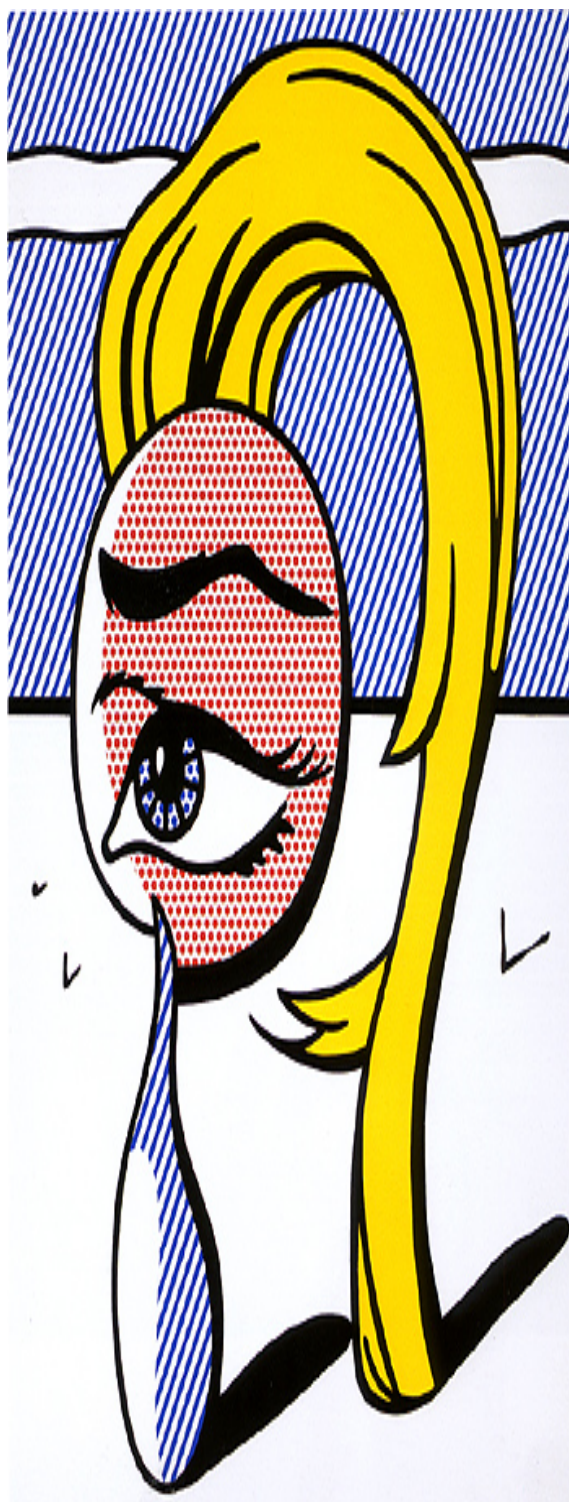




გია გიორგაძე

დიფერენციალური
განტოლებები

ლექციათა კურსი

2016 წელი



თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ლექციათა კურსი

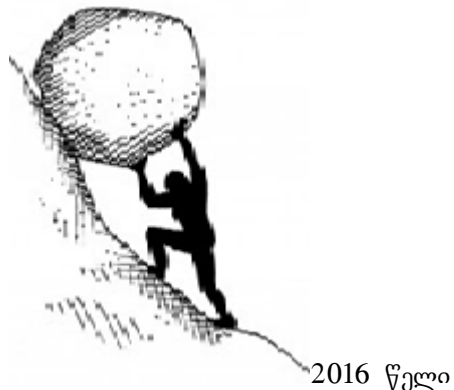
დიფერენციალურ განტოლებებში

ფიზიკის მიმართულების სტუდენტებისათვის

კურსი გათვალისწინებულია ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მესამე სემესტრის ფიზიკის მიმართულების ბაკალავრებისათვის და ფარავს დიფერენციალური განტოლებების (რაც გულისხმობს ჩვეულებრივ და კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებს) პროგრამით გათვალისწინებულ ყველა საკითხს. სისრულისათვის კურსში შესულია რამდენიმე საკითხი, რომელიც არაა სილაბუსში ასახული. ამოხსნილია თითქმის ყველა ტიპური ამოცანა და მოცემულია სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. სავარჯიშოები ძირითადი ტექსტის განუყოფელი ნაწილია, რომლებიც შემდგომ გამოყენებულია. თეორიის ფუნდამენტური და ძირითადი ფაქტები მოყვანილია თეორემების და დებულებების სახით, რომლებიც ზოგჯერ დამტკიცებული არ არის, რადგან ვერც ერთი მოაზრებადი მოცულობის კურსი მათ ვერ დაიტევს. ამ ნაპრალს ავსებს სავარჯიშოები. პირველი თავის ბოლოს მოცემულია დამატებითი ამოცანები, რომლითაც ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ძირითადი საკითხები ამოწურულია. ასეთი სავარჯიშოების მოყვანისაგან კურსის მეორე ნაწილის ბოლოს თავი შევიკავეთ, რადგან ჩავთვალეთ, რომ იგივე მიზნის მიღწევა შეუძლებელი იყო. არ გვინდოდა, რომ ამოცანები მხოლოდ შრომატევად სავარჯიშოებად დარჩენილიყო.

კურსის შედგენისას მაქსიმალურად ვცდილობდით, რომ მასალა დაძლევადი ყოფილიყო თხუთმეტ სალექციო საათში ყველა დონის სტუდენტისათვის, რაც მარტივად გადასაწყვეტი საკითხი არ იყო.

დამატებაში შესული საკითხები, როგორც მათი მოცულობიდან ჩანს, საცნობარო ხასიათისაა. კურსში მოცემული სხვადასხვა საკითხის განხილვის დროს შესაძლებელია მათი გამოყენება, რასაც აკეთებთ კიდევ ზოგიერთი საუნივერსიტო სახელმძღვანელოს ავტორი. ჩვენს შემთხვევაში მათი მოყვანით მომიჯნავე არსებითი თემატიკა გამოვყავით.



2016 წელი

	ნაწილი I. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები	13
	შესავალი.	13
	განმარტებები და მაგალითები	
1	ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა	19
1.1	კუშშვადი ასახვის პრინციპი	19
1.2	განმარტებები და დამხმარე დებულებები	20
1.3	ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემა პირველი რიგის ნორმალური განტოლებისათვის	23
1.4	დიფერენციალური განტოლებების ანალიზი არსებობისა და ერთადერთობის თეორემების გამოყენებით	26
	ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	31
2	პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები	33
2.1	განცალკეად ცვლადებიანი განტოლება	33
2.2	ერთგვაროვანი განტოლები	37
2.3	ტიპური ამოცანები. განცალკეად ცვლადებიანი განტოლებები	38
2.4	გეომეტრიული ამოცანების ანალიზი	46
2.5	განტოლება სრულ დიფერენციალებში	47
2.6	პირველი რიგის წრფივი განტოლება	56
2.7	ტიპური ამოცანები. წრფივი განტოლებები და განტოლებები რომლებიც წრფივზე დაიყვანებიან	61
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	63
3	<i>n</i>-ური რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები	66
3.1	მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი განტოლება	66
3.2	ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი განტოლება	71
3.3	მუდმივ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება კვაზიპოლინომიალური არაერთგვაროვანი წევრით	76
3.4	ზოგიერთი დიფერენციალური განტოლების შესახებ, რომელიც ცვლადის გარდაქმნით მიიყვანება წრფივ ერთგვაროვან მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებამდე	78
3.5	ბერნულის განტოლება	81
3.6	რიკატის განტოლება	82
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	85

4	დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნის წარმოდგენა ხასისხოვანი მწკრივის საშუალებით	87
4.1	განმარტებები და ელემენტარული ფუნქციები	87
4.2	პირველი რიგის წრფივი განტოლების ამონახსნის მწკრივად წარმოდგება	88
4.3	მეორე რიგის წრფივი განტოლების ამონახსნის მწკრივად წარმოდგება	89
4.4	ეილერის ინტეგრალი	95
4.5	ბესელის ფუნქცია	100
4.6	ვებერის ფუნქცია	104
4.7	რამდენიმე სასარგებლო ფორმულა	106
4.8	ცილინდრული ფუნქციების ასიმპტოტური ყოფაქცევა არგუმენტის დიდი მნიშვნელობისათვის	109
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	110
5	ზოგიერთი სპეციალური სახის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მეთოდი	113
5.1	განსაკუთრებული (სინგულარული) ამონახსნი	113
5.2	$F(t, x, x') = 0$ სახის განტოლების ამოხსნის მეთოდები	113
5.3	ლაგრანჟისა და კლეროს განტოლებები	115
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	119
6	დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები	120
6.1	წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა	120
6.2	ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა n -ური რიგის განტოლებათა ნორმალური სისტემისათვის და საწყის პირობებზე უწყვეტად დამოკიდებულება	122
6.3	მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა	126
6.4	ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის გამოყენებები	132
6.5	მეორე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა	137
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	138
7	დიფერენციალურ განტოლებათა ავტონომიური სისტემა	140
7.1	ავტონომიური სისტემა	140
7.2	პირველი ინტეგრალი	144
7.3	კონსერვატიული სისტემა ერთი თავისუფლების ხარისხით	147
7.4	ორგანზომილებიანი ავტონომიური სისტემა	149

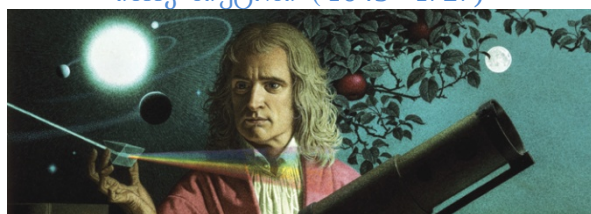
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	154
8	დგრადობა	156
8.1	მდგრადობის ცნება და ძირითადი თეორემები	156
8.2	განტოლებათა პერიოდული სისტემა და მისი მდგრადობა	159
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	163
9	სასაზღვრო ამოცანა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის	164
9.1	სასაზღვრო ამოცანის დასმა	164
9.2	სასაზღვრო ამოცანის გრინის ფუნქცია	165
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	170
10	შტურმ-ლიუვილის თეორია	171
10.1	ფუნქციის წარმოდგენა ფურიეს მწკრივად	171
10.2	შტურმ-ლიუვილის ამოცანის დასმა	176
10.3	რამდენიმე ტიპური ამოცანა	190
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	193
11	ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების კვადრატურებში ინტეგრებადობა	195
11.1	კომპიუტერული ალგებრის სისტემების შესახებ	195
11.2	ლიუვილის თეორიის ელემენტები	198
	მოცანები	203
	ასუხები	208
	ნაწილი II. კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები	
12	მათემატიკური ფიზიკის ძირითადი განტოლებები	210
12.1	ძირითადი აღნიშვნები	210
12.2	ძირითადი ცნებები და განმარტებები	214
12.3	მათემატიკური ფიზიკის კლასიკური განტოლებები	216
13	პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები	220
13.1	წრფივი პირველი რიგის განტოლება	220
13.2	ორი ცვლადის შემთხვევა	222
13.3	კვაზიწრფივი განტოლება	227
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	231
14	მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები	233
14.1	კლასიფიკაცია	233
14.2	კლასიფიკაცია: ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევა	235
14.3	მულტიკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის	

	განტოლები	236
14.4	ტიპიური მაგალითები	246
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	251
	ჰიპერბოლური განტოლებები	
15	კოშის ამოცანა სიმის რხევის განტოლებისათვის	255
15.1	ტალღის განტოლება	255
15.2	უსასრულო სიმი	256
15.3	მორბენალი ტალღა	261
15.4	შემოსაზღვრული სიმის რხევა	266
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	273
	პარაბოლური განტოლებები	
16	სითბოგამტარებლობის განტოლება ღეროსათვის	274
16.1	უსასრულო ღეროში სითბოს გავრცელება	274
16.2	სასრული სიგრძის ღეროში სითბოს გავრცელება	276
	ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	282
	ელიფსური განტოლებები	
17.1	ლაპლასის განტოლება	284
17.2	არაკორექტული ამოცანები. ადამარის მაგალითი	287
17.3	ლაპლასის განტოლება რგოლისთვის	288
17.4	დირიხლეს ამოცანა წრეში ლაპლასის განტოლებისათვის	293
17.5	დირიხლეს ამოცანა წრის გარეთ ლაპლასის განტოლებისათვის	294
17.6	დირიხლეს ამოცანა რგოლში ლაპლასის განტოლებისათვის	295
17.7	პუასონის განტოლება რგოლში	295
18	ჰელმჰოლცის განტოლება	299
	სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	301
19	განტოლებათა ამოხსნის ოპერაციული მეთოდი	303
19.1	ინტეგრალური გარდაქმნები	303
19.2	ლაპლასის გარდაქმნა	305
19.3	ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრება ოპერაციული მეთოდით	309
19.4	ორიგინალის აღდგენა ტრანსტორმანტის საშუალებით	313
19.5	კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრება ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენებით	313
	სავარჯიშო დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	320
	დამატება	

1	განზოგადებული ფუნქციები	322
2	ძირითადი ინტეგრალური განტოლებები	326
2.1	ძირითადი ცნებები და მაგალითები	326
2.2	ფრედჰოლმის მეორე გვარის განტოლებები	332
2.3	ფრედჰოლმის პირველი გვარის განტოლებები	335
3	ელიფსურ განტოლებათა სისტემები სიბრტყეზე	341
4	შტურმ-ლიუვილის ამოცანის რეალიზაცია Maple-ზე	346
5	ლაპლასის გარდაქმნის ცხრილი	351

ნაწილი I
ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები

ისააკ ნიუტონი (1643 - 1727)



გოტფრიდ ლეიბნიცი
(1646 – 1716)



დანიელ ბერნული
(1700 – 1782)



აუგუსტინ-ლუის კოში (1789-1857)



ლეონარდ ეილერი (1707-1783)



ჟოზეფ ლიუ ლაგრანჟი
(1736-1813)



ჟოზეფ ლიუვილი
(1809 – 1882)

ნაწილი I ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები

შესავალი

განმარტებები და მაგალითები. ელემენტარული დიფერენციალური განტოლების, რომლის თეორიის შესწავლასაც ჩვენ ვიწყებთ, მაგალითია ისეთი ფუნქციის პოვნის ამოცანა, რომლის წარმოებული მოცემული ცნობილი ფუნქციაა. სხვა სიტყვებით, ამოცანა მდგომარეობს ისეთი $x(t)$ ფუნქციის პოვნაში, რომლის წარმოებული მოცემული $a(t)$ ფუნქციაა: $x'(t) = a(t)$. ეს ამოცანა, როგორც ანალიზის კურსიდან ვიცით, იხსნება ცნობილი $a(t)$ ფუნქციიდან განუსაზღვრელი ინტეგრალის ალებით: $x(t) = \int a(t)dt$, ანუ ჩვენი ამოცანის ამონახსნი, ე.ი. საძიებელი ფუნქციაა, $a(t)$ -ს პირველყოფილი ფუნქცია (რომელიც მუდმივის სიზუსტით განისაზღვრება). შემდეგი ელემენტარული დიფერენციალური განტოლების მაგალითი, რომელსაც შესავალშივე მოვიყვანთ, არის ისეთი $x(t)$ ფუნქციის პოვნა, რომლის წარმოებული თვით ეს ფუნქციაა: $x'(t) = x(t)$. ანალიზიდან ვიცით, რომ ფუნქცია, რომელიც წარმოებული მძიმარტ ინვარიანტულია, არის ექსპონენციალური ფუნქცია, ანუ, უნდა ველოდოთ, რომ მოცემულ ამოცანას ხსნის $x(t) = e^t$ ფუნქცია. ეს მართლაც ასეა! ამაში უშუალო ჩასმით დავრწმუნდებით. მაგრამ ისიც ნათელია, რომ $x(t) = ce^t$ ფუნქციაც აკმაყოფილებს $x'(t) = x(t)$ დიფერენციალურ განტოლებას, სადაც c ნებისმიერი მუდმივაა. შემდეგი კითხვა, რომელიც ამ განტოლების კონტექსტში ჩნდება არის იმის გაგება, ამოვწურეთ თუ არა ce^t ფუნქციით $x'(t) = x(t)$ განტოლების ყველა ამონახსნი? ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა მოგვიანებით მოგვიწევს, რადგან მიღებული ცოდნიდან მასზე პასუხი არ უნდა გვქონდეს! ისევე, როგორც ინტუიცია ვერ გვიკარნახებს $x'(t) = 2x(t)$ დიფერენციალური განტოლების ყველა ამონახსნს.

საყოველთაოდ მიღებულია აგრეთვე, რომ ბუნების მრავალი მოვლების შესწავლისათვის ეფექტურია ამ მოვლების მათემატიკური მოდელის აგება. ხშირად, ვერ ხერხდება განსახილველი პროცესის დინამიკური პარამეტრების ცხადად ერთმანეთთან დაკავშირება. ფუნქციონალური დამოკიდებულების მიღება კი უმრავლეს შემთხვევაში შესაძლებელია. თუმცა გამოსაკვლევი პროცესის აღმწერი ფუნქცია შესაძლებელია მიღებულ გამოსახულებაში შედიოდეს მის წარმოებულთან ერთად. უხეშად რომ ვთქვათ, მიღებული გამოსახულება დიფერენციალური განტოლებაა. ამ კონტექსტში დიფერენციალური განტოლების უმარტივესი მაგალითია მატერიალური წერტილის მოძრაობის კანონი. თუ $S(t)$ მატერიალური წერტილის მიერ დროის t ინტერვალში გავლილი

საძიებელი გზაა, ხოლო $v(t)$ კი ცნობილი სიჩქარეა დროის t მომენტისათვის, მაშინ მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{dS(t)}{dt} = v(t), \quad (1)$$

ანუ $S'(t) = v(t)$. ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ როდესაც $v(t)$, $t \geq 0$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციაა, (1) განტოლების ყველა ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$S(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau + C, \quad (2)$$

სადაც C ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია. მაგალითად, თუ მატერიალური წერტილის სიჩქარისა და დროის დამოკიდებულება წრფივი ფუნქციაა, ე.ი. თუ $v(t) = at + b$, სადაც a, b ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ (2)-ის თანახმად

$$S(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt + C. \quad (3)$$

მარტივი დიფერენციალური განტოლებით აღიწერება აგრეთვე ბიოლოგიური უჯრედის ფუნქციონირების დარღვევა დიდი ინტენსივობის ულტრაბერის ზემოქმედებით:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -RN(t), \quad (4)$$

სადაც t , ისევე როგორც ზედა მაგალითში, დროს აღნიშნავს, $N(t)$ არის ცოცხალი უჯრედების კონცენტრაცია და სწორედ ამ ფუნქციის პოვნა გვაინტერესებს. (4) განტოლებაში R მუდმივაა, რომელიც დროის ერთეულში უჯრედის ფუნქციონირების დარღვევის ალბათობას განსაზღვრავს. თუკი (1) განტოლებიდან უცნობი $S(t)$ ფუნქციის საპოვნელად ანალიზის თეორემის გამოყენება იყო საკმარისი, (4) განტოლების ამოხსნას თავისი მეთოდი ჭირდება. ამ მეთოდს ცოტა მოგვიანებით განვიხილავთ, მანამდე კი პირდაპირ დავწერთ შედეგს:

$$N(t) = Ce^{-Rt}, \quad (5)$$

სადაც C კვლავ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. (5) გამოსახულებით მოცემული $N(t)$ ფუნქცია რომ მართლაც არის (4) განტოლების ამონახსნი, ამაში უშუალო ჩასმით დავრწმუნდებით!

დიფერენციალური განტოლების კიდევ ერთ მაგალითს მივიღებთ თუ განვიხილავთ ზამბარაზე დაკიდებული წონასწორობის მდგომარეობიდან გამოყვანილი ბურთულის დინამიკის განტოლებას. თუ წონასწორობის მდგომარეობიდან ბურთულას გადახრას დროის t მომენტისათვის

აღნიშნავთ $x(t)$ -თი და გამოვიყენებთ ნიუტონის მეორე კანონს, ბურთულას მოძრაობის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0, \quad (6)$$

სადაც $\omega > 0$ რაიმე მოცემული პარამეტრია. (1) განტოლების ანალოგიურად, (6) განტოლებაც შეიძლება ჩაიწეროს მისი ექვივალენტური $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ ფორმით.

(6) სახის დიფერენციალურ განტოლებას *ჰარმონიული რხევის* ანუ *წრფივი ოსცილატორის* განტოლება ეწოდება. სულ მალე ჩვენ ვნახავთ, რომ მისი ამონახსნი არის

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

ფუნქცია, სადაც A და φ ნებისმიერი მუდმივებია.

გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ თავიანთი შინაარსით სხვადასხვა ფიზიკური ამოცანები აღიწერებიან ერთიდაიგივე დიფერენციალური განტოლებებით. ბუნებაში მიმდინარე პროცესის აღსაწერად დიფერენციალური განტოლების გამოყენების შესაძლებლობა ხელსაყრელია იმ თვალსაზრისით, რომ ეს განტოლებები აღწერენ დროში პროცესის ევოლუციას.

თუ დიფერენციალურ განტოლებაში უცნობი ფუნქცია არის ერთი ცვლადის, მაშინ განტოლებას *ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება* ეწოდება, ხოლო თუ დიფერენციალურ განტოლებაში შემავალი ფუნქცია ორი ან ორზე მეტი ცვლადისაა, მაშინ განტოლებას *კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება* ეწოდება.

თუ t დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო $y = y(t)$ -- კი უცნობი ფუნქცია, მაშინ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, საზოგადოდ, შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (8)$$

სადაც F თავისი არგუმენტების რაიმე მოცემული ფუნქციაა. სხვა სიტყვებით, F გამოხატავს იმ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას, რომელიც არსებობს დამოუკიდებელ t ცვლადს, $y = y(t)$ ფუნქციასა და მის წარმოებულებს შორის. (8) გამოსახულებაში შემავალ y -ის უდიდეს წარმოებულს ეწოდება *დიფერენციალური განტოლების რიგი*. მაგალითად, ზემოთ მოყვანილი (1) და (4) განტოლებები პირველი რიგისაა, (6) განტოლება კი მე-2 რიგის, ხოლო (8) გამოსახულებით მოცემული დიფერენციალური განტოლება არის n -ური რიგის.

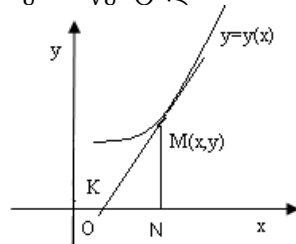
(8) დიფერენციალური განტოლების *ამონახსნი* ეწოდება ისეთ $y(t)$ ფუნქციას, რომლის F ფუნქციაში ჩასმით (8) გამოსახულება იგივეობად გადაიქცევა. $y(t)$ ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება (8) განტოლების

ინტეგრალური წირი. მომდევნო პარაგრაფებში (8) სახით ჩაწერილი განტოლება სხვადასხვა კონტექსტში შეგვხვდება. მაგალითად, იგი შეიძლება იყოს “ამოხსნილი” $y(t)$ -ს უმაღლესი წარმოებული მდარო, მაშინ წერენ

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

ჩვენ ვნახავთ, რომ F ფუნქციის თვისებებზე (წრფივობა, უწყვეტობა და სხვა) მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული (8) განტოლების ამონახსნის არსებობა და ამოხსნის მეთოდები. სწორედ ამ პრობლემებს ეძღვნება წიგნის პირველი თავი.

გეომეტრიული ამოცანები, რომლებიც დიფერენციალურ განტოლებებზე დაიყვანებიან. 1. დავწეროთ ისეთი წირების განტოლება, რომლის ნებისმიერი მხები აბსისთა ღერძს კვეთს წერტილში, რომლის აბსისა ორჯერ ნაკლებია მხების წერტილის აბსისაზე.



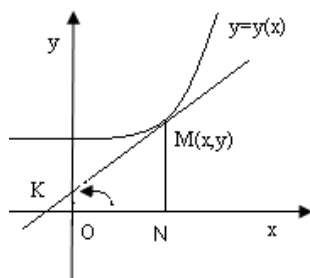
ნახ.1

დავუშვათ საძიებელი წირის განტოლება $y(x)$. ნახაზ 1-ზე მოცემული სამკუთხედი OMN მართკუთხაა, სადაც $MN = y$ და $\tan \angle MKN = y'$, ამასთან ამოცანის პირობის თანახმად $|OK| = \frac{1}{2}|ON|$, რაც ნიშნავს, რომ ON მონაკვეთისათვის K წერტილი შუა წერტილია და $|KN| = \frac{1}{2}|ON| = \frac{x}{2}$. მეორეს მხრივ OMN მართკუთხა სამკუთხედიდან $|KN| = \frac{|MN|}{\tan \angle MKN} = \frac{y}{y'}$. ამ ორი უკანასკნელი გამოსახულების გატოლებით მივიღებთ

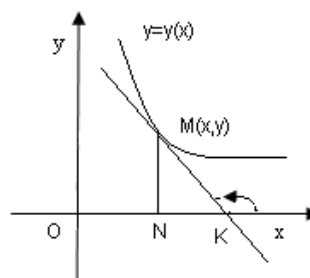
$$\frac{y}{y'} = \frac{x}{2} \Rightarrow xy' = 2y. \quad (1)$$

მიღებული გამოსახულება შეიცავს საძიებელ ფუნქციას თავის წარმოებულთან ერთად.

2. ვიპოვოთ წირები, რომლებისთვისაც სამკუთხედის ფართობი, რომელიც მიიღება ამ წირების მხებით, მხების წერტილის ორდინატით და აბსისთა ღერძით მუდმივია და



ნახ.2 ($y' > 0$)



ნახ.3 ($y' < 0$)

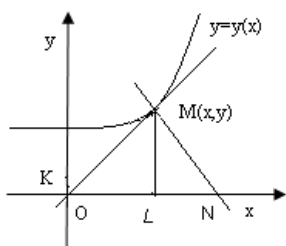
a^2 -ის ტოლია.

როგორც ნახაზი 2-დან ჩანს, მიღებული სამკუთხედის ფართობი ტოლია $S = \frac{1}{2}|KN|y$. რადგან $\operatorname{tg} \angle MKO = y'$ და $\frac{y}{KN} = \operatorname{tg} \angle MKO$, ამიტომ $S = \frac{y^2}{2y'}$, როდესაც $y' > 0$. ამრიგად, ვღებულობთ

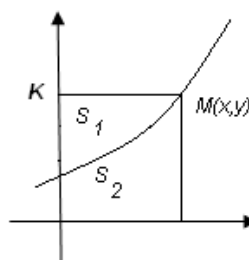
$$\frac{y^2}{2} = a^2 y' \quad (2)$$

ანალოგიურ განტოლებას ვიღებთ როდესაც $y' < 0$. იხილეთ ნახაზი 3.

3. ვიპოვოთ წირები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს: აბსისთა ღერძის მონაკვეთის სიგრძე, რომელსაც წირის ნებისმიერი წერტილიდან გაგლეხული მხები და ნორმალის მოკვეთს x ღერძს $2a$ -ს ტოლია.



ნახ.4



ნახ.5

ნახაზ 4-დან ჩანს, რომ $\frac{|ML|}{|OL|} = \operatorname{tg} \angle MKL$ და $\frac{|ML|}{|LN|} = \operatorname{tg} \angle MNL$. რადგან KMN სამკუთხედი მართკუთხაა, ამიტომ $\operatorname{tg} \angle MNL = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \angle MKL \right) = \operatorname{ctg} \angle MKL = \frac{1}{y'}$. ამასთან, $|OL| = \frac{y}{y'}$ და $|LN| = yy'$. ამოცანის პირობის თანახმად $|OL| + |LN| = 2a$, საიდანაც გამოვძინარეობს, რომ

$$\frac{y}{y'} + yy' = 2a. \quad (3)$$

მიღებული გამოსახულებიდან თუ შევძლებთ ვიპოვოთ y როგორც x -ის ფუნქცია, მივიღებთ საძიებელი წირების განტოლებას.

4. ვიპოვოთ შემდეგი თვისების მქონე წირები: თუ საძიებელი წირის ნებისმიერი წერტილიდან გავავლებთ საკოორდინატო ღერძების პარალელურ წრფეებს ღერძების გადაკვეთამდე, მიღებული მართკუთხედის ფართობს წირი ყოფს შეფარდებით 1:2.

ინტეგრალის გეომეტრიული ინტერპრეტაციის თანახმად $S_2 = \int_0^x y(t)dt$ (იხილეთ ნახ.5), ამასთან $S_1 + S_2 = xy$ და ამოცანის პირობის თანახმად $S_2 = 2S_1$, აქედან გამოდინარეობს, რომ $S_2 = \frac{2}{3}xy = \int_0^x y(t)dt$ ანუ $\frac{2}{3}xy = \int_0^x y(t)dt$. ამ გამოსახულების x -ით გაწარმოების შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{2}{3}(xy' + y) = y. \quad (4)$$

(1), (2), (3) და (4) განტოლებებში ჩვენი ინტერესის საგანია $y(x)$ ფუნქცია, რომელიც აღწერს საძიებელ წირებს. ეს განტოლებები $y(x)$ ფუნქციის გარდა შეიცავენ აგრეთვე მის წარმოებულ ფუნქციებსაც. ასეთი ტიპის განტოლებებს ეწოდებათ *დიფერენციალური განტოლებები*. მომდევნო თავებში მოვახდენთ დიფერენციალური განტოლებების კლასიფიკაციას და დავამუშავებთ მათი ამოხსნის მეთოდებს.

1. ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა

მოდევნო პარაგრაფებში ჩვენ განვიხილავთ ისეთ დიფერენციალურ განტოლებებს, რომელთათვისაც ამონახსნი ცალსახად იწერება. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ისინი ამოხსნადები არიან კვადრატურებში. ვნახავთ აგრეთვე, რომ იმ განტოლებათა რაოდენობა, რომელთა ამოხსნაც კვადრატურებშია შესაძლებელი, საკმაოდ შეზღუდულია, რის გამოც მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, საერთოდ როდის აქვს დიფერენციალურ განტოლებას ამონახსნი. აქ შეგვიძლია მივიყვანოთ ის შორეული ანალოგია, რომელიც ამ მიმართულებით დიფერენციალურ განტოლებებსა და n ხარისხის პოლინომიალურ (ალგებრულ) განტოლებებს შორის არსებობს. ვიცით, რომ მათ აქვთ n ფესვი ჯერადობის გათვალისწინებით, რაც რა თქმა უნდა იმას არ ნიშნავს, რომ ყველა ფესვისათვის გვაქვს ფორმულა, რომლითაც განტოლების კოეფიციენტების საშუალებით გამოისახება ეს ფესვი. ამრიგად, ჩვენ ვიცით ფესვების არსებობა. ანალოგიური თეორემა სამართლიანია დიფერენციალურ განტოლებათა საკმაოდ ფართო კლასისათვის და იგი ცნობილია დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ თეორემის სახელწოდებით. ამასთან ამონახსნის ერთადერთობას ადგილი აქვს საწყისი ანუ კოშის ამოცანისათვის. ჩამოვყალიბოთ არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა შემდეგი კოშის ამოცანისათვის:

$$f^{(n)} = F(t, f^{(n-1)}, \dots, f', f), \quad (*)$$

$$f(t_0) = f_0, f'(t_0) = f_1, f''(t_0) = f_2, \dots, f^{(n-1)}(t_0) = f_{n-1}. \quad (**)$$

შევნიშნოთ, რომ $(*)$ განტოლებაში უფროსი, n -ური რიგის წარმოებული ცხადაა ჩაწერილი. რის გამოც ამ სახის განტოლებაზე ამბობენ, რომ წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი განტოლებაა მოცემული. ხოლო $(**)$ საწყისი პირობები, რომელთა რაოდენობა n -ია, ცალსახად გამოყოფს ამონახსნთა სივრციდან ერთადერთ ამონახსნს, ანუ მოსპობს ზოგად ამონახსნში n რაოდენობის მუდმივებით გამოწვეულ არაცალსახობას.

1.1 კუმშვადი ასახვის პრინციპი

გავიხსენოთ ანალიზიდან რამდენიმე განმარტება და ფაქტი: მეტრიკული სივრცე, ფუნდამენტური მიმდევრობა, სრული მეტრიკული სივრცე.

დავუშვათ R სრული მეტრიკული სივრცეა ρ მეტრიკით და A ამ სივრცის თავისთავზე ასახვაა. A -ს ეწოდება *კუმშვადი ასახვა*, თუ არსებობს ისეთი $\alpha < 1$ დადებითი რიცხვი, რომ

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \quad (1)$$

ნებისმიერი x, y წყვილისათვის R -დან.

კუმშვადი ასახვა უწყვეტია (აჩვენეთ!)

x წერტილს ეწოდება A ასახვის უძრავი წერტილი, თუ $Ax = x$.

თეორემა (კუმშვადი ასახვის პრინციპი). R სრული მეტრიკული სივრცის თავისთავში კუმშვად A ასახვას აქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი.

დამტკიცება. ავიღოთ R -დან ნებისმიერი x_0 წერტილი და განვიხილოთ მიმდევრობა:

$$x_0, x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1 = A^2x_0, \dots, x_n = A^n x_0, \dots$$

ამასთან, ჩავთვალოთ რომ $m \geq n$. ვაჩვენოთ, რომ $(x_n)_{n \geq 0}$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია. მართლაც

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^n x_0, A^m x_0) \leq \alpha \rho(A^{n-1} x_0, A^{m-1} x_0) \leq \alpha^2 \rho(A^{n-2} x_0, A^{m-2} x_0) \leq \dots \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n+1}) \leq \alpha^n \frac{1}{1-\alpha} \rho(x_0, x_1).$$

რადგან $\alpha < 1$, ამიტომ $\alpha^n \frac{1}{1-\alpha} \rho(x_0, x_1)$ რაგინდ მცირე სიდიდეა, ე.ი. მიმდევრობა ფუნდამენტურია. R სივრცე სრულია, რის გამოც $(x_n)_{n \geq 0}$ მიმდევრობის ზღვარი, რომელსაც x -ით აღვნიშნავთ, ეკუთვნის R -ს. A ასახვის უწყვეტობიდან გამოდის, რომ

$$Ax = A \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

ამით უძრავი წერტილის არსებობა დამტკიცებულია. ახლა ვაჩვენოთ მისი ერთადერთობა. დავუშვათ $Ax = x$ და $Ay = y$. მაშინ (1) უტოლობიდან გვექნება, რომ

$$\rho(Ax, Ay) = \rho(x, y) \leq \alpha \rho(x, y),$$

რადგან $\alpha < 1$, უკანასკნელი ტოლობა შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\rho(x, y) = 0$, რაც ნიშნავს, რომ $x = y$. ამით თეორემა სრულადაა დამტკიცებული.

1.2 განმარტებები და დამხმარე დებულებები

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, დიფერენციალური განტოლება ეწოდება თანაფარდობას, რომელიც, საზოგადოდ, შეიცავს ერთ ან რამოდენიმე დამოუკიდებელ ცვლადს, ამ ცვლადებზე დამოკიდებულ უცნობ ფუნქციებს და მათ წარმოებულებს. ამ პარაგრაფში ჩვენი მიზანია საკმაოდ ზოგადი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების შესწავლა და ჩავთლით, რომ ისინი მოცემულია

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

სახით, სადაც t დამოუკიდებელი ცვლადია, x მასზე დამოკიდებული უცნობი ფუნქციაა, f მოცემული ფუნქციაა. როგორც ვიცით, (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ეწოდება $t \in]r_1, r_2[\subset R$ ინტერვალზე განმარტებულ

უწყვეტ $x = \varphi(t)$ ფუნქციას, რომლის ჩასმა დასაშვებია განტოლებაში და ჩასმის შედეგად განტოლება გადაიქცევა

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t)), t \in I.$$

იგივეობად.

I ინტერვალს ეწოდება $\varphi(t)$ ამონახსნის არსებობის ინტერვალი.

ტერმინი „ჩასმა დასაშვებია“ ნიშნავს, რომ ყოველი მათემატიკური ოპერაცია, რომელიც $x = \varphi(t)$ ჩასმასთან არის დაკავშირებული, კორექტულია. განხილულ შემთხვევაში ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს $\frac{d\varphi(t)}{dt}, t \in I$.

აღნიშნეთ აგრეთვე, რომ უმარტივეს დიფერენციალურ განტოლებასაც კი შესაძლოა ჰქონდეს უამრავი ამონახსნი. მაგალითად,

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

განტოლების ამონახსნია ნებისმიერი მუდმივი $\varphi(t) \equiv c, -\infty < t < +\infty$, ფუნქცია. ე.ი ამონახსნთა ეს სიმრავლე უსასრულოა. დიფერენციალურ განტოლების ამონახსნთა სრულ ერთობლიობას, ეწოდება ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ე.ი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის კონკრეტული უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ჩასმა დასაშვებია დიფერენციალურ განტოლებაში, რის შედეგადაც იგი გადაიქცევა იგივეობად.

კერძოდ, ამონახსნის გამოყოფა ზოგადი ამონახსნისაგან შესაძლებელია ე.წ. საწყისი პირობით, რომელსაც განხილულ შემთხვევაში აქვს სახე: $\varphi(t_0) = x_0$, სადაც t_0 და x_0 მოცემული რიცხვებია, რომელთაც საწყისი მნიშვნელობები ეწოდება. თუ განხილულ, მაგალითში საწყისი მნიშვნელობად ავიღებთ $\forall t_0, x_0 = 1$, მივიღებთ კერძო ამონახსნს, $\varphi(t) \equiv 1, -\infty < t < +\infty$, ეს არის ზოგადი ამონახსნის ერთადერთი წარმომადგენელი, რომელიც დააკმაყოფილებს $\varphi(t_0) = 1$ საწყის პირობას.

ამგვარად, დიფერენციალური განტოლებების შესწავლისას ბუნებრივად წარმოიშვება მისი ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხი, რაც ამ თავის შესწავლის საგანია.

ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემების დასამტკიცებლად, დავჭირდება დამხმარე ცნებები და დებულებები, რომლებიც ქვემოთ არის მოყვანილი.

ლიპშიცის პირობა. ვთქვათ $f(t, x)$ განმარტებულია და უწყვეტი $(t, x) \in R^1 \times R^1$ სიბრტყის რაღაც $D \subset R^2$ არეში. ვიტყვი, რომ $f(t, x)$ ფუნქცია D არეში x ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას,

თუ არსებობს $k > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ნებისმიერი $(t, x_1), (t, x_2)$ წერტილებისათვის D არიდან სრულდება უტოლობა:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k |x_1 - x_2|.$$

ყველა უწყვეტი ფუნქცია ლიპშიცის პირობას არ აკმაყოფილებს. მაგალითად, $\sqrt{y}$ უწყვეტი ფუნქცია $[0, 1]$ სეგმენტზე ლიპშიცის პირობას არ აკმაყოფილებს. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს განმარტებაში მითითებული k მუდმივი ისეთი, რომ

$$|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| \leq k |y_1 - y_2|.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $y_2 = 0, y_1 > 0$.

მივიღებთ $|\sqrt{y_1}| \leq k |y_1|$, $\frac{1}{|\sqrt{y_1}|} \leq k$. როდესაც $y_1 \rightarrow 0$, უკანასკნელი

უტოლობის მარცხენა მხარე შემოსაზღვრული არ არის. რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება და ამტკიცებს ჩვენს ჰიპოტეზას. რაც შეეხება დიფერენცირებად ფუნქციას, იგი ლიპშიცის პირობას ყოველთვის აკმაყოფილებს. მართლაც, თუ $|f'(y)| \leq k$, მაშინ ლაგრანჟის თეორემის თანახმად გვაქვს

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |f'(y)| |y_1 - y_2| \leq k |y_1 - y_2|.$$

ამასთან, თუ ფუნქცია ლიპშიცის პირობას აკმაყოფილებს, შესაძლებელია იგი დიფერენცირებადი არ იყოს. მაგალითად, $|y|$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას $(-\infty, +\infty)$ -ზე:

$$||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2| \quad (|y_1| \leq |y_1 - y_2| + |y_2|),$$

მაგრამ $(-\infty, +\infty)$ -ზე ყველგან (კერძოდ 0-ში) დიფერენცირებადი არ არის.

ამრიგად, *ფუნქციონალური სივრცე, რომელიც შედგება ლიპშიცის პირობის დამაკმაყოფილებელი ფუნქციებისაგან, მოიცავს დიფერენცირებად ფუნქციათა სივრცეს და შედის უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეში.*

ინტეგრალური ოპერატორი. განვიხილოთ $r_1 \leq t \leq r_2$ სეგმენტზე უწყვეტ $\varphi(t)$ ფუნქციათა Φ სიმრავლე, რომელთა გრაფიკები შედის D არეში. ანუ სრულდება პირობა: $(t, \varphi(t)) \in D, \forall t \in [r_1, r_2]$. ვთქვათ $f(t, x)$ განმარტებულია და უწყვეტია D არეში და t_0 წერტილი ეკუთვნის $]r_1, r_2[$ ღია ინტერვალს.

გამოსახულება

$$A\varphi = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, \quad r_1 \leq t \leq r_2, \quad (2)$$

სადაც x_0 -მოცემული ნებისმიერი მუდმივია, არის ინტეგრალური ოპერატორი, რომელიც Φ სიმრავლის ნებისმიერ $\varphi = \varphi(t)$ ელემენტს შეუსაბამებს $A\varphi = \tilde{\varphi}(t)$ ელემენტს ზემოთ მოყვანილი ფორმულით:

$$\tilde{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, r_1 \leq t \leq r_2.$$

ცხადია, რომ $\tilde{\varphi}(t)$ არის $r_1 \leq t \leq r_2$ სეგმენტზე განმარტებული უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია და აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\frac{d\tilde{\varphi}(t)}{dt} = f(t, \varphi(t)), r_1 \leq t \leq r_2.$$

1.3 ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა პირველი რიგის ნორმალური განტოლებისათვის

დიფერენციალური განტოლების რივი განისაზღვრება განტოლებაში შემავალი უცნობი ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულით.

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ნორმალური თუ ამონახსნილია უცნობი ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულის მიმართ და არ შეიცავს სხვა რიგის წარმოებულებს.

განვიხილოთ

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \varphi) \quad (1)$$

ნორმალური განტოლება.

თეორემა 1. ვთქვათ ფუნქცია $f(t, x)$ განმარტებულია და უწყვეტია D არეში და აკმაყოფილებს x ცვლადის მიმართ ლიპშიცის პირობას ამ არეში. ვთქვათ (t_0, x_0) არის D -ს ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია. მაშინ არსებობს (1) განტოლების $\varphi(t)$ ამონახსნი განმარტებული t_0 წერტილის შემცველ რაიმე I ინტერვალზე, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას

$$\varphi(t_0) = x_0 \quad (2)$$

და ეს ამონახსნი ერთადერთია შემდეგი აზრით: თუ არსებობს (1) განტოლების რომელიმე სხვა ამონახსნი $\psi(t)$ განმარტებული J ინტერვალზე და არსებობს ისეთი $t^* \in I \cap J$, რომ $\psi(t^*) = \varphi(t^*)$, მაშინ $\psi(t) \equiv \varphi(t)$, ნებისმიერი t -სათვის $I \cap J$ თანაკვეთიდან.

ლემა. განვიხილოთ ისეთი უწყვეტი $\varphi(t), t \in I$ ფუნქცია, რომლის გრაფიკი შედის D არეში, ე.ი. $(t, \varphi(t)) \in D, \forall t \in I$. თუ შესრულებულია იგივეობა

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \phi(\tau)) d\tau, t \in I, \quad (3)$$

მაშინ (3) ინტეგრალური ოპერატორით მოცემული $\phi(t)$ ფუნქცია არის (1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (2) საწყის პირობას.

რადგან (3) იგივეობის მარჯვენა მხარე უწყვეტად წარმოებადია t ცვლადით, ამიტომ არსებობს $\frac{d\phi(t)}{dt}$ და ტოლია $f(t, \phi(t)), t \in I$. გარდა

ამისა $\phi(t_0) = x_0$. ამით ლემა დამტკიცებულია.

ნათელია, რომ სამართლიანია ამ ლემის შებრუნებული დებულებაც.

შენიშვნა. აღვნიშნოთ $\phi = \phi(t), t \in I$. A ოპერატორის გამოყენებით იგივეობა (3) ჩაიწერება ექვივალენტური ფორმით შემდეგნაირად $\phi = A\phi$.

საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ (2) ინტეგრალური ოპერატორი არის კუმშვადი ასახვა. f ფუნქციის უწყვეტობიდან გამომდინარეობს, რომ (t_0, x_0) წერტილის შემცველ $D_1 \subset D$ არეზე სამართლიანია $|f(t, \phi(t))| \leq M$ უტოლობა. რადგან f აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას მეორე არგუმენტის მიმართ, ამიტომ არსებობს ისეთი k , რომ $|f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_2(t))| \leq k|\phi_1(t) - \phi_2(t)|$. ავირჩიოთ t_0 წერტილის $[t_0 - d, t_0 + d]$ მიდამო ისეთნაირად, რომ 1) როდესაც $|t - t_0| \leq d$ სამართლიანი იყოს ჩართვა $(t, \phi) \in D_1$ და $|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq Md$ უტოლობა და 2) გარდა ამ პირობებისა d -მ დააკმაყოფილოს უტოლობა $kd < 1$.

აღვნიშნოთ $C^*[t_0 - d, t_0 + d]$ -ით $|t - t_0| \leq d$ სეგმენტზე იმ ϕ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე $\rho(\phi_1, \phi_2) = \max_t |\phi_1(t) - \phi_2(t)|$ მეტრიკით, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|\phi(t) - x_0| \leq Md$.

$C^*[t_0 - d, t_0 + d]$ სრულია, როგორც $[t_0 - d, t_0 + d]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა სრული სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე. განვიხილოთ $\tilde{\phi} = A\phi$ ფორმულით განსაზღვრული ასახვა

$$\tilde{\phi} = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \phi(\tau)) d\tau,$$

სადაც $|t - t_0| \leq d$. ვაჩვენოთ, რომ ეს ასახვა $C^*[t_0 - d, t_0 + d]$ სივრცეს ასახავს თავისთავში და არის კუმშვადი ასახვა. მართლაც, ვთქვათ $\phi \in C^*[t_0 - d, t_0 + d]$, მაშინ

$$|\tilde{\phi}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \phi(\tau)) d\tau \right| \leq Md$$

და ამრიგად $A(C^*[t_0 - d, t_0 + d]) \subset C^*[t_0 - d, t_0 + d]$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ იგი კუმშვადი ასახვაა. მართლაც,

$$|\tilde{\phi}_1(t) - \tilde{\phi}_2(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, \phi_1(\tau)) - f(\tau, \phi_2(\tau))| d\tau \leq kd\rho(\phi_1, \phi_2).$$

რადგან $kd < 1$, ამიტომ A არის კუმშვადი ასახვა. ეს კი იმას ნიშნავს რომ $\phi = A\phi$ განტოლებას და ამრიგად

$$\varphi = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

ინტეგრალურ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $C^*[t_0 - d, t_0 + d]$ სივრცეში.

ამით არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

განვიხილოთ კოშის ამოცანა, რომლის მარჯვენა მხარე არ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას და რომელსაც არ აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|}, x(t_0) = 0.$$

განტოლების მარჯვენა მხარე $f(x) = 2\sqrt{|x(t)|}$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაგრამ არ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას. მართლაც, ვთქვათ x და y ორი განსხვავებული ელემენტი f -ის განსაზღვრის არედან. მაშინ

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{2(\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|})}{|x - y|}$$

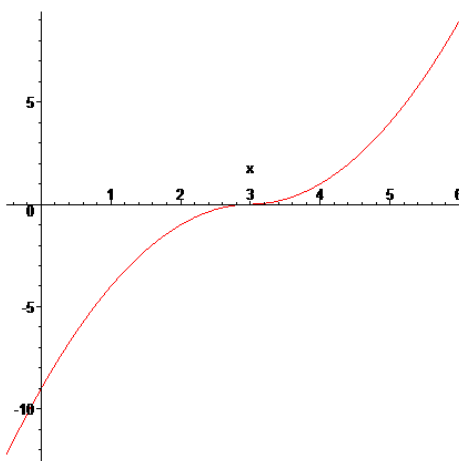
და როდესაც $y = 0$ და $x \rightarrow 0$ გვაქვს

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} = \frac{2}{\sqrt{|x|}} \rightarrow +\infty.$$

უშუალო ჩასმით შეიძლება შევამოწმოთ, რომ

$$x_1(t) = \begin{cases} (t - t_0)^2, & t \geq t_0, \\ -(t - t_0)^2, & t < t_0 \end{cases}$$

კოშის ამოცანის ამონახსნია. ამასთან, კოშის ამოცანის ამონახსნია აგრეთვე $x(t) \equiv 0$ ფუნქცია.



$$x_1(t) = \begin{cases} (t - 3)^2, & t \geq 3, \\ -(t - 3)^2, & t < 3 \end{cases} \quad \text{ფუნქციის გრაფიკი}$$

1.4 დიფერენციალური განტოლებების ანალიზი არსებობისა და ერთადერთობის თეორემების გამოყენებით

არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად, თუ

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

კოშის ამოცანაში f ფუნქცია უწყვეტია სიბრტყის გარკვეულ არეში, მაგალითად

$$\Pi = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2: |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

მართკუთხედზე და აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას მეორე x არგუმენტის მიმართ ამ არეზე, რაც ნიშნავს, რომ

$$\exists K > 0: \forall (x_1, x_2 \in [-b + x_0, b + x_0]), \forall (t \in [-a + t_0, a + t_0]) \\ |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

ასეთ პირობებში $t_0 - d \leq t \leq t_0 + d$ სეგმენტზე, სადაც

$$d = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), M = \max_{(t,x) \in \Pi} |f(t, x)|,$$

მაშინ არსებობს (1) ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი $x(t)$, რომლისკენაც თანაბრად კრებადია

$$x(t_0) = x_0, x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_n(\tau))d\tau, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

რეკურსიული სახით მოცემული ფუნქციათა მიმდევრობა, როდესაც $n \rightarrow \infty$. ამრიგად, (2) მიმდევრობა საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ კოშის ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი. დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ამ მეთოდს *მიახლოებითი მიმდევრობის* (ან *პიკარის*) მეთოდი ეწოდება.

ამოცანა 1. ამოვხსნათ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით $x'(t) = x(t)$, $x(0) = x_0$ კოშის ამოცანა.

ამოხსნა. (2)-ის თანახმად გვაქვს:

$$x_0(t) = x_0, x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t x_0 d\tau = x_0(1+t),$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t x_0(1+\tau)d\tau = x_0\left(1+t+\frac{t^2}{2!}\right).$$

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით ნებისმიერი ნატურალური k -სათვის გვექნება

$$x_k(t) = x_0\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!}\right).$$

როდესაც $k \rightarrow \infty$ ფუნქციათა $(x_k(t))_{n \geq 1}$ მიმდევრობა ნებისმიერი $t \in \mathbb{R}^1$ -სათვის თანაბრად კრებადია $x(t) = x_0 e^t$ ფუნქციისაკენ ნებისმიერ $[-a, a] \subset \mathbb{R}^1$ ჩაკეტილ მონაკვეთზე. რაც ნიშნავს, რომ ჩვენი კოშის

ამოცანის ამონახსნია $x(t) = x_0 e^t$ ფუნქცია (ამ ამონახსნის მიღება ჩვენ სხვა მეთოდებითაც შეგვიძლია).

ზემოთ მოყვანილი (1) კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობის კიდევ რამდენიმე საკმარისი პირობა არსებობს. ერთ-ერთი ასეთია ქვემოთ მოყვანილი თეორემა.

თეორემა (ჰენო) თუ f ფუნქცია უწყვეტია Π -ზე მაშინ $t_0 - d \leq t \leq t_0 + d$ სეგმენტზე არსებობს (1) ამოცანის ერთი ამონახსნი მაინც.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ f ფუნქციის უწყვეტობა უზრუნველყოფს ამონახსნის მხოლოდ არსებობას და იგი ვერ უზრუნველყოფს ამონახსნის ერთადერთობას, მაშინ როდესაც ქვემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად, გარკვეულ პირობებში შესაძლებელია ამონახსნის ერთადერთობის დამტკიცება, თუ ამონახსნი არსებობს.

თეორემა (ოსგუდი) ვთქვათ არსებობს ისეთი $\omega = \omega(\xi)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია როდესაც $\xi \geq 0$, $\omega(0) = 0$ და $\omega(\xi) > 0$ როდესაც $\xi > 0$, გარდა ამისა დავუშვათ $\int_0^{2b} \frac{d\xi}{\omega(\xi)} = +\infty$ და Π -ზე სრულდება უტოლობა $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \omega|x_1 - x_2|$. მაშინ t_0 -ის მიდამოში არსებობს (1) ამოცანის არაუმეტეს ერთი ამონახსნი.

ამოცანა 2. ვიპოვოთ რომელიმე სეგმენტი, რომელზედაც $x'(t) = t + x^3(t)$, $x(0) = 0$ კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

ვისარგებლოთ არსებობის თეორემით. ჩვენს ამოცანაში $t_0 = x_0 = 0$, $f(t, x) = t + x^3$. f უწყვეტია ნებისმიერ $\Pi = \{(t, x) \in R^2: |t| \leq a, |x| \leq b\}$ მართკუთხედზე და აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას, რადგან $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$ შემოსაზღვრულია $3b^2$ რიცხვით. მაშასადამე, $[-d, d]$ სეგმენტზე, სადაც $d = \min(a, \frac{b}{M})$, $M = \max_{(t,x) \in \Pi} |f(t, x)| = a + b^3$ არსებობს ჩვენი ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი.

ამრიგად, საჭიროა ვიპოვოთ d , რომელიც დააკმაყოფილებს ტოლობას $d = \min(a, \frac{b}{a+b^3})$. ნათელია, რომ თუ რომელიმე I სეგმენტზე ერთადერთი ამონახსნი არსებობს, მაშინ ასეთი ამონახსნი იარსებებს I -ში შემაჯავალ ნებისმიერ სეგმენტზე. აქედან, ცხადია, რომ უნდა შევეცადოთ ვიპოვოთ რაც შეიძლება “დიდი” სეგმენტი. ამის გამო ვეძებთ $\max \min(a, \frac{b}{a+b^3})$. რადგან $\psi(a) = a$ ფუნქცია ზრდადია, როდესაც $a \geq 0$, ხოლო $\varphi(a) = \frac{b}{a+b^3}$ ამ დროს კლებადია, ამიტომ მაქსიმუმი მიიღწევა როდესაც $\psi(a) = \varphi(a)$, ე.ი. როდესაც სრულდება ტოლობა $a = \frac{b}{a+b^3}$. მაგრამ a -ს მაქსიმუმი (როგორც b -ს ფუნქციის) მიიღწევა როდესაც $\frac{b}{a+b^3}$ გამოსახულების წარმოებული b -თი 0 -ის ტოლია. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $b^3 = \frac{a}{2}$. $a = \frac{b}{a+b^3}$ გამოსახულებაში $2b^3 = a$ -ს

ჩასმით მივიღებთ, რომ $b = \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ და $a = \frac{2}{\sqrt[5]{256}} = \frac{1}{3} \sqrt[5]{36} \approx 0,66$. ამრიგად, მოცემული კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნის არსებობა გარანტირებულია $-0,66 \leq t \leq 0,66$ სეგმენტზე.

ზემოთ მოყვანილი ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენეთ არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა და მივიღეთ სეგმენტი, რომელზედაც არსებობს კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი. ამასთან შევეცადეთ რაც შეიძლება დიდი ინტერვალი მიგვეღო. ახლა დავსვათ ასეთი კითხვა: შესაძლებელია თუ არა მიღებული სეგმენტის გაზრდა? ამ კითხვაზე პასუხი დადებითია და ჩვენ დავამტკიცებთ $[-0,66, 0,66]$ -ს შემცველი I სეგმენტის არსებობას, სადაც მოცემულ კოშის ამოცანას ექნება ერთადერთი ამონახსნი. ამისათვის გამოვიყენებთ შემდეგ ლემას.

ლემა (ბიხარი) დაუშვათ სრულდება უტოლობა

$$x(t) \leq C + \int_{t_0}^t v(\tau)g(x(\tau))d\tau, \quad t_0 \leq t \leq a,$$

სადაც $C = \text{const} > 0$, $x(t)$ და $v(t)$ არაუარყოფითი და უწყვეტი ფუნქციებია, ხოლო $g(x)$ კი უწყვეტი, არაუარყოფითი და ზრდადი ფუნქციაა (არა აუცილებლად მკაცრად ზრდადი), ამასთან $g(x) > 0$, როდესაც $x > 0$. მაშინ $x(t) \leq G^{-1}\left(G(C) + \int_{t_0}^t v(\tau)d\tau\right)$, სადაც $G(u) = \int_{u_0}^u \frac{d\tau}{g(\tau)}$, $u_0 > 0$, ყოველი $t \in [t_0, a]$, რომელთათვისაც $G(G) + \int_{u_0}^u v(\tau)d\tau$ ეკუთვნის G^{-1} -ს განსაზღვრის არეს.

ამ ლემის გამოყენებით საგრძნობლად შეგვიძლია გავაფართოვოთ სეგმენტი, სადაც კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი არსებობს. მართლაც,

$$x(t) = \int_0^t (\tau + x^3(\tau))d\tau = \frac{t^2}{2} + \int_0^t x^3(\tau) d\tau$$

აქედან $|x(t)| \leq \frac{a^2}{2} + \int_0^t |x(\tau)|^3 d\tau$, $0 \leq t \leq a$. ამრიგად, $C = \frac{a^2}{2}$, $v(t) \equiv 1$, $g(x) = x^3$. ამიტომ

$$G(u) = \int_{u_0}^u \frac{d\tau}{\tau^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{u^2} \right), \quad u \geq u_0 > 0,$$

$$G^{-1}(t) = \frac{u_0}{\sqrt{1-2u_0^2t}}, \quad G(C) + \int_0^t d\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{C^2} \right) + t.$$

$$\text{მაშასადამე, } G^{-1}\left(G(C) + \int_0^t v(\tau)d\tau\right) = \frac{C}{\sqrt{1-2C^2t}}, \quad |x(t)| \leq \frac{C}{\sqrt{1-2C^2t}},$$

სადაც $t \in \left[0, \frac{1}{2C^2}\right]$. $a = \frac{1}{2C^2}$ განტოლებიდან ვპოულობთ $\max a = \sqrt[5]{2} \approx 1,15$.

ახლა შევცვალოთ t ცვლადი $-t$ -თი და ჩავატაროთ იგივე გამოთვლები. მივიღებთ უტოლობას

$$|x(t)| \leq \frac{C}{\sqrt{1+2C^2t}}, \quad t \leq 0,$$

რაც გვიჩვენებს, რომ ჩვენი ამოცანის ამონახსნი არსებობს როდესაც $-\sqrt[5]{2} \leq t \leq 0$. ამგვარად, მოცემული კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $[-1.15, 1.15]$ სეგმენტზე.

ამოცანა 3. ვიპოვოთ რაიმე სეგმენტი, რომელზედაც არსებობს $x'(t) = 2x^2(t) - t, x(1) = 1$ კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი.

გამოვიყენოთ არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა. ამ ამოცანისათვის $t_0 = x_0 = 1, f(t, x) = 2x^2 - t$. ეს ფუნქცია უწყვეტია ნებისმიერ $\Pi = \{(t, x) \in R^2: |t - 1| \leq a, |x - 1| \leq b\}$ მართკუთხედზე და აქვს x -ის მიმართ შემოსაზღვრული კერძო წარმოებული: $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x, \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = |4x| \leq 4|b + 1|$. ამიტომ $|t - 1| \leq d = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ სეგმენტზე, სადაც $M = \max_{(t,x) \in \Pi} |2x^2 - t| \leq 2(1 + b)^2 + 1 + a$, არსებობს ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი. ისევე, როგორც ამოცანა 1-ში a და b პარამეტრებს ვპოულობთ ტოლობებიდან

$$a = \frac{b}{2(1+b)^2 + a + 1} \text{ და } \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{b}{2(1+b)^2 + a + 1} \right) = 0. \quad (*)$$

მაშასადამე, $a = \frac{1}{4(1+b)}, 2b^2 - 3 = \frac{1}{4(1+b)}$. უკანასკნელი ტოლობიდან

გამოდის, რომ $b > \sqrt{\frac{3}{2}} > 1,2$, მაშინ $a < \frac{1}{4(1+1,2)} = 0,11$. მაგრამ d -ს

შეფასება შესაძლებელია გაუმჯობესდეს, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a < 1$. მაშინ $M = 2(1 + b)^2 - 1 + a$ და $(*)$ -ის ანალოგიური ტოლობებიდან ვპოულობთ

$$a = \frac{1}{4(1+b)}, 2b^2 - 1 = \frac{1}{4(1+b)} < \frac{1}{4} \Rightarrow b < \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

მაშასადამე, $a = \frac{1}{4(1+b)} > \frac{1}{4\left(1+\sqrt{\frac{5}{8}}\right)} \approx 0,13$. ამგვარად, $0,87 \leq t \leq 1,13$

სეგმენტზე არსებობს ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი. აქვე შევნიშნოთ, რომ ბიხარის ლემის გამოყენებით შესაძლებელია $[0.87, 1.13]$ შემცველი I სეგმენტის პოვნა, რომელზედაც გარანტირებული იქნება ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა.

ამოცანა 4. ვიპოვოთ $x'(t) = t - x^2(t), x(0) = 0$ კოშის ამოცანის ამონახსნის მესამე მიახლოება და შევაფასოთ ცდომილება, როდესაც $0 \leq t \leq 0.5$.

პიკარის მიახლოებითი მეთოდით ვპოულობთ:

$$x_0 = 0; x_1(t) = \int_0^t (\tau - x_0^2) d\tau = \frac{t^2}{2}; x_2(t) = \int_0^t \left(\tau - \frac{\tau^4}{4}\right) d\tau = \frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{20};$$

$$x_3(t) = \int_0^t \left(\tau - \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^5}{20}\right)^2\right) d\tau = \frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{20} + \frac{t^8}{160} - \frac{t^{11}}{4400}.$$

ახლა შევაფასოთ მიღებული მიახლოების ცდომილება. პირველ რიგში ვიპოვოთ სეგმენტი, სადაც ამონახსნის ერთადერთობაა გარანტირებული.

მსჯელობა ჩავატაროთ წინა ამოცანების ანალოგიურად და მივიღებთ, რომ $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. ამ სეგმენტზე ფუნქციითა მიმდევრობა

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \quad (1)$$

თანაბრად კრებადია

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (2)$$

ინტეგრალური განტოლების ამონახსნისაკენ. (2) გამოსახულებას წევრობრივად გამოვაკლოთ (1) და სხვაობა შევაფასოთ ყოველი $n = 0, 1, 2, \dots$ -სათვის:

$$|x(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau = \int_{t_0}^t |\psi(\tau)| d\tau, \quad \psi(\tau) = |f(\tau, x(\tau))|,$$

$$\begin{aligned} |x(t) - x_1(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x_0)| d\tau \leq k \int_{t_0}^t d\xi \int_{t_0}^{\xi} \psi(\tau) d\tau \\ &= k \int_{t_0}^t (t-u) \psi(u) du \end{aligned}$$

...

...

...

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))| d\tau \leq \frac{K^n}{n!} \int_{t_0}^t (t-u)^n \psi(u) du,$$

სადაც K ლიპშიცის პირობაში მითითებული რიცხვია $\Pi = \{(t, x) \in R^2: |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ მართკუთხედზე, რომლისთვისაც სამართლიანია შეფასება $K \leq \max_{(t,x) \in \Pi} |2x(t)| = 2|y|$. გარდა ამისა, $\psi(u) = |u - x^2(u)| \leq |u| + ||x||^2$, $n = 3$, $t_0 = 0$. ამიტომ ზემოთ მოყვანილი უტოლობებიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} ||x - x_3|| &\leq \frac{4}{3} ||x||^3 \int_{t_0}^t (t-u)^3 (u + ||x||^2) du \leq \\ &\leq \frac{4}{3} ||x||^3 \int_0^{0,5} (0,5-u)^3 (u + ||x||^2) du = \\ &= \frac{||x||^3}{48} (0,1 + ||x||^3). \end{aligned} \quad (*)$$

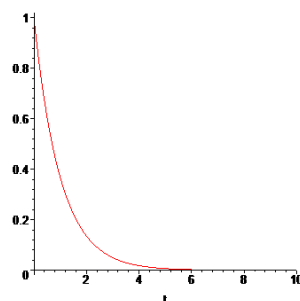
დაგვრჩა შესაფასებელი $0 \leq t \leq 0,5$ სეგმენტზე, რომელიც შედის $[-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}]$ -ში, $||x||$ სიდიდე. ბიხარის ლემიდან გამომდინარეობს, რომ $|x| \leq \frac{C}{1-Cx}$, სადაც $C = \max_{0 \leq t \leq 0,5} \frac{t^2}{2} = 0,125$, ამიტომ $||x|| \leq \frac{0,125}{1-0,125 \times 0,5} \leq 0,134$. (*)-ის გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ

$$||x - x_3|| \leq 0,6 \times 10^{-5}.$$

ერთი შენიშვნა არსებობისა და ერთადერთობის თეორემისათვის.

გავარკვეოთ რამდენად მუშაობს პრაქტიკაში დებულება იმის შესახებ, რომ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირები არ გადაიკვეთებიან. მაგალითად, დიფერენციალურ განტოლებას, $\frac{dx}{dt} = -x$, აქვს

ორი ამონახსნი: $x(t) = 0$ და $x(t) = e^{-t}$. ინტეგრალური წირები, ანუ ამ ფუნქციების გრაფიკები არ იკვეთება, მაგრამ, მეორეს მხრივ, როდესაც $t = 10$ ამ ორ ინტეგრალურ წირს შორის ატომიც კი არ ჩაეტევა $e^{-10} \approx 0,00004539992976 \approx 5 \times 10^{-5}$.



$x(t) = e^{-t}$ ფუნქციის გრაფიკი როდესაც t იცვლება 0-დან 10.

აღწერილი ეფექტის გამო გემის ყოველი მიბმის დროს ნავსადგომში, მეზღვაური ისვრის ბაგირს, რომელსაც სწრაფად ახვევენ კნესტზე (ბოჯგზე). დაბმის საბოლოო ეტაპი ხელით მთავრდება, ბაგირის გაქაჩვის საშუალებით.

ეს აიხსნება იმით, რომ ავტომატური მიბმა, მართვის ზოგადი პრინციპების შესაბამისად, ემყარება უკუკავშირს: ვაკვირდებით რა X მანძილს ნავსადგომამდე, მართვას ვირჩევთ ისე, რომ მიბმის სიჩქარე მდორედ შემცირდეს ნულამდე (როგორც X -ის ფუნქცია). ბუნებრივია, ეს ფუნქცია გლუვია, ე.ი. მცირე X მანძილისათვის სიჩქარე მცირდება X -ის მიმართ წრფივად. ზემოთ მოყვანილი ერთადერთობის თეორემის თანახმად, მიბმის დრო იქნება უსასრულო ნებისმიერი ასეთი გლუვი უკუკავშირისათვის. იმისათვის რომ მიბმა მოხდეს სასრულ დროში, უარი უნდა ვთქვათ რეგულირების პრინციპზე გლუვი უკუკავშირით, შევცვალოთ გემის სიჩქარის მართვა მეზღვაურის მუშაობით ბაგირთან, ან შევევოთ გემის დაჯახებას ნავსადგომის კიდეზე მიბმის ბოლო ეტაპზე (ამისათვისაა ნავსადგომის კიდეზე დამაგრებული ავტომობილის გამოყენებული საბურავები).

ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. პიკარი მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ მართკუთხეში ამოხსენით კომის ამოცანა

$$y'(x) = x^2 + y^2(x), \quad y(0) = 0.$$

პასუხი: $M = 2, d = \frac{1}{2}; y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} + \dots$

2. იპოვეთ მიახლოებითი მიმდევრობის პირველი სამი წევრი

1) $y'(x) = x^2 - y^2(x)$, $y(-1) = 0$. პასუხი: $y_0(x) = 0$, $y_1(x) = \frac{1+x^3}{3}$, $y_2(x) = \frac{1}{126}(33 - 14x + 42x^3 - 7x^4 - 2x^7)$.

2) $y'(x) = x + y^2(x)$, $y(0) = 0$. პასუხი: $y_0(x) = 0$, $y_1(x) = \frac{x^2}{2}$, $y_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}$.

3) $y'(x) = x + y(x)$, $y(0) = 1$. პასუხი: $y_0(x) = 1$, $y_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $y_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$.

3. აჩვენეთ, რომ ფუნქცია $y = x^2$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას $[a, b]$ მონაკვეთზე, მაგრამ არ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას მთელს R ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე.

2. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

2.1. განცალკავებული ცვლადებიანი განტოლება

როგორც უკვე აღვნიშნეთ

$$x' = f(t), \quad (1)$$

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის პოვნა, სადაც $f(t)$ ცნობილი ფუნქციაა, სიმნელეს არ წარმოადგენს. $x(t)$ უცნობი ფუნქციის აღდგენა ხდება ინტეგრების ოპერაციის საშუალებით:

$$x(t) = \int_0^t f(s)ds + C, \quad (2)$$

ან თუ $F(t)$ -თი $f(t)$ ფუნქციის პირველყოფილს აღვნიშნავთ, მაშინ $x(t) = F(t) + C$.

ახლა განვიხილოთ განტოლება

$$x' = g(x), \quad (3)$$

სადაც $g(x)$ უცნობი ფუნქციაა. ამ განტოლების ზემოთ მოყვანილი გზით ამოხსნა უკვე შეუძლებელია. ამაში ხელს გვიშლის $g(x)$! ვეცადოთ როგორმე თავიდან მოვიცილოთ ეს სირთულე. გავიხსენოთ მათემატიკაში მიღებული მეთოდები რაიმე სირთულის გასაჩხნელად. ზშირად გამოსახულებას მისი ექვივალენტური ფორმით გარდაკქმნით ხოლმე. ამისათვის გამოსახულებას ვუმატებთ და ვაკლებთ ან ვამრავლებთ და ვყოფთ ერთსადამიგივე გამოსახულებაზე, ან ვახდენთ ცვლადის გარდაკქმნას (მარტივად რომ ვთქვათ, რთულ გამოსახულებას რაიმე სიმბოლოთი აღვნიშნავთ). (3) განტოლების ანალიზისათვის მისი მარჯვენა და მარცხენა მხარეები გავყოთ $g(x)$ -ზე. მივიღებთ:

$$\frac{x'}{g(x)} = 1. \quad (4)$$

ამის შემდეგ ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარე ვაინტეგრირებთ t -თი. ამასთან, უკვე შესაძლებელია მარცხენა მხარის ინტეგრაცია, რადგან

$$\int \frac{x'}{g(x)} dt = \int \frac{dx}{g(x)}. \text{ შევნიშნოთ, რომ ამ ტოლობას ადგილი აქვს იმისგან}$$

დამოუკიდებლად, როგორია $x(t)$. თუ ახლა $G(x)$ -ით აღვნიშნავთ $\frac{1}{g(x)}$

ფუნქციის პირველყოფილს, (4)-ის ინტეგრებით t -თი მივიღებთ:

$$G(x) = t + C, \quad (5)$$

საიდანაც

$$x(t) = G^{-1}(t + C). \quad (6)$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი განტოლება:

$$x' = g(x) f(t). \quad (7)$$

ამ განტოლების ამონახსნის პოვნა ზემოთ მოყვანილის ანალოგიურად ხდება. $g(x)$ -ზე განტოლების ორივე მხარის გაყოფის შემდეგ შესაძლებელია მიღებული გამოსახულების ორივე მხარის ინტეგრება. აღვნიშნოთ $F(t)$ -ით და $G(x)$ -ით შესაბამისად $f(t)$ და $\frac{1}{g(x)}$ ფუნქციების პირველყოფილები, მივიღებთ:

$$G(x) = F(t) + C,$$

საიდანაც

$$x(t) = G^{-1}(F(t) + C). \quad (8)$$

ვიტყვი, რომ მოცემულია განტოლება განცალკეადი ცვლადებით (ან გვაქვს განცალკეადცვლადებიანი განტოლება), თუ მას აქვს სახე

$$x' = g(x) f(t),$$

ან

$$g_1(x) f_1(t) dx + g_2(x) f_2(t) dt = 0. \quad (9)$$

ამ განტოლებების სახელწოდება შეიცავს მათი ამოხსნის პრინციპსაც! განტოლების ამოხსნელად საჭიროა ცვლადების განცალკეება. ყველა წევრი რომელიც დამოკიდებულია x -ზე საჭიროა გადავიტანოთ ერთ მხარეს, ხოლო მეორე მხარეს დავტოვოთ t -ზე დამოკიდებული წევრები. ამის შემდეგ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\varphi(x)x' = \psi(t)$$

ან

$$\varphi(x)dx = \psi(t)dt.$$

ახლა კი საჭიროა მიღებული გამოსახულების ინტეგრება. ინტეგრების დროს საკმარისია განტოლების ორივე მხარეს ინტეგრების ნიშნები მივაწეროთ და პირველყოფილი ვიპოვოთ, არ ვიზრუნოთ იმაზე თუ რომელი ცვლადების მიმართ ხდება ინტეგრება. ასეთი პროცედურის ჩატარება მათემატიკურად კორექტულია, რადგან სამართლიანია განსაზღვრულ და განუსაზღვრელ ინტეგრალში ცვლადის გარდაქმნის შემდეგი ტოლობა

$$\int \varphi(x(t))x'(t)dt = \int \varphi(x)dx \Big|_{x=x(t)}$$

$x(t)$ ფუნქციითაა საკმაოდ ფართო კლასისათვის.

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ სამი ტიპის განცალკეადცვლადებიანი განტოლება. ამოვწეროთ მათი ამონახსნები. ბუნებრივია დაისვას კითხვა: ნაპოვნია ყველა ამონახსნი? ანუ სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ამონახსნთა

ზემოთ მოყვანილი ფორმულებით მოცემული ფუნქციები არიან თუ არა ზოგადი ამონახსნები. ქვემოთ მოყვანილი მსჯელობა ამ კითხვის პასუხია.

დავიწყოთ (1) განტოლებით. თუ $x(t)$ (1) განტოლების ამონახსნია, მაშინ $(x(t) - F(t))' = f(t) - f(t) \equiv 0$, ამიტომ ლაგრანჟის თეორემიდან სასრული ნაზრდის შესახებ, გამოდინარეობს, რომ $x(t) - F(t)$ სხვაობა შესაძლებელია იყოს მხოლოდ მუდმივი და სხვა არაფერი! ეს კი ნიშნავს, რომ (2) ამოწურავს (1) დიფერენციალური განტოლების ყველა ამონახსნს.

(3) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი კი (6) გამოსახულებით მხოლოდ მაშინ მოიცემა, როდესაც $g(x)$ განსხვავებულია ნულისაგან. თუ $g(x)$ ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ $x'(t) \neq 0$ და ამრიგად იგი ნიშნს არ იცვლის, ე.ი. მკაცრად მონოტონურიცაა. ასეთ პირობებში შესაძლებელია გამოვიყენოთ თეორემა შექცეული ფუნქციის არსებობის შესახებ, რაც ჩვენს შემთხვევაში ნიშნავს, რომ $x'(t) = g(x(t))$ განტოლებიდან შეგვიძლია ვიპოვოთ t როგორც x -ის ფუნქცია $-t(x)$, ამასთან $t'(x) = \frac{1}{g(x)}$.

ეს უკანასკნელი კი (1) ტიპის განტოლებაა, ამიტომ მისი ამონახსნი (5) ფორმულით მოიცემა. ხოლო საძიებელი ფუნქცია კი (6) გამოსახულებით. აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ $G(x)$ ფუნქცია არის მონოტონური და უწყვეტი (რადგან მისი წარმოებული - $\frac{1}{g(x)}$ ნიშნს არ იცვლის,) რის გამოც (5) და (6) გამოსახულებები ერთმანეთის ექვივალენტურია.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $g(x)$ ნულის ტოლი ხდება, სიტუაცია შედარებით რთულდება. მაგალითისათვის განვიხილოთ განტოლება

$$x'(t) = x(t).$$

ცვლადების განცალკევების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{x'}{x} = 1,$$

რომლის ინტეგრება გვაძლევს:

$$\ln |x| = t + C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, რომელიც შესაძლებელია გადაიწეროს ექვივალენტური ფორმით:

$$|x(x)| = e^{t+C},$$

ანუ $x(t) = \pm e^{t+C} \Rightarrow x(t) = (\pm e^C) e^t$. ე.ი. ამონახსნისათვის მივიღეთ გამოსახულება $x(t) = \tilde{C} e^t$, სადაც $\tilde{C}$ ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული მუდმივია. ამრიგად, განტოლებისათვის 0-ოვან, ანუ ტრივიალურ ამონახსნს ვერ ვღებულობთ, მაშინ როდესაც ასეთი ფუნქცია, მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს. ეს ნიშნავს, რომ $x(t) = \tilde{C} e^t$ არ არის $x'(t) = x(t)$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ამიტომ, ამონახსნთა სიმრავლეს საჭიროა დავუმატოთ $x(t) \equiv 0$ ტრივიალური ამონახსნი. ტრივიალური ამონახსნის “დაკარგვა” გამოიწვია $g(x) \neq 0$ დაშვებამ. $g(x) = 0$ განტოლების ამონახსნები, რომლებიც არიან ნულისაგან განსხვავებული მუდმივები, $\tilde{C}$ -ის შერჩევის ხარჯზე ხვდებიან ზოგად ამონახსნში, მაგრამ ზოგჯერ შესაძლებელია მათი დამატება მოგვიხდეს.

(3) სახის განტოლების ამონახსნების განსაკუთრებულობათა აღწერა ამით არ დამთავრებულია. ამაში დავრწმუნდებით შემდეგ კლასიკურ მაგალითზე:

$$x' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2}. \quad (10)$$

ამ განტოლების ამონახსნები ზემოთ მოყვანილი ფორმულების შესაბამისად არიან $x(t) = (t - C)^3$ და $x(t) \equiv 0$ ფუნქციები. მაგრამ, ამათ გარდა, (10) განტოლების ამონახსნებია აგრეთვე ფუნქციები:

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ (t - t_0)^3, & t \geq t_0 \end{cases}$$

ან

$$x_2(t) = \begin{cases} (t - t_0)^3, & t < t_0, \\ 0, & t_0 \leq t < t_1, \\ (t - t_1)^3, & t \geq t_1. \end{cases}$$

ამაში უშუალო ჩასმით დავრწმუნდებით. ამონახსნთა ასეთი მრავალფეროვნება გამოწვეულია $g(x)$ ფუნქციისაგან. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1. *დავუშვათ $g(x)$ დიფერენცირებადია და მისი წარმოებული შემოსაზღვრულია. მაშინ (3) განტოლების ამონახსნები მოიცემა (6) ფორმულითა და $g(x) = 0$ განტოლებების ამონახსნებით.*

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ “საკმაოდ კარგი” $g(x)$ - სათვის იმ ანომალიას, რომელიც (10) განტოლებისათვის გვქონდა, ადგილი

არ ექნება. (10) განტოლებაში $g(x)$ -ის როლს ასრულებს $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}$,

რომლის წარმოებული ფუნქციაა $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$ და იგი არ არის შემოსაზღვრული.

ზოგადი (7) და (9) განტოლებებისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2. *დავუშვათ $g(x)$ დიფერენცირებადია და მისი წარმოებული შემოსაზღვრულია, ხოლო $f(x)$ ფუნქცია კი უწყვეტია. მაშინ (7) განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა (8) გამოსახულებით და იმ მუდმივათა ერთობლიობით, რომლებიც $g(x) = 0$ განტოლების ამონახსნით მიიღება.*

თუ განტოლება მოცემულია (9) სახით, მაშინ მისი ამონახსნებია (8) გამოსახულებით მოცემული ფუნქციები, $x \equiv \text{const}$ მუდმივები, სადაც ეს მუდმივები $g_2(x) = 0$ განტოლების ამონახსნებია და აგრეთვე $t \equiv \text{const}$ მუდმივები, რომლებიც $f_1(t) = 0$ განტოლების ამონახსნებია.

2.2. ერთგვაროვანი განტოლება

ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება m -ერთგვაროვანი (ან m -ხარისხისერთგვაროვანი), თუ $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$. მაგალითად, ორი ცვლადის ერთგვაროვანი ფუნქციებია $ax + by$, $ax^2 + bxy + cy^2$, $x^2 \cos \frac{y}{x}$, $y + \sqrt{x^2 - y^2}$. განვიხილოთ (1) სახის განტოლება m -ერთგვაროვანი კოეფიციენტებით

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

სადაც $M(x, y)$ და $N(x, y)$ m -ერთგვაროვანი ფუნქციებია. მაშინ $y = xz(x)$ გარდაქმნით (1) განტოლება მიიყვანება განცალკევად ცვლადებიან განტოლებაზე.

ერთგვაროვან განტოლებაზე მიიყვანება

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (2)$$

სახის განტოლება, სადაც $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. ამისათვის საკმარისია ავარჩიოთ გარდაქმნა $x = \tau + \alpha$, $y = \tau + \beta$ და α, β მუდმივები იმგვარად შევარჩიოთ, რომ (2) განტოლების მარჯვენა მხარემ მიიღოს სახე:

$$y' = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

თუ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, მაშინ $a_1x + b_1y = l(a_2x + b_2y)$, სადაც l რაიმე არანულოვანი მუდმივია და განტოლება $z = a_2x + b_2y$ ცვლადის გარდაქმნით მიიყვანება განცალკევად ცვლადებიან განტოლებაზე ზემოთ მოყვანილი ფაქტები გამოდინარეობენ იქიდან, რომ ნებისმიერი ერთგვაროვან იფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ერთი $\frac{y}{x}$ ან $\frac{x}{y}$ ცვლადის ფუნქცია. კერძოდ, თუ ავიღებთ $t = \frac{1}{x}$ (შესაბამისად $t = \frac{1}{y}$), მაშინ m -ერთგვაროვანი $f(x, y)$ ფუნქცია ჩაიწერება სახით: $f(x, y) = x^m f(1, \frac{y}{x})$ ანუ $f(x, y) = x^m \varphi(\frac{y}{x})$ (შესაბამისად, $f(x, y) = y^m \psi(\frac{x}{y})$), რისგამოც (1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$u = \frac{y}{x}$ ჩასმით განტოლება მიიყვანება განცალკევად ცვლადებიან განტოლებაზე. მართლაც, რადგან $y = ux$ და აქედან $y' = u + x \frac{du}{dx}$, მივიღებთ განტოლებას;

$$xdu = (\varphi(u) - u)dx,$$

თუ $\int \frac{du}{\varphi(u) - u}$ -ს აღვნიშნავთ Φ -თი, მივიღებთ განტოლების ამონახსნს

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + c.$$

თუ $\varphi(u) = u$, მაშინ (1) განტოლება მიიყვანება $y' = \frac{y}{x}$ განტოლებაზე, რომელიც, თავის მხრივ, განცალკევად ცვლადებიანი განტოლებაა.

2.3 ტიპური ამოცანები. განცალკევად ცვლადებიანი განტოლებები

1. $\sqrt{y^2 + 1} dx = xydy$

განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $\sqrt{y^2 + 1} x$. იმისათვის, რომ ეს ოპერაცია შევასრულოთ საჭიროა დავუშვათ, რომ $\sqrt{y^2 + 1} x \neq 0$, საიდანაც გამოდინარეობს, რომ $x \neq 0$. გაყოფის შემდეგ მივიღებთ: $\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}}$, $x \neq 0$, ახლა ვაინტეგრირებთ განტოლების ორივე მხარე:

$$\int dx/x = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}} + C. \quad (1)$$

ამ გამოსახულების მარცხენა მხარეში ე.წ. ცხრილის ინტეგრალია და მისი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int dx/x = \ln|x|.$$

მარჯვენა მხარე $\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$ მივიყვანოთ ცხრილის ინტეგრალზე. ამისათვის შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $t = \sqrt{y^2+1}$, საიდანაც $y = \sqrt{t^2-1}$, ხოლო $dy = \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}$. ჩავსვათ $\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$ გამოსახულებაში y -სა და dy -ის ახლახან მიღებული გამოსახულებები:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \int \frac{\sqrt{t^2-1} \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}}{t} = \int dt = t \Rightarrow \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \sqrt{y^2+1}.$$

ამრიგად, (1) გამოსახულება მიღებს სახეს:

$$\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C,$$

რაც ამოსავალი განტოლების ამონახსნია, როდესაც $x \neq 0$. ახლა შევამოწმოთ, არის თუ არა $x = 0$ განტოლების ამონახსნი. x -ის ნაცვლად განტოლების ორივე მხარეში 0-ის ჩასმით გამოსახულება იგივეობად გადაიქცევა, რაც იმას ნიშნავს, რომ $x = 0$ განტოლების ამონახსნია.

აქედან, განტოლების ყველა ამონახსნია $\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C$, $x = 0$.

2. ამოხსენით კოშის ამოცანა $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$.

პირველ რიგში განტოლების ყველა ამონახსნი ვიპოვოთ. გადავწეროთ განტოლება მისი ექვივალენტური სახით

$$(x^2-1)dy + 2xy^2dx = 0 \quad (2)$$

და განვაცადოთ x და y ცვლადები, რისთვისაც გამოსახულება გაგვყოფს $(x^2-1)y^2$ -ზე და დავუშვათ, რომ $(x^2-1)y^2 \neq 0$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $x \neq \pm 1$ და $y \neq 0$. გაყოფის შემდეგ (2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{2xdx}{x^2-1} = 0.$$

მოვახდინოთ მიღებული გამოსახულების ინტეგრება:

$$\int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{2xdx}{x^2-1} = C.$$

მიღებული ინტეგრალების აღება სიძნელეს არ წარმოადგენს. მართლაც $\int dy/y^2 = -\frac{1}{y}$, რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით $-\frac{1}{y}$ -ის გაწარმოებით:

$(-\frac{1}{y})' = \frac{1}{y^2}$. რაც შეეხება $\int \frac{2xdx}{x^2-1}$ ინტეგრალს, იგი გავამარტივოთ

შემდეგნაირად: $\int \frac{2xdx}{x^2-1} = \int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1}$, ეს უკანასკნელი კი უკვე ცხრილის ინტეგრალია. თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას $t = x^2-1$, მივიღებთ

$$\int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| \Rightarrow \int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = \ln|x^2-1|.$$

ამრიგად,

$$\int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{2xdx}{x^2-1} = C \Rightarrow -\frac{1}{y} + \ln|x^2-1| = C$$

გამოსავალი განტოლების ამონახსნა ოჯახია, როდესაც $x \neq \pm 1$ და $y \neq 0$. ამასთან, $x = \pm 1$, განტოლების ამონახსნი არ არის, ხოლო $y = 0$ ფუნქცია განტოლებას აკმაყოფილებს, ამიტომ $-\frac{1}{y} + \ln|x^2-1| = C$ -თან ერთად იგი განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია. აქედან, $-\frac{1}{y} + \ln|x^2-1| = C$ და $y = 0$ ფუნქციები ამოწურავენ ჩვენი განტოლების ყველა ამონახსნებს. ახლა შევუდგეთ კოშის ამოცანის ანალიზს, რომლის თანახმად საჭიროა $(0,1)$ წერტილზე გამავალი ინტეგრალური წირის ამორჩევა ინტეგრალურ წირთა უკვე მიღებული ოჯახიდან. $y = 0$ (იგივერად ნულოვანი ფუნქცია) ნათელია კოშის ამოცანის ამონახსნი ვერ იქნება, ამიტომ ამონახსნი, რომელიც $y(0) = 1$ პირობას დააკმაყოფილებს, უნდა ვეძებოთ $-\frac{1}{y} + \ln|x^2-1| = C$ ფუნქციათა ოჯახში. ამ გამოსახულებაში $x = 0$ ჩასმით მივიღებთ, რომ $-\frac{1}{y(0)} = C$. რადგან $y(0) = 1$, ამიტომ $C = -1$. ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ $-\frac{1}{y} + \ln|x^2-1| = C$ გამოსახულებაში და ცხადი სახით ამოვწეროთ $y(x)$ ფუნქცია. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ $y(x) = \frac{1}{1+\ln|x^2-1|}$ არის კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი.

3. ამოხსენით კოშის ამოცანა: $xy' + y = y^2, y(1) = 0,5$.

$$xy' + y = y^2 \Rightarrow x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \Rightarrow xdy + (y - y^2)dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y-y^2} + \frac{dx}{x} = 0, \\ y \neq 0,1; x \neq 0.$$

მოვახდინოთ $\frac{dy}{y-y^2} + \frac{dx}{x} = 0$ გამოსახულების ინტეგრება:

$$\int \frac{dy}{y-y^2} + \int \frac{dx}{x} = C.$$

დაწვრილებით განვიხილოთ პირველი შესაკრები:

$$\int \frac{dy}{y-y^2} = \int \frac{dy}{y(1-y)} =$$

(მრიცხველს დავუმატოთ და გამოვაკლოთ y)

$$= \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \frac{(y-y+1)dy}{y(1-y)} =$$

$$\int \frac{ydy + (1-y)dy}{y(1-y)} = \int \frac{ydy}{y(1-y)} + \int \frac{(1-y)dy}{y(1-y)} = -\int \frac{d(1-y)}{(1-y)} + \ln|y| = -\ln|1-y| +$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right|.$$

მეორე შესაკრები $\int \frac{dx}{x}$ ცხრილის ინტეგრალია და $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$.

ამრიგად,

$$\int \frac{dy}{y-y^2} + \int \frac{dx}{x} = C \Rightarrow \ln \left| \frac{y}{1-y} \right| + \ln|x| = C \Rightarrow xy(1-y) = C$$

არის მოცემული განტოლების ამონახსნთა ერთობლიობა. აქვე შევნიშნოთ, რომ $y = 0, 1; x = 0$ განტოლების ამონახსნებია და ისინი არ დაკარგულა, რადგან სამივე $xy(1-y) = C$ ამონახსნების კერძო შემთხვევებია. $y(1) = 0,5$ პირობის $xy(1-y) = C$ გამოსახულებაში ჩასმით ვპოულობთ $C = \frac{1}{4}$. რაც ნიშნავს, რომ კომის ამოცანის ამონახსნია $4xy(1-y) - 1 = 0$ ფუნქცია.

$$4. \quad e^{-s} \left(1 + \frac{ds}{dt} \right) = 1.$$

განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ e^s -ზე და მიღებული გამოსახულება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{ds}{dt} = e^s - 1,$$

მოვახდინოთ t და s ცვლადების განცალკეება:

$$\frac{ds}{e^s - 1} = dt,$$

ახლა ორივე მხარე ვაინტეგრირებ:

$$\int \frac{ds}{e^s - 1} = \int dt.$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარის ინტეგრება სიძნელეს არ წარმოადგენს.

განვიხილოთ მარცხენა მხარე დაწვრილებით:

$$\int \frac{ds}{e^s - 1} =$$

(მრიცხველს დაუმატოთ და გამოვაკლოთ e^s)

$$\int \frac{(e^s - e^s + 1)ds}{e^s - 1} = \int \frac{e^s ds - (e^s - 1)ds}{e^s - 1}$$

$$\int \frac{e^s ds}{e^s - 1} - \int \frac{(e^s - 1)ds}{e^s - 1} = - \int \frac{d(e^s - 1)}{e^s - 1} - \int ds = -\ln|e^s - 1| - s = \ln \left| \frac{e^s - 1}{e^s} \right|.$$

ამრიგად, $\int \frac{ds}{e^s - 1} = \int dt$ გამოსახულება შესაძლებელია შეიცვალოს

მისი ტოლი $\ln \left| \frac{e^s - 1}{e^s} \right| = t + \ln C$ გამოსახულებით. აქ $\ln C$ ნებისმიერი

რიცხვია, მისი შემოტანა ზოგადობას არ არღვევს და ამასთან გვეხმარება

$\ln \left| \frac{e^s - 1}{e^s} \right| = t + \ln C$ გამოსახულებიდან განვსაზღვროთ ცხადად $s(t)$

ფუნქცია. მართლაც, $t + \ln C = \ln(Ce^t)$, ამიტომ

$$\frac{e^s - 1}{e^s} = Ce^t \Rightarrow \frac{1}{e^s} = 1 - Ce^t \Rightarrow e^s = \frac{1}{1 - Ce^t} \Rightarrow s = -\ln(1 - Ce^t).$$

ამრიგად, განტოლების ზოგადი ამონახსნებია $s = -\ln(1 - Ce^t)$ ფუნქციათა ოჯახი.

$$5. \quad y' = \cos(y - x).$$

იმისათვის, რომ განტოლება მიყვანილი იქნას განცალკევებული განტოლებების საჭიროა შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი z რომელიც ძველ x, y ცვლადებს უკავშირდება თანადობით: $z = y - x$. მაშინ $dz = dy - dx$ და განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$dy = \cos z dx \Rightarrow dz + dx = \cos z dx \Rightarrow dz = (\cos z - 1) dx \Rightarrow \frac{dz}{\cos z - 1} = dx.$$

მივიღეთ განტოლება, რომელშიც x, z ცვლადები განცალკევებულია. ახლა მოვახდინოთ მისი ამოხსნა. როგორც უკვე ვიცით, საჭიროა განტოლების ორივე მხარე ვაინტეგრიროთ (შესაბამისი ცვლადებით):

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx \Rightarrow$$

(გამოვიყენოთ ფორმულები: $\cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2} = \cos z$ და $\cos^2 \frac{z}{2} + \sin^2 \frac{z}{2} = 1$, მაშინ $\cos z - 1 = -2\sin^2 \frac{z}{2}$)

$$\int \frac{dz}{-2\sin^2 \frac{z}{2}} = x + C \Rightarrow - \int \frac{2d(\frac{z}{2})}{2\sin^2 \frac{z}{2}} = x + C$$

(უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარეს უკვე ცხრილის ინტეგრალი გვაქვს)

$$\Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = x + C \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = x + C$$

ანუ

$$\operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} = x + C \Rightarrow \frac{y-x}{2} = \operatorname{arccotg}(C + x) \Rightarrow y = x + 2\operatorname{arccotg}(C + x).$$

განტოლების ამ ამონახსნებს საჭიროა დავუმატოთ “დაკარგული ამონახსნები”, კერძოდ ისინი, რომლებისთვისაც სრულდება ტოლობა $\cos z = 1$, ანუ $z = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$6. y' - y = 2x - 3$$

გადავწეროთ მოცემული განტოლება მისი ექვივალენტური ფორმით

$$\frac{dy}{dx} = y + 2x - 3 \Rightarrow dy = (y + 2x - 3)dx.$$

შემოვიტანოთ ახალი $z = y + 2x - 3$ ცვლადი, მაშინ $dy = dz - 2dx$. ორივეს გათვალისწინებით $dy = (y + 2x - 3)dx$ გამოსახულება ჩაიწერება შემდეგი სახით: $dz - 2dx = zdx$, რომელიც $z \neq 2$ უტოლობის გათვალისწინებით გადაიწერება შემდეგნაირად: $dz = (z + 2)dx \Rightarrow \frac{dz}{z+2} = dx$. უკანასკნელ განტოლებაში x, z ცვლადები განცალკევებულია, ამიტომ ვაინტეგრირებთ დამოუკიდებლად განტოლების ორივე მხარე:

$$\int \frac{dz}{z+2} = \int dx \Rightarrow \ln|z + 2| = x + \ln C \Rightarrow z + 2 = Ce^x \Rightarrow z = Ce^x - 2.$$

ამის შემდეგ დავუბრუნდეთ ძველ x, y ცვლადებს და მივიღებთ: $y = Ce^x - 2x + 1$. ჩვენ დავუშვიტ, რომ $z \neq 2$, რაც ნიშნავს ამონახსნებიდან ამოვიღეთ

$y = 1 - 2x$ წრფივი ფუნქცია, რომელიც მოცემული განტოლების ამონახსნია (ამაში უშუალო ჩასმით ადვილად დავრწმუნდებით). ამის გამო მოგვიწევს $y = Ce^x - 2x + 1$ ფუნქციასა ოჯახს დაუმატოთ ეს ამონახსნიც, მაგრამ ამის საჭიროება არ არის, რადგან $y = Ce^x - 2x + 1$ ფუნქციასა ერთობლიობა $y = 1 - 2x$ ფუნქციას შეიცავს და იგი მიიღება $y = Ce^x - 2x + 1$ -დან, როდესაც $C = 0$. ამრიგად, განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y = Ce^x - 2x + 1$ ფუნქციათა ოჯახი.

7. ვიპოვოთ განტოლების $x^2 y' - \cos 2y = 1$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $y(+\infty) = \frac{9}{4}\pi$.

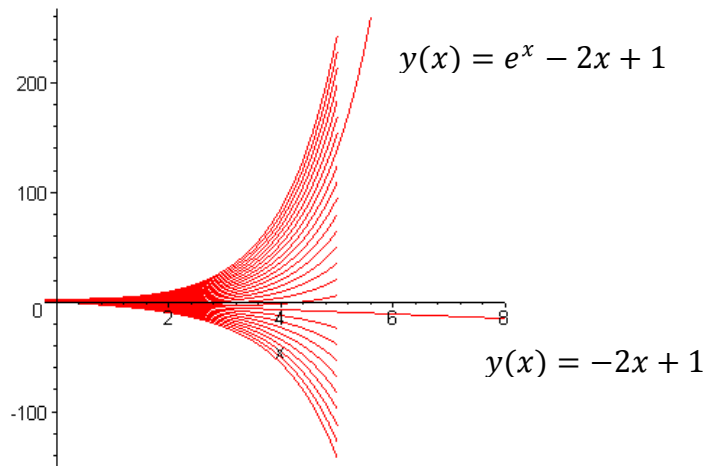
დავიწყოთ $x^2 y' - \cos 2y = 1$ განტოლების ანალიზი.

$$\begin{aligned} x^2 y' - \cos 2y = 1 &\Rightarrow x^2 \frac{dy}{dx} - \cos^2 y + \sin^2 y - \cos^2 y - \sin^2 y = 0 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{2\cos^2 y} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int \frac{dy}{2\cos^2 y} = \int \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{tg} y = -\frac{1}{x} + C \Rightarrow y(x) = \operatorname{arctg} \left(2C - \frac{2}{x} \right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ახლა ამ ამონახსნებიდან ვიპოვოთ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $y(+\infty) = \frac{9}{4}\pi$. განვიხილოთ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \left(2C - \frac{2}{x} \right) + 2\pi k \right) = \operatorname{arctg} 2C + 2\pi k$, რადგან $|\operatorname{arctg} 2C| < \frac{\pi}{2}$, ამიტომ $k = 1$ და $\frac{9}{4} = 2\pi + \operatorname{arctg} 2C \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. ამრიგად, განტოლების ამონახსნი, რომელიც ზემოთ მოყვანილ პირობას აკმაყოფილებს არის $y(x) = \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{2}{x} \right) + 2\pi$ ფუნქცია.

8. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა $y' - y = 2x - 3, y(0) = 2$.



ნახაზზე მოყვანილია $y = Ce^x - 2x + 1$ ფუნქციათა გრაფიკები (განტოლების ინტეგრალური წირები), როდესაც C ნამდვილი რიცხვი იცვლება -0.9 -დან 1.7 -მდე ბიჯით 0.1 , ხოლო $x \in [-0.2, 5]$. როგორც აღვნიშნეთ, როდესაც $C = 0$, განტოლების ამონახსნია $y = -2x + 1$ წრფივი ფუნქცია, მისი გრაფიკი მონიშნულია ნახაზზე. ეს ფუნქცია არის კოშის ამოცანის ამონახსნი პირობით $y(0) = 1$.

განტოლების ზოგადი ამონახსნი წინა ამოცანიდან უკვე ცნობილია და ის არის $y(x) = Ce^x - 2x + 1$ ფუნქციების სიმრავლე, რომელიც გადანომრილია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლით და ამ ფუნქციას ასრულებს C ნამდვილი რიცხვი. $y(0) = 2$ პირობიდან ადვილად ვპოულობთ $C = 1$. ამრიგად, კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნია $y(x) = e^x - 2x + 1$ ფუნქცია (იხილეთ ქვემოთ მოყვანილი ნახაზი).

9. ვიპოვოთ $3y^2y' + 16x; 2 = 2xy^3$ განტოლების ისეთი $y(x)$ ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია, როდესაც $x \rightarrow \infty$.

პირველ რიგში ვიპოვოთ განტოლების ყველა ამონახსნი. რისთვისაც განვაცადოთ x, y ცვლადები:

$$3y^2y' + 16x = 2xy^3 \Rightarrow 3y^2 \frac{dy}{dx} + 16x = 2xy^3 \Rightarrow 3y^2 dy = 2x(y^3 - 8)dx.$$

დავუშვათ $y \neq 2$ და გამოსახულების ორივე მხარე გავყოთ $y^3 - 8$.

მივიღებთ

$$\int \frac{3y^2}{y^3 - 8} dy = \int 2x dx \Rightarrow \int \frac{d(y^3 - 8)}{y^3 - 8} = x^2 + C \Rightarrow \ln|y^3 - 8| = x^2 + C \Rightarrow |y^3 - 8| = Ce^{x^2}.$$

$|y^3 - 8| = Ce^{x^2}$ ფუნქცია განტოლების ამონახსნია როდესაც $y \neq 2$, მაგრამ $y(x) = 2$ ფუნქცია მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს, ამიტომ ამონახსნთა სიმრავლეში ეს ფუნქციაც შევა. $|y^3 - 8| = Ce^{x^2}$

გამოსახულების მარცხენა მხარე ყოველთვის არაუარყოფითი უნდა იყოს, ამიტომ $C \geq 0$. $|y^3 - 8| = Ce^{x^2}$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, როდესაც $x \rightarrow \infty$, მხოლოდ მაშინ, როდესაც $C = 0$. ეს კი შეესაბამება $y(x) = 2$ ამონახსნს. ამრიგად, ამოცანის ამონახსნია $y(x) = 2$ მუდმივი ფუნქცია.

$$10. y' = \frac{x+2y}{x}.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $z = \frac{y}{x}$, მაშინ $y = xz$ და $y' = xz' + z$. y და y' -ის ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ მოცემულ განტოლებაში და მივიღებთ: $xz' + z = 1 + 2z \Rightarrow xz' = 1 + z$, ეს უკანასკნელი კი არის განტოლება განცალკეად ცვლადებში. მართლაც, $x \frac{dz}{dx} = 1 + z \Rightarrow \frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x}, z \neq -1, x \neq 0$. ვაინტეგრირებთ მიღებული გამოსახულების ორივე მხარე:

$$\int \frac{dz}{1+z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z+1| = \ln|x| + C \Rightarrow z+1 = Cx \Rightarrow z = Cx - 1 \Rightarrow y = Cx^2 - x.$$

12. განტოლება $xy - x^2y' = x^2 + \frac{1}{9}y^2$ ცვლადის გარდაქმნით დაიყვანება განცალკეადცვლადებიან განტოლებაზე. გავყოთ განტოლების ყველა წევრი x^2 -ზე და მივიღებთ:

$$\frac{y}{x} - y' = 1 + \frac{y^2}{9x^2}. \quad (1)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $z = \frac{y}{x}$, მაშინ $y = zx$ და $y' = z'x + z$. შევიტანოთ y და y' -ის ეს მნიშვნელობები (1)-ში. მივიღებთ: $z - z'x - z = 1 + \frac{1}{9}z^2$, ეს უკანასკნელი გადავწეროთ მისი ექვივალენტური სახით: $-\frac{dz}{dx}x = 1 + \frac{1}{9}z^2$, ანუ $\frac{dz}{1+\frac{1}{9}z^2} = -\frac{dx}{x}$, ეს კი არის განტოლება განცალკეად ცვლადებში. განტოლების ორივე მხარის ცალ-ცალკე ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int \frac{dz}{1+\frac{1}{9}z^2} = \int \frac{dz}{1+(\frac{z}{3})^2} = 3 \int \frac{d(\frac{z}{3})}{1+(\frac{z}{3})^2} = 3 \operatorname{arctg} \frac{z}{3}, \quad \int -\frac{dx}{x} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x - C;$$

ამრიგად, $3 \operatorname{arctg} \frac{z}{3} = -\ln x - C \Rightarrow z = -3 \operatorname{tg}(\frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{3} C)$. დავუბრუნდეთ აღნიშვნას და მივიღებთ

$$y = -3x \operatorname{tg}(\frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{3} C).$$

შენიშვნა. ამ მაგალითში ჩვენ გამოვიყენეთ ცხრილის ინტეგრალი $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$. ამ ტოლობიდან ადვილად მიიღება $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ სახის ინტეგრალის ანალიზური სახე. მართლაც:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \int \frac{\frac{1}{a^2} dx}{\frac{a^2+b^2x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+(\frac{bx}{a})^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\frac{a}{b} d(\frac{bx}{a})}{1+(\frac{bx}{a})^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{bx}{a} \right) + C.$$

13. ამოვხსნათ ერთგვაროვანი განტოლება $xy' = y(1 - \ln y - \ln x)$. გადავწეროთ ეს განტოლება შემდეგი სახით:

$$xdy - y \left(1 + \ln \left(\frac{y}{x} \right) \right) dx = 0, x > 0, y > 0.$$

ამრიგად, $M(x, y) = -y \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right)$ და $N(x, y) = x$ ერთგვაროვანი ფუნქციებია ($m = 1$). მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $y = xz$. მაშინ $dy = xdz + zdx$ და მივიღებთ

$$x^2 dz + xz dx - xz(1 + \ln z) dx = 0 \Rightarrow xdz - z \ln z dx = 0.$$

ცვლადების განცალკევების და ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ:

$$\ln x - \ln |z| = \ln c, z \neq 1 \Rightarrow y = x e^{cx}.$$

2.4 გეომეტრიული ამოცანების ანალიზი

მას შემდეგ, რაც გამოვიმუშავეთ განცალკევებული განტოლებების ამოხსნის ტექნიკა, შესაძლებელია მოვახდინოთ თავის დასაწყისში მოღებული განტოლებების სრული ანალიზი.

1. ამოვხსნათ განტოლება $xy' = 2y$.

დავუშვათ $x \neq 0$ და $y \neq 0$ და მოცემული განტოლება გადავწეროთ მისი ექვივალენტური სახით: $\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y| = 2 \ln |x| + c \Rightarrow y(x) = cx^2$.

ამრიგად მივიღეთ საძიებელი წირის განტოლება, იგი პარაბოლაა თუ $c \neq 0$. როდესაც $c = 0$ ვღებულობთ, რომ $y = 0$. რომელიც განტოლების ამონახსნია, მაგრამ ჩვენი ამოცანის პირობებს არ აკმაყოფილებს.

2. ამოვხსნათ განტოლება $\frac{y^2}{2} = a^2 y'$.

ჩავთვალოთ, რომ $y \neq 0$, გავყოთ გამოსახულების ორივე მხარე y -ზე და ცვლადების განცალკევების შემდეგ მივიღებთ: $\frac{2dy}{y^2} = \frac{dx}{a^2}$, საიდანაც

$$-\frac{2}{y} = \frac{x}{a^2} + C \Rightarrow y = \frac{2a^2}{Ca^2 + x}.$$

თუ $y' < 0$ (ნახ.2), მაშინ $S = -\frac{y^2}{2y'} = a^2$, რომლის ინტეგრირებითაც

მივიღებთ $y = \frac{2a^2}{x - Ca^2}$. აღვნიშნოთ $Ca^2 = -\tilde{C}$, რის შემდეგაც ორივე

ამონახსნი ჩაიწერება სახით: $y = \frac{2a^2}{\tilde{C} \pm x}$. ამრიგად, წირები, რომლებიც ამოცანა

1-ის პირობებს აკმაყოფილებენ მოიცემიან ანალიზურად $y(x) = \frac{2a^2}{\tilde{C} \pm x}$ ფუნქციებით.

3. ამოვხსნათ განტოლება $\frac{y}{y'} + yy' = 2a$.

გადავწეროთ ეს განტოლება მისი ექვივალენტური სახით

$$y + yy'^2 = 2ay' \Rightarrow y' = \frac{a}{y} \pm \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1} \Rightarrow \frac{ydy}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}} = dx \Rightarrow \frac{d(a^2 - y^2)}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}} = -2dx$$

საბოლოოდ ვღებულობთ ამონახსნს:

$$\sqrt{a^2 - y^2} - a \ln(a \pm \sqrt{a^2 - y^2}) \pm x = c.$$

4. ამოვხსნათ განტოლება $\frac{2}{3}(xy' + y) = y$. გადავწეროთ განტოლება მისი ექვივალენტური $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$ სახით. მივიღეთ განტოლება განცალკევად ცვლადებში, რომლის თითოეული მხარის ინტეგრებით მივიღებთ ტოლობას $\ln|y| = \frac{1}{2}(\ln|x| + c) \Rightarrow y(x) = \sqrt{xc}$.

2.5 განტოლება სრულ დიფერენციალებში

განტოლებები განცალკევად ცვლადებში არის უფრო ზოგადი, ე.წ. განტოლებები სრულ დიფერენციალებში განტოლებათა კლასის კერძო შემთხვევა. ამ პარაგრაფში განტოლებათა ამ კლასის ამოხსნის მეთოდს განვიხილავთ.

სანამ განსახილველი განტოლების ანალიზზე გადავალთ, განვიხილოთ რამდენიმე ფაქტი ორი ცვლადის ფუნქციის სრულ დიფერენციალზე.

დავუშვათ $F(x, y)$ ორი ცვლადის უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა. შეგახსენებთ, რომ $F(x, y)$ -ის სრული დიფერენციალი -- $dF(x, y)$, განმარტებით არის შემდეგი გამოსახულება:

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy.$$

განვიხილოთ $F(x, y)$ ფუნქცია არა ყველა x, y -სათვის, არამედ მხოლოდ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ წირზე მდებარე წერტილებისათვის. მაშინ,

$$dF(\varphi(t), \psi(t)) = \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \frac{d\psi(t)}{dt} \right) dt = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} d\varphi(t) + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} d\psi(t) =$$

$$= \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy.$$

უკანასკნელ გამოსახულებას ეწოდება $F(x, y)$ -ის დიფერენციალი $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ წირის გასწვრივ.

ახლა განვიხილოთ შებრუნებული პროცედურა. დავუშვათ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ წირის გასწვრივ $F(x, y)$ ფუნქციის დიფერენციალი 0-ის ტოლია:

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy \equiv 0,$$

მაშინ ამ წირზე $F(x, y)$ მუდმივია: $F(x, y) \equiv \text{const}$. ანუ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ წირი (საზოგადოდ მისი ნაწილი მაინც) განისაზღვრება $F(x, y) \equiv \text{const}$ არაცხადი განტოლებით.

განვიხილოთ

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

გამოსახულება, სადაც $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ და $\frac{\partial Q}{\partial x}$ უწყვეტი

ფუნქციებია $\mathbf{R}^2$ -ის ისეთ $U \subset \mathbf{R}^2$ არეში, რომელიც არ შეიცავს (1) განტოლების განსაკუთრებულ წერტილებს.

(1) განტოლებას ეწოდება *განტოლება სრულ დიფერენციალებში*, თუ არსებობს ისეთი უწყვეტად დიფერენცირებადი $u(x, y)$ ფუნქცია U -ში, რომ

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ტოლობა სრულდება U -ზე.

დავუშვათ (1) არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში. თუ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I$, მაშინ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციები იძლევიან (1)-ის პარამეტრულ ამონახსნს. მართლაც,

$$du(\varphi(t), \psi(t)) = P(\varphi(t), \psi(t))d\varphi(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))d\psi(t) = 0,$$

ე.ი. $u(\varphi(t), \psi(t)) = C$ ნებისმიერი $t \in I$ -სათვის. ნათელია, რომ სამართლიანია პირიქითაც: თუ $u(\varphi(t), \psi(t)) = C$ ყოველი $t \in I$ -სათვის, მაშინ $x = \varphi(t)$ და $y = \psi(t)$ ფუნქციები არიან პარამეტრული ამონახსნები.

ამრიგად, $u(x, y) = C$ განტოლება, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, შეიცავს (1) განტოლების ყველა ამონახსნს. სრულ დიფერენციალებში მოცემული განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის (x_0, y_0) წერტილზე, ცალსახად განისაზღვრება $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ განტოლებიდან.

სანამ ზემოთ თქმულ დავაზუსტებთ შესაბამისი დებულების სახით, გავარკვიოთ რა შემთხვევაშია (1) ტოლობა განტოლება სრულ დიფერენციალებში.

თეორემა 1. თუ U არე ცალკეობულია, მაშინ იმისათვის, რომ (1) განტოლება იყოს განტოლება სრულ დიფერენციალებში აუცილებელი და საკმარისია

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad (2)$$

ტოლობის შესრულება ყოველი $(x, y) \in U$ -სათვის.

□ აუცილებლობა. ვთქვათ (1) არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში. მაშინ არსებობს $u(x, y)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომ

$$P(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad (3)$$

იგივეობები სრულდება U -ზე. აქედან

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y},$$

საიდანაც $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ ყველა (x, y) -სათვის U -დან.

საკმარისობა. თუ U ცალკეულია, მაშინ ანალიზის კურსიდან ცნობილ თეორემას გამოვიყენებთ, რომლის თანახმად (3) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ისეთი $u(x, y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალიც არის $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ფორმა. იგი აიგება (3) განტოლებათა სისტემიდან. □

ის ფაქტი, რომ (1) განტოლება არის სრულ დიფერენციალებში ნიშნავს, რომ $(P(x, y), Q(x, y))$ ვექტორული ველი პოტენციალურია U არეზე. $X = (P(x, y), Q(x, y))$ ვექტორულ ველს ეწოდება პოტენციალური, თუ არსებობს ისეთი $u(x, y)$ ფუნქცია, რომ $P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ და $Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$. ამ შემთხვევაში $u(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება (1) განტოლების შესაბამისი პოტენციალი.

დავუშვათ თეორემის (2) პირობა შესრულებულია. ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ორი x და y ცვლადების $u(x, y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალია მოცემული $Pdx + Qdy$ ფორმა. თუ ასეთი ფუნქცია არსებობს, მაშინ მისი კერძო წარმოებულებები x -ით და y -ით ტოლი უნდა იყოს, შესაბამისად, $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ ფუნქციების. ე.ი. უნდა შესრულდეს (3) ტოლობები. (3)-ის პირველი განტოლებიდან გამოდის, რომ

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + c(y),$$

სადაც x_0 ორი ცვლადის $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ ფუნქციების განსაზღვრის არედან აღებული ნებისმიერი წერტილია. $c(y)$ უკანასკნელ გამოსახულებაში ნებისმიერი დიფერენცირებადი მხოლოდ y ცვლადზე დამოკიდებული

ფუნქციაა და შევეცადოთ, რომ იგი იმგვარად შევარჩიოთ, რომ გაკმაყოფილდეს (3)-ის მეორე ტოლობა:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x P(x, y) dx + c(y) \right) = Q(x, y).$$

ამრიგად,

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + c'(y) = Q(x, y).$$

გავითვალისწინოთ (2) ტოლობა და ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უკანასკნელ ტოლობაში შევცვალოთ მისი ტოლი სიდიდით. მაშინ გვექნება:

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + c'(y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + c'(y) = Q(x_0, y) - Q(x_0, y) + c'(y).$$

აქედან ჩანს, რომ $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ ტოლობის შესასრულებლად საჭიროა, რომ $c'(y) = Q(x_0, y)$. ამ ტოლობას კი ადგილი აქვს მაშინ, როდესაც

$$c(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy,$$

სადაც y_0 , ისევე როგორც x_0 , P და Q ფუნქციების განსაზღვრის არედან აღებული ნებისმიერი წერტილია. y_0 -ის არჩევა აქ ნიშნავს იმ ფაქტს, რომ $c(y)$ არის y ცვლადის $Q(x_0, y)$ ფუნქციის პირველყოფილი, რომელიც y_0 წერტილში y -ის ტოლია. ჩავსვათ $c(y)$ -ის მიღებული მნიშვნელობა (4)-ში:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = c,$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია. ამით ჩვენ არა მარტო საჭირო თვისებების მქონე $u(x, y)$ ფუნქციის არსებობა დავამტკიცეთ, არამედ უფრო მეტიც, ვიპოვეთ ეს ფუნქცია.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ თეორემა:

თეორემა 2. (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს აქვს სახე

$$\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = c,$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

ეს თეორემა არის (1) დიფერენციალური ფორმის (სრული დიფერენციალის) ინტეგრების, ან პირველყოფილის პოვნის მეთოდი. (6) გამოსახულება დამოკიდებულია c მუდმივზე და ამრიგად, (6) ფორმულით მოცემულია (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ფუნქციები, რომლებსაც ტოლი სრული დიფერენციალი აქვთ, ერთმანეთისაგან მუდმივით განსხვავდებიან, ამიტომ განტოლების ზოგადი ამონახსნის დასაწერად მნიშვნელობა არ აქვს რომელ პირველყოფილს ავირჩევთ, რადგან ყველა შემთხვევაში განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნება სახე $u(x, y) = c$. თეორემა (2)-ში პირველყოფილად არჩეულია ისეთი $u(x, y)$ ფუნქცია, რომ სრულდება $u(x_0, y_0) = 0$ ტოლობა. თუ P და Q ფუნქციების განსაზღვრის

არეში შედის $(0,0)$ წერტილი და ამ წერტილში თვით ეს ფუნქციები და მათი $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ კერძო წარმოებულები უწყვეტებია, მაშინ გამოთვლების წარმოების გასამარტივებლად შესაძლებელია ჩავთვალოთ, რომ $(x_0, y_0) = (0,0)$.

როგორც ვხედავთ, (6) ფორმულა სიმეტრიული არ არის იმ თვალსაზრისით, რომ პირველი ინტეგრალქვეშა ორი ცვლადის, ხოლო მეორე კი ერთი y ცვლადის ფუნქციაა. ეს გამოწვეულია მხოლოდ იმით, რომ ჩვენ ამონახსნის აგება (3) ფორმულის პირველი ტოლობიდან დავიწყეთ. თუ საწყის გამოსახულებად ჩავთვლით (3)-ის მეორე ტოლობას და ზემოთ მოყვანილ მსჯელობას გავიმოწმოთ მივიღებთ (1) განტოლების

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = c$$

ზოგად ამონახსნს. ამრიგად, (6) და (7) ექვივალენტური ფორმულებია თითოეული მათგანი წარმოადგენს (1)-ის ზოგად ამონახსნს.

ახლა დავამტკიცოთ ერთადერთობის თეორემა.

თეორემა 3. ვთქვათ (1) არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში და (x_0, y_0) განტოლების განსაზღვრის არედან აღებული ისეთი წერტილია, რომ $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ უწყვეტი ფუნქციებია და P და Q ფუნქციებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან ამ წერტილში. მაშინ (1) განტოლებას სრულ დიფერენციალებში აქვს ერთი ამონახსნი მაინც.

ამასთან,

1) თუ $P(x_0, y_0) = 0$ და $Q(x_0, y_0) \neq 0$, მაშინ $y = \varphi(x)$ ცხადად გამოისახება $u(x, y) = c$ ზოგადი ამონახსნიდან და აკმაყოფილებს პირობას $y_0 = \varphi(x_0)$.

2) თუ $P(x_0, y_0) \neq 0$ და $Q(x_0, y_0) = 0$, მაშინ $x = \psi(y)$ ამონახსნი აკმაყოფილებს $y_0 = \varphi(x_0)$ პირობას.

დამტკიცება. დავუშვათ $Q(x_0, y_0) \neq 0$. რადგან, $u(x_0, y_0) = 0$, $u(x, y)$ და $\frac{\partial u}{\partial y}$ უწყვეტი ფუნქციებია და $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=x_0, y=y_0} = Q(x_0, y_0) \neq 0$

პირობა შესრულებულია, ეს ნიშნავს, რომ სრულდება ყველა პირობა არაცხადი ფუნქციის არსებობისათვის. ამიტომ ვასკვნით, რომ არსებობს $u(x, y) = 0$ განტოლების ერთადერთი $y = \varphi(x)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $y_0 = \varphi(x_0)$. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ამ საწყისი პირობის დამაკმაყოფილებელი სხვა ამონახსნი დიფერენციალურ განტოლებას არ აქვს. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $y = f(x)$ (1) განტოლების ისეთი ამონახსნია, რომ $y_0 = f(x_0)$. (1) განტოლება გადავწეროთ მისი ექვივალენტური $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ სახით. ამრიგად, ამონახსნის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x) = 0.$$

ჩავსვათ $u(x, y)$ -ში $y = f(x)$, მივიღებთ x -ზე დამოკიდებულ $u(x, f(x))$ ფუნქციას და ვიპოვოთ მისი წარმოებული

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}u(x, f(x)) &= \frac{\partial}{\partial x}u(x, f(x)) + \frac{\partial}{\partial y}u(x, f(x))f'(x) = \\ &= P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x) \equiv 0.\end{aligned}$$

რადგან $u(x, f(x))$ -ის წარმოებული იგივერად 0-ია, ამიტომ ის ინარჩუნებს ნულოვან მნიშვნელობას, ანუ ყველგან მიიღებს იმ მნიშვნელობას, რაც ჰქონდა $x = x_0$ წერტილში:

$$u(x_0, f(x_0)) = u(x_0, y_0) = 0.$$

ე.ი. $y = f(x)$ აკმაყოფილებს $u(x, y) = 0$ განტოლებას, მაგრამ $y = \varphi(x)$ აგრეთვე აკმაყოფილებს ამ განტოლებას და $f(x_0) = \varphi(x_0) = y_0$ პირობას, რაც ნიშნავს, რომ $y = f(x)$ და $y = \varphi(x)$ ფუნქციები ტოლები უნდა იყვნენ. ამრიგად, $y = \varphi(x)$ ამონახსნი ერთადერთია.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თუ (x_0, y_0) წერტილი ისეთია, რომ $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, მაშინ (x_0, y_0) იქნება (1) განტოლების განსაკუთრებული წერტილი.

$h(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება (1) განტოლების მაინტეგრირებელი მამრავლი, თუ მასზე გამრავლებით (1) ხდება დიფერენციალური განტოლება სრულ დიფერენციალებში. საზოგადოდ, მაინტეგრირებელი მამრავლის პოვნის ალგორითმი არ არსებობს. ერთადერთი, რითაც მაინტეგრირებელი მამრავლის პოვნისას შეგვიძლია ვისარგებლოთ, არის თეორემა 1-ის (2) ტოლობა, რომელიც განტოლების $h(x, y)$ -ზე გამრავლების შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$P \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (6)$$

ეს უკანასკნელი კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებაა, რომლის ამოხსნაც (1)-ის ამოხსნის ექვივალენტურია. ამრიგად, მაინტეგრირებელი მამრავლის პოვნა მხოლოდ ინტუიციასა და ტექნიკაზეა დამოკიდებული.

არსებობს რამდენიმე კერძო შემთხვევა, როდესაც (6) განტოლებიდან შესაძლებელია კვადრატურებში $h(x, y)$ მაინტეგრირებელი მამრავლის პოვნა. ეს ის შემთხვევებია, როდესაც $h(x, y)$ დამოკიდებულია მხოლოდ x -ზე ან მხოლოდ y -ზე. დავუშვათ $h(x, y) = h(x)$. მაშინ (6) განტოლება მიიღებს სახეს

$$h \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow h \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \frac{dh}{dx} \Rightarrow \frac{dh}{h} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx.$$

რადგან, ჩვენი დაშვებით, h მხოლოდ x -ზეა დამოკიდებული, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარე მხოლოდ x -ზეა დამოკიდებული. აღვნიშნოთ იგი $\varphi(x)$ -ით. მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{dy}{h} = \varphi(x)dx,$$

საიდანაც $h(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$, სადაც $\varphi(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$. აქ ჩვენ ავიღეთ $h(x)$ -ის მხოლოდ ერთი კონკრეტული მნიშვნელობა $ce^{\int \varphi(x)dx}$ ყველა შესაძლო ამონახსნიდან, რაც საკმარისია ჩვენი მიზნებისათვის.

დებულება 1. იმისათვის, რომ (1) სახის განტოლებას ჰქონდეს მხოლოდ x -ზე დამოკიდებული მაინტეგრირებადი მამრავლი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ გამოსახულება იყოს დამოკიდებული მხოლოდ x -ზე. ამ შემთხვევაში მაინტეგრირებელ მამრავს აქვს სახე

$$h(x) = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}. \quad (7)$$

□ თუ მაინტეგრირებადი მამრავლი მხოლოდ x -ზეა დამოკიდებული, მაშინ როგორც უკვე ვაჩვენეთ $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ გამოსახულებაც მხოლოდ x -ზეა დამოკიდებული და მაინტეგრირებადი მამრავლი მოიცემა (7) ფორმულით. ახლა ვაჩვენოთ პირიქით. ვთქვათ, $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ დამოკიდებულია მხოლოდ x -ზე და დავამტკიცოთ, რომ მაინტეგრირებელ მამრავლს (7) სახე. ამის საჩვენებლად (1) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $h(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$ -ზე და შევამოწმოთ თეორემაში მოყვანილი (2) პირობის სამართლიანობა:

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{\int \varphi(x)dx} P) = e^{\int \varphi(x)dx} \frac{\partial P}{\partial y};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(e^{\int \varphi(x)dx} Q) &= e^{\int \varphi(x)dx} \varphi(x)Q + e^{\int \varphi(x)dx} \frac{\partial Q}{\partial x} = \\ &= e^{\int \varphi(x)dx} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + e^{\int \varphi(x)dx} \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{\int \varphi(x)dx} \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, მიღებული შედეგები ერთმანეთს ემთხვევა. რითაც დებულება დამტკიცებულია. □

ანალოგიური დებულება სამართლიანია იმ შემთხვევაშიდაც, როდესაც მაინტეგრირებადი მამრავლი მხოლოდ y ცვლადზეა დამოკიდებული. მაშინ (7) ფორმულის მსგავსად მაინტეგრირებადი მამრავლი მოიცემა ფორმულით:

$$h(y) = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy}. \quad (8)$$

ამასთან, პირობა იმისა, რომ მაინტეგრირებადი მამრავლი დამოკიდებული იყოს მხოლოდ y ცვლადზე, მოყვანილია შემდეგ დებულებაში:

დებულება 2. იმისათვის, რომ (1) განტოლებას ჰქონდეს მაინტეგრირებადი მამრავლი დამოკიდებული მხოლოდ y -ზე, აუცილებელია

და საკმარისი, რომ $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \psi(y)$ გამოსახულება დამოკიდებული იყოს მხოლოდ y ცვლადზე. ამ დროს განტოლების მაინტეგრირებადი მამრავლი მოიცემა (8) ფორმულით.

□ ისევე, როგორც ზემოთ, ამ დებულების დასამტკიცებლად საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ სრულდება თეორემის (2) ტოლობა, რომელსაც ჩვენს შემთხვევაში აქვს სახე:

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^{\int \psi(y) dy} P) = \frac{\partial}{\partial x} (e^{\int \psi(y) dy} Q). \quad \square$$

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$2(x - y^4)dy = ydx. \quad (9)$$

□ ეს განტოლება არ არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში,

რადგან $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = 2(y^4 - x)$ და $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -2$.

ვიპოვოთ ამ განტოლების მაინტეგრირებადი მამრავლი. გამოვიყენოთ დებულება 2. $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = -\frac{3}{y}$. შევნიშნოთ, რომ $y = 0$ არის განტოლების ამონახსნი და ვეძებთ ახლა მხოლოდ 0-საგან განსხვავებული ამონახსნი. ამრიგად, დავუშვათ, რომ $y \neq 0$. (8) ტოლობიდან მივიღებთ,

რომ $h(y) = \frac{1}{y^3}$. (9) განტოლების მასზე გამრავლებით მივიღებთ

განტოლებას სრულ დიფერენციალებში:

$$\frac{1}{y^2} dx + 2 \left(y - \frac{x}{y^3} \right) dy = 0.$$

საიდანაც, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$ და $\frac{\partial u}{\partial y} = 2 \left(y - \frac{x}{y^3} \right)$. პირველი განტოლებიდან გვაქვს:

$$u(x, y) = \frac{x}{y^2} + \varphi(y).$$

ჩავსვათ ეს მეორე განტოლებაში: $\varphi(y) = y^2 - C$. ამრიგად, (9)

განტოლების ამონახსნებია: $y = 0$ და $\frac{x}{y^2} + y^2 = C$, სადაც C ნებისმიერი

მუდმივაა.

განცალკეად ცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლებები არიან განტოლებები სრულ დიფერენციალებში განტოლებათა კლასის კერძო შემთხვევა (ეს უკვე აღვნიშნეთ პარაგრაფის დასაწყისში), იმ თვალსაზრისით, რომ განცალკეად ცვლადებიანი განტოლება

მაინტეგრირებელი მამრავლის საშუალებით ყოველთვის შეგვიძლია მივიყვანოთ განტოლებაზე სრულ დიფერენციალებში.

დებულება 3.

$$f_1(x)g_1(t)dx + f_2(x)g_2(t)dt = 0 \quad (10)$$

სახის განცალკეულ ცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლების მაინტეგრირებელი მამრავლია $h(x, t) = \frac{1}{g_1(t)f_2(x)}$ ფუნქცია.

დებულების დამტკიცებამდე შევნიშნოთ, რომ (10) განტოლება არ არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში. მითვის თეორემა 1-ის (2) პირობა ნებისმიერი f_1, g_1, f_2, g_2 ფუნქციებისათვის სავალდებულო არ არის შესრულებს.

□ (10) განტოლების $h(x, y)$ -ზე გამრავლების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(t)}{g_1(t)} dt = 0$$

განტოლებას, რომლისთვისაც თეორემა 1-ის (2) პირობა სამართლიანია. □

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$2xy^3 dx + 3(x^2 y^2 + y^2 - 1) dy = 0. \quad (11)$$

□ $P(x, y) = 2xy^3$, $Q(x, y) = 3(x^2 y^2 + y^2 - 1)$ და ისინი უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები არიან $\mathbf{R}^2$ -ში. იმის გასარკვევად, არის თუ არა (11) განტოლება სრულ დიფერენციალებში, საჭიროა შევამოწმოთ თეორემა 1-ის (2) პირობა. ჩვენს შემთხვევაში იგი დაკმაყოფილებულია, რადგან

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

ახლა საჭიროა (11)-ის შესაბამისი პოტენციალის პოვნა. ამისათვის კი ვხსნით შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 3(x^2 y^2 + y^2 - 1);$$

ამ სისტემის პირველი განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$u(x, y) = x^2 y^3 + \varphi(y), \quad (12)$$

სადაც $\varphi(y)$ უწყვეტად წარმოებადია y -ის მიმართ. მის საპოვნელად $u(x, y)$ -ის (12) ფორმულით განსაზღვრული გამოსახულებას ვსვამთ სისტემის მეორე განტოლებაში. მივიღებთ:

$$3x^2 y^2 + \varphi'(y) = 3(x^2 y^2 + y^2 - 1) \Rightarrow \varphi'(y) = 3(y^2 - 1) \Rightarrow \\ \varphi(y) = y^3 - 3y - C.$$

ამრიგად, (11)-ის ყველა ამონახსნი განისაზღვრება განტოლებიდან $x^2 y^3 + y^3 - 3y = C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. □

აქვე შევნიშნოთ, რომ ამ განტოლების ამოხსნა შესაძლებელია თეორემების 2-სა და 3-ის გამოყენებით.

2.6 პირველი რიგის წრფივი განტოლება

შეგახსენებთ, რომ $y = f(x)$ ერთი ცვლადის ფუნქციას ეწოდება წრფივი, თუ მას აქვს სახე $f(x) = ax + b$, ხოლო თუ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ მრავალი ცვლადის ფუნქციაა, მაშინ ის შესაძლებელია მრავალი სხვადასხვა ფორმით იყოს წრფივი. მაგალითად,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

ან კიდევ

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1(x_2, \dots, x_n)x_1 + b(x_2, \dots, x_n)$$

მრავალი ცვლადის წრფივი ფუნქციების მაგალითებია.

$x' = f(t, x)$ დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება წრფივი, თუ მისი მარჯვენა მხარე წრფივია x ცვლადის მიმართ. ე.ი. განტოლებას აქვს სახე:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t).$$

განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ $b(t) \equiv 0$.

წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება. განვიხილოთ წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება

$$x'(t) = a(t)x(t). \quad (1)$$

(1) არის განტოლება განცალკევადი ცვლადებით. მისი ამონახსნის პოვნა ხდება შემდეგნაირად:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a(t) \Rightarrow \ln |x(t)| = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \Rightarrow x(t) = C e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}. \quad (2)$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $x(t_0) = C$. პირიქით, თუ საჭიროა ამონახსნთა (2) სიმრავლიდან ავარჩიოთ ისეთი, რომ

$$x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

ანუ როგორც ამ შემთხვევაში ამბობენ, მოცემული (3) საწყისი პირობით ვიპოვოთ (1)-ის ამონახსნი, მაშინ ნათელია, რომ ასეთი ამონახსნი იქნება

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}. \quad (4)$$

შენიშვნა. (1) განტოლებას ყოველთვის აქვს $x(t) \equiv 0$ იგუარაღ 0-ის ტოლი ამონახსნი რომელსაც **ტრивиალური ამონახსნი** ეწოდება. ამიტომ,

(1)-დან (2)-ზე გადასვლის დროს ჩვენ ვუშვებთ, რომ $x(t) \neq 0$. ზოგადი ამონახსნი, რომელიც (4) ფორმულით მოიცემა, ამ ამონახსნს შეიცავს. კერძოდ, (1) განტოლებას, $x(t_0) = 0$ საწყისი პირობის შემთხვევაში აქვს ტრივიალური ამონახსნი.

წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება. პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \quad (5)$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau} b(s) ds. \quad (6)$$

ქვემოთ მოყვანილია (6) ფორმულის დამტკიცება. ამ მიზნის მისაღწევად გავაანალიზოთ (5) გამოსახულება. პირველ რიგში იგი გადავწეროთ შემდეგი ექვივალენტური ფორმით:

$$x'(t) - a(t)x(t) = b(t). \quad (7)$$

უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარეს მოთავსებულია უცნობი ფუნქციის წარმოებული ფუნქცია, რომელსაც აკლდება ეს ფუნქცია გამრავლებული ნებისმიერ წინასწარ მოცემულ ფუნქციაზე. მიღებული შედეგი გატოლებულია ცნობილ ფუნქციასთან. ამრიგად, (7) არის ფუნქციათა ტოლობა. აღვნიშნოთ E -თი ნამდვილი ცვლადის ნამდვილ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე, ხოლო F -თი კი იმ დიფერენცირებად ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთა წარმოებული უწყვეტია. ეს სიმრავლეები ვექტორული სივრცეებია, ამასთან $F \subset E$. მათ *ფუნქციონალურ* სივრცეებსაც უწოდებენ. ავიღოთ F -დან ნებისმიერი $x(t)$ ფუნქცია და მას შევუსაბამოთ მისი წარმოებული ფუნქცია $x'(t)$. მივიღებთ ასახვას F სივრციდან E -ში. ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის ასახვას სპეციალური სახელი აქვს და მას *ოპერატორი* ეწოდება. ხოლო იმ ოპერატორს კი, რომელიც $x(t) \mapsto x'(t)$ შესაბამისობის წესით არის მოცემული, დიფერენციალური ოპერატორი და $\frac{d}{dt}$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ამრიგად,

$$\frac{d}{dt}: D \rightarrow C, \quad \frac{d}{dt}x(t) = x'(t). \quad (8)$$

ოპერატორის მაგალითია აგრეთვე $x(t) \mapsto a(t)x(t)$ შესაბამისობით მოცემული ასახვა ზემოთ აღწერილ ფუნქციონალურ სივრცეთა შორის, სადაც $a(t)$ ფიქსირებული ფუნქციაა. ამ ოპერატორს ფუნქციაზე გამრავლების ოპერატორი ჰქვია.

ახლა დავუბრუნდეთ (7) განტოლებას. მის მარცხენა მხარეში დგას $\frac{d}{dt} - a(t)$ ოპერატორი (დიფერენციალური და ფუნქციაზე გამრავლების ოპერატორების სხვაობა) და (6) შესაძლებელია გადაიწეროს

$$\left(\frac{d}{dt} - a(t) \right) x(t) = b(t)$$

ოპერატორული ფორმით. თუ $b(t) \equiv 0$, მაშინ (7) გადაიქცევა ერთგვაროვან განტოლებად და მისი ამონახსნი მოიცემა (2) ფორმულით,

ანუ $x(t) = Ce^{\int_0^t a(\tau) d\tau}$ ფუნქცია $\frac{d}{dt} - a(t)$ ოპერატორის მოქმედებით გადავა

იგივერად 0-ის ტოლ ფუნქციაში. ხოლო, თუ დავუშვებთ, რომ $Ce^{\int_0^t a(\tau) d\tau}$ გამოსახულებაში C მუდმივი კი არაა, არამედ ნებისმიერი დიფერენციალური

ფუნქციაა და $\frac{d}{dt} - a(t)$ ოპერატორით ვიმოქმედებთ $C(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}$

ფუნქციაზე, მაშინ

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - a(t) \right) C(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} &= C'(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} + C(t)a(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} - a(t)C(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} = \\ &= C'(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} \end{aligned} \quad (9)$$

ფუნქცია $C(t)$ -ს შერჩევის ხარჯზე ნებისმიერი $b(t) \in C$ ფუნქციის ტოლი შეიძლება აღმოჩნდეს. ამის გამო, ბუნებრივია (6) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ

$$x(t) = C(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} \quad (10)$$

სახის ფუნქციათა შორის. განტოლების ამონახსნის ამ მეთოდს *მუდმივთა ვარიაციის* ან *ლაგრანჟის მეთოდი* ეწოდება. ამრიგად, მუდმივთა ვარიაციის მეთოდის თანახმად ვუშვებთ, რომ (7) განტოლების ამონახსნს აქვს (10) სახე და ვარჩევთ $C(t)$ ფუნქციას ისე, რომ (7) განტოლებაში $x(t)$ -ს ჩასმის შემდეგ იგი გადაიქცევა იგივევობად. (10) გამოსახულების ჩასმით (7)-ში და (9) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} C'(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} + C(t)a(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} - a(t)C(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} &= b(t) \Rightarrow \\ C'(t)e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} &= b(t) \Rightarrow C'(t) = b(t)e^{-\int_0^t a(\tau) d\tau} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$C(t) = \int_{t_0}^t b(s) e^{-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau} ds + C. \quad (11)$$

ამრიგად, $C(t)$ ფუნქცია გამოვსახეთ (7) განტოლების კოეფიციენტების საშუალებით. შევიტანოთ $C(t)$ ეს მნიშვნელობა (10)-ში და მივიღებთ (7) განტოლების ამონახსნს:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \left[\int_{t_0}^t b(s) e^{-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau} ds + C \right]. \quad (12)$$

(6) და (12) ფორმულები ამონახსნის ჩაწერის ორი სხვადასხვა ფორმაა. ამ ფორმულებს *კოშის ფორმულები* ეწოდებათ. (6) გამოსახულებას (12)-საგან მივიღებთ შემდეგნაირად: ჯერ გავხსნით კვადრატულ ფრჩხილებს, ხოლო შემდეგ კი თანამამრავლ ექსპონენტას შევიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ, გავაერთიანებთ ინტეგრალქვეშა ექსპონენტასთან და გამოვიყენებთ განსაზღვრული ინტეგრალის ადიციაურობის თვისებას (გთხოვთ, გაიაზროთ დამოუკიდებლად!)

მაგალითი. რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლის კანონი. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებით აღიწერება რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლის დინამიკა. კერძოდ, *რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლის კანონი* მდგომარეობს შემდეგში: *ფიქსირებული მცირე დროის მანძილზე დაშლილი ატომების რიცხვის ფარდობა ატომების საერთო რიცხვთან (პროცენტის დაწყების მომენტში) დამოკიდებული არ არის ატომების საერთო რიცხვზე* (ჩავთვალოთ რომ ატომების ეს რიცხვი საკმაოდ დიდია). ამის მიზეზი მდგომარეობს იმაში, რომ რადიოაქტიური დაშლა ნიშნავს ბირთვის დაშლას, ხოლო ბირთვები ერთმანეთთან არ ურთიერთქმედებენ ნივთიერების ჩვეულებრივი მდგომარეობის დროს, ურთიერთქმედებას ადგილი აქვს ელექტრონების გარსებს შორის. ამიტომ კონკრეტული ატომის დაშლის ალბათობა დამოკიდებული არ არის ატომების (საერთო) რაოდენობაზე. დაშლილი ატომების რაოდენობა დროის Δt მონაკვეთში პროპორციულია Δt -სი. აღვნიშნოთ $y(t)$ -თი დაშლილი ნივთიერების მასა დროის t მომენტში. Δt დროის მონაკვეთში დაშლილი ნივთიერების მასა იქნება $y(t) - y(t + \Delta t)$. ამრიგად, რადიოაქტიური დაშლის კანონი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{y(t) - y(t + \Delta t)}{y(t)} \approx k \Delta t, \quad (1)$$

სადაც უტოლობა მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მცირეა Δt . აქ k მუდმივი კოეფიციენტია და ახასიათებს მოცემულ ნივთიერებას: იგი ტოლია ინდივიდუალური ატომის დაშლის ალბათობისა დროის ერთეულის განმავლობაში იმ პირობებში, როდესაც დროის ეს ერთეული საკმაოდ

მცირეა. (1) თანადობა შესაძლებელია გავყოთ $-\Delta t$, გავამრავლოთ $y(t)$ და გადავწეროთ სახით:

$$\frac{y(t) - y(t + \Delta t)}{\Delta t} \approx ky(t). \quad (2)$$

(2) უტოლობის სიზუსტე იზრდება როდესაც $\Delta t \rightarrow 0$, ამიტომ გადავალთ რა ზღვარზე, მივალთ ტოლობამდე

$$y'(t) = -ky(t), \quad (3)$$

რომელსაც ეწოდება რადიოაქტიური დაშლის დიფერენციალური განტოლება. შესაძლებელია აგრეთვე ნებისმიერად ავიღოთ ნივთიერების საწყისი რაოდენობა

$$y(0) = y_0, \quad (4)$$

რომელიც ჩვეულებრივ ითვლება (3) განტოლების საწყის პირობად.

თუ აღმოჩნდა, რომ (3), (4) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ იგი სწორად ასახავს განსახილველ პროცესს.

როგორც ვიცით, (3),(4) კოშის ამოცანას მართლაც აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$y(t) = y_0 e^{-kt}. \quad (5)$$

ახლა, უკვე მიღებული ფორმულებიდან, განვსაზღვროთ k კოეფიციენტის არსი. ამისათვის შემოვიტანოთ ნახევრად დაშლის პერიოდი T , რომელიც ტოლია იმ დროისა, რომელშიდაც დაიშალა თავიდან აღებული ნივთიერების ნახევარი. მივიღებთ $y_0 e^{-kT} = \frac{y_0}{2}$, ანუ $e^{kT} = 2$,

საიდანაც $T = \frac{\ln 2}{k}$ და ე.ი. $k = \frac{\ln 2}{T}$. (3) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის (4) ფორმულა გარდაიქმნება შემდეგნაირად:

$$y(t) = y_0 e^{-kt} = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t} = y_0 e^{\ln 2 \left(-\frac{t}{T}\right)} = y_0 (e^{\ln 2})^{-\frac{t}{T}} = y_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

ამრიგად, $y(t) = y_0 2^{-\frac{t}{T}}$, სადაც T ნახევრად დაშლის პერიოდია. აქვე მოვიყვანოთ ზოგიერთი ნივთიერების ნახევრად დაშლის პერიოდი. ურანის ყველაზე გავრცელებული იზოტოპის ^{238}U -ისათვის $T = 4,5 \times 10^9$ წელიწადს, რადიუმისათვის ნახევრად დაშლის პერიოდი ტოლია 1600 წელიწადის: $T_{Ra} = 1600$. ნახშირბადის რადიოაქტიური იზოტოპისათვის, ^{14}C -ისათვის, ნახევრად დაშლის პერიოდი 5700 წელიწადია. ეს იზოტოპი გამოიყენება არქეოლოგიაში ნამარხების წლოვანების დადგენის დროს. ნამარხის დათარიღების ამ მეთოდს რადიონახშირბადის მეთოდი ეწოდება.

რადიონახშირბადის მეთოდი ეყარება იმ ფაქტს, რომ ^{14}C ორგანიზმში ხვდება მხოლოდ სიცოცხლის პერიოდში, ხოლო სიკვდილის შემდეგ იგი გამოიდევენება ორგანიზმიდან რადიოაქტიური დაშლის კანონით. შედარდება რა ცოცხალ ორგანიზმში ^{14}C -ის რაოდენობა ნამარხში დარჩენილს, დგინდება ნამარხის ასაკი.

2.7 ტიპური ამოცანები. წრფივი განტოლებები და განტოლებები რომლებიც წრფივზე დაიყვანებიან

პირველი რიგის განტოლებების ამოსახსნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ კოშის ფორმულა, ან გავიმეოროთ ყველა ის ნაბიჯი, რომლითაც (12) ფორმულა მივიღეთ.

$$1. \quad xy' = 2y - x^4.$$

პირველ რიგში ამოვხსნათ მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება $xy' = 2y$. ამისათვის კი მოვახდინოთ ცვლადების განცალკევა და მიღებული განტოლება გაინტეგრირებოთ:

$$\frac{y}{y} = \frac{2}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x} dx + c \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x| + c \Rightarrow y = cx^2.$$

ახლა ვეძებთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი $y = c(x)x^2$ სახის ფუნქციას შორის. რაც ნიშნავს, რომ თუ $y = c(x)x^2$ ფუნქციამ უნდა დააკმაყოფილოს მოცემული განტოლება. ჩავსვათ განტოლებაში $y = c(x)x^2$. მივიღებთ

$$x^3 c' + 2x^2 c = 2cx^2 - x^4 \Rightarrow c' = -x \Rightarrow c(x) = -\frac{1}{2}x^2 + c.$$

ჩავსვათ $c(x)$ ფუნქციის ეს მნიშვნელობა $y = c(x)x^2$ ფუნქციაში და მივიღებთ: $y(x) = -\frac{1}{2}x^4 + cx^2$.

$$2. \quad xy' - 2y = 2x^4$$

ნაბიჯი 1. ვხსნით ერთგვაროვან განტოლებას:

$$xy' - 2y = 0 \Rightarrow y = cx^2.$$

ნაბიჯი 2. $y = c(x)x^2$ ფუნქციას ვსვამთ განტოლებაში და ვპოულობთ $c(x)$:

$$x^3 c' + 2x^2 c - 2cx^2 = 2x^4 \Rightarrow c(x) = x^2 + c$$

ნაბიჯი 3. $c(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას ვსვამთ $y(x)$ -ში: $y(x) = x^4 + cx^2$.

$$3. \quad y' + y \tan x = \sec x$$

$$y' + y \tan x = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\tan x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \tan x dx \Rightarrow \ln|y| = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალი $-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{d\cos x}{\cos x} dx = \ln|\cos(x)| + c$.
 ამრიგად, $\ln|y| = \ln|\cos(x)| + c \Rightarrow y(x) = c \cos(x)$. ჩავსვათ $y(x) = c(x)\cos(x)$ განტოლებაში:

$$c' \cos(x) - \sin(x)c(x) + c(x)\cos x \frac{\sin x}{\cos x} = \sec(x) \Rightarrow$$

$$c'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow c(x) = \int \frac{dx}{\cos^2(x)} \Rightarrow c(x) = \tan(x) + c.$$

საბოლოოდ ვღებულობთ $y(x) = \sin(x) + \tan(x)\cos(x)$.

$$5. (2x+1)y' = 4x+2y$$

$$(2x+1)y' = 2y \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{2x+1} \Rightarrow \ln|y| =$$

$$\ln(2x+1) + c$$

$$\Rightarrow y = c(2x+1).$$

$y(x) = c(x)(2x+1)$ -ის ჩასმით განტოლებაში მივიღებთ:

$$(c'(x)(2x+1) + 2c)(2x+1) = 4x + 2c(2x+1) \Rightarrow (2x+1)^2 c' = 4x$$

$$\Rightarrow c' = \frac{4x}{(2x+1)^2}$$

$$\Rightarrow c(x) = \int \frac{4xdx}{(2x+1)^2} + c.$$

გამოვთვალოთ ეს ინტეგრალი:

$$\int \frac{4xdx}{(2x+1)^2} = \int \frac{(4x+2-2)dx}{(2x+1)^2} = \int \frac{2(2x+1)dx}{(2x+1)^2} - \int \frac{2dx}{(2x+1)^2} =$$

$$= \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + c.$$

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ: $y(x) = (2x+1)\ln|2x+1| + c(2x+1) + 1$.

$$6. y(x) = \int_0^x y(t)dt + x + 1, y(0) = 1$$

გავაწარმოოთ განტოლების ორივე მხარე: $y' = y + 1$ საიდანაც $y(x) = Ce^x - 1$. სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ: $c = 2$. საბოლოოდ გვექნება: $y(x) = 2e^x - 1$.

$$7. (e^y - y')x = 2$$

აღვნიშნოთ $e^y = z(x)$ და განვსაზღვროთ აქედან $y(x) = \ln|z(x)|$, მაშინ $y'(x) = \frac{z'(x)}{z(x)}$. გამოსავალ განტოლებაში $y(x)$ ფუნქცია შევცვალოთ $z(x)$

და მივიღებთ: $\left(z(x) - \frac{z'(x)}{z(x)}\right)x = 2$. შესაბამისი გადალაგებით მივიღებთ ბერნულის განტოლებას $z' + \frac{2}{x}z = z^2$. კიდევ ერთი აღნიშვნა შემოვიტანოთ:

$f(x) = \frac{1}{z(x)}$. ბერნულის განტოლება $f(x)$ -ის მიმართ გადაიქცევა $-f' + \frac{2}{x}f = 1$ წირფივ განტოლებად. რომლის ზოგად ამონახსნს (ამ ამონახსნს ვპოულობთ კოშის ფორმულიდან) აქვს სახე $f(x) = x(1 + Cx)$, საიდანაც ჩვენი აღნიშვნის თანახმად $z(x) = \frac{1}{x(1+Cx)}$ და $y(x) = \ln|z(x)|$, ამიტომ

გამოსავალი განტოლების ამონახსნი იქნება $y(x) = -\ln|x + Cx^2|$.

$$8. y' x^3 \sin(y) = xy' - 2y$$

გავყოთ განტოლების ორივე მხარე y' -ზე:

$$x^3 \sin(y) = x - 2 \frac{y}{y'} \Rightarrow x^3 \sin(y) = x - 2y \frac{dx}{dy} \Rightarrow 2y \frac{dx}{dy} - x = x^3 \sin(y)$$

განვიხილოთ x როგორც y -ის ფუნქცია, გავყოთ მიღებული გამოსახულების ორივე მხარე x^3 -ზე და შემოვიტანოთ აღნიშვნა $x^{-2} = z(y)$. მივიღებთ წრფივ განტოლებას: $yz' + z = \sin(y)$, რომლის ზოგადი ამონახსნია

$$z = \frac{C}{y} - \frac{\cos(y)}{y}. \text{ საბოლოოდ გამოსავალი განტოლების ყველა ამონახსნია } y = 0; \frac{1}{x^2} = \frac{C}{y} - \frac{\cos(y)}{y} \text{ ანუ } y^2 + x \cos(y) - Cx^2 = 0.$$

9. ამოვხსნათ განტოლება $y' - \frac{2y}{x} - 2y^3 = 0$. განტოლების ყველა წევრი გავყოთ y^3 -ზე და შემოვიტანოთ აღნიშვნა $z = \frac{1}{y^2}$. მაშინ განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{2} z' + \frac{2}{x} z = -2 \Rightarrow z' + \frac{4}{x} z = -4.$$

მივიღეთ წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება, რომლის ამოსახსნელად გამოვიყენებთ კოშის ფორმულას:

$$z = e^{-\int \frac{4}{x} dx} (C - \int 4 e^{\int \frac{4}{x} dx} dx) \Rightarrow z = e^{-4 \ln x} (C - \int 4 e^{4 \ln x} dx) \Rightarrow z = x^{-4} (C - \int 4 x^4 dx) \Rightarrow z = x^{-4} (C - \frac{4}{5} x^5) \Rightarrow \frac{C}{x^4} - \frac{4}{5} x.$$

$$\text{რადგან } \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{C - 4x^5}}, \text{ ამიტომ } y = \pm \frac{\sqrt{5}x^2}{\sqrt{5C - 4x^5}}.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. ამოხსენით წრფივი განტოლებები კოშის ფორმულის გამოყენებით

$$1) xy' = 2y + x^3 \text{ (პასუხი } y(x) = (x + c)x^2)$$

$$2) xy' - 3y = -x^2 \text{ (პასუხი } y(x) = (\frac{1}{x} + c)x^3)$$

$$3) xy' = -y + 2x^3 \text{ (პასუხი } y(x) = \frac{x^4 + 2c}{2x})$$

$$4) xy' - 2y = 3x^2 \text{ (პასუხი } y(x) = (3 \ln(x) + c)x^2)$$

$$5) tx'(t) + x(t) = t^2 \text{ (პასუხი } x(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{c}{t})$$

2. დაიყვანეთ წრფივ განტოლებაზე და ამოხსენით შემდეგი განტოლებები

$$1) y' - \frac{5y(1-2y^2x)}{x} = 0 \text{ (პასუხი } y(x) = \frac{\sqrt{11}x^5}{\sqrt{20x^{11}+11c}})$$

$$2) y' - \frac{3y(1-2y^2x)}{x} = 0 \text{ (პასუხი } y(x) = \pm \frac{\sqrt{7}x^3}{\sqrt{12x^7+7c}})$$

$$3) \quad y' - \frac{2y(1-2y^3x)}{x} = 0 \quad (\text{პასუხი } y(x) = \frac{\sqrt[3]{7x^2}}{\sqrt[3]{12x^7+7c}})$$

$$4) \quad y' + \frac{2y-4y^4x}{x} = 0 \quad (\text{პასუხი } y(x) = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12x+5x^6c}})$$

$$5) \quad y' + \frac{3y(1-y^2x)}{x} = 0 \quad (\text{პასუხი } y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{5}x+x^6c}})$$

3. ამოხსენით შემდეგი განცალკევად ცვლადებიანი განტოლებები

$$1) \quad x^2 y' + x^2 + \frac{1}{49} y^2 = xy \quad (\text{პასუხი } y(x) = -7xtg(\frac{1}{7}\ln(x) + \frac{1}{7}c))$$

$$2) \quad \frac{1}{64} y^2 + x^2 y' = xy - x^2 \quad (\text{პასუხი } y(x) = -8xtg(\frac{1}{8}\ln(x) + \frac{1}{8}c))$$

$$3) \quad x^2 + xy + \frac{1}{16} y^2 - x^2 y' = 0 \quad (\text{პასუხი } y(x) = 4xtg(\frac{1}{4}\ln(x) + \frac{1}{4}c))$$

$$4) \quad xy - x^2 y' = x^2 + \frac{1}{25} y^2 \quad (\text{პასუხი } y(x) = -5xtg(\frac{1}{5}\ln(x) + \frac{1}{5}c))$$

$$5) \quad x^2 y' + x^2 + \frac{1}{36} y^2 = xy \quad (\text{პასუხი } y(x) = -6xtg(\frac{1}{6}\ln(x) + \frac{1}{6}c))$$

$$6) \quad (x+1)y' = -xy \quad (\text{პასუხი } y(x) = c(xe^{-x} - e^{-x}))$$

$$7) \quad y' + tgx \cdot (y-2) = 0 \quad (\text{პასუხი } y(x) = 2 + \cos(x)c)$$

$$8) \quad (x-1)y' = xy \quad (\text{პასუხი } y(x) = c(xe^x - e^x))$$

$$9) \quad y' + ctgx \cdot (y+2) = 0 \quad (\text{პასუხი } y(x) = -2 + \frac{c}{\sin(x)})$$

4. ცვლადის $z = \frac{y}{x}$ გარდაქმნით ამოხსენით განტოლებები:

$$ა) \quad y' = \frac{x-2y}{x}, \quad ბ) \quad y' = \frac{3x+y}{x}, \quad გ) \quad y' = \frac{-x+3y}{x}. \quad (\text{პასუხი } ა) \quad y(x) = \frac{x}{3} + \frac{c_1}{x^2};$$

$$ბ) \quad y(x) = (3 \ln x + c_1)x; \quad გ) \quad y(x) = \frac{x}{2} + c_1 x^3.$$

5. ამოხსენით შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლებები

$$1) \quad (6x + y - 1)dx + (4x + y - x)dy = 0 \quad (\text{პასუხი: } (2x + y - 3)^2 = c(3x + y - \frac{5}{2})). \quad \alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 4; \quad \text{ცვლადების } x = u - \frac{1}{2}, y = v + 4$$

გარდაქმნა გვაძლევს განტოლებას $(6u + v)du + (4u + v)dv = 0$.

$$2) \quad (5x - 7y + 1)dy + (x + y - 1)dx = 0 \quad (\text{პასუხი: } (x - y)(x + 7y - 4)^3 = c). \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2}; \quad x = u + \frac{1}{2}, \quad y = v + \frac{1}{2} \quad \text{ცვლადების გარდაქმნის შემდეგ განტოლება მიიყვანება } (5u - 7v)dv + (u + v)du = 0 \text{ განტოლებაზე.}$$

6. იპოვეთ ინტეგრალური მამრავლი და ამოხსენით განტოლებები:

1) $y(1 + xy)dx - xdy = 0$ პასუხი: ინტეგრალური მამრავლი $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$, განტოლების ზოგადი ამონახსნი $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c$.

2) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$ პასუხი: ინტეგრალური მამრავლი $h(x, y) = e^x$, განტოლების ზოგადი ამონახსნი $(x^2 + y^2)e^x = c$.

3) $(3x + 6xy + 3y^2)dx + (2x^2 + 2xy)dy = 0$. პასუხი: ინტეგრალური მამრავლი $h(x, y) = x$, ზოგადი ამონახსნი $x^3 + 2x^3y + \frac{3}{2}x^2y^2 = c$.

7. ამოხსენით სრულ დიფერენციალებში მოცემული შემდეგი განტოლებები:

1) $(y - \sin x)dx + (x + 1)dy = 0$ (პასუხი: $(x + 1)y + \cos x = c$).

2) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$ (პასუხი: $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$).

3) $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ (პასუხი: $x^2 + xy + y^2 = c$).

8. ამოხსენით კოშის ამოცანა

$x(x - 1)y'(x) + y(x) = x^2(2x - 1)$, $y(2) = 4$. პასუხი: $y(x) = x^2$.

9. ამოხსენით განტოლება $x \int_0^x y(t)dt = (x + 1) \int_0^x ty(t)dt$, $x > 0$.

მითითება: ორივე მხარე ორჯერ გააწარმოეთ x -ით. მიიღება წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება $y(x)$ -ის მიმართ. პასუხი: $y(x) = c \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$.

3. n -ური რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

3.1. მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი განტოლება

ამ პარაგრაფით დავიწყებთ ისეთი დიფერენციალური განტოლებების შესწავლას, რომელთა ამოხსნის მეთოდები კარგადაა დამუშავებული. პირველ რიგში განვიხილავთ *ნორმალურ* განტოლებას.

$$f^{(n)}(t) + a_1 f^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} f'(t) + a_n f(t) = 0 \quad (1)$$

სახის დიფერენციალურ განტოლებას, სადაც $t \in R$ ნამდვილი ცვლადია და $a_1, a_2, \dots, a_n$ მოცემული ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვებია, ეწოდება წრფივი ერთგვაროვანი n რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება $f(t)$ უცნობი ფუნქციის მიმართ. $a_1, a_2, \dots, a_n$ რიცხვებს ეწოდებათ *განტოლების კოეფიციენტები*.

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n,$$

სადაც D აღნიშნავს ჩვენსთვის უკვე ცნობილ $\frac{d}{dt}$ დიფერენციალურ ოპერატორს, დიფერენციალური მრავალწევრის გამოყენებით (1) განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$L(D) f(t) = 0. \quad (2)$$

შემდეგ ლემას უწოდებენ სუპერპოზიციის პრინციპს (1) განტოლებისათვის.

ლემა 1. *დავუშვათ $f_1(t), f_2(t)$ (1) განტოლების რაიმე ამონახსნებია და C_1, C_2 ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვებია. მაშინ $f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$ ფუნქცია აგრეთვე არის (1) განტოლების ამონახსნი.*

◀ ლემის დასამტკიცებლად (2)-ის თანახმად, საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ

$$L(D)(C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)) = 0.$$

უკანასკნელი ტოლობა ფრჩხილების გახსნისა და მუდმივების დიფერენცირების ოპერატორის გარეთ გატანის შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$C_1 L(D) f_1(t) + C_2 L(D) f_2(t) = 0. \quad (3)$$

რადგან $f_1(t), f_2(t)$ ფუნქციები (1) განტოლების ამონახსნებია, ამიტომ თითოეულისათვის სრულდება (2) ტოლობა, რაც ნიშნავს, რომ (3) ტოლობის თითოეული შესაკრები 0-ის ტოლია. ამით ლემა დამტკიცებულია. ▶

სხვა სიტყვებით, ლემა 1 გვეუბნება, რომ ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნის წრფივი კომბინაცია აგრეთვე ამონახსნია. ქვემოთ მოყვანილი თეორემა აზუსტებს (1) დიფერენციალური განტოლების

წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების რაოდენობას. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა 1. *n -ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივი ერთვაროვანი განტოლების ამონახსნების სიმრავლე ქმნიან n განზომილებიან ვექტორულ სივრცეს.*

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ (1)-ს აქვს n წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, მათ (1) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნები ეწოდებათ. ლემა 1-ის თანახმად, კერძო ამონახსნების წრფივი კომბინაცია კვლავ ამონახსნია. (1) განტოლების n წრფივად დამოუკიდებელ კერძო ამონახსნების ერთობლიობას (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა ეწოდება. ამრიგად, ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა არის (1) განტოლების ამონახსნთა სივრცის ბაზისი. (1) დიფერენციალური განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი არის საბაზისო ამონახსნების (ან კერძო ამონახსნების) წრფივი კომბინაცია. ამრიგად, უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა კერძო ამონახსნების პოვნა. ახლა სწორედ ამ ამოცანის გადაჭრას შევუდგებით.

$L(D)$ დიფერენციალური მრავალწევრის პარალელურად განვიხილოთ მრავალწევრი

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

რომელსაც (1) დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი მრავალწევრი ეწოდება, სადაც λ (რიცხვითი) ცვლადია.

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (4)$$

n -ური ხარისხის განტოლებას კი (1)-ის მახასიათებელი განტოლება ეწოდება.

როგორც ცნობილია, (4) განტოლებას აქვს n ფესვი (ამონახსნი) ჯერადობების გათვალისწინებით. ამ რიცხვებს (ნამდვილს ან კომპლექსურს) (1) დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი ფესვები ეწოდებათ.

თეორემა 2. *დავუშვათ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (1) დიფერენციალური განტოლების ერთმანეთისაგან წყვილ-წყვილად განსხვავებული მახასიათებელი ფესვებია: $\lambda_i \neq \lambda_j$, როდესაც $i \neq j$. მაშინ განტოლების კერძო ამონახსნებია $f_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $f_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, ..., $f_n(t) = e^{\lambda_n t}$ ფუნქციები. ხოლო ზოგადი ამონახსნია $f(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$ ფუნქცია, სადაც $C_1, C_2, \dots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია.*

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ მახასიათებელ ფესვებს შორის შესაძლებელია იყოს კომპლექსური რიცხვები. დავუშვათ მათი რაოდენობაა $2l$ (განტოლების კომპლექსური ფესვების რაოდენობა ლუწია, რადგან კომპლექსურ $\alpha + i\beta$ რიცხვთან ერთად მისი $\alpha - i\beta$ შეუღლებულიც განტოლების ამონახსნია).

აღვნიშნოთ ნამდვილი ფესვები $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ -თი, ხოლო კომპლექსური ფესვები კი $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, \dots, \alpha_l \pm i\beta_l$. კერძო ამონახსნები, რომლებიც შეესაბამებინ $\alpha_j \pm i\beta_j$ მახასიათებელ ფესვებს, არიან $f_j(t) = e^{(\alpha_j \pm i\beta_j)t}$. წარმოვადგინოთ იგი ტრიგონომეტრიული ფორმით, ანუ გამოვიყენოთ კომპლექსური ექსპონენტის შემდეგი განმარტება $e^{it} = \cos t + i \sin t$ (ეილერის ფორმულა):

$$e^{(\alpha_j \pm i\beta_j)t} = e^{\alpha_j t} e^{\pm i\beta_j t} \Rightarrow e^{\alpha_j t} e^{\pm i\beta_j t} = e^{\alpha_j t} (\cos \beta_j t \pm i \sin \beta_j t) \Rightarrow$$

$$f_j(t) = e^{\alpha_j t} (\cos \beta_j t \pm i \sin \beta_j t).$$

ლემა 2. თუ $\psi(t) = \phi(t) + i\varphi(t)$ ფუნქცია არის (1) დიფერენციალური განტოლების კომპლექსური ამონახსნი, მაშინ $\phi(t)$ და $\varphi(t)$ ნამდვილი ფუნქციები აკრებენ (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნება.

◀ლემა მტკიცდება $\psi(t) = \phi(t) + i\varphi(t)$ ფუნქციის ჩასმით (1) დიფერენციალურ განტოლებაში. მიღებული გამოსახულების გამარტივების შემდეგ საჭიროა გავითვალისწინოთ, რომ კომპლექსური ფუნქცია ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი ნამდვილი და კომპლექსური ნაწილი 0-ის ტოლია. ეს უკანასკნელი კი მოგვცემს, რომ $\phi(t)$ და $\varphi(t)$ ნამდვილი ფუნქციები არიან (1) განტოლების ამონახსნები. ▶

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეებს, რომ თუ (1) განტოლების მახასიათებელი ფესვები წყვილ-წყვილად განსხვავებულია და მათ შორის არის კომპლექსური რიცხვები, მაშინ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა:

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_k t},$$

$$e^{\alpha_1 t} (\cos \beta_1 t \pm i \sin \beta_1 t), \dots, e^{\alpha_l t} (\cos \beta_l t \pm i \sin \beta_l t) \quad (5)$$

ფუნქციები. ამ შემთხვევაშიც ცხადია, (5) კერძო ამონახსნების წრფივი კომბინაცია არის (1) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ლემა 3. სიმრავლე, რომელიც მიიღება

$$Ae^{at} (\cos \beta t + i \sin \beta t) + Be^{at} (\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

წრფივი კომბინაციით, სადაც A, B და a, b კომპლექსური კოეფიციენტებია, ემთხვევა $ae^{at} \cos \beta t + be^{at} \sin \beta t$ წრფივ კომბინაციების სიმრავლეს.

◀ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ლემაში მოყვანილ ორ სიმრავლეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა. რადგან,

$$Ae^{at} (\cos \beta t + i \sin \beta t) + Be^{at} (\cos \beta t - i \sin \beta t) =$$

$$= e^{at} [(A + B) \cos \beta t + (A - B) i \sin \beta t] =$$

$$= e^{at} [a \cos \beta t + b \sin \beta t],$$

ამიტომ

$$a = A + B, \quad b = i(A - B)$$

ტოლობა, ან

$$A = \frac{a - ib}{2}, \quad B = \frac{a + ib}{2},$$

ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას ლემაში მოყვანილ სიმრავლეებს შორის. ►

(5) ფუნდამენტური სისტემის და ლემა 3-ის გამოყენებით მიღებული შედეგი ჩამოვყალიბოთ თეორემის სახით, რომელსაც ვუწოდოთ თეორემა ნამდვილი ზოგადი ამონახსნის შესახებ.

თეორემა 3. *დაუშვათ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (1) დიფერენციალური განტოლების ერთმანეთისაგან წვეილ-წვეილად განსხვავებული მახასიათებელი ფესვებია: $\lambda_i \neq \lambda_j$, როდესაც $i \neq j$. რომელთა შორის არის $2l$ კომპლექსური ფესვი, მაშინ განტოლების კერძო ამონახსნებია $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_k t}, e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, e^{\alpha_2 t} \cos \beta_2 t, \dots, e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, e^{\alpha_2 t} \sin \beta_2 t, \dots, e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t$ ფუნქციები. ხოლო ზოგადი ამონახსნია ამ ფუნქციების წრფივი კომბინაცია ნამდვილი კოეფიციენტებით.*

განტოლება (1)-ის კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია. ბუნებრივია მისი ამონახსნი ნამდვილ ფუნქციათა კლასში ვეძებოთ. ნამდვილი ამონახსნის პოვნის ერთ-ერთ გზას მოვიყვანოთ ე.წ. ჰარმონიული ოსცილატორის მაგალითზე.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y''(t) + \omega^2 y = 0$, სადაც ω ნამდვილი რიცხვია, განტოლების ნამდვილი ამონახსნი.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$, ხოლო განტოლების ზოგად ამონახსნს კი აქვს სახე $y(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. გამოვიყენოთ ეილერის ფორმულა

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t),$$

აქედან მივიღებთ ნამდვილ ამონახსნს:

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t),$$

რომელსაც ზოგჯერ სხვა სახითაც წერენ. კერძოდ, უკანასკნელი ტოლობა გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos \omega t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin \omega t \right).$$

$$\text{რადგან } \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2 = 1 \quad \text{და} \quad \left|\frac{c_j}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right| < 1, \quad j = 1, 2, \quad \text{ამიტომ}$$

შეგვიძლია შემოვიტანოთ შემდეგი ტოლობებით განსაზღვრული $A > 0$ და φ პარამეტრები

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin \varphi = -\frac{C_2}{A}, \quad \cos \varphi = \frac{C_1}{A},$$

მაშინ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც (1) დიფერენციალური განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები. ზოგადი ამონახსნის მიღების პროცედურა ზემოთ მოყვანილი შემთხვევისაგან არ განსხვავდება და ჯერადი ფესვების შემთხვევაშიდაც სამართლიანია თეორემა 1. ჩვენ მოვიყვანოთ თეორემა 2-ის ანალოგს.

თეორემა 4. *დავუშვათ $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (1) დიფერენციალური განტოლების ერთმანეთისაგან წყვილ-წყვილად განსხვავებული მახასიათებელი ფესვებია: $\lambda_i \neq \lambda_j$, როდესაც $i \neq j$, რომელთა ჯერადობებია შესაბამისად $k_1, k_2, \dots, k_p$. მაშინ განტოლების კერძო ამონახსნებია*

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ & e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, t^2 e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t}, \\ & \dots \dots \dots \dots \\ & e^{\lambda_p t}, te^{\lambda_p t}, t^2 e^{\lambda_p t}, \dots, t^{k_p-1} e^{\lambda_p t} \end{aligned}$$

ფუნქციები. ხოლო ზოგადი ამონახსნი მიიღება ზემოთ მოყვანილი ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაში შემავალი ფუნქციების წრფივი კომბინაციით კომპლექსური კოეფიციენტებით.

ნამდვილი ფესვების გამოყოფა ხდება ისევე, როგორც მარტივი მახასიათებელი ფესვების შემთხვევაში. გთხოვთ გაიაზროთ დამოუკიდებლად!

ამ პარაგრაფში მოყვანილი ყველა დებულება ვრცელდება

$$a_0 f^{(n)}(t) + a_1 f^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} f'(t) + a_n f(t) = 0 \quad (6)$$

სახის მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებებზე. ნათელია, რომ (6)-ის ყველა წევრის $a_0 \neq 0$ -ზე გაყოფით მიიღება (1) განტოლება.

ვთქვათ $f_1, f_2, \dots, f_n$ (1) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა.

$$\begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

მატრიცის დეტერმინანტს ეწოდება *კრონსკის დეტერმინანტი* და აღინიშნება $W(t)$ სიმბოლოთი. სამართლიანია შემდეგი დებულება:

დებულება 1. $W(t) \neq 0$.

სამართლიანია უფრო ზოგადი ფაქტი. დიფერენციალური განტოლებისაგან დამოუკიდებლად განვიხილოთ $g_1, g_2, \dots, g_n$ ფუნქციათა ერთობლიობა განხილულნი $[a, b]$ ნამდვილ რიცხვთა მონაკვეთზე. თუ ისინი წრფივად დამოკიდებულები არიან (R -ის ან C -ს მიმართ), მაშინ მათი კრონსკის დეტერმინანტი, რომელიც (7) სახის მატრიცის დეტერმინანტია, იგივეურად 0-ის ტოლია ამ მონაკვეთზე. კრონსკის დეტერმინანტის ნულთან ტოლობა არის აუცილებელი პირობა იმისა, რომ ფუნქციათა რაიმე ერთობლიობა წრფივად დამოკიდებულია. შებრუნებული დებულება სამართლიანი არ არის. კერძოდ, ფუნქციათა ერთობლიობის კრონსკის დეტერმინანტი შესაძლებელია იყოს იგივეურად ნულის ტოლი, მაგრამ ფუნქციათა ეს ერთობლიობა აღმოჩნდეს წრფივად დამოუკიდებელი.

3.2 ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი განტოლება

ახლა უფრო ზოგადი განტოლების ანალიზზე გადავიდეთ.

$$a_0(t) f^{(n)}(t) + a_1(t) f^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t) f'(t) + a_n(t) f(t) = 0 \quad (1)$$

ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება არის ზოგადად ჩაწერილი

$$F(t, f^{(n)}, f^{(n-1)}, \dots, f', f) = 0$$

n -ური რიგის დიფერენციალური განტოლების კერძო შემთხვევა. ამ უკანასკნელ ჩანაწერში გაერთიანებულია როგორც ცვლადკოეფიციენტებიანი, ისე მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი განტოლებები, ამასთანავე არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებიც.

დავუშვათ $f_1(t), f_2(t), \dots, f_{n-1}(t), f_n(t)$ ფუნქციები (1) განტოლების ნებისმიერ n წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემაა, მას (ისევე როგორც მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლების შემთხვევაში) რომელსაც *ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა* ეწოდება. ვთქვათ

$$f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \dots + C_{n-1} f_{n-1}(t) + C_n f_n(t)$$

(1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია. განვიხილოთ

$$a_0(t) f^{(n)}(t) + a_1(t) f^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t) f'(t) + a_n(t) f(t) = b(t) \quad (2)$$

არაერთგვაროვანი განტოლება და მისი ამონახსნი ვეძებთ

$$\tilde{f}(t) = C_1(t) f_1(t) + C_2(t) f_2(t) + \dots + C_{n-1}(t) f_{n-1}(t) + C_n(t) f_n(t)$$

სახის ფუნქციათა შორის. პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნის საპოვნელად ანალოგიური მეთოდი ჩვენ უკვე

გამოვიყენეთ. განტოლების ამოხსნის ამ მეთოდს მუდმივთა ვარიაციის მეთოდი ეწოდება. სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა 1. დაუშვათ $f_1(t), f_2(t), \dots, f_{n-1}(t), f_n(t)$ ფუნქციები (1) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა. თუ $C_j(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ განტოლებათა შემდეგ

$$C_1'(t)f_1(t) + C_2'(t)f_2(t) + \dots + C_{n-1}'(t)f_{n-1}(t) + C_n'(t)f_n(t) = 0$$

(3)

$$C_1'(t)f_1'(t) + C_2'(t)f_2'(t) + \dots + C_{n-1}'(t)f_{n-1}'(t) + C_n'(t)f_n'(t) = 0 \quad (4)$$

$$C_1'(t)f_1^{(n-2)}(t) + C_2'(t)f_2^{(n-2)}(t) + \dots + C_{n-1}'(t)f_{n-1}^{(n-2)}(t) + C_n'(t)f_n^{(n-2)}(t) = 0 \quad (5)$$

$$C_1'(t)f_1^{(n-1)}(t) + C_2'(t)f_2^{(n-1)}(t) + \dots + C_{n-1}'(t)f_{n-1}^{(n-1)}(t) + C_n'(t)f_n^{(n-1)}(t) = \frac{b(t)}{a_0(t)} \quad (6)$$

სისტემას, მაშინ

$$\tilde{f}(t) = C_1(t)f_1(t) + C_2(t)f_2(t) + \dots + C_{n-1}(t)f_{n-1}(t) + C_n(t)f_n(t) \quad (7)$$

ფუნქცია არის (2) არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

◀ დაუშვათ $C_j(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (3)-(6)

განტოლებათა სისტემას. ავიღოთ (7) ფუნქცია და გავაწარმოოთ იგი, ამასთან გავითვალისწინოთ ის რომ ნამრავლს ვაწარმოებთ და შემდეგი დაგვაგუფოდ ისე რომ ერთად იყოს მოთავსებული პირველი თანამამრავლის ყველა წარმოებული, შემდეგ მეორე თანამამრავლის:

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(t) &= [C_1'(t)f_1(t) + C_2'(t)f_2(t) + \dots + C_{n-1}'(t)f_{n-1}(t) + C_n'(t)f_n(t)] + \\ &+ [C_1(t)f_1'(t) + C_2(t)f_2'(t) + \dots + C_{n-1}(t)f_{n-1}'(t) + C_n(t)f_n'(t)]. \end{aligned}$$

პირველი შესაკრები (3)-ის თანახმად 0-ის ტოლია, ამიტომ

$$\tilde{f}'(t) = C_1(t)f_1'(t) + C_2(t)f_2'(t) + \dots + C_{n-1}(t)f_{n-1}'(t) + C_n(t)f_n'(t).$$

ეს უკანასკნელი კვლავ გავაწარმოოთ და შესაკრებების დაჯგუფება ზემოთ მოყვანილის ანალოგიურად მოვახდინოთ. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \tilde{f}''(t) &= [C_1'(t)f_1'(t) + C_2'(t)f_2'(t) + \dots + C_{n-1}'(t)f_{n-1}'(t) + C_n'(t)f_n'(t)] + \\ &+ [C_1(t)f_1''(t) + C_2(t)f_2''(t) + \dots + C_{n-1}(t)f_{n-1}''(t) + C_n(t)f_n''(t)]. \end{aligned}$$

აქ პირველი კვადრატული ფრჩხილი (4) ტოლობის გამო 0-ის ტოლია. გაწარმოების ეს პროცედურა $n-1$ რიგამდე გავაგრძელოთ. i -რი წარმოებულიათვის გვექნება:

$$\tilde{f}^{(i)}(t) = C_1(t)f_1^{(i)}(t) + C_2(t)f_2^{(i)}(t) + \dots + C_{n-1}(t)f_{n-1}^{(i)}(t) + C_n(t)f_n^{(i)}(t).$$

უკანასკნელი n -ური წარმოებული გამოიყურება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(n)}(t) = & [C_1'(t)f_1^{(n-1)}(t) + C_2'(t)f_2^{(n-1)}(t) + \dots + C_{n-1}'(t)f_{n-1}^{(n-1)}(t) + C_n'(t)f_n^{(n-1)}(t)] + \\ & + [C_1(t)f_1^{(n)}(t) + C_2(t)f_2^{(n)}(t) + \dots + C_{n-1}(t)f_{n-1}^{(n)}(t) + C_n(t)f_n^{(n)}(t)]. \end{aligned}$$

პირველ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება (6)

ტოლობის გამო $\frac{b(t)}{a_0(t)}$ -ს ტოლია, ამიტომ

$$\tilde{f}^{(n)}(t) = C_1(t)f_1^{(n)}(t) + C_2(t)f_2^{(n)}(t) + \dots + C_{n-1}(t)f_{n-1}^{(n)}(t) + C_n(t)f_n^{(n)}(t) + \frac{b(t)}{a_0(t)}.$$

ამის შემდეგ $\tilde{f}^{(i)}(t)$ -სათვის მიღებული გამოსახულება გავამრავლოთ $a_{n-i}(t)$ -ზე და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ:

$$\begin{aligned} & a_0(t)f^{(n)}(t) + a_1(t)f^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)f'(t) + a_n(t)f(t) = \\ & = a_0(t)[C_1(t)f_1^{(n)}(t) + C_2(t)f_2^{(n)}(t) + \dots + C_{n-1}(t)f_{n-1}^{(n)}(t) + C_n(t)f_n^{(n)}(t) + \frac{b(t)}{a_0(t)}] + \\ & + a_1(t)[C_1(t)f_1^{(n-1)}(t) + C_2(t)f_2^{(n-1)}(t) + \dots + C_{n-1}(t)f_{n-1}^{(n-1)}(t) + C_n(t)f_n^{(n-1)}(t)] + \\ & + \dots + a_n(t)[C_1(t)f_1(t) + C_2(t)f_2(t) + \dots + C_{n-1}(t)f_{n-1}(t) + C_n(t)f_n(t)]. \end{aligned}$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარე ჩვენთვის მოსახერხებელი ფორმით დავაჯგუფოთ და $b(t)$ -ს გავუტოლოთ (რადგან მარცხენა მხარე $b(t)$ -ს ტოლია):

$$\begin{aligned} & C_1(t)[a_0(t)f_1^{(n)}(t) + a_1(t)f_1^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)f_1(t)] + \\ & + C_2(t)[a_0(t)f_2^{(n)}(t) + a_1(t)f_2^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)f_2(t)] + \\ & + \dots + C_n(t)[a_0(t)f_n^{(n)}(t) + a_1(t)f_n^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)f_n(t)] + b(t) = b(t), \end{aligned}$$

აქ თითოეული სტრიქონი 0-ის ტოლია, რაც იმას ამტკიცებს, რომ (7) გამოსახულებით მოცემული ფუნქცია (2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია. ►

მუდმივ კოეფიციენტებიანი განტოლების ანალოგიურად განიხილება ცვლად კოეფიციენტებიანი განტოლების ვრონსკის დეტერმინანტი და ამრიგად, იგი არის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური $f_1, f_2, \dots, f_n$ სისტემისაგან შედგენილი (7) მატრიცის დეტერმინანტი, რომელიც პარაგრაფ 3.1-ის დებულება 1-ის თანახმად ნულისაგან განსხვავებულია.

(3)-(6) არის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა $C_1'(t), \dots, C_n'(t)$ ფუნქციების მიმართ. გადავწეროთ იგი მატრიცული ფორმით:

$$\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_{n-1}(t) & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \dots & f_{n-1}'(t) & f_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-2)}(t) & f_2^{(n-2)}(t) & \dots & f_{n-1}^{(n-2)}(t) & f_n^{(n-2)}(t) \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \dots & f_{n-1}^{(n-1)}(t) & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ \dots \\ C_{n-1}'(t) \\ C_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{b(t)}{a_0(t)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

ცხადია, რომ განტოლებათა ამ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს, რადგან სისტემა გადაუგვარებელია. მართლაც,

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_{n-1}(t) & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \dots & f_{n-1}'(t) & f_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-2)}(t) & f_2^{(n-2)}(t) & \dots & f_{n-1}^{(n-2)}(t) & f_n^{(n-2)}(t) \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \dots & f_{n-1}^{(n-1)}(t) & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

არის (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი, რომელიც არანულოვანია. (8) სისტემიდან განისაზღვრება ცალსახად $C_j'(t)$, $j=1, \dots, n$ ფუნქციები კრამერის ფორმულის გამოყენებით, ხოლო მათთვის მიღებული გამოსახულებების ინტეგრებით კი მივიღებთ $\tilde{f}(t)$ ზოგადი ამონახსნის $C_j(t)$ განუსაზღვრელ კოეფიციენტებს:

$$C_j(t) = \int \frac{\Delta_j(t)}{W(t)} dt, \quad (9)$$

სადაც $\Delta_j(t)$, $j=1, \dots, n$ (8) სისტემასთან მიკავშირებული სისტემის დეტერმინანტებია.

(2) არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა სივრცე არ არის წრფივი სივრცე (იგი არ შეიცავს 0-ს), მაგრამ არის აფინური სივრცე და მისი განზომილებაა n . რის გამოც, (2) არაერთგვაროვანი განტოლების f ზოგადი ამონახსნი მიიღება (2)-ს შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების $\tilde{f}$ ზოგადი ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების რომელიმე ერთი კონკრეტული $\tilde{f}$ ამონახსნის შეკრებით: $f = \tilde{f} + \tilde{f}$.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ მულტიკოეფიციენტებიანი არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის (9) ფორმულით შეგვიძლია ვიპოვოთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი. რის გამოც ასეთი სახის განტოლებებისათვის *მულტივთა ვარიაციის მეთოდი* არის უნივერსალური, თუმცა გარკვეული სახის განტოლებებისათვის არსებობს ამონახსნის პოვნის უფრო ეფექტური მეთოდები. განტოლებათა ერთ-ერთ

ასეთ კლასს, ამონახსნის აგების განსხვავებული გზით, განვიხილავთ შემდეგ პარაგრაფში.

n -ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი (1) განტოლებისათვის კოშის ამოცანა არის პირობა ზოგად f ამონახსნზე, რომელიც ცალსახად გამოყოფს ამონახსნთა n -განზომილებიანი სივრციდან ერთადერთ ამონახსნს რაიმე წინასწარ დასახელებულ t_0 წერტილში საძიებელი ფუნქციის $f(t_0) = f_0$ და მისი წარმოებულების $f^{(j)}(t_0) = f_j, j = 1, \dots, n-1$ მნიშვნელობის საშუალებით. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

დებულება 1.

$$\begin{cases} a_0(t)f^{(n)}(t) + a_1(t)f^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)f'(t) + a_n(t)f(t) = 0 \\ f(t_0) = f_0, f'(t_0) = f_1, f''(t_0) = f_2, \dots, f^{(n-1)}(t_0) = f_{n-1} \end{cases}$$

კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

დებულება ტრივიალურია ზემოთ მოყვანილი თეორემების შემდეგ, რადგან ზოგადი ამონახსნი შეიცავს n მუდმივს, რომელთა განსაზღვრაც შესაძლებელია n საწყისი პირობით. ამრიგად, მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას n უცნობით. ამასთან, განტოლებათა სისტემის მთავარი დეტერმინანტი 0-საგან განსხვავებულია. რის გამოც სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

მაგალითი. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა

$$y''(x) + 7y'(x) + 10y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

დავწეროთ მახასიათებელი განტოლება და ვიპოვოთ მისი ფესვები

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5 \Rightarrow$$

განტოლების კერძო ამონახსნები იქნება $y_1(x) = e^{-2x}$ და $y_2(x) = e^{-5x}$, ხოლო ზოგად ამონახსნს კი ექნება სახე $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \Rightarrow y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-5x}$. პირველი საწყისი პირობიდან გამოვძინარეობს, რომ $y(0) = 2 \Rightarrow$ (ზოგად ამონახსნში ვსვამთ $x = 0$ და $y(x)$ ფუნქციის მიღებულ მნიშვნელობას ვუტოლებთ 2-ს) $c_1 + c_2 = 2$.

მეორე საწყისი პირობის თანახმად $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-5x}$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა $x = 0$ წერტილში 1-ის ტოლია, ამიტომ ვპოულობთ $y(x)$ ფუნქციის წარმოებულს: $y'(x) = -2c_1 e^{-2x} - 5c_2 e^{-5x}$, შემდეგ ვსვამთ მიღებულ გამოსახულებაში $x = 0$ და ვუტოლებთ 1: $-2c_1 - 5c_2 = 1$.

c_1, c_2 რიცხვების საპოვნელად მივიღეთ წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2, -2c_1 - 5c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 2 - c_2, -4 + 2c_2 - 5c_2 = 1 \\ \Rightarrow c_2 &= -5/3, c_1 = 11/3. \end{aligned}$$

c_1, c_2 -ის მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ განტოლების ზოგად ამონახსნში და მივიღებთ ამონახსნს

$$y(x) = \frac{11}{3}e^{-2x} - \frac{5}{3}e^{-5x},$$

რომელიც დააკმაყოფილებს $y(0) = 2, y'(0) = 1$ საწყის პირობებს.

3.3 მუდმივ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება კვაზიმრავალწევრით არაერთგვაროვანი წევრით

$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, სადაც $P_m(x)$ m -ხარისხის მრავალწევრია, სახის გამოსახულებას ეწოდება კვაზიმრავალწევრი.

დებულება. ღაგუშვათ

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x) \quad (1)$$

განტოლებაში $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$ კვაზიმრავალწევრია. მაშინ (1)

განტოლების კერძო ამონახსნს აქვს სახე

$$\tilde{y}(x) = x^s Q_m(x)e^{\alpha x}, \quad (2)$$

სადაც ა) $s = 0$, თუ α არ ემთხვევა (1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მახასიათებელ ფესვთან არცერთს; ბ) $s = l$, თუ l არის იმ მახასიათებელი ფესვის ჯერადობა, რომელიც α -ს ტოლია. $Q_m(x)$ -ჟი m -ხარისხის მრავალწევრია.

$Q_m(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტების საპოვნელად საჭიროა (2) გამოსახულება ჩავსვათ (1) და შესაბამისი კოეფიციენტები ერთმანეთს გავუტოლოთ.

თუ $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x)$, მაშინ (1)-ის კერძო ამონახსნები იქნება

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f_i(x), \quad i = 1, \dots, p$$

განტოლებების $\tilde{y}_i(x)$ კერძო ამონახსნების ჯამი, ხოლო თითოეული $\tilde{y}_i(x)$ ამონახსნის პოვნა შესაძლებელია ზემოთ მოყვანილი ალგორითმის შესაბამისად.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y''(x) - y = 2e^x - x^2$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მახასიათებელი ფესვებია -1 და 1. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

რადგან განტოლების მარჯვენა მხარე არის ორი $f_1(x), f_2(x)$ ფუნქციების ჯამი, სადაც $f_1(x) = 2e^x$, $f_2(x) = -x^2$, ამიტომ ჩვენი განტოლება გაიხლიჩება ორ განტოლებად:

$$y''(x) - y = 2e^x; \quad (1)$$

$$y''(x) - y = -x^2. \quad (2)$$

თითოეული მათგანის მარჯვენა მხარე არის კვაზიმრავალწევრი. ამიტომ არაერთგვაროვანი განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნი შესაძლებელია

ვიპოვოთ ზემოთ მოყვანილი წესით. დავიწყოთ პირველი განტოლებით. მის ამონახსნს ვეძებთ $x^s Q_m(x)e^{\alpha x}$ სახით, სადაც $m = 0$, $\alpha = 1$. ეს უკანასკნელი ემთხვევა ერთ-ერთ მარტივ მახასიათებელ ფესვს, ამიტომ $s = 1$. ჩავსვათ რა შესაბამის მნიშვნელობებს $x^s Q_m(x)e^{\alpha x}$ გამოსახულებაში, მივიღებთ, რომ საძიებელ ფუნქციას აქვს სახე: xa_0e^x , რომელშიც a_0 უცნობი რიცხვი განისაზღვრება a_0xe^x -ის ჩასმით (1) განტოლებაში. ივილებთ $a_0e^x + a_0e^x + a_0xe^x - a_0xe^x = 2e^x$, საიდანაც $a_0 = 1$. ამრიგად, $\tilde{y}_1(x) = xe^x$.

ახლა დავიწყოთ (2) განტოლების ანალიზი. ამ შემთხვევაში $m = 2$, $\alpha = 0$. რადგან 0 არ არის მახასიათებელი ფესვი, ამიტომ $s = 0$ და ამრიგად, განტოლების ამონახსნს ვეძებთ $b_0 + b_1x + b_2x^2$ სახის მრავალწევრებს შორის. ჩავსვათ ეს ფუნქცია (2)-ში და მივიღებთ: $2b_2 - b_0 - b_1x - b_2x^2 = -x^2$, საიდანაც $b_2 = -1$, $b_1 = 0$, $b_0 = 2$, ამრიგად (2) განტოლების კერძო ამონახსნია $x^2 + 2$. ე.ი. $\tilde{y}_2(x) = x^2 + 2$.

ამრიგად, საძიებელი განტოლების კერძო ამონახსნია $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) = xe^x + x^2 + 2$, ხოლო ზოგადი ამონახსნი კი როგორც ცნობილია ტოლია ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნის ჯამის. საიდანაც გამოდის, რომ მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y(x) = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$y''(x) - 10y'(x) + 25y(x) = -3e^{5x}.$$

$P_m(x)e^{\alpha x}$ კვაზიმრავალწევრს ჩვენი განტოლებისათვის აქვს სახე $-3e^{5x}$. $m = 0$, $\alpha = 5$. ხოლო $P_m(x) = -3$. დავწეროთ განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება და ვიპოვოთ მახასიათებელი ფესვები:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow (\lambda - 5)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 5.$$

ამრიგად, 5 არის ორჯერადი მახასიათებელი ფესვი, რომელიც ემთხვევა $-3e^{5x}$ კვაზიმრავალწევრის $\alpha = 5$ მაჩვენებელს. ამიტომ არაერთგვაროვანი განტოლების სავარაუდო კერძო ამონახსნს $x^s Q_m(x)e^{\alpha x}$ - ის შესაბამისად ექნება სახე: $x^2a_0e^{5x}$, სადაც $a_0 = Q_0(x)$ არის $m = 0$ ხარისხის საძიებელი მრავალწევრი (ანუ მუდმივი, რომელიც აღვნიშნეთ a_0 -ით). რადგან $\tilde{y}(x) = x^2a_0e^{5x}$ ჩვენი განტოლების სავარაუდო კერძო ამონახსნია, ამიტომ მისი ჩასმით განტოლება უნდა გადაიქცეს იგივეობად:

$$\tilde{y}'(x) = 2xa_0e^{5x} + 5x^2a_0e^{5x},$$

$$\tilde{y}''(x) = 2a_0e^{5x} + 10xa_0e^{5x} + 10xa_0e^{5x} + 25x^2a_0e^{5x};$$

განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$2a_0e^{5x} + 10xa_0e^{5x} + 10xa_0e^{5x} + 25x^2a_0e^{5x} - 10(2xa_0e^{5x} + 5x^2a_0e^{5x}) + 25x^2a_0e^{5x} = -3e^{5x} \Rightarrow$$

გამოსახულების მარცხენა მხარეში მსგავსი წევრების შეერთების შემდეგ მივიღებთ ტოლობას: $2a_0e^{5x} = -3e^{5x} \Rightarrow a_0 = -3/2$. საიდანაც გამოდინარეობს, რომ არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნია $\tilde{y}(x) = -3/2x^2e^{5x}$.

რადგან მახასიათებელი ფესვები უკვე ნიბოვეთ, ამიტომ ვწერთ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს: $\hat{y}(x) = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x}$ (რადგან მახასიათებელ განტოლებას ჯერადი ფესვები აქვს, ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნები იქნება e^{5x} და xe^{5x}). საბოლოოდ, ჩვენი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება $y(x) = \hat{y}(x) + \tilde{y}(x) \Rightarrow y(x) = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x} - \frac{3}{2}x^2e^{5x}$.

3.4 ზოგიერთი დიფერენციალური განტოლების შესახებ, რომელიც ცვლადის გარდაქმნით მიიყვანება წრფივ ერთგვაროვან მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებამდე

უნივერსალური მეთოდი, თუ ცვლადის რა გარდაქმნა გამოდგენა ამა თუ იმ განტოლების ამოსახსნელად არ არსებობს. მოსახერხებელი ცვლადის გარდაქმნის არჩევა გარკვეული ტიპის ხელოვნებაა! მაგრამ დიფერენციალური განტოლებების თეორიაში არსებობს სტანდარტული სიტუაციები, სადაც ცნობილია ამა თუ იმ ცვლადის გარდაქმნას სადამდე მიყვავართ. ჩვენ ცვლადის გარდაქმნის მეთოდს, როგორც დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის საშუალებას, იმასთვის კი არ მოვიყვანთ, რომ ზეპირადაა დასამახსოვრებელი, არამედ იმისათვის, რომ განტოლებისადმი მიდგომის მრავალფეროვნება გაჩვენოთ.

განვიხილოთ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0, \quad (1)$$

სადაც $p(t), q(t)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია R^1 -ის რომელიმე I ინტერვალზე.

დებულება 1 (აუცილებელი პირობა) თუ (1) განტოლება დაიყვანება მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაზე $\tau = \varphi(t)$ ცვლადის გარდაქმნით, მაშინ

$$\tau = c \int \sqrt{q(t)} dt,$$

სადაც c რაიმე მუდმივია, ხოლო ინტეგრალი აქ გაივება როგორც რომელიმე პირველყოფილი.

დამტკიცება. $\varphi(t)$ ჩავთვალოთ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებად და დავუშვათ, რომ $\varphi'(t) \neq 0$ ნებისმიერი t -სათვის I -დან. მაშინ

$$y'(t) = \frac{dy}{d\tau} \cdot \varphi'(t), \quad y''(t) = \frac{d^2y}{d\tau^2} \cdot \varphi'^2(t) + \frac{dy}{d\tau} \cdot \varphi''(t).$$

ჩავსვათ y' და y'' ზემოთ მიღებული მნიშვნელობები (1)-ში და მივიღებთ:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\varphi''(t) + p(t)\varphi'(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{dy}{d\tau} + \frac{q(t)}{\varphi'^2(t)} y = 0.$$

გვინდა, რომ ამ განტოლების კოეფიციენტები მუდმივები იყოს. ამისათვის კი აუცილებელია, რომ $C^2 q(t) = \varphi'^2(t)$. აქედან, $\tau = \varphi(t) = C \int \sqrt{q(t)} dt$.

მაგალითები 1. $t^2 y''(t) + a_1 t y'(t) + a_2 y(t) = 0$, $t > 0$ სახის განტოლებას, სადაც a_1, a_2 მოცემული რიცხვებია, ეწოდება *მეორე რიგის ეილერის განტოლება*. ცვლადის $\tau = \ln t$ გარდაქმნით ეს განტოლება მიიყვანება

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + (a_1 - 1) \cdot \frac{dy}{d\tau} + a_2 y = 0$$

მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებაზე.

ანალოგიურად, თუ n -ური რიგის ეილერის განტოლებაში

$$\tau^n y^{(n)}(\tau) + a_1 \tau^{n-1} y^{(n-1)}(\tau) + \dots + a_{n-1} \tau y'(\tau) + a_n y(\tau) = 0$$

მოვახდენთ $\tau = \ln t$ ცვლადის გარდაქმნას, მივიღებთ მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებას

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0.$$

მაგალითები 2. $(1-t^2)y''(t) - ty'(t) + n^2 y(t) = 0$, სადაც $|t| < 1$, n -ნამდვილი პარამეტრია, ეწოდება *ჩებიშევის განტოლება*. ცვლადის $t = \cos(\tau)$ გარდაქმნით ჩებიშევის განტოლება მიიყვანება

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + n^2 y = 0$$

განტოლებამდე, რომლის ამონახსნია $y(t) = A \cos(n \cdot \arccos(t) + \varphi)$, სადაც A და φ ნებისმიერი მუდმივებია. თუ n მთელია, მაშინ $T_n(t) = \cos(n \cdot \arccos(t))$ არის n ხარისხის მრავალწევრი, რომელსაც *ჩებიშევის მრავალწევრი* ეწოდება.

აქვე გავაკეთოთ შენიშვნა: დებულებაში მოყვანილი $\tau = \varphi(t)$ ცვლადის გარდაქმნის როლს მაგალით 1-ში თამაშობს $\tau = \ln t$ ფუნქცია, ამ

მაგალითში $q(t) = \frac{a_2}{t^2}$ და მართლაც $\tau = \ln(t) = C \int \frac{\sqrt{a_2}}{t} dt$. ხოლო მაგალით 2-ში კი გვაქვს გარდაქმნა $t = \cos(\tau)$, საიდანაც გამოდის, რომ $\tau = \arccos(t)$. გარდა ამისა, $q(t) = \frac{n^2}{1-t^2}$ და ამრიგად, $\tau = \arccos(t) = C \int \frac{n}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

მაგალითები 3. (1) განტოლება მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებამდე ზოგჯერ უცნობი ფუნქციის გარდაქმნის საშუალებით მიიყვანება. მაგალითად,

$$t^2 y'' + ty' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

ბესელის განტოლება $y = \frac{z}{\sqrt{t}}$ გარდაქმნით შესაძლებელია მიყვანილი იქნას განტოლებამდე

$$z'' + z = 0. \quad (3)$$

ვაჩვენოთ (2) და (3) განტოლებების ექვივალენტურობა. რადგან $z(t) = y(t)\sqrt{t}$, ამიტომ

$$z'(t) = y'(t)\sqrt{t} + \frac{y(t)}{2\sqrt{t}}, \quad z''(t) = y''(t)\sqrt{t} + \frac{y'(t)}{2\sqrt{t}} + \frac{y'(t)}{2\sqrt{t}} - \frac{y(t)}{4t\sqrt{t}}.$$

თუ სრულდება (3), მაშინ სამართლიანია ტოლობა:

$$(y''(t)\sqrt{t} + \frac{y'(t)}{2\sqrt{t}} + \frac{y'(t)}{2\sqrt{t}} - \frac{y(t)}{4t\sqrt{t}}) + y(t)\sqrt{t} = 0,$$

რომლის გამარტივების შემდეგ მივიღებთ (2) განტოლებას. ამრიგად, ბესელის განტოლების ამონახსნი მოიცემა სახით:

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{t}} \sin(t + \varphi),$$

სადაც A და φ ნებისმიერი მუდმივებია. კერძოდ, $y(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ ბესელის განტოლების ერთ-ერთი კერძო ამონახსნია.

მაგალითები 4. (1) განტოლება მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებამდე შესაძლებელია მიყვანილი იქნას აგრეთვე ერთდროულად ცვლადის და უცნობი ფუნქციების გარდაქმნით. მაგალითად, სტოქსის

$$y'' = \frac{Ay}{(t-a)^2(t-b)^2}, \quad t \in (a, b)$$

განტოლება გარდაქმნით:

$$\frac{t-a}{b-t} = e^\tau, \quad \frac{y}{t-b} = u, \quad u = u(\tau)$$

მიიყვანება მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებამდე.

მართლაც, თანმიმდევრულად ვპოულობთ:

$$t = \frac{a + be^\tau}{1 + e^\tau}, \quad y = \frac{(a-b)u}{1 + e^\tau}, \quad y' = \frac{dy}{d\tau} : \frac{dt}{d\tau} = u - u'(1 + e^{-\tau}),$$

$$y'' = \frac{u'' - u'(1 + e^{-\tau})(1 + e^\tau)^2}{a-b} \cdot \frac{1}{e^\tau}.$$

თუ t, y, y'' -ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ სტოქსის განტოლებაში მივიღებთ:

$$u'' - u' = \frac{Au}{(b-a)^2}.$$

3.5 ბერნულის განტოლება

როგორც უკვე ვიცით,

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \quad (1)$$

განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau} b(s) ds. \quad (2)$$

განვიხილოთ (1)-ის “მცირე” განზოგადება

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t)x^\alpha(t), \quad (3)$$

ეს დიფერენციალური განტოლება ბერნულის განტოლების სახელწოდებითაა ცნობილი. თუ $\alpha = 0$, მაშინ (3) განტოლება წრფივი არაერთგვაროვანია, ხოლო თუ $\alpha = 1$, მაშინ წრფივი ერთგვაროვანი, ამიტომ მისი ამონახსნი (2) ფორმულით მოიცემა. განვიხილოთ არატრივიალური შემთხვევა $\alpha \neq 0$ და $\alpha \neq 1$. გავყოთ (3) x^α -ზე და მოვახდინოთ გარდაქმნა

$$y(t) = x(t)^{1-\alpha},$$

მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{1}{1-\alpha} y'(t) + a(t)y(t) = b(t),$$

რომელიც (2) ფორმულის საშუალებით იხსნება. როდესაც $\alpha > 0$, x^α -ზე (3) განტოლების ორივე მხარის გაყოფით იკარგება (3)-ის ტრივიალური ამონახსნი $x \equiv 0$, რომელსაც ამონახსნთა სიმრავლეს დაუმატებთ. ამის გაკეთება მოგვიწევს იმის გამო, რომ ზოგადი ფორმულით იგი არ მიიღება.

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება $(x+1)(y' + y^2) = -y$.

დავუშვათ, რომ $x \neq -1$. გავყოთ განტოლების ორივე მხარე $x + 1$ -ზე და გადავწეროთ განტოლება შემდეგი სახით: $y' + \frac{y}{x+1} = -y^2$, რომელიც ბერნულის განტოლებაა. მის ამოსახსნელად ორივე მხარე გავყოთ y^2 -ზე და შემოვიტანოთ აღნიშვნა $y^{-1} = z(x)$. მივიღებთ

$$z'(x) = -y^{-2}y' \Rightarrow z'(x) - \frac{z(x)}{x+1} = 1.$$

მივიღეთ წრფივი განტოლება, რომლის ამონახსნია $z(x) = (\ln|x+1| + c)(x+1)$, დავუბრუნდებით აღნიშვნებს და მივიღებთ:

$$y(x) = \frac{1}{(\ln|x+1|+c)(x+1)}.$$

3.6 რიკატის განტოლება

პირველი რიგის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება, რომლის ინტეგრება კვადრატურებში საზოგადოდ შეუძლებელია, არის რიკატის

$$x'(t) + a(t)x(t) + b(t)x^2(t) = c(t) \quad (1)$$

განტოლება. სადაც $a(t), b(t), c(t)$ მოცემული ფუნქციებია.

(1)-ის პარალელურად განვიხილოთ რიკატის სპეციალური განტოლება:

$$x'(t) + ax^2(t) = bt^\alpha, \quad (2)$$

სადაც a და b მუდმივებია.

როდესაც $\alpha = 0$, მიიღება განცალკევად ცვლადებიანი განტოლება. მართლაც, (2) გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{dx}{dt} + ax^2 = b \Rightarrow dx = (b - ax^2)dt \Rightarrow \frac{dx}{b - ax^2} = dt,$$

რომლის ინტეგრებას სიძნელეს არ წარმოადგენს.

როდესაც $\alpha = -2$, გვექნება დიფერენციალური განტოლება, რომელიც გადაიქცევა არაერთგვაროვან განტოლებად უცნობის $y(t) = \frac{1}{x(t)}$

გარდაქმნით. მართლაც, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას $-\frac{y'(t)}{y^2(t)} + \frac{a(t)}{y^2(t)} = bt^2$.

დანიელ ბერნულმა მოახდინა სპეციალური რიკატის განტოლების დეტალური ანალიზი და აჩვენა, რომ $x(t) = \frac{1}{x_1(t)t^2} + \frac{1}{at}$, $t = t_1^{\frac{1}{\alpha+3}}$ ცვლადების გარდაქმნით (2) განტოლება მიიყვანება განტოლებაზე

$$\frac{dx_1(t_1)}{dt_1} + \frac{b}{\alpha+3} x_1^2(t_1) = \frac{a}{\alpha+3} t_1^{\frac{-\alpha+4}{\alpha+3}}. \quad (3)$$

გარდა ამისა, ბერნულმა დაამტკიცა, რომ (2) განტოლება კვადრატურებში ინტეგრებადია, თუ $\alpha = -\frac{4k}{2k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$. ამრიგად, (3) კვლავ არის

რიკატის სპეციალური განტოლება მაჩვენებლით $\alpha' = -\frac{\alpha+4}{\alpha+3}$. ეს ნიშნავს,

რომ თუ ცნობილია რიკატის სპეციალური განტოლების ამონახსნი მაჩვენებლით α , მაშინ შესაძლებელია ამონახსნის ანალიზური ჩაწერა

რიკატის სპეციალური განტოლებისთვის მაჩვენებლით $-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}$ და პირიქით.

ჩვენ ვიცით ამონახსნის პოვნის ფორმულები როდესაც $\alpha = 0, -2$. $\alpha = -2$ მაჩვენებლიდან ზემოთ მოყვანილი გარდაქმნის საშუალებით მივიღებთ განტოლებას მაჩვენებლით $\alpha' = -2$. ასე, რომ ახალს ვერაფერს გავიგებთ.

ხოლო, როცა $\alpha = 0$, მაშინ $\alpha' = -\frac{4}{3}$. თუ იგივე პროცედურებს

ჩავატარებთ α' -თვის, საზოგადოდ, მივიღებთ ყველა ამონახსნს

$\alpha = -\frac{4k}{2k+1}$ მაჩვენებლისთვის.

თეორემა. (ლიუვილი) (2) არაწრფივი განტოლება კვადრატურებში ინტეგრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\alpha = -\frac{4k}{2k+1}$.

დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას. რადგან სპეციალური რიკატის განტოლება კვადრატურებში ინტეგრებადია მხოლოდ მაჩვენებლის ზემოთ მოყვანილი მნიშვნელობისთვის, უნდა ველოდოთ, რომ (1) განტოლების ინტეგრება კვადრატურებში თითქმის ყოველთვის შეუძლებელია. მაგრამ მდგომარეობა არც ისე უიმედოა! უცნობის გარდაქმნით (სპეციალური გარდაქმნით) რიკატის განტოლება კვლავ რიკატის განტოლებაში გადადის. ეს ფაქტი გვეხმარება ჩვენთვის საინტერესო რიკატის განტოლების ამონახსნის პოვნაში. ეს სპეციალური გარდაქმნაა, მაგალითად:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \phi(t), \quad (4)$$

სადაც $\phi(t)$ რაიმე ფიქსირებული ფუნქციაა. მართლაც, (4)-ის ჩასმა (1)-ში გვაძლევს:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t) + (a(t) + 2b(t)\phi(t))\tilde{x}(t) + b(t)\tilde{x}^2(t) &= \\ &= c(t) - \phi'(t) - a(t)\phi(t) - b(t)\phi^2(t) \end{aligned}, \quad (5)$$

რომელიც (1) გამოსავალი განტოლებისაგან განსხვავებულია, შეიცვალა კოეფიციენტები $a(t)$ და $c(t)$. ისმის კითხვა, შესაძლებელია თუ არა შევარჩიოთ $\varphi(t)$ ისე, რომ გარდაქმნის შემდეგ გაქრეს განტოლების მარჯვენა მხარე. ასეთ პირობებში აღნიშნული განტოლება ბერნულის განტოლებად გადაიქცევა (რომლის ინტეგრებაც შესაძლებელია). ასეთი რამ მართლაც შესაძლებელია. ამისთვის საჭიროა განტოლების მარჯვენა მხარემ დააკმაყოფილოს პირობა:

$$c(t) - \varphi'(t) - a(t)\varphi(t) - b(t)\varphi^2(t) = 0,$$

ამრიგად, $\varphi(t)$ უნდა იყოს იმავე (1) რიკატის განტოლების ამონახსნი.

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი დასკვნა: თუ ცნობილია რიკატის განტოლების ერთი მაინც ამონახსნი, მაშინ (4) გარდაქმნით შესაძლებელია (1) განტოლების მიყვანა ბერნულის განტოლებამდე, რომელიც უკვე ინტეგრებადია კვადრატურებში.

თეორემა 1. ნებისმიერი ერთგვაროვანი წრფივი მეორე რიგის დიფერენციალური

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = 0, \quad (6)$$

განტოლება ექვივალენტურია რიკატის განტოლების.

◀განვიხილოთ გარდაქმნა:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = y(t),$$

მაშინ

$$x'(t) = y(t)x(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x''(t) = y'(t)x(t) + y(t)x'(t) = y'(t)x(t) + y^2(t)x(t),$$

ამ უკანასკნელის (6) – ში ჩასმით გვექნება:

$$(y'(t) + y^2(t))x(t) + a_1(t)y(t)x(t) + a_2(t)x(t) = 0,$$

რომლის $x(t)$ -ზე გაყოფის შემდეგ მივიღებთ რიკატის განტოლებას $y(t)$ -ს მიმართ:

$$y'(t) + a_1(t)y(t) + y^2(t) + a_2(t) = 0. \blacktriangleright$$

თეორემა 2. განვიხილოთ მეორე რიგის ერთგვაროვანი განტოლება:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0, \quad (7)$$

სადაც $a(x), b(x)$ მოცემული ნამდვილი ფუნქციებია რაიმე $I \subset \mathbb{R}^1$ ინტერვალზე, ამასთან $a(x)$ არის უწყვეტად დიფერენცირებადი, $b(x)$ კი უწყვეტი I -ზე. $y(x)$ ფუნქციის გარდაქმნით (7) ყოველთვის შესაძლებელია

$$z''(x) + q(x)z(x) = 0, \quad (8)$$

სახის განტოლებაზე შეიძლება მივიყვანოთ.

◀ღავეუშვათ $y(x) = u(x)z(x)$ და ავარჩიოთ $u(x)$ ისე, რომ $z'(x)$ - ის წინ მდგომი კოეფიციენტი განუღდეს $z(x)$ - ის მიმართ დიფერენციალურ განტოლებაში გვაქვს:

$$y'(x) = u'(x)z(x) + u(x)z'(x),$$

$$y''(x) = u''(x)z(x) + 2u'(x)z'(x) + u(x)z''(x),$$

შევიტანოთ (7) - ში მივიღებთ:

$$u(x)z''(x) + (2u'(x) + a(x)u(x))z'(x) + (u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x))z(x) = 0 \quad (9)$$

ამრიგად, ჩვენი მიზნის მისაღწევად საჭიროა ავიღოთ $u(x)$, რომელიც

$$2u'(x) + a(x)u(x) = 0, \quad (10)$$

განტოლების ამონახსნია. (10)-ის ამონახსნს აქვს სახე:

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x a(\xi) d\xi}, \quad x_0 \in I,$$

თუ ეს ასეა, მაშინ:

$$u'(x) = -\frac{1}{2}a(x)u(x),$$

$$u''(x) = -\frac{1}{2}(a'(x)u(x) + a(x)u'(x)) = -\frac{1}{2}(a'(x) - \frac{1}{2}a^2(x))u(x),$$

ჩავსვათ $u(x), u'(x), u''(x)$ ეს მნიშვნელობები (9)-ში, იმის გათვალისწინებით, რომ $z'(x)$ -ის კოეფიციენტი 0-ია და მივიღებთ (8) განტოლებას, სადაც

$$q(x) = b(x) - \frac{1}{4}a^2(x) - \frac{1}{2}a'(x),$$

ამასთან $q(x)$ უწყვეტი იქნება I -ზე.

შენიშვნა: თუ $q(x) \equiv \text{const}$, ან $q(x) = C(x - \alpha)^{-2}$, $x > \alpha$, მაშინ (8) განტოლება და აქედან გამომდინარე (7), ინტეგრებადი იქნება კვადრატურებში.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. ამოხსენით შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლებები
 - 1) $y'' - 4y' + 5y = 0$ (პასუხი $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$)
 - 2) $y'' + 2y' + 10y = 0$ (პასუხი $y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$)
 - 3) $y'' + 4y = 0$ (პასუხი $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$)
 - 4) $y''' - 8y = 0$ (პასუხი $y = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 \cos \sqrt{3}x + c_3 \sin \sqrt{3}x)$)

- 5) $y^{(4)} - y = 0$ (პასუხი $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$)
- 6) $y''' + 3y'' + 3y' - 7y = 0$ (პასუხი $y = c_1 e^x + e^{2x}(c_2 \cos \sqrt{3}x + c_3 \sin \sqrt{3}x)$)
2. იპოვეთ შემდეგი არაერთგვაროვანი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები
- 1) $y'' + 8y' + 16y = 2e^{-4x}$ (პასუხი $y(x) = c_1 x e^{-4x} + c_2 e^{-4x} + x^2 e^{-4x}$)
- 2) $y'' - 8y' + 16y = 2e^{4x}$ (პასუხი $y(x) = c_1 x e^{4x} + c_2 e^{4x} + x^2 e^{4x}$)
- 3) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$ (პასუხი $y(x) = c_1 x e^{3x} + c_2 e^{3x} + 2x^2 e^{3x}$)
- 4) $y'' + 10y' + 25y = 3e^{-5x}$ (პასუხი $y(x) = c_1 x e^{-5x} + c_2 e^{-5x} + \frac{3}{2} x^2 e^{-5x}$)
3. ამოხსენით კოშის ამოცანა
- 1) $y'' - 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$ (პასუხი $y(x) = -e^{3x} + 3e^{2x}$)
- 2) $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$ (პასუხი $y(x) = -7e^{-3x} + 9e^{-2x}$)
- 3) $y'' + 6y' + 5y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$ (პასუხი $y(x) = -\frac{5}{4}e^{-5x} + \frac{13}{4}e^{-x}$)
- 4) $y'' - 6y' + 5y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$ (პასუხი $y(x) = \frac{7}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x}$)
- 5) $y'' - 7y' + 12y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$ (პასუხი $y(x) = 2e^{3x} - e^{4x}$)
4. ამოხსენით ბერნულის განტოლება
- 1) $y' - 3y = y^2 e^x$ (პასუხი $y(x) = \frac{4}{-e^x + 4ce^{-3x}}$)
- 2) $y' = -y + 3y^2 e^{-2x}$ (პასუხი $y(x) = \frac{1}{e^{-2x} + ce^x}$)
- 3) $y' - 2y = -y^2 e^{2x}$ (პასუხი $y(x) = \frac{4}{e^{2x} + 4ce^{-2x}}$)
- 4) $y' + 2y = 2y^2 e^{2x}$ (პასუხი $y(x) = -\frac{e^{2x}}{2x - c}$)
5. ამოხსენით რიკატის განტოლება, თუ ცნობილია მისი ერთი კერძო ამონახსნი
- 1) $y' e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}, y_1 = e^x$ პასუხი: $e^x + \frac{1}{c+e^x}$
- 2) $y' + y^2 - 2y \sin x + \sin^2 x - \cos x = 0, y_1 = \sin x$ პასუხი: $y = \sin x + \frac{1}{c+x}$
- 3) $xy' - y^2 + (2x+1)y = x^2 + 2x, y_1 = x$ პასუხი: $y = x + \frac{1}{cx+1}$
- 4) $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1, y_1 = -\frac{1}{x}$ პასუხი: $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{(c - \ln x)x}$

4 დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის წარმოდგენა ხარისხოვანი მწკრივის საშუალებით

4.1 განმარტებები და ელემენტარული ფუნქციები

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ სახის გამოსახულებას, სადაც a_j მუდმივებია, ხოლო x კი ცვლადია, ეწოდება *ხარისხოვანი მწკრივი*. როდესაც გარკვეული N -დან დაწყებული ყველა a_j , $j > N$ 0-ის ტოლია, მაშინ ხარისხოვანი მწკრივი გადაიქცევა სასრულ ჯამად და ამრიგად, მივიღებთ N ხარისხის მრავალწევრს, ანუ პოლინომიალურ ფუნქციას. საზოგადოდ, თუ ზემოთ მოყვანილი ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია, მაშინ იგი არის 0-ის შემცველ ინტერვალზე x ცვლადის ფუნქცია (ანალოგიურად, თუ $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია, სადაც x_0 ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვია, მაშინ იგი არის x ცვლადის ფუნქცია x_0 -ის შემცველ ინტერვალზე). ამ თვალსაზრისით, ხარისხოვანი მწკრივი არის "უსასრულო ხარისხის" მრავალწევრი, თუ მწკრივი კრებადია. ხარისხოვანი მწკრივის მაგალითია $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ მწკრივი, რომელიც კრებადია, როდესაც $|x| < 1$, იგი არის უსასრულო გეომეტრიული პროგრესია და მისი ჯამი $\frac{1}{1-x}$ -ის ტოლია, ე.ი. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$, როდესაც $|x| < 1$.

მოვიყვანოთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის ნიშანი.

თეორემა. განვიხილოთ $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ ხარისხოვანი მწკრივის ორი მეზობელი წევრების განაყოფების მოდულების მიმდევრობა და ვთქვათ არსებობს ზღვარი $\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = l$. დავუშვათ $R = 1/l$, გარდა ამისა ჩავთვალოთ, $R = 0$, თუ $l = \infty$ და $R = \infty$ თუ $l = 0$. მაშინ

ა) თუ $|x| < R$, მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია;

ბ) თუ $|x| > R$, მწკრივი განშლადია;

გ) თუ $x = \pm R$, მაშინ მწკრივი შეიძლება იყოს როგორც კრებადი, ასევე განშლადი.

თეორემაში მითითებულ R -ს ეწოდება ხარისხოვანი მწკრივის *კრებადობის რადიუსი* და როგორც თეორემიდან ჩანს, ის შეიძლება იყოს როგორც უსასრულობის, ასევე 0-ის ტოლი.

ელემენტარული ფუნქციები (პოლინომიალური, მაჩვენებლიანი, ხარისხოვანი, ტრიგონომეტრიული და მათი შექცეული ფუნქციები) როგორც ვიცით წარმოედინებიან ტეილორის მწკრივად (რომელიც ხარისხოვანი მწკრივია). ეს ფუნქციები არიან გარკვეული (მრავალი) დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნები. კერძოდ,

1) $n - 1$ ხარისხის პოლინომიალური ფუნქცია არის

$$y^{(n)} = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$.

2) ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ($\cos x$ და $\sin x$ ფუნქციები)

$$y'' + y = 0$$

განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

3) ექსპონენციალური ფუნქცია (e^x)

$$y' - y = 0$$

განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია (მუდმივამდე სიზუსტით). განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y(x) = ce^x$ ფუნქცია.

4) ჰიპერბოლური ფუნქციები დაკავშირებულია

$$y' + y = 0$$

სახის განტოლებასთან. განტოლების ამონახსნია $y(x) = e^{-x}$, იგივე ფუნქცია აკმაყოფილებს აგრეთვე

$$y'' - y = 0$$

განტოლებას, მაგრამ ამ განტოლებას აქვს კიდევ ერთი ამონახსნი e^x . ამრიგად, განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ ფუნქცია. აღვნიშნოთ $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ და $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. ამ ფუნქციებს ეწოდებათ, შესაბამისად, ჰიპერბოლური კოსინუსი და ჰიპერბოლური სინუსი. ეს ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია არიან და ორივე აკმაყოფილებს $y'' - y = 0$ განტოლებას.

არსებობს მრავალი კრებადი ხარისხოვანი მწკრივი, რომელთაც არ აქვთ კონკრეტული სახელი, მაგრამ ყველა ისინი არიან (ისევე როგორც ელემენტარული ფუნქციები) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები. მომდევნო პარაგრაფებში, ჩვენ განვიხილავთ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის პოვნის მეთოდს, მხოლოდ ეს ამონახსნები წარმოდგენილები იქნებიან კრებადი ხარისხოვანი მწკრივის საშუალებით.

4.2 პირველი რიგის წრფივი განტოლების ამონახსნის წკრივად წარმოდგება

როგორც უკვე განვიხილეთ

$$x'(t) = tx(t) \quad (1)$$

წრფივი განტოლების ამონახსნის ორი შესაძლო მეთოდი. პირველი ეს არის განტოლება განცალკევადი ცვლადებით, იგი შესაძლებელია გადაიწეროს

სახით: $\frac{dx}{x} = t dt$, საიდანაც ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ $\int \frac{dx}{x} = \int t dt$ ანუ

$$\ln x = \frac{t^2}{2} + C, \text{ მაშასადამე, ამონახსნი იქნება } x(t) = e^{\frac{t^2}{2} + C} \Rightarrow x(t) = \tilde{C} e^{\frac{t^2}{2}},$$

სადაც $\tilde{C} = e^C$. მეორეს მხრივ, შეგვიძლია ეს განტოლება განვიხილოთ როგორც პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება და ამოვხსნათ კოშის ფორმულის გამოყენებით და შედეგი იგივე იქნება. ახლა განვიხილოთ

ამ განტოლების ამოხსნის კიდევ ერთი ხერხი. კერძოდ, ვეძებთ (1) განტოლების ამონახსნი

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \quad (2)$$

სახის ხარისხოვანი მწკრივის სახით. მაშინ $x'(t)$ იქნება:

$$x'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots \quad (3)$$

ჩავსვათ (2),(3) გამოსახულებები (1)-ში და მივიღებთ:

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + 6a_6 t^5 + \dots = \\ = a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_3 t^4 + a_4 t^5 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

(4) არის ხარისხოვანი მწკრივების ტოლობა, რაც ნიშნავს, რომ t -ს ტოლი ხარისხების მქონე შესაბამისი კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლი უნდა იყოს, ე.ი.

$$\begin{aligned} a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1}{3} = 0, \quad a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \times 4}, \quad a_5 = \frac{a_3}{5} = 0, \\ a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0}{2 \times 4 \times 6}, \dots \end{aligned}$$

სადაც $a_0 = x_0 = x(0)$. ამრიგად, (2) მიიღებს სახეს:

$$x(t) = a_0 \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{t^4}{4} + \frac{1}{2 \times 3} \frac{t^6}{8} + \dots \right),$$

ფრჩხილებში მოთავსებული მწკრივი კრებადია $e^{\frac{t^2}{2}}$ ფუნქციისაკენ (ამაში აღვილად დავრწმუნდებით, თუ $\frac{t^2}{2}$ -ს τ -თი აღვნიშნავთ). ამიტომ მივიღებთ,

რომ (1) განტოლების ამონახსნია $x(t) = a_0 e^{\frac{t^2}{2}}$.

ახლა განვიხილოთ კიდევ ერთი წრფივი პირველი რიგის განტოლება

$$x'(t) = tx(t) + 1 \quad (5)$$

და მისი ამონახსნი ვეძებთ ხარისხოვანი მწკრივის საშუალებით. მხოლოდ აქვე შევნიშნოთ, რომ (5) განტოლება არ არის განტოლება განცალკევადი ცვლადებით, მაგრამ იგი შესაძლებელია ამოიხსნას § 1.2-ის (11) ფორმულის საშუალებით. ვისარგებლოთ კვლავ (2) და (3) გამოსახულებებით და შევიტანოთ ისინი (5)-ში. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + 6a_6 t^5 + \dots = \\ = 1 + a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_3 t^4 + a_4 t^5 + \dots \end{aligned}$$

საიდანაც

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{a_0}{2}, a_3 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{1 \times 3}, a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \times 4}, a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{1}{1 \times 3 \times 5},$$

$$a_5 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0}{2 \times 4 \times 6}, \dots$$

რაც გვაძლევს, რომ (5) განტოლების ამონახსნია შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივი:

$$x(t) = \left(\frac{t}{1} + \frac{t^3}{1 \times 3} + \frac{t^5}{1 \times 3 \times 5} + \frac{t^7}{1 \times 3 \times 5 \times 7} + \dots \right) +$$

$$+ a_0 \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2 \times 4} + \frac{t^6}{2 \times 4 \times 6} + \dots \right),$$

სადაც a_0 განისაზღვრება საწყისი პირობიდან.

4.3 მეორე რიგის წრფივი განტოლების ამონახსნის წარმოდგენა მწკრივის სახით

1. დავწეროთ

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$

განტოლების ამონახსნი ხარისხოვანი მწკრივის საშუალებით.

$$\text{ვთქვათ } y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \text{ მაშინ}$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1},$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2}.$$

ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში და მივიღებთ

$$y'' + xy' + y =$$

$$(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots) + (a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \dots) +$$

$$+ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots.$$

გადავწეროთ უკანასკნელი გამოსახულება აჯამვის ნიშნის გამოყენებით:

$$y'' + xy' + y = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} x^j + \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 0.$$

ხარისხოვანი მწკრივის ნულთან ტოლობის გამო გვაქვს

$$2a_2 + a_0 = 0 \text{ (თავისუფალი წევრი);}$$

$$6a_3 + 2a_1 = 0 \text{ (x-ს კოეფიციენტი);}$$

აქედან a_0 -ის და a_1 -ის საშუალებით a_2 და a_3 კოეფიციენტები გამოსახებიან

შემდეგნაირად: $a_2 = -\frac{1}{2} a_0$, $a_3 = -\frac{1}{3} a_1$. ანალოგიურად. $j \geq 1$ -სათვის x^j -ს

კოეფიციენტის 0-თან გატოლება მოგვცემს $(j+2)(j+1)a_{j+2} + (j+1)a_j = 0$,

$$\text{ანუ } a_{j+2} = -\frac{1}{j+2} a_j.$$

საიდანაც,

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_0, a_4 = -\frac{1}{4} a_2 = -\frac{1}{4 \cdot 2} a_0, a_3 = -\frac{1}{3} a_1, a_5 = -\frac{1}{5} a_3 = -\frac{1}{5 \cdot 3} a_1, a_6 =$$

$$-\frac{1}{6} a_4 = -\frac{1}{6 \cdot 4 \cdot 2} a_0, a_7 = -\frac{1}{7} a_5 = -\frac{1}{7 \cdot 5 \cdot 3} a_1, \dots$$

ამრიგად,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \dots 4 \cdot 2} a_0 =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2 \dots 2 \cdot n(n-1) \dots 2 \cdot 1} a_0 = \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0$$

და

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \dots 5 \cdot 3} a_1 = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!} a_1.$$

აქედან ვღებულობთ განტოლების ფორმალურ ამონახსნს

$$y = a_0 \left(\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{2^j j!} \right) + a_1 \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{2^j j! x^{2j+1}}{(2j+1)!} \right).$$

ფორმალური ვუწოდეთ ამონახსნს იმის გამო, რომ ჯერ არ ვიცით მიღებული მწკრივის კრებადობა. მაგრამ კრებადობის დამტკიცება სირთულეს არ წარმოადგენს და ის გამომდინარეობს იქიდან, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!} a_1 \cdot \frac{2^n n!}{a_0 (-1)^n} \right| = 0$. რაც იმას ნიშნავს, რომ მწკრივის კრებადობის რადიუსი უსასრულოაა (რაც ნიშნავს, რომ განტოლების ამონახსნი, ისევე როგორც მისი კოეფიციენტები, განსაზღვრულია მთელ ნამდვილ ღერძზე) და ამრიგად, განტოლების ამონახსნი წარმოადგინეთ ხარისხოვანი მწკრივის სახით.

2. ვიპოვოთ

$$y'' + x^2 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

კოშის ამოცანის ამონახსნი ხარისხოვანი მწკრივის სახით.

დავუშვათ $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, მაშინ $y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots + (j+1)ja_{j+1}x^{j-1} + \dots$ (იხ. წინა ამოცანა), სასაზღვო პირობებიდან მივიღებთ, რომ $a_0 = 0$ და $a_1 = 1$, აქედან $y = x + a_2 x^2 + \dots$ და $x^2 y = x^3 + a_2 x^4 + a_3 x^5 + \dots + a_{j-1} x^{j-1} + \dots$. რადგან $y'' + x^2 y = 0$, მივიღებთ

$$a_0 = 0 \quad (\text{მუდმივი წევრი});$$

$$a_3 = 0 \quad (x\text{-ის კოეფიციენტი});$$

$$a_4 = 0 \quad (x^2\text{-ის კოეფიციენტი});$$

$$a_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4} \quad (x^3\text{-ის კოეფიციენტი});$$

$$a_6 = 0 = a_7 = a_8 \quad (x^4, x^5 x^6\text{-ის კოეფიციენტები});$$

$$a_9 = -\frac{1}{9 \cdot 8} a_5 = -\frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} a_5 \quad (x^7\text{-ის კოეფიციენტი});$$

და ა.შ.

ამრიგად, საძიებელი მწკრივი პირველი ოთხი წევრით იქნება

$$y = x - \frac{1}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} x^9 - \frac{1}{13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} x^{13} + \dots$$

აჩვენეთ, რომ ეს მწკრივი კრებადია. მითითება: მწკრივის კრებადობისათვის გამოვიყენოთ იგივე მოსაზრება რაც წინა ამოცანაშია, ამასთან გაითვალისწინეთ, რომ რეკურსიული თანადობაა $a_{j+1} = -\frac{1}{j(j+1)} a_{j-3}$, ხოლო ზოგადი წევრი კი

$$(-1)^j \frac{1}{(4j+1)(4j) \dots 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} x^{4j+1}.$$

3. ვიპოვოთ

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \tau y = 0$$

ლეჟანდრის განტოლების ამონახსნი მწკრივის სახით და მწკრივის პირველი რამდენიმე კოეფიციენტი; ვიპოვოთ კოეფიციენტებს შორის რეკურსიული თანადობა.

ისევე როგორც წინ ამოცანებში, ვთქვათ, $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, მაშინ

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}, \\ -2xy' &= -2a_1x - 2 \cdot 2a_2x^2 - 2 \cdot 3a_3x^3 - \dots = -2ia_j x^j - \dots, \\ y'' &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots + j(j-1)a_j x^{j-2} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} j(j-1)a_j x^{j-2}, \\ -x^2y'' &= -2a_2x^2 - 3 \cdot 2a_3x^3 - 4 \cdot 3a_4x^4 - \dots = -j(j-1)a_j x^j - \dots. \end{aligned}$$

ზემოთ მოყვანილი გამოსახულებების ჩასმით მოცემულ $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \tau y = 0$ განტოლებაში მივიღებთ კოეფიციენტებისათვის შემდეგ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} 2a_2 + \tau a_0 &= 0 && (\text{მწკრივის თავისუფალი წევრი}); \\ 3 \cdot 2a_3 - 2a_1 + \tau a_1 &= 0 && (x \text{-ის კოეფიციენტი}); \\ 4 \cdot 3a_4 - 2a_2 - 4a_2 + \tau a_2 &= 0 && (x^2 \text{-ის კოეფიციენტი}); \\ 5 \cdot 4a_5 - 3 \cdot 2a_3 - 2 \cdot 3a_3 - \tau a_3 &= 0 && (x^3 \text{-ის კოეფიციენტი}); \\ &\dots && \end{aligned}$$

მიღებული განტოლებების ამოხსნით მივიღებთ

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{\tau}{2} a_0, & a_3 &= -\frac{2-\tau}{3 \cdot 2} a_1, \\ a_4 &= -\frac{6-\tau}{4 \cdot 3} a_2 = -\frac{6-\tau}{4 \cdot 3 \cdot 2} a_0, \\ a_5 &= -\frac{12-\tau}{5 \cdot 4} a_3 = -\frac{12-\tau}{5 \cdot 4} \frac{2-\tau}{3 \cdot 2} a_1, \end{aligned}$$

და ა.შ.

$$y = a_0 \left(1 - \frac{\tau}{2} x^2 - \frac{(6-\tau)}{4 \cdot 3 \cdot 2} x^4 + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{2-\tau}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{(12-\tau)(2-\tau)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} x^5 + \dots \right).$$

რეკურსიული თანადობის მისაღებად საკმარია x^j -ს კოეფიციენტი 0-ს გავეუტოლოთ:

$$(j+2)(j+1)a_{j+2} - j(j-1)a_j - 2ja_j + \tau a_j = 0,$$

საიდანაც,

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1)-\tau}{(j+2)(j+1)} a_j.$$

უკანასკნელი გამოსახულებიდან ჩანს, რომ მწკრივის კრებადობის რადიუსი დამოკიდებულია τ -ზე. დავუშვათ $\tau = n(n+1)$, სადაც n არაუარყოფითი მთელი რიცხვია. მაშინ თუ n ლუწია, a_1 ავიღოთ 0-ის ტოლად, ხოლო თუ თუ n კენტია, a_0 გავეუტოლოთ 0-ს. მიღებული მწკრივი გადაიქცევა სასრულ ჯამად და ამრიგად, მივიღებთ n ხარისხის მრავალწევრს, რომელიც იქნება $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ განტოლების ამონახსნი. ამ მრავალწევრს ლეჟანდრის მრავალწევრი ეწოდება და $P_n(x)$ სიმბოლოთი აღინიშნება, რომლის თავისუფალი წევრი განისაზღვრება $P_n(1) = 1$ ტოლობიდან.

4. ვიპოვოთ $y'' - 2xy' + \tau y = 0$ ერმიტის განტოლების ამონახსნი ხარისხოვანი მწკრივის სახით.

კვლავ დავუშვათ, რომ

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_jx^j + \dots,$$

მაშინ

$$\begin{aligned} \tau y &= \tau a_0 + \tau a_1x + \tau a_2x^2 + \dots + \tau a_jx^j + \dots, \\ -2xy &= -2a_1x - 4a_2x^2 - 2 \cdot 3a_3x^3 - \dots - 2ja_jx^j - \dots \end{aligned}$$

და

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots + j(j-1)a_jx^{j-2} + \dots.$$

ჩავსვათ მიღებული შედეგები $y'' - 2xy' + \tau y = 0$ განტოლებაში და მიღებული ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტები გავიტოლოთ 0-ს:

$$2a_2 + \tau a_0 = 0 \quad (\text{მწკრივის თავისუფალი წევრი});$$

$$3 \cdot 2a_3 - 2a_1 + \tau a_1 = 0 \quad (x \text{-ის კოეფიციენტი});$$

$$4 \cdot 3a_4 - 4a_2 + \tau a_2 = 0 \quad (x^2 \text{-ის კოეფიციენტი});$$

$$(j+2)(j+1)a_{j+2} - 2ja_j + \tau a_j = 0 \quad (x^j \text{-ის კოეფიციენტი}).$$

საიდანაც,

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{\tau}{2}a_0, \quad a_3 = \frac{2-\tau}{3 \cdot 2}a_1, \\ a_4 &= \frac{4-\tau}{4 \cdot 3}a_2 = -\frac{\tau(4-\tau)}{4 \cdot 3 \cdot 2}a_0. \end{aligned}$$

ზოგადი წევრისათვის გვაქვს გამოსახულება

$$a_{j+2} = \frac{2j-\tau}{(j+2)(j+1)}a_j,$$

საიდანაც შეგვიძლია გამოვთვალოთ მწკრივის ვეა კოეფიციენტი, კერძოდ,

$$a_5 = \frac{6-\tau}{5 \cdot 4}a_3 = \frac{(6-\tau)(2-\tau)}{5!}a_1.$$

ამრიგად, განტოლების ამონახსნი იქნება შემდეგი ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივი

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left(1 - \frac{\tau}{2}x^2 - \frac{(4-\tau)}{4!}x^4 - \frac{(8-\tau)(4-\tau)\tau}{6!}x^6 - \dots \right) + \\ &\quad + a_1 \left(x + \frac{2-\tau}{3!}x^3 + \frac{(6-\tau)(2-\tau)}{5!}x^5 + \frac{(10-\tau)(6-\tau)(2-\tau)}{7!}x^7 + \dots \right). \end{aligned}$$

ეს მწკრივი კრებადია ნებისმიერი x -სათვის. როდესაც τ 4-ის ჯერადი ნატურალური რიცხვია, მწკრივი გადაიქცევა სასრულ ჯამად და მიღებულ მრავალწევრს ეწოდება ერმიტის მრავალწევრი.

5. ვიპოვოთ $y'' = xy$ აირის განტოლების ამონახსნი მწკრივის სახით. ვთქვათ, $y = \sum_{j=0}^{\infty} a_jx^j$, მაშინ $y' = \sum_{j=1}^{\infty} ja_jx^{j-1}$ და $y'' = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)a_jx^{j-2}$. განტოლებაში ამ გამოსახულებების ჩასმით მივიღებთ:

$$y'' - xy = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)a_jx^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} a_jx^{j+1} = 0,$$

საიდანაც,

$$2a_2 = 0 \quad (\text{მწკრივის თავისუფალი წევრი});$$

$$3 \cdot 2a_j - a_0 = 0 \quad (x \text{-ის კოეფიციენტი});$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3a_4 - a_1 &= 0 & (x^2 \text{ -ის კოეფიციენტი}); \\ 5 \cdot 4a_5 - a_2 &= 0 & (x^3 \text{ -ის კოეფიციენტი}); \\ 6 \cdot 5a_6 - a_3 &= 0 & (x^4 \text{ -ის კოეფიციენტი}); \\ 7 \cdot 6a_7 - a_4 &= 0 & (x^5 \text{ -ის კოეფიციენტი}); \end{aligned}$$

$$(j+2)(j+1)a_{j+2} - a_{j-1} = 0 \quad (x^j \text{ -ის კოეფიციენტი});$$

$$\Downarrow$$

$$a_2 = 0, a_3 = a_0/6, a_4 = a_1/12, a_5 = \frac{a_2}{20} = 0, a_6 = a_3/30, a_7 = \frac{a_4}{42} = a_1/504, \dots$$

რეკორსიულ ფორმულას აქვს სახე: $a_{j+3} = \frac{a_1}{(j+3)(j+2)}$. ამრიგად, საძიებელი მწკრივია

$$y = a_0 \left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \dots \right).$$

ფრობენიუსის მეთოდი. მეორე რიგის განტოლების უფროსი კოეფიციენტი 0-ში 0-ის ტოლი ხდება, მაშინ განტოლების ამოსახსნელად გამოიყენება ე.წ. *ფრობენიუსის მეთოდი*, რომელიც მდგომარეობს განტოლების ამონახსნის ძიებაში $y = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = x^r \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ მწკრივის სახით, სადაც r რაიმე უცნობი რიცხვია (არა აუცილებლად მთელი, რადგან ამ დროს საქმე კვლავ ზემოთ განხილულ შემთხვევასთან გვექნება), რომელიც განისაზღვრება თანადობიდან მწკრივის კოეფიციენტებისათვის.

1. ვიპოვოთ $4xy'' - 2y' + y = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი ფრობენიუსის მეთოდით.

ამონახსნი ვეძებთ

$$y = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots$$

მწკრივის სახით. მაშინ

$$-2y' = -2ra_0 x^{r-1} - 2(r+1)a_1 x^r - 2(r+2)a_2 x^{r+1} - \dots$$

და

$$4xy'' = 4r(r-1)a_0 x^{r-1} + 4(r+1)ra_1 x^r + 4(r+2)(r+1)a_2 x^{r+1} + \dots$$

$$4xy'' - 2y' + y = 0 \text{ განტოლებაში მათი ჩასმით მივიღებთ, რომ}$$

$$a_0 [4r(r-1) - 2r] = 0.$$

ამ განტოლებას მოცემული განტოლების *მახასიათებელი განტოლება* ეწოდება.

დავუშვათ $a_0 \neq 0$, მაშინ

$$4r(r-1) - 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \text{ და } r_2 = \frac{3}{2}.$$

პირველად განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $r_1 = 0$. მაშინ

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_j x^j + \dots,$$

$$-2y' = -2a_1 - 2 \cdot 2a_2 x - 3 \cdot 2a_3 x^2 - \dots$$

$$4xy'' = 4 \cdot 2a_2 x + 4 \cdot 6a_3 x^2 + 4 \cdot 12a_4 x^3 + \dots$$

$$4xy'' - 2y' + y = 0 \text{ გათვალისწინებით მივიღებთ:}$$

$$a_0 - 2a_1 = 0$$

(მწკრივის თავისუფალი წევრი);

$$4 \cdot 2a_2 - 2 \cdot 2a_2 + a_1 = 0$$

(x -ის კოეფიციენტი);

$$4 \cdot 6a_3 - 3 \cdot 2a_3 + a_2 = 0 \quad (x^2 \text{ -ის კოეფიციენტი});$$

საიდანაც, $a_1 = \frac{1}{2}a_0, a_2 = -\frac{1}{4}a_1 = -\frac{1}{8}a_0, a_3 = -\frac{1}{18}a_2 = \frac{1}{144}a_0$.

ამრიგად, $y = a_0 \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{144}x^3 - \dots\right)$.

ახლა ვთქვათ, $r_2 = \frac{3}{2}$. მაშინ

$$y = a_0 x^{\frac{3}{2}} + a_1 x^{\frac{5}{2}} + a_2 x^{\frac{7}{2}} + a_3 x^{\frac{9}{2}} + \dots,$$

$$-2y' = -3a_0 x^{\frac{1}{2}} - 5a_1 x^{\frac{3}{2}} - 7a_2 x^{\frac{5}{2}} - 9a_3 x^{\frac{7}{2}} - \dots,$$

$$4xy'' = 3a_0 x^{\frac{1}{2}} + 5 \cdot 3a_1 x^{\frac{3}{2}} + 7 \cdot 5a_2 x^{\frac{5}{2}} + 9 \cdot 7a_3 x^{\frac{7}{2}} + \dots,$$

რადგან $4xy'' - 2y' + y = 0$, ამიტომ

$$3a_0 - 3a_0 = 0 \quad (x^{\frac{1}{2}} \text{ -ის კოეფიციენტი});$$

$$5 \cdot 3a_1 - 5a_1 + a_0 = 0 \quad (x^{\frac{3}{2}} \text{ -ის კოეფიციენტი});$$

$$7 \cdot 5a_2 - 7a_2 + a_1 = 0 \quad (x^{\frac{5}{2}} \text{ -ის კოეფიციენტი});$$

$$9 \cdot 7a_3 - 9a_3 + a_2 = 0 \quad (x^{\frac{7}{2}} \text{ -ის კოეფიციენტი});$$

...

საიდანაც,

$$a_1 = -\frac{1}{10}a_0, a_2 = -\frac{1}{28}a_1 = \frac{1}{280}a_0, a_3 = -\frac{1}{54}a_2 = -\frac{1}{280 \cdot 54}a_0.$$

ამით მივიღეთ განტოლების მეორე კერძო ამონახსნი

$$y = a_0 \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{10}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{280}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{280 \cdot 54}x^{\frac{9}{2}} + \dots\right).$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი მიღებული კერძო ამონახსნების ჯამი:

$$y = c_1 \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{144}x^3 - \dots\right) + c_2 \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{10}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{280}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{280 \cdot 54}x^{\frac{9}{2}} + \dots\right).$$

განტოლების ამოხსნის ზემოთ მოყვანილი ფრობენიუსის მეთოდი საჭიროებს მოდიფიკაციას თუ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები, ან ერთი ფესვი მეორისაგან მთელი რიცხვით განსხვავდება. პირველ შემთხვევაში, ე.ი. როდესაც მახასიათებელი განტოლების ფესვები ჯერადია $r_1 = r_2 = r$, მაშინ დიფერენციალური განტოლების ერთი ამონახსნის პოვნა ხდება ზემოთმოყვანილი მეთოდით, ვთქვათ ეს ამონახსნია $y_1(x) = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots$, ხოლო მეორე ამონახსნი კი მოიცემა $y_2(x) = y_1(x) \ln x + b_0 x^r + b_1 x^{r+1} + b_2 x^{r+2} + \dots$ მწკრივით. მეორე შემთხვევაში კი, ე.ი. თუ $r_2 = r_1 + N$, განტოლების მეორე $b_0 x^{r_2} + b_1 x^{r_2+1} + b_2 x^{r_2+2} + \dots$ ამონახსნს აქვს იგივე სახე რაც $a_0 x^{r_1} + a_1 x^{r_1+1} + a_2 x^{r_1+2} + \dots$ მწკრივს, მხოლოდ მისი პირველი N კოეფიციენტი 0-ის ტოლია. ამ უკანასკნელი პირობიდან მიიღება დამატებითი რეკურსიული თანადობა. განვიხილოთ ამ ტიპის ერთი მაგალითი.

2. ვიპოვოთ $x^2 y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0$ ბესელის განტოლების ამონახსნი, როდესაც $k = \frac{1}{2}$.

ისევე როგორც ზემოთ ვეძებთ განტოლების ამონახსნი ფრობენიუსის მეთოდით და დავუშვათ, რომ განტოლების ამონახსნია $y = x^r \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ მწკრივი. მაშინ

$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+r},$
 $x^2 y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+r+2} = \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2} x^{j+r},$
 $y' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+r) a_j x^{j+r-1} = \sum_{j=-1}^{\infty} (j+r+1) a_{j+1} x^{j+r},$
 $xy' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+r) a_j x^{j+r},$
 $y'' = \sum_{j=-2}^{\infty} (j+r+1)(j+r+2) a_{j+2} x^{j+r},$
 $x^2 y'' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+r-1)(j+r) a_j x^{j+r}.$
 ჩავსვათ $x^2 y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0$ განტოლებაში მიღებული ხარისხოვანი
 მწკრივები და x^r -ის კოეფიციენტი გავუტოლოთ 0-ს. მივიღებთ
 მახასიათებელ განტოლებას:

$$(r-1)ra_0 + ra_0 - \frac{1}{4}a_0 = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

რომლის ფესვებს $r_1 = -\frac{1}{2}$ და $r_2 = \frac{1}{2}$ შორის სხვაობა 1-ის ტოლია. ე.ი $N = 1$
 და ამრიგად x^{r+1} -ის კოეფიციენტი 0-ს უნდა გავუტოლოთ. მივიღებთ

$$r(r+1)a_1 + (r+1)a_1 - \frac{1}{4}a_1 = 0 \Rightarrow \left((r+1)^2 - \frac{1}{4}\right)a_1 = 0.$$

რეკურსიულ ფორმულას x^{r+j} , $j \geq 2$ კოეფიციენტისათვის აქვს სახე

$$r(r+j)a_j + (r+j)a_j - \frac{1}{4}a_j + a_{j-2} = 0 \Rightarrow \left((r+j)^2 - \frac{1}{4}\right)a_j + a_{j-2} = 0.$$

ვთქვათ $r_1 = -\frac{1}{2}$. რადაგან r_1 და r_2 რიცხვები ერთიდაიმავე მახასიათებელი
 განტოლების ფესვებია, ამიტომ a_0 და a_1 რიცხვები ნებისმიერია.
 რეკურსიული თანადობიდან მივიღებთ

$$a_j = -\frac{a_{j-2}}{(-1/2+j)^2 - 1/4} = -\frac{a_{j-2}}{j^2 - j} = -\frac{a_{j-2}}{j(j-1)}, j \geq 2.$$

საიდანაც,

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1}, a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}, \dots, a_{2k} = \frac{a_0(-1)^k}{(2k)!}.$$

ანალოგიურად,

$$a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2}, a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5!}, a_7 = -\frac{a_5}{7 \cdot 6} = -\frac{a_1}{7!}, \dots, a_{2k+1} = \frac{a_1(-1)^k}{(2k+1)!}.$$

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x^{-1/2} \left[a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \right],$$

გავითვალისწინოთ, რომ $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \cos x$ და $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sin x$.
 საბოლოოდ მივიღებთ, რომ განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y = a_0 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + a_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$

შევნიშნოთ, რომ განტოლების ზოგადი ამონახსნი მივიღეთ
 მახასიათებელი განტოლების მხოლოდ ერთი ფესვის გათვალისწინებით.

4.4 ეილერის ინტეგრალი

ცვლადკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებების
 უმრავლესობა ანალიზურად არ იხსნება. იმ დიფერენციალურ განტოლებებს
 კი, რომლებიც კვადრატურებში იხსნება, მივყავართ ახალ ფუნქციებამდე,

რომლებსაც სპეციალური (ტრანსცენდენტული) ფუნქციები ეწოდება. გავიხსენოთ, რომ დიფერენციალური განტოლების კვადრატურებში ამოხსნა, შეიცავს არა მხოლოდ ალგებრული ოპერაციების საშუალებით ამონახსნის გამოსახვას, არამედ ინტეგრალის აღების ოპერაციითაც. მაგალითად, პირველი რიგის

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (1)$$

ფუნქცია, რომელიც ალბათობის თეორიდან მოდის და ალბათური ინტეგრალი ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ინტეგრალი არ აიღება

ელემენტარულ ფუნქციებში, ამიტომ მისთვის შემოღებულია სპეციალური სახელი, ალბათური, ან შეცდომის ინტეგრალი და ზოგჯერ *erf* სიმბოლოთიც აღინიშნება. უფრო ზუსტად, სამეცნიერო ლიტერატურაში (1)

ინტეგრალი გვხდება მისი ექვივალენტური $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

ფორმითაც. (1) ინტეგრალი არის მონოტონური ფუნქცია, რომელიც -1-სა და 1 შორის არის მოთავსებული. იგი იშლება მწკრივად და აქვს სახე:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

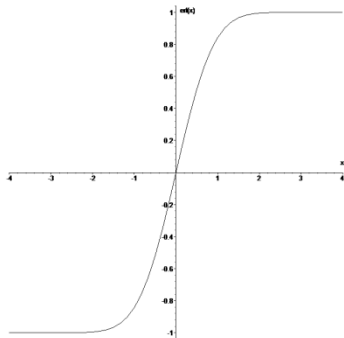
აღნიშნული მწკრივი მიიღება ექსპონენტის ხარისხოვან მწკრივად წარმოდგენის ფორმულიდან და შემდეგ მისი წევრობრივი ინტეგრებით.

$erf(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა და $(erf(x))' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$. გარდა

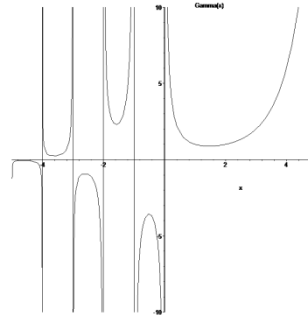
ალბათური ინტეგრალისა სპეციალური ფუნქციების თეორიაში ერთ-ერთ მნიშვნელოვანია

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, \quad y > 0$$

ფუნქცია, რომელსაც (ლეჟანდრის მიერ შემოღებული ტერმინი) ბეტა-ფუნქცია ეწოდება. ეს ფუნქცია, როგორც ახლა ვნახავთ, გამოისახება სხვა ტრანსცენდენტული, გამა-ფუნქციის საშუალებით



$\Phi(x)$ ფუნქციის გრაფიკი



$\Gamma(x)$ ფუნქციის გრაფიკი

რომელიც გამოყენების თვალსაზრისით უფრო მნიშვნელოვანია. ამიტომ ბეტა-ფუნქციის თვისებებს დაწვრილებით არ განვიხილავთ, მოვიყვანთ მხოლოდ რამდენიმე მათგანს.

უშუალო ჩასმით ($t = 1 - \tau$) მოწმდება ბეტა-ფუნქციის სიმეტრიულობის თვისება: $B(x, y) = B(y, x)$. აქვე შევნიშნოთ, რომ $t = 0$ წერტილი $B(x, y)$ -სათვის განსაკუთრებული წერტილია, როდესაც $x < 1$. გარდა უკვე აღნიშნულისა, ბეტა-ფუნქციის განსაკუთრებულ თვისებათა რიცხვს ეკუთვნის ტოლობა

$$B(x, y) = \frac{(y-1)B(x, y-1)}{x+y-1}, \quad y > 1,$$

საიდანაც და სიმეტრიულობიდან, გამომდინარეობს, რომ

$$B(x, y) = \frac{(x-1)B(x-1, y)}{x+y-1}, \quad x > 1.$$

როდესაც $y = n$, სადაც n ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$B(x, n) = \frac{n-1}{x+n-1} \cdot \frac{n-2}{x+n-2} \cdot \frac{n-3}{x+n-3} \cdots \frac{1}{x+1} B(x, 1),$$

მაგრამ

$$B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x},$$

ამიტომ

$$B(x, n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}.$$

გარდა y -სა, თუ x ცვლადიც ნატურალური რიცხვია და $x = m$, მაშინ გვექნება ტოლობა:

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1) \cdots (m+n-1)} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

თუ $y = 1 - x$, მაშინ მივიღებთ ერთ-ერთ შესანიშნავ ინტეგრალს:

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \quad (2)$$

უკვე განხილული ბეტა-ფუნქციისა და ალბათური ინტეგრალის საერთო სახელწოდებაა *ეილერის ინტეგრალები*, ამასთან ბეტა-ფუნქცია ეკუთვნის *პირველი გვარის ეილერის ინტეგრალების* კლასს, ხოლო ალბათური ინტეგრალი *კი-მეორე გვარისას*. პირველი გვარის ეილერის ინტეგრალებს მიეკუთვნება, აგრეთვე, ზემოთ ნახსენები *ეილერის გამა-ფუნქცია*:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

რომლისთვისაც, ისევე როგორც ბეტა-ფუნქციისათვის, $t = 0$ წერტილი განსაკუთრებულია, თუ $x < 0$. გამა- და ბეტა-ფუნქციები ერთმანეთს უკავშირდებიან ტოლობით:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (3)$$

გარდა ამისა, გამა-ფუნქცია აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1). \quad (4)$$

მართლაც,

$$x\Gamma(x) = x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x \int_0^{\infty} e^{-t} d\left(\frac{t^x}{x}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} d(t^x) = e^{-t} t^x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \Gamma(x+1),$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ $e^{-t} t^x \Big|_0^{\infty} = 0$ იგივეობა.

(4) ფორმულის რამდენჯერმე გამოყენება გვაძლევს ტოლობას:

$$\Gamma(x+n) = \Gamma((x+n-1)+1) = (x+n-1)\Gamma(x+n-1) = (x+n-1)(x+n-2) \cdots (x+1)x\Gamma(x),$$

საიდანაც, როდესაც $x = 1$, მივიღებთ:

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1 \quad \text{ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება:}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (5)$$

მოვიყვანოთ გამა-ფუნქციასთან დაკავშირებული ერთი შესანიშნავი ტოლობა, რომელიც (2) და (3) იგივეობებიდან გამომდინარეობს:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

შევნიშნოთ, რომ ეილერის პირველი და მეორე გვარის ინტეგრალები განიმარტებიან კომპლექსური არგუმენტებისთვისაც. მაგალითად, გამა ფუნქციის საშუალებით შემოდის კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში ფაქტორიალის ცნება $z! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot z$, სადაც z კომპლექსური რიცხვია. უფრო ზუსტად, ეილერის ინტეგრალებისათვის, და საერთოდ, სპეციალური ფუნქციებისათვის უფრო ადექვატური თეორიაა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორია და დიფერენციალური განტოლებები კომპლექსურ სიბრტყეზე. ჩვენ ამ კურსში დიფერენციალურ განტოლებებს მხოლოდ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის თვალსაზრისით ვიხილავთ.

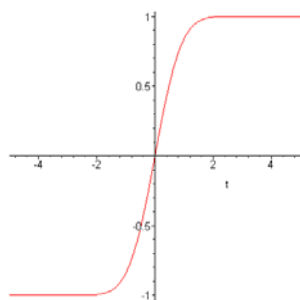
$x'(t) = tx(t) + 1$ არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი სპეციალური $\text{erf}(t)$ ფუნქციის საშუალებით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{2} \text{erf} \left(\frac{\sqrt{2}x}{2} \right) + C \right) e^{\frac{x^2}{2}} \quad (1)$$

ცნობილია, რომ $\text{erf}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$, მისი მწკრივად გაშლით მივიღებთ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} t - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} t^3 + \frac{1}{5\sqrt{\pi}} t^5 - \frac{1}{21\sqrt{\pi}} t^7 + \frac{1}{108\sqrt{\pi}} t^9 + O(t^{10}).$$

ფუნქციის გრაფიკი



$\text{erf}(t)$ არის დიფერენცირებადი ფუნქცია და $(\text{erf}(t))' = \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$. როდესაც

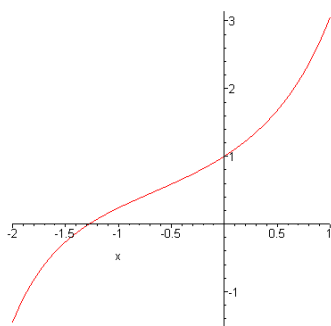
$C = 0$, (1) ფუნქციის შესაბამისი ხარისხოვანი მწკრივია

$$x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{15} x^5 + \frac{1}{105} x^7 + \frac{1}{945} x^9 + O(x^{10}),$$

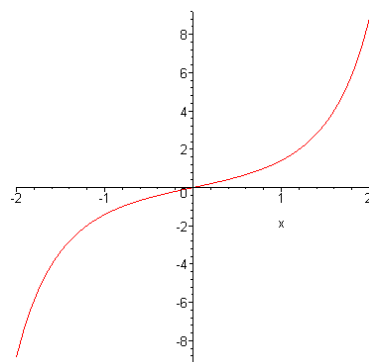
ხოლო $C = 1$ კი

$$1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{15} x^5 + \frac{1}{48} x^6 + \frac{1}{105} x^7 + \frac{1}{384} x^8 + \frac{1}{945} x^9 + O(x^{10})$$

$x(t) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{2} \text{erf} \left(\frac{\sqrt{2}x}{2} \right) + C \right) e^{\frac{x^2}{2}}$ ფუნქციის გრაფიკი



როდესაც $C = 1$



როდესაც $C = 0$

4.5 ბესელის ფუნქცია

მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები წარმოიქმნიან სპეციალური ფუნქციების მნიშვნელოვან კლასს. ასეთი ფუნქციების თვისებები შეისწავლება მისი წარმომქმნელი დიფერენციალური განტოლებებიდან.

განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0. \quad (1)$$

როგორც უკვე ვნახეთ, ასეთი ზოგადი სახის განტოლება კვადრატურებში არ იხსნება, იხსება მხოლოდ $a_1(x)$ და $a_2(x)$ კოეფიციენტების სპეციალურად შერჩევის შემთხვევაში. რამდენიმე მათგანი (ელიფრის, ჩებიშევის, სტოქსის) წინა პარაგრაფებში უკვე განვიხილეთ, ქვემოთ კიდევ რამდენიმე მათგანს მოვიყვანოთ, ეს განტოლებები არიან სწორედ ისეთები, რომლებიც ფუნქციათა ახალ კლასს გვაძლევს და მათი საშუალებით გამოისახება მათემატიკური ფიზიკის მრავალი განტოლების ამონახსნი.

დავუშვათ (1) განტოლებაში $a_1(x) = \frac{1}{x}$ და $a_2(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$, სადაც

ν რაიმე პარამეტრია. მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x) = 0. \quad (2)$$

ამ განტოლებას *ბესელის* განტოლება ეწოდება (ამ განტოლების კერძო შემთხვევას ჩვენ უკვე შევხვდით სავარჯიშოში, სადაც განტოლების ამონახსნი მივიღეთ კვადრატურებში), ხოლო მის ამონახსნებს კი *ბესელის* ან *ცილინდრული* ფუნქციები.

(2) განტოლება გადავწეროთ ექვივალენტური

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0 \quad (3)$$

ფორმით და მისი ამონახსნი ვეძებოთ

$$y = x^\sigma (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \quad (4)$$

მწკრივის სახით, სადაც $a_0 \neq 0$. მაშინ

$$xy' = x^\sigma (a_0 \sigma + a_1 (\sigma + 1)x + a_2 (\sigma + 2)x^2 + \dots),$$

$$x^2 y'' = x^\sigma (a_0 \sigma(\sigma - 1) + a_1 (\sigma + 1)\sigma x + a_2 (\sigma + 1)(\sigma + 2)x^2 + \dots).$$

ჩავსვათ (3)-ში y , xy' და $x^2 y''$ -ის მაგივრად ზემოთ მოყვანილი მწკრივები და დაავჯგუფოთ მიღებულ გამოსახულებაში წევრები x -ის ერთნაირი (ტოლი) ხარისხების მიხედვით. შედეგი იქნება:

$$x^\sigma [a_0 \sigma^2 - a_0 \nu^2] + x^{\sigma+1} [a_1 (\sigma + 1)^2 - a_1 \nu^2] + x^{\sigma+2} [a_2 (\sigma + 2)^2 - a_2 \nu^2 + a_0] + \dots + x^{\sigma+n} [a_n (\sigma + n)^2 - a_n \nu^2 + a_{n-2}] + \dots \equiv 0.$$

იმისათვის, რომ (4) მწკრივი (3) განტოლების ამონახსნი იყოს, საჭიროა შესრულდეს შემდეგი ტოლობები:

$$a_0 [\sigma^2 - \nu^2] = 0;$$

$$a_1 [(\sigma + 1)^2 - \nu^2] = 0;$$

$$a_2 [(\sigma + 2)^2 - \nu^2] + a_0 = 0;$$

... ..

$$a_n [(\sigma + n)^2 - \nu^2] + a_{n-2} = 0;$$

... ..

პირველი ტოლობიდან, რადგან $a_0 \neq 0$, ვპოულობთ $\sigma = \pm \nu$. დავუშვათ $\sigma = \nu$, მაშინ მეორე ტოლობიდან ვღებულობთ: $a_1 = 0$, ხოლო როდესაც $n = 2, 3, \dots$ გვექნება:

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(\sigma + n)^2 - \nu^2} = \frac{-a_{n-2}}{(2\nu + n)n},$$

საიდანაც ნათელია, რომ ყველა მთელი არაუარყოფითი k -სათვის $a_{2k+1} = 0$ და

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{2^2(\nu + k)k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(\nu + k)(\nu + k - 1)\dots(\nu + 1)k!}.$$

დავუშვათ

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

და გამოვიყენოთ წინა პუნქტის (4) და (5) ტოლობები, მივიღებთ:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)}.$$

ამრიგად, ავაგეთ (2) განტოლების ერთი ფორმალური ამონახსნი:

$$y = y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}. \quad (5)$$

საჭიროა დამტკიცდეს, რომ (4) მწკრივი კრებადია. ამისათვის (3)-ის ზოგადი y_k წევრისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$y_k = \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}.$$

მაშინ

$$\left| \frac{y_{k+1}}{y_k} \right| = \left| \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} (k+1)! \Gamma(k+\nu+2)} \right| = \left| \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(k+1)(k+\nu+1)} \right|$$

და აქედან

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(k+1)(k+\nu+1)} \right| = 0, \text{ როდესაც } |x| < \infty.$$

ამიტომ მწკრივების კრებადობის დალამბერის ნიშნის თანახმად (5) მწკრივი კრებადია ყოველი სასრული x -სათვის. უფრო მეტიც, როდესაც $|x| < R$ და $|\nu| < N$, სადაც R და N ფიქსირებული საკმარის დიდი რიცხვებია, კრებადობა თანაბარია თითოეული ცვლადისათვის ცალ-ცალკე. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ განხილული მწკრივი თანაბრად კრებადი ზემოთ მითითებულ არეზე. მიღებულ ფუნქციას ეწოდება *პირველი გვარის ბესელის ფუნქცია ინდექსით ν* და აღინიშნება $J_\nu(x)$ სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, \quad |x| < \infty. \quad (6)$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $J_\nu(x)$ მართლაც არის (2) განტოლების ამონახსნი. რადგან (5) მწკრივი თანაბრდება კრებადი, ამიტომ მისი წევრობრივი გაწარმოება შესაძლებელია:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(k+\nu+1)},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)(2k+\nu-1) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-2}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}.$$

გავამრავლოთ y ფუნქცია $\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)$ -ზე, y' - კი $\frac{1}{x}$, ხოლო y''

ფუნქცია კი - 1-ზე გავამრავლოთ და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ:

$$L(y) \equiv y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [(2k+\nu)(2k+\nu-1) + (2k+\nu) - \nu^2] x^{2k+\nu-2}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)}$$

თუ გავითვალისწინებთ

$$[(2k+\nu)(2k+\nu-1) + (2k+\nu) - \nu^2] = 2^2 k(k+\nu)$$

ტოლობას, გვექნება

$$L(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k(2k+\nu) x^{2k+\nu-2}}{2^{2k+\nu-2} k! \Gamma(k+\nu+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ (k-1) \rightarrow k}}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu-2}}{2^{2k+\nu-2} (k-1)! \Gamma(k+\nu)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} \equiv 0.$$

რაც მიუთითებს იმაზე, რომ (6) მწკრივით მოცემული ბესელის $J_\nu(x)$ ფუნქცია არის (2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

4.6 ვებერის ფუნქცია

განმარტების თანახმად, ბესელის (ცილინდრული) ფუნქცია არის წინა პუნქტის (2) დიფერენციალური განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი. თუ y_1 და y_2 (2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, მაშინ ზოგადი ამონახსნი მოიცემა

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

სახით, სადაც C_1 , C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ჩვენ უკვე ავაგეთ (2)-ის სპეციალური ამონახსნი, ბესელის ფუნქციის სახით. თუ ν პარამეტრი მთელი რიცხვი არ არის, მაშინ

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \quad (7)$$

აგრეთვე არის (2) განტოლების ამონახსნი, ამასთან $J_{\nu}(x)$ და $J_{-\nu}(x)$ წრფივად დამოუკიდებელი არიან. ამის დასამტკიცებლად საჭიროა (6) და (7) ფუნქციების ყოფაქცევა შევისწავლოთ $x=0$ წერტილში. თუ $\nu \neq -1, -2, -3, \dots$, მაშინ

$$J_{\nu}(x) \approx \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}, \text{ როდესაც } |x| \rightarrow 0,$$

ხოლო იმ შემთხვევაში, როდესაც $\nu \neq 1, 2, 3, \dots$, გვაქვს

$$J_{-\nu}(x) \approx \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}, \text{ როდესაც } |x| \rightarrow 0.$$

ე.ი., როდესაც $\nu \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ სამართლიანია ზემოთ მოყვანილი ორივე ფორმულა. ამ დროს

$$\frac{J_{\nu}(x)}{J_{-\nu}(x)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} \frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \neq \text{const}, \quad \nu \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

რაც ნიშნავს, რომ (6) და (7) წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია. მაშასადამე, ცილინდრული ფუნქციის ზოგადი სახე იქნება

$$y = A_{\nu} J_{\nu}(x) + B_{\nu} J_{-\nu}(x), \quad \nu \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (8)$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\nu = n$ მთელი რიცხვია. მაშინ

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!}$$

და

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)},$$

რადგან $\Gamma(k-n+1) = \infty$, როდესაც $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. უკანასკნელ ჯამში ჩავსვათ k -ს მაგივრად $s+n$, მივიღებთ:

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}}{s!(s+n)!} = (-1)^n J_n(x),$$

ამრიგად, მთელი ინდექსების მქონე ბესელის ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულები არიან. ამიტომ (8) გამოსახულება არ იქნება (2) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, როდესაც ν პარამეტრი მთელი რიცხვია. ამის გამო საჭიროა მოიძებნოს (2)-ის კიდევ ერთი ამონახსნი. ამ მიზნის განსახორციელებლად შემოვიტანოთ

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (9)$$

სახის ფუნქცია, რომელსაც *მეორე გვარის ცილინდრული ფუნქცია* ან *კებერის ფუნქცია* ეწოდება. სამეცნიერო ლიტერატურაში (9) ფუნქციის აღსანიშნავად ზოგჯერ $N_\nu(x)$ სიმბოლოც გამოიყენება, ხოლო თვით ფუნქციას კი *ნეიმანის ფუნქცია*საც უწოდებენ.

როდესაც ν მთელი რიცხვია, (9) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა მიიღება. ამ დროს შევთანხმდეთ, რომ

$Y_n(x)$ ფუნქცია იყოს ზღვარი $Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x)$. ეს ზღვარი არსებობს და გამოითვლება ლობიტალის წესის გამოყენებით:

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=-n}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (9) ფუნქცია აკმაყოფილებს ბესელის (2) განტოლებას. მართლაც,

$$L(J_\nu) \equiv J''_\nu + \frac{1}{x} J'_\nu + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu \equiv 0,$$

$$L(J_{-\nu}) \equiv J''_{-\nu} + \frac{1}{x} J'_{-\nu} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_{-\nu} \equiv 0.$$

ვიპოვოთ თითოეული იგივეობის წარმოებული ν მიმართ. მივიღებთ:

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{x^2} J_\nu \equiv 0, \quad L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{x^2} J_{-\nu} \equiv 0.$$

ამის შემდეგ პირველი თანადობა გავამრავლოთ 1-ზე, ხოლო მეორე კი -1 და პირველს მეორე გამოვაკლოთ. გვექნება:

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) - (-1)^n L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{x^2} [J_\nu - (-1)^n J_{-\nu}] \equiv 0.$$

უკანასკნელი ტოლობა გავყოთ π -ზე და გადავიდეთ ზღვარზე როდესაც $\nu \rightarrow n$. მივიღებთ $L(Y_n) \equiv 0$ იგივეობას, რაც ნიშნავს, რომ $Y_n(x)$ არის (2) განტოლების ამონახსნი. $y_1 = J_\nu(x)$ და $y_2 = Y_\nu(x)$ ფუნქციები, ნებისმიერი ν -სათვის, წრფივად დამოუკიდებლები არიან, ამიტომ $y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$ ყოველთვის არის (2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ბოლოს, შემოვიტანოთ კიდევ ერთი კლასი სპეციალური ფუნქციებისა, რომლებიც კვლავ (2) განტოლების სპეციალური ამონახსნებია:

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + iY_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - iY_\nu(x).$$

ამ ფუნქციებს ეწოდებათ *მესამე გვარის ცილინდრული ან ჰანკელის ფუნქციები*.

4.7 რამდენიმე სასარგებლო ფორმულა

სპეციალური ფუნქციების გამოყენების გასაადვილებლად ბესელის (6) ფუნქცია წარმოვადგინოთ სხვა სახით. ამისათვის გავამრავლოთ (6) გამოსახულება x^ν -ზე და მიღებული გამოსახულება გავაწარმოთ x -ით. გვექნება:

$$\frac{d}{dx} x^\nu J_\nu(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+\nu) x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2\nu-1} (k+\nu)}{2^{2k+\nu-1} k! \Gamma(k+\nu+1)} = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2\nu-1}}{k! \Gamma(k+\nu)} = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

ამრიგად,

$$\frac{d}{dx} x^\nu J_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x). \quad (10)$$

ანალოგიური გზით მიიღება თანადობა

$$\frac{d}{dx} x^{-\nu} J_\nu(x) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \quad (11)$$

(10) და (11) გამოსახულებების მარცხენა მხარეების გაწარმოებით მივიღებთ:

$$x^\nu \frac{d}{dx} J_\nu(x) + \nu x^{\nu-1} J_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad (12)$$

$$x^{-\nu} \frac{d}{dx} J_\nu(x) - \nu x^{-\nu-1} J_\nu(x) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x), \quad (13)$$

საიდანაც

$$\frac{d}{dx} J_\nu(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x), \quad (14)$$

$$\frac{d}{dx} J_\nu(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x). \quad (15)$$

(14) და (15) გამოსახულებების შეკრებითა და გამოკლებით მივიღებთ:

$$2 \frac{d}{dx} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \quad (16)$$

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x). \quad (17)$$

თუ უკანასკნელ ტოლობებში ჩავსვათ $\nu = 0$, მივიღებთ:

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = J_{-1}(x), \quad J_{-1}(x) = -J_1(x).$$

ზემოთ მიღებული (10)-(17) ტოლობები სამართლიანია ბესელის მეორე და მესამე გვარის ფუნქციებისთვისაც. ამ ტოლობებს ხშირად *რეკურსიულ ფორმულებს* უწოდებენ.

ზოგჯერ, ν პარამეტრის გარკვეული მნიშვნელობისათვის, შესაძლებელია ბესელის ფუნქციების გამოსახვა ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით. ქვემოთ მოვიყვანოთ რამდენიმე ფორმულას დამტკიცების გარეშე.

დავუშვათ $\nu = 0$. მაშინ

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(xt) dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

საიდანაც, გამომდინარეობს, რომ

$$|J_0(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin(t) \Big|_0^1 = 1.$$

ამრიგად, $|J_0(x)| \leq 1$.

ვთქვათ $\nu = n + 1/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (ასეთ რიცხვებს ნახევრადმთელს უწოდებენ). მაშინ

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}n!} \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt) dt,$$

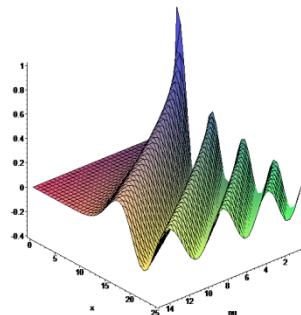
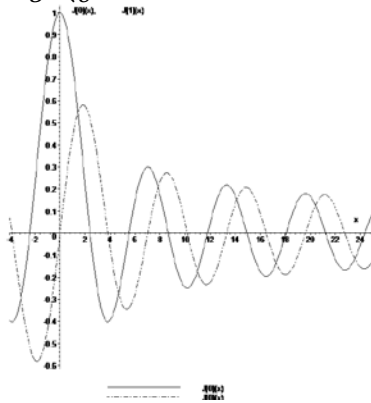
აქედან გამოდინარეობს, რომ ნახევრადმთელი დადებითი ინდექსის მქონე ბესელის ფუნქციები გამოისახებიან ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით. რეკურსიული ფორმულის გამოყენებით ვლებულობთ უარყოფითი ნახევრადმთელი ინდექსის მქონე ბესელის ფუნქციების გამოსახვას ელემენტარულ ფუნქციებში. მაგალითად,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \cos(xt) dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(x),$$

მაშასადამე,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(x).$$

ლიუვილმა აჩვენა, რომ მხოლოდ ნახევრადმთელი ინდექსების მქონე ბესელის ფუნქციები გამოისახებიან ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით.



ბესელის $J_0(x)$ და $J_1(x)$ ფუნქციის გრაფიკები

$f(x, \nu) = J_\nu(x)$ ზედაპირი

4.8 ცილინდრული ფუნქციების ასიმპტოტური ყოფაქცევა არგუმენტის დიდი მნიშვნელობისათვის

ცილინდრულ ფუნქციებს აქვთ მარტივი ასიმპტოტური ყოფაქცევა როდესაც ν პარამეტრი ფიქსირებულია, ხოლო x კი უსასრულობისაკენ მიისწრაფის. ასიმპტოტური ფორმულების მთავარი წევრი შესაძლებელია მიღებული იქნას იმ დიფერენციალური განტოლებებიდან, რომელსაც ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს. ამ ფორმულების მკაცრი დაფუძნებისაგან ჩვენ თავს შევიკავებთ და შემოვიფარგლებით გარკვეული ინტუიციური მსჯელობით.

პარაგრაფ 3.5-ის (2) განტოლებაში მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა:

$$y = \frac{w}{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{w'}{\sqrt{x}} - \frac{w}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow y'' = \frac{w''}{\sqrt{x}} - \frac{w'}{\sqrt{x^3}} + \frac{3w}{4\sqrt{x^5}}.$$

ბესელის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$w'' + \left[1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2} \right] w = 0.$$

როდესაც ν სასრულია, ხოლო $x \rightarrow \infty$ (1) განტოლებიდან გვექნება:

$$w'' + w \cong 0,$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} w &\cong A \cos(x) + B \sin(x) = C e^{ix} + D e^{-ix} \Rightarrow \\ \Rightarrow y &\cong \frac{A \cos(x) + B \sin(x)}{\sqrt{x}} = \frac{C e^{ix} + D e^{-ix}}{\sqrt{x}}, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

A, B, C, D კოეფიციენტები დამოკიდებულებია არიან როგორც ν ინდექსზე, ასევე განსაზღვრულ ცილინდრულ ფუნქციაზე.

ასიმპტოტურ ფორმულებს აქვს სახე:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - (2\nu+1)\frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}}\right), \\ H_\nu^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - (2\nu+1)\frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}}\right), \end{aligned}$$

როდესაც ν შემოსაზღვრულია, ხოლო $x \rightarrow \infty$.

ჰანკელის ფუნქციების განმარტებიდან გამოდის, რომ

$$J_\nu = \frac{H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)}{2}, \quad Y_\nu = \frac{H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)}{2},$$

აქედან

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}}\right), \quad (1)$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}}\right). \quad (2)$$

ამრიგად, თუ ჰანკელის ფუნქცია უსასრულობაში ექსპონენციალურად იზრდება, მაშინ $J_\nu(x)$ და $Y_\nu(x)$ ფუნქციები უსასრულობაში აღიწერებიან (1) და (2) ფორმულებიდან. კერძოდ, თუ $\nu = 0$, მაშინ

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}}\right).$$

ამასთან, $J_1(x) = -J'_0(x)$, მაშასადამე, $J_1(x)$ ემთხვევა $J_0(x)$ ფუნქციის ექვტრემალებს.

შენიშვნა. არსებობს რამდენიმე კარგი ცნობარი, რომელშიდაც გადმოცემულია სპეციალური (ტრანსცედენტული) ფუნქციების თეორია. მაგრამ, თითქმის ყველა წიგნს ფარავს Maple-ის საცნობარო სისტემა (Help). სპეციალური ფუნქციების შესახებ ამომწურავ პასუხს მიიღებთ <? *special function* ბრძანების შესრულების შემდეგ. ბრძანების შესრულება კი როგორც აღვნიშნეთ ხდება Enter კლავიშზე ხელის დაჭერით.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. გამოსახეთ ხარისხოვანი მწკრივით

$$y'' - xy - y = 0$$

განტოლების ამონახსნი. დაწერეთ რეკორსიული ფორმულა მწკრივის ზოგადი წევრისათვის.

$$\text{პასუხი: } a_{2n} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{a_0}{2^n (n!)}, \quad a_{2n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = \frac{a_1 2^n (n!)}{(2n+1)!},$$

$$y = a_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n (n!)} \right) + a_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!) x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right).$$

2. იპოვეთ

$$y'' + 2x^2 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

კოშის ამოცანის ამონახსნი მწკრივის სახით.

$$\text{პასუხი: } y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \dots$$

3. გამოსახეთ ხარისხოვანი მწკრივით

$$y''' - x^2 y + y = 0$$

განტოლების ამონახსნი.

პასუხი: $y = a_0 \left(1 - \frac{x^3}{6} - \frac{5x^6}{720} - \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^4}{24} - \frac{11x^7}{5040} - \dots \right) + a_2 \left(x^2 + \frac{x^5}{60} + \frac{19x^8}{20160} + \dots \right).$

4. ფრობენიუსის მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ

$$3x^2 y'' + 2xy' + y = 0$$

განტოლების ამონახსნი მწკრივის სახით.

$$\text{მითითება: } r = (1 \pm \sqrt{11}i)/6,$$

$$y = x^{\frac{1}{6}} (c_1 \cos(\sqrt{11} \ln \frac{x}{6}) + c_2 \sin(\sqrt{11} \ln \frac{x}{6})).$$

5. გამოსახეთ

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0, \quad |x| < 1$$

ჩებიშევის განტოლების ამონახსნი ხარისხოვანი მწკრივის სახით.

6. აჩვენეთ, რომ

$$1. J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{\frac{1}{2}} \cos(x);$$

$$2. Y_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\left(\frac{2}{\pi x} \right)^{\frac{1}{2}} \cos(x);$$

$$3. H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = -i \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{iz}, \quad H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = -i \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-iz}, \quad \text{სადაც } z$$

კომპლექსური ცვლადია.

5 ზოგიერთი სპეციალური სახის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მეთოდი

5.1 განსაკუთრებული (სინგულარული) ამონახსნი

განტოლებებს, რომლებიც უცნობი ფუნქციის წარმოებულს ცხადად არ შეიცავენ, საზოგადოდ აქვთ სახე

$$F(t, x, x') = 0 \quad (1)$$

და მათი თვისებები აქამდე განხილული $x' = f(t, x)$ განტოლებების თვისებებისაგან არსებითად განსხვავდება. ამ სახის განტოლებებისათვის კოშის ამოცანის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა ყალიბდება შემდეგნაირად.

თეორემა 1. დავუშვათ F უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა U არეში და $(t_0, x_0, x'_0) \in U$ წერტილში $F = 0$ და $\frac{\partial F}{\partial x'} \neq 0$. მაშინ რიცხვითი ღერძის საკმარის მცირე $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ მონაკვეთზე არსებობს (1) განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0$ პირობებს აკმაყოფილებს.

შედეგი 1. ვთქვათ $F(t_0, x_0, p) = 0$ განტოლებას (t_0, x_0) წერტილში აქვს m განსხვავებული $p_1, p_2, \dots, p_m$ ფესვი და ყოველი მათგანისათვის სრულდება უტოლობა $\frac{\partial F(t_0, x_0, p_i)}{\partial p_i} \neq 0$. მაშინ (t_0, x_0) წერტილის მოდამოში (1) განტოლების m ამონახსნი არსებობს, რომლებიც (t_0, x_0) წერტილზე გადიან. გარდა ამისა, ამ ამონახსნების პირველი წარმოებულები t_0 წერტილში $x'(t_0) = p_i, i = 1, \dots, m$ ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

თუ (t_0, x_0) წერტილზე გადის (1) განტოლების ერთზე მეტი ამონახსნი, და ორი მათგანს მაინც t_0 წერტილში აქვს ერთიდაიმავე წარმოებული $x'(t_0)$, ამბობენ, რომ ამ წერტილში (ირღვევა) არ სრულდება ერთადერთობის პირობა. თუ ერთადერთობის პირობა დარღვეულია, მაშინ რომელიმე x'_0 -სათვის სრულდება პირობები

$$F(t_0, x_0, x'_0) = 0, \quad \frac{\partial F(t_0, x_0, x'_0)}{\partial x'_0} = 0. \quad (2)$$

რადგან x'_0 წინასწარ არ არის ცნობილი, ამიტომ (t_0, x_0) წერტილის საპოვნელად საჭიროა (2) განტოლებათა სისტემიდან გამოვრიცხოთ x'_0 . მივიღებთ განტოლებას $g(t_0, x_0) = 0$, რომლის 0-ები გარკვეულ სიმრავლეს განსაზღვრავენ (t, x) სიბრტყეზე. ამ სიმრავლეს ეწოდება დისკრიმინანტული წირი. დისკრიმინანტული წირი შეიცავს ყველა იმ წერტილს, სადაც ერთადერთობის პირობა არ სრულდება, მაგრამ არა მარტო მათ.

(1) განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი ეწოდება ისეთ ამონახსნს, რომელსაც ყოველ წერტილში ეხება სხვა ამონახსნი, რომელიც მისგან განსხვავებულია ამ წერტილის თუნდაც საკმარის მცირე მოდამოში.

რადგან განსაკუთრებული ამონახსნისათვის ერთადერთობის პირობა დარღვეულია, ამიტომ მას დეტერმინანტული წირი აუცილებლად შეიცავს. ამიტომ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნის საპოვნელად საჭიროა თავდაპირველად დეტერმინანტული წირის პოვნა. მაგრამ იგი ყოველთვის არ არის განსაკუთრებული ამონახსნი, ზოგჯერ მაშინაც კი როდესაც ამონახსნია. ამის გამო შემდეგ საჭიროა შემოწმდეს:

1. არის თუ არა იგი ამონახსნი;

2. ეხება თუ არა მას ყოველ წერტილში სხვა ამონახსნი.

თუ ორივე პირობა სრულდება, მაშინ დისკიმინატის განხილული ნაწილი იქნება განსაკუთრებული ამონახსნი.

აქვე შეგახსენებთ, რომ ორი $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციებით მოცემული წირები ერთმანეთს ეხებიან, ან აქვთ შეხების წერტილი, თუ სრულდება ტოლობები $\varphi(t) = \psi(t)$ და $\varphi'(t) = \psi'(t)$.

წირთა $\varphi(t, x, c) = 0$ ოჯახის მოძვლები ეწოდება D წირს, რომელიც ამ წირთა ოჯახს ეხება ყოველ წერტილში.

თეორემა 2. $x = \psi(t)$ წრფე არის (1) განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის არის განტოლების ამონახსნთა ოჯახის მოძვლება.

5.2 $F(t, x, x') = 0$ სახის განტოლების ამონახსნის მეთოდები

ა) წარმოებული ფუნქციის მიმართ განტოლების ამონახსნის მეთოდი. ამოვხსნათ $F(t, x, x') = 0$ განტოლება უცნობის წარმოებული $x'(t)$ ფუნქციის მიმართ, ე.ი. გამოვსახოთ იგი t -სა და x -ის საშუალებით. მივიღებთ ერთ ან რამდენიმე $x'(t) = f(t, x)$ სახის განტოლებას, რომლებსაც უკვე ცნობილი მეთოდებით ამოვხსნით.

ბ) პარამეტრის შემოტანის მეთოდი. ამ მეთოდით განტოლება მიიყვანება განტოლებაზე, რომლის ამონახსნაც შესაძლებელია ზემოთ მოყვანილი მეთოდით. განვიხილავთ შემთხვევებს, როდესაც $F(t, x, x') = 0$ განტოლება მიიყვანება $x(t) = f(t, x')$ ან $t(x) = f(x, x')$ სახის განტოლებებზე.

$x(t) = f(t, x')$ განტოლებაში შევიტანოთ $p = \frac{dx}{dt}$ პარამეტრი და მივიღებთ

$$x(t) = f(t, p) \quad (3)$$

ახლა განვიხილოთ უკანასკნელი გამოსახულების ორივე მხარის სრული დიფერენციალი და გვექნება:

$$dx = f'_t dt + f'_p dp.$$

უკანასკნელი გამოსახულებაში შევიტანოთ $dx = p dt$ მნიშვნელობა:

$$p dt = f'_t dt + f'_p dp.$$

ეს განტოლება იხსნება $\frac{dt}{dp}$ და $\frac{dp}{dt}$ ფუნქციების მიმართ. ვთქვათ მისი ამონახსნი ვიპოვეთ $t = \varphi(p)$ სახით. $t = \varphi(p)$ -ს (3) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ გამოსავალი განტოლების ამონახსნს პარამეტრული სახით: $t = \varphi(p)$, $x = f(\varphi(p), p)$.
ანალოგიური გზით ვხსნით $t = f(x, x')$ განტოლებას.

5.3 ლაგრანჟისა და კლეროს განტოლებები

არაწრფივი განტოლებები, რომლებიც ზემოთ მოყვანილი მეთოდების საშუალებით იხსნებიან უცნობი ფუნქციის წარმოებულის მიმართ, ძირითადად კვადრატურებში ინტეგრებადები არ არიან. მაგრამ ზოგიერთი სპეციალური განტოლებების კვადრატურებში ინტეგრება შესაძლებელია. ასეთია ლაგრანჟის განტოლება:

$$A(p)x + B(p)t = C(p), \quad (4)$$

რომელიც პარამეტრის შემოტანის შემდეგ წრფივია უცნობი ფუნქციის და ცვლადის მიმართ. (4) გამოსახულებაში $A(p), B(p)$ და $C(p)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია p -ს მიმართ.

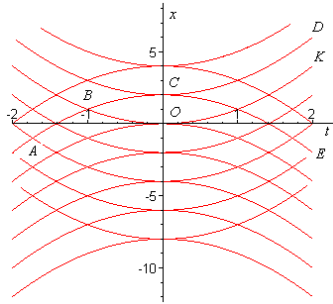
ლაგრანჟის განტოლების კერძო შემთხვევაა კლეროს განტოლება:

$$x = pt + b(p). \quad (5)$$

კლეროს (5) განტოლების ზოგადი ამონახსნებია არაპარალელურ წრფეთა ოჯახი. თუ $b(p)$ არაწრფივი და ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი, მაშინ მას აქვს განსაკუთრებული ამონახსნი, რომლის მხებია ამონახსნთა აღნიშნული ოჯახი. თუ $b(p)$ წრფივია, მაშინ წრფეები ერთ წერტილზე გადიან და განტოლებას განსაკუთრებული ამონახსნი არ აქვს.

ამოცანები. 1. ამოვხსნათ განტოლება $(x'(t))^2 - 4t^2 = 0$.

ამოვხსნათ ეს განტოლება $x'(t)$ წარმოებულის მიმართ და მივიღებთ ორ $x'(t) = 2t$ და $x'(t) = -2t$ განტოლებას, რომელთა ამონახსნები შესაბამისად არიან $x(t) = t^2 + c$ და $x(t) = c - t^2$ ფუნქციები. რაც იმას ნიშნავს, რომ (t, x) სიბრტყის ყოველ წერტილში გადის არანაკლებ ორი ამონახსნი.



წირების ამ ოჯახს გარდა განტოლების ინტეგრალური წირებია ისეთი შედგენილი წირები, რომლებსაც ყველა წერტილში წარმოებულები აქვთ (ან რაც იგივეა საერთო წერტილში მათ საერთო მხები აქვთ), მაგალითად, $ABCD$ წირი განტოლების ამონახსნია, ხოლო $ABOK$ კი განტოლების ამონახსნი არ არის. იმისათვის, რომ (t_0, x_0) წერტილში გამავალი ერთადერთი ამონახსნი გამოვყოთ, საზოგადოდ, წერტილთა ამ წყვილის მითითება საკმარისი არ არის. მაგალითად, $B(t_0 = -1, x_0 = 1)$ წერტილში განტოლების ორი ამონახსნი მაინც გადის: $x(t) = t^2$ (კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ჰიპერბოლა, რომლის შტოები ზევითაა მიმართული) და $x(t) = 2 - t^2$ ($ABCE$ წირი ნახაზზე). იმისათვის, რომ ერთადერთი ამონახსნის გამოყოფა მოხდეს, საჭიროა t_0 წერტილში $x(t)$ -ს წარმოებულის $x'_0 = x'(t_0)$ მნიშვნელობა დავაფიქსიროთ, მხოლოდ x'_0 ისე უნდა შეირჩეს, რომ (t_0, x_0, x'_0) რიცხვთა სამეულმა მოცემული განტოლება დააკმაყოფილოს. მაგალითად, თუ $t_0 = -1, x_0 = 1$ მნიშვნელობის გარდა მოცემულია $x'_0 = 2$, განტოლების ერთადერთი ამონახსნი იქნება $x(t) = 2 - t^2$, ხოლო, თუ $x'_0 = -2$, მაშინ $x(t) = t^2$. ამონახსნების თანახმების წერტილებში ერთადერთობა ირლვევა. მართლაც, ნახაზიდან ჩანს, რომ Ox ღერძის წერტილები ამონახსნთა თანახმების წერტილებია და ამონახსნის გაგრძელება ამ წერტილიდან ცალსახა არ არის.

2. ამოვხსნათ განტოლება $x = x't + (x')^2$.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $p = x'$. მოცემული განტოლება გადაიწერება სახით:

$$x = tp + p^2. \quad (1)$$

ვიპოვოთ განტოლების ორივე მხარის სრული დიფერენციალი და ერთმანეთს დავუტოლოთ: $dx = p dt + t dp + 2p dp$, რადგან $dx = p dt$, ამიტომ $(t + 2p) dp = 0$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $t + 2p = 0$ ან $dp = 0$. თუ $t + 2p = 0$, მაშინ $t = -2p$ და მისი ჩასმით (1)-ში მივიღებთ გამოსავალი განტოლების ამონახსნს პარამეტრული სახით: $t = -2p$, $x = -p^2$. თუ ბოლო გამოსახულებაში შევიტანთ პარამეტრის მნიშვნელობას, მივიღებთ განტოლების ერთ-ერთ ამონახსნს: $x(t) = -\frac{t^2}{4}$. ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა: $dp = 0$. ამ განტოლების ამონახსნია $p = c$ ნებისმიერი მუდმივი, რომლის ჩასმის შემდეგ (1)-ში მივიღებთ გამოსავალი განტოლების

კიდევ ერთ ამონახსნს $x(t) = ct + c^2$, რომელიც არაპარალელურ წრფეთა ოჯახია. შევამოწმოთ, არის თუ $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ ფუნქცია განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი (განტოლება (1) კლეროს განტოლებაა, რომლის ყველა ამონახსნი ჩვენ ზემოთ უკვე დავახასიათეთ). რისთვისაც საჭიროა შემოწმდეს $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ და $x(t) = ct + c^2$ წირების თანახმების პირობები:

$$-\frac{t^2}{4} = ct + c^2, -\frac{t}{2} = c.$$

მეორე ტოლობის ჩასმით პირველში მივიღებთ იგივეობას $-\frac{t^2}{4} = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4}$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ წირს ყოველ წერტილში ეხება $x(t) = ct + c^2$ წრფეთა ოჯახიდან წრფე. ამრიგად, $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნია.

$$3. \quad x = tx' - x'^2.$$

შემოვიტანოთ $p = x'$ პარამეტრი და ვიპოვოთ $x = pt - p^2$ გამოსახულების სრული დიფერენციალი:

$$pdt = d(tp - p^2) \Rightarrow pdt = tdp + pdt - 2pdp \Rightarrow (t - 2p)dp = 0 \Rightarrow p = c \text{ და } p = \frac{t}{2}.$$

$$\text{აქედან } x = ct - c^2, \quad x = \frac{t^2}{4}.$$

$$4. \text{ ამოვხსნათ განტოლება } t^3 x'^2 + t^2 x x' + a = 0.$$

პირველ რიგში განტოლება ამოვხსნათ x -ის მიმართ:

$$x = -\frac{a}{t^2 x'} - tx' \quad (1)$$

ამის შემდეგ შემოვიტანოთ პარამეტრი $p = x'$ და მისი გამოყენებით (1) განტოლება გადავწეროთ სახით:

$$x = -\frac{a}{t^2 p} - tp \quad (2)$$

ვიპოვოთ (2) გამოსახულების ორივე მხარის სრული დიფერენციალი და გავითვალისწინოთ, რომ $dx = pdt$. ამის შემდეგ (2) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$pdt = \frac{2a}{t^3 p} dx + \frac{a}{t^2 p^2} dp - tdp - pdt.$$

ამ ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$\left(\frac{2a}{t^3 p} - 2p\right) dx + \left(\frac{a}{t^2 p^2} - x\right) dp = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{t^2 p^2} - x\right) \left(dp + \frac{2p}{t} dt\right) = 0.$$

უკანასკნელი განტოლებიდან ვპოულობთ $t = \sqrt[3]{\frac{a}{p^2}}$ და $t = \frac{c}{\sqrt{|p|}}$, რომელთა ჩასმით (2) განტოლებაში ვღებულობთ განტოლების ყველა ამონახსნს პარამეტრული სახით:

$$x = -2\sqrt[3]{pa} \text{ და } x = -\frac{a}{c^2} \operatorname{sgn} p - c\sqrt{|p|}.$$

თუ ამ გამოსახულებებიდან p პარამეტრს გამოვრიცხავთ გვექნება: $t = \frac{4a}{x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{c} + \frac{c}{t}$.

$$5. x = 2tx' - 4x'^2.$$

შემოვიტანოთ პარამეტრი $p = x'$. გადავწეროთ მოცემული განტოლება ამ აღნიშვნის გათვალისწინებით: $x = 2tp - 4p^2$; ვიპოვოთ ამ გამოსახულების სრული დიფერენციალი: $dx = 2tdp + 2pdt - 8pdp$; შემდეგ dx შევცვალოთ pdt -ით და გავამარტივოთ მიღებული გამოსახულება: $2tdp + pdt - 8pdp = 0$, რომელიც შესაძლებელია გადაიწეროს სახით:

$$p \frac{dt}{dp} + 2t = 8p.$$

ეს უკანასკნელი კი წრფივი პირველი რიგის განტოლებაა $t = t(p)$ ფუნქციის მიმართ, რომლის ამოსახსნელად გამოვიყენებთ ჩვენთვის კარგად ცნობილ კოშის ფორმულას და მივიღებთ: $t = \frac{c}{p^2} + \frac{8}{3}p$. t -ს ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ გამოსავალ განტოლებაში $p = x'$ გათვალისწინებით და მივიღებთ: $x = 2p\left(\frac{c}{p^2} + \frac{8}{3}p\right) - 4p^2 \Rightarrow x = \frac{2c}{p} - \frac{4}{3}p^2$. ამრიგად, გამოსავალი განტოლების ზოგადი ამონახსნი პარამეტრული სახით მოიცემა შემდეგნაირად:

$t = \frac{c}{p^2} + \frac{8}{3}p$, $x = -\frac{4}{3}p^2 + \frac{2c}{p}$. გარდა ამ ამონახსნებისა, მოცემული განტოლებას აქვს ტრივიალური ამონახსნი $x(t) \equiv 0$.

$$6. x = tx'^2 - 2x'^3.$$

წინა ამოცანების ანალოგიურად შემოვიტანოთ პარამეტრი $p = x'$. მაშინ $x = tp^2 - 2p^3 \Rightarrow dx = d(tp^2 - 2p^3) \Rightarrow p((p-1)dt + 2(t-3p)dp) = 0$,

საიდანაც ვღებულობთ: $p = 1, p = 0$ და $(p-1)\frac{dt}{dp} + 2t = 3p$. უკანასკნელი გამოსახულება წრფივი პირველი რიგის განტოლებაა, რომლის ამონახსნია $t = \frac{c}{(p-1)^2} + 2p + 1$. t -ს ამ მნიშვნელობის და $x' = p$ შეტანით გამოსავალ განტოლებაში მივიღებთ: $x = \frac{cp^2}{(p-1)^2} + p^2$. $p = 1, p = 0$ გვაძლევს, შესაბამისად, $x = t + c$ და $x = const$. მათი ჩასმით გამოსავალ განტოლებაში ვღებულობთ, რომ ფუნქციათა ამ ოჯახებიდან, განტოლების ამონახსნებია მხოლოდ $x(t) = t - 2$ და $x(t) \equiv 0$ ფუნქციები. ამრიგად, განტოლების ყველა ამონახსნი შემდეგი სახისაა:

$$x = 0; x = t - 2; t = \frac{c}{(p-1)^2} + 2p + 1, x = \frac{cp^2}{(p-1)^2} + p^2.$$

$$7. tx'^2 = x - x'.$$

შემოვიტანოთ პარამეტრი $p = x'$. მაშინ განტოლება გადაიწერება სახით $x = tp^2 + p$. სრული დიფერენციალის გამოთვლის შემდეგ მივიღებთ:

$$dx = d(tp^2 + p) \Rightarrow dx = 2tpdp + p^2dt + dp \Rightarrow pdt = 2tpdp + p^2dt + dp$$

$$\Rightarrow (p - p^2)dt = (2tp + 1)dp.$$

დავუშვათ $p \neq 0$ და $p \neq 1$. ამ შემთხვევაში უკანასკნელი განტოლება გადაიწერება სახით: $\frac{dt}{dp} - \frac{2p}{p-p^2}t = \frac{1}{p-p^2}$. ეს არის პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება $t(p)$ ფუნქციის მიმართ, რომლის ამონახსნს ვპოულობთ კოშის ფორმულით: $t = \frac{\ln pc - p}{(p-1)^2}$. $x = tp^2 + p$ ტოლობაში შევიტანთ t -ს ამ მნიშვნელობას მივიღებთ: $x = \frac{p^2(\ln pc - p)}{(p-1)^2} + p$. ამრიგად, მივიღეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი პარამეტრული სახით $t = \frac{\ln pc - p}{(p-1)^2}$, $x = \frac{p^2(\ln pc - p)}{(p-1)^2} + p$, როდესაც $p \neq 0$ და $p \neq 1$. ახლა დავუშვათ $p = 0$ და $p = 1$, მაშინ $x = \text{const}$ და $x = t + c$ შესაბამისად. $x = \text{const}$ მოცემული განტოლების ამონახსნია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x(t) \equiv 0$, ხოლო $x = t + c$ -ს ჩასმით მოცემულ განტოლებაში ვღებულობთ, რომ $c = 1$. ამრიგად, გამოსავალი განტოლების ამონახსნებია:

$$x(t) \equiv 0; \quad x(t) = t + 1; \quad t = \frac{\ln pc - p}{(p-1)^2}, \quad x = \frac{p^2(\ln pc - p)}{(p-1)^2} + p.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

ამოხსენით განტოლებები

1) $y(x) = 2xy'(x) + \ln y'(x)$. მითითება: შემოიტანეთ აღნიშვნა $y'(x) = p$.

პასუხი: $x = \frac{c}{p^2} - \frac{1}{p}$, $y = \ln p + \frac{2c}{p} - 2$.

2) $y(x) = x(1 + y'(x)) + (y'(x))^2$. პასუხი: $x = 2(1 - p) + ce^{-p}$, $y = [2]1 - p + ce^{-p}](1 + p) + p^2$.

3) $y(x) = 2xy'(x) + \sin^2 y'(x)$. პასუხი: $x = \frac{c}{p^2} - \frac{\cos p}{p^2} - \frac{\sin p}{p}$, $y = \frac{2c}{p} - \frac{2\cos p}{p} - \sin p$, $y = 0$.

4) $y(x) = x(y'(x))^2 - \frac{1}{y'(x)}$. პასუხი: $x = \frac{cp^2 + 2p - 1}{2p^2(p-1)^2}$, $y = \frac{cp^2 + 2p - 1}{2p(p-1)^2} - \frac{1}{p}$.

5) $y(x) = \frac{3}{2}xy'(x) + e^{y'(x)}$. პასუხი: $x = \frac{c}{p^3} - 2e^p \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right)$, $y = \frac{3c}{2p^2} - 2e^p \left(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2} \right)$.

6 დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები

6.1 წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

ქვემოთ ჩვენი განხილვის ობიექტი იქნება

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (1)$$

წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, სადაც $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ უცნობი ვექტორული ფუნქციაა, $X'(t)$ ამ ვექტორული ფუნქციის წარმოებული ფუნქციაა და $X'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$, $A(t)$ - მატრიცული ფუნქციაა უწყვეტი ელემენტებით:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

ხოლო $B(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))$ კი მოცემული ვექტორული ფუნქციაა.

წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა (1) სისტემა წარმოადგენს ვექტორების ტოლობას, ამიტომ გაშლილი სახით იგი შესაძლებელია გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x'_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \dots \\ x'_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \quad (2)$$

(2) (ან (1)) განტოლებათა სისტემას ეწოდება წრფივ არაერთგვაროვან ცვლადკოეფიციენტებთან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, ხოლო $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \dots, n$ ფუნქციებს ეწოდებათ (2) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტები. (2) განტოლებათა სისტემას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ $b_1(t) = b_2(t) = \dots = b_n(t) \equiv 0$ (ან $B(t)$ იგივერად 0-ის ტოლი ვექტორია). რადგან (1) და (2) ერთიდაიგივე ობიექტის ორი სხვადასხვა ჩანაწერია, ამიტომ ჩვენ ამ ორიდან იმას ავირჩევთ ხოლმე, რომელიც კონკრეტულ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელი იქნება.

ბუნებრივია, (1) სისტემის ამონახსნი ვუწოდოთ ისეთ $X^1(t) = (x^1_1(t), x^1_2(t), \dots, x^1_n(t))$ ვექტორულ ფუნქციას, რომლის ჩასმითაც (1)-ში ეს გამოსახულება იგივეობად გადაიქცევა.

წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებზე ვრცელდება n -ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა, რომლებსაც სკალარულ განტოლებებს უწოდებენ, თვისებების უმრავლესობა.

თეორემა 1. *კოქათ*

$$X^1(t) = (x_1^1(t), x_2^1(t), \dots, x_n^1(t))$$

და

$$X^2(t) = (x_1^2(t), x_2^2(t), \dots, x_n^2(t))$$

ვექტორული ფუნქციები დიფერენციალურ განტოლებათა (1) სისტემის შესაბამისი

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (3)$$

ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნებია,

1. მაშინ

$$\begin{aligned} C_1 X^1(t) + C_2 X^2(t) &= C_1(x_1^1(t), x_2^1(t), \dots, x_n^1(t)) + C_2(x_1^2(t), x_2^2(t), \dots, x_n^2(t)) = \\ &= (C_1 x_1^1(t) + C_2 x_1^2(t), C_1 x_2^1(t) + C_2 x_2^2(t), \dots, C_1 x_n^1(t) + C_2 x_n^2(t)) \end{aligned}$$

წრფივი კომბინაცია, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი კონსტანტებია, აგრეთვე ამონახსნია.

2. (3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას აქვს n წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი.

3. თუ $X^1(t)$, $X^2(t)$, ..., $X^n(t)$ აღვნიშნავთ (3) დიფერენციალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს, მაშინ (3) სისტემის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$X(t) = C_1 X^1(t) + C_2 X^2(t) + \dots + C_n X^n(t).$$

(3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის $X^1(t)$, $X^2(t)$, ..., $X^n(t)$ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს ეწოდებათ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა, ხოლო ამ ამონახსნების კომპონენტებისაგან შედგენილი

$$\begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

მატრიცის დეტერმინანტს ეწოდება (3) სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი და ისევე როგორც სკალარული განტოლებისათვის, მისთვისაც მიღებულია აღნიშვნა $W(t)$. როგორც ვხედავთ, (4) მატრიცის სვეტები არიან $X^1(t)$, $X^2(t)$, ..., $X^n(t)$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორ-ფუნქციების კოორდინატები (რომლებიც ფუნქციებია). თუ t_0 რაიმე წერტილია (3)

დიფერენციალური განტოლების განსაზღვრის არედან, მაშინ სამართლიანია შემდეგი

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds} \quad (5)$$

ტოლობა ვრონსკის დეტერმინანტისათვის, რომელსაც ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულა (ზოგიერთი ავტორი (5) ტოლობას იაკობის ფორმულასაც უწოდებს) ეწოდება. (5)-ში ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მოთავსებულია $\text{tr} A(t)$ სიმბოლო აღნიშნავს $A(t)$ მატრიცული ფუნქციის კვალს, რომელიც განმარტებით $A(t)$ -ს მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ჯამია.

მიუხედავად ფორმალური მსგავსებისა, სკალარულ და ვექტორულ დიფერენციალურ განტოლებებს შორის მნიშვნელოვანი განსხვავებაა. ეს უპირველეს ყოვლისა გამოწვეულია $A(t_1)A(t_2) \neq A(t_2)A(t_1)$ უტოლობით, სადაც t_1 და t_2 ორი ნებისმიერი რიცხვია $A(t)$ მატრიც-ფუნქციის განსაზღვრის არედან. იმ შემთხვევაში, როდესაც ეს უტოლობა ტოლობად იქცევა, რაც სამართლიანია, მაგალითად, სკალარული ფუნქციებისათვის, მაშინ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის პოვნის ამოცანა მარტივდება. ქვემოთ დავუშვებთ, რომ $A(t)$ მუდმივი მატრიც-ფუნქციაა. ამ დაშვების შემდეგ (3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა გადაიქცევა მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემად, რომელსაც ქვემოთ განვიხილავთ.

6.2 ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა n -ური რიგის განტოლებათა ნორმალური სისტემისათვის და საწყის პირობებზე უწყვეტად დამოკიდებულება

$n \geq 2$ რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემა ეწოდება

„ა, $x_1(t), \dots, x_n(t)$ -უცნობი, ხოლო $f_j(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$, $j = 1, \dots, n$, კი მოცემული ფუნქციებია, რომლებიც უწყვეტებია თავიანთი არგუმენტების მიმართ $\mathbf{R}^{n+1}$ ევკლიდური სივრცის რაიმე U არეზე.

ნათელია, რომ § 3.1-ის (2) განტოლებათა სისტემა (1)-ის კერძო შემთხვევაა. § 3.1-ში $f_j(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$, $j = 1, \dots, n$ ფუნქციები წრფივი ფუნქციებია $x_1(t), \dots, x_n(t)$ არგუმენტების მიმართ.

ნორმალური სისტემის შემოკლებული და მოხერხებული ჩაწერისათვის, ისევ როგორც წინა პარაგრაფებში, შემოვიტანოთ ვექტორული აღნიშვნები:

$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

და

$$F(t, X) = (f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \dots, f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))),$$

მაშინ (1) გადაიწერება

$$X'(t) = F(t, X) \quad (2)$$

სახით. $X = \varphi(t)$ ვექტორ-ფუნქციას ეწოდება (2) სისტემის ამონახსნი $I \subset \mathbf{R}^1$ ნამდვილ რიცხვთა ინტერვალზე, თუ $\varphi(t)$ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა I -ზე, $(t, \varphi(t)) \in U$ ნებისმიერი t -სათვის I -დან და $\varphi'(t) \equiv F(t, \varphi(t))$.

$X = \varphi(t)$ ფუნქციის გრაფიკს, ე.ი. ნებისმიერი $t \in I$ -სათვის $(t, \varphi(t))$ წერტილთა სიმრავლეს, ეწოდება (2) ნორმალური სისტემის ინტეგრალური წირი. განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ (2) სისტემის ინტეგრალური წირი არის გლუვი წირი, რომელიც ძვეს U არეში. განვიხილოთ საწყისი პირობა

$$X(t_0) = X_0, \quad (t_0, X_0) \in U. \quad (3)$$

$(t_0, X_0) \in U$ წერტილს ეწოდება საწყისი წერტილი, ხოლო მის t_0, X_0 კოორდინატებს კი საწყისი მონაცემები.

(2) ნორმალური სისტემის ამონახსნის პოვნის ამოცანას, რომელიც (3) საწყის პირობას აკმაყოფილებს, ეწოდება კომის ამოცანა.

გეომეტრიულად (2),(3) კომის ამოცანა ნიშნავს, რომ საძიებელია U არეში (2)-ის ისეთი ინტეგრალური წირი, რომელიც $(t_0, X_0) \in U$ წერტილზე გაივლის.

ახლა ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ თეორემას, რომელიც არის (2),(3) კომის ამოცანის არსებობისა და ერთადერთობისათვის საკმარისი პირობა. ეს თეორემა არის თეორიული ინსტრუმენტი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ვეძებოთ განტოლების ამონახსნი მაშინაც კი, როდესაც იგი კვადრატურებში არ იხსნება.

თეორემა 1 (არსებობისა და ერთადერთობის). ვთქვათ $F(t, X)$ ვექტორ-ფუნქცია U -ს შემოსაზღვრულ და ჩაკეტილ ქვეარეზე თანაბრად თავისი არგუმენტების მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას და $(t_0, X_0) \in U$ მოცემული წერტილია. მაშინ

ა) არსებობს ისეთი $\delta > 0$, რომ როდესაც $|t - t_0| \leq \delta$, კომის ამოცანას აქვს ამონახსნი.

ბ) (2),(3) ამოცანის ამონახსნი ერთადერთია იმ აზრით, რომ თუ $X_1 = \varphi(t)$ და $X_2 = \psi(t)$ ამოცანის ორი ამონახსნია შესაბამისად $t_0 \in I_1$ და $t_0 \in I_2$ განსაზღვრის არეებით, მაშინ $\varphi(t) \equiv \psi(t)$, ნებისმიერი t - სათვის $I_1 \cap I_2$ -ზე.

აქვე გავაკეთოთ ერთი მნიშვნელოვანი შენიშვნა. თეორემის ა) პუნქტში ლაპარაკია განტოლებათა სისტემის *ლოკალურ* ამონახსნზე. ამონახსნი არსებობს t_0 -ის δ - მიდამოში. საზოგადოდ, ეს ამონახსნი შეიძლება იყოს *გაგრძელებადი*. რაც ნიშნავს, რომ არსებობს t_0 -ის δ - მიდამოს შემცველი $I \subset \mathbf{R}^1$ ღია მონაკვეთი და ისეთი $\tilde{\varphi}(t)$ ფუნქცია I - განსაზღვრის არით, რომ $\tilde{\varphi}(t)$ t_0 -ის δ - მიდამოში ტოლია თეორემაში მითითებული ამონახსნის. შესაძლებელია ასეთი $\tilde{\varphi}(t)$ ფუნქცია არ არსებობდეს, ანუ ამონახსნი არ იყოს გაგრძელებადი.

თეორემა 1-ის დამტკიცების მრავალი გზა არსებობს: მათ შორის სამეცნიერო ლიტერატურაში შეხვდებით დამტკიცების მეთოდს, რომელიც ეილერის ტენილების სახელწოდებით არის ცნობილი, თეორემა მტკიცდება აგრეთვე შეკუმშული ასახვების მეთოდითაც (ეს მეთოდი გამოვიყენეთ პირველი რიგის ნორმალური განტოლებისათვის წინა თავში). უფრო ხშირად, კი თეორემას ამტკიცებენ პიკარის მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით. ამ მეთოდის ძირითადი იდეა მდგომარეობს (2),(3) კოშის ამოცანის დაყვანაზე მის ექვივალენტურ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე, რომელსაც აქვს სახე:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, X(\tau)) d\tau. \quad (4)$$

ეს უკანასკნელი კი მიმდევრობითი მიახლოებით იხსნება. მიმდევრობითი მიახლოება იგება შემდეგი რეკურენტული თანადობით:

$$X_0(t) = X_0, \quad X_{i+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, X_i(\tau)) d\tau, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

F ფუნქციაზე თეორემაში დადებული პირობა საკმარისია იმისათვის, რომ ვექტორ-ფუნქციათა $(X_i(t))_{n \geq 1}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადი იყოს (4) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნისაკენ (ეს თეორემა მტკიცდება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების მრავალ სახელმძღვანელოში. იხ. ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებების დამხმარე ლიტერატურის ნუსხა).

თუ კოშის ამოცანა აღწერს რეალურ ფიზიკურ პროცესს, მაშინ შესაძლებელია რომ განტოლება და საწყისი პირობები შეიცავდეს პროცესის მახასიათებელ პარამეტრებს. საწყისი პირობები და პარამეტრები

ჩვეულებრივ ცნობილია მხოლოდ მიახლოებით, ისინი ემპირიულად, ან ექსპერიმენტიტ მიღებულია რიცხვებია, ამიტომ მნიშვნელოვანია იმის ცოდნა, რამდენად მგძნობიარეა ამონახსნი ამ პარამეტრებისა და საწყისი პირობების ცვლილების მიმართ.

განვიხილოთ $X = \varphi(t)$ (2),(3) კოშის ამოცანის ამონახსნი როგორც t_0, X_0 საწყისი პირობების ფუნქცია. აღვნიშნოთ იგი $\varphi(t, t_0, X_0)$ და განვიხილოთ ამ ფუნქციის უწყვეტობის საკითხი თავის ყველა არგუმენტის მიმართ.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა, რომელიც ცნობილია კოშის ამოცანის **საწყის პირობებზე უწყვეტად დამოკიდებულების** შესახებ.

თეორემა 2. ვთქვათ $F(t, X)$ ვექტორ-ფუნქცია U -ზე თანაბრად თავისი არგუმენტების მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, მაშინ არსებობს ისეთი $\delta > 0$, რომ (2), (3) კოშის ამოცანის ამონახსნი $\varphi(t, t_0, X_0)$ არის თავისი არგუმენტების უწყვეტი ფუნქცია, როდესაც $|t - t_0| \leq \delta$ და $(t_0, X_0) \in S_r$, სადაც

$$S_r = \{(t_0, X_0) \in U : |t_0 - t|^2 + |X_0 - X|^2 \leq r^2\}$$

U არეში შემავალი r რადიუსიანი ბირთვია.

ახლა შემოვიტანოთ მათემატიკური ფიზიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნება, ეს არის კოშის ამოცანის კორექტულობის ცნება ლიფერენციალური განტოლებისათვის.

(2),(3) კოშის ამოცანას ეწოდება **კორექტული**, თუ არსებობს t_0 -ის შემცველი ნამდვილ რიცხვთა I მონაკვეთი, სადაც არსებობს (2),(3) კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც უწყვეტადაა დამოკიდებული საწყის t_0, X_0 მონაცემებზე იმ აზრით, რომ როდესაც

$$|\tilde{F}(t, X) - F(t, X)| < \delta, \quad |\tilde{t}_0 - t_0| < \delta, \quad |\tilde{X}_0 - X_0| < \delta$$

მაშინ $|\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, ნებისმიერი $t \in I$ -სათვის.

ამრიგად, თუ $F(t, X)$ აკმაყოფილებს თეორემა 2-ში მოყვანილ პირობას, მაშინ ნორმალურ განტოლებათა (2) სისტემისათვის კოშის ამოცანა კორექტულია, რაც იმას ნიშნავს, რომ საწყისი მონაცემების მცირე ცვლილების შემთხვევაში გატოლებათა სისტემის შესაბამისი ამონახსნები ერთმანეთთან საკმაოდ ახლოს არიან.

მათემატიკური ფიზიკისათვის, ძირითადად, საინტერესოა კორექტული ამოცანები, რადგან, როგორც ზემოთ გაკეთებული შენიშვნიდან გამომდინარეობს, რეალური ფიზიკური პროცესები, როგორც წესი, კორექტულ ამოცანებზე დაიყვანებიან.

აქვე შევნიშნოთ, რომ n -ური რიგის ნორმალური განტოლება (1) სისტემის კერძო შემთხვევაა, ამიტომ კოშის ამოცანის არსებობისა და

ერთადერთობის თეორემა, აგრეთვე საწყის პირობებზე ამონახსნის უწყვეტად დამოკიდებულების თეორემა ამ სახის განტოლებათა კლასისათვის არის ზემოთ ჩამოყალიბებული თეორემების კერძო შემთხვევა.

6.3 მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

ახლა გადავიდეთ უფრო მარტივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შესწავლაზე.

$$X'(t) = AX(t) \quad (6)$$

სახის განტოლებათა სისტემას, სადაც A მუდმივი მატრიც-ფუნქციაა, წრფივ ერთგვაროვან მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ეწოდება.

(6) განტოლებათა სისტემის ამონახსნის სახე დამოკიდებულია A მატრიცის სპექტრალურ მახასიათებლებზე. ამ მახასიათებლებიდან მნიშვნელოვანია საკუთრივი მნიშვნელობები, რომლებიც ემთხვევიან

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (7)$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვებს, სადაც I ერთეულოვანი მატრიცია.

(7) განტოლების მარცხენა მხარე არის n ხარისხის (იგი A მატრიცის რიგის ტოლია) მრავალწევრი. მართლაც,

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

სადაც $a_1, \dots, a_n$ რიცხვები გამოისახებიან A მატრიცის ელემენტების საშუალებით. აღვნიშნოთ $P(\lambda)$ -თი ეს მრავალწევრი. იგი განმარტებით A მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრია.

დავუშვათ λ ისეთი არანულოვანი რიცხვია, რომ

$$Ah = \lambda h \quad (8)$$

განტოლებათა სისტემას h ვექტორის მიმართ აქვს არანულოვანი ამონახსნი. ასეთ λ -ს ეწოდება A მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობა. ხოლო იმ არანულოვან ვექტორებს, რომელთათვისაც სრულდება (8), ეწოდება λ საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი. როგორც აღვნიშნეთ, A მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები ემთხვევა მის მახასიათებელ ფესვებს.

თეორემა 1. ღავეუშვათ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ არიან A მატრიცის ერთმანეთისაგან განსხვავებული საკუთრივი მნიშვნელობები, ხოლო $h_1, h_2, \dots, h_n$ კი $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ -ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები, მაშინ

$$h_1 e^{\lambda_1 t}, h_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, h_n e^{\lambda_n t} \quad (9)$$

ვექტორ-ფუნქციები ქმნიან (6) დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. ამასთან, (6) სისტემის ზოგადი ამონახსნი არის (9) ვექტორ-ფუნქციების წრფივი კომბინაცია.

ამრიგად, განსხვავებული საკუთრივი მნიშვნელობების შემთხვევაში ავაგეთ ამონახსნთა ფუნდამენტური (9) სისტემა. ამ ამოცანის გადაჭრაში გვეხმარება თეორემა, რომლის თანახმად განსხვავებულ საკუთრივ მნიშვნელობების შესაბამის საკუთრივი ვექტორები ქმნიან ბაზის n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში, ანუ ისინი წრფივად დამოუკიდებლები არიან. თუ საკუთრივი მნიშვნელობებიდან რომელიმე ორი მათგანი ერთმანეთის ტოლია, ანუ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები, მაშინ ისევე როგორც სკალარული განტოლების შემთხვევაში, (6) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის ასაგებად სხვა მეთოდია გამოსაყენებელი. ამ მიზნის მისაღწევად საჭიროა შემოვიტანოთ მატრიცის მიკავშირებული ვექტორის ცნება.

ღავეუშვათ, λ_0 არის A მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობა, ხოლო $h_1, h_2, \dots, h_k$ ვექტორები ისეთებია, რომ სრულდება ტოლობები:

$$Ah_1 = \lambda_0 h_1, \quad h_1 \neq 0,$$

$$Ah_2 = \lambda_0 h_2 + h_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Ah_k = \lambda_0 h_k + h_{k-1},$$

მაშინ h_1 ვექტორი A მატრიცის საკუთრივი ვექტორია, ხოლო $h_2, h_3, \dots, h_k$ ვექტორებს ეწოდებათ h_1 -თან მიკავშირებული ვექტორები. ვექტორთა $h_1, h_3, \dots, h_k$ სისტემას ეწოდება λ_0 საკუთრივი მნიშვნელობის ჟორდანის ჯაჭვი, k -ს კი - ჟორდანის ჯაჭვის სიგრძე. თუ λ_0 მარტივი საკუთრივი მნიშვნელობაა, ხოლო h_1 მისი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორია, მაშინ h_1 -თან მიკავშირებული ვექტორები არ არსებობენ. იმ შემთხვევაში კი, როდესაც λ_0 ჯერადი საკუთრივი მნიშვნელობაა, მაშინ მისთვის შესაძლებელია არსებობდეს რამდენიმე ჟორდანის ჯაჭვი, რომლებიც წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემას შეიცავენ. ახლა უკვე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ თეორემა, რომელიც ჯერადი საკუთრივი ფესვების შემთხვევაშიც კი n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში

მიუთითებს n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების არსებობაზე. ეს თეორემა ცნობილია ჟორდანის თეორემის სახელწოდებით.

თეორემა 2. ნებისმიერი n რიგის მატრიცი აჩენს n წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორს n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში, რომელიც მიიღება ამ მატრიცის ყველა საკუთრივი მნიშვნელობების ჟორდანის ჯაჭვებისაგან.

ახლა უკვე შეგვიძლია დავწეროთ (6) დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნის ფორმულა. ქვემოთ მოყვანილი თეორემა ამოწურავს (6) სახის სისტემის ყველა შესაძლო ვარიანტებს და იძლევა სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების სრულ დახასიათებას.

თეორემა 3. დავუშვათ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ A მატრიცის წყვილ-წყვილად განსხვავებული საკუთრივი მნიშვნელობებია, რომელთა ჯერადობებია $k_1, k_2, \dots, k_l$, $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$, ხოლო

$$\begin{aligned} &h_1^1, h_1^2, \dots, h_1^{k_1}, \\ &h_2^1, h_2^2, \dots, h_2^{k_2}, \\ &\dots \dots \dots \\ &h_l^1, h_l^2, \dots, h_l^{k_l} \end{aligned}$$

მიკავშირებულ ვექტორთა სისტემაა. მაშინ

$$\begin{aligned} &h_1^1 e^{\lambda_1 t}, (h_1^1 t + h_1^2) e^{\lambda_1 t}, \dots, (h_1^1 \frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} + h_1^2 \frac{t^{k_1-2}}{(k_1-2)!} + \dots + h_1^{k_1}) e^{\lambda_1 t}, \\ &h_2^1 e^{\lambda_2 t}, (h_2^1 t + h_2^2) e^{\lambda_2 t}, \dots, (h_2^1 \frac{t^{k_2-1}}{(k_2-1)!} + h_2^2 \frac{t^{k_2-2}}{(k_2-2)!} + \dots + h_2^{k_2}) e^{\lambda_2 t}, \\ &\dots \dots \dots \\ &h_l^1 e^{\lambda_l t}, (h_l^1 t + h_l^2) e^{\lambda_l t}, \dots, (h_l^1 \frac{t^{k_l-1}}{(k_l-1)!} + h_l^2 \frac{t^{k_l-2}}{(k_l-2)!} + \dots + h_l^{k_l}) e^{\lambda_l t} \end{aligned}$$

ვექტორული ფუნქციები ქმნიან (6) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემას. ხოლო (6) სისტემის ზოგადი ამონახსნი ამ ვექტორების წრფივი კომბინაციაა.

აღვნიშნოთ $\Phi(t)$ -თი მატრიცული ფუნქცია, რომლის სვეტებია (6) განტოლებათა სისტემის $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის ვექტორ-ფუნქციები:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

ასეთნაირად შედგენილ მატრიცულ ფუნქციას ეწოდება (6) სისტემის *ფუნდამენტური მატრიცა* (მის დეტერმინანტს, როგორც უკვე ზემოთ აღვნიშნეთ, ეწოდება *კრონსკის დეტერმინანტი*). მაგალითად, მატრიცის $x_i^j(t)$ ელემენტი არის $X_j(t)$ ვექტორ-ფუნქციის i -ური საკოორდინატო ფუნქცია. ადვილი შესამოწმებელია (გთხოვთ გაიაზროთ დამოუკიდებლად), რომ $\Phi(t)$ აკმაყოფილებს შემდეგ მატრიცულ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\Phi'(t) = A\Phi(t),$$

სადაც $\Phi'(t)$ მატრიც-ფუნქცია მიიღება $\Phi(t)$ -ს შესაბამისი ელემენტების გაწარმოებით. ასევე მარტივად მოწმდება, რომ ერთგვაროვანი (6) განტოლების ზოგადი ამონახსნი $\Phi(t)$ ფუნდამენტური მატრიცის ნებისმიერ C ვექტორზე გამრავლებით მიიღება:

$$X(t) = \Phi(t)C.$$

აქვე, დამტკიცების გარეშე მივუთითებთ, რომ (6) განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა

$$X(t) = e^{At}C$$

მატრიცული ექსპონენტის საშუალებით, სადაც e^{At} განიმარტება როგორც

$$A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \dots$$

კრებადი მწკრივის ჯამი. $E(t) = e^{At}$ -ს ეწოდება *ევოლუციის ოპერატორი*. რადგან მისი საშუალებით მიიღება სისტემის ნებისმიერი სხვა მდგომარეობა, თუ ერთი მდგომარეობა ცნობილია. ანუ, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ $X(t)$ არის

$$X'(t) = AX(t), X(t_0) = X_0$$

კოშის ამოცანის ამონახსნი, მაშინ $X(t) = e^{At}X_0$.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

სისტემის ევოლუციის ოპერატორი და ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ევოლუციის ოპერატორია $E(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$
 მატრიცული ფუნქცია, სადაც $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. სისტემის ზოგადი ამონახსნი
 იქნება $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ ვექტორული ფუნქცია, სადაც
 $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორია.

მატრიცული ექსპონენტის საშუალებით

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

დიფერენციალურ განტოლებათა არაერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნი
 მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}C + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)ds,$$

სადაც $B(t)$ მოცემული ვექტორ-ფუნქციაა.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგი
 სისტემა:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) - 2z(t), \\ z'(t) = y(t) + z(t). \end{cases}$$

ამოხსნა. მოვევანოთ ამოცანაში უცნობი ვექტორ-ფუნქციაა
 $((x(t), y(t), z(t)))$. გადავწეროთ იგი მატრიცული სახით:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

ვიპოვოთ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები. ამისათვის საჭიროა დავწეროთ
 მახასიათებელი მრავალწევრი:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2,$$

ხოლო შემდეგ კი

$$(1 + \lambda)(1 - \lambda)^2 = 0$$

მახასიათებელი განტოლებიდან ვიპოვოთ მახასიათებელი ფესვები (რომლებიც A მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები იქნებიან):

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

ახლა საჭიროა ამ საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი რომელიმე საკუთრივი ვექტორები ვიპოვოთ. λ_1 მარტივი ფესვია, ამიტომ მიკავშირებული ვექტორი მისთვის არ არსებობს, ხოლო საკუთრივი ვექტორია, მაგალითად,

$$h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ეს ვექტორი (8) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით მიიღება, თუ მასში ჩვენი ამოცანის მანაცემებს ჩავსვამთ.

λ_2 ორჯერადი ფესვია, ამიტომ მისი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის მიკავშირებული ვექტორების პონაც მოგვიწევს. საკუთრივი ვექტორია, მაგალითად,

$$h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

რომლის მიკავშირებული ვექტორია

$$h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

იგი მიიღება $Ah_3 = \lambda_2 h_3 + h_2$ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით. h_1, h_2, h_3 ვექტორები ქმნიან სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ბაზისს, ამიტომ თეორემა 3-ის ძალით მოცემული განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^t \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad (10)$$

სადაც C_1, C_2, C_3 ნებისმიერი მუდმივებია.

მაგალითი 3. მაგალით 2-ში განხილული სისტემისათვის ამოვხსნათ კოშის შემდეგი ამოცანა: $x(0) = 0, y(0) = -1, z(0) = 1$.

ამოხსნა. საჭიროა C_1, C_2, C_3 უცნობების მიმართ ამოიხსნას წრფივ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

რომელიც მიიღება (10) ზოგად ამონახსნში $x(0) = 0, y(0) = -1, z(0) = 1$

საწყისი პირობების ჩასმით. (11)-დან ვპოულობთ: $C_1 = C_2 = 0, C_3 = 1$.

ჩავსვათ C_1, C_2, C_3 -ის ეს მნიშვნელობები (10)-ში და საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ t-1 \end{pmatrix},$$

ანუ $x(t) = 2te^t, y(t) = -e^t, z(t) = e^t(t-1)$.

6.4 ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის გამოყენებები

დიფერენციალური განტოლების აღდგენა ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემით. განვიხილოთ ერთგვაროვანი წრფივი n -ური რიგის დიფერენციალური განტოლება ცვლადი კოეფიციენტებით

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0 \quad (1)$$

და დავუშვათ, $x_1(t), \dots, x_n(t)$ (1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია.

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & \dots & x_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

დეტერმინანტს, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ეწოდება *ვრონსკის დეტერმინანტი*. მტკიცდება, რომ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$W'(t) = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} W(t),$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds}$$

(ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულა).

ვრონსკის დეტერმინანტთან დაკავშირებულია ნორმალური

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0 \quad (2)$$

დიფერენციალური განტოლების აღდგენა მისი ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის საშუალებით. კერძოდ, თუ $x_1(t), \dots, x_n(t)$ არის (2) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ საძებნი დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$\frac{(-1)^n}{W(t)} \begin{vmatrix} x & \dots & x^{(n-1)} & x^{(n)} \\ x_1 & \dots & x_1^{(n-1)} & x_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & \dots & x_n^{(n-1)} & x_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

n -ური რიგის სკალარული განტოლების კავშირი n -ური რიგის განტოლებათა სისტემასთან. (2) განტოლებიდან დიფერენციალურ განტოლებათა $Y'(t) = A(t)Y(t)$ სახის სისტემაზე გადასვლა ხდება შემდეგნაირად. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$y_1 = x, \quad y_2 = x', \dots, \quad y_n = x^{(n-1)}.$$

მაშინ $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$y_1'(t) = y_2,$$

$$y_2'(t) = y_3,$$

...

$$y_{n-1}'(t) = y_n,$$

$$y_n' = -a_n(t)y_1 - a_{n-1}(t)y_2 - \dots - a_1(t)y_n$$

შემოვიტანოთ მატრიცი

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}.$$

მაშინ $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ ვექტორ-ფუნქცია აკმაყოფილებს $Y'(t) = A(t)Y(t)$ მატრიცულად ჩაწერილ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. აქედან ნათელია, რომ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა უფრო ზოგადი ობიექტია, ვიდრე სკალარული განტოლება, რადგან გადასვლა განტოლებიდან სისტემაზე მხოლოდ სპეციალური სახის $A(t)$ მატრიცისათვის არის შესაძლებელი. ამის გამო §6.2-ში მოყვანილი თეორემა 1 და თეორემა 2 ვრცელდება წინა პარაგრაფებში განხილულ განტოლებებზეც.

კოშის ფუნქცია. §3.2-ში $a_0(t)x^{(n)} + \dots + a_n(t)x = f(t)$ სახის არაერთგვაროვან ცვლად კოეფიციენტებიან დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები მოვებნეთ მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)$$

სახის ფუნქციათა შორის და ვაჩვენეთ, რომ თუ $x_1(t), \dots, x_n(t)$ არიან

$$a_0(t)x^{(n)} + \dots + a_n(t)x = 0 \quad (**)$$

ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა და $C_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ აკმაყოფილებენ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t) + \dots + C_n'(t)x_n(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) + \dots + C_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ \dots \\ C_1'(t)x_1^{(n-2)}(t) + C_2'(t)x_2^{(n-2)}(t) + \dots + C_n'(t)x_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + C_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \dots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = \frac{f(t)}{a_0(t)} \end{cases}$$

მაშინ

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t)x_i(t) \quad (*)$$

არის არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ზემოთ მოყვანილ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებად კრამერის ფორმულით ვისარგებლოთ. მაშინ

$$C'_i = \frac{(-1)^{i+n} f(t)}{a_0(t)W(t)} \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_{i-1}(t) & x_{i+1}(t) & \dots & x_n(t) \\ x'_1(t) & \dots & x'_{i-1}(t) & x'_{i+1}(t) & \dots & x'_n(t) \\ \hline x_1^{(n-2)}(t) & \dots & x_{i-1}^{(n-2)}(t) & x_{i+1}^{(n-2)}(t) & \dots & x_n^{(n-2)}(t) \end{pmatrix}$$

ვაინტეგრით ეს უკანასკნელი $\forall i$ -თვის t_0 -დან t -მდე და ჩავსვათ (*)-ში $C_i(t)$ -ს მნიშვნელობები (რადგან ერთი ამონახსნი გვაინტეგრებს, ამიტომ დავუშვათ $C_i(t_0) = 0$)

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^n C_i(t) x_i(t) = \\ &= x_1(t) \int_{t_0}^t \frac{(-1)^{n+1} f(s)}{a_0(s)W(s)} \det \begin{pmatrix} x_2(s) & \dots & x_n(s) \\ x'_2(s) & \dots & x'_n(s) \\ \hline x_2^{(n-2)}(s) & \dots & x_n^{(n-2)}(s) \end{pmatrix} ds + \\ &+ x_2(t) \int_{t_0}^t \frac{(-1)^{n+2} f(s)}{a_0(s)W(s)} \det \begin{pmatrix} x_1(s) & x_3(s) & \dots & x_n(s) \\ x'_1(s) & x'_3(s) & \dots & x'_n(s) \\ \hline x_1^{(n-2)}(s) & x_3^{(n-2)}(s) & \dots & x_n^{(n-2)}(s) \end{pmatrix} ds + \dots + \\ &+ x_n(t) \int_{t_0}^t \frac{(-1)^{n+n} f(s)}{a_0(s)W(s)} \det \begin{pmatrix} x_1(s) & \dots & x_{n-1}(s) \\ x'_1(s) & \dots & x'_{n-1}(s) \\ \hline x_1^{(n-2)}(s) & \dots & x_{n-1}^{(n-2)}(s) \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$K(t, s) = \frac{1}{a_0(s)W(s)} \left((-1)^{n+1} x_1(t) \det \begin{pmatrix} x_2(s) & \dots & x_n(s) \\ x'_2(s) & \dots & x'_n(s) \\ \hline x_2^{(n-2)}(s) & \dots & x_n^{(n-2)}(s) \end{pmatrix} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{n+2} x_2(t) \det \begin{pmatrix} x_1(s) & x_3(s) & \dots & x_n(s) \\ x'_1(s) & x'_3(s) & \dots & x'_n(s) \\ \hline x_1^{(n-2)}(s) & x_3^{(n-2)}(s) & \dots & x_n^{(n-2)}(s) \end{pmatrix} + \dots + \\
& + (-1)^{n+n} x_n(t) \det \begin{pmatrix} x_1(s) & \dots & x_{n-1}(s) \\ x'_1(s) & \dots & x'_{n-1}(s) \\ \hline x_1^{(n-2)}(s) & \dots & x_{n-1}^{(n-2)}(s) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ეს გამოსახულება არის

$$\det \begin{pmatrix} x_1(s) & \dots & x_n(s) \\ x'_1(s) & \dots & x'_n(s) \\ \hline x_1^{(n-2)}(s) & \dots & x_n^{(n-2)}(s) \\ x_1(t) & \dots & x_n(t) \end{pmatrix}$$

დეტერმინანტის დაშლა უკანასკნელი სტრიქონის მიმართ, ამიტომ გვაქვს ტოლობა:

$$K(t,s) = \frac{1}{a_0(s)W(s)} \det \begin{pmatrix} x_1(s) & \dots & x_n(s) \\ x'_1(s) & \dots & x'_n(s) \\ \hline x_1^{(n-2)}(s) & \dots & x_n^{(n-2)}(s) \\ x_1(t) & \dots & x_n(t) \end{pmatrix}$$

რომელსაც ეწოდება (*) განტოლების კოშის ფუნქცია.

თეორემა 1.

$$x(t) = \int_{t_0}^t K(t,s) f(s) ds$$

ფუნქცია არის (**) განტოლების ამონახსნი

$$x(t_0) = x'(t_0) = \dots = x^{(n-1)}(t_0) = 0$$

საწყისი პირობების შემთხვევაში.

6.5 მეორე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

განვიხილოთ

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) = 0 \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) = 0 \\ \dots \\ \frac{d^2 x_n(t)}{dt^2} + a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

მეორე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა. ისევე როგორც წინა პარაგრაფებში აქ უცნობია $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ვექტორული ფუნქცია. გადავწეროთ (1) მატრიცული ფორმით:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + Ax(t) = 0, \quad (2)$$

სადაც A (1) სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მუდმივი მატრიცია. თუ დავუშვებთ, რომ (2) სკალარული განტოლებაა და $A \neq 0$,

მაშინ (2)-ის ამონახსნი $x(0) = x_0$, $\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0} = \dot{x}_0$ პირობებით არის

$$x(t) = \cos(\sqrt{A}t)x_0 + (\sqrt{A})^{-1} \sin(\sqrt{A}t)\dot{x}_0 \quad (3)$$

ფუნქცია. უშუალო ჩასმით მოწმდება, რომ (3) არის (2) სისტემის ამონახსნი, თუ (3)-ში ვივსულისხმებთ რომ A მატრიცია და $\det A \neq 0$, ხოლო $\cos(\sqrt{A}t)$ და $(\sqrt{A})^{-1} \sin(\sqrt{A}t)$ გაიგება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{A}t) &= 1 - \frac{1}{2!}At^2 + \frac{1}{4!}A^2t^4 - \dots, \\ (\sqrt{A})^{-1} \sin(\sqrt{A}t) &= t - \frac{1}{3!}At^3 + \frac{1}{5!}A^2t^5 - \dots \end{aligned} \quad (4)$$

რადგან (4) გამოსახულებების მარჯვენა მხარეებს აზრი აქვთ მაშინაც კი, როდესაც $\det A = 0$, ამიტომ (3) გამოსახულებით მიღებული ვექტორული ფუნქცია არის (2) და ამრიგად, (1) სისტემის ზოგადი ამონახსნი. აქ გათვალისწინებულია ისიც, რომ x_0 და $\dot{x}_0$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია.

აქვე შევნიშნოთ, რომ $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + Ax(t) = b(t)$ არაერთგვაროვან

განტოლებათა სისტემის ამონახსნი $x(0) = x_0$, $\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0} = \dot{x}_0$ პირობებით არის

$$x(t) = \cos(\sqrt{A}t)x_0 + (\sqrt{A})^{-1} \sin(\sqrt{A}t)\dot{x}_0 + (\sqrt{A})^{-1} \int_0^t \sin(\sqrt{A}(t-\tau))b(\tau)d\tau$$

ვექტორ-ფუნქცია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. ამოხსენით განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემები:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases} \quad \text{პასუხი } x(t) = 5c_1 e^{-8t} + c_2 e^{4t},$$

$$y(t) = 7c_1 e^{-8t} - c_2 e^{4t}.$$

$$2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}, \quad \text{საწყისი პირობით: } x(0) = 3, y(0) = 0.$$

პასუხი $x(t) = 4e^{-t} - e^{2t}$, $y(t) = e^{-t} - e^{2t}$.

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases} \quad \text{პასუხი } x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t},$$

$$y(t) = c_2 e^{3t} - 2c_3 e^{6t}, z(t) = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t}.$$

$$4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y \\ \frac{dy}{dt} = -2z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{cases}, \quad \text{საწყისი პირობით: } x(0) = 3, y(0) = 0, z(0) = 0.$$

პასუხი: სისტემის მახასიათებელი ფესვებია $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = \pm 4i$. $x(t) = -4e^{-2t} - 2\sin 2t$, $y(t) = e^{-2t} - \cos 4t$, $z(t) = e^{-2t} - 2\sin 4t$.

$$5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases} \quad \text{პასუხი } x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{3t} + c_2 e^{4t},$$

$$y(t) = (c_1 + c_2 + c_2 t)e^{3t}.$$

2. ამოხსენით $X'(t) = AX(t)$ განტოლებათა სისტემა, თუ $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ უცნობი ვექტორული ფუნქციაა, ხოლო $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. დაწერეთ მოცვანილი სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი.

3. გამოთვალეთ e^{At} , სადაც A არის შემდეგი 2×2 -მატრიცი

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, პასუხი $\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, პასუხი $\begin{pmatrix} e^t & 2e^t(e^t - 1) \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, პასუხი $\frac{e^{6t}}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \frac{e^{-t}}{7} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, პასუხი $\frac{e^{-2t}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\beta t & \sin\beta t \\ -2\sin\beta t & \sqrt{2}\cos\beta t \end{pmatrix}, \beta = 2\sqrt{2}$.

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, პასუხი $e^{-3t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$.

4. პარაგრაფ 6.4-ის გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი ამოცანები.

1) შეადგინეთ დიფერენციალური განტოლება, რომლისთვისაც $y(x) = e^x$ და $y(x) = e^{-x}$ ფუნქციები ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას ქმნიან. პასუხი: $y'(x) - y(x) = 0$.

2) შეადგინეთ დიფერენციალური განტოლება, რომლისთვისაც $y(x) = e^{x^2}$ და $y(x) = e^{-x^2}$ ფუნქციები ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას ქმნიან. პასუხი: $xy''(x) - y'(x) - 4x^3y(x) = 0$.

7 დიფერენციალურ განტოლებათა ავტონომიური სისტემა

7.1 ავტონომიური სისტემა

n -ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური ავტონომიური სისტემა ეწოდება

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (1)$$

სახის სისტემას, სადაც $f(x)$ -მოცემული ნამდვილი ვექტორ-ფუნქციაა $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ კოორდინატებით, რომლებიც მნიშვნელობას ღებულობენ n -განზომილებიანი ვექტორული სივრცის რაიმე $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ქვესივრცეში, t -დამოუკიდებელი ცვლადია, რომელსაც მიღებულია ეწოდოს დრო და $t \in \mathbf{R}^1$, ხოლო $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ უცნობი ნამდვილი ვექტორული ფუნქციაა. $\dot{x}$ აქ და შემდგომ აღნიშნავს x -ს წარმოებულს t -თი. (1) განტოლების მარჯვენა მხარეს, ე.ი. f ვექტორ-ფუნქციას, ეწოდება (1) სისტემის *ვექტორული ველი*. შემდგომში ყოველთვის ჩავთვლით, რომ $f(x)$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას Ω -ზე. ეს პირობა საკმარისია იმისათვის, რომ (1) სისტემას

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in \Omega \quad (2)$$

საწყისი პირობის შემთხვევაში ჰქონდეს ერთადერთი გაუგრძელებადი ამონახსნი. რაც თავის მხრივ ნიშნავს იმას, მისთვის სამართლიანია *ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის* თეორემა.

(1) ავტონომიურ სისტემას კიდევ *დინამიკურ*, ან *კონსერვატიულ* სისტემასაც უწოდებენ. ავტონომიური სისტემებით აღიწერება მრავალი რეალური ფიზიკური სისტემის მოდელი კლასიკურ მექანიკაში, რხევების თეორიაში, ეკონომიკაში თუ ცოცხალი სისტემების დინამიკაში. დიფერენციალურ განტოლებათა ნებისმიერი ნორმალური სისტემა (იხ. § ??)

$$\dot{x}(t) = f(x, t) \quad (3)$$

ყოველთვის შესაძლებელია გადავწეროთ როგორც ავტონომიური სისტემა უცნობი ფუნქციების რაოდენობის ერთი ერთეულით გაზრდის საშუალებით. მართლაც, თუ ჩავთვლით, რომ $t = x_{n+1}$, მივიღებთ ავტონომიურ სისტემას $n+1$ დამოუკიდებელი ფუნქციისათვის

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, x_{n+1}), \\ \dot{x}_{n+1} = 1. \end{cases}$$

ამრიგად, ავტონომიური სისტემები განსხვავდებიან (3) სახის ნებისმიერი სისტემისაგან იმით, რომ (1)-ის მარჯვენა მხარე არ შეიცავს t ცვლადს.

(1) სისტემაში შემავალი $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადებს ეწოდებათ *ფაზური ცვლადები*, ხოლო Ω არეს ეწოდება (1) ავტონომიური სისტემის *ფაზური*

სივრცე. თუ $x = \varphi(t)$ არის (1) სისტემის ამონახსნი $I \subset \mathbf{R}^1$ რიცხვით მონაკვეთზე, მაშინ იგი მოგვცემს პარამეტრულად განსაზღვრულ წირს Ω -ში, რომელსაც (1) ავტონომიური სისტემის *ფაზური ტრაექტორია* ეწოდება. მაშასადამე, ფაზური ტრაექტორია, ყოველი $t \in I$ -სათვის, არის $\{\varphi(t)\} \in \Omega$ სიმრავლე.

(1) ავტონომიური სისტემის *ინტეგრალური წირი* ეწოდება $x = \varphi(t)$ ფუნქციის გრაფიკს, იგი მდებარეობს

$$G = \{(x, t) \mid x \in \Omega, t \in \mathbf{R}^1\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

უსასრულო ცილინდრში. აქედან, ფაზური ტრაექტორია იქნება ინტეგრალური წირის პროექცია t -ღერძის პარალელურად $\mathbf{R}^n$ -ში. ტრაექტორიაზე ისრით ჩვეულებრივ მონიშნავენ ხოლმე მის მიმართულებას, ორიენტაციას, ე.ი. მოძრაობის მიმართულებას t -ს ზრდის შესაბამისად. მაგალითად, როდესაც $n=1$, $\dot{x} = x$ განტოლების, $x(0) = x_0 > 0$ საწყისი პირობით, ინტეგრალური წირი იქნება $x(t) = x_0 e^t$, $t \in \mathbf{R}^1$, ფუნქციის გრაფიკი (t, x) სიბრტყეზე, ხოლო ფაზური ტრაექტორია კი იქნება $x > 0$ ნახევარღერძი, ანუ ამონახსნი გაგრძელებადია მთელ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე (იხ. შენიშვნა თეორემა 1.1-ის შემდეგ თავი I-ის § 3.3-ში).

კოშის (1), (2) ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველ $x_0 \in \Omega$ წერტილზე გადის t_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრული ერთადერთი ტრაექტორია, გარკვეულ პირობებში ეს ტრაექტორია განსაზღვრულია ნებისმიერი $t \in \mathbf{R}^1$ -სათვის.

თეორემა 1. *იმისათვის, რომ (1) ავტონომიური სისტემის $x = \varphi(t)$, $t \in I$ ამონახსნი გაგრძელებადი იყოს მთელ $\mathbf{R}^1$ -ზე, საკმარისია, რომ ამ სისტემის ტრაექტორია მდებარეობდეს რაიმე $K \subset \Omega$ კომპაქტში.*

ეს თეორემა ავტონომიური სისტემის სახის საშუალებით ამონახსნის გაგრძელების შესაძლებლობაზე ინფორმაციას ვერ იძლევა. თუმცა, აქვე შევნიშნავთ, რომ თუ $f(x)$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას Ω -ზე, მაშინ (1) ავტონომიური სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი გაგრძელებადია მთელ $\mathbf{R}^1$ -ზე.

მოვიყვანოთ (1) ავტონომიური სისტემის ტრაექტორიის ელემენტარული თვისებები.

თვისება 1. *თუ $x = \varphi(t)$ (1) სისტემის ამონახსნია, როდესაც $t \in (\alpha, \beta)$ და c რაიმე ნამდვილი რიცხვია, მაშინ $x = \varphi(t+c)$ აგრეთვე იქნება (1) სისტემის ამონახსნი როდესაც $t \in (\alpha-c, \beta-c)$.*

ამონახსნის ეს თვისება მიანიშნებს იმაზე, რომ (1)-ის ტრაექტორიის ძვრა, აგრეთვე, არის (1) ავტონომიური სისტემის ტრაექტორია.

თვისება 2. თუ ორი ფაზური ტრაექტორია $x = \varphi(t)$, $t \in I_1$ და $x = \psi(t)$, $t \in I_2$ რომელიმე წერტილში გადაიკვეთა, ე.ი. $x_0 = \varphi(t_1) = \psi(t_2)$, მაშინ $\psi(t) \equiv \varphi(t + t_1 - t_2)$ ყოველი t -სათვის, რომელთათვისაც განსაზღვრულია იგივეობის ორივე მხარე.

ეს თვისება კი მიუთითებს, რომ ავტონომიური სისტემის ტრაექტორიები ან არ იკვეთებიან, ან თუ იკვეთებიან, ერთმანეთს ემთხვევიან. შევნიშნოთ, რომ არაავტონომიური სისტემებისათვის ეს თვისება ზოგჯერ ირღვევა.

(1) ავტონომიური სისტემის მუდმივ $x = \varphi(t) \equiv x_0 \in \Omega$, $\forall t \in R^1$, ამონახსნს ეწოდება ავტონომიური სისტემის წონასწორობის ან უძრავი წერტილი.

ყოველ $x_0 \in \Omega$ წერტილს, რომელიც სისტემის წონასწორობის წერტილი არ არის, ეწოდება ჩვეულებრივი წერტილი.

$f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველ ჩვეულებრივ წერტილს აქვს მიდამო, რომელიც კვლავ ჩვეულებრივი წერტილებისაგან შედგება, მაშინ როდესაც წონასწორობის წერტილი შეიძლება იყოს როგორც იზოლირებული, ისე არაიზოლირებული. თუ $x = \varphi(t)$, $t \in I$, განვიხილავთ როგორც ფაზური წერტილის მოძრაობას ფაზურ ტრაექტორიაზე, მაშინ წერტილის მოძრაობის სიჩქარე დროის t_0 მომენტში, თუ $\varphi(t_0) = x_0$, ემთხვევა $f(x_0)$ ვექტორს. ამ $f(x_0)$ ვექტორს ეწოდება (1) ავტონომიური სისტემის ფაზური სიჩქარე, ხოლო $f(x)$ ვექტორულ ველს ეწოდება (1) ავტონომიური სისტემის ფაზურ სიჩქარეთა ველი.

თეორემა 2. $x_0 \in \Omega$ წერტილი არის (1) ავტონომიური სისტემის წონასწორობის წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ფაზური სიჩქარე 0-ის ტოლია, ე.ი. როდესაც $f(x_0) = 0$.

თუ (1) სისტემის $x = \varphi(t)$ ამონახსნი განსაზღვრულია მთელ ნამდვილ R^1 ღერძზე და პერიოდული ვექტორ-ფუნქციაა პერიოდით $T > 0$, მაშინ მის შესაბამის ტრაექტორიას ეწოდება ჩაკეტილი ანუ ციკლი.

მოვიყვანოთ ავტონომიური სისტემის ტრაექტორიების კლასიფიკაციის თეორემა.

თეორემა 3. (1) ავტონომიური სისტემის ყოველი ფაზური ტრაექტორია არის ერთ-ერთი შემდეგი სამიდან:

- 1) წონასწორობის წერტილი;
- 2) ჩაკეტილი ტრაექტორია;
- 3) წირი თვითგადაკვეთის გარეშე.

როდესაც $n = 2$, შესაძლებელია ციკლის არ არსებობის საკმარისი პირობის მოყვანა. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4. თუ (1) სისტემა მოცემულია $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ბრტყელ არეზე და Ω -ზე ფაზური სიჩქარეების $f(x)$ ველი არის პოტენციალური, მაშინ Ω -ში (1) სისტემას არ აქვს ჩაკეტილი ტრაექტორია.

მაგალითად, $\mathbf{R}^2$ -ზე მოცემული $\dot{x} = Ax$ წრფივი სისტემისათვის $f(x) = Ax$ ვექტორული ველი არის პოტენციალური, თუ A მატრიცი სიმეტრიულია. ამრიგად, წრფივ სისტემას სიმეტრიული A მატრიცით არ აქვს ჩაკეტილი ტრაექტორია.

თუ ავტონომიური სისტემის ყოფაქცევას შევისწავლით მხოლოდ ლოკალურად, მაშინ ვნახავთ, რომ თვისობრივად ჩვეულებრივი წერტილის მოდამოში ფაზური ტრაექტორიები ერთნაირია. ამის გამო, საინტერესოა მხოლოდ წონასწორობის წერტილის მიდამო.

(1) ავტონომიური სისტემის ფაზური ტრაექტორიის გრაფიკულ (გეომეტრიულ) გამოსახულებას Ω არეში, ეწოდება *ფაზური პორტრეტი*.

დავუშვათ $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ არის (1), (2) კოშის ამოცანის ამონახსნი, რომელიც გაუგრძელებადია მთელ ნამდვილ $\mathbf{R}^1$ ღერძზე. დავუშვათ საწყისი x_0 მდგომარეობები, როდესაც $t = t_0$ ავსებენ ზომად $V_0 \subset \Omega$ სიმრავლეს, რომლის ზომა იყოს μV_0 . აღვნიშნოთ V_t -თი ზომადი $V_t \subset \Omega$ არე ზომით μV_t , რომელიც მიიღება დროის t მომენტისათვის V_0 -ის ძვრით (1) სისტემის $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ ამონახსნის ფაზური ტრაექტორიის გასწვრივ. V_0 და V_t სიმრავლეებს ფაზურ მოცულობებს უწოდებენ.

განმარტება. კოშის ამოცანას ეწოდება დასაშვები, თუ $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ არის დიფერენციალურ V_0 და V_t არეებს შორის.

თეორემა 5 (ლიუვილი). თუ კოშის (1), (2) ამოცანა დასაშვებია და Ω არეში

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$$

ტოლობა სრულდება, მაშინ (1)-ის ტრაექტორიების გასწვრივ ფაზური "მოცულობები" არ იცვლება. ე.ი. $\mu V_0 = \mu V_t$, ნებისმიერი t -სათვის.

$\operatorname{div} f(x) = 0$ ტოლობა ლიუვილის ზემოთ მოყვანილ თეორემაში მიუთითებს იმაზე, რომ $f(x)$ ვექტორული ველი Ω არეზე არის სოლენოიდალური. თუ $f(x) = Ax$, სადაც A მუდმივი მატრიცია, მაშინ $\operatorname{div} f(x) = A$ მატრიცის კვალის ტოლია. ჰამილტონური

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

განტოლებათა სისტემისათვის R^{2n} ფაზურ სივრცეში კოშის ამოცანა დასაშვებია და

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0.$$

მაშასადამე, ჰამილტონურ განტოლებათა სისტემის ტრაექტორიების გასწვრივ ფაზური მოცულობა არ იცვლება.

შევნიშნოთ, რომ (1) სისტემის ფაზური სივრცე საზოგადოდ არ ემთხვევა იმ Ω არეს, სადაც (1) სისტემა განსაზღვრული.

7.2 პირველი ინტეგრალი

დავუშვათ R^n -ის რაიმე ქვესივრცეზე -- Ω არეზე მოცემულია ავტონომიური სისტემა

$$\dot{x}(t) = f(t), \quad (1)$$

სადაც $t \in R^1$ და $f(x)$ არის Ω -ზე განსაზღვრული ნამდვილი, უწყვეტად დიფერენცირებადი ვექტორული ფუნქციაა კოორდინატებით $f_1(x), \dots, f_n(x)$. ვთქვათ, $x = \varphi(t)$ არის (1) სისტემის ამონახსნი, როდესაც $t \in I \subset R^1$.

განმარტება. Ω -ზე განსაზღვრულ $u(x)$ უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციას ეწოდება (1) ავტონომიური სისტემის პირველი ინტეგრალი, თუ $u(\varphi(t)) = \text{const}$ ყოველი $x = \varphi(t)$, $t \in I$, (1) სისტემის ამონახსნისათვის.

ამ განმარტებაში მოყვანილი მუდმივის პოვნა ძნელი არ არის. თუ $x = \varphi(t)$ ამონახსნი განისაზღვრება $(0, x_0)$ წერტილში საწყისი პირობით: $\varphi(0) = x_0 \in \Omega$, მაშინ ნათელია, რომ $u(\varphi(t)) \equiv u(\varphi(0)) = u(x_0)$. ამრიგად, $u(\varphi(t))$ დამოკიდებულია მხოლოდ სისტემის ტრაექტორიის არჩევაზე და არა t ცვლადზე.

პირველი ინტეგრალის ტრიალური მაგალითია $u(x) = \text{const}$ მუდმივი ფუნქცია. იმისათვის, რომ პირველი ინტეგრალების არატრიალური მაგალითები მოვიყვანოთ, საჭიროა პირველი ინტეგრალის აგების კრიტერიუმი. ქვემოთ, თეორემის სახით, სწორედ ასეთ კრიტერიუმს ჩამოვყალიბებთ. მანამდე მოვიყვანოთ ერთი განმარტება.

განმარტება. დავუშვათ $u(x)$ არის Ω არეზე განსაზღვრული უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია. $u(x)$ ფუნქციის წარმოებული

$f(x)$ ვექტორული ველის გასწვრივ ეწოდება $(f(x), \text{grad} u(x))$ სკალარულ ნამრავლს და აღინიშნება $\dot{u}(x)$ სიმბოლოთი:

$$\dot{u}(x) = (f(x), \text{grad} u(x)) = \sum_{j=1}^n f_j(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

შევნიშნოთ, რომ $u(x)$ ფუნქციის წარმოებული $f(x)$ ვექტორული ველის გასწვრივ არის l ($\|l\|=1$) მუდმივი ვექტორის გასწვრივ $u(x)$ ფუნქციის წარმოებულის განზოგადება და ახასიათებს $u(x)$ -ის ცვლილებას (მონოტონურობას) (1) სისტემის ფაზური ტრაექტორიის გასწვრივ.

თეორემა 1. Ω არეზე განსაზღვრული უწყვეტად დიფერენცირებადი $u(x)$ ფუნქცია არის (1) სისტემის პირველი ინტეგრალი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\dot{u}(x) = 0$ ყოველი x -სათვის Ω -დან.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^3 \end{cases}$$

სისტემის პირველი ინტეგრალი.

ამოხსნა. სისტემაში შემავალი განტოლებები ჯვარედინად გადავამრავლოთ და მივიღებთ:

$$(-x_1 + x_1^3)\dot{x}_1 = x_2\dot{x}_2.$$

აქედან

$$\frac{d}{dt} \left(x_1^2 - \frac{1}{2} x_1^4 + x_2^2 \right) = 0$$

და

$$x_1^2 - \frac{1}{2} x_1^4 + x_2^2 = c.$$

ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად $u(x_1, x_2) = x_1^2 - \frac{1}{2} x_1^4 + x_2^2$ არის

მოცემული ავტონომიური სისტემის პირველი ინტეგრალი, რადგან $\dot{u}(x_1, x_2) = 0$.

პირველი ინტეგრალი დაკავშირებულია $u(x)$ ფუნქციის დონის ზედაპირთან. პირველი ინტეგრალის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ (1) სისტემის ყოველი $x = \varphi(t)$ ტრაექტორია Ω -ში მდებარეობს $u(x)$ პირველი ინტეგრალის ერთ-ერთ დონის ზედაპირზე. როდესაც $n = 2$, მაშინ დონის ზედაპირის მაგივრად ლაპარაკობენ დონის წირზე (რადგან მიღებული ტოპოლოგიური სამრავლე 1-განზომილებიანია). ასეთი კავშირის ღირებულებაა შებრუნებული ამოცანის ამოხსნის გამარტივება. შებრუნებული ამოცანა კი მდგომარეობს იმის გარკვევაში, დონის წირებიდან რომელია

ავტონომიური სისტემის ტრაექტორია. ცნობილია, რომ თუ პირველი ინტეგრალის დონის წირი არის გლუვი და არ შეიცავს სისტემის წონასწორობის წერტილს, მაშინ ეს წირი არის ავტონომიური სისტემის ტრაექტორია ან ტრაექტორიის ნაწილი. ამრიგად, პირველი ინტეგრალის დონის წირის საშუალებით, ზოგიერთ შემთხვევაში, შესაძლებელია ავტონომიური სისტემის გლობალური ფაზური პორტრეტის მიღება.

თუ $u(x)$ არის (1) სისტემის არატრივიალური პირველი ინტეგრალი, ხოლო $\Phi(\zeta)$ -კი ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, რომლისთვისაც აზრი აქვს $\Phi(u(x))$ კომპოზიციას, მაშინ $v(x) = \Phi(u(x))$ აგრეთვე იქნება (1) ავტონომიური სისტემის პირველი ინტეგრალი, რადგან (1) სისტემის ნებისმიერი $x = \varphi(t)$ ტრაექტორიისათვის გვაქვს

$$v(\varphi(t)) = \Phi(u(\varphi(t))) = \Phi(c) = c_1, \quad \forall t \in I.$$

ამრიგად, საზოგადოდ (1) სისტემას აქვს უსასრულო რაოდენობის პირველი ინტეგრალები. მაგრამ, შესაძლებელია ისეთი პირველი ინტეგრალების არჩევა, რომელთა საშუალებითაც ნებისმიერი სხვა გამოისახება. ეს არჩეული ინტეგრალები არიან გარკვეული აზრით დამოუკიდებლები. დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალების ცნება დაზუსტებას მოითხოვს. რის გამოც მოვიყვანოთ მის განმარტებას.

განმარტება. (1) ავტონომიური სისტემის $u_1(x), \dots, u_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, პირველ ინტეგრალებს, $a \in \Omega$ წერტილის მიდამოში ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ იაკობის $u'(x) = \left(\frac{\partial u_i(a)}{\partial x_j} \right)$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$

მატრიცის რანგი k -ს ტოლია.

ამის შემდეგ შესაძლებელია ჩამოვაყალიბოთ $n-1$ რაოდენობის დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალის არსებობის საკმარისი პირობა და აღვწეროთ ნებისმიერი სხვა პირველი ინტეგრალის სტრუქტურა.

თეორემა 2. დაეუშვათ $a \in \Omega$ წერტილი არ არის (1) სისტემის წონასწორობის წერტილი. მაშინ ამ წერტილის ნებისმიერ $\Omega_a \subset \Omega$ მიდამოში არსებობს $n-1$ რაოდენობის დამოუკიდებელი $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$ პირველი ინტეგრალი. გარდა ამისა, თუ $u(x)$ ამ სისტემის რომელიმე პირველი ინტეგრალია Ω_a არეში, მაშინ არსებობს ისეთი უწყვეტად წარმოებადი $F(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$ ფუნქცია, რომ $u(x) = F(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x))$, ნებისმიერი x -სათვის Ω_a -დან.

ნათელია, რომ ამ თეორემაში მითითებული ინტეგრალთა დამოუკიდებელი სისტემა ერთადერთი არ არის. აღნიშნული სისტემის

არსებობა ლოკალური ხასიათისაა იმ აზრით, რომ ისინი F ფუნქციასთან ერთად არსებობენ მხოლოდ მითითებული წერტილის მიდამოში. იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც $a \in \Omega$ წერტილი არ არის წონასწორობის წერტილი, მის მიდამოში a წერტილზე დამოკიდებული F ფუნქცია შესაძლებელია მაინც არსებობდეს. ამასთან, წონასწორობის წერტილის მიდამოში დამოუკიდებელი ინტეგრალები შეიძლება არსებობდნენ და შეიძლება არც არსებობდნენ.

7.3 კონსერვატიული სისტემა ერთი თავისუფლების ხარისხით

პირველი ინტეგრალების ფიზიკური შინაარსის გასააზრებლად განვიხილოთ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე მექანიკური სისტემა ხახუნის გარეშე.

ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე კონსერვატიული სისტემა ეწოდება ისეთ სისტემას, რომელიც აღიწერება შემდეგი ავტონომიური სისტემით:

$$\ddot{x} = F(x) \quad (1)$$

სადაც F ნამდვილ რიცხვთა რაიმე I ინტერვალზე განსაზღვრული x ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

(1) განტოლება ექვივალენტურია განტოლებათა

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = F(x_1) \end{cases} \quad (2)$$

სისტემის, სადაც $(x_1, x_2) \in I \times \mathbf{R}$.

ზემოთ მოყვანილის შესაბამისად მექანიკაში მიღებულია შემდეგი ტერმინოლოგია: I -ს ეწოდება კონფიგურაციული სივრცე, $x_1 = x$ - კოორდინატი ეწოდება, $x_2 = \dot{x}$ -ს სიჩქარე, $\ddot{x}$ -ს აჩქარება, $I \times \mathbf{R}$ დეკარტულ ნამრავლს კი ეწოდება ფაზური სივრცე, (1) განტოლებას ეწოდება ნიუტონის განტოლება, F -ს ძალური ველი, ხოლო $F(x)$ -ს კი ძალა.

განვიხილოთ ფაზურ სივრცეზე განსაზღვრული შემდეგი ფუნქციები:

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{x_2^2}{2} \quad - \text{კინეტიკური ენერგია};$$

$$U = - \int_{x_0}^x F(\xi) d\xi \quad - \text{პოტენციალური ენერგია};$$

$$E = T + U \quad - \text{სრული ენერგია}.$$

თეორემა (ენერგიის შენახვის კანონი) *მექანიკური სისტემის სრული ენერგია არის (2) სისტემის პირველი ინტეგრალი.*

◀ რადგან $E = \frac{x_2(t)^2}{2} + U(x_1(t))$, ამიტომ პირველი ინტეგრალის

განმარტების თანახმად საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x_2(t)^2}{2} + U(x_1(t)) \right) = 0.$$

რადგან $\frac{dU}{dx} = -F(x)$, ამიტომ მივიღებთ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x_2(t)^2}{2} + U(x_1(t)) \right) = x_2 \dot{x}_2 + U' \dot{x}_1 = x_2 F(x_1) - F(x_1) x_2 = 0.$$

რაც ამტკიცებს თეორემას. ▶

მაგალითი 1. განვიხილოთ ჰამილტონის სისტემა, რომელიც აღწერს N თავისუფლების ხარისხის მქონე მექანიკური სისტემის მოძრაობას R^{2N} ფაზურ სივრცეში:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

ამ სისტემაში $H(q, p)$ უწყვეტად დიფერენცირებადი ე.წ. *ჰამილტონის ფუნქცია*. ჰამილტონის ფუნქციის წარმოებული $\dot{q}_i$ და $\dot{p}_i$ ვექტორული ველების გასწვრივ ნულია:

$$\dot{H}(q, p) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right) = 0,$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ $H(q, p)$ არის ჰამილტონის განტოლების პირველი ინტეგრალი იმისგან დამოუკიდებლად მას აქვს თუ არა წონასწორობის წერტილი.

კლასიკურ მექანიკაში მექანიკური სისტემის მოძრაობის პირველ ინტეგრალებს ჩვეულებრივ ამ სისტემის *მოძრაობის ინტეგრალებს* (ან *მოძრაობის კონსტანტებს*) უწოდებენ. პირველი ინტეგრალის განმარტებიდან გამომდინარე, რომ მოძრაობის ინტეგრალები ყოველთვის გამოხატავენ შენახვის რომელიმე (ენერგიის, იმპულსის და ა.შ.) კანონს. მაგალითად, ზემოთ მოყვანილ მაგალითში ვაჩვენეთ, რომ $H(q, p)$ არის პირველი ინტეგრალი. მეორეს მხრივ, მექანიკიდან ცნობილია, რომ $H(q, p)$ მექანიკური სისტემის სრული ენერგიაა. ე.ი. $H = T + U$, სადაც T კინეტიკური ენერგიაა, ხოლო U - კი პოტენციალური. ამრიგად, ის ფაქტი, რომ $H(q, p)$ პირველი ინტეგრალია ნიშნავს, რომ $H(q, p)$ ჰამილტონიანით მოცემული

მექანიკური სისტემისათვის სამართლიანია ენერგიის შენახვის კანონი. ამის გამო, $H(q, p)$ -ს ენერგიის ინტეგრალსაც უწოდებენ.

7.4 ორგანოზომილებიანი ავტონომიური სისტემა

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ორგანოზომილებიან ავტონომიურ განტოლებათა სისტემებს. ავტონომიური სისტემის ნაცვლად ხშირად იხმარება ტერმინი ავტონომიური განტოლება, ასეთი ტერმინოლოგია აღრევას არ იწვევს იმის გამო, რომ სისტემა შესაძლებელია ჩაიწეროს ვექტორული სახით და ფორმალურად მას სკალარული განტოლების სახე ექნება. ამიტომ, ჩვენ ორივე ტერმინს გამოვიყენებთ კონტექსტის შესაბამისად. აქ გავიმეორებთ ზოგიერთ ცნებას და დებულებას, რადგან გვინდა, რომ პარაგრაფი იყოს დამოუკიდებელი წინა პარაგრაფებისაგან.

განვიხილოთ შემდეგი ორგანოზომილებიანი ავტონომიური სისტემა

$$\dot{X}(t) = F(X(t)), \quad (1)$$

სადაც $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ და $F = (F_1, F_2)$. ამრიგად, (1) სისტემა გაშლილი სახით იწერება შემდეგი ფორმით:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = F_1(x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) = F_2(x_1(t), x_2(t)). \end{cases}$$

$C = (c_1, c_2)$ -ს ეწოდება (1)-ის სტაციონალური (განსაკუთრებული) წერტილი, თუ $F(C) = 0$. ყველა სხვა წერტილს, რომლისთვისაც ეს ტოლობა არ სრულდება, ეწოდება ჩვეულებრივი წერტილი. ამრიგად, $X(t) = C$ არის მოცემული განტოლების ამონახსნი, ხოლო მისი ინტეგრალური წირი კი არის წერტილი. თუ $F(C) \neq 0$, მაშინ განტოლების ამონახსნი ან იკლებს, ან იზრდება. ამონახსნის ასეთ გრაფიკულ სურათს ფაზური პორტრეტი ეწოდება. ფაზური პორტრეტი გამოსახავს ფაზური წერტილის სიჩქარის (ვექტორის) მიმართულებას. ეს კი ნიშნავს, რომ ფაზური პორტრეტი ასახავს სისტემის დინამიკის თვისობრივ სურათს.

დავუშვათ $C = (c_1, c_2)$ (1) სისტემის სტაციონალური წერტილია. განვიხილოთ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(c_1, c_2) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(c_1, c_2) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(c_1, c_2) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(c_1, c_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

წრფივი სისტემა, რომელსაც (1)-ის გაწრფივება ეწოდება C სტაციონალურ წერტილში. ხშირად წრფივი სისტემა საწყისი არაწრფივი სისტემაზე სრულ ინფორმაციას იძლევა.

განმარტება. მეორე რიგის ორ წრფივ ავტონომიურ სისტემას ეწოდება თვისობრივად ექვივალენტური, თუ არსებობს სიბრტყის (სიბრტყის ნაწილის) ისეთი ორიენტაციის შემნახველი ჰომეომორფიზმი თავის თავზე,

რომ პირველი სისტემის ფაზური პორტრეტი გადადის მეორის ფაზურ პორტრეტში.

ჩვეულებრივი წერტილის მიდამოში ყველა წრფივი სისტემა ერთმანეთის ექვივალენტურია. ამიტომ, დინამიური სისტემის თვისობრივი ანალიზის დროს საინტერესოა მხოლოდ განსაკუთრებული წერტილები. ამის გამო მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ განსაკუთრებული წერტილების კლასიფიკაცია. ეს უკანასკნელი ამოცანა 2×2 მატრიცების კლასიფიკაციის ექვივალენტურია.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ წრფივი ავტონომიური სისტემა მოცემულია

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ნამდვილი (ე.ი. $a_{ij} \in R^1$) მატრიცით. გავიხსენოთ შემდეგი თეორემა წრფივი ალგებრიდან.

თეორემა 1. ნებისმიერი ნამდვილი A მატრიცისათვის არსებობს ისეთი გადაუგვარებელი M მატრიცი, რომ $J = M^{-1}AM$ მატრიცს აქვს ქვემოთ მოყვანილიდან ერთ-ერთი სახე:

$$\begin{aligned} &\text{ა) } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1 > \lambda_2; \quad \text{ბ) } \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}; \\ &\text{გ) } \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}; \quad \text{დ) } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \beta > \alpha; \end{aligned}$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ და β ნამდვილი რიცხვებია.

თეორემაში მოყვანილ J მატრიცს A -ს *ჟორდანის (კანონიკური) ფორმა* ეწოდება. $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ და β რიცხვები განისაზღვრებიან A მატრიცის $\lambda^2 - \text{tr}A\lambda + \det A = 0$

მახასიათებელი განტოლებიდან. ამასთან, თუ განტოლების დისკრიმინანტი $\Delta = (\text{tr}A)^2 - 4\det A > 0$, J -ს აქვს ა) სახე; თუ $\Delta = 0$ და A დიაგონალური მატრიცია, მაშინ მისი კანონიკური სახეა ბ); ხოლო თუ A დიაგონალური არ არის, მაშინ A -ს ჟორდანის ფორმაა გ); ბოლოს, როდესაც $\Delta < 0$, მახასიათებელ განტოლებას აქვს ერთმანეთის შეუღლებული ორი კომპლექსური ფესვი $\alpha \pm i\beta$ და A დაიყვანება დ) კანონიკურ სახეზე.

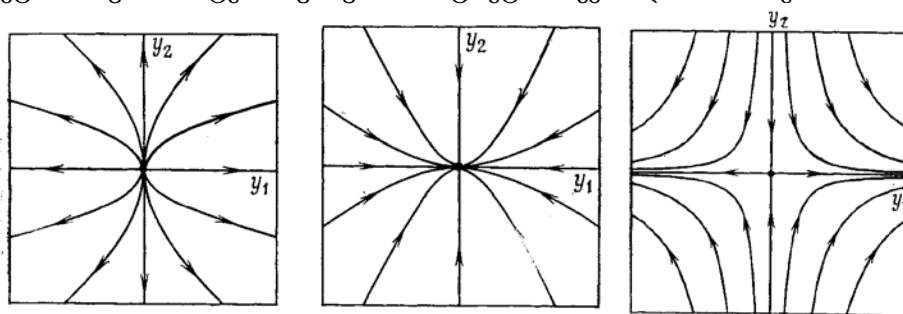
შენიშვნა. თეორემაში მითითებული M მატრიცი ცხადად იგება. მაგალითად, განსხვავებული ნამდვილი მახასიათებელი ფესვების შემთხვევაში მისი სვეტებია შესაბამისი მახასიათებელი ვექტორები.

განმარტება. ავტონომიურ სისტემას ეწოდება *მარტივი*, თუ მისი შესაბამისი მატრიცის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია.

მარტივ სისტემას აქვს ერთადერთი განსაკუთრებული წერტილი და იგი კოორდინატა სათავეა. მარტივი ავტონომიური სისტემის კლასიფიკაცია განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 2. მარტივი (1) ავტონომიური სისტემის ფაზურ პორტრეტს აქვს შემდეგი ათიდან ერთ-ერთი სახე:

1) როდესაც სისტემის კანონიკური სახეა ა) თეორემა 1-დან, ავტონომიური სისტემის ფაზური პორტრეტი მოყვანილია ნახ.1-ზე.



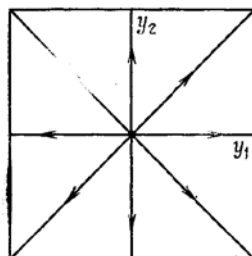
ა) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

ბ) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

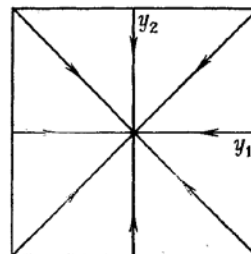
გ) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

ნახაზი 1

2) როდესაც სისტემის კანონიკური სახეა ბ) თეორემა 1-დან ავტონომიური სისტემის ფაზური პორტრეტი მოყვანილია ნახ.2-ზე.



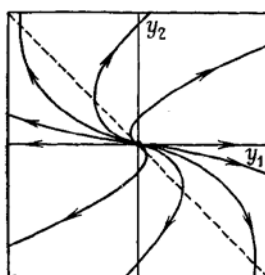
ა) $\lambda_0 > 0$



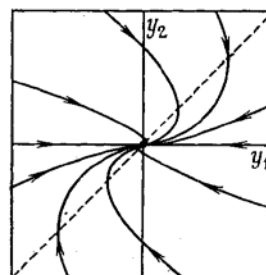
ბ) $\lambda_0 < 0$

ნახაზი 2

3) როდესაც სისტემის კანონიკური სახეა გ) თეორემა 1-დან ავტონომიური სისტემის ფაზური პორტრეტი მოყვანილია ნახ.3-ზე.



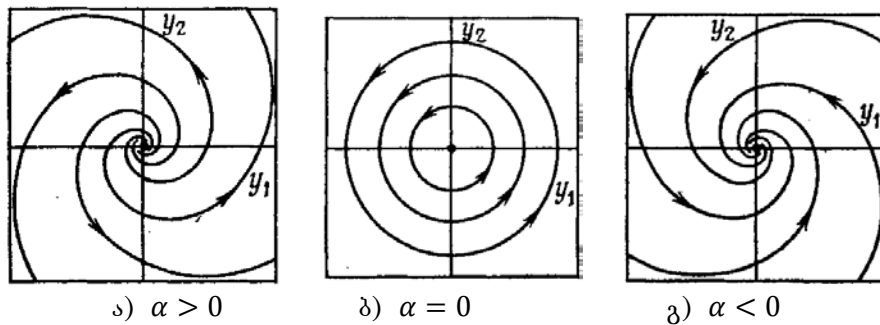
ა) $\lambda_0 > 0$



ბ) $\lambda_0 < 0$

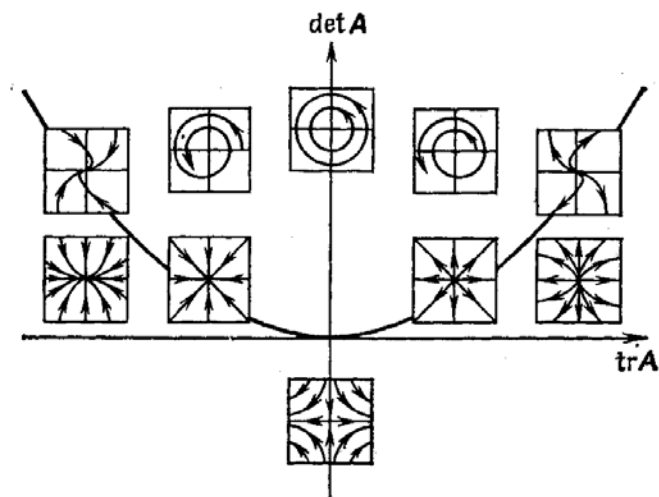
ნახაზი 3

4) როდესაც სისტემის კანონიკური სახეა დ) თეორემა 1-დან ავტონომიური სისტემის ფაზური პორტრეტი მოყვანილია ნახ.4-ზე.



ნახაზი 4

მარტივი ავტონომიური სისტემის ფაზური პორტრეტის დამოკიდებულება შესაბამისი მატრიცის კვალსა და დეტერმინანტზე სქემატურად გამოსახულია ნახ. 5-ზე.



ნახაზი 5

როდესაც ავტონომიური სისტემა არ არის მარტივი, მაშინ სისტემას კოორდინატთა სათავის გარდა სხვა სტაციონალური წერტილებიც აქვს. კერძოდ, თუ $\text{rank } A = 1$, მაშინ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრეების ნებისმიერი წერტილი არის სისტემის უძრავი წერტილი, ხოლო როდესაც $\text{rank } A = 0$, მაშინ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი ავტონომიური სისტემის სტაციონალური წერტილია.

ზემოთ ძირითადად განვიხილეთ წრფივი ავტონომიური სისტემები და არაწრფივი სისტემების გაწრფივების პროცედურა. საინტერესოა

ვიცოდეთ, რამდენად სრულ ინფორმაციას იძლევა გაწვრივებული სისტემა საწყის არაწრფივ სისტემაზე. ამაზე პასუხს იძლევა შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა 3. დავუშვათ არაწრფივი სისტემისათვის კოორდინატთა სათავე მარტივი განსაკუთრებული წერტილია (ეს ნიშნავს რომ შესაბამისი მატრიცი მარტივია). მაშინ ამ სისტემის და მისი გაწვრივების ფაზური პორტრეტები კოორდინატთა სათავეს მოდამოში თვისობრივად ექვივალენტურებია გარდა შემთხვევისა, როდესაც სისტემის მახასიათებელი ფესვები კომპლექსურია და მათი ნამდვილი ნაწილები (რომლებიც ერთმანეთის ტოლია) ნულოვანია.

მაგალითად,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases} \quad (1)$$

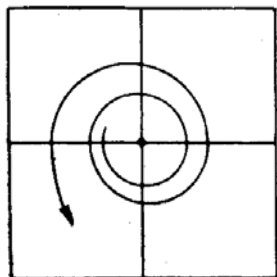
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases} \quad (2)$$

სისტემების გაწვრივებას $(0,0)$ სტაციონალური წერტილის მიდამოში მიყვავართ ერსადამავე წრფივ სისტემამდე, მაგრამ მათი ფაზური პორტრეტები კოორდინატთა სათავეში თვისობრივად ექვივალენტურები არ არიან.

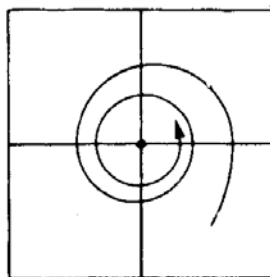
მართლაც, (1) და (2)-ის შესაბამისი წრფივი სისტემაა

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

სისტემა, რომლის მახასიათებელი ფესვებია $\pm i$, მისი ფაზური პორტრეტია ნახ.4 ბ) თეორემა 2-დან. მაშინ, როდესაც (1) და (2) სისტემების ფაზური პორტრეტები მოყვანილია შესაბამისად ნახ.6-სა და ნახ.7-ზე:



ნახ.6



ნახ.7

(1) (2) სისტემების სრული ანალისათვის ეს განტოლებათა სისტემები საჭიროა გადავწეროთ (r, θ) პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში, მივიღებთ სისტემებს:

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3, \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{r} = -r^3, \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

რომელთა ფაზური პორტრეტებიც ზემოთაა მოყვანილი და ისინი თვისობრივად ექვივალენტურები არ არიან, რადგან სიბრტის პოპოკრეფიზმი, რომელიც ერთ ფაზურ პორტრეტს მეორეში გადაიყვანს, არ შეინარჩუნებს ორიენტაციას.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. პარაგრაფ 7.4-ის თეორემა 1-ის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი მატრიცების ჟორდანის ფორმა და ამოწერეთ ის მატრიცი, რომელსაც ისინი ჟორდანის ფორმაზე მიყავს.

- 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. პასუხი $J = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. პასუხი $J = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
- 3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. პასუხი $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. აჩვენეთ, რომ შემდეგი სისტემების

- ა) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$, ბ) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 12x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -26x_1 - 8x_2 \end{cases}$, გ) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 10x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -28x_1 - 5x_2 \end{cases}$

კანონიკური სახეა შესაბამისად შემდეგი სისტემები

- ა) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$, ბ) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 \end{cases}$, გ) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 7x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 \end{cases}$.

3. გააწრფივეთ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_2 e^{x_1} \end{cases}$$

სისტემა $(0,0)$ სტაციონალური წერტილის მიდამოში და დახაზეთ მისი ფაზური პორტრეტი.

პასუხი: წრფივ სისტემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2. \end{cases}$$

4. იპოვეთ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 x_2 \end{cases}$$

სისტემის სტაციონალური წერტილების და გააწრფივეთ ამ წერტილების მიდამოში.

პასუხი: სტაციონალური წერტილებია: $(0,0)$; $(2,0)$. შესაბამისი წრფეები
 სისტემებია: $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$ და $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$.

5. პარაგრაფ 7.3-ის გამოყენებით იპოვეთ

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = -x + x^3 \end{cases}$$

სისტემის ჰამილტონიანი.

მითითება. სისტემის ჰამილტონიანი არის სისტემის პირველი ინტეგრალი.
 მოცემული სისტემა გადავწეროთ

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-x + x^3}{p}$$

სახით. მისი ამონახსნია $x^2 - \frac{1}{2}x^4 + p^2 = c$. აქედან ჰამილტონიანია
 $H(x, p) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + p^2$ ფუნქცია.

8 მდგრადობა

8.1 მდგრადობის ცნება და ძირითადი თეორემები

განმარტება. $\dot{x} = f(t, x)$ განტოლების $\bar{x}(t)$ ამონახსნს განსაზღვრულს $[t_0, \infty)$ ნახევარღერძზე, რომელიც აკმაყოფილებს $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ სასაზღვრო პირობას, ეწოდება მდრადი (ლიაპუნოვის აზრით), თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ დადებითი რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ დადებითი რიცხვი (დამოკიდებული მხოლოდ ε -ის არჩევაზე), რომ ნებისმიერი $\bar{x}_0$ -საგან განსხვავებული საწყისი x_0 მნიშვნელობისათვის, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა $|x_0 - \bar{x}_0| < \delta$ შესაბამისი $x(t)$ და $\bar{x}(t)$ ამონახსნებისათვის რომლებიც განსაზღვრულები არიან $[t_0, \infty)$ ნახევარღერძზე, სრულდება აგრეთვე უტოლობა

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon.$$

ზემოთ მოყვანილი განმარტებით $\bar{x}(t)$ ამონახსნის მდგრადობა ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის არსებობს მხოლოდ ε -ზე დამოკიდებული δ დადებითი რიცხვი ისეთი, რომ ნებისმიერი x_0 რიცხვისათვის, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა $|x_0 - \bar{x}_0| < \delta$, არსებობს განტოლების სხვა $x(t)$ ამონახსნი საწყისი პირობით $x(t_0) = x_0$, რომელიც განსაზღვრულია $[t_0, \infty)$ ნახევარღერძზე და ამ ნახევარღერძის ნებისმიერ $t \geq t_0$ წერტილში სრულდება უტოლობა $|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$.

აქედან, მარტივად ჩამოვყალიბებთ არამდგრადი ამონახსნის ცნებას.

განმარტება. $\bar{x}(t)$ ამონახსნს ეწოდება არამდგრადი, თუ არსებობს დადებითი $\varepsilon_0 > 0$, რომ ნებისმიერი δ დადებითი რიცხვისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $|x_0 - \bar{x}_0| < \delta$, x_0 წერტილზე გამავალი $x(t)$ ამონახსნი ან გაგრძელებადი არ არის მთელ ნახევარღერძზე ან არსებობს $\exists t \geq t_0$, რომ $|x(t) - \bar{x}(t)| \geq \varepsilon_0$.

ნათელია, რომ ზემოთ მოყვანილ განმარტებები სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $x(t)$ ვექტორული ფუნქციაა. ამ დროს შესაბამისი უტოლობები გაიგება როგორც ნორმის შეფასება ევკლიდურ სივრცეში.

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\dot{X}(t) = (F_1(X, t), \dots, F_n(X, t)),$$

სადაც $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, ჩავთვალოთ, რომ განტოლებათა სისტემა განსაზღვრულია X, t -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და

$$F_i(X, t), \frac{\partial F_i(X, t)}{\partial x_k}, \quad i, k = 1, \dots, n$$

უწყვეტი ფუნქციებია. ეს უზრუნველყოფს განტოლების ლოკალურად ამოხსნადობას წარმოებულის მიმართ და კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას. ვთქვათ $Y(t)$ განტოლებათა სისტემის ამონახსნია,

რომელიც განმარტებულია $t > a$ ნახევარღერძზე. ეს ამონახსნი $X(t_0) = Y(t_0)$ საწყისი პირობით ცალსახად განისაზღვრება, სადაც t_0 ნებისმიერი წერტილია $[a, \infty)$ ნახევარღერძიდან. განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი წარმოიდგინება

$$X(t) = Y(t) + U(t)$$

სახით. $U(t)$ -ს ეწოდება ძირითადი ამონახსნის შემფოთება და აკმაყოფილებს შემფოთების

$$\dot{U} = P(U, t)$$

განტოლებათა სისტემას, სადაც

$$P(U, t) = F(Y(t) + U(t), t) - F(Y(t), t).$$

შემფოთების განტოლებას ყოველთვის აქვს $U_0(t) \equiv 0$ ($a < t < \infty$) ნულოვანი ამონახსნი, რომელსაც ტრივიალური ამონახსნი ეწოდება.

დებულება 1. განტოლებათა სისტემის ამონახსნი მდგრადია ლიაპუნოვის აზრით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მდგრადია შემფოთების განტოლებათა სისტემის ტრივიალური ამონახსნი.

ამრიგად, განტოლების ამონახსნის მდგრადობა ექვივალენტურია შემფოთების განტოლების ტრივიალური ამონახსნის მდგრადობის. გარდა ამისა, მდგრადობა არის ამონახსნის საწყისი პირობებზე თანაბრად უწყვეტად დამოკიდებულების თვისება მთელ $[a, \infty)$ ნახევარღერძზე.

განმარტება. განტოლებათა სისტემის $Y(t)$ ამონახსნს ეწოდება ასიმპტოტურად მდგრადი, თუ იგი მდგრადია ლიაპუნოვის აზრით და ნებისმიერი t_0 -სათვის ($a < t_0 < \infty$) არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ ყველა $X(t)$ ამონახსნისათვის, რომლებისთვისაც სრულდება უტოლობა

$$|X(t_0) - Y(t_0)| < \delta,$$

სამართლიანია თანადობა

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t) - Y(t)| = 0.$$

კერძოდ, ტრივიალური $U_0(t)$ ამონახსნი ასიმპტოტურად მდგრადია, თუ იგი მდგრადია და $\lim_{t \rightarrow \infty} |U(t)| = 0$, როდესაც $|U(t_0)| < \delta$.

განვიხილოთ

$$\dot{X} = (F_1(X), \dots, F_n(X)) \quad (1)$$

ავტონომიური სისტემა უწყვეტი ვექტორული ველით და ვთქვათ $X(t_0) \equiv X_0$ ვექტორი მისი წონასწორობის (სტაციონალური) წერტილია. ე.ი. $F(X_0) = 0$. (1) სისტემის პარალელურად განვიხილოთ წრფივი სისტემა

$$\dot{U} = F'_X(X_0)U, \quad (2)$$

სადაც $F'_X(X_0) = \left(\frac{\partial F_i(X_0)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$ კერძო წარმოებულებისაგან შედგენილი

მატრიცია გამოთვლილი X_0 -ში და ამრიგად, იგი მუდმივია. (1) სისტემიდან (2)-ზე გადასვლის პროცედურას ეწოდება (1) სისტემის გაწრფივება X_0 სტაციონალურ წერტილში. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. იმისათვის, რომ X_0 ამონახსნი იყოს ასიმპტოტურად მდგრადი, საკმარისია, რომ ამ თვისების მატარებელი იყოს (2) წრფივი სისტემის ნულოვანი ამონახსნი.

შევნიშნოთ, რომ წრფივი სისტემის შემთხვევაში მისი ყველა ამონახსნი ან მდგრადია ან არამდგრადი. იგივეა სამართლიანი ასიმპტოტურად მდგრადი ამონახსნისათვის. ამის გამო, შეგვიძლია ვილაპარაკოთ არა ცალკეული ამონახსნის მდგრადობაზე, არამედ თვით სისტემის მდგრადობაზე.

$$\dot{y}(t) = Ay(t) \quad (2)$$

მუდმივ კოეფიციენტებიანი განტოლებათა სისტემა ავტონომიური სისტემაა, ამიტომ მასზე ვრცელდება ზემოთ მოყვანილი თეორემები. მისი მდგრადობის კრიტერიუმი მოყვანილია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 2. მუდმივ კოეფიციენტებიანი სისტემის მდგრადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ კოეფიციენტთა მატრიცის მახასიათებელი რიცხვების ნამდვილი ნაწილები იყვნენ უარყოფითი რიცხვები.

თეორემა 2-ის თანახმად (2) მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემის მდგრადობის დასადგენად საჭიროა ვიპოვოთ

$$\det(A - \lambda I) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (3)$$

n -ური ხარისხის, სადაც n არის A მატრიცის რიგი, მრავალწევრის ფესვები, რაც საზოგადოდ, როდესაც $n \geq 5$, შეუძლებელია. შემდეგი თეორემა, რომელიც ცნობილია სისტემის მდგრადობის რაუს-ჰურვიცის კრიტერიუმის სახელწოდებით, საშუალებას იძლევა გვერდი ავუაროთ (3) მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვების პოვნას.

თეორემა 3 (რაუს-ჰურვიცი). იმისათვის, რომ (3) მახასიათებელი მრავალწევრის მახასიათებელ ფესვებს ჰქონდეთ უარყოფითი ნამდვილი ნაწილები, აუცილებელია და საკმარისი რომ

1) (3) მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი იყოს დადებითი. ე.ი. $a_j > 0, j = 1, \dots, n$ და

2) ჰურვიცის მატრიცის დეტერმინანტი

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

ყველა მთავარი Δ_j , $j = 1, \dots, n$ მინორი იყოს დადებითი, სადაც

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}, \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \dots, \Delta_n = \Delta.$$

ჰურვიცის მატრიცის აგების წესი. ჰურვიცის მატრიცი არის n -ური რიგის მარტივი, რომლის მთავარ დიაგონალზე დგას (3) მრავალწევრის კოეფიციენტები დაწყებული λ^{n-1} -ის კოეფიციენტიდან. პირველ სტრიქონში კი კენტი ინდექსის მქონე კოეფიციენტები ზრდადი მიმდევრობით არიან მოთავსებული, თუ ინდექსი მრავალწევრის ხარისხს აღემატება, მაშინ იწერება 0. ყოველი მომდევნო სტრიქონი მიიღება წინა სტრიქონისაგან შესაბამისი ელემენტების ინდექსის ერთი ერთეულით შემცირებით, მანამ, სანამ ინდექსი უარყოფითი არ გახდება, ამდროს კი იწერება 0. Δ_j , $j = 1, \dots, n$ მატრიცები მიიღება ჰურვიცის მატრიციდან მიმდევრობით $1, \dots, n$ ზომის კვადრატული მატრიცების ამოჭრით დაწყებული ზედა მარცხენა კუთხიდან.

ზემოთ მოყვანილი მდგრადობის კრიტერიუმები გამოვიყენოთ ორგანოზომილებიანი ავტონომიური სისტემების მდგრადობის გამოსაკვლეველად. ვისარგებლოთ პარაგრაფ 7.4-ის აღნიშვნებით და თეორემა 1 და თეორემა 2-ით ამავე პარაგრაფიდან.

დავუშვათ მარტივი ავტონომიური სისტემის მახასიათებელი რიცხვები ნამდვილი და ერთმანეთისგან განსხვავებულია. თუ ისინი ორივე დადებითია, მაშინ ავტონომიური სისტემა არამდგრადია და შესაბამისად სტაციონალურ წერტილს ეწოდება *არამდგრადი კვანძი*, მისი ფაზური პორტრეტი თეორემა 3-ის ნახ. 1 ბ). როდესაც ერთი ფესვი დადებითია და მეორე კი უარყოფითი, სტაციონალურ წერტილს ეწოდება *უნაგირი*. ნათელია, რომ უნაგირი არამდგრადი სტაციონალური წერტილია. ფაზური პორტრეტი მოცემულია თეორემა 3-ის ნახ.1 ბ)-ით. იმ შემთხვევაში, როდესაც ორივე ნამდვილი ფესვი უარყოფითია, სისტემა მდგრადია და შესაბამისად სტაციონალური წერტილს ეწოდება *მდგრადი კვანძი*. ფაზური პორტრეტი მოცემულია თეორემა 3-ის ნახ.1 გ)-ით. ამით ჩვენ ამოვწურეთ განსხვავებული ნამდვილი ფესვების შემთხვევა. როდესაც სისტემის მახასიათებელი ფესვები ნამდვილი და ერთმანეთის ტოლია, შესაბამისი ფაზური პორტრეტები მოცემულია თეორემა 3-ის ნახ. 2 და ნახ.3-ით, იმის შესაბამისად, როგორია მატრიცის კანონიკური სახე. ამასთან, სისტემა შეიძლება იყოს როგორც მდგრადი, ასევე არამდგრადი იმის შესაბამისად დადებითია (არამდგრადი) თუ უარყოფითი (მდგრადი) მახასიათებელი ფესვი. ნახ.2-ზე მოცემულია მდგრადი ($\lambda_0 < 0$) და არამდგრადი ($\lambda_0 > 0$) სტაციონალური წერტილის, რომელსაც *ვარსკვლავისებური კვანძი* ეწოდება, წერტილის ფაზური პორტრეტი, შესაბამისად, ნახ. 3 არის მდგრადი ($\lambda_0 < 0$) და არამდგრადი ($\lambda_0 > 0$) *გადაკვარებული კვანძის* ფაზური პორტრეტები. ბოლოს განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც მახასიათებელი

რიცხვები ერთმანეთის შეუღლებული კომპლექსური ფესვებია. როდესაც კომპლექსური ფესვის ნამდვილი ნაწილი დადებითია (შესაბამისი ფაზური პორტრეტი მოცემილია ნახ.4 ა)-თი) სტაციონალურ წერტილს ეწოდება არამდგრადი ფოკუსი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი (მას შეესაბამება ნახ. 4 გ) ფაზური პორტრეტი) მდგრადი ფოკუსი. როდესაც ფესვის ნამდვილი ნაწილი 0-ია, განსაკუთრებულ წერტილს ცენტრი ეწოდება. ნათელია, რომ ცენტრი არამდგრადი განსაკუთრებული წერტილია თეორემა 2-ის თანახმად.

8.2 განტოლებათა პერიოდული სისტემა და მისი მდგრადობა

დავუბრუნდეთ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (1)$$

სადაც $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, ხოლო

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$$

პერიოდული მატრიცული ფუნქციაა პერიოდით ω :

$$A(t + \omega) = A(t).$$

ჩვენი მიზანია (1) სისტემის მდგრადობის საკითხის შესწავლა.

პირველ რიგში ვთქვათ $A(t)$ სკალარული ფუნქციაა და $A(t) = a(t)$. მაშინ (1) სისტემა გადაიქცევა პირველი რიგის ერთგვაროვან სკალარულ დიფერენციალურ განტოლებად

$$x'(t) = a(t)x(t), \quad (2)$$

პერიოდული $a(t)$ ფუნქციით.

(2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩვენთვის ცნობილია

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

გამოვთვალოთ $x(t + \omega)$:

$$x(t + \omega) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t+\omega} a(s) ds} = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} e^{\int_t^{t+\omega} a(s) ds} = x(t) e^{\int_t^{t+\omega} a(s) ds}.$$

რადგან $a(t)$ პერიოდულია, ამიტომ

$e^{\int_t^{t+\omega} a(s) ds}$ დამოკიდებული არ არის t -ზე და ტოლია $e^{\int_{t_0}^{t_0+\omega} a(s) ds}$ რიცხვის, რომელიც აღვნიშნოთ μ -თი.

ამრიგად, მივიღეთ

$$x(t + \omega) = \mu x(t).$$

μ -ს ეწოდება (2) განტოლების მულტიპლიკატორი და გამოითვლება ფორმულით:

$$\mu = e^{\int_{t_0}^{\omega} a(s) ds}.$$

მულტიპლიკატორის საშუალებით შესაძლებელია (2) განტოლების $x(t)$ ამონახსნი გავაგრძელოთ მთელ $[0, \infty)$ ნახევარღერძზე თუ იგი ცნობილია მხოლოდ $[0, \omega]$ სეგმენტზე. ამისათვის საკმარისია ვისარგებლოთ (3) ფორმულით და მათემატიკური ინდუქციით:

$$x(t + n\omega) = \mu^n x(t). \quad (4)$$

ახლა (4) ტოლობის გამოყენებით გამოვიკვლიოთ (2) დიფერენციალური განტოლების მდგრადობა.

დავუშვათ $|\mu| > 1$. მაშინ ნებისმიერი ფიქსირებული t -სათვის გვაქვს $|x(t + n\omega)| \rightarrow \infty$. ამრიგად, (2) განტოლების ამონახსნი შემოუსაზღვრელია. თეორემა 1-ის თანახმად ეს კი ნიშნავს, რომ (2) განტოლება არამდგრადია. ახლა ვთქვათ $|\mu| \leq 1$. (4)-დან გვაქვს

$$\sup_{t \in [0, \infty)} |x(t)| = \sup_{t \in [0, \omega]} |x(t)|.$$

რაც ნიშნავს, რომ (2)-ის ყველა ამონახსნი შემოსაზღვრულია $[0, \infty)$ ნახევარღერძზე. აქედან კი თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ როდესაც $|\mu| \leq 1$ (2) განტოლება მდგრადია.

ამრიგად, (2) განტოლების მდგრადობის ამოცანა დაყვანილი იქნა განტოლების მულტიპლიკატორის ანალიზზე, ანუ განტოლება მდგრადი ან არამდგრადი იმის შესაბამისად, მულტიპლიკატორი მეტია თუ ნაკლებია ან ტოლი 1-ზე.

ახლა დავუბრუნდეთ (1) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. რადგან ჩვენ ცალკეული ამონახსნის ქცევა კი არ გვაინტერესებს, არამედ ამონახსნთა ერთობლიობის, ამის გამო განვიხილოთ ფუნდამენტური მატრიც-ფუნქციის ყოფაქცევა. კერძოდ, ის ფუნდამენტური მატრიცი განვიხილოთ, რომელიც ნორმირებულია: ე.ი. ნულში იგი ერთეულოვანი მატრიცის ტოლია. აღვნიშნოთ $\Phi(t)$ -თი ფუნდამენტური მატრიცი, მაშინ იგი დააკმაყოფილებს შემდეგ მატრიცულ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \quad (5)$$

ხოლო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $X(0) = X_0$, მიიღება $\Phi(t)$ მატრიც-ფუნქციისაგან შემდეგი თანადობით:

$$X(t) = \Phi(t)X_0.$$

ამის გამო საკმარისია შევისწავლოთ ფუნდამენტური მატრიც-ფუნქცია.

ლემა 1. $\Phi(t + \omega) = \Phi(t)\Phi(\omega)$.

◀ამ ტოლობის ორივე მხარეს მდგომი მატრიც-ფუნქციები არიან (5) მატრიცული განტოლების ამონახსნები. მართლაც, $\Phi(t + \omega) = A(t + \omega)\Phi(t + \omega) = A(t)\Phi(t + \omega)$. რაც ნიშნავს იმას, რომ $\Phi(t + \omega)$ არის (5)-ის ამონახსნი, რადგან ის წარმოადგენს ფუნდამენტური და ნამდვილი მატრიცის ნამრავლს. ორივე მატრიც-ფუნქცია $\Phi(t)$ და $\Phi(t + \omega)$ აკმაყოფილებენ ერთსადაიმავე საწყის პირობებს:

$$\Phi(0 + \omega) = \Phi(\omega), \quad \Phi(0)\Phi(\omega) = I\Phi(\omega) = \Phi(\omega),$$

სადაც I ერთეულოვანი მატრიცია. ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად ისინი ვალდებული არიან ერთმანეთის ტოლობი იყვნენ.▶

ლემა 1-დან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

დებულება 1. $\Phi(t + n\omega) = \Phi(t)\Phi^n(\omega)$.

ამრიგად, $\Phi(\omega)$ მუდმივი მატრიცია ასრულებს იგივე როლს, რასაც ასრულებდა მულტიპლიკატორი სკალარული განტოლების შემთხვევაში. $\Phi(\omega)$ -ს ეწოდება (1) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის მულტიპლიკატორი. სიმარტივისათვის იგი M -ით აღვნიშნოთ. მონოდრომიის მატრიცის საკუთრივი ვექტორებისა და საკუთრივი რიცხვების საშუალებით (1) სისტემის მდგრადობის კრიტერიუმი ყალიბდება შემდეგნაირად.

თეორემა 2. იმისათვის, რომ პერიოდული სისტემა იყოს მდგრადი, აუცილებელია და საკმარისი სისტემის მონოდრომიის მატრიცის საკუთრივი რიცხვების მოდულები არ აღემატებოდეს 1-ს, თუ მოდული 1-ის ტოლია, მაშინ ასეთი მახასიათებელ რიცხვებს უნდა შეესაბამებოდეს მხოლოდ ერთი საკუთრივი ვექტორი და არა მიკავშირებულ ვექტორთა ჯაჭვი.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს პერიოდული სისტემის არამდგრადობის პირობა.

შედეგი 1. იმისათვის, რომ პერიოდული სისტემა იყოს არამდგრადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსებობდეს ერთი მაინც მახასიათებელი რიცხვი მოდულით მეტი ან ტოლი 1-ზე, რომელსაც შეესაბამება არამართო საკუთრივი ვექტორი, არამედ მიკავშირებული ვექტორებიც.

როგორც ვნახეთ, პერიოდული სისტემის მდგრადობის საკითხი წყდება მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემის მდგრადობის ანალოგიურად. ეს ფაქტი გასაკვირი არ არის შემდეგი თეორემის გამო.

თეორემა 3. (ფლოკე) პერიოდულ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ექვივალენტურია გარკვეული მუდმივ კოეფიციენტებიანი განტოლებათა სისტემის. უფრო მეტიც, ნებისმიერი ω -პერიოდული $A(t)$ მატრიც-ფუნქციისათვის არსებობს ω -

პერიოდული $P(t)$ მატრიცული ფუნქცია და B მუდმივი მატრიცი, ისეთი რომ $\Phi(t) = P(t)e^{Bt}$. ამასთან $e^{B\omega} = \Phi(\omega) = M$.

თეორემა 3-ში მოყვანილი სისტემების ექვივალენტურობა გაიგება შემდეგნაირად. დავუშვათ მოცემულია ორი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (a)$$

და

$$Y'(t) = B(t)Y(t) \quad (b)$$

ვიტყვი, რომ (a) და (b) სისტემები ერთმანეთის ექვივალენტურები არიან, თუ არსებობს ისეთი $C(t)$ გადაუვარებელი მატრიც-ფუნქცია, რომ $A(t) = C^{-1}(t)B(t)C(t) + C'(t)C^{-1}(t)$. ნათელია, რომ თუ $X(t)$ არის (a) სისტემის რომელიმე ამონახსნი, ხოლო $Y(t)$ კი (b) სისტემის ამონახსნი, მაშინ ისინი ერთმანეთს უკავშირდებიან ტოლობით: $X(t) = C(t)Y(t)$. (a) სისტემა ექვივალენტურია მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემის ბუნებრივია ნიშნავს, რომ (b) სისტემაში შემავალი $B(t)$ მატრიც-ფუნქცია მუდმივია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. გამოიკვლიეთ შემდეგი განტოლების ტრივიალური ამონახსნის მდგრადობა.

1) $x^{(4)}(t) + 5x'''(t) + 13x''(t) + 9x'(t) + 10x(t) = 0$. პასუხი:

ასიმპტოტურად მდგრადია.

2) $x'''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$. პასუხი: არამდგრადია.

3) $x'''(t) + 5x''(t) + 9x'(t) + 5x(t) = 0$. პასუხი: მდგრადია.

2. გამოიკვლიეთ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2^3 \end{cases}$$

არაწრფივი სისტემის მდგრადობა კოორდინატთა სათავეში.

პასუხი: კოორდინატთა სათავე არის მდგრადი ფოკუსი.

9 სასაზღვრო ამოცანა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

9.1 სასაზღვრო ამოცანის დასმა

მეორე რიგის ნებისმიერი განტოლება უწყვეტი კოეფიციენტებით

$$p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0 \quad (1)$$

შესაძლებელია ჩაწერილი იქნას შემდეგი სახით:

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = 0, \quad (2)$$

რომელსაც მეორე რიგის განტოლების თვითშეუღლებული ფორმა ეწოდება.

(1)-დან (2)-ზე გადასვლა ხდება (1)-ის ყველა წევრის

$$r(x) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$$

ფუნქციაზე გამრავლებით და $p(x) = e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$, $q(x) = \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$

აღნიშვნების შემოტანით. მართლაც

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} \frac{dy}{dx} \right) + \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} y(x) &= e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} \frac{dy}{dx} + e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} \frac{d^2 y}{dx^2} + \\ &\frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} y(x), \end{aligned}$$

თუ ამ გამოსახულებას 0-ს გავუტოლებთ, მივიღებთ (1)-ს.

განვიხილოთ შემდეგი **ამოცანა**. ვიპოვოთ $[x_0, x_1]$ ჩაკეტილ მონაკვეთზე განსაზღვრული $y(x)$ ფუნქცია, რომელიც არის

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x) \quad (3)$$

წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლების ისეთი ამონახსნი რომელიც თავისი განსაზღვრის არის საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = \omega_0, \quad \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = \omega_1. \quad (4)$$

(3),(4)-ს ეწოდება **სასაზღვრო ამოცანა** $y(x)$ ფუნქციისათვის. თუ $\omega_0 = \omega_1 = 0$, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია **ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანა**.

(3), (4) ამოცანაში f და q ცნობილი, (x_0, x_1) ღია მონაკვეთზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციებია, $p(x) \neq 0$ უწყვეტად დიფერენცირებადია (x_0, x_1) -ზე, ხოლო $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega_0, \omega_1$ მოცემული რიცხვებია.

კოშის ამოცანისაგან განსხვავებით, სასაზღვრო ამოცანას ყოველთვის ამონახსნი არ აქვს.

მაგალითად, ა) $y'' + y = 0, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $y = a \sin t$.

ბ) $y'' + y = 0, y(0) = 0, y(\pi) = b, b \neq 0$ არ აქვს ამონახსნი;

გ) როდესაც $b = 0$ ამოცანას აქვს მრავალი ამონახსნი: $y = csint$, სადაც c ნებისმიერი რიცხვია.

9.2 სასაზღვრო ამოცანის გრინის ფუნქცია

განვიხილოთ x ცვლადის $G = G(x, s)$ ფუნქცია, სადაც $x \in [x_0, x_1]$, $s \in (x_0, x_1)$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. იგი უწყვეტია;
2. როდესაც $x \neq s$ აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{d}{dx}(p(x)G'_x) + q(x)G = 0$$

და (2) ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს;

3. დიფერენცირებადია x -ის მიმართ და მის წარმოებულს, როდესაც $x = s$ აქვს $\frac{1}{p(s)}$ -ის ტოლი ნახტომი (ე.ი. $G'_x|_{x=s+0} - G'_x|_{x=s-0} = \frac{1}{p(s)}$);

თუ ასეთი G ფუნქცია არსებობს, მას ეწოდება (1), (2) ამოცანის გრინის ფუნქცია.

ამ ტერმინთან დაკავშირებით რამდენიმე ზოგადი სახის შენიშვნა გავაკეთოთ. გრინის ფუნქცია იმ ტიპის ფუნქციების ზოგადი სახელია, რომელიც განტოლების ამონახსნის ინტეგრალურ წარმოდგენას გვაძლევს.

წრფივი დიფერენციალური განტოლების კოშის ამოცანის გრინის ფუნქცია არის განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნი, რომელიც ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს. გრინის ფუნქცია არის იმ ინტეგრალური ოპერატორის ბირთვი, რომელიც წარმოადგენს ნულოვანი სასაზღვრო პირობების მქონე წრფივი დიფერენციალური განტოლების შესაბამისი დიფერენციალური ოპერატორის შებრუნებულს. გრინის ფუნქციის საშუალებით იგება ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების მქონე არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

ზემოთ მოყვანილი განმარტება არის ის ზოგადი თვისება, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქცია, რომ ის იყოს რომელიმე დიფერენციალური ოპერატორის გრინის ფუნქცია.

თუ G (1), (2) ამოცანის გრინის ფუნქციაა და $\omega_0 = \omega_1 = 0$, მაშინ (1), (2) ამოცანის ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s)f(s)ds.$$

ამოცანა 1. ამოვსხნათ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა $y''(x) - y'(x) = 0, y(0) = -1, y'(1) - y(1) = 2$.

პირველ რიგში დავწეროთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი $y(x) = C_1 + C_2 e^x$. სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას C_1, C_2 უცნობი მუდმივებისათვის: $C_1 + C_2 = -1, C_2 e - C_1 - C_2 e = 2$. საიდანაც ვღებულობთ: $C_1 = -2, C_2 = 1$. აქედან, სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი იქნება $y(x) = -2 + e^x, 0 \leq x \leq 1$.

ამოცანა 2. ვიპოვოთ $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y'(0) = 2, y(+\infty) = 0$.

დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$. რადგან სასაზღვრო პირობის თანახმად $y(+\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$, ამიტომ $C_2 = 0$. $y'(0) = 2$ სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $C_1 = -2$. საბოლოოდ სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი იქნება $y(x) = -2e^{-x}, 0 \leq x < +\infty$.

ამოცანა 3. ამოვხსნათ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა

$$y''(x) - 2iy(x) = 0, \quad y(0) = -1, \quad y(+\infty) = 0.$$

დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი განტოლებას აქვს სახე $\lambda^2 = 2i \Rightarrow \lambda = \pm(1+i)$. აქედან ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y(x) = C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{-(1+i)x} \Rightarrow y(x) = C_1 e^x (\cos x + i \sin x) + C_2 e^{-x} (\cos x - i \sin x).$$

რადგან $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, ხოლო $y(0) = -1 \Rightarrow C_2 = -1$. ვღებულობთ ამოცანის შემდეგ ამონახსნს

$$y(x) = e^{-x} (i \sin x - \cos x), \quad 0 \leq x < +\infty.$$

ამოცანა 4. ვიპოვოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი $x^2 y''(x) - 2x y'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(x) = o(x) \text{ როდესაც } x \rightarrow 0, \quad y(1) = 3$.

მოცემული განტოლება ეილერის განტოლებაა. მის კერძო ამონახსნებს აქვთ სახე $y(x) = x^\lambda$, სადაც λ არის შემდეგი

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

მახასიათებელი განტოლების ამონახსნებია: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. ამიტომ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება $y(x) = C_1 x + C_2 x^2$. პირველი სასაზღვრო პირობა ნიშნავს, რომ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x} = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $C_1 = 0$, მეორე სასაზღვრო პირობიდან კი გვაქვს $C_2 = 3$. ამრიგად, მოცემული სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნია $y(x) = 3x^2, 0 \leq x \leq 1$.

ამოცანა 5. a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის არ აქვს

$$y''(x) + ay(x) = 1, y(0) = 0, y(1) = 0$$

სასაზღვრო ამოცანას ამონახსნი?

პირველ რიგში ვპოულობთ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელ ფესვებს $\lambda^2 + a = 0$ მახასიათებელ განტოლებიდან: $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-a}$, როდესაც $a \neq 0$ და $\lambda_{1,2} = 0$, როდესაც $a = 0$. მის შესაბამისად განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} + C_1 e^{\sqrt{-a}x} + C_2 e^{-\sqrt{-a}x}, \\ \frac{x^2}{2} + d_1 x + d_2. \end{cases}$$

სასაზღვრო პირობების გამოყენებით მივიღებთ

$$C_1 + C_2 + \frac{1}{a} = 0, \quad \frac{1}{a} + C_1 e^{\sqrt{-a}} + C_2 e^{-\sqrt{-a}} = 0 \quad (\text{როდესაც } a \neq 0), \quad (1)$$

$$d_1 = -\frac{1}{2}, \quad d_2 = 0 \quad (\text{როდესაც } a = 0).$$

სისტემა (1) არაერთგვაროვანია. მას ამონახსნი არ აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-a}} & e^{-\sqrt{-a}} \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

და ერთ-ერთი

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1/a & 1 \\ -1/a & e^{-\sqrt{-a}} \end{vmatrix} \text{ ან } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1/a \\ e^{\sqrt{-a}} & -1/a \end{vmatrix} \quad (3)$$

დეტერმინანტი განსხვავებულია 0-საგან. (2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$a = k^2 \pi^2, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

(4)-ის გათვალისწინებით (3)-დან მივიღებთ, რომ $\cos k\pi \neq 1$. ამრიგად, k არ უნდა იყოს ლუწი და $k \neq 1$. ამრიგად, თუ $a = (2m+1)^2 \pi^2, m \in \mathbb{Z}$ (1) სისტემას ამონახსნი არ აქვს. ეს კი ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში ამონახსნი არ აქვს სასაზღვრო ამოცანას.

ამოცანა 6. ავაგოთ გრინის ფუნქცია შემდეგი სასაზღვრო ამოცანისათვის: $y''(x) = f(x), y(0) = 0, y(1) = 0$.

ამ ამოცანაში $p(x) = 1, q(x) = 0$. გრინის ფუნქციის განმარტების თანახმად $\frac{d}{dx} \left(\frac{dG(x,s)}{dx} \right) = 0$, ანუ $G_{xx}(x,s) = 0$ და $G(x,s)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს: $G(0,s) = G(1,s) = 0, 0 \leq x \leq 1, x \neq s$ და მისი წარმოებულს გააჩნია $p(x) = 1$ -ის ტოლი ნახტომი, ე.ი. $G'_x|_{x=s+0} - G'_x|_{x=s-0} = 1$. $G_{xx}(x,s) = 0$ განტოლების ერთხელ ინტეგრებით მივიღებთ:

$$G'_x(x,s) = \begin{cases} C_1, & 0 \leq x < s, \\ C_2, & s < x \leq 1, \end{cases}$$

სადაც $C_1 \neq C_2$, რადგან განმარტებით $G'_x(x,s)$ წყვეტილია $x = s$

წერტილში. $G'_x(x,s)$ -ის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1 x + C_3, & 0 \leq x < s, \\ C_2 x + C_4, & s < x \leq 1. \end{cases} \quad (*)$$

რადგან $G(x,s)$ განმარტებით უწყვეტია s წერტილში, ამიტომ უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$C_1 s + C_3 = C_2 s + C_4. \quad (1)$$

გარდა ამისა,

$$G(0,s) = C_1 \cdot 0 + C_3 = 0 \quad (2)$$

და

$$G(1, s) = C_1 \cdot 1 + C_3 = 0. \quad (3)$$

გრინის ფუნქციის განმარტებით $G_x'(x, s)$ -ის ნახტომი s -ში 1-ის ტოლია.

ე.ი.

$$C_2 - C_1 = 1 \quad (4)$$

(1)-(4) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით მივიღებთ: $C_1 = s - 1, C_2 = s, C_3 = 0, C_4 = -s$. $C_i, i = 1, 2, 3, 4$ ჩასმით (*)-ში საბოლოოდ მივიღებთ გრინის ფუნქციას:

$$G(x, s) = \begin{cases} (s-1)x, & 0 \leq x \leq s, \\ s(x-1), & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

ამოცანა 7. ვიპოვოთ $y''(x) + y(x) = f(x)$, $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$ სასაზღვრო ამოცანის გრინის ფუნქცია.

$G_{xx}'' + G = 0$, $x \neq s$ განტოლების ამონახსნია

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 \sin x + C_2 \cos x, & 0 \leq x < s, \\ C_3 \sin x + C_4 \cos x, & s < x \leq \pi. \end{cases}$$

G -ს სასაზღვრო პირობიდან მივიღებთ

$$C_2 = -C_4, \quad C_1 = -C_3. \quad (1)$$

$G(x, s)$ -ის უწყვეტობიდან მისი x -ით წარმოებულის ნახტომის პირობიდან $x = s$ წერტილში ვღებულობთ სისტემას

$$C_1 \sin s + C_2 \cos s = C_3 \sin s + C_4 \cos s, \quad C_3 \sin s - C_4 \cos s - C_1 \sin s + C_2 \cos s = 1 \quad (2)$$

(1),(2) სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ

$$C_1 = -C_3 = \frac{1}{2} \cos s, \quad C_2 = -C_4 = \frac{1}{2} \sin s.$$

ამრიგად, ვღებულობთ

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(s-x), & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{1}{2} \sin(x-s), & s \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

რაც ნიშნავს, რომ ამოცანის გრინის ფუნქციაა $G(x, s) = \frac{1}{2} \sin|x-s|$, $0 \leq x \leq \pi$.

თეორემა 1. $y''(x) + q(x)y(x) = 0$ განტოლების არატრივიალურ $y(x) \not\equiv 0$ ამონახსნს ნამდვილი რიცხვთა ღერძის იმ მონაკვეთზე, სადაც განტოლების $q(x)$ კოეფიციენტი აკმაყოფილებს პირობას $q(x) \leq 0$, არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი ნული.

ამ თეორემის დამტკიცება ემყარება შემდეგ ორ ლემას.

ლემა 1. თუ $y(x) \not\equiv 0$ არის $p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0$ განტოლების არატრივიალური ამონახსნი და $y(t_0) = 0$, მაშინ $y'(t_0) \neq 0$.

მართლაც, თუ $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, მაშინ კოშის ამოცანას ექნება მეორე, $y(x)$ -ისაგან განსხვავებული ამონახსნი $y(x) \equiv 0$. რაც კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას ეწინააღმდეგება.

ლემა 2. $p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0$ განტოლების $y(x) \not\equiv 0$ არატრივიალურ ამონახსნს არ შეიძლება ჰქონდეს სასრულო მონაკვეთზე უსასრულო რაოდენობის ნულები.

დავუშვათ $[a, b]$ მონაკვეთზე განტოლების $y(x) \not\equiv 0$ ამონახსნს უსასრულო რაოდენობის ნულები აქვს. ავარჩიოთ ნულების ამ სიმრავლეში კრებადი ქვემიმდევრობა $t_1, t_2, \dots \rightarrow t_0$ (რაც ყოველთვისაა შესაძლებელი, შემოსაზღვრულობის გამო), მაშინ $t_0 \in [a, b]$. რადგან y უწყვეტია და $y(t_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, ამიტომ $y(t_0) = 0$. y ფუნქცია დიფერენცირებადია t_0 წერტილში, რაც იმას ნიშნავს, რომ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y(t_k) - y(t_0)}{t_k - t_0} = y'(t_0).$$

ამ გამოსახულების მარცხენა მხარის მრიცხველი 0-ის ტოლია, ამიტომ $y'(t_0) = 0$, რაც $y(t_0) = 0$ ტოლობასთან არათავსებადია ლემა 1-ის ძალით. ამით ლემა 2 დამტკიცებულია.

გადავდივართ თეორემა 1-ის დამტკიცებაზე.

დავუშვათ $y(t_0) = 0, y(t_1) = 0, t_1 < t_2$. ლემა 2-ის თანახმად განტოლების არატრივიალურ ამონახსნს შესაძლებელია ჰქონდეს $[t_1, t_2]$ მონაკვეთზე მხოლოდ სასრული რაოდენობის ნულები. ავიღოთ ორი მეზობელი ნული $t = a$ და $t = b > a$. რაც ნიშნავს, რომ როდესაც $a < t < b$ $y(t)$ ნიშნს არ იცვლის, ამიტომ დავუშვათ $y(t) > 0$ (თუ $y(t) < 0$, მაშინ y ამონახსნის მაგივრად განვიხილოთ $y_1(t) = -y(t) > 0$). რადგან $y(a) = y(b) = 0$, ამიტომ ლემა 1-ის ძალით $y'(a) \neq 0$. რადგან $y(t) > 0$ (a, b) -ზე ამის გამო $y'(a) > 0$ და $y'' = -q(t)y \geq 0$ (a, b) -ზე. რაც ნიშნავს, რომ y'' კლებადი არ არის. აქედან კი იმის გამო, რომ $y'(a) > 0$ გამოდის $y(t) > 0$ უტოლობა ნებისმიერი t -სათვის (a, b) -დან. ეს ნიშნავს, რომ $y(t)$ ზრდადია $[a, b]$ -ზე $y(a) = 0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $y(b) > 0$, რაც ეწინააღმდეგება b წერტილის არჩევას. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ

$$L(y) \equiv p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x).$$

განვიხილოთ სასაზღვრო ამოცანა α პარამეტრით:

$$L(y) - \alpha y = 0, \alpha y(t_1) + by'(t_1) = 0, cy(t_2) + dy'(t_2) = 0. \quad (1)$$

α პარამეტრის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც (1) სასაზღვრო ამოცანას აქვს არანულოვანი ამონახსნი, ეწოდება ამოცანის *საკუთრივი მნიშვნელობა*, ხოლო თვით ამ ამონახსნს, *საკუთრივი ფუნქცია*.

ამოცანა 8. ვიპოვოთ

$$y'' - \alpha y = 0, y(0) = 0, y(d) = 0$$

სასაზღვრო ამოცანის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ფუნქციები.

თეორემა 1-ის ძალით ამოცანას აქვს არანულოვანი ამონახსნი, როდესაც $\alpha < 0$. ამაში პირდაპირი მსჯელობითაც შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში განტოლების ამონახსნს

ექნებოდა ორი ნული სასაზღვრო პირობების გამო, რაც თეორემას ეწინააღმდეგება. ვთქვათ $\alpha > 0$. განტოლების მახასიათებელი ფესვები იქნება $\pm\sqrt{\alpha}$, ხოლო ზოგად ამონახსს ექნება სახე $y(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha}t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha}t}$, სასაზღვრო პირობებიდან ვლუბულობთ c_1, c_2 მიმართ წრფივ განტოლებათა სისტემას $c_1 + c_2 = 0, c_1 e^{\sqrt{\alpha}d} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha}d} = 0$, რომელსაც მხოლოდ 0-განი ამონახსნი აქვს. ამრიგად არატრივიალური ამონახსნის არსებობა მოსალოდნელია მხოლოდ $\alpha < 0$ შემთხვევაში. ვთქვათ $\alpha = -a^2, a > 0$. მაშინ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება $y(t) = c_1 e^{ait} + c_2 e^{-ait}$. სასაზღვრო პირობებიდან ვლუბულობთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 = 0, c_1 e^{aid} + c_2 e^{-aid} = 0 &\Rightarrow c_1 e^{aid} - c_1 e^{-aid} = 0 \Rightarrow \\ c_1 (\cos ad + i \sin ad) - c_1 (\cos ad - i \sin ad) = 0 &\Rightarrow c_1 \sin ad = 0 \Rightarrow \\ ad = \pi k, k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

ამრიგად, $a = a_k = \frac{\pi k}{d}$, $\alpha_k = -a_k^2 = -\left(\frac{\pi k}{d}\right)^2, k = 1, 2, 3, \dots$ რაც ნიშნავს, რომ α_k ნამდვილი რიცხვები ჩვენი განტოლების საკუთრივი რიცხვებია, ხოლო $y_k = c \sin \frac{\pi k t}{d}$ საკუთრივი ფუნქციები.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. ამოხსენით სასაზღვრო ამოცანა

$$y'''(x) - y(x) = 0, y'(0) = 0, y(1) = 1.$$

პასუხი: $y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2 \cosh 1}$.

2. იპოვეთ

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0 (\lambda \neq 0), y'(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

სასაზღვრო ამოცანის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ფუნქციები. პასუხი: $\lambda = \lambda_n = \frac{2n+1}{2}, n = 0, 1, 2, \dots; y_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x$.

3. ამოხსენით სასაზღვრო ამოცანა

$$x^2 y''(x) + 2x y'(x) - 6y(x) = 0, y(1) = 1$$

და როდესაც $x \rightarrow 0, y(x)$ შემოსაზღვრულია.

10 შტურმ-ლიუვილის თეორია

10.1 ფუნქციის წარმოდგენა ფურიეს მწკრივად

$[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული უწყვეტი ორი $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ ფუნქციების სკალარული ნამრავლი, აღინიშნება $\langle \varphi_1(x), \varphi_2(x) \rangle$ სიმბოლოთი, არის კვადრატული ფესვი $\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx$ ინტეგრალიდან. ხოლო ფუნქციის ნორმა, აღინიშნება $\|\varphi(x)\|$ სიმბოლოთი, არის კვადრატული ფესვი $\int_a^b \varphi^2(x)dx$ ინტეგრალიდან. ამრიგად,

$$\langle \varphi_1(x), \varphi_2(x) \rangle = \left(\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\varphi(x)\| = \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left(\int_a^b \varphi^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\varphi(x)$ -ს ეწოდება ნორმირებული, თუ მისი ნორმა ტოლია 1-ის: $\|\varphi(x)\| = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx} = 1$. ორ $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ ფუნქციას ეწოდება ორთოგონალური, თუ $\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0$. $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული უწყვეტ ფუნქციათა უსასრულო (სასრულ) $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ ერთობლიობას ეწოდება ორთონორმირებული, თუ თითოეული მათგანი ნორმირებულია და $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0$, როდესაც $i \neq j$.

ტრიგონომეტრიულ

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

ფუნქციათა თვლადი ერთობლიობა ორთოგონალურია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე. რადგან,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x + \cos(n+m)x dx = \\ &= \left(\frac{1}{n-m} \sin(n-m)x + \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

ანალოგიური მსჯელობით ვიღებთ, რომ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0$ და $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$, მაგრამ ეს სისტემა არ არის ნორმირებული, რადგან

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx + \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi.$$

მისი ნორმირება ხდება თითოეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციის $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ -ზე გამრავლებით. 1-ის ნორმა, ზემოთმოყვანილი სკალარული გამრავლების მიმართ არის $\sqrt{2\pi}$. ამრიგად, $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ორთონორმირებული ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სისტემა არის

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots \quad (1)$$

ვთქვათ $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული ორთონორმირებული სისტემა და $f(x)$ $[a, b]$ -ზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა. ვიტყვით, რომ $f(x)$ დაშლილია $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$

ფუნქციას სისტემის მიმართ, თუ $f(x)$ არის $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots$ კრებადი მწკრივის ჯამი:

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots,$$

სადაც $c_j = \int_a^b f(x)\varphi_j(x)dx$. ამ მწკრივს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ ფუნქციას სისტემის მიმართ.

თუ $f(x)$ ფუნქცია $[-\pi, \pi]$ -ზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა და იგი წარმოდგენილია (1) ფუნქციას მწკრივის სახით

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2)$$

სადაც $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$ $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$, მაშინ ამბობენ რომ $f(x)$ დაშლილია ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივად.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უბან-უბან მონოტონური $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ $[a, b]$ იყოფა სასრული რაოდენობის

$$[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_n, b]$$

სეგმენტებად, რომლებზედაც $f(x)$ მონოტონურია.

თუ $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან მონოტონურია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ნებისმიერი შიგა c წერტილისათვის არსებობს მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები:

$$\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = f(c-0), \lim_{x \rightarrow c+} f(x) = f(c+0).$$

ფურიეს მწკრივის კრებადობა დამოკიდებულია დასაშლელი ფუნქციის ანალიზურ თვისებებზე. რაც უფრო გლუვია ფუნქცია, მით უფრო "კარგია" მწკრივის კრებადობა. კერძოდ, სამართლიანი შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1 (დირიხლე). თუ $[-\pi, \pi]$ -ზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან მონოტონური, უბან-უბან უწყვეტი და შემოსაზღვრულია თავის უწყვეტობის მონაკვეთზე, მაშინ მისი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი კრებადია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტის ყველა წერტილში. თუ $s(x)$ ფუნქცია $f(x)$ -ის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის ჯამია, მაშინ ყველა იმ წერტილისათვის, სადაც $s(x)$ უწყვეტია, სამართლიანია ტოლობა $s(x) = f(x)$, ხოლო ყველა იმ წერტილში, სადაც ფუნქცია წყვეტას განიცდის გვაქვს

$$s(x) = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)),$$

გარდა ამისა,

$$s(\pi) = s(-\pi) = \frac{1}{2} (f(\pi-0) + f(-\pi+0)).$$

თეორემაში მოყვანილ პირობებს ეწოდება დირიხლეს პირობები. რომელიც რამდენიმე ექვივალენტური ფორმით შეიძლება შეგვხდეს. მაგალითად, ამბობენ აგრეთვე, რომ $f(x)$ აკმაყოფილებს დირიხლეს პირობებს, თუ მას აქვს მაქსიმუმისა და მინიმუმის სასრული რაოდენობა მოცემულ სეგმენტზე.

თუ f კენტი ფუნქციაა, მაშინ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ და თუ f ლუწია, მაშინ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx$.

კენტი ფუნქციის წარმომადგენელი და პირველყოფილი ლუწი ფუნქციაა, ხოლო ლუწი ფუნქციის წარმომადგენელი და პირველყოფილი კენტი ფუნქციაა. აქედან გამომდის, რომ თუ f ლუწი ფუნქციაა, მაშინ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = 0, n = 1, 2, \dots$, ამიტომ ფურიეს მწკრივს ექნება სახე

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

ხოლო თუ f კენტი ფუნქციაა, მაშინ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = 0, n = 1, 2, \dots$, და ამიტომ მისი ფურიეს მწკრივი იქნება

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

მაგალითი 1. დავშალოთ $f(x) = x$ ფუნქცია ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა გამოვთვალოთ $f(x) = x$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ფურიეს ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

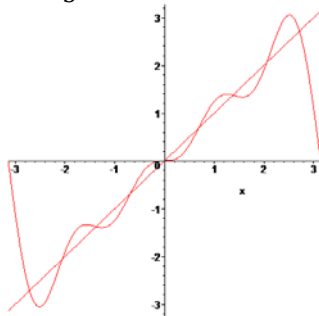
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left(x \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right) = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left(-x \frac{1}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \right) = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

a_k და b_k რიცხვების გამოთვლა, ყოველი k -სათვის, ხდება ნაწილობითი ინტეგრების საშუალებით (იხ. მაგალითი 2-ის შემდეგ შენიშვნა).

ამრიგად, $f(x) = x$ ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი იქნება

$$2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx + \dots \right).$$

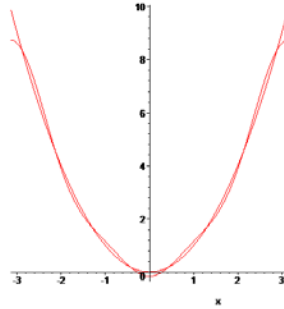


$f(x) = x$ და მისი ფურიეს მწკრივის გრაფიკები

მაგალითი 2. დავშალოთ $f(x) = x^2$ ფუნქცია ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

რადგან $f(x) = x^2$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ $b_n = 0$, a_n კოეფიციენტები კი გამოითვლება ფორმულით $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2} (-1)^n$. ამრიგად, მოცემული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი იქნება

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x + \dots = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx.$$



$f(x) = x^2$ და $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx$ ფუნქციების გრაფიკები $[-\pi, \pi]$ ინტერვალზე

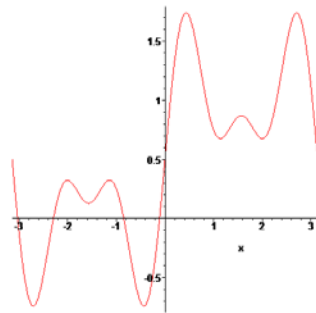
შენიშვნა. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$ ინტეგრალის გამოთვლა ხდება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის ორჯერ გამოყენებით:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos nx dx \\ du = 2x dx \\ v = \int \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right] = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{x^2 \sin nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{\sin nx}{n} dx \right] = \\ &= \frac{2}{\pi n} \left[\pi^2 \sin n\pi - (-\pi)^2 \sin(-n\pi) - 2 \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right] = \frac{2}{\pi n} \left[2\pi^2 \sin n\pi - 2 \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right] = \\ &= -\frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin nx dx \\ du = dx \\ v = \int \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right] = -\frac{4}{\pi n} \left[\left(-\frac{x \cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) dx \right] = \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \left[\pi \cos n\pi - \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{4}{\pi n^2} \left[\pi \cos n\pi - \left(\frac{\sin nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{4}{\pi n^2} \left[\pi \cos n\pi - \frac{\sin n\pi}{n} \right]. \end{aligned}$$

მაგალითი 3. დავშალოთ $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ ფუნქცია ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

გამოვთვალოთ ფურიეს კოეფიციენტები: $a_0 = 1, a_n = 0, b_n = (-1)^n, n \geq 1$. აქედან მოცემული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი იქნება

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \dots = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \sin nx.$$



$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x$ ფუნქციის გრაფიკი

თეორემა 2. თუ $[-\pi, \pi]$ -ზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია იშლება ფურიეს

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (3)$$

მწკრივად და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს

$$f(-\pi) = f(\pi), f'(-\pi) = f'(\pi)$$

და აქვს შემოსაზღვრული მეორე რიგის წარმოებული $|f''(x)| \leq C$, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია. ამასთან ფუნქციის წარმოდგენა ფურიეს (3) მწკრივად ერთადერთია.

ძირითადი სეგმენტი, სადაც ფუნქციის დაშლა განვიხილეთ ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივად იყო $[-\pi, \pi]$ სეგმენტი. ეს არის ხელსაყრელი კოეფიციენტების ჩაწერის მიზნით და ამ შემთხვევაში გამოთვლები მარტივდება. ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში ფუნქციები განსაზღვრულები იყვნენ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე და თუ საჭიროა მთელ ნამდვილ ღერძზე მათი განხილვა (ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე) საჭიროა პერიოდულად (გავაგრძელოთ როგორც პერიოდული ფუნქცია) მათი გაგრძელება ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე. ამრიგად, თუ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტიდან რომელიმე სხვა $[a, b]$ რიცხვით მონაკვეთზე გადასვლა გვინდა, საჭიროა x ღერძზე მოვახდინოთ ამ ინტერვალების ერთმანეთთან შეთავსება მათი x ღერძზე გადაადგილებისა და მასშტაბის შეცვლის საშუალებით.

დებულება 1. ვთქვათ g პერიოდული ფუნქციაა და T მისი პერიოდია, მაშინ ნებისმიერი a და μ რიცხვებისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\int_a^{a+T} g(x) dx = \int_{a+\mu}^{a+\mu+T} g(x) dx.$$

მართლაც, $x - T = y$ აღნიშვნის შემოტანის შემდეგ მივიღებთ

$$\int_{a+T}^{a+\mu+T} g(x) dx = \int_a^{a+\mu} g(y+T) dy = \int_a^{a+\mu} g(y) dy = \int_a^{a+\mu} g(x) dx. \quad (4)$$

ამასთან,

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} g(x) dx &= \int_a^{a+\mu} g(x) dx + \int_{a+\mu}^{a+\mu+T} g(x) dx + \int_{a+\mu+T}^{a+T} g(x) dx = \\ &= \int_a^{a+\mu} g(x) dx - \int_{a+T}^{a+\mu+T} g(x) dx + \int_{a+\mu}^{a+\mu+T} g(x) dx. \end{aligned}$$

აქედან, (4)-ის გათვალისწინებით ვღებულოთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

ვთქვათ $f(x)$ -ის დაშლაა საჭირო ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად $[a, a + 2l]$ სეგმენტზე. ამ შემთხვევაში ვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას $x = \frac{l}{\pi}t$ და ვიხილავთ $f(\frac{l}{\pi}t)$ ფუნქციის დაშლას $[\frac{a\pi}{l}, \frac{a\pi}{l} + 2\pi]$ სეგმენტზე:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a\pi}{l}}^{\frac{a\pi}{l} + 2\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos nt dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a\pi}{l}}^{\frac{a\pi}{l} + 2\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sin nt dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$f(x)$ -ის 2π -პერიოდულობის გამო მისი გაგრძელებაა შესაძლებელი, ამიტომ საკმარისია

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos nt dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

და

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sin nt dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

ინტეგრალების გამოთვლა. ამის შემდეგ დავუბრუნდეთ x ცვლადს და მივიღებთ:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x),$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx.$$

10.2 შტურმ-ლიუვილის ამოცანის დასმა

ამ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ შტურმ-ლიუვილის თეორიის ელემენტებს. ყურადღებას გავამახვილებთ იმ საკითხებზე, რომლებიც თეორიის გამოყენებითაა ნაკარნახები.

განვიხილოთ

$$(p(x)X'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))X(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (1)$$

მეორე რიგის ერთგვაროვანი წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, სადაც $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ ნამდვილი ფუნქციებია, ამასთან $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ ფუნქციები უწყვეტებია (a, b) -ზე, ხოლო $p(x)$, $r(x)$ დადებითი ფუნქციებია, λ -კი პარამეტრია, რომელიც ნებისმიერ მნიშვნელობას ღებულობს.

მეორე რიგის განტოლების (1) სახით ჩაწერას, როგორც აღვნიშნეთ, განტოლების თვითშეუღლებული ფორმა ეწოდება.

(1) განტოლება გადავწეროთ ჩვენთვის ჩვეული სახით

$$p(x)X''(x) + p'(x)X'(x) + (\lambda r(x) - q(x))X(x) = 0, \quad (2)$$

$$X''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} X'(x) + \left(\lambda \frac{r(x)}{p(x)} - \frac{q(x)}{p(x)} \right) X(x) = 0.$$

(2) განტოლები კოეფიციენტები უწყვეტი ფუნქციებია (1) განტოლების კოეფიციენტებზე დადებული შეზღუდვების გამო. (a, b) ინტერვალის ყოველი შიგა წერტილი (2) განტოლებისათვის ჩვეულებრივი წერტილია, ხოლო (a, b) -ს ბოლო წერტილები შესაძლებელია იყოს როგორც ჩვეულებრივი, ასევე განსაკუთრებული (სინგულარული). გავიხსენოთ, რომ თუ (2) განტოლების რომელიმე კოეფიციენტი განიცდის წყვეტას რაიმე x წერტილში და მისი მნიშვნელობა ამ წერტილში უსასრულობის ტოლია, ან $p(x) = 0$, ამ დროს ამბობენ, რომ (2) განტოლებისათვის x არის განსაკუთრებული წერტილი. ჩვენი ინტერესის სფერო არის (2) -ის ისეთი ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ *ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს ნამდვილი კოეფიციენტებით*. ასეთი ტიპის სასაზღვრო ამოცანებს ეწოდება შტურმ-ლიუვილის ამოცანები. უფრო ზუსტად, შტურმ-ლიუვილის ამოცანის ქვეშ გაიგება შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ $C^2(a, b)$ კლასის (ე.ი. ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი) (2) განტოლების ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ *ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს* (a, b) ინტერვალის ბოლოებისათვის. რადგან (1) (ან (2)) განტოლება შეიცავს უცნობ λ პარამეტრს, ამიტომ ამონახსნის პოვნა λ -ს პოვნასაც გულისხმობს.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ამგვარი სასაზღვრო ამოცანები ოპერატორთა სპექტრალური თეორიის ნაწილია. განსაკუთრებით საინტერესოა თვითშეუღლებული ოპერატორების სპექტრალური თეორია, რადგან ასეთი ოპერატორების სპექტრი ნამდვილი რიცხვებია. სპექტრს კი ფიზიკაში განიხილავენ როგორც დაკვირვებად სიდიდეებს.

სასაზღვრო პირობები შეიძლება იყოს $X|_{x \rightarrow a+0} = 0$, $X|_{x \rightarrow b-0} = 0$. საზოგადოდ, განიხილება ორი ტიპის ამოცანა -- რეგულარული და სინგულარული. შტურმ-ლიუვილის ამოცანას ეწოდება *რეგულარული*, თუ (a, b) ინტერვალის სასრულია და ინტერვალის ბოლოები განტოლებისათვის ჩვეულებრივი წერტილებია, ხოლო ამოცანას ეწოდება *სინგულარული*, თუ რეგულარულობის ერთი პირობა მაინც დარღვეულია. სინგულარულ ამოცანაში შესაძლებელია ინტერვალის ორივე ბოლო განსაკუთრებული წერტილი იყოს განტოლებისათვის. ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების ხასიათი რეგულარული და სინგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანისათვის განსხვავებულია. რეგულარული ამოცანისათვის ისმება:

- პირველი გვარის სასაზღვრო ამოცანა: $X(a) = 0$, $X(b) = 0$;
- მეორე გვარის სასაზღვრო ამოცანა: $X'(a) = 0$, $X'(b) = 0$;

• *მესამე გვარის სასაზღვრო ამოცანა:* $X'(a) - h_a X(a) = 0$,
 $X'(b) + h_b X(b) = 0$, $h_a, h_b \geq 0$;

• *მეოთხე გვარის სასაზღვრო ამოცანა:* $X(a) = X(b)$,
 $X'(a) = X'(b)$, $p(a) = p(b)$. ამ სასაზღვრო პირობას სხვანაირად
პერიოდულობის პირობასაც უწოდებენ.

ყველგან, ზემოთ მოყვანილ ტოლობებში, იგულისხმება, რომ
 $X(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} X(x)$, $X(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} X(x)$, $X'(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} X'(x)$
 და ა.შ., ამიტომ ზოგჯერ მათ *ზღვრულ* პირობებსაც უწოდებენ.

სინგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანისათვის გამოყოფენ ორი
 ტიპის ამოცანას, იმის შესაბამისად, განტოლების განსაკუთრებული
 წერტილი ინტერვალის ერთი ბოლოა თუ ორივე. დავუშვოთ $x = a$
 სინგულარული, ხოლო $x = b$ რეგულარული წერტილია. მაშინ
 სინგულარული ბოლოსათვის ჩვეულებრივ ისმება ფუნქციის
 (დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის) შემოსაზღვრულობის პირობა

$$X|_{x \rightarrow a+0} = O(1),$$

ხოლო რეგულარულ ბოლოსათვის შესაძლებელია დაისვას ზემოთ
 მოყვანილი პირველი, მეორე და მესამე გვარის ამოცანა, მაგალითად ასეთი:
 $X'(b) + h_b X(b) = 0$, $h_b \geq 0$. თუ ორივე ბოლო სინგულარულია, მაშინ
 ფუნქციას შემოსაზღვრულობის პირობა ორივე ბოლოში შეიძლება დაედოს
 $X|_{x \rightarrow a+0} = O(1)$, $X|_{x \rightarrow b-0} = O(1)$. ზოგჯერ ზრდის რიგსაც მიუთითებენ
 ხოლმე. მაგალითად ასეთს:

$$\int r(x) |X(x)|^2 dx = O(1).$$

საინტერესოა შტურმ-ლიუვილის ამოცანის მხოლოდ
 არატრივიალური, $X(x) \neq 0$, ამონახსნი, რადგან ტრივიალური, $X(x) \equiv 0$,
 ამონახსნი შტურმ-ლიუვილის ამოცანას ყოველთვის აქვს, ხოლო
 არატრივიალური ამონახსნი კი მოცემული λ -სათვის შესაძლებელია არ
 ჰქონდეს. ამიტომ შტურმ-ლიუვილის ამოცანა მდგომარეობს არამარტო
 მოცემული λ -სათვის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლების
 ამონახსნის პოვნაში, არამედ λ პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობების
 შერჩევაში, რომელთათვისაც განტოლებას არატრივიალური ამონახსნი
 გააჩნია. შტურმ-ლიუვილის ყოველ არატრივიალურ ამონახსნს ეწოდება
 მოცემული ამოცანის *საკუთრივი ფუნქცია*, ამ დროს λ პარამეტრის
 მნიშვნელობა, როგორც ვთქვით, უკვე ცნობილია და მას *საკუთრივი*
მნიშვნელობა, ან *საკუთრივი რიცხვი* ეწოდება. განმარტებით, საკუთრივი
 ფუნქციები იძებნებიან ნებისმიერი მუდმივის სიზუსტით. ზოგჯერ მათ ადებენ

პირობას $\int r(x) |X(x)|^2 dx = 1$, ამ დროს გვაქვს ნორმირებული საკუთრივი

ფუნქციები. მოცემულ საკუთრივ რიცხვს საზოგადოდ შეესაბამება რამდენიმე საკუთრივი ფუნქცია. საკუთრივი რიცხვების სიმრავლეს ეწოდება ამოცანის *სპექტრი*.

შევისწავლოთ შტურმ-ლიუვილის რეგულარული ამოცანის საკუთრივი რიცხვების თვისებები. კერძოდ, განვიხილოთ რეგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანა ზემოთ მოყვანილი ოთხივე სასაზღვრო პირობით. ჩავთვალოთ, რომ (1) განტოლების $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ კოეფიციენტები უწყვეტებია $[a, b]$ -ზე, ხოლო $p(x)$, $r(x)$ დადებითი ფუნქციებია $[a, b]$ -ში.

თეორემა 1. *რეგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანის საკუთრივი რიცხვები ნამდვილია და ამოცანის სპექტრი შემოსაზღვრულია ქვემოთ.*

დავუშვათ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი წერტილი (1) განტოლების ჩვეულებრივი წერტილია. კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს (1)-ის $C^{(2)}$ -კლასის ამონახსნი $X(x)$, ისეთი, რომ $c \in (a, b)$ ნებისმიერი ელემენტისათვის $X(c) = \alpha$ და $X'(c) = \beta$, სადაც α და β ნებისმიერი რიცხვებია. თუ α და β რიცხვები დამოკიდებულები არ არიან λ -ზე, მაშინ ყოველი ფიქსირებული x -სათვის $X(x)$ მთელი ფუნქციაა λ -ს მიმართ. დავუშვათ $c = a$. მაშინ არსებობს (1) დიფერენციალური განტოლების ორი $C^{(2)}(a, b)$ კლასის ამონახსნი (ინტეგრალი) $\phi(x, \lambda)$ და $\psi(x, \lambda)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\begin{aligned} \phi(a, \lambda) &= 1, \quad \phi'(a, \lambda) = 0, \\ \psi(a, \lambda) &= 0, \quad \psi'(a, \lambda) = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

ამასთან, $\phi(x, \lambda)$ და $\psi(x, \lambda)$ ფუნქციები, ფიქსირებული x -სათვის არიან მთელი ფუნქციები λ -ს მიმართ. გარდა ამისა, ისინი წრფივად დამოკიდებულები არიან და მათი ვრონსკიანი a -ში 1-ის ტოლია:

$$W(\phi(a, \lambda), \psi(a, \lambda)) = \begin{vmatrix} \phi(a, \lambda) & \psi(a, \lambda) \\ \phi'(a, \lambda) & \psi'(a, \lambda) \end{vmatrix} = 1.$$

$\phi(x, \lambda)$ და $\psi(x, \lambda)$ ფუნქციებს (და ყველა ასეთი თვისებების მქონე ამონახსნთა წევრს) შტურმ-ლიუვილის ამოცანის *ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა* ეწოდება. შტურმ-ლიუვილის ამოცანის ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება სახით

$$X(x, \lambda) = A\phi(x, \lambda) + B\psi(x, \lambda), \quad (4)$$

სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია.

$\varphi(x, \lambda)$ და $\psi(x, \lambda)$ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის შესახებ ცნობილია, რომ მათი ასიმპტოტური ყოფაქცევა, როდესაც λ პარამეტრი უსასრულობისაკენ მიისწრაფის, გამოისახება შემდეგი ტოლობების საშუალებით:

$$\varphi(x, \lambda) = \sqrt{\frac{p(a)}{p(x)}} \cos(\sqrt{\lambda}(x-a)) + O(\lambda^{-\frac{1}{2}}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad x \in [a, b], \quad (5)$$

$$\psi(x, \lambda) = \sqrt{\frac{p(a)}{p(x)}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-a))}{\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-1}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad x \in [a, b]. \quad (6)$$

შტურმ-ლიუვილის ზემოთ მოყვანილი რეგულარული ამოცანის $\varphi(x, \lambda)$ და $\psi(x, \lambda)$ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა ყოველთვის არსებობს. ჩავთვალოთ φ და ψ ფუნქციები ცნობილად და გამოვიყვანოთ λ პარამეტრის საპოვნი განტოლებები პირველი, მეორე და მესამე გვარის რეგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანებისათვის. ამისათვის ვისარგებლოთ ამოცანის ზოგადი ამონახსნის (4) ფორმულითა და შესაბამისი კოშის პირობებით. პირველი გვარის სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში გვექნება:

$$\begin{aligned} A\varphi(a, \lambda) + B\psi(a, \lambda) &= 0, \\ A\varphi(b, \lambda) + B\psi(b, \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

ანუ

$$\begin{aligned} A = 0, \quad B\psi(b, \lambda) = 0, \quad B \neq 0 &\Rightarrow \\ \psi(b, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

ამრიგად, $\psi(b, \lambda) = 0$ განტოლებიდან განისაზღვრება λ პარამეტრი. ანალოგიური მსჯელობით მიიღება განტოლებები λ -სათვის მეორე და მესამე გვარის შემთხვევაში და მათ შესაბამისად ექნებათ სახე:

$$\varphi'(b, \lambda) = 0 \quad (8)$$

და

$$\varphi'(b, \lambda) + h_b \varphi(b, \lambda) + h_a \psi'(b, \lambda) + h_a h_b \psi(b, \lambda) = 0. \quad (9)$$

დებულება 1. (7), (8), (9) განტოლებებს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი აქვთ.

◀დამტკიცება ვაწარმოოთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $p(x) = r(x) = 1$. ამ დროს (1) იღებს სახეს

$$X''(x) + (\lambda - q(x))X(x) = 0,$$

ხოლო (5), (6) ასიმპტოტური ფორმულები კი

$$\begin{aligned}\varphi(x, \lambda) &= \cos(\sqrt{\lambda}(x-a)) + O(\lambda^{-\frac{1}{2}}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad x \in [a, b]; \\ \psi(x, \lambda) &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-a))}{\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-1}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad x \in [a, b].\end{aligned}$$

პირველი გვარის სასაზღვრო პირობის შემთხვევაში

$$\psi(b, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(b-a))}{\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-1})$$

ფუნქცია რხევადია (ოსცილირებს) λ -ს საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისათვის. ამის გამო უსასრულოდ ბევრჯერ გადაკვეთს ნამდვილ რიცხვთა Ox ღერძს, რაც ნიშნავს, რომ (7) განტოლებას λ -ს მიმართ, ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე აქვს.

მეორე გვარის სასაზღვრო პირობის ანალიზის დროს საჭიროა

$$\varphi'(b, \lambda) = -\sin(\sqrt{\lambda}(b-a)) + O(\lambda)$$

ფუნქცია გამოვიკვლიოთ λ -ს საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისათვის. $\varphi'(b, \lambda)$ უწყვეტი ფუნქციაა, რომელიც უსასრულოდ იცვლის ნიშანს, ე.ი. მრავალჯერ გადაკვეთს Ox ღერძს. ამრიგად, (8) განტოლებასაც ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე აქვს.

მესამე გვარის სასაზღვრო პირობას მივყავართ (9) განტოლების ფესვების პოვნამდე:

$$\begin{aligned}& \varphi'(b, \lambda) + h_b \varphi(b, \lambda) + h_a \psi'(b, \lambda) + h_a h_b \psi(b, \lambda) = \\&= -\sin(\sqrt{\lambda}(b-a)) + O(1) + h_b (\cos(\sqrt{\lambda}(b-a)) + O(\lambda^{-1/2})) + \\&+ h_a (\cos(\sqrt{\lambda}(b-a)) + O(\lambda^{-1/2})) + h_a h_b \left(\frac{\sin(\sqrt{\lambda}(b-a))}{\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-1}) \right) = \\&= -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}(b-a)) + O(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ ეს შემთხვევა მეორე გვარის პირობის ექვივალენტურია. ►

ახლა გადავიდეთ საკუთრივი რიცხვების განაწილებისა და შტურმ-ლიუვილის ამოცანის სპექტრის ბუნების შესწავლაზე. ფუნქციები, რომელთა ნულების საკითხი ახლახან შევისწავლეთ, მთელი არანულოვანი ფუნქციებია λ -ს მიმართ და აქვთ ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა. თუ გავიხსენებთ, რომ არანულოვან კომპლექსური ცვლადის მთელ ფუნქციას აქვს მხოლოდ იზოლირებული ნულები და ზემოთმოყვანილ თეორემა 1-ს მივიღებთ შემდეგი დებულების დამტკიცებას.

დებულება 2. შტურმ-ლიუვილის რეგულარულ ამოცანას პირველი, მეორე და მესამე გვარის სასაზღვრო პირობებში აქვს დისკრეტული სპექტრი: $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, რომელიც შედგება ქვემოდან შემოსაზღვრული ნამდვილი რიცხვებისგან.

აქვე შევნიშნოთ, რომ შტურმ-ლიუვილის ამოცანას შესაძლებელია ჰქონდეს უწყვეტი და შერეული სპექტრიც.

მას შემდეგ, რაც საკუთრივი რიცხვები ვიპოვნეთ, საკუთრივი ფუნქციების პოვნა პირველი, მეორე და მესამე გვარის სასაზღვრო პირობებში ხდება შესაბამისად შემდეგი გამოსახულების საშუალებით:

$$X_n(x) = B_n \psi(x, \lambda_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$X_n(x) = A_n \phi'(x, \lambda_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$X_n(x) = A_n (\phi(x, \lambda_n) + h_a \psi(x, \lambda_n)), \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

როგორც ვხედავთ, ყოველ $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ საკუთრივ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი, მუდმივი მამრავლის სიზუსტით განსაზღვრული, საკუთრივი ფუნქცია: $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x), \dots$.

თეორემა 2. თუ $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ რეგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანის საკუთრივი ფუნქციებია პირველი, მეორე და მესამე სასაზღვრო პირობებში, მაშინ ისინი ერთმანეთის ორთოგონალურები არიან $[a, b]$ -ზე წონით $r(x)$. ე.ი.

$$\int_a^b r(x) X_m(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|X_n\|^2, & m = n. \end{cases}$$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც გარკვეულ პირობებს (ამ პირობებს ქვემოთ მოვიყვანთ) აკმაყოფილებს, შესაძლებელია წარმოვადგინოთ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) \quad (10)$$

წკრივად. თუ დაუშვებთ, რომ (10) მწკრივი კრებადია და შესაძლებელია მისი წევრობრივი ინტეგრება, მაშინ (10) წარმოდგენაში მონაწილე C_n კოეფიციენტები გამოისახებიან შემდეგნაირად:

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x) r(x) X_n(x) dx}{\|X_n(x)\|^2}.$$

ზემოთ თქმული სამართლიანია ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც $[a, b]$ -ზე აკმაყოფილებს ევრეთ წოდებულ დირიხლეს პირობებს: იგი უბან-უბან უწყვეტია და აქვს მინიმუმებისა და მაქსიმუმების სასრული რაოდენობა. ასეთ პირობებში (10) მწკრივი კრებადია $f(x)$ -საკენ ყველგან $[a, b]$ -ზე $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებს გარდა. თუ c წერტილში $f(x)$ პირველი რიგის წყვეტა აქვს, მაშინაც კრებადია (10) მწკრივი და მისი ჯამი $\frac{f(c+0) + f(c-0)}{2}$ გამოსახულების ტოლია (იხ. თეორემა 1 პარაგრაფ 10.1-ში).

შტურმ-ლიუვილის ამოცანა მეოთხე გვარის სასაზღვრო პირობებში ოდნავ განსხვავებულია ზემოთ აღწერილი ამოცანებისაგან, ამიტომ მას ცალკე გამოვყოფთ. ღვეუშვით $\varphi(x, \lambda)$ და $\psi(x, \lambda)$ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა (1) დიფერენციალური განტოლებისათვის და ფუნქციათა ეს წყვილი აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$$\varphi(a, \lambda) = 1, \quad \varphi'(a, \lambda) = 0, \quad \psi(a, \lambda) = 0, \quad \psi'(a, \lambda) = 1. \quad (11)$$

მეოთხე გვარის სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ზოგადი

$$X(x, \lambda) = A\varphi(x, \lambda) + B\psi(x, \lambda)$$

ამონახსნისათვის მივიღებთ:

$$A(\varphi(a, \lambda) - \varphi(b, \lambda)) + B(\psi(a, \lambda) - \psi(b, \lambda)) = 0,$$

$$A(\varphi'(a, \lambda) - \varphi'(b, \lambda)) + B(\psi'(a, \lambda) - \psi'(b, \lambda)) = 0,$$

აქედან (11)-ის გათვალისწინებით ვიღებთ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას A და B მუდმივების მიმართ:

$$A(1 - \varphi(b, \lambda)) - B\psi(b, \lambda) = 0,$$

$$-A\varphi'(b, \lambda) + B(1 - \psi'(b, \lambda)) = 0. \quad (12)$$

(12) სისტემას არატრივიალური ამონახსნის აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ამ სისტემის დეტერმინანტი ნულოვანია:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \varphi(b, \lambda) & -\psi(b, \lambda) \\ -\varphi'(b, \lambda) & 1 - \psi'(b, \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

გამოვთვალოთ ეს დეტერმინანტი და გავითვალისწინოთ, რომ ერთის მხრივ

$$W(\varphi, \psi) = \frac{p(a)}{p(x)} \Big|_{x=b} = \frac{p(a)}{p(b)} = 1$$

და მეორეს მხრივ

$$W(\varphi, \psi) = \varphi(b, \lambda)\psi'(b, \lambda) - \psi(b, \lambda)\varphi'(b, \lambda).$$

საბოლოოდ გვექნება განტოლება საკუთრივი რიცხვებისათვის

$$\Delta(\lambda) = 2 - \varphi(b, \lambda) - \psi'(b, \lambda) = 0. \quad (13)$$

მტკიცდება, რომ როდესაც $\lambda \rightarrow \infty$, (13) განტოლებას აქვს ამონახსნთა ქვემოდან შემოსაზღვრული, უსასრულო, დისკრეტული სიმრავლე და ამონახსნები მდებარეობენ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე. მიღებული შედეგი ჩამოვყალიბოთ შემდეგი დებულების სახით.

დებულება 3. შტურმ-ლიუვილის ამოცანას მეოთხე გვარის სასაზღვრო პირობებში აქვს ნამდვილი, ქვემოდან შემოსაზღვრული, უსასრულო, დისკრეტული სპექტრი.

დავუშვათ $\lambda = \lambda_n$ ამოცანის საკუთრივი რიცხვია. მაშინ (12)-დან გვექნება

$$A(1 - \varphi(b, \lambda_n)) - B\psi(b, \lambda_n) = 0. \quad (14)$$

შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს ქვემოთ მოყვანილი შემთხვევებიდან ერთ-ერთს:

1. $\psi(b, \lambda_n) \neq 0$, მაშინ

$$B = \frac{1 - \varphi(b, \lambda_n)}{\psi(b, \lambda_n)} A$$

და აქედან საკუთრივი ფუნქციები იქნება

$$X_n(x) = A_n \left(\varphi(x, \lambda_n) + \frac{1 - \varphi(b, \lambda_n)}{\psi(b, \lambda_n)} \psi(x, \lambda_n) \right).$$

2. $\psi(b, \lambda_n) = 0$, $\varphi(b, \lambda_n) \neq 1$. მაშინ (14)-დან ვპოულობთ $A = 0$

და საკუთრივ ფუნქციებს ექნებათ სახე:

$$X_n(x) = B_n \psi(x, \lambda_n).$$

3. $\psi(b, \lambda_n) = 0$, $\varphi(b, \lambda_n) = 1$. ამ დროს საკუთრივი ფუნქციებია

$$X_n(x) = A_n \varphi(x, \lambda_n) + B_n \psi(x, \lambda_n).$$

საკუთრივი ფუნქციების ზემოთ მოყვანილ გამოსახულებებში შემავალი $\varphi(b, \lambda_n)$ და $\psi(b, \lambda_n)$ ფუნქციები თვითონ არიან საკუთრივი ფუნქციები, ხოლო $\lambda = \lambda_n$ -ს -კი ჯერადი ფესვებია.

შემდგომში, გადმოცემის მოხერხებულობის მიზნით, საკუთრივი ფუნქციებისათვის ვიხმართ აღნიშვნას

$$X_n(x) = A_n X_n^{(1)}(x) + B_n X_n^{(2)}(x).$$

ახლა განვიხილოთ შტურმ-ლიუვილის ამოცანის საკუთრივი ფუნქციების ორთოგონალურობის საკითხი მეოთხე გვარის სასაზღვრო პირობის შემთხვევაში. დავუშვათ $\lambda = \lambda_n$ საკუთრივი რიცხვია, რომელსაც შეესაბამება საკუთრივი ფუნქცია $X_n(x)$ და $\lambda = \lambda_m$ საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციაა $X_m(x)$. (1) განტოლებიდან გვექნება

$$\begin{aligned}(p(x)X'_m(x))' + (\lambda_m r(x) - q(x))X_m(x) &= 0, \\ (p(x)X'_n(x))' + (\lambda_n r(x) - q(x))X_n(x) &= 0.\end{aligned}$$

პირველი განტოლება გაგამრავლოთ $X_n(x)$ -ზე, მეორე კი - $X_m(x)$. შემდეგ პირველს გამოვაკლოთ მეორე და ვაინტეგრიროთ მიღებული შედეგი $[a, b]$ -ზე, მივიღებთ:

$$(\lambda - \lambda_n) \int_a^b r(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0,$$

საიდანაც გვაქვს

$$\int_a^b r(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n,$$

რაც ნიშნავს, რომ საკუთრივი ფუნქციები ერთმანეთის ორთოგონალურები არიან $[a, b]$ -ზე წონით $r(x)$.

ზემოთ მიღებული შედეგი ჩამოვაყალიბოთ თეორემის სახით.

თეორემა 3. *მეოთხე გვარის სასაზღვრო პირობებში მტურმ-ლიუვილის ამოცანის საკუთრივი ფუნქციები, რომლებიც განსხვავებულ საკუთრივ მნიშვნელობებს შეესაბამებიან, ორთოგონალურები არიან $[a, b]$ -ზე წონით $r(x)$.*

საზოგადოდ, საკუთრივი ფუნქციები, რომლებიც ერთდაგივე (ჯერად) საკუთრივ რიცხვებს შეესაბამებიან, შესაძლებელია არ იყვნენ ორთოგონალურები, მაგრამ მათი ორთოგონალიზაცია შესაძლებელია შემდეგი პროცედურის საშუალებით.

დავუშვათ, $\lambda = \lambda_n$ ჯერადი საკუთრივი რიცხვი და მას შეესაბამება ორი განსხვავებული საკუთრივი ფუნქცია $X_n^{(1)}(x)$ და $X_n^{(2)}(x)$, მაშინ, როგორც აღვნიშნეთ

$$\int_a^b r(x) X_n^{(1)}(x) X_n^{(2)}(x) dx \neq 0.$$

შევადგინოთ ორი ფუნქცია

$$\tilde{X}_n^{(1)}(x) = X_n^{(1)}(x), \quad \tilde{X}_n^{(2)}(x) = X_n^{(2)}(x) - \gamma X_n^{(1)}(x).$$

ნათელია, რომ ეს ფუნქციები აგრეთვე საკუთრივი ფუნქციებია. ვაჩვენოთ, რომ γ ყოველთვის შესაძლებელია ისე შეირჩეს, რომ $\tilde{X}_n^{(1)}(x)$ და $\tilde{X}_n^{(2)}(x)$ ფუნქციები იყვნენ ორთოგონალურები. მართლაც, მოვითხოვთ, რომ შესრულდეს ტოლობა

$$\int_a^b r(x) \tilde{X}_n^{(1)}(x) \tilde{X}_n^{(2)}(x) dx = \int_a^b r(x) X_n^{(1)}(x) X_n^{(2)}(x) dx - \int_a^b r(x) (X_n^{(1)}(x))^2 dx = 0$$

საიდანაც

$$\gamma = \frac{\int_a^b r(x) X_n^{(1)}(x) X_n^{(2)}(x) dx}{\int_a^b r(x) (X_n^{(1)}(x))^2 dx}.$$

ამრიგად, ზემოთ მოყვანილი პროცედურების ჩატარება ყოველთვისაა შესაძლებელი, რადგან უკანასკნელი წილადის მნიშვნელი ნულისაგან განსხვავებულია. ამრიგად, ზოგადობის შეუზღუდავად, საკუთრივი ფუნქციები ყოველთვის შეიძლება ჩავთვალოთ ორთოგონალურებად. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ მეოთხე გვარის სასაზღვრო პირობების შემთხვევაშიდაც ფუნქციის მწკრივად წარმოდგენის არსი იგივეა, რაც პირველი, მეორე და მესამე გვარის სასაზღვრო პირობების დროს. მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

დებულება 4. ყოველი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ღირიზლეს პირობებს $[a, b]$ ინტერვალზე, წარმოდგენება მწკრივად შტურმ-ლიუვილის ამოცანის საკუთრივი ფუნქციების საშუალებით.

ამოცანა 1. ამოცხსნათ შტურმ-ლიუვილის შემდეგი ამოცანა

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 2\pi;$$

$$X(0) = X(2\pi), \quad X'(0) = X'(2\pi).$$

ამოხსნა. ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემას აქვს სახე:

$$\varphi(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x), \quad \psi(x, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}.$$

ზოგად ამონახსნი ასეთია:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}.$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ გამოსახულებებს:

$$A(1 - \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)) - B \frac{\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)}{\sqrt{\lambda}} = 0,$$

$$A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}2\pi) + B(1 - \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)) = 0.$$

საკუთრივი რიცხვების საპოვნელად ვხსნით განტოლებას:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi) & \frac{\sin(\sqrt{\lambda} 2\pi)}{\sqrt{\lambda}} \\ \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} 2\pi) & 1 - \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta(\lambda) = 2(1 - \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi)) = 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\sqrt{\lambda} 2\pi) = 1 \Rightarrow \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

საკუთრივი ფუნქციები იქნება

$$X_n(x) = A_n \cos(nx) + B_n \frac{\sin(nx)}{n}.$$

ზემოთ მოყვანილი აღნიშვნების შესაბამისად შეგვიძლია საკუთრივი ფუნქციები გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$X_0(x) = 1, \quad X_n^{(1)}(x) = \cos(nx), \quad X_n^{(2)}(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ამრიგად, $\lambda_0 = 0$ მარტივი საკუთრივი რიცხვია, რომელსაც შეესაბამება საკუთრივი ფუნქცია $X_0(x) = 1$, ხოლო დანარჩენი საკუთრივი რიცხვების ჯერადობა 2-ის ტოლია. ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციის დაშლას, რომელიც დირიხლეს პირობას აკმაყოფილებს, ჩვენი ამოცანის საკუთრივი ფუნქციების საშუალებით აქვს სახე:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

მასალის გადმოცემის სისრულის მიზნით, ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ სინგულარული შტურმ-ლიუვილის ტიპური ამოცანების ამოხსნას. ამ საკითხს ჩვენ მომდევრო პარაგრაფებში კიდევ დავუბრუნდებით.

ამოცანა 2. ამოხსნათ შტურმ-ლიუვილის ამოცანა

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$X(0) = 0, \quad X|_{x \rightarrow \infty}(0) = O(1).$$

ამოხსნა. ზოგად ამოხსნას აქვს სახე

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

პირველი სასაზღვრო ამოცანიდან გამომდინარეობს, რომ $X(0) = 0 \Rightarrow$

$A = 0$. ამრიგად,

$$X(x) = B \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

$X|_{x \rightarrow \infty}(0) = O(1)$ სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $\sqrt{\lambda}$ ნამდვილი რიცხვია და მასსადამე $\lambda > 0$. ამ შემთხვევაში განტოლების

ზოგადი ამონახსნია $X(x) = A + Bx$, სასაზღვრო პირობიდან ვპოულობთ $A = 0$ და $B = 0$. ამრიგად, $\lambda = 0$ არ არის ამოცანის საკუთრივი რიცხვი. საბოლოოდ გვაქვს: $\lambda \in (0, \infty)$. ე.ი. ამოცანას აქვს უწყვეტი სპექტრი. მოსახერხებელია ვიხმაროთ აღნიშვნა $\lambda = \lambda_\nu = \nu^2$, $0 < \nu < \infty$, ასეთ პირობებში საკუთრივი ფუნქციები იქნება $X_\nu(x) = \sin(\nu x)$.

ამოცანა 3. ამოვხსნათ შტურმ-ლიუვილის შემდეგი ამოცანა
 $(r^2 R'(r))' + \lambda r^2 R(r) = 0$, $0 < r < a$, $R|_{r \rightarrow 0} = O(1)$, $R(a) = 0$.

ამოხსნა. დიფერენციალური განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(r^2 R'(r))' + \lambda r^2 R(r) = 0$$

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) + \lambda r^2 R = 0 \Rightarrow rR''(r) + 2R'(r) + \lambda rR = 0.$$

გამოვიყენოთ ტოლობა $(rR)'' = rR'' + 2R'$ (შეამოწმეთ მისი სამართლიანობა!) და გადავწეროთ ბოლო დიფერენციალური განტოლება მისი ექვივალენტური ფორმით:

$$(rR)'' + \lambda rR = 0.$$

ამ განტოლების ზოგად ამონახსნს კი აქვს სახე

$$rR(r) = A \cos(\sqrt{\lambda}r) + B \sin(\sqrt{\lambda}r).$$

აქედან გამოდის რომ გამოსავალი დიფერენციალური ზოგადი განტოლების ამონახსნია

$$R(r) = A \frac{\cos(\sqrt{\lambda}r)}{r} + B \frac{\sin(\sqrt{\lambda}r)}{r}$$

ფუნქცია. სასაზღვრო პირობებიდან გამოდინარეობს, რომ

$$R|_{r \rightarrow 0} = O(1) \Rightarrow A = 0,$$

$$R(a) = 0 \Rightarrow B \frac{\sin(\sqrt{\lambda}a)}{a} = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}a) = 0, \quad B \neq 0.$$

ამრიგად, საკუთრივი რიცხვები იქნება

$$\sqrt{\lambda}a = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

ხოლო შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია

$$R_n(r) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a}r\right)}{r}.$$

როდესაც $\lambda = 0$, ზოგადი ამონახსნია $R(r) = \frac{A}{r} + B$, სასაზღვრო

პირობიდან გამოდინარეობს: $A = B = 0$, რაც ნიშნავს, რომ $\lambda = 0$ არ

არის ამოცანის საკუთრივი რიცხვი. ამოცანას კი -დისკრეტული სპექტრი აქვს.

ამოცანა 4. ამოხსნათ შტურმ-ლიუვილის შემდეგი ამოცანა

$$(rR'(r))' + \frac{\lambda}{r}R(r) = 0, \quad 0 < r < a, \quad R|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad R(a) = 0.$$

ამოხსნა. დიფერენციალური განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$rR''(r) + R' + \frac{\lambda}{r}R = 0 \Rightarrow r^2R''(r) + rR' + \lambda R = 0.$$

მივიღეთ ეილერის განტოლება, რომლის ამონახსნს ვეძებთ $R = r^s$ ფუნქციის სახით. უკანასკნელ განტოლებაში ჩასმით ვიღებთ განტოლებას s -ის მიმართ:

$$s(s-1) + s + \lambda = 0 \Rightarrow s = \pm i\sqrt{\lambda},$$

ე.ი. განტოლების ამონახსნია $R(r) = r^{\pm i\sqrt{\lambda}} = e^{\pm i\sqrt{\lambda} \ln(r)}$. მოსახერხებელია ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემად ავიღოთ ფუნქციები $\cos(\sqrt{\lambda} \ln(r))$ და $\sin(\sqrt{\lambda} \ln(r))$. ასეთ პირობებში ზოგადი ამონახსნია

$$R(r) = A \cos(\sqrt{\lambda} \ln(r/a)) + B \sin(\sqrt{\lambda} \ln(r/a))$$

ფუნქცია. $R(a) = 0$ სასაზღვრო პირობიდან გამოძინარეობს, რომ $A = 0$, ხოლო $R(0) = O(1)$ -დან კი ვღებულობთ, რომ $\sqrt{\lambda}$ ნამდვილი რიცხია. ე.ი. $\lambda > 0$. აღვნიშნოთ $\lambda = \lambda_\nu = \nu^2$, $0 < \nu < \infty$. მივიღებთ საკუთრივ ფუნქციებს:

$$R_\nu(r) = \sin(\nu \ln(r/a)).$$

თუ $\lambda = 0$, მაშინ ზოგადი ამონახსნია $R(r) = A \ln(r) + B$ ფუნქცია. სასაზღვრო პირობებიდან მივიღებთ ტოლობებს: $A = B = 0$. რაც ნიშნავს, რომ $\lambda = 0$ არ არის ამოცანის საკუთრივი რიცხვი. ამრიგად, ამოცანას აქვს უწყვეტი სპექტრი და $\lambda \in (0, \infty)$.

ამოცანა 5. განვიხილოთ კიდევ ერთი ამოცანა

$$X''(x) + (\lambda - x^2)X(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad X|_{x \rightarrow \pm\infty} = O(1).$$

ამოხსნა. ანალოგიური მსჯელობებით შესაძლებელია ვაჩვენოთ (აუცილებელი გარდაქმნები შეასრულეთ დამოუკიდებლად!), რომ ამოცანის საკუთრივი რიცხვებია $\lambda = \lambda_n = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ხოლო საკუთრივი ფუნქციები კი

$$X_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),$$

სადაც $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ერმიტის მრავალწევრებია.

ამოცანის სპექტრი დისკრეტულია.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითებიდან შესაძლებელია გაკეთდეს დასკვნა: სინგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანის სპექტრი დამოკიდებულია სასაზღვრო პირობებზე. თუ ამოცანის სპექტრი აღმოჩნდა დისკრეტული, მაშინ რეგულარული ამოცანის ამოხსნის მეთოდები მთლიანად შეგვიძლია გამოვიყენოთ სინგულარული ამოცანის ამოხსნისთვისაც, ხოლო თუ სპექტრი შერეული ან უწყვეტია, მაშინ რეგულარული ამოცანისათვის გაკეთებული დასკვნები არ ვრცელდება სინგულარულ ამოცანაზე.

10.3 რამდენიმე ტიპური ამოცანა

$$1. y''(x) + \alpha y(x) = 0, \quad y'(0) = y'(l) = 0.$$

$y''(x) + \alpha y(x) = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

ა) $y(x) = c_1 \sin(\sqrt{\alpha}x) + c_2 \cos(\sqrt{\alpha}x)$, როდესაც $\alpha > 0$;

ბ) $y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha}x}$, როდესაც $\alpha < 0$;

გ) $y(x) = c_1 x + c_2$, როდესაც $\alpha = 0$.

განვიხილოთ თითოეული შემთხვევა ცალ-ცალკე.

ა) როდესაც $\alpha > 0$, $y'(0) = 0$ სასაზღვრო პირობიდან თანახმად $y'(x) = c_1 \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}x) - c_2 \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა 0-ში 0-ის ტოლია, ე.ი. $y'(0) = c_1 \sqrt{\alpha} = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $c_1 = 0$. $y'(l) = 0$

სასაზღვრო პირობიდან კი გვაქვს $c_2 \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}l) = 0$, საიდანაც მივიღებთ, რომ ან $c_2 = 0$ ან $\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}l) = 0$. თუ $c_2 = 0$, მაშინ განტოლების ამონახსნი იქნება ტრივიალური, ამიტომ ვუშვებთ, რომ $c_2 \neq 0$, მაშინ $\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}l) = 0$, ეს

ტოლობა კი სრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\sqrt{\alpha}l = \pi k$, ე.ი. $\alpha = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$,

$k \in \mathbb{N}$. ამრიგად, მოცემული ამოცანის საკუთრივი რიცხვებია $\alpha_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$, რომელთა შესაბამისი ამონახსნებია $y_k(x) = c_2 \cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$. საკუთრივი

ფუნქციები კი იქნება $y_k(x) = \cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$. გავიხსენოთ, რომ საკუთრივ რიცხვს მრავალი საკუთრივი ვექტორი შეესაბამება, მაგრამ ისინი წრფივად დამოკიდებულებია. მათ შორის ვირჩევთ ერთ-ერთს. ნორმირებული საკუთრივი ფუნქციის მისაღებად საჭიროა მათი ნორმირება. რადგან

$$\int_0^l c_2 \cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right) dx = c_2 \int_0^l \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi k}{l}x\right) dx + \frac{c_2}{2} \int_0^l dx = \frac{c_2}{2} \frac{l}{2\pi k} \sin\left(\frac{2\pi k}{l}x\right) \Big|_0^l + \frac{c_2}{2} (x + c) \Big|_0^l = \frac{c_2}{2} l,$$

ამიტომ $c_2 = \frac{2}{l}$. ამრიგად, c_2 გამოითვლება ნორმირების $\int_0^l c_2 \cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right) dx = 1$ პირობიდან და მივიღეთ, რომ $y_k(x) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$ არიან ამოცანის ნორმირებული საკუთრივი ფუნქციები.

ბ) როდესაც $\alpha < 0$, განტოლების ამონახსნის გაწარმოებით მივიღებთ $y'(x) = c_1\sqrt{\alpha}e^{\sqrt{-\alpha}x} - c_2\sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{-\alpha}x}$. პირველი სასაზღვრო პირობიდან გვაქვს $y'(0) = c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$. ხოლო მეორე სასაზღვრო პირობა კი გვაძლევს $y'(l) = c_1\sqrt{\alpha}e^{\sqrt{-\alpha}l} - c_2\sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{-\alpha}l} = 0$. ამ უკანასკნელიდან კი $c_1 = c_2$, $\alpha \neq 0, l \neq 0$ გათვალისწინებით ვიღებთ $c_1 = c_2 = 0$. ამრიგად, ამოცანას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

გ) როდესაც $\alpha = 0$, როგორც აღვნიშნეთ, განტოლების ამონახსნია $y(x) = c_1x + c_2$ წრფივი ფუნქცია. $y'(x) = c_1$, ამიტომ პირველი სასაზღვრო პირობის თანახმად $c_1 = 0$. მეორე სასაზღვრო პირობა კი $y(x) = c_2$ მუდმივი ფუნქციისათვის სრულდება ნებისმიერი c_2 რიცხვისათვის. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ამოცანის არატრივიალური ამონახსნია ნებისმიერი მუდმივი. $\alpha = 0$ საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ფუნქცია კი იქნება $y_0(x) = \frac{1}{l}$.

2. $y''(x) + \alpha y(x) = 0$, $y(0) = y'(l) + hy(l) = 0$, $h > 0$.

ა) $y(x) = c_1 \sin(\sqrt{\alpha}x) + c_2 \cos(\sqrt{\alpha}x)$, როდესაც $\alpha > 0$;

ბ) $y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha}x}$, როდესაც $\alpha < 0$;

გ) $y(x) = c_1x + c_2$, როდესაც $\alpha = 0$.

ა) როდესაც $\alpha > 0$, $y(0) = 0$ სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $c_2 = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 \sin(\sqrt{\alpha}x) \Rightarrow y'(x) = c_1\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}x)$,

ამიტომ მეორე სასაზღვრო პირობიდან $y'(l) + hy(l) = 0$ გვაქვს

$c_1(\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}l) + h \sin(\sqrt{\alpha}l)) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ ან $\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}l) + h \sin(\sqrt{\alpha}l) = 0$.

თუ $c_1 = 0$ მაშინ ამოცანას ექნება მხოლოდ 0-ოვანი ამონახსნი, ამიტომ ვუშვებთ, რომ $c_1 \neq 0$, მაშინ

$$\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}l) + h \sin(\sqrt{\alpha}l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\alpha}l)$$

ამ ტრანსცედენტულ განტოლებას ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა აქვს. მართლაც, $\sqrt{\alpha}$ და $-h \operatorname{tg}(\sqrt{\alpha}l)$ ფუნქციების გრაფიკებს უსასრულო რაოდენობის გადაკვეთის წერტილები აქვთ, ამ გადაკვეთის წერტილების პოვნა კი შესაძლებელია საკმაოდ დიდი სიზუსტით. აღვნიშნოთ ისინი α_k -თი. ამრიგად, α_k -ს შესაბამისი ამონახსნი იქნება $y_k(x) = c_1 \sin(\sqrt{\alpha_k}x)$. c_1 -ს ვიპოვით ნორმირების პირობიდან.

როდესაც $\alpha \leq 0$, ამოცანას არანულოვანი ამონახსნი არ აქვს. ამამი დაწვრთმუნდებით ჩვენი ამოცანისათვის ამოცანა 1-ის შესაბამის პუნქტებში მოყვანილი მსჯელობის განმეორებით. მართლაც, როდესაც $\alpha = 0$, განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y(x) = c_1x + c_2$, ამიტომ $y'(x) = c_1$, პირველი სასაზღვრო პირობიდან გვაქვს $y(0) = c_2 = 0$, ხოლო მეორე სასაზღვრო პირობის თანახმად $y'(l) + hy(0) = c_1 + hc_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$.

ამრიგად, ამოცანის არატრივიალური ამონახსნი აქვს როდესაც $\alpha > 0$. მისი საკუთრივი რიცხვებია $\sqrt{\alpha} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\alpha}l)$ განტოლების α_k , $k \in \mathbb{N}$ ამონახსნები, ხოლო მათი შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია $y_k(x) =$

$\sin(\sqrt{\alpha_k}x)$. ამოცანა 1-ში მოყვანილი მსჯელობის განმეორება საკმარისია

$\sin(\sqrt{\alpha_k}x)$ ფუნქციების ნორმირებისათვის. კერძოდ, $\sqrt{\int_0^l \sin^2(\sqrt{\alpha_k}x)dx} = \frac{l}{2}$.

3. $y''(x) + \alpha y(x) = 0$, $y'(0) - Hy(0) = y'(l) + hy(l) = 0$, $H, h > 0$.

$y''(x) + \alpha y(x) = 0$ განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$y(x) = c_1 \sin \sqrt{\alpha}x + c_2 \cos \sqrt{\alpha}x$, როდესაც $\alpha > 0$;

$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha}x}$, როდესაც $\alpha < 0$;

$y(x) = c_1 x + c_2$, როდესაც $\alpha = 0$.

როდესაც $\alpha > 0$ გვაქვს $y'(x) = c_1 \sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha}x - c_2 \sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha}x$. $y'(0) - Hy(0) = 0$ სასაზღვრო პირობიდან მივიღებთ

$$c_1 \sqrt{\alpha} - H c_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = H \frac{c_2}{c_1}. \quad (1)$$

მეორე $y'(l) + hy(l) = 0$ სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sqrt{\alpha}(c_1 \cos \sqrt{\alpha}l - c_2 \sin \sqrt{\alpha}l) + h(c_1 \sin \sqrt{\alpha}l + c_2 \cos \sqrt{\alpha}l) = 0$$

$\Rightarrow$

$$c_1(\sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha}l + h \sin \sqrt{\alpha}l) + c_2(-\sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha}l + h \cos \sqrt{\alpha}l) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha}l + h \sin \sqrt{\alpha}l}{\sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha}l - h \cos \sqrt{\alpha}l}. \quad (2)$$

(1),(2) $\Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{H} = \frac{\frac{\sqrt{\alpha}}{h} \operatorname{ctg} \sqrt{\alpha}l + 1}{\frac{\sqrt{\alpha}}{h} - \operatorname{ctg} \sqrt{\alpha}l}$$

$\Rightarrow$

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\alpha}l \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{H} + \frac{\sqrt{\alpha}}{h} \right) = \frac{a}{Hh} - 1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{h} \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\alpha}} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\alpha}l = \frac{\sqrt{\alpha}}{h} \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\alpha}} \right) \frac{Hh}{\sqrt{\alpha}(H+h)}.$$

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\alpha}l = \frac{H}{H+h} \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\alpha}} \right). \quad (3)$$

α შეგვიძლია ვიპოვოთ სხვა გზითაც, კერძოდ (2) ტოლობიდან:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha}l + h \sin \sqrt{\alpha}l}{\sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha}l - h \cos \sqrt{\alpha}l} = -\operatorname{tg}(a + \sqrt{\alpha}l),$$

სადაც $a = \arcsin \frac{\sqrt{\alpha}}{a+h^2}$.

გავიხსენოთ, რომ $\sqrt{\alpha} = H \frac{c_2}{c_1}$, ამიტომ

$$\sqrt{\alpha} = -H \operatorname{tg}(a + \sqrt{\alpha}l). \quad (4)$$

(3) და (4) განტოლებებს დადებით ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა აქვთ (დავრწმუნდეთ გრაფიკების საშუალებით ამონახსნის პოვნის ხერხის გამოყენებით!)

ამრიგად, როდესაც შტურმ-ლიუვილის მოცემულ ამოცანას აქვს უსასრულო რაოდენობის საკუთრივი რიცხვები, რომლებიც არიან (3) განტოლების ამონახსნები და მათი შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია

$$y_k(x) = H \sin \sqrt{\alpha_k} x + \sqrt{\alpha_k} \cos \sqrt{\alpha_k} x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

როდესაც $\alpha < 0$ ამოცანას არატრივიალური ამონახსნი არ აქვს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\alpha = 0$. $y'(0) - Hy(0) = 0$ სასაზღვრო პირობიდან გვაქვს $c_1 - Hc_2 = 0 \Rightarrow y(x) = c_2(Hx + 1)$. მეორე $y'(l) + hy(l) = 0$ სასაზღვრო პირობა გვამღებებს $c_2(H + Hhl + h) = 0$, საიდანაც $c_1 = c_2 = 0$. ამრიგად, განხილულ შემთხვევაში ამოცანას არატრივიალური ამონახსნი არ აქვს. აქვე შევნიშნოთ, რომ

$$\|y_k\|^2 = \frac{l(H^2 + \alpha_k)^2(h^2 + \alpha_k) + (H+h)(\alpha_k + Hh)(\alpha_k + H^2)}{2(H^2 + \alpha_k)(h^2 + \alpha_k)},$$

$$\text{როდესაც } H = h, \text{ გვექნება } \|y_k\|^2 = \frac{l(h^2 + \alpha_k) + 2h}{2}.$$

სავარჯიშო დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. პარაგრაფ 10.1-ის დებულება 1-ის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი a -სათვის

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots$$

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სისტემა ორთონორმირებულია $[a, a + 2\pi]$ სეგმენტზე.

2. ამოხსენით შტურმ-ლიუვილის შემდეგი ამოცანები

$$1. y''(x) + \alpha y(x) = 0, \quad y(0) = y'(l) = 0.$$

საკუთრივი რიცხვები: $\alpha_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2$, საკუთრივი ფუნქციები: $y_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}x\right)$, $k \in \mathbb{N}$, $\|y_k\|^2 = \frac{l}{2}$.

$$2. y''(x) + \alpha y(x) = 0, \quad y'(0) = y(l) = 0.$$

საკუთრივი რიცხვები: $\alpha_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2$, საკუთრივი ფუნქციები $y_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}x\right)$, $k \in \mathbb{N}$, $\|y_k\|^2 = \frac{l}{2}$.

$$3. y''(x) + \alpha y(x) = 0, \quad y'(0) - hy(0) = y(l) = 0, \quad h > 0$$

ამოცანას არატრივიალური ამონახსნი აქვს როდესაც $\alpha_k > 0$, სადაც α_k არის $\sqrt{\alpha} = -htg(\sqrt{\alpha}l)$ განტოლების ამონახსნები, შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია $y_k(x) = h \sin(\sqrt{\alpha_k}x) + \sqrt{\alpha_k} \cos(\sqrt{\alpha_k}x)$, $k \in \mathbb{N}$, $\|y_k\|^2 = \frac{l(h^2 + \alpha_k) + h}{2}$.

$$4. y''(x) + \alpha y(x) = 0, \quad y'(0) = y'(l) + hy(0) = 0, \quad h > 0.$$

ამოცანას არატრივიალური ამონახსნი აქვს როდესაც $\alpha_k > 0$, სადაც α_k არის $\sqrt{\alpha} t g(\sqrt{\alpha}l) = h$ განტოლების ამონახსნები, შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია $y_k(x) = \cos(\sqrt{\alpha_k}x)$, $k \in \mathbb{N}$, $\|y_k\|^2 = \frac{l(h^2 + \alpha_k) + h}{2(h^2 + \alpha_k)}$.

$$5. y''(x) + \alpha y(x) = 0, \quad y'(0) - hy(0) = y'(l) = 0, \quad h > 0.$$

ამოცანას არატრივიალური ამონახსნი აქვს როდესაც $\alpha_k > 0$, სადაც α_k არის $\sqrt{\alpha} = -hctg(\sqrt{\alpha}l)$ განტოლების ამონახსნები, შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია $y_k(x) = h \sin(\sqrt{\alpha_k}x) + \sqrt{\alpha_k} \cos(\sqrt{\alpha_k}x)$, $k \in \mathbb{N}$, $\|y_k\|^2 = \frac{l(h^2 + \alpha_k) + h}{2}$.

$$6. \quad \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\lambda}{x} y = 0, \quad y(a) = 0, y(b) = 0, x \in [a, b], a \neq 0,$$

$b \neq 0$;

$$7. \quad \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda x^2 y = 0, y(a) = 0, y(b) = 0, x \in [a, b], a \neq 0,$$

$b \neq 0$;

$$8. \quad y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(-l) = 0, y(l) = 0, x \in [-l, l];$$

$$9. \quad y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(-l) = 0, y'(l) = 0, x \in [-l, l];$$

$$10. \quad y''(x) + \lambda y(x) = 0, -y'(-l) + hy(-l) = 0, y'(l) + hy(l) = 0, x \in [-l, l], h > 0;$$

$$11. \quad \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\lambda}{x} y = 0, \quad y'(a) = 0, y'(b) = 0, x \in [a, b], a \neq 0,$$

$b \neq 0$.

3. დაშალეთ ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე შემდეგი ფუნქციები

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases} \quad \text{პასუხი: } f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases} \quad \text{პასუხი: } f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2nx).$$

4. $\sin \frac{k\pi x}{l}, k = 1, 2, \dots$, ბაზისში დაშალეთ შემდეგი ფუნქციები

$$1) \varphi(x) \equiv 1, 0 < x < l. \text{ მითითება: } \varphi_k = \frac{2}{k\pi} (1 + (-1)^k).$$

$$2) \varphi(x) \equiv x, 0 < x < l. \text{ მითითება: } \varphi_k = -\frac{2}{k\pi} l (-1)^k.$$

11 ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების კვადრატურებში ინტეგრებადობა

11.1 კომპიუტერული ალგებრის სისტემების შესახებ

კომპიუტერული ალგებრის სისტემებს უწოდებენ ისეთ პროგრამულ პაკეტებს (ან ცალკეულ მოდულებს), რომლებიც ოპერირებენ სიმბოლურ (ე.ი. ალგებრულ, მაგალითად, $(a+b)^2 - ab$, და არა არითმეტიკულ, მაგალითად, $(5+7)^2 - 5 \times 7$) გამოსახულებებზე. კომპიუტერული ალგებრის რამდენიმე სისტემა არსებობს, მათ შორის სამეცნიერო და საუნივერსიტეტო წრეებში ყველაზე გავრცელებულია Maple და Mathematica. დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად ამ პაკეტებს ხშირად მიმართავენ, ამიტომ აქ რამდენიმე შენიშვნას გავაკეთებთ, საზოგადოდ, კომპიუტერული ალგებრის სისტემების შესახებ.

დამწყებისათვის კომპიუტერული ალგებრის ნებისმიერი სისტემის გამოყენებაზე ადვილი არაფერია. საკმარისია იცოდეს რამდენიმე ბრძანება და მათი საშუალებით შეძლებს ისეთი სიმბოლური და რიცხვითი გამოთვლების წარმოებას, რომელსაც ფურცლითა და ფანქრით რამდენიმე საათი დაჭირდებოდა და ხშირ შემთხვევაში მათი გაკეთება შეუძლებელიც კი იქნებოდა. კომპიუტერული ალგებრის სისტემების სინტაქსი მარტივია და გარდა ამისა, მონაცების და გამოსახულებების შეტანა საკმაოდ ადვილია, რადგან მათი წარმოდგენისათვის საჭირო არ არის სპეციალური ჩანაწერები, ისინი მაქსიმალურად არიან დაახლოებული წერის იმ სტილთან, რომლებსაც ჯერ კიდევ სკოლის მერხიდან ვეჩვენით.

დაპროგრამების ჩვეულებრივი ენებისაგან განსხვავებით კომპიუტერული ალგებრის სისტემებს ერთი რამ ნამდვილად ახასიათებთ და მათი ცოდნა აუცილებელია. ეს გახლავთ შემდეგი: სი ან რომელიმე სხვა ენაზე დასაპროგრამებლად მნიშვნელოვანია ენის სინტაქსის ცოდნა, მაგრამ სულაც არაა აუცილებელი იცოდეთ როგორ მუშაობს კომპილატორი. კომპიუტერული ალგებრის სისტემებზე დაპროგრამების დროს კი ამის ცოდნა მნიშვნელოვანია, კერძოდ, ხშირად საჭიროა გავარკვიოთ, როგორ ხდება მიმართვა მონაცემებზე და რა ალგორითმით ხდება მათი დამუშავება. მართლაც, წინასწარ ძნელია და ხშირად კიდევ შეუძლებელიცაა. გამოთვლების ზომების წინასწარ დადგენა, მხედველობაში გვაქვს გამოთვლებისათვის საჭირო დრო და მეხსიერება, აგრეთვე მიღებული შედეგის აღქმადობა (ხდება რომ გამოთვლების შედეგები რამდენიმე თაბახს იკავებს). ალგორითმის ცოდნა საშუალებას იძლევა შედეგის ოპტიმიზაცია მოვახდინოთ. ალგებრულ ოპერაციათა უმრავლესობა მომენტალურად სრულდება, მაგრამ თუ აღმოჩნდა, რომ ეს ასე არ არის, შესაძლებელია ტყუილად ვიზრუნოთ რესურსების გაზრდაზე, როდესაც წარუმატებლობის

მიზეზი შუალედური გამოთვლების ექსპონენციალურად ზრდაა. მაგალითად, სი-ზე დაპროგრამების დროს არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს, ვეებთ 100×100 თუ 500×500 ზომის მატრიცების საკუთრივ რიცხვებს, რადგან გამოთვლების დრო პრაქტიკულად წრფივად იზრდება, მაშინ როდესაც კომპიუტერული ალგებრის სისტემაზე 5×5 ზომის მატრიცის საკუთრივი რიცხვის გამოთვლას შეიძლება დასჭირდეს 15 წამი, ხოლო 6×6 ზომის მატრიცისას კი 15 წუთი.

ამიტომ დაპროგრამების ეფექტური სტილის ათვისება და გამოუმუშავება უნარისა, წინასწარ განჭვრიტო გამოთვლის ზომები, კომპიუტერული ალგებრული სისტემების ეფექტურად გამოყენების დროს უდაო წინაპირობაა. სამწუხაროდ, არც ერთსა და არც მეორისათვის, ერთი რეცეპტის შეთავაზება არავის შეუძლია, ერთიც და მეორეც გამოცდილების დაგროვებასთან ერთად მოდის.

თუ კომპიუტერული ალგებრის სისტემის ოპტიმალურად გამოყენება არ ხდება, მაშინ მასზე სერიოზული, სამეცნიერო გათვლების წარმოება ხშირად შეუძლებელია და პირველი კითხვა რაც შეიძლება მომხმარებელმა დასვას, შესაძლებელია იყოს ასეთი: ღირს თუ არა დრო დაკარგო დაპროგრამების ისეთი ენის შესწავლაზე, რომელსაც მხოლოდ ეგრეთ წოდებული, სათამაშო ამოცანების ამოხსნა შეუძლია? ამასთან დაკავშირებით ჩვენ პიდაპირ ვაცხადებთ, რომ კომპიუტერული ალგებრის სისტემები არიან ხელოვნური ინტელექტის პირველი ხელმისაწვდომი მაგალითები. მანქანას პაექრობა არ შეუძლია ადამიანთან, რომელიც იყენებს მეხსიერებას, გამოცდილებას, კომბინირებულ, ასოციაციურ და ინტუიციურ აზროვნებას. ხელოვნური ინტელექტის კვლევამ აჩვენა თუ რამდენად ბევრი იცის, რამდენად ბევრი შეუძლია ადამიანს და რამდენად ეფექტურად იყენებს მას მუშაობის დროს.

სიმბოლური გამოთვლების ყველა სისტემაში ჩადებულია მათემატიკური და ლოგიკური წესების ერთობლიობა. სისტემის უნივერსალობისაკენ მიმავალ გზაზე მუდამ გვხდება გადაუჭრელი პრობლემები. მაგალითად, სტუდენტისათვის გასაგებია ჩანაწერი ln 2, ამ გამოსახულებაში ის არასოდეს იგულისხმებს მრავალსახა ფუნქციას, მაშინ როდესაც გამომთველი მანქანისათვის ასეთი გადასვლა პრობლემაა. ამის გამო მომხმარებელმა არა მარტო უნდა მისდიოს სისტემაში ჩადებული წესების ერთობლობას, არამედ კარგად უნდა გააგებინოს გამომთველ მანქანას, რისი მიღწევა სურს მას და რას გულისხმობს ინტუიციურად. ამიტომ ყოველი მომხმარებელი, კომპიუტერული ალგებრის სისტემებთან მუშაობის დროს თავის სტილს იმუშავებს.

როგორც სპეციალისტები მიუთითებენ, კომპიუტერულ ალგებრებზე მუშაობის დაწყებას ყოველთვის აქვს აზრი, რადგან ყველაფერს რომ თავი დავანებოთ ის არის საკმაოდ ხელსაყრელი გრაფიკული კალკულატორი,

რომლის შესაძლებლობების გამოსაყენებლად არ არის აუცილებელი ალგორითმების ცოდნა, საკმარისია ვიცოდეთ შესაბამისი ბრძანებები და სინტაქსი.

სიმბოლური გამოთვლების სისტემა (აპლიკაცია) Maple-სათვის დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემების ამოსახსნელად რეალიზებულია ბრძანება `dsolve(განტოლებები, ცვლადები, ოპციები)`. სადაც *განტოლებები* აღნიშნავს ამოსახსნელ დიფერენციალურ განტოლებას ან განტოლებათა სისტემას, *ცვლადები* მიუთითებს იმაზე, თუ რომელი ცვლადების მიმართ უნდა ამოიხსნას განტოლება, ხოლო *ოპციები* კი ის აუცილებელი პარამეტრებია, რომლებიც მოიცემიან შემდეგი სახით: *სიტყვა-გასაღები=მნიშვნელობა*.

ბრძანება `dsolve`-ს საშუალებით ანალიზურად იხსნება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა უმრავლესობა. თუ ოპცია მითითებულია სახით: `type=exact`, მაშინ ბრძანება ცდილობს იპოვოს განტოლების ზუსტი ამონახსნი, ანუ განტოლება ამოხსნას კვადრატურებში. ამბობენ რომ განტოლება იხსნება *კვადრატურებში* (ან ინტეგრებადია კვადრატურებში), თუ მისი ყველა ამონახსნი ცხადად, ან არაცხადად გამოისახება ელემენტარული ფუნქციებზე სასრული არითმეტიკული ოპერაციების, მათი სუპერპოზიციის და პირველყოფილის საშუალებით.

მაგალითად, განტოლება $y' = e^{-x^2}$ ამოხსნადია კვადრატურებში, რადგან მისი ამონახსნია $y = \int e^{-x^2} dx + C$, მიუხედავად იმისა, რომ $\int e^{-x^2} dx$ ინტეგრალი არ აიღება ელემენტარულ ფუნქციათა კლასში (იხ. შემდეგი პარაგრაფი). უმარტივესი განტოლება, რომელიც კვადრატურებში არ იხსნება არის რიკატის $y' = y^2 + x$ განტოლება, რომელიც ჩვენ უკვე განვიხილეთ §3-ის პუნქტი 3.6-ში და აქ მოყვანილი განტოლება წარმოადგენს განტოლება (1)-ის კერძო შემთხვევას პუნქტი 3.6-დან. ამიტომ, დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად ზშირად იყენებენ ასიმპტოტურ და რიცხვით მეთოდებს.

სხვა შესაძლო ოპციებია `type=series` (ამ შემთხვევაში განტოლების ამონახსნი მოიცემა მწკრივის სახით), `type=numeric` (ამ დროს რიცხვითი ამონახსნის პოვნა ხდება). შესაძლებელია, აგრეთვე, რამდენიმე სხვა ოპციის მითითება. მაგალითად, გარკვევა იმისა, შესაძლებელია თუ არა ცხადი სახით იქნას მოძებნილი ამონახსნი (`explicit=true` ან `explicit=false`), ან კიდევ მითითებული იქნას ინტეგრების მეთოდები: მაგალითად, `method=laplace`. იმ შემთხვევაში, როდესაც იძებნება განტოლების რიცხვითი ამონახსნი (ე.ი. ოპცია გამოიყურება შემდეგნაირად `type=numeric`), შესაძლებელია მიუთითოთ რიცხვითი გამოთვლების მეთოდზე:

`method=rkf45`- მეოთხე-მეხუთე რიგის რუნგე-კუტის მეთოდი;

method=dvark78- მეშვიდე-მერვე რიგის რუნგე-კუტის მეთოდი;
 method=classical- შეიცავს რამდენიმე კლასიკურ მეთოდს.
 method=gear და method=mgear გირის ერთბიჯიანი და მრავალ
 ბიჯიანი მეთოდები.

11.2 ლიუვილის თეორიის ელემენტები

ლიუვილმა აჩვენა, რომ $\int e^{-x^2} dx$ განუსაზღვრელი ინტეგრალი არ არის ელემენტარული ფუნქცია, მიუხედავად იმისა, რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ელემენტარულ ფუნქციათა კომპოზიციაა. უფრო მეტიც, ლიუვილმა დაამტკიცა ზოგადი თეორემა, რომელიც საშუალებას იძლევა აიგოს ელემენტარული ფუნქციები, რომელთაგან ინტეგრალი არაელემენტარულია. მაგალითად, $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ ინტეგრალები არსებობენ, მაგრამ არ გამოისახებიან ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით. აქ ასეთი ანალოგია შეგვიძლია გავაკეთოთ: ინტეგრალი $\int \frac{dx}{x}$ და $\int \frac{dx}{1+x^2}$ რაციონალური ფუნქციებიდან არ არიან რაციონალური ფუნქციები, რადგან $\int \frac{dx}{x} = \ln x$ და $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x$.

ბუნებრივად და მარტივად ლიუვილის ძირითადი თეორემა ყალიბდება და მტკიცდება დიფერენციალურ ველების (განმარტება მოყვანილია ქვემოთ) თეორიაში, რომელიც უფრო ახლოსაა ალგებრასთან ვიდრე ანალიზთან. ალბათ ამიტომ, ლიუვილის თეორემა არ მიეკუთვნება ანალიზის საყოველთაოდ ცნობილ თეორემათა რიცხვს, თუმცა ის ამას იმსახურებს. მითუმეტეს, რომ თანამედროვე დამტკიცება ძნელი არ არის და თემა საინტერესოა.

ლიუვილმა შემოიტანა ელემენტარული ფუნქციების ძალიან მოხერხებული განმარტება. კერძოდ, მან ისარგებლა იმით, რომ ტრიგონომეტრიული და მათი შებრუნებული ფუნქციები გამოისახებიან ექსპონენტასა და ლოგარითმის საშუალებით, ხოლო ექსპონენტა და ლოგარითმი განისაზღვრება თვისებით: თუ $g(x) = e^{f(x)}$ მაშინ $g'(x) = f'(x)g(x)$.

ლიუვილის თეორიაში ძირითადი ობიექტი არის დიფერენციალური K ველი, ანუ ველი რომელშიც მოცემულია დიფერენცირების ოპერაცია $a \rightarrow a'$ შემდეგი თვისებებით: K ველის ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის სრულდება ტოლობები $(a+b)' = a' + b'$ და $(ab)' = a'b + b'a$.

ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ რომ K ველის მახასიათებელი ნულის ტოლია. შემოვიტანოთ K ველში ექსპონენტისა და ლოგარიტმის ცნებები. თუ $a \neq 0$ და $a' = b'a$, მაშინ a ელემენტს ეწოდება b ელემენტის *ექსპონენტი*, ხოლო b ელემენტს a ელემენტის *ლოგარიტმი*.

$$\text{ადვილი შესამოწმებელია, რომ } \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - b'a}{b^2}, \quad (a^n)' = na^{n-1}a'$$

ნებისმიერი მთელი n -თვის და $1' = 0$, რადგანაც $1' = (1^2)' = 2 \cdot 1 \cdot 1'$.

$c \in K$ ელემენტს ეწოდება *მუდმივი*, თუ $c' = 0$. მუდმივები ქმნიან K -ს ქვეველს.

K დიფერენციალური ველის შემცველ L დიფერენციალურ ველს ეწოდება K ველის *დიფერენციალური გაფართოება*, თუ K ველის დიფერენცირება ემთხვევა L ველის დიფერენცირების K -ზე შეზღუდვას.

ველი რომელიც მიიღება K ველისათვის $t_1, \dots, t_n$ ელემენტების დამატებით აღვნიშნოთ $K(t_1, \dots, t_n)$ სიმბოლოთი. $L \supset K$ დიფერენციალურ გაფართოებას ეწოდება *ელემენტარული* ან *ლიუვილის გაფართოება*, თუ $L = K(t_1, \dots, t_n)$, სადაც ყოველი t_i ელემენტი აკმაყოფილებს შემდეგი სამი პირობიდან ერთ-ერთს:

ა) t_i ალგებრულია $K_i = K(t_1, \dots, t_{i-1})$ -ზე, ანუ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$t_i^n + a_{n-1}t_i^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

რაიმე ნატურალური n რიცხვისათვის და რომელიმე $a_0, \dots, a_{n-1} \notin K_i$ -თვის;

ბ) t_i არის K ველის ელემენტის ექსპონენტი;

გ) t_i არის K ველის ელემენტის ლოგარიტმი;

კომპლექსურ მნიშვნელობიან ფუნქციას განსაზღვრულს $U \subset \mathbb{C}$ არეზე, ვუწოდებთ *ელემენტარულს*, თუ ის ეკუთვნის $C(z)$ რაციონალურ ფუნქციათა რომელიმე ელემენტარულ გაფართოებას. ჩვენთვის ცნობილი ყველა ფუნქცია - პოლინომები, რაციონალური ფუნქციები, ექსპონენტი, ლოგარიტმი, ტრიგონომეტრიული და მათი შებრუნებული ფუნქციები ლიუვილის მიხედვით ელემენტარულია.

მოვიყვანოთ ლიუვილის თეორემის თანამედროვე ფორმულირება და ორი დებულება, რომლებსაც გამოვიყენებთ ზოგიერთი ინტეგრალის არაელემენტარულობის დასამტკიცებლად.

თეორემა 1. (ლიუვილი) ვთქვათ $\alpha \in K$, სადაც K რომელიმე დიფერენციალური ველია. თუ განტოლებას $y' = \alpha$ აქვს y ამონახსნი, რომელიც ეკუთვნის K ველის რომელიმე ელემენტარულ გაფართოებას,

რომელსაც იგივე მუდმივების ველი გააჩნია რაც K -ს, მაშინ K ველში არსებობენ $c_1, \dots, c_n$ მუდმივები და $u_1, \dots, u_n, v$ ელემენტები, რომელთათვისაც სრულდება ტოლობა

$$\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'.$$

დებულება 1. ვთქვათ L დიფერენციალური K ველის გაფართოებაა. მაშინ K ველის დიფერენცირება შეიძლება გაგრძელდეს L -ზე, ხოლო თუ L გაფართოება ალგებრულია, მაშინ K ველის დიფერენცირება L -ზე გაგრძელდება ერთადერთი სახით.

დებულება 2. ვთქვათ K დიფერენციალური ველია, $K(t)$ კი მისი დიფერენციალური გაფართოებაა (იგივე მუდმივების ქვევლით). ამავედროულად t ელემენტი ტრანსცენდენტულია K -ზე.

ა) თუ $t' \in K$, მაშინ ნებისმიერი დადებითი ხარისხის $f(t) \in K[t]$

მრავალწევრისათვის $(f(t))'$ არის მრავალწევრი, რომლის ხარისხი ტოლია ან ერთით ნაკლებია f -ის ხარისხზე იმის მიხედვით, მუდმივისგან განსხვავდება თუ არა f -ის უფროსი კოეფიციენტი.

ბ) თუ $t'/t \in K$, მაშინ ნებისმიერი $a \in K^* = K \setminus \{0\}$ არანულოვანი ელემენტისთვის და ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის ადგილი აქვს ტოლობას $(at^n)' = dt^n$, სადაც $d \in K^*$. გარდა ამისა, ნებისმიერი დადებითი ხარისხის $f(t) \in K[t]$ მრავალწევრისთვის $(f(t))'$ -ს ხარისხი იგივეა, რაც f -ის ხარისხი. ეს მრავალწევრი იყოფა f -ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $f(t)$ -მონომია.

ახლა ვაჩვენოთ თუ როგორ შეიძლება ლიუვილის თეორემით დამტკიცდეს ზოგიერთი ინტეგრალის არაელემენტარულობა. ამ მიზნით ლიუვილმა დაამტკიცა $\int f(z)e^{g(z)}dz$ ინტეგრალის ელემენტარულობის შემდეგი კრიტერიუმი, სადაც $f(z)$ და $g(z)$ რაციონალური ფუნქციებია.

თეორემა 2 (ლიუვილის კრიტერიუმი) ვთქვათ $f(z)$ და $g(z)$ რაციონალური ფუნქციებია, ამასთან f -იგივურად ნულის ტოლი არაა, ხოლო g არ არის მუდმივი. ინტეგრალი $\int f(z)e^{g(z)}dz$ ელემენტარული ფუნქციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს რაციონალური $a(z)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას $f = a' + ag'$.

მაგალითი 1. ინტეგრალი $\int e^{z^2} dz$ არაელემენტარულია.

დამტკიცება. ამ შემთხვევაში $f(z)=1$ და $g(z)=z^2$. ამიტომ განტოლებას $f = a' + ag'$ აქვს სახე $1 = a' + 2az$. დასამტკიცებელია რომ ამ განტოლებას არა აქვს $a(z) \in C(z)$ ამონახსნი. თუ რაციონალური $a(z)$ ფუნქციის დაშლაში შესაკრების სახით არის წილადი მნიშვნელით $(z-a)^r$, სადაც $r \geq 1$ და r მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობაა, მაშინ (2) იგივეობა გვიჩვენებს, რომ $a' + 2az$ გამოსახულებაში მონაწილეობს წილადი მნიშვნელით $(z-a)^{r+1}$. ამიტომ $a(z)$ რაიმე n ხარისხის მრავალწევრია. მაშინ $a'(z)$ არის $n-1$ ხარისხის მრავალწევრი, ხოლო $2za(z)$ კი $n+1$ ხარისხის, ამიტომ ტოლობა $1 = a' + 2az$ ვერ შესრულდება.

მაგალითი 2. ინტეგრალი $\int \frac{e^z}{z} dz$ არაელემენტარულია.

დამტკიცება. ამ შემთხვევაში $f(z)=1/z$ და $g(z)=z$. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $1/z = a' + a$ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი $a(z) \in C(z)$. ზუსტად ისევე, როგორც წინა მაგალითში მტკიცდება, რომ $a(z)$ მრავალწევრია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $a + a'$ -იც მრავალწევრია, ამიტომ ის ვერ იქნება $1/z$.

მაგალითი 3. ინტეგრალები $\int e^z dz$, $\int \frac{dz}{\ln z}$ და $\int \ln \ln z dz$

არაელემენტარულია.

დამტკიცება. ყველა ზემოთ მოყვანილი ინტეგრალი დაიყვანება $\int \frac{e^z}{z} dz$ გამოსახულებაზე. დავუშვათ $z = e^u$, მივიღებთ $\int \frac{e^z}{z} dz = \int e^{e^u} du$. ვთქვათ $z = \ln w$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\int \frac{e^z}{z} dz = \int \frac{dw}{\ln w}$. ბოლოს ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ ტოლობას $\int \ln \ln z dz = z \ln z \ln z - \int \frac{e^z}{z} dz$.

ახლა განვიხილოთ უფრო რთული მაგალითი, სადაც გამოვიყენებთ არა ლიუვილის კრიტერიუმს, არამედ ლიუვილის თეორემას.

მაგალითი 4. ინტეგრალი $\int \frac{\sin z}{z} dz$ არაელემენტარულია.

დამტკიცება. ცვლადის $z \rightarrow iz$ გარდაქმნით ეს ინტეგრალი დაიყვანება $\int \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz$ ინტეგრალის ალებაზე. განვიხილოთ $C(z, t)$

დიფერენციალური კელი, სადაც $t = e^z$. დავუშვათ, რომ $\int \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz$ ინტეგრალი ელემენტარულია, მაშინ ლიუვილის თეორემის თანახმად ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{t^2 - 1}{tz} = \sum_{i=1}^n c_i \frac{u_i'}{u_i} + v', \quad (4)$$

სადაც $c_1, c_2, \dots, c_n \in C(z, t)$ და $u_1, u_2, \dots, u_n, v \in C(z, t)$. დავუშვათ $F = C(z)$. მაშინ $u_1, \dots, u_n, v \in F(t)$. კვლავ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $u_1, \dots, u_n$ განსხვავებული დაუყვანადი მრავალწევრებია F -ზე უფროსი კოეფიციენტით 1. v შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც მრავალწევრისა და გარკვეული სახის წილადის ჯამი. დებულება 2(ბ) გამოყენებით მივიღებთ, რომ ან $u_i \in F$ ან $u_i = t$. შესაბამისად მივიღებთ, რომ

$$\sum c_i \frac{u_i'}{u_i} \in F. \text{ გარდა ამისა } v\text{-ს დაშლისას მიღებული წილადების}$$

მნიშვნელში შეიძლება შეგვხვდეს მხოლოდ t -ს ხარისხები. დავუშვათ $v = \sum_k a_k t^k$, $a_k \in F$. თუ გავუტოლებთ ერთმანეთს (4) ტოლობაში t -ს

კოეფიციენტებს, მივიღებთ ტოლობას $1/z = a_1' + a_1$. მაგალით 2-ში ნაჩვენებია იყო, რომ რაციონალური $a_1(z)$ ფუნქციისათვის ასეთი ტოლობა შეუძლებელია.

ამოცანები

განტოლებები განცალკევად ცვლადებში

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x}{7y}$ 2. $\frac{dy}{dx} = \frac{5y}{7x}$ 3. $\frac{dy}{dx} = ky$ 4. $\frac{dy}{dx} = xy$ 5. $\frac{dy}{dx} = ay(1 - by)$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^3}$ 7. $x - y^2 \frac{dy}{dx} = 0$ 8. $x + y \frac{dy}{dx} = 2$ 9. $y \frac{dy}{dx} - (1 + y)x^2 = 0$ 10. $y \frac{dy}{dx} - (1 + y^2)x^2 = 0$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ 12. $(1+x)e^{3y} \frac{dy}{dx} = 1$ 13. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$
14. $\frac{dy}{dx} = 3x^2y^2, y(0) = \frac{1}{2}$ 15. $\frac{dy}{dx} = 1 + y + x^2 + yx^2$ 16. $x dx + y dy = xy(x dy - y dx)$
17. $y' = (x + y)^2$ 18. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{3y-2x}$ 19. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^2+y^2}{2xy+3y^2}$

გეომეტრიული ამოცანები

შეგახსენებთ, რომ ორ (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებაა $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, ხოლო წრფის განტოლებას საკუთხოვ კოეფიციენტით აქვს სახე $y = kx + b$, სადაც k -ს ეწოდება *დახრილობა*. ვიტყვი, რომ ორ f და g ფუნქციებს x_0 წერტილში აქვთ პირველი რიგის თანახეობა თუ $f(x_0) = g(x_0)$ და $f'(x_0) = g'(x_0)$. f ფუნქციის მხეები x_0 წერტილში არის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე გამავალი $y(x) = kx + b$ წრფე, რომელსაც f ფუნქციასთან x_0 წერტილში აქვს პირველი რიგის თანახეობა. ამრიგად, $f(x)$ და $y(x)$ ფუნქციებმა უნდა დააკმაყოფილონ შემდეგი ტოლობები: $f(x_0) = y(x_0) = kx_0 + b$ და $f'(x_0) = y'(x_0) = k$. საიდანაც $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. ამრიგად, $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე გამავალი მხეები იქნება $y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ წრფე. როგორც ვხედავთ დახრილობა მოცემულ წერტილში ფუნქციის წარმოებულის ტოლია. ორი $y_1(x) = k_1x + b_1$ და $y_2(x) = k_2x + b_2$ განტოლებით მოცემული წრფეები მართობულია, თუ $k_1k_2 = -1$. f ფუნქციის ნორმალის x_0 წერტილში არის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე მხეების მართობული წრფე, რომელიც $(x_0, f(x_0))$ წერტილში გაივლის. აქედან, ნორმალის განტოლებაა $y(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$. თუ x_0 f ფუნქციის კრიტიკული წერტილია, ე.ი. $f'(x_0) = 0$, მაშინ მხეები x ღერძის პარალელური წრფეა, შესაბამისად, ნორმალი კი y ღერძის. ამზოგენ, რომ ერთი წირი მეორის ორთოგონალურია, თუ მათი გადაკვეთის წერტილში გამავალი მხეებები მართობულებია.

20. დაწერეთ წირის განტოლება, რომელიც გადის $(1, 3)$ წერტილში, და რომლის მხეებს (x, y) წერტილში აქვს დახრა $-(1 + \frac{y}{x})$.

21. იპოვეთ $xy = c$ ჰიპერბოლათა ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიები.

22. იპოვეთ იმ წრეწირების ერთობლიობის ორთოგონალური ტრაექტორიები, რომლებიც y ღერძს ეხებიან კოორდინატთა სათავეში.

23. იპოვეთ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი $y = mx$ წრფეების ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიები.

24. დაწერეთ წირის განტოლება, რომელიც გადის xy -სიბრტყის სათავეში და რომლის მხეხსაც (x, y) წერტილში აქვს $x^2 + y^2$ -ს ტოლი დახრა.

25. დაწერეთ წირის განტოლება, რომელიც გადის $(0, 2)$ წერტილზე და რომლის მხეხსაც ყოველ (x, y) წერტილში აქვს $y - 2e^{-x}$ -ს ტოლი დახრა.

26. დაწერეთ წირის განტოლება, რომელიც გადის $(2, 1)$ წერტილზე და რომლის ნორმალსაც ყოველ (x, y) წერტილში აქვს $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$ -ს ტოლი დახრა.

განტოლებები სრულ დიფერენციალებში

27. განსაზღვრეთ არის თუ არა შემდეგი განტოლება სრულ დიფერენციალებში და თუ არის ამოხსენით იგი

$$(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0.$$

28. აჩვენეთ, რომ შემდეგი განტოლება არის სრულ დიფერენციალებში და ამოხსენით იგი

$$(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0.$$

პირველი რიგის არაერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნის გზა მაინტეგრირებელი მამრავლის საშუალებით

ვთქვათ მოცემულია განტოლება

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad (1)$$

შემოვიტანოთ შემდეგი დამხმარე ფუნქცია

$$r(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

რადგან

$$\frac{dr}{dx} = e^{\int p(x)dx} p(x) = r(x)p(x)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}(ry) = r \frac{dy}{dx} + \frac{dr}{dx} y = r \frac{dy}{dx} + rp(x)y. \quad (2)$$

(1) განტოლება გავამრავლოთ $r(x)$ და მივიღებთ $r(x) \frac{dy}{dx} + r(x)p(x)y = r(x)q(x)$. (2)-დან გამომდინარეობს, რომ $\frac{d}{dx}(r(x)y(x)) = r(x)q(x)$, საიდანაც გვაქვს

$$r(x)y(x) = \int r(x)p(x)dx + C \Rightarrow y(x) = \frac{1}{r(x)} \left(\int r(x)q(x)dx + C \right).$$

(1) განტოლებისათვის $r(x) = e^{\int p(x)dx}$ ფუნქცია არის *მაინტეგრირებელი მამრავლი* და ამრიგად, (1) განტოლება ჩაიწერება როგორც განტოლება სრულ დიფერენციალებში. ეს ფაქტი გამომდინარეობს აგრეთვე პარაგრაფ 2.4-ის დებულება 3-დან და იქიდან, რომ წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების (პარაგრაფი 2.3) ინტეგრალური მამრავლია $h(x, y) = \frac{1}{P(x, y)x - Q(x, y)y}$ ფუნქცია (აჩვენეთ პარაგრაფ 2.4-ის გამოყენებით!), რაც ნიშნავს, რომ წრფივი პირველი რიგის განტოლება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც განტოლებად ცვლადებიანი განტოლება. გარდა ამისა, თუ განტოლება ერთგვაროვანია (პარაგრაფი 2.3) და ამავე დროს არის სრულ დიფერენციალებში, მაშინ მის

ამონახსნს აქვს სახე: $P(x, y)x - Q(x, y)y = C$ (დაამტკიცეთ პარაგრაფ 2.4-ის თეორემა 2-ისა და თეორემა 3-ის გამოყენებით, ისარგებლეთ აგრეთვე ამის წინ დამტკიცებული დებულებით!)

29. იპოვეთ მაინტეგრირებადი მამრავლი და ამოხსენით განტოლება

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x.$$

30. იპოვეთ მაინტეგრირებადი მამრავლი და ამოხსენით განტოლება

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = 1.$$

31. იპოვეთ მაინტეგრირებადი მამრავლი და ამოხსენით განტოლება

$$x \frac{dy}{dx} + y = x.$$

32. იპოვეთ მაინტეგრირებადი მამრავლი და ამოხსენით განტოლება

$$\frac{dy}{dx} - y = \sin x.$$

ბერნულის განტოლება

33. ამოხსენით განტოლება

$$xy' - 2y = 4x^3y^{\frac{1}{2}}.$$

34. ამოხსენით განტოლება

$$y' - \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)y = x^3y^2.$$

რიკატის განტოლება

თუ $\tilde{y}(x)$ არის

$$y(x) = P(x) + Q(x)y(x) + R(x)y^2(x) \quad (1)$$

რიკატის განტოლების კერძო ამონახსნი, ხოლო $z(x)$ კი

$$z'(x) - (Q(x) - 2R(x)\tilde{y}(x))z(x) = R(x)z^2(x) \quad (2)$$

ბერნულის განტოლების ზოგადი ამონახსნი, მაშინ $y(x) = \tilde{y}(x) + z(x)$ არის რიკატის (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

მართლაც, ვთქვათ $y = \tilde{y} + z$, მაშინ

$$\begin{aligned} y' &= \tilde{y}' + z' = (P + Q\tilde{y} + R\tilde{y}^2) + [Rz^2 + (Q + 2R\tilde{y})z] = \\ &= P + Q(\tilde{y} + z) + R(\tilde{y}^2 + 2\tilde{y}z + z^2) = \\ &= P + Qy + R(\tilde{y} + z)^2 = P + Qy + y^2, \end{aligned}$$

რაც ნიშნავს, რომ y აკმაყოფილებს (1) განტოლებას. ახლა დავუშვათ, რომ y არის (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი და ვაჩვენოთ, რომ $z = y - \tilde{y}$ არის (2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. მართლაც,

$$\begin{aligned} z' &= y' - \tilde{y}' = (P + Qy + Ry^2) - (P + Q\tilde{y} + R\tilde{y}^2) = Q(y - \tilde{y}) + R(y^2 - \tilde{y}^2) = \\ &= (y - \tilde{y})[Q + R(y + \tilde{y})] = z[Q + R(z + 2\tilde{y})] = z(Q + 2R\tilde{y} + Rz) = \\ &= Rz^2 + (Q + 2R\tilde{y})z. \end{aligned}$$

რაც ნიშნავს, რომ z არის ბერნულის (2) განტოლების ამონახსნი.

35. ამოხსენით რიკატის განტოლება

$$y' = -x^5 + \frac{y}{x} + x^3y^2.$$

36. აჩვენეთ, რომ თუ

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

მეორე რიგის ერთგვაროვანი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლების მახასიათებელი λ_1, λ_2 ფესვები კომპლექსური რიცხვებია და

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, მაშინ განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე $(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)e^{\alpha x}$.

37. იპოვეთ შემდეგი განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0.$$

38. იპოვეთ შემდეგი განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = 0.$$

ამოხსენით არაერთგვაროვანი განტოლებები (პარაგრაფი 3.3)

39. $y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 1 + x + x^2$

40. $y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = \sin 3x$

41. $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = e^{3x}$

42. $y''(x) + y'(x) - 12y(x) = xe^x$

43. $y''(x) + 9y(x) = e^x \cos 2x$

44. ვთქვათ $x = e^t$ და y არის x -ის ფუნქცია. აჩვენეთ, რომ $x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$ და

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

45. იპოვეთ $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

46. $y'''(x) + 2y''(x) - 2y'(x) - y(x) = 0$

47. $y^{(4)}(x) - 4y'''(x) + 9y''(x) - 10y'(x) + 6y(x) = 0$ (მითითება: მახასიათებელი განტოლება იშლება $(\lambda^2 - 2\lambda + 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$ კვადრატული სამწევრების ნამრავლად).

48. $y^{(4)}(x) + 4y'''(x) + 10y''(x) + 12y'(x) + 9y(x) = 0$ (მითითება: მახასიათებელი განტოლება არის $\lambda^2 + 2\lambda + 3$ კვადრატული სამწევრის კვადრატი).

49. ააგეთ მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლება, რომლის ამონახსნებია e^{2x} , e^{-x} , e^{3x} და e^{5x} ფუნქციები.

50. ააგეთ მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლება, რომლის ამონახსნებია e^{-2x} , $e^x \cos 2x$ და ფუნქციები.

სპეციალური განტოლებები.

ჩეზიშევის განტოლება

1. გამოსახეთ

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad |x| < 1$$

ჩეზიშევის განტოლების ამონახსნები ჩეზიშევის მრავალწევრით. განიხილეთ შემთხვევები $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

პასუხი: ჩეზიშევის პოლინომები ($n < 5$):

$$T_0(x) = 1; T_1(x) = x; T_2(x) = 2x^2 - 1; T_3(x) = 4x^3 - 3x; T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

2. იპოვეთ

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 2y = 0, \quad |x| < 1$$

ჩეზიშევის განტოლების ზოგადი ამონახსნი

მითითება: აქ $n = \sqrt{2}$, ამიტომ ამონახსნი ჩეზიშევის პოლინომით არ გამოისახება.

პასუხი: $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{2} \arccos x) + c_2 \sin(\sqrt{2} \arccos x)$

3. ჩებიშევის

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0, |x| < 1$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი გამოსახეთ ჩებიშევის პოლინომის საშუალებით.

პასუხი: $y(x) = c_1(2x^2 - 1) + 2c_2x\sqrt{1-x^2}$.

4. აჩვენეთ, რომ $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$, $m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0. \quad (1)$$

თუ ცნობილია (1)-ის ერთი ამონახსნი, ვთქვათ y_1 , მაშინ მეორე კერძო ამონახსნის პოვნა შესაძლებელია შემდეგნაირად: რადგან y_1 და y_2 წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, ამიტომ მათი ვრონსკიანისათვის გვაქვს გამოსახულება $W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$, მეორეს მხრივ (1)-ის ვრონსკიანი ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულის თანახმად (იხ.პარაგრაფი 6.5) $W(x) = e^{-\int P(x)dx}$ -ს ტოლია. ამრიგად, მივიღეთ წრფივი პირველი რიგის $y_1y_2' - y_2y_1' = e^{-\int P(x)dx}$ განტოლება y_2 მიმართ, რასაც ამოვხსნით მზა ფორმულით: (იხ.პარაგრაფი 2.4)

$$y_2(x) = e^{\int \frac{y_1'}{y_1} dx} \left(\int \frac{1}{y_1} e^{-\int P(x)dx} e^{-\int \frac{y_1'}{y_1} dx} dx + c \right) = y_1 \left(\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx + c \right).$$

ლექანდრის განტოლება $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0, |x| < 1$.

1. ვიპოვოთ $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ლექანდრის განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

პასუხი: $y(x) = c_1x + c_2(\frac{1}{2}x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 1)$.

2. აჩვენეთ, რომ ლექანდრის განტოლების თვითშეუღლებული ფორმაა

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + p(p+1)y = 0$$

განტოლება.

ბესელის განტოლება. იპოვეთ

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

ბესელის განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

მითითება: პარაგრაფ 3.5-ში ამოწერილია ამ განტოლების ერთი კერძო

ამონახსნი $y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

პასუხი: $y(x) = \frac{c_1 \sin x + c_2 \cos x}{\sqrt{x}}$

პასუხები

$$\begin{aligned}
 &1)y^2 = \frac{5}{7}x^2 + c; 2) y = cx^{\frac{5}{7}}; 3) y = ce^{kx}; 4) y = ce^{\frac{x^2}{2}}; 5) y = \frac{1}{b+ce^{-ax}}; 6)y^4 = \\
 &\frac{4}{5}x^3 + c; 7) y^3 = \frac{3}{2}x^2 + c; 8) y^2 = 4x - x^2 + c; 9) y - \ln|1+y| = \frac{1}{3}x^3 + c; 10) \\
 &y^2 = ce^{\frac{2}{3}x^2} - 1; 11) y = \frac{x+C}{1-Cx}, \quad C = tgC_1; 12)y = \frac{1}{3}\ln(3\ln|1+x|+C); 13)y = \\
 &\sin(\sin^{-1}x + C) = \sin(\sin^{-1}x)\cos C + \cos(\sin^{-1}x)\sin C = x\cos C + \sqrt{1-x^2}\sin C; \\
 &14) y = -\frac{1}{x^3-2}; 15) y = ce^{x+\frac{x^3}{3}} - 1; 16) y^2 = c(x^2 - 1) - 1; 17) y = \tan(x + c) - \\
 &x; 18) x^2 + 4xy - 3y^2 = c; 19) 2x^3 + 3xy^2 + 3y^3 = c; 20) 2xy + x^2 = 7; 21) \\
 &y^2 - x^2 = c; 22) x^2 + (y-K)^2 = K^2; 23) x^2 + y^2 = c; 24) y = -(x^2 + 2x + \\
 &2) + 2e^x; 25) y = e^{-x} + e^x = 2\cosh x; 26) x^3 - 3xy^2 = 2; 27) 4yx - x^4 + y^4 = \\
 &C; 28) x\cos y + y\sin x = C; 29) r(x) = e^x, y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}; 30) r(x) = e^{\frac{x}{3}}, y(x) = \\
 &3 + Ce^{-\frac{x}{3}}; 31) r(x) = x, y(x) = \frac{x}{2} + \frac{c}{x}; 32) r(x) = e^{-x}, y(x) = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + \\
 &ce^x; 33) y = x^2(x^2 + C)^2; 34) y(x) = -\frac{2x}{1+Ke^{-\frac{2x^5}{5}}}; 35) y = x - \frac{2x}{1+Ke^{-\frac{2x^5}{5}}}; 37) \\
 &y(x) = (c_1\cos x + c_2\sin x)e^{-x}; 38) y(x) = \left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}; 39) \\
 &\frac{1}{32}(8x^2 - 12x + 19) + c_1e^{-x} + c_2e^{-4x}; 40) y(x) = \frac{1}{30}(3\cos 3x - \sin 3x) + c_1e^x + \\
 &c_2e^{4x}; 41) y(x) = \frac{1}{13}e^x + (c_1\cos x + c_2\sin x)e^{-x}; 42) y(x) = \frac{1}{100}(3 + 10x)e^x + \\
 &c_1e^{3x} + c_2e^{-4x}; 43) y(x) = \frac{1}{26}(3e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x) + (c_1\cos 3x + c_2\sin 3x); 45) y(x) = \frac{c_1+c_2\ln x}{x}; \\
 &46) y(x) = c_1e^x + e^{-\frac{3x}{2}}(c_2\cos\frac{5x}{2} + c_3\sin\frac{5x}{2}); 47) y(x) = e^x(c_1\cos\sqrt{2}x + \\
 &c_2\sin\sqrt{2}x) + e^x(c_3\cos x + c_4\sin x); 48) y(x) = e^{-x}(c_1 + c_2x)\cos\sqrt{2}x + \\
 &(c_3 + c_4x)\sin\sqrt{2}x; 49) y^{(4)}(x) - 9y'''(x) + 21y''(x) + y'(x) + 30y(x) = 0; 50) \\
 &y'''(x) + y'(x) + 10y(x) = 0.
 \end{aligned}$$

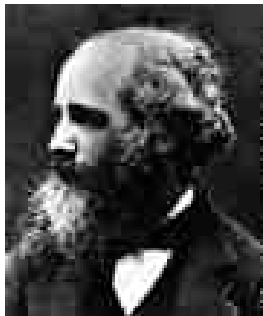
ნაწილი II
მათემატიკური ფიზიკის ძირითადი განტოლებები



ჟან დალამბერი (1717-1783)



საიმონ დენის პუასონი (1781 – 1840)



ჯეიმს კლერკ მაქსველი
(1831 – 1879)



პიერ ლაპლასი (1749 – 1827)



გუსტავ დირიხლე
(1805 – 1859)



ჟან ბატისტ ფურიე (1768-1830)

ნაწილი II

კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები

12 მათემატიკური ფიზიკის ძირითადი განტოლებები

12.1 ძირითადი აღნიშვნები

კოორდინატთა სისტემები. ღვეუშვით (x, y) ევკლიდურ $\mathbf{R}^2$ სიბრტყეზე კოორდინატთა სისტემაა. რაც ნიშნავს, რომ $\mathbf{R}^2$ -ის ნებისმიერი წერტილი ცალსახად ხასიათდება ამ კოორდინატთა სისტემაში თავისი კოორდინატებით. შემოვიღოთ $\mathbf{R}^2$ -ში კიდევ ერთი კოორდინატთა სისტემა (r, φ) , რომელიც ძველ (x, y) კოორდინატთა სისტემას უკავშირდება ტოლობებით:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

აღნიშნული კოორდინატთა სისტემის შეცვლა არის ურთიერთცალსახა $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ასახვა, მოცემული თანადობით

$$(x, y) \mapsto (r, \varphi),$$

რომელსაც გააჩნია შექცეული ასახვა და იგი მოიცემა ტოლობით

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

ნათელია, რომ $\mathbf{R}^2$ -ის ნებისმიერ წერტილს (r, φ) კოორდინატთა სისტემაც ცალსახად ახასიათებს, რადგან პირველი კოორდინატა გამოსახავს მანძილს ამ წერტილიდან კოორდინატთა $(0,0)$ სათავემდე, ხოლო φ კი არის კუთხე, რომელსაც აბსისთა ღერძთან ქმნის კოორდინატთა სათავისა და ამ წერტილის შემაერთებული მონაკვეთი.

(x, y) უწოდებენ ევკლიდურ კოორდინატთა სისტემას, ხოლო (r, φ) -ს კი პოლარულ კოორდინატთა სისტემას. ამრიგად, ორივე ერთიდაიგივე ობიექტის, კერძოდ, $\mathbf{R}^2$ -ის, ორი სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემაა.

3-განზომილებიან $\mathbf{R}^3$ ევკლიდურ სივრცეში (x, y, z) კოორდინატთა სისტემის გარდა შესაძლებელია შემოტანილი იქნას სხვა საკოორდინატო სისტემებიც. მათ შორის, ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა, რომლისთვისაც მიღებულია აღნიშვნა (r, ϕ, z) და იგი (x, y, z) კოორდინატთა სისტემას უკავშირდება თანადობით:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = z.$$

შექცეული ასახვას ახორციელებს

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z$$

ტოლობები. შევნიშნოთ, რომ თუ r მუდმივია, მაშინ $\{(r, \phi, z) \mid r = \cos t, y = \cos \phi, z = z\}$ სიმრავლე არის ცილინდრი $\mathbf{R}^3$ -ში. სწორედ აქედან მოდის კოორდინატთა სისტემის სახელწოდება.

კიდევ ერთი გავრცელებული კოორდინატთა სისტემაა სფერულ კოორდინატთა (r, ϕ, θ) სისტემა, რომელიც (x, y, z) კოორდინატთა სისტემას უკავშირდება თანადობით

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

მისი შექცეული ასახვაა

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

საზოგადოდ, ნებისმიერი ურთიერთცალსახა დიფერენცირებადი ასახვა $\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, რომლის შექცეული $\phi^{-1}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ასახვაც დიფერენცირებადია (იაკობიანი ყველგან ნულისაგან განსხვავებულია), განსაზღვრავს $\mathbf{R}^n$ -ზე კოორდინატთა სისტემას. ასეთ ϕ ასახვას დიფეომორფიზმი ეწოდება.

ზემოთ შემოტანილ საკოორდინატო სისტემის, გარდა დეკარტულია, ზოგადი სახელწოდებაა *მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემები*.

მაგალითი 1. დაუშვათ $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$, u და v დიფერენცირებადი, ხოლო f კი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია ორივე ცვლადის მიმართ. მაშინ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{და} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

მაგალითი 2. ვთქვათ $F(t) = f(u(t), v(t))$, u და v დიფერენცირებადი, ხოლო f კი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია, მათ შორის f ორივე ცვლადის მიმართ. მაშინ

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt}.$$

მაგალითი 3. დაუშვათ $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$. ვიპოვოთ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ და $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. აქვე შევნიშნოთ, რომ ჩანაწერის გამარტივების მიზნით ჩვენ გამოვიყენებთ კერძო

წარმოებულებისათვის საყოველთაოდ მიღებულ აღნიშვნებს: $\frac{\partial F}{\partial x} = F_x$,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F_{xx}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F_{xy} \text{ და ა.შ.}$$

$$\begin{aligned} F_{xx} &= f_u u_{xx} + f_v v_{xx} + f_{uu} (u_x)^2 + 2f_{uv} v_x u_x + f_{vv} (v_x)^2, \\ F_{xy} &= f_u u_{xy} + f_v v_{xy} + f_{uu} u_x u_y + 2f_{uv} (v_y u_x + v_x u_y) + f_{vv} v_x v_y, \\ F_{yy} &= f_u u_{yy} + f_v v_{yy} + f_{uu} (u_y)^2 + 2f_{uv} v_y u_y + f_{vv} (v_y)^2. \end{aligned}$$

ამოცანა 1. ვაჩვენოთ, რომ $z = f(xy)$ არის

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

განტოლების ამონახსნი.

$$\blacktriangleleft \text{ამოხსნა. რადგან } \frac{\partial z}{\partial x} = y f'(xy) \text{ და } \frac{\partial z}{\partial y} = x f'(xy), \text{ ამიტომ}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = xy f'(xy) - yx f'(xy) = 0. \blacktriangleright$$

ამოცანა 2. დავწეროთ ორგანზომილებიანი ლაპლასის

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

განტოლება ახალ (u, v) კოორდინატებში, თუ $x = \frac{u^2 - v^2}{2}$ და $y = uv$

(კოორდინატთა ასეთ სისტემას ეწოდება *პარაბოლური*).

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \text{ამოხსნა. } F_{uu} &= F_x x_{uu} + F_y y_{uu} + F_{xx} (x_u)^2 + 2F_{xy} x_u y_u + F_{yy} (y_u)^2 = \\ &= F_x + u^2 F_{xx} + 2uv F_{xy} + v^2 F_{yy}, \\ F_{vv} &= F_x x_{vv} + F_y y_{vv} + F_{xx} (x_v)^2 + 2F_{xy} x_v y_v + F_{yy} (y_v)^2 = \\ &= -F_x + v^2 F_{xx} - 2uv F_{xy} + v^2 F_{yy}. \end{aligned}$$

აქედან,

$$F_{uu} + F_{vv} = (u^2 + v^2)(F_{xx} + F_{yy}). \blacktriangleright$$

ძირითადი ოპერატორები. n -განზომილებიანი ლაპლასის ოპერატორი, რომელიც Δ სიმბოლოთი აღინიშნება, განმარტებით არის

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

მეორე რიგის დიფერენციალური ოპერატორი n ცვლადის ორჯერ დიფერენცირებად ფუნქციათა სივრცეზე.

დავუშვათ $v: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ არის n ცვლადის ვექტორული ფუნქცია:

$$v = v(x_1, x_2, \dots, x_n) = (v_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, v_n(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

სადაც $v_j(x_1, x_2, \dots, x_n), j = 1, \dots, n$ საკოორდინატო ფუნქციებია:
 $v_j: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. v ვექტორული ფუნქციის *იაკობის მატრიცა* განმარტებით არის v -ს კერძო წარმოებულებისაგან შემდგენი მატრიცა

$$J(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცის დეტერმინანტს ეწოდება v ვექტორული ფუნქციის *იაკობიანი*. $J(v)$ მატრიცის კვალი, ე.ი. მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების

$$\text{ჯამი, } \operatorname{tr} J(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j}, \text{ სკალარული ფუნქციაა და ტოლია}$$

v -ს დივერგენციის, რომელიც $\operatorname{div} v$ -ით აღინიშნება.
 ამრიგად,

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

დავუშვათ ახლა $u = u(x_1, \dots, x_n)$ არის n ცვლადის (სკალარული) ფუნქცია. ამ ფუნქციას ბუნებრივად შეესაბამება ვექტორული ფუნქცია, რომელსაც $u = u(x_1, \dots, x_n)$ -ს *გრადიენტი* (ან ∇ ნაბლა ოპერატორი) ეწოდება, იგი აღინიშნება $\operatorname{grad} u$ და განმარტებით არის

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

აქედან, $u: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ სკალარულ ფუნქციას შეესაბამება $\nabla u = \operatorname{grad} u: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ვექტორული ფუნქცია, რომლის საკოორდინატო ფუნქციებია მისი კერძო წარმოებულები $x_1, \dots, x_n$ ცვლადების მიმართ.

განვიხილოთ $\nabla u = \operatorname{grad} u$ -ს დივერგენცია:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

რაც ნიშნავს, რომ მივიღეთ ტოლობა

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} u.$$

ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება, რომ $\Delta u = \nabla^2 u$.

სამი x, y, z ცვლადის $\vartheta: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ვექტორ-ფუნქციისათვის შემოვიტანოთ აგრეთვე *როტორის* ანუ *ვიხრის* ცნება, რომელიც rot

სიმბოლოთი აღინიშნება და რომელიც განმარტებით არის შემდეგი სამგანზომილებიანი ვექტორული ფუნქცია:

$$\text{rot } \mathcal{G} = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right),$$

სადაც u, v, w საკოორდინატო ფუნქციებია:

$$\mathcal{G}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

12.2 ძირითადი ცნებები და განმარტებები

კურსის დასაწყისში ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებებთან ერთად მოვიყვანეთ კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების განმარტებაც და აღვნიშნეთ, რომ კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები წარმოიშვება იმ დროს, როდესაც საძიებელი ფუნქცია მრავალი (ორი ან ორზე მეტი) ცვლადისაა და განტოლება შეიცავს ამ ფუნქციის ყველა, ან ზოგიერთ კერძო წარმოებულს. ისევე როგორც ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის მიზნით განტოლებების კლასებად დაყოფა ანუ კლასიფიკაცია საჭირო და ცალკეული კლასისათვის ამოხსნის მეთოდის მითითება. ზოგიერთი მათგანის ამოხსნის გზა მათი ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე დაყვანაში მდგომარეობს.

შემოვიტანოთ კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებებთან თეორიის საწყისი ცნებები.

დავუშვათ $u = u(x_1, \dots, x_n)$ ნამდვილი n ცვლადის ნამდვილი ფუნქციაა.

განმარტება. პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება u უცნობი ფუნქციის მიმართ ეწოდება

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (1)$$

სახის გამოსახულებას, სადაც $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ მოცემული ნამდვილი, დიფერენცირებადი ფუნქციაა $2n+1$ -განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის $U \subset \mathbf{R}^{2n+1}$ არეში.

განმარტება. $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ არეში განსაზღვრულ $u = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციას ეწოდება (1) განტოლების ამონახსნი, თუ

1) $u = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ უწყვეტად დიფერენცირებადია Ω -ში;

$$2) \text{ ყოველი } (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \text{ -სათვის } \left(x_1, \dots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) \in U;$$

$$3) F \left(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) \equiv 0 \text{ ყოველი } (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \text{ -}$$

სათვის.

(1) განტოლების ამონახსნი იძლევა $n+1$ -განზომილებიანი R^{n+1} სივრცეში გლუვ n -განზომილებიან ზედაპირს – ჰიპერზედაპირს, რომელსაც (1) განტოლების ინტეგრალური ზედაპირი ეწოდება. ყურადღება მიაქციეთ იმ ფაქტს, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი ჩვენ ვუწოდებთ განტოლების ამონახსნის გრაფიკს, რომელიც ერთ განზომილებიანი ჰიპერზედაპირია $\mathbf{R}^2$ -ში.

როგორც ვთქვით, კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებით მრავალი ფიზიკური მოვლენა აღიწერება. მაგალითად, გაზური დინამიკის ძირითადი განტოლებაა

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ჰობფის განტოლება, სადაც $u = u(t, x)$ უცნობი ფუნქციაა. ოპტიკაში კი მნიშვნელოვან როლს თამაშობს

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = n(x, y, z)$$

განტოლება, რომელიც აღწერს სინათლის სხივის გავრცელებას $n(x, y, z)$ გარდატეხის მაჩვენებლის მქონე არაერთგვაროვან გარემოში.

(1) განტოლებას ეწოდება წრფივი, თუ უცნობი $u = u(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებულები მასში წრფივად შედიან. წრფივი კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$\sum_{j=1}^n a_j(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x_1, \dots, x_n) u = f(x_1, \dots, x_n)$$

გამოსახულება. ხოლო

$$\sum_{j=1}^n a_j(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$$

სახის განტოლებას კი კერძო წარმოებულებიანი წრფივი პირველი რიგის ერთგვაროვანი განტოლება ეწოდება. თუ (1) განტოლებაში წრფივად მხოლოდ $u = u(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები შედიან, მაშინ განტოლებას კვაზიწრფივი ეწოდება. კვაზიწრფივი განტოლების ზოგადი სახე კი ასეთია:

$$\sum_{j=1}^n a_j(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x_1, \dots, x_n, u).$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც (1) განტოლება არ არის კვაზიწრფივი, მაშინ მას კერძოწარმოებულებიანი პირველი რიგის არაწრფივი განტოლება ეწოდება.

12.3 მათემატიკური ფიზიკის კლასიკური განტოლებები

კლასიკური მათემატიკური ფიზიკის ძირითად განტოლებებს მიეკუთვნება:

ა) **ლაპლასის განტოლება**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

როგორც უკვე ვიცით $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ არის ლაპლასის ოპერატორი

და იგი მოქმედებს ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებად $u(x, y, z)$ ფუნქციებზე. ლაპლასის განტოლების გარდა ლაპლასის ოპერატორი გვხდება ტალღურ განტოლებაში, სითბოგამტარებლობის და დიფუზიის განტოლებებში. ლაპლასის განტოლება აღწერს გარკვეულ ფიზიკურ პროცესებს ელექტროდინამიკაში, მაგნიტოსტატიკაში, ჰიდრო და აეროდინამიკაში, დრეკადობის თეორიაში და სხვა;

ბ) **ჰუასონის განტოლება**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z)$$

ლაპლასის განტოლების შესაბამისი არაერთგვაროვანი განტოლებაა;

გ) **ტალღური განტოლება** (ტალღის განტოლება)

$$\Delta u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x, y, z, t);$$

დ) **სითბოგამტარებლობის ანუ ფურიეს განტოლება**

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -f(x, y, z, t)$$

გვხდება სითბოგამტარებლობის და დიფუზიის თეორიებში, აგრეთვე ბირთვულ რეაქტორების თეორიაში;

ე) **ჰელმჰოლცის განტოლება**

$$\Delta u + k^2 u = -f(x, y, z), \quad k = \text{const}.$$

რომელიც აღწერს სხვადასხვა სახის რხევით პროცესებს. განტოლებაში $k = \omega / v$ ტალღური რიცხვია. მრავალგანზომილებიანი (ერთგვაროვანი)

ტალღის განტოლება $u_{tt} = c^2 \Delta u$, სადაც $u = u(t, x)$ უცნობი ფუნქციაა, $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, იმ შემთხვევაში, როდესაც გვინტერესებს $e^{i\omega t} u(x)$ სახის ამონახსნი, დაიყვანება

$$(\Delta + k^2)u = 0$$

ჰელმჰოლცის (ერთგვაროვან) განტოლებაზე, სადაც $\omega = k/c$.

ვ) შრიოდინგერის განტოლება. მიუხედავად იმისა, რომ ჩვენ არ განვიხილავთ დაწვრილებით, მაინც აღვნიშნავთ კიდევ ერთ მნიშვნელოვან განტოლებას - შრიოდინგერის განტოლებას

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0,$$

რომელიც კვანტური მექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი განტოლებაა. აქ $\psi(x)$ ტალღური ფუნქციაა, m ნაწილაკის მასაა, E ნაწილაკის ენერგია, $V(x)$ გარე ველის პოტენციალია, $\hbar$ პლანკის მუდმივაა ($\hbar = 1,054 \times 10^{-27}$ ერგი $\times$ წამი). ეს განტოლება საკმაოდ ზოგადი განტოლებაა და დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის იმ მეთოდების გამოყენებით რასაც შევისწავლეთ, მხოლოდ კერძო შემთხვევებში შევძლებთ მის ამოხსნას.

მაგალითად, უსპინო ნაწილაკს გარე ველში აღწერს

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x) \psi \quad (1)$$

შრიოდინგერის განტოლება, სადაც $x \in \mathbf{R}^3$, $\psi(t, x)$ არის კვანტური ნაწილაკის ტალღური, ანუ ფსი-ფუნქცია, რომლითაც მოიცემა ე.წ. კომპლექსური ამპლიტუდა და იგი ახასიათებს $|\psi(t, x)|^2$ -ის ტოლი ალბათობით ნაწილაკის მდებარეობას x წერტილში დროის t მომენტში, m აღნიშნავს ნაწილაკის მასას, $V(x)$ არის გარე ველის პოტენციალი (იგი ნამდვილი ფუნქციაა), ხოლო $\hbar$ -კი პლანკის მუდმივაა. (1) განტოლებისათვის

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x) \quad (2)$$

საწყისი პირობა ბუნებრივად ისმება. (1), (2) ამოცანის ამონახსნი ფორმალურად იწერება

$$\psi(t, x) = e^{-\frac{i}{\hbar} t H} \psi_0$$

სახით, სადაც $\circ$ სიმბოლოს მაგივრად x -ის კონკრეტული მნიშვნელობა ისმება. ხოლო

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x)$$

გამოსახულებას ((1) განტოლების მარჯვენა მხარე) ეწოდება *შრიოდინგერის ოპერატორი*. მას აქვს ფიზიკური შინაარსი, რის გამოც ამ ოპერატორს მოცემული ნაწილაკის ენერგიის ოპერატორსაც უწოდებენ. ტალღის განტოლების (სადაც სპეციალური სახის ამონახსნის ძიებას მივყავართ ჰელმჰოლცის განტოლებაზე) ანალოგიურად შრიოდინგერის

არასტაციონალურ განტოლებას, რომლის ამონახსნს აქვს სახე $e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(x)$, მივყავართ განტოლებამდე

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x),$$

რომელსაც *შრიოდინგერის სტაციონალური განტოლება* ეწოდება. ის აღწერს ფიქსირებული E ენერგიის მქონე ნაწილაკის მდგომარეობას.

ფიზიკურ მოვლენათა საკმაოდ ფართო კლასს აღწერს აგრეთვე განტოლება,

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b \frac{\partial u}{\partial t} - cu = -f(x, y, z),$$

რომელსაც უწოდებენ *ტალღის გავრცელების განტოლებას ენერგიის შთანთქმელ გარემოში*. მისი ამონახსნის მეთოდებს, ისევე როგორც ზემოთ მოყვანილ შრიოდინგერის განტოლებისას, ცალკე მონოგრაფიები აქვს მიძღვნილი, ხოლო ის კერძო შემთხვევები, რომლის დროსაც ეს განტოლება ინტეგრებადია კვადრატურებში, ტრივიალურია.

ზ) მაქსველის განტოლება. რაიმე გარემოში მაგნიტური და ელექტრული ველის დაძაბულობას აღწერს *მაქსველის განტოლება*. თუ ელექტრულ და მაგნიტურ დაძაბულობებს შესაბამისად აღვნიშნავთ $E = (E_1, E_2, E_3)$ და $H = (H_1, H_2, H_3)$ ვექტორებით, მაშინ მაქსველის განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} D &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} B &= 0, \\ \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} H &= \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, \end{aligned}$$

სადაც ρ ელექტრული მუხტების სიმკვრივეა, c სინათლის სიჩქარეა ვაკუუმში. გარდა ამისა ვაკუუმში $D = E$, $B = H$, $j = 0$, ხოლო იზოტროპულ გარემოში კი $D = \varepsilon E$, $B = \mu H$, $j = \sigma E + j_1$, სადაც ε გარემოს დიელექტრიკული შეღწევადობაა, μ - გარემოს მაგნიტური შეღწევადობა, σ ელექტროგამტარებლობაა, j_1 კი გარე დენების

სიმკვრივეა. ე.ი. აქ იგულისხმება ისეთი დენები, რომლებიც აღიძვრებიან სხვა ძალებიდან (დიფუზიით ან მაგნიტური ველისაგან) და არა ელექტრული ველის ძალისაგან.

მაქსველის განტოლებათა სისტემა არის ელექტრომაგნიტური ტალღების თეორიის ძირითადი განტოლება და გამოიყენება ე.წ. რადიოტექნიკური გათვლებისათვის, აგრეთვე ტალღამატარების თეორიაში. სასაზღვრო და საწყისი პირობები მაქსველის განტოლებისათვის ისმება ფიზიკური მოსაზრებებიდან.

მაქსველის განტოლებიდან გამოიყვანება ე.წ. *ტელეგრაფული განტოლება*, რომელიც აღწერს დენის ძალის და დაძაბულობის ცვლილებას გამტარში:

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0 \end{cases}$$

სადაც x არის კოორდინატი გამტარის გასწვრივ, v ძაბვაა გამტარის მოცემულ წერტილში, i დენის ძალაა, R წინაღობაა, L თვითინდუქციაა, C ტევადობა, ხოლო G კი გაჟონვაა (გადინება). აქ ყველაგან წინაღობა, თვითინდუქცია, და ა.შ. იგულისხმება ერთეულთა ერთსადაიმავე სისტემაში.

13 პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები

13.1 წრფივი პირველი რიგის განტოლება

დავუშვათ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ და ვთქვათ $a_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, Ω არეზე განსაზღვრული უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია. განვიხილოთ წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

ამ დროს ვიტყვით, რომ მოცემული გვაქვს Ω არეზე განსაზღვრული განტოლება. დავუშვათ (1) განტოლების კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\sum_{j=1}^n a_j^2(x) \neq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

შემოვიტანოთ ვექტორ-ფუნქცია $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$. მაშინ (1)

განტოლება შესაძლებელია გადაიწეროს

$$(a(x), \text{gradu}(x)) = 0$$

სახით, სადაც (A, B) მრგვალი ფრჩხილი აღნიშნავს A და B ვექტორების სკალარულ ნამრავლს.

განმარტება.

$$\dot{x}(t) = a(x) \quad (2)$$

ავტონომიურ განტოლებას ეწოდება (1) კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების *მახასიათებელი სისტემა*, ხოლო მის ტრაექტორიებს კი (1) განტოლების *მახასიათებლები*.

თეორემა 1. $x_0 \in \Omega$ წერტილის ნებისმიერ მიდამოში (1) განტოლების ნებისმიერ ამონახსნს აქვს სახე

$$u(x) = F(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)),$$

სადაც $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$ ფუნქციები არიან (2) მახასიათებელი სისტემის დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალები x_0 წერტილში, ხოლო $F(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$ ფუნქცია კი ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

განმარტება. $u = F(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x))$ ფუნქციას, სადაც $F(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$ ნებისმიერი თავისი არგუმენტების მიმართ უწყვეტად

დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ეწოდება (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი x_0 წერტილის V მიდამოში.

როგორც ვხედავთ, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციის სიზუსტით განისაზღვრება. შედარებისათვის გავიხსენოთ, რომ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი მუდმივებზეა დამოკიდებული და ამ მუდმივების განსაზღვრის, უფრო ზუსტად, ამონახსნიდან ერთი ამონახსნის გამოყოფის მიზნით მოიცემა კომის, ანუ საწყისი პირობა. ანალოგიურად, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა სივრციდან კონკრეტული ამონახსნის გამოსაყოფად საჭიროა დამატებითი პირობების მოცემა.

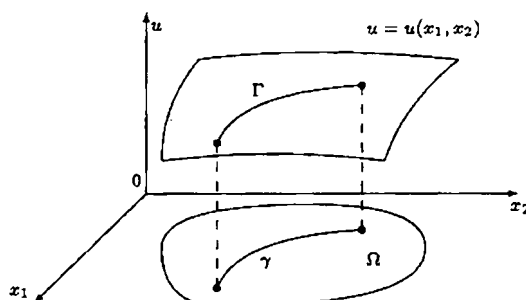
ავიღოთ რაიმე $n-1$ -განზომილებიანი γ ზედაპირი (ჰიპერზედაპირი) Ω -ში. დავუშვათ იგი მოცემულია $g(x)=0$ განტოლებით. g ფუნქციას მოვთხოვოთ, რომ ის იყოს უწყვეტად დიფერენცირებადი და $\text{grad}g(x) \neq 0$ ყოველი x -სათვის Ω -დან. ვუწოდოთ γ ზედაპირს საწყისი ზედაპირი. გარდა ამისა, დავუშვათ, რომ γ -ზე მოცემულია რაიმე $\varphi(x)$ ფუნქცია. ამ შემთხვევაში $u(x)$ -სათვის საწყისი (სასაზღვრო) პირობა იქნება

$$u(x)|_{x \in \gamma} = \varphi(x). \quad (3)$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარე ნიშნავს, რომ u ფუნქცია შეზღუდულია $\gamma \subset \Omega$ $n-1$ -განზომილებიან Ω -ს ქვესიმრავლეზე და (3) ტოლობა სრულდება ამ ქვესიმრავლეზე.

კომის ამოცანა (1) განტოლებისათვის ისმება შემდეგნაირად: ეიპოვოთ (1) განტოლების ყველა ამონახსნი (3) სასაზღვრო პირობით.

მაგალითად, როდესაც $n=2$, კომის (1), (3) ამოცანა გეომეტრიულად ნიშნავს (1) განტოლების ისეთი ინტეგრალური ზედაპირის მოძებნას, რომელიც გაივლის მოცემულ γ წირზე (ნახაზი 1).



ნახაზი 1

ამ ამოცანის ანალიზისათვის საჭიროა ერთი დამატებითი ცნება შემოვიტანოთ.

განმარტება. $M_0 \in \gamma$ წერტილს ეწოდება (1) განტოლების მახასიათებელი წერტილი, თუ $\dot{g}(M_0) = (a(M_0), \text{grad}g(M_0)) = 0$.

$M_0 \in \gamma$ არის (1) განტოლების მახასიათებელი წერტილი მიუთითებს იმ ფაქტზე, რომ $a(M_0)$ ვექტორი არის γ ზედაპირის მხეზე ვექტორი M_0 წერტილში. აქედან გამომდინარეობს, რომ (2) მახასიათებელი სისტემის წონასწორობის და γ ზედაპირის განსაკუთრებული წერტილები არიან (1) განტოლების მახასიათებელი წერტილები.

ახლა დავუბრუნდეთ კოშის ამოცანას. სამართლიანი შემდეგი დებულება, რომელიც შესაძლებელია განვიხილოთ როგორც არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა.

თეორემა 2. თუ $M_0 \in \gamma$ წერტილი არ არის (2) განტოლების მახასიათებელი წერტილი, მაშინ M_0 -ის რაიმე V მიდამოში (2), (4) კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

13.2 ორი ცვლადის შემთხვევა

როგორც აღვნიშნეთ, კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას უწოდებენ ისეთ განტოლებას, რომელშიც უცნობია რამდენიმე ცვლადის ფუნქცია მის კერძო წარმოებულებთან ერთად. უცნობების რიცხვის ზრდასთან ერთად რთულდება დიფერენციალური განტოლება და ძალზე ცოტაა ისეთი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები, რომელთა ამოხსნაც ცხადად შეიძლება. მოვიყვალთ ისეთი განტოლებები, რომელთა ამოხსნაც შედარებით მარტივია. ამ მიზნის მისაღწევად მაქსიმალურად შევზღუდოთ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა კლასი და განვიხილოთ განტოლება

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

ყოველივე ზემოთ თქმული შევაჯამოთ ამ განტოლებისათვის.

(1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციათა კლასში მოიცემა გამოსახულებით

$$u(x, y) = f(v(x, y)),$$

სადაც f უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ხოლო $v(x, y)$ კი ჩვენი განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნია.

$v(x, y)$ კერძო ამონახსნი მოიცემა

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y), \\ \dot{y} = b(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

ავტონომიური სისტემის ამონახსნით. უფრო ზუსტად, (1) განტოლების ამონახსნები არიან (2) სისტემის პირველი ინტეგრალები.

(2) სისტემის პირველი ინტეგრალების პოვნა დაიწვიანება

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის პოვნაზე.

მაგალითი 1. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. საძებნია ორი ცვლადის $u(x, y)$ ფუნქცია.

ამოცანა დასაწყისისათვის საინტერესოა იმით, რომ ორ ცვლადზეა დამოკიდებული. მოვახდინოთ გამოსახულების ინტეგრება x ცვლადით და მივიღებთ: $u = C$, აქ C ნებისმიერი მუდმივია x -ის მიმართ, მაგრამ შესაძლებელია მეორე y ცვლადზე ნებისმიერი თანადობით იყოს დაკავშირებული, სხვა სიტყვებით $u(x, y) = C(y)$. მოცემულ განტოლებაში $C(y)$ -ის ჩასმით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ იგი მართლაც არის განტოლების ამონახსნი.

მაგალითი 2. $\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)$. წინა ამოცანის ანალოგიურად მივიღებთ

$$u(x, y) = \int f(x) dx + C(y).$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ

$$-y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. დავწეროთ (2) ავტონომიური სისტემა:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

ეს უკანასკნელი შესაძლებელია გადავწეროთ სახით: $d(x^2 + y^2) = 0$, საიდანაც $x^2 + y^2 = C$ და ამრიგად, $v(x, y) = x^2 + y^2$ არის ავტონომიური სისტემის პირველი ინტეგრალი. გამოსავალი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი იქნება $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$, სადაც f ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

განტოლების ამონახსნი თუ $u = yz$, როდესაც $x = 1$.

ამოხსნა. დავწეროთ ავტონომიური სისტემა

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$$

და ვიპოვოთ მისი პირველი ინტეგრალები: $x - y = C_1$ და $2x - z = C_2$.
ამრიგად, ზოგად ინტეგრალს აქვს სახე $u(x, y, z) = F(x - y, 2x - z)$.
საწყისი პირობა გვაძლევს $yx = F(1 - y, 2 - x)$. შემოვიტანოთ აღნიშვნები
 $1 - y = \xi$, $2 - z = \eta$. მაშინ $F(\xi, \eta) = (1 - \xi)(2 - \eta)$. ამრიგად,
 $u(x, y, z) = (1 - x + y)(2 - 2x + z)$ ფუნქცია არის ამოცანის ამონახსნი.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

განტოლების ამონახსნი თუ $u = x^2 + y^2$, როდესაც $z = 0$.

ამოხსნა. დავწეროთ ავტონომიური სისტემა

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}$$

და ვიპოვოთ მისი პირველი ინტეგრალები: $\frac{x}{y} = C_1$ და $2xy - 2z = C_2$.

ზოგად ამონახსნს აქვს სახე $u(x, y, z) = F\left(\frac{x}{y}, xy - 2z\right)$. F ფუნქციას,

რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას, ვპოულობთ განტოლებიდან
 $x^2 + y^2 = F\left(\frac{x}{y}, xy\right)$. თუ ამ განტოლებაში ჩავსვამთ $\frac{x}{y} = \xi$, $xy = \eta$

მივიღებთ $F(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\xi} + \xi\eta$. საიდანაც $u(x, y, z) = (x^2 + y^2)\left(1 - \frac{2z}{xy}\right)$.

მაგალითი 6. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$. მიუხედავად იმისა, რომ ეს განტოლება

მარტივად გამოიყურება, მისი ამონახსნის პოვნა ადვილი საქმე არ არის. ამ
ტიპის განტოლებების ამოსახსნელად რამდენიმე სხვადასხვა მეთოდი
დამუშავებული. მოვიყვანოთ ერთ-ერთ მათგანს. შემოვიტანოთ ახალი
 $\xi = \xi(x, y)$ და $\eta = \eta(x, y)$ დამოუკიდებელი ცვლადები. დავუშვათ, რომ
შესაბამისი იაკობიანი 0-საგან განსხვავებულია (რაც იმაზე მიუთითებს, რომ
 $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ ასახვა ურთიუთცალსახაა). გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის
კერძო წარმოებულების პოვნის ფორმულები:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

ეს გამოსახულებები შევიტანოთ გამოსავალ განტოლებაში და შედეგი გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0. \quad (4)$$

მოვითხოვოთ, რომ შესრულდეს იგივეობა $\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$, რომელიც თავის

მხრივ არის გამოსავალი განტოლების მსგავსი, მაგრამ ამჯერად საკმარისია რომელიმე ერთი ამონახსნის პოვნა. მაგალითად, შეგვიძლია ჩავთვალოთ,

რომ $\xi = x + y$, $\eta = x$. (4) განტოლება მიიღებს სახეს $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$,

საიდანაც ვიღებთ, რომ $u = \varphi(\xi)$, სადაც φ ნებისმიერი ფუნქციაა. რადგან $\xi = x + y$, ამიტომ საბოლოოდ გვექნება $u(x, y) = \varphi(x + y)$, სადაც φ $x + y$ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციაა.

მაგალითი 7. $a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, სადაც a და b მუდმივებია. მაგალითი 6 არის ამ განტოლების კერძო შემთხვევა. განვიხილოთ ცვლადის გარდაქმნა $\xi = bx - ay, \eta = ax + by$. მოცემული განტოლება ახალ კოორდინატებში მიიღებს სახეს: $u_\eta = 0$, რომლის ამონახსნია $u(\xi, \eta) = f(\xi)$. დავუბრუნდებით რა ძველ ცვლადებს, მივიღებთ მოცემული განტოლების ამონახსნს: $u(x, y) = f(bx - ay)$, სადაც f ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

თუ წინა მაგალითის გადავწეროთ $-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ სახით, მაშინ უკანასკნელ ორ მაგალითში მიღებული შედეგები ერთმანეთს დაემთხვევა.

მაგალითი 8. მაგალითები 4 და 6 (აგრეთვე 7) არიან შემდეგი ამოცანის კერძო შემთხვევები

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (V, \text{grad } u) = 0, \quad (1)$$

$$V(t, X) = f(X),$$

სადაც $X = (x_1, \dots, x_n)$ n -განზომილებიანი ვექტორია, ხოლო მრგვალი ფრჩხილი კი აღნიშნავს სკალარულ ნამრავლს. (4) განტოლებას ეწოდება გადატანის განტოლება.

ამ ამოცანის ამონახსნია

$$u(t, X) = f(X - tV) \quad (2)$$

ფუნქცია, ხოლო (2) საწყისი პირობის გარეშე (1) განტოლების ამონახსნია $u(t, X) = F(X - tV)$, სადაც F ნებისმიერი ფუნქციაა (გააკეთეთ აუცილებელი გამოთვლები დამოუკიდებლად და დარწმუნდით ამაში!)

ვთქვათ $n = 2$, $t = x - 1$, $X = (y, z)$, $V = (1, 2)$ და $f(X) = yz$, როდესაც $x = 1$. ეს არის მაგალითი 4-ში განხილული შემთხვევა. (2) ფორმულის გამოყენებით ამოცანის ამონახსნია

$$f((y, z) - (x - 1)(1, 2)) = f(y - x + 1, z - 2x + 2),$$

სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ $u(x, y, z) = (y - x + 1)(z - 2x + 2)$.

მაგალითი 6-ში $t = x$ და $V = -1$. მაშინ (2) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ $u(x, y) = F(x + y)$.

მაგალითი 9. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. განვიხილოთ ცვლადის შემდეგი

გარდაქმნა: $\frac{y}{x} = \eta$, $y = \eta x$. მაშინ

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{y}{x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \times 0 = -\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{y}{x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \times 1, \end{aligned}$$

ამრიგად, განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

საიდანაც $u = f(\xi)$, რაც ნიშნავს, რომ ზოგად ამონახს აქვს სახე

$u(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$, სადაც f ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

მაგალითი 10. ვიპოვოთ

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

განტოლების ის ინტეგრალური ზედაპირი, რომელიც გადის

$$x = \tau, \quad y = \tau, \quad u = \tau^3, \quad \tau \in \mathbf{R}^1$$

პარამეტრულად მოცემულ წირზე.

ამოხსნა. ამ ამოცანას ორი განსხვავებული მეთოდით ამოვხსნით.

პირველი გზა (პარამეტრთა შემოტანის საშუალებით). მახასიათებელ

$$\dot{x}(t) = x, \quad \dot{y}(t) = -y, \quad \dot{u}(t) = u$$

სისტემას

$$x|_{t=0} = \tau, \quad y|_{t=0} = \tau, \quad u|_{t=0} = \tau^3$$

საწყისი პირობების შემთხვევაში აქვს სახე

$$x = \tau e^t, \quad y = \tau e^{-t}, \quad u = \tau^3 e^t.$$

ეს არის კოშის ამოცანის პარამეტრული ამონახსნი. საიდანაც ვპოულობთ ანალიზურ ამონახსნს $u = x^2 y$.

მეორე გზა. ახლა გამოვიყენებთ არა ტრაექტორიას, არამედ პირველ ინტეგრალებს. ფუნქციები $v_1 = xy$ და $v_2 = yu$ მახასიათებელი განტოლების პირველი ინტეგრალებია. როგორც უკვე ვიცით $F(xy, yu) = 0$ განტოლება, სადაც $F(\zeta_1, \zeta_2)$ ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, იძლევა გამოსავალი განტოლების ზოგად ინტეგრალს. საწყისი პირობებიდან ვპოულობთ F -ის ცხად გამოსახულებას შემდეგნაირად:

$$F(v_1, v_2) = F(xy, yu) = F(\tau^2, \tau^4) \equiv 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{R}^1.$$

აქედან, $F = v_1^2 - v_2 = x^2 y^2 - yu = 0$ და ამრიგად, $u = x^2 y$.

მაგალითი 11. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა წინა განტოლებისათვის, როდესაც u ფუნქცია იგივეურად ერთის ტოლია $x^2 + y^2 = 4$ წრეწირზე.

ამოხსნა. გამოვრიცხოთ x, y, u ცვლადები

$$u = 1, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad xy = v_1, \quad yu = v_2$$

სისტემიდან და მივიღებთ: $v_2^4 + v_1^2 = 4v_2^2$. ამრიგად, კოშის ამოცანის ამონახსნი მოიცემა განტოლებით: $y^4 u^4 + x^2 y^2 = 4y^2 u^2$.

13.3 კვაზიწრფივი განტოლება

დავუშვათ $U \subset \mathbf{R}^{n+1}$ რაიმე არეა $x = (x_1, \dots, x_n)$ და u დეკარტული კოორდინატებით. განვიხილოთ U არეზე განსაზღვრული პირველი რიგის კვაზიწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებას ავს სახე

$$\sum_{j=1}^n a_j(x, u) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = b(x, u), \quad (1)$$

სადაც $a_j(x, u)$, $j = 1, \dots, n$ და $b(x, u)$ მოცემული უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია U არეზე. ამასთან დავუშვათ სრულდება უტოლობა

$$\sum_{j=1}^n a_j^2(x, u) \neq 0, \quad \forall (x, u) \in U.$$

როგორც ვხედავთ, (1) განტოლების კოეფიციენტები დამოკიდებულია არა მარტო x ცვლადზე, არამედ u ფუნქციაზეც.

კვაზიწრფივი განტოლების ანალიზისათვის ანალოგიურად წრფივი განტოლებისა, შემოვიტანოთ $a(x, u)$ ვექტორ-ფუნქცია კოორდინატებით

$a_1(x, u), \dots, a_n(x, u)$ და (1) განტოლება გადავწეროთ სკალარული ნამრავლის გამოყენებით

$$(a(x, u), \text{grad}u(x)) = b(x, u)$$

სახით.

განმარტება. ავტონომიურ სისტემას

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(x, u), \\ \dot{u}(t) = b(x, u) \end{cases} \quad (2)$$

ეწოდება (1) განტოლების მახასიათებელი სისტემა, ხოლო მის ტრაექტორიებს კი (1) განტოლების მახასიათებლები.

ზემოთ მოყვანილი $\sum_{j=1}^n a_j^2(x, u) \neq 0$ უტოლობა მიუთითებს იმაზე,

რომ U არე არ შეიცავს (2) განტოლების წონასწორობის წერტილს. გარდა ამისა, U არეში სრულდება კომის ამოცანის ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემის პირობები.

განვიხილოთ (1) სახის

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (3)$$

განტოლება ორი დამოუკიდებელი ცვლადის $u(x, y)$ ფუნქციისათვის და დავადგინოთ კავშირი განტოლების მახასიათებელ და ინტეგრალურ ზედაპირებს შორის. აქ $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$, $c(x, y, u)$ ფუნქციები $U \subset R^3$ არეზე მოცემული უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია. ყოველ $M \in U$ წერტილში (3) განტოლება განსაზღვრავს $l(M) = (a(M), b(M), c(M))$ ვექტორულ ველს. ვთქვათ (3) განტოლების ინტეგრალური ზედაპირი მოიცემა განტოლებით $u = u(x, y)$. თუ M წერტილი ინტეგრალურ ზედაპირზე მდებარეობს, მაშინ

$$n(M) = \left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, -1 \right)$$

ვექტორი M წერტილში ზედაპირის

ნორმალის გასწვრივაა მიმართული. $l(M)$ და $n(M)$ ვექტორები ორთოგონალურები არიან, რადგან (6) განტოლება ნიშნავს

$$(l(M), n(M)) = 0, \quad \forall M \in U,$$

ტოლობას. ამრიგად, $l(M)$ მდებარეობს (3) განტოლების ინტეგრალური ზედაპირის M წერტილში გამავალ მხებ სიბრტყეზე. სამართლიანი აგრეთვე შებრულებული დებულებაც, კერძოდ, თუ გლუვი $u = u(x, y)$ ზედაპირის მხები ვექტორია $l(M)$ ყოველ M წერტილში, მაშინ ეს ზედაპირი არის (3) განტოლების ინტეგრალური ზედაპირი. მაშასადამე,

$I(M)$ არის მხები ვექტორი როგორც M წერტილზე გამავალი მახასიათებლისა, ასევე ინტეგრალური ზედაპირის.

თეორემა 3. ყოველი უწყვეტად დიფერენცირებადი $u = u(x, y)$ ზედაპირი, სადაც $(x, y) \in \Omega \subset R^2$, $(x, y, u) \in U$ არის (3) განტოლების ინტეგრალური ზედაპირი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ის არის (4) განტოლების მახასიათებელი.

დავუბრუნდეთ ზოგად (1) განტოლებას. მისი ამოხსნა დაიყვანება

$$\sum_{j=1}^n a_j(x, u) \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + b(x, u) \frac{\partial v}{\partial u} = 0 \quad (4)$$

სახის განტოლების ამოხსნაზე. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4. დაეუშვათ $v = V(x, u)$ არის (4) განტოლების ამონახსნი U არის რაიმე $U_0 \subseteq U$ ქვეარეზე და ვთქვათ $V(x, u) = 0$

რომელიმე $M \in U_0$ წერტილში და $\frac{\partial V(M)}{\partial u} \neq 0$. მაშინ R^n -ზე M -ის M'

პროექციის რაიმე მიდამოსათვის $V(x, u) = 0$ განტოლება განსაზღვრავს (1) განტოლების $u = \varphi(x)$ ამონახსნს.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს (1) განტოლების ამოხსნის ხერხი: (2) მახასიათებელი სისტემიდან ვპოულობთ $M \in U$ წერტილში დამოუკიდებელ პირველ $v_1(x, u), \dots, v_n(x, u)$ ინტეგრალებს, მაშინ M -ის რაიმე მიდამოში (1) განტოლების ამონახსნი იქნება $v = F(v_1(x, u), \dots, v_n(x, u))$ ფუნქცია, სადაც $F(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა. ამრიგად, (2) განტოლების ამონახსნი განისაზღვრება როგორც არაცხადი ფუნქცია

$$F(v_1(x, u), \dots, v_n(x, u)) = 0 \quad (5)$$

განტოლებიდან.

(5) გამოსახულებას (1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ (5) შესაძლებელია არ შეიცავდეს (1) განტოლების ყველა ამონახსნს. სახელდობრ, არ არის გამორიცხული, რომ არსებობდეს (1) განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც (4) განტოლებას იგივეურად ნებისმიერი (x, u) წვეთისათვის არ აკმაყოფილებდეს, მაგრამ აკმაყოფილებდეს იმ შემთხვევაში, როდესაც $u = \varphi(x)$. ასეთი სახის ამონახსნს ეწოდება (1) განტოლების სპეციალური ამონახსნი. გავიმეორებთ, რომ ეს მხოლოდ გამონაკლისი შემთხვევაა.

ისევე, როგორც წრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლებებისათვის, კონკრეტული ამონახსნის გამოსაყოფად კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლიდან, საჭიროა დამატებითი პირობების მოცემა. ხშირად ასეთ პირობად ითვლება

საწყისი პირობა. რაც ჩვენს შემთხვევაში ნიშნავს, რომ R^n -ის Ω არეში მოიცემა $n-1$ -განზომილებიანი (საწყისი) γ ზედაპირი, ხოლო γ -ზე კი უწყვეტად დიფერენცირებადი $\varphi(x)$ ფუნქცია. საწყის პირობას (1) განტოლებისათვის აქვს სახე:

$$u(x)|_{x \in \gamma} = \varphi(x). \quad (6)$$

კოშის ამოცანა წრფივი განტოლების ანალოგიურად ისმება. კერძოდ, საჭიროა (1) განტოლების ამონახსნის პოვნა (6) საწყისი პირობით. სიმარტივისათვის ანალიზი ჩავატაროთ (3) განტოლებისათვის. დავუშვათ γ წირი R^2 -ში პარამეტრული განტოლებითაა მოცემული:

$$x = x(\tau) \text{ და } y = y(\tau),$$

სადაც $\tau \in I \subset R^1$ და ვთქვათ

$$u(x, y)|_{(x, y) \in \gamma} = u_0(\tau), \quad \tau \in I. \quad (7)$$

γ წირს საწყისი წირი ეწოდება. იგულისხმება, რომ I -ზე $x(\tau)$, $y(\tau)$ და $u_0(\tau)$ უწყვეტად დიფერენცირებადები არიან და $(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 > 0$ ყველა τ -სათვის I -დან.

(7) საწყისი პირობა მოგვცემს გლუვ Γ წირს:

$$\Gamma = \{(x, y, u) | x = x(\tau), y = y(\tau), u = u_0(\tau), \tau \in I\}.$$

(3), (7) კოშის ამოცანის ამონახსნი იძლევა (3) განტოლების ინტეგრალურ ზედაპირს, რომელიც ეხება Γ წირს. დავუშვათ $M_0(x_0, y_0)$ არის $M(x_0, y_0, u_0) \in \Gamma$ წერტილის პროექცია R^2 -ზე.

განმარტება. $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$ წერტილს, სადაც $x_0 = x(\tau_0)$, $y_0 = y(\tau_0)$, $u_0 = u(\tau_0)$ ეწოდება (3) განტოლების მახასიათებელი წერტილი, თუ

$$a(x_0, y_0, u_0) \cdot \dot{y}(\tau_0) - b(x_0, y_0, u_0) \cdot \dot{x}(\tau_0) = 0.$$

ამის შემდეგ უკვე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ თეორემა, რომელიც ეხება კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობასა და ერთადერთობას.

თეორემა 5. თუ $M_0 \in \gamma$ წერტილი არ არის (3) განტოლების მახასიათებელი წერტილი, მაშინ M_0 წერტილის რაიმე მიდამოში არსებობს (3),(7) კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი.

კვაზიწრფივი განტოლების ამონახსნით აღიწერება მრავალი ფიზიკური პროცესი. მაგალითად, განვიხილოთ წრფეზე ინერციით მოძრავი ნაწილაკების ერთგვაროვანი გარემო, რომელთა სიჩქარე უცვლელია. აღვნიშნოთ $u(t, x)$ -ით ნაწილაკის სიჩქარე x წერტილში დროის t მომენტში. დავწეროთ ნიუტონის კანონი: ნაწილაკების აჩქარება ნულის ტოლია.

ამოხსნა. დავუშვათ $x = \varphi(t)$ ფუნქცია ნაწილაკის მოძრაობას ახასიათებს, რადგან ნაწილაკის მოძრაობის სიჩქარე u -თი აღვნიშნეთ, გვქვია $\dot{\varphi} = u(t, \varphi(t))$, საიდანაც ვღებულობთ აჩქარებას:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \dot{\varphi} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

ამრიგად, ნიუტონის კანონი იქნება განტოლება

$$u_t + uu_x = 0.$$

ეს განტოლება ბიურგერის განტოლების სახელითაა ცნობილი.

თუ ნაწილაკები მოძრაობენ $F(x)$ ძალურ ველში, მაშინ იგივე კანონი კვაზიწრფივი განტოლების საშუალებით ჩაიწერება $u_t + uu_x = F$ სახით. ეს უკანასკნელი კი არაერთგვაროვანი კვაზიწრფივი განტოლებაა.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

ვიპოვოთ შემდეგი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები

1. $(x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - ay \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $a = \text{const}$. პასუხი:

$$z(x, y) = F\left(\frac{\sqrt[a]{y}(x + ax + 2y)}{1 + a}\right)$$

2. $(x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$. პასუხი: $z(x, y) = y + x + F(xy + y^2)$

3. $(x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2$. პასუხი:

$$z(x, y) = \frac{x^2}{2} + (\ln(y) + 1)yx + 2y^2 \ln(y) + F(xy + y^2)$$

4. $\frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial x} + e^x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. პასუხი: $z(x, y) = F\left(\frac{ye^x + 1}{y}\right)$

5. $\frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. პასუხი: $z(x, y) = F\left(\frac{ye^x + 2}{2y}\right)$

6. $\frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x$. პასუხი: $z(x, y) = y + F\left(\frac{ye^x + 2}{2y}\right)$

7. $\frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x$. *Assume:* $z(x, y) = y + F\left(ye^{-\frac{x^2}{2}}\right)$
8. $\frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 1$. *Assume:* $z(x, y) = \frac{x^2}{2} + F(-x^2 + y^2)$
9. $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = u$. *Assume:* $z(x, y) = F(xy)x$

14 მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები

14.1 კლასიფიკაცია

დავიწყოთ ზოგადი შემთხვევით და განვიხილოთ n ცვლადზე დამოკიდებული $u(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციისათვის შემდეგი კვაზიწრფივი (წრფივი უმაღლესი წარმოებულის მიმართ) განტოლება

$$\sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0 \quad (1)$$

U არეში უწყვეტი $a_{ij}(x)$ კოეფიციენტებით. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$. დავაფიქსიროთ U არეში რომელიმე $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ წერტილი და შევადგინოთ კვადრატული ფორმა

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) X_i X_j. \quad (2)$$

(2) ფორმას ეწოდება (1) განტოლებასთან დაკავშირებული კვადრატული ფორმა. შევადგინოთ (2) კვადრატული ფორმის დეტერმინანტი

$$\det g = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ვიტყვიან, რომ (2) ფორმა *განსაზღვრულია*, თუ იგი ინარჩუნებს ნიშანს X -ის ცვლილების დროს, ხოლო თუ ნიშანი იცვლება X -ის ცვლილებისას, მაშინ (2) ფორმა - *განუსაზღვრელია*.

განმარტება. (1) განტოლებას x^0 წერტილში ეწოდება *ელიფსური* ტიპის განტოლება, თუ $\det g \neq 0$ და g განსაზღვრული ფორმაა.

(1) განტოლებას x^0 წერტილში ეწოდება *ჰიპერბოლური* ტიპის განტოლება, თუ $\det g \neq 0$ და g განუსაზღვრელი ფორმაა.

(1) განტოლებას x^0 წერტილში ეწოდება *პარაბოლური* ტიპის განტოლება, თუ $\det g = 0$.

(1) განტოლებას ეწოდება *ელიფსური* (შესაბამისად *ჰიპერბოლური*, *პარაბოლური*) U არეში, თუ ამ არის ნებისმიერ წერტილში იგი არის ელიფსური (შესაბამისად *ჰიპერბოლური*, *პარაბოლური*).

ნათელია, რომ თუ $a_{ij}(x)$ კოეფიციენტები მუდმივებია, მაშინ განტოლების ტიპი დამოკიდებული არ არის დამოუკიდებელ ცვლადებზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში განტოლების ტიპი შეიძლება შეიცვალოს დამოუკიდებელი ცვლადების ცვლილებასთან ერთად. ამიტომ, ამ შემთხვევაში ბუნებრივად ისმება ისეთი არეების გამოყოფის ამოცანა, სადაც განტოლების ტიპი უცვლელია.

განტოლების ზემოთ მოყვანილი კლასიფიკაცია დამოკიდებული არ არის ცვლადების გარდაქმნაზე. ორი ცვლადის შემთხვევაში ამ დებულებას ჩამოვყალიბებთ თეორემას და დავანტიკებთ მას.

მაგალითი 1. ლაპლასის $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ განტოლებისათვის

g კვადრატულ ფორმას აქვს სახე $g(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2$, ამ ფორმის დეტერმინანტი ტოლია

$$\det g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

ამრიგად g დადებითად განსაზღვრული, რაც ნიშნავს, რომ ლაპლასის განტოლება არის ელიფსური.

მაგალითი 2. g კვადრატულ ფორმას ტალღური

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x, y, z, t) \text{ განტოლებისათვის აქვს სახე}$$

$$g(X, Y, Z, T) = X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{T^2}{a^2},$$

ხოლო ამ ფორმის დეტერმინანტს კი-

$$\det g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2} \neq 0.$$

ცხადია, რომ g განუსაზღვრელი ფორმაა, ამრიგად განტოლება ჰიპერბოლურია.

მაგალითი 3. ფურიეს განტოლებისათვის კვადრატულ ფორმას აქვს სახე $g(X, Y, Z, S) = X^2 + Y^2 + Z^2$, (S ცვლადი აღნიშნავს t -ს მიმართ უმაღლეს, ე.ი. მეორე რიგის წარმოებულის შესაბამის ცვლადს), ხოლო ამ კვადრატული ფორმის დეტერმინანტს კი

$$\det g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ ფურიეს განტოლება არის პარაბოლური ტიპის.

მაგალითი 4. ტრიკომის

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

განტოლება არის შერეული ტიპის, რადგან მისი შესაბამისი $g(X, Y) = yX^2 + Y^2$ კვადრატული ფორმის დეტერმინანტის

$$\det g = \begin{vmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y$$

ნიშანი დამოკიდებულია y დამოუკიდებელ ცვლადზე. თუ $y < 0$ განტოლება ჰიპერბოლურია, თუ $y > 0$ - ელიფსური, ხოლო თუ $y = 0$, მაშინ კი პარაბოლური.

ტრიკომის განტოლება გაზური დინამიკის ერთ-ერთი ძირითადი განტოლებაა. იმ არეში, სადაც განტოლება ჰიპერბოლურია, იგი აღწერს ზეგვერით მოძრაობას, ხოლო როდესაც განტოლება ელიფსურია, ბგერის სიჩქარე დაბალი მოძრაობის აღწერი განტოლებაა.

14.2 კლასიფიკაცია: ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევა

განვიხილოთ მეორე რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლება ორი x, y ცვლადის $u(x, y)$ ფუნქციის მიმართ:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0, \quad (1)$$

სადაც განტოლების A, B, C კოეფიციენტები არიან ორი x, y ცვლადის ფუნქციები, რომელთაც აქვთ მეორე რიგის უწყვეტი წარმოდგენები. დაუშვათ, რომ A, B, C ფუნქციებიდან ერთდროულად ყველა ნულის ტოლი არ ხდება.

(1) განტოლების შესაბამისი კვადრატული ფორმაა $g = AX^2 + 2BXY + CY^2$, რომლის დეტერმინანტია

$$\det g = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

დავუშვათ $\det g = AC - B^2 > 0$ და $A \neq 0$. მაშინ g შესაძლებელია წარმოდგენილი იქნას სახით:

$$g = \frac{1}{A}[(AX + BY)^2 + (AC - B^2)Y^2]. \quad (2)$$

(2) განსაზღვრული ფორმა. ამრიგად განტოლება არის ელიფსური.

დავუშვათ $\det g = AC - B^2 < 0$. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1. $A \neq 0$, მაშინ ადგილი აქვს (2) ტოლობას, მაგრამ იმის შესაბამისად როგორია Y , g ფორმის ნიშანი იცვლება. მართლაც, ამ შემთხვევაში (2) გამოსახულებაში კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული მეორე შესაკრები 0-ზე ნაკლებია, რომელიც ემატება დადებით სიდიდეს, ამიტომ შედეგი იმის შესაბამისად როგორია Y^2 , ხან უარყოფითი იქნება, ხან დადებითი. ამიტომ იგი განუსაზღვრელი ფორმაა. მაშასადამე, (1) განტოლება ჰიპერბოლურია.

2. თუ $A = 0$, მაშინ g შესაძლებელია გადაიწეროს შემდეგი სახით $g = (2BX + CY)Y$. ნათელია, რომ g განუსაზღვრელი ფორმაა, ხოლო განტოლება კი ჰიპერბოლურია.

დავუშვათ $\Delta = AC - B^2 = 0$, ამ შემთხვევაში განტოლება პარაბოლურია.

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ, რომ თუ $\Delta > 0$, მაშინ განტოლება ელიფსურია, თუ $\Delta < 0$ განტოლება ჰიპერბოლურია, ხოლო თუ $\Delta = 0$, მაშინ განტოლება პარაბოლურია.

14.3 მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის განტოლებები

მეორე რიგის ზოგადი სახის დიფერენციალური განტოლება ორი დამოუკიდებელი ცვლადის $u(x, y)$ ფუნქციისათვის არის შემდეგი განტოლება

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0, \quad (1)$$

სადაც, როგორც აღვნიშნეთ $u(x, y)$ საძიებელი ფუნქციაა, ხოლო A, B, C, D, E, F და G არიან x, y ცვლადებზე დამოკიდებული მოცემული ფუნქციები. თუ (1)-ში $G(x, y) \equiv 0$, მაშინ (1)-ს ეწოდება ერთგვაროვანი განტოლება.

განვიხილოთ ცვლადების შემდეგი გარდაქმნა

$$\xi = \varphi(x, y) \text{ და } \eta = \psi(x, y), \quad (2)$$

სადაც ξ და η ახალი დამოუკიდებელი ცვლადებია. φ და ψ ფუნქციები, რომლებიც ერთმანეთს აკავშირებენ ძველ x, y და ახალ ξ, η ცვლადებს, შევარჩევთ მოგვიანებით, ამჯერად მხოლოდ ჩავთვალოთ, რომ $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ ურთიერცალსახა ასახვაა.

მოვახდინოთ (1)-ში ცვლადის გარდაქმნა:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \\ &+ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \\ &+ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \\ &+ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

(3)-(6) ტოლობების მარჯვენა მხარეები არიან წრფივი ფუნქციები $u'_\xi, u'_\eta, u''_{\xi\xi}, u''_{\xi\eta}, u''_{\eta\eta}$ -ის მიმართ. შევცვალოთ (1)-ში $u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}$ შესაბამისი გამოსახულებებით (3)-(6)-დან და მივიღებთ კვლავ მეორე რიგის წრფივ განტოლებას ξ, η ცვლადებზე დამოკიდებული u ფუნქციისათვის

$$\bar{A} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (7)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2; \\ \bar{B} &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \end{aligned}$$

$$\bar{C} = A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2,$$

ხოლო Φ ფუნქცია წრფივია u, u'_x, u'_y -ის მიმართ. ამით ჩვენ დავამტკიცეთ დებულება, რომელსაც ჩამოვაყალიბებთ თეორემის სახით.

თეორემა 1. ცვლადთა (2) გარდაქმნით (1) განტოლების ტიპი არ იცვლება.

შენიშნით, რომ

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცული ტოლობის სამართლიანობაში ადვილად დავრწმუნდებით პირდაპირი გამოთვლით.

(7) განტოლება მარტივდება, თუ აღმოჩნდება, რომ $\bar{A}$ და $\bar{C}$ კოეფიციენტები 0-ის ტოლია. ამისათვის საკმარისია, რომ (2) გარდაქმნაში φ, ψ ფუნქციები ისეთები შევარჩიოთ, რომ აკმაყოფილებდნენ განტოლებას

$$A \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + C \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (8)$$

უკანასკნელი გამოსახულება არის პირველი რიგის არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება. შემდეგი თეორემა მიუთითებს კავშირს (8) განტოლების ამონახსნსა და გარკვეული სახის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას შორის.

თეორემა 2. იმისათვის რომ $z = f(x, y)$ ფუნქცია Ω არის ყოველ წერტილში აკმაყოფილებდეს (8) განტოლებას, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f(x, y) = \text{const}$ იყოს

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0 \quad (9)$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი Ω არეში.

ეს თეორემა ამარტივებს გამოსავალი (1) განტოლების ამონახსნის ძიების გზას. ამრიგად, განტოლების გამარტივების გზა ასეთია: პირველ რიგში იწერება დამხმარე (9) განტოლება, რომელსაც (1)-ის მახასიათებელი განტოლება ეწოდება. მახასიათებელი განტოლება პირველი რიგის მეორე ხარისხის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა. ამოვხსნათ იგი y' წარმოებულის მიმართ და მივიღებთ ორ განტოლებას

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad (10)$$

$$y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (11)$$

თუ (10) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე $\varphi(x, y) = \text{const}$, მაშინ ავიღებთ რა $\xi = \varphi(x, y)$, ნულს გაუტოლდება $u_{\xi\xi}''$ -ის კოეფიციენტი. თუ $\psi(x, y) = \text{const}$ არის (11) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, მაშინ $\eta = \psi(x, y)$ ჩასმით 0-ს გაუტოლდება აგრეთვე $u_{\eta\eta}''$ -ს კოეფიციენტი.

მახასიათებელი განტოლების ინტეგრალურ წირებს, ე.ი. წირებს, რომლებიც შედიან $\varphi(x, y) = \text{const}$ და $\psi(x, y) = \text{const}$ ოჯახში, ეწოდება მოცემული (1) დიფერენციალური განტოლების *მახასიათებლები*. ამის გამო, (1) განტოლების გამარტივების ზემოთ მოყვანილ მეთოდს ეწოდება *მახასიათებელთა მეთოდი*.

ჰიპერბოლური განტოლება. $\varphi(x, y) = \text{const}$ და $\psi(x, y) = \text{const}$ ოჯახში, შესაძლებელია განხილული იქნას, როგორც (9) განტოლების ზოგადი ინტეგრალები. ეს განტოლება როგორც აღვნიშნეთ იშლება ორ დამოუკიდებელ (10) და (11) განტოლებებად. მათი მარჯვენა მხარეები ნამდვილები და ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად $z = \varphi(x, y)$ და $z = \psi(x, y)$ ფუნქციები არიან (8) კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები. ეს ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებლები არიან (დაამტკიცეთ, რომ მათი გრონსკის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია როდესაც $AC - B^2 < 0$). რადგან $\varphi(x, y)$ და $\psi(x, y)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (9) განტოლებას, ცვლადების გარდაქმნის შემდეგ აღმოჩნდება, რომ $\bar{A} = 0$ და $\bar{C} = 0$. მაშასადამე (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$2\bar{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0,$$

თუ ორივე მხარეს $2\bar{B}$ -ზე გავყოფთ და მეორე შესაკრებს მარჯვენა მხარეს გადავიტანთ მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \bar{\Phi} \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (12)$$

ნათელია, რომ მიღებულ განტოლებას უფრო მარტივი სახე აქვს, ვიდრე გამოსავალ (1) განტოლებას. თუ შევძლებთ ამ უკანასკნელის ინტეგრებას, (1)-ის ამონახსნის საპოვნელად საკმარისია დავუბრუნდეთ ძველ ცვლადებს.

(12) განტოლებას ეწოდება *ჰიპერბოლური განტოლების კანონიკური სახე*.

ზოგჯერ იხმარება ჰიპერბოლური განტოლების სხვა კანონიკური სახე. კერძოდ, თუ (12)-ში მოვახდენთ ცვლადის $\xi = t + \tau$ და $\eta = t - \tau$ გარდაქმნას, სადაც t და τ ახალი ცვლადებია, (12) მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \tilde{\Phi},$$

სადაც $\tilde{\Phi} = 4\bar{\Phi}$ (შეამოწმეთ!)

პარაბოლური განტოლება. ამ შეთხვევაში (10) და (11) განტოლებები ერთმანეთს ემთხვევა, გვაქვს ერთი განტოლება და $\varphi(x, y) = \text{const}$ ერთი ზოგადი ინტეგრალი, რომელიც განსაზღვრავს მახასიათებელ წირთა ერთ ოჯახს. შევვიძლია ავიღოთ $\xi = \varphi(x, y)$ და $\eta = \psi(x, y)$, სადაც $\psi(x, y)$ ნებისმიერი ფუნქციაა, რომლისგანაც მხოლოდ ის მოითხოვება, რომ იყოს იმდენჯერ წამოებადი, რამდენჯერაც საჭიროა. ნათელია, რომ ცვლადების ასეთი გარდაქმნის დროს (7) გამოსახულებაში $\bar{A}$ კოეფიციენტი 0-ის ტოლი ხდება, ე.ი.

$$\bar{A} = A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $AC - B^2 = 0$ ანუ $B = \sqrt{A}\sqrt{C}$, უკანასკნელი ტოლობა მიიღებს სახეს

$$A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \left(\sqrt{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

ეს მოგვეხმარება $\bar{B}$ კოეფიციენტის 0-თან ტოლობის დამტკიცებაში. მართლაც,

$$\begin{aligned} \bar{B} &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{A}\sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \sqrt{A}\sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\sqrt{A} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} \left(\sqrt{A} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \\ &= \left(\sqrt{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\sqrt{A} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

ამრიგად, (7) განტოლება იღებს სახეს

$$\bar{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0,$$

$\bar{C}$ -ზე გაყოფით კი - საბოლოოდ მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \tilde{\Phi} \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (13)$$

(13) განტოლებას ეწოდება *პარაბოლური განტოლების კანონიკური სახე*. აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ (13) განტოლების მარჯვენა მხარე დამოკიდებული არ არის $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ წარმოებულზე, მაშინ იგი გადაიქცევა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებად, ხოლო ξ შეგვიძლია პარამეტრად ჩავთვალოთ.

ელიფსური განტოლება. ამ შემთხვევაში (10) და (11) განტოლების მარჯვენა ნაწილები კომპლექსურად შეუღლებულები არიან. დავუშვათ $\varphi(x, y)$ (10)-ის კომპლექსური ინტეგრალია. მაშინ $\varphi^*(x, y) = \text{const}$ არის (11) განტოლების ამონახსნი, სადაც $\varphi^*(x, y)$ არის $\varphi(x, y)$ -ის კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქცია. თუ გადავალთ $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \varphi^*(x, y)$ კომპლექსურ ცვლადებზე, მაშინ ზოგადი თეორიის თანახმად (1) განტოლება იგივე სახეზე მიიყვანება, რაზედაც ჰიპერბოლური განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

იმისათვის, რომ ნამდვილ რიცხვთა თეორიის ფარგლებში დავრჩეთ საჭიროა კიდევ ერთხელ მოვახდინოთ ცვლადების შემდეგი გარდაქმნა

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, \quad i = \sqrt{-1}$$

სადაც α და β ახალი ცვლადებია. ამ შემთხვევაში $\xi = \alpha + i\beta$ და $\eta = \alpha - i\beta$. ადვილად მოწმდება, რომ ამ შემთხვევაში $\bar{A} = \bar{C}$ და $\bar{B} = 0$ (შეამოწმეთ დამოუკიდებლად!). ამრიგად, (1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Theta \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right).$$

უკანასკნელ განტოლებას ეწოდება *ელიფსური განტოლების კანონიკური სახე*.

მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი განტოლება. დავუშვათ (1) განტოლებაში A, B, C, D, E, F და G მუდმივებია და განტოლებას აქვს სახე

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0 \quad (14)$$

მოვახდინოთ (2)-ის ანალოგიურად ცვლადების წრფივი გარდაქმნა:

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \quad (15)$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ შემდეგ კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\bar{a} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{b} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{c} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \quad (16)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2, \\ \bar{b} &= a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta, \\ \bar{c} &= a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2. \end{aligned} \quad (17)$$

ხოლო $F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ გამოსახულების ქვეშ გაიგება ყველა ის შესაკრები,

რომელიც გარდაქმნის შემდეგ მიიღებიან და შეიცავენ საძიებელი u ფუნქციის არაუმეტეს პირველი რიგის კერძო წარმოებულებს. როგორც ვხედავთ, F არ შეიცავს ξ და η დამოუკიდებელ ცვლადებს.

დებულება 1. (ჰიპერბოლური განტოლება) დაეუშვათ $b^2 - ac > 0$.

(14) დიფერენციალური განტოლების პირველი საში კოეფიციენტისაგან შევადგინოთ შემდეგი კვადრატული განტოლება $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ და დაეუშვათ, რომ $a \neq 0$ და $c \neq 0$. ამ განტოლებას ორი λ_1 და λ_2 ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი აქვს. ცვლადის გარდაქმნის

(15) ფორმულაში შევარჩიოთ α, β, γ და δ ისე, რომ $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda_1$ და $\frac{\gamma}{\delta} = \lambda_2$. მაშინ $\bar{a} = 0, \bar{c} = 0$ და განტოლება (16) მიიღებს სახეს

$$2\bar{b} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \quad (18)$$

ამ დებულების დამტკიცება სირთულეს არ წარმოადგენს. მართლაც, (17) გამოსახულებების თანახმად,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}}{\beta^2} &= a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2b\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + c, \\ \frac{\bar{c}}{\delta^2} &= a\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 + 2b\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) + c. \end{aligned}$$

რადგან დებულების პირობით $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ განტოლების $D = b^2 - ac$ დისკრიმინანტი დადებითია, ამიტომ ამ განტოლებას აქვს ორი განსხვავებული ნამდვილი ფესვი. დაეუშვათ რა, რომ $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda_1$ და

$\gamma/\delta = \lambda_2$, მივიღებთ $\bar{a} = 0, \bar{c} = 0$. ეს ამტკიცებს დებულების ერთ ნაწილს. ცვლადების მითითებული გარდაქმნით მივიღებთ, რომ

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \beta\delta\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}\right) = \beta\delta(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0.$$

რაც მიუთითებს იმაზე, რომ (17) გამოსახულებების ბოლო პირობა სრულდება. ამით დებულება დამტკიცებულია.

განტოლება (18)-ის $2\bar{b}$ -ზე გაყოფით მიიღება განტოლება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \text{ რასაც ზემოთ მოყვანილის ანალოგიურად ეწოდება}$$

მუდმივკოეფიციენტებიანი ჰიპერბოლური განტოლების კანონიკური სახე.

შევნიშნოთ, რომ დებულება 1-ის პირობების დაცვით შესაძლებელია შერჩეული იქნას ცვლადის ისეთი წრფივი გარდაქმნა, რომ (14) განტოლება

მოყვანილი იქნას განტოლებაზე:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Psi\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \quad \text{ამ}$$

უკანასკნელსაც მუდმივკოეფიციენტებიანი ჰიპერბოლური განტოლების კანონიკური სახე ეწოდება.

დებულება 1-ის ანალოგიურად მტკიცდება ქვემოთ მოყვანილი დებულებები.

დებულება 2. (პარაბოლური განტოლება) *დავუშვათ* $b^2 - ac = 0$.

მაშინ $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ *კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ტოლი ფესვი* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -b/a$ *და თუ ავიღებთ* $\alpha/\beta = \lambda$ *(15) გარდაქმნაში, მივიღებთ, რომ* $\bar{a} = 0, \bar{b} = 0$, *ხოლო განტოლებას ექნება სახე*

$$\bar{c} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \quad (19)$$

დებულება 3. (ელიფსური განტოლება) *დავუშვათ* $b^2 - ac < 0$.

მაშინ $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ *კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ერთმანეთის შეუღლებული ფესვი და შესაძლებელია (15) გარდაქმნის ისე შერჩევა, რომ* $\bar{a} = \bar{c}$ *და განტოლებას ექნება სახე*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \quad (20)$$

(19) და (20) განტოლებებს ეწოდებათ შესაბამისად *პარაბოლური* და *ელიფსური* კერძო წარმოებულებიანი მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებების კანონიკური სახე.

ამოცანა 1. მივიყვანოთ კანონიკურ სახემდე და ვიპოვოთ ამონახსნი შემდეგი კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების:

$$1. 16u_{xx} + 16u_{xy} + 3u_{yy} = 0; \quad (21)$$

$$2. u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0; \quad (22)$$

$$3. u_{xx} = \tau^2 u_{yy}, \text{ სადაც } \tau \text{ დადებითი პარამეტრია.} \quad (23)$$

ამოხსნა. 1. შევადაროთ $16u_{xx} + 16u_{xy} + 3u_{yy} = 0$ განტოლება (14)-ს და დავინახავთ, რომ $a=16, b=8, c=3$, აქედან $D=16 > 0$. მაშასადამე, ჩვენი განტოლება ჰიპერბოლურია. გამოვიყენოთ დებულება 1, რომლის თანახმად საჭიროა $16\lambda^2 + 16\lambda + 3 = 0$ კვადრატული განტოლების ფესვების პოვნა: $\lambda_1 = -1/4, \lambda_2 = -3/4$. ცვლადის გარდაქმნის (17) ფორმულებში შევარჩიოთ α, β, γ და δ ისე, რომ შესრულდეს ტოლობები: $\alpha/\beta = -1/4, \gamma/\delta = -3/4$, ავირჩიოთ ყველაზე მარტივი - $\alpha=1, \beta=-4, \gamma=3, \delta=-4$. (17) წრფივი გარდაქმნა მიიღებს სახეს:

$$\xi = x - 4y, \eta = 3x - 4y. \quad (24)$$

დებულება 1-ის ძალით ცვლადების ასეთი გარდაქმნის დროს ჩვენი განტოლება გამარტივდება $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ სახის განტოლებამდე, რომლის

მარჯვენა მხარეში მოთავსებულია 0 იმის გამო, რომ (18) გამოსახულების თანახმად F ფუნქცია შეიცავს საძიებელ ფუნქციას და მის პირველი რიგის წარმოებულებს, რომლებსაც ჩვენი ამოცანა არ შეიცავს და არც შეიძლება გაჩნდნენ ცვლადების გარდაქმნის შემდეგ. ამრიგად, (21)-ის კანონიკური

სახეა $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ განტოლება. ამ განტოლების ამონახსნი კი, როგორც

უკვე ვიცით, არის $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$, სადაც φ და ψ ნებისმიერი ფუნქციებია. ჩავსვათ მასში ξ და η -ს (24) მნიშვნელობები და საბოლოოდ გვექნება (21) განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$u(x, y) = \varphi(x - 4y) + \psi(3x - 4y).$$

2. გამოსაკვლევი (22) განტოლების (14)-თან შედარებით მივიღებთ, რომ $a=c=1, b=-1$, ე.ი. $D=0$ და ამრიგად, (22) განტოლება პარაბოლურია. გამოვიყენოთ დებულება 2. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ განტოლების ფესვია $\lambda=1$. ცვლადების გარდაქმნის (17) გამოსახულებებს დავადოთ პირობა $\alpha/\beta=1$ და ჩავთვალოთ, რომ $\alpha=\beta=1$. γ და δ ცვლადებს, გარდა (17)-ის ბოლო უტოლობის დაკმაყოფილებისა, სხვა შეზღუდვები არ ედება. ამის გათვალისწინებით ახალი η ცვლადი ავირჩიოთ x -ის ტოლი: $\eta = x$. ამრიგად, ცვლადების გარდაქმნის (17) გამოსახულება იქნება

$$\xi = x + y, \eta = x. \quad (25)$$

აქედან გამოდინარეობს, რომ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

შევიტანოთ ეს ტოლობები გამოსავალ (22) განტოლებაში და მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \quad \text{უკანასკნელი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური}$$

განტოლების მსგავსი განტოლებები უკვე გამოვიკვლიეთ და ვიცით, რომ მისი ამონახსნის საბოლოოდ საჭიროა ვიპოვოთ $z'' + z' = 0$ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი ფესვები $k_1 = 0$ და $k_2 = -1$, რომლებიც გვაძლევენ ფუნდამენტურ ამონახსნთა $z_1(\eta) = 1$ და $z_2(\eta) = e^{-\eta}$

სისტემას, ხოლო $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი კი

მოიცემა $u = C_1(\xi) + e^{-\eta}C_2(\xi)$ ფუნქციით. მაშასადამე, (25)-ის გათვალისწინებით (22) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$u(x, y) = C_1(x + y) + e^{-x}C_2(x + y),$$

სადაც C_1 და C_2 თავიანთი არგუმენტის ნებისმიერი ფუნქციებია.

3. (23) განტოლება გადავწეროთ $u_{xx} - \tau^2 u_{yy} = 0$ სახით და

შევადაროთ (14)-ს. მივაღოთ ტოლობებამდე: $a = 1, b = 0, c = -\tau^2$, საიდანაც ვღებულობთ $b^2 - ac = \tau^2 > 0$, რაც ნიშნავს, რომ (23) განტოლება ჰიპერბოლურია. გამოვიყენოთ დებულება 1: შევადგინოთ $\lambda^2 - \tau^2 = 0$ კვადრატული განტოლება და ვიპოვოთ მისი ფესვები: $\lambda_1 = \tau$ და $\lambda_2 = -\tau$. ცვალების გარდაქმნის (17) გამოსახულები ავიღოთ შემდეგნაირად: $\alpha/\beta = \tau$ და $\gamma/\delta = -\tau$. ისევე როგორც წინა მაგალითებში ავირჩიოთ უმარტივესი შემთხვევა: $\alpha = \tau, \beta = 1, \gamma = -\tau, \delta = 1$. მაშინ (17) მიიღებს სახეს:

$$\xi = \tau x + y, \quad \eta = -\tau x + y. \quad (26)$$

ახალ ცვლადებში ჩვენი განტოლება მიიღებს სახეს $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, რომლის

ამონახსნია $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$, სადაც φ და ψ ნებისმიერი ფუნქციებია. ჩავსვათ მასში (26) გამოსახულებები და მივიღებთ (23) განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$u(x, y) = \varphi(y + \tau x) + \psi(y - \tau x).$$

ამოცანა 2. ორგანოზომილებიან ლაპლასის განტოლებას პოლარულ კოორდინატებში აქვს სახე

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0. \quad (27)$$

ვიპოვოთ ლაპლასის განტოლების ზოგადი წრიულად სიმეტრიული ამონახსნი.

◀ამოხსნა. ლაპლასის ზემოთ მოყვანილი განტოლების წრიულად სიმეტრიულობა ნიშნავს, რომ f დამოკიდებულია მხოლოდ r , ამიტომ (27) განტოლება რედუცირდება (დაიყვანება) მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = 0. \quad (28)$$

რადგან $\frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) = r \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{df}{dr}$, ამიტომ (28) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) = 0,$$

საიდანაც გვაქვს

$$\frac{df}{dr} = \frac{A}{r},$$

სადაც A ნებისმიერი მუდმივია. ამრიგად, (27) განტოლების ზოგადი წრიულად სიმეტრიული ამონახსნი იქნება $f(r) = A \ln r + B$, სადაც B , ისევე როგორც A , ნებისმიერი მუდმივებია. ►

14.4 ტიპური მაგალითები

როგორც აღვნიშნეთ, კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას უწოდებენ ისეთ განტოლებას, რომელშიდაც უცნობის სახით შედის რამდენიმე ცვლადის ფუნქცია მის კერძო წარმოებულებთან ერთად. უცნობების რიცხვის ზრდასთან ერთად რთულდება დიფერენციალური განტოლება და ძალზე ცოტაა ისეთი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები, რომელთა ამოხსნაც ცხადად შეიძლება. მოვიყვალთ ისეთი განტოლებები, რომელთა ამოხსნაც შედარებით მარტივია.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. ეს განტოლება გადავწეროთ ექვივალენტური ფორმით

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$ და შემოვიტანოთ ახალი უცნობი ფუნქცია განმარტებული

$v = \frac{\partial u}{\partial y}$ სახით. მაშინ გამოსავალი განტოლება მიიღებს სახეს $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

ასეთი განტოლება უკვე განვიხილეთ და ვიცით, რომ მის ამონახსნს აქვს

სახე $v = C(y)$, რადგან $v = \frac{\partial u}{\partial y}$, ვლევულობთ განტოლებას $\frac{\partial u}{\partial y} = C(y)$,

ასეთი განტოლებაც უკვე განვიხილეთ გვაქვს და ვიცით, რომ $u(x, y) = \int C(y)dy + \varphi(x)$, სადაც $\varphi(x)$ კიდეც ერთი ნებისმიერი

ფუნქციაა. შევნიშნოთ, რომ $\int C(y)dy = \psi(y)$ ნებისმიერი ფუნქციაა, რადგან ასეთია $C(y)$. ამრიგად, ჩვენი განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y), \quad (1)$$

სადაც φ და ψ თავისი არგუმენტების ნებისმიერი ფუნქციებია. (1)

გამოსახულებას ეწოდება $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. ანალოგიურად ზემოთ მოყვანილი მაგალითისა გვაქვს:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \text{ ამიტომ } \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y) \Rightarrow u(x, y) = \varphi(y)x + \psi(y).$$

3. განვიხილოთ პირველი ამოცანის განზოგადება. საძებნია ორი x და y ცვლადების $u(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას

$$a_m \frac{\partial^m u}{\partial x^m} + \dots + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_0 u = 0, \quad (1)$$

სადაც $a_0, a_1, \dots, a_m$ ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვებია. განვიხილოთ შემდეგი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$a_m z^{(m)}(x) + \dots + a_1 z'(x) + a_0 z(x) = 0. \quad (2)$$

თეორემა. *კოქათ $z_1(x), \dots, z_m(x)$ არიან (2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები. დაეუშვათ $C_1(y), \dots, C_m(y)$ ნებისმიერი ფუნქციებია. მაშინ ორი ცვლადის*

$$u(x, y) = z_1(x)C_1(y) + \dots + z_m(x)C_m(y) \quad (3)$$

ფუნქცია არის (1) კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

ეს თეორემა გამოსახულება (3)-ის განტოლება (1)-ში პირდაპირი ჩასმით მტკიცდება. მაგალითისათვის შევამოწმოთ, რომ (3) გამოსახულების

პირველი შესაკრები $u_1(x, y) = z_1(x)C_1(y)$ მართლაც არის (1)-ის ამონახსნი. თეორემის პირობის ძალით $z_1(x)$ -სათვის სრულდება ტოლობა $\sum_{k=0}^m a_k z_1^{(k)}(x) = 0$, საიდანაც ვღებულობთ

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{\partial^k u_1}{\partial x^k} = \sum_{k=0}^m a_k z_1^{(k)}(x) C_1(y) = 0.$$

რაც ამტკიცებს, რომ $u_1(x, y) = z_1(x)C_1(y)$ არის (1) განტოლების ამონახსნი.

(3) გამოსახულება შეიცავს m ნებისმიერ ფუნქციას, ამიტომ ეს ამონახსნი არის ზოგადი.

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$. ეს განტოლება (1)-ის კერძო შემთხვევაა. მისი

შესაბამისი ჩვეულებრივი დიფერენციალური $z'' - z' = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია $z_1(x) = 1$ და $z_2(x) = e^x$. თეორემა 1-დან გამომდინარეობს, რომ ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$u(x, y) = C_1(y) + e^x C_2(y)$$

სადაც C_1, C_2 ნებისმიერი ფუნქციებია.

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა:

$$x + y = \xi, \quad x - y = \eta.$$

მაშინ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

და განტოლება მიიღებს სახეს:

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

ამრიგად, $u = f(\xi) + g(\eta)$. მაშასადამე, განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x - y),$$

სადაც f და g ნებისმიერი ორჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციებია.

$$6. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad \text{მაგალითი 5-ის ანალოგიურად მივიღებთ}$$

ამონახსნს $u(x, y) = f(x + iy) + g(x - iy)$, სადაც f, g ნებისმიერი ორჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციებია და $i = \sqrt{-1}$ კომპლექსური ერთეულია.

$$7. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{სადაც } a \text{ ნამდვილი რიცხვია.}$$

გადავწეროთ ეს განტოლება შემდეგი სახით:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0. \quad (1)$$

უკანასკნელი განტოლება ნიშნავს, რომ $\frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y}$ ოპერატორი მოქმედებს უცნობ u ფუნქციაზე, შედეგად ვოქვით მიიღება v , ე.ი.

$$\frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial u}{\partial y} = v. \quad (2)$$

ამის შემდეგ v ფუნქციაზე მოქმედებს $\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}$ ოპერატორი და შედეგად გვაქვს 0:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

ამრიგად, მოცემული მეორე რიგის განტოლების ამოხსნა დავიყვანეთ ორი (2) და (3) პირველი რიგის განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial u}{\partial y} = v \\ \frac{\partial v}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

ამოვხსნათ (4) სისტემა ნიშნავს, ვიპოვოთ ისეთი $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ფუნქციები, რომლებიც (2) და (3) განტოლებებს აკმაყოფილებენ.

(4) სისტემის მეორე განტოლება ჩვენთვის უკვე ცნობილია (§13.2, მაგალითი 7). ამიტომ ამ განტოლიდან ვიპოვოთ v ფუნქციას, რომელსაც ჩავსვათ სისტემის პირველ განტოლებაში. შედეგად მიიღება პირველი რიგის არაერთგვაროვანი განტოლება. რომლის ამონახსნიც იქნება მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

განტოლების ამოხსნის ამ მეთოდს ეწოდება *დეკომპოზიციის მეთოდი*.

$$8. \quad \text{გამოვიყენოთ დეკომპოზიციის მეთოდი} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ლაპლასის განტოლებისათვის.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) u = 0.$$

წინა მაგალითის მსგავსად მივიღეთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = v, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

აქედან ჩანს, რომ სისტემის ამონახსნი კომპლექსური ფუნქცია უნდა იყოს. რაც მიუღებელია ჩვენი მიზნებისათვის, ვეძებთ ნამდვილ ამონახსნებს. ამრიგად, აქ მოყვანილ ლაპლასის განტოლების დეკომპოზიციას, სასურველ შედეგამდე ვერ მივყავართ.

ლაპლასის განტოლებასთან მიმართებაში მიზანშეწონილია განვიხილოთ პირველი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომელიც კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემის სახელითაა ცნობილი და აქვს სახე:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

თუ $u(x, y)$ და $v(x, y)$ კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემის ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ამონახსნებიან, მაშინ ისინი აკმაყოფილებენ ლაპლასის განტოლებას (აჩვენეთ!).

ზემოთ მოყვანილი სისტემები შესაძლებელია გადავწეროთ მატრიცული ფორმით. კერძოდ, კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემის მატრიცული ფორმაა შემდეგი გამოსახულება

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad U = (u, v).$$

მაშინ კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემა გადაიწერება სახით

$$\mathfrak{D}U = 0.$$

$\mathfrak{D}$ -ს მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორი ეწოდება ის შესაძლებელია იყოს ნებისმიერი რიგის მატრიცი, რომლის ელემენტებია "სკალარული" დიფერენციალური ოპერატორები, მათ შორის ნულოვანი რიგის (მუდმივი) ოპერატორიც.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. დაადგინეთ შემდეგი განტოლების ტიპი და მიიყვანეთ ისინი კანონიკურ სახეზე.

$$1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

პასუხი: განტოლება ელიფსურია; $u_{\eta\eta}(\eta, \xi) + u_{\xi\xi}(\eta, \xi) - u(\eta, \xi) = 0$

$$2) 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

პასუხი: განტოლება პარაბოლურია; $u_{\eta\eta}(\eta, \xi) - 2u_{\eta}(\eta, \xi) - 2u_{\xi}(\eta, \xi) = 0$
ან $4u_{\eta\eta}(\eta, \xi) - 2u_{\xi}(\eta, \xi) = 0$.

$$3) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

პასუხი: განტოლება ელიფსურია; კანონიკური სახე $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$.

$$4) u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u = 0$$

პასუხი: განტოლება პარაბოლურია; კანონიკური სახე $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + u = 0$.

$$5) u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$$

პასუხი: განტოლება ელიფსურია; კანონიკური სახე $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$

2. იპოვეთ განტოლებების ტიპი და მიუთითეთ არეზე, სადაც განტოლების ტიპი არ იცვლება

$$1) x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad \text{პასუხი: განტოლება ჰიპერბოლურია}$$

ნებისმიერი x, y -სათვის.

$$2) x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad \text{პასუხი: განტოლება}$$

პარაბოლურია ნებისმიერი x, y -სათვის.

$$3) x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad \text{პასუხი: განტოლება პარაბოლურია}$$

ნებისმიერი x, y -სათვის.

3. განსაზღვრეთ შემდეგი განტოლებების ტიპი მოცემულ არეზე

$$1) (y+1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$1 < x < 3, 0 < y < 1$ მართკუთხედში. პასუხი: ელიფსური

$$2) y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x+y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

$x^2 + (y-6)^2 < 1$ წრეში. პასუხი: ჰიპერბოლური

$$3) 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$|x| < 1, |y| < 1$ კვადრატში. პასუხი: პარაბოლური

$$4) (x+y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x-y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xu = 0$$

$(x-5)^2 + y^2 < 1$ წრეში. პასუხი: ელიფსური

$$5) (x+1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + (y-3) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$$

$0 < x < 1, 0 < y < 1$ კვადრატში. პასუხი: ჰიპერბოლური

4. დაწერეთ ერთ-ერთი შესაძლო გარდაქმნა, რომელსაც განტოლება მიყავს კანონიკურ სახეზე და ამოწერეთ განტოლების შესაძლო კანონიკური სახე

$$1) 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = 2y + x, \eta = x; \text{ ელიფსური;}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$$

$$2) 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = 3x - 2y, \eta = 2x + 4;$$

$$\text{ჰიპერბოლური; } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$$

$$3) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 25 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = 3x + y, \eta = x;$$

$$\text{პარაბოლური; } \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$$

$$4) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{2x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - x \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = e^x, \eta = y;$$

$$\text{ელიფსური; } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$$

$$5) 9y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6y^2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = \cos x +$$

$$y^3, \eta = x; \text{ პარაბოლური; } \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$$

5. მიიყვანეთ განტოლებები კანონიკურ სახეზე და მიუთითეთ გარდაქმნაზე, რომელსაც განტოლება კანონიკურ სახეზე მიყავს

$$1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = 4x + y, \eta =$$

$$2x + y; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

$$2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = x + y, \eta = x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

$$3) 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = 0. \text{ პასუხი: } \xi = x + y, \eta =$$

$$x - y; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

$$4) x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 12 \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = x^3 y, \eta =$$

$$y; \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{4}{3\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

$$5) 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = x + y^2, \eta = x + y^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

6. იპოვეთ გარდაქმნა, რომელსაც განტოლება მიყავს კანონიკურ სახეზე, დაწერეთ განტოლების კანონიკური სახე და იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

$$1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = x + y, \eta = 5x - y; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{6} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; u = \varphi(x + y) + \psi(5x - y)e^{\frac{x+y}{6}}.$$

$$2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\sin x - \operatorname{ctg} x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = y, \eta = y - \cos x; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; u = \varphi(y) + \psi(y - \cos x)e^y.$$

$$3) 4x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 7 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = xy^4, \eta = y; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{3}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; u = \varphi(xy^4)y^3 + \psi(y).$$

$$4) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - 2(x-1) \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = x^2 + y, \eta = x; \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; u = \varphi(x^2 + y) + \psi(x^2 + y)e^x.$$

$$5) x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = xy, \eta = y; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; u = \varphi(xy)y + \psi(y).$$

$$6) 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = xy^2, \eta = x; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0; u = \varphi(xy^2)x + \psi(x).$$

$$7) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = x^2 + y, \eta = x; \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; u = \varphi(x^2 + y)x^2 + \psi(x^2 + y).$$

$$8) x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5 \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = x^3 y, \eta = x; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0; u = \varphi(x^3 y)x^2 + \psi(x).$$

$$9) x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = xy, \eta = y; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{3}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0; u = \varphi(xy)y^3 + \psi(y).$$

$$10) x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \text{ პასუხი: } \xi = \frac{y}{x}, \eta = y; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0; u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)y + \psi(y).$$

7. იპოვეთ კოშის ამოცანის ამონახსნი

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -x - 1$. პასუხი: $u = \frac{1}{2}t^2 - xt - t$.

2) $3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7(\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$, $u|_{x=0} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 3y$. პასუხი: $u = -\frac{3}{7}e^{-\frac{7}{3}x}(x + 3y + 3) + \frac{1}{7}(16 - 18x + 9y)$

3) $5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u|_{x=0} = 2y$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 5y$.
პასუხი: $u = e^{-\frac{1}{5}x}(-25y + 5x - 110) + 27y - 27x + 110$.

4) $3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u|_{x=0} = 2y$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 4y$.
პასუხი: $u = e^{-\frac{1}{3}x}(-12y - 4x - 54) + 14y - 14x + 54$.

5) $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u|_{y=0} = 3x$, $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 2x + 6$. პასუხი: $u = e^{\frac{1}{3}y}(4y + 6x + 24) - 6y - 3x - 24$.

ჰიპერბოლური განტოლებები 15 კომის ამოცანა სიმის რხევის განტოლებისათვის

15.1 ტალღის განტოლება

მრავალი ფიზიკური (სიმის, ღეროს, მემბრანის და სამგანზომილებიანი ობიექტების რხევა, ელექტრომაგნიტური რხევები და სხვა) ამოცანები აღიწერებიან რხევის (ან ტალღის) შემდეგი განტოლებებით

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\nabla, p(x) \nabla u) - q(x)u + F(x, t) \quad (1)$$

სადაც უცნობი $u(x, t)$ ფუნქცია დამოკიდებულია n სივრცულ (ჩვეულებრივ $n = 1, 2, 3$) კოორდინატებზე და t დროის კოორდინატზე, $\rho(x)$, $p(x)$ და $q(x)$ კოეფიციენტები განისაზღვრებიან იმ გარემოს თვისებებიდან, სადაც რხევა ხდება, ხოლო $F(x, t)$ თავისუფალი წევრი გამოხატავს გარე შეშფოთებას. ფრჩხილები აქ ნიშნავს ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავს და ამრიგად,

$$(\nabla, p(x) \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

პირველ რიგში განვიხილოთ ერთგანზომილებიან სიმის განტოლება.

სიმი ეწოდება გაჭიმულ ძაფს, რომელიც არ ეწინააღმდეგება ღუნვას. დაეუშვათ (x, u) სიბრტყეზე სიმი ირხევა განივად თავისი წონასწორობის მდგომარეობიდან x ღერძის გასწვრივ. სიმის გადახრა წონასწორობის მდგომარეობიდან x წერტილში დროის t მომენტში $u(x, t)$ -ით აღვნიშნოთ. ფიზიკური მოსაზრებების გათვალისწინებით მიიღება ერთგანზომილებიანი სიმის რხევის განტოლება

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t). \quad (2)$$

ეს არის სიმის მცირე განივი რხევის განტოლება. როდესაც $F \neq 0$, სიმის რხევას ეწოდება *ძულებითი*, ხოლო $F = 0$ შემთხვევაში კი *თავისუფალი*. თუ $\rho(x)$ სიმკვრივე მუდმივია და $\rho(x) = \rho$, სიმის რხევის განტოლებას აქვს სახე:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

სადაც $f = F/\rho$, $v^2 = T_0/\rho$ მუდმივი სიდიდეებია. აქ T_0 მუდმივი სიდიდეა, იგი ე.წ. დაძაბულობის ვექტორის სიგრძეა.

მემბრანა ეწოდება თხელ, ბრტყელ, ღრეკად, უჭიმავ აფსკს. დაეუშვათ, წონასწორობის მდგომარეობაში მყოფი მემბრანა იკავებს xOy სიბრტყის D არეს, ხოლო წონასწორობიდან გამოყვანის შემდეგ ვთქვათ იგი იწყებს რხევას ისე, რომ მისი წერტილები მოძრაობენ xOy სიბრტყის პერპენდიკულარულად (მემბრანის განივი რხევა). xOy სიბრტყიდან მემბრანის წერტილების გადახრა აღვნიშნოთ u -თი. გადახრის სიდიდე

დამოკიდებულია მემბრანის (x, y) წერტილზე და t დროზე. $u(x, y, t)$ ფუნქცია იქნება საძიებელი ფუნქცია. ფიქსირებული x, y -სათვის ის იძლევა მემბრანის (x, y) წერტილის რხევის კანონს. მემბრანის მცირე განივი რხევის განტოლებას (ანალოგიურად სიმის რხევის განტოლებას, ისიც ფიზიკური მოსაზრებების გათვალისწინებით მიიღება) აქვს სახე:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F(x, t), \quad x = (x_1, x_2).$$

თუ ρ სიმკვრივე მუდმივია, მაშინ მემბრანის რხევის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f(x, t), \quad v^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}, \quad (3)$$

ამრიგად, (2) სიმის (ერთგანზომილებიან შემთხვევაში) და (3) მემბრანის (ორგანზომილებიან შემთხვევაში) რხევის განტოლებებს ერთი და იგივე სახე აქვთ და ისინი (1) ზოგადი განტოლების კერძო შემთხვევებია. (2) და (3) განტოლებები *ჰიპერბოლური ტიპის* განტოლებებია. ისინი ჩაწერილია კანონიკური სახით. როგორც ვიცით, ჰიპერბოლურ განტოლებებს ორი შესაძლო კანონიკური სახე აქვთ. (2) და (3) ერთიმამდე სახისაა (ისინი არ შეიცავენ შერეულ წარმოებულებს). ამ სახის ჰიპერბოლურ განტოლებებს მიღებულია *ეწოდოს ტალღის განტოლებები*. ტალღის განტოლების განზომილება განისაზღვრება მასში შემავალი "სივრცითი" ცვლადების რაოდენობის მიხედვით (დროითი t ცვლადი ცალკეა გამოყოფილი). ამრიგად, (2) და (3) შესაბამისად არიან ერთ და ორ განზომილებიანი *ტალღის განტოლებები*.

15.2 უსასრულო სიმი

ჩვენ დავადგინეთ ტალღის

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

განტოლების ტიპი და აღვნიშნეთ, რომ იგი მეორე რიგის კვაზიწრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლების კლასიფიკაციის მიხედვით არის ჰიპერბოლური. წინა პარაგრაფის აღნიშვნებით $A = 1$, $C = -\frac{a^2}{2}$, $B = 0$, ამიტომ $AC - B^2 = -\frac{a^2}{2} < 0$. ახლა ვნახავთ, რომ მისი ამონახსნი

$$u(x, t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at) \quad (1)$$

მოიცემა ორი ნებისმიერი φ, ψ ფუნქციების ჯამის სახით, რომელსაც **დალამბერის ფორმულა** ეწოდება. განტოლების ამონახსნის განმარტების თანახმად, მისი ჩასმით განტოლებაში უნდა მივიღოთ იგივეობა, მაგრამ დალამბერის ფორმულით მოცემული ამონახსნის ჩასასმელად ტალღურ

განტოლებებში საჭიროა, რომ $u(t, x)$ იყოს ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი, რაც თავის მხრივ φ, ψ ფუნქციებისათვის ამ პირობის დაკმაყოფილებას ნიშნავს. მიუხედავად ამისა, დალამბერის ფორმულას აზრი აქვს არააუცილებლად წარმოებადი ფუნქციებისათვის. ამ შემთხვევაში $u(x, t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$ იქნება ე.წ. განზოგადებული ამონახსნი. ამგვარი ამონახსნი ზოგჯერ საჭიროა რეალური პროცესების აღწერის დროს.

დალამბერის ფორმულიდან სიმის რხევის განტოლების მრავალი ამონახსნი მიიღება φ, ψ ფუნქციების შერჩევის ხარჯზე. რეალური ამოცანის ამოხსნის დროს კი მხოლოდ ერთი ამონახსნია საჭირო. იმისათვის, რომ ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლიდან კონკრეტული ამონახსნი იქნას გამოყოფილი საჭიროა, რომ ამონახსნს დავადლოთ დამატებითი პირობები, რომლებიც ასევე მრავალია ამოცანის ფიზიკური ბუნებიდან გამომდინარე. მათემატიკურად ყველაზე მარტივია ამოცანა საწყისი პირობით, რომელსაც სხვანაირად კოშის ამოცანაც ეწოდება და აქვს სახე:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x). \quad (2)$$

ზემოთ მოყვანილ სასაზღვრო პირობებში f და g ფუნქციები ითვლებიან ცნობილად. ამასთან, t -ს ეწოდება საწყისი გადახრა, ხოლო g -ს კი საწყისი სიჩქარე. ისინი ასახავენ სიმის მდგომარეობას და ყოველი წერტილის სიჩქარეს დროის საწყის მომენტში. კოშის ამოცანის დასმა გამართლებულია, თუ სიმი საკმაოდ გრძელია და რხევა შეისწავლება სადღაც შუაში. ამრიგად, იგულისხმება რომ, სიმის ბოლოები რხევის პროცესზე გავლენას ვერ ახდენენ. კოშის ამოცანის ამონახსნი იწერება მოცემული f და g ფუნქციების საშუალებით. რადგან საძიებელი ფუნქცია აკმაყოფილებს სიმის რხევის განტოლებას, ამიტომ იგი შესაძლებელია (1) სახის ტოლობით იქნას წარმოდგენილი. გამოვთვალოთ მისი კერძო წარმოებულით t -თი:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\varphi'(x + at) - a\psi'(x - at),$$

შემდეგ ამ უკანასკნელსა და (1)-ში ჩავსვათ $t = 0$. გამოვიყენოთ (2)-ის დამატებითი პირობაც და მივიღებთ:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = a\varphi'(x) - a\psi'(x) = g(x).$$

უკანასკნელი ტოლობა გადავწეროთ სახით:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a}G(x), \quad G(x) = \int g(x)dx.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x), \quad \varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a}G(x),$$

საიდანაც განისაზღვრებიან φ და ψ ფუნქციები:

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(f + \frac{1}{a}G \right), \quad \psi = \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{a}G \right).$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულებები დალამბერის (1) ფორმულაში და გვექნება:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} [G(x+at) - G(x-at)]. \quad (3)$$

ამ ტოლობაში უკანასკნელი სხვაობა არის $g(x)$ ფუნქციის $G(x)$ პირველყოფილის ნაზრდი, რომელიც შესაძლებელია ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულით გამოვსახოთ როგორც განსაზღვრული ინტეგრალი (ე.ი. $G(x+at) - G(x-at) = \int_{x-at}^{x+at} g(s)ds$) და მივიღებთ:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s)ds. \quad (4)$$

ამონახსნის ამგვარ წარმოდგენას ეწოდება *დალამბერ-ეილერის ფორმულა*. ეს ფორმულა მიღებულია კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობის დაშვებიდან. თუ არსებობს კოშის ამოცანის მეორე ამონახსნიც, მაშინ ისიც აუცილებლად (4) სახით წარმოდგენება. იმის შესამოწმებლად, რომ (4) ფორმულით მოცემული ფუნქცია მართლაც წარმოადგენს (2) ამოცანის ამონახსნს, საჭიროა $u(t, x)$ (განსაზღვრული (4) ფორმულით) ჩავსვათ განტოლებაში და შევამოწმოთ სასაზღვრო პირობები. რისი გაკეთებაც ძნელი არ არის. აღმოჩნდება, რომ f -ს უნდა მოვთხოვოთ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადობა, ხოლო g -ს კი უწყვეტად დიფერენცირებადობა.

განმარტება. $u(t, x)$ ფუნქციას ეწოდება (2) კოშის ამოცანის კლასიკური ამონახსნი, თუ მას აქვს უწყვეტი პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულები $\Omega = \{(t, x) | t > 0, x \in \mathbf{R}^1\} \subset \mathbf{R}^2$ არეში და Ω -ზე აკმაყოფილებს სიმის რხევის განტოლებას, გარდა ამისა, უწყვეტი და უწყვეტად დიფერენცირებადია t -ს მიმართ $\overline{\Omega}$ ჩაკეტილ სიძრავლეზე და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს.

ამ განმარტების გათვალისწინებით ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა შეჯამებულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1. *დავუშვათ $f(x)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია ნებისმიერი $x \in \mathbf{R}^1$ -სათვის, ხოლო $g(x)$ უწყვეტად დიფერენცირებადია. მაშინ კოშის (2) ამოცანას აქვს ერთადერთი კლასიკური ამონახსნი. ეს ამონახსნი მოიცემა დალამბერ-ეილერის (4) ფორმულით.*

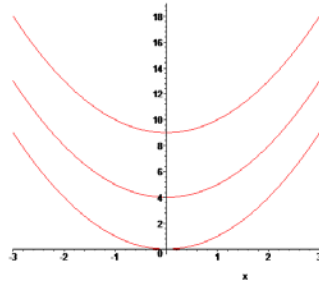
ამოცანა 1. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

ამოხსნა. აქ $a = 1$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 0$, ამიტომ (12) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[(x+t)^2 + (x-t)^2] = x^2 + t^2.$$

მივიღეთ პარაბოლების ოჯახი. სიძის მდგომარეობა დროის $t = 0, 2, 3$ მომენტებისათვის გამოსახულია ნახ.1-ზე. შევნიშნოთ, რომ პარაბოლის წვეროს აჩქარებულ მოძრაობას აქვს ადგილი t -ს გაზრდასთან ერთად. ასეთი ყოფაქცევა დამახასიათებელია მაგრად მოწიმული მშვილდის ლარისათვის.



ნახ. 1

ამოცანა 2. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა

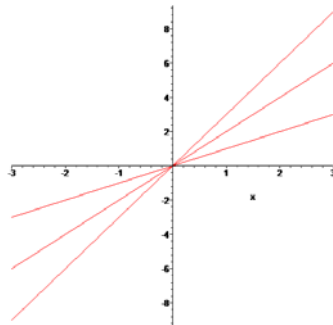
$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x.$$

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $a = 2$, $f(x) = 0$, $g(x) = x$. აქედან

$G(x) = \frac{x^2}{2}$. გამოსახულება (12)-დან ვღებულობთ ამოცანის ამონახსნს:

$$u(t, x) = \frac{1}{8}[(x+2t)^2 - (x-2t)^2] = xt.$$

ეს უკანასკნელი არის t პარამეტრზე დამოკიდებული წრფეთა ოჯახი. სიძის მდგომარეობა დროის სხვადასხვა მომენტებისათვის $t = 1, 2, 3$ გამოსახულია ნახ.2-ზე. სიძი ბრუნავს კოორდინატთა სათავის გარშემო როგორც მყარი ტანი.



ნახ.2.

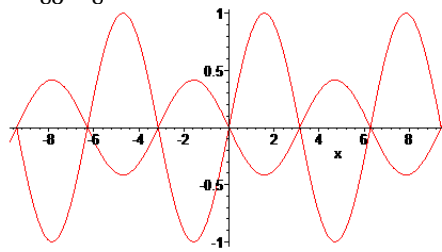
ამოცანა 3. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

ამოხსნა. ამ ამოცანისათვის $a = 1$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = 0$ და (3) ფორმულა მოგვცემს

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)] = \sin x \cos t.$$

სიმის ნაწილი დროის სხვადასხვა მომენტისათვის, $t = 0$, $t = 2$, ნაჩვენებია ნახ.3-ზე. ნახაზიდან ჩანს, რომ სიმის რხევა ეთანადება ადამიანის წარმოსახვას სიმის რხევაზე.



ნახ.3

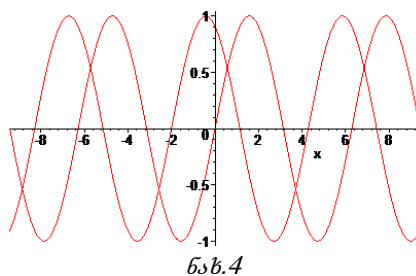
ამოცანა 4. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = \cos x.$$

ამოხსნა. აქ $a = 1$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, ამიტომ $G(x) = \sin x$. (3) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)] + \frac{1}{2} [\sin(x+t) - \sin(x-t)] = \sin(x+t).$$

არგუმენტი $x+t$ მიუთითებს იმაზე, რომ გეომეტრიულად (ნახ.4. $t = 0$, $t = 2$) მოხდა ფუნქციის ძვრა Ox ღერძის გასწვრივ t -ს ტოლი სიდიდით.



ნახ.4

ამრიგად, სიმი გადაადგილდება Ox ღერძის გასწვრივ და ქმნის მორბენალი ტალღის იმიტაციას.

სასარგებლოა ნახოთ ზემოთ მოყვანილი პროცესების დინამიკური სურათი Maple-ის გამოყენებით. მაგალითად, მორბენალი ტალღას მიიღებთ Maple-ზე შემდეგი ერთსტრიქონიანი პროგრამის გაშვებით (პროგრამა ფაქტიურად ერთი ბრძანებაა-`animate`):

15.3 მორბენალი ტალღა

განვიხილოთ

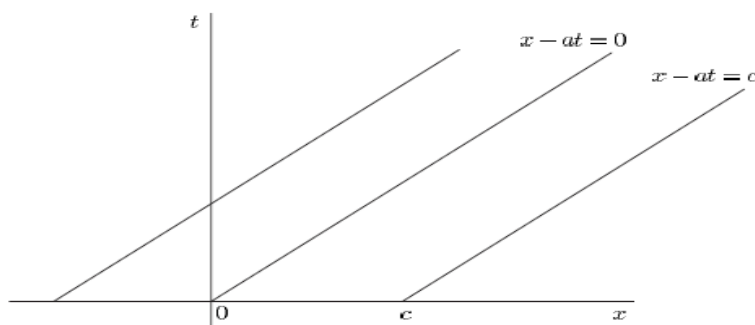
$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

სიმის რხევის განტოლების გეომეტრიული სტრუქტურა. როგორც აღვნიშნეთ, ამ განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$u(t, x) = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \quad (1)$$

სადაც φ და ψ ნებისმიერი ფუნქციებია.

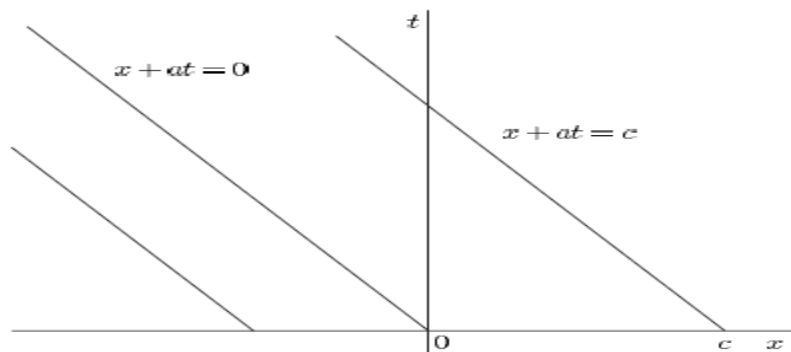
განვიხილოთ უკანასკნელი $\psi(x - at)$ შესაკრები. იგი დამოკიდებულია $x - at$ სიდიდეზე, რომელიც ორი x და t დამოუკიდებელი ცვლადებისაგან შედგება. თუ მას მუდმივად ჩავთვლით, ე.ი. თუ $x - at = c$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია, მაშინ (x, t) სიბრტყეზე მივიღებთ წრფის განტოლებას. c მუდმივის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის გვექნება წრფეთა ოჯახი (ნახ.1).



ნახ.1

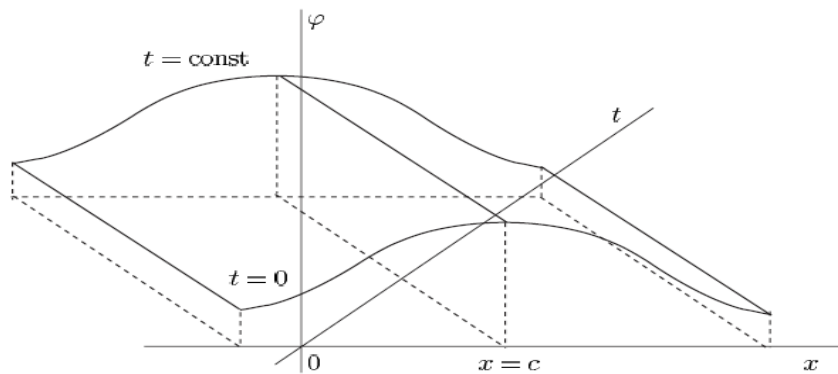
ფიქსირებულ $x - at = c$ წრფეზე ψ ფუნქცია მუდმივია, რადგან $\psi(x - at) = \psi(c)$. ესენი არიან სიძის რხევის განტოლების *მახასიათებელი წრფეები*. მათი საშუალებით მარტივად ხდება $\psi(x - at)$ ფუნქციის (ორი x და t ცვლადის) გრაფიკის აგება ψ, x, t საკოორდინატო სისტემის მქონე სამგანზომილებიან სივრცეში (რომელიც ცხადია იქნება ზედაპირი). ჩავთვალოთ, რომ როდესაც $t = 0$ ცნობილია $\psi(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. დავაფიქსიროთ $x = c$ და გავატაროთ მასზე (x, t) სიბრტყეში განტოლების $x - at = c$ მახასიათებელი წრფე. ამ წრფის გასწვრივ ψ ფუნქცია მუდმივია, რაც ნიშნავს, რომ $\psi(x - at)$ ზედაპირზე მდებარეობს წრფე, რომელიც შესაბამის მახასიათებელი წრფეზე პროექტირდება. რაც ნიშნავს, რომ $\psi(x)$ -ის გრაფიკი გადაიტანება აღნიშნული წირის გასწვრივ როგორც მყარი კონსტრუქცია, რომელიც ფორმას არ იცვლის (ეს შემთხვევა განვიხილოთ წინა პარაგრაფის მაგალითებში). ამის გამო მიღებულია შემდეგი სახელწოდებები: $\psi(x - at)$ -ს ეწოდება *პირდაპირი ტალღა*, $x - at$ -ს *ტალღის ფაზა*, a -ს *ფაზური სიჩქარე*, (x, t) სიბრტყეს კი *ფაზური სიბრტყე*.

ნათელია, რომ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა სამართლიანია $\varphi(x + at)$ შესაკრებისათვის. $x + at = c$ მახასიათებელი წრფე c -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის მოყვანილია ნახ.2-ზე.



ნახ.2

$\varphi(x + at)$ -ს ეწოდება *შებრუნებული ტალღა*, რადგან იგი გადაადგილდება მარცხნივ (ფორმის შეუცვლელად) Ox ღერძის გასწვრივ (t -ს ცვლილების დროს. იხილე ნახ.3).

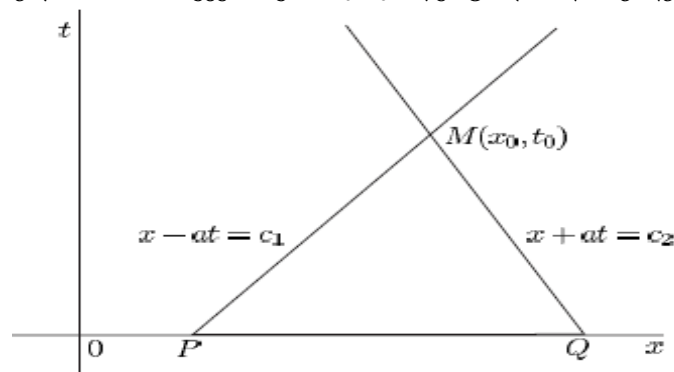


ნახ.3

ყოველივე ზემოთ თქმული მსჯელობა მივუსადაგოთ დალამბერის ფორმულას, რომელიც, როგორც აღვნიშნეთ, კოშის ამოცანის ამონახსნია სიბის განტოლებისათვის. ფაზურ სივრცეში დავაფიქსიროთ $M(x_0, t_0)$ წერტილი. ამ წერტილში გაივლის

$$x - at = c_1, \quad x + at = c_2 \quad (2)$$

მახასიათებელი წრფეები, რომლებიც Ox ღერძს გადაკვეთენ P და Q წერტილებში. PQM სამკუთხედს, რომელიც შემოსაზღვრულია (2) განტოლებით მოცემული წრფეებით და Ox ღერძის ნაწილით, ეწოდება მახასიათებელი. PQ მონაკვეთს კი (x_0, t_0) წერტილის დამოკიდებულების



ნახ.4

მონაკვეთი.

P და Q წერტილების კოორდინატების საპოვნელად ვაწარმოთ შემდეგი მსჯელობა. M წერტილი (2) წრფეების გადაკვეთის წერტილია, ამიტომ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებენ ორივეს (2) განტოლებებიდან: $x_0 - at_0 = c_1$, $x_0 + at_0 = c_2$, ამიტომ იგი მიგვიყვანს განტოლებებამდე

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0. \quad (3)$$

თუ (3)-ში ჩავსვათ $t = 0$, მივიღებთ P და Q წერტილების კოორდინატებს

$$P(x, 0) = (x_0 - at_0, 0), Q(x, 0) = (x_0 + at_0, 0).$$

აქედან, დალაშქრის ფორმულის გამოყენებით ვიღებთ (x_0, t_0) წერტილში $u(x_0, t_0)$ ფუნქციის მნიშვნელობას

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + at_0) + f(x_0 - at_0)) + \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} g(s) ds.$$

ჩავსვათ ამ ფორმულაში სიბრტყის წერტილები მათი კოორდინატების ნაცვლად და ინტეგრალი ავიღოთ PQ მონაკვეთზე:

$$u(M) = \frac{1}{2}(f(P) + f(Q)) + \frac{1}{2a} \int_{PQ} g(s) ds.$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ მივიღოთ კოშის ამოცანის ამონახსნი სიმის რხევის განტოლებისათვის ფიქსირებულ M წერტილში, საკმარისია $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობების ცოდნა ორ P და Q წერტილებში, ხოლო $g(x)$ -სა კი PQ მონაკვეთზე. ამასთან, P და Q წერტილები არიან M წერტილზე გამავალი მახასიათებელი წრფეების Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები.

ზემოთ მოყვანილი გეომეტრიული სურათი საშუალებას იძლევა გრაფიკულად ამოვხსნათ სიმის რხევის განტოლება. განტოლების ამოხსნის ამ გზას *მორბენალი (მრბოლი) ტალღის მეთოდი* ეწოდება.

დავუშვათ მოცემულია $\psi(x)$ ფუნქცია. $\psi(x - at)$ ფუნქციის გრაფიკი ფიქსირებული დროის t მომენტში მიიღება $\psi(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ძვრით მარჯვნივ Ox ღერძის გასწვრივ at სიდიდით. ანალოგიურად, $\varphi(x + at)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $\varphi(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ძვრით at სიდიდით Ox ღერძის გასწვრივ მარცხნივ. ძვრებით მიღებული ორივე გრაფიკის ჯამი არის სიმის რხევის განტოლების ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება (1) ფორმულით მიღებულ ამონახსნს. რეალური ამონახსნის ასაგებად საჭიროა შემოვიფარგლოთ დროის ცალკეული მომენტებისათვის.

იმისათვის, რომ ვისარგებლოთ მორბენალი ტალღის მეთოდით აუცილებელია საწყისი $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციების ცოდნა. გავიხსენოთ, რომ

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(f + \frac{1}{a}G\right), \quad \psi(x) = \frac{1}{2}\left(f - \frac{1}{a}G\right), \quad G(x) = \int_0^x g(s) ds. \quad (4)$$

ეს ფორმულები მარტივდება, როდესაც ერთ-ერთი მოცემული ფუნქციიდან, მაგალითად, $g(x)$ იგვეურად ნულია. მივიღებთ $\varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{2}f(x)$.

ხოლო როდესაც $f(x) \equiv 0$, გვექნება $\varphi(x) = \frac{1}{2a}G(x) = -\psi(x)$.

გავაერთიანოთ ზემოთ მოყვანილი არგუმენტები შემდეგ პროცედურების მიმდევრობაში და ჩამოვაყალიბოთ მორბენალი ტალღის მეთოდი ალგორითმის სახით. პირველ რიგში გამოვთვალოთ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციები (4) ფორმულების გამოყენებით. დავაფიქსიროთ t და მოვახდინოთ $\varphi(x)$ ფუნქციის მარცხნივ ძვრა Ox ღერძის გასწვრივ at სიდიდით. $\psi(x)$ ფუნქციის ძვრა მოვახდინოთ მარჯვნივ Ox -ის გასწვრივ at

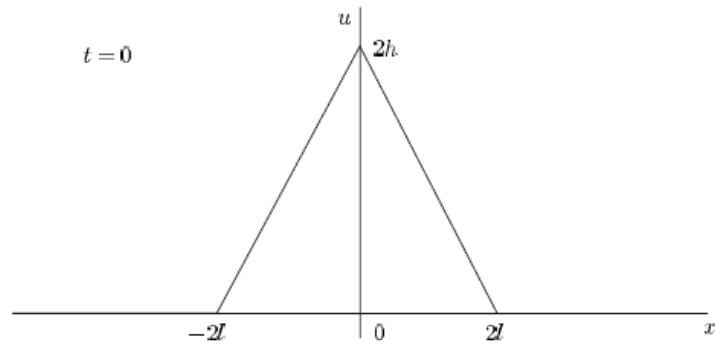
სიდიდით. მივიღებთ $\varphi(x+at)$ და $\psi(x-at)$ ფუნქციების გრაფიკებს, რომლებსაც შევკრებთ. შედეგად მივიღებთ დროის ფიქსირებულ t მომენტში საძიებელი $u(x,t)$ ფუნქციის გრაფიკს.

მოყვანილი კონსტრუქცია განსაკუთრებით სასარგებლოა მაშინ, როდესაც საწყისი მონაცემები გრაფიკულადაა მოცემული.

ამოცანა 1. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა

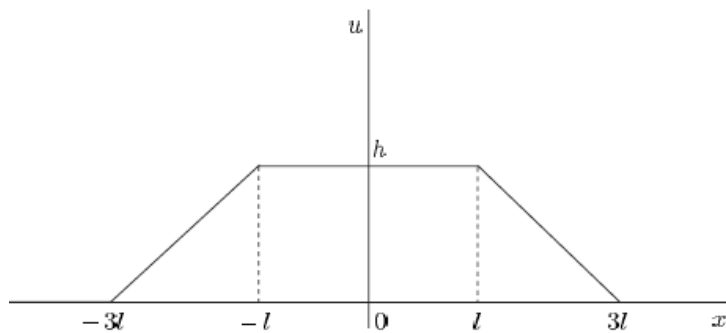
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = 0$$

სადაც $f(x)$ მოცემულია ნახ. 5-ზე.

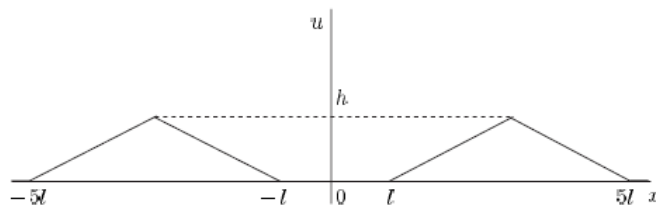


ნახ.5

ამოხსნა. რადგან $g = 0$, ამიტომ $\varphi = \psi = \frac{1}{2}f$. შესაძლო ამონახსნის გრაფიკები მოცემულია ნახ.6. და ნახ. 7-ზე.



ნახ.6



ნახ.7

15.4 შემოსაზღვრული სიბის რხევა

კოშის უკვე განხილული ამოცანა სიბის განტოლებისათვის დასმული იყო იმ დაშვებით, რომ სიბი უსასრულოდ გრძელია. რეალურად საჭიროა შესწავლილი იქნას სასრული სიგრძის სიბის რხევა. მაგალითად, თუ სიბის ბოლოები დამაგრებულია და იგი Ox ღერძის გასწვრივ $[0, l]$ მონაკვეთს იკავებს, მაშინ სიბის თავისუფალი რხევის ამოცანა არის:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = g(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

(2) პირობას ეწოდება *საწყისი*, ხოლო (3)-ს კი *სასაზღვრო*. საზოგადოდ, (1)-(3) ეწოდება *შერეული* ამოცანა. ამ ამოცანის ამოსახსნელად დამუშავებულია სპეციალური მეთოდი, რომელიც მისი პირველად მომჩინის *ფურიეს მეთოდის* სახელითაა ცნობილი. ფურიეს მეთოდის სხვაგვარი სახელწოდებაა *ცვლადთა განცალკევების მეთოდი*. მეთოდის არსი მდგომარეობს ამონახსნის წარმოდგენაში ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით, რომელთაგან თითოეული ერთი ცვლადის ფუნქციაა: $u(t, x) = T(t)X(x)$.

ვიპოვოთ $u_{tt} = T''(t)X(x)$ და $u_{xx} = T(t)X''(x)$ კერძო წარმოდგენები. ჩავსვათ ისინი სიბის (1) განტოლებაში და მივიღებთ

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x).$$

ამ განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $a^2 T(t)X(x)$ და გვქონება

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (4)$$

(4) ტოლობის მარცხენა მხარეში არის t -ზე დამოკიდებული ფუნქცია, ხოლო მარჯვენა მხარეში კი x -ზე დამოკიდებული.

ლემა 1. ტოლობა $\varphi(t) = \psi(x)$, სადაც t, x დამოუკიდებელი ცვლადებია, რომლებიც იცვლებიან შესაბამისად $[0, \tau]$ და $[0, l]$ ინტერვალზე, ხოლო φ, ψ თავიანთი არგუმენტების უწყვეტი ფუნქციებია, სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ორივე ფუნქცია რაიმე ერთიდაიმავე მუდმივის ტოლია.

◀დამტკიცება ელემენტარულია. მართლაც დავაფიქსიროთ x , ვთქვათ $x = 0$. მივიღებთ $\varphi(t) = \psi(0) = \text{const}$. ანალოგიურად, თუ დავუშვებთ, რომ $t = 0$, მივიღებთ $\psi(x) = \varphi(0) = \text{const}$. რაც ამთავრებს ლემის დამტკიცებას.▶

დავუბრუნდეთ (4) ტოლობას. გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილი ლემა და ეს მუდმივი აღვნიშნოთ $-\lambda^2$. ამრიგად,

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

ტოლობებიდან მივიღებთ ორ განტოლებას:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (5)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (6)$$

ამრიგად, ცვლადების განცალკევების შემდეგ ერთი კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების მაგივრად მივიღეთ ორი დამოუკიდებელი ერთსადაიმავე პარამეტრზე დამოკიდებული ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება. პარამეტრი, რომელსაც განტოლებები შეიცავენ უცნობია და დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნთან ერთად საჭიროა მისი პოვნაც.

გავიხსენოთ (3) სასაზღვრო პირობა. ჩავსვათ მასში დასაშვები სტრუქტურის მქონე $u(t, x) = T(t)X(x)$ ამონახსნი. მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$u|_{x=0} = T(t)X(x)|_{x=0} = T(t)X(0) = 0, \quad (7)$$

$$u|_{x=l} = T(t)X(x)|_{x=l} = T(t)X(l) = 0. \quad (8)$$

ტოლობა (7) სრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც $X(0) = 0$, ხოლო (8) კი როდესაც $X(l) = 0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ $T(t) \equiv 0$, რაც ამოცანის პირობას ეწინააღმდეგება. ამრიგად, (5) დიფერენციალური განტოლებას ვუმატებთ სასაზღვრო პირობებს $X(0) = 0$ და $X(l) = 0$, ასე, რომ საბოლოოდ ვღებულობთ სასაზღვრო ამოცანას საკუთრივი მნიშვნელობისათვის:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (9)$$

ასეთი ამოცანის ამოხსნის მეთოდი ჩვენთვის უკვე ცნობილია. (9) დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელ განტოლებას $k^2 + \lambda^2 = 0$ აქვს ორი წარმოსახვითი ფესვი და დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნს აქვს სახე: $X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x$, სადაც C_1, C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. გამოვიყენოთ $X(0) = 0$ სასაზღვრო პირობა და მივიღებთ $C_2 = 0$, ასე, რომ გვრჩება მხოლოდ ერთი შესაკრები $X(x) = C_1 \sin \lambda x$, რომლის ჩასმის შემდეგ $X(l) = 0$ სასაზღვრო პირობაში მივიღებთ $\sin \lambda l = 0$ განტოლებამდე. აქედან ვპოულობთ $\lambda_n = \pi n / l$, $n = 1, 2, 3, \dots$, რომელთა კვადრატები ადგენენ (9) ამოცანის სპექტრს. λ_n -ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება ამონახსნები $X_n(x) = C_n \sin \pi n x / l$, $n = 1, 2, 3, \dots$, რომლებიც დამოკიდებულნი არიან ნებისმიერ C_n მუდმივებზე. გადავიდეთ (6) განტოლებაზე. ისიც ანალოგიურად იხსნება. მახასიათებელი

$k^2 + a^2 \lambda^2 = 0$ განტოლების ფესვებია $k_{1,2} = \pm i \lambda a$, ხოლო ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს $T(t) = A \cos a \lambda t + B \sin a \lambda t$ სახით. λ პარამეტრის მნიშვნელობა ჩვენ უკვე ვიპოვეთ და ვიცით, რომ $\lambda = \pi n / l$. ჩავსვათ იგი $T(t)$ ფუნქციაში და მივიღებთ ამონახსნთა თვლად რაოდენობას

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ამრიგად, ჩვენ ვიპოვეთ (5) და (6) დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნთა თვლადი სიმრავლე. ცვლადთა განცალკევების მეთოდის თანახმად (1) ამოცანის ამონახსნები მოიცემა ამ ამონახსნთა ნამრავლის საშუალებით:

$$u_n(t, x) = T_n(t) X_n(x) = \left(a_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin \frac{\pi n a t}{l} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

ნათელია, რომ ყოველი $u_n(t, x)$ ფუნქცია უსასრულოდ დიფერენცირებადია $\Pi = \{t \geq 0, 0 \leq x \leq l\}$ ჩაკეტილ სიმრავლეზე a_n, b_n მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. პირდაპირი ჩასმით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ $u_n(t, x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (1) განტოლებას და (3) სასაზღვრო პირობებს Π არეზე. ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

დებულება 1. სიმის რხევის განტოლებას აქვს ამონახსნების თვლადი რაოდენობა, თითოეული ამონახსნი აკმაყოფილებს (3) სასაზღვრო პირობებს და არიან უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფუნქციები $\Pi = \{t \geq 0, 0 \leq x \leq l\}$ სიმრავლეზე.

ფურიეს მეთოდის დასკვნით ეტაპს წარმოადგენს სიმის რხევის განტოლების წრფივობის თვისების (სუპერპოზიციის პრინციპის) გამოყენება. თუ ნაპოვნია ერთგვაროვანი წრფივი განტოლებების რამდენიმე ამონახსნი, მაშინ მათი ჯამი აგრეთვე ამონახსნია. დებულება 1-ის თანახმად სიმის რხევის განტოლებას აქვს ამონახსნთა თვლადი რაოდენობა, ამიტომ მათი ჯამიც იქნება ამ განტოლების ამონახსნი. სხვა სიტყვებით,

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin \frac{\pi n a t}{l} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (10)$$

მწკრივი არის დამაგრებული ბოლოების მქონე სიმის თავისუფალი რხევის განტოლების ამონახსნი, რომელსაც ამონახსნის ფურიეს ფორმით წარმოადგენს ეწოდება.

გამოვთვალოთ $u(t, x)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული t -თი და დავუშვათ, რომ მიღებული

$$u_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} \left(-a_n \sin \frac{\pi n a t}{l} + b_n \cos \frac{\pi n a t}{l} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

მწკრივიც კრებადია. გავიხსენოთ (2) საწყისი პირობა. ჩავსვათ მასში $u(t, x)$ და $u_t(t, x)$ ფუნქციები და მივიღებთ

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x), \quad (11)$$

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} b_n \sin \frac{\pi n x}{l} = g(x). \quad (12)$$

დავუშვათ ცნობილია $[0, l]$ ინტერვალზე $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების დაშლა ფურიეს მწკრივად $\sin \frac{\pi n x}{l}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ფუნქციების საშუალებით. გავიხსენოთ, რომ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტები გამოითვლება

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad g_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (13)$$

ფორმულების საშუალებით, ხოლო ფურიეს მწკრივს ამ ფუნქციებისათვის აქვს სახე

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (14)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (15)$$

ერთიდაიგივე $f(x)$ ფუნქცია ჩვენ წარმოდგენილი გვაქვს ორი (11) და (14) მწკრივების სახით, ამიტომ ამ მწკრივების კოეფიციენტები ერთმანეთს ემთხვევა: $a_n = f_n$. ანალოგიურად, $g(x)$ ფუნქციისათვის გვაქვს მისი მწკრივის სახით (12) და (15) გამოსახულებები, რაც ნიშნავს, რომ $\pi n a b_n / l = g_n$, საიდანაც $b_n = g_n l / (\pi n a)$, სადაც $n = 1, 2, \dots$. a_n -სა და b_n -ის ნაპოვნი მნიშვნელობები ჩავსვათ (10) მწკრივში და მივიღებთ სიმის რხევის (1)-(3) ამოცანის ამონახსნს.

ზემოთ თქმული შევაჯამოთ შემდეგ დებულებაში.

დებულება 2. იმისათვის რომ ამოვხსნათ ბოლოებდამაგრებული სიმის თავისუფალი რხევის განტოლება ფურიეს მეთოდის გამოყენებით, საჭიროა გამოვთვალოთ მოცემული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტები (13) ფორმულით, განვსაზღვროთ $a_n = f_n$ და $b_n = g_n l / (\pi n a)$ კოეფიციენტები და შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები ზოგად (10) ამონახსნში.

ამოცანა 1. ამოვხსნათ $]0, l[$ ღია ინტერვალზე შემდეგი შერეული ამოცანა ტალღური განტოლებისათვის:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = x(x-1), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

ამოხსნა. ამ ამოცანის შედარება ზოგად (1)-(3) ამოცანასთან გვაძლევს, რომ $a=1$, $l=1$, $f(x)=x(x-1)$, $g(x)=0$. გამოვთვალოთ f და g ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტები (13) ფორმულების საშუალებით:

$$f_n = 2 \int_0^1 x(x-1) \sin \pi n x dx = \begin{cases} \frac{-8}{\pi^3 (2k-1)^3}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k; k=1,2,3,\dots, \end{cases}$$

$$g_n = 0, \quad n = 1,2,3,\dots$$

ამონახსნი წარმოიდგინება მწკრივით:

$$u(t, x) = \frac{-8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \cos \pi(2k-1)t \sin \pi(2k-1)x \quad (16)$$

გამოვიკვლიოთ ამ მწკრივის კრებადობა. (16)-ის მაჟორანტული მწკრივია $\frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-3}$. ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად (16)

ფუნქციონალური მწკრივი თანაბრად კრებადია $\Pi = \{t \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$ სიმრავლეზე და წარმოადგენს ორი ცვლადის უწყვეტ ფუნქციას. $u(x, t)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულების u_t და u_x მაჟორანტს წარმოადგენს რიცხვითი მწკრივი $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-2}$, ამიტომ ისინიც უწყვეტი ფუნქციებია. მეორე კერძო წარმოებულები წარმოიდგინებინა მწკრივის სახით

$$u_{tt} = u_{xx} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cos \pi(2k-1)t \sin \pi(2k-1)x, \quad (17)$$

რომელსაც Π -ზე არ აქვს კრებადი რიცხვითი მაჟორანტული მწკრივი. (17) მწკრივი კრებადია წყვეტილი ფუნქციისაკენ. მართლაც, (17)-ში ჩავსვათ $t=0$ და მივიღებთ

$$u_{tt}(0, x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(2k-1)x}{2k-1}.$$

გამოვიყენოთ ცნობილი დამლა

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(2k-1)x}{2k-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x=0, x=1 \end{cases}$$

და მივიღებთ:

$$u_{tt}(0, x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, x = 1. \end{cases}$$

ამ უკანასკნელიდან ჩანს, რომ $u_{tt}(0, x)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას $[0, 1]$ სეგმენტის ბოლოებში. (17) წარმოდგენიდან გამომდინარეობს, რომ $u_{tt}(t, x)$ პერიოდულია t -ს მიმართ პერიოდით 2, რის გამოც აქვს წყვეტის წერტილები $[0, 1]$ სეგმენტის ბოლოებში ყოველი $t = 2m$ -სათვის, $m = 0, 1, 2, \dots$

(16) ამონახსნის მოყვანილი თვისება შევადაროთ საწყის-სასაზღვრო ამოცანის კლასიკური ამონახსნის განმარტებას.

განმარტება. დავუშვათ $[0, l]$ მონაკვეთზე მოცემულია უწყვეტი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები. $u(t, x)$ ფუნქციას ეწოდება (1)-(3) შერეული ამოცანის კლასიკური ამონახსნი, თუ იგი არის სიძის რხევის განტოლების კლასიკური ამონახსნი $\Omega = \{t > 0, 0 < x < l\}$ არეზე. ე.ი. Ω -ზე აქვს პირველი და მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები და აკმაყოფილებს $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ განტოლებას, გარდა ამისა განსაზღვრული და უწყვეტია Ω არის $\overline{\Omega}$ ჩაკეტვაზე თავის u_t კერძო წარმოებულთან ერთად და აკმაყოფილებს საწყის და სასაზღვრო (2)-(3) პირობებს.

დავუბრუნდეთ ახლა ჩვენს მაგალითს. ძნელი შემოწმებულია (17) მწკრივით წარმოდგენილი u_{tt} და u_{xx} ფუნქციები უწყვეტები არიან თუ არა $\Omega = \{t > 0, 0 < x < 1\}$ არეზე. ჩვენ მხოლოდ ის შევამოწმეთ, რომ u_{tt} წყვეტას განიცდის მონაკვეთის ბოლოებში. ამიტომ ვილაპარაკებთ მხოლოდ განზოგადებულ ამონახსნზე. განვიხილავთ განზოგადებულ ამონახსნს მიუხედავად იმისა, რომ საწყისი და სასაზღვრო პირობები სრულდება კლასიკური აზრით და $u(t, x)$ და $u_t(t, x)$ ფუნქციები უწყვეტები არიან ჩაკეტილ $\Pi = \{t \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$ სიმრავლეზე.

ამოცანა 2. ამოვხსნათ ბოლოებ დამავრებული სიძის რხევის (1) განტოლება, როდესაც $0 < x < l$, შემდეგ საწყის და სასაზღვრო პირობებში

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) = 0,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0.$$

ამოხსნა. ეს ამოცანა შესაძლებელია ფურიეს მეთოდით ამოიხსნას. მაგრამ მის ამოხსნას დასაბუთების ფორმულითაც შეგვიძლია ვისარგებლოთ. ჩვენ ამოცანის ამოხსნის ამ გზას ავირჩევთ. საჭიროა სიძის რხევის განტოლების ინტეგრება

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) = 0$$

საწყის და

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0$$

სასაზღვრო პირობებში. პირველ რიგში გავაგრძელოთ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ როგორც კენტი ფუნქციები $[-l, 0]$ სეგმენტზე, ხოლო შემდეგ კი მთელ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე, როგორც პერიოდული ფუნქციები. შედეგად მივიღებთ:

$$\Phi(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad \Psi(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

რომლებიც მოცემულ ფუნქციებს ემთხვევიან $[0, l]$ -ზე. ჩავსვათ რა $\Phi(x)$ და $\Psi(x)$ ფუნქციებს დალაშქრის ფორმულაში, მივიღებთ სიმის რხევის განტოლების ამონახსნს:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} A \sin\left(\frac{\pi}{l}(x - at)\right) + A \sin\left(\frac{\pi}{l}(x + at)\right),$$

ანუ

$$u(x, t) = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi at}{l}\right).$$

ამოცანა 3. ამოვხსნათ ბოლოებდამაგრებული ე.ი. $u(0, t) = u(l, t) = 0$, სიმის რხევის განტოლება $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ შემდეგი საწყისი პირობებით $u(x, 0) = f(x) = \sin^3 x$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = g(x) = 0$.

ამ პარაგრაფში ჩვენ მივიღეთ ამოცანის ამონახსნისათვის გამოსახულება (ფორმულა (10))

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi at}{l} + b_n \sin \frac{\pi at}{l} \right) \sin \frac{\pi nx}{l}.$$

$\sin \frac{n\pi}{l} x$, $n = 1, 2, \dots$ ბაზისში a_n კოეფიციენტები გამოითვლება დებულება 1-დან და მივიღებთ, რომ მხოლოდ ორი a_1 და a_3 კოეფიციენტი 0-საგან განსხვავებული, ყველა სხვა კოეფიციენტი კი 0-ია. საბოლოოდ გვაქვს

$$f(x) = \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.$$

(სასკოლო კურსის ტრიგონომეტრიიდან კარგად ცნობილი ფორმულა გასამმაგებული კუთხის სინუსის გამოსახვა კუთხის სინუსის საშუალებით: $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$).

ამრიგად, ამოცანის ამონახსნი იქნება ფუნქცია

$$u(x, t) = \frac{3}{4} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{a\pi}{l} t - \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3a\pi}{l} t.$$

როგორც ვხედავთ, მწკრივი ამ შემთხვევაში სასრული ჯამია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. დალამბერის ფორმულის გამოყენებით ამოხსენით კოშის ამოცანა

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty,$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = e^{-x}.$$

$$\text{პასუხი: } u(x, t) = \cos x \cos t + e^{-x} \sin t$$

2. ამოხსენით შერეული ამოცანა

$$u_{tt} = 9u_{xx}; \quad 0 < x < 4, t > 0;$$

$$u_x(0, t) = 0, u(4, t) = 0;$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 16 - x^2.$$

$$\text{პასუხი: } u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{256(-1)^k}{3\left(k+\frac{1}{2}\right)^4} \sin \frac{3\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t}{4} \cos \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x}{4}.$$

პარაბოლური განტოლებები 16 სითბოგამტარებლობის განტოლება ლეროსათვის

16.1 უსასრულო ღეროში სითბოს გავრცელება

თუ სხეულის სიგრძე გაცილებით აღემატება მის სხვა ზომებს, მაშინ სხეულს *ღერო* ეწოდება და შეგვიძლია იგი Ox ღერძთან გავაიგივოთ. სითბოგამტარებლობის

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho} \quad (1)$$

განტოლება ამ შემთხვევაში მიიღებს $u_t = a^2 u_{xx}$ სახეს და არის პარაბოლური ტიპის განტოლება. გავიხსენოთ, რომ სიმის რხევის $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ განტოლების შემთხვევაში ჩვენ ვიპოვეთ ზოგადი ამონახსნი. გარეგნულად მისი მსგავსი სითბოგამტარებლობის განტოლების ამონახსნის დაწერა ელემენტარული სახით შეუძლებელია. ანალოგიურ შემთხვევებში ჩვეულებრივ შემოისაზღვრებიან ხოლმე პარამეტრზე დამოკიდებული სპეციალური ამონახსნის ძიებით. მართლაც დავრწმუნდეთ, რომ ღეროს სითბოგამტარებლობის განტოლებას აკმაყოფილებს საკმაოდ სპეციფიკური ფუნქცია, რომელსაც *სითბოგამტარებლობის ერთგანზომილებიანი განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნი* ეწოდება და მოიცემა გამოსახულებით:

$$G(t-t_0, x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}, \quad t > t_0 \quad (2)$$

სადაც ξ და t_0 პარამეტრებია. გამოვთვალოთ (2)-ის კერძო წარმოებულები:

$$G_x = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x-\xi}{2[a^2(t-t_0)]^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{-1}{2[a^2(t-t_0)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x-\xi)^2}{4[a^2(t-t_0)]^{\frac{5}{2}}} \right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{-a^2}{2[a^2(t-t_0)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2(x-\xi)^2}{4[a^2(t-t_0)]^{\frac{5}{2}}} \right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}.$$

აქედან ჩანს, რომ $G_t = a^2 G_{xx}$, რისი ჩვენებაც გვინდოდა.

თეორემა 1. (სუპერპოზიციის პრინციპის ინტეგრალური ფორმა) ვთქვათ მოცემულია ერთგვაროვანი განტოლება $u_t - a^2 u_{xx} = 0$, $t > 0$ და $x \in \mathbf{R}^1$, და მისი ამონახსნი $\xi \in \mathbf{R}^1$ პარამეტრზე დამოკიდებული $G(t, x, \xi)$ ამონახსნი. ე.ი. ყოველი $\xi \in \mathbf{R}^1$ ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის სრულდება ტოლობა $G_t - a^2 G_{xx} = 0$. დავუშვათ $f(\xi)$ ცნობილი და უწყვეტი ფუნქციაა. განვიხილოთ შემდეგი არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (3)$$

და დავუშვათ, რომ იგი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია t, x ცვლადების მიმართ ყოველ ჩაკეტილ $t \geq t_1 > 0, x \in \mathbf{R}^1$ სიმრავლეზე თავის u_t, u_x, u_{xx} კერძო წარმოებულებთან ერთად.

მაშინ $u(t, x)$ ფუნქცია, წარმოდგენილი (3) ინტეგრალური ფორმით აგრეთვე არის $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ განტოლების ამონახსნი.

მართლაც, (3) ინტეგრალი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია. აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია აგრეთვე ანალოგიური ინტეგრალები u_t, u_x, u_{xx} ფუნქციებისათვის, რის გამოც ეს წარმოებულები შეგვიძლია ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ შევიტანოთ და გამოვთვალოთ ინტეგრალი. ამრიგად, სამართლიანია ტოლობა

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_t - a^2 G_{xx}) f(\xi) d\xi \equiv 0,$$

რადგან $G_t - a^2 G_{xx} \equiv 0$. ამით დამტკიცება დამთავრებულია.

გამოვიყენოთ ეს თეორემა (2) ფორმულით განსაზღვრული $G(t, x, \xi)$ ფუნქციისათვის. უფრო ზუსტად, შემოვიტანოთ ფუნქცია

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} f(\xi) d\xi, \quad (4)$$

რომელსაც პუასონის ინტეგრალი ეწოდება. დავუშვათ (4) გამოსახულებაში $f(\xi)$ ფუნქცია უწყვეტი და შემოსაზღვრულია ნებისმიერი ξ -სათვის $\mathbf{R}$ -დან: $|f(\xi)| \leq M$. განვიხილოთ პუასონის ინტეგრალისათვის $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$ ცვლადების შემდეგი გარდაქმნა:

$$\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = y, \quad \xi = x + 2a\sqrt{t}y, \quad d\xi = 2a\sqrt{t}dy, \quad y \in (-\infty, \infty).$$

მაშინ (4) ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(x + 2a\sqrt{t}y) dy,$$

რომელიც უწყვეტი ფუნქციაა $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$ არეზე. დავუშვათ $t = 0$, მაშინ

$$u(0, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy f(x) = f(x).$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ტოლობა $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$. ზემოთ თქმული შევავსოთ შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 2. დავუშვათ $f(x)$ უწყვეტი და შემოსაზღვრულია $\mathbf{R}$ -ზე. მაშინ პუასონის (4) ინტეგრალი არის უწყვეტი $u(x, y)$ ფუნქცია $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$ არეში და იგი აკმაყოფილებს $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ განტოლებას ამ არეზე.

გარდა ამისა, როდესაც $t = 0$, სამართლიანია ტოლობა $u(0, x) = f(x)$. სხვა სიტყვებით, $u(x, y)$ არის

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (t \geq 0, x \in \mathbf{R}), \quad u(0, x) = f(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

კოშის ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

16.2 სასრული სიგრძის ღეროში სითბოს გავრცელება

თუ ღეროს სიგრძე დიდი არ არის, მაშინ სითბოს გავრცელების დროს მისი ბოლოების გავლენა სითბოს გავრცელებაზე მხედველობაში უნდა იქნას მიღებული. ამისათვის კი საჭიროა ტემპერატურის ცვლილების კანონი იქნას მოცემული ბოლოებში. მოვთავსოთ ღერო Ox ღერძის $[0, l]$ მონაკვეთზე და დავუშვათ, რომ ღეროს ბოლოებში ნულოვანი ტემპერატურაა. მათემატიკური ამოცანა მაშინ დაისმება შემდეგი სახით:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < l, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = f(x) \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2)$$

ამ განტოლებათა სისტემისათვის გამოვიყენოთ ფურიეს მეთოდი. რაც ნიშნავს, რომ ამონახსნი იძებნება ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით, რომელთაგან თითოეული დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ ცვლადზე: $u(t, x) = T(t)X(x)$. ჩავსვათ ეს ნამრავლი სითბოგამტარებლობის (1) განტოლებაში და მივიღებთ ტოლობას: $T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$, რომლის $a^2 T(t)X(x)$ -ზე გაყოფის შემდეგ გვექნება:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (3)$$

(3) ტოლობის მარცხენა მხარე დამოკიდებულია მხოლოდ t ცვლადზე, ხოლო მარჯვენა მხარე კი X -ზე. ცვლადები დამოუკიდებლები არიან, ამიტომ ორი სხვადასხვა ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციების ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი დამოკიდებულები არ არიან თავიანთ არგუმენტებზე, ე.ი. როდესაც მუდმივები არიან. ეს მუდმივი აღვნიშნოთ λ^2 -ით. (3) ტოლობიდან ვიღებთ ორ მუდმივ კოეფიციენტებიან ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (4)$$

პირველი განტოლებისათვის მახასიათებელი ფესვებია $k = \pm i\lambda$, საიდანაც მისთვის ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x. \quad (5)$$

ამ ამონახსნმა უნდა დააკმაყოფილოს სასაზღვრო პირობები: $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ ანუ $T(t)X(0) = T(t)X(l) = 0$. თუ $T(t)$ -ს 0-საგან იგივეურად განსხვავებულად ჩავთვლით, მაშინ მივალთ $X(0) = 0$ და $X(l) = 0$ განტოლებათა სისტემამდე, ამასთან (5) ტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$C_1 = 0, \quad C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $C_2 \sin \lambda l = 0$. თუ დავუშვებთ, რომ $C_2 = 0$, მაშინ მივიღებთ $X(x) \equiv 0$, რაც ჩვენი ამოცანიდან გამომდინარე შეუძლებელია, ამიტომ დავუშვათ, რომ $\sin \lambda l = 0$ და მივიღებთ ტოლობათა თვლად რაოდენობას $\lambda l = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$, საიდანაც $\lambda_n = \pi n / l$. λ_n -ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება $X_n = \sin \pi n x / l$, $n = 1, 2, \dots$ (4)-ის პირველი განტოლების ამონახსნი. ახლა მეორე განტოლება განვიხილოთ. მის მახასიათებელ განტოლებას უკვე ნაპოვნი $\lambda = \lambda_n$ -ის გათვალისწინებით აქვს სახე $k + a^2 \lambda_n^2 = 0$, საიდანაც $k = -a^2 \lambda_n^2$ და ზოგადი ამონახსნი იქნება $T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$.

შევავამოთ შუალედური შედეგები. სითბოგამტარელობის განტოლება დავიყვანეთ ორ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე ცვლადების განცალკევებით, ამოვხსენით თითოეული დიფერენციალური განტოლება. ამის შემდეგ უკვე შესაძლებელია სითბოგამტარელობის განტოლების კერძო ამონახსნების პოვნა

$$u_n(t, x) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

(6) გამოსახულების უშუალო ჩასმით (1) განტოლებაში მოწმდება, რომ (6) მართლაც არის გამოსავალი განტოლების ამონახსნი. ახლა ყოველივე ზემოთ თქმული შევაჯამოთ შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1. (1) სასაზღვრო ამოცანას აქვს ამონახსნი; 2) თვალადასტურებულია, რომელიც მოიცემა განცალკევებულ ცვლადებში (6) ტოლობით და ყოველი მათგანი დამოკიდებულია თავის C_n , $n = 1, 2, \dots$ მუდმივებზე.

შეგახსენებთ, რომ ფურიეს იდეა მდგომარეობს (1)-(2) ამოცანის ამონახსნი მოიძებნოს

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (7)$$

ფუნქციონალური მწკრივის საშუალებით. თუ (7) კრებადია როგორც რიცხვითი მწკრივი ყოველი $x \in [0, l]$ და $t \geq 0$ -სათვის, მაშინ მას ეწოდება (1) ამოცანის ფურიეს ფორმით მოცემული ზოგადი ამონახსნი. (1)-(2) შერეული ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა (2) საწყისი პირობის დაკმაყოფილება, რისთვისაც (7) ზოგადი ამონახსნის ჩასმა საჭირო (2) საწყის პირობაში. შედეგად მიიღება ტოლობა:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (8)$$

რომელიც წარმოადგენს მოცემული $f(x)$ ფუნქციის დაშლას $[0, l]$ ინტერვალზე ფურიეს მწკრივად სინუსის საშუალებით. C_n რიცხვების პოვნა ხდება

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

ფორმულის საშუალებით.

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღეთ:

დებულება 1. იმისათვის რომ ამოხსნათ (1)-(2) შერეული ამოცანა ღეროში სითბოს გავრცელების განტოლებისათვის ფურიეს მეთოდით, საჭიროა გამოვთვალოთ $[0, l]$ ინტერვალზე ფურიეს კოეფიციენტები მოცემული $f(x)$ ფუნქციისათვის (9) ფორმულით და შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (7) ზოგად ამონახსნში.

ამოცანა 1. ვიპოვოთ სითბოგამტარებლობის განტოლებისათვის შემდეგი შერეული ამოცანის ამონახსნი:

$$u_t = 16u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 4, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=4} = 0, \quad (10)$$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} x^2/2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4-x, & 2 < x \leq 4. \end{cases} \quad (11)$$

ამოხსნა. შევადაროთ ჩვენი ამოცანა (1)-(2) ამოცანას. ვხედავთ, რომ (2) საწყისი პირობით მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას აქვს (11) სახე. იმისათვის, რომ ვისარგებლოთ (9) ფორმულით, მოცემული ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტების გამოსათვლელად, საჭიროა ინტერვალი $[0, 4]$

მონაკვეთზე გავყოთ ორი $[0,2]$ და $[2,4]$ მონაკვეთებზე განსაზღვრული ინტეგრალების ჯამად:

$$C_n = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 \frac{x^2}{2} \sin \frac{\pi n x}{4} dx + \int_2^4 (4-x) \sin \frac{\pi n x}{4} dx \right).$$

თითოეული შესაკრების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^2}{2} \sin \frac{\pi n x}{4} dx &= -2 \left(\frac{4}{\pi n} \right) \cos \frac{\pi n}{2} + 2 \left(\frac{4}{\pi n} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{2} + \left(\frac{4}{\pi n} \right)^3 \left(\cos \frac{\pi n}{2} - 1 \right), \\ \int_0^2 (4-x) \sin \frac{\pi n x}{4} dx &= 2 \left(\frac{4}{\pi n} \right) \cos \frac{\pi n}{2} + \left(\frac{4}{\pi n} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{2}. \end{aligned}$$

საიდანაც საბოლოოდ გვქნება

$$C_n = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{\pi n} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi n} \right)^2 \left(\cos \frac{\pi n}{2} - 1 \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

ჩავსვათ გამოთვლილი კოეფიციენტები ზოგადი ამონახსნის (7) გამოსახულებაში და მივიღებთ (10)-(11) ამოცანის ამონახსნს

$$u(t, x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(3 \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi n} \left(\cos \frac{\pi n}{2} - 1 \right) \right) e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \frac{\pi n x}{4}. \quad (13)$$

(13)-ის მაჟორანტული მწკრივია $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. ამის გამო (13)

ფუნქციონალური მწკრივი თანაბრად კრებადია $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ ჩაკეტილ არეზე და იქ განსაზღვრავს ორი ცვლადის უწყვეტ ფუნქციას. როდესაც $t > 0$, (13) მწკრივის წევრები, აგრეთვე იმ მწკრივების წევრები, რომლებიც მიიღებან მისგან t და x ცვლადებით გაწარმოებით, იძენენ სწრაფად ქრობად $e^{-\pi^2 n^2 t}$ მამრავლს, რის გამოც (13) მწკრივი განსაზღვრავს ორი ცვლადის უსასრულოდ დიფერენცირებად ფუნქციას. როდესაც $t = 0$, (13)-დან მიიღება $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \pi n x / 4$, რომელიც (11) ფორმულით განსაზღვრულ ფუნქციას ემთხვევა, რადგან მის ფურიეს მწკრივს წარმოადგენს.

ამრიგად, (13) მწკრივი არის $t > 0$, $0 < x < l$ ღია არეზე უსარულოდ დიფერენცირებადი ფუნქცია და აკმაყოფილებს სითბოგამტარებლობის (10) განტოლებას. ჩაკეტილ $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$ არეზე (13) განსაზღვრავს უწყვეტ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს (10) ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს და (11) საწყის პირობას. ზემოთქმული ნიშნავს, რომ (13) მწკრივით წარმოდგენილი $u(t, x)$ ფუნქცია არის (10)-(11) ამოცანის კლასიკური ამონახსნი. ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ თუ $t > 0$, მაშინ (13) მწკრივი ძალზე სწრაფად იკრება და მრავალ ამოცანაში შესაძლებელია დაგკმაყოფილდეთ

$$u(t, x) \approx \frac{8}{\pi^2} \left(\left(3 - \frac{4}{\pi} \right) e^{-\pi^2 t} \sin \frac{\pi x}{4} - \frac{1}{\pi} e^{-4\pi^2 t} \sin \frac{\pi x}{2} \right), \quad t > 0$$

მიახლოებით.

დებულება 1 გვიჩვენებს, რომ სასრული ღეროსათვის შერეული ამოცანის ამონახსნი არის არც თუ ისე მარტივი მათემატიკური ობიექტი – (7) ფუნქციონალური მწკრივი. პირველ რიგში აუცილებელია მიღებული მწკრივის კრებადობა შევისწავლოთ, რაც საკმაოდ რთულ მათემატიკურ აპარატს და სპეციფიკურ ჩვევებს მოითხოვს. პრაქტიკაში ხშირად უფრო მარტივ ფორმულებს იყენებენ. ეს დასაშვებია მაშინ, როდესაც მიღებული თეორიული დასკვნები ექსპერიმენტულ მონაცემებს ემთხვევა.

ამოცანა 2. განვიხილოთ $u_0 > 0$ ტემპერატურამდე თანაბრად გაცხელებული l სიგრძის ღეროს გაცივება, იმ პირობით, რომ მის საზღვარზე 0-ოვანი ტემპერატურა გვაქვს. მათემატიკურად ამოცანა ყალიბდება

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$$

განტოლებისა და სასაზღვრო პირობების სახით.

ამოხსნა. ამოცანა 1-ის ანალოგიურად (1)-(2) ამოცანასთან ჩვენი ამოცანის შედარებით ვლევულობთ, რომ $f(x) \equiv u_0$. ამ ფუნქციის დაშლა ფურიეს მწკრივად $[0, l]$ მონაკვეთზე სინუსების საშუალებით კარგად არის ცნობილი და მას აქვს სახე:

$$u_0 = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l},$$

ხოლო ამოცანის ამონახსნი კი მოიცემა მწკრივით

$$u(t, x) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{l},$$

რომელიც პირობითად კრებადია. გამოყენებში საჭიროა მხოლოდ t -ს დიდი მნიშვნელობები, ამიტომ საკმარისია შევინარჩუნოთ მხოლოდ ერთი შესაკრები. ასეთ პირობებში ამბობენ, რომ დამყარდა რეგულარული რეჟიმი. იგი განისაზღვრება ფორმულით

$$u(t, x) \approx \frac{4u_0}{\pi} e^{-a^2 \pi^2 l^{-2} t} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

ამოცანა 3. დავწეროთ სითბოგამტარებლობის განტოლება ცილინდრისათვის.

ამოხსნა. მოცემულია V ცილინდრი h სიმაღლით და ფუძის რადიუსით r_0 . ჩავთვალოთ, რომ ცილინდრის ღერძი მიმართულია Oz ღერძის გასწვრივ და მისი ფუძე მდებარეობს xOy სიბრტყეზე. ასეთ პირობებში სითბოგამტარებლობის განტოლებას აქვს სახე:

$$u_t = a^2 \Delta u, \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad (1)$$

$$0 \leq r < r_0, 0 < z < h, t > 0.$$

შემოვიტანოთ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა
 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z.$

გვექნება ტოლობა

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}$$

და (1) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$u_t = a^2 (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz}). \quad (2)$$

ამრიგად, საძიებელი $u(t, x, y, z)$ არის ოთხი ცვლადის ფუნქცია და მაშასადამე (2) არის სამგანზომილებიანი სივრცეში განტოლება ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში.

ვთქვათ, ვეძებთ რადიანულად სიმეტრიულ ამონახსნს, ე.ი. ისეთ ამონახსნს, რომელიც დამოკიდებული არ არის φ -ზე. მაშინ $u_{\varphi\varphi} \equiv 0$ და ამრიგად, (2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$u_t = a^2 (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zz}), \quad (3)$$

$$0 \leq r < r_0, 0 < z < h, t > 0.$$

ამოვხსნათ (3) განტოლება ცვლადთა განცალკევების მეთოდით.

ვთქვათ,

$$u(t, r, z) = T(t)v(r, z).$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (3)-ში და მოვახდინოთ განტოლების გარდაქმნა უკვე ცნობილი მეთოდით:

$$T'v = a^2 (v_{rr} + \frac{1}{r} Tv + Tu_{zz}) \Rightarrow \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + v_{zz}}{v}.$$

ამის შემდეგ ორივე მხარე გავუტოლოთ $-\lambda^2$ და მივიღებთ ორ განტოლებას:

$$T'(t) + a^2 T(t) + \lambda^2 = 0, \quad (4)$$

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + v_{zz} + \lambda^2 v = 0. \quad (5)$$

(5)-ის მიმართ კვლავ იგივე მეთოდი გამოვიყენოთ. დავუშვათ $v(r, z) = R(r)Z(z)$. (5) მიიღებს სახეს:

$$R''(r)Z(z) + \frac{1}{r} R'(r)Z(z) + R(r)Z''(z) + \lambda^2 R(r)Z(z) = 0.$$

უკანასკნელი ტოლობის ყველა წევრი გავყოთ $R(r)Z(z)$ -ზე. ცვლადთა განცალკევების შემდეგ ორივე მხარე გავუტოლოთ $-\tau^2$ და გადავწეროთ ჩვენთვის ხელსაყრელი სახით:

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} = -\tau^2 \Rightarrow R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \tau^2 R(r) = 0, \quad (6)$$

$$-\frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda^2 = -\tau^2 \Rightarrow Z''(z) + (\lambda^2 - \tau^2)Z(z) = 0. \quad (7)$$

ამრიგად, მიღებული (4), (6), (7) განტოლებები პარამეტრზე დამოკიდებული წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებია, λ და τ განისაზღვრებიან შესაბამისი შტურმ-ლიუვილის ამოცანიდან (რომელიც თავის მხრივ განტოლების საწყისი და სასაზღვრო პირობებიდან მიიღება). (4) და (7) განტოლებები მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებია და მათი ზოგადი ამონახსნი ადვილად იწერება. (6) კი ბესელის განტოლებაა, რომლის ზოგადი ამონახსნია

$$R(r) = c_1 J(0, \tau r) + c_2 Y(0, \tau r)$$

ფუნქცია, სადაც $J(0, \tau r)$ და $Y(0, \tau r)$ შესაბამისად ბესელის პირველი და მეორე გვარის ფუნქციებია, ხოლო τ კი - პარამეტრია.

ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. იპოვეთ კოშის ამოცანის ამონახსნი

$$1) \quad 4 \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = e^{2x-x^2}. \quad \text{პასუხი: } u(t, x) = (1+t)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2x-x^2+t}{1+t}}.$$

$$2) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = x e^{-x^2}. \quad \text{პასუხი: } u(t, x) = x(1+4t)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{x^2}{1+4t}}.$$

$$3) \quad 4 \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = \sin x e^{x^2} \quad \text{პასუხი: } u(t, x) = (1+t)^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{x}{1+t} e^{\frac{4x^2+t}{4(1+t)}}.$$

2. ამოხსენით შერეული ამოცანა

$$1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 5, t > 0; \quad u(0, t) = u(5, t) = 0; \quad u(x, t) = 1.$$

$$\text{პასუხი: } u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k) e^{-\left(\frac{3k\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{5}$$

$$2) \quad 1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, t > 0; \quad u_x(3, t) = 0; \quad u(x, 0) = x.$$

$$\text{პასუხი: } u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6(-1)^k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} e^{-\frac{4\pi^2 \left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{9} t} \sin \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x}{3}.$$

3. კოშის ამოცანის ამონახსნი ერთგანზომილებიანი სითბოგამტარებლობის არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

სადაც f და u_0 მოცემული ფუნქციებია, მოიცემა ფორმულით:

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \\ + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau.$$

ამ ფორმულის გამოყენებით ამოხსენით კოშის შემდეგი ამოცანები.

- 1) $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + t + e^t, \quad u|_{t=0} = 2.$ პასუხი: $u(t, x) = 1 + e^t + \frac{t^2}{2}.$
- 2) $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + 3t^2, \quad u|_{t=0} = \sin x.$ პასუხი: $u(t, x) = t^3 + e^{-t} \sin x.$

17 ელიფსური განტოლებები

17.1 ლაპლასის განტოლება

სხეულში სითბოს გავრცელებას ეწოდება *სტაციონალური*, თუ სხეულის ყოველ წერტილში ტემპერატურა დამოკიდებული არ არის t დროზე. ამ შემთხვევაში $u_t = 0$ და სითბოგამტარებლობის $u_t = \Delta u$ განტოლება გადადის $\Delta u = 0$ ლაპლასის განტოლებაში. ლაპლასის განტოლების ამონახსნს *ჰარმონიული ფუნქცია* ეწოდება. $\Delta u = 0$ განტოლება დროს არ შეიცავს, ამიტომ მისთვის საწყისი პირობა არ მოიცემა. თუ V სხეულის σ საზღვარზე მუდმივი f ტემპერატურაა შენარჩუნებული, მაშინ სხეულის შიგა ნაწილში მყარდება გარკვეული ტემპერატურული წონასწორობა. შესაბამის მათემატიკურ ამოცანას *დირიხლეს*, ანუ *პირველი სასაზღვრო ამოცანა* ეწოდება და აქვს სახე $\Delta u = 0$; $u|_{\sigma} = f$. თუ სხეულის ზედაპირზე ტემპერატურა ცნობილი არ არის, მაგრამ მოცემულია სითბოს ნაკადი სხეულის ზედაპირის ყოველ წერტილში, რომელიც ნორმალის გასწვრივ წარმოებული პროპორციულია, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია *მეორე სასაზღვრო*, ანუ *ნეიმანის* ამოცანა: $\Delta u = 0$, $\partial u / \partial n|_{\sigma} = g$.

ლაპლასის განტოლება ერთ-ერთი ცენტრალური განტოლებაა, რის გამოც დავიწყეთ ზოგადი შემთხვევით. n -განზომილებიან ლაპლასის განტოლებს აქვს სახე

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

სადაც საძიებელი u ფუნქცია n დამოუკიდებელ ცვლადზეა დამოკიდებული. ამ განტოლებას მრავალი ამონახსნი აქვს. მაგალითად, როდესაც $n = 2$ და f კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციაა $f_1(x, y)$ და $f_2(x, y)$ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილებით, მაშინ ისინი ორივე აკმაყოფილებს ორგანზომილებიან ლაპლასის განტოლებას. ამრიგად, თუ რაიმე შეზღუდვას არ დავადებთ განტოლების საძიებელ ამონახსნს, ვიღებთ ფუნქციათა საკმაოდ ფართო კლასს. როგორც აღვნიშნეთ, ამონახსნთა ამ კლასისათვის სპეციალური სახელიც კი არსებობს და მათ ჰარმონიული ფუნქციები ეწოდებათ. დირიხლესა და ნეიმანის ზემოთ მოყვანილი პირობები ჰარმონიულ ფუნქციათა კლასიდან გამოყოფენ ერთ კონრეტულ ჰარმონიულ ფუნქციას. დავსვათ ასეთი ამოცანა:

ამოცანა. ვიპოვოთ ლაპლასის განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც დამოკიდებულია არგუმენტის $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ სიგრძეზე და დამოკიდებული არ არის $x_1, x_2, \dots, x_n$ კოორდინატებზე. ანუ გვპინტერესებს

ისეთი ჰარმონიული ფუნქციის პოვნა, რომელიც ნებისმიერ r რადიუსიან სფეროზე მუდმივ მნიშვნელობას იღებს და ეს მნიშვნელობა იცვლება r -ის ცვლილებასთან ერთად.

ამრიგად, საძიებელი ფუნქცია ერთ r ცვლადზეა დამოკიდებული: $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(r)$. ვიპოვოთ $f(r)$ -ის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x_j} = \frac{df(r)}{dr} \frac{dr}{dx_j} = \frac{df(r)}{dr} \frac{x_j}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_j^2} = \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \frac{x_j^2}{r^2} + \frac{df(r)}{r dr} - \frac{x_j^2 df(r)}{r^3 dr}.$$

შედეგი ჩავსვათ ლაპლასის განტოლებაში:

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 \left[\frac{d^2 f(r)}{r^2 dr^2} - \frac{df(r)}{r^3 dr} \right] + n \frac{df(r)}{r dr} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{df(r)}{dr} = 0.$$

მივიღეთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნა და ამონახსნთა ყოფაქცევა ჩვენთვის ცნობილია

$$f(r) = c_1 + c_2 \ln r, \text{ როდესაც } n = 2$$

და

$$f(r) = c_1 + c_2 r^{2-n}, \text{ როდესაც } n > 2.$$

მაშასადამე მივიღეთ, რომ

$$u(x_1, x_2) = c_1 + c_2 \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

და

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 + c_2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1-\frac{n}{2}},$$

ნებისმიერი $n > 2$ -სათვის., სადაც c_1, c_2 ნებისმიერი კონსტანტებია.

ძირითადად, ჩვენი განხილვის საგანი იქნება ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანები ლაპლასის განტოლებისათვის. ამ შეთხვევაში კი მოსახერხებელია არა დეკარტულ, არამედ პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში მუშაობა, რის გამოც პირველ რიგში გადავწეროთ ორგანზომილებიანი ლაპლასის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში.

ეს ნიშნავს, რომ მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $(x, y) \rightarrow (r, \varphi)$

ფორმულით $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. მაშინ $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg \frac{y}{x}$,

საიდანაც

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\cos \varphi}{r}.$$

ორი ცვლადის რთული ფუნქციის გაწარმოება ახალ კოორდინატებში მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

ამგვარად,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}. \end{aligned}$$

მეორე რიგის დიფერენციალის გამოსათვლელად კიდევ ერთხელ გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი. გვექნება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{და} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

გამოვთვალოთ $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ და $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\sin \varphi}{r} - \\ &\quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}, \end{aligned}$$

ამის შემდეგ პირველი ტოლობა გავამრავლოთ $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi$, ხოლო მეორე კი $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin \varphi$ -ზე, შევკრიბოთ შედეგები და შევაერთოთ მსგავსი წევრები, მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2}. \quad (1)$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2}. \quad (2)$$

შევკრიბოთ (1) და (2) ტოლობები და მივიღებთ ლაპლასის განტოლებას პოლარულ კოორდინატებში:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

შენიშვნა. უკანასკნელ განტოლებას ზოგჯერ (თვითშეუღლებული ფორმა)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

სახითაც წერენ.

17.2 არაკორექტული ამოცანები. ადამარის მაგალითი

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ანალოგიურად კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში განიხილება ამოცანის (დიფერენციალური განტოლება საწყის ან სასაზღვრო (ან ორივე ერთად) პირობებთან ერთად) კორექტულობის საკითხი. გავიხსენოთ, რომ ამოცანა კორექტულია თუ მას აქვს ერთადერთი ამონახსნი ფუნქციათა გარკვეულ კლასში და ეს ამონახსნი უწყვეტადაა დამოკიდებული საწყის, სასაზღვრო პირობებზე და კოეფიციენტებზე (ამოცანის შესაბამისად). ვაჩვენეთ, რომ კოშის ამოცანას სიმის რხევის განტოლებისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი. მტკიცდება, რომ ამონახსნი უწყვეტადაა დამოკიდებული საწყის პირობებზე და ამრიგად, კოშის ამოცანა კორექტულია სიმის რხევის განტოლებებისათვის.

ახლა განვიხილოთ კოშის ამოცანა ლაპლასის განტოლებებისათვის

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, t > 0, -\infty < x < +\infty, u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{1}{n} \sin nx, \quad (1)$$

სადაც n ნატურალური რიცხვია.

ამ ამოცანის ამონახსნია

$$u(x, t) = \frac{1}{n^2} \sin nx \sin nt. \quad (2)$$

რადგან

$$\left| \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \right| = \left| \frac{1}{n} \sin nx \right| \leq \frac{1}{n},$$

ამიტომ საკმაოდ დიდი n -სათვის $u_t(x, 0)$ -ის აბსოლუტური მნიშვნელობა რადინდ მცირეა ნებისმიერი x -სათვის. მეორეს მხრივ, (1) ამოცანის (2) ამონახსნის აბსოლუტური მნიშვნელობა რადინდ დიდია ნებისმიერი საკმაოდ პატარა t -სათვის, როდესაც n საკმაოდ დიდია. ვთქვათ, ვიპოვეთ ზემოთ მოყვანილი ლაპლასის განტოლების $u_0(x, t)$ ამონახსნი შემდეგი კოშის ამოცანისათვის:

$$u|_{t=0} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1.$$

მაშინ იმავე განტოლების ამონახსნია

$$u|_{t=0} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1 + \frac{1}{n} \sin nx,$$

საწყისი პირობების შემთხვევაში იქნება

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \frac{1}{n^2} sh nt \cdot \sin nt$$

ფუნქცია, რომელიც საწყისი პირობების მცირე ცვლილების შემთხვევაში რაგინდ დიდ მნიშვნელობა იღებს $t = 0$ წრფის მახლობლობაში.

მაშასადამე, კომის ამოცანა ლაპლასის განტოლებისათვის არ არის კორექტული.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითი, რომლითაც ვაჩვენეთ ლაპლასის განტოლებისათვის კომის ამოცანის არაკორექტულობა ეკუთვნის ფრანგ მათემატიკოს ჟ. ადამარს.

ადამარის მაგალითი არაა ერთადერთი არაკორექტული ამოცანა. არაკორექტულია აგრეთვე სასაზღვრო ამოცანა $u_{xy} = 0$ ჰიპერბოლური განტოლებისათვის, რომლის თანახმად საძიებელია ამ განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც მართკუთხედის გვერდებზე მოცემულ (ოთხ) ფუნქციებს ემთხვევა. მოცემული განტოლების ამონახსნია $u(x, y) = f(x) + g(y)$, სადაც f, g ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციებია. $u_y = g'(y)$ და $u_x = f'(x)$ ფუნქციებმა შესაბამისად მართკუთხედის $x = const$ და $y = const$ საპირისპირო გვერდებზე უნდა მიიღონ ტოლი მნიშვნელობები, რაც იმას ნიშნავს, რომ მართკუთხედის გვერდებზე ნებისმიერად მოცემული სასაზღვრო პირობების შეთხვევაში ამოცანას ამონახსნი ვერ ექნება. ე.ი. ასეთი სახით დასმული სასაზღვრო ამოცანა ჰიპერბოლური განტოლებისათვის კორექტული არ არის. ამოცანას ამონახსნი ექნება იმ შეთხვევაში, თუ სასაზღვრო პირობებს დავადებთ საძიებელ ფუნქციას მართკუთხედის მხოლოდ ორ მეზობელ გვერდზე.

17.3 ლაპლასის განტოლება რგოლისთვის

გამოყენების თვალსაზრისით მნიშვნელოვანია სიბრტყეზე

$$\Delta u = 0 \quad \text{ანუ} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

ლაპლასის განტოლება, რომლის ამონახსნებს ჰარმონიული ფუნქციები ეწოდება.

განვიხილოთ რგოლის მსგავსი K არე სიბრტყეზე, რომელიც ვთქვათ შემოსაზღვრულია R_1 და R_2 რადიუსის მქონე წრეწირებით, რომელთა ცენტრები კოორდინატთა სათავეშია. ვიგულისხმობთ, რომ $R_1 < R_2$.

დავსვათ ასეთი ამოცანა:

ვიპოვოთ $u(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც K რგოლის შივნიტ აკმაყოფილებს ლაპლასის (1) განტოლებას.

ამოცანის ამოსახსნელად გადავიდეთ პოლარულ კოორდინატთა სისტემაზე: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. K რგოლი ახალ კოორდინატთა სისტემაში მოიცემა $R_1 < r < R_2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ მარტივი თანადობით. საჭიროა ლაპლასის ოპერატორიც გადაიწეროს ახალ კოორდინატებში. ლაპლასის $\Delta u = 0$ განტოლებას პოლარულ კოორდინატებში, როგორც აღვნიშნეთ, აქვს სახე:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2)$$

განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ცვლადთა განცალკევების მეთოდი. ამრიგად, განტოლების ამონახსნი ვეძებთ $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ ნამრავლის სახით, იმ დაშვებით, რომ $R_1 < r < R_2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. ჩავსვათ $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ ფუნქცია (2) განტოლებაში და გვექნება:

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = 0.$$

ამ განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $R(r)\Phi(\varphi)/r^2$ და შედეგი გავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}. \quad (3)$$

ამ განტოლების მარცხენა მხარე მხოლოდ r ცვლადზეა დამოკიდებული, მაშინ როდესაც მარჯვენა მხარე φ ცვლადზე. მაშასადამე, მათი ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც ორივე ერთიდაიგივე მუდმივის ტოლია. აღვნიშნოთ ეს მუდმივი λ^2 -ით. (3) განტოლებიდან მიიღება ორი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, რომელთა მცირე გარდაქმნით მივიღებთ:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi), \quad (4)$$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda^2 R(r) = 0, \quad \lambda \geq 0. \quad (5)$$

(4) ამოცანაში სასაზღვრო პირობა აღნიშნავს იმ ფაქტს, რომ $\Phi(\varphi)$ ფუნქციის მნიშვნელობა ყოველი 2π -ს შემდეგ მეორდება. სხვა სიტყვებით, იძებნება პერიოდული ამონახსნი. (4) ამოცანას ვხსნით უკვე ცნობილი სქემის საშუალებით. თავიდან ჩავთვალოთ, რომ λ პარამეტრი დადებითია. დიფერენციალური განტოლების $k^2 + \lambda^2 = 0$ მახასიათებელი განტოლებიდან ვპოულობთ მახასიათებელ ფესვებს: $k = \pm i\lambda$, რომლითაც ვავებთ დიფერენციალური განტოლების $\Phi(\varphi) = C_1 \cos \lambda \varphi + C_2 \sin \lambda \varphi$ ზოგად

ამონახსნს. ჩავსვით იგი სასაზღვრო პირობებში და მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას C_1 და C_2 მუდმივების მიმართ:

$$\begin{cases} C_1(\cos 2\pi\lambda - 1) + C_2 \sin 2\pi\lambda = 0, \\ -C_1 \sin 2\pi\lambda + C_2(\cos 2\pi\lambda - 1) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

მიღებული სისტემა ერთგვაროვანია, ამიტომ არანულოვანი ამონახსნის არსებობისათვის საჭიროა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლი იყოს. ე.ი.

$$\begin{vmatrix} \cos 2\pi\lambda - 1 & \sin 2\pi\lambda \\ -\sin 2\pi\lambda & \cos 2\pi\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

საიდანაც ვღებულობთ განტოლებას $\cos 2\pi\lambda = 1$, რომელსაც ამონახსნთა თვლადი რაოდენობა აქვს $\lambda_n = n$, სადაც $n = 1, 2, 3, \dots$. C_1 და C_2 მუდმივების პოვნის მიზნით $\lambda_n = n$ უკვე ნაპოვნი მნიშვნელობები ჩავსვით (6) სისტემაში და მივიღებთ იგივეობას $0 = 0$, რაც ნიშნავს, რომ (6)-ის ამონახსნებია ნებისმიერი C_1 , C_2 რიცხვები. ხაზი გავუსვით იმ გარემოებას, რომ ეს მუდმივები იცვლებიან $\lambda_n = n$ პარამეტრების ცვლილებასთან ერთად, რის გამოც (4) ამოცანის ამონახსნი დაიწერება სახით

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ახლა დავუშვათ $\lambda = 0$. ეს შემთხვევა განსაკუთრებულ შესწავლას მოითხოვს. (4) ამოცანა მიიღებს სახეს:

$$\Phi''(\varphi) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi).$$

$\Phi''(\varphi) = 0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე $\Phi(\varphi) = A_0 + B_0\varphi$. იმისათვის, რომ ამ ფუნქციამ პერიოდულობის პირობა დააკმაყოფილოს, აუცილებელია ჩავთვალოთ, რომ $B_0 = 0$. ამრიგად, ამონახსნი იქნება $\Phi(\varphi) = A_0$ მუდმივი ფუნქცია. მიღებული შედეგი ხშირად გამოიყენება მათემატიკური ფიზიკის სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნის დროს, ამიტომ ჩამოვაყალიბოთ იგი თეორემის სახით:

თეორემა 1. (4) პერიოდული სასაზღვრო ამოცანას აქვს ამონახსნთა თვლადი $\lambda_n^2 = n^2$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ საკუთრივი რიცხვები და თვლადი საკუთრივი

$$\Phi(\varphi) = A_0, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

ფუნქციები.

გადავიდეთ ახლა (5) ამოცანის ანალიზზე. (5) დიფერენციალური განტოლება წარმოადგენს ეილერის განტოლებას. ეილერის განტოლების ამონახსნი როდესაც $\lambda > 0$ საჭიროა ვეძებოთ $R(r) = r^\alpha$ სახით, რომლის

განტოლებებში ჩასმის და გამარტივების შემდეგ მივიღებთ ალგებრულ განტოლებას:

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \lambda.$$

აქედან ვიღებთ ეილერის განტოლების კერძო ამონახსნებს $r^\lambda, r^{-\lambda}$ და ზოგად $R(r) = Cr^\lambda + Dr^{-\lambda}$, $\lambda > 0$ ამონახსნს. კვლავ საჭიროა ცალკე განვიხილოთ შემთხვევა $\lambda = 0$. ამ დროს ეილერის განტოლებას აქვს სახე $r^2 R'' + rR' = 0$. $R' = z$ ცვლადის გარდაქმნას მივყავართ პირველი რიგის განტოლებამდე, რომელიც იხსნება ცვლადების განცალკევების მეთოდით:

$$rz' + z = 0 \Rightarrow r \frac{dz}{dr} + z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} + \frac{dr}{r} = 0 \Rightarrow \ln |z| + \ln r = \ln |C|.$$

აქედან $zr = C \Rightarrow R' = z = C/r$, რაც ნიშნავს, რომ ზოგად ამონახსნს აქვს სახე: $R(r) = C \ln r + D$. ამრიგად, (5) ეილერის განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$R(r) = C \ln r + D, \text{ როდესაც } \lambda = 0,$$

$$R(r) = Cr^\lambda + Dr^{-\lambda}, \text{ როდესაც } \lambda > 0.$$

გავიხსენოთ, რომ (4),(5) განტოლებები უნდა ამოიხსნას ერთიდაიგივე λ პარამეტრის მნიშვნელობისათვის. რადგან პერიოდული ამონახსნები (4) ამოცანისათვის მიღებულია მხოლოდ $\lambda = n$ -სათვის, ამიტომ (5) ამოცანის ამონახსნები საჭიროა პარამეტრის ამ მნიშვნელობისათვის ვიპოვოთ, რაც მოგვცემს ფუნქციათა თვლად რაოდენობას

$$\begin{cases} R_0(r) = C_0 \ln r + D_0, & n = 0, \\ R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (8)$$

(4)-(5) ამოცანების ამონახსნები წარმოდგენილი (7), (8) ფორმულებით, ჩავწეროთ ყოველი $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ნომრისათვის:

$$\begin{cases} n = 0: R_0(r) = C_0 \ln r + D_0, & \Phi_0(\varphi) = A_0, \\ n > 0: R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, & \Phi_n(\varphi) = A_1 \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \end{cases}$$

ძნელი არ არის იმის შემოწმება, რომ ზემოთ ამოწერილი ფუნქციების წყვილ-წყვილად გადამრავლებით მივიღებთ ლაპლასის განტოლების კერძო ამონახსნებს რგოლისათვის. ეს ნამრავლები გადავწეროთ შემდეგი ხელსაყრელი ფორმით:

$$\begin{cases} u_0(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r, & n = 0, \\ u_n(r, \varphi) = (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi, & n > 0. \end{cases} \quad (9)$$

სუპერპოზიციის პრინციპის თანახმად, ყველა (9) სახის კერძო ამონახსნების ჯამი მოგვცემს რგოლში ლაპლასის განტოლების ზოგად ამონახსნს იმ შემთხვევაში თუ

$$u(r, \phi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left((a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\phi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\phi \right) \quad (10)$$

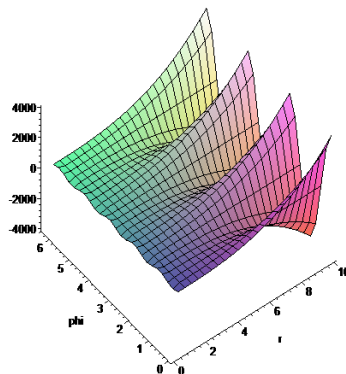
მწკრივი კრებადია. ამ მწკრივის კრებადობის საკითხი შეისწავლება ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში. გავიხსენოთ, რომ (10)-ის კრებადობა უწყვეტი ფუნქციისაა კენ ჯერ კიდევ არ იძლევა იმის გარანტიას, რომ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადი იქნება. ფუნქციის დიფერენცირებადობა კი აუცილებელია ამონახსნის ჩასასმელად ლაპლასის განტოლებაში. ამის გამო (10) მწკრივი ამოცანის განზოგადებული ამონახსნია. ცხადია, კრებადობის საკითხი არ დაისმება, თუ (9) კერძო ამონახსნების სასრულ ჯამს განვიხილავთ. ყოველი ასეთი სასრული ჯამი ლაპლასის განტოლების კლასიკური ამონახსნია ეგრეთ წოდებულ ზღვრულ რგოლში:

$$K = \{0 < r < \infty, 0 \leq \phi < 2\pi\},$$

რადგან არსებობს მისი არამარტო მეორე, არამედ უსასრულო რიგის კერძო წარმოებულები. ლაპლასის განტოლების კლასიკური ამონახსნია, მაგალითად,

$$u(r, \phi) = \ln r + 4r^3 \cos 3\phi - \frac{2}{r^5} \sin 5\phi$$

ფუნქცია (შეამოწმეთ დამოუკიდებლად!). მისი გრაფიკი მოცემულია ნახ. 1-ზე. (r -სა და ϕ -ს მნიშვნელობები აღებულია K -დან).



ნახ.1.

17.4 დირიხლეს ამოცანა წრეში ლაპლასის განტოლებისათვის

განვიხილოთ ზემოთ მოყვანილის კერძო შემთხვევა, როდესაც რგოლი გადაგვარდება წრეში, რაც შეესაბამება შემთხვევას $R_1 = 0$. რგოლის დიდი რადიუსი აღენიშნება $R = R_2$ -ით.

$\Delta u = 0$, $u|_{r=R} = f(\varphi)$, სადაც f ცნობილი პერიოდული ფუნქციაა პერიოდით 2π , წარმოადგენს ლაპლასის განტოლებისათვის დირიხლეს ამოცანას წრეში.

პოლარულ კოორდინატებში ამოცანა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < r < R, \quad u|_{r=R} = f(\varphi). \quad (1)$$

გავიხსენოთ, რომ რგოლისათვის ამ ამოცანის ამონახსნი წინა პარაგრაფის (10) გამოსახულებით მოიცემოდა. (10) გამოსახულებაში შემავალი $\ln r$ და r^{-n} ფუნქციები წრეში ცენტრში შემოსაზღვრულები არ არიან. ფიზიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე ითვლება, რომ ასეთი ამონახსნების რეალიზება არ შეიძლება, რის გამოც მათ წინ მდგომი კოეფიციენტები 0-ს უნდა გავუტოლოთ. ამიტომ, წრისათვის ლაპლასის ამოცანის ამონახსნი იქნება

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos n\varphi + c_n r^n \sin n\varphi). \quad (2)$$

(2) გამოსახულებაში a_n და c_n კოეფიციენტების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ სასაზღვრო პირობებით. $r = R$ ჩასმის შემდეგ (2) გავუტოლოთ $f(\varphi)$ -ს და მივიღებთ:

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n R^n \cos n\varphi + c_n R^n \sin n\varphi).$$

დავწეროთ $f(\varphi)$ ფუნქციის დაშლა ფურიეს მწკრივად $[0, 2\pi]$ ინტერვალზე:

$$f(\varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi),$$

ფუნქციის ფურიეს მწკრივად დაშლის ერთადერთობიდან გამომდის, რომ

$$a_0 = f_0, \quad a_n R^n = f_n^c, \quad c_n R^n = f_n^s, \quad n = 1, 2, \dots,$$

საიდანაც ვპოულობთ: $a_n = \frac{1}{R^n} f_n^c$ და $c_n = \frac{1}{R^n} f_n^s$. ჩავსვათ a_n -სა და c_n -ს ეს მნიშვნელობები (2)-ში და გვექნება

$$u(r, \varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi). \quad (3)$$

f_0 , f_n^c , f_n^s კოეფიციენტები გამოითვლებიან კარგად ცნობილი ფორმულებიდან

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad f_n^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ f_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

დებულება 1. იმისათვის რომ წრეში ღირიხლეს ამოცანა ამოვხსნათ ლაპლასის განტოლებისათვის ფურიეს მეთოდით, საჭიროა გამოითვალოს მოცემული $f(\varphi)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები (4) ფორმულებიდან და ჩაისვას (3) გამოსახულებაში.

17.5 ღირიხლეს ამოცანა წრის გარეთ ლაპლასის განტოლებისათვის

განვიხილოთ კიდევ ერთი კერძო შემთხვევა, როდესაც რგოლი წრის გარე არეში გადაგვარდება, რაც ბუნებრივია შეესაბამება შემთხვევას $R_2 = \infty$. გარე რადიუსი აღენიშნოთ $R = R_1$ -ით. ლაპლასის განტოლებას ემატება სასაზღვრო პირობა $r = R$ რადიუსიანი წრეწირის საზღვარზე. ზოგადი ამონახსნის (10) ფორმულაში შემაჯავლი $\ln r$ და r^n ფუნქციები, როდესაც $r \rightarrow \infty$ უსასრულოდ იზრდება. ამიტომ ამ ფუნქციების წინ მდგომი კოეფიციენტები ღირიხლეს ამოცანის ამოხსნისას 0-ს უნდა გავუტოლოთ, რასაც მივყავართ ლაპლასის განტოლების შემდეგ ამონახსნამდე

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{r^n} \cos n\varphi + \frac{d_n}{r^n} \sin n\varphi \right). \quad (5)$$

(5) ფუნქციისათვის სასაზღვრო პირობების შესრულება ნიშნავს $r = R$ -ის ჩასმას მასში და $f(\varphi)$ -სათვის გატოლებას:

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{R^n} \cos n\varphi + \frac{d_n}{R^n} \sin n\varphi \right),$$

რომლის შედარება $f(\varphi)$ -ის ფურიეს

$$f(\varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi)$$

მწკრივთან გვაძლევს:

$$a_0 = f_0, \frac{b_n}{R^n} = f_n^c, \frac{d_n}{R^n} = f_n^s, \quad n = 1, 2, \dots$$

საიდანაც ვიღებთ: $b_n = R^n f_n^c$, $d_n = R^n f_n^s$. მათი ჩასმით (5) ზოგად ამონახსნში ვღებულობთ ამოცანის ამონახსნს:

$$u(r, \varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi),$$

რომლის კოეფიციენტები გამოითვლებიან (4) ფორმულიდან.

17.6 დირიხლეს ამოცანა რგოლში ლაპლასის განტოლებისათვის

დირიხლეს ამოცანა რგოლისათვის ყალიბდება შემდეგნაირად:

$$\Delta u \equiv u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad R_1 < r < R_2;$$

$$u|_{r=R_1} = f(\varphi), \quad u|_{r=R_2} = g(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (6)$$

მის ამოსახსნელად კვლავ ვიყენებთ ზოგად (10) ფორმულას. a_n, b_n, c_n, d_n კოეფიციენტები გამოითვლებიან

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = f_0 \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = g_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = f_n^c \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = g_n^c \end{cases}, \quad \begin{cases} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = f_n^s \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = g_n^s \end{cases} \quad (7)$$

განტოლებათა სისტემებიდან.

17.7 პუასონის განტოლება რგოლში

არაერთგვაროვანი ლაპლასის $\Delta u = F$ განტოლება პუასონის განტოლების სახელწოდებითაა ცნობილი. ჩვენ შევისწავლით ამ განტოლებას რგოლში, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი კონცენტრული r_1 და r_2 რადიუსების მქონე წრეწირებით ცენტრებით კოორდინატთა სათავეში. ვიგულისხმობთ, რომ $r_1 < r_2$. დავწეროთ პუასონის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში:

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = F(r, \varphi). \quad (1)$$

ლაპლასის განტოლების ანალოგიურად (1) განტოლების ამონახსნი ვეძებთ

$$u(r, \varphi) = A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(r) \cos n\varphi + B_n(r) \sin n\varphi) \quad (2)$$

მწკრივის სახით.

დავუშვათ (2) მწრივი შესაძლებელია გავაწარმოოთ წევრობრივად, მაშინ

$$\begin{aligned}u_r &= A_0'(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n'(r) \cos n\varphi + B_n'(r) \sin n\varphi), \\u_{rr} &= A_0''(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n''(r) \cos n\varphi + B_n''(r) \sin n\varphi), \\u_{\varphi\varphi} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 A_n(r) \cos n\varphi - n^2 B_n(r) \sin n\varphi).\end{aligned}$$

ეს ტოლობები შევიტანოთ (1)-ში და შედეგი გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\left(A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(A_n'' + \frac{1}{r} A_n' - \frac{n^2}{r^2} A_n \right) \cos n\varphi + \left(B_n'' + \frac{1}{r} B_n' - \frac{n^2}{r^2} B_n \right) \sin n\varphi \right) = F(r, \varphi)$$

გარდა ამისა, დავწეროთ $F(r, \varphi)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივად დაშლა φ ცვლადის მიმართ და r ჩავთვალოთ პარამეტრად:

$$F_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n^c(r) \cos n\varphi + F_n^s(r) \sin n\varphi) = F(r, \varphi).$$

უკანასკნელი ტოლობების ერთიდაიგივე სახის კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned}A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) &= F(r, \varphi), \\A_n''(r) + \frac{1}{r} A_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} A_n(r) &= F_n^c(r), \\B_n''(r) + \frac{1}{r} B_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} B_n(r) &= F_n^s(r).\end{aligned}\tag{4}$$

გავიხსენოთ ფურიეს კოეფიციენტების ფორმულა და გამოვიყენოთ იგი r პარამეტრზე დამოკიდებული $F(r, \varphi)$ ფუნქციისათვის $[0, 2\pi]$ ინტერვალზე:

$$\begin{aligned}F_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) d\varphi, \\F_n^c(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots \\F_n^s(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{5}$$

(4) დიფერენციალურ განტოლებებს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე აქვთ, ერთი რომელიმე ამონახსნის გამოსაყოფად საჭიროა დამატებითი პირობა. ჩვეულებრივ, ასეთი დამატებითი პირობები მოიცემა რგოლის საზღვარზე, ე.ი. $r = r_1$ და $r = r_2$ წრეწირებზე. ამ დამატებითი პირობებს, როგორც ვიცით, სასაზღვრო პირობა ეწოდება. სასაზღვრო პირობები მრავალნაირი შეიძლება იყოს, მაგალითისათვის განვიხილოთ შემდეგი:

$$\Delta u = F, \quad u|_{r=r_1} = f(\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=r_2} = g(\varphi), \quad (6)$$

რაც ნიშნავს, რომ მცირე რადიუსიან წრეწირზე ცნობილია თვითონ $u(r, \varphi)$ ფუნქცია, ხოლო დიდ წრეწირზე მოცემულია მისი წარმოებული ამ წრეწირის ნორმალის გასწვრივ. აქ იგულისხმება არის მიმართ გარე ნორმალი. გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ ნორმალის მითითებული მიმართულება აირჩევა ისე, რომ იგი ემთხვეოდეს r არგუმენტის ზრდის მიმართულებას. სხვა სიტყვებით, მართებულია ტოლობა: $\frac{\partial u}{\partial n}|_{r=r_2} = \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=r_2}$. პოლარულ კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის შემდეგ (1),(6) ამოცანა იღებს სახეს:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = F(r, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad (7)$$

$$u|_{r=r_1} = f(\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=r_2} = g(\varphi) \quad (8)$$

გავიხსენოთ, რომ (7) პუასონის განტოლების ამონახსნს ვეძებთ (2) მწკრივის სახით. ჩავსვათ ამ მწკრივში $r = r_1$ მნიშვნელობა და შედეგი გავუტოლოთ $f(\varphi)$ -ს (8) პირობის პირველი ტოლობის თანახმად:

$$A_0(r_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(r_1) \cos n\varphi + B_n(r_1) \sin n\varphi) = f(\varphi).$$

დავწეროთ აგრეთვე $f(\varphi)$ -ის ფურიეს მწკრივად დაშლა $[0, 2\pi]$ ინტერვალზე:

$$f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi) = f(\varphi).$$

უკანასკნელი ორი გამოსახულების შედარება გვაძლევს $r = r_1$ -სათვის შემდეგ ტოლობებს:

$$A_0(r_1) = f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \\ A_n(r_1) = f_n^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$B_n(r_1) = f_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots$$

ანალოგიურად ზემოთ თქმულისა, ჩავსვათ u_r -ში, რომელიც (3) ფორმულითაა წარმოდგენილი, $r = r_2$ მნიშვნელობა და შედეგი გავუტოლოთ $g(\varphi)$ -ს (8) სასაზღვრო პირობის მეორე ტოლობის თანახმად:

$$A_0'(r_2) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n'(r_2) \cos n\varphi + B_n'(r_2) \sin n\varphi) = g(\varphi).$$

პარალელურად ამისა, წარმოვადგინოთ $g(\varphi)$ ფურიეს მწკრივად $[0, 2\pi]$ ინტერვალზე:

$$g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n^c \cos n\varphi + g_n^s \sin n\varphi) = g(\varphi),$$

კვლავ ორი უკანასკნელი გამოსახულების შედარება $r = r_2$ -სათვის გვაძლევს ტოლობებს:

$$A_0'(r_2) = g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi,$$

$$A_n'(r_2) = g_n^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

$$B_n'(r_2) = g_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots$$

ზემოთთქმული შევაჯამოთ შემდეგ დებულებაში:

დებულება 1. იმისათვის, რომ რგოლში (6) სასაზღვრო ამოცანა ამოიხსნას ფურიეს მეთოდი, საჭიროა იგი გადაეწეროს პოლარულ კოორდინატებში, გამოვთვალოთ $F(r, \varphi)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $[0, 2\pi]$ ინტერვალზე (5) ფორმულით, გამოვთვალოთ აგრეთვე $f(\varphi)$ და $g(\varphi)$ ფურიეს კოეფიციენტები (9) და (10) გამოსახულებებიდან, შემდეგ ამოვხსნათ (4) ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება (9) და (10) თანადობებიდან აღებული სასაზღვრო პირობასთან ერთად და შედეგები შევიტანოთ (2) ზოგად ამონახსნში.

18 ჰელმჰოლცის განტოლება

ფიქსირებული ω სიხშირის აკუსტიკური რხევით პროცესს $\mathbf{R}^n$ -ში აღწერს განტოლება

$$\Delta u = -\omega^2 u, \quad (1)$$

რომელიც ჰელმჰოლცის განტოლების სახელწოდებითაა ცნობილი. თუ (1) განტოლების ფიზიკურ შინაარსს დავივიწყებთ, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $\omega = 0$, მაშინ (1) გადადის ლაპლასის განტოლებაში.

გადავწეროთ (1) განტოლება კოორდინატებში:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = -\omega^2 u, \quad (2)$$

სადაც $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. (2) (ან რაც იგივეა (1) განტოლება) არის ელიფსური განტოლება, ამიტომ მისთვის ისმება ყველა ის სასაზღვრო ამოცანები (დირიხლეს, ნეიმანის), რომლებიც, საზოგადოდ, ელიფსური განტოლებების შემთხვევაში გვაქვს. წინა პარაგრაფებიდან გამომდინარე, ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ (2) განტოლებას (შესაბამის სასაზღვრო პირობებში) გარკვეული $\omega \neq 0$ -სათვის ექნება ამონახსნი. ასეთი არანულოვანი ამონახსნი იქნება ლაპლასის ოპერატორის საკუთრივი ფუნქცია (მართლაც, (1) განტოლებას აქვს სახე: $(\Delta + \omega^2)u = 0$). რადგან არსებობს ელიფსური განტოლებების კვლევის ზოგადი თეორია და მათ შორის ამოხსნის მეთოდები (რაც ნაწილობრივ განვიხილეთ), (2) განტოლებაც, როგორც კერძო შემთხვევა, შესაძლებელია გამოკვლეული იქნას ამ მეთოდებით. მაგრამ, ზოგჯერ, გარკვეულ შეზღუდვების შემდეგ, (2) განტოლება დაიყვანილი ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე. ქვემოთ სწორედ ამ შემთხვევაზე შევჩერდებით.

დავუშვათ $u = v(wr) = v(\tau)$, სადაც $\tau = wr$, ხოლო

$$r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \quad \text{გამოვსახოთ} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \quad \text{ლაპლასის}$$

ოპერატორი ახალ ცვლადებში. ამისათვის საჭიროა ახალ ცვლადებში

$$\text{გამოვსახოთ } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, i = 1, \dots, n:$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(\tau) w \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(\tau) w \frac{x_i}{r} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v'(\tau) w \left[\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right] + \frac{x_i^2}{r^2} w^2 v''(\tau).$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v'(\tau) w \left[\frac{n}{r} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^3} \right] + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^2} w^2 v''(\tau).$$

უკანასკნელი გამოსახულების მარჯვენა მხარის გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$\Delta u = \frac{v'(\tau) w}{r} (n-1) + w^2 v''(\tau).$$

ამის შემდეგ (1) განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$v''(\tau) + \frac{(n-1)}{\tau} v'(\tau) + v(\tau) = 0. \quad (3)$$

მოვახდინოთ უცნობი ფუნქციის გარდაქმნა

$$v(\tau) = y(\tau) \tau^{\frac{1-n}{r}} \quad (4)$$

თანადობით და გადავწეროთ (3) განტოლება ახალი უცნობი $y(\tau)$ ფუნქციის მიმართ. ამისათვის საჭიროა ვიპოვოთ (4)-დან $v'(\tau)$ და $v''(\tau)$:

$$\begin{aligned} v'(\tau) &= y'(\tau) \tau^{\frac{1-n}{r}} + \frac{1-n}{r} \frac{\tau^{\frac{1-n}{r}}}{\tau} y(\tau) = \tau^{\frac{1-n}{r}} \left[y'(\tau) - \frac{n-1}{2\tau} y(\tau) \right], \\ v''(\tau) &= \frac{1-n}{r} \frac{\tau^{\frac{1-n}{r}}}{\tau} \left[y'(\tau) - \frac{n-1}{2\tau} y(\tau) \right] + \\ &+ \tau^{\frac{1-n}{r}} \left[y''(\tau) - \frac{n-1}{r} \frac{y'(\tau) \tau - y(\tau)}{\tau^2} \right] = \\ &= \tau^{\frac{1-n}{r}} \left[y''(\tau) - \frac{n-1}{r} \frac{y'(\tau)}{\tau} + \frac{(n-1)^2}{4\tau^2} y(\tau) - \frac{n-1}{r} \frac{y'(\tau)}{\tau} + \frac{(n-1)^2}{4\tau^2} y(\tau) \right] = \\ &= \tau^{\frac{1-n}{r}} \left[y''(\tau) - \frac{n-1}{\tau} y'(\tau) + \frac{(n-1)^2}{4\tau^2} y(\tau) + \frac{(n-1)}{4\tau^2} y(\tau) \right]. \end{aligned}$$

ჩავსვათ $v(\tau)$, $v'(\tau)$ და $v''(\tau)$ (3) განტოლებაში და მიღებული გამოსახულება გავყოთ საერთო $\tau^{\frac{1-n}{r}}$ მაშრავლზე. მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
& y''(\tau) - \frac{n-1}{\tau} y'(\tau) + \frac{(n-1)^2}{4\tau^2} y(\tau) + \frac{(n-1)}{2\tau^2} y(\tau) + \\
& + \frac{n-1}{\tau} y'(\tau) - \frac{(n-1)^2}{2\tau^2} y(\tau) + y(\tau) = \\
& = y''(\tau) + y(\tau) \left(\frac{(n-1)^2}{4\tau^2} + \frac{n-1}{2\tau^2} - \frac{(n-1)^2}{2\tau^2} + 1 \right) = \\
& = y''(\tau) + y(\tau) \left(1 + \frac{1}{\tau^2} \left(\frac{n^2-1}{2} - \frac{(n-1)^2}{4} \right) \right) .
\end{aligned}$$

უკანასკნელი გამოსახულების გამარტივების შემდეგ მივიღებთ განტოლებას:

$$y''(\tau) + \left(1 + \frac{(n-1)^2}{4\tau^2} \right) y(\tau) = 0 \quad (5)$$

(5) არის ბესელის განტოლება და მისი ზოგადი ამონახსნი სპეციალური ფუნქციებით გამოისახება.

ამრიგად, თუ შემოვისაზღვრებით (1)-ის $u = v(wr) = v(\tau)$ სახის ამონახსნების ძიებით, ანუ როგორც ამბობენ, თუ გვაინტერესებს ამოცანის მხოლოდ სფერულად სიმეტრიული ამონახსნები, მაშინ ჰელმჰოლცის განტოლება დაიყვანება ბესელის განტოლებაზე.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1.ჩვენეთ, რომ

$$K(x, y, \xi) = \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2}$$

აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას ნებისმიერი ξ -სათვის.

2. იპოვოთ $u \in C^{(2)}$, რომელიც აკმაყოფილებს

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ლაპლასის განტოლებას და სასაზღვრო პირობებს:

$u|_{y=0} = f(x)$, $u|_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} = 0$ შემოსაზღვრულია, როდესაც $y \geq 0, -\infty < x < \infty$.

მითითება. გამოიყენეთ წინა ამოცანა და სუპერპოზიციის ინტეგრალური ფორმა (თეორემა 1 წინა პარაგრაფიდან).

პასუხი: $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi.$

3. ამოხსენით რგოლში დირიხლეს შემდეგი ამოცანა

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad 4 < x^2 + y^2 < 9;$$

$$u|_{x^2+y^2=4} = x, \quad u|_{x^2+y^2=9} = y.$$

პასუხი: $u = \left(-\frac{4}{5}r + \frac{36}{5}r^{-1}\right) \cos \varphi + \left(\frac{9}{5}r - \frac{36}{5}r^{-1}\right) \sin \varphi.$

4. ამოხსენით წრეში დირიხლეს შემდეგი ამოცანა

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 < 4; \quad u|_{x^2+y^2=4} = x^2.$$

პასუხი: $u(x, y) = 2 + \frac{x^2 - y^2}{2}.$

5. იპოვეთ ერთეულ რადიუსიანი წრის (წრეწირის ცენტრია კოორდინატთა სათავე) შიგნით $u(\varphi, r)$ ჰარმონიული ფუნქცია ისეთი, რომ

1) $u(\varphi, r)|_{r=1} = \cos^2 \varphi.$ პასუხი: $u(\varphi, r) = \frac{1}{2}(1 + r^2 \cos 2\varphi).$

2) $u(\varphi, r)|_{r=1} = \sin^3 \varphi.$ პასუხი: $u(\varphi, r) = \frac{r}{4}(3 \sin \varphi - r^2 \sin 3\varphi).$

3) $u(\varphi, r)|_{r=1} = \cos^4 \varphi.$ პასუხი: $u(\varphi, r) = \frac{3}{8} + \frac{r^2}{2} \cos 2\varphi - \frac{r^4}{8} \cos 4\varphi.$

6. იპოვეთ R რადიუსის მქონე წრის (წრეწირის ცენტრია კოორდინატთა სათავე) შიგნით $u(\varphi, r)$ ჰარმონიული ფუნქცია ისეთი, რომ

1) $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = A \cos \varphi.$ პასუხი: $u(\varphi, r) = Ar \cos \varphi + c.$

2) $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = A \sin^3 \varphi$ პასუხი: $u(\varphi, r) = \frac{1}{4}(3r \sin \varphi - \frac{r^3}{3R^2} \sin 3\varphi) + c.$

7. აჩვენეთ, რომ თუ u და v აკმაყოფილებენ კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემას, მაშინ ისინი ჰარმონიულები არიან.

19 განტოლებათა ამოხსნის ოპერაციული მეთოდი

19.1 ინტეგრალური გარდაქმნები

უწყვეტი სპექტრის მქონე ოპერატორების შემთხვევაში მათემატიკური ფიზიკის განტოლებების ამოსახსნელად ხშირად მოსახერხებელია ინტეგრალური გარდაქმნების გამოყენება. ინტეგრალური გარდაქმნის დროს მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას შეესაბამება სხვა ფუნქცია, რომელიც მიიღება მოცემული ფუნქციისა და ბირთვის (რომელიც x -სა და რაიმე პარამეტრის ფუნქციაა) ნამრავლის ინტეგრებით. ამასთან ინტეგრალური გარდაქმნები შეიძლება იყოს ნამდვილი ან კომპლექსური, იმის შესაბამისად რა მნიშვნელობას იღებს პარამეტრი.

დავუშვათ $K(x, s)$, $a < x < \infty$, $b < s < \infty$ მოცემული, თავისი განსაზღვრის არეზე უწყვეტი ფუნქციაა. გარდა ამისა, დავუშვათ, A რაიმე ფუნქციონალური სივრცეა და $f(x) \in A$. თუ

$$F(s) = \int_a^\infty K(x, s) f(x) dx \quad (1)$$

ინტეგრალი არსებობს, ასეთ დროს ამბობენ მოცემულია $f(x)$ ფუნქციის $F(s)$ ინტეგრალური გარდაქმნა. ამასთან, $K(x, s)$ -ს ეწოდება ინტეგრალური გარდაქმნის ბირთვი (ან გული), x ცვლადზე დამოკიდებულ f ფუნქციას ეწოდება ორიგინალი, ხოლო s დამოუკიდებელი ცვლადის F ფუნქციას კი ტრანსფორმანტი. ამრიგად, (1) ინტეგრალური გარდაქმნა არის ინტეგრალური ოპერატორი A ფუნქციონალური სივრციდან B ფუნქციონალურ სივრცეში, რომელიც ყოველ $f(x)$ -ს შეუსაბამებს $F(s)$ და ეს შესაბამისობა (1) გამოსახულებითაა მოცემული. თუ ეს ოპერატორი შებრუნებადია და შებრუნებული ოპერატორი მოიცემა თანადობით

$$f(x) = \int_b^\infty M(x, s) F(s) ds, \quad (2)$$

ამ დროს $M(x, s)$ ფუნქციას უწოდებენ შებრუნებული გარდაქმნის ბირთვს. შებრუნებული ინტეგრალური ოპერატორის განსაზღვრის არე ჩვეულებრივ B ფუნქციონალური სივრცის ქვესივრცეა. შესაძლებელია A და B ფუნქციონალური სივრცეები ერთმანეთს ემთხვეოდეს, ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოცემულია $f(x)$ ფუნქციის $F(s)$ ინტეგრალური გარდაქმნა A -ში.

მოვიყვანოთ ინტეგრალური გარდაქმნის მაგალითები:

1. ფურიეს გარდაქმნა ეწოდება შემდეგ ინტეგრალურ გარდაქმნას

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx} dx, -\infty < s < \infty, \quad (3)$$

რომლის შებრუნებულ გარდაქმნას აქვს სახე:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{-isx} ds, -\infty < x < \infty. \quad (4)$$

ნათელია, რომ (3) და (4) გარდაქმნების ბირთვები შესაბამისად არიან e^{isx} და e^{-isx} .

2. ფურიეს ზემოთ მოყვანილი გარდაქმნის კერძო შემთხვევებია სინუს და კოსინუს ფურიეს გარდაქმნები, რომლებიც შემდეგი თანადობით მოიცემა:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)\sin(sx)dx, 0 < s < \infty; \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(x)\cos(sx)dx, 0 < s < \infty,$$

მათი შებრუნებული ინტეგრალური გარდაქმნები შესაბამისად არიან:

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(s)\sin(sx)ds, 0 < x < \infty; \quad f(x) = \int_0^{\infty} F(s)\cos(sx)ds, 0 < x < \infty.$$

აქვე აღვნიშნოთ, რომ განიმარტება აგრეთვე ფურიეს განზოგადებული გარდაქმნა ფორმულით:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) \frac{s \cos(sx) + h \sin(sx)}{\sqrt{s^2 + h^2}} dx, \quad 0 < s < \infty,$$

რომლის შებრუნებულია

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(s) \frac{s \cos(sx) + h \sin(sx)}{\sqrt{s^2 + h^2}} ds, \quad 0 < x < \infty.$$

მოყვანილი 2), 3) გარდაქმნები ნამდვილი გარდაქმნების მაგალითებია, რადგან s პარამეტრი ნამდვილ რიცხვთა რაიმე ინტერვალზე იცვლება და აქედან გამომდინარე ღარდაქმნებში მონაწილე ფუნქციები ნამდვილი ცვლადს ნამდვილ მნიშვნელობიანი ფუნქციებია.. კომპლექსური გარდაქმნის მაგალითებია ლაპლასისა და მელინის გარდაქმნები, რომლებსაც, საზოგადოდ, აქვთ სახე:

$$F(p) = \int_a^{\infty} K(x, p) f(x) dx, \quad (5)$$

სადაც a მოცემული რიცხვია, $p = \alpha + i\beta$ კომპლექსური პარამეტრია და მისი ცვლილების არეა D კომპლექსურ რიცხვთა ქვესიმრავლე, ხოლო K - კი გარდაქმნის ბირთვია, რომელიც a -სთან ერთად განსაზღვრავს გარდაქმნის სახეს. კერძოდ, თუ $K(x, p) = e^{-xp}$, $a = 0$, ხოლო D კი $\alpha = \alpha_1$ -ის

მარჯვნივ მდებარე ნახევარსიბრტყეა კომპლექსურ სიბრტყეზე, მაშინ (5) გარდაქმნას ეწოდება *ლაპლასის გარდაქმნა*. თუ $K(x, p) = e^{p-x}$, $a = 0$, D - კი არის ზოლი, მოთავსებული $\alpha = \alpha_1$ და $\alpha = \alpha_2$ პარალელურ წრფეებს შორის, მაშინ (5) გარდაქმნას ეწოდება *მელინის გარდაქმნა*.

ინტეგრალური გარდაქმნების საშუალებით იხსნება მათემატიკური ფიზიკის არაერთგვაროვანი განტოლებები გრინბერგის მეთოდით (არაერთგვაროვანი ამოცანების ამოხსნის ერთ-ერთი მეთოდი). ინტეგრალური გარდაქმნის გამოყენება კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების მიმართ ღროებით გამორიცხავს ერთ ცვლადს და ამოცანა დაიყვანება ერთი ცვლადით ნაკლები განტოლების ამოხსნაზე, ზოლო ორი ცვლადის შემთხვევაში - კი, ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე. ბუნებრივია, გარდაქმნილი განტოლების ამოხსნის შემდეგ საჭიროა აღვადგინოთ "დაკარგული" დამოუკიდებელი ცვლადი. ეს პროცედურა ზორციელდება ინტეგრალური განტოლების ამოხსნის საშუალებით, რომელიც, ზოგჯერ, მხოლოდ შებრუნებული ინტეგრალური გარდაქმნაა და მეტი არაფერი! რის გამოც ინტეგრალური გარდაქმნების მეთოდი ეფექტურია პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისთვის.

19.2 ლაპლასის გარდაქმნა

ლაპლასის გარდაქმნა ითვლება მათემატიკური ფიზიკის არასტაციონალური ამოცანების ამოხსნის ეფექტურ მეთოდად, რის გამოც მას დაწვრილებით განვიხილავთ და ყურადღებას გავამახვილებთ ამ გარდაქმნის მრავალხმრივ გამოყენებზე.

დავუშვათ $f(t)$, $t \in (0, \infty)$ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციაა და განვიხილოთ

$$\hat{f}(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt \quad (1)$$

სახის ინტეგრალი $\operatorname{Re}(z) > a$ კომპლექსური სიბრტყის ქვესიბრტყეზე, სადაც z კომპლექსური ცვლადია. თუ (1) ინტეგრალი არსებობს რომელიმე a -სათვის, მაშინ ამბობენ, რომ (1) ტოლობა განსაზღვრავს *ლაპლასის გარდაქმნას*. (1) თანადობით მოცემული გარდაქმნა არის ოპერატორის გარკვეულ ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის. იმ ფუნქციონალური სივრცის სტრუქტურას, რომელზედაც (1) ტოლობით მოცემული ოპერატორი ყოველთვის არსებობს (ე.ი. ინტეგრალს აზრი აქვს) ქვემოთ მოვიყვანოთ, მანამდე შევნიშნოთ, რომ მაგალითად, $f(t) = e^{t^2}$ ან $f(t) = \frac{1}{t}$

ფუნქციებისათვის (1) ინტეგრალი არ არსებობს (როგორც არ უნდა იყოს z), მაშინ როდესაც $f(t) = t^2$ ფუნქციისათვის არსებობს მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\operatorname{Re}(z) > 0$, ხოლო $f(t) = e^{zt}$ -სათვის კი როდესაც $\operatorname{Re}(z) > 2$.

ახლა შემოვიტანოთ ფუნქციონალური სივრცე, აღვნიშნოთ იგი S_α და ვუწოდოთ α მაჩვენებლით სასრულად ზრდად ფუნქციათა სივრცე. f ნამდვილი ცვლადის კომპლექსური ფუნქცია ეკუთვნის S_α -ს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. $f(t) = 0$, თუ $t < 0$;
2. f უწყვეტია ყველგან, გარდა იმ სასრული რაოდენობის წერტილებისა, სადაც მას შესაძლებელია ჰქონდეს პირველი გვარის წყვეტა.
3. არსებობს ისეთი $M > 0$ და $s \geq 0$ რიცხვები, რომ ყოველი $t \geq 0$ -სათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(t)| < Me^s. \quad (2)$$

$\{s\}$ სიმრავლის ქვედა საზღვარს -- α -ს, რომლისთვისაც სრულდება (2) უტოლობა, ეწოდება ზრდის მაჩვენებელი.

S_α სივრცეზე (1) თანადობით განსაზღვრულ ინტეგრალურ ოპერატორს ეწოდება ლაპლასის ინტეგრალური ოპერატორი და ჩაწერის მოხერხებულობისათვის ეს ოპერატორი და მისი შესაბამისი გარდაქმნა

$$\text{აღიშნება } L\text{-ით. ამრიგად, } Lf(t) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt.$$

ვთქვათ $Lf(t) = F(z)$. L გარდაქმნის შებრუნებული (შექცევული) გარდაქმნა $L^{-1}F(z)$ განიმარტება ფორმულით $f(t) = L^{-1}F(z) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt} dz$, რომელსაც რიმან-მელინის ფორმულა ეწოდება, სადაც $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt} dz = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} F(z)e^{zt} dz$, ხოლო $c > a$.

მოვიყვანოთ ლაპლასის გარდაქმნის ძირითადი თვისებები:

1. ლაპლასის გარდაქმნა წრფივია, ანუ თუ $Lf_1(t) = g_1(z)$ და $Lf_2(t) = g_2(z)$, მაშინ

$$L(af_1(t) + bf_2(t)) = ag_1(z) + bg_2(z)$$

სადაც a და b ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვებია.

2. თუ $Lf(t) = g(z)$, მაშინ $Lf(at) = \frac{1}{a}g\left(\frac{z}{a}\right)$, სადაც a

ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

3. თუ $Lf(t) = g(z)$, მაშინ $Lf(t-a) = e^{-za}g(z)$, სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

4. თუ $Lf(t) = g(z)$, მაშინ $L(e^{-at} f(t)) = g(z + a)$, სადაც a ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვია.

5. თუ $f(t)$ -სთან ერთად მისი $f'(t)$ წარმოებულიც S_α სივრცის ელემენტია და $Lf(t) = g(z)$, მაშინ $Lf'(t) = zg(z) - f(0)$, როდესაც $\operatorname{Re} z > \alpha$, სადაც $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. გარდა ამისა, თუ $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n)}(t) \in S_\alpha$, მაშინ

$$Lf''(t) = z^2 g(z) - zf(0) - f'(0),$$

$$Lf'''(t) = z^3 g(z) - z^2 f(0) - zf'(0) - f''(0),$$

$$Lf^{(n)}(t) = z^n g(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

ლაპლასის გარდაქმნის ეს თვისება გამოიყენება წრფივი არაერთგვაროვანი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად და ამოხსნის ამ მეთოდს *ოპერატორული მეთოდი* ეწოდება.

6. თუ $Lf(t) = g(z)$, მაშინ $L(-tf(t)) = g'(z)$, როდესაც $\operatorname{Re} z > \alpha$.

7. თუ $Lf(t) = g(z)$, მაშინ $L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_z^\infty g(\tau) d\tau$, როდესაც

$\int_0^\infty e^{-zt} \frac{f(t)}{t} dt$ ინტეგრალი არსებობს.

8. თუ $F(t) = \int_0^\infty f(\tau) d\tau$, მაშინ $LF(t) = \frac{g(z)}{z}$.

კომპლექსური ცვლადის $\hat{f}(z)$ ფუნქციის ანალიზური ხასიათი მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1. სასრულად ზრდად ფუნქციათა სივრციდან აღებული ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა არის კომპლექსური z ცვლადის ანალიზური ფუნქცია $\operatorname{Re} z \geq c$ ნახევარსიბრტყეზე.

თეორემაში მითითებული არე, რომელზედაც ლაპლასის ტრანსფორმანტი ანალიზურია აღვნიშნოთ D -თი: $D = \{z : \operatorname{Re}(z) \geq c\}$. D არის გარეთ, საზოგადოდ, (1) ინტეგრალი არ არსებობს. ლაპლასის გარდაქმნის მნიშვნელობას D არის გარეთ პოულობენ ანალიზური გაგრძელების საშუალებით. ნათელია, რომ ამ დროს შესაძლებელია მივიღოთ მრავალსახა ფუნქცია. იმ წერტილებს, სადაც ლაპლასის ტრანსფორმანტის გაგრძელება შეუძლებელია, ეწოდება განსაკუთრებული წერტილები. ლაპლასის გარდაქმნის ანალიზური გაგრძელება შესაძლებელია მაშინ, თუ

ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში აიღება. მაგალითად, თუ $f(t) = 1$ მუდმივი ფუნქციაა, მაშინ

$$Lf(t) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-zt} dt = \frac{e^{-zt}}{-z} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{z}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

$Lf(t) = \frac{1}{z}$ კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია ანალიზურად გაგრძელებადია მთელ კომპლექსურ სიბრტყეზე, გარდა კოორდინატთა $O = (0,0)$ სათავისა, რომელიც არის განსაკუთრებული წერტილი, კერძოდ, პირველი რიგის პოლუსი.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარე ისმის კითხვა, ანალიზურად გაგრძელებული ფუნქცია აკმაყოფილებს თუ არა რაიმე განტოლებას? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა თეორემა, რომელიც ანალიზური გაგრძელების პრინციპის სახელწოდებითაა ცნობილი.

თეორემა 2. *თუ რაიმე ფუნქცია აკმაყოფილებს რომელიმე ანალიზურ კოეფიციენტებიან განტოლებას, მაშინ მისი ანალიზური გაგრძელებაც აკმაყოფილებს ამ განტოლებას.*

ზემოთ მოყვანილი თეორემები მტკიცდება კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის გამოყენებით. მათ შორის, თეორემა 2 ანალიზურ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის ერთ-ერთი ცენტრალური საკითხია. ჩვენი შემდგომი მიზნებისათვის ლაპლასის გარდაქმნის ანალიზური თვისებები საჭირო არ არის. ზემოთ მოყვანილი ფაქტების მხოლოდ დამახსოვრება საკმარისია მომდევნო პარაგრაფში მოყვანილი მასალის ანალიზისათვის. თუმცა აქვე აღვნიშნავთ, რომ ინტეგრალის გამოსათვლელად კომპლექსური ანალიზის (მაგალითად, ნაშთთა თეორიის) მეთოდების გამოყენება ხელსაყრელია.

19.3 ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრება ოპერაციული მეთოდით

განვიხილოთ კოშის ამოცანა მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \quad a_0 \neq 0 \quad (1)$$

$$y|_{t=t_0} = y_0, \quad y'|_{t=t_0} = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}|_{t=t_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

ეს ამოცანა ლაპლასის გარდაქმნის საშუალებით ეფექტურად იხსნება მხოლოდ იმ დაშვებით, რომ არსებობს $f(t)$ და $y'(t)$ -ს ლაპლასის გარდაქმნები.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$a_0(t) y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t) y' + a_n(t) y = f(t), \quad a_0 \neq 0$$

ოპერაციულ მეთოდს ყოველთვის არ მიყვავართ სასურველ შედეგამდე, თუმცა ზოგჯერ ეს მეთოდი საკმაოდ ეფექტურია (იხ. მაგალითი 3).

დავუბრუნდეთ (1), (2) ამოცანას და დავუშვათ, რომ

$$\hat{y}(z) = \int_0^\infty y(t) e^{-zt} dt, \quad \hat{f}(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt. \quad (3)$$

მაშინ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y'(t) e^{-zt} dt &= \hat{y}' = z\hat{y} - y_0, \\ \int_0^\infty y''(t) e^{-zt} dt &= \hat{y}'' = z^2 \hat{y} - zy_0 - y'_0, \end{aligned} \quad (4)$$

... ..

$$\int_0^\infty y^{(n)}(t) e^{-zt} dt = \hat{y}^{(n)} = z^n \hat{y} - z^{n-1} y_0 - z^{n-2} y'_0 - \dots - y_0^{(n-1)}$$

ლაპლასის გარდაქმნის წრფივობის თვისების და (3), (4) ტოლობების გათვალისწინებით (1) განტოლება გადავა განტოლებაში:

$$\hat{y}(z)(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) - Q_{n-1}(z) = \hat{f}(z)$$

ანუ

$$\hat{y}(z) P_n(z) - Q_{n-1}(z) = \hat{f}(z), \quad (5)$$

სადაც $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ n -ხარისხის მრავალწევრია, ხოლო $Q_{n-1}(z)$ არის არაუმეტეს $n-1$ -ხარისხის მრავალწევრი, რომელიც (2) საწყისი პირობიდან მიიღება. (5)-დან ვპოულობთ:

$$\hat{y}(z) = \frac{\hat{f}(z) + Q_{n-1}(z)}{P_n(z)},$$

მაშასადამე,

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{y}(z) e^{zt} dz.$$

ინტეგრების L წრფე გადის $\hat{y}(z)$ ფუნქციის განსაკუთრებული წერტილების მარჯვნივ. თუ საწყისი პირობები ნულოვანია, ე.ი. თუ $y|_{t=0} = 0$, $y'|_{t=0} = 0, \dots, y^{(n-1)}|_{t=0} = 0$, მაშინ $Q_{n-1}(z) = 0$ და

$$y(z) = \frac{\hat{f}(z)}{P_n(z)} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\hat{f}(z) e^{zt}}{P_n(z)} dz.$$

(1), (2) ამოცანის ამოხსნის ამ მეთოდს *ოპერაციული მეთოდი* ეწოდება.

მოვიყვანოთ ოპერაციული მეთოდით კოშის ამოცანის ამოხსნის ორ მაგალითს მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის. მოყვანილი ამოცანების ამოხსნა ტრადიციული გზითაც შეიძლება, მიუხედავად ამისა, ოპერაციული მეთოდით განტოლების ამოხსნის თავისებურებების ჩვენების მიზნით მათ ამოხსნას დაწვრილებით განვიხილავთ.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

კოშის ამოცანის ამოხსნა.

დავუშვათ

$$\hat{y}(z) = \int_0^\infty y(t) e^{-zt} dt,$$

მაშინ

$$\int_0^\infty y'(t) e^{-zt} dt = \hat{y}'(z) = z\hat{y}(z) - 1,$$

$$\int_0^\infty y''(t) e^{-zt} dt = \hat{y}''(z) = z^2 \hat{y}(z) - z + 1.$$

მივიღებთ განტოლებას

$$\hat{y}(z)(z^2 + 3z + 2) = \frac{1}{z+3} + z + 2, \Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1}{z+1}$$

ხვეისაიდას ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{2} - e^{-2t} + \frac{e^{-3t}}{2} + e^{-t} = \frac{3e^{-t}}{2} - e^{-2t} + \frac{e^{-3t}}{2}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$y'' + 4y' = 2\sin(2t), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$$

კოშის ამოცანის ამონახსნი.

დავუშვათ

$$\hat{y}(z) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-zt} dt,$$

მაშინ

$$\int_0^{\infty} y''(t)e^{-zt} dt = \hat{y}''(z) = z^2 \hat{y}(z) + z,$$

ხოლო განტოლება კი მიიღებს სახეს

$$\hat{y}(z)(z^2 + 4) = \frac{4}{z^2 + 4} - z.$$

საიდანაც ვპოულობთ:

$$\hat{y}(z) = \frac{4}{(z^2 + 4)^2} - \frac{z}{z^2 + 4}.$$

ცნობილია, რომ $L^{-1}\left(\frac{z}{z^2 + 4}\right) = \cos(2t)$. $L^{-1}\left(\frac{z}{(z^2 + 4)^2}\right)$ -ის საპოვნელად

ვისარგებლოთ ნახევრის ფორმულით და ლაპლასის გარდაქმნის ცხრილით:

$L^{-1}\left(\frac{z}{z^2 + 4}\right) = \sin(2t)$, ამიტომ

$$L^{-1}\left(\frac{z}{(z^2 + 4)^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{2}{z^2 + 4} \cdot \frac{2}{z^2 + 4}\right) = \int_0^t \sin(2\tau) \sin(2(t-\tau)) d\tau.$$

მაგრამ

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin(2\tau) \sin(2(t-\tau)) d\tau &= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(4\tau - 2t) - \cos(2t)] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(4\tau - 2t)}{4} - \tau \cos(2t) \right]_0^t = \frac{\sin(2t)}{4} - \frac{t}{2} \cos(2t). \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$y(t) = \frac{\sin(2t)}{4} - \frac{t}{2} \cos(2t) - \cos(2t) = \frac{\sin(2t)}{4} - \frac{t+2}{2} \cos(2t).$$

მაგალითი 3.

ამოვხსნათ

ცვლადკოეფიციენტებიანი

დიფერენციალური განტოლება

$$tu'' + u' + tu = 0 \quad (1)$$

იმ დაშვებით, რომ $t=0$ წერტილში $u(t)$ და მისი პირველი წარმოებული შემოსაზღვრული ფუნქციებია.

ამოხსნა. (1) განტოლება გავამრავლოთ e^{-zt} -ზე და ვაინტეგრროთ 0 -დან $+\infty$ -მდე. მივიღებთ:

$$\int_0^{\infty} t u'' e^{-zt} dt + \int_0^{\infty} u' e^{-zt} dt + \int_0^{\infty} t u e^{-zt} dt = 0.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\hat{u} = \int_0^{\infty} u e^{-zt} dt,$$

მაშინ

$$\int_0^{\infty} t u e^{-zt} dt = -\frac{d}{dz} \int_0^{\infty} u e^{-zt} dt = -\frac{d\hat{u}}{dz},$$

$$\int_0^{\infty} \hat{u}' e^{-zt} dt = z\hat{u} - u|_{t=0},$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t u'' e^{-zt} dt &= -\frac{d}{dz} \int_0^{\infty} u'' e^{-zt} dt = -\frac{d\hat{u}''}{dz} = -\frac{d}{dz} (z^2 \hat{u} - zu|_{t=0} - u'|_{t=0}) = \\ &= z^2 \frac{d\hat{u}}{dz} - 2z\hat{u} + u|_{t=0}. \end{aligned}$$

მაშასადამე, (1) განტოლების მაგივრად მივიღეთ განტოლება:

$$z^2 \frac{d\hat{u}}{dz} - 2z\hat{u} + z\hat{u} - \frac{d\hat{u}}{dz} = 0 \Rightarrow (z^2 + 1) \frac{d\hat{u}}{dz} + z\hat{u} = 0 \quad (2)$$

მიღებული (2) განტოლება საწყის (1) განტოლებაზე უფრო მარტივია, რადგან იგი წარმოადგენს პირველი რიგის განცალკევად ცვლადებიან განტოლებას:

$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} + \frac{zdz}{z^2 + 1} = 0 \Rightarrow \ln(\hat{u}) + \frac{1}{2} \ln(z^2 + 1) = \ln(C) \Rightarrow \hat{u} = \frac{C}{\sqrt{z^2 + 1}}.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $C=1$, მაშინ

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{zt} dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = u(t) = J_0(t).$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ტოლობები:

$$L(J_0(at)) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

და

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right) = J_0(t).$$

19.4 ორიგინალის აღდგენა ტრანსფორმანტის საშუალებით

დავუშვათ ლაპლასის ტრანსფორმანტი $\hat{f}(z)$ რაციონალური ფუნქციაა და აქვს სახე:

$$\hat{f}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (1)$$

გარდა ამისა, ვთქვათ, $\deg Q(z) \geq \deg P(z)$ და $Q(z)$, $P(z)$ მრავალწევრებს არ აქვთ საერთო ნულები.

(1) რაციონალური ფუნქციის განსაკუთრებული წერტილებია $Q(z)$ მრავალწევრის $z_1, z_2, \dots, z_n$ ნულები, რომლებიც იქნებიან ლაპლასის შებრუნებული

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(z) e^{zt} dz$$

გარდაქმნის ინტეგრალქვეშა გამოსახულების პოლუსები. მაშინ

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} \hat{f}(z) e^{zt}.$$

თუ $z_1, z_2, \dots, z_n$ მარტივი პოლუსებია, მაშინ ნაშთთა თეორიის გამოყენებით მტკიცდება, რომ სამართლიანი შემდეგი ტოლობა:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P(z_k) e^{z_k t}}{Q'(z_k)}.$$

უკანასკნელ იგივეობას *ჰევისაიდას დაშლა* ეწოდება.

19.5 კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრება ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენებით

დავუშვათ $u = u(x, y)$. განვიხილოთ განტოლება

$$L_x(u) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b \frac{\partial u}{\partial t} - cu = F(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (1)$$

სადაც $L_x(u) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu \right)$, v, b, c მუდმივებია ან x -ის მიმართ
 ნამდვილი ფუნქციებია, p, p', q, r x -ის მიმართ უწყვეტი ფუნქციებია $[0, l]$
 -ზე, ამასთან $p, r > 0$.

(1) განტოლება ან ჰიპერბოლურია ან პარაბოლური, მისი ტიპი ამ
 ორიდან განისაზღვრება v -ს ნიშნის მიხედვით.

დავუშვათ x -ის მიმართ სრულდება I, II, III გვარის სასაზღვრო
 პირობები:

$$\text{I} \quad u|_{x=0} = f_0(t), \quad u|_{x=l} = f_l(t);$$

$$\text{II} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = f_0(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = f_l(t);$$

$$\text{III} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} - h_0 u \right|_{x=0} = f_0(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} + h_l u \right|_{x=l} = f_l(t).$$

გარდა სასაზღვრო პირობისა, დავუშვათ, ჰიპერბოლური განტოლებისათვის
 საწყის პირობას აქვს სახე:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x).$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\hat{u}(x, z) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-zt} dt.$$

(1) განტოლება გავამრავლოთ e^{-zt} -ზე და ვაინტეგრროთ 0 -დან ∞ -მდე.
 მივიღებთ:

$$\int_0^\infty L_x(u) e^{-zt} dt - \frac{1}{v^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} e^{-zt} dt - b \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} e^{-zt} dt - c \int_0^\infty u e^{-zt} dt = \int_0^\infty F(x, t) e^{-zt} dt.$$

აქედან

$$L_x(\hat{u}) - \frac{1}{v^2} \left[z^2 \hat{u} - zu|_{t=0} - \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \right] - b[z\hat{u} - u|_{t=0}] - c\hat{u} = \hat{F}(x, z), \quad (2)$$

სადაც

$$\hat{F}(x, z) = \int_0^\infty F(x, t) e^{-zt} dt.$$

(2) განტოლება შესაძლებელია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$L_x(\hat{u}) - \left[\frac{z^2}{v^2} + bz + c \right] \hat{u} = g(x, z), \quad (3)$$

სადაც $g(x, z) = \hat{F}(x, z) - \frac{z}{v^2} \varphi(x) - \frac{1}{v^2} \psi(x) - b\varphi(x)$ ცნობილი ფუნქციაა.

ზემოთ მოყვანილი I, II, III გვარის სასაზღვრო პირობები გარდაიქმნებიან შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \text{I}^* \quad & \hat{u}|_{x=0} = \hat{f}_0, \quad \hat{u}|_{x=l} = \hat{f}_l; \\ \text{II}^* \quad & \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right|_{x=0} = \hat{f}_0, \quad \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right|_{x=l} = \hat{f}_l; \\ \text{III}^* \quad & \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - h_0 \hat{u} \right|_{x=0} = \hat{f}_0, \quad \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + h_l \hat{u} \right|_{x=l} = \hat{f}_l. \end{aligned}$$

(3) განტოლების ამოხსნა I*, II*, III* სასაზღვრო პირობებში არის

$$\hat{u} = \hat{u}(x, z) \text{ ფუნქცია, ამიტომ } u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{u}(x, z) e^{zt} dz.$$

ამოცანა 1 (ნახევრადსასრული ღეროს განივი რხევა). ნახევრადსასრული ღერო გავაიგივოთ $x \geq 0$ ნამდვილ რიცხვთა $[0, \infty)$ ნახევარღერძთან. ამოცანის მათემატიკური ფორმულირება ასეთია:

ვიპოვოთ $u = u(x, t)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$

სასაზღვრო

$$u|_{x=0} = f(t), \quad u|_{x \rightarrow \infty} = 0$$

და საწყის პირობებს

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

ამოცანა ამოვხსნათ ლაპლასის გარდაქმნის საშუალებით. დავუშვათ

$$\hat{u}(x, z) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-zt} dt.$$

გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნა (1) განტოლების მიმართ და გავითვალისწინოთ (2) სასაზღვრო პირობები. გვექნება:

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} - \frac{z^2}{v^2} \hat{u} = 0, \quad (3)$$

$$\hat{u}|_{x=0} = \hat{f}(z), \quad \hat{u}|_{x \rightarrow 0} = 0. \quad (4)$$

(3) ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა, რომლის ამონახსნს აქვს სახე:

$$\hat{u}(x, z) = Ae^{-\frac{z}{v}x} + Be^{\frac{z}{v}x}, \quad (5)$$

(4) სასაზღვრო პირობებიდან მივიღებთ:

$$B = 0, \quad A = \hat{f}.$$

ამიტომ (5) მიიღებს სახეს:

$$\hat{u} = \hat{f}(z)e^{-\frac{z}{v}x}.$$

მაშასადამე,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(z) e^{z\left(t - \frac{x}{v}\right)} dz, \quad x > 0, \quad t > 0.$$

რიმან-მელინის ფორმულის თანახმად

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(z) e^{zt} dz = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

რაც ნიშნავს, რომ (6) შესაძლებელია გადადიწეროს შემდეგნაირად:

$$u(x, t) = \begin{cases} f\left(t - \frac{x}{v}\right), & t > \frac{x}{v}, \\ 0, & t < \frac{x}{v}. \end{cases}$$

ამრიგად, ფიზიკური პროცესი არის მორბენალი ტალღა, რომელიც v სიჩქარით ვრცელდება ნახელების $x = 0$ ბოლოდან.

ამოცანა 2 (სასრული ღეროს განივი რხევა). წინა ამოცანისაგან განსხვავებით ახლა ვთქვათ ღერო შემოსაზღვრულია და $0 \leq x \leq l$. საჭიროა ვიპოვოთ $u = u(x, t)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

სასაზღვრო

$$u|_{x=0} = f(t), \quad u|_{x=l} = 0$$

და საწყის

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

პირობებს.

ამოხსნა. კვლავ ლაპლასის გარდაქმნა გამოვიყენოთ და დავუშვათ

$$\hat{u}(x, z) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-zt} dt.$$

ანალოგიურად წინა ამოცანისა მივიღებთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} - \frac{z^2}{v^2} \hat{u} = 0,$$

$$\hat{u}|_{x=0} = \hat{f}(z), \quad \hat{u}|_{x=l} = 0.$$

საიდანაც ვპოულობთ:

$$u(x, z) = \hat{f}(z) \frac{\sinh\left(\frac{z}{v}(l-x)\right)}{\sinh\left(\frac{z}{v}x\right)},$$

ამრიგად,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(z) \frac{\sinh\left(\frac{z}{v}(l-x)\right)}{\sinh\left(\frac{z}{v}x\right)} e^{zt} dz. \quad (1)$$

უკანასკნელი ინტეგრალის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$\frac{\sinh\left(\frac{z}{v}(l-x)\right)}{\sinh\left(\frac{z}{v}x\right)} = \frac{e^{\frac{z}{v}(l-x)} - e^{-\frac{z}{v}(l-x)}}{e^{\frac{z}{v}x} - e^{-\frac{z}{v}x}} = \frac{e^{\frac{z}{v}x} - e^{-\frac{z}{v}(2l-x)}}{1 - e^{-\frac{2z}{v}l}} = \left(e^{\frac{z}{v}x} - e^{-\frac{z}{v}(2l-x)} \right) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{2z}{v}lk} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{\frac{z}{v}(2lk+x)} - e^{\frac{z}{v}(2lk+2l-x)} \right), \quad \left| e^{-\frac{2z}{v}l} \right| < 1.$$

ჩავსვათ ეს მწკრივი (1)-ში და დავეშვათ შესაძლებელია წევრობრივი ინტეგრება, მივიღებთ:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_L e^{z\left(t - \frac{2lk+x}{v}\right)} \hat{f}(z) dz - \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{z\left(t - \frac{2lk+2l-x}{v}\right)} \hat{f}(z) dz \right).$$

რიმან-შელინის ფორმულა საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ (2) მწკრივებიდან თითოეული მათგანი შეიცავს სასრული რაოდენობის წევრებს, რადგან ყოველთვის მოიძებნება ისეთი k რიცხვი, რომ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(z) e^{zt} dz = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

ამ ტოლობიდან გამოდინარეობს, რომ მწკრივში გვექნება უსუსრულოდ ბევრი 0-ის ტოლი შესაკრები. მაშასადამე,

$$0 < t < \frac{x}{v} \Rightarrow u = 0,$$

$$\frac{x}{v} < t < \frac{2l-x}{v} \Rightarrow u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

$$\frac{2l-x}{v} < t < \frac{2l+x}{v} \Rightarrow u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) - f\left(t - \frac{2l-x}{v}\right),$$

$$\frac{2l+x}{v} < t < \frac{4l-x}{v} \Rightarrow u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) - f\left(t - \frac{2l-x}{v}\right) + f\left(t - \frac{2l+x}{v}\right),$$

და ა.შ.

დროის ყოველი ინტერვალისათვის ამონახსნს ვპოულობთ ანალოგიურად. ამრიგად, ღეროში ვრცელდება ბრტყელი ტალღები. ისინი აირეკლებიან კედლებიდან და მათი თანდათანობით ზედდება ზდება.

ამოცანა 3 (მაგნიტურ ველში დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება). განვიხილოთ m მასის დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა $\vec{H}$ დაძაბულობის მქონე ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში. ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება იწერება შემდეგნაირად (ჩვენ განტოლების დაწერის დროს ვინარჩუნებთ იმ აღნიშვნებს, რაც საზოგადოდ მიღებულია ფიზიკურ ლიტერატურაში)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \frac{e}{c} \vec{r} \times \vec{H},$$

სადაც c სინათლის სიჩქარეა, e -ნაწილაკის მუხტია, ხოლო წერტილი კი როგორც უკვე აღვნიშნეთ (ავტონომიური სისტემების განმარტების დროს), ნიშნავს წარმოებულს დროითი ცვლადის მიმართ. საკოორდინატო ღერძებზე ამ განტოლების პროექტირის შემდეგ მივიღებთ ($\vec{H} = H\vec{k}$):

$$\ddot{x} = \frac{eH}{mc} \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\frac{eH}{mc} \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $\omega = \frac{eH}{mc}$, მაშინ მოძრაობის განტოლების პროექცია ღერძებზე მიიღებს სახეს:

$$\ddot{x} = \omega \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0. \quad (1)$$

ჩვენი ინტერესის საგანი (1) განტოლებათა სისტემაა. მისი ამოხსნის ერთ მეთოდს ჩვენ უკვე გავეცანით (იხ. პარაგრაფები 6.3 და 6.5). აქ მისი ამოხსნისათვის გამოვიყენებთ ლაპლასის გარდაქმნას.

დავსვით კოშის ამოცანა. ჩავთვალოთ, რომ

$$x|_{t=0} = 0, y|_{t=0} = 0, z|_{t=0} = 0, \dot{x}|_{t=0} = v_0 \cos(\alpha), \dot{y}|_{t=0} = v_0 \sin(\alpha), \dot{z}|_{t=0} = 0.$$

ნათელია, რომ ასეთ პირობებში $z(t) = 0$, როდესაც $t \geq 0$. გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნა (1)-ის პირველი ორი განტოლებისათვის. მივიღებთ:

$$z^2 \hat{x} - zx|_{t=0} - \dot{x}|_{t=0} = \omega(z\hat{y} - y|_{t=0}),$$

$$z^2 \hat{y} - zy|_{t=0} - \dot{y}|_{t=0} = -\omega(z\hat{x} - x|_{t=0}),$$

საწყისი პირობების გამოყენებით გავამარტივოთ ეს გამოსახულებები და მივაღწიოთ ალგებრულ განტოლებათა

$$z^2 \hat{x} - \omega z \hat{y} = v_0 \cos \alpha,$$

$$z^2 \hat{y} + \omega z \hat{x} = v_0 \sin \alpha.$$

სისტემაზე, რომლის ამონახსნებია

$$\hat{x} = \frac{v_0 \cos \alpha}{z^2 + \omega^2} + \frac{v_0 \omega \sin \alpha}{z(z^2 + \omega^2)}, \quad \hat{y} = \frac{v_0 \sin \alpha}{z^2 + \omega^2} + \frac{v_0 \omega \cos \alpha}{z(z^2 + \omega^2)}. \quad (2)$$

$x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციების აღსადგენად დაგვჭირდება რამდენიმე ცნობილი ტოლობა, რომლებსაც ახლა მოვიყვანთ:

$$\frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega} = \int_0^t \sin(\omega \tau) d\tau$$

და

$$L(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{\omega^2 + z^2} \Rightarrow L\left(\int_0^t \sin(\omega \tau) d\tau\right) = \frac{\omega}{z(\omega^2 + z^2)} \Rightarrow L\left(\frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega}\right) = \frac{\omega}{z(\omega^2 + z^2)}.$$

(2) გამოსახულებების უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} (1 - \cos(\omega t)),$$

$$y = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega} (1 - \cos(\omega t)).$$

მიღებული სისტემა გადავწეროთ მისი ექვივალენტური ფორმით:

$$x - \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega} \sin(\omega t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t - \alpha),$$

$$y + \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega} = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t - \alpha).$$

საიდანაც ვწერთ ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლებას:

$$\left(x - \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega}\right)^2 + \left(y + \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2.$$

ამ განტოლების საფუძველზე კი ვასკვნით, რომ ნაწილაკი მოძრაობს წრეწირზე, რომლის რადიუსია $R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0 mc}{eH}$.

სავარჯიშო დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოიყენეთ ინტეგრალური გარდაქმნები და ამოხსენით შემდეგი ამოცანები

ამოცანა 1. ამოვხსნათ შემდეგი ამოცანა

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

პასუხი: $u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2}} d\xi.$

ამოცანა 2. ვიპოვოთ $u \in C^{(2)}$, რომელიც აკმაყოფილებს

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ლაპლასის განტოლებას და სასაზღვრო პირობებს:

$$u|_{y=0} = f(x), \quad u|_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \text{ შემოსაზღვრულია, როდესაც } y \geq 0, -\infty < x < \infty$$

პასუხი: $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{a}{(\xi-x)^2 + y^2} d\xi.$

ამოცანა 3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u = xye^t, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad t > 0.$$

პასუხი: $u(x, y, z, t) = 3x^2 y^2 z^2 t^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)t^4.$

ამოცანა 4. დავუშვათ $u(x, t)$ ერთგანზომილებიანი არის ტემპერატურა, ამასთან $u(x, t) = f(x)$ საწყისი ტემპერატურაა. გამოვიკვლიოთ სითბოგამტარებლობის განტოლების ამონახსნი სხვადასხვა საწყისი ტემპერატურის შემთხვევაში. ა) $f(x) = e^{-x^2}$ - საწყისი ტემპერატურის გაუსის პროფილი, ბ) $f(x) = \theta(x+1) - \theta(x-1)$ - საწყისი ტემპერატურის თანაბარი განაწილება $[-1, 1]$ მონაკვეთზე, სადაც $\theta(x)$ ხავისიედას ერთეულოვანი ფუნქციაა. გ) $f(x) = (1-x)(\theta(x+1) - \theta(x-1))$ საწყისი ტემპერატურის სამკუთხა პროფილი.

ამოცანა 5. ნახევრადსასრული გამტარის $x=0$ ბოლოში დროის $t=0$ მომენტში ირთება მუდმივი E ელექტრომაგნიტური ძალა. ვიპოვოთ ძაბვა გამტარის ყოველ წერტილში. იგულისხმება, რომ $L=g=0$, ხოლო გამტარის პარამეტრებია R და C .

პასუხი: $u(x,t) = E \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}} \right) \right)$. მითითება. ამოცანის პირობიდან

გამომდინარე განტოლებათა სისტემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + RI = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

რომლიდანაც დენის გამორიცხვის შემდეგ მივიღებთ:

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad v^2 = \frac{1}{RC}.$$

დავწეროთ საწყისი და სასაზღვრო პირობები:

$$u|_{t=0} = 0, u|_{x=0} = E, u|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \infty.$$

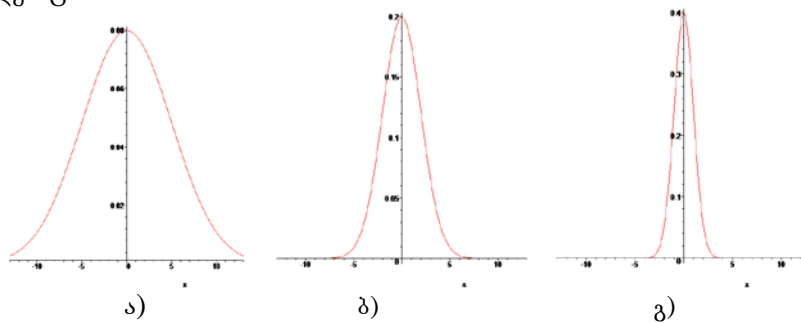
დამატება

1. განზოგადებული ფუნქციები

კლასიკურ მათემატიკურ ანალიზში ჩვეულებრივ “კარგი” ფუნქციები განიხილება. ისინი შეიძლება გავაწარმოოთ, ვაინტეგროთ, ავაგოთ მათი გრაფიკები. ეს ფუნქციები შეიძლება მიისწრაფოდნენ უსასრულობისაკენ რომელიმე წერტილში, ან ჰქონდეთ წვევების წერტილები, სასრული ან უსასრულო, მაგრამ ეს ყველაფერი გამოთვლებს დიდად ვერ აბრკოლებს. მეორეს მხრივ, ასეთი კარგი ფუნქციების ზღვარი, ყოველთვის როდი არიან კარგი ფუნქციები. განვიხილოთ მაგალითად, გაუსის წირი, რომელიც ხშირად გამოიყენება მათემატიკასა და ფიზიკაში, იმის გამო, რომ იგი აღწერს ისეთი შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას, რომელიც დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების უსასრულო ჯამია (ალბათობის თეორიის ცენტრალური ზღვრული თეორემა). გაუსის წირი

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

გამოსახულებით მოიცემა. σ დისპერსიაა, იგი x^2 -ის საშუალო მნიშვნელობის ტოლია, როდესაც $x \in (-\infty, \infty)$. σ -ს შემცირებასთან ერთად (1) წირი ვიწროვდება ისე, რომ როდესაც $\sigma \rightarrow 0$, $\varphi(x) = 0$, მაშინაც კი, როდესაც $x \neq 0$.



ნახაზზე მოყვანილია $\varphi(x)$ ფუნქციის გრაფიკი როდესაც x იცვლება $-\infty$ -დან $+\infty$ -მდე, ხოლო σ პარამეტრი კი ფიქსირებულია. ამასთან, ა) ნახაზზე მოცემულია $\varphi(x)$ -ის გრაფიკი, როდესაც $\sigma = 5$; ბ)-ზე როდესაც $\sigma = 2$, ხოლო გ) ნახაზი კი შეესაბამება შემთხვევას $\sigma = 1$.

ამასთან არც თუ იხე ძნელი შესამოწმებელია, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$$

σ -საგან დამოუკიდებლად. ვიღებთ, რომ ინტეგრალი ფუნქციიდან, რომელიც ნულის ტოლია ყველგან, გარდა $x = 0$ -სა (როდესაც $\sigma \rightarrow 0$), ნულის ტოლი არ არის! ნათელია, რომ კლასიკური მათემატიკური ანალიზისათვის ასეთი ფუნქციები არც თუ ისე ჩვეულებრივია, მიუხედავად იმისა, რომ (1) ფუნქცია არათუ კარგია, როდესაც $\sigma \neq 0$, არამედ ძალიან კარგია! ის უსასრულოდ დიფერენცირებადია.

(1) ფუნქციის მიმდევრობის აღწერა σ -ს ყოველი მნიშვნელობისათვის, $\sigma = 0$ -ის ჩათვლით, ორი გზითაა შესაძლებელი. ერთი ასეთია: მოვახდინოთ ყველა შესაძლო გამოთვლა $\sigma \neq 0$ -სათვის და შემდეგ, დასკნით ეტაპზე, გადავიდეთ $\sigma \rightarrow 0$ ზღვარზე. ან მეორე: თავიდანვე გარკვეული აზრი მივცეთ $\varphi(x)$ -ს $\sigma = 0$ მნიშვნელობისათვის. პირველი გზა საკმაოდ შრომატევადია გამოთვლების თვალსაზრისით, მეორე კი მათემატიკური თვალთახედვით ბუნებრივია. დასაშვებ ფუნქციათა სივრცე გავაფართოვოთ ისეთნაირად, რომ ამ სივრციდან აღებული ნებისმიერი კრებადი მიმდევრობის ზღვარი კვლავ ამ სივრცეს ეკუთვნოდეს. ამით მოცემული სივრცე ჩაკეტილი გახდება, იგი კლასიკურ ფუნქციებთან ერთად სხვა ფუნქციებსაც შეიცავს, მათ განზოგადებული ფუნქციები ეწოდება.

განზოგადებული ფუნქციების მათემატიკური თეორია თითქმის ერთდროულად შეიქმნა საბჭოთა კავშირში, რუსი მათემატიკოსის ს.ლ. სობოლევის და ფრანგი მეცნიერის ლ.შვარცის მიერ. სობოლევს განზოგადებული ფუნქციების იდეა ჰიპერბოლური განტოლებების ამონახსნის ანალიზის კონტექსტში წარმოეშვა, შვარცმა კი ადამარის და რისის განშლადი მწკრივების თეორიის ძირითადი იდეების სისტემატიზაციის დროს დაინახა საერთო თვისების მქონე ობიექტის არსებობა, რომელსაც მან distribution დაარქვა. თუმცა, ფიზიკოსები, ერთ-ერთ მათგანს, ეგრეთ წოდებულ δ -ფუნქციას, მანამდედაც სისტემატიურად იყენებდნენ. ეს განზოგადებული ფუნქცია ფიზიკური მოსაზრებიდან გამომდინარე პ. დირაკმა შემოიტანა, დღეს იგი მის სახელს ატარებს. დირაკის δ -ფუნქციაა სწორედ $\varphi(x)$ -ის ზღვარია, როდესაც $\sigma \rightarrow 0$. ინგლისურენოვან ლიტერატურაში განზოგადებული ფუნქციის მაგივრად გავრცელებულია ტერმინი განაწილება (distribution), რაც დაკავშირებულია (1) სახის ფუნქციის ალბათურ და აგრეთვე მექანიკურ ხასიათთან: მატერიალური საგნის მასის განაწილების აღწერის დროს (1) სახის ფუნქციები ზღვარში, როდესაც $\sigma \rightarrow 0$, იძლევიან მატერიალურ წერტილს-ნულოვანი მოცულობის და სასრული მასის ობიექტს.

იგივე თვისებების, რაც აქვს (1)-ს, მატარებელია აგრეთვე სხვა ფუნქციებიც. ქვემოთ მოყვანილია ყველაზე გავრცელებულები:

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)};$$

$$\varphi(x) = \frac{\sin(x/\sigma)}{\pi x};$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sigma} \exp(-|x|/\sigma);$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi\sigma} (\exp(x/\sigma) + \exp(-x/\sigma))^{-1};$$

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{\pi x^2} \sin^2(x/\sigma).$$

განზოგადებული ფუნქციების მათემატიკური თეორია შეიცავს “მოხმარების” წესებს. მათ შორის, დიფერენცირების და ინტეგრების წესებს, ზღვარზე გადასვლას, განზოგადებული და კლასიკური ფუნქციების ურთიერთდამოკიდებულებას მათზე ალგებრული ოპერაციების წარმოების თვალსაზრისით და სხვა. კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნები წარმოადგენთ მწკრივის სახით, მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობა, შესაძლებელია არ იყოს კრებადი, რის გამოც მიღებული ამონახსნი ვერ იქნება განტოლების *კლასიკური ამონახსნი*. მწკრივი მხოლოდ *განტოლების ფორმალური ამონახსნი* იქნება. გამოყენებით ამოცანებში კი საჭიროება მოითხოვს განვიხილოთ აგრეთვე ისეთი ამონახსნები, რომლებიც განზოგადებული ფუნქციებია. თუ გვეცოდინება მათზე მათემატიკური ოპერაციების ჩატარება, მაშინ შევძლებთ შევამოწმოთ, არის თუ არა მიღებული განზოგადებული ფუნქცია განტოლების ამონახსნი.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, საზოგადოდ შეუძლებელია განზოგადებული ფუნქციის გრაფიკის სახით წარმოდგენა (ზემოთ მოყვანილ ნახაზებზე მისი მიახლოებითი პროფილია წარმოდგენილი!) ეს ნიშნავს, რომ ამ ტიპის ფუნქციები არ შეიძლება მიღებულნი იქნან როგორც რომელიმე ექსპერიმენტის შედეგები. განზოგადებული ფუნქციები მხოლოდ გამოთვლების წარმოების შუალედურ ეტაპზე შეიძლება არსებობდენ. იმისათვის, რომ მივიღოთ ექსპერიმენტულად გაზომვადი სიდიდე, თეორიაში უნდა შესრულდეს რაიმე ფინიტური, სასრული ოპერაცია. მოცემულ შემთხვევაში ასეთი ოპერაციაა ინტეგრება. სხვა სიტყვებით, “ფიზიკური” სიდიდეები, მოცემულები განზოგადებული ფუნქციებით, ექსპერიმენტით დაიმზირებიან მხოლოდ მათი ინტეგრების შემდეგ, ისიც სხვა, ჩვეულებრივ ფუნქციაზე ნამრავლთან ერთად. მაგალითად, თუ (1) გამოსახულებით არის მოცემული x შემთხვევითი სიდიდის განაწილება, მაშინ იგი (განზოგადებული ფუნქცია) საშუალებას გვაძლევს ინტეგრებით გამოვთვალოთ ნებისმიერი x ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა. შედეგი უკვე შესაძლებელია შევადაროთ ექსპერიმენტულ

მონაცემებს. ამიტომ ბუნებრივია, დირაკის δ -ფუნქცია განვმარტოთ, როგორც ინტეგრების შედეგი მისი და ჩვეულებრივი ფუნქციის ნამრავლისა:

$$\int_a^b y(x)\delta(x)dx = \begin{cases} y(0), & 0 \in (a,b), \\ 0, & 0 \notin (a,b), \end{cases}$$

სადაც $y(x)$ ჩვეულებრივი, $x=0$ წერტილში უწყვეტი ფუნქციაა. როგორც ვხედავთ, δ არის ფუნქციონალი, რომლის განსაზღვრის არეა ჩვეულებრივ ფუნქციასა სივრცე, ხოლო მნიშვნელობათა არე კი - ნამდვილი რიცხვები. სწორედ ეს ძირითადი თვისება უღევს საფუძვლად განზოგადებული ფუნქციების განმარტებას.

2. ძირითადი ინტეგრალური განტოლებები

2.1 ძირითადი ცნებები და მაგალითები

განტოლებას ეწოდება *ინტეგრალური*, თუ უცნობი ფუნქცია, რომელსაც $y(s)$ -ით აღვნიშნავთ, შედის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ:

$$\int_a^b F(s, t, y(t)) dt = G(s, y(s)). \quad (1)$$

კერძო შემთხვევაში, როდესაც (1) განტოლების მარჯვენა მხარეში მდგომი G ფუნქცია დამოკიდებული არ არის $y(s)$ საძიებელ ფუნქციაზე, მაშინ (1)-ს უწოდებენ *პირველი გვარის*, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში *მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებას*.

დიფერენციალური განტოლებისაგან განსხვავებით (1) სახის განტოლების კონკრეტული ამონახსნის საპოვნელად საჭირო არ არის დამატებითი პირობების მოცემა, სახელდობრ, საჭირო არ არის ცნობილი იყოს საძიებელი ან მისი წარმოებული ფუნქციების მნიშვნელობები (კოშის პირობები) რაიმე წერტილში. ამ გარემოებას გარკვეული მნიშვნელობა აქვს განტოლებების გამოყენების თვალსაზრისით.

მეორე გვარის განტოლების ცვლადების $a \leq s, t \leq b$ ცვლილების არეს ეწოდება *ძირითადი კვადრანტი*. პირველი გვარის განტოლებებისათვის ცვლილების არეები სავალდებულო არ არის ერთმანეთს დაემთხვეს. F ფუნქცია განსაზღვრულად ითვლება ძირითად კვადრატზე. $[a, b]$ ინტერვალს, რომელზედაც იძებნება y ფუნქცია და რომელზედაც განსაზღვრულია G როგორც თავისი პირველი არგუმენტის ფუნქცია, ეწოდება (1) განტოლების *განსაზღვრის არე*.

$[a, b]$ მონაკვეთი შეიძლება იყოს როგორც სასრული, ისე უსასრულო. თუ ორივე საზღვარი სასრულია, მაშინ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $a = 0$ და $b = 1$. ამ შემთხვევაში (1) განტოლებას ეწოდება *ურიხონის განტოლება*:

$$\int_0^1 F(s, t, y(t)) dt = G(s, y(s)) \quad (2)$$

ურიხონის განტოლების კერძო შემთხვევაა *ჰამერშტეინის განტოლება*:

$$\int_0^1 K(s, t) g(t, y(t)) dt = G(s, y(s)) \quad (3)$$

(3)-ში ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მოთავსებულ K ფუნქციას ეწოდება *განტოლების ბირთვი* ან *განტოლების გული*.

ყველაზე მარტივი, და ამასთან კარგად შესწავლილია წრფივი ინტეგრალური განტოლებები. ეს ის შემთხვევაა, როდესაც g და G ფუნქციები წრფივია უცნობი ფუნქციის მიმართ:

$$g(t, y(t)) = y(t), \quad G(s, y(s)) = \frac{1}{\lambda}(y(s) - f(s)). \quad (4)$$

ამ შემთხვევაში a და b რიცხვების სასრულობა სავალდებულო არ არის, ხოლო განტოლებას კი აქვს სახე:

$$y(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) y(t) dt = f(s). \quad (5)$$

(5) განტოლებას წრფივი მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლება ეწოდება, λ -ს პარამეტრი ეწოდება, ხოლო f კი არაერთგვაროვანი წევრი. თუ $f \equiv 0$, მაშინ (5)-ს ერთგვაროვანი ეწოდება.

როდესაც g -ს ისეთივე სახე აქვს, როგორც (4)-ში და G დამოკიდებული არ არის მეორე არგუმენტზე, ე.ი. $G(s, y(s)) = f(s)$, მივიღებთ წრფივ პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$\int_a^b K(s, t) y(t) dt = f(s). \quad (6)$$

დავუშვათ $a = 0$ და $b = 1$ სასრული რიცხვებია. ხოლო ბირთვი და არაერთგვაროვანი წევრი კვადრატში ინტეგრებადებია:

$$\|K\| \equiv \left(\int_0^1 \int_0^1 |K(s, t)|^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad (7)$$

$$\|f\| \equiv \left(\int_a^b |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad (8)$$

მაშინ (5) განტოლებას ეწოდება ფრედჰოლმის მეორე, ხოლო (6) კი ფრედჰოლმის პირველი გვარის განტოლებები.

(7) და (8) გამოსახულებით განმარტებული $\|K\|$ და $\|f\|$ სიდიდეები შესაბამისად, არიან ბირთვისა და არაერთგვაროვანი წევრის ნორმები.

შევნიშნოთ, რომ ფრედჰოლმის განტოლებების უფრო ზოგადი განმარტება არსებობს. ჩვენ მხოლოდ ამ კერძო შემთხვევით შემოვიხილავთ.

წრფივი ინტეგრალური განტოლებების კერძო შემთხვევაა ისეთი განტოლებები, რომელთა ბირთვი აკმაყოფილებს პირობას;

$$K(s, t) = 0, \quad s > t.$$

მიღებულ განტოლებებს:

$$\int_a^s K(s,t)y(t)dt = f(s), \quad y(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)y(t)dt = f(s) \quad (9)$$

ეწოდებათ, შესაბამისად, ვოლტერას პირველი და მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლებები.

შევნიშნოთ, რომ კოშის ამოცანა წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = \phi(t),$$

საწყისი პირობით

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$$

მიიყვანება მეორე გვარის (9) ტიპის ვოლტერას განტოლებამდე, სადაც $\lambda = -1$,

$$K(s,t) = \sum_{m=1}^n a_m(s) \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!}$$

და

$$f(s) = \varphi(s) - c_{n-1}a_1(s) - (c_{n-1}s - c_{n-2})a_2(s) - \dots - \left(c_{n-1} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + c_1s + c_0 \right) a_n(s).$$

საზოგადოდ, პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლებები მიეკუთვნებიან არაკორექტულ ამოცანათა რიცხვს. ამ საკითხს მოგვიანებით დავუბრუნდებით. ახლა გავცნოთ ზოგიერთ მეორე გვარის ისეთ განტოლებებს, რომლებსაც ზუსტი, ანალიზური ამონახსნი აქვთ.

მაგალითები. წრფივი ინტეგრალური განტოლებების მაგალითია

$$a) \quad \varphi(x) - \int_0^1 e^{xy} \varphi(y) dy = x - \frac{e^x}{x} + \frac{e^x - 1}{x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

განტოლება. ან კიდევ

$$b) \quad \int_0^\infty \sin(xy) \varphi(y) dy = f(x), \quad 0 \leq x < \infty.$$

არაწრფივი ინტეგრალური განტოლებაა

$$b) \quad \varphi(x) - \int_0^1 \frac{xy\varphi(y)}{1+\varphi^2(y)} dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

ზემოთ მოყვანილ განტოლებებში $\varphi(x)$ უცნობი, საძიებელი ფუნქციაა, ხოლო $f(x)$ - კი ბ) და გ) განტოლებებში ცნობილი ფუნქციაა, რომელსაც არაერთგვაროვანი წევრი ეწოდება.

ამოვსხნათ ინტეგრალური განტოლება ნიშნავს ვიპოვოთ ისეთი ფუნქცია, რომელიც განტოლებას იგივეობად აქცევს.

მაგალითად ა) განტოლების ამონახსნი იგივეური $\varphi(x) = x$ ფუნქციაა. მართლაც,

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \int_0^1 e^{xy} \varphi(y) dy &= x - \int_0^1 e^{xy} y dy = x - \frac{1}{x} \int_0^1 y d(e^{xy}) = \\ &= x - \frac{1}{x} \left(y e^{xy} \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 e^{xy} dy \right) = x - \frac{e^x}{x} + \frac{e^x - 1}{x^2}.\end{aligned}$$

ბ) განტოლება კი $\varphi(x)$ ფუნქციის ფურიეს სინუს-გარდაქმნაა. ფურიეს გარდაქმნის შექცევის (შებრუნების) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$\varphi(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(xy) f(x) dx, \quad 0 \leq y < \infty,$$

რაც ნიშნავს, რომ $\varphi(y)$ არის ბ) განტოლების ამონახსნი.

ინტეგრალური განტოლების $K(s, t)$ ბირთვს ეწოდება *გადავარებული*, თუ იგი შესაძლებელია წარმოვადგინოთ ერთი ცვლადის ფუნქციების ნამრავლის სასრულ ჯამად:

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(s) \psi_i(t). \quad (10)$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ φ_i ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებლები არიან. მართლაც, თუ მაგალითად, $\varphi_n = \gamma \varphi_{n-1}$, სადაც γ რაიმე რიცხვია, მაშინ უკანასკნელი ორი წევრი (10) გამოსახულებაში შესაძლებელია გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\varphi_n \psi_n + \varphi_{n-1} \psi_{n-1} = \varphi_{n-1} (\gamma \psi_n + \psi_{n-1}),$$

ამის შემდეგ განვიხილოთ $\gamma \psi_n + \psi_{n-1}$ როგორც ახალი $(n-1)$ -ე t ცვლადის ფუნქცია. (10) ჯამში შესაკრებების რაოდენობა ერთით შემცირდება და გახდება $n-1$. ანალოგიურად, შეგვიძლია წრფივად დამოუკიდებლად ჩავთვალოთ ψ_i ფუნქციებიც. ზუსტად ასეთივე შედეგი მიიღება თუ წრფივ თანადობით არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული არა ორი, არამედ რამდენიმე ფუნქცია: ყოველი წრფივი დამოკიდებულება φ_i (ან ψ_i) ფუნქციებს შორის ამცირებს ერთი ერთეულით შესაკრებთა რაოდენობას (10) ჯამში.

ჩავსვათ (10) გამოსახულება (5) განტოლებაში და მივიღებთ:

$$y(s) - \lambda \sum_{i=1}^n \varphi_i(s) \int_a^b \psi_i(t) y(t) dt = f(s). \quad (11)$$

ამ უკანაენელ გამოსახულებაში გვაქვს განსაზღვრული ინტეგრალი, ნათელია, რომ $y(s)$ საძიებელ ფუნქციას აქვს სახე:

$$y(s) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(s), \quad \varphi_0(s) \equiv f(s), \quad a_0 \equiv 1. \quad (12)$$

ამ ფორმულის (11)-ში ჩასმა მოგვცემს განტოლებას:

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i - \lambda \sum_{j=0}^n C_{ij} a_j \right) \varphi_i(s) = 0, \quad C_{ij} \equiv \int_a^b \psi_i(t) \varphi_j(t) dt. \quad (13)$$

მაგრამ, φ_i , $1 \leq i \leq n$, ფუნქციები პირობის თანახმად, წრფივად დამოუკიდებელია. მაშასადამე, (13) ტოლობა შესაძლებელია ყოველი $s \in [a, b]$ შესრულდეს მხოლოდ მაშინ, როდესაც ნულის ტოლია ნებისმიერი φ_i -ს წინ მდგომი კოეფიციენტი. ამრიგად, ვღებულობთ, წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას a_i კოეფიციენტებისათვის (12) დაშლიდან:

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \lambda C_{ij}) a_j = \lambda G_{i0}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14)$$

სადაც δ_{ij} კრონეკერის სიმბოლოა. ამოვხსნით რა განტოლებათა ამ სისტემას ვიპოვიტ a_i კოეფიციენტებს და მაშასადამე საძიებელ $y(s)$ ფუნქციასაც.

როგორც ვხედავთ, გადაგვარებულ ბირთვიანი წრფივი ინტეგრალური განტოლების ამოხსნა მიიყვანება წრფივი ალგებრული განტოლების ამოხსნაზე. საზოგადოდ, ნებისმიერი ბირთვის მქონე წრფივი ინტეგრალური განტოლება აღმოჩნდება უსასრულო რაოდენობის წრფივი დიფერენციალური განტოლების მსგავსი. ეს ანალოგია სასარგებლოა გვექონდეს მხედველობაში, რადგან ეს წრფივი ინტეგრალური განტოლებების ძირითადი თვისების გააზრების საშუალებას იძლევა.

კერძოდ, თუ (11) განტოლება ერთგვაროვანია, ე.ი. $f(s) \equiv 0$, მაშინ ერთგვაროვანია (14) ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რადგან ამ დროს $C_{i0} = 0$ ყველა i -სათვის. ასეთ პირობებში, როგორც ცნობილია, ამ განტოლების არატრივიალური ამონახსნი არსებობს მხოლოდ მაშინ, როდესაც განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია. აქედან უკვე შესაძლებელია მივიღოთ λ პარამეტრის მნიშვნელობათა ერთობლიობა, რომლებსაც *მახასიათებელი მნიშვნელობები* ეწოდება და რომელთათვისაც სისტემის დეტერმინანტი განულებს. ასეთი მნიშვნელობების რაოდენობა n -

ის ტოლია, მახასიათებელი განტოლების ფესვების ჯერადობის გათვალისწინებით. საზოგადოდ, წრფივი ინტეგრალური განტოლებებისთვისაც λ პარამეტრის მახასიათებელი მნიშვნელობები ანალოგიურად განიმარტება იმ დაშვებით, რომ არსებობს ერთგვაროვანი განტოლების არატრივიალური ამონახსნი, მაგრამ საკუთრივი მნიშვნელობების სიმრავლე, სასრული a -სა და b -ს შემთხვევაშიაც კი, უსასრულოა.

რადგან ინტეგრალური განტოლება გადაგვარებული ბირთვით მიიყვანება ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე, ამიტომ არსებობს ნებისმიერი ბირთვისათვის ინტეგრალური განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის შესაძლებლობა. ის ეფუძნება ბირთვის აპროქსიმაციას გადაგვარებული ბირთვით: ორი ცვლადის ფუნქცია იცვლება დაახლოებით მისი ტოლი ორი ფუნქციის ნამრავლების სასრული ჯამით, რომელთაგან თითოეული დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ ცვლადზე. ხშირად ხდება, რომ ამ მიახლოების დროს მიღწეული სიზუსტე დამოკიდებულია ამ ფუნქციების გონივრულ შერჩევაზე.

განვიხილოთ განტოლება

$$y(s) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(s-t)y(t)dt = f(s), \quad (15)$$

რომლის ბირთვი ერთ არგუმენტზეა დამოკიდებული, არგუმენტი კი - თავის მხრივ არის ორი დამოუკიდებელი ცვლადის სხვაობა. (15) განტოლებას *ფურიეს-ნაზევის ტიპის განტოლება* ეწოდება. ამ ტიპის განტოლება იხსება ბირთვის, საძიებელი ფუნქციის და არაერთგვაროვანი წევრის შესაბამისი ფურიეს კომპლექსური გარდაქმნის შესრულებით

$$K(s-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(z)e^{iz(s-t)}dz, \quad y(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(z)e^{izs}dz, \\ f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)e^{iz(s-t)}dz. \quad (16)$$

ამ ფორმულების (15)-ში ჩასმის და დირაკის δ -ფუნქციის ფურიეს

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm izs}ds \quad (17)$$

გარდაქმნის გამოყენების შემდეგ მივიღებთ:

$$\eta(z) = \frac{\phi(z)}{1 - \kappa(z)}. \quad (18)$$

(18)-ის საშუალებით წარმოდგინება მოცემული განტოლების ამონახსნი. მართლაც, მისი ჩასმა (16) გამოსახულებების მეორე ფორმულაში იძლევა საძიებელ $y(s)$ ფუნქციას ცხადი სახით.

ყურადღება მივაქციოთ იმ ფაქტს, რომ (15) ინტეგრალურ განტოლებაში ინტეგრების a და b საზღვრები უსასრულოა. ამის შედეგია ის, რომ (15) განტოლების შესაძლების ერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებას მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი აქვს. მართლაც, თუ $f(s) \equiv 0$, მაშინ (18), (16) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ $y(s) \equiv 0$.

2.2 ფრედჰოლმის მეორე გვარის განტოლებები

გადავიდეთ ფრედჰოლმის მეორე გვარის

$$y(s) - \lambda \int_0^1 K(s-t)y(t)dt = f(s) \quad (1)$$

ინტეგრალური განტოლების ანალიზზე. ეს განტოლება უფრო მარტივად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, თუ შემოვიტანთ $\hat{K}$ ოპერატორს და განვსაზღვრავთ მას L_2 ფუნქციონალური სივრცის ყოველი v ფუნქციისათვის ფორმულით

$$(\hat{K}x)(s) \equiv \int_0^1 K(s,t)x(t)dt. \quad (2)$$

მაშინ (1) განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$y - \lambda \hat{K}y = f, \quad (3)$$

ამასთან, ცხადად შეგვიძლია არ მივუთითოთ იმ s არგუმენტზე, რომელზედაც დამოკიდებულია განტოლების ორივე მხარე. (1), (2) განტოლებებიდან ჩანს, რომ λ პარამეტრის მცირე მნიშვნელობისათვის შესაძლებელია ჩავთვალოთ, რომ $y \equiv f$. ამის შემდეგ ბუნებრივია (1) განტოლების ამონახსნის ძიება λ -ს მიმართ მწკრივის სახით, იმ დაშვებით, რომ λ პარამეტრი საკმაოდ მცირეა. ამ მიზნის მისაღწევად შემოვიტანოთ y -ის მიახლოებითი მიმდევრობა (იტერაცია) შემდეგნაირად:

$$y_1 = f + \lambda \hat{K}y_0, \dots, y_n = f + \lambda \hat{K}y_{n-1}, \quad (4)$$

სადაც $y_0 \in L_2$ რაიმე საწყისი მიახლოებაა. თუ $(y_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ მისი ზღვარი იქნება განტოლების ამონახსნი.

$\hat{K}$ ოპერატორის კვადრატი განვმარტოთ შემდეგნაირად:

$$(\hat{K}^2 x)(s) \equiv \int_0^1 dt \int_0^1 dt_2 K(s,t_1)K(t_1,t_2)x(t_2). \quad (5)$$

ოპერატორის უფრო მაღალი ხარისხები ანალოგიურად განიმარტება. მოყვანილი განმარტების შემდეგ (4) ფორმულები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$y_n = f + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda^j \hat{K}^j f + \lambda^n \hat{K}^n y_0, \quad n > 1. \quad (6)$$

$(y_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობის კრებადობა ნიშნავს (6)-ში შემავალი მწკრივის კრებადობას.

მწკრივის კრებადობის ანალიზის გასამარტივებლად დავუშვათ, რომ ინტეგრალური განტოლების ბირთვი და არაერთგვაროვანი წევრი აკმაყოფილებენ უფრო ძლიერ მოთხოვნას ვიდრე კვადრატში ინტეგრებაა. კერძოდ, დავუშვათ, რომ ისინი შემოსაზღვრულებია:

$$|K(s, t)| \leq A \quad \forall s, t \in [0, 1], \quad |f(s)| \leq B \quad \forall s \in [0, 1], \quad (7)$$

სადაც A და B ნებისმიერი რიცხვებია.

ასეთ პირობებში მიიღება შემდეგი შეფასება

$$(\hat{K}^n f)(s) = \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \dots \int_0^1 dt_n K(s, t_1) K(t_1, t_2) \dots K(t_{n-1}, t_n) f(t_n) \leq A^n B. \quad (8)$$

ამრიგად, (6) მწკრივის მაჟორანტული მწკრივია გეომეტრიული პროგრესია, რომლის ზოგადი წევრია $\lambda^n A^n B$, იგი კრებადია, თუ $|\lambda| < 1/A$. ეს უტოლობა მიუთითებს იმაზე, თუ რამდენად მცირე უნდა იყოს λ პარამეტრი, რომ (6) მწკრივი კრებადი იყოს. ჩვენი შეფასება უხეშია ბირთვის და არაერთგვაროვანი წევრის შემოსაზღვრულობის დაშვების გამო. ზოგად შემთხვევაში, როდესაც ბირთვი $K(s, t) \in L_2$, მაშინ მიიღება შეფასება

$$|\lambda| < \|K\|^{-1}. \quad (9)$$

შევნიშნოთ, რომ იტერაციული პროცესის კრებადობა დამოკიდებული არ არის საწყისი მიახლოების არჩევაზე. ამიტომ, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $y_0 = f$.

ახლა ვაჩვენოთ ამონახსნის ერთადერთობა. ვაჩვენოთ, რომ თუ (9) სრულდება, მაშინ (3) განტოლების (4) და (6) ფორმულებით მოცემული ამონახსნის ერთადერთია. დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ z (3) განტოლების სხვა ამონახსნია:

$$z - \lambda \hat{K}z = f.$$

ჩავსვათ (4)-ში y_0 -ის მაგივრად z . მივიღებთ:

$$y_1 = f + \lambda \hat{K}z = z, \quad y_2 = f + \lambda \hat{K}y_1 = z, \dots$$

სხვა სიტყვებით, $(y_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარია z , რომელიც დაშვების თანახმად (3) განტოლების ამონახსნია. ეს ფაქტი ამტკიცებს ამონახსნის ერთადერთობას.

(6) გამოსახულება, როდესაც $n \rightarrow \infty$, შესაძლებელია გადაიწეროს ასეთი სახით:

$$y = f + \lambda \hat{R}f, \quad (10)$$

სადაც

$$\hat{R} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \hat{K}^j \quad (11)$$

ოპერატორს ეწოდება *რეზოლვენტა*. $\hat{I} + \lambda \hat{R}$ ოპერატორს, სადაც $\hat{I}$ ერთეულოვანი ოპერატორია, ეწოდება *გრინის ფუნქცია* (უფრო ზუსტი სახელწოდება, ცხადია, იქნებოდა გრინის ოპერატორი). (10) ფორულა იხმარება ინტეგრალური განტოლების ფორმალური ამონახსნის დასაწერად იმ შემთხვევაში, როდესაც (11) მწკრივად ამონახსნის წარმოდგენა შეუძლებელია, ე.ი. როდესაც (9) უტოლობა არ სრულდება.

ვოლტარას განტოლებისათვის, ე.ი. როდესაც ბირთვი აკმაყოფილებს პირობას $K(s, t) = 0$, $s > t$, იტერაციული პროცესი შესაძლებელია დაზუსტდეს. კვლავ ჩავთვალოთ, რომ (7) პირობა სრულდება. მაშინ (8) შეფასების მაგივრად გვექნება

$$(\hat{K}f)(s) = \int_0^s dt K(s, t) f(t) \leq ABs;$$

$$(\hat{K}^2 f)(s) = \int_0^s dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 K(s, t_1) K(t_1, t_2) f(t_2) \leq \frac{1}{2} A^2 Bs;$$

...

$$(\hat{K}^n f)(s) = \int_0^s dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n K(s, t_1) K(t_1, t_2) \dots K(t_{n-1}, t_n) f(t_n) \leq \frac{1}{n!} A^n Bs^n.$$

ამ შეფასებებიდან ჩანს, რომ მიმდევრობითი მიახლოების (6) მწკრივი ყოველთვის, λ პარამეტრის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის კრებადია. ანალოგიური შედეგი მიიღება უფრო ზოგად შემთხვევაშიც, კერძოდ L_2 -კლასის ბირთვებისთვის.

როგორც აღვნიშნეთ, თუ λ პარამეტრი მცირე არ არის, მაშინ იტერაციული მწკრივი ფრედჰოლმის განტოლებისათვის განშლადია. ამრიგად, ინტეგრალური განტოლების ანალიზისათვის ამ შემთხვევაში საჭიროა სხვა მეთოდების გამოყენება. ასეთი მეთოდები კი კარგადაა დამუშავებული და შესწავლილი თვითშეუღლებული ოპერატორებისათვის.

$\hat{K}$ ინტეგრალური ოპერატორის შეუღლებული ვეწოდოთ ისეთ $\hat{K}^*$ ოპერატორს, რომლის შესაბამისი ბირთვია $\hat{K}$ ოპერატორის ბირთვის შეუღლებული $K^*(s,t)$ ფუნქცია, რომელიც $K(s,t)$ ბირთვისაგან მიიღება კომპლექსური შეუღლებითა და არგუმენტების გადანაცვლებით. ოპერატორს ეწოდება თვითშეუღლებული, თუ $\hat{K}^* = \hat{K}$. ნამდვილი $K(s,t)$ ფუნქციისათვის, შესაბამისი თვითშეუღლებული ოპერატორი მიიღება $K(s,t)$ ბირთვში არგუმენტების გადანაცვლების მიმართ სიმეტრიულობის პირობის დადებით. ძნელი არ არის იმის დანახვა, რომ ვოლტერას ოპერატორის ბირთვი თვითშეუღლებული არ არის. გადაგვარებულ ბირთვს, ეთანადება თვითშეუღლებული ოპერატორი მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\varphi_i^* = \psi_i$.

თვითშეუღლებული ოპერატორების მნიშვნელოვანი თვისება, რომლის გამოც ისინი ფართოდ გამოიყენებიან ფიზიკურ თეორიებში არის ის, რომ მათ აქვთ მხოლოდ ნამდვილი მახასიათებელი მნიშვნელობები.

თეორემა 1. (ფრედჰოლმის ალტერნატივა) თვითშეუღლებული ბირთვის მქონე ფრედჰოლმის მეორე გვარის არაერთგვაროვან განტოლებას, ნებისმიერი არაერთგვაროვანი წევრით L_2 -დან აქვს ერთადერთი ამონახსნი L_2 -ში ან შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას L_2 -ში აქვს არატრივიალური ამონახსნი.

თეორემის პირობაში მოყვანილი არაერთგვაროვანი წევრის ნებისმიერობა შემთხვევითი არაა. თუ ავირჩევთ f -ს ისეთნაირად, რომ იგი ორთოგონალური იყოს ყველა საკუთრივი ფუნქციისა, რომლებიც შეესაბამებიან მოცემულ λ_m მახასიათებელ მნიშვნელობას, მაშინ არაერთგვაროვან განტოლებას ექნება ერთადერთი ამონახსნი და ამავე დროს როდესაც $\lambda = \lambda_m$, ერთგვაროვან განტოლებას ექნება არატრივიალური ამონახსნი.

2.3 ფრედჰოლმის პირველი გვარის განტოლებები

მათემატიკურ ფიზიკაში კარგად ცნობილი ინტეგრალური გარდაქმნები არიან ზუსტად ამოხსნადი ინტეგრალური განტოლებები. მაგალითად, თუ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ist)y(t)dt = f(s),$$

მაშინ

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ist) f(s) ds .$$

ეს ფორმულები განსაზღვრავენ პირდაპირ და შებრუნებულ ფურიეს გარდაქმნებს. ზუსტად ასევე ლაპლასის პირდაპირ და შებრუნებულ გარდაქმნას შეგვიძლია ვუყუროთ როგორც პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებას. არსებობს, აგრეთვე სხვა ინტეგრალური გარდაქმნები, რომელთა ბირთვები არ არიან ელემენტარული ფუნქციები. მაგალითად, ჰენკელის გარდაქმნა

$$f(s) = \int_0^{\infty} J_{\nu}(st) \sqrt{st} y(t) dt, \quad y(t) = \int_0^{\infty} J_{\nu}(st) \sqrt{st} f(s) ds$$

შეიცავს ბესელის J_{ν} ფუნქციას. ეს გარდაქმნა იმითაა საინტერესო, რომ იგი თავისი თავის შებრუნებულობაა: პირდაპირი და შებრუნებული გარდაქმნები ერთმანეთს ემთხვევა.

ზოგადი ვოლტერას პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება

$$\int_a^s K(s,t) y(t) dt = f(s)$$

გლუვი K და f ფუნქციებისათვის შესაძლებელია მეორე გვარის განტოლებაზე იქნას მიყვანილი. ამისათვის საკმარისია ამ განტოლების დიფერენცირება მოვახდინოთ:

$$K(s,s)y(s) + \int_a^s K'(s,t)y(t)dt = f'(s). \quad (1)$$

თუ $K(s,s) \neq 0$, მაშინ $K(s,s)$ -ზე ორივე მხარის გაყოფით მივიღებთ მეორე გვარის განტოლებას. თუ კი $K(s,s) = 0$, მაშინ $K'_s(s,s) \neq 0$, ამიტომ (1) გამოსახლება კიდევ ერთჯერ გავაწარმოთ, ხოლო შემდეგ კი გავყოთ $K'_s(s,s)$. უცვლელბობის შემთხვევაში ეს პროცედურა შესაძლებელია გავაგრძელოთ.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება:

$$\int_a^b K(s,t)y(t)dt = f(s), \quad c \leq s \leq d. \quad (2)$$

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ მეორე გვარის განტოლებებისაგან განსხვავებით s და t ცვლადები დასაშვებია სხვადასხვა რიცხვით ინტერვალზე. უფრო მეტიც, მათ შესაძლებელია ჰქონდეთ სხვადასხვა ფიზიკური განზომილება. ყველა შემთხვევაში, თუ a, b, c, d რიცხვები სასრულია, შესაძლებელია ისეთ ახალ ცვლადებზე გადასვლა, რომ

$0 \leq s, t \leq 1$. ჩავთვალოთ, აგრეთვე, რომ $K(s, t)$ ბირთვი ფრედჰოლმისეულია (ე.ი. სრულდება (7) პარაგრაფი 1-დან). მისი შესაბამისი $\hat{K}$ ოპერატორი თვითშეუღლებულია და $f \in L_2$.

ახლა დავუშვათ, რომ $\hat{K}$ თვითშეუღლებული ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციები სრულ ბაზისს ქმნიან. (2) განტოლების ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის პირობას იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1 (პიკარი). (2) განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობისათვის, როდესაც $\hat{K}$ თვითშეუღლებული ოპერატორია და მისი საკუთრივი ფუნქციები ქმნიან სრულ ბაზისს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |f_n|^2$$

მწკრივი იყოს საშუალოდ კრებადი, სადაც λ_n არის $\hat{K}$ ოპერატორის მახასიათებელი მნიშვნელობები, ხოლო f_n -კი, $\hat{K}$ ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციების ბაზისში (2) გამოსახულების დაშლის კოეფიციენტებია.

აქვე გავაკეთოთ ერთი მნიშვნელოვანი შენიშვნა. მიზეზი, რომლის გამოც, ნებისმიერი არაერთგვაროვანი წვერისათვის ფრედჰოლმის პირველი გვარის განტოლებას ამონახსნი არ აქვს, მდგომარეობს ინტეგრების პროცედურის განსაკუთრებულობაში. როგორც ცნობილია, ინტეგრება "ასწორებს" ინტეგრალქვეშა ფუნქციის განსაკუთრებულობებს (წყვეტის წერტილებს; წერტილებს, სადაც ფუნქციას არ აქვს წარმოებული და სხვა). ამრიგად, ინტეგრების შემდეგ მიიღება "კარგი" ფუნქცია. მივიღოთ ამ გზით ფუნქციები, რომლებსაც, მაგალითად, წარმოებული არ აქვთ რაიმე წერტილში, შეუძლებელია, მიუხედავად იმისა, რომ ასეთი ფუნქციები კვადრატში ინტეგრებადები არიან. სიძნელის ძირითადი არსი, რომელიც თან სდევს პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებებს არის ის, რომ პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, როგორც წესი, არ არის ძღვრადი. გადავიდეთ ამ საკითხის დეტალურ ანალიზზე.

პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლებებისათვის სრულდება (აღამარის აზრით) ამოცანის კორექტულობის მხოლოდ ნაწილი, კერძოდ, მათ აქვთ ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო რაც შეეხება ამონახსნის მდრადლობას არაერთგვაროვანი წვერის მიმართ, საზოგადოდ, არ სრულდება. მართლაც, დავუშვათ y (2) განტოლების ამონახსნია. ჩავსვათ $z(t) = y(t) + A \cos \omega t$ ფუნქცია (2) სახის ისეთ განტოლებაში, რომლის არაერთგვაროვანი წვერი g -ს ტოლია. გვექნება

$$\int_a^b K(s,t)z(t)dt = g(s),$$

$$A \int_a^b K(s,t) \cos \omega t dt = g(s) - f(s).$$

ფრედჰოლმისეული ბირთვისათვის უკანასკნელ განტოლებაში ინტეგრალი ნულისაკენ მიისრაფის, როდესაც $\omega \rightarrow \infty$, ფურიეს ინტეგრალების თეორიის ძირითადი თეორემის თანახმად. თვისობრივად ეს დებულება ცხადია: ინტეგრალი გლუვი და სწრაფად ოსცილირებადი ნიშანცვლადი ფუნქციის ნამრავლიდან ძალიან მცირე სიდიდეა. ამრიგად, $f - g$ სხვაობა შესაძლებელია გავხადოთ რაგინდ მცირე, ნებისმიერი სასრული A -სათვის თუ ω -ს საკმარისად დიდს ავიღებთ. ეს კი ნიშნავს, რომ z და y ფუნქციებს შორის განსხვავება სასრული რიცხვითაა სასრული A -ს შემთხვევაში, მიუხედავად იმისა, რაგინდ მცირე განსხვავება არ უნდა იყოს f და g ფუნქციებს შორის. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, არაერთგვაროვანი f წვერის მცირე ცვლილება იწვევს მონახსნთა შორის ძლიერ განსხვავებას, რაც ნიშნავს, რომ (2)-ის ამონახსნი არამდგრადია და ამოცანა არაკორექტულია.

ამის გამო, დიდი ხნის მანძილზე ითვლებოდა, რომ არაკორექტული ამოცანები, კერძოდ, კი პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლებები, რომელთა არაერთგვაროვანი წვერი მხოლოდ გარკვეული მიახლოებითაა ცნობილი, გამოუყენებადია საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა და ტექნიკის ამოცანების ამოსახსნელად, რადგან რეალურად არაერთგვაროვანი წვერი ექსპერიმენტიდან მიღებული ფუნქციაა, ანუ გაზომვის შედეგია, სადაც ცდომილება ჩვეულებრივ სასრული სიდიდეა. სანამდვილეში, გამოთვლითი რესურსების შეზღუდულობით იყო გამოწვეული ასეთი შეხედულება: დიდი სიზუსტით გამოთვლა დიდ დროს მოითხოვდა, ხოლო სიზუსტის შემცირების შემთხვევაში კი არამდრადობა არ ვლინდება. უკანასკნელ პერიოდში არაკორექტული (ამოცანის კორექტულობა, ზემოთ მოყვანილი თვისების დარღვევისას) ამოცანებისადმი მიდგომა მძლავრი ელექტროგამომთვლელი მანქანების არსებობის გამო შეიცვალა. დამუშავდა სპეციალური ალგორითმები, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელი გახდა საიმედო ინფორმაციის მიღება განტოლებებიდან, რომელთა ამონახსნები საკმარისად იცვლებიან განტოლებაში შემავალი პარამეტრების ცვლილებისას. გავიმეორებთ, რომ პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლებების ამონახსნის არამდგრადობა ვლინდება მხოლოდ იმ დროს, როდესაც f ფუნქცია ზუსტად არაა ცნობილი, მაგალითად, როდესაც ის ექსპერიმენტიდან აიღება ან განტოლება იხსნება მასზე არცთუისე მისაღავი

ალგორითმით. თუ f ზუსტადაა ცნობილი, მაშინ არამდგრადობა შესაძლებელია არც გამოვლინდეს.

რაც შეეხება ფრედჰოლმის პირველი გვარის განტოლების გამოყენებას ფიზიკაში, მაგალითი სპექტროსკოპიდან მოვიყვანოთ. დავუშვათ რაიმე წყარო გამოასხივებს რთული სპექტრის სინათლეს. პრიზმის გამოყენებით შესაძლებელია მისი ისე “გაჭიმვა” სივრცეში, რომ X ღერძის მოცემულ წერტილში მოხვდეს მოცემული V სიხშირის გამოსხივება. დეტექტორი ახდენს ΔX ინტერვალზე სრული გამოსხივების რეგისტრაციას და გარდაქმნის მას ელექტრონულ სიგნალში, რომელიც ფიქსირდება. ნათელია, რომ ექსპერიმენტის მსგავსი სქემა (2) სახის განტოლებით აღიწერება. ამ განტოლებაში ჩაისმება $s = X$, $t = V$, ხოლო f ფუნქცია იქნება ელექტრონული სიგნალი, რომელსაც დეტექტორი იძლევა მასზე დაცემული გამოსხივების შემდეგ. მოცემული სინათლის წყაროს y საძიებელი ინტენსივობის სპექტრის განაწილებისათვის მივიღებთ (2) ინტეგრალურ განტოლებას. განტოლების ბირთვი ინტეგრირდება როგორც გამოსხივების სიხშირის გარდაქმნილი სივრცულ კოორდინატებში, მას ჩვეულებრივ აპარატურულ ფუნქციას უწოდებენ. რადგან ΔX ინტერვალი, რომელზედაც დეტექტორი აგროვებს გამოსხივებას, სასრულია, დეტექტორის მიერ გამოუმავებული ელექტრონული სიგნალი, აგრეთვე სიგნალის შემდგომი დამუშავება ყოველ ეტაპზე გარკვეულ ცდომილებებს შეიცავს. ნათელია, რომ (2) განტოლების მარჯვენა მხარე ზუსტად გაზომილი არ შეიძლება იყოს. ანალოგიური პრობლემა ჩნდება სხვა სპექტრების შესწავლის დროსაც. კერძოდ, რენტგენული, ნეიტრონული, რადიოასტრონომიული და სხვა. ამრიგად, y -ის შესახებ არასაიმედო ინფორმაციას ვიღებთ, რის გამოც ვერ ხერხდება გავაკეთოთ დასკვნა იმის შესახებ, სპექტრის მოცემულ დიაპაზონში რეალურად გვაქვს ერთი ხაზი, თუ სპექტრალური დუპლეტი (ორი სპექტრალური ხაზი). ასეთ საკითხს კი პრინციპული მნიშვნელობა აქვს. უფრო ზუსტად, ვიცით რა f -ის ცდომილება, შეუძლებელია გამოვთვალოთ y -ის ცდომილება.

მოყვანილი მაგალითი ერთადერთი არ არის. პრაქტიკაში პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება ხშირად გვხვდება. ამიტომ ასეთი განტოლებების, და საერთოდ არაკორექტული ამოცანების ამოხსნის მეთოდების დამუშავებას დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. არაკორექტულ ამოცანებს, და მათ შორის პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებებს, უწოდებენ *შებრუნებულ ამოცანებს*. ასეთი სახელწოდება გამოწვეულია იმით, რომ ამ ამოცანების მეშვეობით მოწყობილობის (სისტემის) გამოსავალზე ცნობილი სიდიდის საშუალებით შეიძლება განვსაჯოთ, რა სიგნალი მიეწოდებოდა მოწყობილობას.

ინტეგრალურ განტოლებათა მნიშვნელოვანი კლასია აგრეთვე *სინგულარული ინტეგრალი განტოლებები*, რომლის ზოგადი თეორია თვისობრივად განსხვავდება ზემოთ მოყვანილი ინტეგრალური განტოლებების თეორიისაგან.

რადგან ეს პარაგრაფი მხოლოდ ინფორმაციულ ხასიათს ატარებს, ამიტომ მხოლოდ ფორმალური განმარტებით შემოვიფარგლებით.

სინგულარული ინტეგრალური განტოლება f უცნობი ფუნქციის მიმართ ეწოდება

$$a(\tau)f(\tau) + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{K(\tau, t)f(t)}{t - \tau} dt = g(\tau)$$

სახის გამოსახულებას, სადაც $\frac{K(\tau, t)}{t - \tau}$ განტოლების გულია (*კოშის გული*), γ მარტივი წირია სიბრტყეზე, t და τ წერტილებია γ -ზე, ხოლო g კი მოცემული ფუნქციაა, რომელიც შესაძლებელია იყოს 0-ის ტოლი (ამ შემთხვევაში განტოლება იქნება ერთგვაროვანი).

განტოლების სირთულე გამოწვეულია განტოლების $\frac{K(\tau, t)}{t - \tau}$ გულის რთული ყოფაქცევით. $\tau = t$ წერტილი ამ ფუნქციისათვის განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილია, რის გამოც ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნის ზოგადი თეორია, რომელიც ძირითადად ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიას ემყარება, საკმარისი არ არის მისი ანალიზისათვის. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების დასრულებული (ერთ განზომილებიან შემთხვევაში) ეკუთვნის ნ. მუსხელიშვილს, რომელმაც ანალიზური ფუნქციების სასაზღვრო მნიშვნელობების გამოკვლევის და ფუნქციათა ამ სივრცისათვის კლასიკური შედეგების მიღების შემდეგ შეძლო განტოლებისათვის დაეკავშირებინა ახალი რიცხვითი ინვარიანტი, განტოლების *ინდექსი*. როგორც შემდგომმა კვლევებმა აჩვენა, ეს ინვარიანტი არა მარტო განტოლებისათვისაა მნიშვნელოვანი, არამედ ანალიზის, ტოპოლოგიის და ალგებრის საერთო ობიექტია. ამის შემდეგ, ბუნებრივია, საქართველო მსოფლიო მათემატიკურ მეცნიერებათა ქვეყნად იქცა.

3. ელიფსურ განტოლებათა სისტემები სიბრტყეზე

წრფივ პირველი რიგის კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ორი ცვლადის $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ფუნქციებისათვის აქვს სახე

$$\begin{cases} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + a_1 u + b_1 v = f_1, \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + a_2 u + b_2 v = f_2, \end{cases} \quad (1)$$

სადაც $a_{ij}(x, y), b_{ij}(x, y), a_j(x, y), b_j(x, y), f_j(x, y)$ ორი ცვლადის მოცემული ფუნქციებია $U \subset R^2$ არეზე. ამ ფუნქციებს, ისევე როგორც საძიებელ ფუნქციებს, რაიმე შეზღუდვებს არ დავადებთ (თუმცა, აქვე აღვნიშნავთ, რომ განტოლებათა სისტემის სრული ანალიზისათვის ეს მნიშვნელოვანია).

ისევე როგორც ერთი განტოლების შემთხვევაში, განტოლებათა სისტემის კლასიფიკაციისათვის გამოვიყენოთ შესაბამისი კვადრატული ფორმა:

$$G = adx^2 + 2b dx dy + c dy^2, \quad (2)$$

სადაც

$$\begin{aligned} a(x, y) &= \frac{a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}}{\Delta}, \\ b(x, y) &= -\frac{a_{11}b_{22} + a_{12}b_{21} - a_{21}b_{21} - a_{22}b_{11}}{2\Delta}, \\ c(x, y) &= \frac{a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11}}{\Delta}, \\ \Delta &= (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})(a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11}) - \\ &\quad - \frac{1}{4}(a_{11}b_{22} + a_{12}b_{21} - a_{21}b_{21} - a_{22}b_{11})^2. \end{aligned}$$

(1) სისტემას ვუწოდოთ *ელიფსური*, თუ (2) ფორმა დადებითად განსაზღვრულია. ეს მოხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a > 0$ და $\Delta > 0$. Δ -ს ეწოდება განტოლებათა სისტემის დისკრიმინანტი. ქვემოთ მხოლოდ ელიფსურ სისტემებს განვიხილავთ. ამ შემთხვევაში კი დისკრიმინანტი დადებითა, რის გამოც (1) შესაძლებელია გარდაიქმნას შედარებით მარტივ სისტემად:

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial y} + a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + a_1 u + b_1 v = f_1, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + a_2 u + b_2 v = f_2, \end{cases} \quad (3)$$

რომლის ელიფსურობა ნიშნავს $a_{11} > 0$ და $\Delta > 0$ პირობების დაკმაყოფილებას.

დავუშვათ, რომ $a_{12} = -a_{21}$, $a_{11} = a_{22}$. მაშინ უკანასკნელი სისტემა, ნათელია, მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial y} + a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + a_1 u + b_1 v = f_1, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - a_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{11} \frac{\partial u}{\partial y} + a_2 u + b_2 v = f_2, \end{cases}$$

რომელიც $U = a_{11}u$ და $V = v + a_{12}v$ ჩასმის შემდეგ მოგვცემს

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} + A_1 U + B_1 V = f, \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + A_2 U + B_2 V = g \end{cases} \quad (4)$$

სისტემას. (4)-ს (3) სისტემის *კანონიკური ფორმა* ეწოდება.

საწყისი სისტემის თითოეული განტოლების მთავარი ნაწილებისაგან შედგენილ სისტემას განტოლებათა *სისტემის მთავარი ნაწილი* ეწოდება. თუ (4) სისტემის მარჯვენა მხარე 0-ია, მაშინ მას *ერთგვაროვანი* ეწოდება. გარდა ამისა, (4)-ში შესაძლებელია რომელიმე კოეფიციენტი, ან ყველა ერთად იგივეურად 0-ის ტოლი გახდეს. ადვილი შესაძენია, რომ (4)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მთავარი ნაწილი კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემაა. ამრიგად (4) არის კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემის განზოგადება.

(1) სახის სისტემების ამონხნის მეთოდი და მისი ამონახსნების თვისებები კოეფიციენტთა საკმაოდ ფართო კლასისათვის ეკუთვნის ი.ვეკუას. ი.ვეკუამ (4) სისტემა ჩაწერა შემდეგი კომპლექსური ფორმით

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + AW + B\bar{W} = F, \quad (5)$$

სადაც $W(z, \bar{z}) = U(x, y) + iV(x, y)$ საძიებელი ფუნქციაა, $F(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}(f(x, y) + ig(x, y))$ მოცემული კომპლექსური ფუნქციაა,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

დიფერენცირების ოპერატორია, ხოლო განტოლების კოეფიციენტები (4) სისტემით მოცემულ ფუნქციებს უკავშირდებიან თანადობებით:

$$\begin{aligned} A(z, \bar{z}) &= \frac{1}{4}(A_1(x, y) - B_2(x, y) + i(A_2(x, y) + B_1(x, y))), \\ B(z, \bar{z}) &= \frac{1}{4}(A_1(x, y) + B_2(x, y) - i(B_1(x, y) - A_2(x, y))), \end{aligned}$$

რის შემდეგ, ი.ვეკუამ, შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნის არსებობის შესახებ თეორემის გამოყენებით ამოწერა (5) განტოლების ამონახსნი. (5) განტოლების ამონახსნის ვეკუას ფორმულას სამეცნიერო ლიტერატურაში *მსგავსების პრინციპი* ეწოდება, ხოლო (5)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნებს ვეკუას აზრით განზოგადებული *ანალიზური ფუნქციები*.

ნათელია, რომ (1) სახის ზოგადი ელიფსური სისტემის კერძო შემთხვევაა

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \tilde{a} \frac{\partial v}{\partial y} + \tilde{b} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \tilde{b} \frac{\partial v}{\partial y} + \tilde{c} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

სისტემა (კოეფიციენტები ისეა აღებული, რომ სისტემა ელიფსურია), რომელიც კომპლექსურ კოორდინატებში გადაწერის შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z, \bar{z}) \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

იგი ბელტრამის განტოლების სახელითაა ცნობილი. მის ამონახსნებს კვაზიკონფორმული ფუნქციები ეწოდება. ცხადია, რომ ეს განტოლებაც კოში რიმანის (რომელსაც კომპლექსურ კოორდინატებში აქვს სახე $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$) განტოლებათა სისტემის განზოგადებაა. ამის გამოა, რომ ანალიზურ ფუნქციათა თვისებების უმრავლესობა ვრცელდება განზოგადებული ანალიზურ და კვაზიკონფორმულ ფუნქციებზე.

მეორე რიგის წრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას სიბრტყეზე აქვს სახე

$$A(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + E(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + F(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} + D(x, y) U = G(x, y) \quad (1)$$

სადაც

$$\begin{aligned} A(x, y) &= (a_{ij}(x, y))_{i,j=1}^n, \quad B(x, y) = (b_{ij}(x, y))_{i,j=1}^n, \\ C(x, y) &= (c_{ij}(x, y))_{i,j=1}^n, \quad E(x, y) = (e_{ij}(x, y))_{i,j=1}^n, \\ F(x, y) &= (f_{ij}(x, y))_{i,j=1}^n, \quad D(x, y) = (d_{ij}(x, y))_{i,j=1}^n \end{aligned}$$

მოცემული კვადრატული მატრიც-ფუნქციებია,

$$U(x, y) = (u_1(x, y), \dots, u_n(x, y))$$

უცნობი და $g(x, y) = (g_1(x, y), \dots, g_n(x, y))$ მოცემული ვექტორული ფუნქციაა.

$$(1) \text{ სისტემას ეწოდება ელიფსური } U \subset R^2 \text{ არეზე, თუ } \det(A(x, y)\lambda^2 + 2B(x, y)\lambda + C(x, y)) \neq 0, \quad \det A(x, y) \neq 0 \quad (2)$$

λ -ს ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის მოცემულ არეში.

λ -ს იმ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც

$$\det(A(x, y)\lambda^2 + 2B(x, y)\lambda + C(x, y)) = 0$$

სისტემის მახასიათებელი რიცხვები ეწოდება.

მეორე რიგის ელიფსური განტოლებისათვის ღირიხლეს ამოცანა კორექტული ამოცანაა, რაც შეეხება (1) სახის სისტემებს, მაშინაც კი როდესაც კოეფიციენტები მუდმივია, ღირიხლეს ამოცანას შეიძლება ჰქონდეს

უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი. ასეთი ამოცანის პირველი მაგალითი ეკუთვნის ქართველ მათემატიკოს ა. ბიწაძეს.

განვიხილოთ (1) სახის სისტემა მუდმივი კოეფიციენტებით

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

ეს სისტემა ელიფსურია, რადგან მის მახასიათებელ განტოლებას $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$ ნამდვილი ფესვები არ აქვს. დავსვათ მისთვის ღირიხლეს შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ $D = \{x^2 + y^2 < R^2\}$ წრეში (3)-ის ისეთი, რომ D -ს $S^1 = \{x^2 + y^2 = R^2\}$ საზღვარზე იგი 0-ის ტოლი გახდეს.

განტოლებაში უშუალო ჩასმით მოწმდება, რომ ნებისმიერი ნატურალური n -სათვის სისტემის ამონახსნია

$$\begin{aligned} u_n(x, y) &= \left(r^{n-1} - \frac{r^{n+1}}{R^2} \right) \cos(n-1)\varphi, \\ v_n(x, y) &= \left(r^{n-1} - \frac{r^{n+1}}{R^2} \right) \sin(n-1)\varphi \end{aligned}$$

ფუნქციები, სადაც (r, φ) x -ის და y -ის პოლარული კოორდინატებია. როდესაც $r \rightarrow R$, ეს ფუნქციები იგივეურად 0-ის ტოლი ხდებიან და ამრიგად, ყველა მათგანი წარმოადგენს ღირიხლეს ამოცანის ამონახსნს.

(3) განტოლებათა სისტემა ბიწაძის განტოლების სახელითაა ცნობილი იგი ელიფსური სისტემების შემდგომი კლასიფიკაციის აუცილებლობის სტიმული გახდა, რადგან (1) სახის ელიფსურ სისტემათა უმრავლესობისათვის ღირიხლეს ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი აქვს. ასე სრული კლასიფიკაცია ეკუთვნის ი.ვეკუას მოწაფეს, პოლონელ მათემატიკოს ბ.ბოიარსკის. განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც $n = 2$. ბოიარსკიმ აჩვენა, რომ სიბრტყეზე მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი ელიფსური სისტემების კლასიფიკაცია (ღირიხლეს ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თვალსაზრისით) ორი უცნობი ფუნქციისათვის ექვივალენტურია

$$P(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C = (a_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2 \quad (3)$$

მეორე რიგის პოლინომიალური მატრიცების სიმრავლის კლასიფიკაციის მისი ბმულობის კომპონენტების მიხედვით. უფრო ზუსტად, განვიხილოთ (3) პოლინომიალური მატრიცების სიმრავლე, რომლებიც (2) პირობებს აკმაყოფილებენ და ვიპოვოთ ამ სიმრავლის ბმული კომპონენტების რაოდენობა. ბოიარსკის თეორემის თანახმად, ამ სიმრავლეს აქვს 6 ბმულობის კომპონენტი და ისინი შეესაბამებიან

$$\chi(\lambda) = \alpha_{11}(\lambda) + \alpha_{22}(\lambda) + i(\alpha_{21}(\lambda) - \alpha_{12}(\lambda)) = 0$$

კვადრატული განტოლების λ_1 და λ_2 ფესვების შემდეგ თანადობებს:

- 1) $\det P(\lambda) > 0, \operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \operatorname{Im} \lambda_2 > 0$;
- 2) $\det P(\lambda) > 0, \operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \operatorname{Im} \lambda_2 < 0$;

- 3) $\det P(\lambda) > 0, \operatorname{Im} \lambda_1 < 0, \operatorname{Im} \lambda_2 < 0;$
- 4) $\det P(\lambda) < 0, \operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \operatorname{Im} \lambda_2 > 0;$
- 5) $\det P(\lambda) < 0, \operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \operatorname{Im} \lambda_2 < 0;$
- 6) $\det P(\lambda) < 0, \operatorname{Im} \lambda_1 < 0, \operatorname{Im} \lambda_2 < 0.$

მეორე რიგის ელიფსურ განტოლებათა სისტემა სიბრტყეზე, რომლებიც აკმაყოფილებენ 1), 2) და 3) პირობებს, აღვნიშნოთ, შესაბამისად, E_1 , E_2 და E_3 -ით.

მაგალითად ლაპლასის განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

ეკუთვნის E_2 კლასს. ბიწადის (3) სისტემა, აგრეთვე სისტემა

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sqrt{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \sqrt{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

ეკუთვნის E_3 , ხოლო

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$$

სისტემა E_1 კლასისაა.

დებულება 1. თუ ელიფსური სისტემა E_2 კლასისაა, მაშინ მისთვის ღირიხლეს ამოცანა კორექტულია.

რაც შეეხება E_1 და E_3 კლასის ელიფსურ განტოლებებს, მათთვის ღირიხლეს ამოცანა შეიძლება კორექტულიც იყოს და არაკორექტულიც. მაგალითად, (4) სისტემისათვის ღირიხლეს ამოცანას ამოცანას აქვს მრავალი ამონახსნი

$$u(x, y) = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad v(x, y) = 1 - \frac{r^2}{R^2}.$$

სადაც r x -ის და y -ის პირველი პოლარული კოორდინატია, მეორე φ კოორდინატზე სისტემის ამონახსნი დამოკიდებული არ არის. ეს ფუნქციები იგივეურად 0-ის ტოლია $D = \{x^2 + y^2 < R^2\}$ დისკის საზღვარზე. საინტერესოა, იმის გარკვევა, რამდენად ბევრია ასეთი ამოცანები. სხვა სიტყვებით, ამოცანა მდგომარეობს იმის გარკვევაში, ღიაა თუ არა კორექტული ამოცანების სიმრავლე E_1 და E_3 კლასებში.

4. შტურმ-ლიუვილის ამოცანის რეალიზაცია Maple-ზე

კომპიუტერული ალგებრის სისტემა Maple შეიცავს სტანდარტულ ბრძანებას `mapde(eq, canom)`, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია მუდმივკოეფიციენტებიანი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების მიყვანა კანონიკურ სახემდე. ხოლო ბრძანება `pdsolve`-ს საშუალებით ხდება განტოლების ზოგადი ამონახსნის პოვნა. აქვე შევნიშნოთ, რომ `mapde(eq, canom)` საშუალებით არამარტო მუდმივ კოეფიციენტებიანი განტოლება მიიყვანება კანონიკურ სახემდე, არამედ ზოგჯერ ცვლად კოეფიციენტებიანიც. იმისათვის, რომ ბრძანებით ვისარგებლოთ, საჭიროა მის შესრულებამდე ჩავთოთ Maple-ს პაკეტი `PDEtools`. ხაზი გავუსვით იმ გარემოებას, რომ ცვლადკოეფიციენტებიანი განტოლების შემთხვევაში ყოველთვის ბრძანებამ შესაძლებელია არ იმუშაოს!

ამოცანა 1. ვიპოვოთ საკუთრივი ფუნქციები და საკუთრივი რიცხვები შემდეგი შტურ-ლიუვილის ამოცანისათვის:

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, \\ y(a) &= 0, y'(a) = 0, \\ x &\in [a, b]. \end{aligned}$$

ქვემოთ მოყვანილია პროგრამა Maple-ზე განმარტებებით:

```
> restart;
diff(y(x), x(x, 2)) + lambda*y(x) = 0; y(a) = 0; D(y)(b) = 0;
განტოლების შეტანა:
> eq:=diff(y(x), x(x, 2)) + lambda*y(x)=0;
განტოლების ზოგადი ამონახსნის პოვნა:
> dsolve(eq, y(x)); y:=unapply(rhs(%), x);

$$y(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$$


$$y := x \rightarrow c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

სასაზღვრო პირობების მოცემა:
> assume(b>a):
> eq1:=y(a)=0; eq2:=D[1](y)(b)=0;

$$eq1 = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} a) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} a) = 0$$


$$eq2 = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} b) \sqrt{\lambda} - c_2 \sin(\sqrt{\lambda} a) \sqrt{\lambda} = 0$$

 $c_1, c_2$ -სათვის განტოლებათა სისტემის შედგენა და მისი
დეტერმინანტის გამოთვლა:
> linalg[genmatrix]({eq1, eq2}, {C1, C2});
> linalg[det](%); Delta:=combine(%);
```

$$\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{\lambda}a) & \cos(\sqrt{\lambda}a) \\ \cos(\sqrt{\lambda}a) & -\sin(\sqrt{\lambda}a)\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} = -\sin(\sqrt{\lambda}a)\sin(\sqrt{\lambda}a)\sqrt{\lambda} - \cos(\sqrt{\lambda}a)\cos(\sqrt{\lambda}a)\sqrt{\lambda}$$

$$\Delta := -\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}a - \sqrt{\lambda}b)$$

მახასიათებელი განტოლების ამოხსნა:

> Delta:=select(has,Delta,[cos]);

$$\Delta := \cos(\sqrt{\lambda}a - \sqrt{\lambda}b)$$

> _EnvAllSolutions:=true;

> lambda:=solve(Delta,lambda);

$$\lambda := \frac{\pi^2(1+2-z1)^2}{4(-b+a)^2},$$

$$\lambda := \frac{\pi^2(1+2k)^2}{4(-b+a)^2}$$

საკუთრივი ფუნქციების პოვნა:

> assume(k,posint):y(x);

$$-c1\sin\left(\frac{\sqrt{4}\sqrt{\frac{\pi^2(1+2k)^2}{4(-b+a)^2}}x}{4}\right) + -c2\cos\left(\frac{\sqrt{4}\sqrt{\frac{\pi^2(1+2k)^2}{4(-b+a)^2}}x}{4}\right)$$

> C1:=solve(eq1,_C1);

$$c1 := \frac{-c2\cos\left(\frac{\pi(1+2k)a}{2(-b+a)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(1+2k)a}{2(-b+a)}\right)}$$

> simplify(subs(_C1=C1,y(x)));

> combine(%);

$$\frac{-c2\sin\left(\frac{-\pi a + \pi x - 2\pi a k + 2\pi x k}{-2b + 2a}\right)}{\sin\left(\frac{\pi a + 2\pi k a}{-2b + 2a}\right)}$$

> Yn:=unapply(select(has,%, [x]),x,k);

$$Yn := (x, k) \rightarrow \sin\left(\frac{-\pi a + \pi x - 2\pi a k + 2\pi x k}{-2b + 2a}\right)$$

დიფერენციალური განტოლების მიღებული ამონახსნის შემოწმება

> y:='y':Yn(x,k);simplify(subs(y(x)=%,eq));

სასაზღვრო პირობების შემოწმება:

> $Yn(a,k)=0$; $simplify(D[1](Yn)(b,k))=0$;

საკუთრივი ფუნქციების ორთოგონალურობის შემოწმება $[a,b]$

სეგმენტზე

> $assume(n, posint): assume(m, posint)$;

> $Int(Yn(x,n)*Yn(x,m), x=a..b); simplify(value(%))$;

$$\int_a^b \sin\left(\frac{-\pi a + \pi x - 2\pi a k + 2\pi x k}{-2b + 2a}\right) \sin\left(\frac{-\pi a + \pi x - 2\pi a k + 2\pi x k}{-2b + 2a}\right) dx$$

საკუთრივი ფუნქციების ნორმის გამოთვლა

> $Norma:=Int(Yn(x,n)^2, x=a..b); simplify(value(%))$;

$$Norma := \int_a^b \sin\left(\frac{-\pi a + \pi x - 2\pi a k + 2\pi x k}{-2b + 2a}\right)^2 dx$$

$$\frac{b}{2} - \frac{a}{2}$$

საკუთრივი ფუნქციის არგუმენტის ხელსაყრელ ფორმაში გადატანა:

> $simplify(collect((-Pi*a+Pi*x-2*Pi*a*k+2*Pi*x*k)/(-2*b+2*a), x))$;

ამრიგად, ამოცანის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ფუნქციები

იქნება:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4(b-a)^2}, k=1,2,3...$$

$$y_k(x) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi(a-x)a}{2(b-a)}\right), k=1,2,3...$$

თავიდან ჩვენ ვიგულისხმეთ, რომ $\lambda \neq 0$, ახლა ვაჩვენოთ, რომ მოცემული ამოცანის სპექტრში 0 არ შედის.

დავუშვათ $\lambda = 0$:

> $lambda:=0; eq$;

$$\lambda := 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = 0$$

> $dsolve(eq, y(x)); assign(%): y0:=unapply(y(x), x)$;

> $eq0\_1:=y0(a)=0; eq0\_2:=D(y0)(b)=0$;

> $linalg[genmatrix]({eq0\_1, eq0\_2}, \{C1, C2\})$;

> $Delta0:=linalg[det](%)$;

შტურმ-ლიუვილის ამოცანაზე დაყრნობით, გამოვიკვლიოთ რხევის განტოლება, კერძოდ დავსვათ შემდეგი ამოცანა:

ამოცანა 2. განვიხილოთ ღეროს ისეთი რხევა, რომლის $x=0$

ბოლო დამაგრებულია, ხოლო თავისუფალი $x=l$ ბოლოში ხდება სიმის

შეშვითება დროის საწყისი მომენტისათვის გასწვრივი დარტყმითი P იმპულსით.

ამრიგად, საჭიროა ვიპოვოთ რხევის განტოლების

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad l > 0$$

ამონახსნი

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$$

სასაძღვრო და

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & 0 < x < l - \varepsilon, \\ v_0 = \frac{P}{\rho \varepsilon S}, & l - \varepsilon < x < l. \end{cases}$$

საწყისი პირობების შემთხვევაში, ρ და S აღნიშნავენ შესაბამისად სიმკვრივესა და ფართობს.

პროგრამის ამოსავალი კოდი კომენტარებით.

```
eq:=diff(u(x,t),t,t)/v^2-diff(u(x,t),x,x)=0: 0<x,x<1,t>0;
init_c:=u(x,0)=0,D[2](u)(x,0)=phi;
phi1:=piecewise(0<x and x<1-epsilon,0,1-epsilon<x and x<1,
P/rho/epsilon/S):
phi2:=x->P/rho/S*Dirac(x-1):
bound_c:=u(0,t)=0,D[1](u)(0,t)=0;
subs(u(x,t)=X(x)*T(t),eq):
expand(lhs(%)/X(x)/T(t)=0;
s1:=op(1,lhs(%))=-lambda:s2:=op(2,lhs(%))=lambda;
```

ამ ოპერაციების შესრულების შემდეგ მივიღებთ ორ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{\frac{d^2}{dt^2} T(t)}{T(t)v^2} = -\lambda, \quad \frac{\frac{d^2}{dx^2} X(x)}{X(x)v^2} = \lambda,$$

რომელთათვისაც შესაძლებელია შტურმ-ლიუვილის ამოცანის დასმა. ამის შემდეგ ვიმეორებს იმ ალგორითმს, რომელიც ზემოთ უკვე გვქონდა და საბოლოოდ ვპოულობთ საკუთრივ რიცხვებსა და ნორმირებულ საკუთრივ ფუნქციებს შტურმ-ლიუვილის ამოცანისათვის (მაგალითად მე-2 განტოლებისათვის):

$$\frac{\pi^2 (1+2k)^2}{4l^2}, \quad \frac{\sin\left(\frac{\pi(1+2k)x}{2l}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{l}}.$$

ამის გათვალისწინებით პირველი განტოლების ზოგად ამონახს აქვს სახე:

$$T(t) = -c_1 \sin\left(\frac{\pi v(1+2k)t}{2l}\right).$$

ფურიეს კოეფიციენტების გამოთვლა მოხდება შედეგი პროგრამით:
assume(l>0):

*Ck1:=P/rho/epsilon/S*Int(ef(k,x), x=1-epsilon..1)/ev(k)*(1/2)/v;*

გამარტივების შედეგ, რომელიც სრულდება ბრძანებით:

Ck1:=simplify(value(Ck1));

მიიღება

$$Ck1 := \frac{4P\sqrt{2}l^{3/2}(-1)^k \left(\sin\left(\frac{\pi\epsilon}{2l}\right) \cos\left(\frac{\pi\epsilon k}{l}\right) + \cos\left(\frac{\pi\epsilon}{2l}\right) \sin\left(\frac{\pi\epsilon k}{2l}\right) \right)}{\rho\epsilon S\pi^2(1+2k)^2v},$$

ამის შემდეგ ხდება ზღვარზე გადასვლა ბრძანებით:

Ck1:=Limit(Ck1,epsilon=0): Ck1:=factor(value(Ck1));

ღეროს მასის (რომელიც სიმკვრივისა და ფართობისაგან გამოითვლება) გათვალისწინებით საბოლოო ამონახსნს აქვს სახე:

$$u(x,t) = \frac{4Pl}{\pi vM} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}vt\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right)}{2k+1}.$$

5. ლაპლასის გარდაქმნის ცხრილი

$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(z)e^{zt} dz$	$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt$
$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{z}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{z + \alpha}$
$\cos(\beta t)$	$\frac{z}{z^2 + \beta^2}$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{z^2 + \beta^2}$
t^ν	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$
$\sin(at) \sinh(at)$	$\frac{2a^2 z}{z^4 + 4a^4}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{z}}$
$J_0(\alpha t)$	$\frac{1}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}}$
$\begin{cases} 1, & t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$\frac{1 - e^{-zT}}{z}$
$\sin(at) \cosh(at)$	$\frac{a(z^2 + 2a^2)}{z^3 + 4a^4}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{z^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{z}{z^2 - a^2}$
$\frac{1}{2a} (\sin(at) - at \cos(at))$	$\frac{a^2}{(z^2 + a^2)^2}$
$\frac{t}{2a} \sin(at)$	$\frac{z}{(z^2 + a^2)^2}$
$\cos(at) \cosh(at)$	$\frac{z^3}{z^4 + 4a^4}$
$e^{-\lambda t} \cos(\omega t)$	$\frac{z + \lambda}{(z + \lambda)^2 + \omega^2}$

$e^{-\lambda t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(z + \lambda)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}$
$\cos(at) \sinh(at)$	$\frac{a(z^2 - 2a^2)}{z^4 + 4a^4}$
$1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{z}}}{z}$
$\frac{1 + 2at}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{z + a}{z\sqrt{z}}$
$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{z + a}}$

