მათემატიკის საფუძვლები

დამხმარე სახელმძღვანელო
I-VI კლასების მოქმედი და
მომავალი მასწავლებლებისთვის

USAID FROM THE AMERICAN PEOPLE

G-PRIED Georgia Primary Education Project
საქართველოს დაწყებითი განათლების პროექტი

ზოგადი განათლების ეროვნული მიზნებიდან გამომდინარე, ეროვნული სასწავლო გეგმა ეფუძნება პიროვნების განვითარებაზე ორიენტირებულ კონსტრუქტივისტულ საგანმანათლებლო კონცეფციას.

ეს ხედვა რეალიზებულია ეროვნული სასწავლო გეგმის როგორც მოქმედ (იხ. თავი VI. ძირითადი მეთოდიკური ორიენტირები, მუხლი 33. გაღრმავებული სწავლება), ასევე განახლებულ (იხ.თავი II. სწავლა-სწავლების მიზნები და საგანმანათლებლო პრინციპები, მუხლი 9. ეროვნული სასწავლო გეგმის ძირითადი საგანმანათლებლო პრინციპები) ვერსიებში.

მათემატიკის სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებში ამ პრინციპების შესაბამისად საჭიროებს მასწავლებლის სათანადო საუნივერსიტეტო მომზადებასა და მოქმედი მასწავლებლების პროფესიულ განვითარებას – მათი მათემატიკური ცოდნის გაფართოება-გაღრმავებას ისეთ საკითხებში, რომლებიც აუცილებელია მათემატიკის სწავლებაში კონსტრუქტივისტული საგანმანათლებლო კონცეფციის განხორციელებისთვის. ასეთი საკითხები შესაფერისი მოცულობით, სიღრმითა და აქცენტების დასმით არ არის წარმოდგენილი პედაგოგთა მომზადებისთვის განკუთვნილ მათემატიკის საუნივერსიტეტო კურსებში. ამიტომ მათემატიკის მოქმედ მასწავლებლებს და სკოლაში პრაქტიკაზე გასულ სტუდენტებს უჭირთ სასწავლო საკითხების დამუშავება სწავლების კონსტრუქტივისტული მეთოდოლოგიის გამოყენებით; მითუმეტეს, რომ არც მოქმედ სასკოლო სახელმძღვანელოებშია წარმოდგენილი საჭირო სავარჯიშოები და სწავლების ეტაპები. შედეგად, მოსწავლეებს არათუ საკუთარი ცოდნის კონსტრუირება არ შეუძლიათ, არამედ, საზოგადოდ, აქვთ მათემატიკის გააზრებულად სწავლის პრობლემები.

წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელო სწორედ ზემოაღნიშნული ხარვეზების აღმოფხვრის მიზნით შეიქმნა საქართველოს დაწყებითი განათლების პროექტში. წიგნი განკუთვნილია უნივერსიტეტების განათლების ფაკულტეტების დაწყებითი განათლების სპეციალობის სტუდენტებისა და ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლების დაწყებითი საფეხურის მოქმედი მასწავლებლებისთვის.

წიგნი 10 თავისგან შედგება და მოიცავს სიმრავლეებთან, ნატურალურ რიცხვებთან, მათზე მოქმედებებთან, შეფარდებასთან და პროპორციასთან, მათემატიკურ გამოსახულებასთან და მის რიცხვით მნიშვნელობასთან, ტოპოლოგიის საწყისებთან, ბრტყელ და სივრცულ ფიგურებთან, აგრეთვე, სტატისტიკასთან დაკავშირებულ საკითხებს. ამასთან, ყურადღება გამახვილებულია სწორედ იმ ასპექტებზე, რომლებიც ხელს უწყობს სასკოლო პროგრამის შესაბამისი საკითხების სიღრმისეულ წვდომასა და გააზრებულად სწავლებას კონსტრუქტივისტული მეთოდოლოგიის გამოყენებით. წიგნში ყოველ თავს ახლავს სავარჯიშოთა კრებული დამოუკიდებელი მუშაობისთვის და შემაჯამებელი ტესტი პასუხებით. თეორიული საკითხები გათვალსაჩინოებულია მრავალრიცხოვანი ნახაზებითა და სქემებით, განხილულია საინტერესო და მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევები, მოყვანილია ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები, რეკომენდაციები საკითხის სწავლებასთან დაკავშირებით.

თანამედროვე ქართულენოვანი საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელოების დეფიციტის პირობებში წიგნი მნიშვნელოვან დახმარებას გაუწევს სკოლის მასწავლებლებს, უნივერსიტეტის სტუდენტებსა და მათ პროფესორ-მასწავლებლებს. მიუხედავად იმისა, რომ იგი არ წარმოადგენს მათემატიკის სრულ სასწავლო საუნივერსიტეტო კურსს, იგი შეავსებს მოქმედ საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელოებს მათემატიკის კონსტრუქტივისტული სწავლებისთვის აუცილებელი სპეციფიკური მასალით, როგორიცაა, მაგალითად, მოსწავლეთა ტიპური შეცდომები ამა თუ იმ საკითხთან დაკავშირებით ან სასწავლო ხარაჩოების მიწოდებისთვის საჭირო რეკომენდაციები.

წიგნის შექმნაში განსაკუთრებული წვლილი მიუძღვით საქართველოს დაწყებითი განათლების პროექტის ტრენერებსა და ექსპერტებს ზურაბ ვახანიას, მიმოზა ტყებუჩავას და თამარ ჭყონიას, რისთვისაც მადლობას ვუხდით მათ.

საქართველოს დაწყებითი განათლების პროექტის
მათემატიკის მიმართულების ხელმძღვანელი

მათემატიკის საფუძვლები

დამხმარე სახელმძღვანელო I-VI კლასების მოქმედი და მომავალი მასწავლებლებისთვის

ამ მასალის მომზადება შესაძლებელი გახდა ამერიკელი ხალხის კეთილი ნებითა და აშშ საერთაშორისო განვითარების სააგენტოს მხარდაჭერით. მასალის შინაარსზე პასუხისმგებელია შემდგენელი და იგი არ წარმოადგენს აშშ საერთაშორისო განვითარების სააგენტოს ან აშშ მთავრობის აზრს. ეს მასალა მომზადდა აშშ საერთაშორისო განვითარების სააგენტოს დაწყებითი განათლების პროექტის ფარგლებში, რომელიც ხორციელდება საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროსთან ერთად.

ISBN 978-9941-0-9803-5

თბილისი 2017

შინაარსი

შინაარსი

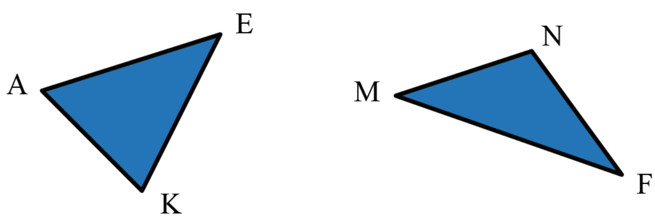
თავი 1. სიმრავლე (ერთობლიობა)

1. სიმრავლე და მისი ჩაწერა

ხშირად საჭიროა განვიხილოთ სხვადასხვა საგნებისა თუ სიმბოლოების გარკვეული **ერთობლიობა.** მათემატიკაში ასეთ ერთობლიობას „სიმრავლე" ეწოდება. **სიმრავლე** მათემატიკის ერთ-ერთი პირველადი ცნებაა.

სიმრავლის ჩასაწერად ვიყენებთ ფიგურულ ფრჩხილებს { }. ჩვეულებრივ, სიმრავლე დიდი ლათინური ასოთი აღინიშნება. მაგალითად, ქართული ანბანის პირველი ექვსი ასოს ერთობლიობა ასე ჩაიწერება: A=*{ა, ბ, გ, დ, ე, ვ};* ყველა ერთნიშნა ლუწი რიცხვის სიმრავლე კი – ასე: B=*{0, 2, 4, 6, 8}.* ობიექტებს, რისგანაც შედგება სიმრავლე, მისი **ელემენტები** ეწოდება.

ნახაზზე მოცემული სამკუთხედების სიმრავლე ასე ჩაიწერება: C={ΔAEK, ΔMNF}, ხოლო ამავე სამკუთხედების გვერდების ერთობლიობა კი – ასე: D={AE, EK, AK, MN, NF, MF}.



თუ a არის სიმრავლის ელემენტი, ვწერთ: $a \in A$. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ასე: $a \notin A$

> შევნიშნოთ, რომ განსხვავებით ობიექტთა რიგისგან, სიმრავლის ჩაწერისას არ აქვს მნიშვნელობა ამ სიმრავლის ელემენტების თანმიმდევრობას და სიმრავლეში არ შეიძლება იყოს ორი ერთიდაიგივე ელემენტი.

მაგალითად, ერთნიშნა ლუწი ნატურალური რიცხვების სიმრავლეა: *{2, 4, 6, 8}* ან *{8, 4, 2, 6}* ან *{6, 2, 4, 8}* და სხვა. ისინი ერთიდაიგივე სიმრავლეებია. მაგალითად, სიმრავლე *{3, 8, 6, 3, 2}* არ არის სწორად ჩაწერილი. სწორი ჩანაწერია: *{3, 8, 6, 2}.* მართლაც, რადგან ვიცით, რომ 3 არის ამ სიმრავლის ელემენტი, მის ორჯერ მითითებას აზრი არა აქვს, ისევე როგორც: თუ ლუკა აბსანძე IIIᵇ კლასის მოსწავლეთა სიაში ირიცხება, მაშინ სიაში მის სახელსა და გვარს არავინ გაიმეორებს.

ამრიგად, სიმრავლის ჩაწერისას საჭიროა ვიცოდეთ ობიექტები, რომლისგანაც შედგება სიმრავლე, ანუ სიმრავლის ელემენტები. შეიძლება ვილაპარაკოთ ვარსკვლავების, ქალაქების, ხეების, ხილის, ბავშვების, სათამაშოების და სხვათა სიმრავლეებზე. მაგალითად, ზოგიერთი ხილის ერთობლიობაა: *{ვაშლი, მსხალი, კომში, ბალი, ქლიავი},* ხოლო ზოგიერთ საკრავთა ერთობლიობაა: *{ფანდური, დოლი, სტვირი, გიტარა}.*

სიმრავლე სასრულია, თუ სიმრავლეში შესაძლებელია მისი ყველა ელემენტის ჩამოთვლა. სხვა შემთხვევაში სიმრავლე უსასრულოა. მაგალითად, სიმრავლე A=*{თბილისი}*, საქართველოს დედაქალაქების ერთობლიობა, ერთელემენტიანი სიმრავლეა, ხოლო სიმრავლე B=*{19, 0, 105, 4, 600}* ზოგიერთ მთელ რიცხვთა ერთობლიობაა, იგი ხუთელემენტიანია. უსასრულო სიმრავლის მაგალითია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე.

სიმრავლე შეიძლება ჩაიწეროს ელემენტებისათვის დამახასიათებელი ნიშნის მიხედვითაც. მაგალითად, ლუწ რიცხვთა სიმრავლე: $\{x \mid x = 2n,\ n \in N\}$.

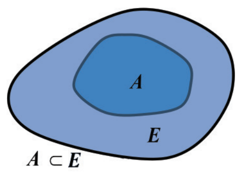
შევნიშნოთ, რომ ყოველი გეომეტრიული ფიგურა შეიძლება განვიხილოთ როგორც სიმრავლე. მაგალითად, ნაკვთი არის სიბრტყის გარკვეულ წერტილთა ერთობლიობა, ხოლო სხეული – სივრცის გარკვეულ წერტილთა ერთობლიობა.

როგორც ვხედავთ, შეიძლება განვიხილოთ და ჩავწეროთ ისეთი **სიმრავლეები, რომელთა ელემენტები კანონზომიერების მიხედვით არაა დალაგებული**. ერთობლიობა რიგი არ არის, ერთობლიობა გროვაა.

2. ცარიელი სიმრავლე, ქვესიმრავლე, ტოლი სიმრავლეები

სიმრავლეს, რომელიც არც ერთ ელემენტს შეიცავს, ცარიელი სიმრავლე ეწოდება. მას $\varnothing$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ცარიელი სიმრავლე სასრულია, რადგან მასში შემავალი ელემენტების რაოდენობა ნულია.

თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი E სიმრავლის ელემენტიცაა, მაშინ A სიმრავლეს E სიმრავლის **ქვესიმრავლე** ეწოდება და ასე ჩაიწერება: $A \subset E$.



წინააღმდეგ შემთხვევაში, A სიმრავლე არ არის E სიმრავლის ქვესიმრავლე, რაც ასე ჩაიწერება: $A \not\subset E$.

მაგალითად, ყველა ადამიანთა ერთობლიობა მოიცავს ქართველთა ერთობლიობას, ანუ ქართველთა სიმრავლე კაცობრიობის სიმრავლის ქვესიმრავლეა; დედაქალაქების სიმრავლე ქალაქების სიმრავლის ქვესიმრავლეა და ასე შემდეგ.

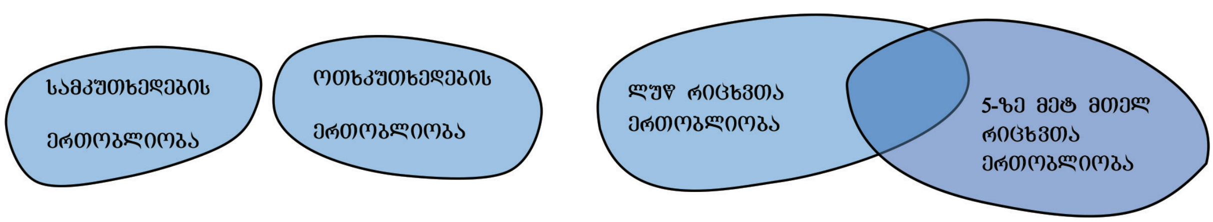
ყოველი სიმრავლე თავისი თავის ქვესიმრავლეა, ხოლო ცარიელი სიმრავლე ყველა სიმრავლის ქვესიმრავლეა.

მაგალითად, $\{a, c, e, m\}$ სიმრავლე არ არის $\{a, b, c, e, d, k, n\}$ სიმრავლის ქვესიმრავლე, რადგან მეორე სიმრავლე არ შეიცავს m ელემენტს; სამკუთხედების ერთობლიობა არ არის ოთხკუთხედების ერთობლიობის ქვესიმრავლე; ლუწ რიცხვთა ერთობლიობა არ არის 5-ზე მეტ რიცხვთა ერთობლიობის ქვესიმრავლე და ასე შემდეგ.

ცნობილია, რომ n ელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაოდენობა დაითვლება შემდეგი ფორმულით – 2^n.

მაგალითად, ადვილია იმის შემოწმება, რომ $B=\{a, c, e\}$ სამელემენტიან სიმრავლეს აქვს $2^3 = 8$ ცალი ქვესიმრავლე.

როგორც ნახაზებზე ჩანს, სიმრავლეთა ურთიერთმიმართებები შეიძლება გამოისახოს სქემებით:



ამგვარ სქემას ეწოდება **ეილერ-ვენის დიაგრამა**. იგი თვალსაჩინოდ აჩვენებს სიმრავლეთა შორის მიმართებებს. ნახაზზე არეები ბრტყელი ფიგურების სახითაა წარმოდგენილი. ფორმას მნიშვნელობა არ აქვს, არე შეიძლება იყოს, მაგალითად, წრიული, სამკუთხა ან მართკუთხა.

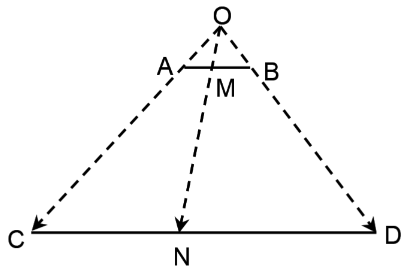
ორი A და B სიმრავლე ტოლია, თუ ეს სიმრავლეები ერთი და იმავე ელემენტებისაგან შედგება. A და B სიმრავლეების ტოლობა ასე ჩაიწერება: $A=B$. მაგალითად, 7-ზე ნაკლებ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე და 30-ის მარტივ გამყოფთა სიმრავლე ტოლი სიმრავლეებია.

ორ სიმრავლეს ტოლძალოვანი (და არა ტოლი) ეწოდება, თუ ამ სიმრავლეებში ტოლი რაოდენობის ელემენტებია. მაგრამ როგორ უნდა გაირკვეს, არის თუ არა ორი სიმრავლე ტოლძალოვანი? თუ სიმრავლეები სასრულია, მათ ელემენტებს გადაითვლიან. მაგრამ თუ სიმრავლეები უსასრულოა?

საზოგადოდ, ორ სიმრავლეს ტოლძალოვანი ეწოდება, თუ შესაძლებელია მათი ელემენტების დაწყვილება, ანუ თუ ერთი სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეიძლება შევუსაბამოთ მეორე სიმრავლის ერთი ელემენტი და პირიქით.

ასეთი შესაბამისობა შეიძლება არსებობდეს უსასრულო სიმრავლეებს შორისაც. მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლესა $\{1,2,3,4,...m,...\}$ და ამ რიცხვთა კვადრატების სიმრავლეს $\{1,4,9,16,...m^2...\}$ შორის.

ასევე, მაგალითად, ყოველი ორი მონაკვეთი, გრძელი და მოკლე, ტოლძალოვანია, რადგან შესაძლებელია მათი წერტილების დაწყვილება. ეს თვალსაჩინოდ ჩანს ნახაზზე. ესე იგი გრძელ მონაკვეთზე „იმდენივე" წერტილია, რამდენიც – მოკლეზე.

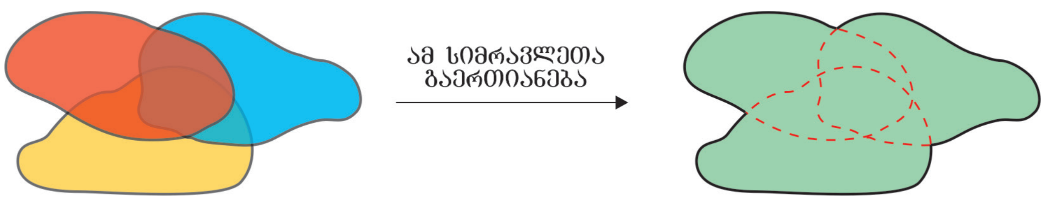


3. სიმრავლეთა გაერთიანება და თანაკვეთა. თანაუკვეთი სიმრავლეები

ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლეთა ერთობლიობა:

$E_1, E_2, E_3, \ldots$ სიმრავლეთა გაერთიანება ეწოდება მათი ყველა ელემენტის ისეთ G ერთობლიობას, რომლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის $E_1, E_2, E_3, \ldots$ სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც.

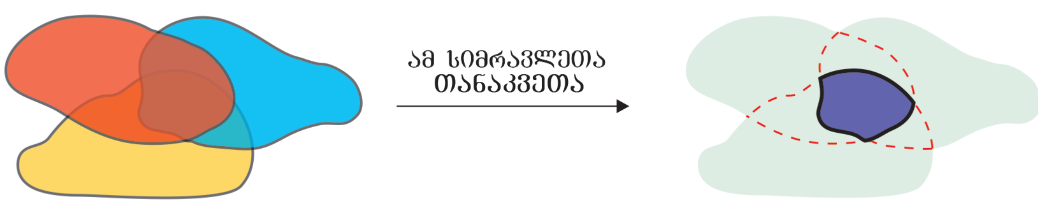
ანუ, სიმრავლეთა **გაერთიანება** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შედგება



$E_1, E_2, E_3 \ldots$ სიმრავლეების უკლებლივ ყველა ელემენტისგან და მხოლოდ მათგან. გაერთიანება ასე აღინიშნება: $G=E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots$

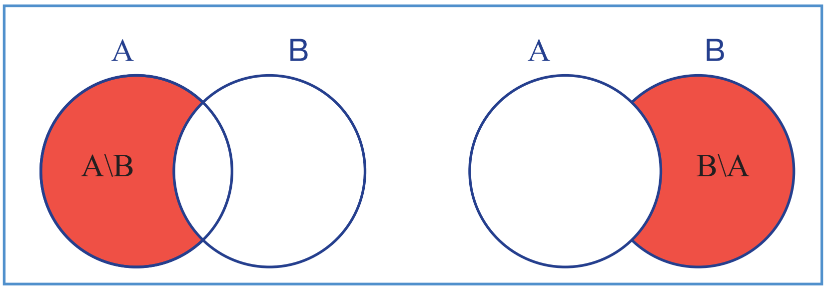
$E_1, E_2, E_3, \ldots$ სიმრავლეთა **თანაკვეთა** ეწოდება მათი ყველა საერთო ელემენტის ისეთ T ერთობლიობას, რომლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის თითოეულს $E_1, E_2, E_3, \ldots$ სიმრავლეთაგან.

ანუ, სიმრავლეთა **თანაკვეთა** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შედგება უკლებლივ, მათი ყველა იმ ელემენტისგან, რომელიც ეკუთვნის ყველას $E_1, E_2, E_3, \ldots$ სიმრავლეთაგან და მხოლოდ ასეთი ელემენტებისგან. თანაკვეთა აღინიშნება ასე: $T=E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots$

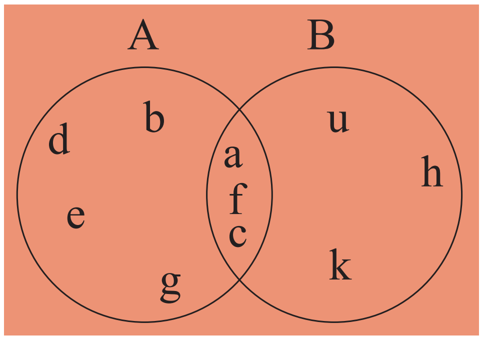


ვთქვათ, მოცემულია A და B სიმრავლეები. A და B სიმრავლის სხვაობა არის A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა ერთობლიობა, რომლებიც არ ეკუთვნის B სიმრავლეს. A და B სიმრავლის სხვაობა აღინიშნება შემდეგნაირად: A\B.

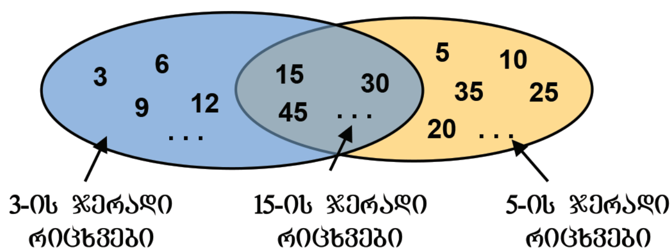
ვთქვათ, მაგალითად: A={0,2,4,5}; B={0,3,5}; A∪B={0,2,4,5,3}; A∩B={0,5}; A\B={2,4}, B\A={3}.



კიდევ, მაგალითად, ვთქვათ, $A=\{e,d,b,g,a,f,c\}$, $B=\{a,f,c,u,k,h\}$, მაშინ $A\backslash B=\{e,d,b,g\}$, $B\backslash A=\{u,k,h\},\}$

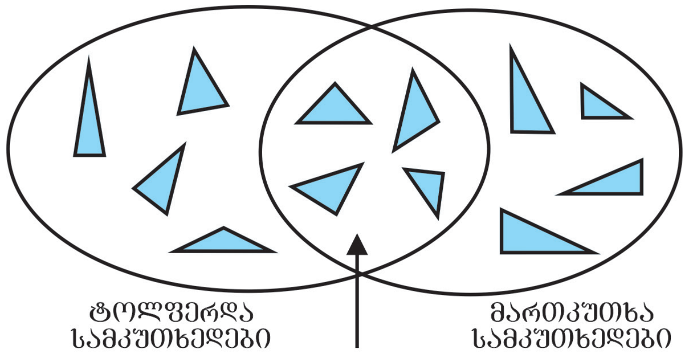


ვთქვათ, ახლა A={3, 6, 9, 12, 15, 18, ... } 3-ის ჯერადი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა, ხოლო B={5, 10, 15, 20, 25, 30, ... } 5-ის ჯერადი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე. A და B სიმრავლეთა თანაკვეთა, ანუ A∩B არის ყველა იმ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც ერთდროულად 3-ის ჯერადიცაა და 5-ის ჯერადიც. ეს კი იგივეა, რაც 15-ის ჯერად რიცხვთა სიმრავლე; ანუ A∩B={15,30,45,…} (იხ. ვენის დიაგრამა).



ტოლფერდა სამკუთხედთა და მართკუთხა სამკუთხედთა სიმრავლეების თანაკვეთაა ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედთა სიმრავლე (იხ. ვენის დიაგრამა).

ლუწ და კენტ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანებაა ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე.

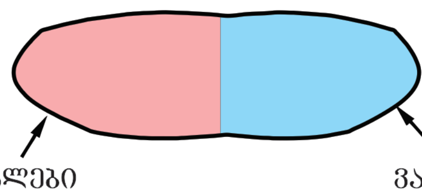


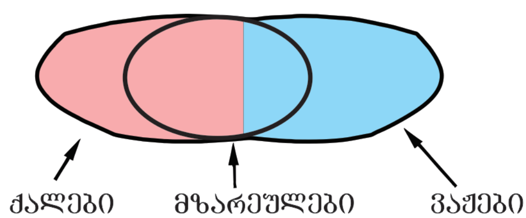
ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედები

ერთნიშნა რიცხვთა ერთობლიობისა და 20-ზე ნაკლებ ლუწ რიცხვთა ერთობლიობის გაერთიანებაა {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18}; ხოლო მათი თანაკვეთაა {0, 2, 4, 6, 8} სიმრავლე.

ორ ან რამდენიმე სიმრავლეს, რომელთაც საერთო ელემენტი არ აქვთ **თანაუკვეთი** სიმრავლეები ეწოდება.

თუ A და B სიმრავლეები თანაუკვეთია, მაშინ $A \cap B = \varnothing$. მაგალითად, ლუწ რიცხვთა სიმრავლე და კენტ რიცხვთა სიმრავლე – თანაუკვეთი სიმრავლეებია, რადგან რიცხვი არ შეიძლება იყოს ერთდროულად კენტიც და ლუწიც, ამიტომ მათ საერთო ელემენტი არ აქვთ. ასევე, ქალების და ვაჟების სიმრავლეები თანაუკვეთია; ხოლო ვაჟების სიმრავლე და მზარეულთა სიმრავლე არ არის თანაუკვეთი, რადგან ზოგი მზარეული – ვაჟია. რაც თვალსაჩინოდ ჩანს ვენის დიაგრამებზე.





4. „და“, „ან“, „ან-ან“ კავშირები

კავშირი **„და“** მათემატიკაში ისევე, როგორც ყოფით ცხოვრებაში ნიშნავს იმ ჩამონათვალთა ერთობლიობას, რომელშიც მონაწილეობს ეს კავშირი. მაგალითად, წინადადება: *„k რიცხვი იყოფა 2-ზე, 5-ზე და 9-ზე“* ნიშნავს, რომ k რიცხვი იყოფა სამივეზე: 2-ზეც, 5-ზეც და 9-ზეც, ერთდროულად. წინადადებაში: *„ამ არითმეტიკული გამოსახულების გასამარტივებლად საჭიროა ფრჩხილების გახსნა და წილადების შეკრება“* საჭიროა ფრჩხილების გახსნაც და წილადების შეკრებაც. თუ ამ მოქმედებათა თანამიმდევრობას მნიშვნელობა აქვს, მაშინ უნდა დაზუსტდეს: *„საჭიროა ჯერ ფრჩხილების გახსნა და შემდეგ წილადების შეკრება“* (ან პირიქით).

საზოგადოდ, თუ სრულდება „X, Y და Z“ ეს იგივეა, რაც „X და Y და Z“ და იგულისხმება, რომ ერთდროულად სრულდება X-იც, Y-იც და Z-იც.

საყოფაცხოვრებო ენაში *„ან“* კავშირი ორი სხვადასხვა აზრით იხმარება. მაგალითად, წინადადებით: *„სადილად კვერცხს შეგიწვავთ ან წვნიანს გაგიკეთებთ“*. იგულისხმება, რომ კვერცხის შეწვა და წვნიანის გაკეთება ერთმანეთს გამორიცხავს. თუმცა, ზოგადად შესაძლებელია, რომ კვერცხიც შეიწვეს და წვნიანიც გაკეთდეს.

ახლა განვიხილოთ წინადადება: *„ჩვენი კლასის ყველა მოსწავლე სწავლობს ქართულ ენას, მათემატიკას, რუსულ ენას და ინგლისურ ან გერმანულ ენას“*. ეს ნიშნავს, რომ კლასის ყველა მოსწავლე სწავლობს ქართულს, მათემატიკას, რუსულს და – ან ინგლისურს ან გერმანულს, თუ ინგლისურსაც და გერმანულსაც? ამ წინადადებაში სიტყვით *„ან“* შეერთებულია *„ინგლისური“* და *„გერმანული“*. ისინი ერთმანეთს არ გამორიცხავს, შეიძლება, რომ მოსწავლე სწავლობდეს ორივე ამ ენას. არ არის გამორიცხული, რომ მოსწავლე სწავლობდეს ინგლისურსაც და გერმანულსაც.

ამგვარად, საყოფაცხოვრებო ენაში *„ან“* კავშირით დაკავშირებული დავალებები ზოგჯერ გამორიცხავს ერთმანეთს, ზოგჯერ კი არა.

> მათემატიკურ ენაში *„ან“* კავშირი იხმარება მხოლოდ **არაგამომრიცხავი** დაკავშირების აზრით.

მაგალითად, *„განვიხილოთ 2-ის ან 5-ის ჯერად რიცხვთა E სიმრავლე“*. ეს იმას ნიშნავს, რომ E სიმრავლე შედგება მხოლოდ იმ ნატურალური რიცხვებისაგან, რომლებიც 2-ის ჯერადია ან 5-ის ჯერადია ან ერთდროულად არის 2-ისა და 5-ის ჯერადი, ანუ $E \equiv \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, \ldots\}$.

„ან“ კავშირით დაკავშირებული მათემატიკური წინადადებები ერთმანეთს არ გამორიცხავს.

შესაძლებელია ისე მოხდეს, რომ თვით ცნებები აღმოჩნდნენ ერთმანეთის გამომრიცხავი, *„ან“* კავშირისაგან დამოუკიდებლად. მართლაც, განვიხილოთ შემდეგი წინადადება: *„ეს ფიგურა შეიძლება იყოს სამკუთხედი ან ოთხკუთხედი“*. ცხადია, რომ მოცემული ორი წინადადება ერთმანეთს ნამდვილად გამორიცხავს, შეუძლებელია, რომ ფიგურა ერთდროულად სამკუთხედიც იყოს და ოთხკუთხედიც. ეს წინადადებები ურთიერთგა-

მომრიცხავია. **„ან“** კავშირი აქ არაფერ შუაშია. განხილულ წინადადებაში **„ან“** კავშირი მაინც არაგამომრიცხავ დაკავშირებას გულისხმობს.

საზოგადოდ, როცა ლოგიკურ-მათემატიკურ ენაში ითქმის X **ან** Y **ან** Z, იგულისხმება სამივეს შესრულება ცალ-ცალკეც და ერთდროულადაც. ამგვარად, შეიძლება შესრულდეს მხოლოდ X; შეიძლება შესრულდეს მხოლოდ Y; შეიძლება შესრულდეს მხოლოდ Z; ასევე, შეიძლება შესრულდეს X და Z; ასევე შეიძლება – X და Y; შეიძლება იყოს Y და Z და შეიძლება შესრულდეს X და Y და Z სამივე ერთადაც. ყველა ეს შესაძლებლობა დაშვებულია, არცერთი არაა გამორიცხული. სწორედ ამიტომ ვამბობთ, რომ **ლოგიკა-მათემატიკაში „ან“ – არაგამომრიცხავი კავშირია.**

ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისას საჭიროა ცნებათა გამომრიცხავი დაკავშირება.

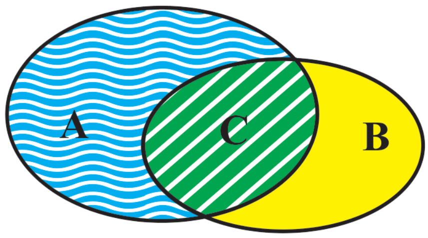
ცნებათა გამომრიცხავი დაკავშირებისთვის მათემატიკურ ენაშიც და საყოფაცხოვრებო ენაშიც იხმარება ორმაგი კავშირი „ან-ან“.

მაგალითად, გვჭირდება განვიხილოთ ისეთ რიცხვთა ერთობლიობა F, რომლებიც 2-ის ჯერადია ან 5-ის ჯერადია, მაგრამ არაა ერთდროულად 2-ისა და 5-ის ჯერადი: $F \equiv \{2, 4, 5, 6, 8, 12, 14, 15, 16, 18, 22, \ldots\}$ - გამოტოვებულია 2-ისა და 5-ის საერთო ჯერადები: 10, 20, 30, ...; ანუ, F არის ისეთ რიცხვთა ერთობლიობა, რომლებიც **ან 2-ის ჯერადია, ან 5-ის**.

ამრიგად: **ან** X, **ან** Y, **ან** Z გამოთქმაში იგულისხმება მხოლოდ სამი შესაძლებლობა: შეიძლება შესრულდეს მხოლოდ X; შეიძლება იყოს მხოლოდ Y; შეიძლება იყოს მხოლოდ Z. ხოლო სხვა შესაძლებლობები გამორიცხულია.

5. ამოცანების ამოხსნა ვენის დიაგრამის გამოყენებით

განვიხილოთ ორი სიმრავლე A და B (ნახაზზე ვენის დიაგრამები გამოსახულია ელიფ-სის ფორმით), რომელთა თანაკვეთაა C.



რადგან გაერთიანების ყოველი ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს ან B სიმრავლეს, ხოლო თანაკვეთის ყოველი ელემენტი არის A სიმრავლის და B სიმრავლის ელემენტი ერთდროულად, ამიტომ

სიმრავლეთა გაერთიანებას შეესაბამება ,,ან" კავშირი, ხოლო თანაკვეთას – „და".

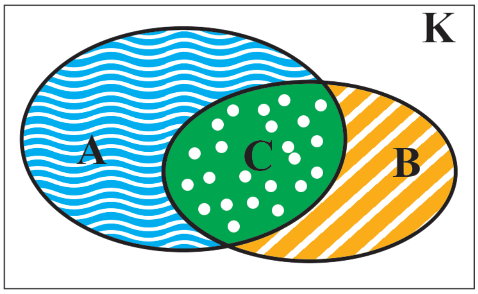
ვთქვათ, A აღნიშნავს ეზოში წითელი ვარდების (ვარდის ბუჩქების) სიმრავლეს, B – კოკრიანი ვარდების სიმრავლეს. მაშინ ამ სიმრავლეთა თანაკვეთა – წითელი კოკრია-ნი ვარდების ერთობლიობაა და გაერთიანება – წითელი ან კოკრიანი ვარდების ერ-თობლიობა.

ჩვეულებრივ საყოფაცხოვრებო ამოცანებში ხშირად გვხვდება რაიმე სიმრავლის ქვე-სიმრავლეთა გაერთიანება. მაგალითად, „კალათაში 9 წითელი ვარდია, თეთრი ვარდე-ბი 3-ით ნაკლებია, ყვითლები – 2-ჯერ მეტი, ვიდრე თეთრები..." და ასე შემდეგ. ესე იგი, მოცემულია კალათაში ვარდების ერთობლიობა და მისი ქვესიმრავლეები: წითელი, თეთრი, ყვითელი... ვარდები. ეს ქვესიმრავლეები თანაუკვეთია, ამიტომ მათი ელე-მენტების მთლიანი რაოდენობის გასაგებად შეიძლება მათი წევრების რაოდენობათა პირდაპირ შეკრება. მაგალითად, წითელი ვარდები და თეთრი ვარდები გაერთიანებუ-ლად (ერთად) იმდენია, რამდენიცაა წითელი ვარდებისა და თეთრი ვარდების რაოდე-ნობათა ჯამი. ასევე, როცა ერთ ტოტზე ზის 8 ჩიტი, მეორე, სხვა ტოტზე – 11. ცხადია, ერთ ტოტზე მსხდარი ჩიტების ერთობლიობა და სხვა ტოტზე მსხდარი ჩიტების ერ-თობლიობა – თანაუკვეთებია, ამიტომ მთლიანად ჩიტების რაოდენობის დასათვლელად პირდაპირ შეიძლება 8-ისა და 11-ის შეკრება.

თუ ამოცანებში ქვესიმრავლეები თანაუკვეთია, მათ გაერთიანებაში შემავალი ელემენტე-ბის საერთო რაოდენობის გასარკვევად საჭიროა შევკრიბოთ ქვესიმრავლეების ელემენტე-ბის რაოდენობები.

ახლა განვიხილოთ განსხვავებული ამოცანა: ეზოში 9 წითელი და 5 კოკრიანი ვარდია. რამდენი წითელი და კოკრიანი ვარდია ერთად ეზოში? ცხადია, ამოცანის პასუხი შეიძ-ლება არ იყოს 9+5, რადგან წითელი ვარდების სიმრავლე და კოკრიანი ვარდების სიმ-

რავლე შეიძლება არ არის თანაუკვეთი. შეიძლება ზოგიერთი წითელი ვარდი კოკრიანიც იყოს. ამ ამოცანის ამოსახსნელად შეიძლება ვენის დიაგრამის გამოყენება. ეზოში ყველა ვარდების სიმრავლე იყოს K, წითელი ვარდების სიმრავლე A, ხოლო კოკრიანი ვარდების სიმრავლე B, რომელთა თანაკვეთაა C.



ცხადია, რომ A და B არის K სიმრავლის ქვესიმრავლეები. ვენის დიაგრამიდან ჩანს, რომ K სიმრავლე დაყოფილია ოთხ თანაუკვეთ ქვესიმრავლედ. ესენია:

1) **მხოლოდ A** არის ის ნაწილი, რომელსაც საერთო არ აქვს **B** არესთან და შეესაბამება იმ წითელი ვარდების სიმრავლეს, რომლებიც არ არიან კოკრიანები; ნახაზზე მას შეესაბამება ტალღით მონიშნული არე.

2) **მხოლოდ B** არის ის ნაწილი, რომელსაც საერთო არ აქვს **A** არესთან და შეესაბამება მხოლოდ კოკრიანი ვარდები, რომლებიც არ არიან წითლები. მას შეესაბამება დაშტრიხული არე.

3) **C** ანუ **(თანაკვეთა)** – დაწინწკლული არე, რომელიც შეესაბამება წითელ კოკრიან ვარდებს.

4) არც **A** და არც **B** გაერთიანების გარეთ თეთრი არე.

რადგან ეს ოთხი არე თანაუკვეთია, ამიტომ იმის დასადგენად, თუ ერთად რამდენი წითელი და კოკრიანი ვარდია ეზოში, საჭიროა ოთხივე არის ელემენტების რაოდენობების შეკრება. მათი წევრების რაოდენობათა პირდაპირ შეკრება შესაძლებელია. ამისთვის საჭიროა თითოეული არის ელემენტების რაოდენობის ცოდნა.

განვიხილოთ მაგალითი.

კლასის 21 მოსწავლიდან 18-მა იცის ინგლისური ან რუსული ენა. 8 მოსწავლემ არ იცის ინგლისური, 10-მა არ იცის რუსული. რამდენმა მოსწავლემ არ იცის არცერთი ეს ენა? რამდენმა იცის ორივე ენა – ინგლისურიც და რუსულიც? რამდენმა იცის მხოლოდ ინგლისური? მხოლოდ რუსული?

ამოხსნა. მთავარია, დავხაზოთ შესაბამისი ვენის დიაგრამა. ამის შემდეგ ამოცანის ამოხსნა პირდაპირ გამოჩნდება დიაგრამაზე. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია იგივე ნახაზი გამოვიყენოთ.

რადგან 18-მა იცის ინგლისური ან რუსული, 21-18=3 მოსწავლეა დარჩენილი, რომლებმაც არ იცის არცერთი ეს ენა. ესე იგი, გარე, თეთრი ნაწილი 3 ელემენტს შეიცავს. 8 მოსწავლემ არ იცის ინგლისური, მათგან 3 მოსწავლე გარეთა თეთრ ნაწილშია, ესე

იგი, დანარჩენი 5 ელიფსებშია, ანუ იცის რუსული. ესე იგი, B-ს დაშტრიხულ ნაწილში 5 ელემენტია. ასევე, A-ს ტალღოვან ნაწილში იქნება 10-3=7 წევრი.

მაშასადამე, კლასის 21 მოსწავლე ასე შეიძლება გავანაწილოთ:

მხოლოდ რუსული – 5 მოსწავლე;

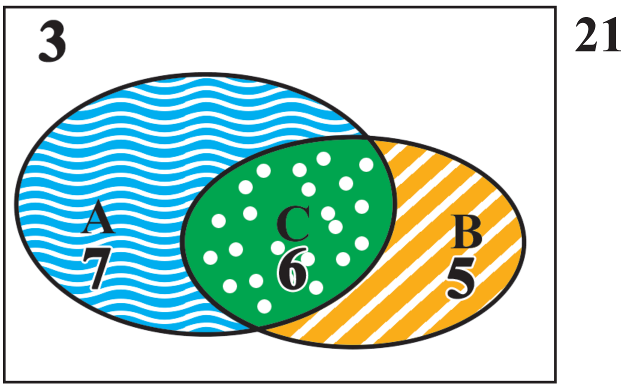
მხოლოდ ინგლისური – 7 მოსწავლე;

არც ინგლისური, არც რუსული – 3 მოსწავლე;

ინგლისურიც და რუსულიც – 6 (21–5–7–3 =6) მოსწავლე.

ამ დანაწილების შემდეგ ცხადია: ინგლისური იცის 7+6=13 მოსწავლემ; რუსული იცის 5+6 =11 მოსწავლემ.

მოსწავლეთა ამგვარი განაწილება თვალსაჩინოა იმავე დიაგრამაზე:



ამგვარად, თუ პირდაპირ შევკრებთ A-სა და B-ს ელემენტების რაოდენობას, ჯამის მნიშვნელობა მეტი იქნება, ვიდრე გაერთიანების ელემენტთა რაოდენობა, თანაც მეტი იქნება ზუსტად იმდენით, რამდენი ელემენტიცაა თანაკვეთაში, რადგან შეკრებისას თანაკვეთის ელემენტები ორჯერ იკრიბება. აღნიშნული მსჯელობა შეიძლება გამოისახოს ფორმულით:

$$n(A)+n(B)=n(A\cup B)-n(A\cap B)$$

ხოლო თუკი A და B თანაუკვეთებია, მაშინ $n(A\cap B)=0$ და ზემოაღნიშნული ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$n(A)+n(B)=n(A\cup B)$$

დავალება დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

1. აღწერეთ მოცემული სიმრავლე {2, 3, 5, 7} მახასიათებელი ნიშნის მიხედვით.
2. მოცემულია ადამიანთა სახელების ორი სიმრავლე:

{ლალი, გენო, გია, პაატა, ზურა, იანინა}

{ლელა, ლალი, ზურა, ნაზი, ნანა, თამარი}.

ამოწერეთ ის სახელები, რომლებიც:

ა) საერთოა ორივე სიმრავლისთვის;

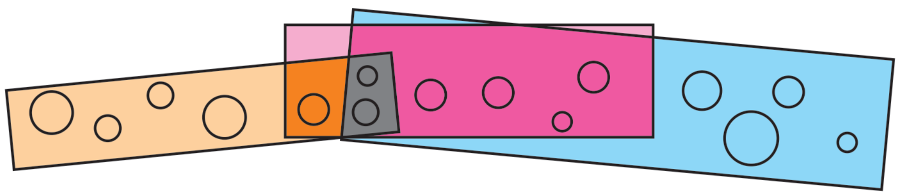
ბ) ეკუთვნის პირველ ან მეორე სიმრავლეს;

გ) ეკუთვნის ან პირველ ან მეორე სიმრავლეს.

3. დამახასიათებელი ნიშნის მითითებით მოცემული სიმრავლეები ჩაწერე ელემენტების ჩამოთვლით:

A={p| p 15-ზე ნაკლები მარტივი რიცხვია}

B={2n-1| n=1,2,3,4,5}

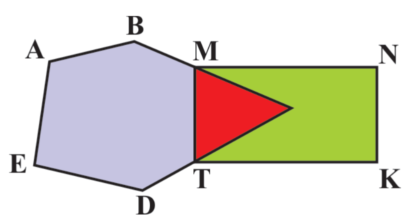


4. ნახაზზე მოცემულია სამი მართკუთხედი. დათვალეთ რამდენი რგოლია:

ა) სამივე მართკუთხედის თანაკვეთაში;

ბ) სამივე მართკუთხედის გაერთიანებაში.

5. ერთი სიმრავლე 6 ელემენტიანია, მეორე – 20. გაარკვიეთ რამდენი ელემენტი შეიძლება იყოს მათ თანაკვეთაში.
6. ერთ სიმრავლე 8 ელემენტიანია, მეორე – 18. გაარკვიეთ რამდენი ელემენტი შეიძლება იყოს მათ გაერთიანებაში.
7. მოცემულია ხუთკუთხედი და მართკუთხედი. ნახაზზე მოძებნეთ მოცემული ხუთკუთხედისა და მართკუთხედის თანაკვეთა და გაერთიანება.



8. გაარკვიე, რომელია მოცემულ სიმრავლეთა წყვილებიდან თანაუკვეთი:

ა) $\{r, 3{,}4, -2/5, k, 18\}$ და $\{-3/4, 81, n, r\}$;

ბ) $\{3, 6, 9, ..., 60\}$ და $\{2, 5, 8, ..., 80\}$;

გ) პრიზმათა სიმრავლე და მართკუთხა პარალელეპიპედთა სიმრავლე;

დ) დადებით რიცხვთა სიმრავლე და უარყოფით რიცხვთა სიმრავლე;

9. ჯგუფში 15 სტუდენტია, რომელთაგან 10 დადის სპორტულ ან ხელოვნების წრეზე. ამ ჯგუფის რამდენი სტუდენტი არ დადის არც სპორტულ და არც ხელოვნების წრეზე?

10. გამოიყენეთ ვენის დიაგრამა და ამოხსენით ამოცანა: კლასის 15 მოსწავლიდან ყველამ, გარდა ერთისა, იცის ბერძნული ან არაბული ენა. 3-მა მოსწავლემ არ იცის ბერძნული, 2-მა არ იცის არაბული. რამდენმა მოსწავლემ იცის ორივე ენა, ბერძნულიც და არაბულიც? რამდენმა იცის ბერძნული?

11. სკოლაში მივიდა ექვსი უცხოელი, რომლებმაც იციან ინგლისური ან გერმანული ენები. მათგან 3-მა იცის მხოლოდ ინგლისური, 2-მა – მხოლოდ გერმანული. რამდენმა იცის ორივე ენა?

12. საქართველოში სიმინდი უთესია გლეხების 4/5 ნაწილს, ხორბლეული – 3/4 ნაწილს. გლეხების რა ნაწილს შეიძლება არ ეთესოს არც სიმინდი და არც ხორბლეული?

ა) 0- $^1/_4$; ბ) 0- $^1/_5$; გ) $^1/_5$ - $^1/_4$; დ) ზუსტად $^{11}/_{20}$;

13. გაარკვიეთ, წინა ამოცანის მონაცემებიდან როგორი დასკვნის გამოტანაა შესაძლებელი – გლეხების რა უდიდეს ნაწილს შეიძლება ეთესოს მხოლოდ ხორბლეული? მხოლოდ სიმინდი?

ა) $\frac{1}{5};\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{3}{4};\frac{1}{4}$ გ) $\frac{3}{4};\frac{1}{5}$ დ) $\frac{11}{20};0$

შემაჯამებელი ტესტი

1. 9 ფერადი მრავალკუთხედიდან 3 სამკუთხედია, რომელთაგან 2 სამკუთხედი ლურჯია და 1 – ყვითელი. მოცემულ მრავალკუთხედებს შორის რამდენი მრავალკუთხედი შეიძლება იყოს ლურჯად გაფერადებული?

   ა) 2-8;

   ბ) 2-9;

   გ) 2-7;

   დ) 3-9;

2. სკოლის 32 მასწავლებლიდან სასერტიფიკაციო გამოცდა სპეციალობაში ჩაბარებული აქვს 10-ს, პროფესიულ უნარებში – 6-ს, ამათგან კი 2 მასწავლებელს ჩაბარებული აქვს ორივე გამოცდა. რამდენ მასწავლებელს აქვს ჩაბარებული ერთი გამოცდა მაინც?

   ა) 10;

   ბ) 16;

   გ) 14;

   დ) 18;

3. მოცემულია K სიმრავლე და მისი ორი A და B ქვესიმრავლე. გაარკვიეთ, რა დამატებითი პირობაა საჭირო იმისთვის, რომ მართებული იყოს წინადადება: *გაერთიანების ელემენტების რაოდენობა ტოლია A-სა და B-ს ელემენტების რაოდენობათა ჯამის.*

   ა) გაერთიანება არ ამოწურავს მთელ K სიმრავლეს;

   ბ) გაერთიანება ტოლია მთელი K სიმრავლის;

   გ) A და B თანაუკვეთი სიმრავლეებია;

   დ) A და B ტოლძალოვანი სიმრავლეებია.

4. 1200 მოსწავლიდან 800-ს შეუძლია თხილამურებით სრიალი, 650-ს-ციგურებით, 60-მა არ იცის არცერთი. რამდენს შეუძლია როგორც თხილამურებით, ასევე ციგურებით სრიალი?

   ა) 250

   ბ) 150;

გ) 140;

დ) 310;

5. A და B სიმრავლეები განიმარტება შემდეგნაირად: A={p| p 15-ზე ნაკლები მარტივი რიცხვია}; B={2n-1| n=1,2,3,4,5}. A და B სიმრავლეების თანაკვეთაა:

ა) {3,5}

ბ) {3,5,7}

გ) {3,7}

დ) {2,3,5,7}

6. მასწავლებელმა ვანოს დაავალა შეესრულებინა პირველი ან მეორე სავარჯიშო. ვანომ დავალება არ შეასრულა თუ:

ა) შეასრულა მხოლოდ პირველი სავარჯიშო;

ბ) შეასრულა მხოლოდ მეორე სავარჯიშო;

გ) შეასრულა პირველი და მეორე სავარჯიშო;

დ) არცერთი სავარჯიშო არ შეასრულა.

7. გიორგის მშობლებმა პირობა მისცეს, რომ ზამთარში გაუშვებდნენ ან გუდაურში ან ბაკურიანში. რა შემთხვევაში არ შესრულდა პირობა?

ა) გიორგი წავიდა ორივე კურორტზე;

ბ) გიორგი წავიდა გუდაურში;

გ) გიორგი წავიდა ბაკურიანში;

დ) არცერთი პასუხი არაა სწორი.

თავი 2. რიცხვები

1. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე. ციფრი და რიცხვი

ნატურალური რიცხვებია: 1, 2, 3, 4, ... , 10, 11, ...

ხოლო 0 არაა ნატურალური რიცხვი.

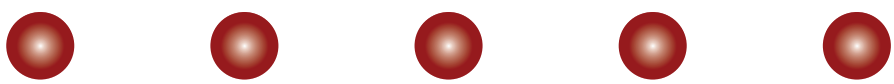
ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე N ასოთი აღინიშნება.

$N = \{1,2,3,4 \ldots\}$

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. უმცირესი ნატურალური რიცხვია 1. ზრდადობის მიხედვით დალაგებულ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობაში ყოველი მომდევნო რიცხვი წინა რიცხვზე ერთით მეტია.

ერთმანეთში არ უნდა აგვერიოს მათემატიკური ცნება და მისი ჩანაწერი. მაგალითად, მათემატიკურ მოქმედებათა ნიშნები ამ მოქმედებათა მხოლოდ ჩანაწერებია. შეკრება მათემატიკური მოქმედებაა, რომელიც „+“ სიმბოლოთი აღინიშნება, ასევე გამრავლე-ბაც მათემატიკური მოქმედებაა, ხოლო „·“ ან „x“ მათი ჩანაწერებია. ციფრი, მხოლოდ ჩანაწერია, პირობითი ნიშანია. მისი წარმოთქმაც კი არ შეიძლება, იგი მხოლოდ იწერება!

მაგალითად, რიცხვი „ხუთი“ შეესაბამება მოცემული წრეების რაოდენობას, ხოლო ციფრი 5 – ამ რიცხვის ჩანაწერია, აღნიშვნაა.



განვიხილოთ სამი ციფრი: 2, 6, 9. ცხადია, ამ ჩანაწერებს შორის ყველაზე „დიდია“ ციფრი 6, ხოლო ყველაზე „მცირეა“ ციფრი 9. მაგრამ რიცხვი ცხრა ყოველთვის მეტია, ვიდრე რიცხვი ექვსი, როგორც უნდა ჩაიწეროს ისინი. ამგვარად, ერთმანეთს რიცხვე-ბი უნდა შედარდეს და არა ციფრები. ასევე მათემატიკური მოქმედებებიც სრულდება რიცხვებზე. მაგალითად, იკრიბება რიცხვები და არა ციფრები.

ამ შეცდომას ხშირად უშვებენ. მაგალითად *„აღმოჩნდა, რომ წლევანდელი დანახარ-ჯების მაჩვენებელი ციფრები არც ისე დიდია.“* ეს წინადადება მცდარია, რადგან დიდი ციფრი – ესაა დიდი ზომით დაწერილი ციფრები, ხოლო დანახარჯების რაოდენობას შეესაბამება არა ციფრები, არამედ — რიცხვები. ამიტომ წინადადება ასე უნდა ჩამო-ყალიბდეს: *„აღმოჩნდა, რომ წლევანდელი დანახარჯების მაჩვენებელი რიცხვები არც ისე დიდია.“*

ამგვარად, რიცხვი – ესაა რაოდენობა, ხოლო ციფრი – პირობითი ჩანაწერი.

რიცხვების ჩასაწერად ვსარგებლობთ ათი განსხვავებული ციფრით, რომელთა მეშვეობით ნებისმიერი რიცხვის ჩაწერაა შესაძლებელი.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

ეს ციფრები ინდოელმა მეცნიერებმა შექმნეს დაახლოებით 1800 წლის წინ, მაგრამ სხვა ქვეყნებში ისინი არაბებმა შეიტანეს და გაავრცელეს. ამიტომ მათ ხშირად „არაბულ ციფრებს“ უწოდებენ.

სანამ არაბული ციფრები გავრცელდებოდა, მრავალ სახელმწიფოში რიცხვებს სიტყვებით წერდნენ. რომაელებს რიცხვების ჩაწერის თავისი სისტემა ჰქონდათ, რომელიც რომაული თვლის სისტემის სახელწოდებითაა ცნობილი:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

რომაელები რიცხვს ჩაწერისას წარმოადგენდნენ ათასეულების, ნახევარათასეულების, ასეულების, ნახევარასეულების, ათეულების, ხუთეულების და ერთეულების ჯამის სახით. მაგალითად,

$$MC = 1000 + 100 = 1100;$$

$$CLVIII = 100 + 50 + 8 = 158;$$

$$MMDXI = 1000 + 1000 + 500 + 10 + 1 = 2511$$

თუ ნაკლები მნიშვნელობის მქონე ციფრი დიდი მნიშვნელობის მქონე ციფრის მარცხნივ არის დაწერილი, ამ შემთხვევაში მიმატების ნაცვლად სრულდება გამოკლება. მაგალითად,

$$CM = 1000 – 100 = 900;$$

$$CD = 500-100 = 400$$

2. რიცხვის ცნება. რაოდენობის რაობა

განვიხილოთ სხვადასხვა კონკრეტული წყვილი: ხელების წყვილი, ფეხების წყვილი, თვალების წყვილი, ყურების წყვილი, ადამიანების წყვილი, ჩიტების წყვილი, ბლის ნაყოფის წყვილი და სხვა მრავალი. ეს განსხვავებული წყვილებია, მაგრამ მათ აქვთ საერთო თვისება – რაოდენობა. ცხადია, ადამიანის წყვილი და ბლის წყვილი სხვადასხვაა, მაგრამ მათ საერთო აქვთ – რაოდენობა ორი. რიცხვი ანუ რაოდენობა ორი – ესაა ის საერთო, რაც აქვს ყველა შესაძლო წყვილს.

ასევე, ყველა შესაძლო ოთხეულს, (რომლებიც შეიძლება იყოს სხვადასხვა წესით დალაგებული), აქვთ საერთო **– რიცხვი ანუ რაოდენობა ოთხი.** ასევე **რიცხვი ცხრა –** ესაა ის საერთო, რაც აქვს ყოველგვარ საგანთა ყველა შესაძლო ცხრაეულს და ასე შემდეგ.

საზოგადად, ყოველი ნატურალური რიცხვი – ესაა ის საერთო, რაც აქვს ყოველგვარ საგანთა ყველა შესაძლო **ტოლძალოვან** სასრულ ერთობლიობას.

ეს ერთობლიობა შეიძლება იყოს წყვილი, ოთხეული, ცხრაეული, ოცეული, ასეული, მილიონ სამას ოცდაექვსეული და ასე შემდეგ. ხოლო გამოთქმის „საერთო თვისება“ მათემატიკური აზრია ტოლძალოვან ერთობლიობათაგან შედგენილი სიმრავლე. ამასთან, სიმრავლეთა ტოლძალოვნების გარკვევას რიცხვის ცოდნა არ სჭირდება. მართლაც, ორი სხვადასხვა სიმრავლის ტოლძალოვნების გასარკვევად საკმარისია ამ სიმრავლეთა წევრების დაწყვილება, რაც მათემატიკურად ნიშნავს ურთიერთცალსახა შესაბამისობის დამყარებას.

თუ დაწყვილების შედეგად არცერთი წევრი არ დარჩება დაუწყვილებელი, მაშინ ამ სიმრავლეთა ელემენტების რაოდენობები ტოლი ყოფილა. თუ ერთ-ერთი სიმრავლიდან დარჩება დაუწყვილებელი ელემენტები, მაშინ ამ სიმრავლის წევრთა რაოდენობა ყოფილა მეტი. (ეს უკანასკნელი წინადადება მართებულია მხოლოდ სასრულ ერთობლიობათა შემთხვევაში, ყოველი ნატურალური რიცხვი ხომ სასრულია).

ამგვარად, ნატურალური რიცხვი ოთხი განყენებული და აბსტრაქტულია, იგი თავისთავად, საგნებისაგან დამოუკიდებლად არსებობს, ხოლო ოთხეული უფრო კონკრეტული, ნივთიერი და თვალსაჩინოა, ყოველთვის რაღაცის ოთხეული – გროვაა. არსებითი სახელი „ოთხიანი” კი შესაბამისი ციფრის სახელწოდებაა, ისიც კონკრეტულია, რადგან იწერება და მას უშუალოდ ვხედავთ.

არაბული ციფრების დამკვიდრებამდე რაოდენობას სქემატურად აღნიშნავდნენ, თუმცა არა ციფრით, მაგალითად:

ერთი	ორი	სამი		ოთხი	ხუთი	ექვსი	შვიდი	...	ათი		თერთმეტი		...
•	••	•••	• ••	• • ••	×	×•	×••		××	○	××•	○•	

მაშასადამე, ისტორიული და ფსიქოლოგიური თვალსაზრისით, რიცხვის ცნების განვითარების სქემა ამგვარია:

1. კონკრეტული ერთობლიობანი ანუ ყოველგვარ შესაძლო საგანთა **გროვები**

↓

2. ტოლძალოვანი ერთობლიობანი – ნივთიერი, მაგ.: **ოთხეულები**

↓

3. ტოლძალოვან ერთობლიობათა საერთო თვისება – **რიცხვი**
მაგ.: რიცხვი და სიტყვა **„ოთხი“**.

↓

4. ამ რიცხვის ჩაწერა სქემატურად – ოთხი წერტილის ან სხვა სახით;

↓

5. ამ რიცხვის აღნიშვნა პირობითი ნიშნით – ციფრით და ასე ჩაწერა.
მაგ.: ციფრი 4 ანუ **„ოთხიანი“**.

ამგვარად, პირველადია კონკრეტული ოთხეულები, ხოლო რიცხვი „ოთხი“ – ყველა შესაძლო ოთხეულის გამაერთიანებელი, ანუ განმაზოგადებელი ცნებაა. შემდეგ კი ხდება ამ ცნების ჩაწერა.

გრამატიკულად „ოთხეული“ და ,,ოთხიანი“ – არსებითი სახელებია, პასუხობს კითხვას „რა?“, ხოლო „ოთხი“ და „მეოთხე“ – რიცხვითი სახელებია, რომლებიც პასუხობს კითხვას „რამდენი?“, „მერამდენე?”. თუმცა „ოთხიანი“ და „ოთხეული“ არსებითად განსხვავდება ერთმანეთისგან. „ოთხიანი“ – ესაა ციფრი 4, ანუ ჩანაწერია, ხოლო „ოთხეული“ – რაიმე საგანთა ოთხეულია ანუ გროვაა.

ამგვარად, **რიცხვები ჩაიწერება ციფრებით.** რიცხვით შეიძლება **რაოდენობის** გარდა აღვნიშნოთ **რიგობითობა – მერამდენეა საგანი.** მაგალითად, მე-3 კლასი, მე-9 სართული. რიცხვი შეიძლება აღნიშნავდეს ნომერსაც – **რა ნომრითაა მონიშნული საგანი.** მაგალითად, ბინა №16, სკოლა ნომერი 4, ფეხბურთელი 5-იანი მაისურით.

განვიხილოთ ნატურალური რიცხვების შედარების საკითხი. რატომაა, რომ ხუთი მეტია, ვიდრე სამი? ჩვეულებრივ, ამბობენ, რომ ხუთი იმიტომაა სამზე მეტი, რომ ნატურალურ რიცხვთა რიგში სამი უსწრებს ხუთს. ეს მცდარი აზრია, რადგან ადამიანის გონებაში ნატურალურ რიცხვთა რიგი გამზადებულად არ იყო მოცემული. სინამდვილეში სამი იმიტომ უსწრებს რიცხვთა რიგში ხუთს, რომ სამი ნაკლებია ხუთზე, ხოლო სამი კი იმიტომაა ხუთზე ნაკლები, რომ სამეულისა და ხუთეულის დაწყვილების შედეგად ხუთეულს მორჩება ორი წევრი.

3. თვლის სხვადასხვა სისტემები

ისტორიულად ადამიანების უმეტესობა თვლისათვის თითებს იყენებდა. სწორედ ეს გახდა თვლის თანამედროვე ათობითი სისტემის საფუძველი. ესე იგი, რიცხვის ჩანაწერს განსაზღვრავს ის, თუ ამ რიცხვში რამდენია ათეული, ასეული, ათასეული და ასე შემდეგ. თუმცა, რიცხვების ჩაწერა სხვა სისტემებშიც შეიძლება.

ისევე როგორც მანძილის გასაზომად აუცილებელია სიგრძის ერთეული, ისე რაოდენობის რიცხვებით გასაზომად აუცილებელია სათვლელი ერთეული. ამიტომ ყველა განვითარებულ ენას შერჩეული აქვს სათვლელი ერთეული. ზოგიერთ ენას არა აქვს სათვლელი ერთეული, მისი რიცხვითი სახელები შეზღუდულია, ვერ სცილდება 3-ს, ან 6-ს, ან 10-ს... ამაზე მეტი რაოდენობის გამოსათქმელად ამბობენ „ბევრი“, თვლით კი ველარ ითვლიან.

ამგვარად, თვლის ყოველ სისტემას აქვს **ფუძე ანუ სათვლელი ერთეული**. ფუძე შეიძლება იყოს ერთზე მეტი ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი.

ინფორმატიკასა და კომპიუტერულ ტექნიკაში გამოიყენება თვლის სისტემა ფუძით 2, ანუ თვლის ორობითი სისტემა, რომელშიც რიცხვების ჩასაწერად გამოიყენება მხოლოდ ორი ციფრი 0 და 1. შუმერები იყენებდნენ თვლის ექვსობით-ათობით სისტემას, რომელშიც ორი ფუძეა – 6 და 10. ამ სისტემის გადმონაშთია შემორჩენილი დროის ერთეულებში: 1 საათი = 60 წუთი და არა 100, ასევე 1 წუთი = 60 წამი.

მსოფლიოს ენათა უმრავლესობაში (რუსული, აზერბაიჯანული, თურქული, ებრაული, არაბული, სომხური, ირანული, ოსური, ევროპული ენები...) თვლის ათობითი სისტემაა (მცირე გამონაკლისთა გარდა), ხოლო ქართულ ენაში **თვლის ათობით-ოცობითი სისტემაა.** ასზე ნაკლებ რაოდენობაში (მაგალითად 78-ში) ქართული ენა გამოყოფს ჯერ ოცეულებს (შესაბამისად, 3 ოცეული), შემდეგ – ათეულებს (შესაბამისად, 1 ათეული) და ბოლოს რჩება ნაშთი – ერთეულები (8). რიცხვის სახელწოდებაც ამითაა განპირობებული: **სამ-ოც-და-ათ-რვა-მეტი**. სწორედ აქედანაა მიღებული სიტყვა „**სამოცდათვრამეტი**“.

ამრიგად, თვლის ქართულ სისტემაში ორი ფუძეა – 10 და 20. ასევეა კავკასიურ ენათა დიდ უმრავლესობაში. ოცობითი თვლა კავკასიური ენების ერთ-ერთი თავისებურებაა.

4. რიცხვის პოზიციური ჩაწერა. თანრიგები

არსებობს თვლის პოზიციური და არაპოზიციური სისტემები. არაპოზიციურ სისტემებში ყოველი ციფრი ერთსა და იმავე რიცხვს გამოსახავს, იმისდა მიუხედავად, თუ რომელ ადგილას ანუ რომელ პოზიციაშია ის ჩაწერილი. რიცხვთა ჩაწერის რომაული სისტემა არაპოზიციური სისტემაა. მაგალითად, ციფრი **I** ყველაგან აღნიშნავს ერთს, ხოლო **V** – ხუთს და სხვა. მაგ., რიცხვებში IV და VI ციფრი **I** აღნიშნავს ერთს მიუხედავად იმისა **V**-ის წინ წერია, თუ შემდეგ.

პოზიციურ სისტემაში ყოველი ციფრის რაოდენობრივი მნიშვნელობა დამოკიდებულია მის პოზიციაზე ციფრთა მიმდევრობაში, რომლითაც კონკრეტული რიცხვი ჩაიწერება. მაგალითად, პოზიციურ ჩანაწერში 333 ერთი და იგივე ნიშანი 3 აღნიშნავს ან 3-ს, ან 3 ათეულს (30-ს), ან 3 ასეულს (300-ს). ხოლო ერთსა და იმავე პოზიციაში ციფრს ყოველთვის ერთი და იგივე მნიშვნელობა აქვს. მაგალითად, ციფრი 3, დაწერილი ბოლოს წინა პოზიციაში, ყოველთვის აღნიშნავს ოცდაათს.

თანრიგი – ესაა ადგილი რიცხვის პოზიციურ ციფრულ ჩანაწერში.

მაგალითად, სამნიშნა რიცხვის ასეულების თანრიგში ჩაწერილი ციფრი აჩვენებს, თუ რამდენი ასეულია ამ რიცხვში, ხოლო ათეულების თანრიგში ჩაწერილი ციფრი – ამ ასეულთა გარდა კიდევ რამდენი ათეულია. ესე იგი, პოზიციური სისტემა – ესაა იგივე თანრიგობრივი სისტემა. სწორედ ამის საფუძველზე გახდა შესაძლებელი, რომ ათი ციფრით ჩაიწეროს ნებისმიერი რიცხვი. რიცხვის ჩანაწერში 0 ნიშნავს, რომ ამ რიცხვში არ არის სათანადო თანრიგის ერთეული.

რიცხვი 1 205 903 ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$1\ 205\ 903 = 1\cdot1000000 + 2\cdot100000 + 0\cdot10000 + 5\cdot1000 + 9\cdot100 + 0\cdot10 + 3$$

რიცხვი 1 205 903 წარმოდგენილია **სათანრიგო შესაკრებთა ჯამის სახით.** ეს გამოსახულება შეიძლება ჩაიწეროს 10-ის ხარისხების ჯამის სახით (გავითვალისწინოთ, რომ $10^0 = 1$).

$$1\ 205\ 903 = 1\cdot10^6 + 2\cdot10^5 + 0\cdot10^4 + 5\cdot10^3 + 9\cdot10^2 + 0\cdot10^1 + 3\cdot10^0$$

მაშასადამე, ბოლო (ყველაზე მარჯვენა) ერთეულების თანრიგი შეესაბამება 10-ის ნულოვან ხარისხს, მის მარცხნივ მომდევნო – პირველ ხარისხს, შემდეგი – მეორე ხარისხს ანუ კვადრატს, და ასე შემდეგ.

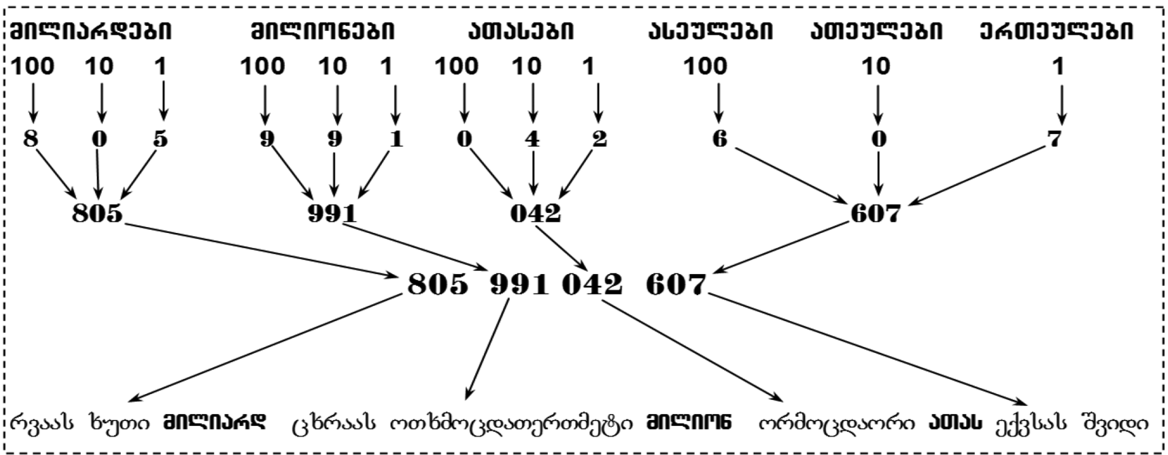
ყველაზე ხშირად მოსწავლეები უშვებენ შემდეგი სახის შეცდომას. კითხვაზე „რამდენი ათეულია 318-ში?“ „რამდენი ერთეულია?“ პასუხი ხშირად ამგვარია – 318-ში არის 1 ათეული და 8 ერთეული. ეს უხეში შეცდომაა. 318-ში არის არა 1, არამედ 31 ათეული და არის არა 8, არამედ 318 ერთეული. მაგრამ სწორია, თუ ვიტყვით, რომ 318-ში არის 3 ასეული და (ესე იგი, ასეულთა გარდა) 1 ათეული და (ესე იგი, ათეულთა გარდა) 8 ერთეული. ასევე, მაგალითად 15-ში არის არა 5, არამედ 15 ერთეული, ამასთან, 15-ში არის 1 ათეული და (ესე იგი, ათეულთა გარდა) 5 ერთეული.

ვთქვათ, მოცემულია ექვსნიშნა რიცხვი 201865. მასში უნდა გამოიკვეთოს სათანრიგო სამეულები: 201´865. პირველი ციფრი 2 ამ რიცხვში ასიათასეულთა რაოდენობას აჩვენებს. 201´865 რიცხვში 20 აჩვენებს ათიათასეულთა რაოდენობას, რადგან 0 ათიათასეულთა თანრიგში დგას. 0 – მოცემულ რიცხვში ასიათასეულთა გარდა მორჩენილ ათიათასეულთა რაოდენობას მიუთითებს (არცერთი არ რჩება). 1 – ნიშნავს, რომ მოცემულ რიცხვში ათიათასეულთა გარდა არის 1 ათასეული. ასევე, 201 უჩვენებს მოცემულ რიცხვში ათასეულთა რაოდენობას, ხოლო 8 – ათასეულთა გარდა მორჩენილ ასეულთა რაოდენობას; 2018 უჩვენებს მოცემულ რიცხვში ასეულთა რაოდენობას, 6 – ასეულთა გარდა მორჩენილ ათეულთა რაოდენობას, 65 – ასეულთა გარდა მორჩენილ ერთეულთა რაოდენობას, ხოლო 5 – ათეულთა გარდა მორჩენილ ერთეულთა რაოდენობას და ა.შ.

5. მრავალნიშნა რიცხვების ჩაწერა და წაკითხვა

განვიხილოთ მილიონი და მილიონზე დიდი ზოგიერთი რიცხვის სახელწოდება და ჩანაწერი. მილიონი 1 000 000 შვიდნიშნა რიცხვია. მის ჩანაწერში პირველი ციფრი – 1-იანი უჩვენებს, რომ ამ რიცხვში სულ 1 მილიონია. მარჯვნივ მიწერილი 0-ები კი უჩვენებს, რომ მილიონის გარდა ნაშთი აღარაა, ანუ არცერთი ერთეული აღარაა. საზოგადოდ, მილიონზე მეტი რიცხვების წასაკითხად საჭიროა იმის გარკვევა, თუ რამდენი მილიონია ამ რიცხვში და რისი ტოლია ნაშთი. ამის გარკვევა კი ადვილად შეიძლება რიცხვის ციფრულ ჩანაწერში სათანრიგო სამეულების გამოყოფით. რიცხვის ჩანაწერში სათანრიგო სამეულთა გამოყოფა იწყება მარჯვნიდან (ბოლოდან) და არა მარცხნიდან.

მრავალნიშნა რიცხვების წაკითხვასა და ჩაწერაში ხშირად გამოიყენება კლასებისა და თანრიგების ცხრილი.



მილიარდების კლასი			მილიონების კლასი			ათასეულების კლასი			ერთეულების კლასი		
ასეულები	ათეულები	ერთეულები	ასეულები	ათეულები	ერთეულები	ასეულები	ათეულები	ერთეულები	ასეულები	ათეულები	ერთეულები

მაგალითად, გავარკვიოთ როგორ იკითხება რიცხვები: 24028728 და 807302304. პირველ ნაბიჯზე საჭიროა რიცხვის ციფრულ ჩანაწერში კლასების ანუ სათანრიგო სამეულების

გამოყოფა: 24´028´728 და 807´302´304. ახლა უკვე ცხადად ჩანს, რომ პირველ რიცხვში 24 მილიონია, კიდევ 28 ათასეულია და კიდევ 728 ერთეულია. ამიტომ ეს რიცხვი ასე წაიკითხება:

ოცდაოთხი მილიონ ოცდარვა ათას შვიდას რვა.

ასევე ცხადად ჩანს, რომ მეორე რიცხვშია 807 მილიონი, კიდევ 302 ათასეული და კიდევ 304 ერთეული. ამიტომ ეს რიცხვი ასე იკითხება:

რვაას შვიდი მილიონ სამას ორი ათას სამას ოთხი.

ასევეა შესაძლებელი უფრო დიდი რიცხვების წაკითხვაც.

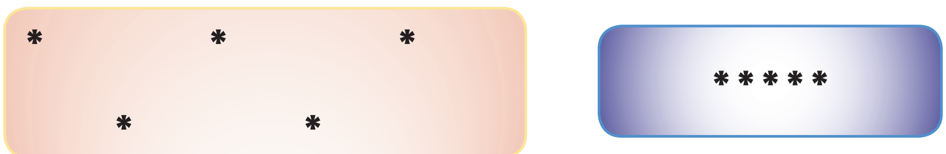
მაგალითად, რიცხვი 17 064 108 200 არის 17 მილიარდი და კიდევ 64 108 200 ანუ

$17 \cdot 1\ 000\ 000\ 000 + 64\ 108\ 200$ და იკითხება:

ჩვიდმეტი მილიარდ სამოცდაოთხი მილიონ ას რვა ათას ორასი.

6. რიცხვთა ჩაწერის სწავლების მეთოდიკის საკითხები

არითმეტიკის სწავლებისას მოსალოდნელია, რომ მოსწავლემ რიცხვი და მისი აღნიშვნა, ანუ მისი ციფრული ჩანაწერი გააიგივოს ერთმანეთთან. ამის გამო, მოსწავლე ვერ აღიქვამს რაოდენობას და რიცხვს ეცლება მათემატიკური შინაარსი, მას ეკარგება არსი – რაოდენობა. ფსიქოლოგიური ექსპერიმენტებით დამტკიცებულია, რომ ამ შემთხვევაში ბავშვი მეორე-მესამე კლასებშიც კი ვერ იაზრებს ნამდვილ რაოდენობას. მას უძლიერდება აზროვნების ის ბუნებრივი ილუზიები, რომლებიც ჟ. პიაჟეს მიერ იქნა აღმოჩენილი. ცნობილია რაოდენობის ამგვარი ილუზია: 5-6 წლის ბავშვს (და ზოგჯერ 7-8 წლის ბავშვსაც კი) ნივთების ერთი და იგივე რაოდენობა განსხვავებული ჰგონია, თუ გროვაში ნივთები გაფანტულადაა განლაგებული. მაგალითად,



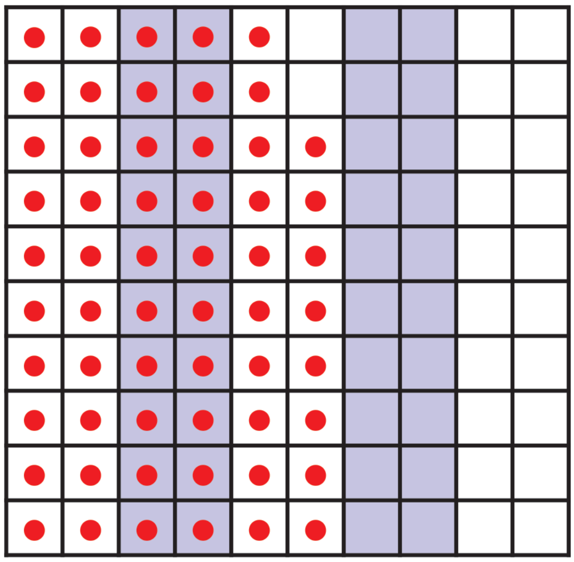
მარცხენა გროვაში უფრო მეტი, ფანტელი ჰგონია, ვიდრე მარჯვენა გროვაში, თუნდაც გროვა მის თვალწინ გაფანტონ. შეიძლება პირიქით ეგონოს – თუ სიმკვრივეს მიაქცია ყურადღება. მაგრამ ფართობი და სიმკვრივე სივრცის თვისებებია და არა რაოდენობისა. მაშასადამე, ბავშვი ხედავს სივრცეს და მის მიხედვით აფასებს რაოდენობასაც, ხოლო ნამდვილ რაოდენობას ის ვერ აღიქვამს. ზოგჯერ ამ ამოცანის სწორად გადაჭრაში ბავშვს დათვლაც კი ვერ შველის. შესაძლოა, ეს შეცდომა მცირე რაოდენობის გროვებზე არ მოხდეს, მაგრამ უფრო დიდ რაოდენობებზე მაინც მოსალოდნელია.

ამ შეცდომის თავიდან ასაცილებლად საჭიროა, არითმეტიკის სწავლების მთავარი საყრდენი იყოს ნამდვილი ნივთების გროვები: სათვლელი ჩხირები, ასანთის ღერები, რგოლები, კუბები და სხვა. სათვლელი ნივთების მრავალფეროვნება აუცილებელია, შემდეგში რომ არ გაძნელდეს რაოდენობის განყენება ნივთებისგან. გარდა ამისა, არაა საჭირო ციფრების ნაადრევი შემოტანა და მით უმეტეს, მათი წერის დაწყება.

საზოგადოდ, პირველკლასელისათვის ციფრული ჩანაწერი თავიდან საქმეს ართულებს. მაგალითად, პირველკლასელმა მოსწავლემ უნდა შეკრიბოს სამი და ხუთი. ჩანაწერი 3 + 5 ბავშვისათვის აძნელებს შეკრების აღქმას. მას ვუქმნით ფორმალური ჩანაწერის წაკითხვისა და გააზრების დამატებით სირთულეს. 5-6 წლის ბავშვს ეს უნარ-ჩვევა ჯერ არა აქვს განვითარებული. მისთვის გაცილებით ადვილია სამის და ხუთის ზეპირად შეკრება, ვიდრე 3 + 5 = 8 ჩანაწერის შედგენა და გააზრება. თუ მოსწავლეს გაუჭირდება ანგარიში, მას ჩანაწერი კი არ უნდა მივაშველოთ, არამედ – სათვლელი ნივთები, თუნდაც საკუთარი თითები.

მოსწავლემ ჯერ შეკრება-გამოკლება რეალურად, თვალსაჩინოებებით უნდა ისწავლოს და მხოლოდ ამის შემდეგ – ამ მოქმედებათა აღნიშვნა, ფორმალიზაცია, მათი ჩაწერა გამოსახულების სახით.

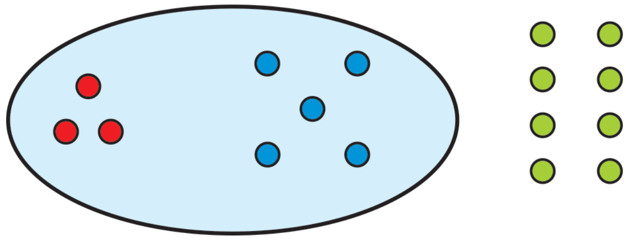
დოდო ნაზირიშვილის მიერ დამუშავებულია რიცხვების „დომინოსებური“ თვალსაჩინოება. სწორედ ამგვარი თვალსაჩინოება უნდა გამოიყენოს მასწავლებელმა და პირველ კლასში პირველი ორი თვის განმავლობაში არ შემოიტანოს ციფრები, წაკითხვითაც კი. „დომინოსებური“ თვალსაჩინოებით ბავშვი მყარად შეითვისებს რიცხვის არსს – მის რაოდენობრივ შინაარსს. ასე, აგრეთვე თავიდან ავიცილებთ რიცხვის გაიგივებას მის აღნიშვნასთან, ანუ ციფრულ ჩანაწერთან. რიცხვი მტკიცედ შეკავშირდება მის რაოდენობრივ არსთან. გარდა ამისა, „დომინოსებური“ თვალსაჩინოება, თავისი კოხტა და თვალშისაცემი განლაგების გამო, ძალიან ადვილად ამახსოვრდება ბავშვს. ექვსი წლის ბავშვის ძლიერი ხატოვან-მხედველობითი მეხსიერება განყენებული მათემატიკური აზროვნების საყრდენი და ერთგული დამხმარე გახდება.



„დომინოსებური“ რიცხვები ძალიან კარგად ცვლის ნივთთა გროვებს. გაკვეთილზე ნივთთა გროვებით მოქმედების შესრულებას ძალიან ბევრი დრო ჭირდება, „დომინოსებური“ რიცხვები კი პირიქით, ძალიან სწრაფი და ადვილი გამოსაყენებელია. აგრეთვე, მათი საშუალებით რიცხვის დაშლა შესაკრებთა ჯამებად მარტივად, თვალშისაცემად და ამომწურავად თვალსაჩინოვდება. ეს კი აზრიანი შეკრება-გამოკლების საფუძველია. ამიტომ, „დომინოსებური“ თვალსაჩინოება ნაყოფიერი საშუალებაა შეკრება-გამოკლების სასწავლებლადაც. ცხადია, თვალსაჩინოებასაც აქვს თავისი ბუნებრივი ფარგლები, რომელთა დარღვევის შემთხვევაში იგი უკვე შემაფერხებელი გახდება. II კლასში „დომინოსებური“ თვალსაჩინოება უნდა შეიცვალოს სქემატური „კვადრატული დაფით“.

პიაჟესეული ილუზიის დასაძლევად და რაოდენობის არსის გასაგებად პირველივე გაკვეთილებიდან უნდა დაიწყონ სავარჯიშოების კეთება დაწყვილებაზე, სხვადასხვაგვარად განლაგებული ერთი და იმავე რაოდენობათა შედარების მიზნით. მოსწავლეები თავიანთი ხელით აწყვილებენ სხვადასხვა გროვებს და რწმუნდებიან, რომ რაოდენობა არ იცვლება გროვის განლაგების შეცვლით. აქტიურ-ევრისტიკული მეთოდიკის შესაბამისად, მასწავლებელი ამას თავად მოსწავლეებს აღმოაჩენინებს, თვითონ კი არ ასწავლის, როგორც ჭეშმარიტებას.

ციფრულ ჩანაწერში 3 + 5 = 8, არსებითად, არ ჩანს არც რიცხვის რაოდენობრივი და არც შეკრების არსი. „დომინოსებურ“ თვალსაჩინოებაში მას ცვლის ამგვარი სურათი:



ამ სურათში ერთდროულად თვალსაჩინოდ ჩანს, რომ:

I. 3 + 5 = 8; II. 5 + 3 = 8; III. 8 – 5 = 3; IV. 8 – 3 = 5;

V. შეკრების მთავარი თვისება: 3 + 5 = 5 + 3 ;

VI. ჯამსა და ერთ-ერთი შესაკრების სხვაობა ტოლია მეორე შესაკრებისა;

VII. 8 = 3 + 5 ანდა 8 = 5 + 3 (8-ის დაშლა შესაკრებებად) და სხვა.

ეს ყველაფერი ჩანს რიცხვის რაოდენობრივი არსით. ციფრში 8 არსად არ ჩანს რაოდენობა რვა, ხოლო „დომინოსებური“ რვიანი თვალსაჩინოდ შედგება რვა წრისაგან.

პირველკლასელისათვის ჩანაწერი 3+5=5+3 ანდა წინადადება *„ჯამს გამოკლებული ერთერთი შესაკრები ტოლია მეორე შესაკრებისა“* – ძალიან აბსტრაქტული და არაფრისმომცემია, მხოლოდ მექანიკური დამახსოვრება-გაზეპირებისაკენ უბიძგებს მას. ბავშვი ამას კი დაიმახსოვრებს, მაგრამ პრაქტიკული გამოყენება გაუჭირდება. შეიძლება გაუჭირდეს პასუხის გაცემა შეკითხვაზე: *„რისი ტოლია თხუთმეტისა და ცხრის ჯამს გამოკლებული თხუთმეტი?“* ბავშვს კი, რომელსაც შეკრება შინაარსეულ თვალსაჩინოებაზე დაფუძნებული აქტიურ-ევრისტიკული მეთოდიკით აქვს ნასწავლი, ამგვარი შეკითხვები არ აბნევს და დაფიქრების შემდეგ აზრიანად პასუხობს.

ამგვარად, პირველ კლასში მთავარია რაოდენობის არსის წვდომა. ამისათვის სასწავლო პროგრამა ასეთი მიმდევრობით უნდა აიგოს: დაწყვილება, გროვათა მეტ-ნაკლებობა, გროვათა ტოლობა, გროვის განლაგების შეცვლისას მის შემადგენელთა რაოდენობის უცვლელობა, რიცხვი ერთი – ყველა შესაძლო ერთეული, რიცხვი ორი – ყველა შესაძლო წყვილი; რიცხვი სამი – ყველა შესაძლო სამეული (ყველანაირი განლაგებით); ... შეკრება – გროვათა შეერთება,... გამოკლება, როგორც შეკრების საპირისპირო – გროვიდან აღება, ...

ეს ყველაფერი ხდება ციფრების გარეშე – მხოლოდ ნივთიერი თვალსაჩინოებით, „დომინოსებური გროვებით“ და სიტყვიერი მსჯელობით, წერას კი მოგვიანებით დაიწყებენ.

გარკვეული მეთოდური სიძნელეები ჩნდება ორნიშნა რიცხვების წაკითხვის სწავლების დროს. XX საუკუნის 60-იან წლებში აღმოჩნდა, რომ თბილისელი ქართველი მესამეკლასელები არითმეტიკაში ჩამორჩებოდნენ თავიანთ თანატოლ არაქართველ თბილისელებს. ამის მიზეზია ქართულ ენაში დამკვიდრებული თვლის ათობით-ოცობითი სისტემა. რუსულში, სომხურში, აზერბაიჯანულში, ინგლისურში და სხვა ენებში

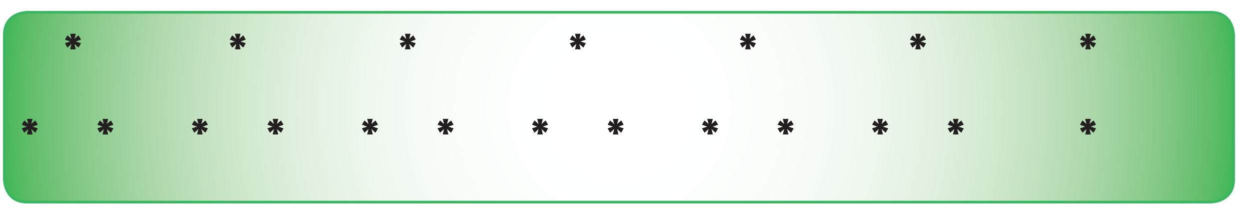
ათობითი თვლაა, ამიტომ პირველად რომელი რიცხვიც ისმის, იგივე იწერება ციფრით. ქართულენოვანი ბავშვი კი ხედავს ჩანაწერს 78, ანუ ხედავს შვიდიანს, მაგრამ უნდა თქვას **„სამი“** ესმის **„სამ-ოც-და-თვრამეტი“,** ანუ ესმის რიცხვები **„სამი“** და **„თვრამეტი“,** მაგრამ უნდა დაწეროს არა 318, არამედ 78.

ზრდასრულ ადამიანსა თუ უფროსკლასელ მოსწავლეს ეს არ ეძნელება, რადგან მის გონებაში უკვე მყარადაა შეკავშირებული ორნიშნა რიცხვის სახელწოდება და ჩანაწერი (მიჩვევის, გამოცდილების წყალობით). ცხადია, დროთა განმავლობაში დაწყებითი კლასების მოსწავლეც ეჩვევა, მაგრამ დიდი დრო სჭირდება იმისათვის, რომ უშეცდომოდ დაეუფლოს თვლის ჩვეულებრივ თანრიგობრივ სისტემას. მეორე მხრივ, ზოგჯერ, ქართულენოვანი ბავშვი, მათ შორის ძალიან გონიერიც კი, ვერ იგებს, თუ რა არის ამ შეუსაბამობის მიზეზი. რიცხვთა სახელებისა და ჩაწერის სწავლება, არსებითად, ბავშვის მეხსიერების ხარჯზე ხდება. მოსწავლე იძულებული ხდება, დაიზეპიროს, თუ როგორ იწერება ესა თუ ის რიცხვი. ამ დროს ის რაოდენობას ვერ სწვდება და, ბუნებრივია, შეკრება-გამოკლებაც უჭირს. განსაკუთრებით უჭირს ზეპირი ანგარიში.

ალ. წერეთელმა ზოგადად, ხოლო გ. ბერიშვილმა და ი. კოტეტიშვილმა დაწვრილებით, დაამუშავეს ქართულენოვანი თვლისა და რიცხვთა ჩაწერის სწავლების მეთოდიკა. მისი საშუალებით მოსწავლე (ძირითადად II კლასში) კარგად იაზრებს, თუ რატომ ხდება ზემოაღნიშნული შეუსაბამობა. ამიტომ მას შეცდომებიც ნაკლებად მოსდის და არითმეტიკასაც უკეთესად და შინაარსიანად სწავლობს. ოცობითისა და მისი შესატყვისი მეთოდიკის საშუალებით მოსწავლე გაიაზრებს საზოგადოდ თვლის სისტემების საფუძვლებს, ცხადია, არა თეორიულად, არამედ კონკრეტულ-პრაქტიკულ დონეზე, სწავლობს რაოდენობის დათვლას არა მხოლოდ ათეულებით, არამედ ნებისმიერი სათვლელი ფუძით. ეს იმდენად ძლიერად ანვითარებს ბავშვის აზროვნებას, რომ მისი მათემატიკური ცოდნის დონე და უნარები მთლიანობაში მკვეთრად ძლიერდება. მოსწავლე მიხვდება, რომ მთავარი და უცვლელი – ესაა თვით რაოდენობა, ხოლო ამ რაოდენობის სიტყვიერი დასახელება ან მისი ციფრებით ჩაწერა – პირობითია. იგი სხვადასხვაგვარი შეიძლება იყოს და დამოკიდებულია თვლის ფუძეზე (ცხადია, მიხვდება ამ ცნებათა დასახელების გარეშე – მხოლოდ პრაქტიკულად).

ყოველივე ამაში შეიძლება დაიხმარონ არსებითი სახელები: **ხუთეული, ექვსეული, სამეული** და ასე შემდეგ (**ხუთიანი, ექვსიანი, სამიანი** – სულ სხვაა). ქართულ ენაში გამზადებულია ის ცნებები, რომლებიც ნატურალურ რიცხვთა ცნებების საფუძველია.

ზ. ვახანიამ არსებითად გადაამუშავა გ. ბერიშვილისა და ი.კოტეტიშვილისეული მეთოდიკა, აქტიური მზაობის მეთოდიკის მიხედვით. ძალიან ნაყოფიერი აღმოჩნდა გროვების წარმოდგენა თვალსაჩინოდ: ლამაზი „დომინოსებური“ განლაგებით. მაგალითად, ოცელემენტიანი გროვა ასე შეიძლება დალაგდეს სამეულებად:



დაითვლიან ასე: **ექვსი სამეული და კიდევ ორი ერთეული** (ორი – ნაშთია) და ჩაწერენ:

$$6 \cdot 3 + 2$$

ცხადია, პირველ და მეორე კლასში მოსწავლემ არ იცის გამრავლება და გაყოფა და არც შეიძლება გამრავლების ხსენება. ნიშანი „ · “ აღნიშნავს მხოლოდ სიტყვას **ცალი – „ექვსი ცალი სამეული და კიდევ ორი ერთეული“**. ამასთან, ეს კარგი საფუძველი იქნება მესამე კლასში გამრავლება-გაყოფის შესასწავლად. არა მარტო გამრავლება და გაყოფა, არამედ თავიდან მოსწავლემ არც რიცხვი „ოცი“ იცის და არც სჭირდება. მას მოცემული აქვს უცნობი რაოდენობის მოუწესრიგებელი გროვა, რომელიც მან უნდა მოაწესრიგოს და დათვალოს ჯუფთებად, კერძოდ, სამეულებად. ნამრავლის გამოთვლის საკითხიც კი არ დაისმის. არც იმის გააზრებაა საჭირო, რომ 6 · 3 რაოდენობით უდრის 6 · 3-ს, „ნაშთი“ კი ამ საფეხურზე მისთვის ნიშნავს უბრალოდ „მორჩენილს”. დათვლის სამეულებად და რაც მორჩება, ისაა ნაშთი.

სავარჯიშოები ჯუფთებით თვლაზე კეთდება ჯერ მხოლოდ ზეპირად, თანაც თვალსაჩინოდ – სათვლელი ნივთების გროვებზე, შემდეგ – ნახატებზე, შემდეგ – ზოგადად რიცხვებზე. მხოლოდ ამის შემდეგ იწყება რიცხვითი გამოსახულების ჩაწერა. ბავშვები ადვილად წერენ რიცხვით გამოსახულებას დალაგებული ჯუფთების მიხედვით და, პირიქით, – მოცემული რიცხვითი გამოსახულების მიხედვით ალაგებენ ნივთების ჯუფთებს ან ხატავენ რაიმე ნიშნების, ფიგურების თუ სურათების ჯუფთებს.

ასე მოსწავლეები სწავლობენ თვლას სხვადასხვა სათვლელი ფუძეებით. ათეულობით თვლა – ესაა ერთ-ერთი კერძო შემთხვევა ჯუფთებით თვლისა, არაფრით გამორჩეული სხვებისაგან. ეს მეცნიერული თვალსაზრისითაც ასეა. ათეულის გამორჩევა სხვა ფუძეებისაგან განპირობებულია არა მათემატიკური მიზეზებით, არამედ მხოლოდ იმით, რომ ადამიანს ხელებზე ათი თითი აქვს.

შემდეგ მოსწავლე გაიაზრებს, რომ ცხრაზე მეტი და ოცზე ნაკლები რიცხვების წასაკითხად და ჩასაწერად ისინი უნდა დაითვალონ ათეულებად. მეორე კლასში სწავლობენ, რომ ოცზე მეტი რიცხვების სახელწოდებისთვის საჭიროა მათი დათვლა ოცეულებად, ხოლო ამავე რიცხვების ჩასაწერად საჭიროა მათი დათვლა ათეულებად.

დავალება დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

1. რომაული ციფრებით მოცემული რიცხვები ჩაწერეთ არაბული ციფრების სა-შუალებით

   ა) CCLV; ბ) MDC ; გ) LD

2. ჩაწერე რომაული ციფრების საშუალებით.

   ა) 1098; ბ) 1121 გ) 1166

3. შემდეგი ჩამონათვალიდან რომელი წევრია გამონაკლისი?

   ხუთეული, ათეული, ოცეული, წყვილი, ასეული, ერთეული, სამი.

4. გაარკვიეთ რომელი წევრია გამონაკლისი რიცხვთა მოცემულ ერთობლიობაში

   A = {065, 020, 460, 082, 006, 501, 110, 106, 540, 161, 081}.

5. ჩაწერეთ რიცხვი *ას ოცი მილიონ ორმოცი ათას სამოცდაცხრამეტი.* გაარკვიეთ, რამდენ ასეულს შეიცავს მოცემული რიცხვი? რამდენ ათასეულს?

6. ჩაწერეთ რიცხვი *ას ოცი მილიონ ოთხმოცი ათას სამოცდაცამეტი.* მოცემული რიცხვის ციფრულ ჩანაწერში რას აღნიშნავს ერთიანი? რვიანი?

7. გაარკვიეთ, როგორ შეიცვლება ნატურალური რიცხვი, თუ მის ციფრულ ჩანაწერს:

   1) მარჯვნივ მივუწერთ: ა) ორ ნულიანს; ბ) ექვს ნულიანს;

   2) მარცხნივ მივუწერთ: ა) ორ ნულიანს; ბ) ექვს ნულიანს.

8. გაარკვიეთ შემდეგი წინადადებებიდან, რომელია მცდარი და რატომ?

   I. ხუთნიშნა რიცხვის პირველი ციფრი გვიჩვენებს, ამ რიცხვში რამდენი ათია-თასეულია;

   II. ექვსნიშნა რიცხვის პირველი ციფრი გვიჩვენებს, ამ რიცხვში რამდენი ასიათ-ასეულია;

   III. ხუთნიშნა რიცხვის მეორე ციფრი გვიჩვენებს, ამ რიცხვში ათიათასეულთა გარდა კიდევ რამდენი ათასეულია;

   IV. ექვსნიშნა რიცხვის მესამე ციფრი გვიჩვენებს, ამ რიცხვში რამდენი ათასეულია;

9. მოცემული რიცხვები წარმოადგინეთ სათანრიგო შესაკრებთა ჯამად:

   I) *რვაას ჩვიდმეტი მილიონ ხუთას ოთხი ათას სამას ოთხმოცი;*

   II) *თვრამეტი მილიარდ ას ოცი მილიონ ორას თხუთმეტი ათას სამოცდაორი.*

10. დაწერეთ და წაიკითხეთ რვანიშნა რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს ყველა შემ-დეგ პირობას:

    - 48 მილიონზე მეტია;
    - ასეულათასეულების აღმნიშვნელი ციფრია 0;

- ათეულათასეულების აღმნიშვნელი ციფრია 4;
- ათასეულების აღმნიშვნელი ციფრია 3;
- ასეულების, ათეულებისა და ერთეულების აღმნიშვნელი ციფრებია 0,1 და 2, შესაბამისად.

11. დაასახელეთ რიცხვის სამი ძირითადი გამოყენება და მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითები.

12. გაკვეთილის თემაა: **„ორნიშნა რიცხვის წარმოდგენა ოცეულებად და მისი სიტყვიერი სახელწოდება“**.

რომელი მაგალითი უნდა იქნას განხილული ამ გაკვეთილისთვის?

(ა) ოთხმოცდაექვსი 86 8·10 + 6	**(ბ) ოთხმოცდაექვსი** 4·20 + 6 86
(გ) 65 3·20 + 5 **სამოცდახუთი**	(დ) 18 0·20 + 18 **თვრამეტი**

13. გაკვეთილის თემაა: **„სიტყვიერად მოცემულ (ანუ ოცეულებად დათვლილ) მრგვალ ოცეულთა შედარება“.**

რომელი მაგალითი უნდა იქნას განხილული ამ გაკვეთილისთვის?

ა) **ორმოცდაცხრა < სამოცდაორი**

$2\cdot20 + 9 < 3\cdot20 + 2$

ბ) $60 < 80$

$6\cdot10 < 8\cdot10$

გ) **სამოცი < ოთხმოცი**

$3\cdot20 < 4\cdot20$

დ) $44 < 49$

$4\cdot10 + 4 < 4\cdot10 + 9$

შემაჯამებელი ტესტი

1. მოცემული რიცხვებიდან რომელი ვერ იქნება ამ კანონზომიერი რიგის წევრი?

80, 808, 8080, 80808, ...

ა) 808080; ბ) 80808080; გ) 808080808; დ) 808808.

2. გაკვეთილის თემაა: **„ასზე ნაკლებ რიცხვთა ციფრული ჩანაწერის დაკავშირება ათეულებად დათვლისას მორჩენილ ნაშთთან“.**

რომელი მაგალითი უნდა იქნას განხილული ამ გაკვეთილისთვის?

ა) **ოცდაოთხი** = 2·10 + 4. ჩაიწერება: 24. რას გვიჩვენებს ციფრი 2 და რას გვიჩვენებს ციფრი 4?

ბ) **ოცდათოთხმეტი** = 1·20 + 14. ჩაიწერება: 34. რას გვიჩვენებს ციფრი 3 და რას გვიჩვენებს ციფრი 4?

გ) **ოცდაოთხი** = 1·20 + 4. ჩაიწერება: 24. რას გვიჩვენებს ციფრი 2 და რას გვიჩვენებს ციფრი 4?

დ) **ოცდაოთხი** = 1·10 + 14. ჩაიწერება: 24. რას გვიჩვენებს ციფრი 1 და რას გვიჩვენებს ციფრი 4?

3. გაკვეთილის თემაა: **„სიტყვიერად მოცემულ (ანუ ოცეულებად დათვლილ) ორნიშნა რიცხვთა შედარება“.**

რომელი მაგალითი უნდა იქნას განხილული ამ გაკვეთილისთვის?

ა) **ორმოცდაცხრა < სამოცდაორი**

2•20 + 9 < 3 •20 + 2

ბ) 49 < 62

4•10 + 9 < 6•10 + 2

გ) **სამოცი < ოთხმოცი**

6•10 < 8•10

დ) 44 < 49

2•20 + 4 < 2•20 + 9

4. ვთქვათ, მოსწავლემ შვიდეულებად უნდა დაალაგოს 50 ცალი კუბი. რომელი გამოსახულება ასახავს კუბების მიღებულ განაწილებას?

ა) **$7 \cdot 7+5$**; ბ) **$6 \cdot 7+8$;** გ) **$7 \cdot 7+1$**; დ) **$5 \cdot 9+5$**.

5. მოსწავლეებს მისცეს გროვა, რომელიც შედგება 9 რგოლისაგან. მასწავლებელი სხვადასხვა მოსწავლეებს აწყობინებს ამ გროვას ერთეულებად, წყვილებად, სამეულებად, ოთხეულებად, ... , ცხრაეულებად და თითოეულ შედეგს წერენ დაფაზე. ბოლოს, ასეთი ცხრილი მიიღება:

$9 \cdot 1+0$	$9 \cdot 1$
$4 \cdot 2+1$	$4 \cdot 2+1$
$3 \cdot 3+0$	$3 \cdot 3$
$2 \cdot 4+1$	$2 \cdot 4+1$
$1 \cdot 5+4$	$1 \cdot 5+4$
$1 \cdot 6+3$	$1 \cdot 6+3$
$1 \cdot 7+2$	$1 \cdot 7+2$
$1 \cdot 8+1$	$1 \cdot 8+1$
$1 \cdot 9+0$	$1 \cdot 9$

რომელია ამ სასწავლო ქმედების დანიშნულება?

ა) ერთიდაიმავე გასაყოფის ნაშთიან-უნაშთო გაყოფა სხვადასხვა გამყოფზე.

ბ) სხვადასხვა გასაყოფის ნაშთიანი გაყოფა ერთსა და იმავე გამყოფზე.

გ) სხვადასხვა გროვის დათვლა ერთი და იმავე ჯუფთებით, ნაშთიან-უნაშთოდ.

დ) ერთიდაიმავე გროვის დათვლა სხვადასხვა ჯუფთებით, ნაშთიან-უნაშთოდ.

6. a და b სამნიშნა ნატურალური რიცხვებია, იპოვეთ $3a-2b$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა.

7. ორნიშნა რიცხვის ციფრები ერთმანეთის მომდევნო ნატურალური რიცხვებია. მეორე ორნიშნა რიცხვი ჩაწერილია იმავე ციფრებით, ოღონდ შებრუნებული რიგით. ამ რიცხვებიდან ერთ-ერთი მეტია მეორეზე:

(ა) 7-ით; (ბ) 9-ით; (გ) 10-ით; (დ) 11-ით.

8. ნინო და ანა მატარებელში ერთმანეთის მეზობელ ვაგონებში არიან. ნინო მეექვსე ვაგონშია, ანა კი – ბოლოდან მერვეში. სულ რამდენი ვაგონია ამ მატარებელში?

(ა) ან 11, ან 14;

(ბ) ან 11, ან 15;

(გ) ან 12, ან 13;

(დ) ან 12, ან 14.

თავი 3. მოქმედებები რიცხვებზე

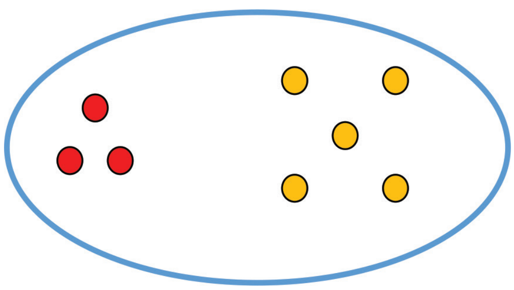
1. შეკრება-გამოკლების მათემატიკური არსი

როგორც წინა თავში აღინიშნა, ყოველი ნატურალური რიცხვი – ესაა ის საერთო, რაც აქვს ყოველგვარ საგანთა ყველა შესაძლო **ტოლძალოვან** სასრულ ერთობლიობას. ამიტომ, საჭიროა, ნატურალურ რიცხვებზე მოქმედებები სიმრავლეებზე ოპერაციების საშუალებით განისაზღვროს.

ვთქვათ, A და B თანაუკვეთი სიმრავლეებია და A სიმრავლეში წევრთა რაოდენობას გამოხატავს ნატურალური რიცხვი a, ხოლო B სიმრავლეში – ნატურალური რიცხვი b, მაშინ a და b ნატურალური რიცხვების ჯამი წარმოადგენს A∪B სიმრავლეში ელემენ-ტების რაოდენობას

შეკრების მათემატიკური არსი – ორი თანაუკვეთი სიმრავლის გაერთიანება.

მაგალითად, როგორ იკრიბება სამი და ხუთი. ამისათვის, რაიმე სამწევრიანი ერთობლიობა უნდა გაერთიანდეს მასთან თანაუკვეთ ხუთწევრიან ერთობლიობასთან, შემდეგ კი დაითვალოს წევრების რაოდენობა გაერთიანებაში. ამას მოსწავლეები ასე აკეთებენ: აირჩევენ სამ თითს, მერე სხვა ხუთ თითს და ითვლიან სულ რამდენი თითი მიიღეს. თუ მოსწავლემ ჯამი გაერთიანებასთან არ დააკავშირა, ის ვერ ჩაწვდება შეკრების არსს და მოუწევს ჯამების მნიშვნელობათა მექანიკური დაზეპირება. პირველ კლასში მას-წავლებელმა შეკრების თემა აუცილებლად ნივთების გროვების გაერთიანებით უნდა დაიწყოს. მაგალითად, ამ სქემაზე თვალსაჩინოდ ჩანს, თუ რატომაა 3 + 5 = 8.



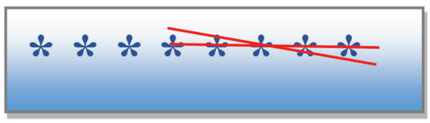
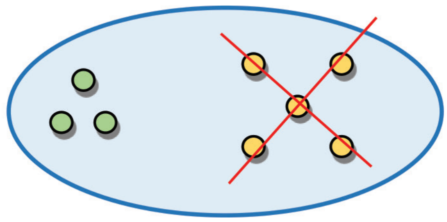
გამოკლება – ესაა შეკრების საპირისპირო მოქმედება. მისი არსია უცნობი შესაკრების გა-მოთვლა ჯამისა და მეორე შესაკრების მიხედვით.

მოცემული სქემის მსგავსი სქემები პირველკლასელებს გაუმარტივებს შეკრების შეს-რულებას.

a და b ნატურალური რიცხვების სხვაობა წარმოადგენს A\B სიმრავლეში ელემენ-ტების რაოდენობას, თუ B⊂A.

ესე იგი, მოცემულ სიმრავლეს უნდა გამოაკლდეს თავისი ელემენტები – და არა სხვა სიმრავლის ელემენტები. ამასთან, მაკლების შესაბამისი სიმრავლე საკლების შესაბამისი სიმრავლის ქვესიმრავლეა – და არა სხვა სიმრავლე. ამიტომ, გამოკლების ახსნის დროს საკლებისა და მაკლების შესაბამისი ცალ-ცალკე გროვებით გათვალსაჩინოება არ არის სწორი. გამოკლებისას გროვის სახით მოცემულია მხოლოდ საკლები, ხოლო მაკლები იმავე გროვაშია. ამიტომ, მაკლების წარმოდგენა უმჯობესია სიტყვით ან ციფრით.

მოცემულ სქემებზე თვალსაჩინოდ ჩანს, თუ რატომაა 8 – 5 = 3.

განვიხილოთ ზეპირი ანგარიშისთვის მოსახერხებელი ერთ-ერთი ხერხი. თუ საკლებსა და მაკლებს შორის განსხვავება შედარებით მცირეა, კარგი იქნება უახლოეს მრგვალ თანრიგამდე შევსების ხერხის გამოყენება. მაგალითად, უნდა გამოთვალონ სხვაობის მნიშვნელობა 394-378=? მსჯელობენ ასე: 378-ის უახლოესი მრგვალი რიცხვია 380. მას 380-მდე აკლია 2, შემდეგ 390-მდე აკლია 10 და 394-მდე აკლია 4, ამიტომ სხვაობის მნიშვნელობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს: 2 + 10 + 4 = 16. შესაბამისად, 394-378=16.

2. შეკრება-გამოკლების სწავლების მეთოდიკის საკითხები

ტრადიციული მეთოდიკით სწავლების დროს მოსწავლეებს უჭირთ რაოდენობის გააზრება. ასევე ვერ იაზრებენ არითმეტიკულ მოქმედებათა არსს და მექანიკურად ასრულებენ მათ. იმისათვის, რომ მოსწავლეებმა არითმეტიკული მოქმედებები მექანიკურად არ შეასრულონ, საჭიროა, არითმეტიკული მოქმედება დაყვანილ იქნას თვლაზე. ამ შემთხვევაში, მოქმედება თვალსაჩინოც იქნება და მისი არსიც უკეთ წარმოჩნდება.

პირველკლასელმა მათემატიკის შესწავლა უნდა დაიწყოს ნივთიერ, კონკრეტულ საგნებზე მოქმედებებით. მისთვის მთავარი თვალსაჩინოება უნდა იყოს არა სურათები, არამედ ნამდვილი ნივთები. წიგნი და სურათი უკვე განყენებაა. პირველი კლასის მათემატიკის ერთ-ერთი მიზანი სწორედ ესაა – მოამზადოს მოსწავლე სინამდვილიდან წიგნზე გადასასვლელად; განუვითაროს მოსწავლეს სურათებსა და ნაწერებში ნამდვილი ვითარების დანახვის და მისი წარმოდგენის უნარ-ჩვევა. პირველ კლასში კი ყველა სასწავლო აქტივობა უნდა განხორციელდეს ნივთებზე.

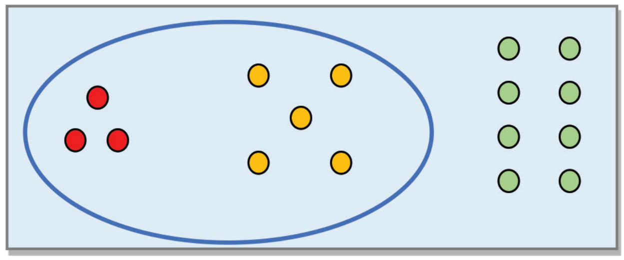
არითმეტიკულ მოქმედებათა შესწავლისას გავრცელებული თვალსაჩინოებებია სურათებზე გამოსახული ვითარებები. მაგალითად, დახატულია ხეზე მჯდომი სამი და ორი გაფრენილი ჩიტი. ასეთი ტიპის სურათები მოქმედებისა და მიმართების აღქმისთვის არ გამოდგება, რადგან მოქმედება მხოლოდ მოძრაობაში ხორციელდება, სურათი კი გაჩერებულია (გარდა კომპიუტერული თვალსაჩინოებისა) და მასში მოქმედების დანახვა ცალკე ამოცანაა. ნახატზე გამოსახულ ვითარებაში მათემატიკური მოქმედების დანახვა არაა თვალსაჩინოება. ამის გამო, ასეთი ტიპის სურათების გამოყენება კარგი იქნება მას შემდეგ, როცა მოსწავლეებს კარგად ექნებათ ათვისებული არითმეტიკული მოქმედებები და გააზრებული ექნებათ მათი არსი (II კლასში).

არითმეტიკული მოქმედებების ახსნა იწყება შეკრებით. მაგალითად, როგორ იკრიბება სამი და ხუთი? როგორც ვიცით, **სამი** – ესაა ყველა შესაძლო სამეულთა ერთობლიობა, მისი წარმომადგენელია რომელიმე სამეული, ხოლო **ხუთი** – ესაა ყველა შესაძლო ხუთეულთა ერთობლიობა და მისი წარმომადგენელია რომელიმე ხუთეული. ამიტომ, **სამი+ხუთი** უნდა გათვალსაჩინოვდეს თითებით ან ჩხირებით: სამი ჩხირი უნდა შეაერთონ ხუთ ჩხირთან და დაითვალონ მიღებული გროვა. სათვლელი ნივთები ჩხირების გარდა შეიძლება იყოს ღილები, კუბები, მაგნიტები, ასანთის ღერები,... . მოსწავლის ცნობიერებაში შეკრება ერთ ნივთს რომ არ მიეჯაჭვოს, აუცილებელია სათვლელი თვალსაჩინოებების ცვლა და საბოლოოდ მოსწავლემ ნივთებისგან განყენებული აზროვნებაც უნდა შეძლოს.

თავიდან კარგია შეერთებით მიღებული გროვის ერთად მოთავსება ნამდვილ ჯამში, შემდეგ საფეხურებზე – ჯამის სქემაში – ელიფსში, რომელიც „ვითომ ჯამია“, ეს გააადვილებს ჯამის ცნების გააზრებას.

შეკრების გააზრების შემდეგ იწყება გამოკლებაზე მუშაობა. იგი უფრო ძნელი გასააზრებელია, ვიდრე შეკრება, რადგან შეუძლებელია მაკლების ნივთიერი გათვალსაჩინოება. გამოკლების დროს გათვალსაჩინოებული უნდა იყოს მხოლოდ საკლები. მაგალითად, **რვა** წრის გროვა და მისგან უნდა აიღონ, ანუ მას უნდა მოაკლონ **სამი.** ისევე როგორც შეკრება, გამოკლებაც მხოლოდ სათვლელ ნივთებზე მოქმედებით უნდა

შეასრულონ. შემდეგი საფეხურია იმის გააზრება, რომ გამოკლება – შეკრების საპირისპირო მოქმედებაა (ამ ტერმინების გარეშე – მხოლოდ პრაქტიკულად). ეს ადვილად ჩანს იმავე გროვებზე. მაგალითად, ხუთ წრეს ისევ დაუმატონ სამი და ჯამში მიიღებენ ისევ რვას. ეს სქემაზეც თვალსაჩინოდ ჩანს.



მოსწავლე თვალსაჩინოდ ხედავს, რომ სამს მივუმატოთ ხუთი რვის ტოლია. აგრეთვე შეუძლია უპასუხოს კითხვას – რას უდრის რვას გამოკლებული ხუთი? ამისათვის შეიძლება ელიფსში ხელი დააფაროს ხუთეულს და პირდაპირ გამოჩნდება, რომ პასუხი სამის ტოლია.

ამგვარ სავარჯიშოთა შედეგად მოსწავლე თვითონ აღმოაჩენს, რომ შეკრება და გამოკლება საპირისპირო მოქმედებებია.

როგორც ადრე აღინიშნა, ჟ. პიაჟემ აღმოაჩინა ბავშვის აზროვნების თვისება – რომ მას უჭირს შექცევადობის გააზრება და მასში ინვარიანტობის დანახვა – ანუ მიხვედრა, რომ თუ შესრულდება რაიმე მოქმედება, შემდეგ კი მისი საპირისპირო მოქმედება, ამით საბოლოოდ არაფერი შეიცვლება. ზემოთ აღწერილი მეთოდიკით შესაძლებელია ჟ. პიაჟეს მიერ აღმოჩენილ თვისებაზე მუშაობა და საჭირო უნარების განვითარება.

3. გამრავლების მათემატიკური არსი

ნატურალურ რიცხვთა გამრავლებას სკოლაში განსაზღვრავენ, როგორც ტოლ შესაკრებთა ჯამის მნიშვნელობის გამოთვლას, ხოლო ნამრავლი – ტოლ შესაკრებთა ჯამია. ვთქვათ, უნდა გამოვთვალოთ ჯამი: $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$, ის შეიძლება მოკლედ ჩავწეროთ: $9 \cdot 4$, ანუ ცხრა ცალი ოთხიანი, იგივეა ცხრაჯერ ოთხი.

ამგვარად, **გამრავლების** მოქმედება, იგივეა რაც **ტოლ შესაკრებთა შეკრება.** რიცხვს, რომელიც შესაკრებად მეორდება ეწოდება **სამრავლი**, ხოლო რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ არის გამეორებული ტოლი შესაკრები, ეწოდება **მამრავლი**. სამრავლს და მამრავლს, ორივეს – **თანამამრავლები** ეწოდება. მოქმედების შედეგს, ანუ ტოლ შესაკრებთა ჯამს **ნამრავლი** ეწოდება.

ცხადია, რომ ნატურალური რიცხვის ერთზე ნამრავლი თვით ეს რიცხვია.

განვიხილოთ ერთი კერძო მეთოდიკური საკითხი. ტრადიციულად, ნამრავლის ჩანაწერში ჯერ იწერება შესაკრები, ხოლო შემდეგ – მისი რაოდენობა. მაგალითად, $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 7$. ასევე, ტრადიციულ მეთოდიკაში „სამოცდათვრამეტი“ იშლება ასე: $78 = 10 \cdot 7 + 8$ ან $78 = 20 \cdot 3 + 18$ ასეა სასკოლო არითმეტიკის კურსში, მაგრამ აღმოჩნდა, რომ მოსწავლეები წერდნენ პირიქით: $78 = 3 \cdot 20 + 18$.

საკითხის არსზე დაკვირვების შედეგად დადგინდა, რომ ეს მოსწავლეები სწორად წერენ (მანანა ფხაკაძე). მართლაც, როგორც მშობლიურ ენაში, ისე მათემატიკაშიც ჯერ ითქმის და იწერება რაოდენობა, ხოლო შემდეგ – საგანი, მაგალითად, „**სამი ვაშლი**“ და არა „ვაშლი სამი“ ან „ვაშლი სამჯერ“, „**15 მეტრი**“ და არა „მეტრი 15“; „**სამოცი**“ და „**ხუთი ათასი**“ და არა „ოცი სამი“ ან „ათასი ხუთი“; „**ოთხი y**“ და არა „y ოთხი“ და სხვა.

საზოგადოდ: $X + X + ... + X$ – ესაა k-ჯერ X, და ჩაიწერება ასე: $k \cdot X = kX$, და არა $X \cdot k$.

ასევე, ბუნებრივად ლაგდება სიტყვების რიგი ნამრავლის წაკითხვისას:

$3 \cdot 20$ → სამ ჯერ ოცი

$78 = 3 \cdot 20 + 18$ → **სამ ოც და თვრამეტი**

ამრიგად, ტრადიციულ სასკოლო არითმეტიკაში დამკვიდრებული ნამრავლის ჩაწერა და დასახელება – მცდარია როგორც მათემატიკური, ასევე ფსიქოლოგიური თვალსაზრისით.

4. გაყოფის მათემატიკური არსი. ნაშთიანი გაყოფა

ისევე როგორც გამოკლებაა შეკრების საპირისპირო მოქმედება, ასევე გაყოფა – ესაა გამრავლების საპირისპირო მოქმედება. მისი არსია უცნობი თანამამრავლის გამოთვლა ნამრავლისა და მეორე თანამამრავლის საშუალებით. a ნატურალური რიცხვი იყოფა b რიცხვზე ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი c ნატურალური რიცხვი, რომ $a=b{\cdot}c$, საიდანაც $a{\div}b=c$. ამ დროს a არის გასაყოფი, b – გამყოფი, c – განაყოფი.

გაყოფის შესწავლისას უნდა გავითვალისწინოთ სირთულე – ნაშთიანი გაყოფა – შეიძლება, a ზუსტად არ გაიყოს b-ზე და მოგვრჩეს ნაშთი. ეს საკითხი გაყოფის სწავლების დასაწყისშივე უნდა გაირკვეს, რადგან თუ მოსწავლემ გაყოფის სწავლის დასაწყისში მხოლოდ უნაშთო გაყოფები შეასრულა, მას შეექმნება მცდარი შეხედულება, რომ გაყოფა ყოველთვის ზუსტად სრულდება და შეიძლება მომავალში მას გაუჭირდეს ნაშთიანი გაყოფის გააზრება.

მოდით ჩავუღრმავდეთ ამ საკითხს და განვიხილოთ ერთ-ერთი დიდი მათემატიკური სირთულე. გაყოფა ყოველთვის მთელი რიცხვის მიღებით არ მთავრდება. მაგალითად, ნატურალური რიცხვების 6-ზე გაყოფისას, უნაშთოდ გაყოფის შესრულება ყოველი ურთიერთმომდევნო ექვსი რიცხვიდან მხოლოდ ერთ შემთხვევაშია შესაძლებელი. თუ გაყოფა ზუსტად არ სრულდება, მაშინ ნაშთი შეიძლება ორნაირად იქნას გამოყენებული: ჩაიწეროს მორჩენილ ოდენობად, ანუ ნაშთად, ან ნაშთი ჩაიწეროს წილადის სახით. ამის მიხედვით შეიძლება ითქვას, რომ გაყოფა არსებობს ორი სახის: ნაშთიანი გაყოფა და წილადური გაყოფა. პირობითად, პირველი სახის გაყოფას ვუწოდოთ ნაშთიანი გაყოფა (შემცველობითი) და მეორე სახისას – წილადური გაყოფა.

პირველი სახის გაყოფაა ნაშთიანი გაყოფა. უნაშთოდ გაყოფა გახლავთ მისი კერძო შემთხვევა, როცა ნაშთი ნულის ტოლია.

უნაშთო გაყოფა არის ნაშთიანი გაყოფის კერძო შემთხვევა, როცა ნაშთი ნულის ტოლია.

განვიხილოთ ნაშთიანი ანუ შემცველობითი გაყოფის არსი. გამრავლება არის ტოლ შესაკრებთა შეკრება, გაყოფა გამრავლების საპირისპირო მოქმედება; ამიტომ, გაყოფა ნიშნავს რიცხვის დაშლას ტოლ შესაკრებთა ჯამად.

მაშასადამე განაყოფის მოსაძებნად, უნდა გაირკვეს რამდენჯერ უნდა შეკრიბონ გამყოფი, რომ მიიღონ გასაყოფი.

მაგალითად, $21 : 4 = ?$ საკითხი ისმის ასე: რამდენჯერ უნდა შეკრიბონ 4, რომ მიიღონ 21? $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$, ხოლო 21-ში მეტი ოთხეული აღარ მოთავსდება, ამიტომ, $21 : 4 = 5$ (ნაშთი 1). რადგან $21 = 5 \cdot 4 + 1$, ამიტომ, განაყოფია 4 და ნაშთი – 1. თუ უნდა შეასრულონ $20 : 4$, მაშინ განაყოფია 5, და ნაშთი 0, რაც იგივეა $20 : 4 = 5$.

მოვიყვანოთ განხილული საკითხის ყოფაცხოვრებაში გამოყენების მაგალითი: გაარკვიეთ, 21 ლარით მაქსიმუმ რამდენი ცალი 4-ლარიანი წიგნის ყიდვაა შესაძლებელი. რადგან

$21 = 5 \cdot 4 + 1$, ამიტომ შეიძლება შეიძინონ 5 წიგნი და ხურდა დარჩებათ 1 ლარი.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, გამრავლება არის ტოლ შესაკრებთა შეკრება და გაყოფა გამრავლების საპირისპირო მოქმედება. როგორ არის იგი დაკავშირებული გამოკლე-ბასთან? ვთქვათ მოცემულია 21 ჩხირი.

IIIIIIII

IIIIIIII

IIII

ამოვაკლოთ ოთხეულები ჩხირების საერთო რაოდენობიდან. პროცესი გავაგრძელოთ მანამ, სანამ შესაძლებელია ოთხეულების ამოკლება. 21 ჩხირიდან ამოაკლდება 5 ცალი ოთხეული და კიდევ მორჩება ერთი ჩხირი:

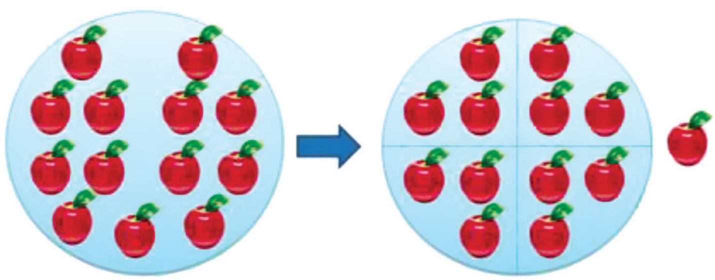
IIII IIII IIII IIII IIII I

$$20 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 = 1.$$

ოცდაერთს ოთხი გამოაკლდება 5-ჯერ და დაგვრჩება 1. გვექნება

$$21 : 4 = 5 \text{ (ნაშთი 1).}$$

მაშასადამე, გაყოფა ნიშნავს ტოლ მაკლებთა მრავალჯერად გამოკლებას. განაყოფის მო-საძებნად, უნდა გაირკვეს, რამდენჯერ უნდა გამოვაკლოთ გამყოფი გასაყოფს.



განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: ვთქვათ თეფშზე დევს 13 ვაშლი, რომელიც უნდა გავუნაწილოთ ბავშვებს ისე, რომ თითოეულს შეხვდეს 3 ვაშლი. რამდენ ბავშვზე შე-ძლება განაწილდეს ვაშლები?

$$13 - 3 - 3 - 3 - 3 = 1$$

სამი უნდა გამოვაკლოთ ცამეტს 4-ჯერ და დარჩება 1, ანუ 13-ის სამზე გაყოფისას მიიღება განაყოფი 4 და ნაშთი 1. $13 : 3 = 4$ (ნაშთი 1). ამიტომ 13 ვაშლი გაიყოფა 4 ბავშვზე. თითოეულს შეხვდება 3 ვაშლი და კიდევ მორჩება 1.

II. გაყოფის მეორე სახეა წილადური გაყოფა ანუ თანაბარი დაყოფა. განვიხილოთ იგივე მაგალითი და 21 გავყოთ 4 თანაბარ ნაწილად:

$$21 = 4 \cdot x, \quad x = 21 : 4 = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

მაგალითად, როგორ განაწილდება 21 ლარი თანაბრად 4 ბავშვს შორის? თითოეულს შეხვდება 5 ლარი და კიდევ 1/4 თეთრი ანუ 5 ლარი და 25 თეთრი.

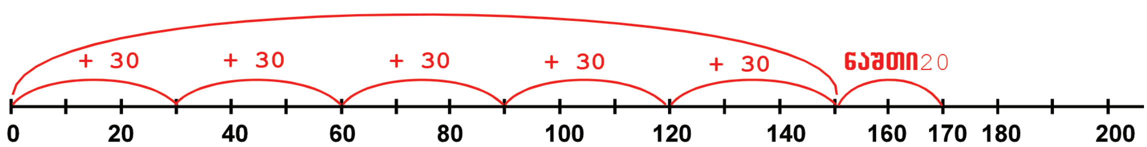
გაყოფის ნამდვილი პირველადი არსი – ესაა პირველი სახის გაყოფა, რადგან ნაშთიანი გაყოფის გზა ბუნებრივი და თვალსაჩინოა. მოსწავლეები დაიწყებენ პირდაპირ ოთხეულების შეკრებას მანამ, სანამ 21-ს არ გადააჭარბებენ. 21-ის 4-ზე თანაბრად გაყოფა კი, ცხადად არ ჩანს. ამიტომ, ჯერ კარგად უნდა ისწავლონ ნაშთიანი (შემცველობითი) გაყოფა და, მხოლოდ შემდეგ, და ნაშთიანი გაყოფის საფუძველზე, უნდა დაიწყონ გაყოფის გამოყენება თანაბარი დაყოფისთვის და, შესაბამისად, წილადებისთვისაც.

სკოლაში გაყოფის სწავლებისას ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი საკითხია, რომ არ ავრიოთ პირველი და მეორე სახის გაყოფა ერთმანეთში – რადგან ამ დროს მოსწავლე ვერც ნაშთს გაიაზრებს კარგად და ვერც წილადებს. მასწავლებლებმა უნდა გაითვალისწინონ, რომ ლოგიკურად წილადების შესწავლას სჭირდება ნაშთიანი გაყოფის ცოდნა; პირიქით, ნაშთიან გაყოფას კი წილადების ცოდნა არ სჭირდება. ზოგჯერ წილადების ნაადრევი შემოტანა ხელს უშლის ნაშთიანი გაყოფის შესწავლას. ამიტომ, მოსწავლეებმა ჯერ საფუძვლიანად უნდა შეისწავლონ და გაიაზრონ ნაშთიანი გაყოფა და მხოლოდ ამის შემდეგ, დაახლოებით მე-V-ე კლასიდან, შეიძლება წილადურ გაყოფაზე გადასვლა. ამრიგად, ნაშთიანი გაყოფა მასწავლებლებმა უნდა გამოიყენონ წილადური გაყოფის წინარე ცოდნად.

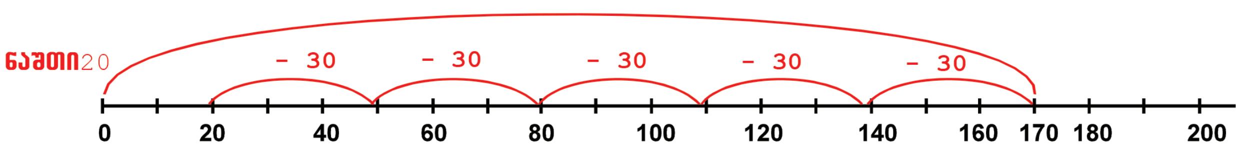
თვალსაჩინოებისთვის გამოდგება ნაშთიანი გაყოფა რიცხვთა სხივზე.

მაგალითად, როგორ შევასრულოთ 170 : 30 რიცხვით სხივზე:

ნაშთიანი გაყოფა რიცხვთა სხივზე



ანალოგიური სხივი ოღონდ 30-ის გამოკლებით წამოვიდეთ 170-დან



ნახაზიდან ჩანს, რომ 170-ში ეტევა 5 ცალი ოცდაათეული და კიდევ რჩება ნაშთი 20.

ამგვარად, 170 : 30 = 5 (ნაშთი 20).

გაყოფის არსის საფუძველზე გამრავლების, გამოკლებისა და შეკრების საშუალებით გაყოფის შესრულება მარტივად შეიძლება. განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა.

1) რადგან ნამრავლი არის ტოლ შესაკრებთა ჯამი, ხოლო გაყოფა არის გამრავლების საპირისპირო მოქმედება – რაიმე რაოდენობის დაშლა ტოლ შესაკრებთა ჯამად, ამიტომ 90-ის 11-ზე გაყოფა ნიშნავს, რომ 90 უნდა დაიშალოს თერთმეტეულებად და გაირკვეს, რამდენი თერთმეტეული მოთავსდება 90-ში:

$$11 + 11 = 2 \cdot 11 = 22$$

$$11 + 11 + 11 = 3 \cdot 11 = 33$$

$$11 + 11 + 11 + 11 = 4 \cdot 11 = 44$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 8 \cdot 11 = 88$$

$11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 9 \cdot 11 = 99$ – ეს უკვე აღარ მოთავსდება. ამიტომ, 90-ში მოთავსდება 8 ცალი თერთმეტეული და კიდევ მორჩება ნაშთი 2.

იგივე გაყოფა, შესაძლოა შევასრულოთ ასეც:

90-11=79

90-11-11=68

90-11-11-11=57

90--11-11-11-11=46

90-11-11-11-11-11=35

90-11-11-11-11-11-11=24

90-11-11-11-11-11-11-11=13

90-11-11-11-11-11-11-11-11=2

მეტი თერთმეტეული უკვე აღარ მოთავსდება. ამიტომ 90-ში მოთავსდება 8 ცალი თერთმეტეული და კიდევ მორჩება ნაშთი 2.

ამგვარად, $90 = 8 \cdot 11 + 2$ და $90 : 11 = 8$ (ნაშთი 2). მოსწავლეებმა ყურადღება უნდა მიაქციონ, რომ ნაშთი არ შეიძლება იყოს გამყოფზე მეტი ან მისი ტოლი. მაგალითად, როცა რაიმე რიცხვს ყოფენ 11-ზე, ნაშთი არ შეიძლება იყოს 11, 12, 13 ან უფრო მეტი. ეს იმიტომ, რომ თითოეულ მათგანში კიდევ მოთავსდება თერთმეტეული. მაგალითად, მოსწავლემ რაღაც რიცხვი გაყო 11-ზე, განაყოფი მიიღო 20 და ნაშთი 14. მაშინ ამ 14-ისგან ხომ შეიძლება კიდევ ერთი თერთმეტეულის გამოყოფა. ესე იგი, განაყოფს დაემატება კიდევ ერთი 11-ეული, ხოლო ნაშთი სინამდვილეში ყოფილა 14-11 = 3. ამიტომ, მოსწავლეს ნაცვლად პასუხისა – 20 (ნაშთი 14), უნდა მიეღო 21 (ნაშთი 3).

ზემოთ აღინიშნა, რომ ნაშთი შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, ამ დროს გასაყოფი იყოფა გამყოფზე უნაშთოდ.

2) საჭიროა შეასრულონ უნაშთო გაყოფა $1500 : 250 = ?$

ისევ უნდა გამოიყენონ გამრავლება $4 \cdot 250 = 1000$; $2 \cdot 250 = 500$; $4 + 2 = 6$; ამგვარად, $1500 : 250 = 6$.

3) ანალოგიურად, $112 : 11 = ?$; $10 \cdot 11 = 110$; $110 + 2 = 112$. მაშასადამე $112 : 11 = 10$ (ნაშთი 2).

ნაშთიანი გაყოფის შემოწმებაც შეიძლება. მაგალითად, $87 : 6 = 14$ (ნაშთი 3). პირველ რიგში ნაშთი უნდა შევადაროთ გამყოფს – ნაშთი ნაკლები უნდა იყოს 6-ზე – $3 < 6$; რადგან, ამ შემთხვევაში ნაშთი ნაკლებია გამყოფზე, შემდეგ ეტაპზე განაყოფი უნდა გავამრავლოთ გამყოფზე – $14 \cdot 6 = 84$ – და მიღებულ ნამრავლს დავუმატოთ ნაშთი: $84 + 3 = 87$. თუ მიიღება გასაყოფი, მაშინ ნაშთიანი გაყოფა სწორადაა შესრულებული.

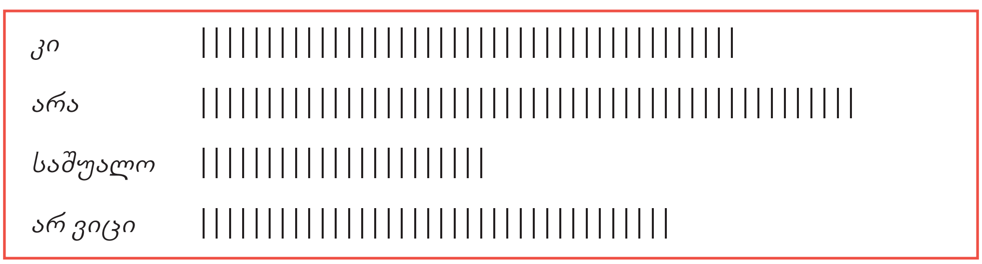
როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ნაშთიანი გაყოფა მასწავლებლებმა უნდა გამოიყენონ წილადური გაყოფის წინარე ცოდნად. გარდა წილადური გაყოფისა, იგი ქვეშმიწერით გაყოფის საფუძველიცაა. მას ემყარება **ქვეშმიწერით გაყოფის ალგორითმი.** ნაშთიანი გაყოფის გარეშე შეუძლებელია ქვეშმიწერით გაყოფის ალგორითმის დასაბუთება და გააზრება.

მოსწავლეებისთვის ნაშთის გააზრება, ისე, რომ გაყოფის მოქმედება ჯერ არც კი უსწავლიათ, საჭიროა პირველ და მეორე კლასებშივე. ნაშთის გარეშე მოსწავლე ვერ გაიაზრებს ორნიშნა რიცხვის აგებულებას, თვლის საფუძველს და, მით უმეტეს, ოცეულებით თვლას.

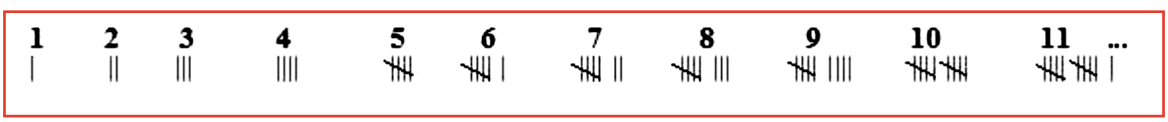
ნაშთიანი გაყოფა დაწყებითი კლასების მთელი არითმეტიკისთვის მნიშვნელოვანი საკითხია, რადგან იგი აერთიანებს თვლას, შეკრება-გამოკლებასა და გამრავლებას.

განვიხილოთ ნაშთიანი გაყოფის კიდევ ერთი გამოყენება – თვლა შტრიხებით.

ვთქვათ, ჟურნალისტმა უნდა გამოკითხოს 200 ადამიანი და დაუსვას მათ ერთი და იგივე შეკითხვა, რომელსაც ოთხი შესაძლო პასუხი აქვს: „კი“, „არა“, „საშუალო“, „არ ვიცი“. თითოეული მიღებული პასუხის შემდეგ ჟურნალისტი შესაბამის სტრიქონში ჩამოუსვამს თითო შტრიხს (მოკლე ხაზს). ბოლოს კი გადაითვლის შტრიხების რაოდენობას:



ამგვარ შტრიხებს ერთი ნაკლი აქვს. სათითაოდ გადათვლის გარეშე არ ჩანს მათი რაოდენობა. ამიტომ, უფრო მოსახერხებელია შემდეგი სახის ჩანაწერები:



ამგვარი აღნიშვნები იმითაა მოსახერხებელი, რომ ადამიანი დათვლის გარეშე, თვალის ერთი შევლებით ცნობს რაოდენობას 5-მდე, 5-ს კი ცნობს გადახაზულით. ხუთეულე-ბად თვლა იმ მხრივაცაა მოსახერხებელი, რომ ორი ხუთეული იგივეა, რაც ერთი ათეუ-ლი.

ჩვენი ჟურნალისტი გამოკითხვის შედეგებს დაახლოებით ამგვარად ჩაწერდა:

კი	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |
არა	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
საშუალო	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | |
არ ვიცი	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸

მაშასადამე, გამოკითხვის საბოლოო შედეგები ამგვარი ყოფილა:

კი	$8 \cdot 5 + 1 = 41$
არა	$10 \cdot 5 = 50$
საშუალო	$4 \cdot 5 + 2 = 22$
არ ვიცი	$6 \cdot 5 = 36$

5. რიცხვი ნული. მოქმედებები რიცხვებზე, რომელთა ჩანაწერები ნულებით მთავრდება

ნატურალური რიცხვები განიმარტა სიმრავლეების საშუალებით. ასევე უნდა განისაზღვროს რიცხვი ნულიც. ყველა ცარიელი სიმრავლე ტოლძალოვანია და, შესაბამისად, ცარიელ სიმრავლეთა ერთობლიობას შეესაბამება რიცხვი ნული. ნული ლათინური სიტყვაა და აღნიშნავს არცერთს, არაფერს.

ყოველი ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ამიტომ ნული ნაკლებია ნებისმიერ ნატურალურ რიცხვზე.

ნებისმიერი ნატურალური რიცხვის და ნულის ჯამი ისევ ეს ნატურალური რიცხვია, ხოლო ნებისმიერი ნატურალური რიცხვის ნულზე ნამრავლი ტოლია ნულის, რადგან ნული რამდენჯერაც უნდა ავიღოთ შესაკრებად, ჯამში მივიღებთ მაინც ნულს. ნულის განსაზღვრებიდან ცხადია, რომ $0 : a = 0$. ნულზე გაყოფა არ შეიძლება. მართლაც, ვთქვათ a ნულისგან განსხვავებული რიცხვია და $a : 0 = b$, მაშინ $a = b \cdot 0 = 0$, რაც შეუძლებელია, რადგან დაშვების თანახმად a ნულისგან განსხვავებული რიცხვია.

განვიხილოთ ნულებით დაბოლოებულ რიცხვებზე მოქმედებები.

ნულებით დაბოლოებული რიცხვების გამრავლების დროს ნულებს შეიძლება ყურადღება არ მიექცეს და ისე შესრულდეს გამრავლება, ხოლო ბოლოს მიღებულ ნამრავლს იმდენი ნული მიეწეროს, რამდენიცაა ყველა თანამამრავლში ერთად. მაგალითად,

$$8000 \cdot 700=(8 \cdot 1000)(7 \cdot 100)=56 \cdot 100000 = 5600000$$

იგივე პრინციპი შეიძლება გამოვიყენოთ ქვეშმიწერით გამრავლების დროსაც. მაგალითად,

$$\begin{array}{r}
\times \; 27040 \\
7600 \\
\hline
+ \; 16224 \\
18928 \\
\hline
205504000
\end{array}$$

განსაკუთრებით ყურადღება მისაქცევია ნულით დაბოლოებული რიცხვების გაყოფა. როცა გასაყოფი ბოლოვდება ნულებით, მაშინ გაყოფა იწყება ჩვეულებრივად; თუ გასაყოფი ნულებამდე უნაშთოდ გაიყო, მაშინ გაყოფა დასრულდება და განაყოფს მიეწერება გასაყოფის ნულები, მაგალითად:

$$\mathbf{2718\underline{00} : 9 = 302\underline{00}}$$

თუ გაყოფა უნაშთოა და გამყოფიც ბოლოვდება ნულებით, მაშინ:

$$54000 : 600 = ?; \quad 54000 : 600 = 54000 : (6 \cdot 100) = 54000 : 6 : 100;$$

$54000 : 6$ გაყოფის შესრულება უკვე ცნობილია: $54 : 6 = 9$, ამიტომ დავწერთ 9-ს,

მას მარჯვნივ მიეწერება გასაყოფის დამახსოვრებული ნულები – 9000; შემდეგ კი შეასრულებენ 100-ზე გაყოფას ანუ ჩამოაცილებენ გამყოფის ნულებს და შედეგია 90.

ამგვარად, თუ გაყოფა უნაშთოა და გამყოფიც ბოლოვდება ნულებით, მაშინ ჯერ ნულებს ყურადღება არ მივაქციოთ და ისე გავყოთ, შემდეგ განაყოფს მარჯვნივ მივუწეროთ იმდენი ნული, რამდენიც აქვს გასაყოფს (დამახსოვრებულები), შემდეგ კი ჩამოვაცილოთ იმდენი ნული, რამდენიც აქვს გამყოფს.

განვიხილოთ ნულით დაბოლოებული რიცხვების ნაშთიანი გაყოფის სწავლების დროს ტიპური შეცდომა. მაგალითად, 271900 : 9; გასაყოფს ჩამოაცილეს ნულები და მიიღეს განაყოფი 2719 : 9 = 302, შემდეგ კი განაყოფს მიუწერეს ის ჩამოცილებული ნულები და მიიღეს 30200 – მაგრამ ცხადია, რომ განაყოფი მცდარია, რადგან 271900 : 9 = 30211 (ნაშთი 1).

ასეთივე შეცდომაა მოსალოდნელი მაშინაც, როდესაც გამყოფიც ნულებითაა დაბოლოებული. მაგალითად,

102000 : 50000 = 102 : 50 = 2 (ნაშთი 2);

ან თუ კიდევ შეკვეცავენ:

102000 : 50000 = 102 : 50 = 51 : 25 = 2 (ნაშთი 1).

ეს შეცდომა გამოწვეულია წილადური ანუ თანაბარი გაყოფის მთავარი წესით – შეკვეცით – **ნაშთიანი გაყოფის დროს შეკვეცა არ შეიძლება.** განხილულ მაგალითში ნაშთი არის არა 1, არამედ 2000.

ასევე, არ შეიძლება ნულების ჩამოცილება, თუ გამყოფის ნულების რაოდენობა მეტია და გაყოფა ნაშთიანია. მაგალითად, 1210 : 900 = 1 (ნაშთი 310), ნულების ჩამოცილებით კი მიიღება მცდარი პასუხი: 1210 : 900 = 121 : 90 = 1 (ნაშთი 31).

ამგვარად, ნაშთიანი გაყოფის დროს ნულების ჩამოცილება-დამახსოვრება არ შეიძლება.

6. გამრავლება-გაყოფის სწავლების მეთოდიკის საკითხები.

აღსანიშნავია, როგორც შეკრების შესწავლა არ ნიშნავს ჯამების მნიშვნელობათა დაზეპირებას, ასევე გამრავლების შესწავლა არ ნიშნავს ნამრავლების მნიშვნელობათა („გამრავლების ტაბულის“) ტრადიციულ დაზეპირებას და არც მხოლოდ ქვეშმიწერით გამრავლების წესების დაუფლებას. როგორც სხვა საკითხების სწავლებისას, ამ შემთხვევაშიც მთავარია თვით ცნების გააზრება.

მესამე კლასამდე მოსწავლემ კარგად უნდა იცოდეს, რომ $9 \cdot 4$ არის ცხრა ცალი ოთხეული, ანუ $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$.

მესამე კლასში იწყება ნამრავლის წარმოდგენა ტოლ შესაკრებთა ჯამებად. ზეპირი გამოთვლების გამოყენებით მოსწავლეები მიიღებენ მოცემულ ნიმუშებს.

ასეთი სავარჯიშოები შეიძლება შესრულდეს უფრო დიდი რაოდენობებისთვისაც. მასწავლებელმა არ უნდა იფიქროს, რომ გამოსახულებაში ერთი და იმავე შესაკრების მრავალჯერ გამეორება ზედმეტია. პირიქით, სწორედ ასე გაიაზრებს მოსწავლე იმას, თუ რა არის გამრავლება – იგი თავისი ხელით დაწერს და დათვლის ამ შესაკრებთა რაოდენობას.

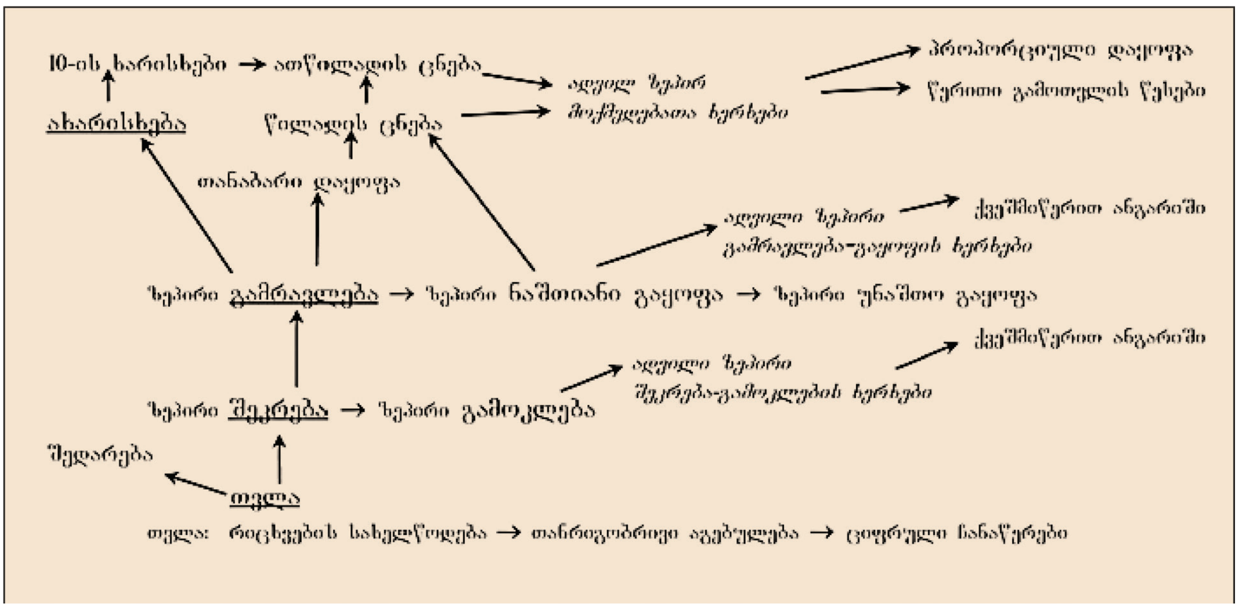
როგორც ადრე იყო აღნიშნული, პირველ კლასში შესაძლებელია ცნება „ნაშთის“ შემოღება გაყოფის ხსენების გარეშე. მაგალითად, 38 კუბის ოთხეულებად დაწყობით მიიღება: $9 \cdot 4 + 2$ „ცხრა ოთხეული და ნაშთი ორი“, ანუ „ცხრა ოთხეული და კიდევ ორი“. სიტყვა „ნაშთი“ იგივეა, რაც „კიდევ“. განიხილავენ ხან უნაშთო, ხან კი ნაშთიან ჯუფთებს. თუმცა ტერმინი „ჯუფთი“ მასწავლებელმა შეიძლება არ ახსენოს და ისაუბროს კონკრეტულად, სამეული, ოცეული და სხვა.

ამგვარი მეთოდიკით სწავლებისას მოსწავლეებმა მეორე კლასშივე იციან, რომ $9 \cdot 4$ არის ტოლ შესაკრებთა (ოთხეულთა) ჯამი. გასააზრებელი რჩება, რომ $9 \cdot 4$ რაოდენობით იგივეა, რაც $4 \cdot 9$. ამის ჩვენება კი შესაძლებელია თვალსაჩინოებით, კერძოდ, ცხრილის მეშვეობით – ოთხი ცხრაეული, ანუ $4 \cdot 9$, რაოდენობით იმდენია, რამდენიც ცხრა ოთხეული ანუ $9 \cdot 4$. რადგან მოსწავლეებმა შეკრების გადანაცვლებადობა უკვე იციან, გამრავლების გადანაცვლებადობას ისინი სავსებით ბუნებრივად და ადვილად იაზრებენ.

2 = 1+1	2 · 1
3 = 1+1+1	3 · 1
5 = 1+1+1+1+1	5 · 1
6 = 1+1+1+1+1+1	6 · 1
6 = 2+2+2	3 · 2
6 = 3+3	2 · 3
7 = 1+1+1+1+1+1+1	7 · 1
8 = 1+1+1+1+1+1+1+1	8 · 1
8 = 2+2+2+2	4 · 2
8 = 4+4	2 · 4
9 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1	9 · 1
9 = 3+3+3	3 · 3
10= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	10 · 1
10 = 2+2+2+2+2	5 · 2
10 = 5+5	2 · 5

გამრავლებაც და გაყოფაც რაც შეიძლება მეტად უნდა დაემყაროს შეკრებას. მხოლოდ ამით აიცილებს მასწავლებელი გამრავლება-გაყოფის მექანიკურ, გაუაზრებელ დაზეპირებას, ხოლო თვით შეკრება პირველივე კლასში უნდა დაფუძნდეს თვლაზე, ანუ თანაუკვეთ სიმრავლეთა გაერთიანების წევრთა რაოდენობის გარკვევაზე.
ამგვარად, მასწავლებელმა ყველა არითმეტიკული მოქმედება საბოლოოდ უნდა დაიყვანოს სხვადასხვა სიმრავლეების წევრთა რაოდენობის გამოთვლაზე, ანუ თვლაზე. ამაზე სიტყვის მნიშვნელობაც მეტყველებს: „გამოთვლა"-ს ფუძეა „თვლა". სწორედ თვლა არის პირველადი, ბუნებრივი არითმეტიკული მოქმედება. მოსწავლისთვის ადვილად გასააზრებელია ის, რაც თვლას უკავშირდება. ეს მეთოდიკური არგუმენტი მისაღებია ლოგიკურ-მათემატიკურადაც. მათემატიკაში მეცნიერულად გამართულია მხოლოდ ის ცნება, რომელიც რაიმე სახის სიმრავლეზე დაიყვანება.

არითმეტიკის მეცნიერული დაფუძნებისა და არითმეტიკის გააზრებული სწავლის საუკეთესო თანმიმდევრობა მოცემულია სქემაზე (მასში ყველგან იგულისხმება მოქმედება სათანადო რიცხვთა ფარგლებში – მხოლოდ წინა ფარგლების საკმაო განმტკიცების შემდეგ). ეს სქემა ზედმიწევნით აღწერს არითმეტიკის აგების არამარტო მეთოდიკურ, არამედ მეცნიერულ-მათემატიკურ თანმიმდევრობასაც – ეს ორი თანმიმდევრობა ერთმანეთს ემთხვევა.



სქემაზე თვალსაჩინოა მოქმედებათა იერარქია: რომელია მაღალი რიგის მოქმედება და რომელი – დაბალი. თუმცა ყოველი მოქმედება მჭიდროდ ემყარება მის წინა, უფრო დაბალი რიგის მოქმედებას.

სქემაზე თვალსაჩინოდ ჩანს ზეპირი ანგარიშის უპირატესობა წერითთან შედარებით. წერითი მოქმედება წინასწარ კარგად განმტკიცებულ იმავე ზეპირ მოქმედებას ემყარება, თანაც წამყვანი მაინც ზეპირი მოქმედებაა. მაგალითად, გაუმართლებელია ქვეშმიწერით შეკრება-გამოკლება მანამ, სანამ მოსწავლე არ გაიაზრებს არამარტო შეკრება-გამოკლების ცნებებს, არამედ ზეპირი შეკრება-გამოკლების ხერხებსაც. ამას კი I-II კლასები სჭირდება. ესე იგი ქვეშმიწერით შეკრება-გამოკლება III კლასამდე

ნაადრევია. შესაბამისად, ქვეშმიწერით გამრავლება-გაყოფის დაწყება უმჯობესია IV კლასიდან, რადგან III კლასში მოსწავლემ ჯერ ქვეშმიწერით შეკრება-გამოკლება უნდა გაითავისოს.

ამ გეგმის დარღვევა, ანუ მჭიდრო კავშირის გაწყვეტა არითმეტიკულ მოქმედებათა შორის ამ მოქმედებათა ცოდნას შინაარსს დაუკარგავს, ხოლო პირიქით, გეგმის დაცვა მოსწავლის მიერ ქვეშმიწერის წესების გააზრებულ დაუფლებას განაპირობებს, რითაც მიიღწევა სასკოლო მათემატიკის ერთ-ერთ უმთავრესი მიზანი – ***რიცხვის გუმანის*** განვითარება.

ამ გეგმით სწავლებას ერთი სირთულე ახლავს. მასწავლებელმა უნდა გააფრთხილოს მოსწავლეთა მშობლები, რომ სწავლებაში არასწორი ჩარევით საქმე არ გააფუჭონ (მშობელს ხშირად ეჩქარება, რომ შვილს ქვეშმიწერით ანგარიში დააწყებინოს). უფრო მეტიც, თავად მასწავლებელსაც კარგად უნდა ახსოვდეს, თუ რა აქვს ნასწავლი კლასს და უნებურად ნაადრევი ქმედებები არ დაიწყოს.

7. სიდიდეები და მათი საზომი ერთეულები. მოქმედებები სიდიდეებზე.

დაწყებით კლასებში ისწავლება სხვადასხვა სიდიდე, როგორიცაა სიგრძე, მასა, ღირებულება, დრო, მანძილი, სიჩქარე.

სიდიდე შეიძლება გაიზომოს სხვადასხვა ერთეულებით. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი. სიგრძის საზომი ერთეულია მეტრი (მ). სიტყვა „მეტრი“ ბერძნული წარმოშობისაა და ზომას ნიშნავს. სიდიდეთა გაზომვის შედეგის ჩასაწერად არაა საკმარისი მარტო რიცხვების ჩაწერა, აუცილებელია ერთეულების მითითებაც. მაგალითად, აზრი არ აქვს წინადადებას: „ადამიანის სიმაღლეა 1,7, უნდა ვთქვათ, რომ ადამიანის სიმაღლეა 1,7მ.

მეტრის გარდა სიგრძის საზომი სხვა ერთეულებიც გამოიყენება: მილიმეტრი, სანტიმეტრი, დეციმეტრი, კილომეტრი.

1 კილომეტრი = 1კმ, 1 დეციმეტრი = 1დმ, 1 სანტიმეტრი = 1სმ, 1 მილიმეტრი = 1მმ

სიგრძის საზომ სხვადასხვა ერთეულებს შორის თანაფარდობა გამოსახულია ცხრილში.

$$\boxed{1\text{კმ}} \xrightarrow{:1000} \boxed{1\text{მ}} \xrightarrow{:10} \boxed{1\text{დმ}} \xrightarrow{:10} \boxed{1\text{სმ}} \xrightarrow{:10} \boxed{1\text{მმ}}$$

მაგალითად, ცხრილის გამოყენებით შეიძლება გამოისახოს:

15კმ = 15000 მ;   7 მ = 700 სმ;   500 დმ = 50 მ,   12 სმ = 0,12 მ.

მასის ძირითად ერთეულად მიღებულია კილოგრამი (კგ). მიუხედავად ამისა, მასის ამ და სხვა ერთეულების სახელწოდება იწარმოება გრამისგან. (გრამი ბერძნული სიტყვაა და მცირე წონას ნიშნავს).

1 გრამი = 1 გ = 0,001 კგ

1 ცენტნერი = 1 ც = 100 კგ

1 ტონა = 1 ტ = 1000 კგ

საქართველოში ღირებულების საზომი ერთეულია ლარი და თეთრი.

1 ლარი = 100 თეთრი.

უძველესი დროიდან დროის საზომ ერთეულად მიღებულია დღე-ღამე. დღე-ღამის 1/24 ნაწილს საათი ეწოდება, 1/60 სთ = 1 წთ, ხოლო 1/60 წთ = 1 წამი.

სიჩქარე ეწოდება დროის ერთეულ მონაკვეთში გავლილ მანძილს, ანუ 1 საათში, 1 წუთში ან 1 წამში გავლილ მანძილს. სიჩქარის საზომი ერთეულის დასახელება მიიღება სიგრძისა და დროის საზომი ერთეულებისგან. მაგალითად, სიჩქარის ერთეულად მიღებულია 1 კილომეტრი საათში (1 კმ/სთ), 1 მეტრი წუთში (1 მ/წთ), 1 მეტრი წამში (1 მ/წმ).

სიდიდეებს, რომელთა გაზომვა შესაძლებელია, არითმეტიკაში სახელდებულ რიცხვებს უწოდებენ. სიმოკლისათვის მათაც „სიდიდეები" ეწოდება. მაგალითად, 5 სმ, 3 კგ, 6 სთ, 700 გ, 7 ლარი. სიდიდეებია აგრეთვე: 5 დმ 3 სმ, 1 დღე-ღამე 5 სთ, 4 კგ 120 გ, 12 ლარი 25 თეთრი, და სხვა. განვიხილოთ სიდიდეებზე მოქმედებების საკითხები.

შეიძლება სიდიდეების რიცხვებზე გამრავლება ან გაყოფა. შედეგად ისეთივე სიდიდეები მიიღება. მაგალითად,

7 · 3 სმ = 3 სმ · 7 = 21 სმ, 42 კგ : 2 = 21 კგ, 4 წთ : 4 = 1 წთ

სიდიდების შეკრება ან გამოკლება ყოველთვის არ შეიძლება – მაგალითად, აზრი არა აქვს შემდეგ ჩანაწერებს:

5 მ + 3 კგ, 6 ტ – 5 სთ, 5 მ + 3, 6 ლარი – 5 და ა.შ.

შეიძლება მხოლოდ ერთი და იმავე სიდიდეების შეკრება და გამოკლება – მაგალითად, სიგრძის ერთეულების ან მასის ერთეულების და ა.შ.

7 კგ + 3 კგ = 10 კგ, 1 სთ – 20 წთ = 40 წთ,

5 მ + 17 სმ = 5 მ 17 სმ, 20 თეთრი – 20 თეთრი = 0 თეთრი.

ერთგვარი სიდიდეები იყოფა ერთმანეთზე და შედეგად მიიღება არა სიდიდე, არამედ რიცხვი. მაგალითად,

12 მ : 4 მ = 3, 1 კგ : 200 გ = 1000 გ : 200 გ = 5 60 წთ : 30 წთ = 2

გარდა აღნიშნული მოქმედებებისა, შეიძლება სიდიდეების გამრავლება, რომელიც მოგვიანებით იქნება განხილული.

სასკოლო მათემატიკის კურსში უნდა მიექცეს ყურადღება სიდიდეების შესწავლას, რადგან სიდიდეები – ერთ-ერთი ისეთი საკითხია, რომელშიც ნათლად ჩანს მათემატიკის კავშირი ყოფაცხოვრებასთან.

მაგალითად, რა ოდენობის წვენია ვაშლის წვენის სავსე ყუთში?

შეარჩიეთ შესაძლო პასუხი:

ა) 2 კილომეტრი; ბ) 2 ვაშლი;

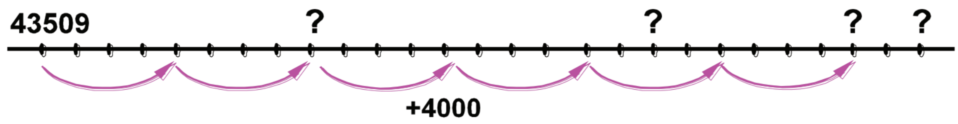
გ) 2 მეტრი; დ) 2 კილოგრამი;

ე) 200 კილოგრამი; ვ) 2 გრამი.

ამ ამოცანაში სწორი პასუხი შეიძლება აირჩიოს მეოთხეკლასელთა მხოლოდ გარკვეულმა ნაწილმა. ზოგიერთ მეოთხეკლასელს ჰგონია, რომ წვენის ოდენობა შეიძლება იყოს 2 კმ, ან 2 მ, ან 2 ვაშლი, ან 200 კგ.

დავალება დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

1. გაარკვიეთ რა რიცხვები უნდა ეწეროს რიცხვით სხივზე „?“ ნიშნების ნაცვლად?



2. ჯამი შეცვალეთ ნამრავლით და გამოთვალეთ მარტივი ხერხით.

I. 6 + 4 + 6 + 6 + 6 + 16 + 6 + 6;

II. 8 + 9 + 9 + 9 + 8 + 9 + 9 + 9 + 8 + 8 + 8 + 9 + 8 + 8;

III. 11 + 5 + 5 + 5 + 11 + 5 + 11 + 5 + 5 + 5 + 5 + 11 + 5 + 5 + 25 + 5 + 15 + 5 + 8.

3. რისი ტოლი შეიძლება იყოს ნაშთი კენტი რიცხვის გაყოფისას 6-ზე?

4. ცნობილია, რომ 13986000 : 74 = 189000. ანგარიშის გარეშე მოიფიქრეთ, რისი ტოლი იქნება 13986 : 74.

5. იპოვეთ ნაშთი ა) 8200 : 2000; ბ) 820000 : 400000

6. გაარკვიეთ რომელ ტოლობაშია შეცდომა და აღწერეთ ის.

ა) 75 : 15 = 5 (ნაშ. 0); ბ) 62 : 9 = 6 (ნაშ. 8);

გ) 70 : 30 = 2 (ნაშ. 10); დ) 87 : 20 = 4 (ნაშ. 17).

7. გაარკვიეთ რომელ ტოლობაშია შეცდომა და აღწერეთ ის.

ა) 65 : 13 = 5 (ნაშ. 0); ბ) 88 : 9 = 8 (ნაშ. 16);

გ) 100 : 30 = 3 (ნაშ. 10); დ) 107 : 20 =5 (ნაშ. 7).

8. შეადარეთ ერთმანეთს.

1 კმ და 900 მ; 2 სთ და 70 წთ; 1 კგ და 200 გ; 27 სთ და 2 დღე-ღამე;

70 დმ 30 მმ და 530 სმ; 1 თვე და 39 დღე-ღამე; 5 სთ 25 წთ და 375 წთ;

45 ც 670 გ და 3580 გ.

9. 9 ყუთში 180 კგ მაკარონი ეტევა. რამდენ ასეთ ყუთს გაავსებს 526 კგ მაკარონი?

10. გამოსახე.

240 წმ = ... წთ ; 7200 წმ = ... სთ; 80 ც 160 კგ = ... კგ; 374 დმ = ... მმ

11. სიმბოლოთი * აღნიშნულია ერთ-ერთი არითმეტიკული მოქმედება: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება, ან გაყოფა. ცნობილია, რომ 7 * 1 < 6 * 2. რის ტოლია 15 * 3?

12. ნამცხვარი გაჭრეს ოთხ ნაწილად, შემდეგ მიღებული ნაჭრებიდან ერთ-ერთი გაჭრეს სამ ნაწილად. ამის შემდეგ ერთ-ერთი ნაჭერი კვლავ გაჭრეს ოთხ ნაწილად, ხოლო შემდეგ ერთ-ერთი ნაჭერი ისევ გაჭრეს სამ ნაწილად. დაჭრის ასეთი მეთოდი გაიმეორეს რამდენჯერმე. ჩამოთვლილთაგან რომლის ტოლი შეიძლება იყოს მიღებული ნაჭრების საერთო რაოდენობა?

ა) 22; ბ) 25; გ) 28; დ) 31.

13. რიცხვს, რომელიც რომელიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატის ტოლია, **კვადრატული** რიცხვი ეწოდება. ორნიშნა რიცხვებიდან რამდენია კვადრატული?

14. წიგნის გვერდები დანომრილია ნატურალური რიცხვებით 1, 2, 3, ... სულ გამოყენებულია 210 ციფრი. რამდენ გვერდიანია წიგნი?

15. მოცემული რიცხვის 16-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი არის 15. რისი ტოლია ნაშთი ამ რიცხვის 4-ზე გაყოფისას?

შემაჯამებელი ტესტი

1. 407000-ის 50000-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი ტოლია:

ა) 800; ბ) 7; გ) 700; დ) 7000.

2. რომელ წინადადებაშია ჩამოყალიბებული შტრიხებით თვლის წესისა და ნაშთიანი გაყოფის არსებითი კავშირი?

ა) შტრიხებით თვლისას გვაქვს რამდენიმე 5-ეული და ნაშთი, ნაშთიანი გაყოფისას შეიძლება 10-ეულების რაოდენობაც დავითვალოთ;

ბ) შტრიხებით თვლისას არ შეიძლება, რომ ნაშთი 5-ზე მეტი იყოს, ასევე გაყოფისასაც არ შეიძლება, რომ ნაშთი გამყოფზე მეტი იყოს;

გ) შტრიხებით თვლა და ნაშთიანი გაყოფა მნიშვნელოვნად განსხვავდება ერთმანეთისგან – ადამიანს არ შეუძლია ერთი თვალის გადავლებით შეაფასოს 5-ზე მეტი შტრიხის რაოდენობა, გაყოფისას კი შეგვიძლია ნებისმიერი რიცხვი ნებისმიერზე გავყოთ;

დ) შტრიხებით თვლისას აღვრიცხავთ 5-ეულებს და კიდევ – მორჩენილ შტრიხებს, რაც, არსებითად, იგივეა, რაც ნაშთიანი გაყოფა 5-ზე.

3. რომელი საგაკვეთილო თემისთვისაა შესაფერისი მოცემული ცხრილი?

2 = 1+1	2 • 1
3 = 1+1+1	3 • 1
5 = 1+1+1+1+1	5 • 1
6 = 1+1+1+1+1+1	6 • 1
6 = 2+2+2	3 • 2
6 = 3+3	2 • 3
7 = 1+1+1+1+1+1+1	7 • 1
8 = 1+1+1+1+1+1+1+1	8 • 1
8 = 2+2+2+2	4 • 2
8 = 4+4	2 • 4
9 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1	9 • 1
9 = 3+3+3	3 • 3
10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+110 • 1	
10 = 2+2+2+2+2	5 • 2
10 = 5+5	2 • 5
22 = 11+11	2 • 11

ა) ზეპირი შეკრების ადვილი ხერხი;

ბ) ცხრილური გამრავლების მაგალითები;

გ) გამრავლების ცნება;

დ) გაყოფის ცნება.

4. წილადების სწავლებას კონკრეტულად რისთვის სჭირდება წინასწარ ნაშთიანი გაყოფა?

ა) შემცველობითი გაყოფა ვერ შესრულდება, თუ წინასწარ თანაბარი დაყოფა არ შესრულდა.

ბ) წილადების მთავარი საკითხის (წილადის ძირითადი თვისების) დასასაბუთებლად, ხოლო შემდგომში მოსწავლისთვის ამ თვისების გასააზრებლად;

გ) ერთზე მეტი წილადის (ანუ ზოგადად წილადის!) შემადგენლობის გასააზრებლად და მისგან მთელი და წილადური ნაწილების გამოსაყოფად;

დ) თანაბარი დაყოფა ვერ შესრულდება, თუ წინასწარ შემცველობითი გაყოფა არ შესრულდა.

5. რომელი ტოლობაა სწორი?

ა) 102000 : 50000 = 102 : 50 = 2 (ნაშთი 2)

ბ) 102000 : 50000 = 102 : 50 = 51 : 25 = 2 (ნაშთი 1)

გ) 102000 : 50000 = 2 (ნაშთი 2000)

დ) 102000 : 50000 = 1020 : 50 = 2 (ნაშთი 20)

6. მეთოდიკურ სახელმძღვანელოში აღწერილია აქტივობა: მოსწავლეებმა ტოლ ჯგუფებად დააწყონ კუბები, ისე, რომ:

I. უნაშთოდ დაეწყოს;

II. ნუ გამოვიყენებთ კიდურა შემთხვევებს: ძალიან მცირე ჯგუფებს (ერთეულებს, წყვილებს) და ძალიან მცირე რაოდენობის ჯგუფებს (როცა სულ 1-2 ჯგუფი მიიღება);

III. კუბიკების საერთო რაოდენობა 30-ზე ნაკლებია.

მოძებნეთ აქტივობის განხილვისთვის შესაფერისი ვარიანტი:

ა) 22 კუბიკის დაწყობა ექვსეულებად;

ბ) 35 კუბიკის დაწყობა თერთმეტეულებად;

გ) 28 კუბიკის დაწყობა შვიდეულებად;

დ) 20 კუბიკის დაწყობა ათეულებად.

7. ერთი ცალი ვაშლის წონა 50-200 გრამის ფარგლებში მერყეობს. ჩამოთვლილთაგან, რომლის ტოლი შეიძლება იყოს ასი ათასი ვაშლის წონა.

ა) 2 ტ; ბ) 12 ტ; გ) 25 ტ; დ) 32 ტ.

8. ნიკას ქონდა 55 ლარი. მან იყიდა რამდენიმე ჟურნალი და რამდენიმე წიგნი. თითო ჟურნალი 4 ლარი ღირდა, თითო წიგნი 8 ლარი. ჩამოთვლილთაგან რომელი შეიძლება იყოს დარჩენილი თანხა?

ა) 3 ლარი; ბ) 4 ლარი; გ) 5 ლარი; დ) 6 ლარი

9. ნიკამ სიდიდეების შედარებისას შემდეგი ჩანაწერები გააკეთა:

10 მ < 20 დმ, 9 მ = 9 დმ, 5 დმ < 40 მ, 9 მ < 10 დმ.

ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი შეიძლება იყოს ნიკას შეცდომის მიზეზი?

ა) არ შეუძლია ერთმანეთისგან მეტობისა და ნაკლებობის ნიშნების გარჩევა;

ბ) მეტობის, ნაკლებობის და ტოლობის ნიშნებს ვერ უკავშირებს შესაბამის მნიშვნელობებს;

გ) რიცხვის აღნიშვნას ვერ უკავშირებს შესაბამის რაოდენობას;

დ) არ იცის, რა მიმართებაა მეტრსა და დეციმეტრს შორის.

10. რამდენი გრამით აღემატება 7 კგ-ისა და 200 გ-ის მეოთხედი ნაწილი 5 კგ-ისა და 100 გ-ის მესამედ ნაწილს?

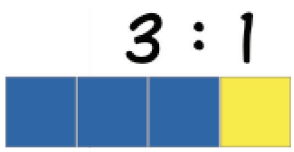
ა) 100 გ-ით; ბ) 150 გ-ით; გ) 200 გ-ით; დ) 250 გ-ით.

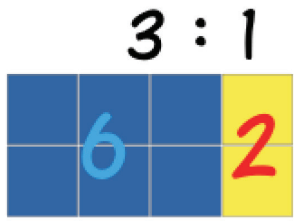
თავი 4. შეფარდება

1. შეფარდება, მთელის ნაწილი და წილადი

ორი რიცხვის განაყოფს ზოგჯერ მათ შეფარდებას უწოდებენ. გავარკვიოთ, რას შეიძლება გვიჩვენებდეს ორი რიცხვის შეფარდება.

ვთქვათ, მარცვლების ერთი გროვა შედგება 3 წითელი და 1 თეთრი მარცვლისგან, ხოლო მეორე გროვა – 6 წითელი და 2 თეთრი მარცვლისგან. გროვებში წითელი და თეთრი მარცვლების რაოდენობა განსხვავებულია, მაგრამ ორივე გროვაში წითელი მარცვლები 3-ჯერ მეტია თეთრზე, რაც ადვილად შეიძლება გაირკვეს გაყოფით 6 : 2 = 3 და 3 : 1 = 3.





მიუხედავად იმისა, რომ ერთ გროვაში 4 მარცვალია, ხოლო მეორე გროვაში 8, თითოეულ გროვაში დამოკიდებულება წითელი და თეთრი მარცვლების რაოდენობათა შორის ერთი და იგივეა და გამოიხატება **შეფარდებით** 3:1. ამგვარად,

> შეფარდება გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ მეტია ერთი რაოდენობა მეორესთან შედარებით.

ნახაზზე წითელი წრეების რაოდენობის შეფარდება ლურჯი წრეების რაოდენობასთან არის 8:4.

დავაწყვილოთ ერთი ფერის წრეები.

წყვილებად დათვლილი წრეების რაოდენობების შეფარდებაა 4:2.

ანალოგიურად, ოთხეულებად დათვლის შედეგად მივიღებთ, რომ წითელი და ლურჯი

წრეების რაოდენობათა შეფარდებაა 2:1.

მაშასადამე, შეფარდებები 8 : 4, 4 : 2 და 2 : 1 ტოლია.

$$8:4=4:2=2:1$$

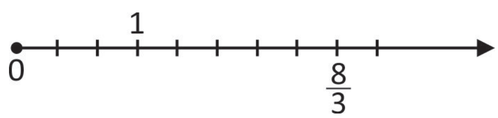
შეფარდება 2:1 მოცემული შეფარდების **უმარტივესი სახეა**.

წილადი – რაციონალური რიცხვი – ეწოდება ორი მთელი რიცხვის შეფარდებას (სადაც მეორე რიცხვი არანულოვანია).

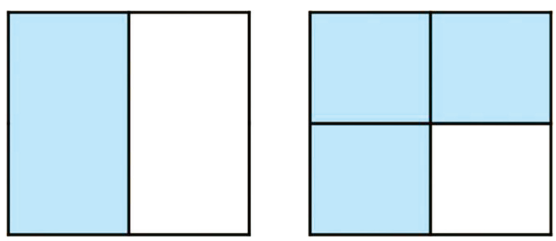
მაგალითად, წილადი $\frac{7}{3}$ – ესაა 7-ის შეფარდება 3-თან ანუ 7 გაყოფილი 3-ზე.

ამგვარად, წილადი იწერება ორი მთელი რიცხვის მეშვეობით, რომლებიც გამიჯნულია ხაზით, მაგალითად, $\frac{3}{4}$, და იკითხება: სამი მეოთხედი. ხაზის ზემოთ დაწერილ რიცხვს წილადის **მრიცხველი** ეწოდება, ხაზის ქვემოთ დაწერილ რიცხვს კი – **მნიშვნელი.**

წილადის მოდელი – ესაა შესაბამისი წერტილი რიცხვთა სხივზე. მაგალითად:



წილადის სახით ჩაიწერება არა მხოლოდ რიცხვების შეფარდება, არამედ მთელის ნაწილებიც. მაგალითად,



$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$

მთელის ნაწილების გამოსახვისას წილადის მნიშვნელი მიუთითებს, თუ რამდენ ტოლ ნაწილად არის დაყოფილი მთელი, ხოლო მრიცხველი – მთელის რამდენი ნაწილია აღებული.

წილადი, როგორც ორი რიცხვის განაყოფი (შეფარდება), ასევე შეიძლება გვიჩვენებდეს, გამყოფის რა ნაწილია გასაყოფი. მაგალითად, ნახაზზე რუხი წრეები ყველა წრის $\frac{2}{7}$ ნაწილია.

წილადი უფრო აბსტრაქტული ცნებაა, ვიდრე ნაწილი. ნაწილი ყოველთვის რაღაც მთელის ნაწილია, ამიტომ ნაწილის ცნება უშუალოდ მთელთანაა მჭიდრო კავშირში. ამის უგულებელყოფა ტიპურ შეცდომებს იწვევს. განვიხილოთ ამოცანები, რომლებიც მთელსა და ნაწილს შორის მიმართების გააზრებაში დაგვეხმარება.

ამოცანა 1.

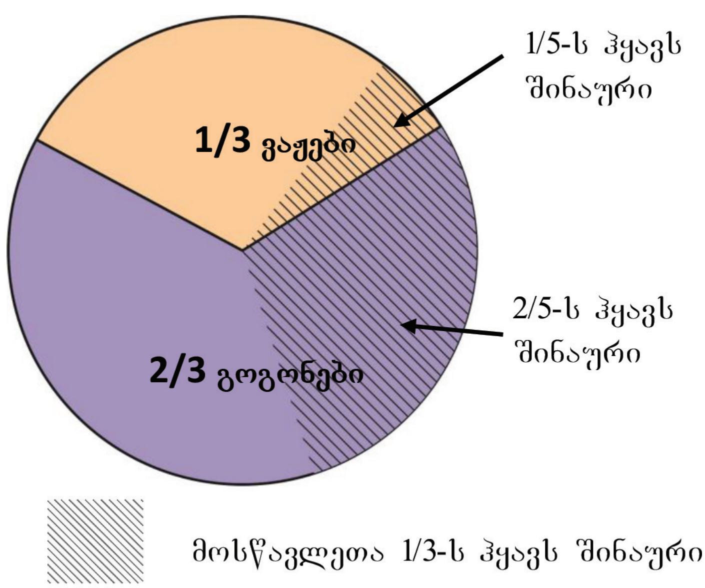
კლასში გოგონები ორჯერ მეტნი არიან, ვიდრე ვაჟები. გოგონების 2/5 ნაწილს და ვაჟების 1/5 ნაწილს შინაური ცხოველი ჰყავს. კლასის მოსწავლეთა რა ნაწილს ჰყავს შინაური ცხოველი?

ტიპური შეცდომაა ამ ამოცანის ასე ამოხსნა: $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$.

2/5 და 1/5 სხვადასხვა მთელების ნაწილებია, ამიტომ მათი შეკრება-გამოკლებას აზრი არ აქვს. რაკი გოგონები ორჯერ მეტნი არიან, ვიდრე ვაჟები, ამიტომ გოგონები კლასის 2/3 ნაწილი ყოფილან, ვაჟები – 1/3 ნაწილი, ხოლო შინაური ცხოველი ჰყავთ:

კლასის 2/3-ის 2/5-ს ანუ $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$ და კიდევ კლასის 1/3-ის 1/5-ს ანუ $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$.

ესე იგი სულ: $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$



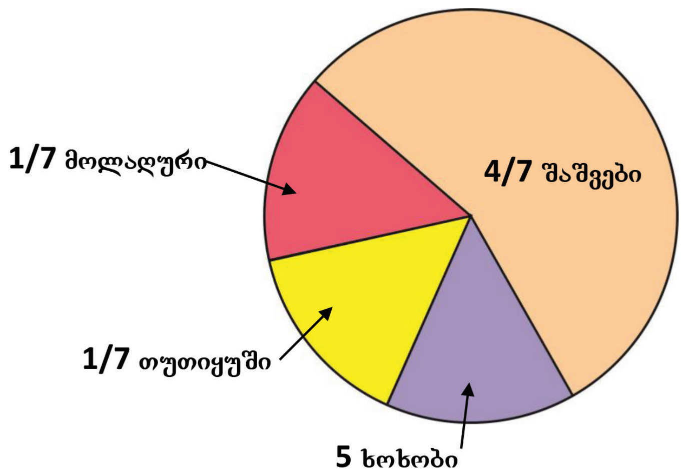
პასუხი: შინაური ცხოველი ჰყავს კლასის მესამედ ნაწილს.

ამოცანა 2

ზოოპარკის დიდ გალიაში ფრინველთა 1/7 ნაწილი მოლაღურია, ამდენივე – თუთიყუ-ში, ხოლო 4/7 ნაწილი – შაშვია. ამათ გარდა, გალიაში კიდევ 5 ხოხობია. სულ რამდენი ფრინველია ამ გალიაში? რამდენია შაშვი?

ტიპური შეცდომაა მოცემული რიცხვების პირდაპირ შეკრება და პასუხი $5\frac{6}{7}$.

მართებული ამოხსნაა: $\frac{1}{7}$ ნაწ. + $\frac{1}{7}$ ნაწ. + $\frac{4}{7}$ ნაწ. = $\frac{6}{7}$ ნაწ.



ესე იგი ხოხბები შეადგენენ ფრინველთა 1/7 ნაწილს. ამიტომ გალიის ფრინველების საერთო რაოდენობის 1/7 ნაწილი 5 ფრინველს შეადგენს. ამიტომ გალიაში სულ 35 ფრინველი ყოფილა. მათგან შაშვია $35 \cdot \frac{4}{7} = 20$.

პასუხი: გალიაში 35 ფრინველია; შაშვი 20.

მაშასადამე, მთელის გარეშე ნაწილს აზრი არ აქვს. წილადს კი, როგორც შეფარდებას, თავისთავადი აზრი აქვს რაიმე მთელისგან დამოუკიდებლად. მაგალითად, წილადი 8/3 არის არა რაიმე მთელის 8/3 ნაწილი, არამედ კონკრეტული რაციონალური რიცხვი, დამოუკიდებლად ყოველგვარი მთელისგან.

2. წილადური გაყოფა

შეფარდება ანუ წილადური გაყოფა ისევე იწყება, როგორც ნაშთიანი გაყოფა. მაგალითად, განვიხილოთ წილადი $\frac{7}{3}$ და შევასრულოთ გაყოფა: 7-ში 3 მოთავსდება 2-ჯერ და ნაშთი რჩება 1, ანუ

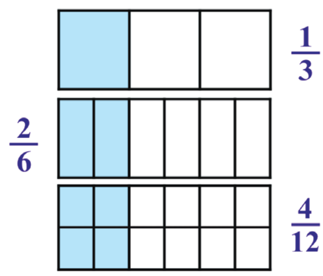
7 : 3 = 2 (ნაშთი 1).

მაგრამ, ნაშთიანი გაყოფისგან განსხვავებით, წილადური გაყოფა აქ არ დასრულდება და ნაშთიც იყოფა – განაყოფი 2 იგივე რჩება და გადადის მთელ ნაწილში, ნაშთი კი 3-ზე გაიყოფა. ამიტომ:

$$\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$$

როგორც ვიცით, ნაშთიანი გაყოფისას შეკვეცა დაუშვებელია (ამიტომ, ნაშთიანი გაყოფის დროს ნულების ჩამოცილება არ შეიძლება). წილადური გაყოფისას კი პირიქითაა – შეკვეცა წილადის ძირითადი თვისებაა.

ამ სქემაზე თვალსაჩინოდ ჩანს შეკვეცა 2-ზე:



$$\frac{4}{12}=\frac{2}{6}=\frac{1}{2}$$

1-ზე ნაკლები ჩვეულებრივი (ე.წ. „წესიერი“) წილადებია, მაგალითად:

$$\frac{2}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{12}{105}.$$

1-ზე მეტი ჩვეულებრივი (ე.წ. „არაწესიერი“) წილადებია, მაგალითად:

$$\frac{3}{2},\ \frac{5}{1},\ \frac{8}{3},\ \frac{105}{12}.$$

მთელი რიცხვის ტოლი ჩვეულებრივი წილადებია (აგრეთვე „არაწესიერი“), მაგალითად:

$$\frac{3}{3}=1,\ \ \frac{5}{1}=5,\ \ \frac{20}{4}=5,\ \ \frac{8}{2}=4,\ \ \frac{120}{12}=10.$$

შერეული რიცხვებია, მაგალითად:

$$1\frac{2}{3},\ \ 24\frac{1}{5},\ \ 3\frac{3}{8},\ \ 10\frac{12}{105}.$$

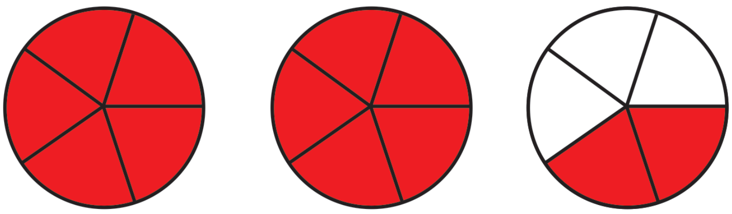
შერეული რიცხვები შეიძლება ჩავწეროთ არაწესიერი წილადების სახით და პირიქით, ჩვეულებრივი წილადები – შერეული რიცხვების სახით.

შემდეგი მაგალითი თვალსაჩინოდ გვიჩვენებს ზოგად წესს – თუ როგორ უნდა ჩავწეროთ შერეული რიცხვის სახით 1-ზე მეტი ჩვეულებრივი წილადი:

$$13:5=2 \text{ (ნაშთი 3)}$$

$$\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}$$

შერეული რიცხვი ჩავწეროთ არაწესიერი წილადის სახით:



$$2\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$$

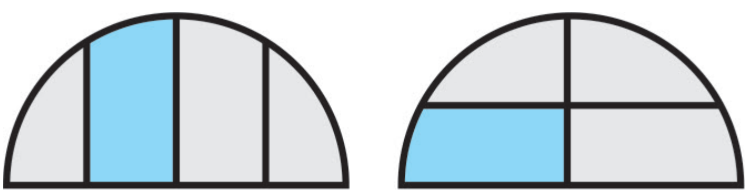
წილადის ორნაირი მიღება

I. $\frac{13}{5}=13:5=2\frac{3}{5}$

II. $\frac{13}{5}=13\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5}$, ანუ 13/5 იგივეა, რაც 13-ჯერ 1/5.

განვიხილოთ ამოცანები, რომლებიც დაეხმარება მასწავლებლებსა და მოსწავლეებს წილადის, აგრეთვე მთელსა და ნაწილს შორის მიმართების, უკეთ გააზრებაში.

1. ზოგიერთ მოსწავლეს მიაჩნია, რომ მოცემულ ორ ნახაზზე გამუქებულია მთელის 1/4 ნაწილი, რაც არასწორია, რადგან მოცემული ნახევარწრეები არ არის დაყოფილი ოთხ ტოლ ნაწილად.



2. გაარკვიეთ წრეების საერთო რაოდენობის რა ნაწილს შეადგენს რუხი წრეების რაოდენობა:

ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება გასცეს პასუხი: $\frac{2}{5}$, რაც არასწორია, რადგან წრეების საერთო რაოდენობა არის 7, ხოლო რუხი წრეების რაოდენობა – 2, ამიტომ სწორი პასუხია $\frac{2}{7}$.

3. გაერთმნიშვნელიანების გარეშე როგორ შეიძლება წილადების $\frac{7}{6}$ და $\frac{8}{7}$ შედარება?

ორივე არაწესიერი წილადია, ამიტომ თითოეული ჩავწეროთ შერეული რიცხვის სახით. გვექნება $\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$ და $\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$. რადგან მთელი ნაწილები ტოლია, ამიტომ შევადაროთ წილადი ნაწილები: $\frac{1}{6}$ და $\frac{1}{7}$. მოსწავლემ უნდა გაიხსენოს, რომ ერთნაირმრიცხველიანი წილადებიდან ისაა მეტი, რომლის მნიშვნელი ნაკლებია, ანუ $\frac{1}{6}>\frac{1}{7}$. მაშასადამე $\frac{7}{6}>\frac{8}{7}$.

4. რა რიცხვი შეესაბამება რიცხვით სხივზე მონიშნულ A წერტილს?

მოსწავლემ შეიძლება იფიქროს, რომ რადგან 10 ერთეულიანი სიგრძის მონაკვეთი შუაზეა გაყოფილი, ამიტომ რიცხვით ღერძზე მონიშნულ A წერტილს შეესაბამება წილადი $\frac{1}{2}$, რაც არ არის სწორი. ამ შემთხვევაში მთელს შეესაბამება რიცხვი 10, ხოლო A წერტილს –10-ის $\frac{1}{2}$ ნაწილი, ანუ 5.

5. ეზოში ხეების ნაწილი კოპიტია, ამდენივეა ჭადარი და კიდევ 2 ნაძვი. რამდენი ხეა სულ ეზოში?

სავარაუდო პასუხებია: ა) 21; ბ)14 გ) $2\frac{6}{7}$; დ) $2\frac{6}{14}$.

თუ მოსწავლემ აირჩია პასუხი გ) ან დ), ეს იმას ნიშნავს, რომ მოსწავლეს სრულიად არ ესმის რა არის წილადი და ვერც იმას იაზრებს, რომ ხეების რაოდენობა არ შეიძლება იყოს წილადი რიცხვი. ამ ამოცანის ამოხსნისთვის საკმარისია მხოლოდ წილადის ცნების ცოდნა: 2 ნაძვი შეადგენს ეზოში ხეების საერთო რაოდენობის 1/7 ნაწილს. ესე იგი, ეზოში სულ 14 ხეა.

6. ორსერიანი ფილმის I სერიაში მუსიკა სერიის 1/5 ნაწილს ახლდა, ხოლო II სერიაში – სერიის 2/5 ნაწილს. მთელი ფილმის რა ნაწილს ახლდა მუსიკა? ზოგიერთი მოსწავლე უპასუხებს, რომ $\frac{3}{5}$, რაც არასწორია. ამ ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა პირობაში მოცემული იყოს ინფორმაცია სერიების ხანგრძლივობის შესახებ.

ამგვარი ამოცანების ამოხსნით მოსწავლეები კარგად გაიაზრებენ წილადის ცნებას.

3. ათწილადის ცნება

გავრცელებულია ასეთი მცდარი განმარტება:

წილადს, რომლის მნიშვნელი 10-ის ხარისხია, **ათწილადი** ეწოდება. ამ განმარტება-ში ორი არსებითი შეცდომაა:

I. ამ სამი წილადის მნიშვნელი 10-ის ხარისხია,

$$\frac{3}{10},\ \frac{11}{100},\ \frac{3205}{1000}$$

მაგრამ არცერთი მათგანი არაა ათწილადი:

II. უსასრულო პერიოდული ათწილადები

0,33333... ან 2,727272727272... – ათწილადებია, მაგრამ არცერთის მნიშვნელი არაა 10-ის ხარისხის ტოლი.

ათწილადი – ესაა წილადის სხვანაირი ჩანაწერი. წილადისა და ათწილადის მათემა-ტიკური არსი ერთი და იგივეა – ორივე რაციონალური რიცხვია (ანუ ორი მთელი რიცხვის შეფარდებაა). უბრალოდ, წილადი ჩაწერილია მრიცხველისა და მნიშვნე-ლის შეფარდების სახით, ხოლო ათწილადის ჩანაწერი თანრიგობრივია.

ათწილადი – ესაა წილადის თანრიგობრივი ჩანაწერი; ანუ 10-ის ხარისხების მიხედვით შედგენილი ჩანაწერი. სწორედ ამიტომ უწოდეს ამგვარ ჩანაწერს „ათწილადი“.

ამიტომ ათწილადის თვალსაჩინო სქემა – ესაა უსასრულო ტაბლო, რომელსაც მთელი და წილადი ნაწილის გამიჯვნის ადგილას მძიმის ნიშანი აქვს დასმული. როგორც ნატურალური რიცხვის, ისე ათწილადის კარგად გასააზრებლად უნდა წარმოვიდგინოთ ხოლმე თანრიგების დაუსრულებელი მწკრივი, რომელშიც მთელი და წილადი ნაწილის გამიჯვნის ადგილას დასმულია მძიმე:

მძიმის მარცხნივ მთელი ნაწილია (9150), ანუ ჩვეულებრივაა ერთეულთა, ათეულ-თა, ასეულთა, ათასეულთა და ა.შ. თანრიგები. მძიმის მარჯვნივ კი წილადური თან-რიგებია: მეათედთა, მეასედთა, მეათასედთა და ა.შ. შესაბამისად, მათში წილადუ-რი ნაწილი იწერება.

4. ათწილადის ფარული ნულები

თანრიგი ცარიელი უჯრედით, პოზიციით აღინიშნება. მასში იწერება საჭირო ციფრი. მაგალითად:

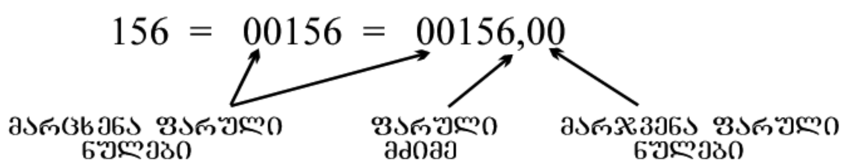
სქემიდან ცხადად ვხედავთ, რომ ყოველ ათწილადს უამრავი თანრიგი შეიძლება ჰქონდეს. მათგან ზოგიერთი შევსებულია ციფრებით, ზოგიერთი კი – არა. მაგალითად, ათწილადში **9150,408** მხოლოდ შვიდ თანრიგშია ჩაწერილი ციფრები. ცარიელი თანრიგი იგივეა, რაც ნულით შევსებული თანრიგი ანუ თანრიგი, რომლშიც ჩაწერილია ციფრი ნული.

ათწილადის მნიშვნელობა არ შეიცვლება მარცხნიდან ან მარჯვნიდან ნულების მიწერით:

$$9150{,}408 = 09150{,}4080 = 0009150{,}4080000 \ldots$$

ათწილადის თავშიც და ბოლოშიც ცარიელ თანრიგებში ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ფარული ნულები. ამ ნულების წარმოჩენით ან დაფარვით ათწილადის რიცხვითი მნიშვნელობა არ იცვლება.

ასევეა მთელი რიცხვების შემთხვევაშიც, ოღონდ მთელ რიცხვს ფარული ნულების გარდა აქვს ფარული მძიმეც, მაგალითად:



5. წილადის ჩაწერა ათწილადის სახით

ახლა ათწილადის სახით ჩავწეროთ წილადები, რომელთა მნიშვნელები 10-ის ხარისხებია, მაგალითად:

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ 5\frac{6}{10},\ 1\frac{51}{1000},\ 123\frac{7}{1000},\ \frac{309}{10},\ \frac{60}{10000}$$

ამისათვის, უპირველეს ყოვლისა, ჩვეულებრივ წილადს ჩაწერენ შერეული რიცხვის სახით:

$$\frac{309}{10}=30\frac{9}{10};\qquad \frac{601}{10000}=0\frac{601}{10000}$$

შემდეგ წილადური ნაწილის მრიცხველს ჩაწერენ ზუსტად იმდენი ციფრის საშუალებით, რამდენი ნულიცაა მნიშვნელში:

$$123\frac{7}{1000}=123\frac{007}{1000};\qquad 0\frac{601}{10000}=0\frac{601}{10000}$$

და ბოლოს, ჯერ წერენ მთელების მაჩვენებელ რიცხვს, შემდეგ – მძიმის ნიშანს, ხოლო მძიმის ნიშნის შემდეგ – წილადის მრიცხველს:

$$30\frac{9}{10}=30{,}9;\qquad 123\frac{007}{1000}=123{,}007;\qquad 0\frac{06010}{1000}=0{,}0601.$$

ამრიგად:

$$505\,\frac{703}{10000}\ =\ \underbrace{505}\,\frac{\overbrace{0703}}{10000}\ =\ \underbrace{505},\overbrace{0703}$$

ცხადია, ათწილადის სახით ჩაიწერება ამგვარი წილადების ტოლი წილადებიც. მაგალითად, რაკი

$\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$, ამიტომ, $\frac{3}{25}=\frac{12}{100}=0{,}12$

ასევე: $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=0{,}5;\ 1\frac{1}{4}=1\frac{25}{100}=1{,}25;\ \frac{3}{5}=\frac{6}{10}=0{,}6;\ 6\frac{19}{500}=6\frac{38}{1000}=6{,}038$

პირიქით, ათწილადის ჩაწერა წილადის სახით ადვილია. ამისთვის, მთელი გადავწეროთ მთელად; მძიმის შემდეგ ჩაწერილი რიცხვი ანუ წილადური ნაწილი ჩავწეროთ წილადის მრიცხველად; ხოლო მნიშვნელში ერთიანს მივუწეროთ იმდენი ნული, რამდენი ციფრიცაა მრიცხველში. ბოლოს კი წილადს მოვაცილოთ „ზედმეტი" ნულები, თუკი ისინი გაჩნდა. მაგალითად:

$$29{,}076=29\frac{076}{1000}=29\frac{76}{1000};\qquad 0{,}19=0\frac{19}{100}=\frac{19}{100}.$$

ჩვენ უკვე ვიცით ნატურალური რიცხვების დაშლა სათანრიგო შესაკრებთა ჯამად. მაგალითად:

$$1472 = 1 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 1.$$

ასევე შეიძლება ათწილადის დაშლაც **სათანრიგო შესაკრებთა ჯამად**. მაგალითად:

ᲬᲘᲚᲐᲓᲘ	ᲐᲗᲬᲘᲚᲐᲓᲘ											
	ᲛᲗᲔᲚᲘ ᲜᲐᲬᲘᲚᲘ						ᲬᲘᲚᲐᲓᲘ ᲜᲐᲬᲘᲚᲘ					
	. . .	ᲐᲗᲐᲡᲔᲣᲚᲔᲑᲘ	ᲐᲡᲔᲣᲚᲔᲑᲘ	ᲐᲗᲔᲣᲚᲔᲑᲘ	ᲔᲠᲗᲔᲣᲚᲔᲑᲘ		ᲛᲔᲐᲗᲔᲓᲔᲑᲘ	ᲛᲔᲐᲡᲔᲓᲔᲑᲘ	ᲛᲔᲐᲗᲐ-ᲡᲔᲓᲔᲑᲘ	ᲛᲔᲐᲗᲘ-ᲐᲗᲐᲡᲔᲓᲔᲑᲘ	ᲛᲔᲐᲡᲘ-ᲐᲗᲐᲡᲔᲓᲔᲑᲘ	. . .
$302\frac{605}{1000}$			3	0	2	,	6	0	5			

ესე იგი:

$$302,605 = 302\frac{605}{1000} = 300 + 2 + \frac{600}{1000} + \frac{5}{1000} =$$

$$= 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{100} + 5\frac{1}{1000} =$$

3 ასეული + 0 ათეული + 2 ერთეული + 6 მეათედი + 0 მეასედი + 5 მეათასედი

$$302,605=3 \cdot 100+0 \cdot 10+2 \cdot 1+6 \cdot 0,1+0 \cdot 0,01+5 \cdot 0,001.$$

როგორც ვიცით, ათწილადის მთელი ნაწილის თანრიგები 10-ის ხარისხებს შეესაბამება. ასევეა წილადური ნაწილის თანრიგებიც, ოღონდ ისინი 10-ის ხარისხების შებრუნებულ რიცხვებს შეესაბამება, ანუ 10-ის ხარისხები მნიშვნელებშია, მრიცხველი კი ყველა სათანრიგო წილადს 1-ის ტოლი აქვს. მაგალითად, მე-3 ათწილადური ნაწილის თანრიგი შეესაბამება წილადს $\frac{1}{10^3}$ ანუ $\frac{1}{1000}$.

მივაქციოთ ყურადღება, რომ, ისევე როგორც მთელი რიცხვების ჩანაწერებში, ათწილადებშიც სხვადასხვა ადგილას ჩაწერილი ციფრები სხვადასხვას აღნიშნავს. მაგალითად, ათწილადურ ჩანაწერში 33,33 ოთხივე ციფრი 3-ანია, მაგრამ ისინი სხვადასხვას აღნიშნავს. მათ შორის მარცხნიდან პირველი სამიანი ჩაწერილია ათეულების თანრიგში და აღნიშნავს იმას, რომ ამ რიცხვში სამი ათეულია; მეორე სამიანი ერთეულების თანრიგშია და აღნიშნავს, რომ რიცხვში **კიდევ** სამი ერთეულია; მძიმის ნიშნის შემდეგ პირველი სამიანი მეათედების თანრიგშია და აღნიშნავს, რომ რიცხვში **კიდევ** სამი მეათედია; ხოლო მძიმის ნიშნის შემდეგ მეორე სამიანი ჩაწერილია მეასედების თანრიგში და აღნიშნავს, რომ რიცხვში **კიდევ** სამი მეასედია.

ათწილადური ჩანაწერები იკითხება ისევე, როგორც შესაბამისი წილადები. მაგალითად: 10,9 = 10მთელი 9 მეათედი;

0,601 = 0 მთელი 601 მეათასედი;   505,0703 = 505 მთელი 703 მეათიათასედი.

6. მთელი რიცხვის ტოლი ათწილადები

განვიხილოთ ახლა ისეთი ათწილადები, რომლებშიც მძიმის ნიშნის შემდეგ სულ ნულები წერია, მაგალითად - 2,000 ან 30,0 ან 17,00. ჩავწეროთ ეს ათწილადები წილადების სახით:

$$2,000 = 2\frac{000}{1000} = 2; \quad 30,0 = 30\frac{0}{10} = 30; \quad 17,00 = 17\frac{00}{100} = 17.$$

ესე იგი: 2,000 = 2; 30,0 = 30; 17,00 = 17.

ამრიგად, ყოველი ათწილადი, რომელშიც მძიმის ნიშნის შემდეგ მხოლოდ ნულები წერია, მთელი რიცხვის ტოლია. მართებულია შებრუნებული დასკვნაც – ყოველი მთელი რიცხვი შეიძლება ჩავწეროთ ათწილადის სახით, თანაც უამრავი განსხვავებული ჩანაწერით. მაგალითად:

36 = 36,0 = 36,00 = 36,000 = და ...

რადგან, $36 = 36\frac{0}{10} = 36\frac{00}{100} = 36\frac{000}{1000} = 36\frac{0000}{10000} = \ldots$

მას შემდეგ, რაც მთელი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ათწილადის სახით, გააზრებული გვაქვს ფარული ნულები და ფარული მძიმე, შეგვიძლია წილადი ჩავწეროთ ათწილადის სახით და პირიქით, უკვე მზად ვართ, რომ გააზრებულად ვისწავლოთ ათწილადების შედარებაც, შეკრება-გამოკლებისა და გამრავლება-გაყოფის წესებიც. მაგალითად,

39,49 < 39,507, რადგან 39,49 = 39,490 და 490 < 507.

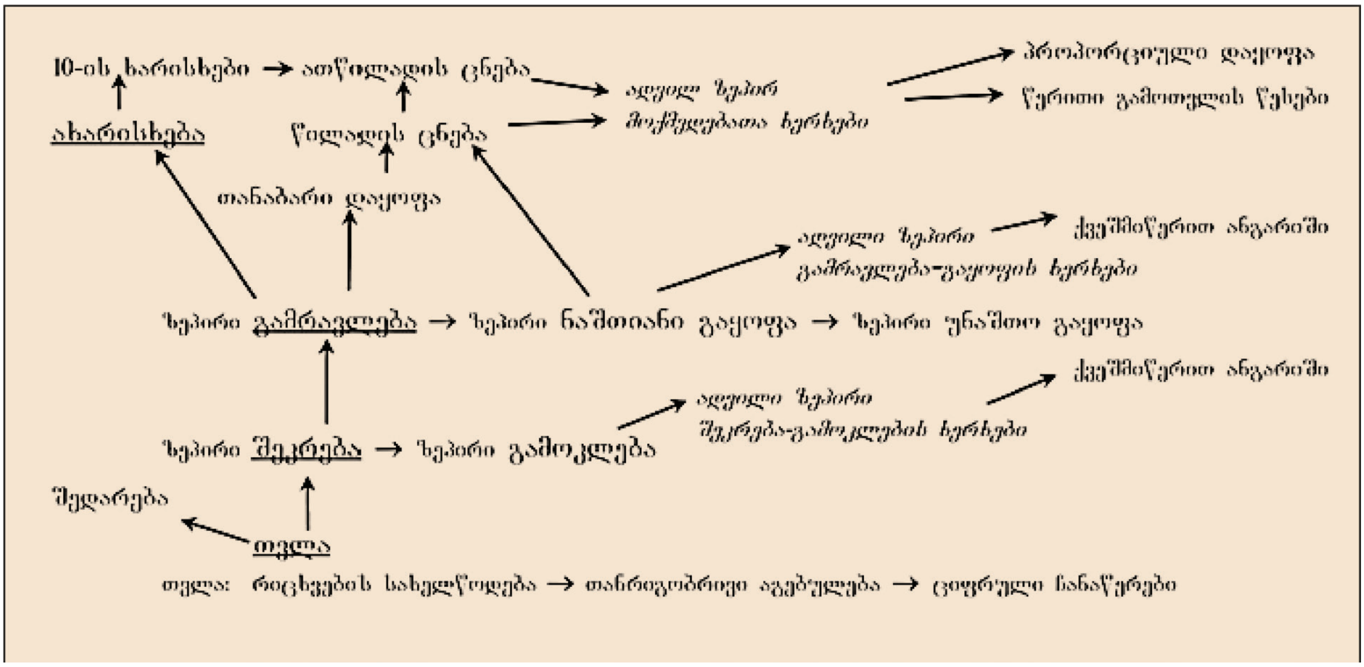
13,67 – 6,4 = 13,67 – 6,40 = 7,27

45 : 2 = 45,0 : 2 = 22,5

ათწილადები იმითაა მოსახერხებელი, რომ მათზე არითმეტიკული მოქმედებები ისევე ტარდება, როგორც მთელ რიცხვებზე, ოღონდ მძიმის გათვალისწინებაა საჭირო.

7. წილადის და ათწილადის სწავლების მეთოდიკის საკითხები

არითმეტიკის მეცნიერული დაფუძნებისა და არითმეტიკის გააზრებული სწავლის საუკეთესო თანმიმდევრობა მოცემულია სქემაზე (მასში ყველგან იგულისხმება მოქმედება სათანადო ფარგლებში – მხოლოდ წინა ფარგლების საკმაო განმტკიცების შემდეგ).



სქემიდან ჩანს წილადის და ათწილადის სწავლების თანმიმდევრობა. მოსწავლეებს კარგად უნდა ჰქონდეთ გააზრებული ნაშთიანი გაყოფა, შემდეგ კი – წილადის ცნება და ამის შემდეგ შეიძლება დავიწყოთ ათწილადის სწავლება. მართლაც, ათწილადი იგივე წილადია (რაციონალური რიცხვი), სხვა სახით ჩაწერილი. ამიტომ მოსწავლეს ბოლომდე უნდა ჰქონდეს გააზრებული წილადების შედარება და მათზე არითმეტიკული მოქმედებები და შემდეგ დაიწყოს ათწილადების სწავლება. ეს ნიშნავს, რომ მთავარია არა მოქმედებათა შესრულება (რაც ათწილადებზე უფრო ადვილია), არამედ, ცნების გააზრება. მართლაც, როგორ შეიძლება მოსწავლემ გაიაზროს ათწილადებზე – ანუ კერძო სახის წილადებზე – მოქმედებები, თუ ჯერ წილადები, ანუ ზოგადი, არ გაუაზრებია? რა თქმა უნდა, მოსწავლისთვის ზედმეტი არ არის ათწილადებზე მოქმედებათა ცოდნა, მაგრამ უმთავრესია წილადის ცნებისა და წილადებზე მოქმედებათა გააზრება. ათწილადის შესწავლას, გარდა წილადებისა, 10-ის ხარისხების და ზოგადად ხარისხის ცოდნაც სჭირდება. ამიტომ, დიდი ყურადღება უნდა დაეთმოს წინარე ცოდნას.

8. ტიპური შეცდომები ათწილადებთან დაკავშირებით

მოსწავლეს ჰგონია, რომ:

1. 6,10 = 6/10 და 16,10 = 16/10.

სწორია: $6{,}10 = 6\frac{1}{10}$ და $16{,}10 = 16\frac{1}{10}$.

2. მატარებელი თბილისიდან გავიდა 09.10 საათზე და ლანჩხუთში ჩავიდა 14.35 საათზე. ესე იგი, მატარებელს ამ გზისთვის მოუნდომებია 5,25 სთ.

სწორია: მატარებელს გზის გასავლელად დასჭირდა 5 სთ და 25 წთ.

3. რაკი 35 > 5, ამიტომ 8,35 > 8,5; ასევე, 0,0995 > 0,15.

სწორია: 8,35 < 8,5, რადგან 8,35 < 8,50;

ასევე: 0,0995 < 0,15 რადგან 0,0995 < 0,1500.

4. რაკი 0,43-ზე 2-ჯერ მეტია 0,86, ასევე, 0,71-ზე 2-ჯერ მეტია 0,142;

ან: 0,142:2 = 0,71.

სწორია: 0,71-ზე 2-ჯერ მეტია 1,42; 0,142:2 = 0,071.

5. 2 მილიონზე 1,5-ჯერ მეტი რიცხვია 5 მილიონი.

სწორია: რადგან, ამიტომ 2 მილიონზე 1,5-ჯერ მეტი რიცხვია 3 მილიონი.

6. რადგან 0,1 : 2 = 0,05; ამიტომ ასე ანგარიშობს:

0,9 : 2 = 0,045, ანუ 2 · 0,045 = 0,9;

სწორია: 0,9 : 2 = 0,45 შესაბამისად, 2 · 0,45 = 0,9

75 : 2,5 = 0,3; ამიტომ 2,5 · 0,3 = 75.

სწორია: 75 : 2,5 = 750 : 25 = 30; ხოლო 2,5 · 0,3 = 0,75.

7. 1,2 · 10 = 1,20 .

სწორია: 1,2 · 10 = 12.

8. 4,9 + 3,3 = 7,12 .

სწორია: 4,9 + 3,3 = 8,2.

9. **I.** $$\begin{array}{r} 640{,}71 \\ +\ 23{,}815 \\ \hline 87{,}886 \end{array}$$ **II.** $$\begin{array}{r} 891{,}39 \\ -\ 71{,}893 \\ \hline 17{,}246 \end{array}$$

სწორია: **I.** $$\begin{array}{r} 640{,}71 \\ +\ 23{,}815 \\ \hline 664{,}525 \end{array}$$ **II.** $$\begin{array}{r} 891{,}39 \\ -\ 71{,}893 \\ \hline 719{,}497 \end{array}$$

დავალება დამოუკიდებელი მუშაობისთვის

1. მასწავლებელმა მოსწავლეებს მისცა დავალება გაერკვიათ:

$\frac{12}{11}$ უფრო მეტია თუ $\frac{13}{12}$?

მოსწავლეებმა გადაწყვიტეს გაერთმნიშვნელიანება და ტოლმნიშვნელიანი წილადების შედარება. აუხსენით მოსწავლეებს შედარების საუკეთესო (მარტივი) გზა ამ ამოცანის ამოსახსნელად.

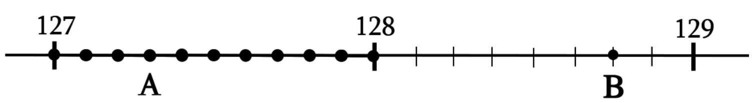
2. მასწავლებელმა მოსწავლეებს მისცა ამოცანა: „ეზოში ქათმების 4/5 ნაწილი დედლებია, მათ გარდა კიდევ 3 მამალია. სულ რამდენი ქათამია ეზოში?" მოსწავლემ ამ ამოცანის ამოსახსნელად ასეთი გამოსახულება შეადგინა:

$$\frac{4}{5}+3=3+\frac{4}{5}=3\frac{4}{5}.$$

ამოხსენით ამოცანა სწორად და ახსენით, რა შეეშალა მოსწავლეს.

3. ჩაწერე ათწილადის სახით: $3\cdot10^5+6\cdot10^4+1\cdot10^3+5\cdot10^2+3\cdot10+4+7\cdot\frac{1}{10}$.

4. მოცემულ რიცხვით ღერძზე იპოვეთ A და B წერტილების კოორდინატები.



5. პირველი რიცხვი მეორეზე 1,5-ჯერ მეტია. პირველი რიცხვის რა ნაწილია მეორე რიცხვი?

ა) 1/3 ბ) 1/5 გ) 2/3 დ) 3/2

6. თორნიკემ ამოხსნა სავარჯიშო და მიიღო პასუხი 14,25. მერე შენიშნა, რომ ბოლო მოქმედება შეცდომით შეუსრულებია: რიცხვი 20,1-ზე უნდა გაეყო, მან კი 201-ზე გაყო. რა იქნებოდა მართებული პასუხი?

7. მგზავრმა პირველ დღეს გაიარა მთელი გზის 4/9 ნაწილი, მეორე დღეს – ორჯერ ნაკლები, მესამე დღეს კი – იმდენივე, რაც მეორე დღეს. ამის შემდეგ გასავლელი დარჩა კიდევ 12 კმ. სულ რამდენი კმ ჰქონია გასავლელი მგზავრს?

8. მოცემული ათწილადები დაშალეთ სათანრიგო შესაკრებთა ჯამად:

ა) 237,06; ბ) 9150,508; გ) 4010,0104.

9. დაწყვილებული გაკვეთილებიდან პირველი გაკვეთილი 45-წუთიანი იყო, მეორე – 36-წუთიანი. ჯგუფურ მუშაობას დაეთმო პირველი გაკვეთილის 2/9 ნაწილი და მეორე გაკვეთილის 3/9 ნაწილი. ორი გაკვეთილის საერთო ხანგრძლივობის რა ნაწილი დაეთმო ჯგუფურ მუშაობას?

10. 1მ × 2მ × 3მ მართკუთხა პარალელეპიპედის რა ნაწილია 1მ × 1მ × 1მ კუბი?

ა) 1/2; ბ) 1/3; გ) 7/8; დ) 1/6.

11. რიცხვებიდან $\frac{13}{9}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{32}{15}$, $\frac{9}{5}$ რამდენია $\frac{7}{4}$-ზე მეტი?

(ა) 1; (ბ) 2; (გ) 3; (დ) 4.

შემაჯამებელი ტესტი

1. წილადების სწავლებას რისთვის სჭირდება წინასწარ ნაშთიანი გაყოფის სწავლება?

   (ა) შემცველობითი გაყოფა ვერ ჩატარდება, თუკი წინასწარ თანაბარი დაყოფა არ ჩატარდა;

   (ბ) წილადების მთავარი საკითხის (წილადის ძირითადი თვისების) დასასაბუთებლად, ხოლო შემდგომში მოსწავლის მიერ ამ თვისების გასააზრებლად;

   (გ) ერთზე მეტი წილადის (ანუ ზოგადად წილადის!) შემადგენლობის გასააზრებლად და მისგან მთელი და წილადური ნაწილების გამოსაყოფად;

   (დ) თანაბარი დაყოფა ვერ ჩატარდება, თუკი წინასწარ შემცველობითი გაყოფა არ ჩატარდა.

2. $8\cdot 10^2+4+7\cdot\frac{1}{100}+5\cdot\frac{1}{1000}=$

   ა) 847,5; ბ) 804,075; გ) 804,75; დ) 84,75;

3. მოსწავლემ წილადები ზრდის მიხედვით დაალაგა:

$$\frac{11}{16},\ \frac{13}{16},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}$$

აარჩიეთ დასკვნა ამ მოსწავლის სათანადო ცოდნის შესახებ:

ა) საზოგადოდ არ იცის წილადების შედარება;

ბ) ტოლმრიცხველიან წილადებს სწორად ადარებს, მაგრამ სხვა შემთხვევებში ეშლება, რადგან შედარებას ან მხოლოდ მრიცხველის, ან მხოლოდ მნიშვნელის მიხედვით ახდენს;

გ) ჰგონია, რომ რაც უფრო დიდია მნიშვნელი, მით უფრო მცირეა წილადი (მრიცხველის მიუხედავად);

დ) ტოლმნიშვნელიან წილადებს მართებულად ადარებს, მაგრამ სხვა შემთხვევაში ჰგონია, რომ რაც უფრო დიდია მნიშვნელი, მით უფრო მცირეა წილადი.

4. წუთნახევრის მერამდენედი ნაწილია 15 წამი?

5. ხეხილის ბაღში მსხლის ხეების რაოდენობა ვაშლის ხეების რაოდენობის $\frac{4}{5}$ ნაწილს შეადგენს. რამდენი ვაშლის ხეა ბაღში, თუ ვაშლის ხეების რაოდენობა მსხლის ხეების რაოდენობაზე 6-ით მეტია?

6. თითოეული ანთებული ნათურა ყოველ საათში ერთი და იმავე ღირებულების ელექტროენერგიას ხარჯავს. 8 ნათურა 4 საათში 80 თეთრის ღირებულების ელექტროენერგიას ხარჯავს. რამდენი ლარის ტოლი იქნება 20 ნათურის მიერ 3 საათში დახარჯული ელექტროენერგიის ღირებულება?

(ა) 1,2; (ბ) 1,5; (გ) 1,8; (დ) 2.

7. მაღაზიაში დღის განმავლობაში 42 კგ ვაშლი გაიყიდა. ეს ამ მაღაზიაში იმ დღეს გაყიდული ხილის წონის მესამედზე მეტია, მაგრამ ნახევარზე ნაკლები. ჩამოთვლილთაგან რომლის ტოლი შეიძლება იყოს მაღაზიაში იმ დღეს გაყიდული ხილის წონა?

(ა) 56 კგ; (ბ) 82 კგ; (გ) 91 კგ; (დ) 150 კგ.

თავი 5. პროპორცია და პროცენტი

1. რიცხვთა და სიდიდეთა პროპორციული წყებანი. პროპორციულობის კოეფიციენტი

დალაგებულ ორეულს ანუ წყვილს, სამეულს, ოთხეულს, ხუთეულსა და ასე შემდეგ – წყება ეწოდება. წყების ჩასაწერად გამოიყენება მრგვალი ფრჩხილები ( ), რომლებშიც წყების წევრები ერთმანეთისგან გამოყოფილია ; -ით. მაგალითად, სიდიდეთა ოთხწევრიანი წყებაა: (6 კგ; 6 კგ; 1/2 სმ; 15,4 წთ). საქართველოს ქალაქთა წყებაა: (თბილისი; ქუთაისი; ბოლნისი; თბილისი), ხოლო (თბილისი; ბოლნისი; თბილისი; ქუთაისი) – ქალაქთა სხვა წყებაა.

განვიხილოთ ახლა ისეთი წყებები, რომელთაც წევრთა ერთი და იგივე რაოდენობა აქვთ. ასეთ წყებებში შესაბამისი წევრები ვუწოდოთ ერთი და იგივე ნომრიან ადგილებზე მდგომ წევრებს: ერთი წყების მარცხნიდან პირველი წევრის შესაბამისია მეორე წყების მარცხნიდან პირველი წევრი, მეორე წევრისა – მეორე წევრი, მესამე წევრისა – მესამე წევრი და ასე შემდეგ. მაგალითად, ოთხ-ოთხი წევრისაგან შედგენილ წყებებში (1/2 სმ; 6 კგ; 15,5 მ; 15,5 წმ) და (2 ; 0 ; 2მ^3 ;18 ტ) შესაბამისი წევრებია 1/2 სმ და 2; 6 კგ და 0; 15,5 მ და 2 მ^3; 15,5 წმ და 18 ტ.

ხშირად საჭიროა მოცემული სიდიდეების ერთსა და იმავე რიცხვჯერ გადიდება ან შემცირება. მაგალითად, თუკი ხაჭაპურის გამოსაცხობად საჭიროა 250 გ ფქვილი, 150 გ ყველი და 1 კოვზი ცხიმი, მაშინ ამაზე ორჯერ უფრო დიდი წონის ხაჭაპურის გამოსაცხობად საჭირო იქნება შესაბამისად ორჯერ მეტი მასალა: ფქვილი – 500 გ = 0,5 კგ, ყველი – 300 გ და ერბო – 2 კოვზი; ხოლო ერთნახევარჯერ უფრო დიდი ხაჭაპურის გამოსაცხობად საჭირო იქნება თავდაპირველზე შესაბამისად ერთნახევარჯერ მეტი მასალა: ფქვილი – 375 გ, ყველი – 225 გ და ერბო – 1,5 კოვზი.

მათემატიკური თვალსაზრისით ამ მაგალითში მნიშვნელოვანია ერთი რამ. სიდიდეთა წყება (500 გ; 300 გ; 2 კოვზი) მიიღება თავდაპირველი წყების (250 გ; 150 გ; 1 კოვზი) შესაბამისი წევრების 2-ზე გამრავლებით: ახალი წყების პირველი წევრი 500 გ მიიღება პირველი წყების პირველი წევრის 250 გ-ის 2-ზე გამრავლებით; მეორე წევრი – მეორე წევრის 2-ზე გამრავლებით და ასე შემდეგ.

(250 გ; 150 გ; 1 კ)
(500 გ; 300 გ; 2 კ)
(375 გ; 225 გ; 1,5 კ)

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე წყება, რომლის არცერთი წევრი არაა 0-ის ტოლი. რიცხვთა თუ სიდიდეთა წყებას, რომელიც მიიღება მოცემული წყების წევრების ერთსა და იმავე რიცხვზე (ან სიდიდეზე) გამრავლებით, ეწოდება მოცემული წყების **პროპორციული წყება**. რიცხვს (ან სიდიდეს), რომელზეც ხდება მოცემული წყების წევრების გამრავლება პროპორციული წყების მიღებისას, ეწოდება **პროპორციულობის კოეფიციენტი**.

მაშასადამე, ჩვენს შემთხვევაში სიდიდეთა წყება (500 გ; 300 გ; 2 კოვზი) პროპორციულია თავიდან მოცემული სიდიდეთა წყებისა (250 გ; 150 გ; 1 კოვზი). ხოლო პროპორციულობის კოეფიციენტი კი 2-ის ტოლია.

პროპორციულობის კოეფიციენტი შეიძლება იყოს სიდიდეც, მაგალითად: სიდიდეთა წყება (15 მ^2; 18 მ^2) პროპორციულია სიდიდეთა წყებისა (5 მ; 6 მ) და პროპორციულობის კოეფიციენტია – სიდიდე 3 მ (და არა რიცხვი 3!). ასევე, წყებები (1; 9; 2) და (1 მ; 9 მ; 2 მ) პროპორციულია, პროპორციულობის კოეფიციენტით 1 მ.

პროპორციულობის კოეფიციენტი შეიძლება 1-ზე ნაკლები რიცხვიც იყოს, მაგალითად: რიცხვთა წყება (6; 2; 3; 3,1) პროპორციულია წყებისა (18; 6; 9; 9,3) – პროპორციულობის კოეფიციენტია – $\frac{1}{3}$.

პროპორციულ წყებათა ჩაწერისას არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ წყებაში წევრების თანმიმდევრობის შეცვლა არ შეიძლება. მაგალითად, რიცხვთა წყება (18; 6; 9; 9,3) პროპორციულია წყებისა (6; 2; 3; 3,1), მაგრამ არაა პროპორციული მის წევრთა გადანაცვლებით მიღებული წყებისა – (2; 6; 3,1 ; 3).

ვთქვათ, პროპორციულობის კოეფიციენტია – 0. მაშინ, წყება (0; 0) პროპორციული იქნება ყველა ორწევრიანი წყებისა, წყება – (0; 0; 0) პროპორციული იქნება ყველა სამწევრიანი წყებისა და ასე შემდეგ, რასაც აზრი არა აქვს, ამიტომ მიღებულია, რომ პროპორციულობის კოეფიციენტი არ უნდა იყოს 0.

2. პროპორცია

ვთქვათ, მოცემულია რიცხვთა ან სიდიდეთა ორი პროპორციული წყება:

$$(p;\ q;\ r)$$
$$(a;\ b;\ c)$$

პროპორციულობის კოეფიციენტია k. როგორც ვიცით, ეს იმას ნიშნავს, რომ:

$p = ka, \quad q = kb, \quad r = kc$.

აქედან მივიღებთ:

$$\frac{p}{a} = k, \quad \frac{q}{b} = k, \quad \frac{r}{c} = k.$$

მაშასადამე, გვექნება:

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c} = k.$$

ამრიგად, წყებათა პროპორციულობის დროს შესაბამისი წევრების შეფარდებათა მნიშვნელობები ერთმანეთის ტოლია და ემთხვევა პროპორციულობის კოეფიციენტს.

ესაა პროპორციულ წყებათა პირველი თვისება.

მაგალითად, წყება (600; 4) პროპორციულია წყებისა (300; 2).

შეფარდებებია: $\dfrac{600}{300} = \dfrac{4}{2} = 2.$ ← პროპორციულობის კოეფიციენტი.

სიდიდეთა წყება (750 გ; 450 გ; 3 კოვზი) პროპორციულია წყებისა (500 გ; 300 გ; 2 კოვზი).

შეფარდებებია: $\dfrac{750}{500} = \dfrac{450}{300} = \dfrac{3}{2} = 1\dfrac{1}{2}.$ ← პროპორციულობის კოეფიციენტი.

ამრიგად, წყებათა პროპორციულობისას ვიღებთ ტოლი მნიშვნელობის მქონე შეფარდებებს.

ორი შეფარდების (რომელთა წევრები 0-ისგან განსხვავებულია) მართებულ ტოლობას **პროპორცია** ეწოდება; ხოლო პროპორციაში შემავალ რიცხვებსა თუ სიდიდეებს – **პროპორციის წევრები**.

პროპორციის მაგალითებია:

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} \text{ ანუ } p : a = q : b \ \ (p \neq 0,\ q \neq o,\ a \neq 0,\ b \neq 0).$$

ეს პროპორცია სიტყვიერად ასე იკითხება:

„ p ისე შეეფარდება a-ს, როგორც q შეეფარდება b-ს“.

$$4:2=7:3,5, \text{ ანუ } \frac{4}{2}=\frac{7}{3,5};$$
$$16\text{ გ}:16=20\text{ გ}:20, \text{ ანუ } \frac{16\text{გ}}{16}=\frac{20\text{გ}}{20}.$$

შემდეგი ტოლობები კი ორივე მცდარია, რადგანაც შეფარდებათა მნიშვნელობები არაა ტოლი, ამიტომ არცერთი მათგანი არაა პროპორცია:

$$9:2=0,7:3,5, \quad \frac{4\text{მ}}{2}=\frac{8}{16}.$$

პროპორცია არაა აგრეთვე შემდეგი მართებული ტოლობა $\frac{0\text{ მ}}{7\text{ მ}}=\frac{0\text{ სმ}}{9\text{ სმ}}$, რადგანაც პროპორციის არცერთი წევრი არ უნდა იყოს 0-ის ტოლი.

საზოგადოდ, პროპორციის ჩაწერა უფრო მოსახერხებელია ხოლმე წილადის ხაზის საშუალებით (და არა განაყოფებით), რადგანაც ასე უკეთ ჩანს პროპორციის წევრები.

ცხადია, პროპორციის წევრებისაგან ყოველთვის შეიძლება პროპორციული წყებების შედგენა. პირიქითაც, თუ მოცემულია რიცხვთა ან სიდიდეთა პროპორციული წყებანი, მათგან ყოველთვის შეიძლება პროპორციების შედგენა.

ამრიგად, პროპორცია შეფარდებათა ტოლობაა, ხოლო პროპორციული – რიცხვთა ან სიდიდეთა წყებებია.

3. პროპორციის ძირითადი თვისება

ვთქვათ, მოცემულია რიცხვთა ან სიდიდეთა პროპორციული წყებები:

$$(p;\ q;\ r)$$
$$(a;\ b;\ c)$$

ამრიგად, $\frac{p}{a}=\frac{q}{b}$ პროპორციის **„ჯვარედინა“** $\begin{matrix}p & q\\ a & b\end{matrix}$ ნამრავლები ტოლია:

$$pb\ =\ qa.$$

მოცემული პროპორციული წყებებიდან შევადგინოთ სხვა პროპორციები, მაგალითად, ასეთები: $\frac{p}{a}=\frac{r}{c}$ და $\frac{q}{b}=\frac{r}{c}$. მაშინ მივიღებთ, რომ ერთმანეთის ტოლია აგრეთვე

$\begin{matrix}(p; & q; & r)\\ (a; & b; & c)\end{matrix}$ და $\begin{matrix}(p; & q; & r)\\ (a; & b; & c)\end{matrix}$ ჯვარედინა ნამრავლებიც: $pc\ =\ ar$ და $qc\ =\ br.$

მაშასადამე, პროპორციული წყებების წევრთა „ჯვარედინა“ ნამრავლები ერთმანეთის ტოლია. ესაა პროპორციის ძირითადი თვისება. ის ხშირად აადვილებს იმის გარკვევას, არის თუ არა მოცემული წყებანი ერთმანეთის პროპორციული. ამის გასარკვევად აღარაა საჭირო შეფარდებათა გამოთვლა (რასაც ხშირად გრძელი გამოანგარიშება სჭირდება). შეგვიძლია პირდაპირ გავამრავლოთ ერთმანეთზე „ჯვარედინა“ წევრები და მიღებული ნამრავლები ერთმანეთს შევადაროთ. თუ ნამრავლები ტოლია, მაშინ წყებები პროპორციულია, თუ არაა ტოლი – მაშინ არა.

მაგალითად, წყებები

(1 მ; 20 მ)

(1,5 მ; 30 მ)

ერთმანეთის პროპორციულია, რადგან $1\text{ მ}\cdot\ 30 = 1{,}5\cdot\ 20\text{ მ};$

წყებები

(1; 30)

(1,5; 40)

კი არაა ერთმანეთის პროპორციული, რადგან $1\cdot\ 40 \neq 1{,}5\cdot\ 30$.

4. პროპორციის უცნობი წევრის მოძებნა. პროპორციის გამოყენება

პროპორციის ძირითადი თვისების გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია პროპორციის ერთი უცნობი წევრის გამოთვლა, როცა მოცემულია დანარჩენი სამი წევრი.

1) მოვძებნოთ უცნობი წევრი, მაგალითად, ამ პროპორციაში:

$$\frac{3,57}{x}=\frac{1,4}{4}$$

ამისათვის გამოვიყენოთ პროპორციის ძირითადი თვისება, გავუტოლოთ ჯვარედინა ნამრავლები: $1,4 \cdot x = 3,57 \cdot 4$,

საიდანაც

$$x=\frac{3,57\cdot 4}{1,4}$$

ახლა ნუ ვიჩქარებთ გამრავლება-გაყოფას, შეფარდება ჯერ გავამარტივოთ:

$$x=\frac{3,57\cdot 4}{1,4}=\frac{3,57\cdot 2}{0,7}=\frac{5,1\cdot 2}{1}=10,2$$

როგორც ვხედავთ, შეფარდების გამარტივებამ ისე გააადვილა გამოთვლები, რომ ისინი ზეპირადაც კი შესრულდება.

2) ასევე უნდა მოვიქცეთ სხვა პროპორციების შემთხვევაშიც:

$$\frac{x}{5,5}=\frac{6,3}{5}$$

$$5\cdot x=6,3\cdot 5,5$$

$$x=\frac{6,3\cdot 5,5}{5}=6,3\cdot 1,1=6,93$$

ამრიგად: პროპორციის უცნობი წევრის გამოსათვლელად საჭიროა ცნობილი „ჯვარედინა“ წევრების ნამრავლი გავყოთ მესამე ცნობილ წევრზე.

ახლა ვნახოთ, თუ როგორ ამოიხსნება ამოცანები პროპორციის გამოყენებით.

3) 5,2 კუბ. მეტრი ხმელი შეშისგან მიიღება 390 კგ ნახშირი. რამდენი ხმელი შეშაა საჭირო 585 კგ ნახშირის მისაღებად?

ამოცანის პირობის მოკლე ჩანაწერი ასე კეთდება:

390 კგ ------- 5,2 კუბ. მეტრი

585 კგ -------- x კუბ. მეტრი

პირველ სტრიქონში ჩაწერილ სიდიდეთა წყება (390 კგ; 5,2 კუბ. მეტრი)

პროპორციულია მეორე სტრიქონში ჩაწერილ სიდიდეთა წყებისა (586 კგ; x კუბ. მეტრი). ამიტომ:

$\frac{390}{585}=\frac{5,2}{x}$, საიდანაც $x=\frac{585\cdot 5,2}{390}=7,8$ (კუბ.მ)

პასუხი: 585 კგ ნახშირის მისაღებად საჭიროა 7,8 კუბ. მეტრი შეშა.

4) 3 კუბ.მეტრი ხის მორების დახერხვით მიიღება დაახლოებით 240 გრძივი მეტრი ფიცარი (20 სმ სიგანისა), ან 100 კვ.მ პარკეტი. რამდენი გრძივი მეტრი ფიცარი ან რამდენი კვ.მ პარკეტი დამზადდება 7 კუბ.მ მორებისაგან?

3 კუბ.მ ------- 240 მეტრი ფიცარი ------- 100 კვ.მ პარკეტი

7 კუბ.მ ------- x მეტრი ფიცარი ------- y კვ.მ პარკეტი

პროპორციულობის გამო: $3\cdot x=7\cdot 240$. აქედან: $x=\frac{7\cdot 240}{3}=\frac{7\cdot 80}{1}=560$ (მ)

ასევე: $3\cdot y=7\cdot 100$. აქედან $y=\frac{7\cdot 100}{3}=\frac{700}{3}=233\frac{1}{3}$ (კვ.მ)

პასუხი: 7 კუბ. მ ხის მასალისგან დამზადდება 560 გრძივი მ ფიცარი ან $233\frac{1}{3}$ კვ.მ პარკეტი.

5. პროცენტი

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე რიცხვისა თუ სიდიდის ორი სხვადასხვა ნაწილი. ცხადია, ამ ნაწილების შედარება თუ მათი შეკრება-გამოკლება უფრო ადვილი იქნება, თუ ეს ნაწილები ტოლმნიშვნელიანი წილადებით იქნება მოცემული. ყოფა-ცხოვრებაში სწორედ ასე იქცევიან: უფრო ხშირად ნაწილებისათვის იყენებენ ისეთ წილადებს, რომელთა მნიშვნელია მრგვალი რიცხვი 100. ამასთან, იმის ნაცვლად, რომ თქვან, მაგალითად, „7/100 ნაწილი“, ამბობენ მოკლედ: „7 პროცენტი“. ამას უფრო მოკლედაც ჩაწერენ: 7%. საზოგადოდ, $p/100$ ნაწილის მაგივრად წერენ მოკლედ: $p\%$. სახელწოდება „პროცენტი“ წარმოდგება ლათინური სიტყვიდან „პროცენტუმ“, რაც ნიშნავს: „ასზე“.

მაშასადამე, რაიმე საგნის, რიცხვისა თუ სიდიდის 1% იგივეა, რაც მისი 1/100 ნაწილი; 37% იგივეა, რაც 37/100 ნაწილი; 100% იგივეა, რაც – 100/100 ნაწილი ანუ 1 მთელი; 145% იგივეა, რაც 145/100 ნაწილი და სხვა.

ზოგიერთი წილადური ნაწილი ადვილად ჩაიწერება პროცენტის სახით. მაგალითად:

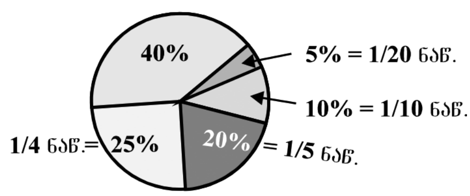
$$\frac{1}{10}\text{ ნაწ.} = \frac{1}{100}\text{ ნაწ.} = 10\% \qquad \frac{1}{5}\text{ ნაწ.} = \frac{20}{100}\text{ ნაწ.} = 20\%$$

ამრიგად, პროცენტი იგივე ნაწილია, ოღონდ მეასედებით ჩაწერილი. საჭიროა ყველა შემდეგი შესაბამისობის ზეპირად დამახსოვრება:

$$\frac{1}{2}\text{ ნაწ.} = 50\%; \quad \frac{1}{100}\text{ ნაწ.} = 1\%$$

$$\frac{1}{4}\text{ ნაწ.} = 25\%;$$

$$\frac{3}{4}\text{ ნაწ.} = 75\%;$$



$$1\text{ მთელი ნაწ.} = 100\ \%; \quad 1\frac{1}{2}\text{ ნაწ.} = 150\ \%\ ;$$

$$2\text{ მთელი ნაწ.} = 200\ \%.$$

ამოცანა. რძე შეიცავს 4% ცხიმს. რა რაოდენობის ცხიმს შეიცავს 1400 მლ რძე?

ამოხსნა: პროცენტი ჩავწეროთ წილადის სახით და შევასრულოთ გამრავლება:

$1400\cdot\frac{4}{100} = 56$ მლ.

ამოცანა. შეაკეთეს გზის მონაკვეთის 9%, რაც შეადგენს 27 კმ-ს. რას უდრის გზის მონაკვეთის სიგრძე?

ამოხსნა: პროცენტი უნდა ჩაიწეროს წილადის სახით და შესრულდეს გაყოფა –

$27:\frac{9}{100} = 300$ კმ.

6. ნაწილის ჩაწერა პროცენტის სახით

როგორც ვიცით, ხშირად პროცენტები უფრო მოსახერხებელია, ვიდრე წილადის ან ათწილადის სახით ჩაწერილი ნაწილები. მაგრამ როგორ ჩავწეროთ ნაწილი პროცენტის სახით? როგორც ვისწავლეთ, რაიმე a რიცხვის (ან სიდიდის) $p\%$ ამავე a-ს $p/100$ ნაწილის ტოლია:

$$p\% = \frac{p}{100} \text{ ნაწ.}$$

ამიტომ, ცხადია: p ნაწ. $= 100\,p\,\%$.

ამრიგად, მივიღეთ ადვილი წესი: იმისათვის, რათა ნაწილი ჩავწეროთ პროცენტის სახით, ნაწილის მაჩვენებელი რიცხვი უნდა გავამრავლოთ 100-ზე. მაგალითად, რიცხვის:

0,023 ნაწ. = 2,3 %, რადგან 0,023 ·100 = 2,3;

3/40 ნაწ. = 7,5 %, რადგან $\frac{3}{40} \cdot 100 = \frac{30}{4} = 7,5$;

1,75 ნაწ. = 175 %, რადგან 1,75 ·100 = 175;

$3\frac{1}{4}$ ნაწ. = 325 %, რადგან $3\frac{1}{4} \cdot 100 = 3,25 \cdot 100 = 325$.

მოსახერხებელია პროცენტი ჩავწეროთ მთელის ან ათწილადის სახით.

მაგალითად, ჩანაწერები: $30\frac{1}{2}\%$ ან $\frac{2}{3}\%$ და მისთანები იშვიათად გამოიყენება.

ამიტომ, თუ ამგვარი ჩანაწერი გაჩნდება, მაშინ წილადი უნდა ჩავწეროთ ათწილადის სახით ან დავამრგვალოთ.

მაგალითად: $30\frac{1}{2}\% = 30,5\%$, $\frac{2}{3}\% = 0,666...\% \approx 0,67\%$.

ამოცანა. მოსწავლემ 250-გვერდიან წიგნში წაიკითხა 20 გვერდი. წიგნის რამდენი პროცენტი წუკითხავს მოსწავლეს?

ამოხსნა: წაკითხული გვერდების რაოდენობა შევაფარდოთ გვერდების მთლიან რაოდენობასთან, ანუ გამოვთვალოთ წილადური ნაწილი: 20/250 = 2/25 ნაწ.

ახლა კი ეს ნაწილი გავამრავლოთ 100-ზე:

$$\frac{20}{250} \cdot 100\% = 8\% \;.$$

7. მატება-კლება რამდენიმე პროცენტით

ვთქვათ, მოცემული a რიცხვი გადიდდა (ან შემცირდა), მაგალითად, 15 %-ით. იგულისხმება, რომ a რიცხვს მიემატა (ან მოაკლდა) **თავისივე** 15 %. ასე, რომ თუკი, მაგალითად, დარიცხული ხელფასი იყო 200 ლარი და იგი 15 %-ით გაიზარდა, ახალი ხელფასი იქნება: 200 + 30 = 230 (ლარი).

ასევე, თუ 200-ლარიანი დარიცხული ხელფასი მცირდება 20 %-იანი საშემოსავლო გადასახადით, მაშინ დაქვითვის მერე ხელზე ასაღებად დარჩება:

$$200-200\cdot\frac{20}{100}=200-40=160 \text{ (ლარი)}.$$

ახლა ვთქვათ, რაღაც მოცემული a რიცხვი გადიდდა და მივიღეთ b რიცხვი. რამდენ პროცენტიანი მატება ყოფილა? მატება იყო $b-a$, მაგრამ ეს რამდენ პროცენტს შეადგენს? ამის გასარკვევად უნდა გამოვთვალოთ, ეს სხვაობა **თავდაპირველი** რიცხვის რა ნაწილია; ანუ ეს სხვაობა უნდა შევაფარდოთ a-სთან და შემდეგ კი, როგორც ჩვეულებრივ, გავამრავლოთ 100-ზე. ესე იგი ნამატი ყოფილა:

$$\boxed{\frac{b-a}{a}100\%}$$

მაგალითად, თუ 200-ლარიანი ხელფასი მომატების შემდეგ გახდა 250 ლარი,

მაშინ მომატება ყოფილა: $50/200\cdot 100 = 25$ %-იანი.

ამგვარი გაანგარიშებისას გავრცელებული შეცდომაა: სხვაობას შეაფარდებენ არა თავდაპირველ a რიცხვთან, არამედ მეორე, b რიცხვთან. მაგალითად, 50 ლარის სხვაობა რომ შეეფარდებინათ არა 200, არამედ 250 ლართან. მაშინ მიიღებდნენ 20 %-იან მატებას, რაც მცდარია!

ამოცანა. კომპიუტერი ღირდა 800 ლარი. ზაფხულში მისმა ღირებულებამ დაიკლო და გახდა 600 ლარი. რამდენი პროცენტით გაიაფებულა კომპიუტერი?

ამოხსნა: (800 – 600) : 800 = 0,25.

მაშასადამე, კომპიუტერი გაიაფებულა 25%-ით თავდაპირველ ფასთან შედარებით.

ამოცანა. რამდენი პროცენტითაა 6 ლარი 8 ლარზე ნაკლები?

ამოხსნა: ასეთ შემთხვევაში სხვაობა უნდა შევაფარდოთ 8-სთან, ვინაიდან მოცემული შეკითხვა ტოლფასია ამ შეკითხვისა: რამდენი პროცენტით უნდა შევამციროთ 8 ლარი, რათა მივიღოთ 6 ლარი?

$$\frac{2}{8}\cdot 100=25\%$$

ამოცანა. ბენზინის ფასი ჯერ 20%-ით გაიზარდა, ხოლო შემდეგ 20%-ით შემცირდა. როგორ შეიცვალა ბენზინის ფასი?

ტიპური შეცდომაა: ფასი არ შეცვლილა.

ამოხსნა: ჩავთვალოთ, რომ თავდაპირველი ფასია 100 ლარი, გაზრდის შემდეგ ფასი გახდებოდა 120 ლარი, რომლის 20% არის $120 \cdot \frac{20}{100} = 24$ ლარი. ამიტომ თუ 120 შემცირდა 20%-ით, ფასი გახდებოდა 120 – 24 = 96 ლარი. ეს ნიშნავს, რომ ბენზინის ფასი ორი ცვლილების შემდეგ გახდა 96 ლარი, ე. ი. შემცირდა 4%-ით.

8. პროცენტი და პროპორციულობა

ვთქვათ, რაიმე a რიცხვის (ან სიდიდის) $p\%$ ტოლია P-სი, ხოლო $q\%$ კი – Q-სი. ესე იგი:

$$P = a \cdot \frac{p}{100}, \quad Q = a \cdot \frac{q}{100}.$$

დავამტკიცოთ, რომ წყებანი $\begin{matrix}(P; & p\%) \\ (Q; & q\%)\end{matrix}$ – ერთმანეთის პროპორციულია.

ვნახოთ, რისი ტოლია P და Q-ს შეფარდება:

$$\frac{P}{Q} = \frac{a \cdot \frac{p}{100}}{a \cdot \frac{q}{100}} = \frac{\frac{p}{100}}{\frac{q}{100}} = \frac{p}{100} : \frac{q}{100} = \frac{p}{100} \cdot \frac{100}{q} = \frac{p}{q} = \frac{p\%}{q\%}$$

ამგვარად, $\frac{P}{Q} = \frac{p\%}{q\%}$.

ეს კი პროპორციულობას ნიშნავს – რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

პროპორციის გამოყენებით ადვილად შეიძლება ამოვხსნათ პროცენტებთან დაკავშირებული სხვადასხვა ამოცანები.

მაგალითად:

1) მოძებნეთ რიცხვი, რომლის 7% ტოლია 21-ის.

ამოხსნა: საძებნი რიცხვი აღვნიშნოთ x-ით. ცხადია, ის თავისი თავის 100%-ია. ამიტომ მივიღებთ პროპორციულ წყებებს – წყება (x; 21) პროპორციულია წყებისა (100%; 7%).

აქედან: $x = \frac{21 \cdot 100}{7} = \frac{3 \cdot 100}{1} = 300.$

პასუხი: საძებნი რიცხვია 300.

2) ახალგამომცხვარი პურის წონაა 800 გ. გაცივებისა და გამოშრობის შემდეგ პურის წონა შემცირდა 75 გ-ით. რამდენი პროცენტით შემცირებულა პურის წონა?

ამოხსნა: საძებნი პროცენტების რიცხვი აღვნიშნოთ y-ით და ჩავწეროთ შესაბამისი პროპორციული წყებები – წყება (800; 75) პროპორციულია წყებისა (100 %; y %).

აქედან: $y = \frac{75 \cdot 100}{800} = \frac{75 \cdot 1}{8} = \frac{75}{8} = 9,375 \approx 9,4(\%).$

პასუხი: პურის წონა შემცირებულა დაახლოებით 9,4 %-ით.

დავალება დამოუკიდებელი მუშაობისთვის

1. რკინის მადანში 7 წილ რკინაზე მოდის 3 წილი შენარევი. რამდენი ტონა შენარევია რკინის მადანში, რომელიც 73500 კგ რკინას შეიცავს?
2. რუკის მასშტაბია 1 : 4500000. ამ რუკაზე ორი მწვერვალის აღმნიშვნელ წერტილებს შორის მანძილია 5,5 მმ. რისი ტოლია ამ მწვერვალებს შორის ნამდვილი მანძილი?
3. გიას დავითთან შედარებით 50 %-ით ნაკლები ხელფასი აქვს. გაარკვიეთ რამდენი პროცენტით მეტი ხელფასი აქვს დავითს გიასთან შედარებით.
4. მასწავლებელმა მოსწავლეებს მისცა დავალება: ყუთში 50 ბურთულაა, რომელთა 80% წითელია, დანარჩენი კი – თეთრი. ყუთიდან რამდენიმე წითელი ბურთულა ამოიღეს და ყუთში დარჩენილი წითელი ბურთულების რაოდენობა ყუთში დარჩენილი ბურთულების საერთო რაოდენობის 60%-ის ტოლი გახდა. რამდენი წითელი ბურთულა ამოუღიათ ყუთიდან?
5. გადაადნეს ორი სხვადასხვა ხარისხის ოქრო: 5 გ, რომელიც 60% სუფთა ოქროს შეიცავდა და 10 გ, რომელიც 90% სუფთა ოქროს შეიცავდა. რამდენ % სუფთა ოქროს შეიცავს მიღებული შენადნობი?
6. სკოლაში 1200 მოსწავლეა. 40% გოგონაა, გოგონათა 15% და ბიჭების 5% წარჩინებულია. რამდენი წარჩინებული მოსწავლეა სკოლაში?
7. რამდენი პროცენტითაა 180 ლარი ნაკლები 240 ლარზე?
8. 24 რვეულსა და 18 კალამში გადაიხადეს 42 ლარი. რისი ტოლი იქნება 28 რვეულისა და 21 კალმის ღირებულება?

   ა) 45 ლარი; ბ) 46 ლარი; გ) 48 ლარი; დ) 49 ლარი.
9. ორი ქალაქიდან, რომელთა შორის მანძილია 250 კმ, ერთმანეთის შესახვედრად ერთდროულად ველოსიპედისტი და მოტოციკლისტი გამოვიდნენ. მოტოციკლის სიჩქარე 3-ჯერ მეტია ველოსიპედის სიჩქარეზე. 2 სთ-ის შემდეგ მათ შორის 10 კმ იყო დარჩენილი. რისი ტოლია მოტოციკლის სიჩქარე?
10. გაარკვიეთ, შემდეგი წინადადებებიდან რომელშია მცდარად გამოყენებული პროცენტი – ანუ, რომელი არ შეიძლება, რომ მოხდეს:

    I. ბურთი გააიაფეს ფასის 99%-ით;

    II. ჭურჭელი თითქმის სავსეა, 50%-ით;

    III. ბილეთები გაძვირდა ფასის 70%-ით;

    IV. ბილეთები გაიაფდა ფასის 105%-ით;

    V. მუშამ თავისი გეგმა 140%-ით შეასრულა.
11. ერთ მაღაზიაში ტელევიზორი ღირდა 490 ლარი, მეორეში – 504 ლარი. საახალწლოდ პირველ მაღაზიაში ტელევიზორების გაყიდვა დაიწყეს 6%-იანი ფას-

დაკლებით, მეორეში –10%-იანით. რომელ მაღაზიაში შეიძლება საახალწლოდ ტელევიზორის ყიდვა უფრო იაფად და რამდენი ლარით?

12. ერთ-ერთ სოფელში 40 პენსიონერისთვის საახალწლოდ საჩუქრად მიიტანეს 600 კგ შაქარი, რომელიც თანაბრად უნდა გაენაწილებინათ მათთვის. პენსიონერთა სურვილის გათვალისწინებით, გარკვეული რაოდენობის შაქარი თანაბრად გაუნაწილდა 4 მრავალშვილიან ოჯახს, რის შემდეგაც თითოეულ პენსიონერს შეხვდა 12 კგ შაქარი. რამდენი კილოგრამი შაქარი შეხვედრია თითოეულ მრავალშვილიან ოჯახს?

13. მარგებელი და გემრიელი ნარევის მისაღებად ერთმანეთში უნდა აურიონ 2 წილი თაფლი, 5 წილი ლიმონი (წვრილად დაჭრილი), 1 წილი ჩირი (წვრილად დაჭრილი) და 1 წილი შავი ღვინო ან ყურძნის წვენი. თაფლი აქვთ მხოლოდ 300 გრამი. რამდენი გრამი ლიმონი დასჭირდებათ?

შემაჯამებელი ტესტი

1. ავტომობილის ფასი 4-ჯერ შემცირდა, რაც ნიშნავს მისი ფასის შემცირებას:

   ა) 80%-ით; ბ) 75%-ით; გ) 40%-ით; დ) 25%-ით.

2. ღვინის ქარხანაში სულ 150000 ლიტრი ღვინო ჩამოასხეს. აქედან 65000 ლიტრი მშრალი ღვინო იყო, 55000 ლიტრი – ტკბილი, ხოლო დანარჩენი – ნახევრადტკბილი. ჩამოსხმული ღვინის საერთო რაოდენობის რამდენი პროცენტის ტოლია ნახევრადტკბილი ღვინოების რაოდენობა?

   ა) 30%; ბ) 25%; გ) 20%; დ) 15%.

3. მაგიდაზე აწყვია ფანქრები, ავტოკალმები და 28 ფლომასტერი. ფანქრების რაოდენობის შეფარდება ფლომასტერების რაოდენობასთან 3:4-ის ტოლია, ხოლო ავტოკალმების რაოდენობასთან – 3:5 –ის. რამდენი ავტოკალამია მაგიდაზე?

   ა) 12; ბ) 21; გ) 28; დ) 35.

4. ფირმამ ბანკისგან აიღო კრედიტი 6000 ლარის ოდენობით, იმ პირობით, რომ ერთი წლის შემდეგ დაუბრუნებდა ბანკს 6720 ლარს. რამდენპროცენტიანი კრედიტი აუღია ფირმას, ანუ თავდაპირველი თანხის რამდენი პროცენტია დასამატებელი თანხა?

5. კირისგან უნდა მოამზადონ მისი 15%-იანი წყალხსნარი (კირწყალი, რომელშიც კირის კონცენტრაცია ანუ პროცენტული წილი იქნება 15%). გამოთვალეთ, რამდენი ასეთი კირწყალი მომზადდება 750 გრამი კირისაგან.

6. გასათიბი იყო მართკუთხედის ფორმის მინდორი. მას შემდეგ, რაც მთიბავმა 2 საათის განმავლობაში იმუშავა, გასათიბი დარჩა მინდვრის ნაწილი, რომელსაც ასევე მართკუთხედის ფორმა ჰქონდა და რომლის სიგრძე 3-ჯერ ნაკლები იყო მინდვრის სიგრძეზე, ხოლო სიგანე – 2-ჯერ ნაკლები მინდვრის სიგანეზე. რამდენი წუთია საჭირო მინდვრის დარჩენილი ნაწილის გასათიბად, თუ მთიბავი იმავე ტემპით გააგრძელებს მუშაობას?

7. 50 კგ ფქვილისგან ცხვება 52 კგ პური. ასეთივე პირობებში რამდენი კგ პური გამოცხვება 3 კგ ფქვილისაგან?

თავი 6. ალგებრული გამოსახულებები

1. არითმეტიკულ მოქმედებათა ალგებრული თვისებები

საყოველთაოდ ცნობილია არითმეტიკულ მოქმედებათა თვისებები. ქვემოთ მოცემულია მათი ჩანაწერები ალგებრული იგივეობების სახით (± ნიშანი აღნიშნავს, შესაბამისად, ან + ან –):

1. $a+b+c+d = b+a+d+c = c+b+d+a = \ldots$	შესაკრებთა გადანაცვლებადობა ანუ შეკრების კომუტაციურობა.
2. $(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$	შესაკრებთა ჯუფთებადობა ანუ შეკრების ასოციაციურობა.
3. $a+(b-c) = a+b-c$	ფრჩხილების გახსნა შესაკრებში ანუ სხვაობის მიმატება.
4. $a-(b-c) = a-b+c$	ფრჩხილების გახსნა, როცა მაკლებში სხვაობაა ანუ სხვაობის გამოკლება.
5. $a-(b+c+d) = a-b-c-d$	ფრჩხილების გახსნა, როცა მაკლებში ჯამია ანუ ჯამის გამოკლება.
6. $a \cdot b = b \cdot a$	თანამამრავლთა გადანაცვლებადობა ანუ გამრავლების კომუტაციურობა.
7. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$	თანამამრავლთა დაჯგუფებადობა ჯუფთებადობა ანუ გამრავლების ასოციაციურობა.
8. $(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$	გამრავლების განრიგებადობა (ორივე თანამამრავლით) ანუ
$c \cdot (a \pm b) = c \cdot a \pm c \cdot b$	გამრავლების დისტრიბუციულობა შეკრება-გამოკლების მიმართ.
9. $a : (b \cdot c) = a : b : c$	ფრჩხილების გახსნა, როცა გამყოფში ნამრავლია ანუ ნამრავლზე გაყოფა.
10. $a+(b-a) = b$	გამოკლებისა და შეკრების შებრუნებადობა.
11. $a \cdot (b:a) = b$	გაყოფისა და გამრავლების შებრუნებადობა.

12. $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$ გაყოფის განრიგებადობა (**მხოლოდ გასაყოფით**) ანუ გაყოფის დისტრიბუციულობა შეკრება-გამოკლების მიმართ.

აღვნიშნოთ, რომ გაყოფას არ აქვს გამყოფით განრიგებადობის თვისება, ესე იგი მცდარია:

$c : (a \pm b) = c : a \pm c : b$

2. ზეპირი ანგარიშის ადვილი ხერხები

I. ნაწილ-ნაწილ შეკრების:

381 + 57 = 381 + 50 + 7 = 381 + 20 + 30 + 7 = 401 + 37 = 438.

II. შეკრება მრგვალ ასეულამდე შევსებით:

385 + 57 = 385 + 15 + (57 – 15) = 400 + 42 = 442.

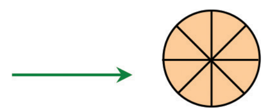
III. ნაწილ-ნაწილ გამოკლების:

381 – 151 = 381 – 100 – 50 – 1 = 281 – 1 – 50 = 280 – 50 = 230.

IV. ნაწილ-ნაწილ გამრავლების:

16 ·15 = 16·5·3 = 80·3 = 240.

V. ნაწილ-ნაწილ გაყოფის (უნაშთო გაყოფისას):



1050 : 15 = 1050 : 5 : 3 = 210 : 3 = 70.

ნაწილ-ნაწილ გაყოფა მოსახერხებელია აგრეთვე 8-ზე გაყოფისას – 3-ჯერ განახევრება: 128 : 8 = ((128 : 2) : 2) : 2=(64 : 2) : 2 = 32 : 2 = 16

VI. გადაჯგუფებით შეკრების:
218 + 357 + 34 + 272 + 143 = (218 + 272) + (357 + 143) + 34 = 500 + 500 + 34 = 1034.

VII. გადაჯგუფებით გამრავლების: 25 · 5 · 35 · 4 · 2 = (25 · 4) · (5 · 2) · 35 = 100 · 10 · 35 = 35000.

VIII. დაშლით გამრავლების:

6 · 212 = 6 · (200 + 12) = 6 · 200 + 6 · 12 = 1200 + 72 = 1272.

IX. დაშლით გაყოფის (ნაშთიანი ან უნაშთო გაყოფისას):

8000 : 7 = (7000 + 700 + 300) : 7 = 7000:7 + 700:7 + 300:7 = 1000 + 100 + (280 + 20):7 = 1100 + 40 + 2 (ნ. 6) = 1142 (ნ. 6).

X. დამრგვალების: 564 + 399 = 564 + 400 — 1 = 964 — 1 = 963.

349 – 198 = 349 – (200 – 2) = 349 – 200 + 2 = 151.

XI. ქვევიდან შევსებით (შეკრებით) გამოკლების: 813 – 586 = ?

586 + 4 + 10 = 600, 600 + 200 + 13 = 813, 4 + 10 + 200 + 13 = 227,
813 – 586 = 227.

XII. გამრავლებით გაყოფის (ნაშთიანი ან უნაშთო გაყოფისას):
8300 : 2000 = ?
4 · 2000 = 8000, 8000 + 300 = 8300, 8300 : 2000 = 4 (ნ. 300).

XIII. თანამამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანის:

11 · 38 + 52 · 11 = 11 · (38 + 52) = 11 · 90 = 990.

XIV. გამყოფის ფრჩხილებს გარეთ გატანის (უნაშთო გაყოფისას):

840 : 60 + 960 : 60 = (840 + 960) : 60 = 1800 : 60 = 30.

გასათვალისწინებელია, რომ ეს გამოთვლები გაწაფულ გონებაში უფრო სწრაფად სრულდება, ვიდრე ამ ჩანაწერებით ჩანს.

ამგვარი გამოთვლები საუკეთესო საფუძველია არამარტო რიცხვის გუმანის განსავითარებლად, არამედ აგრეთვე უფროს კლასებში ალგებრის სწავლის შესამზადებლადაც.

3. რიცხვითი გამოსახულება და მისი მნიშვნელობა. მოქმედებათა შესრულების თამიმდევრობა რიცხვით გამოსახულებაში

განვიხილოთ ჩანაწერები: 27, 243 – 12, 283 : (75 + 13) + 130.

ამ ჩანაწერებიდან პირველი არის ერთი რიცხვის – ოცდაშვიდის ციფრული ჩანაწერი. მეორე და მესამე ჩანაწერები შეიცავს რიცხვებს, რომლებიც ერთმანეთთან შეერთებულია მოქმედებათა ნიშნებითა და ფრჩხილებით. თითოეულ ასეთ ჩანაწერს ეწოდება რიცხვითი გამოსახულება. უნდა გვახსოვდეს, რომ რიცხვით გამოსახულებაში:

1) რიცხვების, მოქმედებათა ნიშნებისა და ფრჩხილების გარდა არაფერი არ უნდა ეწეროს;
2) ყველა ფრჩხილს უნდა ჰქონდეს თავისი მეწყვილე ფრჩხილი;
3) ყოველი მოქმედების ნიშანს უნდა მოსდევდეს შესაბამისი რიცხვი.

მაგალითად, ჩანაწერები 78 + (y – 29) და 84 – 2 > 29 არ არის რიცხვითი გამოსახულებები იმიტომ, რომ პირველი მათგანი შეიცავს ასო y-ს, მეორე კი – უტოლობის ნიშანს.

ასევე, ჩანაწერები (58 – 35 + 30 და 804 : 4 + (30 –) არაა რიცხვითი გამოსახულებები, იმიტომ, რომ პირველ ჩანაწერში ფრჩხილს არა აქვს თავისი მეწყვილე ფრჩხილი, ხოლო მეორე ჩანაწერში გამოკლების ნიშანს არ მოსდევს რიცხვი.

რიცხვით გამოსახულებათა სხვა მაგალითებია: ჯამი 15 + 5; სხვაობა 15 – 5; ნამრავლი 15 · 5; განაყოფი 15 : 5; ცალკე ჩაწერილი რიცხვი 702, ოცეულთა შესაბამისი გამოსახულება 3 · 20 + 11 · 20, ...

განვიხილოთ, თუ რა თანმიმდევრობით უნდა შესრულდეს მოქმედებები რიცხვით გამოსახულებაში.

1) თუ გამოსახულება შეიცავს ფრჩხილებს, მაშინ პირველად სრულდება ფრჩხილებში მოთავსებული მოქმედებები;
2) ჯერ სრულდება გამრავლება და გაყოფა, ხოლო შემდეგ – შეკრება და გამოკლება;
3) გარდა ამ წესებისა, უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ჯერ სრულდება უფრო მარცხნივ დაწერილი მოქმედება, შემდეგ კი – უფრო მარჯვნივ დაწერილი.

თუ რიცხვით გამოსახულებაში მითითებულ მოქმედებებს შევასრულებთ საჭირო თანმიმდევრობით, შედეგად მივიღებთ რიცხვს, რომელსაც ამ **რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა** ეწოდება. მაგალითად, 15 + 5 -ის მნიშვნელობაა 20, რადგან 15 + 5 = 20; ხოლო 24 – (3 + 8 : 4) -ის მნიშვნელობაა 19, რადგან

24 – (3 + 8 : 4) = 24 – (3 + 2) = 24 – 5 = 19.

ზოგიერთი რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობის გამოთვლა შეუძლებელია. მაგალითად: 10 + 32 : (4 - 4) გამოსახულების მნიშვნელობას ვერ გამოვთვლით, რადგან 4 – 4 = 0, ხოლო ნულზე გაყოფა არ შეიძლება.

ასეთ რიცხვით გამოსახულებებს აზრი არ აქვს.

4. გამოთვლების სწრაფი და უხეში გადამოწმების ხერხები

პირველი ხერხია უხეში, ძალიან მიახლოებითი შეფასება.

მაგალითად: 234 + 345 : 15 = 362.

ზერელე შეხედვითაც ჩანს, რომ გამოსახულების მნიშვნელობა არ არის მართებული, რადგან ორასზე მეტ რიცხვს ემატება დაახლოებით 20-30, ამიტომ ჯამი 250-სა და 300-ს შორის უნდა იყოს.

ამას ჰგავს ნაწილების მიახლოებითი შეფასება. მაგალითად:

1კგ ჩირი 3ლ 50თ ღირს; 1,5კგ ჩირი – 6ლ 30თ. 1,5კგ ჩირის ღირებულების გამოსათვლელად 3ლ 50თ 1,5-ზე უნდა გამრავლდეს. 1,5-ზე გამრავლებისას კი რიცხვს თავისივე ნახევარი ემატება. მაგრამ 3ლ 50თ-ის ნახევარი ვერ იქნება თითქმის 2ლ (რომელიც 4 ლარის ნახევარია).

მეორე ხერხია დაკვირვება მრგვალ რიცხვებზე. მაგალითად, მოსწავლეს დაფაზე ეწერა:

10ლ + 30ლ + 10ლ + 10ლ + 10ლ + 60 ლ = 70ლ + 6ლ = 76ლ.

მასწავლებელმა ვერ შენიშნა მექანიკური შეცდომა – ბავშვს „60 ლ“ ჩანაწერის გადაწერისას რომ ნულის მიწერა გამორჩა. შეცდომის ზუსტად მოძებნა სწრაფად ვერ ხერხდება ხოლმე, მაგრამ პასუხი რომ მცდარია – ეს თვალშისაცემია, რადგან მრგვალი რიცხვების ჯამის ჩანაწერი ნულით უნდა ბოლოვდებოდეს.

ამას ჰგავს ლუწკენტობაზე დაკვირვება, მაგალითად:

12კმ + 3•6 კმ + 148 კმ = 175 კმ.

ცხადია, რომ ლუწი რიცხვების ჯამი კენტი ვერ იქნება.

ასევე, პირიქითაც: თუკი 1კგ ჩირი 3ლ 50თ ღირს, 1,5კგ ჩირის ღირებულება ლუწი რიცხვით ვერ გამოისახება, რადგან 3ლ 50თ-ს თავისივე ნახევარი უნდა მივუმატოთ, ეს ჯამი კი 0 თეთრით ვერ დაბოლოვდება, 5 თეთრით უნდა დაბოლოვდეს.

ბუნებრივია, რომ ეს ორი ხერხი ნამდვილი შემოწმებისთვის არ არის საკმარისი – ხშირად შედეგი მიახლოებით მართებულია და მისი ციფრული ჩანაწერის ბოლო ციფრიც შესაფერისია, მაგრამ შედეგი მაინც მცდარია. თუმცა, ეს ორი ხერხი მაინც ძალიან სასარგებლოა, რადგან ადვილად და სწრაფად გვიჩვენებს ძალიან უხეშ შეცდომებს.

5. განტოლება

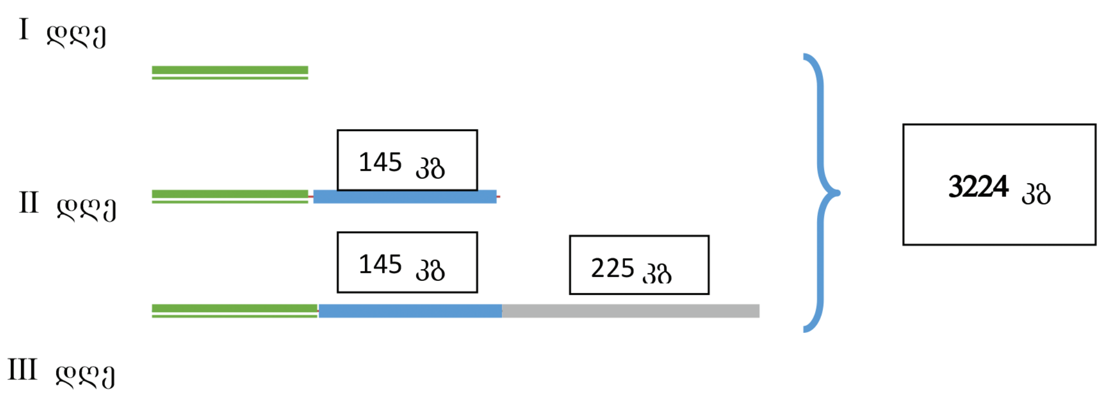
განტოლება არის ცვლადის შემცველი ტოლობა.

კარგია, როცა მოსწავლე გაწაფულია სხვადასხვა ტიპის მათემატიკური გამოსახულებების გამარტივებასა და განტოლებების ამოხსნაში, მაგრამ გამოთვლითი ხასიათის ტექნიკურ პრობლემებზე მეტად ყურადღება უნდა მიექცეს მათემატიკური მოდელირების პროცესს: რომ განტოლება სწორად აღწერდეს რეალურ სურათს, ანუ წარმოადგენდეს რეალური ვითარების მათემატიკურ მოდელს.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ საყოფაცხოვრებო ამოცანა:

სამ დღეში 3224 კგ ფორთოხალი მოკრიფეს. მეორე დღეს მოკრიფეს 145 კგ-ით მეტი, ვიდრე პირველ დღეს, მესამე დღეს კი – 255 კგ-ით მეტი, ვიდრე მეორე დღეს. რამდენი კილოგრამი ფორთოხალი მოუკრეფიათ თითოეულ დღეს?

VI კლასამდე ზოგი მოსწავლე ასეთ ამოცანას სქემის საშუალებით ამოხსნის:



სქემის შედგენის შემდეგ, შეკითხვების დახმარებით, მოსწავლეები შეასრულებენ მოქმედებებს შემდეგი თანმიმდევრობით:

1) 3224 – 225 = 2999 კგ

2) 2999 – 145 – 145 = 2709 კგ

3) 2709 : 3 = 903 კგ (პირველ დღეს მოკრეფილი ციტრუსი)

4) 903 + 145 = 1048 კგ (მეორე დღეს მოკრეფილი ციტრუსი)

5) 1048 + 225 = 1273 კგ (მესამე დღეს მოკრეფილი ციტრუსი).

იმავე ამოცანის ამოსახსნელად ზოგიერთმა მოსწავლემ შეიძლება შეადგინოს რიცხვითი გამოსახულება $(3224 - 225 - 2 \cdot 145) : 3$.

VI-VII კლასებიდან მოსწავლეები იმავე ამოცანას განტოლების შედგენით ამოხსნიან:

პირველ დღეს მოკრეფილი ფორთოხლის წონა: x

მეორე დღეს მოკრეფილი ფორთოხლის წონა: $x + 145$

მესამე დღეს მოკრეფილი ფორთოხლის წონა: $x + 145 + 225$.

ამ სამ დღეში მოკრეფილი ფორთოხლის წონა: $x + x + 145 + x + 145 + 225$.

შევადგინოთ განტოლება: $x + x + 145 + x + 145 + 225 = 3224$.

ამოვხსნათ ეს განტოლება: $3x + 515 = 3224$.

$$3x = 3224 - 515 = 2709.$$

$$x = 2709 : 3 = 903$$

მაშასადამე, პირველ დღეს მოუკრეფიათ 903 კგ ფორთოხალი, მეორე დღეს – 903 + 145=1048 კგ, ხოლო მესამე დღეს კი 1048 + 225 = 1273 კგ ფორთოხალი.

დავალება დამოუკიდებელი მუშაობისთვის

1. ამოცანის ამოსახსნელად შეადგინეთ რიცხვითი გამოსახულება.

ანას 10 ლარი აქვს და უნდა იყიდოს 12 ცალი 55-თეთრიანი კალამი. რა თანხა დარჩება ანას?

2. ამოცანის ამოსახსნელად შეადგინეთ სქემა.

სამ ვენახში ერთად 2756 კგ ყურძენი მოკრიფეს. მეორე ვენახში მოკრიფეს 276 კგ-ით მეტი, ვიდრე პირველში და 224 კგ-ით ნაკლები, ვიდრე მესამეში. რამდენი კგ ყურძენი მოუკრეფიათ თითოეულ ვენახში?

3. ამოცანის ამოსახსნელად შეადგინეთ განტოლება.

ლადო გარკვეული კანონზომიერების მიხედვით აწყობს ვარსკვლავებს ერთ რიგში. ლადომ გადაწყვიტა, ვარსკვლავები გამოიყენოს, ისე რომ მწვანე, ლურჯი და წითელი ვარსკვლავების რაოდენობათა შეფარდება იყოს 1:5:2. რამდენი წითელი ვარსკვლავი დასჭირდება ლადოს, თუ იგი სულ 240 ვარსკვლავს გამოიყენებს?

4. ჩაწერეთ ამოცანის ამოხსნა ასოითი გამოსახულების სახით.

I. ერთ ლარნაკში a ვარდია, მეორეში – 15-ით მეტი. რამდენი ვარდია ორივე ლარნაკში?

II. ავტობუსში b მგზავრი იყო. ერთ გაჩერებაზე 7 მგზავრი ჩავიდა, მეორეზე – 5. რამდენი მგზავრი დარჩა ავტობუსში ?

5. გამოთვალე ადვილი გზით:

$$5 \cdot 32 + 17 \cdot 32 + 8 \cdot 32 + 93 \cdot 7 - 63 \cdot 7$$

6. ექსკურსიისთვის უნდა შეაგროვონ ფული. თუ ექსკურსიის ყოველი მონაწილე 80 ლარს გადაიხდის, ზედმეტი დარჩება 15 ლარი, ხოლო თუ 75 ლარს გადაიხდის, საჭირო თანხას დააკლდება 25 ლარი. სულ რამდენი ადამიანი მიემგზავრება ექსკურსიაზე?

7. კაფეში არის ორადგილიანი და ოთხადგილიანი მაგიდები, სულ 20 მაგიდა. ჯამში კაფეში არის 70 ადგილი. რამდენი ორადგილიანი მაგიდაა კაფეში?

8. A-დან B სოფელში ჩასვლა მხოლოდ C სოფლის გავლითაა შესაძლებელი. A სოფლიდან B-ს მიმართულებით ველოსიპედით გაემგზავრა თამარი, რომლის სიჩქარეა 6 კმ/

სთ. იმავე დროს C-დან B-სკენ გაემგზავრა ელენე, რომლის სიჩქარეა 4 კმ/სთ. A და C სოფლებს შორის მანძილია 12 კმ. რამდენი საათის შემდეგ დაეწევა თამარი ელენეს?

ა) 4 სთ; ბ) 5 სთ; გ) 6 სთ; დ) 7 სთ.

9. დავითი იმდენი წლისაა, რამდენისაც გიორგი იყო 42 წლის წინ. რამდენი წლისაა გიორგი, თუ 8 წლის წინ იგი დავითზე 4-ჯერ უფროსი იყო?

10. ეზოში ხეების $\frac{3}{7}$ ნაწილი კოპიტია, ამდენივეა ჭადარი და კიდევ 2 ნაძვია. რამდენი ხეა სულ ეზოში?

11. მასწავლებელმა მოსწავლეებს მისცა დავალება: ყუთში 50 ბურთულაა, რომელთა 80% წითელია, დანარჩენი კი – თეთრი. ყუთიდან რამდენიმე წითელი ბურთულა ამოიღეს და ყუთში დარჩენილი წითელი ბურთულების რაოდენობა ყუთში დარჩენილი ბურთულების საერთო რაოდენობის 60%-ის ტოლი გახდა. რამდენი წითელი ბურთულა ამოუღიათ ყუთიდან?

12. ქალაქიდან 10 საათზე გაემგზავრა მოტოციკლისტი, რომლის სიჩქარეა 60 კმ/სთ, ხოლო 12 საათსა 30 წუთზე იმავე ქალაქიდან მოტოციკლისტის მოძრაობის საპირისპიროდ გაემგზავრა ველოსიპედისტი. რომელ საათზე იქნება მათ შორის 370 კმ, თუ მოტოციკლისტის სიჩქარე 3-ჯერ მეტია ველოსიპედისტის სიჩქარეზე?

13. დედამიწის მთელი ფართობის 70% წყლითაა დაფარული. წყნარ ოკეანეს უკავია დედამიწის წყლების 0,5 ნაწილი; ინდოეთის ოკეანეს – 0,2 ნაწილი. დანარჩენი წყლების ფართობია 72 მლნ. კვ.კმ. რამდენი მლნ. კვ.კმ-ის ტოლია მთელ დედამიწაზე წყლით დაფარული ზედაპირის ფართობი?

შემაჯამებელი ტესტი:

1. რამდენიმე ბიჭი სათევზაოდ წავიდა. ორმა ბიჭმა ათ-ათი თევზი დაიჭირა, დანარჩენებმა – თერთმეტ-თერთმეტი. სულ რამდენი ბიჭი იყო, თუ მათ 75 თევზი დაიჭირეს?

ა) 11; ბ) 10; გ) 5; დ) 7.

2. ვანო პაპამ თავის თოთხმეტ შვილიშვილს 30 კანფეტი დაურიგა: ბიჭებს თითო-თითო, გოგონებს კი – სამ-სამი. ვანო პაპას შვილიშვილებიდან რამდენი იყო გოგონა?

(ა) 5; (ბ) 7; (გ) 8; (დ) 9.

3. ნიკამ სახლიდან აგარაკამდე მისვლას ავტომობილით 2 სთ მოანდომა. ავტომობილი შეუსვენებლად 60 კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობდა. უკან დაბრუნებისას ნიკა ისევ თანაბარი, მაგრამ უფრო ნაკლები სიჩქარით მოძრაობდა, ამიტომ, მან იმავე გზის გავლას 1 სთ-ით მეტი დრო მოანდომა. რამდენი კმ/სთ-ით შეუმცირებია ნიკას სიჩქარე უკან დაბრუნებისას?

(ა) 10-ით; (ბ) 15-ით; (გ) 20-ით; (დ) 25-ით.

4. ავტოსადგურიდან ავტობუსი დილის 8.00 სთ-ზე გავიდა, მიკროავტობუსი კი იმავე მიმართულებით — 10.00 სთ-ზე. ავტობუსის სიჩქარე იყო 70 კმ/სთ, ხოლო მიკროავტობუსისა კი — 110 კმ/სთ. ორივე შეუფერხებლად, თანაბარი სიჩქარით მოძრაობდა. რომელ საათზე დაეწევა მიკროავტობუსი ავტობუსს?

5. სამი რიცხვიდან ერთი რიცხვი მეორეზე 7-ით ნაკლებია, მესამეზე კი – 5-ით მეტი. ამ რიცხვებს შორის უდიდესია $x + 3$. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი გამოსახულების ტოლია ამ სამი რიცხვის ჯამი?

(ა) $3x - 10$; (ბ) $3x - 1$; (გ) $3x + 1$; (დ) $3x + 15$.

6. რუსუდანს გაუორკეცეს თანხა, რომელიც მას ჰქონდა. დახარჯა რა 8 ლარი, მას დარჩენილი თანხა ისევ გაუორკეცეს. როდესაც რუსუდანმა ამის შემდეგ ისევ 8 ლარი დახარჯა, მას ფული აღარ დარჩა. რამდენი ლარი ჰქონია რუსუდანს თავდაპირველად?

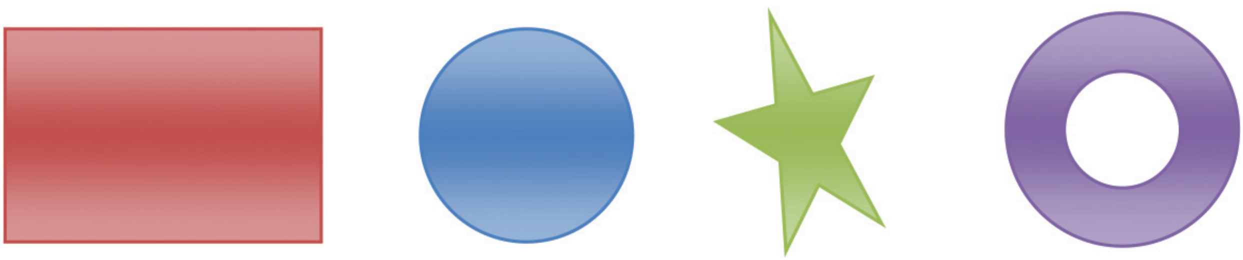
7. მაგიდაზე აწყვია ფანქრები, ავტოკალმები და 28 ფლომასტერი. ფანქრების რაოდენობის შეფარდება ფლომასტერების რაოდენობასთან 3 : 4-ის ტოლია, ხოლო ავტოკალმების რაოდენობასთან – 3 : 5-ის. რამდენი ავტოკალამია მაგიდაზე?

თავი 7. ტოპოლოგია

1. ტოპოლოგიის საწყისები

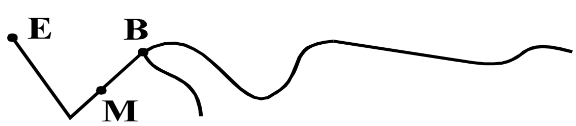
ტოპოლოგია ბერძნული წარმოშობის სიტყვაა და ადგილისმცოდნეობას ნიშნავს. იგი მათემატიკის დარგია, რომელიც შეისწავლის გეომეტრიული ობიექტების ისეთ თვისებებს, რომლებიც უცვლელი რჩება უწყვეტი დეფორმაციების დროს. ეს შეიძლება იყოს: „გაწელვა“, „მოღუნვა“, „შეკუმშვა“, „გამობურცვა“, „შეჭყლეტა“ და ა.შ.

გეომეტრიული ფიგურები, რომლებიც ამგვარი უწყვეტი დეფორმაციების საშუალებით მიიღება, ტოპოლოგიის თვალსაზრისით ერთმანეთისგან არ განსხვავდება. მაგალითად, ტოპოლოგიისთვის ოთხკუთხედი, წრე და ვარსკვლავი არსებითად ერთი და იგივეა. მათგან არსებითად განსხვავებულია რგოლი, რომელიც „გახვრეტილია“ და ამიტომ ვერ მიიღება უწყვეტი დეფორმაციით პირველი სამისგან (ნახ. 1).



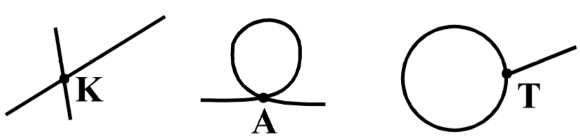
ნახ.1

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ხაზი ანუ წირი (მონაკვეთი, ტეხილი ან მრუდი, იხ. ნახ. 2). რით განსხვავდება ხაზის ბოლო, E წერტილი სხვა, ხაზის შიგა წერტილებისაგან? ბოლო E წერტილს უერთდება ხაზის მხოლოდ ერთი შტო, ერთი ნაწილი, ანუ, როგორც ტოპოლოგიაში ამბობენ ერთი რკალი; ყოველ შიგა წერტილს კი უერთდება ხაზის ორი ან მეტი შტო. მაგალითად, M წერტილს მარჯვნიდანაც და მარცხნიდანაც უერთდება თითო შტო, სულ – 2 რკალი; B წერტილს უერთდება 3 შტო.



ნახ.2

თუ ხაზის შიგა წერტილი ისეთია, რომ მას უერთდება ხაზის ორზე მეტი შტო, მაშინ ეს წერტილი ხაზის თავისთავთან გადაკვეთის წერტილია. ნახ. 3-ზე მოცემული ხაზები – თავისთავის გადამკვეთებია.



ნახ. 3

ისეთ ხაზს, რომელიც არ კვეთს თავისთავს, მარტივი ხაზი ეწოდება. ნახ. 4-ზე მარტივი ხაზებია მოცემული.

ნახ. 4

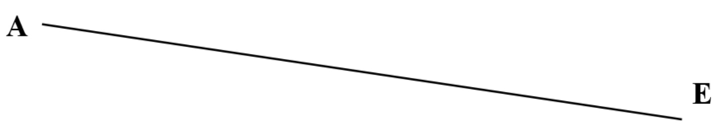
ამგვარად, ხაზი ან მარტივია, ან თავისთავის გადამკვეთია. მარტივი ხაზის არც ერთ წერტილს არ უერთდება 2-ზე მეტი რკალი.

მარტივი ხაზი შეიძლება იყოს ან შეკრული ან გახსნილი. ხაზს, რომელსაც არ აქვს არცერთი ბოლო წერტილი, შეკრული ხაზი ეწოდება, ხოლო ხაზს, რომელიც არ შემოსაზღვრავს არცერთ შიგა არეს, გახსნილი ხაზი ეწოდება. ნახ. 4-ზე I, II, III და VI ხაზები გახსნილებია, ხოლო IV, V და VII ხაზები – შეკრული ხაზებია.

თავისთავის გადამკვეთი, ანუ რთული ხაზიც შეიძლება იყოს შეკრული ან გახსნილი, მაგრამ შეიძლება არც შეკრული იყოს და არც გახსნილი (ნახ. 5).

ნახ. 5

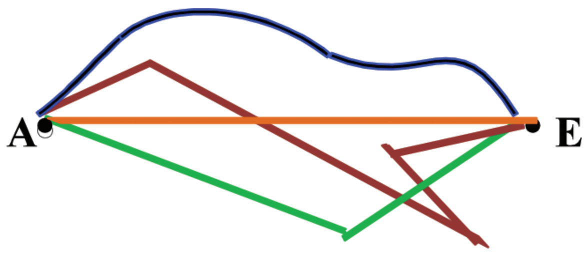
ორი წერტილის შემაერთებელ სწორ ხაზს მონაკვეთი ეწოდება. ამ წერტილებს კი – მონაკვეთის ბოლოები ეწოდება.



ნახ.6

ნახაზზე ზოგჯერ მონაკვეთის ბოლოებს ამსხვილებენ, მაგრამ ეს მხოლოდ მათ გამოსაკვეთად, უკეთ დასანახად კეთდება. სინამდვილეში მონაკვეთის ბოლოები ისეთივე წერტილებია, როგორიც დანარჩენები, განსხვავებულია მხოლოდ მათი მდებარეობა. გეომეტრიული წერტილის სიგრძეც, სიგანეც და სისქეც ნულის ტოლია.

ხაზს აქვს არანულოვანი სიგრძე, ხოლო მისი სიგანე და სისქე ნულის ტოლია. არსებობს A და E წერტილების შემაერთებელი „გზების“ უსასრულო რაოდენობა (ნახ. 7), ამ „გზებს“ შორის უმოკლესია AE მონაკვეთი. AE მონაკვეთის სიგრძე არის მანძილი A წერტილიდან E წერტილამდე.

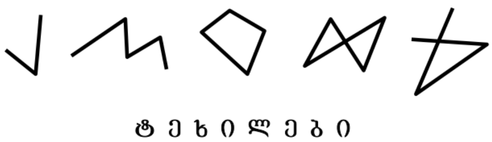


ნახ.7

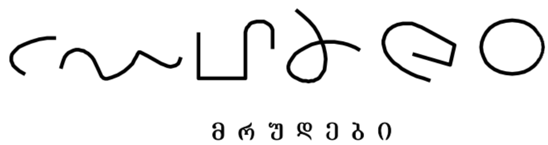
ამგვარად, ორ წერტილს შორის მანძილი ერთადერთია და იგი ამ წერტილების შემაერთებელი ყველა შესაძლო ხაზიდან უმოკლესი ხაზის – მონაკვეთის – სიგრძის ტოლია.

არსებობს ტეხილი და მრუდი ხაზები. ხაზს, რომელიც ორი ან მეტი მონაკვეთისაგან შედგება და ყველა მონაკვეთი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს, ტეხილი ეწოდება, ხოლო ყველა სხვაგვარი ხაზი მრუდია. ტეხილი მხოლოდ მონაკვეთებისაგან შედგება. მეზობელი მონაკვეთების საერთო წერტილს და გახსნილი ტეხილის ბოლო წერტილებს ტეხილის წვერო ეწოდება (ნახ. 8).

თუ ხაზი ერთგან მაინცაა გამრუდებული, მაშინ იგი მრუდი ხაზია (ნახ. 9).



ნახ. 8



ნახ. 9

2. ნაკვთი და სხეული

გეომეტრიული ფიგურებია ბრტყელი ფიგურები, ანუ ნაკვთები, და სივრცული ფიგურები, ანუ სხეულები.

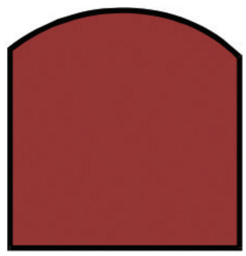
ნაკვთი – სიბრტყის ისეთ წერტილთა სიმრავლეა, ანუ სიბრტყის ისეთი ნაწილია, რომელიც არაა გაწყვეტილი და რომელსაც ეკუთვნის თავისივე საზღვარი. ესე იგი, ნაკვთი მთლიანია, იგი შეიძლება იყოს გახვრეტილი, მაგრამ არა – ნაწილებად დაწყვეტილი. მეთოდიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე, იმისათვის, რომ მოსწავლეებს გაუმარტივდეთ აღქმა, დამახსოვრება და მეტყველება, გეომეტრიული ფიგურის ნაცვლად მასწავლებელმა შეიძლება გამოიყენოს ცნება „ნაკვთი“.

გეომეტრიული სხეული – სივრცის ისეთ წერტილთა სიმრავლეა, ანუ სივრცის ისეთი ნაწილია, რომელიც არაა გაწყვეტილი და რომელსაც ეკუთვნის თავისივე საზღვარი. ისევე, როგორც ნაკვთი, სხეულიც მთლიანია, იგი შეიძლება იყოს გახვრეტილი, ჰქონდეს ღრმულები, მაგრამ არ არის ნაწილებად დაწყვეტილი.

ნაკვთებიც და სხეულებიც გეომეტრიული ფიგურებია.

ამგვარად, ნაკვთი – ესაა ნებისმიერი ბრტყელი ფიგურა. წერტილები, ხაზები, მრავალკუთხედები, წრეები, რგოლები თუ ყოველგვარი „უსწორმასწორო ლაქები“ – ყველა ნაკვთია.

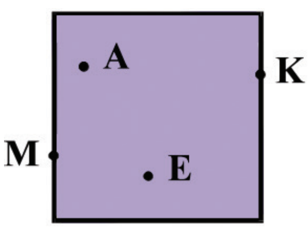
ნახ. 10



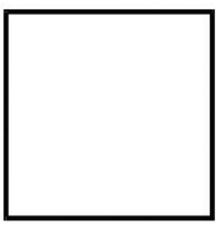
ნახ. 11

ნახაზებზე მოცემულია ორი ნაკვთი. კვადრატი (ნახ. 10) – მისი საზღვარია შეკრული ტეხილი, რომელიც ოთხი ტოლი მონაკვეთისაგან შედგება და ნაკვთი (ნახ.11), რომლის საზღვარი არის ტეხილი და მრუდი. მიუხედავად ამ განსხვავებისა, ორივე ნაკვთის საზღვარი შეკრული ხაზებია. ამგვარად, ნახაზებზე მოცემული ნაკვთები შედგება ორი ნაწილისაგან: **შიგა არე** და მისი **საზღვარი**. საზღვარი კი სიბრტყეს ყოფს ორ ნაწილად: შიგა და გარე არეებად.

მე-12 ნახაზზე აღნიშნულია კვადრატის ორი შიგა წერტილი.



ნახ. 12



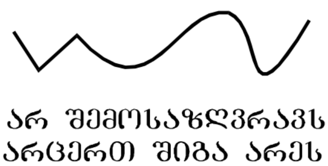
ნახ. 13

მე-13 ნახაზზე მოცემულია ნაკვთი, რომელიც შემოსაზღვრავს შიგა არეს, მაგრამ ეს შიგა არე მას არ ეკუთვნის. იგი ოთხი ტოლი მონაკვეთისაგან შემდგარი შეკრული ტეხილია და არა კვადრატი.

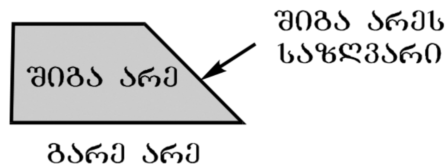
მაშასადამე, ზოგიერთ ნაკვთს არ ეკუთვნის თავისი შიგა არე. ასეთებია ტეხილები, მრუდები და სხვა ხაზები (ნახ. 14). მათ შორის ზოგი შეკრული ხაზია, ზოგი – გახსნილი, მაგრამ შიგა არე არც ერთს არ ეკუთვნის.

ნახ.14

ყველა ხაზი არ შემოსზღვრავს შიგა არეს (ნახ. 15), შეკრული ხაზი კი ყოველთვის შემოსაზღვრავს შიგა არეს (ნახ. 16).

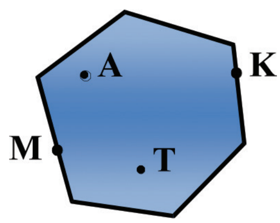


ნახ. 15



ნახ. 16

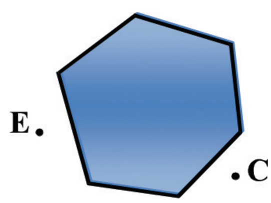
მე-17 ნახაზზე მოცემულია მრავალკუთხედი. M და K მისი საზღვრის წერტილებია. ხოლო A და T შიგა წერტილებია.



ნახ.17

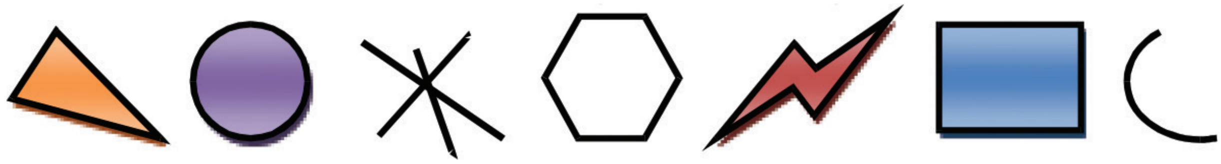
ამრიგად, მრავალკუთხედი წარმოადგენს შიგა წერტილებისა და მისი საზღვრის წერტილების ერთობლიობას. სიბრტყეზე, რომელზეც მდებარეობს ეს მრავალკუთხედი, არის წერტილები, რომლებიც მრავალკუთხედის არც შიგა და არც საზღვრის წერტილებს არ წარმოადგენს. ისინი მრავალკუთხედის **გარე** არეს წერტილებია. ნახაზზე (ნახ. 18).

მონიშნულია მრავალკუთხედის ორი გარე წერტილი: E და C.



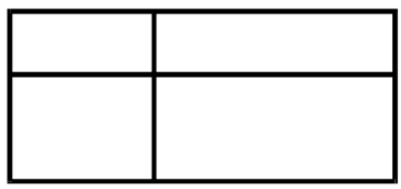
ნახ.18

ამგვარად, გარე არეც, შიგა არეც და საზღვარიც წერტილების ერთობლიობაა. ასევე, ნებისმიერი სხვა ნაკვთიც წერტილების ერთობლიობაა (ნახ. 19).



ნახ.19

აღსანიშნავია, რომ წერტილებისგან შედგება არა მარტო ნაკვთები, არამედ მთელი სიბრტყეც. მე-20 ნახაზზე მოცემულია სიბრტყეზე გადამკვეთი ხაზები.

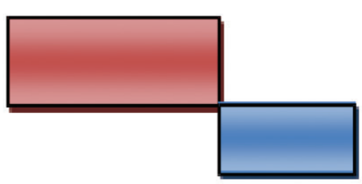


ნახ. 20

ეს ხაზები სიბრტყეს ხუთ ნაწილად ანუ ხუთ არედ ყოფს. ერთი, ყველაზე დიდი – გარე არეა, დანარჩენი ოთხი კი – შიგა არე. ყურადღება უნდა მიექცეს იმას, რომ ეს ხაზები მხოლოდ 4 შიგა არეს წარმოქმნის, ხოლო მართკუთხედთა საზღვრები კი უფრო მეტია. მოცემულ ნახაზზე ცხრა მართკუთხედის დანახვაა შესაძლებელი, შიგა არე კი მხოლოდ ოთხია.

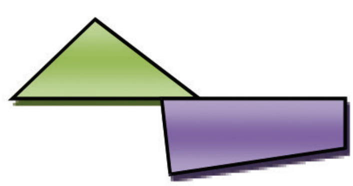
მასწავლებელმა გეომეტრიული ფიგურების შესწავლის დროს უნდა განიხილოს მრავალკუთხედთა და არეთა გაერთიანების საკითხი. რა შემთხვევაშია ნაკვთები ერთმანეთის მოსაზღვრე?

თუ ორ მრავალკუთხედს მხოლოდ წვერო აქვს საერთო, მაშინ მათი გაერთიანებით მრავალკუთხედი არ მიიღება. ისინი მოსაზღვრე მრავალკუთხედები არაა (ნახ. 21). მოსაზღვრე მრავალკუთხედებს ერთი გვერდი მაინც უნდა ჰქონდეთ საერთო, მაშინ მათი გაერთიანებით მიიღება მრავალკუთხედი (ნახ. 22).



ეს ორი მართკუთხედი არ ესაზღვრება ერთმანეთს

ნახ. 21

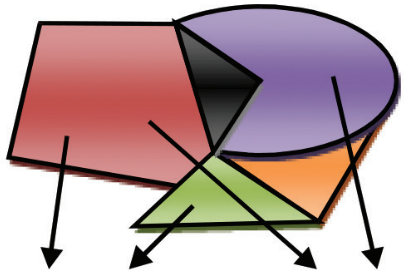


ეს სამკუთხედი და ოთხკუთხედი მოსაზღვრეებია. მათი გაერთიანებით მიიღება შვიდკუთხედი

ნახ. 22

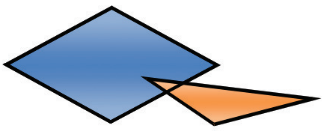
იგივე შეიძლება ითქვას არეებზეც. ორი არე მაშინ ესაზღვრება ერთმანეთს, თუ მათ საზღვრებს აქვს საერთო ხაზი, თუნდაც პატარა (ნახ. 23). თუ საზღვრებს საერთო აქვს

მხოლოდ წერტილები, მაშინ ასეთი არეები ერთმანეთს არ ესაზღვრება.



ნახ. 23

ამგვარად, ნაკვთები და არეები ერთმანეთის მოსაზღვრე არ არის, თუ მათ საერთო აქვთ მხოლოდ ცალკეული წერტილები; ასევე, თუ აქვთ საერთო არე. მაგალითად იხ. ნახაზი 24.



ნახ. 24

მოსაზღვრე არეების გაერთიანებით, მოსაზღვრე მრავალკუთხედებისგან განსხვავებით, ახალი არე არ მიიღება. რადგან არეს თავისი საზღვარი არ ეკუთვნის, ამიტომ მოსაზღვრე არეთა შორის მოთავსებული საზღვარი გაერთიანებაში არ მოხვდება. ამიტომ გაერთიანება გაწყვეტილი იქნება, არე კი გაწყვეტილი არ უნდა იყოს.

ცხადია, რომ დახაზული ნაკვთი სინამდვილეში შედგება არა წერტილებისაგან, არამედ იმისგან, რითაც დახაზულია (მაგალითად, დაფაზე ცარცით დახაზული წრე შედგება ცარცის ძალიან თხელი ფენისაგან). გეომეტრიაში განიხილება არა ნაკვთების ნახაზები, არამედ თვითონ ნაკვთები, რომლებიც წერტილებისაგან შედგება. გეომეტრიული ნაკვთი არსებობს არა ყოფა-ცხოვრებაში, არამედ ადამიანთა გონებაში.

ასევე, მაგალითად, ხის კუბიკი – იგი შედგება ხისგან და არა წერტილებისგან. ნებისმიერი ნივთიერი სხეულიც ნივთიერებისაგან შედგება, და არა წერტილებისაგან. მაგრამ გეომეტრიაში განიხილება არა ნივთიერი სხეულები, არამედ **გეომეტრიული სხეულები**. გეომეტრიული სხეული კი წერტილებისაგან შედგება – წერტილების ერთობლიობაა. ისევე როგორც სიბრტყე, სივრცეც წერტილების სიმრავლეა.

კუბი და ბირთვი გეომეტრიული სხეულებია, კუბიკი და ბურთი კი – ნივთიერი სხეულები. კუბი და ბირთვი ადამიანთა გონებაში არსებობს, კუბიკი და ბურთი კი – ყოფაცხოვრებაში.

ამგვარად, ყოველი გეომეტრიული სხეული სივრცის გარკვეულ წერტილთა სიმრავლეა. ნაკვთი – სიბრტყის გარკვეულ წერტილთა სიმრავლეა. გეომეტრიაში ყველა ნაკვთი და ყველა სხეული, სიბრტყეც და სივრცეც. წერტილებისაგან შედგება. თვით წერტილ-

იც წერტილთა სიმრავლეა, ოღონდ ერთელემენტიანი სიმრავლე.

3. ტოპოლოგია და გეომეტრია

სიმრავლის ცნება პირველადი ცნებაა, სიმრავლეთა თეორია კი მათემატიკის ყველა დარგის საფუძველია. ნებისმიერი მათემატიკური ცნება მხოლოდ მაშინაა ზუსტად და მეცნიერულად განსაზღვრული, თუ იგი განისაზღვრება, როგორც რომელიმე სახის სიმრავლე. ამიტომაა საჭირო გეომეტრიის დაფუძნება ტოპოლოგიაზე. ტოპოლოგიის თვალსაზრისით ერთმანეთისაგან ყოველთვის უნდა იყოს განცალკევებული ნაკვთი, რომელიც თავის შიგა არეს შეიცავს, და ამ ნაკვთის საზღვარი – მაგალითად, წრე და წრეწირი. წრე შეიცავს შიგა არესაც და საზღვარსაც, ხოლო წრეწირი წრის საზღვარია. ასევე, კვადრატი გაიგება, როგორც შიგა არეც და საზღვარიც. კვადრატის საზღვარი შედგება ოთხი ტოლი გვერდისაგან, ანუ ოთხი ტოლი მონაკვეთისგან.

იგივე შეიძლება ითქვას სივრცულ სხეულებზეც: კუბი მთლიანია, შიგნიდან „სავსეა“, მისი საზღვარი კი ექვსი ტოლი წახნაგისაგან შედგება. ბირთვის საზღვარი არის სფერო. ესე იგი, სფერო შიგნიდან ცარიელია, ბირთვი – არა.

საზოგადოდ, ნაკვთის საზღვარი შეკრული ხაზია. კერძოდ, მრავალკუთხედის საზღვარი შეკრული ტეხილია; სხვა ნაკვთების საზღვარი – შეკრული მრუდია. ყველა შემთხვევაში ხაზი ანუ საზღვარი „შიგნიდან“ ცარიელია, მის მიერ შემოსაზღვრული ნაკვთი კი შიგნიდან სავსეა, ანუ მოიცავს შიგა არესაც. ამიტომ წრეების, რგოლებისა თუ მრავალკუთხედების ნახაზები მოსწავლემ ყოველთვის უნდა გააფერადოს. ხოლო ხაზის შიგნით გაფერადება არაა საჭირო.

მასწავლებელმა უნდა გამოარჩიოს რგოლი სხვა ფიგურებისგან და აუხსნას მოსწავლეებს, რომ რგოლი გამორჩეული ნაკვთია იმით, რომ მისი შიგა არე ნახვრეტიანია, ხოლო საზღვარი ორი ხაზისაგან – დიდი და მცირე წრეწირისაგან შედგება (ნახ. 25).

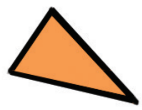
ნახ.25

ამგვარად, მასწავლებელმა ამ საკითხების გააზრებისათვის აუცილებლად უნდა გააფერადებინოს მოსწავლეებს არეები, რადგან ნახაზების გაფერადების გარეშე მოსწავლეებს გაუჭირდებათ ერთმანეთისაგან გაარჩიონ სამი სხვადასხვა ნაკვთი: წრე, რგოლი და წრეწირი.

საზოგადოდ, ყოველთვის ზუსტად უნდა იყოს გარკვეული, თუ რომელ წერტილებს და რომელ არეს მოიცავს ესა თუ ის ნაკვთი. მხოლოდ გარე მოხაზულობა არაა საკმარისი ნაკვთის განსასაზღვრად.

ეს ყოველივე განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია იმიტომ, რომ სახელმძღვანელოების უმრავლესობაში ამ საკითხებზე არ არის ყურადღება გამახვილებული. მაგალითად, რა

იგულისხმება ცნებაში „სამკუთხედი“? თუ ეს სამი მონაკვეთისაგან შემდგარი შეკრული ტეხილია, მაშინ როგორ გამოირჩევა იგი ტეხილისაგან? თუ ტეხილია, მაშინ სამკუთხედის ფართობი ნულის ტოლი იქნება. ამიტომ მასწავლებელმა სამკუთხედის ახსნის დროს ყურადღება უნდა გაამახვილოს, რომ სამკუთხედი არის საზღვარი და მისი შიგა არე, ისე, როგორც ეს 26-ე ნახაზზეა ნაჩვენები.



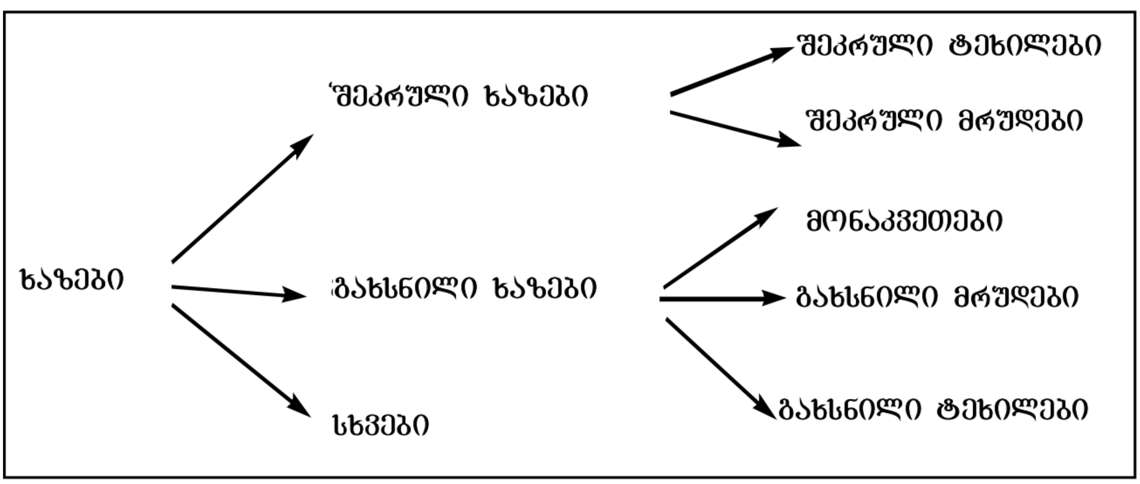
ნახ.26

ხშირად მოკლედ ამბობენ, რომ ნახაზზე მოცემულია რაიმე სხეული ან ნაკვთი. სინამდვილეში მოცემულია სხეულის ან ნაკვთის ნახაზი და არა თვით სხეული ან ნაკვთი – ისევე, როგორც ფურცელზე შეიძლება მოცემული იყოს მანქანის ნახაზი და არა თვით მანქანა.

ასევე მნიშვნელოვანია ნაკვთის ინვარიანტობის გარკვევა, ანუ ახსნა, რომ ნაკვთი არ იცვლება მისი მობრუნებითა და პარალელური გადატანით. დაწყებით კლასებში ტიპური შეცდომაა – ირიბულად დახაზულ მართკუთხედს ან კვადრატს არ მიიჩნევენ მართკუთხედად და კვადრატად, შესაბამისად.

ტოპოლოგიისთვის ხაზის ბოლო წერტილი არსებითად განსხვავდება დანარჩენებისგან, ოღონდ არა ზომით, არამედ მდებარეობით. განსხვავდება ერთმანეთისგან აგრეთვე შეკრული და გახსნილი ხაზები – შეუძლებელია მათი ერთმანეთისგან მიღება უწყვეტი დეფორმაციებით. თუმცა ტოპოლოგიის თვალსაზრისით არ განსხვავდება ერთმანეთისგან მონაკვეთი, გახსნილი ტეხილი და გახსნილი მრუდი, რადგანაც ყოველი მათგანისგან შეიძლება რომელიმე მეორეს მიღება უწყვეტი დეფორმაციებით. ასევე არ განსხვავდება შეკრული ტეხილი შეკრული მრუდისგან. ასეთ ფიგურებს ტოპოლოგიურად ეკვივალენტური ეწოდება.

მოცემული სქემა გვიჩვენებს, თუ როგორ სხვადასხვა სახეებად ჯგუფდება ხაზები.



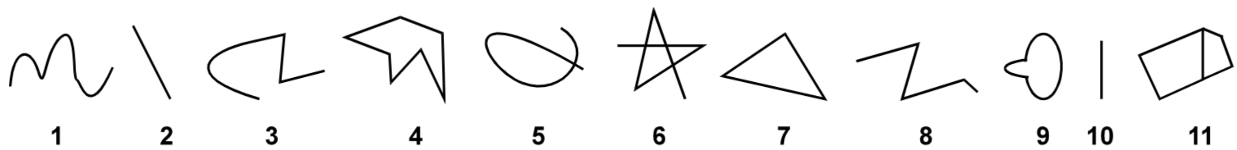
მასწავლებელმა უნდა გაარჩიოს ერთმანეთისგან ტოპოლოგიური და გეომეტრიული ცნებები.

ტოპოლოგიური ცნებებია:	*გეომეტრიული ცნებებია:*
გახსნილი ხაზი, შეკრული ხაზი, წერტილი, ბოლო წერტილი, მარტივი ხაზი, შიგა არე, გარე არე, საზღვარი...	მონაკვეთი, ტეხილი, მრუდი ხაზი, წრე, კვადრატი, სამკუთხედი, ოთხკუთხედი ...

ყოველი ტოპოლოგიური ცნება ასევე გეომეტრიულიცაა, მაგრამ არა პირიქით: გეომე-ტრიულ ცნებათა მცირე ნაწილია ტოპოლოგიური.

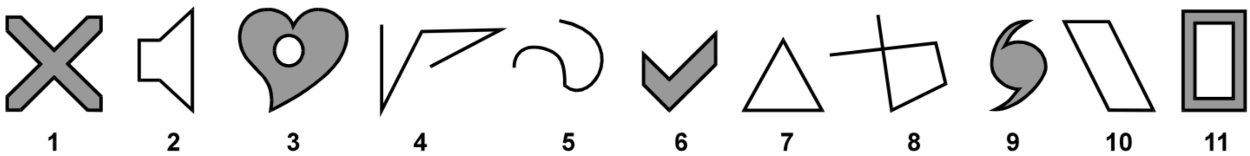
დავალება დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. დააკვირდით ნახაზზე მოცემულ ხაზებს.



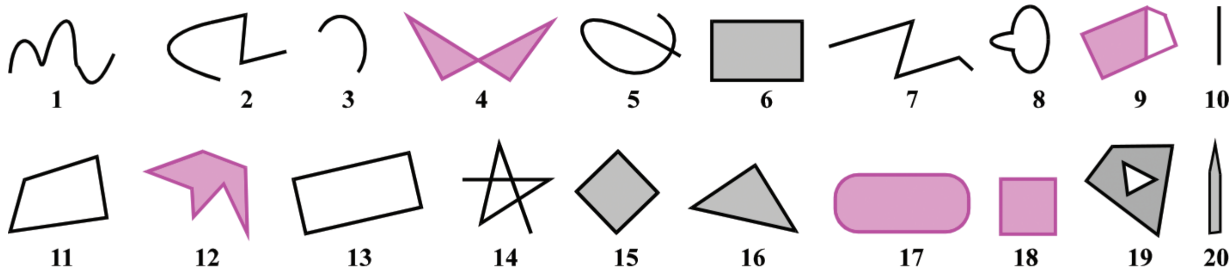
დააჯგუფეთ ცალკე მონაკვეთები, ცალკე ტეხილები და ცალკე მრუდები.

2. დააკვირდით ნახაზზე მოცემულ ნაკვთებს.

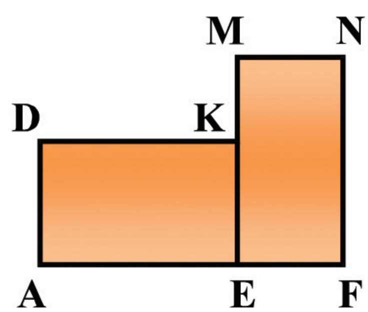


ამოწერეთ ცალკე იმ ნაკვთების ნომრები, რომლებსაც ეკუთვნის შიგა არე და ცალკე – იმათი ნომრები, რომლებსაც არცერთი შიგა არე არ ეკუთვნის.

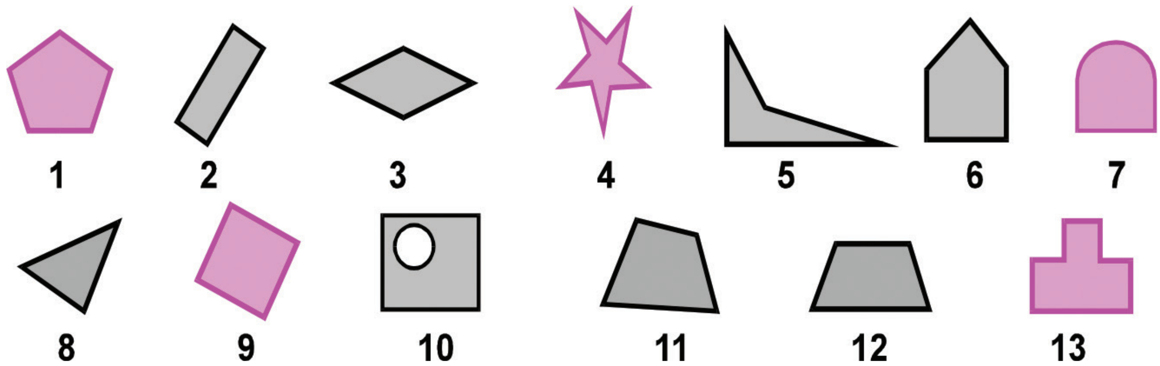
3. დააკვირდით ნახაზზე მოცემულ ხაზებსა და ნაკვთებს და დააჯგუფეთ ნომრების მიხედვით. I) შეკრული ტეხილები; II) გახსნილი ტეხილები; III) მრუდები; IV) მრავალკუთხედები; V) სხვები



4. გაარკვიეთ, მოცემულ ნახაზზე რამდენი მონაკვეთია, რომლის ერთ-ერთი ბოლოა I. K წერტილი; II. E წერტილი



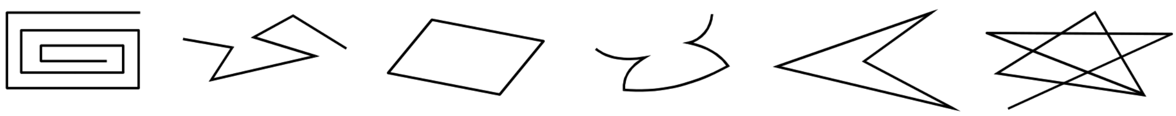
5. მოიფიქრეთ, მოცემულ ნახაზზე რომელი ნაკვთებია ტოპოლოგიურად ეკვივალენტური.



6. დაასახელეთ ექვსკუთხედის ტოპოლოგიურად ეკვივალენტური ნაკვთი.

7. ტოპოლოგიურად ეკვივალენტურია თუ არა: ა) კუბის საზღვარი და სფერო; ბ) კუბი და ბირთვი.

8. ნახაზზე მოცემული 6 ფიგურიდან რამდენია ტეხილი?



(ა) 5 (ბ) 4 (გ) 3 (დ) 2

შემაჯამებელი ტესტები

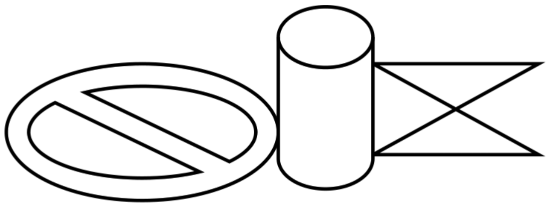
1. რომელია წრის საზღვრის ზუსტი დახასიათება?

ა) ტეხილი; ბ) გახსნილი ხაზი; გ) შეკრული მრუდი; დ) მონაკვეთი.

2. რომელია კვადრატის საზღვრის ზუსტი დახასიათება?

ა) შეკრული ტეხილი; ბ) გახსნილი ხაზი; გ) შეკრული მრუდი; დ) მონაკვეთი.

3. რამდენი შიგა არე აქვს ამ ხაზებს:



ა) 6 ბ) 7 გ) 4 დ) 8

4. შემდეგი წინადადებებიდან რომელია მცდარი:

ა) ყოველ მრავალკუთხედს იმდენი წვერო აქვს, რამდენიც – გვერდი.

ბ) ყოველ შეკრულ ტეხილს იმდენი წვერო აქვს, რამდენიც – გვერდი.

გ) ყოველ გახსნილ ტეხილს იმდენი წვერო აქვს, რამდენიც – გვერდი.

დ) ყოველი გახსნილი ტეხილის გვერდების რაოდენობა 1-ით ნაკლებია წვეროთა რაოდენობაზე.

5. რომელი ქართული ასო, როგორც გეომეტრიული ნაკვთი, არის „ა"-ს ტოპოლოგიურად ეკვივალენტური?

ა) ბ; ბ) გ; გ) ტ; დ) ს.

6. რომელი წინადადებაა ჭეშმარიტი?

ა) ციფრი „0" არის „6"-ის ტოპოლოგიურად ეკვივალენტური.

ბ) ციფრი „0" არ არის არცერთი ციფრის ტოპოლოგიურად ეკვივალენტური.

გ) ციფრი „0" არის „9"-ის ტოპოლოგიურად ეკვივალენტური.

დ) ციფრი „0" არის „8"-ის ტოპოლოგიურად ეკვივალენტური.

7. წრფე ტოპოლოგიურად ეკვივალენტურია:

ა) ჩაკეტილი ტეხილის; ბ) მონაკვეთის; გ) სხივის; დ) ღია მრუდის.

თავი 8. გეომეტრია სიბრტყეზე

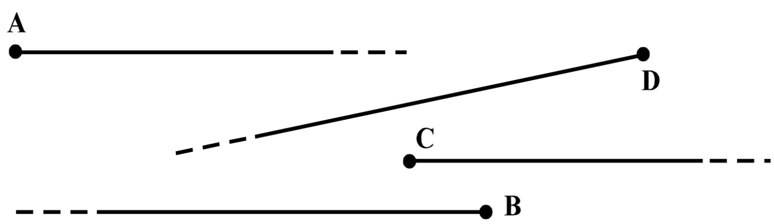
1. წრფე, სხივი, მონაკვეთი.

ქვემოთ განხილული იქნება გეომეტრიული ნაკვთები: წრფე, სხივი და მონაკვეთი.

სწორი ხაზი, რომელიც ორივე მხარეს უსასრულოდ გრძელდება, წრფე ეწოდება. წრფის მთლიანად დახაზვა შეუძლებელია, ამიტომ იხაზება მხოლოდ მისი ნაწილი. შეიძლება, ნახაზი ორივე მხარეს წყვეტილი ხაზებით დავაბოლოვოთ, რაც სწორედ იმას აღნიშნავს, რომ წრფე ორივე მხარეს უსასრულოდ გრძელდება. (ნახ.1)

ნახ.1

რას ნიშნავს „გრძელდება უსასრულოდ"? რიცხვითი სხივის სათავე რიცხვი 0-ის შესაბამისი წერტილია, ხოლო ყოველი წერტილი რიცხვით სხივზე რომელიღაც რიცხვს შეესაბამება – რაც უფრო მარჯვნივაა წერტილი, მით უფრო დიდ რიცხვს შეესაბამება იგი. მაშასადამე, რიცხვით სხივს ერთი სათავე აქვს, ხოლო მეორე მხარეს ის უსასრულოდ გრძელდება. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ სხივზე ერთმანეთის გაგრძელებით მონიშნულია, მაგალითად, 1 სმ სიგრძის მონაკვეთები, მაშინ ამ მონაკვეთების რაოდენობა უსასრულოა. სწორ ხაზს, რომელსაც ერთი ბოლო ანუ სათავე აქვს, ხოლო მეორე მხარეს უსასრულოდ გრძელდება, **სხივი** ეწოდება.



ნახ. 2

მე-2 ნახაზზე ნაჩვენებია ოთხი სხივი, მათი სათავეებია A, B, C და D წერტილები. ამგვარად, იხაზება წრფის და სხივის მხოლოდ ნაწილი, ხოლო დანარჩენი გონებით უნდა წარმოვიდგინოთ.

ორი უსასრულო სიმრავლე ტოლძალოვანია, თუ შესაძლებელია მათი ელემენტების დაწყვილება, ანუ თუ ერთი სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეიძლება შევუსაბამოთ მეორე სიმრავლის ერთი ელემენტი და პირიქით. სხივი წარმოადგენს სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს, ამიტომ, თუ ერთი სხივის სათავეს შევუთავსებთ სხვა სხივის სათავეს ისე, რომ სხივი სხივს გაჰყვეს, ცხადია, სხივები ერთმანეთს შეუთავსდება. ამიტომ ყველა სხივი ერთმანეთის ტოლია. ისევე, როგორც ყველა სხივი, ყველა წრფეც ერთმანეთის ტოლია.

აღსანიშნავია, რომ სიტყვა **„წრფელის"** ძველი ქართული მნიშვნელობა ნიშნავს არის „სწორი". სწორედ ამ სიტყვისგან შექმნა ტერმინი **„წრფე"** ქართველმა მათემატიკოსმა გიორგი ნიკოლაძემ (1888-1931).

წინა თავიდან ცნობილია, რომ ორი წერტილის შემაერთებელი სწორი ხაზი არის მონაკვეთი. ამრიგად, სწორი ხაზი შეიძლება იყოს: ან მონაკვეთი, ან სხივი, ან წრფე. ამ ცნებებს შორის „სწორი ხაზი" ყველაზე ზოგადია. მონაკვეთი, სხივი და წრფე – მისი კერძო შემთხვევებია, სამივე სხვადასხვა.

როგორც ვიცით, გეომეტრიული ხაზი არის არა ნახაზი, არამედ ნაკვთი. ნაკვთი გეომეტრიულ წერტილთა ერთობლიობაა სიბრტყეზე. ხაზის ნახაზი კი შედგება ნივთიერ წერტილთაგან და არა გეომეტრიულ წერტილთაგან. ამიტომ ხაზის ნახაზს აქვს სისქე, ძალიან მცირე, მაგრამ მაინც სისქე. ასევე, ფურცელზე დასმულ წერტილსაც აქვს არანულოვანი დიამეტრი. გეომეტრიულ წერტილს კი არა აქვს დიამეტრი, რადგან მისი სისქე ყველა მიმართულებით 0-ის ტოლია. ასევე, გეომეტრიული ხაზის სისქეც 0-ის ტოლია. რადგან წრფე, სხივი და მონაკვეთი გეომეტრიული ნაკვთებია – **სწორი ხაზებია** – მათი სისქე 0-ის ტოლია, ამასთან, სხივი და წრფე – უსასრულო ნაკვთებია. ჩვენ ვხაზავთ მათი მხოლოდ პატარა სასრული ნაწილის ნახაზს. მონაკვეთს აქვს სიგრძე. იგი ორი წერტილის შემაერთებელი ყველა შესაძლო ხაზიდან უმოკლესია.

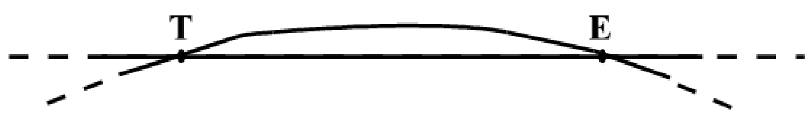
ვთქვათ, მონაკვეთის სიგრძეა 1000000 კმ. მისი დახაზვა შეუძლებელია. შეიძლება დაიხაზოს მისი პროპორციულად შემცირებული ნახაზი გარკვეული მასშტაბით. სხივი ან წრფე კი, როგორც უნდა შემცირდეს, მაინც უსასრულო დარჩება და ვერ დაიხაზება.

წრფე ორივე მხარეს უსასრულოა, ამიტომ მასზე მონიშნული ნებისმიერი წერტილი წრფეს ორ სხივად გაყოფს; ყველა სხივი კი ერთმანეთის ტოლია. ესე იგი, შეიძლება ითქვას, რომ სხივი წრფის ნახევარია, ანუ ნახევარწრფეა.

სიბრტყის ნებისმიერ ორ სხვადასხვა T და E წერტილზე ყოველთვის შეიძლება უამრავი მონაკვეთის გავლება, ეს წერტილები არაა აუცილებელი ბოლოები იყოს. ხოლო თუ TE მონაკვეთი უსასრულოდ გაგრძელებულია ორივე მხარეს მიიღება წრფე, რომელიც T და E წერტილებზე გადის.

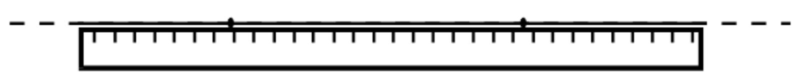
სიბრტყის ორ წერტილზე ყოველთვის შეიძლება წრფის, მონაკვეთებისა და სხივების გავლება. მონაკვეთი და სხივი გაივლება უსასრულოდ ბევრი, მაგრამ წრფე კი მხოლოდ ერთადერთი გაივლება. ორ სხვადასხვა წერტილზე არ შეიძლება ორი, სამი ან მეტი სხვადასხვა წრფის გავლება.

მართლაც, თუ T და E წერტილებზე გავავლებთ წრფეს და კიდევ სხვა ხაზსაც, მაშინ არც ერთი ეს სხვა ხაზი არ იქნება წრფე (ნახ. 3).



ნახ. 3

ორ წერტილზე გამავალი სწორი ხაზის დახაზვა ადვილია სახაზავით (ნახ. 4):



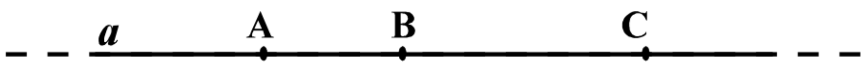
ნახ. 4

საზოგადოდ, ნაკვთები შეიძლება ალვნიშნოთ ასოებით: *a, b, c, l, u* და სხვა, მაგრამ ხშირად მოსახერხებელია წრფის სხვაგვარი აღნიშვნა. წრფის აღნიშვნისათვის მასზე მოვნიშნოთ რაიმე ორ წერტილს (ნახ. 5) და ჩავწეროთ: AB წრფე. ეს იგივეა, რაც AB მონაკვეთზე გამავალი წრფე.

ნახ. 5

მე-6 ნახაზზე *a* წრფე იგივეა, რაც AB წრფე ან BC წრფე ან AC წრფე. ესე იგი, $a \equiv AB$, $a \equiv BC$, $a \equiv AC$.

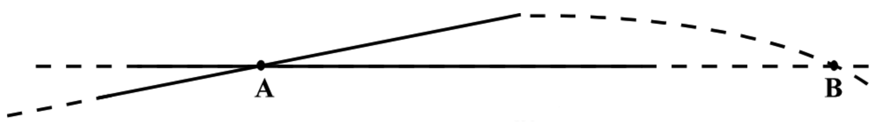
წრფეზე მონიშნული რომელი ორი წერტილით ალვნიშნავთ ამ წრფეს, მნიშვნელობა არ აქვს.



ნახ. 6

ისევე როგორც წრფე, სხივიც შეიძლება აღინიშნოს ორი წერტილის საშუალებით. სხივის ჩანაწერში პირველი ასო მის სათავეს აღნიშნავს. მაგალითად, AB და AC სხივები ერთი და იგივეა, რადგან ორივეს სათავეა A წერტილი და მისგან მარჯვნივ გრძელდება უსასრულოდ. AB, BC, CA სხივები კი სხვადასხვაა.

რამდენ წერტილში შეიძლება გადაიკვეთოს ორი სხვადასხვა წრფე? ორი წრფე ერთ წერტილში იკვეთება. ხომ არ შეიძლება, რომ ორი სხვადასხვა წრფე ორ წერტილში გადაიკვეთებოდეს? წრფეები ხომ უსასრულოდ გრძელდება და იქნებ, თუკი ძალიან გავაგრძელებთ წრფეებს, მათ კიდევ რაიმე სხვა წერტილშიც გადაკვეთონ ერთმანეთი (ნახ. 7)?



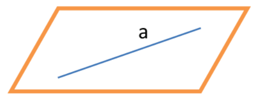
ნახ. 7

ეს რომ ასე მომხდარიყო, მაშინ გამოვა, რომ A და B წერტილზე გადის ორი სხვადასხვა წრფე. ეს კი არ შეიძლება. მაშასადამე, ორი სხვადასხვა წრფე მხოლოდ ერთადერთ წერტილში შეიძლება გადაკვეთდეს ერთმანეთს.

2. სიბრტყე. ნახევარსიბრტყე

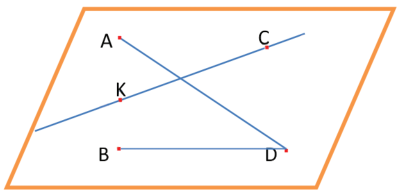
სიბრტყე გეომეტრიის ერთ-ერთი საწყისი ცნებაა. მასზე წარმოდგენას ქმნის უსასრულო მაგიდის ზედაპირი, სარკის ზედაპირი და ა. შ. ნახაზზე სიბრტყე შეიძლება წარმოდგენილი იქნას პარალელოგრამის სახით. სიბრტყეს აღნიშნავენ ბერძნული ასოებით $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ნახაზზე გამოსახულია სიბრტყე და მასზე გავლებულია a წრფე.

სიბრტყის იმ წერტილების სიმრავლე, რომლებიც მოცემულ წრფეს არ ეკუთვნის, ამ წრფით ორ ნაწილად იყოფა. ყოველი წრფე მთელ სიბრტყეს ორ ტოლ ნაწილად ყოფს. წრფე სადაა გავლებული, არ აქვს მნიშვნელობა. თითოეულ ამ ნაწილს **ნახევარსიბრტყე** ეწოდება.



ამგვარად, სიბრტყის ნებისმიერ წრფეს და მის ერთ მხარეს მდებარე წერტილების სიმრავლეს ნახევარსიბრტყე ეწოდება, ხოლო ამ წრფეს – ნახევარსიბრტყის საზღვარი.

თუ ნახევარსიბრტყე „გადაკეცილია“ წრფეზე, ცხადია, ნახევარსიბრტყეები ერთმანეთს დაემთხვევა. ესე იგი, სიბრტყეც სიმეტრიული ნაკვთია.



ნახ. 8

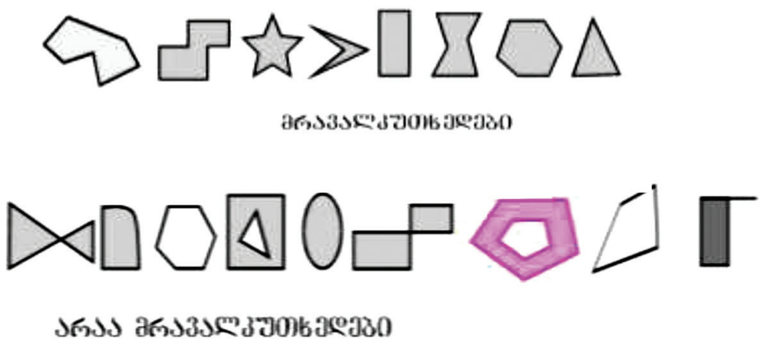
მე-8 ნახაზის მიხედვით A და D წერტილები CK წრფის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეს ეკუთვნის, ხოლო B და D წერტილები – ერთ ნახევარსიბრტყეს. C წერტილი ნახევარსიბრტყის საზღვარზე მდებარეობს.

თუ მონაკვეთის ბოლოები სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ მონაკვეთი კვეთს ამ ნახევარსიბრტყეთა საზღვარს, ხოლო თუ მონაკვეთის ბოლოები ერთ ნახევარსიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ მონაკვეთი არ კვეთს ამ ნახევარსიბრტყეთა საზღვარს.

3. მრავალკუთხედი, მრავალკუთხედის პერიმეტრი

მრავალკუთხედი ეწოდება ისეთ ნაკვთს, რომელიც შემოსაზღვრულია ერთი მარტივი შეკრული ტეხილი ხაზით.

ამგვარად, მრავალკუთხედი შედგება ერთი შიგა არესა და საზღვრისაგან. მრავალკუთხედის საზღვარი მარტივი შეკრული ტეხილია (ნახ. 9).



ნახ. 9

მრავალკუთხედის საზღვრის შემადგენელ ყოველ მონაკვეთს ამ მრავალკუთხედის გვერდი ეწოდება. ორი მეზობელი გვერდის საერთო წერტილს კი – ამ მრავალკუთხედის წვერო.

ნებისმიერი მრავალკუთხედის გვერდებისა და წვეროების რაოდენობა ტოლია. მრავალკუთხედების სახელწოდებები გამომდინარეობს მისი გვერდების (ან წვეროების) რაოდენობისგან: სამკუთხედები, ოთხკუთხედები, ხუთკუთხედები და ასე შემდეგ.

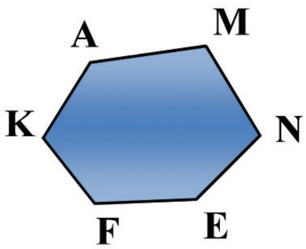
მრავალკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი და ყველა კუთხე ტოლია, წესიერი მრავალკუთხედი ეწოდება.

მრავალკუთხედის **პერიმეტრი** ეწოდება ამ მრავალკუთხედის ყველა გვერდის სიგრძეთა ჯამს. ცხადია, მრავალკუთხედის პერიმეტრი ამ მრავალკუთხედის შემომსაზღვრავი ტეხილის სიგრძის ტოლია.

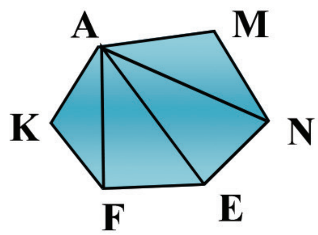
ნახ. 10

მე-10 ნახაზზე მოცემული კვადრატის პერიმეტრია: 2 სმ $+ 2$ სმ $+ 2$ სმ $+ 2$ სმ $=$ 8 სმ

მე-11 ნახაზზე გამოსახულია $AMNEFK$ ექვსკუთხედი. განვიხილოთ მისი რომელიმე წვერო, მაგალითად, A წვერო. ექვსკუთხედის დანარჩენი წვეროებიდან M და K წვეროები A წვეროს მეზობელი წვეროებია, ხოლო N, E და F კი – A-ს **მოპირდაპირე** (არამეზობელი) წვეროებია.



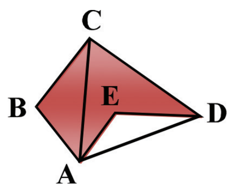
ნახ.11



ნახ. 12

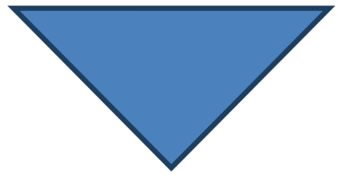
მრავალკუთხედის ორი არამეზობელი წვეროს შემაერთებელ მონაკვეთს ამ მრავალკუთხედის **დიაგონალი** ეწოდება. AN, AE და AF მონაკვეთები ექვსკუთხედის A წვეროდან გავლებული დიაგონალებია (ნახ. 12).

ზოგჯერ დიაგონალი შეიძლება მრავალკუთხედის შიგნით არ მოთავსდეს. მაგალითად, $ABCDE$ მრავალკუთხედის (ნახ. 13) A წვეროდან გაივლება ორი დიაგონალი – AC და AD. მათგან AD ამ მრავალკუთხედის გარეთაა.



ნახ. 13

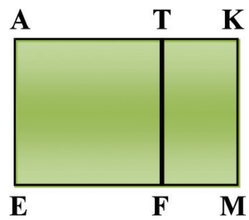
4. სამკუთხედი. მართკუთხედი



სამკუთხედი არის მრავალკუთხედი, რომელსაც აქვს სამი გვერდი და სამი კუთხე, ცხდია, ის არის ნაკვთი და შესაბამისად – სიბრტყის ნაწილი, რომელიც შემოსაზღვრულია სამი მონაკვეთისაგან შედგენილი მარტივი შეკრული ტეხილით. ამგვარად, სამკუთხედი არის საზღვარი და მისი შიგა არე, ისე, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები.

სამკუთხედები იყოფა სახეობებად, გვერდების სიგრძეთა მიხედვით. სამკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი ტოლია, ტოლგვერდა (წესიერი) სამკუთხედი ეწოდება. სამკუთხედს, რომელსაც ორი გვერდი ტოლი აქვს – ტოლფერდა, ხოლო თუ სამკუთხედს ტოლი გვერდები არა აქვს – სხვადასხვაგვერდა.

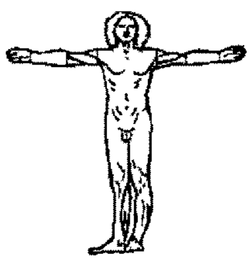
მართკუთხედი და კვადრატი ოთხკუთხედებია. მართკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია და ყველა კუთხე მართი აქვს, ხოლო კვადრატი მართკუთხედია, რომლის ყველა გვერდი ტოლია, იგი წესიერი ოთხკუთხედია. ამგვარად, ყოველი კვადრატი თან მართკუთხედიცაა, კერძოდ, ისეთი მართკუთხედი, რომლის ყველა გვერდი ტოლია. $AKME$ მართკუთხედია, ხოლო $ATFE$ – კვადრატი (ნახ. 14).



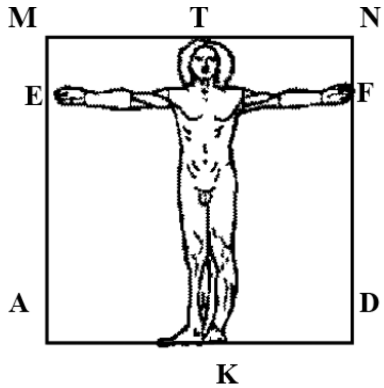
ნახ. 14

მართკუთხედები ზოგჯერ მათი გვერდების სიგრძეების მიხედვით აღინიშნება. მაგალითად, 13 სმ $\times$ 60 სმ – ესაა მართკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია 13 სმ და 60 სმ. ცხადია, 36 სმ $\times$ 36 სმ კვადრატია.

გავიხსენოთ ლეონარდო და ვინჩის კანონი: ზრდასრული ადამიანის სიმაღლე დაახლოებით ტოლია მისი გაშლილი ხელების სიგრძისა (ნახ. 15).


ნახ. 15

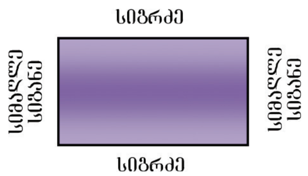
მაგრამ, ჩნდება ილუზია და ჩვენ ადამიანის სიმაღლე უფრო მეტი გვეჩვენება, ვიდრე მისი ხელების სიგრძე. თუ ნახ.15-ზე მოცემული ადამიანის გამოსახულებას AMND მართკუთხედში ჩავსვამთ, ილუზია გაქრება (ნახ. 16). ჩვენ აშკარად დავინახავთ, რომ AMND მართკუთხედი კვადრატია. ცხადია, რომ EF მონაკვეთი ტოლია კვადრატის AD გვერდისა, ხოლო KT მონაკვეთი ტოლია კვადრატის AM გვერდისა.



ნახ. 16

ვინაიდან კვადრატის ოთხივე გვერდი ერთმანეთის ტოლია, ამიტომ |AD| = |AM|. მაშასადამე, EF და KT მონაკვეთებიც ტოლია.

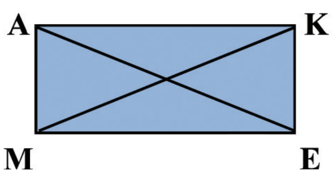
ესე იგი, ადამიანის სიმაღლე და მისი გაშლილი ხელების სიგრძე ტოლია.



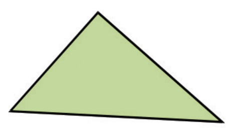
ნახ. 17

ზოგჯერ ყოფაცხოვრებაში მართკუთხედის უფრო გრძელი გვერდის სიგრძეს ამ მართკუთხედის სიგრძეს უწოდებენ, ხოლო ამ გვერდის მეზობელი გვერდის სიგრძეს – მართკუთხედის სიმაღლეს ან სიგანეს. მაშინ კვადრატის სიგრძე და სიგანე (ანუ სიმაღლე) – ერთმანეთის ტოლია.

AKEM მართკუთხედში (ნახ. 18) A, E და M, K არამეზობელი წვეროებია. ამიტომ მართკუთხედს სულ ორი დიაგონალი აქვს. მათი სიგრძეები ერთმანეთის ტოლია.



ნახ.18


ნახ.19

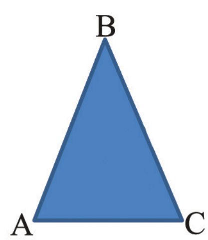
მართკუთხედის დიაგონალები მართკუთხედში ჩახაზულ ნებისმიერ მონაკვეთზე დიდია. მართკუთხედში ვერ ჩაიხაზება მონაკვეთი, რომელიც დიაგონალზე უფრო გრძელია.

რადგან სამკუთხედს მოპირდაპირე გვერდები არ აქვს, ამიტომ მასში დიაგონალი არ გაივლება. აღსანიშნავია, რომ მრავალკუთხედებიდან მხოლოდ სამკუთხედში არ გაივლება დიაგონალი (ნახ. 19).

განვიხილოთ მრავალკუთხედის პერიმეტრთან დაკავშირებული ამოცანები.

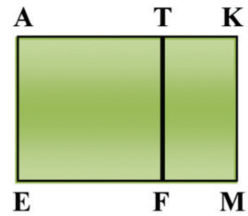
1. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდის სიგრძე 4-ჯერ მეტია ფუძის სიგრძეზე. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფუძის სიგრძის შეფარდება პერიმეტრთან.

პირობის თანახმად, ფერდის სიგრძე 4-ჯერ მეტია ფუძის სიგრძეზე, ამიტომ, მოსწავლეებს შეუძლიათ შემოიტანონ აღნიშვნები: $AC=x$; $AB=BC=4x$. რადგან მრავალკუთხედის პერიმეტრი ამ მრავალკუთხედის ყველა გვერდის სიგრძეთა ჯამის ტოლია, ამიტომ სამკუთხედის პერიმეტრს ასე გამოთვლიან: $P=AB+BC+AC=x+4x+4x=9x$; ამ სამ-



კუთხედის ფუძის სიგრძის შეფარდება პერიმეტრთან ტოლია: $\frac{AC}{P}=\frac{x}{9x}=\frac{1}{9}$.

ალსანიშნავია, რომ თუ ფიგურა დაყოფილია რამდენიმე ნაწილად, მაშინ მოცემული ფიგურის პერიმეტრი შემადგენელი ნაწილების პერიმეტრთა ჯამის ტოლი არ არის. ამის მაგალითად გამოდგება შემდეგი ამოცანა: $EAKM$ მართკუთხედის გვერდები 8სმ და 4 სმ-ია. იგი TF მონაკვეთით გაყოფილია ორ მართკუთხედად, AT = 5 სმ. (ნახ. 20) აჩვენეთ, რომ მიღებულ მართკუთხედთა პერიმეტრების ჯამი თავდაპირველად მოცემული მართკუთხედის პერიმეტრის ტოლი არ არის. მოსწავლეები გამოთვლიან სამივე მართკუთხედის პერიმეტრებს:

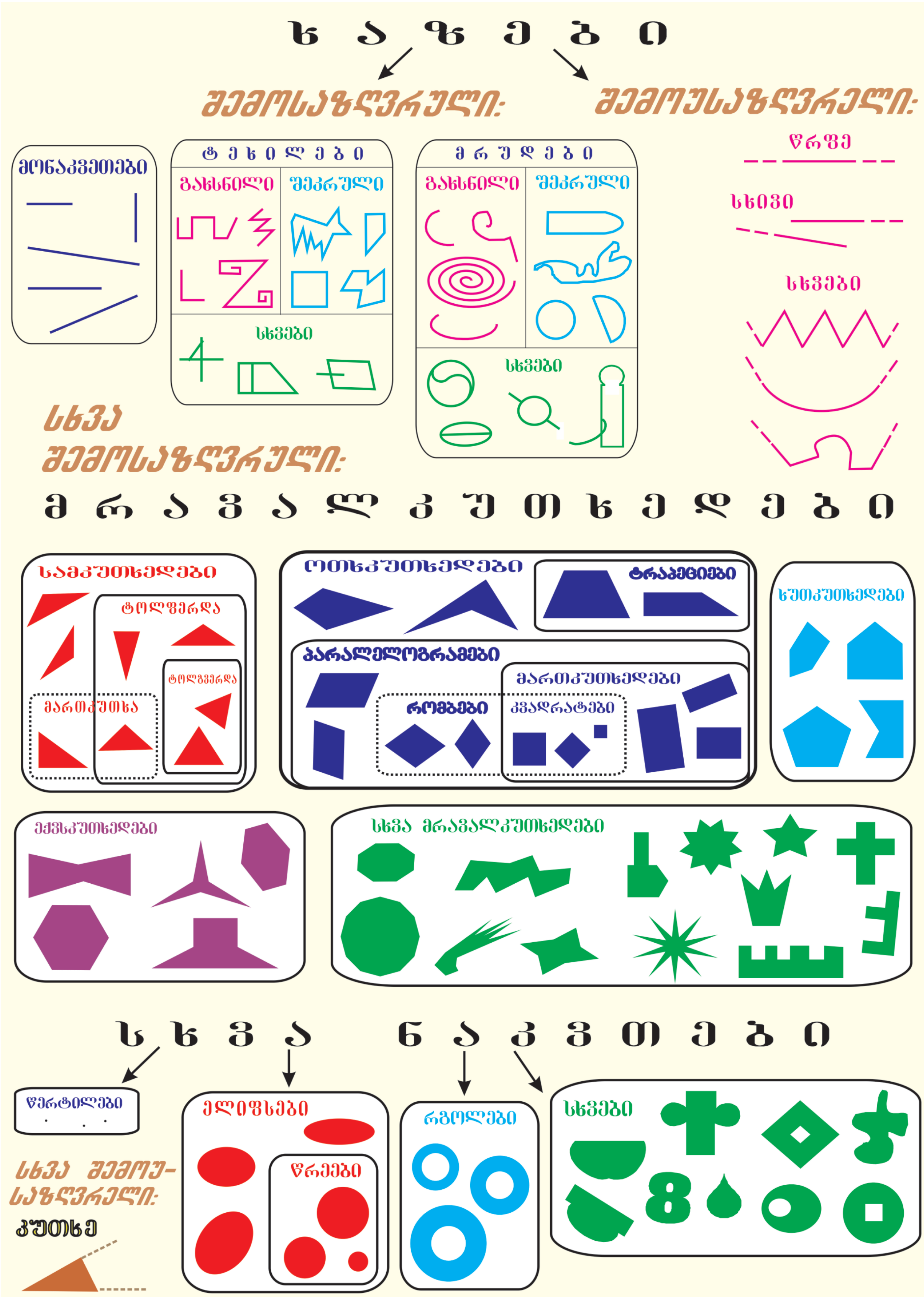


ნახ. 20

$P_{EAKM}=(8+4)\cdot 2=24$სმ; $P_{EATF}=(5+4)\cdot 2=18$; $P_{FTKM}=(4+3)\cdot 2=14$.

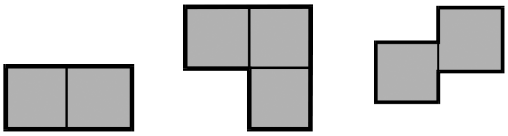
ცხადია, რომ $P_{EAKM} \neq P_{EATF}+P_{FTKM}$.

ნაკვთების კლასიფიკაცია



5. ბრტყელი ფიგურის ფართობი. ფართობის ერთეულები

ყველა ნაკვთი (ბრტყელი ფიგურა) რაღაც ადგილს იკავებს სიბრტყეზე, ზოგი მეტს, ზოგი – ნაკლებს. 22-ე ნახაზზე მოცემული ნაკვთებიდან ყველაზე მეტი ადგილი უკავია მეორე ნაკვთს:



ნახ. 21

როცა ერთი ნაკვთი მეორესთან შედარებით უფრო მეტ ადგილს იკავებს სიბრტყეზე, მათემატიკაში ამბობენ, რომ ერთი ნაკვთის ფართობი მეტია, ვიდრე მეორე ნაკვთის ფართობი. როცა ორ ნაკვთს ტოლი ადგილი უკავია სიბრტყეზე, ამბობენ, რომ ამ ორი ნაკვთის ფართობები ტოლია. მესამე ნაკვთი ფორმით განსხვავდება პირველი ნაკვთი-საგან, მაგრამ მასაც იმდენივე ადგილი უკავია სიბრტყეზე, რამდენიც პირველ ნაკვთს.

ცხადია, ტოლ ფიგურებს ტოლი ფართობები აქვს. მაგრამ ხშირად ფართობთა შედარება ერთმანეთზე დადებით ძნელია, რადგან ზოგჯერ არატოლ ნაკვთებსაც შეიძლება ტოლი ფართობები ჰქონდეს. ფართობის გასაზომად ისევე გვჭირდება საზომი ერთეული, რო-გორც სიგრძის გასაზომად. სიგრძის ერთეული ერთეულოვანი მონაკვეთია, ხოლო ფარ-თობისა – ერთეულოვანი კვადრატი. ერთეულოვანი კვადრატი ისეთი კვადრატია, რომლის გვერდის სიგრძე ერთი ერთეულის ტოლია.

ნაკვთი უნდა დავყოთ ერთნაირ ერთეულოვან კვადრატებად და დავთვალოთ კვა-დრატების რაოდენობა. ეს იქნება ამ ნაკვთის ფართობი. მაგალითად, 22-ე ნახაზზე პირველი ნაკვთი მართკუთხედია, მესამე – არა, მაგრამ ორივეს ფართობი 2-ის ტოლია. ხოლო მეორე ნაკვთის ფართობი კი 3-ის ტოლია.

საზოგადოდ, ნაკვთის **ფართობი** იმ ერთეულოვანი კვადრატების რაოდენობაა, რომლე-ბიც ამ ნაკვთის დასაფარავადაა საჭირო.

ფართობის ერთ-ერთი საზომი ერთეულია

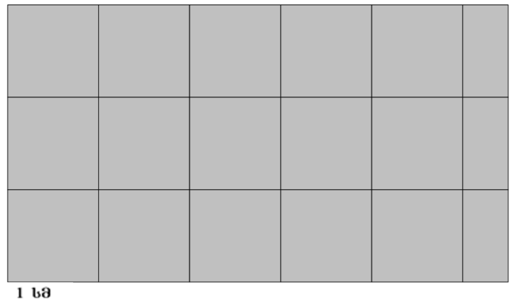
კვადრატული სანტიმეტრი – **კვ.სმ** ანუ **სმ²**.

კვადრატული სანტიმეტრი არის იმ კვადრატის ფართობი, რომლის გვერდის სიგრძე 1 სმ-ია. ფართობის სხვა საზომი ერთეულებია კვადრატული მილიმეტრი (კვ.მმ = მმ²), კვადრატული მეტრი (კვ.მ = მ²), კვადრატული დეციმეტრი (კვ.დმ = დმ²), კვადრატული კილომეტრი (კვ.კმ = კმ²). ყოფაცხოვრებაში, მიწის ნაკვეთების გასაზომად, ხშირად გამოიყენება აგრეთვე არი და ჰექტარი:

1 ა = 100 კვ.მ; 1 ჰა = 100 ა = 10000 კვ.მ.

ყველაზე ადვილი მართკუთხედის ფართობის გაზომვაა. მართკუთხედის ფართობი მისი სიგრძისა და სიგანის ნამრავლის ტოლია. ეს კარგად ჩანს 22-ე ნახაზზე.

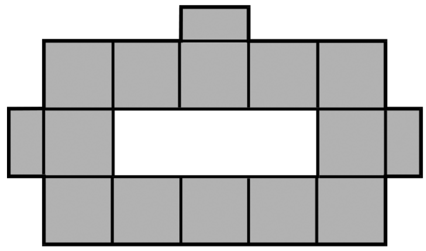
მოცემული მართკუთხედის სიგრძეა $5\frac{1}{2}$ სმ, სიგანე – 3სმ. ამ მართკუთხედს ზუსტად ფარავს $3\cdot5+3\cdot\frac{1}{2}=3\cdot(5+\frac{1}{2})=3\cdot5\frac{1}{2}$ ცალი ერთეულოვანი კვადრატი. მივიღეთ სწორედ სიგანისა და სიგრძის ნამრავლი. ესე იგი ამ მართკუთხედის ფართობია $(15+1\frac{1}{2})$ კვ.სმ = $16\frac{1}{2}$ კვ.სმ.



ნახ. 22

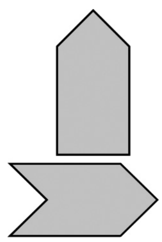
ასევე, აქ დახაზული ნაკვთის ფართობია:

$$12+3\cdot\frac{1}{2}=12+\frac{3}{2}=13\frac{1}{2}\ \text{კვ. სმ.}$$



თუ მართკუთხედის გვერდები გაზომილია სიგრძის რომელიმე ერთეულით, მაშინ ფართობი გაიზომება შესაბამისი დასახელების ერთეულით. გასათვალისწინებელია, რომ ფართობის გამოთვლისას შეიძლება მხოლოდ ერთი და იმავე ერთეულებით გაზომილ სიგრძეთა გამრავლება; მაგალითად, სანტიმეტრების რიცხვის გამრავლება მეტრების რიცხვზე არ შეიძლება. ამგვარ შემთხვევებში საჭიროა გვერდების სიგრძეთა გამოსახვა ერთსა და იმავე საზომ ერთეულებში.

ცხადია, რომ თუ ნაკვთი დაყოფილია რამდენიმე ნაწილად, მაშინ მოცემული ნაკვთის ფართობი შემადგენელი ნაწილების ფართობთა ჯამის ტოლია (როგორც ვიცით, ადიციურობის ეს თვისება არა აქვს პერიმეტრს).

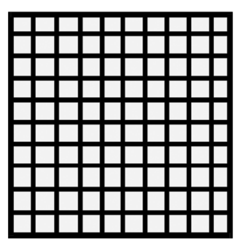


მაგალითად, ამ ხუთკუთხედის ფართობი ტოლია მართკუთხედისა და სამკუთხედის ფართობთა ჯამისა; ხოლო ექვსკუთხედი მიღებულია ამავე ხუთკუთხედისგან იმავე სამკუთხედის ამოჭრით. ამიტომ ექვსკუთხედის ფართობი მართკუთხედის ფართობის ტოლია – მართკუთხედს დაემატა სამკუთხედი და მოაკლდა ასეთივე სამკუთხედი.

რაკი წერტილისა და ხაზის სიგანე ნულის ტოლია, მათში არცერთი, თუნდაც უმცირესი კვადრატი არ მოთავსდება. ამიტომ წერტილისა და ხაზის ფართობი ნულის ტოლია.

ტიპური შეცდომაა, როდესაც სიგრძის ერთეულებს შორის თანაფარდობა პირდაპირ გადააქვთ ფართობის შესაბამის ერთეულებზე. მაგალითად, შეცდომაა:, რომ: 1 კვ.სმ = 10 კვ.მმ.

დავხაზოთ კვადრატი 1 სმ × 1 სმ და ვნახოთ, თუ რამდენი 1 მმ × 1 მმ პატარა კვადრატი მოთავსდება მასში (ნახ. 23). რაკი 1 სმ = 10 მმ, ამიტომ მიიღება პატარა კვადრატების 10 სვეტი. თითოეულ სვეტში 10 მცირე კვადრატია, ესე იგი, პატარა კვადრატები სულ $10\cdot10=100$ ცალია.



ნახ. 23

მაშასადამე: 1 კვ. სმ = 100 კვ. მმ, 1 კვ. მმ = 1/100 კვ. სმ.

საზოგადოდ, თუ სიგრძის ერთი ერთეული 10-ჯერ მეტია მეორეზე, მაშინ ფართობის შესაბამისი ერთეული არა 10-ჯერ, არამედ 100-ჯერ მეტი იქნება, რადგან 10-ის კვადრატი 100-ის ტოლია.

ფართობის სხვადასხვა საზომ ერთეულებს შორის თანაფარდობა გამოსახულია ამ სქემაზე:

1 კვ.მმ $\xrightarrow{:100}$ 1 კვ.სმ $\xrightarrow{:100}$ 1 კვ.დმ $\xrightarrow{:100}$ 1 კვ.მ $\xrightarrow{:100}$ 1 არი $\xrightarrow{:100}$ 1 ჰა $\xrightarrow{:100}$ 1 კვ.კმ

ამ სქემის გამოყენებით ფართობი შეიძლება გამოისახოს სხვა საზომი ერთეულებით, მაგალითად:

67 კვ.კმ $\overset{\cdot 100}{=}$ 6700 ჰა $\overset{\cdot 100}{=}$ 670000 ა $\overset{\cdot 100}{=}$ 67000000 კვ.მ

125 კვ.მმ $\overset{:100}{=}$ 125/100 კვ.სმ = 1,25 კვ.სმ $\overset{:100}{=}$ 0,0125 კვ.დმ

გავრცელებული შეცდომაა ასეთი განმარტება:

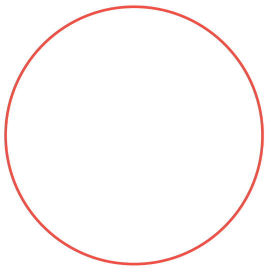
ფიგურის ფართობი ეწოდება სიბრტყის იმ ნაწილს, რომელიც უკავია ამ ფიგურას.

სინამდვილეში კი სიბრტყის ის ნაწილი, რომელიც უკავია ამ ფიგურას – ესაა არა ფართობი, არამედ თვითონ ეს ფიგურა. როგორც ვიცით, პლანიმეტრიული ფიგურა, ანუ ნაკვეთი – ესაა სიბრტყის გარკვეულ წერტილთა სიმრავლე, ანუ სიბრტყის გარკვეული ნაწილი.

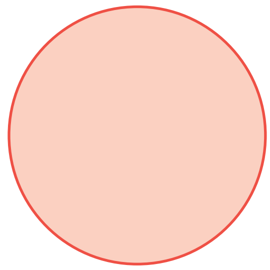
პლანიმეტრიული ფიგურის ფართობი – ამ ფიგურის მიერ სიბრტყეზე დაკავებული ადგილის ზომაა: რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენი ერთეულოვანი კვადრატი მოთავსდება ამ ფიგურაში.

6. წრეწირი და წრე. წრეწირის სიგრძე, წრის ფართობი

წრეწირი არის ფიგურა, რომელიც სიბრტყის ყველა იმ წერტილისგან შედგება, რომ-ლებიც ტოლი მანძილითაა დაშორებული რაიმე წერტილიდან (ცენტრიდან). წრე წრე-წირით შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილს ეწოდება. წრე შეიცავს შიგა არესაც და საზღვარსაც, ხოლო წრეხაზი ანუ წრეწირი წრის საზღვარია.



წრეწირი



წრე

მონაკვეთს, რომელიც წრეწირის ცენტრს აერთებს წრეწირის ნებისმიერ წერტილთან, წრეწირის რადიუსი ეწოდება, ხოლო წრეწირის ორი ნებისმიერი წერტილის შემაერთებ-ელ მონაკვეთს, რომელიც ცენტრზე გაივლის, წრეწირის დიამეტრი ეწოდება. დიამეტრი რადიუსზე 2-ჯერ მეტია. ეს დამოკიდებულება ფორმულით შეიძლება ასე ჩაიწეროს: $d=2r$.

წრეწირი არის ხაზი, მას აქვს სიგრძე. ნებისმიერი წრეწირის სიგრძე თავის დიამეტრზე ერთი და იმავე რიცხვჯერ მეტია; ეს რიცხვი აღინიშნება ბერძნული π (პი) ასოთი, რო-მელიც უსასრულო ათწილადის სახით ჩაიწერება: $\pi=3,14159265....$ აქედან შეიძლება დავწეროთ, რომ წრეწირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით: $C=\pi d=2\pi r$.

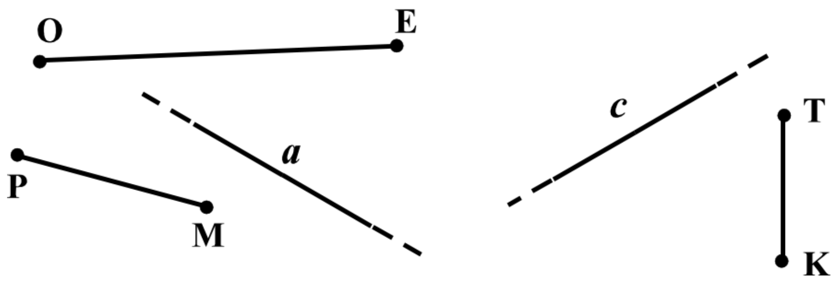
წრეს უჭირავს სიბრტყის ნაწილი, ამიტომ შეიძლება გამოითვალოს მისი ფართობი, შემდეგი ფორმულით: $S=\pi r^2$.

განვიხილოთ ამოცანა. უნდა შეღებონ ცირკის არენის იატაკი, რომელსაც აქვს წრის ფორმა, რადიუსით 20 მ. რამდენი კილოგრამი საღებავია საჭირო, თუ ყოველი კვადრატ-ული მეტრის შეღებვაზე 200 გრამი საღებავი იხარჯება?

პირველ ეტაპზე მოსწავლეები გამოთვლიან, რამდენი კვადრატული მეტრი ადგილი უჭირავს იატაკს. ამისთვის გამოიყენებენ წრის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულას: $S=\pi\cdot 20^2\approx 3,14\cdot 400=1256$ მ². რადგან ყოველი კვადრატული მეტრის შესაღებად 200 გრამი საღებავია საჭირო, ამიტომ სულ დასჭირდებათ 1256 · 200 გ = 251200 გ = 251,2 კგ.

დავალება დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

1. დააკვირდით ნახაზს და გაარკვიეთ, რომელი წინადადებაა მცდარი:



ა) a წრფე და MP მონაკვეთი არ გადაიკვეთება;

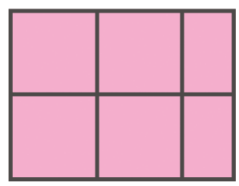
ბ) a წრფე და OE მონაკვეთი გადაიკვეთება;

გ) a წრფე და c წრფე არ გადაიკვეთება;

დ) c წრფე და TK მონაკვეთი არ გადაიკვეთება.

2. რამდენი კვადრატისა და რამდენი მართკუთხედის დანახვაა შესაძლებელი ამ ნახაზზე?

ა) 1, 5; ბ) 4, 13; გ) 5, 21; დ) 5, 18.



3. რომელი წინადადებაა მცდარი?

ა) ყოველი კვადრატი მართკუთხედია;

ბ) ზოგიერთი მართკუთხედი კვადრატია;

გ) ზოგიერთი კვადრატი მართკუთხედია;

დ) ზოგიერთი მართკუთხედი არაა კვადრატი.

4. მოცემული პასუხებიდან შემოხაზეთ სწორი ვარიანტი და შეავსეთ გამოტოვებული სიტყვები, ისე რომ მიიღოთ მართებული წინადადებები:

. . . მართკუთხედი არის ოთხკუთხედი.

მხოლოდ . . . ოთხკუთხედი არის მართკუთხედი.

. . . ოთხკუთხედი არ არის მართკუთხედი.

ა) ერთადერთი, ზოგჯერ, არც ერთი;

ბ) ყოველი, ზოგიერთი, ყოველი;

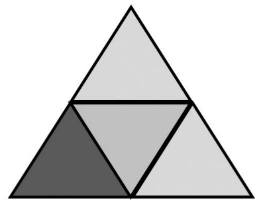
გ) ერთერთი, ზოგიერთი, ზოგიერთი;

დ) ყოველი, ზოგიერთი, ზოგიერთი.

5. 697 კმ^2 = ... მ^2

ა) 69700; ბ) 697000000; გ) 697000; დ) 69700000.

6. ტოლგვერდა სამკუთხედი დაყოფილია 4 ტოლგვერდა სამკუთხედად. რამდენჯერ მეტია მოცემული ტოლგვერდა სამკუთხედის პერიმეტრი დაყოფის შედეგად მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრზე?



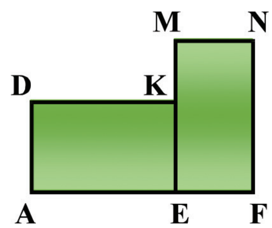
ა) 2-ჯერ; ბ) 3-ჯერ; გ) 4-ჯერ; დ) 6-ჯერ.

7. კვადრატული ფორმის ნაკვეთი, რომლის სიგრძეა 2 კმ, დაყვეს ტოლ, მართკუთხედის ფორმის, პატარა ნაკვეთებად, რომელთა სიგრძეა 250 მ, ხოლო სიგანე – 200 მ. სულ რამდენი პატარა ნაკვეთი მიიღეს?

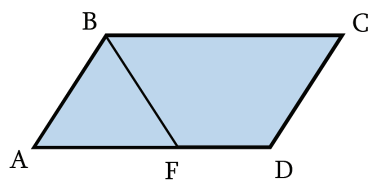
ა) 80; ბ) 6; გ) 40; დ) 18.

8. მართკუთხედის სიგრძე ხუთჯერ მეტია, ვიდრე სიგანე. გაარკვიეთ, რამდენჯერ მეტია მართკუთხედის პერიმეტრი სიგანეზე?

9. რამდენი მეტრის ტოლია ნახაზზე მოცემული ექვსკუთხედის პერიმეტრი, თუ FN მონაკვეთის სიგრძეა 7 მეტრი, ხოლო AF-ის – 9 მეტრი.



10. *ABCD* პარალელოგრამის *B* წვეროსა და *AD* გვერდის შუაწერტილის შემაერთებელი *BF* მონაკვეთით პარალელოგრამი დაყოფილია ტოლგვერდა სამკუთხედად და ოთხკუთხედად. იპოვეთ დაყოფის შედეგად მიღებული ტოლგვერდა სამკუთხედის და ოთხკუთხედის პერიმეტრების შეფარდება.

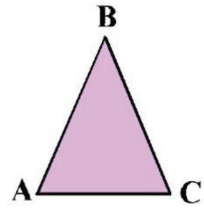


11. კვადრატის გვერდის სიგრძე მართკუთხედის სიგანის ტოლია. კვადრატის ფართობი ისე შეეფარდება მართკუთხედის ფართობს, როგორც 3:7. იპოვეთ კვადრატის და მართკუთხედის პერიმეტრების შეფარდება.

12. წესიერი ხუთკუთხედის პერიმეტრი 120 სმ-ია. იპოვე იმ წესიერი რვაკუთხედის პერიმეტრი, რომლის გვერდის სიგრძე ხუთკუთხედის გვერდის სიგრძის ტოლია.

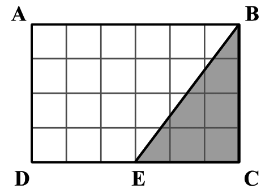
13. შენობის რესტავრაციის დროს წრიული დარბაზის იატაკი ქვის ფილებით მოაპირკეთეს. რამდენი კვადრატული მეტრი ფილა დაიხარჯა, თუ დარბაზის იატაკის შიდა დიამეტრი 5მ-ია?

შემაჯამებელი ტესტები.



1. ABC ტოლფერდა სამკუთხედის BC ფერდის სიგრძე 8 სმ-ით მეტია AC ფუძის სიგრძეზე. სამკუთხედის პერიმეტრი 25 სმ-ის ტოლია. რისი ტოლია ამ სამკუთხედის ფუძის სიგრძე?

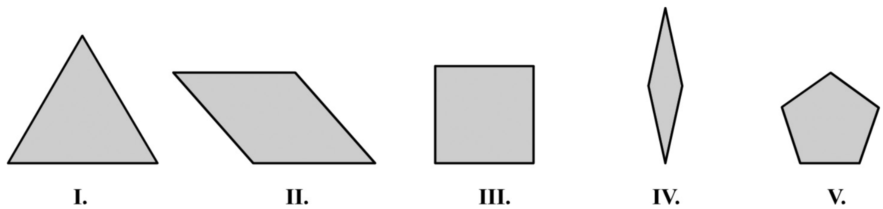
(ა) 12 სმ; (ბ) 6 სმ; (გ) 9 სმ; (დ) 3 სმ.



2. ABCD მართკუთხედის B წვერო CD გვერდის E შუაწერტილთან მონაკვეთითაა შეერთებული. რის ტოლია ABCD მართკუთხედის ფართობი, თუ BEC სამკუთხედის ფართობი 24 სმ^2-ის ტოლია?

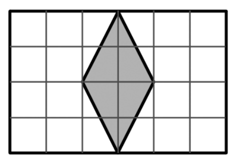
(ა) 56 სმ^2-ის; (ბ) 64 სმ^2-ის; (გ) 72 სმ^2-ის; (დ) 96 სმ^2-ის.

3. ნახაზზე მოცემულია ტოლგვერდებიანი მრავალკუთხედები. მათგან რომბია:



(ა) I, II და IV; (ბ) I, III და V; (გ) II, III და IV; (დ) II, IV და V.

4. მართკუთხედის სიგრძე 3-ჯერ მეტია, ვიდრე სიგანე. რის ტოლია ამ მართკუთხედის მოკლე გვერდის სიგრძის შეფარდება პერიმეტრთან?

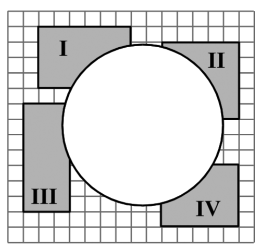


5. მართკუთხედი დაყოფილია ტოლ უჯრებად. გამუქებული ოთხკუთხედის წვეროები უჯრების წვეროებს ემთხვევა (იხ. ნახაზი). რამდენჯერ ნაკლებია გამუქებული ოთხკუთხედის ფართობი მართკუთხედის ფართობზე?

(ა) 6-ჯერ; (ბ) 5,5-ჯერ; (გ) 5-ჯერ; (დ) 4,5-ჯერ.

6. დუიმი სიგრძის საზომი ისეთი ერთეულია, რომ 1 დუიმი ტოლია 25 მმ-ის. რამდენი კვადრატული სანტიმეტრის ტოლია იმ მართკუთხედის ფართობი, რომლის სიგრძეა 6 დუიმი, ხოლო სიგანე – 8 დუიმი?

(ა) 48 სმ^2; (ბ) 150 სმ^2; (გ) 200 სმ^2; (დ) 300 სმ^2.



7. ტოლუჯრებიან ბადეზე მოცემულია 4 მართკუთხედი, რომელთა ნაწილები დაფარულია წრით (იხ. ნახაზი). რომელ მართკუთხედს აქვს ყველაზე მეტი ფართობი?

(ა) I-ს; (ბ) II-ს; (გ) III-ს; (დ) IV-ს.

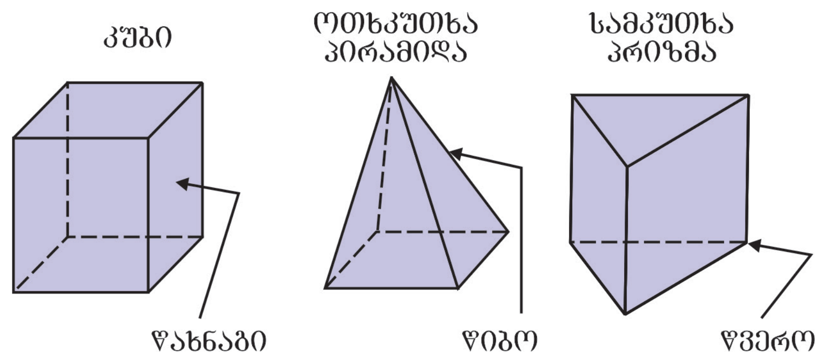
თავი 9. გეომეტრია სივრცეში

1. მრავალწახნაგა. წვერო, წიბო, წახნაგი

პლანიმეტრია არის გეომეტრიის ის ნაწილი, რომელიც სიბრტყეში მდებარე ფიგურებს შეისწავლის, სტერეომეტრია კი – რომელიც სივრცეში მდებარე ფიგურებს შეისწავლის. ყოველი ნაკვთი სიბრტყის წერტილების გარკვეული სიმრავლეა, ხოლო ყოველი **გეომეტრიული** (სტერეომეტრიული) **სხეული** – სივრცის წერტილთა გარკვეული სიმრავლე. სხეული, ისევე როგორც ნაკვთი, შედგება შიგა არესა და საზღვრისგან, ანუ სივრცის ისეთი ნაწილია, რომელიც არაა გაწყვეტილი და რომელსაც ეკუთვნის თავისივე საზღვარი. გეომეტრიული სხეულის საზღვარს ამ სხეულის **ზედაპირი** ეწოდება. მაგალითად, ბირთვის ზედაპირია სფერო.

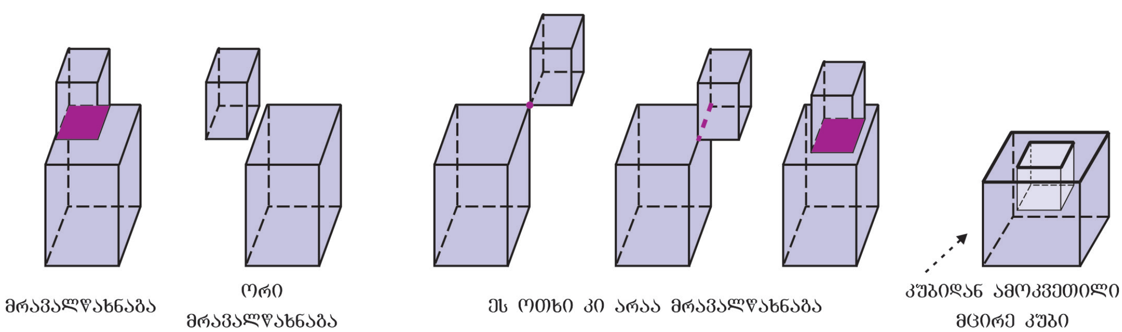
განვიხილოთ გეომეტრიული სხეულები, რომელთა ზედაპირი მხოლოდ მრავალკუთხედებისგან შედგება. მათ შორის გამოირჩევა **მრავალწახნაგები –** პარალელეპიპედი, პრიზმა, პირამიდა.

ამგვარად, მრავალწახნაგას ზედაპირი არის მრავალკუთხედების გაერთიანება. თითოეულ მრავალკუთხედს ამ მრავალწახნაგას **წახნაგი** ეწოდება, მრავალწახნაგას ორი მეზობელი წახნაგის საერთო მონაკვეთს – **წიბო,** ხოლო სამი მეზობელი წიბოს საერთო წერტილს – **წვერო** (იხ. ნახ.1)



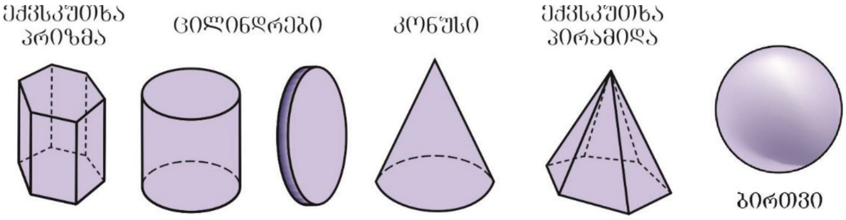
ნახ.1

მეორე ნახაზზე განხილული მაგალითებიდან ჩანს, რომ მრავალკუთხედების ნებისმიერი ერთობლიობა არ ქმნის მრავალწახნაგას ზედაპირს. თუ ერთ კუბზე დადგმულია მეორე, მცირე კუბი, მიღებული სხეული იქნება თუ არა მრავალწახნაგა? თუ მცირე კუბის ორი წიბო დიდი კუბის ორ წიბოზეა ზუსტად მოთავსებული, მაშინ მიღებული სხეული მრავალწახნაგაა; სხვა შემთხვევებში კი – არა.



ნახ.2

მე-3 ნახაზზე მოცემულია ზოგი სტერეომეტრიული სხეულის მოდელი.



ნახ.3

განვიხილოთ სამკუთხა პრიზმა, რომელიც პირველ ნახაზზეა გამოსახული. მისი წახნაგებისა და წვეროების რაოდენობათა ჯამია 5+6=11. წიბოების რაოდენობა, რომელიც 9-ის ტოლია, 2-ით ნაკლებია წახნაგებისა და წვეროების რაოდენობათა ჯამზე. იმავე ნახაზზე გამოსახულია ოთხკუთხა პირამიდა, რომლის წახნაგებისა და წვეროების რაოდენობათა ჯამია 5+5=10, ხოლო წიბოების რაოდენობაა 8, ამ შემთხვევაშიც წახნაგებისა და წვეროების რიცხვთა ჯამი 2-ით მეტია წიბოების რიცხვზე. გამოჩენილმა შვეიცარიელმა მათემატიკოსმა ლეონარდ ეილერმა (XVIII ს) აღმოაჩინა, რომ აღნიშნული კანონზომიერება მართებულია ნებისმიერი მრავალწახნაგასთვის, რომელიც არ არის „გახვრეტილი“:

მრავალწახნაგას წახნაგებისა და წვეროების რაოდენობების ჯამს გამოკლებული წიბოების რიცხვი უდრის 2-ს.

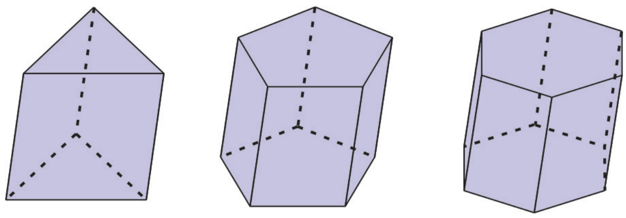
წვეროების, წიბოებისა და წახნაგების რაოდენობებისთვის ხშირად იყენებენ აღნიშვნებს – *a, r, f*, რომელიც გამომდინარეობს მათი ინგლისური დასახელებიდან: წვერო – *apex*, წიბო – *rib*, წახნაგი – *fase*. ამ სიმბოლოების გამოყენებით აღნიშნული კანონზომიერება ჩაიწერება ტოლობის სახით:

$$a + f - r = 2,$$

რომელსაც ეწოდება **ეილერის** ფორმულა მრავალწახნაგებისათვის.

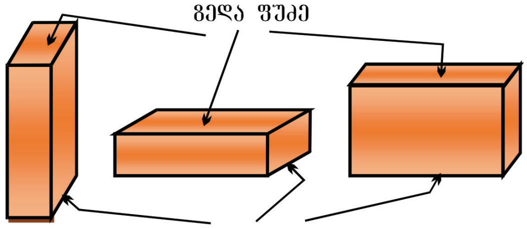
2. პრიზმა, პირამიდა, კონუსი, ბირთვი

პრიზმა არის მრავალწახნაგა, რომლის წახნაგები პარალელოგრამებია. პრიზმის ზედაპირის შემადგენელ მრავალკუთხედს მისი ფუძე, პარალელოგრამებს კი – გვერდითი წახნაგები ეწოდება. აქ განხილული იქნება მხოლოდ ისეთი პრიზმები, რომელთა გვერდითი წახნაგები მართკუთხედებია. პრიზმის სახელწოდება გამომდინარეობს ფუძეებიდან. თუ ფუძეა სამკუთხედი, მაშინ პრიზმას სამკუთხა ეწოდება, თუ ფუძედ აქვს ოთხკუთხედი – ოთხკუთხა და ა.შ. მაგალითად,



ნახ. 4

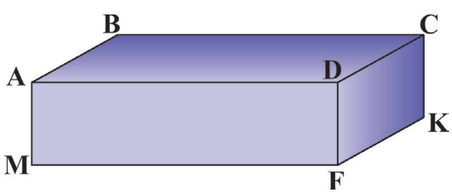
პრიზმას, რომლის ყველა წახნაგი მართკუთხედია, მართკუთხა პარალელეპიპედი ეწოდება. მაგალითად, მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა აქვს აგურს, ასანთის კოლოფს, მაცივარს და სხვ. მართკუთხა პარალელეპიპედის ზედაპირი ექვსი მართკუთხედისაგან შედგება. (ნახ. 5)



ნახ. 5

მართკუთხედის დასახაზად საჭიროა მეზობელი გვერდების სიგრძეების ცოდნა, ანუ მართკუთხედის სრულად დასახასიათებლად საკმარისია 2 სიდიდის – სიგრძისა და სიგანის – ცოდნა. ამიტომაა მართკუთხედის მოკლე აღნიშვნაშიც მხოლოდ 2 სიდიდე. მაგალითად, ჩანაწერით 5 სმ × 1 სმ აღინიშნება მართკუთხედი, რომლის მეზობელი გვერდების სიგრძეებია 5 სმ და 1 სმ.

მართკუთხა პარალელეპიპედს აქვს 12 წიბო. აქედან ოთხ-ოთხი წიბოა ერთმანეთის ტოლი. ამიტომ, მას მხოლოდ სამი განსხვავებული სიგრძის წიბო შეიძლება ჰქონდეს. მართკუთხა პარალელეპიპედის თითოეულ წვეროში სწორედ სამ-სამი ასეთი წიბო ერთდება: ისინი მეზობელი წიბოებია. მაგალითად, D წვეროში ერთდება განსხვავებული სიგრძის მქონე სამი წიბო: *DA, DC* და *DF.* (ნახ. 6)



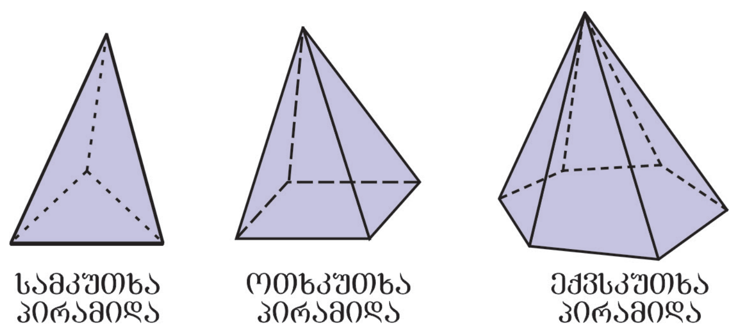
ნახ. 6

მართკუთხა პარალელეპიპიდის სრულად დასახასიათებლად 3 სიდიდეა საჭირო. ზოგჯერ ამ სიდიდეებს მართკუთხა პარალელეპიპიდის სიგრძეს, სიგანეს და სიმაღლეს უწოდებენ. მართკუთხა პარალელეპიპიდი, რომლის მეზობელი გვერდების სიგრძეებია 5 სმ, 1 სმ და 14 სმ, მოკლე აღნიშვნით ასე შეიძლება ჩავწეროთ: 5 სმ × 1 სმ × 14 სმ.

თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის სამივე ზომა, ანუ სიგრძე, სიგანე და სიმაღლე, ერთმანეთის ტოლია, მაშინ მიიღება კუბი.

n -კუთხა პრიზმის წვეროთა რაოდენობაა $2n$, წიბოთა რაოდენობა – $3n$, ხოლო წახნაგებისა კი – $n+2$. მაგალითად, მართკუთხა პარალელეპიპიდს აქვს 8 წვერო, 12 წიბო და 6 წახნაგი.

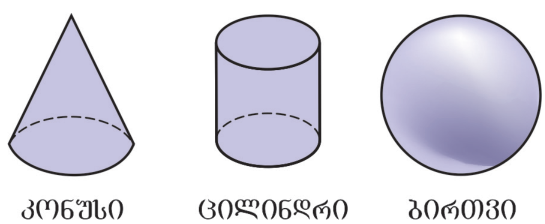
კიდევ ერთი სივრცითი გეომეტრიული ფიგურაა პირამიდა. როგორც პრიზმის, პირამიდის სახელწოდებაც დაკავშირებულია მის ფუძესთან. თუ პირამიდის ფუძეა სამკუთხედი, მაშინ პირამიდა სამკუთხაა, თუ ფუძეშია ოთხკუთხედი, პირამიდა ოთხკუთხაა და ა.შ.



ნახ. 7

საზოგადოდ, n -კუთხა პირამიდის წვეროთა რაოდენობაა $n+1$, წახნაგების – $n+1$, ხოლო წიბოები კი – $2n$. მაგალითად, ექვსკუთხა პირამიდას აქვს 7 წვერო, 7 წახნაგი და 12 წიბო.

კონუსი, ცილინდრი და ბირთვი სტერეომეტრიული სხეულებია, მაგრამ არც ერთი მათგანი მრავალწახნაგა არ არის.

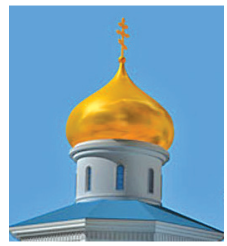


ნახ. 8

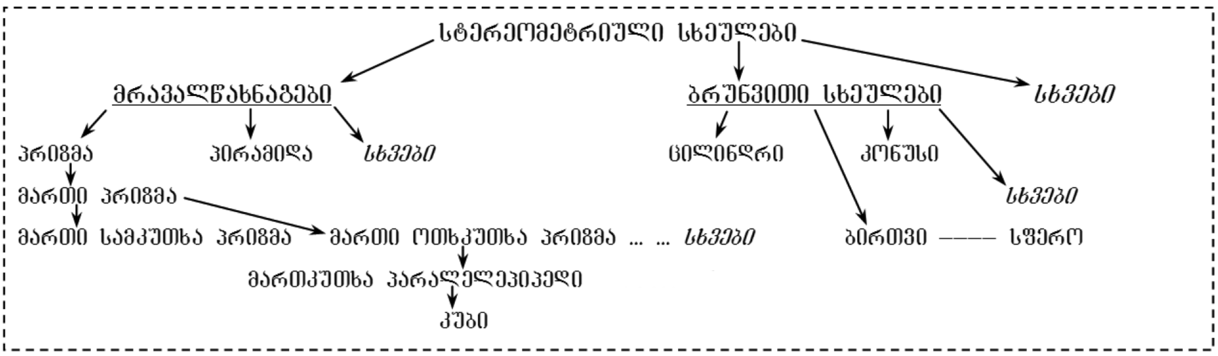
კონუსს აქვს ერთი ფუძე და ერთი წვერო. მისი ფუძე წრეა. კონუსის ფორმა აქვს ზოგიერთ ნაყინს, სანტა-კლაუსის ქუდს, ტაძრის გუმბათს.

ცილინდრს აქვს ორი ფუძე. მისი ფუძეები წრეებია. ცილინდრის ფორმა აქვს კონსერვის ქილას, დოლს, ტაძრის გუმბათის ყელს.





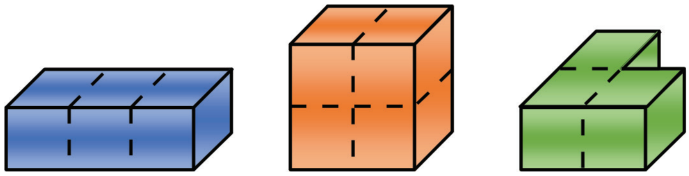
ბირთვი განსაკუთრებული გეომეტრიული ფიგურაა იმ აზრით, რომ მას გვერდითი ზედაპირი არ აქვს გამოკვეთილი. ბირთვის ფორმა აქვს ბურთს, ზოგიერთ ხილს.



3. მოცულობა. მოცულობის ერთეულები

სტერეომეტრიული ფიგურები შეიძლება შეადარონ ერთმანეთს **მოცულობის** მიხედვით.

მოცულობა არის ფიგურის მიერ დაკავებული სივრცის ნაწილის ზომაა. მაგალითად, ნახ. 9-ზე მოცემული სხეულებიდან სივრცეში ყველაზე მეტ ადგილს იკავებს მეორე სხეული. მესამე სხეული ფორმით განსხვავდება პირველი სხეულისაგან, მაგრამ ისიც იმდენივე ადგილს იკავებს სივრცეში, რამდენსაც პირველი სხეული.

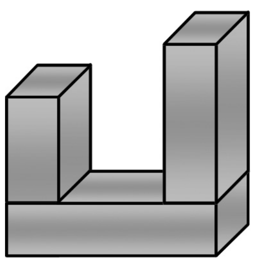


ნახ. 9

როცა სურთ, აღნიშნონ, რომ ერთი სხეული მეორესთან შედარებით უფრო მეტ (ან ის-ეთივე) ადგილს იკავებს სივრცეში, მათემატიკაში ამბობენ, რომ ერთი სხეულის მოცუ-ლობა მეტია (ან ტოლია) მეორე სხეულის მოცულობაზე. მაგალითად, ამბობენ, რომ ნახ. 9-ზე მოცემული სხეულებიდან ყველაზე დიდი მოცულობა აქვს მეორე სხეულს, პირველ და მესამე სხეულებს კი ტოლი მოცულობები აქვთ.

ერთმანეთის ტოლი სხეულები ტოლ ადგილებს იკავებს სივრცეში, ამიტომ ტოლ სხე-ულებს მოცულობებიც ტოლი აქვთ. მაგრამ ერთმანეთისგან განსხვავებულ სხეულებ-საც შეიძლება ტოლი მოცულობები ჰქონდეს. მაგალითად, ნახ. 9-ზე პირველი სხეული მართკუთხა პარალელეპიპედია, მესამე – არა, მაგრამ მათი მოცულობები მაინც ტო-ლია.

თუ ერთი სხეული მიღებულია მეორე და მესამე სხეულების გაერთიანებით, მაშინ პირ-ველი სხეულის მოცულობა ტოლი იქნება მეორე და მესამე სხეულების მოცულობათა ჯამის.



ნახ. 10

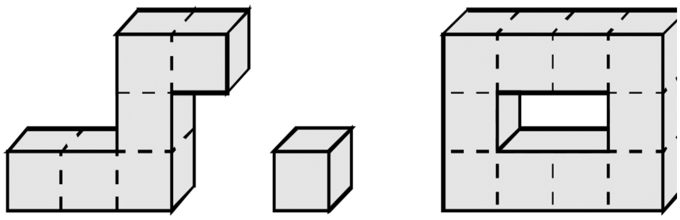
ასევეა რამდენიმე სხეულის გაერთიანების შემთხვევაშიც. მაგალითად, ნახ. 10-ზე მოცემული სხეული მიიღება სამი პარალელეპიპედის გაერთიანებით. ამიტომ, მისი მოცულობა ამ სამი მართკუთხა პარალელეპიპედების მოცულობათა ჯამის ტოლია. ამრიგად, თუ ფიგურა შედგება რამდენიმე ნაწილისაგან, მაშინ ფიგურის მოცულობა მისი შემადგენელი ნაწილების მოცულობათა ჯამის ტოლია.

ამრიგად, ყოველ სხეულს აქვს მოცულობა. ტოლ სხეულებს ტოლი მოცულობა აქვთ.

მაგრამ ტოლი მოცულობა შეიძლება ჰქონდეს განსხვავებულ სხეულებსაც.

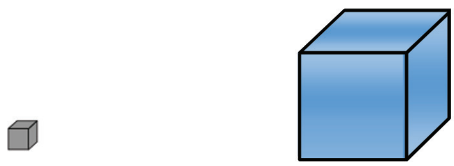
სხეულის მოცულობის გასაზომად, ისევე როგორც ფართობის გაზომვისას, საჭიროა შეირჩეს მოცულობის ერთეული. ამისათვის უნდა შეირჩეს რაიმე სხეული, რომელიც გამოიყენება მოცულობის ერთეულად. რამდენი ასეთი სხეულიც „მოთავსდება" გასაზომ სხეულში, იმდენი იქნება მისი მოცულობა. ცხადია, მოცულობის ერთეულად უმჯობესია ისეთი ფორმის სხეულის შერჩევა, რომ შეიძლებოდეს მისი ტოლი სხეულების ერთმანეთზე მჭიდროდ მიწყობა.

მოცულობის ერთეულად შევარჩიოთ, მაგალითად, ნახ. 11-ზე მოცემული მეორე სხეული – კუბი. მაშასადამე, ცხადია, პირველი სხეულის მოცულობა იქნება 6 კუბის მოცულობის ტოლი, ხოლო მესამესი – 10 კუბის მოცულობის ტოლი.



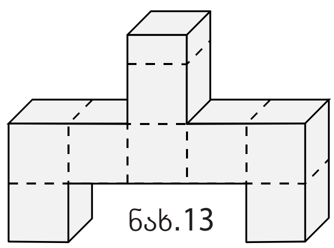
ნახ.11

ისევე, როგორც მანძილისა თუ ფართობის ზომვისას, ძალიან მცირე, დიდ ან ძალიან დიდ მოცულობათა გასაზომად მოსახერხებელია რამდენიმე განსხვავებული საზომი ერთეულის გამოყენება. ყველაზე მოსახერხებელია ისეთი კუბები, რომელთა წიბოების სიგრძე ემთხვევა სიგრძის ერთეულს. მოცულობის საზომად მიღებულია კუბი, რომლის წიბოს სიგრძე სიგრძის ერთეულის ტოლია. კუბს, რომლის წიბოს სიგრძე ერთი სანტიმეტრის ტოლია, კუბური სანტიმეტრი ეწოდება და შემოკლებით იწერება: 1სმ^3, ხოლო კუბს, რომლის წიბოს სიგრძე ერთი მილიმეტრის ტოლია, კუბური მილიმეტრი ეწოდება და შემოკლებით იწერება: 1 მმ^3. ნახ. 12-ზე მოცემულია ასეთი კუბები.



1 მმ × **1** მმ × **1** მმ   **1** სმ × **1** სმ × **1** სმ

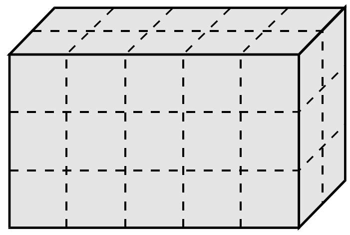
ნახ.12



ნახ.13

გგასაზომი სხეულის მოცულობა ტოლია ერთეულოვანი კუბების იმ რიცხვისა, რამდენიც „მოთავსდება" ამ სხეულში. მაგალითად, აქ დახაზული სხეულის მოცულობაა $8\frac{1}{2}$ კუბური სმ ანუ $8\frac{1}{2}$ სმ^3.

ეს რიცხვი გვიჩვენებს, თუ რისი ტოლია ამ სხეულის მიერ სივრცეში დაკავებული ადგილის ზომა, ანუ მოცულობა V.


ნახ.14

სხეულებს შორის ყველაზე ადვილია მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობის გამოთვლა (ნახ.14). ვთქვათ, მართკუთხა პარალელეპიპედის ზომებია 5 სმ × 2 სმ × 3 სმ. მასში ერთეულოვანი კუბები დალაგდება 3 ფენად, რომელთაგანაც თითოეულში 5 მწკრივი და 2 რიგია. ესე იგი, კუბების რაოდენობა იქნება $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$. ამიტომ ამ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობაა 30 სმ^3.

ამგვარად, მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა მისი განზომილებების – სიგრძის, სიგანისა და სიმაღლის – ნამრავლის ტოლია.

თუ წიბოების სიგრძეები გაზომილია სიგრძის რომელიმე ერთეულით, მაშინ მოცულობა გაიზომება შესაბამისი დასახელების ერთეულით. გასათვალისწინებელია, რომ მოცულობის გამოთვლისას შეიძლება მხოლოდ ერთი და იმავე ერთეულებით გაზომილი წიბოების სიგრძეთა გამრავლება; მაგალითად, სანტიმეტრების რიცხვის გამრავლება მეტრების რიცხვზე არ შეიძლება. ამგვარ შემთხვევებში საჭიროა გვერდების სიგრძეთა გამოსახვა ერთსა და იმავე საზომ ერთეულებში.

მაგალითად, თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია 2 სმ, 3 მმ და $\frac{1}{5}$ სმ, მოცულობის გამოსათვლელად ყველა სიდიდე უნდა ჩაიწეროს ერთნაირ ერთეულში, ვთქვათ, მილიმეტრებში. 2 სმ = 20 მმ და $\frac{1}{5}$ სმ = 2 მმ. შესაბამისად, მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობაა: $20 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ მმ^2.

კუბური სანტიმეტრის და კუბური მილიმეტრის გარდა მოცულობის გასაზომად გამოიყენება კუბური დეციმეტრი და კუბური მეტრი.

1 დმ^3 = 10 სმ×X10 სმ X×10 სმ = 1000 სმ^3

1 მ^3 = 10 დმ×X10 დმ X×10 დმ = 1000 დმ^3

ტიპური შეცდომაა, როდესაც სიგრძის ერთეულებს შორის თანაფარდობა პირდაპირ გადააქვთ მოცულობის შესაბამის ერთეულებზე. მაგალითად, შეცდომაა: 1 კუბ.სმ = 10 კუბ.მმ. სინამდვილეში კი 1 სმ × 1 სმ × 1 სმ კუბში მოთავსდება 1000 ცალი მცირე კუბი.

ამიტომ, 1 კუბ. სმ = 1000 კუბ. მმ, 1 კუბ. მმ = 1/1000 კუბ. სმ.

საზოგადოდ, თუ სიგრძის ერთი ერთეული 10-ჯერ მეტია მეორეზე, მაშინ მოცულობის შესაბამისი ერთეული არა 10-ჯერ, არამედ 1000-ჯერ მეტი იქნება.

მოცულობის სხვადასხვა საზომ ერთეულებს შორის თანაფარდობა გამოსახულია ამ სქემაზე:

1 კუბ.მმ $\xrightarrow{:1000}$ 1 კუბ.სმ $\xrightarrow{:1000}$ 1 კუბ.დმ / 1 ლიტრი $\xrightarrow{:1000}$ 1 კუბ.მ

სტერეომეტრიული სხეულის მოცულობა – ამ სხეულის მიერ სივრცეში დაკავებული ადგილის ზომაა: რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენი ერთეულოვანი კუბი მოთავსდება ამ სხეულში.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ხაზისა თუ ნაკვთის მოცულობა 0-ის ტოლია.

4. ტევადობა. ტევადობის ერთეულები

პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება ისეთი სიდიდე, როგორიცაა ტევადობა. ტევადობას იყენებენ თხევადი და ფხვიერი ნივთიერებების – წყლის, რძის, ფქვილის და მისთ. რაოდენობის გასაზომად. ჭურჭლის ტევადობა აჩვენებს, თუ რა მოცულობის სითხე ეტევა ამ ჭურჭელში.

შეიძლება ითქვას, რომ ჭურჭლის ტევადობა – ესაა ჭურჭლის შიგა მოცულობა; ხოლო ამავე ჭურჭლის გარე მოცულობა – ესაა ჭურჭლის მოცულობა მისი კედლების ჩათვლით. შეიძლება დაიწეროს, რომ

გარე მოცულობა = ტევადობა + ჭურჭლის კედლების საერთო მოცულობა

ტევადობა = გარე მოცულობა – ჭურჭლის კედლების საერთო მოცულობა

შიგა და გარე ზომები აქვს აგრეთვე ყუთებს, კარადებს, მილებს და საზოგადოდ, ყველა ნივთს, რომელიც შიგნიდან ღრუიანია.

ტევადობის გაზომვა შეიძლება მოცულობის ერთეულებით (მ^3, სმ^3 და სხვა), თუმცა ტევადობის ძირითადი ერთეულია დმ^3, რომელსაც ჰქვია ლიტრი. შემოკლებით იწერება 1ლ.

1 ლ = 1 დმ^3 = 1000 სმ^3

1 მილილიტრი = 1 მლ = 1/1000 ლიტრი = 1 სმ^3 .

სითხეს (წყალს, ღვინოს, ზეთს, ნავთს, საღებავს, თაფლს...) და ფხვიერ ნივთიერებას (ფქვილს, მარცვლეულს, შაქრის ფხვნილს, ქვიშას, კირს...) არა აქვს საკუთარი ფორმა. სითხე და ფხვნილი იმ ჭურჭლის ფორმას იღებს, რომელშიცაა მოთავსებული. ამიტომ, რაიმე რაოდენობის სითხის ან ფხვნილის მოცულობის გასაზომად, ის უნდა გაიზომოს ჭურჭელით, რომლის ტევადობა ცნობილია. მაგალითად, თუ ღვინომ ექვსჯერ შეავსო 3 ლიტრი ტევადობის მქონე ხელადა და მეშვიდე ჩასხმისას ხელადა სანახევროდ აავსო, მაშინ ღვინის ამ რაოდენობის მოცულობა ყოფილა:

$6\frac{1}{2}\cdot 3 = 19\frac{1}{2}$ ლ.

წონის ერთეულები ისეა შერჩეული, რომ 1 ლიტრი წყალი იწონის ზუსტად 1 კილოგრამს, 1 მ^3 წყალი იწონის 1 ტონას, ხოლო 1 მილილიტრი წყალი იწონის 1 გრამს.

გეომეტრიული ფიგურების ფართობისა და მოცულობის ცნებების გასააზრებლად, მათი პრაქტიკული გამოყენების საჩვენებლად მასწავლებელმა შეიძლება განიხილოს ამოცანა:

დადგენილი ნორმების მიხედვით, საკლასო ოთახი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ კრიტერიუმებს: ოთახში თითოეულ მოსწავლეზე უნდა მოდიოდეს ფანჯრების ფართობი – არანაკლებ 0,3 მ^2, იატაკის ფართობი – 1,5 მ^2-ზე მეტი, მოცულობა – 4 მ^3-ზე მეტი. ჩაატარეთ საჭირო გაზომვები რომელიმე საკლასო ოთახში, რომელშიც იმყოფება 20 მოსწავლე, და გაარკვიეთ, დაცულია თუ არა ეს ნორმები.

გაზომვის შედეგად მოსწავლეებმა მიიღეს: სიგრძე 7 მ, სიგანე 6 მ, სიმაღლე 3 მ და 2 ფანჯარა, რომელთა გვერდებია 1,2 მ და 1,5 მ. მიღებული შედეგებით გამოთვლიან იატაკის ფართობს: $S = 7 \cdot 6 = 42$ მ^2 და მოცულობას: $V = 6 \cdot 7 \cdot 3 = 126$ მ^3. ფანჯრების ფართობია: $S = 1{,}2 \cdot 1{,}5 \cdot 2 = 3{,}6$ მ^2. მიღებულ სიდიდეებს გაყოფენ მოსწავლეთა რაოდენობაზე და შეადარებენ დადგენილ ნორმებს. იატაკი $42 : 20 = 2{,}1$ მ^2; $126 : 20 = 6{,}3$ მ^3; $3{,}6 : 20 = 0{,}18$ მ^2. აღმოჩნდა, რომ დარღვეულია მხოლოდ ფანჯრის ფართობის ნორმები.

დავალება დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. გაარკვიეთ, შეიძლება თუ არა, რომ მართკუთხედები 5 სმ × 2 სმ, 2 სმ × 9 სმ და 9 სმ × 7 სმ იყოს ერთი და იმავე მართკუთხა პარალელეპიპედის წახნაგები. თუ შეუძლებელია, შეასწორეთ რომელიმე მართკუთხედის გვერდები ისე, რომ ეს მართკუთხედები მართკუთხა პარალელეპიპედის წახნაგები იყოს.

2. კუბის ერთი წახნაგის ფართობი 16 $მ^2$-ია. რას უდრის კუბის მოცულობა?

3. ოთახის სიგრძე 5მ-ია, სიგანე – 3მ, სიმაღლე – 2,8მ. რამდენი ლიტრი საღებავია საჭირო ოთახის კედლების შესაღებად, თუ 1$მ^2$ ფართობზე საჭიროა 0,5 ლ საღებავი, ხოლო ფანჯრებისა და კარების ფართობთა ჯამი 6$მ^2$-ია?

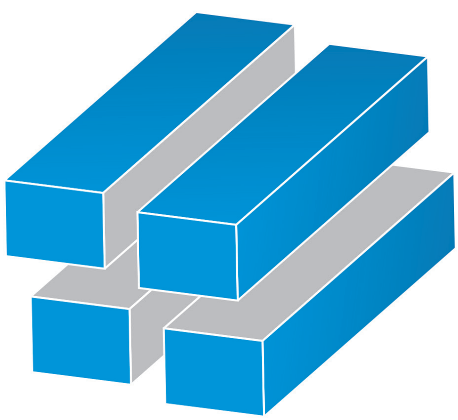
4. ხის ძელის ზომებია 30დმ, 2დმ, 2დმ. გამოთვალეთ ამ ძელის მასა, თუ ერთი კუბური დეციმეტრი ხის მასა 800გ-ს უდრის.

5. პირამიდის წახნაგების რაოდენობა 8-ით ნაკლებია პირამიდის წიბოების რაოდენობაზე. იპოვეთ წვეროთა რაოდენობა.

6. 6 ერთნაირი კოლოფით ააწყვეს 1დმ სიგრძის წიბოს მქონე კუბის ფორმის სხეული. რამდენი ასეთი კოლოფია საჭირო 3 დმ სიგრძის წიბოს მქონე კუბის ფორმის სხეულის ასაწყობად?

7. მართკუთხა პარალელეპიპედის სიმაღლე 3 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფუძის სიგრძე 5სმ-ით მეტია სიგანეზე. როგორ შეიცვლება მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ ფუძის სიგრძე შემცირდება 1სმ-ით, სიგანე გადიდდება 1სმ-ით, ხოლო სიმაღლე დარჩება უცვლელი?

8. მართკუთხა პარალელეპიპედის ყველა წახნაგი შეღებეს ლურჯად, შემდეგ კი გაჭრეს ოთხ ტოლ ნაწილად, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები.



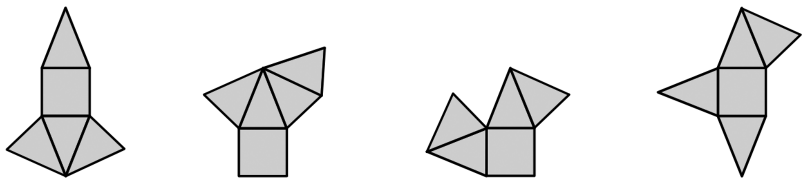
I. რამდენი შეუღებავი წახნაგი ექნება ოთხივე პატარა მართკუთხა პარალელეპიპედს ერთად?

II. რამდენი ლურჯი წახნაგი ექნება ყველას ერთად?

9. ოთხკუთხა პირამიდის ყველა წიბო ტოლია და მათი სიგრძეთა ჯამი 40 სმ-ია. იპოვეთ გვერდითი წახნაგის პერიმეტრი.

10. მართკუთხედის ფორმის მოედანი, რომლის ზომებია 15 მ და 20 მ, დაფარულია 5დმ სიმაღლის თოვლის საფარით. მის გასაწმენდად რამდენი რეისი უნდა შეასრულოს თვითმცლელმა, რომლის ტვირთმზიდაობა 20 ტ-ა, თუ 1დმ^3 თოვლის მასა 850 გ-ია..

11. ნახაზზე მოცემულია 4 ფიგურა:



ამ ფიგურებიდან რომელი **<u>არ არის</u>** ოთხკუთხა პირამიდის შლილი?

(ა) I (ბ) II (გ) III (დ) IV

შემაჯამებელი ტესტი

1. მოცემული მიმდევრობებიდან აარჩიეთ ის, რომელიც შედგენილია პრინციპით: ზოგადი → კერძო.

ა) მართი პრიზმა → მართი რვაკუთხა პრიზმა → კუბი → მართკუთხა პარალელეპიპედი

ბ) მართი პრიზმა → მართი ოთხკუთხა პრიზმა → მართკუთხა პარალელეპიპედი → კუბი

გ) კუბი → მართკუთხა პარალელეპიპედი → მართი ოთხკუთხა პრიზმა → მართი რვაკუთხა პრიზმა

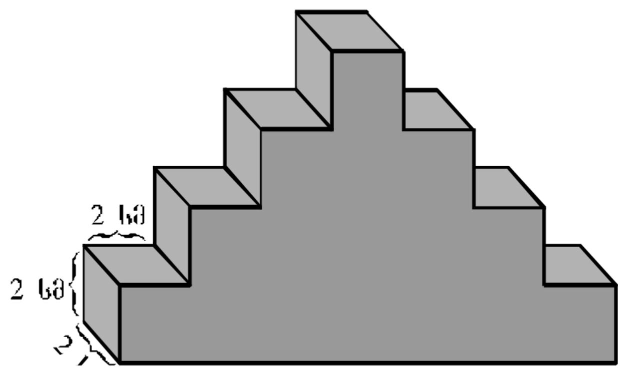
დ) კუბი → მართი პრიზმა → მართი ოთხკუთხა პრიზმა → მართკუთხა პარალელეპიპედი

2. ცხრილში მოცემული რომელი ორი მართკუთხა პარალელეპიპედის შეერთებაა შესაძლებელი ახალ მართკუთხა პარალელეპიპედად?

I	II	III	IV	V
60 სმ × 50 სმ × 17 სმ	1 მ × 1 მ × 2 მ	17 სმ × 10 სმ × 50 სმ	60 მ × 17 მ × 50 სმ	50 სმ × 35 მ × 1 სმ 7 მმ

ა) I და IV ბ) II და V გ) III და IV დ) I და III

3. გამოთვალეთ ნახაზზე მოცემული სხეულის მოცულობა, თუ თითოეული საფეხურის სიგანეც, სიგრძეც და სიმაღლეც 2 სმ-ის ტოლია.



ა) 64 სმ^3 ბ) 120 სმ^3 გ) 128 სმ^3 დ) 136 სმ^3

4. ოთხ ბავშვს მისცეს პლასტელინის ერთნაირი ნაჭრები. ერთმა გამოძერწა ბირთვი, მეორემ – ცილინდრი, მესამემ – კუბი, მეოთხემ – მართკუთხა პარალელეპიპედი (არც ერთ ბავშვს არ მორჩენია პლასტელინი). რომელი სხეული დაიკავებს უფრო

მეტ ადგილს სივრცეში?

ა) კუბი ბ) მართკუთხა პარალელეპიპედი

გ) ცილინდრი დ) ოთხივე თანაბრად

5. 1 მ × 2 მ × 3 მ მართკუთხა პარალელეპიპედის რა ნაწილია 1 მ × 1 მ × 1 მ კუბი

ა) 1/2 ბ) 1/3 გ) 7/8 დ) 1/6

6. დიდ ქვევრში 65 კოკა ღვინო ეტევა, კასრში – 192 დოქი. ერთი კოკით სამი დოქის შევსება შეიძლება. ქვევრი უფრო მეტ ღვინოს იტევს თუ კასრი? რამდენით?

ა) კასრი, 3 დოქით ბ) ქვევრი, 3 დოქით

გ) კასრი, 8 დოქით დ) ქვევრი, 17 დოქით

7. მოცემული რიცხვებიდან რომელი შეიძლება იყოს პრიზმის წიბოთა რაოდენობა?

ა) 6 ბ) 7 გ) 8 დ) 9

თავი 10. სტატისტიკა

1. აღწერითი სტატისტიკა

სტატისტიკა ადამიანის საქმიანობის თითქმის ყველა სფეროში გამოიყენება. მაგალითად, განათლების სფეროს წარმომადგენლები დაინტერესებული არიან მოსწავლეთა მიღწევებით, პოლიტიკურ პარტიებს აინტერესებთ საკუთარი პოპულარობა, მეწარმეებს – მათი პროდუქციის მომხმარებელთა რიცხვი, კალათბურთელებს – ზუსტ ტყორცნათა რიცხვი და ა.შ.

სტატისტიკის შესწავლის აუცილებლობა მრავალი მიზეზითაა განპირობებული, მათ შორის იმითაც, რომ:

- ადამიანებს პროფესიული საქმიანობისას სჭირდებთ სტატისტიკური ინფორმაცია, რომლის გასაგებად უნდა დაეუფლონ ტერმინებს, სიმბოლოებს, ცნებებს და სტატისტიკურ მეთოდებს. მათ ასევე უნდა შეძლონ სხვებისთვის სტატისტიკური ინფორმაციის გადაცემა ან მიღებული მასალის ინტერპრეტაცია;
- ნებისმიერ ადამიანს, შესაძლოა, თვითონ დასჭირდეს სტატისტიკური კვლევის ჩატარება, რადგან ეს, საზოგადოდ, კვლევა-ძიების ერთ-ერთი ძირითადი ხერხია;
- სტატისტიკური ცოდნა და უნარ-ჩვევები საჭიროა იმისთვის, რომ ადამიანები უკეთესი მოქალაქეები და მომხმარებლები იყვნენ, გააკეთონ სწორი არჩევანი, მიიღონ გონივრული გადაწყვეტილება;
- ინფორმაციის შეგროვება მეცნიერების ყველა დარგის საფუძველია.

  იყენებენ ინფორმაციის შეგროვების სხვადასხვა ტექნიკას. გამოკითხვის, გაზომვის, დაკვირვების შედეგებს ზოგადად უწოდებენ მონაცემებს.

  სტატისტიკა არის მეცნიერება, სადაც კვლევა მიმდინარეობს მონაცემთა შეგროვების, მოწესრიგების, შეჯამების, ანალიზისა და დასკვნების გამოტანის გზით.

სტატისტიკაში იყენებენ მონაცემთა შეგროვების შემდეგ მეთოდებს:

- გამოკითხვა;
- გაზომვა და დაკვირვება.

  გამოკითხვა. გამოკითხვის პროცესის სრულყოფილად ჩატარებისთვის მნიშვნელოვანია გამოკითხვის მიზნის დასახვა და ჩამოყალიბება, გამოკითხვაში მონაწილე პირების შერჩევა და მათი რაოდენობის განსაზღვრა, ანკეტა-კითხვარის მომზადება. გამოკითხვა შეიძლება ჩატარდეს ღია კითხვებით – როდესაც გამოკითხვის მონაწილე კითხვას პასუხობს ნებისმიერი წინადადებით – და დახურული კითხვებით – როდესაც გამოკითხვის მონაწილე რამდენიმე სავარაუდო პასუხიდან ირჩევს ერთ-ერთს.

ვთქვათ, მსხვილი კომპანიის ხელმძღვანელებს აინტერესებთ ფირმაში დასაქმებული თანამშრომლების საჭიროებები, რათა გააუმჯობესონ მათი კომფორტი და ამით გაზარდონ თანამშრომლების შრომის ნაყოფიერება. საჭირო მონაცემებს ისინი ვერ მოიძიებენ

ვერც ერთ კატალოგში, ხოლო მუშაკთა ქცევაზე დაკვირვება, ცხადია, უხერხულობას შექმნის, ამიტომ მიზანშეწონილია კომპანიის სოციალურ მუშაკთა გუნდმა შექმნას სპეციალური კითხვარი, რომლის შევსებაც სწრაფად მოხერხდება და მიღებული მონაცემების საფუძველზე გამოიკვეთება, თუ პირობების როგორ გაუმჯობესებას ანიჭებენ უპირატესობას დასაქმებულები.

გამოკითხვით მონაცემთა შეგროვების სხვა ხერხებია: სატელეფონო გამოკითხვა, კითხვარის დაგზავნა ფოსტის ან ინტერნეტის საშუალებით და ინდივიდუალური ინტერვიუ.

გამოკითხვით მონაცემების შემგროვებელს **ინტერვიუერი** ეწოდება, ხოლო მათ, ვისაც გამოკითხავენ — **რესპონდენტები**. ინტერვიუერი რესპონდენტებს არჩევს კვლევის მიზნის შესაბამისად. მაგალითად, თუ მას აინტერესებს რომელიმე პოლიტიკური მოღვაწის პოპულარობა (რეიტინგი) არჩევნების წინ, მაშინ იგი კითხვარებს შეავსებინებს ზრდასრული მოსახლეობის წარმომადგენლებს და არა მოზარდებს, რადგან მათ ჯერ არ აქვთ არჩევნებში მონაწილეობის უფლება. ამასთანავე, ინტერვიუერი უნდა იყოს ობიექტური, მან უნდა გამოიჩინოს მიუკერძოებლობა და გამოკითხოს მოქალაქეთა რაც შეიძლება მეტი დაინტერესებული ჯგუფის წარმომადგენლები. მნიშვნელოვანი მონაცემების შესაგროვებლად საჭიროა საკვლევ პრობლემაში გარკვევა და გადაწყვეტილების მიღება, თუ რომელი მონაცემები უნდა შეგროვდეს და რა საშუალებებით. კვლევის მიზნებს შორის შესაძლებელია იყოს: მოვლენათა განვითარების წინასწარმეტყველება, პრიორიტეტების გარკვევა, მონაცემებში კანონზომიერებების გამოვლენა, მონაცემთა ორ ერთობლიობას შორის დამოკიდებულების გარკვევა და სხვ. შესაბამისად შეირჩევა ანკეტები და კითხვარები: თუ ორ ან რამდენიმე მოსაზრებას შორის უფრო პოპულარული უნდა გაირკვეს, მაშინ კითხვარში მოცემული პასუხებიდან რესპოდენტმა ერთი სასურველი უნდა აირჩიოს. თუ ინტერვიუერს აინტერესებს რესპოდენტთა მოსაზრებები, მაშინ კითხვარი ღიაა – არ მოიცავს მზა პასუხებს.

მონაცემების შეგროვების კიდევ ერთი საშუალებაა ***გაზომვა და დაკვირვება.*** ეს მეთოდი გამოიყენება როგორც საბუნებისმეტყველო, ისე სოციალურ მეცნიერებებში. დაკვირვების მეთოდის გამოყენების სფერო ძალიან ფართოა. დაკვირვების ობიექტი შეიძლება იყოს საზოგადოება, ჯგუფი, ინდივიდი, სოციალური პროცესები, მოვლენები, მოქმედებები. დაკვირვებისას მკვლევარი არ ერევა მოვლენათა მსვლელობაში. დაკვირვება შეიძლება ექსპერიმენტის საშუალებით. **ექსპერიმენტი** არის გაკონტროლებული პროცესი, რომლის დროსაც მეცნიერები ერთსა და იმავე პირობებში მრავალჯერ იმეორებენ ცდას, რათა რამდენჯერმე დადასტურებული სანდო მონაცემების საფუძველზე გააკეთონ დასკვნა გამოსაკვლევი ობიექტის თვისებების შესახებ. ექსპერიმეტის ჩატარებისას მკვლევარი თვითონ ქმნის ან ცვლის ექსპერიმენტის პირობებს, რათა უკეთ შეისწავლოს საკვლევი ობიექტი იმ კუთხით, რომელიც მას აინტერესებს. დაკვირვების მეთოდი გამოიყენება, მაგალითად, ასტრონომიაში, ბიოლოგიაში, ქიმიაში, ფიზიკაში და სხვა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში.

გამოკითხვისა თუ დაკვირვების დროს ზოგჯერ დასათვლელია ისეთი რამ, რაც ერთბაშად არ გვაქვს თვალწინ. თუკი დასათვლელი ობიექტების რაოდენობა დიდია, მაშინ მოსახერხებელია თვლა შტრიხებით – ეს მეთოდი განხილულია მესამე თავში (იხ. პ.4: გაყოფის მათემატიკური არსი. ნაშთიანი გაყოფა.)

2. სვეტოვანი და წრიული დიაგრამები

როგორც ზემოთ აღინიშნა, სტატისტიკა წარმოადგენს მეცნიერებას მონაცემების შეგროვების, დამუშავების, მოწესრიგების, ანალიზისა და მათზე დაყრდნობით დასკვნების გაკეთების შესახებ. დაწყებითი საფეხურის მათემატიკის კურსში შეისწავლება აღწერითი სტატისტიკის ელემენტები. აღწერითი სტატისტიკა ეხება მონაცემთა შეგროვების, კლასიფიკაციისა და პირველადი დამუშავების მეთოდებს. სტატისტიკური კვლევა მონაცემთა შეგროვებით იწყება. „მონაცემებში“ იგულისხმება ობიექტთა რაიმე სიმრავლის რაოდენობრივ ან თვისებრივ მახასიათებელთა დაკვირვებული მნიშვნელობების ერთობლიობა. ამ ერთობლიობის ყოველ წევრს მონაცემი ეწოდება. გამოკითხვის, დაკვირვების ან სხვა რომელიმე მეთოდით შეგროვილ მონაცემებს ნედლი მონაცემები ეწოდება. კვლევის მეორე ეტაპი მიღებული ნედლი მონაცემების დამუშავებაა, რაც მათ კლასიფიკაციას და ორგანიზაციას გულისხმობს. მონაცემთა კლასიფიკაცია ხდება მონაცემთა ტიპების (თვისებრივი და რაოდენობრივი) მიხედვით. თვისებრივი მონაცემი მიიღება რაიმე თვისების ან მდგომარეობის დაკვირვების შედეგად (სქესი, პროფესია, ფერი და ა.შ.). რაოდენობრივი მონაცემი მიიღება გაზომვის ან ათვლის შედეგად და რიცხვით გამოიხატება (წონა, სიმაღლე, ხელფასი და ა.შ.). მონაცემთა ორგანიზაცია მათ თვალსაჩინოდ – ადვილად აღთქმადი სახით – წარმოდგენას გულისხმობს. მონაცემთა თვალსაჩინოდ წარმოდგენა შეიძლება სიხშირეთა ცხრილების, დიაგრამების და გრაფიკების სახით.

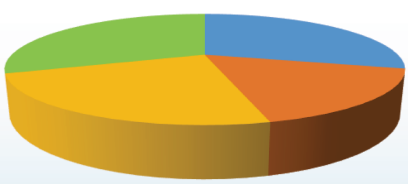
თვისებრივი მონაცემების გრაფიკული წარმოდგენისთვის გამოიყენება სვეტოვანი და წრიული დიაგრამა, პიქტოგრამა და სხვა.

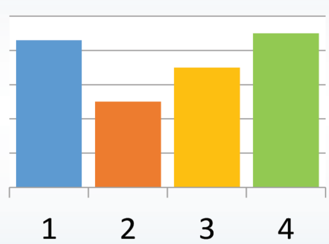
რაოდენობრივი მონაცემების ჩასაწერად გამოიყენება სიხშირეთა ცხრილები, ხოლო გრაფიკული წარმოდგენისთვის – წერტილოვანი დიაგრამა, ხაზოვანი დიაგრამა, ფოთლებიანი ღეროს მსგავსი დიაგრამა და სხვა.

მონაცემთა გრაფიკული წარმოდგენა მონაცემების თვალსაჩინოდ შედარების საშუალებას იძლევა.

მონაცემთა განაწილების გრაფიკული წარმოდგენისათვის ორი ძირითადი საშუალება არსებობს:

- სვეტოვანი (მართკუთხედებიანი) დიაგრამები;





- წრიული (სექტორებიანი) დიაგრამები.

სვეტოვანი დიაგრამის აგების საილუსტრაციოდ შეიძლება განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

ერთ-ერთი სკოლის დამამთავრებელი კლასების მოსწავლეთა აკადემიური მოსწრება ნიშნების მიხედვით ასე ნაწილდება:

I კატეგორია: „9-10 ბალიანი" – 21 მოსწავლე;

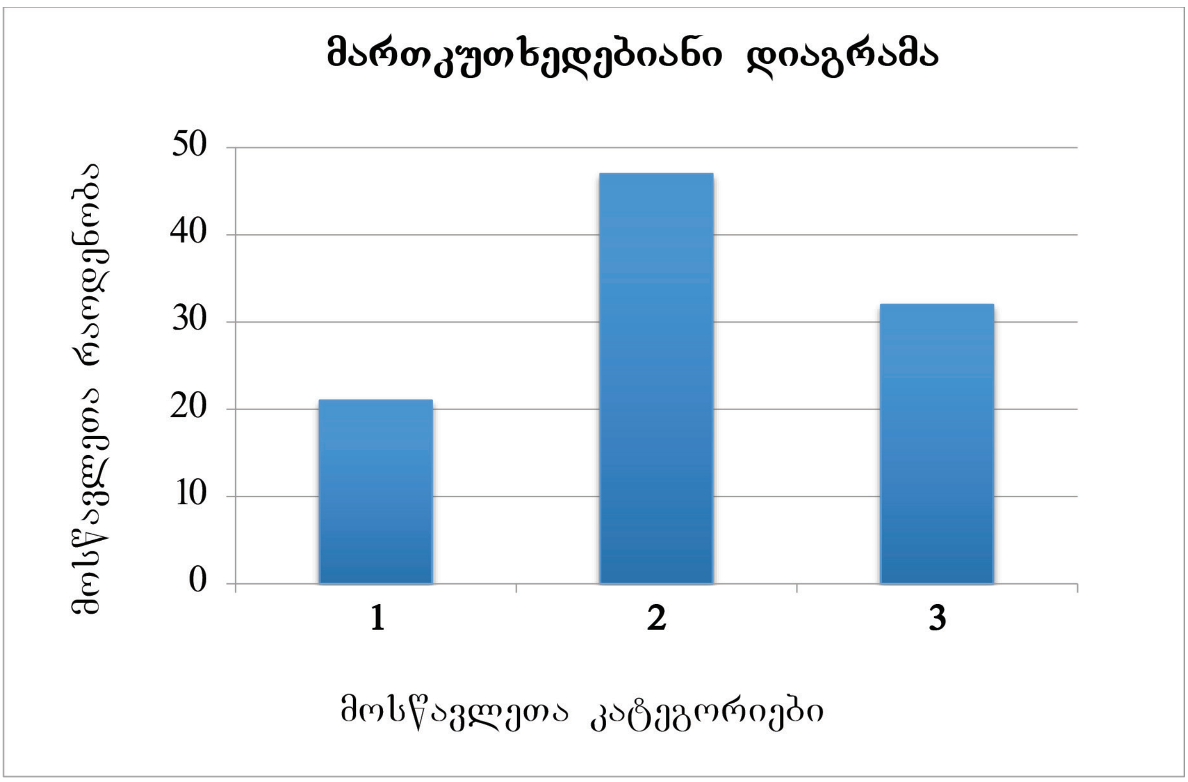
II კატეგორია: „7-8 ბალიანი" – 47 მოსწავლე;

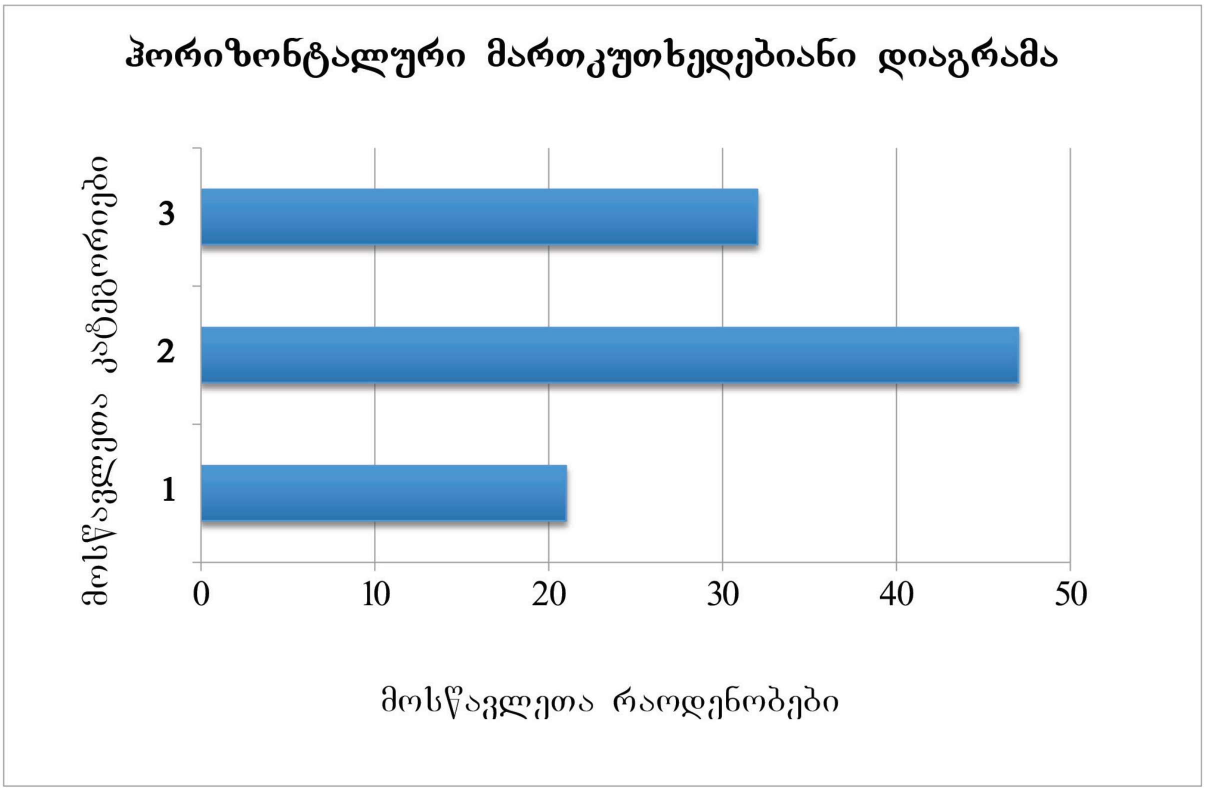
III კატეგორია: „5-6 ბალიანი" – 32 მოსწავლე.

პირველ რიგში ეს მონაცემები უნდა წარმოდგინდეს ცხრილის სახით:

კატეგორია	I	II	III
მოსწ. რაოდ. (სიხშირე)	21	47	32
მოსწ. ფარდობითი სიხშირე	$\frac{21}{100}=21\%$	$\frac{47}{100}=47\%$	$\frac{32}{100}=32\%$

ცხრილის მონაცემების უფრო თვალსაჩინოდ წარმოდგენისთვის უნდა ავაგოთ აბსცისათა ღერძზე მდებარე ტოლი ფუძეების მქონე სამი მართკუთხედი, რომელთა სიმაღლეები მოსწავლეთა რაოდენობის პროპორციულია, და ისინი ერთმანეთისაგან ტოლი დაშორებით განვალაგოთ. ორდინატთა ღერძზე კი გადაიზომება სიხშირეები. მიღებულ შედეგს სვეტებიანი ან მართკუთხედებიანი დიაგრამა ეწოდება. ცხადია, რომ ვერტიკალურ ღერძზე შეიძლებოდა ფარდობითი სიხშირის გადაზომვაც.





სტატისტიკაში მონაცემთა წარმოდგენისთვის ხშირად გამოიყენება წრიული დიაგრამა. წრიული დიაგრამის გამოყენების მიზანია მთელის ნაწილებს შორის ურთიერთმიმართების ჩვენება სექტორების ზომების ვიზუალური შედარების გზით. წრიული დიაგრამის აგების დროს გამოიყენება როგორც პროცენტები, ისე პროპორციები.

წრიული დიაგრამის ასაგებად განვიხილოთ შემდეგი ტიპის ამოცანა: ცხრილში მოცემულია არმიის ახალწვეულთა სისხლის ჯგუფების სიხშირეთა განაწილება (პირობითად აღებულია სისხლის 4 ჯგუფი: A, B, O, AB):

ჯგუფი	სიხშირე
A	5
B	7
O	9
AB	4
ჯამი	**25**

წრიული დიაგრამის ასაგებად პირველ ეტაპზე უნდა ვიპოვოთ თითოეული ჯგუფის შესაბამისი სექტორის შესაბამისი კუთხის გრადუსული ზომა. ამისთვის, უნდა გავარკვიოთ, მთელი წრის რა ნაწილს წარმოადგენს თითოეული ჯგუფი.

$$A - \frac{5}{25}\cdot 360^0 = 72^0 \qquad B - \frac{7}{25}\cdot 360^0 = 100,8^0$$

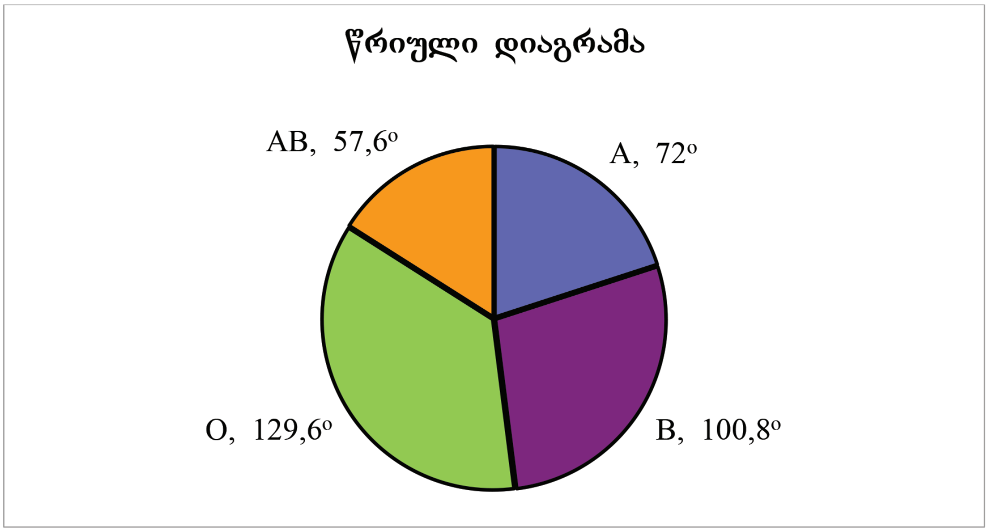
$$O - \frac{9}{25}\cdot 360^0 = 129,6^0 \qquad AB - \frac{4}{25}\cdot 360^0 = 57,6^0$$

შეიძლება თითოეული ჯგუფის შესაბამისი პროცენტის პოვნა, ამისთვის ფარდობითი სიხშირე პროცენტულად უნდა გამოისახოს:

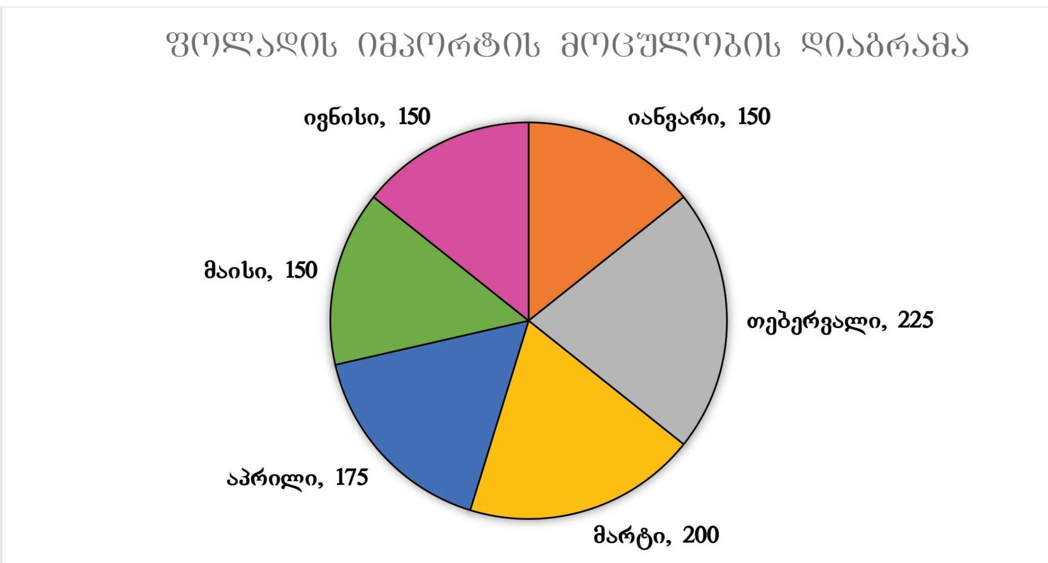
$$A - \frac{5}{25}\cdot 100\% = 20\% \qquad B - \frac{7}{25}\cdot 100\% = 28\%$$

$$O - \frac{9}{25}\cdot 100\% = 36\% \qquad AB - \frac{4}{25}\cdot 100\% = 16\%$$

ამის შემდეგ ცენტრალური კუთხეების ასაგებად ვისარგებლებთ ტრანსპორტირით და ავაგებთ წრიული დიაგრამას.



დიაგრამაზე უნდა მოინიშნოს თითოეული სექტორის სახელი.



იმისათვის, რომ გავაანალიზოთ წრიულ დიაგრამაზე წარმოდგენილი მონაცემები, უნდა შევადაროთ სექტორები. მიღებული დიაგრამიდან ჩანს, რომ ყველაზე მეტად

გავრცელებული სისხლის ჯგუფია O (36%); AB ტიპის სისხლის მქონე ადამიანები არიან უმცირესობაში. ადამიანების 2,5-ჯერ უფრო მეტ რაოდენობას აქვს O ტიპის სისხლი, ვიდრე AB ტიპის სისხლი.

წრიული დიაგრამა განკუთვნილია დროის მოცემულ მომენტში ან მოცემულ შუალედ-ში ობიექტთა მოცემული რაოდენობის კომპონენტებად დაყოფის, ანუ ამ ობიექტთა კლასიფიკაციის საჩვენებლად. ამიტომ, ხშირად უფრო მოხერხებულია პროცენტებით წარმოდგენილი დიაგრამის აგება.

3. ფოთლებიანი ღეროს მსგავსი დიაგრამა

ზოგჯერ მოსახერხებელია ე.წ. ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამის გამოყენება. ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა წარმოადგენს მონაცემების განლაგების სქემას, რომელშიც თითოეული მონაცემის ერთი ნაწილი წარმოჩინდება, როგორც ვერტიკალური ღერო, ხოლო მეორე ნაწილი – როგორც ფოთოლი, რათა მოხდეს ჯგუფებისა და კლასების ფორმირება.

ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამის აგების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი:

20 დღის განმავლობაში აღრიცხეს იმ პაციენტების რაოდენობა, რომლებმაც ამბულატორიული მკურნალობის ცენტრს მიმართეს კარდიოგრამის გადასაღებად:

25, 31, 20, 32, 13, 14, 43, 02, 57, 23, 36, 32, 33, 32, 44, 32, 52, 44, 51, 45

ფოთლებიანი ღეროს მსგავსი დიაგრამის ასაგებად ამოვარჩიოთ უმცირესი და უდიდესი მონაცემები – ესენია 02 და 57. მონაცემები უნდა დალაგდეს ათეულების მიხედვით, ამიტომ მოცემული რიცხვებიდან გამოვყოთ ათეულები, რაც ქმნის ვერტიკალურ „ღეროს“, ხოლო მომდევნო ციფრი დგება შესაბამისი ათეულის გასწვრივ და წარმოადგენს „ფოთოლს“. მაგალითად, მონაცემისათვის 32 პირველი ციფრი (3) არის ღერო, ხოლო მეორე ციფრი (2) – ფოთოლი. ფოთლებს დავალაგებთ ზრდის მიხედვით და საბოლოოდ ფოთლებიანი ღეროს მსგავს დიაგრამას ექნება ასეთი სახე:

ღერო	ფოთლები
0	2
1	3 4
2	0 3 5
3	1 2 2 2 2 3 6
4	3 4 4 5
5	1 2 7

აგებული ფოთლებიანი ღეროების დიაგრამიდან ჩანს, რომ მონაცემების ამ განაწილებას პიკი აქვს ცენტრში და მონაცემებში არ არის წყვეტა. 20 დღიდან 7 დღის განმავლობაში იმ პაციენტების რაოდენობა, რომლებმაც გადაიღეს კარდიოგრამა, მოთავსებულია 31-დან 36-მდე. დიაგრამიდან აგრეთვე ჩანს, რომ ამბულატორიულ ცენტრში პაციენტების რაოდენობა დღის განმავლობაში მერყეობდა მინიმუმ 2 პაციენტიდან მაქსიმუმ 57 პაციენტამდე.

ზოგადად ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა თვალსაჩინოა და აადვილებს გამოთვლას, არ კარგავს არც ერთ მონაცემს, თუმცა მონაცემთა დიდი რაოდნობისთვის ასეთი დიაგრამის აგება რთულია.

4. მონაცემთა მახსიათებლები: საშუალო, მოდა, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი

რიცხვით მონაცემთა გასაანალიზებლად საჭიროა მონაცემების მახასიათებლების შესწავლა. ესენია: ცენტრალური ტენდენციის (მონაცემთა ცენტრის მდებარეობის) საზომები - საშუალო, მოდა, მედიანა და გაბნევის დიაპაზონი.

ხშირად საჭიროა მონაცემების დალაგება არაკლებადი მიმდევრობის სახით. ასეთ მიმდევრობას ვარიაციული მწკრივი ეწოდება.

მონაცემთა საშუალო (mean) არის მოცემული რიცხვების საშუალო არითმეტიკული, ანუ ამ რიცხვების ჯამის შეფარდება მათ რაოდენობასთან. მაგალითად, 3, 2, 6, 5, 4 მონაცემების საშუალოა $\frac{3+2+6+5+4}{5}=\frac{20}{5}=4$. საშუალოს აღნიშნავენ $\overline{x}$ სიმბოლოთი და იგი გამოითვლება ფორმულით

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

სადაც n გვიჩვენებს მონაცემთა რაოდენობას.

„საშუალოს" შეიძლება მიეცეს შემდეგი მარტივი ინტერპრეტაცია: საშუალო არის მონაცემების ერთ ობიექტზე მოსული დაჯამებულ მონაცემთა წილი (საშუალო რაოდენობა). საშუალო ადვილი გამოსათვლელია და აქვს მარტივი ინტერპრეტაცია, იგი წარმოადგენს მონაცემთა ცენტრალური ტენდენციის ერთ-ერთ ყველაზე გავრცელებულ რიცხვით მახასიათებელს.

უნდა აღინიშნოს, რომ საშუალოს აქვს ერთი ნაკლი: იგი არამდგრადი მახასიათებელია. ზოგადად, მონაცემთა რიცხვითი მახასიათებლის მდგრადობა ნიშნავს, რომ მონაცემის ცვლილებას მცირე გავლენა აქვს აღნიშნულ მახასიათებელზე, მიუხედავად იმისა, თუ როგორია ამ ცვლილების სიდიდე. საშუალო ზედმეტად რეაგირებს მონაცემის ცვლილებაზე, ამიტომ საშუალო არ წარმოადგენს ცენტრალური ტენდენციის მდგრად საზომს, რაც ჩანს ქვემოთ განხილულ ამოცანაში.

1. მუსიკალურ ნაწარმოებთა კატალოგიდან ამოირჩიეს 5 ნაწარმოები, რომელთა ხანგრძლივობებია (წუთებში): 37, 46, 40, 57, 50. საშუალოა $\overline{x}$ = 46. თუ ახლა მეხუთე ნაწარმოებს, რომლის ხანგრძლივობა იყო 50 წუთი, შეცვლიან სხვა ნაწარმოებით, რომლის ხანგრძლივობაა 200 წუთი, მაშინ საშუალო იქნება $\overline{x}$ = 76. ანუ საშუალო მიუახლოვდა ამოვარდნილ მონაცემს, ყველა დანარჩენი მონაცემი მასზე ნაკლებია. ამ შემთხვევაში $\overline{x}$-ი არ არის განლაგების მდგრადი მახასიათებელი.

მკვეთრად ასიმეტრიული (მარჯვნივ) ფორმა აქვს მოსახლეობის შემოსავლების სიხშირულ განაწილებებს, ამიტომ ამ მონაცემთა მკვეთრად წანაცვლებული აღმოჩნდება მარჯვნივ (ექსტრემალურად დიდი შემოსავლების მიმართულებით) და ამ გზით დადგენილი საშუალო შემოსავლების გამოყენება ცხოვრების დონის აღსაწერად აზრს მოკლებულია.

2. ქვემოთ მოყვანილია ავსტრალიის ერთ-ერთი უნივერსიტეტის თანამშრომელთა წლიური შემოსავლები (1000 დოლარებში): 28, 109, 26, 32, 30, 26, 29. ამ მონაცემებზე

დაყრდნობით, საშუალო შემოსავალი იქნება $\bar{x} = 40$. როგორც ჩანს, ყველა მონაცემი, გარდა ერთისა (109), 40-ზე ნაკლებია და ამდენად, საშუალო არ აღწერს შემოსავლებს სწორად.

საშუალოს გამოთვლის დროს საჭიროების შემთხვევაში საშუალო უნდა დამრგვალდეს ერთი ათობითი ნიშნით მეტი სიზუსტით, ვიდრე ნედლი მონაცემებია წარმოდგენილი. მაგალითად, თუ ნედლი მონაცემები მოცემულია მთელი რიცხვებით, მაშინ საშუალო უნდა დამრგვალდეს მეათედებამდე სიზუსტით. თუ ნედლი მონაცემები გამოსასახულია მეათედებში, მაშინ საშუალო უნდა დამრგვალდეს მეასედებამდე სიზუსტით.

მედიანა (**mediana**) განეკუთვნება ცენტრალური ტენდენციის მდგრადი საზომების ჯგუფს (განსხვავებით საშუალოსაგან). სწორედ ამ თვისების გამო მედიანა, საშუალოს შემდეგ, წარმოადგენს ცენტრალური ტენდენციის ყველაზე გავრცელებულ საზომს.

მედიანა ეწოდება ვარიაციული მწკრივის (ზრდადობის მიხედვით დალაგებული მონაცემების) შუა მონაცემს, თუ მონაცემთა რაოდენობა კენტია, და ეწოდება შუა ორი მონაცემის საშუალო არითმეტიკულს, თუ მონაცემთა რაოდენობა ლუწია.

ამრიგად, ***მედიანის*** მოსაძებნად საჭიროა ნედლი მონაცემების ზრდადობის მიხედვით დალაგება ანუ ვარიაციული მწკრივის ჩაწერა, და შუა წერტილის შერჩევა. განსხვავებით საშუალოსგან, მონაცემთა დიდი რაოდენობის დროს მედიანის პოვნა გარკვეულ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული. განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა:

1. მოცემულია შვიდი სამხედრო ახალწვეულის წონა ფუნტებში (1 ფუნტი = 453,6 გრამი): 180, 201, 220, 191, 219, 209, 186.

მონაცემები უნდა დავალაგოთ ზრდადობის მიხედვით:

180, 186, 191, 201, 209, 219, 220.

რადგან $n = 7$, ანუ მონაცემთა რაოდენობა კენტია, ამიტომ მედიანა არის შუა მეოთხე მონაცემი – 201.

2. აშშ-ში რვა წლის განმავლობაში მომხდარი ტორნადოების რაოდენობებია:

684, 764, 656, 702, 856, 1133, 1132, 1303.

ვარიაციული მწკრივი იქნება:

656, 684, 702, 764, 856, 1132, 1133, 1303.

მონაცემთა რაოდენობა ლუწია, ამიტომ უნდა ამოვარჩიოთ შუა ორი მონაცემი: 764 და 856. მედიანის გამოსათვლელად ვიპოვით მათ საშუალო არითმეტიკულს. მონაცემთა მედიანა არის $\frac{(764+856)}{2} = 810$.

3. მედიანას პოვნის დროს მოსწავლეებს ხშირად ავიწყდებათ მონაცემების ზრდადობით დალაგება. ამ შეცდომის თავიდან აცილების მიზნით მასწავლებელმა უნდა გაარჩიოს საყოფაცხოვრებო ხასიათის ამოცანები. მაგალითად: სამმა ჟურნალისტმა ჩაატარა გამოკითხვა. მათი საშუალო ასაკია 42, მედიანური ასაკი – 45, ასაკთა დიაპაზონი – 23 წელი. რა წლოვანების არიან ჟურნალისტები? უმცირესი ასაკი აღვნიშნოთ x-ით, მაშინ

უდიდესი ასაკი იქნება $x+23$ და მიიღებენ მწკრივს: x, 45, $x+23$; რადგან საშუალო ასაკია 42, შეადგენენ განტოლებას: $(x+45+x+23):3=42;4$.

4. დავუბრუნდეთ საშუალოზე მე-2 მაგალითს. ავსტრალიის ერთ-ერთი უნივერსიტე-ტის თანამშრომელთა წლიური შემოსავლები ჩავწეროთ ვარიაციული მწკრივის სახით:

$$26,\ 26,\ 28,\ 29,\ 30,\ 32,\ 109.$$

მედიანა არის 29, საშუალო იყო $\overline{x}=40$. აქედან ჩანს, რომ მედიანა უკეთ აღწერს საშუა-ლო შემოსავალს, ვიდრე საშუალო.

გავარკვიოთ, როგორ შეიცვლება საშუალო და მედიანა მონაცემთა ცვლილებისას. მა-გალითად, მონაცემი 109 შევცვალოთ 200-ით. შეცვლილი მონაცემებისათვის მედიანა დარჩება იგივე 29, ხოლო საშუალო წაინაცვლებს დიდი მონაცემის (200-ის) მიმარ-თულებით: $\overline{x}=53$. ამდენად, მედიანა უფრო მდგრადი მახასიათებელია, ვიდრე საშუ-ალო.

შეიძლება, მონაცემი 26 შევცვალოთ 300-ით. მაშინ ახალი მონაცემების ვარიაციული მწკრივი იქნება:

$$26,\ 28,\ 29,\ 30,\ 32,\ 109,\ 300.$$

ამ შემთხვევაში მედიანა იცვლება მხოლოდ ერთი ერთეულით (ხდება 30), მაშინ, როდე-საც საშუალო მკვეთრად იზრდება ($\overline{x}=79{,}14$), რაც ისევ მეტყველებს მედიანას მდგრა-დობაზე.

მედიანა განსაკუთრებით მნიშვნელოვან ინფორმაციას იძლევა მაშინ, როცა მონაცე-მებს შორის შედარებით მცირე რაოდენობა მნიშვნელოვნად განსხვავდება დანარჩენი მონაცემებისგან. მაგალითად, მოსახლეობის გარკვეული ჯგუფის შემოსავლების გა-ნაწილების მონაცემებში მედიანა მოსახლეობის ამ ჯგუფის ცხოვრების დონის უფრო ზუსტ სურათს იძლევა, ვიდრე საშუალო, რომელზედაც დიდ გავლენას ახდენს ერთი ინდივიდის შემოსავალი.

თუმცა ეს არ ნიშნავს, რომ მედიანას, როგორც მონაცემს, ყოველთვის უნდა მიენიჭოს უპირატესობა საშუალოსთან შედარებით. საშუალო გამოითვლება ყველა მონაცემის მეშვეობით და შეიცავს მეტ ინფორმაციას, ვიდრე მედიანა. საშუალო შეიძლება გამო-ყენებულ იქნას როგორც საზომი, რომელიც ასახავს, თუ საშუალოდ რა სიდიდისაა მონაცემები. ორი სხვადასხვა ჯგუფის მონაცემების შედარების მიზნით ჩვეულებრივ, პირველ რიგში ადარებენ მათ არითმეტიკულ საშუალოებს.

ცენტრალური ტენდენციის კიდევ ერთ საზომს წარმოადგენს ***მოდა*** (**mode**). მოდა ეწოდება ისეთ მონაცემს, რომელიც მონაცემებში ყველაზე ხშირად მეორდება.

მონაცემებს შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი მოდა ან საერთოდ არ ჰქონდეს მოდა. მოსწავლეები მოცემულ მაგალითებში იპოვიან მოდას.

1. მოცემულია აშშ-ს მრავალჯერადი გამოყენების კოსმოსური ხომალდის ფრენის ხან-გრძლივობა (დღეებში) წლებში:

$$8,\ 9,\ 9,\ 14,\ 8,\ 8,\ 10,\ 7,\ 6,\ 9,\ 7,\ 8,\ 10,\ 14,\ 11,\ 8,\ 14,\ 11$$

მოდის მოსაძებნად არაა აუცილებელი მონაცემების დალაგება ზრდის მიხედვით, თუმცა მოსახერხებელია.

6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 14, 14, 14

შეიძლება შევადგინოთ სიხშირეთა ცხრილი:

მონაცემი	6	7	8	9	10	11	14
სიხშირე	1	2	5	3	2	2	3

ცხრილიდან ჩანს, რომ 8-დღიანი ფრენა მოხდა 5-ჯერ, ანუ 8-ის სიხშირე – 5 – მეტია ყველა სხვა სიხშირეზე, ამიტომ ამ მონაცემების მოდა არის 8.

2. იპოვეთ სამხრეთ-დასავლეთ პენსილვანიის 10 შერჩეულ საგრაფოში ქვანახშირის მოპოვებაში დასაქმებულ მუშათა რაოდენობის მოდა.

110, 731, 1031, 84, 20, 118, 1162, 1977, 103, 752

რადგან ყველა მონაცემის სიხშირეა 1, აქ მოდა არ არსებობს. არაკორექტულია, ვთქვათ, რომ მოდა არის ნული, რადგან ზოგიერთი მონაცემისთვის, მაგალითად, როგორიცაა ტემპერატურა, ნული შეიძლება რეალური მნიშვნელობა იყოს.

3. გაზომეს 11 სხვადასხვა ავტომობილის სამუხრუჭე მანძილის სიდიდე, როცა ისინი მოძრაობდნენ 15 მილი/საათში სიჩქარით. მიღებული მონაცემებია:

15, 18, 18, 18, 20, 22, 24, 24, 24, 26, 26

შევადგინოთ სიხშირეთა ცხრილი:

მონაცემი	15	18	20	22	24	26
სიხშირე	1	3	1	1	3	2

რადგან 18 და 24 ორივე გვხვდება — 3-ჯერ, და 3 ყველა სიხშირეზე მეტია, ამიტომ მოდა არის 18 და 24. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მონაცემებს აქვს ორი მოდა ან ბიმოდალურია.

მონაცემთა მოდის ინტერპრეტაცია წააგავს ყოველდღიურ ცხოვრებაში სიტყვა „მოდის“ მნიშვნელობას. მაგრამ, როგორც ის, რაც „მოდაშია“ ანუ ყველაზე ხშირია, შეიძლება არ აღწერდეს საყოველთაო სტილს, ასევე მონაცემთა მოდაც ახასიათებს დაკვირვებათა მხოლოდ ნაწილს. მონაცემთა მოდა იძლევა მნიშვნელოვან ინფორმაციას სხვადასხვა საქონლის გამომშვები ფირმებსათვის, ამ საქონლის მომხმარებლისათვის – მაღაზიის მფლობელებისათვის, დისტრიბუტორებისთვის, რომლებიც აწოდებენ საქონელს სპეციფიკურ ბაზრებს. მაგალითად, ტანსაცმლის გამომშვებმა ფირმამ (აგრეთვე, ტანსაცმლის მაღაზიის მფლობელმა) უნდა იცოდეს კოსტუმების ყველაზე გავრცელებული ზომები, რათა გაითვალისწინოს ეს ფაქტი საქონლის გამოშვებისას (შესაბამისად, მომარაგებისას); საათების მწარმოებელმა უნდა იცოდეს, თუ რა კლასის საათები იყიდება ყველაზე ხშირად, იმ მიზნით, რომ გაზარდოს ამ კლასის პროდუქციის წარმოება.

მოდა თვისებრივი მონაცემებისათვისაც გამოიყენება, თუმცა საშუალოსა და მედიანის გამოყენებას ასეთი მონაცემებისთვის აზრი არ აქვს. მოდა კი იძლევა სასარგებლო ინფორმაციას ყველაზე ტიპური შემთხვევის გამოსავლენად.

ამგვარად, პასუხი კითხვაზე, თუ ცენტრალური ტენდენციის ამ სამი მახასიათებლიდან რომელი არის ყველაზე გამოსადეგი, დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა ინფორმაცია გვჭირდება. მაგალითად, თუ უნდა შეისწავლონ მარკეტების საშუალო დღიური ნავაჭრი, უნდა გამოთვალონ საშუალო, ხოლო თუ აინტერესებთ, რამდენი ლარი აქვს ნავაჭრი მარკეტთა უმრავლესობას, მაშინ უნდა იპოვონ მოდა. თუ საშუალო და მედიანა ძალიან განსხვავდებიან ერთმანეთისგან, ეს ნიშნავს, რომ მონაცემები შეიცავენ ექსტრემალურ მნიშვნელობებს. ასეთ შემთხვევაში მედიანა „ცენტრის" უკეთესი მახასიათებელია, ვიდრე საშუალო.

ცენტრალური ტენდენციის რიცხვითი მახასიათებლები – საშუალო, მედიანა და მოდა – სრულად ვერ აღწერს მონაცემთა თვისებებს. ხშირად საინტერესოა: როგორია მონაცემთა გაფანტულობა საერთოდ და კონკრეტულად კი – საშუალოს მიმართ? მაგალითად, გამოვთვალოთ შემდეგ მონაცემთა საშუალოები:

A: 8 9 10 10 13   B: 1 5 10 16 18

$$\overline{x_1}=\frac{(8+9+10+10+13)}{5}=10 \text{ და } \overline{x_2}=\frac{(1+5+10+16+18)}{5}=10$$

მონაცემთა ორივე ერთობლიობას აქვს ერთი და იგივე საშუალო, მაგრამ ცხადია, რომ B მწკრივის ელემენტთა ცვალებადობა უფრო ძლიერია, ვიდრე A მწკრივის ელემენტების. A მწკრივის ელემენტები უფრო მჭიდროდ არიან თავმოყრილი (კონცენტრირებული) საშუალოს ირგვლივ, ვიდრე B მწკრივის ელემენტები.

ხშირად ძნელია მწკრივის ცვალებადობის თვალსაჩინოდ დანახვა (მაგალითად, მონაცემთა დიდი რაოდენობის დროს). ამიტომ აუცილებელია ცვალებადობის ანუ გაფანტულობის საზომების შემოღება, ესე იგი, ისეთი მახასიათებლების შემოღება, რომელიც საშუალებას იძლევა, შეფასდეს მონაცემთა გაბნევის ხარისხი.

მონაცემთა გაფანტულობის ერთ-ერთი უმარტივესი რიცხვითი მახასიათებელია ***გაბნევის დიაპაზონი*** (**Range**), რომელიც წარმოადგენს შერჩევის უდიდესი და უმცირესი რიცხვითი მონაცემის სხვაობას.

ზემოთ მოყვანილ მაგალითში მონაცემთა A მწკრივის გაბნევის დიაპაზონია 13 – 8 =5, ხოლო B მწკრივის – 18 – 1 = 17.

მონაცემთა გაბნევის დიაპაზონი სიმარტივის გამო ფართოდ გამოიყენება ისეთი ამოცანების გადაწყვეტისას, სადაც გამოთვლის სისწრაფესა და მარტივ შინაარსს გადამწყვეტი მნიშვნელობა ენიჭება. მაგალითად, ხარისხის კონტროლის სფეროში. ზოგადად, გაბნევის დიაპაზონის, როგორც მონაცემთა გაფანტულობის საზომის, მთავარი ნაკლი ისაა, რომ ის არ შეიცავს ინფორმაციას, თუ როგორაა გაბნეული დანარჩენი (საშუალედო) მონაცემები მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს შორის. გაბნევის დიაპაზონი არ იძლევა ზუსტ ინფორმაციას იმ შემთხვევაშიც, როცა მონაცემი შეიცავს იშვიათ, ე. წ. ამოვარდნილ ელემენტს. თუ გვაინტერესებს რომელიმე რეგიონში მამაკაცთა სიმაღლის განაწილება და ამ რეგიონში ცხოვრობს მამაკაცი, რომლის სიმაღლეა 210 სმ, ცხადია, რომ, თუ შერჩეულ ჯგუფში შემთხვევით აღმოჩნდება ეს მამაკაცი (რაც იშვიათი მონაცემია), გაბნევის დიაპაზონი უფრო დიდი იქნება, ვიდრე იმ

შემთხვევაში, როცა მის ნაცვლად შერჩევაში მოხვდება სხვა, ტიპური სიმაღლის მქონე, მამაკაცი. ამგვარად, ექსტრემალურად მაღალ (ან ექსტრემალურად დაბალ) მონაცემის მნიშვნელობას შეუძლია მნიშვნელოვანი გავლენა მოახდინოს გაბნევის დიაპაზონზე.

5. მონაცემთა მახასიათებლების გამოყენება რეალურ სიტუაციებში

განვიხილოთ სავარჯიშოები, რომლებიც შეიცავენ რეალურ ვითარებასთან დაკავშირებულ, მოსწავლეთათვის საინტერესო მონაცემებს და პრობლემის გადაჭრის გზებს.

1. „მაღაზიაში“

მოსწავლეები უნდა დაეხმარონ სასკოლო მაღაზიის მეპატრონეს მაღაზიაში გასაყიდი კანფეტების სახეობის შერჩევაში. პირველ ეტაპზე უნდა გავარკვიოთ, რომელი მეთოდის გამოყენება შეიძლება საჭირო მონაცემების შესაგროვებლად. მოსწავლეები გადაწყვეტენ, მონაცემების შესაგროვებლად გამოიყენონ გამოკითხის მეთოდი. სკოლის მოსწავლეებს ეკითხებიან: რომელია თქვენთვის ყველაზე საყვარელი კანფეტი? პასუხის შემდეგ აფიქსირებენ დასახელებული კანფეტების განსხვავებულ სახეობებს, მის გასწვრივ ჩამოუსვამენ ვერტიკალურ ხაზს (თვლა შტრიხებით). მიიღებენ, მაგალითად, შემდეგი სახის ცხრილს.

ბარამბოს შოკოლადი: |||

ბარამბოს კარამელი: ~~||||~~

სნიკერსი: ~~||||~~ |||

ბაუნტი: ||||

მოსწავლეებს უნდა დავათვლევინოთ თითოეული დასახელების გვერდით ჩამოსმული ხაზების რაოდენობა და შევადგენინოთ სიხშირეთა ცხრილი.

ბარამბოს შოკოლადი	ბარამბოს კარამელი	სნიკერსი	ბაუნტი
3	5	8	4

კვლავ დავსვათ კითხვები, რომლის საშუალებით გავარკვევთ: რომელი ტიპის მონაცემები მივიღეთ? (თვისებრივი — შოკოლადის სახეობები) რომელი მახასიათებლის პოვნა შეგვიძლია? (მოდა)

მოსწავლეები ცხრილის სახით წარმოდგენილი მონაცემების საფუძველზე გაანალიზებენ, რომ მონაცემთა მოდაა სნიკერსი და, შესაბამისად, მათი სკოლის მოსწავლეების ყველაზე საყვარელი კანფეტია სნიკერსი, ამიტომ მაღაზიის მეპატრონეს ურჩევენ, მაღაზიაში გაყიდოს „სნიკერსი“.

2. „ჯიბის ფული“

მოსწავლეებს რომ ვასწავლოთ არა მხოლოდ დიაგრამების აგება, არამედ დიაგრამების „წაკითხვა“ და მათგან ინფორმაციის მიღება, ამისათვის შეიძლება განვიხილოთ შემდეგი ტიპის ამოცანა:

ვთხოვოთ მოსწავლეებს, გვიკარნახონ მათი თვიური „ჯიბის ფულის“ ოდენობა ლარებ-

ში და მოსწავლეთა პასუხები დავწეროთ დაფაზე. მაგალითად,

7, 11, 22, 13, 18, 11, 25, 13, 10, 28, 11, 19, 24, 6, 15, 9, 32, 17

დავსვათ კითხვები, რომლის საშუალებითაც მოსწავლეები გაარკვევენ, რომელი დიაგრამის აგებაა მოსახერხებელი აღნიშნული მონაცემების თვალსაჩინოდ წარმოდგენისათვის. მაგალითად, მოსახერხებელია თუ არა ამ მონაცემთათვის სვეტებიანი დიაგრამის აგება ან ცხრილის სახით წარმოდგენა? (არა, რადგან ჰორიზონტალურ ხაზზე უნდა დაიწეროს თითოეული მოსწავლის გვარი, ვერტიკალურზე აღინიშნოს თანხა – ეს არ წარმოადგენს მონაცემებს თვალსაჩინოდ). მოსწავლეები გადაწყვეტენ, რომ ჯობს, ააგონ ფოთლებიანი ღეროს მსგავსი დიაგრამა;

ღერო	ფოთლები
0	6 7 9
1	0 1 1 1 3 3 5 7 8 9
2	2 4 5 8
3	2

მოსწავლეები ყურადღებას მიაქცევენ, რომ დიაგრამა საწყის მონაცემებთან შედარებით მოწესრიგებულია, ნათლად ჩანს, რომელია ყველაზე მცირე მონაცემი, რომელია ყველაზე დიდი, ასევე, რამდენი მოსწავლის „ჯიბის ფულია“, მაგალითად, 20-დან 30-მდე, რამდენით მეტია ყველაზე დიდი მონაცემი ყველაზე მცირეზე, რამდენის თანხა ემთხვევა ერთმანეთს. მოსწავლეები მარტივად შეძლებენ, იპოვონ

- **მოდა:** 11 (ყველაზე ხშირად მეორდება);
- **გაბნევის დიაპაზონი:** 32 - 6 (სხვაობა უდიდესსა და უმცირესს მონაცემს შორის);
- **მედიანა**: (13 + 15) : 2 (რადგან მონაცემთა რაოდენობა ლუწია).

ამის შემდეგ, ისინი ააგებენ სიხშირეთა განაწილების ცხრილს.

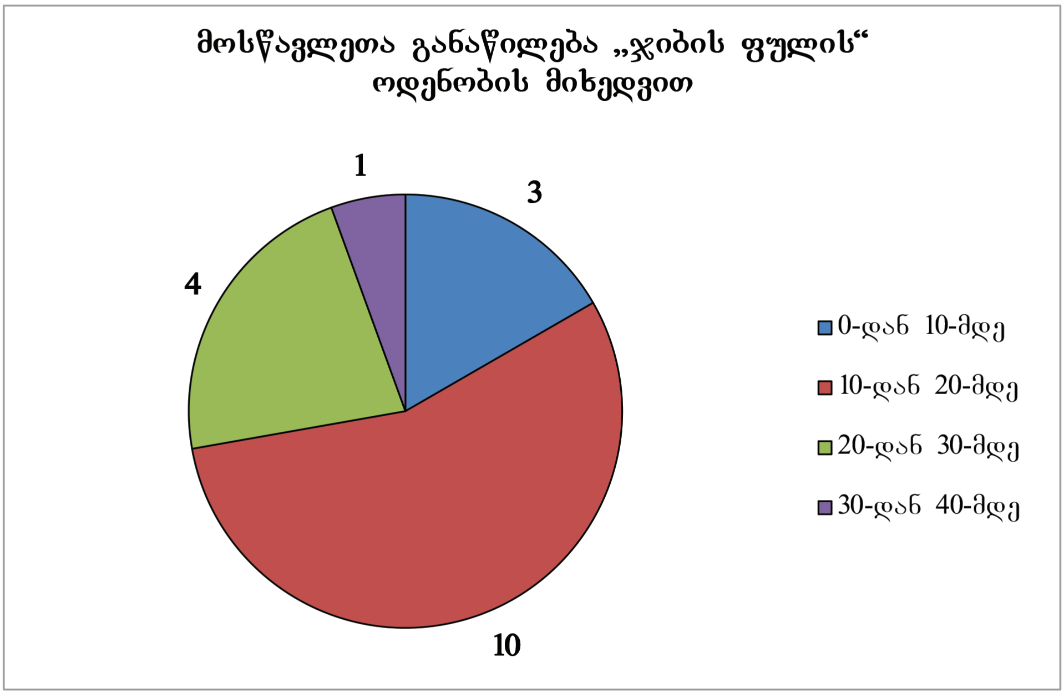
თანხები ლარებში	სიხშირე
0-დან 10-მდე	3
10-დან 20-მდე	10
20-დან 30-მდე	4
30-დან 40-მდე	1
სულ	18

ცხრილის გამოყენებით უნდა აიგოს შესაბამისი წრიული დიაგრამა. ამისთვის მოსწავლეები გამოთვლიან ფარდობით სიხშირეებს და შესაბამისი სექტორის კუთხის გრადუ-

სულ ზომას, შემდეგ კი წრეს დაყოფენ 4 არათანაბარ ნაწილად, მონაცემთა სიხშირეების პროპორციულად.

30 ლარზე მეტი თანხის სიხშირეა 1; ფარდობითი სიხშირე – $\frac{1}{18}$. შესაბამისი სექტორის კუთხის გრადუსული ზომაა $\frac{360^0}{18}=20^0$. მოსწავლეები ტრანსპორტირის საშუალებით წრეს დაყოფენ 18 ტოლ ნაწილად და 1 ნაწილს გააფერადებენ, ვთქვათ, იასამნისფრად. ეს ნაწილი აღნიშნავს სწორედ მაქსიმალური თანხის სიხშირეს.

შემდეგი 3 ნაწილი აღნიშნავს 0-დან 10-მდე ლარის თანხის მქონე მოსწავლეთა A რაოდენობას, სხვა 10 ნაწილი — 10-დან 20-მდე ლარის თანხის მქონე, ხოლო დარჩენილი 4 ნაწილი — 20-დან 30-მდე ლარის თანხის მქონე მოსწავლეების რაოდენობას. შედეგად მიიღებენ წრიულ დიაგრამას:



3. „საშუალო ხელფასი“

ამოცანაში განვიხილოთ საწარმოში თანამშრომლებსა და დირექტორს შორის ხელფასის მომატების თაობაზე წარმოქმნილი წინააღმდეგობა.

საწარმოს თანამშრომელთა პროფკავშირული ორგანიზაციის თავმჯდომარე მოლაპარაკებას აწარმოებდა საწარმოს დირექტორთან თანამშრომელთა ხელფასების თაობაზე. მისი აზრით, ცხოვრება გაძვირდა, ფასები გაიზარდა და თანამშრომლები მეტ ფულს საჭიროებენ საყოფაცხოვრებო დანახარჯებისთვის, გაერთიანების წევრებიდან კი არც ერთი არ იღებს წელიწადში 18 000 ლარზე მეტს. დირექტორი დაეთანხმა მას იმაში, რომ მართლაც ყველაფერი გაძვირდა, მათ შორის, ნედლი მასალის ფასიც; შესაბამი-

სად, საწარმოს მოგება შეუმცირდა. გარდა ამისა, საწარმოში საშუალო ხელფასი ხომ წელიწადში 22 000 ლარს აღემატება. ამიტომ მას ვერც წარმოუდგენია ასეთ ვითარებაში ხელფასების მომატება.

იმ საღამოსვე თავმჯდომარემ ჩაატარა პროფკავშირული ორგანიზაციის წევრთა კრება. გამყიდველმა სიტყვა ითხოვა: „ჩვენ, გამყიდველები, მხოლოდ 10 000 ლარს ვიღებთ წელიწადში, გაერთიანების წევრთა უმრავლესობის ხელაფასი კი 15 000 ლარია. ჩვენ გვსურს, რომ ჩვენი ხელფასები ამ დონემდე მაინც გაიზარდოს“. გაერთიანების თავმჯდომარემ გადაწყვიტა, ყურადღებით შეესწავლა სრული ინფორმაცია საწარმოს თანამშრომელთა ხელფასების შესახებ. სახელფასო განყოფილებაში მას მისცეს შემდეგი ცხრილი:

სამუშაოს დასახელება	თანამშრომელთა რაოდენობა	ხელფასი ლარებში	პროფკავშირის წევრობა
დირექტორი	1	250 000	არა
მოადგილე	2	130 000	არა
ინჟინერი	3	55 000	არა
ოსტატი	12	18 000	დიახ
მუშა	30	15 000	დიახ
ბუღალტერი	3	13 500	დიახ
მდივანი	6	12 000	დიახ
გამყიდველი	10	10 000	დიახ
მცველი	5	8 000	დიახ
სულ	72	1 593 500	–

ყურადღებით უნდა წავიკითხოთ სიტუაციური ამოცანის ტექსტი და დავეხმაროთ პროფკავშირული ორგანიზაციის თავმჯდომარეს, გაერკვეს სიტუაციაში, საწარმოს დირექტორს წარუდგინოს ანგარიში და დაეხმაროს საწარმოს თანამშრომლებს. შესაძლებელია, მოსწავლეები დავყოთ ჯგუფებად და მათ გაითამაშონ ამოცანაში მითითებულ თანამშრომელთა როლები და ჩამოაყალიბონ საკუთარი მოსაზრებები.

მოსწავლე, რომელიც თავმჯდომარის როლშია, გამოთვლის საწარმოს თანამშრომელთა საშუალო ხელფასს, რომელიც დაახლოებით 22 131,94 ლარია. იგი მსჯელობს: დირექტორი მართალია, მაგრამ ხელფასების საშუალო მაღალია საწარმოს ხელმძღვანელთა მაღალი ხელფასების გამო და ხელფასების საშუალო არ იძლევა სწორ წარმოდგენას თანამშრომელთა ტიპური ხელფასის შესახებ. შემდეგ ნახავს, რომ გამყიდველიც მართალია. ოცდაათი მუშიდან თითოეულს 15 000 ლარი აქვს – ესაა ხელფასების მოდა. მიუხედავად ამისა, პროფკავშირის დანარჩენი 36 წევრიდან 24 იღებს ამაზე ნაკლებს, ანუ 15 000 ლარზე ნაკლებს. ბოლოს თავმჯდომარე საწარმოს ხელფასებს დაალაგებს ზრდადობის მიხედვით და იპოვის, რომ მედიანა 36-ე და 37-ე ხელფასებს შორისაა და რაკი ორივე ეს ხელფასი 15 000 ლარია, ამიტომ მედიანაც 15 000 ლარია.

მოსწავლეებმა უნდა გაარკვიონ, როგორ შეიცვლება ხელფასების მედიანა, მოდა და საშუალო, თუკი ყველაზე მცირეხელფასიანი 24 თანამშრომლის ხელფასი 15 000 ლარამ-

დე გაიზრდება. ისინი გამოთქვამენ თავიანთ ვარაუდს ხელფასებთან დაკავშირებით.

ბოლოს, ვთხოვოთ მოსწავლეებს, გამოთვალონ კალკულატორის ან კომპიუტერის საშუალებით ცენტრალური ტენდენციის საზომები გაზრდილი ხელფასების შემთხვევაში და შეადარონ საკუთარი ვარაუდი გამოთვლების შედეგებს. მოსწავლეები იმსჯელებენ, თუ ცენტრალური ტენდენციის რომელი საზომის რიცხვითი მნიშვნელობა არ შეცვლილა, რომელი საზომის რიცხვითი მნიშვნელობა შეიცვალა, რომელი შეიცვლებოდა და რომელი არ შეიცვლებოდა ერთი ხელფასის შეცვლის შემთხვევაში.

როლური თამაშის შემთხვევაში ბოლოს შეიძლება გაიმართოს დისკუსია და გაირკვეს — ვინ რომელ მახასიათებელს ანიჭებს უპირატესობას ტიპური ხელფასის წარმოსაჩენად (სავარაუდოდ, მმართველები უპირატესობას მიანიჭებდნენ საშუალოს, გაერთიანების თავმჯდომარე – მედიანას, ხოლო დაბალხელფასიანი თანამშრომლები — მოდას).

ცხადია, რომ მოცემული ამოცანა ხელს უწყობს არა მარტო სპეციფიკური — სტატისტიკური – ცოდნის დაუფლებას და სტატისტიკური ალღოს ჩამოყალიბებას, არამედ ზოგადი ინტელექტუალური უნარიანობის განვითარებასაც — ესაა პრობლემათა გადაჭრის უნარი, კრიტიკული აზროვნების უნარი, გადაწყვეტილების მიღების უნარი, მსჯელობისა და დასაბუთების უნარი, სასწავლო-კვლევითი უნარები.

დავალება დამოუკიდებელი მუშაობისთვის

1. გაარკვიეთ, თვისებრივია თუ რაოდენობრივი შემდეგი მონაცემები:

- ავტოსადგომზე განთავსებული ავტომობილების ფერები;
- საკლასო ოთახებში მერხების რიცხვი;
- სამარშრუტო ტაქსების ნომრები;
- სახელმძღვანელოთა ფასები;
- მტკვარში დაჭერილი თევზების წონები;
- პროდუქტების დამამზადებელი ფირმების დასახელებები;
- მოქალაქეთა დაბადების ადგილები;
- მოსწავლეთა თვალის ფერი;
- მოსწავლეთა სიმაღლე.

2. გარკვიეთ, მონაცემთა შეგროვების რომელ საშუალებებს გამოიყენებთ, თუ:

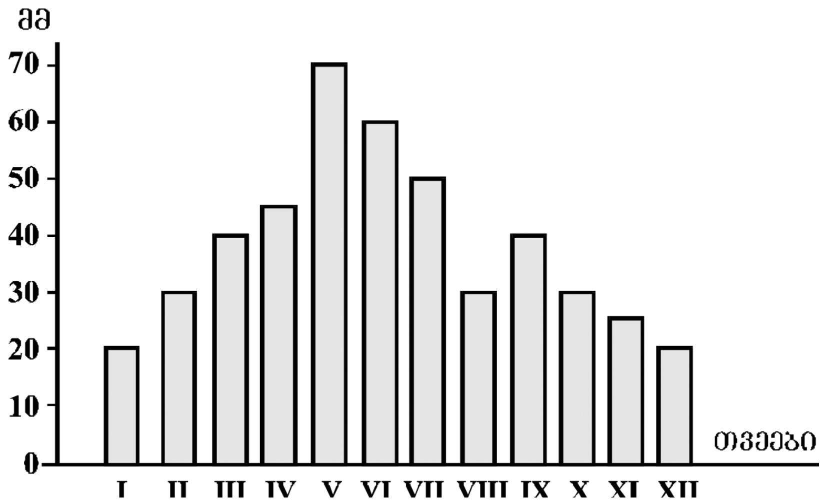
- იწერთ ყოველთვიურად წაკითხული წიგნების რაოდენობას;
- ეცნობით უნივერსიტეტში ჩარიცხულ სტუდენტთა სიას;
- ყოველდღიურად იწერთ ამოსული ჯეჯილის სიმაღლეს;
- რეკავთ ცნობათა ბიუროში კინოსეანსთა დაწყების დროის შესატყობად;
- ავსებთ ანკეტას მეზობლების ოჯახებში წევრების რაოდენობის შესახებ;
- არკვევთ, რამდენ საათს უყურებს ტელევიზორს მეექვსეკლასელი;
- იკვლევთ, რა განსხვავებაა წლიურ ნალექიანობაში თქვენს ქალაქსა და საქართველოს სხვა ქალაქებს შორის.

3. შეარჩიეთ მონაცემთა შეგროვების შესაფერისი საშუალება და ჩასვით წინადადებებში გამოტოვებული სიტყვები:

- მომავალი საკალათბურთო მატჩის პროგნოზისათვის მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ მონაცემები მოწინააღმდეგე გუნდების მოთამაშეთა ტყორცნების შედეგიანობის შესახებ. ამგვარი მონაცემების შესაგროვებლად სპეციალისტები სპორტსმენებზე აწარმოებენ...
- ... საშუალებით მონაცემების შეგროვების მაგალითია პოპულაციების შესწავლა ეკოლოგების მიერ. ისინი სწავლობენ გარემოს დაბინძურების ზეგავლენას და ამისთვის დროის ხანგრძლივი მონაკვეთის განმავლობაში აღრიცხავენ პოპულაციის რიცხობრიობის ცვლილებებს.

- ახალი ტურისტული სეზონისათვის ტურისტული ბიზნესის წარმომადგენლებს სჭირდებათ მონაცემები ტურისტთა ნაკადის შესახებ ამა თუ იმ რეგიონში წლის ამა თუ იმ დროს. ამგვარი მონაცემების მოძიება შესაძლებელია სასტუმროებში...

4. სვეტოვან დიაგრამაზე მოცემულია თბილისში ყოველთვიური ატმოსფერული ნალექის დონე.

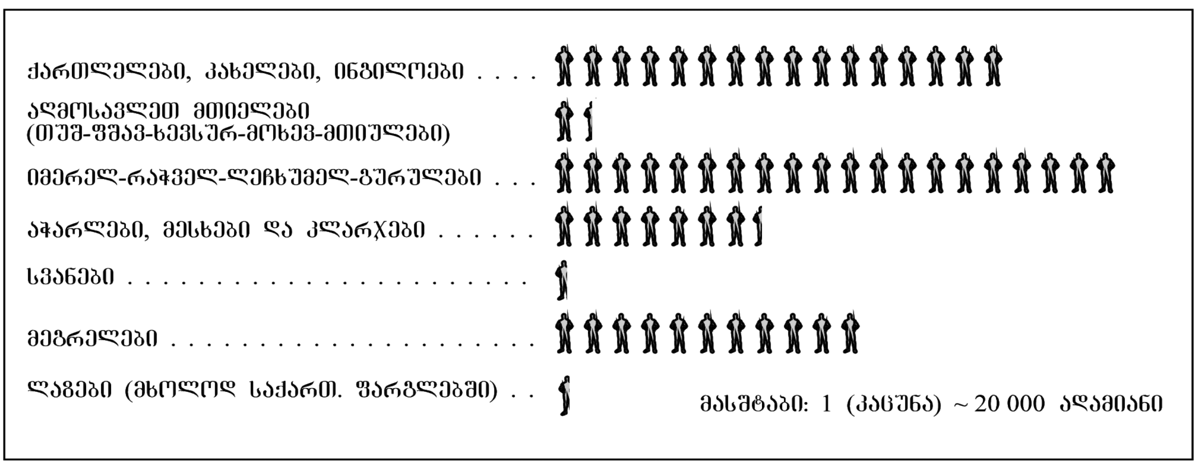


ა) გამოთვალეთ თბილისში ნალექების საშუალო წლიური დონე;

ბ) გამოთვალეთ, რამდენჯერაა ნაკლები საშუალო ნალექიანობა თბილისში, ვიდრე საქართველოს ყველაზე ნესტიან ადგილას – მთა მტირალაზე (აჭარაში), სადაც ნალექების საშუალო წლიური დონეა 3500 მმ;

გ) გამოთვალეთ, რამდენჯერაა მეტი საშუალო ნალექიანობა თბილისში, ვიდრე მსოფლიოს ყველაზე მშრალ ადგილას – დახლაში (ეგვიპტე), სადაც ნალექების საშუალო წლიური დონეა მხოლოდ 1 მმ.

5. მოცემულია XIX საუკუნის ბოლოსათვის საქართველოში მცხოვრები ქართველი მოსახლეობის რაოდენობა და შემადგენლობა.



პიქტოგრამის მიხედვით გაარკვიეთ:

ა) რამდენით ნაკლები თუშ-ფშავ-ხევსურ-მოხევ-მთიული ცხოვრობდა, ვიდრე აჭარლე-ბი, მესხები და კლარჯები;

ბ) რამდენჯერ მეტი იყო იმერელ-რაჭველ-ლეჩხუმელ-გურულების რაოდენობა, ვიდრე ქართლელების, კახელებისა და ინგილოების რაოდენობა.

6. VII-კლასელებმა თვითმმართველობის არჩევნები ჩაატარეს. კანდიდატად წარდგენი-ლი იყო 6 მეშვიდეკლასელი. მათგან უნდა აერჩიათ ერთი. არჩევნებში სულ 51 მოს-წავლე აძლევდა ხმას. დიაგრამაზე უნდა გამოვსახოთ ამ არჩევნების შედეგები – ხმე-ბის განაწილება. რომელი დიაგრამის აგებაა მოსახერხებელი აღნიშნული მონაცემების თვალსაჩინოდ წარმოდგენისათვის?

7. ცხრილში მოცემულია ფოლადის იმპორტის მოცულობა ექვსი თვის განმავლობაში.

თვეები	მოცულობა (მლნ ტ)
იანვარი	150
თებერვალი	225
მარტი	200
აპრილი	175
მაისი	150
ივნისი	150

ცხრილის მიხედვით ააგეთ სვეტოვანი და წრიული დიაგრამები.

8. ცნობილია მონაცემები:

6, 3, 6, 7, 2, 8, 6, 3, 7, 1, 6, 1, 7, 6, 6

იპოვეთ მოდა, მედიანა, საშუალო და გაბნევის დიაპაზონი.

9. სადაზღვევო კომპანიის ხელმძღვანელობას აინტერესებს, გამოიკვლიოს გასული ზაფხულის 30 დღის განმავლობაში დიდ ქალაქში მოპარულ ავტომანქანათა განაწილე-ბა. ქვემოთ მოცემულია დაკვირვებული ნედლი მონაცემები:

52	62	51	50	69
58	77	66	53	57
75	56	55	67	73
79	59	68	65	72
57	51	63	69	75
65	53	78	66	75

ამ მონაცემებისთვის ააგეთ ფოთლებიანი ღეროს მსგავსი დიაგრამა.

10. მოცემულია წვეულებაზე მოსულ სტუმართა ასაკი:

19, 25, 88, 23, 24, 26, 20, 23, 22

საშუალო ასაკი და მედიანა ტოლია:

ა) 27; 27 ბ) 26; 26 გ) 60; 20 დ) 30; 23

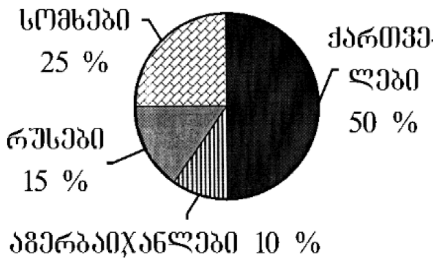
11. ვთქვათ, მეორე ამოცანაში უფროსი სტუმარი 45 წლისაა ნაცვლად 88-ისა, ყველაზე ახალგაზრდა კი – 13 წლის და არა 19-ის. როგორ იმოქმედებს ეს საშუალოზე და მედიანაზე?

ა) შეიცვლება; არ შეიცვლება. გ) არ შეიცვლება; არ შეიცვლება.

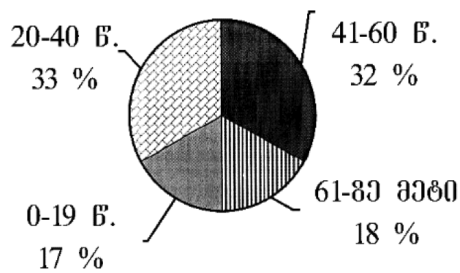
ბ) შეიცვლება; შეიცვლება. დ) არ შეიცვლება; შეიცვლება.

12. წრიულ დიაგრამებზე მოცემულია რომელიღაც ქალაქის ეროვნული და ასაკობრივი შემადგენლობის პროცენტული განაწილება.

ქალაქის მოსახლეობის ეროვნული შემადგენლობა



ქალაქის მოსახლეობის ასაკობრივი შემადგენლობა



დიაგრამების მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ შეკითხვებს ამ ქალაქის შესახებ:

I. რამდენჯერ მეტნი არიან ქართველები, ვიდრე სომხები? ვიდრე აზერბაიჯანლები?

II. რამდენჯერ ნაკლებნი არიან აზერბაიჯანლები, ვიდრე სომხები? ვიდრე რუსები?

III. თუ ქალაქის მოსახლეობის საერთო რაოდენობაა 1,2 მლნ, მაშინ რამდენი მოსახლეა 19 წლის ან მასზე ნაკლები წლოვანების? 40 წელიწადზე მეტი წლოვანების?

IV. გაარკვიეთ, მხოლოდ მოცემული წრიული დიაგრამებიდან რომელ ინფორმაციას ვერ გამოვიტანთ ქალაქის მოსახლეობის შესახებ:

ა) რა ნაწილი არაა არც რუსი და არც სომეხი;

ბ) რა ნაწილია ქართველი ან სომეხი;

გ) რა ნაწილია 41 წლამდე ასაკისა;

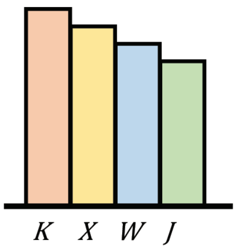
დ) ქართველების რა ნაწილია 20-40 წლისა.

შემაჯამებელი ტესტი

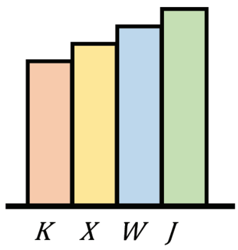
1. რომელი სვეტოვანი დიაგრამა შეესაბამება ამ ცხრილში მოცემულ მონაცემებს?

მანქანის მოდელი	რაოდენობა
K	7
X	9
W	7
J	8

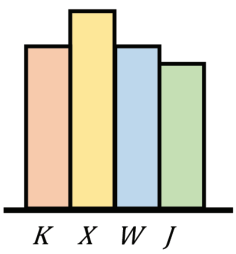
ა)



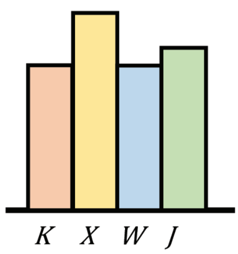
ბ)



გ)



დ)

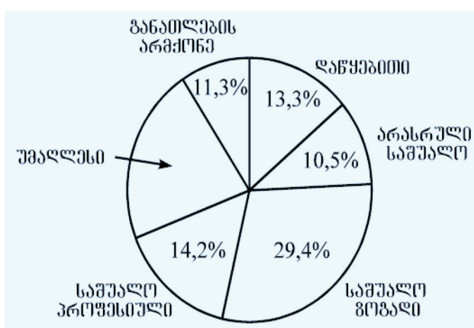


2. რიცხვით მონაცემებში ყველა რიცხვი 5-ით გაზარდეს. რომელი წინადადებაა მცდარი?

ა) საშუალო 5-ით გაიზრდება. გ) დიაპაზონი არ შეიცვლება.

ბ) მედიანა 5-ით გაიზრდება. დ) საშუალოსა და მედიანის ჯამი 5-ით გაიზრდება.

3. წრიულ დიაგრამაზე მოცემულია, რეგიონში მამაკაცთა რამდენი პროცენტია განათლების გარეშე და რამდენ პროცენტს აქვს დაწყებითი, არასრული საშუალო, საშუალო ზოგადი, საშუალო პროფესიული თუ უმაღლესი განათლება. რის ტოლია ამ რეგიონში უმაღლესი განათლების მქონე მამაკაცთა რაოდენობა, თუ საშუალო პროფესიული განათლების მქონე მამაკაცთა რაოდენობა 130 ათასის ტოლია?



4. ეზოში თამაშობს 4 ბავშვი. მათი საშუალო ასაკია 7,5 წელი, მედიანური ასაკი – 8,5; მოდა უდრის 9 წელს, დიაპაზონი – 5 წელს. რა ასაკის ბავშვები თამაშობენ ეზოში?

ა) 5, 8, 9, 9;   ბ) 4, 5, 9, 9;   გ) 5, 8, 9, 9;   დ) 4, 8, 9, 9.

5. სკოლის 50 მასწავლებლიდან 40 ქალია, 10 – მამაკაცი. ქალების საშუალო ასაკი 45 წელია, მამაკაცების – 35 წელი. რისი ტოლია მასწავლებლების საშუალო ასაკი?

ა) 40;   ბ) 43;   გ) 45;   დ) 47.

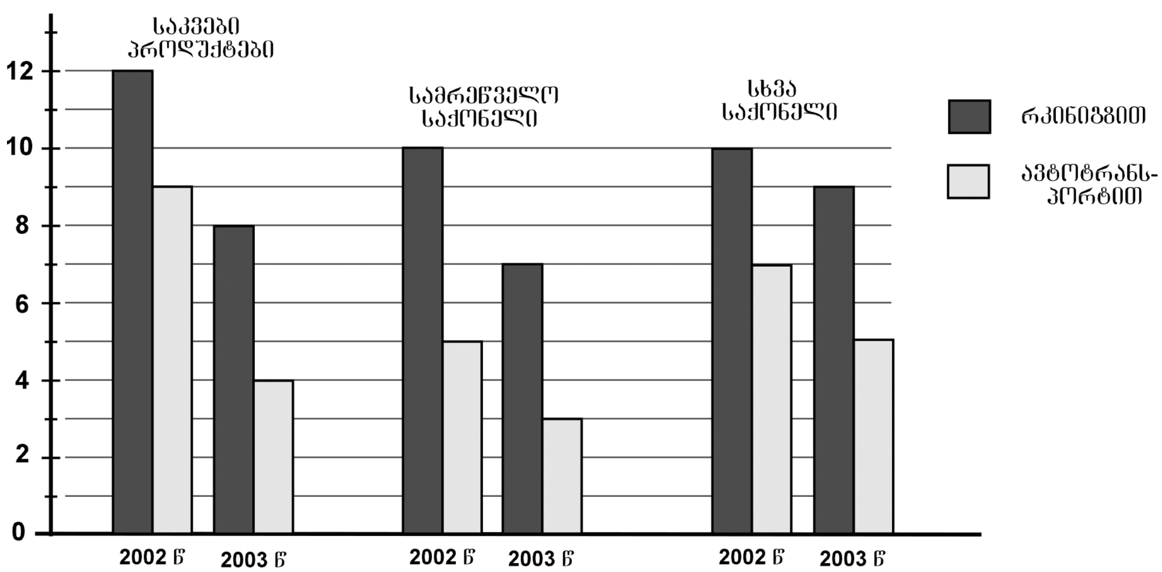
6. ერთ-ერთ ოჯახში ელექტროენერგიის გადასახადი თვეების მიხედვით მოცემულია ცხრილით:

თვე	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
ლარი	78	72	63	47	45	30	36	30	49	46	51	64

მონაცემების მოდა და მედიანაა:

ა) 30; 48   ბ) 72; 46   გ) 49; 47   დ) მოდა არ აქვს; 48

7. სვეტოვან დიაგრამაზე მოცემულია, რამდენი მილიონი ტონა ტვირთი იქნა გადაზიდული ერთ-ერთ ქვეყანაში 2002-2003 წლებში რკინიგზით და ავტოტრანსპორტით და რა სახის იყო ეს ტვირთი (საკვები პროდუქტები, სამრეწველო საქონელი თუ სხვა).



დიაგრამის მიხედვით უპასუხეთ ორ კითხვას: რამდენი მილიონი ტონით ნაკლები საკვები პროდუქტები გადაუზიდავთ რკინიგზით 2003 წელს 2002 წელთან შედარებით? რამდენჯერ აღემატებოდა 2003 წელს რკინიგზით გადაზიდული ტვირთის საერთო წონა იმავე წელს ავტოტრანსპორტით გადაზიდულ ტვირთის საერთო წონას?

(ა) 2; 1,5-ჯერ (ბ) 3; 2,5-ჯერ (გ) 4; 2-ჯერ (დ) 5; 3-ჯერ

პასუხები

თავი 1. სიმრავლე

დამოუკიდებელი სამუშაო

1. 10-ზე ნაკლები ყველა მარტივი რიცხვი;

2. ა). *{ლალი, ზურა,},*

ბ). *{ლალი, გენო, გია, პაატა, ზურა, იანინა, ლელა, ნაზი, ნანა, თამარი}.*

გ). *{ გენო, გია, პაატა, იანინა, ლელა, ნაზი, ნანა, თამარი}.*

3. A={2, 3, 5, 7, 11, 13}   B{1,3, 5,7,9};

4. ა) 2; ბ) 15.

5. როცა სიმრავლეები თანაუკვეთია – 0, ხოლო მაქსიმუმ 6, როცა ერთი მეორის ქვესიმრავ-ლეა.

6. როცა ერთი მეორის ქვესიმრავლეა – 18, ხოლო მაქსიმუმ 26, როცა სიმრავლეები თანაუკვე-თია.

7. თანაკვეთა ΔMTC , გაერთიანება $ABMNKTDE$ რვაკუთხედი**.**

8. ბ) და დ); რადგან ა)-ში თანაკვეთაა r, გ)-ში კი მართკუთხა პარალელეპიპედთა სიმრავლე;

9. 5.

10. 9 და 11.

11. 1.

12. ბ) 0- $^1/_{5.}$ **13.** ა) $\frac{1}{5};\frac{1}{4}$.

შემაჯამებელი ტესტი

1. ა; 2. გ;   3. გ; 4. დ;   5. ბ;   6. დ;   7. ა.

თავი 2. რიცხვები

დამოუკიდებელი სამუშაო

1. ა) 255, ბ)1600, გ) 450.

2. ა) MLXXXXVIII, ბ) MCXXI, გ) MCLXVI.

3. სამი.

4. 161.

5. 120040079; 1200400; 120040.

6. 120080073, ასეულმილიონი; ათეულათასეული;.

7. 1) ა. გაიზრდება 100-ჯერ; ბ. გაიზრდება 1000000-ჯერ. 2) არ შეიცვლება.

8. IV.

9. I) 817 504 380 = $8{\cdot}10^8+10^7+7{\cdot}10^6+5{\cdot}10^5+4{\cdot}10^3+3{\cdot}10^2+8{\cdot}10$

II) 18 120 215 062 = $10^{10}+8{\cdot}10^9+10^8+2{\cdot}10^7+2{\cdot}10^5+10^4+5{\cdot}10^3+6{\cdot}10+2$.

10. 49 043012 (ერთ-ერთი პასუხია).

11. რიცხვის სამი ძირითადი გამოყენება რაოდენობა – რამდენია საგანი. რიგითობა – მერამდენეა საგანი. ნომერი – რა ნომრითაა მონიშნული საგანი.

12. გ.

13. გ.

შემაჯამებელი ტესტი

1. დ; **2.** ა; **3.** ა; **4.** გ; **5.** დ; **6.** 2797; **7.** ბ; **8.** დ.

თავი 3. მოქმედებები რიცხვებზე

დამოუკიდებელი სამუშაო

1. 51509, 61509, 67509, 69509.

2. I) 6·6+4+16=56;

II) 7·9+7·8=119;

III) 4·11+12·5+25+15+8=152.

3. 1, 3, 5.

4. 189.

5. ა) 200, ბ) 20000.

6. დ) რადგან ნაშთი არასწორადაა ნაანგარიშევი.

7. ბ) რადგან ნაშთი მეტია გამყოფზე.

8. 1კმ>900მ, 2სთ>70წთ, 1კგ>200გ, 27სთ<2დღე-ღამე=48სთ, 70 დმ 30მმ>530სმ, 1თვე<39 დღე-ღამე, 5 სთ. 25წთ. < 375წთ, 45ც. 670გ>3580გ.

9. 26 ყუთი.

10. 240წმ=4წთ, 7200წმ=2სთ, 80ც160კგ=8160კგ, 374დმ=37400მმ.

11. 45.

12. დ) 31.

13. 6.

14. 106.

15. 3.

შემაჯამებელი ტესტი

1. დ; 2. დ; 3. გ; 4. გ; 5. გ; 6. გ; 7. ბ); 8. ა); 9. დ); 10. ა).

თავი 4. შეფარდება

დამოუკიდებელი სამუშაო

1.საუკეთესო გზაა მთელის გამოყოფა და წილადი ნაწილების შედარება $1\frac{1}{11} > 1\frac{1}{12}$.

2. ეზოში სულ 15 ქათამია. მოსწავლეებს ერთმანეთში აერიათ ნაწილები და ქათმები, მათ მამ-ლების რაოდენობა და დედლების შესაბამისი ნაწილი შეკრიბეს.

3. 361534,7.

4. A წერტილის კოორდინატია $127\frac{3}{10}$, ანუ127,3; B წერტილის კოორდინატია $128\frac{3}{4}$, ანუ128,75.

5. გ) 2/3.

6. 142,5.

7. 108 კმ.

8. 237,06 = 2 · 100 + 3 · 10 + 7 · 1 + 0 0,1 + 6 · 0,01.

9150,508 = 9 · 1000 + 1 · 100 + 5 · 10 + 0 · 1 + 5 · 0,1 + 0 · 0,01 + 8 · 0,001.

4010,0104 = 4 · 1000 + 0 · 100 + 1 · 10 + 0 · 1 + 0 · 0,1+1 · 0,01 + 0 · 0,001 + 4 · 0,0001.

9. 22/81; 10. დ) 1/6; 11. (ბ) 2.

შემაჯამებელი ტესტი

1. გ; 2. ბ; 3. დ; 4. მეექვსედი; 5. 30; 6. (ბ) 1,5; 7. (გ) 91 კგ.

თავი 5. პროპორცია და პროცენტი

დამოუკიდებელი სამუშაო

1. 31500კგ.

2. 24,75 კმ.

3. 100%.

4. ამოიღეს 25 წითელი ბურთულა.

5. შენადნობი შეიცავს 80% სუფთა ოქროს.

6. 108.

7. $\approx 33,3\%$.

8. დ) 49 ლარი.

9. 90 კმ/სთ.

10. არ შეიძლება მოხდეს IV.

11. მეორე მაღაზიაში 7 ლარით.

12. 30 კგ.

13. 750 გრამი.

შემაჯამებელი ტესტი

1. ბ.

2. გ.

3. დ.

4. 12 % .

5. 5კგ.

6. 24 წთ.

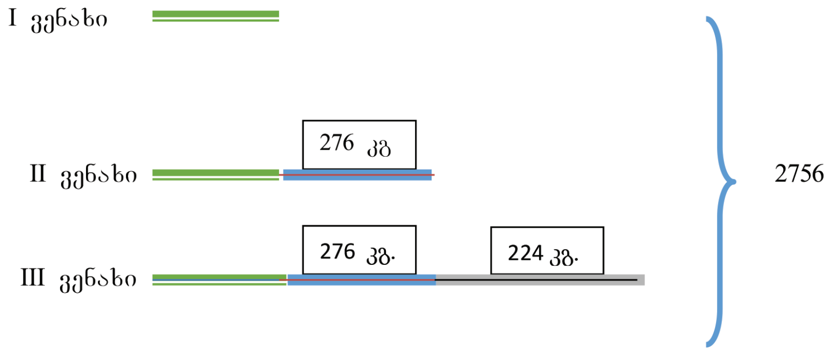
7. 3 კგ 120 გ.

თავი 6. ალგებრული გამოსახულებები.

დამოუკიდებელი სამუშაო

1. 10·100–12·55

2.



3. $x+5x+2x=240$.

4. I. 2ა+15; II. ბ-(7+5)=ბ-12.

5. 32×30+7×30=30×(32+7)=1170.

6. 8 კაცი.

7. 5.

8. (გ) 6.

9. 64.

10. 14.

11. ამოიღეს 25 წითელი ბურთულა.

12. 15 სთ 15 წთ.

13. 240 მლნ. კმ^2.

შემაჯამებელი ტესტი

1. 5.

2. (გ).

3. (გ).

4. დაეწევა; 13 სთ 30 წთ.

5. (ა).

6. 6 ლარი.

7. 35 ავტოკალამი.

თავი 7. ტოპოლოგია

დამოუკიდებელი სამუშაო

1. მონაკვეთები: 2,10; ტეხილები: 4,6,7,8,11; მრუდები: 1,3,5,9.

2. I. ეკუთვნის შიგა არე 1,3,6,9,11; II. არ ეკუთვნის შიგა არე 2,4,5,7,8,10.

3. I) 11,13; II) 7; III) 1,2,3,5,8; IV) 6,12,15,16,18,20; V) 4,9,10,14,17,19.

4. I) 3; II) 4.

5. ეკვივალენტურია ყველა ნაკვთი გარდა მე-10.

6. მაგალითად, წრე.

7. ა) დიახ, ბ) დიახ.

8. (ა) 5.

შემაჯამებელი ტესტი

1. გ.

2. ა.

3. დ.

4. გ.

5. დ.

6. ბ.

7. დ.

თავი 8. გეომეტრია სიბრტყეზე

დამოუკიდებელი სამუშაო

1. გ.

2. დ.

3. გ.

4. დ.

5. ბ.

6. ა.

7. ა.

8. 12.

9. 32.

10. 3:5.

11. 3:5.

12. 192.

13. მიახლოებით 20მ^2.

შემაჯამებელი ტესტი

1. (დ).

2. (დ).

3. (გ).

4. $\frac{1}{8}$.

5. (ა).

6. (დ).

7. (ბ).

თავი 9. გეომეტრია სივრცეში

დამოუკიდებელი სამუშაო

1. 7 სმ უნდა შეიცვალოს 5სმ-ით ან პირიქით.

2. 64 $მ^3$.

3. 19 ლიტრი.

4. 96 კგ.

5. 10.

6. 162.

7. გადიდდება 12 $მ^3$-ით.

8. I) 8; II) 16.

9. 15სმ.

10. 7 რეისი;

11. (გ)

შემაჯამებელი ტესტი

1. ბ.

2. დ.

3. გ.

4. დ.

5. დ.

6. ბ.

7. დ.

პასუხები: თავი 10. სტატისტიკა

დამოუკიდებელი სამუშაო.

1. თვისებრივი; რაოდენობრივი; თვისებრივი; რაოდენობრივი; რაოდენობრივი; თვისებრივი; თვისებრივი; თვისებრივი; რაოდენობრივი.

2. დაკვირვება; დაკვირვება; გაზომვა და დაკვირვება; გამოკითხვა; გამოკითხვა; გამოკითხვა; გაზომვა.

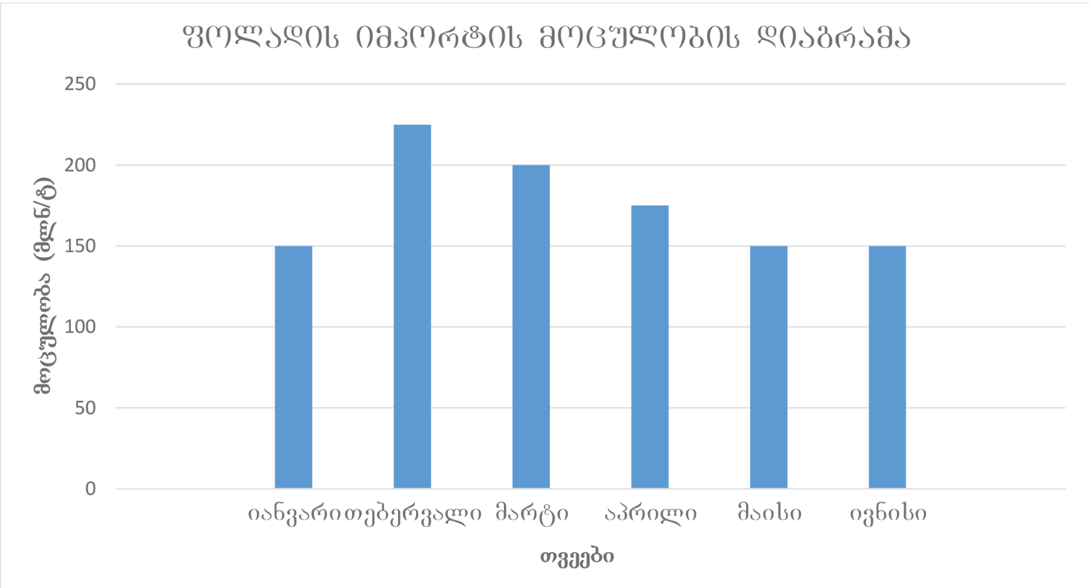
3. დაკვირვება; დაკვირვება; გამოკითხვა.

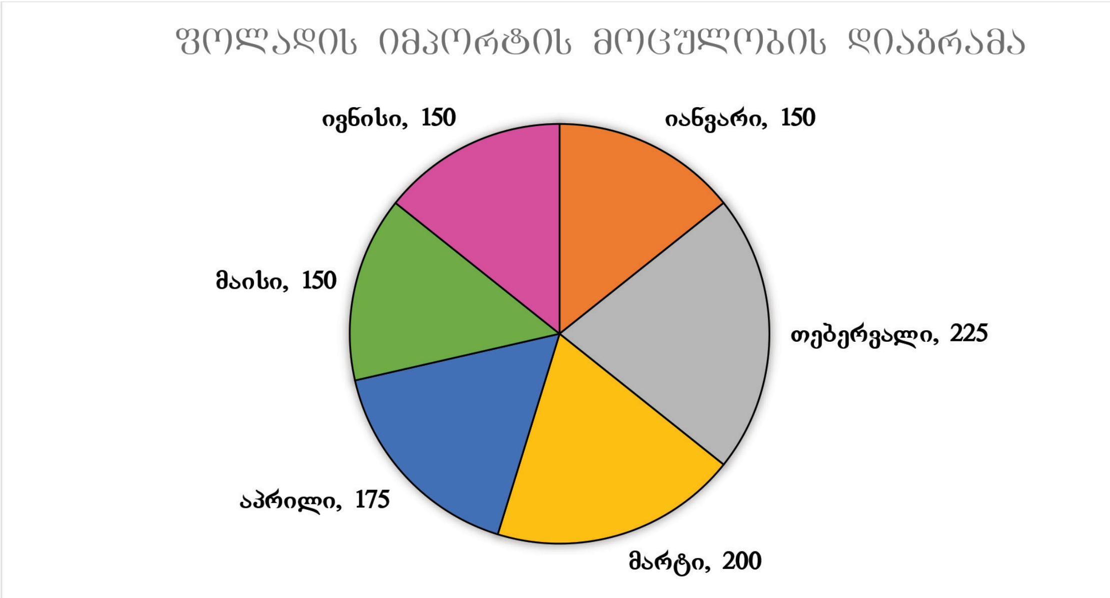
4. ა) 38,3; ბ) 91,4; გ) 38,3.

5. ა) 120000; ბ) 1,25.

6. სვეტოვანი.

7.





8. საშუალო 5; მოდა 6; მედიანა 6; გაბნევის დიაპაზონი 7.

9.

ღერო	ფოთლები
5	0 1 1 2 3 3 5 6 7 7 8 9
6	2 3 5 5 6 6 7 8 9 9
7	2 3 5 5 5 7 8 9

10. დ;

11. ა;

12. I. 2-ჯერ; 5-ჯერ. II. 2,5-ჯერ; 1,5-ჯერ.

III. 204 ათასი; 600 ათასი. IV. დ)

შემაჯამებელი ტესტი

1. დ; 2. დ; 3. 195 ათასი; 4. დ; 5.ბ; 6.ა; 7. გ