თეიმურაზ ვეფხვაძე

წრფივი ალგებრა და ანალიზური გეომეტრია

ლექციების კურსი

თბილისი 2012

რიცხვითი სისტემები

გავიხსენოთ, როგორ ფართოვდებოდა ჩვენი ცოდნა რიცხვების შესახებ. ვიწყებდით **ნატურალური რიცხვებით**: 1,2,3,. . . მათ თვლასთან და გადანომრვასთან დაკავშირებული პირველივე ამოცანებიდან ვიყენებთ.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე გვაქვს მეტობის და ნაკლებობის მიმართებები, განსაზღვრულია შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები. გავიხსენოთ ამ ოპერაციების თვისებები:

შეკრების კომუტაციურობა: $a + b = b + a$;

შეკრების ასოციაციურობა: $a + (b + c) = (a + b) + c$;

გამრავლების კომუტაციურობა: $a \cdot b = b \cdot a$; მაგალითად: $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$;

გამრავლების ასოციაციურობა: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

ე.წ. გამრავლების ნეიტრალური ელემენტი: რიცხვი 1: $a \cdot 1 = a$;

გაყოფის ოპერაცია ყოველთვის არ სრულდება: თუ მოცემულია a და b ბატურალური რიცხვები და არსებობს c ნატურალური რიცხვი, ისეთი, რომ:

$$a = b \cdot c$$

მაშინ ვიტყვით, რომ a იყოფა $b-$ზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ a არ იყოფა $b-$ზე.

თუ a იყოფა $b-$ზე, მაშინ, აუცილებლად $b \leq a$, რადგან $a = bc$.

შებრუნებული დებულება არ არის სწორი: თუ $b \leq a$, მაშინ აქედან არ გამომდინარეობს, რომ a იყოფა $b-$ზე. მაგალითად: $5 \leq 17$ მაგრამ 17 არ იყოფა 5–ზე.

თუმცა სამართლიანია თეორემა **ნაშთიანი გაყოფის** შესახებ:

თუ $b \leq a$ და a არ იყოფა $b-$ზე, მაშინ არსებობს ნატურალური რიცხვები q და r ისეთი, რომ

$$a = bq + r \ , \quad \text{სადაც } r < b; \quad \underline{r \text{ ნაშთია}}.$$

მაგალითად: $5 \leq 17$ მაგრამ გვაქვს:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2$$

აქ 5 არის <u>არასრული</u> განაყოფი, 2–კი ნაშთი.

ამასთანავე, რიცხვთა წყვილი (q, r) ერთადერთია. ანუ:

თუ: $a = bq_1 + r_1$, და $a = bq_2 + r_2$; $r_1 < b$; $r_2 < b$;

მაშინ: $q_1 = q_2$ და $r_1 = r_2$.თუ ნატურალური რიცხვი c არის a და b ნატურალური რიცხვების გამყოფი, მაშინ ის ამ რიცხვების საერთო გამყოფია.

საერთო გამყოფებს შორის უდიდესს **უდიდესი საერთო გამყოფი** ეწოდება.

ახლა გავეცნოთ უდიდესი საერთო გამყოფის პოვნის **ევკლიდეს ალგორითმს:**

ვთქვათ, $a \geq b$ და გვსურს ვიპოვოთ a და $b-$ს უდიდესი საერთო გამყოფი. თუ a იყოფა $b-$ზე, მაშინ b არის a და $b-$ს უდიდესი საერთო გამყოფი: $b=$უ.ს.გ.$(a;b)$.

თუ a არ იყოფა $b-$ზე, მაშინ ვწერთ:

$$a=bq_1+r_1;\ 0<r_1<b.$$

თუ b იყოფა r_1-ზე უნაშთოდ, მაშინ:

უ.ს.გ.$(b;r_1)=r_1$ და მაშინ: უ.ს.გ.$(a;b)=$უ.ს.გ.$(b;r_1)=r_1$.

ხოლო თუ არა მაშინ:

$b=r_1q_2+r_2$, $0<r_2<r_1$(ანუ a-ს ჩაენაცვლება b; b-ს ჩაენაცვლება r_1).

ამ პროცესს ვაგრძელებთ სანამ გაყოფა უნაშთოდ არ შესრულდება.

თუ r_n უკანასკნელი არანულოვანი ნაშთია, მაშინ:

$$r_n=\text{უ.ს.გ.}(a;b).$$

მაგ.1): ვიპოვოთ უ.ს.გ.(248;64).

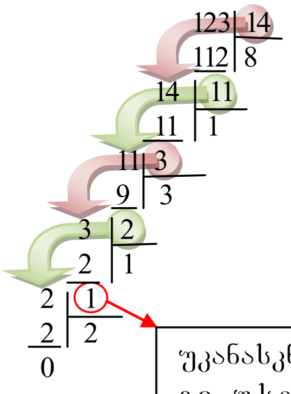
$$248=64\cdot 3+56$$

$$64=56\cdot 1+8$$

$$56=8\cdot 7$$

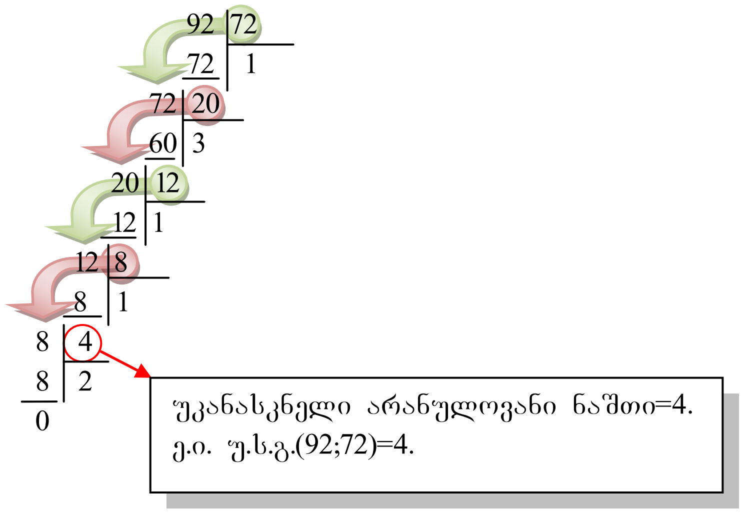
მაშასადამე: 8=უ.ს.გ.(248;64).

მაგ.2): ვიპოვოთ უ.ს.გ.(123;14).

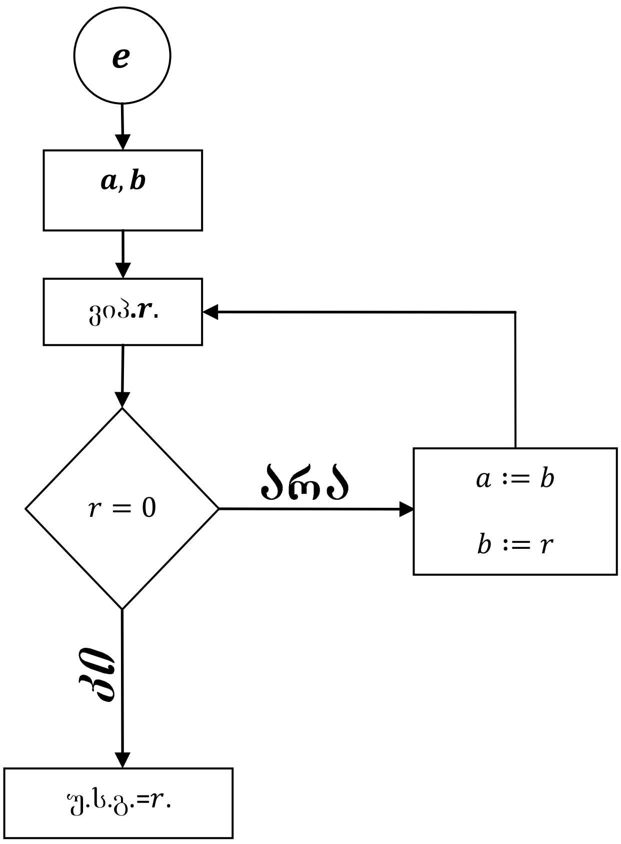


უკანასკნელი არანულოვანი ნაშთი=1. ე.ი. უ.ს.გ.(123;14)=1. შესაბამისად ეს რიცხვები ურთიერთმარტივი რიცხვებია.

მაგ3): ვიპოვოთ უ.ს.გ.(72;92).



ევკლიდეს ალგორითმი შეიძლება ბლოკსქემით წარმოვადგინოთ:



$\boldsymbol{e}$–დასაწყისია

უ.ს.გ= r.–ბოლო.

მეორე ბლოკში a–ს b–ზე გაყოფისას ნაშთის პოვნაა.

მესამე ბლოკში $a := b$ და $b := r$ ნიშნავს, რომ a–ს ენიჭება b–ს მნიშვნელობა და b–ს ენიჭება r–ის მნიშვნელობა და შემდეგ უკვე ვპოულობთ b–ს r–ზე გაყოფით მიღებულ ნაშთს.

მანამ, სანამ არ გვექნება "$r = 0$", ციკლი მეორდება.

ნატურალურ რიცხვებთან ერთად სკოლაში გავეცანით **ნულს და დადებით რაციონალურ** რიცხვებს: $\frac{1}{2}, \frac{17}{5}, \frac{2}{5}, \ldots$ მათი საჭიროება, მეტწილად, გაზომვების ამოცანებმა დაგვანახა. ნატურალური რიცხვებიც შეიძლება ჩაიწეროს წილადების სახით: $1 = \frac{1}{1}, 5 = \frac{5}{1}$.

გავიხსენოთ დადებითი რაციონალური რიცხვების ჩაწერა ათწილადების სახით (სასრული ან უსასრულო). მაგალითად: $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots = 0,(3)$ −უსასრულო პერიოდული ათწილადი, პერიოდია 3 .

შემდეგ დავიწყეთ მთელი უარყოფითი რიცხვებისა და უარყოფითი რაციონალური რიცხვების შესწავლა.

მტელი დადებითი რიცხვები (ნატურალური რიცხვები), მთელი უარყოფითი რიცხვები და ნული ქმნის **მთელ რიცხვთა** $\mathbb{Z}$ სიმრავლეს. ნატურალურ რიცხვთა $\mathbb{N}$ სიმრავლე $\mathbb{Z}$ სიმრავლის ქვესიმრავლეა.

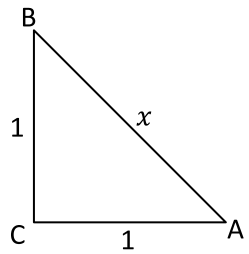
$\mathbb{Z}$ სიმრავლეში გვაქვს ორი ოპერაცია −შეკრება და გამრავლება, თუმცა, შეკრებას აქვს დამატებითი თვისება, რაც კარგად ჩანს შემდეგ ჩამონათვალში:

	შეკრება:	გამრავლება:
1.	$a + b = b + a$ (კომუტაციურობა)	$ab = ba$ (კომუტაციურობა)
2.	$a + (b + c) = (a + b) + c$(ასოციაციურობა)	$a(bc) = (ab)c$ (ასოციაციურობა)
3.	$a + 0 = a$ (0–შეკრების ნეიტრალური ელემენტი)	$a \cdot 1 = a$(1–გამრავლების ნეიტრალური ელემენტი)
4.	$a + (-a) = 0$	$a \cdot a^{-1} = 1$; როცა $a \neq 1$
5.	$a + x = b$ მაშინ $x = b - a$ (x უცნობია)	$ax = b$ მაშინ $x = \frac{b}{a}$; როცა $a \neq 0$(x უცნობია)

a რიცხვის გაყოფა ნულისაგან განსხვავებულ b რიცხვზე:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

ყველა მონაკვეთის სიგრძე რიცხვით რომ გამოისახოს, საჭირო გახდა რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლის გაფართოება ახალი რიცხვებით.



ABC მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები $AC = BC = 1$. ასეთი სამკუთხედის ჰიპოტენუზის კვადრატი 2-ის ტოლია. მაგრამ არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. ჰიპოტენუზის სიგრძე ირაციონალური რიცხვით გამოისახება: $x = \sqrt{2}$.

უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი წარმოადგენს ირაციონალურ რიცხვს. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება − $\mathbb{I}$ ასოთი.

რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლე და $\mathbb{I}$ **ირაციონალურ** რიცხვთა სიმრავლეები შედის უფრო ფართო –**ნამდვილ რიცხვთა** $\mathbb{R}$ სიმრავლეში. $\mathbb{R}$-ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

$\mathbb{Q} < R$, მაშასადამე $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

ყოველი რაციონალლური რიცხვი უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით ჩაიწერება, ყოველი უსასრულო პერიოდული ათწილადი რაღაც რაციონალურ რიცხვს წარმოადგენს. მაგრამ არსებობს არაპერიოდული ათწილადებიც, მაგალითად: $0{,}1010010001\ldots$ (პირველი ერთიანის შემდეგ ერთი ნულია, მეორე ერთიანის შემდეგ ორი ნული და ა.შ.). უსასრულო არაპერიოდული ათწილადების სახით წარმოგვიდგება ირაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{I}$ სიმრავლე.

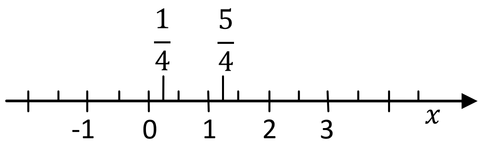
ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში **მოქმედებების თვისებები**:

კომუტაციურობა:	$a + b = b + a$	$ab = ba$
ასოციაციურობა:	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(bc) = (ab)c$
	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
	$a + (-a) = 0$	$a \cdot a^{-1} = 1$; თუ $a \neq 1$.

ყოველთვის იხსნება განტოლება:

განტოლრბა:	$a + x = b$	$ax = b$ და $a \neq 0$
ამოხსნა:	$x = b - a$;	$x = \frac{b}{a}$;

ნამდვილი რიცხვები რიცხვითი წრფის(საკოორდინატო წრფის) წერტილებით გამოისახება.



სურათზე რაციონალური რიცხვებია წარმოდგენილი. ისინი „რაციონალური წერტილებით“ გამოისახება. მათ გარდა გვაქვს „ირაციონალური წერტილები“ რომლებიც ირაციონალურ რიცხვებს გამოსახავს.

ყოველ წერტილს ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი (რაციონალური ან ირაციონალური) შეესაბამება.

განტოლებები და განტოლებათა სისტემები

წრფივი განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$ax = b$$

a და b რაიმე რიცხვებია, x-ით უცნობია აღნიშნული. თუ $a \neq 0$, ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსენი:

ა$x = \frac{b}{a}$

თუ $a = 0$ და $b = 0$ მაშინ განტოლებას უამრავი ამონახსნი აქვს.

თუ $a = 0$ და $b \neq 0$ მაშინ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი.

გაიხსენეთ **მეორე ხარისხის ერთუცნობიანი** განტოლება –კვადრატული განტოლება და ფესვის ფორმულები.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \neq 0$$

წრფივი ორუცნობიანი განტოლება კი ასე ჩაიწერება:

$ax + by = c$ (1)

ამ განტოლების ამონახსნი ეწოდება რიცხვთა წყვილს $(x_0; y_0)$–ს, რომლისთვისაც

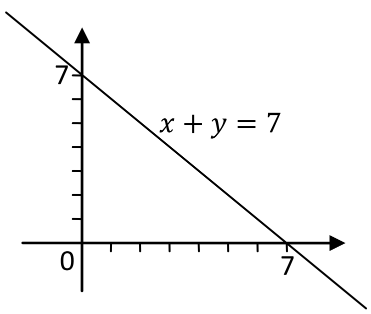
$$ax_0 + by_0 = c$$

თუ უცნობების კოეფიციენტები a და b ორივე ნულია და $c \neq 0$, განტოლებას არა აქვს ამონახსნი.

თუ $a = 0$, $b = 0$ და $c = 0$ განტოლებას უამრავი ამონახსნი აქვს.

იმ $(x; y)$ წყვილთა ერთობლიობას, რომლებიც (1)–ს აკმაყოფილებს, განტოლების გრაფიკი ეწოდება.

თუ a ან b არ არის ნული, მაშინ განტოლების გრაფიკი საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოისახება წრფით.



მაგალითად: $x + y = 7$,

საკმარისია ორი წერტილი ვიპოვოთ,

$x = 0,\ y = 7;$

$x = 7,\ y = 0.$

განვიხილოთ **წრფივი ორუცნობიანი განტოლებათა სისტემა:**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

თუ ყველა რიცხვი a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 ნოლია, მაშინ სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს.

თუ $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ და c_1 ან $c_2 \neq 0$, მაშინ სისტემას არ აქვს ამონახსნი. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით რომ სისტემა არათავსებადია.

ვთქვათ a_1, a_2, b_1, b_2 რიცხვებიდან ერთი მაინც $\neq 0$, ვთქვათ $a_1 \neq 0$. მაშინ გვაქვს:

$$\begin{cases} x + \frac{b_1}{a_1}y = \frac{c_1}{a_1} \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \left| \cdot(-a_2) \right| \begin{cases} -a_2x - b_1\frac{a_2}{a_1}y = -c_1\frac{a2}{a1} \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$\left(b_2 - b_1\frac{a_2}{a_1}\right)y = c_2 - c_1\frac{a_2}{a_1} \qquad (1)$$

აქედან:

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

ჩავსვათ პირველ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

ე.ი. როცა $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ მაშინ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

თუ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ და $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ მაშინ (1) –ს და მაშასადამე, სისტემას არა აქვს ამონახსნი.

თუ $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ მაშინ უამრავი ამონახსნი აქვს და ყოველი $(x; y)$,რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$x = \frac{c_2}{a_2} - \frac{b_2}{a_2}y \qquad (-\ y \text{ ნებისმიერია})$$

არის სისტემის ამონახსნი.

ვთქვათ, კვლავ $a_1 \neq 0$ და $b_2 - b_1 \frac{a_2}{a_1}$,

აღვნიშნოთ $\frac{a_2}{a_1} = k$, მაშინ $a_2 = a_1 k$ და $b_2 = b_1 k$; გვექნება:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ k a_1 x + k b_1 y = c_2 \end{cases}$$

და ამ სისტემას მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს ამონახსნი როცა $c_2 = kc_1$

მაშასადამე, როცა $a_1 \neq 0$, $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, მაშინ სისტემას მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს ამონახსნი, როცა მეორე მიიღება პეირველისგან $k = \frac{a_2}{a_1}$ –ზე გამრავლებით.

სამუცნობიანი წრფივი განტოლებათა სისტემა

განტოლებათა სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით

(გამორიცხვის მეთოდით)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad + \quad \ldots \quad + \cdots + \ldots \quad = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

მოცემულ სისტემაში $a_{11} \neq 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავაადგილებთ განტოლებებს სისტემაში.

სისტემის ამონახსნებია:

1. (როცა ბოლო მიღებული სისტემის მატრიცი „სამკუთხედის“ სახისაა) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.
2. (როცა ბოლო მიღებული სისტემის მატრიცი „ტრაპეციის“ სახისაა) სისტემას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი.
3. სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინაა არათავსებადი (არ აქვს ამონახსნი) თუ გამორიცხვის რომელიმე საფეხურზე მივიღებთ: $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ სახის განტოლებას, სადაც $b \neq 0$.

სხვა შემთხვევას ადგილი არ ექნება.

<u>გაუსის მეთოდით ამოხსნის საფეხურები:</u>

1). (პირველ განტოლებაში $a_{11} \neq 0$; წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავაადგილებთ სისტემაში) ყოველ i-ურ განტოლებას$(2 \leq i \leq m)$ დავუმატოთ $\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$-რიცხვზე გამრავლებული პირველი განტოლება, ხოლო პირველი განტოლება უცვლელი დავტოვოთ. მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას, რომლის ყველა განტოლებიდან, პირველის გარდა, **გამორიცხული იქნება x_1 უცნობი.**

სისტემიდან ამოვაგდებთ $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ სახის განტოლებებს.

2). თუ მიღებულ სისტემაში არ გამოვლინდა არათავსებადობა $(0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \neq 0)$ გადავდივართ მეორე საფეხურზე.

$$a_{22} \neq 0;$$

მიღებულ სისტემაში მესამე და ყოველ მომდევნო განტოლებას დავუმატებთ სათანადო რიცხვებზე გამრავლებულ მეორე განტოლებას. მეორე საფეხურის დამთავრების შემდეგ **გამორიცხული იქნება x_2 უცნობი.**

თუ სისტემა თავსებადია გადავდივართ მომდევნო საფეხურზე და ვაგრძელებთ პროცესს მანამ, სანამ არ მივიღებთ 2 ან 1 უცნობიანი განტოლებით დაბოლოებულ განტოლებათა სისტემის მატრიცს.

<u>შედეგი:</u>

1) თუ რომელიმე საფეხურზე არათავსებადობა გამოვლინდა ე.ი. **სისტემას არა აქვს ამონახსნი.**
2) თუ სისტემა თავსებადია და მივიღებთ „სამკუთხედის“ სახის(ერთუცნობიანი განტოლებით დაბოლოებულ) განტოლებათა სისტემის მატრიცს ე.ი. **სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.**
3) თუ მივიღებთ „ტრაპეციის“ სახის(ორუცნობიანი განტოლებით დაბოლოებულ) განტოლებათა სისტემის მატრიცს ე.ი. **სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.**

სხვა შემთხვევას ადგილი არ ექნება.

მაგ.1) : ამოვხსნათ გაუსის მეთოდით (გამორიცხვის მეთოდით):

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \ \ (1) & \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \ \ (2) & \cdot(-2) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \ \ (3) & \cdot(-1) \end{array}\right.$$

მეორე განტოლებას ვამატებთ $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -2$ ზე გამრავლებულ (1) გსნტოლებას.

მესამე განტოლებას ვამატებთ $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -2$ ზე გამრავლებულ (1) გსნტოლებას.

$$=> \left\{\begin{array}{rl} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 & (1) \\ -5x_2 - 4x_3 = 9 & (4) \\ -x_2 = 1 & (5) \end{array}\right.$$

მივიღეთ ერთუცნობიანი განტოლებით დაბოლოებული („სამკუთხედის“ სახის) მატრიცი. ე.ი. სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

მივიღეთ ერთუცნობიანი განტოლებით დაბოლოებული („სამკუთხედის“ სახის) მატრიცი. ე.ი. სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

(5) –დან:

$x_2 = -1;$ ჩავსვათ (4) –ში, გვექნება:

$-5 \cdot (-1) - 4x_3 = 9$ სადაც: $x_3 = \frac{9-5}{-4} = -1;$

$x_3 = -1;$ ჩავსვათ x_3 და x_2 მნიშვნელობები (1) –ში:

$x_1 + 3 \cdot (-1) + (-1) = -3;$

$x_1 = -3 + 4 = 1;$

$x_1 = 1.$

ე.ი. სისტემის ერთადერთი ამონახსნია: (1;-1;-1)

მაგ.2) : ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა გაუსის მეთოდით:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ -1 \\ -2 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_2 + 4x_3 = -3 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \\ -1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + 4x_3 = -2 \\ 0x_2 + 0x_3 = -1 \end{array}\right.$$

–მივიღეთ არათავსებადი სისტემა, ე.ი. სისტემას არა აქვს ამონახსნი.

მაგ.3) :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ -1 \\ -1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 & (1) \\ 4x_3 + x_4 = 5 & (2) \\ x_2 - 3x_3 = 3 & (3) \end{cases}$$

მივიღეთ ორუცნობიანი განტოლებით დაბოლოებული („ტრაპეციის“ სახის) მატრიცი. ე.ი. სისტემას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი.

გამოვთვალოთ (2) –დან x_3:

$x_3 = \frac{5-x_4}{4} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_4$;

$x_3 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_4$;

გამოვთვალოთ (3) –დან x_2: (ჩავსვათ x_3)

$x_2 + 2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_2\right) = 3$;

$x_2 = 3 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4$;

$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4$;

გამოვითვალოთ (1) –დან x_1: (ჩავსვათ x_2 და x_3)

$x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$;

$x_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4\right) - 3 \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_4\right) + x_4 = 0$;

$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{15}{4} - \frac{3}{4}x_4 - x_4 = \frac{13}{4} - \frac{9}{4}x_4$;

$x_1 = \frac{13}{4} - \frac{9}{4}x_4$;

პასუხი: სისტემას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი. სისტემის ზოგადი ამონახსნია: $x_1 = \frac{13}{4} - \frac{9}{4}x_4$; $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4$; $x_3 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_4$; სადაც x_4 ნებისმიერი რიცხვია.

დეტერმინანტები

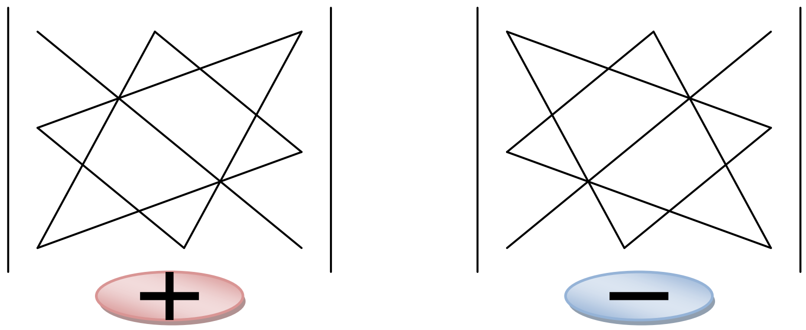
(მეორე და მესამე რიგის)

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ე.ი მეორე რიგის დეტერმინანტი უდრის მთავარი დიაგონალის ($|\ddots|$) ელემენტების ნამრავლისა და დამხმარე დიაგონალის ($|\therefore|$) ელემენტების სხვაობას.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

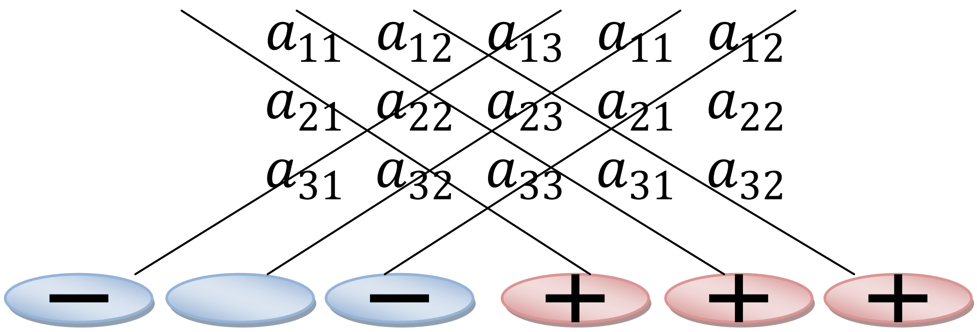
<u>სამკუთხედების მეთოდი</u> (წესი).

სქემატურად:



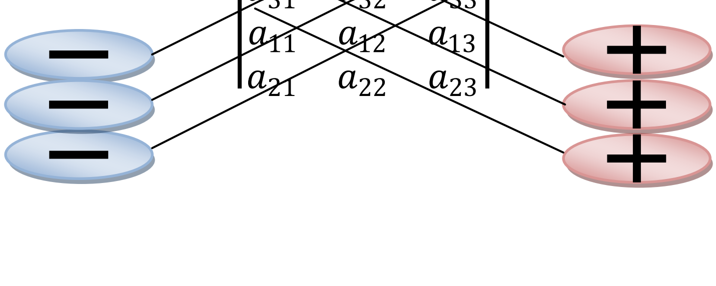
მესამე რიგის დეტერმინანტების გამოსათვლელად სამკუთხედების წესის გარდა შეიძლება აგრეთვე ვისარგებლოთ სხვა ხერხით, რომელსაც ქვია **სარუსის წესი:**

ვარიანტი 1) დეტერმინანტებს მარჯვნივ მივუწეროთ მისივე პირველი ორი სვეტი:



(+) –ნიშნით აღნიშნულ ხაზებზე მდებარე ელემენტების ნამრავლები ავიღოთ (+) ნიშნით ხოლო (–) ნიშნით აღნიშნულ ხაზებზე მდებარე ელემენტების ნამრავლები კი (–) ნიშნით.

ვარიანტი 2). ამ შემთხვევაში მესამე რიგის დეტერმინანტს ქვეშ მივუწეროთ მისივე პირველი ორი სვეტი:



განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

კრამერის ფორმულებით

n −უცნობიან n −წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მატრიცული ჩაწერა. კრამერის თეორემა:

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომელშიც განტოლებათა რიცხვი და უცნობთა რიცხვი ერთმანეთის ტოლია:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ვთქვათ ამ სისტემის მატრიცი $A = \left(a_{ij}\right)_n$ გადაუგვარებელია. მოცემული სისტემიდან ჩაწერილ A მატრიცული განტოლების ორივე მხარეს მარცხნიდან გავამრავლებთ A მატრიცის შებრუნებულ A^{-1} მატრიცზე, მივიღებთ: $x = A^{-1}B$, რაც გვაძლევს ამ სისტემის ამოხსნის მატრიცულ ჩანაწერს.

$x = A^{-1}B$ ტოლობით შეიძლება დამტკიცდეს **კრამერის თეორემა:**

თუ სისტემის დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც გამოითვლება ფორმულებით:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.}$$

სადაც Δ_i არის სისტემის ე.წ. დამხმარე დეტერმინანტი. რომელიც მიიღება სისტემის დეტერმინანტისაგან, თუ მასში i-ურ სვეტს შევცვლით B სვეტით. $(i = 1,2,\ldots,n)$**:**

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \cdots \quad ;$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

მაგ.1): ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა კრამერის ფორმულებით:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 6 = 10$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 15 = 13$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 14 = 6$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{13}{10};$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};$$

პასუხი: $\left(\frac{13}{10}; \frac{3}{5}\right)$.

მაგ.2): ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა კრამერის ფორმულებით:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + z = 1 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\Delta= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-2) - 0 - 8 - 1 = -11$$

$$\Delta_1= \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 1 - 0 - 0 - 4 = 1$$

$$\Delta_{2=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + (-6) + 0 - 0 - 0 - 3 = -7$$

$$\Delta_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 12 - 1 = -13$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{11} \ ; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{-11} = \frac{7}{11} \quad ; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-13}{-11} = \frac{13}{11} \ .$$

პასუხი: სისტემის ამონახსნია $\left(-\frac{1}{11}\ ;\ \frac{7}{11}\ ;\ \frac{13}{11}\right)$.

დასაბუთების ხერხები

ყოველ დებულებაში, რომელსაც ვასაბუთებთ, შეიძლება გამოვყოთ პირობა, დასკვნა და აღწერითი ნაწილი. ამ უკანასკნელში (რომელიც შეიძლება გამოცალკევებულიც იყოს) შეიძლება აღწერილი იყოს ობიექტები, რომელთა თვისებებსაც ვასაბუთებთ.

თუმცა, დებულება, რომელსაც ვასაბუთებთ, შეიძლება მოკლედ ასეც ჩავწეროთ: $\boldsymbol{p} => q$. ვცდილობთ, რომ p–ს ჭეშმარიტებიდან მივიღოთ q–ს ჭეშმარიტება, რაც ნიშნავს იმას, რომ p–დან გამომდინარეობს q, ეს ჩანაწერი მოკლედ შეიძლება ასეც ჩავწეროთ: „თუ p , მაშინ q “.

არსებობს დებულების **დამტკიცების პირდაპირი ხერხი**, როცა ვახერხებთ ავაგოთ დასაბუთებათა ჯაჭვი, რომლის ყველა რგოლი იქნება „q“. მაგალითად:

ვასაბუთებთ: $p => r$, $r => s$, $s => g$, მაშინ გვექნება: $p => q$.

თუმცა, არსებობს დებულების დასაბუთების არაპირდაპირი ხერხიც, დებულების დასაბუთება **საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით:** ვუშვებთ, რომ დასასაბუთებელი q–დებულება მცდარია. თუ ასეთი დაშვებიდან მსჯელობით მივალთ პირობის უარყოფამდე, მაშინ დავასკვნით, რომ ჩვენი დაშვება მცდარია, ანუ q–დებულება ჭეშმარიტია. ზოგჯერ ამბობენ: საწინააღმდეგოს დაშვებამ აბსურდამდე მიგვიყვანა.

<u>მაგალითად</u>: დავამტკიცოთ საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით, რომ არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატიც ორის ტოლია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო –ვთქვათ, არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2–ის ტოლია, ეს რაციონალური რიცხვი შეიძლება უკვეცი წილადის სახით წარმოვადგინოთ: $\frac{m}{n}$; მაშასადამე,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2; \text{ აქედან: } m^2 = 2n^2,$$

ამრიგად, m^2 ლუწი რიცხვია, მაშინ m რიცხვიც ლუწია, $m = 2m_1$, ანუ:

$$4m^2 = 2n^2 \ , \ n^2 = 2{m_1}^2.$$

ე.ი. n^2 ლუწია, მაშინ n რიცხვიც ლუწია. $n = 2n_1$, ამრიგად, $\frac{m}{n} = \frac{2m_1}{2n_1}$ –მივიღეთ წინააღმდეგობა: $\frac{m}{n}$ არ არის უკვეცი წილადი. ე.ი. ჩვენი დაშვება მცდარია და არ არსებობს რაციონალური რიცხვი რომლის კვადრატიც ორის ტოლია.

ზოგჯერ, დებულების დასაბუთებისას, გამოიყენება **ინტუიციური მსჯელობა** –კერძო მაგალითების განხილვის საფუძველზე კეთდება ზოგადი დასკვნა. ჭეშმარიტია თუ არა ასე მიღებული დასკვნა? თუ განხილული მაგალითები ყველა შესაძლო შემთხვევას არ მოიცავენ, მაშინ ასე მიღებული დასკვნა მხოლოდ ვარაუდი (ჰიპოთეზა) შეიძლება იყოს.

როცა ზოგადი დასკვნა კერძო (არა ყველა) შემთხვევების განხილვის საფუძველზე კეთდება –ასეთ მეთოდს **არასრული ინდუქცია** ეწოდება. არასრული ინდუქციით მიღებული დასკვნა შეიძლება არ იყოს ჭეშმარიტი.

მსჯელობის მეთოდს, როცა დასკვნა ყველა შესაძლო შემთხვევის საფუძველზე კეთდება, **სრული ინდუქცია** ეწოდება. ამ მეთოდით მიღებული დასკვნა ჭეშმარიტია.

ახლა შევეხოთ დებულების დამტკიცების მეთოდს, რომელსაც **მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი** ეწოდება.

ვთქვათ, დასამტკიცებელი გვაქვს დებულება, რომელიც შეიცავს n ნატურალურ რიცხვს, აღვნიშნოთ იგი $p(n)\cdots$, ამასთანავე, ვთქვათ შემოწმებით დადგინდა:

1). $p(n)$ ჭეშმარიტია, როცა $n=1$.

2). იმ ვარაუდით, რომ $p(k)$ ჭეშმარიტია, მტკიცდება $p(k+1)-$ის ჭეშმარიტებაც.

მაშინ $p(n)$ ჭეშმარიტია ნებისმიერი $n-$ისთვის.

მაგალითი: დავამტკიცოთ რომ $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

1). შევამოწმოთ $n=1-$სათვის: როცა $n=1$, გვაქვს $1=\frac{1(1+1)}{2}=1-$ჭეშმარიტია.

2). (ინდუქციის დაშვება) ვთქვათ, $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$; მაშინ:

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

მაშასადამე, ტოლობა $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ სწორია მაშინაც, როცა $n=k+1$. ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ: $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით ბერნულის უტოლობა:

თუ $h<-1$, მაშინ $(1+h)^n \geq 1+nh$.

1). შევამოწმოთ როცა $n=1$

$1+h \geq 1+h$ სწორია.

2). დავუშვათ, ჭეშმარიტია: $(1+h)^k \geq 1+kh$, მაშინ:

$(1+h)^{k+1}=(1+h)^k(1+h) \geq (1+kh)(1+h)=1+(k+1)h+kh^2$;

რადგან $kh^2 \geq 0$ ამიტომ:

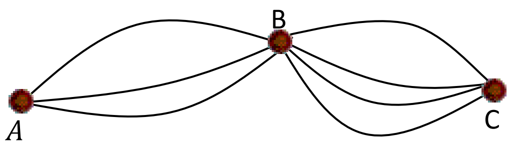
$(1+h)^{k+1} \geq 1+(k+1)h$

კომბინატორიკა

კომბინატორიკა არის მათემატიკის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის სასრული სიმრავლის ელემენტებისგან სხვადასხვა **კომბინაციის** შედგენისა და ამ კომბინაციების რაოდენობის დადგენასთან დაკავშირებულ საკითხებს.

კომბინატორიკის ერთერთი მნიშვნელოვანი წესი არის **გამრავლების წესი.** ვთქვათ, საჭიროა თანმიმდევრულად, ერთმანეთის მიყოლებით k მოქმედების ჩატარება, (ელემენტების შერჩევა). თუ პირველი მოქმედების შესრულება შეიძლება n_1 სხვადასხვა გზით, მეორე მოქმედების შესრულება შეიძლება n_2 გზით, . . . , $k-$ური მოქმედების შესრულება შეიძლება n_k გზით, მაშინ ყველა k მოქმედება ერთად შეიძლება შევასრულოთ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot, \cdots, \cdot n_k$ გზით.

მაგალითი 1).



თუ $A-$დან $B-$მდე გზის შერჩევა შეიძლება 3 სხვადასხვა ხერხით, $B-$დან $C-$მდე კი 4 სხვადასხვა ხერხით, მაშინ ერთდროულად $A-$დან $B-$მდე და $B-$დან $C-$მდე გზის შერჩევათა რიცხვი, ანუ $A-$დან $C-$მდე ჩასვლის შესაძლებლობათა რიცხვი იქნება $3 \cdot 4 = 12$.

მაგალითი 2). რამდენი ისეთი ორნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ რომელშიც გამოყენებული იქნება მხოლოდ ციფრები: 1, 3, 5 ? (ციფრების გამეორება შეიძლება).

პირველი ციფრის შერჩევათა რიცხვია 3.

მეორის --- 3.

სულ -- $3 \cdot 3 = 9$.

ხოლო თუ ციფრების გამეობება არ შეიძლება მაშინ გვექნება: $3 \cdot 2 = 6$ რიცხვი.

ვთქვათ გვაქვს $n-$ელემენტიანი სიმრავლე. ამ სიმრავლის ელემენტების ნებისმიერ დალაგებას **$n-$ელემენტიანი გადანაცვლება ეწოდება.**

მაგალითად:

ვთქვათ გვაქვს 3–ელემენტიანი სიმრავლე: $A = \{1; 2; 3\}$.

ამ სიმრავლის ელემენტების დალაგებები იქნება: 1,2,3;   1,3,2;   2,1,3;   2,3,1;   3,1,2;   3,2,1.

n−ელემენტიან გადანაცვლებათა რიცხვი აღვნიშნოთ P_n−ით.

მაშინ:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot, \cdots, \cdot n$$

რაც ასეც ჩაიწერება:

$$P_n = n! \qquad (\; n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot, \cdots, \cdot n \;)$$

დამტკიცება: n−ელემენტიანი გადანაცვლების შედგენისას პირველ ადგილძე შეიძლება იყოს ნებისმიერი ელემენტი n ელემენტიდან. მეორე ადგილზე ნებისმიერი ელემენტი დანარჩენი $n-1$ ელემენტიდან, ანუ გვაქვს შერჩევის $n-1$ შესაძლებლობა და ა.შ.

ამიტომ

$$P_n = n(n-1) \cdot, \cdots . \cdot 2 \cdot 1 \,.$$

წყობა

m −ელემენტიანი წყობა n −ელემენტისგან ეწოდება n −ელემენტიანი სიმრავლის m −ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს.

მაგალითად: ვთქვათ, გვაქვს სამელემენტიანი სიმრავლე:

$A = \{1,2,3\}$.

შევადგინოთ ორელემენტიანი წყობა:

(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2).

სულ გვაქვს 6 ორელემენტიანი წყობა.

m −ელემენტიან წყობათა რიცხვი შედგენილი n ელემენტისგან აღინიშნება ასე:

A_n^m

როგორც ზემოთ ვნახეთ: $A_3^2 = 6$

ვიპოვოთ A_n^m , აქ პირველ ადგილზე ელემენტის შერჩევათა რიცხვი არის n , მეორე ადგილზე კი $(n-1)$ და ა.შ. მე-m -ე ადგილზე კი $n-(m-1) = n-m+1$.

$$\boxed{A_n^m = n(n-1) \cdots (n-m+1)}$$

ამიტომ:

ეს ფორმულა ასეც ჩაიწერება:ა

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

ჯუფთება

m –ელემენტიანი ჯუფდება n –ელემენტიდან ეწოდება n –ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს. მათი რაოდენობა ასე აღინიშნება:

$$C_n^m$$

ვთქვათ გვაქვს m –ელემენტიანი ჯუფთება n ელემენტიდან C_n^m. თუ თითოეულ ჯუფთებაში მოვახდენთ $m!$ რაოდენობის გადანაცვლებებს, მივიღებთ ყველა წყობას, ე.ი. $C_n^m \cdot m! = A_n^m$.

საიდანაც $$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$$

ანუ: $$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}}$$

წყობათა რიცხვის ფორმულები:

1. $C_n^m = C_n^m$;

2. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$;

3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

აქ შევთანხმდეთ: $C_n^0 = 1$, ე.ი. $0! = 1$ და $A_n^0 = 1$.

მე-3 ფორმულა შეიძლება ასეც წავიკითხოთ: n –ელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეების რაოდენობა არის 2^n. იგი შეიძლება სხვადასხვა ხერხით დავამტკიცოთ, მაგალითად მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით:

თუ $n = 1$, ერთელემენტიან სიმრავლეს ორი ქვესიმრავლე აქვს, ცარიელი სიმრავლე და თვით ეს სიმრავლე, $2^1 = 2$.

ე.ი. $n = 1$ –ის დროს ეს ჭეშმარიტია.

ვთქვათ, k –ელემენტიან სიმრავლეს აქვს 2^k ქვესიმრავლე (ჩვენი დაშვებით), ყველა ეს ქვესიმრავლე არის $(k+1)$–ელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეც. კიდევ ერთი იმდენი ქვესიმრავლე მიიღება, თუ თითოეულს დავამატებთ $(k+1)$–ე ელემენტს, სულ: $\mathbf{2^k+2^k=2^{k+1}}$.

თეორემა დამტკიცებულია.

მეორე თვისების მიხედვით აიგება პასკალის სამკუთხედი, სტრიქონებში გვაქვს:

- ნულოვან სტრიქონში – 1;
- პირველ სტრიქონში – C_1^0 და C_1^1;
- მეორე სტრიქონში – C_2^0, C_2^1, C_2^2;
- მესამე სტრიქონში – $C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3$;

და ა.შ.

ახლა დავამტკიცოთ ნიუტონის ბინომის ფორმულა:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n$$

ვიყენებთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს:

1) n=1, ფორმულა ჭეშმარიტია

2) n=k, ვთქვათ,

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \cdots + C_k^k b^k$$

გავითვალისწინოთ, რომ:

$$C_{k+1}^0 = C_k^0, \quad C_k^k = C_{k+1}^{k+1},$$

$$C_k^0 + C_k^1 = C_{k+1}^1, \quad C_k^1 + C_k^2 = C_{k+1}^2, \cdots$$

მაშინ ჯუფთებათა რიცხვის მეორე ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \cdots + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$$

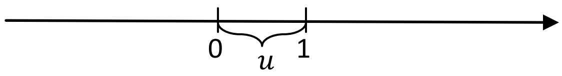
მაშასადამე, თეორემა ჭეშმარიტია $(k+1)$–სთვის, მაშასადამე ის ჭეშმარიტია ნებისმიერი ხარისხის მაჩვენებლისათვის.

ნიუტონის ბინომის ფორმულაში $n+1$ შესაკრებია, $(k+1)$–ე შესაკრები შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

კოორდინატები წრფეზე

წრფეზე ვირჩევთ ათვლის სათავეს (რაიმე 0 წერტილს), სამასშტაბო ერთეულს (u მონაკვეთს) და მიმართულებას, რომელიც დადებითად ჩაითვლება.

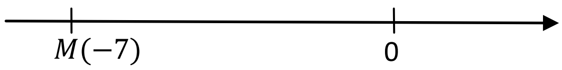


სურათზე დადებითი მიმართულება ისრითაა ნაჩვენები. ამ წრფეს ვუწოდოთ საკოორდინატო წრფე. (შეიძლება ვიხმაროთ ტერმინები: „რიცხვითი ღერძი“, „რიცხვითი წრფე“).

წერტილის კოორდინატი არის არჩეული მასშტაბის ერთეულებში მანძილი ათვლის სათავიდან, აღებული პლიუს ან მინუს ნიშნით, იმისდა მიხედვით, ეს წერტილი სათავიდან დადებითი მიმართულებით მდებარეობს თუ არა. ათვლის სათავეს კოორდინატთა სათავესაც ვუწოდებთ.

კოორდინატთა სათავის კოორდინატი ნულის ტოლია.

იხმარება აღნიშვნები: $M(-7)$, $A(x)$, და ა.შ. $M(-7)$ აღნიშნავს M წერტილს, რომლის კოორდინატია -7, $A(x)$ აღნიშნავს A წერტილს, რომლის კოორდინატია x.

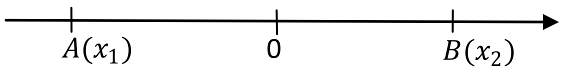


x რიცხვის მოდული, (აბსოლუტური სიდიდე) ეწოდება მანძილს $A(x)$ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე და ასე აღინიშნება: $|x|$.

$|x| = x$;   თუ $x \geq 0$;

$|x| = -x$;   თუ $x < 0$.

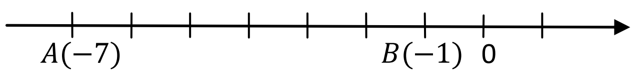
მაგალითად: $|-3| = 3$.



ვთქვათ მოცემულია საკოორდინატო წფეზე წერტილები: $A(x_1)$ და $B(x_2)$, მაშინ მათ შორის მანძილი ϱ ასე გამოითვლება:

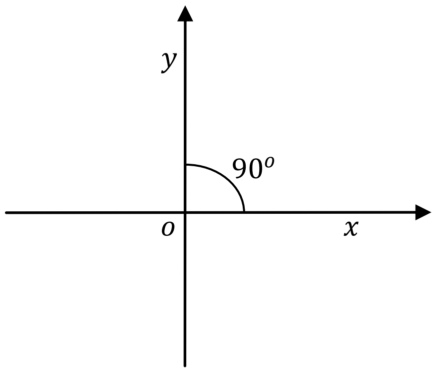
$$\varrho(A;B) = |x_2 - x_1|.$$

მაგალითად: $A(-7)$ და $B(-1)$. მათ შორის მანძილია: $\varrho(A;B) = |-7-(-1)| = 6$.



კოორდინატები სიბრტყეზე

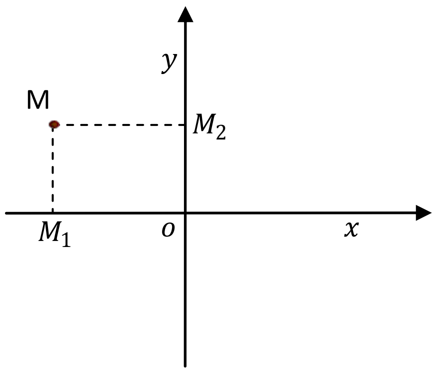
გავატაროთ სიბრტყეზე ორი ურთიერთმართობული ღერძი. ერთ-ერთს ამ ღერძებიდან ვუწოდოთ აბსცისათა ღერძი (ან x ღერძი, ან ox ღერძი). მეორეს ორდინატთა ღერძი (ან y ღერძი, ან oy ღერძი).



ღერძების მიმართულებებს ისე ვირჩევთ, რომ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 90^o –ით მობრუნებისას, ox ღერძის დადებითი ნახევარღერძი შეუთავსდეს oy ღერძის დადებით ნახევარღერძს.

ღერძების გადაკვეთის წერტილს კოორდინატთა სათავე ეწოდება და ის o წერტილით აღინიშნება. ის წარმოადგენს ათვლის საწყისს ორივე ღერძისათვის. სამასშტაბო ერთეულები ამ ღერძებისათვის, როგორც წესი, ერთიდაიგივეა.

ვთქვათ M წერტილი სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია. ამ წერტილიდან დავუშვათ მართობები ox და oy ღერძებზე. M_1 და M_2 არის ამ მართობების ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. – M_1 და M_2 წერტილებს ეწოდება M წერტილის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე.



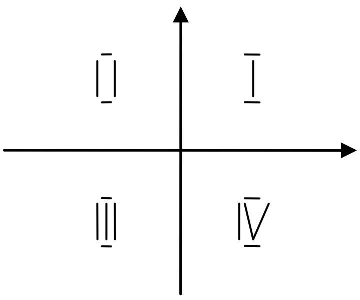
M_1 წერტილი ox ღერძზე მდებარეობს. ამიტომ მას შეესაბამება გარკვეული x რიცხვი –მისი კოორდინატი ამ ღერძზე. ზუსტად ასევე, M_2 წერტილს შეესაბამება გარკვეული y რიცხვი –ამ წერტილის კოორდინატი oy ღერძზე.

ამრიგად, სიბრტყის ყოველ M წერტილს შეესაბამება ორი, x და y რიცხვი, რომლებსაც M წერტილის დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატები ეწოდება. x რიცხვს ეწოდება M წერტილის აბსცისა, y რიცხვს –ამ წერტილის ორდინატი.

ნებისმიერ ორ რიცხვს (x და y-ს) შეესაბამება სიბრტყის გარკვეული წერტილი, რომლისთვისაც, x აბსცისაა და y კი –ორდინატი. დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა სიბრტყის წერტილებსა და გარკვეული თანამიმდევრობით აღებულ x და y რიცხვთა წყვილებს შორის.

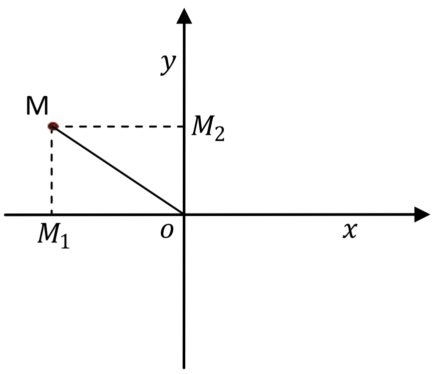
მაშასადამე, M წერტილის მართკუთხა კოორდინატები სიბრტყეზე, ამ წერტილის გეგმილების კოორდინატებია.

M წერტილის კოორდინატები ასე ჩაიწერება: $M(x, y)$. ხშირად იმის ნაცვლად, რომ თქვან: „წერტილის კოორდინატებია (3,-8)“, ამბობენ მოკლედ: „წერტილი (3,-8)“.

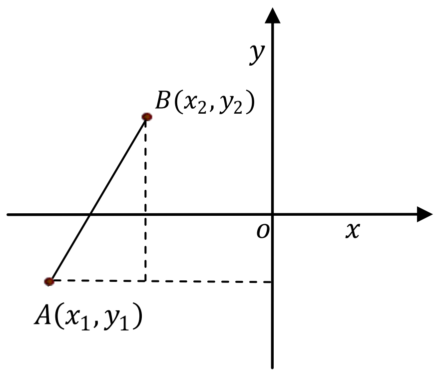


კოორდინატთა ღერძები სიბრტყეს ოთხ მეოთხედად ჰყოფს. პირველ მეოთხედად ითვლება მეოთხედი ox და oy ღერძების დადებით ნახევარღერძებს შორის. შემდეგი ნუმერაცია მიმდინარეობს საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

მანძილი ორ წერტილს შორის სიბრტყეზე

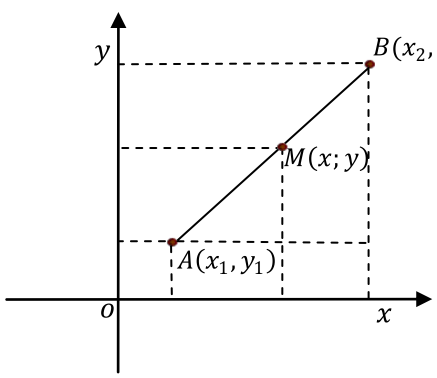


ჯერ განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, ვიპოვოთ მანძილი კოორდინატთა სათავიდან $M(x,y)$ წერტილამდე. ცხადია $M_1(x)$ და $M_2(y)$ წერტილებიდან სათავემდე მანძილია $|x|$ და $|y|$–ია. პითაგორას თეორემის თანახმად, $\varrho(O,M)=x^2+y^2$ (მანძილი O წერტილიდან(სათავიდან) M წერტილამდე აღვნიშნეთ $\varrho(O,M)$–ით).



ვიპოვოთ $A(x_1,y_1)$ და $B(x_2,y_2)$ წერტილებს შორის მანძილი. სურათის მიხედვით:
$\boldsymbol{\varrho(A;B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$, ეს არის A და B წერტილებს შორის მანძილის ფორმულა.

მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით



ვიტყვით, რომ M წერტილი ჰყოფს AB მონაკვეთს λ ფარდობით, თუ $\frac{AM}{MB}=\lambda$.

სურათზე წარმოდგენილ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{x-x_1}{x_2-x} \qquad \frac{x-x_1}{x_2-x} = \lambda \qquad x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{y-y_1}{y_2-y} \qquad \frac{y-y_1}{y_2-y} = \lambda \qquad y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$$

$$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2 \qquad x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$y + \lambda y = y_1 + \lambda y_2 \qquad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

მონაკვეთის λ ფარდობით გაყოფის ფორმულები

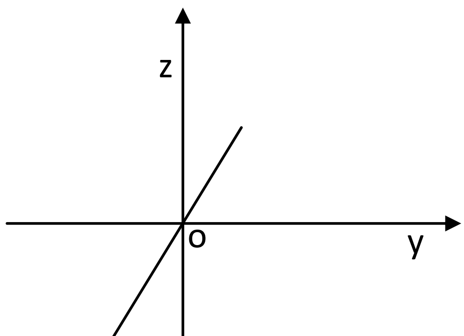
თუ $\lambda = 1$, მივიღებთ მონაკვეთის შუაზე გაყოფის ფორმულებს:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \;\; ; \;\; y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

ეს ფორმულები ჭეშმარიტია წერტილების ნებისმიერი მდებარეობისათვის.

წერტილის კოორდინატები სივრცეში

სივრცეში უნდა ავიღოთ სამი საკოორდინატო ღერძი: x ღერძი – **აბსცისათა** ღერძი, y ღერძი –**ორდინატთა** ღერძი და z ღერძი –**აპლიკატთა** ღერძი. მათ სივრცის ერთიდაიმავე O წერტილზე ერთმანეთის მართობულად ვატარებთ. ამასთანავე, ღერძების მიმართულებებს ასე ვარჩევთ: თუ xy სიბრტყეს z ღერძის დადებითი ნახევარღერძიდან შვხედავთ, მაშინ x დადებითი ნახევარღერძის y ნახევარღერძთან შესათავსებლად საჭიროა პირველის 90^o–ით მობრუნება (საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით).



ახლა კოორდინატთა სიბრტყეები განვიხილოთ:

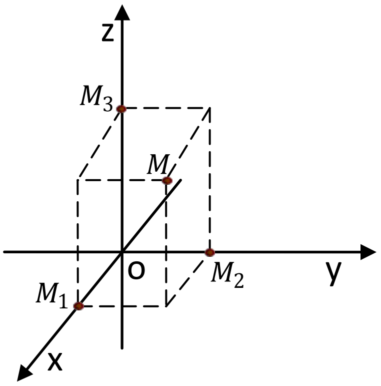
xy სიბრტყე –გადის x და y ღერძებზე და არის $(x, y, 0)$ სახის წერტილთა სიმრავლე(x და y ნებისმიერი რიცხვებია).

xz სიბრტყე –გადის x და y ღერძებზე და არის $(x, 0, z)$ სახის წერტილთა სიმრავლე(x და z ნებისმიერი რიცხვებია).

yz სიბრტყე, რომელიც y და z ღერძებზე გადის, არის $(0, y, z)$ სახის წერტილთა სიმრავლე (y და z ნებისმიერი რიცხვებია).

სივრცის ყოველი M წერტილისათვის მოიძებნება ისეთი სამი x, y და z, რომლებიც ამ წერტილის კოორდინატებია.

იმისთვის, რომ ვიპოვოთ x რიცხვი, M წერტილზე გავატაროთ yz სიბრტყის პარალელური სიბრტყე, ამ სიბრტყეს ox ღერძთან აქვს გადაკვეთის M_1 წერტილი, ამ M_1 წერტილს ox ღერძზე აქვს x კოორდინატი. სწორედ ამ რიცხვს ეწოდება M წერტილის კოორდინატი x ღერძზე $-M$ წერტილის აბსცისა.



მეორე კოორდინატის საპოვნელად M წერტილზე უნდა გავატაროთ xz სიბრტყის პარალელური სიბრტყე, რომელიც y ღერძის მართობულია და კვეთს მას M_2 წერტილში. ამ M_2 წერტილის y კოორდინატს ეწოდება M წერტილის ორდინატი. შემდეგ გავავლებთ xy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეს, რომელიც კვეთს z ღერძს M_3 წერტილში. M_3–ის კოორდინატი არის M წერტილის აპლიკატა.

ამრიგად, სივრცის ყოველ M წერტილს შეესაბამება რიცხვთა სამეული (x, y, z), x–აბსცისა, y–ორდინატი და z–აპლიკატა.

თუ მოცემულია რიცხვთა სამეული (x, y, z), მაშინ მას შეესაბამება ერთადერთი M წერტილი, რომლის კოორდინატებია x, y და z.

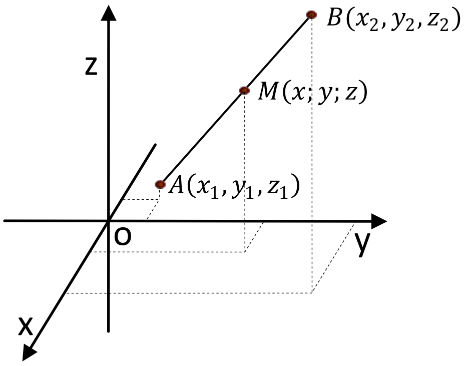
ამრიგად დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა სივრცის წერტილებსა და რიცხვთა სამეულებს შორის.

ყველა ის ფორმულა, რომელიც გამოვიყენეთ სიბრტყისთვის, მცირე ცვლილებების შეტანით, სამართლიანია სივრცის შემთხვევაშიც.

მაგალითად: $A(x_1, y_1, z_z)$ და $B(x_2, y_2, z_2)$ **წერტილებს შორის მანძილი** ასე გამოითვლება:

$$\varrho(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

სივრცეში მონაკვეთის λ ფარდობით გაყოფის ფორმულები ასე მოიცემა:



$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

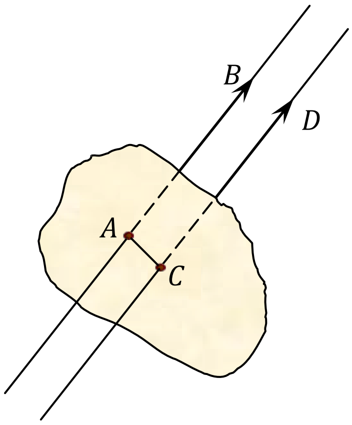
$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

კერძოდ, $\lambda = 1$ შემთხვევაში გვაქვს შუაზე გაყოფის ფორმულები:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

ვექტორი
მოქმედებები ვექტორებზე

მიმართული მონაკვეთი ვუწოდოთ მონაკვეთს, რომლის ბოლოებს (წერტილებს) გარკვეული თანმიმდევრობით ვიღებთ. პირველ წერტილს ვუწოდოთ მიმართული მონაკვეთის სათავე, მეორეს ბოლო. თუ სათავე A წერტილშია, ბოლო $-B$ წერტილში, ასეთ მიმართულ მონაკვეთს ასე ჩავწერთ: $\overrightarrow{AB}$. თუ მიმართული მონაკვეთის ერთი ბოლო ემთხვევა მეორეს, მაშინ ასეთ მიმართულ მონაკვეთს ვუწოდოთ ნულოვანი მიმართული მონაკვეთი, მაგალითად, ნულოვანი მიმართული მონაკვეთებია: $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ და ა.შ



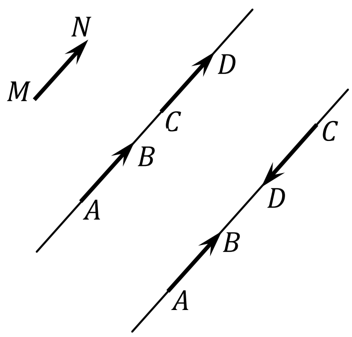
ვთქვათ, $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ორი არანულოვანი მიმართული მონაკვეთია და ისინი პარალელურ წრფეებს ეკუთვნიან. A და C–ზე გავავლოთ სიბრტყე. ეს სიბრტყე სივრცეს ორ ნაწილად ჰყოფს, თუ B და D წერტილები ერთი და იმავე ნაწილს ეკუთვნის, მაშინ ვიტყვით, რომ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ თანამიმართული მიმართული მონაკვეთებია, წინააღმდეგ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ საწინააღმდეგოდ მიმართული მიმართული მონაკვეთებია. პირველ შემთხვევაში ვწერთ:

$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$,

მეორე შემთხვევაში:

$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

ვთქვათ, $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ერთი და იმავე წრფეს ეკუთვნის. ვიტყვით, რომ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ თანამიმართული მიმართული მონაკვეთებია, თუ არსებობს $\overrightarrow{MN}$ მიმართული მონაკვეთი,



რომელიც თანამიმართულია როგორც $\overrightarrow{AB}$-სი, ისე $\overrightarrow{CD}$-სი. ანუ:

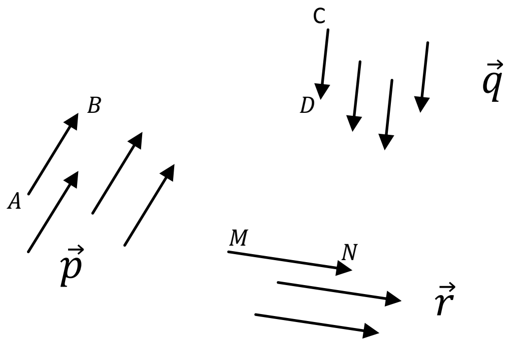
$\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, მაშინ: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

წინააღმდეგ შემთხვევაში $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ საწინააღმდეგოდ მიმართული მიმართული მონაკვეთებია. ანუ:

$\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{MN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$, მაშინ: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

ორ მიმართულ მონაკვეთს ვუწოდოთ **ტოლი**, თუ ისინი ერთნაირადაა მიმართული და სიგრძეები ტოლი აქვთ.

ყველა მიმართული მონაკვეთების სიმრავლე იყოფა ერთმანეთის ტოლი მიმართული მონაკვეთების კლასებად, მათ საერთო ელემენტები არა აქვთ.



თითოეული კლასით განვსაზღვრავთ ახალ ობიექტს –ვექტორს.

ვექტორებს აღვნიშნავთ: $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ და ა.შ.

სურათზე სამი ხსხვადასხვა ვექტორია გამოსახული, $\vec{p}$, $\vec{q}$ და $\vec{r}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ და $\overrightarrow{MN}$ მათი წარმომადგენლებია, ვწერთ: $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{q} = \overrightarrow{CD}$; $\vec{r} = \overrightarrow{MN}$. პირველი ტოლობის შესახებ ვიტყვით: $\vec{p}$ ვექტორი მოდებულია A წერტილში. მეორე ტოლობის შესახებ ვიტყვით: $\vec{q}$ ვექტორი მოდებულია C წერტილში.

თუ მოცემულია რაიმე $\vec{p}$ ვექტორი და A წერტილი, მაშინ არსებობს ერთადერთი B წერტილი რომლისთვისაც $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$.

$\vec{p}$ ვექტორის სიგრძე ვუწოდოთ მისი შესაბამისი ნებისმიერი მიმართული მონაკვეთის სიგრძეს. თუ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, მაშინ ამ ვექტორის სიგრძეს ასე ჩავწერთ: $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე ვუწოდოთ OA და OB მონაკვეთებს შორის კუთხეს, სადაც $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ და $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

ვექტორებს ეწოდება **კოლინეარული ვექტორები**, თუ ისინი ერთი და იმავე წრფის **პარალელურია**. ჩავთვალოთ რომ ნულოვანი ვექტორი ნებისმიერი ვექტორის კოლინეარულია.

ვექტორებს ეწოდება **კომპლანარული**, თუ ისინი ერთი და იმავე **სიბრტყის პარალელურია.** ჩავთვალოთ რომ ნულოვანი ვექტორი და ნებისმიერი ორი ვექტორი კომპლანარულია.

ნულოვანი ვექტორი ერთდროულად ითვლება თანამიმართულად და საწინააღმდეგოდ მიმართულად ნებისმიერი სხვა ვექტორის.

ვექტორების შეკრება

ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის ჯამი ეწოდება $\vec{c}$ ვექტორს, რომელიც აიგება შემდეგი წესით: ნებისმიერი A წერტილიდან გავავლებთ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ვექტორს, B წერტილიდან გავავლებთ $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ვექტორს, მაშინ $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ ვექტორი არის $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამი და ვწერთ: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

ვექტორების შეკრების თვისებები:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
4. არსებობს ვექტორი: $-\vec{a}$ ისეთი რომ: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

ამასთანავე, თუ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, მაშინ: $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$. $-\vec{a}$-ს ეწოდება $\vec{a}$-ს მოპირდაპირე, $-\vec{a}$-ს სიგრძე ტოლია $\vec{a}$-ს სიგრძისა:

$|-\vec{a}|=|\vec{a}|$ და $-\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

სხვაობა ასე განისაზღვრება:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

შეკრების მეორე თვისების მიხედვით შეიძლება განვსაზღვროთ სამი და მეტი ვექტორის ჯამი:

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ ან $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$; ასევე:

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{d}$ და ა.შ.

ცხადია:

$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|;$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

ვექტორის რიცხვზე გამრავლება

$\vec{a}$ ვექტორის ნამრავლი λ რიცხვზე ეწოდება $\vec{b}$ ვექტორს, რომელიც განისაზღვრება პირობებით:

1. $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$
2. $\vec{b}$ კოლინეარულია $\vec{a}$ ვექტორის
3. $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$, თუ $\lambda>0$ და $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$, თუ $\lambda<0$.

თუ $\lambda=0$, მაშინ (1)-ის მიხედვით: $\vec{b}=\vec{0}$. ცხადია, $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

ორი ვექტორის კოლინეარულობის პირობა: ორი არანულოვანი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის კოლინეარულობისთვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მოიძებნებოდეს λ რიცხვი ისეთი, რომ:

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}.$$

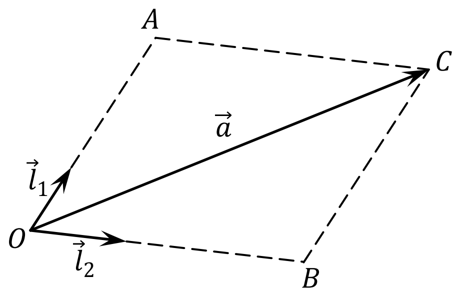
<u>დამტკიცება:</u> თუ $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, მაშინ, განმარტების თანახმად, $\vec{b}$ და $\vec{a}$ კოლინეარულია. თუ $\vec{b}$ და $\vec{a}$ კოლინეარულია, მაშინ მოიძებნება λ რიცხვი:

$$\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|} \text{ ,როცა } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \quad \text{და } \lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|} \text{ , როცა } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}.$$

თვისებები:

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
2. $(\lambda + p) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + p\vec{a}$
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
4. $(\lambda \cdot p) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (p \cdot \vec{a})$

თეორემა: თუ $\vec{l}_1$ და $\vec{l}_2$ არაკოლინეარული ვექტორებია, მაშინ ყოველი $\vec{a}$ ვექტორი, რომელიც კომპლანარულია ამ ვექტორების, ერთადერთი სახით წარმოიდგინება, $\vec{l}_1$-ის და $\vec{l}_2$-ის წრფივი კომბინაციით:



$$\vec{a} = \lambda_1\vec{l}_1 + \lambda_2\vec{l}_2.$$

<u>დამტკიცება:</u>

თუ $\vec{a}$ ვექტორი ნულოვანია მაშინ:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0.$$

თუ $\vec{a}$ ვექტორი ერთ-ერთის კოლინეარულია, მაგალითად, $\vec{l}_1$ ვექტორის, მაშინ:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{l}_1 + 0 \cdot \vec{l}_2.$$

თუ $\vec{a}$ ვექტორი არცერთის კოლინეარული არ არის, მაშინ სამივეს მოვდებთ ერთ წერტილში. ვთქვათ: $\overrightarrow{OC} = \vec{a}$, მაშინ:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

მაგრამ:

$$\overrightarrow{OA} = \lambda_1\vec{l}_1 \text{ ,} \overrightarrow{OB} = \lambda_2\vec{l}_2 \qquad \text{ე.ი.}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OC} = \lambda_1\vec{l}_1 + \lambda_2\vec{l}_2.$$

ახლა, ვთქვათ:

$$\vec{a} = \lambda'_1\vec{l}_1 + \lambda'_2\vec{l}_2,$$

მაშინ:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \lambda'_1)\vec{l}_1 + (\lambda_2 - \lambda'_1)\vec{l}_2$$

თუ, მაგალითად: $\lambda_1 \neq \lambda'_1$, მაშინ:

$$\vec{l}_1 = -\frac{\lambda_2 - \lambda'_1}{\lambda_1 - \lambda'_1} \cdot \vec{l}_2$$

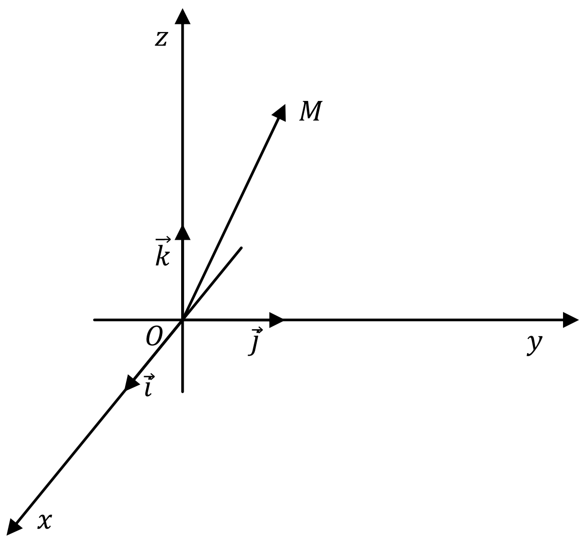
ანუ $\vec{l}_1$ კოლინეარულია $\vec{l}_2$-ის, რაც შეუძლებელია, ე.ი. $\lambda_1 = \lambda'_1$, მაშინ $\lambda_2 = \lambda'_2$.

ანალოგიურად დამტკიცდება

<u>თეორემა:</u> თუ $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ და $\vec{l}_2$, სამი არაკომპლანარული ვექტორია, მაშინ ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორი ერთადერთი სახით ჩაიწერება:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{l}_1 + \lambda_2 \vec{l}_2 + \lambda_3 \vec{l}_3.$$

ვექტორის კოორდინატები



ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემა; $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ერთეულოვანი ვექტორებია. ისინი განსაზღვრავენ Ox, Oy, Oz ღერძების მიმართულებებს, სურათზე ეს ვექტორები სათავეშია მოდებული, $\overrightarrow{OM}$ ვექტორს ეწოდება M წერტილის რადიუსვექტორი, თუ M წერტილის კოორდინატებია x, y და z, მაშინ $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ და (x, y, z) სამეულს ეწოდება $\overrightarrow{OM}$ **ვექტორის კოორდინატები**:

$\overrightarrow{OM}(x, y, z)$.

თუ $\vec{p}$ ნებისმიერი ვექტორია და მოდებულია A წერტილში, მაშინ:

$$\vec{p} = \overrightarrow{AB};$$

მაგრამ:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} - \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) =$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k};$$

აქ $A = (x_1, y_1, z_1)$ და $B = (x_2, y_2, z_2)$.

მაშასადამე,

$$\overrightarrow{AB} = (x_x - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ამასთანავე,

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_x - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2 (z_2 - z_1)^2}$$

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

ვთქვათ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი ვექტორებია. ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება რიცხვს, რომელიც ტოლია ამ ვექტორების სიგრძეებისა და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლის:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos \propto$$

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვეტორებიდან ერთი მაინც ნულოვანია, მაშინ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

<u>თვისებები:</u>

1). ნებისმიერი ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორისთვის:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

მართლაც, თუ ერთ-ერთი ნულოვანია, მაშინ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$$

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი ვექტორებია, მაშინ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \propto = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos \propto = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2). $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

3). ცხადია, ორტებისთვის (სათავეზე მოდებულ ერთეულოვან ვექტორებს, რომლებიც საკოორდინატო ღერძების დადებით მიმართულებებს ემთხვევიან, ორტები ქვიათ) გვაქვს:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \;;\; \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \;;\; \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \,.$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

4). $\lambda\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \lambda\vec{b}$

5) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$

მესამე ლექციის მესამე გვერდი (ერთი) /*სკალარული ნამრავლის გამოსახვა კოორდინატებში . . . ვექტორის სიგრძე . . . კუთხე ორ ვექტორს შორის . . .*/ //ვექტორთა პარალელობისა და მართობულობის პირობები //

ვექტორთა მართობულობის პირობა, ცხადია, ასე ჩაიწერება:

$\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$

თუ $\vec{p} = (x_1, y_1, z_1)$ და $\vec{q} = (x_2, y_2, z_2)$, მაშინ მართობულობის პირობისთვის გვაქვს:

$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

$\vec{p}$ და $\vec{q}$ **ვექტორების პარალელობის პირობა** იქნება ისეთი λ რიცხვის არსებობა, რომ:

$\vec{p} = \lambda\vec{q}$

ანუ:

$x_1 = \lambda x_2$

$y_1 = \lambda y_2$

$z_1 = \lambda z_2$

ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი

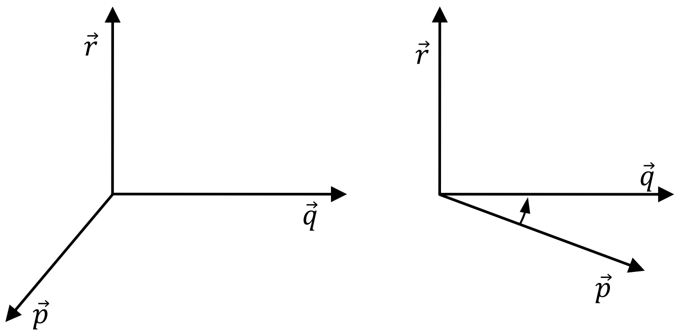
$\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ეწოდება $\vec{r}$ ვექტორს, რომლისთვისაც სრულდება პირობები:

1). $\vec{r}$ არის ორთოგონალური $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორების, ანუ $\vec{r}$ არის პერპენდიკულარული $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორების, რაც იმას ნიშნავს, რომ:

$\vec{r} \cdot \vec{p} = 0, \quad \vec{r} \cdot \vec{q} = 0.$

2). $|\vec{r}| = |\vec{p}||\vec{q}| \sin \propto$

3). $\vec{p}$, $\vec{q}$ და $\vec{r}$ ვექტორები მარჯვენა სისტემაა, ანუ $\vec{r}$ ვექტორიდან $\vec{p}$ ვექტორის მოძრაობა $\vec{q}$ ვექტორთან შესათავსებლად ხდება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.



ამ განსაზღვრებაში $\vec{p} \neq 0$, $\vec{q} \neq 0$;

თუ $\vec{p} = 0$ ან $\vec{q} = 0$, მაშინ ვექტორული ნამრავლი: $\vec{p} \times \vec{q} = 0$.

ვექტორული ნამრავლის თვისებები:

თუ $\vec{p}$ და $\vec{q}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, მაშინ $|\vec{p} \times \vec{q}|$ ტოლია ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობის.

თუ $\vec{p}$ და $\vec{q}$ კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ:

$\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$

თუ $\vec{p} \times \vec{q} = 0$, მაშინ ან ერთ-ერთი ვექტორი $\vec{p}$ ან $\vec{q}$ ნულოვანია, ან ეს ვექტორები კოლინეარული ვექტორებია.

ორტებისთვის გვაქვს:

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$; $\vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}$;

$\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}$; $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$;

$\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$; $\vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$

ვექტორული ნამრავლის თვისებები:

1. $\vec{p} \times \vec{q} = -\vec{q} \times \vec{p}$
2. $\lambda\vec{p} \times \vec{q} = \lambda(\vec{p} \times \vec{q}) = \vec{p} \times \lambda\vec{q}$
3. $(\vec{p} + \vec{q}) \times \vec{r} = \vec{p} \times \vec{r} + \vec{q} \times \vec{r}$

ვექტორული ნამრვლის გამოსახვა კოორდინატებში

ვთქვათ, $\vec{p} = (x_1, y_1, z_1)$ და $\vec{q} = (x_2, y_2, z_2)$ მაშინ $\vec{p} \times \vec{q}$-ს კოორდინატებია:

$y_1 z_2 - z_1 y_2$; $-(x_1 z_2 - x_2 z_1)$; $x_1 y_2 - y_1 x_2$

ანუ:

$$\vec{p} \times \vec{q} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{\imath} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\vec{\jmath} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

ეს ტოლობა შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

რადგან:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

<u>დამტკიცება:</u>

ვიყენებთ ვექტორული ნამრავლის თვისებებს:

$$\vec{p} \times \vec{q} = \left(x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}\right) \times \left(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}\right) =$$

$$= x_1 x_2(\vec{\imath} \times \vec{\imath}) + y_1 x_2(\vec{\jmath} \times \vec{\imath}) + z_1 x_2\left(\vec{k} \times \vec{\imath}\right) + x_1 y_2(\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) + y_1 y_2(\vec{\jmath} \times \vec{\jmath}) + z_1 y_2\left(\vec{k} \times \vec{\jmath}\right) +$$

$$+ x_1 z_2\left(\vec{\imath} \times \vec{k}\right) + y_1 z_2\left(\vec{\jmath} \times \vec{k}\right) + z_1 z_2\left(\vec{k} \times \vec{k}\right) =$$

$$= -y_1x_2\vec{k} + z_1x_2\vec{j} + x_1y_2\vec{k} - z_1y_2\vec{i} - x_1z_2\vec{j} + y_1z_2\vec{i} =$$

$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}.$$

სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი

სამი არანულოვანი ვექტორის შერეული ნამრავლი არის რიცხვი, რომელიც ტოლია პირველი ორის ვექტორული ნამრავლისა და მესამე ვექტორის სკალარული ნამრავლის:

$$(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}.$$

თუ რომელიმე ვექტორი ნულოვანი ვექტორია, მაშინ შერეული ნამრავლი ნულია.

ვთქვათ, $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ მარჯვენა სამეულია, მაშინ მათზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა ტოლია შერეული ნამრავლის.

// სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი, // /*მისი გამოსახვა კოორდინატებში, ვექტორთა კოლინეარულობა და კომპლანარულობა.*/

გაიხსენეთ რიცხვთა სიმრავლეები და მათი აღნიშვნები

ვექტორთა შერეული ნამრავლი

$\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორთა დალაგებული სამეულის შერეული ნამრავლი ეწოდება $\vec{a}\times\vec{b}$ ვექტორის სკალარულ ნამრავლს $\vec{c}$ ვექტორზე. შერეული ნამრავლი ასე ჩაიწერება:

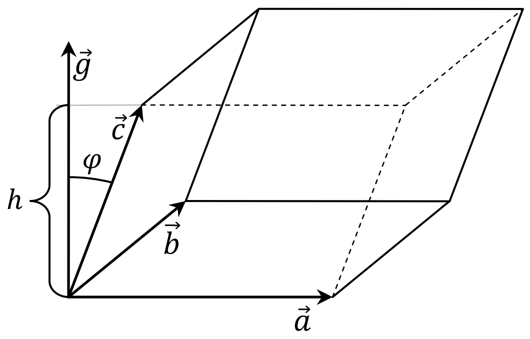
$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

მაშასადამე:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

შერეული ნამრავლის გეომეტრიული ინერტპრეტაცია:

ვთქვათ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ არაკომპლანარული ვექტორებია. მათზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა აღვნიშნოთ V ასოთი. თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ მარჯვენა სამეულია, მაშინ: $V = S\cdot h$, სადაც S არის იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომელიც აგებულია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე, h კი სიმაღლეა, h -არის იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც ამ პარალელოგრამის მართობულია.



ვთქვათ, $\vec{g} = \vec{a}\times\vec{b}$, მაშინ, ცხადია $|\vec{g}| = S$, $\vec{g}$ ვექტორი მართობულია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების და $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{g}$ მარჯვენა სამეულია. მაშასადამე, თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ მარჯვენა სამეულია, მაშინ $\vec{g}$ და $\vec{c}$ მდებარეობს პარალელოგრამის ერთ მხარეს, ამიტომ პარალელეპიპედის h სიმაღლე ტოლია: $h = |\vec{c}|\cos\varphi$. ე.ი.:

$$\vec{g}\cdot\vec{c} = |\vec{g}||\vec{c}|\cos\varphi = S\cdot h = V.$$

ამრიგად, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = V$. მაშასადამე, როცა $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ მარჯვენა სამეულია, მაშინ შერეული ნამრავლი ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობის ტოლია.

თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ მარცხენა სამეულია, მაშინ $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ ტოლი იქნება $-V$ რიცხვის(V პარლელეპიპედის მოცულობაა).

შერეული ნამრავლის თვისებები:

1. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორების კომპლანარობისთვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$.
2. ნებისმიერი $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორებისთვის: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ანუ: $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = (\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{a})$.

შერეული ნამრავლის გამოსახვა კოორდინატებში:

ვთქვათ, $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, ანუ:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

$$\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}.$$

მაშინ:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

ამიტომ:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

მაშასადამე:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

შედეგი 1.:

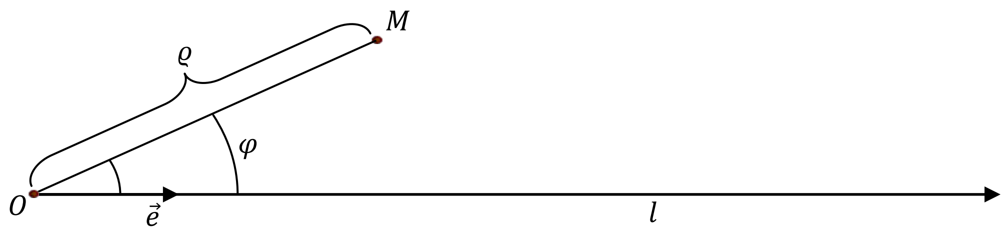
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორების კომპლანარობის პირობა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

სადაც $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ და $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$.

პოლარ კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე

დავაფიქსიროთ სიბრტყეზე O წერტილი, და l სხივი, ვთქვათ $\vec{e}$ არის ერთეულოვანი ვექტორი და განსაზღვრავს l-ზე მიმართულებას:



O წერტილს ეწოდება პოლუსი, l ღერძს –პოლარული ღერძი. მაშინ M წერტილის მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება ორი რიცხვით:

$\varrho = |\overrightarrow{OM}|$ და φ კუთხით, რომელსაც $\overrightarrow{OM}$ ვექტორი ადგენს l ღერძთან. კუთხე იცვლება $[0; 2\pi]$ შუალედში. **ვწერთ: $M(\varrho; \varphi)$.**

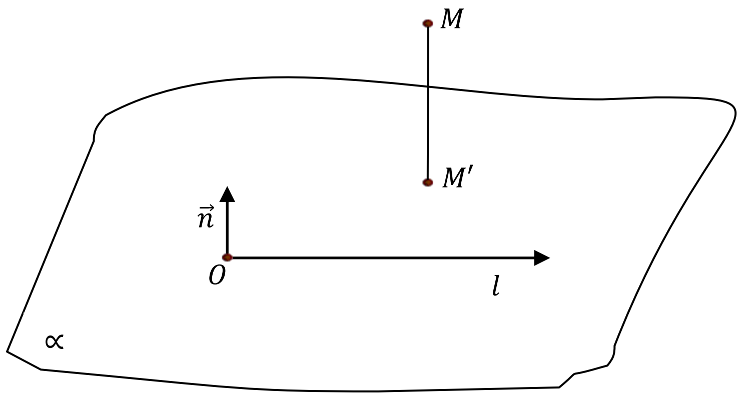
თუ სიბრტყეზე შემოვიღებთ დეკარტის კოორდინატებს, ისე, რომ სათავე დარმთხვეს პოლუსს, აბსცისათა ღერძის დადებითი მიმართულება კი პოლარულ ღერძს, მაშინ დეკარტის $(x; y)$ კოორდინატები ასე გამოისახება $(\varrho; \varphi)$ პოლარული კოორდინატებით:

$$x = \varrho\cos\varphi \ \text{ და } \ y = \varrho\sin\varphi$$

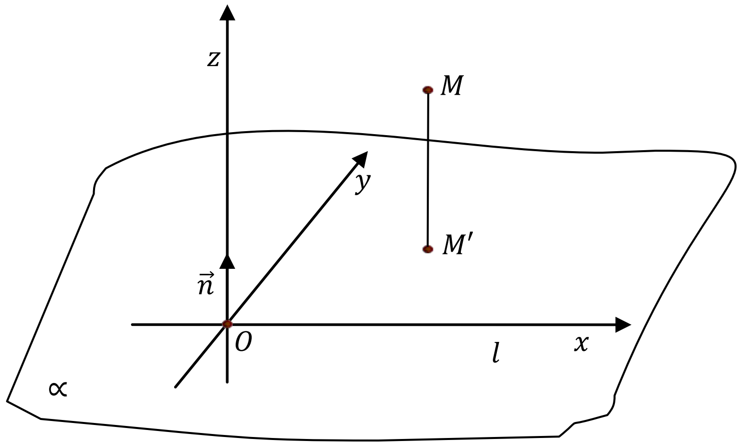
აქედან:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

ცილინდრული კოორდინატები სივრცეში



ვაფიქსირებთ სივრცეში O წერტილს და მასზე გამავალ $\propto$ სიბრტყეს. ამ $\propto$ სიბრტყეში ვიღებთ l სხივს, რომლის სათავეა O. ვთქვათ $\vec{n}$ არის ვექტორი, რომელიც მართობულია $\propto$ სიბრტყის. მოვდოთ O წერტილში ეს ვექტორი. ვთქვათ, M სივრცის ნებისმიერი წერტილია, M' კი მისი გეგმილია $\propto$ სიბტყეზე. მაშინ $\overrightarrow{M'M}$ კოლინეარულია $\vec{n}$ ვექტორის. M–ის ცილინდრული კოორდინატები ეწოდება რიცხვთა სამეულს (ϱ, φ, h), სადაც (ϱ, φ) არის M'–ის პოლარული კოორდინატები l ღერძის მიმართ, ხოლო h ასე განისაზღვრება: $\overrightarrow{M'M} = h \cdot \vec{n}$.



შემოვიღოთ დეკარტის კოორდინატები: სათავე იყოს O, ხოლო Ox ღერძის დადებითი მიმართულება ემთხვევა l ღერძს, Oz ღერძის ორტი ემთხვეოდეს $\vec{n}$ ვექტორს. მაშინ M წერტილის ცილინდრული კოორდინატებით ასე

გამოისახება დეკარტეს კოორდინატები:

$$x = \varrho\cos\varphi \ , \quad y = \varrho\sin\varphi \ , \quad z = h.$$

სფერული კოორდინატები

ისევე, როგორც ცილინდრული კოორდინატების შემთხვევაში, ვაფიქსირებთ O წერტილს და $\propto$ სიბრტყეს, რომელიც O–ზე გადის, l სხივს ამ სიბრტყეში და $\vec{n}$ ვექტორს, რომელიც მართობულია $\propto$ სიბრტყის. ვთქვათ M სივრცის ნებისმიერი წერტილია, მაშინ M წერტილის სფერული კოორდინატები ეწოდება რიცხვთა სამეულს: $(\varrho, \varphi, \theta)$, სადაც $\varrho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$, φ არის კუთხე $\overrightarrow{OM'}$ ვექტორსა და l ღერძს შორის, θ არის კუთხე $\overrightarrow{OM}$ ვექტორსა და $\propto$ სიბრტყეს შორის. ამასთანავე, θ იცვლება $-\frac{\pi}{2}$ -დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, $\theta \geq 0$ როცა M წერტილი იმავე ნახევარსფეროშია, რომელშიც არის $\vec{n}$ ვექტორის ბოლო, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\theta \leq 0$. თუ შემოვიღებთ დეკარტის კოორდინატებს ისევე, როგორც ცილინდრული კოორდინატების შემთხვევაში და x, y, z დეკარტის კოორდინატებია, მაშინ:

$$x = \varrho\cos\varphi\cos\theta,$$

$$y = \varrho\sin\varphi\cos\theta,$$

$$z = \varrho\sin\theta.$$

წრფის სხვადასხვა სახის განტოლება სიბრტყეზე

<u>თეორემა:</u>

საკოორდინატო სიბრტყეზე წრფის განტოლება მოიცემა შემდეგი სახით:

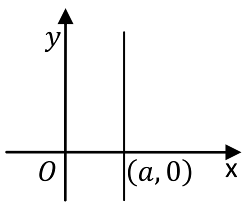
$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

სადაც $a^2 + b^2 \neq 0$.

ჭეშმარიტია შებრუნებული დებულებაც: ყოველი ორუცნობიანი წრფივი განტოლება, ანუ განტოლება რომელსაც აქვს (1) სახე, ამასთანავე $a^2 + b^2 \neq 0$, არის წრფის განტოლება.

(1) განტოლებას ქვია **წრფის ზოგადი განტოლება**.

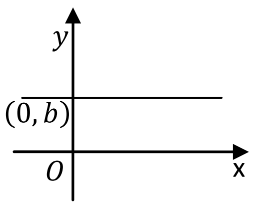
<u>დამტკიცება:</u>



ვთქვათ, მოცემულია d წრფე და იგი პარალელურია Oy ღერძის, კვეთს Ox ღერძს წერტილში, რომლის კოორდინატია a, მაშინ ამ წრფის განტოლება, ცხადია, ასე ჩაიწერება:

$$x = a \qquad (2)$$

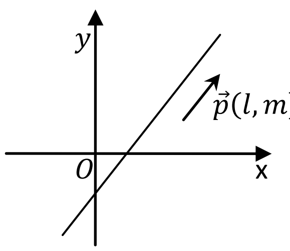
ეს განტოლება, ცხადია (1) –სახისაა, აქ y-ის კოეფიციენტი არის 0, x-ის კოეფიციენტი არის 1 და ა.შ.



თუ წრფე Ox ღერძის პარალელურია და კვეთს Oy ღერძს წერტილში, რომლის კოორდინატია b, მაშინ წრფის განტოლება იქნება:

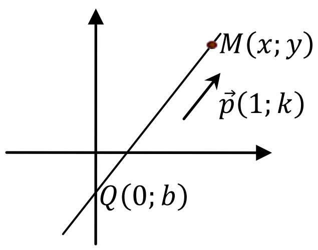
$$y = b$$

ესეც (1) სახის განტოლებაა.



ვთქვათ, წრფე არცერთი ღერძის პარალელური არ არის. წრფის <u>მიმმართველი</u> ვექტორი ვუწოდოთ მის პარალელურ ნებისმიერ ვექტორს $\vec{p}(l; m)$. ცხადია, ყველა მიმმართველი ვექტორი კოლინეარულია და მათი ორდინატისა და აბსცისის შეფარდება ერთიდაიგივე რიცხვის ტოლია. ეს რიცხვი აღვნიშნოთ k-თი, $k = \frac{m}{l}$.

ვთქვათ, წრფე კვეთს ორდინატთა ღერძს წერტილში $Q(0, b)$, მიმმართველ ვექტორად შეიძლება ავიღოთ ვექტორი $\vec{p}(1; k)$, მაშინ $M(x; y)$ ეკუთვნის წრფეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა QM კოლინეარულია $\vec{p}$ ვექტორისა, ანუ:



$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-b}{k} \text{ აქედან: } y = kx + b.$$

მაშასადამე, ამ წრფის განტოლებას ასე ჩავწერთ:

$$y = kx + b \qquad (3)$$

ამ განტოლებას ჰქვია **წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით**, k არის წრფის საკუთხო კოეფიციენტი.

ახლა, ვთქვათ, მოცემულია (1) განტოლება:

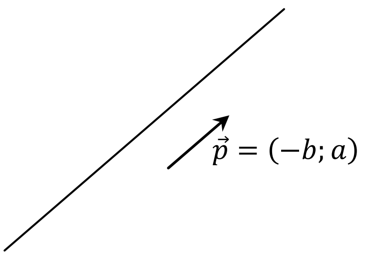
$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

თუ აქ $b = 0$, მაშინ მივიღებთ ან Oy ღერძის განტოლებას $(x = 0)$, ან Oy ღერძის პარალელური წრფის განტოლებას $\left(x = -\frac{c}{a}\right)$.

თუ $b \neq 0$, მაშინ (1)-დან:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

აღვნიშნოთ $-\frac{a}{b} = k$ და $-\frac{c}{b} = b$, მივიღებთ (3)–განტოლებას: $y = kx + b$ ანუ წრფის განტოლებას, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია k. მაშასადამე, $ax + by + c = 0$ სახით მოცემული წრფის საკუთხო კოეფიციენტი: $k = -\frac{a}{b}$ და მიმმართველი ვექტორია: $\vec{p}(1;k) = \vec{p}\left(1; -\frac{a}{b}\right)$. მიმმართველი ვექტორი იქნება ამ ვექტორის კოლინეარული ნებისმიერი ვექტორი, მაგალითად:



$$\vec{\boldsymbol{p}} = (-\boldsymbol{b}; \boldsymbol{a}).$$

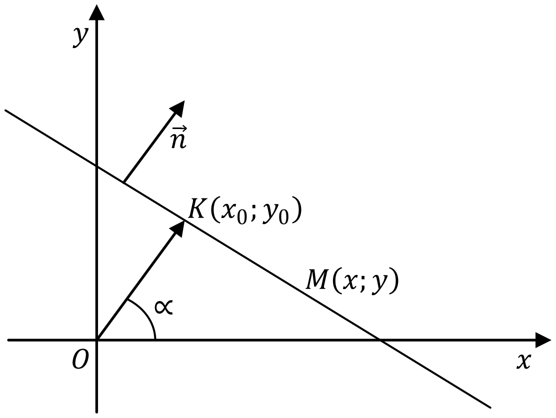
ცხადია, ვექტორი $\vec{n}(a;b)$ არის ამ ვექტორის მართობული, მართლაც:

$$\vec{n}(a;b) \cdot \vec{p} = (-b;a) = -ab + ab = 0.$$

თუ წრფე მოცემულია ზოგადი განტოლებით:

$$ax + by + c = 0$$

მაშინ ვექტორი $\vec{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ მისი მართობული ვექტორია და მას ეწოდება **წრფის ნორმალური ვექტორი.**



ვთქვათ, წრფე არ გადის სათავეზე და არცერთი ღერძის პარალელური არ არის, მაშინ მის განტოლებაში:

$$ax + by + c = 0 \qquad a \neq 0, \quad b \neq 0$$ და $c \neq 0$.

დავუშვათ სათავიდან წრფეზე მართობი. განვიხილოთ $\overrightarrow{OK}$ ვექტორი. ვთქვათ $\left|\overrightarrow{OK}\right| = h$. ნორმალის როლში ავიღოთ ერთეულის

სიგრძის $\vec{n}$ ვექტორი, რომელიც თანამიმართულია $\overrightarrow{OK}$ ვექტორის, მაშინ, ცხადია: $\vec{n}(\cos\propto, \sin\propto)$.

$M(x;y)$ წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ ძევს წრფეზე, როცა $\vec{n} \perp \overrightarrow{KM}$, ე.ი.:

$$(x - x_0)\cos\propto + (y - y_0)\sin\propto = 0$$

$$x\cos\propto + y\sin\propto - (x_0\cos\propto + y_0\sin\propto) = 0$$

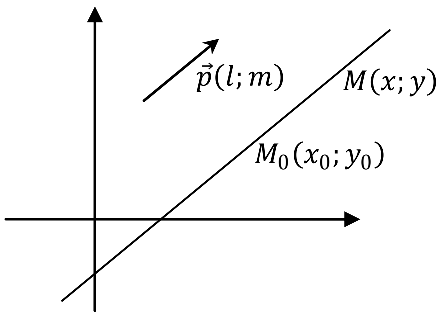
მაგრამ,

$$x_0\cos\propto + y_0\sin\propto = \overrightarrow{OK}\cdot\vec{n} = \left|\overrightarrow{OK}\right|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos 0 = \left|\overrightarrow{OK}\right| = h.$$

მივიღეთ **წრფის ნორმალური განტოლება:**

$$\boxed{x\cos\propto + y\sin\propto - h = 0}$$

ახლა, ვთქვათ, $\vec{p}(l;m)$ წრფის მიმმართველი ვექტორია. დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(x_0;y_0)$ წერტილზე და რომლის მიმმართველი ვექტორია $\vec{p}(l;m)$. $M(x;y)$ წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ ძევს წრფეზე, როცა $\vec{p}$ კოლინეარულია $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორის. ე.ი. არსებობს t რიცხვი, ისეთი, რომ:



$$x - x_0 = t\cdot l$$

$$y - y_0 = t\cdot m$$

აქედან მიიღება **წრფის პარამეტრული სახით** წარმოდგენა:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + t\cdot l \\ y &= y_0 + t\cdot m \end{aligned}}$$

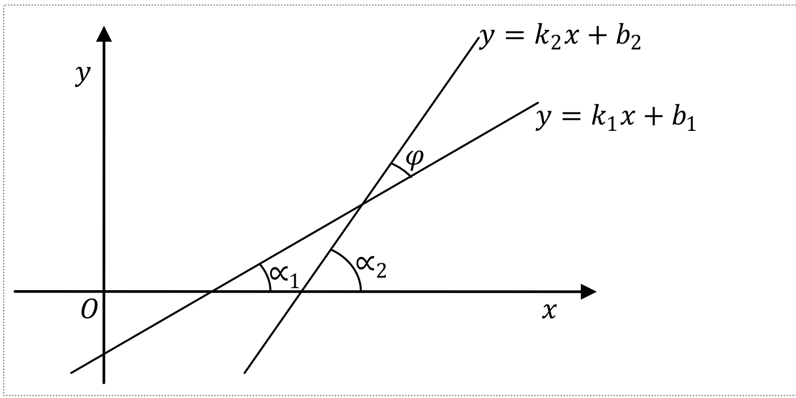
თუ $l \neq 0$ და $m \neq 0$, აქედან მიიღება **წრფის კანონიკური სახით** წარმოდგენა:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}}$$

ვთქვათ, წრფე გადის $M_1(x_1;y_1)$ და $M_2(x_2;y_2)$ წერტილებზე. მაშინ იგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც წრფე, რომელიც გადის $M_1(x_1;y_1)$ წერტილზე და რომლის მიმმართველი ვექტორია $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, ამიტომ ამ **ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება**, როცა $x_1 \neq x_2$ და $y_1 \neq y_2$, ასე ჩაიწერება:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$$

ცალკე განიხილეთ შემთხვევები: $x_1=x_2$ და $y_1=y_2$.



თუ წრფეები მოცემულია განტოლებებით:

$y=k_1x+b_1$

$y=k_2x+b_2$

მაშინ:

$\tan\propto_2=k_2$

$\tan\propto_1=k_1$

სურათზე მოცემულ შემთხვევაში გვაქვს:

$\varphi=\propto_2-\propto_1,\quad \tan\varphi=\tan(\propto_2-\propto_1),$

$\tan\varphi=\frac{\tan\propto_2-\tan\propto_1}{1+\tan\propto_2\cdot\tan\propto_1}$

ანუ:

$$\boxed{\tan\varphi=\frac{|k_2-k_1|}{1+k_1\cdot k_2}}$$

–ასე შეიძლება გამოვთვალოთ **ორ წრფეს შორის კუთხის ტანგენსი.**

ორი წრფის პარალელობის პირობა:

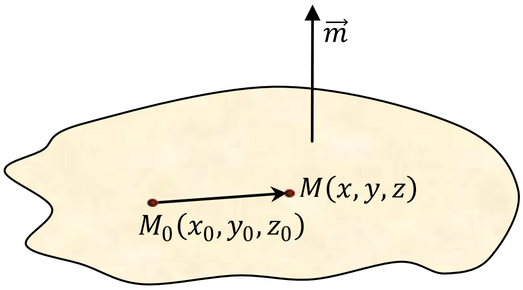
$k_1=k_2$

ორი წრფის მართობულობის პირობა:

$k_1k_2=-1$

სიბრტყის სხვადასხვა სახის განტოლება

სიბრტყის ნორმალი ეწოდება ნებისმიერ $\vec{m}$ ვექტორს, რომელიც მისი მართობულია. ცხადია სიბრტყე ცალსახად განისაზღვრება, თუ მოცემულია წერტილი, რომელზეც იგი გადის და ნორმალი.



ვთქვათ სიბრტყე გადის $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილზე და მისი ნორმალია $\vec{m}(a,b,c)$ ვექტორი. $M(x,y,z)$ **წერტილი მდებარეობს სიბრტყეზე** მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{m}$, ანუ:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

ეს არის იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილზე და მართობულია $\vec{m}(a,b,c)$ ვექტორის.

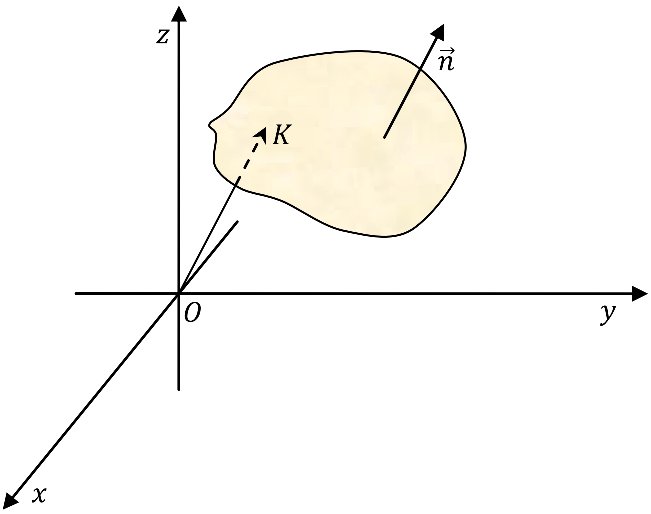
(1)–დან მიიღება **სიბრტყის ზოგადი განტოლება:**

$$\boldsymbol{ax+by+cz+d=0} \qquad (2)$$

სადაც:

$$d=-ax_0-by_0-cz_0$$

თუ სიბრტყის ნორმალის როლში ავიღებთ ე.წ. გარე ერთეულოვან ნორმალს, $\vec{n}$ ვექტორს, რომლის ბოლო და სათავე სიბრტყის მიმართ სხვადასხვა მხარესაა, მაშინ $\vec{n}=(\cos\propto,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\propto$, β და γ არის კუთხეები, რომლებსაც ადგენს $\vec{n}$ ვექტორი Ox, Oy და Oz ღერძებთან. მაშინ (2) მიიღებს სახეს:



$$x\cos\propto+y\cos\beta+z\cos\gamma+D=0.$$

ვთქვათ, $p=|\overrightarrow{OK}|$ –არის მანძილი სათავიდან სიბრტყემდე, მაშინ:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OK}=\cos\propto x_0+\cos\beta\, y_0+\cos\gamma\, z_0,$$

$$|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{OK}|=|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{OK}|\cdot\cos 0=p,$$

ე.ი.:

$$p=\cos\propto\cdot x_0+\cos\beta\cdot y_0+\cos\gamma\cdot z_0,$$

რადგან K ეკუთვნის სიბრტყეს, ამიტომ:

$$x_0 \cos \propto + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma + D = 0$$

ე.ი.: $D = -p$

მაშასადამე მიიღება განტოლება: (3)

$$\boxed{x \cos \propto + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0}$$

ამ განტოლებას ჰქვია **სიბრტყის ნორმალური განტოლება**.

რაიმე $M_1(x_1, y_1, z_1)$ **წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი** გამოითვლება ფორმულით:

$$\varrho = \left|\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

თუ $\overrightarrow{m_1}(a_1, b_1, c_1)$ არის $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ სიბრტყის ნორმალი, ხოლო $\overrightarrow{m_2}(a_2, b_2, c_2)$ არის $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ სიბრტყის ნორმალი, მაშინ ცხადია, **სიბრტყეებს შორის კუთხის კოსინუსი** შეიძლება ასე ვიპოვოთ:

$$\cos \propto = \frac{|m_1 \cdot m_2|}{|\overrightarrow{m}_1| \cdot |\overrightarrow{m}_2|}$$

ე.ი.:

$$\cos \propto = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

ამ ფორმულის მიხედვით შეიძლება დავწეროთ ორი სიბრტყის პერპენდიკულარობისა და პარალელობის პირობები:

ორი სიბრტყის პერპენდიკულარობის პირობა:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

ორი სიბრტყის პარალელობის პირობა:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

ამ ტოლობებში იგულისხმება: თუ რომელიმე მნიშვნელი ნულის ტოლია, მაშინ შესაბამისი მრიცხველიც ნულის ტოლად უნდა ავიღოთ.

წრფე სივრცეში

ვთქვათ a ნებისმიერი წრფეა. მისი მიმმართველი ვექტორი ვუწოდოთ $\vec{s}$ ვექტორს, რომელიც პარალელურია a წრფის. ვთქვათ a წრფე გადის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე და $\vec{s}(l, m, n)$ არის a წრფის მიმმართველი ვექტორი. **$M(x, y, z)$ მდებარეობს a წრფეზე** მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი კოლინეარულია $\vec{s}$ ვექტორის, ანუ:

$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}$, აქედან მიიღება **წრფის პარამეტრული განტოლება**:

$$x = x_0 + lt$$

$$y = y_0 + mt$$

$$z = z_0 + nt$$

თუ გამოვრიცხავთ t –ს, მიიღება წრფის წარმოდგენა **კანონიკური სახით**:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

ამასთანავე, თუ რომელიმე რიცხვი, l, m ან n ნულის ტოლია, მაშინ შესაბამისი მრიცხველიც ნულის ტოლად უნდა ავიღოთ.

ვთქვათ მოცემულია ორი წრფე:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

და

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

მაშინ ამ **წრფეებს შორის კუთხის კოსინუსს** ასე ვიპოვით:

$$\cos\varphi = \left|\frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}\right|$$

აქედან მიიღება **ორი წრფის მართობულობისა და პარალელობის პირობები**:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

და

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

სიბრტყე და წრფე სივრცეში

ყოველი წრფე შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ორი სიბრტყის თანაკვეთა, ე.ი. წრფე შეიძლება წარმოვადგინოთ სისტემით:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

ეს სისტემა წრფეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში განსაზღვრავს, როცა განტოლებებით წარმოდგენილი სიბრტყეები არ არის პარალელური, ე.ი. როცა არ სრულდება პირობა:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

ცხადია წრფის მიმმართველი ვექტორი მართობულია ორივე სიბრტყის ნორმალის: $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ და $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ ვექტორების. ამიტომ $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ არის წრფის მიმმართველი ვექტორი. ვიცით, რომ:

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

ამიტომ ამ **წრფის კანონიკური წარმოდგენა** ასე ჩაიწერება:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$(x_0; y_0; z_0)$ სისტემის ერთ-ერთი ამონახსნია –წრფეზე მდებარე წერტილის კოორდინატებია.

მატრიცები
მოქმედებები მატრიცებზე

მატრიცა ეწოდება მართკუთხოვან ცხრილს, რომელშიც რიცხვები განლაგებულია სტრიქონებად და სვეტებად.

მაგალითად, მატრიცა, რომელსაც ორი სტრიქონი და სამი სვეტი აქვს: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ –პირველ სტრიქონს ადგენს რიცხვები: 2,3,1. მეორეს: 1,5,1.

რიცხვებს, რომლისგანაც მატრიცა შედგაბა, ვუწოდოთ მატრიცის ელემენტები.

მატრიცებს აღვნიშნავთ ასოებით: $A, B, C, \cdots$

მატრიცის ელემენტები შეიძლება აღვნიშნოთ ერთი ასოთი, რომელსაც ორი ინდექსი აქვს, მაგალითად: a_{23} , პირველი ინდექსი გვიჩვენებს სტრიქონის ნომერს, მეორე –სვეტის ნომერს. მაგალითი:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

ეს არის მატრიცა, რომელსაც აქვს ორი სტრიქონი და სამი სვეტი.

მატრიცა, რომელსაც m სტრიქონი აქვს და n სვეტი ასე ჩაიწერება:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

შეიძლება ეს მატრიცა მოკლედ ასეც ჩავწეროთ:

$$A = (a_{ik})_{mn} \ , \quad B = (b_{ik})_{mn}$$

მაშინ $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ ისეთი მატრიცაა, რომელიც ასე განისაზღვრება:

$$C = (c_{ik})_{mn} \quad \text{და} \quad c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \ .$$

მაგალითად:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ik})_{mn}$ **მატრიცის ნამრავლი $\boldsymbol{\lambda}$ რიცხვზე** არის მატრიცა, რომლის ელემენტებია λa_{ik} , ე.ი. ყველა ელემენტი მრავლდება λ რიცხვზე.

ნულოვანი მატრიცა ეწოდება მატრიცს, რომლის ყველა ელემენტი ნულია. აღვნიშნავთ ასე: θ . ე.ი.:

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცებზე **მოქმედებების თვისებები**:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + \theta = A$
4. თუ $A + B = \theta$, მაშინ $B -$ს ეწოდება $A -$ს მოპირდაპირე და ასე აღინიშნება: $B = -A$
5. $1 \cdot A = A$
6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7. $(\lambda + r)A = \lambda A + rA$
8. $\lambda(rA) = r(\lambda A) = (\lambda r)A$

თუ მატრიცის სტრიქონების რიცხვი უდრის სვეტების რიცხვს, მაშინ ასეთ მატრიცას ეწოდება **კვადრატული მატრიცა**.

მატრიცების გამრავლება

ნებისმიერი ორი მატრიცის გამრავლება არ არის განსაზღვრული.

ვამრავლებთ A_{mn} მატრიცას B_{nl} მატრიცაზე და შედეგად ვიღებთ C_{ml} მატრიცს, რომლის ელემენტები ასე განისაზღვრება:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

სადაც: $i = 1,2,\cdots,m$ და $k = 1,2,\cdots,l$.

მაშასადამე, თუ $C = A \cdot B$, მაშინ C მატრიცის C_{ik} ელემენტი მიიღება A მატრიცის $i-$ური სტრიქონის „გადამრავლებით" B მატრიცის $k-$ურ სვეტზე, ანუ C_{ik} ელემენტი არის A მატრიცის $i-$ური სტრიქონის ელემენტების B მატრიცის $k-$ური სვეტის შესაბამის ელემენტებზე ნამრავლთა ჯამი.

მაგალითი:

ვთქვათ, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{32}$ ეს მატრიცი შეიძლება გავამრავლოთ $2 \cdot 2$ მატრიცაზე, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. მაშინ:

$$A_{3 \cdot 2} \cdot B_{2 \cdot 2} = C_{3 \cdot 2}$$

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \qquad c_{12} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2$$

$$c_{21} = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \qquad c_{22} = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2$$

$$c_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \qquad c_{32} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2$$

ე.ი. $C = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 28 & 19 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}_{2 \cdot 3}$

ცხადია, თუ A მრავლდება B–ზე, შეიძლება B ვერ გავამრავლოთ A–ზე.

თუ A და B ერთი და იგივე რიგის მატრიცებია და შეგვიძლია ვიპოვოთ $A \cdot B$ და $B \cdot A$ ნამრავლები, მაგრამ ამ შემთხვევაშიც, საზოგადოდ, $A \cdot B \neq B \cdot A$

გაუსის მეთოდი

ვიხილავთ n უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომელიც შეიცავს m განტოლებას.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}a_{m2} + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი ეწოდება $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ $n-$ეულს, რომელთა ჩასმით სისტემაში, მიიღება სწორი ტოლობები. თუ სისტემისთვის არსებობს ამონახსნი, სისტემას ქვია თავსებადი, თუ არა აქვს ამონახსნი არათავსებადი ქვია. თუ ერთზე მეტი ამონახსნი აქვს, მას ქვია განზღვრელი.

ორ სისტემას ქვია ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთიდაიგივეა.

გაუსის მეთოდით სისტემის ამოხსნისას შემდეგ ოპერაციებს ვაწარმოებთ: რომელიმე განტოლებას ვამრავლებთ რაიმე რიცხვზე და ვუმატებთ სხვა განტოლებებს.

თუ $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ $-$მაშინ ასეთ განტოლებებს ამოვაგდებთ.

თუ რომელიმე განტოლება მიიღებს სახეს: $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \neq 0$ მაშინ ვწყვეტთ ამოხსნას რადგან სისტემას ამ შემთხვევაში ამონასხნი არააქვს.

ვთქვათ, $a^{11} \neq 0$, (რომელიმე კოეფიციენტი $\neq 0$) -ერთერთი პროცესი არის კოეფიციენტების ნომრების შეცვლა, შეგვიძლია აგრეთვე განტოლებების გადანაცვლება, ამიტომ ამას ყოველთვის მივაღწევთ, ამიტომ ვიგულისხმოთ რომ $a_{11} \neq 0$. მაშინ შეგვიძლია პირველი განტოლების გარდა ყველგან გამოვრიცხოთ x_1 ცვლადი. ამისთვის პირველი განტოლება დავტოვოთ უცვლელი, ხოლო ყოველ შემდგომ განტოლებას დავუმატოთ $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ $-$ზე გამრავლებული პირველი განტოლება.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}a_{m2} + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \left| \begin{matrix} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ \cdots \\ \frac{a_{m1}}{a_{11}} \end{matrix} \right. \qquad =>$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{'}x_2 + \dots + a_{2n}^{'}x_n = b_2^{'} \\ a_{m2}^{'}x_2 + \dots + a_{mn}^{'}x_n = b_m^{'} \end{cases} \qquad =>$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{1n}c_n = l_1 \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = l_2 \\ c_{kk}x_k + \dots + c_{kn}x_n = l_k \end{cases}$$

თუ ბოლო განტოლება ორუცნობიანია მაშინ სისტემას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი. თუ ერთუცნობიანია მაშინ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

ლექცია 12

გადანაცვლების ლუწობა და კენტობა

გავიხსენოთ, რომ **n-ელემენტიანი გადანაცვლება** ეწოდება n-ელემენტიანი სიმრავლის ყოველ დალაგებას. n-ელემენტიან გადანაცვლებათა რიცხვი არის $n!$

გადანაცვლებები შეიძლება შევადგინოთ პირველ n ნატურალური რიცხვისგან. მაგალითად, პირველი სამი ნატურალური რიცხვისგან შეიძლება შევადგინოთ 6 გადანაცვლება (6=3!); 123, 132, 213, 231 და 321.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე გადანაცვლება პირველი n ნატურალური რიცხვისგან. ვიტყვით, რომ ამ გადანაცვალებაში რაიმე ორი რიცხვი ქმნის ინვერსიას, თუ ის რიცხვი, რომელიც მეტია წინ უსწრებს მასზე ნაკლებს. მაგალითად, 132 გადანაცვლებაში 3 და 2 ქმნის ინვერსიას.

ამ გადანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვი მხოლოდ ერთია – მხოლოდ 3 და 2 ქმნის ინვერსიას, ინვერსიათა რიცხვს ასეთ ჩავწერთ: [1, 3, 2], ე. ი. [1, 3, 2]=1.

განვიხილოთ 7-ელემენტიანი გადანაცვლება: 2, 5, 4, 7, 3, 6. აქ ინვერსიათა რიცხვი არის 7, [2, 5, 1, 4, 7, 3, 6]=7. მართლაც, რიცხვი 1 ქმნის 2 ინვერსიას, რიცხვი 2 – არცერთს, რიცხვი 3 – 3-ს, რიცხვი 4 – 1-ს, რიცხვი 5 – არცერთს, რიცხვი 6 – ერთს, რიცხვი 7 – არცერთს, სულ – 2+3+1+1=7.

გადანაცვლებას ეწოდება ლუწი, თუ მასში ინვერსიათა რიცხვი ლუწია, გადანაცვლებას ეწოდება კენტი თუ მასში ინვერსიათა რიცხვი კენტია. თუ გადანაცვლებაში ორ რიცხვს ადგილებს შევუცვლით, მაშინ, ცხადია, გადანაცვლების ლუწობა, ან კენტობა იცვლება – ლუწი გახდება კენტი და კენტი – ლუწი. ასეც ვიტყვით: ტრანსპოზიციის შემდეგ (ორი რიცხვის ადგილების შეცვლის შემდეგ) ლუწი გადანაცვლება გახდება კენტი და კენტი გახდება – ლუწი.

$n!$ გადანაცვლებიდან ნახევარი ლუწია, მეორე ნახევარი – კენტი.

n-ური რიგის დეტერმინანტი

განვიხილოთ n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

n-ური რიგის მატრიცის **n-ური რიგის დეტერმინანტი** ეწოდება ამ მატრიცის ელემენტების ნამრავლთა ჯამს; თითოეულ ნამრავლში შედის n თანამამრავლი, რომლებიც თითო-თითოდ არის აღებული თითოეული სტრიქონიდან და თითოეული სვეტიდან. შესაკრებების რაოდენობა არის $n!$ თითოეულ შესაკრებს აქვს + ან – ნიშანი, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება: თუ თითოეულ ნამრავლში თანამამრავლები შესაბამისი სვეტების ნომრების ზრდის მიხედვითაა დალაგებული, მაშინ იმ ნამრავლს, რომელშიც სტრიქონების ნომრები ქმნის ლუწ გადანაცვლებას „+“ ნიშანი აქვს, წინააღმდეგ შემთხვევაში – მინუს ნიშანი (როცა სტრიქონების ნომრები ქმნის კენტ გადანაცვლებას). n-ური რიგის დეტერმინანტს ასე აღვნიშნავთ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ეს არის რიცხვი, რომელიც, ზემოთთქმულის თანახმად, ასე გამოითვლება:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1, i_2, \dots i_n)} (-1)^{[i_1, i_2, \dots i_n]} a_{i_{11}} a_{i_{22}} a_{i_{33}} \dots a_{i_{nn}}$$

ჯამი ვრცელდება ყველა გადანაცვლებაზე, მაშასადამე, შესაკრებების რაოდენობა არის $n!$

თეორემა 1. n-ური რიგის დეტერმინანტში წევრი $a_{l_1k_1} a_{l_2k_2} \dots a_{l_nk_n}$ შედის $(-1)^{[l_1, l_2, \dots l_n] + [k_1, k_2, \dots, k_n]}$ ნიშნით.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ, თუ $a_{l_1k_1} a_{l_2k_2} \dots a_{l_nk_n}$ ნამრავლში ორ თანამამრავლს ადგილებს შევუცვლით, მაშინ $l_1, l_2, \dots, l_n$ და $k_1, k_2, \dots, k_n$ გადანაცვლებებში თითო

ტრანსპოზაცია მოხდება, ამიტომ $[l_1, l_2, ..., l_n]$+$[k_1, k_2, ..., k_n]$ არ შეიცვლის ლუწ-კენტოვნებას.

ვთქვათ, მოცემულ გადანაცვლებაში წევრებს ისე შევუცვალეთ ადგილები, რომ მეორე ინდექსები ადგენს მთავარ გადანაცვლებას: 1, 2, ... n. თუ პირველი ინდექსები ადგენს $m_1, m_2, ..., m_n$ გადანაცვლებას, მაშინ შესაბამისი წევრის ნიშანი უნდა იყოს: $(-1)^{[m_1, m_2, ..., m_n]}$. ეს ნიშანი კი დაემთხვევა $(-1)^{[l_1, l_2, ... l_n]+[k_1, k_2, ..., k_n]}$ ნიშანს.

n-ური რიგის დეტერმინანტის თვისებები.

დეტერმინანტში ორი სტრიქონის (ან სვეტის) ადგილების შეცვლას ვუწოდოთ ამ სტრიქონების (სვეტების) **ტრანსპოზიცია**.

ვთქვათ, სტრიქონები გადავნომრეთ ზემოდან ქვემოთ, სვეტები – მარცხნიდან – მარჯვნივ. ყოველი სტრიქონის შეცვლას იგივე ნომრის სვეტით ტრანსპონირება ვუწოდოთ.

I თვისება. ტრანსპონირების დროს დეტერმინანტი არ იცვლება.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია დეტერმინანტი:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & ... & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

მისი ტრანსპონირებით მიიღება დეტერმინანტი:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ & ... & & \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ცხადია, პირველი დეტერმინანტის ყოველი შესაკრების მოდული დაემთხვევა D'-ის რომელიღაც შესაკრების მოდულს, რადგან ყოველი წევრი შედგება n თანამამრავლისგან, ისე, რომ თითოეული სტრიქონიდან და თითოეული სვეტიდან თითო ელემენტი აიღება. ანალოგიურად, D'-ის ყოველი წევრის მოდული დაემთხვევა D-ს რომელიღაც წევრის მოდულს. ე. ი. $a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}...a_{i_nk_n}$ – წევრი არის პირველ დეტერმინანტშიც და მეორეშიც, მაგრამ მისი ნიშანი ორივეში ერთი და იგივეა და ტოლია $(-1)^{[i_1, i_2, ..., i_n]+[k_1, k_2, ..., k_n]}$ პირველ დეტერმინანტში $i_1, i_2, ..., i_n$ სტრიქონების ნომრებია, მეორეში – სვეტების.

II თვისება. დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონის, ან სვეტის ტრანსპოზიციით დეტერმინანტი ნიშანს იცვლის.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია დეტერმინანტი:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & \ldots & a_{1q} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & \ldots & a_{2q} & \ldots & a_{2n} \\ & & & & \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} & \ldots & a_{nq} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

p და q ნომრის მქონე სვეტების ტრანსპოზიციის შემდეგ მიიღება დეტერმინანტი:

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} & \ldots & a_{1p} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q} & \ldots & a_{2p} & \ldots & a_{2n} \\ & & & & \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nq} & \ldots & a_{np} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

განვიხილოთ D_1-ის რაიმე შესაკრები ნიშნის გათვალისწინების გარეშე:

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_p p} \ldots a_{i_q q} \ldots a_{i_n n}$$

ეს წევრი შედის D_1-ში $(-1)^{[i_1, i_2, \ldots, i_n]}$ ნიშნით.

ეს შესაკრები D_2-შიც არის რაღაც ნიშნით. ვიპოვოთ ეს ნიშანი. მაგრამ D_2-ში სვეტების ნომრები უნდა დავალაგოთ ზრდის მიხედვით. ამიტომ ასე გადავწერთ:

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_q q} \ldots a_{i_p p} \ldots a_{i_n n}$$

აქ უკვე სვეტები ზრდის მიხედვითაა დალაგებული, რადგან a_{iq} მოთავსებულია სვეტში, რომლის ნომერია p. ამიტომ ეს ნამრავლი D_2-ში შედის $(-1)^{[i_1, i_2, \ldots, i_q, \ldots, i_p \ldots, i_n]}$ ნიშნით.

ამრიგად, D_1-ის ყოველი წევრი არის D_2-ის წევრი და აქვს მოპირდაპირე ნიშანი, რადგან $[i_1, i_2, \ldots, i_p, \ldots, i_q, \ldots, i_n]$ გადანაცვლება ლუწია, თუ $[i_1, i_2, \ldots, i_q, \ldots, i_p, \ldots, i_n]$ – კენტია და კენტია, როცა ეს მეორე გადანაცვლება ლუწია.

იგივე თვისება ჭეშმარიტია სტრიქონებისთვის, რადგან ტრანსპონირებით, სვეტები გარდაიქმნება სტრიქონებად.

შედეგი. თუ დეტერმინანტში ორი სტრიქონი, ან ორი სვეტი ტოლია, მაშინ ეს დეტერმინანტი ნულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, ორი სტრიქონი ტოლია. შევუცვალოთ მათ ადგილები. ერთის მხრივ დეტერმინანტი არ იცვლება, მეორეს მხრივ – იცვლის ნიშანს, ამიტომ დეტერმინანტი ნულია.

III თვისება. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის, ან სვეტის ყველა ელემენტს რაიმე რიცხვზე გავამრავლებთ, მაშინ დეტერმინანტი გამრავლდება ამ რიცხვზე.

დამტკიცება. მსჯელობა ჩავატაროთ პირველი სვეტის შემთხვევაში.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ ka_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ცხადია, $D_1=\sum\limits_{(i_1,i_2,\dots i_n)}(-1)^{[i_1,i_2,\dots i_n]}(ka_{i_1 1})a_{i_2 2}a_{i_3 3}\dots a_{i_n n}=k\sum\limits_{(i_1,i_2,\dots i_n)}(-1)^{[i_1,i_2,\dots i_n]}ka_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3}\dots a_{i_n n}=kD.$

შედეგი. თუ დეტერმინანტში ორი სტრიქონი, ან ორი სვეტი პროპორციულია, მაშინ დეტერმინანტი ნულია.

III თვისების შედეგი. თუ დეტერმინანტში ორი სტრიქონი, ან ორი სვეტი პროპორციულია, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

IV თვისება. ვთქვათ, დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის ელემენტები ორი შესაკრების ჯამია, $a_{ik}=b_{ik}+c_{ik}$, ანუ

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & b_{1k}+c_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & b_{2k}+c_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & b_{nk}+c_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

მაშინ $D=D_1+D_2$, სადაც

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & b_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & b_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & c_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & c_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & c_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

დამტკიცება:

$$D=\sum_{(i_1,i_2,\dots i_n)}(-1)^{[i_1,i_2,\dots i_n]}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots b_{i_k k}\dots a_{i_n n}+\sum_{(i_1,i_2,\dots i_n)}(-1)^{[i_1,i_2,\dots i_n]}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots c_{i_k k}\dots a_{i_n n}=D_1+D_2.$$

შედეგი. დეტერმინანტი არ შეიცვლება თუ რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებს დავუმატებთ სხვა სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებისა და რაიმე რიცხვის რიცხვის ნამრავლს.

განსაზღვრება. n-ური რიგის დეტერმინანტის a_{ik} ელემენტის მინორი M_{ik} ეწოდება n-1 რიგის დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება i-ური სტრიქონისა და k-ური სვეტის ამოშლით.

n-ური რიგის დეტერმინანტის a_{ik} ელემენტის ალგებრული დამატება A_{ik} კი უწოდება რიცხვს: $(-1)^{i+k}M_{ik}$.

თეორემა. თუ n-ური რიგის D დეტერმინანტში რომელიმე k-ური სვეტის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია გარდა a_{ik} ელემენტისა, მაშინ

$$D = a_{ik} \cdot A_{ik}.$$

დამტკიცება. ჯერ, ვთქვათ, i=k=1, ე. ი. გვაქვს დეტერმინანტი:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \text{ცხადია,}\ D = \sum_{(i_1, i_2, \dots i_n)} (-1)^{[i_1, i_2, \dots i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = a_{11}M_{11} = a_{11}A_{11}.$$

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(i–1) ტრანსპოზიციით i-ური სტრიონი შეიძლება პირველ სტრიქონად ვაქციოთ, (k–1) ტრანსპოზიციით კი k-ური სვეტი გადაიქცევა პირველ სვეტად და a_{ik} დაიკავებს a_{11}-ის ადგილს.

ამიტომ $$a_{ik}M_{ik} = a_{ik}A_{ik}$$

დეტერმინანტის V თვისება. n-ური რიგის დეტერმინანტი ტოლია რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტების მათსავე ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამის:

$$D=a_{ik}A_{ik}+a_{2k}A_{2k}+ \dots + a_{nk}A_{nk}.$$

დამტკიცება. $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

იგი შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1k}+0+\dots+0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0+a_{2k}+\dots+0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0+0+\dots+a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$= a_kA_k+a_{2k}A_{2k}+ \dots + a_{nk}A_{nk}.$

VI თვისება: n-ური რიგის დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტების სხვა სტრიქონის ან სვეტის ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია.

ვთქვათ,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{ns} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

განვიხილოთ დეტერმინანტი:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ცხადია, $D_1=0$, მეორეს მხრივ, s-ური სვეტის მიხედვით წინა თვისების გამოყენება გვაძლევს:

$$D_1=a_{1k}A_{1s}+a_{2k}A_{2s}+\dots+a_{nk}A_{ns}$$

ე. ი.

$$\boldsymbol{a_{1k}A_{1s}+a_{2k}A_{2s}+\dots+a_{nk}A_{ns}=0.}$$

შებრუნებული მატრიცა. მისი არსებობის პირობა.

კვადრატული A მატრიცის შებრუნებული ეწოდება მატრიცას, რომლის ნამრავლი მოცემულ A მატრიცაზე ერთეულოვანი მატრიცაა, ე. ი. არის მატრიცა:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

A-ს შებრუნებულს ასე აღვნიშნავთ: A^{-1}

ე. ი. $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = E}$.

თეორემა. თუ კვადრატული A მატრიცის დეტერმინანტი ნული არ არის, მაშინ

არსებობს ერთადერთი მატრიცა, რომელიც A-ს შებრუნებულია და იგი ასე მოიცემა:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix},$$ სადაც

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, \dots, A_{nn}$ არის A მატრიცის ელემენტების ალგებრული დამატებებია, D არის A მატრიცის დეტერმინანტი.

დამტკიცება. ადვილად შევამოწმებთ, რომ $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$.

მაგალითად, ნამრავლის c_{11} ელემენტი ასე გამოითვლება

$$a_{11} \cdot \frac{A_{11}}{D} + a_{12} \cdot \frac{A_{12}}{D} + \dots + a_{1n} \cdot \frac{A_{1n}}{D} = \frac{D}{D} = 1;$$

c_{12} ასე გამოითვლება:

$$a_{11} \cdot \frac{A_{21}}{D} + a_{12} \cdot \frac{A_{22}}{D} + \dots + a_{1n} \cdot \frac{A_{2n}}{D} = \frac{0}{D} = 0.$$

ერთადერთობა.

ვთქვათ, $B \cdot A = E$

მაშინ $(B \cdot A)A^{-1} = E \cdot A^{-1}$

$B(A \cdot A^{-1}) = A^{-1}$,

$B = A^{-1}$.

თუ $\det A = 0$, მაშინ A მატრიცს შებრუნებული არა აქვს.

მართლაც, თუ არსებობს A^{-1}, მაშინ

$A \cdot A^{-1} = E$

$\det(A \cdot A^{-1}) = 1$

$\det A \neq 0$ $\det A^{-1} = 0$

რადგან $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$.

მატრიცას $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ ვუწოდოთ A-ს მიკავშირებული. მაშასადამე,

$A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot A^*$, სადაც D არის A-ს დეტერმინანტი.

ლექცია 13

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

განვიხილოთ n-უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{array}{l} \backslash a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_1 \\ \quad\text{- - - - - - -} \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{array} \qquad (1)$$

ამ სისტემის ამონახსნი ეწოდება რიცხვთა დალაგებულ n-ეულს (α_1, α_2, ... α_n), რომლის ჩასმით (x_1, x_2, ..., x_n) უცნობთა სისტემის ნაცვლად, ანუ $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, ... $x_n=\alpha_n$ ჩასმით,

მიიღება ჭეშმარიტი ტოლობები:

$$\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n=b_1 \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n=b_1 \\ \quad\text{- - - - - -} \\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\ldots+a_{nn}\alpha_n=b_n \end{array}$$

(1) სისტემის დეტერმინანტი ეწოდება n-ური რიგის Δ დეტერმინანტს:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

დამხმარე დეტერმინანტები კი ეწოდება დეტერმინანტებს:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \quad \Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

ე. ი. ყოველი დამხმარე დეტერმინანტი Δ_i(i=1, 2, ... n) მიიღება Δ-სგან თავისუფალი წევრების – b_1, b_2, ... b_n რიცხვების – ჩასმით i-ური სვეტში უცნობების შესაბამისი კოეფიციენტების ნაცვლად.

კრამერის თეორემა. თუ n-უცნობიან n წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი $\Delta\neq0$, მაშინ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს, რომელიც არის $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$, ანუ $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,$ $x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$.

დამტკიცება. ვთქვათ, (1) სისტემის აქვს ამონახსნი: (x_1, x_2, ..., x_n) ამონახსნია, მაშინ გვაქვს:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_1$$
$$------$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n$$

პირველი ტოლობა გავამრავლოთ A_{11}-ზე (a_{11}-ის ალგებრულ დამატებაზე), მეორე ტოლობა გავამრავლოთ A_{21}-ზე და ა. შ. ბოლო ტოლობა გავამრავლოთ A_{n1}-ზე. მიღებული ტოლობები შევკრიბოთ. მივიღებთ:

$$x_1(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\ldots+a_{n1}A_{n1})+x_2(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\ldots+a_{n2}A_{n1})+\ldots$$
$$+x_n(a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+\ldots+a_{nn}A_1)=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1}$$

აქედან გვაქვს:

$$x_1\Delta=\Delta_1,$$

რადგან $\Delta\neq0$, $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$.

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (2)$$

მაშასადამე, თუ სისტემის ამონახსნია (x_1, x_2, ... x_n) მაშინ იგი მოიცემა (2) ფორმულებით. ამონახსნის ერთადერთობა დამტკიცებულია. ამონახსნის არსებობაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია ($\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,$ $\frac{\Delta_n}{\Delta}$) ჩავსვათ ყველა განტოლებაში უცნობების ნაცვლად და დავრწმუნდებით, რომ (2) სისტემის ამონახსნია.

თეორემა დამტკიცებულია.

განტოლებათა (1) სისტემა შეიძლება მატრიცულად ასე ჩავწეროთ:

$$A\cdot X=B, \qquad (3)$$

სადაც მატრიცები A, X და B ასე მოიცემა:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ვთქვათ, A მატრიცის დეტერმინანტი ნული არ არის და იგი აღვნიშნოთ Δ ასოთი – $\det A=\Delta$ (ანუ A მატრიცა არაგადაგვარებულია). მაშინ არსებობს მისი შებრუნებული მატრიცა

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

მაშინ (3) ტოლობიდან (თუ არსებობს X, რომელიც აკმაყოფილებს (3)-ს) გვაქვს:

$$A^{-1}(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B,$$

აქედან

$$(A^{-1}A)\cdot X=A^{-1}B,$$

აქედან $X=A^{-1}B$, რადგან $A^{-1}A$ ერთეულოვანი მატრიცაა.

მაშასადამე, ამონახსნი თუ არსებობს, ასე მოიცემა

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B.$$

ის რომ $A^{-1}B$ ამონახსნია, ჩასმით მოწმდება:

$$A(A^{-1}\cdot B)=(A\cdot A^{-1})\cdot B=B.$$

ამრიგად, თუ $\Delta\neq 0$, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და მატრიცულად ეს ამონახსნი ასე ჩაიწერება:

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ კრამერის ფორმულებს:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომელიც შეიცავს m განტოლებას n უცნობით:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_1$$
$$------$$
$$a_1x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m$$

$a_{11}, a_{12}, \dots a_{nn}$ რიცხვებს სისტემის კოეფიციენტები ეწოდება, $b_1, b_2, \dots, b$ რიცხვებს – თავისუფალი წევრები. სისტემის ამონახსნი ეწოდება რიცხვთა ნებისმიერ n-ეულს – $c_1, c_2 \dots c_n$, რომელთა ჩასმით $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობების ნაცვლად მივიღებთ ჭეშმარიტ ტოლობებს.

სისტემას ეწოდება თავსებადი, თუ მას აქვს ერთი მაინც ამონახსნი, თუ სისტემის არა აქვს ამონახსნი, მაშინ მას ეწოდება არათავსებადი. სისტემას

ეწოდება განუზღვრელი, თუ მას ერთზე მეტი ამონახსნი აქვს, შევნიშნოთ, რომ სისტემას თუ აქვს ერთზე მეტი ამონახსნი, მაშინ მას აქვს უამრავი ამონახსნი. ორ სისტემას ეწოდება ტოლფასი, როცა მათ აქვს ერთი და იგივე სიმრავლე ამონახსნებისა.

სიტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით.

მოცემულ სისტემაზე ვაწარმოებთ შემდეგი სახით გარდაქმნებს: 1) სისტემიდან ამოვიღებთ შემდეგი სახის განტოლებებს:

$$0 \cdot x_1+0 \cdot x_2+\ldots+0 \cdot x_n=0 \qquad (1)$$

2) რომელიმე განტოლების ორივე მხარეს ვუმატებთ სხვა განტოლების გამრავლებულს რაიმე რიცხვზე.

ცხადია, ამ გარდაქმნების შემდეგ მოცემული სისტემის ტოლფასი სისტემა მიიღება. კიდევ ერთი სახის გარდაქმნასაც ვასრულებთ – უცნობების გადანომრვასაც ვცვლით.

თუ სისტემაში ერთი მაინც შედის განტოლება:

$$0 \cdot x_1+0 \cdot x_2+\ldots+0 \cdot x_n=b \quad (b\neq 0) \qquad (2)$$

რომელსაც, ჩანს, რომ ამონახსნი არა აქვს, მაშინ სისტემაც არათავსებადია.

ვთქვათ, ახალი სისტემა ასეთი განტოლებას არ შეიცავს და ჩამოშორებულია (1) სახის განტოლებებიც. მაშინ ერთი მაინც განტოლება შეიცავს ნულისგან განსხვავებულ კოეფიციენტიან წევრს. შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ეს არის $a_{11}x_1$ წევრი, ე. ი. $a_{11}\neq 0$.

პირველ განტოლებას ვტოვებთ, ხოლო ყველა დანარჩენიდან გამოვრიცხავთ x_1 უცნობის შემცველ წევრებს. მაგალითად, თუ პირველს გავამრავლებთ $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$-ზე და დავუმატებთ მეორე განტოლებას, მაშინ მეორიდან გამორიცხება x_1 და ა. შ. შედეგად მივიღებთ მოცემულის ტოლფას სისტემას:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_n&=b \\ a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2 \\ &\ldots \\ a'_{m2}x_2+\ldots+a'_{mn}x_n&=b'_m \end{aligned}$$

ცხადია, აქ განტოლებათა რიცხვი შეიძლება m-ზე ნაკლებიც იყოს, რადგან ამოვაგდეთ (1) სახის განტოლებები.

ვთქვათ, $a'_{22}\neq 0$. მაშინ იგივე პროცესს ჩავატარებთ – გამოვრიცხავთ x_2-ს მეორის შემდეგ ყველა განტოლებიდან. შედეგად მიიღება სისტემა:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2$$
$$a''_{33}x_3 + ... + a''_{3n}x_n = b''_3$$
$$...$$
$$a''_{m3}x_3 + ... + a''_{mn}x_n = b''_m$$

გავაგრძელებთ ამ პროცესს. სისტემა მოიყვანება მის ტოლფას სისტემამდე:

$$c_{11}x_1+c_{12}x_2+...+c_{1n}x_n=d_1$$
$$c_{22}x_2+...c_{2n}x_n=d_2$$
$$- - - - -$$
$$c_{kk}x_k+...+c_{km}x_n=d_k$$

რომელშიც $c_{11}, c_{22}, ... c_k$ ნულისგან განსხვავებული რიცხვებია.

შეიძლება მოხდეს, რომ გარდაქმნის პროცესში (2) სახის განტოლება მივიღოთ, მაშინ სისტემა არათავსებადია.

განვიხილოთ ორი შესაძლო შემთხვევა:

1) $k=n$. მაშინ ბოლო განტოლება მიღებულ სისტემაში ერთ უცნობს შეიცავს, მას ერთი ამონახსნი აქვს: $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$, ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობას წინა განტოლებაში და ვიპოვით x_{n-1}-ს. შემდეგ x_n და x_{n-1}-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ წინა განტოლებაში და მივიღებთ x_{n-2}-ს, და ა. შ. ვიპოვით ყველა უცნობს. ე. ი. ამ შემთხვევაში სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

2) $k<n$. მაშინ უკანასკნელი განტოლება შეიცავს ერთზე მეტ უცნობს, მას უამრავი ამონახსნი აქვს და სისტემასაც უამრავი ამონახსნი აქვს.

შევშინოთ, რომ ყველა ის გარდაქმნა, რომელსაც ვაწარმოებთ განტოლებებზე, ფაქტიურად ხორციელდება მატრიცაზე, რომელიც შედგება კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრებისგან.

მაგალითი. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

ამოხსნა $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 10 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 1 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \end{array}\right)$

ე. ი. მივიღეთ სისტემა:

$$x_1+3x_2–2x_3=10$$
$$x_2–7x_3=-20$$

მას აქვს უამრავი ამონახსნი: მეორე განტოლებიდან:
x_2=–20+7x_3, ჩავსვათ წინა განტოლებაში და ვიპოვოთ x_1, x_1=70+23x_3
ე. ი. ყველა ამონახსნი ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} x_1 = 70 + 23x_3 \\ x_2 = -20 + 7x_3 \\ x_3 - \text{ნებისმიერი რიცხვია} \end{cases}$$

ლექცია 14

$\mathbf{R}^n$ სივრცე

ვთქვათ, **R** ნამდვილი რიცხვია სიმრავლეა. განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული n-ეულები, ანუ n ნამდვილი რიცხვი, რომლებიც გადანომრილია – a_1, a_2 ... a_n. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\vec{a} = (a_1, a_2, ... a_n)$. ვუწოდოთ მას n-განზომილებიანი ვექტორი. განვიხილოთ n-განხომილებიანი ვექტორების სიმრავლე.

$$\{(a_1, a_2, ... a_n), a_1\in \mathbf{R}, a_2\in \mathbf{R}_1 ... a_n\in \mathbf{R}\}.$$

ამ სიმრავლეში შემოვიღოთ ოპერაციები:

1) შეკრების ოპერაცია:

$$(a_1, a_2, ... a_n) + (b_1, b_2, ... b_n)=(a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_n+b_n).$$

2) $\lambda \in \mathbf{R}$, მაშინ შემოვიღოთ:

$$\lambda\cdot(a_1, a_2, ... a_n)= (\lambda a_1, \lambda a_2, ... \lambda a_n).$$

აღვნიშნოთ: $\mathbf{R}^n=\{(a_1, a_2, ... a_n), a_1\in\mathbf{R}, a_2\in\mathbf{R}_1 ... a_n\in\mathbf{R}\}$.

ვუწოდოთ მას არითმეტიკული სივრცე. თუ ნამდვილი რიცხვების ნაცვლად ავიღებთ კომპლექსურ რიცხვებს, გვექნება კომპლექსური არითმეტიკული სივრცე – C^n.

$\mathbf{R}^n$-ის ნულოვანი ვექტორი ვუწოდოთ ვექტორს:

$$\vec{0}=(0, 0, ..., 0).$$

$\vec{x}=(a_1, a_2, ... a_n)$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი ვუწოდოთ ვექტორს:

$$-\vec{x}=(-a_1,- a_2, ...- a_n).$$

თვისებები:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

5) $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$

6) $a(b\vec{x})=(ab)\vec{x}$

7) $(a+b)\vec{x}=a\vec{x}+b\vec{x}$

8) $a(\vec{x}+\vec{y})=a\vec{x}+a\vec{y}$

ამ თვისებების თანახმად, შეიძლება განვიხილოთ სამი, ოთხი და ა. შ. მეტი ვექტორის ჯამი, შეიძლება განვიხილოთ ვექტორთა წრფივი კომბინაცია: თუ $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_k}$ ვექტორებია, λ_1, λ_2, ... λ_k რიცხვები, მაშინ ამ ვექტორების წრფივი კომბინაციაა

$$a_1\overrightarrow{x_1}+a_2\overrightarrow{x_2}+...+a_k\overrightarrow{x_k}.$$

ვიტყვით, რომ $\vec{x}$ ვექტორი წრფივად გამოისახება $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_k}$ ვექტორებით, თუ არსებობს რიცხვები $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_k$, რომ

$$\vec{x}=\lambda_1\overrightarrow{x_1}+\lambda_2\overrightarrow{x_2}+...+\lambda_k\overrightarrow{x_k}.$$

ვთქვათ, მოცემულია მატრიცა:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

მისი ყოველი სტრიქონი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც $\mathbf{R}^n$-ის ვექტორი, ყოველი სვეტი არის $\mathbf{R}^m$-ის ვექტორი.

განსაზღვრება 1. $\mathbf{R}^n$ სივრცის $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}$ ვექტორებს ეწოდება **წრფივად დამოკიდებული**, თუ მოიძებნება რიცხვები $a_1, a_2, \dots, a_k$, რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს, რომ ჭეშმარიტია ტოლობა

$$a_1\overrightarrow{x_1}+a_2\overrightarrow{x_2}+\dots+a_k\overrightarrow{x_k}=\vec{0} \qquad (1)$$

განსაზღვრება 2. $\mathbf{R}^n$ სივრცის $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი თუ (1) ტოლობის ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $a_1=a_2=\dots=a_k=0$.

ამ განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს:

1) თუ ვექტორთა სისტემა შეიცავს ნულოვან ვექტორს, ის წრფივად დამოკიდებულია

2) თუ ვექტორთა სისტემის ერთი ვექტორი წრფივად გამოისახება დანარჩენი ვექტორებით, მაშინ ის წრფივად დამოკიდებულია. თუ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ მათ შორის არსებობს ვექტორი, რომელიც წრფივად გამოისახება დანარჩენი ვექტორებით

3) თუ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ყოველი სისტემა, რომელიც მას მოიცავს წრფივად დამოკიდებულია.

4) თუ სისტემა $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}$ არის $\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \dots, \overrightarrow{y_k}$ სისტემის ქვესისტემა და ეს უკანასკნელი წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ მოცემულიც წრფივად დამოუკიდებელია.

მატრიცის რანგი. ვთქვათ, მოცემულია $m\times n$ მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ვიტყვით, რომ A მატრიცის რანგი არის r რიცხვი, თუ არსებობს A მატრიცაში r რიგის მინორი, რომელიც ნული არ არის, ხოლო ყველა უფრო მაღალი რიგის მინორი ნულის ტოლია. ცხადია,

ა) $0 \le r \le min(m, n)$.

ბ) $r=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A ნულოვანია

გ) თუ A არის n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა, მაშინ $r=n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $detA\neq0$.

რანგის განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს: თუ მატრიცაში k-ური რიგის მინორებიდან ერთი მაინც ნული არ არის და $k+1$ რიგის მინორები ყველა ნულია, მაშინ უფრო მაღალი რიგის მინორებიც ნულია და მატრიცის რანგი არის k.

მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნები ვუწოდოთ შემდეგ ოპერაციებს:

1) ტრანსპონირებას 2) ორი სტრიქონის, ან ორი სვეტის ტრანსპოზიციას 3) რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ყველა ელემენტის ერთი და იმავე ნულისგან განსხვავებულ რიცხვზე გამრავლებას 4) რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებისადმი სხვა სტრიქონის ან სვეტის ელემენტების ერთი და იმავე რიცხვზე ნამრავლების მიმატება.

ადვილი საჩვენებილია, რომ პირველი სამი ელემენტარული გარდაქმნით მატრიცის რანგი არ იცვლება. ახლა ვაჩვენოთ, რომ მეოთხე ოპერაციითაც არ იცვლება რანგი. ვთქვათ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

გამოყოფილია ორი სვეტი (i-ური და k-ური).

მე-4 ელემენტარული გარდაქმნით მიიღება მატრიცა

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i}+ca_{1k} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i}+ca_{2k} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi}+ca_{m1k} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ვთქვათ, A მატრიცის რანგი არის r, ვაჩვენოთ, რომ B-ს რანგი $\le r$. ე. ი. B-ში r-ზე მეტი რიგის მინორი ყველა ნულია. ცხადია, B-ს ის მინორი, რომლის რიგი r-ზე მეტია და არ შეიცავს i-ურ სტრიქონს, მაშინ ის იგივეა, რაც შესაბამისი მინორი A-ში, ე. ი. ნულის ტოლია. B-ს ის მინორიც, რომლის რიგი r-ზე მეტია და შეიცავს i-ურ სვეტსაც და k-ურ სვეტსაც, ნულია. თუ B-ს მინორი, რომლის რიგი r-ზე მეტია

შეიცავს i-ურ სვეტს და არ შეიცავს k-ურ სვეტს, მაშინ მას ასე წარმოვადგენთ: D_1+D_2, სადაც D_1 ტოლია A მატრიცის შესაბამისი მინორია და ის ნულია, D_2 კი განსხვავდება A მატრიცის შესაბამისი მინორისგან რიცხვითი მამრავლით და ისიც ნულია.

ამრიგად, B მატრიცის რანგი არ აღემატება A მატრიცის რანგს – $r(b)\le r(A)$.

მაგრამ A მატრიცაც მიიღება B-სგან ანალოგიური ელემენტარული გარდაქმნით, ამიტომ

$$r(A)\le r(B).$$

ე. ი.

$$r(A)=r(B).$$

ძირითადი თეორემა მატრიცის რანგის შესახებ. თუ მატრიცის რანგი არის r, მაშინ ამ მატრიცაში არსებობს r სტრიქონი (ვექტორ-სტრიქონი), ან r სვეტი (ვექტორ-სვეტი), რომელიც წრფივად დამოუკიდებელია და ყოველი სტრიქონი ან სვეტი მათი წრფივი კომბინაციაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, A მატრიცის რანგი არის r. მაშინ არსებობს r რიგის მინორი, რომელიც ნული არ არის და ყველა უფრო მაღალი რიგის მინორი ნულია. შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ეს r რიგის მინორი A მატრიცის მარცხენა ზემო კუთხეშია. ვაჩვენოთ, რომ პირველი r სტრიქონი წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო ყველა სხვა სტრიქონი მათი წრფივი კომბინაციაა.

დავუშვათ, რომ პირველი r სტრიქონი წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ მათგან ერთ-ერთი სხვების წრფივაი კომბინაციაა. ვთქვათ ეს ერთ-ერთი არის r-სტრიქონი, $\overrightarrow{x_r}=\lambda_1\overrightarrow{x_1}+\lambda_2\overrightarrow{x_2}+\ldots+\lambda_{r-1}\overrightarrow{x_{r-1}}$.

თუ ამ r რიგის მინორში, რომელიც ნული არ არის ბოლო სტრიქონს გამოვაკლებთ პირველს გამრავლებულს λ_2-ზე, მეორე სტრიქონს, გამრავლებულს λ_2-ზე და ა. შ. წინა სტრიქონს გამრავლებულს λ_{r-1}-ზე, მაშინ ამ სტრიქონში ყველა ელემენტი ნული იქნება, მინორი არ შეიცვლება და იგი ნული იქნება, რაც შეუძლებელია.

ახალა ვაჩვენოთ, რომ ყველა სხვა სტრიქონი პირველი r სტრიქონის წრფივი კომბინაციაა.

განვიხილოთ $r+1$ რიგის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2l} \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kr} & a_{kl} \end{vmatrix}$$

თუ $l\le r$, ცხადია, იგი ნულია.

თუ $l>r$, მაშინ იგი $(r+1)$ რიგის მინორია და მაშინაც ნულია. ე. ი. მისი გაშლა ბოლო სვეტის მიხედვით =0.

$$a_{1l}A_1 + a_{2l}A_2 + \dots + a_{rl}A_r + a_{kl}A_{r+1} = 0$$

ცხადია, $A_{r+1} \neq 0$, რადგან ემთხვევა r რიგის მინორს, ამიტომ აქედან

$$a_{kl} = \lambda_1 a_{1l} + \lambda_2 a_{2l} + \dots + \lambda_r a_{rl}, \; l=1, \dots, n.$$

ანუ

$$a_{k1} = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_r a_{r1}$$
$$a_{k2} = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_r a_{r2}$$
$$\dots$$
$$a_{kn} = \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_r a_{rn}$$

ეს ნიშნავს, რომ k-ური სტრიქონი არის პირველი r სტრიქონის წრფივი კომბინაცია.

ლექცია 15

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა.
კრონეკურ-კაპელის თეორემა.

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომელიც შეიცავს m განტოლებას, უცნობების რიცხვი არის n.

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ +a_{2n}x_n=b_2$$
$$------$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ \dots\ +a_{mn}x_n=b_n.$$

თუ $x_1=c_1$, $x_2=c_2$, ..., $x_n=c_n$ ჩასმის შემდეგ მივიღებთ ჭეშმარიტ ტოლობებს, მაშინ (c_1, c_2, ... c_n)-ს ეწოდება სისტემის ამონახსნი. თუ სისტემას ერთი მაინც ამონახსნი აქვს, მაშინ მას ეწოდება თავსებადი, თუ არა აქვს ამონახსნი, მაშინ მას ეწოდება არათავსებადი. სისტემას ეწოდება განსაზღვრული, თუ მას აქვე ამონახსნი, ეწოდება განუზღვრელი, თუ მას აქვს უამრავი ამონახსნი.

სისტემის მატრიცა ეწოდება მატრიცას:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

სისტემის გაფართოებული მატრიცა ეწოდება მატრიცას:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

კრონეკერ-კაპელის თეორემა. n-უცნობიან m განტოლებათა სისტემის თავსებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი მატრიცის რანგი ტოლი იყოს გაფართოებული მატრიცის რანგის. თავსებადობის შემთხვევაში სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როცა რანგი უდრის უცნობია რიცხვს და აქვს უამრავი ამონახსნი, როცა რანგი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ სისტემა თავსებადია და ამონახსნია (c_1, c_2, ... c_n). მაშინ ჭეშმარიტია ტოლობები.

$$a_{11}c_1+a_{12}c_2+\ldots+a_{1n}c_n=b_1$$
$$a_{21}c_1+a_{22}c_2+\ldots+a_{2n}c_n=b_2$$
$$------$$
$$a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\ldots+a_{mn}c_n=b_m$$

B მატრიცის ბოლო სვეტს გამოვაკლოთ პირველი სვეტი, გამრავლებული c_1-ზე, შემდეგ გამოვაკლოთ მეორე სვეტი, გამრავლებული c_2-ზე და ა. შ. – წინა სვეტი, გამრავლებული c_n-ზე. ეს ოპერაციები არ ცვლის მატრიცის რანგს. შედეგად კი მიიღება მატრიცა

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

მისი რანგი კი ტოლია A მატრიცის რანგის, მაშასადამე, $r(A)=r(B)$.

ვთქვათ, ახლა $r(A)=r(B)=r$. მაშასადამე, A მატრიცაში არსებობს r რიგის მინორი, რომელიც არ უდრის ნულს და ყველა მასზე მაღალი რიგის მინორი ნულის ტოლია. იგივე r რიგის მინორი ნულისაგან განსხვავებულია B მატრიცაშიც და B მატრიცის ყველა $r+1$ რიგის მინორი ნულის ტოლია. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ r რიგის მინორი რომელიც ნულისგან განსხვავებულია B მატრიცის ზედა მარცხენა კუთხეშია. მატრიცის რანგის შესახებ ძირითადი თეორემის თანახმად, B მატრიცის პირველი r სტრიქონი წრფივად დამოუკიდებელია და ყველა სხვა სტრიქონი მათი წრფივი კომბინაცია. ამიტომ მოცემული სისტემა ტოლფასია პირველი r განტოლების – პირველი r განტოლების ყოველი ამონახსნი მოცემული სისტემის ამონახსნია და პირიქით.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა

1) $r=n$. მაშინ პირველი r განტოლება მიიღებს სახეს:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \ldots\ +a_{1r}x_r=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \ldots\ +a_{2r}x_r=b_2$$
$$-----$$
$$a_{r1}x_{q1}+a_{r2}x_2+\ \ldots\ +a_{rr}x_r=b_r$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს. კრამერის თეორემის თანახმად მას ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში მოცემულ სისტემის ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

2) $r<n$. ამ შემთხვევაში პირველი r განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \dots +a_{1r}x_2=b_1–a_{1r+1}x_{rr1} \dots –a_{1n}x_n$$

- - - - -

$$a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+ \dots +a_{r2}x_2=b_r-a_{rr+1}x_{r+1} \dots –a_{rn}x_n$$

x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n უცნობებს ვუწოდოთ თავისუფალი უცნობები. თუ მათ მივანიჭებთ რაიმე მნიშვნელობებს და სისტემის ამოვხსნით კრამერის წესით, მივიღებთ მოცემული სისტემის ამონახსნს.

თავისუფალ უცნობებს შეგვიძლია მივანიჭოთ ნებისმიერი მნიშვნელობები. ამრიგად, ამ შემთხვევაში სისტემა თავსებადია და აქვს უამრავი ამონახსნი (განუსაზღვრელია).

შედეგი. თუ n-უცნობიან n განტოლების სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ ის ან არათავსებადია, ან განუსაზღვრელია.

ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა.

ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა ეწოდება შემდეგ სისტემას:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \dots +a_{1n}x_n=0$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \dots +a_{2n}x_n=0$$

- - - - - -

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ \dots +a_{mn}x_n=0$$

ცხადია, ეს სისტემა თავსებადია, მას აკმაყოფილებს ნულოვანი ამონახსნი: (0. 0, ... 0). $x_1=0$, $x_2=0$, ... $x_n=0$ ჩასმის შემდეგ მიიღება ჭეშმარიტი ტოლობები. ამ ამონახსნისგან განსხვავებულ ამონახსნს ეწოდება არანულოვანი ამონახსნი.

თეორემა. იმისათვის, რომ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსნი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემის მატრიცის რანგი ნაკლები იყოს უცნობთა რიცხვზე.

ეს თეორემა კრონეკერ-კაპელის თეორემის შედეგია. კერძოდ, თუ სისტემა კვადრატულია, მაშინ არანულოვანი ამონახსნის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იქნება შესაბამისი მატრიცის დეტერმინანტის ნულთან ტოლობა.

თეორემა. თუ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის რანგი r ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე n-ზე, მაშინ არსებობს სისტემის n-r ამონახსნი, რომელიც წრფივად დემოუკიდებელია და მათი საშუალებით წრფივად გამოსახება ნებისმიერი ამონახსნი.

ამ $n–r$ ამონახსნს ეწოდება ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა.

დამტკიცება. ვთქვათ, სისტემის მატრიცის რანგი არის r და r რიგის მინორი, რომელიც ნულის ტოლი არ არის მარცხენა ზემო კუთხეშია. მაშინ სისტემა ტოლფასია პირველი r განტოლების:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1r}x_r=-a_{1r+1}x_{r+1}-\dots-a_{1n}x_n$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2r}x_r=-a_{2r+1}x_{r+1}-\dots-a_{2n}x_n$$
$$- - - - -$$
$$a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\dots+a_{rr}x_r=-a_{rr+1}x_{r+1}-\dots-a_{rn}x_n$$

აქ $x_{r+1}, x_{r+2+, \dots}, x_n$ თავისუფალი უცნობებია.

მივანიჭოთ მათ მნიშვნელობები:

$$x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=0, \dots x_n=0,$$
$$x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=1, \dots x_n=0,$$
$$- - - - -$$
$$x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=0, \dots x_n=1,$$

ამ მნიშვნელობებისგან შედგენილი დეტერმინანტი არის 1-ის ტოლი

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ეს დეტერმინანტი $n–r$ რიგის ნულისგან განსხვავებული დეტერმინანტია. ამ მნიშვნელობების ჩასმისა და სისტემის ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ $n–r$ ამონახსნს:

$$\vec{e_1}=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, 1,\ 0,\ \dots, 0)$$
$$\vec{e_2}=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, 0,\ 1,\ \dots, 0)$$
$$- - - -$$
$$\vec{e_4}=(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r, 0,\ 0,\ \dots, 1)$$

ცხადია, ეს ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია, რადგან შესაბამისი მატრიცის რანგი ($n–r$)-ის ტოლია. ახლა ავიღოთ, რაიმე ამონახსნი:

$$\vec{x}=(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r, \delta_{r+1}, \dots, \delta_n).$$

განვიხილოთ ვექტორი:

$$\vec{y}=\vec{x}-\delta_{r+1}\vec{e_1}-\delta_{r+2}\vec{e_2}-\dots-\delta_n\overrightarrow{e_{n-2}}=(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r, 0,\ 0,\ \dots,\ 0)$$

$(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r)$ ეს იქნება სისტემის ამონახსნი. მასში თავისუფალი უცნობების მნიშვნელობები ნულებია, ამიტომ $\rho_1=\rho_2=\dots=\rho_r=0$.

ე. ი. $\vec{x}$ არის $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_{n-r}}$ ვექტორების **წრფივი კომბინაცია**.

კავშირი ერთგვაროვან და შესაბამის არაერთგვაროვან სისტემებს შორის.

განვიხილოთ სისტემა:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ ...\ +a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ ...\ +a_{2n}x_n=b_1$$
$$------ \qquad (1)$$
$$a_1x_1+a_{m2}x_2+\ ...\ +a_{mn}x_n=b_m$$

ვთქვათ

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

მაშინ სისტემა ასე ჩაიწერება

$$A{\cdot}X=B \qquad (2)$$

(1) სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემა კი ასე ჩაიწერება

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ ...\ +a_{1n}x_n=0$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ ...\ +a_{2n}x_n=0$$
$$------ \qquad (3)$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ ...\ +a_{mn}x_n=0$$

მატრიცულად ეს სისტემა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$A{\cdot}X=0,\ \text{სადაც}\ 0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

თუ X_1 და X_2 (3)-ის, ანუ (4)-ის რაიმე ამონახსნებია, მაშინ, ცხადია, მათი წრფივი კომბინაციაც $\alpha X_1+\beta X_2$ ამონახსნია, რადგან $A(\alpha X_1+\beta X_2)=\alpha(AX_1)+\beta(AX_2)=0$

ამასთანავე, ვიცით, რომ, თუ A მატრიცის რანგი არის r, არსებობს $n-r$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი: $X_1, X_2, ... X_{n-r}$ და ნებისმიერი ამონახსნი მათი წრფივი კომბინაციას, ე. ი. (3)-ის ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება:

$$X=\alpha X_1+\beta X_2+\ ...\ \alpha_{n-r}X_{n-r}.$$

თუ X_0 არის (1)-ის რაიმე ამონახსნი, მაშინ ცხადია $X+X_0$ იქნება (1)-ს ამონახსნი და ნებისმიერი ამონახსნი ამ ფორმულით მოიცემა, ე. ი. არაერთგვაროვანის ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება.

$Y=X+X_0$, სადაც X არის შესაბამისი ერთგვაროვანის ნებისმიერი ამონახსნი, ხოლო X_0 არის არაერთგვაროვანის რაიმე ამონახსნი. მაშასადამე, არაერთგვაროვანის ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$Y=X_0+\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\ ...\ \alpha_{n-r}X_{n-r}.$$

სადაც $X_1, X_2, ... X_{n-r}$ არის ერთგვაროვანის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა.

ლექცია 16

წრფივი (ვექტორული) სივრცე.

ვთქვათ, V არაცარიელი სიმრავლეა, $\mathbf{R}$ – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. V-ს ელემენტებს ვუწოდოთ ვექტორები და ასე აღვნიშნოთ: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$... $\mathbf{R}$-ის ელემენტები რიცხვებია – α, β, γ....

ვთქვათ, განსაზღვრულია ასახვა: $V\times V \to V$, ე. ი. V-ს ვექტორთა ყოველ წყვილს $(\vec{x},\vec{y})$-ს შეესაბამება V-ს ელემენტი $\vec{z}$, მას ვუწოდოთ ვეტორთა ჯამი და მას ასე ჩავწერთ: $\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}$.

გარდა ამისა ვიხილავთ ასახვას: $\mathbf{R}\times V\to V$, რომელიც ყოველ $(\alpha, \vec{x})$ წყვილს შეუსაბამებს $\vec{z}$ ელემენტს და მას ვუწოდოთ $\alpha\vec{x}$ ნამრავლი: $\vec{z}=\alpha\vec{x}$.

ამასთანავე, ვთქვათ, შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$, $\vec{x}\in V$, $\vec{y}\in V$.

2) $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$

3) არსებობს V-ში ელემენტი $\vec{0}$, რომელსაც აქვს თვისება: $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$.

4) ყოველი $\vec{x}$-სთვის არსებობს V-ში ელემენტი $-\vec{x}$, ისეთი, რომ $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$.

5) $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

6) $\alpha(\beta\vec{x})=(\alpha\beta)\vec{x}$

7) $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

8) $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$

V სიმრავლეს, რომელშიც განსაზღვრულია შეკრების ოპერაცია და რიცხვზე გამრავლების ოპერაცია ისე, რომ ზემოთ ჩამოთვლილი 8 პირობა სრულდება, ეწოდება წრფივი სივრცე (ვექტორული) სივრცე.

შევნიშნოთ, რომ ამ თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს:

$-\vec{x}=(-1)\cdot\vec{x}$, $0\cdot\vec{x}=\vec{0}$, თუ $\alpha\cdot\vec{x}=\vec{0}$, მაშინ ან $\alpha=0$, ან $\vec{x}=\vec{0}$.

მაგალითი 1. ვთქვათ, M არის სივრცეში ვექტორების სიმრავლე, რომლებიც მიმართული მონაკვეთების საშუალებით განისაზღვრება. აქ გვაქვს შეკრება და რიცხვზე გამრავლება, ყველა 8 პირობა სრულდება, ეს სიმრავლე წრფივი სივრცეა.

მაგალითი 2. განვიხილოთ $m\cdot n$ მატრიცების სიმრავლე. ეს სიმრავლეც მათი შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების მიმრათ წრფივი სივრცეა.

მაგალითი 3. $\mathbf{R}^n$ სივრცე – $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ნამდვილი რიცხვთა n-ეულების სიმრავლე, რომელშიც მოქმედებები ასეა განსაზღვრული:

$$(x_1, x_2, ..., x_n)+(y_1, y_2, ..., y_n)= (x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n)=(\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

ნებისმიერი V წრფივ სივრცეში შეგვიძლია შემოვიღოთ წრფივად დამოუკიდებლობისა და წრფივად დამოკიდებულების ცნებები ისე, როგორც იყო $\mathbf{R}^n$-ში.

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ V ვექტორული სივრცე n-განზომილებიანია, თუ არსებობს n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი, ხოლო ნებისმიერი სისტემა n-ზე მეტი ვექტორისა წრფივად დამოკიდებულია.

თუ არსებობს n რიცხვი ისეთი, რომ V წრფივი სივრცე n-განზომილებიანა, მაშინ n-ს ეწოდება წრფივი სივრცის განზომილება, წინააღმდეგ შემთხვევაში, V-ს ეწოდება უსასრულო განზომილებიანი.

განსაზღვრება. n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ნებისმიერ n წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორს წრფივი სივრცის ბაზისი ეწოდება.

თეორემა. n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ნებისმიერი ვექტორი წრფივად გამოისახება ბაზისის ვექტორებით და ეს გამოსახვა ერადერთია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ არის n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ბაზისი. $\vec{x}$ ნებისმიერი ვექტორია. განსაზღვრების თანახმად, ყოველი n+1 ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი. $\vec{x}$, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ წრფივად დამოკიდებულ ვექტორთა სისტემაა, ამიტომ არსებობს რიცხვები α, α_1, α_2, ..., α_n, რომელთაგან ერთი მაინც $\neq 0$, რომ

$$\alpha\vec{x} + \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + ... + \alpha_n\vec{e_n} = \vec{0} \qquad (1)$$

ცხადია, $\alpha \neq 0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ წრფივად დამოკიდებული სისტემა იქნება. მაშასადამე, (1)-დან $\vec{x}$ გამოისახება წრფივად $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ ვექტორებით –

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + ... + \lambda_n\vec{e_n}.$$

თუ გარდა ამისა გვაქვს:

$$\vec{x} = \lambda_1'\vec{e_1} + \lambda_2'\vec{e_2} + ... + \lambda_n'\vec{e_n},$$

მაშინ

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \lambda_1')\vec{e_1} + (\lambda_2 - \lambda_2')\vec{e_2} + ... + (\lambda_n - \lambda_n')\vec{e_n}.$$

რადგან $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა, ამიტომ

$$\lambda_1 = \lambda_1', \; \lambda_2 = \lambda_2', \; ..., \; \lambda_n'.$$

$\vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + ... + \lambda_n\vec{e_n}$ გამოსახვაში, რომელიც, როგორც ვაჩვენეთ ერთადერთია, λ_1, λ_2, ..., λ_n რიცხვებს ეწოდება $\vec{x}$ ვექტორის კოორდინატები.

ჩვენ განვსაზღვრეთ წრფივი (ვექტორული) სივრცე **R** ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, R-ის ნაცვლად თუ ავიღებთ კომპლექსურ რიცხვთა C სიმრავლეს და

განვმარტავთ კომპლექსური რიცხვის ნამრავლს ვექტორზე ისე, რომ შესრულდეს ანალოგიური პირობები, მაშინ გვექნება კომპლექსური წრფივი სივრცე. ჩვენ ძირითადად განვიხილავთ ნამდვილ წრფივ სივრცეს.

ვექტორების შეკრების დროს კოორდინატები იკრიბება და რიცხვზე გამრავლებისას კოორდინატები მრავლდება რიცხვზე.

თუ $\vec{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\vec{y}=(y_1, y_2, ..., y_n)$,

მაშინ

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n),$$
$$\alpha\vec{x}=(\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

თეორემა. თუ V წრფივ სივრცეში $\vec{e_1}, \vec{e_2},...,\vec{e_n}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა და ყოველი ვექტორი მათი წრფივი კომბინაციაა, მაშინ $\vec{e_1}, \vec{e_2},...,\vec{e_n}$ ბაზისია.

დამტკიცება. $\vec{e_1}, \vec{e_2},...,\vec{e_n}$ წრფივად დამოუკიდებელია. დასამტკიცებელია მხოლოდ, რომ n-ზე მეტი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია. ვთქვათ, $\vec{a_1}, \vec{a_2},...,\vec{a_m}$ ვექტორები V სივრცის ელემენტებია და $m>n$. პირობის თანახმად,

$$\vec{a_1}=\alpha_{11}\vec{e_1}+\alpha_{21}\vec{e_2}+...+\alpha_{n1}\vec{e_n}$$
$$\vec{a_2}=\alpha_{12}\vec{e_1}+\alpha_{22}\vec{e_2}+...+\alpha_{n2}\vec{e_n}$$

- - - - - - -

$$\vec{a_m}=\alpha_{1m}\vec{e_1}+\alpha_{2m}\vec{e_2}+...+\alpha_{nm}\vec{e_n}\,.$$

განვიხილოთ მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{2m} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n1} & ... & \alpha_{nm} \end{pmatrix}_{n\cdot m}$$

რადგან $n<m$, ამიტომ, ცხადია, ამ მატრიცის რანგი $r(A)\le n<m$. ამიტომ მატრიცის სვეტები წრფივად დამოკიდებულია. მათ შორის შეიძლება იყოს სულ დიდი n წრფივად დამოუკიდებელი სვეტი. ე. ი. ერთ-ერთი სვეტი არის სხვა სვეტების წრფივი კომბინაცია. ამიტომ $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_m}$ ვექტორებიდან ერთ-ერთი სხვა ვექტორების წრფივი კომბინაციაა. მაშასადამე, $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_m}$ წრფივად დამოკიდებულ ვექტორთა სისტემაა.

თეორემა R^n სივრცის განზომილების შესახებ. R^n სივრცის განზომილება n-ის ტოლია.

დამტკიცება. განვიხილოთ ვექტორები:

$$\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n},$$

სადაც $\vec{e_1}$ =(1, 0, ..., 0); $\vec{e_2}$ =(0, 1, ..., 0); ... ; $\vec{e_n}$ =(0, 0, ..., 1).

ეს სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია –

$\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}+...+\lambda_n\vec{e_n}=\vec{0}$ მხოლოდ მაშინ, როცა $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$, რადგან ეს ვექტორი არის: $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$.

მეორეს მხრივ, ყოველი ვექტორი $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ მათი წრფივი კომბნაციაა, რადგან $\vec{a}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+...+\alpha_n\vec{e_n}$.

თეორემა (ბაზისამდე შევსება). V წრფივ სივრცეში ყოველი წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა შეიძლება შევავსოთ ბაზისამდე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_k}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა. თუ V სივრცის ყველა ვექტორი მათი წრფივი კომბინაციაა, მაშინ ეს ყოფილა ბაზისი და k განზომილებაა. წინააღმდეგ შემთხვევაში, V-ში არსებობს $\overrightarrow{e_{k+1}}$ ვექტორი, რომელიც წრფივად არ გამოისახება $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_k}$ ვექტორებით. მაშინ $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_k}$, $\overrightarrow{e_{k+1}}$ იქნება წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა. თუ V-ს ყველა ვექტორი ამ ვექტორებით წრფივად გამოისახება, მაშინ ეს სისტემა ბაზისია, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ავაგებთ $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_k}$, $\overrightarrow{e_{k+1}}$, $\overrightarrow{e_{k+2}}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემას. ვექტორების დამატება არ შეიძლება გაგრძელდეს უსასრულოდ, თუ V სასრულ-განზომილებიანია. ამიტომ აუცილებლად მივიღებთ $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ ვექტორებს, რომლებიც წრფივად დამოუკიდებელია და ყველა ვექტორი მათი საშუალებით წრფივად გამოისახება. ე. ი. ეს სისტემა ბაზისია და შეიცავს ვექტორებს $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_k}$.

ვექტორულ სივრცეთა იზომორფიზმი.

განსაზღვრება. ვთქვათ, V ვექტორული სივრცეა. V' არის მეორე ვექტორული სივრცე. ვიტყვით, რომ იზომორფულია V^1-ის თუ არსებობს ურთიერთცალსახა f ასახვა:

f:$V\rightarrow V'$ ისეთი, რომ

1) $f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$ და 2) $f(\alpha\vec{x})=\alpha f(\vec{x})$, ყველა $\vec{x}\in V$ და $\vec{y}\in V$ ვექტორებისთვის.

ცხადია, თუ V იზომორფულია V' წრფივი სივრცის, მაშინ V' იზომორფულია V სივრცის და

1) $f^{-1}(\vec{x'}+\vec{y'})=f^{-1}(\vec{x'})+f^{-1}(\vec{y'})$,

2) $f^{-1}(\alpha\vec{x'})=\alpha f^{-1}(\vec{x'})$, ყოველი $\vec{x'},\vec{y'}$ ვექტორებისთვის V' სივრციდან. აქ f^{-1} არის f-ის შექცეული ასახვა (f^{-1} არსებობს, რადგან f ბიექციაა).

თეორემა იზომორფიზმის შესახებ. M ვექტორული სივრცე იზომორფულია M^1-ის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა M და M'-ის განზომილებები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ, n არის M და M'-ის განზომილებები. მათი ბაზისები იყოს: $\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n}$ და $\vec{e'_1},\vec{e'_2},\ldots,\vec{e'_n}$.

ვთქვათ, $\vec{x}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}+\ldots+\lambda_n\vec{e_n}\in M$

განვიხილოთ ასახვა:

$$\vec{x}\to\vec{x'},\ \text{სადაც}\ \vec{x'}=\lambda_1\vec{e'_1}+\lambda_2\vec{e'_2}+\ldots+\lambda_n\vec{e'_n}.$$

ცხადია,

$$f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y}),$$

$$f(\alpha\vec{x})=\alpha f(\vec{x}),$$ ე. ი. M იზომორფულია M'-ის.

ახლა, ვთქვათ M იზომორფულია M'-ის. ვაჩვენოთ, რომ მაშინ მათი განზომილებები ტოლია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, M-ის განზომილებაა n, M'-ის – m და $m\neq n$. შევნიშნოთ, რომ M-ის ნულოვან ვექტორს შეესაბამება M'-ის ნულოვანი ვექტორი, რადგან

$$f(\vec{x}+\vec{0})=f(\vec{x})+f(\vec{0})=f(\vec{x}),\ \text{ე. ი.}\ f(\vec{0})=\vec{0''}.$$

გარდა ამისა, ცხადია,

$$f(\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2}+\ldots+\lambda_k\vec{x_k})=\lambda_1 f(\vec{x_1})+\lambda_2 f(\vec{x_2})+\ldots+\lambda_k f(\vec{x_k})).$$

თუ $\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n}$ ბაზისია M-ში, მაშინ, თუ $k>n$, $\vec{x_1},\vec{x_2},\ldots,\vec{x_k}$ წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი. არსებობს $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$, რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს, რომ გვაქვს

$$\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2}+\ldots+\lambda_k\vec{x_k}=\vec{0}$$

აქედან

$$\lambda_1 f(\vec{x_1})+\lambda_2 f(\vec{x_2})+\ldots+\lambda_k f(\vec{x_k}))=f(\vec{0})=\vec{0}\in V'.$$

ე. ი. $f(\vec{x_1}),f(\vec{x_2}),\ldots,f(\vec{x_k})$ წრფივად დამოკიდებულია M'-ში. ამიტომ M'-ის განზომილება $m\leq n$. ანალოგიურად მივიღებთ: $n\leq m$. ე. ი. $n=m$.

ლექცია 17

ახალ ბაზისზე გადასვლა

ყველა წრფივი სივრცე, რომლის განზომილება არის n, იზომორფულია R^n-ის. ამიტომ შეიძლება ეს სივრცე განვიხილოთ. ყველა თეორემა იზომორფიზმის გამო გადაიტანება ნებისმიერ სხვა სივრცეზე, რომელიც იმავე განზომილებისაა.

ვთქვათ, $\mathbf{R}^n$-ში გვაქვს ორი ბაზისი: $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ და $\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, ..., \vec{e'_n}$. პირველ ბაზისს პირობითად ვუწოდოთ ძველი ბაზისი, მეორეს ახალი ბაზისი. ცხადია, მეორე ბაზისის ყოველი ვექტორი წრფივად გამოისახება ძველი ბაზისის ვექტორებით და პირიქით.

$$\vec{e'_1} = a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + ... + a_{n1}\vec{e_n}$$
$$\vec{e'_1} = a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + ... + a_{n1}\vec{e_n}$$
$$- - - - - -$$
$$\vec{e'_1} = a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + ... + a_{n1}\vec{e_n}\,.$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

A მატრიცას ეწოდება ახალ ბაზისაზე გადასვლის მატრიცა, მისი სვეტები ახალი ბაზისის ვექტორების კოორდინატებია. ცხადია, სვეტები წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ A მატრიცა არაგადაგვარებული მატრიცაა, არსებობს A^{-1} მატრიცა, რომლითაც ძველი ბაზისი გამოისახება ახლით.

ავიღოთ ნებისმიერი $\vec{x}$ ვექტორი. ვთქვათ,

$\vec{x} = (x_1, x_2, ... , x_n)$, ანუ

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + ... + x_n\vec{e_n} \qquad (1)$$

გარდა ამისა, ვთქვათ,

$$\vec{x} = x'_1\vec{e'_1} + x'_2\vec{e'_2} + ... + x'_n\vec{e'_n} \qquad (2)$$

გავითვალისწინოთ ახალ ბაზისზე გადასვლის ფორმულები. მივიღებთ:

$$\vec{x} = x'_1(\alpha_{11}\vec{e_1} + \alpha_{21}\vec{e_2} + ... + \alpha_{n1}\vec{e_n}) + x'_2(\alpha_{12}\vec{e_1} + \alpha_{22}\vec{e_2} + ... + \alpha_{n2}\vec{e_n}) + ... + x'_n(\alpha_{1n}\vec{e_1} + \alpha_{2n}\vec{e_2} + ... + \alpha_{nn}\vec{e_n}) =$$
$$= (\alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + ... + \alpha_{1n}x'_n)\vec{e_1} + (\alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + ... + \alpha_{2n}x'_n)\vec{e_2} + ... + (\alpha_{n1}x'_1 + \alpha_{n2}x'_2 + ... + \alpha_{nn}x'_n)\vec{e_n}\,. \qquad (3)$$

(1) და (3)-ის გამო გვაქვს კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები:

$$x_1=\alpha_{11}x'_1+\alpha_{12}x'_2+...+\alpha_{1n}x'_n$$
$$x_2=\alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2+...+\alpha_{2n}x'_n$$
$$......$$
$$x_n=\alpha_{n1}x'_1+\alpha_{n2}x'_2+...+\alpha_{nn}x'_n$$

მატრიცულად ეს ასე ჩაიწერება:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}$$

მაგალითი. ვთქვათ, $\vec{i}$, $\vec{j}$ სიბრტყეზე საკოორდინრატო ღერძების ორტებია, მაშიან $\vec{i}$, $\vec{j}$ ბაზისია.

თუ კოორდინატთა ღერძებს მოვაბრუნებთ α კუთხით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ ახალი ღერძების ორტები $\vec{i'}$, $\vec{j'}$ აგრეთვე იქნება სიბრტყეზე ვექტორთა წრფივი სივრცის ბაზისი.

$\vec{i'}$ ადგენს α კუთხეს $\vec{i}$ ვექტორთან, ხოლო $\vec{j}$ ვექტორთან – $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ან $\alpha-\frac{\pi}{2}$ კუთხეს. ამიტომ $\vec{i'}$-ის კოორდინატები ძველ ბაზისში იქნება: cosα და sinα ($\alpha-\frac{\pi}{2}$). ე. ი. cosα და sinα, $\vec{i'}$ =cosα$\vec{i}$ +sinα $\vec{j}$. $\vec{j'}$-ის კოორდინატები იქნება cos($\frac{\pi}{2}+\alpha$) და sin($\frac{\pi}{2}+\alpha$)=cosα, ანუ –*sin*α და *cos*α.

$$\vec{j'}=-\sin\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{j}.$$

ე. ი.

$$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

მაშასადამე, გვექნება კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{ანუ} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

ევკლიდური სივრცე

ვთქვათ, V არის წრფივი სივრცე (ნამდვილი წრფივი სივრცე). შემოვიღოთ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი; ყოველ $\vec{x}$ და $\vec{y}$ ვექტორს შევუსაბამოთ რიცხვი $(\vec{x}, \vec{y})$ ისე, რომ ყოველი λ რიცხვისთვის შესრულდეს პირობები:

1) $(\vec{x}, \vec{y})=(\vec{y}, \vec{x})$

2) $(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z})=(\vec{x}, \vec{z})+(\vec{y}, \vec{z})$

3) $(\lambda\vec{x}, \vec{y})=\lambda(\vec{x}, \vec{y})$

4) $(\vec{x}, \vec{x})\geq 0$, ამასთანავე ეს რიცხვი ნულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vec{x}=0$.

ამ ოპერაციას ეწოდება ვექტორების სკალარული გამრავლება; $(\vec{x}, \vec{y})$-ს ეწოდება სკალარული ნამრავლი.

$(\vec{x}, \vec{x})$-ს ეწოდება $\vec{x}$ ვექტორის სკალარული კვადრატი და ასე ჩაიწერება $\vec{x}^2$.

შევნიშნოთ, რომ

$$(\vec{0}, \vec{y})=(0\cdot\vec{x}, \vec{y})=0\cdot(\vec{x}, \vec{y})=0.$$

ევკლიდური სივრცე ეწოდება წრფივ სივრცეს, რომელზეც შემოღებულია სკალარული გამრავლება.

წრფივი სივრცის ბაზისს ეწოდება შესაბამისი ევკლიდური სივრცის ბაზისი.

მაგალითი 1. ვთქვათ, M არის სამგანზომილებიანი სივრცის ვექტორთა სიმრავლე. აქ განსაზღვრული სკალარული ნამრავლი აკმაყოფილებს ოთხივე პირობას. M ევკლიდური სივრცეა.

მაგალითი 2. $\mathbf{R}^n$-ში შემოვიღოთ სკალარული გამრავლება შემდეგნაირად:

თუ $\vec{x}=(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\vec{y}=(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, $(\vec{x}, \vec{y})=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_n\beta_n)$,

მაშინ $\mathbf{R}^n$ იქნება, ევკლიდური სივრცე.

ორ E და E' ევკლიდურ სივრცეებს ეწოდება იზომორფული, თუ შესაბამისი წრფივი სივრცეები იზომორფულია და $(\vec{x}, \vec{y})=(f(x), f(y))$, სადაც f არის ასახვა: $f{:}E\to E'$.

ვექტორის სიგრძე ევკლიდურ სივრცეში ასე განიმარტება:

$$\left|\vec{x}\right|=\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}.$$

ცხადია, $\left|\vec{x}\right|=0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vec{x}=\vec{0}$.

$$\left|\lambda\vec{x}\right|=|\lambda|\cdot\left|\vec{x}\right|.$$

ამასთანავე, $$\left|(\vec{x}, \vec{y})\right|\leq\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right| \qquad (1)$$

და $$\left|(\vec{x}+\vec{y})\right|\leq\left|\vec{x}\right|+\left|\vec{y}\right|. \qquad (2)$$

დავამტკიცოთ (1).

განვიხილოთ ნებისმიერი t რიცხვისთვის

$(\vec{x}-t\vec{y};\, \vec{x}-t\vec{y})$, ცხადია,

$(\vec{x}-t\vec{y};\, \vec{x}-t\vec{y}) \geq 0$, ნებისმიერი t რიცხვისთვის.

სკალარული ნამრავლის თვისებების შესაბამისად გვაქვს:

$$(\vec{x},\, \vec{x}) - 2t\vec{x}(\vec{x},\, \vec{y}) + t^2(\vec{y},\, \vec{y}) \geq 0$$

რადგან კვადრატული სამწევრი ნებისმიერი t-სთვის ≥0, ამიტომ მისი დისკრიმინანტი (დისკრიმინანტის მეოთხედი) ნაკლებია ან ტოლია ნულის.

$$(\vec{x},\, \vec{y})^2 - (\vec{x},\, \vec{x})(\vec{y},\, \vec{y}) \leq 0$$

ანუ $\left|(\vec{x},\, \vec{y})\right| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$.

ახლა (2) დავამტკიცოთ:

$$\left|\vec{x}+\vec{y}\right|^2 = (\vec{x}+\vec{y},\, \vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + 2(\vec{x},\, \vec{y}),$$

მაგრამ

$$\left(|\vec{x}|+|\vec{y}|\right)^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|.$$

$$(\vec{x},\, \vec{y}) \leq |\vec{x}||\vec{y}|.$$

ე. ი. $\left|\vec{x}+\vec{y}\right|^2 \leq (|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2, \quad |\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}|+|\vec{y}|.$

ვექტორებს შორის კუთხე უკვე შეგვიძლია ამ ტოლობით შემოვიღოთ

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x}\,\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}.$$

ორ ვექტორს ეწოდება ორთოგონალური, თუ მათი სკალარული ნამრავლი ნულია.

ᲝᲠᲗᲝᲜᲝᲠᲛᲘᲠᲔᲑᲣᲚᲘ ᲑᲐᲖᲘᲡᲘ

$\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება ორთოგონალური, თუ ვექტორები წყვილ-წყვილად ორთოგონალურია.

თეორემა. ორთოგონალურ არანულოვან ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ ორთოგონალურ არანულოვან ვექტორთა სისტემაა. დავუშვათ ეს სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ არსებობს რიცხვები $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, რომელთაგან ერთი მაინც არ არის ნული, რომ

$$\lambda_1\vec{x_1} + \lambda_2\vec{x_2} + \dots + \lambda_n\vec{x_n} = 0.$$

ვთქვათ, $\lambda_1 \neq 0$, გავამრავლოთ სკალარულად ორივე მხარე $\overrightarrow{x_1}$-ზე.

მივიღებთ

$$\lambda_1 |\overrightarrow{x_1}| = \vec{0},$$ რადგან $\lambda_1 \neq 0$, ამიტომ $\overrightarrow{x_1} = \vec{0}$, მივიღეთ წინააღმდეგობა,

$\vec{x}$ ვექტორს ეწოდება ერთეულოვანი, თუ $|\vec{x}| = 1$.

თუ $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ ორთოგონალურია და თითოეული ვექტორი ერთეულოვანია, მაშინ ამ სისტემას ეწოდება **ორთონორმირებული სისტემა**.

თეორემა. ყოველ ევკლიდურ სივრცეში არსებობს ორთონორმირებული ბაზისი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \ldots, \overrightarrow{g_n}$ ბაზისია. ავაგოთ ორთოგონალური სისტემა შემდეგნაირად:

$$\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{g_1},$$

$$\overrightarrow{f_2} = g_2 + \lambda_1 \overrightarrow{g_1}$$ და λ_1 ისე შევარჩიოთ, რომ $(\overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_1}) = 0$, ანუ

$$(\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2} + \lambda \overrightarrow{g_1}) = 0$$

ანუ $$(g_1, g_2) + \lambda_1 (\overrightarrow{g_1} \cdot \overrightarrow{g_2}) = 0.$$

რადგან $\overrightarrow{g_1} \neq \vec{0}$, აქედან λ_1 განისაზღვრება.

f_3 ასე შევარჩიოთ:

$$\overrightarrow{f_3} = g_3 + \lambda_1 \overrightarrow{f_1} + \lambda_2 \overrightarrow{f_2},$$ და λ_1 და λ_2 ისე შევარჩიოთ, რომ

$$(\overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{f_1}) = 0$$ და $$(\overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{f_2}) = 0.$$

ამასაც მივაღწევთ.

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, ავაგებთ $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_n}$ ორთოგონალურ სისტემას, რომელიც წრფივად დამოუკიდებელიც იქნება. აქედან მიიღება ორთონორმირებული სისტემა:

$$\frac{\overrightarrow{f_1}}{|\overrightarrow{f_1}|}, \frac{\overrightarrow{f_2}}{|\overrightarrow{f_2}|}, \ldots, \frac{\overrightarrow{f_n}}{|\overrightarrow{f_n}|}.$$

სკალარული ნამრავლის გამოსახვა ორთონორმირებულ ბაზისში.

ვთქვათ,
$$\vec{x} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{e_n},$$
$$\vec{y} = \beta_1 \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \overrightarrow{e_2} + \ldots + \beta_n \overrightarrow{e_n},$$

სადაც $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ ორთონორმირებული ბაზისია, მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \ldots + \alpha_n \beta_n.$$

ლექცია 18

აფინური სივრცე

ვთქვათ, მოცემულია V წრფივი სივრცე და A სიმრავლე, რომლის ელემენტებს ვუწოდოთ წერტილები. ვთქვათ, შესრულებულია პირობები.

1) ყოველ ორ M და N წერტილებს A-დან შეესაბამება ვექტორი $\vec{x} \in V$. ჩავწერთ ასე: $\vec{x} = \overrightarrow{MN}$.

2) ყოველი M წერტილისა და $\vec{x} \in V$ ვექტორისთვის არსებობს ერთადერთი N წერტილი, რომ

$$\overrightarrow{MN} = \vec{x}.$$

3) ყოველი სამი M, N, P წერტილებისთვის

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}.$$

მაშინ A სიმრავლეს ვუწოდოთ აფინური სივრცე, რომელიც V წრფივ სივრცეს შეესაბამება. თუ V n-განზომილებიანია, მაშინ A-ს ეწოდება ***n*-განზომილებიანი აფინური სივრცე**.

ვთქვათ, A აფინურ სივრცეში ავიღეთ O წერტილი. მაშინ ყოველ M წერტილს შეესაბამება ვექტორი: $\vec{x} = \overrightarrow{OM} \in A$. ამ ვექტორს ვუწოდოთ **რადიუს-ვექტორი**.

შევნიშნოთ, რომ ყოველ წყვილს, რომელიც ერთი და იმავე წერტილებისგან შედგება შეესაბამება ნულოვანი ვექტორი:

$$\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{NN} = ... = \vec{0},$$

მართლაც,

$$\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN}, \text{ აქედან } \overrightarrow{MM} = \vec{0}.$$

კოორტინატთა სისტემა ეწოდება წერტილისა და ბაზისის ერთობლიობას: $(0, \ \vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n})$ არის კოორდინატთა სისტემა აფინურ სივრცეში. M წერტილის კოორდინატები ვუწოდოთ მისი რადიუს-ვექტორის კოორდინატებს, ე. ი. თუ

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + ... + x_n\vec{e_n}, \text{ მაშინ}$$

ვწერთ: $M=(x_1, x_2 ... x_n)$.

თუ $M=(x_1, x_2 ... x_n), N=(y_1, y_2 ... y_n)$

მაშინ $\overrightarrow{MN} = (y_1 - x_1, \ y_2 - x_2, \ ..., \ y_n - x_n).$

მართლაც

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \text{ (რადგან } \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}\text{)}.$$

აქედან

$\overrightarrow{MN}$-ის კოორდინატებია $y_1 – x_1, y_2 – x_2, ..., y_n – x_n$.

კოორდინატთა სისტემას ეწოდება მართკუთხა, თუ ბაზისი ორთონორმირებული ბაზისია.

ვთქვათ, გვაქვს ორი სისტემა:

$$(0, \vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}) \text{ და } (0', \vec{e'_1}, \vec{e'_2}, ..., \vec{e'_n}).$$

A იყოს $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ ბაზისიდან ახალ ბაზისზე – $\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, ..., \vec{e'_n}$ გადასვლის მატრიცა.

ვთქვათ, $O'=(h_1, h_2, ... h_3)$

თუ $\overrightarrow{O'M}$ -ის კოორდინატები $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ ბაზისში არის $(y_1, y_2, ... y_n)$, მაშინ გვაქვს

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}.$$

აქედან
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ ... \\ h_4 \end{pmatrix}.$$

მეორეს მხრივ ახალ ბაზისზე გადასვლის ფორმულების თანახმად,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_4 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_4 \end{pmatrix}$$

საბოლოოდ გვაქვს კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_4 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ ... \\ h_4 \end{pmatrix}.$$

კერძოდ, თუ $\vec{e'_1} = \vec{e_1}, \vec{e'_2} = \vec{e_2}, ..., \vec{e'_n} = \vec{e_n}$, მაშინ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ ... \\ h_4 \end{pmatrix}$$

ამ ფორმულებს ეწოდება კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები პარალელური გადატანისას.

წრფივი გარდაქმნა

ვთქვათ, V წრფივი სივრცეა. განვიხილოთ ასახვა $f{:}V \to V$, თუ $\vec{y} = f(\vec{x})$, მაშინ $\vec{y}$ არის $\vec{x}$-ის სახე. $\vec{x}$ არის $\vec{y}$-ის წინა სახე.

ვიტყვით, რომ f ასახვა არის წრფივი ასახვა, თუ სრულდება პირობები:

1) $f(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) = f(\overrightarrow{x_1}) + f(\overrightarrow{x_2})$

2) $f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}),$$ α და β ნებისმიერი რიცხვებია.

წრფივი ასახვისას: $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

რადგან $f(\vec{0}) = f(\vec{x} - \vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}$.

წრფივი ასახვის მატრიცა

ვთქვათ, f წრფივი ასახვაა და ცნობილია, რომ

$$f(\overrightarrow{e_1}) = \alpha_{11}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{21}\overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_{n1}\overrightarrow{e_n}$$

$$f(\overrightarrow{e_2}) = \alpha_{11}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{21}\overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_{n1}\overrightarrow{e_n}$$

- - - - - -

$$f(\overrightarrow{e_n}) = \alpha_{11}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{21}\overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_{n1}\overrightarrow{e_n}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება f წრფივი ასახვის მატრიცა, მისი სვეტები არის $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n})$-ის კოორდინატები.

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი $\vec{x}$ ვექტორი და ვთქვათ, $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n}$.

რადგან $f(\vec{x}) \in V$, ამიტომ $f(\vec{x}) = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + y_n\overrightarrow{e_n}$, მეორეს მხრივ

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \ldots + x_n f(\overrightarrow{e_n}) =$$

$$= x_1(\alpha_{11}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{21}\overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_{n1}\overrightarrow{e_n}) + x_2(\alpha_{12}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{22}\overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_{n2}\overrightarrow{e_n}) + \ldots + x_n'(\alpha_{1n}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{2n}\overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_{nn}\overrightarrow{e_n}) =$$

$$= (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n)\overrightarrow{e_2} + \ldots + (\alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n)\overrightarrow{e_n}.$$

მაშასადამე,

$$y_1=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ ...\ \alpha_{1n}x_n$$
$$y_1=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ ...\ \alpha_{2n}x_n$$
$$- \ - \ - \ -$$
$$y_n=\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ ...\ \alpha_{nn}x_n$$

მატრიცულად $Y=AX$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_4 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_4 \end{pmatrix}$.

ასეც ვწერთ: თუ $\vec{y}=f(\vec{x})$, f წრფივი ასახვაა A მატრიცით, მაშინ

$$\vec{y}=A\cdot\vec{x}.$$

ერთი და იმავე ასახვის მატრიცებს შორის კავშირი სხვადასხვაა ბაზისებში.

თეორემა. თუ

$$\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ ...,\vec{e_n} \qquad (1)$$

და

$$\vec{e_1'},\ \vec{e_2'},\ ...,\vec{e_n'} \qquad (2)$$

ორი ბაზისია V წრფივი სივრცის და A არის f ასახვის მატრიცა (1) ბაზისში. მაშინ მატრიცა მეორე ბაზისში მოიცემა ფორმულით:

$$\boldsymbol{B=T^{-1}AT}\ , \qquad (3)$$

სადაც T არის (1) ბაზისიდან (2)-ზე გადასვლის მატრიცა.

დამტკიცება: ვთქვათ, $\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ (1) ბაზისში და $\vec{x}=(x_1',\ x_2',\ ...,\ x_n')$ მეორე ბაზისში.

$\vec{y}=f(\vec{x})=(y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n)$ (1) ბაზისში და

$\vec{y}=f(\vec{x})=(y_1',\ y_2',\ ...,\ y_n')$ (2) ბაზისში.

მაშინ

$$X=TX' \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_4 \end{pmatrix},\ X'=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_4' \end{pmatrix} \qquad (4)$$

$$Y=TY' \qquad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_4 \end{pmatrix},\ Y'=\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ ... \\ y_4' \end{pmatrix} \qquad (5)$$

გარდა ამისა, ვიცით, რომ

$$Y=AX$$

$$Y'=BX'$$

(4)-დან $AX=ATX'$, ანუ

$$TY'=Y=AX=ATX'$$

აქედან $\boldsymbol{Y'=(T^{-1}AT)Y'}$, მივიღეთ: $\boldsymbol{B=T^{-1}AT}$.

ლექცია 19

წრფივი ასახვის მახასიათებელი განტოლება

თეორემა. თუ f წრფივი ასახვის მატრიცა

$$\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$$

ბაზისში არის A, ხოლო $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, ..., \vec{e_n'}$ ბაზიში არის B. მაშინ

$$\det(A-\lambda E)=\det(B-\lambda E),$$

სადაც λ ნებისმიერი რიცხვია, E ერთეულოვანი მატრიცაა; ანუ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, T არის პირველი ბაზისიდან მეორეზე გადასვლის მატრიცა, მაშინ, როგორც ვიცით, $B=T^{-1}AT$.

მაშასადამე,

$\det(B-\lambda E)= \det(T^{-1}AT-\lambda E)=\det(T^{-1}AT-\lambda T^{-1}ET)=\det(T^{-1}AT-\lambda T^{-1}ET)=\det(T^{-1}(A-\lambda E)T)=$

$=\det T^{-1}\det(A-\lambda E)\det T=\det(A-\lambda E)$, რადგან $T\cdot T^{-1}=E$.

ცხადია, $\det(A-\lambda E)$ არის n ხარისხის მრავალწევრი. ამ მრავალწევრს ჰქვია წრფივი ასახვის მახასიათებელი მრავალწევრი, ხოლო განტოლებას

$$\det(A-\lambda E)=0$$

ჰქვია წრფივი ასახვის მახასიათებელი განტოლება. მას ეწოდება აგრეთვე A მატრიცის მახასიათებელი განტოლება.

წრფივ ასახვათა ნამრავლი

ვთქვათ, f წრფივი ასახვაა და $\vec{y}=f(\vec{x})$. g მეორე ასახვაა და $\vec{z}=g(\vec{y})$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $\vec{z}$ მიიღება $\vec{x}$-სგან f და g ასახვების მიმდევრობით ჩატარებით. ამ ახალ ასახვას ჰქვია f და g-ს ნამრავლი. და ასე ჩაიწერება $g\circ f$. ე. ი. $g\circ f(\vec{x})=g(f(\vec{x}))$.

თეორემა: წრფივ ასახვათა ნამრავლი წრფივი ასახვაა.
თუ f-ის მატრიცა არის A, g-ს მატრიცა არის B, მაშინ $g\circ f$-ის მატრიცა არის $B{\cdot}A$.

დამტკიცება. ნებისმიერი $\vec{x_1}$ და $\vec{x_2}$ ვექტორისთვის

$$g\circ f(\alpha\vec{x_1}+\beta\vec{x_2})=g(f(\alpha\vec{x_1}+\beta\vec{x_2})),$$

$$g(\alpha\vec{x_1}+\beta\vec{x_2})=\alpha g(\vec{x_1})+\beta g(\vec{x_2}),$$

რადგან f და g წრფივი ასახვებია.
მაშინ გვექნება:

$$(g\circ f)(\alpha\vec{x_1}+\beta\vec{x_2})=g(f(\alpha\vec{x_1}+\beta\vec{x_2}))=g(\alpha f(\vec{x_1})+\beta f(\vec{x_2}))=$$

$$=(\alpha g\circ f)(\vec{x_1})+(\beta g\circ f)(\vec{x_2})$$

ვთქვათ, $\vec{y}=f(\vec{x})$, $\vec{z}=f(\vec{y})$.

$$\vec{z}=g\circ f(\vec{x}),$$

მაშინ $Y=AX$, $Z=BY$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_4\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\dots\\y_4\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\dots\\z_4\end{pmatrix}.$$

C იყოს $g\circ f$ -ის მატრიცა, მაშინ

$$Z=CX.$$

მაშინ გვაქვს:

$$Z=BY=(BA)X$$

ე. ი. $C=BA$.

წრფივი ასახვების ჯამი

f და g ასახვების ჯამი ეწოდება ისეთ h ასახვას, რომელიც ასე განიმარტება:

$$h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}).$$

თეორემა. h ასახვაც წრფივი ასახვაა, თუ f და g წრფივი ასახვებია, h-ის მატრიცა C არის A და B მატრიცების ჯამი, სადაც A არის f-ის მატრიცა, B არის g-ს მატრიცა.

დამტკიცება: $h(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha h(\vec{x}) + \beta h(\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{y})$.

ვთქვათ, $\vec{y} = f(\vec{x})$, $\vec{z} = f(\vec{y})$, ახლა გავიხსენოთ, რომ, თუ f-ის მატრიცა არის A, მაშინ

$$Y=A\cdot X,$$

თუ g-ს მატრიცა არის B, მაშინ

$$Z=BX$$

$$Y+Z=CX,\ Y+Z=(A+B)X.$$

ე. ი. $C=A+B$.

არაგადაგვარებული წრფივი ასახვა ეწოდება წრფივ ასახვას, რომლის მატრიცა არაგადაგვარებულია. ყოველი არაგადაგვარებული წრფივი ასახვა ბიექციაა (ურთიერთცალსახა ასახვაა).

მართლაც, ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $\vec{y}$ ვექტორისთვის არსებობს ერთადერთი $\vec{x}$ ისეთი, რომ $f(\vec{x}) = \vec{y}$, ანუ

$$Y=AX.$$

თუ ამ ტოლობას განვიხილავთ როგორც n-უცნობიან განტოლებათა სისტემას, მაშინ მისი A მატრიცა არაგადაგვარებულია, ამიტომ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

იმისათვის, რომ წრფივი ასახვა იყოს არაგადაგვარებული აუცილებელია და საკმარისი, რომ არანულოვანი ვექტორის სახე იყოს არანულოვანი ვექტორი.

აუცილებლობა. ვთქვათ, f არაგადაგვარებულია. ყოველ წრფივ ასახვას ნულოვანი ვექტორი გადაჰყავს ნულოვანში. მაგრამ f ურთიერთცალსახაა, ამიტომ არანულოვანი გადადის არანულოვანში.

საკმარისია. ვთქვათ, f წრფივ ასახვას ყოველი არანულოვანი ვექტორი გადაჰყავს არანულოვანში. დავუშვათ საწინააღმდეგო – f არ არის არაგადაგვარებული, ე. ი. $\det A=0$, მაშინ სისტემას $AX=0$ აქვს არანულოვანი ამონახსნი. ე. ი. $(x_1, x_2, \dots x_n)$ არანულოვანი ვექტორი გადადის ნულოვანში.

ცხადია, არაგადაგვარებული წრფივი ასახვების ნამრავლი არაგადაგვარებულია, რადგან გამრავლებისას მატრიცები მრავლდება და არაგადაგვარებული მატრიცების ნამრავლი, ცხადია, არაგადაგვარებულია.

წრფივი ასახვის შებრუნებული ასახვა.

f ასახვას შებრუნებული უწოდება ისეთ φ ასახვას, რომლისთვისაც

$$f \circ \varphi(\vec{x}) = \varphi \circ f(\vec{x}) = \vec{x}$$

ე. ი. $f \circ \varphi$ და $\varphi \circ f$ იგივური ასახვებია.

ამ ტოლობიდან გამოდის, რომ

$$AB=BA=E, \text{ სადაც}$$

A არის f-ის მატრიცა, B არის φ-ს მატრიცა, E ერთეულოვანი მატრიცა.

აქედან გამოდის: იმისათვის, რომ არსებობდეს შებრუნებული ასახვა აუცილებელია და საკმარისია რომ ეს ასახვა იყოს არაგადაგვარებული და შებრუნებულის მატრიცა ამ ასახვის მატრიცის შებრუნებულია:

$$B=A^{-1}.$$

წრფივი ასახვის საკუთრივი ვექტორი

არანულოვან $\vec{x}$ ვექტორს ეწოდება f წრფივი ასახვის საკუთრივი ვექტორი, თუ არსებობს ისეთი λ რიცხვი, რომ

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}.$$

მატრიცულად ეს ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$AX= \lambda X \text{ (ან ასე } A\vec{x} = \lambda\vec{x}\text{)}.$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_4 \end{pmatrix}$$

λ რიცხვს ეწოდება $\vec{x}$ საკუთრივი ვექტორის **საკუთრივი რიცხვი**.

ვთქვათ, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ არის f წრფივი ასახვის მატრიცა.

მაშინ ტოლობა

$$AX=\lambda X$$

ასე ჩაიწერება $(A-\lambda E)X=0$.

ეს კი ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} &(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ &a_{21}x_1+(a_{22}x_2-\lambda)+\dots+a_{2n}x_n=0 \\ &\qquad - - - - - - \\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+(a_{nn}x_n-\lambda)=0. \end{aligned}$$

ამ სისტემას რომ ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსნი მისი დეტერმინანტი ნული უნდა იყოს

$$\det(A-\lambda E)=0.$$

ეს კი A მატრიცის მახასიათებელი განტოლებაა. მაშასადამე, საკუთრივი რიცხვების საპოვნელად უნდა შევადგინოთ A მატრიცის მახასიათებელი განტოლება და უნდა ვიპოვოთ ამ განტოლების ფესვები. ამ მახასიათებელი რიცხვის შესაბამისად ვპოულობთ ერთგვაროვანი სისტემის არანულოვან ამონახსნს. ეს ამონახსნი წარმოგვიდგენს საკუთრივ ვექტორს.

მატრიცის მიყვანა დიაგონალურ სახეზე (დიაგონალიზაცია).

თეორემა. იმისათვის, რომ f წრფივი ასახვის მატრიცა $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ ბაზისში იყოს დიაგონალური აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ ვექტორები იყოს საკუთრივი ვექტორები.

მართლაც, თუ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ საკუთრივი ვექტორებია, ეს ტოლფასია იმისა, რომ

$$\begin{aligned} &f(\overrightarrow{e_1})=\lambda\overrightarrow{e_1} \\ &f(\overrightarrow{e_2})=\lambda\overrightarrow{e_2} \\ &\quad \dots \\ &f(\overrightarrow{e_n})=\lambda\overrightarrow{e_n} \end{aligned}$$

ე. ი. $f(\overrightarrow{e_1})$-ს შეესაბამება ვექტორ-სვეტი $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\overrightarrow{e_2})$-ს $\to \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\overrightarrow{e_n})$-ს $\to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

მაგრამ ეს სვეტები A მატრიცის სვეტებია:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

თუ $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$, მაშინ მივიღებთ: $f(\vec{e_1})=\lambda\vec{e_1},\ f(\vec{e_2})=\lambda\vec{e_2},\dots,\ f(\vec{e_n})=\lambda\vec{e_n}$,

ე. ი. $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ საკუთრივი ვექტორებია.

A მატრიცას ეწოდება დაყვანადი დიაგონალურ სახეზე, თუ არსებობს T არაგადაგვარებული მატრიცა, რომ $T^{-1}AT$ – დიაგონალურია, ანუ თუ არსებობს A-ს მსგავსი მატრიცა, რომელიც დიაგონალურია.

A და $T^{-1}AT$ მატრიცების მახასიათებელი განტოლებები ერთი და იგივეა, მათი მახასიათებელი რიცხვებით ერთი და იგივეა. ამიტომ, თუ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$s A მატრიცის მახასიათებელი რიცხვებია, მაშინ

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

თეორემა. იმისათვის, რომ f ასახვის A მატრიცა იყოს დაყვანილი დიაგონალურ სახეზე აუცილებელია და საკმარისი რომ არსებობდეს ბაზისი, რომლის ვექტორები f-ის საკუთრივი ვექტორებია.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ, f-ის ბაზისია $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$, მისი მატრიცა არის A და A დაყვანადია დიაგონალურ სახეზე. ე. ი. არსებობს არაგადაგვარებული T მატრიცა ისეთი, რომ $B=T^{-1}AT$. T არაგადაგვარებული მატრიცააა. ის შეიძლება განვიხილოთ როგორც $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ ბაზისიდან ახალ $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \dots, \vec{e_n'}$-ზე გადასვლის მატრიცად, მაშინ ახალ ბაზისში f-ის მატრიცა იქნება $B=T^{-1}AT$, რომელიც დიაგონალურია, ამიტომ ეს ახალი ბაზისი საკუთრივი ვექტორებისგან შედგება.

საკმარისობა. ვთქვათ, A არის f-ის მატრიცა $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ ბაზისში და არსებობს $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \dots, \vec{e_n'}$ ბაზისი, რომელიც შედგება f-ის საკუთრივი ვექტორებისგან. მაშინ ამ ბაზისში f-ის მატრიცა დიაგონალურია – იყოს ის D. თუ T არის $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \dots, \vec{e_n'}$-ზე გადასვლის მატრიცა, მაშინ $D=T^{-1}AT$.

მაშასადამე, თუ f-ის მატრიცა $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ ბაზისში არის A და A დაყვანილია დიაგონალურ სახეზე, ე. ი. არსებობს T არაგადაგვარებული მატრიცა ისეთი, რომ

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – A მატრიცის მახასიათებელი რიცხვებია. T კი არის ახალ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა. ეს ახალი ბაზისი შედგება საკუთრივი ვექტორებისგან და მათი საკუთრივი რიცხვებია $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. მაშასადამე, T-ს ასაგებად საკმარისია ვიპოვოთ A მატრიცის საკუთრივი ვექტორები.

თუ ყველა საკუთრივი რიცხვი A მატრიცისა განსხვავებულია, მაშინ მატრიცა მიიყვანება დიაგონალურ სახეზე.

რადგან იმ შემთხვევაში, როცა საკუთრივი რიცხვები განსხვავებულია, საკუთრივი ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია და მას ავიღებთ ბაზისად.

ორთოგონალური მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$ კვადრატულ მატრიცას ეწოდება **ორთოგონალური**, თუ შესაბამისი ვექტორ-სვეტები ორთონორმირებულია.

$\overrightarrow{x_1}(a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1})$, $\overrightarrow{x_2}(a_{12}, a_{22}, ..., a_{n2})$,..., $\overrightarrow{x_n}(a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{nn})$ ორთონორმირებულია.

მაშასადამე, თუ A ორთოგონალურია, მაშინ

$$\sum_{n=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1, \text{ თუ } i=j \\ 0, \text{ თუ } i\neq j \end{cases},$$

მაგალითად, $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ორთოგონალური მატრიცებია.

ცხადია, ერთეულოვანი მატრიცა ორთოგონალურია.

თეორემა. იმისათვის, რომ A მატრიცა იყოს ორთოგონალური აუცილებელია და საკმარისია, რომ A-ს ტრანსპონირებული – A^T იყოს A-ს შებრუნებული: $A^T=A^{-1}$, ანუ შესრულდეს პირობა: $A^T \cdot A=E$.

ეს გამომდინარეობს მატრიცების გამრავლების ფორმულებიდან.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ორთოგონალური მატრიცის დეტერმინანტი ან 1-ია, ან -1-ია.

რადგან

$$\det(A^T \cdot A)=\det E$$

$$\det A^{T}\cdot\det A=1$$
$$(\det A)^2=1$$
$$\det A=\pm 1$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ორთოგონალური მატრიცების ნამრავლი ორთოგონალურია.

მართლაც, $(AB)^T AB=B^T(A^TA)B=B^T\cdot B=E.$

თეორემა. ორთონორმირებული ბაზისიდან მეორე ორთონორმირებულ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა ორთოგონალურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ ძველი ორთონორმირებული ბაზისია, $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \dots, \vec{e_n'}$ – ახალი. T გადასვლის მატრიცაა.

$$T=\begin{pmatrix} t_{11}, & t_{21}, & \dots, & t_{n1} \\ & \dots\dots & & \\ t_{1n}, & t_{2n}, & \dots, & t_{nn} \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$\vec{e_1'}=t_{11}\vec{e_1}+t_{21}\vec{e_2}+\dots+t_{n1}\vec{e_n}$$
$$\dots\dots$$
$$\vec{e_n'}=t_{1n}\vec{e_1}+t_{2n}\vec{e_2}+\dots+t_{nn}\vec{e_n}$$

მაგრამ ორივე ბაზისი ორთონორმირებულია, ამიტომ

$$(\vec{e_i'}, \vec{e_j'})=\begin{cases} 1, \text{ თუ } i=j \\ 0, \text{ თუ } i\neq j \end{cases},$$

მაგრამ

$$(\vec{e_i'}, \vec{e_j'})=t_{1i}t_{1j}+t_{2i}t_{2j}+\dots+t_{ni}t_{nj}=\begin{cases} 1, \text{ თუ } i=j \\ 0, \text{ თუ } i\neq j \end{cases}.$$

ეს ნიშნავს, რომ T მატრიცა ორთოგონალურია.

ორთოგონალური გარდაქმნა ეწოდება ევკლიდური სივრცის ისეთ ასახვას, რომლის მატრიცა რაიმე ორთონორმირებულ ბაზისში ორთოგონალურია.

თეორემა. წრფივი ასახვა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ორთოგონალური, როცა მას ორთონორმირებული ბაზისი გადაჰყავს ორთონორმირებულ ბაზისში.

შენიშვნა: ჩვენ ყველგან ვიხილავთ წრფივი სივრცის, კერძოდ, ევკლიდური სივრცის თავის თავში წრფივ ასახვას. ცხადია, ანალოგიურად შეიძლება განვმარტოთ წრფივი ასახვა ერთი რაიმე წრფივი სივრცისა მეორე წრფივ სივრცეში. მათი განზომილებები შეიძლება ტოლი არ იყოს. მაშინ ასეთ წრფივ

ასახვების მატრიცა შეიძლება არ იყოს კვადრატული. იმ ასახვებს რომლებსაც ჩვენ ვიხილავთ, ზოგ წიგნში წრფივ ოპერატორებს უწოდებენ.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა. ვთქვათ, f ორთოგონალური გარდაქმნაა ეკვლიდური სივრცის და მისი მატრიცა $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ ორთონორმირებულ ბაზისში არის

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

მაგრამ მისი სვეტები $\vec{e_i'} = f(\vec{e_{ii}'})\ (i = 1, ..., n)$ ვექტორების კოორდინატებია.

თუ A მატრიცა ორთოგონალურია, ამიტომ $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, ..., \vec{e_n'}$ ორთონორმირებული ბაზისია.

თუ f ასახვას ორთონორმირებული ბაზისი გადაჰყავს ორთონორმირებულ ბაზისში, მაშინ ვიცით, რომ მისი მატრიცა ორთოგონალურია.

ჩვენ აქ გამოვიყენეთ სიტყვა „გარდაქმნა“, საქმე იმაშია, რომ ორთოგონალური გარდაქმნის მატრიცა არაგადაგვარებულია, ამიტომ ასახვა, რომლის მატრიცა არაგადაგვარებულია ურთიერთცალსახაცაა, ასეთ ასახვას კი „გარდაქმნა“ ჰქვია.

თეორემა. ორთოგონალური გარდაქმნა არ ცვლის სკალარულ ნამრავლს.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ ორთონორმირებული ბაზისია (ევკლიდური სივრცის).

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + ... + x_n\vec{e_n}$$

და

$$\vec{y} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + ... + y_n\vec{e_n},$$

მაშინ სკალარული ნამრავლი იქნება:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

თუ f ორთოგონალური გარდაქმნაა:

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e_1}) + x_2 f(\vec{e_2}) + ... + x_n f(\vec{e_n})$$

$$f(\vec{y}) = y_1 f(\vec{e_1}) + y_2 f(\vec{e_2}) + ... + y_n f(\vec{e_n})$$

მაშინ $f(\vec{e_1}),\ f(\vec{e_2}), ...,\ f(\vec{e_n})$ ორთონორმირებული ბაზისია. ამიტომ

$$(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

შედეგი 1. ორთოგონალური გარდაქმნა არ ცვლის ვექტორის სიგრძეს.

შედეგი 2. ორთოგონალური გარდაქმნა არ ცვლის კუთხეს ვექტორებს შორის.

ლექცია 20

კვადრატული ფორმა

ვთქვათ, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. კვადრატულ მატრიცას ეწოდება **სიმეტრიული**, თუ იგი უდრის თავის ტრანსპონირებულს:

$$A^T=A.$$

ანუ

$$a_{ij}=a_{ji}, \qquad i=1, 2, \dots n$$
$$j=1, 2, \dots n$$

კვადრატული ფორმა კი ეწოდება $x_1, x_2, \dots , x_n$ ცვლადების ფუნქციას, რომელიც ასე ჩაიწერება:

$$L(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=}^{n} a_{ik}x_ix_k=a_{11}x_1^2+2a_2x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\dots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+\dots+a_{mm}x_n^2. \quad (1)$$

ზოგიერთი ავტორი კვადრატული ფორმის განსაზღვრებას იწყებს შემდეგნაირად:

$$L(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=}^{n} a_{ik}x_ix_k\,,$$

სადაც a_{ik} შეიძლება ტოლი არ იყოს a_{ki} რიცხვის. მაშინ გვექნება, მაგალითად წევრები: $a_{12}x_1x_1+a_{21}x_2x_1$ მათ ჯამს ასე ჩავწერთ: $(a_{12}+a_{21})x_1x_2=2\frac{1}{2}(a_{12}+a_{21})x_1x_2$ და ახალი აღნიშვნების შემოტანით შესაბამისი კოეფიციენტები შეადგენენ სიმეტრიულ მატრიცას.

ვთქვათ, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_4 \end{pmatrix}$, მაშინ $X^T=(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)$ და კვადრატული ფორმა მატრიცულად შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n)=X^TAX.$$

სადაც $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ამ კვადრატული ფორმის მატრიცაა.

განვიხილოთ $x_1, x_2, \dots x_n$ ცვლადთა წრფივი ერთგვაროვანი გარდაქმნა:

$$x_1=b_{11}y_1+b_{12}y_2+\dots+b_{1n}y_n$$
$$x_2=b_{21}y_1+b_{22}y_2+\dots+b_{2n}y_n$$
$$------$$
$$x_n=b_{n1}y_1+b_{22}y_2+\dots+b_{nn}y_n.$$

ის ასე ჩაიწერება:

$$X=BY,\ \text{სადაც}\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

ვიგულისხმოთ, $|B|\neq 0$, გარდაქმნა არის არაგადაგვარებული.

მაშინ მივიღებთ:

$$L(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)=X^TAX=(BY)^TA(BY)=Y^T(B^TAB)Y=L_1(y_1,\ y_2,\dots,y_n).$$

მივიღეთ კვადრატული ფორმა, რომლის მატრიცა არის B^TAB. ამ კვადრატულ ფორმას ეწოდება $L(x_1, x_2, \dots x_n)$-ის ექვივალენტური. ვწერთ:

$$L(x_1, x_2, \dots x_n) \sim L(y_1, y_2, \dots y_n).$$

მათი მატრიცების რანგები ტოლია.

$L(x_1, x_2, \dots x_n)$ კვადრატულ ფორმას ეწოდება კანონიკური, თუ მას აქვს სახე

$$L(x_1, x_2, \dots x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\dots+a_{nn}x_n^2.$$

თუ ყველა კოეფიციენტი ერთის ტოლია, მაშინ ასეთ კანონიკურ (დიაგონალურ) კვადრატულ ფორმას ეწოდება ნორმარული.

ყოველი კვადრატული ფორმისთვის არსებობს მისი ექვივალენტური კანონიკური კვადრატული ფორმა.

როცა $n=1$. მაშინ გვაქვს:

$$L(x_1)=a_{11}x_1^2.$$

ეს კი კანონიკური ფორმაა.

დავუშვათ ყოველი კვადრატული ფორმა m-ცვლადის ($m<n$) დაიყვანება კანონიკურ სახეზე.

ვაჩვენოთ, რომ მაშინ n-ცვლადიანი ფორმაც ექვივალენტურია კანონიკური ფორმის. ეს კი ნიშნავს, რომ, მათემატიკური ინდუქციის თანახმად, ყოველი კვადრატული ფორმა ექვივალენტურია კანონიკური ფორმის. ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11}\neq 0$. ამას ყოველთვის მივაღწევთ. გამოვყოთ x_1-ის შემცველი წევრები.

$$L(x_1, x_2, \dots x_n)=(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\dots+2a_{1n}x_1x_n)+L_1(x_2,\ x_3,\ \dots,x_n).$$

ეს შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$L(x_1, x_2, \dots x_n)=(a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n)^2+L_2(x_{21}\dots x_n).$$

მაგრამ L_2 ექვივალენტურია კანონიკური ფორმის, რომელიც შეიცავს $y_{21}\dots y_n$ ცვლადებს.

მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ $L(x_1, x_2, \dots x_n)$ ექვივალენტურია დიაგონალური ფორმის $L_3(y_1, y_2, \dots y_n)$-ის.

ინერციის კანონი. ყველა კანონიკურ ფორმაში, რომლებიც ექვივალენტური მოცემული კვადრატული ფორმის, ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტების რაოდენობა და დადებითკოეფიციენტებიან წევრების რაოდენობა ერთი და იგივეა.

კვადრატულ ფორმას ეწოდება დადებითად განსაზღვრული თუ ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობებისთვის მისი მნიშვნელობა დადებითია.

ვთქვათ, $L=X^TAX$, $\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

კვადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრულობისთვის აუცილებელია და საკმარისი დადებითი იყოს ყველა **მთავარი მინორი**:

$$a_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$