ლექციები გეომეტრიაში

Book · March 2013

1 author:

Malkhaz Bakuradze
Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

გეომეტრია

მალხაზ ბაკურაძე

რუსლან სურმანიძე

თსუ 2015

შინაარსი

1. კოორდინატთა სისტემები სიბრტყეზე და სივრცეში

მართკუთხა (ანუ დეკარტეს) კოორდინატთა სისტემა არის წრფივი ალგებრის და ანალიზური გეომეტრიის საფუძველი.

გეომეტრია, ბერძნულად გეო (მიწა) – მეტრია (გაზომვა) ისტორიულად მიღებულია რომ გეომეტრიის "მამა" არის

ევკლიდე (III საუკუნე ქრისტემდე) ;

ალგებრა, არაბულად ალ-ჯებრ (შეკრება),

ალგებრის "მამა" -- **ალ-ხვარიზმი** (მისი წიგნი დაიწერა 820 წელს).

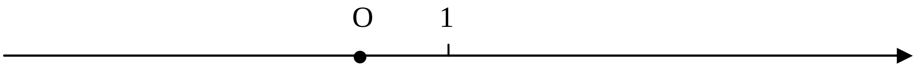
თუმცა მანამადე არსებობდნენ ეგვიპტელები, რომლებმაც 140 პირამიდა ააგეს დაწყებული **5000 წლის წინ!**

 **პირველი სისტემატური შეკავშირება ალგებრასა და გეომეტრიას შორის** მოხდა დეკარტეს მიერ 17-ე საუკუნეში კოორდინატების შემოღებით. **რენე დეკარტე** (ფრანგულად Descartes), ლათინურად (Cartesius), ამიტომ ინგლისურ ლიტერატურაში გვხდება **Cartesian coordinates**

რიცხვითი წრფე ანუ დეკარტეს კოორდინატთა სისტემა წრფეზე.

დეკარტეს კოორდინატების შემოღება წრფეზე ნიშნავს ამ წრფეზე ავირჩიოთ სამი რამ:

1. წერტილი 0 ანუ "კოორდინატთა სათავე"
2. სიგრძის ერთეული:
3. ორიენტაცია, ანუ რომელი ნახევარწრფე იყოს დადებითი (და შესაბამისად მეორე ნახევარწრფე უარყოფითი) .



ამის შემდეგ წრფის ყოველ წერტილს განსაზღვრავს მისი **კოორდინატი,** ანუ მანძილი O სათავემდე, აღებული + ან − ნიშნით იმის მიხედვით, თუ რომელ ნახევარზე ძევს ეს წერტილი.

წრფეს არჩეული კოორდინატთა სისტემით ეწოდება რიცხვითი წრფე .

ყოველ **ნამდვილ რიცხვს,** ანუ

ნატურალურს, (1, 2, 3 ..);

მთელს, (ნატურალური რიცხვები მათი მოპირდაპირე რიცხვები −1,−2,−3 .. და 0);

რაციონალურს, (წილადები. მაგ. 1/2, 1/3, ..);

თუ ირაციონალურს, (უსასრულო არაპერიოდული ათწილადები, მაგ. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$,
π=წრეწირის სიგრძის შეფარდება მის დიამეტრთან)

აქვს ცალსახად განსაზღვრული მდებარეობა ამ წრფეზე და პირიქით: ყოველ წერტილს წრფეზე შეესაბამება ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი.

კითხვა: პრაქტიკულად როგორ გადავზომოთ მონაკვეთი რომლის სიგრძეა $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π ?

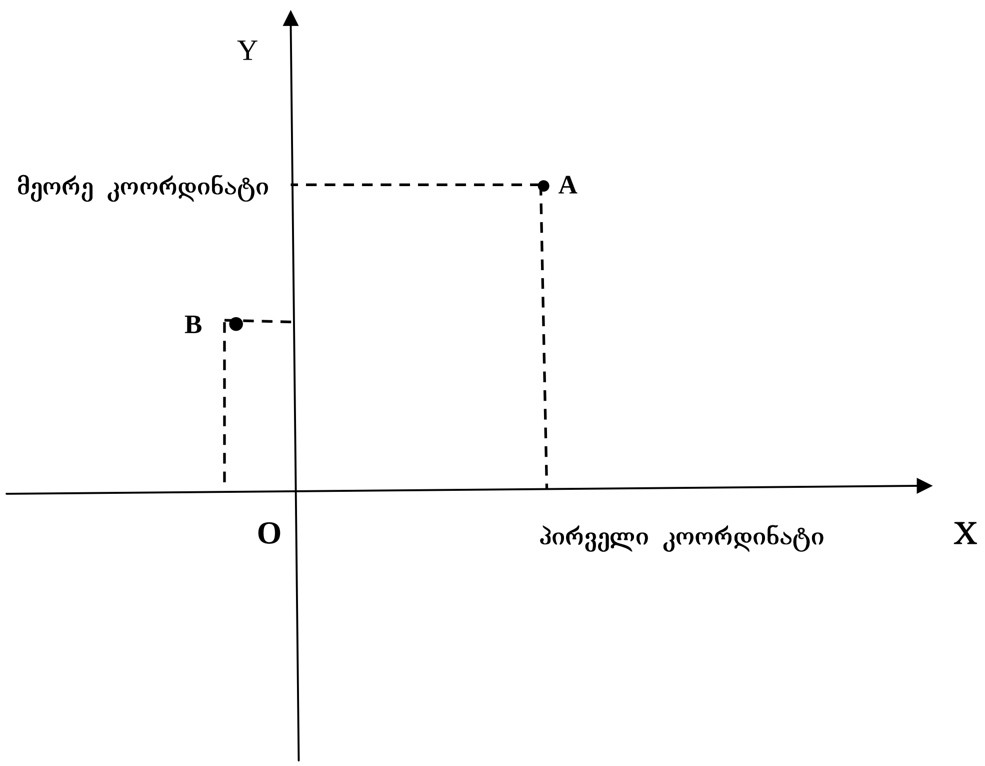
მართკუთხა ანუ დეკარტეს კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე

დეკარტეს კოორდინატთა სისტემის შემოღება სიბრტყეზე ნიშნავს, რომ ამ სიბრტყეზე

1. ავირჩიოთ საკოორდინატო **ღერძები**, ანუ მართობულ წრფეთა დალაგებული წყვილი (X,Y). ანუ X და Y წრფეები უნდა იყოს ურთიერმართობული(ანუ მათ შორის კუთხე მართია) და დალაგებული ნიშნავს რომ მნიშვნელობა აქვს რომელია პირველ ადგილზე და რომელი მეორეზე.
2. ორივე წრფისთვის ავირჩიოთ სიგრძის ერთეული და ორიენტაცია.
3. X და Y წრფეთა გადაკვეთის 0 წერტილი უნდა მივიღოთ კოორდინატთა სათავედ.

ამის შემდეგ კოორდინათტა სისტემის **ორივე წრფე გადაიქცევა რიცხვით წრფედ. სიბრტყის ყოველი წერტილის კოორდინატები მიიღება ასე:** პირველი კოორდინატის მისაღებად დავუშვათ მოცემული წერტილიდან მართობი (ანუ პერპენდიკულარი) **X** წრფეზე და ვიპოვოთ გადაკვეთის წერტილი. ამ წერტილს როგორც ვიცით შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი და ეს რიცხვი ავიღოთ პირველ კოორდინატად.

ანალოგიურად, თუ მოცემული წერტილიდან დავუშვებთ მართობს Y წრფეზე და ვიპოვით დაგაკვეთის წერტილს მივიღებთ მეორე კოორდინატს.



დეკარტეს კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

დეკარტეს კოორდინატთა სისტემის შემოღება სივრცეში ნიშნავს:

1. სივრცეში ავირჩიოთ საკოორდინატო **ღერძები**, ანუ მართობულ წრფეთა დალაგებული სამეული (X,Y,Z). ე.ი. ამ სამი წრფიდან ნებისმიერი ორი მათგანი ურთიერთმართობული უნდა იყოს.

2. სამივე წრფისთვის ავირჩიოთ სიგრძის ერთეული და ორიენტაცია.
3. X , Y, Z წრფეთა გადაკვეთის 0 წერტილი უნდა მივიღოთ კოორდინატთა სათავედ.

ამის შემდეგ კოორდინათტა სისტემის **სამივე წრფე გადაიქცევა რიცხვით წრფედ**. **სიბრტყის ყოველი წერტილის კოორდინატების მისაღებად** დავუშვათ მოცემული წერტილიდან მართობები (ანუ პერპენდიკულარები) **X, Y** და **Z** წრფეზე და ვიპოვოთ შესაბამისი გადაკვეთის წერტილები. ამ გადაკვეთის წერტილებს როგორც ვიცით შეესაბამება ნამდვილი რიცხვები შესაბამისად **X, Y** და **Z** წრფეებზე. ამ სამი რიცხვიდან პირველი მოგვცემს პირველ კოორდინატს, მეორე რიცხვი-მეორე კოორდინატს, მესამე რიცხვი კი მესამე კოორდინატს.

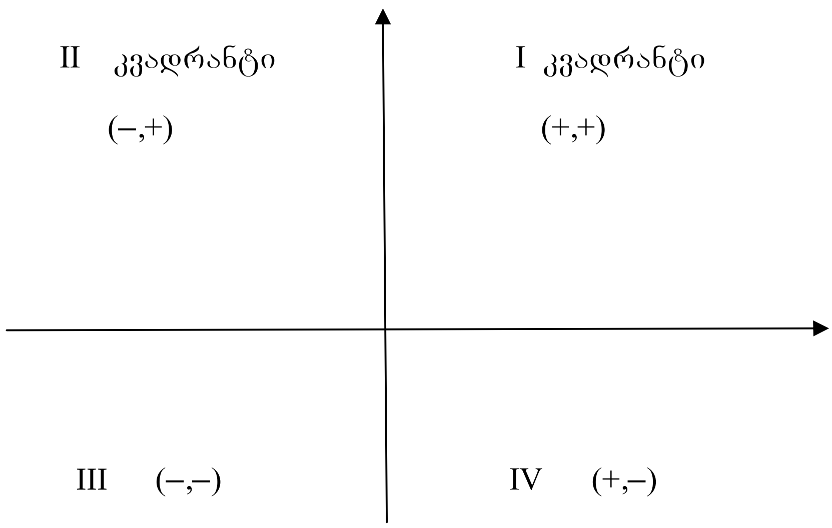
შევნიშნოთ რომ სივრცის შემთხვევაში თითქმის იგივე გავიმეორეთ, რაც სიბრტყეზე გვქონდა, ოღონდ სიტყვა "ორი" შეიცვალა "სამით".
თუმცა პრაქტიკულად ალბათ ჯობია ასეთი განსაზღვრება:

სივრცეს ნებისმიერი სიბრტყე ორ ნახევარსივრცედ ყოფს.
კოორდინატთა წრფეები ქმნიან საკოორდინატო სიბრტყეებს **(X,Y), (Y,Z)** და **(X,Z).**

ამიტომ სივრცის მოცემული წერტილს პირველი კოორდინატი არის მანძილი **Y** და **Z** წრფეებით განსაზღვრულ **(Y,Z)** სიბრტყემდე, ოღონდ + ან – ნიშნით, იმის მიხედვით, თუ რომელ ნახევარსივრცეში მდებარეობს ჩვენი წერტილი.
ანალოგიურად მიიღება მეორე და მესამე კოორდინატი **(X,Z)** და **(X,Y)** სიბრტყეების საშუალებით.

კვადრანტები და ოქტანტები

სიბრტყე საკოორდინატო ნახევარღძებით ოთხ მეოთხედად ანუ **კვადრანტად** იყოფა. ამ კვადრანტებში მდებარე წერტილების (ანუ რიცხვების წყვილის) ნიშნები ნაჩვენებია ამ ნახატზე:



სივრცე საკოორდინატო ნახევარღძებით რვა მეტვედად ანუ **ოქტანტად** იყოფა. ამ ოქტანტების ნუმერაცია საყოველთაოდ შეთანხმებული არაა. მხოლოდ (+,+,+) ნიშნიან წერტილებს უწოდებენ ყოველთვის პირველი ოქტანტიწერტილებს. სულ ამ ნიშნებისთვის არის $8=2^3$ ვარიანტი. (რატომ?, დახატეთ ოქტანტები)

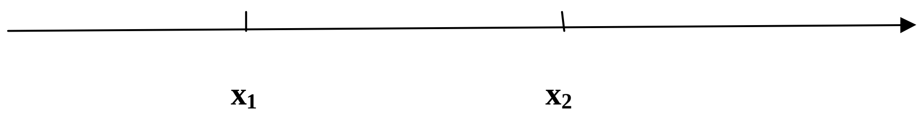
რატომაა ასე მნიშვნელოვანი დეკარტეს კოორდინატები? ანუ რატომ შეაკავშირა კოორდინატებმა ალგებრა და გეომეტრია?

იმიტომ, კოორდინატების საშუალებით ხშირად გეომეტრიული ფიგურები (მაგალითად წრფე, სიბრტყე, წრეწირი, ელიფსი, სხვადასხვა სახის წირები, აგრეთვე ზედაპირები და ა.შ.) შეგვიძლია წარვოვადგინოთ განტოლებების სახით და ხშირად პირიქითაც, ალგებრული განტოლება შეესაბამება გარკვეულ გეომეტრიულ ობიექტს.

დავიწყოთ მარტივი მაგალითებით:

მანძილი ორ წერტილს შორის.

რიცხვით წრფეზე x_1 და x_2 წერტილებს შორის მანძილია $|x_2 - x_1|$.

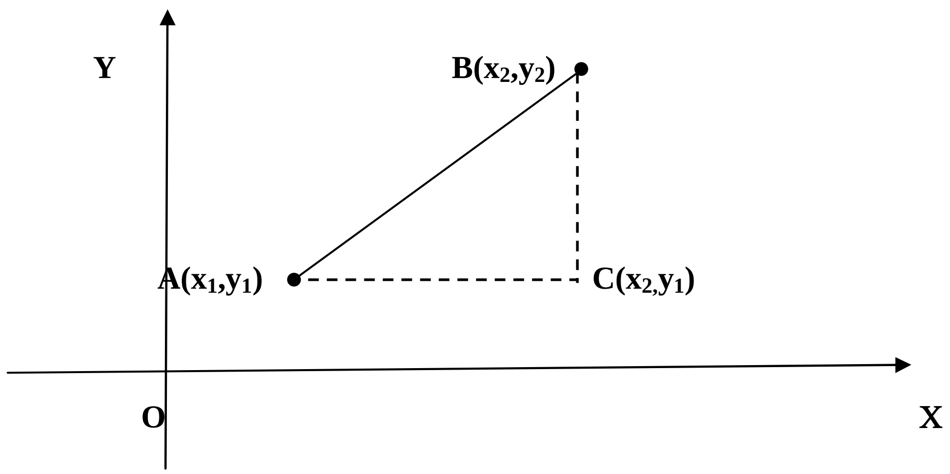


სიბტყეზე (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ეს პითაგორას თეორემის შედეგია. (ვაჩვენოთ ეს ქვემოთმოყვანილი ნახატით)

მაგ: (1,3) და (5,6) წერტილებს შორის მანძილია $\sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

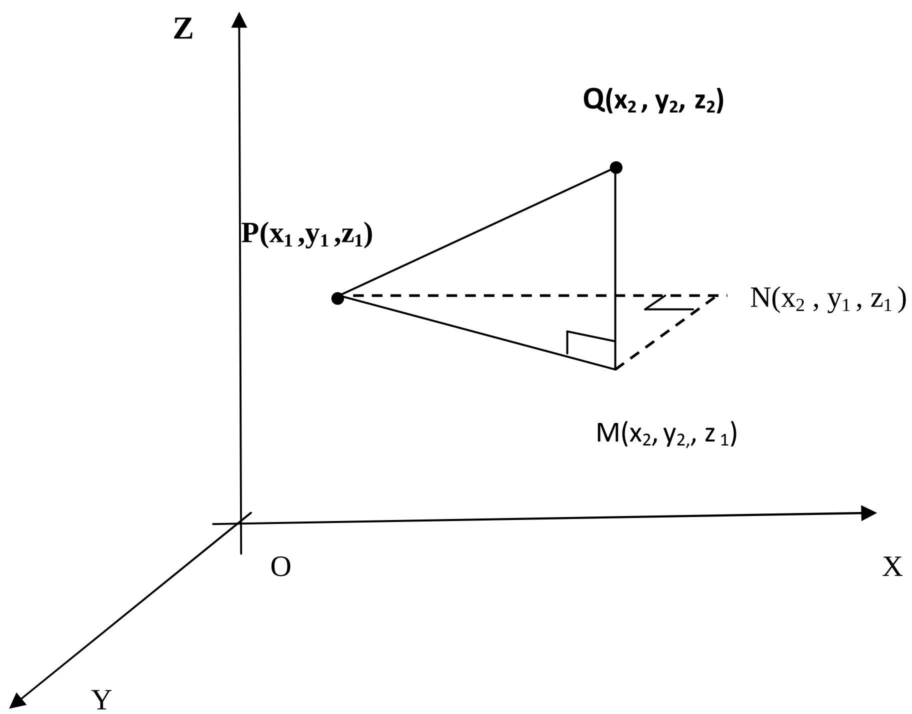


სივრცეში $P(x_1, y_1, z_1)$ და $Q(x_2, y_2, z_2)$ წერტილებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ეს პითაგორას თეორემის ორჯერ გამოყენების შედეგია.

(ვაჩვენოთ ეს ქვემოთ მოცემული ნახატით. M წერტილი არის Q წერტილის გეგმილი XOY სიბრტყის პარალელურ და P წერტილზე გამავალ სიბრტყეზე. N წერტილი არის ორი წრფის გადაკვეთა: ერთი P წერტილზე გადის და X ღერძის პარალელურია , მეორე M წერტილზე გადის და Y ღერძის პარალელურია.
მაშინ M და N წერტილების კოორდინატები სწორედ ისეთია როგორც ნახატზე. აგრეთვე PMQ და PNM სამკუთხედები მართკუთხაა. ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ პითაგორას თეორემა PQ მონაკვეთის გამოსათვლელდად PM და $MQ = z_2 - z_1$ მონაკვეთებით. შემდეგ კი ისევ პითაგორას თეორემით PM მონაკვეთის სიგრძე გამოვთვალოთ $PN = x_2 - x_1$ და $NM = y_2 - y_1$ მონაკვეთებით.)



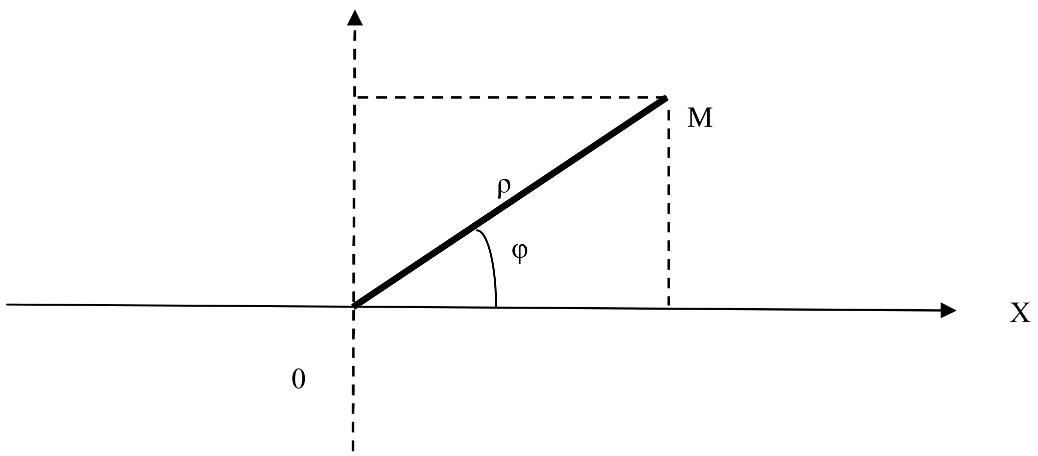
მაგალითად (1,2,3) და (4,-2,15) წერტილებს შორის მანძილია $\sqrt{(4-1)^2+(-2-2)^2+(15-3)^2}=\sqrt{169}=13$.

პოლარულ კოორდინატთა სისტემა

მართკუთხა კოორდინატთა სისტემების გარდა არსებობს სხვა სისტემებიც:

პოლარულ კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე განისაზღვრება ასე:

გვაქვს პოლარული ღერძი, ე.ი. პოლარული OX სხივით, სათავით (ანუ პოლუსით) და სიგრძის ერთეულით;



სიბრტყის ყოველ M წერტილს აქვს ორი პოლარული კოორდინატი M(ρ,φ), სადაც

ρ –მანძილია სათავიდან M წერტილამდე (პოლარული რადიუსი), ხოლო φ-კუთხე

პოლარულ რადიუსსა და პოლარულ ღერძს შორის(პოლარული კუთხე).

შევთანხმდეთ რომ $0 \leq \rho < \infty$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

(სხვა წიგნებში შეიძლება სხვა შეთანხმება იყოს! კერძოდ $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.)

$M\neq 0$ წერტილის დეკარტულ (x,y) კოორდინატები პოლარული კოორდინატებით ასე გამოისახება:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \rho cos\varphi} \\ \boldsymbol{y = \rho sin\varphi} \end{cases},$$

ხოლო სათავისთვის ρ=0 და φ კუთხე განუსაზღვრელია.

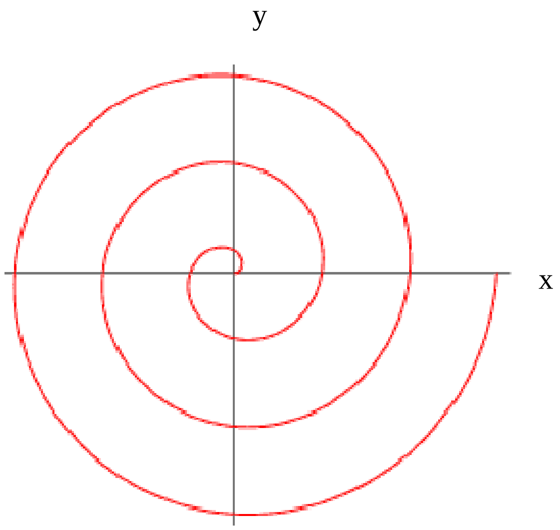
ადვილია პირიქით კავშირიც. ჯერ ერთი $x^2+y^2 = \rho^2(cos^2x + sin^2x) = \rho^2$, ამიტომ

$$\boldsymbol{\rho=\sqrt{x^2+y^2};}$$

ხოლო φ კუთხის გასაგებად გავითვალისწინოთ რომ $tg\varphi = \frac{y}{x}$, აგრეთვე y და x –ის ნიშნებით დავადგინოთ რომელ მეოთხედშია პოლარული რადიუსი.

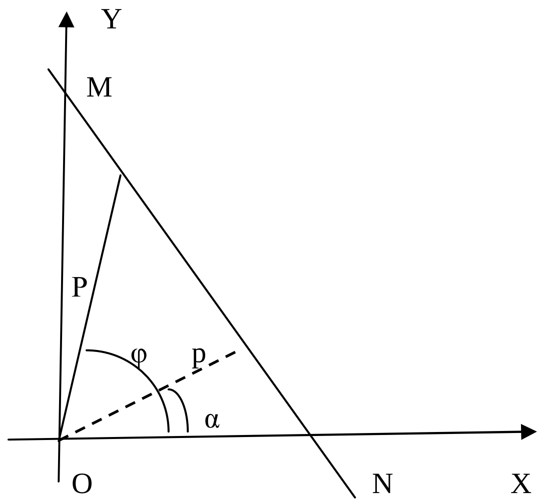
მაგალითი: $M(2,-2)$. გვაქვს $\boldsymbol{\rho=\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{2};}$ $\boldsymbol{tg(\varphi)=\frac{y}{x}=-1}$, რადგან წერტილი მოთავსებულია IV მეოთხედში ამიტომ $\boldsymbol{\varphi=-\frac{\pi}{4}}$.

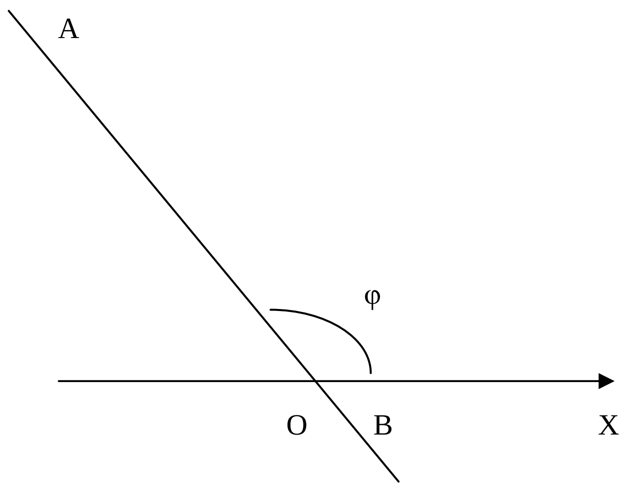
ბუნებრივია ვიკითხოთ რა საჭიროა პოლარული კოორდინატები, როცა უკვე გვაქვს დეკარტული კოორდინატები? განვიხილოთ მაგალითი. M წერტილი მოძრაობს ბრტყელ წირზე, ისე რომ მანძილი პოლარულ სათავემდე $|OM|$ პროპორციულია XOM კუთხის, სადაც X პოლარული ღერძია. ე. ი. პოლარულ კოორდინატებში ამ წირის განტოლებაა $\boldsymbol{\rho = k\,\varphi}$. ამ წირს ეწოდება **არქიმედეს სპირალი** . აქ $\boldsymbol{k}$ დადებითია. თუ $\boldsymbol{k}$-ს ნიშანს შევუცვლით მიიღება ამ წირის სიმეტრიული წირი y ღერძის მიმართ.



არქიმედეს სპირალის განტოლება დეკარტულ კოორდინატებში გაცილებით რთულია.

ამრიგად პოლარული კოორდინატები ზოგჯერ უფრო მასახერხებელია. მაგრამ ყოველთვის არა! განვიხილოთ წრფე MN. ნახატიდან ჩანს, რომ მისი განტოლება პოლარულ კოორდინატებში შეიძლება ასე ჩაიწეროს $\rho = \frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$.





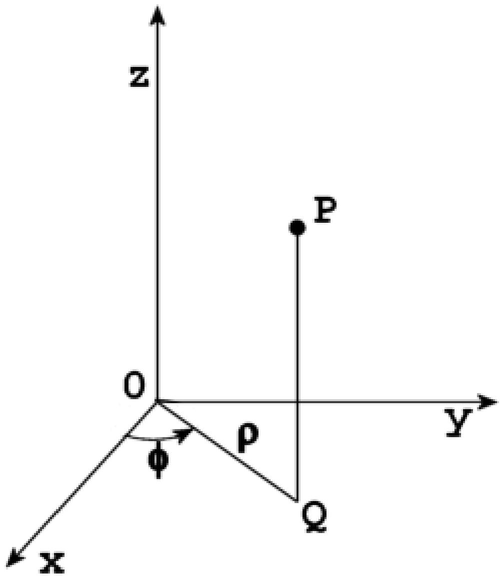
სათავეზე გამავალ AB წრფის განტოლებას ასეთი სახით ვერ ჩავწერთ, რადგან ამ შემთხვევში $p=0$ და $\varphi-\alpha=\pm\pi/2$ ანუ $\cos(\varphi-\alpha)=0$. ამ შემთხვევაში OA სხივის განტოლებაა $\boldsymbol{\varphi=\widehat{XOA}}$**,** ხოლო OB სხივის განტოლებაა $\boldsymbol{\varphi=\widehat{XOB}}$.

ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა.

P წერტილს სივრცეში ცილინდრული კოორდინატებით ასე აღნიშნავენ P(ρ,φ,z).

აქ Q წერტილი P წერტილის გეგმილია OXY სიბრტყეზე. P წერტილის პირველი ორი კოორდინატი, ρ და φ, ემთხვევა Q -ს პოლარულ კოორდინატებს; ხოლო მესამე, კოორდინატი z, ემთხვევა P წერტილის მესამე დეკარტულ კოორდინატს.

შევთანხმდეთ, რომ $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\rho} < \infty$, $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\varphi} < \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$ და $-\infty < \mathbf{z} < +\infty$.



ამ ფიგურით (ნახატით) P წერტილის დეკარტული კოორდინატები ასე გამოისახება ცილინდრულით:

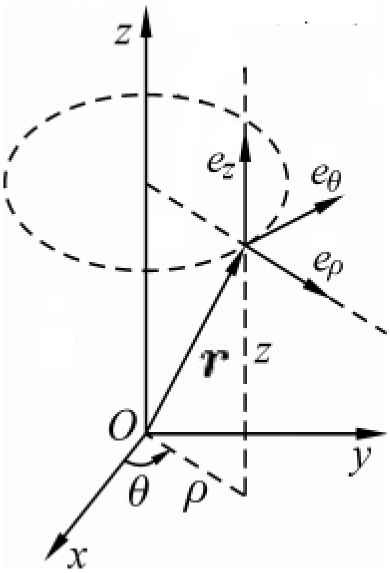
$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \rho cos\varphi} \\ \boldsymbol{y = \rho sin\varphi} \\ \boldsymbol{z = z} \end{cases}$$

პირიქით, P წერტილის ცილინდრული კოორდინატები ასე გამოისახება დეკარტულით:

$\boldsymbol{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$, $\boldsymbol{tg\varphi = \frac{y}{x}}$; $\boldsymbol{z = z}$.

$\boldsymbol{\varphi}$ კუთხის ზუსტად დასადგენად, ისევე როგორც პოლარულ კოორდინატებში, გავითვალისწინოთ x და y-ის ნიშნები, დავადგინოთ რომელ მეოთხედში იმყოფება Q წერტილი.

ავღნიშნოთ მართკუთხა საკოორდინატო ღერძების (ერთეულოვანი) მგეზავები ასე i, j, k, ხოლო ცილინდრული საკოორდინატო ღერძების მგეზავები: e_ϱ, e_θ, e_z .



ფიგურებიდან ადვილი სანახავია რომ სკალარული ნამრავლები აღიწერება ცხრილით

	e_ϱ	e_θ	e_z
i	cosθ	-sinθ	0
j	sinθ	cosθ	0
k	0	0	1

მაგალითი.

მოცემულია ვექტორი მართკუთხა სისტემაში $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$. მოითხოვება ჩავწეროთ ეს ვექტორი ცილინდრულ კოორდინატებში.

ვთქვათ ცილინდრულ კოორდინატებში $a = a_\varrho e_\varrho + a_\theta e_\theta + a_z e_z$. ვიცით რომ ვექტორის კოორდინატი i-ური კოორდინატი ტოლია ვექტორის და i-ური მგეზავის სკალარული ნამრავლის. გვაქვს

$a_\varrho = ae_\varrho = (a_1 i + a_2 j + a_3 k)e_\varrho = a_1 ie_\varrho + a_2 je_\theta + a_2 ke_z$ და ცხრილით მივიღებთ $= a_1 cos\theta - a_2 \sin\theta$;

ანალოგიურად

$$a_\theta = ae_\theta = (a_1 i + a_2 j + a_3 k)e_\theta = a_1 ie_\theta + a_2 je_\theta + a_2 ke_z = a_1 sin\theta + a_2 \cos\theta \;;$$

$$a_z = ae_z = (a_1 i + a_2 j + a_3 k)e_z = a_3.$$

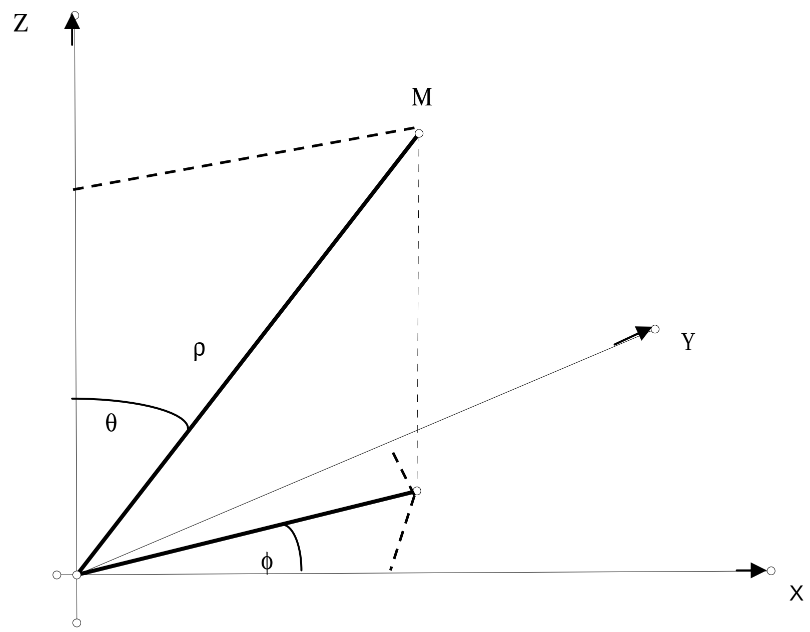
ამრიგად ცილინდრულ კოორდინატებში a ვექტორი მიიღებს სახეს

$$a = (a_1 cos\theta - a_2 \sin\theta)\, e_\varrho + (a_1 sin\theta + a_2 \cos\theta)\, e_\theta + a_3 e_z$$

სფერული კოორდინატები

M წერტილის სფერული კოორდინატები ეწოდება რიცხვების სამეულს ρ,φ,θ (იხ. ნახ.) სადაც ρ არის მანძილი სათავიდან M წერტილამდე, φ-კუთხეა OM მონაკვეთის OXY სიბრტყეზე გეგმილსა და OX ღერძს შორის, ხოლო θ-კუთხეა OM მონაკვეთს და OZ ღერძს შორის.

$$\mathbf{0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi}\ \ \text{და}\ \ \mathbf{0 \le \theta \le \pi}.$$



ნახ. მიხედვით ადვილი სანახავია რომ M წერტილის სფერული კოორდინატებით მისი x,y,z დეკარტული კოორდინატები ასე გამოისახება

$$\mathbf{x = \rho \sin\theta \cos\varphi,}$$

$$\mathbf{y = \rho \sin\theta \sin\varphi,}$$

$$\mathbf{z = \rho \cos\theta.}$$

2. წრფე სიბრტყეზე

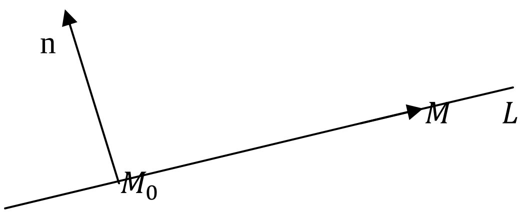
განვიხილოთ პირველი რიგის (ანუ წრფივი) ალგებრული განტოლება

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0}, \qquad \mathbf{(1)}$$

სადაც a, b კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არანულოვანია, ანუ $a^2+b^2 \neq 0$.

თეორემა. **ნებისმიერი წრფე სიბრტყეზე მათკუთხა კოორდინატთა სისტემაში წარმოიდგინება განტოლებით $\mathbf{ax+by+c=0}$, სადაც $\mathbf{a^2+b^2 \neq 0}$, (ანუ ორივე კოეფიციენტი ნული არაა) და პირიქით, ნებისმიერი ასეთი განტოლება აღწერს წრფეს.**

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი L წრფე სიბრტყეზე. ვთქვათ წერტილი $M_0(x_0,y_0)$ ძევს L წრფეზე და ვექტორი $\vec{n}(a,b)$ პერპენდიკულარულია L წრფის.



ასეთ პირობებში ნებისმიერი წერტილი $M(x,y)$ ეკუთვნის L წრფეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი მართობულია $\vec{n}$ ვექტორის. დავწეროთ ამ ორი ვექტორის მართობულობის პირობა კოორდინატებში: ვიცით $\overrightarrow{M_0M}$=(x-x_0,y-y_0) და $\vec{n}(a,b)$ ამიტომ მათი სკალარული ნამრავლი ტოლია ნულის ნიშნავს

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,$$

ანუ

$$ax+by+c=0, \quad \text{სადაც } c=-ax_0-by_0.$$

თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცდა.

მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად განვიხილოთ (1) განტოლება. ამ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელი არაა, (მაგალითად თუ $a \neq 0$, შეგვიძლია ავიღოთ ამონახნი x=$\frac{-c}{a}$, y=0) ანუ (1) განტოლებით მოცემულია წერტილთა არაცარიელი სიმრავლე. ვთქვათ $M_0(x_0,y_0)$ წერტილი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს. ე.ი.

$$ax_0+by_0+c=0\ . \qquad (2)$$

(1)-ს გამოვაკლოთ (2), მივიღებთ

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0. \qquad (3)$$

მიღებული განტოლება (3) წარმოადგენს $\overrightarrow{M_0M}$=(x-x_0,y-y_0) და $\vec{n}(a,b)$ ვექტორების მართობულობის პირობას. მაშასადამე $M(x,y)$ წერტილი ეკუთვნის (1)

განტოლებით მოცემულ სიმრავლეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი პერპენდიკულარულია n ვექტორის, ანუ როცა M წერტილი ძევს წრფეზე რომელიც გადის M_0 წერტილზე და პერპენდიკულარულია n ვექტორის.

განსაზღვრება. **განტოლებას $\boldsymbol{ax+by+c=0}$, $a^2+b^2 \neq \boldsymbol{0}$ ეწოდება წრფის ზოგადი სახის განტოლება, ხოლო ვექტორს $\vec{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ წრფის ნორმალი. ეს ვექტორი, ისევე როგორც წრფის განტოლება სალსახად განისაზღვრება პროპორციულობამდე სიზუსტით.**

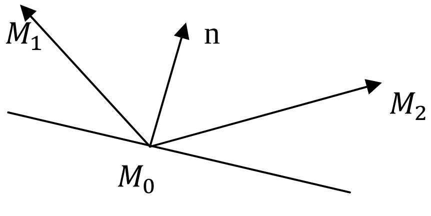
მაგალითი. ვიპოვოთ იმ წრფის ზოგადი განტოლება, რომელიც გადის A(1,2) წერტილზე და რომლიც ნორმალური ვექტორია n=(3,4).

ნორმალური ვექტორის კოორდინატები გვაძლევენ ზოგადი განტოლების კოეფიციენტებს x და y ცვლადებთან, ამიტომ გნტოლებას აქვს სახე

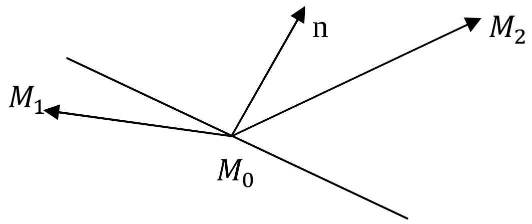
$$3x+4y+c=0.$$

უცნობი კოეფიციენტი c რომ გავიგოთ ჩავსვათ ამ განტოლებაში A წერტილის კოორდინატები: $3\times 1\ +4\times 2\ +c=0$, ანუ $c=\ -11$. საბოლოოდ გვაქვს განტოლება 3x+4y-11=0.

მაგალითი. განვიხილოთ ორი წერტილი M_1, M_2 რომელიც წრფეზე არ ძევს. მაშინ ამ წერტილების კოორდინატების ჩასმით წრფის ზოგად განტოლებაში 0-ს არ მივიღებთ. (რადგან $\overrightarrow{M_0\,M_1}$ და $\overrightarrow{M_0\,M_2}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლები n ვექტორთან არანულოვანია.) იხ. ნახ. (ა) , (ბ).



(ა)



(ბ)

თუ მივიღეთ ორივე დადებითი რიცხვი, ანუ სკალარული ნამრავლები

$$\overrightarrow{M_0\,M_1}\cdot\vec{n}>0 \quad \text{და} \quad \overrightarrow{M_0\,M_2}\cdot\vec{n}>0\ ,$$

(ე.ი. კუთხეები M_1M_0n და nM_0M_1 მახვილია, იხ. ნახ. ა))

ან ორივე უარყოფითი, ანუ სკალარული ნამრავლები

$\overrightarrow{M_0\,M_1}\cdot\vec{n}<0$ და $\overrightarrow{M_0\,M_2}\cdot\vec{n}<0$,

(ე.ი კუთხეები M_1M_0n და nM_0M_1 ბლაგვია)

მაშინ ეს ორი წერტილი წრფის ერთ მხარეს მდებარეობს.

ანალოგიურად თუ მივიღეთ ხსვადახვა ნიშნიანი რიცხვები მაშინ ეს ორი წერტილი წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს. იხ. ნახ ბ).

წრფის სპეციალური სახის განტოლებები.

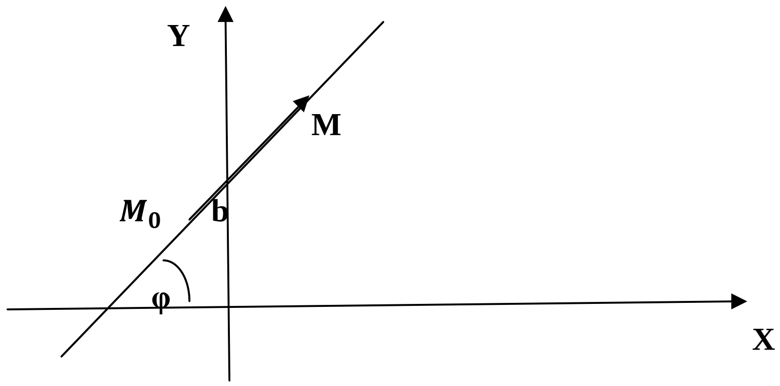
ესენია:

1. წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით;
2. წრფის პარამეტრული განტოლება;
3. წრფის ვექტორული განტოლება;
4. წრფის კანონიკური განტოლება;

5. ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება;
6. წრფის განტოლება მონაკვეთებში;
7. წრფის ნორმალური განტოლება;

წრფის განტოლებას კუთხური კოეფიციენტით აქვს სახე: y=kx+b,

სადაც k=tg φ, φ კუთხეა წრფესა და OX ღერძს შორის, ხოლო b არის წრფისა და OY ღერძის გადაკვეთის წერილის ორდინატი.



თუ წრფე გადის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე, მაშინ

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = tg\varphi, \quad k = tg\varphi, \quad b = y_0 - x_0 tg\varphi \ .$$

მაგალითი. ვიპოვოთ წრფის განტოლება რომელიც გადის M(2,-2) წერტილზე და აბცისთა ღერძთან ადგენს კუთხეს π/3.

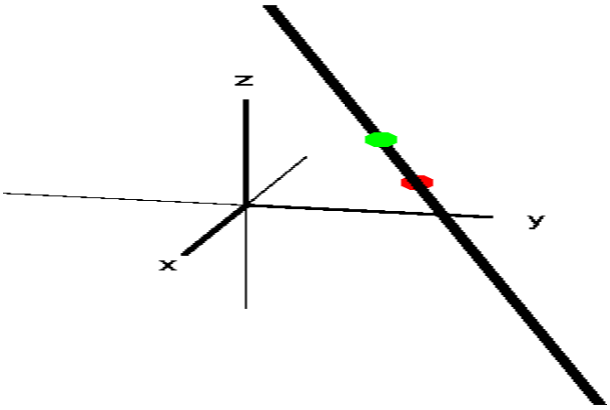
რადგან k=tg π/3=$\sqrt{3}$ განტოლებას აქვს სახე y=$\sqrt{3}$ x+b; b-ს გასაგებად ჩავსვათ M წერტილის კოორდინატები: -2=$\sqrt{3} \times 2 + b$, ანუ b=-2-2$\sqrt{3}$. მივიღეთ y=$\sqrt{3}$ x-2-2$\sqrt{3}$.

წრფის პარამეტრულ განტოლებას აქვს სახე: $\begin{cases} x - x_0 = lt \\ y - y_0 = mt \end{cases}$

ეს განტოლება განსაზღვრავს წრფეს რომელიც გადის $X_0(x_0,y_0)$ წერტილზე და პარალელურია $v=(l,m)$ ვექტორის. წერტილი $X(x,y)$ ეკუთვნის ამ წრფეს ნიშნავს რომ $\overrightarrow{X_0X}$ პარალელურია $v=(l,m)$ ვექტორის.

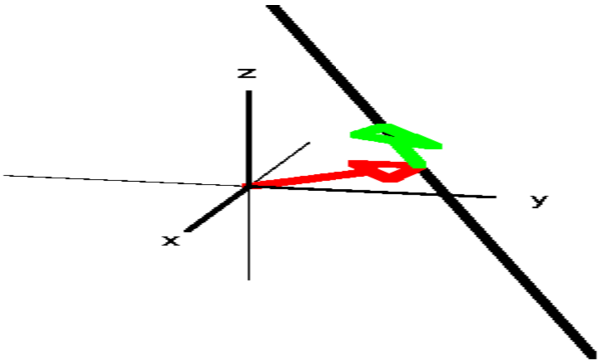
უფრო დეტალურად:

როგორც ვიცით წრფეს მისი ორი წერტილი განსაზღვრავს, ანუ მოცემულ X_0 და X_1 წერტილებზე გაივლება ერთადერთი წრფე.



ეს ორი წერტილი შეიძლება შევცვალოთ მათი რადიუს ვექტორებით, $\boldsymbol{X_0}$ და $\boldsymbol{X_1}$.

განვიხილოთ ვექტორები $\boldsymbol{X_0}$ და $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{X_1}-\boldsymbol{X_0}$.



ავიღოთ ჩვენ წრფეზე ნებისმიერი X წერტილის რადიუს ვექტორი $\boldsymbol{X}$. მაშინ ვექტორი $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X_0}$ პარალელურია $\boldsymbol{v}$ ვექტორის, ანუ ეს ორი ვექტორი პროპორციულია : $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X_0}=\boldsymbol{v}\boldsymbol{t}$., რაღაც t -ნამდვილი რიცხვისთვის.

ამრიგად გვაქვს განტოლება

$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X_0}=\boldsymbol{v}\boldsymbol{t} \qquad (1)$$

(1) - განტოლება არის იმის პირობა, რომ X წერტილი ძევს წრფეზე, რომელიც X_0 წერტილზე გაივლება v ვექტორის პარალელურად.

თუ (1) განტოლებას გადავწერთ კოორდინატობრივად მივიღებთ წრფის პარამეტრულ განტოლებას.

(1) განტოლებას ეწოდება წრფის წრფის პარამეტრიზაცია, სადაც t არის თავისუფალი პარამეტრი, რომელიც იღებს ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობას.

ამრიგად t პარამეტრის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება რადიუს ვექტორი, რომლის ბოლო ჩვენს წრფეზეა.

მაგალითად როც $t = 0$, მაშინ $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_0}$;

$t = 1$ მნიშვნელობას შეესაბამება $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{X_1}$.

t-პარამეტრი გაირბენს ნამდვილ რიცხვით წრფეს $(-\infty, +\infty)$, ხოლო შესაბამისი რადიუს ვექტორის ბოლო გაირბენს (1) განტოლებით მოცემულ წრფეს.

წრფის კანონიკური განტოლებას აქვს სახე: $\boldsymbol{\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}}$,

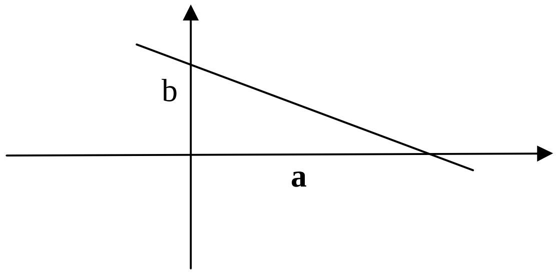
ეს განტოლება განსაზღვრავს ისევ წრფეს რომელიც გადის $M_0(x_0,y_0)$ წერტილზე და პარალელურია $\boldsymbol{s} = (l,m)$ ვექტორის. ამ განტოლების მისაღებად შევნიშნოთ რომ $\overrightarrow{M_0\mathrm{M}}$ პარალელურია $\boldsymbol{s} = (l,m)$ ვექტორის, ანუ ამ ვექტორების კოორდინატები პროპორციულია.

ორ მოცემულ $\boldsymbol{M_1(x_1,y_1)}$, $\boldsymbol{M_2(x_2,y_2)}$ წერტილზე გამავალ წრფის განტოლებას აქვს სახე: $\boldsymbol{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$.

ამ განტოლების მისაღებად შევნიშნოთ რომ $\overrightarrow{MM_1}$ პარალელურია $\overrightarrow{M_1M_2}$ ვექტორის, ანუ შესაბამისი კოორდინატები პროპორციულია.

წრფის განტოლება მონაკვეთებში აქვს სახე: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

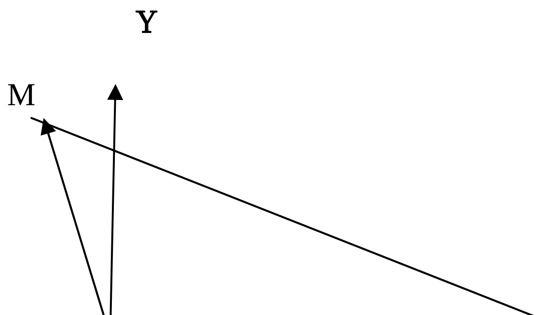
ეს განტოლება განსაზღვრავს წრფეს, რომელიც საკოორდინატო ღერძებზე ჩამოჭრის a და b მონაკვეთებს.



სხვა სიტყვებით, საძიებელი წრფე გადის წერტილებზე კოორდინატებით (a,0) და (0,b). ამ ორ წერტილზე გამავალ წრფეს კი აქვს განტოლება $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$. გავამარტივოთ და მივიღებთ წრფის განტოლებას მონაკვეთებში.

წრფის ნორმალურ განტოლება აქვს სახე: $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$,

სადაც **n=(cosφ, sinφ)** ერთეულოვანი ნორმალური რადიუს ვექტორია , φ-კუთხეა **n** ვექტორსა და აბცისთა ღერძს **OX**-შორის, **p** მანძილია სათავიდან წრფემდე.



შევნიშნოთ რომ გამოსახულება $\boldsymbol{x\cos\varphi + y\sin\varphi}$ არის $\overrightarrow{OM}$=(x,y) და n=(cosφ, sinφ) ერთეულოვანი ნორმალის სკალარული ნამრავლი. განტოლება გვეუბნება რომ ეს სკალარული ნამრავლი უდრის p-ს. მართლაც, რადგან n ვექტორი ერთეულოვანია სკალარული ნამრავლი $\overrightarrow{OM}$. n უდრის $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის გეგმილს n ვექტორის მიმართულებაზე, (გავიხსენოთ გეგმილის განსაზღვრება) რაც ნახატიდან ჩანს რომ p-ს ტოლია.

წრფეების ურთიერთგანლაგება სიბრტყეზე

სიბრტყეზე ორი წრფე შეიძლება იყოს პარალელური (მათ შორის ერთმანეთს დამთხვეული) ან თანამკვეთი(მათ შორის მართობული). ორი L_1, L_2 წრფის ურთიერთგანლაგება შეიძლება განისაზღვროს მატი ზოგადი განტოლებებით:

L_1: a_1x+b_1y+c_1=0 და L_2: a_2x+b_2y+c_2=0.

გავიხსენოთ ამ წრფეების ნორმალური ვექტორებია შესაბამისად

n_1=(a_1,b_1) და n_2=(a_2,b_2), ამიტომ

$L_1 \mid\mid L_2 \ <=> \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$,

ხოლო წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა ნიშნავს:

$L_1 = L_2 \ <=> \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

მაგალითი. წრფეები x+2y+5=0 და 2x+4y-5=0 პარალელურია, მაგრამ არ ემთხვევა:

1/2 =2/4 $\neq 5/(-5)$.

ორი წრფის პერპენდიკულარობა კი ნიშნავს მათი ნორმალური ვექტორების მართობულობას:

$L_1 \perp L_2 <=> a_1a_2+b_1b_2=0$.

მაგალითი. წრფეები x+2y-3=0 და 2x-y+7=0 მართობულია: $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)=0$.

თუ წრფეების განტოლებები მოცემულია კუთხური კოეფიციენტებით $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$, მაშინ

წფეები პარალელურია $\Leftrightarrow$ $k_1 = k_2$,

წფეები მართობულია $\Leftrightarrow$ $k_1k_2= -1$.

(ეს იქიდან გამოდის რომ $k_1= -\frac{a_1}{b_1}$, $k_2= -\frac{a_2}{b_2}$).

კუთხე ორ წრფეს შორის.

L_1 და L_2 წრფეები გადაკვეთისას ორ მოსაზღვრე კუთხეს ქმნიან. მათ შორის უმცირესი გამოითვლება ფორმულით:

$$\cos\varphi = \frac{|n_1n_2|}{|n_1||n_2|} = \frac{|a_1 a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

აქ გამოვიყენეთ n_1, n_2 ნორმალების სკალარული ნამრავლის, და ვექტორის სიგრძის ფორმულა (გავიხსენოთ).

კუთხური კოეფიციენტებით საშუალებით $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$, იგივე კუთხე გამოითვლება ფორმულით:

$$tg\varphi=tg(\varphi_1 - \varphi_2)=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}.$$

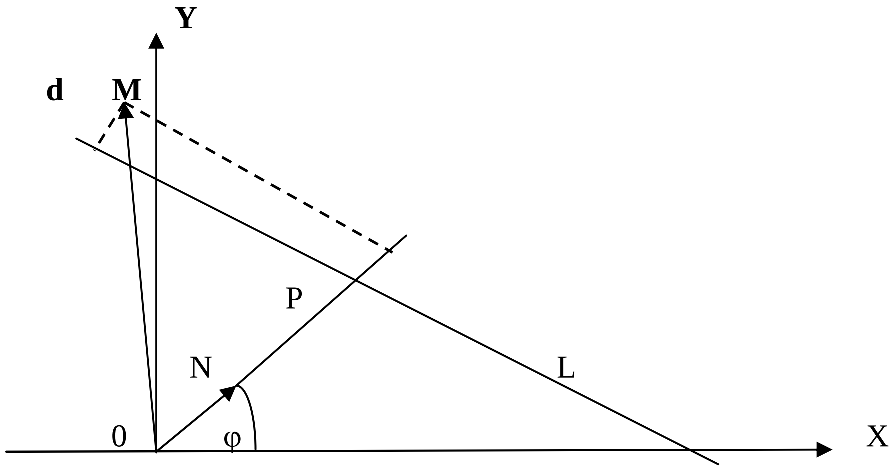
მანძილი წერტილიდან წრფემდე.

მოცემული M_0 წერტილიდან მანძილის გამოსათვლელად L წრფემდე წრფის

ნორმალური სახის განტოლებაა მოხერხებული. გავიხსენოთ ეს განტოლება:

$$\boldsymbol{x cos\varphi + y sin\varphi - p = 0}, \qquad (1)$$

სადაც n=(cos$\boldsymbol{\varphi}$, sin$\boldsymbol{\varphi}$) ერთეულოვანი ნორმალური რადიუს ვექტორია , $\boldsymbol{\varphi}$-კუთხეა n ვექტორსა და აბცისთა ღერძს OX-შორის, p მანძილია სათავიდან $\boldsymbol{L}$ წრფემდე.



მანძილი $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ წერტილიდან (1) განტოლებით მოცემულ წრფემდე გამოითვლება ფორმულით

$$\boldsymbol{d} = |\, \boldsymbol{x cos\varphi + y sin\varphi - p}|. \qquad (2)$$

დამტკიცება. $p + d$ არის $\overrightarrow{OM}\,(x, y)$ ვექტორის გეგმილი $\vec{n}(\boldsymbol{cos\varphi}, \boldsymbol{sin\varphi})$ ნორმალის მიმართულებაზე. გეგმილის განსაზღვრებით (გავიხსენოთ) ეს იგივეა რაც სკალარული ნამრავლი $\overrightarrow{OM}.\ \boldsymbol{n}$, ანუ:

p+d=$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{x cos\varphi + y sin\varphi},$ და აქედან გავიგებთ $\boldsymbol{d}$-ს.

ბოლოს ვთქვათ გვაქვს იგივე ამოცანა მაგრამ წრფე მოცემულია ზოგადი სახით:

მანძილი $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ წერტილიდან $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ წრფემდე გამოითვლება ფორმულით

$$\mathbf{d} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (3)$$

დამტკიცება. გამოსახულება $\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ანუ, $\sqrt{a^2+b^2}$-ზე გაყოფა წრფის ზოგად განტოლებას მიიყვანს ნორმალურ სახეზე. მართლაც

$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \mathbf{x}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathbf{y}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ახლა x და y ცვლადების კოეფიციენტების ჯამი უდრის 1-ს, ანუ გვაქვს ნორმალური სახის განტოლება და ვისარგებლოთ (2) ფორმულით.

3 . სიბრტყე და წრფე სივრცეში

სიბრტყე

განვიხილოთ პირველი რიგის განტოლება სამი უცნობით

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}, \quad \text{სადაც} \quad \boldsymbol{A^2 + B^2 + C^2 \neq 0} \qquad (1)$$

ანუ A,B,C კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არანულოვანია.

თეორემა. **ნებისმიერი სიბრტყე სივრცეში მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოიცემა (1) განტოლებით და პირიქით, ნებისმიერი ასეთი განტოლება მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში აღწერს სიბრტყეს.**

დამტკიცება. მართლაც ვთქვათ $\boldsymbol{\pi}$ სიბრტყე მოცემულია თავისი M_0 წერტილით და **n** არანულოვანი ნორმალური ვექტორით. მაშინ სივრცე სამ ნაწილად გაიყოფა: ერთი ნაწილი სიბრტყის წერტილებია, დანარჩენი ორი ნაწილი კი სიბრტყის სხვადასხვა მხარეს მდებარე წერტილებისგან შედგება. ის თუ ამ სამი ნაწილიდან სად მდებარეობს სივრცის ნებისმიერი M წერტილი განისაზღვრება სკალარული ნამრავლის n $\overrightarrow{M_0M}$ ნიშნით. კერძოდ:

თუ M წერტილი π სიბრტყეზე მდებარეობს მაშინ n $\overrightarrow{M_0M}$=0 რადგან კუთხე n და $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორებს შორის მართია. თუ ეს M წერტილი π სიბრტყეზე არ მდებარეობს მაშინ ეს კუთხე მახვილია და n $\overrightarrow{M_0M}$>0, ან ბლაგვია და n $\overrightarrow{M_0M}$<0. ამ სკალარული ნამრავლის ნიშანი სიბრტყის ერთ მხარეს მდებარე წერტილებითვის ერთნაირია.

ავღნიშნოთ კოორდინატები: $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M = (x, y, z)$, $n = (A, B, C)$. მაშინ $\overrightarrow{M_0M}$=$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ და თუ M წერტილი π სიბრტყეზე მდებარეობს გვაქვს:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

ანუ ფრჩხილების გახსნით გვაქვს:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ სადაც } D = -Ax_0 + By_0 - Cz_0.$$

აქ A,B,C კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არანულოვანია, რადგან $n = (A, B, C)$ ვექტორი არანულოვანია. ამით დამტკიცდა თეორემის პირველი ნაწილი, ე.ი. რომ სიბრტყე არის (1) განტოლების გეომეტრიული სახე.

თეორემის მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად ავირჩიოთ რიცხვები $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1) განტოლებას. (ასეთი რიცხვები არსებობს, მაგ. თუ $A \neq 0$, შეგვიძლია ავიღოთ $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, x_0=$-\frac{D}{A}$). ამ რიცხვებს შეესაბამება წერტილი $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, რომელიც ეკუთვნის (1) განტოლების გეომეტრიულ სახეს. ვაქვს

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \qquad (2)$$

გამოვაკლოთ (1)-ს (2), მივიღებთ

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3)$$

(3) ტოლობა არის ორთოგონულობის კრიტერიუმი ვექტორებისთვის n =(A,B,C) და $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, (y - y_0, z - z_0)$, სადაც წერტილი M= (x, y, z). ეს კრიტერიუმი

სრულდება იმ სიბრტყის წერტილებისთვის რომელიც გადის M_0 წერტილზე და n =(A,B,C) ვექტორის მართობულია (და არ სრულდება სივრცის სხვა წერტილებისთვის.) ე.ი. (1) არის აღნიშნული სიბრტყის განტოლება. ■

განსაზღვრება. **(1) განტოლებას $Ax+By+Cz+D=0$ ეწოდება სიბრტყის ზოგადი განტოლება. კოეფიციენტებს A,B,C აქვს გეომეტრიული აზრი: ვექტორი n=(A,B,C) სიბრტყის მართობულია, ამიტომ მას ეწოდება სიბრტყის ნორმალური ვექტორი.**

სიბრტყის სპეციალური სახის განტოლებები.

ესენია:

სიბრტყის ვექტორული და პარამეტრული განტოლებები;

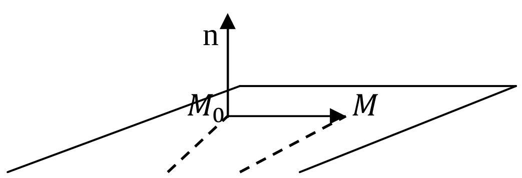
სამ მოცემულ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება;

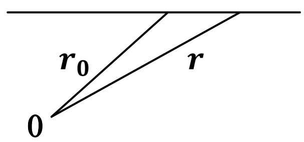
სიბტყის განტოლება მონაკვეთებში;

სიბრტყის ნორმალური განტოლება;

1. ვთქვათ r_0 და r M_0 და M წერტილების რადიუს ვექტორებია. მაშინ $\overrightarrow{\boldsymbol{M_0M}}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}$ და პირობა რომ სიბრტყე გადის M_0 წერტილზე და n ვექტორის მართობულია შეგვიძლია ჩავწეროთ სკალარული ნამრავლის გამოყენებით (ანუ n და $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია)

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})=0, \qquad (4)$$





(4) განტოლებას ეწოდება **სიბრტყის ვექტორული განტოლება.**

ფიქსირებულ სიბრტყეზე (სივრცეში) ავირჩიოთ ორი არანულოვანი და არაკოლინეარული ვექტორი, ანუ ბაზისი e_1, e_2. (გავიხსენოთ ბაზისი).

ანუ არსებობს რიცხვები t_1, t_2 რომ

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M_0M}} = t_1e_1 + t_2e_1,$$

ანუ

$$\boldsymbol{r - r_0 = t_1e_1 + t_2e_1}. \qquad (5)$$

(5) განტოლებას ეწოდება **სიბრტყის პარამეტრული განტოლება, პარამეტრებით $\boldsymbol{t_1, t_2} \in \boldsymbol{R}$.**

მოცემულ სამ წერტილზე $\boldsymbol{M_1 = (x_1, y_1, z_1)}$, $\boldsymbol{M_2 = (x_2, y_2, z_2)}$, $\boldsymbol{M_3 = (x_3, y_3, z_3)}$, გამავალი სიბრტყის განტოლებაა

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x - x_1} & \boldsymbol{y - y_1} & \boldsymbol{z - z_1} \\ \boldsymbol{x_2 - x_1} & \boldsymbol{y_2 - y_1} & \boldsymbol{z_2 - z_1} \\ \boldsymbol{x_3 - x_1} & \boldsymbol{y_3 - y_1} & \boldsymbol{z_3 - z_1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}\,. \qquad \textbf{(6)}$$

დამტკიცება. უნდა ვაჩვენოთ რომ ამ მოცემულ სამ წერტილზე გამავალ სიბრტყეზე მდებარე M=(x,y,z) წერტილების სიმრავლე მოიცემა (6) განტოლებით.

(6) ნიშნავს რომ სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი ნულია:

კერძოდ ამ სამი ვექტორის კოორდინატებია დეტერმინანტის სტრიქონები, ანუ:

$\overrightarrow{M_1M} = (\boldsymbol{x - x_1, y - y_1, z - z_1})$;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (\boldsymbol{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1})$ და

$\overrightarrow{M_1M_3} = (\boldsymbol{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1})$

ვექტორებია შერეული ნამრავლი ნულია,

ეს კი არის ამ სამი ვექტორის კომპლანარობის (ანუ ერთ სიბრტყეზე მდებარეობის) კრიტერიუმი. ანუ ეს არის კრიტერიუმი M, $M_1, M_2, M_3,$ წერტილების ერთ სიბრტყეზე ყოფნის. რ.დ.გ.

შევნიშნოთ რომ თუ (6)-ს გავშლით პირველი სტრიქონის მიხედვით გვექნება

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}(x - x_1) - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}(y - y_1) +}$$

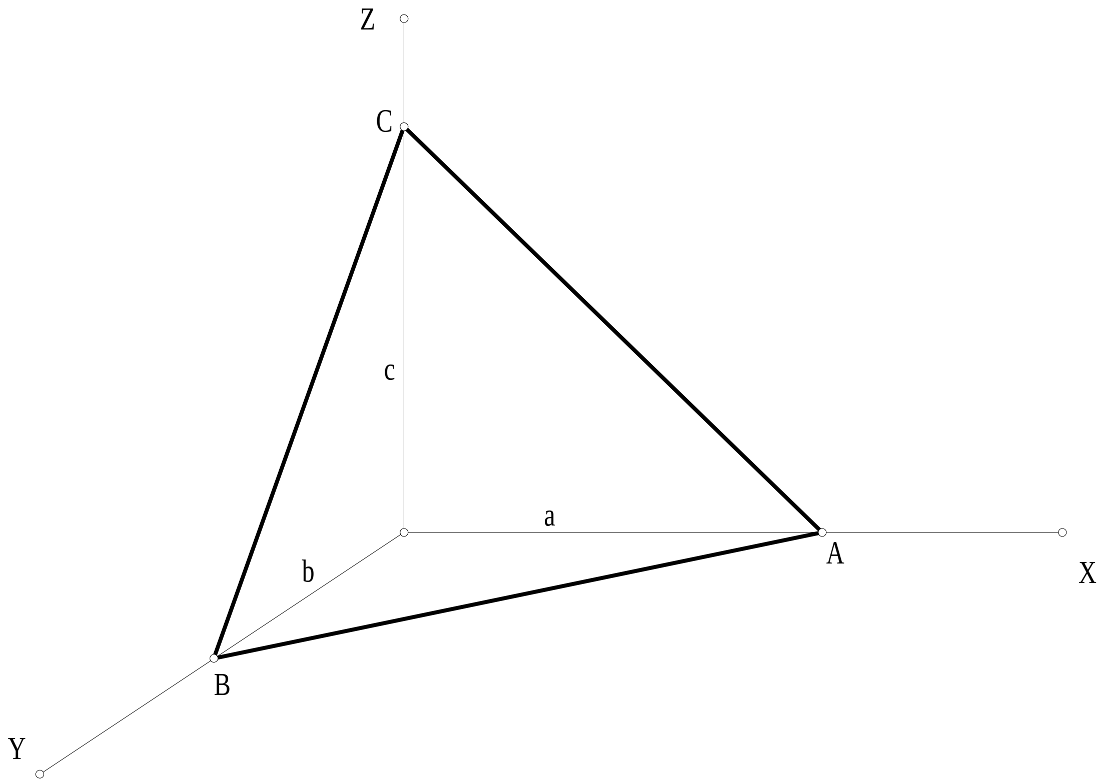
$$\boldsymbol{+ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}(z - z_1) = 0} \qquad (7).$$

და ფრჩხილების გახსნის მერე მივიღებთ სიბრტყის ზოგად განტოლებას.

შევნიშნოთ რომ (7)-ში მონაწილე მეორე რიგის დერერმინანტები არიან

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ და $\overrightarrow{M_1M_3} = (\boldsymbol{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1})$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის კოორდინატები. რადგან ეს ვექტორული ნამრავლი ორივე ვექტორის და ამიტომ მათზე გამავალი სიბრტყის მართობულია, ამიტომ ის სიბრტყის ნორმალი ვექტორია.

სიბტყის განტოლება მონაკვეთებში



ვთქვათ სიბრტყე საკოორდინტო ღერძებზე ჩამოჭრის მონაკვეთებს $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, მაშინ მისი განტოლებაა

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad \textbf{(8).}$$

დამტკიცება. ეს სიბრტყე გადის წერტილებზე $A=(a,0,0); B=(0,b,0);\ C=(0,0,c)$.

გამოვიყენოთ (6):

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ $bc(x-a)+acx+abz=0.$

გავყოთ abc-ზე და გავამარტივოთ, მივიღებთ (8)-ს.

წრფე სივრცეში.

წრფე სივრცეში შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ორი სიბრტყის თანაკვეთა. ვთქვათ ორი სიბრტყე

π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, და π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

პარალელური არაა, მაშინ მათი თანაკვეთა არის წრფე. წერტილი $M(x, y, z)$ ძევს ამ წრფეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ იგი ძევს ორივე სიბრტყეზე, ანუ არის

$$\begin{cases} \boldsymbol{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0} \\ \boldsymbol{A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0} \end{cases} \quad (1)$$

სისტემის ამონახსნი.

(1)-ს ეწოდება წრფის ზოგადი განტოლება სივრცეში.

წრფის სპეციალური სახის განტოლებები.

ესენია:

1. **წრფის პარამეტრული განტოლება;**
2. **წრფის კანონიკური განტოლება;**
3. **ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება;**

წრფის პარამეტრულ განტოლებას აქვს სახე: $\begin{cases} \boldsymbol{x - x_0 = lt} \\ \boldsymbol{y - y_0 = mt} \\ \boldsymbol{z - z_0 = nt} \end{cases}$ **(2).**

ეს განტოლება განსაზღვრავს წრფეს რომელიც გადის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე და პარალელურია $\vec{s}(l, m, n)$ ვექტორის.

წერტილი M(x,y) ეკუთვნის ამ წრფეს ნიშნავს რომ $\overrightarrow{M_0\mathrm{M}}$ პარალელურია $\vec{s}(l, m, n)$ ვექტორის, ანუ რომ $\overrightarrow{M_0\mathrm{M}} = t\vec{s}$. თუ ამ ბოლო ტოლობას ჩავწერთ კოორდინატებში მივიღებთ პარამეტრულ განტოლებას.

წრფის კანონიკური განტოლებას აქვს სახე: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ (3).

ეს განტოლება განსაზღვრავს ისევ წრფეს რომელიც გადის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე და პარალელურია $\vec{s}(l,m,n)$ ვექტორის. ამ განტოლების მისაღებად შევნიშნოთ რომ $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ პარალელურია $\vec{s}(l,m,n)$ ვექტორის, ანუ ამ ვექტორების კოორდინატები პროპორციულია.

ორ მოცემულ $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილზე გამავალ წრფის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z-z_1} \qquad (4).$$

ამ განტოლების მისაღებად შევნიშნოთ რომ $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$ პარალელურია $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ ვექტორის, ანუ შესაბამისი კოორდინატები პროპორციულია.

წრფის კანონიკური განტოლებიდან პარამეტრულ განტოლებაზე გადასვლა (ანუ (3)-დან (2)-ზე) **ან პირიქით ადვილია. ეს ხდება პარამეტრის შემოღებით ან პირიქით გამორიცხვით.**

მაგალითი ვთქვათ წრფე მოცემულია პარამეტრული განტოლებით

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=3t \\ z=-1+2t \end{cases} \qquad (ა)$$

კანონიკური განტოლების მისაღებდ გამოვრიცხოთ t პარამერტი, ანუ ამოვხსნათ t სამივე ტოლობიდან: $t=x-2$; $t=\frac{y}{3}$; : $t=\frac{z+1}{2}$ და მარჯვენა მხარეები გავუტოლოთ, მივიღებთ კნონიკურ განტოლებას:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2} \qquad (ბ).$$

ეხლა პირიქით თუ გვაქვს (ბ), მაშინ შემოვიღებთ პარამეტრს, ანუ გავუტოლებთ ამ ყველაფერს t-ს: $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}=t$ და ამოვხსნით x,y და z-ს. მივიღებთ (ა)-ს.

წრფის კანონიკური განტოლებიდან ზოგად განტოლებაზე გადასვლა (ანუ (ანუ (3)-დან (1)-ზე) **ხდება ასე:**

(3) არის ორმაგი ტოლობა. ადავწეროთ ეს ტოლობები სისტემის სახით

$$\begin{cases}\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}\\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{z-z_0}{n}\end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} mx-ly+(ly_0-mx_0)=0\\ nx-lz+(lz_0-nx_0)=0\end{cases}$$

რაც არის კერძო შემთხვევა წრფი ზოგადი განტოლების.

წრფის ზოგადი განტოლებიდან კანონიკური განტოლებაზე გადასვლა (ანუ (1)-დან (3)-ზე) **ხდება ასე:**

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases} \qquad (1)$$

სისტემა შედგება π_1 და π_2 სიბრტყეების განტოლებებისგან:

π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, და π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

π_1 სიბრტყის ნორმალური ვექტორია $n_1=(A_1,B_1,C_1)$;

π_2 სიბრტყის ნორმალური ვექტორია $n_2=(A_2,B_2,C_2)$.

ამ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი $n_1\times n_2$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც (1)-ით მოცემული წრფის მიმმართველი ვექტორი $\vec{s}(l,m,n)$. მართლაც $n_1\times n_2$ ვექტორი მართობულია n_1 და n_2 ვექტორების (ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრებით) ე.ი პარალელურია π_1 და π_2 სიბრტყეების და მაშასადამე მათი თანაკვეთით მიღებული წრფის. კანონიკური განტოლების დასაწერად გვინდა კიდევ ამ წრფეზე მდებარე ერთი რომელიმე წერტილის კოორდინატები, რასაც გავიგებთ (1)-სისტემიდან, მაგალითად ჩასმით $z=0$.

მაგალითი. წრფის ზოგადი განტოლებაა $\begin{cases}x-y+z-2=0\\ x+y-z=0\end{cases}$

$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2j + 2k$, ე.ი. წრფის მიმმართველი ვექტორია $s = (0,2,2)$,

შეგვიძლია შევცვალოთ მისი პარალელური ვექტორით (0,1,1) .

წრფეზე მდებარე რომელიმე ერთი წერტილის საპოვნელად (1)-ში ჩავსვათ z=0: $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$. ამოხსნა გვაძლევს $x = 1,\ y = -1,$

ე.ი. წერტილი $M(1, -1,0)$ ეკუთვნის წრფეს და მისი მიმმართველი ვექტორია $(0,1,1)$, ამიტომ წრფის კანონიკური განტოლებაა

$\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}.$

წრფეების და სიბრტყეების ურთიერთგანლაგება სივრცეში

სიბრტყეების ურთიერთგანლაგება.

ვთქვათ სივრცის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია ორი სიბრტყე ზოგადი განტოლებებით შესაბამისად

$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_2 = 0$ და $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

სიბრტყის პარალელობის პირობაა მათი ნორმალური ვექტორების კოლინეარობა, ხოლო ორი ვექტორის კოლინეარობის პირობაა მათი კოორდინატების პროპორციულობა. ე.ი.

სიბრტყეების პარალელობა $\boldsymbol{\pi_1 \,||\, \pi_2}$ ჩაიწერება ასე $\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$**.**

სიბრტყეების დამთხვევა $\boldsymbol{\pi_1 = \pi_2}$ ჩაიწერება ასე $\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}}$**.**

სიბრტყის მართობულობის პირობაა მათი ნორმალური ვექტორების მართობულობა, ხოლო ორი ვექტორის მართობულობის პირობაა მათი სკალარული ნამრავლის ნულობა ე.ი.

სიბრტყეების მართობულობა $\boldsymbol{\pi_1 \perp \pi_2}$ ჩაიწერება ასე $\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$.

სიბრტყეების შორის კუთხე. სიბრტყეების შორის ორი კუთხიდან ერთი ემთხვევა მათ ნორმალურ ვექტორებს შორის კუთხეს α, მეორე კი ტოლია კუტხის π-α.

სკალარული ნამრავლის განსაზვრების თანახმად

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.}$$

წრფეების ურთიერთგანლაგება.

ორი წრფე სივრცეში შეიძლება ა) ემხვეოდეს ერთმანეთს, ბ) იყოს პარალელური და არ ემთხვეოდეს ერთმანეთს, გ) თანაიკვეთებოდეს ან დ) იყოს აცდენილი. ჩავწეროთ ეს შემთხვევები წრფეათა განტოლებების ტერმინებში.

ვთქვათ სივრცის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია ორი წრფე მათი კანონიკური განტოლებებით შესაბამისად შესაბამისად

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1};$$

$$L_1: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

ე.ი. L_1 წრფე გადის $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე და მისი მიმმართველი ანუ მგეზავი ვექტორია $s_1(l_1, m_1, n_1)$.

ანალოგიურად, L_2 წრფე გადის $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილზე და მისი მგეზავი ვექტორია $s_2(l_2, m_2, n_2)$.

ორი წრფის დამთხვევა ნიშნავს რომ ისინი პარალელურია ანუ მათი მგეზავი ვექტორების პარალელურია, ე.ი.

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \qquad (1)$$

და აქვთ ერთი მაინც საერთო წერტილი. ვთქვათ ეს საერთო წერტილია x_2, ანუ x_2 აკმაყოფილებს L_1 წრფის განტოლებას. **ე.ი.**

$$\frac{x_2-x_1}{l_1}=\frac{y_2-y_1}{m_1}=\frac{z_2-z_1}{n_1} \qquad (2).$$

L_1=L_2 ჩაიწერება ასე: სრულდება (1) და (2)

$L_1 \mid\mid L_2$ მაგრამ არ ემთხვევა ნიშნავს სრულდება (1) და არ სრულდება (2).

თუ ორი წრფე აცენლი არაა მაშინ ისინი ერთ სიბრტყეშია, ანუ ვექტორები **$s_1(l_1, m_1, n_1)$, $s_2(l_2, m_2, n_2)$, და $\overrightarrow{M_1 M_2}$= $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ ერთ სიბრტყეშია (კომპლანარულია), რაც ნიშნავს**

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3).$$

ე.ი

L_1 და L_2 წრფეები იკვეთება ნიშნავს, სრულდება (3) და არ სრულდება (2).

L_1 და L_2 წრფეები აცდენილია ნიშნავს არ სრულდება (3.)

წრფისა და სიბრტყის ურთიერთგანლაგება

ვთქვათ სივრცის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია $\boldsymbol{\pi}$ სიბრტყე ზოგადი განტოლებით

$\boldsymbol{\pi}$: $\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}$,

და $\boldsymbol{L}$ წრფე კანონიკური განტოლებით

$\boldsymbol{L}$: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$.

კვლავ გავიხსენოთ რომ ეს ნიშნავს: **ვექტორი კოორდინატებით** $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ არის $\boldsymbol{\pi}$ **სიბრტყის ნორმალური ვექტორი,** ხოლო ვექტორი კოორდინატებით $(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ არის $\boldsymbol{L}$ **წრფის მგეზავი და** $\boldsymbol{L}$ **წრფე გადის** $(\boldsymbol{x_0},\ \boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0})$ **წერტილზე.**

ამიტომ ზემოთმოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად ვასკვნით რომ:

$\boldsymbol{L}$ **ძევს** $\boldsymbol{\pi}$ **სიბრტყეში ნიშნავს წერტილი** $(\boldsymbol{x_0},\ \boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0})\in\boldsymbol{\pi}$ **და** $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ **მართობულია** $(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$, **ანუ**

$\boldsymbol{L}$ **ძევს** $\boldsymbol{\pi}$ **სიბრტყეში** $\leftrightarrow$ $\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases}$;

$\boldsymbol{L}\,||\,\boldsymbol{\pi}$ **სიბრტყის, მაგრამ არ ეკუთვნის** $\leftrightarrow$ $\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases}$;

$\boldsymbol{L}$ **კვეთს** $\boldsymbol{\pi}$ **სიბრტყეს** $\leftrightarrow$ $\boldsymbol{Al+Bm+Cn\neq 0}$.

4. სიბრტყის მოძრაობა, ორთოგონული გარდაქმნები.

სკოლიდან ვიცით თუ რა დიდი მნიშვნელობა აქვს გეომეტრიაში ფიგურების ტოლობის (კონგრუენტობის) ცნებას და მასთან მჭიდროდ დაკავშირებულ **მოძრაობის** ცნებას.

თვალსაჩინოდ მოძრაობა (ვთქვათ სიბრტყის) არის გარდაქმნა, (სიბრტყის ასახვა თავისთავზე) რომლის დროს "არაფერი მნიშვნელოვანი არ ხდება", ანუ სიგრძეები და კუთხეები შენარჩუნებულია (სიბრტყის ფიგურები მხოლოდ "ადგილს იცვლიან"), ვექტორების ჯამი გადადის ვექტორების ჯამში, რიცხვის ვექტორზე ნამრავლი–რიცხვის ვექტორზე ნამრავლზე და ა.შ.

როგორ მოიცემა ევკლიდური სივრცის მოძრაობა?

ამისათვის ავიღოთ ორი ნებისმიერი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა $Oxyz$ და $O'x'y'z'$ და სივრცის ყოველ A წერტილს შევუსაბამოთ ის A' წერტილი, რომელსაც $O'x'y'z'$ სისტემაში იგივე კოორდინატები აქვს როგორიც ჰქონდა A წერტილს $Oxyz$ სისტემაში.

ამასთან მოძრაობამ არ უნდა შეცვალოს სიბრტყის (ანუ მართკუთხა საკოორდინატო სისტემის) ორიენტაცია, ანუ **მარჯვენა** სისტემა (ანუ მობრუნება Ox ღერძიდან Oy ღერძისკენ ხდება საათის ისრის საწინააღმდეგოდ) უნდა გადაიყვანოს მარჯვენაში. ამ შემთხვევაში ამბობენ რომ A და A' წერტილების კოორდინატები ტოლია **ერთსახელა** მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ და $O'x'y'z$ სისტემებში.

ფორმალურად გვაქვს:

განსაზღვრება: ევკლიდური სივრცის (ან სიბრტყის) მოძრაობა არის მისი ნებისმიერი გარდაქმნა (თავის თავზე ასახვა) ერთსახელა მართკუთხა საკოორდინატთა სისტემებში კოორდინატების ტოლობის მიხედვით.

ეს ნიშნავს რომ ნებისმიერი მოძრაობა ცალსახად განისაზღვრება ორი ასეთი საკოორდინატო სისტემით (თანაც პირველი ნებისმიერად შეიძლება ავიღოთ) და ყოველ A წერტილს გადაიყვანს ისეთ A' წერტილში, რომელსაც $O'x'y'z$ სისტემაში იგივე კოორდინატები აქვს, რაც A წერტილს $Oxyz$ სისტემაში.

ვთქვათ $Oxyz$ მარჯვენა მართკუთხა საკოორდინატო სისტემის მგეზავებია i, j, k და $O'x'y'z'$ მარჯვენა მართკუთხა საკოორდინატო სისტემის მგეზავები $-$ i', j', k'. ზემოთ რაც ვთქვით ნიშნავს:

$$\text{თუ} \qquad \overrightarrow{OA} = ai + bj + ck,$$

$$\text{მაშინ} \qquad \overrightarrow{OA'} = ai' + bj' + ck'.$$

n განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის მოძრაობების სიმრავლე (რომელიც სხვათაშორის არის ჯგუფი) აღინიშნება სიმბოლოთი $Ort^{+}(n)$, ანუ სიბრტყის შემთხვევაში გვაქვს $Ort^{+}(2)$, სივრცისთვის $Ort^{+}(3)$.

თუ ზემოთმოყვანილ განსაზღვრებაში არ მოვითხოვთ ერთსახელა საკოორდინატო სისტემებს (ანუ ორიენტაციის შენახვას), მაშინ მოძრაობების მაგივრად გვექნება **ორთოგონული გარდაქმნები** , რომელთა სიმრავლე (რაც აგრეთვე წარმოადგენს ჯგუფს) აღინიშნება $\boldsymbol{Ort(3)}$, (ან $\boldsymbol{Ort(2)}$, სიბრტყისათვის).

სიბრტყის მართკუთხა კოორდინატებში ორთოგონული გარდაქმნა მატრიცულად ასე ჩაიწერება:

$$\boldsymbol{y = Ax + b}, \qquad (\mathbf{1})$$

სადაც y, x და b სიბრტყის ვექტორებია, A კი **ორთოგონული მატრიცი** (იხ. დანართი)

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

კოორდინატებში (1) გარდაქმნა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

ანუ

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \qquad (2)$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2.$$

($\mathbf{1}$) გარდაქმნა არის მოძრაობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A ორთოგონული მატრიცი ამავე დროს არის საკუთრივი (ანუ დეტერმინანტი =1). ამ მიზეზით მოძრაობას საკუთრივ ორთოგონულ გარდაქმნასაც უწოდებენ.

თუ (1) გარდაქმნისას $\boldsymbol{A}$ არის ერთეულოვანი მატრიცი, $\boldsymbol{A = E}$, გვაქვს სიბრტყის პარალელური გადატანა $\boldsymbol{b}$ ვექტორით:

$$\boldsymbol{y = x + b}, \qquad (3)$$

ანუ

$$y_1 = x_1 + b_1 \qquad (4)$$

$$y_2 = x_2 + b_2.$$

განსაზღვრება. $\boldsymbol{M}$ წერტილს ეწოდება $\boldsymbol{\Phi}$ გარდაქმნის უძრავი წერტილი,

თუ $\boldsymbol{\Phi(M) = M}$, ანუ $\boldsymbol{M}$ წერტილი ადგილზე რჩება $\boldsymbol{\Phi}$ გარდაქმნისას.

(4) ფორმულიდან ჩანს რომ თუ $b \neq 0$ **პარალელურ გადატანას არა აქვს უძრავი წერტილები.**

განსაზღვრება. ევკლიდური სივრცის მოძრაობას რომელიც ადგილზე ტოვებს ერთ რაიმე $\boldsymbol{O}$ წერტილს, ეწოდება მობრუნება $\boldsymbol{O}$ ცენტრით (ანუ მობრუნება $\boldsymbol{O}$ წერტილის გარშემო).

O წერტილის გარშემო სიბრტყის მობრუნებების სიმრავლე (რაც აგრეთვე წარმოადგენს ჯგუფს) აღინიშნება ასე $\boldsymbol{Rot_0(2)}$ (ან $\boldsymbol{Rot_0(3)}$ სივრცისათვის).

ევკლიდური სივრცის (ნებისმიერი განზომილების) ნებისმიერი მოძრაობა დაიყვანება მობრუნების და პარალელური გადატანის კომპოზიციამდე.

მართლაც (1) გარდაქმნა არის $y = Ax$ მობრუნების და $y = x + b$ პარალელური გადატანის კომპოზიცია (აგრეთვე $y = x + A^{-1}b$ პარალელური გადატანის და $y = Ax$ მობრუნების კომპოზიცია.)

განვიხილოთ დეტალურად სიბრტყის მოძრაობები.

ნებისმიერ საკუთრივ ორთოგონული $\mathbf{2 \times 2}$ მატრიცს აქვს სახე

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos\alpha} & \boldsymbol{-sin\alpha} \\ \boldsymbol{sin\alpha} & \boldsymbol{cos\alpha} \end{pmatrix}$$

ამიტომ ყოველი მობრუნება კოორდინატთა სათავის გარშემო ჩაიწერება ასე:

$$x' = x\,cos\alpha - y\,sin\alpha \qquad (5)$$

$$y' = x\,sin\alpha + y\,cos\alpha$$

სადაც α რაღაც კუთხეა, რომელიც $-\pi < \alpha \leq \pi$ პირობებში ცალსახადაა განსაზღვრული. α კუთხეს **მობრუნების კუთხე** ეწოდება რადგან სიბრტყის ყოველი ვექტორი ამ კუთხით მობრუნდება და შეთანხმებით ათვლა ხდება საათის ისრის საწინააღმდეგოდ.

თურმე სიბრტყის ყოველი მოძრაობა ან პარალელური გადატანაა ან მობრუნება.

თეორემა. სიბრტყის წოველი მოძრაობა არის ან პარალელური გადატანა, ან მობრუნება.

სხაგვარად რომ ვთქვათ მოძრაობების სიმრავლე (ჯგუფი) $\mathbf{Ort^+(2)}$ არის გაერთიანება პარალელური გადატანების სიმრავლის (ჯგუფის) Trans(2) და მობრუნებების სიმრავლეების (ჯგუფების) $\mathrm{Rot_o}(2)$ ყოველი წერტილის გარშემო.

$$\mathbf{Ort^+(2) = Trans(2)} \cup \cup_{\mathbf{o}} \mathbf{Rot_o(2)}.$$

დამტკიცება. რადგან ნებისმიერ მობრუნებას აქვს (5) სახე გამოდის რომ მართკუთხა კოორდინატთა x, y სისტემაში ყოველი მოძრაობა ჩაიწერებ ასე:

$$x' = x\, cos\alpha - y\, sin\alpha + b_1 \qquad (6)$$

$$y' = x\, sin\alpha + y\, cos\alpha + b_2.$$

როცა $\alpha = 0$ გვაქვს პარალელური გადატანა. ვაჩვენოთ რომ როცა $\alpha \neq 0$, მაშინ (6) გარდაქმნას აუცილებლად აქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი და ამიტომ არის მობრუნება. პირობა იმისა, რომ რაიმე $M_0 = (x_0, y_0)$ წერტილის ადგილზე რჩება (6) გარდაქმნის დროს ასე ჩაიწერება:

$$x_0 = x_0\, cos\alpha - y_0\, sin\alpha + b_1$$

$$y_0 = x_0\, sin\alpha + y_0\, cos\alpha + b_2.$$

ანუ

$$(1 - cos\alpha)x_0 + \quad sin\alpha\, y_0 = b_1 \qquad (7)$$

$$-sin\alpha\, x_0 + (1 - cos\alpha)y_0 = b_2.$$

რაც წარმოადგენს წრფივ განტოლებათა არაერთგვაროვან სისტემას x_0, y_0 -ის მიმართ. ამ სისტემის დეტერმინანტი $(1 - cos\alpha)^2 + sin^2\alpha = 2(1 - cos\alpha) \neq 0$, როცა $\alpha \neq 0$. ამიტომ ამ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც უძრავი წერტილია ანუ მობრუნების ცენტრია. □

ამრიგად სიბრტყის ნებისმიერ მოძრაობას ან არა აქვს უძრავი წერტილი (პარალელურ გადატანას არანულოვანი ვექტორით) ან აქვს ერთადერთი უძრავი წერილი (მობრუნებას არანულოვანი კუთხით). ანუ სიბრტყის მოძრაობას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი უძრავი წერტილი. ორთოგონული გარდაქმნებისათვის რომლებიც არ ინახავენ ორიენტაციას (არასაკუთრივი გარდაქმნები) ეს უკვე ასე აღარაა!

სიბრტყის არასაკუთრივი ორთოგონული გარდაქმნები.

განსაზღვრება. სიბრტყის რაიმე l წრფის (ღერძის) მიმართ სიმეტრია ეწოდება სიბრტყის S გარდაქმნას (თავისთავზე ასახვას), რომელიც უძრავად ტოვებს l წრფის

წერტილებს და ნებისმიერი სხვა წერტილი M გადაყავს ისეთ M' წერტილში, რომ

ა) MM' წრფე მართობულია l წფის ;
ბ) M და M' წერტილები თანაბრადაა დაშორებული l წრფიდან და მის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ.

l წრფეს ეწოდება S სიმეტრიის ღერძი.

მაგალითად x,y მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში Oy ღერძის მიმართ სიმეტრია ჩაიწერება ასე

$$x' = -x \ ; \qquad (7)$$

$$y' = y.$$

ღერძული სიმეტრიას აქვს უსასრულოდ ბევრი უძრავი წერტილი, კერძოდ მთელი სიმეტრიის ღერძი. ეს გარდაქმნა ორიენტაციას ცვლის.

მცოცავი სიმეტრია.

სიბრტყის არასაკუთრივი ორთოგონული გარდაქმნა, რომელიც არის ღერძული სიმეტრიის და ამ ღერძის გასწვრივ პარალელური გადატანის კომპოზიცია ეწოდება მცოცავი სიმეტრია.

მაგალითად მცოცავი სიმეტრია რომელიც არის x,y მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში Oy ღერძის მიმართ სიმეტრიის და $(0,a)$ ვექტორით პარალელური გადატანის კომპოზიცია ჩაიწერება ასე

$$x' = -x \ ; \qquad (7')$$

$$y' = y + a.$$

ცხადია მცოცავ სიმეტრიას არა აქვს უძრავი წერტილები და იგი ცვლის ორიენტაციას.

თეორემა. ***სიბრტყის ნებისმიერი ორთოგონული გარდაქმნა, რომელიც ცვლის ორიენტაციას არის მცოცავი სიმეტრია.***

ამ თეორემას დაწვრილებით არ დავამტკიცებთ რადგან ის მობრუნებების შესახებ თეორემის მსგავსად დადის წრფივ სისტემის ამოხსნაზე. მოკლედ ავღნიშნოთ რომ

ნებისმიერ არასაკუთრივ ორთოგონული 2×2 მატრიცს აქვს სახე

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos\alpha} & \boldsymbol{sin\alpha} \\ \boldsymbol{sin\alpha} & -\boldsymbol{cos\alpha} \end{pmatrix}$$

ამიტომ მართკუთხა კოორდინატთა x, y სისტემაში ყოველი ორიენტაციის შემცვლელი ორთოგონული გარდაქმნა ჩაიწერება ასე:

$$x' = x\,cos\alpha + y\,sin\alpha + b_1$$

$$y' = x\,sin\alpha - y\,cos\alpha + b_2.$$

ფორმულები პრაქტიკული გამოთვლებისთვის.

სიბრტყის პარალელური გადატანა.

ამ გარდაქმნას არა აქვს უძრავი წერტილები და ინახავს ორიენტაციას.

პარალელური გადატანა $v=(p,q)$ ვექტორით $\vec{x}=(x_1,x_2)$ ვექტორს გადაიყვანს $\vec{x}+\vec{v}$ ვექტორში. ეს ასე ჩაიწერება ვექტორულად:

$$\boldsymbol{Trans_{\vec{v}}(\vec{x})=\vec{x}+\vec{v},}$$

ანუ კოორდინატებში

$$\boldsymbol{Trans_{(p,q)}(x_1,x_2)=(x_1+p,\ x_2+q)}$$

მაგალითად:

$v=(2{,}5)$ ვექტორით პარალელური გადატანა წერტილს $(x_1,x_2)=(4{,}6)$ გადაიყვანს წერტილში

$$Trans_{(2,5)}=(x_1+2,x_2+5)=(6{,}11).$$

სიბრტყის მობრუნება

კოორდინატთა სათავის გარშემო α კუთხით მობრუნება $\boldsymbol{Rot_0}$ წერტილს $\boldsymbol{(x_1,x_2)}$ გადაიყვანს წერტილში, რომელიც მატრიცულად ასე ჩაიწერება

$$\boldsymbol{Rot_0(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}cos\alpha & -sin\alpha\\ sin\alpha & cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}.$$

ანუ კოორდინატებში

$$\boldsymbol{Rot_0(x_1,x_2)=(x_1cos\alpha-x_2sin\alpha\,,\qquad x_1sin\alpha+x_2cos\alpha)}$$

მაგალითად: თუ ხდება სიბრტყის მობრუნება სათავის გარშემო $\pi/3$ კუთხით (მობრუნების კუთხე როგორც ყოველთვის აითვლება საათის ისრის საწ. მიმართულებით) მაშინ წერტილი $\boldsymbol{(x_1,x_2)}=(2{,}3)$ გადავა წერტილში

$$\boldsymbol{Rot_0(x_1,x_2)=Rot_0(2,3)=(2cos\pi/3-3sin\pi/3\,,\qquad 2sin\pi/3+3cos\pi/3)=}$$

$$=(1-\tfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{3}+3/2).$$

თუ მობრუნება ხდება სათავისაგან განსხვავებული წერტილის გარშემო პრაქტიკულად უმჯობესია ეს მობრუნება “დავშალოთ” სამ გარდაქმნად. კერძოდ:

მობრუნება $\boldsymbol{\alpha}$ კუთხით იმ წერტილის გარშემო, რომლის რადიუს ვექტორია $\vec{\boldsymbol{v}}$, ავღნიშნოთ $\boldsymbol{Rot_{v,\alpha}}$. ეს გარდაქმნა არის სამი გარდაქმნის კომპოზიცია:

$$\boldsymbol{Rot_{v,\alpha} = Trans_{v} \circ Rot_{o,\alpha} \circ Trans_{-v}}.$$

ანუ ჯერ ხდება პარალელური გადატანა $\boldsymbol{Trans_{-v}}$ ($\vec{\boldsymbol{v}}$ რადიუს ვექტორის შესაბამისი წერტილი გადავიტანოთ სათავეში), მერე ხდება სიბრტყის მობრუნება $\boldsymbol{\alpha}$ კუთხით სათავის გარშემო $\boldsymbol{Rot_{o,\alpha}}$ და ბოლოს ისევ პარალელური გადატანა $\boldsymbol{Trans_{v}}$ (სათავე გადავიტანოთ ისევ $\vec{\boldsymbol{v}}$ რადიუს ვექტორის წერტილში..)

მაგალითად სიბრტყის მობრუნებით (1,2) წერტილის გარშემო $\pi/2$ კუთხით წერტილი (3,5) გადავა შემდეგ წერტილში:

$$(3,5) \xrightarrow{\boldsymbol{Trans_{-v}}} (3-1,\ 5-2) = (2,3) \xrightarrow{\boldsymbol{Rot_{o,\alpha}}} (2\cos\pi/2 - 3\sin\pi/2,\ 2sin\pi/2 + 3cos\pi/2) =$$

$$= (-3,2) \xrightarrow{\boldsymbol{Trans_{v}}} (-3+1, 2+2) = (2,4).$$

ანუ აქ სამი გარდაქმნა ცალკ-ცალკე გამოვთვალეთ.

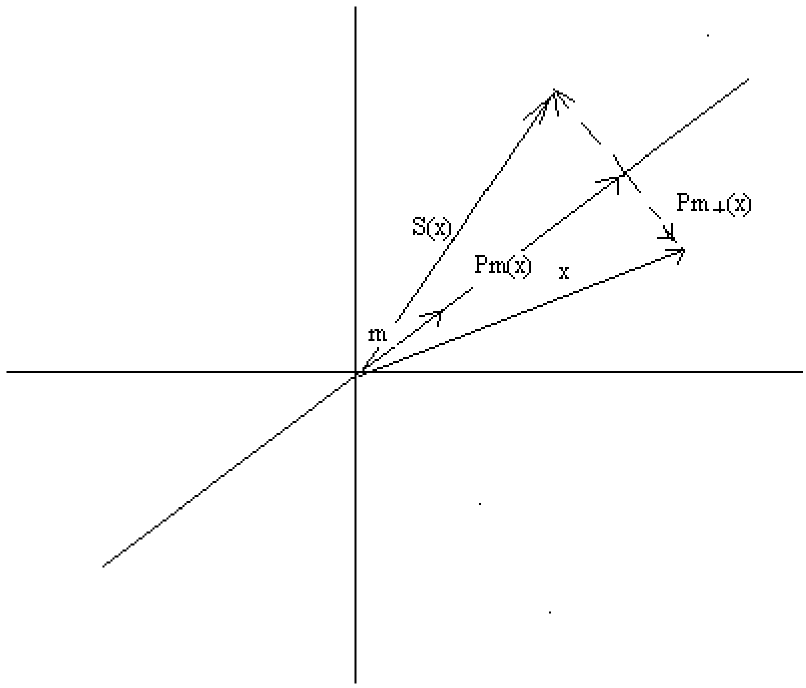
მობრუნებას აქვს ზუსტად ერთი უძრავი წერტილი და ინახავს ორიენტაციას.

სიმეტრია ღერძის მიმართ (ანუ არეკვლა).

თუ $\boldsymbol{m}$ არის სიმეტრიის ღერძის ერთეულოვანი მგეზავი ვექტორი მაშინ ვექტორულად ეს გარდაქმნა ასე ჩაიწერება

$$\boldsymbol{S_m(\vec{x}) = P_m(\vec{x}) - P_{m^\perp}(\vec{x})}, \qquad \textbf{(8)}$$

სადაც $\boldsymbol{P_m(\vec{x})}$ არის $\vec{\boldsymbol{x}}$ ვექტორის პროექცია $\boldsymbol{m}$ ვექტორის მიმართულებაზე ხოლო $\boldsymbol{P_{m^\perp}(\vec{x})}$ არის $\vec{\boldsymbol{x}}$ ვექტორის პროექცია $\boldsymbol{m}$-ის მართობულ ვექტორის მიმართულებაზე.



ეხლა გავიხსენოთ ვექტორის პროექცია მეორე ვექტორის მიმართულებაზე სკალარული ნამრავლის ტერმინებში:

$\boldsymbol{P_m(\vec{x}) = (\vec{m}\cdot\vec{x})\vec{m}}$**,** **რადგან სკალარული ნამრავლი $\boldsymbol{P_m(\vec{x})}$ ვექტორის სიგძეა, ხოლო $\boldsymbol{m}$ ვექტორი ერთეულოვანია და $\boldsymbol{P_m(\vec{x})}$-ის მიმმართველი.**

ნახატიდან ჩანს რომ $\boldsymbol{P_{m^\perp}(\vec{x}) = \vec{x} - P_m(\vec{x})}$, თუ ჩავსვამთ (8) –ში გვქვს:

$$\boldsymbol{S_m(\vec{x}) = 2P_m(\vec{x}) - \vec{x} = 2(\vec{m}\cdot\vec{x})\vec{m} - \vec{x}} \qquad (9)$$

ხოლო კოორდინატებში გვაქვს

ფორმულა: ***თუ $\boldsymbol{S_m}$ სიმეტრიის ღერძი გადის სათავეზე და მისი ერთეულოვანი მგეზავია $\boldsymbol{m = (p,q)}$, მაშინ ამ სიმეტრიით წერტილი $\boldsymbol{x = (x_1,x_2)}$ გადადის წერტილში:***

$$\boldsymbol{S_m(x_1,x_2) = (-x_1 + 2p(px_1 + qx_2),\ -x_2 + 2q(px_1 + qx_2))}. \qquad \textit{(10)}$$

მართლაც

$$S(\vec{x}) = S(x_1,x_2) = 2P_m(x_1,x_2) - (x_1,x_2) = (2(px_1 + qx_2)p - x_1,\ (2(px_1 + qx_2)q - x_2). \quad \square$$

თუ სიმეტრიის წერძი არ გადის სათავეზე მაშინ ასე მოვიქცეთ:

თუ $S_{m,w}$ არის სიმეტრია იმ ღერძის მიმართ რომლის ერთეულოვანი მგეზავი ვექტორია m და სიმეტრიის ღერძი გადის წერტილზე რომლის რადიუს ვექტორია w, მაშინ ჩვენი სიმეტრია არის სამი გარდაქმნის კომპოზიცია:

$$S_{m,w} = Trans_w \circ S_m \circ Trans_{-w} \qquad (11)$$

ანუ ჯერ სრულდება $Trans_{-w}$(პარალელური გადატანით w რადიუს ვექტორის შესაბამისი წერტილი გადადის სათავეში), მერე სრულდება S_m (სიმეტრია უკვე სათავეძე გამავალი წრფის მიმართ) და ბოლოს $Trans_w$ (ისევ პარალელური გადატანა, სათავე გადადის w რადიუს ვექტორის მქონე წერტილში).

ასეთი სიმეტრიისთვის ფორმულის გამოყვანა შეიძლება, მაგრამ პრაქტიკულად ჯობია ეს სამი გარდაქმნა გამოვთვალოთ ხოლმე.

ღერძული სიმეტრიას აქვს უსასრულოდ ბევრი უძრავი წერტილი, კერძოდ მთელი სიმეტრიის ღერძი. ეს გარდაქმნა ორიენტაციას ცვლის.

მცოცავი სიმეტრია.

მცოცავი სიმეტრია G_m არის ორი გარდაქმნის კომპოზიცია. კერძოდ ჯერ ხდება პარალელური გადატანა რაიმე წრფის გასწვრივ და მერე ამ წრფის მიმართ სიმეტრია.

ვექტორული ფორმულა ასეთია: თუ პარალელური გადატანა ხდება v ვექტორით და $m(v)$ არის v-ს ერთეულოვანი მგეზავი მაშინ

$$G_v = S_{m(v)} \circ Trans_v \qquad (12)$$

მცოცავ სიმეტრიას არა აქვს უძრავი წერტილები და იგი ცვლის ორიენტაციას.

გავიხსენოთ ორთოგონული მატრიცები.

განსაზღვრება. კვადრატულ მატრიცს ეწოდება ორთოგონული (და არა ორთონორმული) თუ მისი სტრიქონები (ან სვეტები) არიან ორთონორმირებული ვექტორები(ანუ ერთეულოვანი სიგძის ორთოგონული ვექტორები).

მაგ. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ორთოგონულია ნიშნავს :

სტრიქონები ორთონორმირებული ვექტორებია: $a^2 + b^2$=1, $c^2 + d^2$=1, $ab + cd = 0$,

რაც იგივეა რომ სვეტები ორთონორმირებული ვექტორებია: $a^2 + c^2$=1, $b^2 + d^2$=1, $ac + bd = 0$.

ექვივალენტური განსაზღვრება. კვადრატულ A მატრიცს ეწოდება ორთოგონული, თუ

მისი ტრანპონირებული და შებრუნებული მატრიცები ტოლია: $A^T = A^{-1}$, ან რაც იგივეა, $AA^T = A^T A = I$, სადაც I ერთეულოვანი მატრიცია.

ორთოგონული მატრიცების მაგალითებია :

აქედან გამომდინარეობს **რომ ორთოგონული მატრიცის დეტერმინანტი** $= \pm\mathbf{1}$.

პირიქით მცდარია! მაგალითად დეტერმინანტი $\mathbf{det}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/2} \end{pmatrix}$**=1,**

მაგრამ ეს მატრიცი არაა ორთოგონული.

საზოგადოდ 2×2 ორთოგონული მატრიცი ჩაიწერება ასეთო სახით:

$\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ ან $\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ sin\alpha & -cos\alpha \end{pmatrix}$.

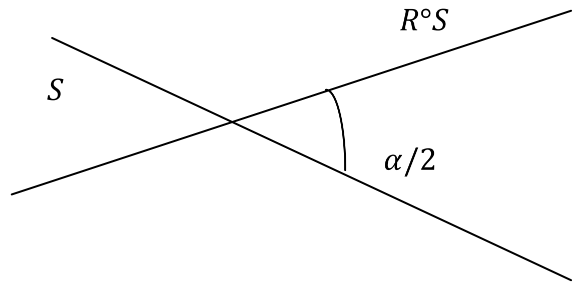
პირველი ინახავს ორიენტაციას (ანუ მარჯვენა სისტემას გადაიყვანს მარჯვენაში), მეორე კი საწინააწმდეგო ორიენტაციით ცვლის.

სიბრტყის მოძრაობის გაშლა ორი სიმეტრიის კომპოზიციად. ორი მობრუნების კომპოზიციის ცენტრი.

თეორემა 1. სიბრტყის ნებისმიერი მობრუნება არის ორი ღერძული სიმეტრიის კომპოზიცია, რომელთა სიმეტრიის ღერძები გადიან მობრუნების ცენტრზე. ამასთან პირველი სიმეტრია ნებისმიერად შეიძლება ავიღოთ, ოღონდ მისი ღერძი უნდა გადიოდეს მობრუნების ცენტრზე, ხოლო მეორე სიმეტრია ცალსახად განისაზღვრება.

დამრტკიცება. წინა ლექციიდან ვიცით სიბრტყის ნებისმიერი ორთოგონული გარდაქმნა, რომელიც ცვლის ორიენტაციას არის მცოცავ სიმეტრია, (ანუ ღერძული სიმეტრიის და ამ ღერძის გასწვრივ რაიმე a ვექტორით პარალელური გადატანის კომპოზიცია). ვიცით აგრეთვე რომ მცოცავ სიმეტრიას არა აქვს უძრავი წერტილები, როცა a ვექტორი არანულოვანია. ე.ი. **სიბრტყის ნებისმიერი ორთოგონული გარდაქმნა რომელიც ცვლის ორიენტაციას და აქვს ერთი მაინც უძრავი წერტილი ყოფილა ღერძული სიმეტრია (და ამიტომ მას აქვს არა მარტო უძრავი წერტილი არამედ უძრავი წერტილების მთელი წრფე–სიმეტრიის ღერძი).**

მაგალითად ეს ნათქვამი ეხება S ღერძული სიმეტრიის და ამ ღერძზე მდებარე წერტილის გარშემო R მობრუნების კომპოზიციას. ე,ი. კომპოსიცია $R \circ S$ არის ღერძული სიმეტრია. ნახატით ეს ასე შეიძლება ვნახოთ:



თუ R არის მობრუნება α კუთხით, მაშინ S ავიღოთ ნებიემიერად, ოღონდ მისი ღერძი გადიოდეს მობრუნების ცენტრზე. მაშინ $R°S$ კომპოზიციის სიმეტრიის ღერძი გადის მობრუნების ცენტრზე და S სიმეტრიის ღერძთან ქმნის $\alpha/2$ კუთხეს.

საბოლოოდ რადგან კომპოზიცია $S°S$ არის იგივური ასახვა, F არის კომპოზიცია ორი სიმეტრიის: $F = (F°S)°S$. რ.დ.გ.

თეორემა 2. ვთქვათ S და S' ღერძული სიმეტრიებია O წერტილში თანამკვეთი ღერძებით, რომელთა შორის კუთხეა α. მაშინ მათი კომპოზიცია არის მობრუნება O წერტილის გარშემო 2α კუთხით.

დამტკიცება. რადგან ორი ღერძული სიმეტრიის კომპოზიცია ინახავს ორიენტაციას და თან უძრავად ტოვებს O წერტილს, თეორემით სიბრტყის მოძრაობების შესახებ ეს კომპოზიცია არის მობრუნება O ცენტრით. რას უდრის მობრუნების კუთხე? ეს ადვილად გამოდის იქიდან რომ ნებისმიერი M წერტილისთვის OM ვექტორი ამ კუთხით მობრუნდება S' სიმეტრიის დროს. ავიღოთ M წერტილი S სიმეტრიის ღერძიდან, მაშინ OM ვექტორი 2α კუთხით მობრუნდება S' სიმეტრიით. რ.დ.გ.

თეორემა 3. ვთქვათ S და S' ღერძული სიმეტრიებია პარალელური ღერძებით, რომელთა შორის მანძილია a. მაშინ მათი კომპოზიცია არის პარალელური გადატანა სიმეტრიის ღერძების მართობული და $2a$ სიგრძის ვექტორით.

დამტკიცება. ამ კომპოზიციას არა აქვს უძრავი წერტილები და ინახავს ორიენტაციას. წინა ლექციით ეს არის პარალელური დაგატანა. გადატანის ვექტორის დასადგენად ავიღოთ M წერტილი S სიმეტრიის ღერძიდან. ცხადია რომ S' სიმეტრიის დროს M წერტილი გადაადგილდება სიმეტრიის ღერძების მართობულად ღერძებს შორის გაორმაგებული მანძილით. რ.დ.გ.

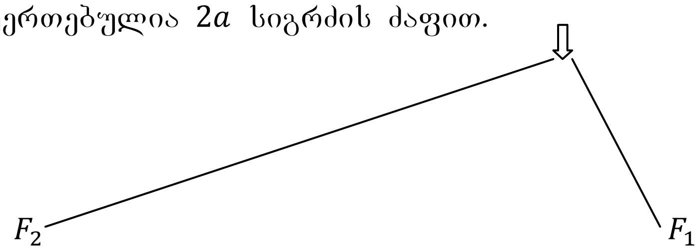
5. მეორე რიგის წირები

ელიფსი

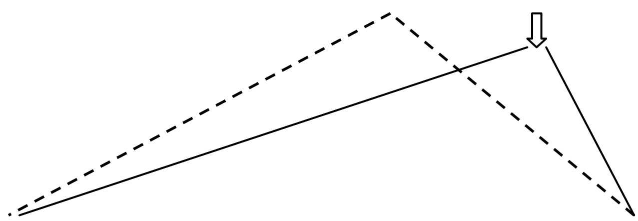
განსაზღვრება. *დავაფიქსიროთ სიბრტყეზე ორი წერტილი F_1 და F_2. ვთქვათ ამ წერტილებს შორის მანძილი არის $2c$. სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს რომელთაგან F_1 და F_2 წერტილებამდე მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა (ვთქვათ ეს სიდიდეა $2a$) ეწოდება* ***ელიფსი.***

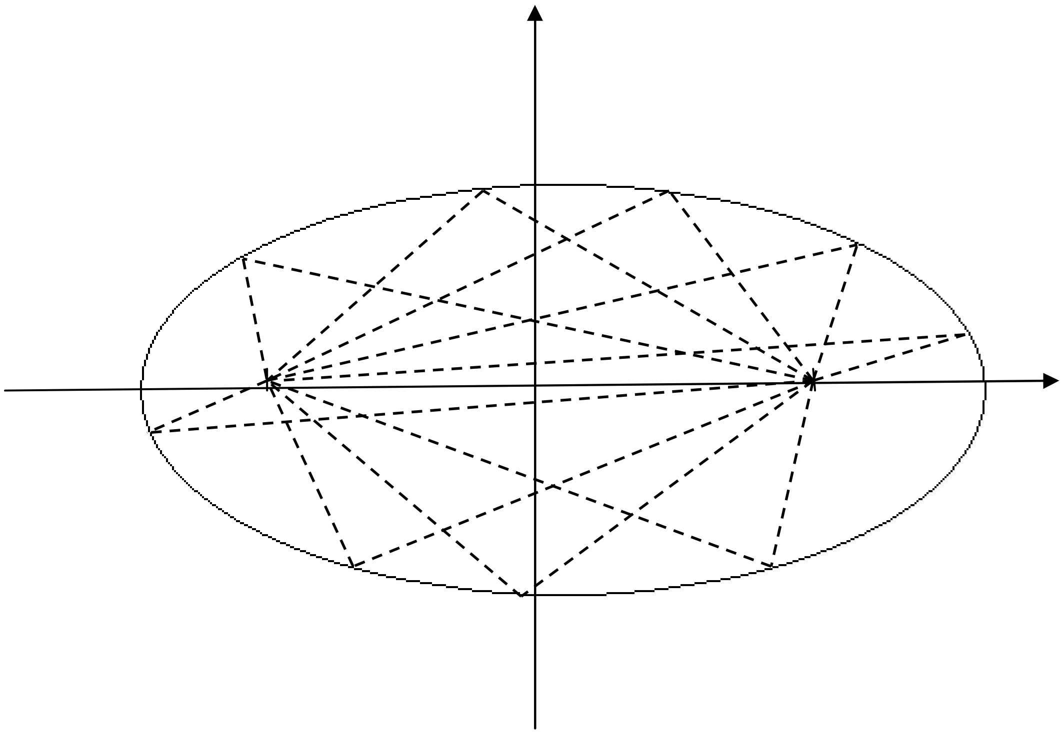
ელიფსის ეს განსაზღვრება საშუალებას იძლევა გეომეტრიულად ავაგოთ ის. წარმოვიდგინოთ რომ F_1 და F_2 ჭიკარტებით დამაგრებულია დაფაზე. F_1 და F_2

შეერთებულია $2a$ სიგრძის ძაფით.



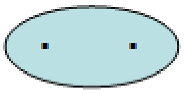
დავჭიმოთ ეს ძაფი ფანქრის წვერით და ფანქარი ვამოძრაოთ ისე რომ ძაფი დაჭიმულ მდგომარეობაში იყოს. მაშინ ფანქრის წვერით ჩვენ დავხატავთ ელიფსს.



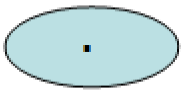


ელიფსის ელემენტებია:

ფოკუსები. ფოკუსებს შორის მანძილია $2c$.

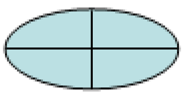


ცენტრი.



ღერძები. ეს ორი ღერძი ელიფსის სიმეტრიის ღერძებიცაა.

დიდი ნახევარღერძია $\boldsymbol{a}$, პატარა კი $\boldsymbol{b}$.



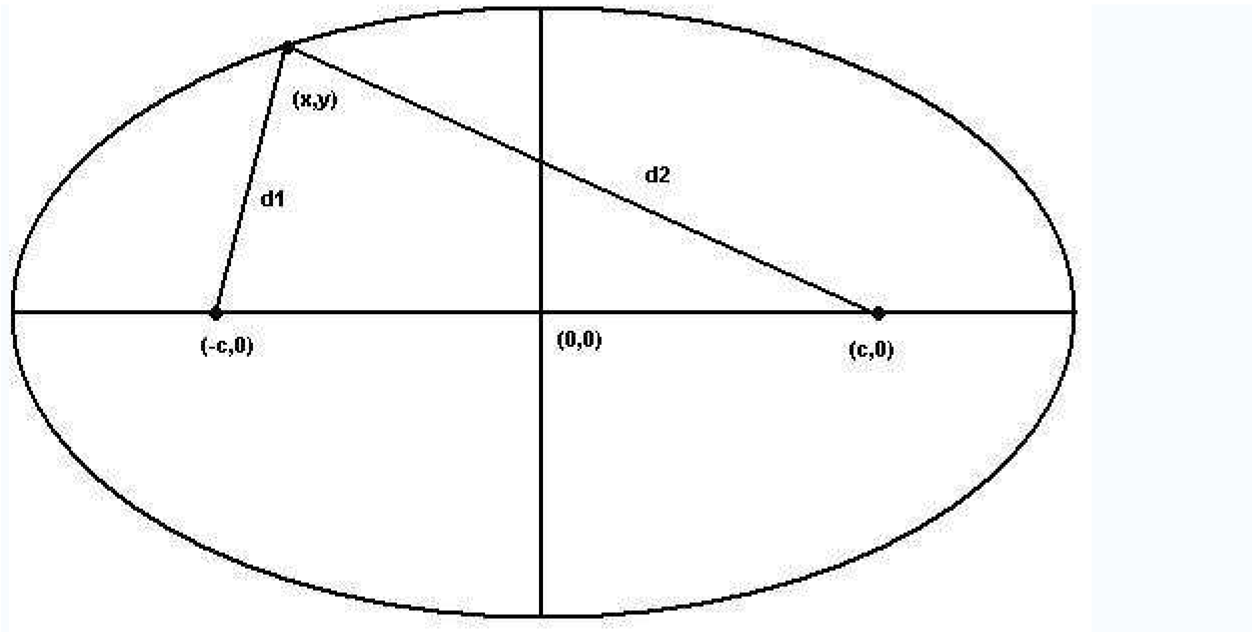
ოთხი წვერო - ელიფსის ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები.

ელიფსის კანონიკური განტოლება

ვისარგებლოთ ელიფსის განსაზღვრებით და გამოვიყვანოთ მისი განტოლება.

კოორდინატთა სისტემა სათავე დავამთხვიოთ ელიფსის ცენტრს, ხოლო კოორდინატთა ღერძები ელიფსის ღერძებს. მაშინ ფოკუსების კოორდინატებიიქნება $F_2(-c, 0)$ და $F_1(c, 0)$.

ავიღოთ ელიფსის ნებისმიერი წერტილი $M(x, y)$.



ელიფსის განსაღვრების თანახმად

$d_1 + d_2 = 2a$ სადაც $d_1 = |MF_1|=\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ და $d_2 = |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

ე.ი.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (1)$$

(1)-ში მარჯვენა ფესვი დაგავიტანოთ ტოლობის მარჯვენა მხარეს და მიღებული გამოსახულება ავიყვანოთ კვადრატში, მივიღებთ

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$

გავამარტივოთ

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \varepsilon x, \qquad (2)$$

სადაც $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$ და ეწოდება ელიფსის **ექსცენტრისიტეტი**.

შემდეგ, (2) ისევ ავიყვანოთ კვადრატში და გავამარტივოთ.

$(x+c)^2 + y^2 = a^2 + 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2$,

ანუ

$\frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2) + y^2 = a^2 - c^2$.

გავყოთ $a^2 - c^2$ -ზე და შემოვიღოთ აღნიშვნა $a^2 - c^2 = b^2 > 0$.

საბოლოოდ მივიღებთ

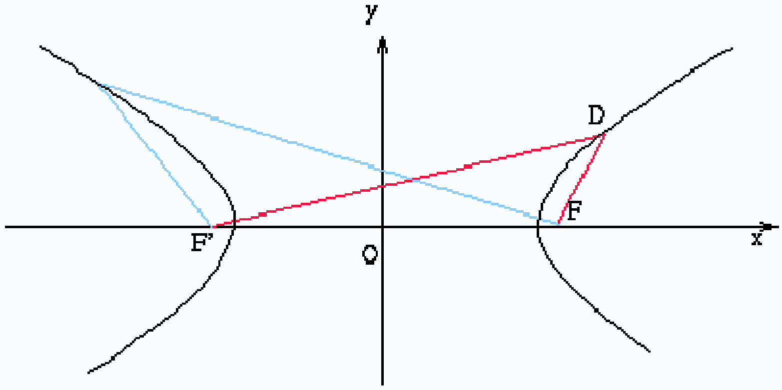
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

(3)-ს ეწოდება **ელიფსის კანონიკური განტოლება**.

ჰიპერბოლა

განსაზღვრება. *დავაფიქსიროთ სიბრტყეზე ორი წერტილი F და F′. ვთქვათ ამ წერტილებს შორის მანძილი არის 2c. სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლესრომელთაგან F და F′ წერტილებამდე მანძილების* ***სხვაობა*** *მუდმივი სიდიდეა(ვთქვათ ეს სიდიდეა 2a) ეწოდება* ***ჰიპერბოლა.*** *F და F′ წერტილებს ეწოდება ფოკუსები.*

შენიშვნა. აქ იგულისხმება რომ უდიდეს მანძილს აკლდება უმცირესი.



ნახ (1)

ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება გამოიყვანება ელიფსის ანალოგიურად და აქვს სახე

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \qquad (4)$$

ოღონდ აქ $c^2 - a^2 = b^2 > 0.$

კერძოდ: განსაზღვრებიდან გამოდის რომ ჰიპერბოლას აქვს სიმეტრიის ორი ღერძი: ერთი გადის F, F' ფოკუსებზე(ნამდვილი ღერძი), მეორე კი FF' მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარია(წარმოსახვითი ღერძი). ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე რომ X ღერძი დაემტხვეს ბამდვილ ღერზს, კი წარმოსახვითს. ნახ(1).

მაεεშინ ფოკუსების კოორდინატებია F(c,0) და F'(c,0). ავიღოთ ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილი $D(x,y)$. განსაზღვრებით გვაქვს

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ - $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ =$\pm 2a$.

გასამარტივებლად გადავიტანოთ მარჯვენა ფესვი განტოლების მარჯვენა მხარეს და კვადრატში ავიყვანოთ.

$(x-c)^2$+y^2=$(x+c)^2$+$y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$+$4a^2$.

გავამარტივებით მივიღებთ

-$\varepsilon x - a = \ \pm\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

ანუ

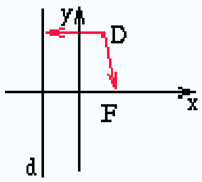
$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$= $|\varepsilon x + a|$, სადაც $\varepsilon = {}^{c}/_{a}$.

მეორედ ავიყვანოთ კვადრატში და შემოვიღოთ აღვიშვნა $b^2 = c^2 - a^2$, მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \qquad \text{რ.დ.გ.}$$

პარაბოლა

განსაზღვრება. დავაფიქსიროთ სიბრტყეზე წრფე **d** და მის გარეთ მდებარე წერტილი $\boldsymbol{F}$. **d** წრფიდან და $\boldsymbol{F}$ წერტილიდან თანაბრად დაშორებულ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს ეწოდება პარაბოლა.



ნახ. (ა)

$\boldsymbol{F}$ წერტილს ეწოდება პარაბოლის **ფოკუსი, d** წრფეს კი პარაბოლის **დირექტრისა.** ვთქვათ მანძილი ფოკუსიდან დირექტრისამდე არის $\boldsymbol{p}$.

მაშინ ფოკუსის კოორდინატებია $F(^p/_2, 0)$, ხოლო დირექტრისის განტოლება

იქნება $x = -^p/_2$.

ანუ განსაზღვრებით გვექნება

$\sqrt{(x - ^p/_2)^2 + y^2} = |\ x + ^p/_2\ |.$

ავიყვანოთ კვადრატში და შევაერთოთ მსგავსი წევრები, მივიღებთ

პარაბოლის კანონიკურ განტოლებას

$$\mathbf{y^2 = 2px.}$$

ერთი ნახევრად სახუმარო კითხვა: არის რაიმე კავშირი “პარაბოლას” და “პარლამენტს” შორის? თურმე არის.

ეს მეორე რიგის წირები ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა ალექსანდრე მაკედონელის მათემატიკის მასწავლებელმა სახელად Menaechmus (375-325 საუკუნე

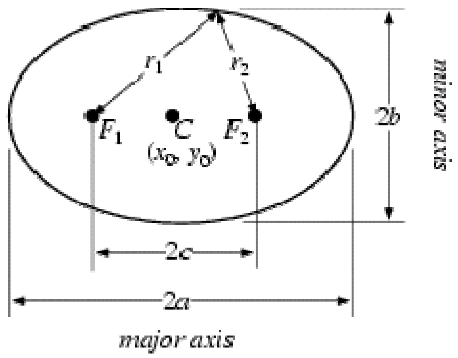
ქრისტემდე), აღმოაჩინა როგორც კონუსის და სიბრტყის თანაკვეთები. მისი ტერმინია "პარაბოლა" რაც ბერძნულად "პარალელურად დაგდებულს" ნიშნავს. დროთა განმავლობაში ლათინურში შემოვიდა ტერმინები "ჰიპერბოლური ლაპარაკი " , ლაპარაკი რომელიც ფაქტებს შორს გაჰყვება", "ელიფსური ლაპარაკი" ანუ "ელიპსის"- ფაქტებს ცოტა ჩამორჩება, ხოლო "პარაბლი" კი ზუსტად იყენებს ფაქტებს. ისე რომ ძველ რომში "*parabolare*"საერთოდ ლაპარაკს ნიშნავდა, ხოლო ფრანგულმა ენამ მოგვცა parley, parlance, parlor, **parliament**, parole…

ელიფსის, ჰიპერბოლას და პარაბოლას მხებები და ოპტიკური თვისებები.

გავიხსენოთ ელიფსი გეომეტრიულად განისაზღვრება როგორც წერტილთა სიმრავლე, რომელთაგან სიბრტყის ორ მოცემულ F_1 და F_2 წერტილამდე მანძილების ჯამი მუდმივი $2a$ სიდიდეა.

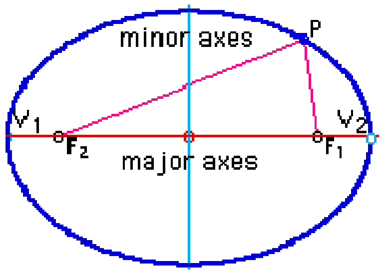
ამ განსაზღვრებით ჩვენ გამოვიყვანეთ ელიფსის **კანონიკური** განტოლება:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>0,\ b>0.$$



კანონიკური ნიშნავს რომ ელიფსის წერტილები აკმაყოფილებენ ამ განტოლებას კანონიკურ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში, ანუ როცა:

კოორდინატთა სათავე $|F_1F_2|$ მონაკვეთის შუაწერტილია (ელიფსის ცენტრი) და საკოორდინატო ღერძები მოიცავენ ელიფსის ღერძებს ($2a$– დიდი ღერძი, $2b$ -პატარა ღერძი.)



აქ ჰორიზონტალური ღერძია $2a$, ვერტიკალური ღერძი $2b$, $|PF_1|$ და $|PF_2|$ ეწოდება P წერტილის ფოკუსური რადიუსები.

კანონიკურ კოორდინატთა სისტემა ორიენტაციამდე სიზუსტით სალცახად განისაზღვრება ელიფსით. ეს ნიშნავს რომ ელიფსის ობიექტები, რომლებიც არ არიან დამოკიდებული საკოორდინატო სისტემის ორიენტაციაზე (ანუ არ იცვლებიან კოორდინატების ნიშნის შეცვლისას) სალსახად იქნებიან დაკავშირებული ელიფსთან.

ეს ობიექტებია:

რიცხვი a, დიდი ნახევარღერძი,

რიცხვი b, პატარა ნახევარღერძი,

რიცხვი c, რომელსაც ეწოდება წრფივი ექსცენტრისიტეტი,

რიცხვი $2c$, რომელსაც ეწოდება ფოკუსური მანძილი,

რიცხვი $e = \frac{c}{a}$, რომესაც ეწოდება (რიცხვითი) ექსცენტრისიტეტი,

რიცხვი $p = \frac{b^2}{a}$, რომესაც ეწოდება ფოკალური პარამეტრი,

წერტილი $(0,0)$ −ცენტრი,

წერტილები $(\pm a, 0)$ −წვეროები,

წერტილები $(\pm c, 0)$ −ფოკუსები,

წრფეები $x = \pm \frac{a}{e}$−დირექტრისები.

ჩვენ დაგვჭირდება ფოკუსური რადიუსების ფორმულები:

ელიფსის $M(x,y)$ წერტილის ფოკუსური რადიუსები ავღნიშნოთ

$r_1 = |F_1, M|$ და $r_2 = |F_2, M|$-ით.

გვაქვს

$$r_1{}^2 = (x-c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2xc + a^2 = e^2x^2 - 2xea + a^2 = (a-ex)^2$$

რადგან $|x| \le a,\ |ex| < a,$ ამიტომ

$$\boldsymbol{r_1 = a - ex} \qquad (\boldsymbol{a})$$

ანალოგიურად

$$\boldsymbol{r_2 = a + ex} \qquad (\boldsymbol{b})$$

ელიფსის მხები.

შევნიშნოთ რომ როგორც ეს კანონიკური განტოლებიდან ჩანს ელიფსი (როგორც ზედა და ქვედა ნახევარი) არის ორი ფუნქციის გრაფიკის გაერთიანება:

$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ როცა $-a \le x \le a,\ \ y > 0,$ (1)

და

$y = -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ როცა $-a \le x \le a,\ \ y \le 0.$ (2).

გამოვიყვანოთ მხების განტოლება (1) შემთხვევისთვის, და შევამოწმოთ (ჩვენ თვითონ) რომ (2) ფუნქციისთვის იგივე იქნება როცა $y < 0$. როცა $y = 0$ ელიფსის მხები $(-a, 0)$ წერტილში არის $x = -a$ წრფე , ხოლო $(a, 0)$ წერტილში $x = a$ წრფე.

როგორც ანალიზის კურსიდან ვიცით $M(x_o, y_o)$ წერტილში (1) ფუნქციის გრაფიკის მხების განტოლებაა:

$y - y_o = y'(x_o)(x - x_0).$

რადგან $y' = \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)' = -\frac{2xb}{2a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{xb}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{xb}{a^2}.\frac{b}{y} = -\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}$

ამიტომ გვაქვს

$y - y_o = -\frac{x_0}{y_0}\frac{b^2}{a^2}(x - x_0),$ ანუ $(y - y_o)(y_0 a^2) = -x_0 \mathrm{b}^2 (x - x_0),$

გავყოთ a^2b^2 -ზე და გავითვალისწინოთ რომ $\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$, საბოლოოდ მივიღებთ

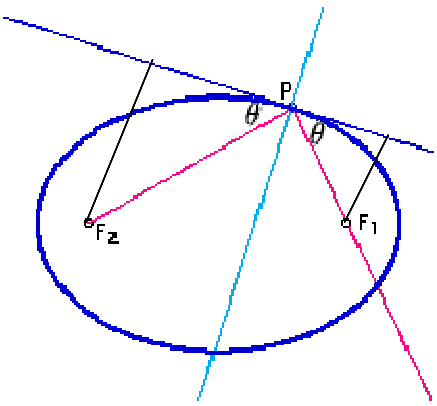
(x_0, y_0) წერტილში ელიფსის მხების განტოლებას

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \qquad (3)$$

ელიფსის ოპტიკური თვისება :

ელიფსის ერთი-ერთი ფიკუსიდან გამოსული სინათლის სხივი ელიფსიდან სარკისებური არეკვლის შემდეგ გაივლის მეორე ფოკუსზე.

გეომეტრიულად ეს ნიშნავს რომ მონაკვეთები PF_1, PF_2 ტოლ კუთხეებს ადგენენ ელიფსის მხებთან P წერტილში.



დამტკიცების ანალიზური გზა ასეთია:

ავღნიშნოთ მანძილი F_1 ფოკუსიდან მხებამდე d_1 –ით და მანძილი F_2 ფოკუსიდან მხებამდე d_2 –ით. მაშინ ნახატიდან მარჯვენა მართკუთხა სამკუთხედიდან გვაქვს $\frac{d_1}{|PF_1|}=sin\theta$. ანალოგიურად მარცხენა მართკუთხა სამკუთხედიდან უნდა გვქონდეს $\frac{d_2}{|PF_2|}=sin\theta$, ანუ $\frac{d_1}{|PF_1|}=\frac{d_2}{|PF_2|}$. შევამოწმოთ ეს ბოლო ტოლობა ელიფსის მხების (3) განტოლების გამოყენებით:

ამისათვის გავიხსენოთ მანძილის ფორმულა მოცემული წერტილიდან წრფემდე, როცა წრფე ნორმალური სახითაა ჩაწერილი. (3) წრფე ჩავწეროთ ნორმალური სახით:

$\frac{1}{N}(\mathbf{x}\frac{\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{a^2}}+\boldsymbol{y}\frac{\boldsymbol{y_0}}{\boldsymbol{b^2}}-\mathbf{1})=0$

სადაც N არის მანორმალირებელი მამრავლი

$N=\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{a^2}\right)^2}.$

მაშინ მანძილი მარცხენა $F_2\,(-c,0)$ ფოკუსიდან მხებამდე არის

$d_2=\frac{1}{N}\left|\frac{x_0(-c)}{a^2}+\frac{y_0.0}{b^2}-1\right|=\frac{1}{N}\left|\frac{x_0c}{a^2}+1\right|=\frac{1}{Na}|x_0e+a|=\frac{|PF_2|}{Na}$,

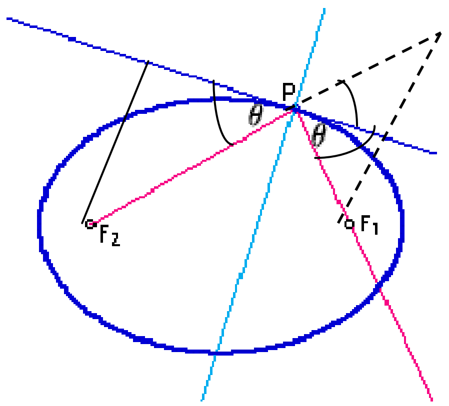
ხოლო მანძილი მარჯვენა $F_1\,(c,0)$ ფოკუსიდან მხებამდე-

$d_1=\frac{1}{N}\left|\frac{x_0c}{a^2}+\frac{y_0.0}{b^2}-1\right|=\frac{1}{N}\left|\frac{x_0c}{a^2}-1\right|=\frac{1}{Na}|x_0e-a|=\frac{|PF_1|}{Na}.$

აქ ჩვენ ვისარგებლეთ ფოკუსური რადიუსის ზემოთმოყვანილი ფორმულებით (a) და (b).

ამ ბოლო ორი ტოლობის შედარებით მივიღებთ რ.დ.გ.

გეომეტრიული დამტკიცების იდეა მარტივია: ავაგოთ F_1 ფოკუსის ღერძულად სიმეტრიული წერტილი მხების მიმართ. თუ ამ წერტილს შევაერებთ F_2 ფოკუსთან მაშინ მხებს გადავკვეთთ ზუსტად P წერტილში, ამიტომ ქვემოთ ნახატზე მონიშნული ორი ჩვენთვის საინტერესო კუთხე (θ-ებით აღნიშნული) მესამე მონიშნული კუთხის ტოლია.



ჰიპერბოლა

გავიხსენოთ რომ ჰიპერბოლას კანონიკური განტოლებაა:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > 0, \qquad b > 0.$$

a-ს ეწოდება ნამდვილი ნახევარღერძი,

b-ს- წარმოსახვითი ნახევარღერძი,

რიცხვს $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ეწოდება წრფივი ექსცენტრისიტეტი,

$2c$-ფოკალური მანძილი,

რიცხვს $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ ეწოდება (რიცხვითი) ექსცენტრისიტეტი, $1 < e < \infty$,

რიცხვს $p = \frac{b^2}{a}$ ეწოდება ფიკალური პარამეტრი

კანონიკური ნიშნავს რომ ჰიპერბოლას წერტილები აკმაყოფილებენ ამ განტოლებას გარკვეულ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში (ნახ ა.)

კერძოდ როცა:

აბცისთა ღერძი არის ნამდვილი ღერძი(ანუ მოიცავს ნამდვილ ნახევარღერძს), ორდინატთა ღერძი არის წარმოსახვითი ღერძი (ანუ მოიცავს წარმოსახვით ღერძს),

ამ ღერძების გადაკვეთის წერტილს ანუ სათავეს (0,0)-ს ეწოდება ცენტრი, წერტილებს $(\pm a, 0)$ ეწოდება წვეროები,

წერტილებს $(\pm c, 0)$ ეწოდება ფოკუსები,
წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთებს ფოკუსებთან ეწოდება ფოკალური რადიუსები,
წრფეებს $x = \pm\frac{a}{e}$ ეწოდება დირექტრისები.

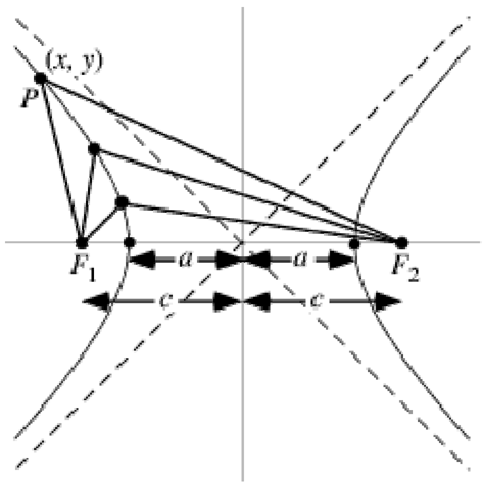
ზუსტად ისეთივე მსჯელობით, როგორც ელიფსის შემთხვევაში მტკიცდება რომ

ჰიპერბოლას მხებს მის $M_0 = (x_0, y_0)$ წეერტილში აქვს განტოლება:

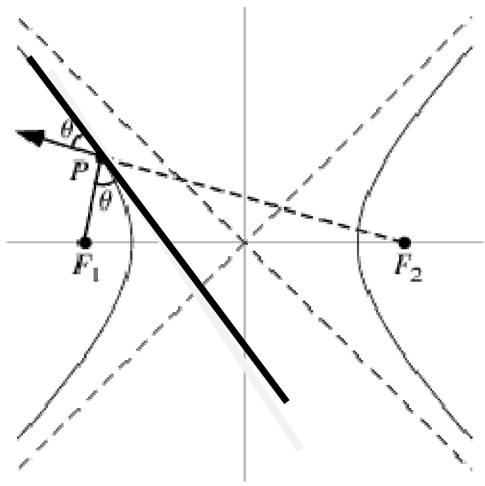
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

და რომ **ჰიპერბოლას აქვს ოპტიკური თვისება:**

ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილის ფოკალური რადიუსები მის მხებთან ტოლ კუთხეებს ქმნიან. (ნახ. ბ.)



ნახ ა.



ნახ. ბ.

ანუ ჰიპერბოლას ერთი-ერთი ფოკუსიდან გამოსული სინათლის სხივი ჰიპერბლაზე არეკვლის შემდეგ აგრძელებს გზას მეორე ფოკუსიდან გამოსული სხივის მიმართულებით.

გავიხსენოთ პარაბოლას კანონიკურ განტოლება

$$\mathbf{y^2 = 2px}, \text{ სადაც } \boldsymbol{p} > 0,$$

ე.ი. არსებობს კოორდინატთა კანონიკური სისტემა სადაც ამ განტოლებას აქვს ადგილი.

კანონიკურ კოორდინატთა სისტემის აბცისთა ღერძი არის პარაბოლას სიმეტრიის ღერძი(რადგან y –ის ნიშნის შეცვლით განტოლება არ იცვლება) ამიტომ ამ ღერძს პარაბოლას ღერძი ეწოდება. განტოლებიდან ცხადია პარაბოლა ძევს $x \geq 0$ ნახევარსიბრტყეში. ღერძის იმ მხარეს სადაც პარაბოლა ძევს ეწოდება დადებითი მიმართულება. ორდინატთა ღერძი პარაბოლას ღერძის მართობულია და პარაბოლას კვეთს წერტილში $O(0,0)$, რომელსაც პარაბოლას წვერო ეწოდება. ამრიგად (ორიენტაციამდე სიზუსტით) პარაბოლა ცალსახად განსაზღვრავს კანონიკურ კოორდინათთა სისტემას. ესეიგი ცალსახად განისაზღვრება აგრეთვე შემდეგი ობიექტები:

რიცხვი p, რომელსაც ფოკალური პარამეტრი ეწოდება,

რიცხვი $p/2$, რომელსაც ფოკუსური მანძილი ეწოდება,

წერტილი $\left(\frac{p}{2,0}\right)$, რომელსაც ფოკუსი ეწოდება,

წრფე $x = -p/2$, რომელსაც დირექტრისა ეწოდება.

პარაბოლას მხებს მის $\boldsymbol{M_0} = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ წერტილში აქვს განტოლება:

$$\boldsymbol{yy_0} = \boldsymbol{2p}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x_0}).$$

დამტკიცება. ვაჩვენოთ ეს პარაბოლას ზედა ნახევრისთვის, ანუ როცა $y > 0$.

იმ შემთხვევაში როცა $y < 0$ ანალოგიურად ვომსჯელებთ, ხოლო როცა $y = 0$ მხები რის ორდინატთა ღერძი $x = 0$.

როცა $y > 0$, $y = \sqrt{2px}$, ამიტომ $y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} = p/y$, და $y'(x_0) = p/y_0$

ამიტომ მხების განტოლებაა

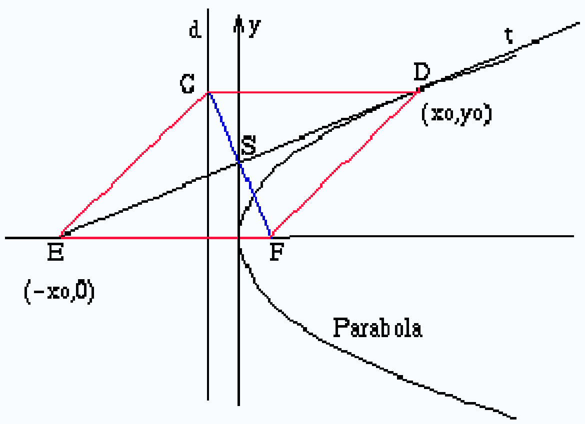
$y - y_0 = p/y_0(x - x_0)$, ანუ $(y - y_0)y_0 = p(x - x_0)$.

რადგან ${y_0}^2 = 2px_0$, მსგავსი წევრების შეერთებით მივიღებთ რ.დ.გ.

პარაბოლას ოპტიკური თვისება: (იხილე ნახ (ა))

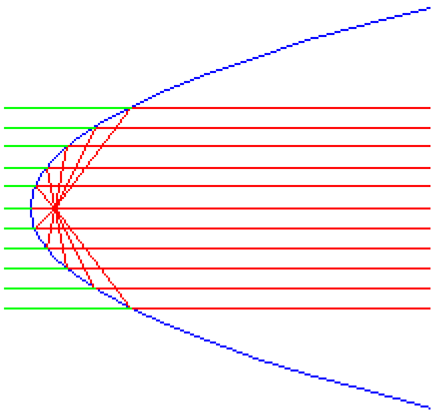
პარაბოლას ნებისმიერი წერტილის ფოკუსურ რადიუსსა და ამ წერტილში მხებს შორის კუთხე EDF ტოლია DEF კუთხისა ამ მხებსა და აბცისთა ღერძის დადებით მიმართულებას შორის.

დამტკიცება: მხები აბცისთა ღერძს გადაკვეთს წერტილში $(-x_0, 0)$. მანძილი ამ წერტილიდან ფოკუსამდე $(p/2,0)$ ტოლია $x_0 + p/2$.   პარაბოლას განტოლებიდან გვაქვს რომ ეს უდრის მანძილს შეხების $M_0(x_0, y_0)$ წერტილიდან ფოკუსამდე, რადგან ეს ტოლია $\sqrt{{y_0}^2 + (x_0 - p/2)^2} = \sqrt{(x_0 + p/2)^2} = x_0 + p/2$.
ე.ი. ნახატზე EDF სამკუთხედი ტოლფერდაა და ამიტომ ფერდებთან კუთხეები ტოლია. რ.დ.გ.



ნახ(გ)

ესეიგი პარაბოლას ფოკუსიდან გამოსული სინათლის სხივი პარაბოლაზე არეკვლის შემდეგ გზას აგრძელებს პარაბოლას ღერძის პარალელური მიმართულებით. იხილე ნახ (დ)



ნახ. (დ)

6. მეორე რიგის წირების კლასიფიკაცია

ჩვენ ვიცით მეორე რიგის წირების მაგალითები: ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა. ანუ მათი კანონიკური განტოლებები წარმოადგენენ მეორე რიგის ალგებრულ განტოლებებს. ბუნებრივია ვიკითხოთ არსებობენ თუ არა სხვა მეორე რიგის წირები.

განვიხილოთ ზოგადად მეორე რიგის ალგებრული განტოლება:

$$\boldsymbol{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}. \qquad (1)$$

მეორე რიგი ნიშნავს რომ a_{11}, a_{12}, a_{22} კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არანულოვანია. ამ კოეფიციენტებს უფროსი კოეფიციენტები ეწოდება, კოეფიციენტებს a_{13}, a_{23} − წრფივი კოეფიციენტები, ხოლო a_{33} −თავისუფალი წევრი.

განვიხილოთ სიდიდეები $a_{11} + a_{22}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ და $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

სადაც გვაქვს სიმეტრია $\boldsymbol{a_{ij} = a_{ji}}$, ანუ განვიხილოთ

$$\boldsymbol{I_1 = a_{11} + a_{22}}, \qquad \boldsymbol{I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{და} \quad \boldsymbol{I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad (2).$$

თურმე **ეს სიდიდეები არიან (1) განტოლების ინვარიანტები კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ.**

ეს ნიშნავს შემდეგს: (1) განტოლება ჩაწერილია რაღაც მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. თუ ამ სისტემიდან გადავალთ ახალ საკოორდინატო სისტემაზე, მაშინ (1) განტოლება საზოგადოდ შეიცვლება. შეიცვლებიან კოეფიციენტებიც a_{ij} , მაგრამ სიდიდეები I_1, I_2, I_3 თურმე იგივე რჩება.

ჩვენ ამ ფაქტს დაწვრილებით არ დავამტკიცებთ, მაგრამ დამტკიცების მნიშვნელოვანი ფრაგმენტები მაინც დაგვჭირდება შემდეგ კითხვებზე პასუხის გასაცემად:

1. როგორ დავადგინოთ (1) განტოლებით მოცემულ წირს აქვს თუ არა სიმეტრიის ცენტრი?
2. თუ აქვს როგორ ვიპოვოთ ცენტრის კოორდინატები?
3. ცენტრის მქონე წირი არის თუ არა ელიფსი ან ჰიპერბოლა? (პარაბოლას სიმეტრიის ცენტრი არა აქვს)

კითხვა 1. როგორც ავღვიშნეთ (1) განტოლება წერია რაღაც საკოორდინატო სისტემაში. ამ სისტემის სათავე რომ მოცემული წირის სიმეტრიის ცენტრი იყოს, x და y ცვლადებს ნიშნის შეცვლით განტოლება არ შეიცვლებოდა. ეს მაშინ ხდება, როცა (1) განტოლებაში წრფივი წევრები $\boldsymbol{2a_{13}x}$ და $\boldsymbol{2a_{23}y}$ ნულის ტოლია.
მაგრამ საზოგადოდ ასე არაა.
(1) განტოლებას აქვს სიმეტრიის ცენტრი (x_0, y_0) იმას ნიშნავს, რომ თუ საკოორდინატო სისტემას სადაც (1) განტოლება წერია პარალელურად გადავიტანთ ახალ საკოორდინატო $O'x'y'$ სისტემაში, ისე რომ (0,0) წერტილი გადავიდეს (x_0, y_0) წერტილში მაშინ x' და y' ცვლადების ნიშნის შეცვლით ახალი განტოლება (x', y' ცვლადებში ჩაწერილი)

$$\boldsymbol{a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0} \qquad (1')$$

არ შეიცვლება. ცხადია ეს მაშინ მოხდება, როცა

$$\boldsymbol{2a'_{13}x' = 0} \text{ და } \boldsymbol{2a'_{23}y' = 0}.$$

ვნახოთ რას ნიშნავს ეს (1) განტოლების ტერმინებში.

მაშ Oxy ძველი საკოორდინატო სისტემაა, $O'x'y'$ ახალი საკოოედინატო სისტემა, რომელიც მიიღება (x_0, y_0) ვექტორის საშუალებით პარალელური გადატანით. ძველი და ახალი სისტემა ასეთ კავშირშია:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

ჩავსვათ x და y-ის მნიშვნელობები (1) განტოლებაში, გვექნება

$$\boldsymbol{a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_{13}(x' + x_0) +}$$

$+2a_{23}(y' + y_0) + a_{33} = 0.$

გავამარტივოთ და მივიყვანოთ (1') სახემდე, მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

თეორემა 1. სიბრტყის პარალელური გადატანისას (x_0, y_0) ვექტორით, (1) განტოლება დაგადის (1') განტოლებაში, სადაც

$$\begin{cases} a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} \end{cases} \qquad (1'')$$

ამასთან უფროსი კოეფიციენტები a_{11}, a_{12}, a_{22} არ შეიცვლება, ანუ

$a'_{11} = a_{11}, \; a'_{12} = a_{12}, \; a'_{22} = a_{22},$

ხოლო a'_{33}-ის მისაღებად (1) განტოლებაში (x, y) −ის ადგილზე უნდა ჩავსვათ (x_0, y_0), ე.ი.

$$a'_{33} = a_{11}{x_0}^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}{y_0}^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}.$$

როგორც ვთქვით a'_{13} და a'_{23} კოეფიციენტების ნულობა ნიშნავს, რომ გვაქვს სიმეტრიის ცენტრი კოორდინატებით (x_0, y_0).

ე.ი საბოლოოდ გვაქვს:

თეორემა 2.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (1)$$

განტოლებით მოცემულ წირს გააჩნია სიმეტრიის ცენტრი კოორდინატებით (x_0, y_0), მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა x_0, y_0 ცვლადების მიმართ წრფივ განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

დეტერმინანტი

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

და ამიტომ სიმეტრიის ცენტრის კოორდინატები (x_0, y_0) ამ სისტემის ერთადერთი ამონახსნია.

არსებობს (1) განტოლების გამარტივების სხვა გზა, რომელსაც სტანდარტული გამარტივება ჰქვია. კერძოდ კოორდინატთა სისტემის გარკვეული კუთხით მობრუნებით შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ ახალ კოორდინატებში (1') განტოლების კოეფიციენტი $a'_{12} = 0$.

ამისათვის გავიხსენოთ, რომ α კუთხით მობრუნებისას ძველი Oxy და ახალი $O'x'y'$ კოორდინატები ასეთ ურთიერთკავშირშია:

$$\begin{cases} x = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases}$$

ჩავსვათ x და y-ის ეს მნიშვნელობები (1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\boldsymbol{a_{11}}(x'cos\alpha - y'sin\alpha)^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{2a_{12}}(x'cos\alpha - y'sin\alpha)(x'sin\alpha + y'cos\alpha)$$

$$+\boldsymbol{a_{22}}(x'sin\alpha + y'cos\alpha)^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{2a_{13}}(x'cos\alpha - y'sin\alpha) +$$

$$+\boldsymbol{2a_{23}}(x'sin\alpha + y'cos\alpha) + \boldsymbol{a_{33}} = \boldsymbol{0}.$$

გავამარტივოთ და მივიყვანოთ (1') სახემდე, მივიღებთ a'_{ij} კოეფიციენტების გამოსახულებებს. მაგალითად

$$a'_{12} = -1/2(a_{11} - a_{22})sin2\alpha - a_{12}cos2\alpha\ .$$

ე.ი. ახალ კოორდინატებში a'_{12} კოეფიციენტის ნულობა ნიშნავს, რომ მობრუნების კუთხე უნდა იყოს

$$\boldsymbol{ctg2\alpha} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \qquad (2)$$

და ამ კუთხით მობრუნებისას (1) განტოლება გადადის განტოლებაში

$$\boldsymbol{a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0} \qquad (3)$$

თეორემა 3. საკოორდინატო სისტემის α კუთხით მობრუნებისას, სადაც

$$ctg2\alpha = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}},$$

(როცა $a_{12} \neq 0$) მეორე რიგის წირის ზოგადი განტოლება (1) გადადის განტოლებაში (3) (ანუ ხდება სტანდარტული გამარტივება).

ეხლა დავუბრუნდეთ მეორე რიგის წირის ზოგად (1) განტოლებას.
კლასიფიკაციის იდეა იმაში მდგომარეობს რომ მეორე რიგის წირების გეომეტრიული დახასიათება და განლაგება სავსებით განისაზღვრება მისი

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \qquad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{და} \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ინვარიანტების მნიშვნელობებით.

მეორე რიგის წირს ეწოდება

ელიფსური ტიპის, თუ $I_2 > 0$,

ჰიპერბოლური ტიპის, თუ $I_2 < 0$,

პარაბოლური ტიპის, თუ $I_2 = 0$.

თეორემები ელიფსური და ჰიპერბოლური ტიპის მეორე რიგის წირების კლასიფიკაციის შესახებ.

ჯერ ვიგულისხმოთ რომ მეორე რიგის წირის ზოგად (1) განტოლებაში ინვარიანტი $I_1 > 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამას მივაღწევთ -1-ზე გამრავლებით.

თეორემა 4. ელიფსური ტიპის წირი ($I_2 > 0$) წარმოადგენს ელიფსს როცა $I_3 < 0$, არის წერტილი (გადაგვარებული ელიფსი) **როცა $I_3 = 0$, და არის ცარიელი სიმრავლე** (ანუ წარმოსახვითი ელიფსი) **როცა $I_3 > 0$.**

თეორემა 5. **ჰიპერბოლური ტიპის წირი ($I_2 < 0$) წარმოადგენს ჰიპერბოლას თუ $\boldsymbol{I_3 \neq 0}$, და თადამკვეთ წრფეთა წყვილს როცა $\boldsymbol{I_3 = 0}$.**

თეორემა 6 (პარაბოლური ტიპის წირების შესახებ).

პარაბოლური ტიპის წირი ($\boldsymbol{I_2 = 0}$) წარმოადგენს პარაბოლას თუ

$\boldsymbol{I_3 \neq 0}$, და პარალელურ წრფეთა წყვილს ან ცარიელ სიმრავლეს როცა $\boldsymbol{I_3 = 0}$.

ამ თეორემების დამტკიცების იდეა ასეთია: ჯერ დავადგენთ მოცემულ წირს აქვს თუ არა ერთადერთი სიმეტრიის წენტრი.

თუ აქვს, ჯერ გამოვიყენებთ (2) თეორემას და გავამარტივებთ (1) განტოლებას. ანუ პარალელური გადატანით გავაქრობთ განტოლების წრფივ წევრებს.

შემდეგ გამოვიყენებთ (3) განტოლებას და გავაქრობთ კოეფიციენტს a'_{12}. ამის შემდეგ განტოლება ადვილად მიიყვანება ელიფსის ან ჰიპერბილას კანონიკურ განტოლებამდე. გადაგვარებულ შემთხვევებში კი მივიღებთ წერტილს ან წრფეთა წყვილს.

თუ წირს არა აქვს ერთადერთი სიმეტრიის ცენტრი, მაშინ პირდაპირ (3) თეორემას გამოვიყენებთ და გავაქრობთ a'_{12} კოეფიციენტს. ამის მერე რადგან $I_2 = 0$, დავასკვნით რომ a_{11}, a_{22} კოეფიციენტებიდან ერთ-ერთი ნულოვანია და განტოლებას დავიყვანთ პარაბოლას კანონიკურ განტოლებაზე. გადაგვარეულ შემთხვევაში მივიღებთ პარალელურ წრფეთა წყვილს.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. $2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0.$ (a)

აქ კოეფიციენტებია $a_{11} = 2,\ a_{12} = -2,\ a_{22} = 5,\ a_{13} = -\frac{1}{2},\ a_{23} = \frac{5}{2},\ a_{33} = -4.$

ინვარიანტები: $I_1 = 7,\ I_2 = 6,\ \ I_3 = -131/4.$

რადგან $\boldsymbol{I_2 \neq 0}$ ამიტომ ამ წირს აქვს ერთადერთი სიმეტრიის ცენტრი.

არის ელიფსური ტიპის, რადგან $\boldsymbol{I_2} > 0$.

თეორემა (4)-ით ეს წირი ელიფსია რადგან $I_3 < 0$.

ვიპოვოთ სიმეტრიის ცენტრის კოორდინატები, ამისათვის ვისარგებლოთ თეორემა (2)-ით და ამოვხსნათ წრფივი სისტემა:

$$\begin{cases} 2x_0 - 2y_0 - \dfrac{1}{2} = 0 \\ -2x_0 + 5y_0 + \dfrac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

მივიღებთ $x_0 = -\frac{5}{12}$, $y_0 = -2/3$. ე.ი. სიმეტრიის ცენტრია წერტილი $(-\frac{5}{12}, -2/3)$.

გავამატრივოთ ეს განტოლება. ჯერ გვინდა მოვკლათ წრფივი წევრები. ამისათვის თეორემა (1) –ით მოვახდინოთ პარალელური გადატანა

$$\begin{cases} x = x' - 5/12 \\ y = y' - 2/3 \end{cases}$$

ჩავსვათ x და y-ის მნიშვნელობები წირის საწყის (a) განტოლებაში, მივიღებთ

$$2x'^2 - 4x'y' + 5y'^2 - \frac{131}{24} = 0. \qquad \text{(b)}$$

ეხლა გვინდა მოვკლათ კოეფიციენტი $x'y'$ –თან. ამისათვის ვისარგებლოთ თეორემა (3)-ით და მოვახდინოთ მობრუნება კუთხით

$$ctg2\alpha = \frac{2-5}{-4} = 3/4.$$

ამ დროს

$$cos2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 2\alpha}} = 3/5$$

ამიტომ

$$sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - cos2\alpha}{2}} = 1/\sqrt{5}, \qquad cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + cos2\alpha}{2}} = 2/\sqrt{5}.$$

ამიტომ ამ კუთხით მობრუნებას აქვს სახე

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'' \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' \end{cases}$$

ჩავსვათ (b) განტოლებაში, მივიღებთ

$$x''^2 + 6y''^2 = \frac{131}{24}.$$

ამიტომ $\frac{131}{24}$ -ზე გაყოფით გვაქვს

$$\frac{x''^2}{(\sqrt{\frac{131}{24}})^2} + \frac{y''^2}{(\sqrt{\frac{131}{144}})^2} = 1 \qquad \textbf{(c)}$$

და საბოლოოდ მივიღეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება.

მაგალითი 2. განტოლება $8x^2 + 24xy + y^2 - 56x + 18y - 55 = 0$

არის ჰიპერბოლური ტიპის, რადგან $I_2 = 8 \times 1 - 12^2 = -136 < 0$,

ეს წირი **არის თანამკვეთ წრფეთა წყვილი**, რადგან ინვარიანტი

$$I_3 = \begin{vmatrix} 8 & 12 & -28 \\ 12 & 1 & 9 \\ -28 & 9 & -55 \end{vmatrix} = 0.$$

მაგალითი 3. განტოლება $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0$

არის პარაბოლური ტიპის რადგან $I_2 = 1 \times 1 - 1^2 = 0$.

ეს წირი არის პარაბოლა, რადგან $I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -1/4 \neq 0$.

მაგალითები იმისა თუ როგორ დავადგინეთ მეორე რიგის წირის ტიპი, მისი კანონიკური განტოლება და კანონიკურ კოორდინატთა სისტემა

ეს თემა კავშირია და გავიხსენოთ სიმეტრიული მატრიცით მოცემული კვადრატული ფორმა. მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები.

მაგალითი. $\mathbf{5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0}$.

ამოხსნა. გვაქვს $a_{11} = 5,\ a_{12} = 2,\ a_{22} = 8,\ a_{13} = -16,\ a_{23} = -28,\ a_{33} = 80.$

ამიტომ წირის ინვარიანტები $I_1 = 13 > 0,\ I_2 = 36 > 0,\ I_3 = -1296 < 0.$

რადგან $I_2 > 0$ და I_2, I_3-ს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ წირი არის ელიფსი.

ამიტომ მოცემული განტოლება მიიყვანება სახემდე

$$\boldsymbol{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0},$$

სადაც λ_1, λ_2 კვადრატული ნაწილის შესაბამისი მახასიათებელი რიცხვებია.

ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ

$I_3 = I''_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{vmatrix} = I''_2 a''_{33} = I_2 a''_{33}$, ანუ თავისუფალი წევრი იქნება $\boldsymbol{\frac{I_3}{I_2}}$.

აგრეთვე, წირის განტოლების შესაბამისი კვადრატული ფორმის მატრიცის მახასიათებელი განტოლებაა

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0,$ ანუ $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$ ფესვებია $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9.$

გავიხსენოთ კვადრატული ფორმის მიყვანა კანონიკურ სახემდე. ეს ხდება ბაზისის გარდაქმნით იმ ორთოგონული მატრიცით რომლის სვეტები ფორმის საკუთრივი ვექტორებია.

ბაზისის ამ გარდაქმნით კვადრატული ნაწილი $5x^2 + 4xy + 8y^2$ მიიღებს ფორმას $4x'^2 + 9y'^2$, (ანუ xy-თან კოეფიციენტი გაქრება და კვადრატებთან კოეფიციენტები საკუთრივი რიცხვებია.)

შემდეგ როგორც ვიცით, პარალელური გადატანით, რომლის დროს სათავე გადადის წირის ცენტრში წრფივი ნაწილი $-32x - 56y$ გაქრება, ხოლო კვადრატული წევრების კოეფიციენტები არ შეიცვლება. ამასთან ახალი თავისუფალი წევრი ინვარიანტებით ასე გამოისახება $a'_{33} = I_3 : I_2 = -\frac{1296}{36} = -36.$

ანუ ახალ x', y' ცვლადებში წირს ექნება განტოლება

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0,$$

და 36-ზე გაყოფით მიიღება კანონიკური განტოლება

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

ცენტრის კოორდინატები, როგორც ვიცით არის შემდეგი სისტემის ამონახსნი:

$\begin{cases} 5x + 2y - 16 = 0 \\ 2x + 8y - 28 = 0 \end{cases}$ ანუ $O'(2,3).$

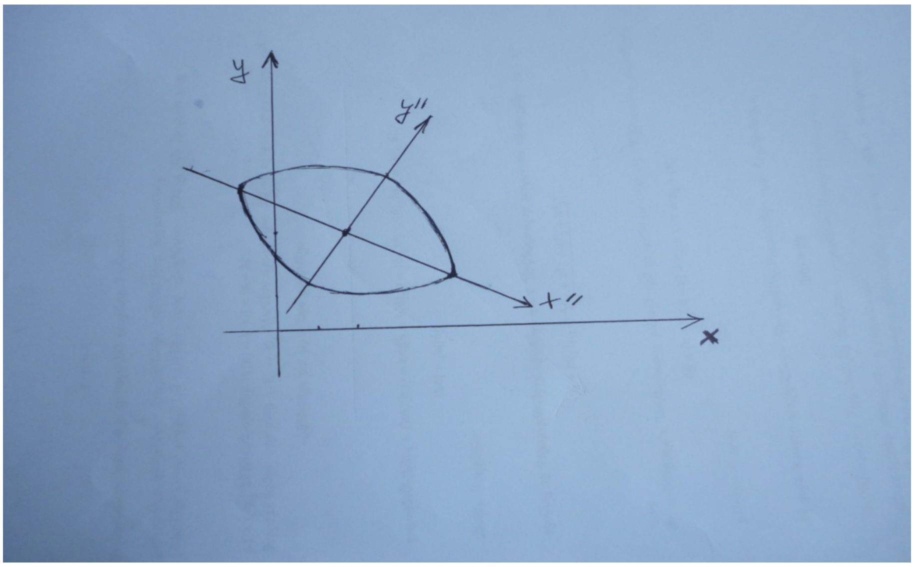
კანონიკური სისტემის საკოორდინატო ღერძების მგეზავებად e'_1, e'_2 უნდა ავიღოთ ერთეულოვანი საკუთრივი ვექტორები, e'_1 -ის კოორდინატებს გავიგებთ შემდეგი სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_1)x+a_{12}y=0\\ a_{12}x+(a_{22}-\lambda_1)y=0\\ \qquad x^2+y^2=1\end{cases}$$

ანუ $\begin{cases}x+2y=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ და $e'_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

e'_2-ს ანალოგიურად გამოვთვლით, თუმცა e'_2-ად შეიძლება ავიღოთ e'_1-ის მართობული ვექტორი $e'_2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

ეხლა რადგან ვიცით ელიფსის ცენტრი, კანონიკური განტოლება და ღერძები შეგვიძლია ეს ელიფსი დავხატოთ კიდეც.



მაგალითი. $\boldsymbol{F(x,y)=4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0}$.

წირის ინვარიანტებია $I_1=5>0,\ I_2=0,\ I_3=-225<0.$

რადგან $I_2=0\ \ I_3<0.$ წირი არის პარაბოლა.

მახასიათებელი ფესვებია $\begin{vmatrix}4-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$, ე.ი. $\lambda_1=0,\ \lambda_2=5.$

$$ctg2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}},\quad tg\alpha=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}=2.$$

ამიტომ $cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\quad sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$

წინასწარ ვიცით რომ მოცემული განტოლება დაიყვანება სახეზე

$$\boldsymbol{\lambda_2 y''^2 + \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} x'' \ = 0.}$$

ანუ $\lambda_2 y''^2 + 2a''_{13}x'' = 0,$ სადაც $|a''_{13}| = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} x''.$

ეს გვაქვს იქიდან, რომ $a''_{22} = I''_1 = I_1$ და $I_3 = I"_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a''_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a''_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a''_{22}{a''_{13}}^2.$

ანუ $|a''_{13}| = 3\sqrt{5}$ და რადგან $\lambda_2 = 5$ უნდა მივიღოთ

$$y''^2 = 6\frac{\sqrt{5}}{5}x''.$$

მართლაც გარდაქმნით

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

$\mathrm{F(x,y)} = 0$ მიიღებს სახეს

$F'(x'y') = (\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y')^2 - 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 4(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y')^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 7 = 0.$

ანუ

$F'(x',y') = 5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0$

როგორც ვხედავთ y^2-ის კოეფიციენტი უდრის მახასიათებელ რიცხვს 5-ს. x^2-ის კოეფიციენტი ნულია, იხ. ზემოთ $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5.$

ეხლა უნდა მოვახდინოთ საკოორდინატო ღერძების პარალელური გადატანა რომ გავაქროთ წევრი $-2\sqrt{5}y' + 7,$ ანუ $F'(x',y')$-ში რაც დარჩება მივიყვანოთ პარაბოლის

განტოლებამდე. ამისათვის ვთქვათ სათავე გადადის (x_0, y_0) წერტილში, ანუ გვაქვს ახალი კოორდინატები (x'', y'')

$$\begin{cases} x' = x'' + x_0 \\ y' = y'' + y_0 \end{cases}$$

ანუ

$$F''(x'', y'') = 5(y'' + y_0)^2 - 6\sqrt{5}(x'' + x_0) - 2\sqrt{5}(y'' + y_0) + 7 = 0$$

გავაქროთ წევრი $-2\sqrt{5}y' + 7$ ნიშნავს, ბოლო განტოლებაში y''-ის კოეფიციენტი და თავისუფალი წევრი უნდა იყოს 0.

$F''(x'', y'')$ ანუ $\begin{cases} 10y_0 - 2\sqrt{5} = 0 \\ 5{y_0}^2 - 6\sqrt{5}x_0 - 2\sqrt{5}y_0 + 7 = 0 \end{cases}$

ამონახნია $(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, ანუ პარაბოლას წვეროს კოოდინატები (x', y')-ში არის $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$,

ამიტომ ახალ (x'', y'') კოორდინატებში განტოლება მიიღებს სახეს

$$F''(x'', y'') = 5(y'' + \frac{\sqrt{5}}{5})^2 - 6\sqrt{5}\left(x'' + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) - 2\sqrt{5}(y'' + \frac{\sqrt{5}}{5}) + 7 = 0$$

ანუ

$$F''(x'', y'') = 5y''^2 - 6\sqrt{5}x'' = 0$$

ანუ საბოლოდ გვაქვს პარაბოლის კანონიკური განტოლება

$$y''^2 = 6\frac{\sqrt{5}}{5}x''.$$

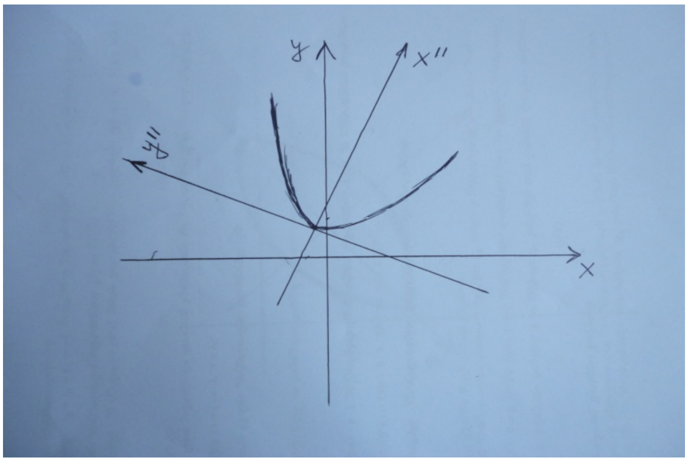
ამასთან ჩვენ ვიცით კანონიკური კოორდინატთა სისტემას:

x''-ის საკუთხო კოეფიციენტია $tg\alpha = 2$;

პარაბოლის წვეროს, ანუ კანონიკური საკორდინატო სისტემის სათავის კოორდინატები (x', y')-ში არის $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$, ხოლო (x, y)-კოორდინატებში გავიგებთ ზემოთმოყვანილი გარდაქმნით

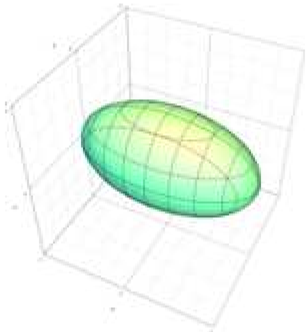
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y' = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5} = -1/5 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5} = 3/5. \end{cases}$$

ეხლა შგვიძლია პარაბოლის დახატვაც.


y
x''
y''
x

7. მეორე რიგის ზედაპირები

ელიფსოიდის კანონიკური განტოლებაა $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (1)



გამოვიყენოთ ეგრეთწოდებული “პარალელური კვეთების მეთოდი” და დავადგინოთ ელიფსოიდის ფორმა.

ჯერ განვიხილოთ მოცემული ელიფსოიდის კვეთები OXY საკოორდინატო სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით. ყოველ ასეთ სიბრტყეს აქვს განტოლება $z=h$, ამიტომ წირი, რომელიც კვეთით მიიღება, მოიცემა ორი განტოლებით

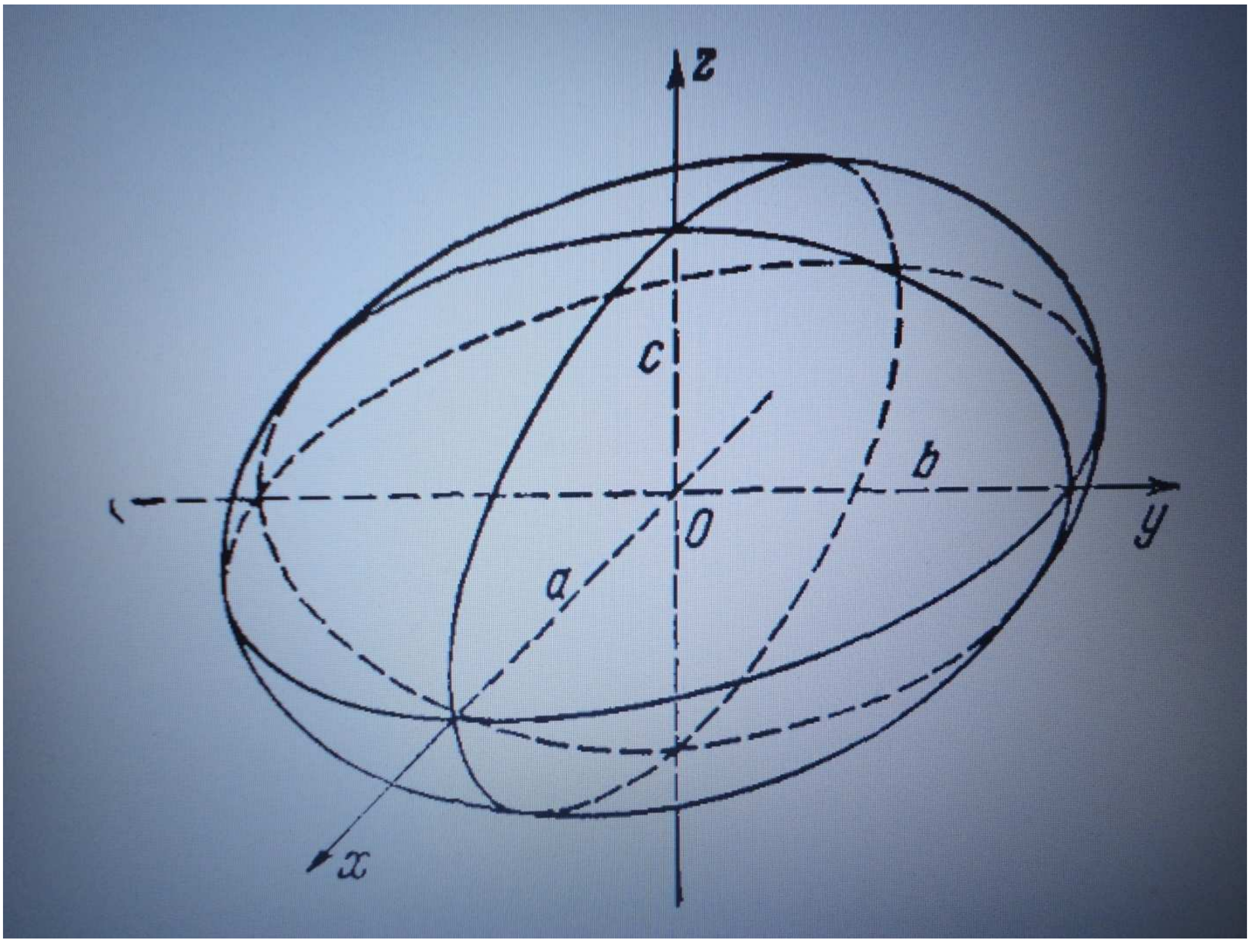
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}\\ z=h.\end{cases} \qquad (2)$$

აქედან ჩანს, რომ

1) როცა $|h|<c$, მაშინ $z=h$ სიბრტყის და (1) ელიფსოიდის თანაკვეთაა ელიფსი, რომლის ნახევარღერძებია
   $a^*=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ და $b^*=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$.
   და სიმეტრიულადაა განლაგებული OXZ და OYZ საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.
2) სიდიდეები a^* და b^* უდიდესია, როცა $h=0$, მაშინ $a^*=a$ და $b^*=b$. ანუ უდიდესი ელიფსი მიიღება $z=0$ სიბრტყის თანაკვეთით.
3) როცა $|h|$ იზრდება a^* და b^* მცირდება.
4) როცა $h=\pm c$, მაშინ $a^*=b^*=0$. ე.ი. კვეთით მიღებული ელიფსი გადაგვარდა წერტილში, ანუ $z=\pm c$ სიბრტყე მოცემულ ელიფსოიდს კი არ კვეთს, არამედ ეხება.
5) როცა $|h|>c$, (2) განტოლებებით გვაქვს ცარიელი სიმრავლე (წარმოსახვითი ელიფსი) ანუ ამ შემთხვევაში $z=h$ სიბრტყე არ კვეთს (1) ელიფსოიდს.

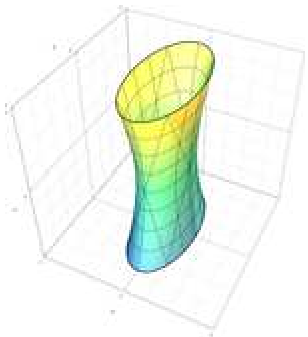
აბსოლუტურად იგივე სურათი გვექნება, თუ განვიხილავთ (1) ელიფსოიდის კვეთებს OXZ და OYZ საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელური სიბტყეებით.

ამრიგად შეგვიძლია დავასკვნათ რომ ელიფსოიდი შეკრული ოვალური ფორმის ზედაპირია. ელიფსოიდს (კანონიკურ საკოორდინატო სისტემაში (1) განტოლებით მოცემულს) სამი ურთიერთმართობული სიმეტრიის სიბრტყე აქვს (საკოორდინატო სიბრტყეები).



ერთკალთა ჰიპერბოლოიდის კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)$$



ჯერ განვიხილოთ კვეთები OXZ და OYZ საკოორდინატო სიბტყეებით.

კვეთა OXZ (ანუ $y=0$) სიბრტყით მოიცემა განტოლებებით (ჩავსვათ (3)-ში $y=0$)

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0.\end{cases}$$

ვხედავთ რომ ესაა ჰიპერბოლა რომელიც სიმეტრიულადაა განლაგებული OX და OZ საკოორდინატი ღერძების მიმართ და Ox ღერძს კვეთს წერტილებში $(-a,0,0)$ და $(a,0,0)$.

ანალოგიურად კვეთა OYZ სიბრტყით მოიცემა განტოლებებით

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0.\end{cases}$$

ესაა ჰიპერბოლა რომელიც სიმეტრიულადაა განლაგებული OY და OZ საკოორდინატი ღერძების მიმართ და OY ღერძს კვეთს წერტილებში $(0,-b,0)$ და $(0,b,0)$.

ეხლა განვიხილოთ (3) ჰიპერბოლოიდის კვეთა OXY (ანუ $z=0$) სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით. ოველი ასეთი სიბრტყე მოიცემა განტოლებით $z=h$, ამიტომ კვეთა მოიცემა განტოლებებით

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}\\ z=h.\end{cases}$$

ვხედავთ რომ ესაა ელიფსი

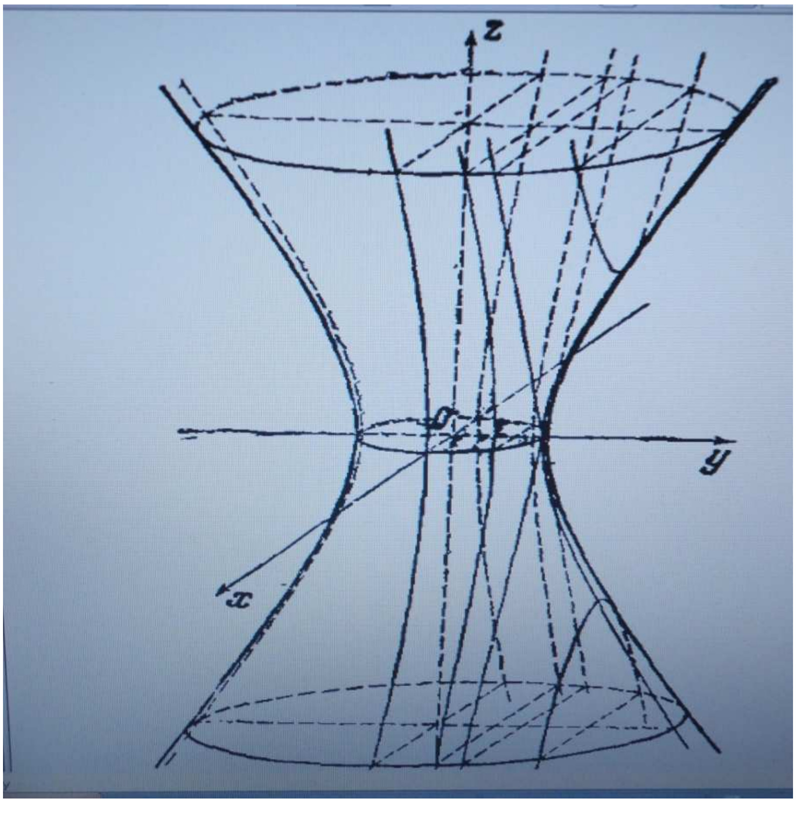
$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1,$$

რომლის ნახევარღერძებია

$$a^* = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \quad \text{და} \quad b^* = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

ეს ელიფსი უმცირესია როცა $z = h = 0$ (საყელო ელიფსი) და იზრდება უსასრულოდ როცა $|z| = |h|$ იზრდება.

ეს ინფორმაცია საკმარისია იმისათვის, რომ წარმოვიდგინოთ ერთკალთა ჰიპერბოლოიდი როგორც უსასრულო მილის ფორმის ვერტიკალურად მიმართული ზედაპირი, რომელიც ყველაზე ვიწროა ნულოვან სიმაღლეზე და თანდათან უსასრულოდ ფართოვდება როცა სიმაღლე მონოტონურად იზრდება (ან იკლებს ნულოვანი დონის ქვემოთ).



რადგან კვეთებზე ვსაუბრობთ ისმის კითხვა,

რას წარმოადგენს (3) ჰიპერბოლოიდის კვეთა $x = h$ და $y = h$ სიბრტყეებით?

პასუხი ასეთია (იხ ნახატი).:

კვეთა $\boldsymbol{x = h}$, $|\boldsymbol{h}| < a$ სიბრტყით არის ჰიპერბოლა (იპოვეთ მისი ნახევარღერძები და განტოლება)

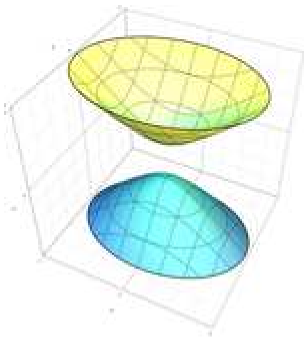
კვეთა $\boldsymbol{x = h}$, $\boldsymbol{h = \pm a}$ სიბრტყით წრფეთა წყვილი $\begin{cases} \frac{y^2}{y^2} - \frac{z^2}{c^2} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x = \pm a}. \end{cases}$

კვეთა $\boldsymbol{x = h}$, $|\boldsymbol{h}| > a$ სიბრტყით არის ისევ ჰიპერბოლა (იპოვეთ მისი ნახევარღერძები და განტოლება.)

პასუხი ანალოგიურია $\boldsymbol{y = h}$ სიბრტყეებით კვეთებისთვის (უპასუხეთ!)

ორკალთა ჰიპერბოლოიდის კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (4)$$



ჯერ განვიხილოთ კვეთები OXZ და OYZ საკოორდინატო სიბტყეებით.

კვეთა OXZ (ანუ $y = 0$) სიბრტყით მოიცემა განტოლებებით (ჩავსვათ (4)-ში)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ y = 0. \end{cases} \qquad \text{ანუ} \qquad \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

ვხედავთ რომ ესაა ჰიპერბოლა რომელიც სიმეტრიულადაა განლაგებული OZ და OX საკოორდინატი ღერძების მიმართ და OZ ღერძს კვეთს წერტილებში $(0,0,-c)$ და $(0,0,c)$.

ნალოგიურად კვეთა OYZ (ანუ $X = 0$) სიბრტყით მოიცემა განტოლებებით (ჩავსვათ (4)-ში)

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = 0. \end{cases} \qquad \text{ანუ} \qquad \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0. \end{cases}$$

ვხედავთ რომ ესაა ჰიპერბოლა რომელიც სიმეტრიულადაა განლაგებული OZ და OX საკოორდინატო ღერძების მიმართ და OZ ღერძს კვეთს წერტილებში $(0,0,-c)$ და $(0,0,c)$.

ეხლა განვიხილოთ (3) ჰიპერბოლოიდის კვეთა OXY (ანუ $z=0$) სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით. ოველი ასეთი სიბრტყე მოიცემა განტოლებით $z=h$, ამიტომ კვეთა მოიცემა განტოლებებით

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1+\dfrac{h^2}{c^2} \\ z=h. \end{cases}$$

ვხედავთ რომ ესაა

1) ელიფსი, როცა $|h|>c$

$$\frac{x^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1,$$

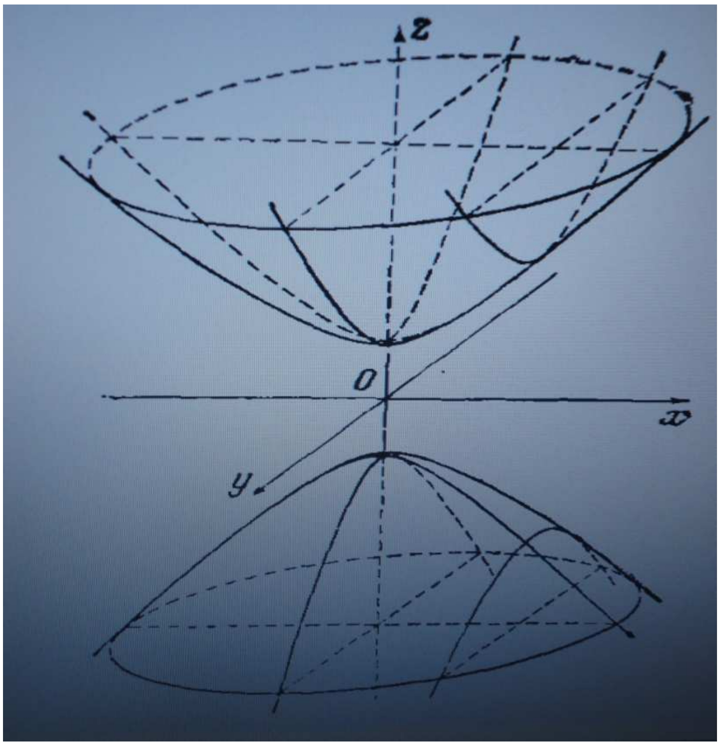
რომლის ნახევარღერძებია

$$a^*=a\sqrt{-1+\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{და} \quad b^*=b\sqrt{-1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

ეს ელიფსი იზრდება უსასრულოდ როცა $|z|=|h|$ იზრდება.

2) ეს ელიფსი გადაგვარდება წერტილად როცა $z=h=\pm c$.
3) გვაქვს ცარიელი სიმრავლე თუ $z=|h|<c$.

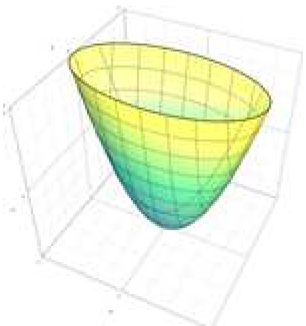
ეს ინფორმაცია საკმარისია იმისათვის, რომ წარმოვიდგინოთ ორთკალთა ჰიპერბოლოიდის ფორმა.



კითხვა: რას წარმოადგენს (4) ორკალთა ჰიპერბოლოიდის კვეთა $x = h$ და $y = h$ სიბრტყეებით?

პასუხი: ჰიპერბოლებს. ზემოთმოყვანილი მსჯელობის ანალოგიით იპოვეთ b^*, c^* ნახევარღერძები პირველ და a^*, c^* ნახევარღერძები მეორე შემთხვევაში და დაწერეთ კვეთების განტოლებები.

ელიფსური პარაბილოიდის კანონიკური განტოლებაა $$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \qquad (5)$$



ჯერ განვიხილოთ კვეთები OXZ და OYZ საკოორდინატო სიბტყეებით.

კვეთა OXZ (ანუ $y = 0$) სიბრტყით მოიცემა განტოლებებით (ჩავსვათ (5)-ში)

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0. \end{cases}$$

ვხედავთ რომ ესაა პარაბოლა რომელიც სიმეტრიულადაა განლაგებული OZ საკოორდინატი ღერძის მიმართ და რომლის პარამეტრია p.

ანალოგიურად კვეთა OYZ (ანუ $x = 0$) სიბრტყით მოიცემა განტოლებებით

$$\begin{cases} y^2 = 2qz \\ x = 0. \end{cases}$$

ვხედავთ რომ ესაა ჰიპერბოლა რომელიც სიმეტრიულადაა განლაგებული OZ საკოორდინატი ღერძის მიმართ და რომლის პარამეტრია q.

ეხლა განვიხილოთ (3) ჰიპერბოლოიდის კვეთა OXY (ანუ $z = 0$) სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით. ოველი ასეთი სიბრტყე მოიცემა განტოლებით $z = h$, ამიტომ კვეთა მოიცემა განტოლებებით

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h \\ z = h. \end{cases}$$

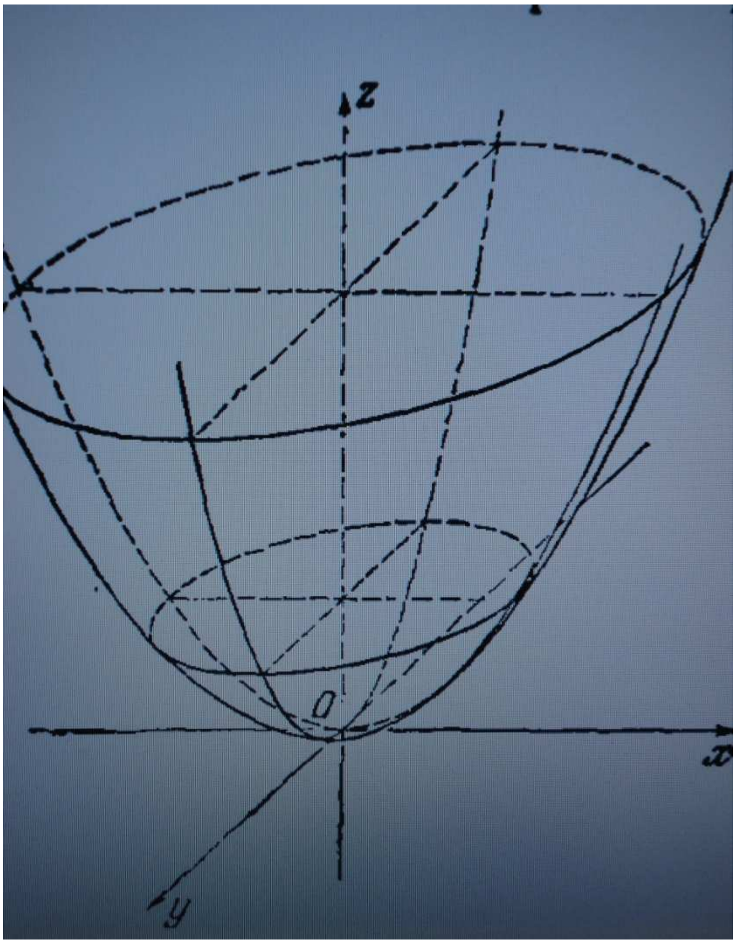
ვხედავთ რომ ესაა

1) ელიფსი, როცა $h > 0$

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1,$$

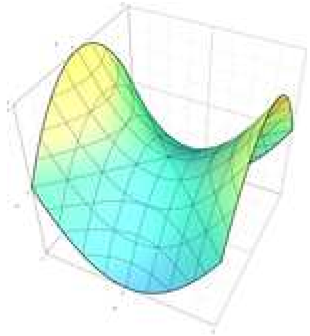
რომლის ნახევარღერძებია $a^* = \sqrt{2ph}$, $b^* = \sqrt{2qh}$

2) წერტილი როცა $h = 0$.


z
O
x
y

ჰიპერბოლური პარაბილოიდის კანონიკური განტოლებაა

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \qquad (6)$$



კვეთა OXZ სიბრტყის (ანუ $y = 0$) პარალელური სიბრტყეებით, ასეტრი სიბრტყეები მოიცემა განტოლებით $y = h$ ამიტომ კვეთა მოიცემა განტოლებებით

პარაბოლა $\begin{cases} 2z = \frac{x^2}{p} - \frac{h^2}{q} \\ y = h \end{cases}$

ესაა აღმავალი პარაბოლა(შტოები მაღლა აქვს მიმართული).

კვეთა OYZ სიბრტყის (ანუ $x = 0$) პარალელური სიბრტყეებით. ასეთი სიბრტყეები მოიცემა ფორმულით $x = h$ ამიტომ კვეთა მოიცემა განტოლებებით

$$\begin{cases} 2z = -\dfrac{y^2}{q} + \dfrac{h^2}{p} \\ x = h \end{cases}$$

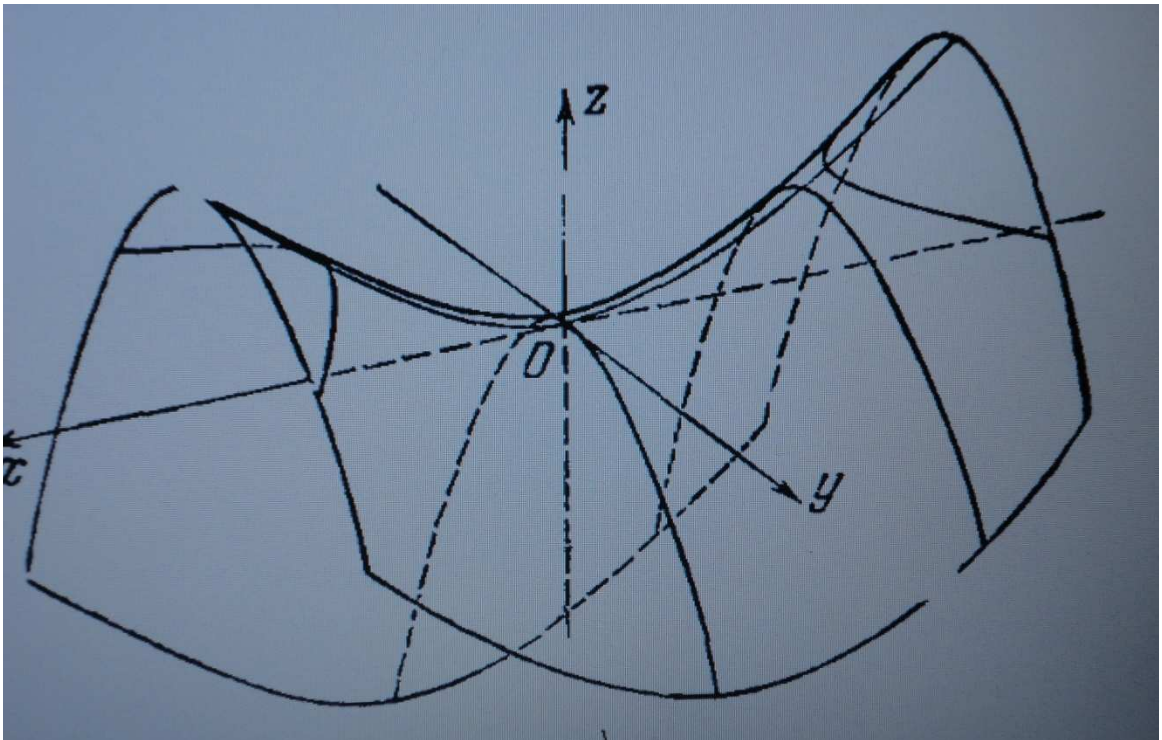
ესაა დაღმავალი პარაბოლები(შტოები დაბლაა მიმართული)

საბოლოოდ კვეთა OXY სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით, ანუ $z = h$ სიბრტყით

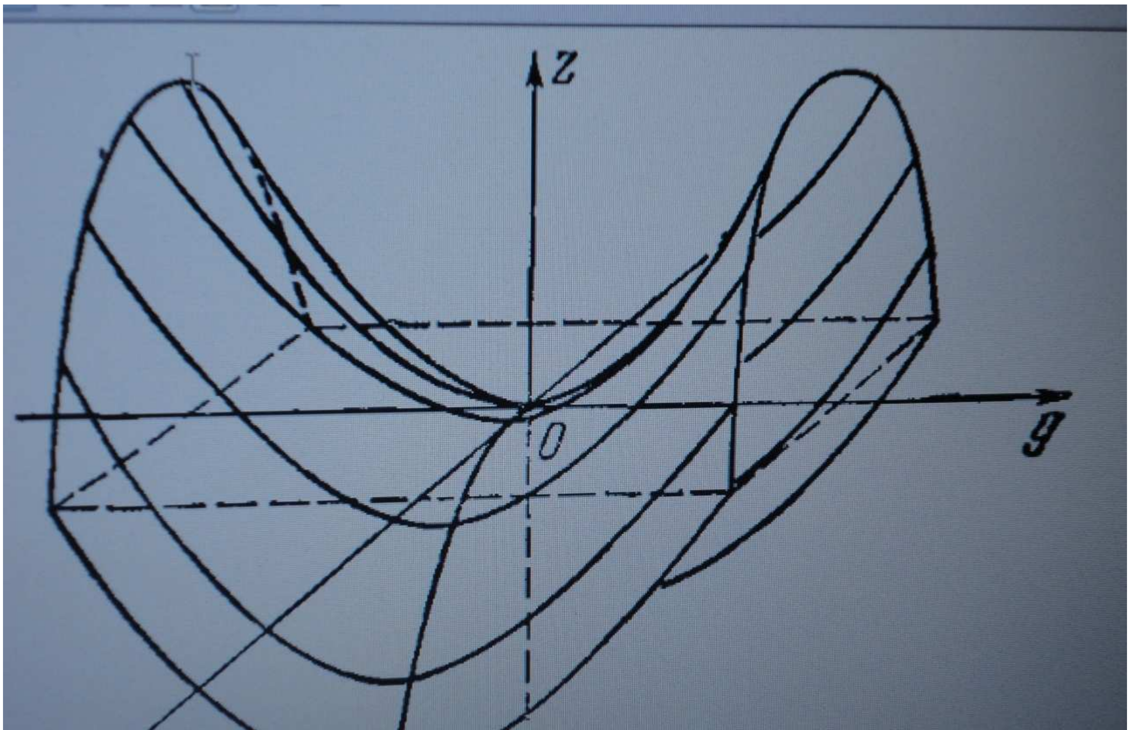
არის ჰიპერბოლა

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h \\ z = h. \end{cases}$$

ეს ინფორმაცია საკმარისია იმისათვის, რომ წარმოვიდგინოთ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის ფორმა.



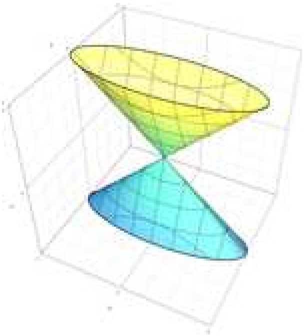
а)



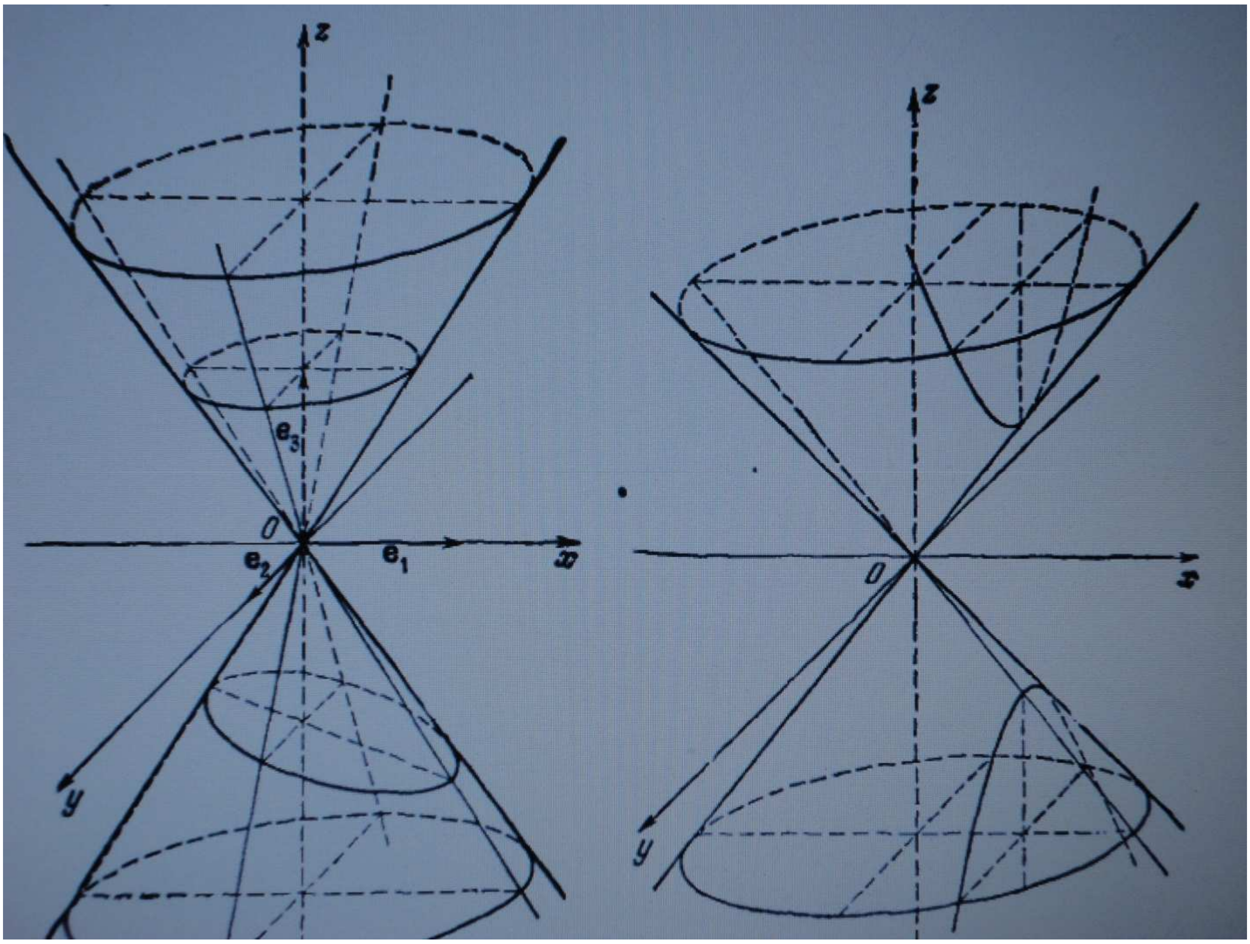
б)

კონუსის კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (7)$$



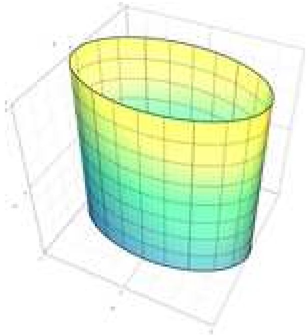
ნახატიდან ჩანს, რომ კონუსის კვეთებია როგორც ელიფსი, ისე ჰიპერბოლა და პარაბოლა (ვაჩვენოთ !). ამიტომ მეორე რიგის წირებს კონუსურ კვეთებსაც უწოდებენ.



მეორე რიგის ცილინდრები. ელიფსური, ჰიპერბოლური და პარაბოლური ცილინდრის კანონიკური განტოლება ფორმალურად იგივეა რაც შესაბამისი მეორე რიგის წირის განტოლება, ოღონდ იგულისხმება რომ z ნებისმიერია. ანუ

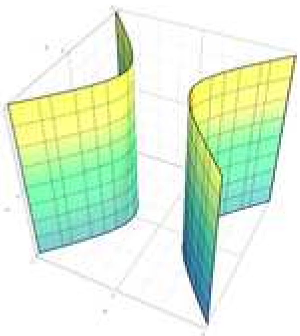
ელიფსური ცილინდრის კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (8)$$



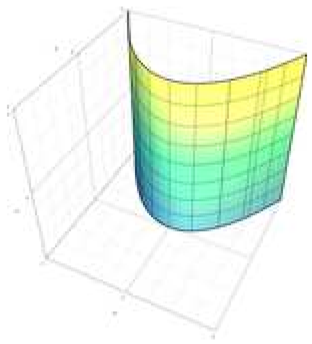
ჰიპერბოლური ცილინდრის კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (9)$$

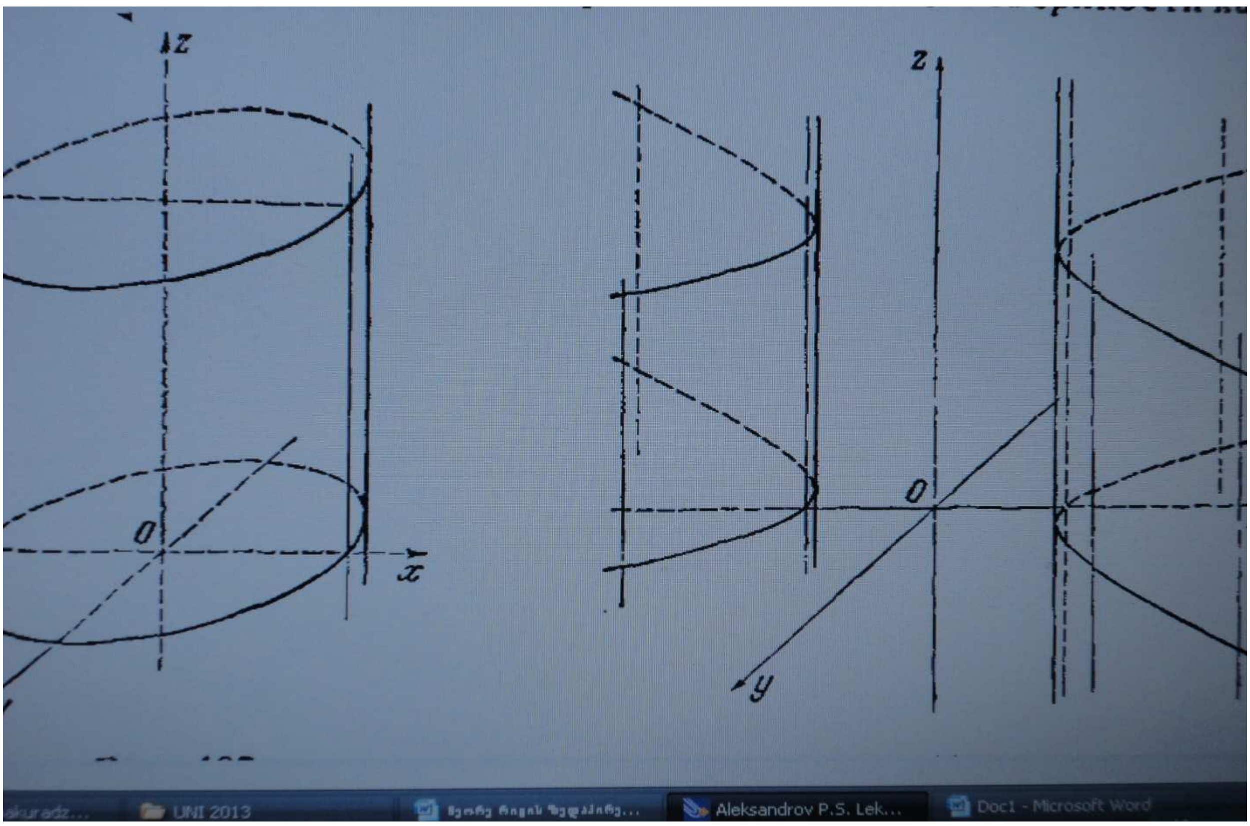


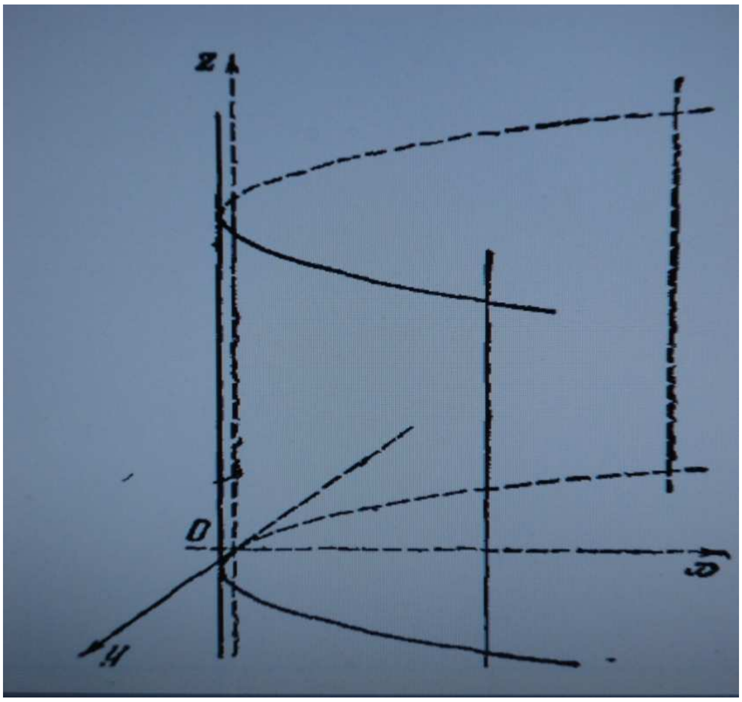
პარაბოლური ცილინდრის კანონიკური განტოლებაა

$$\boldsymbol{y^2 = 2px} \qquad (10)$$



ამ ზედაპირების ფორმაზე წარმოდგენა მხოლოდ ჰორიზონტალური ($z = h$ სიბრტყეებით) პარალელური კვეთებითაც საკმარისია. იხ. ნახატი




z
O
x
y

8. კვატერნიონები

განსაზღვრება: კვატერნიონი ეწოდება გამოსახულებას $\mathrm{a + ib + jc + kd}$, სადაც $\mathrm{a, b, c, d}$ ნამდვილი რიცხვებია, $\mathrm{i, j, k}$ წარმოსახვითი ელემენტები.

გავიხსენოთ კომპლექსური რიცხვები, როგორც გამოსახულებები $a + ib$.

კვატერნიონების **შეკრება** ხდება კოორდინატობრივად, ანუ რადგან კვატერნიონი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ვექტორი $(a, b, c, d) \in R^4$, შეკრების ოპერაციაც ისეთივეა როგორც ვექტორებში. კერძოდ:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4).$$

კვატერნიონებში **გამრავლების ოპერაცია** შემოდის ასე:

კვარერნიონებს $\mathrm{x_1 + i\,x_2 + jx_3 + kx_4}$ და $\mathrm{y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4}$

ჯერ გადავამრავლებთ როგორც მრავალწევრებს ;

შემდეგ გავითვალისწინებთ რომ წარმოსახვით ელემენტებზე გამრავლება ასეა განსზღვრული:

(1) $\mathrm{i^2 = j^2 = k^2 = -1}$ და

(2) $\mathrm{ij = k = -ji}$, $\mathrm{jk = i = -kj}$, $\mathrm{ki = j = -ik}$

და საბოლოოდ, შევაერთებთ მსგავს წევრებს, ანუ i, j და k-ს კოეფიციენტებს ერთად დავაჯგუფებთ.

მაგალითად $(2 + 3i - 4k)(i - 2j) = 2i - 4j + 3i^2 - 6ij - 4ki + 8kj =$

$$= 2i - 4j - 3 - 6k - 4j - 8i = -3 - 6i - 8j - 6k.$$

შევნიშნოთ რომ **კვატერნიონებში გამრავლება არაა კომუტაციური**. მაგ $ij \neq ji$. პირდაპირი შემოწმებით შეიძლება დამტკიცდეს რომ ამ გამრავლებისთვის სრულდება ასოციურობა და ჯუფდებადობა.

ჩვენ გვინდა კვატერნიონები გამოვიყენოთ R^3 სივრცეში ვექტორული ალგებრისათვის, ამიტომ შევნიშნოთ რომ კვატერნიონი (როგორც ნამდვილ რიცხვთა ოთხეული) **ასეთი ფორმითაც შეიძლება ჩაიწეროს** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$,

აქ $\boldsymbol{a}$ **ნამდვილი რიცხვია,** $\boldsymbol{x}$ **კი ვექტორი** $\boldsymbol{R^3}$ **სივრცეში** (ანუ ნამდვილ რიცხვთა სამეული). როცა $a = 0$ გვაქვს $(0, x)$ სახის კვატერნიონი, რომელსაც ეწოდება **წმინდა** კვატერნიონი.

ანუ კვატერნიონები მჭიდრო კავშირშია R^3 სივრცის ვექტორებთან, რაც უფრო კარგად ჩანს შემდეგი გამრავლების წესიდან:

თეორემა. კვატერნიონების ნამრავლი მოიცემა ფორმულით:

$(\mathrm{a}, \mathrm{x})(\mathrm{b}, \mathrm{y}) = (\mathrm{ab} - \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}\ , \mathrm{ay} + \mathrm{bx} + (\mathrm{x} \times \mathrm{y}))$,

სადაც $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლია, $\mathrm{x} \times \mathrm{y}$ კი ვექტორული ნამრავლი.

დამტკიცებას არ მოვიყვანთ, რადგან ეს პირდაპირი სემოცმებით ხდება.

კერძოდ **წმინდა კვატერნიონები მრავლდება ასე:**

$(\mathbf{0}, \mathbf{x})(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = (-\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\ , \mathbf{x} \times \mathbf{y})$**,**

ანუ მათი გამრავლება მხოლოდ სკალარული და ვექტორული ნამრავლების ტერმინებში ხდება.

კომპლექსური რიცხვების ანალოგიურად კვატერნიონისთვის განისაზღვრება მისი შეუღლებული.

განსაზღვრება. $a + x$ კვატერნიონის შეუღლებული არის $a - x$. ჩვენ q კვატერნიონის შეუღლებულს ავღვიშნავთ $\bar{q}$ სიმბილოთი.

კვატერნიონების გამრავლების ფორმულიდან პირდაპირ გამომდინარეობს რომ

$$(\overline{\boldsymbol{pq}}) = \overline{\boldsymbol{q}}\,\overline{\boldsymbol{p}}.$$

აქ მიმდევრობას მნიშვნელობა აქვს, რადგან გამრავლება არაა კომუტაციური!

შევნიშნოთ რომ

$$\boldsymbol{q\bar{q}} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}^2 + |\boldsymbol{x}|^2.$$

და რადგან $a + x$ კვატერნიონის სიგრძე, ანუ მანძილი (a, x_1, x_2, x_3) ვექტორიდან სათავემდე არის

$(\boldsymbol{a}^2 + |\boldsymbol{x}|^2)^{1/2} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{x_1}^2 + \boldsymbol{x_2}^2 + \boldsymbol{x_3}^2}$,

ამიტომ ამ გამოსახულებას ეწოდება $\boldsymbol{a + x}$ კვატერნიონის ნორმა და აღინიშნება $|\boldsymbol{a + x}|$.

გვაქვს ფორმულა

$$|\boldsymbol{pq}| = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|.$$

მართლაც $|pq|^2 = (pq)(\overline{pq}) = pq\bar{q}\bar{p} = p|q|^2\bar{p} = |q|^2p\bar{p} = |q|^2|p|^2 = |p|^2|q|^2$.

შენიშვნა. კვატერნიონი (a, x) უფრო მოსახერხებელია ჩაიწეროს ასე $a + x$. მაშინ თუ q წმინდა კვატერნიონია და $|q| = 1$ გამრავლების წესით გვაქვს $q^2 = -1$.

ეს არის $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ფორმულის **განზოგადება,** რადგან ის სრულდება ნებისმიერი წმინდა კვატერნიონისთვის, ნორმით ერთი.

არეკვლები და ბრუნვები სივრცეში

განსაზღვრება. ასახვას $f: R^3 \to R^3$ ეწოდება იზომეტრია თუ ის ინახავს მანძილებს, ანუ $\forall x, y \in R^3$ ვექტორებისთვის $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

სივრცეში რაიმე სიბრტყეზე არეკვლა არის იზომეტრია. ქვევით ჩვენ ვნახავთ რომ ნებისმიერი იზომეტრია წარმოადგენს არეკვლების კომპოზიციას.

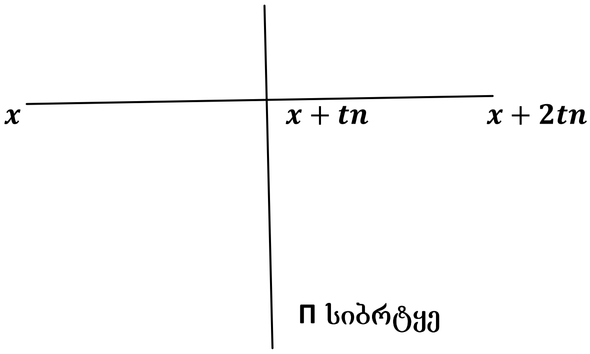
განვიხილოთ სივრცეში Π სიბრტყე რომლის განტოლებაა

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{d}, \qquad (1)$$

სადაც n სიბრტყის ნორმალური ვექტორია, $|n| = 1$.

(აქ $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$, $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in R^3$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება $Ax + By + Cz = d$, რაც როგორც ვიცით სიბრტყის განტოლებაა.)

ვთქვათ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ არის Π სიბრტყეზე არეკვლა. გამოვიყვანოთ მისი ფორმულა.



შევარჩიოთ t რიცხვი ისე რომ x წერტილის სიმეტრიული წერტილი იყოს $x+2tn,$ ანუ $F(x)=x+2tn.$ მაშინ წერტილი $x+tn \in \Pi,$ ამიტომ აკმაყოფილებს (1) განტოლებას.

$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{tn})\cdot\boldsymbol{n}=d \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}+t=d \;\Rightarrow\; t=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{d}.$

ჩავსვათ t-ს მნიშვნელობა x-ის სიმეტრიულ წერტილის $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2tn}$ გამოსახულებაში, მივიღებთ არეკვლის ფორმულას::

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \qquad \textbf{(2)}$$

ორი პარალელური სიბრტყის მიმართ არეკვლების კომპოზიცია.

განვიხილოთ Π_1 და Π_2 პარალელური სიბრტყეები განტოლებებით

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=d_1 \quad \text{და} \quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=d_2.$$

ვთქვათ R_1 არის Π_1 სიბრტყის მიმართ არეკვლა, R_2 კი Π_2 სიბრტყის მიმართ არეკვლა.

მაშინ (1) ფორმულით კომპოზიცია $\boldsymbol{R_1}(\boldsymbol{R_2}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2}(\boldsymbol{d_1}-\boldsymbol{d_2})\boldsymbol{n}.$

ამრიგად პარალელური სიბრტყეების მიმართ ორი არეკვლის კომპოზიცია არის პარალელური გადატანა $\boldsymbol{2dn}$ ვექტორით, სადაც $\boldsymbol{n}$ არის ამ ორი სიბრტყის საერთო ერთეულოვანი ნორმალი, $\boldsymbol{d}$ კი მანძილი სიბრტყეებს შორის.

ორი თანამკვეთი სიბრტყის მიმართ არეკვლების კომპოზიცია.

განვიხილოთ Π_1 და Π_2 განსხვავებული თანამკვეთი სიბრტყეებია; R_1 არის Π_1 სიბრტყის მიმართ არეკვლა, R_2 კი Π_2 სიბრტყის მიმართ არეკვლა.

ვთქვათ L წრფე არის თანაკვეთა $\Pi_1 \cap \Pi_2$. მაშინ ორივე არეკვლა L წრფის წერტილებს უძრავად ტოვებს, ხოლო L წრფის მართობული ნებისმიერი Π სიბრტყის წერტილებს ისევ ამ სიბრტყის წერტილებში გადაიყვანს. ანვიხილოთ ორი წრფე Π სიბრტყეზე

$$L_1 = \Pi_1 \cap \Pi \text{ და } L_1 = \Pi_1 \cap \Pi\,.$$

მაშინ კომპოსიცია R_2R_1 ასე მოქმედებს Π სიბრტყეზე: ეს კომპოზიცია არის ჯერ L_1 შემდეგ კი L_2 წრფის მიმართ არეკვლის (ანუ ღერძული სიმეტრიის) კომპოზიცია. როგორც ვიცით სიბრტყეზე ორი გადამკვეთი წრფის მიმართ კომპოზიცია არის მობრუნება გადაკვეთის წერტილის გარშემო კუთხით რომელიც ორჯერ მეტია წრფეებს შორის კუთხეზე.

ამრიგად **ორი განსხვავებული თანამკვეთი სიბრტყის მიმართ არეკვლების კომპოზიცია არის $\boldsymbol{R^3}$ სივრცის მობრუნება ამ სიბრტყეების გადაკვეთით მიღებული წრფის გარშემო კუთხით, რომელიც ამ სიბრტყეებს შორის კუთხის ორმაგია.**

არეკვლის ჩაწერა კვატერნიონებით

თეორემა: სივრცეში $\boldsymbol{x \cdot q = 0}$ სიბრტყის მიმართ არეკვლა, სადაც q წმინდა კვატერნიონია ერთეულოვანი სიგრძით, ჩაიწერება ასე

$$\boldsymbol{T(y) = qyq}. \qquad (3)$$

მართლაც თუ $\boldsymbol{T}$ **ასახვა** $\boldsymbol{x}$ ვექტორს ადგილზე ტოვებს მაშინ $\boldsymbol{x = qxq}$ ანუ $\boldsymbol{qx = q^2xq = -xq}$ (რადგან ერთეულოვანი სიგრძის წმინდა კვატერნიონი კვადრატში $= -1$).

მაგრამ წმინდა კვატერნიონების გამრავლებით ტოლობა $\boldsymbol{qx = -xq}$ ნიშნავს რომ

$$(\boldsymbol{-q \cdot x, q \times x}) = (\boldsymbol{x \cdot q, -x \times q}) \Rightarrow \boldsymbol{x \cdot q = 0}.$$

ესეიგი T ასახვა $\boldsymbol{x \cdot q = 0}$ სიბრტყის წერტილებს უძრავად ტოვებს. ეხლა გავარკვიოთ $\boldsymbol{T}$ ასახვას სად გადაყავს ნებისმიერი წერტილი $\boldsymbol{y \in R^3}$ ანუ წმინდა კვარეტნიონი $\boldsymbol{y}$. რადგან $\boldsymbol{q}$ ვექტორი ორთოგონულია $\boldsymbol{x \cdot q = 0}$ სიბრტყის ნებისმიერი $\boldsymbol{y}$ შეგვიძლია გავშალოთ $\boldsymbol{q}$ ვექტორისა და ამ $\boldsymbol{x \cdot q = 0}$ სიბრტყის რაიმე $\boldsymbol{p}$ ვექტორით:

$$\boldsymbol{y = p + tq},\ \boldsymbol{t}\text{-რაღაც ნამდვილი რიცხვია.}$$

გვაქვს

$$\boldsymbol{T(y) = T(p + tq) = T(p) + tT(q) = p + t(qq)q = p - tq}.$$

მეორეს მხრივ (2) ფორმულით ეს არის y წერტილის ანარეკლი

$$\boldsymbol{R(y) = y - 2(y \cdot q)q = p + tq - 2\big((p + tq) \cdot q\big)q = p + tq - 2tq = p - tq}. \qquad \text{რ.დ.გ.}$$

შევნიშნოთ რომ ამ თეორემით რომ ორი არეკვლის კომპოსიცია $\boldsymbol{p}$ და $\boldsymbol{q}$ ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორებით იქნება

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{pxp})\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{qp})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{pq}). \qquad (4)$$

მობრუნების ჩაწერა კვატერნიონებით

თეორემა. ვთქვათ გვაქვს კვატერნიონი $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{cos\alpha}, \boldsymbol{sin\alpha}\,\mathbf{n})$, სადაც $\boldsymbol{n}$ ერთეულოვანი ვექტორია. მაშინ $\boldsymbol{r}$ ერთეულოვანი კვატერნიონია და ასახვა

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{rx\bar{r}} \qquad (5)$$

არის ბრუნვა $\boldsymbol{n}$ ვექტორის მიმართულების ღერძის გარშემო $\boldsymbol{2\alpha}$ კუთხით.

მართლაც ორი არეკვლის კომპოსიცია $\boldsymbol{p}$ და $\boldsymbol{q}$ ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორებით გამოითვლება (4) ფორმულით. თუ $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{cos\alpha}$, $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} = \boldsymbol{sin\,\alpha\,n}$, მაშინ კვარეტნიონების გამრავლებით $\boldsymbol{qp} = -\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{pq} = -\boldsymbol{\bar{r}}$. ამიტომ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{rx}(-\boldsymbol{\bar{r}}) = \boldsymbol{rx\bar{r}}$. რ.დ.გ

თეორემა იზომეტრიის წარმოდგენის შესახებ არეკვლების კომპოზიციით.

თეორემა. R^3-ის ყოველი იზომეტრია არის არაუმეტეს ოთხი არეკვლის კომპოზიცია.

დამტკიცება. ჩვენ დაგვჭირდება

ლემა 1. ვთქვათ f იზომეტრიაა რომელიც ინახავს სათავეს, ანუ $f(0) = 0$, მაშინ

1. f ინახავს ნორმას, $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$;

2. f ინახავს სკალარულ ნამრავლს, $\boldsymbol{f(x)\cdot f(y)=x\cdot y}$

მარლაც **1.** $\quad |\boldsymbol{f(x)}|=|\boldsymbol{f(x)-f(0)}|=|\boldsymbol{x-0}|=|\boldsymbol{x}|.$

2. $\quad |\boldsymbol{f(x)}|^2+|\boldsymbol{f(y)}|^2-\boldsymbol{2f(x)\cdot f(y)}=|\boldsymbol{f(x)-f(y)}|^2=|\boldsymbol{x-y}|^2=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2-\boldsymbol{2x\cdot y}$

ამრიგად f ინახავს სკალარულ ნამრავლსაც.

ლემა 2. თუ იზომეტრია ადგილზე ტოვებს $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ −ს, მაშინ $\boldsymbol{f}$ იგივური ასახვაა.

ეს ლემა თითქმის ცხადია რადგან პირობის თანახმად იზომეტრია უძრავად ტოვებს საკოორდინატო სისტემას.

ლემა 3. ვთქვათ $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|\neq \boldsymbol{0}$, მაშინ არსებობს არეკვლა $\boldsymbol{R}$ სათავეზე გამავალ სიბრტყის მიმართ, ისე რომ $\boldsymbol{R(a)=b}$.

საკმარისია ავიღოთ სიბრტყის ერთეულოვანი ნორმალის როლში ვექტორი

$n=(a-b)/|a-b|$.

მაშინ $x\cdot n=0$ სიბრტყის მიმართ არეკვლისას

$$R(a)=a-2(a\cdot n)n=a-2\left(a\cdot\frac{a-b}{|a-b|}\right)\frac{a-b}{|a-b|}=a-(a-b)=b$$

შევნიშნოთ რომ ჩვენ გამოვიყენეთ ტოლობა $2a(a-b)=|a-b|^2$. რ.დ.გ.

თეორემის დამტკიცება.

ვთქვათ f არის R^3 სივრცის ნებისმიერი იზომეტრია. თუ $f(0)\neq 0$ მაშინ R_1 იყოს არეკვლა რომელიც ერთმანეთში გადაიყვანს 0-ს და $f(0)$-ს. თუ $f(0)=0$, მაშინ R_1იყოს იგივური ასახვა. ნებისმიერ შემთხვევაში კომპოზიცია $f_1=R_1f$ უძრავად ტოვებს 0-ს, ანუ

$$\boldsymbol{f_1(0)=0}.$$

რადგან ლემა 3-ით $|f_1(k)|=|k|$ არსებობს არეკვლა R_2, სათავეზე გამავალ სიბრტყის მიმართ, რომელიც ერთმანეთში გადაიყვანს $f_1(k)$-ს და k-ს. მაშინ კომპოზიცია $f_2=R_2f_1$ უძრავად დატოვებს 0-ს და k-ს.

$$\boldsymbol{f_2(0)=0},\quad \boldsymbol{f_2(k)=k}.$$

ეხლა შევნიშნოთ რომ ლემა 1 −ით ვექტორები $f_2(i)$ და $f_2(j)$ ერთეულოვანი ორთოგონული ვექტორებია $x\cdot k=0$ სიბრტყეში. ამიტომ ლემა 3-ით არსებობს არეკვლა R_3, სათავეზე გამავალ ვერტიკალურ სიბრტყის მიმართ (ანუ რომელიც მოიცავს $0.k$-ს) რომელიც ერთამანეთში გადაცვლის $f_2(j)$-ს და j −ს. ამრიგად კომპოზიცია $f_3=R_3f_2$ უძრავად დატოვებს $0,k,j$-ს

$$\boldsymbol{f_3(0)=0},\quad \boldsymbol{f_3(k)=k},\quad \boldsymbol{f_3(j)=j}.$$

შემდეგ $f_3(i) = \pm i$. თუ $f_3(i) = i$, მაშინ R_4 იყოს იგივური ასახვა. თუ $f_3(i) = -i$, მაშინ R_4 იყოს $x \cdot i = 0$ სიბრტყის მიმართ არეკვლა. ნებისმიერ შემთხვევაში კომპოზიცია $f_4 = R_4 f_3$ უზრავად დატოვებს $0, k, j, i$-ს და ამიტომ ლემა 2-ით იდივური ასახვაა

$$\boldsymbol{f_4 = R_4 R_3 R_2 R_1 f = I.}$$

და რადგან $\boldsymbol{R_n R_n = I}$ მივიღებთ

$$\boldsymbol{R_1 R_2 R_3 R_4 = (R_1 R_2 R_3 R_4) I = (R_1 R_2 R_3 R_4) R_4 R_3 R_2 R_1 f = R_1 (R_2 (R_3 (R_4 R_4) R_3) R_2) R_1 f = f.}$$

რ.დ.გ.

9. მობიუსის გარდაქმნები.

მობიუსის გარდაქმნის **გასაზღვრება .**

კომპლექსური სიბრტყის **მობიუსის გარდაქმნა** (აგრეთვე ცნობილია როგორც წილად-წრფივი ან ჰომოგრაფიული გარდაქმნა) **არის C კომპლექსური სიბრტყის გარდაქმნა, ანუ ასახვა $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, რომელიც** მოიცემა **ფოემულით**

$$\mathbf{f(z)} = \frac{\mathbf{az+b}}{\mathbf{cz+d}} \quad ; \qquad\qquad (1)$$

აქ z არის კომპლექსური ცვლადი, $\mathbf{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ კომპლექსური რიცხვები და სრულდება პირობა $\mathbf{ad - bc \neq 0}$.

ეს ბოლო პირობა რა საჭიროა? (1) ფორმულიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ

$$\mathrm{f(z) - f(w)} = \frac{\mathrm{(ad-bc)(z-w)}}{\mathrm{(cz+d)(cw+d)}} \ .$$

ეს ნიშნავს, რომ **თუ $\boldsymbol{ad - bc = 0}$,** მაშინ $f(z) - f(w) = 0$, ანუ $\boldsymbol{f(z) = f(w)}$, $\forall\, \boldsymbol{z, w} \in \boldsymbol{C}$. ამრიგად **ამ შემთხვევაში** f ასახვა მუდმივია, ანუ სიბრტყის ყველა წერტილი ერთ წერტილში აისახება და ამიტომ **$\boldsymbol{f}$ არაა საინტერესო.**

მაგალითად $f(z) = 1/z$, თუ $a = c = 1$, $b = d = 0$. ამ შემთხვევაში f ასახვა არაა განსაზღვრული 0 წერტილში.

ამრიგად ჩვენ გვინდა კიდევ რაღაც პირობა **იმისათვის რომ $\boldsymbol{f}$ ფუნქცია იყოს განსაზღვრული სიბრტყის ყოველ წერტილზე** და იყოს ურთიერთცალსახა.

ფუნქციის ზღვრის თვისებებით გვაქვს:

$\mathbf{lim}_{z\to\infty} \frac{\boldsymbol{az+b}}{\boldsymbol{cz+d}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$, და $\mathbf{lim}_{z\to -d/c} \frac{\boldsymbol{az+b}}{\boldsymbol{cz+d}} = \infty$, **როცა $\boldsymbol{c \neq 0}$**

ამიტომ თუ გვინდა რომ f ფუნქცია იყოს ურთიერთცალსახა, C კომპლექსურ სიბრტყის მაგივრად უნდა განვიხილოთ სიმრავლე $\{C\} \cup \{\infty\}$.

ამრიგად მივიღებთ ასახვას, რომლის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე არის კომპლექსურ სიბრტყეს დამატებული ერთადერთი ელემენტი ∞ (უსასრულო წერტილი).

ამ სიმრავლეს $\{C\} \cup \{\infty\}$ ეწოდება გაფართოებული კომპლექსური სიბრტყე (აგრეთვე რიმანის სფერო, იხ. სტერეოგრაფიული პროექცია) და აღინიშნება C_∞ სიმბოლოთი.

ამის შემდეგ განსაზღვრული გვექნება <u>მობიუსის გარდაქმნა გაფართოებულ კომლექსურ სიბრტყეზე</u> . კერძოდ C_∞ -ზე f მოიცემა ასე: C-ზე (1) ფორმულით და ∞ წერტილისთვის ფორმულებით

$\boldsymbol{f}(\infty)=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$, $\quad \boldsymbol{f}\left(-\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}\right)=\infty$ როცა $\boldsymbol{c}\neq \boldsymbol{0}$ და $\boldsymbol{f}(\infty)=\infty$ როცა $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

გაფართოებულ კომპლექსურ სიბტყეზე მობიუსის გარდაქმნისათვის გვაქვს თეორემები:

თეორემა 1. ვთქვათ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ და $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\Upsilon,\boldsymbol{\delta}$ არიან კომპლექსური რიცხვები და

$$(\boldsymbol{ad}-\boldsymbol{bc})(\boldsymbol{\alpha\delta}-\boldsymbol{\beta}\Upsilon)\neq \boldsymbol{0}$$

და არსებობს $\boldsymbol{z}$-ის სამი მნიშვნელობა მაინც რომ $\boldsymbol{cz}+\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$, $\Upsilon\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\delta}\neq \boldsymbol{0}$ და

$$\frac{\boldsymbol{az}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{cz}+\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{\alpha z}+\boldsymbol{\beta}}{\Upsilon\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\delta}},$$

მაშინ არსებობს არანულოვანი კომპლექსური რიცხვი λ, რომ

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\lambda}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta}\\ \Upsilon & \boldsymbol{\delta}\end{pmatrix}.$$

თეორემა 2. ყოველი მობიუსის ასახვა არის ბიექცია $\boldsymbol{C}_\infty$ სიმრავლისა თავისთავზე და მობიუსის ასახვები კომპოზიციის მიმართ ქმნიან ე.წ. მობიუსის ჯგუფს $\boldsymbol{M}$-ს.

1 თეორემის თახმად (1) ფორმულაში a,b,c,d კოეფიციენტები პროპორციულად შეგვიძლია შევცვალოთ ასახვის შეუცვლელად. ამიტომ 2 თეორემაში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ

$$\boldsymbol{ad}-\boldsymbol{bc}=\boldsymbol{1}.$$

მაშინ თუ $\boldsymbol{f}$ ასხვის მატრიცია $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{pmatrix}$, ამ მატრიცის მიკავშირებული მატრიცი

$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{d} & -\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\end{pmatrix}$ იქნება $\boldsymbol{f}^{-1}$ ასახვის შესაბამისი მატრიცი.

ანუ გვაქვს 2×2 ზომის სპეციალური კომპლექსური (ერთის ტოლი დეტერმინანტის მქონე) მატრიცების ჯგუფის $SL(2,C)$ -ის ჰომომორფიზმი მობიუსის M ჯგუფში, და ამ ჰომომორფიზმის ბირთვი(ანუ ელემენტები რომლების ნეიტრალურ ერთეულში მიდიან) არის $\{\pm I\}$, სადაც I ერთეულოვანი მატრიცია. ამრიგად გვაქვს იზომორფიზმი

$$M \approx SL(2,C)/\{\pm I\}$$

მობიუსის გარდაქმნის კავშირი აინშტაინის ფარდობითობის თეორიასთან.

ამ თეორიაში T დრო და სამგანზომილებიანი სივრცის წერტილის (რაიმე მოვლენის) (X,Y,Z) დეკარტეს კოორდინატები კომბინაციით გვაძლევენ ერთ ვექტორს, კერძოდ 4-ვექტორს (T,X,Y,Z) ოთხგანზომილებიან **სივრცე-დროში.** ცხადია ამ ვექტორის სივრცითი კომპონენტები ამსოლუტური არაა: მაგალითად საკოორდინატო ღერძების მობრუნებით მიღებულ ნებისმიერ ორ სხვადასხვა საკოორდინატო სისტემაში სივრცის ერთსა და იმავე წერტილს ექნება სხვადასხვა კოორდინატები . ამის მიუხედავად ამ ორ სისტემაში მყოფი დამკვირვებლებისთვის იგივე დარჩება სიდიდე

$$\tilde{X}^2+\tilde{Y}^2+\tilde{Z}^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

რაც წარმოადგენს სათავიდან წერტილამდე მანძილის კვადრატს.

ამის საპირისპიროდ, ჩვენ მიჩვეულნი ვართ იმ აზრს რომ დროის კომპონენტს T-ს აქვს რაღაც აბსოლუტური მნიშვნელობა. აინშტაინის თეორია-მრავალი ექპერიმენტით დადასტურებული-ამბობს რომ ეს აზრი მცდარია.

მობიუსის გარდაქმნის დაშლა კომპოზიციად

თეორემა 3. ყოველი მობიუსის გარდაქმნა არის არაუმეტეს ოთხი ასახვის კომპოზიცია, რომელთაგან თითოეული არის ერთერთი შემდეგი ასახვა: $z \to az$, $z \to z+b$, და $z \to 1/z$.

დამტკიცება. ჯერ შევნიშნოთ რომ ეს მარტივი ასახვები არის მობრუნება და გაჭიმვა (შეკუმშვა), პარალელური გადატანა და ინვერსია (კომპლექსური შებრუნება).

ვთქვათ $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. თუ $c=0$ მაშინ $d\neq 0$ და გვაქვს $f(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$ და f არის კომპოსზიცია $f=f_2f_1$, სადაც $f_1(z)=\frac{a}{d}z$ და $f_2(z)=z+\frac{b}{d}$.

თუ $c\neq 0$, მაშინ $f=f_4f_3f_2f_1$,

სადაც $f_1(z)=z+\frac{d}{c}$, $f_2(z)=\frac{1}{z}$, $f_3(z)=kz$, სადაც $-\frac{(ad-bc)}{c^2}$ და $f_4(z)=z+\frac{a}{c}$.

მობიუსის გარდაქმნის ფიქსირებული წერტილები.

გავიხსენოთ რომ C_∞ აღნიშნავს გაფართოებულ კომპლექსურ სიბრტყეს $C_\infty = C \cup \{\infty\}$.

თეორემა 4. ვთქვათ z_1, z_2, z_3 და w_1, w_2, w_3 განსხვავებულ წერტილთა ორი სამეულია C_∞-ში. მაშინ არსებობს ერთადერთი მობიუსის ასახვა f, ისეთი რომ $f_i(z_i) = w_i$, $i = 1,2,3$.

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ რომ არსებობს მობიუსის ასახვა , რომელიც მოცემულ სამ განსხვავებულ წერტილს დაგაიყვანს $0, \infty, 1$ –ში. მართლაც მაშინ $\exists f, h$ ასახვები, რომ

$z_1, z_2, z_3 \xrightarrow{f} 0, \infty, 1$ და $w_1, w_2, w_3 \xrightarrow{h} 0, \infty, 1$. ამიტომ $z_1, z_2, z_3 \xrightarrow{h^{-1}f} w_1, w_2, w_3$.

ეხლა ვთქვათ z_1, z_2, z_3 წერტილებიდან არცერთი არაა ∞ და

$g(z) = \frac{(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_1)} \frac{z - z_1}{z - z_2}$.

მაშინ $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = \infty$, $g(z_3) = 1$ და საძიებელი ასახვაა g.

როცა z_1, z_2, z_3 წერტილებიდან ერთ-ერთი არის ∞, ავიღოთ წერტილი $z_4 \neq z_1, z_2, z_3$ და ასახვა $s(z) = \frac{1}{(z - z_4)}$. მაშინ z_1, z_2, z_3 წერტილებზე s ასახვის მნიშვნელობა არაა ∞ და წინა შემთხვევით მათთვის არსებობს ასახვა g რომ $s(z_1), s(z_2), s(z_3) \xrightarrow{g} 0, \infty, 1$. ხოლო საძიებელი ასახვა ამ შემთხვევაში იქნება კომპოზიცია gs.

დაგვრჩა ერთადერთობა. ვთქვათ არსებობს ორი ასახვა f, F რომ

$z_1, z_2, z_3 \xrightarrow{f} w_1, w_2, w_3$ და $z_1, z_2, z_3 \xrightarrow{F} w_1, w_2, w_3$.

მაშინ $z_1, z_2, z_3 \xrightarrow{F^{-1}f} z_1, z_2, z_3$. ვაჩვენოთ რომ ეს არის იგივური ასახვა.

ვთქვა l ასახვა ისეთია რომ $z_1, z_2, z_3 \xrightarrow{l} 0, \infty, 1$, მაშინ $l^{-1}(F^{-1}f)l$ ასახვა უძრავად ტოვებს წერტილებს $0, \infty, 1$ და ცხადია იგი იგივური ასახვაა(ეს გამომდინარეობს მობიუსის ასახვის ფორმულიდან). ე.ი.

$$l^{-1}(F^{-1}f)l = I \Rightarrow F^{-1}f = lIl^{-1} = I.$$

რ.დ.გ.

შედეგი. მობიუსის ასახვა, რომელსაც აქვს სამი უძრავი წერტილი არის იგივური ასახვა.

წრეწირები გაფაეთოებულ კომპლექსურ სიბრტყეზე

განსაზღვრება. ევკლიდური წრეწირი კომპლექსურ C სიბრტყეზე მოიცემა განტოლებით $|z - z_0| = r,\ r > 0$. ევკლიდური წრფე არის წერტილთა სიმრავლე C-ში რომელიც მოიცემა განტოლებით $|z - a| = |z - b|,\ a \neq b$. ხოლო წრეწირი გაფართოებულ კომპლექსურ სიბრტყეზე C_∞ არის ერთერთი, ევკლიდური წრეწირი ან $L \cup \{\infty\}$, სადაც L არის ევკლიდური წრფე.

თეორემა. მობიუსის ასხვა წრეწირს დაგასახავს წრეწირში.

დამტკიცება. ეს თეორემა ამბობს რომ თუ f მობიუსის ასხვაა და S წრეწირი, მაშინ $f(S)$ არის წრეწირი. საკმარისია ვაჩვენოთ რომ $f(S) \subset S'$ სადა S' რაღაც წრეწირია. მართლაც თუ ეს ასეა მაშინ $S \subset f^{-1}(S')$. რადგან $f^{-1}(S')$ რაგაც წრეწირის ნაწილია, ცხადია ეს წრეწირი არის S და ამიტომ $S = f^{-1}(S')$ ანუ $f(S) = S'$.

ეხლა ისღა დავრჩენია რომ შევამოწმოთ ეს თვისება მარტივი ასახვებისთვის რადგან მობიუსის ასხვები არის არაუმეტეს ოთხი მარტივი ასახვის კომპოზიცია (თეორემა 3-ით). რ.დ.გ

ჯვარედინა ფარდობა.

განსაზღვრება. კომპლექსური C სიბრტყის ოთხი განსხვავეული z_1, z_2, z_3, z_4 წერტილის ჯვარედინა ფარდობა ეწოდება გამოსახულებას

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)},$$

ხოლო თუ ერთერთი წერტილი უსასრულობაა, ჯვარედინა ფარდობა განისაზღვრება როგორც ამ გამოსახულების ზღვარი ანუ

$$[\infty, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4},$$

$$[z_1, \infty, z_3, z_4] = -\frac{(z_1 - z_3)}{(z_3 - z_4)},$$

$$[z_1, z_2, \infty, z_4] = -\frac{(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)},$$

$$[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}.$$

შევნიშნოთ რომ $[0,1,z,\infty] = z$. სხვა ლიტერატურაში შეიძლება სხვა დალაგება იყოს.

თეორემა. ვთქვათ z_1, z_2, z_3, z_4 და w_1, w_2, w_3, w_4 განსხვავებულ წერტილთა ორი ოთხეულია. მაშინ აუცილებელი და საკმარისი პირობა ისეთი მობიუსის fასახვის არსებობისა რომ $f(z_i) = w_i$, $i = 1,2,3,4$ არის ტოლობა

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4],$$

კერძოდ ნებისმიერი მობიუსის fასახვისათვის სრულდება

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)].$$

განსაზღვრება. წერტილებს $z_1, z_2, \dots, z_n$ ეწოდება კონციკლური თუ ისინი მდებარეობენ ერთ წრეწირზე C_∞-ში.

ნებისმიერი სამი წერტილი კონციკლურია , მაგრამ ყოველი ოთხი არა.

თეორემა. ოთხი z_1, z_2, z_3, z_4 წერტილი კონციკლურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ ჯვარედინა ფარდობა $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ არის ნამდვილი რიცხვი.

10. ვკლიდეს "ელემენტები" და არაევკლიდური გეომეტრიები.

გეომეტრიამ როგორც ემპირიულმა მეცნიერებამ პირველად ეგვიპტეში მიაღწია მაღალ დონეს. ეს განპირობებული იყო სამშენებლო და საირიგაციო მოთხოვნილებებით.

ჩვენ წელთაღრიცხვამდე პირველ ათასწლეულში გეომეტრიამ ეგვიპტიდან საბერძნეთში ჩააღწია და დაიწყო განვითარების ახალი ერა.

VIII -- III საუკუნეებში ჩვ.წ.აღ.-მდე სწორედ საბერძნეთში გადაიდგა დიდი ნაბიჯები გეომეტრიის გამდიდრებასა და ლოგიკურ დაფუძნებაში.

ბერძენ გეომეტრთა მრავალსაუკუნოვანი შრომა შეაჯამა ევკლიდემ (ჩვ.წ.აღ.-მდე 330-275 წლები) თავისი სახელგანთქმული წიგნით “ელემენტები”.

ვლკიდეს “ელემენტები” შედგება 13 წიგნისაგან, I—IV და VI ეხება პლანიმეტრიას, XI—XIII სტერეომეტრიას, დანარჩენები კი არითმეტიკის გეომეტრიულ აღწერას.

ყოველი წიგნი იწყება იმ ცნებების განსაზღრებით რომლების პირველად გვხვდება. პირველ წიგნში არის 23 განსაზღვრება, მაგ.:

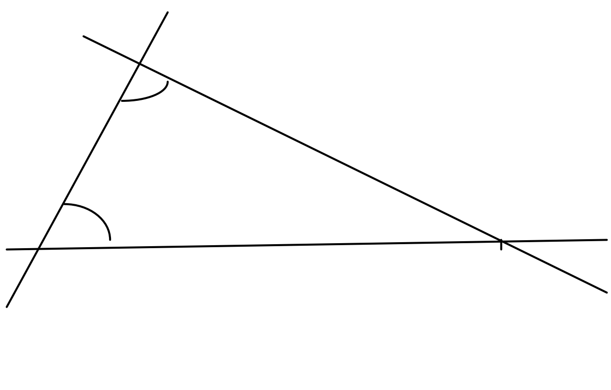
1. წერტილი არის ის რასაც არა აქვს ნაწილები;
2. წირი არის სიგრძე სიგანის გარეშე;
3. წრფე არის ისეთი წირი, რომელიც ერთნაირად არის განლაგებული თავისი ყველა წერტილის მიმართ;

განსაზღვრებებს მოსდევს 5 “პოსტულატი”, და შემდეგ აქსიომები”. მაგ. პირველი პოსტულატი ამბობს რომ ერთი წერტილიდან ნებისმიერ მეორეზე შეიძლება წრფის გავლება, მეოთხე პოსტულატი ამბობს რომ მართი კუთხეები ტოლია.

ჩვენ ვნახავთ რომ განსაკუთრებული როლი აქვს მეხუთე პოსტულატს, რომელიც ექვივალენტურია ე.წ. პარალელობის აქსიომის: წრფის გარეთ მდებარე წერტილზე გაივლება ამ წრფის პარალელური წრფე და ამასთან მხოლოდ ერთი.

თვითონ ევლიდეს ეს პოსტულატი ცოტა რთული ფორმით ეწერა (იხ. ქვემოთ). ეს სავარაუდოდ იმიტომ მოხდა რომ გრძნობდა ამ პოსტულატის განსაკუთრებულ როლს. როგორც ჩანს ევკლიდე ცდილობდა და შესაძლოა სხვებსაც უბიძგებდა ამ პოსტულატის დამტკიცებას, ანუ გამოყვანას სხვა აქსიომებიდან. აი, ეს პოსტულატი ევკლიდეს სიტყვებით:

V პოსტულატი: მოითხოვება რომ თუ წრფე ორი სხვა წრფის გადაკვეთისას მათთან ქმნის ერთ მხარეზე შიგა კუთხეებს, ჯამში ორ მართ კუთხეზე ნაკლებს, ეს წრფეები უსასრულოდ გაგრძელებისას იკვეთებოდეს იმ მხარეზე, რომელზედაც ეს კუთხეები ჯამში ორ მართ კუთხეზე ნაკლებია.



ცხადია, ამ პოსტულატის სამართლიანობაში ეჭვი არ გვეპარება, მაგრამ მეტისმეტად ბევრი სიტყვებია და თანაც არც ისე ცხადია, როგორც დანარჩენი პოსტულატები. სწორედ ეს გარემოება უბიძგებდა 2000 წლის განმავლობაში! მატემატიკოსებს ამ პოსტულატის გამოყვანისკენ სხვა აქსიომებიდან. მაგრამ უშედეგოდ. ყველა ვისაც კი ეგონა რომ მიზანს მიაღწია ერთიდაიგივე შეცდომას უშვებდა: დამტკიცებაში ცხადად თუ არაცხადი სახით იყენებდა დაშვებას, რომელიც სინამდვილეში V პოსტულატის ტოლფასი იყო.

ასეთი ტოლფასი დაშვებები კი ცოტა არაა, მაგ: (ეს სია პროფ. ეფიმოვმა შეადგინა, მისი დაზეპირება არაა საჭირო!)

1. სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი ორი მართი კუთხის ტოლია.
2. შიგა კუთხეების ჯამი ტოლია ყველა სამკუთხედისათვის.
3. წერტილები, რომლებიც განლაგებულია მოცემული წრფის ერთ მხარეს ერთიდაიგივე მანძილით, ქმნიან წრფეს.
4. თუ ორი წრფე არ გადაიკვეთება, მაშინ მანძილების ერთობლიობა ერთი წრფის წერტილებიდან მეორე წრფის წერტილებამდე შემოსაზღვრულია.
5. არსებობს რაგინდ დიდი ფართობის სამკუთხედი.
6. არსებობენ მსგავსი სამკუთხედები.
7. კუთხის ნებისმიერ შიდა წერტილზე გადის წრფე რომელიც კუთხის ორივე გვერდს კვეთს.
8. ყოველ სამკუთხედზე შემოიხაზება წრეწირი.
9. ჩახაზული ექვსკუთხედის გვერდი შემოხაზული წრეწირის რადიუსის ტოლია.

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ V პოსტულატის ტოლფასი ყველაზე მარტივი

აქსიომაა: **წრფის გარეთ მდებარე წერტილზე გადის მოცემული წრფის პარალელური ერთადერთი წრფე.**

რახან სიბრტყეზე ვართ, ორი წრფის პარალელობა ნიშნავს ისინი არ თანაიკვეთებიან.

ამიტომ V პოსტულატის ჩანაცვლების მიზნით შეიძლება ასე მოვიქცეთ:

მივიღოთ ამ აქსიომის მაგივრად მისი უარყოფა, დანარჩენი აქსიომების დახმარებით დავამტკიცოთ თეორემები და ვეძებოთ ხომ არ მიგვიყვანს ეს წინააღმდეგობამდე, ანუ დებულებამდე რომელიც აქსიომებს ეწინააღმდეგება.

მაგრამ უარყოფა ორი გზით შეიძლება:

მივიღოთ ელიფსური აქსიომა: წრფის გარეთ მდებარე წერტილისთვის არ არსებობს ამ წერტილზე გამავალი მოცემული წრფის პარალელური წრფე;

ფაქტიურად ეს აქსიომა ამბობს რომ საერთოდ არ არსებობს პარალელური წრფეები, ან რაც იგივეა ნებისმიერი ორი წრფე იკვეთება. ეს აბსურდს ჰგავს.

მეორე გზაა მივიღოთ ჰიპერბოლური აქსიომა: წრფის გარეთ მდებარე წერტილზე გადის მოცემული წრფის პარალელური ერთზე მეტი წრფე.

ამ იდეით სარგებლობდნენ: საკკერი (1667--1773). მან აჩვენა ელიფსური აქსიომის წინააღმდეგობა ევკლიდეს სხვა აქსიომებთან, მაგრამ მისი იგივე დასკვნა ჰიპერბოლურ აქსიომის შემთხვევაში არასწორია.

გაუსი (1777-1855). როგორც წერილებიდან ჩანს მან იცოდა რომ ჰიპერბოლური აქსიომა არ ეწინააღმდეგება ევკლიდეს დანარჩენ აქსიომებს, მაგრამ ამ საკითხზე შრომა არ გამოუქვეყნებია.

ლობაჩევსკი(1793--1856). მან დაუშვა ჰიპერბოლური აქსიომა, განავითარა მთელი თეორია და პირველმა გააკეთა სწორი დასკვნა რომ არსებობს სხვა გეომეტრიები.

მაგრამ არც ლობაჩევსკის არ ჰქონდა იმის დამტკიცება, რომ ჰიპერბოლური აქსიომით პარალელობის აქსიომის ჩანაცვლება არ მიგვიყვანს არაწინააღმდეგობრივ თეორიამდე. მართალია მან ბევრი თეორემა დაამტკიცა ჰიპერბოლური აქსიომის მიღებით და არ მივიდა წინაღმდეგობამდე, მაგრამ რა გარანტიაა რომ რაც დღეს არ მოხდა ხვალაც არ მოხდება?

მაგრამ ევკლიდეს გეომეტრიაზეც ხომ იგივე შეიძლება ვთქვათ?

რა გამოსავალია?

კლეინი იყო პირველი გეომეტრი ვინც სხვადასხვა გეომეტრიებისთვის პირველად შემოიტანა მოდელები.

თუ პარალელობის აქსიომას შევცვლით ჰიპერბოლური აქსიომით მივიღებთ არაევკლიდურ გეომეტრიას რომელსაც ეწოდება ჰიპერბოლური,

მოდელების საშუალებით ჩვენ ვერ დავამტკიცებთ რომ ჰიპერბოლური გეომეტრია თანმიმდევრული თეორიაა (ანუ არ შეიცავს წინააღმდეგობას), მაგრამ იმას კი დავამტკიცებთ რომ ჰიპერბოლური გეომეტრია ისევეა თანმიმდევრული, როგორც ევკლიდური გეომეტრია.

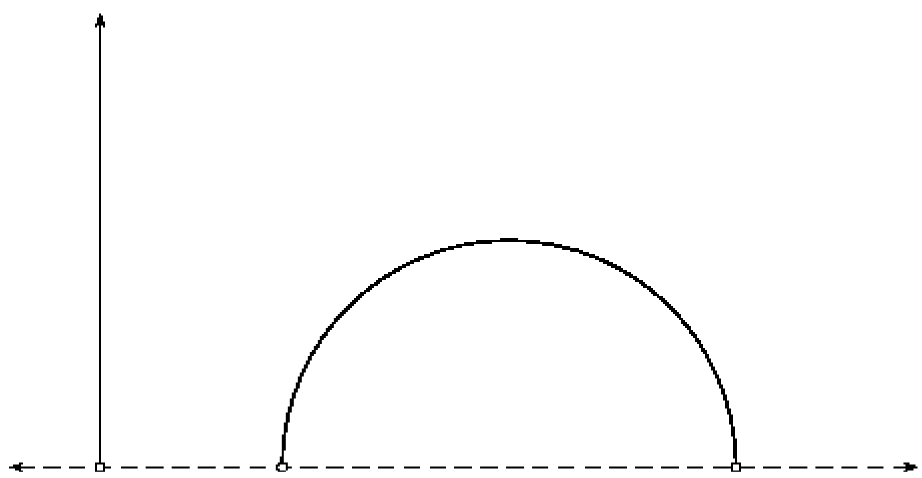
რა არის მოდელი? ჯერ განვიხილოთ მოდელი რომელიც ეკუთვნის პუანკარეს.

ევკლიდური გეომეტრიის სიბრტყეს ჰიპერბოლურ გეომეტრიაში შეესაბამება ზედა ნახევარსიბრტყე:

$$\boldsymbol{H} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}} : \boldsymbol{y} > 0\}.$$

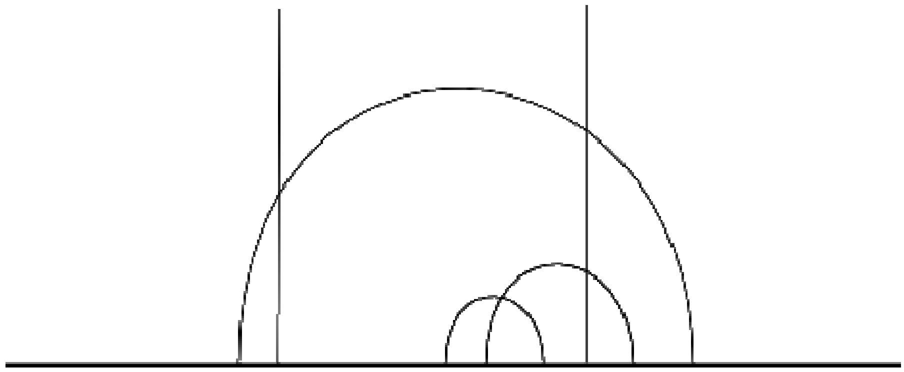
ეხლა ჩვენი წერტილები არის $\boldsymbol{H}$ ნახევარსიბრტყის წერტილები.

რაც მთავარია ჰიპერბოლურ გეომეტრიაში, წრფეები არიან ან ვერტიკალური წრფეები, ან ნახევარწრეწირები, ცენტრით $\boldsymbol{H}$ -ის საზღვარზე. ნახ. 1, 2.



ნახ. 1

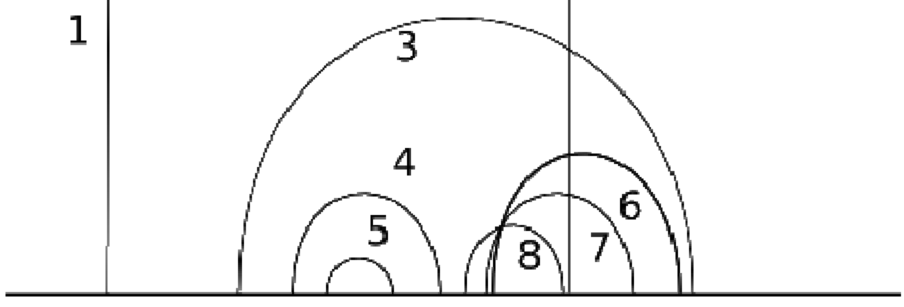
:



ნახ. 2: სხვადასხვა ჰიპერბოლური წრფეები

ამ ტერმინებში ჰიპერბოლური აქსიომა ცხადად სრულდება. იხ. ნახ. 3.

წრფე 3 პარალელურია მის გარეთ მდებარე წერტილზე გამავალი 6,7,8 წრფეების.



ნახ 3: სხვადასხვა პარალელური ჰიპერბოლური წრფეები

იმისათვის რომ დავრწმუნდეთ რომ ეს მართლა ჰიპერბოლური გეომეტრიის მოდელია უნდა შევამოწმოთ აქსიომები.

მაგალითად: ნებისმიერ ორ წერტილზე გადის ერთადერთი წრფე.

როგორც ვთქვით ჰიპერბოლურ გეომეტრიაში "წრფე" ნიშნავს "ჰიპერბოლური წრფე" ანუ ვერტიკალური წრფე ან ნახევარწრეწირი. ანუ ჩვენ შემთხვევაში აქსიომა ნიშნავს რომ:

H ნახევარსიბრტყის ნებისმიერ ორ წერტილზე გადის ან ერთადერთი ვერტიკალური წრფე, ან ერთადერთი ნახევარწრეწირი.

რაც არის თეორემა ევკლიდურ გეომეტრიაში.

ამრიგად ჰიპერბოლური გეომეტრიის აქსიომები გადაიქცევა ევკლიდურ გეომეტრიის თეორემებად და პირიქით. ამიტომ ჰიპერბოლურ გეომეტრიაში რაიმე წინააღმდეგობა რომ იყოს, ეს გამოიწვევდა შესაბამის წინააღმდეგობას ევკლიდურ გეომეტრიაში. ეს ნიშნავს რომ ორივე თეორია თანმიმდევრულია, ან ორივე წინააღმდეგობრივი.

ამრიგად მოდელების საშუალებით იმის დამტკიცებაა შესაძლებელი რომ ევკლიდური გეომეტრია ისევეა თანმიმდევრული როგორც არაევკლიდური გეომეტრიები

ელიფსური გეომეტრია

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ თუ მივიღებთ ელიფსურ აქსიომას (პარალელობის აქსიომის ნაცვლად) მოვიღებთ წინააწმდეგობას ევკლიდეს სხვა აქსიომებთან. მაინც რომელ აქსიომებთან? თურმე აუცილებელი ხდება ამ ორი ევკლიდური აქსიომიდან ერთ-ერთზე უარის თქმა:

1. ორ განსხვავებულ წერტილზე გადის ერთადერთი წრფე.
2. სიბრტყეზე მდებარე წრფე ამ სიბრტყეს ორ ნაწილად ჰყოფს.

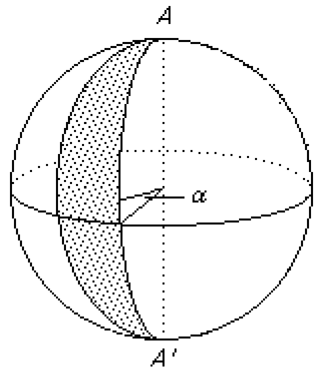
თუ ელიფსურ აქსიომას მოვიღებთ და ამასთან

ა. უარს ვიტყვით 2 აქსიომაზე, გვექნება **"ცალი ელიფსური"** გეომეტრია,

ბ. უარს ვიტყვით 1 აქსიომაზე, გვექნება **"ორმაგი ელიფსური"** გეომეტრია.

ორმაგი ელიფსური (ანუ სფერული) გეომეტრიის მოდელი:

ამ მოდელში ჩვენი "სიბრტყე" არის სფერო,
წერტილები – წერტილები სფეროზე,
ჩვენი "წრფეები" – სფეროს დიდი წრეწირები.
სფეროს დიდი წრეწირი მიიღება სფეროს თანაკვეთით სფეროს ცენტრზე გამავალ სიბრტყესთან.



როგორც ნახატიდან ჩანს A, A' პოლუსებზე გადის ერთზე მეტი წრფე. (სინამდვილეში უამრავი წრფე).
უფრო მეტიც აქ საერთოდ არ არსებობს პარალელური წრფეები (რადგან ორი ნებისმიერი დიდი წრეწირი სფეროზე თანაიკვეთება).

ამ გეომეტრიის "სიბრტყეზე" მდებარე "ელიფსური წრფეების" შესახებ თეორემებს შეესაბამება ვკლიდური გეომეტრიის თეორემები სფეროზე მდებარე დიდი წრეწირების შესახებ.

ცალი ელიფსური (ანუ პროექტიული) გეომეტრიის მოდელი:

ამ გეომეტრიის სიბრტყის მოდელი არის ე.წ. პროექტიული სიბრტყე, ანუ ზედა ნახევარსფერო ეკვატორის ჩათვლით, ოღონდ ეკვატორის ანტიპოდალური (ცენტრის მიმართ სიმეტრიული) წერტილები გაიგივებულია. წრფეები არის დიდი ნახევარწრეწირები.

ეკვატორის ანტიპოდალური წერტილების გაიგივების გამო არ სრულდება ევკლიდური გეომეტრიის ზემოთმოყვანილი 2 აქსიომა.

შევნიშნოთ რომ პროექტიული სიბრტყე იგივეა რაც სფერო ანტიპოდალური წერტილების გაიგივებით (მიწებებით). ამ დროს ქვედა ნახევარსფერო მიეწებება ზედას. ამიტომ დარჩება ზედა ნახევარსფერო და ეკვატორზე ანტიპოდალური წერტილები გაიგივდება, როგორც ზემოთ გვქონდა.

მაღალი განზომილებები.

ზემოთმოყვანილ მოდელებში ჩვენ საუბარი გვქონდა არაევკლიდური სიბრტყის მოდელებზე. რასაკვირველია არსებობს მათი განზოგადება სამი და ნებისმიერი n განზომილებისთვის. მათზე ჩვენ ეხლა დაწვრილებით ვერ შევჩერდებით და მხოლოდ მოტივაციის მიზნით მოკლე შენიშვნებით შემოვიფარგლებით.

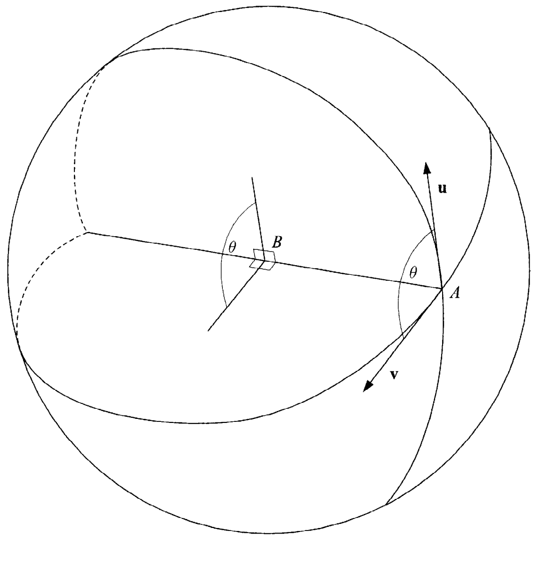
1. სფერული(ანუ ცალი ელიფსური) გეომეტრიის n განზომილებიანი მოდელია n განზომილებიანი სფერო S^n, რომელიც $n+1$ განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში R^{n+1} არის ჩადგმული. აქ წრფეები არიან დიდი წრეწირები, ანუ S^n სფეროს თანაკვეთები R^{n+1} სივრცის სიბრტყეებთან; მოდელის სიბრტყეები არიან S^n სფეროს თანაკვეთები R^{n+1} სივრცის სამგანზომილებიან სივრცეებთან;
შესაბამისად მოდელის m განზომილებიანი სიბრტყეები არიან S^n სფეროს თანაკვეთები R^{n+1} სივრცის m+1 განზომილებიან სიბრტყეებთან.

2. პროექტიულ(ანუ ცალი ელიფსური) გეომეტრიის n განზომილებიანი მოდელია n განზომილებიანი პროექტიული სივრცე RP^n, ანუ n განზომილებიანი სფერო S^n, რომელშიც ანტიპოდალური წერტილები გაიგივებულია.

3. რაც შეეხება ჰიპერბოლურ გეომეტრიას. ეს სახელი იმითაა გამოწვეული რომ ამ გეომეტრიის სიბრტყის ერთ-ერთ მოდელი, ლორენცის მოდელი, წარმოადგენს ჰიპერბოლოიდს. კერძოდ კი ე.წ. ორკალთა ჰიპერბოლოიდის ერთ კომპონენტს (ნაწილს).
ხოლო ჰიპერბოლური გეომეტრიის n განზომილებიანი მოდელია "n განზომილებიანი ორკალთა ჰიპერბოლოიდის" ერთი("მომავლის") კომპონენტი. არსებობს მინკოვსკის სივრცე, რაც როგორც სიმრავლე იგივეა რაც $n+1$ განზომილებიანი ევკლიდურ სივრცე R^{n+1}, ოღონდ $(x_0, x_1 \dots, x_n)$ ვექტორის "სიგრძის კვადრატი" ასეა განსაზღვრული $x_0{}^2 - x_1{}^2 - \dots - x_n{}^2$. ვექტორებს რომელთათვის $x_0{}^2 - x_1{}^2 - \dots - x_n{}^2 = 1$, ეწოდება n განზომილებიანი ორკალთა ჰიპერბოლოიდი. ერთი კალთა როცა $x_0 < 0$ ("მომავლის") არის სწორედ n-განზომილებიანი მოდელი. (მეორე კალთას როცა $x_0 > 0$ ეწ. "წარსული".)

სფერული კუთხეები და სფერული სამკუთხედები

ევკლიდურ ბრტყელ გეომეტრიაში, წრფეები ქმნიან კუთხეს მაშინ, როცა ისინი იკვეთებიან. როგორც ცნობილია, როცა ორი წირი ერთ წერტილში იკვეთება, მაშინ კუთხე ამ ორ წირს შორის განიმარტება როგორც კუთხე გადაკვეთის წერტილში თითოეული წირისადმი გავლებულ მხებ ვექტორებს შორის (ნახ. 4). წირის ყოველ წერტილში, მხები ვექტორისათვის გვაქვს მისი მოპირდაპირე ვექტორი, შესაბამისად –წირების გადაკვეთის წერტილში გვაქვს ოთხი ვექტორი, რომლებიც ერთმანეთთან ოთხ კუთხეს ადგენენ (ვერტიკალური კუთხეები). ამ კუთხეებიდან θ უმცირეს კუთხეს წირებს შორის კუთხეს უწოდებენ. ანალოგიურად განიმარტება კუთხე სფეროს ორ დიდ წრეწირს ანუ **გეოდეზიურს** შორის.



ნახ. 4

არსებობს ორ გეოდეზიურს შორის კუთხის მეორე, ექვივალენტური განმარტება: განვიხილოთ მოცემული გეოდეზიურების განმსაზღვრელი, სფეროს ცენტრზე გამავალი სიბრტყეები. ამოვარჩიოთ ნებისმიერი წერტილი ამ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფეზე მაგალითად, B წერტილი (იხ. ნახ 4). ამ სიბრტყეებიდან თითოეულზე გავავლოთ სხივები, რომლებიც თანაკვეთის წრფის პერპენდიკულარულია და B წერტილში იკვეთებიან. შევნიშნოთ, რომ თითოეულ სიბრტყეში აგებული სხივებისათვის შესაძლებელია ავირჩიოთ ორი ერთმანეთის საპირისპირო მიმართულება. ამ სხივების მიერ შედგენილ კუთხეებს შორის უმცირეს θ კუთხე –გეოდეზიურებს შორის კუთხეს წარმოადგენს.

განსაზღვრება. ვთქვათ, A, B და C სფეროზე აღებული, ერთდროულად ერთ გეოდეზიურზე არამდებარე წერტილებია, AB , BC და CA რკალები რომლებიც

გეოდეზიურებზე მდებარეობენ წყვილ-წყვილად სამ წერტილში (A, B ,C)
დაგაიკვეთებიან და შემოსაზღვრავენ სფეროს ნაწილს, რომელსაც ABC სფერული
სამკუტხედი ეწოდება. (იხ. ნახ. 5)

შენიშვნა. არსებობს სფერული სამკუთხედი ორი მართი კუთხით. ვთქვათ, P_e არის სიბრტყე, რომელიც სფეროს კვეთს ეკვატორის გასწვრივ, ხოლო P_1 არის სიბრტყე, რომელიც გადის სფეროს ცენტრზე, P_e სიბრტყის მართობულად. P_1 სიბრტყე ადგენს ჩრდილო და სამხრეთ პოლუსების შემაერთებელ გეოდეზიურს –გრძედს. ვთქვათ, A_1 ამ გრძედის ეკვატორთან გადაკვეთის ერთ-ერთი წერტილია. ვინაიდან P_1 და P_e სიბრტყეები ურთიერთ მართობულია, ამიტომ ამ ორ გეოდეზიურს შორის ყოველი კუთხეა 90°. მოვაბრუნოთ P_1 სიბრტყე ჩრდილო და სამხრეთ პოლუსების შემაერთებელი წრფეზე (ის ამ წრფეზე გადის, რადგან გადის სფეროს ცენტრზე), მივიღებთ P_2 სიბრტყეს. ეს ახალი სიბრტყე ასევე წარმოქმნის გეოდეზიურს –გრძედს, რომელიც ასევე მართობულია ეკვატორული სიბრტყის და მასთან შედგენილი კუთხეა 90°. ვთქვათ, A_2 მიღებული ახალი გრძედის ეკვატორთან გადაკვეთის ერთ-ერთი წერტილია. როგორც დავადგინეთ, A_1NA_2 სამკუთხედის ორ კუთხე მართია და შესაბამისად, ამ სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180°-ზე მეტია.

ბუნებრივად ჩნდება კითხვა: **სამკუთხედის კუთხეების ჯამი რამდენითაა მეტი 180°-ზე?**

თეორემა-1. ABC სფერული სამკუთხედის საპირისპირო $(-A)(-B)(-C)$ სფერული სამკუთხედი იგივე ზომისაა და ამ სამკუთხედების ფართობები ტოლია

შენიშვნა. აქ $-A$, არის A წერტილის მოპირდაპირე წერტილი სფეროზე, ანუ კოორდინატებში თუ $A=(x,y,z)$, მაშინ $-A=(-x,-y,-z)$. ანალოგიურად $-B.-C$.

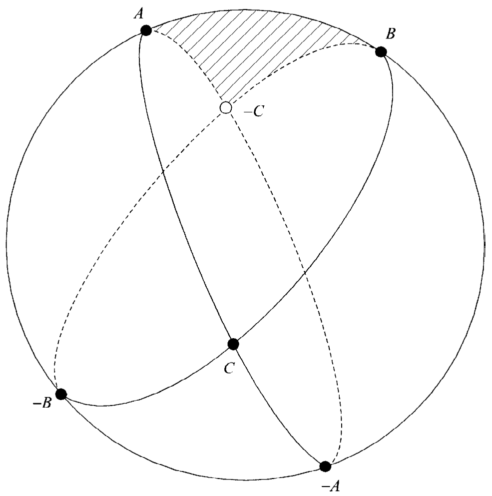
თეორემა-2. R რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართობი $4\pi R^2$-ის ტოლია (შესაბამისად, ნახევარსფეროს ფართობია $2\pi R^2$)

შენიშვნა. შემოვაბრუნოთ სფერო ისე, რომ წინა მხარეს აღმოჩნდეს ABC სფერული სამკუთხედი. მაშინ A, B, $-A$ და $-B$ წერტილები მოთავსდებიან დიდ წრეწირებზე, რომლებიც სფეროს ზედაპირს წინა (ნათელ) და უკანა (ბნელ) მხარეებად დაყოფენ (ნახ. 5). წყვეტილით დიდი წრეწირის ის ნაწილია აღნიშნული, რომელიც სფეროს უკანა მხარეს განეკუთვნება. სფეროს უკანა მხარეზეა ასევე $AB(-C)$ სფერული სამკუთხედი.

ორი დიდი წრეწირი სფეროს ზედაპირს ოთხ ნაწილად–მთვარედ ყოფს (ეს სახელწოდება მთვარის ზედაპირის ნაწილების სახელწოდების ანალოგიას

რარმოადგენს). მაგალითად, C წერტილში იკრიბება ოთხი მთვარე. მათ შორის ერთი $CA(-C)BC$ – თია შემოსაზღვრული (თუ დავუშვებთ, რომ $AB(-C)$ სფერული სამკუთხედი ამ მთვარის ნაწილია). მთვარის მისაღებად დიდი წრეწირი ორ ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი. მთვარის საპირისპირო წერტილებიდან თითოეულს მთვარის კიდე ეწოდება. დიდი წრეწირებით შედგენილი კიდის კუთხის ზომას–მთვარის ზომა (სიდიდე) ეწოდება.

თეორემა-3. θ რადიანის ტოლი კიდის კუთხის შესაბამისი მთვარის ფართობი $2\theta R^2$-ის ტოლია



ნახ. 5

დამტკიცება. სფეროს ზედაპირზე ავაგოთ მთვარე. განვიხილოთ $CB(-C)$ ნახევარწრეწირი და შემოვაბრუნოთ ის სფეროს იმ დიამეტრის გარშემო, რომელსაც C და $(-C)$ წერტილები განსაზღვრავს. ამ მობრუნების შედეგად (როცა $B \to A$) მთვარე ნახევარწრეწირში გადავა და შესაბამისად, მისი ფართობი 0 – ის ტოლია. თუ მობრუნება მოხდება π რადიანზე (180°-ზე), მაშინ მივიღებთ ნახევარსფეროს, რომლის ზედაპირის ფართობია $2\pi R^2$. ცხადია, რომ თუ მობრუნება განხორციელდება θ რადიანის ტოლ კუთხეზე, მაშინ მიღებული მთვარის ზედაპირის ფართობი ნახევარსფეროს ზედაპირის ფართობის θ/π-ნაწილის ტოლი იქნება. ამგვარად, θ რადიანის ტოლი კიდის კუთხის შესაბამისი მთვარის ფართობი ტოლია $2\theta R^2$-ის. **რდგ**

თეორემა-4. (ნამატის შესახებ.) R რადიუსიანი სფეროს ABC სფერულ სამკუთხედისათვის (იხ. ნახ. 5) ადგილი აქვს ტოლობას:

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = \pi + \frac{S_{[ABC]}}{R^2},$$

სადაც $S_{[ABC]}$ – სფერული სამკუთხედის ფართობია, ხოლო ამ სამკუთხედის კუთხეები რადიანებშია გაზომილი.

დამტკიცება. სფერული ABC სამკუთხედის ყოველ წვერო განსაზღვრავს ერთ მთვარეს. ის მიიღება სფერული სამკუთხედის იმ ორი გვერდის გაგრძელებით, რომლებიც ამ წერტილში იკვეთებიან. მათ ეწოდებათ: მთვარე $A-$ში, მთვარე $B-$ში და მთვარე $C-$ში. ავღნიშნოთ შესაბამისად $L(A)$, $L(B)$, $L(C)$. გვექნება:

$S_{L(A)} + S_{L(B)} + S_{L(C)} =$ S(ნახევარსფერო)+ $2S_{[ABC]} - S_{[(-A)(-B)(-C)]} + S_{[AB(-C)]}$.

ამ ტოლობაში, ბოლო ორი ფართობი ერთმანეთის ტოლია, ამიტომ გვექნება:

$$2R^2 \cdot m\angle A + 2R^2 \cdot m\angle B + 2R^2 \cdot m\angle C = 2\pi R^2 + 2 \cdot S_{[ABC]}$$

ტოლობის ორივე მხარის $2 \cdot R^2$-ზე გავყოფით, მივიღებთ საჭირო ტოლობას. **რდგ**

შენიშვნა. ამგვარად, სფერული სამკუთხედის ფართობის გამოთვლა შესაძლებელია მისი კუთხეებისა და სფეროს რადიუსის მიხედვით. ამასთან, არაა აუცილებელი ვიცოდეთ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.

ნებისმიერი სფერული სამკუთხედისათვის, არსებობს ნახევარსფერო, რომელიც მთლიანად შეიცავს მას, ამიტომ სფერული სამკუთზედის მაქსიმალური ფართობია $2\pi R^2$. გამოვიყენოთ თეორემა ნამათის შესახებ.

თეორემა. **სფერული სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი $\boldsymbol{\pi} < \alpha + \beta + \gamma < 3\boldsymbol{\pi}$.**

დამტკიცება: ნებისმიერი სფერული სამკუთხედისათვის, არსებობს ნახევარსფერო, რომელიც მთლიანად შეიცავს მას (რომელი? იხ. ქვემოთ სავარჯიშო), ამიტომ სფერული სამკუთხედის მაქსიმალური ფართობია $2\pi R^2$. გამოვიყენოთ თეორემა ნამატის შესახებ. ღ.დ.გ. (დაწერეთ ეს დამტკიცება დაწვრილებით).

ამ თეორემის დამტკიცების ალტერნატიული გზა ეყრდნობა ე.წ. სტერეოგრაფიულ პროექციას. ეს პროექცია მატემატიკასა და სხვა დისციპლინებში ფართოდ გამოიყენება. ჩვენ მოკლედ შევეხებით მის განსაზღვრებას და თვისებებს.

ჰიპერბოლური კუთხეები და სამკუთხედები.

პუანკარეს ჰიპერბოლური სიბრტყის მოდელზე დაყრდნობით მტკიცდება

თეორემა. **ჰიპერბოლური სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი $\mathbf{0} < \alpha + \beta + \gamma < \pi$.**

დამტკიცებას არ მოვიყვანთ.