საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

კალკულუსი 2

ლექციების კურსი „Thomas' Calculus, Early Transcedentals“ მიხედვით

(სტუ ბიბლიოთეკა # ??????)

„ ნიადაგისა და წყლის რესურსების ინჟინერიის“

სპეციალობის I კურსის სტუდენტებისათვის

2014

THOMAS'
CALCULUS
EARLY TRANSCENDENTALS
Twelfth Edition

Based on the original work by
George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

as revised by

Maurice D. Weir
Naval Postgraduate School

Joel Hass
University of California, Davis

Addison-Wesley

Boston Columbus Indianapolis New York San Francisco Upper Saddle River

Amsterdam Cape Town Dubai London Madrid Munich Paris Montréal Toronto

Delhi Mexico City São Paulo Sydney Hong Kong Seoul Singapore Taipei Tokyo

დ.ნატროშვილი, გ.ბერიკელაშვილი, შ.ზაზაშვილი

კალკულუსი 2

ლექციების კურსი მომზადებულია

„Thomas' Calculus, Early Transcedentals“

მიხედვით

თბილისი 2014

სარჩევი

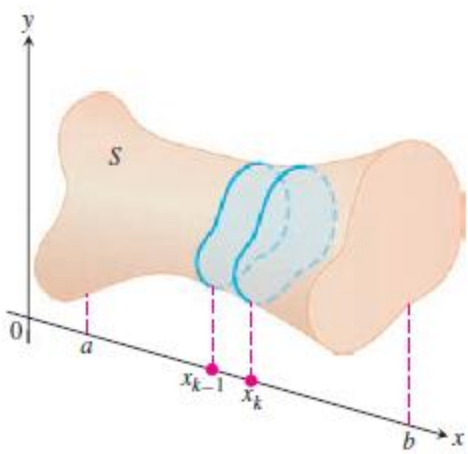
6

განსაზღვრული ინტეგრალების გამოყენებები

მეხუთე თავში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ჩაკეტილ ინტერვალზე უწყვეტი ფუნქციას აქვს განსაზღვრული ინტეგრალი, რომელიც წარმოადგენს რიმანის ჯამის ზღვარი. დავამტკიცეთ, რომ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა შეიძლება კალკულუსის ფუნდამენტური თეორემის გამოყენებით. დავასაბუთეთ, რომ ორ წირს შორის მოთავსებული ფიგურის ფართობი შეიძლება გამოითვალოს როგორც განსაზღვრული ინტეგრალი.

ამ თავში განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებებს გავავრცელებთ მოცულობათა, ბრტყელი წირის სიგრძის და ბრუნვითი სხეულის ზედაპირის ფართობის მოსაძებნად. განსაზღვრულ ინტეგრალს გამოვიყენებთ აგრეთვე ფიზიკური შინაარსის ამოცანათა ამოსახსნელად, როგორებიცაა მაგალითად, ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, თხევადი მასის ზემოქმედება ბრტყელ კედელზე, ობიექტის მასის ცენტრის დადგენა.

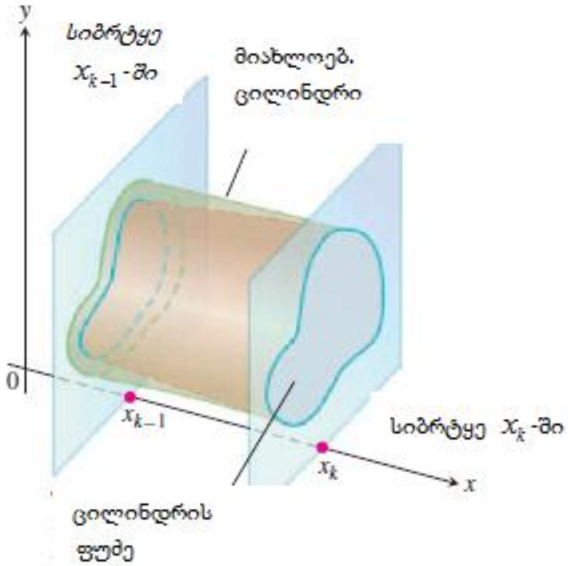
6.1 მოცულობის გამოთვლა განივი კვეთების გამოყენებით



ფიგურა 6. 3

ვთქვათ გვინდა ისეთი S სხეულის მოცულობის გამოთვლა, რომლისთვისაც ცნობილია x ღერძის მართობული სიბრტყეებით კვეთების $A(x)$ ფართობები . a და b იყოს x ღერძის მიმართ სხეულის კიდური წერტილების აბსცისები (ფიგ . 6.3).

$[a,b]$ სეგმენტი დავყოთ ქვეინტერვალებად $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ წერტილებით . ქვეინტერვალთა სიგრძეებია $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.



ფიგურა 6. 4

ორ მეზობელ x_k და x_{k-1} წერტილებზე გავლებულ კვეთებს შორის მოქცეული სხეულის ჩამონაჭერის მოცულობა მიახლოებით ტოლია იმ ცილინდრის V_k მოცულობის (ფიგ. 6. 4), რომლის ფუძის ფართობია $A(x_k)$, ხოლო სიმაღლე $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$:

k -ური ჩამონაჭერის მოცულობა

$$\approx V_k = A(x_k)\Delta x_k.$$

მთლიანი სხეულის V მოცულობა მიახლოებით ამ ცილინდრული ჩამონაჭერების მოცულობათა ჯამის ტოლია

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k .$$

ეს არის $A(x)$ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამი $[a,b]$ შუალედზე. თუ შუალედის დანაწილების ნორმა $\| P \| \to 0$, გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k = \int_a^b A(x)dx .$$

განსაზღვრება. იმ სხეულის მოცულობა, რომლის განივი კვეთის $A(x)$ ფართობი ინტეგრებადია $x = a$ -დან $x = b$ -მდე, განისაზღვრება ტოლობით

$$V = \int_a^b A(x)dx .$$

მაგალითი 1. ვთქვათ, 3 მ სიმაღლის პირამიდის ფუძეა კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა 3მ. წვეროდან x მანძილით დაშორებული პირამიდის განივი კვეთები წარმოადგენენ კვადრატებს x მ სიგრძის გვერდებით. ვიპოვოთ პირამიდის მოცულობა.

ამოხსნა.

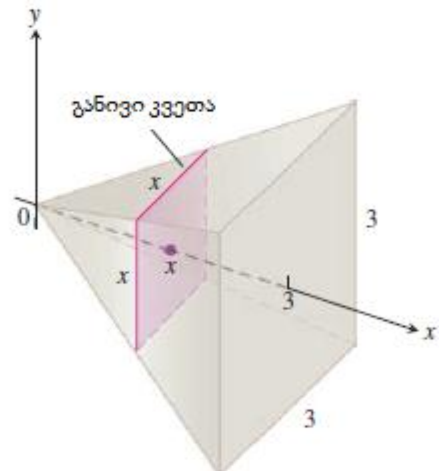
1. შევასრულოთ ნახაზი (ფიგ. 6.5)

2. განივი კვეთის ფართობის ფორმულაა $A(x)=x^2$.

3. ინტეგრების საზღვრებია $x=0$ $x=3$

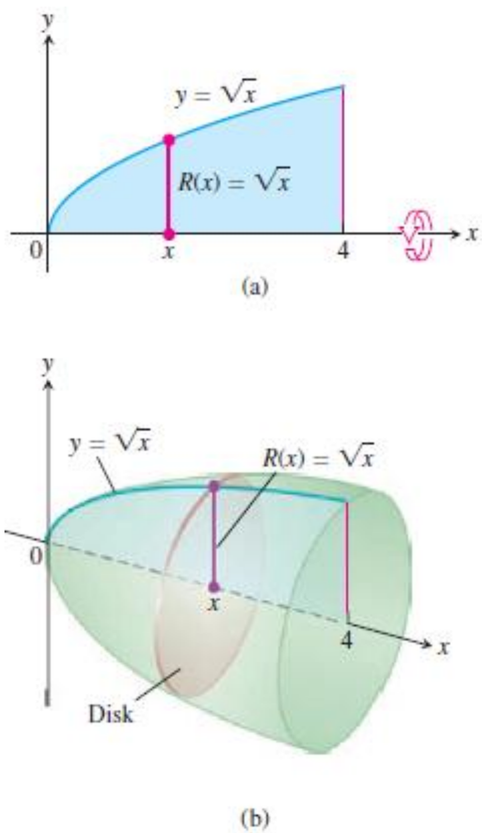
4. გამოვთვალოთ მოცულობა :

$$V=\int_0^3 A(x)dx=\int_0^3 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3=9\ \text{მ}^3.$$



ფიგურა 6. 4

ბრუნვითი სხეული ეწოდება სივრცით სხეულს, რომელიც წარმოიქმნება წირით შემოსაზღვრული ბრტყელი გეომეტრიული ფიგურის ბრუნვით იმავე სიბრტყეში მდებარე ღერძის ირგვლივ.



ფიგურა 6.8. ბრტყელი არე (a) და ბრუნვითი სხეული (b)

ფიგურა 6.8-ზე ნაჩვენები ამგვარი სხეულის მოცულობის საპოვნელად შევნიშნოთ, რომ მისი განივი კვეთა წრეა , რომლის რადიუსი $R(x)$ წარმოადგენს მანძილს ბრტყელი არის საზღვრიდან ბრუნვის ღერძამდე. ამიტომ კვეთის ფართობია

$$A(x)=\pi\left[R(x)\right]^2.$$

> იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც წარმოიქმნება $[a,b]$ ინტერვალზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციით შემოსაზღვრული ფიგურის x ღერძის ირგვლივ ბრუნვით , გამოითვლება ფორმულით
>
> $$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$$

მაგალითი 4. $y=\sqrt{x},\ 0\le x\le 4$ მრუდით და x ღერძით შემოსაზღვრული ფიგურა ბრუნავს x ღერძის ირგვლივ (ფიგ. 6.8). იპოვეთ წარმოქმნილი სხეულის მოცულობა.

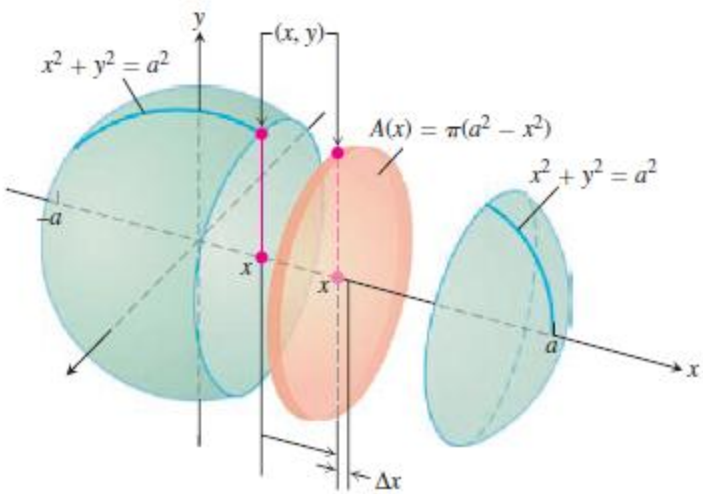
ამოხსნა.

$$V=\pi\int_0^4[R(x)]^2dx=\pi\int_0^4[\sqrt{x}]^2dx=\pi\int_0^4 xdx=$$

$$=\pi\frac{x^2}{2}\Big]_0^4=\pi\frac{(4)^2}{2}=8\pi.$$

მაგალითი 5. $x^2+y^2=a^2$ წრე ბრუნავს x ღერძის ირგვლივ და წარმოქმნის სფეროს. ვიპოვოთ მისი მოცულობა.

ამოხსნა.



ფიგურა 6. 9-ზე ნაჩვენებია x ღერძის ირგვლივ $x^2+y^2=a^2$ წრის ბრუნვით მიღებული სფეროს კვეთები. კვეთის რადიუსია

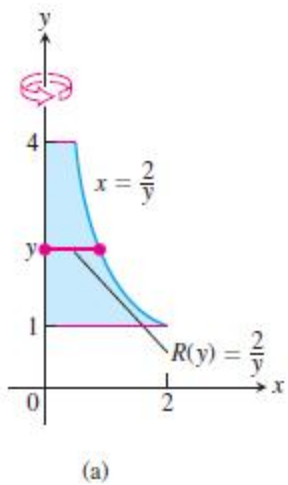
$$R(x)=y=\sqrt{a^2-x^2}\ ,$$
$$-a\le x\le a,$$

ფიგურა 6. 9

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}[a^2-x^2]dx=\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

y ღერძით და $x=g(y),\ c\le y\le d$ მრუდით შემოსაზღვრული ბრტყელი ფიგურის y ღერძის ირგვლივ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით :

$$V=\pi\int_c^d[g(y)]^2dy\quad .$$



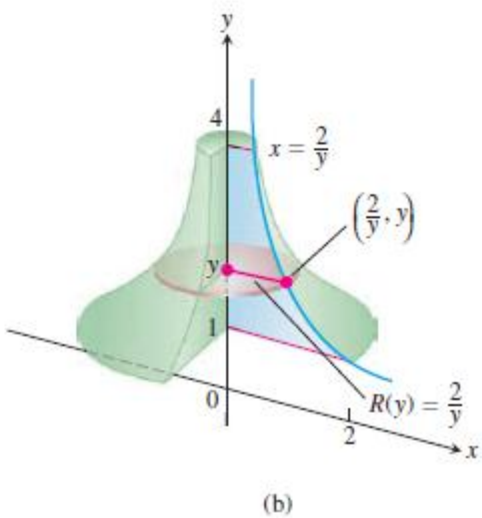
მაგალითი 7. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება y ღერძით და $x = 2/y$, $1 \le y \le 4$ მრუდით შემოსაზღვრული არის ბრუნვით y ღერძის ირგვლივ.

ამოხსნა. ფიგურა 6.11-ზეა ნაჩვენებია ბრტყელი არე (a), ტიპური რადიუსი და ბრუნვით წარმოქმნილი სხეულის ნაწილი(b) . მოცულობა

$$V = \int_1^4 \pi[R(y)]^2 dy =$$

$$= \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy =$$

$$= \pi\int_1^4 \frac{4}{y^2} dy = 4\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi\left[\frac{3}{4}\right] = 3\pi.$$

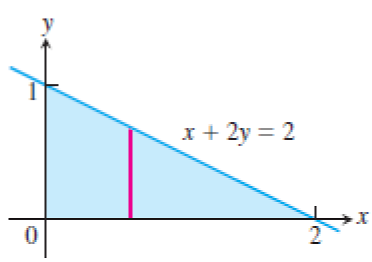


ფიგურა 6. 11

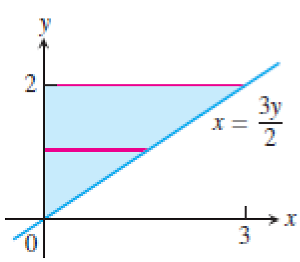
სავარჯიშოები 6.1

15--18 სავარჯიშოებში იპოვეთ მითითებული ღერძის ირგვლივ გაფერადებული ფიგურის ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

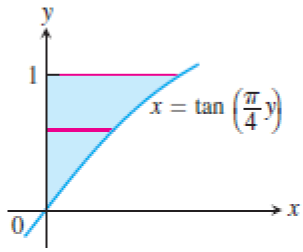
15. x ღერძის ირგვლივ



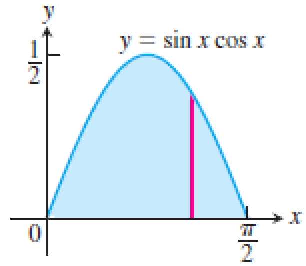
16. y ღერძის ირგვლივ



17. y ღერძის ირგვლივ



18. x ღერძის ირგვლივ



19--28 სავარჯიშოებში იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით x ღერძის ირგვლივ .

19. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$ **20.** $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$

21. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0$ **22.** $y = x - x^2, \quad y = 0$

23. $y = \sqrt{\cos x}, \quad 0 \le x \le \pi/2, \quad y = 0, \quad x = 0$

24. $y = \sec x, \quad y = 0, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$

25. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

26. არე $y = \sqrt{\cot x}, \ \pi/6 \le x \le \pi/2$ ფუნქციის გრაფიკსა და x ღერძს შორის.

27. არე $y = 1/(2\sqrt{x}), \ 1/4 \le x \le 4$ ფუნქციის გრაფიკსა და x ღერძს შორის.

28. $y = e^{x-1}, y = 0, \ x = 1, \quad x = 3.$

39--44 სავარჯიშოებში იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით x ღერძის ირგვლივ .

39. $y = x, \quad y = 1, \quad x = 0$

40. $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0$

41. $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$

42. $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x$

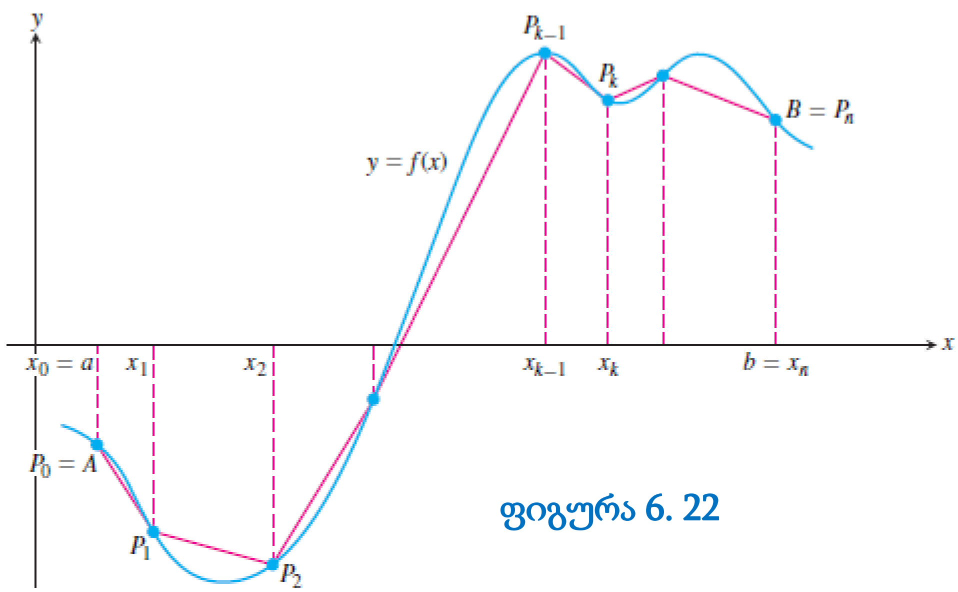
43. $y = \sec x, \quad y = \sqrt{2}, \quad -\pi/4 \le x \le \pi/4$

44. $y = \sec x, \quad y = \tan x, \quad x = 0, \quad x = 1$

6.3 რკალის სიგრძე

ვთქვათ საძიებელია $y = f(x)$ ფუნქციით $x = a$ -დან $x = b$ -მდე განსაზღვრული რკალის სიგრძის გამოთვლა. ვგულისხმობთ, რომ f ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[a,b]$ შუალედის ყოველ წერტილში. ასეთ ფუნქციას გლუვი ეწოდება და მის გრაფიკს არ აქვს წყვეტა და კუთხეები.

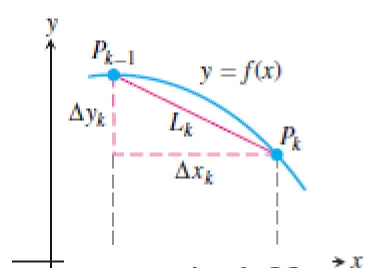
$[a,b]$ დავყოთ n ქვეინტერვალად $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ წერტილებით. თუ $y_k = f(x_k)$, მაშინ შესაბამისი წერტილი $P_k(x_k, y_k)$ ძევს მრუდზე. ერთმანეთის მომდევნო P_{k-1} და P_k წერტილების წყვილები შევაერთოთ წრფის მონაკვეთებით. მიღებული ტეხილის სიგრძე წარმოადგენს რკალის სიგრძის მიახლოებას (ფიგურა 6.22).



ფიგურა 6. 22

თუ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ და $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, მაშინ წრფის მონაკვეთთა სიგრძეები გამოითვლება ფორმულით (იხ. ფიგ. 6.23)

$$L_k = \sqrt{(x_k)^2 + (y_k)^2},$$



ფიგურა 6. 23

ამიტომ რკალის სიგრძის მიახლოებითი სიდიდეა

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k)^2 + (y_k)^2} \, . \tag{1}$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად, არსებობს ისეთი c_k წერტილები $x_{k-1} < c_k < x_k$, რომ $\Delta y_k = f'(c_k)\Delta x_k$.

ამიტომ (1)-დან მიიღება

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f'(c_k)\Delta x_k]^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

როცა ინტერვალის დანაწილების ნორმა მიისწრაფის ნულისკენ, ვღებულობთ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} L_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

განსაზღვრება. თუ f' უწყვეტია $[a,b]$ -ზე, მაშინ $y = f(x)$ მრუდის რკალის სიგრძე $A=(a, f(a))$ წერტილიდან $B=(b, f(b))$ წერტილამდე განისაზღვრება

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \qquad (3)$$

ტოლობით.

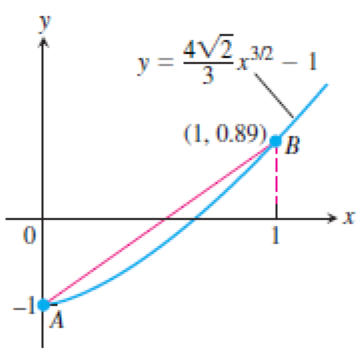
მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \quad 0 \le x \le 1$$

რკალის სიგრძე.

ამოხსნა. (3) ფორმულაში ავიღოთ $a=0, b=1$.

$$y' = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2}; \quad (y')^2 = 8x.$$



ფიგურა 6.24

რკალის სიგრძე $x=0$-დან $x=1$ -მდე არის

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+8x}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(1+8x)^{3/2} = \frac{13}{6} = 2.17$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), 0\le x\le 2$ რკალის სიგრძე.

ამოხსნა.

$y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x});\quad (y')^2=\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x});\quad 1+(y')^2=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2;$

რკალის სიგრძე $x=0$-დან $x=2$ -მდე არის

$$L=\int_0^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,dx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\Big]_0^2\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})\approx 3.63.$$

$x=g(y), c\le y\le d$ რკალის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა

თუ g' უწყვეტია $[c,d]$-ზე, მაშინ $x=g(y)$ რკალის სიგრძე $A=(g(c),c)$-დან $B=(g(d),d)$ -მდე გამოითვლება ფორმულით

$$L=\int_c^d\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy \qquad (4)$$

სავარჯიშოები 6.3

1--8 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ რკალის სიგრძე

1. $y=(1/3)(x^2+2)^{3/2},\ 0\le x\le 3$

2. $y=x^{3/2},\ 0\le x\le 4$

3. $x=(y^3/3)+1/(4y),\ 1\le y\le 3$

4. $x=(y^{3/2}/3)-y^{1/2},\ 1\le y\le 9$

5. $x=(y^4/4)+1/(8y^2),\ 1\le y\le 2$

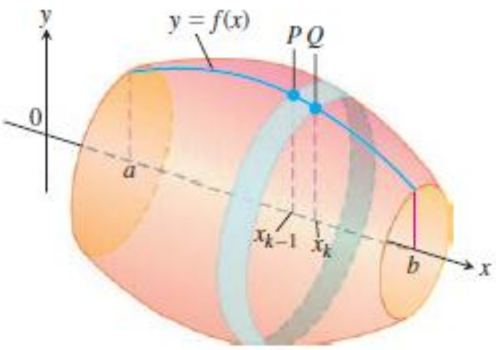
6. $x=(y^3/6)+1/(2y),\ 2\le y\le 3$

7. $y=(3/4)x^{4/3}-(3/8)x^{2/3}+5,\ 1\le x\le 8$

8. $y=(x^3/3)+x^2+x+1/(4x+4),\ 0\le x\le 2$

6.4 ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი

ვთქვათ $y=f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი არაუარყოფითი ფუნქცია. განვიხილოთ ზედაპირი, რომელიც მიიღება ამ ფუნქციის გრაფიკის ბრუნვით Ox ღერძის ირგვლივ.



ფიგურა 6. 30

$[a,b]$ დავყოთ n ქვეინტერვალად $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ წერტილებით. x_{k-1} და x_k წერტილების შესაბამისი PQ რკალი ბრუნვისას შემოწერს ზედაპირს, რომელიც წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის მიახლოებაა (ფიგ. 6.30). თითოეული ასეთი წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობია

$$2\pi\cdot\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\cdot L_k\,,$$

სადაც $L_k=|PQ|$. ამიტომ მთლიანი ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი მიახლოებით არის

$$\sum_{k=1}^{n}\pi(f(x_{k-1})+f(x_k))\cdot L_k\quad. \qquad (1)$$

როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ, $L_k=\sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k$, სადაც c_k რომელიღაც საშუალედო წერტილებია (x_{k-1},x_k) ინტერვალებიდან.

ამრიგად, (1) ჯამი წარმოადგენს $2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(c_k)]^2}$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს და მისი ზღვარი, როცა ინტერვალის დანაწილების ნორმა მიისწრაფის ნულისკენ, არის ინტეგრალი

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

თუ $f(x)\geq 0$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ $y=f(x)$ მრუდის Ox ღერძის ირგვლივ ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობია

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

ანალოგიური ფორმულაა სამართლიანი Oy ღერძის ირგვლივ ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობისათვის .

თუ $g(y)\geq 0$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[c,d]$ სეგმენტზე, მაშინ $x=g(y)$ მრუდის Oy ღერძის ირგვლივ ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობია

$$S=\int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy.$$

სავარჯიშოები 6.4

13--20 სავარჯიშოებში იპოვეთ მითითებული ღერძის ირგვლივ წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი

13. $y=x^3/9,\quad 0\leq x\leq 2;\quad x$-ღერძი

14. $y=\sqrt{x},\quad 3/4\leq x\leq 15/4;\quad x$-ღერძი

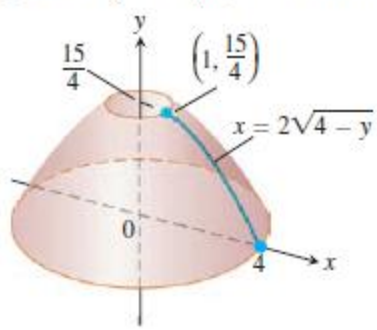
15. $y=\sqrt{2x-x^2},\quad 0.5\leq x\leq 1.5;\quad x$-ღერძი

16. $y=\sqrt{x+1},\quad 1\leq x\leq 5;\quad x$-ღერძი

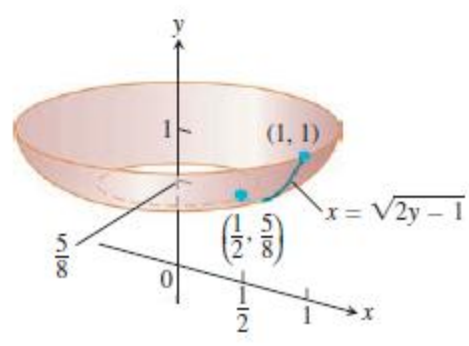
17. $x=y^3/3,\quad 0\leq y\leq 1;\quad y$-ღერძი

18. $x=(1/3)y^{3/2}-y^{1/2},\quad 1\leq y\leq 3;\quad y$-ღერძი

19. $x=2\sqrt{4-y},\quad 0\leq y\leq 15/4;\quad y$-ღერძი



20. $x=\sqrt{2y-1},\quad 5/8\leq y\leq 1;\quad y$-ღერძი



6.5 მუშაობა და წინააღმდეგობის ძალები სითხეში

როცა სხეული გადაადგილდება d მანძილზე წრფის გასწვრივგადაადგილების მიმართულების მქონე მუდმივი F სიდიდის ძალის ზემოქმედებით, ძალის მიერ შესრლებული W მუშაობა გამოითვლება ფორმულით

$$W = Fd\,. \qquad (1)$$

ვთქვათ F ძალა გდააადგილებს სხეულს x - ღერძის გასწვრივ, მაგრამ მისი სიდიდე დამოკიდებულია ობიექტის პოზიციაზე, ე.ი. $F = F(x)$. ვგულისხმობთ, რომ ეს უწყვეტი ფუნქციაა და გვსურს ვიპოვოთ $x = a$-დან $x = b$-მდე ინტერვალზე შესრულებული მუშაობა. დავანაწილოთ $[a,b]$ ჩვენთვის ნაცნობი წესით ქვეინტერვალებად და შევარჩიოთ ნებისმიერი c_k წერტილები $[x_{k-1}, x_k]$ ქვეინტერვალებზე. თუ ქვეინტერვალები საკმაოდ მოკლეა, უწყვეტი ფუნქცია F დიდად არ შეიცვლება x_{k-1}-დან x_k-მდე. ამ ქვეინტერვალზე შესრულებული მუშაობის მიახლოებითი სიდიდეა $F(c_k)\cdot\Delta x_k$. მთელი შესრულებული მუშაობისთვის კი გვექნება რიმანის ჯამი

$$\text{მუშაობა} \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\cdot\Delta x_k\,.$$

აქედან გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} F(c_k)\cdot\Delta x_k = \int_a^b F(x)\,dx\,.$$

ცვლადი ძალის მიერ ღერძის გასწვრივ $x = a$-დან $x = b$-მდე შესრულებული მუშაობაა

$$W = \int_a^b F(x)\,dx \qquad (2)$$

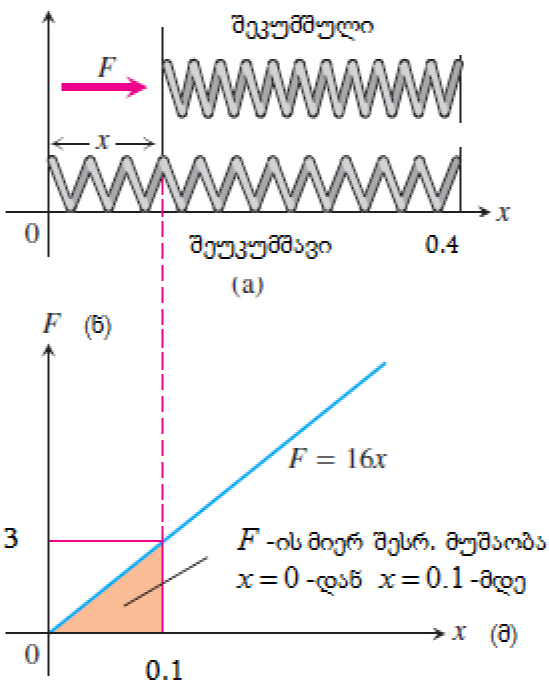
ჰუკის კანონი ზამბარებისათვის

ძალა, რომელიც საჭიროა გაჭიმვადი ან შეკუმშვადი ზამბარის ნატურალური სიგრძის x ერთეულით შესაცვლელად x-ის პროპორციულია

$$F = kx \qquad (3)$$

აქ k პროპორციულობის კოეფიციენტია.

ერთეულთა საერთაშორისო სისტემაში ძალის ერთეულია **ნიუტონი** (ნ), სიგრძის -- მეტრი (მ), მუშაობის -- **ჯოული** (ჯ). 1ჯ=1ნ ·1 მ .



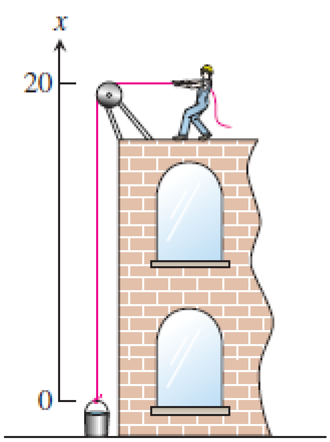
ფიგურა 6.36

მაგალითი 2. ვიპოვოთ მუშაობის სიდიდე, რომელიც საჭიროა 0.4 მ ნატურალური სიგრძის ზამბარის შესაკუმშად 0.1 მ-ით, თუ პროპორციულობის კოეფიციენტია $k = 30$ ნ/მ.

ამოხსნა. წარმოვიდგინოთ, რომ ზამბარის გადაადგილებადი ბოლო კოორდინატთა სათავეშია, მეორე ბოლო კი უძრავადაა x =0.4 მ წერტილში (ფიგ. 6.36). მოქმედი ძალაა $F = 30x$. შეკუმშვა მიმდინარეობს 0-დან 0.1 მ-მდე.

F -ის მიერ შესრულებული მუშაობაა

$$W = \int_0^{0.1} 30x\,dx = 15x^2 \Big]_0^{0,1} = 0.15 \text{ ნ} \cdot \text{მ} = 0.15 \text{ ჯ}.$$



ფიგურა 6.38

მგალითი 4. 8 კგ-იანი ტვირთი ჭოჭონაქით ასწიეს 6 მ სიმაღლეზე (ფიგ. 6.38). 1მ თოკი 0,2 კგ-ს იწონის. რა სიდიდის მუშაობა შესრულდა ტვირთის და თოკის ასაწევად?

ამოხსნა. ტვირთის წონა არ იცვლება, ამიტომ მის ასაწევად შესრულდა $6 \cdot 8$ =48 კგ· მ მუშაობა. ასაწევი თოკის სიგრძე ტვირთის აწევის პროცესში ცვალებადია. როცა ტვირთი მიწის ზედაპირიდან x მეტრზე, თოკი წონა შეადგენს $0.2(6-x)$ მეტრს. ამიტომ თოკის აწევაზე დახარჯული მუშაობაა

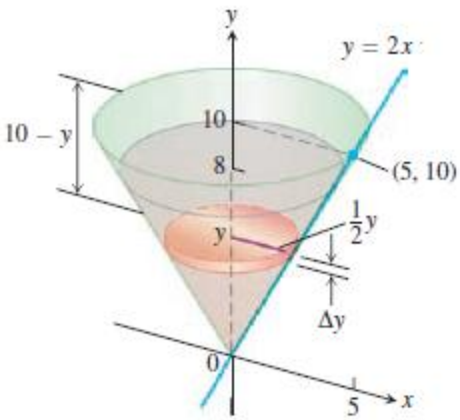
$$\int_0^6 0.2(6-x)\,dx = \int_0^6 (1.2-0.2x)\,dx = \left[1.2x - 0.1x^2\right]_0^6 = \text{კგ} \cdot \text{მ} \quad .$$

$$= 7.2 - 3.6 = 3.6\,.$$

სულ შესრულებულა 48+3.6=51.6 კგ· მ მუშაობა.

სითხის გადმოქაჩვა კონტეინერიდან

მაგალითი 5. ფიგურა 6.39-ზე ნაჩვენები კონუსური ფორმის ავზი ზედა კიდიდან 2 ფუტის სიმაღლემდე შევსებულია 57 გირვანქა/ფტ^3 ზეითუნის ზეთით. რა სიდიდის სამუშაოა შესასრულებელი ავზიდან ზეთის გადმოსაქაჩად?



ფიგურა 6.39

ამოხსნა. წარმოვიდგინოთ, რომ ზეთი დაყოფილია თხელ წრიულ ფენებად y - ღერძის მართობული სიბრტყეებით [0, 8] ინტერვალზე.

y -დან $y+\Delta y$ -მდე ტიპურ ფენის მოცულობაა დაახლოებით

$$\Delta V = \pi\,(\text{რადიუსი})^2\,(\text{სიმკვრ.}) = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 \Delta y = \frac{\pi}{4}y^2\Delta y \ \text{ფტ}^3.$$

ამ ფენის გადმოსაქაჩად საჭირო ძალაა

$$F(y) = 57\Delta V = \frac{57\pi}{4}y^2\Delta y \ \text{გირვ.}$$

მანძილი რომელზეც უნდა იმოქმედოს $F(y)$ ძალამ, რომ ეს ფენა ავზის კიდემდე აწიოს, დაახლოებით $(10-y)$ ფუტია. ასე რომ ფენის ასაწევად გაწეული მუშაობაა დაახლოებით

$$\Delta W = \frac{57\pi}{4}(10-y)y^2\Delta y \ \text{ფტ·გირვ}.$$

თუ დავუშვებთ, რომ [0, 8] შუალედი n ქვეინტერვალადაა დანაწილებული და $y = y_k$ აღნიშნავს Δy_k სიმკვრივის მქონე k -ური ფენის შესაბამის სიბრტყეს , მაშინ ყველა ფენის ამოსაქაჩი მუშაობა წარმოადგენს რიმანის ჯამს

$$W \approx \sum_{k=1}^{n}\frac{57\pi}{4}(10-y_k){y_k}^2\Delta y_k \ \text{ფტ·გირვ}.$$

როცა დანაწილების ნორმა ნულისკენ მიისწრაფის და და ფენების რიცხვი უსასრულოდ იზრდება, ვღებულობთ

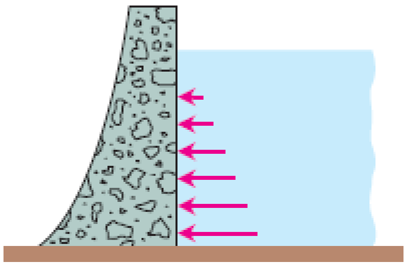
$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{57\pi}{4}(10-y_k){y_k}^2\,\Delta y_k = \int_0^8 \frac{57\pi}{4}(10-y)y^2\,dy$$

$$= \frac{57\pi}{4}\int_0^8 (10y^2 - y^3)\,dy$$

$$= \frac{57\pi}{4}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^8 \approx 30\,561 \ \text{გირვ}\cdot\text{ფტ}$$

სითხის წნევა და ძალები

კაშხალის ქვედა ნაწილს უფრო სქელს აშენებენ, ვიდრე ზედას (ფიგ. 6.40), რადგან სითხის წნევა მასზე სიღრმის ზრდასთან ერთად იზრდება. კაშხალის ნებისმიერ წერტილში წნევა დამოკიდებულია მხოლოდ ზედაპირიდან მის დაშორებაზე და არა ზედაპირის ფართობზე.



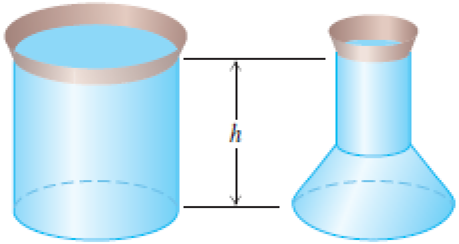
წნევა გაზომილი გირვანქა/ კვადრ. ფუტი ერთეულებში ზედაპირიდან h სიღრმეზე არის ყოველთვის $62.4h$-ის ტოლი. რიცხვი 62.4 წარმოადგენს მტკნარი წყლის სიმკვრივეს გირვანქა/კუბ. ფუტ ერთეულებში. წნევა წედაპირიდან h ფუტის სიღრმეზე ტოლია სითხის სიმკვრივის h-ზე ნამრავლისა.

ფიგურა 6.40

წნევის სიდიდის სიღრმესთან დამაკავშირებელი ფორმულა

უძრავ მდგომარეობაში მყოფი სითხის h სიღრმეზე წნევა p და სითხის სიმკვრივე w დაკავშირებულია ტოლობით:

$$p = wh. \tag{4}$$



ფიგურა 6.41

ამ კონტეინერებს ტოლი ფუძის ფართობი აქვს, წყალიც ერთ დონეზეა ჩასხმული. ფუძეზე მოქმედი ერთიანი ძალები ორივეში ტოლია. კონტეინერის ფორმა არაა არსებითი

ბრტყელი ჰორიზონტალური ფსკერის მქონე სითხის კონტეინერში, ფსკერზე მოქმედი მთლიანი ძალა ტოლია ფსკერის ფართობის ნამრავლისა მის წერტილებში წნევაზე.

თუ F, p და A შესაბამისად არის ერთიანი ძალა, წნევა და ფართობი, მაშინ

$F =$ ერთიანი ძალა $=$

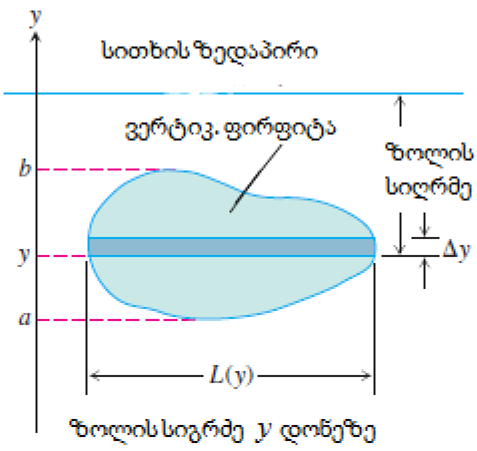
$=$ ერთეულ ფართობზე ძალა $\times$ ფართობი $=$

$=$ წნევა $\times$ ფართობი $= pA = whA$.

სითხის წნევით გამოწვეული ძალა ტოლი სიღრმის ზედაპირზე

$$F = pA = whA.$$

ჰორიზონტალურად ჩაძირულ ბრტყელ ფირფიტაზე, სითხის წნევით გამოწვეული ქვევით მიმართული ძალა მოქმედებს (5) ფორმულის თანახმად.



ფიგურა 6.42

ვთქვათ გვინდა ვიპოვოთ w სიმკვრივის სითხეში ვერტიკალურად ჩაძირული ბრტყელი ფირფიტის ერთ გვერდზე მოქმედი ძალა. ფირფიტის მოდელირება მოვახდინოთ xy სიბრტყის არით, რომელიც ვრცელდება $y=a$ -დან $y=b$-მდე (ფიგ. 6.42). მოვახდინოთ $[a,b]$ შუალედის დანაწილება ქვეინტერვალებად ჩვეულებრივი ხერხით. ტიპიური ზოლი მოთავსებულია y -დან $y+\Delta y$ -მდე და მისი სიგანეა Δy . მისი სიგრძე იყოს $L(y)$, უწყვეტი ფუნქცია y -ის მიმართ. ვთქვათ ზოლი საკმაოდ ვიწროა, მაშინ მასზე მოქმედი ძალა მიახლოებით იქნება

$$\Delta F = (\text{წნევა ქვედა გვერდის გასწვრივ}) \times (\text{ფართობი}) =$$
$$=(w \times \text{სიღრმე}) \times (\text{სიგრძე} \times \text{სიგანე}) = \; w \cdot (\text{ზოლის სიღრმე}) \cdot L(y)\Delta y .$$

ვთქვათ $a \le y \le b$ დაყოფილია n ზოლად, Δy_k სიგანით და რომლის სიგრძედ ზოლის ქვედა გვერდის სიგრძე $L(y_k)$ არის მიჩნეული . წნევის მთლიანი ძალა ფირფიტის გვერდზე წარმოადგენს რიმანის ჯამს

$$\text{F} \approx \sum_{k=1}^{n} (w \cdot (\text{ზოლის სიღრმე})_k \cdot L(y_k))\Delta y_k \; . \qquad (6)$$

ფირფიტაზე მოქმედი ძალა წარმოადგენს ამ ჯამის ზღვარს:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (w \cdot h(y_k) L(y_k))\Delta y_k = \int_a^b wh(y)L(y)\,dy ,$$

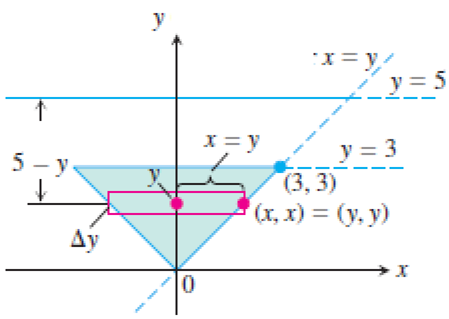
სადაც $h(y)$ აღნიშნავს მანძილს სითხის ზედაპირიდან y დონემდე.

ვერტიკალურ ბრტყელ ფირფიტაზე მოქმედი სითხის წნევის ძალა

ვთქვათ w სიმკვრივის სითხეში ჩაძირულ ფირფიტას საკოორდინატო სიბრტყეზე შეესაბამება $y=a$ -დან $y=b$-მდე არე. თუ სითხის ზედაპირიდან y დონემდე მანძილია $h(y)$, ამ დონის სიგრძე მარცხნიდან მარჯვნივ კი $L(y)$-ის ტოლია. მაშინ სითხის წნევით ფირფიტის ერთ ზედაპირზე ოქმედი ძალაა

$$F = \int_a^b wh(y)L(y)\,dy . \qquad (7)$$

მაგალითი 6. 6 ფტ ფუძის და 3 ფტ სიმაღლის მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედის ფორმის ფირფიტა, ფუძით ზევით, ვერტიკალურადაა ჩაშვებული საცურაო აუზში , 2 ფტ-ით დაბლა აუზის ზედაპირიდან. ვიპოვოთ ფირფიტის ერთ ზედაპირზე მოქმედი, სითხის წნევით გამოწვეული ძალის სიდიდე.



ფიგურა 6.43

ამოხსნა. კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ სამკუთხედის ქვედა წვეროში, y ღერძი კი აუზის ზედაპირის მართობულად მივმართოთ (ფიგ. 6.43). აუზის ზედაპირი $y=5$-ის გასწვრივაა, ფირფიტის ზედა გვერდი კი $y=3$ წრფის გასწვრივ. ფირფიტის მარჯვენა გვერდი ძევს $y=x$-ის გასწვრივ. მისი მარჯვენა ზედა წვერო (3,3) წერტილშია. y დონეზე ფირფიტის სიგანეა $L(y)=2x=2y$. ზოლის დონიდან აუზის ზედაპირამდე მანძილია $h(y)=5-y$. რადგან მტკნარი წყლის სიმკვრივეა 62.4 გირვ./ფტ^3, ამიტომ

$$F=\int_a^b wh(y)L(y)\,dy=\int_0^3 62.4(5-y)2y\,dy=$$

$$=124.8\int_0^3(5y-y^2)\,dy=124.8\left[\frac{5}{2}y^2-\frac{y^3}{3}\right]_0^3=1684.8 \text{ გირვანქა.}$$

სავარჯიშოები 6.5

1. ზამბარა, რომლის ბუნებრივი სიგრძე 2 მ-ია, გაჭიმულია 5 მ-მდე, რისთვისაც შესრულდა 1800 ჯ მუშაობა. იპოვეთ ზამბარის პროპორციულობის კოეფიციენტი.

2. ზამბარა, რომლის სიგრძე 10 ინჩია, 800 გირვანქა ძალით გაჭიმულია 14 ინჩამდე.

ა) იპოვეთ პროპორციულობის კოეფიციენტი.

ბ) რა სიდიდის სამუშაოს შედეგად გაიჭიმება სამბარა 10-დან 12 ინჩამდე?

4. თუ 90 ნ ძალა 1 მ-ით წააგრძელებს ზამბარას, მაშინ რა სიდიდის მუშაობა შესრულდება ზამბარის 5 მ-ით წაგრძელებისას?

8. დაიწყეს სილით სავსე 144 ფუნტი წონის ტომრის ზევით აწევა მუდმივი სიჩქარით. სილა იფანტებოდა მუდმივი სიჩქარით და ფუტის სიმაღლეზე ნახევარიღა დარჩა ტომარაში . რა სიდიდის მუშაობა იყო შესრულებული ამ მომენტისათვის? (ტომრის და ამწევი მოწყობილობების წონას არ ვითვალისწინებთ).

35. წყლით სავსე 10 ფტ სიღრმის აუსში ფსკერამდე ვერტიკალურად ჩაშვებულია 3ფტ × 4ფტ ზომის მართკუთხა ფირფიტა. გამოთვალეთ სითხის წნევის ზემოქმედების ძალა ფირფიტაზე, თუ იგი ჩაშვებულია ძირს

ა) 4ფტ წიბოთი. ბ) 3 ფტ წიბოთი.

36. 5 ფტ რადიუსიანი ნახევარ წრის ფორმის ფირფიტა ვერტიკალურად ჩაშვებულია თავისი დიამეტრით ქვევით, 6 ფტ სიღრმის წყლით სავსე აუზის ფსკერამდე. გამოთვალეთ სითხის წნევის ზემოქმედების ძალა ფირფიტაზე.

6.6 მომენტები და მასის ცენტრი

მრავალი სტრუქტურა და მექანიკური სისტემა ისე იქცევა, თითქოს მათი მასები ერთ წერტილშია თავმოყრილია (ფიგ. 6.44). ასეთი წერტილებს მასის ცენტრი ეწოდება და მათი პოვნა შესაძლებელია მათემატიკურად.

წრფის გასწვრივ განლაგებული მასები

ჯერ წარმოვიდგინოთ m_1, m_2 და m_3 წერტილები, რომლებიც სათავეში საყრდენის მქონე მყარ x -ღერძზეა განლაგებული

ეს სისტემა შეიძლება წონასწორობაში იყოს ან არ იყოს, იმისდა მიხედვით, რა სიდიდისაა ეს მასები და როგორაა ისინი განლაგებული. ყოველი m_k მასა იწვევს ქვევით მიმართულ $m_k g$ ძალას (m_k -ს წონას ; გრავიტაციის აჩქარება $g \approx 9.8$ მ/წმ^2). თითოეული მათგანი

ცდილობს შემოაბრუნოს ღერძი სათავის ირგვლივ. ამ ეფექტს **ბრუნვის მომენტი** ეწოდება და $m_k g \cdot x_k$ სიდიდით იზომება. სათავის მარცხნივ მოთავსებული მასების ბრუნვის მომენტები უარყოფითია (საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო), მარჯვნივ -- დადებითი (საათის ისრის მოძრაობის მიმართულების). ბრუნვითი მომენტების ჯამი წარმოადგენს სათავის ირგვლივ სისტემის მობრუნების ტენდენციის საზომს. ამ ჯამს **სისტემის ბრუნვის მომენტი** ეწოდება.

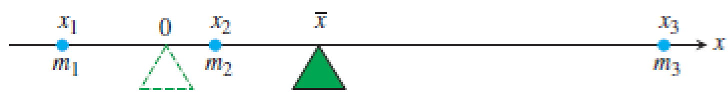
სისტემის ბრუნვის მომენტი = $m_1 g \cdot x_1 + m_2 g \cdot x_2 + m_3 g \cdot x_3$. (1)

სისტემა წონასწორობაშია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი ბრუნვის მომენტი ნულია. თუ (1)-ში ფრჩხილების გარეთ გავიტანთ გრავიტაციის აჩქარებას, გვექნება $g(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$.

$$M_0 = \sum m_k x_k$$

სიდიდეს ეწოდება **სისტემის მომენტი სათავის ირგვლივ.**

საინტერესოა იმ საყრდენი წერტილის მოძებნა, რომელიც სისტემას წონასწორობაში ამყოფებს. მაშასადამე, ვეძებთ ისეთ $\bar{x}$ წერტილს, რომლის ირგვლივ სისტემის ბრუნვის მომენტი ნულის ტოლია.



რადგან $\bar{x}$ -ს ირგვლივ m_k -ს ბრუნვის მომენტი = $(x_k - \bar{x})m_k g$, ამიტომ სისტემის წონასწორობის პირობაა

$$\sum (x_k - \bar{x}) m_k g = 0 ,$$

საიდანაც

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} .$$

მაშასადამე, $\bar{x}$ -ის მოსაძებნად სისტემის მომენტი სათავის ირგვლივ უნდა გაიყოს სისტემის მთლიან მასაზე:

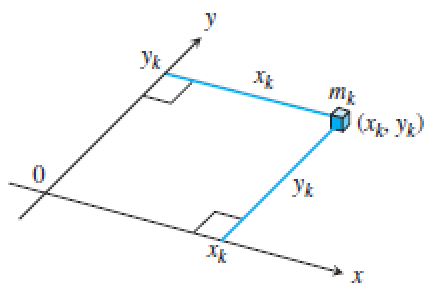
$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{\text{სისტემის მომენტი სათავის ირგვლივ}}{\text{სისტემის მასა}} . \qquad (2)$$

$\bar{x}$ წერტილს **სისტემის მასის ცენტრი** ეწოდება.

ფიგურა 6.44

ქანჩის გასაღები მისრიალებს ყინულზე და ბრუნავს მასის ცენტრის ირგვლივ

ბრტყელ არეში განაწილებული მასები



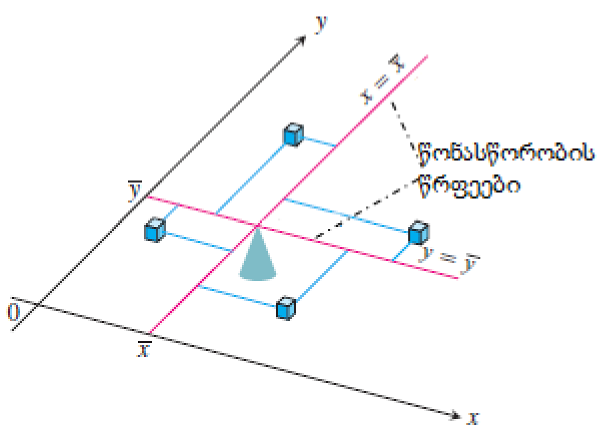
ფიგურა 6.45

ვთქვათ სიბრტყეზე გვაქვს სასრული რაოდენობის m_k მასების ერთობლიობა, რომლებიც (x_k, y_k) წერტილე-ბშია განლაგებული (ფიგ. 6.45).

სისტემის მასა: $M = \sum m_k$.

ცალკეული m_k მასის მომენტი x - ღერძის მიმართ არის $m_k y_k$, ხოლო y ღერძის მიმართ -- $m_k x_k$.

სისტემის მომენტი x ღერძის მიმართ: $M_x = \sum m_k y_k$,



ფიგურა 6.46

სისტემის მომენტი y ღერძის მიმართ:

$M_y = \sum m_k x_k$.

სისტემის მასის ცენტრის აბსცისაა

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}. \qquad (3)$$

$\bar{x}$ -ის ამ თვისების გამო, ერთგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად, სისტემა წონასწორობაშია $x = \bar{x}$ წრფის მიმართ (ფიგ. 6.46).

სისტემის მასის ცენტრის ორდინატაა

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}. \qquad (4)$$

$\bar{y}$ -ის ამ თვისების გამო, სისტემა წონასწორობაშია აგრეთვე $y = \bar{y}$ წრფის მიმართ (ფიგ. 6.46).

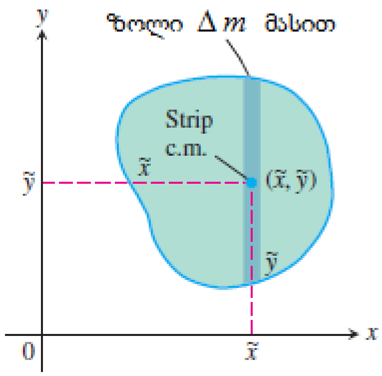
სისტემის ყოფაქცევა ისეთია, თითქოს მთელი მასა მოთავსებულია $(\bar{x}, \bar{y})$ წერტილში.

ამ წერტილს **სისტემის მასის ცენტრი** ეწოდება.

თხელი, ბრტყელი ფირფიტა

ვთქვათ, ფირფიტის შესაბამისი არე სიბრტყეზე ერთ ერთი ღერძის პარალელურ ზოლე-ბადაა დაყოფილი (ფიგ. 6.47 -ზე , y -ღერძის). ტიპური ზოლის მასის ცენტრია $(\tilde{x}, \tilde{y})$

შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ზოლის მასა Δm თითქოს $(\tilde{x}, \tilde{y})$ წერტილშია თავმოყრილი. მაშინ ზოლის მომენტი y -ღერძის მიმართ იქნება $\tilde{x}\Delta m$. ზოლის მომენტი x -ღერძის მიმართ არის $\tilde{y}\Delta m$. ამიტომ (3), (4) განტოლებები გვაძლევს



ფიგურა 6.47

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\,\Delta m}{\sum \Delta m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\,\Delta m}{\sum \Delta m}.$$

ეს ჯამები რიმანის ჯამებია და ზოლის სიგანის ნულისკენ მისწრაფებით ზღვარში მივიღებთ

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dm}{\int dm}, \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,dm}{\int dm}.$$

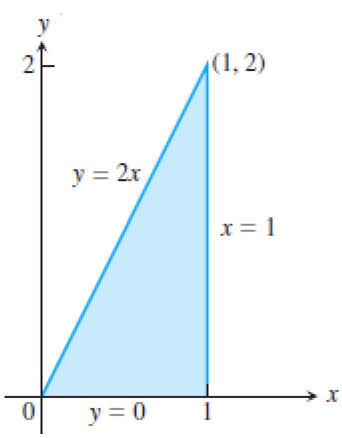
მომენტები, მასა და მასის ცენტრი თხელი და ბრტყელი ფირფიტისა, რომელსაც xy სიბრტყის არე უკავია

მომენტი x-ღერძის მიმართ: $M_x = \int \tilde{y}\,dm$ (5)

მომენტი y-ღერძის მიმართ: $M_x = \int \tilde{y}\,dm$

მასა: $M = \int dm$

მასის ცენტრი: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M}.$



ფიგურა 6.48

მაგალითი 1. ფიგურა 6.48-ზე ნაჩვენები სამკუთხა ფირფიტას აქვს მუდმივი სიმკვრივე $\delta = 3$ გ/სმ^2. ვიპოვოთ

ა) y-ღერძის მიმართ ფირფიტის მომენტი M_y.

ბ) ფირფიტის მასა M.

გ) ფირფიტის მასის ცენტრის x-კოორდინატი.

ამოხსნა (ფიგ. 6.49). ა) ტიპური ვერტიკალური ზოლის

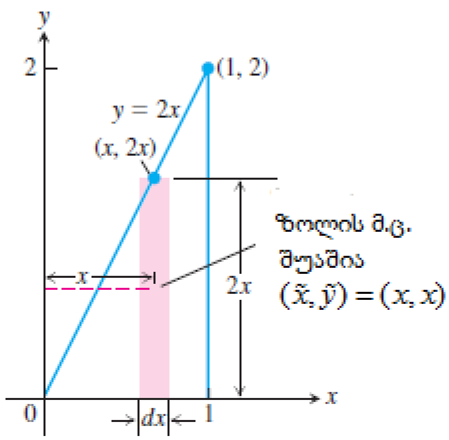
მასის ცენტრი (მ.ც.): $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, x)$

სიგრძე: $2x$

სიგანე: dx

ფართობი: $dA = 2xdx$

მასა: $dm = \delta dA = 3 \cdot 2xdx = 6xdx$



ფიგურა 6.49

მანძილი მ.ც.-დან y ღერძამდე : $\tilde{x} = x$

ზოლის მომენტი y ღერძის მიმართ:

$$\tilde{x}dm = x \cdot 6xdx = 6x^2dx.$$

ფირფიტის მომენტი y ღერძის მიმართ:

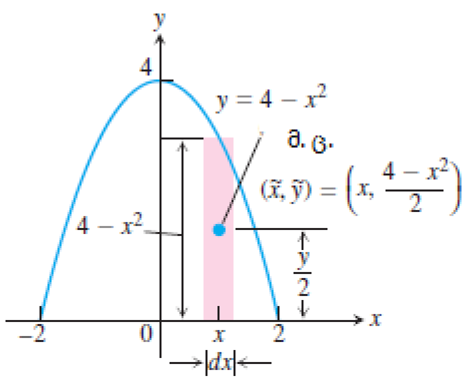
$$M_y = \int \tilde{x}dm = \int_0^1 6x^2dx = 2x^3\Big]_0^1 = 2 \text{ გ·სმ} .$$

ბ) ფირფიტის მასაა

$$M = \int dm = \int_0^1 6xdx = 3x^2\Big]_0^1 = 3 \text{ გ.}$$

გ) ფირფიტის მასის ცენტრის x-კოორდინატია:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{3} \text{სმ.}$$



ფიგურა 6.51

მაგალითი 2. ვიპოვოთ იმ თხელი ფირფიტის მასის ცენტრი, რომელსაც უკავია ზევიდან $y = 4 - x^2$ პარაბოლით, ქვევიდან კი x-ღერძით შემოსაზღვრული არე (ფიგ. 6.51). ფირფიტის სიმკვრივე (x, y) წერტილში არის $\delta = 2x^2$, რაც y ღერძამდე მანძილის გაორკეცებული კვადრატია .

ამოხსნა. მასის განაწილება სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ, ამიტომ $\bar{x} = 0.$

ტიპური ვერტიკალური ზოლისათვის

მასის ცენტრია (მ. ც.): $(\tilde{x},\tilde{y}) = \left(x, \dfrac{4 - x^2}{2}\right)$

სიგრძე: $4 - x^2$

სიგანე: dx

ფართობი: $dA = (4 - x^2)dx$

მასა: $dm = \delta dA = \delta(4 - x^2)dx$

მანძილი მ. ც. -დან x ღერძამდე: $\tilde{y} = \dfrac{4 - x^2}{2}$

ზოლის მომენტი x ღერძის მიმართ: $\tilde{y}dm = \dfrac{4 - x^2}{2} \cdot \delta(4 - x^2)dx = \dfrac{\delta}{2}(4 - x^2)^2 dx.$

ფირფიტის მომენტი x ღერძის მიმართ:

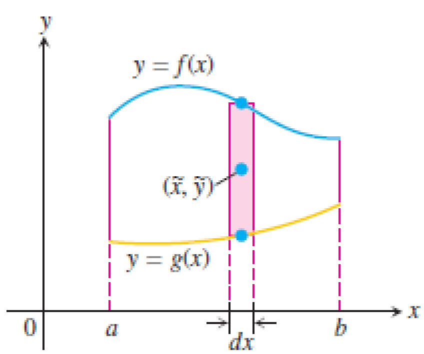
$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx = \int_{-2}^{2} x^2(4 - x^2)^2\, dx$$
$$= \int_{-2}^{2} (16x^2 - 8x^4 + x^6)\, dx = \frac{2048}{105}$$
$$M = \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4 - x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} 2x^2(4 - x^2)\, dx$$
$$= \int_{-2}^{2} (8x^2 - 2x^4)\, dx = \frac{256}{15}.$$

ამრიგად

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}.$$

ფირფიტის მასის ცენტრია $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$.

ორი მრუდით შემოსაზღვრული ფირფიტა



ფიგურა 6.52

ვთქვათ ფირფიტას უკავია $y = g(x)$ და $y = f(x)$ მრუდებით შემოსაზღვრული არე , სადაც $f(x) \geq g(x)$ და $a \leq x \leq b$. ტიპურ ვერტიკალურ ზოლს (ფიგ. 6.52) აქვს

მასის ცენტრი (მ. ც.): $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, 0.5[f(x) + g(x)])$

სიგრძე: $f(x) - g(x)$

სიგანე: dx

ფართობი: $dA = [f(x) - g(x)]dx$

მასა: $dm = \delta dA = \delta[f(x) - g(x)]dx.$

ფირფიტის მომენტი y ღერძის მიმართ არის

$$M_y = \int x dm = \int_a^b x\delta[f(x) - g(x)]dx,$$

x ღერძის მიმართ მომენტი კი --

$$M_x = \int y dm = \int_a^b \frac{1}{2}[f(x) + g(x)] \cdot \delta[f(x) - g(x)]dx = \int_a^b \frac{\delta}{2}[f^2(x) - g^2(x)]dx.$$

ეს მომენტები გვაძლევენ ფორმულებს

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_a^b \delta x\,[f(x) - g(x)]\,dx \qquad (6)$$

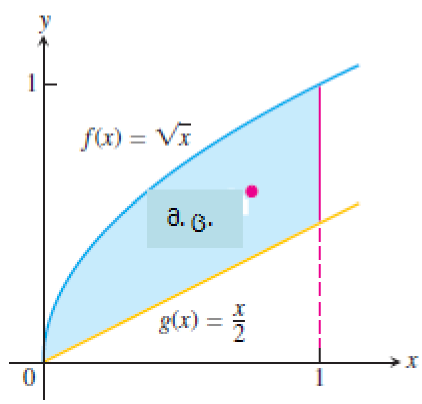
$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_a^b \frac{\delta}{2}\,[f^2(x) - g^2(x)]\,dx \qquad (7)$$

მაგალითი 3. (6),(7) ფორმულების გამოყენებით ვიპოვოთ $\delta(x) = x^2$ სიმკვრივის იმ თხელი ფირფიტის მასის ცენტრი, რომელიც შემოსაზღვრულია $g(x) = x/2$ და $f(x) = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$ მრუდებით (ფიგ. 6.53).

ამოხსნა. ჯერ გამოვთვალოთ ფირფიტის მასა. რადგან $dm = \delta[f(x) - g(x)]dx,$ ამიტომ

$$M = \int_0^1 x^2\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x^{5/2} - \frac{x^3}{2}\right)dx = \left[\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{1}{8}x^4\right]_0^1 = \frac{9}{56}.$$

შემდეგ (6),(7) ფორმულები გვაძლევს



ფიგურა 6.53

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{56}{9}\int_0^1 x^2 \cdot x\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx \\ &= \frac{56}{9}\int_0^1 \left(x^{7/2} - \frac{x^4}{2}\right)dx \\ &= \frac{56}{9}\left[\frac{2}{9}x^{9/2} - \frac{1}{10}x^5\right]_0^1 = \frac{308}{405},\end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{56}{9}\int_0^1 \frac{x^2}{2}\left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx \\ &= \frac{28}{9}\int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^4}{4}\right)dx \\ &= \frac{28}{9}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5\right]_0^1 = \frac{252}{405}.\end{aligned}$$

მასის ცენტრი ნაჩვენებია ფიგურა 6.53-ზე.

სიმძიმის ცენტრი (ცენტროიდი)

როცა სიმკვრივის ფუნქცია მუდმივია, $\bar{x}$ -ის და $\bar{y}$ -ის ფორმულების მრიცხველსა და მნიშვნელში ის იკვეცება. ამიტომ მასის ცენტრის მდებარეობა მხოლოდ ფიგურის გეომეტრიულ ფორმაზეა დამოკიდებული. ასეთ შემთხვევაში ინჟინრები მასის ცენტრს მოიხსენიებენ ცენტროიდის **(სიმძიმის ცენტრის**) სახელით.

სავარჯიშოები 6.6

მუდმივი სიმკვრივის ფირფიტები

1--13 სავარჯიშოებში იპოვეთ მუდმივი δ სიმკვრივის იმ ფირფიტის მასის ცენტრი, რომელსაც მთითებული არე უკავია.

1. არე შემოსაზღვრულია $y = x^2$ პარაბოლით და $y = 4$ წრფით

2. არე შემოსაზღვრულია $y = 25 - x^2$ პარაბოლით და x ღერძით

3. არე შემოსაზღვრულია $y = x - x^2$ პარაბოლით და $y = -x$ წრფით

4. არე შემოსაზღვრულია $y = x^2 - 3$ და $y = -2x^2$ პარაბოლებით

5. არე შემოსაზღვრულია y ღერძით და $x = y - y^3$, $0 \le y \le 1$ მრუდით.

12. არე შემოსაზღვრულია $y = 2x^2 - 4x$ და $y = 2x - x^2$ პარაბოლებით

13. არე შემოსაზღვრულია $y = 1/\sqrt{x}$ მრუდით და x ღერძით $x = 1$-დან $x = 16$ -მდე .

ცვალებადი სიმკვრივის ფირფიტები

15. იპოვეთ ფირფიტის მასის ცენტრი, თუ მას უკავია x ღერძით და $y = 2/x^2$ მრუდით შემოსაზღვრული არე, (x, y) წერტილში მისი სიმკვრივე კი არის $\delta(x) = x^2$.

16. იპოვეთ იმ ფირფიტის მასის ცენტრი, რომელიც საკოორდინატო სიბრტყეზე დაიკავებს $y = x^2$ პარაბოლის ქვევით $y = x$ წრფემდე არეს, (x, y) წერტილში მისი სიმკვრივე კი არის $\delta(x) = 12x$.

ცენტროიდი

29--32 სავარჯიშოებში იპოვეთ ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი. გამოიყენეთ (6) და (7) ფორმულები; შეარჩიეთ მათში $\delta = 1$ და $M =$ ფირფიტის ფართობი.

29. $g(x) = x^2$ and $f(x) = x + 6$
30. $g(x) = x^2(x + 1)$, $f(x) = 2$, and $x = 0$
31. $g(x) = x^2(x - 1)$ and $f(x) = x^2$
32. $g(x) = 0$, $f(x) = 2 + \sin x$, $x = 0$, and $x = 2\pi$

8

ინტეგრების ტექნიკა

ფუნდამენტური თეორემა გვეუბნება, როგორ გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი, თუ კი ვიცით ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველადი. ცხრილ 8.1 -ში თავმოყრილია სხვადასხვა ფუნქციათა პირველადები, რომლებიც აქამდე შევისწავლეთ. ჩასმის ხერხი გვეხმარება გამოვიყენოთ ეს ცხრილი უფრო რთული ფუნქციებისთვისაც. ამ თავში ვისწავლით სხვა მნიშვნელოვან მეთოდებს პირველადების (ანუ განუსაზღვრელი ინტეგრალების) მოსაძებნად.

ცხრილი 8.1 ინტეგრების ძირითადი ფორმულები

1. $\int k\,dx = kx + C \quad (k$ რიცხვია $)$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

12. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
13. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$
14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C$
15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\frac{1}{\sin x} + \cot x\right| + C$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

18*. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sin^{-1} x + C$

19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

19*. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \tan^{-1} x + C$

8.1 ნაწილობითი ინტეგრება

ნაწილობითი ინტეგრება წარმოადგენს $\int f(x)g(x)\,dx$ სახის ინტეგრალის გამარტივების ტექნიკას. ის მოსახერხებელია გამოვიყენოთ, როცა f შეიძლება გავაწარმოოთ განმეორებით, g კი იოლად ვაინტეგროთ განმეორებით. ასეთი ტიპისაა , მაგალითად, ინტეგრალები

$$\int x\cos x\,dx \quad \text{და} \quad \int x^2e^x\,dx\ ,$$

რადგან $f(x)=x$ ან $f(x)=x^2$ განმეორებით შეიძლება გავაწარმოოთ ვიდრე არ მივიღებთ ნულს, $g(x)=\cos x$ და $g(x)=e^x$ კი შეიძლება იოლად ვაინტეგროთ განმეორებით.

ნაწილობითი ინტეგრება შეიძლება აგრეთვე გამოვიყენოთ

$$\int \ln x\,dx \quad \text{და} \quad \int e^x\cos x\,dx$$

სახის ინტეგრალებისათვის. პირველ შემთხვევაში თვალსაჩინოა $f(x)=\ln x$ ფუნქციის გაწარმოება და $g(x)=1$ ფუნქციის ინტეგრება განმეორებით. მეორე შემთხვევაში კი ინტეგრალქვეშა ფუნქციის თითოეული ნაწილი ხელახლა გამოჩნდება რამდენიმეჯერ გაწარმოების ან ინტეგრების შემდეგ.

ნამრავლის გაწარმოების წესი ინტეგრალური ფორმით

თუ f და g წარმოებადი ფუნქციებია, გვაქვს

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

ამიტომ

$$\int\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx=\int[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]dx\,,$$

ანუ

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx .$$

ამ ტოლობაში შესაკრებების გადასმით ვღებულობთ

$$\int f(x)g'(x)dx = \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int f'(x)g(x)dx ,$$

საიდანაც გამომდინარეობს **ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა**

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad (1)$$

ზოგჯერ უკეთესია გამოვიყენოთ ამ ფორმულის დიფერენციალური სახე. ვთქვათ $u = f(x)$ და $v = g(x)$. მაშინ $du = f'(x)dx$ და $dv = g'(x)dx$. ამიტომ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა ასე ჩაიწერება

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (2)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\int x\cos x\,dx$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ფორმულა $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, რომელშიც

$$u = x, \qquad dv = \cos x\,dx,$$
$$du = dx, \quad v = \sin x.$$

მაშინ

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\int \ln x\,dx$.

ამოხსნა. (2) ფორმულაში დავუშვათ

$$u = \ln x, \qquad dv = dx,$$
$$du = \frac{1}{x}dx, \quad v = x.$$

მიიღება

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\int x^2 e^x\,dx$.

ამოხსნა. (2) ფორმულაში დავუშვათ

$$u = x^2, \qquad dv = e^x dx,$$
$$du = 2x\,dx, \quad v = e^x.$$

მიიღება

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx.$$

ტოლობის მარჯვენა მხარეში მიღებული ინტეგრალი ნაკლებად რთულია, რადგან x-ის ხარისხი ერთამდე შემცირდა. ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად კვლავ გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა $u = x,\ dv = e^x dx$-ით. მაშინ $du = dx,\ v = e^x$ და გვექნება

$$\int x e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

ამრიგად,

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

მაგალითი 3-ის ანალოგიურად გამოითვლება ინტეგრალი $\int x^n e^x\,dx$, რომელშიც n დადებითი მთელია.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\int e^x \cos x\,dx$.

ამოხსნა. ვთქვათ, $u = e^x$ და $dv = \cos x\,dx$. მაშინ $du = e^x dx,\ v = \sin x$ და

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx.$$

მარჯვენა მხარეში მიღებული ინტეგრალის გამოსათვლელად დავუშვათ

$$u = e^x,\ dv = \sin x\, dx, \quad v = -\cos x,\ du = e^x dx.$$

მაშინ

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int(-\cos x)(e^x dx)\right) =$$
$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx.$$

საძიებელი ინტეგრალი გამოჩნდა მარჯვენა მხარეშიც. მისი მარცხნივ გადატანით გვექნება

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C_1$$

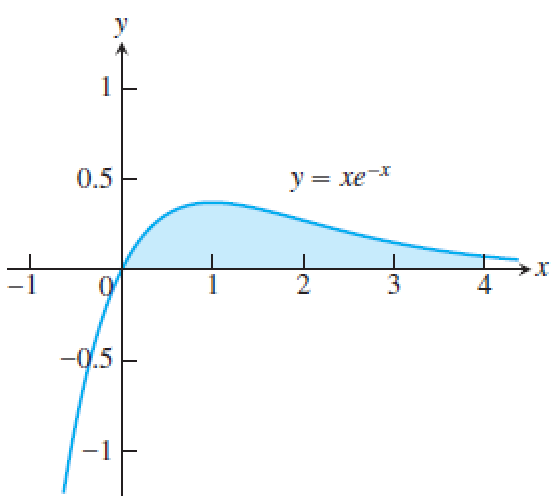
და მაშასადამე

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x) + C.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის

$$\int_a^b u\, dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\, du \qquad (3)$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = xe^{-x},\ 0 < x < 4$ წირით და აბსცისათა ღერძით (იხ. ფიგურა 8.1).



ფიგურა 8. 1

ამოხსნა. საძიებელი ფართობია

$$S = \int_0^4 xe^{-x} dx.$$

ვთქვათ $u = x,\ dv = e^{-x} dx$.

მაშინ $du = dx,\ v = -e^{-x}$ და გვექნება

$$S = xe^{-x}\Big]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})dx = [-4e^{-4} - 0] + \int_0^4 e^{-x} dx =$$

$$= -4e^{-4} - e^{-x}\Big]_0^4 = -4e^{-4} - e^{-4} - (-e^0) = 1 - 5e^{-4} \approx 0.91.$$

სავარჯიშოები 8.1

1--14 სავარჯიშოებში ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენებით გამოთვალეთ ინტეგრალები

1. $\int x \sin \frac{x}{2}\, dx$

2. $\int \theta \cos \pi\theta \, d\theta$

3. $\int t^2 \cos t \, dt$

4. $\int x^2 \sin x \, dx$

5. $\int_1^2 x \ln x \, dx$

6. $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$

7. $\int xe^x \, dx$

8. $\int xe^{3x} \, dx$

9. $\int x^2 e^{-x} \, dx$

10. $\int (x^2 - 2x + 1)\, e^{2x} \, dx$

11. $\int \tan^{-1} y \, dy$

12. $\int \sin^{-1} y \, dy$

13. $\int x \sec^2 x \, dx$

14. $\int 4x \sec^2 2x \, dx$

31--46 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ინტეგრალები

31. $\int x \sec x^2 \, dx$

32. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

33. $\int x (\ln x)^2 \, dx$

34. $\int \frac{1}{x (\ln x)^2} \, dx$

35. $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

36. $\int \frac{(\ln x)^3}{x} \, dx$

37. $\int x^3 e^{x^4} \, dx$

38. $\int x^5 e^{x^3} \, dx$

39. $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$

40. $\int x^2 \sin x^3 \, dx$

41. $\int \sin 3x \cos 2x \, dx$

42. $\int \sin 2x \cos 4x \, dx$

43. $\int e^x \sin e^x \, dx$

44. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

45. $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

46. $\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} \, dx$

8.2 ტრიგონომეტრიული ინტეგრალები

ტრიგონომეტრიული ინტეგრალები შეიცავენ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებსა და მათ ალგებრულ კომბინაციებს.

სინუსისა და კოსინუსის ხარისხების ნამრავლი

განვიხილოთ

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

ტიპის ინტეგრალები, სადაც m და n არაუარყოფითი მთელებია.

შემთხვევა 1. თუ $m = 2k+1$ კენტია, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ იგივეობის გამოყენებით გარდავქმნათ

$$\sin^m x = \sin^{2k+1} x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1-\cos^2 x)^k \sin x.$$

შემდეგ კი ცალკე დარჩენილი $\sin x$ ინტეგრალში დავაჯგუფოთ dx -თან და შევცვალოთ $\sin x \, dx = -d(\cos x)$.

შემთხვევა 2. თუ m ლუწია, ხოლო $n = 2k+1$ კენტია, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ იგივეობის გამოყენებით გარდავქმნათ

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1-\sin^2 x)^k \cos x.$$

შემდეგ ცალკე დარჩენილი $\cos x$ დავაჯგუფოთ dx -თან და შევცვალოთ $\cos x \, dx = d(\sin x)$.

შემთხვევა 3. თუ m და n ორივე ლუწია, შევცვალოთ

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

და მივიღებთ ინტეგრალს $\cos 2x$ -ის მიმართ უფრო დაბალი ხარისხებიდან.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი თითოეული შემთხვევის საილუსტრაციოდ.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

ამოხსნა.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx =$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x(-d(\cos x)) =$$

$$= \int (1-u^2)(u^2)(-du) = \int (u^4 - u^2)\, du =$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

აღვნიშნოთ $u = \cos x$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\int \cos^5 x\, dx$.

ამოხსნა. ეს მაგალითი შეესაბამება შემთხვევა 2-ს, როცა $m = 0$ და $n = 5$.

$$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2\, d(\sin x) =$$

$$= \int (1-u^2)^2\, du = \int (1-2u^2+u^4)\, du =$$

$$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \sin x \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

აღვნიშნოთ $u = \sin x$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$.

ამოხსნა. ეს მაგალითი შეესაბამება შემთხვევა 3-ს.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x - \int (\cos^2 2x + \cos^3 2x) dx\right].$$

$\cos^2 2x$ -ის შემცველი წევრისთვის გვაქვს

$$\int \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right).$$

$\cos^3 2x$-ის შემცველი წევრისთვის გვაქვს

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (1-u^2)du = \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x\right).$$

გამოვიყენეთ ჩასმა $\begin{matrix} u = \sin 2x \\ du = 2\cos 2x\,dx \end{matrix}$

მიღებული შედეგების გამოყენებით და გამარტივებით მივიღებთ

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) + C.$$

სინუსებისა და კოსინუსების ნამრავლი

$$\int \sin mx \sin nx\,dx, \quad \int \sin mx \cos nx\,dx, \quad \int \cos mx \cos nx\,dx$$

ტიპის ინტეგრალების გამოსათვლელად გამოიყენება ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნამრავლების ჯამად გარდაქმნის ფორმულები:

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x], \qquad (3)$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x], \qquad (4)$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]. \qquad (5)$$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ $\int \sin 3x \cos 5x\,dx.$

ამოხსნა.

$$\int \sin 3x \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int [\sin(-2x) + \sin 8x]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int [\sin 8x - \sin 2x]dx =$$

$$= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

სავარჯიშოები 8.2

1--22 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ინტეგრალები

1. $\int \cos 2x\,dx$

2. $\int_0^{\pi} 3\sin\frac{x}{3}\,dx$

3. $\int \cos^3 x \sin x\,dx$

4. $\int \sin^4 2x \cos 2x\,dx$

5. $\int \sin^3 x\,dx$

6. $\int \cos^3 4x\,dx$

7. $\int \sin^5 x\,dx$

8. $\int_0^{\pi} \sin^5 \frac{x}{2}\,dx$

9. $\int \cos^3 x\,dx$

10. $\int_0^{\pi/6} 3\cos^5 3x\,dx$

11. $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx$

12. $\int \cos^3 2x \sin^5 2x\,dx$

13. $\int \cos^2 x\,dx$

14. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$

15. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 y\,dy$

16. $\int 7\cos^7 t\,dt$

17. $\int_0^{\pi} 8\sin^4 x\,dx$

18. $\int 8\cos^4 2\pi x\,dx$

19. $\int 16\sin^2 x \cos^2 x\,dx$

20. $\int_0^{\pi} 8\sin^4 y \cos^2 y\,dy$

21. $\int 8\cos^3 2\theta \sin 2\theta\,d\theta$

22. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \cos^3 2\theta\,d\theta$

51--56 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ინტეგრალები

51. $\int \sin 3x \cos 2x\,dx$

52. $\int \sin 2x \cos 3x\,dx$

53. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \sin 3x\,dx$

54. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x\,dx$

55. $\int \cos 3x \cos 4x\,dx$

56. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos 7x\,dx$

8.3 ტრიგონომეტრიული ჩასმები

ტრიგონომეტრიული ჩასმა წარმოადგენს საინტეგრო ცვლადის შეცვლას ტრიგონომეტრიული ფუნქციით. ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ ჩასმებს.

1) $x = a\tan\theta$, რომელიც ეფექტურია, თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შეიცავს გამოსახულებას $\sqrt{a^2+x^2}$. ამ შემთხვევაში

$$a^2+x^2 = a^2+a^2\tan^2\theta = a^2(1+\tan^2\theta) = \frac{a^2}{\cos^2\theta}$$

და

$$\sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos\theta}. \qquad (1)$$

2) $x = a\sin\theta$, რომელიც ეფექტურია, თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შეიცავს გამოსახულებას $\sqrt{a^2-x^2}$. ამ შემთხვევაში

$$a^2-x^2 = a^2-a^2\sin^2\theta = a^2(1-\sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta$$

და

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta. \qquad (2)$$

3) $x = \dfrac{a}{\cos\theta}$, რომელიც ეფექტურია, თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შეიცავს გამოსახულებას $\sqrt{x^2-a^2}$. ამ შემთხვევაში

$$x^2-a^2 = \frac{a^2}{\cos^2\theta}-a^2 = a^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right) = a^2\tan^2\theta$$

და

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan\theta. \qquad (3)$$

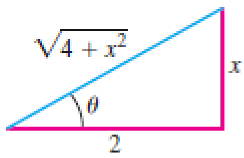
იგულისხმება θ ისეთია, რომ (1)-(3) ტოლობების მარჯვენა მხარეები დადებითია.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

ამოხსნა. ჩავსვათ

$$x = 2\tan\theta, \quad dx = \frac{2d\theta}{\cos^2\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

(1) ფორმულის გათვალისწინებით :



ფიგურა 8.4

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln\left|\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C.$$

აქ გამოვიყენეთ ფიგურა 8.4-დან გამომდინარე ტოლობა

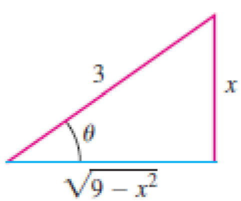
$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

ამოხსნა. ჩავსვათ

$$x = 3\sin\theta, \quad dx = 3\cos\theta d\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

და გავითვალისწინოთ (2) ფორმულა. მიიღება



ფიგურა 8.5

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta\, d\theta}{3\cos\theta} = 9\int \sin^2\theta\, d\theta =$$

$$= 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{9}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C = \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C.$$

აქ გამოვიყენეთ ფიგურა 8.5-დან გამომდინარე ტოლობა

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}, \ x > \frac{2}{5}$.

ამოხსნა.

ჯერ გარდავქმნათ რადიკალი ამგვარად

$$\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)} = 5\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}.$$

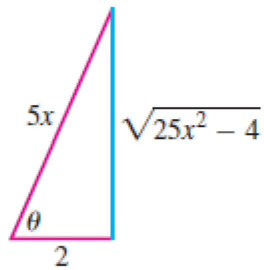
შემდეგ შევცვალოთ

$$x = \frac{2}{5\cos\theta}, \quad dx = \frac{2}{5}\frac{\tan\theta}{\cos\theta}d\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(3) ფორმულის გათვალისწინებით მიიღება

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}\tan\theta.$$

ამიტომ



ფიგურა 8.6

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} = \frac{1}{5}\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2 - 4}}{2}\right| + C.$$

აქ θ ცვლადიდან x -ზე დასაბრუნებლად გამოყენებულია ფიგურა 8.6.

სავარჯიშოები 8.3

1--14 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ინტეგრალები

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}$

2. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{1 + 9x^2}}$

3. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4 + x^2}$

4. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{8 + 2x^2}$

5. $\int_{0}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

6. $\int_{0}^{1/2\sqrt{2}} \frac{2\,dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

7. $\int \sqrt{25 - t^2}\,dt$

8. $\int \sqrt{1 - 9t^2}\,dt$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 49}}, \quad x > \frac{7}{2}$

10. $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{25x^2 - 9}}, \quad x > \frac{3}{5}$

11. $\int \frac{\sqrt{y^2 - 49}}{y}\,dy, \quad y > 7$

12. $\int \frac{\sqrt{y^2 - 25}}{y^3}\,dy, \quad y > 5$

13. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$

14. $\int \frac{2\,dx}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$

8.4 რაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრება

ამ სექციაში ნაჩვენებია, როგორ შეიძლება შეიცვალოს რაციონალური ფუნქცია (მრავალწევრების შეფარდება) ე.წ. უმარტივესი წილადებით, რომელთა ინტეგრება მარტივია.

მეთოდის ზოგადი აღწერა

იმისათვის, რომ რაციონალური ფუნქცია წარმოვადგინოთ უმარტივესი წილადების ჟამის სახით, ორი რამ უნდა სრულდებოდეს:

- $f(x)$ -ის ხარისხი ნაკლები უნდა იყოს $g(x)$ -ის ხარისხზე (ანუ წილადი იყოს წესიერი). თუ ასე არაა, უნდა შევასრულოთ $f(x)$ -ის გაყოფა $g(x)$ -ზე , შემდეგ კი ნაშთი დავშალოთ უმარტივესი წილადების ჯამად .
- უნდა ვიცოდეთ $g(x)$ -ის ფესვები. როგორც ცნობილია, ნამდვილ კოეფიციენტებიანი ყოველი მრავალწევრი შეიძლება ჩაიწეროს წრფივი და კვდრატული თანამამრავლების ნამრავლის სახით. პრაქტიკულად, ამ თანამამრავლების პოვნა შეიძლება რთული იყოს.

უმარტივესი წილადების მეთოდი ($f\,/\,g$ წესიერია)

1. ვთქვათ $x-r$ წარმოადგენს g -ს წრფივ მამრავლს და $(x-r)^m$ არის $x-r$ -ის უმაღლესი ხარისხი, რომელიც ყოფს g -ს. მაშინ ამ მამრავლის შესაბამისი უმარტივესი წილადების ჯამია:

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-r)^m}\ .$$

ეს კეთდება g -ს ყოველი განსხვავებული წრფივი მამრავლისათვის.

2. ვთქვათ x^2+px+q წარმოადგენს g -ს გამყოფს, რომელსაც ნამდვილი ფესვები არ აქვს. ვთქვათ $(x^2+px+q)^n$ არიც ამ სამწევრის უმაღლესი ხარისხი, რომელზეც იყოფა.

მაშინ ამ გამყოფის შესაბამისი უმარტივესი წილადების ჯამია

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}\,.$$

ეს კეთდება g -ს ყოველი განსხვავებული კვადრატული მამრავლისთვის

3. საწყისი f/g წილადი წარმოვადგინოთ ამ უმარტივესი წილადების ჯამად. გავამარტივოთ მიღებული ტოლობა და დავალაგოთ შესაკრებები x-ის კლებადი ხარისხების მიხედვით.

4. ტოლობის ორივე მხარეში გავუტოლოთ ერთმანეთს x-ის ტოლი ხარისხების კოეფიციენტები.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx.$

ამოხსნა. უმარტივეს წილადებად დაშლას ასეთი სახე აქვს

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} \ .$$

მოვიცილოთ წილადი:

$$x^2+4x+1 = A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1) =$$
$$= (A+B+C)x^2 + (4A+2B)x + (3A-3B-C).$$

გავატოლოთ კოეფიციენტები:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \\ 4A+2B &= 4 \\ 3A-3B-C &= 1 \end{aligned}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $A=3/4, B=1/2, C=-1/4.$ ამიტომ

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx = \int \left[\frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+3}\right]dx =$$
$$= \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C_1 \ .$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}dx.$

ამოხსნა. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოვადგინოთ უმარტივეს წილადების ჯამად

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2};$$

$$6x+7=A(x+2)+B=Ax+(2A+B).$$

აქედან $A=6, \quad 2A+B=7; \Rightarrow B=-5.$ ამიტომ

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}dx=\int\left(\frac{6}{x+2}-\frac{5}{(x+2)^2}\right)dx=$$

$$=6\int\frac{dx}{x+2}-5\int(x+2)^{-2}dx=6\ln|x+2|+5(x+2)^{-1}+C.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}dx.$

ამოხსნა. ჯერ გავყოთ მრიცხველი მნიშვნელზე, რათა მივიღოთ მრავალწევრს პლუს წესიერი წილადი:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-4x^2-x-3 & x^2-2x-3 \\ \underline{2x^3-4x^2-6x} & 2x \\ 5x-3 & \end{array}$$

მაშასადამე,

$$\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}=2x+\frac{5x-3}{x^2-2x-3}$$

და გვექნება

$$\int\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}dx=\int 2xdx+\int\frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx=$$

$$=\int 2xdx+\int\frac{2}{x+1}dx+\int\frac{3}{x-3}dx=$$

$$=x^2+2\ln|x+1|+3\ln|x-3|+C.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx.$

ამოხსნა.

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}.$$

მოვიცილოთ წილადი ამ განტოლებაში. მივიღებთ

$$-2x+4=(Ax+B)(x-1)^2+C(x-1)(x^2+1)+D(x^2+1)=$$

$$=(A+C)x^3+(-2A+B-C+D)x^2+(A-2B+C)x+(B-C+D).$$

კოეფიციენტების მოსაძებნად მიიღება სისტემა

$$\begin{aligned} 0&=A+C\\ 0&=-2A+B-C+D\\ -2&=A-2B+C\\ 4&=B-C+D \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad A=2,\, B=1,\, C=-2,\, D=1.$$

ამრიგად,

$$\int\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=$$

$$\int\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x-2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

სავარჯიშოები 8.4

1--8 სავარჯიშოებში წარმოვადგინოთ განაყოფები მარტივი წილადების ჯამის სახით

1. $\dfrac{5x-13}{(x-3)(x-2)}$

2. $\dfrac{5x-7}{x^2-3x+2}$

3. $\dfrac{x+4}{(x+1)^2}$

4. $\dfrac{2x+2}{x^2-2x+1}$

5. $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$

6. $\dfrac{z}{z^3-z^2-6z}$

7. $\dfrac{t^2+8}{t^2-5t+6}$

8. $\dfrac{t^4+9}{t^4+9t^2}$

არაგანმეორებადი წრფივი მამრავლები

9--16 სავარჯიშოებში წარმოვადგინოთ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია მარტივი წილადების ჯამის სახით და გამოვთვალოთ ინტეგრალები

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$

11. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,dx$

13. $\displaystyle\int_4^8 \frac{y\,dy}{y^2-2y-3}$

14. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{y+4}{y^2+y}\,dy$

15. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^3+t^2-2t}$

16. $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^3-8x}\,dx$

განმეორებადი წრფივი მამრავლები

17--18 სავარჯიშოებში წარმოვადგინოთ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია მარტივი წილადების ჯამის სახით და გამოვთვალოთ ინტეგრალები

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^2+2x+1}$

18. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3\,dx}{x^2-2x+1}$

დაუყვანელი კვადრატული მამრავლები

21--30 სავარჯიშოებში წარმოვადგინოთ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია მარტივი წილადების ჯამის სახით და გამოვთვალოთ ინტეგრალები

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

22. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}\,dt$

23. $\displaystyle\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}\,dy$

24. $\displaystyle\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{2s+2}{(s^2+1)(s-1)^3}\,ds$

26. $\displaystyle\int \frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2}\,ds$

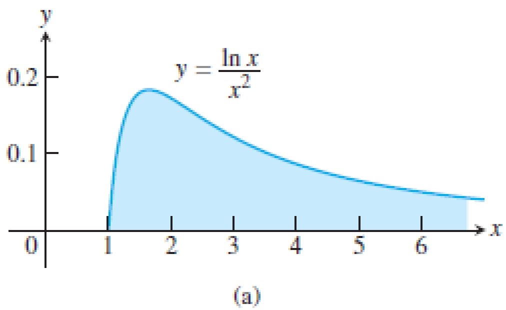
27. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{x^3-1}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^4-3x^2-4}\,dx$

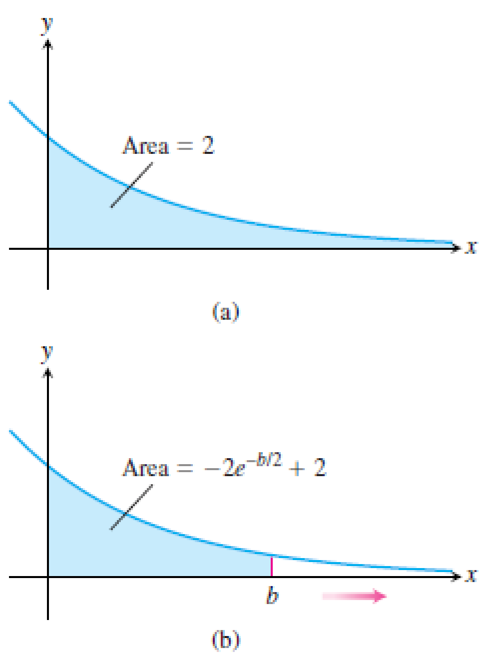
8.7 არასაკუთრივი ინტეგრალები



ფიგურა 8.12

განსაზღვრული ინტეგრალისგან აქამდე მოითხოვებოდა ორი თვისება. პირველი, რომ ინტეგრების არე $[a,b]$ იყოს სასრული. მეორე, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე იყოს შემოსაზღვრული. პრაქტიკული გამოყენებებისას გვხვდება ისეთი ამოცანები, რომლებშიც ერთ-ერთი ან ორივე ეს თვისება არ კმაყოფილდება. $y = (\ln x)/x^2$ მრუდის ქვეშ მდგომი ფართობის გამოთვლა $x = 1$ -დან $x = \infty$ -მდე (ფიგ. 8.12a) წარმოადგენს მაგალითს, როცა ინტეგრების არე უსასრულოა. $y = 1/\sqrt{x}$ მრუდის ქვეშ მდგომი ფართობის გამოთვლა $x = 0$ -დან $x = 1$ -მდე (ფიგ. 8.12 b) წარმოადგენს მაგალითს, როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე არაა შემოსაზღვრული.

ინტეგრების უსასრულო საზღვრები



ფიგურა 8.13

განვიხილოთ $y = e^{-x/2}$ მრუდის ქვეშ პირველ კვადრანტში მდებარე უსასრულო არე (ფიგ. 8.13a). გავარკვიოთ, რა მოიაზრება ამ უსასრულო არის ფართობად. ჯერ ვიპოვოთ მარჯვნიდან $x = b$ -თი შემოსაზღვრული ამ არის ნაწილის ფართობი $A(b)$ (ფიგ. 8.13b)

$$A(b) = \int_0^b e^{-x/2} dx = -2e^{-x/2} \Big]_0^b = -2e^{-b/2} + 2 \ .$$

შემდეგ ვიპოვოთ $A(b)$ -ს ზღვარი, როცა $b \to \infty$:

$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty}(-2e^{-b/2} + 2) = 2.$$

ამ ზღვარს ვუწოდოთ მრუდის ქვეშ მდგომი ფიგურის ფართობი 0-დან ∞ -მდე

$$\int_0^\infty e^{-x/2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x/2} dx = 2.$$

განსაზღვრება უსასრულო საზღვრის მქონე ინტეგრალს ეწოდება **I ტიპის არასაკუთრივი ინტეგრალი.**

1. თუ $f(x)$ უწყვეტია $[a,\infty)$ -ზე, მაშინ

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

2. თუ $f(x)$ უწყვეტია $(-\infty,b]$ -ზე, მაშინ

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

3. თუ $f(x)$ უწყვეტია $(-\infty,\infty)$-ზე, მაშინ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx\,,$$

სადაც c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

თითოეულ ამ შემთხვევაში, თუ ზღვარი სასრულია, ინტეგრალს ეწოდება **კრებადი.**

თუ ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოდ დიდია, მაშინ ამბობენ, რომ ინტეგრალი **განშლადია.**

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx.$

ამოხსნა.

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^b - \int_1^b\left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= -\frac{\ln b}{b} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1.$$

გამოვიყენეთ ნაწილობითი ინტეგრება

$$u = \ln x,\ dv = dx/x^2,$$
$$du = dx/x,\ v = -1/x$$

გადავიდეთ ზღვარზე:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right] =$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\left[\frac{\ln b}{b}\right] - 0 + 1 = -\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1/b}{1}\right] + 1 = 0 + 1 = 1.$$

გამოვიყენეთ ლოპიტალის წესი

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

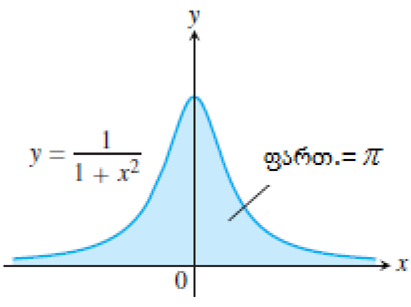
ამოხსნა.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

გამოვთვალოთ ახლა მარჯვენა მხარის ორივე ინტეგრალი.

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\tan^{-1}x\Big]_a^0 =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}a) = 0 - \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$



ფიგურა 8.15

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}x\Big]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\tan^{-1}b - \tan^{-1}0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2};$$

ამრიგად,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

რადგან $1/(1+x^2)$ ამიტომ არასაკუთრივი ინტეგრალი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ფართობი მრუდსა და x ღერძს შორის (ფიგ. 8.15).

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^p}$.

ამოხსნა. თუ $p \neq 1$,

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b = \frac{1}{1-p}(b^{-p+1} - 1) = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right).$$

ამიტომ

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p>1 \\ \infty, & p<1 \end{cases},$$

რადგან

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p>1 \\ \infty, & p<1. \end{cases}$$

ამრიგად, ინტეგრალი კრებადია $1/(p-1)$ -საკენ, თუ $p>1$ და განშლადია, თუ $p<1$.

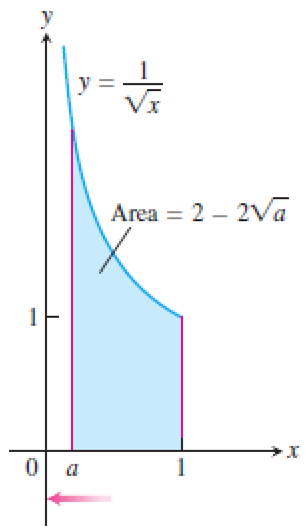
თუ $p=1$, მაშინაც ინტეგრალი განშლადია:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\ln x\Big]_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty.$$

შემოუსაზღვრელი ინტეგრალქვეშა ფუნქცია

როგორ განვსაზღვროთ ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან ?



ფიგურა 8.16

განვიხილოთ პირველ კვადრანტში არე, რომელიც მდებარეობს $y=1/\sqrt{x}$ მრუდის ქვეშ $x=0$ -დან $x=1$ -მდე (ფიგ. 8.12 b).

ჯერ ვიპოვოთ $x=a$ -დან $x=1$ -მდე ფიგურის ნაწილის ფართობი (ფიგ. 8.16).

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big]_a^1 = 2-2\sqrt{a}.$$

შემდეგ ვიპოვოთ ზღვარი

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+}(2-2\sqrt{a}) = 2.$$

მაშასადამე, აღნიშნული ინტეგრალი შეიძლება ასე განისაზღვროს

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

განსაზღვრება თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უსასრულოდ დიდი ხდება საინტეგრო ინტერვალის წერტილში, მაშინ ასეთ ინტეგრალს ეწოდება **II ტიპის არასაკუთრივი ინტეგრალი.**

1. თუ $f(x)$ უწყვეტია $(a,b]$-ზე და წყვეტილია a წერტილში, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx\ .$$

2. თუ $f(x)$ უწყვეტია $[a,b)$ -ზე და წყვეტილია b წერტილში, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx\,.$$

3. თუ $f(x)$ წყვეტილია c წერტილში, სადაც $a<c<b$, და უწყვეტია $[a,c)\cup(c,b]$-ზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

სადაც c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

თითოეულ ამ შემთხვევაში, თუ ზღვარი სასრულია, ინტეგრალს ეწოდება **კრებადი.**

თუ ზღვარი არ არსებობს , მაშინ ამბობენ, რომ ინტეგრალი **განშლადია**.

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx.$

ამოხსნა.

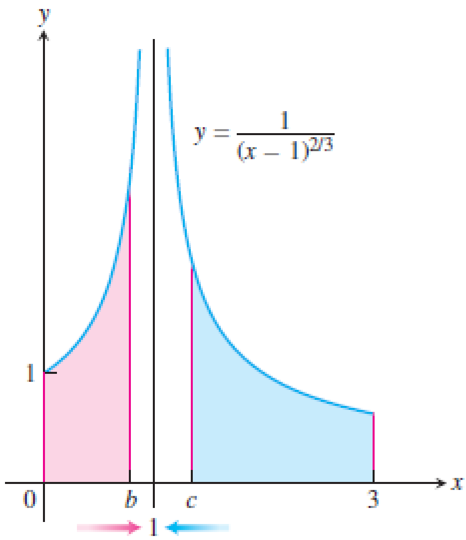
$$\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{b\to 1^-} \left[-\ln|1-x|\right]_0^b = \lim_{b\to 1^-}[-\ln(1-b)+0] = \infty.$$

ზღვარი უსასრულოა, მაშასადამე ინტეგრალი განშლდია.

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$

ამოხსნა.

ინტეგრალქვეშა ფუნქციას ვერტიკალური ასიმპტოტა აქვს $x=1$ წერტილში, სხვა წერტილებში კი უწყვეტია (ფიგ. 8.18). ამიტომ



ფიგურა 8.18

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

შემდეგ, გამოვთვალოთ მარჯვენა მხარის ორივე არასაკუთრივი ინტეგრალი .

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\Big]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 1^-} [3(b-1)^{1/3} + 3] = 3,$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big]_c^3 =$$

$$= \lim_{c\to 1^+} [3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}] = 3\sqrt[3]{2},$$

ამიტომ დავასკვნით, რომ

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}.$$

კრებადობის და განშლადობის ნიშნები

თეორემა 2. ვთქვთ f და g უწყვეტია $[a,\infty)$-ზე და $0 \le f(x) \le g(x)$ როცა $x \ge a$. მაშინ

1. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ კრებადია, თუ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ კრებადია.

2. $\int_a^\infty g(x)\,dx$ განშლადია , თუ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ განშლადია .

მაგალითი 7.

(ა) $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ კრებადია, რადგან

$[1,\infty)$ შუალედზე $0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ და $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ კრებადია.

(ბ) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}} dx$ განშლადია, რადგან

$[1,\infty)$ შუალედზე $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}} \ge \frac{1}{x}$ და $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ განშლადია.

თეორემა 3. თუ f და g დადებითი ფუნქციები უწყვეტია $[a,\infty)$-ზე და

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty,$$

მაშინ

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ და $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ ორივე კრებადია ან ორივე განშლადია .

მაგალითი 8.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ კრებადია, რადგან

კრებადია ინტეგრალი $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ და $L = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{1/(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1.$

მაგალითი 9.

$\int_1^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ განშლადია, რადგან

განშლადია ინტეგრალი $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ და $L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)\left(\frac{x}{1}\right) = \lim_{x\to\infty} (1-e^{-x}) = 1.$

სავარჯიშოები 8.7

1--30 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ინტეგრალები ცხრილების გამოუყენებლად

1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ **2.** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.001}}$

3. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **4.** $\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

5. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$

6. $\int_{-8}^{1} \frac{dx}{x^{1/3}}$

7. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\int_{0}^{1} \frac{dr}{r^{0.999}}$

9. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$

10. $\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$

11. $\int_{2}^{\infty} \frac{2}{v^2-v}\,dv$

12. $\int_{2}^{\infty} \frac{2\,dt}{t^2-1}$

13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$

14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4)^{3/2}}$

15. $\int_{0}^{1} \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}}\,d\theta$

16. $\int_{0}^{2} \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}}\,ds$

17. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

18. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

19. $\int_{0}^{\infty} \frac{dv}{(1+v^2)(1+\tan^{-1}v)}$

20. $\int_{0}^{\infty} \frac{16\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

21. $\int_{-\infty}^{0} \theta e^{\theta}\,d\theta$

22. $\int_{0}^{\infty} 2e^{-\theta}\sin\theta\,d\theta$

23. $\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx$

24. $\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$

25. $\int_{0}^{1} x\ln x\,dx$

26. $\int_{0}^{1} (-\ln x)\,dx$

27. $\int_{0}^{2} \frac{ds}{\sqrt{4-s^2}}$

28. $\int_{0}^{1} \frac{4r\,dr}{\sqrt{1-r^4}}$

29. $\int_{1}^{2} \frac{ds}{s\sqrt{s^2-1}}$

30. $\int_{2}^{4} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-4}}$

43--54 სავარჯიშოებში დაადგინეთ ინტეგრალის კრებადობა ან განშლადობა

43. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{1-x^2}$

44. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{1-x}$

45. $\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx$

46. $\int_{-1}^{1} -x\ln|x|\,dx$

47. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

48. $\int_{4}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

49. $\int_{2}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v-1}}$

50. $\int_{0}^{\infty} \frac{d\theta}{1+e^{\theta}}$

51. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

52. $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

53. $\int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx$

54. $\int_{2}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$

10

უსასრულო მიმდევრობები და მწკრივები

ყველამ იცის, როგორ შეკრიბოს ორი ან რამდენიმე რიცხვი. მაგრამ როგორ შეკრებთ თქვენ უსასრულოდ ბევრ რიცხვს? ამ თავში ჩვენ ვუპასუხებთ ამ შეკითხვაზე, რომელიც უსასრულო მიმდევრობებისა და მწკრივების თეორიის ნაწილს წარმოადგენს. ამ თეორიის მნიშვნელოვანი გამოყენებაა $f(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციის ჩაწერა x-ის ხარისხების უსასრულო ჯამად, რომელიც "უსასრულოდ ბევრ წევრებიანი პოლინომის" სახით გამოიყურება .

10.1 მიმდევრობები

მიმდევრობათა წარმოდგენა

მიმდევრობა არის გარკვეული რიგით მოცემული რიცხვების ჩამონათვალი

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

ამ რიცხვებს მიმდევრობის **წევრები** ეწოდება. მაგალითად,

$$2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 2n, \cdots$$

მიმდევრობის პირველი წევრია $a_1 = 2$, მეორე წევრია $a_2 = 4$, და ა.შ. n -ური წევრია $a_n = 2n$. n ნატურალურ რიცხვს a_n წევრის **ინდექსი** ეწოდება და მიუთითებს მის ადგილს მიმდევრობაში. რიგითობა მნიშვნელოვანია. მიმდევრობა $2, 4, 6, 8, \cdots$ იგივე არაა, რაც $4, 2, 6, 8, \cdots$

ჩვენ შეგვიძლია მოვიაზროთ $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ მიმდევრობა როგორც ფუნქცია, რომლითაც 1-ს შეესაბამება a_1, 2-ს შეესაბამება a_2, 3-ს შეესაბამება a_3 და საზოგადოდ დადებით მთელ n რიცხვს შეესაბამება n-ური წევრი a_n . ამ მიმდევრობას $\{a_n\}$ სიმბოლოთიც აღნიშნავენ.

უფრო ზუსტად, ***რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობა წარმოადგენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციას.***

მიმდევრობა შეიძლება აღიწეროს მისი წევრების განმსაზღვრელი ფორმულით (**ზოგადი წევრით**), მაგალითად

$$a_n = \sqrt{n}, \quad b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{n-1}{n}, \quad d_n = (-1)^{n+1},$$

ან წევრების ჩამონათვალით:

$$\{a_n\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$$

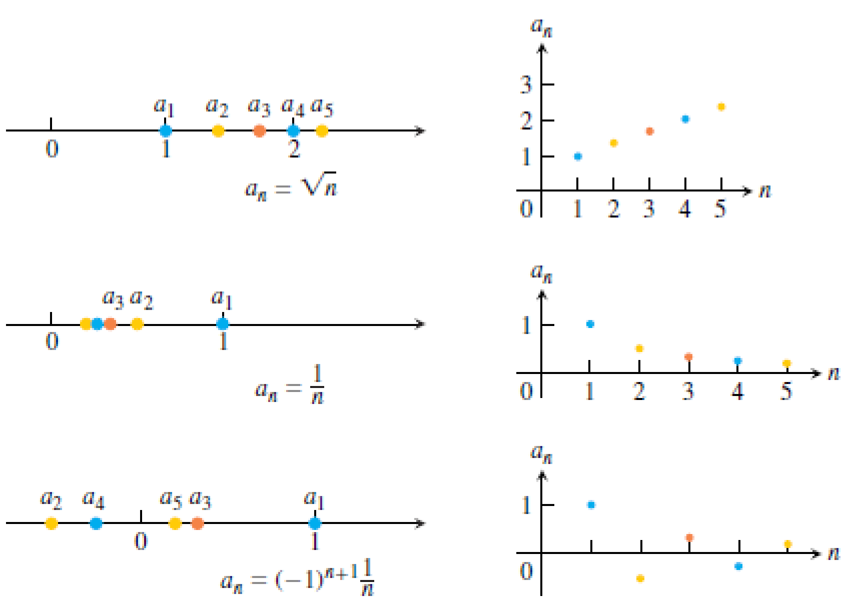
$$\{b_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots\right\}$$

$$\{c_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots\right\}$$

$$\{d_n\} = \left\{1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots\right\}.$$

ზოგჯერ ასეც ჩავწერთ $\{a_n\} = \left\{\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

ფიგურა 10.1-ზე მიმდევრობათა გრაფიკული წარმოდგენის ნიმუშებია ნაჩვენები.



ფიგურა 10.1

კრებადობა და განშლადობა

ზოგჯერ მიმდევრობის წევრები n ინდექსის ზრდასთან ერთად უახლოვდება რომელიღაც რიცხვს. ასეა, მაგალითად,

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$$

მიმდევრობის შემთხვევაში, რომლის წევრები n-ის ზრდასთან ერთად უახლოვდება 0-ს.

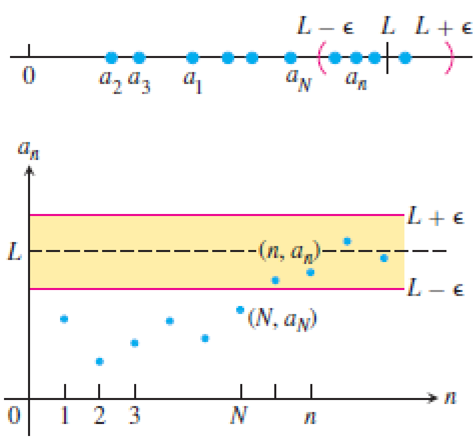
სხვა შემთხვევაში,

$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$

მიმდევრობის წევრები ნებისმიერ რიცხვზე მეტი შეიძლება გახდეს, როცა n იზრდება, ხოლო

$\left\{1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots\right\}$

მიმდევრობის წევრები კი ერთ რომელიმე რიცხვს არ უახლოვდება.



ფიგურა 10.2

L რიცხვს ეწოდება $\{a_n\}$ **მიმდევრობის ზღვარი,** თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი (ε-ზე დამოკიდებული) N რიცხვი, რომ ყოველი ნატურალური n-სათვის

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon \ .$$

თუ ასეთი L რიცხვი არსებობს, ვიტყვით რომ $\{a_n\}$ **კრებადია**; სხვა შემთხვევაში მიმდევრობა **განშლადია.** კრებადობის შემთხვევაში ვწერთ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ან $a_n \to L$.

ზღვრის განმარტები თანახმად, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ინტერვალში მოხვდება მიმდევრობის უსასრულოდ ბევრი წევრი, ინტერვალის გარეთ კი -- სასრული რაოდენობა წევრებისა (ფიგ. 10.2).

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ

(ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}k=k$ (k ნებისმიერი მუდმივია).

ამოხსნა. (ა) ვთქვათ დასახელებულია $\varepsilon>0$. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ ისეთი N რიცხვის არსებობა, რომ მასზე დიდი ყოველი n რიცხვისათვის

$$n>N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon .$$

ამ უტოლობას ადგილი ექნება, თუ $n>1/\varepsilon$. მაშასადამე, N შეიძლება იყოს $1/\varepsilon$ -ზე დიდი ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი.

(ბ) ვთქვათ დასახელებულია $\varepsilon>0$. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ ისეთი N რიცხვის არსებობა, რომ მასზე დიდი ყოველი n რიცხვისათვის

$$n>N \quad \Rightarrow \quad |k-k|<\varepsilon .$$

რადგან $k-k=0$, ამიტომ N რიცხვად შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი მთელი.

თეორემა 1. ვთქვათ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობებია და $\lim_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim_{n\to\infty}b_n=B$. მაშინ:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=A-B$
3. $\lim_{n\to\infty}(k\cdot b_n)=k\cdot B$
4. $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$
5. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}$ (თუ $B\neq 0$)

მაგალითი 3. თეორემა 1-ის და მაგალითი 1-ის საფუძველზე გვაქვს:

(ა) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=-1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=-1\cdot 0=0$

(ბ) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1-0=1$

(გ) $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=5\cdot 0\cdot 0=0$

(დ) $\lim_{n\to\infty}\frac{4-7n^6}{n^6+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4/n^6)-7}{1+(3/n^6)}=\frac{0-7}{1+0}=-7.$

ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ზღვარი

თეორემა 5.

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$

2. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

3. $\lim_{n\to\infty}x^{1/n}=1 \quad (x>0)$

4. $\lim_{n\to\infty}x^n=0 \quad (|x|<1)$

5. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$ (ნებისმ. x)

6. $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ (ნებისმ. x)

(3), (6) ფორმულებში x არაა დამოკიდებული n-ზე.

მაგალითი 9. მოვიყვანოთ თეორემა 5-ის გამოყენების მაგალითები .

(ა) $\frac{\ln(n^2)}{n}=\frac{2\ln n}{n}\to 2\cdot 0=0$ ფორმულა 1

(ბ) $\sqrt[n]{n^2}=n^{2/n}=(n^{1/n})^2\to(1)^2=1$ ფორმულა 2

(გ) $\sqrt[n]{3n}=3^{1/n}(n^{1/n})\to 1\cdot 1=1$ ფორმულა 3 ($x=3$) და ფორმულა 2

(დ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n\to 0$ ფორმულა 4 ($x=-1/2$)

(ე) $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1+\frac{-2}{n}\right)^n \to e^{-2}$ ფორმულა 5 ($x=-2$)

(ვ) $\frac{100^n}{n!} \to 0$ ფორმულა 6 ($x=100$)

განსაზღვრება. $\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **ზემოდან შემოსაზღვრული,** თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომელიც მიმდევრობის ყოველ წევრზე მეტია. M რიცხვს ეწოდება $\{a_n\}$-ის **ზედა საზღვარი.**

$\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **ქვემოდან შემოსაზღვრული** , თუ მოიძებნება ისეთი m რიცხვი, რომელიც ნაკლებია მოცემული მიმდევრობის ყოველ წევრზე. ასეთ m რიცხვს მიმდევრობის **ქვედა საზღვარი** ეწოდება.

თუ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან, მას **შემოსაზღვრული მიმდევრობა** ეწოდება.

თუ მიმდევრობის ზედა საზღვარია M და მიმდევრობას მასზე ნაკლები ზედა საზღვარი არ აქვს, მაშინ M არის **უმცირესი ზედა საზღვარი.**

თუ m არის მიმდევრობის ქვედა საზღვარი, მაგრამ მიმდევრობას მასზე დიდი ქვედა საზღვარი არ აქვს, მაშინ m არის **უდიდესი ქვედა საზღვარი.**

მაგალითი 11.

(ა) მიმდევრობა 1, 2, 3, 4, . . ., n, . . . არაა შემოსაზღვრული ზემოდან. ის შემოსაზღვრულია ქვემოდან 1-ზე ნაკლები ან ტოლი ნებისმიერი რიცხვით.

(ბ) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$ შემოსაზღვრული მიმდევრობაა. ის ზემოდან შემოსაზღვრულია 1-ზე მეტი ან ტოლი ნებისმიერი რიცხვით, ქვემოდან კი 1/2 -ზე ნაკლები ან ტოლი ნებისმიერი რიცხვით.

განსაზღვრება. $\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **არაკლებადი,** თუ

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots$$

და **არაზრდადი** -- თუ

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$$

მიმდევრობას ეწოდება **მონოტონური**, თუ ის არაკლებადია ან არაზრდადია.

მაგალითი 12.

(ა) 1, 2, 3, 4, . . ., n, . . . მიმდევრობა არაკლებადია .

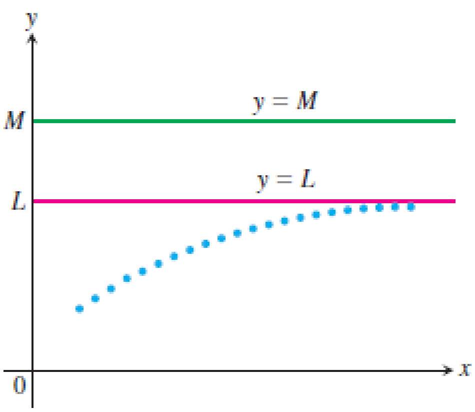
(ბ) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots$ მიმდევრობა არაკლებადია.

(გ) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$ მიმდევრობა არაზრდადია

(დ) 3, 3, 3, . . . , 3, . . . მიმდევრობა არის ერთდროულად არაზრდადიც და არაკლებადიც.

(ე) 1, -1, 1, -1, 1, . . . მიმდევრობა არაა მონოტონური.

თეორემა 6. თუ $\{a_n\}$ მიმდევრობა ერთდროულად მონოტონური და შემოსაზღვრულია, მაშინ ის კრებადია.



დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\{a_n\}$ არაკლებადია და L არის მისი უმცირესი ზედა საზღვარი. xy - სიბრტყეზე ავაგოთ წერტილები $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \cdots, (n, a_n), \cdots$. თუ მიმდევრობის ზედა საზღვარია M, მაშინ ყველა ეს წერტილი აღმოჩნდება $y = M$ წრფის ქვემოთ (ფიგ. 10.7) . $y = L$ წრფე ამ წრფეებიდან ყველაზე ქვემოთაა. (n, a_n) წერტილებიდან არცერთი არ ძევს $y = L$ წრფის ზემოთ, მაგრამ ზოგიერთები ძევს $y = L - \varepsilon$ წრფის ზემოთ, $\varepsilon > 0$. მიმდევრობა კრებადია L-საკენ, რადგან

(ა) თუ $n \geq N$, მაშინ $a_n \leq L$ და

(ბ) ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის არსებობს ერთი მაინც N ისეთი, რომ $a_N > L - \varepsilon$.

რადგან $\{a_n\}$ არაკლებადია, ამიტომ $a_n \geq a_N > L - \varepsilon$, როცა $n > N$.

ამრიგად , დაწყებული N -ური რიცხვიდან, მიმდევრობის წევრები დაშორებულია L -დან არაუმეტეს ε მანძილისა. ეს კი ნიშნავს, რომ $\{a_n\}$-ის ზღვარია L .

არაზრდადი მიმდევრობის შემთხვევაში თეორემა ანალოგიურად მტკიცდება.

სავარჯიშოები 10.1

1--6 სავარჯიშოებში ზოგადი წევრის მიხედვით იპოვეთ მიმდევრობის პირველი ოთხი წევრი

1. $a_n = \dfrac{1-n}{n^2}$

2. $a_n = \dfrac{1}{n!}$

3. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

4. $a_n = 2 + (-1)^n$

5. $a_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}}$

6. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

27--52 სავარჯიშოებში დაადგინეთ, რომელია კრებადი მიმდევრობა და გამოთვალეთ ზღვარი

27. $a_n = 2 + (0.1)^n$

28. $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n}$

29. $a_n = \dfrac{1-2n}{1+2n}$

30. $a_n = \dfrac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$

31. $a_n = \dfrac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$

32. $a_n = \dfrac{n+3}{n^2+5n+6}$

33. $a_n = \dfrac{n^2-2n+1}{n-1}$

34. $a_n = \dfrac{1-n^3}{70-4n^2}$

35. $a_n = 1 + (-1)^n$

36. $a_n = (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

37. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

38. $a_n = \left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right)\left(3 + \dfrac{1}{2^n}\right)$

39. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

40. $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

41. $a_n = \sqrt{\dfrac{2n}{n+1}}$

42. $a_n = \dfrac{1}{(0.9)^n}$

43. $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n}\right)$

44. $a_n = n\pi \cos(n\pi)$

45. $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$

46. $a_n = \dfrac{\sin^2 n}{2^n}$

47. $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

48. $a_n = \dfrac{3^n}{n^3}$

49. $a_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

50. $a_n = \dfrac{\ln n}{\ln 2n}$

51. $a_n = 8^{1/n}$

52. $a_n = (0.03)^{1/n}$

10.2 უსასრულო მწკრივები

უსასრულო მწკრივი წარმოადგენს უსასრულო მიმდევრობის წევრთა ჯამს

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

ამ სექციის მიზანს წარმოადგენს გავიაზროთ, რას წარმოადგენს უსასრულო ჯამი და შევიმუშაოთ მეთოდები ასეთი ჯამების გამოსათვლელად.

განსაზღვრება. ვთქვათ მოცემულია რიცხვთა $\{a_n\}$ მიმდევრობა.

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ სახის გამოსახულებას **უსასრულო მწკრივი** ეწოდება, a_n რიცხვს კი -- მწკრივის n**-ური წევრი**. $\{s_n\}$ მიმდევრობას, რომლის წევრები განსაზღვრულია

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

ტოლობებით, **კერძო ჯამების მიმდევრობა** ეწოდება, s_n რიცხვს კი -- n-ური კერძო ჯამი. თუ კერძო ჯამების მიმდევრობა კრებადია L რიცხვისაკენ, ვიტყვით რომ მწკრივი **კრებადია** და მისი ჯამია L. ამ შემთხვევაში ვწერთ

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = L .$$

თუ კერძო ჯამების მიმდევრობა კრებადი არაა, ვიტყვით, რომ მწკრივი **განშლადია**.

გეომეტრიული მწკრივები

გეომეტრიული მწკრივი ეწოდება

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

სახის მწკრივს, რომელშიც a და r ფიქსირებული რიცხვებია და $a \neq 0$.

გამოვთვალოთ ამ მწკრივის კერძო ჯამი:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

s_n გავამრავლოთ r-ზე.

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

s_n-ს გამოვაკლოთ rs_n . მარჯვენა მხარეში წევრთა უმეტესობა გაბათილდება .

$$s_n(1-r) = a(1-r^n)$$

დავშალოთ მამრავლებად.

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad (r \neq 1).$$

თუ $r \neq 1$, შეგვიძლია ამოვხსნათ s_n.

თუ $|r|<1$, მაშინ $r^n \to 0$ როცა $n \to \infty$ და $s_n \to a/(1-r)$.

თუ $|r|>1$ მაშინ $|r|^n \to \infty$ და მწკრივი განშლადია.

თუ $r=1$, მაშინ n-ური კერძო ჯამი $s_n = na$ და მწკრივი განშლადია, რადგან $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$.

თუ $r=-1$, მაშინ მწკრივი განშლადია, რადგან კერძო ჯამები თანმიმდევრობით ხან 0-ის, ხან a-ს ტოლია.

> თუ $|r|<1$, მაშინ გეომეტრიული მწკრივი $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ კრებადია $a/(1-r)$ რიცხვისაკენ:
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r|<1.$$
>
> თუ $|r| \geq 1$ მაშინ მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 2. მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = 5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \cdots$$

გეომეტრიულია, $a=5, r=-1/4$.

ის კრებადია $\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{5}{1+(1/4)} = 4$ რიცხვისაკენ.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

"ტელესკოპური" მწკრივის ჯამი.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ k -ური კერძო ჯამი. რადგან

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

ამიტომ

$$s_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{k+1}.$$

ცხადია, $s_k \to 1$, როცა $k \to \infty$. ამიტომ მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია 1.

თეორემა 7. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია, რომ $a_n \to 0$.

მაგალითი 7.

(ა) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ განშლადია, რადგან $n^2 \to \infty$

(ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ განშლადია, რადგან $\frac{n+1}{n} \to 1$

(გ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ განშლადია, რადგან $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ არ არსებობს

(დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{2n+5}$ განშლადია, რადგან $\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+5}=-\frac{1}{2}\neq 0.$

კომბინირებული მწკრივები

თუ მოცემული გვაქვს ორი მწკრივი, შეგვიძლია მივიღოთ მათგან ახალი მწკრივი შესაბამისი წევრების შეკრებით, გამოკლებით ან მუდმივზე გამრავლებით.

თეორემა 8. თუ $\sum a_n = A$ და $\sum b_n = B$ კრებადი მწკრივებია, მაშინ

1. $\sum(a_n+b_n)=\sum a_n+\sum b_n = A+B$

2. $\sum(a_n-b_n)=\sum a_n-\sum b_n = A-B$

3. $\sum k a_n = k\sum a_n = kA$ (k ნებისმიერი რიცხვია)

მაგალითი 9. ვიპოვოთ შემდეგი მწკრივების ჯამი.

(ა) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{6^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^{n-1}}=$$

$$==\frac{1}{1-(1/2)}-\frac{1}{1-(1/6)}=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}.$$

(ბ) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{2^n}=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=4\left(\frac{1}{1-(1/2)}\right)=8.$$

წევრების დამატება და გამოკლება

სასრული რაოდენობის წევრების დამატება ან გამოკლება მწკრივის კრებადობას ან განშლადობას არ ცვლის. თუ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ კრებადია, მაშინ ნებისმირი $k>1$-სათვის კრებადი იქნება $\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ მწკრივიც. პირიქით, თუ $\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ კრებადია $k>1$-სათვის, მაშინ კრებადი იქნება $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ მწკრივიც.

სავარჯიშოები 10.2

1--6 სავარჯიშოებში იპოვეთ კერძო ჯამების ფორმულა და კრებადობის შემთხვევაში გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი.

1. $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}+\cdots$

2. $\frac{9}{100}+\frac{9}{100^2}+\frac{9}{100^3}+\cdots+\frac{9}{100^n}+\cdots$

3. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

4. $1-2+4-8+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\cdots$

5. $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$

6. $\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{5}{n(n+1)}+\cdots$

7--14 სავარჯიშოებში გამოწერეთ მწკრივის რამდენიმე საწყისი წევრი. შემდეგ იპოვეთ მწკრივის ჯამი.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

15--18 სავარჯიშოებში დაადგინეთ, კრებადია თუ განშლადი გეომეტრიული მწკრივი. კრებადობის შემთხვევაში იპოვეთ ჯამი.

15. $1 + \left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \cdots$

16. $1 + (-3) + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4 + \cdots$

17. $\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^4 + \left(\frac{1}{8}\right)^5 + \cdots$

18. $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^3 + \left(\frac{-2}{3}\right)^4 + \left(\frac{-2}{3}\right)^5 + \left(\frac{-2}{3}\right)^6 + \cdots$

41--47 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1/n}} - \frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right)$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

10.3 ინტეგრალური ნიშანი

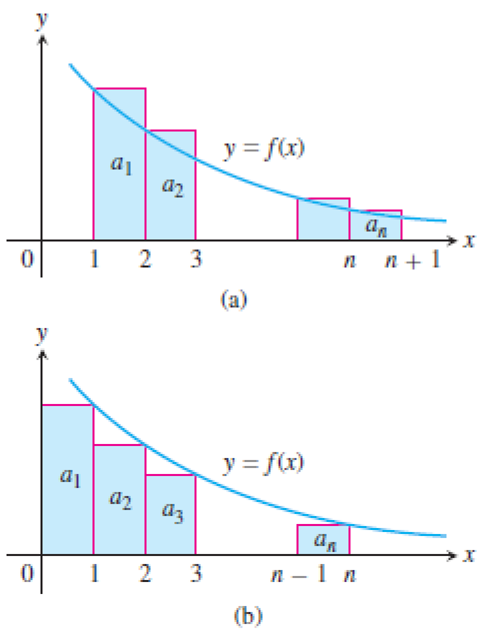
თუ მოცემული გვაქვს მწკრივი, ჩვენ გვსურს ვიცოდეთ კრებადია თუ არა იგი. ამ და მომდევნო ორ სექციაშიც ჩვენ შევისწავლით მწკრივის კრებადობის ნიშნებს.

არაკლებადი კერძო ჯამები

ვთქვათ, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ უსასრულო მწკრივია და $a_n \geq 0$ ნებისმიერი n-სათვის. მაშინ $s_{n+1} = s_n + a_n$ ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \cdots$. რადგან კერძო ჯამები ქმნიან არაკლებად მიმდევრობას, ამიტომ მონოტონური მიმდევრობის თეორემის საფუძველზე მართებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 6-ის შედეგი. არაუარყოფით წევრებიანი მწკრივი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი კერძო ჯამების მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზემოდან.

თეორემა 9 (კოშის ინტეგრალური ნიშანი). ვთქვათ $\{a_n\}$ არის დადებით წევრებიანი მიმდევრობა და $a_n = f(n)$, სადაც $f(x)$ უწყვეტი, დადებითი, კლებადი ფუნქციაა როცა $x \geq N$ (N დადებითი მთელია) . მაშინ $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ და ინტეგრალი $\int_N^{\infty} f(x)dx$ ერთდროულად ორივე კრებადია ან ორივე განშლადია.



ფიგურა 10.11

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ $N=1$ შემთხვევისათვის. შევნიშნოთ, რომ ფიგურა 10.11a -ზე ნაჩვენები მართკუთხედების ფართობებია $a_1, a_2, \cdots, a_n$ რომლებიც ერთობლივად მოიცავენ ფართობს მრუდის ქვეშ $x=1$ -დან $x=n+1$-მდე. მაშასადამე,

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n .$$

ფიგურა 10.11b-ზე ნაჩვენები მართკუთხედები მარცხნივაა წანაცვლებული და ვხედავთ, რომ

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)dx ,$$

საიდანაც

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx .$$

ამ შედეგების გაერთიანება გვაძლევს

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \le a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)dx . \qquad (*)$$

ეს უტოლობები მართებულია ნებისმიერი n-სათვის და ასევეა როცა $n \to \infty$.

თუ $\int_1^\infty f(x)dx$ სასრულია, მაშინ (*) -ის მარჯვენა მხარე გვიჩვენებს, რომ $\sum a_n$ მწკრივი კრებადია. თუ $\int_1^\infty f(x)dx$ უსასრულოა, მაშინ (*) -ის მარცხენა მხარე გვიჩვენებს, რომ $\sum a_n$ მწკრივი განშლადია. ამრიგად, მწკრივი და ინტეგრალი ორივე სასრულია ან ორივე უსასრულო.

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ რომ ***p*- მწკრივი**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

($p > 0$ ნამდვილი რიცხვია) კრებადია როცა $p > 1$ და განშლადია როცა $0 < p \le 1$.

დამტკიცება. $f(x) = 1/x^p$ დადებითი კლებადი ფუნქციაა. სექცია 8.4-ის მაგალით 3-ში ნაჩვენებია, რომ $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ კრებადია, როცა $p > 1$ და განშლადია , როცა $p \le 1$. ამიტომ დასამტკიცებელი დებულება მართებულია ინტეგრალური ნიშნის საფუძველზე.

$p = 1$ შემთხვევაში გვაქვს ე.წ. **ჰარმონიული მწკრივი,** რომელიც განშლადია:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

ცდომილების შეფასება

თუ მწკრივის კრებადობა დადგენილი გვაქვს ინტეგრალური ნიშნის საფუძველზე, შეგვიძლია შევაფასოთ s_n კერძო ჯამით მწკრივის S ჯამის აპროქსიმაციის ცდომილება. ანუ, ჩვენ გვსურს შევაფასოთ

$$R_n = S - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \quad .$$

ფიგურა 10.11a -ს თანახმად

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \ge \int_{n+1}^\infty f(x)dx .$$

ასევე, ფიგურა 10.11b -ს საფუძველზე დავასკვნით

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \le \int_n^\infty f(x)dx .$$

ნაშთის საზღვრები ინტეგრალურ ნიშანში

ვთქვათ $\{a_k\}$ დადებით წევრებიანი მიმდევრობაა და $a_k = f(k)$, სადაც $f(x)$ უწყვეტი დადებითი კლებადი ფუნქციაა როცა $x \geq n$. თუ $\sum a_n = S$, მაშინ $R_n = S - s_n$ ნაშთისათვის მართებულია შეფასება

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx . \qquad (1)$$

თუ (1) უტოლობის ყოველ მხარეში დავამატებთ s_n კერძო ჯამს, მივიღებთ

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq S \leq s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx . \qquad (2)$$

მაგალითი 5. შევაფასოთ $\sum (1/k^2)$ მწკრივის ჯამი (2) უტოლობის გამოყენებით, თუ $n = 10$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_n^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

ამ შედეგის და (2)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$s_{10} + \frac{1}{11} \leq S \leq s_{10} + \frac{1}{10}.$$

თუ გამოვთვლით $s_{10} = 1 + (1/4) + (1/9) + (1/16) + \cdots + (1/100) \approx 1.54977$, ბოლო უტოლობიდან ვპოულობთ

$1.64068 \leq S \leq 1.64997$.

მწკრივის ჯამის მიახლოებით მნიშვნელობად ავიღოთ ინტერვალის შუა წერტილი. მაშინ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx 1.6453 .$$

ცდომილება არ აღემატება ინტერვალის სიგრძის ნახევარს, ე.ი. ≤ 0.005.

სავარჯიშოები 10.3

1--10 სავარჯიშოებში ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით დაადგინეთ, კრებადია თუ განშლადი მწკრივი

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.2}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 4}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n^2)}{n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n/3}}$

10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - 4}{n^2 - 2n + 1}$

11-- 34 სავარჯიშოებში დაადგინეთ, კრებადია თუ განშლადი მწკრივი

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n + 1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n + 1}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{n}$

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n + 3}$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n + 1}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n - 1}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n + 1}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)}$

27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$

31. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(1/n)}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n - 1}}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + \ln^2 n)}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$

10.4 შედარების ნიშანი

ჩვენ ვნახეთ, როგორ უნდა დავადგინოთ გეომეტრიული მწკრივის, p -მწკრივის და ზოგიერთი სხვა მწკრივის კრებადობა. მწკრივის კრებადობის დადგენა შეიძლება აგრეთვე მისი შედარებით სხვა მწკრივთან, რომლის კრებადობა ცნობილია.

თეორემა 10-შედარების ნიშანი. ვთქვათ $\sum a_n$, $\sum c_n$ და $\sum d_n$ არაუარყოფით წევრებიანი მწკრივებია, ამასთან არსებობს ისეთი მთელი N რიცხვი, რომ ნებისმიერი $n > N$ -სათვის

$$d_n \le a_n \le c_n \ .$$

(ა) თუ $\sum c_n$ კრებადია, მაშინ კრებადია $\sum a_n$ მწკრივიც.

(ბ) თუ $\sum d_n$ განშლადია, მაშინ განშლადია $\sum a_n$ მწკრივიც.

მაგალითი 1.

(ა) მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ განშლადია, რადგან მისი n -ური წევრი მეტია ჰარმონიული მწკრივის n -ური წევრზე $\frac{5}{5n-1} > \frac{1}{n}$, ჰარმონიული მწკრივი კი განშლადია.

(ბ) მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ კრებადია, რადგან მისი n -ური წევრი ნაკლებია კრებადი გეომეტრიული მწკრივის n -ური წევრზე $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$.

სავარჯიშოები 10.4

1--8 სავარჯიშოებში დაადგინეთ, მწკრივი კრებადი არის თუ განშლადი.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 30}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n^4 + 2}$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + 2}{n^2 - n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n + 4}{n^4 + 4}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n^2 + 3}}$

10.5 დალამბერის ნიშანი. კოშის რადიკალური ნიშანი

თეორემა 12 - დალამბერის ნიშანი.

ვთქვათ $\sum a_n$ დადებით წევრებიანი მწკრივია და $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$.

მაშინ: (ა) მწკრივი კრებადია, თუ $\rho<1$;

(ბ) მწკრივი განშლადია, თუ $\rho>1$ ან $\rho=\infty$;

(გ) თუ $\rho=1$, გაურკვეველი შემთხვევაა - შეიძლება მწკრივი იყოს განშლადი, ან კრებადი.

მაგალითი 1. გამოვიკვლიოთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა.

(ა) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}$ (ბ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!n!}$ (გ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!n!}{(2n)!}$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ დალამბერის ნიშანი.

(ა) $$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2^{n+1}+5)/3^{n+1}}{(2^n+5)/3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{n+1}+5}{2^n+5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2+5\cdot 2^{-n}}{1+5\cdot 2^{-n}}\to\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{2}{3}.$$

მწკრივი კრებადია, რადგან $\rho=2/3<1$.

(ბ) თუ $a_n=\frac{(2n)!}{n!n!}$, მაშინ $a_{n+1}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$ და

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}=$$
$$=\frac{4n+2}{n+1}\to 4$$

მწკრივი განშლადია, რადგან $\rho=4>1$.

(გ) თუ $a_n=4^n n!n!/(2n)!$, მაშინ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n! n!} =$$

$$= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \to 1.$$

რადგან $\rho = 1$, ამიტომ დალამბერის ნიშნით ვერ განვსაზღვრით კრებადობას. შევნიშნოთ, რომ $a_{n+1}/a_n = (2n+2)/(2n+1) > 1$. $\Rightarrow$ მწკრივის წევრები ზრდადია, და რადგან $a_1 = 2$, ზოგადი წევრი არ მიისწრფის ნულისკენ. მწკრივი განშლადია.

თეორემა 13-კოშის რადიკალური ნიშანი. ვთქვათ $\sum a_n$ მწკრივის წევრები $a_n \geq 0$, როცა $n \geq N$ და

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho .$$

მაშინ : (ა) მწკრივი კრებადია, თუ $\rho < 1$;

(ბ) მწკრივი განშლადია, თუ $\rho > 1$ ან $\rho = \infty$;

(გ) თუ $\rho = 1$, გაურკვეველი შემთხვევაა.

მაგალითი 3. ჩამოთვლილთაგან რომელი მწკრივია კრებადი და რომელი განშლადი?

(ა) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (ბ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ (გ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ კოშის რადიკალური ნიშანი.

(ა) კრებადია, რადგან $\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \to \frac{1}{2} < 1.$

(ბ) განშლადია, რადგან $\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^3} \to \frac{2}{1^3} > 1$.

(გ) კრებადია, რადგან $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)^n} = \frac{1}{1+n} \to 0 < 1.$

სავარჯიშოები 10.5

1--8 სავარჯიშოებში გამოიყენეთ დალამბერის ნიშანი და დაადგინეთ მწკრივის კრებადობა ან განშლადობა

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n3^{n-1}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+2)!}{n!\, 3^{2n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{(2n+3)\ln(n+1)}$

9--14 სავარჯიშოებში გამოიყენეთ კოშის ნიშანი და გამოიკვლიეთ მწკრივის კრებადობა

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(e^2+\frac{1}{n}\right)\right)^{n+1}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(3+(1/n))^{2n}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

17--30 სავარჯიშოებში გამოიკვლიეთ მწკრივის კრებადობა

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^{-n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{1.25^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

10.6 ნიშანმონაცვლე მწკრივები. აბსოლუტური და პირობითი კრებადობა

მწკრივს, რომლის წევრები მონაცვლეობით განსხვავებული ნიშნისაა, **ნიშანმონაცვლე მწკრივი** ეწოდება.

> თეორემა 14_ ლეიბნიცის ნიშანი. ნიშანმონაცვლე მწკრივი
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$
>
> კრებადია, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:
>
> 1. $u_n > 0, \quad n \geq 1;$
> 2. $u_n \geq u_{n+1}, \quad n \geq 1;$
> 3. $u_n \to 0$.

დამტკიცება. ლუწ ინდექსიანი კერძო ჯამი ჩავწეროთ ასე

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \ , \tag{1}$$

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \ . \tag{2}$$

(1)-დან ჩანს, რომ $s_{2m+2} \geq s_{2m} \geq 0$. (2)-დან კი გამომდინარეობს $s_{2m} \leq u_1$. ამრიგად, ლუწ ინდექსიანი კერწო ჯამების მიმდევრობა $\{s_{2m}\}$ მონოტონურია და შემოსაზღვრული, ამიტომ არსებობს მისი ზღვარი

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = L. \tag{3}$$

გარდა ამისა, $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$. ამიტომ

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(s_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = L + 0 \ ,$$

ანუ

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = L. \tag{4}$$

(3),(4) -დან ვღებულობთ $\lim_{n\to\infty} s_n = L$.

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. ნიშანმონაცვლე ჰარმონიული მწკრივი

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

აკმაყოფილებს თეორემა 14-ის პირობებს. ამიტომ ის კრებადია.

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ $\sum a_n$ მწკრივი **აბსოლუტურად კრებადია,** თუ კრებადია შესაბამისი აბსოლუტური მნიშვნელობებისაგან შედგენილი მწკრივი $\sum |a_n|$

მაგალითი. ნიშანმონაცვლე მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$$

აბსოლუტურად კრებადია, რადგან კრებადია შესაბამისი აბსოლუტური მნიშვნელობებისაგან შედგენილი მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots.$$

ნიშანმონაცვლე ჰარმონიული მწკრივი არაა აბსოლუტურად კრებადი, რადგან შესაბამისი აბსოლუტური მნიშვნელობების მწკრივი (განშლადი) ჰარმონიული მწკრივია.

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ მწკრივი **პირობითად კრებადია,** თუ ის კრებადია, მაგრამ არაა აბსოლუტურად კრებადი.

ნიშანმონაცვლე ჰარმონიული მწკრივი პირობითად კრებადია.

თეორემა 16 _ აბსოლუტური კრებადობის ნიშანი.

თუ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ კრებადია, მაშინ კრებადია $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ მწკრივიც.

მაგალითი 4. ამ მაგალითში მოცემულია ორი მწკრივი, რომლებიც აბსოლუტურადაა კრებადი.

(ა) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$ მწკრივისათვის, კრებადია შესაბამისი აბსოლუტური მნიშვნელობებისგან შედგენილი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots.$$

ამიტომ თავდაპირველი მწკრივი კრებადია.

(ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{4}+\frac{\sin 3}{9}+\cdots$ მწკრივისათვის, რომელიც შეიცავს დადებით და უარყოფით წევრებს, შესაბამისი აბსოლუტური მნიშვნელობებისგან შედგენილი მწკრივია

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}=\frac{|\sin 1|}{1}+\frac{|\sin 2|}{4}+\frac{|\sin 3|}{9}+\cdots$$

ეს მწკრივი კრებადია $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ მწკრივთან შედარების მიხედვით, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $|\sin n|\le 1$. მაშასადამე , თავდაპირველი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია . ამიტომ ის კრებადიც არის.

მაგალითი 5. თუ p დადებითი მუდმივია, მაშინ $\{1/n^p\}$ მიმდევრობა კლებადია და მისი ზღვარია 0. ამიტომ კრებადია ნიშანმონაცვლე p - მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots, \quad p>0.$$

თუ $p>1$, მაშინ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. თუ $0<p\le 1$, მაშინ მწკრივი კრებადია პირობით.

(p =1/2). პირობითად კრებადია : $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$.

(p =3/2). აბსოლუტურად კრებადია: $1-\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}-\frac{1}{4^{3/2}}+\cdots$.

სავარჯიშოები 10.6

1--14 სავარჯიშოებში დაადგინეთ, კრებადია თუ არა ნიშანმონაცვლე მწკრივი

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{3/2}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n3^n}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4}{(\ln n)^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2+1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+5}{n^2+4}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{10^n}{(n+1)!}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{10}\right)^n$

10. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

15--40 სავარჯიშოებში დაადგინეთ, რომელი მწკრივია აბსოლუტურად კრებადი, რომელია კრებადი, რომელია განშლადი

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(0.1)^n$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.1)^n}{n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+3}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin n}{n^2}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[n]{10}\right)$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n^2(2/3)^n$

28. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n-\ln n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^{-n}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n}{n!}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)^n}{(2n)^n}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n)!}{2^n n! n}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$

10.7 ხარისხოვანი მწკრივები

ახლა, როცა ჩვენ შეგვიძლია შევამოწმოთ რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობების კრებადობა, შევისწავლით ჯამებს, რომლებიც "უსასრულო პოლინომებს" წააგავს. ასეთ ჯამებს ხარისხოვანი მწკრივები ეწოდება. პოლინომების მსგავსად, ხარისხოვანი მწკრივები შეიძლება შევკრიბოთ, გამოვაკლოთ, გავამრავლოთ, გავაწარმოოთ და ვაინტეგროთ.

ხარისხოვანი მწკრივები და კრებადობა

განსაზღვრება **ხარისხოვანი მწკრივი** ცენტრით $x=0$ წერტილში ეწოდება

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{1}$$

სახის მწკრივს .

ხარისხოვანი მწკრივი ცენტრით $x=a$ წერტილში ეწოდება

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots + c_n (x-a)^n + \cdots \tag{2}$$

სახის მწკრივს რომელშიც **ცენტრი** a და **კოეფიციენტები** $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ მუდმივი რიცხვებია.

მაგალითი 1. თუ (1) ტოლობაში ყველა კოეფიციენტს 1-ის ტოლად ავიღებთ, გვექნება გეომეტრიული ხარისხოვანი მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \ .$$

ესაა გეომეტრიული მწკრივი, რომლის პირველი წევრია 1, მნიშვნელი კი x. ის კრებადია $1/(1-x)$ -საკენ, როცა $|x|<1$. ამ ფაქტს ასეთნაირად ჩავწერთ

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad -1 < x < 1 \ . \tag{3}$$

მაგალითი 2. ხარისხოვანი მწკრივი

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots \tag{4}$$

შეესაბამება (2) ტოლობას, თუ ავიღებთ

$$a = 2,\ c_0 = 1,\ c_1 = -10/2,\ c_2 = 1/4, \ldots, c_n = (-1/2)^n \ .$$

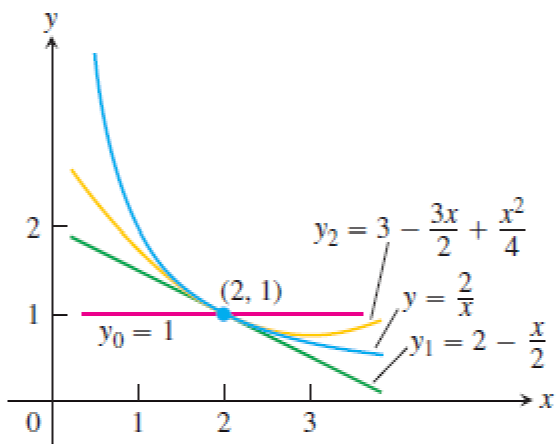
(4) გეომეტრიული მწკრივია, რომლის პირველი წევრია 1, მნიშვნელი კი $r=-(x-2)/2$. იგი კრებადია, როცა $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$ ანუ $0<x<4$. (4) მწკრივის ჯამია

$$\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{2}{x},$$

მაშასადამე

$$\frac{2}{x}=1-\frac{(x-2)}{2}+\frac{(x-2)^2}{4}-\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-2)^n+\cdots,\quad 0<x<4$$

(4) მწკრივი გვაძლევს $f(x)=2/x$ ფუნქციის კარგ პოლინომურ მიახლოებებს 2-თან ახლო x -ის მნიშვნელობებისათვის:



ფიგურა 10.15

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=1-\frac{1}{2}(x-2)=2-\frac{x}{2}$$

$$P_2(x)=1-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)^2=3-\frac{3x}{2}+\frac{x^2}{4},$$

და ა.შ. (ფიგურა 10.15)

შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს, როგორ გამოვიკვლიოთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობა დალამბერის ნიშნის გამოყენებით.

მაგალითი 3. x -ის რა მნიშვნელობებისთვისაა შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივი კრებადი?

(ა) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$

(ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$

(გ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

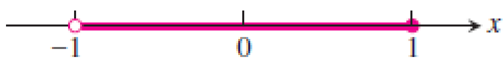
(დ) $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n=1+x+2!x^2+3!x^3+\cdots$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ დალამბერის ნიშანი $\sum|u_n|$ მწკრივისათვის, სადაც u_n არის

შეკითხვის ხარისხოვანი მწკრივის n-ური წევრი. (გავიხსენოთ, რომ დალამბერის ნიშანი არაუარყოფით წევრებიანი მწკრივებისთვის გამოიყენება).

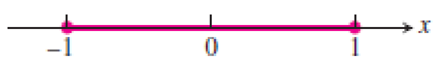
(ა) $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \to |x|.$$

მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია როცა $|x|<1$. ის განშლადია, როცა $|x|>1$, რადგან n-ური წევრის ზღვარი ვერ გახდება 0. როცა $x=1$, გვექნება ნიშანმონაცვლე ჰარმონიული მწკრივი $1-1/2+1/3-1/4+\cdots$, რომელიც კრებადია. როცა $x=-1$, მიიღება ნიშანშეცვლილი ჰარმონიული მწკრივი $-1-1/2-1/3-1/4+\cdots$, რომელიც განშლადია. მწკრივი (ა) კრებადია, როცა $-1<x\le 1$, სხვა შემთხვევაში კი განშლადია.



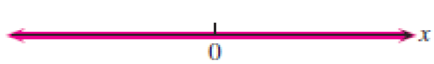
(ბ) $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| = \frac{2n-1}{2n+1}x^2 \to x^2.$$

მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როცა $x^2<1$. ის განშლადია, როცა $x^2>1$ რადგან n-ური წევრის ზღვარი ნული ვერ გახდება. როცა $x=1$, გვექნება $1-1/3+1/5-1/7+\cdots$, რომელიც კრებადია ნიშანმონაცვლე მწკრივის თეორემის თანახმად. მწკრივი კრებადია აგრეთვე $x=-1$ შემთხვევაში, რადგან კვლავ ნიშანმონაცვლე მწკრივი გვექნება. ამრიგად, მწკრივი (ბ) კრებადია როცა $-1<x\le 1$. სხვა შემთხვევაში განშლადია.



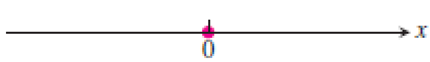
(გ) $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$$ ნებისმიერი x-სათვის.

მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ნებისმიერი x-სათვის.



(დ) $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \to \infty$$ გარდა $x=0$ შემთხვევისა.

მწკრივი განშლადია ნებისმიერი x-ისათვის, გარდა $x=0$ მნიშვნელობისა.



თეორემა 18_აბელის I თეორემა. თუ ხარისხოვანი მწკრივი $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ კრებადია რომელიმე $x = c \neq 0$-სათვის, მაშინ ის აბსოლუტურად კრებადია ყველა იმ x-ისათვის, რომელთათვისაც $|x| < |c|$. თუ მწკრივი განშლადია რომელიმე $x = d$ -სათვის, მაშინ ის განშლადია ყველა იმ x -სათვის, რომელთათვისაც $|x| > |d|$.

თეორემა 18_ის შედეგი. $\sum c_n (x-a)^n$ ხარისხოვანი მწკრივისათვის კრებადობა შეიძლება აღიწეროს შემდეგი სამი შემთხვევიდან ერთ-ერთით:

1. არსებობს დადებითი რიცხვი R ისეთი, რომ მწკრივი განშლადია როცა $|x-a| > R$, მაგრამ აბსოლუტურად კრებადია თუ $|x-a| < R$. მწკრივი შეიძლება იყოს ან არ იყოს კრებადი $x = a - R$ და $x = a + R$ ბოლო წერტილებიდან რომლიმეზე.

2.მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ყოველი x -სათვის ($R = \infty$).

3. მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია როცა $x = a$ და განშლადია ყველა სხვა მნიშვნელობისათვის ($R = 0$)

R რიცხვს ხარისხოვანი მწკრივის **კრებადობის რადიუსი** ეწოდება. R რადიუსიან ინტერვალს ცენტრით a წერტილში **კრებადობის ინტერვალს** უწოდებენ.

როგორ შევამოწმოთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობა

1. გამოვიყენოთ დალამბერის ნიშანი (ან რადიკალური ნიშანი) იმ ინტერვალის მოსაძებნად, სადაც მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. ჩვეულებრივ, ეს არის ღია ინტერვალი $|x-a| < R$ ანუ $a - R < x < a + R$.
2. თუ აბსოლუტური კრებადობის ინტერვალი სასრულია, შევამოწმოთ კრებადობა ან განშლადობა თითოეულ ბოლოზე (როგორც მაგალით 3(ა), 3(ბ) -ში). გამოვიყენოთ შედარების ნიშანი, ინტეგრალური ნიშანი ან ნიშანმონაცვლე მწკრივის ნიშანი.
3. თუ აბსოლუტური კრებადობის ინტერვალია $a - R < x < a + R$, მწკრივი განშლადია $|x-a| > R$ შემთხვევაში რადგან n-ური წევრი ვერ მიუახლოვდება 0-ს x-ის ამ მნიშვნელობებისათვის.

მოქმედებები ხარისხოვან მწკრივებზე

თეორმა 19_ხარისხოვანი მწკრივების გადამრავლება. თუ $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ და $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ აბსოლუტურად კრებადებია როცა $|x|<R$, და

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

მაშინ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ აბსოლუტურად კრებადია $A(x)B(x)$ საკენ როცა $|x|<R$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

ორი მწკრივის ნამრავლის ზოგადი წვრის გამოთვლა შეიძლება ძალზე დამქანცველი აღმოჩნდეს და წევრები შეიძლება ძალზე დიდი იყოს. შემდეგი გამოთვლები გვიჩვენებს როგორ მივიღოთ პრაქტიკულად ნამრავლის რამოდენიმე საწყისი წევრი:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=$$

$$=(1+x+x^2+\cdots)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)=$$

$$=\underbrace{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)}_{1-\text{ზე}}+\underbrace{\left(x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\cdots\right)}_{x-\text{ზე}}+\underbrace{\left(x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}-\cdots\right)}_{x^2-\text{ზე}}+\cdots=$$

$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{3}-\frac{x^4}{6}\cdots$$

თეორემა 20 ვთქვათ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ აბსოლუტურად კრებადია, როცა $|x|<R$. მაშინ ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის აბსოლუტურად კრებადი იქნება $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(f(x)\right)^n$ მწკრივიც $|f(x)|<R$ სიმრავლეზე.

$1/(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია , როცა $|x|<1$. ამიტომ თეორემა 20-ის თანახმად აბსოლუტურად კრებადი იქნება $1/(1-4x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(4x^2)^n$ მწკრივიც, როცა $|4x^2|<1$ ანუ $|x|<1/2$.

თეორემა 21_წევრ -წევრად გაწარმოება. ვთქვათ $\sum c_n (x-a)^n$ მწკრივის კრებადობის რადიუსია $R>0$ და

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \qquad a-R<x<a+R.$$

ამ f ფუნქციას აქვს ყველა რიგის წარმოებული, რომლებიც მიიღება თავდაპირველი მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოებით:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x-a)^{n-1},$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n (x-a)^{n-2},$$

და ა. შ. გაწარმოებით მიღებული თითოეული ეს მწკრივი კრებადია $(a-R, a+R)$ ინტერვალის ყოველ წერტილში.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $f'(x)$ და $f''(x)$-ის მწკრივები, თუ

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1<x<1.$$

ამოხსნა.

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad -1<x<1;$$

$$f''(x)=\frac{1}{(1-x)^3}=2+6x+12x^2+\cdots+n(n-1)x^{n-2}+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad -1<x<1$$

თეორემა 21_წევრ -წევრად ინტეგრება. დავუშვათ რომ

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

კრებადია $a-R<x<a+R$ ინტერვალზე. მაშინ მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

კრებადია იმავე ინტერვალზე და

$$\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+C, \qquad a-R<x<a+R.$$

მაგალითი 5. ამოიცანით ფუნქცია

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots,\quad -1\le x\le 1$$

ამოხსნა. გავაწარმოოთ საწყისი მწკრივი

$$f'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+x^n+\cdots,\quad -1<x<1.$$

ეს გეომეტრიული მწკრივია, რომლის პირველი წევრია 1, მნიშვნელი კი $(-x^2)$. ამიტომ

$$f'(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

ვაინტეგროთ ახლა ეს ფუნქცია

$$\int f'(x)dx=\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+C.$$

$f(x)$-ის მწკრივი ნული ხდება $x=0$-ზე, ამიტომ $C=0$. ამრიგად,

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots=\tan^{-1}x,\quad -1<x<1. \qquad (6)$$

შეიძლება ჩვენება, რომ ეს მწკრივი კრებადია $\tan^{-1}x$-საკენ $x=\pm 1$ წერტილებშიც.

მაგალითი 6. მწკრივი

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots$$

კრებადია $-1<t<1$ ღია ინტერვალზე. ამიტომ

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots\Big]_0^x=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

ანუ

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\quad -1<x<1.$$

შეიძლება აგრეთვე ჩვენება, რომ მწკრივი კრებადია $x=1$-ზე

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2,$$

თუმცა ეს თეორემით არაა გარანტირებული.

სავარჯიშოები 10.7

1--28 სავარჯიშოებში: (ა) იპოვეთ მწკრივის კრებადობის რადიუსი და კრებადობის ინტერვალი. x-ის რომელი მნიშვნელობისთვისაა მწკრივი კრებადი (ბ) აბსოლუტურად , (გ) პირობითად?

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(4x+1)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+2)^n}{n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}\,3^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{2n}}{n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 3^n}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\sqrt{n+3}}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} (2+(-1)^n)\cdot(x+1)^{n-1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}(x-2)^n}{3n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)x^n$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-4)^n$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n(n+1)(x-1)^n$

10.8 ტეილორის და მაკლორენის მწკრივები

ვთქვათ $f(x)$ წარმოადგენს ხარისხოვანი მწკრივის ჯამს

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots,$$

რომლის კრებადობის რადიუსი დადებითი რიცხვია. კრებადობის ინტერვალზე მისი წევრ-წევრა გაწარმოებებით გვექნება

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\cdots+na_n(x-a)^{n-1}+\cdots,$$

$$f''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+3\cdot 4a_4(x-a)^2+\cdots+(n-1)\cdot na_n(x-a)^{n-2}+\cdots,$$

$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a)+3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2+\cdots,$$

და n- ური წარმოებულისთვის $f^{(n)}(x)=n!a_n+$ შესაკრებები, რომელთაც თანამამრავლე-ბად აქვთ $(x-a)$-ს ხარისხები.

რადგან ეს ტოლობები მართებულია $x=a$ წერტილში, გვექნება

$$f'(a)=a_1,\ f''(a)=1\cdot 2a_2,\quad f'''(a)=1\cdot 2\cdot 3a_3,\quad \ldots\quad f^{(n)}(a)=n!a_n\ .$$

მაშასადამე, თუკი $f(x)$ ფუნქციის წარმოდგენა შეიძლება ზემოთ აღნიშნული ხარისხოვანი მწკრივის სახით, მისი კოეფიციენტები უნდა გამოითვლებოდეს ფორმულით

$$a_n=f^{(n)}(a)/n!,$$

მწკრივს კი ექნება სახე:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots. \qquad (1)$$

განსაზღვრება ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ყველა რიგის წარმოებული a შიგა წერტილის შემცველ რაიმე ინტერვალზე . მაშინ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

მწკრივს ეწოდება $f(x)$ **ფუნქციის ტეილორის მწკრივი** $x=a$ **წერტილში.**

$f(x)$ **ფუნქციის მაკლორენის მწკრივი** ეწოდება ტეილორის მწკრივს $x=0$ წერტილში:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $f(x)=1/x$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი $a=2$ წერტილში. ვიპოვოთ $1/x$-საკენ კრებადობის შუალედი.

ამოხსნა. განვსაზღვროთ მწკრივის კოეფიციენტები .

$$f(x)=x^{-1},\quad f'(x)=-x^{-2},\quad f''(x)=2!x^{-3},\quad \cdots,\quad f^{(n)}(x)=(-1)^n n!x^{-(n+1)},$$

საიდანაც

$$f(2)=\frac{1}{2},\quad f'(2)=-\frac{1}{2^2},\quad \frac{f''(2)}{2!}=\frac{1}{2^3},\quad \cdots,\quad \frac{f^{(n)}(2)}{n!}=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

ტეილორის მწკრივია

$$f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\cdots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n}.$$

ეს არის გეომეტრიული მწკრივი, რომლის პირველი წევრია $1/2$, მნიშვნელი კი $r=-(x-2)/2$. იგი აბსოლუტურად კრებადია ,როცა $|x-2|<2$ და მისი ჯამია

$$\frac{1/2}{1+(x-2)/2}=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{x}.$$

ამ მაგალითში $f(x)=1/x$-ით $a=2$ -ში წარმოქმნილი მწკრივი იკრიბება $1/x$-საკენ, როცა $|x-2|<2$ ანუ $0<x<4$.

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის შემცველ რაიმე ღია შუალედში, და ამ შუალედში აქვს k რიგის წარმოებულები ($k=1,2,\cdots,N$). მაშინ ნებისმიერი მთელი n რიცხვისათვის 0-დან N -მდე, $f(x)$ ფუნქციის **n რიგის ტეილორის მრავალწევრი** ეწოდება

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

მრავალწევრს.

ჩვენ ტეილორის მრავალწევრს ვუწოდეთ n *რიგის* და არა n *ხარისხის*, რადგან $f^{(n)}(a)$ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. მაგალითად, $f(x)=\cos x$ -ის პირველი ორი მრავალწევრი $x=0$ წერტილში არის $P_0(x)=1$ და $P_1(x)=1$. ვხედავთ, რომ პირველი რიგის რავალწევრის ხარისხი ამ მაგალითში არის ნული და არა ერთი.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $f(x)=e^x$ -ის ტეილორის მწკრივი და ტეილორის მრავალწევრი $x=0$ წერტილში.

ამოხსნა. რადგან $f^{(n)}(x)=e^x$ და $f^{(n)}(0)=1$ ნებისმიერი $n=1,2,3,\cdots$ -სათვის, ტეილორის მწკრივი იქნება

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=$$
$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

ეს e^x -ის მაკლორენის მწკრივიცაა. მომდევნო სექციაში ნაჩვენები იქნება, რომ ეს მწკრივი ნებისმიერი x -სათვის კრებადია e^x -საკენ.

n რიგის ტეილორის მრავალწევრი $x=0$ -ში არის

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $f(x)=\cos x$-ის ტეილორის მწკრივი და ტეილორის მრავალწევრი $x=0$ წერტილში.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\begin{array}{llll} f(x)= & \cos x & f'(x)= & -\sin x \\ f''(x)= & -\cos x & f'''(x)= & \sin x \\ & \vdots & & \vdots \\ f^{(2n)}(x) = & (-1)^n\cos x & f^{(2n+1)}(x) = & (-1)^{n+1}\sin x. \end{array}$$

ამიტომ

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

ტეილორის მწკრივი იქნება

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=$$

$$=1+0\cdot x-\frac{x^2}{2!}+0\cdot x^3+\frac{x^4}{4!}\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

ეს $\cos x$ -ის მაკლორენის მწკრივიცაა. როგორც ვხედავთ, მწკრივში მხოლოდ x -ის ლუწი ხარისხებია. ეს თანხმობაშია ფაქტთან, რომ კოსინუს ფუნქცია ლუწია.

რადგან $f^{(2n+1)}(0)=0,$ ამიტომ $2n$ და $2n+1$ რიგის მრავალწევრები იდენტურია:

$$P_{2n}(x)=P_{2n+1}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

მაგალითი 4. შეიძლება ჩვენება (თუმცა ეს არაა იოლი), რომ

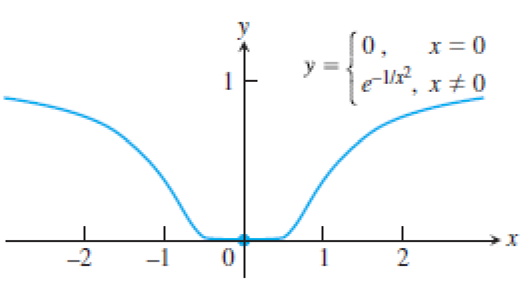
$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ e^{-1/x}, & x\neq 0\end{cases}$$

ფუნქციას (ფიგურა 10.19) აქვს ყველა რიგის წარმოებული $x=0$ -ში და $f^{(n)}(0)=0$ ნებისმიერი n -სათვის. ეს ნიშნავს, რომ f -ის ტეილორის მწკრივი $x=0$ წერტილში არის

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=$$

$$=0+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3+\cdots+0\cdot x^n+\cdots=$$

$$=0+0+0+\cdots+0+\cdots.$$



ფიგურა 10.19

მწკრივი კრებადია ნებისმიერი $x=0$ -სათვის (მისი ჯამია 0), მაგრამ $f(x)$ -საკენ იკრიბება მხოლოდ $x=0$ წერტილში. მაშასადამე, $f(x)$ -ის ტეილორის მწკრივი ამ მაგალითში თვითონ $f(x)$ -ის ტოლი არაა .

სავარჯიშოები 10.8

1--10 სავარჯიშოებში იპოვეთ მოცემული ფუნქციის 0,1,2 და 3 რიგის ტეილორის მრავალწევრები a წერტილში.

1. $f(x) = e^{2x}, \quad a = 0$
2. $f(x) = \sin x, \quad a = 0$
3. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$
4. $f(x) = \ln(1 + x), \quad a = 0$
5. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$
6. $f(x) = 1/(x + 2), \quad a = 0$
7. $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/4$
8. $f(x) = \tan x, \quad a = \pi/4$
9. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$
10. $f(x) = \sqrt{1 - x}, \quad a = 0$

11--22 სავარჯიშოებში იპოვეთ ფუნქციათა ტეილორის მწკრივები

11. e^{-x}
12. xe^{x}
13. $\dfrac{1}{1 + x}$
14. $\dfrac{2 + x}{1 - x}$
15. $\sin 3x$
16. $\sin \dfrac{x}{2}$
17. $7\cos(-x)$
18. $5\cos \pi x$
19. $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
20. $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$
21. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$
22. $\dfrac{x^2}{x + 1}$

23--32 სავარჯიშოებში იპოვეთ ფუნქციათა ტეილორის და მაკლორენის მწკრივები

23. $f(x) = x^3 - 2x + 4, \quad a = 2$
24. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8, \quad a = 1$
25. $f(x) = x^4 + x^2 + 1, \quad a = -2$
26. $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2, \quad a = -1$
27. $f(x) = 1/x^2, \quad a = 1$
28. $f(x) = 1/(1 - x)^3, \quad a = 0$
29. $f(x) = e^{x}, \quad a = 2$
30. $f(x) = 2^{x}, \quad a = 1$
31. $f(x) = \cos(2x + (\pi/2)), \quad a = \pi/4$
32. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad a = 0$

10.9 ტეილორის მწკრივების კრებადობა

თეორემა 23_ ტეილორის თეორემა. თუ f და მისი პირველი n წარმოებული $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ უწყვეტია ჩაკეტილ $[a,b]$ შუალედზე და $f^{(n)}$ წარმოებადია (a,b) ღია შუალედზე, მაშინ არსებობს ისეთი $c \in (a,b)$, რომ

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

როცა ტეილორის თეორემას ვიყენებთ, ჩვეულებრივ გვჭირდება a იყოს ფიქსირებული და b როგორც დამოუკიდებელი ცვლადი. ამიტომ მოსახერხებელია თეორემის ვარიანტი, სადაც b შეცვლილი იქნება x -ით.

ტეილორის ფორმულა.
თუ f ფუნქციას აქვს ყველა რიგის წარმოებული a წერტილის შემცველ ღია I ინტერვალზე, მაშინ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის და ნებისმიერი $x \in I$ -სათვის

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \quad (1)$$

სადაც

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ რომელიღაც c - სათვის (a,x) შუალედიდან. (2)

(1) ტოლობას **ტეილორის ფორმულა** ეწოდება. $R_n(x)$ ეწოდება f -ის $P_n(x)$ -ით აპროქსიმაციის **ნაშთითი წევრი** I შუალედზე. ცხადია

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \qquad x \in I.$$

ვიტყვით, რომ f -ის ტეილორის მწკრივი კრებადია f -სკენ I -ზე და ჩავწერთ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

თუ ნებისმიერი $x \in I$ -სათვის $R_n(x) \to 0$, როცა $n \to \infty$.

თეორემა 24_ ნაშთის შეფასების თეორემა. თუ არსებობს ისეთი დადებითი M რიცხვი, რომ ყოველი t -სათვის x და a -ს შორის ჩათვლით $|f^{(n+1)}(t)| \le M$, მაშინ

$$|R_n(x)| \le M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

მაგალითი 4. ნაცნობი მწკრივების გამოყენებით ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციების ფურიეს მწკრივების რამდენიმე საწყისი წევრი.

(ა) $\frac{1}{3}(2x + x\cos x)$ (ბ) $e^x \cos x$

ამოხსნა.

$$(ა)\quad \frac{1}{3}(2x + x\cos x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{3\cdot 4!} - \cdots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{72} - \cdots$$

$$(ბ)\quad e^x\cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{2!2!} + \frac{x^5}{2!3!} + \cdots\right)$$

$$+ \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{4!} + \frac{x^6}{2!4!} + \cdots\right) + \cdots$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \cdots$$

მაგალითი . გამოვიყენოთ ნაცნობი მწკრივი და ჩასმის ხერხით ვიპოვოთ $\cos 2x$ -ის ფურიეს მწკრივი.

ამოხსნა.

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \frac{2^6x^6}{6!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}.$$

სავარჯიშოები 10.9

1--6 სავარჯიშოებში გამოვიყენოთ ჩასმა და ვიპოვოთ მაკლორენის მწკრივი.

1. e^{-5x} **2.** $e^{-x/2}$ **3.** $5\sin(-x)$

4. $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ **5.** $\cos 5x^2$ **6.** $\cos\left(x^{2/3}/\sqrt{2}\right)$

11--28 სავარჯიშოებში გამოვიყენოთ მწკრივებზე მოქმედების წესები და ვიპოვოთ მაკლორენის მწკრივი.

11. xe^x **12.** $x^2 \sin x$ **13.** $\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$

14. $\sin x - x + \frac{x^3}{3!}$ **15.** $x \cos \pi x$ **16.** $x^2 \cos(x^2)$

17. $\cos^2 x$ (*Hint:* $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$.)

18. $\sin^2 x$ **19.** $\frac{x^2}{1 - 2x}$ **20.** $x \ln(1 + 2x)$

21. $\frac{1}{(1 - x)^2}$ **22.** $\frac{2}{(1 - x)^3}$ **23.** $x \tan^{-1} x^2$

24. $\sin x \cdot \cos x$ **25.** $e^x + \frac{1}{1 + x}$ **26.** $\cos x - \sin x$

27. $\frac{x}{3} \ln(1 + x^2)$ **28.** $\ln(1 + x) - \ln(1 - x)$

10.10 ბინომური მწკრივი და ტეილორის მწკრივების გამოყენება

$f(x)=(1+x)^m$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი, სადაც m მუდმივია, არის

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k+\cdots \qquad (1)$$

ამ მწკრივს **ბინომური მწკრივი** ეწოდება. იგი კრებადია, თუ $|x|<1$. გამოვიყვანოთ ეს მწკრივი .

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^m\\
f'(x) &= m(1+x)^{m-1}\\
f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}\\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}\\
&\vdots\\
f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}.
\end{aligned}$$

გამოვთვალოთ ესენი $x=0$-ზე და ჩავსვათ ტეილორის მწკრივის ფორმულაში. მიიღება (1).

თუ $m\ge 0$ მთელი რიცხვია, მაშინ მწკრივი წყდება $(m+1)$-ე წევრის შემდეგ, რადგან შემდგომი კოეფიციენტები ნული ხდება.

თუ m არაა დადებითი მთელი ან ნული, მწკრივი უსასრულოა და კრებადია როცა $|x|<1$. მართლაც, ვთქვათ u_k არის x^k -ს შემცველი წევრი. მაშინ დალამბერის ნიშნის გამოყენებით ვხედავთ

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\left|\frac{m-k}{k+1}x\right|\to|x| \quad \text{როცა} \quad k\to\infty.$$

ბინომური მწკრივი

თუ $-1<x<1$, მაშინ $(1+x)^m=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$,

სადაც გამოყენებულია აღნიშვნები $\binom{m}{1}=m$, $\binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2!}$ და

$\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}$ როცა $k\ge 3$.

მაგალითი 1. თუ $m=-1$,

$$\binom{-1}{1}=-1, \quad \binom{-1}{2}=\frac{-1\cdot(-2)}{2!}=1,$$

და

$$\binom{-1}{k}=\frac{-1(-2)(-3)\cdots(-1-k+1)}{k!}=(-1)^k\frac{k!}{k!}=(-1)^k.$$

ამ კოეფიციენტების გამოყენებით ბინომური მწკრივის ფორმულიდან ვღებულობთ

$$(1+x)^{-1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^k=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^k x^k+\cdots,$$

რაც გეომეტრიულ მწკრივს წარმოადგენს.

არა ელემენტარული ინტეგრალების გამოთვლა

მაგალითი 3. წარმოვადგინოთ $\int \sin x^2 dx$ ხარისხოვანი მწკრივის სახით

ამოხსნა. $\sin x$ -ის მწკრივში x შევცვალოთ x^2 -ით:

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\frac{x^{18}}{9!}-\cdots.$$

ამიტომ

$$\int \sin x^2 dx=C+\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\frac{x^{15}}{15\cdot 7!}+\frac{x^{19}}{19\cdot 9!}-\cdots.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ $\int_0^1 \sin x^2 dx$ ისე , რომ ცდომილება არ აღემატებოდეს 0.001 -ს.

ამოხსნა. მაგალითი 3-ის გამოყენებით,

$$\int_0^1 \sin x^2 dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{11\cdot 5!}-\frac{1}{15\cdot 7!}+\frac{1}{19\cdot 9!}-\cdots.$$

მწკრივი ნიშანმონაცვლეა, და შეგვიძლია შევამოწმოთ რომ

$$\frac{1}{11\cdot 5!}\approx 0.00076$$

არის 0.001-ზე ნაკლები პირველი წევრი . ამიტომ საკმარისია შევინარჩუნოთ მწკრივის ორი წევრი

$$\int_0^1 \sin x^2 dx\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{42}\approx 0.310\,.$$

განუსაზღვრელი ფორმების გამოთვლა

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$.

ამოხსნა. სექცია 10.7-ის მაგალითი 6-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots,$$

ამიტომ

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(1-\frac{1}{2}(x-1)+\cdots\right)=1\ .$$

ცხრილი 10.1. ხშირად გამოყენებადი მაკლორენის მწკრივები

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-x)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\qquad |x|<1$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad |x|<\infty$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad |x|<\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\qquad |x|<\infty$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\qquad -1<x\le 1$$

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\qquad |x|\le 1$$

სავარჯიშოები 10.10

1--8 სავარჯიშოებში იპოვეთ ბინომური მწკრივის პირველი ოთხი წევრი

1. $(1+x)^{1/2}$ **2.** $(1+x)^{1/3}$ **3.** $(1-x)^{-1/2}$

4. $(1-2x)^{1/2}$ **5.** $\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2}$ **6.** $\left(1-\frac{x}{3}\right)^{4}$

7. $(1+x^3)^{-1/2}$ **8.** $(1+x^2)^{-1/3}$

19--22 სავარჯიშოებში გამოვიყენოთ მწკრივები და გამოვთვალოთ ინტეგრალი 10^{-8} სიზუსტით

19. $\int_0^{0.1}\frac{\sin x}{x}\,dx$ **20.** $\int_0^{0.1} e^{-x^2}\,dx$

21. $\int_0^{0.1}\sqrt{1+x^4}\,dx$ **22.** $\int_0^{1}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$

29--38 სავარჯიშოებში გამოიყენეთ მწკრივები ზღვრის გამოსათვლელად.

29. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}$ **30.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

31. $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t-(t^2/2)}{t^4}$ **32.** $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta-\theta+(\theta^3/6)}{\theta^5}$

33. $\lim_{y\to 0}\frac{y-\tan^{-1}y}{y^3}$ **34.** $\lim_{y\to 0}\frac{\tan^{-1}y-\sin y}{y^3\cos y}$

35. $\lim_{x\to\infty}x^2(e^{-1/x^2}-1)$ **36.** $\lim_{x\to\infty}(x+1)\sin\frac{1}{x+1}$

37. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$ **38.** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\ln(x-1)}$

41--52 სავარჯიშოებში გამოიყენეთ ცხრილი 10.1 და იპოვეთ მწკრივის ჯამი

41. $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$

42. $\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\left(\frac{1}{4}\right)^5+\left(\frac{1}{4}\right)^6+\cdots$

43. $1-\frac{3^2}{4^2\cdot 2!}+\frac{3^4}{4^4\cdot 4!}-\frac{3^6}{4^6\cdot 6!}+\cdots$

44. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$

45. $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi^3}{3^3\cdot 3!}+\frac{\pi^5}{3^5\cdot 5!}-\frac{\pi^7}{3^7\cdot 7!}+\cdots$

46. $\frac{2}{3}-\frac{2^3}{3^3\cdot 3}+\frac{2^5}{3^5\cdot 5}-\frac{2^7}{3^7\cdot 7}+\cdots$

47. $x^3+x^4+x^5+x^6+\cdots$

48. $1-\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^4x^4}{4!}-\frac{3^6x^6}{6!}+\cdots$

49. $x^3-x^5+x^7-x^9+x^{11}-\cdots$

50. $x^2-2x^3+\frac{2^2x^4}{2!}-\frac{2^3x^5}{3!}+\frac{2^4x^6}{4!}-\cdots$

51. $-1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+\cdots$

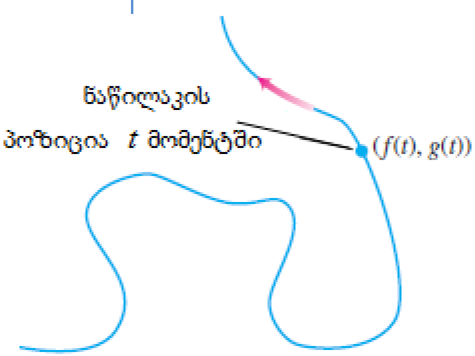
52. $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+\cdots$

11

პარამეტრული განტოლებები და პოლარული კოორდინატები

ამ თავში ჩვენ ვისწავლით ბრტყელი წირების განსაზღვრის ახალ ხერხს. მრუდს წარმოვიდგენთ არა როგორც ფუნქციის ან განტოლების გრაფიკს, არამედ როგორც მოძრავი ნაწილაკის გზა, რომლის პოზიცია დროის განმავლობაში ცვალებადია. მაშინ ნაწილაკის პოზიციის x და y კოორდინატები იქნებიან t ცვლადის ფუნქციები. შევისწავლით აგრეთვე წერტილის აღწერას პოლარ კოორდინატებში. ეს მეთოდები მნიშვნელვანია პლანეტების, თანამგზავრების და სხვათა გადაადგილების აღსაწერად, თუ ეს გადაადგილება გარკვეულ სიბრტყეში მიმდინარეობს. გარდა ამისა, ჩვენ განვიხილავთ პარაბოლის, ელიფსის და ჰიპერბოლის განსაზღვრებებს და სტანდარტულ განტოლებებს. ამ წირებს კონუსური კვეთები ეწოდება.

11.1 ბრტყელი წირის პარამეტრიზაცია



ფიგურა 11.1

ფიგურა 11.1-ზე ნაჩვენებია xy-სიბრტყეზე ნაწილაკის გადაადგილების გზა. ვერტიკალური წრფის ტესტის თანახმად ეს გზა არ წარმოადგენს x ცვლადის ფუნქციის გრაფიკს. მაგრამ შესაძლოა მისი აღწერა მოხერხდეს $x = f(t)$ და $x = g(t)$ უწყვეტ ფუნქციათა წყვილით.

განსაზღვრება. თუ x და y მოიცემა I ინტერვალზე განსაზღვრული t ცვლადის ფუნქციების სახით

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

მაშინ $(x, y) = (f(t), g(t))$ წერტილების სიმრავლეს ეწოდება **პარამეტრული მრუდი.** თვითონ განტოლებებს კი მრუდის **პარამეტრული განტოლობები** ეწოდება.

t ცვლადს მრუდის **პარამეტრი** ეწოდება, I არეს კი -- **პარამეტრის ინტერვალი.** თუ I ჩაკეტილი ინტერვალია, $a \le t \le b$, მაშინ $(f(a), g(a))$ წერტილი მრუდის **საწყისი წერტილია,** $(f(b), g(b))$ კი -- **ბოლო წერტილი.** განტოლებების და ინტერვალის ერთობლიობას მრუდის **პარამეტრიზაცია** ეწოდება.

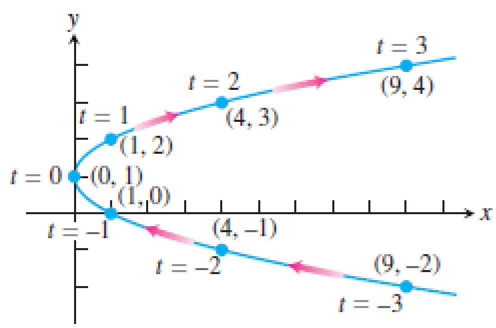
მაგალითი 1. ავაგოთ პარამეტრულად მოცემული მრუდი

$$x = t^2 \qquad y = t + 1 \qquad -\infty < t < \infty.$$

ამოხსნა. შევადგინოთ მნიშვნელობათა ცხრილი (ცხრილი 11.1), ავაგოთ (x, y) წერტილები და გავავლოთ მათზე გლუვი მრუდი (ფიგურა 11.2). თუ ამ მრუდს წარმოვიდგენთ როგორც ნაწილაკის მოძრაობის გზას, მაშინ ნაწილაკის მიმართულება მრუდზე ისრებითაა ნაჩვენები.

ცხრილი 11.1. $x = t^2$ და $y = t + 1$-ს მნიშვნელობები ზოგიერთი t-სათვის

t	x	y
-3	9	-2
-2	4	-1
-1	1	0
0	0	1
1	1	2
2	4	3



ფიგურა 11.2

მაგალითი 2. მაგალით 1-ში მოცემული პარამეტრული განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t პარამეტრი და მივიღოთ x და y -ის მიმართ განტოლება.

ამოხსნა. $y = t + 1$ განტოლებიდან ვიპოვოთ $t = y - 1$ და ჩავსვათ x-ის განტოლებაში

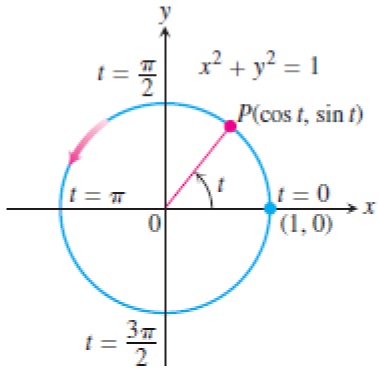
$$x = t^2 = (y-1)^2 = y^2 - 2y + 1.$$

განტოლება $x = y^2 - 2y + 1$ წარმოადგენს პარაბოლას, რომელიც ფიგურა 11.2-ზეა ნაჩვენები.

მაგალითი 3. ავაგოთ პარამეტრული მრუდები

(ა) $x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

(ბ) $x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$



ფიგურა 11.3

ამოხსნა.

(ა) რადგან $x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$, ამიტომ პარამეტრული მრუდი ერთეულ რადიუსიანი $x^2+y^2=1$ წრეწირია (ფიგურა 11.3). როცა t იზრდება 0 -დან 2π- მდე, მაშინ $(x,y)=(\cos t,\sin t)$ წერტილი იწყებს სვლას $(1,0)$ -დან და შემოწერს მთელ წრეწირს ერთხელ, საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით.

(ბ) $x^2+y^2=a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t=a^2$. პარამეტრიზაცია აღწერს მოძრაობას, რომელიც $(a,0)$ წერტილიდან იწყება, შემოწერს $r=a$ რადიუსიან $x^2+y^2=a^2$ წრეწირს, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია .

ნებისმიერი $y=f(x)$ ფუნქცია ყოველთვის შეიძლება ჩაიწეროს **ნატურალური პარამეტრიზაციით**: $x=t$, $y=f(t)$; პარამეტრის არე იგივეა, რაც f -ის განსაზღვრის არე.

მაგალითი 6. იპოვეთ იმ წრფის პარამეტრიზაცია, რომელიც გადის (a,b) წერტილზე წერტილზე და რომლის დახრილობაცაა m.

ამოხსნა. დეკარტის სისტემაში ამ წრფის განტოლებაა $y-b=m(x-a)$. თუ პარამეტრს შევარჩევთ ასე $t=x-a$, მაშინ $x=a+t$ და $y-b=mt$. გვექნება პარამეტრიზაცია

$$x=a+t,\quad y=b+mt,\quad -\infty<t<\infty.$$

თუ შევარჩევდით $x=t$, გვექნებოდა განსხვებული პარამეტრიზაცია, მაგრამ ისიც იგივე წრფის შესაბამისი იქნებოდა .

სავარჯიშოები 11.1

1--14 სავარჯიშოებში მოცემულია xy სიბრტყეში მოძრავი ნაწილაკის პარამეტრული განტოლებები. დეკარტის კოორდინატებში გამოსახეთ ნაწილაკის გზა, ააგეთ გრაფიკი და მონიშნეთ მოძრაობის მიმართულება.

1. $x=3t,\quad y=9t^2,\quad -\infty<t<\infty$
2. $x=-\sqrt{t},\quad y=t,\quad t\ge 0$
3. $x=2t-5,\quad y=4t-7,\quad -\infty<t<\infty$
4. $x=3-3t,\quad y=2t,\quad 0\le t\le 1$
5. $x=\cos 2t,\quad y=\sin 2t,\quad 0\le t\le \pi$
6. $x=\cos(\pi-t),\quad y=\sin(\pi-t),\quad 0\le t\le \pi$

7. $x = 4\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$
8. $x = 4\sin t, \quad y = 5\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$
9. $x = \sin t, \quad y = \cos 2t, \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$
10. $x = 1 + \sin t, \quad y = \cos t - 2, \quad 0 \le t \le \pi$
11. $x = t^2, \quad y = t^6 - 2t^4, \quad -\infty < t < \infty$
12. $x = \frac{t}{t-1}, \quad y = \frac{t-2}{t+1}, \quad -1 < t < 1$
13. $x = t, \quad y = \sqrt{1-t^2}, \quad -1 \le t \le 0$
14. $x = \sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \ge 0$

19. იპოვეთ ნაწილაკის მოძრაობის პარამეტრული განტოლებები და პარამეტრის ინტერვალი, თუ დაწყებული $(a,0)$ წერტილიდან შემოვლა ხდება $x^2 + y^2 = a^2$ წრეწირზე

(ა) ერთჯერ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით

(ბ) ერთჯერ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით

(გ) ორჯერ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით

(გ) ორჯერ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით .

20. იპოვეთ ნაწილაკის მოძრაობის პარამეტრული განტოლებები და პარამეტრის ინტერვალი, თუ დაწყებული $(a,0)$ წერტილიდან შემოვლა ხდება $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ელიფსზე

(ა) ერთჯერ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით

(ბ) ერთჯერ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით

(გ) ორჯერ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით

(გ) ორჯერ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით .

21-- სავარჯიშოებში იპოვეთ წირის პარამეტრიზაცია

21. წრფის მონაკვეთი (-1, -3) და (4, 1) ბოლოებით.

22. წრფის მონაკვეთი (-1, 3) და (3, -2) ბოლოებით.

23. პარაბოლას ქვედა ნახევარი

24. პარაბოლას მარცხენა ნახევარი

25. სხივი რომლის სათავეა (2, 3) წერტილი და რომელიც გადის (-1, -1) წერტილზე.

11.2 პარამეტრულ განტოლებებთან დაკავშირებული გამოთვლები

ვთქვათ, წირის პარამეტრიზაცია მოცემულია $x = f(t)$, $y = g(t)$ განტოლებებით , რომლებიც წარმოებადია t-ს მიმართ. თუ პარამეტრიზებული წირის წერტილში y წარმოებადია x-ის მიმართ, მაშინ dy/dt , dx/dt და dy/dx წარმოებულები დაკავშირებულია ტოლობით:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad .$$

თუ ნახსენები სამივე წარმოებული არსებობს და $dx/dt \neq 0$, მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad . \tag{1}$$

თუ პარამეტრული განტოლებებით y განისაზღვრება როგორც x-ის მიმართ ორჯერ წარმოებადი ფუნქცია, მაშინ შეგვიძლია (1)-ის გამოყენებით გამოვთვალოთ d^2y/dx^2 როგორც t ცვლადის ფუნქცია:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}.$$

პარამეტრული ფორმულა d^2y/dx^2-სათვის

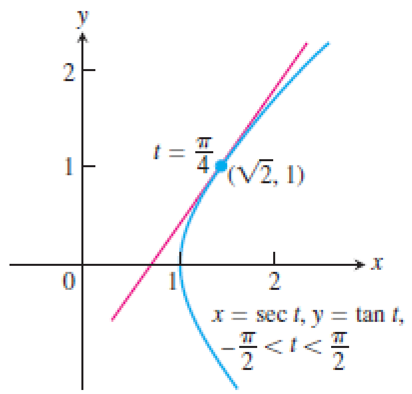
ვთქვათ $x = f(t), y = g(t)$ განტოლებებით y განისაზღვრება როგორც x-ის მიმართ ორჯერ წარმოებადი ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერ წერტილში სადაც $dx/dt \neq 0$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}, \qquad (y' = dy/dx). \tag{2}$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ პარამეტრულად მოცემული

$$x = \frac{1}{\cos t}, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

მრუდის მხები $(\sqrt{2}, 1)$ წერტილში, რომლისთვისაც $t = \pi/4$ (ფიგურა 11.12).



ფიგურა 11.12

ამოხსნა. t-ს შესაბამის წერტილში მრუდის დახრილობაა

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{\sin t}\ .$$

ამიტომ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \frac{1}{\sin(\pi/4)} = \sqrt{2}\ .$$

მხები წრფის განტოლებაა

$$y - 1 = \sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right)$$

$$y = \sqrt{2}x - 1.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ d^2y/dx^2 როგორც t ცვლადის ფუნქცია, თუ $x = t - t^2,\ y = t - t^3$.

ამოხსნა.

1. გამოვსახოთ $y' = dy/dx$ წარმოებული t -თი.

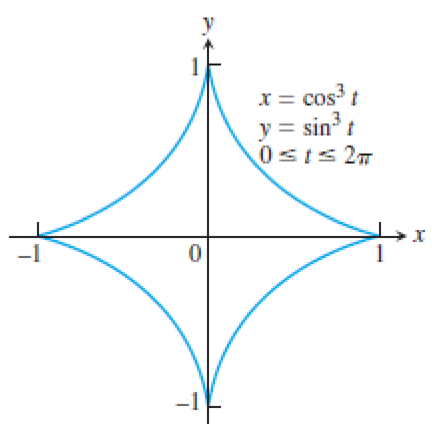
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-3t^2}{1-2t}.$$

2. გავაწარმოოთ t ცვლადით y'

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1-3t^2}{1-2t}\right) = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}.$$

3. გავყოთ dy'/dt სიდიდე dx/dt -ზე

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2-6t+6t^2)/(1-2t)^2}{1-2t} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}.$$



ფიგურა 11.13

მაგალითი 3. ვიპოვოთ

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

ასტროიდით შემოსაზღვრული არეს ფართობი (ფიგ. 11.13).

ამოხსნა. სიმეტრიის გამო, საკმარისია გამოვთვალოთ პირველი მეოთხედის შესაბამისი ფართობი და გავაოთხკეცოთ იგი.

$$
\begin{aligned}
A &= 4\int_0^1 y\,dx \\
&= 4\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t \sin t\,dt && \text{ჩასმა } y \text{ და } dx\text{-სათვის} \\
&= 12\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt && \sin^4 t = \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)(1+\cos 2t)\,dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t)\,dt \\
&= \frac{3}{2}\left[\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2t)\,dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2 2t\,dt + \int_0^{\pi/2} \cos^3 2t\,dt\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + \frac{1}{2}\left(\sin 2t - \frac{1}{3}\sin^3 2t\right)\right]_0^{\pi/2} && \text{სექცია 8.2 მაგალ. 3} \\
&= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 - 0\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right) + \frac{1}{2}(0 - 0 - 0 + 0)\right] \\
&= \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

ვთქვათ, პარამეტრულად მოცემულია წირი $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, სადაც f' და g' უწყვეტია და ერთდროულად ნული არ ხდებიან $[a,b]$-ზე. თუ $t = a$ -დან $t = b$ -მდე პარამეტრის ზრდისას წირის გავლა ხდება მხოლოდ ერთხელ, მაშინ ამ წირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt\,.$$

რკალის სიგრძე ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\,. \tag{3}$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ r რადიუსიანი წრეწირის სიგრძე, თუ მისი პარამეტრიზაციაა

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

ამოხსნა. რადგან $\dfrac{dx}{dt} = -r\sin t, \quad \dfrac{dy}{dt} = r\cos t,$

ამიტომ

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2.$$

(3) ფორმულის თანახმად

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\,dt = r\left[t\right]_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

მაგალითი 5.

ვიპოვოთ

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

ასტროიდის სიგრძე (ფიგურა 11.13)

ამოხსნა. რადგან წირი სიმეტრიულია ორივე საკოორდინატო ღერძის მიმართ, მისი სიგრძე არის პირველ მეოთხედში მოთავსებული ნაწილის გაოთხკეცებული სიგრძე. გვაქვს

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left[3\cos^2 t \cdot (-\sin t)\right]^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left[3\sin^2 t \cdot (\cos t)\right]^2 = 9\sin^4 t \cos^2 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} =$$

$$= \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} = 3|\cos t \sin t| = 3\cos t \sin t.$$

ამიტომ პირველი მეოთხედის რკალის სიგრძეა

$$\int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = -\frac{3}{4}\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}\;.$$

ასტროიდის სიგრძე კი იქნება $4 \cdot (3/2) = 6$.

სავარჯიშოები 11.2

1--14 სავარჯიშოებში იპოვეთ მხების განტოლება მოცემული t -ს შესაბამის წერტილში.

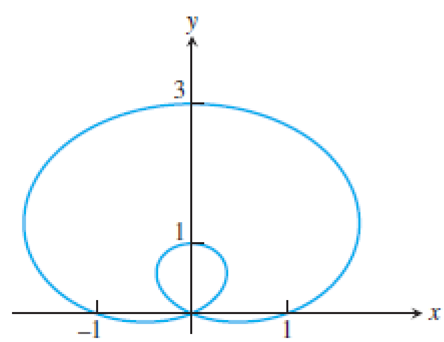
1. $x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad t = \pi/4$
2. $x = \sin 2\pi t, \quad y = \cos 2\pi t, \quad t = -1/6$
3. $x = 4\sin t, \quad y = 2\cos t, \quad t = \pi/4$
4. $x = \cos t, \quad y = \sqrt{3}\cos t, \quad t = 2\pi/3$
5. $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = 1/4$
6. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad t = -\pi/4$
7. $x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad t = \pi/6$
8. $x = -\sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$
9. $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$
10. $x = 1/t, \quad y = -2 + \ln t, \quad t = 1$
11. $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \pi/3$
12. $x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad t = \pi/2$
13. $x = \dfrac{1}{t+1}, \quad y = \dfrac{t}{t-1}, \quad t = 2$
14. $x = t + e^t, \quad y = 1 - e^t, \quad t = 0$

25--30 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ წირის სიგრძე.

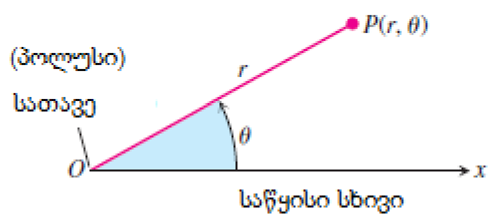
25. $x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$
26. $x = t^3, \quad y = 3t^2/2, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$
27. $x = t^2/2, \quad y = (2t+1)^{3/2}/3, \quad 0 \le t \le 4$
28. $x = (2t+3)^{3/2}/3, \quad y = t + t^2/2, \quad 0 \le t \le 3$
29. $x = 8\cos t + 8t\sin t$
    $y = 8\sin t - 8t\cos t,$
    $0 \le t \le \pi/2$
30. $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t$
    $y = \cos t, \quad 0 \le t \le \pi/3$

43. წირს, რომლის პარამეტრული განტოლებებია $x = (1 + 2\sin\theta)\cos\theta, \quad y = (1 + 2\sin\theta)\sin\theta$, ***ლიმაკონი*** ეწოდება (იხ. თანმხლები ფიგურა). იპოვეთ (x, y) წერტილი და მხები წრფის დხრილობა ამ წერტილში, თუ

ა) $\theta = 0$ ბ) $\theta = \pi/2$ გ) $\theta = 4\pi/3$

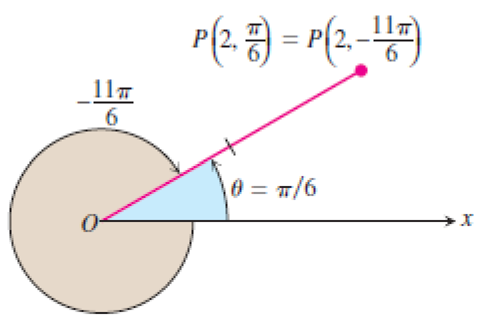


11.3 პოლარული კოორდინატები



ფიგურა 11.18

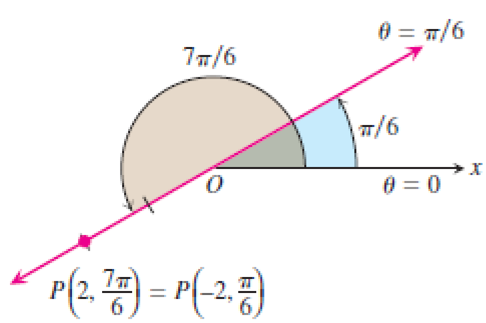
პოლარული კოორდინატები რომ განვსაზღვროთ, პირველ რიგში შევარჩიოთ O სათავე (**პოლუსი**) და O-დან გამომავალი საწყისი სხივი (**პოლარული ღერძი**) (ფიგურა 11.18). ყოველ P წერტილს შევუსაბამოთ პოლარული კოორდინატების წყვილი (r,θ), სადაც r (**რადიუს -ვექტორი**) მანძილია O-დან P-მდე, θ (**პოლარული კუთხე**) კი კუთხეა საწყის სხივსა და OP სხივს შორის.



ფიგურა 11.19

P წერტილის გარკვეულ მდებარეობას შეესაბამება r-ის ერთი გარკვეული დადებითი მნიშვნელობა და θ-ს უსასრულოდ ბევრი მნიშვნელობები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან 2π-ს ჯერადი შესაკრებებით (ფიგურა 11.19). თუ P ემთხვევა O წერტილს, მაშინ $r=0$ და θ არ განისაზღვრება.

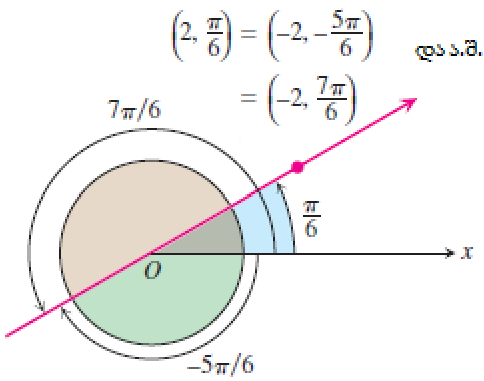
ზოგჯერ სასარგებლოა განიხილებოდეს r-ის უარყოფითი მნიშვნელობებიც. ამასთან, თუ რომელიმე θ კუთხეს შეესაბამება r-ის უარყოფითი მნიშვნელობა, მივიჩნევთ, რომ ეს მნიშვნელობა გადაზომილია θ-თი განსაზღვრული მიმართულების საპირისპიროდ.



ფიგურა 11.20

r-ის უარყოფითი მნიშვნელობები შეიძლება გამოვიყენოთ, თუ საჭიროა მანძილს მივანიჭოთ მიმართულება. $P(2,7\pi/6)$ წერტილს შეიძლება მივაღწიოთ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით $7\pi/6$ რადიანით შემობრუნების და 2 ერთეულით ***წინ*** გადაადგილებით (ფიგურა 11.20). იგივე წერტილს შეიძლება მივაღწიოთ $\pi/6$ რადიანით შემობრუნების და 2 ერთეულით ***უკან*** გადაადგილებით.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $P(2,\pi/6)$ წერტილის ყველა პოლარული კოორდინატი.



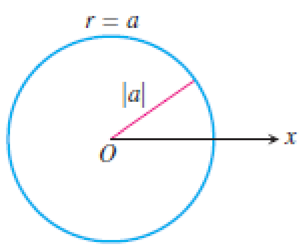
ფიგურა 11.21

ამოხსნა. დავხაზოთ პოლუსი, პოლარული ღერძი და მოვნიშნოთ $(2, \pi/6)$ წერტილი (ფიგურა 11.21). იოლი შესამჩნევია, რომ P წერტილის შესაბამისი კოორდინატული წყვილებია

$$\left(2, \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

და

$$\left(-2, -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



ფიგურა 11.22

თუ r ინარჩუნებს მუდმივ $r = a \neq 0$ მნიშვნელობას, მაშინ $P(r, \theta)$ წერტილი სათავიდან $|a|$ მანძილით იქნება დაშორებული. ამასთან, თუ θ იცვლება 2π სიგრძის ნებისმიერ შუალედზე, მაშინ P შემოწერს $|a|$ რადიუსიან წრეწირს ცენტრით O წერტილში (ფიგურა 11.22).

თუ θ -ს შევუნარჩუნებთ მუდმივ $\theta = \theta_0$ მნიშვნელობას და r -ს ვცვლით $(-\infty, \infty)$ შუალედში, მაშინ $P(r, \theta)$ წერტილი აღწერს სათავეზე გამავალ წრფეს, რომელიც საწყის სხივთან შეადგენს θ_0 სიდიდის კუთხეს.

განტოლება	გრაფიკი
$r = a$	$\vert a \vert$ რადიუსიანი წრეწირი ცენტრით O წერტილში
$\theta = \theta_0$	O -ზე გამავალი წრფე, რომელიც საწყის სხივთან θ_0 კუთხეს ადგენს

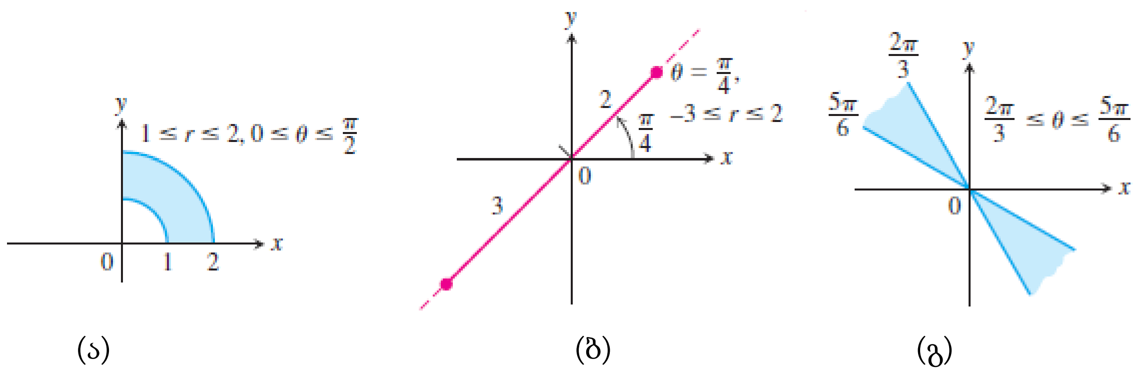
მაგალითი 3. დავხაზოთ იმ წერტილთა სიმრავლეები, რომელთა პოლარი კოორდინატები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

(ა) $1 \le r \le 2$ და $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

(ბ) $-3 \le r \le 2$ და $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

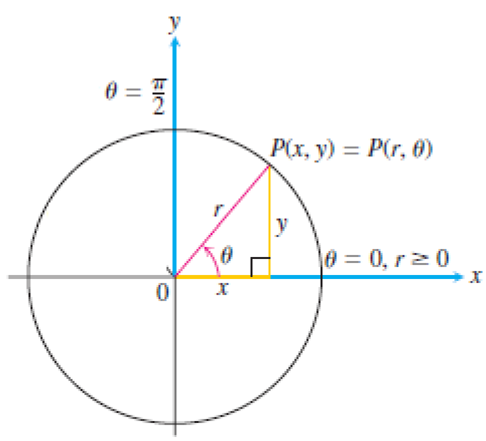
(გ) $\quad \dfrac{2\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{5\pi}{6} \qquad$ (r არაა შეზღუდული)

ამოხსნა. გრაფიკები ფიგურა 11.23-ზეა ნაჩვენები



ფიგურა 11.23

თუ ჩვენ ვიყენებთ სიბრტყეზე დეკარტის კოორდინატებსაც და პოლარულ კოორდინატებსაც, დავამთხვიოთ ერთმანეთს მათი სათავეები; პოლარული სხივი შევუთავსოთ დადებით x-ღერძს. $\theta = \pi/2,\ r > 0$ სხივი გვაძლევს დადებით y - ღერძს (ფიგურა 11.24). მაშინ კოორდინატთა ეს სისტემები ერთმანეთთან ასე იქნება დაკავშირებული.



ფიგურა 11.24

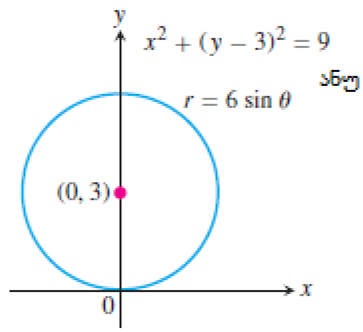
კავშირი პოლარულ და დეკარტის კოორდინატებს შორის

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

ამ ფორმულების პირველი წყვილი ცალსახად განსაზღვრავს დეკარტის კოორდინატებს პოლარული კოორდინატების მეშვეობით. პირიქით, თუ დეკარტის კოორდინატები მოცემულია, მესამე ფორმულა გვაძლევს r-ის ორ (დადებით და უარყოფით) მნიშვნელობას. თუ $(x, y) \ne (0,0)$, მაშინ მეოთხე ტოლობით განისაზღვრება ერთადერთი $\theta \in [0, 2\pi)$, კუთხის ყველა სხვა მნიშვნელობა კი მაგალითი 1-ის ანალოგიურად განისაზღვრება.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $x^2+(y-3)^2=9$ წრეწირის პოლარული განტოლება (ფიგურა 11.25).



ფიგურა 11.25

ამოხსნა. გამოვიყენოთ დეკარტული კოორდინატებიდან პოლარულზე გადასვლის ფორმულები:

$$\begin{aligned} x^2 + (y-3)^2 &= 9 \\ x^2 + y^2 - 6y + 9 &= 9 \\ x^2 + y^2 - 6y &= 0 \\ r^2 - 6r\sin\theta &= 0 \\ r = 0 \quad \text{or} \quad r - 6\sin\theta &= 0 \\ r &= 6\sin\theta \end{aligned}$$

მაგალითი 6. პოლარული განტოლებები გადავიყვანოთ ეკვივალენტურ დეკარტულ განტოლებებში და ამოვიცნოთ მათი გრაფიკები.

(ა) $r\cos\theta=-4$ (ბ) $r^2=4r\cos\theta$ (გ) $r=\dfrac{4}{2\cos\theta-\sin\theta}$

ამოხსნა. შევცვალოთ $r\cos\theta=x$, $r\sin\theta=y$, $r^2=x^2+y^2$.

(ა) მიიღება $x=-4$.
გრაფიკი წარმოადგენს $x=-4$ -ზე გავლებულ x ღერძის მართობულ წრფეს.

(ბ)

$$\begin{aligned} r^2 &= 4r\cos\theta \\ x^2 + y^2 &= 4x \\ x^2 - 4x + y^2 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 4 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

გრაფიკი წარმოადგენს წრეწირს, რომლის რადიუსი 2-ის ტოლია, ცენტრით (2,0) წერტილში.

(გ)

$$\begin{aligned} r(2\cos\theta - \sin\theta) &= 4 \\ 2r\cos\theta - r\sin\theta &= 4 \\ 2x - y &= 4 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

გრაფიკი წარმოადგენს წრფეს, რომლის დახრილობაა $m=2$, y ღერძთან კვეთა კი $b=-4$.

სავარჯიშოები 11.3

1. პოლარულ კოორდინატთა რომელი წყვილები შეესაბამებიან ერთი და იმავე წერტილებს?

a. $(3, 0)$ **b.** $(-3, 0)$ **c.** $(2, 2\pi/3)$
d. $(2, 7\pi/3)$ **e.** $(-3, \pi)$ **f.** $(2, \pi/3)$
g. $(-3, 2\pi)$ **h.** $(-2, -\pi/3)$

3. ააგეთ პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წერტილები. შემდეგ იპოვეთ თითოეული მათგანის ყველა პოლარული კოორდინატები.

a. $(2, \pi/2)$ **b.** $(2, 0)$
c. $(-2, \pi/2)$ **d.** $(-2, 0)$

6. წერტილთა პოლარული კოორდინატებს შეუსაბამეთ მათი დეკარტული კოორდინატები.

a. $\left(\sqrt{2}, \pi/4\right)$ **b.** $(1, 0)$
c. $(0, \pi/2)$ **d.** $\left(-\sqrt{2}, \pi/4\right)$
e. $(-3, 5\pi/6)$ **f.** $(5, \tan^{-1}(4/3))$
g. $(-1, 7\pi)$ **h.** $\left(2\sqrt{3}, 2\pi/3\right)$

7. დეკარტულ კოორდინატებში მოცემულ წერტილებს შეუსაბამეთ პოლარული კოორდინატები ($0 \le \theta < 2\pi$ და $r \ge 0$).

a. $(1, 1)$ **b.** $(-3, 0)$
c. $(\sqrt{3}, -1)$ **d.** $(-3, 4)$

11--26 სავარჯიშოებში დახაზეთ წერტილთა სიმრავლეები პოლარულ კოორდინატებში მოცემული პირობების შესაბამისად.

11. $r = 2$ **12.** $0 \le r \le 2$
13. $r \ge 1$ **14.** $1 \le r \le 2$
15. $0 \le \theta \le \pi/6, \quad r \ge 0$ **16.** $\theta = 2\pi/3, \quad r \le -2$
17. $\theta = \pi/3, \quad -1 \le r \le 3$ **18.** $\theta = 11\pi/4, \quad r \ge -1$
19. $\theta = \pi/2, \quad r \ge 0$ **20.** $\theta = \pi/2, \quad r \le 0$
21. $0 \le \theta \le \pi, \quad r = 1$ **22.** $0 \le \theta \le \pi, \quad r = -1$
23. $\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4, \quad 0 \le r \le 1$
24. $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4, \quad -1 \le r \le 1$
25. $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2, \quad 1 \le r \le 2$
26. $0 \le \theta \le \pi/2, \quad 1 \le |r| \le 2$

53--66 სავარჯიშოებში დეკარტის კოორდინატებით მოცემული განტოლებები გადაიყვანეთ ეკვივალენტურ პოლარულ განტოლებებში.

53. $x = 7$ **54.** $y = 1$ **55.** $x = y$

56. $x - y = 3$ **57.** $x^2 + y^2 = 4$ **58.** $x^2 - y^2 = 1$

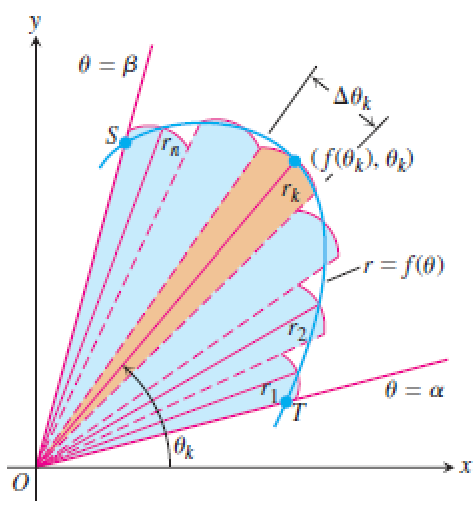
59. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **60.** $xy = 2$

61. $y^2 = 4x$ **62.** $x^2 + xy + y^2 = 1$

63. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ **64.** $(x - 5)^2 + y^2 = 25$

65. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ **66.** $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$

11.5 ფართობები და სიგრძეები პოლარულ კოორდინატებში



ფიგურა 11.30

ფიგურა 11.30 -ზე ნაჩვენები OTS არე შემოსაზღვრულია $\theta = \alpha$ და $\theta = \beta$ სხივებით და $r = f(\theta)$ წირით. ამ არის აპროქსიმაცია მოვახდინოთ n ცალი არაგადამფარავი წრიული სექტორებით, რომლებიც TOS კუთხის P დანაწილებას შეესაბამება. ტიპური სექტორის რადიუსია $r_k = f(\theta_k)$, შესაბამისი ცენტრული კუთხის რადიანული ზომა კი $\Delta\theta_k$. ამ სექტორის ფართობია

$$A_k = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k .$$

OTS არის ფართობი კი მიახლოებით იქნება

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k .$$

თუ უწყვეტია, განვიხილოთ ზღვარი როცა P დანაწილების ნორმა ($\Delta\theta_k$ -ს უდიდესი სიდიდე) მიისწრაფის ნულისკენ. მივიღებთ საძიებელი არის ფართობს:

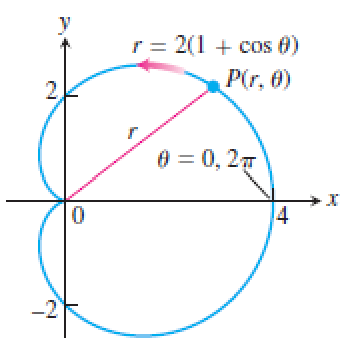
$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta.$$

სათავესა და $r = f(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$ წირს შორის (მარაოსებური) არის ფართობი

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

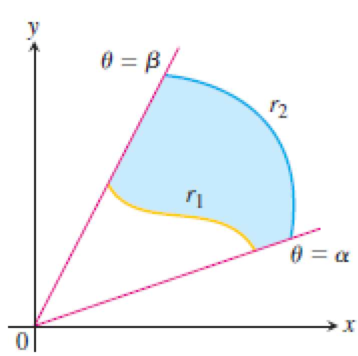
მაგალითი 1. ვიპოვოთ $r = 2(1+\cos\theta)$ კარდიოიდით შემოსაზღვრული ბრტყელი არის ფართობი.

ამოხსნა. კარდიოიდის გრაფიკი ფიგურა 11.32-ზეა ნაჩვენები. OP რადიუსი გრაფიკით შემოსაზღვრულ არეს შემოწერს ზუსტად ერთხელ, როცა θ იცვლება 0-დან 2π -მდე. ამიტომ საძიებელი ფართობია



ფიგურა 11.32

$$\begin{aligned}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cdot 4(1+\cos\theta)^2\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2+4\cos\theta+2\,\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (3+4\cos\theta+\cos 2\theta)\, d\theta \\ &= \left[3\theta+4\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi - 0 = 6\pi.\end{aligned}$$

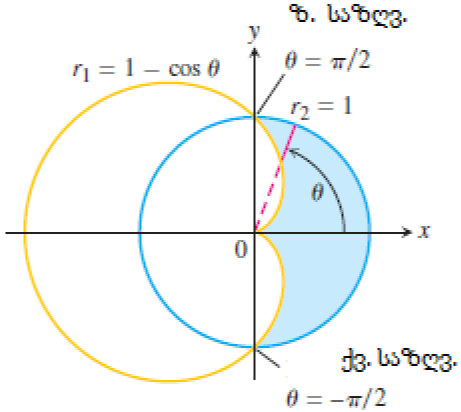


ფიგურა 11.33

ორი პოლარული $r_1 = r_1(\theta)$ და $r_2 = r_2(\theta)$ წირით $\theta = \alpha$ -დან $\theta = \beta$ -მდე შემოსაზღვრული არეს ფართობი (ფიგურა 11.33) შეიძლება გამოვთვალოთ, როგორც ორი ინტეგრალის სხვაობა.

$0 \le r_1(\theta) \le r \le r_1(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta$ არეს ფართობი

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_2^2 d\theta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_1^2 d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) d\theta. \qquad (1)$$



ფიგურა 11.34

მაგალითი 2. ვიპოვოთ იმ არეს ფართობი, რომელიც ძევს $r = 1$ წრეწირის შიგნით და $r = 1 - \cos\theta$ კარდიოიდის გარეთ.

ამოხსნა. შევასრულოთ ნახაზი მისი კონტურის, აგრეთვე ინტეგრების ქვედა და ზედა საზღვრების დასადგენად (ფიგურა 11.34). გარეთა წირია $r_2 = 1$, შიგა წირია $r_1 = 1 - \cos\theta$, ხოლო θ იცვლება $-\pi/2$ -დან $\pi/2$ -მდე. (1) ფორმულის თანახმად:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} (1 - (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta))\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - \cos^2\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(2\cos\theta - \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \left[2\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირის სიგრძე

ვთქვათ გვინდა $r = f(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$ წირის სიგრძის გამოთვლა. მოვახდინოთ მისი პარამეტრიზაცია

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta, \quad \varepsilon \le \theta \le \beta. \qquad (2)$$

გამოვიყენოთ აქ პარამეტრული წირის სიგრძის ფორმულა (სექცია 11.2):

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta .$$

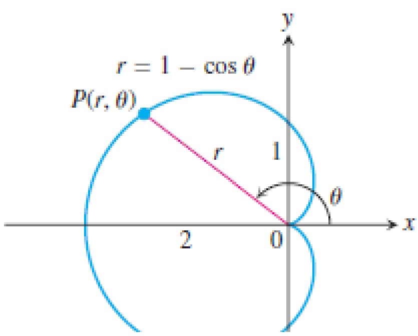
პოლარული წირის სიგრძე.

თუ $r=f(\theta)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[\alpha,\beta]$შუალედში და $P(r,\theta)$ წერტილი ზუსტად ერთხელ შემოწერს $r=f(\theta)$ წირს როცა θ იცვლება α -დან β -მდე, მაშინ წირის სიგრძეა

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta . \tag{3}$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $r=1-\cos\theta$ კარდიოიდის სიგრძე.

ამოხსნა. ინტეგრების საზღვრების დასდგენის მიზნით დავხაზოთ კარდიოიდი (ფიგ. 11.35). წერტილი $P(r,\theta)$ ერთჯერ შემოწერს წირს, საათის ისრის მოძრაობის საპირისპიროდ, როცა θ იცვლება 0-დან 2π -მდე. ჩავთვალოთ რომ α და β სწორედ ეს რიცხვებია.



ფიგურა 11.35

$$r=1-\cos\theta \;\Rightarrow\; \frac{dr}{d\theta}=\sin\theta$$

ამიტომ

$$r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=$$

$$=1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=2-2\cos\theta$$

და

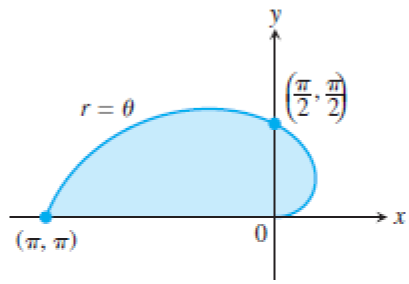
$$\begin{aligned}
L&=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta && 1-\cos\theta=2\sin^2(\theta/2)\\
&=\int_0^{2\pi}2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta\\
&=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta && \sin(\theta/2)\ge 0 \quad \text{for} \quad 0\le\theta\le 2\pi\\
&=\left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=4+4=8.
\end{aligned}$$

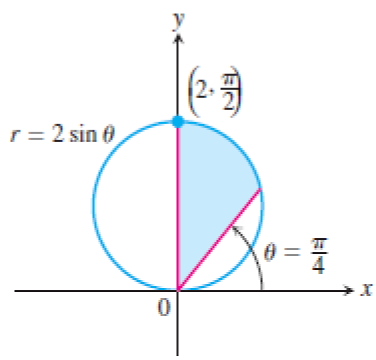
სავარჯიშოები 11.5

1--14 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ მითითებული ფართობები.

1. შემოსაზღვრული

$r=\theta, 0\le\theta\le\pi$ სპირალით





2. შემოსაზღვრული $r=2\sin\theta$,

$\pi/4\le\theta\le\pi/2$ წრეწირის რკალით

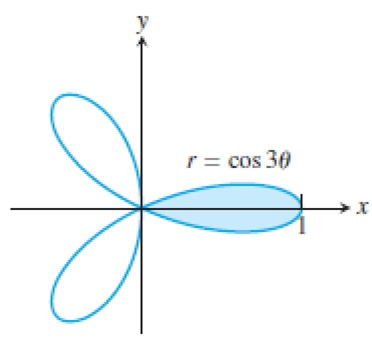
3. $r=4+2\cos\theta$ წირის (ლიმაკონის) შიგნით

4. $r=a(1+\cos\theta), \quad a>0$ წირის (კარდიოიდის) შიგნით

5. $r=\cos 2\theta$ წირის (ოთხფურცლა ვარდის) ერთი ფოთლის შიგნით

6. $r=\cos 3\theta$ წირის (სამფურცლა ვარდის)

ერთი ფოთლის შიგნით



7. $r^2=4\sin 2\theta$ წირის (ლემნისკატის) ერთი მარყუჟის შიგნით

8. $r^2=2\sin 3\theta$ წირის (ლემნისკატის) ერთი მარყუჟის შიგნით

9. შემოსაზღვრული $r = 2\cos\theta$ და $r = 2\sin\theta$ წრეწირებით

10. შემოსაზღვრული $r = 1$ და $r = 2\sin\theta$ წრეწირებით.

11. შემოსაზღვრული $r = 2$ წრეწირით და $r = 2(1-\cos\theta)$ კარდიოიდით

12. შემოსაზღვრული $r = 2(1+\cos\theta)$ და $r = 2(1-\cos\theta)$ კარდიოიდებით

13. $r^2 = 6\cos 2\theta$ ლემნისკატის შიგნით და $r = \sqrt{3}$ წრეწირის გარეთ

14. $r = 3a\cos\theta$ წრეწირის შიგნით და $r = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ კარდიოიდის გარეთ

21--26 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ წირის სიგრძეები.

21. $r = \theta^2$, $0 \le \theta \le \sqrt{5}$

22. $r = e^{\theta}/\sqrt{2}$, $0 \le \theta \le \pi$

23. $r = 1+\cos\theta$

24. $r = 1 + a\sin^2(\theta/2)$, $0 \le \theta \le \pi$, $a > 0$

25. $r = 6/(1+\cos\theta)$, $0 \le \theta \le \pi/2$

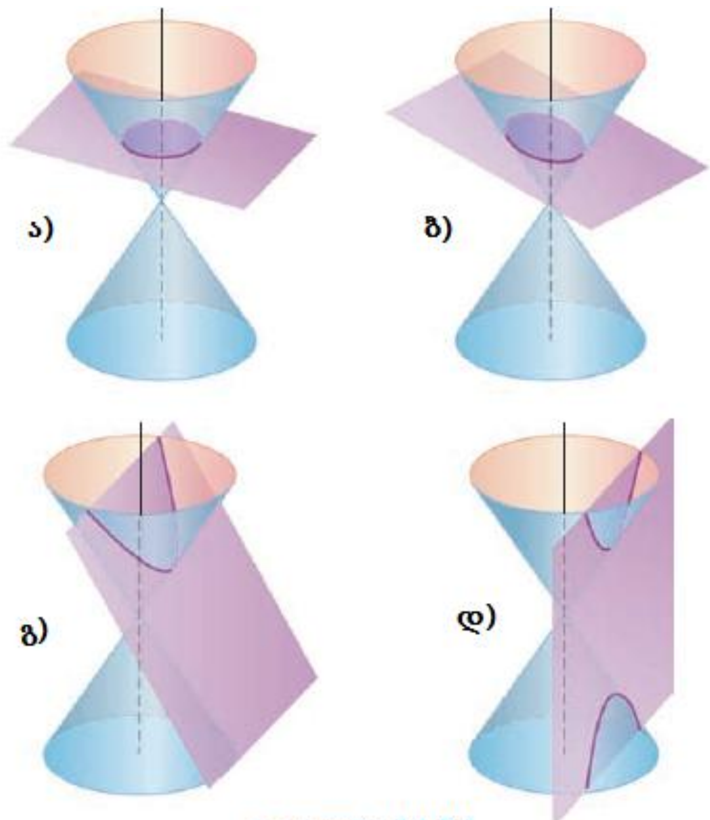
26. $r = 6/(1+\cos\theta)$, $\pi/2 \le \theta \le \pi$

11.7 კონუსური კვეთები პოლარ კოორდინატებში

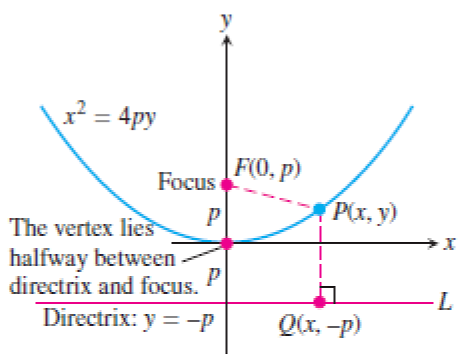
კონუსური კვეთა ეწოდება წრიული კონუსის კვეთას სიბრტყესთან. არსებობს კონუსური კვეთის სამი ძირითადი ტიპი: ელიფსი, პარაბოლა და ჰიპერბოლა.

თუ მკვეთი სიბრტყე გადაკვეთს კონუსის ყველა მსახველს მის ერთ ნახევარში, მიიღება ელიფსი (ფიგ.11.36 ბ).

- თუ მკვეთი სიბრტყე პარალელურია კონუსის რომელიმე მხები სიბრტყისა, მიიღება პარაბოლა (ფიგ.11.36 გ).
- თუ მკვეთი სიბრტყე გადაკვეთს კონუსის ორივე ნახევარს, მიიღება ჰიპერბოლა (ფიგ.11.36 დ).
- წრეწირი შეიძლება ჩავთვალოთ ელიფსის კერძო შემთხვევად, მკვეთი სიბრტყე კონუსის ღერძის მართობულია (ფიგ. 11.36 ა).

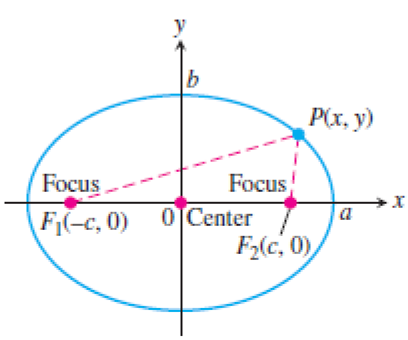


ფიგურა 11.36



ფიგურა 11.37

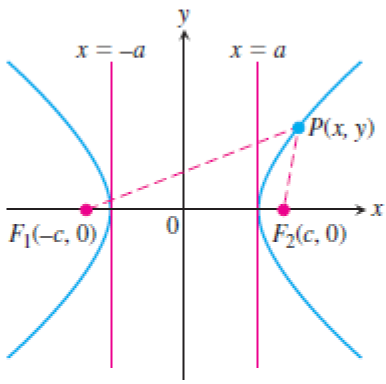
პარაბოლა შეიძლება განისაზღვროს როგორც სიმრავლე სიბრტყის ყველა იმ წერტილისა, რომელთაგან თითოეული ტოლადაა დაშორებული მოცემული წერტილიდან (ფოკუსიდან) და მოცემული წრფიდან (დირექტრისიდან) (ფიგ. 11.37).



ფიგურა 11.40

ელიფსი შეიძლება განისაზღვროს როგორც სიმრავლე სიბრტყის ყველა იმ წერტილისა, რომელთაგან ამ სიბრტყეში მდებარე ორ მოცემულ წერტილამდე (ფოკუსებამდე) მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა (ეს მუდმივი სიდიდე მეტია ფოკუსებს შორის მანძილზე)

(ფიგ. 11.40).



ჰიპერბოლა შეიძლება განისაზღვროს როგორც სიმრავლე სიბრტყის ყველა იმ წერტილისა, რომელთაგან ამ სიბრტყეში მდებარე ორ მოცემულ წერტილამდე (ფოკუსებამდე) მანძილების სხვაობის მოდული მუდმივი სიდიდეა (ეს მუდმივი სიდიდე ნაკლებია ფოკუსებს შორის მანძილზე) (ფიგ. 11.43).

ფიგურა 11.43

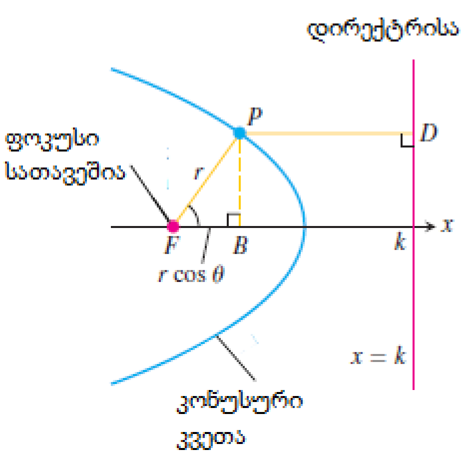
ელიფსი, პარაბოლა და ჰიპერბოლა შეიძლება ასეც აღიწეროს .
შევარჩიოთ სიბრტყეზე F წერტილი , d წრფე და დავასახელოთ $e \geq 0$ რიცხვი. მაშინ ისეთი P წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომელთათვისაც F წერტილამდე PF მანძილის შეფარდება d წრფემდე PD მანძილთან მუდმივი სიდიდეა

$$\frac{PF}{PD} = e\,, \tag{4}$$

წარმოადგენს კონუსურ კვეთას. F წერტილს **ფოკუსი** ეწოდება, ფიქსირებულ d წრფეს -- **დირექტრისა**, e რიცხვს კი -- **ექსცენტრისიტეტი**.
ექსცენტრისიტეტის სიდიდის მიხედვით გვაქვს:

- თუ $e > 1$ --ჰიპერბოლა;
- თუ $e = 1$ -- პარაბოლა;
- თუ $e < 1$ -- ელიფსი.

წრეწირისათვის უშვებენ $e = 0$.



ფიგურა 11.48

ელიფსის, პარაბოლის და ჰიპერბოლის პოლარული განტოლებების მისაღებად, ერთერთი ფოკუსი მოვათავსოთ სათავეში, შესაბამისი დირექტრისა კი სათავის მარჯვნივ $x = k$ ვერტიკალურ წრფეზე (ფიგ. 11.48). პოლარულ კოორდინატებში გვექნება

$$PF = r$$

და

$$PD = k - FB = k - r\cos\theta.$$

(4)-ის თანახმად $PF = e \cdot PD$, და გვექნება

$$r = e(k - r\cos\theta)\,,$$

რაც შეიძლება ამოიხსნას r -ის მიმართ.

კონუსური კვეთის პოლარული განტოლებაა

$$r = \frac{ke}{1+e\cos\theta} \quad , \qquad (5)$$

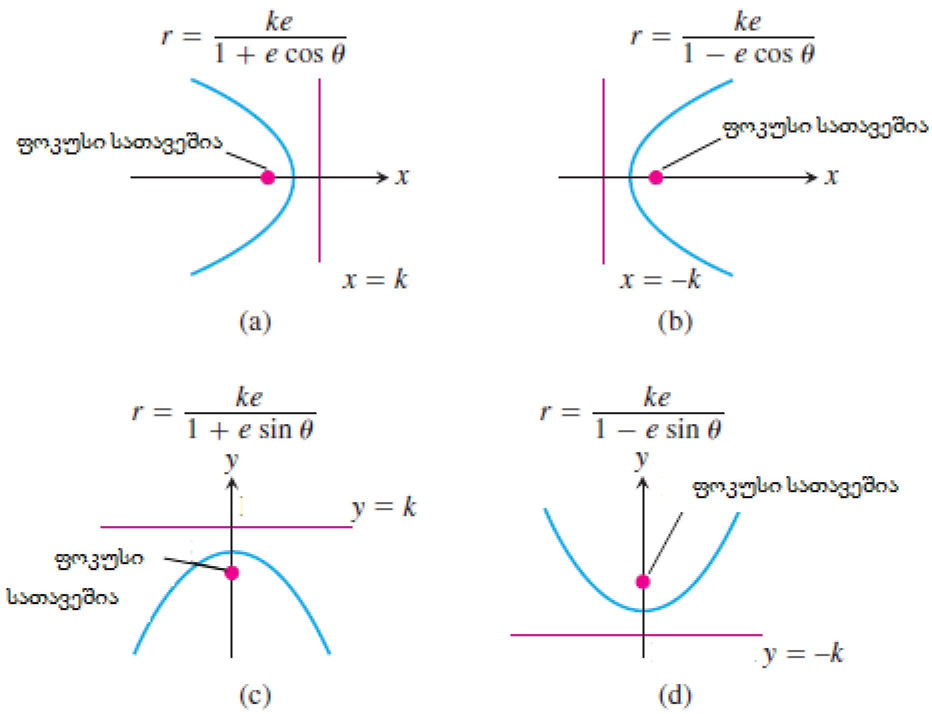
სადაც e ექსცენტრისიტეტია , $x = k > 0$ კი -- დირექტრისა.

მაგალითი 2. მოვიყვანოთ სამი კონუსური კვეთის პოლარული განტოლება. ექსცენტრისიტეტის სიდიდე ერთი და იგივეა პოლარული და დეკარტული სისტემების შემთხვევაში.

$$e = \frac{1}{2}: \quad \text{ელიფსი} \qquad r = \frac{k}{2+\cos\theta}$$

$$e = 1: \quad \text{პარაბოლა} \qquad r = \frac{k}{1+\cos\theta}$$

$$e = 2: \quad \text{ჰიპერბოლა} \qquad r = \frac{2k}{1+2\cos\theta}$$



ფიგურა 11.49

შეგვიძლია ვნახოთ, როგორ იცვლება (5) განტოლება დირექტრისის მდებარეობაზე დამოკიდებულად. თუ დირექტრისაა $x=-k$ წრფე, რომელიც სათავიდან მარცხნივაა (სათავე კვლავ ფოკუსშია), მაშინ (5) ასე შეიცვლება

$$r=\frac{ke}{1-e\cos\theta}.$$

მნიშვნელში ნიშანი (+) შეიცვალ (-)-ით. თუ დირექტრისად ავიღებთ $y=k$ ან $y=-k$ წრფეებს, მაშინ განტოლებებში კოსინუსი შეიცვლება სინუსით (ფიგ. 11.49) .

მაგალითი 3. ვიპოვოთ ჰიპერბოლის განტოლება $3/2$ ექსცენტრისიტეტით და $x=2$ დირექტრისით.

ამოხსნა. (5) ფორმულიდან მივიღებთ

$$r=\frac{2\cdot(3/2)}{1+(3/2)\cos\theta} \quad \text{ანუ} \quad r=\frac{6}{2+3\cos\theta}.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ

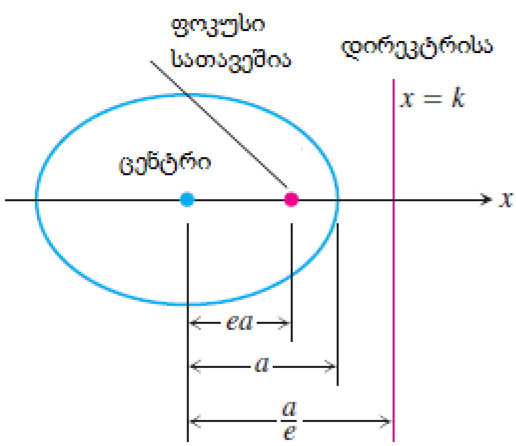
$$r=\frac{25}{10+10\cos\theta}.$$

პარაბოლის დირექტრისა.

ამოხსნა. მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ 10-ზე და განტოლება მივიყვანოთ სტანდარტულ პოლარულ სახეზე:

$$r=\frac{5/2}{1+\cos\theta}.$$

აქედან ჩანს, რომ $k=5/2$ და $e=1$. დირექტრისის განტოლებაა $x=5/2$.



ფიგურა 11.50

ფიგურა 11.50-ზე ნაჩვენები ელიფსის დიაგრამიდან ვხედავთ, რომ k დაკავშირებულია e ექსცენტრისიტეტთან და a დიდ ნახევარღერძ-თან ასეთნაირად

$$k=\frac{a}{e}-ea.$$

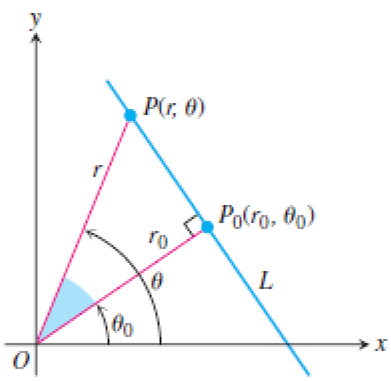
აქედან ვპოულობთ $ke=a(1-e^2)$. ამ ტოლობის გამოყენებით (5)-დან მიიღება ელიფსის სტანდარტული პოლარული განტოლება.

ელიფსის პოლარული განტოლება e ექსცენტრისიტეტით და a დიდი ნახევარღერძით

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \qquad (6)$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $e=0$, (6) -დან მიიღება წრეწირის განტოლება $r=a$.

წრფეები



ფიგურა 11.51

ვთქვათ სათავიდან L წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძეა $P_0(r_0,\theta_0), r_0 \geq 0$ წერტილი (ფიგ. 11.51). მაშინ, თუ $P(r,\theta)$ არის L წრფის სხვა წერტილი, P , P_0 და O წარმოადგენენ მართკუთხა სამკუთხედის წვეროებს, რის გამოც

$$r_0 = r\cos(\theta-\theta_0) .$$

თუ $P_0(r_0,\theta_0)$ არის სათავიდან L წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძე და $r_0 \geq 0$, მაშინ L -ის განტოლებაა

$$r\cos(\theta-\theta_0) = r_0 . \qquad (7)$$

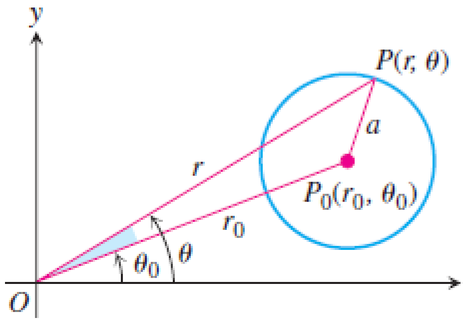
მაგალითად, თუ $\theta_0 = \pi/3$ და r_0 =2, ვპოულობთ

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$\frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta = 2, \quad \text{ანუ} \quad x + \sqrt{3}\,y = 4.$$

წრეწირები



ფიგურა 11.52

ვიპოვოთ a რადიუსის და $P_0(r_0,\theta_0)$ ცენტრის მქონე წრეწირის პოლარული განტოლება. ვთქვათ $P(r,\theta)$ წრეწირის წერტილია და სამკუთხედ OP_0P -ში გამოვიყენოთ კოსიუსების თეორემა (ფიგურა 11.52). მიიღება

$$a^2 = r_0^{\,2} + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta-\theta_0).$$

თუ წრეწირი სათავეზე გაივლის, მაშინ $r_0 = a$ და განტოლება ასე გამარტივდება:

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta-\theta_0) \\ r^2 &= 2ar\cos(\theta-\theta_0) \\ r &= 2a\cos(\theta-\theta_0). \end{aligned}$$

თუ წრეწირის ცენტრი ძევს დადებით x -ღერძზე, მაში $\theta_0 = 0$ და გვექნება ასეთი გამარტივება

$$r = 2a\cos\theta. \tag{8}$$

თუ ცენტრი ძევს დადებით y - ღერძზე, $\theta = \pi/2$, $\cos(\theta-\pi/2) = \sin\theta$, და $r = 2a\cos(\theta-\theta_0)$ განტოლება გვაძლევს

$$r = 2a\sin\theta. \tag{9}$$

მაგალითი 5. მოვიყვანოთ (8) და (9)-დან გამომდინარე რამდენიმე შედეგი იმ წრეწი-რების პოლარული განტოლებებისა, რომლებიც გადიან სათავეზე ცენტრი კი x- ან y-ღერძზეა.

რადიუსი	ცენტრი (პოლარ კოორდინატებში)	პოლარული განტოლება
3	$(3,0)$	$r = 6\cos\theta$
2	$(2,\pi/2)$	$r = 4\sin\theta$
1/2	$(-1/2,0)$	$r = -\cos\theta$
1	$(-1,\pi/2)$	$r = -2\sin\theta$

სავარჯიშოები 11.7

1--8 სავარჯიშოებში იპოვეთ ელიპსის ექსცენტრისიტეტი. შემდეგ მოძებნეთ და დახაზეთ ელიპსის ფოკუსები და დირექტრისები.

1. $16x^2 + 25y^2 = 400$

2. $7x^2 + 16y^2 = 112$

3. $2x^2 + y^2 = 2$

4. $2x^2 + y^2 = 4$

5. $3x^2 + 2y^2 = 6$

6. $9x^2 + 10y^2 = 90$

7. $6x^2 + 9y^2 = 54$

8. $169x^2 + 25y^2 = 4225$

29--36 სავარჯიშოებში მოცემულია კონუსური კვეთის ექსცენტრისიტეტი ერთ ერთი ფოკუსით სათავეში და შესაბამისი დირექტრისა. იპოვეთ კონუსური კვეთის პოლარული განტოლება.

29. $e = 1, \quad x = 2$

30. $e = 1, \quad y = 2$

31. $e = 5, \quad y = -6$

32. $e = 2, \quad x = 4$

33. $e = 1/2, \quad x = 1$

34. $e = 1/4, \quad x = -2$

35. $e = 1/5, \quad y = -10$

36. $e = 1/3, \quad y = 6$

37--44 სავარჯიშოებში გააკეთეთ პარაბოლას და ელიფსის ესკიზი. დახაზეთ აგრეთვე დირექტრისა, რომელიც სათავეში მოთავსებულ ფოკუსს შეესაბამება. წვეროები მონიშნეთ შესაბამისი პოლარული კოორდინატებით. მონიშნეთ აგრეთვე ელიფსის ცენტრი.

37. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$

38. $r = \dfrac{6}{2 + \cos\theta}$

39. $r = \dfrac{25}{10 - 5\cos\theta}$

40. $r = \dfrac{4}{2 - 2\cos\theta}$

41. $r = \dfrac{400}{16 + 8\sin\theta}$

42. $r = \dfrac{12}{3 + 3\sin\theta}$

43. $r = \dfrac{8}{2 - 2\sin\theta}$

44. $r = \dfrac{4}{2 - \sin\theta}$

45--48 სავარჯიშოებში ააგეთ წრფეები და იპოვეთ მათი დეკარტული განტოლებები.

45. $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

46. $r\cos\left(\theta + \dfrac{3\pi}{4}\right) = 1$

47. $r\cos\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right) = 3$

48. $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2$

49--52 სავარჯიშოებში იპოვეთ წრფის $r\cos(\theta-\theta_0)=r_0$ სახის პოლარული განტოლება.

49. $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=6$ **50.** $\sqrt{3}x-y=1$
51. $y=-5$ **52.** $x=-4$

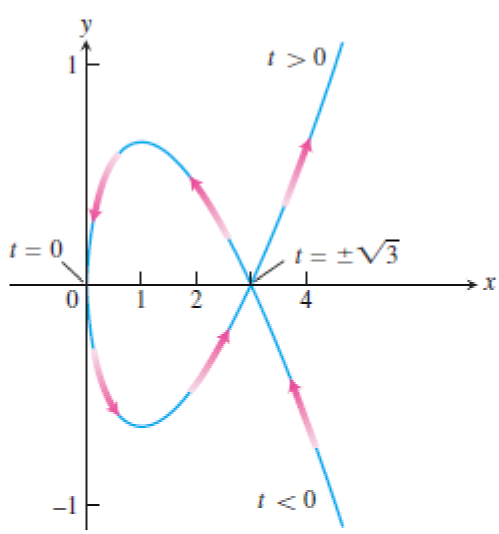
53--56 სავარჯიშოებში დახაზეთ წრეწირები. დაასახელეთ მათი ცენტრების პოლარული კოორდინატები და იპოვეთ რადიუსი.

53. $r=4\cos\theta$ **54.** $r=6\sin\theta$
55. $r=-2\cos\theta$ **56.** $r=-8\sin\theta$

57--64 სავარჯიშოებში იპოვეთ წრეწირის პოლარული განტოლება. ააგეთ სათანადო გრაფიკი.

57. $(x-6)^2+y^2=36$ **58.** $(x+2)^2+y^2=4$
59. $x^2+(y-5)^2=25$ **60.** $x^2+(y+7)^2=49$
61. $x^2+2x+y^2=0$ **62.** $x^2-16x+y^2=0$
63. $x^2+y^2+y=0$ **64.** $x^2+y^2-\frac{4}{3}y=0$

20 (მე-11 თავის). იპოვეთ ქვემოთ მოყვანილი შეკრული მარყუჟის სიგრძე, თუ მისი პარამეტრული განტოლებებია $x=t^2,\ y=(t^3/3)-t$. მარყუჟი იწყება $t=-\sqrt{3}$ -დან და მთავრდება $t=\sqrt{3}$ -ზე.



დამატებითი სავარჯიშოები

თავი 6 (პრაქტიკული სავარჯიშოები)

17--20 სავარჯიშოებში იპოვეთ წირის სიგრძე

17. $y = x^{1/2} - (1/3)x^{3/2}, \quad 1 \le x \le 4$

18. $x = y^{2/3}, \quad 1 \le y \le 8$

19. $y = x^2 - (\ln x)/8, \quad 1 \le x \le 2$

20. $x = (y^3/12) + (1/y), \quad 1 \le y \le 2$

21--24 სავარჯიშოებში იპოვეთ მითითებული ღერძის ირგვლივ წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

21. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \le x \le 3;$ x ღერძი

22. $y = x^3/3, \quad 0 \le x \le 1;$ x ღერძი

23. $x = \sqrt{4y - y^2}, \quad 1 \le y \le 2;$ y ღერძი

24. $x = \sqrt{y}, \quad 2 \le y \le 6;$ y ღერძი

28. 200 ნ ძალა გარაჟის კარის ზამბარას წააგრძელებს 0.8 მ-ით. რა სიდიდით წააგრძელებს ზამბარას 300 ნ ძალა? რა სიდიდის მუშაობა შესრულდება ამ დროს?

33. იპოვეთ თხელი, ბრტყელი ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი, თუ შესაბამისი არე საკოორდინატო სიბრტყეზე შემოსაზღვრულია წირებით $y = 2x^2$ და $y = 3 - x^2$.

34. იპოვეთ თხელი, ბრტყელი ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი, თუ შესაბამისი არე საკოორდინატო სიბრტყეზე შემოსაზღვრულია $x = -2$, $x = 2$, $y = x^2$ წირებით $y = 2x^2$ და x ღერძით.

35. იპოვეთ თხელი, ბრტყელი ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი, თუ შესაბამისი არე საკოორდინატო სიბრტყეზე შემოსაზღვრულია $y = 4$, $y = x^2/4$ წირებით და y ღერძით.

36. იპოვეთ თხელი, ბრტყელი ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი, თუ შესაბამისი არე საკოორდინატო სიბრტყეზე შემოსაზღვრულია $y^2 = x$ და $x = 2y$ წირებით.

37. იპოვეთ თხელი, ბრტყელი ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი, თუ შესაბამისი არე საკოორდინატო სიბრტყეზე შემოსაზღვრულია $y^2 = x$ და $x = 2y$ წირებით, ხოლო სიმკვრივეა $\delta(y) = 1 + y$. (გამოიყენეთ ჰორიზონტალური ზოლები)

თავი 8 (პრაქტიკული სავარჯიშოები)

1--8 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ინტეგრალები ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით.

1. $\int \ln(x+1)\,dx$

2. $\int x^2 \ln x\,dx$

3. $\int \tan^{-1} 3x\,dx$

4. $\int \cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) dx$

5. $\int (x+1)^2 e^x\,dx$

6. $\int x^2 \sin(1-x)\,dx$

7. $\int e^x \cos 2x\,dx$

8. $\int e^{-2x} \sin 3x\,dx$

9--28 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ინტეგრალები. შეიძლება დაგჭირდეთ ჩასმა.

9. $\int \frac{x\,dx}{x^2 - 3x + 2}$

10. $\int \frac{x\,dx}{x^2 + 4x + 3}$

11. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

12. $\int \frac{x+1}{x^2(x-1)}\,dx$

13. $\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}$

14. $\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin^2\theta + \sin\theta - 6}$

15. $\int \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^3 + x}\,dx$

16. $\int \frac{4x\,dx}{x^3 + 4x}$

17. $\int \frac{v+3}{2v^3 - 8v}\,dv$

18. $\int \frac{(3v-7)\,dv}{(v-1)(v-2)(v-3)}$

19. $\int \frac{dt}{t^4 + 4t^2 + 3}$

20. $\int \frac{t\,dt}{t^4 - t^2 - 2}$

21. $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2}\,dx$

22. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x}\,dx$

23. $\int \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 4x + 3}\,dx$

24. $\int \frac{2x^3 + x^2 - 21x + 24}{x^2 + 2x - 8}\,dx$

25. $\int \frac{dx}{x\left(3\sqrt{x+1}\right)}$

26. $\int \frac{dx}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}$

27. $\int \frac{ds}{e^s - 1}$

28. $\int \frac{ds}{\sqrt{e^s + 1}}$

53--62 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალები

53. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

54. $\int_0^1 \ln x\,dx$

55. $\int_0^2 \frac{dy}{(y-1)^{2/3}}$

56. $\int_{-2}^0 \frac{d\theta}{(\theta+1)^{3/5}}$

57. $\int_3^{\infty} \frac{2\,du}{u^2 - 2u}$

58. $\int_1^{\infty} \frac{3v - 1}{4v^3 - v^2}\,dv$

59. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx$

60. $\int_{-\infty}^{0} x e^{3x}\,dx$

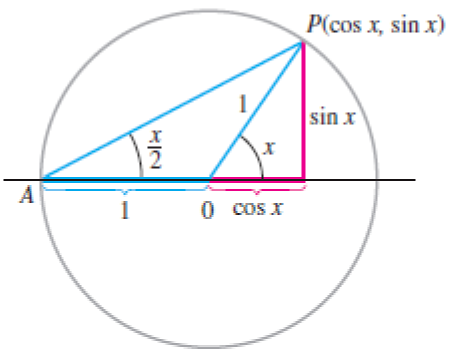
61. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2 + 9}$

62. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\,dx}{x^2 + 16}$

უნივერსალური ჩასმა $z = \tan(x/2)$

$$z = \tan\frac{x}{2} \qquad (7)$$

ჩასმას $\sin x$ და $\cos x$ -ის მიმართ რაციონალური გამოსახულებების ინტეგრება მიჰყავს z -ის მიმართ რაციონალური გამოსახულების ინტეგრებაზე. ამ უკანასკნელის ინტეგრება კი შესაძლოა ელემენტარულ წილადებად დაშლით.



მოყვანილი ნახაზიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

გამოთვლა გვიჩვენებს

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)} - 1$$

$$= \frac{2}{1 + \tan^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1 + z^2} - 1$$

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \qquad (8)$$

და

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\tan\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sec^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$$

$$\sin x = \frac{2z}{1 + z^2}. \qquad (9)$$

და ბოლოს, $x = 2\tan^{-1} z \Rightarrow$

$$dx = \frac{2dz}{1 + z^2}. \qquad (10)$$

მაგალითები

a. $$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{1+z^2}{2}\frac{2\,dz}{1+z^2}$$
$$= \int dz = z + C$$
$$= \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

b. $$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{1+z^2}{2+2z+2z^2}\,\frac{2\,dz}{1+z^2}$$
$$= \int \frac{dz}{z^2+z+1} = \int \frac{dz}{(z+(1/2))^2+3/4}$$
$$= \int \frac{du}{u^2+a^2}$$
$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1+2\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + C$$

41--48 სავარჯიშოებში გამოიყენეთ (7)-(10) ტოლობები ინტეგრალების გამოსათვლელად.

41. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$

42. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

43. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$

44. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}$

45. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

46. $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}$

47. $\int \frac{dt}{\sin t-\cos t}$

48. $\int \frac{\cos t\,dt}{1-\cos t}$

თავი 10 (პრაქტიკული სავარჯიშოები)

1--12 სავარჯიშოებში დაადგინეთ, კრებადია თუ განშლადი მიმდევრობა. თუ კრებადია, იპოვეთ ზღვარი.

1. $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

2. $a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}}$

3. $a_n = \dfrac{1-2^n}{2^n}$

4. $a_n = 1 + (0.9)^n$

5. $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$

6. $a_n = \sin n\pi$

7. $a_n = \dfrac{\ln(n^2)}{n}$

8. $a_n = \dfrac{\ln(2n+1)}{n}$

9. $a_n = \dfrac{n + \ln n}{n}$

10. $a_n = \dfrac{\ln(2n^3+1)}{n}$

11. $a_n = \left(\dfrac{n-5}{n}\right)^n$

12. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

19--24 სავრჯიშოებში იპოვეთ მწკრივის ჯამი.

19. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n(n+1)}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{(3n-1)(3n+2)}$

22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{-8}{(4n-3)(4n+1)}$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^n}$

25--36 სავარჯიშოებში რომელი მწკრივია კრებადი აბსოლუტურად? პირობითად? რომელია განშლადი? პასუხი დაასაბუთეთ.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5}{n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

30. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

32. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{\ln(\ln n)}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n^2}{n^3+1}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+n-1}$

41--50 სავარჯიშოებში: **(ა)** დაადგინეთ მწკრივის კრებადობის რადიუსი და ინტერვალი. შემდეგ განსაზღვრეთ, რომელი მწკრივია კრებადი **(ბ)** აბსოლუტურად და **(გ)** პირობითად.

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n3^n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-2}}{(2n-1)!}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3x-1)^n}{n^2}$

44. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(2x+1)^n}{(2n+1)2^n}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

47. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{2n-1}}{3^n}$

48. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^{2n+1}}{2n+1}$

49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{csch} n)x^n$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\coth n)x^n$

თავი 11 (პრაქტიკული სავარჯიშოები)

39--46 სავარჯიშოებში გრაფიკებს შეუთანადეთ განტოლებები. განტოლებების რაოდენობა მეტია, ამიტომ ზოგიერთი მათგანისთვის გრაფიკი არაა ნაჩვენები

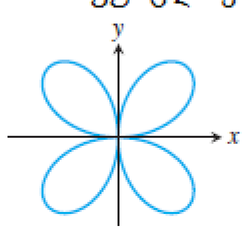
a. $r = \cos 2\theta$ **b.** $r\cos\theta = 1$ **c.** $r = \dfrac{6}{1 - 2\cos\theta}$

d. $r = \sin 2\theta$ **e.** $r = \theta$ **f.** $r^2 = \cos 2\theta$

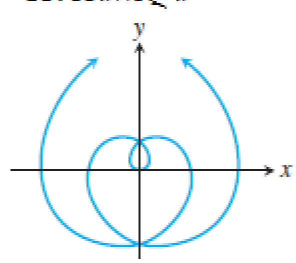
g. $r = 1 + \cos\theta$ **h.** $r = 1 - \sin\theta$ **i.** $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

j. $r^2 = \sin 2\theta$ **k.** $r = -\sin\theta$ **l.** $r = 2\cos\theta + 1$

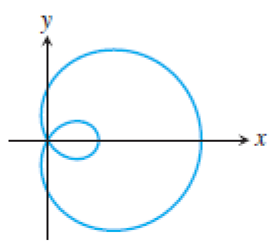
39. ოთხფურცლა ვარდი



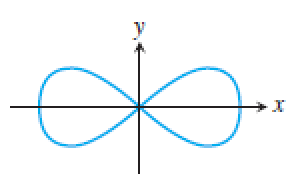
40. სპირალი



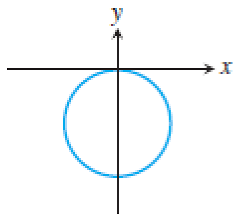
41. ლიმაკონი



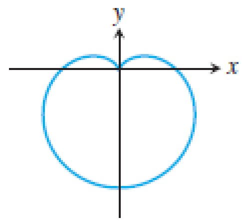
42. ლემნისკატი



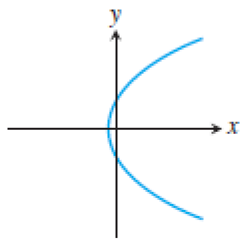
43. წრეწირი



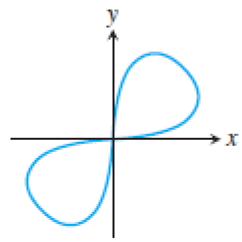
44. კარდიოიდი



45. პარაბოლა



40. ლემნისკატი



51--54 სავარჯიშოებში იპოვეთ პოლარული კოორდინატებით მოცემული წირის სიგრძე.

51. $r = -1 + \cos\theta$

52. $r = 2\sin\theta + 2\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$

53. $r = 8\sin^3(\theta/3), \quad 0 \le \theta \le \pi/4$

54. $r = \sqrt{1 + \cos 2\theta}, \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

81--84 სავარჯიშოებში მოცემულია კონუსური კვეთის ექსცენტრისიტეტი და დირექტრისა იმ ფოკუსთან, რომელიც პოლარული კოორდინატების სათავეშია. იპოვეთ კვეთის პოლარული განტოლება.

81. $e = 2, \quad r\cos\theta = 2$ **82.** $e = 1, \quad r\cos\theta = -4$

83. $e = 1/2, \quad r\sin\theta = 2$ **84.** $e = 1/3, \quad r\sin\theta = -6$