Алексеев Г.В., Холявин И.И.

ЧИСЛЕННОЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ

(линейное, нелинейное и целочисленное программирование, элементы теории игр)

Рекомендовано УМО по образованию в области финансов, учета и мировой экономики в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению «Экономика» и специальностям «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» и «Финансы и кредит»

Гатчина
2011

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26

Рецензент:
М.С.Красс, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «математическое моделирование экономических процессов» ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Алексеев Г.В.

ЧИСЛЕННОЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ: учебное пособие/ Алексеев Г.В., Холявин И.И. – Гатчина:ГИЭФПТ, 2011. – 209 с. + CD (MathCAD – программы).

ISBN 978-5-94895-069-3

В учебном пособии изложен системный подход к использованию современного математического инструментария экономистами. Кроме теоретической базы в нем изложены основы и примеры использования математического аппарата в современных экономических приложениях, причем каждая тема иллюстрируется экономическими примерами.
Подробно представлено решение примеров и задач экономического содержания, с помощью одной из современных систем компьютерной математики – системы MathCAD, которая делает преподавание экономических дисциплин более эффективным и позволяет сосредоточить внимание студента на логике методов и алгоритмов, освобождая от необходимости освоения громоздких вычислительных процедур. Учебное пособие для организации самостоятельной работы и вычислительного практикума студентов комплектуется CD диском с MathCAD-программами для решения наиболее распространенных задач экономико-математического моделирования.
Предназначено в качестве учебного пособия для преподавателей высших учебных заведений, осуществляющих подготовку студентов по специальностям 080105 – Финансы и кредит и 080109 – Бухгалтерский учет, анализ и аудит. Может быть полезно для студентов и аспирантов других экономических специальностей.

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26

ISBN 978-5-94895-069-3

СОДЕРЖАНИЕ Стр.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных направлений современного этапа развития общества является трансфер высоких технологий из самых разных областей знаний в образование, а через него в реальный сектор экономики. Экономическое образование, способствуя этому процессу, должно готовить креативно мыслящих компетентных специалистов, владеющих как теоретическими знаниями, так и навыками их практической реализации.

Обучение навыкам использования современных пакетов специализированных компьютерных программ можно отнести к одному из инновационных подходов в освоении экономической науки. С этой целью в образовательных программах в вариативной части часто используется курс «Математические методы исследования в экономике» и спецкурсы «Основы использования пакета MathCAD в экономических расчетах», «Решение оптимизационных задач с помощью MathCAD», «Элементы теории игр на основе MathCAD». Включение этих курсов обеспечивает повышение уровня профессиональной подготовки будущих специалистов, поскольку неразрывно связано с обучением навыкам решения творческих практических и научных задач.

Математические методы исследования в экономике ориентированы на решение задач, которые можно корректно описать с помощью той или иной математической модели для получения оптимального решения. Понятие «математические методы» тесно связано с понятием «математические модели», так как математические методы можно применять лишь для описания отвечающим им математическим моделям.

В данном пособии представлено решение основных практически значимых задач экономико-математическими методами (линейное и нелинейное программирование, транспортная задача и задача о назначении, сетевые методы и целочисленное программирование) с помощью одной из современных систем компьютерной математики – системы MathCAD.

MathCAD – это мощный инструмент, позволяющий сосредоточить внимание студента на логике методов и алгоритмов, освобождая от необходимости освоения громоздких, незапоминающихся и потому бесполезных вычислительных процедур.

MathCAD является эффективной системой для работы с формулами, числами, текстами и графиками, может выполнять вычисления любой степени сложности, по своему объёму допустимые на персональном компьютере. Помимо привычных численных расчётов, MathCAD способен делать символьные (аналитические) преобразования, что позволяет решить большинство математических задач в виде формул. Возможность интеграции MathCAD с такими мощными системами автоматизации расчетов, как Mathematica, STATISTICA, SPSS, Maple, MatLab и другие делает его незаменимым инструментом в руках не только студента, но и специалиста, решающего сложные современные задачи экономики.

Представленное учебное пособие может успешно использоваться при изучении различных разделов математики и её приложений в высших учебных заведениях, осуществляющих экономическое образование. Благодаря большму числу решенных задач предлагаемое учебное пособие может служить справочником для специалистов, работающих в различных областях экономики.

Все учебное пособие состоит из двух глав и приложения. В I главе рассмотрены основы линейной алгебры и аналитической геометрии и некоторые линейные экономические модели. В главе II рассмотрены основные задачи математического программирования и математических методов в экономике. В приложении, выполненном в виде CD диска, даны листинги некоторых программ, реализующих разработанные алгоритмы, в MathCAD-14 и Excel.

Каждая глава разбита на параграфы, пункты и подпункты. Нумерация формул, рисунков, таблиц введена отдельно для каждого параграфа. В пособии используются общепринятые обозначения; наряду с этим начало решения примера или доказательства теоремы обозначается значком ■, а конец – значком ●.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ БАЗА МОДЕЛИРОВАНИЯ

§1. Векторы. Декартова система координат

1.1. Понятие вектора.

Определение 1. **Вектором** называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B, который можно передвигать параллельно самому себе.

Определение 2. **Длиной** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=|\boldsymbol{a}|$ **вектора** $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ называется неотрицательное число, равное длине отрезка AB, соединяющего точки A и B. Будем также писать $\left|\overrightarrow{AB}\right|=|AB|$.

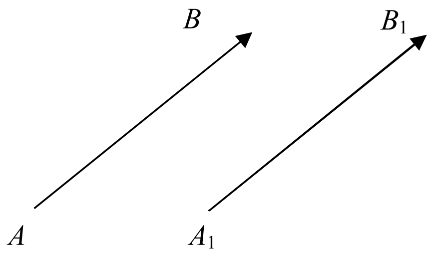


Рис.1.1. Коллинеарные векторы

Таким образом, считается, что два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, имеющие равные длины ($|AB|=|A_1B_1|$) и одно и то же направление, определяют один и тот же вектор $\boldsymbol{a}$, и в этом смысле пишут $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$.

Определение 3. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными** (рис. 1.1).

Определение 4. Если точки A и B совпадают, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA}=\mathbf{0}$ называется **нулевым вектором**. Его длина равна нулю, а направление для него не имеет смысла.

В геометрии рассматривают сложение и вычитание векторов, и умножение их на действительное число. По определению произведение $\boldsymbol{a}\alpha=\alpha\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на число α или числа α на вектор $\boldsymbol{a}$ есть вектор, длина которого равна $|\alpha\boldsymbol{a}|=|\alpha|\cdot|\boldsymbol{a}|$, а направление совпадает с $\boldsymbol{a}$, если $\alpha>0$, или противоположно $\boldsymbol{a}$, если $\alpha<0$. При $\alpha=0$ длина $|\alpha\boldsymbol{a}|$ равна нулю и вектор $\alpha\boldsymbol{a}$ превращается в нулевой вектор (точку), не имеющий направления.

Определение 5. Вектор $\boldsymbol{e}$ называется **единичным,** если его длина равна 1, то есть $|\boldsymbol{e}|=1$.

Если $\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}$ – единичный вектор, то $|\boldsymbol{b}|=|\alpha|$, потому что

$$|\boldsymbol{b}|=|\alpha|\cdot|\boldsymbol{e}|=|\alpha|\cdot 1=|\alpha|.$$

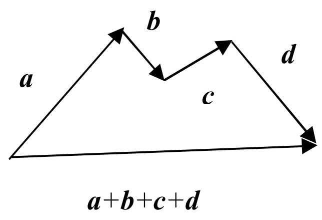


Рис.1.2. Сложение векторов

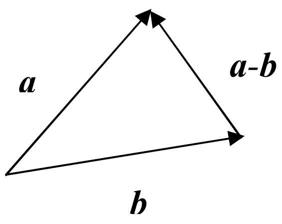


Рис.1.3. Вычитание векторов

Известно, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$,…, взятые в конечном числе, складываются по правилу замыкания цепочки этих векторов (рис. 1.2). На рис. 1.3 показано как вычитаются векторы.

1.2. Скалярное произведение векторов.

Определение 6. **Скалярным произведением** двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ назовём число $\boldsymbol{ab}$ или $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, равное произведению длин этих векторов, помноженному на косинус угла φ между ними:

$$\boldsymbol{ab}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi. \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. Скалярное произведение обладает свойствами:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}), \tag{1.2}$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}), \tag{1.3}$$

$$(\boldsymbol{a},\alpha\boldsymbol{b})=\alpha(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}). \tag{1.4}$$

■ Равенства (1.2) – (1.4) непосредственно вытекают из определения скалярного произведения. ●

Пример 1. Если тело под действием силы $\boldsymbol{F}$ передвинулось прямолинейно вдоль вектора $\boldsymbol{s}$, то работа A, выполненная силой $\boldsymbol{F}$, как известно из курса физики, равна произведению величины силы $|\boldsymbol{F}|$ на путь $|\boldsymbol{s}|$ и ещё на косинус угла ω между векторами $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{s}$: $A=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{s})$. Но тогда $A=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{s})$, то есть указанная работа равна скалярному произведению векторов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{s}$.

1.3. Прямоугольная система координат. Перейдём к аналитическому описанию векторов и точек пространства – при помощи чисел. Введём в пространстве **прямоугольную систему координат** x, y, z, то есть три взаимно перпендикулярно направленные прямые, проходящие через некоторую точку O, называемые **осями координат** x, y, z (рис.1.4). Предполагается, что для данной системы координат выбран единичный отрезок, при помощи которого измеряются все прочие отрезки. Точка O называется **началом координат.**

Зададим произвольную точку A трёхмерного пространства. Направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$ называется **радиус-вектором точки** A. Радиус-вектор в свою очередь определяет вектор $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$), который можно переносить в пространстве параллельно самому себе. **Координатами радиус-вектора** называются координаты точки A; при этом координата x называется **абсциссой,** координата y – **ординатой** и координата z – **аппликатой** точки A.

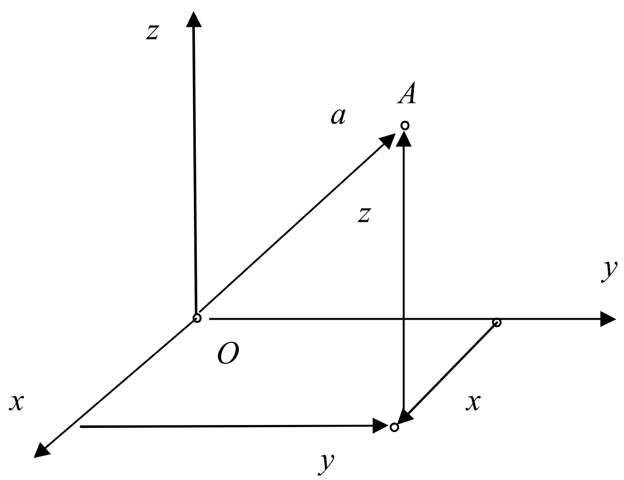


Рис.1.4. Прямоугольная система координат

Между точками A пространства и их радиус-векторами $\overrightarrow{OA}$ или, что все равно, тройками чисел (x, y, z), являющимися координатами точки A или проекциями $\overrightarrow{OA}$ на оси, имеется взаимно однозначное соответствие.

Мы будем писать $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ и говорить, что $\boldsymbol{a}$ или (x, y, z) есть вектор, равный радиус-вектору точки A, имеющему координаты x, y, z. В этом случае проекции $\boldsymbol{a}$ на оси координат часто обозначают символами a_x, a_y, a_z и пишут $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$. Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что два вектора $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ и $\boldsymbol{b}=(x', y', z')$ равны тогда и только тогда, если выполняются одновременно равенства: $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$. По тем же причинам справедливы равенства:

$$(x, y, z)\pm(x', y', z')=(x\pm x', y\pm y', z\pm z'), \qquad (1.5)$$

$$\alpha(x, y, z)=(\alpha x, \alpha y, \alpha z). \qquad (1.6)$$

На рис. 1.4 видно, что длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат:

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,. \qquad (1.7)$$

Обозначим через $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ единичные (имеющие длину, равную 1) векторы, имеющие соответственно то же направление, что и оси x, y, z. Векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ называют **ортами** осей x, y, z. Произвольный вектор (x, y, z) может быть записан в виде

$$(x, y, z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \qquad (1.8)$$

Отметим равенства, имеющие место для скалярных произведений ортов осей, т.е.

$$\boldsymbol{ii}=\boldsymbol{jj}=\boldsymbol{kk}=1,\ \boldsymbol{ij}=\boldsymbol{ik}=\boldsymbol{jk}=0. \qquad (1.9)$$

Пусть теперь $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ и $\boldsymbol{b}=(x_1, y_1, z_1)$. Тогда $\boldsymbol{ab}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=xx_1+yy_1+zz_1$. В самом деле, на основании (1.7), (1.8), (1.9)

$$\boldsymbol{ab}=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=xx_1\boldsymbol{ii}+xy_1\boldsymbol{ij}+xz_1\boldsymbol{ik}+yx_1\boldsymbol{ji}+yy_1\boldsymbol{jj}+yz_1\boldsymbol{jk}+zx_1\boldsymbol{ki}+zy_1\boldsymbol{kj}+zz_1\boldsymbol{kk}=$$
$$=xx_1+yy_1+zz_1, \qquad (1.10)$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов. Тогда косинус угла φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно определить следующим образом:

$$\cos\varphi=(\boldsymbol{ab})/(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)=\frac{xx_1+yy_1+zz_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\,. \qquad (1.11)$$

При $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ угол φ между векторами равен нулю, $\cos\varphi=1$ и

$$\boldsymbol{aa}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2+z^2,$$

т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

Если рассматриваются векторы на плоскости, то в формулах (1.5) – (1.11) необходимо положить $z=0$. В частности, расстояние d между двумя точками плоскости $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ можно рассматривать как длину вектора $\overrightarrow{A_1A_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$. Тогда

$$d=\sqrt{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,. \qquad (1.12)$$

Пример 2. Даны координаты трёх точек $A(-1,1)$, $B(-1,6)$, $C(3,4)$ на плоскости. Найдём: а) вектор $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; б) длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и угол между ними**.**

■ а) Найдём вначале векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. По определению $\overrightarrow{AB}=(x_B\text{-}x_A,\ y_B\text{-}y_A)=(0,\ 5)$, $\overrightarrow{AC}=(x_C\text{-}x_A,\ y_C\text{-}y_A)=(4,\ 3)$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(4,\ 8)$.

б) По формуле (1.12) найдём длины $d_1=\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}=\sqrt{0^2+5^2}=5$, $d_2=\sqrt{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. По формуле (1.10) определим скалярное произведение $\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}=0\cdot4+5\cdot3=15$. Тогда по формуле (1.11) $\cos\varphi=\dfrac{15}{5\cdot5}=0{,}6$, откуда $\varphi=\arccos0{,}6\approx53°$. ●

Двумерные (плоские) или трехмерные (пространственные) векторы и операции над ними, рассмотренные выше, можно обобщить на случай любого числа измерений n:

Определение 6. ***n*-мерным вектором** называется упорядоченная совокупность n чисел, записываемых в виде $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}$, где x_i – i-я **компонента** (**координата**) вектора $\boldsymbol{x}$.

Аналогично обобщаются остальные определения этого параграфа. При этом линейные операции сложения векторов и умножения вектора на число удовлетворяют следующим свойствам, рассматриваемым как аксиомы:

Свойство 1. Коммутативное свойство суммы: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$.

Свойство 2. Ассоциативное свойство суммы: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$.

Свойство 3. Ассоциативное относительно числового множителя свойство: $\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}$.

Свойство 4. Дистрибутивное относительно суммы векторов свойство: $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$.

Свойство 5. Дистрибутивное относительно суммы числовых множителей свойство: $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$.

Свойство 6. Существует нулевой вектор $\mathbf{0}=(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ такой, что $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$.

Свойство 7. Для любого вектора $\boldsymbol{x}$ существует противоположный вектор $(-\boldsymbol{x})$ такой, что $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$.

Свойство 8. Для любого вектора $\boldsymbol{x}$ выполняется равенство $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

Определение 2. Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены вышеназванные линейные операции, удовлетворяющие приведённым свойствам, называется **векторным пространством.**

Если под $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ рассматривать объекты любой природы, то соответствующее множество объектов называется **линейным пространством.** Будем обозначать его R^n.

Упражнения

Даны координаты трёх точек A, B, C в пространстве. Найдите: а) *координаты вектора* $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$**;** б) *угол между векторами* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$**.**

1.1. $A(-1,1,6)$, $B(-1,6,1)$, $C(0,4,-1)$. **1.2**. $A(1,7,3)$, $B(6,9,1)$, $C(8,5,8)$.

1.3. $A(1,9,9)$, $B(5,8,3)$, $C(6,4,8)$. **1.4**. $A(4,9,3)$, $B(7,6,1)$, $C(3,6,7)$.

1.5. $A(5,7,8)$, $B(-3,7,1)$, $C(6,9,2)$. **1.6**. $A(4,6,3)$, $B(4,1,5)$, $C(3,9,8)$.

§2. Определители и их свойства

2.1. Определители второго порядка.

Определение 1. Пусть заданы числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. Они определяют число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, которое называется **определителем (детерминантом) второго порядка** и записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad (2.1)$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются **элементами** определителя. В определителе (2.1) различают первую строку a_{11}, a_{12}, и вторую строку a_{21}, a_{22}, первый столбец a_{11}, a_{21}, и второй столбец a_{12}, a_{22}.

Легко проверяются следующие **свойства определителя**.

Свойство 1. Величина определителя не меняется, если у него заменить строки соответствующими столбцами: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Свойство 2. Величина определителя меняет знак, если у него переменить местами строки (столбцы): $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$.

Свойство 3. Величина определителя умножается на число k (действительное или комплексное), если элементы какого-либо его столбца или строки умножить на k, например, $\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, то есть общий множитель, присутствующий в строке или столбце, можно выносить за знак определителя.

Свойство 4. Величина определителя равна нулю, если элементы какой-либо его строки или какого-либо его столбца равны нулю, например

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0a_{22}-0a_{21}=0.$$

Свойство 5. Величина определителя равна нулю, если элементы двух строк или столбцов соответственно равны, например, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}-a_{11}a_{12}=0$.

В дальнейшем вводятся **определители третьего** и вообще ***n*-го порядка**. Для них свойства 1 – 5 сохраняются.

2.2. Определители третьего порядка.

Определение 2. Число

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \qquad (2.2)$$

записываемое в форме

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{2.3}$$

где a_{ij} – числа (действительные или комплексные), называется **определителем или детерминантом 3-го порядка.**

В определителе (2.3) различают первую, вторую и третью строки, так же как первый, второй и третий столбцы. Число a_{ij} называется **элементом** определителя; при этом первый индекс i указывает номер строки, а второй индекс j – номер столбца, к которому принадлежит данный элемент. Будем также говорить, что элемент a_{ij} находится на пересечении i-й строки и j-го столбца. Элементы определителя a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют **главную диагональ**, а элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} – **второстепенную диагональ** определителя (2.3).

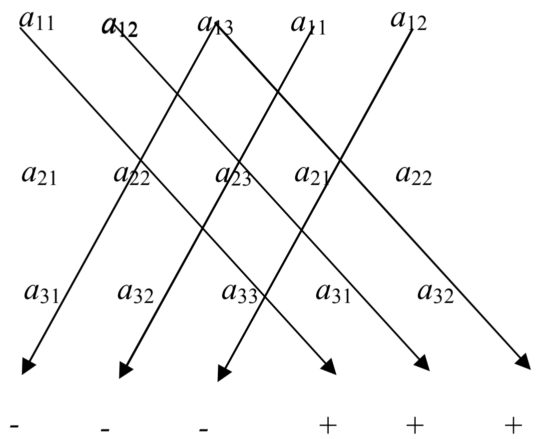


Рис. 2.1. Правило Сарруса

Структура выражения (2.3) довольно проста. Это есть число, вычисляемое по элементам a_{ij} по следующему наглядному правилу (**правилу Сарруса**): составим таблицу, полученную из элементов определителя (2.3), если приписать к ним первый и второй столбцы определителя (рис. 2.1). Мы видим, что надо взять всевозможные произведения элементов, зачеркнутых прямыми; при этом три произведения, соответствующие прямым, параллельным главной диагонали, надо взять со знаком плюс, а остальные три произведения, соответствующие прямым, параллельным второстепенной диагонали, надо взять со знаком минус. Каждое произведение с указанным знаком называется **членом определителя** (2.3). Среди входящих в произведение элементов имеются представители от каждой строки и от каждого столбца. Эти элементы можно в каждом члене расположить в порядке возрастания первого индекса, то есть номеров строк, к которым они принадлежат. Это и сделано в сумме (2.3). Что же касается номеров столбцов, к которым принадлежат эти элементы, то их расположения даются ниже:

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}\right\}, \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}\right\}. \tag{2.5}$$

Это всевозможные перестановки из чисел 1, 2, 3. Перестановку

$$1, 2, 3 \tag{2.6}$$

из чисел 1, 2, 3 назовем **основной.**

Говорят, что в перестановке произведена **транспозиция двух определенных ее элементов,** если эти элементы заменены местами. После транспозиции перестановка переходит в другую перестановку. В этой последней можно сделать в свою очередь транспозицию, в результате получится третья перестановка (но не исключено, что и первая).

Например, перестановка

$$3,\ 2,\ 1 \tag{2.7}$$

получена транспозицией первого и третьего элементов перестановки (2.6), а перестановка

$$2,\ 3,\ 1 \tag{2.8}$$

транспозицией первого и второго элементов перестановки (2.7).

Определение 3. Перестановка чисел 1, 2, 3 называется **четной (нечетной)**, если она получается из основной перестановки при помощи четного (нечетного) числа транспозиций.

Важно отметить, что, если некоторая перестановка получена из основной посредством N транспозиций и если эта же перестановка получена из основной каким-либо другим путем посредством N_1 транспозиций, то оба числа N и N_1 либо оба четные, либо оба нечетные.

Пусть дана перестановка $j=(j_1, j_2, j_3)$, где j_1, j_2, j_3 это числа 1, 2, 3, взятые в некотором порядке. **Число транспозиций***,* с помощью которых можно получить эту перестановку из основной перестановки, обозначим через $t(j)$. Тогда перестановка j является четной (нечетной), если $t(j)$ – четное (нечетное) число.

Перестановки (2.4) – четные, а перестановки (2.5) – нечетные.

После сказанного можно дать другое эквивалентное определение определителя 3-го порядка.

Определение 4. **Определителем или детерминантом** 3-го порядка (2.3) называется число Δ, равное сумме

$$\Delta=\sum_j(-1)^{t(j)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{2.9}$$

произведений вида $(-1)^{t(j)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, где $j=(j_1, j_2, j_3)$ – всевозможные различные перестановки основной перестановки 1, 2, 3.

2.3. Определители *n*-го порядка.

Определение 5. **Определителем** или **детерминантом *n*-го порядка** называется число, записываемое в виде

$$\Delta=\left|a_{ij}\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

и вычисляемое по данным числам a_{ij} (действительным или комплексным) – элементам определителя – по следующему закону: Δ есть сумма произведений

$$\Delta=\sum_j(-1)^{t(j)}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}\ ,$$

распространенная на всевозможные различные перестановки $j=(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ из чисел 1, 2, ..., n. Число $t(j)$ равно **числу транспозиций**, которые нужно сделать, чтобы перейти от основной перестановки 1, 2, ..., n к перестановке $j=(j_1, j_2, \ldots, j_n)$**.** Произведение $(-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ называется **членом определителя.**

Теорема 2.1. Определители n-го порядка удовлетворяют свойствам 1–5, перечисленным в предыдущем параграфе.

Определение 6. Вычеркнем из определителя (2.10) n-го порядка i-ю строку и j-й столбец. Оставшееся выражение порождает определитель $(n$-1)-го порядка M_{ij}, называемый **минором** элемента a_{ij}. Величина же $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ называется **алгебраическим дополнением** или **адъюнктом** элемента a_{ij}.

Теперь рассмотрим свойство определителя, имеющее большое значение для вычисления определителей:

Свойство 6. Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения этих элементов равна величине определителя:

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (i=1,\ldots,n), \tag{2.11}$$

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (j=1,\ldots,n). \tag{2.11$'$}$$

■ Докажем это свойство для определителя 3-го порядка в случае третьей строки. Имеем

$$a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})+$$

$$+a_{32}(a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23})+a_{33}(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{21})=\Delta.$$ ●

Сумму (2.11) называют **разложением определителя по элементам *i*-й строки**, а сумму (2.11′) – **разложением определителя по элементам *j*-го столбца**.

Пример 1.

■ Если в определителе Δ (см. (2.10)) $a_{21}=a_{31}=\ldots=a_{n1}=0$, то $\Delta=a_{11}A_{11}$, то есть вычисление определителя сводится к вычислению одного его алгебраического дополнения, то есть определителя $(n$-1)-го порядка. ●

Пример 2.

■ Если все элементы определителя Δ, стоящие ниже (выше) главной диагонали, равны нулю ($a_{ij}=0$, если $i>j$ $(i<j)$), то $\Delta=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. Это следует из предыдущего примера. ●

Укажем ещё несколько **свойств определителя**.

Свойство 7. Сумма произведений элементов a_{ij} некоторой строки (столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} A_{jk} = 0 \tag{2.12}$$

$(i\neq k;\ i,k=1,\ldots,n)$.

■ В самом деле, зафиксируем наше внимание на первой сумме. Эта сумма не зависит от элементов k-й строки. Заменим в нашем определителе элементы k-й строки на соответствующие элементы i-й строки. От этого рассматриваемая сумма не изменится. Между тем теперь её можно рассматривать как разложение нового определителя по элементам k-й строки, но тогда она равна величине нового определителя. Но последний равен нулю на основании свойства 5, потому что он имеет одинаковые строки – i-ю и k-ю. ●

Свойство 8. Пусть даны два определителя n-го порядка Δ_1 и Δ_2, у которых все строки (столбцы) одинаковы, кроме определённой одной (одного). Сумма таких определителей равна определителю Δ n-го порядка, у которого указанная строка (столбец) состоит из сумм соответствующих элементов этой строки (столбца) определителей Δ_1 и Δ_2, то есть, например,

$$\Delta_1+\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}=\Delta.$$

■ В самом деле, разлагая данные определители по элементам n-го столбца, получим:

$$\Delta_1+\Delta_2=\sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{in}+\sum_{i=1}^{n} b_{in}A_{in}=\sum_{i=1}^{n}(a_{in}+b_{in})A_{in}=\Delta. \qquad ●$$

Свойство 9. Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число k.

■ Добавим, например, к элементам n-го столбца соответствующие элементы первого столбца, умноженные на число k:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n}+ka_{11} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n}+ka_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}+ka_{n1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{11} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n1} \end{vmatrix}=\Delta+k\cdot 0=\Delta$$

в силу свойств 8, 3, 5. ●

Применение этого свойства приводит вычисление данного определителя к вычислению определителя более низкого порядка.

Пример 3. Вычислим определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

■ Вначале к элементам второй строки добавим соответствующие элементы первой строки. Затем к элементам третьей строки добавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на 2. Далее разложим полученный определитель по первому столбцу. Получим:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=(-1)(3\cdot(-1)-4\cdot 1)=7. \qquad ●$$

Свойство 10. Пусть $\Delta_1=\left|a_{ij}\right|$, $\Delta_2=\left|b_{ij}\right|$. Произведение двух определителей n-го порядка с элементами a_{ij}, b_{ij} есть в свою очередь определитель n-го порядка с элементами $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, то есть

$$\Delta_1\Delta_2=\left|c_{ij}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|=\Delta.$$

Таким образом, элемент c_{ij}, принадлежащий i-й строке и j-му столбцу определителя Δ, равен, как говорят, **произведению *i*-й строки определителя Δ_1 на *j*-й столбец определителя Δ_2**. На самом деле это есть **сумма произведений элементов *i*-й строки определителя Δ_1 на соответствующие элементы *j*-го столбца определителя Δ_2**.

Так как в определителях Δ_1 и Δ_2 можно менять строки со столбцами, то, очевидно, элементы c_{ij} произведения Δ можно строить также, беря произведение i-й строки Δ_1 на j-ю строку Δ_2 или произведение i-го столбца Δ_1 на j-й столбец Δ_2 или i-го столбца на j-ю строку.

■ Убедимся в справедливости свойства на примере определителей 2-го порядка:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},\ \Delta=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

где

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21},\ c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22},\ c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21},\ c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}.$$

В силу свойств 8, 3, 5

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}=b_{11}b_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}+b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+$$

$$+b_{12}b_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}+b_{21}b_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}=b_{11}b_{12}\cdot 0+b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}-$$

$$-b_{12}b_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+b_{21}b_{22}\cdot 0=b_{11}b_{22}\Delta_1-b_{12}b_{21}\Delta_1=\Delta_1(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})=\Delta_1\Delta_2. \qquad \bullet$$

В общем случае определителей n-го порядка можно записать:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \sum\limits_{s_1=1}^{n} a_{1s_1}b_{s_11} & \sum\limits_{s_1=1}^{n} a_{1s_1}b_{s_12} & \dots & \sum\limits_{s_1=1}^{n} a_{1s_1}b_{s_1n} \\ \sum\limits_{s_2=1}^{n} a_{2s_2}b_{s_21} & \sum\limits_{s_2=1}^{n} a_{2s_2}b_{s_22} & \dots & \sum\limits_{s_2=1}^{n} a_{2s_2}b_{s_2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{s_n=1}^{n} a_{ns_n}b_{s_n1} & \sum\limits_{s_n=1}^{n} a_{ns_n}b_{s_n2} & \dots & \sum\limits_{s_n=1}^{n} a_{ns_n}b_{s_nn} \end{vmatrix}=\sum_{s_1=1}^{n}\sum_{s_2=1}^{n}\dots\sum_{s_n=1}^{n} a_{1s_1}a_{2s_2}\dots a_{ns_n}\begin{vmatrix} b_{s_11} & b_{s_12} & \dots & b_{s_1n} \\ b_{s_21} & b_{s_22} & \dots & b_{s_2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s_n1} & b_{s_n2} & \dots & b_{s_nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{s=(s_1,s_2,\dots,s_n)} a_{1s_1}a_{2s_2}\dots a_{ns_n}\,(-1)^{t(s)}\Delta_2=\Delta_1\Delta_2.$$

При вычислении отдельных элементов Δ мы вправе выбирать любой индекс суммирования s ($c_{ij}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$), но для дальнейшего удобно для 1-й строки Δ

взять в качестве такового s_1, для 2-й – s_2 и так далее. Второе равенство имеет место на основании свойств 8 и 3; при этом кратная сумма $\sum_{s_1=1}^{n}\sum_{s_2=1}^{n}...\sum_{s_n=1}^{n}$ распространяется на всевозможные перестановки $(s_1, s_2,\ldots,s_n)$, где $1\le s_j\le n$. Однако если в какой-либо системе $(s_1, s_2,\ldots,s_n)$ две компоненты s_i и s_j равны между собой ($s_i=s_j$, $i\ne j$), то определитель $\left|b_{s_k j}\right|=0$. Поэтому на самом деле в кратной сумме можно оставить только члены, соответствующие разным перестановкам $(s_1, s_2,\ldots,s_n)$ натуральных чисел $(1,2,\ldots,n)$. При этом, очевидно, окажется, что определитель $\left|b_{s_k j}\right|=(-1)^{t(s)}\Delta_2$.

2.4. Вычисление определителей в MathCAD. Чтобы вычислить определитель матрицы в аналитическом виде, необходимо:

– щелкнуть по матрице и нажать клавишу **Пробел** (Spase) для выделения всей матрицы;

– щелкнуть в главном меню по пункту **Символы** (Symbolics), в выпадающем меню по пункту **Матрицы** (Matrix), а затем во всплывающем меню по кнопке **Определитель** (Determinant).

Ниже на рис.2.2 показаны матрицы $\begin{pmatrix}-5 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & -5 & -1\\ 1 & 5 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 1 & -5\\ 1 & 2 & 5\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$, и рядом с ними величины их определителей.

$$\begin{pmatrix}-5 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad 7 \qquad \begin{pmatrix}-1 & -5 & -1\\ 1 & 5 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \quad -7 \qquad \begin{pmatrix}-1 & 1 & -5\\ 1 & 2 & 5\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix} \quad 21$$

Рис.2.2. Определители в MathCAD, способ 1

Можно также вычислять определители с помощью значка **Определитель** на панели **Матрицы** (рис.2.3):

$$\Delta1 := \left|\begin{pmatrix}-5 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\right| \quad \Delta1 = 7 \quad \Delta2 := \left|\begin{pmatrix}-1 & -5 & -1\\ 1 & 5 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\right| \quad \Delta2 = -7 \quad \Delta3 := \left|\begin{pmatrix}-1 & 1 & -5\\ 1 & 2 & 5\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\right| \quad \Delta3 = 21$$

Рис.2.3. Определители в MathCAD, способ 2

Упражнения

Вычислите определители:

2.1. $\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}$. **2.2.** $\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}$. **2.3.** $\begin{vmatrix}4 & -3 & 1\\ 5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$. **2.4.** $\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 3 & -4 & 1\\ 4 & -1 & 4\end{vmatrix}$. **2.5.** $\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}$.

Вычислите определители разложением по строке или столбцу:

2.6. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 4 \end{vmatrix}$. **2.7.** $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$. **2.8.** $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

§3. Матрицы и действия над ними

3.1. Понятие матрицы.

Определение 1. Таблица чисел a_{ij} (действительных или комплексных) вида

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right), \tag{3.1}$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется **матрицей.** Числа a_{ij} называются её **элементами**. Если $m\neq n$, то матрица называется **прямоугольной.** При $m=n$ она называется **квадратной матрицей** n-го порядка.

Определение 2. Если задана вторая матрица $B=(b_{ij})$ с элементами b_{ij}, тоже состоящая из m строк и n столбцов, то она считается **равной** матрице A тогда и только тогда, когда соответствующие элементы обеих матриц равны ($a_{ij}=b_{ij}$). В этом случае пишут $A=B$.

Определение 3. Пусть k – натуральное число, не превышающее наименьшего из чисел m и n ($k\leq m$ и $k\leq n$). Зачеркнём в таблице (3.1) какие-либо k столбцов k строк. Элементы α_{ij}, находящиеся на пересечении зачеркнутых столбцов и строк, образуют квадратную матрицу, которая имеет определитель k-го порядка. Полученный определитель называется **определителем *k*-го порядка, порождённым матрицей *A*.**

Определение 4. **Рангом** матрицы A называется наибольшее число k, для которого существует не равный нулю определитель k-го порядка, порождаемый матрицей A.

Определение 5. Если все недиагональные элементы матрицы (т.е. все a_{ij}, у которых $i\neq j$) равны нулю, то матрица называется **диагональной.** Если у квадратной диагональной матрицы все диагональные элементы равны единице, то матрица называется **единичной**. Она обозначается буквой E:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 6. Матрица (прямоугольная или квадратная) называется **нулевой**, если все её элементы равны нулю: $a_{ij}=0$ для всех i и j. Её обозначение: **0**.

Определение 7. Пусть у матрицы (3.1) $m\leq n$. Она называется **ступенчатой**, если имеет следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii}\neq 0$, $i=1,\dots,m$.

3.2. Сумма матриц и произведение числа на матрицу. Матрицы одного и того же размера, то есть имеющие одинаковое количество строк и одинаковое количество столбцов, можно складывать.

Определение 8. **Суммой** двух матриц одного и того же размера $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называется матрица $C=(c_{ij})$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Записывается это следующим образом:

$$C=A+B.$$

Легко видеть, что

$$A+B=B+A,\ (A+B)+C=A+(B+C).$$

Определение 9. **Произведением числа λ на матрицу** A (или произведением матрицы A на число λ) называется матрица, элементы которой равны произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы A. Таким образом, $\lambda A=A\lambda$.

Пример 1. Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдём матрицу $\lambda A+\mu B$.

■ На основании определения суммы матриц и умножения матрицы на число имеем

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2\lambda \\ 2\lambda & 3\lambda & \lambda \end{pmatrix},\ \mu B=\begin{pmatrix} 2\mu & 0 & \mu \\ 2\mu & \mu & \mu \end{pmatrix},\ \lambda A+\mu B=\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & 0 & 2\lambda+\mu \\ 2\lambda+2\mu & 3\lambda+\mu & \lambda+\mu \end{pmatrix}.$$ ●

3.3. Произведение матриц. Транспонированные матрицы. Произведение матриц – это специфическая операция, составляющая основу алгебры матриц. Она определена, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Пусть даны матрица A размером $m\times n$ и матрица B размером $n\times k$.

Определение 10. Произведением матриц A и B называется матрица C, элементы которой c_{ij} равны сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$C=AB=(c_{ij}),\ i=1,\ \dots,\ m,\ j=1,\ \dots,\ k. \tag{3.2}$$

Произведение матриц A и B – матрица C – имеет размер $m\times k$. Для удобства запоминания размера произведения матриц нужно перемножить отношения размеров матриц-сомножителей: $\frac{m}{n}\,\frac{n}{k}=\frac{m}{k}$, т.е. размер матрицы C равен произведению оставшихся в отношении чисел: $m\times k$.

Если A и B – прямоугольные матрицы и их произведение существует, то произведение B и A может и не существовать. Если матрицы A и B квадратные размером $n\times n$, то имеет смысл как произведение матриц AB, так и произведение матриц BA, причем размер этих матриц такой же, как и у исходных сомножителей. При этом в общем случае перемножения матриц правило перестановочности не соблюдается, т.е. $AB\neq BA$.

Рассмотрим примеры на умножение матриц.

Пример 2. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$.

■ Поскольку число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то произведение матриц AB имеет смысл. По формулам (3.2) получаем в произведении матрицу размером 3×2:

$$AB=\begin{pmatrix}0-1+4 & 1-1-4\\ 0+2+6 & 0+2-6\\ 0+4+2 & 1+4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 8 & -4\\ 6 & 3\end{pmatrix}.$$

Произведение BA не имеет смысла, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A. ●

Пример 3. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & -2\end{pmatrix}$.

■ Здесь мы найдем произведения данных матриц AB и BA:

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+15 & 0-6\\ 4-5 & 0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & -6\\ -1 & 2\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0 & 3+0\\ 10-8 & 15+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 17\end{pmatrix}.$$

Как видно из результата, матрица произведения зависит от порядка расположения матриц в произведении. В обоих случаях произведения матриц имеют тот же размер, что и у исходных сомножителей: 2×2. ●

Пример 4. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$. Найдём матрицу A^3.

■ Путем последовательного умножения матриц находим

$$A^3=A^2A=(AA)A=\begin{pmatrix}1+0+2 & 0+0+6 & 2+0+4\\ 2+2+1 & 0+1+3 & 4+1+2\\ 1+6+2 & 0+3+6 & 2+3+4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&6&6\\5&4&7\\9&9&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&1\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&24&24\\20&25&28\\36&36&45\end{pmatrix}.$$ ●

Пусть A, B и C – матрицы соответствующих размеров (чтобы произведения матриц были определены), а α – действительное число. Тогда имеют место следующие **свойства произведения матриц**:

1. $(AB)C=A(BC)$, 2. $(A+B)C=AC+BC$,

3. $A(B+C)=AB+AC$, 4. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.

5. В п. 3.1 введено понятие единичной матрицы E. Нетрудно убедиться, что в алгебре матриц она играет роль единицы, т.е. можно отметить еще одно свойство, связанное с умножением на эту матрицу слева и справа в случае квадратных матриц: $AE=EA=A$.

6. Из того, что $AB=\mathbf{0}$ или $A^n=\mathbf{0}$ не следует, что $A=\mathbf{0}$ или $B=\mathbf{0}$. Например, $A=\begin{pmatrix}2&-2\\2&-2\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$ и $B=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$**,** но, как легко проверить, $AB=\mathbf{0}$ и $A^2=\mathbf{0}$.

Определение 11. Если в матрице A сделать её строки столбцами с тем же номером, то получим матрицу

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{m1}\\\dots&\dots&\dots\\a_{1n}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

называемую **транспонированной к A матрицей.**

Свойства операции транспонирования

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$ 2. $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$.

3. $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$. 4. $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

3.4. Обратная матрица. Понятие обратной матрицы распространяется только на квадратные матрицы размером $n\times n$, называемые матрицами порядка n. В этом разделе мы будем рассматривать именно такие матрицы.

Определение 12. Матрица A порядка n называется **выродженной**, если ее ранг $r<n$.

При этом её определитель $|A|=0$.

Определение 13. Матрица A^{-1} называется **обратной** по отношению к матрице A, если их произведение равно единичной матрице:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E. \qquad (3.3)$$

Для вырожденной матрицы не существует обратной матрицы. Иными словами, справедлива теорема:

Теорема 3.1. Если для некоторой матрицы порядка n ее ранг $r<n$, то для нее не существует обратной матрицы.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы A. Если $|A|=0$, то матрица A вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A|\neq 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица существует. Переходим к шагу 2.

2. Находим матрицу A^{T}, транспонированную к A. Переходим к шагу 3.

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A_{ij}^{\mathrm{T}}=A_{ji}$ $(i,j=1,2,...,n)$ и составляем из них **присоединенную** матрицу $\widetilde{A}$: $\widetilde{a}_{ij}=A_{ij}^{\mathrm{T}}=A_{ji}$ $(i,j=1,2,..., n)$. Переходим к шагу 4.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\widetilde{A}$.

Для проверки правильности вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения, рекомендуется проверить выполнение равенств $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Пример 5. Найдём матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

■ 1. Определитель матрицы $|A|=7\neq 0$ (см. пример 3 §2.3), т.е. матрица A – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Находим матрицу A^{T}, транспонированную к A: $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A^{T} и составляем из них присоединенную матрицу:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-3;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4 \text{ и т.д.},$$

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 3 & 1 & 1\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\widetilde{A}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 3 & 1 & 1\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}286 & -0{,}429 & 0{,}571\\ 0{,}429 & 0{,}143 & 0{,}143\\ -0{,}286 & 0{,}571 & -0{,}429\end{pmatrix}.$$

Проверим, например, правильность формулы $A^{-1}A=E$:

$$A^{-1}A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 3 & 1 & 1\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2-3+8 & -2-6+8 & 2-6+4\\ -3+1+2 & 3+2+2 & -3+2+1\\ 2+4-6 & -2+8-6 & 2+8-3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}=E.$$ ●

3.5. Собственные значения и собственные векторы матрицы. Будем как и ранее рассматривать квадратные матрицы **порядка *n***.

При умножении матрицы порядка n на n-мерный вектор в произведении получается n-мерный вектор:

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}.$$

Для любой матрицы может существовать набор особых векторов, таких, что произведение матрицы на вектор из такого набора равносильно умножению этого вектора на определенное вещественное число (вообще говоря, разное для каждого вектора).

Определение 14. Число λ называется **собственным значением** матрицы A порядка n, если существует такой ненулевой вектор $\boldsymbol{x}(x_1;\ x_2;\ldots;\ x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$, что выполняется равенство

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}. \tag{3.4}$$

При этом вектор $\boldsymbol{x}$ называется **собственным вектором** матрицы A, а λ – собственным значением матрицы A, соответствующим вектору $\boldsymbol{x}$.

Вектор $\tilde{\mathbf{x}}=\boldsymbol{x}/\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$ называется **нормированным собственным вектором** матрицы A.

Иными словами, умножение матрицы на ее собственный вектор равносильно удлинению этого вектора в $|\lambda|$ раз, если $|\lambda|>1$ (или сжатию при $|\lambda|<1$). Если $\lambda=1$, умножение матрицы на соответствующий собственный вектор не меняет его. Уравнение (3.4) представлено в матричной форме. Группируя все слагаемые этого уравнения в левой части, перепишем его в более удобном виде:

$$(A\text{-}E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0},$$

где E и $\mathbf{0}$ – соответственно единичная матрица и нулевой вектор.

Если a_{ij} – элементы матрицы A, то **характеристическая** матрица $A\text{-}\lambda E$, согласно определениям умножения матрицы на число и суммы матриц, имеет вид

$$A\text{-}\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

3.6. Обращение матриц и нахождение их собственных значений и собственных векторов в MathCAD. Обратная матрица существует, если матрица квадратная и невырожденная, то есть ее определитель не равен нулю. Для нахождения обратной матрицы на панели инструментов **Matrix** (Матрица) нажмите кнопку **Inverse** (Обратная матрица) (рис.3.1).

$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.286 & -0.429 & 0.571 \\ 0.143 & -0.286 & 0.714 \\ 0.571 & 1.857 & -2.143 \end{pmatrix}$	$\mathrm{eigenvals}\left(\begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5.323 \\ 3.68 \\ -0.357 \end{pmatrix}$
Рис.3.1. Обратная матрица	**Рис.3.2.** Собственные значения

Уравнение для нахождения собственных значений λ и собственных векторов x матрицы A

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$

имеет решение в виде собственных значений λ_1, λ_2,… и соответствующих им собственных векторов x_1, x_2,…Для решения таких задач в MathCAD имеются следующие функции:

– eigenvals(A) – определяет вектор, элементами которого являются собственные значения для квадратной матрицы A (рис.3.2);

$\mathrm{eigenvec}\left[\begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, 3.68\right] = \begin{pmatrix} -0.02 \\ -0.79 \\ -0.613 \end{pmatrix}$	$\mathrm{eigenvecs}\left(\begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.831 & -0.02 & -0.255 \\ -0.503 & -0.79 & -0.251 \\ -0.235 & -0.613 & 0.934 \end{pmatrix}$	
Рис.3.3. Нормированный собственный вектор	**Рис.3.4.** Все нормированные собственные векторы матрицы	

– eigenvec(A,z) – определяет нормированный собственный вектор, соответствующий собственному значению z матрицы A (рис.3.3);

– eigenvec(A,z) – определяет матрицу, содержащую нормированные собственные векторы, соответствующие собственным значениям матрицы A (рис.3.4).

Упражнения

Определите собственные значения и собственные векторы матриц:

3.4. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ **3.5.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$ **3.6.** $\begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ **3.7.** $\begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

§4. Система линейных уравнений

4.1. Система из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными.

Зададим систему из из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = y_n. \end{cases} \tag{4.1}$$

Определение 1. Числа a_{ij} (i,j=1,…,n) (действительные или комплексные), называемые **коэффициентами системы (4.1)**, заданы. Будем ещё говорить, что система (4.1) определяется матрицей

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

её коэффициентов.

Нас будет интересовать вопрос о разрешимости системы (4.1) для каждого вектора (**столбца свободных членов**) $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_n)^{\mathrm{T}}$.

Определение 2. Вектор $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ называется **решением системы уравнений** (4.1), если числа x_j удовлетворяют этим уравнениям. В этом случае говорят, что система **совместна**. Если при этом система имеет только одно решение, то она называется **определённой**. Если система вообще не имеет решений, то она называется **несовместной.**

Определение 3. Две системы называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Систему (1) можно записать в матричном виде

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}. \tag{4.3}$$

4.2. Метод обратной матрицы и формулы Крамера. Для получения решения системы (4.1) в общем виде предположим, что матрица система невырожденная, т. е. её определитель $\Delta=|a_{ij}|\neq0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}. Умножая слева обе части матричного уравнения (4.3) на матрицу A^{-1}, получаем $A^{-1}(A\boldsymbol{x})=A^{-1}\boldsymbol{y}$. Так как

$A^{-1}(A\boldsymbol{x})=(A^{-1}A)\boldsymbol{x}=E\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{y}. \tag{4.4}$$

Теорема 4.1 (**Теорема Крамера**). Пусть $\Delta=|a_{ij}|$ – определитель матрицы A системы (4.1), Δ_j – определитель, получаемый из определителя Δ, если в нём заменить числа j-го столбца соответственно на числа $y_1,\ldots,y_n$:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & y_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & y_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.5}$$

Если определитель системы не равен нулю, $\Delta\neq0$, то система (4.1) имеет единственное решение для любого вектора $\boldsymbol{y}$, вычисляемого по формулам (**Крамера**)

$$x_j=\Delta_j/\Delta \ (j=1,\dots,n). \tag{4.6}$$

Таким образом,

$$x_j=\frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{n}A_{sj}y_s \ \ (j=1,\dots,n), \tag{4.6′}$$

где A_{sj} – алгебраические дополнения элемента a_{sj} в определителе Δ.

■ Пусть $(x_1,\dots, x_n)$ есть решение системы (4.1). Чтобы найти неизвестное число x_1, умножим 1-е уравнение системы (4.1) на алгебраическое дополнение A_{11}, второе – на A_{21}, …, n-е – на A_{n1} и сложим все уравнения системы. Тогда, учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n}a_{k1}x_1A_{k1}=x_1\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{k1}=x_1\Delta$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}a_{kj}x_jA_{k1}=x_j\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{k1}=x_j\cdot0=0 \ (j\neq1),$$

получаем $x_1\Delta=\Delta_1$, где

$$\Delta_1=\sum_{s=1}^{n}y_sA_{s1}=\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_n & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Следовательно, так как по условию $\Delta\neq0$, то $x_1=\Delta_1/\Delta$.

Аналогично получаем

$$\Delta_j=\sum_{s=1}^{n}y_sA_{sj}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & y_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & y_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Отсюда в силу того, что $\Delta\neq0$, следует равенство (4.6).

Мы доказали, что если $(x_1,\dots, x_n)$ есть решение системы (4.1), то числа x_j определяются равенствами (4.6′).

Обратно, совокупность чисел $x_j=\Delta_j/\Delta$ $(j=1,\dots,n)$ является решением системы (4.1). В самом деле, подставляя x_j $(j=1,\dots,n)$ в левую часть k – го уравнения $(k=1,\dots,n)$, на основании свойств 6, 7 определителей имеем:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\frac{\Delta_j}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\sum_{s=1}^{n}y_sA_{sj}=\frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{n}y_s\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{sj}=\frac{1}{\Delta}y_k\Delta=y_k.$$

Т. о., (3′) действительно является решением системы (4.1). ●

Замечание. Можно показать, что если определитель системы $\Delta=|a_{ij}|=0$, а хотя бы один из определителей $\Delta_j\neq 0$ ($j=1,\ldots,n$), то система несовместна. Если же определитель $\Delta=|a_{ij}|=0$ и все определители $\Delta_j=0$ ($j=1,\ldots,n$), то система либо несовместна, либо имеет бесконечное количество решений.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} -x_1+x_2-x_3=-5 \\ x_1+2x_2+2x_3=5 \\ 2x_1+2x_2+x_3=3 \end{cases}$$

двумя способами: а) средствами матричного исчисления; б) по формулам Крамера.

■ Исходную систему запишем в матричном виде $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$. Здесь матрица коэффициентов $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.Т.к. $|A|=7\neq 0$ (см. пример 3 §2.3), то матрица A невырожденная, и у неё существует обратная A^{-1}, найденная в примере 5 §2.4: $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. Тогда по формуле (4.4)

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{y}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 21 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=3$.

б) Т.к. определитель системы $|A|=7\neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение: $x_j=\Delta_j/\Delta$ ($j=1,\ldots,3$). Вычислим определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3, полученные из определителя $\Delta=|A|$ заменой соответственно 1-го, 2-го и 3-го столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=7,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-7,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=21$$

(определители вычислены с помощью MathCAD*,* рис. 2.3). Тогда по формулам Крамера (4.6) $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{7}{7}=1$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-7}{7}=-1$, $x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{21}{7}=3$.

После этого рекомендуется сделать проверку, подставив найденное решение в уравнения системы и убедившись в том, что они обращаются в тождества.

4.3. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).

Определение 4. **Расширенной матрицей** системы (4.1) называется матрица $A_1=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & y_n \end{array}\right)$, полученная присоединением к A столбца свободных членов

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Обозначим ранг матрицы A_1 через r_1, а ранг матрицы A через r. Т.к. матрица A – часть A_1, то её ранг **не может быть больше** ранга матрицы A_1, т.е. справедливо неравенство $r \le r_1$.

Определение 5. Следующие преобразования матрицы называют **элементарными преобразованиями:**

1) Перестановка местами любых двух строк (столбцов).

2) Умножение всех элементов любых строк (столбцов) на число $k \neq 0$.

3) Умножение всех элементов любой строки (столбца) на постоянное число и прибавление их к соответствующим элементам другой строки (столбца).

4) Отбрасывание нулевой строки (столбца).

5) Транспонирование матрицы.

С помощью элементарных преобразований матрицы коэффициентов системы (4.1) получается система, равносильная данной.

Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к системе ступенчатого вида, из которой последовательно, начиная с последних, находятся все остальные неизвестные.

Применяя подходящим образом элементарные операции над системой уравнений или, что всё равно, над расширенной матрицей A_1, добиться либо решения заданной системы (4.7), либо прийти к явно противоречивой системе. Так как последняя эквивалентна системе (4.7), то это докажет противоречивость системы (4.7).

Ниже приводятся примеры применения этого метода.

Пример 2. Решим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ \qquad\; x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 \qquad\;\; + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = -1. \end{cases}$$

■ Конечно, согласно теореме Крамера, мы могли бы вычислить все пять определителей четвёртого порядка и найти x_1, x_2, x_3, x_4. Здесь было бы много повторяющихся вычислений.

Составим матрицу A_1, $A_1=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 6 & -1 \end{array}\right)$, где, как мы видим, последний столбец состоит из правых частей нашей системы. Умножая 1-ю строку на (-1) и прибавляя её к 3-й и 4-й строкам, получим матрицу $A_1\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$.

Дальнейшие преобразования матриц очевидны:

$$A_1\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & -2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Последняя матрица эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-1, \\ \qquad x_2+2x_3+3x_4=-2, \\ \qquad\qquad 4x_3+6x_4=0, \\ \qquad\qquad\qquad -x_4=-2. \end{cases}$$

Тогда из 4-го уравнения x_4=2, из 3-го $x_3=\frac{-6x_4}{4}$=-3, из 2-го x_2=-2-2x_3-3x_4=-2, из 1-го x_1=-1-2x_2-3x_3-4x_4=4. Чтобы не допустить ошибки, рекомендуется осуществить проверку, подставив полученные значения в исходные уравнения системы. ●

Пример 3. Решим систему $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+2x_3=1, \\ x_1+x_2+3x_3=4. \end{cases}$

■ Имеем: $A_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$. Последняя строка полученной матрицы эквивалентна уравнению $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=3$, что говорит о несовместности исходной системы. ●

Пример 4. Решим систему $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=2, \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=3, \\ 4x_1-x_2+x_3+x_4=7, \\ x_1+2x_2-2x_3+4x_4=1. \end{cases}$

■ Имеем: $A_1=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -1 \end{array}\right)$. Последняя матрица эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -1, \end{cases}$$

то есть система имеет бесконечное множество решений:

$$x_4=C_2,\ x_3=C_1,\ x_2=-\frac{1}{3}+C_1-\frac{5}{3}C_2,\ x_1=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}C_2,$$

где C_1, C_2 – любые числа ($-\infty<C_1,\ C_2<\infty$). ●

4.4. Теорема Кронекера-Капелли. Перейдём теперь к дальнейшему исследованию системы (4.1). Будем предполагать, что хотя бы один элемент её матрицы A не равен нулю и обозначим ранг матрицы A через r (r=ранг A). Таким образом, $1\le r\le n$.

Теорема 4.2 (**Кронекера-Капелли**). Система (4.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы A_1 равен рангу матрицы A ($r_1=r$). В этом случае r называется **рангом** системы.

Теорема 4.3. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных (т.е. $r=n$), то система является **определённой**. Если же $r<n$, то система **неопределённа**.

Теорема 4.2 не означает, что для решения системы в общем случае необходимо вычислять отдельно, а затем сравнивать ранги матриц A и A_1. Для этого достаточно применить метод Гаусса для матрицы A_1. Метод Гаусса более универсален и значительно менее трудоёмок матричного метода и метода Крамера. Кроме того, метод Гаусса позволяет одновременно определить ранги матриц A и A_1 и найти решение системы, если оно существует.

Пример 5. Решим систему $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

■ Имеем: $A_1=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1&1\\0&1&-4&5&2\\0&0&-13&20&7\\0&0&-13&20&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1&1\\0&1&-4&5&2\\0&0&-13&20&7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1&1\\0&1&-4&5&2\\0&0&-13&20&7\end{pmatrix}.$$

Ранг системы равен r=3. Матрица A_1 эквивалентна системе

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+x_4=1,\\ \quad x_2-4x_3+5x_4=2,\\ \quad\quad -13x_3+20x_4=7\end{cases}.$$

то есть система имеет бесконечное множество решений. Пусть $x_4=C$. Тогда

$$x_1=\frac{1}{13}+\frac{12}{13}C,\ x_2=-\frac{2}{13}+\frac{15}{13}C,\ x_3=-\frac{7}{13}+\frac{20}{13}C,\ x_4=C,$$

где C – любое число ($-\infty<C<\infty$). ●

Пример 6. Решим систему $\begin{cases}x+2y+3z=1,\\ 2x+4y+z=1,\\ -x-2y+2z=2.\end{cases}$

■ Имеем: $A_1=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&4&1&1\\-1&-2&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&0&-5&-1\\0&0&5&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&0&-5&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$. При этом $r(A)$=2, т.к. её определитель (минор 3-го порядка) $\Delta=M_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&0&-5\\0&0&0\end{vmatrix}=0$, а один из миноров 2-го порядка, например, $M_2=\begin{vmatrix}2&3\\0&-5\end{vmatrix}=-10\neq0$. Ранг же матрицы A_1 равен 3, т.к. её один из миноров наивысшего, 3-го порядка, например,

$$\begin{vmatrix}1&3&1\\0&-5&-1\\0&0&2\end{vmatrix}=-10\neq0.$$

Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли система решений не имеет. ●

4.5. Однородная система.

Определение 5. Система уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\qquad(4.8)$$

называется **однородной.**

Эта система является частным случаем системы (4.1) при $y_1=\ldots=y_m=0$. Т.к. расширенная матрица A_1 однородной системы отличается от матрицы A только нулевым столбцом правых частей, то эти матрицы эквивалентны, и их ранги равны. Поэтому для однородной системы теорема Кронекера-Капелли всегда выполняется, и она совместна. Ясно, что вектор $x_1=\ldots=x_n=0$ удовлетворяет однородной системе (4.8).

Определение 6. Если однородная система (4.8) имеет решением ненулевой вектор $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots, x_n)$, то есть вектор, имеющий хотя бы одну компоненту $x_j\neq0$, то это решение называют **нетривиальным решением** однородной системы (4.8). Нулевой вектор называют **тривиальным решением** однородной системы (4.8).

Если в системе (4.8) $m=n$, а её определитель $|A|\neq0$, то по теореме Крамера система (4.8) имеет только тривиальное решение. Следовательно, нетривиальное решение возможно лишь для однородных систем, в которых число уравнений меньше числа неизвестных или при их равенстве, когда определитель системы равен нулю. Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 4.4. Линейная однородная система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда её ранг меньше числа неизвестных, т .е. при $r(A)<n$.

Пример 7. Решим однородную систему $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3=0. \end{cases}$

■ Имеем: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы A равен 2, т.к. её один из миноров наивысшего, 2-го порядка, например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}=-5\neq0$. Т.о., ранг меньше числа неизвестных, и система имеет нетривиальное решение. Последняя матрица эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ \quad -5x_2+5x_3=0, \end{cases}$$

то есть система имеет бесконечное множество решений. Пусть $x_3=C$. Тогда

$$x_1=-C,\ x_2=C,\ x_3=C,$$

где C – любое число ($-\infty<C<\infty$). ●

4.6. Нахождение ранга матрицы методом Гаусса. Следующие примеры иллюстрируют этот метод.

Пример 8. Найдём ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

■ Ясно, что ранг матрицы A не больше 4 – минимального из её размеров. В данном случае $a_{11}=1\neq0$. Умножая 1-ю строку на (-1) и прибавляя её к 3-й строке, получаем: $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Теперь, умножая 1-й столбец на соответствующие числа и прибавляя его к остальным столбцам, получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Второй столбец уже состоит из нулей, кроме элемента $a_{22}=1\neq 0$. Умножая 2-й столбец на (-1) и прибавляя его к 4, 6, 7 столбцам, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определитель 4-го порядка последней матрицы не равен нулю, следовательно, её ранг, также как и ранг исходной матрицы, равен 4. ●

В MathCAD ранг матрицы вычисляется с помощью функции rank (рис.4.1):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad r := \mathrm{rank}(A) \quad r = 4$$

Рис.4.1. Ранг матрицы в MathCAD

Пример 9. Найдём ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

■ $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть ранг матрицы A равен 2. ●

Рассуждения в примерах 1 и 2 основаны на следующем общем утверждении: **при элементарном преобразовании $A \sim A'$ ранг матрицы сохраняется, то есть выполняется равенство** $r(A)=r(A')$.

Упражнения

Методом Гаусса найдите ранги следующих матриц:

4.1. $\begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **4.2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **4.3.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решите систему линейных уравнений двумя способами: а) *методом Гаусса;* б) *средствами матричного исчисления.*

4.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$ **4.5.** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ **4.6.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$ **4.8.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$ **4.9.** $\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 8x_3 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

Решите системы линейных уравнений по методу Гаусса. Выполните проверку для какого-либо частного решения.

4.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ **4.11.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ **4.12.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 8, \\ x_1 - 13x_2 + 5x_3 - 16x_4 - 5x_5 = 3. \end{cases}$ **4.14.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ **4.15.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 21, \\ 2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$

Найдите решения и фундаментальные системы решений однородных систем уравнений.

4.16. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0. \end{cases}$ **4.17.** $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 7x_2 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$ **4.19.** $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$ **4.21.** $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

§5. Некоторые линейные модели в экономике и их решение с помощью MathCAD

5.1. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ). Макроэкономика функционирования многоотраслевого производства требует баланса между отраслями. С одной стороны, каждая отрасль выступает как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продукции и своей, и произведенной другими отраслями Цель балансового анализа – ответить на вопрос, возникающий в макроэкономике и связанный с эффективностью ведения многоотраслевого хозяйства: каким должен быть объем производства каждой из n отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли?

Связь между отраслями, как правило, отражается в таблицах межотраслевого баланса, а математическая модель, позволяющая их анализировать, разработана в 1936 г. американским экономистом В.Леонтьевым.

Предположим, что производственная сфера хозяйства представляет собой n отраслей, каждая из которых производит свою однородную продукцию. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год).

Введём следующие обозначения:

x_i – общий (валовый) объём продукции i-й отрасли (i=1,2,…,n);

z_{ij} – объём продукции i-й отрасли, потребляемой j-й отраслью в процессе производства объёма продукции x_j (i, j=1,2,…,n);

y_i – объём конечного продукта i-й отрасли для потребления в непроизводственной сфере (так называемый **продукт конечного потребления**). Это личное потребление граждан, содержание государственных институтов и т. д.

Так как валовой объем продукции любой i-й отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} + y_i, \ (i=1,2,\dots,n). \tag{5.1}$$

Уравнения (5.1) называются **соотношениями баланса**. Т.к. продукция разных отраслей имеет разные измерения, будем в дальнейшем рассматривать **стоимостный межотраслевой баланс**, когда все величины, входящие в (5.1), имеют стоимостное выражение.

Введем **коэффициенты прямых затрат**

$$a_{ij}=\frac{z_{ij}}{x_j},\ (i,\ j=1,2,\ldots,n), \qquad (5.2)$$

показывающие затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли.

Можно полагать, что в некотором промежутке времени коэффициенты a_{ij} будут постоянными и зависящими от сложившейся технологии производства. Это означает **линейную** зависимость материальных затрат от валового выпуска, т.е.

$$z_{ij}=a_{ij}x_j,\ (i,\ j=1,2,\ldots,n), \qquad (5.3)$$

вследствие чего построенная на этом основании модель межотраслевого баланса получила название **линейной.** Теперь соотношения баланса (5.1) примут вид:

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+y_i,\ (i=1,2,\ldots,n). \qquad (5.4)$$

Обозначим

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\ldots\\y_n\end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{x}$ – вектор валового выпуска, $\boldsymbol{y}$ – вектор конечного продукта, A – матрица прямых затрат (технологическая или структурная матрица).

Тогда систему (5.1) можно записать в матричном виде:

$$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}. \qquad (5.5)$$

Уравнение межотраслевого баланса можно использовать в двух целях. В первом, наиболее простом случае, когда известен вектор валового выпуска $\boldsymbol{X}$, требуется рассчитать вектор конечного продукта $\boldsymbol{Y}$.

Во втором случае уравнение межотраслевого баланса используется для целей планирования: для периода времени T (например, год) известен вектор $\boldsymbol{y}$ конечного продукта (потребления) и требуется определить вектор $\boldsymbol{x}$ валового выпуска. Тогда необходимо решать систему линейных уравнений с известной матрицей A и заданным вектором $\boldsymbol{y}$. Эта задача является **основной задачей межотраслевого баланса.**

Перепишем уравнение (5.4) в виде:

$$(E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}. \qquad (5.6)$$

Если матрица $(E-A)$ невырожденная, т.е. $|E-A|\neq 0$, то по формуле (4.4)

$$\boldsymbol{x}=(E-A)^{-1}\boldsymbol{y}. \qquad (5.7)$$

Матрица $S=(E-A)^{-1}$ называется **матрицей полных затрат**. Чтобы выяснить экономический смысл элементов матрицы $S=(s_{ij})$, будем задаваться единичными векторами конечного продукта $\boldsymbol{y}_{(1)}=(1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}_{(2)}=(0,1,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$, …, $\boldsymbol{y}_{(n)}=(0,0,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$. Тогда по (5.7) соответствующие векторы валового выпуска будут

$$\boldsymbol{x}_{(1)}=(s_{11},\ s_{21},\ldots,\ s_{n1})^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_{(2)}=(s_{12},\ s_{22},\ldots,\ s_{n2})^{\mathrm{T}},\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_{(n)}=(s_{1n},\ s_{2n},\ldots,\ s_{nn})^{\mathrm{T}}.$$

Следовательно, каждый элемент s_{ij} матрицы S есть величина валового выпуска продукции i-й отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j-й отрасли $y_j=1$ $(j=1,2,\ldots,n)$.

В соответствии с экономическим смыслом задачи значения x_i должны быть неотрицательны при неотрицательных значениях y_j и a_{ij}, где $i,j=1,2,...,n$. *Определение* 1. Матрица A с неотрицательными элементами называется **продуктивной**, если для любого вектора $\boldsymbol{y}$ с неотрицательными элементами существует решение $\boldsymbol{x}$ уравнения (5.5) с неотрицательными элементами. В этом случае и модель Леонтьева называется **продуктивной**.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы A. Один из них говорит о том, что матрица A продуктивна, если максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы, т.е. матрица A продуктивна, если $a_{ij} \geq 0$ для любых $i,j=1,2,..., n$ и $\max\limits_{j=1,2,...,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, и существует номер j такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

5.2. Линейная модель торговли. Одним из примеров экономического процесса, приводящего к понятию собственного числа и собственного вектора матрицы, является процесс взаимных закупок товаров. Будем полагать, что бюджеты n стран, которые мы обозначим соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расходуются на покупку товаров. Мы будем рассматривать **линейную модель обмена**, или, как ее еще называют, **модель международной торговли.**

Пусть a_{ij} – доля бюджета x_j, которую j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны. Введем матрицу коэффициентов a_{ij}:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (5.8)$$

Тогда если весь бюджет расходуется только на закупки внутри страны и вне ее (можно это трактовать как торговый бюджет), то справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad (5.9)$$

Матрица (5.8) со свойством (5.9), в силу которого сумма элементов ее любого столбца равна единице, называется **структурной матрицей торговли.** Для i-й страны общая выручка от внутренней и внешней торговли выражается формулой $P_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n$. Условие сбалансированной (бездефицитной) торговли формулируется естественным образом: для каждой страны ее бюджет должен быть не больше выручки от торговли, т.е. $P_i \geq x_i$, или

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \geq x_i,\ i=1,2,..., n. \qquad (5.10)$$

Докажем, что в условиях (5.10) не может быть знака неравенства. Действительно, сложим все эти неравенства при i от 1 до n. Группируя слагаемые с величинами бюджетов x_j, получаем

$$x_1(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{n1})+x_2(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{n2})+...+x_n(a_{1n}+a_{2n}+\ldots+a_{nn}) \geq x_1+x_2+...+x_n.$$

Нетрудно видеть, что в скобках стоят суммы элементов матрицы A по ее столбцам от первого до последнего, которые равны единице по условию (5.9). Стало быть, мы получили неравенство $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq x_1+x_2+\ldots+x_n$, откуда возможен только знак равенства.

Таким образом, условия (5.10) принимают вид равенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n. \end{cases} \qquad (5.11)$$

Введем вектор бюджетов $\boldsymbol{x}$, каждая компонента которого характеризует бюджет соответствующей страны; тогда систему уравнений (5.11) можно записать в матричной форме

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}. \qquad (5.12)$$

Это уравнение означает, что собственный вектор структурной матрицы A, отвечающий ее собственному значению $\lambda=1$, состоит из бюджетов стран бездефицитной международной торговли.

Перепишем уравнение (5.12) в виде, позволяющем определить $\boldsymbol{x}$:

$$(A\text{-}E)\boldsymbol{x}=0. \qquad (5.13)$$

5.3. Решение примеров линейной алгебры с помощью MathCAD. Векторные и матричные операторы и функции системы MathCAD позволяют решать широкий круг задач линейной алгебры. К примеру, если заданы матрица A и вектор B для системы линейных уравнений в матричной форме $X=B$, то вектор решения можно получить из выражения $X=A^{-1}\cdot B$ или с помощью встроенной функции isolve(A,B), а также с помощью символьной операции solve.

Пример 1. В таблице приведены данные об исполнении межотраслевого баланса за отчетный период, усл. ден. ед.:

№№	Отрасль	Потребление					Валовой выпуск
		1	2	3	4	5	
1	Станкостроение	100	100	120	100	200	1000
2	Энергетика	150	50	200	100	50	1000
3	Промышленное и с/х машиностроение	50	30	50	50	50	500
4	Автомобильная промышленность	150	70	50	50	100	500
5	Газодобывающая промышленность	50	200	50	50	50	1000

Вычислим:

1) Конечный продукт при данном валовом выпуске.

2) Необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление по отраслям составляет соответственно 120, 350, 70, 175 и 550 усл. ден. ед.

■ Решение приведено на рис.5.1. Оно сопровождается комментариями, набранными с помощью команд Вставка–Текстовая область.

1. Определение вектора конечного продукта для непроизводственного потребления при заданном векторе валового продукта

$X := \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 500 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix}$ $Z := \begin{pmatrix} 100 & 100 & 120 & 100 & 200 \\ 150 & 50 & 200 & 100 & 50 \\ 50 & 30 & 50 & 50 & 50 \\ 150 & 70 & 50 & 50 & 100 \\ 50 & 200 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix}$ $n := \mathrm{rows}(X)$ $n = 5$	Вектор валового продукта X, его размерность n и объём продукции Z i-й отрасли, потребляемой j-й отраслью
$i := 0..n-1$ $j := 0..n-1$ $A_{i,j} := \frac{Z_{i,j}}{X_j}$ $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.24 & 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.05 & 0.4 & 0.2 & 0.05 \\ 0.05 & 0.03 & 0.1 & 0.1 & 0.05 \\ 0.15 & 0.07 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.05 \end{pmatrix}$	Определение матрицы прямых затрат
$j := 0..n-1$ $A1_j := \sum_{i=0}^{n-1} A_{i,j}$ $A1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.45 \\ 0.94 \\ 0.7 \\ 0.45 \end{pmatrix}$ $A1max := max(A1)$ $A1max = 0.94$ $A1max < 1$	Проверка продуктивности матрицы прямых затрат
$E := \mathrm{identity}(n)$ $S1 := E - A$ $Y := S1 \cdot X$ $Y = \begin{pmatrix} 380 \\ 450 \\ 270 \\ 80 \\ 600 \end{pmatrix}$	Конечный продукта при данном объёме валового выпуска.

Таким образом, конечный продукт при данном валовом выпуске и матрице прямых затрат должен быть следующим (в усл. ден. ед.):

Станкостроение - 380, энергетика - 450, промышленное и с/х машиностроение - 270, автомобильная промышленность - 80, газодобывающая промышленность - 600.

2. Определение необходимого объёма валового выпуска каждой отрасли при заданном конечном потреблении

$$Y1 := \begin{pmatrix} 400 \\ 480 \\ 300 \\ 100 \\ 700 \end{pmatrix}$$

Заданный вектор конечного продукта для непроизводственного потребления

$$S := S1^{-1} \qquad X1 := S \cdot Y1$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 1.094 \times 10^3 \\ 1.092 \times 10^3 \\ 557.057 \\ 567.317 \\ 1.143 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Матричное решение системы линейных уравнений для определения необходимого вектора валового продукта X1

$X1 := \mathrm{lsolve}(S1, Y1)$ $$X1 = \begin{pmatrix} 1.094 \times 10^{3} \\ 1.092 \times 10^{3} \\ 557.057 \\ 567.317 \\ 1.143 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$	Решение системы с применением функции isolve для определения необходимого ветора валового продукта X1

Таким образом, чтобы обеспечить заданный вектор конечного продукта, необходимый валовый продукт должен быть следующим (в усл. ден. ед.):
Станкостроение - 1094, энергетика - 1092, промышленное и с/х машиностроение - 557, автомобильная промышленность - 567, газодобывающая промышленность - 1143. ●

Рис.5.1. Межотраслевой баланс

Пример 2. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Найдём бюджеты этих стран для сбалансированной бездефицитной торговли.

■ Решение приведено на рис. 5.2. При этом для решения однородной системы (5.13) использована символьная операция solve.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ТОРГОВЛИ

$$A := \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 02 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$	Заданная структурная матрица торговли
$$\begin{pmatrix} -0.7x + 0.3 \cdot y + 0.3z + 0.2u = 0 \\ 0.2x - 0.8 \cdot y + 0.4z + 0.4u = 0 \\ 0.2x + 0.3 \cdot y - 0.8z + 0.2u = 0 \\ 0.3x + 0.2 \cdot y + 0.1z - 0.8u = 0 \end{pmatrix}$$ solve,x,y,z,u $\rightarrow$ (1.222z; 1.259z; z; 0.897z)	Решение однородной системы (A-E)X=0, заданной в векторной форме, с помощью символьной операции solve

Здесь z может принимать любые действительные значения. Таким образом, сбалансированность торговли четырёх стран достигается при векторе национальных доходов X=(1,22z; 1,26z; z; 0,90z), т.е. при соотношении национальных доходов примерно как 11:11,3:9:8. ●

Рис.5.2 Линейная модель торговли

2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОПТИМИЗАЦИЯ

§6. Задачи математического программирования. Линейное программирование.

6.1. Математические модели задач математического программирования.

Задача математического программирования формулируется следующим образом: найти значения переменных x_1^*, x_2^*, …, x_n^*, при которых функция $z(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ принимает максимальное (или минимальное) значение и, кроме того, на переменные наложены ограничения в виде ряда равенств и неравенств.

Будем кратко записывать задачу в следующей форме:

$$z(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to\max\ (\min), \qquad (6.1)$$

$$g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le 0,\ i=1\div k, \qquad (6.2)$$

$$g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\ i=(k+1)\div m. \qquad (6.3)$$

Функция z называется **целевой функцией**. В конкретных задачах могут отсутствовать ограничения-равенства, либо ограничения-неравенства. Может случиться, что на переменные вообще не накладываются никакие ограничения.

Набор чисел $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющий ограничениям (6.2), (6.3), называется **допустимым решением задачи** (или **допустимым планом**). Все допустимые решения образуют **область допустимых решений задачи (ОДР)**. Допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего максимума (минимума), называется **оптимальным решением** (если оно существует).

В виде моделей математического программирования могут быть представлены и решены задачи оптимизации из следующих областей:

1) планирование и организация производства;
2) оптимальное управление динамическими системами и процессами;
3) инженерный анализ и обработка больших потоков информации;
4) определение оптимальных маршрутов транспорта.

Этот список может быть значительно расширен. Приведём несколько примеров задач математического программирования.

Задача 1 (**задача оптимального планирования и организации производства**). Мебельная фабрика выпускает книжные полки и шкафы. Их производство ограничено наличием необходимых ресурсов (древесно-стружечных плит (ДСП), высококачественных досок (ВД) и стекла).

Нормы затрат ресурсов на единицу продукции, запасы ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции приведены в табл. 6.1. Требуется составить производственный план выпуска продукции с учётом имеющихся ресурсов, который обеспечивал бы наибольшую прибыль.

Таблица 6.1.

Виды ресурсов	Виды продукции		Запасы ресурсов
	Полки	Шкафы	
ДСП	3	2	27
ВД	2	4	28
Стекло	2	3	23
Прибыль	4	7	

■ Приведенные выше условия являются **экономической постановкой задачи**. Составим теперь **ма-**

**тематическую модель (постанов-
ку) задачи**.

Пусть x_1, x_2 – количество полок и шкафов соответственно, планируемое к выпуску. Тогда суммарная прибыль от реализации всей плановой продукции (целевая функция) составит $z=4x_1+7x_2\to\max$. При этом общий расход ДСП равен $3x_1+2x_2$, и он не должен превышать имеющегося запаса 27. Это приводит к ограничению $3x_1+2x_2\le 27$. Аналогично учитываются ограничения по ВД и стеклу: $2x_1+4x_2\le 28$, $2x_1+3x_2\le 23$. Т.к. объёмы выпускаемых изделий не могут быть отрицательны, то $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$. Т.о., математическая модель задачи имеет вид:

$$z=4x_1+7x_2\to\max, \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\le 27, \\ 2x_1+4x_2\le 28, \\ 2x_1+3x_2\le 23, \end{cases} \tag{6.5}$$

$$x_i\ge 0,\ i=1\div 2. \tag{6.6}$$

Таким образом, задача состоится в том, чтобы найти неотрицательные значения x_j, $j=1\div 2$, удовлетворяющие ограничениям (6.5), для которых функция z принимает наибольшее значение. ●

Задача 2 (**транспортная задача (ТЗ)**). Пусть некоторый однородный товар (кирпич, пиломатериалы и т.п.) хранится на m складах A_i ($i=1\div m$) и требуется в n пунктах B_j ($j=1\div n$). Известны следующие параметры: a_i – запас товара на i-м складе; b_j – потребность в товаре в j-м пункте; c_{ij} – стоимость перевозки единицы товара из i-го склада в j-й пункт. Предполагается, что стоимость перевозки произвольного количества товара пропорциональна этому количеству. Требуется составить план перевозок товара так, чтобы удовлетворить потребности при имеющихся запасах, обеспечив при этом наименьшую суммарную стоимость перевозок.

■ Приведённые выше условия – **экономическая постановка задачи**. Обозначим через x_{ij} количество товара, перевозимого из i-го склада в j-й пункт. Стоимость перевозки товара из A_i в B_j составит $c_{ij}x_{ij}$, а суммарная стоимость перевозок есть $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$. Следовательно,

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min . \tag{6.7}$$

Далее, все запасы из пункта A_i должны быть вывезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1\div m. \tag{6.8}$$

Все потребности пункта B_j должны быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1\div n. \tag{6.9}$$

Естественно предполагать также, что

$$x_{ij}\ge 0,\ i=1\div m,\ j=1\div n. \tag{6.10}$$

Т.о., **математическая модель** ТЗ состоит в определении неотрицательного плана перевозок $\boldsymbol{X}=(x_{ij})$, для которого выполняются условия (6.8) и (6.9), а целевая функция (6.7) принимает наименьшее значение. Матрица $\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{m\times n}$ называется **матрицей перевозок**. ●

Если в задаче математического программирования целевая функция, а также уравнения и неравенства системы ограничений линейны, то такая задача называется задачей **линейного программирования (ЛП).** Задачи 1 и 2 – это задачи ЛП.

Задача 3 (**задача нелинейного программирования**). На трёх предприятиях отрасли необходимо изготовить 300 изделий некоторой продукции. Затраты, связанные с производством x_1 изделий на I предприятии, равны x_1^2 руб., а затраты, обусловленные изготовлением x_2 изделий на II предприятии и x_3 изделий на III предприятии, равны $2x_2+x_2^2$ руб. и $4x_3+x_3^2$ руб. соответственно. Определить, сколько изделий на каждом из предприятий следует произвести, чтобы общие затраты, обусловленные изготовлением необходимой продукции, были минимальными.

■ **Математическая** постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$z=x_1^2+2x_2+x_2^2+4x_3+x_3^2\rightarrow\min$$

при условиях

$$x_1+x_2+x_3=300,$$
$$x_j\geq 0,\ j=1\div 3.$$ ●

Различают три основные формы ЛП.

Стандартная форма – все ограничения являются ограничениями-неравенствами, а все переменные неотрицательны (удобна при решении задач ЛП графическим методом).

Каноническая форма – все ограничения являются ограничениями-равенствами с неотрицательными правыми частями, а все переменные неотрицательны. Основные вычислительные методы (симплекс-метод и его варианты) разработаны именно для этой формы.

Общая форма – часть ограничений являются равенствами, часть – неравенствами. Кроме того, не на все переменные наложены условия неотрицательности.

Эти три формы задачи ЛП эквивалентны в том смысле, что каждую из них можно простыми преобразованиями привести к любой из двух остальных. Поэтому, если имеется способ решения одной из этих задач, тем самым мы умеем решать любую из трёх задач ЛП. Произведем преобразование общей задачи ЛП к ее канонической форме. Пусть первоначально она записана в виде:

$$z=3x_1+4x_2\rightarrow\max,$$
$$2x_1+3x_2=12,$$
$$5x_1-6x_2\leq 7,$$
$$-3x_1+2x_2\leq -4,$$
$$x_1 \text{ не ограничена в знаке}, x_2\geq 0.$$

Проведём следующие преобразования:

1. Т.к. правые части ограничений должны быть неотрицательны, то умножим 3-е ограничение на -1, в результате получим $3x_1-2x_2\geq4$.
2. Во 2-м ограничении левая часть не больше правой, поэтому, чтобы их уравнять (сбалансировать), необходимо в левую часть добавить **балансовую** переменную $x_3\geq0$. Если данное ограничение определяет расход некоторого ресурса, переменную x_3 следует интерпретировать как **остаток,** или неиспользованную часть**,** данного ресурса.
3. В 3-м ограничении левая часть больше правой части, поэтому чтобы обеспечить их равенство необходимо слева вычесть **балансовую** переменную $x_4\geq0$. Переменную x_4 следует интерпретировать как **избыток,** или перерасход**,** данного ресурса.
4. Любую переменную x_i, не имеющую ограничения в знаке, можно представить как разность двух неотрицательных переменных: $x_i=x_i'-x_i''$, где x_i', x_i'' ≥0. Поэтому в целевой функции и во всех ограничениях необходимо подставить $x_1=x_1'-x_1''$, где $x_1',x_1''\geq0$.

Указанные операции позволяют привести исходную задачу к канонической форме:

$$z=3x_1'-3x_1''+4x_2\rightarrow\max,$$
$$2x_1'-2x_1''+3x_2=12,$$
$$5x_1'-5x_1''-6x_2+x_3=7,$$
$$3x_1'-3x_1''-2x_2-x_4=4,$$
$$x_1',x_1'',x_2,x_3,x_4\geq0.$$

Кроме того, необходимо отметить, что **максимизация** некоторой функции **эквивалентна минимизации** той же функции, взятой с противоположным знаком, и наоборот. Например, максимизация функции $z=3x_1-2x_2+4x_3$ эквивалентна минимизации функции $(-z)=-3x_1+2x_2-4x_3$. Эквивалентность означает, что при одной и той же совокупности ограничений оптимальные значения переменных x_1,x_2,x_3 в обоих случаях будут одинаковы. Отличие заключается в том, что при одинаковых числовых значениях целевых функций их знаки будут противоположны.

6.2. Графическое решение задачи линейного программирования. Если задача ЛП содержит только две переменные, то её можно решить графически с нагядным представлением на плоскости. В случае трёх переменных графическая интерпретация требует пространственного воображения, а при большем числе переменных становится даже невозможной. Несмотря на это, графическое решение позволяет сделать некоторые выводы, которые служат основой для разработки общего метода решения задачи ЛП.

Пример 1. Пусть необходимо найти решение задачи (6.4) – (6.6) с двумя переменными графическим способом.

■ Сначала строится ОДР, затем на ней ищется $z_{\max}$. Начнём с геометрического представления ОДР. Условия (6.6) ограничивают ОДР первой четвертью. Каждое из неравенств (6.5) определяет на координатной плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость, а система неравенств (6.5), (6.6) в случае её совместности – их пересечение. Находим полуплоскости, в которых выполняются данные неравенства. Для этого вследствие выпуклости любой полуплоскости достаточно взять произвольную точку, через которую не проходит соответствующая граничная прямая, и проверить, удовлетворяет ли эта пробная точка ограничению-неравенству. Если удовлетворяет, то данное неравенство выполняется в полуплоскости, содержащей пробную точку. В противном случае берётся полуплоскость, не содержащая пробной точки. В качестве пробной точки часто удобно брать начало координат $O(0;0)$. Заметим, что при построении ОДР ограничения-неравенства (6.5) лучше переписать в отрезках:

$$\frac{x_1}{9}+\frac{x_2}{27/2}\le 1,\ \frac{x_1}{14}+\frac{x_2}{7}\le 1,\ \frac{x_1}{23/2}+\frac{x_2}{23/3}\le 1.$$

Как известно, числа, стоящие в знаменателях, показывают, сколько единиц отсекает прямая, соответствующая данному ограничению, на той или иной оси. Например, в первом ограничении на оси Ox_1 отсекается 9 единиц, а на оси Ox_2 – $\frac{27}{2}$=13,5 единиц.

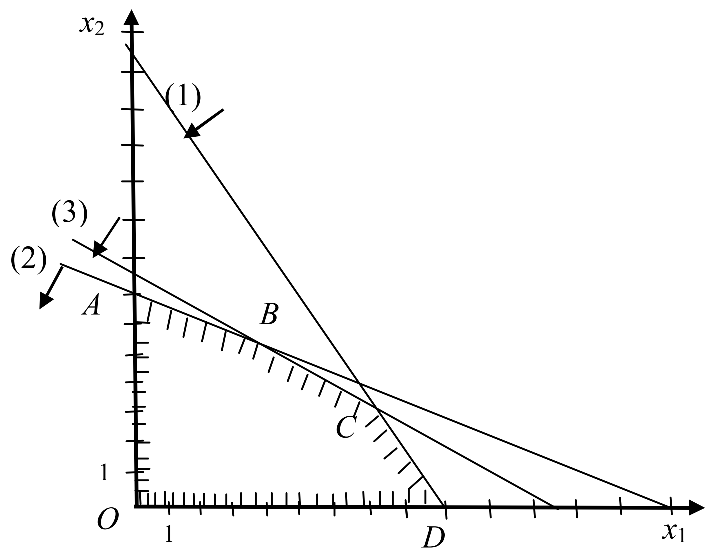


Рис.6.1. Область допустимых решений задачи (6.4)–(6.6)

Для нашей задачи ОДР – множество точек пятиугольника $OABCD$ (рис. 6.1). На рис. 6.1 цифрами в скобках отмечены номера ограничений (6.5) в порядке записи, а стрелками указаны области, в которых выполняются соответствующие неравенства.

Кроме выпуклого многоугольника (рис. 6.1), ОДР может представлять собой неограниченную выпуклую многоугольную область (рис. 6.2а) или быть пустым множеством (рис. 6.2б) (в этом случае задача ЛП **не имеет решения поскольку ОДР является пустой)**.

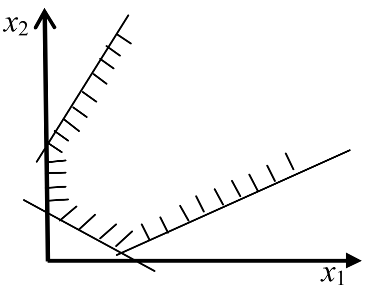


Рис. 6.2а. ОДР – многоугольная область

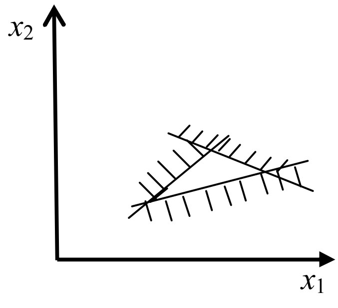


Рис. 6.2б. ОДР – пустое множество

Перейдём к геометрической интерпретации целевой функции (6.4).

Уравнение $z=c_1x_1+c_2x_2=4x_1+7x_2$ при фиксированном значении $z=z_0$ определяет на плоскости прямую линию $z_0=4x_1+7x_2$. При изменении z получим семейство параллельных прямых, называемых **линиями уровня.** Вектор $\boldsymbol{c}=(c_1;c_2)$ с координатами из коэффициентов при x_1 и x_2 перпендикулярен к каждой из линий уровня. Вектор $\boldsymbol{c}$ ($-\boldsymbol{c}$) показывает направление наибольшего возрастания (убывания) целевой функции.

Если построить на одном рисунке ОДР, вектор $\boldsymbol{c}$ и одну из линий уровня, например, $z=0$, то задача сводится к определению в ОДР точки в направлении вектора $\boldsymbol{c}$ ($-\boldsymbol{c}$), через которую проходит линия уровня $z_{\max}$ ($z_{\min}$), соответствующая наибольшему (наименьшему) значения функции z. (Т.к. вектор $\boldsymbol{c}$ необходим лишь для выяснения направления возрастания целевой функции, иногда для большей наглядности удобно строить вектор $\lambda\boldsymbol{c}$ ($\lambda>0$)).

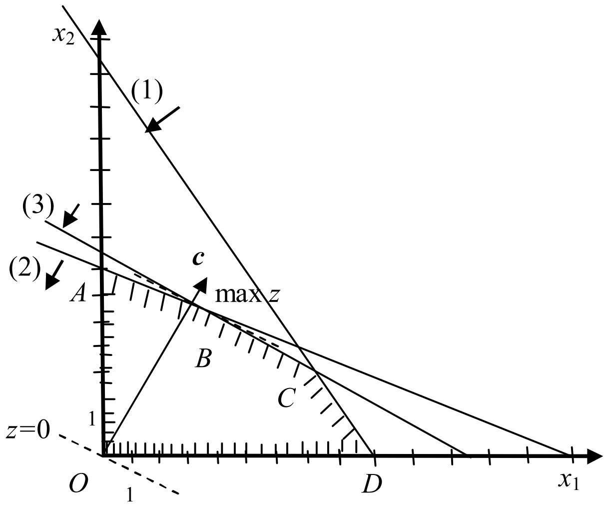


Рис.6.3а. Определение максимума целевой функции

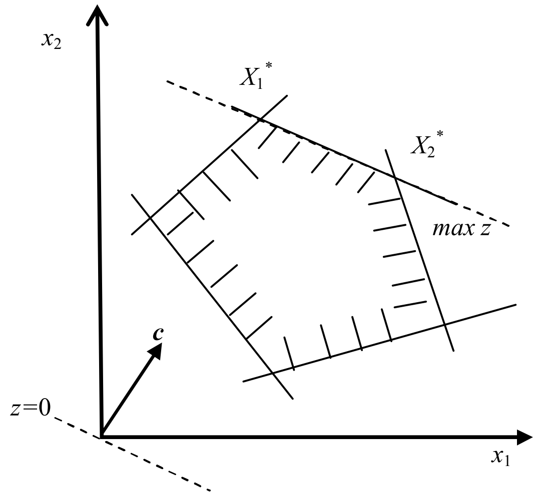


Рис.6.3б. Альтернативный оптимум целевой функции

Перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{c}$ проводим линию уровня $z=0$. Параллельным перемещением прямой $z=0$ находим крайнюю точку, в которой целевая функция достигает максимума (рис.6.3а).

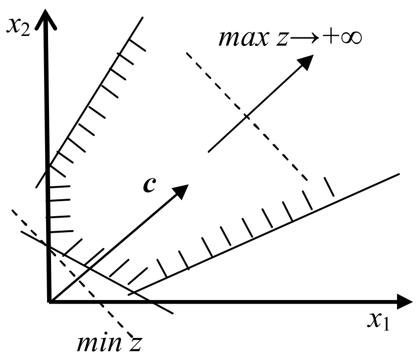


Рис. 6.4а. Целевая функця не ограничена сверху

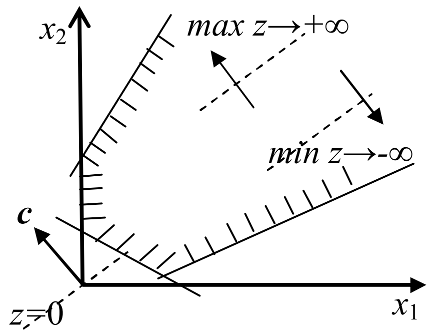


Рис. 6.4б. Целевая функця не ограничена

Так как точка B находится на пересечении прямых (2) и (3), то координаты точки B определяются системой уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 23, \\ 2x_1 + 4x_2 = 28, \end{cases}$ откуда $B(4;5)$, $z_{max}=z(B)=4\cdot 4+7\cdot 5=51$. Это и есть **графический способ решения задачи ЛП.**

Полученное решение означает, что необходимо выпускать 4 полки и 5 шкафов. При этом прибыль будет максимальной – 51 ден. ед. ●

Если задача разрешима, то, кроме данного случая единственного решения, задача может иметь бесконечное множество решений – **альтернативный оптимум** (рис. 6.3б). В этом случае прямая, соответствующая целевой функции, параллельна прямой, соответствующей одному из связывающих ограничений. Ограничение называют **связывающим,** если прямая, его представляющая, проходит через оптимальную точку.

Если ОДР – многоугольная область, то целевая функция может быть не ограничена (рис. 6.4а,б). В этом случае задача ЛП не имеет решения **по причине неограниченности целевой функции.**

6.3.Графическое решение задачи линейного программирования с помощью MathCAD.

Пример 2. Найти значения переменных x_1, x_2, которые доставляют максимум и минимум функции $z=3x_1+2x_2$ при ограничениях

$$x_1+x_2\le 4,$$

$$2x_1+x_2\ge 2,$$

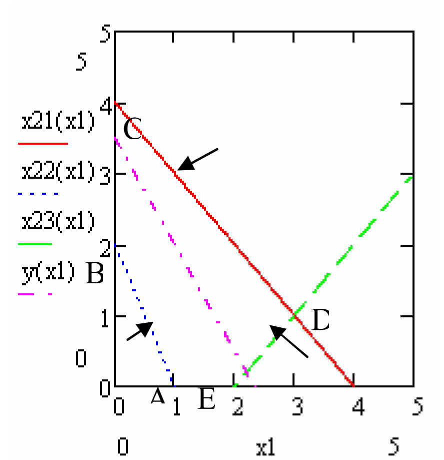
$$x_1-x_2\le 2,$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

■ Переходим от неравенств к равенствам, выражая из них x_2 через x_1, и строим на поле X-Y Plot область допустимых решений вместе с одной линией уровня, например, $z_0=7$:

$x21(x1) := -x1 + 4 \quad x22(x1) := -2\cdot x1 + 2 \quad x23(x1) := x1 - 2$

$z0 := 7 \quad y(x1) := \frac{-3}{2}x1 + \frac{1}{2}\cdot z0$



Каждое неравенство-ограничение означает, что допустимые значения переменных лежат в первой четверти выше или ниже соответствующей прямой (на рис.6.5 эти направления указаны стрелками). Область допустимых решений для данной задачи – пятиугольник $ABCDE$, ограниченный пересекающимися прямыми и координатными осями Ox_1 и Ox_2 (рис. 6.5).

Линии уровня функции $z=z_0$ –

Рис.6.5. Нахождение ОДР в MathCADe

семейство параллельных прямых $3x_1+2x_2=z_0$. Из рис. 6.5 видно, что целевая функция z достигает наибольшего значения в самой правой вершине пятиугольника $ABCDE$ – в точке D, находящейся на пересечении 1-го и 3-го ограничений. Вычисления в MathCAD координат этой точки и значения целевой функции в ней приведены на рис. 6.6.

```
Given
x1 + x2 = 4                                   z(x1,x2) := 3x1 + 2·x2
x1 − x2 = 2        find(x1,x2) → (3)          z(3,1) = 11
                                 (1)
```

Рис.6.6. Вычисления в MathCAD координат точки максимума и значения целевой функции

Из рис.1 также видно, что минимум целевой функции достигается в точке A, координаты которой очевидны из графика: $A(1;0)$, $z_{min}=3$.

Задача ЛП решена графически:

$$z_{min}=3,\ \boldsymbol{X}_{min}(1;0);\ z_{max}=11,\ \boldsymbol{X}_{max}(3;1).$$ •

Можно рекомендовать следующую последовательность графического решения задачи ЛП в MathCAD:

1. Установить режим автоматических вычислений.
2. Записать уравнения прямых, ограничивающих ОДР, в виде $x_2=kx_1+b$.
3. Изобразить на графике соответствующие прямые и определить вид ОДР.
4. Построить для одного или нескольких значений z_0 линии уровня целевой функции $z=z_0$.
5. Если задача имеет решение, найти вершину (или вершины – в случае альтернативного решения), в которой находится искомый экстремум, определить ее координаты и вычислить значение целевой функции в ней.

6.4. Основы симплекс-метода. Задачи, решаемые с помощью симплекс-метода, должны обладать следующими двумя свойствами:

–система ограничений является системой уравнений с базисом;

–свободные члены всех уравнений в системе неотрицательны.

Как известно, система уравнений имеет допустимый базис, если в каждом уравнении есть переменная (с положительным коэффициентом и неотрицательной правой частью), не входящая больше ни в какое другое уравнение. Эти переменные называются **базисными**. Все остальные переменные называются **свободными.** Решение называется **базисным,** если свободные переменные положить равными нулю. Не все задачи ЛП имеют выделенный допустимый базис. Рассмотрим задачу с базисом:

$$z=\sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \to \max, \tag{6.11}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m, \end{cases} \tag{6.12}$$

$$x_j \ge 0,\ j=1 \div n+m,\ m<n,\ b_i \ge 0. \qquad (6.13)$$

К такой канонической задаче, в частности, приводится задача ЛП, в которой все ограничения являются неравенствами $\le$. Выразим базисные переменные $x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$ из равенств (6.12) через свободные $x_1,\ldots,x_n$ и подставим их в целевую функцию. После группировки подобных членов получим

$$z=\Delta_0-\sum_{j=1}^{n+m}\Delta_j x_j\ , \qquad (6.14)$$

$$\text{где } \Delta_0=\sum_{k=1}^{m}c_{n+k}b_k\ , \qquad (6.15)$$

$$\Delta_j=z_j-c_j=\sum_{k=1}^{m}c_{n+k}a_{kj}-c_j,\ j=1 \div n;\ \Delta_j=0,\ j=n+1 \div n+m. \qquad (6.16)$$

С учётом равенств (6.14) – (6.16) задача (6.11) – (6.13) примет вид:

$$z=\Delta_0-\sum_{j=1}^{n+m}\Delta_j x_j\ , \qquad (6.17)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i,\ i=1 \div m, \qquad (6.18)$$

$$x_j \ge 0,\ j=1 \div n+m. \qquad (6.19)$$

Задачу (6.17) – (6.19) записываем в начальную симплекс-таблицу. В первой строке (z-строке или оценочной) таблицы указываются элементы Δ_j. В первом столбце таблицы – базисные переменные (БП) x_{n+1}, ..., x_{n+m}, значения которых приведены в столбце «Решение» (при этом свободные переменные равны нулю).

БП	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	Реш.
z	Δ_1	Δ_2	…	Δ_n	0	0	…	0	Δ_0
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m

Замечание 1. Часто целевая функция z с самого начала зависит только от свободных переменных. Тогда $\Delta_j=-c_j$, $j=1 \div n$.

Опорный план, соответствующий данной таблице, есть $\mathbf{X}=(\underbrace{0;\ldots;0}_{n};b_1;b_2;\ldots;b_m)$. Имеет место следующая теорема:

Теорема 6.1. Пусть исходная задача решается на максимум (минимум). Если для некоторого опорного плана все оценки Δ_j ($j=1 \div n+m$) неотрицательны (неположительны), то такой план оптимален.

Т.о., имеем **алгоритм** нахождения оптимального плана симплекс-методом (для задачи на максимум):

1. Проверяем выполнение критерия оптимальности – наличие в z-строке отрицательных коэффициентов $\Delta_j<0$. Если таковых нет, то решение оптимально, $z_{\max}=\Delta_0$, базисные переменные принимают значения b_i, свободные переменные равны 0, т. е. получаем **оптимальное базисное решение**.

2. Если критерий оптимальности не выполнен, то наибольший по модулю отрицательный коэффициент $\Delta_j<0$ в z-строке определяет **разрешающий столбец** q.

Заметим, что в качестве разрешающего столбца можно выбрать любой столбец j с отрицательным коэффициентом $\Delta_j<0$ в z-строке. Но выбор наибольшего по модулю в большинстве случаев позволяет достичь оптимального решения быстрее.

Для всех строк, у которых $a_{iq}>0$, составляем отношения $\mu_i=\dfrac{b_i}{a_{iq}}$ и определяем наименьшее из них. Если все $a_{iq}\le 0$ (т. е. невозможно выбрать разрешающую строку), то задача не имеет конечного оптимума ($z_{\max}\to\infty$). Если $a_{iq}>0$ существуют, то выбираем строку p, на котором достигается $\min\mu_i$ по всем $a_{iq}>0$ (**разрешающая строка**). На пересечении разрешающих строки и столбца находится **разрешающий элемент** a_{pq}.

3. Переходим к следующей таблице по правилам:

а) в левом столбце записываем новый базис: вместо прежней базисной переменной x_p – новую x_q;

б) новую строку с номером p получаем из прежней строки делением на разрешающий элемент a_{pq};

в) все остальные элементы вычисляем по **правилу прямоугольника**:

$$\begin{cases} a'_{ij}=a_{ij}-\dfrac{a_{iq}a_{pj}}{a_{pq}}, i\neq p \\ a'_{pj}=\dfrac{a_{pj}}{a_{pq}} \end{cases} ; j=1\div n+m, \quad \begin{cases} b'_i=b_i-\dfrac{a_{iq}b_p}{a_{pq}}, i\neq p \\ b'_p=\dfrac{b_p}{a_{pq}} \end{cases} ; \begin{cases} \Delta'_j=\Delta_j-\dfrac{\Delta_q a_{pj}}{a_{pq}}, j=1\div n+m \\ \Delta'_0=\Delta_0-\dfrac{\Delta_q b_p}{a_{pq}}. \end{cases} .$$

Далее переходим к п.1 алгоритма.

Замечание 2. При решении задачи на минимум, кроме критерия оптимальности, меняется выбор разрешающего столбца. Он выбирается по наибольшему (положительному) коэффициенту Δ_j. Остальные пункты алгоритма сохраняются.

Таким образом, следующая таблица (итерация) получается методом исключения переменных. Этот метод включает вычислительные процедуры двух типов.

Тип 1 (формирование разрешающей строки):

Новая разрешающая строка = Предыдущая разрешающая строка/Разрешающий элемент.

Тип 2 (формирование остальных строк, включая z-строку):

Новая строка = Предыдущая строка - (Коэффициент разрешающего столбца предыдущей строки)·(Новая разрешающая строка).

Выполнение процедуры типа 1 приводит к тому, что в новой разрешающей строке разрешающий элемент становится равным единице. В результате выполнения процедуры типа 2 все остальные коэффициенты разрешающего столбца становятся равными нулю. Это эквивалентно получению базисного решения путём исключения вводимой переменной из всех уравнений (строк), кроме разрешающего. Этот метод преобразования систем уравнений называют методом Гаусса.

Пример 3. Решим с помощью симплекс-метода задачу (6.4) – (6.6).

■ Запишем задачу в канонической форме, то есть ограничения-неравенства перепишем в виде равенств, добавляя балансовые переменные:

$$z=4x_1+7x_2\rightarrow\max,$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=27, \\ 2x_1+4x_2+x_4=28, \\ 2x_1+3x_2+x_5=23, \end{cases} \tag{6.20}$$

$$x_i\geq 0,\ i=1\div 5.$$

Система (6.20) является системой с базисом, в которой x_3, x_4, x_5 – базисные, а x_1 и x_2 – свободные переменные. Её базисное решение $\boldsymbol{X}_0=(0;0;27;28;23)$, которое является и допустимым.

Запишем начальную симплекс-таблицу:

Итерация 0

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш.	Отн.
z	-4	-7	0	0	0	0	–
x_3	3	2	1	0	0	27	27/2
x_4	2	$\underline{4}$	0	1	0	28	7
x_5	2	3	0	0	1	23	23/3

Первая рабочая строка таблицы (z-строка) заполняется коэффициентами целевой функции с противоположным знаком (замечание 1). В соответствии с п.1 алгоритма убеждаемся, что критерий оптимальности не выполняется – в z-строке имеются отрицательные коэффициенты. Разрешающий столбец x_2 выбран по наибольшему по модулю отрицательному коэффициенту в z-строке, разрешающая строка – x_4 – выбрана по наименьшему отношению столбца решений к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца, п.2 алгоритма (столбец «Отношение»; в z-строке отношение не ищется). Это значит, что на следующей итерации переменная x_2 из свободной перейдёт в базисную, а переменная x_4 наоборот, из базисной – в свободную. Таким образом, разрешающим элементом является элемент, находящийся в клетке (x_4,x_2). Здесь и далее в неоптимальных таблицах будем подчёркивать разрешающие элементы.

Строим новую симплекс-таблицу (итерация 1) по правилам п.3 алгоритма. Новыми базисными переменными являются x_3, x_2, x_5. Применяя к исходной таблице процедуру типа 1 алгоритма, мы делим строку x_4 на разрешающий элемент, равный 4. Указанная процедура приводит к следующему:

Итерация 1

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш.	Отн.
z							
x_3							
x_2	1/2	1	0	1/4	0	7	
x_5							

Чтобы посчитать остальные строки таблицы, выполним процедуры типа 2 алгоритма.

1. z-строка.

Предыдущая z-строка: (-4 -7 0 0 0 0)

-(-7)×Новая разрешающая строка: $-(-\frac{7}{2}\quad -7\quad 0\quad -\frac{7}{4}\quad 0\quad -49)$

= Новая z-строка: $(-\frac{1}{2}\quad 0\quad 0\quad \frac{7}{4}\quad 0\quad 49)$

2. Строка x_3.

Предыдущая x_3-строка: (3 2 1 0 0 27)

-(2)×Новая разрешающая строка: $-(1\quad 2\quad 0\quad \frac{1}{2}\quad 0\quad 14)$

= Новая x_3-строка: $(2\quad 0\quad 1\quad -\frac{1}{2}\quad 0\quad 13)$

3. Строка x_5.

Предыдущая x_5-строка: (2 3 0 0 1 23)

-(3)×Новая разрешающая строка: $-(\frac{3}{2}\quad 3\quad 0\quad \frac{3}{4}\quad 0\quad 21)$

= Новая x_5-строка: $(\frac{1}{2}\quad 0\quad 0\quad -\frac{3}{4}\quad 1\quad 2)$

Новая симплекс-таблица (итерация 1), полученная с помощью рассмотренных операций, имеет вид:

Итерация 1

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш.	Отн.

z	-1/2	0	0	7/4	0	49	–
x_3	2	0	1	-1/2	0	13	13/2
x_2	1/2	1	0	1/4	0	7	14
x_5	<u>1/2</u>	0	0	-3/4	1	2	4

Новое базисное решение $\boldsymbol{X}_1$=(0;7;13;0;2). В соответствии с п.1 алгоритма опять убеждаемся, что критерий оптимальности не выполняется – в z-строке имеются отрицательный коэффициент; разрешающим столбцом является столбец x_1, разрешающей строкой – строка x_5 (выбрана по наименьшему отношению столбца решений к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца, п.2 алгоритма). Это значит, что на следующей итерации переменная x_1 из свободной перейдёт в базисную, а переменная x_5 наоборот, из базисной – в свободную.

Строим новую симплекс-таблицу (итерация 2) по правилам п.3 алгоритма. Новыми базисными переменными являются x_3, x_2, x_1.

Итерация 2

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш.
z	0	0	0	1	1	51
x_3	0	0	1	5/2	-4	5
x_2	0	1	0	1	-1	5
x_1	1	0	0	-3/2	2	4

Полученное решение оптимально, так как в z-строке все коэффициенты неотрицательны. Следовательно, $z_{\max}$ =51; оптимальное базисное решение $\boldsymbol{X}^*$=(4;5;5;0;0). Решение невырожденное, так как ни в одной таблице в столбце «Решения» для базисных переменных нет нулей. Решение безальтернативно, т.к. все коэффициенты z-строки при свободных переменных (x_4, x_5) не равны нулю. ●

Покажем теперь, что между геометрическим методом и алгебраическим (симплекс) методом существует взаимно однозначное соответствие. В таблице «Итерация 0» x_1 и x_2 – свободные переменные, следовательно, $x_1=x_2=0$. На рис.6.1 находим точку с такими координатами. Это точка O. Следовательно, итерация 0 симплекс-метода соответствует точке O ОДР $OABCD$, $\boldsymbol{X}_0 \leftrightarrow O(0;0)$.

В таблице «Итерация 1» x_2=7, а x_1 – свободная переменная, следовательно, x_1=0. На рис. 6.1 находим точку с координатами (0;7). Это точка A. Следовательно, итерация 1 симплекс-метода соответствует точке A области допустимых решений $OABCD$, $\boldsymbol{X}_1 \leftrightarrow A(0;7)$.

Аналогично в таблице «Итерация 2» x_1=4, x_2=5, следовательно, итерация 2 соответствует точке B(4;5) области допустимых решений $OABDE$, $\boldsymbol{X}^* \leftrightarrow B(4;5)$. Таким образом, базисным решениям системы линейных уравнений соответствуют вершины ОДР, а симплекс-метод состоит в направленном переборе этих вершин и нахождению оптимальной вершины.

6.5. Симплекс-метод с искусственным базисом. В п.4 рассматривалась задача с начальным базисом. Однако если ограничение записано в виде равенства или неравенства $\geq$, нельзя сразу получить **допустимое** начальное базисное решение.

Рассмотрим следующую задачу, не имеющую выделенного базиса:

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{6.21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=1\div m, \tag{6.22}$$

$$x_j \geq 0,\ j=1\div n;\ b_i \geq 0,\ i=1\div m,\ m<n. \tag{6.23}$$

В этом случае вводится так называемый **искусственный базис**. К левым частям уравнений, не имеющих базисных переменных, добавляют искусственные переменные R_i. В целевую функцию переменные R_i вводят с коэффициентом -M, где M – некоторое достаточно большое положительное число, конкретное значение которого обычно не задаётся. Полученная задача называется ***M*-задачей,** соответствующей исходной. M-задача имеет следующий вид:

$$\bar{z}=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M\sum_{i=1}^{m} R_i \to \max, \tag{6.24}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + R_i = b_i,\ i=1\div m, \tag{6.25}$$

$$x_j \geq 0,\ j=1\div n;\ R_i \geq 0,\ i=1\div m. \tag{6.26}$$

M-задача имеет опорный план $\overline{\mathbf{X}}=(\underbrace{0;...;0}_{n};R_1;R_2;\ldots;R_m)$. Поэтому её решение может быть найдено симплекс-методом.

Теорема 6.2. Если в оптимальном плане M-задачи $\overline{\mathbf{X}}^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,R_1^*,R_2^*,...,R_m^*)$ все искусственные переменные $R_i^*=0$ ($i=1\div m$), то $\mathbf{X}^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ является оптимальным планом задачи (6.21)-(6.23).

Замечание 3. В задаче минимизации в целевую функцию переменные R_i вводят с коэффициентом +M, т.е. $\bar{z}=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M\sum_{i=1}^{m} R_i \to \min$.

При опорном плане $\overline{\mathbf{X}}=(\underbrace{0;...;0}_{n};R_1;R_2;\ldots;R_m)$ M-задачи $\Delta_0=-M\sum_{k=1}^{m} b_k$, $\Delta_j=z_j-c_j=-M\sum_{k=1}^{m} a_{kj}-c_j$, $j=1\div n$; $\Delta_j=0$, $j=n+1\div n+m$. Т.о., Δ_0 и разности z_j-c_j состоят из двух частей, одна из которых зависит от M, а другая – нет. После вычисления Δ_0 и Δ_j их значения, а также исходные значения M-задачи заносят в таблицу, которая содержит на одну строку больше, чем обычная симплекс-таблица. При этом в 1-ю строку помещают слагаемые, не содержащие M (т.е. коэффициенты Δ_0 и Δ_j z-строки исходной задачи), а в (m+2)-ю (она называется строкой-**оценкой)** – коэффициенты при M, т.е.

$$\Delta_0=-M\sum_{k=1}^{m} b_k\ ,\ \Delta_j=z_j=-M\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\ . \qquad (6.27)$$

Из формул (6.27) следует, что строка «Оценка» получается суммированием соответствующих коэффициентов строк с искусственными переменными с противоположным знаком. Она будет присутствовать в таблице до тех пор, пока хотя бы одна из искусственных переменных есть в базисе. Т.о., решение задачи разбивается на два этапа:

Этап 1. Разрешающий столбец здесь выбирается по наибольшей по модулю **из отрицательных оценок,** соответствующих свободным переменным. Если таковых не окажется (т. е. невозможно выбрать разрешающий столбец), то задача не имеет решения **по причине пустоты ОДР.** Все остальные вычисления (в том числе и выбор разрешающей строки) проводятся как в алгоритме симплекс-метода п.3. После того, как все искусственные переменные выйдут из базиса (т. е. они примут нулевые значения), переходим к этапу 2.

Этап 2. Оптимальное базисное решение, полученное на этапе 1, используется в качестве начального решения исходной задачи. В результате мы переходим к решению задачи обычным симплекс-методом.

Следовательно, имеем **алгоритм** решения задачи (6.21) – (6.23) методом искусственного базиса:

1. Составляем *M*-задачу (6.24) – (6.26).
2. Находим её опорный план.
3. С помощью обычных вычислений симплекс-метода исключаем искусственные переменные из базиса. В результате опорный план исходной задачи (6.21) – (6.23), либо устанавливаем её неразрешимость (этап 1).
4. Используя найденный опорный план задачи (6.21) – (6.23), либо находим симплекс-методом оптимальный план исходной задачи, либо устанавливаем её неразрешимость (этап 2).

Пример 4. Рассмотрим следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
&z=4x_1+16x_2\to\max,\\
&3x_1+4x_2\ge 6,\\
&x_1+3x_2=3, \qquad\qquad (6.28)\\
&2x_1+x_2\le 4,\\
&x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

■ Запишем задачу в канонической форме:

$$z=4x_1+16x_2\to\max,$$

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=6,\\ x_1+3x_2=3,\\ 2x_1+x_2+x_4=4, \end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\ j=1\div 4.$$

Система ограничений только одну допустимую базисную переменную x_4, поэтому в первое и второе уравнения добавляем искусственные переменные R_1 и R_2. Получим M-задачу:

$$\bar{z}=4x_1+16x_2-M(R_1+R_2)\to\max,$$

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3+R_1=6, \\ x_1+3x_2+R_2=3, \\ 2x_1+x_2+x_4=4, \end{cases} \qquad (6.29)$$

$$x_j\geq 0,\ j=1\div 4,\ R_1\geq 0,\ R_2\geq 0.$$

Данная система является системой с базисом, в которой R_1, R_2, x_4 – базисные, а x_1, x_2 и x_3 – свободные переменные. Запишем начальную симплекс-таблицу:

Итерация 0

БП	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Реш.	Отн.
z	-4	-16	0	0	0	0	0	–
R_1	3	4	-1	1	0	0	6	3/2
R_2	1	$\underline{3}$	0	0	1	0	3	1
x_4	2	1	0	0	0	1	4	4
Оц.	-4	-7	1	-1	-1	0		

Разрешающий столбец x_2 выбран по наибольшей по модулю отрицательной оценке (-7). Разрешающая строка – R_2 – выбрана по наименьшему отношению столбца решений к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца, как и в задаче без искусственных переменных. Это значит, что на следующей итерации переменная x_2 из свободной перейдёт в базисную, а переменная R_2 из базисной - в свободную. Запишем следующие таблицы:

Итерация 1

БП	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Реш.	Отн.
z	4/3	0	0	0	16/30	0	16	–
R_1	$\underline{5/3}$	0	-1	1	-4/3	0	2	6/5
x_2	1/3	1	0	0	1/3	0	1	3
x_4	5/3	0	0	0	-1/3	1	3	9/5
Оц.	-5/3	0	1	-1	4/3	0		

Итерация 2

БП	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Реш.
z	0	0	4/5	-4/5	32/5	0	72/5
x_1	1	0	-3/5	3/5	-4/5	0	6/5
x_2	0	1	1/5	-1/5	3/5	0	3/5
x_4	0	0	1	-1	1	1	1

После итерации 1 закончился этап 1. После итерации 2 получено оптимальное решение, так как в z-строке все коэффициенты неотрицательны (кроме коэффициента при искусственной переменной R_2, который не влияет на оптимальность, когда искусственные переменные вышли из базиса). Имеем ответ: $z_{max}=72/5(6/5;3/5;0;1)$. ●

6.6. Двойственность в линейном программировании. Теория двойственности имеет большое значение в ЛП. На её основе разработаны многие численные методы для решения линейных оптимизационных задач, а также критерии оптимальности допустимых решений.

Каждой задаче ЛП можно сопоставить некоторую другую задачу ЛП, называемую двойственной по отношению к исходной или прямой. При этом двойственная задача (ДЗ) составляется согласно следующим правилам:

1. Если целевая функция исходной задачи задаётся на максимум, то целевая функция ДЗ – на минимум, и наоборот.
2. Число переменных в ДЗ равно числу ограничений исходной задачи и наоборот, число ограничений ДЗ равно числу переменных исходной задачи.
3. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции ДЗ являются свободные члены системы ограничений исходной задачи, а свободными членами системы ограничений ДЗ – коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.
4. Если переменная x_j исходной задачи может принимать только лишь неотрицательные значения, то j-е ограничение в системе ДЗ является неравенством вида $\geq$. Если же переменная x_j не ограничена в знаке, т.е. может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то j-е ограничение в системе ДЗ является уравнением. Аналогично если i-е ограничение в системе исходной задачи является неравенством, то i-я переменная ДЗ $y_i \geq 0$. Если же i-е ограничение есть уравнение, то переменная y_i не ограничена в знаке.
5. Матрицы коэффициентов в системах ограничений двойственных задач являются транспонированными (строки одной матрицы служат соответствующими столбцами другой).

Рассмотрим задачу максимизации, в которой все ограничения являются ограничениями-неравенствами типа $\leq$ или равенствами и по правилам 1 – 5 построим к ней двойственную. Результат запишем следующим образом:

Таблица 6.2

Прямая задача (I)	Двойственная задача (II)
$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$	$w=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i=1 \div k$	$y_i \geq 0,\ i=1 \div k$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=k+1 \div m$	y_i не ограничена в знаке
$x_j \geq 0,\ j=1 \div l$	$\sum a_{ij} y_i \geq c_j,\ j=1 \div l$
x_j не ограничена в знаке	$\sum a_{ij} y_i = c_j,\ j=l+1 \div n$

Пара условий, записанная в одной строке таблицы, называется **парой сопряжённых условий** двойственных задач. Переменные y_i ДЗ, $i=1 \div m$, полученные в табл.1, называются **основными переменными ДЗ**.

Заметим, что если в прямой задаче какое-либо ограничение не является стандартным для задачи максимизации (т.е. неравенством типа ≥), то соответствующая переменная двойственной задачи будет нестандартно ограниченной в знаке:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$	$y_i \le 0$

Если по правилам 1 – 5 к задаче II построить ДЗ, то получится исходная задача I. Поэтому говорят, что обе задачи (I и II) образуют пару ДЗ. Пара ДЗ обладает следующими **свойствами**.

Свойство 1 (**неравенство двойственности**). Пусть $\boldsymbol{X}=(x_1,\ldots,x_n)$ – допустимое решение задачи I со значением целевой функции $z(\boldsymbol{X})$, а $\boldsymbol{Y}=(y_1,\ldots,y_m)$ – допустимое решение задачи II со значением целевой функции $w(\boldsymbol{Y})$. Тогда справедливо неравенство $z(\boldsymbol{X})\le w(\boldsymbol{Y})$.

Свойство 2 (**основная теорема двойственности**). Если одна из ДЗ имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, причём для оптимальных решений $\boldsymbol{X^*}$ и $\boldsymbol{Y^*}$ задач I и II соответственно выполняется равенство $z(\boldsymbol{X^*})=w(\boldsymbol{Y^*})$.

Свойство 3 (**критерий оптимальности Л. В. Канторовича**). Пусть $\boldsymbol{X^*}=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ – допустимое решение задачи I, а $\boldsymbol{Y^*}=(y_1^*,\ldots,y_m^*)$ – допустимое решение задачи II. Для того, чтобы эти решения были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$\text{если } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i, \text{ то } y_i^*=0,\ i=1\div k;$$

$$\text{если } x_j^*>0, \text{ то } \sum a_{ij}y_i^* = c_j,\ j=1\div l.$$

Другими словами, в каждой паре сопряжённых условий ДЗ хотя бы одно нестрогое неравенство должно быть равенством.

Свойство 4. Если в нулевой итерации целевая функция выражена только через свободные переменные, то основными переменными ДЗ являются коэффициенты z-строки при первоначальных базисных переменных прямой задачи. И наоборот, основными переменными прямой задачи являются коэффициенты w-строки при первоначальных базисных переменных ДЗ.

Отсюда, в частности, следует, что решать можно любую задачу из двойственной пары. Естественно, удобнее решать ту, которая представляется менее трудоемкой.

Пример 5. Пользуясь правилами (1) – (5), составим ДЗ к задаче (6.4) – (6.6).

■ Получим пару двойственных задач:

Прямая задача	Двойственная задача
$z=4x_1+7x_2\to\max$	$w=27y_1+28y_2+23y_3\to\min$
$3x_1+2x_2\le27$	$y_1\ge0$
$2x_1+4x_2\le28$	$y_2\ge0$
$2x_1+3x_2\le23$	$y_3\ge0$

$x_1 \geq 0$	$3y_1+2y_2+2y_3 \geq 4$
$x_2 \geq 0$	$2y_1+4y_2+3y_3 \geq 7$

Найдём решение ДЗ по свойству 4 из оптимальной таблицы прямой задачи (итерация 2 решения задачи (6.20)). Т.к. первоначальными базисными переменными прямой задачи были x_3, x_4, x_5, то $y^*_1=0$, $y^*_2=1$, $y^*_3=1$. Т.о., имеем ответ ДЗ: $w_{\min}=51(0;\ 1;\ 1)$. ●

Рассмотрим **экономический смысл** двойственных переменных (или двойственных оценок). Используя условие равенства целевых функций прямой и двойственной задач, можно записать:

$$Z_{max}=w_{min}=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i =27y_1+28y_2+23y_3.$$

Т.к. z измеряется в рублях (прибыль), а b_i – общее количество i-го ресурса, то переменная y_i должна выражаться в рублях на единицу ресурса i. Т.о., переменные ДЗ y_i представляют **ценность** единицы ресурса. Поэтому их иногда называют **теневыми ценами**. Из свойства 3 пары ДЗ следует, что если по некоторому оптимальному плану производства расход i-го ресурса строго меньше его запаса b_i, то в оптимальном плане соответствующая двойственная оценка равна нулю. Если же в некотором оптимальном плане оценок его i-я компонента строго больше нуля, то в оптимальном плане производства расход соответствующего ресурса равен его запасу. Отсюда следует, что двойственные оценки могут служить **мерой дефицитности ресурсов.** Дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет **положительную** оценку, а ресурс избыточный (используемый не полностью) имеет **нулевую** оценку. Так, в нашем примере 3 оптимальный план прямой задачи $\boldsymbol{X}^*=(4;5;5;0;0)$. При этом плане 1-е ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство: $3\cdot4+2\cdot5=22<27$. Это означает, что расход 1-го ресурса (ДСП) меньше его запаса, т.е. 1-й ресурс избыточный. Именно поэтому в оптимальном плане ДЗ $\boldsymbol{Y}^*=(0;\ 1;\ 1)$ оценка $y^*_1=0$.

Пример 6. Составим ДЗ к задаче (6.28).

■ Получим пару двойственных задач:

Прямая задача	Двойственная задача
$z=4x_1+16x_2 \to \max$	$w=6y_1+3y_2+4y_3 \to \min$
$3x_1+4x_2 \geq 6$	$y_1 \leq 0$
$x_1+3x_2=3$	y_2 не ограничена в знаке
$2x_1+x_2 \leq 4$	$y_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$3y_1+y_2+2y_3 \geq 4$
$x_2 \geq 0$	$4y_1+3y_2+y_3 \geq 16$

Найдём решение ДЗ по свойству 4 из оптимальной таблицы прямой задачи (итерация 2 решения задачи (6.28)). Т.к. первоначальными базисными переменными прямой задачи были R_1, R_2, x_4, то y_1=-4/5, y_2=32/5, y_3=0. Т.о., имеем ответ ДЗ: $w_{\min}$=72/5(-4/5; 32/5; 0). ●

6.7. Двойственный симплекс-метод. Двойственный симплекс-метод, как и обычный симплекс-метод, используется при нахождении решения задачи ЛП, записанной в канонической форме с единичным базисом. Вместе с тем двойственный симплекс-метод можно применять при решении задачи ЛП, свободные члены ограничений которой могут быть любыми числами (при решении обычным симплекс-методом эти числа предполагались неотрицательными).

При решении задачи обычным симплекс-методом на любой итерации разность (z_j-c_j), т. е. величина коэффициента z-строки при переменной x_j, равна разности между левой и правой частями соответствующего ограничения двойственной задачи. Если при решении прямой задачи с максимизируемой целевой функцией итерация не приводит к оптимальному решению, то, по крайней мере, для одной переменной разность z_j-c_j<0 и только в оптимуме для **всех *j*** разность z_j-c_j>0.

Рассматривая это условие с учетом двойственности, можно записать

$$z_j\text{-}c_j=\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \text{ -} c_j.$$

Таким образом, если разность z_j-c_j<0, то это означает, что когда решение прямой задачи неоптимальное, то решение двойственной задачи недопустимое. С другой стороны, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$ при z_j-$c_j \geq 0$. Отсюда следует, что оптимальному решению прямой задачи соответствует допустимое решение двойственной задачи.

Эти результаты позволяют разработать новый метод решения задач ЛП, при использовании которого сначала получается **недопустимое,** но «лучшее, чем оптимальное», решение. (Сравните с обычным симплекс-методом, при котором сначала находится **допустимое, но неоптимальное** решение.) Новый метод, получивший название **двойственного симплекс-метода,** обеспечивает выполнение условия оптимальности решения и систематическое «приближение» его к области допустимых решений. Когда полученное решение оказывается допустимым, итерационный процесс вычислений заканчивается, так как это решение является и оптимальным.

Т.о., решение задачи ЛП двойственным симплекс-методом включает в себя следующие этапы:

1^0. Если в задаче есть ограничения-неравенства ≥, то умножением на (-1) их приводят к виду ≤.

2^0. Задачу приводят к каноническому виду, все переменные разбиваются на базисные и свободные. При этом возможно использование недопустимого базиса.

3^0. Находят начальное решение задачи.

4^0. Проверяют это решение на допустимость. Если оно допустимо, то найдено решение задачи. В противном случае переходят к новому решению.

5^0. Выбирают **разрешающую строку**, соответствующую наибольшей по модулю отрицательной базисной переменной. Эта переменная исключается из базиса.

6^0. Включаемая в базис переменная (**разрешающий столбец**) выбирается по наименьшему (в задаче минимизации) или по наименьшему по модулю (в задаче максимизации) отношению коэффициентов z-строки к соответствующим **отрицательным** коэффициентам разрешающей строки. (При наличии альтернатив выбор делается произвольно.) Если знаменатели всех отношений равны нулю или положительные, задача не имеет решений.

7^0. Для получения следующего решения осуществляется обычная операция преобразования строк симплекс-таблицы.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 7.
$$z=10x_1+12x_2+8x_3+20x_4 \to \min,$$
$$2x_1+x_2+4x_3+2x_4 \geq 8,$$
$$x_1+x_2+x_3+8x_4 \geq 5,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0.$$

Сначала необходимо преобразовать все ограничения в неравенства со знаком $\leq$, а затем ввести балансовые переменные. Выполнив эти процедуры, приходим к следующей формулировке задачи:

$$z-10x_1-12x_2-8x_3-20x_4=0,$$
$$-2x_1-x_2-4x_3-2x_4+x_5=-8,$$
$$-x_1-x_2-x_3-8x_4+x_6=-5,$$
$$x_j\geq 0,\ j=1\div 6.$$

Балансовые переменных (x_5, x_6) не обеспечивают получения **допустимого** начального базиса. Так как целевая функция подлежит минимизации, а все коэффициенты z-уравнения неположительные, начальное базисное решение (x_5=-8, x_6=-5) оптимальное, но недопустимое.

Начальная симплекс-таблица, соответствующая оптимальному, но недопустимому решению, имеет вид

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Реш
z	-10	-12	-8	-20	0	0	0
x_5	-2	-1	-4	-2	1	0	-8
x_6	-1	-1	-1	-8	0	1	-5

В приведенной таблице исключаемой переменной является x_5(=-8), так как она имеет наибольшее по модулю отрицательное значение. Отношения, вычисленные для определения новой базисной переменной, приведены в следующей таблице (подчёркнут разрешающий элемент):

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Реш
z	-10	-12	-8	-20	0	0	0
x_5	-2	-1	<u>-4</u>	-2	1	0	-8
x_6	-1	-1	-1	-8	0	1	-5
Отн.	5	12	2	10	–	–	

В качестве включаемой переменной выбирается x_3, так как этой переменной соответствует наименьшее отношение, равное 2. Последующее преобразование строк приводит к новой симплекс-таблице

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Реш
z	-6	-10	0	-16	-2	0	16
x_3	1/2	1/4	1	1/2	-1/4	0	2
x_6	-1/2	-3/4	0	<u>-15/2</u>	-1/4	1	-3
Отн.	12	40/3	–	32/15	8	–	

Новое решение также оптимальное, но всё ещё недопустимое (x_3=2, x_6=-3). Если в качестве новой исключаемой переменной выбрать x_6, вводимой переменной будет x_4, и в результате будем иметь следующую симплекс-таблицу:

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Реш
z	-74/15	-42/5	0	0	-22/15	-32/15	112/5
x_3	7/15	1/5	1	0	-4/15	1/15	9/5
x_4	1/15	1/10	0	1	1/30	-2/15	2/5

Полученное решение является оптимальным и допустимым.

Применение двойственного симплекс-метода особенно эффективно при анализе моделей на чувствительность, в частности в тех случаях, когда после получения оптимального решения в условия задачи вводится новое ограничение. Если для предыдущего оптимального решения новое ограничение не выполняется, то полученное решение оптимальное, но недопустимое. В этом случае двойственный симплекс-метод используется для нахождения нового оптимального решения путём последовательного уменьшения «степени недопустимости» решений, получаемых в процессе симплекс-итераций. Кроме этого, двойственный симплекс-метод также эффективен при решении задач целочисленного программирования.

Упражнения

Задачи **6.1-6.50** *решить графически (найти максимум и минимум целевой функции z); все переменные неотрицательны.*

6.1. $z=x_1+2x_2$ **6.2**. $z=3x_1+4x_2$ **6.3**. $z=x_1+7x_2$ **6.4**. $z=x_1-3x_2$ **6.5**. $z=2x_1-6x_2$

$x_1+x_2\geq1$ $3x_1+2x_2\geq6$ $-x_1+x_2\leq4$ $x_1+2x_2\geq3$ $x_1+x_2\geq4$

$-2x_1+x_2\leq2$ $-3x_1+2x_2\leq7$ $x_1+x_2\geq2$ $x_1-2x_2\leq2$ $2x_1-6x_2\leq12$

$x_1+x_2\leq4$, $x_1\leq3$ $2x_1-4x_2\leq8$, $x_1\geq1$ $x_1+2x_2\leq10$, $x_1\geq1$ $x_1+2x_2\leq6$, $x_1\geq1$ $x_1\geq2$

6.6 $z=2x_1+x_2$ **6.7.** $z=2x_1+4x_2$ **6.8**. $z=2x_1+x_2$ **6.9**. $z=3x_1+2x_2$ **6.10**. $z=x_1-2x_2$

$x_1+2x_2\geq8$ $-x_1+3x_2\geq0$ $x_1+3x_2\geq9$ $3x_1+4x_2\leq12$ $x_1+x_2\geq2$

$x_1+x_2\leq8$ $3x_1+6x_2\leq12$ $2x_1+4x_2\leq16$ $2x_1+x_2\geq2$ $x_1-x_2\leq1$

$-2x_1+x_2\leq2$ $-4x_1+2x_2\leq8$ $x_1-x_2\leq2$ $x_1-2x_2\leq0$

6.11. $z=x_1+3x_2$ **6.12**. $z=2x_1+3x_2$ **6.13**. $z=x_1+x_2$ **6.14**. $z=3x_1-2x_2$ **6.15**.$z=5x_1-3x_2$

$x_1-x_2\geq0$ $x_1+x_2\geq1$ $x_1+2x_2\geq2$ $3x_1+4x_2\geq20$ $3x_1+2x_2\geq6$

$x_1-x_2\leq1$ $3x_1+2x_2\leq6$ $x_1+2x_2\leq10$ $2x_1+x_2\leq11$ $-2x_1+3x_2\leq6$

$2x_1+x_2\leq2$ $-x_1+x_2\leq2$ $2x_1+x_2\leq10$ $-3x_1+2x_2\leq10$ $x_1-x_2\leq4$

6.16. $z=x_1+2x_2$ **6.17**. $z=7x_1-2x_2$ **6.18**. $z=2x_1+x_2$ **6.19**. $z=2x_1+2x_2$ **6.20**. $z=2x_1-4x_2$

$3x_1+4x_2\geq27$ $x_1+x_2\geq1$ $5x_1+2x_2\geq10$ $x_1+x_2\geq3$ $2x_1+7x_2\geq9$

$2x_1+x_2\leq14$ $5x_1-2x_2\leq3$ $4x_1-3x_2\leq12$ $-3x_1+2x_2\leq6$ $8x_1-5x_2\leq16$

$-3x_1+2x_2\leq9$ $2x_1+x_2\leq4$ $7x_1+4x_2\leq28$ $x_1\leq3$ $x_1+3x_2\leq2$

6.21. $z=x_1+2x_2$ **6.22**. $z=3x_1+3x_2$ **6.23**. $z=2x_1-x_2$ **6.24**. $z=7x_1+x_2$ **6.25**. $z=x_1+x_2$

$x_1+x_2\geq4$	$x_1+2x_2\geq2$	$x_1+x_2\geq4$	$5x_1+3x_2\geq21$	$3x_1+x_2\geq8$
$5x_1-2x_2\leq4$	$3x_1+2x_2\leq6$	$-x_1+x_2\leq3$	$x_1+x_2\leq14$	$x_1+2x_2\leq6$
$-x_1+2x_2\leq4$	$-x_1+x_2\leq1$	$6x_1+7x_2\leq42$	$3x_1-5x_2\leq15$	$x_1-x_2\leq3$
6.26. $z=-3x_1+6x_2$	**6.27**. $z=-2x_1+x_2$	**6.28**. $z=-2x_1+x_2$	**6.29**. $z=2x_1-x_2$	**6.30**. $z=2x_1-4x_2$
$x_1+x_2\geq4$	$x_1+3x_2\geq6$	$-3x_1+2x_2\geq3$	$x_1+2x_2\geq2$	$x_1+3x_2\geq2$
$5x_1-2x_2\leq4$	$2x_1+x_2\leq8$	$2x_1+x_2\leq8$	$-x_1+x_2\leq3$	$8x_1-5x_2\leq16$
$-x_1+2x_2\leq4$	$-2x_1+x_2\leq4$	$x_1+x_2\leq6$	$6x_1+7x_2\leq42$	$2x_1+7x_2\leq9$
6.31. $z=2x_1-3x_2$	**6.32**. $z=-2x_1+x_2$	**6.33**. $z=6x_1+4x_2$	**6.34**. $z=-x_1-2x_2$	**6.35**. $z=6x_1+4x_2$
$5x_1+2x_2\geq10$	$-3x_1+2x_2\geq3$	$2x_1+x_2\geq3$	$x_1+x_2\geq4$	$2x_1+x_2\geq3$
$x_1+3x_2\leq12$	$x_1+x_2\leq6$	$x_1+x_2\leq8$	$5x_1-2x_2\leq4$	$x_1-x_2\leq1$
$2x_1-x_2\leq10$	$-x_1+x_2\leq4$	$-x_1+x_2\leq4$	$-x_1+2x_2\leq4$	$x_1+x_2\leq8$
6.36. $z=4x_1+3x_2$	**6.37**. $z=x_1+3x_2$	**6.38**. $z=x_1-2x_2$	**6.39**. $z=2x_1-x_2$	**6.40**. $z=3x_1+2x_2$
$5x_1+2x_2\geq20$	$x_1+x_2\geq3$	$x_1+x_2\geq1$	$3x_1+2x_2\geq16$	$2x_1+x_2\geq3$
$x_1+3x_2\leq15$	$6x_1+x_2\leq42$	$5x_1-2x_2\leq3$	$x_1+2x_2\leq12$	$x_1-2x_2\leq2$
$x_1+x_2\leq10$	$-x_1+x_2\leq6$	$-3x_1+x_2\leq3$	$2x_1+x_2\leq18$	$x_1+2x_2\leq8$
6.41. $z=-x_1-2x_2$	**6.42**. $z=x_1+2x_2$	**6.43**. $z=x_1+x_2$	**6.44**. $z=x_1+2x_2$	**6.45**. $z=2x_1-3x_2$
$x_1+2x_2\geq6$	$x_1+x_2\geq16$	$x_1+2x_2\geq4$	$x_1+2x_2\geq14$	$5x_1+2x_2\geq10$
$4x_1-x_2\leq6$	$5x_1-2x_2\leq20$	$2x_1+x_2\leq8$	$2x_1+x_2\leq18$	$x_1+3x_2\leq9$
$-2x_1+x_2\leq6$	$-x_1+2x_2\leq4$	$x_1+4x_2\leq10$	$x_1+x_2\leq9$	$x_1+x_2\leq10$
6.46. $z=2x_1-x_2$	**6.47**. $z=3x_1+2x_2$	**6.48**. $z=x_1+2x_2$	**6.49**. $z=x_1-2x_2$	**6.50**. $z=x_1+2x_2$
$-x_1+2x_2\geq2$	$3x_1+4x_2\geq20$	$2x_1+3x_2\geq6$	$2x_1+7x_2\geq9$	$2x_1-x_2\geq2$
$5x_1+9x_2\leq45$	$2x_1+x_2\leq11$	$-x_1+x_2\leq4$	$8x_1-5x_2\leq16$	$-x_1+5x_2\leq4$
$2x_1+x_2\leq6$	$-3x_1+2x_2\leq10$	$7x_1+4x_2\leq49$	$x_1+3x_2\leq2$	$x_1+2x_2\leq10$

Для задач **6.51–6.90:**

1) *составить математическую модель;*

2) *поставить двойственную задачу;*

3) *решить прямую задачу графически и симплекс-методом;*

4) *из оптимального решения прямой задачи найти оптимальное решение двойственной задачи;*

5) *показать соответствие опорных решений и вершин допустимой области прямой задачи.*

Формулировка задачи. Предприятие выпускает продукцию двух разновидностей. Каждый вид продукции проходит обработку на трёх станках. При обработке 1 т продукции I вида первый станок используется a_{11} ч., второй станок – a_{21} ч., третий станок – a_{31} ч.. При обработке 1 т продукции II вида первый станок используется a_{12} ч., второй станок – a_{22} ч., третий станок – a_{32} ч. Время работы станков ограничено и не может превышать для первого станка b_1 ч., для второго b_2 ч., для третьего b_3 ч. При реализации 1 т продукции I вида предприятие получает прибыль c_1 руб., а при реализации 1 т продукции II вида – c_2 руб. Найти оптимальный план выпуска продукции каждого вида, дающий максимальную прибыль от реализации всей продукции.

№№	a_{i1}	a_{i2}	$b_{i\cdot}$	c_j
51	1,1,3	4,1,1	28,10,24	3,6
52	1,3,2	3,4,1	24,37,18	3,5
53	0,1,5	1,4,4	6,27,55	2,9
54	0,1,1	1,4,1	7,29,11	2,5
55	1,1,7	2,1,6	22,12,77	6,7
56	1,4,5	1,3,3	10,31,35	8,6
57	1,1,2	5,1,1	30,10,18	3,9
58	1,2,3	2,3,2	14,23,27	4,7
59	1,2,3	2,3,2	16,26,29	7,12
60	1,1,3	4,1,1	24, 9,23	6,12
61	0,2,3	1,5,2	8,44,27	2,10
62	1,2,5	2,3,2	20,31,50	4,6
63	1,3,3	2,5,2	14,36,27	12,23
64	2,5,2	3,4,1	33,51,18	3,4
65	0,1,6	1,4,5	7,28, 54	3,4
81	1,1,3	4,1,1	28,10,24	4,4
82	1,3,2	3,4,1	24,37,18	6,8
83	0,1,5	1,4,4	6,27,55	2,8
84	1,1,7	2,1,6	22,12,77	7,7
85	1,3,1	1,1,4	10,24,28	6,6

№№	a_{i1}	a_{i2}	$b_{i\cdot}$	c_j
66	1,3,7	2,4,4	22,46,70	6,8
67	2,1,5	3,1,3	30,11,45	5,6
68	1,3,5	2,5,4	18,46,55	6,10
69	1,3,2	3,4,1	24,37,18	2,4
70	1,3,7	2,5,4	22,56,77	4,7
71	2,3,2	4,4,1	36,40,20	5,8
72	1,4,4	1,3,1	13,40,24	8,6
73	1,2,4	4,3,1	28,26,32	2,4
74	1,3,5	3,5,2	27,49,50	5,12
75	1,3,5	3,5,1	27,49,45	2,4
76	1,3,10	2,5,3	28,71,100	6,10
77	1,1,5	3,2,2	24,17,45	2,5
78	1,3,5	2,5,2	18,46,45	6,11
79	1,4,3	3,5,1	33,62,30	3,6
80	1,3,3	2,4,1	26,54,27	6,8
86	1,1,2	5,1,1	30,10,18	3,3
87	1,2,3	2,3,2	14,23,27	4,6
88	1,2,3	2,3,2	16,26,29	6,9
89	1,1,3	4,1,1	24,9,23	6,6
90	3,1,6	3,4,2	27,24,26	8,8

Задачи **6.91–6.120** *решить симплекс-методом.*

Решить задачу линейного программирования

$$z=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3 \to \max$$

при условиях, что переменные x_1, x_2, x_3 неотрицательны и удовлетворяют системе неравенств

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \le b_1;$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \le b_2;$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \le b_3.$$

№№	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	c_j
91	1,2,1	2,-1,2	3,1,-2	5,8,1	1,1,-1
92	2,1,0	0,3,-1	3,0,2	2,1,3	5,6,8
93	2,-1, 0	0,3,-1	3,0,1	3,2,1	3,2,5
94	2,0,1	-1,1,0	1,2,1	4,6,6	3,2,-1
95	1,0,1	-1,1,0	2,3,2	3,5,3	1,1,1
96	5,1,0	3,2,1	0,4,1	8,4,1	1,3,1
97	1,0,1	2,1,0	0,1,1	3,1,1	1,2,1
98	2,1,1	1,2,1	1,1,1	2,3,5	3,2, 1
99	1,0,1	0,2,-1	1,0,3	1,2,3	3,2,5
100	3,1,0	0,-2,3	1,0,1	3,6,1	9,5,3
101	3,1,1	4,3,1	1,2,-1	5,4,1	2,1,3
102	1,-1,2	1,0,2	2,1,1	2,6,3	2,-1,2
103	1,2,-1	2,1,0	1,0,2	3,2,4	2,1,1
104	3,-1,-4	-1,2,3	1,0,4	7,6,10	-1,3,-1
105	1,2,0	2,-1,1	1,1,2	5,1,3	2,-1,7

№№	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	c_j
106	2,1,1	-1,2,-1	2,1,0	9,7,1	2,2,-1
107	1,1,2	2,0,-1	-1,1,1	8,6,5	1,1,-2
108	1,2,1	-1,3,1	1,2,0	6,9,4	2,-1,1
109	1,1,1	1,0,2	1,2,1	1,2,2	3,3,2
110	2,1,1	1,-1,1	-3,2,1	4,7,8	1,2,-1
111	1,2,1	1,-1,0	-1,1,4	3,5,9	1,-1,1
112	0,1,2	2,-1,3	1,3,1	6,4,10	1,2,-5
113	1,2,-1	1,-1,1	-1,0,1	4,2,8	2,3, 6
114	2,-1,1	1,0,2	3,2,-1	5,7,4	1,1,-1
115	0,2,3	1,-1,1	1,2,0	7,5,3	3,-1,2
116	2,1,0	3,2,1	-1,1,2	6,7,9	4,-1,2
117	1,0,2	-2,1,3	2,1,1	2,4,3	2,-1,1
118	2,1,1	1,1,1	1,-2,1	8,3,5	1,1,-1
119	2,0,1	1,1,0	1,2,1	4,6,6	3,2,8
120	1,0,2	1,1,0	1,2,-1	2,2,4	1,1,2

Для задач **6.121–6.130:**

1) *составить математическую модель задачи;*

2) *решить задачу графически;*

3) *решить задачу симплекс-методом;*

4) *показать соответствие опорных решений и вершин допустимой области;*

5) *составить двойственную задачу и из оптимальной таблицы прямой задачи найти решение двойственной.*

121. Для изготовления различных изделий A и B предприятие использует три вида сырья. На производство единицы изделия A требуется затратить сырья первого вида 6 кг, второго – 5 кг, третьего – 3 кг. На производство единицы изделия B соответственно: 3 кг, 10 кг и 12 кг. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 714 кг, сырьем второго вида в количестве 910 кг и третьего вида 948 кг. Прибыль от реализации единицы готового изделия A составляет 3 руб., изделия B – 9 руб. Составить план производства изделий A и B, максимизирующий прибыль от их реализации. При этом должно быть выпущено не менее 80 штук изделия A.

122. Для производства двух видов изделий A и B используется три типа технологического оборудования. На изготовление одного изделия A оборудование первого типа используется в течение 5 ч., второго – в течение 3 ч. и третьего – 2 ч. На производство одного изделия B соответственно: 2 ч., 3ч. и 3 ч. В плановом периоде оборудование первого типа может быть использовано в течение 505 ч., второго – 394 ч. и третьего – 348 ч. Прибыль от реализации одного изделия A равна 7 руб., B – 4 руб. Составить план производства, максимизирующий прибыль предприятия. При этом должно быть произведено не менее 70 штук изделия B.

123. Для изготовления изделий A и B предприятие использует три вида сырья. На производство одного изделия А требуется сырья первого вида 15 кг, второго – 11 кг, третьего – 9 кг, а на производство одного изделия В соответственно 4 кг, 5 кг и 10 кг. Сырья первого вида имеется 1095 кг, второго – 865 кг, третьего – 1080 кг. Составить план производства, максимизирующий прибыль, если прибыль от реализации единицы изделия A составляет 3 руб., B – 2 руб. При этом должно быть выпущено не менее 80 штук изделий B.

124. Для производства изделий A и B используется три вида оборудования. При изготовлении одного изделия A оборудование первого вида занято 7 ч., второго – 6 ч. и третьего – 1 ч. При изготовлении одного изделия B соответственно 3 ч., 3 ч. и 2 ч. В месяц оборудование первого вида может быть занято 1365 ч., второго – 1245 и третьего – 650 ч. Составить план производства, максимизирующий прибыль, если прибыль от реализации одного изделия A рана 6 руб., изделия B – 5 руб. При этом должно быть произведено не менее140 изделий A.

125. Для изготовления изделий A и B используется три вида сырья. На изготовление одного изделия A требуется 9 кг сырья первого вида, 6 кг сырья второго вида и 3 кг сырья третьего вида. На изготовление одного изделия B требуется соответственно 4 кг, 7 кг и 8 кг сырья. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 801 кг, второго – 807 кг, третьего – 703 кг. Прибыль от продажи одного изделия A равна 3 руб., изделия B – 2 руб. Составить план производства, максимизирующий прибыль. При этом должно быть произведено не менее 70 штук изделия A.

126. Завод выпускает два вида редукторов. На изготовление одного редуктора первого вида расходуется 3 т чугуна и 1 т стали, а на изготовление одного редуктора второго вида 1 т чугуна и 2 т стали. Завод располагает на месяц 160 т чугуна и 120 т стали и имеет обязательное задание – изготовить не менее 60 редукторов обоих видов вместе. Составить месячный план производства редукторов, максимизирующий прибыль завода, если прибыль от продажи одного редуктора первого вида равна 400 руб., а второго – 100 руб. При этом оборудование завода позволяет выпустить за месяц не более 40 штук редукторов первого вида.

127. Для производства изделий *A* и *B* используется три вида станков. На производство одного изделия *A* требуется 6 ч. работы станка первого вида, 4 ч. работы станка второго вида и 3 ч. работы станка третьего вида. На производство одного изделия *B* требуется 2 ч. работы станка первого вида, 3 ч. работы станка второго вида и 4 ч. работы станка третьего вида. Месячный ресурс работы всех станков первого вида, имеющихся на заводе, равен 600 ч., всех станков второго вида – 520 ч. и всех станков третьего вида – 600 ч. Прибыль от реализации одного изделия *A* равна 6 руб., изделия *B* – 3 руб. Составить план производства на месяц, максимизирующий прибыль предприятия. При этом должно быть произведено не менее 100 штук изделия *B*.

128. На ферме разводят нутрий и кроликов. В недельный рацион нутрии входят 17 кг белков, 11 кг углеводов в 5 кг жиров, а для кролика эти нормы соответственно равны 13 кг, 15 кг и 7 кг. Доход от реализации одного кролика 16 руб., а от реализации одной нутрии 26 руб. Найти план разведения животных, максимизирующий доход фермы, если ферма не может расходовать в неделю более 184 кг белков, 152 кг углеводов и 70 кг жиров. При этом кроликов надо выкормить не менее 6 штук.

129. Для изготовления изделий *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. На производство одного изделия *A* требуется 12 кг сырья первого вида, 10 – второго и 3 – третьего, а на производство одного изделия *B* соответственно 3 кг, 5 кг и 6 кг. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 684 кг, второго – 690 кг и третьего 558 кг. Одно изделие *A* дает предприятию 6 руб. прибыли, изделие *B* – 2 руб. Составить план производства, максимизирующий общую прибыль предприятия. При этом должно быть произведено не менее 60 изделий *B*.

130. Мастерская ремонтирует тракторы двух типов: 1 – мощностью 300 л.с. и 2 – мощностью 200 л.с. За неделю мастерская может отремонтировать не более 150 тракторов. За ремонт трактора 1 типа получают 2000 руб, 2 типа – 1000 руб. Составить недельный план ремонта тракторов, при котором мастерская получит не менее 100000 руб и суммарная мощность отремонтированных тракторов будет наибольшей, если надо отремонтировать не менее 50 тракторов 2 типа. При этом тракторов 1 типа можно отремонтировать не более 90 штук.

Задачи **6.131–6.140:**

1) *решить графически;*

2) *решить симплекс-методом;*

3) показать соответствие опорных решений и вершин допустимой области;

4) поставить двойственную задачу;

5) найти её решение из оптимальной таблицы прямой задачи;

6) исследовать влияние на допустимость новых правых частей (*НПЧ*) *ограничений задачи;*

7) исследовать влияние на оптимальность новых целевых функций (НЦФ) задачи.

$$z=c_1x_1+c_2x_2 \rightarrow \max$$

при условиях, что переменные x_1, x_2 неотрицательны и удовлетворяют системе неравенств

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \geq b_1,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2 \leq b_2,$$

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2 \leq b_3,$$

$$a_{41}x_1+a_{42}x_2 \leq b_4$$

№№	a_{i1}	a_{i2}	b_i	c_j	НПЧ	НПЧ	НЦФ	НЦФ
131	1,1,1,-1	1,-1,2,1	1,2,5,1	2,2	3,3,6,3	4,2,1,6	3,2	1,5
132	1,2,1,-1	1,-1,2,2	2,6,8,4	6,3	1,4,6,6	14/5,17/5,8/5,28/5	8,3	2,5
133	2,1,1,-1	1,-2,1,2	2,2,5,4	5,2	1,3,6,3	5,10,1,6	6,1	3,6
134	1,1,1,-1	1,-1,2,1	2,4,10,2	7,2	1,3,12,3	6, 8,3,6	8,1	4,9
135	2,-1,1,2	1,1,2,-1	1,2,10,10	4,2	5,1,5,5	3,3,1,2	4,3	1,4
136	3,1,-1,2	2,2,1,-3	6,14,4,14	5,2	7,14,7,14	10,2,14,27	4,2	2,5
137	3,1,-1,1	2,2,2,-1	6,16,8,10	6,2	6,15,6,9	11,2,13,31	5,2	2,6
138	3,2,-2,3	1,1,1,-1	3,16,8,9	5,2	5,10,5,5	3,4,7,8	6,2	2,5
139	2,1,-1,1	1,-2,2,1	2,2,4,5	5/2,1	1,3,3,6	5,10,6,1	3,1/2	3/2,3
140	2,-1,2,1	1,1,-1,2	1,2,10,10	2,1	5,1,5,5	3,3,2,1	2,3/2	1/2,2

§7. ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

7.1. Классическая теория оптимизации (экстремальные задачи без ограничений). Задача математического программирования

$$z(\boldsymbol{X}) \rightarrow \max \text{ (или min)} \quad (7.1)$$

при ограничениях

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}) \leq \boldsymbol{b} \quad (7.2)$$

или

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{b} \quad (7.2')$$

или

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{b}, \quad (7.2'')$$

в которой либо ограничения, либо целевая функция $z(\boldsymbol{X})$, либо и то и другое нелинейные, называется задачей **нелинейного программирования (НП).**

НП применяется при прогнозировании промышленного производства, управлении товарными ресурсами, планировании обслуживания и ремонта оборудования и т.д. Нелинейные задачи составляют широкий класс настолько сложных задач, что до сих пор невозможно разработать общие методы, подобные симплекс-методу в ЛП. В зависимости от вида целевой функции и системы ограничений разработаны специальные методы решения, к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, приближённые методы решения, графический метод.

В теории выпуклого программирования в качестве основной обычно рассматривается задача минимизации выпуклой функции n переменных $z(\boldsymbol{X})$ при ограничениях $g_i(\boldsymbol{X})\leq 0$ $(i=1\div m)$, $\boldsymbol{X}\geq\mathbf{0}$, где функции $g_i(\boldsymbol{X})$ предполагаются выпуклыми.

Если $z(\boldsymbol{X})$ и $\mathbf{g}(\boldsymbol{X})$ являются вогнутыми функциями, то имеем задачу максимизации $z(\boldsymbol{X})$ при ограничениях $g_i(\boldsymbol{X})\geq 0$ $(i=1\div m)$, $\boldsymbol{X}\geq\mathbf{0}$.

В данном разделе рассматриваются необходимые и достаточные условия существования экстремумов функций при отсутствии ограничений, метод **множителей Лагранжа** для решения задач с ограничениями-равенствами, **условия Куна-Таккера** для задач с ограничениями в виде неравенств и **графический метод**.

Классическая теория оптимизации основана на использовании дифференциального исчисления для нахождения точек максимумов и минимумов (экстремумов) функций в условиях отсутствия и наличия ограничений. Разработанные к настоящему времени методы оптимизации далеко не всегда оказываются эффективными при решении целого ряда экстремальных задач. Однако фундаментальные теоретические построения служат основой для разработки большинства алгоритмов решения задач НП.

Экстремум в точке $\boldsymbol{X}_0=(x_1,....,x_j,...,x_n)$ функции $f(\boldsymbol{X})$ определяет либо максимум, либо минимум этой функции. Точка $\boldsymbol{X}_0=(x_1,....,x_j,...,x_n)$ является **точкой строгого максимума**, если неравенство

$$f(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{h})<f(\boldsymbol{X}_0)$$

выполняется для всех $\boldsymbol{h}=(h_1,....,h_j,...,h_n)^{\mathrm{T}}$, таких, что $|h_j|$ достаточно малы для всех j. Другими словами, точки $\boldsymbol{X}_0$ является точкой максимума, если значение функции f в окрестности точки $\boldsymbol{X}_0$ меньше $f(\boldsymbol{X}_0)$. Аналогично, $\boldsymbol{X}_0$ является **точкой строгого минимума**, если для вектора $\boldsymbol{h}=(h_1,....,h_j,...,h_n)$ справедливо неравенство

$$f(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{h})>f(\boldsymbol{X}_0).$$

Максимумы и минимумы, определённые выше, являются **локальными,** или **относительными,** максимумами. **Глобальный** максимум (минимум) функции – это её наибольшее (наименьшее) значение из локальных максимумов (минимумов).

Точка $\boldsymbol{X}_0$ является точкой **нестрогого максимума**, если $f(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{h})\leq f(\boldsymbol{X}_0)$, где $\boldsymbol{h}$ – вектор, определение которого дано выше.

Сформулируем **необходимые и достаточные условия** существования экстремумов функции n переменных $f(\boldsymbol{X})$. При этом предполагается, что первая и вторая частные производные $f(\boldsymbol{X})$ непрерывны в каждой точке $\boldsymbol{X}$.

Теорема 7.1 (**необходимые условия**). Если точка $\boldsymbol{X_0}$ является экстремальной точкой функции $f(\boldsymbol{X})$, то $\nabla f(\boldsymbol{X_0})=0$, где $\nabla f(\boldsymbol{X_0})$ – вектор градиента, $\nabla f(\boldsymbol{X_0})=\left(\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_j}\right)$, $j=1\div n$.

■ Из теоремы Тейлора следует, что при $0<\theta<1$ справедливо разложение

$$f(\boldsymbol{X_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{X_0})=\nabla f(\boldsymbol{X_0})\boldsymbol{h}+(1/2)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Hh}|_{\mathbf{X_0}+\theta\mathbf{h}},$$

где $\boldsymbol{H}$ – матрица вторых производных (или матрица Гессе), $\boldsymbol{H}=\left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, $i,j=1\div n$.

Если $|h_j|$ достаточно малы, то остаточный член $(1/2)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Hh}$ оказывается бесконечно малой величиной порядка h_j^2, что позволяет переписать разложение в виде следующего приближенного равенства:

$$f(\boldsymbol{X_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{X_0})=\nabla f(\boldsymbol{X_0})\boldsymbol{h}+O(h_j^2)\approx\nabla f(\boldsymbol{X_0})\boldsymbol{h}.$$

Предположим, что $\boldsymbol{X_0}$ есть точка минимума. Докажем от противного равенство нулю $\nabla f(\boldsymbol{X_0})$. Пусть это условие не выполняется; тогда для некоторого j либо $\partial f(\boldsymbol{X_0})/\partial x_j<0$, либо $\partial f(\boldsymbol{X_0})/\partial x_j>0$. Всегда можно выбрать знак h_j таким образом, чтобы $h_j\partial f(\boldsymbol{X_0})/\partial x_j<0$. Если положить остальные h_j равными нулю, то из разложения Тейлора следует неравенство $f(\boldsymbol{X_0}+\boldsymbol{h})<f(\mathrm{X_0})$. Полученный результат находится в противоречии с предположением о том, что $\boldsymbol{X_0}$ – точка минимума. Следовательно, величина $\nabla f(\boldsymbol{X_0})$ равна нулю. Аналогичное доказательство можно провести для точки максимума. ●

Для функции одной переменной это условие записывается следующим образом: $f'(x_0)=0$.

Как было отмечено ранее, полученное условие удовлетворяется также в точках перегиба и седловых точках функции. Следовательно, оно является необходимым, но недостаточным для идентификации экстремальных точек. В связи с этим точки, удовлетворяющие уравнению $\nabla f(\boldsymbol{X_0})=0$, будем называть **стационарными.** Следующая теорема устанавливает **достаточные условия** для того, чтобы $\boldsymbol{X_0}$ была экстремальной точкой.

Теорема 7.2. Стационарная точка $\boldsymbol{X_0}$ является экстремальной, когда матрица Гессе $\boldsymbol{H}$ в точке $\boldsymbol{X_0}$ оказывается: 1) положительно определенной (тогда $\boldsymbol{X_0}$ – точка минимума); 2) отрицательно определенной (тогда $\boldsymbol{X_0}$ – точка максимума).

■ Из теоремы Тейлора следует, что при $0<\theta<1$

$$f(\boldsymbol{X_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{X_0})=\nabla f(\mathrm{X_0})\boldsymbol{h}+(1/2)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Hh}|_{\mathbf{X_0}+\theta\mathbf{h}},$$

Так как $\boldsymbol{X_0}$ – стационарная точка, то, согласно теор. 7.1, $\nabla f(\boldsymbol{X_0})=0$. Таким образом, $f(\boldsymbol{X_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{X_0})=(1/2)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Hh}|_{\mathbf{X_0}+\theta\mathbf{h}}$. Пусть $\boldsymbol{X_0}$ – точка минимума; тогда по определению $f(\boldsymbol{X_0}+\boldsymbol{h})>f(\boldsymbol{X_0})$ для всех ненулевых $\boldsymbol{h}$. Это означает, что для точки минимума $\boldsymbol{X_0}$, выполняется неравенство $(1/2)\boldsymbol{h}^{T}\boldsymbol{Hh}|_{\mathbf{X_0}+\theta\mathbf{h}}>0$. Непрерывность второй частной производной гарантирует, что величина $(1/2)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Hh}$ имеет один и тот же знак в точках $\boldsymbol{X}_0$ и $\boldsymbol{X_0}+\theta\boldsymbol{h}$. Поскольку $\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Hh}|_{\mathbf{X_0}}$ определяет некоторую квадратичную форму, то рассматриваемая величина (и, следовательно, $\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Hh}|_{\mathbf{X}_0+\theta\mathbf{h}}$) положительна тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{H}|_{\mathbf{X}_0}$ – положительно определенная матрица. Это означает, что достаточным условием существования минимума в стационарной точке $\boldsymbol{X}_0$ является положительная определенность матрицы Гессе в этой точке. С помощью аналогичных рассуждений нетрудно также доказать второе утверждение теоремы, т. е. показать, что достаточным условием существования максимума в стационарной точке является отрицательная определенность матрицы Гессе в этой точке. ●

Как известно, матрица A будет **положительно определенной** (**полуопределенной**), если значения всех угловых миноров определителя $|A|$ положительны (неотрицательны).

Матрица A будет **отрицательно определенной**, если значения k-х угловых миноров определителя $|A|$ отличны от нуля и имеют знак $(-1)^k$, $k=1\div n$.

Матрица **A** будет **отрицательно полуопределенной**, если значения k-х угловых миноров определителя $|A|$ равны нулю либо имеют знак $(-1)^k$, $k=1\div n$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$.

■ Из необходимого условия $\nabla f(\boldsymbol{X_0})=0$ следует, что $\partial f/\partial x_1=1-2x_1=0$, $\partial f/\partial x_2=x_3-2x_2=0$, $\partial f\partial x_3=2+x_2-2x_3=0$. Решением этой системы является вектор $\boldsymbol{X_0}=(1/2, 2/3, 4/3)$. Чтобы проверить выполнение достаточного условия, вычислим

$$\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}|_{\mathbf{X}_0}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Главные миноры $\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ равны -2, 4 и -6 соответственно. В этом случае $\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ является отрицательно определенной матрицей, откуда следует, что $\boldsymbol{X}_0=(1/2,2/3, 4/3)$ – точка максимума. ●

В общем случае, когда матрица $\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ является неопределенной, точка $\boldsymbol{X}_0$ должна быть седловой. Если же матрица $\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ является полуопределенной, то соответствующая точка $\boldsymbol{X}_0$ может как быть, так и не быть экстремальной. При этом формулировка достаточного условия существования экстремума значительно усложняется, ибо для этого необходимо учитывать члены более высоких порядков в разложении Тейлора.

Пример 2**.** Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2)=8x_1x_2+3x_2^2$.

■ Необходимые условия экстремума для неё принимают вид $\nabla f(x_1, x_2)=(8x_2; 8x_1+6x_2)=(0;0)$, т.е. $\boldsymbol{X_0}=(0, 0)$ – стационарная точка. При этом матрица Гессе

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

не несет информации о наличии или отсутствии экстремума. ●

Достаточные условия, установленные теоремой 7.2, весьма просто формулируются для функций одной переменной. Пусть y_0 – стационарная точка, тогда

1) $f^*(y_0)<0$ – достаточное условие существования максимума в точке y_0;

2) $f^*(y_0)>0$ – достаточное условие существования минимума в точке y_0.

Если в случае одной переменной значение $f''(y_0)$ равно нулю, то необходимо исследовать производные высших порядков.

Теорема 7.3. Если в стационарной точке y_0 первые (n-1) производных функции $f(y)$ обращаются в нуль, а $f^{(n)}(y_0)$, то при $y=y_0$ функция $f(y)$ имеет

1) точку перегиба, если n – нечетное;

2) экстремальную точку, если n – четное. Экстремальной точке соответствует максимум при $f^{(n)}(y_0)<0$ и минимум при $f^{(n)}(y_0)>0$.

Пример 3. Рассмотрим две функции $f(y)=y^4$ и $g(y)=y^3$.

■ Для $f(y)=y^4$ имеем $f'(y)=4y^3=0$, откуда $y_0=0$ – стационарная точка. Далее $f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=0$. Т. к. $f^{(4)}(0)=24>0$, то $y_0=0$ – точка минимума.

Для $g(y)=y^3$ имеем $g'(y)=3y^2=0$. Таким образом, $y_0=0$ – стационарная точка. Поскольку $g^{(n)}(0)$ не обращается в нуль при $n=3$, то $y_0=0$ – точка перегиба. ●

Использование необходимого условия $\nabla f(\boldsymbol{X})=0$ для нахождения стационарных точек связано с определенными трудностями, которые возникают в процессе численного решения соответствующей системы уравнений. Рассмотрим для этого **метод Ньютона-Рафсона** – итерационную процедуру решения систем нелинейных уравнений. Пусть дана система уравнений

$$f_i(\boldsymbol{X})=0,\ i=1\div m.$$

где $\boldsymbol{X}^k$ – заданная точка.

Из разложения Тейлора следует, что

$$f_i(\boldsymbol{X})\approx f_i(\boldsymbol{X}^k)+\nabla f_i(\boldsymbol{X}^k)(\boldsymbol{X}\text{-}\boldsymbol{X}^k),\ i=1\div m.$$

Таким образом, исходную систему уравнений можно приближенно представить в следующем виде:

$$f_i(\boldsymbol{X}^k)+\nabla f_i(\boldsymbol{X}^k)(\boldsymbol{X}\text{-}\boldsymbol{X}^k)=0,\ i=1\div m.$$

Запишем полученную систему в матричной форме:

$$A_k+B_k(\boldsymbol{X}\text{-}\boldsymbol{X}^k)=0.$$

Предположим, что все векторы $f_i(\boldsymbol{X})$ независимы; тогда матрица B_k – невырожденная матрица. Из предыдущего уравнения получаем

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^k\text{-}\mathbf{B}_k^{-1}A_k.$$

Идея рассматриваемого метода заключается в следующем. На первом шаге задается начальная точка $\boldsymbol{X}^0$. Если $\boldsymbol{X}^k$ известна, то с помощью полученного уравнения можно вычислить координаты новой точки $\boldsymbol{X}^{k+1}$. Процесс вычислений завершается в точке $\boldsymbol{X}^m$, когда $\boldsymbol{X}^m \approx \boldsymbol{X}^{m+1}$; при этом $\boldsymbol{X}^m$ – приближенное решение исходной системы.

К числу недостатков изложенного метода относится то обстоятельство, что сходимость метода в существенной степени зависит от выбора начальной точки. По-видимому, наиболее целесообразно определять начальную точку путем проб и ошибок.

7.2. Метод множителей Лагранжа. Метод множителей Лагранжа позволяет определять стационарные точки при решении оптимизационных задач с ограничениями в виде **равенств.** К сожалению, при практическом применении метода могут встретиться значительные вычислительные трудности, сужающие область его использования. Мы рассматриваем здесь метод Лагранжа потому, что он является аппаратом, активно используемым для обоснования различных численных методов, широко применяемых на практике. Что же касается функции Лагранжа и метода Лагранжа, то они играют самостоятельную и исключительно важную роль в теории и приложениях не только математического программирования. Схему этого метода можно формально представить следующим образом. Пусть

$$L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}).$$

Функцию L называют функцией Лагранжа, а $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ – множителями Лагранжа. Уравнения

$$\partial L/\partial \boldsymbol{X}=0 \text{ и } \partial L/\partial \boldsymbol{\lambda}=0 \qquad (7.3)$$

являются записью рассмотренных выше **необходимых условий** наличия экстремума. Это означает, что задача оптимизации с целевой функцией $f(\boldsymbol{X})$ при наличии ограничения $\mathbf{g}(\boldsymbol{X})=0$ эквивалентна задаче нахождения безусловного экстремума функции Лагранжа $L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\lambda})$.

Достаточные условия при использовании метода множителей Лагранжа имеют следующий вид. Определим матрицу

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{Q} \end{pmatrix}_{(m+n)\times(m+n)},$$

где

$$P=\begin{pmatrix} \nabla g_1(\mathbf{X}) \\ \ldots \\ \nabla g_m(\mathbf{X}) \end{pmatrix}_{m\times n} \text{ и } Q=\left(\frac{\partial^2 L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n} \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

Матрица H^B представляет собой так называемую **окаймленную матрицу Гессе.**

Пусть дана стационарная точка $(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$ функции Лагранжа $L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\lambda})$, а окаймленная матрица Гессе H^B сформирована из значений соответствующих элементов в точке $(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$. Тогда $\boldsymbol{X}_0$ является

1) точкой **максимума**, если, начиная с углового минора порядка ($2m$+1), последующие (n-m) угловых миноров матрицы H^B образуют знакопеременный числовой ряд, знак первого члена которого определяется множителем $(-1)^{m+1}$;

2) точкой минимума, если, начиная с углового минора порядка ($2m$+1), знак последующих (n-m) угловых миноров матрицы H^B определяется множителем

$(-1)^m$.

Сформулированные условия оказываются достаточными для идентификации экстремальной точки, но не являются необходимыми. Иными словами, стационарная точка, не удовлетворяющая этим условиям, может быть экстремальной.

Существуют другие условия для идентификации экстремальных точек, которые являются как необходимыми, так и достаточными. Однако практическое использование этих условий в ряде случаев связано со значительными вычислительными трудностями.

Один из методов, которые иногда применяются для решения систем уравнений, выражающих необходимые условия наличия экстремума, заключается в последовательном выборе числовых значений $\boldsymbol{\lambda}$, после чего данная система решается относительно $\boldsymbol{X}$. Процедура повторяется до тех пор, пока вектор X, соответствующий некоторому набору значений множителей $\boldsymbol{\lambda}$, не будет удовлетворять всем ограничениям-равенствам. Однако при увеличении количества ограничений объем необходимых вычислений существенно возрастает. В таких случаях следует обратиться к другим численным методам решения систем уравнений, например, к методу Ньютона-Рафсона.

Пример 4. Рассмотрим следующую задачу:

$$z=x_1^2+x_2^2+x_3^2\to\min$$

при ограничении

$$4x_1+x_2^2+2x_3-14=0.$$

■ При этом функция Лагранжа

$$L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\lambda})=x_1^2+x_2^2+x_3^2-\lambda(4x_1+x_2^2+2x_3-14).$$

Необходимые условия наличия экстремума имеют вид и системы

$$\partial L/\partial x_1=2x_1-4\lambda=0,\ \partial L/\partial x_2=2x_2-2\lambda x_2=0,\ \partial L/\partial x_3=2x_3-2\lambda=0,$$
$$\partial L/\partial\lambda=-(4x_1+x_2^2+2x_3-14)=0,$$

решениями которой являются векторы

$$(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)_1=(2;2;1;1),\ (\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)_2=(2;-2;1;1),\ (\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)_3=(2{,}8;0;1{,}4;1{,}4).$$

Чтобы использовать достаточные условия, вычислим элементы матрицы

$$H^B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2x_2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2-2\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Поскольку m=1 и n=3, то стационарная точка является точкой минимума, если знак последних (3-1)=2 угловых миноров определяется множителем $(-1)^m$=-1. Таким образом, в точке $(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)_1$=(2;2;1;1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -32<0 \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -64<0.$$

В точке $(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)_2$=(2;-2;1;1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -32<0 \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -64<0.$$

Наконец, в точке $(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)_3$=(2,8;0;1,4;1,4)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}8 \end{pmatrix} = 12{,}8>0 \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 32>0.$$

Отсюда следует, что $(\boldsymbol{X}_0)_1$ и $(\boldsymbol{X}_0)_2$ – точки минимума. Тот факт, что $(\boldsymbol{X}_0)_3$ не удовлетворяет достаточным условиям наличия максимума или минимума, не означает, что данная точка не является экстремальной. В таком случае следует обратиться к достаточным условиям в другой формулировке. ●

Рассмотрим **экономический смысл** множителей Лагранжа. Для этого рассмотрим классическую задачу оптимизации

$$z=f(x_1,x_2)\rightarrow \max\ (\min) \tag{7.4}$$

при ограничении

$$g(x_1,x_2)=b. \tag{7.5}$$

Предположим, что условный экстремум достигается в точке $\boldsymbol{X}^*=(x_1^*,x_2^*)$. Соответствующее экстремальное значение функции z $z^*=f(x_1^*,x_2^*)$. Допустим, что в ограничениях (7.5) величина b может меняться. Тогда координаты x_1^* и x_2^* точки экстремума, а следовательно, и экстремальное значение z^* функции $z=f$ станут величинами, зависящими от b, т.е. $x_1^*=x_1^*(b)$, $x_2^*=x_2^*(b)$, $z^*=f(x_1^*(b),x_2^*(b))$. Поэтому производная функции (7.4)

$$\frac{dz^*}{db}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1^*}{db}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2^*}{db}. \qquad (7.6)$$

С другой стороны, в силу равенства (7.5) $g(x_1^*,x_2^*)=b$, откуда после дифференцирования имеем:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1^*}{db}+\frac{\partial g}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2^*}{db}=1. \qquad (7.7)$$

Кроме того, в точке экстремума $\mathbf{X}^*$ выполняются необходимые условия (7.3). Из этих равенств для n=2 и m=1 получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}. \qquad (7.8)$$

Подставляя выражения (7.8) в равенство (7.6) и учитывая соотношение (7.3), находим $\frac{dz^*}{db}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1^*}{db}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2^*}{db}=\lambda\cdot 1=\lambda$. Для задачи (7.1), (7.2) аналогично получаем $\frac{dz^*}{d\mathbf{b}}=\boldsymbol{\lambda}$.

Если z интерпретировать как доход, а b_i – как объёмы некоторого ресурса, то множители Лагранжа λ_i показывают, как изменится максимальный доход, если количество ресурса i-го вида увеличится на единицу.

7.3. Ограничения в виде неравенств. Условия Куна-Таккера. Обобщим метод множителей Лагранжа на случай задачи с ограничениями в виде неравенств. Рассмотрим вначале **необходимые** условия Куна-Таккера, которые позволяют определять стационарные точки в задаче НП с ограничениями в виде неравенств. Эти условия являются также и достаточными, если выполняются определённые правила, приведённые ниже.

Рассмотрим следующую задачу:

$$z=f(\boldsymbol{X})\rightarrow\max$$

при ограничениях

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})\le 0.$$

Ограничения-неравенства можно преобразовать в равенства с помощью **неотрицательных** дополнительных (балансовых) переменных. Пусть S_i^2 (≥ 0) – дополнительная (балансовая) переменная, которая прибавляется к левой части i-го ограничения $g_i(\boldsymbol{X})\le 0$ и пусть

$$\boldsymbol{S}=(S_1, S_2, \ldots, S_m)^{\mathrm{T}} \text{ и } \boldsymbol{S}^2=(S_1^2, S_2^2, \ldots, S_m^2)^{\mathrm{T}},$$

где m – общее количество ограничений-неравенств. Следовательно, функция Лагранжа записывается в виде

$$L(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{\lambda}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{S}^2].$$

При ограничениях $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})\le 0$ необходимым условием оптимальности в задаче максимизации (минимизации) является неотрицательность (соответственно неположительность) множителей $\boldsymbol{\lambda}$. Действительно, рассмотрим задачу максимизации. Т.к. множители $\boldsymbol{\lambda}$ выражают скорость изменения целевой функции $z=f(\boldsymbol{X})$ по отношению к изменению $\boldsymbol{g}$, т. е.

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}},$$

то как только правая часть ограничения $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})\leq 0$ увеличивается и становится больше нуля, область допустимых решений задачи расширяется и, следовательно, оптимальное значение целевой функции не может уменьшиться. Это значит, что $\boldsymbol{\lambda}\geq 0$. Аналогично в случае задаче минимизации при увеличении правой части ограничения оптимальное значение целевой функции не может увеличиться, откуда следует, что $\boldsymbol{\lambda}\leq 0$. Если же ограничения задачи имеют вид равенств, т. е. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})=0$, то компоненты вектора $\boldsymbol{\lambda}$ по знаку не ограничены.

Указанные выше ограничения на вектор $\boldsymbol{\lambda}$ должны рассматриваться как часть необходимых условий Куна-Таккера. Теперь получим остальные условия.

Вычисляя частные производные функции L по $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ и приравнивая их к нулю, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}}=\nabla f(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{\lambda}\,\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})=0,\ \frac{\partial L}{\partial S_i}=-2\lambda_i S_i=0,\ i=1\div m;\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}}=-(\mathbf{g}(\mathbf{X})+\mathbf{S}^2)=0.$$

Из второй группы уравнений следуют такие результаты.

1. Если $\lambda_i\neq 0$, то $S_i^2=0$. Это означает, что соответствующий этому ограничению ресурс является дефицитным и, следовательно, полностью исчерпан (ограничение имеет вид равенства).
2. Если $S_i^2>0$, то $\lambda_i=0$. Это значит, что i-й ресурс дефицитным не является и, следовательно, не влияет на значение целевой функции $z=f(\boldsymbol{X})$ (т. е. $\lambda_i=\frac{\partial f}{\partial g_i}=0$).

Из второй и третьей групп уравнений следует, что

$$\lambda_i g_i(\boldsymbol{X})=0,\ i=1\div m.$$

Полученные условия подтверждают предыдущий результат, ибо если $\lambda_i>0$, то $g_i(\boldsymbol{X})=0$ или $S_i^2=0$. Аналогично при $g_i(\boldsymbol{X})<0$ $S_i^2>0$ и, следовательно, $\lambda_i=0$.

Теперь для задачи **максимизации** можно сформулировать условия Куна-Таккера, необходимые для того, чтобы векторы $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ определяли стационарную точку:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\lambda}\geq 0,\\
&\nabla f(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{\lambda}\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})=0, \qquad (7.9)\\
&\lambda_i g_i(\boldsymbol{X})=0,\ i=1\div m,\\
&\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})\leq 0.
\end{aligned}$$

Можно убедиться в том, что эти условия применимы также к задаче **минимизации,** за тем лишь исключением, что вектор $\boldsymbol{\lambda}$ должен быть неположительным. Как в случае задачи максимизации, так и задачи минимизации, множители Лагранжа, соответствующие ограничениям в виде равенств, по знаку не ограничены.

Необходимые условия Куна-Таккера являются также достаточными, если целевая функция и область допустимых решений (ОДР) обладают определенными свойствами, связанными с выпуклостью и вогнутостью. Эти свойства указаны в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Свойства целевой функции и области допустимых значений

Тип оптимизации	Требуемые свойства	
	Целевая функция	ОДР
Максимизация	Вогнутая	Выпуклое множество
Минимизация	Выпуклая	Выпуклое множество

Напомним, что функция $f(\boldsymbol{X})$, определённая на выпуклом множестве M**,** называется **выпуклой (вогнутой),** если для любых точек $\boldsymbol{X}'$ и $\boldsymbol{X}''$ из этого множества и любого $0\leq\lambda\leq 1$ справедливо неравенство

$$f(\lambda\boldsymbol{X}'+(1-\lambda)\boldsymbol{X}'')\leq[\lambda f(\boldsymbol{X}')+(1-\lambda)f(\boldsymbol{X}'')] \leq (f(\lambda\boldsymbol{X}'+(1-\lambda)\boldsymbol{X}'').$$

Если последнее неравенство при $0<\lambda<1$ и любых $\boldsymbol{X}'$ и $\boldsymbol{X}''$ ($\boldsymbol{X}'\neq\boldsymbol{X}''$) выполняется как строгое, то $f(\boldsymbol{X})$ называется **строго выпуклой (строго вогнутой).**

Обычно легче определить, является ли целевая функция выпуклой или вогнутой, чем доказать, что ОДР представляет собой выпуклое множество. Между тем выпуклость ОДР может быть установлена путем исследования функций, формирующих ограничения. В связи с этим ниже приводится перечень соответствующих требований, проверка выполнения которых на практике не представляет больших трудностей. Для того чтобы установить эти требования, сформулируем задачу НП в общей постановке:

$$z=f(\boldsymbol{X})\rightarrow\max\ (\min)$$

при ограничениях

$$g_i(\mathbf{X})\leq 0,\ i=1\div r,$$

$$g_i(\mathbf{X})\geq 0,\ i=r+1\div p,$$

$$g_i(\mathbf{X})=0,\ i=p+1\div m.$$

При этом функция Лагранжа имеет вид

$$L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{X})-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left[g_i(\mathbf{X})+S_i^2\right]-\sum_{i=r+1}^{p}\lambda_i\left[g_i(\mathbf{X})-S_i^2\right]-\sum_{i=p+1}^{m}\lambda_i g_i(\mathbf{X}),$$

где λ_i – множитель Лагранжа, ассоциированный с i-м ограничением. Требования, которые устанавливают достаточность условий Куна-Таккера, приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Требования достаточности условий Куна-Таккера

Тип оптимизации	Требуемые свойства		
	$f(\boldsymbol{X})$	$g_i(\boldsymbol{X})$	λ_i
Максимизация	Вогнутая	Выпуклая Вогнутая Линейная	≥ 0 $(1\leq i\leq r)$ ≤ 0 $(r+1\leq i\leq p)$ Нет огранич. $(p+1\leq i\leq m)$
Минимизация	Выпуклая	Выпуклая Вогнутая Линейная	≤ 0 $(1\leq i\leq r)$ ≥ 0 $(r+1\leq i\leq p)$ Нет огранич. $(p+1\leq i\leq m)$

Табл. 7.2 не охватывает все случаи, упомянутые в табл. 7.1. Это связано с тем обстоятельством, что ОДР может быть выпуклой и, в то же время, не соответствовать перечисленным в табл. 7.2 требованиям к функциям.

Требования, приведенные в табл. 7.2, обусловлены тем, что соответствующие ограничения порождают вогнутую функцию Лагранжа $L(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\lambda})$ в случае максимизации и выпуклую функцию в случае минимизации. Справедливость этого утверждения можно проверить непосредственно, учитывая следующий очевидный факт: если $g_i(\boldsymbol{X})$ – выпуклая функция, то функция $\lambda_i g_i(\boldsymbol{X})$ оказывается выпуклой при $\lambda_i>0$ и вогнутой при $\lambda_i<0$. С помощью аналогичных рассуждений нетрудно обосновать все остальные требования. Следует особо отметить, что линейная функция по определению является как выпуклой, так и вогнутой. Заметим также, что функция $-f$ – выпуклая, если функция f вогнутая, и наоборот.

Пример 5. Рассмотрим следующую задачу

$$z(\boldsymbol{X})= x_1^2+x_2^2+x_3^2\rightarrow\min$$

при ограничениях

$$g_1(\boldsymbol{X})=2x_1+x_2-5\leq 0,\ g_2(\boldsymbol{X})=x_1+x_3-2\leq 0,\ g_3(\boldsymbol{X})=1-x_1\leq 0,\ g_4(\boldsymbol{X})=2-x_2\leq 0,\ g_5(\boldsymbol{X})=-x_3\leq 0.$$

Поскольку мы имеем дело с задачей минимизации, то $\boldsymbol{\lambda}\leq 0$. Запишем:

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\leq\mathbf{0},\ (2x_1,\ 2x_2,\ 2x_3)-(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

$$\lambda_1 g_1=\lambda_2 g_2=\ldots=\lambda_5 g_5=0,\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})\le 0.$$

После упрощений получаем

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5\le 0,$$
$$2x_1-2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0,\ 2x_2-\lambda_1+\lambda_4=0,\ 2x_3-\lambda_2+\lambda_5=0,$$
$$\lambda_1(2x_1+x_2-5)=0,\ \lambda_2(x_1+x_3-2)=0,\ \lambda_3(1-x_1)=0,\ \lambda_4(2-x_2)=0,\ \lambda_5 x_3=0,$$
$$2x_1+x_2\le 5,\ x_1+x_3\le 2,\ x_1\ge 1,\ x_2\ge 2,\ x_3\ge 0,$$

откуда $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_5=0$, $\lambda_3=-2, \lambda_4=-4$. Т. к. и функция $z(\boldsymbol{X})$, и ОДР $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})\le\boldsymbol{0}$ являются выпуклыми, то функция $L(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\lambda})$ также должна быть выпуклой, и найденная стационарная точка определяет глобальный условный минимум.

К сожалению, данный пример показывает, что решение системы, порождённой условиями Куна-Таккера, сопряжено со значительными трудностями. Следовательно, описанный метод не подходит для численных расчетов. Для нелинейных задач с ограничениями в виде неравенств в общем случае нет достаточных условий существования экстремума (подобных условиям для задач без ограничений и задач с ограничениями-равенствами). Таким образом, за исключением случаев перечисленных в табл. 7.1 и случаев, когда такие условия можно установить **заранее,** не существует какого-либо приемлемого способа проверить, какой оптимум получен с помощью того или иного алгоритма нелинейного программирования – локальный или глобальный.

7.4. Квадратичное программирование. В ряде случаев теоретические построения Куна-Таккера служат основой для создания эффективных алгоритмов. Хорошим примером использования необходимых условий Куна-Таккера является **квадратичное программирование**, задача которого имеет вид:

$$z=\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{X}\to\max\ (\text{или}\ \min)$$

при ограничениях

$$A\boldsymbol{X}\le\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X}\ge\boldsymbol{0},$$

где

$$\boldsymbol{X}=(x_1,\ \ldots,\ x_n)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{C}=(c_1,\ \ldots,\ c_n),\ \boldsymbol{b}=(b_1,\ \ldots,\ b_m)^{\mathrm{T}},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{m1} & \ldots & d_{mn} \end{pmatrix}.$$

Функция $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{DX}$, где D – симметрическая матрица, является квадратичной формой, $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_i x_j$. Матрица D будет отрицательно определённой в задаче максимизации и положительно определённой – в задаче минимизации. Это означает, что функция z является строго выпуклой по переменным $\boldsymbol{X}$ в случае задачи минимизации и строго вогнутой – в задаче максимизации. Ограничения в этой задаче предполагаются линейными, что гарантирует выпуклость ОДР.

Решение данной задачи основано на использовании необходимых условий Куна-Таккера (7.9). Так как целевая функция z строго выпуклая (или вогнутая) и ОДР задачи является выпуклым множеством, эти условия также и достаточны для установления наличия глобального оптимума.

Задачу квадратичного программирования рассмотрим для случая, когда целевая функция подлежит максимизации. Изменение формулировки задачи при минимизации целевой функции является тривиальным. Общая постановка задачи имеет следующий вид.

$$z=\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{X}\to\max$$

при ограничениях

$$G(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ -\mathbf{E}\end{pmatrix}\boldsymbol{X}-\begin{pmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\le\mathbf{0},$$

где $E=\begin{pmatrix}1 & ... & 0\\ ... & ... & ...\\ 0 & ... & 1\end{pmatrix}$ – единичная матрица. Обозначим через $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1, \mu_2,\dots, \mu_m)^{\mathrm{T}}$ множители Лагранжа, соответствующие ограничениям $A\boldsymbol{X}\text{-}\boldsymbol{b}\le\mathbf{0}$ и $\boldsymbol{-X}\le\mathbf{0}$ соответственно. Применяя условия Куна-Таккера, получаем

$$\boldsymbol{\lambda}\ge0,\ \boldsymbol{\mu}\ge0,$$

$$\nabla z\text{-}(\boldsymbol{\lambda}^T,\boldsymbol{\mu}^T)\nabla G(\boldsymbol{X})=0,$$

$$\lambda_i(b_i\text{-}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)=0,\ i=1\div m,$$

$$\mu_j x_j=0,\ j=1\div n,$$

$$A\boldsymbol{X}\le\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{-X}\le\mathbf{0}.$$

Отсюда имеем

$$\nabla z=C+2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D},\ \nabla G(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ -\mathbf{E}\end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{b}\text{-}A\boldsymbol{X}\ge\mathbf{0}$ вектор балансовых (остаточных) переменных. Тогда приведённые выше условия принимают следующий вид

$$\text{-}2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}D+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}A\text{-}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}=C,$$

$$A\boldsymbol{X}+\boldsymbol{S}=\boldsymbol{b},$$

$$\mu_j x_j=0=\lambda_i S_i \text{ для всех } i \text{ и } j,$$

$$\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{S}\ge0.$$

Т.к. $D^{\mathrm{T}}=D$, в результате транспонирования первой системы уравнений получим

$$\text{-}2D\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\text{-}\boldsymbol{\mu}=C^{\mathrm{T}}.$$

Следовательно, необходимые условия могут быть записаны в виде

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{2D} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i \text{ для всех } i \text{ и } j,$$

$$\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{S} \geq 0.$$

Все уравнения, за исключением $\mu_j x_j=0=\lambda_i S_i$, являются линейными относительно переменных $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{S}$. Следовательно, исходная задача сводится к нахождению решения системы линейных уравнений, удовлетворяющего дополнительным условиям $\mu_j x_j=0=\lambda_i S_i$. Поскольку функция z строго вогнутая, а ОДР представляет собой выпуклое множество, **допустимое** решение, удовлетворяющее всем этим условиям, должно быть единственным и оптимальным.

Решение рассматриваемой системы находится путём реализации этапа 1 M-задачи. При этом единственным ограничением является необходимость удовлетворения условий $\lambda_i S_i=0=\mu_j x_j$. Выполнение этих условий означает, что если переменная λ_i в базисном решении принимает **положительное** значение, то переменная S_i не может быть базисной и принимать положительное значение. Аналогично переменные μ_jи $_j x_j$ не могут одновременно принимать положительные значения. Этап 1 завершается обращением в нуль всех искусственных переменных только в том случае, когда исходная задача имеет непустое множество допустимых решений.

Пример 6. Рассмотрим следующую задачу

$$z = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \to \max$$

при ограничениях

$$2x_1 - x_2 \leq 6,\ x_1 + 2x_2 \leq 10,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

■ Эту задачу можно записать в матричной форме

$$z = (2;3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix},\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Условия Куна-Таккера принимают следующий вид.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Начальная симплекс-таблица для этапа 1 строится путём введения в первые два уравнения искусственных переменных R_1 и R_2, столбцы которых в симплекс-таблицах указывать не будем. Имеем первоначальную таблицу:

Итерация 0

БП	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	S_1	S_2	Реш.	Отн.
R_1	2	0	2	1	-1	0	0	0	2	–
R_2	0	$\underline{6}$	-1	2	0	-1	0	0	3	1/2
S_1	2	-1	0	0	0	0	1	0	6	–
S_2	1	2	0	0	0	0	0	1	10	5
Оц.	-2	-6	-1	-3	1	1	0	0		

Поскольку μ_2=0, вводимой в базис переменной может быть x_2, при этом из числа базисных исключается R_2. Получаем следующую симплекс-таблицу.

Итерация 1

БП	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	S_1	S_2	Реш.	Отн.
R_1	$\underline{2}$	0	2	1	-1	0	0	0	2	1
x_2	0	1	-1/6	1/3	0	-1/6	0	0	1/2	–
S_1	2	0	-1/6	1/3	0	-1/6	1	0	13/2	13/4
S_2	1	0	1/3	-2/3	0	1/3	0	1	9	9
Оц.	-2	0	-2	-1	1	0	0	0		

Т.к. μ_1=0, вводимой в базис переменной является быть x_1, при этом из числа базисных исключается R_1. Получаем следующую симплекс-таблицу.

Итерация 2

БП	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	S_1	S_2	Реш.
x_1	1	0	1	1/2	-1/2	0	0	0	1
x_2	0	1	-1/6	1/3	0	-1/6	0	0	1/2
S_1	0	0	-13/6	-2/3	1	-1/6	1	0	9/2
S_2	0	0	-2/3	-7/6	1/2	1/3	0	1	8

Итерация 2 даёт оптимальное решение рассматриваемой на этапе 1 задачи. Т.к. искусственные переменные вышли из базиса, то полученное решение

x_1=1, x_2=1/2 являются допустимым. Оптимальное значение z вычисляется подстановкой полученного решения в выражение для целевой функции исходной задачи и равняется 7/4. ●

7.5. Дробно-линейное программирование.

7.5.1. Математическая модель задачи. Дробно-линейное программирование (ДЛП) относится к нелинейному программированию, так как имеет целевую функцию, заданную в нелинейном виде.

Задача ДЛП в общем виде записывается следующим образом:

$$z=\frac{\sum_{j=1}^{n} e_j x_j + e_0}{\sum_{j=1}^{n} f_j x_j + f_0} \to \max\ (\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \ge 0,\ j=1, 2, \ldots, n,$$

где e_j, f_j, b_i, a_{ij} – постоянные коэффициенты и $\sum_{j=1}^{n} f_j x_j + f_0 \neq 0$.

Рассмотрим задачу ДЛП в виде

$$z=\frac{e_1 x_1 + e_2 x_2}{f_1 x_1 + f_2 x_2} \to \max\ (\min) \qquad (7.10)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i,\ i = 1, 2, ..., m, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (7.11)$$

Будем считать, что $f_1x_1+f_2x_2 \neq 0$.

Для решения этой задачи найдем область допустимых решений, определяемую ограничениями (7.11). Пусть эта область не является пустым множеством.

Из выражения (7.10) найдем x_2: $zf_1x_1+zf_2x_2=e_1x_1+e_2x_2$, $x_2(zf_2-e_2)=x_1(e_1-zf_1)$,

$x_2=\frac{e_1 - zf_1}{zf_2 - e_2}x_1$, $x_2=kx_1$, где $k=\frac{e_1 - zf_1}{zf_2 - e_2}$.

Прямая $x_2=kx_1$ проходит через начало координат. При некотором фиксированном значении z угловой коэффициент k прямой тоже фиксирован и прямая займет определенное положение. При изменении значений z прямая $x_2=kx_1$ будет поворачиваться вокруг начала координат (рис. 7.1).

Установим, как будет вести себя угловой коэффициент k

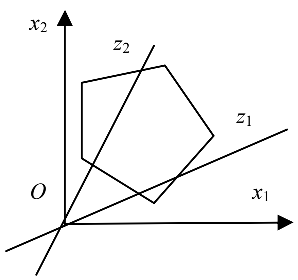


Рис. 7.1. Графическое

при монотонном возрастании z. Найдем производную от k по z:

представление задачи ДЛП

$$\frac{dk}{dz} = k' = \frac{-f_1(zf_2 - e_2) - f_2(e_1 - zf_1)}{(zf_2 - e_2)^2} = \frac{f_1e_2 - f_2e_1}{(zf_2 - e_2)^2}.$$

Знаменатель производной всегда положителен, а числитель от z не зависит.

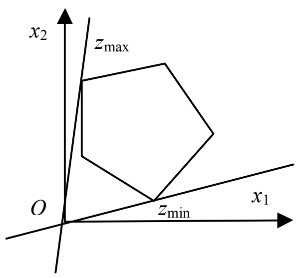


Рис. 7.2. ОДР ограничена, оба экстремума существуют

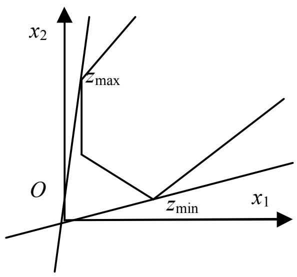


Рис. 7.3. ОДР неограничена, оба экстремума существуют

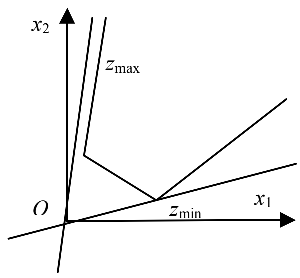


Рис. 7.4 ОДР неограничена, один экстремум существует

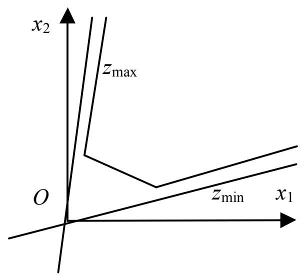


Рис. 7.5 ОДР неограничена, оба экстремума не существуют

Следовательно, производная имеет постоянный знак, и при увеличении z угловой коэффициент будет только возрастать или только убывать, а прямая будет поворачиваться в одну сторону. Если угловой коэффициент прямой имеет положительное значение, то прямая вращается против часовой стрелки, при отрицательном значении k – по часовой стрелке. Установив направление вращения, находим вершину или вершины многогранника, в которых функция принимает max(min) значение, либо устанавливаем неограниченность целевой функции задачи. При этом возможны следующие случаи.

1.Область допустимых решений ограничена, максимум и минимум достигаются в ее угловых точках (рис. 7.2).

2.Область допустимых решений не ограничена, однако существуют угловые точки, в которых целевая функция принимает максимальное и минимальное значения (рис. 7.3).

3. Область допустимых решений не ограничена, имеется один из экстремумов. Например, минимум достигается в одной из вершин области и имеет так называемый асимптотический максимум (рис. 7.4).

4. Область допустимых решений не ограничена. Максимум и минимум являются асимптотическими (рис. 7.5).

Алгоритм решения

1. Находим область допустимых решений.

2. Определяем угловой коэффициент k и устанавливаем направление перемещения целевой функции.

3. Находим точку max (min) целевой функции или устанавливаем неразрешимость задачи.

7.5.2. Экономическая интерпретация задач ДЛП. Математическая модель задачи ДЛП может быть использована для определения рентабельности затрат на производство изделий, рентабельности продаж, затрат в расчете на рубль выпускаемой продукции, себестоимости изделий.

Обозначим:

r_j – прибыль предприятия от реализации единицы изделия j-го вида;

x_j – количество выпущенной продукции j-го вида;

s_j – цена единицы продукции j-го вида;

c_j – себестоимость производства единицы изделия j-го вида;

d_j – затраты на производство одного изделия j-го вида.

Задача рентабельности затрат ($P_з$) на производство изделий имеет вид

$$z=P_з=\frac{\sum_{j=1}^{n} r_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}\to\max.$$

Задача рентабельности продаж ($P_п$) имеет вид

$$z=P_п=\frac{\sum_{j=1}^{n} r_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} s_j x_j}\to\max.$$

Задача определения затрат в расчете на рубль ($З_р$) товарной продукции записывается в виде

$$z=З_р=\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} s_j x_j}\to\min.$$

Задача нахождения себестоимости изделия ($C_и$) записывается как

$$z=C_и=\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j}\to\min.$$

Указанные математические модели имеют системы ограничений в зависимости от условий задачи.

7.5.3. Применение задачи ДЛП для определения себестоимости изделий. Рассмотрим использование ДЛП для нахождения себестоимости изделий.

Пример 7**.** Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на каждом из типов оборудования. Время обработки каждого из изделий, затраты, связанные с производством одного изделия, даны в табл. 1.

Оборудование I и III типов предприятие может использовать не более 26 и 39 ч соответственно, оборудование II типа целесообразно использовать не менее 4 ч.

Определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы средняя себестоимость одного изделия была минимальной.

Таблица 7.2

Условия задачи

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия, ч	
	A	*B*
I	2	8
II	1	1
III	12	3
Затраты на производство одного изделия, т. р.	2	3

■ Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 – количество изделий вида *A,* которое следует изготовить предприятию, x_2 – количество изделий вида *B*. Общие затраты на их производство составят ($2x_1+3x_2$) тыс. р., а средняя себестоимость одного изделия будет равна $\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}$. Математическая модель задачи примет вид

$$z=\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}\to\min$$

при ограничениях

$$2x_1+8x_2\le 26,$$
$$x_1+x_2\ge 4,$$
$$12x_1+3x_2\le 39,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

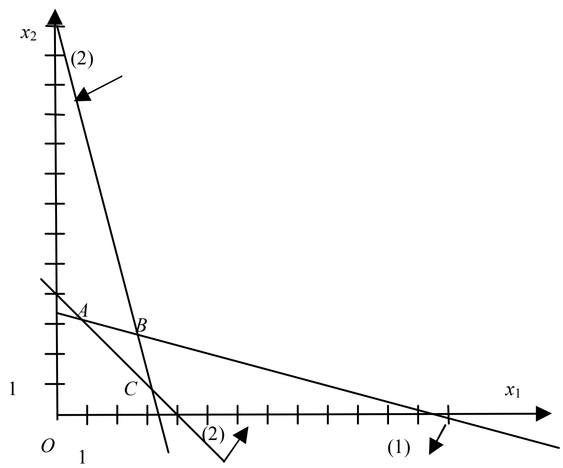


Рис. 7.6. ОДР в примере 7.

ОДР – треугольник *ABC* (рис. 7.6). Найдем x_2:

$$x_2=kx_1,$$

где $k=\frac{e_1-zf_1}{zf_2-e_2}=\frac{2-z}{z-3}$. Тогда $k'=\frac{f_1e_2-f_2e_1}{(zf_2-e_2)^2}=\frac{1}{(z-3)^2}$.Так как $k'>0$, то функция $k=\frac{2-z}{z-3}$ возрастает. Это соответствует вращению прямой против часовой стрелки. Следовательно, в точке *C* (рис. 7.6) целевая функция будет иметь наименьшее значение (глобальный минимум). Найдем координаты точки *C*. Решая систему

$$\begin{cases} 12x_1+3x_2=39, \\ x_1+x_2=4, \end{cases}$$

получим $x_1=3$, $x_2=1$, т.е. $C(3,1)$, $\boldsymbol{X}_{\text{опт}}=(3,1)$, $z=9/4$.

Значит, предприятию следует выпускать 3 изделия вида *A* и 1 изделие вида *B*. При этом средняя себестоимость одного изделия будет минимальной и равной 2,25 тыс. р. ●

7.5.4. Сведение экономико-математической модели ДЛП к задаче линейного программирования. Задачу ДЛП можно свести к задаче линейного программирования и решить симплексным методом.

Обозначим

$$y_0=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} f_j x_j + f_0}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} f_j x_j + f_0 \neq 0$$

и введем новые переменные $y_j=y_0x_j$.

Тогда задача примет вид

$$z=\sum_{j=1}^{n} e_j y_j \to \max\ (\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_j y_j = 1,$$

$$y_j \geq 0,\ y_0>0,\ i=1, 2, \ldots, m,\ j=1, 2, \ldots, n.$$

После нахождения оптимального решения полученной задачи, используя вышеуказанные соотношения, найдем оптимальное решение исходной задачи ДЛП.

Пример 8. Дана задача ДЛП

$$z=\frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \max$$

при ограничениях

$$x_1-2x_2+x_3=2,$$

$$2x_1+x_2+x_4=6,$$

$$x_j \geq 0,\ j=1, 2, 3, 4.$$

■ Обозначим: $x_1+2x_2+1=\frac{1}{y_0}$, $y_0>0$, $x_1y_0=y_1$, $x_2y_0=y_2$, $x_3y_0=y_3$, $x_4y_0=y_4$, тогда $z=2x_1y_0-x_2y_0$. Преобразуем систему ограничений, умножив обе части всех ограничений на y_0, и перейдем к переменным y_0, y_1, y_2, y_3, y_4. Задача примет вид

$$z=2y_1-y_2 \to \max$$

при ограничениях

$$-2y_0+y_1-2y_2+y_3=0,$$
$$-6y_0+2y_1+y_2+y_4=0,$$
$$y_0+y_1+2y_2=1,$$
$$y_j\geq 0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ y_0>0.$$

Запишем задачу в канонической форме:

$$z-2y_1+y_2=0,$$
$$-2y_0+y_1-2y_2+y_3=0,$$
$$-6y_0+2y_1+y_2+y_4=0,$$
$$y_0+y_1+2y_2+R_1=1,$$
$$y_j\geq 0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ y_0>0,\ R_1\geq 0.$$

Базисные переменные: y_3, y_4, R_1. Свободные переменные: y_0, y_1, y_2.

Итерация 0

БП	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	Реш.	Отн.
z	0	-2	1	0	0	0	–
y_3	-2	1	-2	1	0	0	–
y_4	-6	2	1	0	1	0	–
R_1	<u>1</u>	1	2	0	0	1	1
Оц.	1	1	2	0	0		

Итерация 1

БП	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	Реш.	Отн.
z	0	-2	1	0	0	0	–
y_3	0	<u>3</u>	2	1	0	2	2/3
y_4	0	8	13	0	1	6	3/4
y_0	1	1	2	0	0	1	1

Итерация 2

БП	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	Реш.
z	0	0	7/3	2/3	0	4/3
y_1	0	1	2/3	1/3	0	2/3
y_4	0	0	2/3	-8/3	1	2/3
y_0	1	0	4/3	-1/3	0	1/3

Получили

$\boldsymbol{Y}_{\text{опт}}=(1/3,\ 2/3,\ 0,\ 0,\ 2/3)$,

тогда

$x_1=\dfrac{y_1}{y_0}=2,\quad x_2=\dfrac{y_2}{y_0}=0,\quad x_3=\dfrac{y_3}{y_0}=0,\quad x_4=\dfrac{y_4}{y_0}=2,$

$\boldsymbol{X}_{\text{опт}}=(2,\ 0,\ 0,\ 2)$, $z_{\max}=4/3$. ●

7.6. Графический метод решения задач нелинейного программирования. Так же как и в задачах ЛП, задачи с двумя переменными могут быть решены графически.

Пример 9. Найдём экстремумы функции $z=x_1+2x_2$ при ограничениях

$$x_1^2+x_2^2\leq 9,\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

■ ОДР – часть окружности с радиусом 3, которая расположена в 1-й четверти (рис. 7.7). Линиями уровня целевой функции являются параллельные прямые

$$x_2=-\frac{1}{2}x_1+C \qquad (1)$$

с угловым коэффициентом $-\frac{1}{2}$.

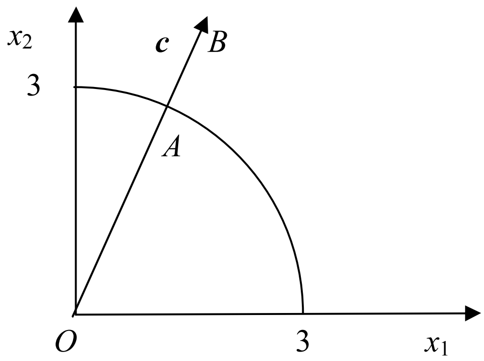


Рис. 7.7. ОДР из примера 9

Проведём вектор $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}=(\lambda;2\lambda)$ (где λ – любое положительное число), перпендикулярный к каждой из линий уровня. Минимум достигается в точке $O(0;0)$, а максимум в точке A касания окружности и вектора $\overrightarrow{OB}$. Прямая OA проходит через начало координат перпендикулярно прямым (1). Поэтому её уравнение $x_2=2x_1$. Решаем систему $\begin{cases} x_1^2+x_2^2=9, \\ x_2=2x_1, \end{cases}$ откуда находим $x_1=\frac{3\sqrt{5}}{5}$, $x_2=\frac{6\sqrt{5}}{5}$, $z_{\max}=3\sqrt{5}$.●

Пример 10. Решим задачу нахождения экстремумов функции

$$z=-20-x_1^2+6x_1-x_2^2+12x_2$$

при ограничениях $x_1+x_2\le 5$, $2x_1+x_2\le 8$, $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$.

■ Выделим полные квадраты в выражении для функции z:

$$z=-20-(x_1^2-2\cdot x_1\cdot 3+9-9)-(x_2^2-2\cdot x_2\cdot 6+36-36)=-20-(x_1-3)^2+9-(x_2-6)^2+36=$$

$$=25-(x_1-3)^2-(x_2-6)^2.$$

ОДР – 4-угольник $OABD$ (рис. 7.8). Линиями уровня целевой функции являются концентрические окружности с центром в точке $O_1(3;6)$ при $z<25$. Минимум находится в точке $O(0;0)$ как самой удалённой от точки O_1, и равен $z_{\min}=-20$. Максимум находится в точке E, как самой ближайшей к O_1 точки ОДР. Точка E находится на пересечении прямой AB,

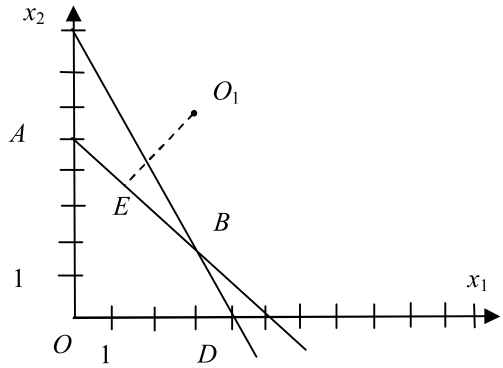


Рис. 7.8. ОДР из примера 10

уравнение которой $x_1+x_2=5$, и перпендикуляра к этой прямой, проведённого из точки O_1. Т.к. угловой коэффициент прямой $x_1+x_2=5$ равен -1, то угловой коэффициент перпендикуляра O_1E равен 1. Из уравнения прямой, проходящей через данную точку O_1 с угловым коэффициентом 1, получим $x_2-6=x_1-3$, откуда $x_1-x_2=-3$. Решая систему $\begin{cases} x_1+x_2=5, \\ x_1-x_2=-3, \end{cases}$ находим координаты точки E: $x_1=1$, $x_2=4$, при этом $z_{\max}=21$. ●

Пример 11. Решим задачу нахождения экстремумов функции

$$z = 53 + x_1^2 - 14x_1 + x_2^2 - 4x_2$$

при ограничениях $x_1x_2 \geq 5$, $0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 5$.

■ Выделим полные квадраты в выражении для функции z:

$$z = 53 + (x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot 7 + 49 - 49) + (x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot 2 + 4 - 4) = (x_1-7)^2+(x_2-2)^2.$$

ОДР – фигура ABD (рис. 7.9), ограниченная гиперболой $x_1x_2=5$ (кривая AD) и двумя прямыми AB и BD. Линиями уровня целевой функции являются концентрические окружности с центром в точке $O_1(7;2)$ (при $z>0$). Максимум находится в точке $A(1;5)$ как самой удалённой от точки O_1, и равен $z_{max}=45$. Минимум находится в точке $E(5;2)$, как самой ближайшей к O_1 точки ОДР, и равен $z_{min}=4$. ●

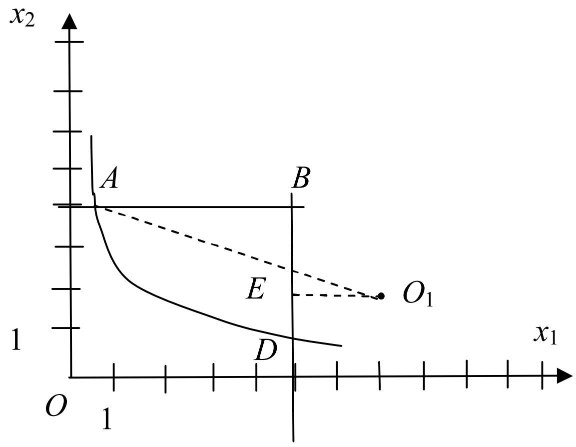


Рис. 7.9. ОДР из примера 10

7.7. Определение безусловных и условных экстремумов в задачах математического программирования с помощью MathCAD. Задачи поиска экстремума функции означают нахождение ее максимума (наибольшего значения) или минимума (наименьшего значения) в некоторой области определения ее аргументов. Ограничения значений аргументов, дающих эту область, как и прочие дополнительные условия, должны быть определены в виде системы неравенств и (или) уравнений. В таком случае говорят о задаче на **условный экстремум**.

Для решения задач поиска максимума и минимума в MathCAD имеются встроенные функции Minerr, Minimize и Maximize.

Поиск экстремума функции включает в себя задачи нахождения локального и глобального экстремума. Последние называют еще задачами оптимизации. Рассмотрим конкретный пример функции f(x), показанной графиком на рис. 7.10 на интервале (-2;5). Она имеет глобальный максимум на левой границе интервала, глобальный минимум, локальный максимум, локальный минимум и локальный максимум на правой границе интервала (в порядке слева направо).

В MathCAD с помощью встроенных функций решается только задача поиска локального экстремума. Чтобы найти глобальный максимум (или минимум), требуется либо сначала вычислить все их локальные значения и потом выбрать из них наибольшее (наименьшее), либо предварительно **просканировать** с некоторым шагом рассматриваемую область, чтобы выделить из нее подобласть наибольших (наименьших) значений функции и осуществить поиск глобального экстремума, уже находясь в его окрестности. Последний путь таит в себе некоторую опасность уйти в зону другого локального экстремума, но часто может быть предпочтительнее из соображений экономии времени.

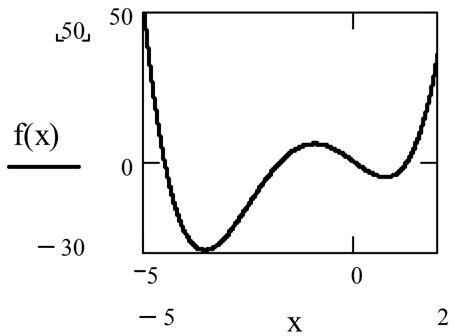


Рис. 7.10. График функции $f(x)=x^4+5\cdot x^3-10\cdot x$

Для поиска локальных экстремумов имеются две встроенные функции, которые могут применяться как в пределах вычислительного блока, так и автономно.

– Minimize (f,x) – вектор значений аргументов, при которых функция f достигает минимума;

– Maximize (f,x) – вектор значений аргументов, при которых функция f достигает максимума.

Здесь f(x) – функция; $x=(x_1,...,x_м)$ – аргументы, по которым производится минимизация (максимизация).

Всем аргументам функции f предварительно следует присвоить некоторые значения, причем для тех переменных, по которым производится минимизация, они будут восприниматься как начальные приближения. Примеры вычисления экстремума функции одной переменной (рис. 7.10) без дополнительных условий показаны на рис. 7.11 – 7.12. Поскольку никаких дополнительных условий в них не вводится, поиск экстремумов выполняется для любых значений x от -∞ до +∞.

$f(x) := x^4 + 5\cdot x^3 - 10\cdot x \quad x := -1$ $\text{Minimize}(f,x) = -3.552$ $x := 1 \quad \text{Minimize}(f,x) = 0.746$ **Рис. 7.11.** Минимум функции одной переменной	$f(x) := x^4 + 5\cdot x^3 - 10\cdot x \qquad x := 1$ $\text{Maximize}(f,x) = -0.944$ $x := -10 \quad \text{Maximize}(f,x) =$ **Рис. 7.12**. Максимум функции одной переменной

Как видно из рисунков, существенное влияние на результат оказывает выбор начального приближения, в зависимости от чего в качестве ответа выдаются различные локальные экстремумы. В последнем случае численный метод вообще не справляется с задачей, поскольку начальное приближение x=-10 выбрано далеко от области локального максимума, и поиск решения уходит в сторону увеличения f(x), т. е. расходится к x→∞.

В задачах на условный экстремум функции минимизации и максимизации должны быть включены в вычислительный блок, т. е. им должно предшествовать ключевое слово **Given.** В промежутке между **Given** и функцией поиска экстремума с помощью булевых операторов записываются логические выражения (неравенства, уравнения), задающие ограничения на значения аргументов минимизируемой функции. На рис. 7.13 показаны примеры поиска условного экстремума на различных интервалах, определенных неравенствами. Сравним результаты работы этого рисунка с двумя предыдущими. Не следует забывать о

$f(x) := x^4 + 5\cdot x^3 - 10\cdot x \quad x := 1$
Given $-5 < x < -2$
$\text{Minimize}(f,x) = -3.552$
$x := 1$ Given $x > 0$
$\text{Minimize}(f,x) = 0.746$
$x := -10$ Given $-3 < x < 0$
$\text{Maximize}(f,x) = -0.944$

Рис. 7.13. Три примера поиска условного экстремума функции

важности выбора правильного начального приближения и в случае задач на условный экстремум. Например, если вместо условия -3<x<0 в последнем примере рисунка задать -5<x<0, то при том же самом начальном x=-10 будет найден максимум Maximize (f,x) =-0.944. Это неверно, поскольку максимальное значение достигается функцией f(x) на левой границе интервала при x=-5. Выбор начального приближения x=-4 решает задачу правильно, выдавая в качестве результата Maximize(f,x)=-5.

Вычисление экстремума функции многих переменных не несет принципиальных особенностей по сравнению с функциями одной переменной. Поэтому ограничимся примером (рис. 7.14) нахождения максимума функции двух переменных для следующей задачи:

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 10 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 700 \\ 900 \\ 900 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c := (3 \quad 9) \quad \text{ORIGIN} := 1 \quad z(x) := c\cdot x$$

$$z(x) = 12$$

Given

$$x \ge 0 \quad x_1 \ge 70 \quad A\cdot x \le B \quad X := \text{Maximize}(z,x)$$

$$X = \begin{pmatrix} 70 \\ 55 \end{pmatrix} \quad z(X) = 705$$

Рис. 7.14. Экстремум функции двух переменных

Пример 12. $z=3x_1+9x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} &6x_1+3x_2 \le 700, \\ &5x_1+10x_2 \le 900, \\ &3x_1+12x_2 \le 900, \\ &x_1 \ge 70,\ x_2 \ge 0. \end{aligned} \qquad (7.9)$$

■ На рис. 7.14 c – коэффициенты целевой функции, A и B – матрицы левых и правых частей ограничений системы неравенств (1). ●

Поиск минимума можно организовать и с помощью функции Minerr.

Решение задачи нелинейного программирования принципиально не отличается от нахождения решения задачи линейного программирования, приведённого на рис. 7.14. Изменится лишь форма записи ограничений в блоке Given.

Упражнения

Для задач **7.1–7.40:**

1) *составить математическую модель задачи применительно к числовым данным выполняемого варианта;*

2) *решить полученную задачу с помощью MathCAD как задачу нелинейного программирования;*

3) *графическим методом решить полученную задачу и сформулировать ответ в экономических терминах в соответствии с условиями задачи.*

Формулировка задачи. Предприятие выпускает изделия A и B, при изготовлении которых используется сырьё S_1 и S_2. Известны запасы b_i (i=1,2) сырья, нормы a_{ij} (j=1,2) его расхода на единицу изделия, плановая себестоимость c_j^0 и оптовые цены p_j. Как только объём выпускаемой продукции перестаёт соответствовать оптимальным размерам предприятия, дальнейшее увеличение выпуска x_j ведёт к повышению себестоимости продукции, и в первом приближении фактическая себестоимость c_j описывается функцией $c_j = c_j^0 + c'x_j$, где c' – некоторая постоянная величина. При поиске плана выпуска изделий, обеспечивающего предприятию наивысшую прибыль в условиях нарушения баланса между объёмом выпуска и оптимальными размерами предприятия, целевая функция принимает вид

$$z=(p_1-(c_1^0+c'x_1))x_1+(p_2-(c_2^0+c'x_2))x_2,$$

а ограничения по сырью

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \le b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2 \le b_2,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

(нормы расхода сырья a_{ij} от x_j не зависят).

Все необходимые числовые данные указаны в таблице.

№№	b_1	b_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	p_1	p_2	c_1^0	c_2^0	c'
1	90	88	13	6	8	11	12	10	7	8	0,2
2	30	60	5	2	8	11	8	7	6	4	0,1
3	60	10	11	8	1	2	10	11	7	9	0,1
4	14	42	1	4	7	3	15	13	14	11	0,2
5	7	10	1	1	1	2	12	11	9	10	0,2
6	51	105	5	13	15	7	15	13	13	10	0,1
7	40	84	4	7	12	7	11	17	9	14	0,2
8	13	10	2	3	2	1	14	16	12	13	0,2
9	72	10	9	8	1	2	23	19	20	13	0,3
10	84	31	7	12	5	3	21	27	15	24	0,3
11	15	52	2	1	4	13	8,6	5,4	5	4,6	0,2
12	22,5	104	3	1,5	8	26	5	4	2,25	3,25	0,125
13	30	102	4	2	6	17	12	14	8	12	0,2
14	51	105	3	8,5	14	7	12	8	5	4,5	0,25
15	45	136	6	3	8	17	13	12	7,4	7,2	0,4
16	7,5	68	1	0,5	7	8,5	12,75	16	10	14	0,125
17	60	125	8	4	11	15	8	9	4,8	5,4	0,2
18	12	82,5	1,6	0,8	5,5	7,5	17	22,5	11	17	0,25
19	75	228	10	5	12	19	12	20	6,4	11,2	0,4
20	37,5	114	5	2,5	6	9,5	15,5	21,75	12,75	18,5	0,125
21	90	260	12	6	13	20	6	8	3,6	2,8	0,2
22	22,5	130	3	1,5	6,5	10	17	18,5	12	11	0,25
23	12	60	1	2	10	6	5	8	2,6	2,4	0,4
24	18	30	1,5	3	5	3	6,25	6,25	5	4	0,125
25	24	80	2	4	10	8	21	18,6	19	16,2	0,2
26	30	40	2,5	5	5	4	4	7	1	3	0,25
27	36	10	3	6	1	1	8	6	2,4	2	0,4
28	42	20	3,5	7	2	2	4	2,25	2	0,5	0,125
29	48	140	4	8	14	10	15,6	23,8	12	22,2	0,2
30	54	70	4,5	9	7	5	9	5	4	2	0,25
31	52	15	4	13	2	1	6,46	9,6	5,6	6	0,2
32	104	22,5	8	26	3	1,5	5	6	4,25	3,25	0,125
33	5	30	0,5	1	5,5	4	9	8	6	6	0,1

34	42	7	7	3	0,5	2	12	14	11	12	0,2
35	5	7	0,5	1	1	1	11	12	8	11	0,2
36	105	51	15	7	5	13	10	10	8	7	0,1
37	125	60	11	15	8	4	7	8	3,8	4,4	0,2
38	82,5	12	5,5	7,5	1,6	0,8	10	10	4	4,5	0,25
39	228	75	12	19	10	5	8	16	2,4	7,2	0,4
40	114	37,5	6	9,5	5	2,5	10	10,25	7,25	7	0,125

В задачах **7.41–7.50:**

даны линейная целевая функция и нелинейная система ограничений. Найти глобальные экстремумы функции.

При этом в **№№7.41–7.45** *задача имеет вид*

$$z=c_1x_1+c_2x_2,$$
$$x_1^2+x_2^2\le b_1,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0;$$

а в **№№7.46–7.50** *– вид*

$$z=c_1x_1+c_2x_2,$$
$$x_1x_2\le b_1,$$
$$x_1\le b_2,$$
$$x_2\le b_3,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Значения коэффициентов целевых функций и систем ограничений приведены в таблице.

Значения	№ задачи									
	41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
c_1	3	2	-2	3	-2	1	2	-3	1	-2
c_2	4	3	-1	2	-3	2	3	-2	2	-1
b_1	25	16	36	9	4	3	2	5	4	2
b_2	–	–	–	–	–	4	6	5	7	8
b_3	–	–	–	–	–	5	7	4	5	6

В задачах **7.51–7.60:**

даны нелинейная целевая функция и линейная система ограничений. Найти глобальные экстремумы функции графическим методом.

Математическая модель задачи:

$$z=(x_1+a_1)^2+(x_2+b_1)^2,$$
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_2,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_3,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений приведены в таблице.

Значения	№ задачи									
	51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
a_1	-4	-2	-1	-1	-4	-1	-1	-6	-2	-1
b_1	-5	-6	-1	-2	-3	-1	-3	-2	-2	1
a_{11}	-4	5	-4	5	8	5	8	5	7	7
a_{12}	-5	2	5	2	3	3	3	3	6	6
b_2	-20	20	-20	20	24	15	24	15	42	42

a_{21}	2	1	2	1	7	3	7	3	-2	-2
a_{22}	3	2	3	2	4	5	4	5	3	3
b_3	30	10	30	10	28	15	25	15	-6	-6

В задачах **7.61–7.70:**

даны нелинейная целевая функция и нелинейная система ограничений. Найти глобальные экстремумы функции.

При этом **в №№7.61–7.65** принять математическую модель задачи вида

$$z=(x_1+a_1)^2+(x_2+b_1)^2$$
$$x_1x_2\leq b_2,$$
$$x_1\leq b_3,$$
$$x_2\leq b_4,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0;$$

в **№№7.66–7.70** *– вида*

$$z=(x_1+a_1)^2+(x_2+b_1)^2$$
$$x_1^2+x_2^2\leq b_2,$$
$$x_1\leq b_3,$$
$$x_2\leq b_4,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений приведены в таблице.

Значения	№ задачи									
	61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
a_1	-1	1	-2	-1	2	-2	1	-1	-2	0
b_1	1	-2	1	-1	2	-1	-1	1	0	-2
b_2	4	5	6	3	2	16	25	36	4	9
b_3	5	6	5	4	6	3,5	4,5	5,5	6,5	2,8
b_4	6	5	4	5	3	3,5	4,5	5,5	6,5	2,8

Задачи дробно-линейного программирования **7.71-7.80.**

Формулировка задачи. Для производства двух изделий P_1 и P_2 предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на данном типе оборудования. Время обработки каждого из изделий, затраты, связанные с производством одного изделия, даны в таблице.

Оборудование 1-го и 3-го типов предприятие может использовать не менее b_1 и b_3 ч. соответственно, оборудование 2-го типа – не более b_2 ч.

Определить, сколько изделий следует изготовить предприятию, чтобы средняя себестоимость одного изделия была минимальной.

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия, ч.	
	P_1	P_2
1 2 3	a_{11} a_{21} a_{31}	a_{12} a_{22} a_{32}
Затраты на производство одного изделия, тыс. руб.	c_1	c_2

Значения коэффициентов условия задачи

Значения	№ задачи									
	71	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
c_1	2	1	4	2	3	4	3	4	5	2
c_2	1	3	1	4	1	2	5	3	2	5
a_{11}	4	1	4	3	6	10	8	1	4	6
a_{12}	12	12	7	8	8	8	4	11	16	12
b_1	48	12	28	24	48	80	32	11	32	70
a_{21}	5	4	10	1	9	6	5	6	5	9
a_{22}	10	10	5	1	6	12	9	4	7	8
b_2	50	40	45	5	54	72	45	24	35	72
a_{31}	1	8	11	8	1	14	2	10	7	10
a_{32}	1	5	2	2	8	3	10	1	2	1
b_3	6	30	22	16	8	42	20	10	14	12

§8. Транспортная задача по критерию стоимостей

8.1. Постановка транспортной задачи в матричной форме. Закрытая и открытая транспортная задача. Рассмотрим решение транспортной задачи (ТЗ) по критерию стоимостей, экономико-математическая постановка которой приведена в задаче 2 §6.1.

Пусть некоторый однородный товар (кирпич, пиломатериалы и т.п.) хранится на m пунктах отправления A_i (i=1÷m) и требуется в n пунктах назначения B_j (j=1÷n). Известны следующие параметры: a_i – запас товара на i-м пункте отправления; b_j – потребность в товаре в j-м пункте назначения; c_{ij} – стоимость перевозки единицы товара из i-го пункта отправления склада в j-й пункт назначения. Предполагается, что стоимость перевозки произвольного количества товара пропорциональна этому количеству. Требуется составить план перевозок товара так, чтобы удовлетворить потребности при имеющихся запасах, обеспечив при этом наименьшую суммарную стоимость перевозок.

Обозначим через x_{ij} количество товара, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Стоимость перевозки товара из A_i в B_j составит $c_{ij}x_{ij}$, а суммарная стоимость перевозок есть $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. Следовательно,

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min . \tag{8.1}$$

Далее, все запасы из пункта A_i должны быть вывезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=1 \div m. \tag{8.2}$$

Все потребности пункта B_j должны быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=1 \div n. \tag{8.3}$$

Естественно предполагать также, что

$$x_{ij} \ge 0,\ i=1 \div m,\ j=1 \div n. \tag{8.4}$$

Т.о., **математическая модель** ТЗ состоит в определении неотрицательного плана перевозок $\boldsymbol{X}=(x_{ij})$, для которого выполняются условия (8.2) и (8.3), а целевая функция (8.1) принимает наименьшее значение. Матрица $\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{m\times n}$ называется **матрицей перевозок**.

Для наглядности условия ТЗ можно представить таблицей (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Условия транспортной задачи

A_i \ B_j	B_1	B_2	…	B_n
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

Здесь в 1-й строке показаны потребности пунктов назначения B_j ($j=1\div n$), в 1-м столбце – запас товара в пунктах отправления A_i ($i=1\div m$). В каждой ячейке (i,j) в верхнем левом углу приведены стоимости перевозки единицы товара c_{ij}, а в центре – количество товара, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения x_{ij}.

Если сумма всех запасов равна сумме всех заявок, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{8.5}$$

то мы имеем ТЗ **закрытого типа**.

Определение 1. Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений (8.2), (8.3), определяемое матрицей перевозок $\boldsymbol{X}$, называется **планом** ТЗ.

Определение 2. План $\boldsymbol{X^*}$, при котором функция (8.1) принимает своё минимальное значение, называется **оптимальным планом** ТЗ.

Теорема 8.1. Для того, чтобы ТЗ имела допустимые планы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (8.5).

■ **Необходимость**. Просуммируем равенства (8.2) по всем j от 1 до n, а равенства (8.3) по всем i от 1 до m:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{j=1}^{n} b_j,\ \ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m} a_i.$$

При этом суммируются все переменные x_{ij} как по строкам, так и по столбцам как в первом равенстве, так и во втором, поэтому левые части равенств равны, $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$, а тогда равны и правые: $\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}a_i$.

Достаточность. Обозначим $\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}a_i=\alpha$. Пусть

$$x_{ij}=\frac{a_ib_j}{\alpha}. \qquad (8.6)$$

Так как $a_i\geq 0$, $b_j\geq 0$, то $\alpha>0$, а поэтому $x_{ij}\geq 0$, $i=1\div m,\ j=1\div n$. Следовательно, выполнены ограничения (8.4) ТЗ. Далее, просуммируем равенства (8.6) по i от 1 до m:

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_ib_j}{\alpha}=\frac{b_j}{\alpha}\sum_{i=1}^{m}a_i=b_j,\ j=1\div n,$$

то есть выполнены ограничения (8.3) ТЗ. Аналогично, просуммировав равенства (8.6) по j от 1 до n, получим выполнение ограничений (8.2) ТЗ. ●

В случае если сумма запасов не равна сумме потребностей (заявок), имеем задачу **открытого типа**. Если сумма заявок превышает сумму запасов, вводится **фиктивный поставщик** A_{m+1}, «запас» которого равен разности между суммой заявок и суммой запасов: $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$. В случае, когда сумма запасов превышает сумму заявок, вводится **фиктивный потребитель** B_{n+1}, «заявка» которого равна разности между суммой запасов и суммой заявок:

$$b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j.$$

Стоимости всех фиктивных перевозок полагают равными нулю. Таким образом, задача открытого типа легко сводится к задаче закрытого типа.

Поскольку ТЗ транспортная задача является задачей линейного программирования, она может быть решена симплекс-методом. Но в силу специфики задачи (каждая переменная входит лишь в два уравнения системы (8.2), (8.3) и коэффициенты при переменных равны единице) оптимальный план ТЗ может быть получен путем некоторых преобразований транспортной таблицы. Как и в общем случае, оптимальный план ищется среди опорных решений.

Число переменных x_{ij} в ТЗ с m пунктами отправления и n пунктами назначения равно mn, а число уравнений в системах (8.2) и (8.3) равно $m+n$. Т.к. в закрытой ТЗ выполняется условие (8.5), то число линейно-независимых уравнений равно $m+n$-1. Следовательно, опорный план ТЗ может иметь не более $m+n$-1 отличных от нуля переменных. Это – **базисные переменные**.

Если в опорном плане число отличных от нуля переменных равно в точности равно $m+n$-1, то план является **невырожденным**, а если меньше – то **вырожденным.**

8.2.Нахождение начального опорного плана. Для определения опорного плана существует несколько методов. Рассмотрим два из них – метод северо-западного угла и метод минимальной стоимости.

В методе северо-западного угла (МСЗУ) будем распределять товар, начиная с левой верхней клетки (1,1) и полагая x_{11}=min(a_1,b_1) (табл.8.1). Если a_1>b_1, то x_{11}=b_1 и потребитель B_1 будет полностью удовлетворён, и значит, надо положить x_{i1}=0, i=2÷m («столбец 1 закрыт»). Переходим в соседнюю ячейку. **Соседней** здесь считается открытая ячейка снизу или справа от данной – в данном случае это ячейка (1,2). Она заполняется с учётом того, что запас пункта A_1 сократился на величину b_1 и составляет a_1-b_1.

Если же b_1>a_1, то запас поставщика A_1 полностью исчерпан, и значит, надо положить x_{1j}=0, j=2÷n («строка 1 закрыта»). Переходим в соседнюю ячейку – ячейку (2,1), учитывая, что потребность пункта B_1 сократилась на величину a_1 и составляет b_1-a_1. Аналогичным образом заполняются ячейки (1,2) или (2,1) и т.д. Последней заполняется ячейка (m,n). Рассмотрим применение этого метода на примере.

Пример 1. Условия ТЗ заданы транспортной таблицей (табл. 8.2). Требуется составить опорный план перевозок методом северо-западного угла.

■ Проверим, является ли задача закрытой. Т.к. $\sum_i a_i$=130≠$\sum_j b_j$=110, то ТЗ – открытая. Вводим фиктивного потребителя B_5, b_5=$\sum_i a_i$-$\sum_j b_j$=20 (табл.8.3).

Таблица 8.2

A_i \ B_j	30	25	35	20
50	3	2	4	1
10	2	3	1	5
20	3	2	4	4
50	5	3	2	6

Таблица 8.3

A_i \ B_j	30	25	35	20	20
50	3	2	4	1	0
10	2	3	1	5	0
20	3	2	4	4	0
50	5	3	2	6	0

Будем заполнять таблицу поэтапно.

Этап 1. x_{11}=min(a_1,b_1)=min(50,30)=30. Закрыт 1-й столбец. Переходим в соседнюю ячейку (1,2) (табл. 5).

Этап 2. x_{12}=min(a_1-b_1,b_2)=min(20,25)=20. Закрыта 1-я строка. Переходим в соседнюю ячейку (2,2).

Этап 3. x_{22}=min(10,5)=5. Закрыт 2-й столбец. Переходим в соседнюю ячейку (2,3).

Этап 4. x_{23}=min(5,35)=5. Закрыта 2-я строка. Переходим в соседнюю ячейку (3,3).

Этап 5. x_{33}=min(20,30)=20. Закрыта 3-я строка. Переходим в соседнюю ячейку (4,3).

Этап 6. x_{43}=min(50,10)=10. Закрыт 3-й столбец. Переходим в соседнюю ячейку (4,4).

Этап 7. x_{44}=min(40,20)=20. Закрыт 4-й столбец. Переходим в соседнюю ячейку (4,5).

Этап 8. x_{45}=min(20,20)=20. Закрыты 5-й столбец и 4-я строка. Заполнение таблицы закончено. Отметим, что число заполненных (базисных) клеток равно $m+n$-1=8 , т.е. действительно построен опорный план перевозок.

Таблица 8.4

B_j / A_i	30	25	35	20	20
50	3 30	2 20	4 –	1 –	0 –
10	2 –	3 5	1 5	5 –	0 –
20	3 –	2 –	4 20	4 –	0 –
50	5 –	3 –	2 10	6 20	0 20

Получен начальный опорный план с матрицей перевозок

$$X_{с\text{-}з}=\begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(фиктивные поставщики и потребители в матрице перевозок не указываются). По этому плану из пункта A_1 завезено 30 ед. груза в B_1, 20 – в B_2, из A_2 завезено 5 ед. груза в B_2 и 5 – в B_3, из A_3 все 20 ед. груза завезены в B_3, из A_4 завезено 10 ед. груза в B_3 и 20 – в B_4. То есть 20 ед. груза, «завезённые» в фиктивный пункт B_5, на самом деле остались в A_4. Затраты по плану $X_{с\text{-}з}$ составляют

$z_{с\text{-}з}$=3·30+2·20+3·5+1·5+4·20+2·10+6·20=370 (ден. ед.). ●

Замечание 1. При использовании МСЗУ на каждом этапе, кроме последнего, закрывалась либо строка (т.е. один из поставщиков), либо столбец (т.е. один из потребителей). Может оказаться, что на некотором (не последнем) шаге будут одновременно закрываться и строка, и столбец. Тогда в одну из соседних ячеек (желательно с меньшим тарифом) необходимо поставить нуль в явном виде. Эта ячейка в дальнейшем считается базисной (вырожденная задача).

Замечание 2. При использовании МСЗУ заполнение таблицы происходит чисто механически слева направо сверху вниз без учёта тарифов перевозок. Поэтому полученный опорный план обычно далёк от оптимального. В рассматриваемом далее методе – минимальной стоимости (ММС) – порядок заполнения таблицы зависит от тарифов.

При построении опорного плана этим методом сначала заполняется ячейка таблицы с минимальной стоимостью (если таковых несколько, то можно начинать с любой из них; обычно по порядку – слева направо сверху вниз). При этом либо удовлетворяется заявка соответствующего потребителя, либо исчерпывается запас поставщика. Далее ячейки заполняются в порядке возрастания стоимостей.

Пример 2. Рассмотрим применение ММС на решении той же ТЗ, что в примере 1 (табл. 8.2 и 8.3), и будем поэтапно заполнять табл. 8.3.

■ *Этап* 1. Начинаем, например, с ячейки (1,5), в которой мы имеем одну из минимальных стоимостей перевозки (c_{15}=0): x_{15}=min(a_1, b_5)=min(50,20)=20. Закрыт 5-й столбец. Переходим в соседнюю ячейку (табл.8.5).

Этап 2. Среди оставшихся ячеек заполняем ячейку (1,4), имеющую одну из минимальных стоимостей (c_{14}=1): минимальных стоимостей (c_{14}=1): x_{14}=min(a_1-b_5, b_4)=min(30,20)=20. Закрыт 4-й столбец. Переходим в соседнюю ячейку.

Этап 3. Среди оставшихся ячеек заполняем ячейку (2,3), имеющую минимальную стоимость (c_{23}=1): x_{23}=min(a_2, b_3)=min(10,35)=10. Закрыта 2-я строка. Переходим в соседнюю ячейку.

Этап 4. Среди оставшихся ячеек одну из минимальных стоимостей имеет ячейка (1,2), c_{12}=2. Поэтому x_{12}=min(a_1-b_4-b_5, b_2)=min(10,25)=10. Закрыта 1-я строка. Переходим в соседнюю ячейку).

Этап 5. Среди оставшихся ячеек заполняем ячейку (3,2), имеющую одну из минимальных стоимостей (c_{32}=2): x_{32}=min(20,15)=15. Закрыт 2-й столбец. Переходим в соседнюю ячейку.

Этап 6. Среди оставшихся ячеек заполняем ячейку (4,3), имеющую минимальную стоимость (c_{43}=2): x_{43}=min(50,25)=25. Закрыт 3-й столбец.

Переходим в соседнюю ячейку.

Этап 7. Среди оставшихся ячеек заполняем ячейку (3,1), имеющую минимальную стоимость (c_{31}=3): x_{31}=min(5,30)=5. Закрыта 3-я строка. Переходим в соседнюю (последнюю) ячейку (4,1).

Этап 8. x_{41}=min(25,25)=25. Закрыты

1-й столбец и 4-я строка. Заполнение таблицы закончено. Число заполненных (базисных) клеток равно $m+n$-1=8 , т.е. действительно построен опорный план.

Таблица 8.5

B_j / A_i	30	25	35	20	20
50	3 –	2 10	4 –	1 20	0 20
10	2 –	3 –	1 10	5 –	0 –
20	3 5	2 15	4 –	4 –	0 –
50	5 25	3 –	2 25	6 –	0 –

Получен начальный опорный план с матрицей перевозок

$$X_{м.ст}=\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 5 & 15 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

(фиктивные поставщики и потребители в матрице перевозок не указываются). По этому плану из пункта A_1 завезено 10 ед. груза в B_2 из A_2 завезено 10 ед. груза в B_3, из A_3 – 5 ед. груза завезено в B_1 и 15 – в B_2, из A_4 завезено по 25 ед. груза в B_1 и B_3. Те 20 ед. груза, «завезённые» в фиктивный пункт B_5, на самом деле остались в A_1. Затраты по плану $X_{м.ст}$ составляют $z_{м.ст}=2\cdot10+1\cdot20+1\cdot10+3\cdot5+2\cdot15+5\cdot25+2\cdot25=270$ (ден. ед.), что на 100 ед. меньше, чем в МСЗУ. ●

Для ММС также справедливо замечание 2 (о нулевом базисном элементе), только здесь изменяется понятие соседней ячейки. Ячейкой, соседней с данной, считается любая открытая ячейка в данной строке и в данном столбце.

8.3. Оптимальный план перевозок – метод потенциалов. При решении ТЗ, как и при решении любой задачи ЛП, осуществляется последовательный переход от одного опорного плана (если оно не оптимально) к другому. Для проверки оптимальности полученного плана воспользуемся теорией двойственности. Составим к ТЗ двойственную задачу и запишем их в табл. 8.6.

Таблица 8.6

Прямая задача	Двойственная задача
$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min$	$w=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j\to\max$
$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1\div m$	u_i не огр. в знаке, $i=1\div m$
$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1\div n$	v_j не огр. в знаке, $j=1\div n$
$x_{ij}\ge0,\ i=1\div m,\ j=1\div n$	$u_i+v_j\le c_{ij},\ i=1\div m,\ j=1\div n$

Переменные ДЗ называются:

u_i – потенциал поставщика A_i, $i=1\div m$;

v_j – потенциал потребителя B_j, $j=1\div n$.

Пользуясь свойством 3 ДЗ (§6.6), сформулируем в терминах потенциалов критерий оптимальности плана перевозок.

Теорема 8.2. Пусть $X^*=(x_{ij}^*)$ – план перевозок ТЗ. Для того, чтобы этот план был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы существовали потенциалы поставщиков u_i, $i=1\div m$, и потенциалы потребителей v_j, $j=1\div n$, удовлетворяющие условиям:

– сумма потенциалов каждого поставщика и каждого потребителя не превосходит соответствующей стоимости перевозки единицы груза, т.е.

$$u_i+v_j\le c_{ij},\ i=1\div m,\ j=1\div n; \qquad (8.7)$$

– если по плану X^* имеет место перевозка от поставщика A_i потребителю B_j, то сумма их потенциалов равна соответствующей стоимости перевозки единицы груза, то есть если $x_{ij}^*>0$, то $u_i+v_j=c_{ij}$.

Т.о., чтобы выполнить проверку оптимальности плана перевозок, необходимо для всех занятых ячеек составить систему уравнений относительно потенциалов:

$$u_i+v_j=c_{ij}. \qquad (8.8)$$

Т.к. занятых ячеек (а, значит, и уравнений (8.8)) $m+n-1$, а неизвестных потенциалов $m+n$. Поэтому одному из неизвестных нужно придать произвольное значение (обычно полагают $u_1=0$), и тогда остальные потенциалы определяются однозначно. Затем для свободных ячеек проверяются условия (8.7), или

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}\leq 0 \qquad (8.7')$$

(Δ_{ij} называется **оценкой** соответствующей ячейки). Если все эти неравенства выполняются, то, согласно приведённому выше критерию (теорема 8.2), план перевозок оптимальный. Если хотя бы одно из неравенств (8.7′) не выполняется, то план не является оптимальным. В этом случае из свободных ячеек с положительной оценкой выбирается та, для которой эта оценка является наибольшей. Если наибольших оценок несколько, то выбирается та из ячеек, где меньше тариф.

В транспортной таблице для выбранной свободной ячейки проводится замкнутая ломаная прямая, звенья которой лежат только в строках или столбцах и соединяют какие-либо две ячейки, а вершины (кроме начальной) расположены в занятых ячейках. Такая ломаная прямая называется **циклом.** Для каждой ячейки можно построить **только один** цикл. Вершинам цикла приписываются чередующиеся знаки, причём свободная ячейка снабжается знаком «+». В ячейках, соответствующих отрицательным вершинам цикла, отыскивается наименьшее значение объёма перевозок, $\alpha=\min x_{ij}^{(-)}$, которое перераспределяется по ячейкам цикла, т.е. прибавляется к переменным в ячейках со знаком «+» и вычитается от переменных в ячейках со знаком «-». В ячейках, не вошедших в цикл, переменные остаются неизменными. Ячейка «-», по которой определялась величина α (для неё $x_{ij}=\alpha$), остаётся пустой. Если таковых ячеек несколько, то одна из них (желательно с большим тарифом) остаётся пустой, а в остальных проставляются нули.

В результате перераспределения перевозок по циклу получается новый план с меньшими затратами. Примеры некоторых циклов показаны на рис. 8.1.

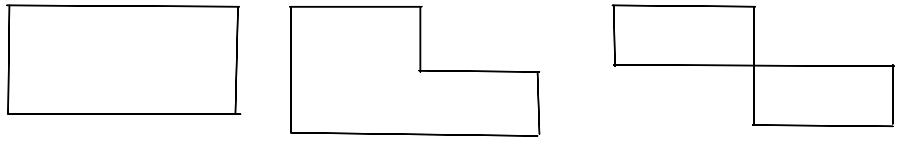


Рис.8.1. Примеры некоторых циклов

В новом плане вновь определяются потенциалы поставщиков и потребителей, и производится проверка плана на оптимальность. Когда среди оценок не окажется больше отрицательных, полученный план будет оптимальным.

Т.о., **алгоритм решения ТЗ** методом потенциалов состоит из следующих этапов:

Этап 1. Составление начального плана перевозок.

Этап 2. Вычисление потенциалов поставщиков и потребителей; проверка оптимальности плана перевозок. Если план оптимальный, то задача решена; иначе следует переход к этапу 3.

Этап 3. Построение нового (улучшенного) плана перевозок, для которого транспортные затраты меньше или, по крайней мере, равны затратам для предыдущего плана. Далее следует переход к этапу 2.

Пример 3. Рассмотрим применение метода потенциалов для нахождения оптимального плана ТЗ, опорный план которой найден ММС (таблица 8.5).

■ Для определения потенциалов составляем систему уравнений (для **занятых ячеек**)

$$u_1+v_2=2,\ u_1+v_4=1,\ u_1+v_5=0,\ u_2+v_3=1,\ u_3+v_1=3,\ u_3+v_2=2,\ u_4+v_1=5,\ u_4+v_3=2.$$

Полагая $u_1=0$, находим $v_2=2$, $v_4=1$, $v_5=0$, $u_3=0$, $v_1=3$, $u_4=2$, $v_3=0$, $u_2=1$.

Потенциалы проставлены в таблицу (столбец u_i и строка v_j), которую мы обозначим «Итерация 0». Потенциалы можно вычислять и непосредственно в таблице, не выписывая систему уравнений. Если известны потенциал и тариф занятой ячейки, то из соотношения $u_i+v_j=c_{ij}$ легко определить неизвестный потенциал (из суммы вычесть известное слагаемое).

Определим оценки **свободных ячеек** ($\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$):

$$\Delta_{11}=0+3-3=0,\ \Delta_{13}=0+0-4=-4,\ \Delta_{21}=1+3-2=2,\ \Delta_{22}=1+2-3=0,\ \Delta_{24}=1+1-5=-3,\ \Delta_{25}=1+1-5=-3,\ \Delta_{33}=0+0-4=-4,\ \Delta_{34}=0+1-4=-3,\ \Delta_{35}=0+0-0=0,\ \Delta_{42}=2+2-3=1,\ \Delta_{44}=2+1-6=-3,\ \Delta_{45}=2+0-0=2.$$

Далее оценки будем также вычислять непосредственно в таблице, помещая их в левом нижнем углу каждой свободной ячейки. Так как среди оценок есть положительные, то план $X_0=X_{м.ст}$ не является оптимальным. Перейдём к этапу 3 – улучшению плана X_0. Для этого выберем ячейку (4,5) (она имеет одну из наибольших положительных оценок (2) и меньший тариф, чем ячейка (2,1) с той же оценкой). Из этой ячейки проводим цикл (табл.2). В цикл войдут ячейки (4,5) (отмечается знаком «+»), (1,5) (отмечается знаком «-»), (1,2) (отмечается знаком «+»), (3,2) (отмечается знаком «-»), (3,1) (отмечается знаком «+»), (4,1) (отмечается знаком «-»). Наименьшее значение груза, стоящее в вершинах цикла со знаком «-»,

Итерация 0

B_j / A_i	30	25	35	20	20	u_i
50	3 – 0	2 10 ⊕	4 – -4	1 20	0 20 Θ	0
	2	3	1	5	0	

Итерация 1

B_j / A_i	30	25	35	20	20	u_i
50	3 – 2	2 25	4 – -2	1 20	0 5	0
10	2 –	3 –	1 10	5 –	0 –	-1

10	– 2	– 0	10	– -3	– 1	1
20	3 5 ⊕	2 15 Θ	4 – -4	4 – -3	0 – 0	0
50	5 25 Θ	3 – 1	2 25	6 – -3	0 – 2 ⊕	
v_j	3	2	0	1	0	

	2 ⊕	-2	Θ	-5	-1	
20	3 20	2 – -2	4 – -4	4 – -5	0 – -2	-2
50	5 10 Θ	3 – -1	2 25 ⊕	6 – -5	0 15	0
v_j	5	2	2	1	0	

α=min(20,15,25)=15. Это число прибавляется к переменным в ячейках со знаком «+» и вычитается от переменных в ячейках со знаком «-». В результате получается новый план с меньшими затратами (таблица 3, итерация 1).

Для нового плана X_1 определяем новые потенциалы и оценки свободных ячеек (итерация 1). Новый план также не оптимален. Перейдём к этапу 3 – улучшению плана X_1. Для этого выберем ячейку (2,1) (она имеет одну из наибольших положительных оценок (2) и меньший тариф, чем ячейка (1,1) с той же оценкой). Из этой ячейки проводим цикл (табл.3). В цикл войдут ячейки (2,1) (отмечается знаком «+»), (4,1) (знак «-»), (4,3) (знак «+»), (2,3) (знак «-»). Наименьшее значение груза, стоящее в двух вершинах цикла со знаком «-», одинаково, α=min(10,10)=10. Из базиса должна уйти только одна переменная; пусть это будет переменная x_{41}=10 (тариф этой ячейки больше). Это число прибавляется к переменным в ячейках со знаком «+» и вычитается от переменных в ячейках со знаком «-». В результате получается новый (вырожденный) план с меньшими затратами (итерация 2).

Итерация 2.

B_j / A_i	30	25	35	20	20	u_i
50	3 – 0	2 25	4 – -2	1 20	0 5	0
10	2 10	3 – -2	1 0	5 – -5	0 – -1	-1
20	3 20	2 – 0	4 – -2	4 – -3	0 – 0	0
50	5 – -2	3 – -1	2 35	6 – -5	0 15	0
v_j	3	2	2	1	0	

Для нового плана все оценки неположительные. Следовательно, полученный план

$$X^*=\begin{pmatrix} 0 & 25 & 0 & 20 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 0 \end{pmatrix}$$

является оптимальным (фиктивного потребителя в ответе не указываем). Кроме того, план вырожден (базисная переменная x_{23}=0) и альтернативен (некоторые оценки $\Delta_{11}=\Delta_{32}=\Delta_{34}=0$). При данном плане стоимость перевозок

$$z_{\min}=2\cdot25+1\cdot20+2\cdot10+3\cdot20+2\cdot35=230$$

(ден. ед.). ●

8.4. Транспортная задача с усложнениями. Часто при решении транспортных задач возникает необходимость введения дополнительных ограничений (условий). Рассмотрим наиболее часто встречающиеся условия, используемые при решении задач транспортного типа.

1. **Запрет перевозок от *i*-го поставщика к *j*-му потребителю.** Для определения оптимальных планов таких задач предполагают, что тариф перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j является столь угодно большой величиной M, и при этом условии известными методами находят решение новой транспортной задачи. При таком предположении исключается возможность при оптимальном плане ТЗ перевозить грузы из A_i в B_j. Такой подход к нахождению решения ТЗ называется **запрещением перевозок** или б**локированием** соответствующей клетки таблицы данных задачи.

2. **Фиксированная поставка.** В отдельных ТЗ дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам **определенного количества груза**. Пусть, например, из пункта A_i в пункт B_j требуется обязательно перевезти α_{ij} ед.груза. Тогда в ячейку таблицы данных ТЗ, находящуюся на пересечении строки A_i и столбца B_j, записывают указанное число α_{ij} и в дальнейшем эту ячейку считают свободной со сколь угодно большим тарифом перевозок M. Для полученной таким образом новой ТЗ находят оптимальный план, который определяет оптимальный план исходной задачи.

3. **Нижние границы на поставки.** Иногда требуется найти решение ТЗ, при котором из пункта A_i в пункт B_j должно быть завезено **не менее заданного количества груза α_{ij}.** Для определения оптимального плана такой задачи считают, что запасы пункта A_i и потребности пункта B_j меньше фактических на α_{ij} ед. Далее находят оптимальный план новой ТЗ, на основании которого и определяют решение исходной задачи. После этого к значению переменной x_{ij} добавляют α_{ij}.

4. **Верхние границы на поставки.** В некоторых ТЗ требуется найти оптимальный план перевозки при условии, что из пункта отправления A_i в пункт B_j перевозится **не более чем α_{ij} единиц груза**, т.е. $x_{ij} \le \alpha_{ij}$. Для сведения условия задачи к разрешимому типу поставщика A_i или потребителя B_j (либо того, либо другого) делят на две части, как бы на два самостоятельных поставщика (или потребителя). При этом мощности этих условно са-мостоятельных поставщиков будут равны: $A'_i=\alpha_{ij}$ и $A''_i=A_i-\alpha_{ij}$. Затраты на поставку продукции от поставщика A'_i к B_j и другим потребителям принимаются равными затратам, заданным в матрице $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times n}$. Затраты c''_{ij} на поставку продукции от поставщика A''_i к B_j принимаются равными $c''_{ij}=M$, где M – сколь угодно большое число. Затраты на поставку от A''_i к другим потребителям (помимо B_j) принимаются равными заданным в матрице $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times n}$. Подобный прием обеспечивает положение, при котором переменная $x_{i''j}$ в решении задачи непременно будет равна нулю, в то

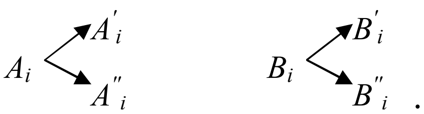


Рис.8.2. Деление поставщика или потребителя на две части

время как переменная $x_{i'j}$ может принимать любое значение от нуля до a_{ij}, $0 \le x_{ij} \le \alpha_{ij}$. После получения оптимального решения соответствующие переменные поставщиков A'_i и A''_i (или потребителей B'_i и B''_i) складываются.

5. Условия полного ввоза-вывоза. Аналогично решается задача в случае, если может возникнуть требование полного вывоза груза из отдельных пунктов отправления или полного удовлетворения заявок некоторых потребителей. Например, пусть в задаче требуется вывезти груз от поставщика A_i полностью. Это означает, что следует назначить очень высокую стоимость M перевозки от поставщика A_i в фиктивный пункт назначения. В случае требования полного удовлетворения заявок, например, некоторого потребителя B_j, следует назначить очень высокую стоимость M перевозки от фиктивного поставщика A_i потребителю B_j.

Усложнения типа полного ввоза-вывоза возможны лишь для открытых ТЗ.

Таблица 8.7.

B_j / A_i	50	80	30	60
65	3	5	4	1
85	4	5	6	2
70	5	1	3	3

Пример 4. Найдем решение ТЗ, исходные данные которой приведены в табл.8.7 с учетом того, что из пункта A_1 в пункт B_1 перевозки не могут быть осуществлены, а из пункта A_3 в пункт B_1 будет завезено 10 ед. груза.

■ Так как из A_1 в B_1 перевозки не могут быть осуществлены, то в ячейке (1,1) тариф считаем равными некоторому сколь угодно большому числу M. Полагаем равным этому же числу и тариф для ячейки (3,1). Одновременно в эту клетку помещаем число 10,так как по условию из A_3 в B_1 нужно завезти 10 единиц груза. В дальнейшем ячейку (3,1) считаем свободной, со сколь угодно большим тарифом M. Находим опорный план методом наименьшей стоимости и проверяем его на оптимальность.

Итерация 0

B_j / A_i	50	80	30	60	u_i
65	2-M	5 -2	⊕ 4 5	⊖ 1 60	0
85	4 40	5 20	⊖ 6 25	⊕ 2 1	2
70	10	1 60	3	3	-2

Итерация 1

B_j / A_i	50	80	30	60	u_i
65	3-M	5 -1	4 30	1 35	0
85	4 40	5 20	6 -1	2 25	1
70	10 M	1 60	3 -4	3 -5	-3
v_j	3	4	4	1	

План не оптимален, так как одна оценка является положительной (1).Строим новый план (итерация 1). Он является оптимальным. Следовательно, исходная ТЗ имеет оптимальный план

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 35 \\ 40 & 20 & 0 & 25 \\ 10 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

	M		-1	-4	
v_j	2	3	4	1	

При этом общая стоимость перевозок
$z^*=4\times30+1\times35+4\times40+5\times20+2\times25+5\times10+1\times60=575$ ден. ед.
является минимальной. ●

Таблица 8.8.

B_j / A_i	50	80	30	60
65	3	5	5	1
85	4	5	6	2
70	5	1	3	3

Пример 5. Найдем решение ТЗ, исходные данные которой приведены в табл.8.8 с учетом того, что из пункта A_2 в пункт B_4 завезти не менее 5 ед. груза, а из A_2 в B_1 – не более 30 ед. груза.

■ Так как из A_2 в B_4 необходимо завезти не менее 5 ед. груза, то запасы этих пунктов отправления и назначения считаем меньшими

Итерация 0

B_j / A_i	30	80	30	55	20	u_i
65	3 10 ⊖	5 -1	5 0	1 55	⊕3 M-4	0
80	⊕ 4 20	5 10	6 30	2 0	M 20 ⊖	1
70	5 -5	1 70	3 -1	3 -5	5 M-9	-3

*Итерация*1

B_j / A_i	30	80	30	55	20	u_i
65	3 4-M	5 3-M	5 4-M	⊖ 1 55	⊕ 3 10	0
80	30	5 10	6 30	⊕ 2 M-4	M 10	M-3
70	5 -5	1 70	3 -1	3 M-9	5 M-9	M-7

v_j	3	4	5	1	M-1	

v_j	7-M	8-M	9-M	1	3	

на 5 ед. Кроме того, поскольку из A_2 в B_1 необходимо завезти не более 30 ед. груза, то пункт назначения B_1 разобьём на два пункта: потребности B_1 теперь считаем равными 30 ед. и рассмотрим дополнительный пункт B''_1 с потребностями, равными 50-30=20 ед. В столбце B''_1 записываем тарифы, помещённые в ячейках столбца B_1, за исключением ячейки (2,1″). В этой ячейке тариф полагаем равным некоторому сколь угодно большому числу M. Решение задачи методом потенциалов приведено в таблицах итер. 0–2.

Итерация 2						
B_j / A_i	30	80	30	55	20	u_i
65	3 0	5 -1	5 0	1 45	3 20	0
80	4 30	5 10	6 30	2 10	M 4-M	1
70	5 -5	1 70	3 -1	3 -1	5 -5	-3
v_j	3	4	5	1	3	

Как видно из итер. 3, исходная ТЗ имеет оптимальный план

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 45 \\ 30 & 10 & 30 & 15 \\ 0 & 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы сложили соответствующие переменные столбцов B_1 и B''_1 и добавили 5 ед. груза в ячейку (2,4) исходя из дополнительных условий задачи. При этом общая стоимость перевозок

$$z^*=3\times20+1\times45+4\times30+5\times10+6\times30+2\times15+1\times70=555 \text{ ден. ед.}$$

является минимальной. ●

Пример 6. Пусть требуется найти решение ТЗ, исходные данные которой приведены в табл., причём потребности B_2 и B_4 должны быть полностью удовлетворены.

b_j / a_i	10	15	15	10
12	9	14	12	10
19	8	6	10	8
7	7	8	7	10

■ Задача открытая, так как $\sum_{i=1}^{3} a_i = 38, \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 50$. Вводим фиктивного поставщика, его мощность a_4=12. Так как потребности B_2 и B_4 должны быть полностью удовлетворены, то следует назначить очень высокую стоимость M перевозки в B_2 и B_4 отфиктивного поставщика.

Решение имеет вид:

Итерация 0					
B_j / A_i	10	15	15	10	u_i

*Итерация*1					
B_j / A_i	10	15	15	10	u_i

12	⊕ 9 3	14 -6	12 ⊖ 6	10 6	0
19	8 2	6 15	10 0	8 4	-2
7	7 0	8 -5	7 7	10 -5	-5
12	0 10 ⊖	M -4-M	0 2 ⊕	M -2-M	-12
v_j	5	3	1	4	

12	9 6	14 -6	12 -3	10 6	0
19	-1	6 15	10 -3	8 4	-2
7	7 0	8 -2	7 7	10 -2	-2
12	4	M -1-M	0 8	M 1-M	-9
v_j	9	8	9	10	

В оптимальном плане фиктивную строку не записывают:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 15 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозок при этом составила z^*=265 ден. ед. Оптимальная стоимость перевозок выше, чем в таком же примере без дополнительных условий, но она минимальна при выполнении дополнительных условий. Недополучат груз потребители B_1 и B_3 в количествах 4 и 8 ед. соответственно. ●

Упражнения

В **№№ 8.1–8.92** *решить транспортную задачу, заданную распределительной таблицей, т. е. найти опорный план методами СЗУ и МС, а затем оптимальный план методом потенциалов*

В таблицах жирным шрифтом выделены номера задач, в первом столбце представлены возможности пунктов отправления, в первой строке – потребности пунктов назначения, в остальных ячейках – тарифы перевозок.

1	30	20	60	15
20	1	3	4	5
30	5	2	10	3
50	3	2	1	4
20	6	4	2	6

2	40	30	20	20
20	2	7	7	6
50	1	1	1	2
10	5	5	3	1
20	2	8	1	4

3	16	30	80	20
20	6	3	4	5
70	5	2	3	3
50	3	4	2	4
30	5	6	2	7

4	20	40	30	20
30	5	1	7	6
40	1	5	8	1
10	5	6	3	3
18	2	5	1	4

17	3	2	1	5

10	3	7	9	1

5	50	10	35	10
40	3	9	4	5
10	1	8	5	3
30	7	2	1	4
20	2	4	10	6

6	50	30	20	20
20	6	1	3	1
30	3	4	5	8
20	5	9	3	2
20	2	4	8	4
17	3	2	1	5

7	20	50	20	35
30	5	9	4	5
20	1	5	5	6
30	2	2	10	4
40	3	7	2	6

8	30	40	50	10
30	7	1	3	2
20	8	4	5	8
10	5	2	3	7
27	5	6	8	4
30	1	9	7	5

9	40	30	30	42
20	7	9	1	5
30	2	7	5	6
40	3	5	10	8
30	3	7	4	5

10	50	10	30	10
10	5	9	3	10
30	3	10	5	9
20	7	2	3	8
32	8	5	11	2
20	5	9	10	5

11	100	200	200	300
100	1	3	4	1
200	5	2	2	7
400	4	4	3	6
200	7	2	5	3

12	200	400	400	800
200	1	6	9	3
400	3	2	2	4
600	4	5	4	7
200	1	4	3	9

13	300	200	300	100
300	3	4	3	1
200	2	3	5	6
100	1	2	3	3
200	4	5	7	9

14	200	300	400	200
200	1	3	4	2
200	1	2	4	1
300	3	4	5	9
300	6	3	7	6

15	10	15	15	10	10
5	3	4	5	4	6
10	1	5	7	1	5
15	4	6	6	3	4
10	2	7	4	7	2

16	30	90	60	90	30
30	1	3	4	3	1
60	9	5	2	4	8
90	3	4	7	4	3
60	5	7	2	6	6

17	1000	500	1500	2000
500	3	1	2	3
1500	1	3	4	2
500	3	6	3	6
1500	2	8	5	7
500	4	3	9	8

18	200	200	100	200
200	5	2	1	1
300	1	3	4	4
200	4	2	3	1
200	4	3	5	2
100	3	2	4	2

19	5	10	15	15	15
10	2	1	3	5	7
5	4	3	4	4	3
5	5	2	3	6	2
10	3	6	5	2	4
15	1	9	7	3	4

20	5	5	10	10	5
5	3	4	6	5	13
5	6	3	7	6	10
10	10	5	2	2	6
15	9	4	4	9	5
10	4	6	2	3	4

21	100	200	200	100	200
100	2	3	4	2	5
200	3	1	1	3	1
300	4	3	3	5	4
200	5	1	2	6	7
100	2	9	8	7	6

22	10	30	30	30	40
10	3	1	3	4	3
30	5	1	2	2	6
60	2	3	4	1	1
10	6	2	5	3	2
60	3	7	4	4	1

23	20	20	40	40	40
20	4	5	2	4	3
40	3	1	3	5	2
80	2	7	6	8	6
40	3	3	1	4	9
20	1	6	9	2	7

24	200	400	100	200	100
200	1	7	12	2	5
100	2	3	8	4	7
200	3	5	4	6	9
400	4	4	3	8	2
400	5	3	7	10	1

25	50	25	50	75
25	3	1	8	1
50	2	5	2	3
75	9	4	6	5
25	7	3	10	3
75	4	6	7	4

26	20	30	20	20	10
20	1	5	1	1	5
30	4	2	6	7	9
10	3	4	5	6	5
30	4	2	3	3	6
30	6	2	3	5	4

27	150	200	300	400
150	1	4	7	2
300	3	6	3	9
250	4	8	12	2
150	1	5	9	13

28	40	60	40	60	20
20	3	3	4	2	3
40	1	2	1	5	3
60	4	8	2	9	12
40	5	7	1	3	6

29	300	150	300	150
150	2	1	3	1
250	8	3	7	4
250	6	4	9	3
150	5	2	4	2

30	200	300	200	300	100
100	2	3	4	5	1
200	2	4	2	6	7
300	6	5	4	5	4
400	4	6	7	6	9

31	15	25	8	12
25	2	4	3	6
18	3	5	7	5
12	1	8	4	5
15	4	3	2	8

32	50	10	20	30
30	5	6	1	2
50	3	1	5	2
20	8	4	2	5
20	6	5	2	4

33	93	77	56	94
77	17	15	10	14
93	14	14	11	13
66	18	16	11	15
74	13	12	13	13

34	1000	600	800	1100
1500	12	9	10	13
500	9	8	9	9
700	15	10	11	14
900	16	10	11	17

35	35	35	55	82
40	13	18	19	20
50	12	18	20	23
60	13	18	18	17
40	13	17	21	22

36	45	15	25	25
35	13	18	19	20
45	12	18	20	21
10	13	18	18	17
10	13	17	18	18

37	120	50	190	110
160	7	8	1	2
140	4	5	9	8
170	9	2	3	6

38	70	220	40	30	60
115	4	5	2	8	6
175	3	1	9	7	3
130	9	6	7	2	1

39	30	30	10	20
50	1	2	4	1
30	2	3	1	5
10	3	2	4	4

40	20	18	44	75
40	1	7	2	5
30	3	8	4	1
50	6	3	5	3

14	5	2	1	2

41	70	5	45	70
60	1	2	9	7
55	3	40	15	5
40	6	4	8	3
85	24	3	3	1

42	46	18	12	15
20	2	2	9	7
16	3	4	6	1
14	5	1	2	2
11	4	5	8	1

43	10	35	15	25
30	3	7	1	5
5	7	5	8	6
45	6	4	8	3
70	3	1	7	4

44	110	30	50	90
130	4	5	6	8
90	10	3	2	3
40	4	10	5	1
30	2	5	3	4

45	25	30	40	15
20	1	3	3	8
20	8	6	2	6
40	7	7	3	8
45	5	2	4	5

46	20	60	55	45
35	6	1	2	5
70	3	4	3	8
45	2	5	4	3
80	2	7	3	6

47	35	20	55	80
30	2	4	1	3
20	5	6	5	4
40	3	7	9	3
50	1	2	2	7

480	70	30	40	15
25	4	11	9	10
25	5	9	8	4
20	6	18	15	12
70	7	15	6	7

49	35	80	25	70
30	1	9	7	2
40	3	1	5	5
70	6	8	3	4
60	2	3	1	3

50	25	80	40	15
10	1	3	3	8
20	8	6	2	6
35	4	7	7	3
45	5	2	4	5

51	70	15	45	70
60	1	2	9	7
55	3	3	1	5
40	6	4	8	3
35	2	3	3	1

52	25	30	40	15
20	1	3	3	8
20	8	6	2	6
40	7	7	3	8
45	5	2	4	5

53	30	25	35	20
50	3	2	4	1
40	2	3	1	5
20	3	2	4	4
50	5	3	2	6

54	10	20	26	34
24	3	1	6	2
26	5	6	7	3
15	2	8	4	5
20	3	2	4	6

55	15	20	34	16
40	2	6	3	4
30	1	5	6	9
35	3	4	1	6
50	4	7	5	1

56	15	40	30	15
40	10	5	7	4
25	7	4	9	10
35	6	14	8	7
60	2	4	5	1

57	16	18	12	15
20	2	3	9	7
16	3	4	6	1
14	5	1	2	2
22	4	5	8	1

58	10	40	20	60
70	9	4	5	7
30	2	3	7	6
50	5	7	6	2
10	1	7	4	2

59	30	20	70	30
60	4	6	3	8
40	3	6	7	8
30	4	15	10	12
50	7	8	6	3

60	15	15	40	30
30	1	8	2	3
50	4	7	5	1
20	5	3	4	4
25	4	1	6	10

61	80	120	60	40
90	4	8	7	6
100	8	5	3	10
80	4	5	4	6
80	4	3	5	6

62	30	30	40	50
60	4	8	5	1
40	2	3	6	4
40	5	4	2	3
50	1	2	1	8

63	40	40	20	50
60	6	7	8	5
60	3	1	4	5
30	6	10	5	6
20	4	8	9	7

64	30	70	15	25
80	4	8	9	6
30	3	3	10	8
40	5	7	5	4
40	6	3	4	3

65	9	31	20
20	3	9	8
14	4	6	7
12	2	4	5

66	10	7	18
15	6	3	7
18	4	2	9
12	5	3	8

67	20	12	37
15	5	3	7
10	3	2	3
21	6	4	8

68	17	21	8
24	5	7	4
16	4	8	3
20	6	9	4

69	40	12	20
17	8	4	9
30	6	3	7
15	5	2	4

70	14	20	30
25	4	5	9
10	2	3	3
12	4	6	8

71	40	120	170
90	5	6	8
65	6	9	10
75	4	7	5

72	25	40	35
20	3	6	4
90	5	9	3
60	4	8	6

73	16	20	35
15	6	7	5
8	5	6	4
20	9	10	6

74	20	12	8
22	7	6	3
18	8	4	2
16	2	3	1
10	20	12	8

75	30	25	35	20
50	3	2	4	1
40	2	3	1	5
20	3	2	4	4
50	5	3	2	6

76	10	20	26	34
24	3	1	6	2
26	5	6	7	3
15	2	8	4	5
20	3	2	4	6

77	45	25	20	30
60	6	7	9	2
40	1	4	6	7
50	3	8	5	4
50	4	3	2	4

78	40	20	40
30	3	5	4
25	4	2	1
15	1	3	2
30	5	3	5

79	40	20	40
30	6	2	4
25	2	1	5
15	5	6	3
30	1	3	2

80	40	20	40
30	2	6	4
25	4	3	5
15	3	1	5
30	5	2	5

81	30	40	90	30
70	11	11	12	11

82	45	65	35	25
50	15	11	16	14

83	75	55	110	60
100	3	3	13	4

84	17	19	25	24
50	18	19	21	17

65	14	16	15	13
45	12	14	15	12

70	17	14	12	13
40	15	13	14	15

90	3	1	4	2
80	7	3	12	8

35	23	18	22	19
30	21	25	19	21

85	30	10	17	32
25	13	11	14	12
55	17	14	13	19
40	14	15	18	16

86	45	10	40	30
40	14	12	8	12
50	15	7	9	14
35	8	15	4	7

87	7	3	6	8
10	15	17	12	14
5	13	11	16	11
9	12	14	11	16

88	60	10	20	50
30	13	11	9	10
40	10	9	10	9
56	9	11	10	12

89	15	40	30	15
40	10	5	7	4
25	7	4	9	10
35	6	14	8	7
60	2	4	5	1

90	40	30	35	15
40	1	2	6	4
30	3	1	3	2
20	5	7	5	1
70	2	3	9	4

91	45	15	45	30
30	8	7	6	3
30	5	3	6	4
40	3	4	5	7
15	2	6	3	8

92	40	20	30	10
20	13	14	12	18
20	15	16	22	14
30	12	13	13	17

В **№№ 8.93–8.128** *решить транспортную задачу с усложнениями, заданную распределительной таблицей.*

Усложнения задаются в нижней строке таблицы. Например, $A_1 \to B_1 \geq 40$ (≤ 50) означает, что от 1-го поставщика 1-му потребителю необходимо доставить не менее 40 ед. груза (не более 50 ед. груза).

93	64	94	74	84	94
180	6	2	3	5	8
70	8	5	6	2	2
160	9	7	5	4	3
$A_1 \to B_1 \geq 40$; $A_3 \to B_4 \leq 50$; $A_2 \to B_3 \leq 30$.					

94	84	144	94	134	84
240	5	8	7	6	12
120	1	3	4	4	14
180	4	2	3	1	12
$A_1 \to B_1 \geq 60$; $A_3 \to B_5 \leq 60$; $A_2 \to B_2 \leq 70$.					

95	70	100	80	90	100
190	14	5	16	7	6
80	13	7	18	5	8
170	12	6	17	6	9
$A_1 \to B_5 \geq 70$; $A_3 \to B_1 \leq 40$; $A_2 \to B_3 \leq 60$.					

96	130	120	90	120
90	6	5	15	17
120	8	7	16	14
130	9	6	14	15
120	7	8	11	13
$A_1 \to B_2 \geq 70$; $A_4 \to B_3 \leq 60$; $A_2 \to B_4 \leq 100$.				

97	30	40	90	20
70	11	11	12	11
65	14	16	15	13
45	12	14	13	12
$A_2 \to B_3 \geq 40$;				

98	20	50	80	30
60	15	11	16	14
70	17	14	12	12
50	15	13	14	15
$A_1 \to B_3 \geq 30$;				

99	40	20	10	20
40	15	16	14	12
30	13	12	14	11
20	12	13	16	15
$A_3 \to B_3 \geq 5$;				

100	13	14	7	11
10	11	13	15	12
25	10	12	13	10
10	11	11	12	10
$A_2 \to B_3 \geq 4$; $A_3 \to B_4 \leq 5$.				

$A_3 \to B_2 \le 10$; $A_1 \to B_2 \le 20$; $A_3 \to B_4 \le 10$.	$A_2 \to B_4 \ge 10$; $A_2 \to B_1 \le 10$; $A_3 \to B_2 \le 20$	$A_3 \to B_4 \ge 8$ $A_1 \to B_2 \le 10$; $A_2 \to B_1 \le 20$	

101	10	5	10	15
20	2	2	4	5
5	4	6	7	10
20	5	3	3	6
15	6	4	5	12
$A_1 \to B_4 = 0$; $A_3 \to B_3 = 5$				

102	100	50	150	100
100	1	3	4	1
50	3	2	2	4
150	4	8	9	5
150	9	6	7	10
$A_4 \to B_1 = 0$; $A_1 \to B_4 = 50$				

103	100	200	300	300
100	4	3	5	2
200	7	1	2	3
300	9	2	4	5
100	1	3	6	4
$A_2 \to B_3 \ge 100$; $A_3 \to B_2 \le 100$				

104	200	400	100	200
200	2	1	3	5
100	4	3	4	7
100	5	8	3	6
400	3	5	2	4
$A_4 \to B_2 \ge 200$; $A_1 \to B_1 \le 100$				

105	10	20	30	40
10	3	1	3	4
50	5	1	2	2
60	2	3	4	6
40	7	2	5	3
$A_2 \to B_4 \ge 20$; $A_3 \to B_2 \le 20$.				

106	20	20	40	40
20	4	5	2	4
40	3	1	3	5
80	2	7	6	8
40	3	3	1	4
$A_3 \to B_4 \ge 20$; $A_4 \to B_3 \le 20$.				

107	100	200	200	300
100	1	3	4	1
200	5	2	2	7
400	4	4	3	6
200	7	2	5	3
$A_4 \to B_2 \ge 100$; $A_3 \to B_3 \le 100$.				

108	400	200	200	100
100	2	1	3	5
200	4	3	4	7
400	5	8	3	6
100	3	5	2	4
$A_1 \to B_2 \ge 50$; $A_2 \to B_1 \le 100$.				

109	30	20	50	40
30	5	3	1	6
20	4	6	4	7
40	4	1	2	3
20	6	3	8	10
$A_3 \to B_2 \ge 10$; $A_4 \to B_4 \le 20$.				

110	400	200	200	100
100	1	7	12	2
200	2	3	8	4
200	3	5	4	6
200	4	4	3	8
$A_2 \to B_4 \ge 50$; $A_1 \to B_3 \le 50$.				

111	200	100	300	300
200	4	3	5	2
100	7	1	2	3
100	9	2	4	5
300	1	3	6	4
$A_3 \to B_2 \ge 50$; $A_2 \to B_3 \le 50$.				

112	400	200	200	100
100	2	1	3	5
200	4	3	4	7
400	5	8	3	6
100	3	5	2	4
$A_2 \to B_4 \ge 50$; $A_1 \to B_1 \le 50$.				

113	120	150	130	70
200	7	5	3	4
190	9	6	5	8
240	9	10	7	10

114	110	190	150	100
250	10	11	7	12
240	9	9	8	10
190	8	7	9	8

115	180	100	120	110
220	9	9	7	8
180	7	9	8	10
230	10	8	11	9

116	100	150	130	90
150	9	9	12	10
200	12	10	11	14
270	10	11	9	12

$A_3 \to B_1=0; A_3 \to B_2=100$	$A_1 \to B_3=0; A_2 \to B_3=90$	$A_1 \to B_2=0; A_1 \to B_3=80$	$A_1 \to B_1=0; A_3 \to B_3=70$

117	180	120	150	90
220	7	8	6	11
180	5	6	8	10
250	6	7	9	9
$A_1 \to B_3=100; A_3 \to B_4=0$				

118	120	130	190	150
210	9	6	8	5
230	10	7	6	8
190	8	10	5	7
$A_2 \to B_1=0; A_1 \to B_4=90$				

119	110	190	150	100
250	10	11	8	12
250	9	9	6	10
180	8	7	9	8
$A_1 \to B_3=0; A_2 \to B_3=90$				

120	200	120	160	90
270	9	7	8	9
270	6	7	7	10
150	3	8	4	11
$A_1 \to B_1=0; A_2 \to B_2=110$				

121	5	10	15	10
5	2	2	4	5
20	4	6	7	10
15	5	3	3	6
20	6	4	5	12
$A_4 \to B_3=0;\ A_2 \to B_2=5.$				

122	50	100	100	150
50	1	3	4	1
100	3	2	2	4
150	4	8	9	5
150	9	6	7	10
$A_3 \to B_4=0;\ A_4 \to B_3=50.$				

123	60	120	180	120
60	1	3	2	1
120	6	2	4	2
180	5	9	5	10
180	7	6	7	15
$A_3 \to B_3=0;\ A_4 \to B_2=75$				

124	70	140	210	140
70	1	2	1	3
140	2	4	5	8
210	3	5	6	9
210	4	6	7	10
$A_3 \to B_4=0;\ A_4 \to B_3=50.$				

125	80	160	240	160
80	2	5	2	3
160	3	4	4	5
80	4	3	6	7
160	5	2	5	4
$A_4 \to B_2=0;\ A_2 \to B_3=80$				

126	180	90	270	180
90	1	3	4	1
90	3	2	9	13
180	3	4	5	8
180	4	5	6	4
$A_3 \to B_1=0;\ A_4 \to B_4=90$				

127	50	25	50	75
50	1	1	3	4
25	7	2	4	2
50	8	9	5	6
50	6	7	8	5
$A_3 \to B_3=0;\ A_1 \to B_1=25$				

128	20	20	20	40
40	2	2	3	4
20	4	5	4	7
40	6	7	3	5
20	3	5	7	4
$A_3 \to B_1=0;\ A_4 \to B_4=90$				

В **№№ 8.129–8.156** *решить транспортную задачу с усложнениями, заданную распределительной таблицей.*

Усложнения задаются в нижней строке таблицы. Они касаются либо полного удовлетворения потребностей некоторых потребителей (в этом случае указываются их номера, например, B_1, B_4*), либо полного вывоза некоторых поставщиков (например,* A_1, A_2*).*

129	50	40	60	50
55	8	6	5	4
75	6	3	4	5
30	7	5	6	6

130	40	40	40	40
70	3	5	4	3
60	2	7	5	2
70	4	6	7	4

131	21	23	18	28
10	13	12	11	15
20	16	13	12	18
30	15	11	13	17

132	16	12	11	10
10	17	16	15	14
20	12	13	11	11
30	15	18	19	17

B$_1$, B$_4$	A$_2$, A$_3$	B$_2$;B$_4$	A$_1$;A$_3$

133	70	150	250
50	12	13	14
160	12	15	13
200	11	14	12
B$_1$, B$_2$			

134	70	45	25	100
160	18	17	14	15
120	20	15	13	19
80	22	19	18	21
A$_2$, A$_3$				

135	21	23	18	28
10	13	12	11	15
20	16	13	12	18
30	15	11	13	17
B$_2$;B$_4$				

136	16	12	11	10
10	17	16	15	14
20	12	13	11	11
30	15	18	19	17
A$_1$;A$_3$				

137	110	200	200
50	7	5	8
150	6	14	12
210	9	11	8
B$_2$, B$_3$			

138	17	25	19	32
65	7	11	12	15
24	9	7	3	11
30	12	8	11	7
A$_1$, A$_2$				

139	20	30	21	19
10	12	19	15	14
20	13	20	13	13
30	15	18	14	12
B$_2$;B$_3$				

140	80	70	100	40
190	21	23	22	21
110	21	23	22	24
30	25	22	21	24
A$_1$;A$_3$				

141	50	40	60	50
55	8	6	5	4
75	6	3	4	5
30	7	5	6	6
B$_1$, B$_2$				

142	40	40	40	40
70	3	5	4	3
60	2	7	5	2
70	4	6	7	4
A$_2$, A$_3$				

143	21	23	18	28
10	13	12	11	15
20	16	13	12	18
30	15	11	13	17
B$_1$;B$_3$				

144	16	12	11	10
10	17	16	15	14
20	12	13	11	12
30	15	18	19	17
A$_1$;A$_2$				

145	110	200	200
50	7	5	8
150	6	14	12
210	9	11	8
B$_1$, B$_2$			

146	17	25	19	32
65	7	11	12	15
24	9	7	3	11
30	12	8	11	7
A$_2$, A$_3$				

147	50	40	60	50
55	8	6	5	4
75	6	3	4	5
30	7	5	6	6
B$_1$;B$_4$				

148	40	40	40	40
70	3	5	4	3
60	2	7	5	2
70	4	6	7	4
A$_2$;A$_3$				

149	5	10	15	10
5	2	2	4	5
20	4	6	7	10
15	5	3	3	6
20	6	4	5	12

150	50	100	100	150
50	1	3	4	1
100	3	2	2	4
150	4	8	9	5
150	9	6	7	10

151	60	120	180	120
60	1	3	2	1
120	6	2	4	2
180	5	9	5	10
180	7	6	7	15

152	70	140	210	140
70	1	2	1	3
140	2	4	5	8
210	3	5	6	9
210	4	6	7	10

A_2, A_4	A_3, A_4	A_3, A_4	A_2, A_4

153	180	90	270	180
90	1	3	4	1
90	3	2	9	13
180	3	4	5	8
180	4	5	6	4
B_2, B_4				

154	50	25	50	75
50	1	1	3	4
25	7	2	4	2
50	8	9	5	6
50	6	7	8	5
B_1, B_3				

155	100	200	300	300
100	4	3	5	2
200	7	1	2	3
300	9	2	4	5
100	1	3	6	4
B_2, B_3				

156	200	400	100	200
200	2	1	3	5
100	4	3	4	7
100	5	8	3	6
400	3	5	2	4
B_1, B_2				

§9. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Пусть некоторая комплексная работа P связана с производством совокупности n более мелких работ P_1, P_2, …, P_n, которые могут выполняться независимо одна от другой. В распоряжении планирующего органа находится m организаций-исполнителей (или рабочих) $И_1$, $И_2$, …, $И_m$, каждая из которых может выполнять только некоторые определенные работы. При этом каждый исполнитель одновременно может выполнять только какую-нибудь работу и каждая работа одновременно может выполняться только одним исполнителем. Задача состоит в распределении работ между исполнителями таким образом, чтобы одновременно выполнялось возможно большее их количество.

Эту задачу можно рассматривать как частный случай транспортной задачи. Здесь рабочие представляют «исходные пункты», а рабочие места − «пункты назначения». Предложение в каждом исходном пункте равно 1, т. е. a_i=1 для всех i. Аналогично спрос в каждом пункте назначения равен 1, т. е. b_j=1 для всех j. Стоимость «перевозки» (прикрепления) рабочего i к рабочему месту j равна c_{ij}. В табл. 9.1 иллюстрируется общая структура задачи о назначениях.

Таблица 9.1

Общая структура задачи о назначениях

		Рабочие места				
		1	2	…	n	Предложение
Рабочие	1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	1
	2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	1
	…	…	…	…	…	…
	m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	1
	Спрос	1	1	…	1	

Прежде чем решать задачу методами, ассоциированными с транспортной моделью, необходимо ликвидировать дисбаланс (т.е. закрыть задачу), добавив фиктивные ресурсы (если $m<n$) или объекты (если $m>n$). Поэтому без потери общности можно положить $m=n$.

Задачу о назначениях можно представить следующим образом. Пусть

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i-\text{й ресурс назначается на } j-\text{й объект,}\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Теперь задача будет формулироваться следующим образом:

$$z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=1\div n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=1\div n,$$

$$x_{ij}=0 \text{ или } 1.$$

Специфическая структура задачи о назначениях позволяет разработать эффективный метод ее решения. Покажем, как реализуется один из таких методов (т.н. **венгерский метод**) на примере приведенной выше задачи.

Теорема 9.1. Оптимальное решение задачи о назначениях не изменится, если к любой строке или столбцу матрицы стоимостей прибавить (или вычесть) постоянную величину.

■ Этот факт можно доказать следующим образом. Если числа p_i и q_j вычитаются из i-й строки и j-го столбца, то новые стоимости имеют вид $c'_{ij}=c_{ij}-p_i-q_j$. Отсюда получается новая целевая функция

$$z'=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c'_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}-p_i-q_j)x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-\sum_{j=1}^{n}q_j\sum_{i=1}^{n}x_{ij}.$$

Так как $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1$, то $z'=z$-const. Отсюда следует, что минимизация исходной целевой функции z приводит к такому же решению, как минимизация z'. ●

Поскольку стоимость не может быть отрицательной, то приведенное соображение показывает, что если можно построить новую $\{c'_{ij}\}$-матрицу с нулевыми элементами и эти нулевые элементы или их подмножество соответствуют допустимому решению, то такое решение будет оптимальным,.

Алгоритм венгерского метода включает в себя следующие шаги.

Шаг 1. (**Получение нулей в каждой строке.**) Для этого в каждой строке определяют наименьший элемент, и его значение вычитают от всех элементов данной строки. Переход к шагу 2.

Шаг 2. (**Получение нулей в каждом столбце.**) В преобразованной таблице стоимостей в каждом столбце определяют наименьший элемент, и его значение вычитают от всех элементов данного столбца. Переход к шагу 3.

Шаг 3. (**Поиск оптимального решения**.) Просматривают строку, содержащую наименьшее число нулей. Отмечают один из нулей этой строки и зачеркивают все остальные нули этой строки и этого столбца, в которых находится отмеченный нуль. Аналогичные операции последовательно проводят для всех строк. Каждому отмеченному нулю соответствует назначение, т.е. переменная x_{ij} принимает значение, равное 1. Если назначение, которое получено при всех отмеченных нулях, является полным (т.е. число отмеченных нулей равно размерности задачи n), то решение является оптимальным. В противном случае следует переход к шагу 4.

Шаг 4. (**Вычеркивание всех нулей таблицы.**) Проводим минимальное число прямых через некоторые строки и столбцы с тем, чтобы все нули оказались вычеркнутыми. Выбирается **наименьший** не вычеркнутый элемент. Этот элемент вычитается из каждого не вычеркнутого элемента и прибавляется к каждому элементу, стоящему на пересечении проведенных прямых. Далее возвращаемся к шагу 3.

Пример 1. Институт получил гранты на выполнение четырех научно-исследовательских проектов. Выходные результаты первого проекта являются входными данными для второго проекта, выходные результаты второго проекта − это входные данные для третьего проекта, результаты третьего проекта используются для работы над четвертым проектом (т.е. проекты нельзя выполнять параллельно). В качестве научных руководителей проектов рассматриваются кандидатуры четырех ученых, обладающих различным опытом и способностями. Каждый ученый оценил время, необходимое для реализации каждого проекта. Матрица времени имеет вид:

$$T=\begin{array}{|cccc|}\hline 3&7&5&8\\ 2&4&4&5\\ 4&7&2&8\\ 9&7&3&8\\ \hline\end{array}\ .$$

На пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы T стоит время, необходимое i-му ученому на выполнение j-го проекта (в месяцах). Требуется выбрать научных руководителей проектов так, чтобы суммарное время выполнения всех проектов было минимальным.

■ Пусть $x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i-\text{й ученый - руководитель } j-\text{го проекта,}\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$ Тогда целевая функция имеет вид:

$z=\sum\limits_{i,j} t_{ij}x_{ij} \to \min$, t_{ij} − элементы матрицы T.

Решаем задачу венгерским методом. Кратко решение задачи можно записать следующим образом:

$$T=\begin{array}{|cccc|}\hline 3&7&5&8\\ 2&4&4&5\\ 4&7&2&8\\ 9&7&3&8\\ \hline\end{array} \;\square\; \begin{array}{|cccc|}\hline 0&4&2&5\\ 0&2&2&3\\ 2&5&0&6\\ 6&4&0&5\\ \hline\end{array} \;\square\; \begin{array}{|cccc|}\hline 0&2&2&2\\ 0&0&2&0\\ 2&3&0&3\\ 6&2&0&2\\ \hline\end{array} \;\square\; \begin{array}{|cccc|}\hline 0\cdot&2&2&2\\ \cancel{0}&0\cdot&2&\cancel{0}\\ 2&3&0\cdot&3\\ 6&2&\cancel{0}&2\\ \hline\end{array} \;\square\; \begin{array}{|cccc|}\hline 0&2&2&2\\ 0&0&2&0\\ 2&3&0&3\\ 6&2&0&2\\ \hline\end{array}$$

$$\square\; \begin{array}{|cccc|}\hline 0\cdot&2&4&2\\ \cancel{0}&0\cdot&4&\cancel{0}\\ \cancel{0}&1&0\cdot&1\\ 4&\cancel{0}&\cancel{0}&0\cdot\\ \hline\end{array}$$

Таблицы 2−5 соответствуют шагам 1−4 венгерского метода, табл. 6 − возвращение к шагу 3, на котором получено второе в этой задаче назначение. Оно является полным, т.к. число отмеченных нулей равно размерности задачи

n=4. Имеем следующее назначение: 1-й ученый назначен научным руководителем 1-го проекта, 2-й − 2-го проекта, 3-й − 3-го и 4-й − 4-го. Получен ответ:

$$X^*=\boxed{\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}}\ ,\quad z^*=3+4+2+8=17 \text{ (месяцев).}$$

Заметим, что если бы мы отмечали нули несколько в ином порядке, то плучили бы другую матрицу назначений с той же стоимостью (альтернативное решение), например:

$$X_1^*=\boxed{\begin{matrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{matrix}}\ ,\ z^*=3+5+2+7=17 \text{ (месяцев).}$$ ●

Пример 2. Имеется четверо рабочих и пять видов работ. Стоимость c_{ij} выполнения i-м рабочим приведена в таблице стоимостей **C**, где под строкой понимается рабочий, а под столбцом − работа.

$$C=\boxed{\begin{matrix}4&5&3&5&6\\5&6&10&9&8\\2&9&3&10&4\\2&3&4&9&10\end{matrix}}\ .$$

■ Данная задача является открытой, т.к. число рабочих m=4 меньше числа работ n=5. Закрываем ее, вводя фиктивного рабочего (т.е. пятую строку таблицы) с нулевыми стоимостями. В этом случае шаг 2 (получение нулей в каждом столбце) становится лишним. Решение имеет вид:

$$\boldsymbol{C}=\boxed{\begin{matrix}4&5&3&5&6\\5&6&10&9&8\\2&9&3&10&4\\2&3&4&9&10\end{matrix}}\ \sqcup\ \boxed{\begin{matrix}4&5&3&5&6\\5&6&10&9&8\\2&9&3&10&4\\2&3&4&9&10\\0&0&0&0&0\end{matrix}}\ \sqcup\ \boxed{\begin{matrix}1&2&0&2&3\\0&1&5&4&3\\0&7&1&8&2\\0&1&2&7&8\\0&0&0&0&0\end{matrix}}\ \sqcup\ \boxed{\begin{matrix}1&2&0\cdot&2&3\\0\cdot&1&5&4&3\\\cancel{0}&7&1&8&2\\\cancel{0}&1&2&7&8\\\cancel{0}\cdot&0\cdot&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{matrix}}$$

$$\sqcup\ \boxed{\begin{matrix}1&2&0\cdot&2&3\\0\cdot&1&5&4&3\\\cancel{0}&7&1&8&2\\\cancel{0}&1&2&7&8\\\cancel{0}\cdot&0\cdot&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{matrix}}\ \sqcup\ \boxed{\begin{matrix}\cancel{2}&2&0\cdot&2&3\\\cancel{0}&0\cdot&4&3&2\\0\cdot&6&\cancel{0}&7&1\\\cancel{0}&\cancel{0}&1&6&7\\1&0&\cancel{0}&0\cdot&0\end{matrix}}\ \sqcup\ \boxed{\begin{matrix}2&2&0&2&3\\0&0&4&3&2\\0&6&0&7&1\\0&0&1&6&7\\1&0&0&0&0\end{matrix}}\ \sqcup\ \boxed{\begin{matrix}2&2&0\cdot&1&2\\0\cdot&\cancel{0}&4&2&1\\\cancel{0}&6&\cancel{0}&6&0\cdot\\\cancel{0}&0\cdot&1&5&6\\2&1&1&0\cdot&\cancel{0}\end{matrix}}$$

Получено следующее назначение: 1-й рабочий выполняет 3-ю работу, 2-й − 1-ю, 3-й − 5-ю и 4-й − 2-ю. Фиктивный рабочий «выполняет» 4-ю работу, т.е. эта работа не получила назначения. Имеем ответ, в котором фиктивные строки (и столбцы, если бы они были) не указаны:

$$X^*=\boxed{\begin{matrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{matrix}}\ ,\quad z^*=3+5+9+9=26 \text{ (руб).}$$ ●

0	0	0	1	0

Алгоритм венгерского метода приведен для случая минимизации критерия эффективности (целевой функции). Предположим, что в задаче о назначениях требуется найти максимум. Как известно, max z=min ($-z$). Поэтому в задаче максимизации умножаем матрицу стоимостей на (-1) и применяем венгерский метод. Рассмотрим пример.

Пример 3. Предприятие имеет пять различных станков, каждый из которых может выполнять пять различных операций. Известна производительность каждого станка при выполнении каждой операции. Она задана следующей таблицей:

$$P=\begin{array}{|ccccc|}\hline 5 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ \hline\end{array}\ .$$

Определить, какую операцию и за каким станком следует назначить, чтобы суммарная производительность была максимальной при условии, что на каждый станок назначается только одна операция.

■ Умножаем матрицу P на (-1) и применяем венгерский метод:

$$P'=\begin{array}{|ccccc|}\hline -5 & -3 & -4 & -6 & -7 \\ -6 & -2 & -6 & -4 & -5 \\ -4 & -3 & -5 & -6 & -6 \\ -3 & -4 & -3 & -4 & -3 \\ -5 & -6 & -3 & -2 & -5 \\ \hline\end{array} ⊔ \begin{array}{|ccccc|}\hline 2 & 4 & 3 & 1 & 0\cdot \\ 0\cdot & 4 & \cancel{0} & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0\cdot & \cancel{0} \\ 1 & 0\cdot & 1 & \cancel{0} & 1 \\ 1 & \cancel{0} & 3 & 4 & 1 \\ \hline\end{array} ⊔ \begin{array}{|ccccc|}\hline 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ \hline\end{array} ⊔$$

$$⊔ \begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 4 & 2 & 1 & 0\cdot \\ 0\cdot & 5 & \cancel{0} & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0\cdot & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 0\cdot & 1 \\ \cancel{0} & 0\cdot & 2 & 4 & \cancel{1} \\ \hline\end{array}$$

Имеем ответ, в котором фиктивные строки не указаны:

$$\boldsymbol{X}^*=\begin{array}{|ccccc|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}\ ,\quad z^*=7+6+5+4+6=28 \text{ (ед)}.$$

●

Упражнения

9.1–9.20. *Имеется n рабочих и m видов работ. Стоимость c_{ij} выполнения i-м рабочим j-й работы приведена в таблице, где под строкой понимается рабочий, а под столбцом – работа. Необходимо составить план работ так, чтобы* *все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была минимальной.*

$$\mathbf{1}\begin{pmatrix}5&6&4&7\\4&5&3&6\\4&5&5&7\\5&4&3&6\\6&3&4&5\end{pmatrix}\quad\mathbf{2}\begin{pmatrix}4&5&3&5\\6&5&4&6\\3&4&3&5\\5&4&3&4\\4&4&5&4\end{pmatrix}\quad\mathbf{3}\begin{pmatrix}3&4&5&5\\3&5&4&4\\5&5&4&5\\4&4&5&4\\3&5&4&5\end{pmatrix}\quad\mathbf{4}\begin{pmatrix}4&4&3&5\\4&5&3&6\\5&5&4&3\\3&3&4&3\\4&4&5&3\end{pmatrix}\quad\mathbf{5}\begin{pmatrix}5&4&6&5\\6&4&5&5\\5&4&6&6\\4&5&5&5\\4&6&4&4\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{6}\begin{pmatrix}6&5&4&5\\5&6&4&6\\6&7&5&7\\5&5&6&6\\4&4&6&7\end{pmatrix}\quad\mathbf{7}\begin{pmatrix}3&4&6&5\\4&5&6&6\\3&6&5&4\\6&6&5&5\\5&3&4&5\end{pmatrix}\quad\mathbf{8}\begin{pmatrix}5&6&7&6\\6&4&5&6\\5&5&6&7\\4&7&4&4\\5&6&7&6\end{pmatrix}\quad\mathbf{9}\begin{pmatrix}7&6&8&7\\6&5&6&7\\6&7&5&6\\6&5&7&6\\4&7&6&4\end{pmatrix}\quad\mathbf{10}\begin{pmatrix}6&7&4&6\\7&6&5&6\\6&5&4&5\\4&4&4&7\\7&5&6&5\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{11}\begin{pmatrix}8&6&2&8\\10&9&7&12\\6&12&9&8\\7&5&11&7\\5&2&3&5\end{pmatrix}\quad\mathbf{12}\begin{pmatrix}3&7&10&5\\11&10&9&12\\7&8&2&10\\10&9&7&12\\8&6&1&5\end{pmatrix}\quad\mathbf{13}\begin{pmatrix}2&4&2&10&5\\3&6&2&5&11\\7&2&1&11&3\\5&12&1&9&11\end{pmatrix}\quad\mathbf{14}\begin{pmatrix}2&4&6&10&5\\1&3&6&7&5\\2&5&7&8&3\\1&5&3&2&9\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{15}\begin{pmatrix}2&3&4&4&5\\9&4&8&5&7\\2&1&9&8&3\\3&1&8&2&9\end{pmatrix}\quad\mathbf{16}\begin{pmatrix}5&8&6&2\\8&5&2&9\\9&3&8&1\\3&1&4&2\\5&3&7&10\end{pmatrix}\quad\mathbf{17}\begin{pmatrix}4&10&3&2\\8&5&9&10\\10&7&8&1\\3&1&9&10\\5&3&7&8\end{pmatrix}\quad\mathbf{18}\begin{pmatrix}7&9&3&2\\8&5&4&9\\10&7&8&1\\3&1&9&10\\5&3&7&8\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{19}\begin{pmatrix}7&10&5&3&9\\9&4&6&2&10\\6&8&10&2&4\\7&3&10&1&5\end{pmatrix}\quad\mathbf{20}\begin{pmatrix}7&5&12&2\\13&10&8&7\\5&7&13&11\\3&2&7&2\\13&13&9&8\end{pmatrix}$$

9.21 (10 вариантов) *Для задач о назначениях*:

1) *составить математическую модель задачи применительно к числовым данным выполняемого варианта;*

2) *решить полученную задачу венгерским методом и сформулировать ответ в экономических терминах в соответствии с условиями задачи.*

Формулировка задачи. Предприятие имеет четыре различных станка, каждый из которых может выполнять шесть различных операций. Известна производительность каждого станка при выполнении каждой операции. Она задана таблицей $C=\{c_{ij}\}.i=1\div4, j=1\div6$.

Определить, какую операцию и за каким станком следует назначить, чтобы суммарная производительность была максимальной при условии, что на каждый станок назначается только одна операция.

Значения	**Варианты**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
c_{11}	8	5	3	4	3	5	9	5	4	6

c_{12}	5	6	4	3	7	6	5	3	5	6
c_{13}	6	7	7	6	5	7	6	3	6	5
c_{14}	7	3	5	5	5	3	6	6	3	6
c_{15}	5	9	6	6	8	5	7	8	3	7
c_{16}	4	7	7	5	7	4	5	7	7	5
c_{21}	7	6	3	3	5	6	6	6	5	7
c_{22}	6	4	5	4	9	7	7	4	8	8
c_{23}	5	8	8	8	4	9	4	6	9	9
c_{24}	6	4	4	9	6	4	3	5	6	4
c_{25}	4	7	6	7	5	4	5	9	3	3
c_{26}	6	5	7	4	4	5	6	5	5	5
c_{31}	6	5	5	4	4	4	7	3	5	5
c_{32}	3	3	5	5	8	5	8	6	6	4
c_{33}	6	8	9	7	6	8	3	5	7	7
c_{34}	5	4	6	8	5	3	5	7	5	5
c_{35}	3	8	7	7	6	6	4	6	6	4
c_{36}	7	4	6	5	3	6	5	6	3	6
c_{41}	4	4	4	5	6	3	7	3	6	6
c_{42}	5	5	6	3	9	5	7	6	7	5
c_{43}	4	9	6	6	3	4	4	4	6	5
c_{44}	8	5	5	5	4	4	6	6	4	3
c_{45}	6	6	8	5	4	5	3	9	4	3
c_{46}	5	5	5	3	5	5	4	5	5	4

§10. Транспортная задача по критерию времени

Как известно, качество плана транспортной задачи можно оценивать по различным критериям. Рассмотрим здесь в качестве такого критерия (целевой функции) время перевозок.

Транспортная задача по критерию времени возникает при перевозке срочных грузов. Как и в обычной ТЗ, имеется m поставщиков с запасами однородного груза в количестве a_i (i=1÷m) и n потребителей, которым этот груз должен быть доставлен в объеме b_j (j=1÷n). Требуется составить план перевозок товара так, чтобы удовлетворить потребности при имеющихся запасах и чтобы при этом наибольшее время доставки всех грузов было минимальным.

Пусть T – матрица времен размера $m\times n$, в которой на позиции (i,j) находится величина t_{ij}. Тогда задача имеет вид:

$$z=\max_{x_{ik}>0} t_{ik} \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \\ \mathbf{X} \geq 0. \end{cases} \qquad (10.1)$$

ТЗ по критерию времени не является задачей линейного программирования, т.к. целевая функция z не является линейной функцией переменных x_{ij}.

Без ограничения общности можно считать, что задача закрытая. В противном случае ее всегда можно закрыть, пропорционально уменьшая избыточные запасы a_i (или потребности b_j) или вводя фиктивные пункты отправления или назначения.

Решение ТЗ по критерию времени может быть получено в следующем порядке. Находится начальный план X_0 (можно использовать, например, метод северо-западного угла или метод наименьшей стоимости). Определяется значение целевой функции $z(X_0)=\max_{x_{ik}>0} t_{ik} = t_{i_0k_0}$. Все свободные ячейки, которым соответствуют $t_{ik}>t_{i_0k_0}$, исключаются из рассмотрения (например, закрашиваются темным фоном). Чтобы понизить значение целевой функции, необходимо освободить ячейку (i_0,k_0), в которой t_{ik} достигает максимума. Для этого можно строить так называемые **разгрузочные циклы**, которые могут включать в свой состав несколько свободных ячеек, т.е. положительные вершины цикла могут опираться на ячейки с нулевыми перевозками. В разгрузочном цикле, начиная с разгружаемой ячейки (i_0,k_0), расставляются поочередно знаки «-» и «+» и осуществляют сдвиг на величину $\theta=\min_{\text{"-"}} t_{ik}$. Если удается эту ячейку разгрузить, то она исключаются из рассмотрения (закрашивается). Получается новый план X_1, на котором значение целевой функции не больше, чем на X_0. Далее снова пытаются разгрузить ячейку, соответствующую $z(X_1)=\max_{x_{ik}>0} t_{ik} = t_{i_1k_1}$. Процесс продолжается до тех пор, пока возможность разгрузить соответствующую ячейку не исчезнет.

Рассмотрим этот метод на примере.

Пример. Пусть $T=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$, a_1=13, a_2=8, a_3=4, b_1=10, b_2=10, b_3=5.

Итерация 0

B_j A_i	10	10	5
13	3 10	3 3	4
8	***2***	⊖ 6 7	⊕ 2 1
4	5	⊕ 7	⊖ 10 4

■ Находим начальный план X_0 методом северо-западного угла (итерация 0). Максимум целевой функции z_0=max{3,3,6,2,10}=10 достигается в ячейке (3,3). Для улучшения решения разгрузим ее с помощью цикла (3,3)→(2,3)→(2,2)→(3,2) (итерация 0). Осуществив сдвиг по циклу, получим новое опорное решение X_1 (итерация 1). Максимум целевой функции на этом опорном решении z_1=max{3,3,6,2,7}=7 достигается в ячейке (3,2). Разгрузим ее с помощью цикла (3,2)→(1,2)→(1,1)→(3,1) (итерация 1). Закрасим ячейку (3,3), т.к. время t_{33}=10 больше, чем z_1=7.

Осуществив сдвиг по циклу, получим новое решение X_2 (итерация 2). Максимум целевой функции на этом опорном решении z_2=max{3,3,6,2,5}=6 достигается в ячейке (2,2). Закрасим ячейку (3,2), т.к. время t_{32}=7 больше, чем z_2=6. Разгрузим ячейку (2,2) с помощью цикла

Итерация 1

B_j A_i	10	10	5
13	⊕ 3 10	⊕ 3 3	4
8	***2***	6 3	2 5
4	⊕ 5	⊖ 7 4	10

Итерация 2

B_j A_i	10	10	5
13	⊖ 3 6	⊕ 3 7	4
8	***2*** ⊕	⊖ 6 3	2 5
4	5 4	7	10

Итерация 3

B_j A_i	10	10	5
13	3 3	3 10	4
8	***2*** 3	6	2 5
4	5 4	7	10

(2,2)→(1,2)→(1,1)→(2,1) (итерация 2). Осуществив сдвиг по циклу, получим новое решение X_3 (итерация 3). Максимум целевой функции на этом о решении z_3=max{3,3,2,2,5}=5 достигается в ячейке (3,1). С помощью оставшихся не закрашенных ячеек разгрузить ячейку (3,1) не удается, поэтому X_3 является оптимальным решением:

$$X^*=\mathbf{X}_3=\begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ z^*=z(X_3)=5. \qquad \bullet$$

Решение ТЗ по критерию времени можно получить также, добавляя последовательно к системе ограничений уравнения, позволяющие улучшить целевую функцию. Рассмотрим такое решение на том же примере. На первом шаге находим какое-то решение системы ограничений ТЗ, например, методом наименьшей стоимости. Это решение имеет вид:

$$X0 = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad z(X0) = 10$$

.

Добавим теперь к системе ограничений уравнение x_{33}=0, так как именно переменная x_{33} определяет полученное значение целевой функции. Получим:

$$X1 = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad z(X1) = 7$$

.

Заменим теперь уравнение x_{33}=0 уравнением $x_{33}+x_{32}$=0 (теперь ячейка (3,2) дает наибольшее время перевозки t_{32}=7). Имеем:

$$X2 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z(X2) = 6$$

.

Далее, уравнение $x_{33}+x_{32}$=0 заменяется уравнением $x_{33}+x_{32}+x_{22}$=0. Получим:

$$X3 = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z(X3) = 5$$

.

Теперь к системе ограничений добавляем уравнение $x_{33}+x_{32}+x_{22}+x_{31}$=0. Полученная система уравнений не имеет решений, так как добавленное уравнение противоречит одному из уравнений ограничений для третьего поставщика, $x_{31}+x_{32}+x_{33}$=0. Получили ответ: $X^*=\begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, z^*=5.

Упражнения

10.1–10.26. *Решить транспортную задачу по критерию времени*

1	50	30	20
50	10	6	4
30	7	6	6
10	12	3	9
10	2	17	7

2	32	40	68
70	9	13	32
30	16	12	16
30	13	7	5
10	12	7	13

3	20	30	50
10	9	5	2
20	4	2	10
40	6	7	5
30	3	8	4

4	36	24	40
10	12	13	14
50	8	12	13
10	5	4	2
30	12	8	3

5	10	70	20
10	7	10	6
10	11	19	9
40	18	9	20
40	5	8	6

6	30	30	40
20	10	4	3
20	5	5	11
40	7	8	4

7	20	30	50
10	9	5	2
20	4	2	10
40	6	7	5

8	20	30	50
20	7	4	5
20	10	8	5
30	7	6	8

9	30	10	60
30	6	3	4
10	11	9	6
20	8	5	9

10	60	10	50
24	16	13	14
16	2	5	6
40	14	6	8

20	6	7	3

30	3	8	4

30	3	6	4

40	2	7	3

40	12	5	3

11	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

12	15	5	10	20
15	5	10	7	1
5	2	8	4	6
30	3	5	8	2

13	10	10	15	15
10	6	9	6	2
15	3	7	5	5
25	4	4	7	3

14	12	8	20	20
30	15	1	13	11
5	12	4	5	4
25	13	5	7	2

15	25	15	5	5
25	9	6	11	1
15	5	5	2	16
10	3	5	8	6

16	5	25	5	15
18	11	7	4	11
12	12	11	3	7
20	13	12	1	2

17	35	15	15	5
16	8	15	12	11
20	12	11	6	6
34	31	15	4	12

18	10	10	20	10
15	9	4	6	5
15	3	4	7	6
20	2	10	3	2

19	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

20	5	5	20	20
5	6	10	17	4
35	9	18	8	7
10	5	8	19	5

21	5	15	15	10
15	15	6	7	1
30	12	8	4	6

22	5	5	15	15
5	6	10	17	4
35	9	18	8	7

23	20	40	50	70
30	13	8	7	11
40	6	7	9	8
50	5	12	5	10
60	19	6	14	4

24	10	3	17	20	10
35	3	5	6	11	2
15	4	6	3	2	3
10	6	7	8	11	2

25	25	15	10	2	8
35	9	16	9	11	11
5	11	6	5	6	5
20	8	11	6	3	7

26	200	200	200	200
200	8	7	6	5
100	7	6	5	7
200	4	5	6	7
300	5	7	6	4

§11. Решение транспортных моделей с помощью MathCAD

11.1. Решение транспортной задачи по критерию стоимостей.

Пример 1. На складах A_1, A_2, A_3 хранится a_1=70, a_2=90, и a_3=50 тонн топлива соответственно. Требуется доставить его четырем потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, заказы которых составляют b_1=50, b_2=70, b_3=40, b_4=40 тонн соответственно. Стоимости перевозки c_{ij} одной тонны с i-го склада j-му потребителю указаны в таблице:

1. Установим, является ли модель транспортной задачи, заданная таб-

	b_1=50	b_2=70	b_3=40	b_4=40
a_1=70	5	2	3	6

лицей, открытой или закрытой. Если модель является открытой, то её необходимо закрыть.

a_2=90	4	3	5	7
a_3=50	2	4	1	5

2. Составим план перевозок, обеспечивающий минимальную стоимость перевозок.

3. Найдём минимальную стоимость перевозок.

■ 1. Суммарные запасы груза 210, а суммарные потребности 200 тонн. Следовательно, задача является задачей открытого типа и ее необходимо закрыть, вводя фиктивного потребителя с потребностями 10 единиц груза при нулевых стоимостях перевозок. Приходим к задаче:

	b_1=50	b_2=70	b_3=40	b_4=40	b_5=10
a_1=70	5	2	3	6	0
a_2=90	4	3	5	7	0
a_3=50	2	4	1	5	0

2. Выводим на листовое поле программу (рис.11.1). Вначале мы вводим векторы

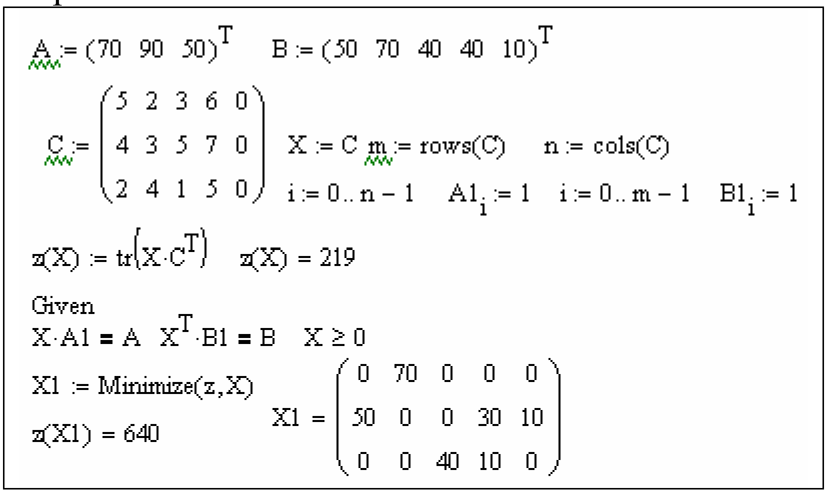


Рис. 11.1. Решение ТЗ по критерию стоимостей в MathCAD

поставщиков A, потребителей B (транспонированные строки введены для того, чтобы их запись занимала меньше места) и матрицу стоимостей перевозок C. Затем фиксируем значения переменных X := C. Векторы A1 и B1 введены для того, чтобы ограничения транспортной задачи записать в матричном виде. Например,

вместо системы ограничений по поставщикам $\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=70, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=90, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=50 \end{cases}$ мы получаем матричное уравнение X·A1=A. Аналогично вместо системы ограничений по потребителям получаем матричное уравнение X^T·B1=B.

Составляем целевую функцию z(X)=tr(X·C^T). Открываем вычислительный блок ключевым словом Given и задаем ограничения в матричном виде. С помощью встроенной функции Minimize(z,X) находим минимальное значение целевой функции z.

3. Вычисляем минимальную стоимость перевозок z(X1)=640 ден.ед. ●

Транспортная задача с усложнениями решается точно так же; это усложнение в виде ограничения добавляется в вычислительный блок Given.

11.2. Решение задачи о назначениях. С помощью транспортных алгоритмов можно решать и некоторые другие задачи, например, задачу о назначении.

Пример 2. Пусть матрица стоимостей C имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} 11 & 8 & 10 & 4 & 9 \\ 11 & 2 & 6 & 12 & 10 \\ 6 & 5 & 13 & 4 & 12 \\ 8 & 10 & 12 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Т.к. задача открыта ($m \neq n$), то вводим фиктивного рабочего с нулевыми стоимостями, и теперь матрица C примет вид

$$C=\begin{pmatrix} 11 & 8 & 10 & 4 & 9 \\ 11 & 2 & 6 & 12 & 10 \\ 6 & 5 & 13 & 4 & 12 \\ 8 & 10 & 12 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи с помощью MathCAD приведено на рис. 11.2.

$$C := \begin{pmatrix} 11 & 8 & 10 & 4 & 9 \\ 11 & 2 & 6 & 12 & 10 \\ 6 & 5 & 13 & 4 & 12 \\ 8 & 10 & 12 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} X := C \quad m := \mathrm{rows}(C) \\ i := 1..m \quad A_i := 1 \end{matrix}$$

$$z(X) := \mathrm{tr}\left(X \cdot C^T\right) \qquad z(X) = 1.557 \times 10^3$$

Given

$$X \cdot A = A \quad X^T \cdot A = A \quad X \geq 0 \quad X1 := \mathrm{Minimize}(z, X)$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z(X1) = 18$$

Рис.11.2. Решение задачи о назначениях с помощью MathCAD.

11.3. Решение транспортной задачи по критерию времени. Решим с помощью MathCAD ту же задачу, которая решена в §10. Пусть $\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$, $a_1=13$,

a_2=8, a_3=4, b_1=10, b_2=10, b_3=5. Введем исходные данные: матрицу T, а также векторы A запасов и B потребностей. Зададим начальные значения переменных X, целевую функцию $z(X)$, а также сформируем два вектора $A1$ и $B1$, состоящие из единиц, назначение которых такое же, как и при решении транспортной задачи по критерию стоимости (рис.11.3).

```
     (3  3  4 )
T := (2  6  2 )     A := (13  8  4)^T   B := (10  10  5)^T
     (5  7  10)     n := cols(T)   m := rows(T)   X := T

ORIGIN := 1     i := 1..m   k := 1..n    A1_k := 1   B1_i := 1

z(X) := | for i ∈ 1..m
        |   for k ∈ 1..n
        |     | y_i,k ← T_i,k  if X_i,k ≠ 0
        |     | (y_i,k ← 0)  otherwise
        | max(y)
```

Рис.11.3. Ввод начальных данных и построение целевой функции

```
g(X) := | r ← 0
        | while max(T) > 0
        |   | naib ← max(T)
        |   | for i ∈ 1..m
        |   |   for k ∈ 1..n
        |   |     if naib = T_i,k
        |   |       | T_i,k ← 0
        |   |       | r ← r + 1
        |   |       | g_r ← X_i,k
        | g
```

Рис.11.4. Переупорядочение переменных $X_{i,k}$

Переупорядочим переменные $X_{i,k}$ по невозрастанию соответствующих им элементов $T_{i,k}$ матрицы T, сформировав для этого вектор- функцию $g(X)$. Координата g_r вектора $g(X)$ будет равна переменной $X_{i,k}$, соответствующей r-му по величине элементу матрицы T (рис.11.4).

Сформируем блок для решения систем ограничений задачи. Присваивая последовательно значения 1, 2, 3,4 параметру r, определим минимальное число p, при котором не будет найдено решение функцией Find. Тогда решение X2, полученное при $r=p-1$ будет оптимальным планом поставленной задачи (рис.11.5).

$$r := 3$$

$$\text{Given}\quad X \ge 0 \quad X \cdot A1 = A \qquad X^T \cdot B1 = B$$

$$\sum_{j=1}^{r} g(X)_j = 0 \quad X2 := \text{Find}(X) \quad X2 = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z(X2) = 5$$

Рис.11.5. Вычислительный блок Given для ТЗ по критерию времени

§12. Задачи целочисленного программирования

12.1. Метод отсечений Гомори. В экономике существует огромное количество задач с дискретной природой. Прежде всего, это задачи с физической неделимостью многих факторов и объектов расчета. Например, нельзя построить 3,1 фабрики или поставить 1,35 автомобиля. Количество комплектов, число агрегатов, число типовых размеров предприятий, типовые мощности предприятий – все это вносит дискретность в оптимизационные расчеты. Дискретными являются задачи с логическими переменными, принимающими только два значения – нуль или единица (т.е. вариант отвергается или принимается). Попытка решения таких задач симплекс-методом приводит, как правило, к нецелочисленным величинам, не имеющим в данном случае смысла. Можно попытаться получить приближенное решение задачи, округляя полученные величины до целых значений. Однако при этом может оказаться, что округленное решение не является планом задачи и существенно отличается от точного решения.

Целочисленное программирование – это раздел математического программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные (все или некоторые) накладывается условие целочисленности.

Методы целочисленной оптимизации можно разделить на две основные группы: точные и приближенные. К точным относятся методы отсечения и метод ветвей и границ.

Общая идея решения задачи целочисленного программирования методами отсечения состоит в следующем. Сначала задача решается без условия целочисленности. Если полученный план целочисленный, то задача решена. В противном случае к ограничениям задачи добавляется новое ограничение. При этом:

а) оно должно быть линейным;
б) должно отсекать оптимальный нецелочисленный план;
в) не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Дополнительное ограничение, обладающее указанными свойствами, называется **правильным отсечением**. Далее задача решается с учетом нового ограничения. После этого в случае необходимости добавляется еще одно ограничение и т.д.

Геометрически добавление каждого ограничения отвечает проведению поверхности, которая отсекает от области допустимых решений некоторую его часть вместе с оптимальной точкой с нецелыми координатами, но не затрагивает ни одной из целых точек этого многогранника. В результате новый многогранник решений содержит все целые точки, заключающиеся в первом начальном многограннике решений, и полученное на этом многограннике оптимальное решение может быть целочисленным. Один из алгоритмов решения задачи ЦП, предложенный американским математиком Р. Гомори, основан на симплекс методе и дает достаточно простой способ построения правильного отсечения.

Пусть задача ЛП

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{10.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=1, 2, \ldots, m, \tag{10.2}$$

$$x_j \text{ – неотрицательны и целочисленны, } j=1, 2, \ldots, n \tag{10.3}$$

имеет конечный оптимум и на последнем шаге ее решения симплекс-методом получены следующие уравнения, выражающие базисные переменные $x_1, \ldots, x_m$ через свободные переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ оптимального решения:

$$x_1 = \beta_1 - \alpha_{1,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{1n} x_n,$$

$$x_2 = \beta_2 - \alpha_{2,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{2n} x_n,$$

…………………………………..

$$x_i = \beta_i - \alpha_{i,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{in} x_n,$$

…………………………………..

$$x_m = \beta_m - \alpha_{m,m+1}x_{m+1} - ... - \alpha_{mn}x_n,$$

Константы β_i и α_{ij}, i=1, …, m, j=m+1, …, n, взяты из последней симплекс-таблицы (без требования целочисленности):

Б.П.	x_1	x_2	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	Реш
z	0	0	…	0	…	0	$\overline{c}_{m+1}$	…	$\overline{c}_n$	β_0
x_1	1	0	…	0	…	0	$\alpha_{1,m+1}$	…	α_{1n}	β_1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	0	0	…	1	…	0	$\alpha_{i,m+1}$	…	α_{in}	β_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	0	0	…	0	…	1	$\alpha_{m,m+1}$	…	α_{mn}	β_m

Пусть в оптимальном решении $\boldsymbol{X}^*=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)$ решение β_i нецелое. Тогда $\beta_i=[\beta_i]+f_i$, $\alpha_{ij}=[\alpha_{ij}]+f_{ij}$, где $N=[a]$ – целая часть числа a, f_i и f_{ij} – дробные части чисел β_i и α_{ij}. Т.к. β_i – нецелое, то $0<f_i<1$; α_{ij} может быть нецелым, поэтому $0\le f_{ij}<1$. После подстановки разбиения коэффициентов на целую и дробную части получим:

$$x_i - [\beta_i] - f_i + \sum_{j=m+1}^{n}[\alpha_{ij}]x_j + \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}x_j = 0 \text{ или } f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}x_j = x_i - [\beta_j] + \sum_{j=m+1}^{n}[\alpha_{ij}]x_j.$$

Поскольку все переменные x_i, i=1, …, n должны быть целыми, то правая часть последнего выражения должна быть целочисленной, откуда следует, что левая часть также должна принимать целые значения. Далее, т.к. $f_{ij}\ge 0$ и $x_j\ge 0$ для любых i, j, то $\sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}x_j \ge 0$. Следовательно, должно выполняться неравенство $f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}x_j \le f_i$. Т.к. дробная часть $f_i<1$, то $f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}x_j < 1$. Но левая часть должна принимать целые значения; следовательно, условием целочисленности будет $f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}x_j \le 0$ (0 – ближайшее целое, меньше 1). Это ограничение можно записать в виде равенства с балансовой переменной S_i: $f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}x_j + S_i = 0$ или $S_i = \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}x_j - f_i$ или

$$S_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}x_j = -f_i, \qquad (10.4)$$

причем S_i по определению должно принимать целые значения. Такое ограничение-равенство определяет отсечение Гомори для полностью целочисленной задачи. Это ограничение-равенство добавляется к последней симплекс-таблице.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 10.1. Равенство (10.4) определяет правильное отсечение Гомори, т.е.:
- является линейным;
- отсекает найденное оптимальное нецелочисленное решение задачи (10.1)–(10.3);
- не отсекает ни одного целочисленного плана задачи (10.1)–(10.3).

Если после итерации окажется, что в оптимальном плане задачи (10.1)–(10.3) имеется несколько нецелых координат, то для построения отсекающей гиперплоскости целесообразно выбрать переменную, имеющую наибольшую дробную часть.

Признаком отсутствия целочисленного решения служит появление в симплекс-таблице хотя бы одной строки с дробным свободным членом (решением) и целыми остальными коэффициентами, т.к. в этом случае соответствующее уравнение не имеет решения в целых числах.

Пример 1. Рассмотрим типичную раскройную задачу, имеющую следующий вид. Металлические прутья длиной L, имеющиеся в достаточном количестве, следует распилить на заготовки двух видов: длиной l_1 и длиной l_2, причём заготовок первого вида должно быть получено не менее n_1 штук и заготовок второго вида – не менее n_2 штук. Каждый прут может быть распилен на указанные заготовки несколькими способами. Требуется найти число прутьев, распиливаемых каждым способом, с тем, чтобы необходимое количество заготовок было получено из наименьшего количества прутьев, поступающих в раскрой.

Для решения задачи необходимо определить всевозможные варианты распила прутьев на заготовки нужной длины, составить математическую модель в виде задачи целочисленного программирования, решить задачу методом отсечений Гомори, найти все оптимальные решения задачи.

■ Пусть L=5,8 м, l_1=1,6 м, l_2=2,4 м, n_1=78, n_2=70. Разделим L=5,8 на l_1=1,6. Получим 3 и 1 м в остатке. Так как $1<l_2$=2,4, то этот остаток идёт в отходы, а мы получаем 1-й вариант распила – $3*l_1+0*l_2$. Если от прута L=5,8 м отпилить 2 заготовки длиной l_1=1,6 м, то останется обрезок длиной 2,6 м, из которого ещё выйдет одна заготовка длиной l_2=2,4 м, и мы получаем 2-й вариант распила – $2*l_1+1*l_2$. Аналогично получаем последний, 3-й, вариант распила – $0*l_1+2*l_2$.

Пусть x_1, x_2, x_3 – число прутьев, распиливаемых по 1-, 2- и 3-му вариантам соответственно. Общее количество прутьев обозначим z. Тогда математическая модель задачи примет вид:

$$z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 78, \\ x_2 + 2x_3 \geq 70, \\ x_i \geq 0, x_i - целочисл., i = 1,2,3. \end{cases}$$

Решаем вначале задачу с ослабленными ограничениями – без учёта целочисленности. Запишем задачу в канонической форме:

$$z - x_1 - x_2 - x_3 = 0,$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_4 = -78, \\ -x_2 - 2x_3 + x_5 = -70, \\ x_i \geq 0, i = 1-5. \end{cases}$$

При этом используем двойственный симплекс-метод.

Итерация 0

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш
z	-1	-1	-1	0	0	0

Итерация 1

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш
z	0	-1/3	-1	-1/3	0	26

x_4	-3	-2	0	1	0	-78
x_5	0	-1	-2	0	1	-70
Отн	1/3	1/2	–	–	–	

x_1	1	2/3	0	-1/3	0	26
x_5	0	-1	-2	0	1	-70
Отн	–	1/3	1/2	–	–	

Итерация 2

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш
z	0	0	-1/3	-1/3	-1/3	148/3
x_1	1	0	-4/3	-1/3	2/3	-62/3
x_2	0	1	2	0	-1	70
Отн.	–	–	1/4	1	–	

*Итерация*3

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш
z	-1/4	0	0	-1/4	-1/2	109/2
x_3	-3/4	0	1	1/4	-1/2	31/2
x_2	3/2	1	0	-1/2	0	39

Разрешающие числа, определяющие разрешающие строку и столбец, подчеркнуты.

Решение не целочисленно – записываем отсечение по переменной, имеющей наибольшую дробную часть, то есть по переменной x_3. Для этого запишем уравнение, соответствующее переменной x_3, выделив в каждом коэффициенте целую и дробную части. Напомним, что целая часть числа a (обозначается $[a]$) – это наибольшее целое, не превосходящее данного; дробная часть числа a (обозначается $\{a\}$) – это разность между самим числом и его целой частью. Тогда имеем:

$(-1+1/4)x_1+(1+0)x_3+(0+1/4)x_4+(-1+1/2)x_5=(15+1/2)$.

Затем в этом уравнении оставим только дробные части (с противоположным знаком), добавив в левую часть балансовую переменную S:

$-1/4x_1-1/4x_4-1/2x_5+S=-1/2$.

Это отсечение является дополнительным ограничением, учёт которого в последней итерации приводит к следующим таблицам:

Итерация 3

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S	Реш
z	-1/4	0	0	-1/4	-1/2	0	109/2
x_3	-3/4	0	1	1/4	-1/2	0	31/2
x_2	3/2	1	0	-1/2	0	0	39
S	-1/4	0	0	-1/4	-1/2	1	-1/2
Отн	1	–	–	1	1	–	

Итерация 4

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S	Реш
z	0	0	0	0	0	-1	55
x_3	0	0	1	1	1	-3	17
x_2	0	1	0	-2	-3	6	36
x_1	1	0	0	1	2	-4	2

Решение оптимально, допустимо и целочисленно. При этом $z_{\min}=55$, $\boldsymbol{X}^{(1)}=(2;36;17;0;0)$. Решение альтернативно, так как коэффициенты в z-строке при свободных переменных x_4 и x_5 равны нулю. Из оптимальной таблицы имеем:

$$z=55+S,\ x_3=17-x_4-x_5+3S,\ x_2=36+2x_4+3x_5-6S,\ x_1=2-x_4-2x_5+4S. \qquad (10.5)$$

Альтернативные решения получаются при значении свободной переменной S, входящей в выражение для z, равной нулю ($S=0$), и при любых значениях свободных переменных x_4 и x_5, не входящих в выражение для z, которые «позволяет» принять система ограничений, чтобы базисные переменные x_1, x_2 и x_3 оставались допустимыми: $0\le x_4\le\min(17,\infty,2)=2$ и $0\le x_5\le\min(17,\infty,1)=1$, то есть при $0\le x_4\le 2$ и $0\le x_5\le 1$. Но в силу условия целочисленности переменные x_4 и x_5 могут принять только значения 0, 1 или 2 для x_4 и 0 или 1 для x_5. Поэтому задача будет дополнительно иметь оптимальные целочисленные решения, когда пара переменных (x_4,x_5) принимает значения (1,0), (2,0) и (0,1) (при значениях (2,1) переменная x_1 перестаёт быть допустимой), а S=0. Подставляя эти значения в систему ограничений (5), найдём эти оптимальные решения:

$$\boldsymbol{X}^{(2)}=(1;38;16;1;0),\ \boldsymbol{X}^{(3)}=(0;40;15;2;0),\ \boldsymbol{X}^{(4)}=(0;39;16;0;1).$$ ●

Наличие альтернативных решений позволяет осуществить выбор одного из них, руководствуясь дополнительными критериями, не учитываемыми в математической модели задачи. Например, из условия данной задачи следует, что распиливание прутьев даёт меньше всего отходов по второму варианту, поэтому естественно при выборе одного из четырёх оптимальных решений отдать предпочтение решению $\boldsymbol{X}^{(3)}$, при котором максимальное число прутьев (x_2=40) распиливается с минимальными отходами.

К недостаткам метода отсечений Гомори можно отнести требование целочисленности для всех переменных – как, основных в задаче, так и для введенных балансовых, которые, вообще говоря, могут быть и дробными.

12.2. Решение задач целочисленного программирования с помощью MathCAD. Входящая в библиотеку MathCAD встроенная функция floor(x) возвращает наибольшее целое число, меньшее или равное x. При каждом целом x функция имеет разрыв первого рода. На поле X-Y Plot ее график (y(x):=floor(x)) имеет вид (рис.12.1):

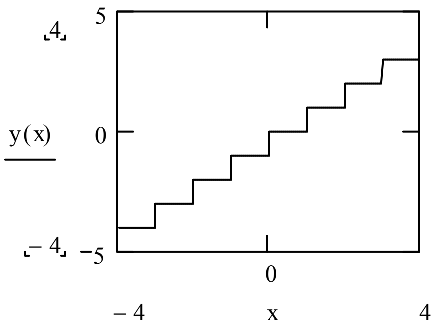


Рис.12.1. График функции floor(x)

Рассмотрим применение функции floor(x) к решению частично и полностью целочисленных задач линейного программирования.

$$ORIGIN := 1$$

$$C := (5\ \ 4) \qquad X := (1\ \ 1)^T \qquad z(X) := C\cdot X \qquad z(X) = 9$$

$$A := \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Given

$$X \ge 0 \qquad A\cdot X \le B \qquad \mathrm{floor}(X_2) = X_2$$

$$M := \mathrm{Maximize}(z, X) \qquad M = \begin{pmatrix} 1.833 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad z(M) = 13.167$$

Рис.12.2. Решение примера 2 в MathCAD

Пример 2. Решим частично целочисленную задачу:

$$z=5x_1+4x_2\to\max;$$
$$6x_1-9x_2\le 2,$$
$$-7x_1+5x_2\le 4,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_2 \text{ – целочисленное.}$$

■ Задаем начальные данные: коэффициенты целевой функции, а также матрицы A и B правых и левых частей ограничений, а также начальные значения переменных (1;1). В вычислительный блок добавляем условие x_2=floor(x_2) (рис. 12.2).

Ответ: (1,833; 1), z_{max}=13,167.

●*Пример* 3. Решим частично целочисленную задачу

$$z=-4x_1+9x_2+2x_3+4x_4\to\max,$$
$$2x_1+x_2+6x_3+2x_4=4,$$
$$2x_1+2x_2+6x_3+x_4=5,$$
$$-2x_1-x_2+3x_3+3x_4=5,$$
$$x_j\geq0,\ (j=1\div4),\ x_2 \text{ – целочисленное.}$$

■ Решение – на рис.12.3. ●

ORIGIN := 1

$C := (-4\ \ 9\ \ 2\ \ 4) \quad X := (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T \quad z(X) := C\cdot X \quad z(X) = 11$

Given

$X \geq 0 \quad (2X)_1 + (X)_2 + 6\cdot X_3 + 2\cdot X_4 = 4$

$2\cdot X_1 + (2\cdot X)_2 + 6\cdot X_3 + 1\cdot X_4 = 5$

$\mathrm{floor}(X_2) = X_2 \quad -2\cdot X_1 - X_2 + 3\cdot X_3 + 3\cdot X_4 = .5$

$M := \mathrm{Maximize}(z, X) \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.5 \\ -7.438\times10^{-15} \end{pmatrix} \quad z(M) = 10$

Рис.12.3. Решение примера 3 в MathCAD

Пример 4. Найдём полностью целочисленные решения для задачи

$$z=3x_1+3x_2\to\max,$$
$$x_1+2x_2\geq2,$$
$$3x_1+2x_2\leq6,$$
$$-x_1+x_2\leq1,$$

$x_j\geq0$, целочисленные $(j=1\div2)$ (рис. 12.4).

■ Решение приведено на рис.3. ●

ORIGIN := 1

$C := (3\ \ 3) \quad X := (0\ \ 4)^T \quad z(X) := C\cdot X \quad z(X) = 12$

$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Given

$X \geq 0 \quad A\cdot X \leq B \quad X_1 + 2\cdot X_2 \geq 2$

$X_1 = \mathrm{floor}(X_1) \quad X_2 = \mathrm{floor}(X_2)$

$M := \mathrm{Maximize}(z, X) \quad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad z(M) = 6$

Рис.12.4. Решение примера 4 в MathCAD

Заметим, что решение задачи целочисленного программирования существенно зависит от выбора начального приближения. Так, в последней задаче выбор начального приближения в точках (0;1) и (1,2) неправильно дает в качестве максимума точку (0;1) со значением целевой функции $z=3$.

12.3. **Решение задач целочисленного программирования с помощью EXCEL.** Задачи ЦП в EXCEL решаются аналогично задачам линейного программирования ЛП. Основное отличие заключается во вводе требования целочисленности. Рассмотрим последовательность действий на примере следующей задачи:

$$z=0{,}3x_1+0{,}4x_2+0{,}4x_3+0{,}5x_4\to\min,$$
$$x_1+x_2+x_4\geq242,$$

$$x_1+x_2+x_3 \geq 241,$$
$$2x_1+x_3+2x_4 \geq 333, \qquad (12.1)$$
$$x_1+3x_2+2x_3+x_4 \leq 401,$$
$$x_j \geq 0,\ x_j \text{ – целочисл.},\ j=1 \div 4.$$

Решим вначале эту задачу без требования целочисленности, как в обычной задаче ЛП.

Действуя по алгоритму решения обычной задачи ЛП, получим решение (табл. 12.1):

Таблица 12.1

Условия общей задачи программирования

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Переменные				
2	имя	Пр.1	Пр.2	Пр.3	Пр.4			
3	значение	165,5	75,5	0	1			
4	нижн.гр.							
5	верхн.гр.							
6	коэф.ЦФ	0,5	0,4	0,6	0,3	113,25	мин	
7				Ограничения				
8	вид					левая часть	знак	Прав. часть
9	трудовые	1	1	0	1	242	>=	242
10	сырьё	1	1	1	0	241	>=	241
11	финансы	2	0	1	2	333	>=	333
12	энергия	1	3	2	1	393	<=	401

Решение не целочисленно – потребуем выполнение условия целочисленности. Для этого необходимо следующее:

1. Сделать форму для ввода условий задачи, добавив к предыдущей табл. требования целочисленности для переменных B6-E6 и ввести исходные данные (табл. 12.2)

Таблица 12.2

Условия задачи целочисленного программирования

A	B	C	D	E	F	G	H

1				Переменные				
2	имя	Пр.1	Пр.2	Пр.3	Пр.4			
3	значение							
4	нижн.гр.							
5	верхн.гр.							
6	целочисл	целое	целое	целое	целое	ЦФ	напр	
7	коэф.ЦФ	0,5	0,4	0,6	0,3	0	мин	
8					Ограничения			
9	вид					Левая часть	знак	Правая часть
10	трудовые	1	1	0	1	0	>=	242
11	сырьё	1	1	1	0	0	>=	241
12	финансы	2	0	1	2	0	>=	333
13	энергия	1	3	2	1	0	<=	401

2. Вызвать диалоговое окно **Поиск решения** командой **Сервис, Поиск решения.**

На экране: диалоговое окно **Поиск решения**.

3. Ввести:

- условия, которые были введены при предыдущем решении (граничные условия и ограничения);

- требования целочисленности:

Добавить…

На экране: диалоговое окно **Добавление ограничений**.

Курсор в окно Ссылка на ячейку.

Ввести адрес ячейки B3.

Курсор на стрелку.

Ввести «целое».

Повторить ввод требования целочисленности для всех целочисленных переменных.

- После окончания ввода требований целочисленности вместо **Добавить…** нажать кнопку **ОК.**

На экране: диалоговое окно **Поиск решения** с введёнными условиями.

4. **Параметры…**

На экране: диалоговое окно **Параметры поиска решения**.

5. Установить флажок Линейная модель, что обеспечивает применение симплекс-метода.

6. **ОК.**

На экране: диалоговое окно **Поиск решения**.

7. **Выполнить.**

На экране: диалоговое окно **Результаты поиска решения**.

8. **ОК.**

На экране: результат решения (табл. 12.3).

Таблица 12.3

Решение задачи целочисленного программирования

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2	имя	Пр.1	Пр.2	Пр.3	Пр.4			
3	значение	166	75	0	1			
4	нижн.гр.							
5	верхн.гр.							
6	целочисл	Цел.	Цел.	Цел.	Цел.	ЦФ	напр	
7	коэф.ЦФ	0,5	0,4	0,6	0,3	113,3	мин	
8				Ограничения				
9	вид					Л. часть	знак	П. часть
10	трудовые	1	1	0	1	242	>=	242
11	сырьё	1	1	1	0	241	>=	241
12	финансы	2	0	1	2	334	>=	333
13	энергия	1	3	2	1	392	<=	401

Графическое представление результатов решения задачи ЦП. Сравнительные данные для непрерывного и целочисленного решений приведены в табл. 12.4:

Таблица 12.4

Данные для непрерывного и целочисленного решений

	A	B	C	D	E	F
1	Решение	прод1	прод2	прод3	прод4	ЦФ
2	Непрерывное	165,5	75,5	0	1	33136,5
3	Целочисленное	166	75	0	1	33182

По данным этой табл. можно построить гистограммы, наглядно демонстрирующие полученные результаты. Для этого необходимо:

1. Выделить ячейки A1-E3.
2. Выполнить алгоритм построения гистограмм.

На экране: гистограмма (рис. 12.5).

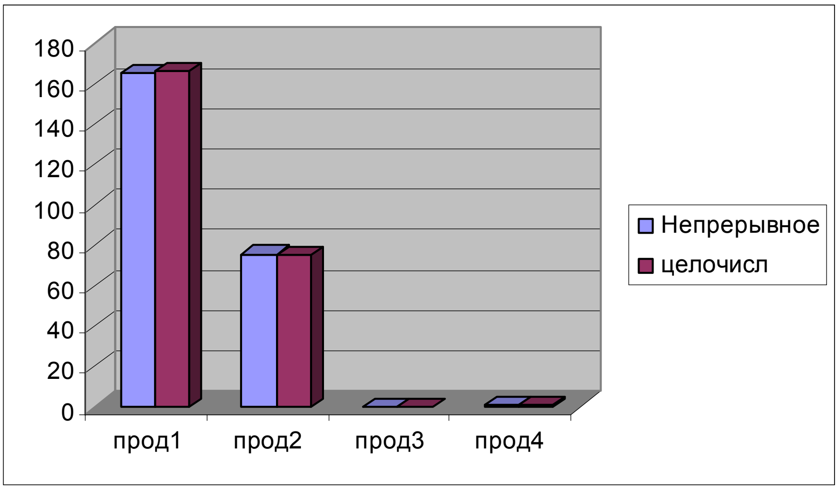


Рис. 12.5. Сравнительная гистограмма для непрерывного и целочисленного решений

Из этого рисунка видно, в частности, что целевая функция в целочисленном решении увеличилась. Это показывает, что **требование целочисленности,** как и любое дополнительное требование, **ухудшает целевую функцию.**

Упражнения

Задачи **12.1–12.30.**

Формулировка задачи. Доски длиной L, имеющиеся в достаточном количестве, следует распилить на заготовки двух видов: длиной l_1 и длиной l_2, причём заготовок первого вида должно быть получено не менее n_1 штук и заготовок второго вида – не менее n_2 штук. Каждая доска может быть распилена на указанные заготовки несколькими способами. Требуется найти число досок, распиливаемых каждым способом, с тем, чтобы необходимое количество заготовок было получено из наименьшего количества досок. Все необходимые числовые данные указаны в таблице. Необходимо:

1) *построить всевозможные варианты распила досок на заготовки нужной длины (т.е. определить карту раскроя);*

2) *составить математическую модель в виде задачи ЦП;*

3) *решить задачу методом отсечений Гомори, или с помощью MathCAD, или с помощью EXCEL;*

4) *найти все оптимальные решения задачи.*

№№	L, м	l_1, м	l_2, м	n_1	n_2
1	2,5	0,9	0,8	76	69
2	3,4	1,4	1,0	62	66
3	2,0	0,6	0,8	90	86
4	2,3	1,1	0,6	88	77
5	3,7	0,8	1,3	54	62
6	2,8	1,0	0,9	68	93
7	4,3	1,4	1,5	85	56
8	1,7	0,7	0,5	38	84
9	3,9	1,2	1,5	91	40
10	2,2	1,0	0,6	44	71
11	2,9	0,8	1,2	78	70
12	1,6	0,6	0,5	86	94
13	4,4	1,3	1,8	79	48
14	1,9	0,9	0,5	60	70
15	2,4	0,7	0,9	57	92

№№	L, м	l_1, м	l_2, м	n_1	n_2
16	3,6	1,6	1,0	74	73
17	2,6	0,7	1,1	81	74
18	4,1	1,4	1,3	76	45
19	1,8	0,5	0,8	67	52
20	2,1	0,9	0,6	58	42
21	3,5	1,0	1,5	57	70
22	4,0	1,8	1,1	60	90
23	2,7	0,8	1,1	45	56
24	3,0	1,2	0,9	50	81
25	3,3	1,0	1,3	63	70
26	3,8	1,4	1,2	80	99
27	3,7	1,1	1,5	87	62
28	4,2	1,6	1,3	92	78
29	3,2	0,9	1,4	75	65
30	4,5	1,7	1,4	86	90

§13. Основы сетевого планирования и управления (СПУ)

13.1. Сетевой график комплекса операций и правила его построения. Деятельность организаций, предприятий и их подразделений по выполнению сложного, трудоёмкого комплекса работ должна быть подчинена единому плану. Только наличие такого плана может обеспечить организованное и своевременное проведение всех работ, входящих в рассматриваемый комплекс. Особое значение при этом имеет правильная организация всей системы управления ходом работ.

План проведения комплекса работ должен отражать все входящие в него этапы работ, их последовательность и взаимосвязь, длительность отдельных этапов и разработки в целом, а также трудоёмкость и стоимость отдельных работ и всего проекта.

План проведения комплекса работ нужно рассматривать как модель, в которой отношения между элементами отражают реально существующую систему – планируемый комплекс работ. Наиболее эффективными областями применения системы СПУ являются: проектные, опытно-конструкторские и научно-исследовательские работы, подготовка производства новых изделий, строительство и реконструкция сложных объектов, технологические процессы изготовления сложных изделий, материально-техническое снабжение, административные мероприятия.

Основой метода СПУ является **сетевой график (сетевая модель)**, отражающий логическую взаимосвязь и взаимообусловленность входящих в него элементарных операций (работ).

Определение 1. Граф, в котором существует лишь одна вершина A_0, не имеющая входящих дуг, и лишь одна вершина A_n, не имеющая выходящих дуг, и каждой дуге которого приписано некоторое число, называется **сетевым графиком** или **сетью.** Числа, приписанные дугам, называются их **длинами**.

Определение 2. Последовательность дуг (A_{i_1}, A_{i_2}), (A_{i_2}, A_{i_3}), …, $(A_{i_{k-1}}, A_{i_k})$,в которой конец каждой предыдущей совпадает с началом последующей, называется **путём.** При этом вершина A_{i_1} является началом, а вершина A_{i_k} – концом пути. **Длиной** пути называется сумма длин последовательности его дуг.

Определение 3. Путь сетевого графика называется **полным**, если его начало совпадает с вершиной A_0, а конец – с вершиной A_n. Если начало некоторого пути совпадает с его концом, то такой путь называется **контуром.**

Как правило, сетевой график имеет большое число полных путей.

Мы будем использовать сетевые графики в терминах «дуги – работы» (или «дуги – операции»); в таких графиках вершины, называемые **событиями**, соответствуют моментам времени начала или окончания одной либо нескольких работ, а дуги – работам. События обозначаются кружками.

Определение 4. В сетевом графике различают три вида событий: исходное, завершающее и промежуточное. **Исходное** – это такое событие, с которого начинается выполнение комплекса операций. **Завершающее** событие соответствует достижению конечной цели, то есть завершению комплекса работ. К **промежуточным** относятся все прочие события.

Предполагается, что события не имеют продолжительности и наступают **мгновенно**.

Определение 5. **Моментом свершения** события считается момент окончания выполнения всех входящих в это событие работ. Пока не выполнены все входящие в событие работы, не может свершиться само событие, а, следовательно, не может быть начата ни одна из следующих непосредственно за ним работ.

Определение 6. Различают три вида работ:

1) **действительная работа** (обозначается сплошной стрелкой $\longrightarrow$) – процесс, требующий затрат времени и ресурсов (разработка проекта, подвоз материалов, выполнение монтажных работ и так далее);

2) **работа-ожидание** (обозначается штрихпунктирной стрелкой $\dashrightarrow$) – процесс, требующий только затрат времени (процессы затвердения бетона, сушки пиломатериалов и тому подобное);

3) **фиктивная работа** (обозначается штриховой стрелкой $\dashrightarrow$) – логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующая затрат труда, материальных ресурсов и времени. Она указывает, что возможность начала одной работы непосредственно зависит от результата другой. Продолжительность фиктивной работы равна нулю.

При построении сетевых графиков необходимо соблюдать определённые **правила**.

1. В сети не должно быть событий (кроме исходного), в которые не входит ни одна работа.

2. Не должно быть событий (кроме завершающего), из которых не выходит ни одна работа.

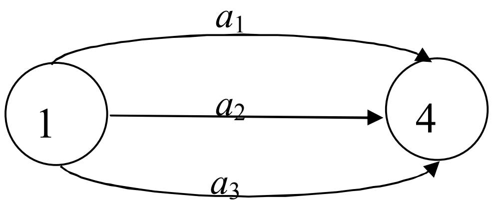


Рис.13.1. Неправильное соединение событий

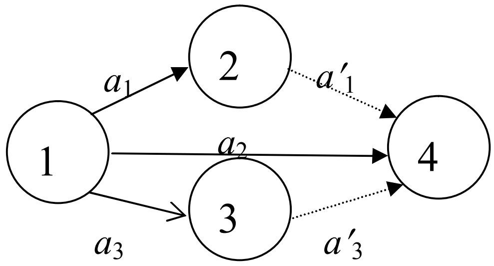


Рис.13.2. Правильное соединение событий

3. Сеть не должна содержать контуров, так как ни одна работа не может предшествовать сама себе.

4. Любая пара событий сетевого графика может быть соединена не более чем одной дугой (работой) a_i (рис.13.1). При этом нужно ввести дополнительные события и соединить их фиктивными работами a_1' и a_3' (рис.13.2).

5. Номер начального события любой работы должен быть меньше номера её конечного события.

6. Для отражения технологической или ресурсной зависимости при выполнении работ также применяют фиктивные работы.

Предположим, что работа a_3 может выполняться после завершения работ a_1 и a_2, а работа a_4 – только после завершения работы a_2. Эта зависимость представлена на рис. 13.3, из которого видно, что работа a_3 следует за работой a_1 и фиктивной работой a_2'.

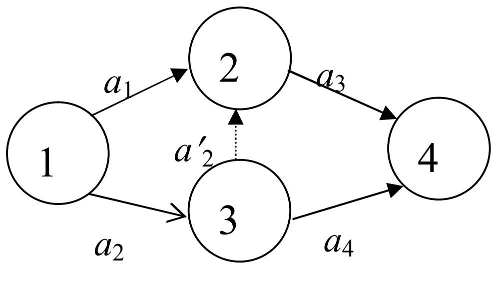


Рис. 13.3. Иллюстрация правила 6

13.2. Построение сетевого графика комплекса операций. Исходная информация о работах, которые требуется выполнить, должна содержать перечень всех работ, последовательность их выполнения и оценку каждой работы (продолжительность, стоимость и тому подобное). Так, например, информация о некотором проекте может быть задана в виде структурной таблицы комплекса работ (табл.13.1). В этой таблице дан перечень (номера) всех работ, последовательность их выполнения, продолжительность каждой работы.

Пример 1. Построим упорядоченный сетевой график комплекса работ в терминах событий.

■ Пусть 0 – номер исходного события. Работы a_1, a_2, a_3 и a_4 не имеют предшествующих работ, поэтому они выходят из исходного события. Работы a_5 и a_{12} опираются на работу a_1. Следовательно, работа a_1 заканчивается событием (№1), из которого выходят работы a_5 и a_{12}. Работы a_6 и a_7 опираются на работы a_2 и a_5. Следовательно, работы a_2 и a_5 заканчиваются событием (№2), из которого выходят работы a_6 и a_7. Работы a_8 и a_9 опираются на работу a_3. Следовательно, работа a_3 заканчивается событием (№3), из которого выходят работы a_8 и a_9. Работы a_{10} и a_{11} опираются на работы a_4, a_6 и a_8. Следовательно, работы a_4,

a_6 и a_8 заканчиваются событием (№4), из которого выходят работы a_{10} и a_{11}, и т.д. На работы a_{16} и a_{17} не опирается ни одна работа, поэтому их окончанием служит завершающее событие (№8). Сетевой график изображён на рис. 13.4. Он выражает логическую связь в последовательности событий и работ. События построенного сетевого графика имеют упорядоченную нумерацию.

Таблица 13.1

Структурная таблица комплекса работ

Работа	Опирается на работы	Продолжит. работы	Работа	Опирается на работы	Продолжит. работы
a_1	–	4	a_{10}	a_4,a_6,a_8	1
a_2	–	5	a_{11}	a_4,a_6,a_8	2
a_3	–	2	a_{12}	a_1	2
a_4	–	2	a_{13}	a_{10}	3
a_5	a_1	2	a_{14}	a_{10}	3
a_6	a_2, a_5	3	a_{15}	a_9,a_{11},a_{13}	1
a_7	a_2, a_5	2	a_{16}	a_9,a_{11},a_{13}	4
a_8	a_3	5	a_{17}	a_7,a_{12},a_{14},a_{15}	4
a_9	a_3	2			

Однако иногда в исходном сетевом графике события имеют неупорядоченную нумерацию. Поэтому после построения графика в случае необходимости рекомендуется перенумеровать его события (номер начального события любой работы должен быть меньше номера её конечного события, правило 5 построения сетевого графика). ●

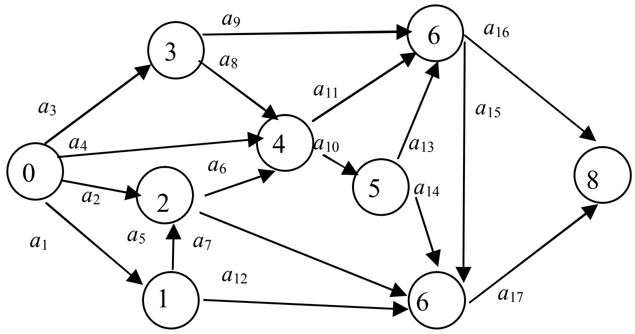


Рис. 13.4. Сетевой график примера 1

13.3. Расчёт временных параметров сетевого графика. Для управления ходом выполнения комплекса работ, представленного сетевым графиком, необходимо располагать количественными параметрами элементов сети. К таким параметрам относятся: сроки выполнения отдельных работ, продолжительность выполнения всего комплекса работ и критический путь.

Пусть весь комплекс работ изображён в виде пронумерованного сетевого графика и известна продолжительность t_{ij} каждой работы. Естественно, возникает вопрос: какова минимальная продолжительность выполнения **всего** комплекса работ. Рассмотрим любой полный путь сетевого графика, то есть путь от исходного события до завершающего.

Определение 7. **Продолжительностью пути** называется время, необходимое для выполнения всех работ, лежащих на этом пути.

Обычно на сети существует несколько полных путей различной продолжительности.

Определение 8. **Критическим** называется полный путь, имеющий наибольшую продолжительность во времени. Его продолжительность называется **критическим временем** $t_{кр}$ выполнения всего комплекса работ. Работы и события, принадлежащие критическому пути, называются соответственно **критическими работами** и **критическими событиями.** Остальные работы и события сети будут некритическими.

В сети может быть несколько критических путей, имеющих одинаковую длину. Если выполнение какой-либо критической работы будет задержано на некоторый срок, то это вызовет запаздывание выполнения всего комплекса работ на тот же срок. Некритические работы допускают некоторое запаздывание с их выполнением, и это не вызывает задержки срока реализации всего комплекса работ.

Определение 9. Под **свершением события** будем понимать момент, к которому заканчиваются все входящие в него работы и может быть начата любая выходящая работа.

Событие может иметь некоторый интервал свободы свершения. В связи с этим различают **ранний** и **поздний** сроки свершения событий.

Определение 10. **Ранний срок** $t_р(j)$ свершения события j равен минимальному сроку, необходимому для выполнения **всех** работ, предшествующих этому событию. Он определяется продолжительностью самого длительного из предшествующих ему путей от исходного события до данного события j.

Ранний срок свершения события j может быть подсчитан по формуле:

$$t_р(j)=\max_i (t_р(i)+t_{ij}), \qquad (13.1)$$

где максимум берётся по всем событиям i, непосредственно предшествующим событию j. При этом принимают, что ранний срок свершения исходного события равен 0. Ранний срок свершения завершающего события определяет продолжительность критического пути $t_{кр}$.

Любое событие должно наступить не позднее такого предельного момента, чтобы осталось достаточно времени на выполнение всех работ, следующим за ним, иначе произойдёт задержка с реализацией всего комплекса работ. Поэтому вводится понятие позднего срока свершения события.

Определение 11. **Поздний срок** $t_п(i)$ свершения события i равен разности между продолжительностью критического пути $t_{кр}$ и продолжительностью самого длинного из всех путей от данного события i до завершающего.

Поздний срок свершения события i может быть подсчитан по формуле:

$$t_п(i)=\min_j (t_п(j)-t_{ij}), \qquad (13.2)$$

где минимум берётся по всем событиям j, непосредственно следующим за событием i. При этом принимают, что поздний срок свершения завершающего события равен раннему сроку его свершения, или критическому времени.

Определение поздних сроков свершения событий следует вести последовательно от завершающего события к исходному. При правильном расчёте для исходного события получим $t_р(0)=t_п(0)$.

При работе с сетевым графиком вручную, если количество событий невелико, вычисления удобно проводить прямо на графе. Для этого каждый кружок, обозначающий событие, делим на три сектора. Нижний сектор отводится для записи номера события, левый – для вычисляемого раннего срока свершения события $t_р$, и, наконец, правый – для вычисляемого позднего срока свершения события $t_п$.

Пример 2. Вычислим временные параметры событий для сетевого графика из примера 1.

■ Каждый кружок, обозначающий событие, делим на три сектора. Нижний сектор отводится для записи номера события, левый – для вычисляемого раннего срока свершения события $t_р$ и, наконец, правый – для вычисляемого позднего срока свершения события $t_п$.

Вычислим временные параметры событий для полученного сетевого графика.

Для определения ранних сроков свершения событий воспользуемся формулами (1). Событию 1 (j=1) непосредственно предшествует одно событие, нулевое (i=0), поэтому $t_р(1)=\max(t_р(0)+t_{01})=\max(0+4)=4$.

Событию 2 (j=2) непосредственно предшествуют два события 0 и 1, нулевое (i=0,1), поэтому $t_р(2)=\max(t_р(0)+t_{02},\ t_р(1)+t_{12})=\max(0+5,\ 4+2)=6$.

Аналогично получаем для остальных событий:

$t_р(3)=\max(t_р(0)+t_{03})=\max(0+2)=2$,

$t_р(4)=\max(t_р(0)+t_{04},\ t_р(2)+t_{24},\ t_р(3)+t_{34})=\max(0+2,\ 6+3,\ 2+5)=9,\ldots,$

$t_р(8)=\max(t_р(6)+t_{68},\ t_р(7)+t_{78})=\max(13+4,\ 14+4)=18$.

Критическое время выполнения всей программы $t_{кр}=t_р(8)=18$.

Для определения поздних сроков свершения событий воспользуемся формулами (2). Считая $t_п(8)=t_р(8)=18$, имеем

$t_п(7)=\min(t_п(8)-t_{78})=\min(18-4)=14$,

$t_п(6)=\min(t_п(8)-t_{68},t_п(7)-t_{67})=\min(18-4,14-1)=13,\ldots,$

$t_п(1)=\min(t_п(7)-t_{17},t_п(2)-t_{12})=\min(14-2,6-2)=4$,

$t_п(0)=\min(t_п(4)-t_{04},t_п(3)-t_{03},t_п(2)-t_{02},t_п(1)-t_{01})=\min(9-2,4-2,6-5,4-4)=0$.

Полученные значения временных параметров событий проставлены в соответствующих секторах сетевого графика (рис. 13.5).

Какие работы принадлежат критическому пути? Работа (i,j) принадлежит критическому пути, если выполнены условия:

$$t_р(i)=t_п(i),\ t_р(j)=t_п(j),$$
$$t_р(j)-t_р(i)=t_п(j)-t_п(i)=t_{ij}.$$

Этим условиям удовлетворяют работы (0,1) (т. е. a_1), (1,2) (a_5),

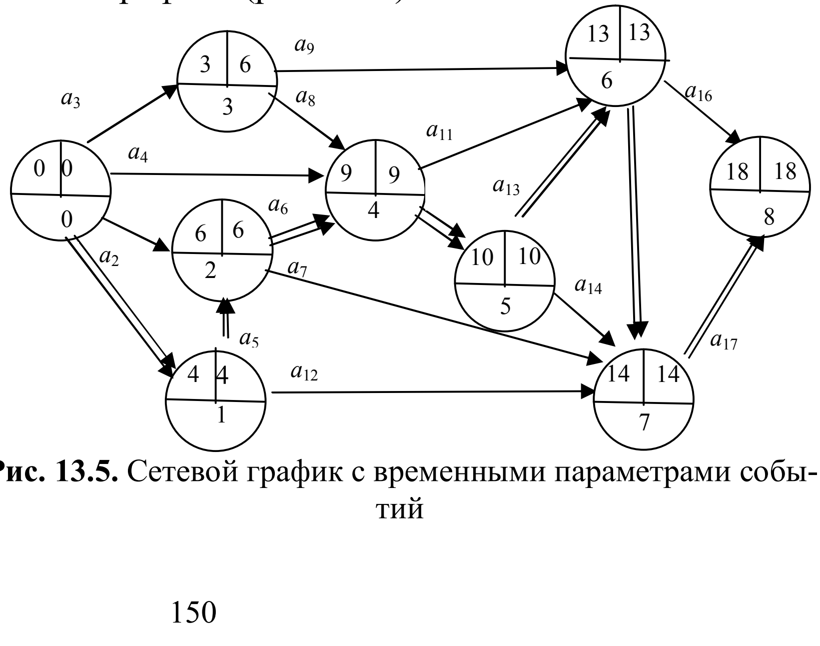


Рис. 13.5. Сетевой график с временными параметрами событий

(2,4) (a_6), (4,5) (a_{10}), (5,6) (a_{13}), (6,7) (a_{16}), (7,8) (a_{17}). Они выделены двойными стрелками. ●

13.4. Моменты начала и окончания работ. Резервы времени. Основными временными параметрами работ сетевого графика являются моменты их начала и окончания. Для критической работы эти моменты равны срокам свершения начального и конечного событий данной работы. Любая задержка в сроках выполнения критической работы недопустима, так как она приводит к задержке в выполнении всего комплекса работ. Для некритической работы (i, j) различают моменты ее наиболее раннего возможного начала $t_{\text{рн}}(i, j)$ и окончания $t_{\text{ро}}(i, j)$, а также моменты наиболее позднего допустимого (без увеличения длительности всего комплекса работ)-начала $t_{\text{пн}}(i, j)$ и окончания $t_{\text{ро}}(i, j)$.

Ранний срок начала работы равен раннему сроку свершения ее начального события:

$$t_{\text{рн}}(i, j)=t_{\text{р}}(i). \qquad (13.3)$$

Ранний срок окончания работы равен раннему сроку начала работы, сложенному с продолжительностью:

$$t_{\text{ро}}(i, j)=t_{\text{р}}(i)+t_{ij}. \qquad (13.4)$$

Поздний срок окончания работы равен позднему сроку свершения ее конечного события:

$$t_{\text{по}}(i, j)=t_{\text{п}}(j). \qquad (13.5)$$

Поздний срок начала работы равен позднему сроку ее окончания за вычетом продолжительности работы:

$$t_{\text{пн}}(i, j)=t_{n}(j)-t_{ij}. \qquad (13.6)$$

Работа может обладать резервами времени. Рассмотрим два основных вида резервов времени выполнения работ: полный резерв $R_{\text{п}}(i, j)$ и свободный резерв $R_{\text{с}}(i, j)$.

Полный резерв времени работы – это максимальное количество времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения, не изменяя срока завершения всего комплекса работ.

Полный резерв времени равен разности между поздним и ранним сроками начала (или окончания) работы, а с учетом соотношений (13.3) – (13.6) полный резерв равен разности между поздним сроком свершения конечного события работы и ранним сроком окончания этой работы:

$$R_{\text{п}}(i, j)=t_{\text{п}}(j)-t_{\text{ро}}(i, j)=t_{\text{п}}(j)-t_{\text{р}}(i)-t_{ij}. \qquad (13.7)$$

Полный резерв времени ,у критических работ равен нулю. Некритические работы обладают ненулевым полным резервом. Увеличение продолжительности некритической работы за счет использования всего ее полного резерва обязательно влечет появление нового критического пути, в состав которого войдет эта работа.

Свободный резерв времени работы – это максимальное количество времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения при условии, что она начинается в свой ранний срок, не изменяя при этом ранних сроков начала последующих работ. Свободный резерв времени равен разности между ранним сроком свершения конечного события данной работы и ранним сроком окончания этой работы:

$$R_с(i, j)=t_р(j)-t_{ро}(i, j)=t_р(j)-t_р(i)-t_{ij}. \qquad (13.8)$$

Из соотношений (13.7) и (13.8) следует, что для любой работы свободный резерв не превосходит полного резерва времени, и для работ, оканчивающихся критическими событиями, эти резервы совпадают. Свободный резерв времени можно использовать для каждой работы произвольно, им может распоряжаться непосредственный исполнитель данной работы, так как затягивание работы в пределах этого резерва не препятствует своевременному исполнению остальных работ. При использовании полных резервов следует согласовать друг с другом время выполнения последующих работ. Поэтому полным резервом времени должен распоряжаться руководитель всего комплекса работ.

13.5. Табличный метод расчета временных параметров сетевой модели. Для расчета временных параметров сетевой модели предполагается, что события сети упорядочены, каждая работа закодирована шифрами начального и конечного событий, известны продолжительности всех работ.

Алгоритм табличного метода расчета состоит из семи операций при заполнении табл. 13.2. В этой таблице:

– 1-й столбец – (i, j) – шифр работы;

– 2-й столбец – t_{ij} – продолжительность работы;

– 3-й и 4-й столбцы – сроки начала работы – ранний $t_{рн}(i, j)$ и поздний $t_{пн}(i, j)$;

– 5-й и 6-й столбцы – сроки окончания работы – ранний $t_{ро}(i, j)$ и поздний $t_{по}(i, j)$;

– 7-й и 8-й столбцы – резервы времени работы – полный $R_п(i, j)$ и свободный $R_с(i, j)$.

1. В графу 1 заносятся шифры работ в возрастающем порядке начального и конечного событий работ.

2. В графу 2 записываются значения продолжительностей работ.

3. Графы 3 и 5 заполняются совместно по следующим правилам:

а) в графу 3 для всех работ (i, j), начинающихся в событии i, записывается срок его раннего начала $t_р(i)$;

б) в графу 5 записывается сумма чисел, содержащихся в графах 2 и 3.

4. Графы 4 и 6 заполняются совместно по следующим правилам:

а) в графу 6 для работ (i, j), оканчивающихся событием j, записывается срок его позднего окончания $t_п(j)$;

б) в графу 4 записывается разность чисел, содержащихся в графах 6 и 2.

Таблица 13.2

Табличный метод расчета

(i, j)	t_{ij}	Срок начала работы		Срок окончания работы		Резерв времени работы	
		$t_{рн}(i, j)$	$t_{пн}(i, j)$	$t_{ро}(i, j)$	$t_{по}(i, j)$	$R_п(i, j)$	$R_с(i, j)$
1	2	3	4	5	6	7	8
(0,1)	4	0	0	4	4	0	0
(0,2)	5	0	1	5	6	1	1
(0,3)	2	0	2	2	4	2	0
(0,4)	2	0	7	2	9	7	7
(1,2)	2	4	4	6	6	0	0

(1,7)	2	4	12	6	14	8	8
(2,4)	3	6	6	9	9	0	0
(2,7)	2	6	12	8	14	6	6
(3,4)	5	2	4	7	9	2	2
(3,6)	2	2	11	4	13	9	9
(4,5)	1	9	9	10	10	0	0
(4,6)	2	9	11	11	13	2	2
(5,6)	3	10	10	13	13	0	0
(5,7)	3	10	11	13	14	1	1
(6,7)	1	13	13	14	14	0	0
(6,8)	4	13	14	17	18	1	1
(7,8)	4	14	14	18	18	0	0

5. Полный резерв времени работы определяется как разность между сроками ее позднего и раннего начала (или окончания). Поэтому в графу 7 записывается разность чисел, содержащихся в графах 4 и 3 (или 6 и 5).

6. Свободный резерв времени работы определяется как разность между ранним сроком свершения конечного события данной работы и ранним сроком свершения начального события минус продолжительность данной работы. Свободный резерв времени записывается в графу 8.

7. Из графы 7 выписываются все работы, для которых полный резерв времени равен нулю. Последовательность этих работ есть критический путь. Из табл. 2 следует, что критический путь образуют работы (0,1), (1,2), (2,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8).

13.6. Построение линейной карты сети обычным способом и средствами EXCEL. Сетевой график, хотя и дает четкое представление о порядке следования работ, все же недостаточно нагляден для определения тех работ, которые должны выполняться в каждый данный момент времени. Поэтому в случае небольшого числа работ полезно после составления пронумерованного сетевого графика составить так называемую линейную карту (диаграмму) сети.

На горизонтальной оси наносится равномерная шкала времени t. Каждая работа изображается отрезком, параллельным оси времени, длина которого равна продолжительности этой работы. Фиктивная работа имеет нулевую продолжительность, и она изображается точкой. События i и j, обозначающие начало и конец работы (i,j), ставят соответственно в начале и конце отрезка. Отрезки – работы располагают один над другим снизу вверх в порядке возрастания номеров начального и конечного событий, в последовательности, указанной в табл. 13.2 (графа 1).

Линейная карта может быть построена по ранним и поздним срокам свершения событий. При построении линейной карты по ранним срокам момент наступления исходного события считается равным нулю, т. е. все отрезки $(0, j)$ откладываются от оси ординат. Отрезок (i,j) откладывается так, чтобы его начало лежало на одной вертикали с самым правым концом всех отрезков–работ, заканчивающихся событием j. Тем самым, начало каждой работы (i,j) соответствует раннему сроку $t_p(i)$ наступления события i. Линейная карта, построенная для сетевого графика, показанного на рис. 13.5, приведена на рис. 13.6.

На ней сплошными линиями показаны отрезки–работы, построенные по ранним срокам свершения событий.

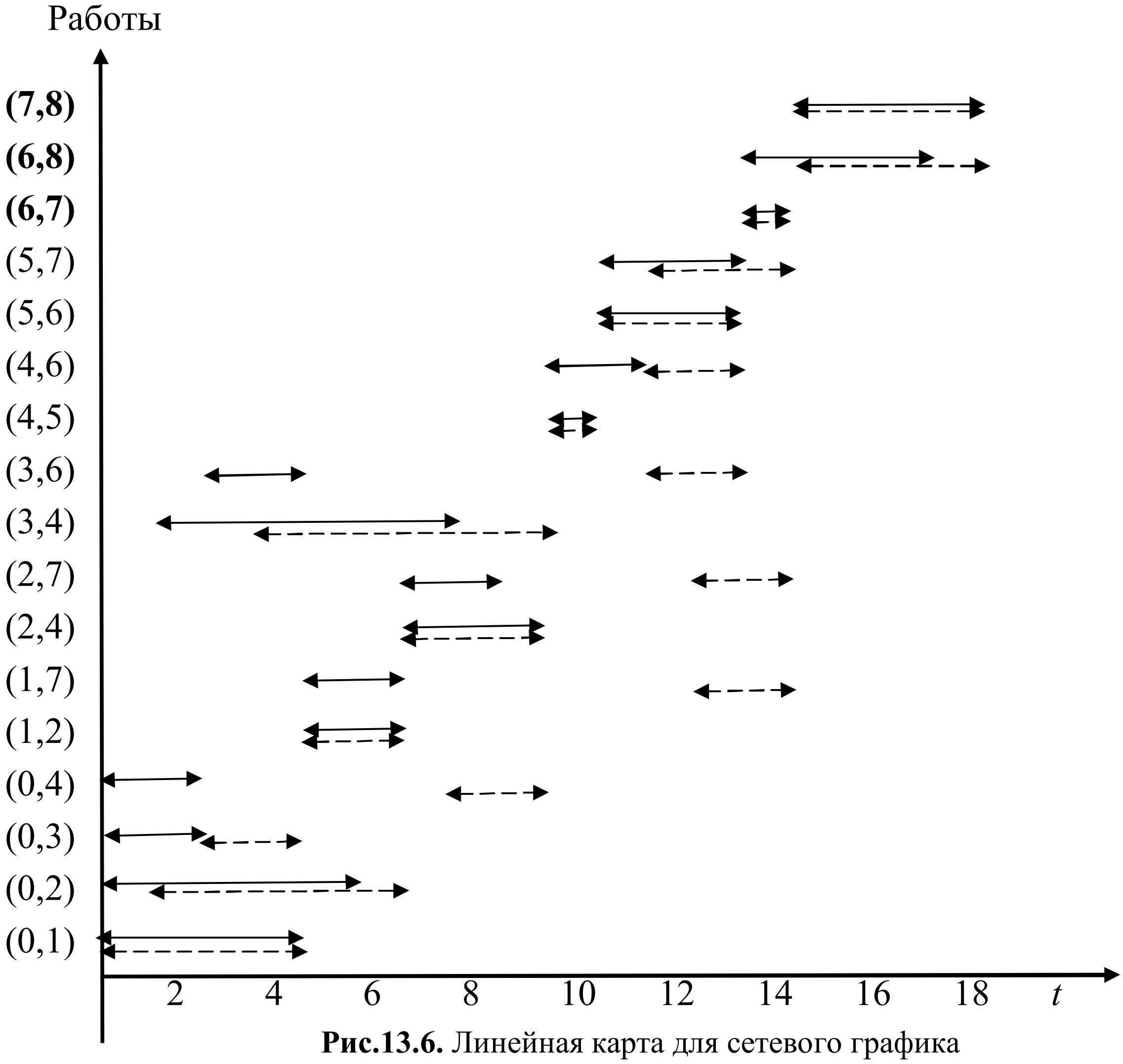


Рис.13.6. Линейная карта для сетевого графика

По линейной карте можно определить критическое время, критический путь, а также резервы времени всех работ. Критическое время равно координате по оси времени самого правого конца всех отрезков линейной карты. В нашем случае критическое время $t_{кр}$ равно 18. Критический путь можно найти следующим образом. Находится отрезок, правый конец которого расположен на вертикали критического времени $t=t_{кр}$, – это будет работа (7,8). Затем находится отрезок, правый конец которого расположен на одной вертикали с левым концом работы (7,8), – это работа (6,7). После этого находятся работы (5,6), (4,5), (2,4), (1,2), и, наконец, работа (0,1), начинающаяся в момент времени t=0. Выделенные отрезки–работы образуют критический путь. Если критических путей несколько, то указанный способ позволяет найти все критические пути.

Свободный резерв времени $R_c(i, j)$ работы (i, j) на линейной карте определяется как наибольшее расстояние, на которое можно сдвинуть вправо отрезок (i, j), не сдвигая ни одного отрезка с началом j, т. е. не изменяя начала $t_p(j)$ работ, выходящих из события j. На рис. 6 свободный резерв, например, работы

(3,6) равен 9, так как отрезок (3,6) можно сдвинуть вправо на 9, не сдвигая отрезка (6,7). Работа же (5,6) не имеет свободного резерва, так как любой сдвиг вправо отрезка (5,6) возможен лишь при таком же сдвиге отрезка (6,7).

Для отыскания полных резервов времени надо построить линейную карту по поздним срокам свершения событий. Момент наступления завершающего события считается равным критическому времени $t_{кр}$, т. е. все отрезки $(i,7)$ откладываются влево от вертикали $t=t_{кр}$. Отрезок (i,j) откладывается так, чтобы его конец лежал на одной вертикали с самым левым началом всех отрезков–работ, начинающихся событием j. Тогда начало каждой работы (i,j) будет соответствовать позднему сроку $t_п(i)$ наступления события i. На рис.13.6 отрезки–работы, построенные по поздним срокам свершения. событий, показаны пунктирными линиями. Полный резерв времени $R_п(i, j)$ работы (i, j) определяется как величина сдвига отрезка (i, j) от старого положения до нового положения. Например, полный резерв работы (3,6) равен 9, а работы (4,6) равен 2.

Линейная карта сети строится с целью анализа сетевой модели и определения возможности оптимизации хода выполнения работ. По линейной карте можно узнать, например, как распределены материальные или трудовые ресурсы в каждый момент времени. Допустим, что каждую работу выполняет один человек, при этом он может выполнять любую работу. Из рис. 6 видно, что в промежутке времени $2 \le t \le 3$ выполняется четыре работы (0, 1), (0, 2), (3, 4), (3, 6), и, значит, в течение этого времени будет занято четыре человека, а в промежутке $9 \le t \le 10$ выполняется только две работы (4, 5) и (4, 6), и необходимо два человека. Однако, если сдвинуть работу (3, 6) вправо на 7 единиц (часть ее свободного резерва времени), то в промежутках $2 \le t \le 3$ и $9 \le t \le 10$ будет выполняться по три работы, и будет занято три человека. По сетевому графику такие взаимосвязи обнаружить значительно труднее.

Линейную карту сети можно построить в **среде Microsoft Excel.** С этой целью в столбцы A, B, C и D заносится содержимое первой, третьей, второй и седьмой колонок табл. 13.2 соответственно. Затем выделяется блок данных столбцов B, C и D и производится обращение к мастеру диаграмм. Выбирается линейчатая диаграмма с накоплением. Щелкнув правой мышкой по диаграмме, выбрать в появившемся окне строку «Выбрать данные». В правой части открывшегося теперь окна (называется «Подписи горизонтальной оси») заносится диапазон ячеек с данными столбца A. В правой части этого же окна (называется «Элементы легенды (ряды)») дать названия рядам, как показано на рис.13.7. После этого в пункте меню «Макет» нажимаем кнопку «Названия осей» и устанавливаем – для горизонтальной и вертикальной –, как показано на рис. 13.7.

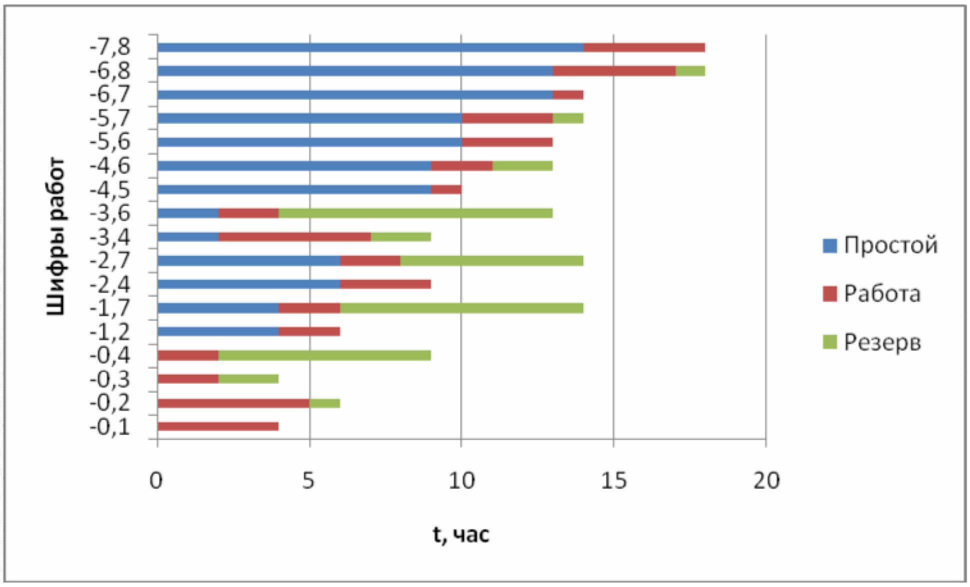


Рис.13.7. Линейная карта для сетевого графика в EXCEL

13.7. Расчет сетевой модели методами линейного программирования.

13.7.1. Постановка пары двойственных задач для сетевой модели. К основным задачам сетевого планирования относятся задачи отыскания критического пути сетевого графика и нахождения моментов наступления событий ([1], [2]). Эти задачи могут быть описаны в терминах линейного программирования и образуют пару двойственных задач.

Пусть в структурной таблице работы пронумерованы от 1 до m, а события сетевого графика упорядочены и пронумерованы от 0 до n, где 0 – исходное, а n – завершающее событие. Для каждого события j ($0 \le j \le n$) обозначим через $u^+(j)$ множество событий сетевого графика, непосредственно предшествующих событию j, а через $u^-(j)$ – множество событий, непосредственно следующих за событием j. Критический путь есть путь сетевого графика, ведущий из исходного события в завершающее (полный путь), имеющий максимальную длину. Для получения математической модели задачи выбора критического пути необходимо составить систему ограничений, охватывающую множество всех полных путей сетевого графика. С каждой работой a_k свяжем число x_k, равное 1, если эта работа входит в критический путь (является критической), и равное 0 для некритической работы. В системе ограничений должны быть учтены следующие условия:

– из исходного события выходит только одна критическая работа a_k, для которой x_k=1, следовательно,

$$\sum_{k \in u^-(0)} x_k = 1; \qquad (13.9)$$

– если в какое-либо событие j входит критическая работа a_k, то должна быть и критическая работа a_l, выходящая из этого события; если в какое-либо событие j не входит критическая работа, то должна отсутствовать критическая работа, выходящая из этого события. Отсюда следует, что имеет место «сохранение потока»:

$$\sum_{k \in u^+(j)} x_k = \sum_{l \in u^-(j)} x_l\,, \ 1 \le j \le n\text{-}1; \qquad (13.10)$$

– в завершающее событие входит только одна критическая работа a_l, для которой x_l=1, следовательно,

$$\sum_{l\in u^+(n)} x_l = 1. \qquad (13.11)$$

Длина полного пути выразится как сумма всех длин t_k (продолжительностей работ a_k, для которых x_k=1:

$$z = \sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k. \qquad (13.12)$$

Итак, математическая модель задачи выбора критического пути формулируется в следующем виде: требуется найти неотрицательные переменные x_k (k=1÷ m), принимающие только два значения 0 или 1, удовлетворяющие ограничениям (13.9), (13.10), (13.11) и обращающие целевую функцию (13.12) в максимум. Поставленная таким образом задача относится к линейному целочисленному программированию с альтернативными переменными. Нетрудно показать, что эта задача разрешима, и симплекс-метод, примененный для решения задачи (13.9) – (13.12), дает оптимальное решение, компоненты которого принимают только два значения 0 или 1. Отсюда следует, что критический путь может быть получен путем решения симплексным методом задачи линейного программирования.

Обозначим через y_j момент свершения события j ($0\le j\le n$). Событие j может наступить лишь тогда, когда наступит каждое предшествующее событие i и будет выполнена работа a_k, соединяющая события i и j, имеющая продолжительность t_k. Это значит, что для любой работы a_k должно выполняться неравенство

$$y_j \ge y_i + t_k. \qquad (13.13)$$

Длительность выполнения всего комплекса работ равна, очевидно, разности между моментами свершения завершающего и исходного событий:

$$w = y_n - y_0. \qquad (13.14)$$

Таким образом, математическая модель задачи о нахождении моментов свершения событий состоит в определении значений y_j, удовлетворяющих неравенствам (13.13) и обращающих целевую функцию (13.14) в минимум.

Рассмотренные задачи линейного программирования являются двойственными и могут быть представлены по схеме (табл. 13.3) с указанием сопряженных пар условий.

Таблица 13.3

Двойственные задачи

I. Задача нахождения критического пути	II. Задача нахождения моментов свершения событий
Найти числа x_k, для которых $z = \sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k \to \max$ при ограничениях	Найти числа y_j, для которых $w = y_n - y_0 \to \min$ при ограничениях

$x_k \geq 0$	$-y_i + y_j \geq t_k$
$-\sum\limits_{k \in u^-(0)} x_k = -1$	y_0 не огр. в знаке
$\sum\limits_{k \in u^+(j)} x_k - \sum\limits_{l \in u^-(j)} x_l = 0$	y_j ($1 \leq j \leq n-1$) не огр. в знаке
$\sum\limits_{l \in u^+(n)} x_l = 1$	y_n не огр. в знаке

13.7.2. Решение прямой задачи для сетевой модели. Решим **прямую задачу** для сетевой модели.

Пример 3. Сеть проекта представлена следующими данными.

Структурная таблица комплекса работ

Работа	Опирается на работы	Продолжит. работы
a_1	–	3
a_2	–	5
a_3	a_1	8
a_4	a_1	2
a_5	a_1	7
a_6	a_2, a_3	2
a_7	a_6	3
a_8	a_5, a_7	6
a_9	a_4	3

Найдём критический путь (максимальный по времени). Сколько времени потребуется для завершения проекта?

■ В соответствии с условиями задачи строим ориентированную сеть (рис. 13.8).

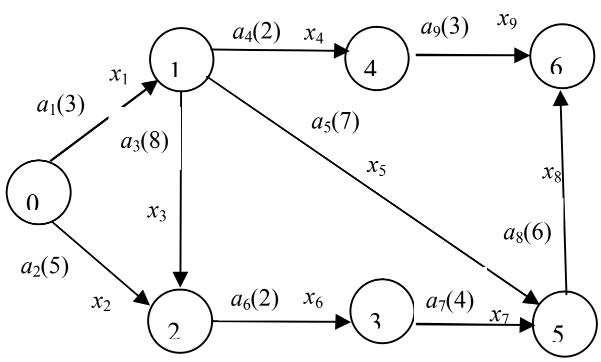


Рис. 13.8. Сетевой график из примера 3

Вводим на листовое поле следующие команды (рис. 13.9). Открываем вычислительный блок и задаем ограничения.

$\text{ORIGIN} := 1$

$C := (3\ 5\ 8\ 2\ 7\ 2\ 4\ 6\ 3)\quad X := (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^T\quad z(X) := C\cdot X$

Given

$X \ge 0$

$X_1 + X_2 = 1\quad X_1 = X_3 + X_4 + X_5\quad X_2 + X_3 = X_6\quad X_6 = X_7\quad X_4 = X_9$

$X_5 + X_7 = X_8\quad X_8 + X_9 = 1\quad K := \text{Maximize}(z, X)$

$$K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\qquad z(K) = 23$$

Рис.13.9. Решение прямой задачи ЛП для сетевого графика из примера 3

С помощью функции Maximize находим критический путь. Вычисляем время завершения проекта z(X)=23. Критический путь проходит через события 0-1-2-3-5-6, $t_{кр}=23$. При этом критические работы: a_1, a_3, a_6, a_7, a_8. ●

13.7.3. Решение двойственной задачи для сетевой модели. Решим **двойственную задачу** для сетевой модели. Моменты свершения событий найдем путем решения двойственной задачи. Двойственная задача состоит в минимизации целевой функции

$$w=y_6-y_0 \qquad (13.9)$$

при ограничениях

$$y_1-y_0\ge3,\ y_2-y_0\ge5,\ y_2-y_1\ge8,\ y_3-y_2\ge2,\ y_5-y_3\ge4,\ y_5-y_1\ge7,\ y_4-y_1\ge2,\ ,\ y_6-y_4\ge3,\ y_6-y_5\ge6. \qquad (13.10)$$

В силу критерия оптимальности, неравенства, соответствующие критическим работам a_1, a_3, a_6, a_7, a_8, должны выполняться как равенства, т. е.

$$y_1-y_0=3,\ y_2-y_1=8,\ y_3-y_2=2,\ y_5-y_3=4,\ y_6-y_5= \qquad (13.11)$$

Полагая момент свершения исходного события равным нулю, $y_0=0$, получим из системы уравнений (13.11) моменты свершения критических событий: $y_1=3$, $y_2=11$, $y_3=13$, $y_5=17$, $y_6=23$. Неравенства (13.10), соответствующие некритическим работам, показывают, что $y_4\ge5$, $y_4\le20$. Отсюда находим двусторонние оценки для сроков свершения некритических событий:

$$5\le y_4\le20,$$

предельные значения которых являются соответственно ранним и поздним сроками свершения этих событий. Полученные значения сведем в табл. 13.4 (1-й столбец – номера событий, i; 2-й – ранний $t_р(i)$ и 3-й – поздний $t_п(i)$ сроки свершения событий). Решение в MathCAD представлено на рис.13.10.

$$Y := (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T \qquad w(Y) := Y_6 - Y_0$$

Given

$$Y \ge 0 \quad Y_1 - Y_0 \ge 3 \quad Y_2 - Y_0 \ge 5 \quad Y_2 - Y_1 \ge 8 \quad Y_3 - Y_2 \ge 2$$

$$Y_5 - Y_1 \ge 7 \quad Y_4 - Y_{.} \ge 2 \quad Y_{.} - Y_4 \ge 3 \quad Y_6 - Y_5 \ge 6 \quad Y_5 - Y_3 \ge 4$$

$$Y1 := \text{Minimize}(w, Y) \qquad Y1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 11 \\ 13 \\ 20 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix} \qquad w(Y1) = 23$$

Рис.13. 10. Решение двойственной задачи ЛП для сетевого графика из примера 3

Методами линейного и нелинейного программирования решаются также задачи сетевого планирования, в которых учитываются имеющиеся в наличии ресурсы (рабочая сила, оборудование и т. п.). В производственной практике руководителю комплекса работ часто приходится сталкиваться с недостатком трудовых и материальных ресурсов. И здесь знание резервов времени позволяет установить, на выполнение каких работ следует выделить дополнительные ресурсы, что бы эти работы были своевременно завершены и чтобы общий срок реализации комплекса не был нарушен.

Таблица 13.4

i	$t_р(i)$	$t_п(i)$
0	0	0
1	3	3
2	11	11
3	13	13
4	5	20
5	17	17
6	23	23

Оптимальные методы применяются в задачах минимизации стоимости выполнения комплекса работ при заданном времени его выполнения за счет увеличения продолжительности отдельных работ, или в задачах минимизации времени выполнения комплекса работ при заданной его стоимости. Математические модели подобных задач сводятся, как правило, к задачам математического программирования.

Упражнения

Для задач **13.1–13.40:**

1) *построить упорядоченный сетевой график комплекса работ в терминах событий;*

2) *вычислить ранние и поздние сроки свершения событий, найти критический путь и критическое время;*

3) *решить симплекс-методом;*

4) *вычислить моменты раннего и позднего начала и окончания работ, полный и свободный резервы времени работ;*

5) *построить линейную карту сети по ранним и поздним срокам свершения событий;*
6) *составить математическую модель задачи нахождения критического пути в виде задачи линейного программирования, найти её решение с помощью MathCAD, определить критический путь и критическое время;*
7) *составить математическую модель задачи нахождения моментов свершения событий как двойственную задачу и, используя критерий оптимальности, определить ранние и поздние сроки свершения событий.*

Формулировка задачи. Построить сетевую модель и произвести расчёт её временных параметров. Исходные данные для расчёта содержатся в структурной таблице комплекса работ, включающей перечень (номера) всех работ, последовательность их выполнения, продолжительность каждой работы. Первый столбец таблицы (№№) – номера работ.

№№	Номера работ, на которые опирается i-я работа (левый столбец каждой задачи), продолжительность i-й работы (правый столбец).																			
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**7**		**8**		**9**		**10**	
1	-	1	-	4	-	8	-	4	-	7	-	5	-	2	-	1	-	7	-	9
2	1	3	1	5	-	5	1	3	-	5	-	4	1	3	-	2	-	3	1	5
3	-	2	1	3	-	4	1	5	1	7	1	6	1	5	-	3	1	4	1	6
4	1	5	2	4	1	6	2	2	2	9	1	8	1	4	1	4	1	6	2	5
5	1	4	3	6	2	7	2	6	2	6	3	7	2	6	2	5	3	6	2	9
6	2,3	3	3	3	2	7	3,4	5	3	8	2,5	5	2	6	2	4	2	3	2	7
7	4	2	3	7	3,4,5	8	3,4	3	3	5	2,5	4	3,5	2	3,5	1	2	7	3,4	8
8	2,3	4	4,5	4	3,4,5	4	5	4	4,6	9	2,5	6	3,5	5	3,5	4	4	4	3,4	5
9	7,8	3	4,5	5	6	6	5	2	4,6	8	4,6	8	4,7	3	4,6	2	4	6	5,7	5
10	7,8	2	6	5	7	5	6,8	3	5,8	6	7	5	4,7	6	7,9	1	5,6,8	5	5,7	6
11	5,6	1	6	3	7	7	6,8	5	5,8	6	7	4	6,8	4	7,9	3	5,6,8	3	6,8,9	8
12	9,11	5	7,8,10	7	8,10	8	7,10	6	7,9,10	7	8,9,10	7	6,8	2	8,10	5	7,10	4	10	6
13	10	4	7,8,10	6	8,10	4	7,10	4	7,9,10	5	8,9,10	8	9,11	5	8,10	1	7,10	7	10	7
14	10	2	9,12	4	9,12	5	9,11	2	11,12	9	11,12	4	10	6	12	3	9,12	5	11,12	9
15	12,14	3	9,12	5	9,12	6	9,11	3	11,12	8	14	7	10	3	11	2	9,12	5	13	7

№i	11		12		13		14		15		16		17		18		19		20	
1	-	7	-	3	-	9	-	3	-	6	-	3	-	5	-	2	-	3	-	3
2	-	8	1	2	-	7	1	2	-	4	1	6	1	7	-	4	1	4	-	4
3	1	5	1	1	-	8	2	6	1	7	1	4	1	9	1	6	1	3	1	2
4	1	6	2	4	1	7	2	4	1	5	2	3	2	7	2	2	1	5	1	3
5	2	7	2	2	1	6	3	2	2	8	2	6	2	8	2	5	2	1	3	5
6	2	5	3	4	2,4	9	3	5	2	4	3	4	2	5	4	3	2	3	3	6
7	3,5	6	3	5	3	7	4	3	3,5	6	3	5	4	9	3,5	5	3	2	3	4
8	3,5	6	4,6	3	3	5	4	2	3,5	4	4,6	7	4	6	3,5	3	3	1	2,5	2
9	4,7	8	4,6	1	5,7	8	5,7	4	4,6	8	4,6	3	4	5	3,5	6	3	4	2,5	5
10	6,8	4	5,8	5	6,8	6	5,7	5	4,6	5	5,7	5	3,5,7	8	6,7	2	4,5,7	3	4,6,8	6
11	6,8	5	5,8	3	9	9	6,8,9	3	7,9	7	5,7	7	6,8,10	7	6,7	5	6,8	2	7,10	3
12	9,10	4	7,9,10	2	9	5	6,8,9	6	7,9	5	8	3	6,8,10	5	6,7	4	6,8	1	9	5
13	9,10	5	7,9,10	3	9	7	6,8,9	4	8,10, 11	6	9,10	4	9,11	9	8,10	2	9,11	3	9	2
14	11,12	5	11,12	5	10,11	8	10,11	3	12	4	9,10	6	12,13	5	9,11	4	10,12	5	11,12	5
15	11,12	4	13	4	12	5	12,14	4	13,14	5	11,12, 13	4	12,13	6	12,14	3	13	3	13,14	2

№i	21		22		23		24		25		26		27		28		29		30	
1	-	2	-	5	-	7	-	3	-	7	-	3	-	3	-	3	-	8	-	5
2	-	4	-	3	1	4	-	5	-	5	-	5	-	5	-	1	-	6	1	4
3	1	3	-	7	-	5	-	2	1	6	1	7	2	4	-	5	2	9	1	6
4	1	5	1	6	1	8	1	4	1	8	1	4	2	3	1	4	2	6	3	7
5	2	1	2	4	4	7	1	6	2	9	2,3	7	3	6	3,4	2	3	8	2	8
6	2	2	2	3	2,3	4	3,4	3	2	5	2,3	6	3	2	1	5	4,5	7	2	5
7	3,5	2	2	7	5,6	8	2,5	6	3,5	7	2,3	3	1	4	2,5	1	1	9	3	6
8	3,5	4	3,4,5	5	2,3	6	2,5	3	3,5	9	4,5	7	1	5	3,4	2	4,5	5	3	7

9	4,6	6	3,4,5	3	7,8	8	6,7	2	4,7	5	4,5	6	4,6,7	6	2,5	4	6	9	4,6	4
10	4,6	1	6	6	5,6	5	6,7	5	4,7	8	7,8	3	4,6,7	2	6,7	5	4,5	8	4,6	8
11	7	3	7,8	4	7,8	6	9	4	6,8,9	5	6	5	5,9	4	10	2	7,10	9	4,6	7
12	8,9,11	4	9	6	9	5	9	6	11	6	6	4	5,9	3	8,9	5	8,11	6	8,11	6
13	8,9,11	1	9	4	10,11	4	8,11	2	6,8,9	7	9,10	6	12	5	11	3	8,11	9	5,7,9	4
14	10,12	3	10,11,12	7	9	7	10,12	4	10,12	5	9,10	3	8,10,11	2	10	1	7,10	7	10,12	8
15	13	1	14	5	13,14	6	13,14	2	13	6	12,14	4	13	6	12,13,14	4	9,12	5	13,14	5

№i	**31**		**32**		**33**		**34**		**35**		**36**		**37**		**38**		**39**		**40**	
1	-	8	-	3	-	2	-	6	-	9	-	6	-	4	-	6	-	4	-	7
2	-	3	1	4	-	5	1	5	-	6	-	6	-	5	1	4	-	6	1	5
3	1	4	1	6	-	3	1	6	2	5	-	7	1	7	2	3	1	4	2	6
4	1	5	2	4	1	4	2	1	1,3	4	1	6	2	6	2	8	1	7	3	6
5	2	6	2	4	2	4	2	3	2	1	2,4	5	3	5	2	5	2	3	3	5
6	2	3	3,4	5	3	6	2	5	4	2	1	4	3	3	3	5	2	5	3	4
7	4	8	5,6	8	4	5	3,4	6	4	4	1	4	4	2	4,6	9	3	7	6	6
8	3,5,7	2	5,6	5	4	7	3,4	2	4	5	1	8	4	3	3	5	3	7	5,7	3
9	3,5,7	4	5,6	1	5,7	3	6,8	8	5,8	3	2,4	9	5,7	4	3	7	4,5	3	6	4
10	4,6	7	9	5	5,7	1	5,7,9	8	5,8	8	3,5	2	5,7	5	4,6	7	6	8	6	6
11	4,6	7	8	7	6	2	6,8	3	9,10	7	6	6	6,9	3	5,7	5	3	5	8,10	5
12	9,11	8	8	8	6	5	10,11	2	6,10,11	2	7	4	6,9	5	8	3	8,9,10	3	4,9,11	8
13	8,10,12	6	7,10,11	6	8,9,11	5	10,11	4	7,9	4	8,9,10	5	8,11	5	9,10	7	8,9,10	9	8,10	1
14	13	5	7,10,11	7	8,9,11	3	12	4	12	6	11	2	8,11	3	11	4	11,12	3	12,13	8
15	14	7	12,14	7	10,12,13	6	13,14	4	13	7	12,13	3	10,12,13	4	12,13,14	6	13,14	7	8,10	4

§14. Принятие решений в условиях неопределенности. Элементы теории игр

14.1. Матричные игры с нулевой суммой. Нижняя и верхняя цены игры. Теория игр занимается разработкой различного рода рекомендаций по принятию решений в условиях конфликтной ситуации. Конфликтной называется ситуация, в которой одна или более сторон стремится решить свои интересы за счет других сторон. Примерами конфликтных ситуаций являются военные действия, спортивные состязания, выборы в органы управления, ситуации «продавец – покупатель», «клиент банка – работник банка», «студент – преподаватель» и т. д. Формализуя конфликтные ситуации математически, их можно представить как игру двух, трех и более игроков, каждый из которых преследует цель максимизации своего выигрыша за счет другого игрока. Иногда теорию игр определяют как раздел математики, занимающийся выработкой оптимальных правил поведения для каждой стороны, участвующей в конфликтной ситуации. Совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий стороны в конкретной конфликтной ситуации, есть **стратегия.**

Под термином **«игра»** понимается совокупность предварительно оговоренных правил и условий, а термин **«партия»** связан с частичной возможной реализацией этих правил. Если n партнеров (игроков) $P_1, P_2, \ldots, P_n$ участвуют в данной игре, то основное содержание теории игр состоит в изучении следующей проблемы: как должен вести партию j-й партнер (j=1, …, n) для достижения наиболее благоприятного для себя исхода?

В дальнейшем предполагается, что в конце партии каждый игрок P_j получает сумму v_j, называемую **выигрышем.** При этом подразумевается, что каждый игрок руководствуется лишь целью максимизации общей суммы выигрыша. Числа v_j (j=1, …, n) могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Если $v_j>0$, то это соответствует выигрышу j-го игрока, если $v_j<0$, – проигрышу, при $v_j=0$ – ничейный исход.

В большинстве случаев рассматривают игры с нулевой суммой, т. е. $v_1+v_2+\ldots+v_n=0$. В этих играх сумма выигрыша переходит от одного партнера к другому, не поступая из внешних источников. Игра с нулевой суммой предусматривает, что сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю. Примерами игры с нулевой суммой служат многие экономические задачи. В них общая сумма выигрыша перераспределяется между игроками, но не меняется. В противном случае имеем игру с ненулевой суммой.

Игры, в которых участвуют два игрока, называются **парными**, а игры с большим числом участников – **множественными.** Принятие игроком того или иного решения в процессе игры и его реализация называется **ходом.** Ходы могут быть **личные** и **случайные**. Если ход выбирается сознательно, – это личный ход, а если с помощью механизма случайного выбора, – случайный ход.

Шахматы являются игрой двух партнеров с конечным числом личных ходов. В дальнейшем мы будем рассматривать игры двух партнеров с нулевой суммой и конечным числом возможных ходов. Такие игры математически глубоко проработаны и вызывают наибольший интерес, поскольку чаще используются в практических приложениях.

В зависимости от количества стратегий игры делятся на **конечные** и **бесконечные**. Так, в конечной игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, то игра называется бесконечной.

В зависимости от взаимоотношений игроков игры делятся на **кооперативные, коалиционные и бескоалиционные.** Если игроки не имеют права вступать в соглашения, то такая игра относится к бескоалиционным, если же игроки могут вступать в соглашения, создавать коалиции, – к коалиционным. Кооперативная игра – это такая игра, в которой заранее определены коалиции.

В зависимости от вида функции выигрышей игры подразделяются на **матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные** и т. д. Мы будем рассматривать матричные игры. Обратимся к примерам простейших матричных игр.

Пример 1 («игра в три пальца»). Игроки A и B одновременно и независимо друг от друга показывают 1, 2 или 3 пальца. Размер выигрыша определяется общим количеством показанных пальцев. При этом, если число пальцев четное, выигрывает игрок A, нечетное, – игрок B.

Такую игру двух игроков можно представить в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix},$$

где индекс i элементов a_{ij} (i,j=1,2,3) означает количество пальцев игрока A, а индекс j – количество пальцев игрока B. Например, a_{13} означает, что одновременно и независимо друг от друга игрок A показал 1 палец, а игрок B – 3 пальца. Количество пальцев для элемента a_{13}=4 указывает на выигрыш 4 единиц игроком A. Элемент a_{32}=-5 указывает на проигрыш 5 единиц игроком A или выигрыш 5 единиц игроком B.

Мы рассмотрели пример матричной игры 3-го порядков. В общем случае матричная игра задается прямоугольной матрицей размерности $m \times n$. Номер i строки матрицы соответствует номеру стратегии A_i, применяемой игроком A. Номер j столбца соответствует стратегии B_j, применяемой игроком B. Описанная игра однозначно определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент a_{ij} матрицы является действительным числом и представляет собой сумму выигрыша, уплачиваемую игроком B игроку A, если A выбирает стратегию, соответствующую i-й строке, а B выбирает стратегию, соответствующую j-му столбцу.

Матричную игру часто записывают в развернутой форме (см. табл. 14.1), называемой **платежной матрицей.**

Каждый игрок выбирает для себя наиболее выгодную стратегию. При этом первый игрок стремится выбрать такую стратегию, которая доставляет ему максимальный выигрыш, тогда второй игрок выбирает стратегию, приводящую его к минимальному проигрышу. В этой связи вводят понятия нижней и верхней чистой цены игры.

Таблица 14.1

	B_1	…	B_j	…	B_n
A_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Нижней чистой ценой игры (максимином) называется число α, определяемое по формуле

$$\alpha=\max_i \min_j a_{ij}. \qquad (14.1)$$

Верхней чистой ценой игры (минимаксом) называется число β, определяемое по формуле

$$\beta=\min_j \max_i a_{ij}. \qquad (14.2)$$

Стратегии игроков, соответствующие максимину (минимаксу), называются **максиминными (минимаксными).**

Пример 2. Найти максиминную и минимаксную стратегии игроков в матричной игре $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

■ Данную игру представим в виде платежной матрицы (табл. 14.2). В соотетствии с формулой (14.1) по каждой строке определяем наименьшее число, которое записывается в столбец α_i. Это означает, что, какой бы выбор по столбцам ни сделал игрок B, выигрыш игрока A, который свои стратегии выбирает по строкам, в худшем случае составит соответственно: 3, 3, 1,2. Однако игроку A целесообразно выбрать такую стратегию (строку), для которой достигается максимальный выигрыш независимо от того, какой столбец выбрал игрок B, т. е. $\alpha=\max_i \min_j a_{ij}=\max_i \alpha_i=\max(-3, 3, 1, 2)=3$. Максиминной стратегией игрока A является A_2.

Таблица 14.2

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	-3	4	5	-3
A_2	3	7	8	4	3
A_3	5	1	3	7	1
A_4	4	6	2	9	2
β_j	5	7	8	9	

Аналогично, пользуясь формулой (2), определяем минимаксную стратегию игрока B. Поскольку он выбирает стратегии по столбцам, то какие бы стратегии ни выбирал игрок A, в худшем случае игрок B может проиграть соответственно стратегиям B_1, B_2, B_3, B_4: 5, 7, 8, 9. Однако игрок B стремится минимизировать свой проигрыш, а потому выбирает стратегию, соответствующую минимальному из чисел 5, 7, 8, 9, т. е. минимаксу:

$$\beta=\min_j \max_i a_{ij}=\min_j \beta=\min(5, 7, 8, 9)=5.$$

Из платежной матрицы видно, что минимаксной стратегией игрока B является B_1. ●

14.2. Чистые и смешанные стратегии и их свойства. Основные теоремы теории игр. Различают стратегии **чистые** и **смешанные**. Чистая стратегия A_i (i=1,…,m) первого игрока (чистая стратегия B_j (j=1, …, n) второго игрока) – это возможный ход первого (второго) игрока, выбранный им с вероятностью, равной 1.

Если первый игрок имеет m стратегий, а второй – n стратегий, то для любой пары стратегий первого и второго игроков чистые стратегии можно представить в виде единичных векторов. Например, для пары стратегий A_1, B_2 чистые стратегии первого и второго игроков запишутся в виде: $\boldsymbol{p}_1=(1;0;...;0)$, $\boldsymbol{q}_2=(0;1;0;...;0)$. Для пары стратегий A_i B_j чистые стратегии можно записать в виде:

$$\boldsymbol{p}_i=(0;...;0;\underset{i\text{-е место}}{\underbrace{1}};0;...;0),$$

$$\boldsymbol{q}_j=(0;\ldots;0;\underset{j\text{-е место}}{\underbrace{1}};0;...;0).$$

Теорема 14.1**.** В матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхней чистой цены игры, т.е. $\alpha\leq\beta$.

■ По определению $\alpha_i=\min\limits_j a_{ij}\leq a_{ij}$. Аналогично $\beta_j=\max\limits_i a_{ij}\geq a_{ij}$. Объединив эти соотношения, получим: $\alpha_i=\min\limits_j a_{ij}\leq a_{ij}\leq \max\limits_i a_{ij}=\beta_j$. Отсюда $\alpha_i\leq a_{ij}\leq\beta_j$ или $\alpha_i\leq\beta_j$ (i=1,…,m; =1,…,n). Это неравенство справедливо для любых i и j, следовательно, $\alpha\leq\beta$. ●

Если для чистых стратегий A_i, B_j игроков A и B соответственно имеет место равенство $\alpha=\beta$, то пару чистых стратегий (A_i,B_j) называют **седловой точкой матричной игры,** элемент a_{ij} матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, – **седловым элементом платежной матрицы**, а число $v=\alpha=\beta$ – **чистой ценой игры.**

Пример 3. Найдём нижнюю и верхнюю чистые цены, установим наличие седловых точек матричной игры $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

■ Определим нижние и верхние чистые цены игры (табл. 14.3):

$$\alpha=\max_i \alpha_i=\max(5,1,-4)=5,\ \beta=\min_j \beta_j=\min(9,5,6,8)=5,\ v=\alpha=\beta=5.$$

В данном случае имеем одну седловую точку (A_1,B_2), а седловой элемент равен 5. Этот элемент является наименьшим в 1-й строке и наибольшим во 2-м столбце. Отклонение игрока A от максиминной стратегии A_1 ведет к уменьшению его выигрыша, а отклонение игрока B от минимаксной стратегии B_2 ведет к увеличению его проигрыша. Иными словами, если в матричной игре имеется седловой элемент, то наилучшими для игроков являются их минимаксные стратегии. И эти чистые стратегии, образующие седловую точку и выделяющие в матрице игры седловой элемент a_{12}=5, есть оптимальные чистые стратегии A_1 и B_2 игроков A и B. ●

Если же матричная игра не имеет седловой точки, то решение игры затрудняется. В этих играх $\alpha<\beta$. Применение минимаксных стратегий в таких играх приводит к тому, что для каждого из игроков выигрыш не превышает α, а проигрыш – не меньше β. Для каждого игрока возникает вопрос увеличения выигрыша (уменьшения проигрыша). Решение находят, применяя смешанные стратегии. **Смешанной стратегией** первого (второго) игрока называется вектор $\boldsymbol{p}=(p_1;\ldots;p_m)$, где

$$p_i \geq 0\ (i=1,\ldots,m) \text{ и } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

$$(\boldsymbol{q}=(q_1;\ \ldots\ ;q_n), \text{ где } q_j \geq 0\ (j=1,\ldots,n) \text{ и } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1).$$

Таблица 14.3

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	9	<u>5</u>	6	7	5
A_2	1	4	3	8	1
A_3	6	3	2	-4	-4
β_j	9	5	6	8	

Вектор $\boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{q}$) означает вероятность применения i-й чистой стратегии первым игроком (j-й чистой стратегии вторым игроком).

Поскольку игроки выбирают свои чистые стратегии случайно и независимо друг от друга, игра имеет случайный характер и случайной становится величина выигрыша (проигрыша). В таком случае средняя величина выигрыша (проигрыша) – математическое ожидание – является функцией смешанных стратегий $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$:

$$f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j .$$

Функция $f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ называется **платежной функцией** игры с матрицей $(a_{ij})_{m\times n}$.

Стратегии $\boldsymbol{p}^*=(p_1^*;\ldots;\ p_m^*)$, $\boldsymbol{q}^*=(q_1^*;\ldots;q_n^*)$ называются **оптимальными,** если для произвольных стратегий $\boldsymbol{p}=(p_1;\ldots;p_m)$, $\boldsymbol{q}=(q_1;\ \ldots\ ;q_n)$ выполняется условие

$$f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}^*)\leq f(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)\leq f(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}). \qquad (14.3)$$

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии $\boldsymbol{p}$**,** второму игроку – проигрыш, не больший, чем при использовании им любой другой стратегии $\boldsymbol{q}$.

Совокупность оптимальных стратегий и цены игры составляет **решение игры**.

Значение платежной функции при оптимальных стратегиях определяет цену игры v, т. е. $f(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)=v$.

Теорема 14.2 (теорема **Неймана**). В смешанных стратегиях любая конечная матричная игра имеет седловую точку.

Пусть имеем матричную игру $(a_{ij})_{m\times n}$ и некоторые смешанные оптимальные стратегии $\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*$ игроков A и B, обеспечивающие сумму выигрыша v. Вопрос поставим так: как проверить, что набор $(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*,v)$ является решением игры? Для этого нужно проверить справедливость неравенства (14.3) для любых смешанных стратегий, среди которых и будут стратегии $\boldsymbol{p}^*$,**q*.** Однако различных смешанных стратегий, среди которых и оптимальные, имеем бесчисленное множество. И в таком случае проверить справедливость неравенства (14.3) невозможно. Поэтому рассмотрим следующую теорему, которая позволит ответить на поставленный выше вопрос.

Теорема 14.3. Для того чтобы смешанные стратегии $\mathbf{p}^*=(p_1^*;\ldots;\ p_m^*)$ и $\boldsymbol{q}^*=(q_1^*;\ldots;q_n^*)$ были оптимальными для игроков A и B в игре с матрицей $(a_{ij})_{m\times n}$ выигрышем v, необходимо и достаточно выполнения неравенств:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq v \ (j=1,\ldots,n), \qquad (14.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \leq v \ (i=1,\ldots,m). \qquad (14.5)$$

■ Пусть ***p**, *q**** – оптимальные смешанные стратегии. Докажем, что для них выполняются соотношения (14.4) и (14.5). Воспользуемся определением оптимальных смешанных стратегий, для которых выполняется соотношение (14.3). Неравенство (14.4) получается из соотношения (14.3), если записать его в развернутой форме, а именно:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* \leq v \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j \qquad (14.6)$$

В правую часть соотношения (14.6) подставим вектор

$$\boldsymbol{q_j}=(q_1;\ldots;q_{j-1};q_j;q_{j+1},\ldots;q_n)=(0;\ldots;0;1;0;\ldots;0).$$

Получим

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq v,$$

т. е. оптимальная стратегия ***p**** удовлетворяет неравенству (14.4).

Если вместо произвольного вектора $\boldsymbol{p}$ в левую часть соотношения (14.6) подставить вектор $\boldsymbol{p_i}=(p_1;\ldots,p_{i-1},p_i, p_{i+1}, \ldots;p_m)=(0;\ldots;0;1;0;\ldots;0)$, то можно показать, что и оптимальная стратегия ***q**** удовлетворяет соотношению (14.5).

Итак, доказано условие необходимости, а именно: если стратегии ***p**** и ***q**** оптимальные, то они должны удовлетворять соотношениям (14.4) и (14.5).

Теперь докажем достаточность этого условия. Пусть выполняются неравенства (14.4), (14.5). Покажем, что ***p**,*q**** – оптимальные стратегии. Для этого нужно показать выполнимость соотношения (14.6). С учетом соотношения (14.4) преобразуем правую часть, а с учетом соотношения (14.5) – левую часть соотношения (14.6).

Пусть $\boldsymbol{q_j}=(q_1;\ldots;q_n)$ – произвольный вектор, тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq \sum_{j=1}^{n} q_j v = v \sum_{j=1}^{n} q_j = v\cdot 1 = v,$$

т.е. $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j \geq v.$

Преобразуя левую часть соотношения (14.6) для произвольного вектора $\mathbf{p_i}=(p_1; \ldots ;p_m)$, получаем

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} p_i v = 1\ v = v,$$

т. е. $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* \leq v.$

Итак, доказано, что если выполняются соотношения (14.4), (14.5), то выполняется и (14.6), т.е. смешанные стратегии ***p**** и ***q**** – оптимальные. ●

Таким образом, для проверки того, что набор (***p*****,*q****,v) является решением матричной игры, достаточно проверить, удовлетворяют ли ***p*****,*q**** неравенствам (14.4) и (14.5) и уравнениям $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ и $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

На основании теоремы 3 можно сделать вывод: **если игрок *A* применяет оптимальную смешанную стратегию *p****, а игрок *B* – любую чистую стратегию B_j, то выигрыш игрока *A* будет не меньше цены игры *v*.** Аналогично: **если игрок *B* использует оптимальную смешанную стратегию *q****, а игрок *A* – любую чистую стратегию A_i, то проигрыш игрока *B* не превысит цены игры *v***.

Чистые стратегии игрока, входящие в его оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются **активными стратегиями игрока.** Рассмотрим теорему об активных стратегиях.

Теорема 14.4. Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

■ Пусть в матричной игре $(a_{ij})_{m\times n}$ имеем оптимальные стратегии игроков *A* и *B* соответственно ***p**** и ***q****. Цена игры равна *v*. При этом игрок *A* имеет *r* активных стратегий, а игрок *B* – *k* активных стратегий. Расположив активные стратегии для игроков первыми, будем иметь: ***p****=($p_1^*;\ldots\;;p_r^*$;0;….;0) и ***q****=($q_1^*;\ldots;q_k^*$;0;...;0), для которых $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ и $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Пусть игрок *A* придерживается своей оптимальной стратегии ***p*****,** а игрок *B* – чистой стратегии, тогда, согласно теореме 14.3,

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* \geq v \ (j=1,\ldots,k). \qquad (14.7)$$

Если игроки *A* и *B* используют свои оптимальные стратегии, то выигрыш игрока *A* равен цене игры *v*, т. е. $v=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} p_i^* q_j^*$.

Учитывая соотношение (7), получаем

$$v=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* q_j^* = \sum_{j=1}^{k} q_j^* \sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* \geq \sum_{j=1}^{k} q_j^* v = v. \qquad (14.8)$$

Соотношение (14.8) выполнимо лишь в случае, когда неравенства (14.7) превращаются в равенства. Отсюда можно сделать вывод, что для любой смешанной стратегии ***q****=($q_1;\ldots;q_k$;0;...;0) выполняется равенство $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* q_j^* = v$, что и доказывает теорему. ●

На основании данной теоремы решение матричной игры можно упростить, выявив при этом доминирование одних стратегий над другими. Так, рассматривая стратегии игрока *A*, сравниваем элементы строк *s* и *t*, а именно: a_{sj} с элементами a_{tj} для j=1,…,*n*. Если $a_{sj} \geq a_{tj}$ (j=1,…,*n*), то выигрыш игрока *A* при стратегии A_s будет больше, чем при стратегии A_t. В этом случае стратегия A_s

доминирует над стратегией A_t. Стратегию A_s называют **доминирующей**, а стратегию A_t – **доминируемой.**

Поскольку игрок B заинтересован в минимизации проигрыша, доминирующим будет столбец с наименьшими элементами. Например, сравниваем элементы r-го и l-го столбцов. Если все элементы $a_{ir} \geq a_{il}$ (i=1,…,m), то игроку B свой выбор выгодно сделать по l-му столбцу. В этом случае стратегия B_l игрока B доминирует над стратегией B_r. Стратегия B_l называется **доминирующей,** а стратегия B_r – **доминируемой.**

Если в матричной игре имеем строки (столбцы) с одними и теми же элементами, то строки (столбцы), а соответственно и стратегии игроков A и B называются **дублирующими**.

В матричной игре доминируемые и дублирующие строки (столбцы) можно опускать, что не влияет на решение игры.

Теорема 14.5. Оптимальные смешанные стратегии $\boldsymbol{p^*}$ и $\boldsymbol{q^*}$ соответственно игроков A и B в матричной игре $(a_{ij})_{m\times n}$ с ценой v будут оптимальными и в матричной игре $(ba_{ij}+c)_{m\times n}$ с ценой $v'=bv+c$, где $b>0$.

■ На основании теоремы 3 для оптимальной смешанной стратегии $\boldsymbol{p^*}$ игрока A и для любой чистой стратегии B_j игрока B имеем

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq v \ (j=1,\dots,n) \qquad (14.9)$$

Умножим обе части неравенства (14.9) на некоторое положительное число $b>0$ и к обеим частям полученного неравенства прибавим произведение $c\sum_{i=1}^{m} p_i^*$. Получим

$$\sum_{i=1}^{m} ba_{ij} p_i^* + c\sum_{i=1}^{m} p_i^* \geq bv + c\sum_{i=1}^{m} p_i^* \ \ (j=l,\dots,n). \qquad (14.10)$$

Так как $\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1$, соотношение (14.10) примет вид

$$\sum_{i=1}^{m} (ba_{ij}+c) p_i^* \geq bv+c \ (j=l,\dots,n)$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} (ba_{ij}+c) p_i^* \geq v' \ (j=1,\dots,n),$$

где $v'=bv+c$. Теорема доказана для оптимальной смешанной стратегии $\boldsymbol{p^*}$ игрока A.

Аналогично доказывается теорема и для оптимальной смешанной стратегии игрока B. ●

На основании теоремы 14.5 платежную матрицу, имеющую отрицательные числа, можно преобразовать в матрицу с положительными числами.

Пример 4. Выполним все возможные упрощения матричной игры

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

■ Поскольку соответствующие элементы второй и четвертой строк матрицы игры равны, т. е. имеем две дублирующие строки, опустим, например, четвертую строку: $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Сравним соответствующие элементы столбцов. Элементы первого столбца доминируют над элементами третьего и шестого столбцов, а элементы второго столбца доминируют над соответствующими элементами четвертого столбца. Игроку B невыгодно применять стратегии B_3, B_4 и B_6. Опускаем третий, четвертый и шестой столбцы и получаем матрицу $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Элементы второй строки меньше соответствующих элементов третьей строки. Следовательно, игроку A невыгодна стратегия A_2. Опуская вторую строку, получаем упрощенную матрицу $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Если требуется получить матрицу с положительными элементами, то достаточно прибавить к ее элементам, например, число 3. ●

14.3. Решение матричных игр в смешанных стратегиях.

14.3.1. Графическое решение игры 2×*n*. Решение матричных игр в смешанных стратегиях может быть найдено **либо графически, либо методами линейного программирования.** Графический метод применим для решения игр, в которых хоть один игрок имеет две чистые стратегии. Этот метод интересен в том плане, что графически объясняет понятие седловой точки. Методами линейного программирования может быть решена любая игра двух лиц с нулевой суммой. Рассмотрим игру $2\times n$, в которой игрок A имеет две стратегии.

		B_1	B_2	…	B_n
		q_1	q_2	…	q_n
A_1	$p_1=p$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	$p_2=1-p$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}

Игра предполагает, что игрок A смешивает стратегии A_1 и A_2 *с* соответствующими вероятностями $p_1=p$ и $p_2=1-p$, $0\le p\le 1$. Игрок B смешивает стратегии B_1, B_2, ..., B_n с вероятностями q_1, q_2, …, q_n, где $q_j\ge 0, j=1,2,...,n,$ и $\sum_{j=1}^{n} q_j=1$. В этом случае ожидаемый выигрыш игрока A, соответствующий j-й чистой стратегии игрока B, вычисляется в виде

$$w=(a_{1j}-a_{2j})p+a_{2j},\ j=1,2,...,n. \qquad (14.11)$$

На плоскости (p, w) эти уравнения описывают прямые. Тем самым каждой чистой стратегии игрока B на этой плоскости соответствует своя прямая. Поэтому

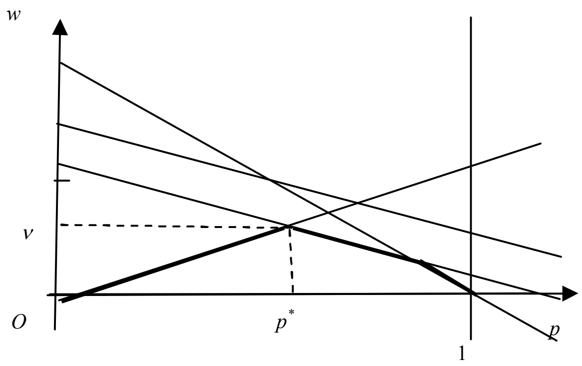


Рис.14.1. Графическое решение игры $2\times n$

сначала на плоскости (p, w) последовательно рисуются все прямые (14.11) (рис. 14.1). Затем для каждого значения p, $0\le p\le 1$, путем визуального сравнения соответствующих ему значений w на каждой из построенных прямых определяется и отмечается наименьшее из них. В результате описанной процедуры получается ломаная, которая и является графиком функции (14.11) (жирная линия на рис. 14.1). Эта ломаная огибает снизу все семейство построенных прямых, и поэтому называется **нижней огибающей** этого семейства. Абсциссой верхней точки полученной ломаной будет значение p^*, определяющее оптимальную смешанную стратегию игрока A, а ординатой v – цена игры (рис. 14.1).

Пример 5. Рассмотрим следующую игру 2×3:

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	-1
A_2	4	2	6

■ Игра не имеет решения в чистых стратегиях (α=2, β=3), и, следовательно, стратегии должны быть смешанными. Ожидаемые выигрыши игрока A, w_A, соответствующие чистым стратегиям игрока B, приведены в следующей таблице.

B_j	w_A
1	$4-2p$
2	$2+p$
3	$6-7p$

На рис. 14.2 изображены три прямые линии, соответствующие чистым стратегиям игрока B. Чтобы определить **наилучший результат из наихудших**, построена **нижняя** огибающая трех указанных прямых (изображенНая на рисунке толстыми линейными сегментами), которая представляет минимальный (наихудший) выигрыш для игрока A независимо от того, что делает игрок B. Максимум (наилучшее) нижней огибающей соответствует максиминному решению в точке $p^*=0{,}5$. Это значение p^* определяется из уравнения $2+p=6-7p$, отвечающего пересечению прямых 2 и 3. Следовательно, оптимальным решением для игрока является смешивание стратегий B_2 и B_3 с вероятностями 0,5 и 0,5 соответственно. Цена игры v определяется подстановкой p=0,5 в уравнение либо прямой 2, либо 3, что приводит к следующему:

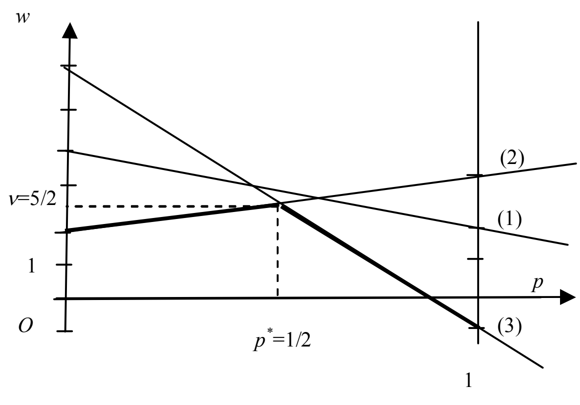


Рис.14.2. Графическое решение игры из примера 5

$$v=\begin{cases} 2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2} & \text{из уравнения прямой 2,} \\ 6-7\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2} & \text{из уравнения прямой 3.} \end{cases}$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока B определяется двумя стратегиями, которые определяют нижнюю огибающую графика. Это значит, что игрок B

может смешивать стратегии B_2 и B_3, в этом случае q_1=0 и q_3=1-q_2=1-q.

Следовательно, ожидаемые платежи игрока B, соответствующие чистым стратегиям игрока A, имеют следующий вид.

A_i	w_B
1	$-1+4q$
2	$6-4q$

Наилучшее решение из наихудших для игрока B представляет собой точку минимума **верхней** огибающей заданных двух прямых. Эта процедура эквивалентна решению уравнения $-1+4q=6-4q$. Его решением будет q=7/8, что определяет цену игры $v=-1+4\cdot(7/8)=5/2$. Таким образом, решением игры для игрока A является смешивание стратегий A_1 и A_2 с равными вероятностями 0,5 и 0,5, а для игрока B – смешивание стратегий B_2 и B_3 с вероятностями 7/8 и 1/8: v=5/2, $\boldsymbol{p}^*$=(½; ½) и $\boldsymbol{q}^*$=(0; 7/8; 1/8). ●

14.3.2.Графическое решение игры $m\times2$. Пусть теперь в матричной игре две чистые стратегии имеет игрок B, а число чистых стратегий у игрока A произвольно (равно m). Это означает, что платежная матрица такой игры имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}.$$

Анализ такой игры во многом напоминает рассуждения, описанные для игры $2\times n$.

Пусть $\boldsymbol{q}=(q,\ 1-q)$ – произвольная смешанная стратегия игрока B. Если игрок A выбирает i-ю чистую стратегию, i=1,2,..., m, то средний выигрыш игрока B в ситуации $\{i,\boldsymbol{q}\}$ будет равным

$$w_i=a_{i1}q+a_{i2}(1-q),\ i=1,\ 2,\dots,\ m. \qquad (14.2)$$

Зависимость этого выигрыша от переменной q описывается прямой. Графиком функции $\max\limits_{1\le i\le m}(a_{i1}q+a_{i2}(1-q))$ является верхняя огибающая семейства прямых (14.2), соответствующих чистым стратегиям игрока A (рис. 14.3). Абсциссой нижней точки полученной ломаной будет значение q^*, определяющее оптимальную смешанную стратегию игрока B, а ординатой v – цена игры. Отыскание оптимальной смешанной стратегии игрока A проводится по той же схеме, которая позволяет находить оптимальную смешанную стратегию игрока B в игре $2\times n$. Рассмотрим конкретный пример.

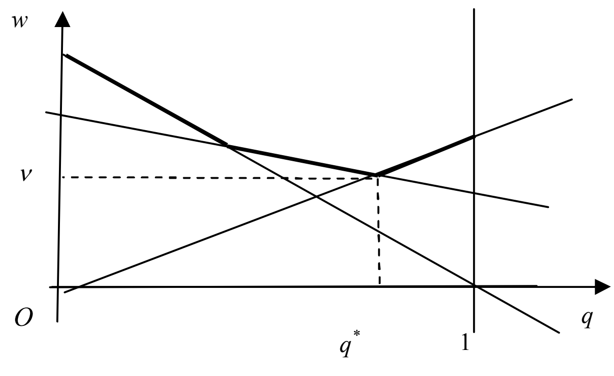


Рис.14.3. Графическое решение игры $m\times2$

Пример 6. Игра 3×2 задана матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

■ Нижняя цена игры равна 0, верхняя – равна 3. Седловой точки нет. Решение игры нужно искать в смешанных стратегиях. Ожидаемые выигрыши игрока B, соответствующие чистым стратегиям игрока A, приведены в следующей таблице.

A_i	w_B
1	$-1+4q$
2	$3-4q$
3	q

Построим на координатной плоскости (q,w) все три прямые, а затем и их верхнюю огибающую (рис. 4). Нижняя точка верхней огибающей является точкой пересечения прямых (1) и (2). Решая уравнение

$-1+4q=3-4q$, получаем $q^*=\frac{1}{2}$, $v=1$.

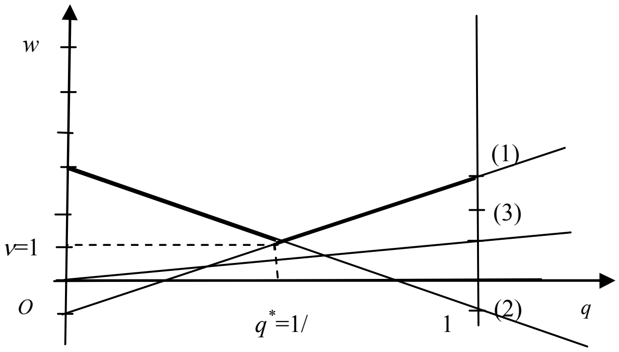


Рис.14.4. Графическое решение игры из примера 6

Оптимальная смешанная стратегия игрока A определяется двумя стратегиями, которые определяют нижнюю огибающую графика. Это значит, что игрок A может смешивать стратегии A_1 и A_2, в этом случае $p_3=0$ и $p_2=1-p_1=1-p$. Следовательно, ожидаемые платежи игрока A, соответствующие чистым стратегиям игрока B, имеют следующий вид.

B_j	w_A
1	$-1+4p$
2	$3-4p$

Приравниваем средние выигрыши игрока A, соответствующие чистым стратегиям игрока B:

$$-1+4p=3-4p,$$

и находим $p^*=1/2$.

Таким образом, цена игры и оптимальные смешанные стратегии игроков A и B соответственно равны:

$$v=1,\ \boldsymbol{p}^*=(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0),\ \boldsymbol{q}^*=(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}). \qquad \bullet$$

14.3.3. Приведение матричной игры $m\times n$ к задаче линейного программирования. Пусть имеем игру размерности $m\times n$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\boldsymbol{p^*}=(p_1;...;p_m)$, $\boldsymbol{q^*}=(q_1;...;q_n)$ оптимальные смешанные стратегии игроков A *и* B. Стратегия $\boldsymbol{p^*}$ игрока A гарантирует ему выигрыш не меньше v, независимо от выбора стратегии B_j игроком B (теор. 14.3). Это можно записать так:

$$\begin{cases} \alpha_{11}p_1+\alpha_{21}p_2+\ldots+\alpha_{m1}p_m \ge v, \\ \alpha_{12}p_1+\alpha_{22}p_2+\ldots+\alpha_{2m}p_m \ge v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}p_1+\alpha_{12n}p_2+\ldots+\alpha_{mn}p_m \ge v, \end{cases} \qquad (14.13)$$

где $p_1+p_2+...+p_m=1$; $p_i\ge 0$ ($i=1,\ldots,m$).

Аналогично стратегия **q*** игрока B гарантирует ему проигрыш не больше v, независимо от выбора стратегии A_i игроком A, т. е.

$$\begin{cases} \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \ldots + \alpha_{1n}q_n \le v, \\ \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \ldots + \alpha_{2n}q_n \le v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}q_1 + \alpha_{m2}q_2 + \ldots + \alpha_{mn}q_n \le v, \end{cases} \tag{14.14}$$

где $q_1+q_2+\ldots+q_n=1$; $q_j\geq 0$ $(j=1,\ldots,n)$.

Поскольку элементы платежной матрицы на основании теоремы 14.5 всегда можно сделать положительными, то и цена игры $v>0$.

Преобразуем системы (14.13) и (14.14), разделив обе части каждого неравенства на положительное число v, и введем новые обозначения: $p_i/v=x_i$, $q_j/v=y_j$ $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$. Получим:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \ldots + \alpha_{m1}x_m \ge 1, \\ \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2m}x_m \ge 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{12n}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_m \ge 1, \end{cases} \tag{14.15}$$

где

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=1/v;\ x_i\geq 0\ (i=1,\ldots,m), \tag{14.16}$$

и

$$\begin{cases} \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1n}y_n \le 1, \\ \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2n}y_n \le 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}y_1 + \alpha_{m2}y_2 + \ldots + \alpha_{mn}y_n \le 1, \end{cases} \tag{14.17}$$

где

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=1/v;\ y_j\geq 0\ (j=1,\ldots,n). \tag{14.18}$$

Так как игрок A стремится максимизировать цену игры v, то обратная величина $1/v$ будет минимизироваться, поэтому оптимальная стратегия игрока A определится из задачи линейного программирования следующего вида: найти минимальное значение функции $z=x_1+x_2+\ldots+x_m$ при ограничениях (14.17), (14.18).

Оптимальная смешанная стратегия игрока B определится решением задачи следующего вида: найти максимальное значение функции $w=y_1+y_2+\ldots+y_n$ при ограничениях (14.17), (14.18). Решив пару **двойственных задач**, далее определим:

$$v=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*},\ p_i=\frac{x_i^*}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*},\ q_j=\frac{y_j^*}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*}\ (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n).$$

Проиллюстрируем решение матричной игры сведением ее к задаче ЛП.

Пример 7. Два сельскохозяйственных предприятия A и B выделяют денежные средства на строительство трех объектов. С учетом особенностей вкладов и местных условий прибыль предприятия A в зависимости от объема финансирования выражается элементами матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Убыток предприятия B при этом равен прибыли предприятия A. Требуется найти оптимальные стратегии предприятий A и B.

■ Обозначим чистые стратегии предприятий A и B через A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 соответственно. Предположим, что предприятие A располагает общей суммой a тыс. ден. ед., отпускаемой на строительство трех объектов. Аналогично и предприятие B имеет сумму в b тыс. ден. ед., отпускаемую на строительство тех же трех объектов. Тогда чистая стратегия A_1 – это выделение a_1 тыс. ден. ед. предприятием A на строительство первого объекта; A_2 – чистая стратегия предприятия A, которое выделяет сумму a_2 тыс. ден. ед. на строительство второго объекта; A_3 – чистая стратегия предприятия A, которое выделяет сумму a_3 тыс. ден. ед. на строительство третьего объекта. Общая сумма средств, выделяемых на строительство трех объектов, $a=a_1+a_2+a_3$. Аналогично определяются чистые стратегии и для предприятия B.

Проверим игру на наличие седловой точки:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 4,\ \beta = \min_j \max_i a_{ij} = 6,\ \alpha \neq \beta.$$

Седловой точки нет, поэтому решение игры определяем в смешанных стратегиях. Цена игры v заключена между нижней α и верхней β ценами, т.е. $4 \le v \le 6$. Составим задачу ЛП для каждого игрока.

Для игрока A:

$$z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \ge 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \ge 1, \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0\ (i=1,2,3),$$

Для игрока B:

$$w = y_1 + y_2 + y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \le 1, \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 1, \\ 7y_1 + 5y_2 + 4x_3 \le 1, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0\ (j=1,2,3).$$

Вводя балансовые переменные $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$ для исходной задачи и $y_4 \ge 0$, $y_5 \ge 0$, $y_6 \ge 0$ для двойственной задачи, модели задач преобразуем к канонической форме. При этом балансовые переменные двойственной задачи станут базисными.

При «ручном» счёте проще решать **двойственную** задачу, т.к. она не требует введения искусственных переменных. Соответствие между переменными пары взаимно двойственных задач будет следующее (табл.14.4):

Таблица 14.4

Свободные			Базисные			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	
y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	
Базисные			Свободные			

Решим, например, двойственную задачу ЛП, построенную для определения выигрыша предприятия B. Каноническая форма задачи имеет вид:

$$w = y_1 + y_2 + y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3y_1+6y_2+8y_3+y_4=1, \\ 9y_1+4y_2+2y_3+y_5=1, \\ 7y_1+5y_2+4x_3+y_6=1, \end{cases}$$

$$y_j \geq 0 \ (j=1,\dots,6).$$

Решая ее симплекс-методом, имеем (итерации 0–2) оптимальный план

Итерация 0

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Р	О
w	-1	-1	-1	0	0	0	0	–
y_4	3	<u>6</u>	8	1	0	0	1	1/6
y_5	9	4	2	0	1	0	1	1/4
y_6	7	5	<u>4</u>	0	0	1	1	1/5

*Итерация*1

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Р	О
w	-1/2	0	1/3	1/6	0	0	1/6	–
y_2	1/2	1	4/3	1/6	0	0	1/6	1/3
y_5	7	0	-10/3	-2/3	1	0	1/3	1/21
y_6	<u>9/2</u>	0	8/3	-5/6	0	1	1/6	1/27

$\boldsymbol{y}^*=(y_1^*;\dots;y_6^*)=(1/27;\ 4/27;\ 0;\ 0;\ 2/27;\ 0)$. При этом $w^*=5/27$.

Итерация 2

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Р
w	0	0	17/27	2/27	0	1/9	5/27
y_2	0	1	28/27	7/27	0	-1/9	4/27
y_5	0	0	-202/27	17/27	1	-14/9	2/27
y_1	1	0	16/27	-5/27	0	2/9	1/27

С учетом основной теоремы двойственности и соответствия между переменными оптимальный план исходной задачи запишется в виде

$$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*;\dots;x_6^*)=(2/27;\ 0;\ 1/9;\ 0;\ 0;\ 17/27),$$

$$z^*=5/27.$$

По формулам $v=\frac{1}{z^*}=\frac{1}{w^*}$, $\frac{p_i}{v}=x_i$, $\frac{q_j}{v}=y_j$ $(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n)$ получим цену игры v=27/5 и вероятности p_i^* и q_j^* для оптимальных смешанных стратегий соответственно предприятий A и B:

$$p_1^*=27/5\cdot 2/27=2/5,\ p_2^*=27/5\cdot 0=0,\ p_3^*=27/5\cdot 1/9=3/5,$$

$$q_1^*=27/5\cdot 1/27=1/5,\ q_2^*=27/5\cdot 4/27=4/5,\ q_3^*=27/5\cdot 0=0.$$

Таким образом, оптимальными смешанными стратегиями сельскохозяйственных предприятий A и B являются стратегии **p***=(2/5;0; 3/5) и **q***=(1/5; 4/5;0) соответственно при гарантированном получении предприятием A независимо от стратегий предприятия B прибыли не менее 27/5=5,4 тыс. ден. ед. Убыток предприятия B при этом составит не более 5,4 тыс. ден. ед.

Итак, из общей суммы средств a тыс. ден. ед., выделяемых предприятием A на строительство трех объектов, на долю первого объекта должно выделяться 40%, второго – 0% и третьего – 60% этой суммы. Аналогично распределяются средства b тыс. ден. ед. предприятием B: на долю первого объекта приходится 20%, второго – 80% и третьего – 0 % общей суммы. ●

14.4. Решение задач теории игр с помощью MathCAD

Пример 8. Рассмотрим следующую игру 2×4:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	0
A_2	4	3	2	4

■ Решение задачи с помощью MathCAD приведено на рис.1. Вначале определены верхняя и нижняя цены игры: β=3, α=2. Затем вычисляется ожидаемый выигрыш игрока A, соответствующий каждой чистой стратегии игрока B, в виде W1, W2,W3 и W4. На рис. 14.5 изображены четыре прямые линии, соответствующие чистым стратегиям игрока B. Чтобы определить **наилучший результат из наихудших**, построена **нижняя** огибающая трех указанных прямых, которая представляет минимальный (наихудший) выигрыш для игрока A независимо от того, что делает игрок B. Максимум нижней огибающей соответствует максиминному решению в точке $p^*=2/5$. Это значение p^* определяется из уравнения $2+p=4-4p$, отвечающего пересечению прямых 3 и 4. Следовательно, оптимальным решением для игрока A является смешивание стратегий A_1 и A_2 с вероятностями 2/5 и 3/5 соответственно. Цена игры v определяется подстановкой $p=2/5$ в уравнение либо прямой 3, либо 4, что приводит к следующему:

$$v=\begin{cases} 2+\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{5}=2{,}5 & \text{из уравнения прямой 3,} \\ 4\text{-}4\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{5}=2{,}5 & \text{из уравнения прямой 4.} \end{cases}$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока B определяется двумя стратегиями, которые определяют нижнюю огибающую графика. Это значит, что игрок B может смешивать стратегии B_3 и B_4, в этом случае $q_1=q_2=0$ и $q_3=q$,

$q_4=1-q_3=1-q$.

Следовательно, ожидаемые платежи игрока B, соответствующие чистым стратегиям игрока A, имеют следующий вид.

A_i	w_B
1	$3q$
2	$4-2q$

Наилучшее решение из наихудших для игрока B представляет собой точку минимума **верхней** огибающей заданных двух прямых. Эта процедура эквивалентна решению уравнения $3q=4-2q$. Его решением будет $q=4/5$, что определяет цену игры

$v=3\cdot(4/5)=12/5$.Таким образом, решением игры для игрока A является смешивание стратегий A_1 и A_2 с вероятностями 2/5 и 3/5, а для игрока B – смешивание стратегий B_3 и B_4 с вероятностями 4/5 и 1/5: $v=12/5$, $\boldsymbol{p^*}=(2/5;\ 3/5)$ и $\boldsymbol{q^*}=(0;\ 0;4/5;\ 1/5)$. ●

Пример 9. Игра 4×2 задана матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

■ Нижняя цена игры равна 2, верхняя – 3. Седловой точки нет. Решение игры нужно искать в смешанных стратегиях. Решение задачи с помощью MathCAD приведено на рис.14.6.

$ORIGIN := 1$

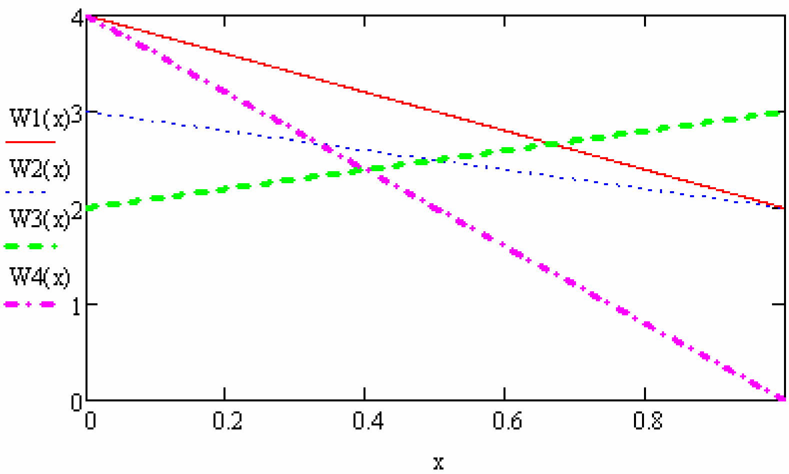
$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad n := cols(A) \quad i := 1..n \quad b_i := \max\left(A^{\langle i \rangle}\right) \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \beta := \min(b) \quad \beta = 3$

$Q := A^T \quad i := 1..2 \quad a_i := \min\left(Q^{\langle i \rangle}\right) \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \alpha := \max(a)$

$\alpha = 2 \qquad 2 \le \nu \le 3$

$W1(x) := \left(A_{1,1} - A_{2,1}\right) \cdot x + A_{2,1} \quad W2(x) := \left(A_{1,2} - A_{2,2}\right) \cdot x + A_{2,2} \quad W3(x) := \left(A_{1,3} - A_{2,3}\right) \cdot x + A_{2,3}$

$W4(x) := \left(A_{1,4} - A_{2,4}\right) \cdot x + A_{2,4}$



$W3(x) = W4(x)\ \text{solve}, x \rightarrow \frac{2}{5} \quad p1 := \frac{2}{5} \quad p2 := 1 - p1 \quad \nu := W3(p1) \quad \nu = 2.4$

$b1(y) := 3y \quad b2(y) := -2y + 4 \quad b2(y) = b1(y)\ \text{solve}, y \rightarrow \frac{4}{5} \quad q3 := \frac{4}{5} \quad q4 := 1 - q3$

$\nu := b2(q3) \quad \nu = 2.4 \quad p := (p1 \quad p2) \quad q := (0 \quad 0 \quad q3 \quad q4)$

$p = (0.4 \quad 0.6) \qquad q = (0 \quad 0 \quad 0.8 \quad 0.2) \qquad \nu = 2.4$

Рис.14.5. Решение игры 2×4 с помощью MathCAD

$ORIGIN := 1$

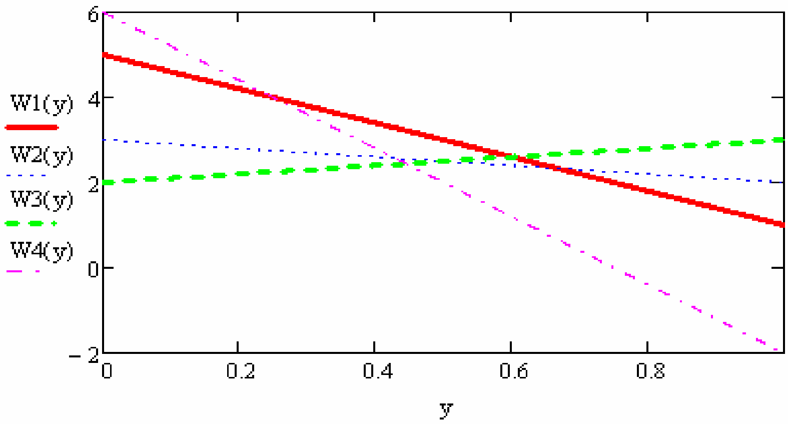
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad i := 1..2$$

$$m := rows(A) \quad b_i := \max\left(A^{\langle i \rangle}\right) \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \beta := \min(b) \quad \beta = 3$$

$$Q := A^T \quad i := 1..m \quad a_i := \min\left(Q^{\langle i \rangle}\right) \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \alpha := \max(a)$$

$$\alpha = 2 \quad 2 \le \nu \le 3 \quad W1(y) := \left(A_{1,1} - A_{1,2}\right)y + A_{1,2}$$

$$W2(y) := \left(A_{2,1} - A_{2,2}\right)y + A_{2,2} \quad W3(y) := \left(A_{3,1} - A_{3,2}\right)y + A_{3,2} \quad W4(y) := \left(A_{4,1} - A_{4,2}\right)y + A_{4,2}$$



$$W1(y) = W3(y) \text{ solve}, y \rightarrow \frac{3}{5} \quad q1 := \frac{3}{5} \quad q2 := 1 - q1 \quad \nu := W1(q1) \quad \nu = 2.6$$

$$a1(x) := -2x + 3 \quad a2(x) := 3x + 2 \quad a1(x) = a2(x) \text{ solve}, x \rightarrow \frac{1}{5} \quad p1 := \frac{1}{5} \quad p3 := 1 - p1$$

$$\nu := a1(p1) \quad \nu = 2.6 \quad p := (p1 \;\; 0 \;\; p3 \;\; 0) \quad q := (q1 \;\; q2)$$

$$\nu = 2.6 \quad p = (0.2 \;\; 0 \;\; 0.8 \;\; 0) \quad q = (0.6 \;\; 0.4)$$

Рис.14.6. Решение игры 4×2 с помощью MathCAD

Пример 10. Сведём матричную игру, имеющую платёжную матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & -2 \\ -7 & -2 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix},$$

к задаче ЛП, и решим с помощьюMathCAD.

■ Нижняя цена игры равна -2, верхняя равна -1. Седловой точки нет. Решение игры нужно искать в смешанных стратегиях. Решение задачи с помощью MathCAD приведено на рис.14.7.

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & -2 \\ -7 & -2 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix} \qquad m := \mathrm{rows}(A) \quad m = 5 \qquad n := \mathrm{cols}(A) \quad n = 5$$

$$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad i := 1..n \quad b_i := \max\left(A^{\langle i \rangle}\right) \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A1 := A^T$$

$$\beta := \min(b) \qquad \beta = -1$$

$$i := 1..m \qquad a_i := \min\left(A1^{\langle i \rangle}\right) \qquad a = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha := \max(a) \qquad \alpha = -2 \qquad -2 \le v \le -1$$

$$A := \left| \begin{array}{l} A - \alpha \ \text{ if } \alpha < 0 \\ A \ \text{ otherwise} \end{array} \right. \qquad A1 := A^T$$

$$x := a \qquad c := (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1) \qquad f(x) := c \cdot x \qquad f(x) = -22 \qquad c1 := c$$

$$y := b \qquad w(y) := c1 \cdot y \qquad w(y) = 8$$

Given

$$A1 \cdot x \ge c1^T \quad x \ge 0 \quad M := \mathrm{Minimize}(f, x)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.667 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(M) = 1.667 \qquad v1 := \frac{1}{f(M)} \qquad v1 = 0.6$$

$$v := \left| \begin{array}{l} v1 + \alpha \ \text{ if } \alpha < 0 \\ v1 \ \text{ otherwise} \end{array} \right. \qquad v = -1.4 \qquad P := M \cdot v1 \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given

$$A \cdot y \le c^T \qquad y \ge 0 \qquad M1 := \mathrm{Maximize}(w, y) \qquad M1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.333 \\ 0 \\ 0 \\ 1.333 \end{pmatrix} \qquad w(M1) = 1.667 \quad v1 := \frac{1}{w(M1)}$$

$$v := \left| \begin{array}{l} v1 + \alpha \ \text{ if } \alpha < 0 \\ v1 \ \text{ otherwise} \end{array} \right. \qquad v = -1.4 \qquad Q := M1 \cdot v1 \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Ответ

$$v = -1.4 \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Рис.14.7. Решение игры $m \times n$ с помощью MathCAD

14.5. Игры с природой

14.5.1.Критерии для принятия решений. Для управления производственными процессами необходима информация о состоянии объекта управления в условиях его работы. В случае отсутствия достаточной информации возникает некоторая неопределенность в принятии решения. Причины этого различны: невозможность получения информации к моменту принятия решения; слишком высокие затраты на получение информации; невозможность устранения неопределенности по причинам объективного характера и т. д.

По мере совершенствования средств сбора информации и ее обработки неопределенность в момент принятия управленческих решений будет уменьшаться. Существование неустранимой неопределенности связано со случайным характером многих явлений. Например, случайность спроса на продукцию делает невозможным точное прогнозирование объема ее выпуска. Принятие решения тогда связано с риском. Или, например, прием партии товара для контроля на соответствие стандарту также связан с риском. Правда, неопределенность при контроле может быть устранена в случае контроля всего товара, выпускаемого для реализации. Однако это может оказаться слишком дорогостоящим мероприятием.

В целях уменьшения неблагоприятных последствий в каждом конкретном случае следует учитывать степень риска и имеющуюся информацию. И здесь **лицо, принимающее решение** (ЛПР), вступает в игровые отношения с некоторым абстрактным лицом, условно называемое **«природой»,** а такие ситуации принято называть **играми с природой.** Таким образом, ЛПР должно уметь находить управленческое решение, когда природа не выбирает сознательно свои оптимальные стратегии. Вместе с тем, в некоторых случаях мы иногда располагаем некоторыми вероятностными характеристиками состояния природы.

Хозяйственную деятельность человека можно рассматривать как игру с природой. Под «природой» будем понимать **совокупность неопределенных факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений**.

Безразличие природы к результату игры (выигрышу) и возможность получения ЛПР дополнительной информации о ее состоянии отличают игру с природой от обычной игры с двумя сознательными игроками.

Игры с природой представляют собой одну из основных моделей теории принятия решений в условиях частичной неопределенности.

Множество **стратегий** природы обозначим через П, отдельное состояние – $П_j$, $П_j \in П$ ($j=1,\dots,n$). Множество **стратегий** ЛПР обозначим через A, отдельную **стратегию** – A_i, $A_i \in A$ ($i=1,\dots,m$).

Для i-й стратегии A_i ЛПР и j-го состояния природы $П_j$ имеем некоторое число, обозначающее функцию выигрышей $a_{ij}(A_i,П_j)$, которая, как правило, является случайной величиной.

Во взаимоотношениях с природой ЛПР может использовать любые из своих стратегий $A_1,\dots,A_m$ в зависимости от состояний $П_j$ природы. Имея эти стратегии, ЛПР должен руководствоваться некоторым правилом, с помощью которого он определяет выбираемую стратегию $A_i \in A$. Другими словами, ЛПР отыскивает оптимальное поведение, которое и будет его оптимальной стратегией. При этом он может пользоваться как чистыми, так и смешанными стратегиями. При этом игры с природой могут решаться как в чистых, так и смешанных стратегиях. Но игры с природой имеют особенности по сравнению играми двух сознательных игроков. В частности, игрок П (природа) применяет свои чистые стратегии независимо от того, выгодно ли это игроку A (ЛПР) или нет, т.е. природа безразлична к своему выигрышу и не стремится воспользоваться промахами игрока A. Поэтому решение игры достаточно находить только для игрока A, так как игрок П не способен воспринимать какие-либо рекомендации интересоваться результатами решения.

Предположим, что есть возможность численно оценить величиной a_{ij} эффективность каждой комбинации (A_i,П$_j$). Тем самым определена так называемая **платежная матрица игры с природой**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

на основе которой в дальнейшем и будут сформулированы «правила поведения» – критерии выбора оптимальной стратегии ЛПР.

Элемент a_{ij} назовем выигрышем ЛПР, если он использует стратегию A_i при состоянии природы П$_j$. Его значение может быть как положительным, так и нулем, так и отрицательным числом.

Решение игры с природой несколько отличается от решения обычной игры, где оба игрока ведут игру сознательно. Отличие состоит в упрощении игры. Выявление дублирующих и доминируемых стратегий производится только для стратегий ЛПР. Стратегии природы нельзя опускать, поскольку она не имеет «умысла» навредить ЛПР, более того, она может реализовать состояния, заведомо выгодные ЛПР.

При решении игры с природой наряду с платежной матрицей используется **матрица рисков.** Элементы r_{ij} матрицы рисков равны разности между максимально возможным выигрышем и тем выигрышем, который ЛПР получит в тех же условиях П$_j$, применяя стратегию A_i, т. е. $r_{ij}=\beta_j-a_{ij}$, где $\beta_j=\max\limits_i a_{ij}$.

Оптимальную стратегию ЛПР можно определяют, используя ряд критериев. При известном распределении вероятностей различных состояний П$_j$ природы пользуются **критерием Байеса.** Показателем в этом критерии служит либо величина среднего выигрыша, либо величина среднего риска.

Платежную матрицу (a_{ij}) представим в виде табл. 14.5.

По критерию Байеса за оптимальную принимается та чистая стратегия A, при которой максимизируется средний выигрыш $\overline{\alpha}_i$ ЛПР, т.е. обеспечивается $\overline{\alpha}=\max\limits_i \overline{\alpha}_i$, где

$$\overline{\alpha}_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \quad (i=1,\dots,m).$$

Таблица 14.5

Стратегия ЛПР A_i	Состояния природы П$_j$				Средний выигрыш $\overline{\alpha}_i$
	П$_1$	П$_2$	…	П$_n$	
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\overline{\alpha}_1$
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$\overline{\alpha}_2$
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\overline{\alpha}_m$

Матрицу рисков представим

в виде табл. 14.6. За оптимальную стратегию ЛПР принимается чистая стратегия A_i, при которой минимизируется средний риск, т.е. обеспечивается $\bar{r} = \min_i \bar{r}_i$, где

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \quad (i=1,\ldots,m).$$

В случае, когда одно состояние природы нельзя предпочесть другому, для их оценки используют принцип **недостаточного основания Лапласа,** согласно которому все состояния природы полагаются равновероятными, т. е. $q_1=q_2=\ldots=q_n=1/n$. Оптимальной считается стратегия, обеспечивающая максимум среднего выигрыша.

Таблица 14.6

Стратегия ЛПР A_i	Состояния природы $П_j$				Средний риск $\bar{r}_i$
	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$	
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}	$\bar{r}_1$
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}	$\bar{r}_2$
…	…	…	…	…	…
A_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}	$\bar{r}_m$
q_j	q_1	q_2	...	q_n	

В случае когда вероятности состояний природы неизвестны, для решения игр с природой – выбора оптимальной стратегии ЛПР – можно использовать несколько критериев.

Максиминный критерий Вальда совпадает с критерием выбора максиминной стратегии, позволяющей получать нижнюю чистую цену α в парной игре с нулевой суммой. По критерию Вальда, за оптимальную принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т. е.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Это критерий **крайнего пессимизма**, так как ЛПР исходит из предположения, что природа действует против него наилучшим для себя образом.

Критерий минимального риска Сэвиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях (достигается «минимальный риск из максимально возможных), т.е. обеспечивается $\min_i \max_j r_{ij}$. Это – минимаксный критерий в отношении риска.

Критерии Вальда и Сэвиджа ориентируют ЛПР на самые неблагоприятные состояния природы, т. е. эти критерии выражают пессимистическую оценку ситуации.

Критерий Гурвица (критерием пессимизма-оптимизма) рекомендует рассчитывать на нечто среднее. За оптимальную чистую стратегию принимается та, для которой выполняется соотношение

$$\max_i (\lambda \max_j a_{ij} + (1-\lambda) \min_j a_{ij}),$$

где $0 \le \lambda \le 1$. При $\lambda=0$ имеем критерий пессимизма Вальда, а при $\lambda=1$ – критерий крайнего оптимизма (рекомендуется выбирать лучшее из лучшего). В случае, когда $0<\lambda<1$, мы имеем нечто среднее. При желании подстраховаться в данной ситуации λ принимают, близким нулю. В общем случае число λ выбирается из субъективных соображений (опыта, здравого смысла и т.д.).

Пример 11. Потребление исходного сырья S на предприятии в зависимости от его качества составляет 5, 6 или 7 ед. Если для выпуска запланированного объема продукции сырья S окажется недостаточно, запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в размере 4 ед. в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 3 ед. в расчете на единицу сырья. При изучении работы аналогичных предприятий планирующий орган располагает некоторой дополнительной информацией, снижающей неопределенность ситуации: 1) известны вероятности потребности в сырье в количествах 5, 6 и 7 ед.: 0,25; 0,35; 0,4; 2) потребность в сырье равновероятна; 3) о вероятностях потребности в сырье ничего определенного сказать нельзя.

Таблица 14.7

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0	-4	-8
A_2	-3	0	-4
A_3	-6	-3	0

■ Планирующий орган предприятия может принять одно из следующих решений: создать запас сырья в 5 ед. (стратегия A_1); в 6 ед. (стратегия A_2); в 7 ед. (стратегия A_3).

Второй играющей стороной – природой – будем считать совокупность объективных внешних условий, определяющую потребность в сырье. Если для выпуска запланированного объема продукции сырья S окажется достаточно в размере 5 ед. это будет означать состояние природы $П_1$; если в размере 6 ед. – состояние $П_2$; в размере 7 ед. – состояние $П_3$. Итак, описанная ситуация представляет собой игру с природой. Рассчитаем элементы платежной матрицы (табл. 14.7). Так, в ситуации (A_1,$П_1$) элемент a_{11} вычисляется следующим образом. Плановый орган принимает решение создать запас сырья в 5 ед., что и соответствует их расходованию в 5 ед., a_{11}=0. Элемент a_{12} рассчитываем так. Запас сырья создан в 5 ед., а для выпуска запланированного объема продукции требуется 6 ед. Мы его пополняем, что потребует затрат в размере 4·(6-5)=4 ден. ед., т.е. a_{12}=-4. Аналогично определяются и другие элементы табл. 14.7, например элемент a_{21} для ситуации (A_2,$П_1$). Запас сырья создан в 6 ед., а для выпуска запланированного объема продукции требуется 5 ед. Запас сырья превышает потребности, тогда дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 3·(6-5)=3 ден. ед., т.е. a_{21}=-3. В общем случае элементы платежной матрицы рассчитываются по формуле

Таблица 14.8

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	Критерии: Лапласа	Вальда	Гурвица (λ=0,6)
A_1	0	-4	-8	-4,00	-8	-3,8
A_2	-3	0	-4	**-2,33**	**-4**	**-1,6**
A_3	-6	-3	0	-3,00	-6	-2,4
q_j	0,25	0,35	0,4			

$$a_{ij}=\begin{cases} 4(i-j), \text{ если } i \le j; \\ -3(i-j), \text{ если } i > j. \end{cases}$$

Вычисляем средние выигрыши (**критерий Байеса**):

$$\overline{\alpha}_1=0\cdot0{,}25+(-4)\cdot0{,}35+(-8)\cdot0{,}4=-4{,}6,\ \overline{\alpha}_2=-2{,}35,\ \overline{\alpha}_3=-2{,}55.$$

Оптимальной стратегией по Байесу является A_2:

$\bar{\alpha}$=max(-4,6, -2,35, -2,55)=-2,35 (ден. ед.).

Результаты расчетов по критериям Лапласа, Вальда и Гурвица приведены справа от табл. 14.8 (оптимальные значения выделены жирным шрифтом), по критерию Сэвиджа – в табл. 14.9.

Все они рекомендуют иметь запасы исходного сырья в 6 ед. ●

Таблиа 14.9

	Матрица рисков			r_i
	П$_1$	П$_2$	П$_3$	
A_1	0	4	8	8
A_2	3	0	4	**4**
A_3	6	3	0	6

14.5.2. Решение задач теории игр с природой с помощью MathCAD. Рассмотрим решение следующей задачи с помощью MathCAD.

Пример 12. Объем продаж некоторого товара V за рассматриваемый период времени в универмаге колеблется, в зависимости от уровня покупательского спроса, в пределах от 5 до 8 ед. Прибыль универмага от единицы реализованного товара V равна 3 ден. ед. Если запаса товара окажется недостаточно для удовлетворения спроса, можно заказать дополнительно некоторое количество товара, что потребует новых затрат на доставку в размере 4 ден. ед. за единицу товара. Если же запасенный товар полностью реализовать не удастся, то расходы на хранение остатка составят 2 ден. ед. за единицу товара. Предполагается, что дополнительно заказанный товар полностью реализуется за тот же рассматриваемый период времени. Используя игровой подход, высказать рекомендации об оптимальном уровне запаса товара V в универмаге, обеспечивающем ему наивысшую эффективность работы с учетом прибыли и возможных дополнительных затрат на заказ и доставку товара, а также хранение остатка.

Решение найти в чистых стратегиях:

1) на основе критериев Байеса (q_1=0,10, q_2=0,25, q_3=0,40, q_4=0,30);
2) Лапласа;
3) Вальда, Сэвиджа, Гурвица (параметр λ Гурвица принять равным 0,65).

■Планирующий орган универмага может принять одно из решений: создать запас товара в 5 ед. (стратегия A_1); в 6 ед. (стратегия A_2); в 7 ед. (стратегия A_3), 8 ед. (стратегия A_4).

Второй играющей стороной – природой – считаем совокупность объективных внешних условий, определяющую потребительский в спрос. Если для удовлетворения спроса запаса объема продукции товара окажется достаточно в размере 5 ед. это будет означать состояние природы П$_1$; в размере 6 ед. – состояние П$_2$; в размере 7 ед. – состояние П$_3$, в размере 8 ед. – состояние П$_4$. Рассчитаем элементы платежной матрицы (табл. 3). Элементы платежной матрицы рассчитываются по формуле

$$a_{ij}=5(4+j)+\begin{cases} 3(i-j), \text{ если } i \le j; \\ -2(i-j), \text{ если } i > j. \end{cases}$$

Платежная матрица выглядит следующим образом:

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 22 & 19 & 16 \\ 23 & 30 & 27 & 24 \\ 21 & 28 & 35 & 33 \\ 19 & 26 & 33 & 40 \end{pmatrix}$$

Решение в MathCAD приведено на рис.14.8 по всем критериям.

$$ORIGIN := 1 \quad \lambda := 0.65 \quad Q := A^T \quad A := \begin{pmatrix} 25 & 22 & 19 & 16 \\ 23 & 30 & 27 & 24 \\ 21 & 28 & 35 & 33 \\ 19 & 26 & 33 & 40 \end{pmatrix} \quad q := (0.1 \;\; 0.25 \;\; 0.4 \;\; 0.3)^T \quad n := \mathrm{cols}(A) \;\; m := \mathrm{rows}(A)$$

$$j := 1..n \quad \beta_j := \max\left(A^{\langle j\rangle}\right) \quad i := 1..m \quad R_{i,j} := \beta_j - A_{i,j} \quad R1 := R^T$$

$$i := 1..m \quad aB_i := \sum_{j=1}^{n} \left(q_j A_{i,j}\right) \quad aL_i := \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \quad aV_i := \min\left(Q^{\langle i\rangle}\right)$$

$$aG_i := \lambda\cdot\max\left(Q^{\langle i\rangle}\right) + (1-\lambda)\cdot\min\left(Q^{\langle i\rangle}\right) \quad aS_i := \max\left(R1^{\langle i\rangle}\right)$$

$$aB = \begin{pmatrix} 20.4 \\ 27.8 \\ 33 \\ 33.6 \end{pmatrix} \quad aL = \begin{pmatrix} 20.5 \\ 26 \\ 29.25 \\ 29.5 \end{pmatrix} \quad aV = \begin{pmatrix} 16 \\ 23 \\ 21 \\ 19 \end{pmatrix} \quad aG = \begin{pmatrix} 21.85 \\ 27.55 \\ 30.1 \\ 32.65 \end{pmatrix} \quad aS = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Рис.14.8. Решение задачи игры с природой в MathCAD

Вводим начальные данные задачи – параметр Гурвица λ, платежную матрицу A и вектор вероятностей стратегий природы $\mathbf{q}$. В результате получаем по всем стратегиям игрока A (ЛПР) его выигрыши по критериям: Байеса aB, Лапласа aL, Вальда aV, Гурвица aG и Сэвиджа aS. Выбираем те стратегии ЛПР, которым соответствуют наибольшие выигрыши (прибыли) и наименьшие риски. По критерию Байеса это стратегия A_4 с прибылью 33,6 ден.ед., Лапласа – тоже A_4 с прибылью 29,5 ден.ед., Вальда – A_2 с прибылью 23 ден.ед., Гурвица – A_4 с прибылью 32,65 ден.ед. и Сэвиджа – тоже A_4 с наименьшим риском в 6 ден.ед. По различным критериям чаще других рекомендовалась стратегия A_4. Следовательно, нужно создать запас товара в 8 ед.

Упражнения

В задачах **14.1–14.36** *решить графически игру, заданную платёжной матрицей* **(2×*n*).**

$$1\begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad 2\begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 & 10 & 5 \\ 7 & 8 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad 3\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 4\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 6 & 4 \\ -3 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$5\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & -6 & 7 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad 6\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 6 & -3 \\ 7 & 6 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad 7\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad 8\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$9\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad 10\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad 11\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$13\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 14\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 15\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad 16\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 3 & 7 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$17\begin{pmatrix}6&7&8&9&9\\9&8&1&1&2\end{pmatrix}18\begin{pmatrix}5&-1&2&2&4\\6&1&-2&4&8\end{pmatrix}19\begin{pmatrix}3&2&-3&5&6\\2&-4&1&6&8\end{pmatrix}20\begin{pmatrix}3&-4&1&-3&-5\\2&3&4&3&6\end{pmatrix}$$

$$21\begin{pmatrix}4&2&7&3&7\\5&5&2&5&3\end{pmatrix}22\begin{pmatrix}3&5&4&2&5\\5&6&3&4&3\end{pmatrix}23\begin{pmatrix}3&2&7&7&2\\-3&3&6&7&4\end{pmatrix}24\begin{pmatrix}2&4&1&6&8\\-1&4&5&5&7\end{pmatrix}$$

$$25\begin{pmatrix}9&-2&5&3&-1\\10&10&16&8&-3\end{pmatrix}26\begin{pmatrix}7&0&3&1&-3\\0&-1&6&1&1\end{pmatrix}27\begin{pmatrix}1&5&-3&4&-2\\6&5&5&1&4\end{pmatrix}28\begin{pmatrix}3&3&-4&-4&-6\\5&4&-5&-3&-2\end{pmatrix}$$

$$29\begin{pmatrix}2&3&-1&1&3\\-3&4&0&2&-3\end{pmatrix}30\begin{pmatrix}14&13&4&13&-2\\3&3&3&4&4\end{pmatrix}31\begin{pmatrix}2&1&5&5&4\\1&2&3&4&2\end{pmatrix}32\begin{pmatrix}-1&1&-7&2&0\\1&-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$33\begin{pmatrix}0&1&-6&-3&0\\2&2&1&1&-1\end{pmatrix}34\begin{pmatrix}2&1&3&-3&2\\3&2&-3&3&4\end{pmatrix}35\begin{pmatrix}5&-1&-3&5&-2\\-1&2&3&1&3\end{pmatrix}36\begin{pmatrix}10&3&-1&0&2\\15&-3&1&0&3\end{pmatrix}$$

В задачах **14.37–14.78** *решить графически игру, заданную платёжной матрицей* (***m*×2**).

$$37\begin{pmatrix}0&6\\-3&-1\\0&-5\\2&1\\0&-6\end{pmatrix}38\begin{pmatrix}1&-3\\2&0\\0&-2\\-2&1\\-1&-4\end{pmatrix}39\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\-5&0\\-1&2\\3&1\end{pmatrix}40\begin{pmatrix}-3&2\\-3&3\\1&-4\\0&1\\3&-3\end{pmatrix}41\begin{pmatrix}-2&2\\-4&2\\5&-1\\-4&3\\-1&2\end{pmatrix}42\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\\5&-2\\2&1\\1&-3\end{pmatrix}43\begin{pmatrix}4&1\\-4&2\\8&3\\5&3\\-4&5\end{pmatrix}$$

$$44\begin{pmatrix}2&1\\1&1\\1&0\\0&1\\0&6\end{pmatrix}45\begin{pmatrix}4&1\\3&1\\1&2\\0&-3\\4&0\end{pmatrix}46\begin{pmatrix}3&-3\\3&-4\\5&-3\\1&2\\2&3\end{pmatrix}47\begin{pmatrix}-1&4\\6&2\\4&6\\-2&6\\3&5\end{pmatrix}48\begin{pmatrix}4&3\\1&7\\5&4\\4&3\\5&0\end{pmatrix}49\begin{pmatrix}5&6\\7&0\\3&4\\4&3\\1&4\end{pmatrix}50\begin{pmatrix}1&7\\-2&6\\-1&4\\2&0\\1&4\end{pmatrix}$$

$$51\begin{pmatrix}6&4\\5&3\\0&2\\1&1\\-1&5\end{pmatrix}52\begin{pmatrix}7&5\\6&4\\7&4\\1&6\\-4&2\end{pmatrix}53\begin{pmatrix}7&0\\4&5\\-3&4\\1&1\\6&1\end{pmatrix}54\begin{pmatrix}8&3\\6&11\\5&3\\1&1\\7&0\end{pmatrix}55\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\0&-2\\2&-2\\-2&2\end{pmatrix}56\begin{pmatrix}3&1\\2&-3\\0&0\\-2&3\\2&-2\end{pmatrix}57\begin{pmatrix}1&5\\0&1\\1&4\\3&-1\\2&0\end{pmatrix}$$

$$58\begin{pmatrix}5&0\\1&4\\4&3\\-1&7\\0&5\end{pmatrix}59\begin{pmatrix}8&6\\8&4\\4&3\\6&8\\1&6\end{pmatrix}60\begin{pmatrix}-3&-6\\5&2\\1&3\\4&8\\2&-9\end{pmatrix}61\begin{pmatrix}-2&-4\\-2&-1\\-4&-2\\5&-5\\5&-2\end{pmatrix}62\begin{pmatrix}0&0\\2&4\\1&6\\7&-1\\4&-5\end{pmatrix}63\begin{pmatrix}-1&1\\3&2\\-1&4\\-2&1\\6&2\end{pmatrix}64\begin{pmatrix}-3&-4\\3&0\\1&6\\0&0\\5&4\end{pmatrix}$$

$$65\begin{pmatrix}1&-5\\-1&1\\2&-5\\-3&2\\-1&3\end{pmatrix}66\begin{pmatrix}-1&-6\\-6&3\\0&-4\\1&2\\5&2\end{pmatrix}67\begin{pmatrix}-4&-4\\2&3\\-3&-1\\3&-2\\4&1\end{pmatrix}68\begin{pmatrix}1&-4\\-3&1\\0&2\\-3&-5\\0&-7\end{pmatrix}69\begin{pmatrix}3&1\\0&1\\0&-2\\2&-2\\-2&2\end{pmatrix}70\begin{pmatrix}3&1\\2&-3\\0&0\\-2&3\\-2&2\end{pmatrix}71\begin{pmatrix}1&5\\0&1\\1&4\\3&-1\\3&-4\end{pmatrix}$$

$$72\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 0 & -3\\ 3 & 2\\ -6 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}\quad 73\begin{pmatrix}-5 & -4\\ 5 & -4\\ 3 & 4\\ 4 & -3\\ 5 & 0\end{pmatrix}\quad 74\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -3 & -3\\ 1 & 5\\ -3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\quad 75\begin{pmatrix}0 & -5\\ 3 & 2\\ -1 & -2\\ -4 & 2\\ -5 & 4\end{pmatrix}\quad 76\begin{pmatrix}0 & -4\\ 3 & 2\\ -3 & -3\\ 2 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}\quad 77\begin{pmatrix}-6 & -2\\ -1 & 3\\ 0 & -1\\ -3 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad 78\begin{pmatrix}2 & -6\\ 2 & 3\\ -4 & -1\\ 4 & -4\\ 1 & -4\end{pmatrix}$$

В задачах **14.79 –14.114** *решить матричную игру* ***m×n*** *с помощью линейного программирования*

$$79\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2 & 1 & 3\\ 4 & 0 & -1 & 5 & 5\\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1\\ -4 & 4 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 3 & -2 & 1\end{pmatrix}\quad 80\begin{pmatrix}7 & 3 & 9 & 8 & 9\\ 2 & 0 & 8 & 7 & 8\\ 6 & 1 & 6 & 2 & 9\\ 5 & 4 & 2 & 3 & 8\\ 6 & 4 & 6 & 1 & 8\end{pmatrix}\quad 81\begin{pmatrix}6 & 9 & 2 & 10 & 5\\ 5 & 6 & -3 & 8 & 13\\ 4 & 6 & -1 & 7 & 5\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3\\ 7 & 8 & 7 & 9 & 2\end{pmatrix}\quad 82\begin{pmatrix}3 & 3 & 5 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 4 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3\\ 4 & 4 & 0 & 5 & 5\\ 4 & 4 & 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$83\begin{pmatrix}3 & 3 & -2 & 6 & 4\\ -1 & 2 & -3 & 6 & 2\\ 2 & 1 & -6 & 2 & 1\\ -3 & 5 & 1 & 4 & 6\\ 2 & 4 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}\quad 84\begin{pmatrix}-1 & -4 & 0 & -2 & -2\\ 7 & 4 & 0 & 1 & 4\\ 5 & 3 & -2 & 0 & 3\\ 6 & -6 & 7 & -3 & 9\\ 4 & -7 & 7 & 1 & 6\end{pmatrix}\quad 85\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & -5 & 6 & -3\\ -3 & 4 & 2 & -1 & 3\\ 7 & 6 & -5 & 7 & -5\\ -4 & 3 & 0 & -3 & 1\end{pmatrix}\quad 86\begin{pmatrix}-5 & 2 & -5 & 7 & 3\\ 4 & 3 & 4 & 6 & 3\\ -2 & 8 & 3 & 4 & 8\\ 6 & 5 & 0 & 7 & 8\\ 1 & 1 & 2 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

$$87\begin{pmatrix}-3 & -4 & -2 & -6 & -7\\ 1 & 0 & -1 & 0 & -3\\ 3 & -4 & 1 & 1 & -2\\ -4 & -5 & -2 & -3 & -3\\ -8 & -3 & -1 & -6 & -7\end{pmatrix}\quad 88\begin{pmatrix}3 & -3 & 1 & -4 & -2\\ 1 & 3 & -4 & 5 & 4\\ 4 & -3 & 2 & -2 & -1\\ -1 & 4 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 5 & -3 & 6 & 6\end{pmatrix}\quad 89\begin{pmatrix}4 & 3 & 3 & -1 & 0\\ -5 & 4 & 1 & 4 & 4\\ -4 & 2 & 2 & 5 & 5\\ 5 & -3 & -4 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\quad 90\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 3 & -3\\ 2 & -1 & 3 & 5 & 0\\ -2 & 3 & 4 & 6 & 4\\ 3 & 2 & -4 & -2 & 2\\ -5 & 3 & 3 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

$$91\begin{pmatrix}-2 & 3 & -2 & 3 & -2\\ 5 & -1 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 4 & 4 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0\\ 3 & 2 & -5 & 3 & 4\end{pmatrix}\quad 92\begin{pmatrix}-5 & 3 & 2 & -7 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1 & -2 & -5\\ 2 & 2 & -2 & 0 & -2\end{pmatrix}\quad 93\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 2 & -6\\ 4 & 3 & 2 & -3 & 1\\ -1 & 5 & -1 & 5 & 4\\ 3 & -3 & 2 & 3 & -5\\ 5 & 0 & -2 & 4 & 3\end{pmatrix}\quad 94\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -6 & -4\\ 5 & -2 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & -4 & 6 & 7\\ 8 & 3 & 7 & -5 & -3\\ -3 & 2 & -5 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$95\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 9 & 0 & 1 & 1\\ 6 & 7 & 8 & 8 & 9\\ 9 & 8 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 9 & 4 & 6 & 5\end{pmatrix}\quad 96\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 5\\ 3 & 0 & -1 & 4 & 7\\ 5 & -1 & -2 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 4 & 2 & 6\\ 6 & 1 & -2 & 4 & 8\end{pmatrix}\quad 97\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0 & 4 & 5\\ -1 & 4 & 0 & 5 & 7\\ -2 & 2 & -1 & 3 & 4\\ 3 & 2 & -3 & 5 & 6\\ 2 & -4 & 1 & 6 & 8\end{pmatrix}\quad 98\begin{pmatrix}1 & -4 & 1 & -3 & -5\\ 2 & 3 & 4 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1\\ -3 & 3 & 3 & 2 & -2\\ -4 & 5 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$99\begin{pmatrix}2 & 4 & 1 & 6 & 8\\ -2 & 3 & 0 & 4 & 5\\ 3 & 2 & -2 & 5 & 6\\ -1 & 4 & 5 & 5 & 7\\ -2 & 2 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\quad 100\begin{pmatrix}8 & -3 & 4 & 5 & -3\\ 4 & 2 & -3 & 1 & 1\\ 9 & -2 & 5 & 3 & -1\\ 10 & 10 & 16 & 8 & -3\\ 2 & 1 & -4 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad 101\begin{pmatrix}1 & 5 & -3 & 4 & -2\\ 6 & 5 & 5 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 2 & -2 & 5\\ 3 & 7 & -1 & 7 & 1\\ 3 & 4 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\quad 102\begin{pmatrix}6 & -5 & 2 & 3 & -5\\ 2 & 0 & -5 & 2 & -1\\ 7 & 0 & 3 & 1 & -3\\ 8 & -1 & 14 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 6 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$103\begin{pmatrix}4 & 2 & 7 & 2 & 7\\ 14 & 13 & -3 & 13 & -2\\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4\\ 5 & 5 & 2 & 5 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5\end{pmatrix}\quad 104\begin{pmatrix}0 & 1 & 5 & 5 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 2\\ 4 & 4 & 0 & 0 & 4\\ 3 & 5 & 2 & 2 & 1\\ 5 & 6 & 3 & 4 & 3\end{pmatrix}\quad 105\begin{pmatrix}1 & 2 & -7 & 7 & 2\\ -1 & -1 & -7 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1\\ -3 & 2 & -6 & 7 & -3\\ -4 & -1 & -6 & 5 & 2\end{pmatrix}\quad 106\begin{pmatrix}3 & 3 & -5 & -4 & -6\\ 5 & 5 & -5 & -3 & -6\\ -2 & 1 & 0 & 1 & 5\\ 2 & 3 & -1 & 1 & 3\\ -3 & 4 & -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

$$107\begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & -1 \\ -10 & -1 & 1 & -1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad 108\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad 109\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & -2 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad 110\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$111\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad 112\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad 113\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 & 5 & -2 \\ -4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 114\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В задачах **14.115 –14.114** *решить игры с природой*

115. За некоторый период времени на предприятии потребление исходного сырья *S* в зависимости от его качества составляет 10 – 12 ед. Если для выпуска запланированного объема основной продукции сырья *S* окажется недостаточно, запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в размере 5 ед. в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 2 ед. в расчете на единицу сырья. Придать описанной производственной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу. Дать рекомендации по созданию оптимального запаса сырья на предприятии.

116. В новом жилом массиве создается ателье для ремонта в стационарных условиях не более 8 тыс. компьютеров в год. Пусть поток заявок на ремонт в условиях стационара выражается числами 2, 4, 6 и 8 тыс. в год. Накопленный опыт аналогичных предприятий показывает, что прибыль от ремонта компьютера составляет 9 ден. ед., потери, вызванные отказом в ремонте из-за недостатка мощностей, оцениваются в 5 ден. ед., а убытки от простоя специалистов и оборудования при отсутствии заявок обходятся в 6 ден. ед. в расчете на каждый телевизор. Придав рассматриваемой ситуации игровую схему, составить платежную матрицу. Дать рекомендации о мощности создаваемого ателье.

117. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать картофель на трех участках: на участке *А* – повышенной влажности, *Б* – средней влажности, *В* – сухом. Урожайность картофеля зависит от погодных условий, в частности, от количества осадков, выпадающих в течение сезона. Если осадков выпадает меньше нормы, то средняя урожайность на участке *А* составляет 270 ц с 1 га; при количестве осадков, близком к норме, – 220 ц; если же осадков выпадет больше нормы, – 110 ц; на участке *Б* – соответственно 210, 250 и 140 ц; на участке *В* – 120, 260 и 280 ц. Используя игровой подход, составить платежную матрицу. Установить, на каком участке следует выращивать картофель в предстоящем году, если, по данным службы долгосрочного прогнозирования погоды, вероятность выпадения осадков меньше нормы ожидается равной 0,3, близко к норме – 0,6, больше нормы – 0,1.

118. Объем реализации товара *Т* за рассматриваемый период времени колеблется, в зависимости от уровня покупательского спроса, в пределах от 4 до 7 ед. Прибыль торгового предприятия от единицы реализованного товара *Т* равна 2 ден. ед. Если запасенного товара окажется недостаточно для полного удовлетворения спроса, можно заказать дополнительное количество товара, что по-

требует новых затрат на доставку в размере 4 ден. ед. в расчете на единицу товара. Если же запасенный товар полностью реализовать не удастся, то расходы на содержание и хранение остатка составят 3 ден. ед. в расчете на единицу товара. Предполагается, что дополнительно заказанный товар полностью реализуется за тот же рассматриваемый период времени. Используя игровой подход, высказать рекомендации об оптимальном уровне запаса товара T на торговом предприятии, обеспечивающем ему наивысшую эффективность работы с учетом торговой прибыли и возможных дополнительных затрат на заказ и доставку товара, содержание и хранение остатка.

Решение найти в чистых стратегиях на основе критериев Байеса (q_1=0,15, q_2=0,20, q_3=0,40, q_4=0,25), Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица (параметр λ Гурвица принять равным 0,55).

119 Руководство универмага заказывает товар вида A. Известно, что спрос на данный вид товара лежит в пределах от 6 до 9 ед. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения спроса, то руководство может срочно заказать и завезти недостающее количество. Если же спрос будет меньше наличного количества товара, то нереализованный товар хранится на складе универмага.

Требуется определить такой объем заказа на товар, при котором дополнительные затраты, связанные с хранением и срочным завозом, были бы минимальными, если расходы на хранение 1 ед. товара составляют 1000 руб., а по срочному заказу и завозу − 2000 руб.

120. За зиму потребление мазута на ТЭЦ в зависимости от погоды составляет b_1, b_2 или b_3 весовых ед. Если для обеспечения заданной температуры теплоносителя объема запасенного мазута окажется недостаточно, то можно закупить недостающее количество мазута в отопительный сезон, что потребует дополнительных затрат в размере c ед. на ед. мазута. Если же запас мазута превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят d ед. на ед. мазута. Требуется:

а) придать описанной ситуации игровую схему;

б) составить платежную матрицу;

в) дать обоснованные рекомендации об оптимальном уровне запаса мазута, при котором дополнительные затраты на его приобретение, содержание и хранение будут минимальными при следующих предположениях: 1) вероятности q_1, q_2, потребления мазута в количествах соответственно b_1, b_2, b_3 ед. известны; 2) потребление мазута в количествах b_1, b_2, b_3 ед. представляется равновероятным; в) о вероятностях потребления мазута ничего определенного сказать нельзя. Числовые данные для 10 вариантов приведены в следующей таблице.

	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_1	20	7	11	14	17	10	13	19	30	12
b_2	22	8	12	16	19	12	15	20	32	14
b_3	24	9	13	18	21	14	17	21	34	16
c	3	4	5	7	8	9	11	4	5	4
d	2	2	3	3	4	5	5	2	3	1

λ	0,6	0,8	0,7	0,8	0,75	0,6	0,7	0,6	0,55	0,7
q_1	0,35	0,30	0.35	0,25	0,45	0,30	0,30	0,25	0,40	0,45
q_2	0,30	0,30	0,25	0.35	0,30	0,40	0,35	0,35	0.25	0,25
q_3	0,35	0,40	0,40	0,40	0,25	0,30	0,35	0,40	0,35	0,30

121. После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование оказывается в одном из следующих состояний: 1) оборудование может использоваться в очередном году после профилактического ремонта; 2) для безаварийной работы оборудования в дальнейшем следует заменить отдельные его детали и узлы; 3) оборудование требует капитального ремонта или замены. В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия в состоянии принять такие решения: 1) отремонтировать оборудование силами заводских специалистов, что потребует, в зависимости от обстановки, затрат, равных a_1, a_2 или a_3 ден. ед.; 2) вызвать специальную бригаду ремонтников, расходы в этом случае составят b_1, b_2 или b_3 ден. ед.; 3) заменить оборудование новым, реализовав устаревшее оборудование по его остаточной стоимости; совокупные затраты в результате этого мероприятия будут равны соответственно c_1, c_2 или c_3 ден. ед. Указанные выше расходы предприятия включают кроме стоимости ремонта и заменяемых деталей и узлов убытки, вызванные ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования, а также затраты на установку и отладку нового оборудования. Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии сторон;

2) составить платежную матрицу;

3) выяснить, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать руководству предприятия, чтобы минимизировать потери при следующих предположениях: а) накопленный на предприятии опыт эксплуатации аналогичного оборудования показывает, что вероятности указанных выше состояний оборудования равны соответственно q_1, q_2, q_3; б) имеющийся опыт свидетельствует о том, что все три возможных состояния оборудования равновероятны; в) о вероятностях состояний оборудования ничего определенного сказать нельзя.

В п. 3 следует найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь: в п. 3а – критерием Байеса, в п. 3б – критерием Лапласа, в п. 3в – критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица (значение параметра λ в критерии Гурвица задается).

Необходимые числовые данные для 10 вариантов приведены в табл. 1.

Таблица 1

	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	5	4	7	6	9	10	8	7	10	13
a_2	11	6	11	10	12	8	11	12	17	9
a_3	9	9	9	15	10	13	7	20	13	15
b_1	7	5	6	15	7	18	15	15	12	20
b_2	12	3	8	9	14	14	10	11	15	12

b_3	6	7	16	18	9	10	16	17	9	11
c_1	15	20	21	13	15	25	12	23	21	18
c_2	10	16	10	24	11	12	9	9	8	10
c_3	16	6	12	12	18	9	18	13	14	14
q_1	0,3	0,4	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3	0.15	0,4	0,3
q_2	0,5	0,4	0,6	0,5	0,6	0,5	0,5	0,65	0,4	0,4
q_3	0,2	0,2	0,3	0.4	0,2	0,2	0,2	0,20	0,2	0,3
λ	0,7	0,6	0,5	0,8	0,6	0,8	0,7	0,75	0,6	0,7

122. За некоторый период времени на предприятии потребление исходного сырья S в зависимости от его качества составляет b_1, b_2, b_3 или b_4 ед. Если для выпуска запланированного объема основной продукции сырья S окажется недостаточно, то запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в сумме c_1 ед. в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят c_2 ед. в расчете на единицу сырья. Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, выявить участников игры и установить ее характер, указать допустимые стратегии сторон;
2) вычислить элементы платежной матрицы и составить ее;
3) дать обоснованные рекомендации об оптимальном уровне запаса сырья, при котором дополнительные затраты на приобретение, содержание и хранение сырья будут минимальными при следующих предположениях: а) вероятности q_1, q_2, q_3, q_4 потребности в сырье в количествах соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 ед. известны; б) потребление сырья в количествах b_1, b_2, b_3, b_4 ед. представляется равновероятным; в) о вероятностях потребления сырья ничего определенного сказать нельзя.

В п. 3 следует найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь: в п. 3а – критерием Байеса, в п. 3б – критерием Лапласа, в п. 3в – критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица (значение параметра λ в критерии Гурвица задается).

Необходимые числовые данные для 10 вариантов приведены в табл. 2.

Таблица 2

	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_1	12	10	8	15	9	6	20	13	10	8
b_2	14	11	9	17	10	8	21	15	12	10
b_3	16	12	10	19	11	10	22	17	14	12
b_4	18	13	11	21	12	12	23	19	. 16	14
c_1	5	8	7	4	6	5	2	9	3	5
c_2	7	4	3	9	2	8	4	7	6	8
q_1	0,24	0,14	0.20	0,25	0,10	0,15	0,20	0,10	0,20	0,15
q_2	0,30	0,30	0,25	0.45	0,30	0,30	0,30	0,35	0.25	0,25
q_3	0,26	0,40	0,40	0,20	0,40	0,40	0,35	0,35	0,40	0,20
q_4	0,20	0,16	0,15	0,10	0,20	0,15	0,15	0,20	0,15	0,40
λ	0,60	0,80	0,70	0,40	0,80	0,65	0,40	0,70	0,80	0,60

Список литературы

1. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Математические методы и модели для магистрантов экономики: учеб. пособие для вузов.–С.-Пб.:«Питер», 2010.
2. *Красс М.С., Чупрынов* Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. –М: Дело АНХ, 2008.
3. *Красс М. С., Чупрынов* Б. П. Математика в экономике. Математические модели и методы. –М: Финансы и статистика, 2007.
4. *Орлова И.В*. Экономико-математическое моделирование: учеб. пособие для вузов. М: «Вузовский учебник», 2008.
5. *Миненко* С.Н. Экономико-математическое моделирование производственных систем: учеб.пособие для вузов. – М.: МГИУ, 2006.
6. *Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников О.И., Кузнецов А.В.* Математика для экономистов на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003.
7. *Поршнев С.В., Беленкова И.В.* Численные методы на базе MathCAD. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.