვერპლი მდგომარეობს ბუნებრივ წონასწორობაში. შემდგომ რაღაც ფაქტორმა ნაწილობრივ გაანადგურა ორივე პოპულაცია. ამ ფაქტორის ზემოქმედების შემდეგ თურმე $\frac{dH}{dt} > 0$ და $\frac{dP}{dt} < 0$, ე.ი. მსხვერპლის პოპულაცია იზრდება, ხოლო მტაცებლისა კი კლებულობს, მაგრამ, ამ დროს შეიქმნა ეკოლოგიური პრობლემა: მტაცებლის პოპულაცია, რომელიც კლებულობს, შეიძლება გახდეს იმდენად მცირე, რომ მას შეიძლება შეექმნას სრული განადგურების საშიშროება სხვა მიზეზებით: წყალდიდობა, გვალვა და სხვა. ეს გვიჩვენებს, თუ რამდენად საშიშია ჩვენთვის ბუნების კანონებში ჩარევა.

ორგანიზმის უნარს შეიცნოს მასში მოხვედრილი უცხო ელემენტები (მიკროორგანიზმები, ვირუსები და სხვა) *იმუნიტეტი* ეწოდება. *იმუნური სისტემა* - ეს არის ყველა ლიმფოიდური ორგანოებისა და

სხეულის ლიმფოიდური უჯრედების ერთობლიობა, შეიცავს ტიმუსს, ელენთას, ლიმფურ კვანძებსა და სხვა ლიმფოიდურ დაჯგუფებებს.

ლიმფოიდური უჯრედების საერთო რაოდენობა 10^{12}-ის ტოლია. ეს უჯრედები იმუნური რეაგირების უმნიშვნელოვანეს სახეებს ასრულებენ. ძირითადი ფუნქციაა - ორგანიზმის დაცვა იმ ცოცხალი სხეულებისა და ნივთიერებებისაგან, რომლებიც ატარებენ გენეტიკურად უცხო ინფორმაციას, ასეთებია: ბაქტერიები, ვირუსები, ჭიები, ცილები, უჯრედები, ქსოვილები. ასეთ ნივთიერებებს ეწოდება *ანტიგენები.* ყოველი ანტიგენი სპეციფიკურია და იწვევს იმუნური სისტემის სპეციფიურ რეაქციას [4].

ანტისხეული არის ცილები, რომლებსაც გამოიმუშავებს ლიმფოიდების უჯრედები ორგანიზმში შეღწეული ანტიგენის საპასუხოდ.

ორგანიზმი ყოველთვის შეიცავს იმუნოციტების მცირე პოპულაციას, სპეციფიკურს მოცემული ანტიგენისათვის.

7. ინფექციური დაავადებების შმარტივესი მათემატიკური მოდელი (მმ).

ინფექციისგან ორგანიზმის დაცვის ერთ-ერთი ძირითადი მეთოდი იმუნური სისტემაა. იმუნური რეაქციის არსი მდგომარეობს სპეციფიკური მატერიალური სუბსტრატების (ანტისხეულები, უჯრედები-ქილერები) წარმოქმნაში, რომლებსაც უნარი აქვთ გაანეიტრალონ ანტიგენები.

ამგვარად, ინფექციური დაავადებაა - დაავადების გამომწვევ პოპულაციასა და ორგანიზმის იმუნურ სისტემას შორის კონფლიქტი.

ავაგოთ დაავადების უმარტივესი მმ. პირველად მსგავსი მოდელი ააგო გ.ი. მარჩუკმა 1975 წ., შემდგომ ა.ა. ასანჩეკოვმა ააგო და გამოიკვლია მმ, რომელიც აღწერდა ორგანიზმის ტემპერატურულ რეაქციას ინფექციური დაავადების დინამიკაზე.

ავადმყოფობის აღნიშნული მოდელი ძალიან რთულია. ამიტომ, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორ პოპულაციას - ინფექციის მატარებელი (ანტიგენების) მიკროორგანიზმების პოპულაციასა და იმუნური უჯრედების პოპულაციას, რომლებიც უვნებელყოფენ მიკროორგანიზმებს (ანტისხეულებს) [9].

1. ამოცანა რეალური ცხოვრებიდან.

ზოგიერთი ვირუსის დასათრგუნად სამედიცინო პრაქტიკაში გამოიყენებენ ანტობიოტიკებს. ამოცანა მდგომარეობს ორგანიზმზე მოქმედების შესაძლო მექანიზმების დადგენაში.

2. მათემატიკური მოდელი.

ვთქვათ, საწყის t დროში მიკროორგანიზმების რაოდენობა იყო V=V(t), ხოლო იმუნური უჯრედების რაოდენობა F=F(t). Δt დროის შემდეგ ორგანიზმის სტიმულაციის შემდეგ წარმოიქმნება ახალი იმუნური უჯრედები, რომლებიც ებმებიან მიკროორგანიზმებთან ბრძოლაში, და მათ შორის ურთიერთობაზეა დამოკიდებული ავადმყოფობის შედეგი.

ამოცანაში შეგროვილი ინფორმაციების საფუძველზე მიკრობული და იმუნური უჯრედების ცვლილებები შესაბამისად ტოლია:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = \beta V - \gamma FV, \\ \dfrac{dF}{dt} = -\alpha FV - \mu F, \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \mu - \text{რაიმე მუდმივებია}. \qquad (9.78)$$

დროის რაიმე შუალედში ამ ორი პოპულაციის გაწონასწორება ხდება.

ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილები, რომლებიც მიიღება შემდეგი პირობებიდან:

$$\begin{cases} \beta V - \gamma FV = 0 \\ -\alpha FV - \mu F = 0 \end{cases} \Rightarrow F = \frac{\beta}{\gamma}, V = -\frac{\mu}{\alpha}. \qquad (9.79)$$

პოპულაციის რაოდენობის ამ მნიშვნელობებს უწოდებენ გაწონასწორებულს და აღნიშნავენ F_0 და V_0. ამგვარად, $F_0 = \frac{\beta}{\gamma}, V_0 = -\frac{\mu}{\alpha}$.

დავუშვათ, რომ ორივე პოპულაცია არის ბუნებრივ წონასწორობაში და მათი რაოდენობა შესაბამისად F_0 და V_0-ია. ახლა შემოვიტანოთ მოქმედებაში ანტიბიოტიკი. მისი გარკვეული დოზით გამოყენების საშუალებით საგრძნობლად ვამცირებთ მიკრობების პოპულაციას, ისე რომ უშუალოდ არ მოვახდინოთ ზეგავლენა იმუნური უჯრედების პოპულაციაზე. მაგრამ, მიკრობების პოპულაციის ხელოვნური დაქვეითება იმუნური სისტემის "ყურადღებას ადუნებს" და იმუ-

ნური უჯრედების რაოდენობა იკლებს. ანტიბიოტიკის გამოყენების შემდეგ პოპულაციათა რაოდენობები ასეთია: $(V_0-v)<0$, $(F_0-f)>0$.

3. მათემატიკური შედეგი.

დავადგინოთ, როგორი გადახრა ექნება წონასწორობის მდგომარეობიდან უცნობ $V(t)$, $F(t)$ ფუნქციებს.

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = \beta(V_0 - v) - \gamma(V_0 - v)(F_0 - f), \\ \dfrac{dF}{dt} = -\alpha(V_0 - v)(F_0 - f) - \mu(F_0 - f). \end{cases}$$

$$\frac{dV}{dt} = \beta(V_0 - v) - \gamma(V_0 - v)(F_0 - f) = (V_0 - v)(\beta - \gamma(F_0 - f)) =$$

$$= (V_0 - v)\cdot\left(\beta - \gamma\left(\frac{\beta}{\gamma} - f\right)\right) = (V_0 - v)\gamma f .$$

რადგანაც $(V_0-v)<0$, $f>0$, $\gamma>0$,

ამიტომ $$\frac{dV}{dt} < 0 . \qquad (9.80)$$

$$\frac{dF}{dt} = -\alpha(V_0 - v)(F_0 - f) - \mu(F_0 - f) = (F_0 - f)(-\alpha(V_0 - v) - \mu) =$$

$$= (F_0 - f)\left(-\alpha\left(-\frac{\mu}{\alpha} - v\right) - \mu\right) = (F_0 - f)\cdot\alpha v .$$

რადგანაც $(F_0-f)>0$, $v>0$, $\alpha>0$, ამიტომ $\dfrac{dF}{dt} > 0$. (9.81)

4. რეალური სამყარო.

მივცეთ ინტერპრეტაცია მიღებულ შედეგებს. თავდაპირველად ორივე პოპულაცია იმყოფებოდა წონასწორობაში. შემდგომ ანტიბიოტიკმა შეამცირა მიკრობების პოპულაციის რიცხვი, და იმუნური უჯრედების რაოდენობაც ნაწილობრივ შემცირდა. ფაქტორის – ანტიბიოტიკის ზემოქმედების შემდეგ $\dfrac{dV}{dt} < 0$, $\dfrac{dF}{dt} > 0$ ეს კი ნიშნავს, რომ ანტიბიოტიკის გამოყენების შედეგად შეინიშნება ორგანიზმის ძლიერი იმუნური რეაქცია და ამის გამო ავადმყოფობის გამომწვევი მიკრობების მკვეთრი კლება. ეს მახასიათებელია ავადმყოფობის მწვავე ფორმისათვის. ამგვარად, ჩვენ განვიხილეთ ანტიბიოტიკის მოქმედების ერთ-ერთი შესაძლო ჰიპოტეტიკური მექანიზმი.

"ცხოვრების მთელი აზრი მდგომარეობს
უცნობლობის უსასრულო დაუფლებაში,
მარადიულ მისწრაფებაში, რომ მეტი ვიცოდეთ".

ემილ ზოლა

სავარჯიშოები

ამოხსენით განტოლებები

1. (1+y)dx-(1-x)dy=0.

[(1+y)(1-x)=C.]

2. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$.

[arctgx+arctgy=C.]

3. $(1+e^x)yy'=e^x$.

$$\left[\frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C.\right]$$

4. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$.

$$[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C.]$$

5. $e^{-y}(1+y')=1$.

$[e^x=C(1-e^{-y}).]$

6. $y'=2^{x+y}$.

$[2^x+2^{-y}=C.]$

7. $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$.

$[1+e^y=C(1+x^2).]$

8. $2xyy'=x^2+y^2$.

$[x^2-y^2-Cx=0.]$

9. (x+y)dx+xdy=0.

$$\left[y=-\frac{x}{2}+\frac{C}{x}.\right]$$

10. $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$.

$[x^3+3x^2y-y^3=C.]$

11. $y' = \frac{x-y}{x-2y}$.

$[x^2-2xy+2y^2=C.]$

12. $y' = \frac{2x}{x^2+1}$.

$[y=\ln(x^2+1)+C.]$

13. $y'=1+y^2$.

$[y=tg(x+C).]$

14. $\sqrt{4+y^2}xdx + y(1+x^2)dy = 0$.

$\left[\sqrt{4+y^2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = C.\right]$

15. $(xy^2+x)dx+(y+x^2y)dy=0.$

$[(1+x^2)(1+y^2)=C.]$

16. $(x^2-y^2)dx-2xydy=0.$

$\left[y^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}.\right]$

17. $(7x^2-2xy-6y^2)dx+(x^2-4xy)dy=0.$

$[2y^2-xy+7x^2=Cx^3.]$

18. $y'+2y=e^{-x}.$

$[y=Ce^{-2x}+e^{-x}.]$

19. $y'-2xy = 2xe^{x^2}$.

$\left[y = (C + x^2)e^{x^2}.\right]$

20. $y'+2xy = e^{-x^2}$.

$\left[y = (C + x)e^{-x^2}.\right]$

21. $y'x\ln x-y=3x^3\ln^2 x.$

$\left[y = (C + x^3)\ln x.\right]$

22. $xy'-3y=x^2$.

$[y=Cx^3-x^2.]$

23. yy'=3.

[$y^2=6x+C$.]

24. ydy-xdx=0.

[$y^2-x^2=C$.]

25. yx-y'=0.

$$\left[y = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}. \right]$$

26. y'-2xy-y=0.

$$\left[y = C \cdot e^{x^2+x}. \right]$$

იპოვეთ განტოლებათა კერძო ამონახსნები:

27. $x^2+xy'=y$, თუ $y=0$, როცა $x=1$.

[$y=x-x^2$.]

28. $y'+y\cos x=\cos x$, თუ $y=1$, როცა $x=0$.

[$y=1$.]

29. $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$, თუ $y=4$, როცა $x=2$.

[$y=x^2$.]

30. სხეულის მოძრაობის სიჩქარე მოცემულია განტოლებით $v=(2t^2+1)$ სმ/წმ. იპოვეთ მოძრაობის დაწყებიდან 6 წმ-ის განმავლობაში განვლილი მანძილი.

[162 სმ.]

31. სხეულის მოძრაობის სიჩქარეა $v=\left(4t-\frac{6}{t^2}\right)$ სმ/წმ. იპოვეთ 3 წმ-ის განმავლობაში განვლილი მანძილი.

[9 სმ.]

32. აბსცისათა ღერძის გასწვრივ $v=2t-t^2$ სიჩქარით მოძრაობს სხეული. იპოვეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება, თუ $x=10$, როცა $t=0$.

$$\left[x = t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 10.\right]$$

33. სხეულის სიჩქარე გავლილი გზის პროპორციულია. პირველ 10 წმ-ში სხეული გადის 100 მ-ს, 15 წმ-ში - 200 მ. რა მანძილს გაივლის სხეული 20 წმ-ში?

[400 მ.]

34. სხეულის სიჩქარე გავლილი გზის პროპორციულია. პირველ 10 წმ-ში სხეული გადის 100 მ-ს, 15 წმ-ში - 200 მ-ს. რა მანძილს გაივლის სხეული t წმ-ში?

$$\left[s = 25 \cdot 2^{\frac{t}{5}}.\right]$$

35. ჰაერში სხეულის გაცივების სიჩქარე პროპორციულია სხეულისა და ჰაერის ტემპერატურებს შორის სხვაობის თუ ჰაერის ტემპერატურა არის 20^0C და სხეული 20 წთ-ში ცივდება 100^0C-დან 60^0C-მდე, მაშინ რა დროში დაეცემა ტემპერატურა 30^0C-მდე?

[60 წთ.]

36. ბაკში არის 100 ლ ხსნარი, რომელიც შეიცავს 10 კგ მარილს. ბაკში წყალი ჩადის წუთში 3 ლ-ის სიჩქარით და ერთდროულად ბაკიდან ხსნარი გადმოისხმება წუთში 2 ლ სიჩქარით, ამასთანავე ხსნარის კონცენტრაცია რჩება მთელი ხნის განმავლობაში თანაბარი (არევის წყალობით). რამდენი მარილი დარჩება ბაკში 1 სთ-ის შემდეგ?

[3,9 კგ.]

საშუალო სკოლის მათემატიკის ზოგიერთი ფორმულა

I. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები:

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
$(a\pm b)^2=(a^2\pm 2ab+b^2)$;
$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$;
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

II. პროპორციები

თუ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, მაშინ $a\cdot d=b\cdot c$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$;

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d};\quad \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c};\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

III. ხარისხი

1. $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n-ჯერ}$, სადაც $n\in N$;
2. $a^0=1$, $a\neq 0$;
3. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $n\in N$; $a\neq 0$;
4. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $m\in Z$; $n\in N$ და $a>0$.

IV. მოქმედებები ხარისხზე:

$(ab)^n=a^nb^n$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},\ \text{თუ}\ b\neq 0;$$

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n};$$

$(a^m)^n=a^{mn}$.

V. მოქმედებები რადიკალებზე:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a;\ \ \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m};\ \ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\ \ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ \ (b \neq 0);$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m};\ \ \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m\cdot b^n}.$$

VI. საშუალო არითმეტიკულისა და საშუალო გეომეტრიულის შედარება

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot \ldots \cdot a_n}.$$

VII. კვადრატული განტოლების ამონახსნთა ფორმულა და ფესვთა თვისებები

თუ $ax^2+bx+c=0$ და $D=b^2-4ac\geq 0$, მაშინ

ა) $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

ბ) $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-ac}}{a}$, თუ $b=2k$.

ვიეტას თეორემა

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ \ x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

კვარდატული სამწევრის დაშლა მამრავლებად

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

VIII. არითმეტიკული პროგრესია

$a_n=a_1+d\,(n-1)$;

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n,\ \ S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n,$$

$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\ldots=a_k+a_{n-k+1}$;

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

IX. გეომეტრიული პროგრესია

$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$;

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1};$$

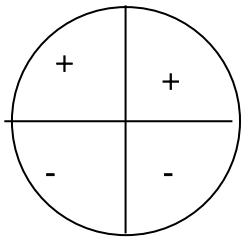
$b_1\cdot b_n=b_2\cdot b_{n-1}=\ldots=b_k\cdot b_{n-k+1}$;

$b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$.

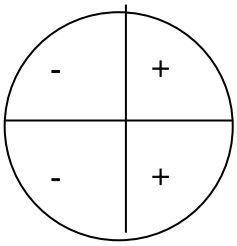
უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი, როცა

$|q|<1$, $S=\frac{b_1}{1-q}$.

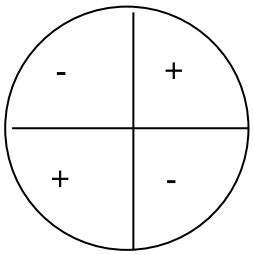
X. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნიშნები



სინუსის ნიშნები



კოსინუსის ნიშნები



ტანგესისა და კოტანგესის ნიშნები

XI. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილი ზოგიერთი არგუმენტისთვის

α	$0=0^0$	$\frac{\pi}{6}=30^0$	$\frac{\pi}{4}=45^0$	$\frac{\pi}{3}=60^0$	$\frac{\pi}{2}=90^0$	$\pi=180^0$	$\frac{3\pi}{2}=270^0$
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
ctgα	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

XII. ტრიგონომეტრიის ძირითადი ფორმულები:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$

$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha};$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$

$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\ \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$

$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\ \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

$\sin x=a,\ |a|\le1,\ x=(-1)^k\arcsin a+\pi k;\ k\in Z;$

$\cos x=a,\ |a|\le1,\ x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z;$

$\operatorname{tg}x=a,\ x=\operatorname{arctg}a+\pi k,\ k\in Z;$

$\operatorname{ctg}x=a,\ x=\operatorname{arcctg}a+\pi k,\ k\in Z.$

XIII. ლოგარითმები

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \quad (a \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0)$$

$$a^{\log_a b} = b; \quad \log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1;$$

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad (x_1 > 0, \quad x_2 > 0);$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad (x_1 > 0, \quad x_2 > 0);$$

$$\log_a x^k = k \log_a x, \quad (x > 0);$$

$$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x, \quad (x>0);$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ზერაგია პ. უმაღლესი მათემატიკა. I ნაწილი. თსუ. 1975.
2. მელაძე ჰ., სხირტლაძე ნ. გამოყენებითი მათემატიკის საწყისები. თსუ. თბ., 2000.
3. ხომერიკი რ. მათემატიკური მეთოდები ბიოლოგიაში. თსუ. 1987.
4. შათირიშვილი ა., ცაგარელი ს., ცარციძე მ. ზოგადი ბიოლოგია. თსუ. თბილისი, 1999.
5. ძიძიგური ც. საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტებზე განსაზღვრული ინტეგრალის სწავლება და გამოყენება. "ინტელექტი" №3(20), 2004. გვ.132-134.
6. ძიძიგური ც. საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტებზე დიფერენ-ციალური განტოლებების გამოყენების შესახებ. საზრისი" №14, 2004. გვ.111-117.
7. ძიძიგური ც. მატრიცათა თეორიის ზოგიერთი გამოყენების შესახებ პოპულაციის განვითარებისა და ეპიდემიოლოგიის ამოცანებში. "ინტელექტი" №1(21), 2005. გვ.166-170.
8. ძიძიგური ც. უმაღლესი მათემატიკის ზოგიერთი საკითხის გამოყენების შესახებ საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში. "ინტელექტი" №1(21), 2005. გვ.171-174.
9. ძიძიგური ც., ჩილაჩავა თ. უმაღლესი მათემატიკის კურსში დიფერენციალური განტოლებების სწავლება მედიცინის ზოგიერთი მათემატიკური მოდელის მაგალითზე. "საზრისი" №20, 2006. გვ.
10. **Баврин И.И. Высшая математика. М.:Просвещение, 1980.**
11. **Баврин И.И. Высшая математика. М.:Академия, 2003.**
12. **Бейли Н. Математика в биологии и медицине/Пер. с англ. М.:Мир, 1970.**
13. **Гильдерман И.Г. Лекции по высшей математике для биологов, Новосибирск, Наука, 1974.**
14. **Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: "Высшая школа". 1980.**
15. **Жуков А.В. Вездесущее число π. Изд-во УРСС. Москва. 2004.**
16. **Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. М.:Наука, 1991.**

17. Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. "Высшая школа". М.: 1985.

18. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. "Наука", М.: 1971.

19. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974, т. I, II.

20. Шикина Г.Е., Шикин Е.В. Гуманитариям о математике. УРСС, Москва. 2001.

21. Щипачев В.С. Задачник по высшей математике. "Высшая школа". М.: 2003.

ციალა ძიძიგური

მათემატიკა საბუნებისმეტყველო სპეციალობებისათვის
საზელმძღვანელო

თბილისი 2006

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 11.05.06
საბეჭდი ფორმატი 60×84
პირ.ნაბეჭდი თაბახი 19,4
ტირაჟი 300

ფასი სახელშეკრულებო

გამომცემელი: საგამომცემლო სახლი "ინოვაცია"
მთავარი რედაქტორი: ზაურ ნაჭყებია
კომპიუტერული უზრუნველყოფა: ნათელა ბარაბაძე
გარეკანის დიზაინი: ლევან ბოჭორიშვილი
კორექტორები: ნონა ჯღარკავა
ქეთინო წახნაკია
მისამართი: თბილისი, ძმები კაკაბაძეების ქუჩა №22.
ტელ. 92-25-23; 99-70-94

ДЗИДЗИГУРИ ЦИАЛА ДОМЕНТЬЕВНА

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Учебник

(на грузинском языке)

Издательство: издательский дом "Иновация". Тбилиси. 2006. 312 стр.