t. buaZe, g. yirmelaSvili,
i. beJuaSvili, g. fifia

albaTobis Teoriisa da maTematikuri statistikis elementebi

@`teqnikuri universiteti”@

saqarTvelos teqnikuri universiteti

t. buaZe, g. yirmelaSvili,
i. beJuaSvili, g. fifia

albaTobis Teoriisa da maTematikuri statistikis elementebi

damtkicebulia stu-s
saredaqcio-sagamomcemlo sabWos
mier. 02.07.2009, oqmi #6

Tbilisi
2009

saxelmZRvaneloSi gadmocemulia aRweriTi statistikis, albaTobis Teoriisa da daskvniTi statistikis mniSvnelovani sakiTxebi. Teoriuli masalis gadmocemasTan erTad moyvanilia Sesabamisi praqtikuli amocanebi, maTi amoxsnebi, meToduri miTiTebebi da saTanado savarjiSoebi.

saxelmZRvanelo gankuTvnilia umaRlesi teqnikuri saswavleblebis studentebisaTvis, Sedgenilia amJamad moqmedi programis mixedviT da avtorTa mier mravali wlis ganmavlobaSi umaRles saswavleblebis Sesabamis specialobebiT wakiTxuli leqciebis safuZvelze. igi daxmarebas gauwevs informatikisa da socialuri mecnierebebis grifiT gaerTianebuli specialobebis bakalavriatisa da magistraturis studentebs.

warmodgenili saxelmZRvaneloTi SeiZleba isargeblon agreTve umaRlesi profesiuli ganaTlebis, saSualo skolisa da umaRlesi saswavleblebis maTematikis pedagogebma da abiturientebma. igi did daxmarebas gauwevs praqtikuli sociologiuri kvlevebiT dainteresebul pirebs.

t. buaZis redaqciiT

recenzenti sruli profesori i. miqaZe

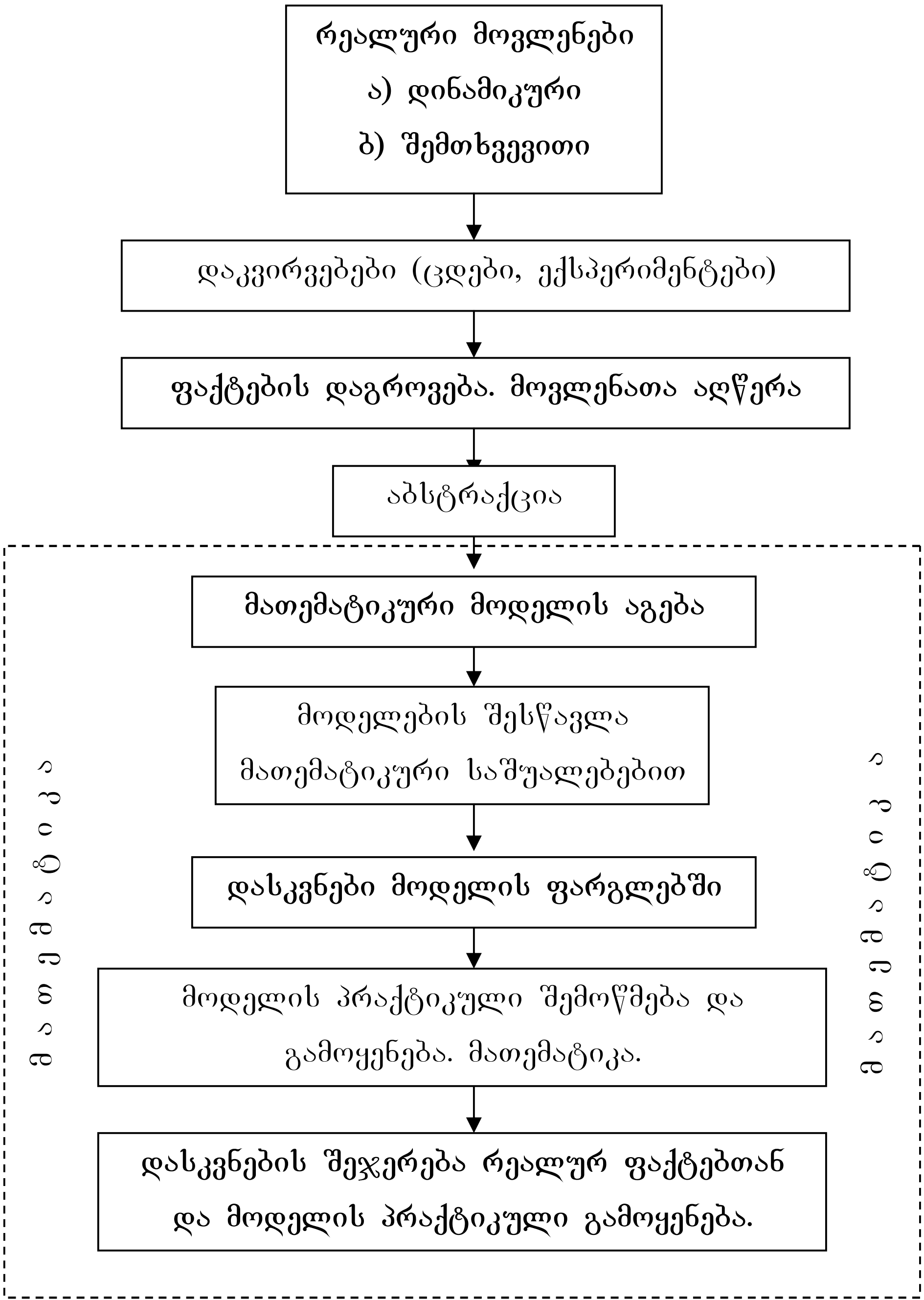
ISBN 978-9941-14-693-0
http://www.gtu.ge/publishinghouse/

Verba volant,
scripta manent

თავი I. შემთხვევით მოვლენათა მათემატიკური მოდელირების შესავალი

§1. მათემატიკური მოდელირების ეტაპები

მათემატიკა შეისწავლის გარემომცველი სამყაროს რეალურ მოვლენათა მათემატიკურ მოდელებს და ადგენს იმ რაოდენობრივი ხასიათის კანონზომიერებებს, რომელთაც ეს მოვლენები ემორჩილებიან. მათემატიკის ადგილი რეალური სამყაროს კანონზომიერებათა დადგენისას შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სქემის სახით (ნახ. 1)



(ნახ.1)

მათემატიკის კავშირი გარემომცველი სამყაროს მოვლენებთან ხორციელდება საფეხურებად:

1) თავდაპირველად ხდება მრავალმხრივი ფაქტორებიდან მეორეხარისხოვანი ფაქტორების ჩამოშორება.

2) არსებითი ფაქტორების განზოგადებით, საწყის ცნებებზე და აქსიომებზე დაყრდნობით აიგება მათემატიკური მოდელი.

3) აგებული მოდელის ფარგლებში აქსიომებიდან გამომდინარე ყალიბდება ახალი დებულებები - თეორემები.

4) ხდება მოდელში მიღებული ახალი მათემატიკური ფაქტების ინტერპრეტაცია თავდაპირველი რეალური მოვლენების ცნებებში.

5) მოწმდება აგებული მათემატიკური მოდელის ვარგისიანობა - ხდება მათემატიკურ მოდელში წარმოდგენილი გათვლების პრაქტიკული შემოწმება.

პრაქტიკული დასკვნები საიმედოა, თუ აგებული მოდელი აღწერს შესასწავლი მოვლენის არსებით მხარეებს.

კარგად, წარმატებით აგებული და მომუშავე მათემატიკური მოდელის მაგალითად გამოდგება ნიუტონის აქსიომებზე აგებული მექანიკა.

§2. შემთხვევითი დაკვირვება (ცდა, ექსპერიმენტი). ხდომილობა და მონაცემი

შემთხვევითი დაკვირვება, შემთხვევითი ცდა, შემთხვევითი ექსპერიმენტი სინონიმებია. **დაკვირვება (ცდა, ექსპერიმენტი)** წარმოადგენს გარკვეული პირობების კომპლექსის შესრულებას, გულისხმობს დამკვირვებელ სუბიექტს, დაკვირვების ობიექტს, დაკვირვების პირობებსა და დაკვირვების პოტენციურ ან რეალურ შედეგს. დაკვირვება შეიძლება ჩატარდეს რეალურად - უშუალოდ პრაქტიკულად, ან აზრობრივად - თეორიულად.

თუ დაკვირვების პირობების კომპლექსი ვერ იძლევა საშუალებას წინასწარ ცალსახად ზუსტად განისაზღვროს დაკვირვების შედეგი, მაშინ დაკვირვებას **შემთხვევითი დაკვირვება (შემთხვევითი ცდა, ექსპერიმენტი)** ეწოდება.

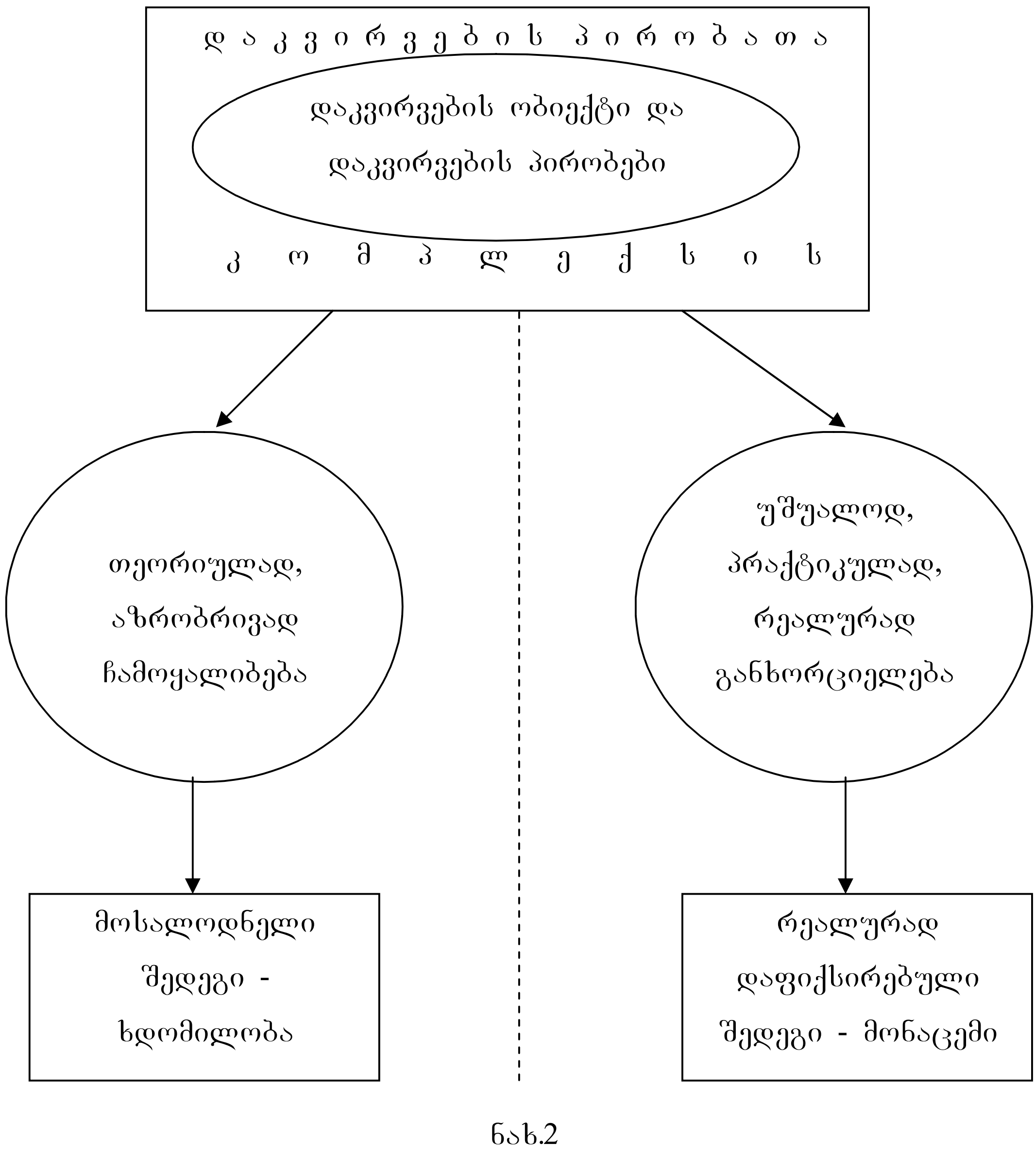
დაკვირვების პოტენციურ შედეგს **ხდომილობას** ვუწოდებთ. ხდომილობა გონებრივად გააზრებული დაკვირვების პირობათა კომპლექსის პოტენციური

შედეგია. ხდომილობებს აღვნიშნავთ სიმბოლოებით Ω, Ø, ω, A, B, C, ω_1, ω_2, A_1, A_2, A_3...,…,;

ხდომილობა ალბათობათა თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა და ხდომილობის ცნების ქვეშ გაიგება ყველაფერი ის, რის შესახებაც აზრი აქვს ითქვას, რომ დაკვირვების შედეგად იგი ხდება ან არ ხდება (მოხდება ან არ მოხდება).

რეალურად ჩატარებული დაკვირვების კონკრეტულ შედეგს მონაცემს ვუწოდებთ. მონაცემი დაკვირვების პირობათა კომპლექსის პრაქტიკული რეალიზაციის შედეგია.

გავეცნოთ შემდეგ სქემას (ნახ.2)



ნახ.2

განვიხილოთ უმარტივესი მაგალითები.

მაგალითი1.1. (გთხოვთ, ამ მაგალითის პირობა მთელი სერიოზულობით პრაქტიკულად განახორციელოთ). აიღეთ ხელში ნებისმიერი ღირებულების მონეტა, ააგდეთ ბრტყელ ზედაპირზე (მაგიდაზე, იატაკზე) და დაკვირვების შედეგი ჩანიშნეთ ცხრილ 1-ში

ცხრილი 1

დაკვირვების რიგითი №	1
დაკვირვების შედეგი. მონაცემი	

მითითება: თუ მონეტა დავარდა ბორჯღალით ზემოთ, ჩაინიშნეთ „ბორჯღალი“, მოკლედ - ბ, ან დაწერეთ 1-იანი, ვამბობთ - „მონეტაზე მოვიდა ბორჯღალი“. ხოლო თუ მონეტა დაეცა საფასურით ზემოთ, ჩანიშნეთ „საფასური, მოკლედ - ს, ან ჩაწერეთ 0. ვამბობთ - „მონეტაზე მოვიდა საფასური“. ორივე შემთხვევაში საქმე გვაქვს **თვისობრივ** მონაცემთან.

ხარისხობრივ-თვისებრივი მონაცემი მიიღება შესასწავლი ობიექტის ხარისხობრივ-თვისებრივ მახასიათებელზე დაკვირვებით. იგი ობიექტს ან აქვს ან არ აქვს. ობიექტის თვისებრივი მახასიათებელი არ ემორჩილება გაზომვას. ასეთი მახასიათებლებია: პროფესია, ოჯახური მდგომარეობა, სოციალური მდგომარეობა, რელიგიური მრწამსი, იდეოლოგიური შეხედულება, ფსიქოლოგიური განწყობა, პროდუქციის ხარისხი, ფერი და ა.შ.

თვისებრივი ხარისხობრივი მახასიათებელი შეიძლება იყოს ალტერნატიული ორმნიშვნელოვანიანი, ან მრავალმნიშვნელოვანიანი.

ალტერნატიული მახასიათებლებია: ქალი და კაცი, ძლიერი და სუსტი (არაძლიერი), დაოჯახებული და დაუოჯახებელი, სპორტსმენი და არასპორტსმენი, დაავადებული და არადაავადებული, უმაღლესდამთავრებული და უმაღლესდაუმთავრებელი, ხარისხიანი და უხარისხო და ა.შ.

მრავალმნიშვნელოვანიანი მახასიათებლებია: გარკვეული აზრით ხარისხი - I ხარისხი, II ხარისხი, III ხარისხი, სისხლის ჯგუფი - I, II, III, IV, რეზუს უარყოფითი. ინფექციური დაავადებები - წითელა, ყივანახველა, შავი ჭირი, ქოლერა, ეროვნება - ქართველი, გერმანელი, ბერძენი, ესპანელი, რუსი, თურქი და ა.შ.

რაოდენობრივი მონაცემი მიიღება შესასწავლი ობიექტის რაოდენობრივ მახასიათებელზე (ნიშანთვისებაზე) დაკვირვების შედეგად. **თვისებრივი მახასიათებლისაგან განსხვავებით ობიექტის რაოდენობრივი მახასიათებელი შეიძლება გაიზომოს.** ასეთია მაგალითად: სიჩქარე, მანძილი, სიმაღლე, შრომის ნაყოფიერება, სიმკვრივე, მასა, საკრედიტო თანხის რაოდენობა, მოგება, ხელფასი, სითბოს რაოდენობა, მუსჰაობა, სიმძლავრე, ინტენსივობა და ა.შ.

რაოდენობრივი მახასიათებელი დისკრეტულია თუ იგი უკავშირდება დათვლის პროცესს (ახალშობილთა რაოდენობა და სხვა), ხოლო **უწყვეტია** თუ იგი უკავშირდება გაზომვის პროცესს (ტემპერატურე, ცდომილობა გაზომვებში და სხვა).

რაოდენობრივი მონაცემის საილუსტრაციოდ მაგალით 1.1-ში მონეტა შეცვალეთ ნარდის სათამაშო კამათელით, ანუ კუბით, რომლის თითოეულ წახნაგზე ამოტვიფრულია შესაბამისად 1, 2, 3, 4, 5, 6 - რიცხვები.

დავალება: ორივე განხილულ შემთხვევაში მიმოიხილეთ დაკვირვების პირობების კომპლექსი.

მითითება: პირველ მაგალითში დაკვირვების პირობათა კომპლექსის მიხედვით მაგიდაზე, ან იატაკზე რეალურად ერთჯერ ვაგდებთ ერთ მონეტას, მონეტა წარმოადგენს ლითონის ფულს, რომლის ერთ მხარეზე მისი ღირებულებაა მინიშნებული (საფასური), მეორეზე კი მფლობელი ქვეყნის ღერბია (ბორჯღალი). ამასთან იგულისხმება მონეტა იმდენად თხელია, რომ შეუძლებელია დადგეს წიბოზე ან დაუსრულებლად იგოროს.

მეორე შემთხვევაში დაკვირვების პირობების კომპლექსის დახასიათება მკითხვებისთვის მიგვინდვია.

მაგალითი 1.2. ბრტყელ ზედაპირზე ვაგდებთ მონეტას (აქ იგულისხმება შემდეგი კონტექსტი: **„რომ ავაგდოთ ბრტყელ ზედაპირზე მონეტა“).**

პირობათა კომპლექსის შესაბამისად შეგვიძლია ჩამოვთვალოთ მოსალოდნელი, პოტენციური შედეგებია, რომლებსაც მათ **ხდომილობებს** ვუწოდებთ. ასეთებია:{მონეტაზე მოვა ბორჯღალი}={ბ}, {მონეტაზე მოვა საფასური}={ს}. შეიძლება განვიხილოთ სხვა ხდომილობებიც: {მონეტაზე არც ბორჯღალი მოვა, არც საფასური}={მონეტაზე არ მოვა ბორჯღალი და არც საფასური მოვა} - ეს ხდომილობა **შეუძლებელი ხდომილობაა**, რადგან იგი არ მოხდება არასოდეს, მას აღვნიშნავთ $\varnothing$ - სიმბოლოთი.

{მონეტაზე მოვა ან ბორჯღალი, ან საფასური}={ბ; ს} - ეს ხდომილობა **აუცილებელი ხდომილობაა**, რადგან იგი დაკვირვების შედეგად აუცილებლად მოხდება თეორიული მოსაზრებებიდან გამომდინარე და პრაქტიკულადაც. აუცილებელ ხდომილობას აღვნიშნავთ Ω სიმბოლოთი.

ხდომილობას, რომელიც დაკვირვების შედეგად შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს შემთხვევითი ხდომილობა ეწოდება და აღინიშნებიან სიმბოლოებით: $\omega, A, B, C, \omega_1 ...$

§3. დინამიკური და სტატისტიკური კანონზომიერებები. ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის საგანი

რეალური სამყაროს კანონზომიერებები, რომელთაც შეისწავლის მათემატიკა ძირითადად ორი სახისაა **დინამიკური (დეტერმინირებული)** და **სტატისტიკური (სტოქასტური, ალბათური).** შესაბამისად მოვლენებიც ორი სახისაა დინამიკური (დეტერმინირებული) და შემთხვევითი (სტოქასტური).

დინამიკური კანონზომიერებები საშუალებას იძლევიან წინასწარ დეტერმინისტულად, ზუსტად ცალსახად განვსაზღვროთ შესასწავლ მოვლენაზე დაკვირვების შედეგი. ასეთი მოვლენები დინამიკური მოვლენებია. ეს მოვლენები უფრო იდეალიზებული მოვლენებია. სამყაროს ადექვატური შეცნობის შესაძლებლობას ძირითადად **სტატისტიკური კანონზომიერებები** იძლევიან.

მოვლენა შემთხვევითია თუ წინასწარ ზუსტად შეუძლებელია გამოვიცნოთ მასზე დაკვირვების საბოლოო შედეგი. თუმცა მასობრივი ერთგვაროვანი შემთხვევითი მოვლენები ემორჩილებიან სტატისტიკურ **კანონზომიერებებს.** ეს კანონზომიერებები შემთხვევით მოვლენების ფარდობით სიხშირეთა სტატისტიკური მდგრადობის თვისებით ჩამოყალიბდებიან. **სტატისტიკური კანონზომიერებები შემთხვევითი მოვლენების პროგნოზირების (წინასწარი ვარაუდების გამოთქმის) საშუალებას იძლევიან, რაც შემთხვევითობასთან დაკავშირებით გაურკვევლობის პირობებში გადაწყვეტილებების მიღებაში და მოქმედების ოპტიმალური სტრატეგიების არჩევაში გვეხმარებიან.**

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1.3. ვთქვათ მატერიალურ წერტილზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა. რომელიღაც მომენტში ცნობილია წერტილის მდებარეობა და სიჩქარე, მაშინ მისი შემდგომი მოძრაობა ცალსახად აღიწერება შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებით (გაიხსენეთ აღნიშნული საკითხი ფიზიკიდან).

აღნიშნული მექანიკური მოდელი დამაკმაყოფილებლად ყოველთვის ვერ ასახავს რეალურ ფიზიკურ მოვლენას.

მაგალითი 1.4. განვიხილოთ გასროლილი ტყვიის მოძრაობა. ცალსახად არ შეიძლება წინასწარ განისაზღვროს მისი ტრაექტორია. სხვადასხვა გასროლათა სერიებში ტყვიის საწყისი სიჩქარე სხვადასხვა იყოს, რადგან იგი დამოკიდებული იქნება მრავალ მიზეზზე (მრავალ შემთხვევით ფაქტორზე): დენთის ხარისხზე და რაოდენობაზე, გასროლის კუთხეზე. იარაღის სახეობაზე, ქარის მიმართულებაზე და სიჩქარეზე და ა.შ. რაც გამოიწვევს შედეგთა სხვადასხვაობას. კერძოდ ტყვიის ტრაექტორიების განსხვავებულობას.

ფარდობით სიხშირერთა საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები:

მაგალითი 1.5. გიორგიმ მონეტა 10-ჯერ ააგდო სიბრტყეზე, ყოველი აგდების შემდეგ რიგის მიხედვით ჩაინიშნა დაკვირვების შედეგი და მიღებული მონაცემები წარმოადგინა ცხრილის სახით:

ცხრილი 2.

დაკვირვების რიგი თი №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
დაკვირვების შედეგი. მონაცემი	გ	ს	გ	გ	ს	ს	გ	ს	გ	გ

შენიშვნა: თუ საწინააღმდეგო აზრი დაფიქსირებული არაა, მაშინ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ მონეტა „წესიერია“, რაც ნიშნავს, რომ სიმეტრიული და ერთგვაროვანია.

დაკვირვებათა რაოდენობა 10-ის ტოლია. შესაბამისად მონაცემთა რაოდენობაც 10-ია. „ბორჯღალის“ მოსვლის სიხშირე ტოლია 6-ის, ხოლო - ფარდობითი სიხშირე 6/10-ის. „საფასურის“ მოსვლის სიხშირე ტოლია 4-ის, ხოლო ფარდობითი სიხშირე 4/10-ის ტოლია.

ამასთან 6+4=10 და $\frac{6}{10}+\frac{4}{10}=1$.

შენიშვნა: **თუ K არის n-ჯერ ჩატარებულ ცდაში რაიმე A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვი, მაშინ $\frac{n}{K}=P_n^*(A)$ არის n ცდაში A ხდომილობის** ფარდობითი სიხშირე.

დავუბრუნდეთ მაგალითს.

მასში განხილული ცდები ორშედეგიანია - ცალკეული ცდის (დაკვირვების) ჩატარებამდე თეორიულად მოსალოდნელია ორი პოტენციური შედეგი (ხდომილობა) {ბ}={მოვა ბორჯღალი} და {ს}={მოვა საფასური}, მაგრამ კონკრეტულად რომელი ხდომილობის მოხდენა დაფიქსირდება, ამის ზუსტად განსაზღვრა შეუძლებელია. აღნიშნული ხდომილობები შემთხვევითი ხდომილობებია.

გავერკვეთ ფარდობითი სიხშირის სტატისტიკური მდგრადობის თვისებაში. ამ კანონზომიერების ჭეშმარიტების საილუსტრაციოდ შეიძლება მოვიყვანოთ უამრავი პრაქტიკული მაგალითი, მათ შორის ისეთებიც, რომლებიც შემჩნეული და შესწავლილია თეორიის განვითარების ადრე ისტორიულ ეტაპზე.

მაგალითი 1.6. მოვიყვანოთ დაკვირვების შედეგები (იხ. ცხრილი 3) სხვადასხვა დროს სხვადასხვა მეცნიერ-დამკვირვებლის მიერ სიმეტრიული მონეტის n-ჯერ აგდების მიხედვით

ცხრილი 3.

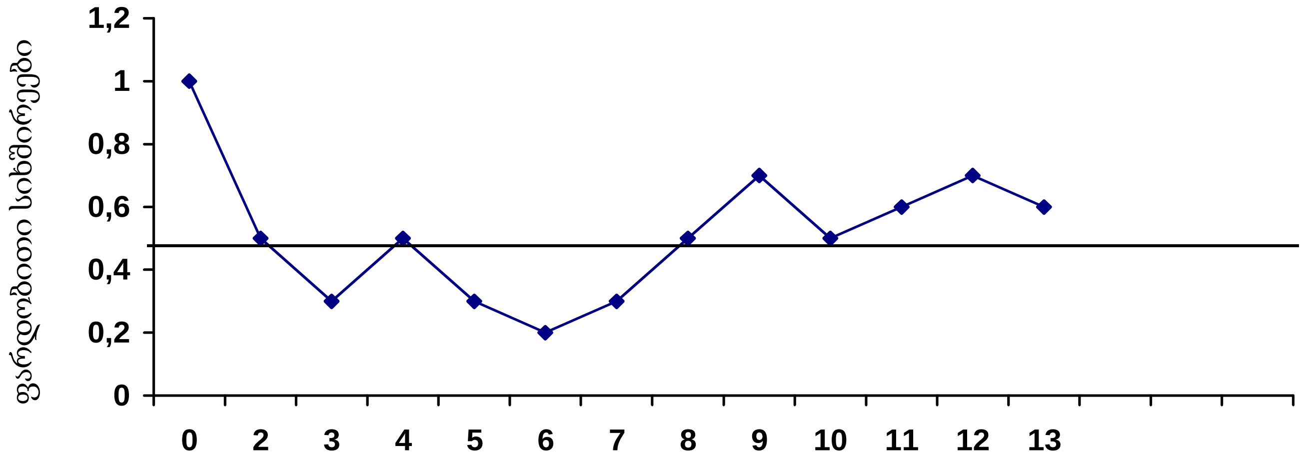
ცდის პირი	მონეტის აგდებათა რიცხვი n	საფასურის მოსვლათა სიხშირე	საფასურის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე $\frac{K}{n}$	%
ჟ. ბიუფონი (1707-1788)	4040	2048	0,5080	50,6%

ფრანგი მკვლევარი				
კ. პირსონი (1857-1936) ინგლისელი მათემატიკოსი	12000	6019	0,5016	50,16%
კ. პირსონი	24000	12012	0,5005	50,05%

ცხრილიდან ჩანს, რომ დაკვირვებათა სხვადასხვა სერიებში „საფასურის“ ფარდობითი სიხშირეები მცირედ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან და 0,5-ის ტოლი მუდმივი რიცხვისაგან. განსხვავება მით უფრო მცირეა, რაც უფრო დიდია დაკვირვებათა რიცხვი. **ესაა ფარდობითი სიხშირეების სტატისტიკური მდგრადობის კანონზომიერება.**

ანალოგიური ფაქტი მოგვიანებით დაადასტურა ელექტრონულ გამომთვლელ მანქანაზე რიცხვების 1-ისა და 0-ის შემთხვევითი გათამაშების შედეგებმაც. რიცხვი 1 შეესაბამება მონეტაზე {საფასური}-ის მოსვლას, 0 კი {ბორჯღალი}-ის მოსვლას. კომპიუტერის (ე.გ.მ.) გამოყენება საშუალებას იძლევა თანმიმდევრულად გაიზარდოს როგორც დაკვირვებათა სერიების რაოდენობა, ასევე სერიებში დაკვირვებათა რაოდენობებიც.

„საფასურის“ მოსვლის აღმნიშვნელი ხდომილობის ფარდობითი სიხშირეების სტატისტიკური მდგრადობის ტენდენცია ნათლად ჩანს ჩატარებული კვლევების შესაბამისად აგებულ ნახ. 3-ზე, რომელიც აგებულია წიგნი [11]-ის მიხედვით.



ნახ.3

დაკვირვებათა რაოდენობები სერიებში (lgn მასშტაბით)

დანაყოფი 5-ს შეესაბამება $10^5=100000$ დაკვირვებას.

n სერიაში დაკვირვებათა რაოდენობაა, ხოლო $n_ხ$ იმავე სერიაში „საფასურის“ სიხშირეა.

აბცისათა ღერძზე აღებულია ლოგარითმული მასშტაბი (lgn). რაც ასე უნდა გავიგოთ. თუ მაგალითად, ჩატარდაn=10 ცდა, მაშინ აბცისათა ღერძზე გადავზომავთ lg10=1-ს და არა 10-ს. რიცხვი 10 გადაიზომება, თუ ჩატარებულია $n=10^{10}$ დაკვირვება (ცდა), რადგან $\lg 10^{10}=10$ და ა.შ.

მსოფლიოს მრავალ რეგიონში სხვადასხვა ისტორიულ პერიოდში ჩატარებულმა დემოგრაფიულმა კვლევებმა დაადასტურა შემდეგი სტატისტიკური კანონზომიერება, რომ დაკვირვებათა დიდი რიცხვის პირობებში ახალშობილთა საერთო რიცხვში საშუალოდ 48-49% ქალია, ხოლო 51-52% ვაჟია.

აღნიშნულის საილუსტრაციოდ განვიხილავთ მაგალითს.

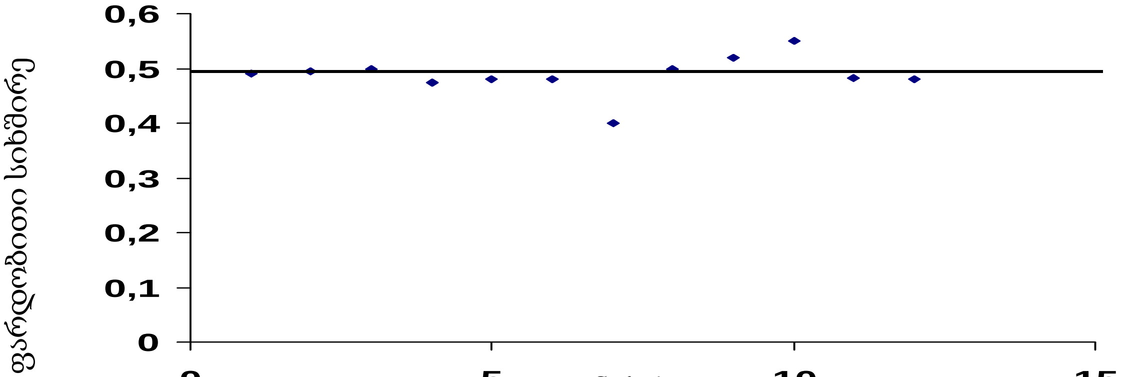
მაგალითი 07. (წიგნიდან [6]) მოცემულია შვეციაში 1935 წელს დაბადებულ ბავშვთა სქესის მიხედვით განაწილების ცხრილი 3. (მონაცემები აღებულია შვეციის ოფიციალური სტატისტიკიდან, იხ წიგნი [10]).

ცხრილი 3.

თვეები	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	სულ წელში
ახალშობილთა რიცხვი	7280	6957	7883	7884	7892	7609	7585	7393	7203	6903	6552	7132	88273
ბიჭები	3743	3550	4017	4173	4117	3944	3964	3797	3712	3512	3392	3761	45682
ოგონები	3537	3407	3866	3711	3775	3665	3621	3596	3491	3391	3160	3371	42591
გოგონების ფარდობითი სიხშირე	0,486	0,489	0,490	0,471	0,478	0,482	0,462	0,484	0,485	0,491	0,482	0,473	0,4825

იპოვეთ ბიჭების დაბადებათა შესაბამისი ფარდობითი სიხშირეები, ფორმულით - K/n (n დაკვირვებათა რიცხვია, K ბიჭების სიხშირე).

ნახ.4-ზე ნაჩვენებია ახალშობილ გოგონათა თვეების მიხედვით ნაპოვნი ფარდობითი სიხშირეების გადახრები წლიური მაჩვენებლისაგან.



ნახ.4

ანალოგიური დიაგრამა aagreT ახალშობილი ბიჭების ფარდობითი სიხშირეებისათვის

ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა მათემატიკის უმნიშვნელოვანესი დარგია. იგი შეისწავლის შემთხვევით მოვლენებთან დაკავშირებულ მათემატიკურ მოდელებსა და მასობრივ შემთხვევით მოვლენათა რაოდენობრივ კანონზომიერებებს.

მასობრივი ერთგვაროვანი შემთხვევითი მოვლენების ფარდობით სიხშირეთა სტატისტიკური მდგრადობის თვისება ამ შემთხვევით მოვლენათა პროგნოზირების საშუალებასა და გაურკვევლობის პირობებში გადაწყვეტილებების მიღებისა და მოქმედების ოპტიმალური სტრატეგიების არჩევაში გვეხმარება.

რამოდენიმე შენიშვნა:

1) ერთგვაროვან შემთხვევით ხდომილობათა ფარდობითი სიხშირეების სტატისტიკური მდგრადობის თვისების თეორიულ საფუძველს წარმოადგენს ე.წ. „დიდ რიცხვთა კანონი“. ეს კანონი ალბათობათა თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ერთ-ერთი ძირითადი დებულებაა. მას მოგვიანებით შევისწავლით.

2) დაკვირვებათა n რიცხვის გაზრდის პირობებში რომელიმე ფიქსირებულ სერიაში გამორიცხული არაა სტატისტიკური კანონზომიერების ერთჯერადი დარღვევა თუნდაც რომელიმე დიდი n რიცხვისთვის.

3) თუ დაკვირვება ისეთია, რომ ფიქსირდება მხოლოდ ორი შედეგიდან ერთ-ერთი ა) განსახილველი ხდომილობა „ხდება“, ან ბ) „არ ხდება“, მაშინ მათ ორშედეგიან დაკვირვებებს ვუწოდებთ.

ღაიმე A ხდომილობის არ მოხდენას, მისი საწინააღმდეგო ხდომილობა ეწოდება, და აღვნიშნოთ $\overline{A}$ სიმბოლოთი.

§4. გამოყენების სფეროები და მოკლე ისტორიული ექსკურსი

ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკას კვლევისა და გამოყენების მრავალმხრივი მიმართულება აქვს.

შემთხვევითი მოვლენის უამრავი მაგალითის განხილვა შეიძლება მეცნიერებისა და ტექნიკის ყველა დარგიდან. მაგალითად, ფიზიკაში, ბიოლოგიაში, დემოგრაფიაში, ეკონომიკასა და ბიზნესში, სადაზღვევო, საბანკო საქმეში, მართვის თეორიაში, მასობრივ წარმოებაში, ფსიქოლოგიაში, ეკოლოგიაში, მედიცინაში, სოციალურ მეცნიერებებში და სხვა,

მათემატიკური, ალბათურ-სტატისტიკური კვლევების, მეთოდებისა და გამოყენების სფეროების შესაბამისად ჩამოყალიბდა განსხვავებული მიმართულებები, როგორიცაა ეკონომეტრიკა, სტატისტიკური ფიზიკა, ეკონომიკური სტატისტიკა, ბიომეტრია, ბიო-სამედიცინო სტატისტიკა, სპორტული სტატისტიკა, ბიზნესის სტატისტიკა, სადაზღვევო სტატისტიკა, სოციალური სტატისტიკა და სხვა დარგების სტატისტიკა.

ძველი ჩინეთის, ბაბილონის, ეგვიპტის, საბერძნეთის არქეოლოგიური მასალების შესწავლის საფუძველზე დადგენილია, რომ ისტორიულად სტატისტიკური მეცნიერების განვითარება სათავეს იღებს უძველეს დროში და ვითარდებოდა სახელმწიფოთა წარმოშობა-განვითარებასთან ერთად. სახელმწიფოს ჭირდებოდა დაცვისა და შენახვის ხარჯები. სპეციალურად შერჩეული აღმრიცხველები აწარმოებდნენ მოსავლიანობის, მოსახლეობის დემოგრაფიულ და სხვადასხვა სახის აღწერებს. თათვიდან მოპოვებული მონაცემების დამუშავება მარტივი მეთოდებით ხდებოდა, რაც შემდგომში საზოგადოების სოციალურ-პოლიტიკურ და ინტელექტუალურ განვითარებასთან ერთად თანდათან იხვეწებოდა და მიაღწია განვითარების თანამედროვე დონეს.

სახელდობრ ალბათობის თეორია სათავეს იღებს XVII საუკუნის საფრანგეთში აზარტულ თამაშებთან დაკავშირებული შემთხვევითობის კვლევებში პასკალის (1623-1662), ფერმის (1601-1665) და ჰიუგენსის (1629-1695) შრომების წყალობით. განვითარების თანამედროვე დონეს ალბათობის

თეორიამ მიაღწია აკადემიკოს ა.ნ. კოლმოგოროვის (1903-1987) შრომებში ჩამოყალიბებულ აქსიომებზე დაყრდნობით XX საუკუნის 30-იანი წლებიდან.

საქართველოში ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის სწავლებას საფუძველი ჩაუყარა ანდრია რაზმაძემ (1889-1929) ახლად დაარსებული თბილისის უნივერსიტეტში. პროფესორმა გვანჯი მანიამ (1918-1985) საფუძველი დაუდო მათემატიკის ამ დარგის განვითარებას საქართველოში, ხოლო რევაზ ჩიტაშვილმა (1942-1995) კიდევ უფრო განავითარა კვლევები აღნიშნულ დარგში, როგორც თეორიული, ისე გამოყენებითი მიმართულებით, მან ჩაუყარა საფუძველი საქართველოში სტოქასტური ფინანსური ანალიზის განვითარებას.

*) საქართველოს განათლების სამინისტროს 2005 წლის 633 ბრძანების საფუძველზე სოციალური მეცნიერებების გრიფით გაერთიანებულია ბაკალავრიატის შემდეგი სპეციალობები: ეკონომიკა, გეოგრაფია, ფსიქოლოგია, სოციოლოგია, პოლიტიკური მეცნიერებანი, საერთაშორისო ურთიერთობები, საზოგადოებრივი ურთიერთობები, ჟურნალისტიკა, საბიბლიოთეკო, საარქივო, ინფორმატიკა, საინფორმაციო საქმე და სხვა (http://www.mes.gov.ge).

თავი II. აღწერითი სტატისტიკა (Descriptive statistics)

§1. სტატისტიკური მონაცემები, პოპულაცია და შერჩევა

1. **მონაცემები** (Data - მრავლობითი, datum - მხოლობითი), **სტატისტიკური მონაცემები** ერთგვაროვან ობიექტთა რაიმე სიმრავლის რაოდენობრივ ან თვისებრივ მახასიათებელთა დაკვირვებული მნიშვნელობების ერთობლიობაა.

სტატისტიკური მონაცემები ჩატარებული ცდების (დაკვირვებების, ექსპერიმენტების) შედეგთა ერთობლიობაა.

სტატისტიკა (Statistics) წარმოადგენს მეცნიერების დარგს, რომელიც იკვლევს მონაცემთა შეგროვების, დამუშავების, ანალიზისა და დასკვნების გამოტანის მეთოდებს.

აღნიშნული კვლევები ხორციელდება საზოგადოებრივი მეცნიერებების სხვადასხვა ამოცანის გადასაწყვეტად რეკომენდაციების შემუშავების მიზნით. მიღებული რეკომენდაციები წარმოადგენს ქმედების ოპტიმალური სტრატეგიების არჩევის საფუძველს ადამიანთა მოღვაწეობის სხვადასხვა სფეროში, შემთხვევით მოვლენებთან და პროცესებთან დაკავშირებით.

მონაცემთა მოპოვების, დალაგების, დაჯგუფების, სხვადასხვა ხერხებით წარმოდგენის მეთოდოლოგია შეადგენს **აღწერითი** ანუ **დესკრიფციული სტატისტიკის** (Descriptivc statistics) საგანს.

აღწერითი სტატისტიკის მიზანს წარმოადგენს იმ მეთოდების დამუშავება, რომლებიც ემსახურებიან მონაცემების შეგროვებას, მოხერხებული ფორმით წარმოდგენას და სხვადასხვა რიცხვითი მახასიათებლებით აღწერას.

პოპულაცია (Population), ან **სტატისტიკური პოპულაცია** ეწოდება შესასწავლი ობიექტების კონკრეტული რაოდენობრივი ან ხარისხობრივ თვისობრივი კონკრეტული მახასიათებლების მნიშვნელობების ერთობლიობას. პოპულაციის ელემენტთა რაოდენობას **პოპულაციის მოცულობა** (Population Size) ეწოდება.

პოპულაცია და გენერალური ერთობლიობა სინონიმებია.

პოპულაციის ელემენტარულ ერთეულებს (ობიექტებს, ინდივიდებს), რომელთაც ახასიათებს ერთი საერთო ნიშან-თვისება (მახასიათებელი)

პოპულაციის ბაზისს (Frame) უწოდებენ. **საერთო ნიშან-თვისება წარმოადგენს მონაცემების მიღების ძირითად კრიტერიუმს.**

სტატისტიკური მონაცემები (დაკვირვებული მნიშვნელობები) უნდა იყოს ერთგვაროვანი საკვლევი ნიშან-თვისების მიხედვით, რაც შერჩევის საფუძველსაც შეადგენს.

განსხვავებული სტატისტიკური მონაცემები უნდა განვაცალკევოთ და დავყოთ კასებად თითოეული საერთო ნიშან-თვისების მიხედვით.

ალალბედზე, პოპულაციის ნაწილზე დაკვირვებების მნიშვნელობათა ერთობლიობას (მოპოვებულ მონაცემებს) **პოპულაციიდან** შემთხვევითი **შერჩევა**, (ან შერჩევითი ერთობლიობა-ამონაკრეფი Probobility or Statistical) ეწოდება. ამ მეთოდით შერჩევის გამოყოფას პოპულაციიდან **შემთხვევითი შერჩევის მეთოდი ეწოდება.** ამ მეთოდისათვის ძირითადად დამახასიათებელია ის, რომ პოპულაციის თითოეული ელემენტისათვის განსაზღვრულია შერჩევაში მოხვედრის შანსი.

შემთხვევითი შერჩევის ძირითადი მეთოდებია:

ა) **მარტივი შემთხვევითი შერჩევა** (Simple random sampling), როდესაც პოპულაციის ყოველ ელემენტს შერჩევაში მოხვედრის ერთნაირი შანსი აქვს.

ბ) **სისტემატური შემთხვევითი შერჩევა**, როდესაც ალალბედზე ვირჩევთ მხოლოდ პირველ ელემენტს 1-დან m-მდე, ხოლო შემდეგ ისევ ალალბედზე ვირჩევთ ყოველ მომდევნო k ბიჯით დაშორებულ ელემენტს. m რიცხვი განისაზღვრება პოპულაციისა და შერჩევის მოცულობების შეფარდების მიხედვით.

გ) **განშრევებული ანუ სტრატიფიცირებული შემთხვევითი შერჩევა,** რომელიც ეფუძნება პოპულაციის დაყოფას თანაუკვეთ ჯგუფებად, რომლებსაც შრეები ეწოდებათ. შრეები ისე უნდა შეირჩეს, რომ პოპულაციის განმსაზღვრელი მახასიათებელი, ნიშან-თვისება თითოეულ შრეში იყოს შეძლებისამებრ ერთნაირი. შემთხვევითი შერჩევა ისე უნდა განხორციელდეს, რომ ამ ჯგუფების პროპორციები შერჩევაში ისეთივე იყოს როგორც მთელ პოპულაციაში. შერჩევის ელემენტების არჩევა შრიდან ხდება მარტივი შემთხვევითი შერჩევის მეთოდის გამოყენებით.

დ) **კლასტერული შერჩევა,** რომლის მიხედვით პოპულაცია იყოფა თანაუკვეთ ჯგუფებად ანუ კლასტერებად, რომლებიც დამოუკიდებლად განიხილება როგორც მცირე პოპულაციები. ჯერ ხდება პირველადი

კლასტერების მარტივი შემთხვევითი შერჩევა, ხოლო შემდეგ შერჩეული კლასტერებიდან ელემენტების გამოსაყოფად გამოიყენება შემთხვევითი შერჩევის რომელიმე მეთოდი.

შერჩევა შეიძლება იყოს **დაბრუნებითი** (with replacement), ან **დაბრუნების გარეშე** (Nithout replacement).

პოპულაციიდან შერჩევა დაბრუნებითია თუ პოპულაციის ყოველი დაკვირვებული ელემენტი მორიგი დაკვირვების ჩატარებამდე ისევ პოპულაციაში ბრუნდება და შერჩევის პროცესი გრძელდება. ამ შემთხვევაში შერჩევის ელემენტების მნიშვნელობები განმეორებადია. თუ არა და შერჩევა ხდება **დაბრუნების** გარეშე.

ამონაკრეფში (შერჩევაში) ელემენტთა რაოდენობას **შერჩევის მოცულობა** (Sample size) ეწოდება. შერჩევის მოცულობა ყოველთვის სასრულია, მაშინ როცა პოპულაციის მოცულობა შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულო.

შერჩევას ეწოდება წარმომადგენლობითი ანუ **რეპრეზენტატული** (Representative), თუ ის კარგად ასახავს იმ პროპორციებს, რომელიც პოპულაციას გააჩნია. **თუ შერჩევა არაა წარმომადგენლობითი, მაშინ ამბობენ, რომ პოპულაციიდან შერჩევას აქვს ცდომილობა.**

სტატისტიკაში განიხილება **არაშემთხვევითი შერჩევის მეთოდიც** (Convenience sampling), ანუ **მიწვდომადი** შერჩევა, როცა შერჩევა ხდება მხოლოდ პოპულაციის მიწვდომადი ნაწილის და მიზანმიმართული შერჩევა (Judgement sampling), როცა მცირე მაგრამ არაერთგვაროვანი პოპულაციის გამოსაკვლევად შეისწავლიან მთელ პოპულაციას და ირჩევენ ტიპური ერთეულების მცირე რაოდენობას, ანუ ისეთებს, რომლებიც კარგად ასახავენ პოპულაციის ძირითად თავისებურებებს.

გავაკეთებთ რამოდენიმე არსებით შენიშვნას:

ბიოლოგიური (ზოოლოგიაში) მეცნიერებების მიხედვით რაიმე საერთო ნიშან-თვისების მქონე ობიექტთა ერთობლიობა წარმოადგენს ოჯახს, რომელიც ბინადრობს განსაზღვრულ გეოგრაფიულ გარემოში, არეალში.

მაგალითად: შეგვიძლია ვისაუბროთ კუნძულ „ცეცხლოვან მიწაზე“ მცხოვრები თოლიების პოპულაციაზე. კატისებრთა ოჯახის (სახეობის) შესახებ. კატისებრთა ოჯახის სახეობაზე. სახეობა არსებობს პოპულაციის სახით. მგლის სახეობა არსებობს სვანეთის მგლების პოპულაციის, რაჭის

მგლების პოპულაციის და სხვა სახით. შეგვიძლია ვისაუბროთ მუშათა სხვადასხვა კატეგორიებზე მათი საერთო გამაერთიანებელი ხარისხობრივ-თვისობრივი ნიშნის, მახასიათებლების, ან რაოდენობრივი ნიშნის (მახასიათებლის) მიხედვით.

ისევ გვინდა გავუსვათ ხაზი იმ გარემოებას, რომ პოპულაციის თითოეული ობიექტის, ანუ ელემენტარული ერთეულის შესწავლა მოცემული მახასიათებლის მიხედვით ხშირად ვერ ხერხდება, ან მიუღწეველია სხვადასხვა მიზეზის გამო, როგორიცაა: ამ ერთეულების დიდი რაოდენობა, რაც გამოიწვევდა შემოწმების დიდ დროით და მატერიალურ ხარჯებს. ანდა შემოწმების შედეგად ობიექტი უვარგისი ხდება. მაგალითად სანადიროდ მიმავალმა მონადირემ, რომ შეამოწმოს წასაღები ყველა ასანთის ღერის ვარგისიანობა ანთებით, ანდა ნათურების ქარხანაში ყოველი წარმოებული ნათურის შემოწმება გადაწვამდე (დაღლამდე) დროის განსასაზღვრავად. ხშირად პოპულაციის ერთეულების შემოწმება მიუღწევადია. მაგალითად, ტბაში რომელიმე სახეობის თევზის შესწავლა წონის, ან დაავადებულობის მიხედვით, ინდივიდების სიცოცხლის ხანგრძლივობის შესწავლა და სხვა.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ასეთ შემთხვევებში ხდება პოპულაციიდან შერჩევის გამოყოფა. მათი შესწავლა მოცემული მახასიათებლის (ნიშან-თვისების) მიხედვით და შემდეგ მიღებული მონაცემების დამუშავების საფუძველზე კეთდება დასკვნები პოპულაციაში არსებული პროპორციების შესახებ.

განვიხილოთ კიდევ ერთი საილუსტრაციო **მაგალითი:**

რაიმე ტექნიკური სისტემის მოცემულ დროში საიმედოდ ფუნქციონირება დამოკიდებულია მისი თითოეული ელემენტის საიმედოდ ფუნქციონირებაზე, ამიტომ წარმოებებში, ქარხნებში ხდება ტექნიკური გამოცდების მოწყობა, მათზე დაკვირვება და მიღებული მონაცემების დამუშავებისა და ანალიზის საფუძველზე კეთდება სტატისტიკური დასკვნები და შემდეგ ხდება გარკვეული რეკომენდაციების შემუშავება.

მათემატიკური სტატისტიკის ერთ-ერთ მთავარ მიზანს წარმოადგენს შერჩევის საშუალებით პოპულაციის შესწავლა. გარკვეულ პირობებში შერჩევის მახასიათებლებზე სტატისტიკური მეთოდებით გაკეთებული დასკვნები მიახლოებით სამართლიანია პოპულაციის იგივე მახასიათებლებისთვისაც, რაც იმას ნიშნავს, რომ გარკვეულ პირობებში შერჩევის მახასიათებლებს ვიყენებთ მთელი პოპულაციის ანალოგიური

მახასიათებლების შესაფასებლად. ამასთან, რაც უფრო დიდია შერჩევის მოცულობა, მით უფრო ზუსტია პოპულაციის მახასიათებლების შესახებ გაკეთებული დასკვნები და პროგნოზები.

როგორც აღვნიშნეთ, მათემატიკური სტატისტიკა პირობითად შეიძლება დაიყოს ორ ნაწილად: აღწერითი (დესკრიპციული) სტატისტიკა და სტატისტიკური დასკვნების თეორია, რომელიც მოიცავს პარამეტრულ და არაპარამეტრულ სტატისტიკურ შეფასებებს, ჰიპოთეზათა შემოწმებებს, ცვლადებს შორის კავშირების დადგენას და პროგნოზების გაკეთებას.

საზოგადოდ **სტატისტიკური დასკვნების მისაღებად არსებობს ორი ძირითადი მიდგომა შეფასება და ჰიპოთეზათა შემოწმება.**

§2. მონაცემთა მოპოვების მეთოდები. ჩვლადების ცნება.

1) დაკვირვება (observation) გაზომვა, აღწერა, რაც წარმოადგენს მონაცემების შეგროვების მეთოდს შესასწავლ ობიექტზე უშუალოდ ჩატარებული დაკვირვებების პროცესში.

მაგალითი 2.1. ცხრილი 2.1.-ით მოცემულია შემთხვევით შერჩეული ათი სტუდენტის სიმაღლეები გაზომვის რიგის მიხედვით (აღვნიშნოთ სიმაღლე X ცვლადით).

დაკვირვების რიგი თი №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
სტუდენტის სიმაღლე X	164	178	172	166	162	174	178	176	168	182

ცხრილი 2.1.

სიმაღლეები გაზომილია სანტიმეტრებში და მიღებულია "ნედლი" მონაცემები. „სიმაღლე“ პოპულაციის რიცხვითი მახასიათებელია. იგი ზოგადად აღვნიშნოთ X ცვლადით. დაკვირვების რიგითი ნომრის მიხედვით X-ის მნიშვნელობებია: x_1=164; x_2=178; x_3=172; x_4=166; x_5=162; x_6=174; x_7=178; x_8=176; x_9=168; x_{10}=182. მათ რიცხვით მონაცემებს ვუწოდებთ. **X ცვლადის მნიშვნელობები შემთხვევით ფაქტორებზეა დამოკიდებული.** X-ს შემთხვევით სიდიდესაც უწოდებენ. x_1, x_2,..., x_{10} მისი შესაძლო მნიშვნელობებიდან დაკვირვებით „გაზომვით“ მიღებული რიცხვითი მნიშვნელობებია (ანუ მონაცემებია).

ცვლადები შეიძლება იყოს დისკრეტული და უწყვეტი. ცვლადებს აღვნიშნავთ X,Y,Z... სიმბოლოებით.

დისკრეტული ცვლადები წარმოადგენენ ისეთი მახასიათებლების აღმწერ (შესაბამის) ცვლადებს, რომლებმაც შეიძლება მიიღოს ცალკეული განმხოლოებული მნიშვნელობები.

ცვლადები უწყვეტია, თუ ისინი შეესაბამებიან ისეთ მახასიათებლებს, რომლებმაც შეიძლება მიიღონ მნიშვნელობების უსასრულო რაოდენობა.

ცვლადები, რომლებიც ახასიათებენ პოპულაციის ელემენტარული ერთეულების ისეთ თვისებას, რომლისთვისაც შესაძლებელია მხოლოდ იმის დადგენა, თუ რომელ კატეგორიას მიეკუთვნება ობიექტი, **კატეგორიზებული ცვლადები** ეწოდებათ.

ცვლადებს, რომლებიც ყველაზე სრულფასოვნად გამოიხატება რიცხვების საშუალებით **რაოდენობრივი ცვლადები** ეწოდებათ.

2) ექსპერიმენტის ჩატარება (Experimentation), რაც წარმოადგენს ექსპერიმენტის წინასწარ შემუშავებული გეგმის მიხედვით მკვლევარის მიერ წარმოებულ ქმედებათა თანმიმდევრობას გამოსაკვლევი ობიექტების რაოდენობრივი ან თვისობრივ-ხარისხობრივი მახასიათებლების მონაცემების მოსაპოვებლად და საინტერესო პარამეტრების განსაზღვრისათვის. ექსპერიმენტის ჩატარებისას ხდება ერთი ან რამოდენიმე პარამეტრის შეცვლა ისე, რომ განისაზღვროს მათი წეგავლენა გამოსაკვლევ პარამეტრებზე (მახასიათებლებზე).

3) მითითებულ რესპოდენტთა ჯგუფის გამოკითხვა მზა ანკეტით (კითხვარით) Survey.

მაგალითი 2.2. თვალსაჩინოებისათვის იხილეთ დანართი IV, V, რომელიც წარმოადგენს საქართველოს სტატისტიკის სახელმწიფო დეპარტამენტის მიერ საქართველოს განათლების სფეროში რეალურად ჩატარებული გამოკვლევების კითხვარს (ანკეტას). იგი შეძლებისდაგვარად სრულყოფილი სახითაა წარმოდგენილი ორიგინალთან მიმართებაში, ამდენად დაინტერესებულ მკითხველს დიდ დახმარებას გაუწევს.

რესპოდენტი არის ადამიანი, რომელიც გამოკითხვის ჩატარების დროს ინფორმაციის უშუალო წყაროს წარმოადგენს.

კორესპონდენტი (ინტერვიუერი) არის ის პიროვნება, ვინც შეკითხვებით მიმართავს რესპოდენტს და ინიშნავს მიღებულ პასუხებს. იგი სპეციალურად შეიძლება მომზადდეს. **მას უნდა ჩაუტარდეს სათანადო ინსტრუქტაჟი** (გაეცანით დანართ IV, V-ს.

გამოკითხვის ძირითადი ეტაპებია:

გამოკითხვის მიზნის და ამოცანების განსაზღვრა.

გამოკითხვის მიზნებიდან გამომდინარე რესპოდენტთა კატეგორიების განსაზღვრა.

კითხვარის შექმნა **დახურული, ღია ან შერეული** კითხვებით.

კითხვარის წინასწარი ტესტირების ჩატარება.

რესპოდენტთა რაოდენობისა და მათი შერჩევის მეთოდების განსაზღვრა.

რესპოდენტთა შერჩევა და გამოკითხვის ჩატარება. მონაცემების შეგროვება.

მონაცემების **ანკეტირებით** მოპოვების შემთხვევაში ძირითადად გამოიყენება **დახურული და ღია ტიპის** კითხვები (Closed-end questions) და (Open end questions).

დახურული ეწოდება კითხვას, რომელსაც თან ახლავს პასუხის შესაძლო ვარიანტები.

ღია ეწოდება კითხვას, რომელსაც პასუხის შესაძლო ვარიანტები არ ახლავს.

მაგალითად, დახურულია კითხვა:

„რომელ ტაძარშია დაკრძალული ქართველთა განმანათლებელი წმინდა ნინო

ა) ალავერდის ბ) ბოდბის

გ) გელათის დ) სვეტიცხოვლის

ხოლო კითხვა: „რომელი ქართული ეკლესიები მდებარეობენ დღევანდელი თურქეთის ტერიტორიაზე“ - **ღია ტიპისაა.**

კითხვები, რომლებიც შეეხება რესპოდენტის პირად მონაცემებს **დემოგრაფიული** (Demografic) კითხვებია.

გამოკითხვის ჩატარების ფორმები შეიძლება იყოს:

პირადი ინტერვიუთი (Personal interview) - **სტრუქტურიზებული** (Structured), როცა ყველა კითხვა წინასწარ არის განსაზღვრული, ან

არასტრუქტურიზებული (Unstructured), რომელიც იწყება ერთი ან რამოდენიმე ზოგადი კითხვით და მომდევნო კითხვები დამოკიდებულია რესპოდენტის პასუხებზე.

სატელეფონო გამოკითხვები (Telephone survey) და წერილობითი გამოკითხვები (Telephone survey).

სატელევიზიო, რადიო და ზოგადად მედეა საშუალებებით ერთდროულად რესპოდენტთა გაზრდილი რაოდენობის ინტერაქტიული გამოკითხვები.

ჩამოთვლილი მეთოდებით შეგროვილ მონაცემებს ეწოდებათ პირველადი მონაცემები.

4) მონაცემების მოპოვების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მეთოდია უკვე არსებული და გამოქვეყნებული მონაცემების გამოყენება (Published source). ამ მეთოდით მოპოვებულ მონაცემებს **მეორადი მონაცემები** (Secondary Data) ეწოდებათ.

მეორადი მონაცემები შეიძლება მოვიპოვოთ სტატისტიკური დეპარტამენტის მიერ გამოქვეყნებული მასალებიდან, სხვადასხვა დარგობრივი სამინისტროების, უწყებების, ბიზნეს ორგანიზაციების, ფირმების გამოქვეყნებული მასალებიდან, კატალოგებიდან, საარქივო მასალებიდან, ჟურნალ-გაზეთებიდან, ინტერნეტიდან და სხვა.

მონაცემების მოპოვებისას ერთ-ერთ მნიშვნელოვან პრობლემას წარმოადგენს **მონაცემთა „დამახინჯება“, ანუ ჩანაცვლება** (Bias). მისი გამომწვევი მიზეზი შეიძლება იყოს მკვლევარის სუბიექტური აღქმით გამოწვეული ჩანაცვლება (Observer bias), გაზომვის ცდომილება (Measurement error), გამოკითხვის დროს უპასუხოდ დარჩენილი კითხვების დიდი რაოდენობა (Nonresponse bias), კვლევისას დაკვირვებულ მნიშვნელობათა შერჩევის მეთოდით გამოწვეული ჩანაცვლება (Selection bias).

მაგალითი 2.3. ქვემოთ მოცემულია ანკეტის ნიმუში, რომლითაც ჩაატარა ინფორმატიკის ფაკულტუტის ბაკალავრიატის II კურსის 20-კაციანი აკადემიური ჯგუფის სტუდენტთა სასწავლო ექსპერიმენტული გამოკითხვა. გამოკითხვა ჩატარდა რეალურთან მიახლოებულ პირობებში ანკეტის ნიმუშის მიხედვით, წესების ფორმალური დაცვით, 2009 წლის 1 აპრილს. ვლევის თემა მითიტებულია ანკეტაში.

სასწავლო ექსპერიმენტული ანკეტა

დანართი I. სტუდენტთა აზრი გამოკვლევა წარმატებული კარიერისათვის საქართველოში აუცილებელი წინაპირობის შესახე (სასწავლო კითხვარი)

საქართველოში წარმატებული კარიერისათვის აუცილებელი
წინაპირობის შესახებ სტუდენტთა აზრის გამოკვლევა.

სასწავლებელი ----------------------- ფაკულტეტი, კურსი --------------------------------------

ინტერვიუერი -------------------------------- --------------------------------- ----------------------------

(გვარი, სახელი) (ხელმოწერა) (თარიღი)

ინტერვიუერის შენიშვნები და კომენტარები ---

ზედამხედველი -------------------------------- ------------------------------ ----------------------------

(გვარი, სახელი) (ხელმოწერა) (შემოწმების თარიღი)

ზედამხედველის შენიშვნები და კომენტარები --

კორექტორის შენიშვნები და კომენტარები ---

წინამდებარე კითხვარის მიზანია სამსახურებრივი კარიერისათვის აუცილებელი წინაპირობის შესახებ საქართველოს უმაღლეს სასწავლებლების სტუდენტთა აზრის გამოკვლევა.

თქვენი პასუხები გამოყენებული იქნება მხოლოდ სასწავლო მიზნით, განზოგადებული სტატისტიკური შეფასების მისაღებად.

ინტერვიუერს: გთხოვთ გამოკითხოთ მხოლოდ არსებული სასწავლებლისა და ფაკულტუტის სტუდენტი. რესპოდენტს პირველ რიგში წარუდგინეთ თქვენი თავი, გააცანით შესავალი და ზოგადად აუხსენით გამოკვლევის მიზნები. შემდეგ კი წინამდებარე კითხვარის სტრუქტურა და პირობები.

რა მიგაჩნია საქართველოში წარმატებული კარიერის წინაპირობად?

შრომა ☐

ნიჭი ☐

ბედისწყალობა ☐

მემკვიდრეობა ☐

მეგობართა წრე ☐

განათლების მიღება უცხოეთში, თუნდაც

ნებისმიერ ქვეყანაში ☐

პასუხი არ მაქვს ☐

2. რომელი საგნის ან საგნების შესწავლა მიგაჩნიათ აუცილებელ პირობად თქვენს სპეციალობაში წარმატებული კარიერის მისაღწევად? ----------
----

რესპოდენტს (სტუდენტს): წერილობით, მოკლედ გამოკითხვით თქვენი მოსაზრებები და შენიშვნები წინამდებარე ანკეტის ადექვატურობის შესახებ კვლევის ძირითადი მიღწევის საქმეში. კითხვარში რა საკითხს ჩაუმატებდით ან ამოიღებდით? --
----

გმადლობთ ინტერვიუსათვის

შენიშვნა: დანართ IV-ში მოყვანილი საქართველოში ქართველი მკვლევარების მიერ ჩატარებული ერთ-ერთი გამოკვლევის ანკეტის ნიმუში ვფიქრობთ, დაგეხმარებათ გამოკითხვით მონაცემთა შეგროვების სტრუქტურულ-ორგანიზაციული საკითხების გააზრებაში.

გამოკითხვის ანკეტის პირველ პუნქტში დაფიქსირებული შედეგების მიხედვით შედგა მონაცემთა სიხშირეების (ნედლი) ცხრილი 2.2.

შრომა	|
ნიჭი	|
ბედისწყალობა	
მემკვიდრეობა	||||
მეგობართა წრე	||
განათლების მიღება უცხოეთში	||
პასუხი არ აქვს	|
ბათილი ბიულეტენი	||||

ცხრილი 2.2.

ა) ავაგოთ მონაცემების სიხშირეთა შესაბამისი პროცენტული წრიული დიაგრამა

ამოხსნა. წრიული დიაგრამის ასაგებად წრე იყოფა სიხშირეთა პროპორციულ სექტორებად, რისთვისაც ვპოულობთ თითოეული სექტორის შესაბამის ცენტრალურ კუთხეს მოცემული n სიხშირის მიხედვით ფორმულით:

$$\alpha_i = \frac{360 \cdot n_i}{100} = 3{,}6 n_i$$

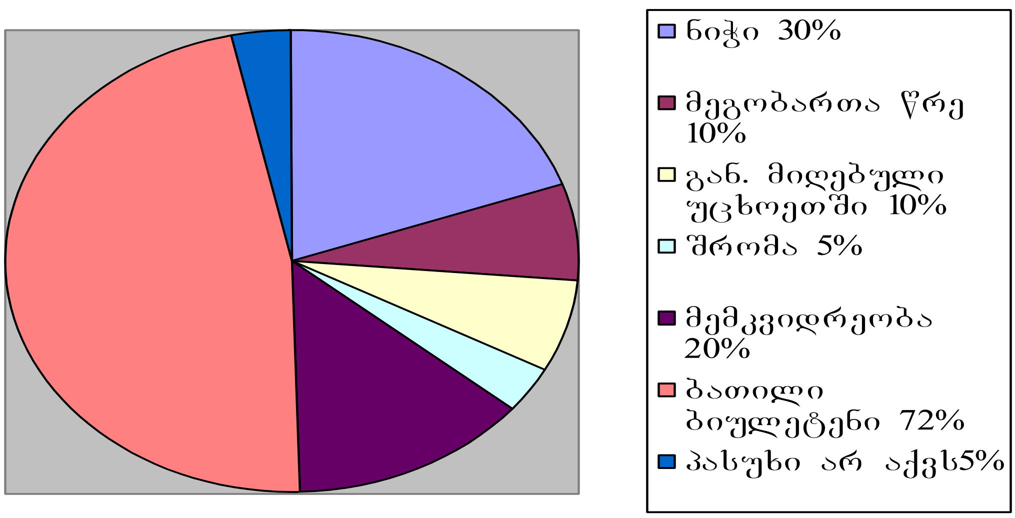
$\sum_{i=1}^{K} n_i = 20$, რესპოდენტთა რიცხვი ტოლია 20-ის.

შედგება სამუშაო ცხრილი:

ცხრილი 2. 3.

<table>
<tr><th>დონე</th><th>მონიშვნა</th><th>სიხშირე n_i</th><th>პროცენტული $n_i/n.100\%$</th><th>შესაბამისი ცენტრალური კუთხე $\alpha=(3,6.\ n_i)$</th></tr>
<tr><td>შრომა</td><td>|</td><td>1</td><td>5%</td><td>18^0</td></tr>
<tr><td>ნიჭი</td><td>|</td><td>6</td><td>30%</td><td>108^0</td></tr>
<tr><td>ბედისწყალობა</td><td></td><td>0</td><td>0%</td><td>0^0</td></tr>
<tr><td>მემკვიდრეობა</td><td>||||</td><td>4</td><td>20%</td><td>72^0</td></tr>
<tr><td>მეგობართა წრე</td><td>||</td><td>2</td><td>10%</td><td>36^0</td></tr>
<tr><td>განათლების მიღება უცხოეთში</td><td>||</td><td>2</td><td>10%</td><td>36^0</td></tr>
<tr><td>პასუხი არ აქვს</td><td>|</td><td>1</td><td>5%</td><td>18^0</td></tr>
<tr><td>ბათილი ბიულეტენი</td><td>||||</td><td>4</td><td>20%</td><td>72^0</td></tr>
<tr><td>სულ</td><td></td><td>20 რესპოდენტი</td><td>100%</td><td>360^0</td></tr>
</table>

ცენტრალური კუთხეების მიხედვით აიგება წრიული დიაგრამა.



ნახ. 2.1.

შენიშვნა:

- არ უნდა დაგვავიწყდეს ბათილი კითხვების აღრიცხვა და დაკავშირებულ (პასუხი არ მაქვს) რესპოდენტთა აღრიცხვა. წინააღმდეგ შემთხვევაში კვლევა სრულფასოვანი ვერ იქნებოდა.
- დიაგრამაზე კუთხეები მოვნიშნეთ, მხოლოდ სასწავლო მიზნით, დიაგრამის ასაგებად.

5) ხარისხის ტექნიკური კონტროლის სტატისტიკური მეთოდი ერთ-ერთი ძირითადი მეთოდია, როგორც წარმოების ყოველი უბნისა და კონტროლის ობიექტისათვის, ისე პროდუქციის (ნაწარმის) ხარისხის შესწავლისათვის მოხმარების სფეროში. (იხილეთ წიგნი ი. ზედგენიძე, მ. ბაიაშვილი, ხარისხის მართვა, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, თბილისი, 2008).

ტექნიკურ კონტროლს ექვემდებარება ობიექტების როგორც რაოდენობრივი, ისე თვისობრივი მახასიათებლები და პარამეტრები. მოპოვებული მონაცემები ძირითადად სპეციალური დანიშნულებისაა.

შეიძლება გამოვყოთ ხარისხის ტექნიკური კონტროლის მონაცემების მოპოვების შემდეგი ძირითადი მიმართულებები:

- ვიზუალური დათვალიერება (აღწერა), რომელიც საშუალებას იძლევა განისაზღვროს ვიზუალურად ზედაპირული დეფექტების არსებობა, ან არ არსებობა (თვისობრივი მონაცემები).

- ლაბორატორიული ანალიზი, რომელიც მასალის, ნაწარმის, დეტალის მექანიკური, ქიმიური, ფიზიკური, მეტალოგრაფიული და სხვა თვისებების განსაზღვრის საშუალებას იძლევა (რაოდენობრივი და თვისობრივი მონაცემები).

- მექანიკური გამოცდა - სიმტკიცის, გამძლეობის და სხვა პარამეტრების განსაზღვრისათვის (რაოდენობრივი და თვისობრივი მონაცემები).

- რენტგენოგრაფიული, ელექტროთერმული, ელექტრომაგნიტური და სხვა გამოცდის ფიზიკური მეთოდები (თვისობრივი და რაოდენობრივი მონაცემები).

- ტექნიკური დისციპლინის კონტროლი და ტექნოლოგიური გასინჯვები, რომელიც ტარდება მაშინ, როდესაც ლაბორატორიული ანალიზი საკმარისი არ არის (თვისობრივი და რაოდენობრივი მონაცემები).

- საკონტროლო - ჩასაბარებელი გამოცდა - ხარისხის კონკრეტული მოცემული მაჩვენებლისა და მახასიათებლის განსაზღვრისათვის.

- მოხმარების სფეროში გამოკვლევებისა და კონტროლის ის მეთოდები, რომლებიც დამყარებულია ელექტრონული, იონური სხივების გამოყენებაზე, როგორიცაა ელექტრონული სპექტროსკოპია. ლექტრონულ - ზონდური რენტგენული მიკროანალიზი, მეორადი იონური მას - სპექტროგრაფია, რენტგენოსკოპია, ულტრაბგერითი კვლევები და სხვა.

ხარისხის კონტროლის შედეგად მოპოვებული მონაცემების დამუშავების, ანალიზისა და დასკვნის საუკეთესო საშუალებაა კვლევის ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდები.

§3. სტატისტიკურ მონაცემთა წარმოდგენის ხერხები და ანალიზი

სტატისტიკურ მონაცემთა მოხერხებული ფორმით წარმოდგენის სხვადასხვა საშუალება არსებობს. როგორიცაა ნედლი მონაცემების ცხრილები; სიხშირეთა, ფარდობით სიხშირეთა და პროცენტული განაწილების ცხრილები, პიქტოგრამები, ხისებრი ფოთლებიანი ღეროების დიაგრამა, წერტილოვანი დიაგრამა, ხაზოვანი დიაგრამა, მესერული დიაგრამა, სვეტოვანი დიაგრამა (Bar chart), ფარდობით სიხშირეთა, ან სიხშირეთა განაწილების ჰისტოგრამა (Histogram), პოლიგონი, ოგივა და სხვა.

n_i არაუარყოფით მთელ რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ განმეორდა რომელიმე x_i მონაცემი, ეწოდება ამ მონაცემის სიხშირე.

მონაცემის სიხშირის განაყოფს მონაცემთა რაოდენობაზე ეწოდება ამ მონაცემის ფარდობითი სიხშირე $\left(\frac{n_i}{n}\right)$. პროცენტულად $\left(\frac{n_i}{n}\right)100\%$.

მოდა (Mo) ეწოდება იმ მონაცემს, რომლის სიხშირე (ან ფარდობითი სიხშირე) თითოეული სხვა მონაცემის სიხშირეზე (ფარდობით სიხშირეზე) მეტია.

მონაცემებს შეიძლება არ ჰქონდეთ მოდა, ეს მაშინ მოხდება თუ თითოეული მონაცემის სიხშირე ტოლია, შეიძლება ჰქონდეს ერთი ან ერთზე მეტი მოდა.

შინაარსობრივად სიტყვა „მოდა“ ცხოვრებაშიც მსგავსი შინაარსით გამოიყენება. პოპულარული, გავრცელებული, მაგრამ არა ყველა.

მაგალითად: 1) მონაცემებს 5; 3; 6; 0; 7; 9; 2; 1; 4; 8 მოდა არ გააჩნია. ხოლო მონაცემებს 4; 3; 5; 4; 3; 3; 4; 8; 6; 9 აქვს ორი მოდა 3 და 4.

მაგალითებში: 1.1; 1.5; 1.6; 1.7; 2.1, პირველადი ნედლი მონაცემები ჩაწერილია ცხრილში, ისეთივე თანმიმდევრობით, როგორც ისინი დაკვირვებათა (ცდების) მიხედვით მიიღებიან.

ნედლი რიცხვითი მონაცემების მოწესრიგება და დამუშავება იწყება, მათი არაკლებადი მიმდევრობის სახით გადალაგებით. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ მონაცემები დალაგებულია ვარიაციული მწკრივის სახით. მათ შორის უდიდეს და უმცირესს კიდურა მონაცემები ეწოდება.

- უდიდეს და უმცირეს მონაცემებს შორის სხვაობას მოცემული მონაცემების

გაბნევის დიაპაზონი (Range) ეწოდება და აღინიშნება R-ით.

ვთქვათ x_1, x_2, x_3,...,x_n X ცვლადზე დაკვირვების რიგის მიხედვით ჩაწერილი ნედლი რიცხვითი მონაცემებია. n მონაცემთა მოცულობაა. დავალაგოთ მონაცემები „ვარიაციული მწკრივის“ სახით:

x_1, x_2, x_3,...,x_k, სადაც $X_1 \le X_2 \le X_3 \le \ldots \le X_k$ (ან $X_1 < X_2 < \ldots < X_k$)

X_1 არის უმცირესი მონაცემი, ხოლო X_k - უდიდესი მონაცემია.

$x_1 = \min\limits_{1 \le i \le n} x_i^{'}$; $x_K = \min\limits_{1 \le i \le n} x_i^{'}$

$R = X_k - X_1$

x_i-ს ვუწოდოთ ვარიანტსაც უწოდებენ.

- **მედიანა** (Me) არის ზრდადობის მიხედვით დალაგებული მონაცემებიდან:

ა) შუა მონაცემი თუ მონაცემთა n რიცხვი კენტია.

მონაცემების: 4; 4; 4; 5; 6; 7; 9 მედიანა 5-ის ტოლია

ბ) ორი შუა მონაცემის არითმეტიკული საშუალოა, თუ მონაცემთა n რიცხვი ლუწია.

მონაცემების 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 მედიანა ტოლია $\frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$

- საზოგადოდ, დავუშვათ x_1, x_2, x_3,...,x_n ვარიაციულ მწკრივად დალაგებული მონაცემებია. აღვნიშნოთ მედიანა Me - სიმბოლოთი. იგი გამოითვლება შემდეგი წესით:

ა) $M_e = X_{\frac{1+n}{2}}$, ანუ $\frac{1+n}{2}$ ნომრიანი მონაცემია, თუ n კენტია.

X_1 X_2 X_3-ის შემთხვევაში შუა წევრი, ანუ მედიანა $Me = X_2 = X_{\frac{1+3}{2}}$ ანუ $\frac{1+3}{2} = 2$ ნომრიანი წევრია, რადგან, n=3 კენტი რიცხვია.

ბ) $M_e = \dfrac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$, თუ n ლუწია.

x_1, x_2, x_3, x_4-ის შემთხვევაში, n=4, $M_e = \dfrac{X_2 + X_3}{2}$, ანუ $x_{\frac{4}{2}} = x_2$, 2 ნომრიანი წევრისა და $X_{\frac{4}{2}+1} = X_3$, ერთით მეტნომრიანი წევრის არითმეტიკული საშუალოა.

- ვარიაციის დიაპაზონს, მოდას, მედიანას სტატისტიკური მონაცემების რიცხვით მახასიათებლებს უწოდებენ. ისინი გარკვეულ საჭირო ინფორმაციას გვაწვდიან სტატისტიკური მონაცემების შესახებ. იგივე აზრით განისაზღვრება შერჩევისათვის დიაპაზონი, მოდა, მედიანა, რომლებიც საბოლოო ჯამში პოპულაციის (შესასწავლი ცვლადის, ანუ ატრიბუტის) ანალოგიური მახასიათებლების შეფასებას წარმოადგენენ.

ზოგჯერ წარმოდგენილი მონაცემები სპეციალური დანიშნულებისაა.

მაგალითი 2.4. მოცემულია A, B, C, D, M, N, L ქალაქებს შორის მანძილები (კილომეტრებში) შემდეგი ცხრილით:

A						
108	B					
176	81	C				
56	138	174	D			
104	78	74	102	M		
32	88	146	50	72	N	
74	36	122	124	92	74	L

ცხრილი 2.4.

ცხრილში რეალური ქალაქების დასახელებები გამიზნულადაა შეცვლილი პირობითი ასოებით. მონაცემები აღებულია [12] წიგნიდან.

ორ ქალაქს შორის მანძილი შესაბამისი ჰორიზონტალური სტრიქონისა და ვერტიკალური სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი რიცხვია. მაგალითად CN მანძილი 146 კმ-ია.

ა) რა საშუალებით შეიძლებოდა ამ მონაცემების შეგროვება?

ბ) დაასახელეთ სხვადასხვა ქალაქების წყვილები და იპოვეთ მათ შორის მანძილები.

გ) დაასახელეთ მონაცემები, რომლებიც მეორდებიან და შესაბამისი ქალაქების წყვილები.

დ) რა უმოკლესი მანძილია B-დან N ქალაქამდე, D ქალაქის გავლით?

მაგალითი 2.5. საქართველოს ერთ-ერთმა ბანკმა იმ პირებს, რომლებიც მისი მომსახურებით სარგებლობენ და საშუალოდ ყოველთვიურად იხდიან არანაკლებ 100 ლარის კომუნალურ გადასახადს, შესთავაზა სესხის ახალი ფორმა.

ქვემოთ მოცემულია საბანკო სესხის (თანხის) განაწილების ცხრილი ლარებში:

ცხრილი 2.5.

ყოველთვიური საშუალო კომუნალური გადასახადი (ბოლო 6 თვის მონაცემების მიხედვით	სესხი 12 თვის ვადით
100	1000
150	1500
200	2000
250	2500
300	3000
350	3500
400	4000

მონაცემები წარმოდგენილია ბანკის სარეკლამო ბარათის მიხედვით. წარმოადგინეთ მონაცემები ხაზოვანი დიაგრამის სახით, ამასთან აბსცისათა ღერძზე დააფიქსირეთ კომუნალური გადასახადის შესაბამისი, ორდინატთა ღერძზე კი სესხის შესაბამისი წერტილები. აგებული დიაგრამის მიხედვით უპასუხეთ კითხვებს.

ა) რა თანხის აღება შეიძლება სესხად, თუ ყოველთვიური საშუალო კომუნალური გადასახადი შეადგენს 225 ლარს?

ბ) აღმოაჩინეთ კანონზომიერება მონაცემთა ცხრილში და გამოსახეთ ფორმულით კავშირი საშუალო კომუნალურ გადასახადსა და სესხის სიდიდეს შორის. რა თანხის აღება შეიძლება სესხად, თუ საშუალო კომუნალური გადასახადი შეადგენს 315 ლარს.

გ) რა თანხის აღება შეიძლება სესხად, თუ ბოლო 6 თვის განმავლობაში გადახდილია კომუნალური გადასახადები (ლარებში):

150; 160; 190; 140; 110; 90

„ხარისხის კონტროლის შვიდი იაპონური ინსტრუმენტის“ ერთ-ერთი ძირითადი შემადგენელი ნაწილია საკონტროლო ფურცელი. (იხილეთ წიგნი ი.ზედგენიძე, მ. ბაიაშვილი. ხარისხის მართვა. სტუ. თბილისი 2008). საკონტროლო ფურცელი მონაცემების შეკრების და მათი მოწესრიგების ინსტრუმენტია მოპოვებული (შეგროვილი) ინფორმაციის შემდგომი გამოყენების გასაადვილებლად.

საკონტროლო ფურცელი ქაღალდის ბლანკია, რომელზეც წინასწარ ამობეჭდილია საკონტროლო პარამეტრები, რომელთა შესაბამისად შესაძლებელია მონაცემების შეტანა სიმბოლოების საშუალებით. საკონტროლო ფურცლების შედგენისას საჭიროა ყურადღება მიექცეს, რომ ნაჩვენები იყოს, ვინ, პროცესის რომელ ეტაპზე და რა დროის განმავლობაში შეაგროვა მონაცემები, აგრეთვე იმას, რომ ფურცლის ფორმა იყოს უბრალო და დამატებითი განმარტებების გარეშე გასაგები.

მაგალითი 2.6. [იხ. იგივე წიგნი იგივე]. მოვიყვანოთ საკონტროლო ფურცელი, რომელიც გამოიყენება ტელევიზორის ნამტყუნები დეტალების ფიქსირებისათვის (ნახ. 2.2).

<table>
<tr><td>ატელიეში შეცვლილი დეტალები</td><td>ს</td></tr>
<tr><td>ყოველი შეცვლილი დეტალი აღნიშნეთ ხაზით</td><td>ი</td></tr>
<tr><td>აღნიშნეთ ასე: | || ||| |||| |||||</td><td>ხ</td></tr>
<tr><td>დრო: 1-6 აპრილი 2008 წ.</td><td>შ</td></tr>
<tr><td>ხელოსანი: კახიანი ა.ბ.</td><td>ი</td></tr>
<tr><td></td><td>რ</td></tr>
<tr><td></td><td>ე</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>მოდელი 1013</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ინტეგრალური სქემები</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>კონდენსატორები</td><td>|| || |||| |||| |||| |</td><td>26</td></tr>
<tr><td>წინაღობები</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>ტრანსფორმატორები</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>გადამრთველები</td><td>|||| ||||</td><td>8</td></tr>
<tr><td>მილაკები</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>სულ</td><td>41</td></tr>
<tr><td>მოდელი 1017</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ინტეგრალური სქემები</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>კონდენსატორები</td><td>|||| |||| |||| |||| |||</td><td>24</td></tr>
<tr><td>წინაღობები</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>ტრანსფორმატორები</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>გადამრთველები</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>მილაკები</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>სულ</td><td>31</td></tr>
<tr><td>მოდელი</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ინტეგრალური სქემები</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>კონდენსატორები</td><td>|||| |||| |||| |||| |||| ||</td><td>27</td></tr>
<tr><td>წინაღობები</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>ტრანსფორმატორები</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>გადამრთველები</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>მილაკები</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>სულ</td><td>40</td></tr>
<tr><td></td><td>ჯამი</td><td>112</td></tr>
</table>

ნახ. 2.2. საკონტროლო ფურცელი

შეადგინეთ მტყუნებათა სიხშირეების განაწილების ცხრილი

ამოხსნა

საკონტროლო ფურცლის საშუალებით შეგროვებული მონაცემების საფუძველზე შედგება ჯამური მტყუნებების სიხშირეთა ცხრილი (ცხრილი 2.2).

ცხრილი 2.6.

ტელევიზორის ნამტყუნები დეტალების ჯამური რაოდენობა

ყველა მოდელის მიხედვით	ტყუნებების რაოდენობა	პროცენტული შემადგენლობა
ინტეგრალური სქემები	8	7,1
კონდენსატორები	77	68,8
წინაღობები	4	3,6
ტრანსფორმატორები	9	8,0
გადამრთველები	11	9,9
მილაკები	3	2,6
ჯამი	112	100

სიხშირეთა (ან ფარდობით სიხშირეთა) განაწილების ცხრილი წარმოადგენს ცხრილს, რომელშიც წარმოდგენილია დალაგებული მონაცემების შესაძლო x_i მნიშვნელობები და ყოველი x_i მნიშვნელობის შესაბამისი სიხშირე (ან ფარდობითი სიხშირე $n_i/n=N_i$) $i=1,2,...,n$.

მაგალითი 2.7. ნავთობმომპოვებელი კომპანიის მიერ მოპოვებული ნავთობის რაოდენობა დღეების მიხედვით (ბარელებში, 1 ბარელი=159 ლიტრს), წარმოდგენილია ქვემოთ მოცემულ ცხრილში. შევადგინოთ ა) ფოთლებიანი ღეროების დიაგრამა, სიხშირეთა, ფარდობით სიხშირეთა და პროცენტული განაწილების ცხრილი. წინასწარ დაალაგეთ მონაცემები ვარიაციულ მწკრივად და იპოვეთ გაბნევის დიაპაზონი, მოდა და მედიანა.

ცხრილი 2.7.

დაკვირვების ნომერი (დღეები)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
მოპოვებული ნავთობის რაოდენობა	208	182	208	207	203	201	191	194	183	181	207	205	207	221

ამოხსნა. თვალსაჩინოების მიზნით ხშირად სტატისტიკურ მონაცემებს წარმოადგენენ **ფოთლებიანი ღეროების დიაგრამის სახით** შემდეგი წესით: ყოველი რიცხვი დავყოთ ორ ნაწილად. რიცხვის პირველი ორი ციფრი ჩავწეროთ ვერტიკალური ხაზის მარცხნივ, ხოლო ბოლო ციფრი კი მივუწეროთ შესაბამისად ჰორიზონტალურად ამ ხაზის მარჯვენა მხრიდან.

ამასთან დავიცვათ ზრდადობის ტენდენცია ზემოდან ქვემოთ და მარცხნიდან მარჯვნივ

ღეროები	ფოთლები
18	123
19	14
20	13577788
21	
22	1

ცხრილი 2.8.

ზრდის მიხედვით დალაგებული მონაცემებია (ვარიაციული მწკრივია. 181, 182, 183, 191, 194, 201, 203, 205, 207, 207, 207, 208, 208, 221. გაბნევის დიაპაზონია d=221-181=40 (ბარელი)

მოდა Mo=207 (ბარელი)

მედიანა $Me=X_{n/2}=X_{14/2}=X_7=203$ (ბარელი)

სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) განაწილების ცხრილს აქვს სახე:

ვარიანტის № i	მოპოვებული ნავთობის რაოდენობა X_i (ვარიანტა)	შესაბამისი სიხშირე n_i	შესაბამისი ფარდობითი სიხშირე ni/n
1	181	1	-
2	182	1	1/14
3	183	1	1/14
4	191	1	1/14
5	194	1	1/14
6	201	1	1/14
7	203	1	1/14
8	205	1	1/14
9	207	3	3/14
10	208	2	2/14
11	221	1	1/14
ჯამი $\sum$		14	1

n=14 მონაცემების მოცულობაა.

K=11 ვარიანტების (ზრდადობით დალაგებული მონაცემების) რაოდენობაა.

$\sum_{i=1}^{K} n_i = n = 14$ ვარიანტების შესაბამის სიხშირეთა ჯამი მონაცემთა რაოდენობის ტოლია.

$\sum_{i=1}^{K} \frac{n_i}{n} = 1$ ვარიანტების შესაბამის ფარდობით სიხშირეთა ჯამი ერთის ტოლია.

მაგალითი 2.8. უნივერსიტეტის ერთ-ერთი ჯგუფის 10 სტუდენტს ჩაუტარეს ორმნიშვნელოვნებიანი გამოკითხვა (იგულისხმება, რომ გამოკითხვის ყოველ შედეგს აქვს ერთი თვისებრივი ნიშანი ორი დონით: A - სტუდენტი სპორტსმენია, ან მისი უარყოფა $\overline{A}$ - სტუდენტი არაა სპორტსმენი. დაკვირვების შედეგები მოცემულია შემდეგი ცხრილის სახით.

გამოკითხული სტუდენტის რიგითი ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
დონე A სპორტსმენია $\overline{A}$ არაა სპორტსმენი	Ā	A	A	Ā	A	Ā	A	A	Ā	A

ცხრილი 2.10.

დავაჯგუფოთ ეს მონაცემები მახასიათებელი ნიშნის დონეების მიხედვით და ჩავწეროთ სიხშირეთა განაწილების ცხრილის სახით. მივიღებთ:

დონე	A (სპორტსმენია)	Ā არაა სპორტსმენი	∑ჯამი
სიხშირე	6	4	n=10
ფარდობითი სიხშირე	0,6	0,4	1

პროცენტული	60%	40%	100%

ცხრილი 2.11.

დავალება: სიხშირეთა, ფარდობით სიხშირეთა და პროცენტული განაწილებები თვალსაჩინოებისათვის წარმოვადგინოთ **მართკუთხედებიანი სვეტოვანი დიაგრამების (პარეტოს დიაგრამის)** სახით და **წრიული დიაგრამის სახით.**

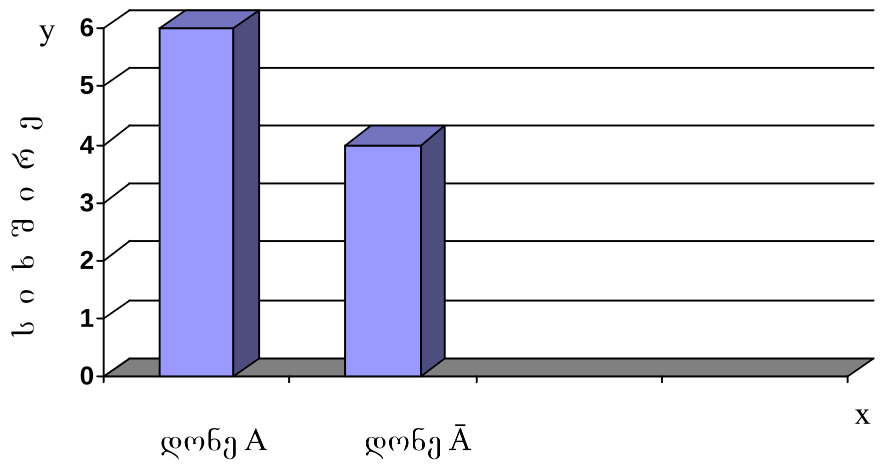
ამოხსნა

პარეტოს დიაგრამის აგება.

I ეტაპი. დავალაგოთ მონაცემები სიხშირეების (ფარდობითი სიხშირეების) მიხედვით ზრდადი ან კლებადი თანმიმდევრობით (იხ. ცხრილი 1.7).

II ეტაპი. საკოორდინატო სიბრტყეზე ავიღოთ ჰორიზონტალური და ვერტიკალური ღერძები. ჰორიზონტალურ ღერძზე მოვნიშნოთ ასაგები მართკუთხედების მცირე გვერდები დონის მონიშვნით. ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე მოვნიშნოთ შესაბამისი სიხშირის ან ფარდობითი სიხშირის სიდიდე. შესაბამისად პროპორციები უნდა შეირჩეს და მონიშნულ ფუძეებზე ავაგოთ სიხშირის (ფარდობითი სიხშირის) სათანადო სიმაღლის მართკუთხედები.

მართკუთხედები უნდა იყოს ტოლი სიგანის. მართკუთხოვან დიაგრამას სვეტოვან დიაგრამასაც უწოდებენ.



ნახ. 2.3.

პარეტოს დიაგრამა (დონეთა სიხშირეების განაწილება).

წრიული დიაგრამის ასაგებად ჯერ ვპოულობთ დონეთა შესაბამის პროცენტულ განაწილებას და წრეს დავყოფთ პროცენტების პროპორციულ

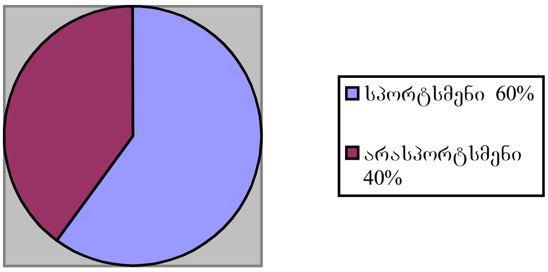
სექტორებად. ჯერ უნდა ვიპოვოთ შესაბამისი ცენტრალური კუთხეები. ამისათვის 3600 გავამრავლოთ შესაბამის პროცენტზე და გავყოთ 100-ზე.

დონე	A	Ā	ჯამი
პროცენტული წილი	60%	40%	100%

ცხრილი 2.12.

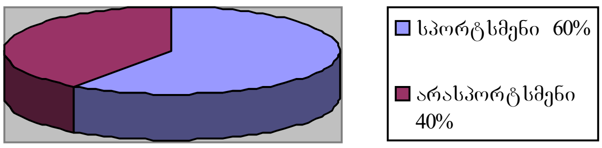
$$\frac{360^0 \cdot 60}{100} = 216^0, \quad \frac{360^0 \cdot 40}{100} = 144^0$$

წრიულ დიგრამას ექნება სახე:



სპორტსმენი 60 % (დონე A), არასპორტსმენი 40% (დონე Ā)

ნახ. 2.4.

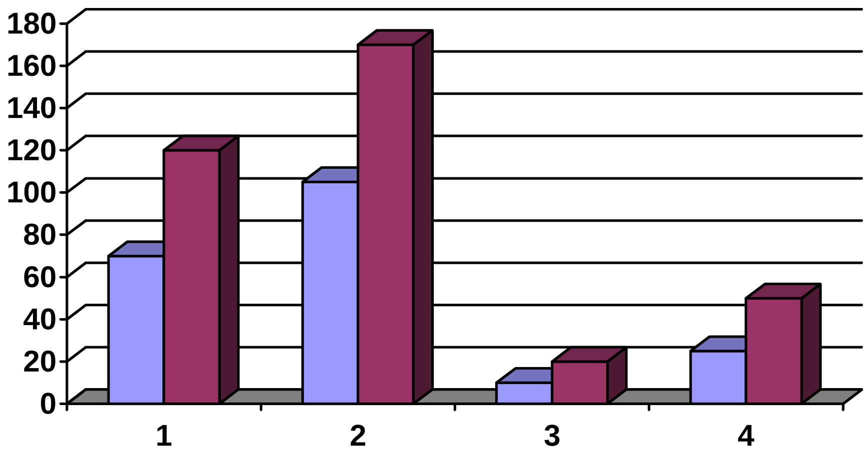


სპორტსმენი 60 % (დონე A), არასპორტსმენი 40% (დონე Ā)

ნახ. 2.5.

ზოგჯერ წრიულ დიაგრამებს მოცულობით სახეს აძლევენ.

მაგალითი 2.9. ნახ.2.6.-ით მოცემულია საფერავის ჯიშის სუფრის წითელ ღვინოში სხვადასხვა ნივთიერებების კონცენტრაციის დონეები მოცულობითი სვეტოვანი დიაგრამის სახით. I დასაშვები და II ნიმუშიდან აღებული. თითოეული ნივთიერებისთვის იანგარიშეთ სხვაობები. იპოვეთ მოდალური გადახრა.



ნახ. 2.6.

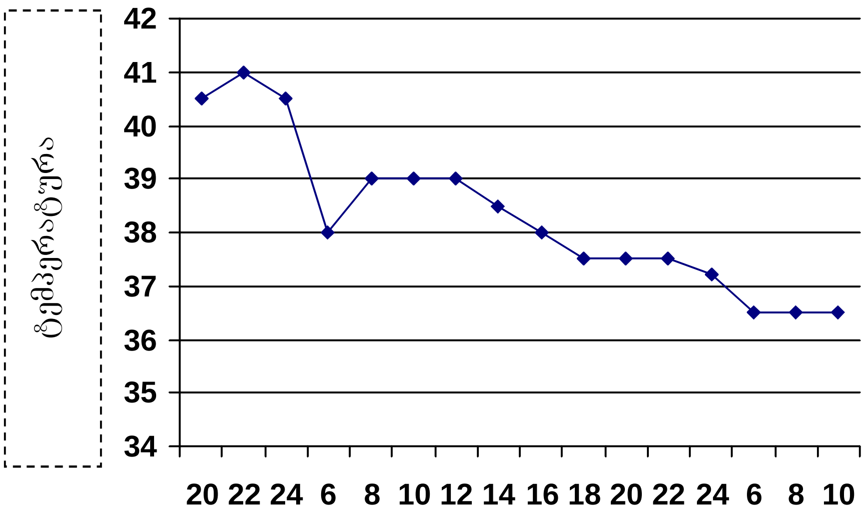
მოცულობითი სვეტოვანი დიაგრამა

კატეხინები და ფლავონოლი

1. (+) კატეხინი; 2. (-) ეპიკატეხინი;

3. კვერცეტინი; გლუკოზიდი; 4. კვერცეტინი

მაგალითი 2.10. ავადმყოფს ტემპერატურა გაუზომეს 20 საათზე, თერმომეტრმა 40,50 აჩვენა, ექიმმა ავადმყოფს დაუნიშნა წამლები და მედდას დაავალა ტემპერატურის ყოველ 2 საათში ერთხელ გაზომვა - დილის 6 საათიდან 24 საათამდე ჩათვლით. გაზომვებით მიღებული მონაცემების შესაბამისი ხაზოვანი დიაგრამა ასე გამოიყურება:



ტემპერატურის გზომვის დრო (სტ-ში)

ნახ. 2.7.

ხაზოვანი დიაგრამა

ა) როდის ჰქონდა ავადმყოფს ყველაზე მაღალი ტემპერატურა? რამდენი?

ბ) რამდენი საათის შემდეგ დაიწყო გამოჯანმრთელების პროცესი?

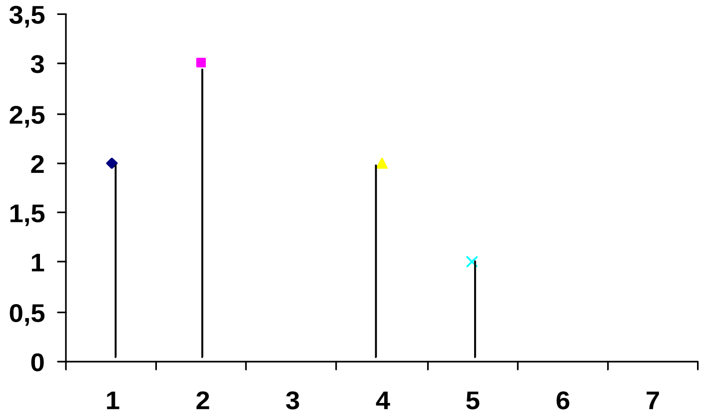
გ) რამდენჯერ გაუზომეს ტემპერატურა ავადმყოფს?

დ) დიაგრამაზე წარმოდგენილი მონაცემები (ტემპერატურები) დაალაგეთ ტემპერატურის კლებადობის მიხედვით და იპოვეთ: მედიანა, დიაპაზონი და მოდა. რამდენი მოდა აქვს?

მაგალითი 2.11. ქვემოთ მოცემულია დაუსრულებელი ცხრილი და დიაგრამა, რომლებიც ასახავენ აკადემიური ჯგუფის სტუდენტთა რაოდენობებს სემესტრში გაცდენილი დღეების მიხედვით:

აცდენილი დღეები	რთეულ ები	სტუდენტთა რაოდენობა (სიხშირე)
0	||	2
1	|	6
2	|||	
3		
4		
5		
6		0
7	|	
სულ		

ცხრილი 2.13.



ნახ. 2.8.

დაასრულეთ თითოეული მათგანი და უპასუხეთ კითხვებს:

თუ გაცდენების რაოდენობების მიხედვით სტუდენტებს დავანაწილებთ ჯგუფებად, მაშინ

ა) სტუდენტთა რამდენ ჯგუფს აქვს ტოლი რაოდენობის გაცდენები?

ბ) გაცდენილი დღეების მიხედვით სტუდენტთა რომელი ჯგუფია მრავალრიცხოვანი?

გ) სტუდენტთა რომელი ჯგუფის ხვედრითი წილია მეტი საერთო გაცდენებში?

დ) რა საშუალებით შეიძლება ყოფილიყო მოპოვებული ზემოთ მოყვანილი მონაცემები?

§4. მონაცემთა რიცხვითი მახასიათებლები

შერჩევის რიცხვითი მახასიათებლები

მონაცემების თვალსაჩინო ვიზუალური წარმოდგენის გარდა მონაცემების ანალიზისათვის ძალიან მნიშვნელოვანია მისი სხვადასხვა რიცხვითი მახასიათებლების პოვნა. როგორიცაა: ა) **მონაცემთა ცენტრალური ტენდენციის საზომები: მოდა** (Mode), **მედიანა** (Median), **საშუალო** (Mean), ბ) **მონაცემთა გაფანტულობის საზომები** (Measures of dispersion), **გაბნევის დიაპაზონი** (Range), **საშუალო გადახრა** (Mean deviation), **დისპერსია** (Variance), **თვისობრივი ვარიაციის ინდექსი** (IQV), **სტანდარტული გადახრა** (Standard deviation).

ზოგიერთი მათგანი კერძოდ გაბნევის დიაპაზონი, მოდა, მედიანა რიცხვითი მონაცემებისათვის წინა პარაგრაფებში განვიხილეთ.

ა) **ცენტრალური ტენდენციის საზომები**

მოდა (Mo) წარმოადგენს შესასწავლი ცვლადის იმ მნიშვნელობას, ანუ იმ მონაცემს, რომელსაც ყველაზე ხშირად ირჩევენ რესპონდენტები, ანუ რომელსაც აქვს ყველაზე დიდი სიხშირე. მოდა შეიძლება ვიპოვოთ ნებისმიერი გაზომვის დონის მქონე ცვლადისათვის.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მოდა, უნდა ავაგოთ სიხშირეთა განაწილება და მასზე დაყრდნობით განვსაზღვროთ ის მონაცემი ან კატეგორიები, რომელთაც აქვთ უდიდესი სიხშირე. საზოგადოდ თითოეულ ცვლადს შეიძლება ჰქონდეს ერთი მოდა, როცა მხოლოდ ერთ კატეგორიას აქვს

ყველაზე დიდი სიხშირე; ორი ან მეტი მოდა, როცა ორ ან რამოდენიმე კატეგორიას აქვს ერთნაირი დანარჩენ კატეგორიებზე მეტი სიხშირე; ცვლადს შეიძლება მოდა არ გააჩნდეს, როცა ყველა კატეგორიას აქვს ერთნაირი სიხშირე.

მედიანა (Me) წარმოადგენს იმ მონაცემს, რომელზე მეტი და ნაკლები მონაცემების რაოდენობა ერთნაირია. მედიანა არის ცვლადის შესაბამისი მონაცემების 50-პროცენტილი. მედიანა შეიძლება განისაზღვროს რიცხვითი მონაცემებისათვის.

მონაცემების მედიანის მოსაძებნად შესაბამისი მონაცემები ჯერ უნდა დავალაგოთ ზრდადობით ანუ უნდა ავაგოთ მონაცემთა ვარიაციული მწკრივი. შემდეგ, თუ ცვლადის შესაბამისი მონაცემების რაოდენობა კენტია, მაშინ მედიანა (n+1)/2 ნომრის მქონე მონაცემის ტოლი იქნება, სადაც n არის მონაცემების რაოდენობა. თუკი ცვლადის შესაბამისი მონაცემების რაოდენობა ლუწია, მაშინ უნდა განვიხილოთ n/2 და $\frac{n}{2}+1$ ნომრის მქონე მონაცემები, რომელთა არითმეტიკულ საშუალოს უდრის მედიანა, როცა ცვლადი რიცხვითია.

არითმეტიკული საშუალო $\overline{X}$ წარმოადგენს ცენტრალური ტენდენციის ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან საზომს, რომელიც გამოითვლება რიცხვითი ცვლადებისათვის და უდრის მონაცემთა ჯამის მათ რაოდენობასთან შეფარდებას, ე.ი.

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$ სადაც n მონაცემთა მოცულობაა.

შევნიშნოთ, რომ თუ განვიხილავთ შესაბამისად მონაცემებისა და მათი არითმეტიკული საშუალოს სხვაობებს, მაშინ მათი ჯამი ტოლი იქნება ნულის, ე.ი. საშუალოდან გადახრების ჯამი ნულის ტოლია.

იმ შემთხვევაში, როცა ცვლადის შესაბამისი მონაცემები დაჯგუფებულია და მოცემულია თითოეული კატეგორიის სიხშირე, მაშინ საშუალო შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულის გამოყენებით.

$$\overline{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \ldots + x_k n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$$

სადაც ni წარმოადგენს i-ური x_i მნიშვნელობის სიხშირეს, ხოლო X_1, X_2,...X_k კი ცვლადის განსხვავებული მნიშვნელობებია (მონაცემებია).

შევნიშნოთ, რომ მედიანა და მოდა წარმოადგენენ ცენტრალური ტენდენციის ისეთ საზომებს, რომლებზეც არ ახდენენ გავლენას განსაკუთრებული ანუ ძალიან დიდი ან ძალიან მცირე მონაცემები, მაშინ როცა არითმეტიკულ საშუალოზე დიდ გავლენას ახდენენ ამ ტიპის მონაცემები.

ამავე დროს უნდა აღვნიშნოთ, რომ თუ განვიხილავთ სხვადასხვა შერჩევებს, არითმეტიკული საშუალო არის ცენტრალური ტენდენციის ერთ-ერთი ყველაზე მდგრადი საზომი. ე.ი. პოპულაციის საშუალოდან შერჩევების საშუალოს აბსოლუტური გადახრების საშუალო საზოგადოდ უფრო მცირეა, ვიდრე მედიანისა და მოდასათვის.

განაწილებას ეწოდება უნიმოდალური, თუ მას აქვს ერთადერთი მოდა.

განაწილებას ეწოდება სიმეტრიული, თუ არითმეტიკულ საშუალოზე მეტი და მასზე ნაკლები მნიშვნელობების რაოდენობები ტოლია, ე.ი. როცა საშუალო უდრის მედიანას.

თუ ცვლადის მნიშვნელობების განაწილება არის იდეალურად ზარის ფორმის, ე.ი. არის სიმეტრიული, უნიმოდალური, არ არის ზემოთ ძალიან გაწელილი და არ აქვს დიდი ბოლოები, მაშინ მას ეწოდება ნორმალური განაწილება.

განაწილებას ეწოდება ასიმეტრიული, თუ საშუალო არ ემთხვევა მედიანას.

განაწილებას ეწოდება დადებითად ასიმეტრიული, თუ საშუალო მედიანაზე მეტია.

განაწილებას ეწოდება უარყოფითად ასიმეტრიული, თუ საშუალო მედიანაზე ნაკლებია.

x_1, x_2,...,x_n შერჩევის ცენტრალური ტენდენციის მახასიათებლები ანალოგიურად განისაზღვრება.

ბ) მონაცემთა და შერჩევის გაფანტულობის საზომები

გაფანტულობის საზომები ახასიათებენ ცენტრის ერთ-ერთი საზომის მიმართ მონაცემების განლაგების სიმჭიდროვეს.

გავიხსენოთ, **გაბნევის დიაპაზონი** (R), წარმოადგენს მონაცემთა გაფანტულობის საზომს, რომელიც უდიდეს და ცმცირეს მონაცემებს შორის სხვაობის ტოლია.

მონაცემთა საშუალო გადახრა (MD) უდრის საშუალოდან გადახრების აბსოლუტური მნიშვნელობების საშუალოს, ე.ი.

$$MD = \frac{\left|x_1 - \overline{x}\right| + \left|x_2 - \overline{x}\right| + \ldots + \left|x_n - \overline{x}\right|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \overline{x}\right|}{n}$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მონაცემებია.

დისპერსია წარმოადგენს საშუალოს მიმართ მონაცემების გაფანტულობის საზომს, რომელიც მონაცემებიდან საშუალომდე მანძილების კვადრატების საშუალოს ტოლია და აღინიშნება S^2-ით.

$$S^2 = \frac{(x_1 - \overline{X})^2 + (x_2 - \overline{X})^2 + .. + (x_n - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n-1} - \frac{N}{n-1}(\overline{X})^2$$

სადაც N - მონაცემების რაოდენობაა, x - საშუალოა.

სტანდარტული გადახრა (Standard deviation) წარმოადგენს კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან, ე.ი.

$$S = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n-1} - \frac{n}{n-1}(\overline{X})^2}$$

იმ შემთხვევაში, როცა შესასწავლი ცვლადისათვის მოცემულია სიხშირეთა განაწილება ანუ მონაცემები დაჯგუფებულია კატეგორიების მიხედვით, მაშინ სტანდარტული გადახრის გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ მოდიფიცირებული ფორმულა

$$S = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 n_i}{n-1} - \frac{n}{n-1}(\overline{X})^2}$$

სადაც $X_1, X_2, \ldots X_k$ - განსხვავებული მონაცემებია, ხოლო $n_1, n_2, \ldots n_k$ წარმოადგენენ ამ მონაცემების სიხშირეებს.

ცვლადისათვის, რომლის შესაბამისი მონაცემების განაწილება არის ნორმალური, ე.ი. არის სიმეტრიული და აქვს ზარისებრი ფორმა, საშუალოდან სიმეტრიულ ინტერვალში მოხვედრილი მონაცემების რაოდენობის დასადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი წესი:

მონაკვეთი [$\overline{X}$-s, $\overline{X}$+s] შეიცავს მონაცემთა დაახლოებით 68%;

მონაკვეთი [$\overline{X}$-2s, $\overline{X}$+2s] შეიცავს მონაცემთა დაახლოებით 95%;

მონაკვეთი [$\overline{X}$-3s, $\overline{X}$+3s] შეიცავს მონაცემთა დაახლოებით 99,7%,

სადაც $\overline{X}$ არის საშუალო, ხოლო s კი სტანდარტული გადახრა.

§5. მონაცემთა რანგი. მონაცემთა დაგროვილი სიხშირეები. კუმულატა

§§5, 6, 7, 8-ის მასალა ძირითადად აღებულია წიგნიდან: თ. ბეიტრიშვილი, გ. ბერიკელაშვილი, ტ. ბუაძე, დ. კაპანაძე, მათემატიკა, XI კლასი, მოსწავლის წიგნი, გამომცემლობა „აზრი“, თბილისი, 2007.[7].

სტატისტიკური მონაცემების დამუშავებისას იყენებენ გარკვეულ მახასიათებელს, რომელსაც რანგი ეწოდება.

მაგალითი 2.12. 10 მონაწილისაგან შედგენილმა სტუდენტ ვაჟთა გუნდმა სროლაში მოიპოვა ქულები: 98, 95, 97, 100, 94, 91, 99, 96, 93, 92.

თუ ამ მონაცემებს არაკლებადი მიმდევრობით დავალაგებთ, გვექნება: 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

თიტოეულმა მონაწილემ განსხვავებული ქულა დააგროვა. ონაცემები არ მეორდებიან. ყველაზე ნაკლებ მონაცემს ანიჭებენ 1-ის ტოლ რანგს და ა.შ. 100-ის რანგია 10.

მაგალითი 2.13. 10 მონაწილისაგან შედგენილმა სტუდენტ გოგონათა გუნდმა სროლაში მოიპოვა ქულები: 98, 83, 99, 80, 99, 96, 100, 97, 99, 96.

დავალაგოთ ეს მონაცემები არაკლებადი მიმდევრობის სახით: 80, 83, 96, 97, 98, 99, 99, 99, 100.

წინა მაგალითის ანალოგიურად, 80 და 83-ის რანგები შესაბამისად არის 1 და 2. მაგრამ რა რანგი მივანიჭოთ თანატოლ 96 ქულებს?

ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ რანგი დალაგებულ მიმდევრობაში მათი რიგითი ნომრების არითმეტიკულ საშუალოს ე.ი. (3+4):2=3,5-ის ტოლია და ა.შ. 99 ის რანგი კი (7+8+9):3=8-ის ტოლია.

მაგალითი 2.13. შეამოწმეთ შემდეგი ცხრილის სისწორე:

ცხრილი 2.14.

მონაცემები	98	83	99	80	99	96	100	97	99	96
რანგი	6	2	8	1	8	3,5	10	5	8	3,5

რანგი ეწოდება არაკლებადი მიმდევრობით დალაგებულ მონაცემთა რიგით ნომერს, თუ მონაცემები არ მეორდება, გამეორებადი მონაცემების შემთხვევაში კი ამ მიმდევრობაში მათი რიგითი ნომრების არითმეტიკულ საშუალოს.

ვთქვათ, x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, $x \in R$. n - მონაცემთა რაოდენობაა. **დაგროვილი სიხშირე** Nn(x) ეწოდება ზრდადობით დალაგებულ მონაცემთა იმ მნიშვნელობების სიხშირეების ჯამს, რომლებიც მოცემული x რიცხვს არ აღემატებიან.

$\dfrac{N_n(x)}{n}$ ფარდობას **დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე** ეწოდება.

ვიზუალური თვალსაჩინოებისათვის აგებენ დაგროვილ სიხშირეთა, ან დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა გრაფიკებს.

მაგალითი 2.15. მოცემულია საავადმყოფოს კარდეოლოგიური განყოფილების ერთ-ერთი პაციენტის არტერიული წნევის 20-ჯერ გაზომვის მონაცემები:

ცხრილი 2.15.

გაზომვის №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
წნევის განაზომი მნიშვნელობა	170	140	150	180	178	160	155	150	170	160	155	165	175	160	175	165	175	170	165	165

დავალაგოთ მონაცემები არაკლებადი მიმდევრობის სახით:

140, 150, 150, 155, 155, 155, 160, 160, 160, 165, 165, 165, 165, 170, 170, 170, 175, 175, 175, 178, 180.

საიდანაც მივიღებთ ზრდადი მიმდევრობით დალაგებულ მონაცემებს შესაბამისი სიხშირეებით:

x_i: 140, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 178, 180.

n_i: 1 2 2 3 4 3 1 $n = \sum_{i=1}^{n} n_i = 20$

შევადგინოთ მონაცემთა სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა განაწილების შემდეგი ცხრილი

დალაგებული მონაცემები X_i	140	150	155	160	165	170	175	178	180	ჯამი
სიხშირე n_i	1	2	2	3	4	3	3	1	1	n=20
ფარდობითი სიხშირე n_i/n	0,05	0,1	0,1	0,15	0,2	0,15	0,15	0,05	0,05	1
დაგროვილი სიხშირე $N_n(x)$	1	3	5	8	12	15	18	19	20	20
დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე $N_n(x)\backslash n$	0,05	0,15	0,25	0,40	0,60	0,75	0,90	0,95	1	1

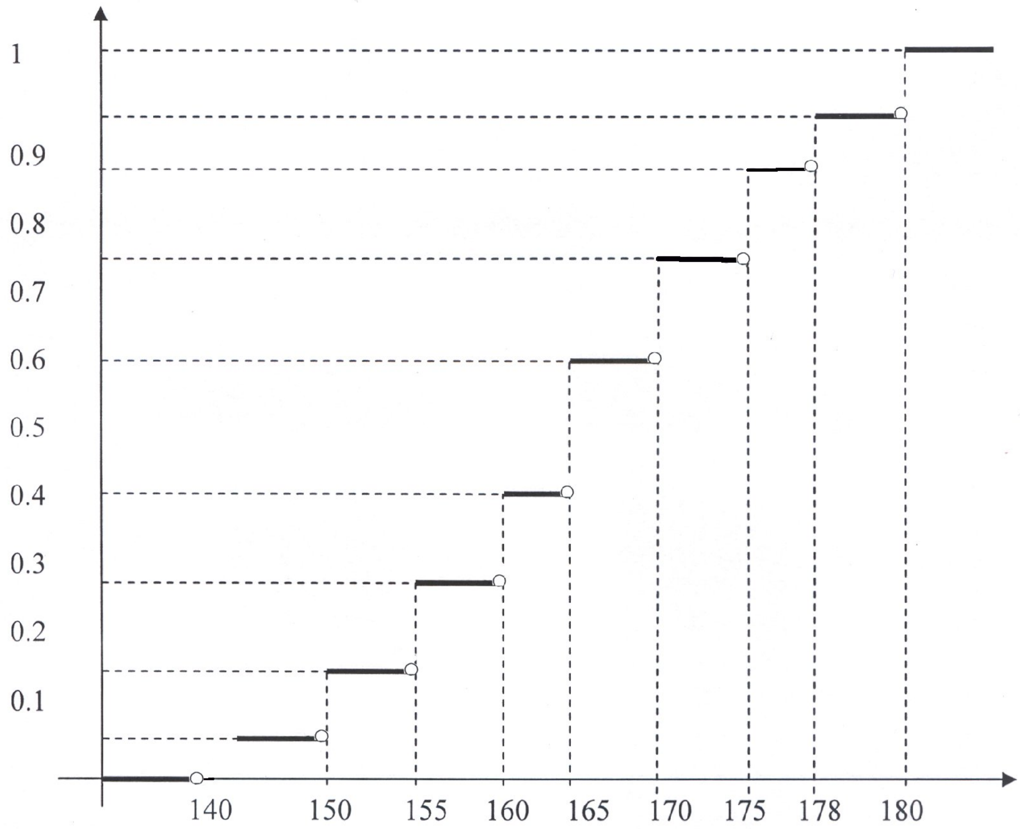
ცხრილი 2.16.

ამ ცხრილის მეოთხე სტრიქონი შემდეგი წესითაა მიღებული:

უმცირესი X_1=140 მონაცემამდე დაგროვილი სიხშირეა 0; X_1=140-სათვის დაგროვილი სიხშირეა 0+1=1: ფარდობითი სიხშირეა 1/20=0,05; X_2=150-სათვის დაგროვილი სიხშირეა 1+2=3, დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეა 3/20=0,15.

ცხრილის მეხუთე სტრიქონი მიიღებაზედა სტრიქონის რიცხვების გაყოფით n=20-ზე.

ავაგოთ მონაცემთა დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეების შესაბამისი დიაგრამა:



ნახ.2.9.

ეს დიაგრამა ასახავს ფარდობით სიხშირეთა განაწილებით მოცემულ ინფორმაციას, რომელსაც კუმულატას უწოდებენ.

კითხვები განმეორებისათვის

1. მონაცემის რანგი წარმოადგენს:

ა) შუა მონაცემის ნომერს

ბ) მონაცემების პოზიციის მახასიათებელს

გ) დიდი სიხშირის მქონე მონაცემის ნომერს.

2. რა არის მონაცემის სიხშირე და ფარდობითი სიხშირე?

3. თვალსაჩინოდ როგორ შეიძლება წარმოვადგინოთ მონაცემთა სიხშირეები და ფარდობითი სიხშირეების განაწილება?

4. რას წარმოადგენს მონაცემთა დაგროვილი სიხშირეები?

5. როგორ შეიძლება წარმოვადგინოთ მონაცემთა დაგროვილი სიხშირეების განაწილება?

6. კუმულატას ასაგებად მონაცემები ზრადობის მიხედვით უნდა დალაგდეს თუ კლებადობის მიხედვით?

მაგალითი 2.16. მოცემული ცხრილი 2.17. გვიჩვენებს 10 კომერციული ბანკის აქტივებისა და წლიური მოგების მონაცემებს. ცხრილში თითოეულ ბანკს აქვს კოდური სახელწოდება, ნომრებით 1, 2, 3,... 10.

ბანკის №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
აქტივები (მ ლნ.ლარი)	10	15	20	25	30	30	50	60	70	80
წლიური მოგება (მლნ. ლარი)	0,5	0,5	0,7	0,6	0,7	1,3	1,0	1,3	1,5	2,0

ცხრილი 2.17.

გამოთვალეთ:

ა) აქტივების შესაბამისი რანგები.

ბ) წლიურ მოგებათა შესაბამისი რანგები.

გ) ფარდობითი წლიური მოგება ანუ წლიური მოგება გაყოფილი\აქტივების სიდიდეზე და მიღებული მონაცემთა რანგები. რანგების მიხედვით შეადარეთ ბანკების ეფექტურობა.

მაგალითი 2.17. მაგალითი 2.15-ის მონაცემებისათვის გამოთვალეთ რანგები.

მაგალითი 2.18. თვეების მიხედვით, თბილისში უცხოეთიდან შემოსულ ტურისტთა რაოდენობები მოცემულია შემდეგი ცხრილით (1:1000):

თვე	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
ტურისტთა რაოდენობა	1	0,5	1,5	2	3	3	2	0,5	2	2,5	2	0,5

ცხრილი 2.185.

ა) შეადგინეთ დაგროვილ სიხშირეთა განაწილების ცხრილი.

ბ) დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი.

გ) ააგეთ კუმულატა.

დ) იპოვეთ მონაცემთა რანგები.

დავალება განმეორებისათვის

მაგალითი 2.19. ფირმის მენეჯერი იკვლევს პორტატული კომპიუტერის ბატარეების ექსპლოატაციის ხანგრძლივობას. ქვემოთ მოცემულია მის მიერ ალალბედზე შერჩეულ „A“ტიპის 40 ბატარეაზე დაკვირვების მონაცემები (წთ-ში):

130 146 126 145 152 132 130 164 155 133

129 145 137 139 127 140 131 126 145 148

126 126 132 125 126 135 131 129 136 129

136 147 156 146 130 146 132 132 142 132

ა) ააგეთ ფოთლებიანი ღეროების დიაგრამა, რომლის ღეროებად პირველი ორი ციფრია გამოუყენებელი, დანარჩენები ფოთლებად.

ბ) დაალაგეთ ფოთლებად გამოყენებული ციფრები არაკლებად მიმდევრობად და დაწერეთ მონაცემების ფარდობით სიხშირეთა განაწილების ცხრილი.

გ) ააგეთ კუმულატა.

დ) გამოთვალეთ მონაცემთა რანგები.

ე) იპოვეთ ცენტრალური ტენდენციის საზომები.

ვ) იპოვეთ გაფანტულობის საზომები.

იმ შემთხვევში, როდესაც X ცვლადის დაკვირვებით მიღებული მონაცემთა რაოდენობა დიდია, ან ცვლადი უწყვეტია, შემდგომი ანალიზის მიზნით მიმართავენ მონაცემთა დაჯგუფებას ქვეინტერვალებად მითითებული წესით:

1. მონაცემებს ალაგებენ ზრდადობის მიხედვით;

2. მინიმალურ და მაქსიმალურ მონაცემს შორის ინტერვალს ყოფენ ტოლი ან არატოლი სიგრძის რამოდენიმე ქვეინტერვალად; ჯერ განვიხილავთ ტოლი სიგრძის ინტერვალებად დაყოფას.

3. გამოყოფენ ცალკეულ ქვეინტერვალში მოთავსებულ მონაცემთა ჯგუფებს;

4. დაითვლიან თითოეული ჯგუფის მონაცემების სიხშირეებსა და ფარდობით სიხშირეებს და ადგენენ მონაცემების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ინტერვალური განაწილების ცხრილს - სიხშირეთა ინტერვალურ განაწილებებს.

5. ქვეინტერვალების კიდურა მონაცემებისათვის გამოთვლიან დაგროვილ სიხშირეებს, დაგროვილ ფარდობით სიხშირეებს; მარჯვენა

კიდურა მონაცემების მიხედვით ადგენენ მონაცემთა დაგროვილი სიხშირეებისა და დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეების ინტერვალური განაწილებების ცხრილს - დაგროვილ სიხშირეთა ინტერვალურ განაწილებებს.

6. სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) და დაგროვილ სიხშირეთა (დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა) განაწილებებს თვალსაჩინოდ წარმოადგენენ სხვადასხვა გრაფიკული ფორმით.

აღნიშნული მეთოდი აადვილებს ინფორმაციის აღქმასა და ანალიზს.

მონაცემის ინტერვალებად (ანუ კლასებად) დაჯგუფებისას, ასევე ჰისტოგრამების აგებისას არსებითი მნიშვნელობა აქვს ინტერვალთა რაოდენობის სწორად შერჩევას. ინტერვალების რაოდენობა არ უნდა იყოს 1) ძალიან დიდი და 2) არც ძალიან მცირე. პირველ შემთხვევაში ინტერვალების სიგრძეები ხდებიან მცირე და მონაცემთა სიხშირეები მასში განიცდიან არაკანონზომიერ ცვალებადობას (ფლუქტაციას), მეორე შემთხვევაში ინტერვალების სიგრძეები დიდია და სიხშირეთა განაწილებები აღიწერებიან ძალიან უხეშად.

პრაქტიკით დადგენილია, რომ თუ მონაცემების რაოდენობა $n \in (40\text{-}100)$, მიზანშეწონილია 7-9 ინტერვალის არჩევა, როცა $n \in (100\text{-}500)$, მიზანშეწონილია 8-12 ინტერვალი, ხოლო როცა $n \in (500\text{-}1000)$ 10-16 ინტერვალი.

ვთქვათ X ცვლადია. მასზე დაკვირვების მონაცემების მიხედვით x_{min} არის უმცირესი მონაცემი, ხოლო x_{max} - უდიდესი მონაცემი. n მონაცემთა რაოდენობაა, აღწერილი მეთოდით n-ის მიხედვით ვთქვათ საჭიროა ავიღოთ K ინტერვალი. მაშინ ინტერვალის სიგრძე h გამოითვლება ფორმულით

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{K}$$

მონაცემთა ინტერვალებად დასაჯგუფებლად და ჰისტოგრამების ასაგებად ასევე ხშირად მიმართავენ სხვადასხვა მეთოდებს. ერთ-ერთია სტერ-ჯერსის ფორმულის გამოყენება, რასაც შემდგომში განვიხილავთ. ამჟამად შემოგთავაზებთ მონაცემების ინტუიციურ დაყოფას კლასებად.

მაგალითი 2.20. წინა პარაგრაფის მაგალითით 2.15-ის მიხედვით პაციენტის არტერიული წნევის გაზომვით მიღებული მონაცემების ცვლილების არე დავყოთ 5 ტოლი სიგრძის ქვეინტერვალად. შევადგინოთ

სიხშირეთა, დაგროვილ სიხშირეთა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ინტერვალური განაწილებები და ავაგოთ დიაგრამები.

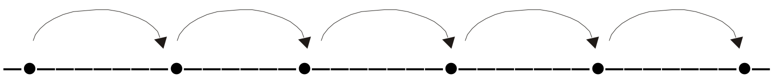
1. საწყისი მონაცემებია:

170, 140, 150, 180, 178, 160, 155, 150, 170, 160, 155, 165, 175, 160, 175, 165, 175, 170, 165, 165

დავალაგოთ არაკლებადი მიმდევრობით:

140, 150, 150, 155, 155, 160, 160, 160, 165, 165, 165, 165, 170, 170, 170, 175, 175, 175, 178, 180.

2. მონაცემთა ცვლილების დიაპაზონი x_{max}-x_{min}=180-140=40-ის ტოლია. რადგან დაყოფის ინტერვალების რაოდენობა k=5-ია, ამიტომ თითოეული ქვეინტერვალის სიგრძე h=40/5=8. დაყოფა მოხდება შემდეგი სქემით:



140 148 156 164 172 180

3. ინტერვალებში გამოვყოფთ მონაცემთა ჯგუფებს

140, 150, 150, 151, 155, 155, 160, 160, 160, 165, 165, 165, 165, 170, 170, 170, 175, 175, 175, 178, 180

უმცროსი კიდურა მონაცემი 140 მივაკუთვნოთ პირველ ქვეინტერვალს.

4. ქვეინტერვალების მიხედვით სიხშირეთა გამოთვლის შედეგები მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

ცხრილი 2.19.

ინტერვალის ნომერი	ინტერვალი	სიხშირეთა დათვლა	სიხშირე
1	[140; 148]	|	1
2	[148; 156]	||||	4
3	[156; 164]	|||	3
4	[164; 172]	||	7
5	[172; 180]		5
სულ			n=20

დაჯგუფებულ მონაცემთა ფარდობითი სიხშირეები ტოლია:

პირველი ინტერვალისათვის 1/20=0,05

მეორე ინტერვალისათვის 4/20=0,2

მესამე ინტერვალისათვის 3/20=0,15

მეოთხე ინტერვალისათვის 7/20=0,35

მეხუთე ინტერვალისათვის 5/20=0,25

სიხშირეთა ინტერვალური განაწილებაა:

ცხრილი 2.20

ინტერვალის ნომერი	ინტერვალი	ინტერვალში მონაცემების სიხშირეთა დათვლა	მონაცემთა ფარდობითი სიხშირე ინტერვალებში
1	[140; 148]	1	0,05
2	[148; 156]	4	0,2
3	[156; 164]	3	0,15
4	[164; 172]	7	0,35
5	[172; 180]	5	0,25
ჯამი		n=20	1

5. ქვეინტერვალების კიდურა მონაცემებისათვის გამოთვლილი დაგროვილი $\widetilde{N}_n(x)$ სიხშირეები ტოლია (n=20):

x=140, $\widetilde{N}_{20}$(140)=0; x=148, $\widetilde{N}_{20}$(148)=0+1=1

x=156, $\widetilde{N}_{20}$(156)=1+4=5; x=164, $\widetilde{N}_{20}$(164)=8

x=172, $\widetilde{N}_{20}$(172)=15; x=180, $\widetilde{N}_{20}$(180)=20

მიღებული შედეგების მიხედვით გამოთვლილი დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეები შესაბამისად ტოლია: 0-ის; 0,05-ის; 0,25-ის; 0,4-ის; 0,75-ის; 1-ის.

დაგროვილ სიხშირეთა განაწილებაა:

ცხრილი 2.21

ინტერვალის ნომერი	ინტერვალი	დაგროვილი სიხშირე	დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე
1	[140; 148]	1	0,05
2	[148; 156]	5	0,25

3	[156; 164]	8	0,4
4	[164; 172]	15	0,75
5	[172; 180]	20	1

მაგალითი 2.21. თუ ზემოთ განხილულ მაგალითში მონაცემთა დაჯგუფება მოხდება 8 ინტერვალად:

ა) რისი ტოლი იქნება ქვეინტერვალის სიგრძე და დაყოფის რა ქვეინტერვალები მიიღება?

ბ) გამოითვალეთ ქვეინტერვალებში მონაცემთა სიხშირე და ფარდობითი სიხშირე, მონაცემთა დაგროვილი სიხშირეები და დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეები.

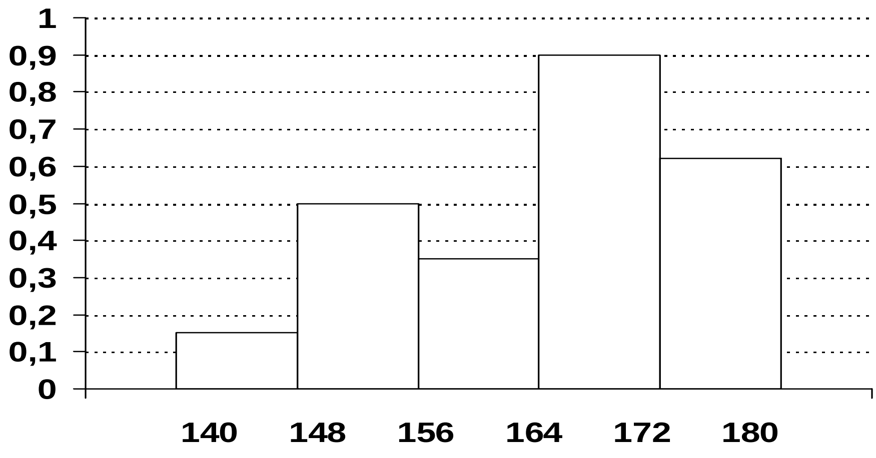
გ) როგორ შეამოწმებთ, რომ დაჯგუფებული მონაცემებისათვის სიხშირეები და ფარდობითი სიხშირეები სწორადაა ჩაწერილი?

§7. დაჯგუფებული მონაცემების სიხშირეთა გრაფიკული წარმოდგენა. ისტოგრამა. გივა. ოლიგონი. ოდალური ინტერვალი

ა) ჰისტოგრამის აგება.

ჰისტოგრამა - წარმოადგენს ქვეინტერვალებზე აშენებულ მართკუთხედებს, რომელთა სიმაღლეები შესაბამისად მითითებულ ქვეინტერვალის მონაცემთა სიხშირის (ფარდობითი სიხშირის) ტოლია.

ფარდობითი სიხშირეთა ჰისტოგრამას არტერიული სისტოლური წნევისათვის აქვს შემდეგი სახე:



ქვეინტერვალები

ნახ. 2.9

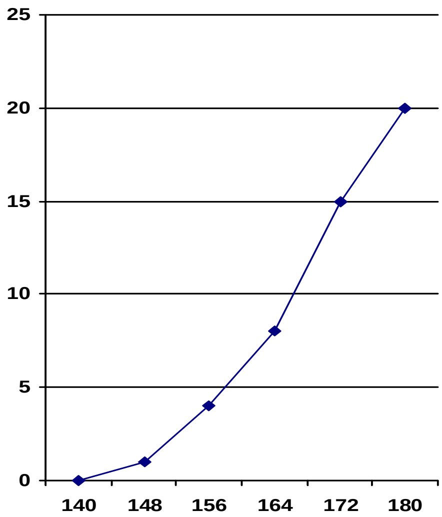
ინტერვალის სიგრძე n=8, სიმაღლეებია: 0,125; 0,5; 0,375; 0,875; 0,625.

ქვეინტერვალს, რომლის მონაცემთა სიხშირე ყველაზე მეტია, მოდალური ინტერვალი ეწოდება. ჩვენს მაგალითში მოდალური ინტერვალია 164-172.

ბ) ოგივა საკოორდინატო სიბრტყის იმ წერტილების შემაერთებელი ტეხილია, რომელთა აბსცისები ქვეინტერვალების საზღვრებია, ორდინატები კი - შესაბამისი დაგროვილი სიხშირეები (ან ფარდობითი სიხშირეები).

დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეებისათვის აგებული ოგივა ამ მრუდისაგან მხოლოდ მასშტაბით განსხვავდება.

ჩვენს მაგალითში დაგროვილი სიხშირეების მიხედვით აგებულ ოგივას ასეთი სახე აქვს.



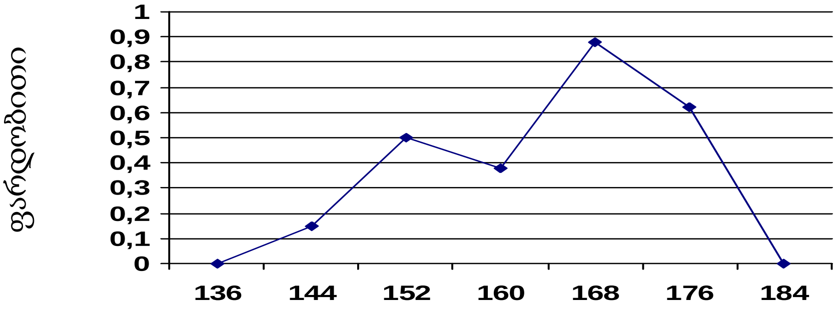
ნახ. 2.11

დაგროვილ სიხშირეთა ოგივა

გ) პოლიგონი საკოორდინატო სიბრტყის იმ წერტილების შემაერთებელი ტეხილია, რომელთა აბსცისები ქვეინტერვალების შუა წერტილებია, ორდინატები კი შესაბამისი სიხშირეები (ან ფარდობითი სიხშირეები). ამასთან, ტეხილის ბოლოები შეერთებულია აბსცისათა ღერძის იმ წერტილებთან, რომლებიც პირველი და ბოლო ქვეინტერვალის შუა წერტილებიდან დაშორებულია ქვეინტერვალის სიგრძით (შესაბამისად მარცხნივ და მარჯვნივ).

გავიხსენოთ

*]a, b[- ინტერვალის შუა წერტილი გამოითვლება ფორმულით a+b/2.



ქვეინტერვალები ნახ. 2.12

სიხშირეთა პოლიგონი არტერიული წნევისათვის ინტერვალის სიგრძე h=8, სიმაღლეებია: 0,125; 0,5; 0,375; 0,875; 0,625.

ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა საშუალებას იძლევა ვიზუალურად შეფასდეს სტატისტიკური მონაცემების „განაწილების კანონი".

კითხვები განმეორებისათვის

1. რა არის ჰისტოგრამა? როგორი მონაცემებისთვის აიგება ჰისტოგრამა?

2. რამდენი სახის ჰისტოგრამა შეიძლება აიგოს ერთი და იგივე მონაცემებისათვის?

3. რას წარმოადგენს ოგივა?

4. რა არის პოლიგონი? აღწერეთ პოლიგონის აგების სქემა.

შევნიშნოთ, რომ გარეგნული მსგავსების მიუხედავად, სვეტოვან დიაგრამასა და ჰისტოგრამას შორის არის არსებითი განსხვავება. სვეტოვანი დიაგრამის სვეტებს შორის შეიძლება იყოს ადგილები, სვეტების ფუძეების შესაბამის ღერძზე წარწერები უბრალოდ აღნიშნავენ ცვლადის კატეგორიებს, ხოლო მათ მიმდევრობას განსაკუთრებული მნიშვნელობა არ აქვს. ჰისტოგრამის სვეტებს შორის არ არის ადგილები და ფუძეების შესაბამის ღერძზე მონიშნულია უწყვეტი რიცხვითი ცვლადის მნიშვნელობები, რომლებიც მთლიანად უნდა მოიცავდნენ უწყვეტი ცვლადის შესაძლო ცვლილების მთელ დიაპაზონს.

მაგალითი 2.22. [6] ცხრილში 2.? მოცემულია 60 ერთტიპური მონ სტრუქტურის დიელექტრიკული ფენების გამრღვევი ძაბვის გაზომვის შედეგები, რომლებიც ფიქსირებულია საზომ დანადგარზე მათი შემოსვლის თანმიმდევრობით.

60 ერთტიპური მონ სტრუქტურის დიელექტრიკული ფენების გამრღვევი ძაბვა ვოლტებში

ცხრილი 2.22

153	158	161	168	165	161	164	168	173	163
150	159	163	165	168	171	151	161	163	171
161	155	157	161	163	167	172	158	162	166
157	156	160	164	162	166	169	172	152	158
162	167	170	154	157	160	159	155	162	171

170	162	154	156	160	166	159	165	160	169

დააჯგუფეთ მონაცემები ინტერვალებად. ჩაწერეთ სიხშირეთა ინტერვალური განაწილების ცხრილი და ააგეთ სიხშირეთა განაწილების ჰისტოგრამა, ოგივა, პოლიგონი.

აღმოაჩინე შეცდომები: ა) $h = \dfrac{170 - 130}{8} = 5$

ბ) 60 ერთტიპური **მონ** სტრუქტურის დიელექტრიკული ფენების გამრღვევი ძაბვის ინტერვალური

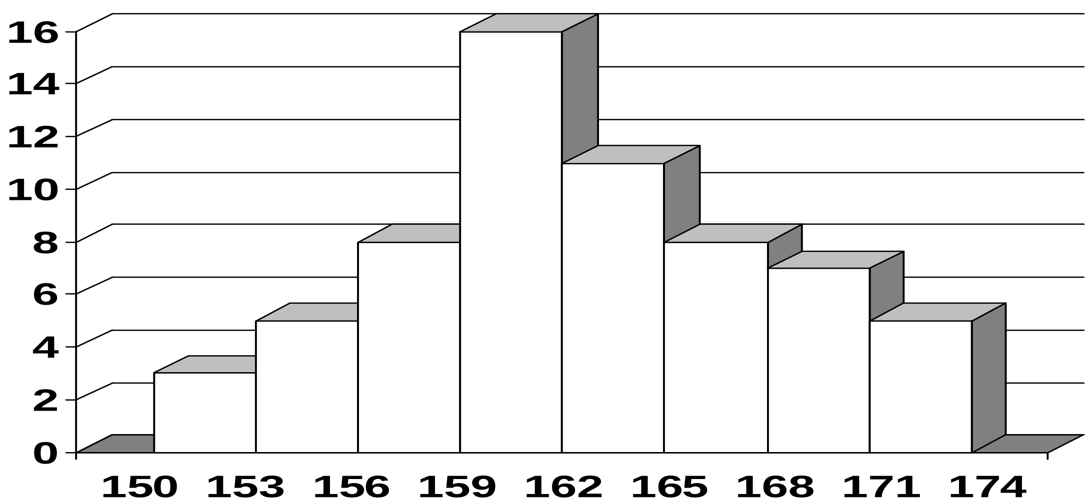
რიგი ცხრილი 2.23.

ინტერვალის (კლასის) №	ინტერვალი		მონაცემები	სიხშირე, m_i
	≥	<		
1	130	153	||||	3
2	153	156	|	5
3	156	159	||||	8
4	159	162	|||	12
5	162	165	||	11
6	165	168	||||	8
7	168	171	|||	7
8	172	174	||	6

$\sum m_i=60$

ცხრილი 2.24

გ)



ნახ. 2.12 გამრღვევი ძაბვის ჰისტოგრამა

მაგალითი 2.21. მოცემულია 100 მაღაზიაში ტელევიზორების გაყიდვის მონაცემები

ცხრილი 2.24.

გაყიდული ტელევიზორების რაოდენობა	მაღაზიების რაოდენობა
[100; 200]	0
[200; 300]	5
[300; 400]	39
[400; 500]	31
[500; 600]	16
[600; 700]	6
[700; 800]	3

ამ მონაცემების მიხედვით შეასრულეთ შემდეგი სავარჯიშოები:

1 შეადგინეთ ფარდობით სიხშირეთა განაწილების ცხრილი.

2. შეადგინეთ დაგროვილ სიხშირეთა განაწილების ცხრილი.

3. შეადგინეთ დაგროვილი ფარდობით სიხშირეთა განაწილების ცხრილი.

4. ააგეთ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამები.

5. ააგეთ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონები.

6. ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა ოგივა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ოგივა.

7. ააგეთ დაგროვილი ფარდობით სიხშირეთა გრაფიკი (კუმულატა).

§8. რიცხვითი მახასიათებლები დაჯგუფებული მონაცემებისათვის

რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრა დაჯგუფებული მონაცემებისათვის ხელსაყრელია იმ შემთხვევაში, თუ მონაცემთა რაოდენობა დიდია, ან მონაცემთა მოპოვება შესაძლებელია მხოლოდ დაჯგუფებული სახით და ამავე დროს გვაკმაყოფილებს მიღებული მიახლოებითი პასუხის სიზუსტე.

მაგალითი 2.24. ცხრილით მოცემულია ფირმის ოფისის ერთ-ერთი ტელეფონიდან ერთი თვის განმავლობაში ყოველდღიურად განხორციელებული საერთაშორისო სატელეფონო საუბრების დრო (წუთებში):

6,2 11,2 10,4 6,8 5,5 6,1

15,3 12,3 8,5 2,3 18,7 8,8

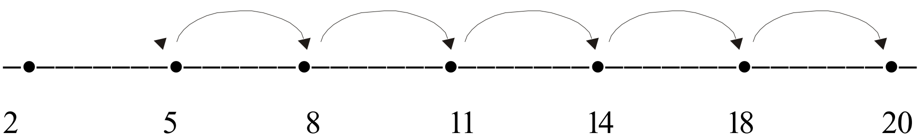
10,2 8,0 11,4 13,5 9,6 19,5

8,9 9,1 7,7 15,9 12,1 11,7

11,8 3,6 16,6 7,2 4,8 14,5

დავაჯგუფოთ მონაცემები ტოლი სიგრძის ქვეინტერვალებად (კლასებად). უმცირესი მონაცემია 2,3; უდიდესია 19,5. 2,3 დავამრგვალოთ მთელამდე ნაკლებობით, ხოლო 19,5 მეტობით (მონაცემთა დიაპაზონი გაიზრდება მთელამდე სიზუსტით) (2,3) 2 (19,5) 20. დავყოთ მიღებული შუალედი (2;20) ექვს ტოლ ქვეინტერვალად. ინტერვალის სიგრძე:

$h = \frac{20-2}{6} = \frac{18}{6} = 3$ მონაცემთა ქვეინტერვალებად (კლასებად) დაჯგუფებისა და შესაბამისი ინტერვალური სიხშირეების დათვლის შედეგებია:



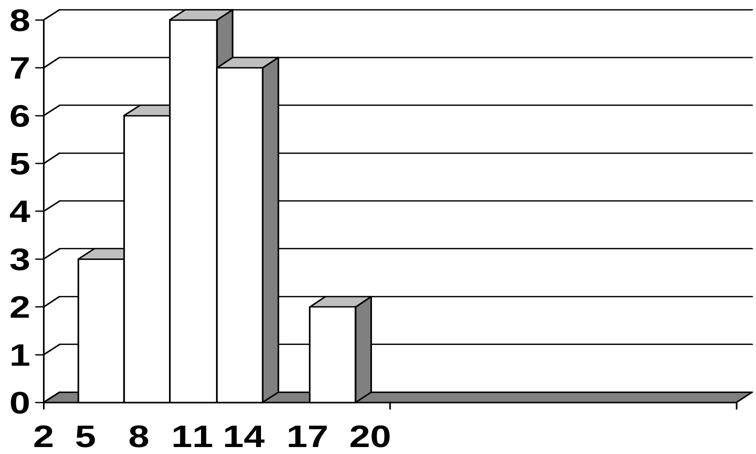
შესაბამისი n_i სიხშირეები 3 6 8 7 4 2

2 5 8 11 14 17 20

ქვეინტერვალებში მოხვედრილ მონაცემთა სიხშირეები შეიძლება დაითვალოს ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამითაც.

ავაგოთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა და პოლიგონი.

რადგან დაჯგუფება მოხდა ტოლი სიგრძის ქვეინტერვალებად, ამიტომ ჰისტოგრამის აგებისას მართკუთხედების სიმაღლეებად შეგვიძლია ავიღოთ ქვეინტერვალებში მოხვედრილ მონაცემთა ჯამური სიხშირეები (ან ჯამური ფარდობითი სიხშირეები, თუ ვაგებთ ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამას და პოლიგონს).



ნახ. 2.15

სატელეფონო საუბრების ხანგრძლივობა (წთ-ში)

მოდალურია ის ქვეინტერვალი (კლასი), რომლის შესაბამისი სიხშირე (ფარდობითი სიხშირე) უდიდესია.

სიხშირეთა ჰისტოგრამა და პოლიგონის სიმეტრიული (ზარისებრი) ფორმისაა. [8,11] ქვეინტერვალი წარმოადგენს მოდალურ კლასს, რაც იმას ნიშნავს, რომ სატელეფონო საუბრების მაქსიმალური სიხშირე დაფიქსირდა 8 წთ-დან 11 წთ-იანი ხანგრძლივობით.

კლასებად (ქვეინტერვალებად) **დაჯგუფებული მონაცემების არითმეტიკული საშუალო** $\overline{X}$ **ასე** გამოითვლება:

ყოველი ქვეინტერვალის „შუა წერტილი" (შესაბამისი კოორდინატი) უნდა გავამრავლოთ ამ ქვეინტერვალში მოხვედრილ მონაცემთა სიხშირეზე, შევაჯამოთ და გავყოთ მონაცემთა რაოდენობაზე.

თუ დაყოფის i-ური ქვეინტერვალისათვის აღვნიშნავთ: „შუა წერტილს" $\widetilde{x}_i$-ით, მონაცემთა სიხშირეს ქვეინტერვალში კი n_i-ით მაშინ

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(n_1\widetilde{x}_1 + n_2\widetilde{x}_2 + \ldots + n_k\widetilde{x}_k)$$

სადაც n არის მონაცემთა რაოდენობა, k - დაყოფის ქვეინტერვალთა რაოდენობა.

შევადგინოთ სატელეფონო საუბრების სიხშირეთა ინტერვალური განაწილების შემდეგი ცხრილი 2.25. (წთ-ში)

ცხრილი 2.25.

ინტერვალი i	შუა წერტილი $\widetilde{x}_i$	სიხშირე ინტერვალში n_i	ნამრავლი $n_i\,\widetilde{x}_i$
[2; 5]	3,5	3	10,5
[5; 8]	6,5	6	39
[8; 11]	9,5	8	76
[11; 14]	12,5	7	87,5
[14; 17]	15,5	4	62
[17; 20]	18,5	2	37
ჯამი		30	312

განხილული მეთოდით გამოთვლილი არითმეტიკული საშუალოა:

$$\overline{X} = \frac{3{,}5\cdot 3 + 6{,}5\cdot 6 + 9{,}5\cdot 8 + 12{,}5\cdot 7 + 15{,}5\cdot 4 + 18{,}5\cdot 2}{30} = \frac{312}{30} \approx 10{,}4$$

ამრიგად, მითითებული სატელეფონო საუბრების საშუალო დღიური დანახარჯია 10,4 წთ.

არითმეტიკული საშუალოდან მონაცემების გაფანტულობის საზომია დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.

დაჯგუფებული მონაცემების დისპერსია S^2 ასე გამოითვლება:

ყოველი ქვეინტერვალის „შუა წერტილის“ კვადრატისა და ამ ინტერვალში მონაცემთა სიხშირის ნამრავლების ჯამს უნდა გამოვაკლოთ მონაცემთა მოცულობის და არითმეტიკული საშუალოს კვადრატის ნამრავლი და მიღებული შედეგი გავყოთ მონაცემთა ერთი ერთეულით შემცირებულ რაოდენობაზე.

$$s^2 = \frac{(n_1\widetilde{x}_1^{\,2} + n_2\widetilde{x}_2^{\,2} + \ldots + n_k\widetilde{x}_k^{\,2}) - n(\overline{X}^2)}{n-1}$$

სტანდარტული გადახრა $s = \sqrt{S^2}$

გამოთვლების გასაიოლებლად შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი 2.26.:

ცხრილი 2.26.

ინტერვალი i	შუა წერტილი $\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_i^{\,2}$	სიხშირე ინტერვალში $\tilde{n}_i$	$n_i\,\tilde{x}_i$	$n_i\,\tilde{x}_i^{\,2}$
[2; 5]	3,5	12,25	3	10,5	36,75
[5; 8]	6,5	42,25	6	39	253,50
[8; 11]	9,5	90,25	8	76	722
[11; 14]	12,5	156,25	7	87,5	1093,75
[14; 17]	15,5	240,25	4	62	961
[17; 20]	18,5	342,25	2	37	684,5
ჯამი			30	312	

$$s^2 = \frac{1}{30} 3\cdot(3,5)^2 + 6\cdot(6,5) \ + 8\cdot(9,5)^2 \cdot 7\cdot(12,5)^2 \cdot +4\cdot(15,5)^2 \cdot +2\cdot(18.5)^2 - 30\cdot(10,4)^2 =$$

$$= \frac{1}{29}(3751,5 - 3244,8) \approx 17,47$$

$$s = \sqrt{17,47} \approx 4,18$$

განხილულ მაგალითში აღმოჩნდა, **რომ არითმეტიკული საშუალო $\overline{X}$ ≈10,4 მოთავსებულია მოდალურ [8;11] ინტერვალში**. ამდენად, **სიხშირეთა განაწილების პოლიგონი და ჰისტოგრამა სიმეტრიულია $\overline{X}$ ≈10,4 წრფის მიმართაც.** ასეთ შემთხვევაში, გარკვეულ „სტანდარტულ“ ინტერვალებში მოხვედრილ მონაცემთა პროცენტული რაოდენობები შეიძლება მიახლოებით გამოითვალოს ცნობილი წესით. კერძოდ:

ა) ინტერვალი [$\overline{X}$ -S; $\overline{X}$ +S] შეიცავს მონაცემთა 68%-ს.

ბ) ინტერვალი [$\overline{X}$ -2s; $\overline{X}$ +2s] შეიცავს მონაცემთა 95%-ს.

გ) ინტერვალი [$\overline{X}$ -3s; $\overline{X}$+3s] შეიცავს მონაცემთა 99%-ს.

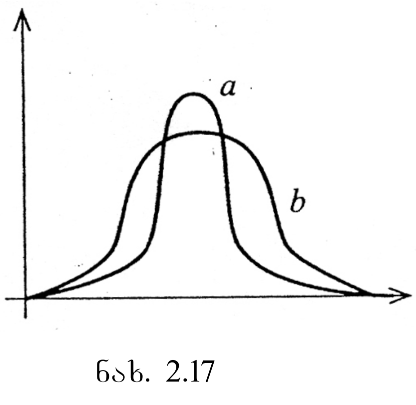
დ) ინტერვალი [$\overline{X}$ -4s; $\overline{X}$ +4s] შეიცავს პრაქტიკულად ყველა მონაცემს.

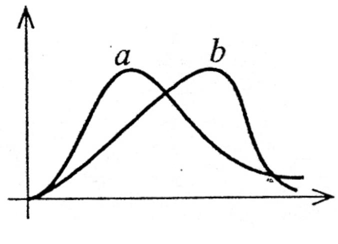
საზოგადოდ, ზარისებული პოლიგონის შემთხვევაში [$\overline{X}$ -4s; $\overline{X}$ +4s] შუალედი წარმოადგენს დაჯგუფებული მონაცემების დიაპაზონს.

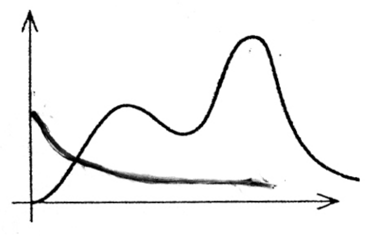
ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში [$\overline{X}$-2s; $\overline{X}$+2s] არის [2,04; 18,76] შუალედი. მას არ ეკუთვნის მხოლოდ ერთი 19,5-ის ტოლი მონაცემი, რაც შეადგენს 30 მონაცემის 3,3%-ს. ე.ი. ამ შუალედში აღმოჩნდა მონაცემების 96,7%, რაც თეორიულ (95%-იან) წესს მიახლოებით ეთანადება. ეს ნიშნავს, რომ სატელეფონო საუბრების ძირითადი მასა ამ შუალედშია გაბნეული. თუმცა დიაპაზონია [$\overline{X}$-4s; $\overline{X}$+4s] შუალედი.

სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) ჰისტოგრამისა და პოლიგონის მეშვეობით ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ განაწილებათა ტიპობრივი ფორმები, რაც მნიშვნელოვანია შემდეგში მონაცემთა სიხშირეების განაწილებათა შედარებისას. ცხადია, პოლიგონის შესაბამისი ტეხილი (ასევე ჰისტოგრამა) მით უფრო მიიღებს მრუდის (წირის) სახეს, რაც უფრო დიდი რაოდენობის მონაცემებს და დაჯგუფებების ქვეინტერვალებს განვიხილავთ, ამასთან რაც უფრო მცირე იქნება ქვეინტერვალის სიგრძე. ამიტომ სიხშირეთა განაწილების სავარაუდო გავრცელებული ფორმები გრაფიკულად შეგვიძლია შემდეგი მრუდების (წირების) მეშვეობით წარმოვიდგინოთ:

მრუდი სიმეტრიულია. b მრუდი უფრო მდორედ (ნელა) იცვლება, ვიდრე a მრუდი. კიდურა მნიშვნელობები უფრო იშვიათად გვხვდება, ვიდრე შუალედური. აქვს ერთი წვერო.







ნახ. 2.17
სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) განაწილების ტიპი

ნახ. 2.18.

ნახ. 2.19.
სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) განაწილების ასიმეტრიული ტიპი

უმრავლეს შემთხვევაში უმჯობესია დაკვირვების მონაცემები თავიდანვე ჩაიწეროს სიხშირეთა ინტერვალური განაწილების (დაჯგუფებული) სახით. ეს ხდება მაშინ, როდესაც მონაცემთა რაოდენობა დიდია და ძნელია ცალ-ცალკე

გამოირჩეს ერთმანეთისაგან არსებითად განსხვავებული ინდივიდუალური მონაცემები.

მაგალითი 2.25. მოცემულია მონაცემები ერთ-ერთ დიდ სავაჭრო ცენტრში საქონლის რეალიზაციით შემოსული თანხების დღეების მიხედვით განაწილების შესახებ (100 დღის განმავლობაში, 1000 ლარებში).

ცხრილი 2.27.

ინტერვალი n_i	ნავაჭრი თანხა	დღეების სიხშირე
1	[100; 200)	1
2	[200; 300)	4
3	[300; 400)	31
4	[400; 500)	38
5	[500; 600)	20
6	[600; 700)	5
7	[700; 800)	1

ა) შეადგინეთ ფარდობით სიხშირეთა განაწილების ცხრილი.

ბ) ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა და პოლიგონი.

გ) დაახასიათეთ, როგორია განაწილების ფორმა (სიმეტრიულია თუ ასიმეტრიული).

დ) იპოვეთ მოდალური შუალედი, რამდენ დღეში დაფიქსირდა ყველაზე ხშირი შემოსავლების რაოდენობა და რას შეადგენს იგი.

ე) იპოვეთ შემოსავლების არითმეტიკული საშუალო.

ვ) იპოვეთ სტანდარტული გადახრა.

ზ) თუ ჩავთვლით, რომ შესაძლებელია მონაცემთა დიაპაზონის პოვნა, იპოვეთ იგი.

კითხვები განმეორებისათვის

1. როდის იყენებენ დაჯგუფებული მონაცემების რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრას.

2. ამ შემთხვევაში როგორ პასუხს ვღებულობთ ზუსტს, თუ მიახლოებითს?

3. რას წარმოადგენს მოდალური კლასი?

4. რას წარმოადგენს არითმეტიკული საშუალო დაჯგუფებული მონაცემებისათვის? როგორ გამოითვლება იგი?

5. როგორ შეიძლება გამოვთვალოთ დისპერსია და სტანდარტული გადახრა დაჯგუფებული მონაცემებისათვის.

მაგალითი 2.26. ამოწერეთ მაგალითი 2.24-ის მონაცემებით და გამოთვალეთ მონაცემთა რამდენ პროცენტს შეიცავს

ა) [$\overline{X}$-4s; $\overline{X}$+4s] ინტერვალი? [$\overline{X}$-3s; $\overline{X}$+3s] ინტერვალი? [$\overline{X}$-S; $\overline{X}$+S] ინტერვალი?

ბ) იპოვეთ მედიანა და მოდა საწყისი მონაცემებისათვის.

გ) იპოვეთ არითმეტიკული საშუალო საწყისი მონაცემებისათვის. შეადარეთ მონაცემთა დაჯგუფებით მიღებულ პასუხს.

დ) იპოვეთ სტანდარტული გადახრა საწყისი მონაცემებისათვის და შეადარეთ მონაცემთა დაჯგუფებით მიღებულ პასუხს.

მაგალითი 2.27. სასურსათო მაღაზიის მარკეტინგის კონსულტანტმა შეისწავლა 30 მყიდველის მიერ მაღაზიაში დახარჯული თანხის რაოდენობა ლარებში. დაკვირვების რიგის მიხედვით მონაცემები მოცემულია ცხრილით:

10; 5; 8; 6; 1; 7; 15; 31; 32; 35; 42; 3; 9; 4; 5

40; 29; 30; 45; 22; 21; 11; 13; 15; 38; 30; 30; 17; 30; 14

დაყავით მონაცემთა ცვლილების არე 8 ტოლ ინტერვალად. იპოვეთ:

ა) დაყოფის ინტერვალები და ინტერვალებში მონაცემთა სიხშირეები და ფარდობითი სიხშირეები.

ბ) ააგეთ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა განაწილების ჰისტოგრამები. იპოვეთ მოდალური კლასი. სიხშირეთა განაწილებები დაახასიათეთ სიმეტრიულობის, გაშლილობის მიხედვით.

გ) გამოთვალეთ არითმეტიკული საშუალო დაჯგუფებული და დაუჯგუფებელი მონაცემებისათვის და პასუხები შეადარეთ ერთმანეთს.

დ) იპოვეთ მონაცემთა გაბნევის დიაპაზონი, გამოთვალეთ სტანდარტული გადახრა და შეისწავლეთ [$\overline{X}$-2s; $\overline{X}$+2s], [$\overline{X}$-3s; $\overline{X}$+3s] და [$\overline{X}$-4s; $\overline{X}$+4s] ინტერვალებში მონაცემთა პროცენტული შემადგენლობა.

მაგალითი 2.28. [3] მოცემულია მონაცემები ასაკობრივი ჯგუფების მიხედვით კუნძულზე დაავადებულ ადამიანთა რაოდენობების შესახებ.

ცხრილი 2.27.

ასაკობრივი ჯგუფები (ინტერვალები)	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40
დაავადებულთა რაოდენობა (სიხშირე)	8	56	163	204	143	144	79	89

ცხრილი 2.28.

ასაკობრივი ჯგუფები (ინტერვალები)	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70	71-75	76-80	81-85	ჯამი
დაავადებულთა რაოდენობა (სიხშირე)	44	48	41	26	18	18	3	3	1	1058

ა) ააგეთ სიხშირეთა განაწილების ჰისტოგრამა. არის თუ არა იგი სიმეტრიული?

ბ) იპოვეთ მოდალური შუალედი.

გ) ააგეთ განაწილების პოლიგონი. არის თუ არა იგი სიმეტრიული?

დ) გამოთვალეთ არითმეტიკული საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

ე) იპოვეთ $[\overline{X}$-S; $\overline{X}$+S] შუალედში მოხვედრილ მონაცემთა პროცენტული რაოდენობა.

მაგალითი 2.29 [3] იმ ფირმის მენეჯერს, რომელსაც შეუკვეთეს ქალის 10 000 წყვილი ფეხსაცმლის შეკვეთა, სურს გაარკვიოს რომელი ზომის რამდენი წყვილი ფეხსაცმელი უნდა შეკეროს ფირმამ.

რადგან ყველა მომხმარებლის გამოკითხვა შეუძლებელია, ამიტომ მენეჯერმა ალალბედზე 100 ქალისაგან მოიპოვა ინფორმაცია მათი ფეხსაცმელების ზომის შესახებ. მიღებული მონაცემების სიხშირეებისა და ფარდობითი სიხშირეების განაწილებები მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

ცხრილი 2.29.

ზომა	34	35	36	37	38	39	40	41
სიხშირე	2	6	15	20	24	24	8	1
ფარდობითი სიხშირე	0,02	0,06	0,15	0,2	0,24	0,24	0,08	0,01

ფარდობითი სიხშირეები მიუთითებს იმ პროპორციას, რომლის მიხედვითაც განაწილდება შეკვეთა. ამიტომ მენეჯერმა ფარდობითი სიხშირეები გაამრავლა 10 000 და ფირმას წარუდგინა პროგნოზი შესაკერ ფეხსაცმელთა წყვილების რაოდენობების შესახებ:

ცხრილი 2.30.

ზომა	34	35	36	37	38	39	40	41
რაოდენობა	200	600	1500	2000	2400	2400	800	100

მაგალითი 2.30 [7] რაიონში გამოცხადდა წინასაშობაო შეჯიბრი მათემატიკაში მეთერთმეტეკლასელთა შორის: - თითოეული სკოლიდან მონაწილეობის უფლება ეძლეოდა ერთ მოსწავლეს. ამიტომ (რადგან შეჯიბრი წერითი უნდა ყოფილიყო) მასწავლებელმა მეთერთმეტეკლასელებს წარუდგინა სექტემბრიდან 10 დეკემბრამდე ოთხი წარმატებული მოსწავლის წერით ნამუშევრებში (დამოუკიდებელ საკლასო და საკონტროლო სამუშაოებში) მიღწეული შემდეგი შედეგები:

ცხრილი 2.31.

მოსწავლე	1	2	3	4	5	6	7	8	9	საშუალო
ზურა	8	10	9	8	9	10	8	10	9	9
ატო	9	9	8	7	10	9	9	8	10	8,8
დათო	6	8	8	9	10	10	9	10	10	8,9
აია	9	8	10	7	8	9	9	8	10	8,6

ამ მონაცემთა წარმოდგენის ხერხებზე მსჯელობისა და მცირე კამათის შემდეგ მოსწავლეებმა გადაწყვიტეს დაეთვალათ სხვა მახასიათებლებიც:

ცხრილი 2.32.

მოსწავლე	მოდა	მედიანა	არითმეტიკული საშუალო	დიაპაზონი	სტანდარტული გადახრა
ზურა	10	9	9	2	≈0,8
ნატო	9	9	8,8	3	≈0,9
დათო	10	9	8,9	4	≈1,3
მაია	8 და 9	9	8,7	3	≈0,9

(გამოთვლათა შედეგების სისწორე შეამოწმეთ დამოუკიდებლად)

ზემო მონაცემების საფუძველზე (მისი შედეგების სტაბილურობას ყველაზე მცირე სტანდარტული გადახრა ადასტურებს) ზურა საუკეთესო ჩანს. ტრენდის გათვალისწინებით კლასმა გადაწყვიტა, რომ დათო იყო გამარჯვებული და ის უკეთეს შედეგებს აჩვენებდა მათემატიკურ შეჯიბრში (თუ საწინააღმდეგო მოსაზრება გაგიჩნდათ, შეგიძლიათ დაასაბუთოთ).

მაგალითი 2.31 [7] ერთ-ერთ რძის ქარხანაში მიწვეულმა ექსპერტთა 6-კაციანმა ჯგუფმა აქ წარმოებული ხაჭოს გემოსა და სუნზე დეგუსტაციის შედეგები შეაფასა ქულებით, რომელიც მოცემულია შემდეგ ცხრილში:

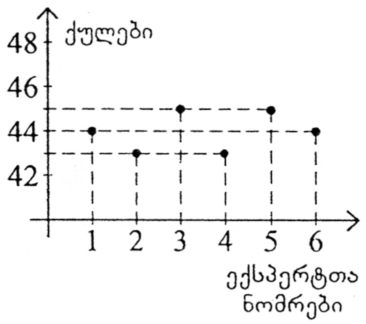
ცხრილი 2.33.

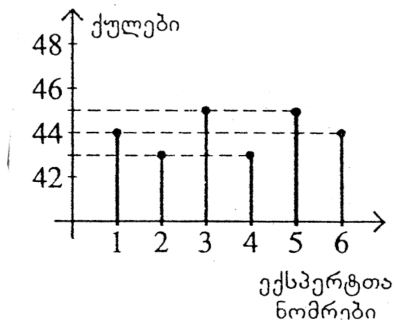
ექსპერტთა ნომრები	შეაფასებები (ქულები)
1	44
2	43
3	44
4	43
5	45
6	44

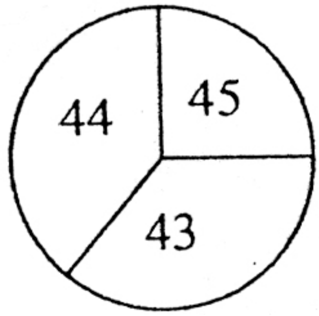
ეს მონაცემები წარმოდგენილია წერტილოვანი ნახ (2.20) და მესერული დიაგრამებით, (ნახ. 2.21) ხოლო მონაცემთა ფარდობითი სიხშირეები - წრიულ

დიაგრამაზე. (ნახ. 2.22) თითოეული დიაგრამის აგებისას დაშვებულია შეცდომა.

ჩაატარეთ აუცილებელი გამოთვლები, იპოვეთ ეს შეცდომები და გაასწორეთ ისინი.







წერტილოვანი დიაგრამა ნახ.2.20.

მესერული დიაგრამა ნახ. 2.21.

წრიული დიაგრამა ნახ. 2.22.

მაგალითი 2.31. [7] ერთ-ერთ სკოლაში მეთერთმეტეკლასელებმა ჩაატარეს X კლასის მოსწავლე-რესპოდენტთა გამოკითხვა - „რამდენი შვილი ჰყავს თქვენს მშობლებს?“ კითხვაზე პასუხი გასცა 100-მა რესპოდენტმა, რომელთაგან არც ერთი წყვილი არ იყო ერთი დედ-მამის შვილი. პასუხები წინასწარ შედგენილ ცხრილში ფიქსირდებოდა, რომელმაც ბოლოს ასეთი სახე მიიღო:

ცხრილი 2.34.

შვილების რაოდენობა	1	2	3	4	5 და მეტი
სიხშირე n_i	20	52	18	7	3

ისიც დადგინდა, რომ ყველაზე მეტი შვილი (8 ბავშვი) იყო მხოლოდ ერთ ოჯახში.

ა) ჩაატარეთ ამ მონაცემთა ანალიზი. დაალაგეთ შვილების რაოდენობის ყველა მონაცემი არაკლებადი მიმდევრობით და იპოვეთ მონაცემთა ფარდობითი სიხშირეები, მოდა და მედიანა, საშუალო, დიაპაზონი, დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.

ბ) მონაცემთა სიხშირეების მიხედვით წარმოადგინეთ შესაბამისი სვეტოვანი დიაგრამა, ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა, ხაზოვანი დიაგრამა (ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი), წრიული დიაგრამა.

გ) მონაცემთა ანალიზის საფუძველზე დაადგინეთ სტატისტიკური დასკვნა მოსახლეობის დემოგრაფიული მდგომარეობის შესახებ.

მაგალითი 2.32. დავალება ჯგუფური მეცადინეობისთვის. სტუდენტთა ჯგუფში ორგანიზებულად შეადგინეთ კითხვარი.

დასმული საკითხის შესაბამისად ჩაატარეთ გამოკითხვა სასწავლებელში (სტუდენტთა რაოდენობა შეიძლება იყოს 100-ზე ნაკლები), შეადგინეთ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი. ააგეთ სათანადო დიაგრამები.

მაგალითი 2.33. თქვენს ბაღში 120 ძირი მსხმოიარე ვაშლის ხეა დასაკრეფი. როგორ განვსაზღვრავდით მოსავლიანობას, თუ შეგიძლიათ წინასწარ დაკრიფოთ ვაშლი მხოლოდ 6 ხეზე, როცა:

ა) ყველა ვაშლის ხე „კეხურაა"

ბ) 40 „ანტონოვკა" და 80 „კეხურაა"

გ) 20 „ანტონოვკა", 40 „შაფრანი" და 60 „კეხურაა"

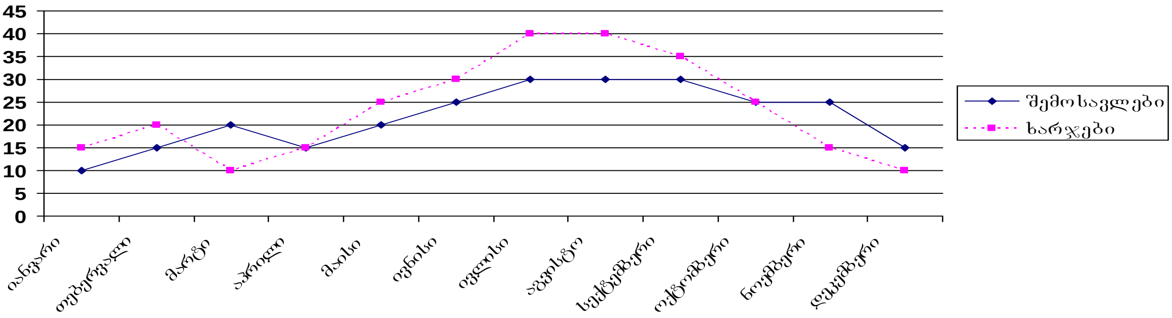
რომელი ჯიშის რამდენ ხეს შეარჩევდით თითოეულ შემთხვევაში? რომელ შემთხვევაში გაკეთებული დასკვნა იქნებოდა უფრო ზუსტი?

მაგალითი 2.34. შეაგროვეთ მონაცემები თქვენი ჯგუფის სტუდენტი (სკოლის ან უფროსკლასელი) ვაჟების ფეხსაცმელების ზომის შესახებ. მაგალითი 2.29.-ის მიხედვით რა დასკვნას გააკეთებდა ფირმის მენეჯერი თქვენს მიერ მოპოვებული მონაემების მიხედვით? დაეხმარეთ მას.

სავარჯიშოები

1. ფირმის მოგება და ზარალი მის შემოსავლებსა და ხარჯებზეა დამოკიდებული.

დიაგრამაზე მოცემულია, რამდენ ათას ლარს შეადგენს ტურისტული ფირმის შემოსავლები და ხარჯები თვეების მიხედვით მთელი წლის განმავლობაში.



ნახ.2.13

დიაგრამის მიხედვით უპასუხეთ შეკითხვებს:

ა) რომელ თვეში იყო ფირმის შემოსავლები 30 ათასი ლარის ტოლი?

ბ) მოიგო თუ იზარალა ფირმამ აგვისტოში და რამდენი?

გ) რამდენი ათასი ლარი იზარალა სულ ფირმამ წლის ბოლო მეოთხედში (ოქტომბრის, ნოემბრის და დეკემბრის თვეების განმავლობაში)?

2. ცხრილში თვეების მიხედვით წარმოდგენილია მონაცემები ახალშობილი გოგონების და ვაჟების რაოდენობათა შესახებ.

თვე	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	წელი-წადში
გოგონები	3537	3407	3866	3711	3775	3665	3621	3596	3491	3391	3160	3371	42591
ვაჟები	3743	3550	4017	4173	4117	3944	3964	3797	3712	3512	3392	3761	45682
ერთად	7280	6957	7883	7884	7892	7609	7585	7393	7203	6903	6552	7132	88273

მოცემული ცხრილის მიხედვით უპასუხეთ შეკითხვებს:

ა) რამდენი გოგონა დაიბადა მაისში?

ბ) თუ მთელი წლის განმავლობაში ახალშობილი ვაჟების რაოდენობა გოგონების რაოდენობაზე ს-ითაა მეტი, მაშინ:

გ) რომელ თვეში იყო ახალშობილ ვაჟთა რაოდენობა ყველაზე მცირე?

დ) რამდენი თვეა ისეთი, რომელშიც ახალშობილთა საერთო რაოდენობა 7800-ზე მეტია?

ე) შეადარეთ ახალშობილ გოგონათა და ვაჟთა წლიური საშუალო რიცხვი. იპოვეთ თითოეული მათგანიდან გადახრის მაჩვენებლები.

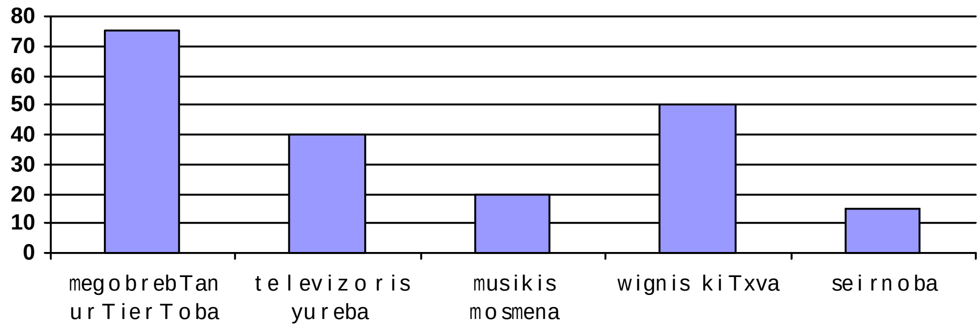
3. ფსიქოლოგის თხოვნაზე, დაესახელებინათ თავისუფალი დროის გატარების მხოლოდ ერთი, მათთვის ყველაზე საყვარელი ფორმა,

სტუდენტებმა დაასახელეს: მეგობრებთან ურთიერთობა, ტელევიზორის ყურება, მუსიკის მოსმენა, წიგნის კითხვა, სეირნობა.

სვეტოვან დიაგრამაზე წარმოდგენილია იმ სტუდენტთა რაოდენობა, რომლებსაც

თავისუფალი დროის ამა თუ იმ ფორმით გატარება უყვართ.

ნახ.2.24



მოცემული დიაგრამის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ შეკითხვებს:

ა) თავისუფალი დროის გატარების რომელი ფორმა დაასახელა სტუდენტთა ყველაზე მცირე ნაწილმა?

ბ) რამდენჯერ მეტია იმ სტუდენტთა რაოდენობა, რომლებმაც დაასახელეს ტელევიზორის ყურება, იმ სტუდენტთა რაოდენობაზე, რომლებმაც დაასახელეს მუსიკის მოსმენა?

გ) სტუდენტთა რამდენმა პროცენტმა დაასახელა წიგნის კითხვა?

დ) იმ სტუდენტების რაოდენობათა ჯამი, რომლებმაც დაასახელეს მეგობრებთან ურთიერთობა და სეირნობა, გამოკითხულთა საერთო რაოდენობის:ა) ნახევარზე მეტია, ბ) ნახევარზე ნაკლებია, გ) ნახევარზე ნაკლებია მაგრამ მესამედზე მეტია, დ) მესამედია, ე) მესამედზე ნაკლებია, მაგრამ მეოთხედზე მეტია.

ე) იპოვეთ გამოკითხულ სტუდენტთა რაოდენობა.

4. ახალ მხატვრულ ფილმს 4 დღის განმავლობაში უჩვენებდნენ. ფილმის ჩვენებას ყველაზე მეტი მაყურებელი პირველ დღეს დაესწრო. ყოველ მომდევნო დღეს კი მაყურებელთა რაოდენობა წინა დღესთან შედარებით 50-ით მცირდებოდა. ბოლო დღეს ეს ფილმი ნახა 200-მა მაყურებელმა საშუალოდ დღეში რამდენ მაყურებელს უნახავს ეს ფილმი?

5. ცხრილში მითითებულია, თუ რამდენი ლარი იყო ზოგიერთი საკვები პროდუქტის საშუალო ფასი სხვადასხვა წელს (1995 წლიდან 1998 წლის ჩათვლით)

ცხრილი 2.35.

	1995	1996	1997	1998
საქონლის ხორცი (1 კგ)	3.72	3.30	3.80	4.10
ღორის ხორცი (1 კგ)	3.88	3.70	4.00	4.20
ქათამი (1 კგ)	4.62	4.50	4.00	3.62
კვერცხი (10 ცალი)	1.30	1.40	1.50	1.60
კარაქი (1 კგ)	5.20	5.00	5.00	6.20
ყველი (1 კგ)	4.90	3.80	3.80	3.80
შაქრის ფხვნილი (1 კგ)	0.80	0.91	0.84	0.97
ხორბლის ფქვილი (1 კგ)	0.85	1.00	0.94	1.00
ღვინო (0,7 ლ.)	1.13	1.37	1.37	1.37

მოცემული ცხრილის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ შეკითხვებს:

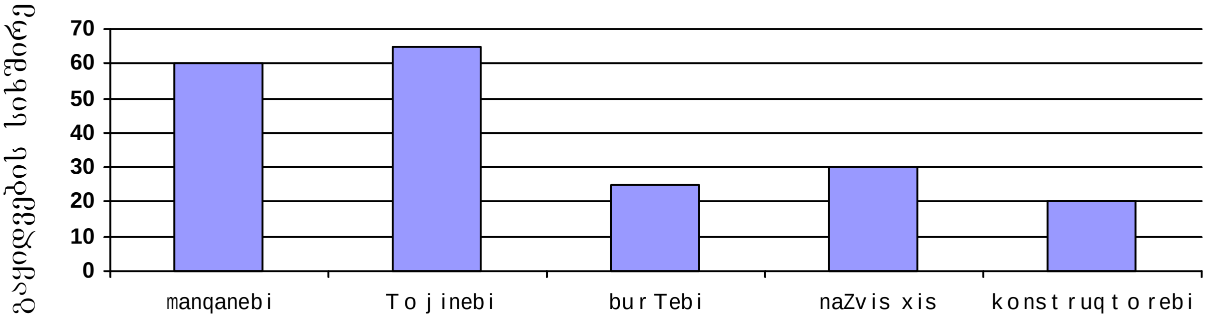
ა) რამდენი ლარი იყო 1 კგ ყველის საშუალო ფასი 1995 წელს?

ბ) ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი პროდუქტის საშუალო ფასი შემცირდა 1997 წელს წინა წელთან შედარებით?

გ) რომელი პროდუქტის საშუალო ფასი იმატებდა ყოველწლიურად 1995-1998 წლებში?

დ) რა ფარგლებში მერყეობდა (იცვლებოდა) ღორის ხორცის საშუალო ფასი 1995-1998 წლებში?

6. სვეტოვან დიაგრამაზე წარმოდგენილია მაღაზიაში ერთი თვის განმავლობაში გაყიდული სხვადასხვა სახის სათამაშოთა რაოდენობები:



ნახ.2.25

მოცემული დიაგრამის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ შეკითხვებს:

ა) რა სახის სათამაშოები გაიყიდა მაღაზიაში და რამდენი?

ბ) რა სახის სათამაშოები გაყიდულა ყველაზე დიდი რაოდენობით?

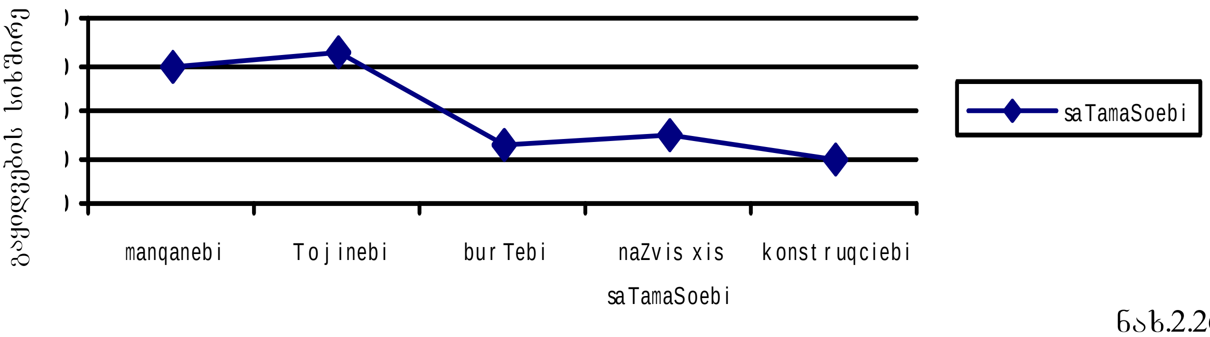
გ) რამდენჯერ ნაკლებია გაყიდული კონსტრუქტორების რაოდენობა გაყიდული მანქანების რაოდენობაზე?

დ) გაყიდული სათამაშოების საერთო რაოდენობის რამდენი პროცენტია გაყიდული ნაძვის ხის სათამაშოების რაოდენობა?

ე) გაყიდულ სათამაშოთა საერთო რაოდენობის მეოთხედზე მეტია, მაგრამ მესამედზე ნაკლები.

7. მეწარმის შემოსავალი იანვარში 1000 ლარი იყო. თებერვალში მისი თვიური შემოსავალი 100 ლარით გაიზარდა, მარტში - კიდევ 100 ლარით. აპრილიდან მოყოლებული სამი თვის განმავლობაში მეწარმის შემოსავალი ყოველთვიურად 200 ლარით მცირდებოდა. საშუალოდ რამდენი ლარი იყო მეწარმის შემოსავალი თვეში ამ 6 თვის მონაცემებით?

8. სვეტოვან დიაგრამაზე წარმოდგენილია მაღაზიაში ერთი თვის



ნახ.2.26

განმავლობაში გაყიდული სხვადასხვა სახის სათამაშოთა რაოდენობები: მოცემული დიაგრამის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ შეკითხვებს:

ა) სულ რამდენი სათამაშო გაიყიდა?

ბ) რა სახის სათამაშოები გაყიდულა ყველაზე დიდი რაოდენობით?

გ) რამდენჯერ ნაკლებია გაყიდული კონსტრუქტორების რაოდენობა გაყიდული მანქანების რაოდენობაზე?

დ) გაყიდული სათამაშოების საერთო რაოდენობის რამდენი პროცენტია გაყიდული ნაძვის ხის სათამაშოების რაოდენობა?

ე) მანქანების და თოჯინების რაოდენობის ჯამი. გაყიდულ სათამაშოთა საერთო რაოდენობის მეოთხედზე მეტია, მაგრამ მესამედზე ნაკლები? დაასაბუთეთ.

ვ) საშუალოდ დღეში რამდენი სათამაშო იყიდებოდა?

ზ) საშუალოდ დღეში რამდენი ბურთი გაიყიდა?

შენიშვნა: იყო ნოემბრის თვე.

9. მეწარმის შემოსავალი იანვარში 3000 ლარი იყო. თებერვალში მისი თვიური შემოსავალი 100 ლარით გაიზარდა, მარტში - კიდევ 200 ლარით. აპრილიდან მოყოლებული სამი თვის განმავლობაში მეწარმის შემოსავალი ყოველთვიურად 200 ლარით მცირდებოდა. სულ რამდენი ლარი იყო თვეში მეწარმის საშუალო შემოსავალი ამ 6 თვის მონაცემებით?

10.ცხრილში მითითებულია, თუ რამდენი ლარი იყო ზოგიერთი საკვები პროდუქტის საშუალო ფასი სხვადასხვა წელს (1995 წლიდან 1998 წლის ჩათვლით)

ცხრილი 2.26.

	1995	1996	1997	1998
საქონლის ხორცი (1 კგ)	3.72	3.30	3.80	4.10
ღორის ხორცი (1 კგ)	3.88	3.70	4.00	4.20
ქათამი (1 კგ)	4.62	4.50	4.00	3.62
კვერცხი (10 ცალი)	1.30	1.40	1.50	1.60
კარაქი (1 კგ)	5.20	5.00	5.00	6.20
ყველი (1 კგ)	4.90	3.80	3.80	3.80
შაქრის ფხვნილი (1 კგ)	0.80	0.91	0.84	0.97
ხორბლის ფქვილი (1 კგ)	0.85	1.00	0.94	1.00
ღვინო (0,7 ლ.)	1.13	1.37	1.37	1.37

მოცემული ცხრილის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ შეკითხვებს:

ა) რამდენი ლარი იყო 1 კგ ყველის საშუალო ფასი 1995 წელს?

ბ) ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი პროდუქტის საშუალო ფასი შემცირდა 1997 წელს წინა წელთან შედარებით?

გ) რომელი პროდუქტის საშუალო ფასი იმატებდა ყოველწლიურად 1995-1998 წლებში?

დ) რა ფარგლებში მერყეობდა (იცვლებოდა) ღორის ხორცის საშუალო ფასი 1995-1998 წლებში?

11. ცხრილ 2.27-ში მოცემულია ქალაქის მერის არჩევნების შედეგები. ქალაქი ხუთ საარჩევნო უბნად იყო დაყოფილი. არჩევნებში მხოლოდ ორმა - M და N კანდიდატმა მიიღო მონაწილეობა. გაიმარჯვა იმ კანდიდატმა, რომელმაც მეტი ხმა დააგროვა. განსაზღვრეთ, რომელ უბანში მიიღო გამარჯვებულმა კანდიდატმა ყველაზე მეტი ხმა?

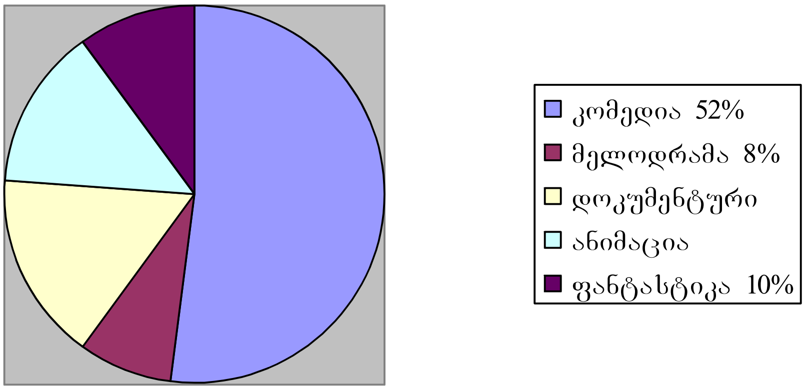
შენიშვნა: იგულისხმება, რომ არჩევნებში ყველა ამომრჩეველმა მიიღო მონაწილეობა და თითოეულმა მათგანმა ხმა მხოლოდ ერთ კანდიდატს მისცა.

ცხრილი 2.27.

უბანი	ამომრჩეველთა რაოდენობა	M კანდიდატის მომხრეთა პროცენტული რაოდენობა	N კანდიდატის მომხრეთა პროცენტული რაოდენობა
1	1800	60%	40%
2	1000	25%	75%
3	700	50%	50%
4	1200	50%	50%
5	1800	75%	25%

12. ელენეს თავისი ელექტრონული ფოსტის კოდი დაავიწყდა. მას ახსოვს, რომ კოდი 6 სიმბოლოსგან შედგება. ამასთან, პირველი ოთხი სიმბოლო მისი სახელის პირველი ოთხი ასოა, მეხუთე სიმბოლო ციფრია, ხოლო ბოლო სიმბოლო ხმოვანია (ა, ე, ი, ო, უ). ყველაზე უარეს შემთხვევაში, რამდენი ვარიანტის გადასინჯვა მოუწევს ელენეს თავისი კოდის მისაგნებად?

13. დიაგრამაზე მითითებულია ვიდეოგაქირავების სალონში არსებული სხვადასხვა ჟანრის ფილმების რაოდენობების პროცენტული განაწილება.



ნახ.2.27

განსაზღვრეთ დოკუმენტური ჟანრის ფილმების რაოდენობის პროცენტული მაჩვენებელი.

14. ავეჯის საამქრო ამზადებს მაგიდებს, სკამებს, საწოლებს და კარადებს, რომელთა დღიური რაოდენობები მითითებულია სვეტოვან დიაგრამაზე, ხოლო პროცენტული განაწილება - წრიულ დიაგრამაზე. ცნობილიაბ რომ ყოველდღე მზადდება იმდენივე სკამი, რამდენიც მაგიდა. დიაგრამებზე მოცემული ინფორმაციის საფუძველზე დაადგინეთ, დღეში დამზადებულ ნაკეთობათა საერთო რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენს კარადები?

15. ცხრილში მოცემულია, რამდენი სტუდენტი სწავლობდა 2000-2005 წლებში ერთ-ერთი უმაღლესი სასწავლებლის ჰუმანიტარულ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტების სპეციალობებზე.

ცხრილი 2.28.

	ჰუმანიტარული ფაკულტეტი			საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი			
	ფილოლოგია	ისტორია	ფსიქოლოგია	ფიზიკა	ქიმია	ბიოლოგია	გეოლოგია
2000	160	120	90	80	30	45	40
2001	180	100	85	75	25	40	35
2002	190	110	80	85	20	35	25
2003	180	105	90	80	25	30	20

2004	175	110	95	70	30	45	35
2005	170	100	95	65	35	40	25

ცხრილის მიხედვით უპასუხეთ შეკითხვებს:

ა) რომელ წლებში იყო იმ სტუდენტთა რაოდენობა, რომლებიც საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის ფიზიკის სპეციალობაზე სწავლობდნენ, უფრო მეტი, ვიდრე მათი საერთო რაოდენობა, ვინც იმავე ფაკულტეტის ბიოლოგიის ან გეოლოგიის სპეციალობებზე სწავლობდა?

ბ) რამდენჯერ მეტი იყო იმ სტუდენტთა რაოდენობა, რომლებიც 2001 წელს ჰუმანიტარული ფაკულტეტის ისტორიის სპეციალობაზე სწავლობდნენ, მათ რაოდენობაზე, ვინც იმავე წელს საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის ბიოლოგიის სპეციალობაზე სწავლობდა?

გ) ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი დასკვნაა მართებული ცხრილის მიხედვით?

1) ჰუმანიტარული ფაკულტეტის სტუდენტთა ნახევარზე მეტი ფილოლოგიის სპეციალობაზე სწავლობს.

2) იმ სტუდენტთა რაოდენობა, რომლებიც ჰუმანიტარული ფაკულტეტის ისტორიის სპეციალობაზე სწავლობდნენ, ყოველწლიურად იკლებდა, ხოლო მათი, ვინც ფსიქოლოგიის სპეციალობაზე სწავლობდა - იმატებდა.

3) იმ სტუდენტთა რაოდენობა, რომლებიც საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის გეოლოგიის სპეციალობაზე სწავლობდნენ, 2000-2002 წლებში ყოველწლიურად იკლებდა, ხოლო 2003-2005 წლებში - იმატებდა.

4) საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის ფიზიკის სპეციალობაზე ყოველ წელს უფრო მეტი სტუდენტი სწავლობდა, ვიდრე იმავე ფაკულტეტის სხვა დანარჩენ სპეციალობებზე (ერთად).

5) ჰუმანიტარული ფაკულტეტის ფსიქოლოგიის სპეციალობაზე ყოველ წელს სტუდენტთა უფრო ნაკლები რაოდენობა სწავლობდა, ვიდრე საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის ფიზიკის ან ქიმიის სპეციალობებზე (ერთად).

16. ქალაქის მუნიციპალიტეტის დავალებით სხვადასხვა წლებში გამოიკვლიეს, ქალაქის მოსახლეობის რა ნაწილი სარგებლობს კერძო ტრანსპორტით ან საზოგადოებრივი ტრანსპორტის ამა თუ იმ სახეობით (აქაც და შეკითხვებშიც საუბარია იმაზე, რა სახეობის ტრანსპორტით სარგებლობს

მოსახლეობა უპირატესად). ცხრილში მოცემულია, 1990-1996 წლებში ქალაქის მცხოვრებთა რამდენი პროცენტი სარგებლობდა კერძო ტრანსპორტით ან საზოგადოებრივი ტრანსპორტის შემდეგი სახეობებით: ავტობუსით, მიკროავტობუსით, ტროლეიბუსით, ტრამვაით თუ მეტროპოლიტენით.

ცხრილი 2.29

	კერძო ტრანსპორტი	საზოგადოებრივი ტრანსპორტი				
		ავტობუსი	იკროავტო-ბუსი	ტროლეიბუსი	ტრამვაი	ეტროპო-ლიტენი
1990	11	35	8	15	7	24
1991	10	33	8	12	7	30
1992	11	32	10	12	5	30
1993	17	28	11	15	3	26
1994	15	30	12	15	3	25
1995	14	32	12	14	2	26
1996	12	35	10	13	2	28

უპასუხეთ შემდეგ შეკითხვებს:

ა) ქალაქის მცხოვრებთა რამდენი პროცენტი მგზავრობდა საზოგადოებრივი ტრანსპორტით 1995 წელს?

ბ) რომელ წლებში იყო იმ მცხოვრებთა რაოდენობა, რომლებიც ტროლეიბუსით მგზავრობდნენ, უფრო ნაკლები, ვიდრე მათი საერთო რაოდენობა, ვინც მიკროავტობუსით ან ტრამვაით მგზავრობდა?

გ) რამდენჯერ მეტი იყო იმ მცხოვრებთა რაოდენობა, რომლებიც 1994 წელს ავტობუსით სარგებლობდნენ, მათ რაოდენობაზე, ვინც იმავე წელს კერძო ტრანსპორტით სარგებლობდა?

დ) ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი დასკვნაა მართებული ცხრილის მიხედვით?

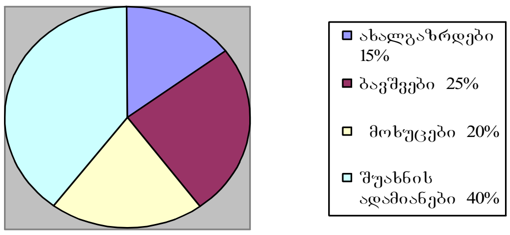
1) ქალაქის მცხოვრებთა ნახევარზე მეტი ავტობუსით სარგებლობს.

2) იმ მცხოვრებთა წილი, რომლებიც მეტროპოლიტენით სარგებლობდნენ, ყოველწლიურად იმატებდა, ხოლო მათი, ვინც მიკროავტობუსით სარგებლობდა - იკლებდა.

3) ყოველ წელს ქალაქის მცხოვრებთა უფრო ნაკლები რაოდენობა სარგებლობდა ტროლეიბუსით, ვიდრე - კერძო ტრანსპორტით ან ტრამვაით (ერთად).

4) საზოგადოებრივი ტრანსპორტის სახეობებიდან ავტობუსით ან ტროლეიბუსით (ერთად) ყოველ წელს უფრო მეტი მცხოვრები სარგებლობდა, ვიდრე - საზოგადოებრივი ტრანსპორტის სხვა დანარჩენი სახეობებით (ერთად).

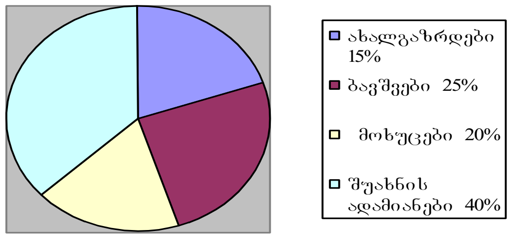
5) ყოველ წელს ქალაქის მცხოვრებთა უფრო მეტი რაოდენობა სარგებლობდა ავტობუსით, ვიდრე - ტრამვაით ან მეტროპოლიტენით (ერთად).



ნახ.2.28

Mქალაქი

ქალაქში მცხოვრებ ბავშვთა რაოდენობაა მეტი თუ



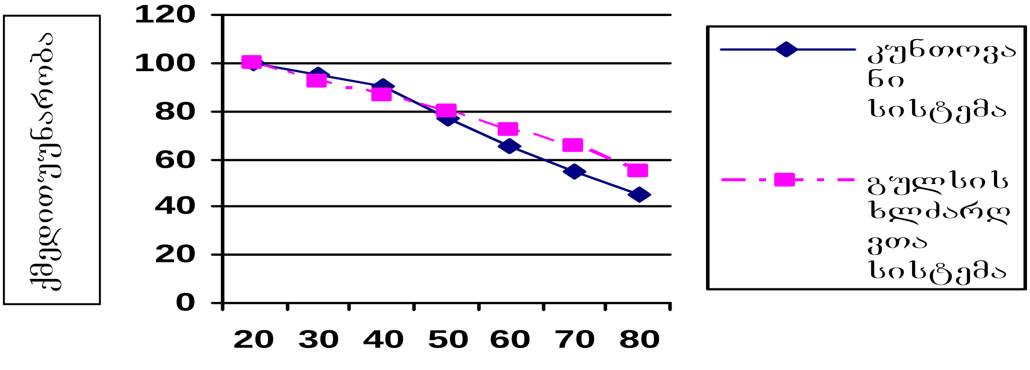
ნახ.2.29.

N ქალაქი

ქალაქში მცხოვრებ ბავშვთა რაოდენობა

წრიულ დიაგრამებზე მითითებულია M და N ქალაქების მცხოვრებთა რამდენ პროცენტს შეადგენენ ბავშვები, ახალგაზრდები, შუახნის ადამიანები და მოხუცები.

17. ცნობილია, რომ ადამიანის ფიზიოლოგიურ სისტემათა უმრავლესობის ქმედითუნარიანობა მაქსიმუმს, ანუ 100%-ს მაშინ აღწევს, როცა ადამიანი 20 წლისაა. დიაგრამაზე წარმოდგენილია, თუ როგორ იცვლება საშუალოდ ადამიანის გულსისხლძარღვთა და კუნთოვანი სისტემების ქმედითუნარიანობა პროცენტულად 20-დან 80 წლამდე ასაკში.



ნახ.2.30

მოცემული დიაგრამის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ შეკითხვებს:

ა) რამდენ პროცენტს შეადგენს ადამიანის კუნთოვანი სისტემის ქმედითუნარიანობა 70 წლის ასაკში?

ბ) რამდენჯერაა შემცირებული გულსისხლძარღვთა სისტემის ქმედითუნარიანობა 75 წლის ასაკში, 35 წლის ასაკთან შედარებით?

გ) ქვემოთ ჩამოთვლილი ასაკობრივი შუალედებიდან რომელში მცირდება კუნთოვანი სისტემის ქმედითუნარიანობა უფრო ნაკლებად, ვიდრე - გულსისხლძარღვთა სისტემისა?

დ) ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი წინადადებაა მართებული დიაგრამის მიხედვით?

1) 40-დან 80-წლამდე ასაკში ადამიანის როგორც კუნთოვანი, ასევე - გულსისხლძარღვთა სისტემის ქმედითუნარიანობა არ იცვლება.

2) 20-დან 50-წლამდე ასაკში ადამიანის გულსისხლძარღვთა სისტემის ქმედითუნარიანობა ხან იმატებს, ხან - იკლებს.

3) 70-დან 80-წლამდე ასაკში ადამიანის გულსისხლძარღვთა სისტემის ქმედითუნარიანობა უფრო მეტად მცირდება, ვიდრე - კუნთოვანი სისტემისა.

4) 30-დან 70-წლამდე ასაკში ადამიანის გულსისხლძარღვთა სისტემისა და კუნთოვანი სისტემის ქმედითუნარიანობა ერთნაირად იცვლება.

5) 50-დან 60-წლამდე ასაკში ადამიანის კუნთოვანი სისტემის ქმედითუნარიანობა უფრო მეტად მცირდება, ვიდრე - გულსისხლძარღვთა სისტემისა.

თავი III. ალბათობის თეორიის ელემენტები. თეორიული მასალა

§1. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე. მოქმედებები ხდომილობებზე

გავიხსენოთ:

ცდა (ექსპერიმენტი, დაკვირვება) ეწოდება პირობათა გარკვეულ S კომპლექსის შესრულებას.

ცდის იმ შესაძლო შედეგთა ერთობლიობა, რომლებიც ერთმანეთს გამორიცხავენ და ერთ-ერთი მათგანი აუცილებლად ხდება, ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეს ქმნის. ამ სივრცის ელემენტებს ელემენტარულ ხდომილობებს უწოდებენ.

ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე აღინიშნება **Ω**, ხოლო ელემენტარული ხდომილობები ω სიმბოლოთი. ცდის პირობათა S კომპლექსი ცალსახად განსაზღვრავს ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეს.

ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ხდომილობა ეწოდება.

ხდომილობები აღინიშნებიან ლათინური ანბანის დიდი ასოებით A, B, C,...

იმ ω ელემენტარულ ხდომილობებს, რომლებიც შედიან რაიმე ხდომილობაში, ხდომილობის ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობები ეწოდებათ და ამ ფაქტს აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $\omega \in A$.

ამბობენ, რომ A ხდომილობა მოხდა, თუ ცდის შედეგად ადგილი ჰქონდა მის ხელშემწყობ ერთ-ერთ ელემენტარულ ხდომილობას.

ხდომილობას, რომელიც მოცემული ცდის ყველა ელემენტარულ ხდომილობას შეიცავს, **აუცილებელი** ხდომილობა ეწოდება და, ბუნებრივია, ისევე როგორც ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე, **Ω** სიმბოლოთი აღინიშნება.

ხდომილობას, რომელიც მოცემული ცდის არცერთ ელემენტარულ ხდომილობას არ შეიცავს **შეუძლებელი ხდომილობა** ეწოდება და აღინიშნება $\varnothing$სიმბოლოთი.

ხდომილობას, რომელიც არც აუცილებელია და არც შეუძლებელი, შემთხვევითი ხდომილობა ეწოდება.

თუ Ω-ს ყველა ის ელემენტარული ხდომილობა, რომელიც იწვევს (ხელს უწყობს) რაიმე A ხდომილობას, ამავე დროს იწვევს სხვა B ხდომილობასაც, მაშინ ამბობენ, რომ A ხდომილობა იწვევს B ხდომილობას ან A ხდომილობა შედის B ხდომილობაში და ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ - $A \subset B$.

თუ $A \subset B$ და $B \subset A$, მაშინ A და B-ს ექვივალენტური (ტოლძალოვანი) ხდომილობები ეწოდებათ და წერენ $A=B$.

მოცემული ცდის ყველა აუცილებელი ხდომილობა ექვივალენტურია; ყველა შეუძლებელი ხდომილობაც ექვივალენტურია.

ორი A და B **ხდომილობის ჯამი** (გაერთიანება) ეწოდება ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც A და B ხდომილობებიდან ერთი მაინც ხდება და აღინიშნება $A+B$ ან $A \subset B$ სიმბოლოთი.

ორი A და B **ხდომილობის ნამრავლი ეწოდება** ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება A და B ხდომილობები ერთდროულად და აღინიშნება AB ან $A \subset B$ სიმბოლოთი.

ორი A და B **ხდომილობის სხვაობა** ეწოდება ისეთ ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება A და არ ხდება B ხდომილობა და აღინიშნება $A-B$ ან $A\backslash B$ სიმბოლოთი.

A და B-ს **უთავსებადი** ხდომილობები ეწოდებათ, თუ მათი ერთდროული მოხდენა შეუძლებელია, ე.ი. $A \cdot B=\varnothing$.

A ხდომილობის არმოხდენას A-ს საწინააღმდეგო ხდომილობა ეწოდება და აღინიშნება $\bar{A}$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ $\Omega-A=\bar{A}$, $\bar{A} \cdot A=\varnothing$.

ხდომილობათა ჯამი და ნამრავლი ნებისმიერი სასრული და თვლადი რაოდენობის ხდომილობებისათვის ანალოგიურად განისაზღვრება.

სქემატურად, ორი A და B ხდომილობის ჯამი, ნამრავლი, სხვაობა, საწინააღმდეგო ხდომილობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად (ნახ.1).

$A+B$ AB $A-B$ $\bar{A}$

A, B, C ხდომილობებისათვის სრულდება შემდეგი თანაფარდობანი:

1.1. ჯამისა და ნამრავლის კომუტატიურობა

$A+B=B+A$, $A \cdot B=B \cdot A$

1.2. ჯამისა და ნამრავლის ასოციატიურობა

$A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C$, $A \cdot B \cdot C=A \cdot (B \cdot C)=(A \cdot B) \cdot C$

1.3. დისტრიბუციულობა

(A+B)·C=A·C+B·C, (A·B)+C=(A·C) · (B+C)

1.4. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$; $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$; $\overline{\overline{A}}=A$; A+A= A; A·A=A

A+Ω=Ω; A+Ø=A; A·Ω=A; A·Ø=Ø; Ω=Ø; Ø= Ω

A1A2...An ხდომილობანი ქმნიან ხდომილობათა სრულ ჯგუფს, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

ა) ერთ-ერთი Ai, i=1, n, ხდომილობა აუცილებლად ხდება, ე.ი. $A_1+A_2+A_3+\ldots A_n=\Omega$

ბ) ხდომილობები წყვილ-წყვილად უთავსებადია, ე.ი. AiAj=Ø, i≠j, i, j=1,2,…n

§2. კომბინატორიკა

კომბინატორიკის ძირითადი პრინციპი შემდეგში მდგომარეობს: თანმიმდევრობით შესასრულებელია k მოქმედება. თუ პირველი მოქმედება შეიძლება შევასრულოთ n_1, მეორე - n_2, მესამე n_3 და ა.შ.

k-ური n_k განსხვავებული წესით, მაშინ k მოქმედება მთლიანობაში შეიძლება შესრულდეს $n_1\cdot n_2\ldots n_k$ განსხვავებული წესით.

n-ელემენტიანი სიმრავლის ყოველ k-ელემენტიან ქვესიმრავლეს n ელემენტიდან აღებული k-ელემენტიანი ჯუფდება ეწოდება;

n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა K-ელემენტიან ჯუფდებათა რიცხვი აღინიშნება C_n^k სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-K)!}=\frac{n(n-1)....(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\cdot K}$$

n-ელემენტიანი სიმრავლის k-ელემენტიან ყოველ დალაგებულ ქვესიმრავლეს n ელემენტიდან აღებული k-ელემენტიანი წყობა ეწოდება.

n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა k-ელემენტიან წყობათა რიცხვი, რომელიც აღინიშნება A_n^k სიმბოლოთი, გამოითვლება ფორმულით

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)....(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

n-ელემენტიანი სიმრავლის n-ელემენტიან წყობას **გადანაცვლება** ეწოდება.

n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა გადანაცვლებათა რიცხვი აღინიშნება Pn სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$P_n = n!$$

ვთქვათ $K_1, K_2 \ldots K_m$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია, ამასთან $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$ წარმოვიდგინოთ n-ელემენტიანი A სიმრავლე, შესაბამისად, $k_1, k_2, \ldots k_m$-ელემენტიანი $A_1, A_2, \ldots A_m$ სიმრავლეების გაერთიანების სახით. A სიმრავლის ასეთ ჯგუფებად ყველა შესაძლო დაყოფათა რიცხვი აღვნიშნოთ $Cn(k_1, k_2, \ldots km)$ და იგი განისაზღვრება ფორმულით

$$C_n = (k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_m!}$$

ვთქვათ, n-ელემენტიანი A სიმრავლე დაყოფილია შესაბამისად $n_1, n_2, \ldots nk$ ($\sum_{i=1}^{m} n_i = n$)ელემენტიან სიმრავლეებად და B არის A სიმრავლის m-ელემენტიანი ქვესიმრავლე, რომელიც შეიცავს A_1 სიმრავლის m_1 ელემენტს, A_2 სიმრავლის m_2 ელემენტს და ა.შ. Ak სიმრავლის mk ელემენტს ($\sum_{i=1}^{m} m_i = m$). მოცემული n-ელემენტიან A სიმრავლიდან ყველა ასეთ m-ელემენტიან B ქვესიმრავლეთა რიცხვი, კომბინატორიკის ძირითადი პრინციპის მიხედვით, ტოლია $C_{n1}^{m1} x C_{n2}^{m2} x ... x C_{nx}^{mx}$

სავარჯიშოები

დაამტკიცეთ:

1. $C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = \frac{P_m}{P_{m-n} \cdot P_n}$

2. $C_m^n = C_m^{m-n}$

მითითება ამ ტოლობის სამართლიანობა ცხადია, რადგან

$$C_m^n = \frac{m!}{[m-(m-n)]!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} C_m^{m-n}$$

შენიშვნა: გადანაცვლების, წყობის და ჯუფთების გამოსაანგარიშებლად, შესაბამისად, ვისარგებლებთ ფორმულებით:

$$P_m = m! A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{P_m}{P_{m-n}}; \; C_m^n = C_m^{(m-n)} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = \frac{P_m}{P_{m-n} \cdot P_n}$$

3. ერთ მერხზე 5 მოსწავლე უნდა დაჯდეს. რამდენი სხვადასხვა დაჯდომაა შესაძლებელი?

4. რამდენი ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს შემდეგი ციფრებით: 0;1;2;3?

მითითება: ოთხი ციფრისაგან შესაძლებელ ყოველგვარ გადანაცვლებათა რაოდენობას უნდა გამოვაკლოთ 0-ით დაწყებულ გადანაცვლებათა რაოდენობა.

5. სივრცეში სიბრტყის მდებარეობა 3 წერტილით ისაზღვრება. რამდენი სხვადასხვა სიბრტყე შეიძლება გავავლოთ: 1) 4; 2) 7; 3) 10; 4) 6 წერტილზე, თუ ამ წერტილთა არც ერთი სამეული ერთ სწორ ხაზზე არ მდებარეობს და არც ერთი ოთხეული არაა ერთ სიბრტყეზე მოთავსებული?

6. 32 კარტიდან ვარაუდით ვიღებთ ოთხ-ოთხ კარტს. კარტების ამოღების რამდენი სხვადასხვა შემთხვევა შეიძლება იყოს?

7. რამდენი სხვადასხვა გადანაცვლება შეიძლება 1; 2; 3; 4; 5; 6 ციფრებისაგან მოვახდინოთ ისეთი, რომ თითოეული გადანაცვლება იწყებოდეს ციფრი 4-იანით? ციფრებით 45? ციფრებით 456?

8. კლასში 32 მოსწავლეა, მათგან 6 მოსწავლე პირველ მერხზე უნდა დავსვათ. რამდენი სხვადასხვა შემთხვევაა შესაძლებელი, თუ სახეში მივიღებთ მხოლოდ მოწაფეთა გვარებს და არა მათ თანმიმდევრობას ჯდომის დროს?

9. გამოთვალეთ: ა) $\frac{6!-4!}{3!}$; ბ) $\frac{P_6 - P_5}{5!}$; გ) $\frac{A_8^5 - A_8^4}{A_8^3}$;

10. ამოხსენით განტოლება $C_x^2 = 153$;

§3. ალბათობის სტატისტიკური, კლასიკური და გეომეტრიული განსაზღვრა

ერთსა და იმავე პირობებში ჩატარებულ m ცდაში რაიმე A ხდომილობის მოხდენით ma რიცხვის ფარდობას ცდათა რიცხვთან, ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე ეწოდება, აღინიშნება Wm(A) სიმბოლოთი, ე.ი.

$$W_m(A) = \frac{m_A}{m};$$

როდესაც ცდათა m რიცხვი საკმაოდ დიდია, A ხდომილობის Wm(A) ფარდობით სიხშირეს ღებულობენ A ხდომილობის ალბათობად, მას აღნიშნავენ P(A) სიმბოლოთი, ე.ი.

$$P(A)\approx \frac{m_A}{m} \tag{3.1}$$

(3.1) არის ალბათობის სტატისტიკური განსაზღვრა.

თუ **Ω** ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შედგება თანაბრად შესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა სასრული რაოდენობისაგან, მაშინ A ხდომილობის ($A\subset\Omega$) P(A) ალბათობა განისაზღვრება ფორმულით

$$P(A)= \frac{m_A}{n} \tag{3.2}$$

სადაც m_A არის A ხდომილობის ხელისშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რიცხვი, ხოლო n - ცდის ყველა შესაძლო ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი.

(3.2) არის ალბათობის კლასიკური განსაზღვრა.

ვთქვათ, რაიმე **Ω** არეში შემთხვევით ვსვავთ წერტილს. ალბათობა იმისა, რომ წერტილი მოხვდება $A\subset\Omega$ არეში, გამოითვლება ფორმულით

$$P(A)= \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \tag{3.3.}$$

სადაც m(A) და m(**Ω**) აღნიშნავენ შესაბამისად A და **Ω** არეების ზომებს.

(3.3) არის ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრა.

ერთ, ორ და სამგანზომილებიან შემთხვევებში ზომის ქვეშ შესაბამისად გულისხმობენ სიგრძეს, ფართობს და მოცულობას.

§4. პირობითი ალბათობის ფორმულა. ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა

A ხდომილობის პირობითი ალბათობა იმ პირობით, რომ B ხდომილობას ადგილი უკვე ჰქონდა, აღინიშნება P(A|B) ან $P\cap B(A)$ სიმბოლოთი და ეწოდება გამოსახულებას:

$$P(A|B)= \frac{P(A\cdot B)}{P(B)}, \text{ თუ } P(B)\neq 0 \tag{4.1}$$

ანალოგიურად განისაზღვრება P(B|A), როცა $P(A)\neq 0$

ცხადია, A და B ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოსათვლელ ფორმულას ექნება სახე

P(A·B) =P(A)·P(B|A)=P(B) P(A|B) (4.2)

B ხდომილობა არაა დამოკიდებული A ხდომილობაზე, თუ P(B/B)=P(B) რაც იმას ნიშნავს, რომ A ხდომილობის მოხდენა ან არმოხდენა გავლენას არ ახდენს ხდომილობის ალბათობაზე. ამ შემთხვევაში არც A ხდომილობაა დამოკიდებული B-ზე და ვწერთ

P(A·B)=P(A) P(B) (4.3)

თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ დამოკიდებულია აგრეთვე ხდომილობებიც: Ā და B, A და $\overline{B}$, Ā და $\overline{B}$.

A_1, A_2…An ხდომილობებს ეწოდებათ ერთობლივად დამოუკიდებლები, თუ ნებისმიერი i≤I,<…<i_k≤n და k=2...n ნატურალური რიცხვებისათვის სრულდება ტოლობა

$P(Ai_1…Ai_k)=P(Ai_1)…P(Ai_k)$ (4.4)

თუ ეს ფორმულა მართებულია მხოლოდ k=2 მნიშვნელობისათვის, მაშინ A_1, A_2,...A_n ხდომილობებს წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი ხდომილობები ეწოდებათ.

(4.4)-დან ვღებულობთ შედეგებს:

თუ A_1, A_2,...A_n ერთობლივ დამოუკიდებელი ხდომილებებია, მაშინ ერთობლივ დამოუკიდებელი იქნება აგრეთვე მოცემული სისტემიდან ზოგიერთი ან ყველა ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობით შეცვლით მიღებული სისტემაც.

A_1, A_2,...A_n ხდომილობების ერთობლივ დამოუკიდებლობიდან გამომდინარეობს მისი ნებისმიერი ქვესისტემის ერთობლივ დამოუკიდებლობა.

თუ A_1, A_2,...A_n ერთობლივ დამოუკიდებელი ხდომილებებია, მაშინ

$$P(\prod_{i-1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (4.5)$$

§5. ხდომილობათა ჯამის ალბათობა. საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობა

ნებისმიერი ორი A და B ხდომილობის ჯამის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$ (5.1)

თუ A და B ხდომილობები უთავსებადია, მაშინ $P(A\cdot B)=P(\varnothing)=0$ და $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

ერთობლივ დამოუკიდებელი A_1, A_2,...A_n ხდომილობებისათვის მართებული შემდეგი ფორმულა:

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}...\overline{A_n}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) \tag{5.2}$$

თუ A_1, A_2,...A_n წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია, მაშინ

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{5.3}$$

საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$P(\bar{A})=1-P(A)$ (5.4)

§6. სრული ალბათობისა და ბაიესის ფორმულები

თუ H_1, H_2,... H_n ხდომილობები ქმნიან ხდომილობათა სრულ ჯგუფს და $P(H_i)\neq 0$, $i=1,\ldots,n$, მაშინ ნებისმიერი A ხდომილობისათვის, რომელსაც ცდის შედეგად შეიძლება ადგილი ექნეს რომელიმე H_i, $i=1\ldots n$, ხდომილობასთან ერთად, სრულდება ტოლობები:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i) \tag{6.1}$$

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}, \ k=1,\ldots,n \tag{6.2}$$

(6.1) არის სრული ალბათობის ფორმულა, (6.2) ბაიესის ფორმულა.

§7. დამოუკიდებელ ცდათა სქემა

ვთქვათ, ცდას ვატარებთ ერთსა და იმავე პირობებში n-ჯერ და თითოეულ ცდას გააჩნია მხოლოდ ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო შედეგი: „წარმატება“ (რაიმე ხდომილობის მოხდენა), „მარცხი“ (A ხდომილობის არმოხდენა). შემოვიღოთ ხდომილობები A_i={i-ურ ცდაში ადგილი აქვს

„წარმატებას“}, მაშინ $\bar{A}\cap$={i-ურ ცდაში ადგილი აქვს „მარცხს“}, i=1,2…n, რომელთა ალბათობები აღვნიშნოთ შესაბამისად P(Ai) და P(Āi)-ით.

თუ ყოველ ცდაში „წარმატების“ ალბათობა არის მუდმივი არაუარყოფითი სიდიდე $P(A_i)=p$, i=1,…n და A_1, A_2,...A_n ხდომილობები ერთობლივად დამოუკიდებლები არიან, მაშინ ვამბობთ, რომ გვაქვს დამოუკიდებელ ცდათა ბერნულის სქემა.

ცხადია:

P(Āi)=1-P(Ai)=1-P=q, i=1,…n. და p+q=1

ალბათობა იმისა, რომ n დამოუკიდებელ ცდაში „წარმატებას“ ადგილი ექნება k-ჯერ და არ ექნება ადგილი (n-k)-ჯერ, აღინიშნება Pn(K)-თი და გამოითვლება ბერნულის ფორმულით

$$P_n(K) = C_n^k P^k q^{n-k} = \frac{n!}{K!(n-K)!} p^K q^{n-k}, \text{ k=0,1,…,n} \qquad (7.1)$$

K-ს იმ Ko მნიშვნელობას, რომლისთვისაც (7.1) ფორმულით გამოთვლილი Pn(K) ალბათობა უდიდესია, ეწოდება A ხდომილობის მოხდენის („წარმატების“), უალბათესი რიცხვი.

თუ (n+1)p წილადია, მაშინ Ko გამოითვლება ფორმულით

Ko=[(n+1)P], (7.2)

სადაც [x] აღნიშნავს რიცხვის მთელ ნაწილს. თუ სიდიდე (n+1)P მთელია, მაშინ Ko ღებულობს ორ მნიშვნელობას:

Ko=(n+1)P-1 Ko=(n+1)P (7.3)

როდესაც n დიდი რიცხვია (7.1) ფორმულით სარგებლობა შრომატევადი ხდება, ამიტომ ამ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია ვისარგებლოთ შემდეგი მიახლოებითი ფორმულებით:

$$P_n(K) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \qquad (7.4)$$

სადაც

$$P_n(K) \approx \frac{\lambda^k}{n!} e^{-\lambda} \qquad (7.5)$$

სადაც $P = Pn \xrightarrow[n=\infty]{} 0$ და λ=np. φ(x) ფუნქციისა და (7.5) ფორმულით გამოსახული Pn(K)-ს მნიშვნელობები მოცემულია შესაბამისად I და III ცხრილებში. ამასთან (7.4) ფორმულით სარგებლობა მიზანშეწონილია იმ

შემთხვევაში, თუ npq>9; წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ np≤10, უკეთეს მიახლოებას იძლევა (7.5) ფორმულა.

(7.4) არის მუავრ-ლაპრასის ლოკალური ზღვრული ფორმულა, ხოლო (7.5)-პუასონის ფორმულა.

ალბათობა იმისა, რომ n ჩატარებულ ცდაში „წარმატებათა“ (სასურველი ხდომილობის მოსვლავა) K რიცხვი მოთავსებული იქნება [K1, K2] შუალედში, გამოითვლება ფორმულით

$$P(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k P^k q^{n-k} \tag{7.6}$$

სადაც K_1 და K_2 დადებითი მთელი რიცხვებია.

თუ n დიდი რიცხვია, მაშინ ამ ალბათობის გამოსათვლელად შეიძლება გამოყენებულ იქნას შემდეგი მიახლოებითი ფორმულები:

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi_0\left(\frac{K_2 - nP}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{K_1 - nP}{\sqrt{npq}}\right) \tag{7.7}$$

სადაც

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ამასთან, npq>9, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ np≤10

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\lambda^k}{K!} e^{-\lambda} \tag{7.8}$$

(Φo(x) ფუნქციისა და (7.8) ფორმულით განსაზღვრული $\sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\lambda^k}{K!} e^{-\lambda}$ გამოსახულების მნიშვნელობები მოცემულია შესაბამისად II და IV ცხრილებში.

(7.7) არის მუავრ-ლაპლასის ინტერგალური ზღვრული ფორმულა, ხოლო (7.6) და (7.8) მიიღებიან შესაბამისად (7.1) და (7.5) ფორმულებიდან.

§8. შემთხვევითი სიდიდე. შემთხვევითი სიდიდის ალბათობების განაწილების კანონი, განაწილების ფუნქცია და სიმკვრივე. მაგალითები.

Ω ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეზე განსაზღვრულ ξ=ξ(ω) ფუნქციას ეწოდება შემთხვევითი სიდიდე, თუ ნებისმიერი x რიცხვისათვის სიმრავლე A={ω:ξ(ω)<x}={ξ<x} წარმოადგენს შემთხვევით ხდომილობას.

თუ $A=\{\xi<x\}$ არის შემთხვევითი ხდომილობა, მაშინ შემთხვევით ხდომილობებს წარმოადგენენ აგრეთვე სიმრავლეები:

$\{\xi\leq x\}$, $\{\xi>x\}$, $\{\xi\geq x\}$, $\{a\leq\xi\leq x\}$, $\{a\leq\xi<b\}$,

$\{a<\xi\leq x\}$, $\{a<\xi<x\}$,

სადაც a და b ($a<b$) ნამდვილი რიცხვებია.

ელემენტარულ ხდომილობათა **Ω** სივრცეზე განსაზღვრულ ორ ξ და η შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ ნებისმიერი x და y რიცხვებისათვის ხდომილობები $A=\{\xi<x\}$ და $B=\{\eta<y\}$ დამოუკიდებელია.

ξ1...ξn შემთხვევით სიდიდეებს ერთობლივ დამოუკიდებელი ეწოდებათ, თუ ნებისმიერი a_1, a_2… ან რიცხვებისათვის ხდომილობები $A_1=\{\xi<a_1\}$… $An=\{\xi<an\}$ ერთობლივ დამოუკიდებელია.

$\xi=\xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ეწოდება

$F\xi(x)=P\{\omega:\xi(\omega)\leq x\}$, $(-\infty<x<\infty)$

ფუნქციას.

თუ **Ω** ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე დისკრეტულია, მაშინ სიმრავლე $\{\omega:\xi(\omega)\leq x\}$ ყოველთვის წარმოადგენს შემთხვევით ხდომილობას.

დისკრეტულ ელემენტარულ ხდომილობათა **Ω** სივრცეზე განსაზღვრულ $\xi=\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$, შემთხვევით სიდიდეს დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება.

დისკრეტული ξ(ω) შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრული ან თვლადი სიმრავლეა $x=\{x_1, x_2…xn\}$ an $x=\{x_1, x_2…\}$ · x_1, x_2… xn... რიცხვებს დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები ეწოდებათ.

ალბათობა იმისა, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს X_k მნიშვნელობას, ტოლია:

$$P\xi(xk)=P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}=P\{\xi=x_k\}=P_k,\ k=1,2… \tag{8.1}$$

ცხადია $\sum_{i=1}^{\infty} P_k = 1$

თუ მოცემულია ξ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო Xk, k=1,2…, მნიშვნელობებისა და მათი შესაბამისი Pk ალბათობების ერთობლიობა, ვიტყვით, რომ მოცემული გვაქვს ξ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილება. ξ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილება მოიცემა შემდეგი ცხრილის სახით:

$$\frac{\xi|x_1\|x_2|...|x_n|...}{P|P_1\|P_2|...|P_n|} \quad \sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$$

სადაც პირველ სტრიქონში ჩაწერილია ξ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები, ხოლო მეორე სტრიქონში ამ მნიშვნელობების შესაბამისი ალბათობები.

დისკრეტული განაწილების მაგალითები

1. ბერნულის განაწილება (პარამეტრით P).

$$\frac{\xi|0\|1|}{P_\xi|P\|1-P|}, \ 0<P<1$$

2. ბინომიალური განაწილება (პარამეტრებით (n, k, p)

$$\frac{\xi|0\|1\|2|....|n|}{P_\xi|P_0\|P_1\|P_2|}, \ P_n = C_n^k P^k q^{n-k}, \ 0<P<1, \ k=0,1,...,n.$$

3. პუასონის განაწილება (პარამეტრით λ)

$$\frac{\xi|0\|1\|2|....|n|}{P_\xi|P_0\|P_1\|P_2|} \ P_k = \frac{\lambda^k}{K!}e^{-2}, \lambda > 0, K = 0,1,...$$

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება უწყვეტი, თუ მისი განაწილების ფუნქცია შეიძლება მოცემულ იქნას შემდეგი სახით:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx, \tag{8.2}$$

სადაც fξ(x) არაუარყოფითი ფუნქციაა.

ინტეგრალქვეშა fξ(x) ფუნქციას ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე $\int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx = 1$ (8.2) ტოლობიდან გამომდინარეობს. რომ

$$f_\xi(x) = F_\xi^1(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}$$

უწყვეტი განაწილების მაგალითები

1. თანაბარი განაწილება [a,b] ინტერვალზე

$$f_\xi(x) = \left\{\frac{1}{b-a}, \text{თუ } x \in [a,b],\right.$$

$0, \text{თუ } x \le 0, (\lambda > 0)$

2. მაჩვენებლიანი განაწილება (a,σ პარამეტრით)

$$f_\xi(x) = \left\{\lambda e^{-\lambda x}, \text{თუ } x > 0\right.$$

$0, \text{თუ } x \le 0, (\lambda > 0)$

3. ნორმალური განაწილება (პარამეტრებით (a, 1)

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},-\infty<a<+\infty$$

ნორმალურ განაწილებას პარამეტრებით (0; 1) სტანდარტული ნორმალური განაწილება ეწოდება და მისი განაწილების ფუნქციას აქვს სახე

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{t^2}{2}}dt.$$

$\Phi(x)$ ფუნქციასა და ლაპლასის $\Phi_0(x)$ (იხ.7.7) ფუნქციას შორის არის შემდეგი კავშირი:

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}+\Phi_0(x)$$

ალბათობა იმისა, ξ რომ შემთხვევითისიდიდე მიიღება მნიშვნელობებს [a,b] ინტერვალიდან, გამოითვლება ერთ-ერთი შემდეგი ფორმულით:

$$P\{a\le\xi\le b\}=F_\xi(b)-F_\xi(a) \tag{8.3}$$

$$P\{a\le\xi\le b\}=\int_a^b f_\xi(x)dx \tag{8.4}$$

განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $0\le F_\xi(x)\le 1$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}F_\xi(x)=1 \quad \lim\limits_{x\to+\infty}F_\xi(x)=0$
3. განაწილების ფუნქცია არაკლებადი ფუნქციაა
4. განაწილების ფუნქცია მარცხნიდან უწყვეტია.

§9. ორი შემთხვევითი სიდიდის ერთობლივი განაწილება

განვიხილოთ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე (ვექტორი) (ξ, η), სადაც ξ და η დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთა განაწილებებს აქვს სახე:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c\|}\xi & x_1 & x_2 & \ldots & x_m\\ \hline P_\zeta & P_1 & P_2 & \ldots & P_m\end{array}\quad Pi=P_\xi(x_i)=P\{\xi=x_i\},\ i=1,\ldots,n \tag{9.1}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c\|}\eta & y_1 & y_2 & \ldots & y_m\\ \hline P_\eta & q_1 & q_2 & \ldots & q_m\end{array}\quad q_j=P_\eta(y_i)=P\{\eta=y_j\},\ j=1,\ldots,n \tag{9.2}$$

(ξ,η) შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე წარმოადგენს (xi, yj) i=1,…m, j=1…n, ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა

ერთობლიობას, რომელთა შესაბამისი ალბათობები განიმარტება შემდეგნაირად:

$P_{ij}=P_{\xi\eta}(x_i,y_j)=P(\{\xi(\omega)=x_i\}\cap\{\eta(\omega)=y_i\})=P\{\xi=x_i,\ \eta=y_j\}$

$i=1,...,m;\ j=1,....,n;$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P_{ij}=1, \tag{9.3}$$

ორგანზომილებიანი (ξ, η) დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის (ვექტორის) განაწილების კანონი შეიძლება მოცემულ იქნას შემდეგი ცხრილის საშუალებით:

η / ξ	Y_1	Y_2	…	Y_n
x_1	P_{11}	P_{12}	…	P_{1n}
x_2	P_{21}	P_{22}	…	P_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	P_{m1}	P_{m2}	…	P_{mn}

(9.4)

სადაც Pij ალბათობები აკმაყოფილებენ (9.3) ტოლობას.

თუ ვიცით შემთხვევითი (ξ, η) დისკრეტული ვექტორის (9.4) განაწილების კანონი, მაშინ შეიძლება მისი საშუალებით აღვადგინოთ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების (9.1) და (9.2) განაწილების კანონები შემდეგი ფორმულების გამოყენებით:

$$P=P_{\xi}(x_i)=\sum_{j=1}^{n}P_{\xi\eta}(x_i,y_j),\ i=1,....,m \tag{9.5}$$

$$q_j=P_{\eta}(y_j)=\sum_{i=1}^{m}P_{\xi\eta}(x_i,y_j),\ j=1,....,n \tag{9.6}$$

ორგანზომილებიანი (ξ, η) შემთხვევითი ვექტორის, სადაც ξ და η უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებია, განაწილების ფუნქცია (ანუ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების ფუნქცია) $F_{\xi\eta}(x,y)$ ნებისმიერი x და y რიცხვებისათვის განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$F_{\xi\eta}(x,y)=P(\{\xi(\omega)<x\}\cap\{\eta(\omega)<y\})=P\{\xi<x,\eta<y\} \tag{9.7}$$

სარგებლობენ შემდეგი განმარტებითაც:

თუ არსებობს ისეთი არაუარყოფითი $f_{\xi\eta}(x,y)$ ფუნქცია, რომ $F_{\xi\eta}(x,y)$ წარმოადგენს $F_{\xi\eta}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f_{\xi\eta}(u,v)dudv$ სახით მაშინ ორგანზომილებიან (ξ, η)

შემთხვევით ვექტორს უწოდებენ უწყვეტს, ხოლო $f_{\xi\eta}(x,y)$ მისი განაწილების სიმკვრივეს

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1 \tag{9.8}$$

უწყვეტი ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების $F_\xi(x)$ და $F_\eta(y)$ სიმკვრივეები Fξη(x,y)-ის საშუალებით გამოითვლება შემდეგი სახით:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dy, f_\eta(y)\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dx \tag{9.9}$$

ξ და η სიდიდეებს ეწოდებათ დამოუკიდებელნი, თუ x და y ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის მათი ერთობლივი განაწილების ფუნქცია Fξη(x,y) წარმოიდგინება როგორც თითოეული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციათა ნამრავლი

$F_{\xi\eta}(x,y)= F_\xi(x)\cdot F_\eta(y)$

თუ (ξ, η) დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი ვექტორია, მაშინ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობის პირობას წარმოადგენს ტოლობა

$P_{ij}=P_iq_j$, i=1,2,…, m, j=1,2,…, n (9.10)

ხოლო უწყვეტი ტიპის ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებისათვის

$f_{\xi\eta}(x,y)= f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$ (9.11)

§10. შემთხვევითი სიდიდის ფუნქცია

ვთქვათ, ξ=ξ(ω), ω∊**Ω** არის რაიმე შემთხვევითი სიდიდე, ხოლო y(x) - ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ისეთი ფუნქცია, რომ η=y(ξ(ω) აგრეთვე შემთხვევითი სიდიდეა. განვიხილოთ შემთხვევები:

1) არის (9.1) განაწილების კანონით განსაზღვრული დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე. თუ η=y(ξ) შემთხვევითი ფუნქციის შესაძლო მნიშვნელობები $y_1=y(x_1)…y_m=y(x_m)$ ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, მაშინ ხდომილობები $\{\omega:\xi(\omega=x_i\}$ და $\{\omega:\eta(\omega)=y_i=y(x_i)\}$ ტოლია და $Pi=P\xi(x_i)=P\{\xi=x_i\}=P\{\eta=y_i\}=P\eta(y_i)$, i=1…m

ამიტომ η-ს განაწილებას აქვს სახე

$$\frac{\eta}{P_\eta}\left|\frac{y_1}{P_1}\right|\frac{\dots}{\dots}\left|\frac{y_n}{P_n}\right| \tag{10.1}$$

თუ $\eta=\varphi(\xi)$ შემთხვევითი ფუნქციის $y_1=y(x_1),\dots y_n=y(x_n)$ მნიშვნელობებს შორის არის ერთმანეთის ტოლი მნიშვნელობები, მაშინ ამ მნიშვნელობებს η-ს განაწილების კანონში წერენ ერთჯერ და შესაბამის ალბათობად იღებენ ტოლ მნიშვნელობათა შესაბამისი ალბათობის ჯამს.

2) ვთქვათ, ორი $\xi_1=\xi_1(\omega)$ და $\xi_2=\xi_2(\omega)$, $\omega\epsilon\boldsymbol{\Omega}$, დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია შესაბამისად

$$\frac{\xi_1}{P_\zeta}\left|\frac{x_1}{P_1}\right|\frac{\dots}{\dots}\left|\frac{x_n}{P_n}\right|,\ P_i=P_{\xi_1}(x_i)=P\{\xi_1=x_i\},\ i=1,\dots,m$$

და

$$\frac{\xi_2\,|y_1|\dots|y_n|}{P_\xi\,|q_1|\dots|q_n|},\ q_j=P_{\xi_2}(y_j)=P\{\xi_2=y_j\},\ j=1,\dots,n$$

მაშინ ξ_1 და ξ_2 შემთხვევით სიდიდეთა $\xi=\xi(\omega)=y(\xi_1,\xi_2)$ ფუნქციის განაწილების კანონს ექნება სახე

$$\frac{\eta}{P_\eta}\left|\frac{z_{ij}}{P_{ij}}\right|=\frac{\varphi(x_i,y_j)}{P(\xi_1=x_i,\xi_2=y_j)}\ ,\ i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n \tag{10.2}$$

დისკრეტული ξ_1 და ξ_2 შემთხვევით სიდიდეთა $\eta_1=y_1(\xi_1,\xi_2)=\xi_1+\xi_2$ ჯამის განაწილების კანონს ექნება სახე:

$$\frac{\eta_1}{P_{\eta_1}}\left|\frac{x_i+y_j}{P_{ij}}\right|,\ P_{ij}=P(\xi_1=x_i,\ \xi_2=y_j) \tag{10.3}$$

დისკრეტული ξ_1 და ξ_2 შემთხვევითი სიდიდეა $\eta_2=y_2(\xi_1\cdot\xi_2)=\xi_1\cdot\xi_2$ ნამრავლის განაწილების კანონს ექნება სახე

$$\frac{\eta_2\,|x_i\cdot y_j}{P_{\eta_1}|P_{ij}},\ ,\ i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n \tag{10.4}$$

ξ_1 და ξ_2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის (10.3) და (10.4) განაწილებებში (9.10) ფორმულის საფუძველზე სათანადოდ შეიცვლება მხოლოდ Pij ალბათობები P_i და q_j-თი.

ცხადია,

$$\frac{K\xi_1}{P_{\xi_1}}\left|\frac{Kx_1}{P_1}\right|\frac{\dots}{\dots}\left|\frac{Kx_m}{P_m}\right. \qquad \frac{\xi^k{}_1}{P_{\xi_1}}\left|\frac{x^k{}_1}{P_1}\right|\frac{\dots}{\dots}\left|\frac{x^k{}_m}{P_m}\right. \tag{10.5}$$

3) ξ უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეა $f\xi(x)$ განაწილების სიმკვრივით.

თუ y=f(x) მონოტონური, უწყვეტი და დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ η=f(ξ) შემთხვევითი ფუნქციის განაწილების უცნობი სიმკვრივე fη(y) მოიძებნება შემდეგი ფორმულით:

$$f_\eta(y) = f_\xi(x)\left|\frac{d\varphi(y)}{dy}\right| = f_\xi(\varphi(y))\left|\frac{d\varphi(y)}{dy}\right| \tag{10.6}$$

სადაც x=y(y) არის y=f(x)-ის შებრუნებული ფუნქცია.

თუ y=f(x) არაა მონოტონური, ანუ შებრუნებული x=y(y) ფუნქცია ცალსახა არაა, რაც ნიშნავს, რომ ერთსა და იმავე y-ს შეესაბამება x-ის რამოდენიმე მნიშვნელობა $x_1=y_1(y)\ldots Xn=yn(y)$, მაშინ ვსარგებლობთ ფორმულით

$$f_\eta(y) = \sum_{i=1}^{n} f_\xi(\varphi i(y)/\varphi'_i(y) \tag{10.7}$$

§11. შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია

ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი აღინიშნება M(ξ) სიმბოლოთი.

დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება რიცხვს

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{n} x_k P_k \tag{11.1}$$

თუ შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს თვლადი რაოდენობის მნიშვნელობებს, მაშინ

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k \tag{11.2}$$

და მოითხოვება (11.2) მწკრივის აბსოლუტური კრებადობა.

უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება რიცხვს

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx \tag{11.3}$$

სადაც fξ(x) არის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე, ამასთან მოითხოვება, რომ (11.3) ინტერვალი იყოს აბსოლუტურად კრებადი.

თუ გავითვალისწინებთ §10-ს, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$M(\varphi(\xi)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)P_\xi(x_i)$$

$$M[\varphi(\xi_1,\xi_2)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi(x_i, y_i) P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2),$$

აქ ξ, ξ1, ξ2 დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებია. ანალოგიურად:

$$M(\varphi(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_\xi(x)dx,$$

$$M(\varphi(\xi_1,\xi_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y) f_{\xi_1\xi_2}(x,y)dxdy,$$

სადაც ξ, ξ1, ξ2 უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო fξ1,ξ2(x,y)-ξ1,ξ2 შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე.

ξ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია D(ξ) ეწოდება (ξ-M(ξ)2 შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს

$D(\xi)=M(\xi-M(\xi))^2$

დისპერსია შეიძლება გამოთვლილი იქნას შემდეგი ფორმულით:

$D(\xi)=M(\xi^2)-M(\xi))^2$ (11.4)

ξ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის დისპერსია გამოითვლება ფორმულით

$$D(\xi) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(\xi))^2 P_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 P_k - (\sum_{k=1}^{n} x_k P_k)^2 \quad (11.5)$$

ხოლო უწყვეტისათვის

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(\xi))^2 f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx - (\int_{\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx)^2 \quad (11.6)$$

თუ მოცემულია (ξ, η) შემთხვევითი ვექტორის ერთობლივი განაწილება, მაშინ ξ და η შემთხვევით სიდიდეების მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

ა) თუ დისკრეტული (ξ, η) ვექტორის განაწილება მოცემულია (9.4) სახით, მაშინ

$$m_\xi = M(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i P_{ij}, m_\eta = M(\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j P_{ij} \quad (11.7)$$

$$\sigma_\xi^2 = D(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - m_\xi)^2 P_{ij}, \sigma_\eta^2 = D(\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (y_j - m_\eta)^2 P_{ij}$$

ბ) თუ უწყვეტ (ξ, η) შემთხვევით ვექტორს გააჩნია განაწილების fξ,η(x,y) სიმკვრივე, მაშინ

$$m_\xi = M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi\eta}(x,y)dxdy, \quad \sigma_\eta^2 = D(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi\eta}(x,y)dy, \quad (11.8)$$

$$\sigma_\xi^2 = D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_\xi)^2 f_{\xi\eta}(x,y)dxdy, \qquad \sigma_\eta^2 = D(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-m_\eta)^2 f_{\xi\eta}(x,y)dxdy,$$

მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებები:

1. თუ c=const , მაშინ M(c)=c;
2. თუ c=const, მაშინ M(cξ)=cM(ξ);
3. $M(\xi_1+\xi_2)=M(\xi_1)+M(\xi_2)$;
4. თუ c=const, მაშინ D(c)=0;
5. თუ c=const, მაშინ $D(c\xi)=c^2(\xi)$
6. თუ ξ_1 და ξ_2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.

მაშინ

$M(\xi_1\,\xi_2)=M(\xi_1)\cdot M(\xi_2)$;

§12. კოვარიაცია და კორელაციის კოეფიციენტი

განვიხილოთ ორი ξ=ξ(ω), η=η(ω), ω∈Ω შემთხვევითი სიდიდე M[(ξ-M(ξ)(η-M(η)] გამოსახულებას ეწოდება ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების კოვარიაცია და აღინიშნება cov(ξ,η) სიმბოლოთი.

cov(ξ,η)=M[(ξ-M(ξ) Ω-M(η)]=M(ξ,η)-M(ξ)M(η)

უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებისათვის კოვარიაციის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს სახე:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(\xi))(y-M(\eta))f_{\xi\eta}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_{\xi\eta}(x,y)dxdy + M(\xi)\cdot M(\eta) \tag{12.1}$$

ხოლო დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებისათვის

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_\xi)(y_j-m_\eta)p_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j P_{ij} - m_\xi m_\eta \tag{12.2}$$

სიდიდეს $r_{\xi\eta} = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}}$ ეწოდება ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების კორელაციის კოეფიციენტი.

კორელაციის კოეფიციენტი გამოხატავს ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების ხარისხს. კერძოდ, რაც უფრო დიდია კორელაციის კოეფიციენტის მოდული, მით უფრო დიდია დამოკიდებულება ξ და η-ს შორის. თუ კორელაციის კოეფიციენტი უდრის ნულს, მაშინ ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს არაკორელირებულები ეწოდება.

კორელაციის კოეფიციენტის თვისებები

1. კორელაციის კოეფიციენტის მოდული არ აღემატება ერთს, $|r_{\xi\eta}|\leq 1$.
2. თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $r_{\xi\eta}=0$.
3. თუ ξ და η-ს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება, ე.ი. $\xi=a\eta+b$, $a,b=\mathrm{const}$, მაშინ $|r_{\xi\eta}|=1$.
4. $r_{\xi\eta}=.\ r_{\eta\xi}$

§13. დიდ რიცხვთა კანონი. ჩებიშევის უტოლობა. ჩებიშევის თეორემა, ბერნულის თეორემა

ჩებიშევის I უტოლობა: თუ ξ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია სასრული მათემატიკური ლოდინი $M(\xi)$, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის, მართებულია უტოლობა

$$P(|\xi|\geq\varepsilon)\leq\frac{M|\xi|}{\varepsilon} \tag{13.1}$$

ჩებიშევის II უტოლობა: თუ ξ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია სასრული მათემატიკური ლოდინი $M(\xi)$ და დისპერსია $D(\xi)$, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მართებულია უტოლობა

$$P(|\xi-M(\xi)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D|\xi|}{\varepsilon^2} \tag{13.2}$$

(13.1) და (13.2) უტოლობები საშუალებას იძლევიან შევაფასოთ შემთხვევითი სიდიდის გაბნევა.

ჩებიშევის უტოლობების გამოყენებით მტკიცდება თეორემები, რომლებიც ატარებენ დიდ რიცხვთა კანონის სახელს.

დიდ რიცხვთა კანონის ქვეშ გულისხმობენ იმ თეორემებს, რომელთაც აერთიანებთ ცდათა დიდი რიცხვის დროს საშუალო შედეგთა მდგრადობის იდეა.

ჩებიშევის თეორემა. ვთქვათ $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ შემთხვევითი სიდიდეები წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელნი არიან და $D \le C$, $i=1,2\ldots$ სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება რაგინდ მცირე $\delta>0$ რიცხვი, ისეთი, რომ საკმაოდ დიდი n რიცხვისათვის შესრულდება პირობა

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i)\right| < \varepsilon\right) > 1-\delta \tag{13.3}$$

ამ უტოლობაში შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $0<\delta<\frac{D(x)}{n\varepsilon^2}$, სადაც D(x) X შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიაა.

ბერნულის თეორემა. ვთქვათ, m არის „წარმატებათა“ რიცხვით, n დამოუკიდებელ ცდაში, ხოლო ყოველ ცდაში „წარმატების“ ალბათობაა P, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ საკმაოდ დიდი n-ებისათვის

$$P\left(\left|\frac{m}{n}P\right| < \varepsilon\right) > 1-\delta \tag{13.4}$$

(ამასთან შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $0<\delta\le\frac{Pq}{n\varepsilon^2}$

§14. ცენტრალური ზღვარითი თეორემა ერთნაირად განაწილებულ შესაკრებთა ჯამის შესახებ

ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n \ldots$ დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, სასრული მათემატიკური ლოდინით $M(\xi i)=m$ და დისპერსიით $D(\xi i)=\delta^2>0$ მაშინ, როცა $n\to\infty$, ნორმირებული $\eta_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m)}{\sigma\sqrt{n}}$ ჯამის განაწილების ფუნქცია მიისწრაფვის ნორმალური განაწილების ფუნქციისაკენ პარამეტრებით (0; 1), ე.ი. ნებისმიერი x-სათვის

$$\lim_{n\to\infty} P(\eta_n<x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{14.1}$$

საკმაოდ დიდი n-ებისათვის მართებულია შემდეგი მიახლოებითი ტოლობა:

$$P\{x_1<\eta_n<x_2\}\approx\Phi_0(x_2)-\Phi_0(x_1) \tag{14.2}$$

Φo უნქციის მნიშვნელობები გამოითვლება II ცხრილის საშუალებით (იხ. დამატება). (14.2) ფორმულით შეიძლება გამოვთვალოთ ηn შემთხვევითი სიდიდის $]x_1,x_2[$ ინტერვალში ჩავარდნის ალბათობა.

თავი IV. დასკვნითი სტატისტიკის ელემენტები. თეორიული მასალა

§1. შერჩევითი მეთოდი. პოლიგონი. ჰისტოგრამა

შერჩევითი მეთოდი არის ისეთი სტატისტიკური მეთოდი, რომელიც საშუალებას იძლევა დავადგინოთ რაიმე ობიექტთა ერთობლიობის ზოგადი თვისებები ამ ობიექტთა მხოლოდ რაღაც ნაწილის (რომელსაც შერჩევას უწოდებენ) თვისებების შესწავლის საფუძველზე.

შერჩევაზე წარმოდგენას იძლევა შემდეგი სქემა: ვთქვათ, ყუთში მოთავსებულია ფირფიტები ნომრებით $X_1, X_2 \ldots X_N$ და ალალბედზე ვიღებთ n ფირფიტას, რომელთა ნომრებიც აღმოჩნდა $x_1, x_2 \ldots x_n$.

$$x_1, x_2 \ldots x_n \tag{15.1}$$

წარმოადგენს n მოცულობის შერჩევას $X_1, X_2 \ldots X_n$ გენერალური ერთობლიობიდან.

(15.1)-ს ეწოდება **შერჩევა დაბრუნებით,** თუ ყოველ ამოღებულ ფირფიტას ყუთში ვაბრუნებთ შემდეგი ფირფიტის ამოღებამდე, წინააღმდეგ შემთხვევაში (ე.ი. თუ ამოღებულ ფირფიტას ყუთში არ ვაბრუნებთ) კი შერჩევა დაბრუნების გარეშე.

ვთქვათ, (15.1) არის შერჩევა დაბრუნებით, მაშინ $X_1, X_2 \ldots X_n$ წარმოადგენენ დამოუკიდებელ, ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეებს; თითოეული მათგანის განაწილების კანონი ემთხვევა იმ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს $X_1, X_2 \ldots X_N$ ერთი და იგივე 1/N-ის ტოლი ალბათობით. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $x_1, x_2 \ldots x_n$ წარმოადგენს ξ შემთხვევით სიდიდეზე n დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგს.

თუ (15.1) შერჩევის მნიშვნელობებს დავალაგებთ ზრდის მიხედვით, მივიღებთ ე.წ. ვარიაციულ მწკრივს

$x_{(1)}, x_{(2)} \ldots x_{(n)} \qquad (x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)})$

ფუნქციას

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, \text{როცა } x \leq x_{(1)} \\ \dfrac{k}{n}, \text{როცა } x_{(k)} \leq x \leq x_{(k+1)}, k = \overline{1, n-1} \\ 1, \text{როცა } x_{(n)} < x \end{cases} \tag{15.2}$$

ეწოდება (15.1) შერჩევაზე დაფუძნებული ემპირიული განაწილების ფუნქცია.

იმ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, რომლის განაწილების ფუნქციაც არის Fn(x), გამოითვლებიან ფორმულებით:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k; \qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2; \tag{15.3}$$

x-ს ეწოდება შერჩევითი (ემპირიული) საშუალო, ხოლო S^2-ს შერჩევითი (ემპირიული) დისპერსია.

ვთქვათ, (15.1) შერჩევაში გვაქვს z განსხვავებული მნიშვნელობა ($\xi_1, \xi_2, \ldots \xi z$); ამასთან, ξ_i შერჩევაში გვხვდება n_i-ჯერ ფარდობას $i = \overline{1,n} (\sum_{i=1}^{n} n_i = n)$; ფარდობას $\frac{n_i}{n}$ ეწოდება ξ_i მნიშვნელობის ფარდობითი სიხშირე და აღინიშნება w_i სიმბოლოთი. ცხადია, $\sum_{i=1}^{r} w_i = 1.$

ცხრილს, რომელიც ამყარებს კავშირს შერჩევის ξi მნიშვნელობებსა და შესაბამის wi ფარდობით სიხშირეებს შორის, ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის სტატისტიკური განაწილება. იგი მოიცემა შემდეგი სახით:

ცხრილი 4.1.

შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობა	ξ_1	ξ_2	...	ξ_r
ფარდობითი სიხშირეები W_ξ	W_1	W_2	...	W_r

თუ ξ უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ მიზანშეწონილია მისი სტატისტიკური განაწილება. წარმოვადგინოთ შემდეგი ცხრილის სახით:

ცხრილი 4.2.

ინტერვალები	$]y_1, y_2]$	$]y_2, y_3]$	...	$]y_{e-1}, y_e]$
ინტერვალის შესაბამისი ფარდობითი სიხშირე	W_1	W_2	...	W_{e-i}

სადაც $y_1, y_2,... y_\ell$ წარმოადგენს ξ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა სიმრავლის დაყოფის წერტილებს, ხოლო Wi არის $[y_i,y_{i+1}]$ ინტერვალში ჩავარდნილ შერჩევის მნიშვნელობათა ფარდობითი სიხშირე.

თვალსაჩინოებისათვის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის სტატისტიკურ განაწილებას წარმოადგენენ ე.წ. პოლიგონის სახით, რისთვისაც საკოორდინატო სიბრტყეზე აღნიშნავენ $(\xi_1, Wi), (\xi_2, W_2)…(\xi z,Wz)$ წერტილებს და აერთებენ წრფის მონაკვეთებით, უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებისათვის კი აგებენ დიაგრამას, რომელსაც ჰისტოგრამას უწოდებენ.

ჰისტოგრამის აგებისას $yi(i=1,\ell)$ დანაყოფებს იღებენ ისე, რომ $y_i-y_{i-1}=h$ $(i=\overline{2,\ell})$ სხვაობა მუდმივი იყოს (h-ს ეწოდება ცხრილის ბიჯი) და აგებენ ფუნქციას $y=\frac{w_i}{h}$, როცა $x\in]y_{i-1},y_i[, i=\overline{2,\ell}.$

§2. უცნობი პარამეტრისათვის შერჩევაზე დაფუძნებული, წერტილოვანი შეფასებები. კლასიფიკაცია და შეფასებათა მიღების მეთოდები

ვთქვათ, ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვირივეა $f(x,\theta)$, სადაც θ უცნობი პარამეტრია. უცნობი θ პარამეტრის შეფასება ვუწოდოთ ξ შემთხვევით სიდიდეზე $\xi_1, \xi_2,...\xi n$ დაკვირვებათა ნებისმიერ $\theta^*_n= \theta_n^*(\xi_1, \xi_2,...\xi n)$ ფუნქციას.

ცხადია, ნებისმიერი θ_n^* შეფასება არ იქნება ახლოს შესაფასებელ θ პარამეტრთან.

სასურველია, რომ θ_n^* შეფასება არ იძლეოდეს სისტემატურ ცდომილებას, ე.ი. სრულდებოდეს პირობა

$$M\theta_n^*(\xi_1, \xi_2,...\xi n)= \theta$$

იმ θn* შეფასებას, რომელიც აკმაყოფილებს აღნიშნულ თვისებას, გადაუადგილებადი შეფასება ეწოდება.

თუ n-ის ზრდასთან ერთად θn* ალბათობით კრებადია θ-კენ, ე.ი.

$$P(\lim_{n\to\infty}\Theta_n^*(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=\Theta)=1$$

მაშინ θn*-ს ეწოდება θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება.

ძალდებულება ნიშნავს, რომ შერჩევის მოცულობის ზრდასთან ერთად შეფასების ხარისხი უმჯობესდება.

თუ $\bar{x}$ და S^2 წარმოადგენენ (15.3) ტოლობებით განსაზღვრულ შერჩევით საშუალოსა და შერჩევით დისპერსიას, მაშინ $\bar{x}$ და $\frac{n}{n-1}S^2$ წარმოადგენენ ξ შემთხვევითი სიდიდის, შესაბამისად, მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის გადაუადგილებლად და ძალდებულ შეფასებებს.

შეფასებათა მიღების მეთოდები

1. მომენტთა მეთოდი. ვთქვათ, ξ უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეა f(x,θ) განაწილების სიმკვრივით, სადაც θ უცნობი პარამეტრია. მაშინ M(ξ) მათემატიკური ლოდინი წარმოადგენს θ-ს ფუნქციას

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,Q)dx=\mu_1(\Theta)$$

რადგანაც შერჩევითი საშუალო x ღებულობს M(ξ)-თან ახლომდგომ მნიშვნელობას, ამიტომ θ პარამეტრის დასადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ განტოლება $\mu_1(\Theta)=\bar{x}$ ანალოგიურად გამოიყენება მომენტთა მეთოდი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეებისთვისაც.

2. მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი. ვთქვათ, ξ უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეა განაწილების სიმკვრივით f(x,θ), სადაც θ უცნობი პარამეტრია, ხოლო X_1, $X_2 \ldots X_n$ – ξ შემთხვევითი სიდიდეზე n დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგი. X_1, $X_2 \ldots X_n$ ვექტორის განაწილების სიმკვრივე განისაზღვრება ტოლობით:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta)=f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\ldots f(x_n,\theta) \qquad (16.1)$$

ამ ტოლობით განსაზღვრულ θ პარამეტრის $L(X_1,\ldots X_n,\theta)$ ფუნქციას ეწოდება დასაჯერობის ფუნქცია.

θ პარამეტრის იმ $\theta^*=\theta^*(X_1, X_2 \ldots X_n)$ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც (16.1) ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს, შერჩევის ყოველი (X_1, $X_2 \ldots X_n$)მნიშვნელობისათვის, მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება ეწოდება.

მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი ძალაში რჩება მაშინაც, როცა ξ არის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე განაწილებით

$P(\xi=\xi_i)=P_i(\theta)$. $\overline{1,n}$

ამ შემთხვევაში დასაჯერობის ფუნქციას აქვს სახე:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P_1^{n1}(\theta)P_2^{n2}(\theta)\ldots P_N^{nN}(\theta) \qquad (16.2)$$

სადაც $n_k(K=\overline{1,N})$ არის ξi მნიშვნელობის რაოდენობა (X_1, $X_2 \ldots X_n$)შერჩევაში.

§3. ნდობის ინტერვალი

განაწილების უცნობი θ პარამეტრის მნიშვნელობის დასადგენად, გარდა წერტილოვანი შეფასებებისა, გამოიყენება ე.წ. ნდობის ინტერვალები: მოიცემა არა მხოლოდ ერთი θn^* (X_1, $X_2 \ldots X_n$) რიცხვი, არამედ ინტერვალი (θn, θn), რომელსაც მოცემული P ალბათობათ ეკუთვნის θ პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა

$$P(\underline{\Theta_n} < \Theta < \overline{\Theta_n}) = P \qquad (17.1)$$

P რიცხვს (0<p<1) ეწოდება ნდობის ალბათობა: იგი ახასიათებს მიღებული შეფასების საიმედოობას. რაც უფრო ახლოა p ერთთან, მით უფრო საიმედოა შეფასება (როგორც წესი, ირჩევენ p=0,9; 0,95 ან 0,99).

$\underline{\Theta_n}$ და $\overline{\Theta_n}$ -ს ეწოდებათ ნდობის საზღვრები. ისინი წარმოადგენენ შერჩევის ფუნქციებს: $\underline{\Theta_n}=\underline{\Theta_n}$ (X_1, $X_2 \ldots X_n$), $\overline{\Theta_n}=\overline{\Theta_n}$ (X_1, $X_2 \ldots X_n$) და ამიტომ წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეებს.

იმ ($\underline{\Theta_n}, \overline{\Theta_n}$) ინტერვალს, შემთხვევითი საზღვრებით

$\underline{\Theta_n}=\underline{\Theta_n}$ (X_1, $X_2 \ldots X_n$) და $\overline{\Theta_n}=\overline{\Theta_n}$ (X_1, $X_2 \ldots X_n$), რომელიც θ-ს ყოველი დასაშვები მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებს (17.1)-ს, უცნობი θ პარამეტრის ნდობის ინტერვალი ეწოდება.

ნდობის ინტერვალის მაგალითები

1. ცნობილი 2 დისპერსიის მქონე, ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის m მათემატიკური ლოდინის ნდობის ინტერვალს აქვს სახე:

$$(\bar{x} - U_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + U_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \qquad (17.2)$$

სადაც ($\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ხოლო Up განისაზღვრება მოცემული p ნდობის ალბათობით V ცხრილის საშუალებით (იხ. დამატება).

2. უცნობი δ^2 დისპერსიის მქონე, ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის m მათემატიკური ლოდინისათვის ნდობის ინტერვალს აქვს სახე:

$$(\overline{x}-tp\frac{s}{\sqrt{n-1}},\overline{x}+tp\frac{s}{\sqrt{n-1}}) \tag{17.3}$$

სადაც $\overline{x}$ და S^2 გამოითვლება (15.3) ფორმულებით, ხოლო tp განისაზღვრება მოცემული P ნდობის ალბათობითა და შერჩევის მოცულობით VI ცხრილის საშუალებით (იხ. დამატება).

განვიხილოთ $\xi_1,\ldots\xi_k$ შემთხვევითი სიდიდეები, რომელთაგან თითოეული განაწილებულია ნორმალურად პარამეტრებით (0;1).

$X^2=\xi_1^2+\ldots+\xi_k^2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას სიმკვრივით

$$\mathrm{P}_k(x)=f_{x_k^2}(x)=\frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{Л}{2})}e^{-\frac{x}{2}},x>0 \tag{14.4}$$

უწოდებენ χ^2 განაწილებას K თავისუფლების ხარისხით (K=1,2,…n) Г (·) გამა-ფუნქციაა.

თუ K=2, მაშინ მიიღება მაჩვენებლიანი განაწილება $(\lambda=\frac{1}{2})$

3. ნორმალური განაწილების δ2 დისპერსიისათვის ნდობის ინტერვალს აქვს სახე:

$$\left(\frac{nS^2}{x_{(2)}^2},\frac{nS^2}{x_{(1)}^2}\right), \tag{17.4}$$

სადაც n შერჩევის მოცულობაა, S^2 განისაზღვრება (17.4) ფორმულით, ხოლო $x^2{}_{(1)}$ და $x^2{}_{(2)}$ შემდეგი განტოლების ფესვებია:

$$\int_0^{x_{(1)}^2}P_{(n-1)}(x)dx=\frac{1-P}{2},\int_{x_{(2)}^2}^{+\infty}P_{n-1}(x)dx=\frac{1-P}{2}, \tag{17.5}$$

სადაც ინტეგრალქვეშა $P_{n-1}(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს χ^2 განაწილების სიმკვრივეს n-1 თავისუფლების ხარისხით.

(17.5) განტოლებები, მოცემული P ნდობის ალბათობისათვის, იხსნება VII ცხრილის საშუალებით (იხ. დამატება). $X^2{}_{(1)}$-ის განსაზღვრისას საწყის

მონაცემებს წარმოადგენენ ν=n-1 და $\alpha = \frac{1-P}{2}$, ხოლო $X^2_{(2)}$-ის გამოთვლისას ν=n-1 და $\alpha = \frac{1-P}{2}$

§4. ჰიპოთეზათა შემოწმება

ვთქვათ, ξ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია უცნობ θ პარამეტრზე დამოკიდებული $f(x,\theta)$ განაწილების სიმკვრივე.

ნებისმიერ დაშვებას θ უცნობი პარამეტრის მნიშვნელობის შესახებ სტატისტიკური ჰიპოთეზა ეწოდება.

სტატისტიკური ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანა ისმება შემდეგნაირად: ვთქვათ, მოცემულია ξშემთხვევით სიდიდეზე n დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგი

$$X_1, X_2 \ldots X_n \tag{18.1}$$

და გვსურს შევამოწმოთ Ho ჰიპოთეზა $H_o: \theta=\theta_o$, სადაც θ_o რაღაც ფიქსირებული რიცხვია. ამისათვის უნდა ავაგოთ რაიმე წესი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს დავადგინოთ შეთანხმებულია თუ არა (18.1) შერჩევა Ho ჰიპოთეზასთან. ჰიპოთეზის შემოწმების წესს კრიტერიუმი ეწოდება.

როგორც წესი, კრიტერიუმი იგება კრიტიკული არის საშუალებით: $X=(X_1, X_2 \ldots X_n)$ შერჩევის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლიდან არჩევენ ისეთ U ქვესიმრავლეს, რომ როცა (18.1) შერჩევა ეკუთვნის U სიმრავლეს, მაშინ Ho ჰიპოთეზა უკუიგდება, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში Ho ჰიპოთეზა მიიღება. U-ს უწოდებენ კრიტიკულ სიმრავლეს.

კრიტიკული სიმრავლეს არჩევენ ისე, რომ X შერჩევის U სიმრავლეში მოხვედრის ალბათობა, როცა Ho ჰიპოთეზა მართებულია PHo(U)=SP (x, θo) dx, სადაც $f(x, \theta_o)=f(x_1, \theta_o)\, f(x_1, \theta_o) \ldots f(x_n, \theta_o)$, იყოს რაც შეიძლება მცირე. ცხადია, რომ ისეთი სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს აღნიშნულ თვისებას შეიძლება შერჩეულ იქნას უამრავი ხერხით. უფრო კონკრეტულად U-ს არჩევა შესაძლებელია, როცა მოცემულია ალტერნატიული ჰიპოთეზა $H_1: \theta=\theta_1$

ყოველ კრიტერიუმს უკავშირდება ორი გვარის შეცდომა: თუ Ho ჰიპოთეზას უკუვაშდებთ (ე.ი. X შერჩევა ეკუთვნის U კრიტიკულ სიმრავლეს), როცა იგი მართებულია, ამბობენ, რომ გვაქვს პირველი გვარის შეცდომა,

ხოლო თუ x∈u, ე.ი. Ho ჰიპოთეზას მივიღებთ, როცა იგი მცდარია (ჭეშმარიტია ალტერნატიული 1 ჰიპოთეზა) - მეორე გვარის შეცდომა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $P_i(B)=\int_B P(x,\Theta_i)dx, i=0,1.$,

მაშინ კრიტერიუმის პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა ტოლია $P_o(U)$-ის, ხოლო მეორე გვარის შეცდომისა $\beta=P_1(U)$, სადაც U არის U სიმრავლის დამატება: 1-β-ს კრიტერიუმის სიმძლავრე ეწოდება.

ჰიპოთეზათა შემოწმების წესი შემდგომში მდგომარეობს:

1) იღებენ მცირე $\alpha>0$ რიცხვს, რომელსაც კრიტერიუმის მნიშვნელიანობის დონეს უწოდებენ (როგორც წესი, იღებენ α=0,05; 0,01 ან 0,001).

2) კრიტიკული არის დასადგენად განიხილავენ პირობას:

$$Po(U)\leq \alpha \qquad (18.2)$$

ცხადია, რაც უფრო მცირეა α, მით უფრო ნაკლებია პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა. ყველა იმ U სიმრავლიდან, რომლებიც აკმაყოფილებენ (18.2)-ს, ირჩევენ იმას, რომელიც უზრუნველყოფს მინიმალურ მეორე გვარის შეცდომას, რაც ეთანადება კრიტერიუმის სიმძლავრის მაქსიმუმს.

3) ატარებენ ცდას, რომლის მიხედვითაც იღებენ შერჩევას

$X=(X_1,\ldots X_n)$ და პოულობენ კრიტერიუმის ემპირიულ მნიშვნელობას. თუ x∈u, მაშინ ძირითად Ho ჰიპოთეზას უარყოფენ. წინააღმდეგ შემთხვევაში თვლიან, რომ Ho ჰიპოთეზა არ ეწინააღმდეგება ცდის მონაცემებს. ჰიპოთეზის შემოწმების შედეგი აღიწერება შემდეგი სიტყვებით: Ho ჰიპოთეზა უარყოფილია (ან შესაბამისად Ho ჰიპოთეზა მიღებულია) მნიშვნელიანობის α დონით.

შეთანხმებულობის χ^2 კრიტერიუმი

კრიტერიუმებს, რომლებიც შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის შესახებ ჰიპოთეზათა გამოსაკვლევად გამოიყენება, შეთანხმებულობის კრიტერიუმები ეწოდებათ.

ვთქვათ, ძირითადი Ho ჰიპოთეზა იმაში მდგომარეობს, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია F არის მოცემული Fo ფუნქცია (Ho:F=Fo)

დავყოთ რიცხვითი ღერძი z ინტერვალად:

$(-\infty=a_o, a'_1), [a,a_2],\ldots,[a_{r-1}, a_{r=+\infty}])$,

სადაც $a_1<a_2<...<U_{r-1}$. ჭეშმარიტი H_o ჰიპოთეზისათვის $[a_{i-1}, a_i]$ ინტერვალს ეთანადება ალბათობა $P_i=F_o(a_1)-F_o(a_{i-1})$, $i=\overline{1,r}$.

ვთქვათ, ξ შემთხვევითი სიდიდის n შერჩევითი მნიშვნელობიდან i-ურ $I_i=[a_{i-1},.a_i]$ ინტერვალში ხვდება m_i რაოდენობა $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$

თუ H_o ჰიპოთეზა მართებულია, მაშინ I_i ინტერვალში ჩავარდნილი შერჩევის მნიშვნელობათა $\frac{m_i}{n}$ ფარდობითი სიხშირე ახლოს უნდა იყოს P_i ალბათობასთან.

შიდიდე $$\aleph^2 = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{n}{P_i}\frac{m_i}{n} - P_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{r}\frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i} \qquad (18.3)$$

ახასიათებს H_o ჰიპოთეზის ცდის მონაცემებთან (შერჩევასთან) შეთანხმებულობას.

VII ცხრილის საშუალებით (იხ.დამატება) პოულობენ $\aleph^2_\alpha$-ს გამოთვლილს მნიშვნელიანობის დონისა და v=r-1 მნიშვნელობისათვის.

თუ სრულდება თანაფარდობა $\aleph^2 > \aleph^2_\alpha$, მაშინ H_o ჰიპოთეზას უარყოფენ მნიშვნელიანობის α დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ჰიპოთეზა იღებენ იგივე α დონით.

შევნიშნოთ, რომ $\aleph^2$ კრიტერიუმის გამოყენებაც ხდება ჰიპოთეზათა შემოწმების ზოგადი წესით. ამ შემთხვევაში კრიტერიუმის ემპირიული მნიშვნელობები გამოითვლება (18.3) ფორმულით, ხოლო კრიტიკულ სიმრავლედ აირჩევა ($\aleph^2_\alpha$ +∞) ინტერვალი.

შენიშვნა 1: თითოეულ ინტერვალში შერჩევით მნიშვნელობათა mi რიცხვი 5-10-ზე მცირე არ უნდა იყოს. თუ ეს პირობა არ სრულდება, რეკომენდებულია ინტერვალების გაერთიანება.

შენიშვნა 2: შეთანხმებულობის $\aleph^2$ კრიტერიუმი გამოიყენება არა მარტო იმ შემთხვევაში, როდესაც ξ შემთხვევითი სიდიდის ჰიპოთეზური განაწილების Fo ფუნქცია მოცემულია, არამედ მაშინაც თუ იგი დამოკიდებულია θ უცნობ პარამეტრზე, ე.ი. აქვს სახე $F_o(x, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_e)$ და პარამეტრები $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_e$ ფასდებიან შერჩევის საფუძველზე მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით. თუმცა ამ დროს VII ცხრილიდან X2 მნიშვნელობა უნდა ვიპოვოთ v=r-ℓ-1 სიდიდისათვის.

თავი V. სავარჯიშოები ალბათობის თეორიაში

მეთოდური მითითებებით

§1. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე. მოქმედებანი ხდომილობებზე

(1-30) ვაგორებთ კამათელს. ააგეთ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე. შემდეგი ხდომილობები ჩაწერეთ ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლის სახით და იპოვეთ მათი ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი.

A={კამათელზე მოვა ლუწი რიცხვი},

B={კამათელზე მოვა კენტი რიცხვი},

C={კამათელზე მოვა რიცხვი, რომელიც არ აღემატება 3-ს},

D={კამათელზე მოვა მარტივი რიცხვი},

E={კამათელზე მოვა რიცხვი, რომელიც იყოფა 3-ზე}.

1. $A+B$; $A\cdot C$
2. $A\cdot\overline{D}$; $A-B$
3. $A+C$; $A\cdot B$
4. $\overline{A}\cdot E$; $\Omega-D$
5. $A+D$; $A\cdot D$
6. $B\cdot\overline{E}$; $D-E$
7. $A+E$; $A\cdot E$
8. $D\cdot\overline{E}$; $A-E$
9. $A+\Omega$; $A\cdot\Omega$
10. $\overline{A}\cdot B$; $C-B$
11. $B\cdot\varnothing+$; $B\cdot\Omega$
12. $\overline{A}\cdot B$; $\Omega-\overline{D}$
13. $C+\Omega$; $C\cdot\Omega$
14. $\overline{A}\cdot\overline{C}$; $\Omega-E$
15. $D+\Omega$; $D\cdot\varnothing$
16. $\overline{A}\cdot\overline{D}$; $\Omega-B$
17. $B+\Omega$; $D\cdot\Omega$
18. $\overline{A}\cdot\overline{E}$; $-B$
19. $E+\Omega$; $E\cdot\Omega$
20. $\overline{B}\cdot\overline{C}$; $\Omega-\overline{E}$
21. $A\cdot A$; A
22. $\overline{A}+\overline{B}$; $\Omega\cdot\overline{A}$
23. $A\cdot\overline{A}$; B
24. $\overline{A}+\overline{C}$; $\Omega\cdot\overline{B}$
25. $A\cdot\overline{B}$; C
26. $\overline{A}+\overline{D}$; $\Omega\cdot\overline{C}$
27. $\overline{A}+B$; $\overline{E}$
28. $\overline{A}+\overline{E}$; $\Omega\cdot\overline{D}$
29. $\overline{B}+\overline{D}$; D
30. $\overline{B}+\overline{D}$; $\Omega\cdot\overline{E}$

(31-60) დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი A, B და C ხდომილობებისთვის მართებულია შემდეგი დამოკიდებულებანი:

31. $A+(A\cdot B)=A$
32. $(A+B)-B=A-B$

33. $A+B=(A-A\cdot B)+B$

34. $A\cdot B+B\cdot C=(A+C)\cdot B$

35. $(A-B)+B=A+B$

36. $(A+C)(B+C)=(A\cdot B)+C$

37. $A+B=(A-B)+(B-A)+A\cdot B$

38. $(B-C)-(B-A)=A-C$

39. $A-B=A-(A\cdot B)$

40. $A-B=(A+B)-B$

41. $A\cdot(B-C)=A\cdot B-A\cdot C$

42. $(A+B)-C=(A-C)+(B-C)$

43. $(A-C)\cdot(B-C)=A\cdot B-C$

44. $(A-B)-C=A-(B+C)$

45. $A-(B-C)=(A-B)+(A\cdot C)$

46. $(A-B)\,(C-B)=A(C-B)-B\,(C-B)$

47. $A+B+C=A+(B-A\cdot B)+(C-A\cdot C)$

48. $(A+B)-A=B\cdot\overline{A}\cdot$

49. $A\cdot\overline{B}\cdot C=A+B$

50. $\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{A+B}$

51. $\overline{A}+\overline{B}=\overline{A\cdot B}$

52. $\overline{A}\cdot B\cdot C=A+B$

53. $(\overline{A+B})\cdot C=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$

54. $(\overline{A+B})\cdot\overline{C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$

55. $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C=(\overline{A}+\overline{B})\cdot C$

56. $(\overline{A\cdot B})+C=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

57. $\Omega-\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

58. $\varnothing+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C=(\overline{A+B})\cdot C$

59. $A+B=A+(B-A\cdot B)$

60. $(A\cdot B)+C=(A+C)\cdot(B+C)$

§2. ალბათობის კლასიკური, სტატისტიკური და გეომეტრიული განსაზღვრება

1. ყუთიდან, რომელშიც 25 თეთრი და 20 წითელი ბირთვია, შემთხვევით იღებენ ბირთვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ იგი თეთრია?

2. ვაგორებთ ორ კამათელს (აქ და შემდეგშიც ვგულისხმობთ, რომ კამათლები „წესიერია“). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლებზე მოსული რიცხვების ჯამი ტოლია 12-ის.

3. მონეტას ვაგდებთ ორჯერ (აქ და შემდეგშიც ვგულისხმობთ, რომ მონეტა „წესიერია“). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივეჯერ მოვა „ღერბი“.

4. კრებაზე, რომლის მსვლელობაში მონაწილეობას იღებდა 25 მამაკაცი და 5 ქალი, ფარული კენჭისყრით აირჩიეს დელეგატად 5 პიროვნება. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ არჩეულია 5 ქალი?

5. ვაგორებთ ორ კამათელს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლებზე მოსული რიცხვების სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა ტოლია ოთხის.

6. ვაგდებთ ორ მონეტას. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ „ღერბი“ მოვა ერთ მონეტაზე მაინც.

7. 30 დეტალიანი პარტიიდან, რომელშიც 5 დეფექტიანი დეტალია, შემთხვევით იღებენ ერთ დეტალს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულია დეფექტიანი დეტალი?

8. ქარხანა უშვებს 50% უმაღლეს და 45% პირველი ხარისხის ნაწარმს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული ნაწარმი აღმოჩნდება უმაღლესი ხარისხის?

9. ლატარიის 50 ბილეთიდან მომგებიანია ორი ბილეთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ნაყიდი ბილეთი მომგებიანია.

10. ტელეფონის ნომრის აკრეფისას აბონენტს დაავიწყდა ბოლო ციფრი. მან ალალბედზე აკრიფა ეს ციფრი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აკრეფილია საჭირო ციფრი.

11. ტექნიკური კონტროლის განყოფილება ამოწმებს მზა 100 დეტალიან პარტიას, რომელშიც 90 არის პირველი ხარისხის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული პირველივე დეტალი პირველი ხარისხისაა.

12. A და B დასახლებულ პუნქტებს შორის გაჭიმული სატელეფონო ხაზის სიგრძეა 100 კმ. ხაზი გაწყდა რომელიღაც C წერტილში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მანძილი A-დან C-მდე არ აღემატება 30 კმ-ს.

13. კვადრატზე შემოხაზულია R რადიუსიანი წრეწირი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით არჩეული წერტილი მოხვდება კვადრატის შიგნით?

14. 40 სმ-ის ტოლ რადიუსიან წრეში ჩახაზულია კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა 10 სმ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით დასმული წერტილი აღმოჩნდება კვადტარის შიგნით.

15. საამქროში აწყობილი 991 ბლოკ-სქემის შემოწმების შედეგად დადგინდა, რომ ვარგისია 923. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული ბლოკ-სქემა ვარგისია.

16. ახალი, ერთნაირი ტიპის ძრავების ტექნიკური გამოცდის შედეგად დადგინდა, რომ ვარგისი ძრავების ფარდობითი სიხშირეა 0,96. იპოვეთ 200 შემთხვევით აღებული ძრავიდან ვარგის ძრავათა რიცხვი.

17. ყუთში 40 ვატი სიმძლავრის 10 და 100 ვატი სიმძლავრის 50 ნათურაა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ნათურა 40 ვატი სიმძლავრისაა.

18. ტექნიკური კონტროლის განყოფილებამ შემთხვევით აღებული 100 დეტალიდან აღმოაჩინა 5 წუნდებული დეტალი. იპოვეთ წუნდებულ დეტალთა ფარდობითი სიხშირე და არაწუნდებულ დეტალთა ფარდობითი სიხშირე.

19. საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის 99% სტანდარტულია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული ნაწარმი არაა სტანდარტული.

20. ორი კონცენტრირებული წრეწირიდან ერთის რადიუსია R სმ და მეორის - r სმ. (r<R). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დიდ წრეში შემთხვევით დასმული წერტილი აღმოჩნდება პატარა წრეშიც.

21. სამკუთხედზე შემოხაზულია R რადიუსიანი წრეწირი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით დასმული წერტილი აღმოჩნდება სამკუთხედის შიგნით.

22. საწყობში მიიღეს I საამქროში დამზადებული 7, II საამქროში დამზადებული 8 და III საამქროში დამზადებული 10 ელექტროძრავი. მომხმარებელთან გაგზავნეს შემთხვევით არჩეული ძრავი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ იგი დამზადებულია I საამქროში.

23. წესიერ სამკუთხედში ჩახაზულია R რადიუსიანი წრეწირი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამკუთხედში შემთხვევით დასმული წერტილი აღმოჩნდება წრეში.

24. წესიერი სამკუთხედის შიგნით, რომლის გვერდის სიგრძე 30 სმ-ია, ჩახაზულია 2 სმ-ის ტოლ რადიუსიანი წრე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამკუთხედში შემთხვევით დასმული წერტილი აღმოჩნდება წრის შიგნით.

25. სტუდენტმა 25 საგამოცდო ბილეთიდან ისწავლა 20 ბილეთი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მას შეხვდება ნასწავლი ბილეთი, თუ იგი პირველი გავიდა გამოცდაზე (ბილეთის აღება შემთხვევითი წესით ხდება).

26. შემთხვევით ასახელებენ ერთ რიცხვს 1-დან 25-მდე (ჩათვლით). რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დასახელებულია 5-ის ჯერადი რიცხვი?

27. საწყობში 18 პირველი და 7 მეორე ხარისხის მილია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული მილი მეორე ხარისხისაა.

28. ვაგდებთ სამ მონეტას. იპოვეთ სამივე მონეტაზე „ღერბის" მოსვლის ალბათობა.

29. 8 სმ-ის ტოლ რადიუსიან წრეში ჩახაზულია კვადრატი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით დასმული წერტილი აღმოჩნდება კვადრატის შიგნით.

30. საწყობში ერთად დევს პირველი ხარისხის 20 და მეორე ხარისხის 6 საბურავი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული საბურავი პირველი ხარისხისაა?

ბ) ამოცანები, რომლებიც ამოიხსნებიან კომბინატორიკის გამოყენებით

31. ტელეფონის ნომრის აკრეფის დროს აბონენტს დაავიწყდა ბოლო სამი ციფრი, ახსოვდა მხოლოდ, რომ ციფრები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან. მან შემთხვევით აკრიფა ეს ციფრები. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აკრეფილია საჭირო ციფრები.

32. ყუთში 15 დეტალია, მათ შორის 10 უმაღლესი ხარისხისაა. ამწყობი შემთხვევით იღებს 3 დეტალს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამივე ამოღებული დეტალი უმაღლესი ხარისხისაა.

33. საამქროში მუშაობს 6 მამაკაცი და 4 ქალი. სამსახურში გამოცხადების განრიგის მიხედვით შემთხვევით აარჩიეს 7 ადამიანი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 5 ქალია.

34. 20 პერფობარათი დანომრილია 1-დან 20-მდე. შემთხვევით აიღეს ორი ბარათი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულია 1 და 2-ნომრიანი ბარათები.

35. საწყობში 15 კინესკოპია, მათ შორის 10 დამზადებულია თბილისის ქარხანაში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული 5 კინესკოპიდან 3 აღმოჩნდება თბილისის ქარხანაში დამზადებული.

36. ჯგუფში 12 სტუდენტია, მათ შორის 8 ფრიადოსანია. სიით შემთხვევით აარჩიეს 9 სტუდენტი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ არჩეულ სტუდენტებს შორის 5-ია ფრიადოსანი.

37. ქარხნის მიერ გამოშვებული ერთიდაიგივე მარკის 5 ავტომანქანიდან 3 უმაღლესი ხარისხისაა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული 3 მანქანიდან ორი მანქანა უმაღლესი ხარისხისაა.

38. ტელეფონის ნომერი შედგება 6 ციფრისაგან. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს ციფრები სხვადასხვაა.

39. 25 ნათურიდან 5 უმაღლესი ხარისხისაა. შემთხვევით იღებენ 8 ნათურას. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 4 ნათურაა უმაღლესი.

40. აპარატი 5 ელემენტისაგან შედგება, რომელთაგან 2 გაცვეთილია. აპარატის ჩართვისას შემთხვევით ჩაირთვება 3 ელემენტი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ჩართული იქნება ორი გაცვეთილი ელემენტი.

41. სათამაშო კარტის კომპლექტიდან (36 კარტით) შემთხვეთით იღებენ 3 კარტს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული სამივე კარტი ტუზია.

42. ლატარიის 100 ბილეთიდან მომგებიანია 10. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ნაყიდი 5 ბილეთიდან მოიგებს 3 ბილეთი.

43. „სპორტლოტოს“ (49-დან 6) ტირაჟის მონაწილემ შეავსო ერთი ბილეთი (შემთხვევით გადახაზა 6 ნომერი). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მომგებიანი აღმოჩნდება გადახაზული ოთხი ნომერი.

44. ბავშვი შემთხვევით ალაგებს გვერდიგვერდ 4 კუბიკს, რომლებზედაც აწერია ასოები m, m, a, a. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მიიღება სიტყვა „მამა“.

45. ყუთში 3 თეთრი და 7 წითელი ფერის ბირთვია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ორი ბირთვი აღმოჩნდება წითელი ფერის.

46. A, B და კიდევ 8 ადამიანი დგას რიგში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ და B პიროვნება ერთმანეთისგან დაშორებულია 3 ადამიანით.

47. საწყობში ერთიდაიგივე ტიპის 10 ძრავია, რომელთა შორის 2 წუნდებულია. მომხმარებელთან შემთხვევით აგზავნიან 2 ძრავს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე კარგია.

48. სათამაშო კარტის კომპლექტიდან (52 კარტით) შემთხვევით იღებენ ოთხ კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ოთხივე ათიანია?

49. მაღაზიაში მიღებული 10 წიგნიდან 3 წუნდებულია, მომხმარებელს შემთხვევით მისცეს 3 წიგნი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 2 წიგნია წუნდებული?

50. სათამაშო კარტის კომპლექტიდან (52 კარტით) შემთხვევით იღებენ 4 კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი ტუზია და ორი ათიანი?

§3. ხდომილობათა ჯამის ალბათობა. საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობა. პირობითი ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა. ნამრავლის ალბათობა. სრული ალბათობისა და ბაიესის ფორმულები

1. ორი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს. პირველი მსროლელი სამიზნეს აზიანებს 0,9-ის ტოლი ალბათობით, მეორე - 0,8-ის ტოლი ალბათობით. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება მხოლოდ ერთი ტყვიით?

2. ელექტრო სქემა შეიცავს 4 ბლოკს. თითოეული ბლოკის გამართული მუშაობის (საიმედობის) ალბათობა შესაბამისად ტოლია 0,6; 0,7; 0,8; 0,9-ის. ბლოკები მწყობრიდან გამოდიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. იპოვეთ სქემის საიმედოდ მუშაობის ალბათობა, თუ ბლოკები მიმდევრობითაა ჩართული.

3. წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ სქემის საიმედოდ მუშაობის ალბათობა, თუ ბლოკები პარალელურადაა ჩართული.

4. ორი ქვემეხი ერთდროულად ესვრის სამიზნეს. პირველი ქვემეხისათვის სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0,9, მეორისათვის - 0,8. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნეს დააზიანებს ორივე ქვემეხი.

5. ფეიქარი ემსახურება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მომუშავე სამ ავტომატურ საქსოვ დაზგას. ალბათობა იმისა, რომ ერთი საათის განმავლობაში ფეიქრის მომსახურება არ დასჭირდება პირველ დაზგას ტოლია 0,8, მეორე დაზგას - 0,9, მესამე დაზგას 0,95. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი საათის განმავლობაში ფეიქრის მომსახურება დასჭირდება ერთ დაზგას მაინც.

6. წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი საათის განმავლობაში ფეიქრის მომსახურება არ დასჭირდება არცერთ დაზგას.

7. კამათლის ის წახნაგები, რომლებზედაც აწერია რიცხვები 1, 2, 3, შეღებილია ყვითლად, ხოლო დანარჩენი - თეთრად (რიცხვები 4, 5, 6). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათელზე მოვა ლუწი ნომერი, თუ ვიცით, რომ კამათელზე მოვა თეთრი ფერი.

8. მაღალია ღებულობს სამი ქარხნის მიერ დამზადებულ კინესკოპებს. პირველი ქარხანა ამზადებს მთელი პროდუქციის 45%-ს, მეორე - 40%-ს, მესამე - 15%-ს. პირველი ქარხნის პროდუქციის 70% უმაღლესი ხარისხისაა,

მეორე - 80%, მესამისა - 90%. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მაღაზიაში შემთხვევით ნაყიდი კინესკოპი უმაღლესი ხარისხისაა?

9. საბურავების დეფექტების აღმოსაჩენი გამოსაცდელი სტენდი იძლევა 95% გარანტიას. ცდიან საბურავების პარტიას, რომელთაგან თითოეული 0,005-ის ტოლი ალბათობითაა დეფექტური. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული საბურავი დეფექტურია, თუ სტენდის პასუხი დადებითია (რაც იმას ნიშნავს, რომ სტენდმა აჩვენა დეფექტურობა).

10. ლატარიის 1000 ბილეთიდან 24 ფულადი და 10 ნივთის მომგებიანია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ნაყიდი ორი ბილეთიდან ერთი მაინც იქნება მომგებიანი.

11. საწყობში 20 პირველი და 6 მეორე ხარისხის დეტალია. შემთხვევით ვიღებთ ერთ დეტალს, ვამოწმებთ და უკან ვაბრუნებთ საწყობში. შემდეგ ისევ ვიღებთ შემთხვევით ერთ დეტალს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივეჯერ პირველი ხარისხის დეტალია ამოღებული.

12. მუშა ემსახურება სამ ჩარხს, რომლებზედაც ერთიდაიგივე დეტალები მზადდება. პირველი ჩარხისათვის დეფექტური დეტალის დამზადების ალბათობა ტოლია 0,02-ის, მეორისათვის - 0,03, მესამისათვის - 0,04. პირველ ჩარხზე სამჯერ მეტი დეტალი მზადდება, ვიდრე მეორეზე, ხოლო მესამეზე ორჯერ ნაკლები, ვიდრე მესამეზე. სამივე ჩარხის დეტალები მოწმდება ტექნიკური კონტროლის მიერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შემოწმებული ერთი დეტალი აღმოჩნდება დეფექტური.

13. თვითმფრინავს სამჯერ ესვრიან. პირველი სროლის დროს მოხვედრის ალბათობა ტოლია 0,5, მეორე სროლის დროს - 0,6 და მესამის დროს - 0,8-ის. თვითმფრინავი გამოდის მწყობრიდან სამი მოხვედრის შემთხვევაში, მისი მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა ერთი მოხვედრის დროს ტოლია 0,3-ის, ხოლო ორი მოხვედრისას - 0,6. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ თვითმფრინავი გამოვა მწყობრიდან.

14. ერთ ყუთში 2 თეთრი და 4 შავი ბირთვია, მეორეში - 3 თეთრი და 5 შავი, მესამეში 4 თეთრი და 6 შავი. პირველი ყუთიდან მეორეში გადადეს ერთი ბირთვი, მეორედან მესამეშიც ერთი ბირთვი და ბოლოს მესამიდან პირველში ისევ ერთი ბირთვი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ბირთვების შემადგენლობა ყუთებში არ შეიცვლება.

15. პირველი საამქრო ამზადებს დეტალების საერთო რაოდენობის 70%-ს, ხოლო მეორე - 30%-ს. დეტალები მოწმდება ტექნიკური კონტროლის მიერ.

პირველი საამქროს პროდუქცია შეიცავს 10% დეფექტურ დეტალს, მეორის - 20%-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემოწმებული ერთი დეტალი აღმოჩნდება დეფექტური.

16. მომხმარებელს ეგზავნება სამი ქარხნის მიერ დამზადებული პროდუქცია. პირველი ქარხანა უშვებს პროდუქციის 20%-ს, მეორე - 45%-ს, მესამე 34%-ს. პირველი ქარხნის პროდუქცია შეიცავს 3%, მეორე 2% და მესამე 1% - წუნდებულ ნაკეთობებს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მომხმარებლის მიერ შეძენილი ნაკეთობა არის პირველ ქარხანაში დამზადებული, თუ ის აღმოჩნდა წუნდებული.

17. გვაქვს ათი ერთნაირი ყუთი. ცხრა მათგანში 2 თეთრი და 2 შავი ფერის საგანია, ერთში კი - 5 თეთრი და 1 შავი საგანი. შემთხვევით არჩეული ყუთიდან ვიღებთ ერთ საგანს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ საგანი ამოღებულია ყუთიდან, რომელშიც 5 თეთრი და 1 შავი ფერის საგანია, თუ იგი აღმოჩნდა თეთრი ფერის.

18. პირველ ჩარხზე უმაღლესი ხარისხის დეტალის დამზადების ალბათობა ტოლია 0,7-ის, მეორეზე - 0,8-ის. გვაქვს ორი პირველ და სამი მეორე ჩარხზე დამზადებული დეტალი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ხუთივე დეტალი უმაღლესი ხარისხისაა.

19. ელექტრონული მოწყობილობა მწყობრიდან გამოდის თუ გაფუჭდა პირველი, მეორე ან მესამე ელემენტიდან ერთ-ერთი. ელემენტების დაზიანების ალბათობები შესაბამისად ტოლია 0,3; 0,2 და 0,2-ის. იპოვეთ ელექტრონული მოწყობილობის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა, თუ ელემენტების დაზიანება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია.

20. გათამაშების 100 ბილეთიდან 10 მომგებიანია. იპოვეთ მოგების ალბათობა, თუ გვაქვს 4 ბილეთი.

21. ერთ ყუთში 12, ხოლო მეორეში 10 ნათურაა. ორივე ყუთში თითო წუნდებული ნათურაა. პირველიდან მეორეში გადააქვთ ერთი ნათურა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მეორე ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ნათურა იქნება წუნდებული.

22. დეტალის გარკვეული მახასიათებელი შეიძლება იცვლებოდეს ექვს სხვადასხვა ინტერვალში შესაბამისი ალბათობებით: 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16 და 0,09. დეტალის ამ მახასიათებელზე დამოკიდებულებით სტანდარტული ნაკეთობის მიღების ალბათობები ტოლია შესაბამისად 0,2; 0,2; 0,4; 0,3; 0,2. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ნაკეთობა იქნება სტანდარტული.

23. ყუთში 15 ტენისის ბურთია, რომელთა შორის 9 ახალია. პირველი თამაშისათვის იღებენ სამ ბურთს და თამაშის შემდეგ ისევ ყუთში აბრუნებენ. მეორე თამაშისათვის იღებენ აგრეთვე სამ ბურთს, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მეორე თამაშისათვის შემთხვევით აღებული სამივე ბურთი ახალი იქნება.

24. თხუთმეტ საგამოცდო ბილეთში ორი განსხვავებული საკითხია. სტუდენტს შეუძლია პასუხის გაცემა მხოლოდ 25 საკითხზე. იპოვეთ გამოცდის ჩაბარების ალბათობა, თუ ამისათვის საკმარისია პასუხის გაცემა ერთი ბილეთის ორივე საკითხზე, ან ერთი ბილეთის ერთ-ერთ საკითხზე და მეორე ბილეთის გარკვეულ საკითხზე.

25. საავარიო სიტუაციაში ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შეიძლება ჩაირთოს ორი ხელსაწყო შესაბამისად ალბათობებით: 0,95 და 0,9. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ავარიის შემთხვევაში ჩაირთვება მხოლოდ ერთი ხელსაწყო.

26. ტექნიკური კონტროლის განყოფილება ამოწმებს ორი ტიპის დეტალების სტანდარტულობას. სტანდარტულობის ალბათობები I და II ტიპის დეტალებისათვის შესაბამისად ტოლია 0,7 და 0,8-ის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი შემოწმებული დეტალიდან მხოლოდ ერთი იქნება სტანდარტული.

27. ხელსაწყო შედგება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მომუშავე ორი ელემენტისაგან. ელემენტების მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობები შესაბამისად ტოლია 0.05 და 0,08-ის. იპოვეთ ხელსაწყოს მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა, თუ ამისათვის საკმარისია ერთი ელემენტის მაინც მწყობრიდან გამოსვლა.

28. სამი ასტრონომიური ობსერვატორია ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად აწარმოებს ერთიდაიგივე ფიზიკური სისტემის გაზომვას. გაზომვის შედეგებში შეცდომის ალბათობები თითოეული ობსერვატორიისათვის შესაბამისად ტოლია 0,1; 0,15 და 0,2-ის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამივე ობსერვატორიაში წარმოებული ერთჯერადი გაზომვის შედეგებიდან ერთში მაინც იქნება შეცდომა.

29. გამოთვლით ლაბორატორიაში 6 ავტომატური და 4 ნახევრადავტომატური გამომთვლელი მანქანაა. თითოეული ტიპის მანქანის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა შესაბამისად ტოლია 0,05 და 0,2-ის. სტუდენტი აწარმოებს გამოთვლებს შემთხვევით არჩეულ მანქანაზე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მანქანა არ გამოვა მწყობრიდან.

30. გამომთვლელი მანქანის სამი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მომუშავე ელემენტიდან ორი გამოვიდა მწყობრიდან. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მწყობრიდან გამოვიდა პირველი და მეორე ელემენტი, თუ ელემენტების მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობები შესაბამისად ტოლია 0,2; 0,4 და 0,3-ის.

§4. მეთოდური მითითებები

1. ვამოწმებთ ორ ნათურას ვარგისიანობაზე ისე, რომ ვიხილავთ შემდეგ ხდომილობებს: ω_{i1}={i-ური ნათურა ვარგისია}, ω_{i2}={გაწყვეტილია i-ური ნათურის სპირალი}, ω_{i3}={გატეხილია i-ური ნათურის კოლბა}, i=1, 2;… A={ვარგისია ერთი ნათურა}, B ={ვარგისია ერთი ნათურა მაინც}, C={ვარგისია ორივე ნათურა} და E={უვარგისია ორივე ნათურა (ან სპირალია გაწყვეტილი, ან კოლბაა გატეხილი)}. ავაგოთ ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე; A, B, C, E, A+B, A·B, B-A - ხდომილობები ჩავწეროთ ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლის სახით და ვიპოვოთ თითოეული მათგანის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი.

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცეს ექნება სახე:

$\Omega=\{(\omega_{11}, \omega_{21}), (\omega_{11}, \omega_{22}), (\omega_{11}, \omega_{23}), (\omega_{12}, \omega_{21}), (\omega_{12}, \omega_{22}), (\omega_{12}, \omega_{23}), (\omega_{13}, \omega_{2}1), (\omega_{13}, \omega_{22}), (\omega_{13}, \omega_{23})\}$.

აღვნიშნოთ m(Ω)-თი Ω-ს ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა, ანუ ცდის ყველა შესაძლო ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი

ანალოგიურად ჩავწერთ, რომ:

$A= \{(\omega_{11}, \omega_{22}), (\omega_{11}, \omega_{23}), (\omega_{12}, \omega_{21}), (\omega_{13}, \omega_{21})\}$

$m(A)=4$

$B=\{(\omega_{11}, \omega_{21}), (\omega_{11}, \omega_{22}), (\omega_{11}, \omega_{23}), (\omega_{12}, \omega_{21}), (\omega_{13}, \omega_{21})\}$

$M(B)=5$

$C=\{(\omega_{11}, \omega_{21})\}$, $m(c)=1$

$E=\{(\omega_{12}, \omega_{22}), (\omega_{12}, \omega_{23}), (\omega_{13}, \omega_{22}), (\omega_{13}, \omega_{23})\}= \Omega\text{-}B=\overline{B}$, $m(E)=m(\overline{B})=4$

$A+B=\{(\omega_{11}, \omega_{21}), (\omega_{11}, \omega_{22}), (\omega_{11}, \omega_{23}), (\omega_{12}, \omega_{21}), (\omega_{13}, \omega_{21})\}$

$m(A+B)=5$

$A\cdot B=\{(\omega_{11}, \omega_{22}), (\omega_{11}, \omega_{23}), (\omega_{12}, \omega_{21}), (\omega_{13}, \omega_{21})\}$

$m(A \cdot B)=4$

$B\text{-}A=\{(\omega_{11}, \omega_{21})=C$

$m(B\text{-}A)=m(c)=1$

2. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი A, B და C ხდომილობებისათვის (A B)+C=(A+C) (B+C)

ამოხსნა.

ა) ვთქვათ $\forall\omega\in\Omega$ და $\omega\in(A\cdot B)+C \Rightarrow\omega\in(A\ \cdot B)$, ან $\omega\in C$, ან $\omega\in (A\cdot B)$ და $\omega\in C\Rightarrow\omega\in A$ და $\omega\in B$, ან $\omega\in C$, ან $\omega\in A$, $\omega\in B$ და $\omega\in C\omega\in(A+C)$ და $\omega\in (B+C)\Rightarrow \omega\in (A+C)\cdot (B+C)$ ე.ი. $(A\ \cdot B)+C\subset(A+C)\ (B+C)$

ბ) ანალოგიურად $\forall\omega\in(A+C)\cdot\ (B+C)\Rightarrow \omega\in(A+C)$ და $\omega\in(B+C)\Rightarrow (\omega\in A$, ან $\omega\in C$ ან $\omega\in (A\cdot C))$ და $(\omega\in B$, ან $\omega\in C$, ან $\omega\in(B\cdot C))\Rightarrow \omega\in(A\cdot B)$, ან $\omega\in C$, ან $\omega\in(A\cdot B\cdot C)\Rightarrow \omega\in (A\cdot B)+C$ ე.ი. $(A+C)\ (B+C)\subset(A\cdot B)+C$

მიღებული ჩართვებიდან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა (ექვივალენტობა).

3. ტექნიკური დათვალიერების დროს 1000 ავტომანქანიდან გაუმართავი აღმოჩნდა 100 მანქანა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული ავტომანქანა გაუმართავია (ხდომილობა A).

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ხდომილობის ალბათობის სტატისტიკური განსაზღვრით $P(A)\approx\dfrac{N(A)}{N}$, სადაც N ცდების რიცხვია, N(A) A ხდომილობის სიხშირე. დავწეროთ:

$$P(A)\approx\frac{100}{1000}=0.1$$

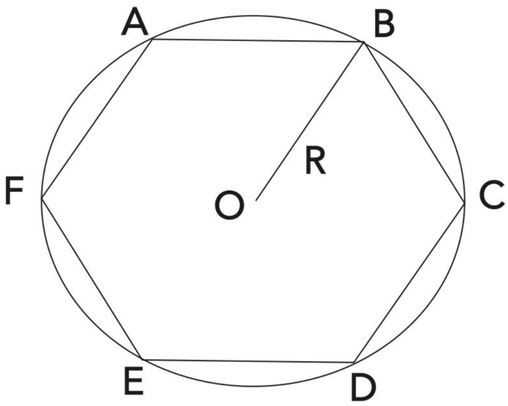
4. საამქროს საწყობში დეტალია, მათ შორის მ არასტანდარტულია. შემთხვევით ვიღებთ ზ დეტალს, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულია კ(ზ) არასტანდარტული დეტალი (ხდომილობა A).

ამოხსნა. M დეტალიდან r დეტალის შემთხვევითი ამოღების ყველა შესაძლო შემთხვევა თანაბრად შესაძლებელია და მათი რაოდენობა ტოლია M ელემენტიდან აღებული m ელემენტიანი ჯგუფთებათა რიცხვისა $C_M^m=\dfrac{M!}{m!(M-m)!}$ K არასტანდარტული დეტალი შეიძლება აღებულ იქნას m

არასტანდარტული დეტალიდან $C_M^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ წესით ამავე დროს დანარჩენი r-k დეტალი უნდა იყოს სტანდარტული, ე.ი. აღებული იქნება M-m სტანდარტული დეტალიდან $C_{M-m}^{r-k} = \dfrac{(M-m)!}{(r-k)!(M-m-r+k)}$ წესით. თუ ვისარგებლებთ ალბათობის კლასიკური განსაზღვრით $P(A) = \dfrac{m(A)}{n}$, რადგან $n = m(\Omega) = C_M^r$ და $m(A) = C_m^k \cdot C_{M-m}^{r-k}$ მივიღებთ:

$$P(A) = \frac{C_m^k \cdot C_{M-m}^{r-k}}{k!(m-k)!}$$

5. R რადიუსიან წრეში, რომელშიც ჩახაზულია წესიერი ექვსკუთხედი შემთხვევით ვსვამთ წერტილს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ წერტილი მოხვდება წესიერ ექვსკუთხედში (ხდომილობა A).



ნახ. 5.1.

ამოხსნა. ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრის საფუძველზე მივიღებთ:

$$P(A) = \frac{S_{ABCDEF}}{S_{(O;R)წრ}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

6. გიორგიმ შეავსო სპორტლოტოს ერთი ბილეთი (45 ნომრიდან გადახაზა 6). რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ გათამაშებაში გიორგი მოიგებს?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ ხდომილობები:

A={გიორგი მოიგებს}, Ai={გიორგის მიერ გადახაზული i ნომერი დაემთხვევა გათამაშებულიდან i ნომერს} i=1, 2,..., 6. სპორტლოტოს გათამაშების წესების მიხედვით ბილეთი იგებს, თუ დაემთხვა გადახაზული 3 ან მეტი ნომერი გათამაშებულიდან შესაბამისი რაოდენობის ნომრებს. ე.ი. $A=A_3+A_4+A_5+A_6$, აქედან გამომდინარე საწინააღმდეგო ხდომილობა $\bar{A}$={გიორგი ვერ მოიგებს} ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$\bar{A}=A_0+A_1+A_2$, $A_0+A_1+A_2$ უთავსებადი ხდომილობებია. უთავსებად ხდომილობათა ჯამის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულის მიხედვით, დავწერთ

$(\bar{A})=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)$

ვისარგებლოთ ამოცანა 4-ის ამოხსნის სქემით. M=45, m=r=6, k=0, 1 ან 2.

$$P(A_0)=\frac{C_6^0 C_{39}^6}{C_{45}^6}=0{,}377,\quad P(A_1)=\frac{C_6^1 C_{39}^5}{C_{45}^6}=0{,}424,$$

$$P(A_2)=\frac{C_6^2 C_{39}^4}{C_{45}^6}=0{,}151,$$ ამიტომ

$P(\bar{A})\approx 0.377+0{,}424+0{,}151=0{,}952.$

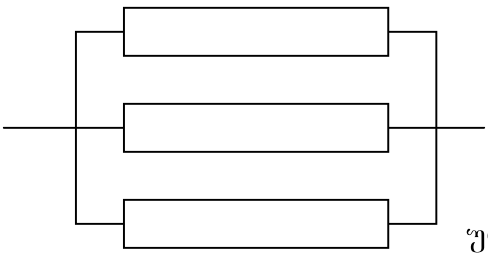
მოგების ალბათობა გამოვთვალოთ საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულით

$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0{,}952=0{,}048$

შენიშვნა: საძიებელი ალბათობა შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით

$P(A)=P(A_3+A_4+A_5+A_6)=P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)$

7. ელექტროსქემა შეიცავს პარალელურად შეერთებულ 3 კვანძს (იხ.ნახ.2). თითოეული კვანძის საიმედოდ მუშაობის ალბათობა შესაბამისად ტოლია 0,6; 0,7; 0,8. კანძები მწყობრიდან გამოდიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ვიპოვოთ სქემის საიმედოდ მუშაობის ალბათობა (ხდომილობა A).



ნახ.5.2.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ ხდომილობები ი={ი-ური კვანძი მუშაობს გამართულად}, i=1, 2,3, $\bar{A}$i={i-ური კვანძი გამოვა მწყობრიდან}. $\bar{A}$={სქემა გამართულად არ მუშაობს}. ე.ი. $\bar{A}=\bar{A}1\ \bar{A}2\ \bar{A}3$

ამოცანის პირობით $(A_1)=0{,}6$; $(A_2)=0{,}7$; $(A_3)=0{,}8$.

საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულით:

$(\bar{A}_1)=1-P(A_1)=0{,}4;$

$P(\bar{A}_2)=1-P(A_2)=0{,}3;$

$P(\bar{A}_3)=1-P(A_3)=0{,}2.$

$\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ ხდომილობების ერთობლივ დამოუკიდებლობის გამო დავწერთ

$(\bar{A})=P(\bar{A}_1)\ P(\bar{A}_2)\ P(\bar{A}_3)=0{,}4\cdot0{,}3\cdot0{,}2=0{,}024$

ამიტომ სქემის საიმედოდ მუშაობის ალბათობა ტოლია

$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0{,}024=0.976.$

8. ორი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის ერთიდაიგივე სამიზნეს. პირველი მსროლელი სამიზნეს აზიანებს 0,6-ის ტოლი ალბათობით, მეორე - 0,7-ის ტოლი ალბათობით. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამიზნეს დააწიანებს ერთი მსროლელი მაინც (ხდომილობა A).

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები ი={სამიზნეს დააზიანებს ი-ური მსროლელი}, ი=1,2. ამოცანის პირობით $P(A_1)=0{,}6$; $P(A_2)=0{,}7$. ცხადია, $A=A_1+A_2$, ამიტომ ნებისმიერი ორი ხდომილობის ჯამის ალბათობისა და დამოუკიდებელ ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\qquad P(A_2)=0{,}6+0{,}7-0{,}6\cdot0{,}7=0{,}88$

9. ელექტრომონტიორი ემსახურება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მომუშავე სამ ობიექტს. ალბათობა იმისა, რომ ერთი საათის განმავლობაში ერთი მონტიორის მომსახურება არ დასჭირდება პირველ ობიექტს ტოლია 0,95-ის, მეორე ობიექტისთვის - 0,9-ის, მესამესათვის - 0,8-ის. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი საათის განმავლობაში ელექტრომონტიორის მომსახურება დასჭირდება ერთ ობიექტს მაინც (ხდომილობა A).

ამოხსნა. აღვნიშნოთ ხდომილობები Ai={ერთი საათის განმავლობაში ელექტრომონტიორის მომსახურება არ დასჭირდება i-ურ ობიექტს}, i=1,2,3; ამოცანის პირობებით $P(A_1)=0{,}95$; $P(A_2)=0{,}9$; $P(A_3)=0{,}8$

ცხადია

$A=\overline{A_1\cdot A_2\cdot A_3}=\bar{A}_1+\ \bar{A}_2+\ \bar{A}_3$

A_1, A_2, A_3 ხდომილობების ერთობლივ დამოუკიდებლობის გამო $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ და $\bar{A}_3$ ხდომილობებიც ერთობლივ დამოუკიდებელია. ვისარგებლოთ ერთობლივი დამოუკიდებელ ხდომილობათა ჯამის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულით

$$P(A)=P(\bar{A}_1+\bar{A}_2+\bar{A}_3)=1-P(\overline{\overline{A_1}})\,P(\overline{\overline{A_2}})\,P(\overline{\overline{A_3}})=1-P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)=1-0{,}684=0{,}316$$

10. ხარატის მიერ დამზადებული ყოველი 100 დეტალიდან 97 არის ვარგისი და 68 პირველი ხარისხისაა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული ვარგისი დეტალი პირველი ხარისხისაა.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ ხდომილობები: A={შემთხვევით აღებული დეტალი ვარგისია}, B={შემთხვევით აღებული დეტალი პირველი ხარისხისაა}. საძიებელია პირობითი ალბათობა P(B/A). ამოცანის პირობით A და B ხდომილობას ერთდროულად ხელს უწყობს 100 ელემენტარული ხდომილობიდან 68. ალბათობის გამოსათვლელი კლასიკური ფორმულის გამოყენებით დავწერთ

$$P(A\cdot B)=\frac{m(A\cdot B)}{n}=\frac{68}{100}=0{,}68$$

A ხდომილობას ხელს უწყობს 97 ელემენტარული ხდომილობა, ამიტომ $P(A)=\frac{97}{100}=0{,}97$ ვისარგებლოთ პირობითი ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულით

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

ჩვენ შემთხვევაში მივიღებთ

$$P(B/A)=\frac{0.68}{0.97}\approx 0.7$$

11. გვაქვს სამი ერთნაირი ყუთი. პირველ ყუთში 10 თეთრი და 5 შავი ბირთვია. მეორეში - 8 თეთრი და 4 შავი, ხოლო მესამეში ყველა ბირთვი თეთრია. ბავშვი შემთხვევით იღებს ერთ-ერთ ყუთიდან ბირთვს. ვიპოვოთ: 1) ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულია თეთრი ფერის ბირთვი (ხდომილობა); 2) ალბათობა იმისა, რომ ბირთვი ამოღებულია პირველი ყუთიდან, თუ ვიცით, რომ იგი თეთრი ფერისაა.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ ხდომილობები H_i={ბირთვი ამოღებულია i-ური ყუთიდან}, i=1,2,3; რადგან $H_1+H_2+H_3=\Omega$ და $H_i.H_j=\varnothing$, $i\neq j$, i=1,2,3, j=1,2,3 ამიტომ H_1,H_2,H_3 - ჰიპოთეზებია. ამოცანის პირობით

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}, P(A/H_1)=\frac{10}{10+5}=\frac{2}{5}$$

$$P(A/H_2)=\frac{8}{8+4}=\frac{2}{3}, P(A)=1,$$

1) სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით დავწერთ

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{1}{3}(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}+1)=\frac{31}{45}$$

2) ბაიესის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}+1)}=\frac{6}{31}$$

პასუხები:

§2

1. 5/9	2. 1/36	3. 0,25	4. $1/C_{30}^{5}$	5. 1/9	6. 0,75
7. 1/7	8. 0,5	9. 0,04	10. 0,1	11. 0,9	12. 0,3
13. 2/π	14. 1/16π	15. 923/991	16. 192	17. 1/6	18. 1/20; 19/20
19. 0,01	20. $(r/R)^2$	21. 33/4π	22. 7/25	23. $\sqrt{3\pi}/9$	24. 2π/125
25. 0,8	26. 0,2	27. 0,28	28. 1/8	29. 2/π	30. 10/13
31. 1/720	32. 24/91	33. 0,5	34. 1/190	35. ≈0,4	36. 14/55
37. 0,3	38. 0,3	39. ≈0,023	40. 0,3	41. ≈0,0006	42. ≈0,007
43. ≈0,001	44. 1/6	45. ≈0,23	46. 2/15	47. ≈0,62	48. $\approx 4.10^{-6}$
49. ≈0,18	50. 12.10^{-5}				

§3

1. 0,26	2. 0,3024	3. 0,0024	4. 0,72	5. 0,316	6. 0,684
7. 2/3	8. 0,77	9. 0,0872	10. 0,064	11. 0,046	12. 0,024
13. 0,594	14. 173/495	15. 0,87	16. 0,322	17. 0,156	18. 0,251
19. 0,328	20. $1-\frac{90!96!}{100!86!}$	21. 13/132	22. 0,332	23. 0,089	24. 190/203
25.0.14	26.0,38	27. 0,126	28. 0,388	29. 0,89	30. 14/45

§5. დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობა

ბერნულის ფორმულა. მუავრ-ლაპლასის ლოკალური და ინტეგრალური ზღვარითი თეორემები. პუასონის ასიმპტოტური ფორმულა. უალბათესი რიცხვი

1. მონეტას ვაგდებთ ხუთჯერ (ვგულისხმობთ, რომ მონეტა „წესიერია“). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა ორზე ნაკლებ შემთხვევაში.

2. კამათელს ვაგდებთ ექვსჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ რიცხვი ხუთი მოვა არაუმეტეს 3 შემთხვევისა.

3. ორი თანაბარი ძალის მოჭადრაკე თამაშობს ჭადრაკს (თითოეულის მოგების ალბათობა ტოლია 0,5-ის). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველი მოჭადრაკე ოთხი პარტიიდან მოიგებს 3-ს (ყაიმი მხედველობაში არ მიიღება).

4. წინა ამოცანის პირობებში, რომლის ალბათობაა მეტი ოთხი პარტიიდან ორის მოგებისა, თუ ექვსი პარტიიდან სამის?

5. ტექნიკური კონტროლი ამოწმებს 10 დეტალისაგან შემდგარ პარტიას. დეტალის სტანდარტულობის ალბათობა ტოლია 0,75. იპოვეთ სტანდარტული დეტალების უალბათესი რიცხვი.

6. იპოვეთ 19 პერფობარათში სწორად პერფორირებული ბარათების უალბათესი რიცხვი, თუ ბარათის არასწორად პერფორირების ალბათობა ტოლია 0,1-ის.

7. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ოთხ დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობა მოხდება არანაკლებ სამჯერ, თუ ცალკეულ ცდაში A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ტოლია 0,4-ის.

8. ცალკეულ დამოუკიდებელ ცდაში ხდომილობის მოხდენის ალბათობაა 0,7. იპოვეთ ცდათა n რიცხვი, რომლის დროსაც უალბათესი რიცხვი ტოლი იქნება 20-ის.

9. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კალათბურთელი 10 სროლიდან კალათში ბურთს მოათავსებს არანაკლებ 9-ჯერ, თუ ყოველ ცალკეულ სროლაში კალათში ბურთის ჩაგდების ალბათობა ტოლია 0,8-ის.

10. ბერნულის სქემაში ხდომილობის ალბათობა ტოლია 0,3-ის. იპოვეთ ცდათა რიცხვი n, რომლის დროსაც უალბათესი რიცხვი ტოლია 30-ის.

11. იპოვეთ ალბათობა იმისაბ რომ 2400 დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობა მოხდება 1400-ჯერ, თუ ცალკეულ ცდაში P(A)=0,6.

12. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 2100 დამოუკიდებელ ცდაში ხდომილობა მოხდება არანაკლებ 1470 და არაუმეტეს 1500-ისა, თუ ცალკეულ ცდაში P(A)=0,7.

13. ტექნიკური კონტროლი ამოწმებს 475 დეტალს. დეტალის დეფექტიანობის ალბათობა 0,05-ის ტოლია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დეფექტური აღმოჩნდება არანაკლებ 400 და არაუმეტეს 450 დეტალი.

14. ნაკეთობის 30% უმაღლესი ხარისხისაა. ვამოწმებთ 6 ნაკეთობას. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 4 მათგანია უმაღლესი ხარისხის.

15. საწყობში მიღებული დეტალების 60% უმაღლესი ხარისხისაა. ვიღებთ 10 დეტალს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 3 დეტალია უმაღლესი ხარისხის.

16. ალბათობა იმისა, რომ საამქროში ელექტროენერგიის დანახარჯი ერთი დღე-ღამის განმავლობაში არ გადააჭარბებს ნორმას ტოლია 0,9-ის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 5 დღე-ღამიდან ელექტროენერგიის დანახარჯი არ გადააჭარბებს ნორმას 4 დღე-ღამეში.

17. ყუთში 10 თეთრი და 5 შავი საგანია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე თუ ამოვიღებთ თანმიმდევრობით 14 საგანს დაბრუნებით, მათ შორის აღმოჩნდება არანაკლებ 12 თეთრი საგანი.

18. ვაჟის დაბადების ალბათობა 0,515-ის ტოლია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 10 ახალშობილს შორის 4 გოგო იქნება.

19. მაღაზიაში შევიდა 8 მომხმარებელი. თითოეულისათვის რაიმეს ყიდვის ალბათობა ტოლია 0,3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამი მათგანი იყიდის.

20. ცალკეულ ცდაში ხდომილობის ალბათობა ტოლია 0,64. რამდენი დამოუკიდებელი ცდა უნდა ჩავატაროთ, რომ უალბათესი რიცხვი ტოლი იყოს 51-ის.

21. არასტანდარტული დეტალის დამზადების ალბათობა ტოლია 0,05-ის. რამდენი დეტალი უნდა იყოს პარტიაში, რომ მასში არასტანდარტული დეტალების უალბათესი რიცხვი 63-ის ტოლი იყოს.

22. 28 ნერგიდან თითოეულს გაზრდის ტოლი ალბათობა გააჩნია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ გაიზრდება 20 ნერგი.

23. საგარანტიო ტელევიზორის კინესკოპის მტყუნების ალბათობა ტოლია 0,12-ის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 46 ტელევიწორიდან 36 გაუძლებს საგარანტიო ვადას.

24. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 700 ნაკეთობიდან უმაღლესი ხარისხის ნაკეთობათა რიცხვი არანაკლებ 460 და არაუმეტეს 600 იქნება, თუ ალბათობა იმისა, რომ ნაკეთობა უმაღლესი ხარისხისაა, ტოლია 0,7-ის.

25. „ცაციები" შეადგენენ საშუალოდ 1%-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 200 ადამიანიდან 4 „ცაცია" იქნება.

26. დეტალის დეფექტურობის ალბათობა ტოლია 0,02. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 100 დეტალიდან არც ერთი დეფექტური არ იქნება.

27. ალბათობა იმისა, რომ 1000 საათის მუშაობის შემდეგ ნათურა არ გადაიწვება ტოლია 0,2-ის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამი ნათურიდან ერთი მაინც არ გადაიწვება 1000 საათის მუშაობის შემდეგ.

28. T დროში კონდენსატორის გაფუჭების ალბათობა ტოლია 0,2. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ T დროში 100 კონდენსატორიდან გაფუჭდება არანაკლებ 20.

29. T დროში ტელევიზორის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა 0,01-ის ტოლია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ T დროში 100 ტელევიწორიდან მწყობრიდან გამოვა არანაკლებ 95 ტელევიზორისა.

30. T დროში ხელსაწყოს მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა ტოლია 0,2-ის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 100 ხელსაწყოდან მწყობრიდან გამოსული ხელსაწყოების რიცხვი არანაკლებ 14 და არაუმეტეს 26-ია.

§6. დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდეები

1. ფიქსირებულ t დროში ოთხმოტორიანი თვითმფრინავის თითოეული მოტორის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა ერთიდაიგივეა და უდრის 0,1. მოტორები მწყობრიდან გამოდიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ვიპოვოთ:

ა) ალბათობა იმისა, რომ t დროში მწყობრიდან გამოვა თვითმფრინავის 2 მოტორი.

ბ) ალბათობა იმისა, რომ მწყობრიდან გამოსულ მოტორთა რიცხვი მეტია ერთზე.

გ) t დროში მწყობრიდან გამოსული მოტორების უალბათესი რიცხვი.

ამოხსნა: აღვნიშნოთ ხდომილობა A={თვითმფრინავის მოტორი გამოდის მწყობრიდან t დროში}. ამოცანის პირობით

P=P(A)=0,1 q=P(Ā)=1-P=0,9, n=4

ა) ვისარგებლოთ ბერნულის ფორმულით

$$P_n(K)=\frac{n!}{K!(n-k)!}p^K q^{n-k}$$

სადაც 0<p<1, 0≤k≤n რადგან k=2, მივიღებთ:

$$P_4(2)=\frac{4!}{2!2!}(0,1)^2(0,9)^2=0,0486$$

ბ) ზოგადი საძიებელია Pn(k_1≤k≤k_2) ალბათობა იმისა, რომ n ცდაში A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვი k მიიღებს მნიშვნელობას [k_1,k_2] შუალედიდან. ცხადია:

$$P_n(k_1\le k\le k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2}P_n(k)$$

რადგან λ=np=4·0,1=0,4<10, ამიტომ თუ ვისარგებლებთ პუასონის ასიმპტოტური ფორმულით

$$P_n(K)\approx\frac{\lambda^K}{K!}e^{-\lambda}$$

საძიებელი ალბათობის გამოსათვლელად მივიღებთ გამოსახულებას

$$P_n(k_1\le k\le k_2)\approx\sum_{k=k_1}^{k_2}\frac{\lambda}{k!}e^{-\lambda}$$

მაშასადამე

$$P_4(2\le k\le 4)\approx\sum_{k=2_1}^{4}\frac{(0,4)^k}{k!}e^{-\lambda}0,4=\sum_{K=0}^{4}\frac{(0,4)^K}{k!}e^{-0.4}-\sum_{K=0}^{1}\frac{(0,4)^K}{k!}e^{-0.4}$$

ვისარგებლოთ ცხრილი IV-ით (იხ. დამატება). სინაიდან m=4, ან m=1 λ=0,4, გვექნება

$$P_4(2\le k\le 4)\approx 0,9999-0,9384=0,0615$$

შენიშვნა: ჩვენ შემთხვევაში n=4 არაა დიდი რიცხვი, ამიტომ საძიებელი ალბათობის გამოსათვლელად შეიძლება ვისარგებლოთ ბერნულის ფორმულითაც. მივიღებთ

$$P_4(2\le k\le 4)=\sum_{K=2}^{4}C_4^kP^kq^{n-k}=P4(2)+P4(3)+P4(4)=$$

$$=\frac{4!}{2!2!}(0,1)^2(0,9)^2+\frac{4!}{3!1!}(0,1)^3(0,9)+\frac{4!}{2!0!}(0,1)^4=0,0523$$

მაგრამ ეს მეთოდი უფრო შრომატევადია და თანაც როგორც აღვნიშნეთ, რადგან np<10, უკეთეს მიახლოებას გვაძლევს ზემოთ განხილული მეთოდი პუასონის ასიმპტოტური ფორმულის გამოყენებით,

გ) როგორც ცნობილია, t დროში მწყობრიდან გამოსული მოტორების რიცხვის უალბათესი მნიშვნელობა K_o იქნება (n+1)p რიცხვის მთელი ნაწილის - [(n+1)p] ტოლი (თუ (n+1)p მთელი რიცხვია, მაშინ გვაქვს ორი უალბათესი მნიშვნელობა Ko=(n+1)p-1 და Ko=(n+1)p). ჩვენ შემთხვევაში

$$(n+1)p=(4+1).0,1=0,5$$

ამიტომ

$$Ko=[(n+1)p]=[0,5]=0$$

შენიშვნა: ზოგიერთ ამოცანაში უმჯობესია დავწეროთ უტოლობა, რომელსაც აკმაყოფილებს უალბათესი მნიშვნელობა Ko. კერძოდ,

$$np-q \le Ko \le np+q$$

2. ავტომატური დაზგის მიერ სტანდარტული დეტალის დამზადების ალბათობა ტოლია 0,9-ის. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დაზგის მიერ დამზადებული 100 დეტალიდან სტანდარტულია: ა) 93 დეტალი: ბ) არანაკლებ 81 და არაუმეტეს 93 დეტალი.

ამოხსნა: ჩავთვალოთ, რომ ავტომატური დაზგა ცალკეულ დეტალს ამზადებს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. n=100 სტანდარტული დეტალის დამზადების (ხდომილობა A) ალბათობა p=p(A)=0,9

$q=P(\bar{A})=1-P=1-0,9=0,1$; $npq=100.0,9.0,1=9$; $np=100.0,9=90>10$

ა) რადგან K=93, n=100 საკმარისად დიდი რიცხვია, ამიტომ საძიებელი Pn(k) ალბათობის გამოთვლა ბერნულის ფორმულით ტექნიკურად რთულდება.

როგორც ვნახეთ np>10, npq=9. მაშასადამე, შეგვიძლია ვისარგებლოთ მუავრ-ლაპლასის ლოკალური ზღვარითი ფორმულით:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$$

სადაც

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}},$$

$$0<p<1 \text{ და } \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}$$

φ (x) ფუნქციის მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილი I-ით (იხ. დამატება). Φ(-x)= φ(x), φ(x)≈0,0001, როცა x≥ 4 ჩვენ შემთხვევაში

$$x = \frac{93-90}{\sqrt{9}} = 1,$$

ცხრილი I-ის მიხედვით ვპოულობთ φ(1)≈0,242 მაშასადამე,

$$P_{100}(93) \approx \frac{1}{\sqrt{9}}\varphi(1) \approx 0.081$$

გ) საძიებელია ალბათობა $Pn(k_1 \le k \le k_2)$, $k_1=81$, $k_2=93$

np>10 ვისარგებლოთ მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური ზღვარითი თეორემით, კერძოდ, როცა 0<p<1, საკმაოდ დიდი n-თვის ვწერთ:

$Pn(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi o(X_2) - \Phi o(X_1)$,

სადაც

$$X_{10} = \frac{K_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{K_2 - np}{\sqrt{npq}}, \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

ფუნქციის მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილი II-ით (იხ.დანართი).

ამასთან Φo(-X)=-Φo(X)

ჩვენ შემთხვევაში

$$X_1 = \frac{81-90}{\sqrt{9}} = -3, x_2 = \frac{93-90}{\sqrt{9}} = 1$$

ვინაიდან

Φo(-3)=-Φo(3)≈0,4986 და Φo(1)≈0,3413

ამიტომ

$P_{10}(81 \le K \le 93) \approx 0,3413+0,4986=0,8399$

3. ქარხანაში არასტანდარტული ნაწარმის დამზადების ალბათობა ტოლია 0,004. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დამზადებული 1000 ნაწარმიდან არასტანდარტული აღმოჩნდება 10.

ამოხსნა: აღვნიშნოთ ხდომილობა A={ქარხნის მიერ დამზადებული ნაწარმი არასტანდარტულია}, ამოცანის პირობის თანახმად

$P=P(A)=0,004$, $q=P(\bar{A})=1-P=1-0,004=0,996$

n=1000 საკმარისად დიდი, ხოლო P=0,004 საკმარისად მცირე რიცხვია, ამასთან

$\lambda=n\,P=1000\cdot 0,004=4<10$, $npq=1000\cdot 0,004\cdot 0,996=3,984<9$

ამიტომ შეგვიძლია ვისარგებლოთ პუასონის ასიმეტრიული ფორმულით

$$Pn(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

ცხრილი III-ის გამოყენებით (იხ. დამატება) k=10 და λ=4

$P_{1000}(10) \approx 0,00529$.

პასუხები:

§4

1. 3/16   2. 0,99   3. 5/16   4. $P_4(2)>P_6(3)$ 5. 8   6. 17; 18
7. ≈0,18   8. $28 \le n \le 29$ 9. 1,8 0,89   10. $100 \le n \le 102$ 11. 0,0041   12. 0,4236
13. 0,001   14. 0,06   15. 0,036   16. 0,328   17. 0,105   18. 0,217
19. 0,254   20. $79 \le n \le 80$ 21. $1259 \le n \le 1279$ 22. 18/29   23. 0,972   24. 0,993
25. 0,09   26. 0,14   27. 0,488   28. 0,5   29. 0,02   30. 0,99

§7. დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი, მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია

(1-30) ვიპოვოთ დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის ა) მათემატიკური ლოდინი: ბ) დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრაბ თუ ξ-ს განაწილების კანონს აქვს სახე

1.

ξ	-5	0	3	4	5
P_ξ	0.2	0.1	0.3	0.2	P

2.

ξ	-1	0	2	5
P_ξ	0.5	P	0.1	0.1

3.

ξ	-10	-2	3	5
P_ξ	P	0.2	0.4	0.1

4.

ξ	0	3	5	10
P_ξ	0.1	0.2	0.3	P

5.

ξ	-10	-4	1	2
P_ξ	0.1	0.1	0.2	P

6.

ξ	-1	1	4	5
P_ξ	0.2	0.1	P	0.3

7.

ξ	10	11	12
P_ξ	0.4	0.1	P

8.

ξ	5	5.1	6.5
P_ξ	P	0.4	0.2

9.

ξ	1	2.5	5
P_ξ	0.1	P	0.3

10.

ξ	6	6.5	10
P_ξ	0.3	P	0.5

11.

ξ	-10	-8.5	0
P_ξ	0.3	P	0.4

12.

ξ	15	20	25
P_ξ	0.4	P	0.4

13

ξ	-12	-11	12
P_ξ	0.4	P	0.3

14

ξ	-15	-12	1
P_ξ	P	0.7	0.2

15

ξ	-1.5	1.5	2.5
P_ξ	0.1	0.2	P

16

ξ	-1	-0.5	1	5
P_ξ	0.1	0.2	0.3	P

17

ξ	-4	-2.5	0	1.5
P_ξ	0.2	0.1	0.3	P

18

ξ	-3.5	3	25
P_ξ	P	0.4	0.3

19

ξ	-2.5	-2	3	5
P_ξ	0.1	0.2	0.4	P

20

ξ	25	30	35
P_ξ	P	0.2	0.4

21

ξ	-1.7	0	2	3
P_ξ	0.1	P	0.5	0.1

22

ξ	1.8	1.9	2	3	4
P_ξ	P	0.1	0.1	0.3	0.2

23

ξ	-0.5	-0.1	0	9
P_ξ	P	0.1	0.3	0.4

24

ξ	-15	-10	-5	-1
P_ξ	0.4	P	0.1	0.3

25

ξ	25	25.1	26	27
P_ξ	0.1	0.2	P	0.5

26

ξ	13	17	19	20
P_ξ	P	0.4	0.2	0.1

27

ξ	-2.5	5	11	21
P_ξ	P	0.1	0.3	0.2

28

ξ	0.1	0.15	0.16	0.17
P_ξ	0.1	0.2	P	0.3

29

ξ	-30	-20	10	11
P_ξ	P	0.5	0.1	0.1

30

ξ	5	10	15	20	25
P_ξ	0.1	0.1	0.1	0.1	P

§8. უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, განაწილების სიმკვრივე, მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია

(1-20) იპოვეთ უწყვეტი ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის ა) განაწილების სიმკვრივე და პარამეტრი; ბ) მათემატიკური ლოდინი; გ) დისპერსია; დ) მოცემულ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა, თუ ξ-ის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე:

1. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{თუ } x\le 0 \\ \alpha x^2, & \text{თუ } 0<x\le 1 \\ 1, & \text{თუ } x>0 \end{cases}$

$$P(\frac{1}{2} < \xi < 1)$$

2. $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 1 \\ \alpha(x^2 - x), & \text{თუ } 1 < x \le 2 \\ 1, & \text{თუ } x > 2 \end{cases}$$

$$P(\frac{1}{2} < \xi < 1\frac{1}{2})$$

3. $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 1 \\ \alpha x^3, & \text{თუ } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{თუ } x > 1 \end{cases}$$

$$P(0 < \xi < \frac{1}{2})$$

4. $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 0 \\ \alpha(x^2 + 2x), & \text{თუ } 0 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & \text{თუ } x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$P(0 < \xi < \frac{1}{4})$$

5. $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 2 \\ ax - 1, & \text{თუ } 2 \le x \le 4 \\ 1, & \text{თუ } x > 4 \end{cases}$$

$$P(3 < \xi < 3\frac{1}{2})$$

6. $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 0 \\ ax^2, & \text{თუ } 0 < x \le 3 \\ 1, & \text{თუ } x > 3 \end{cases}$$

$$P(1 < \xi < 2)$$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le 0\\ ax^2, & \text{თუ } 0<x\le 2\\ 1, & \text{თუ } x>2\end{cases}$

$P(1<\xi<2)$

8. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le -\frac{\pi}{2}\\ a\cos x, & \text{თუ } x\in \left]-\frac{\pi}{2},0\right]\\ 1, & \text{თუ } x>0\end{cases}$

$P(-\frac{\pi}{6}<\xi<0)$

9. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le 0\\ a\sin x, & \text{თუ } 0<x\le \frac{\pi}{6}\\ 1, & \text{თუ } x>\frac{\pi}{6}\end{cases}$

$P(0<\xi<\frac{\pi}{8})$

10. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le \frac{3}{4}\pi\\ a\cos 2x, & \text{თუ } \frac{3\pi}{4}<x\le \pi\\ 1, & \text{თუ } x>\pi\end{cases}$

$P(\frac{3}{4}\pi<\xi<\pi)$

11. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le -1\\ a(x+1), & \text{თუ } -1<x\le 2\\ 1, & \text{თუ } x>2\end{cases}$

$P(0\le\xi\le 1)$

12. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le \frac{1}{2} \\ ax^2, & \text{თუ } \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 1, & \text{თუ } x > 1 \end{cases}$

$P(0.5 \le \xi \le 0.9)$

13. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 0 \\ ax^2, & \text{თუ } 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{თუ } x > 2 \end{cases}$

$P(0 < \xi \le 1)$

14. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 2 \\ a(2x-3), & \text{თუ } 2 < x \le 4 \\ 1, & \text{თუ } x > 4 \end{cases}$

$P(2 \le \xi < 3)$

15. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x, & \text{თუ } -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{თუ } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$P(0 \le \xi \le \frac{\pi}{6})$

16. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 0 \\ ax, & \text{თუ } 0 < x \le 4 \\ 1, & \text{თუ } x > 4 \end{cases}$

$P\{0 < \xi \le 3\}$

17. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 0 \\ ax, & \text{თუ } 0 < x \le 4 \\ 1, & \text{თუ } x > 4 \end{cases}$

$P\{1 \le \xi \le 3\}$

18. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le 0\\ a\sin x, & \text{თუ } 0<x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 1, & \text{თუ } x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

$P\{0<\xi\le \frac{\pi}{2}\}$

19. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le 0\\ a\sin 2x, & \text{თუ } 0<x\le \dfrac{\pi}{4}\\ 1, & \text{თუ } x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

$P\{\frac{\pi}{8}<x<\frac{\pi}{4}\}$

20. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le \dfrac{\pi}{6}\\ a\cos 3x, & \text{თუ } \dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{3}\\ 1, & \text{თუ } x>\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$

$P\{\frac{\pi}{6}<\xi\le \frac{\pi}{2}\}$

(21-30) იპოვეთ უწყვეტი ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის: ა) განაწილების ფუნქცია, განაწილების უცნობი პარამეტრი a, ბ) მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, გ) მოცემულ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა, თუ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე:

21. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le -2\\ a/2, & \text{თუ } -2<x\le 2\\ 0, & \text{თუ } x>2\end{cases}$

$P\{0<\xi\le 2\}$

22. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x<\dfrac{1}{3}\\ 3a, & \text{თუ } \dfrac{1}{3}\le x\le 1\\ 0, & \text{თუ } x>1\end{cases}$

$P\{\frac{1}{2}<x\le 1\}$

23. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x<4\\ ax, & \text{თუ } 4\le x\le 4.5\\ 0, & \text{თუ } x>4.5\end{cases}$

$P\{4.3\le \xi\le 4.5\}$

24. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le 1\\ 2ax, & \text{თუ } 1<x\le \sqrt{2}\\ 0, & \text{თუ } x>1\end{cases}$

$P\{1<x<1.1\}$

25. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x<-1\\ a(x+1), & \text{თუ } -1\le x\le 0\\ 0, & \text{თუ } x>0\end{cases}$

$P\{-\frac{1}{2}<\xi\le 0\}$

26. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x<0\\ 3ax^2, & \text{თუ } 0\le x\le 1\\ 0, & \text{თუ } x>1\end{cases}$

$P\{0\le x\le \frac{1}{2}\}$

27. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x<0\\ 2ax, & \text{თუ } 0\le x\le \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 0, & \text{თუ } x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$P\{0\le \xi \le 1\}$

28. $f(x)=\begin{cases}0, \text{თუ } x<21\\ a, \text{თუ } 21\le x\le 22\\ 0, \text{თუ } x>22\end{cases}$

$P\{21\le x\le 21.5\}$

29. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x>\dfrac{1}{8}\\ 8a, & \text{თუ } \dfrac{1}{8}\le x\le 1\\ 0, & \text{თუ } x\ge 1\end{cases}$

$P\{\frac{1}{8}\le x\le \frac{1}{4}\}$

30. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x<0\\ ax^3, & \text{თუ } 0\le x\le 2\\ 0, & \text{თუ } x>2\end{cases}$

$P\{1\le x\le 2\}$

§9. თანაბარი, მაჩვენებლაინი და ნორმალური განაწილების კანონი

1. ξ შემთხვევითი სიდიდე თანაბრადაა განაწილებული [5;6] შუალედში. დაწერეთ ξ-ს განაწილების სიმკვრივე, იპოვეთ ξ-ს განაწილების ფუნქცია, მათემატიკური ლოდინი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

2. გამზომი ხელსაწყოს სკალის დანაყოფის ფასია 0,2. ხელსაწყოს მაჩვენებელი მრგვალდება უახლოეს მთელ დანაყოფამდე. იპოვეთ ალბათობა

იმისა, რომ ათვლისას დაშვებულია შეცდომა (ცდომილობა), რომელიც არ აღემატება 0,004-ს.

3. წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ათვისას დაშვებული ცდომილობა აღემატება 0,05-ს.

4. ელექტროსაათის წუთების ისარი გადაადგილდება ნახტომებით ყოველი წუთის ბოლოს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ მომენტში საათი აჩვენებს დროს, რომელიც ჭეშმარიტი დროისაგან განსხვავდება არა უმეტეს 20 წამისა.

5. იპოვეთ]2;8[ინტერვალში თანაბრად განაწილებული ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა.

6. ქარხანა ამზადებს ერთი სახის მილებს. მილის დიამეტრი იზომება მიახლოებით [9; 9,5] შუალედში, ამასთან ჩავთვალოთ მილის დიამეტრი ξ შემთხვევით სიდიდედ, რომელიც თანაბრადაა განაწილებული [9; 9,5] შუალედში. დაწერეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, გამოთვალეთ M(ξ) და D (ξ).

7.]5-b, 5+b[ინტერვალებში თანაბარი კანონით განაწილებული ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის დაწერეთ განაწილების სიმკვრივე და გამოთვალეთ მათემატიკური ლოდინი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

8. იპოვეთ]-9;5[შუალედში თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე და [-10;5] ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა.

9. დაწერეთ მაჩვენებლიანი კანონით განაწილებული ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე, განაწილების ფუნქცია, როცა პარამეტრი λ=5 და გამოთვალეთ ამ შემთხვევითი სიდიდის [0,1;1] ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა.

10. დაწერეთ მაჩვენებლიანი კანონით განაწილებული ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე და გამოთვალეთ M(ξ) და D(ξ), თუ განაწილების პარამეტრი λ=6.

11. მაჩვენებლიანი კანონი განაწილებული უწყვეტი ტიპის ξ შემთხვევაში სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x<0\\ 0{,}04e^{-0{,}04x}, & \text{როცა } x\geq 0\end{cases}$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას]1;2[ინტერვალიდან და გამოთვალეთ საშუალო კვადრატული გადახრა.

12. მაჩვენებლიანი კანონით განაწილებული უწყვეტი ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე

$$f(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0,6x}, \text{ როცა } x\geq 0\\ 0, \text{როცა } x<0\end{cases}$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ξ მიიღებს მნიშვნელობას]2;5[ინტერვალიდან და დაწერეთ განაწილების სიმკვრივე.

13. იპოვეთ დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა მაჩვენებლიანი კანონით განაწილებული ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის, თუ მისი განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე

$$f(x)=\begin{cases}0, \quad \text{როცა } x<0\\ 10e^{-10x}, \text{როცა } x\geq 0\end{cases}$$

14. ჩაწერეთ ნორმალური კანონით განაწილებული ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივისა და განაწილების ფუნქციის ანალიზური სახე, ააგეთ შესაბამისი გრაფიკები,თუ ξ-ს განაწილების პარამეტრებია:

a=M(ξ)=3, $\sigma=\sqrt{D(\xi)}=2$

15. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით, რომლის პარამეტრებია a=M(ξ)=10 და $\sigma=\sqrt{D(\xi)}=2$. იპოვეთ P{12<ξ<14}

16. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით, რომლის პარამეტრებია a=M(ξ)=20, $\sigma=\sqrt{D(\xi)}=5$. იპოვეთ P{15<ξ<25}

17. გაზომვის შედეგების შეცდომები განაწილებულია ნორმალური კანონით პარამეტრებით a=0მმ და σ=20მმ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ გაზომვის შეცდომის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლები იქნება 10მმ-ზე.

18. ნორმალური კანონით განაწილებული ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე

$$f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$$

იპოვეთ ξ-ის განაწილების ფუნქცია, მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

19. ავტომატი ამზადებს დეტალებს. იზომება დეტალის სიგრძე ξ, რომელიც განაწილებულია ნორმალური კანონით 50მმ-ის ტოლი მათემატიკური ლოდინით (საპროექტო სიგრძე). ფაქტიურად დამზადებული დეტალების სიგრძეები არანაკლებია 32მმ-ზე და არ აღემატება 67მმ-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული დეტალის სიგრძე მეტია 55მმ-ზე.

20. წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული დეტალის სიგრძე ნაკლებია 40მმ-ზე.

21. რაღაც ნივთიერების აწონვის დროს დაშვებული შემთხვევითი შეცდომები (ცდომილება) ξ განაწილებულია ნორმალური კანონით, რომლის საშუალო კვადრატული გადახრა σ=20გ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აწონის დროს დაშვებული შეცდომების აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება 10გ-ს.

22. ტექნიკური კონტროლის განყოფილება ამოწმებს ქარხანაში დამზადებული ერთიდაიგივე სახის ნაწარმის ξ სიგრძეს, ითვლება, რომ იგი განაწილებულია ნორმალური კანონით =0,4მმ-ის ტოლი საშუალო კვადრატული გადახრით. ნაწარმი ვარგისია, თუ მისი სიგრძის გაზომვის შედეგის საპროექტო ზომისაგან გადახრის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია 0,7მმ-ზე. იპოვეთ რამდენია ვარგისი 150 ნაწარმში.

23. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით $a=M(\xi)=0$, $\sigma^2=D(\xi)=1$ პარამეტრებით. დაწერეთ ξ-ს განაწილების ფუნქციის ანალიზური სახე, ააგეთ შესაბამისი გრაფიკები და იპოვეთ $P\{|\xi|<2\}$

24. ნორმალური კანონით განაწილებული ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია შესაბამისად ტოლია 10 და 4-ის. იპოვეთ $\{12<\xi<14\}$

25. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით, რომლის პარამეტრებია $a=M(\xi)=30$ და $\sigma^2=(\xi)=400$. იპოვეთ $P\left\{\left|\frac{\xi-a}{\sigma}\right|<\delta\right\}$, თუ δ=5.

26. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით, რომლის მათემატიკური ლოდინი 0-ია. ამ შემთხვევითი სიდიდის]-1;1[ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა ტოლია 0,5-ის. იპოვეთ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა - σ.

მითითება: ისარგებლეთ (7.7) ფორმულით და ცხრილი II-ით.

27. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით, რომლის პარამეტრებია $a=M(\xi)=20$ და $\sigma^2=D(\xi)=100$. იპოვეთ $P\{|\xi-a|<\delta\}$ თუ $\delta=3$

28. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით, რომლის პარამეტრებია $a=M(\xi)=30$ და $\sigma^2=D(\xi)=100$. იპოვეთ $P\{10<\xi<50\}$

29. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით, რომლის პარამეტრებია $a=M(\xi)=7$ და $\sigma^2=D(\xi)=49$. დაწერეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივისა და განაწილების ფუნქციის ანალიზური სახე. ააგეთ შესაბამისი გრაფიკები.

30. წინა ამოცანის პირობები გამოთვალეთ $P\{-10<\xi<10\}$

§10. მეთოდური მითითებები

1. ვიპოვოთ დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის ა) მათემატიკური ლოდინი; ბ) დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა, თუ ξ-ს განაწილების კანონს აქვს სახე

ξ	-1	2
P_ξ	P	0.6

ამოხსნა: როგორც ცნობილია დისკრეტული განაწილების კანონის შესაბამისი ალბათობების ჯამი ტოლია ერთის, ე.ი.

$P+0,6=1 \quad P=0,4$

ა) ვისარგებლოთ დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის გამოსათვლელი ფორმულით

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{n} x_i P_i$$

რის შედეგადაც მივიღებთ

$M(\xi)=-1\cdot 0,4+2\cdot 0,6=0,8$

 გ) დისპერსიის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით

$$D(\xi)=M(\xi^2)-[M(\xi)]^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i P_i\right)^2$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ჩვენს შემთხვევაში $M(\xi)=0,8$, მივიღებთ

$D(\xi)=1\cdot 0,4+4\cdot 0,6-(0,8)^2=2,16$

საშუალო კვადრატული გადახრა აღვნიშნოთ σ_ξ -თი. ცნობილია, რომ

$$\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)},$$

ე.ი.

$$\sigma_\xi = \sqrt{2.16} \approx 1.47$$

2. უწყვეტი ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x \le 0 \\ ax^3, & \text{როცა } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{როცა } x > 1 \end{cases}$$

ვიპოვოთ: ა) ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე f(x) და a პარამეტრი. ბ) მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა. გ) ალბათობა იმისა, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობებს $[0; \frac{1}{2}]$ შუალედიდან.

ამოხსნა: ა) როგორც ცნობილია f(x)=F'(x), ამიტომ გვექნება

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x \le 0 \\ 3ax^2, & \text{როცა } 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{როცა } x > 1 \end{cases}$$

პარამეტრის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ პირობით $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, მივიღებთ

$$\int_{-\infty}^{0} odx + \int_{0}^{1} 3ax^2 dx + \int_{1}^{+\infty} odx = 1,$$

მაშასადამე

a=1

ე.ი

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x \le 0 \\ 3x^2, & \text{როცა } 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{როცა } x > 1 \end{cases}$$

ბ) შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

მივიღებთ:

$$M(\xi)=3\int_0^1 x^3 dx=\frac{3}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{3}{4},$$

ხოლო დისპერსია გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$D(\xi)=M(\xi^2)-[M(\xi)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx)^2,$$

რის შედეგადაც მივიღებთ:

$$D(\xi)=3\int_0^1 x^4 dx-(\frac{3}{4})^2=\frac{3}{5}x^5\Big]_0^1-\frac{9}{16}=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80},$$

საშუალო კვადრატული გადახრა σ_ξ ტოლი იქნება:

$$\sigma_\xi=\sqrt{\frac{3}{80}}\approx 0.2,$$

გ) საძიებელია ალბათობა $P\{0\le\xi\le\frac{1}{2}\}$

როგორც ცნობილია ალბათობა იმისა, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას [a,b] შუალედიდან, გამოითვლება ფორმულით

$P\{a\le\xi\le b\}=F(b)-F(a)$

ან

$$P\{a\le\xi\le b\}=\int_a^b f(x)dx$$

ვისარგებლოთ ერთ-ერთი მათგანით, მივიღებთ:

$$P\{a\le\xi\le b\}=F(\frac{1}{2})-F(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-0=\frac{1}{8}$$

3. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x<0\\ \cos x, & \text{როცა } 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{როცა } x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

ვიპოვოთ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

როცა x<0, მაშინ

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$$

ღოცა $0\le x\le \frac{\pi}{2}$, მაშინ

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x}\cos t dt=\sin t\ \Big]_{0}^{x}=\sin x$$

ღოცა $x>\frac{\pi}{2}$, მაშინ

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0dt=1$$

მაშასადამე

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x<0\\ \sin x, & \text{როცა } 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 1, & \text{როცა } x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

4. ამპერმეტრის სკალას დანაყოფის ფასია 0,1 ამპ. გაზომვის შედეგი მრგვალდება უახლოეს მთელ დანაყოფამდე. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ათვლისას დაშვებული ცდომილება აღემატება 0,02 ამპ-ს.

ამოხსნა: ანათვალის დამრგვალებით გამოწვეული ცდომილება შეიძლება განვიხილოთ როგორც შემთხვევითი სიდიდე ξ, რომელიც განაწილებულია თანაბრად 0,1-ის ტოლი სიგრძის ინტერვალში. (ანუ ξ მოთავსებულია ინტერვალში ორ მეზობელ მთელ დანაყოფს შორის). ამიტომ ξ-ს განაწილების სიმკვრივე $f(x)=\frac{1}{b-a}$, b-a არის იმ ინტერვალის სიგრძე, სადაც მოთავსებულია ξ და f(x)=0 ამ ინტერვალის გარეთ ჩვენ შემთხვევაში $f(x)=\frac{1}{0.1}=10$.

ცხადია, რომ ანათვალის ცდომილობა გადააჭარბებს 0,02 ამპ-ს თუ იგი მოთავსებული იქნება [0,03; 0,08[ინტერვალში. ზემოთ განხილული ამოცანა 2-ის გ) პირობის ანალოგიურად გამოვითვლით

$$P\{0.02 < \xi < 0.08\} = \int_{0.02}^{0.08} 10dx = 0.6$$

5. უწყვეტი ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვირივეს აქვს სახე

$$f(x) = \begin{cases} 3\mathrm{e}^{-3\mathrm{x}}, & \text{როცა } x \geq 0 \\ 0, & \text{როცა } x < 0 \end{cases}$$

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ξ მიიღებს მნიშვნელობას]0,13; 0,7[ინტერვალიდან.

ამოხსნა: როგორც ვხედავთ ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია მაჩვენებლიანი განაწილების კანონით, ამიტომ საძიებელი ალბათობის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$P\{\alpha \leq \xi \leq \beta\} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta},$$

ჩვენ შემთხვევაში λ=3; α=0,13; β=0,7. ამიტომ მივიღებთ

$$P\{0.13 < \xi < 0.7\} = e^{-3\cdot 0.13} - e^{-3\cdot 0.7} = e^{-0.39} - e^{-2.1},$$

ვისარგებლოთ e^{-x} ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილებით, რის შედეგადაც მივიღებთ, რომ

$$P\{0.13 < \xi < 0.7\} = 0.671 - 0.122 = 0.555$$

6. ავტომატი ამზადებს ბურთულებს. ბურთულა ვარგისია, თუ მისი დიამეტრის საპროექტო ზომიდან ξ გადახრის აბსოლუტური მნიშვნელობა 0,7მმ-ზე ნაკლებია. Ξ განაწილებულიანორმალურად a=0მმ-ის ტოლი მათემატიკური ლოდინითა და σ=0,4მმ-ის ტოლი საშუალო კვადრატული გადახრით. რამდენი ვარგისი ბურთულაა დამზადებული ავტომატის მიერ 100 ბურთულიდან?

ამოხსნა: ξ შემთხვევითი სიდიდე აღნიშნავს ბურთულის დიამეტრის საპროექტო ზომიდან გადახრას, ξ განაწილებულია ნორმალური განაწილების კანონით და M(ξ)=a=0. ვისარგებლოთ ფორმულით

$$P(|\xi - a| < \delta) = 2\Phi_0(\frac{\delta}{\sigma}),$$

სადაც $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t\frac{1}{2}}dt$ ლაპლასის ფუნქცია და მისი მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილი II-ით (იხ. დამატება).

ჩვენ შემთხვევაში δ=0,7, σ=0,4, a=0, რის გამოც მივიღებთ

$$P\{|\xi| < 0.7\} = 2\Phi_0(\frac{0.7}{0.4}) = 2\Phi(1.75)$$

ცხრილი II-დან ვპოულობთ $\Phi_o(1{,}75)\approx0{,}4599$. ამიტომ

$$P\{|\xi| < 0.7\} = 2 \cdot 0.4599 = 0.92$$

პასუხები

§5

1. 0,2: 1,7; 13,01; 3,6
2. 0,3; 0,2; 3,36; 1,8
3. 0,1; -2,3; 31,61; 5,6
4. 0,4; 6,1; 12,09; 3,5
5. 0,6; 0; 14,2; 3,3
6. 0,4; 3; 5,2; 2,3
7. 0,5; 11,1; 0,89; 0,94
8. 0,4; 5,31; 28,9; 5,3
9. 0,6; 3,1; 1,74; 1,3
10. 0,2; 8,1; 3,64; 1,9
11. 0,3; -5,55; 20,9; 4,3
12. 0,2; 20; 20; 4,2
13. 0,3; -4,5; 116,45; 10,8
14. 0,1; -9,7; 29,41; 5,4
15. 0,7; 1,9; 1,14; 1,2
16. 0,4; 2,1; 6,04; 2,49
17. 0,4; -0,45; 4,56; 2,1
18. 0,3; 8,65; 120; 11
19. 0,3; 2,05; 12,3; 3,5
20. 0,4; 30; 21; 4.6
21. 0,3; 1,13; 1,91; 1,4
22. 0,3; 2,63; 0,64; 0,8
23. 0,2; 2,59; 25,7; 5,07
24. 0,2; 08,8; 35,4; 5,9
25. 0,2; 16,22; 424,1; 20,8
26. 0,3; 16,5; 6,25; 2,5
27. 0,4; 7; 80,5; 9
28. 0,4; 0,16; 0,169; 0,4
29. 0,3; -16,9; 183,1; 13,5
30. 0,6; 20; 50; 7,07

§6

1. 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}$
2. 1; $\frac{9}{2}$; $\frac{13}{2}$;$\frac{3}{4}$;

3. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{23}{240}$; $\frac{1}{24}$

4. $\frac{9}{7}$; $\frac{11}{63}$; 0,33; $\frac{81}{112}$

5. 0,5; 3; $\frac{1}{3}$; 0,25

6. $\frac{1}{9}$; 2; 0,5; $\frac{1}{3}$

7. 0,25; $\frac{4}{3}$; $\frac{2}{9}$; 0,75

8. 1; -1; $\pi+1$; $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

9. 2; $\frac{\pi+6\sqrt{3}-12}{6}$; $\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}-5$; $2\sin\frac{\pi}{8}$;

10. -1; $\pi-\frac{1}{2}$; $3\pi^2-\frac{11}{4}$; 1

11. $\frac{1}{3}$; 0,5; 0,75; $\frac{1}{3}$

12. $\frac{4}{3}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{71}{216}$;1

13. 0,25; $\frac{4}{3}$; 2; 0,25

14. $\frac{1}{4}$; 3; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$

15. 0,5; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi^2-4}{4}$; 0,25

16. 0,25; 2; $\frac{4}{3}$; 0,75

17. 0,25; 2; $\frac{4}{3}$; 0,5

18. 1; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8}$-1;1

19. 1; $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; $\frac{\pi^2-4\pi-12}{16}$; 1

20. -1; $\frac{\pi-1}{3}$; $\frac{\pi-3}{9}$; 1

21. 0,5; 0; $\frac{4}{3}$; 0,5

22. 0,5; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{27}$; 1

23. $\frac{8}{17}$; $\frac{217}{51}$; 1,5; 0,45

24. 1; 1,2; 0,66

25. $\frac{3}{2}$; -$\frac{5}{12}$; $\frac{189}{576}$; $\frac{3}{4}$

26. 1; $\frac{3}{4}$; $\frac{95}{32}$; $\frac{1}{8}$

27. 2; $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1}{36}$; 1

28. 1; $\frac{43}{2}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{2}$

29. $\frac{1}{7}$; $\frac{9}{16}$; $\frac{49}{768}$; $\frac{1}{7}$

30. $\frac{1}{4}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{368}{25}$; $\frac{15}{16}$

თავი VI. სავარჯიშოები მათემატიკურ სტატისტიკაში. დასკვნითი სტატისტიკა

§1. ამოკრეფა გენერალური ერთობლიობიდან. ვარიაციული მწკრივი. ემპირიული განაწილების კანონი. ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა და პოლიგონი. ემპირიული განაწილების ფუნქცია. ემპირიული საშუალო და დისპერსია. ნდობის ინტერვალი

1. მოცემულია შემდეგი ამონაკრეფი გენერალური ერთობლიობიდან:

5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4

ჩაწერეთ იგი ვარიაციული მწკრივის სახით, შეადგინეთ ემპირიული განაწილების კანონი. ააგეთ სიხშირეთა პოლიგონი და ემპირიული განაწილების ფუნქცია.

2. მოცემულია ξ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები

-3; 5; 5; 4; 1; 2; -3; -2; 2; 2; -1; 5; 0; 0; 2

შეადგინეთ ვარიაციული მწკრივი, ემპირიული განაწილება, ემპირიული განაწილების ფუნქცია და ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი.

3. ააგეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის შემდეგი ემპირიული განაწილების ფარდობითი სიხშირეების ჰისტოგრამა, თუ ამოკრეფითი ერთობლიობის მოცულობა $n=100$.

ცხრილი 6.1.

ინტერვალის №	ინტერვალის საზღვრები (h=5)	ინტერვალში მოხვედრილი ξ-ს მნიშვნელობების სიხშირე
i	$x_i \sim x_{i+1}$	n_i
1	5-10	4
2	10-15	6
3	15-20	16
4	20-25	36
5	25-30	24
6	30-35	10

7	35-40	4

იპოვეთ ემპირიული განაწილების ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი.

4. მონახეთ ამოკრეფითი ერთობლიობის ისეთი მინიმალური მოცულობა, რომლისთვისაც 0,99-ის ტოლი საიმედობის ალბათობით გენერალური ერთობლიობის a მათემატიკური ლოდინის ემპირიული საშუალო შეფასების სიზუსტე δ=0,33, თუ ნორმალური კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობის დისპერსია ტოლია 1,44.

5. ააგეთ შემდეგი ემპირიული განაწილების ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა, თუ ამოკრეფითი ერთობლიობის მოცულობა n=55.

ცხრილი 6.2.

ინტერვალის №	ინტერვალის საზღვრები (h=2)	ინტერვალში მოხვედრილი ამოკრეფითი ერთობლიობის სიხშირე
i	x_i~x_{i+1}	n_i
1	10-12	2
2	12-14	4
3	14-16	8
4	16-18	12
5	18-20	16
6	20-22	10
7	22-24	3

იპოვეთ ემპირიული განაწილების ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი.

6. ააგეთ შემდეგი ემპირიული განაწილების ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა, თუ ამოკრეფითი ერთობლიობის მოცულობა ნ=100.

ცხრილი 6.3..

ინტერვალის №	ინტერვალის საზღვრები (h=2)	ინტერვალში მოხვედრილი ამოკრეფითი ერთობლიობის სიხშირე
i	$x_i \sim x_{i+1}$	n_i
1	0-2	20
2	2-4	30
3	4-6	50

იპოვეთ ემპირიული განაწილების ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი.

7. გაზომეს შემთხვევით არჩეული 100 სტუდენტის სიმაღლე, შედეგები წარმოდგენილია შემდეგი ცხრილით:

ცხრილი 6.7.

სიმაღლე (სმ-ში)	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
აღნიშნული სიმაღლის სტუდენტთა რიცხვი	10	14	26	28	12	8	2

იპოვეთ გამოკვლეულ სტუდენტთა ემპირიული საშუალო და ემპირიული დისპერსია.

მითითება: X_i ვარიანტად ჩათვალეთ ინტერვალის შუა წერტილი.

8. წარმოებს რაღაც ფიზიკური სიდიდის ხუთი დამოუკიდებელი გაზომვა, გაზომვის შედეგები მოცემულია ცხრილით

ცხრილი 6.4.

გაზომვის ნომერი	1	2	3	4	5
გაზომვის	2781	2836	2807	2763	2858

შედეგი X_i					

იპოვეთ გაზომვის ცდომილობის ემპირიული დისპერსია, თუ გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტ მნიშვნელობად მიჩნეულია 2800.

9. გადაწერეთ ამოცანა 8-ის პირობები და იპოვეთ ემპირიული საშუალო, ემპირიული დისპერსია და შესწორებული ემპირიული დისპერსია, თუ გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა ცნობილი არაა.

10. მოცემულია ξ შემთხვევით სიდიდეზე რვა დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგი 90, 0; 93,1; 95,0; 95,0; 96,0; 100,0; 101,0; 106,0. იპოვეთ ემპირიული საშუალო და ემპირიული დისპერსია.

11. იპოვეთ ამოკრეფითი ერთობლიობის ისეთი მინიმალური მოცულობა, რომლისთვისაც საიმედობის 0,925-ის ტოლი ალბათობით გენერალური ერთობლიობის a მათემატიკური ლოდინის ემპირიული საშუალო შეფასების სიზუსტე δ=0,2, თუკი ნორმალური კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობის დისპერსია σ^2=2,25.

12. ფიზიკური სიდიდის ოთხჯერ გაზომვის შედეგად მიღებულია: 8, 9, 11, 12; ხელსაწყოს სისტემატური ცდომილობები არა აქვს. იპოვეთ გაზომვათა შედეგების ემპირიული საშუალო, ემპირიული დისპერსია და შესწორებული ემპირიული დისპერსია.

13. გენერალური ერთობლიობიდან n=50-ის ტოლი მოცულობიანი შემდეგი ამოკრეფითი ერთობლიობის სიხშირეთა ემპირიული განაწილების მიხედვით იპოვეთ ემპირიული დისპერსია

ცხრილი 6.5.

x_i	18.4	18.9	19.3	19.6
n_i	5	10	20	5

14. გენერალური ერთობლიობიდან б=100 ტოლი მოცულობიანი შემდეგი ამოკრეფითი ერთობლიობის სიხშირეთა განაწილების მიხედვით იპოვეთ ემპირიული დისპერსია.

ცხრილი 6.6..

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

15. რაიმე ფიზიკური სიდიდის ერთიდაიგივე ხელსაწყოთი ხუთჯერ გაზომვის შედეგად (სისტემატური შეცდომები გამორიცხულია) მიიღეს (მმ-ში) 92; 94; 103; 105; 106. დაწერეთ ემპირიული განაწილების კანონი, გამოთვალეთ ემპირიული საშუალო და შესწორებული ემპირიული დისპერსია.

16. იპოვეთ ნორმალური კანონით განაწილებული ξ გენერალური ერთობლიობის უცნობი ა მათემატიკური ლოდინის ემპირიული საშუალოთი შეფასების ნდობის ინტერვალი P=0,99 საიმედობის ალბათობით, თუ გენერალური ერთობლიობის დისპერსია $\sigma^2=16$ ამოკრეფითი საშუალო $\bar{x}=10{,}2$ და ამოკრეფის მოცულობა n=16.

17. იპოვეთ ნორმალური კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობის ნდობის უცნობი a მათემატიკური ლოდინის ემპირიული საშუალოთი შეფასების ნდობის ინტერვალი P=0,99 - საიმედობის ალბათობით, თუ მოცემულია გენერალური ერთობლიობის საშუალო კვადრატული გადახრა σ=5, ემპირიული საშუალო $\bar{x}=16{,}8$ და ამოკრეფითი ერთობლიობის მოცულობა n=25.

18. დიდ რაოდენობიანი ნათურების პარტიიდან წარმოებს n=100 ნათურიანი ამოკრეფა გადაწვამდე ნათების ხანგრძლივობის დროის დასადგენად. ეს დრო შემთხვევითი სიდიდეა და განაწილებულია ნორმალური განაწილების კანონით, რომლის საშუალო კვადრატული გადახრა σ=40 სთ, ემპირიული საშუალო, ანუ ნათურის გადაწვამდე ნათების საშუალო დრო $\bar{x}=1000$ სთ. იპოვეთ გენერალური ერთობლიობის (ნათურების პარტიის) a მათემატიკური ლოდინისათვის (გადაწვამდე ნათების საშუალო დროისათვის) ნდობის ინტერვალი საიმედობის P=0,95-ის ტოლი ალბათობით.

19. ავტომატი ამზადებს ლილვაკებს. ლილვაკის დიამეტრის ზომა შემთხვევითი სიდიდეა და იგი განაწილებულია ნორმალური განაწილების კანონით, რომლის საშუალო კვადრატული გადახრა σ=2 მმ-ს. n=100 მოცულობიანი ამოკრეფითი ერთობლიობის მიხედვით გამოთვალეს ლილვაკის დიამეტრის ამოკრეფითი საშუალო მნიშვნელობა $\bar{x}$. იპოვეთ P=0,95-ის ტოლი საიმედობის ალბათობით იმ შეფასების δ სიზუსტე, რომლითაც ამოკრეფითი საშუალო აფასებს დამზადებული ლილვაკების დიამეტრების a მათემატიკურ ლოდინს.

20. ლილვაკების პარტიიდან წარმოებს n=100 მოცულობიანი ამოკრეფა დიამეტრის გაზომვის მიზნით. ემპირიული მონაცემებით დიამეტრის საშუალო ზომა $\bar{x} = 15$ მმ-ს. ლილვაკის დიამეტრის ზომა არის ნორმალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, რომლის საშუალო კვადრატული გადახრა σ=2მმ, ხოლო მათემატიკური ლოდინი a უცნობია. იპოვეთ ნდობის ინტერვალი a პარამეტრისათვის საიმედობის P=0,95 ალბათობით.

21. ნორმალური კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან წარმოებს ნ=12 მოცულობითი ამოკრეფა, რომელიც წარმოდგენილია შემდეგი ემპირიული განაწილების კანონით

ცხრილი 6.7.

x_i	-0.5	0.4	-0.2	0	0.2	0.6	0.8	1	1.2	1.5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

საიმედობის 0,95-ის ტოლი ალბათობით ააგეთ ნდობის ინტერვალი გენერალური ერთობლიობის უცნობი a მათემატიკური ლოდინისათვის.

22. წარმოებს 9 დამოუკიდებელი დაკვირვება ნორმალური კანონით განაწილებული შემთხვევით სიდიდეზე. ესპირიული საშუალო $\bar{x} = 30{,}1$ და შესწორებული ემპირიული დისპერსია S^2=36. საიმედობის P=0,99 ალბათობით ააგეთ ნდობის ინტერვალი ξ შემთხვევითი სიდიდის a მათემატიკური ლოდინისათვის.

23. ნორმალური კანონით განაწილებული ფიზიკური სიდიდის 16-ჯერ დამოუკიდებელი გაზომვის შედეგად გამოთვლილია განაზომთა ემპირიული საშუალო $\overline{x} = 42{,}8$ და შესწორებული ემპირიული დისპერსია $\frac{n}{n-1}S^2 = 64$. P=0,999-ის ტოლი ალბათობით შეაფასეთ გასაზომი ფიზიკური სიდიდის ჭეშმარიტი a მნიშვნელობა (ანუ ააგეთ ნდობის ინტერვალი გენერალური ერთობლიობის a მათემატიკური ლოდინისათვის).

24. ააგეთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა და ემპირიული განაწილების ფუნქციის გრაფიკი, თუ მოცემულია გენერალური ერთობლიობიდან n=100 მოცულობითი ამოკრეფის შემდეგი ემპირიული განაწილება.

ცხრილი 6.8.

ინტერვალის №	ინტერვალის საზღვრები	ინტერვალში მოხვედრილი ამოკრეფითი ერთობლიობის სიხშირე
i	$x_i \sim x_{i+1}$	n_i
1	1-5	10
2	5-9	20
3	9-13	40
4	13-17	12
5	17-21	10
6	21-25	8

25. ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა განაწილების პოლიგონი და ემპირიული განაწილების ფუნქციის გრაფიკი შემდეგი ემპირიული განაწილებისათვის:

ცხრილი 6.9.

x_i	4	7	9	12
n_i	6	5	11	18

26. მოცემულია ξ შემთხვევით სიდიდეზე დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგები: -0,1; 0; -0,1; 2; 0,5; -1; 0; 1,5; 2; 2. შეადგინეთ ვარიაციული მწკრივი, ემპირიული განაწილების კანონი, იპოვეთ ემპირიული განაწილების ფუნქცია, ააგეთ სიხშირეთა განაწილების პოლიგონი და ემპირიული განაწილების ფუნქციის გრაფიკი.

27. გამოთვალეთ ემპირიული დისპერსია და შესწორებული ემპირიული დისპერსია თუ მოცემულია გენერალური ერთობლიობიდან n=10 მოცულობიანი ამონაკრეფის ემპირიული განაწილება.

ცხრილი 6.10.

x_i	0.01	0.05	0.09
n_i	2	3	5

28. მოცემულია ξ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები: 1,2,-1,-1,1,2,0,0,-2,3,-1,1,3,-3,2. ჩაწერეთ იგი ვარიაციული მწკრივის სახით. შეადგინეთ ემპირიული განაწილების კანონი. იპოვეთ ემპირიული განაწილების ფუნქცია.

29. მოცემულია ξ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები: 5.6,5,6,4,5,4,4,4,3. ჩაწერეთ იგი ვარიაციული მწკრივის სახით, შეადგინეთ ემპირიული განაწილების კანონი, ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა განაწილების პოლიგონი.

30. მოცემულია ემპირიული განაწილების კანონი

ცხრილი 6.11

x_i	0	1	3	5
n_i	3	5	5	2

იპოვეთ ემპირიული განაწილების ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი. ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა განაწილების პოლიგონი.

§2. მეთოდური მითითებები

1. ჯგუფში 25 სტუდენტია. ჟურნალიდან სიის მიხედვით ამოწერეს მოცემული სემესტრის განმავლობაში თითოეული სტუდენტის მიერ უმაღლეს მათემატიკაში გაცდენილ მეცადინეობათა რაოდენობა შემდეგი სახით:

2; 5; 0; 1; 6; 3; 0; 1; 5; 4; 0; 3; 3; 2; 1; 4; 0; 0; 2; 3; 6; 0; 3; 0; 1

ა) შეადგინეთ შესაბამისი შემთხვევითი სიდიდის ემპირიული (სტატისტიკური) განაწილება.

ბ) ავაგოთ ფარდობით სიხშირეთა განაწილების პოლიგონი.

გ) დავყოთ [0,6] შუალედი ხუთ ტოლ ნაწილად, შევადგინოთ ემპირიული განაწილება და ავაგოთ ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა.

დ) ვიპოვოთ გენერალური ერთობლიობის მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის გადაუადგილებადი და ძალდებული წერტილოვანი ემპირიული შეფასებები.

ე) ვიპოვოთ ემპირიული განაწილების ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

ამოხსნა: სტუდენტის მიერ გაცდენილ მეცადინეობათა რაოდენობა შემთხვევითი სიდიდეა, აღვნიშნოთ იგი ξ-თი.

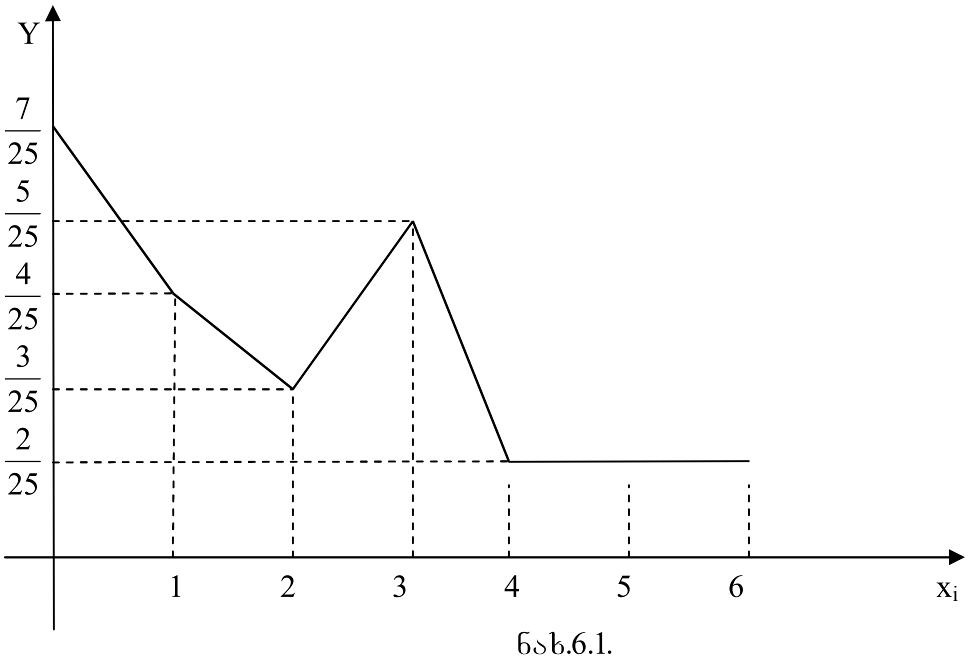
ა) ამოკრეფის მოცულობა n=25 ამოცანის მონაცემების მიხედვით ამოვწერთ შემდეგ ვარიაციულ მწკრივს 0,1,2,3,4,5,6, შესაბამისი სიხშირეებით 7,4,3,5,2,2,2. ემპირიულ (სტატისტიკურ) განაწილებას ექნება სახე:

ცხრილი 6.12.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$y_i = \frac{n_i}{n}$ n_i	$\frac{7}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$

ბ) ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონის ასაგებად ξ0 საკოორდინატო სიბრტყეზე ავიღოთ (0; $\frac{7}{25}$), (1; $\frac{4}{25}$), (2; $\frac{3}{25}$), (3; $\frac{1}{5}$), (4; $\frac{2}{25}$), (5; $\frac{2}{25}$), (6; $\frac{2}{25}$)

წერტილები და შევაერთოთ წრფის მონაკვეთებით (იხ.ნახ.3)



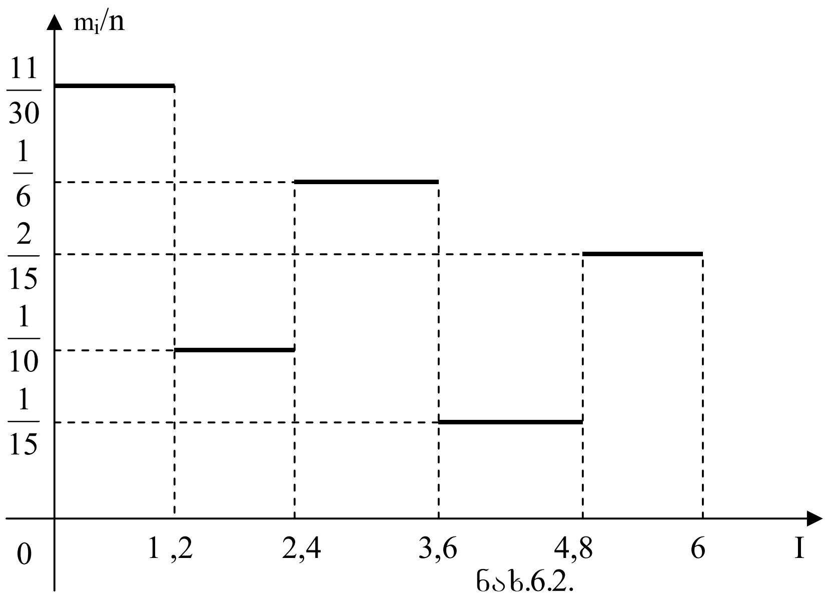
ნახ.6.1.

გ) რადგან $h = \frac{|6-0|}{5} = 1{,}2$, ამიტომ მივიღებთ შემდეგ ემპირიულ განაწილებას

ცხრილი 6.13.

ინტერვალები I	[0;1,2[	[1,2;2,4[	[2,4;3,6[	[3,6;4,8[	[4,8;6[
შესაბამისი ფარდობითი სიხშირეები $\frac{m_i}{n}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$
$\frac{m_i}{nh}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$	$\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$	$\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$	$\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამას ექნება სახე (იხ.ნახ.4).



ნახ.6.2.

დ) როგორც ცნობილია გენერალური ერთობლიობის მათემატიკური ლოდინის გადაუადგილებლად და ძალდებულ შეფასებას წარმოადგენს ემპირიული საშუალო $\overline{x}$, რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{K} x_i n_i$$

სადაც $\sum_{i-1}^{K} n_i = n = 25$, k=7 მივიღებთ, რომ

$$\overline{x} = 0\cdot\frac{7}{25} + 1\cdot\frac{4}{25} + 2\cdot\frac{3}{25} + \frac{3\cdot 5}{25} + 4\cdot\frac{2}{25} + 5\cdot\frac{2}{25} + 6\cdot\frac{2}{25} = 2.2$$

ემპირიული დისპერსიის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{K}(x_i - \overline{x})n_i$$

ჩვენ შემთხვევაში გვექნება

$$S^2 = \frac{1}{25}(0-2.2)^2\cdot 7 + (1-2.2)^2\cdot 4 + (2-2.2)^2\cdot 3 + (3-2.2)^2\cdot 5 +$$
$$+(4-2.2)^2\cdot 2 + (5-2.2)^2\cdot 2 + (6-2.2)^2\cdot 2] = 3.76$$

მაგრამ გენერალური ერთობლიობის დისპერსიის გადაუადგილებლად და ძალდებულ შეფასებას წარმოადგენს არა ემპირიული დისპერსია, არამედ შესწორებული ემპირიული დისპერსია.

$$S^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{25}{24}\cdot 3.76 \approx 3.918$$

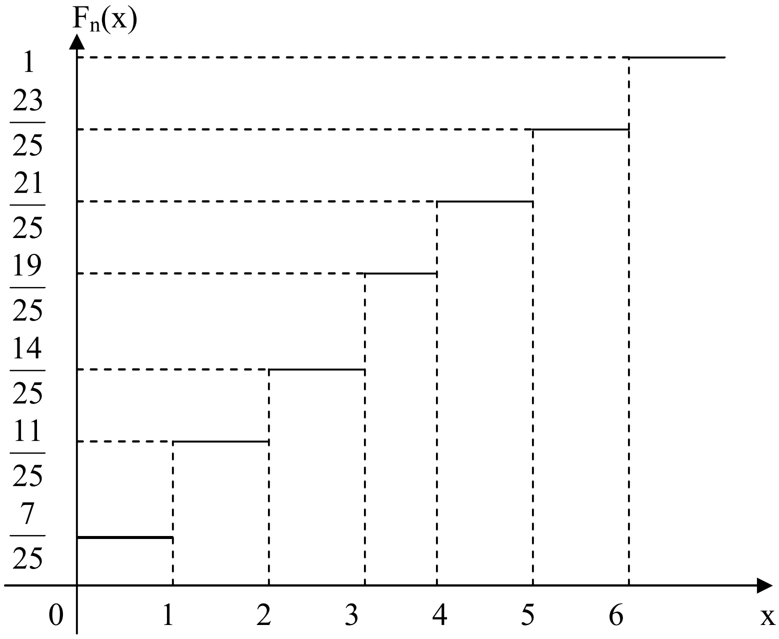
ე) აღვნიშნოთ ემპირიული განაწილების ფუნქცია Fn(x)-ით. ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$\widehat{F}_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ როცა } x < x_1 \\ \frac{m}{n}, \text{როცა } \mathrm{x_m} \le x \le \mathrm{x_{m+1}} \\ 1, \text{ როცა } x > x_n, m = \overline{1, k-1} \end{cases}$$

რადგან ჩვენ შემთხვევაში ამოკრეფის მოცულობა n=25 $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, $x_4=4$, $x_5=5$, $x_7=6$, ამიტომ ემპირიული განაწილების მიხედვით მივიღებთ:

$$\hat{F}(x)=\begin{cases} 0, \text{ როცა } x \le 0 \\ \frac{7}{25}, \text{როცა } 1 < \mathrm{x} \le 1 \\ \frac{11}{25}, \text{როცა } 1 < x \le 2 \\ \frac{14}{25}, \text{როცა } 2 < x \le 3 \\ \frac{19}{25}, \text{როცა } 3 < x \le 4 \\ \frac{21}{25}, \text{როცა } 4 < x \le 5 \\ \frac{23}{25}, \text{როცა } 5 < x \le 6 \\ 1, \text{ როცა } x > 6 \end{cases}$$

ამ ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე (იხ.ნახ. 6.3.)



ნახ.6.3

2. გენერალური ერთობლიობა განისაზღვრება ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდით, რომლის მათემატიკური ლოდინი a უცნობია, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა σ=5. გვაქვს n=25-ის ტოლი მოცულობიანი ამოკრეფა ξ გენერალური ერთობლიობიდან. ემპირიული საშუალო $\overline{x}$=14. ვიპოვოთ 95%-იანი, ანუ P=0,95 საიმედობის ალბათობის

შესაბამისი ნდობის ინტერვალი გენერალური ერთობლიობის უცნობი მათემატიკური ლოდინისათვის.

ამოხსნა: ცნობილი σ^2 დისპერსიის მქონე, ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის a მათემატიკური ლოდინისათვის ნდობის ინტერვალს აქვს სახე:

$$\bar{x} - U_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + U_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ვისარგებლოთ ცხრილი V-ით (იხ.დამატება), მოცემული P=0,95-თვის ვპოულობთ U_p=1,96, ამიტომ მივიღებთ:

$$14 - 1.96\frac{5}{\sqrt{25}} < a < 14 + 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}$$

ამრიგად, უცნობი a მათემატიკური ლოდინისათვის ნდობის ინტერვალი საიმედობის P=0,95-ის ტოლი ალბათობით იქნება

12,4<a<15,96

3. წარმოებს n მოცულობიანი ამოკრეფა ნორმალური კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან, რომლის საშუალო კვადრატული გადახრა σ=1,2. ემპირიული საშუალოს გამოყენებით საიმედობის =0,98 ალბათობით აგებულია ნდობის ინტერვალი გენერალური ერთობლიობის უცნობი a მათემატიკური ლოდინისათვის. ვიპოვოთ ამონაკრეფის მინიმალური მოცულობა, თუ შეფასების სიზუსტე =0,3.

ამოხსნა: ნდობის ინტერვალის ჩანაწერში სიზუსტე $\delta = U_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, საიდანაც ვპოულობთ, რომ $n = \frac{Up^2\sigma^2}{\delta^2}$, ცხრილი V-ის მიხედვით (იხ. დამატება) საიმედობის მოცემული P=0,98 ალბათობის მიხედვით ვიპოვოთ U_p=2,326. ჩვენ შემთხვევაში σ=1.2; δ=0,3, ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$n = \left(\frac{2.326 \cdot 1.2}{0.3}\right)^2 = 87$$

4. მოცემულია n=10 მოცულობიანი შემდეგი ამონაკრები ნორმალური კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან

1; -1; -2; 3; 4; 2; 5; 3; 2; 4

ვიპოვოთ P=0,95 საიმედობის ტოლი ალბათობის შესაბამისი ნდობის ინტერვალი გენერალური ერთობლიობის მათემატიკური ლოდინისათვის.

ამოხსნა: ამოკრეფითი ერთობლიობა დავალაგოთ ვარიაციული მწკრივის სახით შესაბამისი სიხშირეებით და ფარდობითი სიხშირეებით. მივიღებთ ემპირიული განაწილების კანონს.

ცხრილი 6.14.

ვარიანტი x_i	-2	1	2	3	4	5
სიხშირე n_i	2	1	2	2	2	1
ფარდობითი სიხშირე n_i/n	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$i=\overline{1,6}$$

n=10

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{n_i}{n}=\frac{4}{5}+\frac{2}{10}=1$$

გამოთვლით ემპირიული საშუალო ფორმულით

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i n_i$$

მივიღებთ

$$\overline{x}=\frac{1}{10}((-2)\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2+4\cdot 2+5\cdot 1)=2$$

ემპირიული დისპერსიის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2 n_i\ ,$$

რის შედეგადაც მივიღებთ:

$$S^2=\frac{1}{10}\left[(-2-2)^2+(1-2)^2\cdot 1+(2-2)^2\cdot 2+(3-2)^2\cdot 2+(4-2)^2\cdot 2+(5-2)^2\cdot 1\right]=5.184$$

S≈2.28.

როგორც ცნობილია უცნობი 2 დისპერსიის მქონე, ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის ა მათემატიკური ლოდინისათვის ნდობის ინტერვალს აქვს სახე

$$\overline{x}-t_p\frac{S}{\sqrt{n-1}}<a<\overline{x}+t_p\frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

რადგან საიმედობის ალბათობა P=0,95, ცხრილი VI-ის დახმარებით (იხ. დამატება) 6-1=9 მნიშვნელობისათვის ვიპოვოთ t_p=2,262, ამიტომ საძიებელი ნდობის ინტერვალს ექნება სახე:

$$2-2.262\cdot\frac{2.28}{3}<a<2+2.262\frac{2.28}{3}$$

ანუ

0,28<a<3,71

პასუხები:

§8

4. n=86; 7. 166; 8. 1287,8; 9. 2809; 1206,8; 1508,5;

10. 97,0; 24,8; 11. 178; 12. 10; 2,5; 3,3; 13. 0,5916; 14. 12603;

15. 100; 42,5; 16. 7,63<a<12,77; 17. 14,23<a<19,37; 18. 992,16<a<1007,84;

19. 0,392მმ; 20. 14,608მმ<a<15,392მმ; 21. -0,04<a<0,88; 22. 23,38<a<36,82;

23. 34,66<a<50,94; 27. 0,00765; 0,0085.

დანართი

ცხრილი I

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	8989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3797
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	109	1074	1057	1040	1023	0006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0334	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0289	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229

2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0058	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ცხრილი II

$\Phi_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00899	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	44058	14431	14803	15173
0.4	15542	15910	16276	16640	17003	17363	17724	18082	18439	18793
0.5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0.7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0.8	28814	29103	29389	29673	29955	20234	30511	30785	31057	31327
0.9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1.0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35542	35769	35993	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1.2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1.3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1.4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1.5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1.7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	47126	47193	47256	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2.0	47725	47778	47831	47682	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2.2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2.3	48928	48956	48683	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2.4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2.6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643

2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49721	49728	49736
2.8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	4831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3.0	0.49865		3.1	49903	3.2	49931	3.3	49952	3.4	49965
3.5	49977		3.6	49984	3.7	49993	3.8	49993	3.9	49995
4.0	499968									
4.5	499997									
5.0	49999997									

ცხრილი III

$\frac{\lambda^k}{K!}e^{-\lambda}$ ფუნქციის მნიშვნელობები

(პუასონის განაწილება)

K \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.90484	0.81873	0.74082	0.67032	0.60653
1	0.09048	0.16375	0.22225	0.26813	0.30327
2	0.00452	0.01638	0.03334	0.05363	0.07582
3	0.00015	0.00109	0.00333	0.00715	0.01264
4		0.00006	0.00025	0.00072	0.00158
5			0.00002	0.00006	0.00016
6					0.00001

K \ λ	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.54881	0.49659	0.44933	0.40657
1	0.32929	0.34761	0.35946	0.36591
2	0.09879	0.12166	0.14379	0.16466
3	0.01976	0.02839	0.03834	0.04940
4	0.00296	0.00497	0.00767	0.01112
5	0.00036	0.00070	0.00123	0.00200
6	0.00004	0.00006	0.00016	0.00030
7		0.00001	0.00002	0.00004

K \ λ	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
0	0.36788	0.12534	0.04879	0.01832	0.00674
1	0.36788	0.27067	0.14936	0.07326	0.03369
2	0.18994	0.27067	0.22404	0.14653	0.08422
3	0.06131	0.18045	0.22404	0.19537	0.19537
4	0.01533	0.09022	0.16803	0.12537	0.17547
5	0.000307	0.03609	0.10082	0.15629	0.17547
6	0.00051	0.01203	0.05041	0.10419	0.14622
7	0.00007	0.00344	0.02160	0.05954	0.10445
8	0.00001	0.00086	0.00810	0.02977	0.06528
9		0.00019	0.00270	0.01323	0.03627
10		0.00004	0.00081	0.00529	0.01813

11		0.00001	0.00022	0.00193	0.00824
12			0.00006	0.00064	0.00343
13			0.00001	0.00020	0.00132
14				0.00006	0.00047
15				0.00002	0.00016
16					0.00005
17					0.00001

$\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი   ცხრილი IV

λ / m	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.904837	0.818731	0.730818	0.670320	0.606531	0.548812
1	0.995321	0.982477	0.963063	0.938448	0.909796	0.878099
2	0.999845	0.998852	0.996400	0.992074	0.985612	0.976885
3	0.999996	0.999943	0.999734	0.999224	0.998248	0.996642
4	1.000000	0.999998	0.999984	0.999939	0.999825	0.999606
5	1.000000	1.000000	0.999996	0.999996	0.999986	0.999962
6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.999999	0.999997
7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
λ / m	0.7	0.9	0.9	1.0	2.0	3.0
0	0.496585	0.449329	0.406570	0.357879	0.135335	0.049787
1	0.844195	0.808792	0.772483	0.735759	0.406006	0.199148
2	0.965858	0.952577	0.937144	0.919699	0.676677	0.423190
3	0.994246	0.990920	0.986542	0.981012	0.857124	0.647232
4	0.999214	0.998589	0.997657	0.996340	0.947348	0.815263
5	0.999909	0.999816	0.999658	0.999406	0.983437	0.916082
6	0.999990	0.999980	0.999958	0.999917	0.995467	0.966491
7	0.999998	0.999999	0.999997	0.999990	0.998904	0.988095
8	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999763	0.996196
9				1.000000	0.999954	0.998997
10					0.999992	0999707
11					0.999999	0.999928
12					1.000000	0.999983
13						0.999996
14						0.999999
15						1.000000
λ / m	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	0.018316	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123
1	0.091579	0.040428	0.017352	0.007295	0.004019	0.001234
2	0.238105	0.124652	0.061970	0.29636	0.013754	0.006232
3	0.466472	0.265026	0.151205	0.081765	0.042380	0.021228
4	0.628839	0.440493	0.285058	0.172991	0.099632	0.054963

5	0.785132	0.613960	0.445681	0.300708	0.191236	0.115690
6	0.889326	0.762183	0.606304	0.449711	0.313374	0.206780
7	0.948866	0.866628	0.743981	0.598714	0.452961	0.323896
8	0.978636	0.931806	0.847239	0.729091	0.592548	0.455652
9	0.991867	0.968172	0.916077	0.830496	0.716625	0.587840
10	0.997159	0.986305	0.957380	0.901479	0.815887	0.705988
11	0.999084	0.994547	0.979909	0.946660	0.888077	0.803003
12	0.999726	0.997081	0.991173	0.973000	0.936206	0.875773
13	0.999923	0.999202	0.996372	0.987188	0.965820	0.925149
14	0.999979	0.999774	0.998600	0.994282	0.982744	0.958533
15	0.999994	0.999931	0.999491	0.997593	0.991770	0.977964
16	0.999998s	0.999980	0.999825	0.999041	0.906283	0.988894
k \ a	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
17	0.999999	0.999994	0.999943	0.999637	0.998407	0.994680
18	0.999999	0.999998	0.999982	0.999869	0.999351	0.997573
19	0.999999	0.999999	0.999994	0.999955	0.999748	0.998943
20	1.000000	0.999999	0.999998	0.999985	0.999907	0.999560
21		1.000000	0.999999	0.999995	0.999967	0.999824
22			0.999999	0.999998	0.999989	0.999932
23			1.000000	0.999999	0.999997	0.999974
24				0.999999	0.999999	0.999990
25				1.000000	0.999999	0.999996
26					1.000000	0.999998
27						0.999999
28						1.000000

Up-ის მნიშვნელობაშიბ $2\Phi(U_p)=p$ ცხრილი V

ρ	0.9	0.95	0.98	0.99	0.998
U_p	1.645	1.960	2.326	2.576	3.09

ცხრილი VI

t_p-ის მნიშვნელობები. $2\int_0^{t_p} f_{n-1}(x)dx = P$, სადაც $f_{n-1}(x)$ არის სტუდენტის განაწილების სიმკვრივე თავისუფლების ხარისხით

n-1 \ ρ	0.9	0.98	0.98	0.99
5	2.085	2.576	3.365	4.032
6	3.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169

12	3.782	2.179	2.681	3.055
14	1.761	2.145	2.624	2.977
16	1.746	2.120	2.583	2.921
18	7.734	2.101	2.552	2.878
20	1.725	2.086	2.528	2.845
22	1.717	2.074	2.508	2.819
30	1.697	2.042	2.457	2.750
	1.645	1.960	2.326	2.576

ცხრილი VII

$\chi^2{}_\alpha$-ის მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფლებენ პირობას, $\int_{\chi^2_\alpha}^{+\infty} f_\nu(x)dx = \alpha$

სადაც $f_\nu(x)$ არის ხი-კვადრატ განაწილების სიმკვრივე თავისუფლების ხარისხით ν

	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50
1	0.000	0.001	0.04	0.016	0.064	0.148	0.455
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.37
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.20	3.36
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.34	3.00	4.35
6	0.872	1.134	1.635	2.20	3.07	3.63	5.35
7	1.239	1.564	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35
8	1.646	2.03	2.73	3.49	4.69	5.53	7.34
9	2.09	2.53	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34
10	2.56	3.06	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34
11	3.05	3.61	4.58	5.58	6.99	8.15	10.34
12	3.57	4.18	5.23	6.30	7.81	9.03	11.34
13	4.11	4.76	5.89	7.04	8.63	9.93	12.34
14	4.66	5.37	6.57	7.79	9.47	10.82	13.34
15	5.23	5.98	7.26	8.55	10.31	11.72	14.34
16	5.81	6.61	7.86	9.31	11.15	12.62	15.34
17	6.41	7.26	8.67	10.08	12.00	13.53	16.34
18	7.02	7.91	9.39	10.86	12.86	14.44	17.34
19	7.63	8.57	10.11	11.65	13.72	15.35	18.34
20	8.26	9.24	10.85	12.44	14.58	16.27	19.34
21	8.90	9.92	11.59	13.24	15.44	17.18	20.3
22	9.54	10.60	12.34	14.04	16.31	18.10	21.3
23	10.20	11.29	13.09	14.85	17.19	19.02	22.3
24	10.86	11.90	13.85	15.66	18.06	19.94	23.3
25	11.52	12.70	14.61	16.47	18.94	20.9	24.3
26	12.20	13.41	15.38	17.29	19.82	21.8	25.3
27	12.88	14.12	16.15	18.11	20.7	22.7	26.3
28	13.56	14.085	16.93	18.94	21.6	23.6	27.3
29	14.26	15.57	17.71	19.77	22.5	24.6	28.3
30	14.95	16.31	18.49	20.6	23.4	25.5	29.3

	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	1.074	1.642	2.71	3.84	5.47	6.64	10.83
2	2.41	0.22	4.60	5.99	7.82	9.21	13.82
3	3.66	4.64	6.25	7.82	9.84	11.34	16.27
4	4.88	5.99	7.78	9.49	11.67	13.28	18.46
5	6.06	7.29	9.24	11.07	13.39	15.09	20.5
6	7.23	8.56	10.64	12.59	15.03	16.81	22.5
7	8.38	9.80	12.02	14.07	16.62	18.48	24.3
8	9.52	11.03	13.36	15.51	18.17	20.1	26.1
9	10.66	12.24	14.68	19.92	19.68	21.7	27.9
10	11.78	13.44	15.99	18.31	21.2	23.2	29.6
11	12.90	14.63	17.28	19.68	22.6	24.7	31.3
12	14.01	15.81	18.55	21.0	24.1	26.2	32.9
13	15.12	16.98	19.81	22.4	25.5	27.7	34.6
14	16.22	18.15	21.1	23.7	26.9	29.1	36.1
15	17.32	19.31	22.3	25.0	28.3	30.6	37.7
16	18.42	20.5	23.5	26.3	29.6	32.0	39.3
17	19.51	21.6	24.8	27.6	31.0	33.4	40.8
18	20.06	28.6	26.0	28.9	32.3	34.8	42.3
19	21.7	23.9	27.2	30.1	33.7	36.2	43.8
20	22.8	25.0	28.4	31.4	35.0	37.6	45.8
21	23.9	26.2	29.6	32.7	36.3	38.9	46.8
22	24.9	27.3	38.0	33.9	37.7	40.3	48.3
23	26.0	28.4	32.0	35.2	39.0	41.6	49.7
24	27.1	29.6	33.2	36.4	40.3	43.0	51.2
25	28.2	30.7	34.4	37.7	41.7	44.3	52.6
26	29.2	31.8	35.6	38.9	42.9	45.6	54.1
27	30.3	32.9	36.7	40.1	44.1	47.1	55.5
28	31.4	34.0	37.9	41.3	45.4	48.3	56.9
29	32.5	35.1	39.1	42.6	46.7	49.6	58.3
30	33.5	36.2	40.3	43.8	48.0	50.9	59.7

danarTi IV. ganaTlebis miRebisaTvis mosaxleobis mier gaweuli xarjebis kiTxvari

ganaTlebis miRebisaTvis mosaxleobis mier gaweuli xarjebis gamokvleva

საადწერო უბანი----------- ინტერვიუერი -------------------- ----------------------- -------------
(გვარი, სახელი) (ხელმოწერა) (თარიღი)

ინტერვიუერის შენიშვნები და კომენტარები ---

ზედამხედველი ---------------------------- ---------------------------- ------------------------------
(გვარი, სახელი) (ხელმოწერა) (შემოწმების თარიღი)

ზედამხედველის შენიშვნები და კომენტარები --

კორექტორის შენიშვნები და კომენტარები ---

წინამდებარე კითხვარის მიზანია საქართველოს მოსახლეობის მიერ განათლების (შესაბამისი ცენზის, დიპლომის) მიღებისათვის და სასწავლო ნივთების შესაძენად გაწეული ხარჯების გამოკვლევა.

თქვენი პასუხები გამოყენებული იქნება მხოლოდ განზოგადებული სტატისტიკური შეფასებების მისაღებად.

interviuers: გთხოვთ, გამოკითხოთ ოჯახის უფროსი ან ის პირი, რომელიც ოჯახის უფროსთან ერთად იღებს გადაწყვეტილებებს და ინფორმირებულია შინამეურნეობის როგორც ეკონომიკურ, ასევე ოჯახის წევრთა განათლებასთან დაკავშირებული ხარჯების შესახებ.

რესპონდენტს პირველ რიგში გააცანით შესავალი და ზოგადად აუხსენით გამოკვლევის მიზნები, შემდეგ კი - ჩვენი კითხვარის ზოგადი სტრუქტურა მისი ძირითადი ნაწილების მიხედვით:

1. skolamdeli aRzrda-ganaTlebis xarjebi;
2. dawyebiT, arasrul saSualo, saSualo skolaSi, gimnaziaSi an skola-liceumSi swavlis xarjebi;

3. mosamzadebel i ganyofilebis msmenelTa swavlis xarjebi;
4. kolejSi, teqnikumSi, specialur saswavleblebSi swavlis xarjebi;
5. kerZo maswavlebelTan, repetitorTan momzadebis xarjebi;
6, umaRlesi ganaTlebis xarjebi;
7. kvalfikaciis kursebis xarjebi;
8. sazRvargareT ganaTlebis xarjebi;

zogadi monacemebi

interviuers: მომდევნო ცხრილის 1-ლ სვეტში შეიტანეთ ოჯახის ყველა წევრის სახელი და სხვა მონაცემები.

მე-4, მე-5 ან მე-6 სვეტებში ოჯახის თითოეული წევრის შესახებ ცხრილის ბოლოში მოცემული კოდების გამოყენებით შეიტანეთ მონაცემები იღებდა თუ არა იგი განათლებას რაიმე ფორმით 2000 წელს.

მაგალითად, თუ ოჯახის წევრი გამოკითხვის მომენტში არის უნივერსიტეტის პირველი კურსის სტუდენტი, საშუალო სკოლა დაამთავრა წელს და დამატებით ემზადებოდა მასწავლებელთან, მე-4, მე-5 და მე-6 სვეტებში უნდა ჩაუწეროთ კოდები: 2, 5, 6. ხოლო მას, ვინც 2000 წელს პირველი იანვრიდან კლდებში დასახელებული არც ერთი ფორმით განათლებას არ იღებდა, მე-4 სვეტში ჩაუწერეთ კოდი 9.

	სახელი	სქესი: 1 = მდედრობითი 2 = მამრობითი	ასაკი=შესრულებული წლები	იღებდა თუ არა 2000 წელს რაიმე ფორმით განათლებას? (იხ. კოდები)		
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

7						
8						
9						

G

ganaT lebis miRebis formebis kodebi

1. სკოლამდელი აღზრდა საბავშვო ბაღში (ბაგაში) ან დაქირავებულ აღმზრდელთან;
2. დაწყებით, არასრული საშუალო, საშუალო სკოლაში, გიმნაზიაში ან სკოლა-ლიცეუმში;
3. უმაღლესი სასწავლებლის მოსამზადებელ განყოფილებაში;
4. კოლეჯში, ტექნიკუმში, სპეციალურ სასწავლებელში;
5. კერძო მასწავლებელთან, რეპეტიტორთან;
6. უმაღლეს სასწავლებელში ან ასპირანტურაში;
7. კვალფიკაციის კურსებზე;
8. საზღვარგარეთ განათლება;
9, სხვა (ჩაწერეთ)----------
10. არა

interviuers: ახლა უნდა გამოიკითხოთ ოჯახის წევრების ხარჯები მათ შორის პირველი კითხვის პასუხებში მითითებული განათლების ყველა ფორმის მიხედვით. მომდევნო 1-8 ნაწილების ცხრილებში უნდა იქნას შეტანილი მონაცემები წინა ცხრილის, მე-4, მე-5 ან მე-6 სვეტების პასუხების მიხედვით.

ხარჯების ყველა მაჩვენებელი, გარდა მე-8 ნაწილისა, უნდა შეიტანოთ ლარებში. იმ შემთხვევაში, თუ რესპონდენტმა თანხა დაასახელა სხვა ვალუტაში, უნდა გადაიყვანოთ იგი ლარებში.

nawili 1. bavSvebis skolamdeli aRzrda-ganaTlebis xarjebi

ინტერვიუერს: კითხვების ამ ბლოკზე მშობლები იძლევიან ინფორმაციას ბავშვების სკოლამდელი აღზრდა-განათლების ხარჯების შესახებ.

გადმოწერეთ პირველი კითხვიდან რესპონდენტთა ის ნომრები და სახელები, რომელთა პასუხების მიხედვით ცხრილის მე-4, მე-5 ან მე-6 სვეტებში შეტანილია კოდი 1.

თუ ოჯახში არ არის ასეთი რესპონდენტი, აღნიშნეთ უჯრაში √და გადადით nawili 2-ze □

რესპონდენტის ნომერი zogadi monacemebidan(ჩაწერეთ			

შესაბამის უჯრაში)					
რესპონდენტის სახელი (ჩაწერეთ შესაბამის უჯრაში)					
1	**რომელ საბავშვო ბაღში ან აღმზრდელთან დაგყავთ (დაგყავდათ) ბავშვი?**		კოდი:	კოდი:	კოდი:
	kodebi 1. სახელმწიფო საბავშვო ბაღში (ბაგაში) 2. კერძო საბავშვო ბაღში (ბაგაში)	3. დაგვყავს აღმზრდელთან სახლში 4. აღმზრდელი დაქირავებულია ოჯახში			
2.	**რამდენი ლარია გადასახდელი ბავშვის ბაღში (ბაგაში) ან აღმზრდელთან ყოფნისათვის საშუალოდ ერთ თვეში?** (თუ არაფერი, ჩაწერეთ 0)	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
3.	**სულ რამდენი გადაიხადეთ?** (თუ არაფერი ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში ბავშვი არ დაგყავდათ, უჯრაში ჩაწერეთ X)	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერში			
4.	**რამდენ ლარს ხარჯავდით სხვა ხარჯების (საჩუქრების, სხვადასხვა მოსაკრებლების და ა.შ.) სახით?**	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერში			
5.	**ხომ არ დააფინანსა ბავშვის აღზრდა ნაწილობრივ მაინც:**		კოდი:	კოდი:	კოდი:
	1. კერძო პირმა? 2. კერძო ფირმამ? 3. საზოგადოებრივმა ორგანიზაციამ?	4. სახელმწიფომ? 5. სხვამ? 6. არა, არავის დაუფინანსებია. ⇒naaw.2			
6.	დაახლოებით რამდენ ლარს შეადგენს მიმდინარე წელს ეს დაფინანსება?				

nawili 2. skolaSi, gimnaziaSi, skola-liceumSi swavlis xarjebi

ინტერვიუერს: კითხვების ამ ნაწილში უნდა შეიტანოთ ინფორმაცია ამ ტიპის სასწავლებელთა მოსწავლეებზე.

გადმოწერეთ პირველი კითხვიდან რესპონდენტთა ის ნომრები და სახელები, რომელთა პასუხების მიხედვით ცხრილის მე-4, მე-5 ან მე-6 სვეტებში შეტანილია კოდი 2

თუ ოჯახში არ არის ასეთი რესპონდენტი აღნიშნეთ უჯრაში√ და გადადით nawili 3-ze□.

რესპონდენტის ნომერი zogadi monacemebidan(ჩაწერეთ შესაბამის უჯრაში)					
რესპონდენტის სახელი (ჩაწერეთ შესაბამის უჯრაში)					
7	**რომელ სკოლაში, გიმნაზიაში, სკოლა-ლიცეუმში სწავლობდით ან სწავლობთ ამჟამად?** kodebi 1. სახელმწიფო უფასო 2. სახელმწიფო ფასიანი 3. კერძო 4. სხვა (დაასახელეთ)		კოდი:	კოდი:	კოდი:
რამდენი ლარი იყო გადასახდელი სკოლაში სწავლისათვის 2000 წლის დასაწყისიდან (იანვარ-ივნისში და სექტემბერში) (თუ არაფერი, ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, შესაბამის უჯრაში ჩაწერეთ X)?					
8	სკოლის (სასწავლებლის) გადასახადი (სწავლის ქირა) საშუალოდ ერთ თვეში	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
9	სასწავლო სექციებში, წრეებში მეცადინეობისათვის საშუალოდ ერთ თვეში	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			

რამდენი ლარი გადაიხადეთ სკოლაში სწავლისათვის 2000 წლის ანგარიშში

(თუ არაფერი ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, უჯრაში ჩაწერეთ X)?

10.	სკოლის (სასწავლებლის) გადასახადი (სწავლის ქირა)	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
11	სასწავლო სექციებში, წრეებში მეცადინეობისათვის	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
12	სასწავლო ნივთების (წიგნების, რვეულების) შესაძენად, სულ	იანვარ-ივნისში			
		აგვისტო-სექტემბერში			
13	სხვა, მათ შორის არარეგულარული ხარჯები, სულ	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერში			
14.	სწავლის დროს (საგნების ჩაბარების, მომდევნო კლასში გადაყვანის ან სხვა მიზეზით) ხომ არ დაგჭირდათ არაოფიციალური ხარჯების გაწევა? 1. დიახ. 2. არა. ⇒naaw.16				
15.	დაახლოებით რამდენ ლარს შეადგენს მიმდინარე წელს ეს ხარჯები?				
16	ხომ არ დააფინანსა თქვენი სწავლება ნაწილობრივ მაინც: 1. კერძო პირმა? 2. კერძო ფირმამ? 3. საზოგადოებრივმა ორგანიზაციამ?	4. სახელმწიფომ? 5. სხვამ? 6. არა, არავის დაუფინანსებია. ⇒naaw.18	კოდი:	კოდი:	კოდი:
17.	**დაახლოებით რამდენ ლარს შეადგენს მიმდინარე წელს ეს დაფინანსება?**				
18	თუ ნატურით (რაიმე ნივთის, პროდუქტის, სხვადასხვა საქონლის მიცემით ან სამსახურის გაწევით) იხდით სწავლის საფასურის ნაწილს				

	მაინც, ან აკეთებთ ამას მასწავლებლის პატივსაცემად, გთხოვთ შეაფასოთ, მიახლოებით რა ღირებულებისაა (ლარებში) ეს საქონელი და მომსახურება?			

nawili 3. mosamzadebeli ganyofilebis msmenelTa xarjebi

ინტერვიუერს: კითხვების ამ ნაწილში უნდა შეიტანოთ ინფორმაცია უმაღლესი სასწავლებლის მოსამზადებელი განყოფილების მსმენელთა ხარჯების შესახებ.

გადმოწერეთ პირველი კითხვიდან რესპონდენტთა ის ნომრები და სახელები, რომელთა პასუხების მიხედვით ცხრილის მე-4, მე-5 ან მე-6 სვეტებში შეტანილია კოდი 3.

თუ ოჯახში არ არის ასეთი რესპონდენტი, აღნიშნეთ უჯრაში √და გადადით me-4 nawilze□

რესპონდენტის ნომერი zogadi monacemebidan *(ჩაწერეთ)*				
რესპონდენტის სახელი *(ჩაწერეთ)*				
19	ფასიანია თუ არა მოსამზადებელი განყოფილება, სადაც სწავლობდით ან სწავლობთ ამჟამად? 1. დიახ. 2. არა.	კოდი:	კოდი:	კოდი:

თუ 20-23 სტრიქონების მიხედვით არაფერია გადასახდელი (გადახდილი) ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, უჯრაში ჩაწერეთ X)

20.	**რამდენი ლარი იყო გადასახდელი მოსამზადებელ განყოფილებაში სწავლისათვის?** (თუ არაფერი ჩაწერეთ 0)	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
21.	**აქედან რამდენი ლარი გადაიხადეთ**	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერში			

	სწავლისათვის?				
22	რამდენი ლარი გადაიხადეთ სასწავლო ნივთების (წიგნების, რვეულების...) შესაძენად? (თუ არაფერი ჩაწერეთ 0)	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერში			
23	რამდენი ლარი გადაიხადეთ სხვა, მათ შორის, არარეგულარული ხარჯების სახით? (თუ არაფერი, ჩაწერეთ 0)	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერში			
24	24. ხომ არ დააფინანსა თქვენი სწავლება ნაწილობრივ მაინც:		კოდი:	კოდი:	კოდი:
	1. კერძო პირმა? 2. კერძო ფირმამ? 3. საზოგადოებრივმა ორგანიზაციამ?	4. სახელმწიფომ? 5. სხვამ? 6. არა, არავის დაუფინანსებია. ⇒naaw.26			
25	დაახლოებით რამდენ ლარს შეადგენს მიმდინარე წელს ეს დაფინანსება?				
26	თუ ნატურით (რაიმე ნივთის, პროდუქტის, სხვადსხვა საქონლის მიცემით ან სამსახურის გაწევით) იხდით სწავლების საფასურის ნაწილს მაინც, გთხოვთ შეაფასოთ, მიახლოებით რა ღირებულებისაა (ლარებში) ეს საქონელი და მომსახურება?				

nawili 4. kolejSi, teqnikumSi, specialur saswavlebelSi swavlis xarjebi

ინტერვიუერს: **კითხვების ამ ნაწილში უნდა შეიტანოთ ინფორმაცია კოლეჯების, ტექნიკუმების, ან სპეციალური სასწავლებლების მოსწავლეების, სტუდენტებისათვის**

გადმოწერეთ პირველი კითხვიდან რესპონდენტთა ის ნომრები და სახელები, რომელთა პასუხების მიხედვით ცხრილის მე-4, მე-5 ან მე-6 სვეტებში

შეტანილია კოდი 4.

თუ ოჯახში არ არის ასეთი რესპონდენტი, აღნიშნეთ უჯრაში√ და გადადით me-5 nawilze

რესპონდენტის ნომერი zogadi monacemebidan *(ჩაწერეთ)*			
რესპონდენტის სახელი *(ჩაწერეთ შესაბამის უჯრაში)*			

27.	**რომელ კოლეჯში, ტექნიკუში, სპეციალურ სასწავლებელში სწავლობდით ან სწავლობთ ამჟამად?** *(პასუხის კოდი ჩაწერეთ შესაბამის უჯრაში?* 1. სახელმწიფო უფასო 2. სახელმწიფო ფასიანი	3. კერძო 4. სხვა (დაასახელეთ)	კოდი:	კოდი:	კოდი:

რამდენი ლარი იყო გადასახდელი სასწავლებელში 2000 წლის დასაწყისიდან? *(თუ არაფერი ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, შესაბამის უჯრაში ჩაწერეთ X)*

28	**სწავლისათვის** (სწავლის ქირა)?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
29	სასწავლო სექციებში, წრეებში მეცადინეობისათვის?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			

რამდენი ლარი გადაიხადეთ კოლეჯში, ტექნიკუმში, სპეციალურ სასწავლებელში? (იანვარ-ივნისში და სექტემბერში) *(თუ არაფერი ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, შესაბამის უჯრაში ჩაწერეთ X)*

30.	სწავლისათვის? (სწავლის ქირა)?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
31.	სასწავლო ნივთების (წიგნების, რვეულების...) შესაძენად?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			

32.	სასწავლო სექციებში, წრეებში მეცადინეობისათვის?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
33.	სხვა, მათ შორის არარეგულარული ხარჯები?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
34.	სასწავლებელში ჩარიცხვისათვის, სწავლის დროს (საგნების ჩაბარების, სპეციალობის შეცვლის ან სხვა მიზეზით) ხომ არ დაგჭირდათ არაოფიციალური ხარჯების გაწევა? 1. დიახ. 2. არა. ⇒36		კოდი:	კოდი:	კოდი:
35	დაახლოებით რამდენ ლარს შეადგენდა ეს ხარჯები?				
36.	ხომ არ დააფინანსა თქვენი სწავლება ნაწილობრივ მაინც: 1. კერძო პირმა? 4. სახელმწიფომ? 2. კერძო ფირმამ? 5. სხვამ? 3. საზოგადოებრივმა ორგანიზაციამ? 6. არა, არავის დაუფინანსებია. ⇒38		კოდი:	კოდი:	კოდი:
37.	დაახლოებით რამდენ ლარს შეადგენს მიმდინარე წელს ეს დაფინანსება?				
38.	თუ ნატურით *(რაიმე ნივთის, პროდუქტის, სხვადსხვა საქონლის მიცემით ან სამსახურის გაწევით)* იხდით სწავლების საფასურის ნაწილს მაინც, ან აკეთებთ ამას მასწავლებლის პატივსაცემად, გთხოვთ შეაფასოთ, მიახლოებით რა ღირებულებისაა (ლარებში) ეს საქონელი და მომსახურება?				

nawi l i 5. kerZo maswav l ebe l Tan, repet i t o r Tan momzadeba

ინტერვიუერს: კითხვების ამ ნაწილში უნდა შეიტანოთ ინფორმაცია კერძო მასწავლებელთან, რეპეტიტორთან მომზადების ხარჯების შესახებ.

გადმოწერეთ პირველი კითხვიდან რესპონდენტთა ის ნომრები და სახელები, რომელთა პასუხების მიხედვით ცხრილის მე-4, მე-5 ან მე-6 სვეტებში შეტანილია კოდი 5.

თუ ოჯახში არ არის ასეთი რესპონდენტი, აღნიშნეთ უჯრაში √ და გადადით nawili 6-ze □

რესპონდენტის ნომერი zogadi monacemebidan *(ჩაწერეთ უჯრაში)*			
რესპონდენტის სახელი *(ჩაწერეთ უჯრაში)*			
39 რომელ საგნებში ემზადებ(ოდ)ით?	ჩაწერეთ კოდები		
1. მათემატიკა; 4. გეოგრაფია;			
2. ფიზიკა; 5. ქართული;			
3. ისტორია; 6. უცხო ენები;			
7. სხვა *(დასახელება)*			

რამდენი ლარი იყო გადასახდელი მომზადებისათვის 2000 წლის ანგარიშში? *(თუ არაფერი ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, შესაბამის უჯრაში ჩაწერეთ X) (საგნის რიგითობა აიღეთ 39-ე კითხვიდან)*

40.	პირველ საგანში	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
41.	მეორე საგანში	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
42.	დანარჩენ საგნებში, ერთად	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			

რამდენი ლარი გადაიხადეთ მომზადებისათვის 2000 წლის ანგარიშში *(თუ არაფერი ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, შესაბამის უჯრაში ჩაწერეთ X) (საგნების რიგითობა აიღეთ 39-ე კითხვიდან)*

43.	პირველ საგანში	იანვარ-ივნისში			

		სექტემბერ-დეკემბერში			
44	მეორე საგანში	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
45	დანარჩენ საგნებში, ერთად	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
46	ხომ არ გამეცადინათ უფასოდ ნაცნობმა მასწავლებელმა (მასწავლებლებმა)? 1. დიახ. 2. არა		კოდი:	კოდი:	კოდი:
47	დაახლოებით რა დაგიჯდებოდათ იგივე მომზადება ფასიან მასწავლებელთან?				
	ხომ არ დააფინანსა თქვენი სწავლება ნაწილობრივ მაინც:		კოდი:	კოდი:	კოდი:
	1. კერძო პირმა? 2. კერძო ფირმამ? 3. საზოგადოებრივმა ორგანიზაციამ?	4. სახელმწიფომ? 5. სხვამ? 6. არა, არავის დაუფინანსებია. ⇒50			
49.	დაახლოებით რამდენ ლარს შეადგენს მიმდინარე წელს ეს დაფინანსება?				
50.	თუ ნატურით *(რაიმე ნივთის, პროდუქტის, სხვადსხვა საქონლის მიცემით ან სამსახურის გაწევით)* იხდით სწავლების საფასურის ნაწილს მაინც, ან აკეთებთ ამას მასწავლებლის პატივსაცემად, გთხოვთ შეაფასოთ, მიახლოებით რა ღირებულებისაა (ლარებში) ეს საქონელი და მომსახურება?				

nawili 6. umaRlesi ganaTlebis da aspiranturis xarjebi

ინტერვიუერს: კითხვების ამ ნაწილში უნდა შეიტანოთ ინფორმაცია უმაღლესი სასწავლებლის სტუდენტებისა და ასპირანტთა ხარჯების შესახებ.
გადმოწერეთ პირველი კითხვიდან რესპონდენტთა ის ნომრები და სახელები, რომელთა პასუხების მიხედვით ცხრილის მე-4, მე-5 ან მე-6 სვეტებში შეტანილია კოდი 6.

თუ ოჯახში არ არის ასეთი რესპონდენტი, აღნიშნეთ უჯრაში √და გადადით me-7 nawilze □

რესპონდენტის ნომერი zogadi monacemebidan *(ჩაწერეთ)*				
რესპონდენტის სახელი (ჩაწერეთ შესაბამის უჯრაში)				
51.	რომელ უმაღლეს სასწავლებელში ან ასპირანტურაში სწავლობთ ამჟამად kodebi 1. სახელმწიფო უფასო 3. კერძო ფასიანი 2. სახელმწიფო ფასიანი 4. სხვა (დაასახელეთ)	კოდი:	კოდი:	კოდი:

რამდენი ლარი იყო გადასახდელი სასწავლებელში 2000 წლის დასაწყისიდან? *(თუ არაფერი ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, შესაბამის უჯრაში ჩაწერეთ X)*

52	სწავლისათვის გადასახადი (სწავლის ქირა)?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
53	სასწავლო სექციებში, ლაბორატორიაში მეცადინეობისათვის?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			

რამდენი ლარი იყო გადასახდელი სასწავლებელში 2000 წლის დასაწყისიდან? *(თუ არაფერი ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, შესაბამის უჯრაში ჩაწერეთ X)*

54	სწავლისათვის გადასახადი (სწავლის ქირა)?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			

55	სასწავლო სექციებში, ლაბორატორიაში მეცადინეობისათვის, მეორად ფაკულტეტზე სწავლისათვის?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
56	სასწავლო ნივთების (წიგნების, რვეულების...) შესაძენად?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
57	სხვა, მათ შორის არარეგულირებული ხარჯები?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერ-დეკემბერში			
58	58. სასწავლებელში ჩარიცხვისათვის ხომ არ დაგჭირდათ არაოფიციალური ხარჯების გაწევა? 1. დიახ. 2. არა.		კოდი:	კოდი:	კოდი:
59	შწავლის დროს ხომ არ დაგჭირდათ რაიმე არაოფიციალურუ ხარჯების (საგნების ჩაბარების, სპეციალობის შეცვლის ან სხვა მიზეზით) გაწევა? 1. დიახ; 2. არა ⇒61		კოდი:	კოდი:	კოდი:
60	დაახლოებით რამდენ ლარს შეადგენს ეს ხარჯები 2000 წლის იანვრიდან?				
61.	ხომ არ დააფინანსა თქვენი სწავლება ნაწილობრივ მაინც: 1. კერძო პირმა? 2. კერძო ფირმამ? 3. საზოგადოებრივმა ორგანიზაციამ?	4. სახელმწიფომ? 5. სხვამ? 6. არა, არავის დაუფინანსებია. ⇒63	კოდი:	კოდი:	კოდი:
62.	დაახლოებით რამდენ ლარს შეადგენს მიმდინარე წელს ეს დაფინანსება?				
63.	თუ ნატურით (რაიმე ნივთის, პროდუქტის, სხვადსხვა საქონლის მიცემით ან სამსახურის				

	გაწევით) იხდით სწავლების საფასურის ნაწილს მაინც, გთხოვთ შეაფასოთ, მიახლოებით რა ღირებულებისაა (ლარებში) ეს საქონელი და მომსახურება?			

nawili 7. kvalifikaciis (ახალი კვალიფიკაციის მიღების ან ამაღლების) kursebi

ინტერვიუერს: კითხვების ამ ნაწილში უნდა შეიტანოთ ინფორმაცია ოჯახის იმ წევრების ხარჯების შესახებ, რომელნიც 2000 წლის დასაწყისიდან სწავლობდნენ კვალიფიკაციის მიღების ან ამაღლების რომელიმე (უცხო ენის, კომპიუტერების, საბუღალტრო და ა.შ.) კურსებზე.

გადმოწერეთ პირველი კითხვიდან რესპონდენტთა ის ნომრები და სახელები, რომელთა პასუხების მიხედვით ცხრილის მე-4, მე-5 ან მე-6 სვეტებში შეტანილია კოდი 7.

თუ ოჯახში არ არის ასეთი რესპონდენტი, აღნიშნეთ უჯრაში √ და გადადით me-8 nawilze □

რესპონდენტის ნომერი zogadi monacemebidan *(ჩაწერეთ)*					
რესპონდენტის სახელი *(ჩაწერეთ)*					
64	რომელ კურსებზე სწავლობდით ან სწავლობთ ამჟამად? კოდები: 1. უცხო ენის 2. კომპიუტერების	3. საბუღალტრო 4. სხვა (დაასახელეთ)	კოდი:	კოდი:	კოდი:
65	**რამდენი ლარი იყო გადასახდელი კურსებზე სწავლისათვის?** (თუ	იანვარ-ივნისში			
	არაფერი ჩაწერეთ 0, თუ	სექტემბერ-			

	მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, შესაბამის უჯრაში ჩაწერეთ X).	დეკემბერში			

რამდენი ლარი იყო გადაიხადეთ კურსებზე სწავლისათვის? (თუ არაფერი ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, შესაბამის უჯრაში ჩაწერეთ X).

66.	კურსებზე სწავლისათვის?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერში			
67	სასწავლო ნივთების (წიგნების, რვეულების...) შესაძენად?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერში			
68	სხვა, მათ შორის, არარეგულარული ხარჯები?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერში			
69	სწავლის დროს რაიმე მიზეზით ხომ არ დაგჭირდათ არაოფიციალური ხარჯების გაწევა? 1. დიახ. 2. არა. ⇒ 71		კოდი:	კოდი:	კოდი:
70.	დაახლოებით რამდენ ლარს შეადგენს მიმდინარე წელს ეს ხარჯები?				
71	თუ ნატურით (რაიმე ნივთის, პროდუქტის, სხვადსხვა საქონლის მიცემით ან სამსახურის გაწევით) იხდით სწავლების საფასურის ნაწილს მაინც, გთხოვთ შეაფასოთ, მიახლოებით რა ღირებულებისაა (ლარებში) ეს საქონელი და მომსახურება?				

nawili 8. sazRvargareT ganaTlebis xarjebi

ინტერვიუერს: **კითხვების ამ ნაწილში უნდა შემოიტანოთ ინფორმაცია**

საზღვარგარეთ განათლების ხარჯების შესახებ.

გადმოწერეთ პირველი კითხვიდან რესპონდენტთა ის ნომრები და სახელები, რომელთა პასუხების მიხედვით ცხრილის მე-4, მე-5 ან მე-6 სვეტებში შეტანილია კოდი 8.

თუ ოჯახში არ არის ასეთი რესპონდენტი, აღნიშნეთ უჯრაში და გადადით 81-e კითხვაზე

<table>
<tr><td colspan="3">რესპონდენტის ნომერი zogadi monacemebidan (ჩაწერეთ)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">რესპონდენტის სახელი (ჩაწერეთ)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>72.</td><td>რომელ ქვეყანაში სწავლობთ ამჟამად?
kodebi
1. რუსეთი
2. აშშ
3. გერმანია</td><td>4. ევროპის სხვა ქვეყანა (გერმანიის გარდა)
5. სხვა (დაასახელეთ)</td><td>კოდი:</td><td>კოდი:</td><td>კოდი:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">73</td><td rowspan="2">რამდენი აშშ დოლარი იყო გადასახდელი 2000 წლის დასაწყისიდან? (თუ არაფერი ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, შესაბამის უჯრაში ჩაწერეთ X).</td><td>იანვარ-ივნისში</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>სექტემბერ-დეკემბერში</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

რამდენი აშშ დოლარი გადაიხადეთ 2000 წლის დასაწყისიდან? (თუ არაფერი ჩაწერეთ 0, თუ მითითებული პერიოდებიდან რომელიმეში არ სწავლობდით, შესაბამის უჯრაში ჩაწერეთ X).

<table>
<tr><td rowspan="2">74</td><td rowspan="2">სწავლისათვის გადასახადი (სწავლის ქირა)?</td><td>იანვარ-ივნისში</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>სექტემბერში</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

75	სასწავლო ნივთების (წიგნების, რვეულების...) შესაძენად?	იანვარ-ივნისში			
		სექტემბერში			
76	სტუდენტის (მოსწავლის) მიმდინარე ხარჯებისათვის	იანვარ-ივნისში			
		აგვისტო-სექტემბერში			

ამ ხარჯებიდან რამდენი აშშ დოლარი გადაიხადა 2000 წელს

77	თვითონ სტუდენტმა საკუთარი შრომითი შემოსავლებიდან *(თუ არაფერი, ჩაწერეთ 0).*			
78	თქვენმა ოჯახმა *(თუ არაფერი, ჩაწერეთ 0).*			
79.	ხომ არ დააფინანსა სწავლა ნაწილობრივ მაინც: 1. კერძო პირმა? 4. სახელმწიფომ? 2. კერძო ფირმამ? 5. სხვამ? 3. საზოგადოებრივმა ორგანიზაციამ? 6. არა, არავის დაუფინანსებია.			
80	დაახლოებით რამდენ აშშ დოლარს შეადგენს მიმდინარე წელს ეს დაფინანსება?			

ახლა გთხოვთ გვიპასუხოთ სხვა ხასიათის ორ კითხვაზე!

81	ძირითადად რომელი ვალუტით ისაზღვრებ(ოდ)ა სწავლის გადასახადი მიმდინარე წელს თქვენი ოჯახის წევრისათვის? კოდები: 1. აშშ დოლარით 2. ლარით 3. სხვა ვალუტით (დაასახელეთ) -------------------------------	კოდი:	კოდი:	კოდი:
82	ძირითადად რომელი ვალუტით იხდიდით სწავლის გადასახადს მიმდინარე წელს თქვენი ოჯახის წევრისათვის? კოდები: 1. აშშ დოლარით 2. ლარით 3. სხვა ვალუტით (დაასახელეთ) -------------------------------	კოდი:	კოდი:	კოდი:

madlobas gixdiT gamokvlevaSi monawileobisaTvis

uarebis furceli

გამოკვლევის უბანი ----------------------

ინტერვიუერი ------------------ ზედამხედველი -----------------------------------

interviuers: თქვენი გამოსაკვლევი იმ მისამართებიდან, რომლებიდანაც რაიმე მიზეზით ვერ იქნა მიღებული ინტერვიუ, თითოეულ მათგანზე ცალ-ცალკე მე-3 გრაფაში უნდა მოგვცეთ პასუხის ვერ მიღების მიზეზი. მე-4 გრაფაში კი უნდა შეიტანოთ ამ ოჯახების გამოსაკვლევ ტერიტორიაზე მცხოვრებ სხვა ოჯახებთან შედარებით მატერიალური მდგომარეობის თქვენი თვალსაზრისით შეფასება. პასუხები შეიტანეთ თანდართული ვარიანტების მიხედვით.

რესპონდენტის შინ არ დახვედრის შემთხვევაში ამ მისამართს განმეორებით თქვენ სულ მცირე ორჯერ მაინც უნდა მიაკითხოთ და მხოლოდ შემდეგ შეიტანოთ ამ ფორმაში უარის შესაბამისი მიზეზი.

თუ სახლი ხანგრძლივი დროითაა დაკეტილი, შეეცადოთ მისი მეზობლების მეშვეობით გაიგოთ ერთ წელზე მეტი თუ ნაკლები ხნით არიან წასული.

№	შინამეურნეობის №	ინტერვიუს არჩატარების მიზეზი (ჩაწერეთ შესაბამისი კოდი ან კომენტარი)	შინამეურნეობის მატერიალური მდგომარეობა
1	2	3	4
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

10			

intervius Cautareblobis kodebi:

saxlSi cxovroben, magram:

1. უარი განაცხადეს ინტერვიუზე

2. შინ არავინ დაგხვდა

3. ხარჯების შესახებ ინფორმირებული წევრი შინ არ დაგვხვდა

4. დროებით წასული არიან (რამდენიმე კვირით, თვით ან სეზონურად) საქართველოს სხვა კუთხეში

5. დროებით წასული არიან (რამდენიმე კვირით, თვით ან სეზონურად) საზღვარგარეთ

6. სხვა მიზეზი (ჩაწერეთ შესაბამის სტრიქონში)

saxlSi aravin cxovrobs:

7. მობინადრეები გადავიდნენ საცხოვრებლად სხვა ადგილზე, სხვა კუთხეში, საქართველოს ფარგლებში

8. მობინადრეები წავიდნენ საცხოვრებლად საზღვარგარეთ

9. მობინადრე გარდაიცვალა

10. სხვა მიზეზი (ჩაწერეთ შესაბამის სტრიქონში)

misamarTze ar (aRar aris sacxovrebeli:

11. არარსებული მისამართი

12. ბინა (სახლი) დანგრეულია, ან ავარიულობის გამო საცხოვრებლად აღარ გამოიყენება

13. ბინა (სახლი) არ გამოიყენება საცხოვრებლად (გადაკეთდა სხა დანიშნულების ობიექტად)

14. სხვა მიზეზე: (ჩაწერეთ შესაბამის სტრიქონში)

Sinameurneobis materialuri mdgomareobis kodebi:

1. ძალიან მაღალი

2. მაღალი

3. საშუალო

4. დაბალი

5. ძალიან დაბალი

6. მიძნელდება პასუხის გაცემა

danarTi V. ganaTlebis dawesebulebebis saqmianobis gamokvlevis kiTxvari

saqarTvelos statistikis saxelmwifo departamenti

dawesebulebebis statistikuri saindentifikacio (rvaniSna) kodi		sawarmos sruli dasaxeleba, misamarTi	
teritoriis kodi			
sakuTrebis forma		(daasaxeleT)	
organizaciul-samarTlebrivi forma		(daasaxeleT)	
ZiriTadi saqmianoba sek (NACE)-001-97-is mixedviT		(daasaxeleT)	

მიღებული სტატისტიკური მონაცემების საიდუმლოება დაცულია „სტატისტიკის შესახებ" საქართველოს კანონის ძალით. თქვენი საწარმოს მონაცემები გამოყენებული იქნება მხოლოდ ნაერთი სტატისტიკური გაანგარიშებებისათვის

ganaTlebis dawesebulebebis saqmianobis gamokvleva

2000 წლის იანვარ-სექტემბრის შედეგების მიხედვით

წარმოადგენენ შერჩევით გამოკვლევის სიაში მოხვედრილი	statistikuri forma

განათლების დაწესებულებები, განურჩევლად საკუთრებისა და ორგანიზაციულ-სამართლებრივი ფორმისა.	**№1-ganaTleba** (განათლების დაწესებულებებისათვის)

I. dasaqmeba da kontingenti

კაცი

მაჩვენებლების დასახელება	სტრი-ქონი	დაწესებულებაში სულ
1	2	3
მოსწავლეთა (სტუდენტთა, აღსაზრდელთა) რაოდენობა 2000 წლის 1 იანვრის მდგომარეობით	10	
მოსწავლეთა (სტუდენტთა, აღსაზრდელთა) რაოდენობა 2000 წლის 1 ოქტომბრის მდგომარეობით	11	
მომუშავეთა საშუალო სიითი რაოდენობა, სულ	12	
შემთავსებელთა საშუალო რაოდენობა, სულ	13	
მომუშავეთა რაოდენობა, რომელთაც დაერიცხათ ხელფასი	14	

II. Semosavlebi da xarjebi

ა) Semosavali (საოპერაციო შემოსავლები)		
სწავლის გადასახადი (მთლიანი ან თანაგადახდის ის ნაწილი, რომელიც მოსწავლეს (მოსწავლის ოჯახს) ერიცხება გადასახდელად)	20	
დარიცხული დაფინანსება სახელმწიფოს (ცენტრალური ან ტერიტორიული (ადგილობრივი) ბიუჯეტის) რესურსებიდან	21	
მათ შორის: სამეცნიერო-კვლევითი საქმიანობისათვის დარიცხული დაფინანსება	22	
კაპიტალური ხარჯების დაფინანსება	23	

შემოსავლები სხვა წყაროებიდან, შემოწირულობები	24	
შემოსავლები ქონების იჯარით გაცემიდან, დღგ-ს გარეშე	25	
მთლიანი პროდუქცია არაძირითადი საქმიანობიდან (რეალიზაციისა და მზა პროდუქციის მარაგების ცვლილების ჯამი), დღგ-ს და აქციზის გარეშე	26	
სხვა საოპერაციო შემოსავლები (დაასახელეთ)	27	
ბ) momsaxurebis, saerTo da administraciuli xarjebi (საოპერაციო ხარჯები)		
ნედლეულისა და მასალების ხარჯი	30	
სათბობისა და ენერგიის ხარჯი	31	
გარე ორგანიზაციების ან ფიზიკური პირების მიერ კომუნალური, კავშირგაბმულობის, სატრანსპორტო, რეკლამის, მარკეტინგული კვლევის, სარემონტო და ა.შ. გაწეული მომსახურების მოცულობა	32	
საიჯარო ქირა	33	
შრომის ანაზღაურება, სოციალური ანარიცხების გარეშე	34	
სოციალური ანარიცხები	35	
სტიპენდიები	36	
ექსპლოატაციაში მყოფ ძირითად კაპიტალზე დარიცხული ამორტიზაცია (ცვეთა)	37	
სხვა საოპერაციო ხარჯები (დაასახელეთ)	38	
g) sxva Semosavlebi (არასაოპერაციო შემოსავლები)		
ძირითადი კაპიტალის ობიექტის გაყიდვიდან დარიცხული შემოსავალი	40	
სხვა არასაოპერაციო შემოსავლები (დაასახელეთ)	41	
d) sxva xarjebi (არასაოპერაციო ხარჯები)		
ძირითადი და საბრუნავი კაპიტალის გასვლის (ჩამოწერის, რეალიზაციის) შედეგად მიღებული ზარალი	50	
სხვა არასაოპერაციო ხარჯები	51	
e) gadasaxadebi (დარიცხული)		

დღგ	60	
ლიცენზიის აღების ხარჯები	61	
წარმოების ხარჯებში შესული გადასახადები (ქონების, სამეწარმეო, საგზაო და სხვა)	62	
მოგების გადასახადი	63	
III. dabandebebi ZiriTad kapitalSi ლარებში		
შენობა-ნაგებობები (მათი კაპიტალური რემონტის ხარჯების ჩათვლით)	70	
მანქანა-დანადგარები, სატრანსპორტო საშუალებები, ავეჯი, კომპიუტერები და სხვა ორგტექნიკა (მათი კაპიტალური რემონტის ხარჯების ჩათვლით)	71	
სხვა (გთხოვთ დაასახელოთ)	72	

IV. finansuri aqtivebi da valdebulebebi ლარებში

a) aqtivebi		1.1.2000 მდგომარეობით	1.10.2000 მდგომარეობით
ნაღდი ფული და დეპოზიტები	80		
მოთხოვნები ცენტრალური ან ტერიტორიული (ადგილობრივი) ბიუჯეტისადმი	81		
მოთხოვნები გაწეული კომერციული მომსახურებიდან (კონტინგენტის დავალიანება სასწავლებლისადმი)	82		
სხვა ფინანსური აქტივები	83		

ბ) ვალდებულებები

დავალიანება მომსახურე პერსონალის მიმართ (გაუცემელი ხელფასების და სხვა სარგოების სახით)	90		
სასწავლებლის მიერ კონტინგენტისაგან მიღებული ან სხვა ავანსები	91		

სხვა ფინანსური ვალდებულებები	92		

დაწესებულების ხელმძღვანელი ---------------------- ტელეფონის № -----------
(სახელი, გვარი)

შემსრულებელი ----------------------- --------- ---------- 2000 წელი
(სახელი, გვარი)

mokle miTiTebebi

სტატისტიკური ფორმა „№1 განათლების“ შევსებისათვის

1. წინამდებარე ფორმა შეივსება მიმდინარე - 2000 წლის იანვარ-სექტემბრის მონაცემების საფუძველზე.

2. ფორმას ავსებენ შერჩევითი წესით სტატისტიკურ დაკვირვებას დაქვემდებარებული (ნებისმიერი საკუთრებისა და დაფინანსების წყაროს მქონე) საბავშვო ბაღები, ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლები, კოლეჯები, ტექნიკუმები, სპეციალური და უმაღლესი სასწავლებლები, აგრეთვე განათლების სფეროს სხვა დაწესებულებები.

3. ფორმის I განყოფილებაში უნდა შეიტანოთ დაწესებულებაში მომუშავეთა და მოსწავლეთა (სტუდენტთა, აღსაზრდელთა) კონტიგენტზე მონაცემები.

4. ფორმის II განყოფილების შემოსავლების ნაწილში ნაჩვენები იქნება მიმდინარე წლის ცხრა თვეში შესაბამისი დაწესებულებების შემოსავლების სხვადასხვა წყაროები, მათ შორის:

5. 20-ე სტრიქონზე ნაჩვენები უნდა იქნას მოსწავლეთა (სტუდენტთა) სწავლისათვის გადასახდელად დარიცხული თანხა პირველი იანვრიდან პირველ ოქტომბრამდე. გაანგარიშება უნდა მოხდეს 1999-2000 სასწავლო წლის მეორე ნახევრის გადასახადზე 2000-2001 სასწავლო წლის პირველი ნახევრის გადასახადიდან სექტემბრის თვის წილად დარიცხული გადასახადის დამატებით.

6. 21-ე სტრიქონზე შეიტანება სახელმწიფო (ცენტრალური ან ადგილობრივი) ბიუჯეტიდან დარიცხული დაფინანსება, საიდანაც 22-ე და 23-ე სტრიქონებზე ცალკე უნდა იქნას გამოყოფილი სამეცნიერო-კვლევითი საქმიანობისა და კაპიტალური ხარჯების (ტექნიკის, ინვენტარის, ავეჯის შეძენის, რემონტის, მშენებლობის და ა.შ.) დაფინანსება.

7. 24-ე სტრიქონზე შეიტანება მშობლებიდან ან სხვადასხვა წყაროებიდან შემოწირულობების სახით ფაქტიურად მიღებული შემოსავლები, გახანგრძლივებული სწავლების, ფასიანი წრეების დარიცხული შემოსავლები.

8. 25-ე სტრიქონზე შეიტანება ქონების (ძირითადი საშუალებების) იჯარით გაცემიდან დარიცხული შემოსავალი.

9. 26-ე სტრიქონზე შეიტანება არაძირითადი საქმიანობიდან, მაგალითად, დამხმარე სასოფლო-სამეურნეო, სასწავლო სახელოსნოების ნაკეთობების ან

სხვა პროდუქციის რეალიზაციიდან დარიცხული შემოსავლებისა (დღგ-სა და აქციზის გარეშე) და მათი საკუთარი საჭიროებისათვის გამოყენებული და მარაგების ცვლილების მიმდინარე ფასებში გადაანგარიშებული ჯამი.

10. 27-ე სტრიქონი განკუთვნილია იმ საოპერაციო შემოსავლების აღსარიცხად, რომელთა იდენტიფიკაცია არ ხერხდება წინა პუნქტებში, კერძოდ აქ უნდა აღირიცხოს სხვადასხვა გრანტების, პროგრამების, პროექტების ფარგლებში შესრულებული სამუშაოების მოცულობა.

11. ფორმის II განყოფილების „ბ" ნაწილში 30-38-ე სტრიქონებზე ნაჩვენები იქნება მიმდინარე საწარმო ანუ საოპერაციო დარიცხული ხარჯები (ადმინისტრაციული ხარჯების ჩათვლით), მათ შორის:

33-ე სტრიქონში შეიტანება საიჯარო ქირა, რომელიც მოდის წლიური გადასახადიდან პირველი სამი კვარტალის წილად, იმისდა მიუხედავად გადახდილი იქნა იგი თუ არა;

34-ე სტრიქონზე - შრომის ანაზღაურების ხარჯები სოციალური ანარიცხების გარეშე;

35-ე სტრიქონზე ნაჩვენები იქნება ეს სოციალური ანარიცხები. აქაც იგულისხმება ამ პერიოდში დარიცხული ხელფასი და ანარიცხები.

12. 36-ე სტრიქონში შევა 2000 წლის იანვარ-სექტემბერში დარიცხული სტიპენდიების მთლიანი თანხა.

13. თუ ამორტიზაციის (ძირითადი საშუალებების ცვეთის) გაანგარიშება ხდება მხოლოდ წლიურ მონაცემებზე, მაშინ 37-ე სტრიქონში ჩაიწერება წინა წელს დარიცხული წლიური ამორტიზაციის 3/4.

14. 38-ე სტრიქონში შევა ისეთი საოპერაციო ხარჯები, რომელთა კლასიფიცირება ვერ მოხერხდა 30-37 სტრიქონებში, გარდა წარმოების ხარჯებში შესული გადასახადებისა, რომლებიც შეიტანება 62-ე სტრიქონში.

15. ფორმის II განყოფილების „გ" ნაწილში 40-41-ე სტრიქონებზე ნაჩვენები იქნება აოასაოპერაციო შემოსავლები: 40-ე სტრიქონზე უნდა შეიტანოთ ძირითადი კაპიტალის ობიექტის გაყიდვიდან დარიცხული მთლიანი შემოსავალი, 41-ე სტრიქონზე კი უნდა შეიტანოთ ისეთი საოპერაციო შემოსავლები, როგორიცაა საპროცენტო შემოსავლები, ვადაგადაცილებული ან უიმედო დავალიანების დასაფარად შემოსული თანხები და სხვა.

16. 50-51 სტრიქონებში შევა არასაოპერაციო ხარჯები. 50-ე სტრიქონზე უნდა შეიტანოთ ძირითადი და საბრუნავი კაპიტალის გასვლის (ჩამოწერის, რეალიზაციის) შედეგად მიღებული ზარალი, რაც ტოლია მისი ნარჩენი

ღირებულებისა. ამასთან, რეალიზაციის ან ჩამოწერილი საშუალების უტილიზაციის ხარჯები უნდა შევიდეს მომდევნო - 51-ე სტრიქონზე. 51-ე სტრიქონზევე უნდა შეიტანოთ ისეთი არასაოპერაციო ხარჯები, როგორიცაა საპროცენტო, ვალდებულებების დასაფარად გაწეული ხარჯები და სხვა.

17. ფორმის II განყოფილების „ე“ ნაწილში ჩაიწერება დარიცხული გადასახადები: 60-ე სტრიქონზე - დღგ, 61-ზე - მოცემულ პერიოდში ლიცენზიების აღების მთლიანი ღირებულება ხოლო 62-ში - სხვა გადასახადები, გარდა იმ გადასახადებისა, რომლებიც ჩართულია 35-ე სტრიქონში, ხოლო 63-ში - მოგების გადასახადი.

18. 70-72 სტრიქონები განკუთვნილია ა.წ. იანვარ-სექტემბერში გაწეული კაპიტალური ხარჯების აღსარიცხავად. რემონტის ხარჯები უნდა შევიდეს კაპიტალურ ხარჯებში, თუ ამ ოპერაციის შედეგად მოხდა რემონტის ობიექტის ნარჩენი (აღდგენითი) ღირებულების გარკვეული გაზრდა (აღდგენა).

19. ფორმის IV განყოფილებაში ა.წ. 1 იანვრისა და 1 ოქტომბრის მდგომარეობით ნაჩვენები იქნება ფინანსური აქტივები და ვალდებულებები. ამ ნაწილში განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიექცეს მოსწავლე კონტინგენტის დავალიანებას და წინასწარ გადახდილი სწავლის საფასურის სწორ ჩვენებას.

gmad l obT s t a t ist ikur gam okv l evaSi m onawi l eobisa da
inf o rmaci is m owo debisaTvis!

Sinaarsi

ლიტერატურა

1. გ. მანია. ალბათობის თეორიის კურსი. თსუ, თბილისი, 1982
2. გ. მანია. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, თსუ, თბილისი, 1976.
3. ბესარიონ დოჭვირი, ჰამლეტ მელაძე. ფინანსური მათემატიკა. ალბათობა და სტატისტიკა (ელემენტები) თსუ, თბილისი, 2003.
4. ტ. ბუაძე, ა. კვალიაშვილი, გ. მირზაშვილი, მ. ნადარეიშვილი. ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები, დამხმარე სახელმძღვანელო, სტუ, თბილისი, 1987.
5. ნ. ლაზრიევი, გ. მანია, გ. მარი, ა. მოსიძე, ა. ტორონჯაძე, თ. შერვაშიძე. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათვის. ფონდი „ევრაზია“, თბილისი, 2009.
6. ტ. ბუაძე, გ. ჯავახიშვილი, რ. დიხამინჯია, გ. ფიფია, თ. ბიბილაშვილი, რ. კაკუბავა. მეთოდური მითითებები ინდივიდუალური მოცემულობების შესასრულებლად ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში, სტუ, თბილისი, 1991.
7. გ. ჯავახიშვილი, ტ. ბუაძე, ზ. კანდელაკი და სხვ. ალბათური მოდელები ეკონომიკაში, თბილისი საავიაციო უნივერსიტეტი, თბილისი, 2009.
8. ი. სხილაძე, თ. ტუღუში, ა. ოსაძე, ა. ცივაძე, მ. ნადარეიშვილი. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, „განათლება“, თბილისი, 1990.
9. ლ. ბოჭორიშვილი, თ. მოდებაძე, გ. სოხაძე. სპეციალობის შესავალი. (მათ. მეთოდები ეკონომიკაში, ქუთაისი, 2000)
10. ჰაროლდ კისი. სტატისტიკა სოციალურ მეცნიერებებში, მესამე გამოცემა, თსუ 2008.
11. ი. ზედგენიძე, მ. ბალიაშვილი. ხარისხის მართვა. სახელმძღვანელო. სტუ., თბილისი. 2008
12. Г. Крамер. Математические методы статистики. изд. «иност. лит.», Москва, 1948
13. И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. Теория вероятностей и математическая статистика. изд. «Ваща школа», Киев, 1979.

14. В. К. Захаров, Б. А. Севастянов, В. П. Чистяков Теория вероятностей. Москва, 1988.

15. В. Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятнотей и математической статистике. Москва. 1988.

16. Т. Г. Буадзе, Н. А. Куциава, Е. С. Топурия, Д. Макацария. Принцип иерархического моделирования сложных систем и некоторые аспекты его применения. Межд. Нау. Тех. Конф. Российская школа молодых ученых и специалистов «Системные проблемы качества, математического моделирования и информационных технологий». Част 7, Москва, Сочи, 2000.

17. Т. Ш. Бибилашвили, И. И. Бадагадзе, Т. Г. Буадзе, И. Микарадзе. О расчете стандартного опциона европейского типа. Межд. Нау. Тех. Конф. Российская школа молодых ученых и специалистов «Системные проблемы качества, математического моделирования и информационных технологий». Част 7, Москва, Сочи, 2000.

ibeWdeba avtorTa mier warmodgenili saxiT

gadaeca warmoebas 02.07.2009. xelmowerilia dasabeWdad 09.07.2009. qaRaldis zoma 60X84 1/8. pirobiTi nabeWdi Tabaxi 12,5. tiraJi 100 egz.

sagamomcemlo saxli `teqnikuri universiteti~, Tbilisi, kostavas 77

Verba volant,
scripta manent