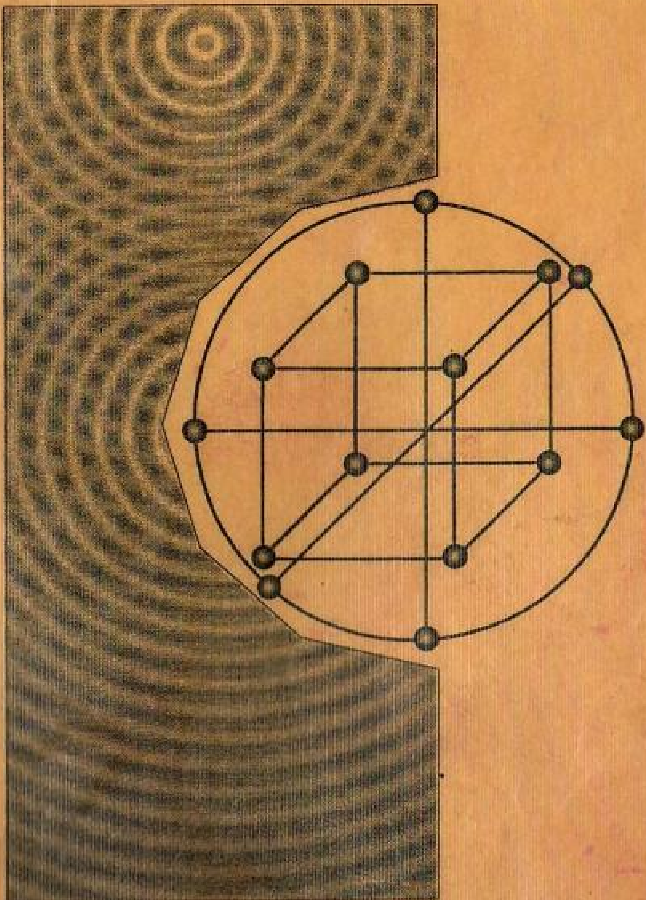


ი. ზედგინიძე

საინჟინრო ექსპერიმენტის ორგანიზაცია და დაგეგმვა

ბატონ [illegible]
პატივისცემით ავტორისაგან

-3037-

XXI საუკუნის სახელმძღვანელო

GEORGIAN TECHNICAL UNIVERSITY
INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION ACADEMY
INTERNATIONAL INFORMATIZATION ACADEMY

I. G. ZEDGINIDZE

ORGANIZATION AND PLANNING OF ENGINEERING EXPERIMENT

TBILISI 2000

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
კავშირგაბმულობის საერთაშორისო აკადემია
ინფორმატიზაციის საერთაშორისო აკადემია

ი. ზედგინიძე

საინჟინრო ექსპერიმენტის ორგანიზაცია და დაგეგმვა

ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი 2000

62(075.8)+519.242(075.8)

უაკ 519.24
ზ445

ი.ზედგინიძე. საინჟინრო ექსპერიმენტის ორგანიზაცია და დაგეგმვა, ტექნიკური უნივერსიტეტი. თბილისი, 2000, გვ.240.

ზ445 განიხილება საინჟინრო ექსპერიმენტის ორგანიზაციისა და დაგეგმვის თანამედროვე სტატისტიკური მეთოდები. დაკვირვებათა ერთი ან რამდენიმე ჯგუფის შედეგების დამუშავების, დისპერსიული, კორელაციური და რეგრესიული ანალიზის მეთოდების გარდა განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა ექსპერიმენტის დაგეგმვის მათემატიკურ მეთოდებს.

განკუთვნილია „მეტროლოგია, სტანდარტიზაცია, სერტიფიკაცია და ხარისხის მართვა“ და „საინფორმაციო-საზომი ტექნიკა და ტექნოლოგიები“ სპეციალობის სტუდენტებისათვის. სასარგებლო იქნება მონათესავე სპეციალობის სტუდენტების, მაგისტრანტების, ასპირანტების, აგრეთვე სხვა დარგის სამეცნიერო და საინჟინრო-ტექნიკური მუშაკებისათვის, რომელთა საქმიანობა დაკავშირებულია დაკვირვებათა შედეგების სტატისტიკურ დამუშავებასთან და პროცესების მოდელირებასთან.

რეცენზენტები:
ტ.მ.დ., პროფ. *გ.გოგიჩაიშვილი*
ტ.მ.დ., პროფ. *ა.გუგუშვილი*

ISBN 99928-78-41-X

1. დაკვირვებათა შედეგების დამუშავება ერთი ჯგუფის შემთხვევაში

1.1. გაზომვის შედეგი

გაზომვის შედეგში იგულისხმება დაკვირვებათა შედეგების შესწორებულ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული. დავუშვათ, დაკვირვების შედეგი აღნიშნულია U_i–ით, შესაბამის i–ურ ცდაში აბსოლუტური ცდომილება λ_i–ით, მაშინ დაკვირვების შესწორებული შედეგისათვის გვექნება $y_i=U_i-\lambda_i$, გაზომვის შედეგისათვის კი

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i, \tag{1.1}$$

სადაც n პარალელური ცდების[1] რაოდენობაა.

მაგალითი. ჩატარებულია $n=5$ ცდა და მიღებულია დაკვირვებათა შედეგები: 12, 13, 14, 15, 16. ცნობილია, რომ პირველ ცდაში სისტემატური ცდომილება იყო $\lambda_1=1{,}0$, მეორეში – $\lambda_2=1{,}5$, მესამეში – $\lambda_3=2{,}0$, მეოთხეში – $\lambda_4=2{,}5$, მეხუთეში – $\lambda_5=3{,}0$. განვსაზღვროთ გაზომვის შედეგი.

ზემოთ აღნიშნული ალგორითმით გამოვთვალოთ დაკვირვებათა შესწორებული შედეგები:

$$y_1=U_1-\lambda_1=12-1{,}0=11{,}0,$$

$$y_2=U_2-\lambda_2=13-1{,}5=11{,}5,$$

$$y_3=U_3-\lambda_3=14-2{,}0=12{,}0,$$

$$y_4=U_4-\lambda_4=15-2{,}5=12{,}5.$$

$$y_5=U_5-\lambda_5=16-3{,}0=13{,}0.$$

ამ შესწორებული შედეგების მიხედვით განვსაზღვროთ გაზომვის შედეგი:

$$\bar{y}=\frac{1}{5}(11{,}0+11{,}5+12{,}0+12{,}5+13{,}0)=\frac{60}{5}=12{,}0.$$

[1] პარალელური ეწოდება ისეთ ცდებს, რომლებიც ჩატარებულია ერთ და იგივე პირობებში.

თუ წინასწარ ცნობილია, რომ სისტემატური ცდომილება არ იცვლება ერთი ცდიდან მეორეზე გადასვლისას, გაზომვის შედეგის გამოთვლა ხდება გამარტივებული ალგორითმით: ამ შემთხვევაში არ ხდება დაკვირვებათა შედეგების შესწორება. დაკვირვებათა შედეგების მიხედვით პირდაპირ გამოითვლება მათი საშუალო არითმეტიკული

$$\overline{U} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i. \tag{1.2}$$

გაზომვის შედეგს მივიღებთ თუ ამ საშუალო არითმეტიკულს გამოვაკლებთ მუდმივ სისტემატურ ცდომილებას

$$\overline{y} = \overline{U} - \lambda. \tag{1.3}$$

მაგალითი. ჩატარებულია $n=5$ პარალელური ცდა და მიღებულია დაკვირვებათა შედეგები: 12, 13, 14, 15, 16. ცნობილია, რომ სისტემატური ცდომილება არ იცვლება და ერთნაირია ყველა ცდაში, ე.ი. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\lambda=2$. ვიპოვოთ გაზომვის შედეგი.

ზემოთ აღწერილი ალგორითმით ჯერ გამოვთვალოთ დაკვირვებათა შედეგების საშუალო არითმეტიკული

$$\overline{U} = \frac{1}{5}\left(12+13+14+15+16\right) = \frac{70}{5} = 14.$$

შემდეგ გაზომვის შედეგისათვის მივიღებთ

$$\overline{y} = \overline{U} - \lambda = 14 - 2 = 12.$$

1.2. დაკვირვებათა შედეგების გაბნევის მახასიათებლები

ერთნაირი გაზომვის შედეგი შეიძლება მივიღოთ მეტად ან ნაკლებად გაბნეული დაკვირვებათა შედეგების მიხედვით:

I ჯგუფი: 18; 19; 20; 21; 22 $\quad \bar{y}_1 = 20$,

II ჯგუფი: 19,8; 19,9; 20,0; 20,1; 20,2 $\quad \bar{y}_2 = 20,0$.

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ პირველ ჯგუფში შედეგები უფრო გაბნეულია თავისი საშუალოს მიმართ, ვიდრე მეორეში.

დაკვირვებათა შედეგების გაბნევას ახასიათებენ დისპერსიით (σ^2) და საშუალო კვადრატული გადახრით (σ). მაგრამ ეს მახასიათებლები გვექნება მხოლოდ იმ შემ-

თხვევაში, როცა ვამუშავებთ პარალელურ დაკვირვებათა უსასრულოდ დიდ რაოდენობას. პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას პარალელურ დაკვირვებათა რაოდენობა ყოველთვის შეზღუდულია. ამიტომ ამ შემთხვევაში შეგვიძლია მივიღოთ ჭეშმარიტი დისპერსიის და საშუალო კვადრატული გადახრის მხოლოდ შეფასებები. დისპერსიის შეფასება აღინიშნება S^2–ით, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასება S–ით.

დისპერსიის შეფასება განისაზღვრება შემდეგი ფორმულის მიხედვით

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2, \tag{1.4}$$

ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასება

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}. \tag{1.5}$$

ცხადია, რომ დისპერსიისა და საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასებას შორის შემდეგი დამოკიდებულებაა

$$S = \sqrt{S^2}. \tag{1.6}$$

მაგალითი. განვსაზღვროთ დისპერსიისა და საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასებები დაკვირვებათა პირველი ჯგუფის შემთხვევაში, ე.ი., როდესაც გვაქვს $n=5$ პარალელური დაკვირვება, რომელთა შედეგებია: 18; 19; 20; 21; 22. სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ ამ შემთხვევაში სისტემატური ცდომილებები არ გვაქვს. მაშინ გაზომვის შედეგი შეგვიძლია გამოვთვალოთ უშუალოდ დაკვირვებათა შედეგების მიხედვით

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{5}\left(18+19+20+21+22\right) = \frac{100}{5} = 20,$$

ხოლო დისპერსიის შეფასება

$$S_1^2 = \frac{1}{5-1}\left[\left(18-20\right)^2 + \left(19-20\right)^2 + \left(20-20\right)^2 + \left(21-20\right)^2 + \left(22-20\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4+1+0+1+4\right) = \frac{1}{4}\cdot 10 = 2,5.$$

საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასება კი

$$S_1 = \sqrt{S_1^2} = \sqrt{2,5} \approx 1,58.$$

ვიპოვოთ დისპერსიის შეფასება დაკვირვებათა მეორე ჯგუფისათვის, ე.ი. როცა $n=5$ და გვაქვს შემდეგი შედეგები: 19,8; 19,9; 20,0; 20,1; 20,2.

გაზომვის შედეგისათვის მივიღებთ

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{5}(19{,}8 + 19{,}9 + 20{,}0 + 20{,}1 + 20{,}2) = \frac{100}{5} = 20.$$

დისპერსიის შეფასებისათვის

$$S_2^2 = \frac{1}{5-1}\left[(19{,}8-20)^2 + (19{,}9-20)^2 + (20-20)^2 + (20{,}1-20)^2 + (20{,}2-20)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(0{,}04 + 0{,}01 + 0 + 0{,}01 + 0{,}04) = \frac{1}{4}\cdot 0{,}1 = 0{,}025.$$

როგორც ვხედავთ, პირველი ჯგუფის დისპერსიის შეფასება გამოვიდა 100-ჯერ მეტი, ვიდრე მეორე ჯგუფისა.

დაკვირვებათა შედეგების გაბნევის დასახასიათებლად ზოგჯერ გამოიყენება „გაქანება". ამ უკანასკნელს აღნიშნავენ R_n-ით, სადაც n პარალელურ დაკვირვებათა რაოდენობაა. „გაქანება" მოიძებნება შემდეგნაირად

$$R_n = y_{max} - y_{min},$$

სადაც y_{max} დაკვირვებათა შედეგებს შორის უდიდესია, ხოლო y_{min} – უმცირესი.

მაგალითი. დავუშვათ, გვაქვს $n=5$ პარალელური დაკვირვების შედეგი: 18, 19, 20, 21, 22. მაშინ $R_5=22-18=4$. თუ გვაქვს დაკვირვებათა შედეგები: 19,8; 19,9; 20,0; 20,1; 20,2, მაშინ $R_5=20{,}2-19{,}8=0{,}4$.

1.3. გაზომვის შედეგის გაბნევის მახასიათებლები

იმის გამო, რომ ერთ და იგივე პირობებში პარალელური ცდების გამეორებისას საშუალო არითმეტიკულები ანუ გაზომვის შედეგები გარკვეულად განსხვავდება ერთმანეთისაგან, ე.ი. გაბნეულია, ამიტომ აუცილებელია საშუალო არითმეტიკულების ანუ გაზომვის შედეგების გაბნევის დახასიათება. ამისათვის გამოიყენება გაზომვის შედეგის დისპერსია $\sigma_{\bar{y}}^2$ და გაზომვის შედეგის საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma_{\bar{y}}$. ვინაიდან ყოველთვის ვმუშაობთ დაკვირვებათა შეზღუდულ რაოდენობასთან, ამიტომ შეგვიძ-

ლია განვსაზღვროთ გაზომვის შედეგის დისპერსიისა და საშუალო კვადრატული გადახრის მხოლოდ შეფასებები, რომლებიც აღინიშნება შესაბამისად $S_{\bar{y}}^2$-თა და $S_{\bar{y}}$-ით.

გაზომვის შედეგის დისპერსიის შეფასება გამოითვლება ფორმულით

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2, \qquad (1.7)$$

გაზომვის შედეგის საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასება კი

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}. \qquad (1.8)$$

მაგალითი. დავუშვათ, ჩატარებულია $n=5$ პარალელური ცდა და მიღებულია დაკვირვებათა შედეგები: 12, 13, 14, 15, 16. მოვძებნოთ გაზომის შედეგის დისპერსიის და საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასებები.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(12 + 13 + 14 + 15 + 16) = \frac{70}{5} = 14,$$

მივიღებთ

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{5(5-1)}\left[(12-14)^2 + (13-14)^2 + (14-14)^2 + (15-14)^2 + (16-14)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{20}[4 + 1 + 0 + 1 + 4] = \frac{1}{20}\cdot 10 = 0{,}5,$$

(1.8) თანახმად გაზომვის შედეგის საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასებისათვის

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71.$$

თუ შევადარებთ ერთმანეთს დაკვირვებათა შედეგებისა და გაზომვის შედეგის დისპერსიების შეფასების (1.4) და (1.7) ფორმულებს, დავინახავთ, რომ მათ შორის შემდეგი დამოკიდებულებაა

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{S^2}{n}, \qquad (1.9)$$

ე.ი. გაზომვის შედეგის დისპერსიის შეფასება n-ჯერ ნაკლებია დაკვირვებათა შედეგების შეფასების დისპერსიაზე, სადაც n პარალელური ცდების რაოდენობაა.

ანალოგიურად, დაკვირვებათა შედეგებისა და გაზომვის შედეგის საშუალო კვადრატული გადახრების გამოსაანგარიშებელი (1.5) და (1.8) ფორმულების შედარება საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ დასკვნა

$$S_{\bar{y}} = \frac{S}{\sqrt{n}}. \qquad (1.10)$$

1.4. დაკვირვებათა შედეგების წინასწარი მომზადება დამუშავებისათვის

ხშირად დაკვირვებათა შედეგებს შორის ზოგიერთი ეჭვს იწვევს – გაცილებით აღემატება დანარჩენებს (მაგალითად, 12, 14, 11, 20, 10, 13) ან გაცილებით ნაკლებია დანარჩენებზე (მაგალითად, 12, 2, 11, 10, 14, 13). საეჭვო შედეგი (ხაზგასმულია მაგალითებში) შეიძლება იყოს უხეში შეცდომა და ასეთ შემთხვევაში უნდა გამოირიცხოს ან შეიძლება მიეკუთვნოს დაკვირვებათა განსახილველ ჯგუფს.

საეჭვო შედეგის ჯგუფში დატოვება — არდატოვების საკითხის გადასაწყვეტად გამოიყენება *Q* - კრიტერიუმი ან რომანოვსკის კრიტერიუმი.

1.4.1. Q - კრიტერიუმი

Q - კრიტერიუმის თანახმად დაკვირვებათა შედეგები უნდა განვალაგოთ ზრდადობის მიხედვით, მაშინ საეჭვო დიდი შედეგი აუცილებლად მოექცევა მარჯვნივ (10, 11, 12, 13, 14, 20), ხოლო საეჭვო მცირე შედეგი ყოველთვის მოხვდება მარცხნივ (2, 10, 11, 12, 13, 14). ამის შემდეგ ზრდადობით განლაგებულ $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n$ დაკვირვებათა შედეგების მიხედვით უნდა გამოვიანგარიშოთ ორი დამხმარე სიდიდე:

სიდიდით მცირე საეჭვო შედეგისათვის

$$Q_1' = \frac{y_2 - y_1}{y_n - y_1}; \qquad (1.11)$$

სიდიდით დიდი საეჭვო შედეგისათვის

$$Q_2' = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_n - y_1}. \qquad (1.12)$$

ასე გამოთვლილ საანგარიშო მნიშვნელობებს Q_1' და Q_2' ვადარებთ შესაბამის ცხრილურ კრიტიკულ $Q_{\text{ცხ}}$ მნიშვნელობასთან. ამ მნიშვნელობას ვირჩევთ პარალელურ დაკვირვებათა *n* რაოდენობის მიხედვით შემდეგი ცხრილიდან

ცხრილი 1

$Q_{\text{ცხ}}$ მნიშვნელობები

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Q_{\text{ცხ}}$	0,94	0,77	0,64	0,56	0,51	0,48	0,44	0,42	0,41	0,405

თუ საანგარიშო მნიშვნელობა $Q'\,(Q_1', Q_2')$ აღემატება ცხრილურ მნიშვნელობას

$$Q' > Q_{\text{ცხ}}, \qquad (1.13)$$

მაშინ ვთვლით, რომ სათანადო საეჭვო შედეგი წარმოადგენს უხეშ შეცდომას და უნდა გამოირიცხოს.

მაგალითი. დავუშვათ, გვაქვს n=6 პარალელურ დაკვირვებათა შედეგი: 12, 14, 11, 20, 10, 13. ეჭვს იწვევს დაკვირვების შედეგი „20“. შევამოწმოთ, ეკუთვნის თუ არა ეს დაკვირვების შედეგი განხილულ დაკვირვებათა ჯგუფს.

ზემოთ აღწერილი ალგორითმის თანახმად განვალაგოთ დაკვირვებათა შედეგები ზრდადობის მიხედვით 10, 11, 12, 13, 14, 20. გამოვთვალოთ საანგარიშო მნიშვნელობები Q_1' და Q_2'.

$$Q_1' = \frac{11-10}{20-10} = \frac{1}{10} = 0{,}1, \quad Q_2' = \frac{20-14}{20-10} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

n=6 პარალელური დაკვირვებისათვის პირველი ცხრილიდან შევარჩევთ კრიტიკულ მნიშვნელობას $Q_{\text{ცხ}}$=0,56.

ვინაიდან $Q_1' = 0{,}1 < Q_{\text{ცხ}} = 0{,}56$, ამიტომ დაკვირვებათა შედეგებს შორის ყველაზე მცირე „10“ მიეკუთვნება დაკვირვებათა განსახილველ ჯგუფს.

ვინაიდან $Q_2' = 0{,}6 > Q_{\text{ცხ}} = 0{,}56$, ამიტომ სიდიდით ყველაზე დიდი საეჭვო შედეგი „20“ უხეში შეცდომაა და უნდა გამოირიცხოს.

1.4.2. რომანოვსკის კრიტერიუმი

რომანოვსკის კრიტერიუმი არ მოითხოვს დაკვირვებათა შედეგების ზრდადობით განლაგებას. ამ კრიტერიუმით საეჭვო შედეგის გაუთვალისწინებლად დანარჩენი n-1 დაკვირვების შედეგის მიხედვით მოიძებნება გაზომვის შედეგის შეფასება $\bar{y}$ და საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასება S. შემდეგ საეჭვო შედეგისა და გაზომვის შედეგის სხვაობის აბსოლუტურ მნიშვნელობას ვადარებთ შესაბამის კრიტიკულ $t' \cdot S$ მნიშვნელობას, სადაც t' რომანოვსკის კრიტერიუმის ცხრილური მნიშვნელობაა იმ თავისუფლების ხარისხისათვის, რომლითაც განისაზღვრება საშუალო კვადრატული გადახრა S.

ცხრილი 2

t' მნიშვნელობები რომანოვსკის კრიტერიუმისათვის

n-1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t'	15,56	4,97	3,56	3,04	2,78	2,62	2,51	2,43	2,37	2,34	2,32

თუ

$$|y_k - \bar{y}| > t' \cdot S, \tag{1.14}$$

ვთვლით, რომ საეჭვო შედეგი წარმოადგენს უხეშ შეცდომას და უნდა გამოვრიცხოთ.

მაგალითი. დავუშვათ, გვაქვს n=6 პარალელური დაკვირვების შედეგი: 12, 14, 11, 20, 13, 10. საეჭვოა მეოთხე დაკვირვების შედეგი $y_k=y_4=20$. რომანოვსკის კრიტერიუმით ეს საეჭვო შედეგი დროებით უგულებელვყოთ და დარჩენილი მონაცემების მიხედვით (12, 14, 11, 13, 10) მოვძებნოთ გაზომვის შედეგი

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(12+14+11+13+10) = \frac{60}{5} = 12$$

და საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასება

$$S = \sqrt{\frac{1}{5-1}\left[(12-12)^2+(14-12)^2+(11-12)^2+(13-12)^2+(10-12)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(0+4+1+1+4)} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 10} \approx 1{,}58.$$

გამოვითვალოთ სხვაობა $|y_k - \bar{y}| = |20-12| = 8$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ დასაწყისში გვქონდა 6 პარალელური დაკვირვება, n-1=6-1=5–სათვის მე–2 ცხრილიდან მივიღებთ t'=3,04. მაშინ $t' \cdot S$=3,04·1,58=4,80. ვინაიდან $|y_k - \bar{y}| = 8 > t' \cdot S = 4{,}80$, ამიტომ საეჭვო შედეგი „20" მართლაც უხეში შეცდომაა და აუცილებლად უნდა გამოირიცხოს. დაკვირვებათა შედეგების შემდგომი დამუშავებისას ამ შედეგს აღარ გავითვალისწინებთ.

1.5. განაწილების ნორმალურობის შესახებ ჰიპოთეზის შემოწმება დაკვირვებათა მცირე რაოდენობის შემთხვევაში

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს დაკვირვებათა შედარებით მცირე რაოდენობა ($10 \le n \le 50$), დაკვირვებათა შედეგების განაწილების ნორმალურობის შესახებ ჰიპოთეზას ვამოწმებთ ე.წ. $\tilde{d}$–კრიტერიუმით.

ამ კრიტერიუმით დაკვირვებათა შედეგების მიხედვით უნდა მოვძებნოთ შესაბამისი საანგარიშო მნიშვნელობა

$$\tilde{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i - \bar{y}|}{n \cdot S^*}, \tag{1.15}$$

სადაც

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n}}, \tag{1.16}$$

ხოლო $\bar{y}$ წარმოადგენს n პარალელური დაკვირვების შედეგის მიხედვით განსაზღვრულ გაზომვის შედეგს.

საანგარიშო მნიშვნელობა $\tilde{d}$ უნდა შევადაროთ შესაბამის კრიტიკულ ცხრილურ მნიშვნელობას. ქვედა კრიტიკული მნიშვნელობა აღინიშნება როგორც $d_{1-(q/2)}$, ხოლო ზედა კრიტიკული მნიშვნელობა–$d_{q/2}$ (აქ q–მნიშვნელოვნობის დონეა).

ქვედა და ზედა კრიტიკული მნიშვნელობების შერჩევას ვაწარმოებთ პარალელურ დაკვირვებათა რაოდენობის მიხედვით შემდეგი ცხრილიდან.

ცხრილი 3

კრიტიკული მნიშვნელობები

$\tilde{d}$ –კრიტერიუმისათვის

n	$d_{1-(q/2)}$	$d_{q/2}$
11	0,7153	0,9073
16	0,7236	0,8884
21	0,7304	0,8768
26	0,7360	0,8686
31	0,7404	0,8625
36	0,7440	0,8578
41	0,7470	0,8540
46	0,7496	0,8508

თუ საანგარიშო მნიშვნელობა აღმოჩნდება კრიტიკულ მნიშვნელობათა შორის

$$d_{1-(q/2)} \le \tilde{d} \le d_{q/2}, \tag{1.17}$$

მაშინ პირობა იმის შესახებ, რომ პარალელურ დაკვირვებათა შედეგები განაწილებულია ნორმალური კანონის თანახმად არ არის უარყოფილი.

თუ პირობა (1.17) არ სრულდება, მაშინ დაკვირვებათა შედეგების განაწილება ნორმალურ კანონს არ ემორჩილება.

მაგალითი. დავუშვათ, n=16–ჯერ გავიმეორეთ ცდა და მივიღეთ 16 პარალელური დაკვირვების შედეგი. ეს შედეგები მოთავსებულია ცხრილის y_i სვეტში.

ცდის №	y_i	$\lvert y_i-\bar{y}\rvert$	$(y_i-\bar{y})^2$	ცდის №	y_i	$\lvert y_i-\bar{y}\rvert$	$(y_i-\bar{y})^2$
1	51	1	1	9	47	3	9
2	53	3	9	10	52	2	4
3	49	1	1	11	50	0	0
4	50	0	0	12	51	1	1
5	52	2	4	13	48	2	4
6	49	1	1	14	50	0	0
7	48	2	4	15	49	1	1
8	51	1	1	16	50	0	0
				ჯამი		20	40

მეორე სვეტის მონაცემების მიხედვით მივიღოთ გაზომვის შედეგი

$$\bar{y} = \frac{51+53+49+50+52+49+48+51+47+52+50+51+48+50+49+50}{16} =$$

$$= \frac{800}{16} = 50.$$

დაკვირვებათა შედეგების და გაზომვის შედეგის სხვაობათა აბსოლუტური მნიშვნელობები შეტანილია ზემოთ მოყვანილი ცხრილის $\lvert y_i-\bar{y}\rvert$ სვეტში, ხოლო $(y_i-\bar{y})^2$ სვეტში მოცემულია ამ სხვაობათა კვადრატების მნიშვნელობები.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ მეოთხე სვეტის ელემენტების ჯამი $\sum_{i=1}^{16}(y_i-\bar{y})^2 = 40$, მაშინ (1.16)–ის თანახმად მივიღებთ

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{16}(y_i-\bar{y})^2}{16}} = \sqrt{\frac{40}{16}} = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58.$$

გამოვთვალოთ $\tilde{d}$

$$\tilde{d} = \frac{\sum_{i=1}^{16}\lvert y_i-\bar{y}\rvert}{16\cdot 1{,}58} = \frac{20}{25{,}28} = 0{,}791.$$

ვინაიდან ჩვენ მაგალითში n=16, მე–3 ცხრილიდან ქვედა კრიტიკული მნიშვნელობისათვის მივიღებთ $d_{1-(q/2)} = 0{,}7236$ ხოლო ზედა კრიტიკული მნიშვნელობისათვის $d_{q/2} = 0{,}8884$.

ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა $\tilde{d} = 0{,}791$ მოთავსდა ქვედა და ზედა კრიტიკულ მნიშვნელობებს შორის

$$0{,}7236 < 0{,}791 < 0{,}8884,$$

ამიტომ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ განსახილველი 16 პარალელური დაკვირვების შედეგი განაწილებულია ნორმალური კანონის თანახმად.

1.6. დაკვირვებათა დიდი რაოდენობის შემთხვევაში განაწილების ჰისტოგრამისა და პოლიგონის აგება

როდესაც გვაქვს პარალელურ დაკვირვებათა დიდი რაოდენობა (n≥40), მაშინ მათ დამუშავებას ახორციელებენ ინტერვალებში მონაცემთა დაჯგუფების შემდეგ.

დაკვირვებათა შედეგების დაჯგუფება და განაწი-
ლების ჰისტოგრამისა და პოლიგონის აგება განვიხილოთ
კონკრეტულ მაგალითზე.

დავუშვათ, გვაქვს n=60 პარალელური დაკვირვების შედეგი
53; 58; 61; 68; 65; 61; 64; 68; 73; 63;
50; 59; 63; 65; 68; 71; 51; 61; 63; 71;
61; 55; 57; 61; 63; 67; 72; 58; 62; 66;
57; 56; 60; 64; 62; 66; 69; 72; 52; 58;
62; 67; 70; 54; 57; 60; 59; 55; 62; 71;
70; 62; 54; 56; 60; 66; 59; 65; 60; 69.

მათ შორის მოვძებნოთ ყველაზე მცირე y_{min} (y_{min}=50) და ყველაზე დიდი y_{max} (y_{max}=73) მნიშვნელობები. მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები ხაზგასმულია.

შევარჩიოთ ინტერვალების რაოდენობა L. ინტერვა-
ლების რაოდენობას ვირჩევთ პარალელურ დაკვირვებათა
რაოდენობის მიხედვით შემდეგი ცხრილიდან

ცხრილი 4

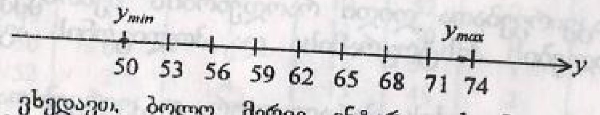
პარალელურ დაკვირვებათა რაოდენობა n	ინტერვალების რაოდენობა L
40 — 100	7 — 9
100 — 500	8 — 12
500 — 1000	10 — 16
1000 — 10000	12 — 22

ვინაიდან გვაქვს 60 პარალელური დაკვირვების შედეგი, მე-4 ცხრილის თანახმად შეგვიძლია შევარჩიოთ 7 – 9 ინტერვალი. შევარ-
ჩიოთ L=8.

ინტერვალის სიგრძე

$$h = \frac{y_{max} - y_{min}}{L} = \frac{73 - 50}{8} = \frac{23}{8} = 2,875.$$

ინტერვალის მიღებული სიგრძე მოუხერხებელია, ამიტომ მიზანშეწო-
ნილია დავამრგვალოთ, h=3.



როგორც ვხედავთ, ბოლო მერვე ინტერვალის მარჯვენა საზღვარი
გასცდა მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ეს მოხდა იმის გამო, რომ ინ-
ტერვალის სიგრძე დავამრგვალეთ მეტობით.

ინტერვალებად დაყოფის შემდეგ უნდა განვსაზღვ-
როთ თუ რამდენი დაკვირვება მოხვდება თითოეულ ინტერ-
ვალში. i-ურ ინტერვალში მოხვედრილ დაკვირვებათა
რაოდენობა აღინიშნება $\tilde{f}_i$-ით. სათანადო მნიშვნელობები მო-
თავსებულია ქვემოთ მოცემული ცხრილის მეოთხე სვეტში.

ინტერვალის №	ინტერვალის საზღვრები		$\tilde{f}$	W	υ
	≥	<			
1	50	53	3	0,050	0,017
2	53	56	5	0,083	0,028
3	56	59	8	0133	0,044
4	59	62	12	0,200	0,067
5	62	65	11	0,183	0,061
6	65	68	8	0,133	0,044
7	68	71	7	0,117	0,039
8	71	74	6	0,100	0,033
ჯამი			60	0,999	

შემდეგ განვსაზღვროთ თითოეულ ინტერვალში დაკ-
ვირვებათა მოხვედრის სიხშირე W_i

$$W_i = \frac{\tilde{f}_i}{n}. \qquad (1.18)$$

მაგალითად, პირველი ინტერვალისათვის

$$W_1 = \frac{\tilde{f}_1}{n} = \frac{3}{60} = 0,050,$$

მეორე ინტერვალისათვის $W_2 = \frac{\tilde{f}_2}{n} = \frac{6}{60} = 0,083$ და ა.შ.

სიხშირეების მიხედვით შეგვიძლია ავაგოთ ჰისტოგ-
რამა. ამისათვის თითოეულ ინტერვალზე ავაგოთ მართ-
კუთხედი, რომლის ფართობი S_i ტოლი იქნება ამ ინტერ-
ვალის შესაბამისი W_i სიხშირისა. ინტერვალის სიგრძე
h-ით აღვნიშნოთ, მაშინ $W_i = S_i = h \cdot \upsilon_i$ თანაფარდობიდან
განვსაზღვრავთ მართკუთხედების სიმაღლეებს

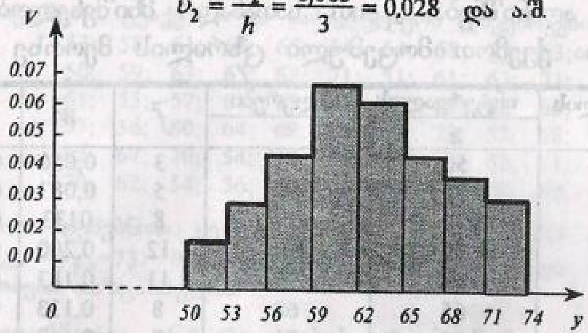
$$\upsilon_i = \frac{W_i}{h}. \qquad (1.19)$$

ასე მაგალითად, პირველი მართკუთხედისათვის

$$\upsilon_1 = \frac{W_1}{h} = \frac{0,050}{3} = 0,017,$$

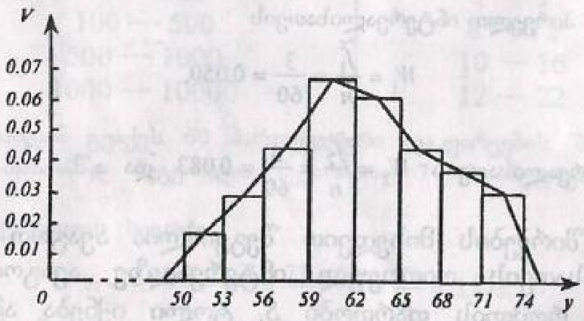
მეორე ინტერვალის შესაბამისი მართკუთხედისათვის

$$\upsilon_2 = \frac{W_2}{h} = \frac{0,083}{3} = 0,028 \quad \text{და ა.შ.}$$



ნახ.1. დაკვირვებათა შედეგების განაწილების ჰისტოგრამა

დაკვირვებათა შედეგების განაწილების პოლიგონის ასაგებად ჰისტოგრამის მართკუთხედების ზედა გვერდების შუა წერტილებს ვაერთებთ ერთმანეთთან ტეხილი სწორი ხაზით.



ნახ.2. დაკვირვებათა შედეგების განაწილების პოლიგონი

რაც უფრო მეტი ინტერვალი და პარალელური დაკვირვების შედეგი გვექნება, მით უფრო დაუახლოვდება დაკვირვებათა შედეგების განაწილების პოლიგონი განაწილების რომელიმე შესაბამისი კანონის ამსახველ მრუდს.

1.7. სტატისტიკური მახასიათებლების გამოთვლა დაჯგუფებული მონაცემების მიხედვით

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს პარალელურ დაკვირვებათა დიდი რაოდენობა, სტატისტიკური მახასიათებლების (გაზომვის შედეგი, დაკვირვებათა შედეგების დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა და სხვ.) გამოთვლა 1.1, 1.2 და 1.3 პარაგრაფებში აღწერილი ხერხით გაძნელებულია. ამიტომ მიმართავენ სხვა ხერხს, რომელიც დაფუძნებულია დაჯგუფებული მონაცემების დამუშავებაზე.

სტატისტიკური მახასიათებლების გამოთვლა პარალელურ დაკვირვებათა შედეგების დიდი რაოდენობის შემთხვევაში ხორციელდება შემდეგი ალგორითმის მიხედვით:

1. თითოეული ინტერვალისათვის მოიძებნება შესაბამისი საანგარიშო მნიშვნელობა

$$y_{io}^{\cdot} = \frac{y_{io} - y_a}{h}, \tag{1.20}$$

სადაც y_{io} წარმოადგენს i-ური ინტერვალის შუა წერტილს (ჩვენ მაგალითში პირველი ინტერვალის შუა წერტილი იქნება y_{10}=51,5, მეორე ინტერვალისათვის – y_{20}=54,5 და ა.შ.); y_a იმ ინტერვალის შუა წერტილია, რომელშიც მოხვდა პარალელურ დაკვირვებათა ყველაზე დიდი რაოდენობა (ჩვენ მაგალითში ასეთია მეოთხე ინტერვალი $y_{40}=y_a$ =60,5); ხოლო h ინტერვალის სიგრძე (ჩვენ მაგალითში h=3).

გამოვთვალოთ თითოეული ინტერვალისათვის შესაბამისი $y_{io}^{\cdot}$ მნიშვნელობები:

$$y_{10}^{\cdot} = \frac{51,5-60,5}{3} = \frac{-9}{3} = -3, \quad y_{20}^{\cdot} = \frac{54,5-60,5}{3} = \frac{-6}{3} = -2,$$

$$y_{30}^{\cdot} = \frac{57,5-60,5}{3} = \frac{-3}{3} = -1, \quad y_{40}^{\cdot} = \frac{60,5-60,5}{3} = \frac{0}{3} = 0,$$

$$y_{50}^{\cdot} = \frac{63,5-60,5}{3} = \frac{3}{3} = 1, \quad y_{60}^{\cdot} = \frac{66,5-60,5}{3} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$y_{70}^{\cdot} = \frac{69,5-60,5}{3} = \frac{9}{3} = 3, \quad y_{80}^{\cdot} = \frac{72,5-60,5}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

მიღებული შედეგები შევიტანოთ ქვემოთ მოყვანილი ცხრილის მესამე სვეტში

y_{io}	$\widetilde{f}_i$	y^*_{io}	$\widetilde{f}_i \cdot y^*_{io}$	$\widetilde{f}_i \cdot \left(y^*_{io}\right)^2$
51,5	3	-3	-9	27
54,5	5	-2	-10	20
57,5	8	-1	-8	8
60,5	12	0	0	0
63,5	11	1	11	11
66,5	8	2	16	32
69,5	7	3	21	63
72,5	6	4	24	96
ჯამი			45	257

თუ დავაკვირდებით ამ ცხრილის მესამე სვეტს, დავინახავთ კანონზომიერებას: ინტერვალს, რომელშიც მოხვდა დაკვირვებათა ყველაზე მეტი რაოდენობა, შეესაბამება y^*_{io}–ის 0–ის ტოლი მნიშვნელობა, წინა ინტერვალებს შეესაბამება –1; –2; –3 და ა.შ. შემდგომ ინტერვალებს კი – 1; 2; 3 და ა.შ. თუ გავითვალისწინებთ ამ კანონზომიერებას, y^*_{io} გამოთვლა საჭირო აღარ იქნება.

2. გამოვთვალოთ ორი საანგარიშო მნიშვნელობა

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{L} \widetilde{f}_i \cdot y^*_{io}}{n}; \quad a_2 = \frac{\sum_{i=1}^{L} \widetilde{f}_i \cdot \left(y^*_{io}\right)^2}{n}. \qquad (1.21)$$

ამ დამხმარე სიდიდეების მისაღებად ბოლო ცხრილში გვაქვს მეოთხე და მეხუთე სვეტები. მეოთხე სვეტის ელემენტების ჯამი წარმოადგენს a_1–ის მრიცხველს, ხოლო მეხუთე სვეტის ელემენტების ჯამი a_2–ის მრიცხველს.

გავითვალისწინოთ, რომ ჩვენ მაგალითში n=60. მაშინ

$$a_1 = \frac{45}{60} = 0{,}750, \quad a_2 = \frac{257}{60} = 4{,}283.$$

3. დამხმარე სიდიდეების გამოყენებით ვიპოვოთ სტატისტიკური მახასიათებლები

$$\bar{y} = h \cdot a_1 + y_a, \qquad (1.22)$$

$$S^2 = h^2\left(a_2 - a_1^2\right) \qquad (1.23)$$

ჩვენ მაგალითში გაზომვის შედეგი

$$\bar{y} = 3 \cdot 0{,}750 + 60{,}5 = 62{,}75,$$

ხოლო დაკვირვებათა შედეგების დისპერსია

$$S^2 = 3^2 \cdot \left(4{,}283 - 0{,}75^2\right) = 9 \cdot \left(4{,}283 - 0{,}562\right) = 9 \cdot 3{,}720 = 33{,}484.$$

1.8. განაწილების ნორმალურობის შესახებ ჰიპოთეზის შემოწმება დაკვირვებათა დიდი რაოდენობის შემთხვევაში

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს დაკვირვებათა დიდი რაოდენობა ($n \geq 50$), დაკვირვებათა შედეგების განაწილების ნორმალურობის შესახებ ჰიპოთეზას ამოწმებენ პირსონის ანუ χ^2 კრიტერიუმით შემდეგი ალგორითმის თანახმად:

1. ახდენენ დაკვირვებათა შედეგების დაჯგუფებას ინტერვალების მიხედვით (იხილეთ 1.6);

2. დაჯგუფებული მონაცემებით საზღვრავენ გაზომვის $\bar{y}$ შედეგს და დაკვირვებათა შედეგების S^2 დისპერსიას (ან S საშუალო კვადრატულ გადახრას) (იხილეთ 1.7);

3. თითოეული ინტერვალისათვის მოიძებნება შემდეგი საანგარიშო მნიშვნელობები:

$$z_i = \frac{y_{io} - \bar{y}}{S}, \qquad (1.24)$$

სადაც y_{io} i–ური ინტერვალის შუა წერტილია, $\bar{y}$-გაზომვის შედეგი, S - საშუალო კვადრატული გადახრა, რომლებიც მივიღეთ ამ ალგორითმის მეორე პუნქტში;

4. ყოველი ინტერვალისათვის შესაბამისი z_i–ის გამოყენებით გამოვთვალოთ ნორმირებული ნორმალური განაწილების ალბათობის სიმკვრივე $\varphi(z_i)$

$$\varphi(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_i^2}{2}}. \qquad (1.25)$$

ვინაიდან ამ ფორმულით გამოანგარიშება რთულია, ჩვეულებრივ $\varphi(z_i)$ მნიშვნელობას ირჩევენ შესაბამისი ცხრილიდან (იხ. მე–5 ცხრილი).

ცხრილი 5

ნორმირებული ნორმალური განაწილების ალბათობის სიმკვრივე

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$$

z	z-ის მეასედი ნაწილები									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0005	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

დავუშვათ, რომელიმე ინტერვალისათვის მიღებულია მნიშვნელობა z_i=0,13. მოვძებნოთ მე-5 ცხრილში $\varphi(z)$-ის შესაბამისი მნიშვნელობა. შესაბამისი რიცხვი მოიძებნება „0,1" სტრიქონისა და „3" სვეტის გადაკვეთაზე, ე.ი. $\varphi(z)$=0,3956.

თუ გამოანგარიშების შედეგად მივიღებთ z-ის უარყოფით მნიშვნელობას, მაგალითად z=-0,13, ნიშანს ყურადღებას არ მივაქცევთ და შესაბამისი $\varphi(z)$-ის მნიშვნელობა კვლავ $\varphi(z)$=0,3956 ტოლი აღმოჩნდება.

თუ გამოანგარიშების შედეგად რომელიმე ინტერვალისათვის მიღებული z მნიშვნელობა 3,99-ს გადააჭარბებს, მაშინ $\varphi(z)$-ის მნიშვნელობა ასეთი ინტერვალისათვის უნდა მივიჩნიოთ 0-ის ტოლად.

5. თითოეული ინტერვალისათვის უნდა მოვძებნოთ დაკვირვებათა თეორიული რაოდენობა f_i, ე.ი. ის რაოდენობა, რომელიც აღმოჩნდება განსახილველ ინტერვალში დაკვირვებათა შედეგები განაწილებული რომ ყოფილიყო ნორმალური კანონის მიხედვით

$$f_i = n\frac{h}{S}\varphi(z_i). \qquad (1.26)$$

6. თუ გვაქვს ისეთი ინტერვალები, რომლებშიც მოხვდა 5 ან 5-ზე ნაკლები დაკვირვების შედეგი, მაშინ ისინი უნდა გავაერთიანოთ მეზობელ ინტერვალებთან. ასეთი გაერთიანება გულისხმობს, რომ გაერთიანებული მეზობელი ინტერვალებისათვის უნდა ვიპოვოთ პრაქტიკულად მოხვედრილ $\tilde{f}_i$ დაკვირვებათა ჯამური რაოდენობა და შესაბამისად თეორიულად მოსალოდნელ f_i დაკვირვებათა ჯამური რაოდენობა. ასეთი გაერთიანების შედეგად, ბუნებრივია, ინტერვალების რაოდენობა შემცირდება და თუ დასაწყისში გვქონდა L ინტერვალი, გაერთიანების შემდეგ დაგვრჩება ინტერვალების ნაკლები რაოდენობა, რომელიც აღინიშნება L'-ით.

7. თითოეული ინტერვალისათვის (გაერთიანებული ინტერვალისათვის) გამოვთვალოთ χ^2 (ხი-კვადრატის) შესაბამისი საანგარიშო მნიშვნელობა

$$\chi_i^2 = \frac{\left(\tilde{f}_i - f_i\right)^2}{f_i}. \qquad (1.27)$$

8. მოვძებნოთ χ^2-ის ჯამური მნიშვნელობა ყველა ინტერვალისათვის

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{L'} \left[\frac{\left(\tilde{f}_i - f_i\right)^2}{f_i}\right]. \qquad (1.28)$$

χ^2-ის მიღებული ჯამური მნიშვნელობა შევადაროთ პირსონის (χ^2) კრიტერიუმის შესაბამის კრიტიკულ ქვედა $\chi^2_{\text{ქვ}}$ და ზედა $\chi^2_{\text{ზ}}$ მნიშვნელობებთან, რომლებიც უნდა ამოვირჩიოთ პირსონის (ანუ χ^2) ცხრილიდან $k=L'-3$ თავისუფლების ხარისხის მიხედვით (L' ინტერვალების დარჩენილი რაოდენობაა დაკვირვებათა მცირე რაოდენობის შემცველი ინტერვალების გაერთიანების შემდეგ). ქვედა კრიტიკული მნიშვნელობა შეირჩევა 95%-იანი სვეტიდან, ხოლო ზედა კრიტიკული მნიშვნელობა 5%-იანიდან.

პირსონის ცხრილი მოცემულია დანართში, ხოლო მისი ფრაგმენტი — მე-6 ცხრილში

ცხრილი 6

k	χ^2	
	95 %	5 %
1	0,00393	3,841
2	0,103	5,991
3	0,352	7,815
4	0,711	9,488
5	1,145	11,070
6	1,635	12,592
7	2,167	14,067
8	2,733	15,507
9	3,325	16,919
10	3,940	18,307
12	5,226	21,026

9. თუ χ^2-ის ჯამური მნიშვნელობა აღმოჩნდება ქვედა და ზედა კრიტიკულ მნიშვნელობებს შორის

$$\chi^2_{\text{ქვ}} < \chi^2 < \chi^2_{\text{ზ}}, \qquad (1.29)$$

მაშინ ჰიპოთეზა განსახილველ დაკვირვებათა შედეგების ნორმალური კანონის მიხედვით განაწილების შესახებ არ არის უარყოფილი.

მაგალითი. დავუშვათ, გვაქვს n=60 პარალელური დაკვირვების შედეგი:

53; 58; 61; 68; 65; 61; 64; 68; 73; 63;
50; 59; 63; 65; 68; 71; 51; 61; 63; 71;
61; 55; 57; 61; 63; 71; 72; 58; 62; 66;
57; 56; 60; 64; 62; 66; 69; 72; 52; 58;
62; 67; 70; 54; 57; 60; 59; 55; 62; 71;
70; 62; 54; 56; 60; 66; 59; 65; 60; 69.

შევამოწმოთ ჰიპოთეზა დაკვირვებათა ამ შედეგების განაწილების ნორმალურობის შესახებ.

ჩვენ უკვე მოვახდინეთ ამ დაკვირვებათა შედეგების დაჯგუფება L=8 ინტერვალის მიხედვით (იხ.1.6). დაჯგუფებული მონაცემების მიხედვით ვიპოვეთ გაზომვის შედეგი $\bar{y} = 62{,}75$ და დაკვირვებათა შედეგის დისპერსია S^2=33,484 (საშუალო კვადრატული გადახრა $S = \sqrt{33{,}484} \approx 5{,}79$) (იხ.1.7).

შემდგომი გამოთვლების შედეგები (ზემოთ მოყვანილი ალგორითმით) შეტანილია შემდეგ ცხრილში.

ინტერ-ვალის №	y_{io}	$\tilde{f}_i$	$y_{io} - \bar{y}$	$z_i = \frac{y_{io} - \bar{y}}{S}$	$\varphi(z_i)$	f_i	χ_i^2
1	51,1	3 } 8	-11,25	-1,94	0,0608	1,89 } 6,35	0,429
2	54,5	5	-8,25	-1,42	0,1435	4,46	
3	57,5	8	-5,25	-0,91	0,2637	8,20	0,005
4	60,5	12	-2,25	-0,39	0,3697	11,50	0,022
5	63,5	11	0,75	0,13	0,3956	12,31	0,139
6	66,5	8	3,75	0,65	0,3230	10,05	0,418
7	69,5	7	6,75	1,17	0,2012	6,26	0,087
8	72,5	6	9,75	1,68	0,0973	3,03	2,911
ჯამი		60				57,7	4,011

ამ ცხრილის მეორე და მესამე სვეტებში გადატანილია ინფორმაცია ინტერვალების შუა წერტილების შესახებ (იხ. წინა პარაგრაფის მაგალითის ცხრილი) და ამ ინტერვალებში მოხვედრილ დაკვირვებათა შედეგების რაოდენობის შესახებ. მეოთხე სვეტში მოცემულია ინტერვალების შუა წერტილებისა და გაზომვის შედეგის $y_{io} - \bar{y}$ სხვაობები (მაგალითად, პირველი ინტერვალისათვის მივიღებთ $y_{1o} - \bar{y} = 51{,}50 - 62{,}75 = -11{,}25$). მეხუთე სვეტში მოცემულია $z_i = \left(y_{io} - \bar{y}\right)/S$

სიდიდეები (მაგალითად, პირველი ინტერვალისათვის გვექნება $z_1 = (y_{10} - \bar{y})/S = (-11,25)/5,79 = -1,94$). მეექვსე სვეტში მოცემულია მე–5 ცხრილიდან ამოკრეფილი $\varphi(z_i)$ მნიშვნელობები. მეშვიდე სვეტში მოცემულია (1.26) ფორმულით გამოთვლილ დაკვირვებათა თეორიული რაოდენობები (მაგალითად, პირველი ინტერვალისათვის $f_1 = 60(3/5,79) \cdot 0,0608 = 1,89$). დაკვირვებათა მცირე რაოდენობის შემცველი ($\tilde{f}_1 = 3,\ \tilde{f}_2 = 5$) ინტერვალების გაერთიანების შედეგად დაგვრჩა $L'=7$ ინტერვალი. თითოეული ინტერვალისათვის (გაერთიანებული ინტერვალისათვის) χ^2–ის მნიშვნელობები გამოვთვალოთ (1.27) ფორმულით (მაგალითად, გაერთიანებული პირველი და მეორე ინტერვალებისათვის $\chi^2_I = (8-6,35)^2/6,35 = 0,429$; შემდეგი ინტერვალისათვის $\chi^2_{II} = (8-8,20)^2/8,20 = 0,005$). χ^2–ის მიღებული მნიშვნელობები მოთავსებულია ამ მაგალითის ცხრილის მერვე სვეტში. ამ სვეტის ელემენტების ჯამი 4,011 არის χ^2–ის ჯამური მნიშვნელობა.

მე–6 ცხრილიდან $k=L'-3=7-3=4$ თავისუფლების ხარისხისათვის $\chi^2_{ქვ}=0,711$ და $\chi^2_{ზ}=9,488$. ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა 4,011 მოთავსდა ქვედა და ზედა კრიტიკულ მნიშვნელობებს შორის, $0,711<4,011<9,488$, ამიტომ ჰიპოთეზა დაკვირვებათა შედეგების ნორმალური განაწილების შესახებ არაა უარყოფილი.

1.9. სანდო ინტერვალი გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისათვის

ექსპერიმენტის შეცდომების გამო დაკვირვებათა ჯგუფის შედეგები გაბნეულია. იმავე მიზეზებით გარკვეულ ფარგლებში გაბნეული აღმოჩნდება გაზომვის შედეგიც. სანდო ინტერვალი გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისათვის გვაძლევს იმ საზღვრებს, რომლებშიც გარკვეული სანდო ალბათობით (ჩვეულებრივ, $\alpha=0,95$) მოთავსდება დაკვირვებათა ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულები.

სანდო ინტერვალს გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისათვის აქვს შემდეგი სახე:

$$\left[\bar{y} - t_q \cdot S_{\bar{y}};\ \bar{y} + t_q \cdot S_{\bar{y}}\right] \qquad (1.30)$$

ამ გამოსახულებაში $\bar{y}$ გაზომვის შედეგია, $S_{\bar{y}}$–გაზომვის შედეგის საშუალო კვადრატული გადახრა, რომელიც გამოითვლება (1.8) ფორმულით, t_q–სტიუდენტის კრიტერიუმის შესაბამისი ცხრილური მნიშვნელობა, რომელსაც ვირჩევთ სტიუდენტის (ანუ t–კრიტერიუმის) ცხრილიდან $k=n-1$ თავისუფლების ხარისხის მიხედვით (n პარალელურ დაკვირვებათა რაოდენობაა). t–კრიტერიუმის შესაბამისი ცხრილი მოცემულია დანართში, ხოლო მისი ფრაგმენტი მე–7 ცხრილში.

ცხრილი 7

$k=n-1$	1	2	3	4	5	6
t_q	12,706	4,303	3,182	2,776	2,571	2,447

გაგრძელება

$k=n-1$	7	8	9	10	12
t_q	2,365	2,306	2,268	2,228	2,179

მაგალითი. დავუშვათ, ჩატარებულია $n=5$ პარალელური ცდა და მიღებულია დაკვირვებათა შედეგები: 10; 11; 12; 13; 14. მოვძებნოთ სანდო ინტერვალი გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისათვის.

გაზომვის შედეგი

$$\bar{y} = \frac{10+11+12+13+14}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

და გაზომვის შედეგის საშუალო კვადრატული გადახრა

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{5(5-1)}\left[(10-12)^2 + (11-12)^2 + (12-12)^2 + (13-12)^2 + (14-12)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{20}(4+1+0+1+4)} = \sqrt{\frac{1}{20}\cdot 10} = \sqrt{0,5} \approx 0,71.$$

ვინაიდან ჩვენ მაგალითში თავისუფლების ხარისხია $k=n-1=5-1=4$, მე–7 ცხრილიდან ოთხი თავისუფლების ხარისხისათვის შევარჩევთ $t_q=2,776$.

სანდო ინტერვალის ქვედა საზღვრისათვის

$$\bar{y} - t_q \cdot S_{\bar{y}} = 12 - 2,776 \cdot 0,71 = 12 - 1,96 = 10,04,$$

ზედა საზღვრისათვის

$$\bar{y} + t_q \cdot S_{\bar{y}} = 12 + 2,776 \cdot 0,71 = 12 + 1,96 = 13,96.$$

მაშასადამე, სანდო ინტერვალს გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისათვის აქვს შემდეგი სახე: [10,04; 13,96]. ეს ნიშნავს, რომ გაზომვის შედეგი დაკვირვებათა სერიის განმეორებისას α=0,95 სანდო ალბათობით (95% შემთხვევაში) მოთავსდება ჩვენ მიერ მიღებულ ინტერვალში.

1.10. სანდო ინტერვალი საშუალო კვადრატული გადახრისათვის

ექსპერიმენტის შეცდომების გამო გარკვეულ ფარგლებში გაბნეულია დაკვირვებათა ჯგუფების საშუალო კვადრატული გადახრებიც. საშუალო კვადრატული გადახრისათვის სანდო ინტერვალის ქვედა l_1 და ზედა l_2 საზღვრები

$$l_1 = \frac{\sqrt{n-1} \cdot S}{\chi_{*}}, \qquad l_2 = \frac{\sqrt{n-1} \cdot S}{\chi_{**}}, \tag{1.31}$$

სადაც n პარალელურ დაკვირვებათა რაოდენობაა, S - დაკვირვებათა შედეგების საშუალო კვადრატული გადახრა, ხოლო χ_{*} და χ_{**} — პირსონის ცხრილური მნიშვნელობებიდან ამოღებული კვადრატული ფესვის მნიშვნელობები, ე.ი. $\chi_{*} = \sqrt{\chi_{*}^2}$, $\chi_{**} = \sqrt{\chi_{**}^2}$. χ_{*}^2 და χ_{**}^2 უნდა შევარჩიოთ პირსონის ანუ χ^2 ცხრილიდან (იხ. მე-6 ცხრილი) k=n-1 თავისუფლების ხარისხისათვის. χ_{*}^2-ს ვპოულობთ 5%-იანი სვეტიდან, ხოლო χ_{**}^2-ს 95%-იანიდან.

მაგალითი. დავუშვათ, ჩატარებულია n=5 პარალელური ცდა და მიღებულია დაკვირვებათა შედეგები: 10; 11; 12; 13; 14. მოვძებნოთ სანდო ინტერვალი საშუალო კვადრატული გადახრისათვის.

გაზომვის შედეგი

$$\bar{y} = \frac{10 + 11 + 12 + 13 + 14}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

და დაკვირვებათა შედეგების საშუალო კვადრატული გადახრა

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{5-1}\left[(10-12)^2 + (11-12)^2 + (12-12)^2 + (13-12)^2 + (14-12)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(4+1+0+1+4)} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 10} = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58.$$

ვინაიდან გვაქვს n=5 პარალელური დაკვირვების შედეგი, ამიტომ თავისუფლების k=n-1=5-1=4 ხარისხისათვის მე-6 ცხრილის 5%-იანი სვეტიდან მივიღებთ $\chi_{*}^2 = 9{,}488$, ხოლო 95%-იანი სვეტიდან - $\chi_{**}^2 = 0{,}711$ მაშინ $\chi_{*} = \sqrt{9{,}488} = 3{,}08$, $\chi_{**} = \sqrt{0{,}711} = 0{,}84$.

საშუალო კვადრატული გადახრისათვის სანდო ინტერვალის ქვედა საზღვრისათვის მივიღებთ

$$l_1 = \frac{\sqrt{5-1} \cdot 1{,}58}{3{,}08} = \frac{\sqrt{4} \cdot 1{,}58}{3{,}08} = \frac{2 \cdot 1{,}58}{3{,}08} = \frac{3{,}16}{3{,}08} = 1{,}02,$$

ზედა საზღვრისათვის

$$l_2 = \frac{\sqrt{5-1} \cdot 1{,}58}{0{,}84} = \frac{3{,}16}{0{,}84} = 3{,}76.$$

ამრიგად, ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში სანდო ინტერვალს გასაზომი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრისათვის ექნება შემდეგი სახე: [1,02; 3,76]. ეს ნიშნავს, რომ პარალელურ დაკვირვებათა ჯგუფის (სერიის) გამეორებისას მიღებულ დაკვირვებათა შედეგებით გამოთვლილი საშუალო კვადრატული გადახრები α=0,95 სანდო ალბათობით მოთავსდება ჩვენ მიერ მიღებულ ინტერვალში.

1.11. ტოლერანტული ინტერვალი

ხშირად ექსპერიმენტატორს სჭირდება დაკვირვებათა მცირე რაოდენობის შედეგების საფუძველზე გააკეთოს დასკვნა მომავალ დაკვირვებათა შედეგების შესახებ, კერძოდ, განსაზღვროს ისეთი ინტერვალი (ისეთი ფარგლები), რომლებშიც გარკვეული სანდო ალბათობით (ჩვეულებრივ α=0,95) მოთავსდება მომავალ დაკვირვებათა გარკვეული P_0 ნაწილი (ჩვეულებრივ P_0=0,9; P_0=0,95 ან P_0=0,9973). ასეთ ინტერვალს *ტოლერანტული* ეწოდება.

ტოლერანტული ინტერვალის ქვედა საზღვარი

$$l_1 = \bar{y} - K \cdot S,$$

ზედა საზღვარი

$$l_2 = \bar{y} + K \cdot S,$$

სადაც $\bar{y}$ გაზომვის შედეგია, S–დაკვირვებათა შედეგების საშუალო კვადრატული გადახრა, K - ტოლერანტული მამრავლი, რომლის მნიშვნელობები მოცემულია მე–8 ცხრილში.

ცხრილი 8

ტოლერანტული მამრავლის მნიშვნელობები

$k=n$-1	K		
	0,9973	0,95	0,9
4	8,26	5,11	4,29
5	7,17	4,44	3,72
6	6,50	4,02	3,38
7	6,05	3,74	3,14
8	5,72	3,54	2,97
9	5,48	3,39	2,84
10	5,28	3,26	2,74
12	4,99	3,08	2,59
14	4,78	2,96	2,49
16	4,62	2,86	2,40

მაგალითი. დავუშვათ, ჩატარებულია n=12 პარალელური ცდა და მიღებულია დაკვირვებათა შედეგები: 48; 50; 51; 49; 52; 49; 51; 50; 50; 51; 49; 50. მოვძებნოთ ინტერვალი, რომელშიც α=0,95 სანდო ალბათობით მოთავსდება მომავალ დაკვირვებათა P_0=0,9973 ნაწილი (ანუ 99,73%).

გაზომვის შედეგი

$$\bar{y} = \frac{1}{12}\left(48+50+51+49+52+49+51+50+50+51+49+50\right) = \frac{600}{12} = 50.$$

დაკვირვებათა შედეგების საშუალო კვადრატული გადახრა

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{12-1}\left[(48-50)^2+(50-50)^2+(51-50)^2+(49-50)^2+(52-50)^2+\right.}$$

$$\overline{\left.+(49-50)^2+(51-50)^2+(50-50)^2+(50-50)^2+(49-50)^2+(50-50)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{11}\left(4+0+1+1+4+1+1+0+0+1+1+0\right)} = \sqrt{\frac{1}{11}\cdot 14} = \sqrt{1{,}273} \approx 1{,}13.$$

n=12 პარალელური დაკვირვების შედეგის შემთხვევაში თავისუფლების ხარისხისათვის გვექნება $k=n$-1=12-1=11. 11 თავისუფლების ხარისხისათვის P_0=0,9973 სვეტიდან უნდა შევარჩიოთ ტოლერანტული მამრავლის შესაბამისი მნიშვნელობა. ვინაიდან მე–8 ცხრილში k=11 თავისუფლების ხარისხისათვის საათანადო მონაცემები არა გვაქვს, მოვიქცეთ შემდეგნაირად: P_0=0,9973 სვეტის k=10 და k=12 თავისუფლების ხარისხის შესაბამისი ტოლერანტული მამრავლების K=5,28 და K=4,99 მნიშვნელობების მიხედვით გამოვიანგარიშოთ საძიებელი მნიშვნელობა k=11 –ისათვის

$$K=(5{,}28+4{,}99)/2=5{,}135.$$

მაშინ ტოლერანტული მამრავლის ქვედა საზღვრისათვის

$$l_1=0{,}50-5{,}135\cdot 1{,}13=50-5{,}80=44{,}20;$$

ზედა საზღვრისათვის

$$l_2=0{,}50+5{,}135\cdot 1{,}13=50+5{,}80=55{,}80.$$

ამრიგად, ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში ტოლერანტულ ინტერვალს აქვს შემდეგი სახე: [44,20; 55,80]. ეს ნიშნავს, რომ მომავალ დაკვირვებათა P_0=0,9973 ნაწილი ანუ 99,73% α=0,95 სანდო ალბათობით მოთავსდება [44,20; 55,80] ინტერვალში. მაგალითად, რომ ჩავატაროთ მომავალში ათი ათასი ცდა, 9973–ის დაკვირვების შედეგი უნდა მოთავსდეს ჩვენ მიერ მიღებულ ტოლერანტულ ინტერვალში.

2. დაკვირვებათა რამდენიმე ჯგუფის შედეგების დამუშავება

ხშირია შემთხვევები, როდესაც ერთ და იმავე პროცესს სწავლობენ სხვადასხვა მკვლევარები, სხვადასხვა ლაბორატორიებში, სხვადასხვა ქალაქებში, ქვეყნებში, გაზომვის სხვადასხვა მეთოდისა და აპარატურის გამოყენებით. შესაბამისად იღებენ დაკვირვებათა რამდენიმე ჯგუფს (სერიას). ცხადია, რომ დაკვირვებათა ამ ჯგუფების შედეგების გაერთიანება უფრო სწორ წარმოდგენას იძლევა შესასწავლ პროცესზე.

რამდენიმე ჯგუფის დაკვირვებათა შედეგების გაერთიანებისათვის ჯერ უნდა შემოწმდეს ამ ჯგუფების დაკვირვებათა შედეგების დისპერსიების ერთგვაროვნობა, შემდეგ მათი საშუალო არითმეტიკულების განსხვავების არსებითობა და მხოლოდ ამის შემდეგ, მიღებული შედეგების გათვალისწინებით, შეიძლება დაკვირვებათა შედეგების გაერთიანება.

2.1. დაკვირვებათა ჯგუფების დისპერსიების ერთგვაროვნობის შემოწმება

დაკვირვებათა ჯგუფების დისპერსიების ერთგვაროვნობის შემოწმებას აწარმოებენ სხვადასხვა ალგორითმის მიხედვით: ორი ჯგუფის შემთხვევაში გამოიყენება ფიშერის კრიტერიუმი, რამდენიმე ჯგუფის შემთხვევაში ჯგუფებში პარალელურ დაკვირვებათა თანაბარი რაოდენობისას – კოკრენის კრიტერიუმი, რამდენიმე ჯგუფის შემთხვევაში ჯგუფებში პარალელურ დაკვირვებათა არათანაბარი რაოდენობისას – ბარტლეტის კრიტერიუმი.

2.1.1. ფიშერის კრიტერიუმის გამოყენება ორი ჯგუფის დისპერსიების ერთგვაროვნობის შესამოწმებლად

დავუშვათ, გვაქვს დაკვირვებათა ორი ჯგუფი

I. $y_{11},\ y_{12}, \dots, y_{1n_1}$,

II. $y_{21},\ y_{22}, \dots, y_{2n_2}$.

პირველი ჯგუფი შეიცავს n_1 პარალელური დაკვირვების შედეგს, მეორე – n_2 პარალელური დაკვირვების შედეგს.

ფიშერის კრიტერიუმის თანახმად განსახილველი ორი ჯგუფის დისპერსიების ერთგვაროვნობის შესამოწმებლად ჯერ უნდა განისაზღვროს ამ ჯგუფების დისპერსიების S_1^2 და S_2^2 შეფასებები

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(y_{1i} - \bar{y}_1\right)^2, \qquad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(y_{2i} - \bar{y}_2\right)^2,$$

სადაც

$$\bar{y}_1 = \frac{y_{11} + y_{12} + \dots + y_{1n_1}}{n_1} \quad \text{და} \quad \bar{y}_2 = \frac{y_{21} + y_{22} + \dots + y_{2n_2}}{n_2}$$

შესაბამისად პირველი და მეორე ჯგუფების დაკვირვებათა შედეგების საშუალო არითმეტიკულებია.

შემდეგ მოიძებნება ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}. \tag{2.1}$$

მიღებულ საანგარიშო მნიშვნელობას ადარებენ შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობებს. ზედა კრიტიკული მნიშვნელობა $F_ზ$ მოიძებნება ფიშერის ცხრილიდან (ცხრილი 9), მრიცხველში მდგომი S_1^2 დისპერსიის თავისუფლების ხარისხის ($k_1=n_1-1$) შესაბამისი სვეტისა და მნიშვნელში მდგომი S_2^2 დისპერსიის თავისუფლების ხარისხის ($k_2=n_2-1$) შესაბამისი სტრიქონის გადაკვეთაზე.

ცხრილი 9

ფიშერის ცხრილის ფრაგმენტი

k_2	k_1							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	237	239
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,4	19,4
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,10	8,94	8,89	8,85
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44

ქვედა კრიტიკული მნიშვნელობა კი

$$F_{ქვ} = 1/F_ზ.$$

თუ საანგარიშო მნიშვნელობა $F = S_1^2 / S_2^2$ მოთავსდა ქვედა და ზედა კრიტიკულ მნიშვნელობებს შორის

$$F_{\text{ქვ}} \le F \le F_{\text{ზ}}, \tag{2.2}$$

მაშინ ვთვლით, რომ დაკვირვებათა განსახილველი ორი ჯგუფის დისპერსიები არსებითად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან ანუ ისინი ერთგვაროვანია.

მაგალითი. მოცემულია დაკვირვებათა ორი ჯგუფის შედეგები:

I. 10; 11; 12; 13; 14;

II. 11; 13; 15.

შევამოწმოთ ამ ჯგუფების დისპერსიების ერთგვაროვნობა.

ჯერ განვსაზღვროთ განსახილველი ორი ჯგუფის გაზომვის შედეგები

$$\bar{y}_1 = \frac{10+11+12+13+14}{5} = \frac{60}{5} = 12,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{11+13+15}{3} = \frac{39}{3} = 13$$

და დისპერსიები

$$S_1^2 = \frac{1}{5-1}\left[(10-12)^2 + (11-12)^2 + (12-12)^2 + (13-12)^2 + (14-12)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[4+1+0+1+4\right] = \frac{1}{4}\cdot 10 = 2{,}5,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{3-1}\left[(11-13)^2 + (13-13)^2 + (15-13)^2\right] = \frac{1}{2}\left[4+0+4\right] = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4{,}0.$$

ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$F = S_1^2 / S_2^2 = 2{,}5/4{,}0 = 0{,}625.$$

ვინაიდან მრიცხველში S_1^2 დისპერსიის თავისუფლების ხარისხია $k_1 = n_1 - 1 = 5 - 1 = 4$, ხოლო მნიშვნელში S_2^2 დისპერსიის თავისუფლების ხარისხი $k_2 = n_2 - 1 = 3 - 1 = 2$, ამიტომ ფიშერის ცხრილის მეოთხე სვეტისა და მეორე სტრიქონის გადაკვეთაზე გვექნება კრიტიკული მნიშვნელობა $F_{\text{ზ}} = 19{,}25$. მაშინ

$$F_{\text{ქვ}} = 1/F_{\text{ზ}} = 1/19{,}25 \approx 0{,}052.$$

რადგან საანგარიშო მნიშვნელობა $F = 0{,}625$ მოთავსდა ქვედა და ზედა კრიტიკულ მნიშვნელობებს შორის

$$0{,}052 < 0{,}625 < 19{,}25,$$

ამიტომ ვთვლით, რომ განსახილველი ორი ჯგუფის დისპერსიები არსებითად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან ანუ ისინი ერთგვაროვანია.

2.1.2. კოკრენის კრიტერიუმის გამოყენება დაკვირვებათა რამდენიმე ჯგუფის დისპერსიების ერთგვაროვნობის შესამოწმებლად

დავუშვათ, გვაქვს დაკვირვებათა რამდენიმე, მაგალითად, L ჯგუფი და თითოეულ ჯგუფში დაკვირვებათა თანაბარი რაოდენობაა (n პარალელური დაკვირვების შედეგი):

I. $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$,

II. $y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}$,

....

L. $y_{L1}, y_{L2}, \ldots, y_{Ln}$.

კოკრენის კრიტერიუმის თანახმად ჯგუფების დისპერსიების ერთგვაროვნობის შესამოწმებლად ჯერ უნდა განისაზღვროს თითოეული ჯგუფის დაკვირვებათა შედეგების დისპერსიები $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_L^2$. შემდეგ მიღებულ დისპერსიებს შორის ყველაზე დიდის გაყოფით ყველა დისპერსიის ჯამზე ვღებულობთ შესაბამის საანგარიშო მნიშვნელობას:

$$G = \frac{S_{max}^2}{\sum_{i=1}^{L} S_i^2}. \tag{2.3}$$

მიღებული საანგარიშო მნიშვნელობა უნდა შევადაროთ კოკრენის კრიტერიუმის ცხრილურ მნიშვნელობას $G_{\text{ცხ}}$. თუ აღმოჩნდება, რომ საანგარიშო მნიშვნელობა არ აღემატება ცხრილურს $G \le G_{\text{ცხ}}$, მაშინ ვთვლით, რომ განსახილველი ჯგუფების დისპერსიები არსებითად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან ანუ ერთგვაროვანია.

ცხრილი 10

კოკრენის ცხრილის ფრაგმენტი

L \ n-1	1	2	3	4	5	6
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184

მაგალითი. დავუშვათ, გვაქვს დაკვირვებათა 3 ჯგუფი:

I. 10; 11; 14; 12; 13;

II. 9; 10; 11; 12; 13;

III. 8; 10; 12; 14; 16.

უნდა შევამოწმოთ ერგვაროვანია თუ არა ამ განსახილველი სამი ჯგუფის დისპერსიები.

ალგორითმის თანახმად გამოვთვალოთ განსახილველი ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულები და დისპერსიები:

$$\bar{y}_1 = \frac{10+11+14+12+13}{5} = \frac{60}{5} = 12,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{9+10+11+12+13}{5} = \frac{55}{5} = 11,$$

$$\bar{y}_3 = \frac{8+10+12+14+16}{5} = \frac{60}{5} = 12;$$

$$S_1^2 = \frac{1}{5-1}\left[(10-12)^2 + (11-12)^2 + (14-12)^2 + (12-12)^2 + (13-12)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[4+1+4+0+1\right] = \frac{1}{4}\cdot 10 = 2{,}5,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{5-1}\left[(9-11)^2 + (10-11)^2 + (11-11)^2 + (12-11)^2 + (13-11)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[4+1+0+1+4\right] = \frac{1}{4}\cdot 10 = 2{,}5,$$

$$S_3^2 = \frac{1}{5-1}\left[(8-12)^2 + (10-12)^2 + (12-12)^2 + (14-12)^2 + (16-12)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[16+4+0+4+16\right] = \frac{1}{4}\cdot 40 = 10.$$

ალგორითმის თანახმად G კრიტერიუმის შესაბამისი მნიშვნელობა

$$G = \frac{10}{2{,}5+2{,}5+10} = 0{,}6666.$$

ვინაიდან გვაქვს L=3 ჯგუფი და ჯგუფებში ხუთ-ხუთი პარალელური ცდაა, ამიტომ ცხრილური მნიშვნელობა მოიძებნება n-1= =5-1=4 სვეტისა და L=3-ის შესაბამისი სტრიქონის გადაკვეთაზე: $G_{ცხ}$= =0,7457.

ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა 0,6666 ნაკლებია ცხრილურ მნიშვნელობაზე (0,6666<0,7457), ამიტომ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ განსახილველი ჯგუფების დისპერსიები არსებითად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან, ე.ი. დისპერსიები ერთგვაროვანია.

2.1.3. ბარტლეტის კრიტერიუმი

იმ შემთხვევაში, როდესაც გაგვაჩნია დაკვირვებათა რამდენიმე ჯგუფი და ამ ჯგუფებში პარალელურ დაკვირვებათა სხვადასხვა რაოდენობაა, მაშინ იყენებენ ბარტლეტის კრიტერიუმს.

დავუშვათ, გვაქვს დაკვირვებათა L ჯგუფი:

I. $y_{11},\ y_{12}, \dots, y_{1n_1}$,

II. $y_{21},\ y_{22}, \dots, y_{2n_2}$,

. . . .

L. $y_{L1},\ y_{L2}, \dots, y_{Ln_L}$.

ბარტლეტის კრიტერიუმის თანხმად, ჯერ მოიძებნება თითოეული ჯგუფის შესაბამისი დისპერსია $S_1^2, S_2^2, \dots, S_L^2$. შემდეგ გამოითვლება გასაშუალოებული $\bar{S}^2$ დისპერსია

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{N-L}\sum_{i=1}^{L} S_i^2(n_i-1). \qquad (2.4)$$

ამ გამოსახულებაში L ჯგუფების რაოდენობაა, n_i – i-ურ ჯგუფში დაკვირვებათა შედეგების რაოდენობა, S_i^2 – დაკვირვებათა i-ური ჯგუფის დისპერსია, ხოლო N – დაკვირვებათა საერთო რაოდენობა ყველა ჯგუფში $N=n_1+n_2+\dots+n_L$.

შემდეგ მოიძებნება C კოეფიციენტი

$$C = 1 + \frac{1}{3(L-1)}\left(\sum_{i=1}^{L}\frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{N-L}\right). \qquad (2.5)$$

თუ ჯგუფებში გვაქვს პარალელურ დაკვირვებათა დიდი რაოდენობა (n≥30), C კოეფიციენტი შეგვიძლია არ გამოვთვალოთ და ჩავთვალოთ ერთის ტოლად.

ბოლოს გამოითვლება χ^2-ის შესაბამისი საანგარიშო მნიშვნელობა

$$\chi^2 = \frac{2{,}303}{C}\left[(N-L)\lg\bar{S}^2 - \sum_{i=1}^{L}(n_i-1)\lg S_i^2\right]. \qquad (2.6)$$

მიღებული საანგარიშო მნიშვნელობა უნდა შევადაროთ ცხრილურ მნიშვნელობას $\chi^2_{ცხ}$, რომელიც უნდა შევარჩიოთ

პირსონის ანუ χ^2 ცხრილიდან $k=L$-1 თავისუფლების ხარისხისათვის 5%-იანი სვეტიდან. თუ საანგარიშო მნიშვნელობა არ აღემატება ცხრილურს $\chi^2 \le \chi^2_{ცხ}$ ვთვლით, რომ განსახილველი ჯგუფების დისპერსიები არსებითად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან.

მაგალითი. დავუშვათ, გვაქვს დაკვირვებათა L=3 ჯგუფი:

I. 9,9; 10,1; 10,2; 10,4; 10,5; 10,7;

II. 11,0; 11,2; 10,5; 11,6; 10,7;

III. 12,0; 12,4; 12,6; 12,3.

შევამოწმოთ ამ ჯგუფების დისპერსიების ერთგვაროვნობა.

ვინაიდან ჯგუფებში პარალელურ დაკვირვებათა არათანაბარი რაოდენობაა, ამიტომ შემოწმებისათვის გამოვიყენოთ ბარტლეტის კრიტერიუმი. ამისათვის გამოვთვალოთ ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულები

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{6}\left(9{,}9 + 10{,}1 + 10{,}2 + 10{,}4 + 10{,}5 + 10{,}7\right) = 10{,}3\,,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{5}\left(11{,}0 + 11{,}2 + 10{,}5 + 11{,}6 + 10{,}7\right) = 11{,}0\,,$$

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{4}\left(12{,}0 + 12{,}4 + 12{,}6 + 12{,}3\right) = 12{,}32$$

და დაკვირვებათა შედეგების დისპერსიების შეფასებები

$$S_1^2 = \frac{1}{6-1}\Big[(9{,}9-10{,}3)^2 + (10{,}1-10{,}3)^2 + (10{,}2-10{,}3)^2 + (10{,}4-10{,}3)^2 + (10{,}5-10{,}3)^2 + (10{,}7-10{,}3)^2\Big] = 0{,}084,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{5-1}\Big[(11{,}0-11{,}0)^2 + (11{,}2-11{,}0)^2 + (10{,}5-11{,}0)^2 + (11{,}6-11{,}0)^2 + (10{,}7-11{,}0)^2\Big] = 0{,}185,$$

$$S_3^2 = \frac{1}{4-1}\Big[(12{,}0-12{,}32)^2 + (12{,}4-12{,}32)^2 + (12{,}6-12{,}32)^2 + (12{,}3-12{,}32)^2\Big] = 0{,}062$$

ვინაიდან N=6+5+4=15 დაკვირვებათა საერთო რაოდენობაა, გასაშუალოებული დისპერსიისათვის მივიღებთ

$$\bar{S}_2 = \frac{1}{15-3} = \left[0{,}084(6-1) + 0{,}185(5-1) + 0{,}062(4-1)\right] = 0{,}112,$$

ხოლო C კოეფიციენტისათვის

$$C = 1 + \frac{1}{3(3-1)}\left[\frac{1}{6-1} + \frac{1}{5-1} + \frac{1}{4-1} - \frac{1}{15-3}\right] = 1{,}117.$$

χ^2–ის საანგარიშო მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$\chi^2 = \frac{2{,}303}{1{,}117}\left[(15-3)lg\,0{,}112 - (6-1)lg\,0{,}084 - (5-1)lg\,0{,}185 - (4-1)lg\,0{,}062\right] = 1{,}078$$

პირსონის ცხრილიდან $k=L$-1=3-1=2 თავისუფლების ხარისხისათვის 5%–იანი სვეტიდან მივიღებთ $\chi^2_{ცხ}$=5,991, ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა ნაკლებია ცხრილურ მნიშვნელობაზე (χ^2=1,078<$\chi^2_{ცხ}$= =5,991), ამიტომ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ განსახილველი ჯგუფების დისპერსიები ერთგვაროვანია.

2.2. დაკვირვებათა რამდენიმე ჯგუფის საშუალო არითმეტიკულების განსხვავების არსებითობის შემოწმება

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს დაკვირვებათა რამდენიმე ჯგუფი და გვინდა შევამოწმოთ ამ ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულების განსხვავების არსებითობა, გამოიყენება სხვადასხვა ალგორითმები: სტიუდენტის მეთოდი დაკვირვებათა ორი ჯგუფის შემთხვევაში და ფიშერის მეთოდი დაკვირვებათა რამდენიმე ჯგუფის შემთხვევაში.

2.2.1. დაკვირვებათა ორი ჯგუფის საშუალო არითმეტიკულების განსხვავების არსებითობის შემოწმება

დავუშვათ, გვაქვს დაკვირვებათა ორი ჯგუფი:

I. $y_{11},\ y_{12}, \ldots, y_{1n_1}$,

II. $y_{21},\ y_{22}, \ldots, y_{2n_2}$.

იმისათვის, რომ შევამოწმოთ ამ ორი ჯგუფის საშუალო არითმეტიკულების განსხვავების არსებითობა, ჯერ უნდა გამოვთვალოთ ამ ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულები $\bar{y}_1$ და $\bar{y}_2$ და შესაბამისი დისპერსიები S_1^2 და S_2^2, შემდეგ საანგარიშო მნიშვნელობა

$$t = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sqrt{n_1 S_1^2 - n_2 S_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}\,. \tag{2.7}$$

მიღებული საანგარიშო მნიშვნელობა უნდა შევადაროთ შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობას, რომელსაც ვირჩევთ სტიუდენტის ცხრილიდან. თუ საანგარიშო მნიშვნელობა არ აღე-

მატება ცხრილურს, ე.ი. $t \le t_q$, მაშინ ვთვლით, რომ განსახილველი ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულები არსებითად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან. ცხრილური მნიშვნელობა უნდა ვიპოვოთ სტიუდენტის ცხრილიდან $k=n_1+$ $+n_2-2$ თავისუფლების ხარისხისათვის.

მაგალითი. დავუშვათ, გვაქვს დაკვირვებათა ორი ჯგუფი:

I. 8; 9; 10; 11; 12, $n_1=5$,

II. 9; 11; 13, $n_2=3$.

შევამოწმოთ არსებითად განსხვავდება თუ არა ამ ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულები.

ამისათვის ჯერ განვსაზღვროთ I და II ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულები

$$\bar{y}_1 = \frac{8+9+10+11+12}{5} = \frac{50}{5} = 10, \quad \bar{y}_2 = \frac{9+11+13}{3} = \frac{33}{3} = 11$$

და დისპერსიები

$$S_1^2 = \frac{1}{5-1}\left[(8-10)^2 + (9-10)^2 + (10-10)^2 + (11-10)^2 + (12-10)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[4+1+0+1+4\right] = \frac{1}{4}\cdot 10 = 2{,}5,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{3-1}\left[(9-11)^2 + (11-11)^2 + (13-11)^2\right] = \frac{1}{2}\left[4+0+4\right] = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4{,}0.$$

საანგარიშო მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$t = \frac{|10-11|}{\sqrt{|5\cdot 2{,}5 - 3\cdot 4{,}0|}}\cdot\sqrt{\frac{5\cdot 3\cdot(5+3-2)}{5+3}} = 4{,}74.$$

ჩვენს მაგალითში თავისუფლების ხარისხია $k=n_1+n_2-2=5+3-2=6$. ექვსი თავისუფლების ხარისხისათვის სტიუდენტის ცხრილიდან მივიღებთ შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობას $t_q=2{,}447$.

ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა 4,74 აღემატება ცხრილურ მნიშვნელობას ($t_q=2{,}447$), ამიტომ საშუალო არითმეტიკულების განსხვავება არსებითია.

2.2.2. დაკვირვებათა რამდენიმე ჯგუფის საშუალო არითმეტიკულების განსხვავების არსებითობის შემოწმება

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს დაკვირვებათა ორ ჯგუფზე მეტი საშუალო არითმეტიკულების განსხვავების არსებითობის შესამოწმებლად გამოიყენება ფიშერის კრიტერიუმი.

დავუშვათ, გვაქვს დაკვირვებათა L ჯგუფი:

I. $y_{11},\ y_{12}, \ldots,\ y_{1n_1}$,

II. $y_{21},\ y_{22}, \ldots,\ y_{2n_2}$,

....

L. $y_{L1},\ y_{L2}, \ldots,\ y_{Ln_L}$.

ფიშერის მეთოდის თანახმად ჯერ უნდა გამოვთვალოთ თითოეული ჯგუფის საშუალო არითმეტიკულები: $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_L$, შემდეგ ერთობლივი საშუალო

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{L} n_i \bar{y}_i, \tag{2.8}$$

სადაც N დაკვირვებათა საერთო რაოდენობაა ყველა ჯგუფში $N=n_1+n_2+\cdots+n_L$.

შემდეგ გამოითვლება $S^2_{\Sigma L}$ ჯგუფთაშორისი დისპერსია

$$S^2_{\Sigma L} = \frac{1}{L-1}\sum_{i=1}^{L} n_i\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2 \tag{2.9}$$

და $\bar{S}^2_{nL}$ ჯგუფების შიგნით დისპერსიების გასაშუალოებული მნიშვნელობა

$$\bar{S}^2_{nL} = \frac{1}{N-L}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2. \tag{2.10}$$

ბოლოს განისაზღვრება ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$F = \frac{S^2_{\Sigma L}}{\bar{S}^2_{nL}}. \tag{2.11}$$

ეს მნიშვნელობა შევადაროთ შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობებს. ზედა კრიტიკული მნიშვნელობა $F_{\text{ზ}}$ შეირჩევა ფიშერის ცხრილის L-1 სვეტისა და N-L სტრიქონის გადაკვეთაზე. ქვედა კრიტიკული მნიშვნელობა $F_{\text{ქვ}}=1/F_{\text{ზ}}$.

თუ საანგარიშო მნიშვნელობა აღმოჩნდება ზედა და ქვედა კრიტიკულ მნიშვნელობებს შორის

$$F_{\text{ქვ}} \le \frac{S^2_{\Sigma L}}{\bar{S}^2_{nL}} \le F_{\text{ზ}},$$

ვთვლით, რომ განსახილველი ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულების განსხვავება არაარსებითია.

მაგალითი. დავუშვათ, გვაქვს დაკვირვებათა L=3 ჯგუფი:

I. 10; 12; 8; 9; 11, $n_1=5$,

II. 8,7; 10,2; 11,7, $n_2=3$,

III. 10,5; 9,5; 11,5; 8,5; 12,5, $n_3=5$.

შევამოწმოთ არსებითია თუ არა ამ სამი ჯგუფის საშუალო არითმეტიკულების განსხვავება.

ჯერ გამოვთვალოთ განსახილველი ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულები

$$\bar{y}_1 = \frac{10 + 12 + 8 + 9 + 11}{5} = \frac{50}{5} = 10\,,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{8,7 + 10,2 + 11,7}{3} = 10,2\,,$$

$$\bar{y}_3 = \frac{10,5 + 9,5 + 11,5 + 8,5 + 12,5}{5} = 10,5.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ დაკვირვებათა საერთო რაოდენობა $N=n_1+n_2+n_3=5+3+5=13$, ერთობლივი საშუალოსათვის გვექნება:

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{13}\left(5\cdot 10 + 3\cdot 10,2 + 5\cdot 10,5\right) = \frac{1}{13}\cdot 133,1 = 10,24\,.$$

გამოვთვალოთ ჯგუფთაშორისი დისპერსია

$$S^2_{\Sigma L} = \frac{1}{3-1}\left[5\cdot(10-10,24)^2 + 3\cdot(10,2-10,24)^2 + 5\cdot(10,5-10,24)^2\right] = 0,32\,;$$

ჯგუფების შიგნით დისპერსიების გასაშუალოებული მნიშვნელობა

$$\bar{S}^2_{nL} = \frac{1}{13-3}\Big\{\left[(10-10)^2 + (12-10)^2 + (8-10)^2 + (9-10)^2 + (11-10)^2\right] + \left[(8,7-10,2)^2 + (10,2-10,2)^2 + (11,7-10,2)^2\right] + \left[(10,5-10,5)^2 + (9,5-10,5)^2 + (11,5-10,5)^2 + (8,5-10,5)^2 + (12,5-10,5)^2\right]\Big\} = 2,45.$$

ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა $F = 0,32/2,45 = 0,13$.

იმის გამო, რომ $S^2_{\Sigma L}$ დისპერსიის თავისუფლების ხარისხია $k_1=L-1=3-1=2$, ხოლო $\bar{S}^2_{nL}$ დისპერსიისა – $k_2=N-L=13-3=10$, კრიტიკული მნიშვნელობა $F_{\text{ზ}}$ მოიძებნება ფიშერის ცხრილის მეორე სვეტისა და მეათე სტრიქონის გადაკვეთაზე - $F_{\text{ზ}}=4,10$. მაშინ ქვედა კრიტიკული მნიშვნელობისათვის $F_{\text{ქვ}}=1/F_{\text{ზ}}=1/4,10=0,24$.

ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა 0,13 არ მოთავსდა ქვედა და ზედა კრიტიკულ მნიშვნელობებს შორის, ამიტომ ვთვლით, რომ განსახილველი ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულები არსებითად განსხვავდება ერთმანეთისაგან.

2.3. აბეს კრიტერიუმი და მისი გამოყენება

თუ ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულები არსებითად განსხვავდება ერთმანეთისაგან, უნდა დავადგინოთ ჯგუფიდან ჯგუფზე გადასვლისას საშუალო არითმეტიკულების წანაცვლების ხასიათი.

როდესაც საშუალო არითმეტიკული ჯგუფიდან ჯგუფზე გადასვლისას მონოტონურად იზრდება ან მცირდება, საქმე გვაქვს საშუალო არითმეტიკულის სისტემატურ წანაცვლებასთან. როდესაც საშუალო არითმეტიკული ხან იზრდება, ხან მცირდება, საქმე გვაქვს შემთხვევით წანაცვლებასთან.

წანაცვლების ხასიათის დადგენა წარმოებს აბეს კრიტერიუმით. დავუშვათ, გვაქვს დაკვირვებათა L ჯგუფი:

I. $y_{11},\ y_{12}, \ldots, y_{1n_1}$,

II. $y_{21},\ y_{22}, \ldots, y_{2n_2}$,

....

L. $y_{L1},\ y_{L2}, \ldots, y_{Ln_L}$.

აბეს კრიტერიუმის თანახმად უნდა გამოვთვალოთ თითოეული ჯგუფის საშუალო არითმეტიკულები: $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_L$; შემდეგ მეზობელი ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულების სხვაობები:

$$d_1 = \bar{y}_2 - \bar{y}_1\,,$$

$$d_2 = \bar{y}_3 - \bar{y}_2\,,$$

....

$$d_{L-1} = \bar{y}_L - \bar{y}_{L-1}\,.$$

შემდეგ გამოითვლება ორი დისპერსია:

$$S_d^2 = \frac{1}{2(L-1)}\sum_{i=1}^{L-1} d_i^2\,, \tag{2.12}$$

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{L-1}\sum_{i=1}^{L}\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2, \tag{2.13}$$

სადაც $\bar{\bar{y}}$ წარმოადგენს ერთობლივ საშუალოს

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{L} n_i \bar{y}_i}{N}.$$

აქ N დაკვირვებათა საერთო რაოდენობაა ყველა ჯგუფში, ე.ი. $N=n_1+n_2+\cdots+n_L$.

აბეს კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$\nu = S_d^2 / S_{\bar{y}}^2 . \qquad (2.14)$$

მიღებული საანგარიშო მნიშვნელობა უნდა შევადაროთ აბეს კრიტერიუმის შესაბამის ცხრილურ კრიტიკულ მნიშვნელობას.

ცხრილი 11

L	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\nu_{ცხ}$	0,3902	0,4102	0,4451	0,4680	0,4912	0,5121	0,5311	0,5482	0,5638

თუ საანგარიშო მნიშვნელობა აღემატება ცხრილურს $\nu>\nu_{ცხ}$, მაშინ ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულების წანაცვლებას შემთხვევითი ხასიათი გააჩნია, თუ $\nu\le\nu_{ცხ}$, მაშინ ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულების წანაცვლებას სისტემატური ხასიათი გააჩნია.

მაგალითი. დავუშვათ, გვაქვს დაკვირვებათა 5 ჯგუფი:

I. 41; 39; 40; 38; 37; $n_1=5$,
II. 30,0; 29,5; 28,5; 28,0; 29,0; $n_2=5$,
III. 48; 50; 49; 47; 46; $n_3=5$,
IV. 43,5; 42,5; 43,0; 44,0; 42,0; $n_4=5$,
V. 24; 25; 23; 26; $n_5=4$.

შევამოწმოთ ამ ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულების წანაცვლების ხასიათი აბეს კრიტერიუმის მიხედვით.

ამისათვის გამოვთვალოთ თითოეული ჯგუფის საშუალო არითმეტიკულები:

$$\bar{y}_1 = \frac{41+39+40+38+37}{5} = 39,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{30,0+29,5+28,5+28,0+29,0}{5} = 29,$$

$$\bar{y}_3 = \frac{48+50+49+47+46}{5} = 48,$$

$$\bar{y}_4 = \frac{43,5+42,5+43,0+44,0+42,0}{5} = 43,$$

$$\bar{y}_5 = \frac{24+25+23+26}{4} = 24,5.$$

საშუალო არითმეტიკულების სხვაობები:

$$d_1 = \bar{y}_2 - \bar{y}_1 = 29 - 39 = -10,$$

$$d_2 = \bar{y}_3 - \bar{y}_2 = 48 - 29 = 19.$$

$$d_3 = \bar{y}_4 - \bar{y}_3 = 43 - 48 = -5,$$

$$d_4 = \bar{y}_5 - \bar{y}_4 = 24,5 - 43 = -18,5.$$

ერთობლივი საშუალო

$$\bar{y} = \frac{5\cdot 39 + 5\cdot 29 + 5\cdot 48 + 5\cdot 43 + 4\cdot 24,5}{24} = 37,2.$$

განვსაზღვროთ სათანადო დისპერსიები

$$S_d^2 = \frac{1}{2(5-1)}\left[(-10)^2 + (19)^2 + (-5)^2 + (-18,5)^2\right] = 103,53,$$

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{5-1}\Big[(39-37,2)^2 + (29-37,2)^2 + (48-37,2)^2 + (43-37,2)^2 + (24,5-37,2)^2\Big] = 95,51,$$

აბეს კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$\nu = S_d^2 / S_{\bar{y}}^2 = 103,53/95,51 = 1,08.$$

ვინაიდან გვაქვს პარალელურ დაკვირვებათა 5 ჯგუფი ($L=5$), ამიტომ აბეს კრიტერიუმის ცხრილური მნიშვნელობა $\nu_{ცხ}=0,4102$.

რადგან საანგარიშო მნიშვნელობა აღემატება ცხრილურს $\nu=1,08>\nu_{ცხ}=0,4102$, ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულების წანაცვლებას შემთხვევითი ხასიათი გააჩნია.

2.4. დაკვირვებათა ჯგუფების შედეგების გაერთიანება

იმის შემდეგ რაც შემოწმებულია დაკვირვებათა ჯგუფების დისპერსიების ერთგვაროვნობა ფიშერის, კოკრენის ან ბარტლეტის კრიტერიუმების მიხედვით, აგრეთვე საშუალო არითმეტიკულების განსხვავების არსებითობა სტიუდენტის ან ფიშერის კრიტერიუმების მიხედვით, შეგვიძლია გადავიდეთ დაკვირვებათა შედეგების გაერთიანებაზე.

2.4.1. დაკვირვებათა შედეგების გაერთიანება, როდესაც ჯგუფების დისპერსიები ერთგვაროვანია, ხოლო საშუალო არითმეტიკულები არსებითად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან

იმ შემთხვევაში, როდესაც ჯგუფების დისპერსიები ერთგვაროვანია, ხოლო საშუალო არითმეტიკულები არსებითად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან, დაკვირვებათა

შედეგების გაერთიანებული მახასიათებლები – ერთობლივი საშუალო $\bar{\bar{y}}$ და ერთობლივი საშუალოს დისპერსია $S^2_{\bar{\bar{y}}}$ გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{L} n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{L} n_i}, \qquad (2.15)$$

$$S^2_{\bar{\bar{y}}} = \frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{i=1}^{L}(n_i-1)S_i^2 + \sum_{i=1}^{L} n_i(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2\right], \qquad (2.16)$$

სადაც N დაკვირვებათა საერთო რაოდენობაა ყველა ჯგუფში, ე.ი. $N=n_1+n_2+\cdots+n_L$; n_i – პარალელურ დაკვირვებათა რაოდენობა i-ურ ჯგუფში; $\bar{y}_i$ – i-ური ჯგუფის საშუალო არითმეტიკული; S_i^2 – i-ური ჯგუფის დისპერსია; $\bar{\bar{y}}$ – ერთობლივი საშუალო.

მაგალითი. დავუშვათ, გვაქვს პარალელურ დაკვირვებათა ორი ჯგუფი:

I. 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; $n_1=7$,

II. 17,5; 19,1; 20,3; 21,4; 22,1; 22,6; $n_2=6$.

უნდა გავაერთიანოთ დაკვირვებათა ამ ორი ჯგუფის მონაცემები.

აღწერილი ალგორითმის თანახმად პირველ რიგში შევამოწმოთ ამ ორი ჯგუფის დისპერსიების ერთგვაროვნობა.

ვინაიდან გვაქვს მხოლოდ ორი ჯგუფი, დისპერსიების ერთგვაროვნების შესამოწმებლად გამოვიყენოთ ფიშერის კრიტერიუმი. გამოვთვალოთ დაკვირვებათა ამ ორი ჯგუფის საშუალო არითმეტიკულები

$$\bar{y}_1 = \frac{17+18+19+20+21+22+23}{7} = 20,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{17{,}5+19{,}1+20{,}3+21{,}4+22{,}1+22{,}6}{6} = 20{,}5,$$

დისპერსიები

$$S_1^2 = \frac{1}{7-1}\Big[(17-20)^2+(18-20)^2+(19-20)^2+(20-20)^2+$$
$$+(21-20)^2+(22-20)^2+(23-20)^2\Big] = 4{,}6,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{6-1}\Big[(17{,}5-20{,}5)^2+(19{,}1-20{,}5)^2+(20{,}3-20{,}5)^2+$$
$$+(21{,}4-20{,}5)^2+(22{,}1-20{,}5)^2+(22{,}6-20{,}5)^2\Big] = 3{,}76.$$

ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობისათვის მივიღებთ:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{4{,}6}{3{,}76} = 1{,}22.$$

ფიშერის ცხრილში 7–1=6 სვეტისა და 6–1=5 სტრიქონის გადაკვეთაზე მოვძებნით შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობას $F_{\text{ზ}}$=4,95. ქვედა კრიტიკული მნიშვნელობა

$$F_{\text{ქვ}} = \frac{1}{F_{\text{ზ}}} = \frac{1}{4{,}95} = 0{,}20.$$

იმის გამო, რომ საანგარიშო მნიშვნელობა იმყოფება ქვედა და ზედა კრიტიკულ მნიშვნელობებს შორის (0,20<1,22<4,95), ვთვლით, რომ დისპერსიები ერთგვაროვანია.

მეორე ეტაპზე შევამოწმოთ ამ ორი ჯგუფის საშუალო არითმეტიკულების განსხვავების არსებითობა სტიუდენტის კრიტერიუმის გამოყენებით. ამისათვის განვსაზღვროთ საანგარიშო მნიშვნელობა:

$$t = \frac{|20-20{,}5|}{\sqrt{|7\cdot 4{,}6 - 6\cdot 3{,}76|}}\cdot\sqrt{\frac{7\cdot 6(7+6-2)}{7+6}} = 0{,}334.$$

ეს მნიშვნელობა უნდა შევადაროთ სტიუდენტის კრიტერიუმის შესაბამის ცხრილურ მნიშვნელობასთან (ცხრილი 7) $k=n_1+n_2-2=7+6-2=11$ თავისუფლების ხარისხისათვის. ვინაიდან ცხრილში არა გვაქვს შესაბამისი მნიშვნელობა 11 თავისუფლების ხარისხისათვის, ამიტომ ამოვიწეროთ ცხრილური მნიშვნელობა 10 თავისუფლების ხარისხისათვის ($t_{\text{ცხ}}$=2,228), 12 თავისუფლების ხარისხისათვის ($t_{\text{ცხ}}$=2,179) და გამოვთვალოთ მათი საშუალო არითმეტიკული: (2,228+2,179)/2=2,203, რომელიც მივიღოთ ცხრილური მნიშვნელობის სახით $t_q = t_{\text{ცხ}}$=2,203.

იმის გამო, რომ საანგარიშო მნიშვნელობა 0,334 ნაკლებია ცხრილურზე (t=0,334<$t_{\text{ცხ}}$=2,203), ვაკეთებთ დასკვნას: პარალელურ დაკვირვებათა განსახილველი ორი ჯგუფის საშუალო არითმეტიკულები არსებითად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან.

ვინაიდან ჩვენ მაგალითში დისპერსიები ერთგვაროვანია, ხოლო საშუალო არითმეტიკულები არსებითად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან, დაკვირვებათა გაერთიანება განვახორციელოთ ამ პუნქტში აღწერილი ალგორითმის მიხედვით, ე.ი. ერთობლივი საშუალო

$$\bar{\bar{y}} = \frac{7\cdot 20 + 6\cdot 20{,}5}{7+6} = 20{,}23$$

და ერთობლივი საშუალოს დისპერსია

$$S_{\bar{\bar{y}}}^2 = \frac{1}{13(13-1)}\Big\{\big[(7-1)\cdot 4{,}6 + (6-1)\cdot 3{,}76\big] + \Big[7\cdot(20-20{,}23)^2 + 6\cdot(20{,}5-20{,}23)^2\Big]\Big\} = 0{,}303.$$

2.4.2 დაკვირვებათა შედეგების გაერთიანება, როდესაც ჯგუფების დისპერსიები ერთგვაროვანია, ხოლო საშუალო არითმეტიკულები არსებითად განსხვავდება ერთმანეთისაგან

თუ დისპერსიები ერთგვაროვანია, ხოლო საშუალო არითმეტიკულები არსებითად განსხვავდება ერთმანეთისაგან, მონაცემების გაერთიანება წარმოებს სხვადასხვანაირად იმის მიხედვით, თუ რა შედეგს გვაძლევს შემოწმება აბეს კრიტერიუმით.

თუ აბეს კრიტერიუმით საშუალო არითმეტიკულების წანაცვლებას შემთხვევითი ხასიათი აქვს, მაშინ მონაცემების გაერთიანება წარმოებს ისევე, როგორც ეს აღწერილია 2.4.1 პუნქტში:

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{L} n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{L} n_i},$$

$$S_{\bar{\bar{y}}}^2 = \frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{i=1}^{L}(n_i-1)S_i^2 + \sum_{i=1}^{L} n_i(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2\right].$$

თუ ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულებს აქვს სისტემატური წანაცვლება, მონაცემების გაერთიანებამდე წინასწარ ახდენენ მათ მოდიფიკაციას.

დავუშვათ, გვაქვს დაკვირვებათა L=5 ჯგუფი:

I. 18; 19; 20; 21; 22; $\bar{y}_1$=20,

II. 27; 28; 29; 30; 31; $\bar{y}_2$=29,

III. 39; 40; 41; 42; 43; $\bar{y}_3$=41,

IV. 48; 49; 50; 51; 52; $\bar{y}_4$=50,

V. 58; 59; 60; 61; 62; $\bar{y}_5$=60.

აბეს კრიტერიუმის თანახმად დაკვირვებათა ამ ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულებს აქვთ სისტემატური

წანაცვლება – ხდება მათი მონოტონური ზრდა დაახლოებით ათი ერთეულით ერთი ჯგუფიდან მეორეზე გადასვლისას.

საშუალო არითმეტიკულების მონოტონური ზრდისას მონაცემების მოდიფიკაცია შემდეგნაირად ხდება: დაკვირვებათა I ჯგუფის მონაცემები დავტოვოთ უცვლელად, II ჯგუფის ყველა მონაცემს გამოვაკლოთ საშუალო წანაცვლების ტოლი სიდიდე, ე.ი. 10 ერთეული, III ჯგუფის ყველა მონაცემს — გაორკეცებული საშუალო წანაცვლების ტოლი სიდიდე, ე.ი. 20 ერთეული, IV ჯგუფის ყველა მონაცემს — გასამკეცებული საშუალო წანაცვლების ტოლი სიდიდე, ე.ი. 30 ერთეული, V ჯგუფის ყველა მონაცემს — გაოთხკეცებული საშუალო წანაცვლების ტოლი სიდიდე, ე.ი. 40 ერთეული. ამრიგად, მივიღებთ მოდიფიცირებულ მონაცემებს და ყოველი მოდიფიცირებული ჯგუფის შესაბამის $\bar{y}'_i$ საშუალო არითმეტიკულებს:

I. 18; 19; 20; 21; 22; $\bar{y}'_1$=20,

II. 17; 18; 19; 20; 21; $\bar{y}'_2$=19,

III. 19; 20; 21; 22; 23; $\bar{y}'_3$=21,

IV. 18; 19; 20; 21; 22; $\bar{y}'_4$=20,

V. 18; 19; 20; 21; 22; $\bar{y}'_5$=20.

დაკვირვებათა შედეგების მოდიფიკაციის და მოდიფიცირებული მონაცემების $\bar{y}'_i$ საშუალო არითმეტიკულების გამოთვლის შემდეგ დაკვირვებათა შედეგების გაერთიანებას ვაწარმოებთ შემდეგი ფორმულების მიხედვით:

მოდიფიცირებული ერთობლივი საშუალო

$$\bar{\bar{y}}' = \frac{\sum_{i=1}^{L} n_i \bar{y}'_i}{\sum_{i=1}^{L} n_i}. \qquad (2.17)$$

ერთობლივი საშუალოს დისპერსია

$$S_{\bar{\bar{y}}'}^2 = \frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{i=1}^{L}(n_i-1)S_i^2 + \sum_{i=1}^{L} n_i(\bar{y}'_i - \bar{\bar{y}}')^2\right]. \qquad (2.18)$$

თუ საშუალო არითმეტიკულებს წინა მაგალითისაგან განსხვავებით გააჩნია სისტემატური წანაცვლება, მაგრამ ხდება მათი მონოტონური შემცირება, მაგალითად, $\bar{y}_1 = 90$, $\bar{y}_2 = 80$, $\bar{y}_3 = 70$, $\bar{y}_4 = 60$, $\bar{y}_5 = 50$, ასეთ შემთხვევაში მოდიფიკაციას ვახდენთ შემდეგნაირად: დაკვირვებათა I ჯგუფს ვტოვებთ უცვლელად, II ჯგუფის ყველა მონაცემს ვუმატებთ წანაცვლების საშუალო სიდიდეს (ჩვენ შემთხვევაში 10 ერთეულს), III ჯგუფის ყველა მონაცემს – 20 ერთეულს, IV ჯგუფის ყველა მონაცემს – 30 ერთეულს და ა.შ.

მაგალითი. დავუშვათ, გვაქვს პარალელურ დაკვირვებათა L=5 ჯგუფი

I. 40; 60; 38; 41; 37; 39;
II. 29,5; 28,0; 29,0; 28,5; 30,0;
III. 50; 48; 47; 49; 46;
IV. 43,5; 43,0; 44,0; 42,0; 42,5;
V. 23; 12; 22; 26; 24; 25.

უნდა გავაერთიანოთ ამ ჯგუფების დაკვირვებათა შედეგები.

პირველ რიგში უნდა შევამოწმოთ, ხომ არ არის განსახილველ დაკვირვებათა ჯგუფებში უხეში შეცდომები.

შემოწმებისათვის გამოვიყენოთ Q–კრიტერიუმი. ამისათვის განვალაგოთ საეჭვო შედეგის „60" შემცველი პირველი ჯგუფის მონაცემები ზრდადობის მიხედვით:

37; 38; 39; 40; 41; <u>60.</u>

გამოვთვალოთ Q_2' სიდიდე

$$Q_2' = \frac{60-41}{60-37} = 0{,}83.$$

ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა Q_2'=0,83>$Q_{\text{ცხ}}$=0,56, ვაკეთებთ დასკვნას, რომ დაკვირვების მეორე შედეგი I ჯგუფში „60" უხეში შეცდომაა და უნდა გამოირიცხოს.

განვალაგოთ საეჭვო შედეგის „12" შემცველი V ჯგუფის მონაცემები ზრდადობის მიხედვით:

<u>12</u>; 22; 23; 24; 25; 26.

განვსაზღვროთ Q–კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$Q_1' = \frac{22-12}{26-12} = 0{,}71.$$

ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა აღემატება ცხრილურს Q_1'=0,71>$Q_{\text{ცხ}}$=0,56, V ჯგუფის საეჭვო შედეგი უხეში შეცდომაა და უნდა გამოირიცხოს.

საეჭვო შედეგების გამორიცხვის შემდეგ ჩვენ დაგვრჩება შემდეგი მონაცემები:

I. 40; 38; 41; 37; 39; n=5,
II. 29,5; 28,0; 29,0; 28,5; 30,0; n=5,
III. 50; 48; 47; 49; 46; n=5,
IV. 43,5; 43,0; 44,0; 42,0; 42,5; n=5,
V. 23; 22; 26; 24; 25. n=5.

ამ ხუთი ჯგუფის მონაცემების გაერთიანებისათვის უნდა შევამოწმოთ დისპერსიების ერთგვაროვნობა და საშუალო არითმეტიკულების განსხვავების არსებითობა.

იმის გამო, რომ ხუთივე ჯგუფში გვაქვს დაკვირვებათა ერთნაირი რაოდენობა, დისპერსიების ერთგვაროვნობის შემოწმებისათვის გამოვიყენოთ კოკრენის კრიტერიუმი.

ამისათვის განვსაზღვროთ ყოველი ჯგუფის საშუალო არითმეტიკული:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{5}\left(37+38+39+40+41\right) = 39,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{5}\left(28{,}0+28{,}5+29{,}0+29{,}5+30{,}0\right) = 29,$$

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{5}\left(46+47+48+49+50\right) = 48,$$

$$\bar{y}_4 = \frac{1}{5}\left(42{,}0+42{,}5+43{,}0+43{,}5+44{,}0\right) = 43,$$

$$\bar{y}_5 = \frac{1}{5}\left(22+23+24+25+26\right) = 24$$

და ამ ჯგუფების დისპერსიები:

$$S_1^2 = \frac{1}{5-1}\left[(37-39)^2+(38-39)^2+(39-39)^2+(40-39)^2+(41-39)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(4+1+0+1+4) = 2{,}5,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{5-1}\left[(28{,}0-29)^2+(28{,}5-29)^2+(29{,}0-29)^2+(29{,}5-29)^2+(30{,}0-29)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(1+0{,}25+0+0{,}25+1) = 0{,}625,$$

$$S_3^2 = \frac{1}{5-1}\left[(46-48)^2+(47-48)^2+(48-48)^2+(49-48)^2+(50-48)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(4+1+0+1+4) = 2{,}5,$$

$$S_4^2 = \frac{1}{5-1}\left[(42-43)^2 + (42{,}5-43)^2 + (43-43)^2 + (43{,}5-43)^2 + (44-43)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 0{,}25 + 0 + 0{,}25 + 1\right) = 0{,}625,$$

$$S_5^2 = \frac{1}{5-1}\left[(22-24)^2 + (23-24)^2 + (24-24)^2 + (25-24)^2 + (26-24)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4 + 1 + 0 + 1 + 4\right) = 2{,}5.$$

კოკრენის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$G = \frac{2{,}5}{2{,}5 + 0{,}625 + 2{,}5 + 0{,}625 + 2{,}5} = 0{,}285.$$

კოკრენის ცხრილში (მე–10 ცხრილი) n-1=5-1=4 სვეტისა და L=5–ის შესაბამისი სტრიქონის გადაკვეთაზე მოიძებნება ცხრილური მნიშვნელობა: $G_{\text{ცხ}}$=0,5441.

იმის გამო, რომ საანგარიშო მნიშვნელობა ცხრილურზე ნაკლებია (G=0,285<$G_{\text{ცხ}}$=0,5441), ვაკეთებთ დასკვნას, რომ განსახილველი ჯგუფების დისპერსიები ერთგვაროვანია.

საშუალო არითმეტიკულების განსხვავების არსებითობას ვამოწმებთ ფიშერის კრიტერიუმით. ამისათვის გამოვთვალოთ $\bar{\bar{y}}$ ერთობლივი საშუალო

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{L} n_i \bar{y}_i = \frac{1}{25}\left(5\cdot 39 + 5\cdot 29 + 5\cdot 48 + 5\cdot 43 + 5\cdot 24\right) = 36{,}6;$$

$S_{\Sigma L}^2$ ჯგუფთაშორისი დისპერსია

$$S_{\Sigma L}^2 = \frac{1}{L-1}\sum_{i=1}^{L} n_i\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2 = \frac{1}{5-1}\Big[5(39-36{,}6)^2 + 5(29-36{,}6)^2 +$$

$$+ 5(48-36{,}6)^2 + 5(43-36{,}6)^2 + 5(24-36{,}6)^2\Big] = 491{,}5$$

და $\bar{S}_{nL}^2$ ჯგუფების შიგნით დისპერსიების გასაშუალოებული მნიშვნელობა

$$\bar{S}_{nL}^2 = \frac{1}{N-L}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2 = \frac{1}{25-5}\Big\{\Big[(37-39)^2 + (38-39)^2 + (39-39)^2 +$$

$$+ (40-39)^2 + (41-39)^2\Big] + \Big[(28-29)^2 + (28{,}5-29)^2 + (29-29)^2 + (29{,}5-29)^2 +$$

$$+ (30-29)^2\Big] + \Big[(46-48)^2 + (47-48)^2 + (48-48)^2 + (49-48)^2 + (50-48)^2\Big] +$$

$$+ \Big[(42{,}0-43)^2 + (42{,}5-43)^2 + (43{,}0-43)^2 + (43{,}5-43)^2 + (44-43)^2\Big] +$$

$$+ \Big[(22-24)^2 + (23-24)^2 + (24-24)^2 + (25-24)^2 + (26-24)^2\Big]\Big\} = \frac{1}{20}\Big\{\big[4 + 1 + 0 +$$

$$+ 1 + 4\big] + \big[4 + 1 + 0 + 1 + 4\big] + \big[1 + 0{,}25 + 0 + 0{,}25 + 1\big] + \big[1 + 0{,}25 + 0 + 0{,}25 + 1\big] +$$

$$+ \big[4 + 1 + 0 + 1 + 4\big]\Big\} = \frac{1}{20}\left\{10 + 2{,}5 + 10 + 2{,}5 + 10\right\} = 1{,}75.$$

შემდეგ განვსაზღვროთ F საანგარიშო მნიშვნელობა

$$F = \frac{S_{\Sigma L}^2}{\bar{S}_{nL}^2} = \frac{491{,}5}{1{,}75} = 280{,}85.$$

ფიშერის ცხრილში k_1=L-1=5-1=4 სვეტისა და k_2=N-L=25-5=20 სტრიქონის გადაკვეთაზე მოიძებნება ზედა კრიტიკული მნიშვნელობა $F_{\text{ზ}}$=2,87. ქვედა კრიტიკული მნიშვნელობა $F_{\text{ქ}}$=1/$F_{\text{ზ}}$=1/2,87=0,35.

ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა არ იმყოფება ქვედა და ზედა კრიტიკულ მნიშვნელობებს შორის, ვაკეთებთ დასკვნას, რომ განსახილველი ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულები არსებითად განსხვავდება ერთმანეთისაგან. აბეს კრიტერიუმის თანახმად საშუალო არითმეტიკულების წანაცვლების ხასიათის დასადგენად გამოვთვალოთ მეზობელი საშუალო არითმეტიკულების სხვაობები:

$$d_1 = \bar{y}_2 - \bar{y}_1 = 29 - 39 = -10,$$

$$d_2 = \bar{y}_3 - \bar{y}_2 = 48 - 29 = 19,$$

$$d_3 = \bar{y}_4 - \bar{y}_3 = 43 - 48 = -5,$$

$$d_4 = \bar{y}_5 - \bar{y}_4 = 24 - 43 = -19.$$

გამოვთვალოთ ორი დისპერსია:

$$S_d^2 = \frac{1}{2(L-1)}\sum_{i=1}^{L} d_i^2 = \frac{1}{2(5-1)}\left[(-10)^2 + (19)^2 + (-5)^2 + (-19)^2\right] = 70{,}88,$$

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{L-1}\sum_{i=1}^{L}\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2 = \frac{1}{5-1}\Big[(39-36{,}6)^2 + (29-36{,}6)^2 +$$

$$+ (48-36{,}6)^2 + (43-36{,}6)^2 + (24-36{,}6)^2\Big] = 68{,}66.$$

განვსაზღვროთ აბეს კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა:

$$\nu = \frac{S_d^2}{S_{\bar{y}}^2} = \frac{70{,}88}{68{,}66} = 1{,}032.$$

მე–11 ცხრილში L=5 ჯგუფისათვის მოვძებნოთ შესაბამისი ცხრილური მნიშვნელობა $\nu_{\text{ცხ}}$=0,4102.

ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა ν=1,032 აღემატება ცხრილურს, ვაკეთებთ დასკვნას, რომ საშუალო არითმეტიკულების წანაცვლებას ერთი ჯგუფიდან მეორეზე გადასვლისას აქვს შემთხვე-

ეული ხასიათი. ამ შემთხვევაში, როგორც ცნობილია, მონაცემების გაერთიანებისათვის დაკვირვებათა მონაცემების მოდიფიკაცია არ არის საჭირო. გაერთიანება უნდა განვახორციელოთ უშუალოდ არსებული მონაცემებით.

ერთობლივი საშუალო უკვე მიღებულია განსახილველი შემთხვევისათვის

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{L} n_i \bar{y}_i}{N} = 36{,}6\,,$$

ხოლო ერთობლივი საშუალოს დისპერსია

$$S^2_{\bar{\bar{y}}} = \frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{i=1}^{L}(n_i-1)S_i^2 + \sum_{i=1}^{L} n_i(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2\right] = \frac{1}{25(25-1)}\{[(5-1)2{,}5 +$$

$$+(5-1)0{,}625 + (5-1)2{,}5 + (5-1)0{,}625 + (5-1)2{,}5] + [5(39-36{,}6)^2 +$$

$$+5(29-36{,}6)^2 + 5(48-36{,}6)^2 + 5(43-36{,}6)^2 + 5(24-36{,}6)^2]\} = 3{,}41.$$

2.4.3. დაკვირვებათა შედეგების გაერთიანება, როდესაც ჯგუფების დისპერსიები არაერთგვაროვანია, ხოლო საშუალო არითმეტიკულები არსებითად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან

ამ შემთხვევაში გაერთიანება შესაძლებელია და შემდეგნაირად ხდება:

ერთობლივი საშუალო გამოითვლება

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{L} g_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{L} g_i}, \qquad (2.19)$$

სადაც g_i წონადობის კოეფიციენტია დაკვირვებათა i-ური ჯგუფისათვის. ის სათანადო დისპერსიის უკუპროპორციულია

$$g_i = \frac{1}{S^2_{\bar{y}_i}}\,. \qquad (2.20)$$

ერთობლივი საშუალოს დისპერსია

$$S^2_{\bar{\bar{y}}} = \frac{1}{(N-1)\sum_{i=1}^{L} g_i}\left[\sum_{i=1}^{L} g_i \frac{n_i-1}{n_i} S_i^2 + \sum_{i=1}^{L} g_i(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2\right]. \qquad (2.21)$$

მაგალითი. დავუშვათ, გვაქვს პარალელურ დაკვირვებათა $L=4$ ჯგუფი:

I. 24; 27; 30; 33; 36;
II. 30,5; 31,0; 31,5;
III. 27; 28; 29; 30; 31;
IV. 27,0; 27,5; 28,5; 29,0.

უნდა მოვახდინოთ ამ ჯგუფების მონაცემების გაერთიანება.

ბარტლეტის მეთოდით შევამოწმოთ ამ ჯგუფების დისპერსიების ერთგვაროვნობა. ამისათვის გამოვთვალოთ ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულები:

$$\bar{y}_1 = \frac{24+27+30+33+36}{5} = 30, \qquad y_3 = \frac{27+28+29+30+31}{5} = 29,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{30{,}5+31{,}0+31{,}5}{3} = 31, \qquad \bar{y}_4 = \frac{27{,}0+27{,}5+28{,}5+29{,}0}{4} = 28$$

და შესაბამისი დისპერსიები:

$$S_1^2 = \frac{1}{5-1}\left[(24-30)^2 + (27-30)^2 + (30-30)^2 + (33-30)^2 + (36-30)^2\right] = 22{,}5,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{3-1}\left[(30{,}5-31{,}0)^2 + (31{,}0-31{,}0)^2 + (31{,}5-31{,}0)^2\right] = 0{,}25,$$

$$S_3^2 = \frac{1}{5-1}\left[(27-29)^2 + (28-29)^2 + (29-29)^2 + (30-29)^2 + (31-29)^2\right] = 2{,}5,$$

$$S_4^2 = \frac{1}{4-1}\left[(27{,}0-28{,}0)^2 + (27{,}5-28{,}0)^2 + (28{,}5-28{,}0)^2 + (29{,}0-28{,}0)^2\right] = 0{,}83.$$

დისპერსიის გასაშუალოებული მნიშვნელობა

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{17-4}\left[22{,}5(5-1) + 0{,}25(3-1) + 2{,}5(5-1) + 0{,}83(4-1)\right] = 7{,}92.$$

C კოეფიციენტისათვის გვექნება:

$$C = 1 + \frac{1}{3(4-1)}\left[\frac{1}{5-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{5-1} + \frac{1}{4-1} - \frac{1}{17-4}\right] = 1{,}14,$$

ხოლო χ^2-ის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$\chi^2 = \frac{2{,}303}{1{,}14}\{(17-4)\lg 7{,}92 - (5-1)\lg 22{,}5 - (3-1)\lg 0{,}25 -$$

$$-(5-1)\lg 2{,}5 - (4-1)\lg 0{,}83\} = 12{,}391\,.$$

პირსონის ცხრილიდან L-1=4-1=3 თავისუფლების ხარისხისათვის მივიღებთ $\chi^2_{\text{ქ}}$=0,352 და $\chi^2_{\text{ზ}}$=7,815. ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა არ მოთავსდა ქვედა და ზედა კრიტიკულ მნიშვნელობებს შორის, განსახილველი ჯგუფების დისპერსიები არაერთგვაროვანია.

საშუალო არითმეტიკულების განსხვავების არსებითობის შემოწმებისათვის გამოვთვალოთ ერთობლივი საშუალო

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{17}(5\cdot 30 + 3\cdot 31 + 5\cdot 29 + 4\cdot 28) = 29{,}41,$$

ჯგუფთაშორისი დისპერსიის შეფასება

$$S_{\Sigma L}^2=\frac{1}{4-1}\left[5(30-29{,}41)^2+3(31-29{,}41)^2+5(29-29{,}41)^2+4(28-29{,}41)^2\right]=6{,}039$$

და ჯგუფების შიგნით დისპერსიების გასაშუალოებული მნიშვნელობა

$$\overline{S}_{nL}^2=\frac{1}{17-4}\Big\{\left[(24-30)^2+(27-30)^2+(30-30)^2+(33-30)^2+(36-30)^2\right]+\left[(30{,}5-31)^2+(31-31)^2+(31{,}5-31)^2\right]+\left[(27-29)^2+(28-29)^2+(29-29)^2+(30-29)^2+(31-29)^2\right]+\left[(27{,}0-28)^2+(27{,}5-28)^2+(28{,}5-28)^2+(29{,}0-28)^2\right]\Big\}=7{,}923,$$

სადაც N=17 დაკვირვებათა საერთო რაოდენობაა ყველა ჯგუფში.

ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობისათვის მივიღებთ

$$F=\frac{6{,}039}{7{,}923}=0{,}762.$$

ფიშერის ცხრილში 4-1=3 სვეტისა და 17-4=13 სტრიქონის გადაკვეთაზე მოიძებნება ზედა კრიტიკული მნიშვნელობა 3,41; ქვედა კრიტიკული მნიშვნელობა $F_{ქ}=1/F_{ზ}=1/3{,}41=0{,}29$.

ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა მოთავსდა ქვედა და ზედა კრიტიკულ მნიშვნელობებს შორის, განსხვავება განსახილველი ჯგუფების საშუალო არითმეტიკულებს შორის არაარსებითია.

ზემოთ აღწერილი ალგორითმის მიხედვით მოვახდინოთ მონაცემების გაერთიანება. ამისათვის განვსაზღვროთ დაკვირვებათა თითოეული ჯგუფის „წონები“:

$$g_1=1/S_{\bar{y}_1}^2=1/\left(S_1^2/n_1\right)=1/(22{,}5/5)=0{,}22,$$

$$g_2=1/S_{\bar{y}_2}^2=1/\left(S_2^2/n_2\right)=1/(0{,}25/3)=12{,}00,$$

$$g_3=1/S_{\bar{y}_3}^2=1/\left(S_3^2/n_3\right)=1/(2{,}5/5)=2{,}00,$$

$$g_4=1/S_{\bar{y}_4}^2=1/\left(S_4^2/n_4\right)=1/(0{,}83/4)=4{,}82.$$

შემდეგ გამოვთვალოთ ერთობლივი საშუალო

$$\bar{\bar{y}}_g=\frac{0{,}22\cdot30+12{,}00\cdot31{,}0+2{,}00\cdot29+4{,}82\cdot28{,}0}{0{,}22+12{,}00+2{,}00+4{,}82}=\frac{571{,}65}{19{,}04}=30{,}02,$$

აგრეთვე ერთობლივი საშუალოს დისპერსია

$$S_{\bar{\bar{y}}_g}^2=\frac{1}{(17-1)(0{,}22+12{,}00+2{,}00+4{,}82)}\Big\{\Big[0{,}22\frac{5-1}{5}22{,}5+12{,}00\frac{3-1}{3}0{,}25+2{,}00\frac{5-1}{5}2{,}5+4{,}82\frac{4-1}{4}0{,}83\Big]+\Big[0{,}22(30-30{,}02)^2+12{,}00(31-30{,}02)^2+2{,}00(29-30{,}02)^2+4{,}82(28{,}0-30{,}02)^2\Big]\Big\}=0{,}152.$$

თუ დისპერსიები არაერთგვაროვანია და საშუალო არითმეტიკულები არსებითად განსხვავდება ერთმანეთისაგან, მონაცემების გაერთიანება დაუშვებელია.

3. დისპერსიული ანალიზი

წინა ორ თავში განვიხილეთ მხოლოდ ერთი გამოსავალი y პარამეტრი. ვნახეთ, რომ ის გარკვეული კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა. პარალელური დაკვირვებების ჩატარებისას ფაქტორების (ტემპერატურის, წნევის, კონცენტრაციის და ა.შ.) დონეები არ იცვლებოდა. პრაქტიკაში ხშირად წყდება შებრუნებული ამოცანა: ვსწავლობთ ამა თუ იმ ფაქტორების გავლენას გამოსავალი პარამეტრის შესაბამის მნიშვნელობაზე. ასეთი გავლენის დასადგენად სპეციალურად ცვლიან შესასწავლი ფაქტორების დონეებს და აკვირდებიან გამოსავალი y პარამეტრის რეაქციას. ამა თუ იმ ფაქტორების გავლენის ხარისხი გამოსავალი y პარამეტრის მნიშვნელობაზე დგინდება დისპერსიული ანალიზით. ერთდროულად შესასწავლი ფაქტორების რაოდენობის მიხედვით ასხვავებენ ერთფაქტორიან დისპერსიულ ანალიზს, ორფაქტორიან დისპერსიულ ანალიზს, I რიგის ლათინურ კვადრატებს სამი ფაქტორის გავლენის ერთდროული შესწავლისათვის, II რიგის ლათინურ კვადრატებს ოთხი ფაქტორის გავლენის ერთდროული შესწავლისათვის.

3.1. ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი

დავუშვათ, ვსწავლობთ ერთი A ფაქტორის ზეგავლენას პროცესზე და ამ ფაქტორს ვცვლით k დონეზე $A_1, A_2,\ldots, A_k$ (მაგალითად, თუ შესასწავლი ფაქტორი ტემპერატურაა, დონეების სახით შეიძლება გვქონდეს 20^0C, 40^0C, 60^0C და ა.შ.).

შესასწავლი A ფაქტორის ყოველ დონეზე ვატარებთ რამდენიმე პარალელურ ცდას. პარალელური ცდების რაოდენობა A ფაქტორის ყველა დონეზე შეიძლება იყოს როგორც ერთნაირი, ისე სხვადასხვა. შესაბამისად დაკვირვებათა შედეგების დამუშავება ხდება დისპერსიული ანალიზის სხვადასხვა ალგორითმის მიხედვით.

3.1.1. ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი პარალელური დაკვირვებების თანაბარი რაოდენობის შემთხვევაში

დავუშვათ, ვსწავლობთ A ფაქტორის გავლენას, რომელიც k დონეზე იცვლება: $A_1, A_2,..., A_k$. ყველა დონეზე ჩატარებულია პარალელური ცდების ერთნაირი რაოდენობა–n. A_i დონეზე მიღებული დაკვირვებათა შედეგები აღვნიშნოთ $y_{i1}, y_{i2},..., y_{in}$–ით. A ფაქტორის ყველა დონეზე n პარალელური ცდის ჩატარებისას მიღებული დაკვირვებათა შედეგები შევიტანოთ ცხრილში

ცხრილი 12

ცდის №	A ფაქტორის დონეები			
	A_1	A_2	. . .	A_k
1	y_{11}	y_{21}	. . .	y_{k1}
2	y_{12}	y_{22}	. . .	y_{k2}
⋮	⋮	⋮		⋮
n	y_{1n}	y_{2n}	. . .	y_{kn}
$\sum$	Y_1	Y_2	. . .	Y_k

ცხრილში მოთავსებულ დაკვირვებათა შედეგების დამუშავება წარმოებს შემდეგი ალგორითმის გამოყენებით:

1. ცხრილში მოთავსებულ დაკვირვებათა შედეგების ჯამები გამოვთვალოთ A ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$Y_1 = y_{11} + y_{12} + \cdots + y_{1n}$ (A_1 დონისათვის),

$Y_2 = y_{21} + y_{22} + \cdots + y_{2n}$ (A_2 დონისათვის),

....

$Y_k = y_{k1} + y_{k2} + \cdots + y_{kn}$ (A_k დონისათვის).

2. გამოვთვალოთ ცხრილში მოთავსებულ დაკვირვებათა შედეგების კვადრატების ჯამი

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 . \qquad (3.1)$$

3. გამოვთვალოთ A ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი პარალელურ დაკვირვებათა რაოდენობაზე

$$Q_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} Y_i^2 . \qquad (3.2)$$

4. გამოვთვალოთ ცხრილში მოთავსებული ყველა დაკვირვების შედეგის ჯამის კვადრატი გაყოფილი ცხრილში დაკვირვებათა რაოდენობაზე

$$Q_3 = \frac{1}{kn}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)^2 . \qquad (3.3)$$

5. გამოვთვალოთ ექსპერიმენტის შეცდომასთან დაკავშირებული დისპერსია S_0^2

$$S_0^2 = \frac{Q_1 - Q_2}{k(n-1)} . \qquad (3.4)$$

6. გამოვთვალოთ გამოსაკვლევი A ფაქტორის ზეგავლენასთან დაკავშირებული დისპერსია S_A^2

$$S_A^2 = \frac{Q_2 - Q_3}{k-1} . \qquad (3.5)$$

7. განვსაზღვროთ ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$F = \left|S_A^2 / S_0^2\right| . \qquad (3.6)$$

8. ფიშერის ცხრილში k-1 სვეტისა და $k(n$-1) სტრიქონის გადაკვეთაზე მოვძებნოთ შესაბამისი კრიტიკული მნიშვნელობა $F_ც$.

9. თუ საანგარიშო მნიშვნელობა აღემატება კრიტიკულ მნიშვნელობას

$$F = \left|\frac{S_A^2}{S_0^2}\right| > F_ც ,$$

ვთვლით, რომ A ფაქტორი ახდენს არსებით ზეგავლენას პროცესზე და ამ ფაქტორის ეფექტი მოიძებნება შემდეგნაირად:

$$\sigma_A^2 = \frac{S_A^2 - S_0^2}{n} . \qquad (3.7)$$

თუ საანგარიშო მნიშვნელობა არ აღემატება კრიტიკულს, ვთვლით, რომ A ფაქტორი არ ახდენს არსებით

ზეგავლენას, მისი ეფექტი σ_A^2 არ გამოითვლება და ის ნულის ტოლად უნდა მივიჩნიოთ.

მაგალითი. დავუშვათ, ვსწავლობთ რომელიმე A ფაქტორის ზეგავლენას და ეს ფაქტორი იცვლება $k=5$ დონეზე: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. შესასწავლი ფაქტორის ყოველ დონეზე ვატარებთ ექვს-ექვს პარალელურ ცდას ($n=6$). მიღებული შედეგები შევიტანოთ ცხრილში.

ცდის №	A ფაქტორის დონეები				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	3,2	2,6	2,9	3,7	3,0
2	3,1	3,1	2,6	3,4	3,4
3	3,1	2,7	3,0	3,2	3,2
4	2,8	2,9	3,1	3,3	3,5
5	3,3	2,7	3,0	3,5	2,9
6	3,0	2,8	2,8	3,3	3,1
Σ	18,5	16,8	17,4	20,4	19,1

ზემოთ აღწერილი ალგორითმის მიხედვით გამოვთვალოთ დაკვირვებათა შედეგების ჯამები შესასწავლი ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$Y_1 = 3,2 + 3,1 + 3,1 + 2,8 + 3,3 + 3,0 = 18,5$ (A_1 დონისათვის),

$Y_2 = 2,6 + 3,1 + 2,7 + 2,9 + 2,7 + 2,8 = 16,8$ (A_2 დონისათვის),

$Y_3 = 2,9 + 2,6 + 3,0 + 3,1 + 3,0 + 2,8 = 17,4$ (A_3 დონისათვის),

$Y_4 = 3,7 + 3,4 + 3,2 + 3,3 + 3,5 + 3,3 = 20,4$ (A_4 დონისათვის),

$Y_5 = 3,0 + 3,4 + 3,2 + 3,5 + 2,9 + 3,1 = 19,1$ (A_5 დონისათვის).

გამოვთვალოთ სამი დამხმარე სიდიდე:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6} y_{ij}^2 = 3,2^2 + 3,1^2 + 3,1^2 + 2,8^2 + 3,3^2 + 3,0^2 + 2,6^2 + 3,1^2 + \cdots + 3,1^2 = 285,6,$$

$$Q_2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{5} Y_i^2 = \frac{1}{6}\left[18,5^2 + 16,8^2 + 17,4^2 + 20,4^2 + 19,1^2\right] = 284,7,$$

$$Q_3 = \frac{1}{5\cdot 6}\left(\sum_{i=1}^{5} Y_i\right)^2 = \frac{1}{30}(18,5 + 16,8 + 17,4 + 20,4 + 19,1)^2 = 283,4.$$

ექსპერიმენტის შეცდომასთან დაკავშირებული დისპერსია

$$S_0^2 = \frac{Q_1 - Q_2}{k(n-1)} = \frac{285,6 - 284,7}{5(6-1)} = \frac{0,9}{25} = 0,036.$$

გამოვთვალოთ A ფაქტორის ზეგავლენასთან დაკავშირებული დისპერსია

$$S_A^2 = \frac{Q_2 - Q_3}{k-1} = \frac{284,7 - 283,4}{5-1} = \frac{1,3}{4} = 0,325.$$

განვსაზღვროთ ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა:

$$F = \left|\frac{S_A^2}{S_0^2}\right| = \left|\frac{0,325}{0,036}\right| = 9,03.$$

ფიშერის ცხრილში $k-1=5-1=4$ სვეტისა და $k(n-1)=5(6-1)=25$ სტრიქონის გადაკვეთაზე მოიძებნება კრიტიკული მნიშვნელობა $F_ც=2,8$. ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა $F=\left|S_A^2/S_0^2\right|=9,03>F_ც=2,8$, ამიტომ უნდა ჩავთვალოთ, რომ შესასწავლი ფაქტორის დონეების ზეგავლენა არსებითია. ასეთ შემთხვევაში უნდა გამოვთვალოთ A ფაქტორის ეფექტი:

$$\sigma_A^2 = \frac{S_A^2 - S_o^2}{n} = \frac{0,325 - 0,036}{6} = \frac{0,289}{6} = 0,048.$$

3.1.2. ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი პარალელური დაკვირვებების სხვადასხვა რაოდენობის შემთხვევაში

დავუშვათ, ვსწავლობთ A ფაქტორის გავლენას, რომელიც იცვლება k დონეზე — $A_1, A_2, \ldots, A_k$. A_1 დონეზე ვატარებთ n_1 პარალელურ ცდას, A_2 დონეზე – n_2 პარალელურ ცდას და ა.შ., A_k დონეზე – n_k პარალელურ ცდას. სათანადო ცხრილში დაკვირვებათა შედეგები შეგვაქვს

ცხრილი 13

ცდის №	A ფაქტორის დონეები			
	A_1	A_2	$\ldots$	A_k
1	y_{11}	y_{21}	$\ldots$	y_{k1}
2	y_{12}	y_{22}	$\ldots$	y_{k2}
3	y_{13}	y_{23}	$\ldots$	y_{k3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
				y_{kn_k}
	y_{1n_1}			
		y_{2n_2}		
Σ	Y_1	Y_2	$\ldots$	Y_k

დაკვირვებათა შედეგების დამუშავება წარმოებს შემდეგი ალგორითმის თანახმად:

1. ცხრილში მოთავსებულ დაკვირვებათა შედეგების ჯამები გამოვთვალოთ A ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1 = y_{11} + y_{12} + y_{13} + \cdots + y_{1n_1} \quad (A_1 \text{ დონისათვის}),$$

$$Y_2 = y_{21} + y_{22} + y_{23} + \cdots + y_{2n_2} \quad (A_2 \text{ დონისათვის}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_k = y_{k1} + y_{k2} + y_{k3} + \cdots + y_{kn_k} \quad (A_k \text{ დონისათვის}).$$

2. განვსაზღვროთ ცხრილში მოთავსებულ დაკვირვებათა შედეგების კვადრატების ჯამი

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2. \tag{3.8}$$

3. გამოვთვალოთ A ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების შესაბამის დონეზე ცდების რაოდენობასთან განაყოფების ჯამი

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{Y_i^2}{n_i}. \tag{3.9}$$

4. გამოვთვალოთ ცხრილში მოთავსებული დაკვირვებათა შედეგების ჯამის კვადრატი გაყოფილი ცხრილში დაკვირვებათა საერთო რაოდენობაზე

$$Q_3 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)^2, \tag{3.10}$$

სადაც $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

5. განვსაზღვროთ ექსპერიმენტის შეცდომასთან დაკავშირებული S_0^2 დისპერსია

$$S_0^2 = \frac{Q_1 - Q_2}{N - k}. \tag{3.11}$$

6. გამოვთვალოთ A ფაქტორის ზეგავლენასთან დაკავშირებული S_A^2 დისპერსია

$$S_A^2 = \frac{Q_2 - Q_3}{k - 1}. \tag{3.12}$$

7. განვსაზღვროთ ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$F = \left|S_A^2 / S_0^2\right|. \tag{3.13}$$

8. ფიშერის ცხრილში k-1 სვეტისა და N-k სტრიქონის გადაკვეთაზე მივიღებთ შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობას — $F_{კ}$.

9. თუ საანგარიშო მნიშვნელობა აღემატება კრიტიკულ მნიშვნელობას, ე.ი.

$$F = \left|\frac{S_A^2}{S_0^2}\right| > F_{კ},$$

ვთვლით, რომ A ფაქტორი ახდენს არსებით ზეგავლენას და ამ ფაქტორის ეფექტი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\sigma_A^2 = \frac{(k-1)N}{N^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i^2}\left(S_A^2 - S_0^2\right). \tag{3.14}$$

თუ საანგარიშო მნიშვნელობა არ აღემატება კრიტიკულს, მაშინ A ფაქტორი არ ახდენს არსებით ზეგავლენას, მისი ეფექტი σ_A^2 არ გამოითვლება და ის ნულის ტოლად უნდა მივიჩნიოთ.

მაგალითი. დავუშვათ, ვსწავლობთ B ფაქტორის გავლენას და ეს ფაქტორი იცვლება k=4 დონეზე. B_1 დონეზე ჩატარებულია n_1=3, B_2 დონეზე – n_2=4, B_3 დონეზე – n_3=5 და B_4 დონეზე – n_4=4 პარალელური ცდები. დაკვირვებათა შედეგები მოცემულია ცხრილში

ცდის №	B ფაქტორის დონეები			
	B_1	B_2	B_3	B_4
1	2,0	5,0	8,0	11,0
2	2,1	5,1	7,9	11,1
3	2,0	4,9	8,1	10,9
4		5,0	8,0	11,0
5			7,9	
Σ	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4

დისპერსიული ანალიზის ჩატარებისათვის გამოვთვალოთ დაკვირვებათა შედეგების ჯამები B ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1 = 2{,}0 + 2{,}1 + 2{,}0 = 6{,}1,$$

$$Y_2 = 5{,}0 + 5{,}1 + 4{,}9 + 5{,}0 = 20{,}0,$$

$$Y_3 = 8{,}0 + 7{,}9 + 8{,}1 + 8{,}0 + 7{,}9 = 39{,}9,$$

$$Y_4 = 11{,}0 + 11{,}1 + 10{,}9 + 11{,}0 = 44{,}0.$$

განვსაზღვროთ დამხმარე სიდიდეები:

$$Q_1 = 2{,}0^2 + 2{,}1^2 + 2{,}0^2 + 5{,}0^2 + 5{,}1^2 + 4{,}9^2 + 5{,}0^2 + 8{,}0^2 + 7{,}9^2 +$$
$$+ 8{,}1^2 + 8{,}0^2 + 7{,}9^2 + 11{,}0^2 + 11{,}1^2 + 10{,}9^2 + 11{,}0^2 = 914{,}88,$$

$$Q_2 = \frac{6,1^2}{3} + \frac{20,0^2}{4} + \frac{39,9^2}{5} + \frac{44,0^2}{4} = 914,80,$$

$$Q_3 = \frac{1}{16}\left(6.1 + 20,0 + 39.9 + 44,0\right)^2 = 756,25.$$

მაშინ ექსპერიმენტის შეცდომასთან დაკავშირებული დისპერსიისათვის მივიღებთ

$$S_0^2 = \frac{914,88 - 914,80}{16 - 4} = 0,0067,$$

ხოლო B ფაქტორის ზეგავლენასთან დაკავშირებული დისპერსიისათვის

$$S_B^2 = \frac{914,8 - 756,25}{4 - 1} = 52,85.$$

ვინაიდან ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა F= =52,85/0,0067=7888,06 აღემატება ცხრილურს $F(3;12)=3,49$, B ფაქტორი ახდენს არსებით გავლენას და მისი ეფექტი

$$\sigma_B^2 = \frac{(4-1)\cdot 16}{16^2 - \left(3^2 + 4^2 + 5^2 + 4^2\right)} \cdot \left(52,85 - 0,0067\right) = 13,35.$$

3.2. ორფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი

ორფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როდესაც ერთდროულად ვსწავლობთ ორი A და B ფაქტორების ზეგავლენას. დავუშვათ A ფაქტორი იცვლება k დონეზე — $A_1, A_2, \ldots, A_k$; B ფაქტორი იცვლება m დონეზე — $B_1, B_2, \ldots, B_m$.

A და B ფაქტორების დონეების სხვადასხვა კომბინაციის პირობებში ვატარებთ ცდებს. შეიძლება ჩატარდეს თითო ან რამდენიმე პარალელური ცდა. შესაბამისად დამუშავება წარმოებს სხვადასხვა ალგორითმის მიხედვით.

3.2.1. ორფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი პარალელური დაკვირვებების გარეშე

დავუშვათ, ვსწავლობთ A და B ფაქტორების ერთდროულ ზეგავლენას. A ფაქტორი იცვლება k დონეზე — $A_1, A_2, \ldots, A_k$; B ფაქტორი – m დონეზე — $B_1, B_2, \ldots, B_m$. A და B ფაქტორების დონეების ყველა შესაძლო კომბინა-

ციის პირობებში ($N=km$) ტარდება თითო ცდა. ასეთ ექსპერიმენტს *სრული ფაქტორული ექსპერიმენტი* ეწოდება. A_iB_j დონეების კომბინაციის პირობებში მიღებული დაკვირვებათა შედეგი აღვნიშნოთ y_{ij}. დაკვირვებათა შედეგები შევიტანოთ შემდეგ ცხრილში.

ცხრილი 14

$B \backslash A$	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	$\sum$
B_1	y_{11}	y_{21}	$\cdots$	y_{k1}	Y'_1
B_2	y_{12}	y_{22}	$\cdots$	y_{k2}	Y'_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_m	y_{1m}	y_{2m}	$\cdots$	y_{km}	Y'_m
$\sum$	Y_1	Y_2	$\cdots$	Y_k	

ცხრილში მოთავსებული დაკვირვებათა შედეგების დამუშავება ხორციელდება შემდეგი ალგორითმის მიხედვით:

1. გამოითვლება დაკვირვებათა შედეგების ჯამები A ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1 = y_{11} + y_{12} + \cdots + y_{1m} \quad (A_1 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y_2 = y_{21} + y_{22} + \cdots + y_{2m} \quad (A_2 \text{ დონისათვის}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y_k = y_{k1} + y_{k2} + \cdots + y_{km} \quad (A_k \text{ დონისათვის}).$$

2. გამოითვლება დაკვირვებათა შედეგების ჯამები B ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y'_1 = y_{11} + y_{21} + \cdots + y_{k1} \quad (B_1 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y'_2 = y_{12} + y_{22} + \cdots + y_{k2} \quad (B_2 \text{ დონისათვის}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y'_m = y_{1m} + y_{2m} + \cdots + y_{km} \quad (B_k \text{ დონისათვის}).$$

3. გამოითვლება ოთხი დამხმარე სიდიდე:

ცხრილში მოთავსებული დაკვირვებათა შედეგების კვადრატების ჯამი

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}^2 , \qquad (3.15)$$

A ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი B ფაქტორის დონეთა რაოდენობაზე

$$Q_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} Y_i^2 , \qquad (3.16)$$

B ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი A ფაქტორის დონეთა რაოდენობაზე

$$Q_3 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m} Y_j'^2 , \qquad (3.17)$$

ცხრილში მოთავსებული ყველა დაკვირვების შედეგების ჯამის კვადრატი გაყოფილი დაკვირვებათა რაოდენობაზე

$$Q_4 = \frac{1}{mk}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)^2 . \qquad (3.18)$$

4. განისაზღვრება ექსპერიმენტის შეცდომასთან დაკავშირებული S_0^2 დისპერსია, A და B ფატორების ზეგავლენასთან დაკავშირებული S_A^2 და S_B^2 დისპერსიები:

$$S_0^2 = \frac{Q_1 + Q_4 - Q_2 - Q_3}{(k-1)(m-1)} , \qquad (3.19)$$

$$S_A^2 = \frac{Q_2 - Q_4}{k-1} , \qquad (3.20)$$

$$S_B^2 = \frac{Q_3 - Q_4}{m-1} . \qquad (3.21)$$

5. A და B ფაქტორების ზეგავლენის არსებითობის დასადგენად განისაზღვრება ორი საანგარიშო მნიშვნელობა:

$$F_1 = \left|\frac{S_A^2}{S_0^2}\right| , \qquad (3.22)$$

$$F_2 = \left|\frac{S_B^2}{S_0^2}\right| . \qquad (3.23)$$

ფიშერის ცხრილში მოიძებნება შესაბამისი კრიტიკული მნიშვნელობები: $F_{ც1}$ — ცხრილის k-1 სვეტისა და

(k-1)(m-1) სტრიქონის გადაკვეთაზე და $F_{ც2}$ - m-1 სვეტისა და (k-1)(m-1) სტრიქონის გადაკვეთაზე.

6. თუ საანგარიშო მნიშვნელობა

$$F_1 = \left|\frac{S_A^2}{S_0^2}\right| > F_{ც1} ,$$

მაშინ არსებითია A ფაქტორის ზეგავლენა ამ ფაქტორის ეფექტი

$$\sigma_A^2 = \frac{S_A^2 - S_0^2}{m} . \qquad (3.24)$$

თუ სრულდება პირობა

$$F_2 = \left|\frac{S_B^2}{S_0^2}\right| > F_{ც2} ,$$

მაშინ არსებითია B ფაქტორის ზეგავლენა და მისი ეფექტი

$$\sigma_B^2 = \frac{S_B^2 - S_0^2}{k} . \qquad (3.25)$$

თუ საანგარიშო მნიშვნელობები არ აღემატება მოდულით შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობებს, ასეთ შემთხვევაში ვთვლით, რომ გამოსაკვლევი ფაქტორები (ფაქტორი) არ ახდენენ არსებით ზეგავლენას. ასეთ შემთხვევაში შესაბამისი ეფექტები არ გამოითვლება და ისინი უნდა მივიჩნიოთ ნულის ტოლად.

მაგალითი. ვსწავლობთ ორი ფაქტორის ზეგავლენას. A ფაქტორი იცვლება სამ დონეზე (k=3), ხოლო B ფაქტორი - ოთხ დონეზე (m=4). A და B ფაქტორების დონეების ყველა შესაძლო კომბინაციის დროს ვატარებთ თითო ცდას. დაკვირვებათა შედეგები მოცემულია ცხრილში

B \ A	A_1	A_2	A_3	Σ
B_1	10	13	17	40
B_2	9	14	16	39
B_3	10	12	15	37
B_4	9	13	16	38
Σ	38	52	64	154

ჩავატაროთ დისპერსიული ანალიზი გამოსაკვლევი ფაქტორების არსებითობის და ზეგავლენის ხარისხის დასადგენად.

განვსაზღვროთ დაკვირვებათა შედეგების ჯამები A ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1 = 10 + 9 + 10 + 9 = 38,$$
$$Y_2 = 13 + 14 + 12 + 13 = 52,$$
$$Y_3 = 17 + 16 + 15 + 16 = 64$$

და B ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1' = 10 + 13 + 17 = 40,$$
$$Y_2' = 9 + 14 + 16 = 39,$$
$$Y_3' = 10 + 12 + 15 = 37,$$
$$Y_4' = 9 + 13 + 16 = 38.$$

გამოვთვალოთ ოთხი დამხმარე სიდიდე:

$$Q_1 = 10^2 + 9^2 + 10^2 + 9^2 + 13^2 + 14^2 + 12^2 + 13^2 + 17^2 + 16^2 + 15^2 + 16^2 = 2066,$$
$$Q_2 = \frac{1}{4}\left(38^2 + 52^2 + 64^2\right) = 2061,$$
$$Q_3 = \frac{1}{3}\left(40^2 + 39^2 + 37^2 + 38^2\right) = 1978,$$
$$Q_4 = \frac{1}{3 \cdot 4}(154)^2 = 1976{,}33.$$

ექსპერიმენტის შეცდომასთან, A და B ფაქტორების ზეგავლენასთან დაკავშირებული დისპერსიებისათვის მივიღებთ:

$$S_0^2 = \frac{2066 + 1976{,}33 - 2061 - 1978}{(3-1)(4-1)} = 0{,}555,$$
$$S_A^2 = \frac{2061 - 1976{,}33}{3-1} = 42{,}335,$$
$$S_B^2 = \frac{1978 - 1976{,}33}{4-1} = 0{,}557.$$

ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობებისათვის გვექნება:

$$F_1 = \frac{42{,}335}{0{,}555} = 76{,}279 \quad (A \text{ ფაქტორისათვის}),$$
$$F_2 = \frac{0{,}557}{0{,}555} = 1{,}004 \quad (B \text{ ფაქტორისათვის}).$$

ფიშერის ცხრილიდან ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობები:

$$F_{1\text{ც}} = F(2;6) = 5{,}14, \quad F_{2\text{ც}} = F(3;6) = 4{,}76.$$

ვინაიდან $F_1=76{,}279 > F_{1\text{ც}}=5{,}14$, A ფაქტორი ახდენს არსებით ზეგავლენას და ამ ფაქტორის ეფექტი

$$\sigma_A^2 = \frac{42{,}335 - 0{,}555}{4} = 10{,}445.$$

ვინაიდან $F_2=1{,}004 < F_{2\text{ც}}=4{,}76$, B ფაქტორი არსებით ზეგავლენას არ ახდენს და მისი ეფექტი ნულის ტოლია.

3.2.2. ორფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი პარალელური დაკვირვებების შემთხვევაში

დავუშვათ, ვსწავლობთ A და B ფაქტორების ზეგავლენას. A ფაქტორი იცვლება k დონეზე – $A_1, A_2, \ldots, A_k$; B ფაქტორი – m დონეზე – $B_1, B_2, \ldots, B_m$. A და B ფაქტორების დონეების ყველა შესაძლო კომბინაციის დროს ტარდება n პარალელური ცდა. მაშინ A_iB_j დონეების კომბინაციის დროს მივიღებთ პარალელურ დაკვირვებათა შედეგებს: $y_{ij1}, y_{ij2}, \ldots, y_{ijn}$.

თუ ჩავატარებთ n პარალელურ ცდას შესასწავლი ფაქტორების დონეების ყველა შესაძლო კომბინაციის დროს, მივიღებთ დაკვირვებათა შედეგებს, რომლებიც მოცემულია შემდეგ ცხრილში.

ცხრილი 15

B \ A	A_1	A_2	…	A_k
B_1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11n}$	$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21n}$	…	$y_{k11}, y_{k12}, \ldots, y_{k1n}$
B_2	$y_{121}, y_{122}, \ldots, y_{12n}$	$y_{221}, y_{222}, \ldots, y_{22n}$	…	$y_{k21}, y_{k22}, \ldots, y_{k2n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
B_m	$y_{1m1}, y_{1m2}, \ldots, y_{1mn}$	$y_{2m1}, y_{2m2}, \ldots, y_{2mn}$	…	$y_{km1}, y_{km2}, \ldots, y_{kmn}$

ცხრილში მოთავსებული დაკვირვებათა შედეგების დისპერსიული ანალიზი წარმოებს შემდეგი ალგორითმის მიხედვით:

1. გამოვთვალოთ ცხრილში მოთავსებულ დაკვირვებათა შედეგების კვადრატების ჯამი

$$Q_5 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} y_{ij\nu}^2. \tag{3.26}$$

2. შემდეგ A და B ფაქტორების დონეების ყოველი კომბინაციისათვის განისაზღვრება დაკვირვებათა შედეგ-

ბის საშუალო არითმეტიკულები. მაგალითად, დონეების A_iB_j კომბინაციისათვის

$$\bar{y}_{ij} = \frac{y_{ij1} + y_{ij2} + \cdots + y_{ijn}}{n}.$$

ფაქტორების დონეების ყველა კომბინაციისათვის მიღებული საშუალო არითმეტიკულები შევიტანოთ ცხრილში.

ცხრილი 16

$B \backslash A$	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	Σ
B_1	$\bar{y}_{11}$	$\bar{y}_{21}$	$\cdots$	$\bar{y}_{k1}$	Y'_1
B_2	$\bar{y}_{12}$	$\bar{y}_{22}$	$\cdots$	$\bar{y}_{k2}$	Y'_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_m	$\bar{y}_{1m}$	$\bar{y}_{2m}$	$\cdots$	$\bar{y}_{km}$	Y'_m
Σ	Y_1	Y_1	$\cdots$	Y_k	

3. მე–16 ცხრილში მოთავსებული საშუალო არითმეტიკულებით გამოვთვალოთ მათი ჯამები A ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1 = \bar{y}_{11} + \bar{y}_{12} + \cdots + \bar{y}_{1m} \quad (A_1 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y_2 = \bar{y}_{21} + \bar{y}_{22} + \cdots + \bar{y}_{2m} \quad (A_2 \text{ დონისათვის}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y_k = \bar{y}_{k1} + \bar{y}_{k2} + \cdots + \bar{y}_{km} \quad (A_k \text{ დონისათვის}).$$

4. გამოვთვალოთ საშუალო არითმეტიკულების ჯამები B ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y'_1 = \bar{y}_{11} + \bar{y}_{21} + \cdots + \bar{y}_{k1} \quad (B_1 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y'_2 = \bar{y}_{12} + \bar{y}_{22} + \cdots + \bar{y}_{k2} \quad (B_2 \text{ დონისათვის}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y'_m = \bar{y}_{1m} + \bar{y}_{2m} + \cdots + \bar{y}_{km} \quad (B_m \text{ დონისათვის}).$$

5. მე–16 ცხრილის მონაცემებით გამოვთვალოთ ოთხი დამხმარე სიდიდე:

საშუალო არითმეტიკულების კვადრატების ჯამი

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \bar{y}_{ij}^2, \tag{3.27}$$

A ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი B ფაქტორის დონეთა რაოდენობაზე

$$Q_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} Y_i^2. \tag{3.28}$$

B ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი A ფაქტორის დონეების რაოდენობაზე

$$Q_3 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m} Y_j'^2, \tag{3.29}$$

საშუალო არითმეტიკულების საერთო ჯამის კვადრატი გაყოფილი საშუალო არითმეტიკულების რაოდენობაზე

$$Q_4 = \frac{1}{mk}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)^2. \tag{3.30}$$

6. განვსაზღვროთ ექსპერიმენტის შეცდომასთან დაკავშირებული S_0^2 დისპერსია, A და B ფაქტორების ზეგავლენასთან დაკავშირებული S_A^2 და S_B^2 დისპერსიები, აგრეთვე A და B ფაქტორების ურთიერთქმედებასთან დაკავშირებული S^2_{AB} დისპერსია:

$$S_0^2 = \frac{Q_1 + Q_4 - Q_2 - Q_3}{(k-1)(m-1)}, \tag{3.31}$$

$$S_A^2 = \frac{Q_2 - Q_4}{k-1}, \tag{3.32}$$

$$S_B^2 = \frac{Q_3 - Q_4}{m-1}, \tag{3.33}$$

$$S_{AB}^2 = \frac{Q_5 - nQ_1}{mk(n-1)}. \tag{3.34}$$

7. გამოვთვალოთ ფიშერის კრიტერიუმის სამი საანგარიშო მნიშვნელობა:

$$F_1 = \left|\frac{S_A^2}{S_0^2}\right|, \tag{3.35}$$

$$F_2 = \left|\frac{S_B^2}{S_0^2}\right|, \tag{3.36}$$

$$F_3 = \left|\frac{nS_0^2}{S_{AB}^2}\right|. \tag{3.37}$$

ფიშერის ცხრილიდან მოვძებნოთ სამი კრიტიკული მნიშვნელობა: $F_{ც1}$ A ფაქტორისათვის k-1 სვეტისა და (k-1)(m-1) სტრიქონის გადაკვეთაზე; $F_{ც2}$ B ფაქტორისათვის m-1 სვეტისა და (k-1)(m-1) სტრიქონის გადაკვეთაზე და $F_{ც3}$ A და B ფაქტორების ურთიერთქმედებისათვის (k-1)(m-1) სვეტისა და mk(n-1) სტრიქონის გადაკვეთაზე.

8. თუ საანგარიშო მნიშვნელობები აღემატება შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობებს

$$F_1 = \left|\frac{S_A^2}{S_0^2}\right| > F_{ც1}, \quad F_2 = \left|\frac{S_B^2}{S_0^2}\right| > F_{ც2},$$

მაშინ არსებითია A და B ფაქტორების ზეგავლენა. ამ ფაქტორების ეფექტები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\sigma_A^2 = \frac{S_A^2 - S_0^2}{m}, \tag{3.38}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{S_B^2 - S_0^2}{k}. \tag{3.39}$$

თუ სრულდება პირობა

$$F_3 = \left|\frac{nS_0^2}{S_{AB}^2}\right| > F_{ც3},$$

მაშინ არსებითია A და B ფაქტორების ურთიერთქმედების ეფექტი, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\sigma_{AB}^2 = \frac{nS_0^2 - S_{AB}^2}{n} = S_0^2 - \frac{S_{AB}^2}{n}. \tag{3.40}$$

თუ საანგარიშო მნიშვნელობები არ აღემატება კრიტიკულ მნიშვნელობებს, მაშინ ვთვლით, რომ სათანადო ფაქტორი ან ფაქტორების ურთიერთქმედება არ ახდენს არსებით ზეგავლენას. ამ შემთხვევაში შესაბამისი ეფექტების გამოთვლა არ ხდება და ეს ეფექტები უნდა მივიჩნიოთ ნულის ტოლად.

მაგალითი. დავუშვათ, ვსწავლობთ ორი ფაქტორის ზეგავლენას, ერთი (ფაქტორი A) იცვლება k=3 დონეზე — A_1, A_2, A_3, მეორე (ფაქტორი B) იცვლება m=4 დონეზე — B_1, B_2, B_3, B_4. A და B ფაქტორების დონეების ნებისმიერი კომბინაციის დროს ჩატარებულია სამ-სამი პარალელური ცდა (n=3). სათანადო დაკვირვებათა შედეგები შეტანილია ცხრილში.

B \ A	A_1	A_2	A_3
B_1	3,6; 3,8; 4,1	2,9; 3,1; 3,0	2,7; 2,5; 2,9
B_2	4,2; 4,0; 4,1	3,3; 2,9; 3,2	3,7; 3,5; 3,6
B_3	3,8; 3,5; 3,6	3,6; 3,7; 3,5	3,2; 3,0; 3,4
B_4	3,4; 3,2 3,2	3,4; 3,6; 3,5	3,6; 3,8; 3,7

გამოვიყენოთ დისპერსიული ანალიზი და შევაფასოთ A და B ფაქტორების, აგრეთვე მათი ურთიერთქმედების ზეგავლენის არსებითობა.

ზემოთ აღწერილი ალგორითმით ვიპოვოთ ცხრილში მოთავსებულ დაკვირვებათა შედეგების კვადრატების ჯამი:

$$Q_5 = 3{,}6^2 + 3{,}8^2 + 4{,}1^2 + 2{,}9^2 + \cdots + 3{,}8^2 + 3{,}7^2 = 431{,}32,$$

შემდეგ დაკვირვებათა შედეგების საშუალო არითმეტიკულები A და B ფაქტორების დონეების ყველა კომბინაციისათვის. მაგალითად, A_1B_1 კომბინაციისათვის

$$\bar{y}_{11} = \frac{3{,}6 + 3{,}8 + 4{,}1}{3} = 3{,}83.$$

მიღებული საშუალო არითმეტიკულები A და B ფაქტორების დონეების სხვადასხვა კომბინაციისათვის შევიტანოთ ცხრილში.

B \ A	A_1	A_2	A_3	Σ
B_1	3,83	3,00	2,70	9,53
B_2	4,10	3,13	3,50	10,73
B_3	3,63	3,60	3,20	10,43
B_4	3,27	3,50	3,70	10,47
Σ	14,83	13,23	13,10	41,16

ამ ცხრილის საშუალო არითმეტიკულების გამოყენებით გამოვთვალოთ მათი ჯამები A ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1 = 3{,}83 + 4{,}10 + 3{,}63 + 3{,}27 = 14{,}83,$$

$$Y_2 = 3{,}00 + 3{,}13 + 3{,}60 + 3{,}50 = 13{,}23,$$

$$Y_3 = 2{,}70 + 3{,}50 + 3{,}20 + 3{,}70 = 13{,}10.$$

განვსაზღვროთ საშუალო არითმეტიკულების ჯამები B ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1' = 3,83 + 3,00 + 2,70 = 9,53,$$

$$Y_2' = 4,10 + 3,13 + 3,50 = 10,73,$$

$$Y_3' = 3,63 + 3,60 + 3,20 = 10,43,$$

$$Y_4' = 3,27 + 3,50 + 3,70 = 10,47.$$

ბოლო ცხრილის მონაცემებით გამოვთვალოთ ოთხი დამხმარე სიდიდე:

$$Q_1 = 3,83^2 + 3,00^2 + 2,70^2 + 4,10^2 + 3,13^2 + 3,50^2 + 3,63^2 + $$

$$+ 3,60^2 + 3,20^2 + 3,27^2 + 3,50^2 + 3,70^2 = 142,83,$$

$$Q_2 = \frac{14,83^2 + 13,23^2 + 13,10^2}{4} = 141,64,$$

$$Q_3 = \frac{9,53^2 + 10,73^2 + 10,43^2 + 10,47^2}{3} = 141,45,$$

$$Q_4 = \frac{(14,83 + 13,23 + 13,10)^2}{4 \cdot 3} = 141,18,$$

დისპერსიები:

$$S_0^2 = \frac{142,83 + 141,18 - 141,64 - 141,45}{(3-1)(4-1)} = 0,153,$$

$$S_A^2 = \frac{141,64 - 141,18}{3-1} = 0,23,$$

$$S_B^2 = \frac{141,45 - 141,18}{4-1} = 0,09,$$

$$S_{AB}^2 = \frac{431,32 - 3 \cdot 142,83}{4 \cdot 3 \cdot (3-1)} = 0,118.$$

გამოვთვალოთ ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობები A და B ფაქტორებისათვის

$$F_1 = \left|\frac{S_A^2}{S_0^2}\right| = \left|\frac{0,23}{0,153}\right| = 1,50, \quad F_2 = \left|\frac{S_B^2}{S_0^2}\right| = \left|\frac{0,09}{0,153}\right| = 0,06,$$

აგრეთვე ურთიერთქმედებისათვის

$$F_3 = \left|\frac{nS_0^2}{S^2}\right| = \left|\frac{3 \cdot 0,153}{0,118}\right| = 3,90.$$

ფიშერის ცხრილში k-1=3-1=2 სვეტისა და (k-1)(m-1)=(3-1)(4-1)==6 სტრიქონის გადაკვეთაზე მოვძებნოთ კრიტიკული მნიშვნელობა $F_{ც1}$=5,14; m-1=4-1=3 სვეტისა და (k-1)(m-1)=(3-1)(4-1)=6 სტრიქონის გადაკვეთაზე – $F_{ც2}$=4,76; (k-1)(m-1)=(3-1)(4-1)=6 სვეტისა და $mk(n$-1)==4·3(3-1)=24 სტრიქონის გადაკვეთაზე – $F_{ც3}$=2,51.

ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა F_1=1,50<$F_{ც1}$=5,14 და F_2==0,59<$F_{ც2}$=4,76, ამიტომ A და B ფაქტორები არ ახდენენ არსებით ზეგავლენას და შესაბამისი ეფექტები უნდა მივიჩნიოთ ნულის ტოლად.

ვინაიდან F_3=3,90>$F_{ც3}$=2,51, A და B ფაქტორების ურთიერთქმედება არსებითია და შესაბამისი ეფექტი

$$\sigma_{AB}^2 = \frac{3 \cdot 0,153 - 0,118}{3} = 0,113.$$

ჩატარებული გამოკვლევის შედეგად დავადგინეთ, რომ დამოუკიდებლად არც A და არც B ფაქტორი არსებით ზეგავლენას არ ახდენს, მაგრამ მათი ერთობლივი შეცვლა გვაძლევს არსებით ეფექტს.

3.3. პირველი რიგის ლათინური კვადრატები

თუ ერთდროულად ვსწავლობთ სამი A, B და C ფაქტორის ერთდროულ ზეგავლენას, სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის რეალიზაცია მოითხოვს $N=kml$ ცდის ჩატარებას, სადაც k, m, l შესაბამისად A, B და C ფაქტორების დონეების რაოდენობაა. ცდების ასეთი დიდი რაოდენობის ჩატარება პრაქტიკულად შეუძლებელია. ამიტომ სამი ფაქტორის ერთდროული ზეგავლენის შესწავლისათვის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტების ნაცვლად იყენებენ უფრო ეკონომიურ წილადურ ფაქტორულ ექსპერიმენტებს, რომლებშიც ცდები ტარდება შესასწავლი სამი ფაქტორის დონეების არა ყველა, არამედ მხოლოდ ზოგიერთი კომბინაციის პირობებში.

ცნობილია წილადური ფაქტორული ექსპერიმენტების აგების სხვადასხვა ხერხი. ერთ-ერთ ხერხს წარმოადგენს პირველი რიგის ლათინური კვადრატები, რომლებიც გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როდესაც სამივე შესასწავლი ფაქტორი იცვლება დონეთა ერთნაირ რაოდენობაზე, ვთქვათ k დონეზე. სრული ფაქტორული ექსპერიმენტი ამ შემთხვევაში მოითხოვს ცდების ჩატარებას გეგმის $N=kkk=k^3$ წერ-

ტილში. პირველი რიგის ლათინური კვადრატი კი მოითხოვს ცდების ჩატარებას სულ k^2 წერტილში, ე.ი. ცდებში ვიგებთ k–ჯერ.

პირველი რიგის ლათინური კვადრატის ასაგებად იყენებენ ორფაქტორიანი (A და B) დისპერსიული ანალიზის (kxk) განზომილების ცხრილს, მესამე C ფაქტორის დონეებს ისე ათავსებენ ამ ცხრილში, რომ არცერთ სტრიქონსა და არცერთ სვეტში ორჯერ არ შეგვხვდეს C ფაქტორის ერთი და იგივე დონე. ასეთი გეგმა მარტივად აიგება ციკლური ძვრის მეთოდით. ამისათვის ცხრილის პირველ სტრიქონში მიმდევრობით უნდა ჩაიწეროს C ფაქტორის ყველა დონე; მეორე სტრიქონს ვიღებთ პირველი სტრიქონის დაძვრით მარჯვნიდან მარცხნივ ერთი პოზიციით და ა.შ.

მაგალითისათვის განვიხილოთ პირველი რიგის ლათინური კვადრატის აგება k=5 დონისათვის.

ცხრილი 17

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
B_2	C_2	C_3	C_4	C_5	C_1
B_3	C_3	C_4	C_5	C_1	C_2
B_4	C_4	C_5	C_1	C_2	C_3
B_5	C_5	C_1	C_2	C_3	C_4

ცხრილი 18

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Σ
B_1	y_{11}	y_{21}	y_{31}	y_{41}	y_{51}	Y'_1
B_2	y_{12}	y_{22}	y_{32}	y_{42}	y_{52}	Y'_2
B_3	y_{13}	y_{23}	y_{33}	y_{43}	y_{53}	Y'_3
B_4	y_{14}	y_{24}	y_{34}	y_{44}	y_{54}	Y'_4
B_5	y_{15}	y_{25}	y_{35}	y_{45}	y_{55}	Y'_5
Σ	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	

ამ გეგმით ჩავატაროთ $k^2=5^2=25$ ცდა შემდეგ პირობებში:

1. $A_1B_1C_1 - y_{11}$, 5. $A_5B_1C_5 - y_{51}$,
2. $A_2B_1C_2 - y_{21}$, 6. $A_1B_2C_2 - y_{12}$,
3. $A_3B_1C_3 - y_{31}$, ...
4. $A_4B_1C_4 - y_{41}$, 25. $A_5B_5C_4 - y_{55}$.

დაკვირვებათა შედეგები აღვნიშნოთ y_{ij}, სადაც პირველი ინდექსი i შეესაბამება A ფაქტორის დონეს, ხოლო მეორე ინდექსი j – B ფაქტორის დონეს.

დაკვირვებათა შედეგები შევიტანოთ მე–17 ცხრილში. დაკვირვებათა შედეგების დამუშავება ხორციელდება დისპერსიული ანალიზის შემდეგი ალგორითმის მიხედვით:

1. გამოვთვალოთ დაკვირვებათა შედეგების ჯამები A ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1 = y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15},$$
$$Y_2 = y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} + y_{25},$$
$$Y_3 = y_{31} + y_{32} + y_{33} + y_{34} + y_{35},$$
$$Y_4 = y_{41} + y_{42} + y_{43} + y_{44} + y_{45},$$
$$Y_5 = y_{51} + y_{52} + y_{53} + y_{54} + y_{55}.$$

2. გამოვთვალოთ დაკვირვებათა შედეგების ჯამები B ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y'_1 = y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41} + y_{51},$$
$$Y'_2 = y_{12} + y_{22} + y_{32} + y_{42} + y_{52},$$
$$Y'_3 = y_{13} + y_{23} + y_{33} + y_{43} + y_{53},$$
$$Y'_4 = y_{14} + y_{24} + y_{34} + y_{44} + y_{54},$$
$$Y'_5 = y_{15} + y_{25} + y_{35} + y_{45} + y_{55}.$$

3. გამოვთვალოთ დაკვირვებათა შედეგების ჯამები C ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y''_1 = y_{11} + y_{52} + y_{43} + y_{34} + y_{25} \quad (C_1 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y''_2 = y_{21} + y_{12} + y_{53} + y_{44} + y_{35} \quad (C_2 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y''_3 = y_{31} + y_{22} + y_{13} + y_{54} + y_{45} \quad (C_3 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y''_4 = y_{41} + y_{32} + y_{23} + y_{14} + y_{55} \quad (C_4 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y''_5 = y_{51} + y_{42} + y_{33} + y_{24} + y_{15} \quad (C_5 \text{ დონისათვის}).$$

4. გამოვთვალოთ ხუთი დამხმარე სიდიდე:

ცხრილში მოთავსებულ დაკვირვებათა შედეგების კვადრატების ჯამი

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} y_{ij}^2, \qquad (3.41)$$

A ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი დონეთა რაოდენობაზე

$$Q_2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i^2, \qquad (3.42)$$

B ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი დონეთა რაოდენობაზე

$$Q_3 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y_j'^2, \qquad (3.43)$$

ცხრილში მოთავსებულ დაკვირვებათა შედეგების საერთო ჯამის კვადრატი გაყოფილი ცხრილში დაკვირვებათა რაოდენობაზე

$$Q_4 = \frac{1}{k^2}\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)^2, \qquad (3.44)$$

C ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი დონეთა რაოდენობაზე

$$Q_5 = \frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k} Y_\nu''^2. \qquad (3.45)$$

5. ვიპოვოთ ექსპერიმენტის შეცდომასთან დაკავშირებული S_0^2, A, B და C ფაქტორების ზეგავლენასთან დაკავშირებული S_A^2, S_B^2 და S_C^2 დისპერსიები:

$$S_0^2 = \frac{Q_1 + 2Q_4 - Q_2 - Q_3 - Q_5}{(k-1)(k-2)}, \qquad (3.46)$$

$$S_A^2 = \frac{Q_2 - Q_4}{k-1}, \qquad (3.47)$$

$$S_B^2 = \frac{Q_3 - Q_4}{k-1}, \qquad (3.48)$$

$$S_C^2 = \frac{Q_5 - Q_4}{k-1}. \qquad (3.49)$$

6. განვსაზღვროთ ფიშერის კრიტერიუმის სამი საანგარიშო მნიშვნელობა:

$$F_1 = \left|\frac{S_A^2}{S_0^2}\right|, \qquad (3.50)$$

$$F_2 = \left|\frac{S_B^2}{S_0^2}\right|, \qquad (3.51)$$

$$F_3 = \left|\frac{S_C^2}{S_0^2}\right|. \qquad (3.52)$$

ფიშერის ცხრილში k-1 სვეტისა და (k-1)(k-2) სტრიქონის გადაკვეთაზე მოვძებნოთ შესაბამისი კრიტიკული მნიშვნელობა, რომელიც სამივე ფაქტორისათვის ერთნაირია, ე.ი. $F_{ც1}=F_{ც2}=F_{ც3}=F_ც$.

7. თუ საანგარიშო მნიშვნელობები აღემატება კრიტიკულ მნიშვნელობას

$$F_1 = \left|\frac{S_A^2}{S_0^2}\right| > F_ც, \quad F_2 = \left|\frac{S_B^2}{S_0^2}\right| > F_ც, \quad F_3 = \left|\frac{S_C^2}{S_0^2}\right| > F_ც,$$

მაშინ A, B და C ფაქტორები ახდენენ არსებით ზეგავლენას და მათი ეფექტები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\sigma_A^2 = \frac{S_A^2 - S_0^2}{k}, \qquad (3.53)$$

$$\sigma_B^2 = \frac{S_B^2 - S_0^2}{k}, \qquad (3.54)$$

$$\sigma_C^2 = \frac{S_C^2 - S_0^2}{k}. \qquad (3.55)$$

თუ ზემოთ მოყვანილი პირობები არ სრულდება, შესაბამისი ფაქტორები (ფაქტორი) არ ახდენენ არსებით ზეგავლენას და მათ ეფექტებს არ გამოვთვლით – ისინი უნდა მივიჩნიოთ ნულის ტოლად.

მაგალითი. ვსწავლობთ სამი ფაქტორის – ტემპერატურის (A), წნევის (B) და აერაციის სიჩქარის (C) ზეგავლენას საზომი მოწყობილობის ცდომილებაზე. ყველა ფაქტორი იცვლება k=4 დონეზე. ტემპერატურის ზეგავლენას ვსწავლობთ 10, 20, 30 და 40°C, ატმოსფერული წნევის ზეგავლენას 1,00; 1,05; 1,10 და 1,15 კპა და აერაციის სიჩქარის ზეგავლენას 1,0; 1,5; 2,0 და 2,5 მ/წმ პირობებში.

ექსპერიმენტის გეგმა პირველი რიგის ლათინური კვადრატის სახით მოცემულია ქვემოთ

B \ A	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	C_1	C_2	C_3	C_4
B_2	C_2	C_3	C_4	C_1
B_3	C_3	C_4	C_1	C_2
B_4	C_4	C_1	C_2	C_3

ამ გეგმის 16 წერტილში ჩატარებულია ცდები და მიღებულია დაკვირვებათა შედეგები, რომლებიც მოცემულია ქვემოთ, ცხრილის ბოლო სვეტში

ცდის №	ფაქტორების დონეების კომბინაცია	ფაქტორები			ცდომილება, %
		ტემპერატურა, °C	წნევა, კპა	აერაციის სიჩქარე, მ/წმ	
1	$A_1B_1C_1$	10	1,00	1,0	y_{11}=2,0
2	$A_2B_1C_2$	20	1,00	1,5	y_{21}=5,0
3	$A_3B_1C_3$	30	1,00	2,0	y_{31}=7,0
4	$A_4B_1C_4$	40	1,00	2,5	y_{41}=9,0
5	$A_1B_2C_2$	10	1,05	1,5	y_{12}=2,5
6	$A_2B_2C_3$	20	1,05	2,0	y_{22}=6,0
7	$A_3B_2C_4$	30	1,05	2,5	y_{32}=8,0
8	$A_4B_2C_1$	40	1,05	1,0	y_{42}=11,0
9	$A_1B_3C_3$	10	1,10	2,0	y_{13}=3,0
10	$A_2B_3C_4$	20	1,10	2,5	y_{23}=6,5
11	$A_3B_3C_1$	30	1,10	1,0	y_{33}=8,5
12	$A_4B_3C_2$	40	1,10	1,5	y_{43}=11,5
13	$A_1B_4C_4$	10	1,15	2,5	y_{14}=2,5
14	$A_2B_4C_1$	20	1,15	1,0	y_{24}=7,0
15	$A_3B_4C_2$	30	1,15	1,5	y_{34}=9,0
16	$A_4B_4C_3$	40	1,15	2,0	y_{44}=12,0

დაკვირვებათა შედეგები შეტანილია ცხრილში

A / B	A_1	A_2	A_3	A_4	Σ
B_1	2,0	5,0	7,0	9,0	23,0
B_2	2,5	6,0	8,0	11,0	27,5
B_3	3,0	6,5	8,5	11,5	29,5
B_4	2,5	7,0	9,0	12,0	30,5
Σ	10,0	24,5	32,5	43,5	110,5

დაკვირვებათა შედეგების ჯამები A ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1 = 2{,}0 + 2{,}5 + 3{,}0 + 2{,}5 = 10{,}0,$$

$$Y_2 = 5{,}0 + 6{,}0 + 6{,}5 + 7{,}0 = 24{,}5,$$

$$Y_3 = 7{,}0 + 8{,}0 + 8{,}5 + 9{,}0 = 32{,}5,$$

$$Y_4 = 9{,}0 + 11{,}0 + 11{,}5 + 12{,}0 = 43{,}5,$$

B ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1' = 2{,}0 + 5{,}0 + 7{,}0 + 9{,}0 = 23{,}0,$$

$$Y_2' = 2{,}5 + 6{,}0 + 8{,}0 + 11{,}0 = 27{,}5,$$

$$Y_3' = 3{,}0 + 6{,}5 + 8{,}5 + 11{,}5 = 29{,}5,$$

$$Y_4' = 2{,}5 + 7{,}0 + 9{,}0 + 12{,}0 = 30{,}5,$$

C ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1'' = 2{,}0 + 11{,}0 + 8{,}5 + 7{,}0 = 28{,}5,$$

$$Y_2'' = 5{,}0 + 2{,}5 + 11{,}5 + 9{,}0 = 28{,}0,$$

$$Y_3'' = 7{,}0 + 6{,}0 + 3{,}0 + 12{,}0 = 28{,}0,$$

$$Y_4'' = 9{,}0 + 8{,}0 + 6{,}5 + 2{,}5 = 26{,}0.$$

გამოვთვალოთ დამხმარე სიდიდეები:

$$Q_1 = 2{,}0^2 + 2{,}5^2 + 3{,}0^2 + 2{,}5^2 + 5{,}0^2 + 6{,}0^2 + 6{,}5^2 + 7{,}0^2 + 7{,}0^2 +$$

$$8{,}0^2 + 8{,}5^2 + 9{,}0^2 + 9{,}0^2 + 11{,}0^2 + 11{,}5^2 + 12{,}0^2 = 922{,}25,$$

$$Q_2 = \frac{1}{4}\left(10{,}0^2 + 24{,}5^2 + 32{,}5^2 + 43{,}5^2\right) = 912{,}19,$$

$$Q_3 = \frac{1}{4}\left(23{,}0^2 + 27{,}5^2 + 29{,}5^2 + 30{,}5^2\right) = 771{,}44,$$

$$Q_4 = \frac{1}{4 \cdot 4}\left(10{,}0 + 24{,}5 + 32{,}5 + 43{,}5\right)^2 = 763{,}14,$$

$$Q_5 = \frac{1}{4}\left(28{,}5^2 + 28{,}0^2 + 28{,}0^2 + 26{,}0^2\right) = 764{,}06.$$

A, B და C ფაქტორების ზეგავლენასთან დაკავშირებული დისპერსიებისათვის მივიღებთ:

$$S_A^2 = \frac{912{,}19 - 763{,}14}{4-1} = 49{,}68, \qquad S_B^2 = \frac{771{,}44 - 763{,}14}{4-1} = 2{,}77,$$

$$S_C^2 = \frac{764{,}06 - 763{,}14}{4-1} = 0{,}31.$$

ექსპერიმენტის შეცდომასთან დაკავშირებული დისპერსიისათვის გვექნება:

$$S_0^2 = \frac{922{,}25 + 2 \cdot 763{,}14 - 912{,}19 - 771{,}44 - 764{,}06}{(4-1)(4-2)} = 0{,}14.$$

ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობები

$$F_1 = \frac{49{,}68}{0{,}14} = 354{,}86, \qquad F_2 = \frac{2{,}77}{0{,}14} = 19{,}79, \qquad F_3 = \frac{0{,}31}{0{,}14} = 2{,}21.$$

კრიტიკული მნიშვნელობა $F_{\text{კ}}=F(3;6)=4{,}76$.

ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობები F_1 და F_2 აღემატება კრიტიკულს, A და B ფაქტორები (ტემპერატურა და წნევა) არსებით ზეგავლენას ახდენენ და მათი ეფექტები ტოლია

$$\sigma_A^2 = \frac{49,68 - 0,14}{4} = 12,385, \qquad \sigma_B^2 = \frac{2,77 - 0,14}{4} = 0,658.$$

ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა F_3 ნაკლებია კრიტიკულზე, C ფაქტორი (აერაციის სიჩქარე) არ ახდენს არსებით ზეგავლენას და ამ ფაქტორის ეფექტი უნდა მივიჩნიოთ ნულის ტოლად.

σ_A^2 და σ_B^2 ეფექტების შედარება გვიჩვენებს, რომ ტემპერატურა $\sigma_A^2/\sigma_B^2=12,385/0,658=18,8$–ჯერ მეტ ზეგავლენას ახდენს ცდომილებაზე, ვიდრე ატმოსფერული წნევა.

3.4. მეორე რიგის ლათინური კვადრატები

მეორე რიგის ლათინური კვადრატები გამოიყენება ოთხი A, B, C და D ფაქტორის ზეგავლენის ერთდროული შესწავლისას. იგულისხმება, რომ ოთხივე ფაქტორი იცვლება დონეთა ერთნაირ რაოდენობაზე, მაგალითად, k დონეზე.

თუ გამოვიყენებთ სრულ ფაქტორულ ექსპერიმენტს, ცდები უნდა ჩავატაროთ ამ ფაქტორების დონეების ყველა შესაძლო კომბინაციის დროს. ასეთი კომბინაციების რაოდენობა კი შეადგენს $N=k\cdot k\cdot k\cdot k=k^4$. ცდების ასეთი დიდი რაოდენობის რეალიზაცია გაძნელებულია, ამიტომ ისევე, როგორც სამი ფაქტორის შემთხვევაში, მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ ფაქტორების დონეების არა ყველა შესაძლო კომბინაცია, არამედ მხოლოდ ზოგიერთი (სპეციალურად შერჩეული).

მეორე რიგის ლათინური კვადრატი წარმოადგენს წილადური ფაქტორული ექსპერიმენტის ერთ-ერთ შესაძლო ვარიანტს და საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ ოთხი ფაქტორის ზეგავლენა სულ k^2 ცდის ჩატარებით. ამრიგად, მეორე რიგის ლათინური კვადრატი საშუალებას გვაძლევს ცდებში მოვიგოთ $k^4/k^2=k^2$–ჯერ.

- მეორე რიგის ლათინური კვადრატის ასაგებად იყენებენ ორფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზის ცხრილს პირველი ორი (A და B) ფაქტორისათვის. მესამე და მეოთხე (C და D) ფაქტორის დონეები ისე უნდა ჩაიწეროს ამ ცხრილის უჯრედებში, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობები:

- გეგმის არცერთ სტრიქონსა და არცერთ სვეტში ორჯერ არ უნდა შეგვხვდეს C ფაქტორის ერთი და იგივე დონე;
- არცერთ სტრიქონსა და არცერთ სვეტში ორჯერ არ უნდა შეგვხვდეს D ფაქტორის ერთი და იგივე დონე;
- ცხრილში დასაშვებია C და D ფაქტორების დონეების ნებისმიერი კომბინაცია მხოლოდ ერთხელ. მაგალითად, კომბინაცია C_1D_3 შეიძლება შეგვხვდეს მხოლოდ ერთხელ.

ავაგოთ მეორე რიგის ლათინური კვადრატი k=4 დონისათვის

ცხრილი 19

B \ A	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	C_1 D_1	C_2 D_2	C_3 D_3	C_4 D_4
B_2	C_2 D_3	C_1 D_4	C_4 D_1	C_3 D_2
B_3	C_3 D_4	C_4 D_3	C_1 D_2	C_2 D_1
B_4	C_4 D_2	C_3 D_1	C_2 D_4	C_1 D_3

ცხრილი 20

B \ A	A_1	A_2	A_3	A_4	$\sum$
B_1	y_{11}	y_{21}	y_{31}	y_{41}	Y_1'
B_2	y_{12}	y_{22}	y_{32}	y_{42}	Y_2'
B_3	y_{13}	y_{23}	y_{33}	y_{43}	Y_3'
B_4	y_{14}	y_{24}	y_{34}	y_{44}	Y_4'
$\sum$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	

აგებული გეგმის მიხედვით უნდა ჩავატაროთ $k^2=4^2=16$ ცდა, შემდეგ პირობებში:

1. $A_1B_1C_1D_1 - y_{11}$, 5. $A_1B_2C_2D_3 - y_{12}$,
2. $A_2B_1C_2D_2 - y_{21}$, 6. $A_2B_2C_1D_4 - y_{22}$,
3. $A_3B_1C_3D_3 - y_{31}$, ...
4. $A_4B_1C_4D_4 - y_{41}$, 16. $A_4B_4C_1D_3 - y_{44}$.

დაკვირვებათა შედეგები აქაც აღნიშნულია y_{ij}, სადაც i შეესაბამება A – ფაქტორის დონეს, ხოლო j – B – ფაქტორის დონეს. დაკვირვებათა შედეგები შევიტანოთ მე-20 ცხრილში.

დაკვირვებათა შედეგების დამუშავება ხდება დისპერსიული ანალიზის შემდეგი ალგორითმის მიხედვით:

1. გამოვთვალოთ დაკვირვებათა შედეგების ჯამები A ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1 = y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14},$$
$$Y_2 = y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24},$$

$$Y_3 = y_{31} + y_{32} + y_{33} + y_{34},$$
$$Y_4 = y_{41} + y_{42} + y_{43} + y_{44}.$$

2. გამოითვლება დაკვირვებათა შედეგების ჯამები B ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y'_1 = y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41},$$
$$Y'_2 = y_{12} + y_{22} + y_{32} + y_{42},$$
$$Y'_3 = y_{13} + y_{23} + y_{33} + y_{43},$$
$$Y'_4 = y_{14} + y_{24} + y_{34} + y_{44}.$$

3. გამოითვლება დაკვირვებათა შედეგების ჯამები C ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y''_1 = y_{11} + y_{22} + y_{33} + y_{44} \quad (C_1 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y''_2 = y_{21} + y_{12} + y_{43} + y_{34} \quad (C_2 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y''_3 = y_{31} + y_{42} + y_{13} + y_{24} \quad (C_3 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y''_4 = y_{41} + y_{32} + y_{23} + y_{14} \quad (C_4 \text{ დონისათვის}).$$

4. გამოითვლება დაკვირვებათა შედეგების ჯამები D ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y'''_1 = y_{11} + y_{32} + y_{43} + y_{24} \quad (D_1 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y'''_2 = y_{21} + y_{42} + y_{33} + y_{14} \quad (D_2 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y'''_3 = y_{31} + y_{12} + y_{23} + y_{44} \quad (D_3 \text{ დონისათვის}),$$
$$Y'''_4 = y_{41} + y_{22} + y_{13} + y_{34} \quad (D_4 \text{ დონისათვის}).$$

5. გამოითვლება ექვსი დამხმარე სიდიდე:

ცხრილში მოთავსებულ დაკვირვებათა შედეგების კვადრატების ჯამი

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} y_{ij}^2, \qquad (3.56)$$

A ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი დონეთა რაოდენობაზე

$$Q_2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} Y_i^2, \qquad (3.57)$$

B ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი დონეთა რაოდენობაზე

$$Q_3 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} Y_j'^2, \qquad (3.58)$$

ცხრილში მოთავსებულ დაკვირვებათა შედეგების საერთო ჯამის კვადრატი გაყოფილი დაკვირვებათა რაოდენობაზე

$$Q_4 = \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=1}^{k} Y_i \right)^2, \qquad (3.59)$$

C ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი დონეთა რაოდენობაზე

$$Q_5 = \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{k} Y_\nu''^2. \qquad (3.60)$$

D ფაქტორის დონეების მიხედვით ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი დონეთა რაოდენობაზე

$$Q_6 = \frac{1}{k} \sum_{\mu=1}^{k} Y_\mu'''^2. \qquad (3.61)$$

6. დამხმარე სიდიდეების გამოყენებით მოიძებნება ექსპერიმენტის შეცდომასთან დაკავშირებული დისპერსია S_0^2, A, B, C და D ფაქტორების ზეგავლენასთან დაკავშირებული S_A^2, S_B^2, S_C^2 და S_D^2 დისპერსიები:

$$S_0^2 = \frac{Q_1 + 3Q_4 - Q_2 - Q_3 - Q_5 - Q_6}{(k-1)(k-3)}, \qquad (3.62)$$

$$S_A^2 = \frac{Q_2 - Q_4}{k-1}, \qquad (3.63)$$

$$S_B^2 = \frac{Q_3 - Q_4}{k-1}, \qquad (3.64)$$

$$S_C^2 = \frac{Q_5 - Q_4}{k-1}, \qquad (3.65)$$

$$S_D^2 = \frac{Q_6 - Q_4}{k-1}. \qquad (3.66)$$

7. განისაზღვრება ფიშერის კრიტერიუმის ოთხი საანგარიშო მნიშვნელობა:

$$F_1 = \left| \frac{S_A^2}{S_0^2} \right|, \qquad (3.67)$$

$$F_2 = \left| \frac{S_B^2}{S_0^2} \right|, \qquad (3.68)$$

$$F_3 = \left|\frac{S_C^2}{S_0^2}\right|, \qquad (3.69)$$

$$F_4 = \left|\frac{S_D^2}{S_0^2}\right|. \qquad (3.70)$$

ფიშერის ცხრილის k-1 სვეტისა და $(k$-1$)(k$-3$)$ სტრიქონის გადაკვეთაზე მოიძებნება შესაბამისი კრიტიკული მნიშვნელობა, რომელიც ოთხივე ფაქტორის დონეთა თანაბარი რაოდენობის გამო იქნება ერთნაირი ყველა ფაქტორისათვის $F_{ც1}=F_{ც2}=F_{ც3}=F_{ც4}=F_{ც}$.

8. თუ საანგარიშო მნიშვნელობები აღემატება კრიტიკულს

$$F_1 = \left|\frac{S_A^2}{S_0^2}\right| > F_ც, \quad F_2 = \left|\frac{S_B^2}{S_0^2}\right| > F_ც, \quad F_3 = \left|\frac{S_C^2}{S_0^2}\right| > F_ც, \quad F_4 = \left|\frac{S_D^2}{S_0^2}\right| > F_ც,$$

მაშინ A, B, C და D ფაქტორები ახდენენ არსებით ზეგავლენას და მათი ეფექტები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\sigma_A^2 = \frac{S_A^2 - S_0^2}{k}, \qquad (3.71)$$

$$\sigma_B^2 = \frac{S_B^2 - S_0^2}{k}, \qquad (3.72)$$

$$\sigma_C^2 = \frac{S_C^2 - S_0^2}{k}, \qquad (3.73)$$

$$\sigma_D^2 = \frac{S_D^2 - S_0^2}{k}. \qquad (3.74)$$

თუ ზემოთ მოყვანილი პირობები არ სრულდება, შესაბამისი ფაქტორები (ფაქტორი) არ ახდენენ არსებით ზეგავლენას და მათ ეფექტებს არ გამოვთვლით, ისინი ნულის ტოლად უნდა მივიჩნიოთ.

ვინაიდან მეორე რიგის ლათინური კვადრატების აგება დაკავშირებულია სიძნელეებთან, ასეთი გეგმები დონეების სხვადასხვა რაოდენობისათვის მოცემულია საცნობარო ცხრილების სახით.

მაგალითად, k=5 დონის შემთხვევაში მეორე რიგის ლათინურ კვადრატს აქვს შემდეგი სახე:

ცხრილი 21

B \ A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	C_1 D_1	C_2 D_2	C_3 D_3	C_4 D_4	C_5 D_5
B_2	C_2 D_3	C_3 D_4	C_4 D_5	C_5 D_1	C_1 D_2
B_3	C_3 D_5	C_4 D_1	C_5 D_2	C_1 D_3	C_2 D_4
B_4	C_4 D_2	C_5 D_3	C_1 D_4	C_2 D_5	C_3 D_1
B_5	C_5 D_4	C_1 D_5	C_2 D_1	C_3 D_2	C_4 D_3

მაგალითი. ვსწავლობთ ოთხი ფაქტორის – ტემპერატურის (A), ტენიანობის (B), წნევის (C) და მასალის არაერთგვაროვნობის (D) ზეგავლენას. ყველა ფაქტორი იცვლება ხუთ დონეზე. ტემპერატურის დონეებია 5, 10, 15, 20, 25°C, ტენიანობის – 70, 75, 80, 85, 90 %, წნევის – 0,85, 0,90, 0,95, 1,00, 1,05 კპა, მასალის არაერთგვაროვნობის – სინჯები ხუთი სხვადასხვა ყუთიდან.

გამოვიყენოთ 21-ე ცხრილში მოცემული მეორე რიგის ლათინური კვადრატის გეგმა k=5 ფაქტორისათვის.

ამ გეგმის თანახმად ცდები ჩავატაროთ შესასწავლი ოთხი ფაქტორის დონეების სათანადო კომბინაციების პირობებში, მივიღებთ:

1. $A_1B_1C_1D_1$ y_{11}=5
2. $A_2B_1C_2D_2$ y_{21}=7
3. $A_3B_1C_3D_3$ y_{31}=9
4. $A_4B_1C_4D_4$ y_{41}=11,5
5. $A_5B_1C_5D_5$ y_{51}=13
6. $A_1B_2C_2D_3$ y_{12}=5,5
7. $A_2B_2C_3D_4$ y_{22}=7,5
8. $A_3B_2C_4D_5$ y_{32}=9,5
9. $A_4B_2C_5D_1$ y_{42}=12
10. $A_5B_2C_1D_2$ y_{52}=13,5
11. $A_1B_3C_3D_5$ y_{13}=6
12. $A_2B_3C_4D_1$ y_{23}=8
13. $A_3B_3C_5D_2$ y_{33}=10
14. $A_4B_3C_1D_3$ y_{43}=12,5
15. $A_5B_3C_2D_4$ y_{53}=14
16. $A_1B_4C_4D_2$ y_{14}=6,5
17. $A_2B_4C_5D_3$ y_{24}=8,5
18. $A_3B_4C_1D_4$ y_{34}=10,5
19. $A_4B_4C_2D_5$ y_{44}=13,5
20. $A_5B_4C_3D_1$ y_{54}=14,5
21. $A_1B_5C_5D_4$ y_{15}=7
22. $A_2B_5C_1D_5$ y_{25}=9
23. $A_3B_5C_2D_1$ y_{35}=11
24. $A_4B_5C_3D_2$ y_{45}=13
25. $A_5B_5C_4D_3$ y_{55}=15

დაკვირვებათა შედეგები შევიტანოთ ცხრილში

B \ A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	y_{11}	y_{21}	y_{31}	y_{41}	y_{51}
B_2	y_{12}	y_{22}	y_{32}	y_{42}	y_{52}
B_3	y_{13}	y_{23}	y_{33}	y_{43}	y_{53}
B_4	y_{14}	y_{24}	y_{34}	y_{44}	y_{54}
B_5	y_{15}	y_{25}	y_{35}	y_{45}	y_{55}

B \ A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Σ
B_1	5	7	9	11,5	13	45,5
B_2	5,5	7,5	9,5	12	13,5	48,0
B_3	6	8	10	12,5	14	50,5
B_4	6,5	8,5	10,5	13,5	14,5	53,5
B_5	7	9	11	13	15	55,0
Σ	30,0	40,0	50,0	62,5	70,0	252,5

დისპერსიული ანალიზის ჩასატარებლად გამოვთვალოთ დაკვირვებათა შედეგების ჯამები A ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1 = 5+5{,}5+6+6{,}5+7 = 30{,}0,$$
$$Y_2 = 7+7{,}5+8+8{,}5+9 = 40{,}0,$$
$$Y_3 = 9+9{,}5+10+10{,}5+11 = 50{,}0,$$
$$Y_4 = 11{,}5+12+12{,}5+13{,}5+13 = 62{,}5,$$
$$Y_5 = 13+13{,}5+14+14{,}5+15 = 70{,}0,$$

B ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1' = 5+7+9+11{,}5+13 = 45{,}5,$$
$$Y_2' = 5{,}5+7{,}5+9{,}5+12+13{,}5 = 48{,}0,$$
$$Y_3' = 6+8+10+12{,}5+14 = 50{,}5,$$
$$Y_4' = 6{,}5+8{,}5+10{,}5+13{,}5+14{,}5 = 53{,}5,$$
$$Y_5' = 7+9+11+13+15 = 55{,}0,$$

C ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1'' = y_{11}+y_{52}+y_{43}+y_{34}+y_{25} = 5+13{,}5+12{,}5+10{,}5+9 = 50{,}5,$$
$$Y_2'' = y_{21}+y_{12}+y_{53}+y_{44}+y_{35} = 7+5{,}5+14+13{,}5+11 = 51{,}0,$$
$$Y_3'' = y_{31}+y_{22}+y_{13}+y_{54}+y_{45} = 9+7{,}5+6+14{,}5+13 = 50{,}0,$$
$$Y_4'' = y_{41}+y_{32}+y_{23}+y_{14}+y_{55} = 11{,}5+9{,}5+8+6{,}5+15 = 50{,}5,$$
$$Y_5'' = y_{51}+y_{42}+y_{33}+y_{24}+y_{15} = 13+12+10+8{,}5+7 = 50{,}5,$$

D ფაქტორის დონეების მიხედვით:

$$Y_1''' = y_{11}+y_{42}+y_{23}+y_{54}+y_{35} = 5+12+8+14{,}5+11 = 50{,}5,$$
$$Y_2''' = y_{21}+y_{52}+y_{33}+y_{14}+y_{45} = 7+13{,}5+10+6{,}5+13 = 50{,}0,$$
$$Y_3''' = y_{31}+y_{12}+y_{43}+y_{24}+y_{55} = 9+5{,}5+12{,}5+8{,}5+15 = 50{,}5,$$
$$Y_4''' = y_{41}+y_{22}+y_{53}+y_{34}+y_{15} = 11{,}5+7{,}5+14+10{,}5+7 = 50{,}5,$$
$$Y_5''' = y_{51}+y_{32}+y_{13}+y_{44}+y_{25} = 13+9{,}5+6+13{,}5+9 = 51{,}0.$$

დამხმარე სიდიდეებისათვის გვექნება:

$$Q_1 = 5^2+5{,}5^2+6^2+6{,}5^2+7^2+7^2+7{,}5^2+8^2+8{,}5^2+9^2+9^2+9{,}5^2+10^2+10{,}5^2+$$
$$+11^2+11{,}5^2+12^2+12{,}5^2+13{,}5^2+13^2+13^2+13{,}5^2+14^2+14{,}5^2+15^2 = 2773{,}75,$$

$$Q_2 = \frac{1}{5}\left(30{,}0^2+40{,}0^2+50{,}0^2+62{,}5^2+70{,}0^2\right) = 2761{,}25,$$

$$Q_3 = \frac{1}{5}\left(45{,}5^2+48{,}0^2+50{,}5^2+53{,}5^2+55{,}0^2\right) = 2562{,}35,$$

$$Q_4 = \frac{1}{5\cdot 5}\left(30{,}0+40{,}0+50{,}0+62{,}5+70{,}0\right)^2 = 2550{,}25,$$

$$Q_5 = \frac{1}{5}\left(50{,}5^2+51{,}0^2+50{,}0^2+50{,}5^2+50{,}5^2\right) = 2550{,}35,$$

$$Q_6 = \frac{1}{5}\left(50{,}5^2+50{,}0^2+50{,}5^2+50{,}5^2+51{,}0^2\right) = 2550{,}35.$$

დისპერსიების შეფასებები

$$S_0^2 = \frac{2773{,}75+3\cdot 2550{,}25-2761{,}25-2562{,}35-2550{,}35-2550{,}35}{(5-1)(5-3)} = 0{,}025,$$

$$S_A^2 = \frac{2761{,}25-2550{,}25}{5-1} = 52{,}75, \qquad S_B^2 = \frac{2562{,}35-2550{,}25}{5-1} = 3{,}025,$$

$$S_C^2 = \frac{2550{,}35-2550{,}25}{5-1} = 0{,}025, \qquad S_D^2 = \frac{2550{,}35-2550{,}25}{5-1} = 0{,}025.$$

ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ:

$$F_1 = \frac{52{,}75}{0{,}025} = 2110, \qquad F_2 = \frac{3{,}025}{0{,}025} = 121,$$

$$F_3 = \frac{0{,}025}{0{,}025} = 1, \qquad F_4 = \frac{0{,}025}{0{,}025} = 1.$$

კრიტიკული მნიშვნელობა მოვძებნოთ ფიშერის ცხრილში k-1==5-1=4 სვეტისა და $(k\text{-}1)(k\text{-}3)$=(5-1)(5-3)=8 სტრიქონის გადაკვეთაზე: $F_{\text{ც}}$=3,84.

ვინაიდან F_1=2110>$F_{\text{ც}}$=3,84 და F_2=121>$F_{\text{ც}}$=3,84, A და B ფაქტორები (ე.ი. ტემპერატურა და ტენიანობა) არსებით ზეგავლენას ახდენენ და მათი ეფექტები იქნება:

$$\sigma_A^2 = \frac{52{,}75-0{,}025}{5} = 10{,}545, \qquad \sigma_B^2 = \frac{3{,}025-0{,}025}{5} = 0{,}600.$$

ვინაიდან F_3=1<$F_{\text{ც}}$=3,84 და F_4=1<$F_{\text{ც}}$=3,84, C და D ფაქტორები (ე.ი. წნევა და მასალის არაერთგვაროვნობა) არსებით ზეგავლენას არ ახდენენ და მათ ეფექტებს არ გამოვთვლით, მათ ნულის ტოლად ჩავთვლით.

4. კორელაციური ანალიზის საფუძვლები

წინა თავებსა და პარაგრაფებში ვიხილავდით ერთი შემთხვევითი Y სიდიდის დაკვირვებათა შედეგებს. მაგრამ ამა თუ იმ მიზეზ-შედეგობრივი კავშირების გარკვევისათვის აუცილებელია ერთდროულად დავაკვირდეთ რამდენიმე შემთხვევით სიდიდეს (გამოსავალ პარამეტრს, ოპტიმიზაციის პარამეტრს), რათა მიღებული მონაცემებით შევისწავლოთ ამ სიდიდეების ურთიერთდამოკიდებულება.

პარამეტრებს შორის სტატისტიკური კავშირების დადგენა ხდება *კორელაციური ანალიზის* დახმარებით. ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს არსებული ექსპერიმენტული მონაცემების მიხედვით ყოველ ორ პარამეტრს შორის კორელაციის კოეფიციენტის განსაზღვრაში. პარამეტრებს შორის მაღალი კორელაციის არსებობის შემთხვევაში ნებისმიერი მათგანი შეგვიძლია გამოვრიცხოთ შემდგომი განხილვიდან, ვინაიდან ის არ შეიცავს რაიმე დამატებით ინფორმაციას კვლევის ობიექტის შესახებ, გარდა სხვა პარამეტრით მიღებულისა. ბუნებრივია, მიზანშეწონილია გამოვრიცხოთ ის პარამეტრები, რომლებიც ექსპერიმენტულად უფრო ძნელად განისაზღვრება, ან რომელთა ფიზიკური არსი ნაკლებად გასაგებია.

ამ წიგნში შემოვიფარგლებით მხოლოდ ორი შემთხვევითი Y და Z სიდიდეების განხილვით. როგორც წესი, შემთხვევით სიდიდეებს შორის შეიძლება არსებობდეს მხოლოდ განსაკუთრებული სახის კავშირი, რომლის დროსაც ერთი სიდიდის შეცვლისას იცვლება მეორე სიდიდის განაწილება – ასეთ კავშირს *სტოქასტიკური* ეწოდება.

Z შემთხვევითი სიდიდის შეცვლით გამოწვეული Y შემთხვევითი სიდიდის ცვლილებაში შეგვიძლია გამოვყოთ ორი კომპონენტი: სტოქასტიკური (რომელიც დაკავშირებულია Y-ის Z-ზე დამოკიდებულებაზე) და შემთხვევითი (რომელიც დაკავშირებულია Y და Z სიდიდეების „საკუთარ“ შემთხვევით ფაქტორებზე). თუ პირველი კომპონენტი არა გვაქვს, Y და Z სიდიდეები დამოუკიდებელია. თუ სტოქასტიკური კომპონენტი ნულისაგან განსხვავდება, Y-სა და Z-ს შორის არის სტოქასტიკური კავშირი. სტოქასტიკურ

და შემთხვევით კომპონენტებს შორის თანაფარდობა განსაზღვრავს *კავშირის სიმტკიცეს*. მეორე კომპონენტის არსებობა გვაძლევს ფუნქციურ დამოკიდებულებას. ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის კორელაციის არსებობა მიანიშნებს ერთი სიდიდის პირობითი განაწილების ცენტრის დამოკიდებულებაზე მეორე სიდიდეზე.

სტოქასტიკური კავშირის გამოვლენა და მისი სიმტკიცის (კორელაციური კავშირის ხარისხის) შეფასება ხდება სპეციალური მაჩვენებლების გამოყენებით. ამ მაჩვენებლებს შორის ერთ-ერთი მთავარია *წყვილ-წყვილად კორელაციის კოეფიციენტი*

$$\rho = \frac{\mu_{YZ}}{\sigma_Y \cdot \sigma_Z},$$

სადაც μ_{YZ} შემთხვევითი Y და Z სიდიდეების მეორე შერეული მომენტია; σ_Y, σ_Z – შემთხვევითი Y და Z სიდიდეების საშუალო კვადრატული გადახრები.

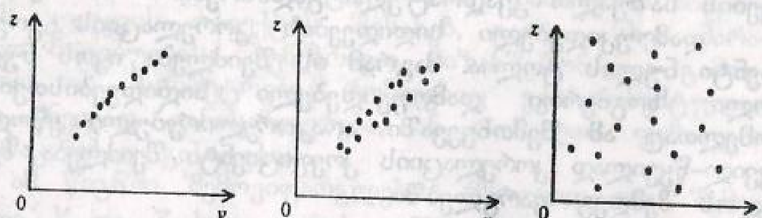
დამოუკიდებელი სიდიდეების კორელაციის კოეფიციენტი ნულის ტოლია. მაგრამ ის შეიძლება იყოს ნულის ტოლი ზოგიერთი დამოუკიდებელი სიდიდეებისთვისაც, რომელთაც ამ შემთხვევაში *არაკორელირებული* ეწოდება. წყვილ-წყვილად კორელაციის კოეფიციენტი შეიძლება შეიცვალოს შემდეგ ფარგლებში

$$-1 \le \rho \le 1.$$

თუ კორელაციის კოეფიციენტი განსხვავდება ნულისაგან, ის თავისი სიდიდით ახასიათებს არა მარტო სტოქასტიკური კავშირის არსებობას Y და Z სიდიდეებს შორის, არამედ ამ კავშირის სიმტკიცესაც. რაც უფრო მეტია ρ-ს აბსოლუტური სიდიდე, მით უფრო ძლიერია კორელაცია Y-სა და Z-ს შორის. მაქსიმალური კორელაცია შეესაბამება $\rho=\pm1$ მნიშვნელობებს (ეს ნიშნავს, რომ Y და Z სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი ფუნქციური დამოკიდებულება). თუ კორელაციის კოეფიციენტი ნულის ტოლია, კავშირი ან საერთოდ არ არსებობს, ან განსხვავებულია წრფივისაგან. რაც უფრო უახლოვდება კორელაციის კოეფიციენტის სიდიდე 1-ს, კავშირი უფრო ძლიერია, რაც უფრო ახლოსაა 0-თან—უფრო სუსტია. კორელაციის

კოეფიციენტის ნიშანი მიუთითებს კავშირის მიმართულებაზე: თუ $\rho>0$, მაშინ Y და Z სიდიდეები შემთხვევით ცდომილებამდე სიზუსტით ერთდროულად იზრდება ან კლებულობს; თუ $\rho<0$, ერთი სიდიდის ზრდისას მეორე კლებულობს.

კორელაციის კოეფიციენტის შეფასებისათვის ვატარებთ N ცდას და თითოეულში ვაფიქსირებთ ორი შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებს. მივიღებთ შემთხვევითი სიდიდეების შერჩევით N წყვილს (y_1,z_1), (y_2,z_2),..., (y_N,z_N). ეს წყვილები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც წერტილების კოორდინატები yoz საკოორდინატო სიბრტყეზე. მიღებული წერტილების ერთობლიობა მოგვცემს წარმოდგენას კორელაციის ძალის შესახებ. მე-3 ნახაზზე გამოსახულია წერტილთა ერთობლიობის მაგალითები, რომლებიც შეესაბამება ძლიერ (ა), სუსტ (ბ) კორელაციას და მის სრულ არარსებობას (გ).



ა ბ გ

ნახ. 3

კორელაციის შერჩევითი კოეფიციენტი r გამოითვლება იმავე ფორმულით, როგორც გენერალური კოეფიციენტი ρ, მაგრამ აქ უნდა ავიღოთ შერჩევითი მათემატიკური ლოდინები (საშუალოები) და დისპერსიები:

$$r=\frac{\sum_{u=1}^{N}(y_u-\bar{y})\cdot(z_u-\bar{z})}{(N-1)S_Y S_Z}, \tag{4.1}$$

სადაც

$$\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}y_u, \qquad \bar{z}=\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}z_u$$

და

$$S_Y=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{u=1}^{N}(y_u-\bar{y})^2}, \qquad S_Z=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{u=1}^{N}(z_u-\bar{z})^2}.$$

შერჩევის საკმაოდ დიდი მოცულობის დროს კორელაციის შერჩევითი r კოეფიციენტი დაახლოებით გაუტოლდება გენერალურ ρ კოეფიციენტს.

შერჩევის შემთხვევითობის გამო კორელაციის შერჩევითი კოეფიციენტი r შეიძლება განსხვავდებოდეს ნულისაგან იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც შესასწავლ სიდიდეებს შორის არაა კორელაცია. მაშასადამე კორელაციის არარსებობის შესახებ ჰიპოთეზის შემოწმებისათვის უნდა შევამოწმოთ არსებითად განსხვავდება თუ არა r ნულისაგან.

შესასწავლ სიდიდეებს შორის კორელაცია არის თუ

$$|r|>r_{\text{ცხ}},$$

სადაც $r_{\text{ცხ}}$ კორელაციის კოეფიციენტის კრიტიკული მნიშვნელობაა, რომელიც შეირჩევა შესაბამისი ცხრილიდან (იხ. მე–7 დანართი) $k=N-2$ თავისუფლების ხარისხისა და მნიშვნელოვნობის შერჩეული q დონისათვის. ამ ცხრილის ფრაგმენტი (q=0,05–ის შემთხვევაში) მოცემულია ქვემოთ.

ცხრილი 22

კორელაციის კოეფიციენტის კრიტიკული მნიშვნელობები

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_{\text{ცხ}}$	0,997	0,950	0,878	0,811	0,754	0,707	0,666	0,632	0,602	0,576

შემთხვევითი სიდიდეების დამოკიდებულების შეფასება კორელაციის შერჩევითი კოეფიციენტის მიხედვით ცნობილია როგორც *კორელაციური ანალიზი*.

მაგალითი. N=5 ცდის ჩატარებისას მიღებულია დაკვირვებათა შემდეგი წყვილები

Y	0	1	2	3	4
Z	0	2	4	6	8

უნდა შევაფასოთ კორელაციური კავშირის ძალა.

კორელაციის შერჩევითი კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალოები და საშუალო კვადრატული გადახრები

$$\bar{y} = \frac{0+1+2+3+4}{5} = 2, \qquad \bar{z} = \frac{0+2+4+6+8}{4} = 4,$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{1}{5-1}\left[(0-2)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2 + (4-2)^2\right]} = 1{,}581,$$

$$S_Z = \sqrt{\frac{1}{5-1}\left[(0-4)^2 + (2-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2 + (8-4)^2\right]} = 3{,}162.$$

მაშინ კორელაციის შერჩევითი კოეფიციენტის შეფასებისათვის მივიღებთ:

$$r = \frac{(0-2)(0-4)+(1-2)(2-4)+(2-2)(4-4)+(3-2)(6-4)+(4-2)(8-4)}{(5-1)\cdot 1{,}581\cdot 3{,}162} = 1.$$

22–ე ცხრილიდან $k=N-2=5-2=3$ თავისუფლების ხარისხისათვის მივიღებთ $r_{ცხ}=0{,}878$. ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა აღემატება ცხრილურს, შერჩევის მიხედვით განსაზღვრული კორელაციის კოეფიციენტი უნდა მივიჩნიოთ არსებითად. იმის გამო, რომ კორელაციის კოეფიციენტი ერთის ტოლია, Y და Z–ს შორის დამოკიდებულება პრაქტიკულად წრფივია.

5. რეგრესიული ანალიზის საფუძვლები

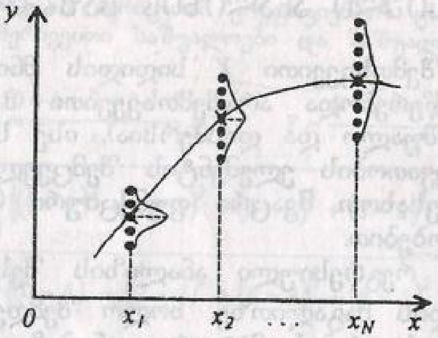
როგორც შემთხვევითი Y სიდიდის მნიშვნელობათა ერთობლიობა აიწერებოდა არაშემთხვევითი პარამეტრებით (გენერალური საშუალო და დისპერსია), ისე სტოქასტიკური, ე.ი. შემთხვევითობის ელემენტის შემცველი კავშირიც შეგვიძლია გამოვსახოთ მკაცრი ფუნქციური (არაშემთხვევითი) თანაფარდობებით.

დავიწყოთ რეგრესიული ანალიზის შესწავლა ორი X და Y ცვლადის მაგალითზე, ხოლო შემდეგ შედეგები გავავრცელოთ ფაქტორების მეტ რაოდენობაზე.

5.1. ერთი ცვლადის მეორეზე რეგრესიული დამოკიდებულება

დავუშვათ, ექსპერიმენტატორი აკვირდება ორ შემთხვევით ცვლადს (X და Y). ვაჩვენოთ, რომ ერთ–ერთი სიდიდე ყოველთვის შეგვიძლია ჩავთვალოთ არაშემთხვევითად. მართლაც, ორი X და Y სიდიდის მნიშვნელობათა ერთდროული აღნიშვნის შემთხვევაში ამ სიდიდეების შეჯერებისას ყველა შეცდომა შეგვიძლია მივაკუთვნოთ მხოლოდ Y სიდიდეს. ამრიგად დაკვირვების შეცდომა ΔY შედგება Y სიდიდის საკუთარი შემთხვევითი შეცდომისაგან და „შეჯერების შეცდომისაგან". ეს უკანასკნელი მიიღება იმის გამო, რომ Y სიდიდესთან შეჯერებულია არა ზუსტად ის მნიშვნელობა X, რომელიც გვქონდა სინამდვილეში.

ამრიგად, ორი შემთხვევითი სიდიდის შეჯერების მაგივრად შეგვიძლია ვილაპარაკოთ რომელიმე შემთხვევითი Y სიდიდის დამოკიდებულებაზე არაშემთხვევით X პარამეტრზე. პარამეტრის ყოველი მნიშვნელობისას შემთხვევით სიდიდეს აქვს გარკვეული განაწილება, რომელსაც *პირობითი* ეწოდება. თუ ეს განაწილება იცვლება პარამეტრის ერთი მნიშვნელობიდან მეორეზე გადასვლისას (ნახ.4), მაშინ X და Y შორის ადგილი აქვს სტოქასტიკურ კავშირს.



ნახ. 4

X პარამეტრის მნიშვნელობები აღვნიშნოთ x–ით, Y პარამეტრის მნიშვნელობები – y–ით. თუ Y სიდიდის საშუალოსა და დისპერსიას აღვნიშნავთ α_y–ით და σ_y^2–ით, მაშინ აუცილებელი ხდება ორი ფუნქციის მოძებნა:

$$\alpha_y = f_1(x), \qquad \sigma_y^2 = f_2(x).$$

σ_y^2 დისპერსიის x პარამეტრზე დამოკიდებულებას ეწოდება *სკედასტიკური დამოკიდებულება*. ის ჩვეულებრივ ახასიათებს დაკვირვებათა მეთოდიკის სიზუსტის შეცვლას პარამეტრის შეცვლის დროს და იშვიათად გამოიყენება.

α_y საშუალოების დამოკიდებულებას x–ზე უფრო დიდი მნიშვნელობა აქვს და *რეგრესია* ეწოდება. ვინაიდან α_y საშუალოები წარმოადგენს გამოსაკვლევი Y სიდიდის ჭეშმარიტ მნიშვნელობებს, რეგრესია გვაძლევს X და Y სიდიდეების ჭეშმარიტ დამოკიდებულებას, გათავისუფლებულს ყოველგვარი შემთხვევითობისაგან.

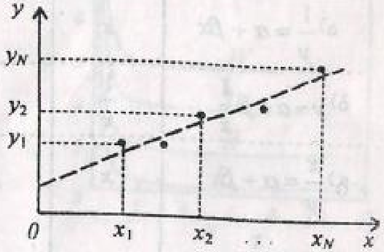
რეგრესიის ზუსტი განტოლების ჩაწერა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც ცნობილია α_y საშუალოები X პარამტრის ყველა დასაშვები x მნიშვნელობისათვის. პრაქტიკულ გამოკვლევებში ასეთი სიტუაცია შეუძლებელია. მეტიც, α_y საშუალოების ცალკეული მნიშვნელობებიც კი არ შეიძლება მოიძებნოს ზუსტად, ხდება მათი მხოლოდ მიახლოებითი შეფასება. ამასთან დაკავშირებით

რეალურად მიიღება მხოლოდ $y = f(x)$ *მიახლოებითი რეგრესიის* განტოლება, და ვგულისხმობთ, რომ $\alpha_y \approx f(x)$.

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც X ცვლადი (ფაქტორი) ღებულობს ექსპერიმენტატორის მიერ განსაზღვრულ მნიშვნელობებს, ხოლო Y ცვლადი წარმოადგენს ექსპერიმენტში დაკვირვებათა შედეგებს (ამონახსნებს). იგულისხმება, რომ ე.წ. დამოუკიდებელი X ცვლადი იზომება შეცდომების გარეშე.

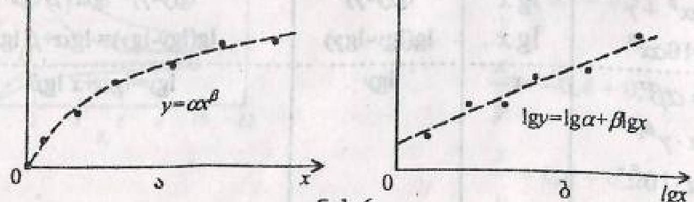
მიახლოებითი რეგრესიის განტოლების ძიების ამოცანა ამოიხსნება ორ ეტაპად. პირველ ეტაპზე ირჩევენ $y = f(x)$ ფუნქციური დამოკიდებულების ფორმას, მეორეზე – აფასებენ შერჩეული ფუნქციური დამოკიდებულების პარამეტრებს.

ფუნქციური $y = f(x)$ დამოკიდებულების ფორმის შერჩევის უნივერსალური ხერხი არ არსებობს. მაგრამ თუ ცნობილია დაკვირვებათა წყვილები (x_1,y_1), (x_2,y_2),. . . ,(x_N,y_N), მათი დატანისას წერტილების სახით საკოორდინატო სიბრტყეზე (ნახ.5), შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა $y=b_0+b_1x$ სწორი ხაზით აპროქსიმაციის შესაძლებლობის ან შეუძლებლობის შესახებ.



ნახ. 5

თუ ექსპერიმენტული (x_1,y_1), (x_2,y_2), . . . ,(x_N,y_N) მონაცემების აპროქსიმაცია სწორი ხაზით არ ხდება, წერტილების განლაგება მიანიშნებს იმ მრუდის ანალიზურ სახეზე, რომელიც ყველაზე უფრო კარგად ეთანხმება ექსპერიმენტულ წერტილებს. ასე მაგალითად, 6, ა ნახაზზე $y = \alpha x^{\beta}$.



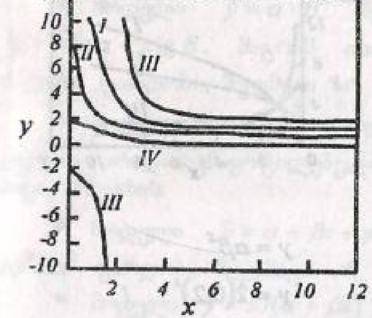
ნახ.6

მრუდის შერჩეული განტოლების ექსპერიმენტულ მონაცემებთან შეთანხმების კარგ ხერხს წარმოადგენს მონაცემების გარდაქმნა წრფივ ფორმაში იმისათვის, რომ გრაფიკზე მივიღოთ $y' = \alpha' + \beta' x'$ წრფე. ასე მაგალითად, 6, ა ნახაზზე $y' = \lg y$ და $x' = \lg x$ ცვლადების გარდაქმნა საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ $y = \alpha x^{\beta}$-ს ეკვივალენტური განტოლება - $\lg y = \lg\alpha + \beta \lg x$.

ერთი ცვლადის ზოგიერთი ფუნქციის წრფივ ფორმაში გარდაქმნის შესაძლო ვარიანტები მოცემულია 23-ე ცხრილში, ხოლო ამ ფუნქციების შესაბამისი გრაფიკები 7, ა–ე ნახაზზე.

ცხრილი 23

განტოლება	წრფის კოორდინატები: x ღერძი	წრფის კოორდინატები: y ღერძი	წრფის განტოლება
ა) $\frac{1}{y} = \alpha + \beta x$	x	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{y} = \alpha + \beta x$
ბ) $y = \alpha + \beta \frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	y	$y = \alpha + \beta \frac{1}{x}$
გ) $\frac{x}{y} = \alpha + \beta x$	x	$\frac{x}{y}$	$\frac{x}{y} = \alpha + \beta x$
$y = \frac{x}{\alpha + \beta x}$			
$\frac{1}{y} = \frac{\alpha}{x} + \beta$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{y} = \beta + \frac{\alpha}{x}$
$y = \frac{x}{\alpha + \beta x} + \gamma$	x	$\frac{x - x_1}{y - y_1}$	$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \alpha + \beta x_1 + \frac{\beta}{\alpha}(\alpha + \beta x_1)x$
დ) $y = \alpha x^{\beta}$	$\lg x$	$\lg y$	$\lg y = \lg\alpha + \beta \lg x$
$y = \alpha x^{\beta} + \gamma$	$\lg x$	$\lg(y-\gamma)$	$\lg(y-\gamma) = \lg\alpha + \beta \lg x$
$y = \gamma 10 \alpha x^{\beta}$	$\lg x$	$\lg(\lg y - \lg\gamma)$	$\lg(\lg y - \lg\gamma) = \lg\alpha + \beta \lg x$
ე) $y = \alpha\beta^{x}$	x	$\lg y$	$\lg y = \lg\alpha + x \lg\beta$
$y = \alpha \cdot \gamma^{\beta_1 x}$			
$y = \alpha \cdot 10^{\beta_1 x}$			



$$\frac{1}{y} = \alpha + \beta x$$

$$\frac{1}{y} = -0{,}1 + 0{,}3x \quad I$$

ა $$\frac{1}{y} = 0{,}1 + 0{,}3x \quad II$$

$$\frac{1}{y} = -0{,}5 + 0{,}3x \quad III$$

$$\frac{1}{y} = 0{,}5 + 0{,}3x \quad IV$$

$$y = \alpha + \beta \frac{1}{x}$$

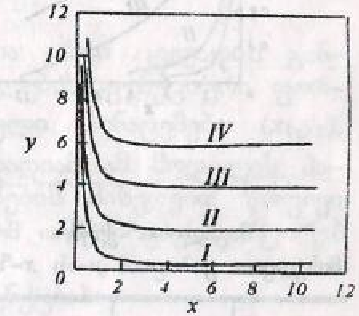
$$y = -0{,}1 + \frac{0{,}3}{x} \quad I$$

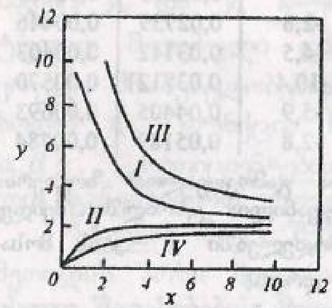
$$y = 2 + \frac{0{,}3}{x} \quad II$$

$$y = 4 + \frac{0{,}3}{x} \quad III$$

$$y = 6 + \frac{0{,}3}{x} \quad IV$$

ბ





$$\frac{x}{y} = \alpha + \beta x$$

გ $$\frac{x}{y} = -0{,}1 + 0{,}3x \quad I$$

$$\frac{x}{y} = 0{,}1 + 0{,}3x \quad II$$

$$\frac{x}{y} = -0{,}4 + 0{,}3x \quad III$$

$$\frac{x}{y} = 0{,}4 + 0{,}3x \quad IV$$

$y = \alpha x^{\beta}$

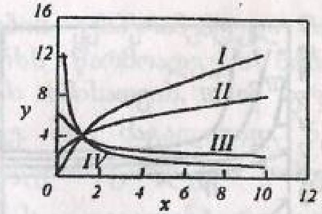
$y = 4x^{0,5}$ I

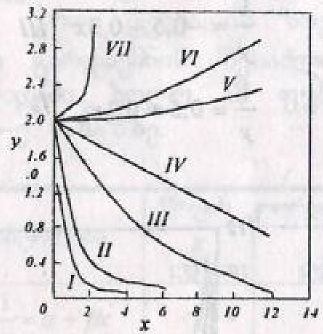
$y = 4x^{0,3}$ II

$y = 4x^{-0,3}$ III

$y = 4x^{-0,5}$ IV

დ





ე

$y = \alpha\beta^{x}$

$y = 2(0,2)^{x}$ I

$y = 2(0,3)^{x}$ II

$y = 2(0,8)^{x}$ III

$y = 2(0,95)^{x}$ IV

$y = 2(1,02)^{x}$ V

$y = 2(1,04)^{x}$ VI

$y = 2(1,3)^{x}$ VII

ნახ. 7

მაგალითი. ქვემოთ მოყვანილი ცხრილის პირველი ორი სვეტის მიხედვით ვიპოვოთ y-ის x-ზე ფუნქციური დამოკიდებულება

x	y	$\lg y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\frac{x}{y}$	$\Delta\left(\frac{x}{y}\right)$
1	62,1	1,79246			0,01610	
2	87,2	1,93962	25,1		0,02293	0,00683
3	109,5	2,03941	22,3	-2,8	0,02739	0,00446
4	127,3	2,10483	17,8	-4,5	0,03142	0,00403
5	134,7	2,12937	7,4	-10,4	0,03712	0,00570
6	136,2	2,13386	1,5	-5,9	0,04405	0,00693
7	134,9	2,13001	-1,3	-2,8	0,05189	0,00784

ამ ამოცანის ამოხსნისათვის უნდა გამოვთვალოთ ზოგიერთი სხვაობა და თანაფარდობა, რომლებიც მოყვანილია ცხრილში. შემდეგ მოვსინჯოთ სხვადასხვა მოდელები (ამ მოდელებში $\hat{y}$ – y-ის მოსალოდნელი მნიშვნელობაა მოცემული x-ის დროს).

- მოდელი $\hat{y} = \alpha + \beta x$ არადამაკმაყოფილებელია, ვინაიდან ფარდობა $\Delta y/\Delta x$ მუდმივი არ არის.

- მოდელი $\hat{y} = \alpha \cdot \beta^{x}$ შეგვიძლია გარდავქმნათ ასეთ სახედ: $\lg\hat{y} = \lg\alpha + x\lg\beta$, მაგრამ ისიც არადამაკმაყოფილებელია, ვინაიდან $\Delta\lg y/\Delta x$ ფარდობა მუდმივი არ არის.
- მოდელი $\hat{y} = \alpha \cdot x^{\beta}$ გარდაიქმნება სახედ: $\lg\hat{y} = \lg\alpha + \beta\lg x$; ეს მოდელიც არადამაკმაყოფილებელია, ვინაიდან $\Delta\lg y/\Delta\lg x$ ფარდობა მუდმივი არ არის.
- მოდელი $\hat{y} = \alpha + \beta x + \gamma x^{2}$ არადამაკმაყოფილებელია, ვინაიდან $\Delta y^{2}/\Delta x^{2}$ ფარდობა მუდმივი არ არის.
- მოდელი $\hat{y} = x/(\alpha + \beta x)$ ეკვივალენტურია $x/\hat{y} = \alpha + \beta x$ მოდელისა. ვინაიდან $\Delta(x/y)/\Delta x$ ($\Delta x=1$) ფარდობები დაახლოებით მუდმივია, ეს მოდელი შეგვიძლია გამოვიყენოთ ექსპერიმენტული მონაცემების მისადაგებისათვის. ეს უზრუნველყოფს შედარებით უკეთეს მისადაგებას წინა მოდელებთან შედარებით, მაგრამ ვერ ვიტყვით იმას, რომ ის საუკეთესოა.

მას შემდეგ, რაც შერჩეულია ერთი ცვლადის განსახილველი ემპირიული დამოკიდებულების ფუნქციური ფორმა $\hat{y} = f(x)$ და გვაქვს ცდისეული მონაცემები (x_1,y_1), (x_2,y_2),...,(x_N,y_N), მეორე ეტაპზე გადადიან ამ მოდელის პარამეტრების შეფასებაზე. პარამეტრების მიხედვით წრფივი მოდელების შემთხვევაში შეფასებას აწარმოებენ *უმცირეს კვადრატთა მეთოდით.*

ამისათვის ჯერ ვადგენთ ფუნქციას:

$$\Phi = \sum_{u=1}^{N}\varepsilon_u^2 = \sum_{u=1}^{N}(y_u - \hat{y}_u)^2 = \sum_{u=1}^{N}[y_u - f(x_u)]^2, \qquad (5.1)$$

სადაც y_u და $\hat{y}_u$ u-ურ ცდაში შესაბამისად ექსპერიმენტულად მიღებული და $y = f(x)$ განტოლებით განსაზღვრული მნიშვნელობებია, N – ცდების საერთო რაოდენობა, ხოლო $f(x)$ ფუნქცია ჩაწერილია ყველა განსასაზღვრავი $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ კოეფიციენტებით. Φ სიდიდე ამ შემთხვევაში შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ფუნქცია ამ კოეფიციენტებისა.

ჰაუსის მიერ შემოთავაზებული უმცირეს კვადრატთა მეთოდის არსი მდგომარეობს $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ კოეფიციენტების ისეთი შეფასებების მიღებაში, რომლებიც მინიმუმამდე შეამცირებენ გადახრების კვადრატების Φ ჯამს. (5.1) ფუნქციის მინიმუმი მიიღება კერძო წარმოებულების ნულთან გატოლებით:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=0;\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}=0;\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}=0;\quad \dots \qquad (5.2)$$

და უცნობი $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ კოეფიციენტების მიმართ მიღებული წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მიღებულ შეფასებებს სტატისტიკური მოსაზრებით გააჩნიათ ზოგიერთი ოპტიმალური თვისება:

კოეფიციენტის შეფასება საფუძვლიანია თუ შერჩევის მოცულობის ზრდისას ის უახლოვდება კოეფიციენტის ჭეშმარიტ მნიშვნელობას; წაუნაცვლებელია, თუ მისი მათემატიკური ლოდინი ტოლია კოეფიციენტის შესაფასებელი მნიშვნელობისა; ეფექტურია, თუ შედარება ხდება მინიმალური დისპერსიით; საკმარისია, თუ შეიცავს ინფორმაციის მაქსიმუმს კოეფიციენტის შესახებ.

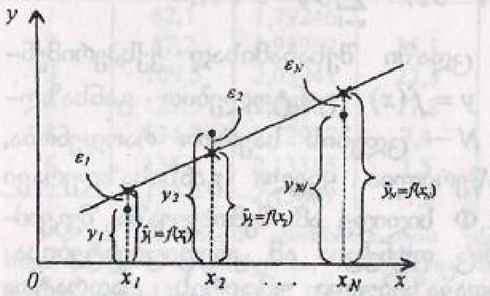
წრფივი რეგრესია. ჯერ განვიხილოთ წრფივი რეგრესიის შემდეგი განტოლების

$$y=\alpha+\beta x. \qquad (5.3)$$

პარამეტრების შეფასება.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდით გამოვთვალოთ α და β კოეფიციენტების ისეთი a და b შეფასებები, რომელთაც მინიმუმამდე დაჰყავთ ფუნქცია

$$\Phi=\sum_{u=1}^{N}\varepsilon_u^2=\sum_{u=1}^{N}(y_u-\hat{y}_u)^2=\sum_{u=1}^{N}(y_u-a-bx_u)^2. \qquad (5.4)$$



ნახ. 8

ავიღოთ Φ ფუნქციის კერძო წარმოებულები a-სა და b-ს მიხედვით, გავუტოლოთ ისინი ნულს, მივიღებთ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}=\sum_{u=1}^{N}2(y_u-a-bx_u)(-1)=-2\sum_{u=1}^{N}y_u+2a\sum_{u=1}^{N}1+2b\sum_{u=1}^{N}x_u=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b}=\sum_{u=1}^{N}2(y_u-a-bx_u)(-x_u)=-2\sum_{u=1}^{N}x_uy_u+2a\sum_{u=1}^{N}x_u+2b\sum_{u=1}^{N}x_u^2=0.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\sum_{u=1}^{N}1=N$ და ჩავატარებთ მარტივ გარდაქმნებს, მივიღებთ ნორმალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} aN+b\sum_{u=1}^{N}x_u=\sum_{u=1}^{N}y_u, \\ a\sum_{u=1}^{N}x_u+b\sum_{u=1}^{N}x_u^2=\sum_{u=1}^{N}x_uy_u. \end{cases} \qquad (5.5)$$

a და b კოეფიციენტები შეგვიძლია გამოვთვალოთ განმსაზღვრელების გამოყენებით:

$$a=\frac{\begin{vmatrix}\sum_{u=1}^{N}y_u & \sum_{u=1}^{N}x_u\\ \sum_{u=1}^{N}x_uy_u & \sum_{u=1}^{N}x_u^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}N & \sum_{u=1}^{N}x_u\\ \sum_{u=1}^{N}x_u & \sum_{u=1}^{N}x_u^2\end{vmatrix}}=\frac{\sum_{u=1}^{N}y_u\sum_{u=1}^{N}x_u^2-\sum_{u=1}^{N}x_u\sum_{u=1}^{N}x_uy_u}{N\sum_{u=1}^{N}x_u^2-\left(\sum_{u=1}^{N}x_u\right)^2}, \qquad (5.6)$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}N & \sum_{u=1}^{N}y_u\\ \sum_{u=1}^{N}x_u & \sum_{u=1}^{N}x_uy_u\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}N & \sum_{u=1}^{N}x_u\\ \sum_{u=1}^{N}x_u & \sum_{u=1}^{N}x_u^2\end{vmatrix}}=\frac{N\sum_{u=1}^{N}x_uy_u-\sum_{u=1}^{N}x_u\sum_{u=1}^{N}y_u}{N\sum_{u=1}^{N}x_u^2-\left(\sum_{u=1}^{N}x_u\right)^2}=\frac{\sum_{u=1}^{N}(x_u-\bar{x})(y_u-\bar{y})}{\sum_{u=1}^{N}(x_u-\bar{x})^2}. \qquad (5.7)$$

b კოეფიციენტის გამოთვლის შემდეგ a კოეფიციენტი შეგვიძლია განვსაზღვროთ უფრო მარტივადაც (5.5) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლებიდან:

$$a=\frac{\sum_{u=1}^{N}y_u-b\sum_{u=1}^{N}x_u}{N}. \tag{5.8}$$

მაგალითი. ვთქვათ, ჩატარებულია $N=5$ ცდა და მიღებულია შემდეგი მონაცემები:

x	0	1	2	3	4
y	0	2	4	6	8

(5.7) და (5.8) ფორმულების გამოყენებით განვსაზღვროთ წრფივი $\hat{y}=a+bx$ რეგრესიული განტოლების a და b კოეფიციენტების შეფასებები:

$$b=\frac{5(0\cdot0+1\cdot2+2\cdot4+3\cdot6+4\cdot8)-(0+1+2+3+4)(0+2+4+6+8)}{5(0^2+1^2+2^2+3^2+4^2)-(0+1+2+3+4)^2}=2,$$

$\hat{y}=2X$

$$a=\frac{(0+2+4+6+8)-2(0+1+2+3+4)}{5}=0.$$

ხარისხოვანი დამოკიდებულება. დავუშვათ, გვაქვს მოდელი

$$y=\alpha x^{\beta}. \tag{5.9}$$

α და β კოეფიციენტების a და b შეფასებები მიიღება (5.9) განტოლების

$$\lg y=\lg a+b\lg x \tag{5.10}$$

განტოლებად გარდაქმნის შემდეგ (5.6) და (5.7) ფორმულების გამოყენებით:

$$\lg a=\frac{\sum_{u=1}^{N}\lg y_u\sum_{u=1}^{N}\lg^2 x_u-\sum_{u=1}^{N}\lg x_u\sum_{u=1}^{N}\lg x_u\lg y_u}{N\sum_{u=1}^{N}\lg^2 x_u-\left(\sum_{u=1}^{N}\lg x_u\right)^2}, \tag{5.11}$$

$$b=\frac{N\sum_{u=1}^{N}\lg x_u\lg y_u-\sum_{u=1}^{N}\lg x_u\sum_{u=1}^{N}y_u}{N\sum_{u=1}^{N}\lg^2 x_u-\left(\sum_{u=1}^{N}\lg x_u\right)^2}. \tag{5.12}$$

მაგალითი. დეტალების ერთი პარტიის ფარგლებში y სისტემატური ცდომილებების სიდიდის დროში ცვლილების მიხედვით შეგვიძლია გამოვიტანოთ დასკვნა ხარისხოვანი (5.9) დამოკიდებულების გამოყენების შესაძლებლობის შესახებ

x	y	lgx	lgy	lgxlgy	$\lg^2x$
1	3,15	0,000	0,498	0,000	0,000
2	3,15	0,301	0,498	0,150	0,096
3	4,55	0,477	0,658	0,314	0,228
4	4,95	0,602	0,695	0,418	0,362
5	5,15	0,699	0,712	0,498	0,489
6	5,75	0,778	0,760	0,591	0,605
7	6,50	0,845	0,813	0,687	0,714
8	5,35	0,903	0,728	0,657	0,815
9	6,15	0,954	0,789	0,753	0,910
10	6,65	1,000	0,823	0,823	1,000
11	6,60	1,041	0,820	0,854	1,082
12	7,00	1,079	0,845	0,912	1,166
Σ		8,679	8,639	6,657	7,467

(5.9) ხარისხოვანი დამოკიდებულების (5.10)-ად გარდაქმნისათვის გამოვთვალოთ $\lg x_u$, $\lg y_u$, აგრეთვე $\lg x_u\cdot\lg y_u$, $\lg^2 x_u$ და შესაბამისი ჯამები.

მაშინ (5.11) და (5.12) მიხედვით მივიღებთ:

$$\lg a=\frac{8{,}639\cdot7{,}467-8{,}679\cdot6{,}657}{12\cdot7{,}467-8{,}679^2}=0{,}471,$$

$$b=\frac{12\cdot6{,}657-8{,}679\cdot8{,}639}{12\cdot7{,}467-8{,}679^2}=0{,}344.$$

(5.10) გამოსახულებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\lg y=0{,}471+0{,}344\lg x.$$

მოვძებნოთ 0,471 რიცხვის ანტილოგარითმი – 2,958, მაშინ

$$y=2{,}958x^{0{,}344}.$$

ჰიპერბოლური დამოკიდებულება. დავუშვათ, მოცემულია მოდელი

$$y=\alpha+\beta\frac{1}{x}. \tag{5.13}$$

α და β კოეფიციენტების a და b შეფასებები გამოვთვალოთ (5.13) განტოლების

$$y'=a+bx' \tag{5.14}$$

წრფივ განტოლებად გარდაქმნის შემდეგ ცვლადების $y' = y$ და $x' = 1/x$ გარდაქმნით.

(5.6) და (5.7) ფორმულები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$a = \frac{\sum_{u=1}^{N}\frac{1}{x_u^2}\sum_{u=1}^{N}y_u - \sum_{u=1}^{N}\frac{1}{x_u}\sum_{u=1}^{N}\frac{y_u}{x_u}}{N\sum_{u=1}^{N}\frac{1}{x_u^2} - \left(\sum_{u=1}^{N}\frac{1}{x_u}\right)^2}, \qquad (5.15)$$

$$b = \frac{N\sum_{u=1}^{N}\frac{y_u}{x_u} - \sum_{u=1}^{N}y_u\sum_{u=1}^{N}\frac{1}{x_u}}{N\sum_{u=1}^{N}\frac{1}{x_u^2} - \left(\sum_{u=1}^{N}x_u\right)^2}. \qquad (5.16)$$

მაგალითი. წინა მაგალითის მონაცემებით განვსაზღვროთ ჰიპერბოლური დამოკიდებულება. აუცილებელი ჯამების გამოთვლის მიმდევრობა მოცემულია შემდეგ ცხრილში:

x	y	$\frac{y}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$
1	3,15	3,15	1,00	1,000
2	3,15	1,58	0,50	0,250
3	4,55	1,52	0,33	0,111
4	4,95	1,24	0,25	0,062
5	5,15	1,03	0,20	0,040
6	5,75	0,96	0,17	0,028
7	6,50	0,93	0,14	0,020
8	5,35	0,67	0,12	0,016
9	6,15	0,68	0,11	0,012
10	6,65	0,66	0,10	0,010
11	6,60	0,60	0,09	0,008
12	7,00	0,58	0,08	0,007
Σ	64,95	13,60	3,09	1,564

განსახილველ მაგალითში a და b კოეფიციენტები ტოლია:

$$a = \frac{1{,}564 \cdot 64{,}95 - 3{,}09 \cdot 13{,}60}{12 \cdot 1{,}564 - 3{,}09^2} = 6{,}459,$$

$$b = \frac{12 \cdot 13{,}60 - 64{,}95 \cdot 3{,}09}{12 \cdot 1{,}564 - 3{,}09^2} = -4{,}067.$$

საძიებელ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y = 6{,}459 + \frac{-4{,}067}{x}.$$

პარაბოლური რეგრესია. განვიხილოთ შემდეგი რეგრესიული განტოლების

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_{11} x^2 \qquad (5.17)$$

პარამეტრების შეფასება.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდით გამოვთვალოთ β_0, β_1, β_{11} კოეფიციენტების შეფასებები b_0, b_1, b_{11}, რომელთაც მინიმუმამდე დაჰყავთ ფუნქცია

$$\Phi = \sum_{u=1}^{N}\varepsilon_u^2 = \sum_{u=1}^{N}(y_u - \hat{y}_u)^2 = \sum_{u=1}^{N}\left(y_u - b_0 - b_1 x_u - b_{11}x_u^2\right)^2. \qquad (5.18)$$

თუ ავიღებთ Φ ფუნქციის კერძო წარმოებულებს b_0, b_1, b_{11}-ის მიხედვით და გავუტოლებთ ნულს, მივიღებთ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b_0} = \sum_{u=1}^{N}2\left(y_u - b_0 - b_1x_u - b_{11}x_u^2\right)(-1) = -2\sum_{u=1}^{N}y_u + 2b_0\sum_{u=1}^{N}1 +$$
$$+2b_1\sum_{u=1}^{N}x_u + 2b_{11}\sum_{u=1}^{N}x_u^2 = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b_1} = \sum_{u=1}^{N}2\left(y_u - b_0 - b_1x_u - b_{11}x_u^2\right)(-x_u) = -2\sum_{u=1}^{N}x_u y_u + 2b_0\sum_{u=1}^{N}x_u +$$
$$+2b_1\sum_{u=1}^{N}x_u^2 + 2b_{11}\sum_{u=1}^{N}x_u^3 = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b_{11}} = \sum_{u=1}^{N}2\left(y_u - b_0 - b_1x_u - b_{11}x_u^2\right)(-x_u^2) = -2\sum_{u=1}^{N}x_u^2 y_u + 2b_0\sum_{u=1}^{N}x_u^2 +$$
$$+2b_1\sum_{u=1}^{N}x_u^3 + 2b_{11}\sum_{u=1}^{N}x_u^4 = 0.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\sum_{u=1}^{N}1 = N$, მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ ნორმალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} b_0 N + b_1\sum_{u=1}^{N}x_u + b_{11}\sum_{u=1}^{N}x_u^2 = \sum_{u=1}^{N}y_u, \\ b_0\sum_{u=1}^{N}x_u + b_1\sum_{u=1}^{N}x_u^2 + b_{11}\sum_{u=1}^{N}x_u^3 = \sum_{u=1}^{N}x_u y_u, \\ b_0\sum_{u=1}^{N}x_u^2 + b_1\sum_{u=1}^{N}x_u^3 + b_{11}\sum_{u=1}^{N}x_u^4 = \sum_{u=1}^{N}x_u^2 y_u. \end{cases} \qquad (5.19)$$

b_0, b_1 და b_{11} კოეფიციენტები მიიღება განმსაზღვრელების მეშვეობით

$$b_0=\frac{\Delta b_0}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}\sum\limits_{u=1}^{N}y_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_u y_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^3\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 y_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^3 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}N & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^3\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^3 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^4\end{vmatrix}}, \tag{5.20}$$

$$b_1=\frac{\Delta b_1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}N & \sum\limits_{u=1}^{N}y_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u y_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^3\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 y_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}N & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^3\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^3 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^4\end{vmatrix}}, \tag{5.21}$$

$$b_{11}=\frac{\Delta b_{11}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}N & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u & \sum\limits_{u=1}^{N}y_u\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u y_u\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^3 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 y_u\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}N & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_u & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^3\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^2 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^3 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_u^4\end{vmatrix}}. \tag{5.22}$$

მაგალითი. დავუშვათ, ჩატარებულია $N=5$ ცდა და მიღებულია შემდეგი მონაცემები

x	0	1	2	3	4
y	5	10	21	38	61

განვსაზღვროთ $\hat{y}=b_0+b_1x+b_{11}x^2$ რეგრესიული განტოლების b_0, b_1 და b_{11} კოეფიციენტების შეფასებები.

ამისათვის ჯერ გამოვთვალოთ შემდეგი ჯამები:

$$\sum_{u=1}^{5}x_u=0+1+2+3+4=10, \qquad \sum_{u=1}^{5}x_u^2=0^2+1^2+2^2+3^2+4^2=30,$$

$$\sum_{u=1}^{5}x_u^3=0^3+1^3+2^3+3^3+4^3=100, \qquad \sum_{u=1}^{5}x_u^4=0^4+1^4+2^4+3^4+4^4=354,$$

$$\sum_{u=1}^{5}y_u=5+10+21+38+61=135,$$

$$\sum_{u=1}^{5}x_u y_u=0\cdot 5+1\cdot 10+2\cdot 21+3\cdot 38+4\cdot 61=412,$$

$$\sum_{u=1}^{5}x_u^2 y_u=0^2\cdot 5+1^2\cdot 10+2^2\cdot 21+3^2\cdot 38+4^2\cdot 61=1417.$$

განმსაზღვრელებისათვის მივიღებთ:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 10 & 30\\ 10 & 30 & 100\\ 30 & 100 & 354\end{vmatrix}=5\cdot 30\cdot 354+10\cdot 100\cdot 30+30\cdot 10\cdot 100-$$

$$-30\cdot 30\cdot 30-100\cdot 100\cdot 5-354\cdot 10\cdot 10=700,$$

$$\Delta b_0 = \begin{vmatrix} 135 & 10 & 30 \\ 412 & 30 & 100 \\ 1417 & 100 & 354 \end{vmatrix} = 135 \cdot 30 \cdot 354 + 10 \cdot 100 \cdot 1417 + 30 \cdot 412 \cdot 354 -$$

$$- 1417 \cdot 30 \cdot 30 - 100 \cdot 100 \cdot 135 - 354 \cdot 412 \cdot 10 = 2920,$$

$$\Delta b_1 = \begin{vmatrix} 5 & 135 & 30 \\ 10 & 412 & 100 \\ 30 & 1417 & 354 \end{vmatrix} = 5 \cdot 412 \cdot 354 + 135 \cdot 100 \cdot 30 + 30 \cdot 10 \cdot 1417 -$$

$$- 30 \cdot 412 \cdot 30 - 1417 \cdot 100 \cdot 5 - 354 \cdot 10 \cdot 135 = 2140,$$

$$\Delta b_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 135 \\ 10 & 30 & 412 \\ 30 & 100 & 1417 \end{vmatrix} = 5 \cdot 30 \cdot 1417 + 10 \cdot 412 \cdot 30 + 135 \cdot 10 \cdot 100 -$$

$$- 30 \cdot 30 \cdot 135 - 100 \cdot 412 \cdot 5 - 1417 \cdot 10 \cdot 10 = 1950.$$

მაშინ

$$b_0 = \frac{\Delta b_0}{\Delta} = \frac{2920}{700} = 4{,}18, \qquad b_1 = \frac{\Delta b_1}{\Delta} = \frac{2140}{700} = 3{,}06,$$

$$b_{11} = \frac{\Delta b_{11}}{\Delta} = \frac{1950}{700} = 2{,}79.$$

პერიოდული დამოკიდებულება. ცნობილია, რომ რომელიმე პროცესის ციკლური ცვლილების აპროქსიმაციისათვის ყველაზე ხშირად იყენებენ სინუსოიდას. ათვლის სათავის მიმართ მაქსიმუმის (ან მინიმუმის) წანაცვლების გასათვალისწინებლად იღებენ სინუსისა და კოსინუსის ჯამს, რაც უზრუნველყოფს „ძვრას ფაზის მიხედვით". ვინაიდან რხევები ხდება რომელიმე არანულოვანი სიდიდის მიმართ, მააპროქსიმირებელ განტოლებაში შეაქვთ მუდმივი შესაკრები. მაშინ რეგრესიული დამოკიდებულება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cos\frac{2\pi}{N}x + \beta_2 \sin\frac{2\pi}{N}x, \qquad (5.23)$$

სადაც β_0, β_1 და β_2 რეგრესიის საძიებელი კოეფიციენტებია, N — დროითი ინტერვალების რაოდენობა რეტროსპექციის პერიოდის ერთ ციკლში.

კოეფიციენტების b_0, b_1 და b_2 შეფასებების მოსაძებნად გამოვიყენოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდი.

Φ ფუნქციონალის გამოსახულებაში (5.23)-ის ჩასმით მივიღებთ:

$$\Phi = \sum_{u=1}^{N}\left(y_u - b_0 - b_1\cos\frac{2\pi}{N}x - b_2\sin\frac{2\pi}{N}x\right)^2. \qquad (5.24)$$

Φ ფუნქციონალის $\partial\Phi/\partial b_0$, $\partial\Phi/\partial b_1$ და $\partial\Phi/\partial b_2$ კერძო წარმოებულების ნულთან გატოლებით, მივიღებთ ნორმალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} b_0 N + b_1\sum\limits_{u=1}^{N}\cos\frac{2\pi}{N}x_u + b_2\sum\limits_{u=1}^{N}\sin\frac{2\pi}{N}x_u = \sum\limits_{u=1}^{N}y_u, \\ b_0\sum\limits_{u=1}^{N}\cos\frac{2\pi}{N}x_u + b_1\sum\limits_{u=1}^{N}\cos^2\frac{2\pi}{N}x_u + b_2\sum\limits_{u=1}^{N}\sin\frac{2\pi}{N}x_u\cos\frac{2\pi}{N}x_u = \sum\limits_{u=1}^{N}y_u\cos\frac{2\pi}{N}x_u, \\ b_0\sum\limits_{u=1}^{N}\sin\frac{2\pi}{N}x_u + b_1\sum\limits_{u=1}^{N}\cos\frac{2\pi}{N}x_u\sin\frac{2\pi}{N}x_u + b_2\sum\limits_{u=1}^{N}\sin^2\frac{2\pi}{N}x_u = \sum\limits_{u=1}^{N}y_u\sin\frac{2\pi}{N}x_u. \end{cases}$$

ნორმალურ განტოლებათა ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს საძიებელი კოეფიციენტების b_0, b_1 და b_2 შეფასებებს.

მაგალითი. მოთხოვნილება „სეზონურ" საქონელზე, მაგალითად, ქოლგებზე ხასიათდება ცხრილის პირველ ორ სვეტში მოთავსებული მონაცემებით.

თვე x	მოთხოვნილება ათასი ცალი y	$\sin\frac{2\pi}{12}x_u$	$\cos\frac{2\pi}{12}x_u$	$\sin^2\frac{2\pi}{12}x_u$	$\cos^2\frac{2\pi}{12}x_u$	$\sin\frac{2\pi}{12}x_u\cos\frac{2\pi}{12}x_u$	$y_u\sin\frac{2\pi}{12}x_u$	$y_u\cos\frac{2\pi}{12}x_u$
1	72	0,5000	0,8660	0,2500	0,7500	0,4330	36,00	62,35
2	83	0,8660	0,5000	0,7500	0,2500	0,4330	71,88	41,50
3	92	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	92,00	0
4	107	0,8660	-0,5000	0,7500	0,2500	-0,4330	92,66	-53,50
5	114	0,5000	-0,8660	0,2500	0,7500	-0,4330	57,00	-98,72
6	129	0,0000	-1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0	-129
7	91	-0,5000	-0,8660	0,2500	0,7500	0,4330	-45,50	-78,81
8	108	-0,8660	-0,5000	0,7500	0,2500	0,4330	-93,53	-54
9	116	-1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	-116,00	0
10	79	-0,8660	0,5000	0,7500	0,2500	-0,4330	-68,41	39,5
11	92	-0,5000	0,8660	0,2500	0,7500	-0,4330	-46,00	79,67
12	93	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0	93
Σ	1176	0	0	6	6	0	-19,9	-98,01

თუ გავითვალისწინებთ არგუმენტების მნიშვნელობებს

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{2\pi}{12}x$	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$\frac{2\pi}{3}$ (120°)	$\frac{5\pi}{6}$ (150°)	π (180°)	$\frac{7\pi}{6}$ (210°)	$\frac{4\pi}{3}$ (240°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	$\frac{5\pi}{3}$ (300°)	$\frac{11\pi}{6}$ (330°)	2π (360°)

სინუსებისა და კოსინუსების ცხრილიდან შევარჩევთ სათანადო მნიშვნელობებს, რომლებიც მოთავსებულია ცხრილის მესამე და მეოთხე სვეტებში. ჯამური მნიშვნელობების გათვალისწინებით ნორმალურ განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} b_0 \cdot 12 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = 1176, \\ b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 6 + b_2 \cdot 0 = -98{,}01, \\ b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 6 = -19{,}9. \end{cases}$$

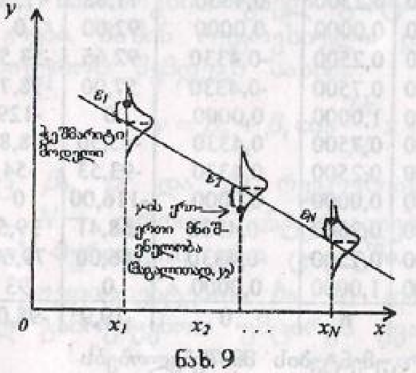
კოეფიციენტების შეფასებებისათვის მივიღებთ:

$$b_0 = \frac{1176}{12} = 98, \quad b_1 = \frac{-98{,}01}{6} = -16{,}34, \quad b_2 = \frac{-19{,}9}{6} = -3{,}32.$$

მაშასადამე, რეგრესიის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\hat{y} = 98 - 16{,}34 \cos\frac{2\pi}{12}x - 3{,}32 \sin\frac{2\pi}{12}x.$$

რეგრესიის განტოლების კოეფიციენტების შეფასების შემდეგ უნდა ჩატარდეს გამოკვლევა, რომელსაც *რეგრესიული ანალიზი* ეწოდება. ეს ანალიზი შედგება ორი არსებითად განსხვავებული ნაწილისაგან. ჯერ ამოწმებენ მიღებული რეგრესიული განტოლების ყველა შესაკრების არსებითობას ცდის σ_y^2 დისპერსიასთან შედარებით, შემდეგ კი — ჰიპოთეზას მოდელის ადეკვატურობის შესახებ მოდელის არაადეკვატურობის დისპერსიის შეპირისპირებით ცდის დისპერსიასთან.



ნახ. 9

თუ პარამეტრების შეფასების მეთოდი არ მოითხოვდა არავითარ ვარაუდს ნორმალურობის შესახებ, მაშინ ის აუცილებელია ზემოთ ხსენებული ჰიპოთეზების შემოწმებისათვის. ვარაუდობენ, რომ ამოძახილის ყოველ დაკვირვებას აქვს ნორმალური განაწილება ვერტიკალის მიმართ და

ამ განაწილების საშუალო ემთხვევა მოდელით მიღებულ მნიშვნელობას $E(y_u) = f(x_u)$. ნორმალურად განაწილებული $y_1, y_2, \dots, y_N$ სიდიდეების დისპერსიები ნავარაუდევია ერთნაირი და σ_y^2-ის ტოლი. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ε_u ნაშთები ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია ნულოვანი საშუალოთი ($E(\varepsilon_u)=0$) და σ_y^2 დისპერსიით $\left(И(\varepsilon_u)=\sigma_y^2\right)$.
ცდის დისპერსიის (აღწარმოების დისპერსიის) შეფასება S_y^2 განისაზღვრება პარალელური ცდების მონაცემებით:

- რომელიმე ერთ u წერტილში m პარალელური ცდის რეალიზაციის შემთხვევაში

$$S_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(y_{uj} - \bar{y}_u\right)^2; \tag{5.25}$$

- გეგმის ყველა N წერტილში m პარალელური ცდის რეალიზაციის შემთხვევაში

$$S_y^2 = \frac{1}{N(m-1)}\sum_{u=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}\left(y_{uj} - \bar{y}_u\right)^2; \tag{5.26}$$

- გეგმის წერტილებში პარალელური ცდების სხვადასხვა რაოდენობის შემთხვევაში

$$S_y^2 = \frac{1}{\sum_{u=1}^{N} m_u - N}\sum_{u=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_u}\left(y_{uj} - \bar{y}_u\right)^2. \tag{5.27}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც პარალელური ცდები არ გაგვაჩნია, σ_y^2-ის შეფასების სახით შეგვიძლია ავიღოთ რეგრესიის მიმართ დისპერსიის შეფასება, რომელიც დაფუძნებულია N-2 თავისუფლების ხარისხზე და განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$S_y^2 = \frac{1}{N-2}\left[\left(\sum_{u=1}^{N} y_u^2 - N\bar{y}^2\right) - \frac{\left(\sum_{u=1}^{N} x_u y_u - N\bar{x}\bar{y}\right)^2}{\sum_{u=1}^{N} x_u^2 - N\bar{x}^2}\right], \tag{5.28}$$

სადაც $\bar{x}$ და $\bar{y}$ შესაბამისად x_u და y_u შერჩევების საშუალოებია.

მაგალითი. x და y ცვლადებზე N=25 დაკვირვების შედეგებით შევაფასოთ წრფივი რეგრესიული განტოლების კოეფიციენტები და ცდის დისპერსია S_y^2.

ცდის №	x	y	x^2	y^2	xy
1	35,3	10,98	1246,09	120,5604	387,594
2	29,7	11,13	882,09	123,8769	330,561
3	30,8	12,51	948,64	156,5001	385,308
4	58,8	8,40	3457,44	70,56	493,92
5	61,4	9,27	3769,96	85,9329	569,178
6	71,3	8,73	5083,69	76,2129	622,449
7	74,4	6,36	5535,36	40,4496	473,184
8	76,7	8,50	5882,89	72,25	651,95
9	70,7	7,82	4998,49	61,1524	552,874
10	57,5	9,14	3306,25	83,5396	525,55
11	46,4	8,24	2152,96	67,8976	382,336
12	28,9	12,19	835,21	148,5961	352,291
13	28,1	11,88	789,61	141,1344	333,828
14	39,1	9,57	1528,81	91,5849	374,187
15	46,8	10,94	2190,24	119,6836	511,992
16	48,5	9,58	2352,25	91,7764	464,63
17	59,3	10,09	3516,49	101,8081	598,337
18	70,0	8,11	4900	65,7721	567,7
19	70,0	6,83	4900	46,6489	478,1
20	74,5	8,88	5550,25	78,8544	661,56
21	72,1	7,68	5198,41	58,9824	553,728
22	58,1	8,47	3375,61	71,7409	492,107
23	44,6	8,86	1989,16	78,4996	395,156
24	33,4	10,36	1115,56	107,3296	346,024
25	28,6	11,08	817,96	122,7664	316,888
Σ	1315	235,6	76323,42	2284,1102	11821,432

კოეფიციენტების შეფასებებისათვის (5.6) და (5.7) თანახმად მივიღებთ:

$$a = \frac{235{,}6 \cdot 76323{,}42 - 1315 \cdot 11821{,}432}{25 \cdot 76323{,}42 - 1315^2} = 13{,}6230,$$

$$b = \frac{25 \cdot 11821{,}432 - 1315 \cdot 235{,}6}{25 \cdot 76323{,}42 - 1315^2} = -0{,}0798.$$

ვინაიდან $\bar{x} = 1315/25 = 52{,}6$ და $\bar{y} = 235{,}6/25 = 9{,}424$

$$S_y^2 = \frac{1}{25-2}\left[\left(2284{,}1102 - 25 \cdot 9{,}424^2\right) - \frac{\left(11821{,}432 - 25 \cdot 52{,}6 \cdot 9{,}424\right)^2}{76323{,}42 - 25 \cdot 52{,}6^2}\right] = 0{,}7927.$$

რეგრესიის კოეფიციენტების სტატისტიკური არსებითობის შესახებ ჰიპოთეზის შემოწმების აუცილებლობა წარმოიშვა იმასთან დაკავშირებით, რომ დაკვირვებათა შემთხვევითი S_y შეცდომების გამო ვიღებთ შეცდომებს რეგრესიის კოეფიციენტების განსაზღვრაშიც.

მაგალითი. S_y შეცდომების არსებობა იწვევს y მნიშვნელობათა გაბნევას. ამიტომ დაკვირვებათა სერიების გამეორებისას შეგვიძლია მივიღოთ გამოსავალი პარამეტრის განსხვავებული მნიშვნელობები.

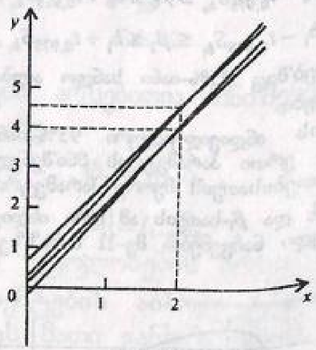
x	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(4)}$
0	0,2	-0,2	0,7	0,3
1	2,1	1,9	2,6	2,4
2	4,0	4,0	4,5	4,5
3	5,9	6,1	6,4	6,6
4	7,8	8,2	8,3	8,7

x და $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, $y^{(4)}$ სვეტების მონაცემების მიხედვით წრფივი რეგრესიული განტოლებების კოეფიციენტების შეფასების შემდეგ მივიღებთ შემდეგ მოდელებს:

$$\hat{y}^{(1)} = 0{,}2 + 1{,}9x, \qquad \hat{y}^{(3)} = 0{,}7 + 1{,}9x,$$

$$\hat{y}^{(2)} = -0{,}2 + 2{,}1x, \qquad \hat{y}^{(4)} = 0{,}3 + 2{,}1x.$$

მათი გრაფიკული გამოსახულება მოცემულია მე-10 ნახაზზე



ნახ. 10

დაკვირვებათა შეცდომების არსებობა იწვევს აგრეთვე b_0 და b_1 კოეფიციენტების გაბნევასაც. ეს კოეფიციენტები წრფივი რეგრესიის შემთხვევაში განისაზღვრება შემდეგი საშუალო კვადრატული გადახრებით:

$$S_{b_0} = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^{N} x_u^2}{N\sum_{u=1}^{N}(x_u-\bar{x})^2}} \cdot S_y, \tag{5.29}$$

$$S_{b_1} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{u=1}^{N}(x_u-\bar{x})^2}} \cdot S_y, \tag{5.30}$$

სადაც $\bar{x}$ წარმოადგენს x_u შერჩევის საშუალოს.

100(1-q)%-იანი სანდო საზღვრები β_0 და β_1-სათვის

$$b_0 \pm t_{1-\frac{q}{2}} S_{b_0}, \tag{5.31}$$

$$b_1 \pm t_{1-\frac{q}{2}} S_{b_1}, \tag{5.32}$$

სადაც $t_{1-q/2}$ t-განაწილების (1-q/2)%-იანი წერტილია იმ თავისუფლების ხარისხისათვის, რომლითაც განისაზღვრა S_y^2 დისპერსია.

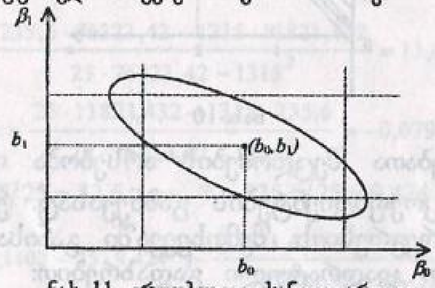
თუ გავითვალისწინებთ იმ გარემოებას, რომ ტექნიკური ამოცანების გადაწყვეტისას q=0,05, ჩვეულებრივ საქმე გვაქვს 100(1-q)=100(1-0,05)=95%-იან სანდო საზღვრებთან. სანდო საზღვრები β_0 და β_1-სათვის ქმნიან 95%-იან სანდო ინტერვალებს

$$b_0 - t_{0,975}S_{b_0} \le \beta_0 \le b_0 + t_{0,975}S_{b_0},$$

$$b_1 - t_{0,975}S_{b_1} \le \beta_1 \le b_1 + t_{0,975}S_{b_1},$$

ე.ი. ინტერვალებს, რომლებშიც 95%-იანი სანდო ალბათობით იმყოფება β_0 და β_1 ჭეშმარიტი მნიშვნელობები.

β_0 და β_1-სათვის ინდივიდუალური 95%-იანი სანდო ინტერვალები ცალ-ცალკე გამოიყენება ერთი პარამეტრის მნიშვნელობათა ცვლილების შესაძლო დიაპაზონის მითითებისათვის მეორე პარამეტრის მნიშვნელობების გათვალისწინების გარეშე. β_0 და β_1-სათვის ამ ორი ინდივიდუალური ინტერვალით წარმოქმნილი მართკუთხედი ნაჩვენებია მე-11 ნახაზზე.



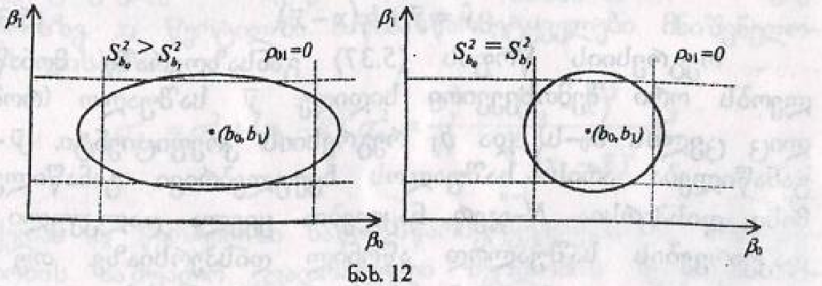
ნახ. 11 ერთობლივი სანდო არე და ინდივიდუალური სანდო ინტერვალები

ყოველი კოეფიციენტისათვის სანდო ინტერვალების აგების ხსენებული ხერხი არ არის საკმარისი მათი სტატისტიკური მნიშვნელოვნობის შეფასებისათვის. უნდა შევაფასოთ ერთობლივი სანდო არე ერთდროულად ყველა კოეფიციენტისათვის. ეს სანდო არე წარმოადგენს რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასებების გაბნევის ელიფსოიდს. წრფივი რეგრესიის β_0 და β_1 პარამეტრებისათვის ერთობლივი სანდო არე შეიძლება მნიშვნელოვნად განსხვავდებოდეს მართკუთხედისაგან. მე-11 ნახაზზე ის გამოსახულია გაჭიმული ელიფსის სახით. გაჭიმულობა დამოკიდებულია $S_{b_0}^2$ და $S_{b_1}^2$ სიდიდეების თანაფარდობაზე (მე-12 ნახაზზე გამოსახულია შემთხვევა, როდესაც $S_{b_0}^2 > S_{b_1}^2$). არის მთავარი ღერძების შემობრუნება იზრდება b_0 და b_1 შორის კორელაციის კოეფიციენტის

$$\rho_{01} = \frac{cov(b_0, b_1)}{S_{b_0} \cdot S_{b_1}}$$

აბსოლუტური სიდიდის ზრდასთან ერთად.

თუ ρ_{01} ახლოსაა ნულთან, მაშინ ინდივიდუალური სანდო ინტერვალებით შექმნილი მართკუთხედის ფართობი დაახლოებით ტოლი იქნება ერთობლივი სანდო არის ფართობისა (ნახ. 12).



ნახ. 12

კოეფიციენტები არსებითია (მნიშვნელოვნად განსხვავდება ნულისაგან), თუ

$$|b_0| \ge t_{1-q} S_{b_0}, \tag{5.33}$$

$$|b_1| \ge t_{1-q} S_{b_1}. \tag{5.34}$$

უკანასკნელი უტოლობების არსი მდგომარეობს იმაში, რომ კოეფიციენტების აბსოლუტური სიდიდე k-ჯერ უნდა აღემატებოდეს მათი განსაზღვრის შეცდომას.

კოეფიციენტის არაარსებითობა შესაბამისი ეფექტის გავლენის უქონლობის ტოლფასია. თუ მოდელი წრფივია და წრფივი ეფექტი არაარსებითი, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ფაქტორი ცვლილების შესწავლილ ინტერვალებში ამოძახილზე გავლენას არ ახდენს.

ტოლობა (5.8) რეგრესიის თავისუფალი წევრისათვის შეიძლება გადაიწეროს შემდეგნაირად

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} y_u - b_1 \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_u = \bar{y} - b_1\bar{x}, \tag{5.35}$$

სადაც

$$\bar{y} = b_0 + b_1\bar{x}. \tag{5.36}$$

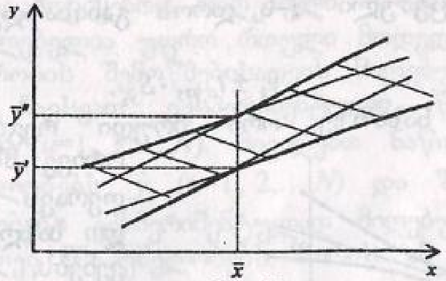
ეს ნიშნავს, რომ შესასწავლი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების საშუალო წერტილი $(\bar{x}, \bar{y})$ რეგრესიის წრფეზე ძევს. აქედან გამომდინარეობს, რომ რეგრესიის წრფის განსაზღვრისათვის საკმარისია ვიცოდეთ მხოლოდ მისი b_1 კუთხური კოეფიციენტი.

(5.35)–ის ჩასმით $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ განტოლებაში მივიღებთ რეგრესიის შესაფასებელ განტოლებას

$$\hat{y} = \bar{y} + b_1(x - \bar{x}). \tag{5.37}$$

რეგრესიის წრფის (5.37) განსაზღვრაში მონაწილეობს ორი შემთხვევითი სიდიდე: $\bar{y}$ საშუალო (რომელიც ცვლის b_0–ს) და b_1 რეგრესიის კოეფიციენტი. $\bar{y}$–ის განაწილება არის საშუალოს ჩვეულებრივი განაწილება, მისი დისპერსია N–ჯერ ნაკლებია ყველა ცალკეული y_u დაკვირვების საშუალოდ აწონილ დისპერსიაზე. თუ y_u დაკვირვებათა დუბლირება არ ხდება, მათი σ_y^2 დისპერსია ცნობილი უნდა იქნას წინა დაკვირვებებიდან. ამ შემთხვევაში $\bar{y}$–ს დისპერსია აგრეთვე σ_y^2/N ტოლია. b_1–ის სანდო საზღვრები კი განისაზღვრება (5.32)–ის თანახმად.

მას შემდეგ, რაც ვიპოვეთ სანდო საზღვრები $\bar{y}$ საშუალოსა და რეგრესიის b_1 კოეფიციენტისათვის, შეგვიძლია ავაგოთ *სანდო არე*, რომელშიც $(1\text{-}\alpha)^2$ ალბათობით ძევს ჭეშმარიტი რეგრესიის წრფე. აღვნიშნოთ სანდო საზღვრები საშუალოსათვის $\bar{y}'$ და $\bar{y}''$–ით, ხოლო რეგრესიის b_1 კოეფიციენტისათვის - b_1' და b_1''–ით. ამ წრფეებით შემოსაზღვრული მაქსიმალური არე წარმოადგენს სწორედ საძიებო სანდო არეს. აგების მაგალითი მოცემულია მე–13 ნახაზზე.



ნახ. 13

ზემოთ ვაჩვენეთ, რომ რეგრესიის განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს სახე:

$$\hat{y} = \bar{y} + b_1(x - \bar{x}),$$

სადაც, როგორც $\bar{y}$, ისე b_1 შეცდომებით ხასიათდება, რომლებიც გავლენას ახდენენ ნაწინასწარმეტყველებ $\hat{y}$ მნიშვნელობაზე. x_k წერტილში ნაწინასწარმეტყველები მნიშვნელობის დისპერსია

$$\sigma_{\hat{y}_k}^2 = \sigma_{\bar{y}}^2 + (x_k - \bar{x})^2\sigma_{b_1}^2 = \frac{\sigma_y^2}{N} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{\sum_{u=1}^{N}(x_u - \bar{x})^2}\sigma_y^2.$$

აქედან x_k წერტილში ნაწინასწარმეტყველები $\hat{y}_k$ მნიშვნელობის საშუალო კვადრატული შეცდომის შეფასებისათვის მივიღებთ

$$S_{\hat{y}_k} = S_y\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{\sum_{u=1}^{N}(x_u - \bar{x})^2}}. \tag{5.38}$$

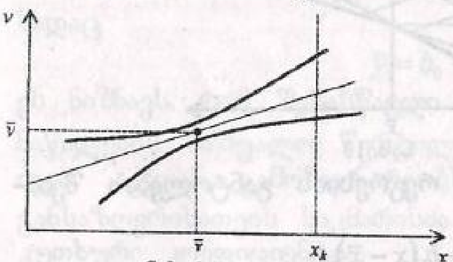
მაშასადამე, ეს სიდიდე აღწევს მაქსიმუმს, როდესაც $x_k = \bar{x}$ $\left(S_{\hat{y}_k} = S_y\sqrt{1/N}\right)$ და იზრდება x_k–ს დაცილებისას $\bar{x}$–იდან ნებისმიერი მიმართულებით.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, რაც უფრო დიდია სხვაობა x_k–სა და საშუალო მნიშვნელობას შორის, მით მეტია შეცდომა, რომლითაც ვიწინასწარმეტყველებთ y–ის საშუალო მნიშვნელობას მოცემული x_k–სათვის. 95%–იანი სანდო საზღვრები y–ის „ჭეშმარიტი“ საშუალო მნიშვნელო–

ბისათვის მოცემული x_k-ს დროს განისაზღვრება გამოსახულებით

$$\hat{y}_k \pm t_{0,975} \cdot S_{\hat{y}_k}. \qquad (5.39)$$

მე-14 ნახაზზე ორი მრუდი რეგრესიის ხაზის ორივე მხარეს განსაზღვრავს 95%-იან სანდო საზღვრებს და გვიჩვენებს, როგორ იცვლება საზღვრები x_k-ს ცვლილებისას. ეს მრუდები ჰიპერბოლებია.



ნახ. 14

95%-იანი სანდო ინტერვალის სიგრძე ინდივიდუალური ახალი დაკვირვებისათვის განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\hat{y}_k \pm t_{0,975} \sqrt{1+\frac{1}{N}+\frac{(x_k-\bar{x})^2}{\sum\limits_{u=1}^{N}(x_u-\bar{x})^2}} \cdot S_y. \qquad (5.40)$$

აქ ინდივიდუალური დაკვირვების ნაწინასწარმეტყველები მნიშვნელობა კვლავ განისაზღვრება $\hat{y}_k$ სიდიდით, მაგრამ დისპერსიით

$$S^2+S^2_{\hat{y}_k}=S^2\left\{1+\frac{1}{N}+\frac{(x_k-\bar{x})^2}{\sum\limits_{u=1}^{N}(x_u-\bar{x})^2}\right\}. \qquad (5.41)$$

95%-იანი სანდო ინტერვალის სიგრძე y_k-ს m ახალი დაკვირვების საშუალოსათვის მოიძებნება შემდეგნაირად:

$$\hat{y}_k \pm t_{0,975} \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{N}+\frac{(x_k-\bar{x})^2}{\sum\limits_{u=1}^{N}(x_u-\bar{x})^2}} \cdot S_y. \qquad (5.42)$$

მონაცემების დამუშავების შემდეგ ეტაპს წარმოადგენს მოდელის ადეკვატურობის შესახებ ჰიპოთეზის შემოწმება. ამ დროს პასუხი უნდა გაეცეს შეკითხვას, შეიძ-

ლება თუ არა გამოვიყენოთ მიღებული $y=\varphi(x)$ განტოლება, თუ აუცილებელია უფრო რთული მოდელი.

ადეკვატურობის შემოწმებისათვის მიღებულ განტოლებაში უნდა ჩავსვათ ექსპერიმენტული წერტილების კოორდინატები x_u (u=1, 2,...,N). მივიღებთ ნაწინასწარმეტყველებ მნიშვნელობებს $\hat{y}_u$ (u=1, 2,...,N) და შემდეგ გამოვთვლით სხვაობებს ექსპერიმენტულად მიღებულ და ნაწინასწარმეტყველებ მნიშვნელობებს შორის. ამ სხვაობების გამოყენებით გამოითვლება მოდელის $S^2_{\text{არაად}}$ არაადეკვატურობის დისპერსია

$$S^2_{\text{არაად}}=\frac{1}{N-l}\sum_{u=1}^{N}(y_u-\hat{y}_u)^2. \qquad (5.43)$$

თუ გეგმის ყველა წერტილში სრულდება m პარალელური ცდა, მაშინ

$$S^2_{\text{არაად}}=\frac{m}{N-l}\sum_{u=1}^{N}(\bar{y}_u-\hat{y}_u)^2, \qquad (5.44)$$

სადაც $\bar{y}_u$ ამომახილის ფუნქციის საშუალო არითმეტიკულია გეგმის u-ურ წერტილში.

თუ გეგმის წერტილებში სრულდება პარალელური ცდები, მაგრამ არათანაბარი რაოდენობით, მაშინ

$$S^2_{\text{არაად}}=\frac{1}{N-l}\sum_{u=1}^{N}m_u(\bar{y}_u-\hat{y}_u)^2, \qquad (5.45)$$

სადაც m_u პარალელური ცდების რაოდენობაა u-ურ წერტილში.

ჰიპოთეზას ადეკვატურობის შესახებ ყველაზე ხშირად ამოწმებენ ფიშერის კრიტერიუმის (F – კრიტერიუმის) გამოყენებით. ამისათვის განსაზღვრავენ ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობას

$$F=\frac{S^2_{\text{არაად}}}{S^2_y}. \qquad (5.46)$$

საანგარიშო მნიშვნელობას ადარებენ კრიტიკულ $F_{\text{ცხ}}$ მნიშვნელობასთან. ამ უკანასკნელს ირჩევენ ფიშერის ცხრი-

ლის (N-l) სვეტისა და იმ სტრიქონის გადაკვეთაზე, რომელიც შეესაბამება S_y^2 დისპერსიის თავისუფლების ხარისხს.

ჰიპოთეზა მოდელის ადეკვატურობის შესახებ არ იქნება უარყოფილი α სანდო ალბათობით, თუ

$$F \le F_{ცხ}. \tag{5.47}$$

მაგალითი. დავუშვათ, გეგმის N=5 წერტილში სამ-სამი (m=3) პარალელური ცდის ჩატარებისას მიღებულია დაკვირვებათა შედეგები, რომლებიც მოცემულია ცხრილის მეორე, მესამე და მეოთხე სვეტებში.

x	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$\bar{y}$	$\hat{y}$
0	3,25	2,75	3,00	3,00	3,10
1	5,40	5,00	5,20	5,20	5,05
2	6,80	7,05	6,55	6,80	7,00
3	9,30	9,00	9,60	9,30	8,95
4	10,70	11,00	10,40	10,70	10,90

უნდა მივიღოთ რეგრესიის წრფივი განტოლების კოეფიციენტების შეფასებები და ჩავატაროთ რეგრესიული ანალიზი.

გამოვთვალოთ გეგმის ყოველ წერტილში დაკვირვებათა შედეგების საშუალო არითმეტიკულები:

$$\bar{y}_1 = \frac{3,25 + 2,75 + 3,00}{3} = 3,00, \qquad \bar{y}_2 = \frac{5,40 + 5,00 + 5,20}{3} = 5,20,$$

$$\bar{y}_3 = \frac{6,80 + 7,05 + 6,55}{3} = 6,80, \qquad \bar{y}_4 = \frac{9,30 + 9,00 + 9,60}{3} = 9,30,$$

$$\bar{y}_5 = \frac{10,70 + 11,00 + 10,40}{3} = 10,70.$$

რეგრესიის საძიებელი წრფივი განტოლების კოეფიციენტები განვსაზღვროთ x და $\bar{y}$ სვეტების მონაცემების მიხედვით:

$$b_1 = \frac{N\sum_{u=1}^{N} x_u \bar{y}_u - \sum_{u=1}^{N} x_u \sum_{u=1}^{N} \bar{y}_u}{N\sum_{u=1}^{N} x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^{N} x_u\right)^2}, \qquad b_0 = \frac{\sum_{u=1}^{N} \bar{y}_u - b_1 \sum_{u=1}^{N} x_u}{N}.$$

გამოვთვალოთ ჯამები:

$$\sum_{u=1}^{5} x_u \bar{y}_u = 0 \cdot 3,00 + 1 \cdot 5,20 + 2 \cdot 6,80 + 3 \cdot 9,30 + 4 \cdot 10,70 = 89,5,$$

$$\sum_{u=1}^{5} x_u = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \qquad \sum_{u=1}^{5} x_u^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30,$$

$$\sum_{u=1}^{5} \bar{y}_u = 3,00 + 5,20 + 6,80 + 9,30 + 10,70 = 35,$$

მაშინ

$$b_1 = \frac{5 \cdot 89,5 - 10 \cdot 35}{5 \cdot 30 - 100} = 1,95, \qquad b_0 = \frac{35 - 1,95 \cdot 10}{5} = 3,10.$$

რეგრესიული ანალიზის ჩატარებისათვის წინასწარ განვსაზღვროთ ცდის დისპერსია

$$S_y^2 = \frac{1}{5(3-1)}\Big\{\left[(3,25-3,00)^2 + (2,75-3,00)^2 + (3,00-3,00)^2\right] +$$

$$+\left[(5,40-5,20)^2 + (5,00-5,20)^2 + (5,20-5,20)^2\right] + \left[(6,80-6,80)^2 + (7,05-6,80)^2 +\right.$$

$$\left.+(6,55-6,80)^2\right] + \left[(9,30-9,30)^2 + (9,00-9,30)^2 + (9,60-9,30)^2\right] + \left[(10,70-10,70)^2 +\right.$$

$$\left.+(11,00-10,70)^2 + (10,40-10,70)^2\right]\Big\} = 0,069$$

და საშუალო კვადრატული გადახრა $S_y = \sqrt{0,069} = 0,263$.

(5.29) და (5.30) ფორმულებით გამოვთვალოთ b_0 და b_1 კოეფიციენტების განსაზღვრის შეცდომები:

$$S_{b_0} = \sqrt{\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{5\left[(0-2)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2 + (4-2)^2\right]}} \cdot 0,263 = 0,204,$$

$$S_{b_1} = \frac{1}{\sqrt{\left[(0-2)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2 + (4-2)^2\right]}} \cdot 0,263 = 0,083.$$

ვინაიდან $N(m$-1)=5(3-1)=10 თავისუფლების ხარისხისათვის

$$t_{1-q} = t_{1-0,05} = t_{0,95} = 2,23,$$

კრიტიკული მნიშვნელობები იქნება:

$$t \cdot S_{b_0} = 2,23 \cdot 0,204 = 0,455, \qquad t \cdot S_{b_1} = 2,23 \cdot 0,083 = 0,185.$$

ვინაიდან ორივე კოეფიციენტი აბსოლუტური სიდიდით აღემატება შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობებს, ორივე კოეფიციენტი არსებითია და რეგრესიულ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\hat{y} = 3,10 + 1,95x.$$

ამ მოდელის ადეკვატურობის შემოწმებისათვის განვსაზღვროთ გამოსავალი პარამეტრის ნაწინასწარმეტყველები მნიშვნელობები გეგმის წერტილებში:

$$\hat{y}_1 = 3,10 + 1,95 \cdot 0 = 3,10, \quad \hat{y}_2 = 3,10 + 1,95 \cdot 1 = 5,05,$$

$$\hat{y}_3 = 3,10 + 1,95 \cdot 2 = 7,00, \quad \hat{y}_4 = 3,10 + 1,95 \cdot 3 = 8,95,$$

$$\hat{y}_5 = 3,10 + 1,95 \cdot 4 = 10,90.$$

ვინაიდან მიღებულ მოდელში ორივე კოეფიციენტი არსებითია (l=2) და გეგმის ყველა წერტილში ჩატარებულია სამ-სამი პარალელური ცდა (m=3), არაადეკვატურობის დისპერსია მოიძებნება (5.44) ფორმულით:

$$S^2_{არად} = \frac{3}{5-2} = \Big[(3{,}00-3{,}10)^2 + (5{,}20-5{,}05)^2 + (6{,}80-7{,}00)^2 +$$
$$+ (9{,}30-8{,}95)^2 + (10{,}70-10{,}90)^2\Big] = 0{,}235.$$

ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$F = \frac{S^2_{არად}}{S_y^2} = \frac{0{,}235}{0{,}069} = 3{,}406.$$

ცხრილური მნიშვნელობა მოვძებნოთ ფიშერის ცხრილის N-l=5-3==2 სვეტისა და $N(m$-1)=5(3-1)=10 სტრიქონის გადაკვეთაზე $F_{ცხ}$=3,70.

ვინაიდან F=3,406<$F_{ცხ}$=3,70, ჰიპოთეზა ჩვენ მიერ მიღებული წრფივი $\hat{y} = 3{,}10 + 1{,}95x$ მოდელის ადეკვატურობის შესახებ არ არის უარყოფილი.

მატრიცული მიდგომა წრფივი რეგრესიისადმი. $\hat{y}=b_0+b_1x_1$ ერთი ცვლადის წრფივი რეგრესიული მოდელის მაგალითზე ვაჩვენოთ, რა მარტივად შეგვიძლია გამოვსახოთ ანალიზი მატრიცული ალგებრის ტერმინებში.

გადავწეროთ ზემოთ აღნიშნული განტოლება შემდეგი სახით:

$$\hat{y} = b_0x_0 + b_1x_1,$$

სადაც x_0 ფიქტიური ცვლადია, რომელიც იგივურად 1-ის ტოლია.

გამოთვლების ჩასატარებლად სტატისტიკური მონაცემები წარმოვადგინოთ მატრიცულ ფორმაში:

დამოუკიდებელი ცვლადების მატრიცა	დაკვირვებათა ვექტორი	კოეფიციენტების ვექტორი
$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} \\ x_{02} & x_{12} \\ \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} \end{bmatrix}$	$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$

ნორმალურ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} b_0\sum_{u=1}^{N} x_{0u}x_{0u} + b_1\sum_{u=1}^{N} x_{0u}x_{1u} = \sum_{u=1}^{N} x_{0u}y_u, \\ b_0\sum_{u=1}^{N} x_{1u}x_{0u} + b_1\sum_{u=1}^{N} x_{1u}x_{1u} = \sum_{u=1}^{N} x_{1u}y_u. \end{cases}$$

მატრიცულ ფორმაში შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\mathbf{X^TXB = X^TY}.$$

მართლაც

$$\mathbf{X^TX} = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} \\ x_{02} & x_{12} \\ \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{u=1}^{N} x_{0u}x_{0u} & \sum_{u=1}^{N} x_{0u}x_{1u} \\ \sum_{u=1}^{N} x_{1u}x_{0u} & \sum_{u=1}^{N} x_{1u}x_{1u} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{X^TY} = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{u=1}^{N} x_{0u}y_u \\ \sum_{u=1}^{N} x_{1u}y_u \end{bmatrix}.$$

B კოეფიციენტების მატრიცა-სვეტი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \mathbf{(X^TX)^{-1}X^TY}, \tag{5.48}$$

სადაც $\mathbf{(X^TX)^{-1}}$ საინფორმაციო $\mathbf{(X^TX)}$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცაა:

$$\mathbf{(X^TX)^{-1}} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{bmatrix}.$$

შებრუნებული მატრიცის ელემენტებია

$$c_{00} = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{1u}^2}{N\sum_{u=1}^{N} x_{1u}^2 - \left(\sum_{u=1}^{N} x_{1u}\right)^2} = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{1u}^2}{N\sum_{u=1}^{N} (x_{1u} - \bar{x})^2},$$

$$c_{01}=\frac{-\sum_{u=1}^{N}x_{1u}}{N\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2-\left(\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\right)^2}=-\frac{\bar{x}}{\sum_{u=1}^{N}(x_{1u}-\bar{x})^2},$$

$$c_{10}=\frac{-\sum_{u=1}^{N}x_{1u}}{N\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2-\left(\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\right)^2}=-\frac{\bar{x}}{\sum_{u=1}^{N}(x_{1u}-\bar{x})^2},$$

$$c_{11}=\frac{N}{N\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2-\left(\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\right)^2}.$$

მაშინ (5.48) შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{00} & c_{01}\\ c_{10} & c_{11}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sum_{u=1}^{N}y_u\\ \sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2y_u}{N\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2-\left(\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\right)^2}-\dfrac{\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u}{N\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2-\left(\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\right)^2}\\ \dfrac{-\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\sum_{u=1}^{N}y_u}{N\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2-\left(\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\right)^2}+\dfrac{N\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u}{N\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2-\left(\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\right)^2}\end{bmatrix}$$

საძიებელი კოეფიციენტების შეფასებისათვის მივიღებთ:

$$b_0=\frac{\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2\sum_{u=1}^{N}y_u-\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u}{N\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2-\left(\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\right)^2},\quad b_1=\frac{N\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u-\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\sum_{u=1}^{N}y_u}{N\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2-\left(\sum_{u=1}^{N}x_{1u}\right)^2}.$$

მაგალითი. მოცემულია დაკვირვებათა წყვილები

x	0	1	2	3	4
y	0	2	4	6	8

მატრიცული მიდგომის გამოყენებით გამოვთვალოთ $\hat{y}=b_0+b_1x_1=b_0x_0+b_1x_1$ რეგრესიული განტოლების კოეფიციენტების შეფასებები.

მატრიცა

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\\1&3\\1&4\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X^TX}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\\1&3\\1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&10\\10&30\end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{X^TX})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{30}{5\cdot30-10\cdot10} & -\dfrac{10}{5\cdot30-10\cdot10}\\ -\dfrac{10}{5\cdot30-10\cdot10} & \dfrac{5}{5\cdot30-10\cdot10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{30}{50} & -\dfrac{10}{50}\\ -\dfrac{10}{50} & \dfrac{5}{50}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X^TY}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\4\\6\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\60\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}b_0\\b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{30}{50} & -\dfrac{10}{50}\\ -\dfrac{10}{50} & \dfrac{5}{50}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}20\\60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{600}{50}-\dfrac{600}{50}\\ -\dfrac{200}{50}+\dfrac{300}{50}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix},$$

$$b_0=0,\qquad b_1=2.$$

b_0 და b_1 კოეფიციენტების დისპერსიები და კოვარიაციები მატრიცულ ფორმაში განისაზღვრება **B** ვექტორის დისპერსია–კოვარიაციების მატრიცის ელემენტების მიხედვით შემდეგნაირად: $S^2_{\mathbf{B}}=(\mathbf{X^TX})^{-1}\cdot S^2_y$, ე.ი.

$$S^2_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}S^2_{b_0} & cov(b_0,b_1)\\ cov(b_1,b_0) & S^2_{b_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{S^2_y\sum_{u=1}^{N}x^2_{1u}}{N\sum_{u=1}^{N}(x_{1u}-\bar{x})^2} & \dfrac{-S^2_y\bar{x}}{\sum_{u=1}^{N}(x_{1u}-\bar{x})^2}\\ \dfrac{-S^2_y\bar{x}}{\sum_{u=1}^{N}(x_{1u}-\bar{x})^2} & \dfrac{S^2_y}{\sum_{u=1}^{N}(x_{1u}-\bar{x})^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{00}&c_{01}\\c_{10}&c_{11}\end{bmatrix}\cdot S^2_y.$$

ზემოთ განხილული მაგალითის შემთხვევაში იმის გათვალისწინებით, რომ $S_y^2 = 1$, მივიღებთ:

$$S_{b_0}^2 = c_{00} \cdot S_y^2 = \frac{30}{50} \cdot S_y^2 = \frac{30}{50} \cdot 1 = 0{,}6 \ , \qquad S_{b_0} = \sqrt{0{,}6} = 0{,}775,$$

$$S_{b_1}^2 = c_{11} \cdot S_y^2 = \frac{5}{50} \cdot S_y^2 = \frac{5}{50} \cdot 1 = 0{,}1 \ , \qquad S_{b_0} = \sqrt{0{,}1} = 0{,}316.$$

x სიდიდის რომელიმე x_k მნიშვნელობისათვის y სიდიდის ნაწინასწარმეტყველები საშუალო მნიშვნელობის დისპერსია მატრიცულ აღნიშვნებში განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$S_{\hat{y}_k}^2 = [1, x_k] \cdot \begin{bmatrix} S_{b_0}^2 & \mathrm{cov}(b_0, b_1) \\ \mathrm{cov}(b_1, b_0) & S_{b_1}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x_k \end{bmatrix} = \mathbf{x}_k^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_k S_y^2,$$

სადაც ვექტორი $\mathbf{x}^T_k = (1, x_k)$.

ზემოთ განხილულ მაგალითში $x_k = 3$ წერტილში y სიდიდის ნაწინასწარმეტყველები საშუალო მნიშვნელობის დისპერსია

$$S_{\hat{y}_k}^2 = [1,\ 3] \cdot \begin{bmatrix} \frac{30}{50} & -\frac{10}{50} \\ -\frac{10}{50} & \frac{5}{50} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot 1 = \left[0,\ \frac{5}{50}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot 1 = \left(0 + \frac{15}{50}\right) \cdot 1 = 0{,}3.$$

5.2. მრავლობითი რეგრესიული ანალიზი

წინა პარაგრაფში დეტალურად განვიხილეთ წრფივი მოდელები ერთი დამოუკიდებელი ცვლადით. ამ პარაგრაფში განიხილება რეგრესიული ანალიზი ფაქტორების მეტი რაოდენობისათვის.

თუ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით გვსურს შევარჩიოთ პარამეტრების მიმართ წრფივი ნებისმიერი მოდელი, გამოთვლები უნდა ვაწარმოოთ ზუსტად იმ ფორმით (მატრიცულ აღნიშვნებში), როგორც მხოლოდ β_0 და β_1 პარამეტრების შემცველი წრფის განტოლების შეფასებისას. მაგრამ გამოთვლების სირთულე პარამეტრების რაოდენობის გაზრდასთან ერთად მატულობს.

ჯერ გამოვიყენოთ მატრიცული ანალიზი ორი ცვლადის შემცველი წრფივი მოდელისათვის:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2. \qquad (5.49)$$

(5.49) განტოლებაში შევიტანოთ x_0 ფიქტიური ცვლადი, რომელიც ყველა ცდაში იღებს ერთის ტოლ მნიშვნელობებს

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2. \qquad (5.50)$$

ცხრილი 24

ცდის №	x_0	ექსპერიმენტის გეგმა		y
		x_1	x_2	
1	x_{01}	x_{11}	x_{21}	y_1
2	x_{02}	x_{12}	x_{22}	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	x_{0N}	x_{1N}	x_{2N}	y_N

უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებისას საჭირო ფუნქციონალი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\Phi = \sum_{u=1}^{N} (y_u - b_0 x_{0u} - b_1 x_{1u} - b_2 x_{2u})^2. \qquad (5.51)$$

ამ ფუნქციონალის დიფერენცირებისა და კერძო წარმოებულების ნულთან გატოლების შემდეგ გვექნება:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_2} = 0.$$

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ ნორმალურ განტოლებათა ალგებრულ ფორმას

$$\begin{cases} b_0 \sum\limits_{u=1}^{N} x_{ou}^2 + b_1 \sum\limits_{u=1}^{N} x_{ou} x_{1u} + b_2 \sum\limits_{u=1}^{N} x_{ou} x_{2u} = \sum\limits_{u=1}^{N} x_{ou} y_u, \\ b_0 \sum\limits_{u=1}^{N} x_{1u} x_{0u} + b_1 \sum\limits_{u=1}^{N} x_{1u}^2 + b_2 \sum\limits_{u=1}^{N} x_{1u} x_{2u} = \sum\limits_{u=1}^{N} x_{1u} y_u, \\ b_0 \sum\limits_{u=1}^{N} x_{2u} x_{0u} + b_1 \sum\limits_{u=1}^{N} x_{2u} x_{1u} + b_2 \sum\limits_{u=1}^{N} x_{2u}^2 = \sum\limits_{u=1}^{N} x_{2u} y_u. \end{cases} \qquad (5.52)$$

გამოთვლების ჩასატარებლად სტატისტიკური მონაცემები წარმოვადგინოთ მატრიცულ ფორმაში:

დამოუკიდებელი ცვლადების მატრიცა	დაკვირვებათა ვექტორი	კოეფიციენტების ვექტორი

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

მაშინ განტოლებათა სისტემისათვის მატრიცულ ფორმაში მივიღებთ

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{B}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}.$$

მართლაც, ფიშერის $\mathbf{A}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ საინფორმაციო მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathbf{A}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}^2 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}x_{1u} & \sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}x_{2u} \\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}x_{0u} & \sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}^2 & \sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}x_{2u} \\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_{2u}x_{0u} & \sum\limits_{u=1}^{N}x_{2u}x_{1u} & \sum\limits_{u=1}^{N}x_{2u}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}y_u \\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}y_u \\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_{2u}y_u \end{bmatrix}.$$

B კოეფიციენტების მატრიცა-სვეტი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}, \qquad (5.53)$$

სადაც $\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$ შებრუნებულ მატრიცას ამ შემთხვევაში აქვს შემდეგი სტრუქტურა:

$$\mathbf{A}^{-1}=\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}=\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}. \qquad (5.54)$$

ამრიგად, ნორმალურ განტოლებათა (5.53) სისტემა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}y_u \\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}y_u \\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_{2u}y_u \end{bmatrix},$$

საიდანაც

$$b_0=c_{00}\sum_{u=1}^{N}x_{0u}y_u+c_{01}\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u+c_{02}\sum_{u=1}^{N}x_{2u}y_u=\sum_{j=0}^{2}\left(c_{0j}\sum_{u=1}^{N}x_{ju}y_u\right),$$

$$b_1=c_{10}\sum_{u=1}^{N}x_{0u}y_u+c_{11}\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u+c_{12}\sum_{u=1}^{N}x_{2u}y_u=\sum_{j=0}^{2}\left(c_{1j}\sum_{u=1}^{N}x_{ju}y_u\right),$$

$$b_2=c_{20}\sum_{u=1}^{N}x_{0u}y_u+c_{21}\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u+c_{22}\sum_{u=1}^{N}x_{2u}y_u=\sum_{j=0}^{2}\left(c_{2j}\sum_{u=1}^{N}x_{ju}y_u\right).$$

მაგალითი. სამი X_1, X_2 და Y ცვლადების N=6 ნაკრების შედეგების მიხედვით (იხ. ცხრილი) გამოთვალეთ Y-ის მრავლობითი რეგრესია X_1-სა და X_2-ზე.

ცდის №	x_0	ექსპერიმენტის გეგმა		y
		x_1	x_2	
1	1	2,1	1,5	12,2
2	1	1,8	2,4	17,5
3	1	1,6	2,6	19,0
4	1	1,9	0,5	7,8
5	1	1,5	1,2	12,2
6	1	0,7	0,2	9,2

β კოეფიციენტების შესაფასებლად $y=\beta_0x_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2$ მოდელში გამოვიყენოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. გამოვთვალოთ კვადრატების და შერეული ნამრავლების ჯამები:

$$a_{00}=\sum_{u=1}^{6}x_{0u}^2=1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2=6,$$

$$a_{11}=\sum_{u=1}^{6}x_{1u}^2=2{,}1^2+1{,}8^2+1{,}6^2+1{,}9^2+1{,}5^2+0{,}7^2=16{,}56,$$

$$a_{22}=\sum_{u=1}^{6}x_{2u}^2=1{,}5^2+2{,}4^2+2{,}6^2+0{,}5^2+1{,}2^2+0{,}2^2=16{,}5,$$

$$a_{01}=a_{10}=\sum_{u=1}^{6}x_{0u}x_{1u}=1\cdot 2{,}1+1\cdot 1{,}8+1\cdot 1{,}6+1\cdot 1{,}9+1\cdot 1{,}5+1\cdot 0{,}7=9{,}6,$$

$$a_{02}=a_{20}=\sum_{u=1}^{6}x_{0u}x_{2u}=1\cdot 1{,}5+1\cdot 2{,}4+1\cdot 2{,}6+1\cdot 0{,}5+1\cdot 1{,}2+1\cdot 0{,}2=8{,}4,$$

$$a_{12}=a_{21}=\sum_{u=1}^{6}x_{1u}x_{2u}=2{,}1\cdot 1{,}5+1{,}8\cdot 2{,}4+1{,}6\cdot 2{,}6+1{,}9\cdot 0{,}5+1{,}5\cdot 1{,}2+0{,}7\cdot 0{,}2=14{,}52,$$

$$\sum_{u=1}^{6}x_{0u}y_u=1\cdot 12{,}2+1\cdot 17{,}5+1\cdot 19{,}0+1\cdot 7{,}8+1\cdot 12{,}2+1\cdot 9{,}2=77{,}9,$$

$$\sum_{u=1}^{6}x_{1u}y_u=2{,}1\cdot 12{,}2+1{,}8\cdot 17{,}5+1{,}6\cdot 19{,}0+1{,}9\cdot 7{,}8+1{,}5\cdot 12{,}2+0{,}7\cdot 9{,}2=127{,}08,$$

$$\sum_{u=1}^{6}x_{2u}y_u=1{,}5\cdot 12{,}2+2{,}4\cdot 17{,}5+2{,}6\cdot 19{,}0+0{,}5\cdot 7{,}8+1{,}2\cdot 12{,}2+0{,}2\cdot 9{,}2=130{,}08.$$

მაშინ ფიშერის საინფორმაციო მატრიცა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\mathbf{A}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}a_{00}&a_{01}&a_{02}\\a_{10}&a_{11}&a_{12}\\a_{20}&a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&9{,}6&8{,}4\\9{,}6&16{,}56&14{,}52\\8{,}4&14{,}52&16{,}5\end{bmatrix},$$

ხოლო

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}77{,}9\\127{,}08\\130{,}08\end{bmatrix}.$$

ყველაზე მნიშვნელოვანი სირთულე ჩნდება $\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$ შებრუნებული მატრიცის გაანგარიშებისას.

გაანგარიშების ერთ-ერთი შესაძლო ფორმულაა

$$\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}=\frac{(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{\nabla}}{|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}|},$$

სადაც $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{\nabla}$ მიერთებული მატრიცაა, ე.ი. მატრიცა, რომელშიც ელემენტები ჩანაცვლებულია მათი ალგებრული დამატებებით, ხოლო შემდეგ შესრულებულია ტრანსპონირება; $|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}|$ კი წარმოადგენს $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})$ მატრიცის განმსაზღვრელს.

ჩვენ მაგალითში

$$|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}|=\begin{vmatrix}6&9{,}6&8{,}4\\9{,}6&16{,}56&14{,}52\\8{,}4&14{,}52&16{,}5\end{vmatrix}=6\cdot 16{,}56\cdot 16{,}5+9{,}6\cdot 14{,}52\cdot 8{,}4+$$

$$+8{,}4\cdot 9{,}4\cdot 14{,}52-8{,}4\cdot 16{,}56\cdot 8{,}4-14{,}52\cdot 14{,}52\cdot 6-16{,}5\cdot 9{,}6\cdot 9{,}6=27{,}13.$$

α_{ij} ელემენტების A_{ij} ალგებრული დამატებები შემდეგია:

$$A_{00}=(-1)^{0+0}\begin{vmatrix}16{,}56&14{,}52\\14{,}52&16{,}5\end{vmatrix}=16{,}56\cdot 16{,}5-14{,}52\cdot 14{,}52=61{,}410,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6&8{,}4\\8{,}4&16{,}5\end{vmatrix}=6\cdot 16{,}5-8{,}4\cdot 8{,}4=28{,}44,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}6&9{,}6\\9{,}6&16{,}56\end{vmatrix}=6\cdot 16{,}56-9{,}6\cdot 9{,}6=7{,}20,$$

$$A_{01}=A_{10}=(-1)^{0+1}\begin{vmatrix}9{,}6&14{,}52\\8{,}4&16{,}5\end{vmatrix}=-(9{,}6\cdot 16{,}5-8{,}4\cdot 14{,}52)=-36{,}432,$$

$$A_{02}=A_{20}=(-1)^{0+2}\begin{vmatrix}9{,}6&16{,}56\\8{,}4&14{,}52\end{vmatrix}=9{,}6\cdot 14{,}52-8{,}4\cdot 16{,}56=0{,}288,$$

$$A_{12}=A_{21}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6&9{,}6\\8{,}4&14{,}52\end{vmatrix}=-(6\cdot 14{,}52-8{,}4\cdot 9{,}6)=-6{,}48.$$

მაშინ

$$(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{61{,}410}{27{,}13}&\dfrac{-36{,}432}{27{,}13}&\dfrac{0{,}288}{27{,}13}\\[2mm]\dfrac{-36{,}432}{27{,}13}&\dfrac{28{,}44}{27{,}13}&\dfrac{-6{,}48}{27{,}13}\\[2mm]\dfrac{0{,}288}{27{,}13}&\dfrac{-6{,}48}{27{,}13}&\dfrac{7{,}20}{27{,}13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2{,}264&-1{,}343&0{,}011\\-1{,}343&1{,}048&-0{,}239\\0{,}011&-0{,}239&0{,}265\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,264 & -1,343 & 0,011 \\ -1,343 & 1,048 & -0,239 \\ 0,011 & -0,239 & 0,265 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 77,9 \\ 127,08 \\ 130,08 \end{bmatrix}$$

და

$$b_0 = 2,264 \cdot 77,9 - 1,343 \cdot 127,08 + 0,011 \cdot 130,08 = 7,129,$$
$$b_1 = -1,343 \cdot 77,9 + 1,048 \cdot 127,08 - 0,239 \cdot 130,08 = -2,529,$$
$$b_2 = 0,011 \cdot 77,9 - 0,239 \cdot 127,08 + 0,265 \cdot 130,08 = 4,956.$$

ახლა გამოვიყენოთ მატრიცული ანალიზი k ფაქტორიანი წრფივი მოდელისათვის

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_k x_k. \tag{5.55}$$

გადავწეროთ ეს განტოლება x_0 ფიქტიური ცვლადის დამატებით, რომელიც იგივურად ყველა ცდაში 1-ის ტოლ მნიშვნელობას იღებს (25-ე ცხრილის მეორე სვეტში $x_{01} = x_{02} = \cdots = x_{0N} = 1$)

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_k x_k. \tag{5.56}$$

ცხრილი 25

ცდის №	x_0	ექსპერიმენტის გეგმა				y
		x_1	x_2	…	x_k	
1	x_{01}	x_{11}	x_{21}	…	x_{k1}	y_1
2	x_{02}	x_{12}	x_{22}	…	x_{k2}	y_2
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
N	x_{0N}	x_{1N}	x_{2N}	…	x_{kN}	y_N

ჩავწეროთ ფუნქცია

$$\Phi = \sum_{u=1}^{N} (y_u - b_0 x_{0u} - b_1 x_{1u} - b_2 x_{2u} - \cdots - b_k x_{ku})^2. \tag{5.57}$$

მისი კერძო წარმოებულების ნულთან გატოლებისა

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_2} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial \Phi}{\partial b_k} = 0$$

და მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ ნორმალურ განტოლებათა ალგებრულ ფორმას:

$$\begin{cases} b_0 \sum_{u=1}^{N} x_{0u}^2 + b_1 \sum_{u=1}^{N} x_{0u} x_{1u} + b_2 \sum_{u=1}^{N} x_{0u} x_{2u} + \cdots + b_k \sum_{u=1}^{N} x_{0u} x_{ku} = \sum_{u=1}^{N} x_{0u} y_u, \\ b_0 \sum_{u=1}^{N} x_{1u} x_{0u} + b_1 \sum_{u=1}^{N} x_{1u}^2 + b_2 \sum_{u=1}^{N} x_{1u} x_{2u} + \cdots + b_k \sum_{u=1}^{N} x_{1u} x_{ku} = \sum_{u=1}^{N} x_{1u} y_u, \\ b_0 \sum_{u=1}^{N} x_{2u} x_{0u} + b_1 \sum_{u=1}^{N} x_{2u} x_{1u} + b_2 \sum_{u=1}^{N} x_{2u}^2 + \cdots + b_k \sum_{u=1}^{N} x_{2u} x_{ku} = \sum_{u=1}^{N} x_{2u} y_u, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0 \sum_{u=1}^{N} x_{ku} x_{0u} + b_1 \sum_{u=1}^{N} x_{ku} x_{1u} + b_2 \sum_{u=1}^{N} x_{ku} x_{2u} + \cdots + b_k \sum_{u=1}^{N} x_{ku}^2 = \sum_{u=1}^{N} x_{ku} y_u. \end{cases} \tag{5.58}$$

გამონაგარიშების ჩასატარებლად სტატისტიკური მონაცემები საჭიროა წარმოვადგინოთ მატრიცულ ფორმაში:

დამოუკიდებელი ცვლადების მატრიცა — დაკვირვებათა ვექტორი — კოეფიციენტების ვექტორი

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} & \cdots & x_{kN} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} & \cdots & x_{kN} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{u=1}^{N} x_{0u}^2 & \sum_{u=1}^{N} x_{0u} x_{1u} & \sum_{u=1}^{N} x_{0u} x_{2u} & \cdots & \sum_{u=1}^{N} x_{0u} x_{ku} \\ \sum_{u=1}^{N} x_{1u} x_{0u} & \sum_{u=1}^{N} x_{1u}^2 & \sum_{u=1}^{N} x_{1u} x_{2u} & \cdots & \sum_{u=1}^{N} x_{1u} x_{ku} \\ \sum_{u=1}^{N} x_{2u} x_{0u} & \sum_{u=1}^{N} x_{2u} x_{1u} & \sum_{u=1}^{N} x_{2u}^2 & \cdots & \sum_{u=1}^{N} x_{2u} x_{ku} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{u=1}^{N} x_{ku} x_{0u} & \sum_{u=1}^{N} x_{ku} x_{1u} & \sum_{u=1}^{N} x_{ku} x_{2u} & \cdots & \sum_{u=1}^{N} x_{ku}^2 \end{bmatrix},$$

$$
\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kN} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{u=1}^{N} x_{0u}y_u \\ \sum\limits_{u=1}^{N} x_{1u}y_u \\ \sum\limits_{u=1}^{N} x_{2u}y_u \\ \cdots \\ \sum\limits_{u=1}^{N} x_{ku}y_u \end{bmatrix}
$$

და

$$
\mathbf{A}^{-1}=\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}=\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \cdots & c_{0k} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k0} & c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}, \qquad (5.59)
$$

ნორმალურ განტოლებათა $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{B}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}$ სისტემის ამონახსნი მატრიცულ ფორმაში შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$
\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \cdots & c_{0k} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k0} & c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \sum\limits_{u=1}^{N} x_{0u}y_u \\ \sum\limits_{u=1}^{N} x_{1u}y_u \\ \sum\limits_{u=1}^{N} x_{2u}y_u \\ \cdots \\ \sum\limits_{u=1}^{N} x_{ku}y_u \end{bmatrix}.
$$

აქედან

$$
b_0=c_{00}\sum_{u=1}^{N}x_{0u}y_u+c_{01}\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u+c_{02}\sum_{u=1}^{N}x_{2u}y_u+\cdots+c_{0k}\sum_{u=1}^{N}x_{ku}y_u=\sum_{j=0}^{k}\left(c_{0j}\sum_{u=1}^{N}x_{ju}y_u\right),
$$

$$
b_1=c_{10}\sum_{u=1}^{N}x_{0u}y_u+c_{11}\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u+c_{12}\sum_{u=1}^{N}x_{2u}y_u+\cdots+c_{1k}\sum_{u=1}^{N}x_{ku}y_u=\sum_{j=0}^{k}\left(c_{1j}\sum_{u=1}^{N}x_{ju}y_u\right),
$$

$$
b_2=c_{20}\sum_{u=1}^{N}x_{0u}y_u+c_{21}\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u+c_{22}\sum_{u=1}^{N}x_{2u}y_u+\cdots+c_{2k}\sum_{u=1}^{N}x_{ku}y_u=\sum_{j=0}^{k}\left(c_{2j}\sum_{u=1}^{N}x_{ju}y_u\right),
$$

....

$$
b_k=c_{k0}\sum_{u=1}^{N}x_{0u}y_u+c_{k1}\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u+c_{k2}\sum_{u=1}^{N}x_{2u}y_u+\cdots+c_{kk}\sum_{u=1}^{N}x_{ku}y_u=\sum_{j=0}^{k}\left(c_{kj}\sum_{u=1}^{N}x_{ju}y_u\right),
$$

ან ზოგადი სახით:

$$
b_i=\sum_{j=0}^{k}\left(c_{ij}\sum_{u=1}^{N}x_{ju}y_u\right), \quad i=0,1,2,\ldots,k. \qquad (5.60)
$$

ვინაიდან რეგრესიის კოეფიციენტების გაანგარიშება ხდება ცდების იმ შედეგების მიხედვით, რომლებიც წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეებს, თვით კოეფიციენტებიც შემთხვევითია. ზოგადად ამ კოეფიციენტებს გააჩნია სხვადასხვა დისპერსიები და ურთიერთკორელაციის სხვადასხვა სიდიდე (სხვადასხვა კოვარიაციები და კორელაციის კოეფიციენტები).

კოეფიციენტებისა და, მაშასადამე, რეგრესიის განტოლების ყველა სტატისტიკურ თვისებას განსაზღვრავს შებრუნებული მატრიცა (5.59) გამრავლებული ცდის დისპერსიის S_y^2 შეფასებაზე. ეს მატრიცა $\mathbf{A}^{-1}S_y^2=\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}S_y^2$ ცნობილია, როგორც *დისპერსია–კოვარიაციების* ან *კოვარიაციული მატრიცა*. მას აქვს შემდეგი სახე:

$$
\mathbf{A}^{-1}S_y^2=\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \cdots & c_{0k} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k0} & c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}\cdot S_y^2=\begin{bmatrix} S_{b_0}^2 & \mathrm{cov}_{b_0b_1} & \mathrm{cov}_{b_0b_2} & \cdots & \mathrm{cov}_{b_0b_k} \\ \mathrm{cov}_{b_1b_0} & S_{b_1}^2 & \mathrm{cov}_{b_1b_2} & \cdots & \mathrm{cov}_{b_1b_k} \\ \mathrm{cov}_{b_2b_0} & \mathrm{cov}_{b_2b_1} & S_{b_2}^2 & \cdots & \mathrm{cov}_{b_2b_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{cov}_{b_kb_0} & \mathrm{cov}_{b_kb_1} & \mathrm{cov}_{b_kb_2} & \cdots & S_{b_k}^2 \end{bmatrix} \qquad (5.61)
$$

მაშასადამე, რეგრესიის კოეფიციენტების დისპერსიების $S_{b_i}^2$ შეფასებებს განსაზღვრავს $\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}$ მატრიცის დიაგონალური c_{ii} ელემენტები

$$
S_{b_i}^2=c_{ii}S_y^2, \qquad (5.62)
$$

ხოლო b_i და b_j კოეფიციენტების $\mathrm{cov}_{b_ib_j}$ კოვარიაციებს – შებრუნებული მატრიცის არადიაგონალური c_{ij} ელემენტები

$$
\mathrm{cov}_{b_ib_j}=c_{ij}S_y^2. \qquad (5.63)
$$

უნდა აღინიშნოს, რომ არადიაგონალური ელემენტი c_{ij} შეესაბამება i–ური სტრიქონისა და j–ური სვეტის ან j–ური სტრიქონისა და i–ური სვეტის გადაკვეთას $\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}$ მატრიცის სიმეტრიულობის გამო.

b_i–სა და b_j–ს შორის კორელაციის კოეფიციენტები შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$r_{b_i b_j} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}}. \qquad (5.64)$$

კოეფიციენტი მნიშვნელოვანია შემდეგი პირობის შესრულებისას

$$|b_i| \ge t \cdot S_{b_i} \qquad (5.65)$$

ან

$$|b_i| \ge t\sqrt{c_{ii}}\, S_y. \qquad (5.66)$$

ვინაიდან b_i კოეფიციენტები შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელიმე w წერტილში ნაწინასწარმეტყველები $\hat{y}_w$ მნიშვნელობის გათვლის შედეგებიც

$$\hat{y}_w = b_0 + b_1 x_{1w} + b_2 x_{2w} + \cdots + b_k x_{kw} \qquad (5.67)$$

შემთხვევითი აღმოჩნდება. მას შეცდომების შეკრების კანონით გააჩნია დისპერსია

$$S^2_{\hat{y}_w} = \sum_{0\le i\le k} \left(\frac{\partial y}{\partial b_i}\right)^2_w S^2_{b_i} + \sum_{0\le i<j\le k} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial b_i \partial b_j}\right)_w \mathrm{cov}_{b_i b_j}; \qquad (5.68)$$

ვინაიდან (5.67) მოდელის შემთხვევაში $\left(\frac{\partial y}{\partial b_i}\right)^2_w = x^2_{iw}$, მივიღებთ

$$S^2_{\hat{y}_w} = S^2_{b_0} + x^2_{1w} S^2_{b_1} + x^2_{2w} S^2_{b_2} + \cdots + x^2_{kw} S^2_{b_k} + 2x_{1w}\,\mathrm{cov}_{b_0 b_1} + \cdots + 2x_{k-1,w} x_{kw}\,\mathrm{cov}_{b_{k-1} b_k}.$$

ეს გამოსახულება მატრიცულ აღნიშვნებში შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$S^2_{\hat{y}_w} = S^2_y \left[\mathbf{x}^{\mathrm{T}}_w \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{x}_w\right] =$$

$$= S^2_y \left[1, x_{1w}, x_{2w}, \ldots, x_{kw}\right] \cdot \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \cdots & c_{0k} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k0} & c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x_{1w} \\ x_{2w} \\ \cdots \\ x_{kw} \end{bmatrix}, \qquad (5.69)$$

სადაც ვექტორი $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}_w = (1, x_{1w}, x_{2w}, \ldots, x_{kw})$.

აქედან (1-q) სანდო საზღვრები y–ის „ჭეშმარიტი“ საშუალო მნიშვნელობისათვის x_w წერტილში მიიღება გამოსახულებიდან

$$\hat{y}_w \pm t_{\left[1-\frac{1}{2}q\right]} \cdot S_y \sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}_w \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{x}_w}, \qquad (5.70)$$

სადაც $t_{1-q/2}$ t განაწილების $(1-q/2)$%–იანი წერტილია იმ თავისუფლების ხარისხისათვის, რომლითაც განისაზღვრა S_y საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასება.

მაგალითი. ხუთ დამოუკიდებელ x ცვლადზე (k=5) და ერთ დამოკიდებულ y ცვლადზე N=17 დაკვირვების შედეგის მიხედვით (მოცემულია ცხრილში) ავაგოთ $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5$ მოდელი

დაკვირვების №	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
1	57,5	5,17	2,42	34,0	77,9	372,86
2	60,5	1,64	7,10	38,4	76,1	385,12
3	60,2	2,85	3,01	20,0	75,8	431,64
4	66,4	7,00	2,85	46,3	77,2	340,72
5	55,1	1,91	3,30	44,6	76,5	329,54
6	59,2	6,20	3,48	52,2	83,4	331,29
7	66,7	5,88	3,99	51,0	60,2	258,54
8	57,4	4,70	4,72	59,9	67,5	239,20
9	68,1	6,41	6,44	52,0	63,4	283,31
10	59,5	5,51	3,17	56,7	72,5	267,85
11	63,5	3,42	5,88	60,5	64,6	246,30
12	60,0	6,11	3,43	48,2	63,2	264,22
13	57,4	5,31	2,49	43,1	71,2	303,20
14	59,7	3,07	2,34	52,9	68,6	266,51
15	62,2	4,84	6,21	48,4	71,3	319,09
16	63,5	4,11	7,10	62,1	64,5	244,93
17	55,1	3,36	1,79	64,2	68,2	206,45

ფიქტიური, ყველა ცდაში იგივურად 1–ის ტოლი, x_0 ცვლადის დამატების შემდეგ მივიღებთ [17 x 6] დაგეგმვის $\mathbf{X}$ მატრიცას

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{X} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 57,5 & 5,17 & 2,42 & 34,0 & 77,9 \\ 1 & 60,5 & 1,64 & 7,10 & 38,4 & 76,1 \\ 1 & 60,2 & 2,85 & 3,01 & 20,0 & 75,8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 55,1 & 3,36 & 1,79 & 64,2 & 68,2 \end{bmatrix} \end{array}$$

ჩვენ მაგალითში ფიშერის საინფორმაციო მატრიცას $\mathbf{A}=\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 57,5 & 60,5 & 60,2 & \dots & 55,1 \\ 5,17 & 1,64 & 2,85 & \dots & 3,36 \\ 2,42 & 7,10 & 3,01 & \dots & 1,79 \\ 34,0 & 38,4 & 20,0 & \dots & 64,2 \\ 77,9 & 76,1 & 75,8 & \dots & 68,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 57,5 & 5,17 & 2,42 & 34,0 & 77,9 \\ 1 & 60,5 & 1,64 & 7,10 & 38,4 & 76,1 \\ 1 & 60,2 & 2,85 & 3,01 & 20,0 & 75,8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 55,1 & 3,36 & 1,79 & 64,2 & 68,2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 17,0000 & 1032,0000 & 77,4900 & 68,7200 & 834,5000 & 1202,1000 \\ 1032,0000 & 62889,8600 & 4750,5000 & 4232,3650 & 50716,1000 & 72810,9300 \\ 77,4900 & 4750,5000 & 394,9985 & 307,0336 & 3853,7040 & 5459,3640 \\ 68,7200 & 4232,3650 & 307,0336 & 332,3836 & 3446,4190 & 4802,8680 \\ 834,5000 & 50716,1000 & 3853,7040 & 3446,4190 & 42956,2700 & 58434,5900 \\ 1202,1000 & 72810,9300 & 5459,3640 & 4802,8680 & 58434,5900 & 85666,9900 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ [6 x 6] - მატრიცის შებრუნების შედეგად მივიღებთ:

$$\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 75,9516 & -0,8440 & 0,9676 & 0,8203 & -0,1557 & -0,3499 \\ -0,8440 & 0,0123 & -0,0162 & -0,0147 & 0,0013 & 0,0024 \\ 0,9676 & -0,0162 & 0,0470 & 0,0238 & -0,0023 & 0,0024 \\ 0,8203 & -0,0147 & 0,0238 & 0,0387 & -0,0020 & -0,0026 \\ -0,1557 & 0,0013 & -0,0023 & -0,0020 & 0,0008 & -0,0013 \\ -0,3499 & 0,0024 & -0,0026 & -0,0013 & 0,0008 & 0,0026 \end{bmatrix}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 57,5 & 60,5 & 60,2 & \dots & 55,1 \\ 5,17 & 1,64 & 2,85 & \dots & 3,36 \\ 2,42 & 7,10 & 3,01 & \dots & 1,79 \\ 34,0 & 38,4 & 20,0 & \dots & 64,2 \\ 77,9 & 76,1 & 75,8 & \dots & 68,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 372,86 \\ 385,12 \\ 431,64 \\ 340,72 \\ \vdots \\ 206,45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5090,7602 \\ 308905,7066 \\ 22923,8118 \\ 20486,9695 \\ 240008,2394 \\ 364414,2590 \end{bmatrix},$$

წრფივი რეგრესიული განტოლების კოეფიციენტების საძიებელი შეფა-სებებისათვის მივიღებთ:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75,9516 & -0,8440 & 0,9676 & 0,8203 & -0,1557 & -0,3499 \\ -0,8440 & 0,0123 & -0,0162 & -0,0147 & 0,0013 & 0,0024 \\ 0,9676 & -0,0162 & 0,0470 & 0,0238 & -0,0023 & -0,0026 \\ 0,8203 & -0,0147 & 0,0238 & 0,0387 & -0,0023 & -0,0026 \\ -0,1557 & 0,0013 & -0,0023 & -0,0020 & 0,0008 & -0,0013 \\ -0,3499 & 0,0024 & -0,0026 & -0,0013 & 0,0008 & 0,0026 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 5090,7602 \\ 308905,7066 \\ 22923,8118 \\ 20486,9695 \\ 240008,2394 \\ 364414,2590 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51,3844 \\ 2,1860 \\ -1,6009 \\ 5,3609 \\ -3,9753 \\ 4,1879 \end{bmatrix}.$$

ცდის დისპერსიის შეფასებისათვის წერტილში კოორდინატე-ბით x_1=58,2; x_2=5,49; x_3=4,15; x_4=48,2; x_5=68,1 ჩატარდა m=4 პარა-ლელური ცდა და მიღებულ იქნა დაკვირვებათა შემდეგი შედეგები: 285,66; 285,42; 285,25; 285,87, რომელთა საშუალო არითმეტიკული 285,55 ტოლია. მაშინ

$$S_y^2 = \frac{1}{4-1}\Big[(285.66-285.55)^2 + (285.42-285.55)^2 +$$
$$+ (285.25-285.55)^2 + (285.87-285.55)^2\Big] = 0,0738.$$

შებრუნებული $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ მატრიცის დიაგონალური ელემენტებისა და სტიუდენტის კრიტერიუმის ცხრილური მნიშვნელობის გათვალის-წინებით m-1=4-1=3 თავისუფლების ხარისხისათვის ($t_{[3;\,0,95]}$=3,18), მივი-ღებთ კრიტიკულ მნიშვნელობებს კოეფიციენტების შეფასებების არსე-ბითობის შემოწმებისათვის:

$$t \cdot S_{b_0} = t\sqrt{c_{00}} \cdot S_y = 3,18 \cdot 8,7150 \cdot 0,2717 = 7,5298,$$
$$t \cdot S_{b_1} = t\sqrt{c_{11}} \cdot S_y = 3,18 \cdot 0,1108 \cdot 0,2717 = 0,0957,$$
$$t \cdot S_{b_2} = t\sqrt{c_{22}} \cdot S_y = 3,18 \cdot 0,2168 \cdot 0,2717 = 0,1873,$$
$$t \cdot S_{b_3} = t\sqrt{c_{33}} \cdot S_y = 3,18 \cdot 0,1966 \cdot 0,2717 = 0,1699,$$
$$t \cdot S_{b_4} = t\sqrt{c_{44}} \cdot S_y = 3,18 \cdot 0,0287 \cdot 0,2717 = 0,0248,$$
$$t \cdot S_{b_5} = t\sqrt{c_{55}} \cdot S_y = 3,18 \cdot 0,0509 \cdot 0,2717 = 0,0440.$$

ვინაიდან წრფივი რეგრესიული განტოლების ყველა კოეფი-ციენტის შეფასება მოდულით აღემატება შესაბამის კრიტიკულ მნიშვ-ნელობას, ყველა კოეფიციენტი არსებითია. ამრიგად, მივიღეთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით შერჩეული განტოლება:

$$\hat{y} = 51,38 + 2,19x_1 - 1,60x_2 + 5,36x_3 - 3,98x_4 + 4,19x_5.$$

მივიღოთ 95%-იანი სანდო საზღვრები y-ის „ჭეშმარიტი" სა-შუალოსათვის x_1=66,4; x_2=7,00; x_3=2,85; x_4=46,3; x_5=77,2 წერტილში. ფაქტორული სივრცის ამ წერტილში (5.69) თანახმად მივიღებთ $\hat{y}$-ის შემდეგ დისპერსიას

$$S_{\hat{y}}^2 = S_y^2\left[\mathbf{x}^T\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{x}\right] = (0{,}0738)\left[1, \quad 66{,}4, \quad 7{,}00, \quad 2{,}85, \quad 46{,}3 \quad 77{,}2\right] \times$$

$$\times\begin{bmatrix} 75{,}9516 & -0{,}8440 & 0{,}9676 & 0{,}8203 & -0{,}1557 & -0{,}3499 \\ -0{,}8440 & 0{,}0123 & -0{,}0162 & -0{,}0147 & 0{,}0013 & 0{,}0024 \\ 0{,}9676 & -0{,}0162 & 0{,}0470 & 0{,}0238 & -0{,}0023 & -0{,}0026 \\ 0{,}8203 & -0{,}0147 & 0{,}0238 & 0{,}0387 & -0{,}0020 & -0{,}0013 \\ -0{,}1557 & 0{,}0013 & -0{,}0023 & -0{,}0020 & 0{,}0008 & 0{,}0008 \\ -0{,}3499 & 0{,}0024 & -0{,}0026 & -0{,}0013 & 0{,}0008 & 0{,}0026 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 66{,}4 \\ 7{,}00 \\ 2{,}85 \\ 46{,}3 \\ 77{,}2 \end{bmatrix} = 0{,}0431.$$

მაშინ 95%-იანი სანდო საზღვრები y-ის „ჭეშმარიტი" საშუალო მნიშვნელობისათვის ამ წერტილში იქნება

$$\hat{y} \pm t_{[3;0{,}975]} \cdot \sqrt{S_{\hat{y}}^2} = 340{,}07 \pm 4{,}54\sqrt{0{,}0431} = 340{,}07 \pm 0{,}94.$$

საზღვრებს [339,13; 341,01] შეიძლება მივცეთ შემდეგი ინტერპრეტაცია: დავუშვათ, რამდენჯერმე გამეორდა ისეთივე (N=17) მოცულობის შერჩევა ფაქტორების დონეების იმავე მნიშვნელობების დროს, რაც ამ მაგალითის ცხრილშია მოცემული. თუ აგებულია ყველა 95%-იანი სანდო ინტერვალი y-ის საშუალო მნიშვნელობისათვის x_1=66,4; x_2=7,00; x_3=2,85; x_4=46,3; x_5=77,2 წერტილში, მაშინ ამ ინტერვალების 95% შეიცავს y-ის „ჭეშმარიტ" საშუალოს ამ წერტილისათვის. სხვანაირად რომ ვთქვათ, 0,95 ალბათობით მართებულია მტკიცება, რომ y-ის „ჭეშმარიტი" საშუალო მნიშვნელობა ჩვენთვის საინტერესო წერტილში 339,13-სა და 341,01-ს შორის დევს.

ზემომოყვანილი მასალის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ თუ რეგრესიულ მოდელში ჩართულია მხოლოდ ერთი ან ორი დამოუკიდებელი ცვლადი, გამოთვლა $\mathbf{B}=(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$ ფორმულით ჩვეულებრივ არ იწვევს გართულებას იმ პირობით, რომ გამოთვლები ტარდება ნიშნადი ციფრების საკმაო რაოდენობით. ამოცანებში რამდენიმე დამოუკიდებელი ცვლადით და მონაცემების დიდი მოცულობით შედეგები მახინჯდება დამრგვალებაში დაშვებული შეცდომის გამო.

განვმარტოთ დამრგვალების შეცდომის ორი ძირითადი მიზეზი:

1) რეგრესიულ გამოთვლებში ჩართული რიცხვები მკვეთრად განსხვავდება ერთმანეთისაგან, მაგალითად, 48913, -871 და 5.

2) $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ მატრიცა, რომლის შებრუნებასაც ვახდენთ, ახლოსაა გადაგვარებულთან. ასეთი მატრიცის განმსაზღვრელი, (როგორც უკვე აღინიშნა) შედის შებრუნებული

$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ მატრიცის ყველა ელემენტში. თუ მატრიცის განმსაზღვრელი მცირეა ანგარიშში მონაწილე სხვა რიცხვებთან შედარებით, დამრგვალებით გამოწვეულ დაბრკოლებას ექნება ადგილი. როდესაც det($\mathbf{X}^T\mathbf{X}$) ძალიან მცირეა ანგარიშში მონაწილე სხვა რიცხვებთან შედარებით, $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ მატრიცაზე ამბობენ, რომ ის ცუდად (ან სუსტად) შეპირობებულია. როდესაც det($\mathbf{X}^T\mathbf{X}$)=0, $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ მატრიცაზე ამბობენ, რომ ის სინგულარულია (გადაგვარებულია); თუ ეს ხდება მანქანური თვლის დროს, ადგილი აქვს გადავსებას.

ამის დასაძლევად თანამედროვე კომპიუტერებში გათვალისწინებულია შედეგების მიღება გაორკეცებული სიზუსტით (მანქანა ამ დროს ასრულებს ოპერაციებს ორჯერ უფრო გრძელ რიცხვებზე).

ზემოთ საკმაოდ დაწვრილებით განვიხილეთ წრფივი მოდელები k ფაქტორისათვის. მაგრამ ხშირად ასეთი მოდელები არაადეკვატურია და იძულებული ვართ გადავიდეთ უფრო რთულ არაწრფივ მოდელებზე.

არაწრფივ პოლინომურ მოდელებს შორის განვიხილოთ მეორე რიგის სრული პოლინომური მოდელი

$$y = \beta_0 + \sum_{1\le i\le k}\beta_i x_i + \sum_{1\le i\le k}\beta_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le k}\beta_{ij}x_i x_j, \qquad (5.71)$$

რომელიც შეიცავს მეორე რიგის ყველა შესაძლო წევრს (როგორც ცვლადების მეორე ხარისხებს, ისე ცვლადების შერეულ ნამრავლებს) და მესამე რიგის პოლინომური მოდელი

$$y = \beta_0 + \sum_{1\le i\le k}\beta_i x_i + \sum_{1\le i\le j\le k}\beta_{ij}x_i x_j + \sum_{1\le i\le j\le v\le k}\beta_{ijv}x_i x_j x_v. \qquad (5.72)$$

β კოეფიციენტების ინდექსაციის აქ გამოყენებული მეთოდი მოსახერხებელია, ვინაიდან საშუალებას გვაძლევს ადვილად დავადგინოთ, რომელ x ცვლადებთან და რა ხარისხებთანაა დაკავშირებული მოცემული კოეფიციენტი. მაგალითად, $x_1x_2^2=x_1x_2x_2$ წევრთან გვექნება კოეფიციენტი β_{122} და ა.შ.

სათანადო ხარისხის სრული პოლინომების გარდა, შეგვიძლია ავაგოთ აგრეთვე არასრული (მაგალითად, კვადრატული სრული კვადრატების გარეშე) ან სპეციალური სახის პოლინომები.

ყველა ეს პოლინომური მოდელი სათანადო გარდაქმნებით შეგვიძლია დავიყვანოთ წრფივი მოდელის სტანდარტულ ფორმამდე

$$y = \beta_0 z_0 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_p z_p, \qquad (5.73)$$

სადაც ყოველი z_j, $j=1, 2, \dots, p$, წარმოადგენს $x_1, x_2, \dots, x_k$-ს ცნობილ ფუნქციას. მიღებული განტოლების (5.73) ანალიზი ხდება ზემოაღნიშნული ზოგადი მეთოდებით.

განვიხილოთ მეორე რიგის პოლინომური მოდელი $k=2$ ცვლადისათვის

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2.$$

$z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_1^2$, $z_4 = x_2^2$, $z_5 = x_1 x_2$ გარდაქმნით ეს მოდელი დაიყვანება წრფივი მოდელის სტანდარტულ ფორმამდე

$$y = \beta_0 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 + \beta_4 z_4 + \beta_5 z_5,$$

სადაც $\beta_3 = \beta_{11}$, $\beta_4 = \beta_{22}$, $\beta_5 = \beta_{12}$.

მეორე რიგის სრული მოდელი k ცვლადისათვის მიიღება ანალოგიური გზით. ამ დროს

$$p = k + k + \frac{1}{2}k(k-1) = \frac{1}{2}(k^2 + 3k)$$

მაგალითი. ორ დამოუკიდებელ x_1 და x_2 და ერთ დამოკიდებულ y ცვლადზე $N=9$ დაკვირვების შედეგის (შესაბამისად ცხრილის მესამე, მეოთხე და მერვე სვეტი) მიხედვით უნდა შევაფასოთ მეორე რიგის პოლინომური მოდელის

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2$$

კოეფიციენტები.

ცდის №	$z_0=x_0$	ექსპერიმენტის გეგმა		$z_3 = x_1^2$	$z_4 = x_2^2$	$z_5=x_1x_2$	y
		$z_1=x_1$	$z_2=x_2$				
1	1	1,32	0,81	1,7424	0,6561	1,0692	53,08
2	1	1,25	0,83	1,5625	0,6889	1,0375	51,53
3	1	1,15	0,95	1,3225	0,9025	1,0925	48,34
4	1	1,18	0,71	1,3924	0,5041	0,8378	51,38
5	1	1,22	0,98	1,4884	0,9604	1,1956	49,33
6	1	1,27	0,64	1,6129	0,4096	0,8128	53,68
7	1	1,28	0,52	1,6384	0,2704	0,6656	54,84
8	1	1,30	0,86	1,6900	0,7396	1,1180	52,19
9	1	1,31	0,87	1,7161	0,7569	1,1397	52,28

$z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_1^2$, $z_4 = x_2^2$, $z_5 = x_1 x_2$ გარდაქმნებით დავიყვანოთ ეს მოდელი წრფივი მოდელის სტანდარტულ ფორმამდე

$$y = \beta_0 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 + \beta_4 z_4 + \beta_5 z_5.$$

დაგეგმვის $\mathbf{Z}$ მატრიცის მისაღებად ექსპერიმენტის გეგმას დავუმატოთ სვეტი $z_0=x_0$ ფიქტიური ცვლადით, აგრეთვე $z_3=x_1^2$, $z_4=x_2^2$ და $z_5=x_1x_2$ სვეტები.

მატრიცა $(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}$ მიიღებს სახეს:

$$\begin{bmatrix} 85777{,}7 & -117002{,}8 & -33062{,}9 & 40708{,}4 & 5544{,}56 & 19573{,}2 \\ -117002{,}8 & 164879{,}2 & 37095{,}7 & -59315{,}2 & -6325{,}9 & -21776{,}2 \\ -33062{,}9 & 37095{,}7 & 25008{,}4 & -9984{,}7 & -4116{,}1 & -14997{,}4 \\ 40708{,}4 & -59315{,}2 & -9984{,}7 & 22060{,}7 & 1817{,}7 & 5695{,}8 \\ 5544{,}6 & -6325{,}9 & -4116{,}1 & 1817{,}7 & 865{,}7 & 2243{,}4 \\ 19573{,}2 & -21776{,}2 & -14997{,}4 & 5695{,}8 & 2243{,}4 & 9267{,}0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}^T\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1{,}32 & 1{,}25 & 1{,}15 & \dots & 1{,}31 \\ 0{,}81 & 0{,}83 & 0{,}95 & \dots & 0{,}87 \\ 1{,}7424 & 1{,}5625 & 1{,}3225 & \dots & 1{,}7161 \\ 0{,}6561 & 0{,}6889 & 0{,}9025 & \dots & 0{,}7569 \\ 1{,}0692 & 1{,}0375 & 1{,}0925 & \dots & 1{,}1397 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53{,}08 \\ 51{,}53 \\ 48{,}34 \\ 51{,}38 \\ \dots \\ 52{,}28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 466{,}65 \\ 585{,}58 \\ 369{,}75 \\ 736{,}24 \\ 302{,}22 \\ 463{,}12 \end{bmatrix}.$$

მაშინ β_0, β_1, β_2, β_3, β_4, β_5 კოეფიციენტების საძიებელი შეფასებებისათვის

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85777{,}7 & -117002{,}8 & -33062{,}9 & 40708{,}4 & 5544{,}56 & 19573{,}2 \\ -117002{,}8 & 164879{,}2 & 37095{,}7 & -59315{,}2 & -6325{,}9 & -21776{,}2 \\ -33062{,}9 & 37095{,}7 & 25008{,}4 & -9984{,}7 & -4116{,}1 & -14997{,}4 \\ 40708{,}4 & -59315{,}2 & -9984{,}7 & 22060{,}7 & 1817{,}7 & 5695{,}8 \\ 5544{,}6 & -6325{,}9 & -4116{,}1 & 1817{,}7 & 865{,}7 & 2243{,}4 \\ 19573{,}2 & -21776{,}2 & -14997{,}4 & 5695{,}8 & 2243{,}4 & 9267{,}0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 466{,}65 \\ 585{,}58 \\ 369{,}75 \\ 736{,}24 \\ 302{,}22 \\ 463{,}12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40{,}5621 \\ 9{,}3405 \\ -6{,}3456 \\ 3{,}1489 \\ -4{,}0481 \\ 2{,}3370 \end{bmatrix}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $b_3=b_{11}$, $b_4=b_{22}$, და $b_5=b_{12}$, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\hat{y} = 40{,}56 + 9{,}34x_1 - 6{,}35x_2 + 3{,}15x_1^2 - 4{,}05x_2^2 + 2{,}34x_1x_2.$$

რეგრესიული მოდელების აგებისას ხშირად სასარგებლოა მთელი ხარისხებისაგან განსხვავებული გარდაქმნები.

წრფივი მოდელის $y=\beta_0+\beta_1 z_1+\beta_2 z_2+\cdots+\beta_k z_k$ სტანდარტულ ფორმამდე დაიყვანება:

- მოდელი

$$y=\beta_0+\beta_1\frac{1}{x_1}+\beta_2\frac{1}{x_2}+\cdots+\beta_k\frac{1}{x_k}$$

„შებრუნებული“ გარდაქმნით $z_1=\frac{1}{x_1}, z_2=\frac{1}{x_2},\ldots,z_k=\frac{1}{x_k}$;

- მოდელი

$$y=\beta_0+\beta_1 x_1^{\frac{1}{2}}+\beta_2 x_2^{\frac{1}{2}}+\cdots+\beta_k x_k^{\frac{1}{2}}$$

კვადრატული ფესვის ტიპის გარდაქმნით $z_1=x_1^{\frac{1}{2}}, z_2=x_2^{\frac{1}{2}},\cdots; z_k=x_k^{\frac{1}{2}}$;

- მოდელი

$$y=\beta_0+\beta_1\ln x_1+\beta_2\ln x_2+\cdots+\beta_k\ln x_k$$

ლოგარითმული გარდაქმნით $z_1=ln x_1, z_2=ln x_2,\ldots, z_k=ln x_k$ და ა.შ.

შესაძლებელია არა მარტო დამოუკიდებელი ცვლადების გარდაქმნა, არამედ დამოკიდებული ცვლადის გარდაქმნაც. მაგალითად,

$$y=\frac{1}{\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\cdots+\beta_k x_k}$$

მოდელის ორივე ნაწილის შებრუნებით მივიღებთ „შებრუნებულ“ მოდელს

$$\frac{1}{y}=\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\cdots+\beta_k x_k$$

და გაანგარიშების დროს ამოძახილის სახით უნდა გამოვიყენოთ დამოკიდებული ცვლადის შებრუნებული სიდიდე.

უფრო რთული ექსპონენციალური მოდელის

$$y=\frac{1}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\cdots+\beta_k x_k}}$$

დაყვანისათვის წრფივ სტანდარტულ სახემდე ახდენენ დამოკიდებული ცვლადის თანამიმდევრულ გარდაქმნას. შებრუნების, ერთიანის გამოკლებისა და ნატურალური ფუძით გალოგარითმების შემდეგ მივიღებთ

$$\ln\left(\frac{1}{y}-1\right)=\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\cdots+\beta_k x_k.$$

ამ შემთხვევაში ამოძახილის სახით უნდა გამოვიყენოთ

$$\ln\left(\frac{1}{y}-1\right).$$

ყველა შემთხვევაში, როდესაც ხდება მოდელის გარდაქმნა, უმცირეს კვადრატთა მეთოდი გამოიყენება გარდაქმნილი მოდელისათვის (5.73). შეფასებულ კოეფიციენტებს ოპტიმალური თვისებები გააჩნია მხოლოდ გარდაქმნილი მოდელის მიმართ.

5.3. ორთოგონალური დაგეგმვა

რეგრესიის განტოლების კოეფიციენტებისა და მათი განსაზღვრის შეცდომების გამოთვლა მნიშვნელოვნად მარტივდება დაგეგმვის ორთოგონალური მატრიცის შემთხვევაში. **X** დაგეგმვის მატრიცა ორთოგონალურია, თუ მისი ორი ნებისმიერი სვეტის წევრ-წევრად ნამრავლების ჯამი ნულის ტოლია, ე.ი. თუ სრულდება *ორთოგონალურობის* პირობა

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu}x_{ju}=0,\quad i\neq j. \tag{5.74}$$

ასეთი ორთოგონალური გეგმის გამოყენების შედეგად ნორმალურ განტოლებათა სისტემა (5.58) მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned}
b_0\sum_{u=1}^{N}x_{ou}^2&=\sum_{u=1}^{N}x_{ou}y_u,\\
b_1\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2&=\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u,\\
b_2\sum_{u=1}^{N}x_{2u}^2&=\sum_{u=1}^{N}x_{2u}y_u,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_k\sum_{u=1}^{N}x_{ku}^2&=\sum_{u=1}^{N}x_{ku}y_u.
\end{aligned} \tag{5.75}$$

აღმოჩნდა, რომ b_i კოეფიციენტების გამოანგარიშებისას არ არის საჭირო ამ სისტემის ამოხსნა. ყოველი კოეფიციენტი განისაზღვრება სხვებისაგან *დამოუკიდებლად* თავისი განტოლებიდან

$$b_0=\frac{\sum_{u=1}^{N}x_{0u}y_u}{\sum_{u=1}^{N}x_{0u}^2},\ b_1=\frac{\sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u}{\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2},\ b_2=\frac{\sum_{u=1}^{N}x_{2u}y_u}{\sum_{u=1}^{N}x_{2u}^2},\ldots,\ b_k=\frac{\sum_{u=1}^{N}x_{ku}y_u}{\sum_{u=1}^{N}x_{ku}^2}$$

ან ზოგადი სახით

$$b_i=\frac{\sum_{u=1}^{N}x_{iu}y_u}{\sum_{u=1}^{N}x_{iu}^2},\quad \mathrm{i}=0,1,2,\ldots,k, \tag{5.76}$$

სადაც i ფაქტორის ნომერია.

შევხედოთ მატრიცის სტრუქტურას და საანგარიშო ფორმულებს $\mathbf{X}$ მატრიცის ორთოგონალურობის შემთხვევაში.

ფიშერის საინფორმაციო მატრიცა (5.74) პირობის შესრულებისას დიაგონალურია

$$\mathbf{A}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\sum_{u=1}^{N}x_{0u}^2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \sum_{u=1}^{N}x_{2u}^2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sum_{u=1}^{N}x_{ku}^2\end{bmatrix}. \tag{5.77}$$

ამ შემთხვევაში დიაგონალურია აგრეთვე შებრუნებული მატრიცაც

$$\mathbf{A}^{-1}=\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}c_{00} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & c_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & c_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{kk}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sum_{u=1}^{N}x_{0u}^2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum_{u=1}^{N}x_{2u}^2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sum_{u=1}^{N}x_{ku}^2}\end{bmatrix}. \tag{5.78}$$

ნორმალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა $\mathbf{B}=(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}$ მატრიცულ ფორმაში ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sum_{u=1}^{N}x_{0u}^2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{\sum_{u=1}^{N}x_{1u}^2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum_{u=1}^{N}x_{2u}^2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sum_{u=1}^{N}x_{ku}^2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sum_{u=1}^{N}x_{0u}y_u\\ \sum_{u=1}^{N}x_{1u}y_u\\ \sum_{u=1}^{N}x_{2u}y_u\\ \cdots\cdots\cdots\\ \sum_{u=1}^{N}x_{ku}y_u\end{bmatrix}. \tag{5.79}$$

აქედან ორთოგონალური დაგეგმვისას ფორმულა (5.60) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$b_i=c_{ii}\sum_{u=1}^{N}x_{iu}y_u=\frac{\sum_{u=1}^{N}x_{iu}y_u}{\sum_{u=1}^{N}x_{iu}^2}.$$

დისპერსია-კოვარიაციების მატრიცა (5.61) ორთოგონალური დაგეგმვისას:

$$
\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}S_y^2=\begin{bmatrix} c_{00} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}\cdot S_y^2=\begin{bmatrix} S_{b_0}^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{b_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & S_{b_2}^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_{b_k}^2 \end{bmatrix}=
$$

$$
=\begin{bmatrix} \dfrac{S_y^2}{\sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{S_y^2}{\sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{S_y^2}{\sum\limits_{u=1}^{N}x_{2u}^2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{S_y^2}{\sum\limits_{u=1}^{N}x_{ku}^2} \end{bmatrix}. \qquad (5.80)
$$

ამრიგად, ორთოგონალური დაგეგმვისას რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასებების დისპერსიები განისაზღვრება ფორმულით

$$
S_{b_i}^2=\frac{S_y^2}{\sum\limits_{u=1}^{N}x_{iu}^2}, \quad i=0,1,2,\ldots,k. \qquad (5.81)
$$

ყველა კოვარიაცია და, მაშასადამე, რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასებებს შორის კორელაციის კოეფიციენტი ნულის ტოლია, რაც კიდევ ერთხელ ადასტურებს გამოანგარიშებული კოეფიციენტების ერთმანეთზე დამოკიდებულებას.

ვინაიდან ორთოგონალური გეგმებისათვის $\mathrm{cov}_{b_i b_j}=0$, ფაქტორული სივრცის w-ური წერტილისათვის განტოლებით ნაწინასწარმეტყველები მნიშვნელობის დისპერსიის შეფასება

$$
S_{\hat{y}_w}^2=\sum_{i=0}^{k}x_{iw}^2 S_{b_i}^2. \qquad (5.82)
$$

მაგალითი. სამ დამოუკიდებელ x_1, x_2, x_3 ცვლადებსა და ერთ დამოკიდებულ y ცვლადზე N=5 დაკვირვების შედეგების (მესამე, მეოთხე, მეხუთე და მეექვსე სვეტები) მიხედვით შევაფასოთ

$$
\hat{y}=\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\beta_3 x_3
$$

წრფივი რეგრესიული განტოლების კოეფიციენტები.

დაკვირვების №	x_0	ექსპერიმენტის გეგმა			y
		x_1	x_2	x_3	
1	1	-2	2	-1,2	35,1
2	1	-1	-1	2,4	74,5
3	1	0	-2	0	80,0
4	1	1	-1	-2,4	75,8
5	1	2	2	1,2	84,6

ექსპერიმენტის გეგმა გავაფართოოთ დაგეგმვის $\mathbf{X}$ მატრიცამდე ერთიანების შემცველი ფიქტიური x_0 ცვლადის შესაბამისი სვეტით. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ როგორც გეგმა, ისე დაგეგმვის $\mathbf{X}$ მატრიცა ორთოგონალურია:

$$
\sum_{u=1}^{5}x_{0u}x_{1u}=1(-2)+1(-1)+1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 2=0,
$$

$$
\sum_{u=1}^{5}x_{0u}x_{2u}=1\cdot 2+1(-1)+1(-2)+1(-1)+1\cdot 2=0,
$$

$$
\sum_{u=1}^{5}x_{0u}x_{3u}=1(-1,2)+1\cdot 2,4+1\cdot 0+1(-2,4)+1\cdot 1,2=0,
$$

$$
\sum_{u=1}^{5}x_{1u}x_{2u}=(-2)2+(-1)(-1)+0(-2)+1(-1)+2\cdot 2=0,
$$

$$
\sum_{u=1}^{5}x_{1u}x_{3u}=(-2)(-1,2)+(-1)2,4+0\cdot 0+1(-2,4)+2\cdot 1,2=0,
$$

$$
\sum_{u=1}^{5}x_{2u}x_{3u}=2(-1,2)+(-1)2,4+(-2)\cdot 0+(-1)(-2,4)+2\cdot 1,2=0.
$$

მაშინ თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$
\sum_{u=1}^{5}x_{0u}^2=1^2+1^2+1^2+1^2+1^2=5,
$$

$$
\sum_{u=1}^{5}x_{1u}^2=(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2=10,
$$

$$\sum_{u=1}^{5} x_{2u}^2 = 2^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 2^2 = 14,$$

$$\sum_{u=1}^{5} x_{3u}^2 = (-1,2)^2 + 2,4^2 + 0^2 + (-2,4)^2 + 1,2^2 = 14,4,$$

მივიღებთ ფიშერის დიაგონალურ ინფორმაციულ მატრიცას

$$\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5,000000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10,000000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14,000000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14,400000 \end{bmatrix}.$$

ფიშერის დიაგონალური მატრიცის შემთხვევაში შებრუნებული მატრიცის ელემენტები მარტივად გამოითვლება

$$c_{00} = \frac{1}{5,000000} = 0,200000,$$

$$c_{11} = \frac{1}{10,000000} = 0,100000,$$

$$c_{22} = \frac{1}{14,000000} = 0,071428,$$

$$c_{33} = \frac{1}{14,400000} = 0,069444,$$

ამიტომ შებრუნებულ მატრიცას ექნება შემდეგი სახე

$$(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 0,200000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,100000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,071428 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,069444 \end{bmatrix}.$$

ამ შემთხვევაში $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}$ მატრიცის შებრუნებასთან დაკავშირებული სიძნელეების გვერდის ავლით წრფივი რეგრესიული განტოლების კოეფიციენტების შეფასებებისათვის მივიღებთ:

$$b_0 = c_{00} \cdot \sum_{u=1}^{N} x_{0u} y_u = 0,200000(1 \cdot 35,1 + 1 \cdot 74,5 + 1 \cdot 80,0 + 1 \cdot 75,8 + 1 \cdot 84,6) = 70,$$

$$b_1 = c_{11} \cdot \sum_{u=1}^{N} x_{1u} y_u = 0,100000[(-2) \cdot 35,1 + (-1) \cdot 74,5 + 0 \cdot 80,0 + 1 \cdot 75,8 +$$
$$+ 2 \cdot 84,6] = 10,03,$$

$$b_2 = c_{22} \cdot \sum_{u=1}^{N} x_{2u} y_u = 0,071428[2 \cdot 35,1 + (-1) \cdot 74,5 + (-2) \cdot 80,0 + (-1) \cdot 75,8 +$$
$$+ 2 \cdot 84,6] = -5,06,$$

$$b_3 = c_{33} \cdot \sum_{u=1}^{N} x_{3u} y_u = 0,069444[(-1,2) \cdot 35,1 + 2,4 \cdot 74,5 + 0 \cdot 80,0 + (-2,4) \cdot 75,8 +$$
$$+ 1,2 \cdot 84,6] = 3,91.$$

შეცდომები კოეფიციენტების განსაზღვრაში შემდეგნაირად გამოითვლება:

$$S_{b_0} = \sqrt{c_{00}} \cdot S_y = \sqrt{0,200000} \cdot S_y = 0,447214 \cdot S_y,$$

$$S_{b_1} = \sqrt{c_{11}} \cdot S_y = \sqrt{0,100000} \cdot S_y = 0,316228 \cdot S_y,$$

$$S_{b_2} = \sqrt{c_{22}} \cdot S_y = \sqrt{0,071428} \cdot S_y = 0,267260 \cdot S_y,$$

$$S_{b_3} = \sqrt{c_{33}} \cdot S_y = \sqrt{0,069444} \cdot S_y = 0,263522 \cdot S_y.$$

ბოლოს კიდევ ერთხელ გავიხსენოთ, რომ რეგრესიული ანალიზის გამოყენებისას უნდა შესრულდეს შემდეგი წინაპირობები:

ა) დამოკიდებული ცვლადი (ამოძახილი) ნორმალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა;

ბ) ამ ცვლადის განსაზღვრის დისპერსია არ არის დამოკიდებული მის აბსოლუტურ სიდიდეზე;

გ) ფაქტორები იზომება ძალიან მცირე შეცდომებით ამოძახილის განსაზღვრაში შეცდომასთან შედარებით.

6. ექსპერიმენტის მათემატიკური დაგეგმვა

წინა თავში მრავალგანზომილებიანი რეგრესიული ანალიზის მეთოდით ობიექტის ნორმალური ექსპლუატაციის რეჟიმში ვამუშავებდით პასიური დაკვირვების გზით რეგისტრირებულ შედეგებს. ასეთ ექსპერიმენტს *პასიური* ეწოდება.

კომპიუტერზე მრავალგანზომილებიანი რეგრესიული ამოცანების მოდელირებამ გვიჩვენა, რომ ყველაფერი დადებითად წყდება, როდესაც სრულდება რეგრესიული ანალიზის ყველა საწყისი წინაპირობა. მაგრამ პასიური ექსპერიმენტის დროს ხშირად ირღვევა თუნდაც ორი საწყისი წინაპირობა. ერთ-ერთი ფორმულირებულია შემდეგნაირად: წინასწარ მოცემულია მათემატიკური მოდელი (მოცემულია დამოუკიდებელი ცვლადების რაოდენობა და პოლინომის რიგი). ტექნოლოგიური პროცესების შემსწავლელი მკვლევარები ჩვეულებრივ უგულებელყოფენ ამ წინაპირობას და გამოკვლევის პროგრამაში რთავენ დამოუკიდებელი ცვლადების ძალიან დიდ რაოდენობას. ისინი თვლიან, რომ დამოუკიდებელი ცვლადების მეტი წილი გაცხრილული იქნება *t*-კრიტერიუმით მიუხედავად იმისა, რომ რეგრესიის კოეფიციენტები ძლიერ კორელირებულია. რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასებები აღმოჩნდება წანაცვლებული. მეორე წინაპირობა: დამოუკიდებელი ცვლადები იზომება შეცდომების გარეშე. პასიურ ექსპერიმენტში ეს წინაპირობა მუდმივად ირღვევა – შეცდომა დამოუკიდებელი ცვლადის გაზომვაში ხშირად გამოსაკვლევი ობიექტის ნორმალური ექსპლუატაციის რეჟიმში ამ ცვლადის ვარირების (ცვლილების) ინტერვალის შესადარია. ჩვეულებრივ, პასიური ექსპერიმენტის ჩატარებისას $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ მატრიცა არადიაგონალურია, კოეფიციენტების შეფასების მოძებნა გვიხდება ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნით და ისინი არ არის დამოუკიდებელი ერთმანეთისაგან. მიღებული კოეფიციენტები არ მიანიშნებენ ფაქტორის ზეგავლენაზე – კოეფიციენტების სიდიდე არ შეესაბამება მოცემული ფაქტორის წვლილს ამოძახილის სიდიდეში.

პასიური რეგისტრაციის მაგივრად შეიძლება აქტიურად ჩავერიოთ ექსპერიმენტში, მისი სტრატეგიის წინასწარი დამუშავებით მიზანდასახულად ვცვალოთ პროცესის ჩატარების (ობიექტის გამოკვლევის) პირობები და დავაკვირდეთ შედეგებს. ასეთი სახის ექსპერიმენტს *აქტიური* ეწოდება. აქტიურ ექსპერიმენტში ორივე ზემოაღნიშნული წინაპირობა ირღვევა ნაკლებად. აქ გაცხრილვა ხდება წრფივი მიახლოების სტადიაზე, როდესაც დამოუკიდებელი ცვლადების მატრიცა ორთოგონალურია და აქტიური ექსპერიმენტი გამოირჩევა მაღალი მოთხოვნილობით სიზუსტის მიმართ – ის უკეთესადაა ორგანიზებული, ყოველთვის წარმოებს ცდის აღწარმოების კონტროლი. აქტიური ექსპერიმენტი შეიძლება დაიგეგმოს – ფაქტორულ სივრცეში ექსპერიმენტული წერტილების სპეციალური განლაგებით მივიღოთ გეგმები, რომელთაც გააჩნია ექსპერიმენტატორისათვის საჭირო თვისებები.

6.1. გეგმების ოპტიმალურობის კრიტერიუმები

გეგმების შეფასებისა და შედარებისათვის გამოიყენება ოპტიმალურობის მათემატიკური კრიტერიუმები, რომელთაც აკავშირებენ კოვარიაციული მატრიცის აღნაგობასთან ან ცდების ჩატარების ორგანიზაციასა და რიგთან.

გეგმის ოპტიმალურობის კრიტერიუმები და ექსპერიმენტის ორგანიზაციის ხერხები სამ ჯგუფად იყოფა.

პირველ ჯგუფში შედის რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასების სიზუსტესთან დაკავშირებული კრიტერიუმები. აქ უნდა აღინიშნოს გეგმების ისეთი თვისებები, როგორიცაა ორთოგონალურობა, *D*-, *A*-, *E*- ოპტიმალურობა და სხვ. ამ კრიტერიუმებს შეიძლება მიეცეს გეომეტრიული ინტერპრეტაცია $b_0, b_1, \ldots, b_k$ კოეფიციენტების სივრცეში. ამ კოეფიციენტების შეფასებები, როგორც ცნობილია, შემთხვევითი სიდიდეებია და ამდენად აქვთ გაფანტვა, რომელიც შეიძლება დახასიათდეს შეფასებების გაბნევის ელიფსოიდით. ელიფსოიდის ორიენტირება, ფორმა და მოცულობა მთლიანად ხასიათდება ექსპერიმენტის შერჩეული გეგმით, უფრო ზუსტად საინფორმაციო $\mathbf{A}=\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ ან კოვარიაციული $\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ მატრიცის აღნაგობით.

განვიხილოთ პირველი ჯგუფის ზოგიერთი კრიტერიუმი.

D – ოპტიმალურობა. D – ოპტიმალურია (ინგლისური სიტყვა *determinant*-ის ანუ განმსაზღვრელის საწყისი ასოს მიხედვით) გეგმები, რომელთაც შეესაბამება კოვარიაციული $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ მატრიცის მინიმალური განმსაზღვრელი ან საინფორმაციო $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$ მატრიცის მაქსიმალური განმსაზღვრელი. კოვარიაციული მატრიცის განმსაზღვრელი გაბნევის ელიფსოიდის მოცულობის პროპორციულია. მაშასადამე, D – ოპტიმალური გეგმა მინიმუმამდე ამცირებს კოეფიციენტების შეფასებების გაბნევის ელიფსოიდის მოცულობას.

შეიძლება შევადგინოთ გეგმები, რომლებიც უზრუნველყოფენ არა ყველა, არამედ კოეფიციენტების შეფასებათა მხოლოდ ნაწილის მინიმუმს. ასეთ გეგმებს წაკვეთილი D – ოპტიმალური გეგმები ეწოდება. ამ შემთხვევაში ხდება არა კოვარიაციული $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ მატრიცის განსაზღვრა, არამედ ამ მატრიცის ჩვენთვის სასურველი პარამეტრების შესაბამისი ქვემატრიცის განმსაზღვრელის მინიმიზაცია.

A – ოპტიმალურობა. A – ოპტიმალურია (ინგლისური გამოთქმის *average variance*, ე.ი. საშუალო დისპერსია საწყისი ასოს მიხედვით) გეგმები, რომელთაც შეესაბამება კოვარიაციული მატრიცის კვალის (ე.ი. დიაგონალური ელემენტების ჯამის) $T_r(\mathbf{A}^{-1})$ მინიმალური მნიშვნელობა. ვინაიდან კოვარიაციული მატრიცის დიაგონალზე იმყოფება კოეფიციენტების შეფასებების დისპერსიები, A – ოპტიმალურობა უზრუნველყოფს ამ შეფასებების დისპერსიების ჯამის მინიმუმს მათი კოვარიაციების გათვალისწინების გარეშე. სხვანაირად რომ ვთქვათ, A – ოპტიმალური გეგმები საშუალებას გვაძლევენ მივიღოთ უცნობი კოეფიციენტების შეფასებები მინიმალური საშუალო დისპერსიით. ამ დროს გაბნევის ელიფსოიდს გააჩნია ღერძების სიგრძის კვადრატების მინიმალური ჯამი.

E – ოპტიმალურობა. E – ოპტიმალურია (ინგლისური გამოთქმის *eigen value*, ე.ი. საკუთარი მნიშვნელობა საწყისი ასოს მიხედვით) გეგმები, რომელთაც შეესაბამება კოვარიაციული $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ მატრიცის უმცირესი მაქსიმალური საკუთარი მნიშვნელობა (მახასიათებელი რიცხვი) ანუ, რაც იგივეა, საინფორმაციო $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ მატრიცის უდიდესი მინიმა-

ლური საკუთარი რიცხვი. E – ოპტიმალური გეგმა მინიმუმამდე ამცირებს კოეფიციენტების შეფასებების გაბნევის ელიფსოიდის მაქსიმალური ღერძის სიგრძეს, ე.ი. არ აძლევს მას საშუალებას მიიღოს ძალიან გაწელილი ფორმა. სტატისტიკური თვალსაზრისით ეს კრიტერიუმები არ უშვებს, რომ კოეფიციენტების ცალკეულ შეფასებებს ჰქონდეთ მეტად დიდი დისპერსიები და კოვარიაციები.

ორთოგონალურობა. გეგმა ორთოგონალურია, თუ მას შეესაბამება დიაგონალური კოვარიაციული ან საინფორმაციო მატრიცა. ორთოგონალური გეგმების შემთხვევაში კოეფიციენტების ყველა შეფასება არაკორელირებულია. რეგრესიის ყველა კოეფიციენტის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი შეფასება საშუალებას გვაძლევს გავამარტივოთ ან გავართულოთ მოდელები კოეფიციენტების ნაწილის გამორიცხვით ან ახალი კოეფიციენტების დამატებით უკვე მოძებნილი კოეფიციენტების ხელახალი გაანგარიშების გარეშე. ამ კრიტერიუმის მიხედვით ოპტიმალური ექსპერიმენტის შედეგების დამუშავებისას გვჭირდება გამოთვლების მინიმალური რაოდენობა. გაბნევის ელიფსოიდი ისეა ორიენტირებული, რომ მისი მთავარი ღერძების მიმართულება ემთხვევა კოეფიციენტების სივრცეში საკოორდინატო ღერძების მიმართულებას.

მეორე ჯგუფის ოპტიმალურობის კრიტერიუმები განსაზღვრავენ აგებული მოდელით ამოხსნილის მნიშვნელობათა წინასწარმეტყველების სიზუსტეს. ამ ჯგუფს მიეკუთვნება გეგმების ისეთი თვისებები, როგორიცაა მათი როტატაბელურობა, უნიფორმმობა, G – და Q – ოპტიმალურობა და სხვ.

განვიხილოთ მეორე ჯგუფის ზოგიერთი კრიტერიუმი.

როტატაბელურობა. გეგმა როტატაბელურია (ინგლისური სიტყვიდან *rotatable*, ე.ი. შემობრუნების უნარის მქონე), თუ რეგრესიული ფუნქციის შეფასების დისპერსია $\sigma_{\hat{y}}^2$ დამოკიდებულია მხოლოდ მანძილზე ექსპერიმენტის ცენტრიდან, მაგრამ არაა დამოკიდებული მიმართულებაზე, ე.ი. არ იცვლება გეგმის შემობრუნებისას ექსპერიმენტის ცენტრის გარშემო. ასეთი გეგმა უზრუნველყოფს წინასწარმეტყველების ერთნაირ სიზუსტეს გეგმის ცენტრიდან ნებისმიერი

მიმართულებით თანაბრად დაცილებული წერტილებისათვის, ე.ი.

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = \sigma_y^2 \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{x} = const,$$

როდესაც

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = const.$$

ასეთი გეგმების გამოყენებისას ნებისმიერი მიმართულება ექსპერიმენტის ცენტრიდან ტოლმნიშვნელოვანია ამოძახილის ზედაპირის შეფასების სიზუსტის თვალსაზრისით, რაც განსაკუთრებით ძვირფასია მაშინ, როდესაც არა გვაქვს არავითარი აპრიორული ცნობა ამოძახილის ზედაპირის ორიენტაციის შესახებ.

უნიფორმობა. უნიფორმობა (ინგლისური სიტყვიდან *uniform*, ე.ი. თანაბარი) როტატაბელურობის გარდა დამატებით მოითხოვს, რომ გეგმის ცენტრის გარშემო გარკვეულ არეში ფუნქციის შეფასებების დისპერსია რჩებოდეს პრაქტიკულად მუდმივი.

G- ოპტიმალურობა. G– ოპტიმალური (ინგლისური გამოთქმის *general variance*, ე.ი. საერთო დისპერსია) გეგმა უზრუნველყოფს ჩვენთვის სასურველ Ω არეში რეგრესიული განტოლებით წინასწარმეტყველების მაქსიმალურად შესაძლო დისპერსიის მინიმიზაციას, ე.ი.

$$\max_{\Omega} d(\mathbf{x},\dot{\xi}) = \min_{\xi}\max_{\Omega} d(\mathbf{x},\xi),$$

სადაც $d(\mathbf{x},\xi) = f^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\xi)f(\mathbf{x})$. ამ კრიტერიუმის გამოყენებისას ექსპერიმენტატორი თავს იზღვევს წერტილებისაგან, რომელთაც გააჩნია ამოძახილის ფუნქციის შეფასების დაბალი სიზუსტე.

Q - ოპტიმალურობა. Q– ოპტიმალური გეგმით ხდება გარკვეულ Ω არეში წინასწარმეტყველების საშუალო დისპერსიის მინიმიზაცია

$$\int_{\Omega} d(\mathbf{x},\ddot{\xi})d\mathbf{x} = \min \int_{\Omega} d(\mathbf{x},\xi)d\mathbf{x} = \min_{\xi} Q\left[\mathbf{A}^{-1}(\xi)\right].$$

მესამე ჯგუფს მიაკუთვნებენ გეგმების თვისებებს, რომლებიც დაკავშირებულია ექსპერიმენტირების სტრატეგიასთან.

ესაა კომპოზიციურობა, გეგმების ნაჯერობა, გეგმების ორთოგონალურ ბლოკებად დაყოფის შესაძლებლობა, რანდომიზაცია და ა.შ.

კომპოზიციური სტრატეგიის დროს ექსპერიმენტის რეალიზაცია ხდება ნაწილ-ნაწილ მოდელისა და ექსპერიმენტის გეგმის თანდათანობითი გართულებით.

გეგმების *ნაჯერობის* ზომას წარმოადგენს ცდების რაოდენობის მიახლოება მოდელის კოეფიციენტების რაოდენობასთან, ე.ი. ნაჯერი გეგმებით ხდება ცდების რაოდენობის მინიმიზაცია.

გეგმების *ორთოგონალურ ბლოკებად* დაყოფის აუცილებლობა ჩნდება მაშინ, როდესაც ექსპერიმენტი იმდენად ხანგრძლივია, რომ შეიძლება სისტემატურად შეიცვალოს არაკონტროლირებადი ფაქტორები, ადგილი აქვს ე.წ. დროით დრეიფს. სისტემატურად მოქმედ არაკონტროლირებად ფაქტორებთან ბრძოლის კიდევ ერთი ხერხია *რანდომიზაცია*, რომელიც ითვალისწინებს გეგმის ცდების შემთხვევითი მიმდევრობით ჩატარებას.

რიგ შემთხვევაში ცდილობენ მიიღონ გეგმები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს მოვახდინოთ ცდების შედეგების დამუშავება რაც შეიძლება მარტივი გამოთვლების გამოყენებით.

ოპტიმალურობის შესაძლო კრიტერიუმებისა და ექსპერიმენტის ორგანიზაციის ხერხების ნუსხა შეიძლება არსებითად გავაფართოოთ.

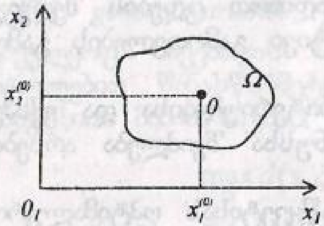
პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას ოპტიმალურობის კრიტერიუმისა და ექსპერიმენტის ჩატარების ხერხის შერჩევას ახდენენ გადასაწყვეტი ამოცანის კონკრეტული შინაარსიდან გამომდინარე. საქმე იმაშია, რომ ოპტიმალურობის მრავალი კრიტერიუმის ერთდროულად უზრუნველმყოფი გეგმების აგება ხერხდება მხოლოდ ცალკეულ შემთხვევებში. კერძოდ, გამოსაკვლევი ობიექტის წრფივი აღწერისათვის გამოსადეგი ორდონიანი სრული და წილადური ფაქტორული ექსპერიმენტები ერთდროულად D-, A-, E- და G–ოპტიმალურია, ე.ი. გეგმები ამასთანავე ორთოგონალური და როტატაბელურია, მაგრამ ასეთი რამ იშვიათია.

6.2. ექსპერიმენტის დაგეგმვა ამოძახილის ზედაპირის წრფივი მიახლოებისათვის

ექსპერიმენტის პირველი სერიის გეგმის აგებას წინ უსწრებს არაფორმალური გადაწყვეტების ეტაპი, რომელიც მიმართულია ფაქტორული სივრცის ლოკალური არის შერჩევაზე.

ჯერ უნდა შეფასდეს ფაქტორების განსაზღვრის არეების საზღვრები. ამ საზღვრების დადგენა ხდება პრინციპული შეზღუდვებით (შეზღუდვები, რომელთა დარღვევა სრულიად დაუშვებელია; მაგალითად, თუ ფაქტორი ტემპერატურაა, ქვედა საზღვარი იქნება აბსოლუტური ნული), ან პროცესის ჩატარების კონკრეტული პირობებით (არსებული აპარატურა, ტექნოლოგია და სხვ.). განსაზღვრის არის დადგენა დაკავშირებულია ოპტიმიზაციის პარამეტრის ცვლილებისა და ამოძახილის ზედაპირის სიმრუდის შესახებ აპრიორული ინფორმაციის საგულდაგულო ანალიზთან.

განსაზღვრის Ω არის (ნახ. 15) შერჩევის შემდეგ უნდა მოიძებნოს ლოკალური ქვეარე ექსპერიმენტის დაგეგმვისათვის. ამ ქვეარის შერჩევის პროცედურა ორ ეტაპს შეიცავს: ძირითადი (ნულოვანი) დონის შერჩევასა და ვარირების (ცვლილების) ინტერვალების შერჩევას.



ნახ. 15

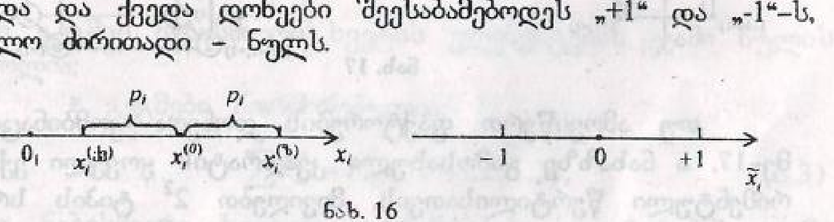
საწყისი წერტილის სახით ჩვეულებრივ ირჩევენ წერტილს, რომელიც შეესაბამება აპრიორული ინფორმაციის ანალიზის შედეგად განსაზღვრულ პირობებს. თუ ეს წერტილი დევს ფაქტორების განსაზღვრის არის საზღვარზე (ან ახლოსაა), მაშინ ძირითადი დონე უნდა შევირჩიოთ გარკვეული ძვრით საუკეთესო პირობებიდან.

ვარირების ინტერვალების შერჩევა ექვემდებარება ბუნებრივ შეზღუდვებს ქვემოდან (ინტერვალი არ შეიძლება იყოს ფაქტორის დონის ფიქსირების შეცდომაზე ნაკლები – წინააღმდეგ შემთხვევაში ქვედა და ზედა დონეები აღმოჩნდება განურჩეველი) და ზემოდან (ქვედა

და ზედა დონეები არ უნდა გამოვიდეს განსაზღვრის არის ფარგლებს გარეთ). ამ შეზღუდვების ფარგლებში ვარირების ინტერვალების შერჩევისას უნდა გამოვიყენოთ აპრიორული ინფორმაცია ფაქტორების ფიქსირების სიზუსტის (განისაზღვრება ხელსაწყოების სიზუსტით და დონის სტაბილურობით ცდის მსვლელობაში), ამოძახილის ზედაპირის სიმრუდის (განისაზღვრება ერთფაქტორიანი დამოკიდებულებების გრაფიკების, ცხრილური მონაცემების მიხედვით და ა.შ.) და ოპტიმიზაციის პარამეტრის ცვლილების დიაპაზონის შესახებ (ცდების გარკვეული სიმრავლის მონაცემების მიხედვით განსაზღვრული ოპტიმიზაციის პარამეტრის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის სხვაობა). ბუნებრივია, რაც უფრო დაბალია ფაქტორების ფიქსირების სიზუსტე, ნაკლებია ამოძახილის ზედაპირის სიმრუდე და ვიწროა ოპტიმიზაციის პარამეტრის ცვლილების დიაპაზონი, მით მეტია ვარირების ინტერვალი.

ფაქტორების ძირითადი დონისა და ვარირების ინტერვალების შერჩევის შემდეგ შეგვიძლია შევუდგეთ ექსპერიმენტის ჩატარების გეგმის აგებას.

ექსპერიმენტის დაგეგმვის პირველი ეტაპი წრფივი მოდელის ასაგებად დაფუძნებულია ფაქტორების ვარირებაზე ნულოვანი (ძირითადი) $x_i^{(0)}$ დონის მიმართ სიმეტრიულად განლაგებულ ორ $x_i^{(ზ)}$ და $x_i^{(ქ)}$ დონეზე. ვინაიდან ყოველი ფაქტორი სტანდარტიზაციის, ექსპერიმენტის პირობების ჩაწერისა და ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავების გამარტივების მიზნით იღებს მხოლოდ ორ განსხვავებულ სიდიდეს $x_i^{(0)} + p_i$ და $x_i^{(0)} - p_i$, მოსახერხებელია მათი კოდირება „+1“ და „-1“ სიმბოლოებით. ამისათვის მასშტაბს ღერძების გასწვრივ ირჩევენ ისე, რომ ზედა და ქვედა დონეები შეესაბამებოდეს „+1“ და „-1“-ს, ხოლო ძირითადი – ნულს.



ნახ. 16

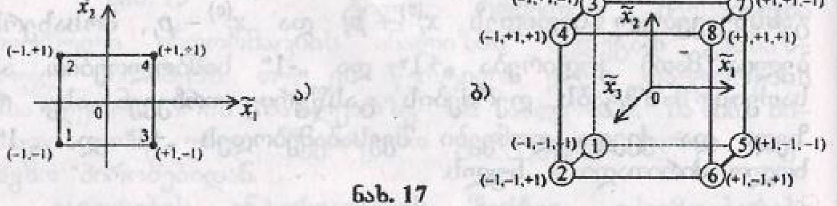
გადასვლა ექსპერიმენტატორისათვის მოსახერხებელი საწყისი (ნატურალური) x_i ცვლადებიდან უგანზომილებო კოდირებულ $\widetilde{x}_i$ ცვლადებზე, რომლებშიც ფაქტორის ზედა და ქვედა დონეებს შეესაბამება „+1“ და „-1“, ხდება შემდეგი ფორმულის მიხედვით:

$$\widetilde{x}_i = \frac{x_i - x_i^{(0)}}{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,k, \tag{6.1}$$

სადაც x_i ნატურალური დამოუკიდებელი ცვლადის მნიშვნელობაა, $x_i^{(0)}$–ნულოვანი დონე და $p_i = (x_i^{(ზ)} - x_i^{(ქვ)})/2$ – ვარირების ინტერვალი. მივაქციოთ ყურადღება ახალ დეტალს აღნიშვნებში. აქამდე ვწერდით უბრალოდ x, ახლა მის ზემოთ გაჩნდა ტალღა. ამის შემდეგ ყოველთვის გამოვიყენებთ ამ ნიშანს თუ ფაქტორი ჩაწერილია ორთოგონალური გეგმის ასაგებად მოსახერხებელ ფორმაში.

k ორდონიანი ფაქტორის დროს ექსპერიმენტული წერტილები +1 და -1 კოორდინატებით სრულ ფაქტორულ ექსპერიმენტში განლაგებულია ჰიპერკუბის წვეროებში, ასეთ სრულ ფაქტორულ ექსპერიმენტებს, სადაც ხდება ფაქტორების დონეების ყველა შესაძლო $N=2^k$ კომბინაციის რეალიზაცია 2^k ტიპის დაგეგმვას უწოდებენ.

ორი გამოსაკვლევი ფაქტორის დროს (k=2) ექსპერიმენტული წერტილები განლაგებულია კვადრატის წვეროებში (ნახ. 17, ა), სამი ფაქტორის დროს (k=3) – კუბის წვეროებში (ნახ. 17, ბ).



ნახ. 17

თუ ამოვიწერთ ფაქტორების დონეთა კომბინაციებს მე–17, ა ნახაზზე გამოსახული კვადრატის ყოველი ექსპერიმენტული წერტილისათვის, მივიღებთ 2^2 ტიპის სრულ

ფაქტორულ ექსპერიმენტს (26–ე ცხრილი), ხოლო მე–17, ბ ნახაზზე გამოსახული კუბის ყოველი ექსპერიმენტული წერტილისათვის – 2^3 ტიპის სრულ ფაქტორულ ექსპერიმენტს (27–ე ცხრილი).

ცხრილი 26

ცდის №	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$
1	-1	-1
2	-1	+1
3	+1	-1
4	+1	+1

ცხრილი 27

ცდის №	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$
1	-1	-1	-1
2	-1	-1	+1
3	-1	+1	-1
4	-1	+1	+1
5	+1	-1	-1
6	+1	-1	+1
7	+1	+1	-1
8	+1	+1	+1

მიღებული გეგმების ანალიზი გვიჩვენებს 2^k ტიპის გეგმების აგების საერთო სტრუქტურას – $\widetilde{x}_1$ სვეტში იწერება 2^{k-1} ნიშანი „-1“, შემდეგ იმდენივე, ე.ი. 2^{k-1} ნიშანი „+1“, ყოველი შემდეგი ფაქტორის ნიშანთა ცვლის სიხშირე ორჯერ მეტია, ვიდრე წინასი. ასე, მაგალითად, 2^4 ტიპის გეგმას ექნება შემდეგი სახე (28–ე ცხრილი).

აღვნიშნოთ განხილული გეგმების შემდეგი სამი მნიშვნელოვანი თვისება:

- ეს გეგმები *სიმეტრიულია* ექსპერიმენტის ცენტრის მიმართ:

$$\sum_{u=1}^{N} \widetilde{x}_{iu} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,k, \tag{6.2}$$

ე.ი. გეგმის ნებისმიერი სვეტის ელემენტების ჯამი ნულის ტოლია;

- გეგმები *ნორმირებულია:*

$$\sum_{u=1}^{N} \widetilde{x}_{iu}^2 = N, \qquad i = 1,2,\ldots,k, \tag{6.3}$$

ე.ი. ნებისმიერი სვეტის ელემენტების კვადრატების ჯამი ცდების რაოდენობის ტოლია;

- გეგმები *ორთოგონალურია:*

$$\sum_{u=1}^{N}\widetilde{x}_{iu}\widetilde{x}_{ju}=0,\quad i\neq j, \qquad (6.4)$$

ე.ი. გეგმის ნებისმიერი ორი განსხვავებული სვეტის წევრ-წევრად ნამრავლების ჯამი ნულის ტოლია.

ცხრილი 28

ცდის №	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4$
1	-1	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	+1
3	-1	-1	+1	-1
4	-1	-1	+1	+1
5	-1	+1	-1	-1
6	-1	+1	-1	+1
7	-1	+1	+1	-1
8	-1	+1	+1	+1
9	+1	-1	-1	-1
10	+1	-1	-1	+1
11	+1	-1	+1	-1
12	+1	-1	+1	+1
13	+1	+1	-1	-1
14	+1	+1	-1	+1
15	+1	+1	+1	-1
16	+1	+1	+1	+1

2^k ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის ზემოაღწერილი გეგმები გამოიყენება წრფივი მოდელის

$$y=\beta_0+\sum_{i=1}^{k}\beta_i\widetilde{x}_i. \qquad (6.5)$$

კოეფიციენტების შეფასებისათვის.

ამისათვის 2^k ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის გეგმას აფართოებენ დაგეგმვის $\widetilde{\mathbf{X}}$ მატრიცამდე +1-ის შემცველი სვეტით. ბუნებრივია, ასეთი მატრიცისათვის (6.3) და (6.4) პირობებიც შესრულდება.

ასეთი ორთოგონალური გეგმის (ორთოგონალური დაგეგმვის მატრიცის) გამოყენების შედეგად ნორმირების

(6.3) პირობის გათვალისწინებით ფიშერის დიაგონალური საინფორმაციო მატრიცა (5.77) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}N&0&0&\cdots&0\\0&N&0&\cdots&0\\0&0&N&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&N\end{bmatrix}, \qquad (6.6)$$

ხოლო შებრუნებული დიაგონალური მატრიცა

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}=\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{X}}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}c_{00}&0&0&\cdots&0\\0&c_{11}&0&\cdots&0\\0&0&c_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&c_{kk}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{N}&0&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{N}&0&\cdots&0\\0&0&\frac{1}{N}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&\frac{1}{N}\end{bmatrix}. \qquad (6.7)$$

ნორმალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი $\mathbf{B}=\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{X}}\right)^{-1}\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}$ მატრიცულ ფორმაში ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\\vdots\\b_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{N}&0&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{N}&0&\cdots&0\\0&0&\frac{1}{N}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&\frac{1}{N}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sum_{u=1}^{N}\widetilde{x}_{0u}y_u\\\sum_{u=1}^{N}\widetilde{x}_{1u}y_u\\\sum_{u=1}^{N}\widetilde{x}_{2u}y_u\\\cdots\cdots\\\sum_{u=1}^{N}\widetilde{x}_{ku}y_u\end{bmatrix}. \qquad (6.8)$$

აქედან გამომდინარე, (5.60) ფორმულა წრფივი რეგრესიის (6.5) განტოლების კოეფიციენტების შესაფასებლად მიიღებს სახეს:

$$b_i = c_{ii}\sum_{u=1}^{N}\widetilde{x}_{iu}y_u = \frac{\sum_{u=1}^{N}\widetilde{x}_{iu}y_u}{N}, \quad i = 0,1,2,\ldots,k. \tag{6.9}$$

ნორმირების (6.3) პირობის შესრულების გამო რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასებათა დისპერსიების გამოსათვლელი ფორმულა (5.81) გარდაიქმნება შემდეგნაირად:

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_y^2}{N}, \quad i = 0,1,2,\ldots,k. \tag{6.10}$$

როგორც ვხედავთ დისპერსიები ერთნაირია ყველა კოეფიციენტისათვის.

(6.10)-ის გათვალისწინებით ფორმულა (5.82) ფაქტორული სივრცის w წერტილში

$$\hat{y}_w = b_0 + b_1\widetilde{x}_{1w} + b_2\widetilde{x}_{2w} + \cdots + b_k\widetilde{x}_{kw}$$

განტოლებით ნაწინასწარმეტყველები $\hat{y}_w$ ამოძახილის მნიშვნელობის $S_{\hat{y}}^2$ დისპერსიის შეფასებისათვის მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$S_{\hat{y}_w}^2 = \frac{S_y^2}{N}\left(1 + \widetilde{x}_{1w}^2 + \widetilde{x}_{2w}^2 + \cdots + \widetilde{x}_{kw}^2\right) \tag{6.11}$$

ან

$$S_{\hat{y}_w}^2 = \frac{S_y^2}{N}\left(1 + \rho_w^2\right), \tag{6.12}$$

სადაც

$$\rho_w^2 = \widetilde{x}_{1w}^2 + \widetilde{x}_{2w}^2 + \cdots + \widetilde{x}_{kw}^2.$$

ამრიგად, რეგრესიის განტოლებით ნაწინასწარმეტყველები $\hat{y}_w$ მნიშვნელობის დისპერსია დამოკიდებულია ექსპერიმენტულ სიტუაციაზე $\left(S_y^2/N\right)$ და ძირითად დონეზე ცენტრის მქონე ჰიპერსფეროს (წრეწირის k=2 შემთხვევაში, სფეროს k=3 შემთხვევაში) ρ_w რადიუსზე. მაშასადამე, მიღებული განტოლება ექსპერიმენტის ცენტრიდან თანაბარ მანძილზე ნებისმიერი მიმართულებით უზრუნველყოფს წინასწარმეტყველებას ერთნაირი სიზუსტით (ერთნაირია $S_{\hat{y}}^2$ სიდიდეები). გეგმები, რომელთათვისაც სრულდება (6.12) პირობა, როტაბელურია.

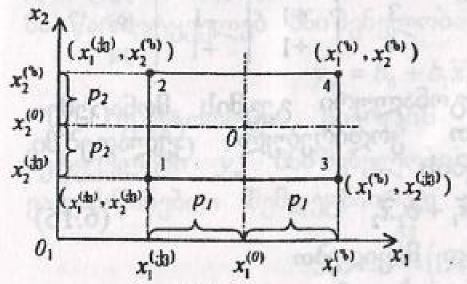
6.2.1. პირველი რიგის გეგმები ორი ფაქტორისათვის

დავუშვათ, ვსწავლობთ ორი x_1 და x_2 ფაქტორის გავლენას. აპრიორულად ცნობილია, რომ გავლენა p_1 და p_2 ვარირების ინტერვალებით შემოფარგლულ არეში წრფივია. მაშასადამე, ვახდენთ შემდეგი წრფივი რეგრესიის განტოლების

$$y = b_0' + b_1'x_1 + b_2'x_2 \tag{6.13}$$

კოეფიციენტების შეფასებას.

ამისათვის საკმარისია ვცვალოთ ორივე ფაქტორი ორ (ზედა და ქვედა) დონეზე, ჩავატაროთ ცდები ამ ფაქტორების დონეთა ყველა შესაძლო N=2^2=4 კომბინაციის პირობებში (ნახ.18).



ნახ.18

ცხრილი 29

ექსპერიმენტის გეგმა ნატურალურ ცვლადებში და ცდების შედეგები

ცდის №	x_1	x_2	y
1	$x_1^{(ქ)}$	$x_2^{(ქ)}$	y_1
2	$x_1^{(ქ)}$	$x_2^{(ზ)}$	y_2
3	$x_1^{(ზ)}$	$x_2^{(ქ)}$	y_3
4	$x_1^{(ზ)}$	$x_2^{(ზ)}$	y_4

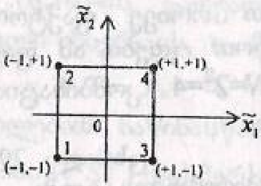
ვინაიდან ფაქტორების მეტი წილი (აბსოლუტური ტემპერატურა, წნევა და ა.შ) თავისი ბუნებით არ შეიძლება გახდეს უარყოფითი, გეგმა ნატურალურ ცვლადებში (29-ე ცხრილი) არაორთოგონალურია (აქედან გამომდინარე და წინა თავში აღწერილი შედეგებით).

უგანზომილებო კოდირებულ ცვლადებზე გადასვლისათვის O_1 კოორდინატთა სათავე გადავიტანოთ ნულოვან წერტილში $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ და განვახორციელოთ მასშტაბირება

$$\widetilde{x}_1 = \frac{x_1 - x_1^{(0)}}{p_1}, \tag{6.14}$$

$$\widetilde{x}_2 = \frac{x_2 - x_2^{(0)}}{p_2}, \qquad (6.15)$$

რის შედეგაც მე–18 ნახაზზე გამოსახული და x_1 ღერძის გასწვრივ $x_1^{(\text{ქვ})}$ და $x_1^{(\text{ზ})}$, ხოლო x_2–ის გასწვრივ $x_2^{(\text{ქვ})}$ და $x_2^{(\text{ზ})}$ მნიშვნელობებით შემოსაზღვრული მართკუთხედი გარდაიქმნება კვადრატში (ნახ.19) $\widetilde{x}_1 0 \widetilde{x}_2$ კოორდინატთა კოდირებულ სისტემაში.



ნახ. 19

ცხრილი 30

ექსპერიმენტის გეგმა კოდირებულ ცვლადებში და ცდების შედეგები

ცდის №	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	y
1	-1	-1	y_1
2	-1	+1	y_2
3	+1	-1	y_3
4	+1	+1	y_4

30–ე ცხრილის ორთოგონალური გეგმის მონაცემებით შეგვიძლია შევაფასოთ კოდირებულ ცვლადებში წრფივი რეგრესიის განტოლების

$$y = b_0 + b_1\widetilde{x}_1 + b_2\widetilde{x}_2 \qquad (6.16)$$

კოეფიციენტები. (6.9) თანახმად მივიღებთ

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^{4} \widetilde{x}_{0u} y_u}{4} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4},$$

$$b_1 = \frac{\sum_{u=1}^{4} \widetilde{x}_{1u} y_u}{4} = \frac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{4},$$

$$b_2 = \frac{\sum_{u=1}^{4} \widetilde{x}_{2u} y_u}{4} = \frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{4}.$$

კოეფიციენტები არსებითია, თუ სრულდება პირობა

$$|b_i| \geq t \cdot S_b = t \cdot \sqrt{c_{ii}} \cdot S_y = t \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot S_y = t \cdot \frac{S_y}{2}, \quad i = 0,1,2. \qquad (6.17)$$

(6.16) განტოლების ადეკვატურობის შესამოწმებლად განსაზღვრავენ ამოძახილის ნაწინასწარმეტყველებ მნიშვნელობებს გეგმის წერტილებში

$$\hat{y}_1 = b_0 + b_1(-1) + b_2(-1), \qquad \hat{y}_3 = b_0 + b_1(+1) + b_2(-1),$$

$$\hat{y}_2 = b_0 + b_1(-1) + b_2(+1), \qquad \hat{y}_4 = b_0 + b_1(+1) + b_2(+1),$$

ხოლო შემდეგ (5.43), (5.44) ან (5.45) ფორმულებით ადეკვატურობის $S^2_{\text{ადეკ}}$ დისპერსიას; $F = S^2_{\text{ადეკ}} / S^2_y$ საანგარიშო მნიშვნელობას ადარებენ ფიშერის კრიტერიუმის კრიტიკულ $F_{\text{ცხ}}$ მნიშვნელობასთან. ჰიპოთეზა მოძებნილი წრფივი (6.16) მოდელის ადეკვატურობის შესახებ არ იქნება უარყოფილი, თუ $F \leq F_{\text{ცხ}}$.

მიღებულ $\hat{y} = b_0 + b_1\widetilde{x}_1 + b_2\widetilde{x}_2$ განტოლებაში ჩვენთვის საინტერესო w წერტილის კოდირებულ ცვლადებში კოორდინატების $(\widetilde{x}_{1w}, \widetilde{x}_{2w})$ ჩასმით მივიღებთ ამ წერტილში ნაწინასწარმეტყველებ მნიშვნელობას

$$\hat{y}_w = b_0 + b_1\widetilde{x}_{1w} + b_2\widetilde{x}_{2w}.$$

ფაქტორული სივრცის w წერტილში ნაწინასწარმეტყველები $\hat{y}_w$ მნიშვნელობის დისპერსია (6.11)–ის გათვალისწინებით შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$S^2_{\hat{y}_w} = \frac{S^2_y}{4}\left(1 + \widetilde{x}^2_{1w} + \widetilde{x}^2_{2w}\right) \qquad (6.18)$$

პროგნოზისათვის მიზანშეწონილია განტოლება (6.16) კოდირებული ცვლადებით გარდავქმნათ განტოლებაში ნატურალური ცვლადებით. ამისათვის საკმარისია (6.16) განტოლებაში ჩავსვათ (6.14) და (6.15) პირობები:

$$\hat{y} = b_0 + b_1\widetilde{x}_1 + b_2\widetilde{x}_2 = b_0 + b_1\frac{x_1 - x_1^{(0)}}{p_1} + b_2\frac{x_2 - x_2^{(0)}}{p_2} = b_0 + \frac{b_1}{p_1}x_1 - \frac{b_1}{p_1}x_1^{(0)} +$$

$$+ \frac{b_2}{p_2}x_2 - \frac{b_2}{p_2}x_2^{(0)} = (b_0 - \frac{b_1}{p_1}x_1^{(0)} - \frac{b_2}{p_2}x_2^{(0)}) + \frac{b_1}{p_1}x_1 + \frac{b_2}{p_2}x_2 = b_0' + b_1'x_1 + b_2'x_2,$$

სადაც

$$b_0' = b_0 - \frac{b_1}{p_1}x_1^{(0)} - \frac{b_2}{p_2}x_2^{(0)}, \qquad b_1' = \frac{b_1}{p_1}, \qquad b_2' = \frac{b_2}{p_2}.$$

მაგალითი. დავუშვათ, ვსწავლობთ ორი ფაქტორის – T ტემპერატურისა და P წნევის – ზეგავლენას. საწყისი (ნულოვანი) წერტილის სახით შერჩეულია წერტილი კოორდინატებით $T^{(0)}$=20°C და $P^{(0)}$=1,00 კპა, ხოლო ვარირების ინტერვალების სახით P_T=10° C და P_P=0,05 კპა. უნდა მოიძებნოს წრფივი დამოკიდებულება, რომელიც დააკავშირებს ორი შესასწავლი ფაქტორის დონეებისა და y ამოძახილის მნიშვნელობებს. ამისათვის გამოვიყენოთ სტანდარტული გეგმა კოდირებულ ცვლადებში (ცხრილი 30).

სტანდარტული გეგმა ამ მაგალითის საწყისი პირობების გათვალისწინებით გარდაიქმნება გეგმაში ნატურალური ცვლადებით.

ცდის №	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y	$\hat{y}$
1	-1	-1	46	45
2	-1	+1	34	35
3	+1	-1	64	65
4	+1	+1	56	55

ცდის №	ტემპერატურა, °C	წნევა, კპა	y
1	10	0,95	46
2	10	1,05	34
3	30	0,95	64
4	30	1,05	56

ამ გეგმით ჩატარებულია ოთხი ცდა და მიღებულია y სვეტში მოთავსებული დაკვირვებათა შედეგები.

კოდირებულ ცვლადებში წრფივი რეგრესიული განტოლების (6.16) კოეფიციენტების შეფასებებისათვის მივიღებთ:

$$b_0 = \frac{46+34+64+56}{4} = \frac{200}{4} = 50, \quad b_1 = \frac{-46-34+64+56}{4} = \frac{40}{4} = 10,$$

$$b_2 = \frac{-46+34-64+56}{4} = \frac{-20}{4} = -5.$$

რეგრესიული ანალიზის ჩასატარებლად უნდა ვიცოდეთ ცდის დისპერსიის შეფასება. ეს შეფასება მივიღოთ გეგმის ცენტრში (T=20°C და P=1,00 კპა) რეალიზებული m=3 პარალელური ცდის შედეგების მიხედვით – 48, 49, 50. თუ გავითვალისწინებთ მათ საშუალო არითმეტიკულს $\bar{y}_0 = (48+49+50)/3 = 49$, ცდის დისპერსიის შეფასებისათვის მივიღებთ

$$S_y^2 = \frac{1}{3-1}\left[(48-49)^2 + (49-49)^2 + (50-49)^2\right] = \frac{1}{2}[1+0+1] = 1,$$

ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასებისათვის $S_y = \sqrt{1} = 1$.

შეცდომები კოდირებულ ცვლადებში წრფივი რეგრესიული განტოლების ყველა კოეფიციენტისათვის ერთნაირია:

$$S_b = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot S_y = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot 1 = 0,5.$$

m-1=3-1=2 თავისუფლების ხარისხისათვის $t_{0,95}$=4,30. ამიტომ სანდო ინტერვალისათვის მივიღებთ $t \cdot S_b$=4,30 · 0,5=2,15. ვინაიდან b_0, b_1

და b_2 კოეფიციენტების აბსოლუტური მნიშვნელობები აღემატება სანდო ინტერვალს, ისინი უნდა მივიჩნიოთ სტატისტიკურად მნიშვნელოვნად და რეგრესიულ განტოლებას კოდირებულ ცვლადებში ექნება სახე

$$\hat{y} = 50 + 10\tilde{x}_1 - 5\tilde{x}_2.$$

მოვძებნოთ ამ მოდელით ნაწინასწარმეტყველები ამოძახილის მნიშვნელობები გეგმის წერტილებში:

$$\hat{y}_1 = 50 + 10(-1) - 5(-1) = 45, \qquad \hat{y}_3 = 50 + 10(+1) - 5(-1) = 65,$$

$$\hat{y}_2 = 50 + 10(-1) - 5(+1) = 35, \qquad \hat{y}_4 = 50 + 10(+1) - 5(+1) = 55.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ მნიშვნელოვანია l=3 კოეფიციენტი, არაადეკვატურობის დისპერსიისათვის (5.43)–ის თანახმად მივიღებთ:

$$S^2_{\text{არაად}} = \frac{1}{4-3}\left[(46-45)^2 + (34-35)^2 + (64-65)^2 + (56-55)^2\right] = 4.$$

ვინაიდან ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა $F = S^2_{\text{არაად}} / S_y^2 = 4/1 = 4$ აღემატება ფიშერის ცხრილის N-l=4-3=1 სვეტისა და m-1=3-1=2 სტრიქონის გადაკვეთაზე მყოფ კრიტიკულ მნიშვნელობას – $F_{\text{ცხ}}$=F(1; 2)=18,5, ჩვენ მიერ მიღებული მოდელი ადეკვატურია ფაქტორული სივრცის შესწავლილ არეში.

განვსაზღვროთ $\hat{y} = 50 + 10\tilde{x}_1 - 5\tilde{x}_2$ მოდელით ნაწინასწარმეტყველები მნიშვნელობა w წერტილში კოორდინატებით $\tilde{x}_{1w} = 0,8$ და $\tilde{x}_{2w} = 0,6$: $\hat{y}_w = 50 + 10 \cdot 0,8 - 5 \cdot 0,6 = 55$.

ამ წერტილში ნაწინასწარმეტყველები მნიშვნელობის დისპერსია

$$S^2_{\hat{y}_w} = \frac{S_y^2}{4}\left(1 + 0,8^2 + 0,6^2\right) = \frac{1}{4} \cdot 2 = 0,5.$$

კოდირების პირობების $\tilde{x}_1 = (T-20)/10$ და $\tilde{x}_2 = (P-1,00)/0,0$ ჩასმით მივიღებთ რეგრესიის განტოლებას ნატურალურ ცვლადებში:

$$\hat{y} = 50 + 10\frac{T-20}{10} - 5\frac{P-1,00}{0,05} = 50 + T - 20 - 100P + 100 = 130 + T - 100P.$$

წრფივი მოდელი უკვე აგებულია. მაგრამ 2^2 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის ოთხი ცდის რეალიზაციისა და სამი კოეფიციენტის (b_0, b_1 და b_2) შეფასებების მიღების შემდეგ შესაძლებლობა გვაქვს შევაფასოთ ორი ფაქტორის ურთიერთქმედების ეფექტი b_{12}. ეს უკანასკნელი გვიჩვენებს ერთ–ერთი ფაქტორის გავლენის ძალას იმის მიხედვით, თუ რა დონეზე იმყოფება მეორე ფაქტორი.

b_{12} კოეფიციენტის გამოთვლისათვის უნდა შევადგინოთ (შესაბამისი სვეტების ელემენტების გადამრავლებით)

და ჩავწეროთ 31–ე ცხრილში $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ სვეტი. ეს სვეტი განსხვავდება დაგეგმვის მატრიცის დანარჩენი სვეტებისაგან (ცხრილი 31)

ცხრილი 31

ცდის №	$\tilde{x}_0$	გეგმა $\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_2$	y
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	+1	-1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

მატრიცა ორთოგონალურია და ამიტომ b_{12} კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით

$$b_{12}=\frac{\sum_{u=1}^{4}\tilde{x}_{1u}\tilde{x}_{2u}y_u}{4}=\frac{y_1-y_2-y_3+y_4}{4}.$$

მაგრამ $\hat{y}=b_0+b_1\tilde{x}_1+b_2\tilde{x}_2+b_{12}\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ მოდელის ადეკვატურობის შემოწმება F–კრიტერიუმით შეუძლებელია, ვინაიდან სტატისტიკურად მნიშვნელოვანი კოეფიციენტების რაოდენობა მოდელში ტოლია ცდების რაოდენობისა და თავისუფლების ხარისხის შესაბამისი რიცხვითი მნიშვნელობა არაადეკვატურობის დისპერსიისათვის ნულის ტოლია. ამ შემთხვევაში მოდელის ადეკვატურობას ამოწმებენ t–კრიტერიუმის მიხედვით.

ამისათვის t–კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$t=\frac{|b_0-y_0|\sqrt{N}}{S_y}, \qquad (6.19)$$

სადაც y_0 ცდის შედეგია ძირითად დონეზე (გეგმის ცენტრში), b_0 – რეგრესიის განტოლების თავისუფალი წევრი (გეგმის ცენტრში განტოლებით ნაწინასწარმეტყველები მნიშვნელობა, როდესაც ყველა ფაქტორის დონე კოდირებულ მასშტაბში ნულის ტოლია), S_y – ცდის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

ჰიპოთეზა ადეკვატურობის შესახებ არ იქნება უარყოფილი, როცა

$$t\le t_{ცხ}, \qquad (6.20)$$

სადაც ცხრილური მნიშვნელობა შეირჩევა $q=0,05$ მნიშვნელოვნობის დონის დროს იმ თავისუფლების ხარისხისათვის, რომლითაც განისაზღვრა ცდის საშუალო კვადრატული შეცდომა.

შევამოწმოთ წინა მაგალითის მოდელის ადეკვატურობა t–კრიტერიუმის მიხედვით. ამ შემთხვევაში $b_0=50$, $\bar{y}_0=49$, $S_y=1$, $N=4$. ამიტომ t–კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა (6.19) ფორმულის თანახმად

$$t=\frac{|50-49|\sqrt{4}}{1}=\frac{1\cdot 2}{1}=2.$$

$q=0,05$ მნიშვნელოვნობის დონისა და $m-1=3-1=2$ თავისუფლების ხარისხისათვის t–კრიტერიუმის ცხრილური მნიშვნელობაა $t_{ცხ}=4,30$. ვინაიდან სრულდება (6.20) პირობა, ე.ი. $t=2<t_{ცხ}=4,30$, ჰიპოთეზა მიღებული მოდელის ადეკვატურობის შესახებ t–კრიტერიუმით მნიშვნელოვნობის 5 %–იანი დონის დროს არ იქნება უარყოფილი.

6.2.2. პირველი რიგის გეგმები სამი ფაქტორისათვის

დავუშვათ, ვსწავლობთ $k=3$ ფაქტორს x_1, x_2 და x_3. აპრიორულად ცნობილია, რომ ფაქტორების გავლენა p_1, p_2 და p_3 ცვლილების ინტერვალებით განსაზღვრულ არეში წრფივია. მაშასადამე, ვეძებთ შემდეგი წრფივი რეგრესიული განტოლების

$$y=b'_0+b'_1x_1+b'_2x_2+b'_3x_3 \qquad (6.21)$$

b'_0, b'_1, b'_2 და b'_3 კოეფიციენტების შეფასებებს.

ამისათვის საკმარისია სამივე ფაქტორის ორ (ზედა და ქვედა) დონეზე ცვლილებისას ჩავატაროთ ცდები ამ ფაქტორების დონეთა ყველა შესაძლო $N=2^3=8$ კომბინაციის პირობებში (32–ე ცხრილი).

ცხრილი 32
ექსპერიმენტის გეგმა ნატურალურ ცვლადებში და ცდების შედეგები

ცდის №	x_1	x_2	x_3	y
1	$x_1^{(ქ)}$	$x_2^{(ქ)}$	$x_3^{(ქ)}$	y_1
2	$x_1^{(ქ)}$	$x_2^{(ქ)}$	$x_3^{(ზ)}$	y_2
3	$x_1^{(ქ)}$	$x_2^{(ზ)}$	$x_3^{(ქ)}$	y_3
4	$x_1^{(ქ)}$	$x_2^{(ზ)}$	$x_3^{(ზ)}$	y_4
5	$x_1^{(ზ)}$	$x_2^{(ქ)}$	$x_3^{(ქ)}$	y_5
6	$x_1^{(ზ)}$	$x_2^{(ქ)}$	$x_3^{(ზ)}$	y_6
7	$x_1^{(ზ)}$	$x_2^{(ზ)}$	$x_3^{(ქ)}$	y_7
8	$x_1^{(ზ)}$	$x_2^{(ზ)}$	$x_3^{(ზ)}$	y_8

ცხრილი 33
დაგეგმვის მატრიცა და დაკვირვების შედეგები

ცდის №	$\widetilde{x}_0$	გეგმა			y
		$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	
1	+1	-1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	-1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	-1	+1	+1	y_4
5	+1	+1	-1	-1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	y_6
7	+1	+1	+1	-1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	y_8

ვინაიდან გეგმა ნატურალურ ცვლადებში ჩვეულებრივ არაორთოგონალურია, ახდენენ გადასვლას კოდირებულ $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$, $\widetilde{x}_3$ ცვლადებზე

$$\widetilde{x}_1 = \frac{x_1 - x_1^{(0)}}{p_1}, \quad \widetilde{x}_2 = \frac{x_2 - x_2^{(0)}}{p_2}, \quad \widetilde{x}_3 = \frac{x_3 - x_3^{(0)}}{p_3}, \qquad (6.22)$$

სადაც $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$ საწყისი წერტილის კოორდინატებია ნატურალურ ცვლადებში. ამ დროს x_1–ის მიხედვით $x_1^{(ქ)}$ და $x_1^{(ზ)}$ მნიშვნელობებით შეზღუდული, x_2–ის მიხედვით $x_2^{(ქ)}$ და $x_2^{(ზ)}$–ით შეზღუდული და x_3–ის მიხედვით $x_3^{(ქ)}$ და $x_3^{(ზ)}$–ით შეზღუდული პარალელეპიპედი გარდაიქმნება კუბში (ნახ.17, ბ) კოორდინატების კოდირებულ ($\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$, $\widetilde{x}_3$) სისტემაში.

თუ ექსპერიმენტის შესაბამის გეგმას (27–ე ცხრილი) დავამატებთ +1–ის შემცველ $\widetilde{x}_0$ სვეტს, მივიღებთ დაგეგმვის სტანდარტულ მატრიცას (33–ე ცხრილი).

კოდირებულ ცლადებში დაგეგმვის ორთოგონალური მატრიცის მონაცემებით შეგვიძლია შევაფასოთ კოდირებულ ცვლადებში წრფივი განტოლების

$$y = b_0 + b_1\widetilde{x}_1 + b_2\widetilde{x}_2 + b_3\widetilde{x}_3. \qquad (6.23)$$

კოეფიციენტები.

(6.9)–ის თანახმად

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^{8} \widetilde{x}_{0u} y_u}{8} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8}{8},$$

$$b_1 = \frac{\sum_{u=1}^{8} \widetilde{x}_{1u} y_u}{8} = \frac{-y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8}{8}, \qquad (6.24)$$

$$b_2 = \frac{\sum_{u=1}^{8} \widetilde{x}_{2u} y_u}{8} = \frac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 + y_7 + y_8}{8},$$

$$b_3 = \frac{\sum_{u=1}^{8} \widetilde{x}_{3u} y_u}{8} = \frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7 + y_8}{8}.$$

კოეფიციენტები მნიშვნელოვანია, თუ სრულდება პირობა

$$|b_i| \geq t \cdot S_b = t \cdot \sqrt{c_{ii}} \cdot S_y = t \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot S_y, \quad i = 0,1,2,3. \qquad (6.25)$$

(6.23) განტოლების ადეკვატურობის შემოწმებისათვის განსაზღვრავენ ნაწინასწარმეტყველებ მნიშვნელობებს გეგმის წერტილებში:

$$\hat{y}_1 = b_0 + b_1(-1) + b_2(-1) + b_3(-1), \quad \hat{y}_5 = b_0 + b_1(+1) + b_2(-1) + b_3(-1),$$
$$\hat{y}_2 = b_0 + b_1(-1) + b_2(-1) + b_3(+1), \quad \hat{y}_6 = b_0 + b_1(+1) + b_2(-1) + b_3(+1),$$
$$\hat{y}_3 = b_0 + b_1(-1) + b_2(+1) + b_3(-1), \quad \hat{y}_7 = b_0 + b_1(+1) + b_2(+1) + b_3(-1),$$
$$\hat{y}_4 = b_0 + b_1(-1) + b_2(+1) + b_3(+1), \quad \hat{y}_8 = b_0 + b_1(+1) + b_2(+1) + b_3(+1).$$

$S^2_{არაად}$ არაადეკვატურობის დისპერსია პარალელურ დაკვირვებათა არსებობის თუ არარსებობის შემთხვევაში განისაზღვრება (5.43), (5.44) ან (5.45) ფორმულებით.

წრფივი განტოლება კოდირებულ ცვლადებში (6.23) ადეკვატურია, თუ $F = S^2_{არაად}/S^2_y$ საანგარიშო მნიშვნელობა არ აღემატება $F_{ცხ}$ კრიტიკულს.

(6.23) განტოლებით $(\tilde{x}_{1w}, \tilde{x}_{2w}, \tilde{x}_{3w})$ წერტილში ნაწინასწარმეტყველები $\hat{y}_w = b_0 + b_1\tilde{x}_{1w} + b_2\tilde{x}_{2w} + b_3\tilde{x}_{3w}$ მნიშვნელობის დისპერსია

$$S^2_{\hat{y}_w} = \frac{S^2_y}{8}\left(1 + \tilde{x}^2_{1w} + \tilde{x}^2_{2w} + \tilde{x}^2_{3w}\right) \qquad (6.26)$$

პროგნოზისთვის მიზანშეწონილია განტოლება (6.23) კოდირებული ცვლადებით გარდავქმნათ ფორმაში ნატურალური ცვლადებით კოდირების (6.22) პირობების ჩასმით

$$\hat{y} = b_0 + b_1\tilde{x}_1 + b_2\tilde{x}_2 + b_3\tilde{x}_3 = b_0 + b_1\frac{x_1 - x_1^{(0)}}{p_1} + b_2\frac{x_2 - x_2^{(0)}}{p_2} + b_3\frac{x_3 - x_3^{(0)}}{p_3} =$$

$$= b_0 + \frac{b_1}{p_1}x_1 - \frac{b_1}{p_1}x_1^{(0)} + \frac{b_2}{p_2}x_2 - \frac{b_2}{p_2}x_2^{(0)} + \frac{b_3}{p_3}x_3 - \frac{b_3}{p_3}x_3^{(0)} = (b_0 - \frac{b_1}{p_1}x_1^{(0)} -$$

$$- \frac{b_2}{p_2}x_2^{(0)} - \frac{b_3}{p_3}x_3^{(0)}) + \frac{b_1}{p_1}x_1 + \frac{b_2}{p_2}x_2 + \frac{b_3}{p_3}x_3 = b'_0 + b'_1x_1 + b'_2x_2 + b'_3x_3,$$

სადაც

$$b'_0 = b_0 - \frac{b_1}{p_1}x_1^{(0)} - \frac{b_2}{p_2}x_2^{(0)} - \frac{b_3}{p_3}x_3^{(0)}, \qquad b'_1 = \frac{b_1}{p_1},\ b'_2 = \frac{b_2}{p_2},\ b'_3 = \frac{b_3}{p_3}.$$

2^3 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტიდან წრფივი ეფექტების გარდა შეგვიძლია საჭიროების შემთხვევაში (მაგალითად, წრფივი მოდელის არაადეკვატურობის შემთხვევაში) შევაფასოთ ფაქტორების ორმაგი $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_1\tilde{x}_3$, $\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ ურთიერთქმედებები და სამმაგი $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ ურთიერთქმედება.

დაგეგმვის მატრიცას მივიღებთ, თუ დავამატებთ 2^3 ტიპის ორთოგონალურ სტანდარტულ გეგმას ფიქტიური $\tilde{x}_0$ ცვლადის შესაბამის სვეტს b_0-ის შესაფასებლად და ფაქტორების ჩვენთვის საინტერესო ურთიერთქმედებების შესაბამის სვეტებს.

ცხრილი 34

დაგეგმვის გაფართოებული მატრიცა

ცდის №	$\tilde{x}_0$	გეგმა			$\tilde{x}_1\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_2\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$	y
		$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$					
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y_1
2	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y_3
4	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y_4
5	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	-1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	y_6
7	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

ზემოაღნიშნული არაწრფივი წევრების შესაბამისი კოეფიციენტების შეფასება შემდეგნაირად ხდება:

$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{8}\tilde{x}_{iu}\tilde{x}_{ju}y_u}{8}, \qquad 1 \le i < j \le 3, \qquad (6.27)$$

$$b_{123} = \frac{\sum_{u=1}^{8}\tilde{x}_{1u}\tilde{x}_{2u}\tilde{x}_{3u}y_u}{8}. \qquad (6.28)$$

თუ შესაფასებელი კოეფიციენტების რაოდენობა გაუტოლდება ცდების რაოდენობას (N=8), მაშინ მოდელის ადეკვატურობას t - კრიტერიუმით ამოწმებენ.

მაგალითი. ვსწავლობთ სამი ფაქტორის — v სიჩქარის, c კონცენტრაციისა და T ტემპერატურის გავლენას ქიმიური პროდუქციის y პროცენტულ გამოსავალზე. საწყისი (ნულოვანი) წერტილის სახით მიღებულია წერტილი კოორდინატებით $v^{(0)}$=5 მ/წმ, $c^{(0)}$=0,8 და $T^{(0)}$=100^{0}C, ხოლო ვარირების ინტერვალების სახით p_v=1 მ/წმ, p_c=0,1 და p_T=20^{0}C. იგულისხმება, რომ ფაქტორული სივრცის ვარირების ზემოაღნიშნული ინტერვალებით განსაზღვრულ არეში გამოსაკვლევი ფაქტორების დონეებსა და გამოსავალი პარამეტრის მნიშვნელობას შორის დამოკიდებულება წრფივია.

წრფივი მოდელის მისაღებად გამოვიყენოთ 2^3 ტიპის სტანდარტული გეგმა და საწყისი პირობების გათვალისწინებით მოვახდინოთ მისი ტრანსფორმაცია გეგმაში ნატურალური ცვლადებით. მიღებული გეგმის თანახმად ყოველ წერტილში ჩავატაროთ სამ-სამი (m=3)

პარალელური ცდა. დავუშვათ, ასეთი თანაბარი დუბლირებისას მიღებულია y სვეტში მოცემული დაკვირვებათა შედეგები.

ცდის №	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\bar{y}$	$\hat{y}$	ცდის №	ν	c	T	y	$\bar{y}$
1	-1	-1	-1	53	52	1	4	0,7	80	51,5;53,0;54,5	53
2	-1	-1	+1	63	62	2	4	0,7	120	62,0;63,0;64,0	63
3	-1	+1	-1	37	38	3	4	0,9	80	35,5;37,0;38,5	37
4	-1	+1	+1	47	48	4	4	0,9	120	45,5;47,0;48,5	47
5	+1	-1	-1	71	72	5	6	0,7	80	69,5;71,0;72,5	71
6	+1	-1	+1	81	82	6	6	0,7	120	79,5;81,0;82,5	81
7	+1	+1	-1	59	58	7	6	0,9	80	57,5;59,0;60,5	59
8	+1	+1	+1	69	68	8	6	0,9	120	67,5;69,0;70,5	69

შემდგომი დამუშავებისას გამოვთვალოთ გეგმის წერტილებში დაკვირვებათა შედეგების საშუალო არითმეტიკულები ($\bar{y}$ სვეტი) და დისპერსიები გეგმის ყოველ წერტილში:

$$S_{y_1}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(51,5-53)^2 + (53,0-53)^2 + (54,5-53)^2\right] = 2,25,$$

$$S_{y_2}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(62,0-63)^2 + (63,0-63)^2 + (64,0-63)^2\right] = 1,00,$$

$$S_{y_3}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(35,5-37)^2 + (37,0-37)^2 + (38,5-37)^2\right] = 2,25,$$

$$S_{y_4}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(45,5-47)^2 + (47,0-47)^2 + (48,5-47)^2\right] = 2,25,$$

$$S_{y_5}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(69,5-71)^2 + (71,0-71)^2 + (72,5-71)^2\right] = 2,25,$$

$$S_{y_6}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(79,5-81)^2 + (81,0-81)^2 + (82,5-81)^2\right] = 2,25,$$

$$S_{y_7}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(57,5-59)^2 + (59,0-59)^2 + (60,5-59)^2\right] = 2,25,$$

$$S_{y_8}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(67,5-69)^2 + (69,0-69)^2 + (70,5-69)^2\right] = 2,25.$$

კოკრენის კრიტერიუმით შევამოწმოთ დისპერსიების ერთგვაროვნობა გეგმის წერტილებში. ამისათვის საანგარიშო მნიშვნელობა

$$G = \frac{2,25}{2,25+1,00+2,25+2,25+2,25+2,25+2,25+2,25} = \frac{2,25}{16,75} = 0,134.$$

G - კრიტერიუმის კრიტიკული მნიშვნელობა მოვძებნოთ შესაბამის ცხრილში m-1=3-1=2 სვეტისა და N=8 სტრიქონის გადაკვეთაზე: $G_{ცხ}$=0,5157. ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა ცხრილურზე ნაკლებია დისპერსიები გეგმის ყველა წერტილში ერთგვაროვანია.

განვსაზღვროთ ცდის დისპერსიის შეფასება:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^{8} S_{y_u}^2}{8} = \frac{2,25+1,00+2,25+2,25+2,25+2,25+2,25+2,25}{8} = 2,094$$

და საშუალო კვადრატული გადახრის მნიშვნელობა S_y=1,447.

შემდეგ სტანდარტული გეგმის და $\bar{y}$ სვეტის მონაცემებით განვსაზღვროთ კოდირებულ ცვლადიანი წრფივი რეგრესიული განტოლების კოეფიციენტების შეფასებები:

$$b_0 = \frac{53+63+37+47+71+81+59+69}{8} = \frac{480}{8} = 60,$$

$$b_1 = \frac{-53-63-37-47+71+81+59+69}{8} = \frac{80}{8} = 10,$$

$$b_2 = \frac{-53-63+37+47-71-81+59+69}{8} = \frac{-56}{8} = -7,$$

$$b_3 = \frac{-53+63-37+47-71+81-59+69}{8} = \frac{40}{8} = 5.$$

კრიტიკული მნიშვნელობა კოეფიციენტების არსებითობის შესამოწმებლად

$$t\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot S_y = 2,12 \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot 1,447 = 1,084.$$

აქ t-კრიტერიუმის ცხრილური მნიშვნელობა q=0,05 მნიშვნელოვნობის დონისა და $N(m$-1)=8(3-1)=16 თავისუფლების ხარისხისათვის $t_{ცხ}$=2,12 ტოლია.

b_0, b_1, b_2, b_3 კოეფიციენტები აბსოლუტური მნიშვნელობით აღემატება კრიტიკულს, ეს კოეფიციენტები სტატისტიკურად მნიშვნელოვანია.

ამრიგად, მიღებულია შემდეგი რეგრესიული განტოლება:

$$y = 60 + 10\tilde{x}_1 - 7\tilde{x}_2 + 5\tilde{x}_3.$$

მოდელის ადეკვატურობის შესამოწმებლად განვსაზღვროთ ამოძახილის ნაწინასწარმეტყველები მნიშვნელობები გეგმის წერტილებში:

$$\hat{y}_1 = 60 + 10(-1) - 7(-1) + 5(-1) = 52,$$

$$\hat{y}_2 = 60 + 10(-1) - 7(-1) + 5(+1) = 62,$$

$$\hat{y}_3 = 60 + 10(-1) - 7(+1) + 5(-1) = 38,$$

$$\hat{y}_4 = 60 + 10(-1) - 7(+1) + 5(+1) = 48,$$

$$\hat{y}_5 = 60 + 10(+1) - 7(-1) + 5(-1) = 72,$$
$$\hat{y}_6 = 60 + 10(+1) - 7(-1) + 5(+1) = 82,$$
$$\hat{y}_7 = 60 + 10(+1) - 7(+1) + 5(-1) = 58,$$
$$\hat{y}_8 = 60 + 10(+1) - 7(+1) + 5(+1) = 68$$

და არაადეკვატურობის დისპერსია

$$S^2_{\text{არაად}} = \frac{3}{8-4}[(53-52)^2 + (63-62)^2 + (37-38)^2 + (47-48)^2 +$$
$$+ (71-72)^2 + (81-82)^2 + (59-58)^2 + (69-68)^2] = 6{,}00.$$

ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა: $F = S^2_{\text{არაად}} / S^2_y =$ $=6{,}00/2{,}094=2{,}865$. q=0,05 მნიშვნელოვნობის დონისათვის F - კრიტერიუმის ცხრილური მნიშვნელობა $F_{\text{ცხ}}(4; 16)=3{,}01$. ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა კრიტიკულზე ნაკლებია, ჰიპოთეზა კოდირებულცვლადიანი მიღებული მოდელის ადეკვატურობის შესახებ არ იქნება უარყოფილი მნიშვნელოვნობის 5%-იანი დონის პირობებში.

მიღებული განტოლება შეგვიძლია გარდავქმნათ განტოლებაში ნატურალური ცვლადებით კოდირების

$$\widetilde{x}_1 = \frac{v-5}{1}, \qquad \widetilde{x}_2 = \frac{c-0{,}8}{0{,}1}, \qquad \widetilde{x}_3 = \frac{T-100}{20}$$

პირობების შეტანით. მივიღებთ

$$\hat{y} = 60 + 10\frac{v-5}{1} - 7\frac{c-0{,}8}{0{,}1} + 5\frac{T-100}{20} = 60 + 10v - 50 - 70c + 56 +$$
$$+ 0{,}25T - 25 = 39 + 10v - 70c + 0{,}25T.$$

6.2.3. პირველი რიგის გეგმები ოთხი ფაქტორისათვის

დავუშვათ, ვსწავლობთ ოთხი x_1, x_2, x_3 და x_4 ფაქტორის გავლენას. წრფივი დამოკიდებულების მისაღებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ 28-ე ცხრილში მოცემული 2^4 ტიპის ორდონიანი სრული ფაქტორული ექსპერიმენტი, რომელიც შეიცავს N=16 წერტილს. ეს გეგმა კოდირებულ $\widetilde{x}_i$ ცვლადებში საწყისი წერტილის კოორდინატების ($x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}$) და ვარირების ინტერვალების p_1, p_2, p_3, p_4 გათვალისწინებით გარდაიქმნება გეგმაში ნატურალური x_i

ცვლადებით. მიღებული გეგმის 16 წერტილში ატარებენ ცდებს და y_u დაკვირვებათა შედეგების (ან გეგმის წერტილებში პარალელური დაკვირვებების არსებობისას $\bar{y}_u$ საშუალო არითმეტიკულების) მიხედვით გამოთვლიან კოდირებულცვლადიანი წრფივი რეგრესიული განტოლების

$$y = b_0 + b_1\widetilde{x}_1 + b_2\widetilde{x}_2 + b_3\widetilde{x}_3 + b_4\widetilde{x}_4 \tag{6.29}$$

კოეფიციენტების შეფასებებს შემდეგი ფორმულებით:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^{16} y_u}{16}, \quad b_i = \frac{\sum_{u=1}^{16} \widetilde{x}_{iu} y_u}{16}, \quad i = 1,2,3,4. \tag{6.30}$$

კოეფიციენტები სტატისტიკურად მნიშვნელოვანია შემდეგი პირობის შესრულებისას

$$|b_i| \ge t \cdot \sqrt{\frac{1}{16}} \cdot S_y = t \cdot \frac{S_y}{4}, \quad i = 0,1,2,3,4, \tag{6.31}$$

სადაც t -კრიტერიუმის ცხრილური მნიშვნელობა შეირჩევა q=0,05 მნიშვნელოვნობის დონის დროს იმ თავისუფლების ხარისხისათვის, რომლითაც განისაზღვრება S_y საშუალო კვადრატული შეცდომა. არაარსებითი კოეფიციენტები მოდელიდან უნდა გამოირიცხოს.

(6.29) განტოლების ადეკვატურობის შესამოწმებლად განვსაზღვროთ y_u ნაწინასწარმეტყველები მნიშვნელობები 28-ე ცხრილში მოცემული გეგმის ყველა 16 წერტილში. არაადეკვატურობის $S^2_{\text{არაა}}$ დისპერსიის შეფასება გეგმის წერტილებში პარალელური ცდების არსებობის ან არარსებობის შემთხვევაში განისაზღვრება (5.43), (5,44) ან (5.45) ფორმულებით 16-l თავისუფლების ხარისხისათვის, სადაც l სტატისტიკურად არსებითი კოეფიციენტების რაოდენობაა.

შემდეგ განისაზღვრება ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა $F = S^2_{\text{არაად}} / S^2_y$; ფიშერის ცხრილიდან (16-$l$) სვეტისა და იმ სტრიქონის გადაკვეთაზე, რომელიც შეესაბამება S^2_y დისპერსიის თავისუფლების ხარისხს, ირჩევენ $F_{\text{ცხ}}$ ცხრილურ მნიშვნელობას. წრფივი განტოლება კო-

დირებული ცვლადებით (6.29) ადეკვატურია, თუ საანგარიშო მნიშვნელობა არ აღემატება $F_{ცხ}$ კრიტიკულს.

თუ (6.29) განტოლებაში ჩავსვამთ კოდირების პირობებს

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - x_i^{(0)}}{p_i}, \qquad i = 1,2,3,4,$$

მივიღებთ წრფივ მოდელს ნატურალური ცვლადებით

$$y = b_0' + b_1' x_1 + b_2' x_2 + b_3' x_3 + b_4' x_4.$$

2^4 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტი საშუალებას გვაძლევს წრფივი ეფექტების გარდა საჭიროების შემთხვევაში ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შევაფასოთ ორ-ორი ფაქტორის ურთიერთქმედების ეფექტები $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_1\tilde{x}_3$, $\tilde{x}_1\tilde{x}_4$, $\tilde{x}_2\tilde{x}_3$, $\tilde{x}_2\tilde{x}_4$ და $\tilde{x}_3\tilde{x}_4$, სამ-სამი ფაქტორის ურთიერთქმედების ეფექტები $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$, $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_4$, $\tilde{x}_1\tilde{x}_3\tilde{x}_4$ და $\tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4$, აგრეთვე ოთხი ფაქტორის ურთიერთქმედების ეფექტი $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4$.

ზემოაღნიშნული არაწრფივი წევრების შესაბამისი კოეფიციენტების შეფასება შემდეგნაირად ხდება:

$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{16} \tilde{x}_{iu}\tilde{x}_{ju} y_u}{16}, \quad 1 \le i < j \le 4, \tag{6.32}$$

$$b_{ijv} = \frac{\sum_{u=1}^{16} \tilde{x}_{iu}\tilde{x}_{ju}\tilde{x}_{vu} y_u}{16}, \quad 1 \le i < j < v \le 4, \tag{6.33}$$

$$b_{1234} = \frac{\sum_{u=1}^{16} \tilde{x}_{1u}\tilde{x}_{2u}\tilde{x}_{3u}\tilde{x}_{4u} y_u}{16}. \tag{6.34}$$

თუ ვიხილავთ მხოლოდ წრფივ აღწერას, სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის გამოყენება უკვე ოთხი ფაქტორის დროს არამიზანშეწონილი ხდება, ვინაიდან ცდების რაოდენობა მნიშვნელოვნად აღემატება წრფივი განტოლების კოეფიციენტების რაოდენობას. ამავე დროს იმ ინფორმაციის ხარჯზე, რომელსაც ატარებენ ფაქტორების ურთიერთქმედების ეფექტები და რომელიც არაარსებითია

პოსტულირებული წრფივი მოდელისათვის, შეგვიძლია შევამციროთ ცდების რაოდენობა, ე.ი. ჩავატაროთ ცდები სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის არა ყველა წერტილში, არამედ სპეციალური წესით შერჩეულ ნაწილში. ასეთ გეგმებს *წილადური ფაქტორული ექსპერიმენტის გეგმები* ეწოდება.

წილადური ფაქტორული ექსპერიმენტის გეგმები აიგება სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის გეგმების მსგავსად. მათაც უნდა ახასიათებდეს სიმეტრიულობის, ნორმირების, ორთოგონალურობის თვისებები. წილადურ რეპლიკებს ადგენენ ურთიერთქმედების ზოგიერთი ეფექტის შეცვლით ახალი დამოუკიდებელი ცვლადებით.

ასე მაგალითად, 2^4 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის 1/2 რეპლიკა (ნახევარრეპლიკა) შეიცავს $N=2^{k-1}=2^{4-1}=8$ ცდას და ასე აღინიშნება: 2^{4-1}, სადაც 1 ურთიერთქმედების ეფექტებთან გატოლებული წრფივი ეფექტების რაოდენობაა. ასეთი წილადური ფაქტორული ექსპერიმენტის ბირთვი 2^3 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტია $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ და $\tilde{x}_3$ ფაქტორებისათვის. $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ სვეტის ნიშნები მიეწერება ახალ $\tilde{x}_4$ ფაქტორს (35-ე ცხრილი). ეს პროცედურა ასე ჩაიწერება: $\tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ და ეწოდება *მაგენერირებელი თანაფარდობა*. ახლა მიღებულია დაგეგმვის მატრიცა უკვე ოთხი ფაქტორისათვის.

ცხრილი 35

2^{4-1} ნახევარრეპლიკა

ცდის №	$\tilde{x}_0$	გეგმა				y
		$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$	
1	+1	-1	-1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	+1	y_3
4	+1	-1	+1	+1	-1	y_4
5	+1	+1	-1	-1	+1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	y_6
7	+1	+1	+1	-1	-1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

პირველ ცდაში ყველა ფაქტორი იმყოფება ქვედა დონეზე, მეორეში x_1 და x_2 – ქვედაზე, ხოლო x_3 და x_4 – ზედაზე და ა.შ. ცდების რეალიზაცია ხდება მიღებული ნახევარრეპლიკის რვა წერტილში და წრფივი რეგრესიული განტოლების (6.29) კოეფიციენტების შეფასება ხდება შემდეგი ფორმულით:

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^{8} \widetilde{x}_{iu} y_u}{8}, \quad i = 0,1,2,3,4.$$

კოეფიციენტები სტატისტიკურად მნიშვნელოვანია შემდეგი პირობის შესრულებისას

$$|b_i| \geq t \cdot S_b = t \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot S_y, \quad i = 0,1,2,3,4.$$

წრფივი რეგრესიული განტოლების

$$y = b_0 + b_1\widetilde{x}_1 + b_2\widetilde{x}_2 + b_3\widetilde{x}_3 + b_4\widetilde{x}_4$$

ადეკვატურობის შემოწმებისათვის განისაზღვრება ნაწინასწარმეტყველები მნიშვნელობები 2^{4-1} ნახევარრეპლიკის რვა წერტილში, გამოითვლება არაადეკვატურობის დისპერსიის $S^2_{\text{არაად}}$ შეფასება, ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა $F = S^2_{\text{არაად}}/S^2_y$, კრიტიკული მნიშვნელობა $F_{\text{ცხ}}$ (8-*l*) –სვეტისა და იმ სტრიქონის გადაკვეთაზე, რომელიც შეესაბამება S^2_y დისპერსიის თავისუფლების ხარისხს. თუ $F \leq F_{\text{ცხ}}$, კოდირებული ცვლადებით მიღებული წრფივი მოდელი ადეკვატურია.

ცდებში ორმაგი მოგება 2^{4-1} ნახევარრეპლიკით აშკარაა, მაგრამ ცდების რაოდენობის შემცირებას თან სდევს ის გარემოება, რომ შეუძლებელია კოეფიციენტების დამოუკიდებელი, განცალკევებული შეფასება, როგორც ამას ადგილი ჰქონდა 2^4 ტიპის სრულ ფაქტორულ ექსპერიმენტში. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ წრფივი ეფექტები შერეულია ურთიერთქმედების ეფექტებთან.

შერევის სისტემა შეგვიძლია მივიღოთ *განმსაზღვრელი კონტრასტის* გამოყენებით. ამ უკანასკნელის მისაღებად მაგენერირებელი თანაფარდობის ორივე ნაწილს $\widetilde{x}_4$–ზე ამრავლებენ:

$$\widetilde{x}_4^2 \equiv \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4.$$

$\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4$ სვეტი (ისევე როგორც $\widetilde{x}_4^2$) შედგება მხოლოდ +1 - საგან. ამიტომ

$$1 \equiv \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4.$$

სვეტების ნამრავლის სიმბოლურ აღნიშვნას (რომელიც +1 ან –1-ის ტოლია) ეწოდება *განმსაზღვრელი კონტრასტი.*

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ, თუ რომელი ეფექტია შერეული მოცემულთან, განმსაზღვრელი კონტრასტის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ მოცემული ეფექტის შესაბამის სვეტზე. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველთვის $\widetilde{x}_i^2 \equiv 1$, $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$, $\widetilde{x}_3$ და $\widetilde{x}_4$–სათვის მივიღებთ:

$$\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_1^2\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4 = \widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4,$$
$$\widetilde{x}_2 = \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2^2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4 = \widetilde{x}_1\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4,$$
$$\widetilde{x}_3 = \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3^2\widetilde{x}_4 = \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_4,$$
$$\widetilde{x}_4 = \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4^2 = \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3.$$

ეს ნიშნავს, რომ გამოთვლილი b_i კოეფიციენტები იქნება შეფასებები:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234},$$
$$b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{134},$$
$$b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124},$$
$$b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{123},$$

სადაც ბერძნული ასოებით აღნიშნულია კოეფიციენტების უცნობი ჭეშმარიტი მნიშვნელობები. მოყვანილი ჩანაწერი შეგვიძლია შემდეგნაირად წავიკითხოთ: მაგალითად, b_1 კოეფიციენტის გამოთვლილი მნიშვნელობა წარმოადგენს β_1 და β_{234} კოეფიციენტების ერთობლივ შეფასებას, ე.ი. b_1 მიანიშნებს როგორც x_1 ფაქტორის გავლენას, ისე x_2, x_3 და x_4 ფაქტორების ერთობლივ გავლენას. ამრიგად, განხილულ წილადურ რეპლიკაში არ შეიძლება განვაცალკევოთ x_1, x_2, x_3 და x_4 ფაქტორების გავლენა მათი

სამმაგი ურთიერთქმედებებისაგან. მაგრამ სამმაგი ურ-
თიერთქმედებები, როგორც წესი, გვაძლევს საკმაოდ სუსტ
ეფექტებს, ამიტომ ასეთი დაგეგმვით შესაძლოა კარგი
წრფივი მოდელის მიღება.

ჩვენ მიერ აგებული ნახევარრეპლიკა არაერთადერ-
თია. შეგვიძლია მივიღოთ 2^{4-1} ნახევარრეპლიკები $\widetilde{x}_4 \equiv -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$,
$\widetilde{x}_4 \equiv \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2$, $\widetilde{x}_4 \equiv -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2$, $\widetilde{x}_4 \equiv \widetilde{x}_1\widetilde{x}_3$, $\widetilde{x}_4 \equiv -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_3$, $\widetilde{x}_4 \equiv \widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$, $\widetilde{x}_4 \equiv -\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$
მაგენერირებელი თანაფარდობების გამოყენებითაც. ჩვეუ-
ლებრივ ცდილობენ შეარჩიონ რეპლიკა, რომელშიც ძირი-
თადი ეფექტები შერეულია რაც შეიძლება მაღალი რიგის
ურთიერქმედების ეფექტებთან. ჩვენ შემთხვევაში ეს ნახე-
ვარრეპლიკები შეესაბამება $\widetilde{x}_4 \equiv \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$ და $\widetilde{x}_4 \equiv -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$ მაგე-
ნერირებელ თანაფარდობებს. უკანასკნელი მათგანი მოცემუ-
ლია 36–ე ცხრილში.

ცხრილი 36

2^{4-1} ნახევარრეპლიკა $\widetilde{x}_4 \equiv -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$ მაგენერირებელი თანაფარდობით

ცდის №	$\widetilde{x}_0$	გეგმა				y
		$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4 \equiv -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$	
1	+1	-1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	-1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	y_3
4	+1	-1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	+1	-1	-1	-1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	+1	y_6
7	+1	+1	+1	-1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	-1	y_8

ვინაიდან ამ შემთხვევაში განმსაზღვრელი კონტრასტი
$1 \equiv -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4$, ეფექტების შერევა შემდეგნაირად ხდება:

$$\widetilde{x}_1 = -\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4, \qquad b_1 \to \beta_1 - \beta_{234};$$
$$\widetilde{x}_2 = -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4, \qquad b_2 \to \beta_2 - \beta_{134};$$
$$\widetilde{x}_3 = -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_4, \qquad b_3 \to \beta_3 - \beta_{124};$$
$$\widetilde{x}_4 = -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3, \qquad b_4 \to \beta_4 - \beta_{123}.$$

აქაც, ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, წრფივი ეფექ-
ტები შერეულია სამმაგი ურთიერთქმედების ეფექტებთან.

$\widetilde{x}_4 \equiv \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$ და $\widetilde{x}_4 \equiv -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$ მაგენერირებელი თანაფარდო-
ბების შესაბამისი 2^{4-1} ნახევარრეპლიკების გაერთიანება გვაძ-
ლევს 2^4 ტიპის სრულ ფაქტორულ ექსპერიმენტს (28–ე ცხრილი).

35–ე ცხრილში მოცემული ნახევარრეპლიკა წარმოად-
გენს 28–ე ცხრილიდან 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16 ნომრებით
აღნიშნული ცდების შერჩევას, ხოლო 36–ე ცხრილში მო-
ცემული ნახევარრეპლიკა – 2^4 ტიპის სრული ფაქტორული
ექსპერიმენტის დარჩენილი ნაწილის (2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15
ნომრებით აღნიშნული ცდების) შერჩევას.

ადვილად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ თუ რეალიზე-
ბულია ორივე ნახევარრეპლიკა (ე.ი. 2^4 ტიპის მთელი სრუ-
ლი ფაქტორული ექსპერიმენტი), წრფივი ეფექტების შეფა-
სებები უკვე აღარ იქნება შერეული ურთიერთქმედების
ეფექტებთან. მართლაც, პირველი ფაქტორისათვის შერევის
მაგალითზე

$$\begin{array}{l} b_1 \to \beta_1 + \beta_{234} \\ + \\ \underline{b_1 \to \beta_1 - \beta_{234}} \\ 2b_1 \to 2\beta_1 \end{array} \qquad \text{ან} \quad b_1 \to \beta_1.$$

სხვა მაგენერირებელი თანაფარდობების დროს შე-
რევის სისტემებს აქვთ შემდეგი სახე:

$\widetilde{x}_4 \equiv \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_4 \equiv -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_4 \equiv \widetilde{x}_1\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4 \equiv -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4 \equiv \widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4 \equiv -\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$
$1 \equiv \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_4$	$1 \equiv -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_4$	$1 \equiv \widetilde{x}_1\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4$	$1 \equiv -\widetilde{x}_1\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4$	$1 \equiv \widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4$	$1 \equiv -\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4$
$b_1 \to \beta_1 + \beta_{24}$	$b_1 \to \beta_1 - \beta_{24}$	$b_1 \to \beta_1 + \beta_{34}$	$b_1 \to \beta_1 - \beta_{34}$	$b_1 \to \beta_1 + \beta_{1234}$	$b_1 \to \beta_1 - \beta_{1234}$
$b_2 \to \beta_2 + \beta_{14}$	$b_2 \to \beta_2 - \beta_{14}$	$b_2 \to \beta_2 + \beta_{1234}$	$b_2 \to \beta_2 - \beta_{1234}$	$b_2 \to \beta_2 + \beta_{34}$	$b_2 \to \beta_2 - \beta_{34}$
$b_3 \to \beta_3 + \beta_{1234}$	$b_3 \to \beta_3 - \beta_{1234}$	$b_3 \to \beta_3 + \beta_{14}$	$b_3 \to \beta_3 - \beta_{14}$	$b_3 \to \beta_3 + \beta_{24}$	$b_3 \to \beta_3 - \beta_{24}$
$b_4 \to \beta_4 + \beta_{12}$	$b_4 \to \beta_4 - \beta_{12}$	$b_4 \to \beta_4 + \beta_{13}$	$b_4 \to \beta_4 - \beta_{13}$	$b_4 \to \beta_4 + \beta_{23}$	$b_4 \to \beta_4 - \beta_{23}$

ამ ექვსი ნახევარრეპლიკიდან თითოეულის რეალი-
ზაცია უზრუნველყოფს ძირითადად ორმაგ ურთიერთქმე-
დებებთან შერეული b_1, b_2, b_3 და b_4 ეფექტების შეფასებას.
ორმაგი ეფექტები სამმაგზე ძლიერია, ამიტომ ამ თვალ-
საზრისით ექვსივე ნახევარრეპლიკა 35–ე და 36–ე ცხრი-
ლებში განხილულზე უარესია. მაგრამ აქ ექვსივე ნახე-
ვარრეპლიკაში ერთ–ერთი ფაქტორის (x_1, x_2 ან x_3) ეფექტი
შერეულია მხოლოდ მეოთხე რიგის ურთიერთქმედებასთან.

ოთხმაგი ეფექტები სამმაგზე უფრო სუსტია, ამიტომ მოცემული ფაქტორის ძირითადი ეფექტი შეგვიძლია შევაფასოთ მეტნაკლებად სუფთა სახით. თუ უფრო ზუსტად გვინდა შევაფასოთ პირველი ფაქტორის ეფექტი, უნდა შევარჩიოთ ნახევარრეპლიკები მაგენერირებელი თანაფარდობებით $\tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_2\tilde{x}_3$ ან $\tilde{x}_4 \equiv -\tilde{x}_2\tilde{x}_3$, თუ მეორე ფაქტორის ეფექტი – $\tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_3$ ან $\tilde{x}_4 \equiv -\tilde{x}_1\tilde{x}_3$, თუ მესამე ფაქტორის ეფექტი – $\tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2$ ან $\tilde{x}_4 \equiv -\tilde{x}_1\tilde{x}_2$.

მაგალითი. ვსწავლობთ პროცესს, რომელიც დამოკიდებულია ოთხ ფაქტორზე: T ტემპერატურაზე, τ დროზე, c კონცენტრაციაზე და ν სიჩქარეზე. საწყისი წერტილის კოორდინატებია: $T^{(0)}$=600 ^{0}C, $\tau^{(0)}$==60 წთ, $c^{(0)}$=0,8, $\nu^{(0)}$=50 მ/წმ, ხოლო ცვლილების ინტერვალები: p_T==50 ^{0}C, p_τ=10 წთ, p_c=0,1, p_ν=10 მ/წმ. წრფივი მოდელის მისაღებად დასაშვებია N=8 ცდის ჩატარება. უფრო ზუსტად უნდა შეფასდეს პირველი ფაქტორის ეფექტი.

ვინაიდან უფრო ზუსტად უნდა შეფასდეს პირველი ფაქტორის ეფექტი, გამოვიყენოთ 2^4 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის 1/2 რეპლიკა $\tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_2\tilde{x}_3$ მაგენერირებელი თანაფარდობით. შესაბამისი გეგმა კოდირებულ და ნატურალურ ცვლადებში მოცემულია ქვემოთ.

ცდის №	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_2\tilde{x}_3$	$\bar{y}$	$\hat{y}$
1	-1	-1	-1	+1	50	50
2	-1	-1	+1	-1	65	64
3	-1	+1	-1	-1	32	32
4	-1	+1	+1	+1	45	46
5	+1	-1	-1	+1	73	74
6	+1	-1	+1	-1	88	88
7	+1	+1	-1	-1	57	56
8	+1	+1	+1	+1	70	70

ცდის №	T, ^{0}C	τ, წთ	c	ν, მ/წმ	y	$\bar{y}$
1	550	50	0,7	60	49; 50; 51	50
2	550	50	0,9	40	64,0; 64,5; 65,5; 66,0	65
3	550	70	0,7	40	31; 33; 65	32
4	550	70	0,9	60	44; 45; 46	45
5	650	50	0,7	60	71,8; 73,0; 74,2	73
6	650	50	0,9	40	87; 88; 89	88
7	650	70	0,7	40	55,7; 57,0; 58,3	57
8	650	70	0,9	60	69; 70; 71	70

გეგმის ყოველ წერტილში ჩატარებულია რამდენიმე პარალელური ცდა და დაკვირვებათა შესაბამისი შედეგები მოცემულია y სვეტში. გეგმის მესამე წერტილში პარალელურ დაკვირვებათა შედეგებს შორის არის საეჭვო შედეგი „65“. გამოვიყენოთ Q - კრიტერიუმი და განვსაზღვროთ $Q_2' = (65-33)/(65-31) = 32/34 = 0,94$ მნიშვნელობა. ცხრილური მნიშვნელობაა $Q_{ცხ}$=0,94. მაშასადამე, საეჭვო შედეგი უხეში შეცდომაა და უნდა ჩამოვაცილოთ სხვა მონაცემებს.

შემდგომი დამუშავებისათვის გამოვთვალოთ გეგმის წერტილებში დაკვირვებათა შედეგების საშუალო არითმეტიკულები ($\bar{y}$ სვეტი):

$$\bar{y}_1 = (49+50+51)/3 = 50, \qquad \bar{y}_5 = (71,8+73,0+74,2)/3 = 73,$$

$$\bar{y}_2 = (64,0+64,5+65,5+66,0)/4 = 65, \qquad \bar{y}_6 = (87+88+89)/3 = 88,$$

$$\bar{y}_3 = (31+33)/2 = 32, \qquad \bar{y}_7 = (55,7+57,0+58,3)/3 = 57,$$

$$\bar{y}_4 = (44+45+46)/3 = 45, \qquad \bar{y}_8 = (69+70+71)/3 = 70,$$

დისპერსიები გეგმის თითოეულ წერტილში:

$$S_{y_1}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(49-50)^2+(50-50)^2+(51-50)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot[2] = 1,00,$$

$$S_{y_2}^2 = \frac{1}{4-1}\left[(64-65)^2+(64,5-65)^2+(65,5-65)^2+(66-65)^2\right] = \frac{1}{3}\cdot[2,5] = 0,83,$$

$$S_{y_3}^2 = \frac{1}{2-1}\left[(31-32)^2+(33-32)^2\right] = \frac{1}{1}\cdot[2] = 2,00,$$

$$S_{y_4}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(44-45)^2+(45-45)^2+(46-45)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot[2] = 1,00,$$

$$S_{y_5}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(71,8-73)^2+(73,0-73)^2+(74,2-73)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot[2,88] = 1,44,$$

$$S_{y_6}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(87-88)^2+(88-88)^2+(89-88)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot[2] = 1,00,$$

$$S_{y_7}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(55,7-57)^2+(57,0-57)^2+(58,3-57)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot[3,38] = 1,69,$$

$$S_{y_8}^2 = \frac{1}{3-1}\left[(69-70)^2+(70-70)^2+(71-70)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot[2] = 1,00.$$

გეგმის წერტილებში პარალელურ დაკვირვებათა სხვადასხვა რაოდენობის გამო დისპერსიათა ერთგვაროვნობის შესახებ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად გამოვიყენოთ ბარტლეტის კრიტერიუმი. დაკვირვებათა საერთო რაოდენობა გეგმის ყველა წერტილში 24-ის ტოლია. ამიტომ დისპერსიის გასაშუალოებული მნიშვნელობა

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{24-8}\left[1,00(3-1)+0,83(4-1)+2,00(2-1)+1,00(3-1)+\right.$$
$$\left.+1,44(3-1)+1,00(3-1)+1,69(3-1)+1,00(3-1)\right] = 1,172.$$

კოეფიციენტი

$$C = 1+\frac{1}{3(8-1)}\left[\frac{1}{3-1}+\frac{1}{4-1}+\frac{1}{2-1}+\frac{1}{3-1}+\frac{1}{3-1}+\frac{1}{3-1}+\frac{1}{3-1}+\frac{1}{3-1}-\frac{1}{24-8}\right] = 1,203$$

χ^2-ის საანგარიშო მნიშვნელობა კი –

$$\chi^2 = \frac{2,303}{1,203}\left[(24-8)\lg 1,172-(3-1)\lg 1,00-(4-1)\lg 0,83-(2-1)\lg 2,00-\right.$$
$$\left.-(3-1)\lg 1,00-(3-1)\lg 1,44-(3-1)\lg 1,00-(3-1)\lg 1,69-(3-1)\lg 1,00\right] = 0,5204$$

χ^2-ის ცხრილური მნიშვნელობა $\chi_{ცხ}^2$ მნიშვნელოვნობის 5%-იანი დონისა და 8-1=7 თავისუფლების ხარისხისათვის 14,067 ტოლია. ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა კრიტიკულზე ნაკლებია, გეგმის წერტილებში დაკვირვებათა შედეგების დისპერსიები ერთგვაროვანია.

არათანაბარი დუბლირების გათვალისწინებით ცდის დისპერსია

$$S_y^2 = \frac{[2]+[2,5]+[2]+[2]+[2,88]+[2]+[3,38]+[2]}{24-8} = \frac{18,76}{16} = 1,172$$

და საშუალო კვადრატული გადახრა $S_y = \sqrt{1,172} = 1,082$.

ნახევარრეპლიკისა და $\bar{y}$ სვეტის მონაცემების გათვალისწინებით განვსაზღვროთ კოდირებულცვლადიანი წრფივი რეგრესიული განტოლების კოეფიციენტების შეფასებები:

$$b_0 = \frac{50+65+32+45+73+88+57+70}{8} = \frac{480}{8} = 60,$$

$$b_1 = \frac{-50-65-32-45+73+88+57+70}{8} = \frac{96}{8} = 12,$$

$$b_2 = \frac{-50-65+32+45-73-88+57+70}{8} = \frac{-72}{8} = -9,$$

$$b_3 = \frac{-50+65-32+45-73+88-57+70}{8} = \frac{56}{8} = 7,$$

$$b_4 = \frac{50-65-32+45+73-88-57+70}{8} = \frac{-4}{8} = -0,5.$$

კოეფიციენტების სტატისტიკური მნიშვნელოვნობის შესამოწმებლად გამოვთვალოთ კრიტიკული მნიშვნელობა:

$$t\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot S_y = 2,12\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot 1,082 = 0,811.$$

აქ t-კრიტერიუმის ცხრილური მნიშვნელობა ($t_{ცხ}$) q=0,05 მნიშვნელოვნობის დონისა და S_y^2 დისპერსიასთან დაკავშირებული 24-8==16 თავისუფლების ხარისხისათვის 2,12 ტოლია.

კოეფიციენტები b_0, b_1, b_2 და b_3 უნდა მივიჩნიოთ სტატისტიკურად მნიშვნელოვნად. ვინაიდან b_4 კოეფიციენტი აბსოლუტური მნიშვნელობით არ აღემატება კრიტიკულ მნიშვნელობას, ის არაარსებითია და შეგვიძლია გამოვრიცხოთ.

ამრიგად, მიღებულია შემდეგი რეგრესიული განტოლება:

$$y = 60 + 12\tilde{x}_1 - 9\tilde{x}_2 + 7\tilde{x}_3.$$

ამ განტოლების ადეკვატურობის შემოწმებისათვის განვსაზღვროთ ნახევარრეპლიკის წერტილებში ნაწინასწარმეტყველები მნიშვნელობები:

$$\hat{y}_1 = 60+12(-1)-9(-1)+7(-1) = 50, \quad \hat{y}_5 = 60+12(+1)-9(-1)+7(-1) = 74,$$
$$\hat{y}_2 = 60+12(-1)-9(-1)+7(+1) = 64, \quad \hat{y}_6 = 60+12(+1)-9(-1)+7(+1) = 88,$$
$$\hat{y}_3 = 60+12(-1)-9(+1)+7(-1) = 32, \quad \hat{y}_7 = 60+12(+1)-9(+1)+7(-1) = 56,$$
$$\hat{y}_4 = 60+12(-1)-9(+1)+7(+1) = 46, \quad \hat{y}_8 = 60+12(+1)-9(+1)+7(+1) = 70,$$

არაადეკვატურობის დისპერსია (ოთხი არსებითი კოეფიციენტის გათვალისწინებით)

$$S_{არაად}^2 = \frac{1}{8-4}\left[3(50-50)^2+4(65-64)^2+2(32-32)^2+3(45-46)^2+\right.$$
$$\left.+3(73-74)^2+3(88-88)^2+3(57-56)^2+3(70-70)^2\right] = 3,25.$$

ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა $F = S_{არაად}^2 / S_y^2 = 3,25/1,172 = 2,77$. ფიშერის ცხრილის 8-4=4 სვეტისა და 24-8=16 სტრიქონის გადაკვეთაზე მოძებნილი კრიტიკული მნიშვნელობაა $F(4;\ 16)=3,01$. ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა არ აღემატება კრიტიკულს, ჰიპოთეზა კოდირებულცვლადიანი წრფივი მოდელის ადეკვატურობის შესახებ არ იქნება უარყოფილი (5%-იანი მნიშვნელოვნობის დონის პირობებში).

6.2.4. პირველი რიგის გეგმები ხუთი ფაქტორისათვის

დავუშვათ, ვსწავლობთ ხუთი x_1, x_2, x_3, x_4 და x_5 ფაქტორის გავლენას. საწყის ეტაპზე განვსაზღვროთ წრფივი დამოკიდებულება, რომელიც დააკავშირებს ფაქტორების დონეებსა და გამოსავალი y პარამეტრის (ამოძახილის) მნიშვნელობებს.

ისევე როგორც წინა შემთხვევებში, მიზანშეწონილია გადავიდეთ კოდირებულ $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$, $\widetilde{x}_3$, $\widetilde{x}_4$ და $\widetilde{x}_5$ ცვლადებზე, რომლებიც დაკავშირებულია ნატურალურ ცვლადებთან

$$\widetilde{x}_i = \frac{x_i - x_i^{(0)}}{p_i}, \quad i = 1,2,3,4,5.$$

კოდირებულცვლადიანი წრფივი რეგრესიული განტოლების

$$y = b_0 + b_1\widetilde{x}_1 + b_2\widetilde{x}_2 + b_3\widetilde{x}_3 + b_4\widetilde{x}_4 + b_5\widetilde{x}_5 \qquad (6.35)$$

კოეფიციენტების დამოუკიდებელი შეფასებისათვის უნდა გამოვიყენოთ 2^5 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტი, რომელიც N=32 ცდას შეიცავს (37–ე ცხრილი).

ცხრილი 37

2^5 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტი

ცდის №	გეგმა					y	ცდის №	გეგმა					y
	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_4$	$\widetilde{x}_5$			$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4$	$\widetilde{x}_5$	
1	-1	-1	-1	-1	-1	y_1	17	+1	-1	-1	-1	-1	y_{17}
2	-1	-1	-1	-1	+1	y_2	18	+1	-1	-1	-1	+1	y_{18}
3	-1	-1	-1	+1	-1	y_3	19	+1	-1	-1	+1	-1	y_{19}
4	-1	-1	-1	+1	+1	y_4	20	+1	-1	-1	+1	+1	y_{20}
5	-1	-1	+1	-1	-1	y_5	21	+1	-1	+1	-1	-1	y_{21}
6	-1	-1	+1	-1	+1	y_6	22	+1	-1	+1	-1	+1	y_{22}
7	-1	-1	+1	+1	-1	y_7	23	+1	-1	+1	+1	-1	y_{23}
8	-1	-1	+1	+1	+1	y_8	24	+1	-1	+1	+1	+1	y_{24}
9	-1	+1	-1	-1	-1	y_9	25	+1	+1	-1	-1	-1	y_{25}
10	-1	+1	-1	-1	+1	y_{10}	26	+1	+1	-1	-1	+1	y_{26}
11	-1	+1	-1	+1	-1	y_{11}	27	+1	+1	-1	+1	-1	y_{27}
12	-1	+1	-1	+1	+1	y_{12}	28	+1	+1	-1	+1	+1	y_{28}
13	-1	+1	+1	-1	-1	y_{13}	29	+1	+1	+1	-1	-1	y_{29}
14	-1	+1	+1	-1	+1	y_{14}	30	+1	+1	+1	-1	+1	y_{30}
15	-1	+1	+1	+1	-1	y_{15}	31	+1	+1	+1	+1	-1	y_{31}
16	-1	+1	+1	+1	+1	y_{16}	32	+1	+1	+1	+1	+1	y_{32}

(6.35) განტოლების კოეფიციენტების შეფასებები შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^{32} y_u}{32}, \qquad b_i = \frac{\sum_{u=1}^{32} \widetilde{x}_{iu} y_u}{32}, \qquad i = 1,2,3,4,5. \qquad (6.36)$$

კოეფიციენტები სტატისტიკურად მნიშვნელოვანია, თუ სრულდება პირობა

$$|b_i| \geq t \cdot \sqrt{\frac{1}{32}} \cdot S_y,$$

სადაც t სტიუდენტის კრიტერიუმის ცხრილური მნიშვნელობაა q=0,05 მნიშვნელოვნობის დონისა და იმ თავისუფლების ხარისხისათვის, რომლითაც განისაზღვრება ცდის S_y^2 დისპერსია.

ჰიპოთეზა კოდირებულცვლადიანი განტოლების ადეკვატურობის შესახებ არ იქნება უარყოფილი, თუ საანგარიშო მნიშვნელობა $F = S^2_{\text{არად}} / S_y^2$ არ აღემატება $F_{\text{ცხ}}$ კრიტიკულს, რომელიც იმყოფება ფიშერის ცხრილის (32-l) სვეტისა და იმ სტრიქონის გადაკვეთაზე, რომელიც შეესაბამება S_y^2 დისპერსიის თავისუფლების ხარისხს.

2^5 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის ცდების რაოდენობა მნიშვნელოვნად აღემატება (6.35) წრფივი განტოლების კოეფიციენტების რაოდენობას. ჭარბია Δ=32-6==26 ცდა. 2^5 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის 32 ცდის რეალიზაციის შემდეგ წრფივი განტოლების არაადეკვატურობის შემთხვევაში დამოუკიდებლად შეგვიძლია შევაფასოთ აგრეთვე ფაქტორების ორმაგი $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2$, $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_3$, $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_4$, $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_5$, $\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$, $\widetilde{x}_2\widetilde{x}_4$, $\widetilde{x}_2\widetilde{x}_5$, $\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4$, $\widetilde{x}_3\widetilde{x}_5$, $\widetilde{x}_4\widetilde{x}_5$ ურთიერთქმედების, სამმაგი $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$, $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_4$, $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_5$, $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4$, $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_3\widetilde{x}_5$, $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_4\widetilde{x}_5$, $\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4$, $\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_5$, $\widetilde{x}_2\widetilde{x}_4\widetilde{x}_5$, $\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4\widetilde{x}_5$ ურთიერთქმედების, ოთხმაგი $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4$, $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_5$, $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_4\widetilde{x}_5$, $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4\widetilde{x}_5$, $\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4\widetilde{x}_5$ ურთიერთქმედების ეფექტები და ყველა ფაქტორის $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4\widetilde{x}_5$ ურთიერთქმედების ეფექტი.

თუ შევიზღუდებით მხოლოდ წრფივი აღწერით, მაშინ ხუთი ფაქტორის გამოკვლევა შეგვიძლია განვახორციელოთ 2^5 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის $\widetilde{x}_5 \equiv \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4$ მაგენერირებელი თანაფარდობით მიღებული 1/2 რეპლიკის (2^{5-1} ნახევარრეპლიკის) გამოყენებით.

ცხრილი 38

2^{5-1} ნახევარრეპლიკა $\tilde{x}_5 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4$ მაგენერირებელი თანაფარდობით

ცდის №	გეგმა					y
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4$	
1	-1	-1	-1	-1	+1	y_1
2	-1	-1	-1	+1	-1	y_2
3	-1	-1	+1	-1	-1	y_3
4	-1	-1	+1	+1	+1	y_4
5	-1	+1	-1	-1	-1	y_5
6	-1	+1	-1	+1	+1	y_6
7	-1	+1	+1	-1	+1	y_7
8	-1	+1	+1	+1	-1	y_8
9	+1	-1	-1	-1	-1	y_9
10	+1	-1	-1	+1	+1	y_{10}
11	+1	-1	+1	-1	+1	y_{11}
12	+1	-1	+1	+1	-1	y_{12}
13	+1	+1	-1	-1	+1	y_{13}
14	+1	+1	-1	+1	-1	y_{14}
15	+1	+1	+1	-1	-1	y_{15}
16	+1	+1	+1	+1	+1	y_{16}

ამ ნახევარრეპლიკის 16 წერტილში ცდების ჩატარების შემდეგ (6.35) განტოლების კოეფიციენტების შეფასებებს ვიპოვით შემდეგი ფორმულების მიხედვით:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^{16} y_u}{16}, \qquad b_i = \frac{\sum_{u=1}^{16} \tilde{x}_{iu} y_u}{16}, \qquad i = 1,2,3,4,5. \qquad (6.37)$$

კოეფიციენტები სტატისტიკურად მნიშვნელოვანია, თუ სრულდება პირობა

$$|b_i| \ge t \cdot \sqrt{\frac{1}{16}} \cdot S_y.$$

ჰიპოთეზა კოდირებულცვლადიანი წრფივი განტოლების ადეკვატურობის შესახებ არ იქნება უარყოფილი, თუ $F = S^2_{\text{არაად}} / S^2_y \le F_{\text{ცხ}}$, სადაც ფიშერის კრიტერიუმის ცხრილური მნიშვნელობა იმყოფება (16-l) სვეტისა და იმ სტრი-

ქონის გადაკვეთაზე, რომელიც შეესაბამება S_y^2 დისპერსიის თავისუფლების ხარისხს.

2^{5-1} ნახევარრეპლიკაში კოეფიციენტების დამოუკიდებელი შეფასება შეუძლებელია, აქ ძირითადი ეფექტები შერეულია ურთიერთქმედების ეფექტებთან. მოვძებნოთ შერევის სისტემა. განმსაზღვრელი კონტრასტი ამ ამოცანაში ასეთია: $1 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4\tilde{x}_5$. მაშასადამე, ეფექტების შერევა ხდება შემდეგნაირად:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4\tilde{x}_5, \qquad b_1 \to \beta_1 + \beta_{2345},$$
$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1\tilde{x}_3\tilde{x}_4\tilde{x}_5, \qquad b_2 \to \beta_2 + \beta_{1345},$$
$$\tilde{x}_3 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_4\tilde{x}_5, \qquad b_3 \to \beta_3 + \beta_{1245},$$
$$\tilde{x}_4 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_5, \qquad b_4 \to \beta_4 + \beta_{1235},$$
$$\tilde{x}_5 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4, \qquad b_5 \to \beta_5 + \beta_{1234}.$$

ოთხმაგი ურთიერთქმედებები, როგორც წესი, გვაძლევენ საკმაოდ სუსტ ეფექტებს, ამიტომ ამ დაგეგმვის გამოყენებით შეგვიძლია მივიღოთ კარგი წრფივი მოდელი.

ხუთი ფაქტორის შესწავლისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ 2^5 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის 1/4 რეპლიკა (2^{5-2} მეოთხედრეპლიკა), რომელიც შეიცავს N=8 ცდას. გეგმის ბირთვი 2^3 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტია პირველი სამი ფაქტორისათვის. $\tilde{x}_4$ ფაქტორი უნდა გავუტოლოთ, მაგალითად, $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ ურთიერთქმედებას, $\tilde{x}_5$ ფაქტორი – $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ ურთიერთქმედებას (39–ე ცხრილი).

ცხრილი 39

1/4 რეპლიკა 2^{5-2}

ცდის №	$\tilde{x}_0$	გეგმა					y
		$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_5 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2$	
1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	-1	+1	+1	-1	-1	y_4
5	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	y_6
7	+1	+1	+1	-1	-1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

ეს მეოთხედრეპლიკა ერთადერთი როდია. 2^5 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის სხვა 1/4 რეპლიკები შეგვიძლია მივიღოთ მაგენერირებელი თანაფარდობების სხვა წყვილების გამოყენებითაც:

$$\tilde{x}_4 \equiv -\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_4 \equiv -\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$$
$$\tilde{x}_5 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2 \quad \tilde{x}_5 \equiv -\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \quad \tilde{x}_5 \equiv -\tilde{x}_1\tilde{x}_2$$

$$\tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_4 \equiv -\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_4 \equiv -\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$$
$$\tilde{x}_5 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_5 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_5 \equiv -\tilde{x}_1\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_5 \equiv -\tilde{x}_1\tilde{x}_3$$

$$\tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_4 \equiv -\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_4 \equiv -\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$$
$$\tilde{x}_5 \equiv \tilde{x}_2\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_5 \equiv \tilde{x}_2\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_5 \equiv -\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \quad \tilde{x}_5 \equiv -\tilde{x}_2\tilde{x}_3.$$

1/4 რეპლიკის 8 წერტილში ცდების რეალიზაციით (6.35) განტოლების კოეფიციენტების შეფასებებს მივიღებთ ფორმულებით:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^{8} y_u}{8}, \qquad b_i = \frac{\sum_{u=1}^{8} \tilde{x}_{iu} y_u}{8}, \qquad i = 1,2,3,4,5. \qquad (6.38)$$

კოეფიციენტები სტატისტიკურად მნიშვნელოვანია, როდესაც

$$|b_i| \geq t \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot S_y.$$

არაადეკვატურობასთან დაკავშირებულ $S^2_{არაად}$ დისპერსიას ვპოულობთ $8-l$ თავისუფლების ხარისხით, სადაც l სტატისტიკურად მნიშვნელოვანი კოეფიციენტების რაოდენობაა.

39–ე ცხრილში მოცემული 1/4 რეპლიკის შემთხვევაში შერევის სისტემა საკმაოდ რთულია. მისი განსაზღვრისათვის

$$1 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4, \qquad 1 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_5$$

კონტრასტების გარდა უნდა დაიწეროს ე.წ. *განზოგადებული განმსაზღვრელი კონტრასტი* ის შეიცავს ორ ზემომოყვანილ კონტრასტს და მათი გადამრავლების შედეგს (ნამრავლის ჩაწერისას უნდა გავითვალისწინოთ, რომ $\tilde{x}_i$

სვეტი ლუწ ხარისხში ერთის ტოლია, ხოლო კენტ ხარისხში არ იცვლება, იგივე რჩება). მივიღებთ

$$1 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4 \equiv \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_5 \equiv \tilde{x}_3\tilde{x}_4\tilde{x}_5.$$

შერევის სისტემა ამ შემთხვევაში ასეთია:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4 = \tilde{x}_2\tilde{x}_5 = \tilde{x}_1\tilde{x}_3\tilde{x}_4\tilde{x}_5, \quad b_1 \to \beta_1 + \beta_{234} + \beta_{25} + \beta_{1345},$$
$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1\tilde{x}_3\tilde{x}_4 = \tilde{x}_1\tilde{x}_5 = \tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4\tilde{x}_5, \quad b_2 \to \beta_2 + \beta_{134} + \beta_{15} + \beta_{2345},$$
$$\tilde{x}_3 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_4 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_5 = \tilde{x}_4\tilde{x}_5, \quad b_3 \to \beta_3 + \beta_{124} + \beta_{45} + \beta_{1235},$$
$$\tilde{x}_4 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_4\tilde{x}_5 = \tilde{x}_3\tilde{x}_5, \quad b_4 \to \beta_4 + \beta_{123} + \beta_{35} + \beta_{1245},$$
$$\tilde{x}_5 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4\tilde{x}_5 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2 = \tilde{x}_3\tilde{x}_4, \quad b_5 \to \beta_5 + \beta_{12} + \beta_{34} + \beta_{12345}.$$

ყველა წრფივი და ორმაგი ეფექტი შერეულია. ორმაგი ურთიერთქმედებები სამმაგზე ძლიერია, სამმაგი – ოთხმაგზე. ამიტომ 1/4 რეპლიკა გვაძლევს გაცილებით ნაკლებ ინფორმაციას, ვიდრე შეგვიძლია მივიღოთ 2^5 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტიდან. მაგრამ 2^5 გეგმა შეიცავს 32 ცდას, ხოლო მისი 1/4 რეპლიკა მხოლოდ 8 ცდას; ამასთან შერჩეული ცვლილების ინტერვალების ფარგლებში ურთიერთქმედების ეფექტების არაარსებითობის პოსტულირებისას ამ ცდების შედეგების მიხედვით შეგვიძლია ავაგოთ წრფივი მოდელი.

6.3. ექსპერიმენტის დაგეგმვა ამოძახილის ზედაპირის მეორე რიგის პოლინომებით აღწერისათვის

ამოძახილის ზედაპირის მეორე რიგის პოლინომით

$$y = \beta_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} \beta_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq k} \beta_{ii} x_i^2 \qquad (6.39)$$

აღწერისათვის ცვლადები, წრფივი შემთხვევისაგან განსხვავებით, უნდა ვცვალოთ სამ დონეზე მაინც. საქმე იმაშია, რომ (6.39) მოდელში შესაფასებელი კოეფიციენტების რიცხვი

$$C_{k+2}^{k} = \frac{(k+2)!}{k!2!} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

აღემატება ორდონიანი სრული ფაქტორული ექსპერიმენტების ცდების რაოდენობას.

ვინაიდან 3^k ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერი-
მენტები შეიცავს ცდების დიდ რაოდენობას, აუცილებე-
ლი გახდა ოპტიმალურობის გარკვეული კრიტერიუმის უზ-
რუნველმყოფი მეორე რიგის გეგმების შექმნა. მაგრამ
პირველი რიგის გეგმებისაგან განსხვავებით, მეორე რიგის
გეგმები ერთდროულად არ პასუხობს ოპტიმალურობის
მრავალ კრიტერიუმს. ამასთან დაკავშირებით გაჩნდა გეგ-
მები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ცალკეულ კრიტერიუმებს.
ჯერ შემოთავაზებულ იქნა კოეფიციენტების დიაგონალუ-
რი კოვარიაციული მატრიცის მქონე მეორე რიგის გეგმები.
შემდეგ მეორე რიგის როტატაბელური გეგმები, რომლებიც
ეფექტურად გამოიყენეს პრაქტიკული ამოცანების გადა-
საწყვეტად. დიდი ყურადღება მიექცა მეორე რიგის კომ-
პოზიციური გეგმების აგებას, რომლებშიც გამოიყენება პირ-
ველი რიგის გეგმის ყველა წერტილი. ახალი გეგმების
აგებისას ძირითადი ტენდენციაა გეგმაში დაკვირვებათა
რაოდენობის შემცირება. საკმაოდ საინტერესო აღმოჩნდა
კვაზი – D – ოპტიმალური გეგმებიც.

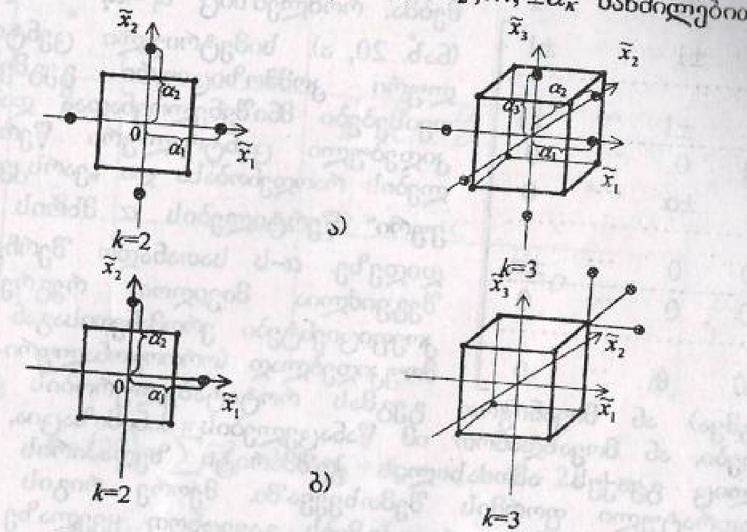
აგების მეთოდით მეორე რიგის გეგმები შეიძლება
იყოს კომპოზიციური და არაკომპოზიციური.

მეორე რიგის კომპოზიციურ გეგმებში ბირთვს წარ-
მოადგენს წრფივი ორთოგონალური გეგმები. იმის მიხედ-
ვით, თუ რა წერტილებს ამატებენ პირველი რიგის გეგ-
მებს მეორე რიგის გეგმების მისაღებად, ასხვავებენ ცენ-
ტრალურ და არაცენტრალურ კომპოზიციურ დაგეგმვას
(ნახ. 20, ა და ბ).

ცენტრალური კომპოზიციური დაგეგმვა გამოიყენება
იმ შემთხვევაში, როდესაც ორდონიანი ფაქტორული ექს-
პერიმენტის შედეგები არ მიუთითებს მაქსიმალური ამოძა-
ხილის აშკარა სიახლოვეზე ჰიპერკუბის ერთ-ერთ წვე-
როსთან.

ასეთი გეგმები მიიღეს (±1, ±1, … ,±1) კოორდინატე-
ბის მქონე $n_c=2^k$ წერტილიანი ორდონიანი საწყისი გეგმის
(„ბირთვის“) გაფართოებით n_0 ცენტრალური (0, 0,…, 0) და
$n_\alpha=2k$ აქსიალური, ე.წ. „ვარსკვლავური“ წერტილებით,
რომლებიც განლაგებულია წყვილ-წყვილად საკოორდინა-

ტო ღერძების გასწვრივ და დაცილებულია ცენტრალური
წერტილიდან შესაბამისად $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \ldots, \pm\alpha_k$ მანძილებით.



ნახ.20. კომპოზიციური გეგმების გეომეტრიული
ინტერპრეტაცია: ა - ცენტრალური და ბ - არაცენტრალური

მაგრამ ბირთვის სახით სრული ფაქტორული ექსპერი-
მენტების გამოყენება არაეკონომიური აღმოჩნდა – შესას-
წავლი სივრცის განზომილების ზრდასთან ერთად დაკვირ-
ვებათა რაოდენობა $N=n_c+n_\alpha+n_0=2^k+2k+n_0$ სწრაფად იზრდე-
ბა და არსებითად აღემატება (6.39)-ში შესაფასებელი კოე-
ფიციენტების რაოდენობას. ცდების რაც შეიძლება მცირე
რაოდენობის შემცველი მეორე რიგის კომპოზიციური გეგ-
მების აგებისას ბირთვის სახით იყენებენ 2^k ტიპის სრუ-
ლი ფაქტორული ექსპერიმენტების რეგულარულ (ხარტლის
გეგმები) ან არარეგულარულ რეპლიკებს (ვესტლეიკის გეგ-
მები). ხარტლისა და ვესტლეიკის გეგმები შეიცავენ დაკ-
ვირვებათა შედარებით მცირე რაოდენობას და თან ახა-
სიათებთ ბოქსის კომპოზიციური გეგმების დამახასიათებელი
სასარგებლო თვისებებიც. ეს გეგმები (k=5-სათვის ხარტლის
გეგმის გარდა) არ შეიძლება გავხადოთ როტატაბელური
და ორთოგონალური.

ყველაზე დიდი პრაქტიკული გამოყენება პოვა სიმეტრიულმა კომპოზიციურმა გეგმებმა, რომლებშიც $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=\alpha$ (ნახ. 20, ა). სიმეტრიული ცენტრალური კომპოზიციური გეგმების თვისებები მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული ცენტრალური წერტილების რაოდენობასა და „ვარსკვლავური" წერტილების α მხრის სიდიდეზე. α-ს სათანადო შერჩევით შეგვიძლია მივიღოთ რეგრესიის კოეფიციენტები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად (ორთოგონალური დაგეგმვა) ან მივანიჭოთ გეგმას როტატაბელურობის თვისებები, ან მოვახდინოთ იმ წანაცვლების მინიმიზაცია, რომელიც გვაქვს ამოძახილის ჭეშმარიტი ზედაპირის არაკვადრატული ფორმის შემთხვევაში. მეორე რიგის ცენტრალურ კომპოზიციურ გეგმებს გავეცნოთ ყველაზე ზოგადი სიმეტრიული არაორთოგონალური კომპოზიციური გეგმების მაგალითზე.

$$
\begin{array}{cccc}
\tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_k
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{cccc}
\pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 \\
\hline
\pm\alpha & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \pm\alpha & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \pm\alpha \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right]
$$

არაორთოგონალური სიმეტრიული კომპოზიციური გეგმები ზოგად შემთხვევაში მეორე რიგის ცენტრალური დაგეგმვის $\mathbf{X}$ მატრიცაში არა ყველა ვექტორ-სვეტია ორთოგონალური

$$
\mathbf{X}=\begin{array}{c}
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc}
\tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_k & \tilde{x}_1^2 & \tilde{x}_2^2 & \cdots & \tilde{x}_k^2 & \tilde{x}_1\tilde{x}_2 & \tilde{x}_1\tilde{x}_3 & \cdots & \tilde{x}_{k-1}\tilde{x}_k
\end{array}\\
\left[\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc}
1 & \pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 \\
1 & \pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 \\
\cdots & & & & & & & & & & & & \\
1 & \pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 \\
\hline
1 & \pm\alpha & 0 & \cdots & 0 & \alpha^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & \pm\alpha & \cdots & 0 & 0 & \alpha^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & \cdots & \pm\alpha & 0 & 0 & \cdots & \alpha^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

ამის გამო მომენტების $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ მატრიცას გააჩნია სპეციფიკური დიაგონალურ-ბლოკური სტრუქტურა

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc}
0 & 1 & 2 & \ldots & k & 11 & 22 & \ldots & kk & 12 & 13 & \ldots & k\text{-}1,k
\end{array}\\
\begin{array}{c}
0\\ 1\\ 2\\ \vdots\\ k\\ 11\\ 22\\ \vdots\\ kk\\ 12\\ 13\\ \vdots\\ k\text{-}1,k
\end{array}
\left[\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc}
A & & * & & & B & B & \ldots & B & & * & & \\
\hline
 & B & & & & & & & & & & & \\
 & & B & & & & & & & & & & \\
* & & & \ddots & & & * & & & & * & & \\
 & & & & B & & & & & & & & \\
\hline
B & & & & & C & D & \ldots & D & & & & \\
B & & & & & D & C & \ldots & D & & & & \\
\vdots & & * & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & * & & \\
B & & & & & D & D & \ldots & C & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & D & & & \\
 & & & & & & & & & & D & & \\
* & & * & & & & * & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & & & D
\end{array}\right]
\end{array}, \quad (6.40)
$$

სადაც

$$A=(00)=\sum_{u=1}^{N}\tilde{x}_{0u}^2=N=n_c+n_\alpha+n_0=D+2k+n_0,$$

$$B=(ii)=\sum_{u=1}^{N}\tilde{x}_{iu}^2=(0ii)=\sum_{u=1}^{N}\tilde{x}_{ou}\tilde{x}_{iu}^2=D+2\alpha^2,$$

$$C=(ii\quad ii)=\sum_{u=1}^{N}\tilde{x}_{iu}^4+D+2\alpha^4,$$

$$D=(ii\quad jj)=(ij\quad ij)=\sum_{u=1}^{N}\tilde{x}_{iu}^2\tilde{x}_{ju}^2=n_c,\qquad i\neq j$$

და ვარსკვლავებით აღნიშნულია ნულოვანი ბლოკები (ქვემატრიცები).

ვინაიდან განსახილველი კომპოზიციური გეგმა სიმეტრიულია, ე.ი. აგებულია ერთნაირად ყველა დამოუკიდებელი ცვლადისათვის, სიმეტრიულია $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ მატრიცის ქვემატრიცებიც – ყოველ ქვემატრიცაში დიაგონალური ელემენტები ერთმანეთის ტოლია, ტოლია აგრეთვე მათი ყველა არადიაგონალური ელემენტებიც.

აღვნიშნოთ, რომ $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ მატრიცაში ნულოვანი ელემენტების დიდი რაოდენობა სიმეტრიული კომპოზიციური დაგეგმვის ნაწილობრივი ორთოგონალურობის შედეგია. რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასებების მიღება ხდება

$\mathbf{X^TXB=X^TY}$ ნორმალურ განტოლებათა სისტემის b-ს მიმართ ამოხსნით – $\mathbf{B=(X^TX)^{-1}X^TY}$ ან გაშლილი სახით:

$$
\begin{bmatrix} b_0\\ b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_k\\ b_{11}\\ b_{22}\\ \vdots\\ b_{kk}\\ b_{12}\\ b_{13}\\ \vdots\\ b_{k-1,k}\end{bmatrix}
=
\begin{array}{r}
\\ 0\\ 1\\ 2\\ \vdots\\ k\\ 11\\ 22\\ \vdots\\ kk\\ 12\\ 13\\ \vdots\\ k-1,k
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & k & 11 & 22 & \ldots & kk & 12 & 13 & \ldots & k-1,k\end{array}\\
\left[\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc}
C_{00} & & * & & & C_{011} & C_{022} & \ldots & C_{0kk} & & * & & \\ \hline
 & C_{11} & & & & & & & & & & & \\
 & & C_{22} & & & & & & & & & & \\
* & & & \ddots & & & * & & & & * & & \\
 & & & & C_{kk} & & & & & & & & \\ \hline
C_{110} & & & & & C_{11\,11} & C_{11\,22} & \ldots & C_{11\,kk} & & & & \\
C_{220} & & * & & & C_{22\,11} & C_{22\,22} & \ldots & C_{22\,kk} & & * & & \\
\vdots & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\
C_{kk0} & & & & & C_{kk\,11} & C_{kk\,22} & \ldots & C_{kk\,kk} & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & C_{12\,12} & & & \\
 & & & & & & & & & & C_{13\,13} & & \\
* & & * & & & & * & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & & & C_{k-1,k\,k-1,k}
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{bmatrix} (0y)\\ (1y)\\ (2y)\\ \vdots\\ (ky)\\ (11y)\\ (22y)\\ \vdots\\ (kky)\\ (12y)\\ (13y)\\ \vdots\\ ((k-1)ky)\end{bmatrix}
$$

სადაც

$$(0y)=\sum_{u=1}^{N}\widetilde{x}_{0u}y_u, \qquad (iy)=\sum_{u=1}^{N}\widetilde{x}_{iu}y_u,$$

$$(iiy)=\sum_{u=1}^{N}\widetilde{x}_{iu}^2y_u, \qquad (ijy)=\sum_{u=1}^{N}\widetilde{x}_{iu}\widetilde{x}_{ju}y_u, \qquad i,j=1,2,\ldots,k,$$

ხოლო შებრუნებული $\mathbf{(X^TX)^{-1}}$ მატრიცის c ელემენტები $\mathbf{X^TX}$ მატრიცის ტერმინებში შემდეგია:

$$c_{00}=\frac{(k-1)D+C}{A[(k-1)D+C]-kB^2}=[(k-1)D+C]L, \qquad (6.41)$$

$$c_{ii}=\frac{1}{B}, \qquad (6.42)$$

$$c_{ii\;ii}=-\frac{A[(k-2)D+C]-(k-1)B^2}{(D-C)\{A[(k-1)D+C]-kB^2\}}=$$
$$=-\frac{A[(k-2)D+C]-(k-1)B^2}{D-C}L, \qquad (6.43)$$

$$c_{ii\;jj}=\frac{AD-B^2}{(D-C)\{A[(k-1)D+C]-kB^2\}}=\frac{AD-B^2}{D-C}L, \qquad (6.44)$$

$$c_{ij\;ij}=\frac{1}{D}, \qquad (6.45)$$

$$c_{0ii}=c_{ii0}=-\frac{B}{\{A[(k-1)D+C]-kB^2\}}=-BL, \qquad (6.46)$$

$$L=\frac{1}{\{A[(k-1)D+C]-kB^2\}}. \qquad (6.47)$$

მიღებული გამოსახულებებით რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასებების მისაღები ფორმულები შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$b_0=c_{00}(y0)+c_{0ii}\sum_{i=1}^{k}(iiy)=L\{[(k-1)D+C](0y)-B\sum_{i=1}^{k}(iiy)\}, \qquad (6.48)$$

$$b_i=c_{ii}(iy)=\frac{1}{B}(iy), \qquad (6.49)$$

$$b_{ii}=c_{ii0}(0y)+c_{ii\;ii}(iiy)+c_{ii\;jj}\sum_{i=1}^{k}(iiy)=$$
$$=L\left[\frac{AD-B^2}{D-C}-\frac{A[(k-2)D+C]-(k-1)B^2}{D-C}-B\right], \qquad (6.50)$$

$$b_{ij}=c_{ij\;ij}(ijy)=\frac{1}{D}(ijy), \qquad (6.51)$$

ხოლო ფორმულებს რეგრესიის კოეფიციენტების დისპერსიების და კოვარიაციების შესაფასებლად ექნება შემდეგი სახე:

$$S_{b_0}^2=S_y^2c_{00}=S_y^2[(k-1)D+C]L, \qquad (6.52)$$

$$S_{b_i}^2=S_y^2c_{ii}=S_y^2\frac{1}{B}, \qquad (6.53)$$

$$S_{b_{ii}}^2=S_y^2c_{ii\;ii}=S_y^2\frac{A[(k-2)D+C]-(k-1)B^2}{D-C}L, \qquad (6.54)$$

$$S_{b_{ij}}^2=S_y^2c_{ij\;ij}=S_y^2\frac{1}{D}, \qquad (6.55)$$

$$\mathrm{cov}_{b_0,b_{ii}}=S_y^2c_{0ii}=-S_y^2BL, \qquad (6.56)$$

$$\mathrm{cov}_{b_{ii},b_{jj}}=S_y^2c_{ii\;jj}=S_y^2\frac{AD-B^2}{D-C}L. \qquad (6.57)$$

(6.48) – (6.51) - დან გამომდინარეობს, რომ არაორთოგონალურ სიმეტრიულ ცენტრალურ კომპოზიციურ გეგ-

მებში რეგრესიის b_{ii} კოეფიციენტები არ შეიძლება შეფასდეს დამოუკიდებლად – ისინი ერთმანეთს შორის კორელირებულია და კორელაციურადაა დაკავშირებული b_0 თავისუფალ წევრთან.

სიმეტრიული კომპოზიციური როტატაბელური გეგმები. ნებისმიერი სიმეტრიული გეგმის გამოყენების შემთხვევაში (6.39) მოდელით ნაწინასწარმეტყველები ამოძახილის დისპერსია განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$S_{\hat{y}}^2 = S_{b_0}^2 + S_{b_i}^2 \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^2 + S_{b_{ij}}^2 \sum_{i<j}^{k} \tilde{x}_i^2 \tilde{x}_j^2 + S_{b_{ii}}^2 \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^4 +$$
$$+ 2\operatorname{cov}_{b_0 b_{ii}} \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^2 + 2\operatorname{cov}_{b_{ii} b_{jj}} \sum_{i<j}^{k} \tilde{x}_i^2 \tilde{x}_j^2. \qquad (6.58)$$

აქედან ჩანს, რომ შესაბამისი მოდელებით ნაწინასწარმეტყველები ამოძახილის მნიშვნელობები განისაზღვრება სხვადასხვა სიზუსტით ფაქტორული სივრცის სხვადასხვა მიმართულებით.

ამასთან აღმოჩნდა, რომ შეგვიძლია ავაგოთ გეგმა, რომელიც უზრუნველყოფს ისეთი მოდელის მიღებას, რომლის მეშვეობითაც ხდება ამოძახილის წინასწარმეტყველება ერთნაირი დისპერსიით გეგმის ცენტრიდან ფაქტორული სივრცის თანაბრად დაშორებულ წერტილებში. როგორც უკვე აღინიშნა 6.1 პარაგრაფში ასეთ გეგმებს როტატაბელური ეწოდება.

იმისათვის, რომ ცენტრალურმა კომპოზიციურმა დაგეგმვამ მიიღოს როტატაბელურობის თვისებები, საჭიროა რომ $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}$ მატრიცაში (6.40)

$$C = 3D = D + 2\alpha^4. \qquad (6.59)$$

ამ პირობიდან $D = n_c = 2^{k-p}$ გათვალისწინებით განისაზღვრება „ვარსკვლავური" α მხრის მნიშვნელობა როტატაბელური ცენტრალური კომპოზიციური დაგეგმვისათვის[1]

$$\alpha = n_c^{1/4} = 2^{(k-p)/4}. \qquad (6.60)$$

[1] $n_c=2^{k-p}$ წერტილების რაოდენობაა 2^k ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის $(1/2)^p$ რეპლიკაში. როდესაც $k \geq 5$ იღებენ $n_c=2^{k-1}$, როდესაც $k \geq 8$ – $n_c=2^{k-2}$ და ა.შ.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მეორე რიგის გეგმები როტატაბელურია, თუ მომენტების $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}$ მატრიცაში კენტი მომენტები მეოთხე რიგამდე ნულის ტოლია, ხოლო ლუწი მომენტებისათვის გვაქვს შემდეგი თანაფარდობები:

$$\sum_{u=1}^{N} \tilde{x}_{iu}^2 = N\lambda_2, \qquad (i = 1,2,\ldots,k),$$
$$\sum_{u=1}^{N} \tilde{x}_{iu}^4 = 3\sum_{u=1}^{N} \tilde{x}_{iu}^2 \tilde{x}_{ju}^2 = 3N\lambda_4, \qquad (i, j = 1,2,\ldots,k, i \neq j), \qquad (6.61)$$

სადაც λ_2 და λ_4 ნებისმიერად შერჩეული მომენტებია, რომლებიც პასუხობენ $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}$ მატრიცის გადაუგვარებლობის პირობას

$$\frac{\lambda_4}{\lambda_2^2} > \frac{k}{k+2}. \qquad (6.62)$$

(6.61)–დან პირველს ვითვალისწინებთ კოდირების პირობით

$$\sum_{u=1}^{N} \tilde{x}_{iu}^2 = N, \quad \text{როცა} \quad \lambda_2 = 1;$$

მეორე აგრეთვე დაკმაყოფილებულია, ვინაიდან $C=3D$ და კოდირებულ ერთეულებში

$$\sum_{u=1}^{N} \tilde{x}_{iu}^2 \tilde{x}_{ju}^2 = \lambda_4 N.$$

მომენტების ტერმინებში $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}$–სათვის მივიღებთ

$$\mathbf{X'X} = N \begin{array}{r|c|cccc|cccc|cccc|}
 & 0 & 1 & 2 & \cdots & k & 11 & 22 & \cdots & kk & 12 & 13 & \cdots & k-1,k \\
\hline
0 & 1 & & * & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & * & & \\
\hline
1 & & 1 & & & & & & & & & & & \\
2 & & & 1 & & & & & & & & & & \\
\vdots & * & & & \ddots & & & * & & & & * & & \\
k & & & & & 1 & & & & & & & & \\
\hline
11 & 1 & & & & & 3\lambda_4 & \lambda_4 & \cdots & \lambda_4 & & & & \\
22 & 1 & & & & & \lambda_4 & 3\lambda_4 & \cdots & \lambda_4 & & & & \\
\vdots & \vdots & & & * & & \vdots & \vdots & & \vdots & & * & & \\
kk & 1 & & & & & \lambda_4 & \lambda_4 & \cdots & 3\lambda_4 & & & & \\
\hline
12 & & & & & & & & & & \lambda_4 & & & \\
13 & & & & & & & & & & & \lambda_4 & & \\
\vdots & * & & & * & & & * & & & & & \ddots & \\
k-1,k & & & & & & & & & & & & & \lambda_4 \\
\hline
\end{array}, \qquad (6.63)$$

შებრუნებულ მატრიცას $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ ამ შემთხვევაში აქვს სახე:

$$
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc}
 & 0 & 1 & \dots & k & 11 & 22 & \dots & kk & 12 & 13 & \dots & k-1,k \\
\hline
0 & 2\lambda_4^2(k+2)L & & * & & -2\lambda_4L & -2\lambda_4L & \dots & -2\lambda_4L & & & * & \\
1 & & 1 & & & & & & & & & & \\
2 & & & 1 & & & & & & & & & \\
\vdots & * & & & \ddots & & * & & & & * & & \\
k & & & & 1 & & & & & & & & \\
\hline
11 & -2\lambda_4L & & & & [(k+1)\lambda_4-(k-1)]L & (1-\lambda_4)L & \dots & (1-\lambda_4)L & & & & \\
22 & -2\lambda_4L & & * & & (1-\lambda_4)L & [(k+1)\lambda_4-(k-1)]L & \dots & (1-\lambda_4)L & & & * & \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\
kk & -2\lambda_4L & & & & (1-\lambda_4)L & (1-\lambda_4)L & \dots & [(k+1)\lambda_4-(k-1)]L & & & & \\
\hline
12 & & & & & & & & & \lambda_4^{-1} & & & \\
13 & & & & & & & & & & \lambda_4^{-1} & & \\
\vdots & * & & * & & & * & & & & & \ddots & \\
k-1,k & & & & & & & & & & & & \lambda_4^{-1}
\end{array}
\cdot N^{-1}
$$

შებრუნებული $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ მატრიციდან გამომდინარე, აგრეთვე ცვლადების კოდირების შედეგად მიღებული $C^4D=\lambda_4N$ თანაფარდობის გათვალისწინებით რეგრესიის კოეფიციენტების გამოსათვლელად საწყისი ცვლადების ტერმინებში მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$b_0=\frac{L}{N}\left[2\lambda_4^2(k+2)(0y)-2\lambda_4c^2\sum_{i=1}^{k}(iiy)\right], \tag{6.64}$$

$$b_i=\frac{c^2}{N}(iy), \tag{6.65}$$

$$b_{ii}=\frac{L}{N}\left\{c^4[(k+2)\lambda_4-k](iiy)+c^4(1-\lambda_4)\sum_{i=1}^{k}(iiy)-2\lambda_4c^2(0y)\right\}, \tag{6.66}$$

$$b_{ij}=\frac{c^4}{N\lambda_4}(ijy), \tag{6.67}$$

სადაც

$$c=\left(N\Big/\sum_{u=1}^{N}\tilde{x}_{iu}^2\right),\qquad L=\frac{1}{2\lambda_4[(k+2)\lambda_4-k]}.$$

რეგრესიის კოეფიციენტების დისპერსიების შეფასე შემდეგნაირად ხდება

$$S_{b_0}^2=\frac{2L\lambda_4^2(k+2)S_y^2}{N}, \tag{6.68}$$

$$S_{b_i}^2=\frac{c^2S_y^2}{N}, \tag{6.69}$$

$$S_{b_{ii}}^2=\frac{L[(k+1)\lambda_4-(k-1)]c^4S_y^2}{N}, \tag{6.70}$$

$$S_{b_{ij}}^2=\frac{c^4S_y^2}{\lambda_4N}. \tag{6.71}$$

დამტკიცებულია, რომ წინასწარმეტყველების $S_{\hat{y}}^2$ დისპერსია მცირედ ან საერთოდ არ იცვლება კოდირებულ-ცვლადიანი ფაქტორული სივრცის $0\le\rho\le1$ არეში, როდესაც

$$\lambda_4=\left[k+3+\sqrt{9k^2+14k-7}\right]\Big/4(k+2).$$

ამ ფორმულით გამოთვლილი და უნიფორმ-როტატაბელური დაგეგმვის უზრუნველმყოფი λ_4 სიდიდეები მოცემულია ცხრილში

ცხრილი 40

პარამეტრები დაგეგმვისათვის

k	2	3	4	5	6
λ_4	0,7844	0,8385	0,8704	0,8918	0,9070
n_0	4,5504	5,5511	7,3344	10,2836	14,7000

აქვეა ცენტრალური წერტილების რაოდენობა, რომელიც გამოთვლილია ფორმულით

$$n_0=B^2\lambda_4D-n_c-n_\alpha. \tag{6.72}$$

ეს აუცილებელია უნიფორმ-როტატაბელური დაგეგმვის ფორმირებისათვის.

ცენტრალური წერტილების რაოდენობა დავამრგვალოთ უახლოეს მთელ რიცხვამდე და დავაზუსტოთ λ_4 სიდიდე

$$\lambda_4=\frac{D(n_0+n_c+n_\alpha)}{B^2}. \tag{6.73}$$

თითქმის უნიფორმ-როტატაბელური დაგეგმვის უზრუნველმყოფი ეს სიდიდეები მოცემულია 41-ე ცხრილში.

ცხრილი 41

მეორე რიგის ცენტრალური კომპოზიციური უნიფორმ-როტატაბელური გეგმები

k	2	3	4	5	5 (1/2 რეპლიკა)	6	6 1/2 რეპლიკა)
n_c	4	8	16	32	16	64	32
n_α	4	6	8	10	10	12	12
n_0	5	6	7	10	6	15	9
N	13	20	31	52	32	91	53
$\alpha = n_c^{1/4}$	1,4142	1,6818	2,0000	2,3784	2,0000	2,8284	2,3784
λ_4	0,81	0,86	0,86	0,89	0,89	0,91	0,90

6.3.1. მეორე რიგის გეგმები ორი ფაქტორისათვის

დავუშვათ, ვსწავლობთ ორი x_1 და x_2 ფაქტორების გავლენას გამოსავალი y პარამეტრის მნიშვნელობაზე. გამოკვლევის პირველ ეტაპზე 2^2 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტის რეალიზაციის შედეგად მიღებულია წრფივი მოდელი, რომელიც არაადეკვატური აღმოჩნდა. მეორე ეტაპზე ვეძებთ

$$y = b_0' + b_1'x_1 + b_2'x_2 + b_{11}'x_1^2 + b_{22}'x_2^2 + b_{12}'x_1x_2 \tag{6.74}$$

განტოლების კოეფიციენტების შეფასებებს.

როგორც წრფივ შემთხვევაში, მიზანშეწონილია გადავიდეთ კოდირებულ $\tilde{x}_1$ და $\tilde{x}_2$ ცვლადებზე. შესაბამისი სტანდარტული უნიფორმ-როტატაბელური გეგმა მოცემულია 42-ე ცხრილში.

ცხრილი 42

ცდის №	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y
1	-1	-1	y_1
2	-1	+1	y_2
3	+1	-1	y_3
4	+1	+1	y_4
5	-1,4142	0	y_5
6	+1,4142	0	y_6
7	0	-1,4142	y_7
8	0	+1,4142	y_8
9	0	0	y_9
10	0	0	y_{10}
11	0	0	y_{11}
12	0	0	y_{12}
13	0	0	y_{13}

კოდირებულ ცვლადებში მეორე რიგის პოლინომის

$$y = b_0 + b_1\tilde{x}_1 + b_2\tilde{x}_2 + b_{11}\tilde{x}_1^2 + b_{22}\tilde{x}_2^2 + b_{12}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \tag{6.75}$$

კოეფიციენტების შეფასებისათვის სტანდარტული გეგმა უნდა გავაფართოოთ დაგეგმვის მატრიცამდე $\tilde{x}_0$ სვეტის დამატებით (b_0 კოეფიციენტის შესაფასებლად), $\tilde{x}_1^2$ და $\tilde{x}_2^2$ სვეტების დამატებით (b_{11} და b_{22} კოეფიციენტების შესაფასებლად) და $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ სვეტის დამატებით (b_{12} კოეფიციენტის შესაფასებლად).

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_1^2 & \tilde{x}_2^2 & \tilde{x}_1\tilde{x}_2 \end{array} \\
\mathbf{X} = & \begin{bmatrix}
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & +1 \\
1 & -1 & +1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & +1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & +1 & +1 & 1 & 1 & +1 \\
1 & -1,4142 & 0 & 1,999962 & 0 & 0 \\
1 & +1,4142 & 0 & 1,999962 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1,4142 & 0 & 1,999962 & 0 \\
1 & 0 & +1,4142 & 0 & 1,999962 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

$\mathbf{X^TX}$ ფიშერის საინფორმაციო მატრიცას (მომენტების მატრიცას) ამ შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathbf{X^TX}=\left[\begin{array}{c|cc|cc|c} 13,00000 & 0 & 0 & 7,99992 & 7,99992 & 0 \\ \hline 0 & 7,99992 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,99992 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7,99992 & 0 & 0 & 11,99970 & 4,00000 & 0 \\ 7,99992 & 0 & 0 & 4,00000 & 11,99970 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,00000 \end{array}\right]$$

შებრუნებულ $(\mathbf{X^TX})^{-1}$ მატრიცას კი - შემდეგი:

$$(\mathbf{X^TX})^{-1}=\left[\begin{array}{c|cc|cc|c} 0,20000 & 0 & 0 & -0,10000 & -0,10000 & 0 \\ \hline 0 & 0,12500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,12500 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0,10000 & 0 & 0 & 0,14375 & 0,01875 & 0 \\ -0,10000 & 0 & 0 & 0,01875 & 0,14375 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25000 \end{array}\right]$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასებისათვის $\mathbf{B=(X^TX)^{-1}X^TY}$ თანახმად

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_{11} \\ b_{22} \\ b_{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,20000 & 0 & 0 & -0,10000 & -0,10000 & 0 \\ 0 & 0,12500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,12500 & 0 & 0 & 0 \\ -0,10000 & 0 & 0 & 0,14375 & 0,01875 & 0 \\ -0,10000 & 0 & 0 & 0,01875 & 0,14375 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25000 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} (0y) \\ (1y) \\ (2y) \\ (11y) \\ (22y) \\ (12y) \end{bmatrix},$$

სადაც

$$(0y)=\sum_{u=1}^{13} y_u,\qquad (1y)=\sum_{u=1}^{13}\tilde{x}_{1u}y_u,\qquad (2y)=\sum_{u=1}^{13}\tilde{x}_{2u}y_u,$$

$$(11y)=\sum_{u=1}^{13}\tilde{x}_{1u}^2y_u,\qquad (22y)=\sum_{u=1}^{13}\tilde{x}_{2u}^2y_u,\qquad (12y)=\sum_{u=1}^{13}\tilde{x}_{1u}\tilde{x}_{2u}y_u.$$

მაშინ ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$b_0=0,2(0y)-0,1(1y)-0,1(2y),$

$b_1=0,125(1y),$

$b_2=0,125(2y),$

$b_{11}=-0,1(0y)+0,14375\,(11y)+0,01875\,(22y),$

$b_{22}=-0,1(0y)+0,01875(11y)+0,14375(22y),$

$b_{12}=0,125(12y).$

b_{11} და b_{22}-ის ფორმულებში 0,14375 $(11y)$ და $(22y)$ წევრებთან მიზანშეწონილია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით: 0,14375=0,125+0,01875. მაშინ ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნა საბოლოოდ შემდეგია:

$$b_0=0,2(0y)-0,1\sum(iiy),\quad \text{სადაც}\quad \sum(iiy)=(11y)+(22y),$$

$$b_i=0,125(iy),$$

$$b_{ii}=0,125(iiy)+0,01875\sum(iiy)-0,1(0y), \tag{6.76}$$

$$b_{12}=0,125(12y).$$

კოეფიციენტები არსებითია, თუ სრულდება პირობები:

$$|b_0|\ge t\cdot S_{b_0}=t\cdot\sqrt{0,2}\cdot S_y=t\cdot 0,447\cdot S_y=0,447t\cdot S_y,$$

$$|b_i|\ge t\cdot S_{b_i}=t\cdot\sqrt{0,125}\cdot S_y=t\cdot 0,354\cdot S_y=0,354t\cdot S_y,$$

$$|b_{ii}|\ge t\cdot S_{b_{ii}}=t\cdot\sqrt{0,14375}\cdot S_y=t\cdot 0,379\cdot S_y=0,379t\cdot S_y,$$

$$|b_{12}|\ge t\cdot S_{b_{12}}=t\cdot\sqrt{0,25}\cdot S_y=t\cdot 0,5\cdot S_y=0,5t\cdot S_y.$$

არაარსებითი კოეფიციენტები მოდელიდან გამოირიცხება.

კოდირებულცვლადიანი რეგრესიული განტოლების ადეკვატურობის შემოწმება შემდეგნაირად ხდება: განისაზღვრება ნაწინასწარმეტყველები $\hat{y}_1,\hat{y}_2,\ldots,\hat{y}_{13}$ მნიშვნელობები გეგმის წერტილებში, შემდეგ (5.43), (5.44) ან (5.45) ფორმულებით არაადეკვატურობის დისპერსია $S^2_{\text{არად}}$. ჰიპოთეზა მეორე რიგის პოლინომის ადეკვატურობის შესახებ არ იქნება უარყოფილი, თუ ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა $F=S^2_{\text{არად}}/S_y^2$ არ აღემატება კრიტიკულ $F_{\text{ცხ}}$ მნიშვნელობას (უკანასკნელი მოიძებნება ფიშერის ცხრილის N-l=$=13$-l სვეტისა და იმ სტრიქონის გადაკვეთაზე, რომელიც შეესაბამება S_y^2 დისპერსიის თავისუფლების ხარისხს), ე.ი. სრულდება პირობა $F\le F_{\text{ცხ}}$.

ნატურალურ ცვლადებზე გადასვლისას (6.75) განტოლებაში უნდა ჩავსვათ კოდირების პირობები

$$y = b_0 + b_1 \frac{x_1 - x_1^{(0)}}{p_1} + b_2 \frac{x_2 - x_2^{(0)}}{p_2} + b_{11}\left(\frac{x_1 - x_1^{(0)}}{p_1}\right)^2 +$$

$$+ b_{22}\left(\frac{x_2 - x_2^{(0)}}{p_2}\right)^2 + b_{12} \frac{x_1 - x_1^{(0)}}{p_1} \cdot \frac{x_2 - x_2^{(0)}}{p_2}.$$

პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას საკმარისია ავიღოთ α=1,414.

მაგალითი. ვსწავლობთ პროცესს, რომელიც დამოკიდებულია ორ ფაქტორზე – T ტემპერატურასა და P წნევაზე. საწყისი წერტილის სახით მიღებულია წერტილი კოორდინატებით $T^{(0)}$=100°C და $P^{(0)}$=6 კპა, ხოლო ცვლილების ინტერვალების სახით – p_T=10°C და P_P=2 კპა. უნდა შევისწავლოთ ამ ფაქტორების გავლენა გამოსავალი y პარამეტრის მნიშვნელობაზე, მივიღოთ ადეკვატური მოდელი, რომელიც დააკავშირებს შესასწავლი ფაქტორების დონეებს გამოსავალი პარამეტრის მნიშვნელობასთან.

გამოკვლევის პირველ ეტაპზე გამოვიყენოთ 2^3 ტიპის სრული ფაქტორული ექსპერიმენტი

ცდის №	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\bar{y}$	$\hat{y}$
1	-1	-1	77	68
2	-1	+1	39	48
3	+1	-1	91	100
4	+1	+1	89	80

ცდის №	ტემპერატურა, °C	წნევა, კპა	y
1	90	4	77
2	90	8	39
3	110	4	91
4	110	8	89

კოდირებულცვლადიანი წრფივი მოდელი

$$y = 74 + 16\tilde{x}_1 - 10\tilde{x}_2$$

არაადეკვატურად აღწერდა გამოსაკვლევ პროცესს. ამიტომ მივიღეთ გადაწყვეტილება წრფივი გეგმის გაფართოების შესახებ მეორე რიგის უნიფორმ-როტატაბელურ გეგმამდე.

ცდის №	x_1	x_2	y	y
1	-1	-1	77	77,52
2	-1	+1	39	39,62
3	+1	-1	91	30,36
4	+1	+1	89	88,46
5	-1,414	0	67	66,18
6	+1,414	0	109	109,78
7	0	-1,414	74	74,07
8	0	+1,414	46	45,93
9	0	0	72	72,02
10	0	0	71	72,02
11	0	0	70	72,02
12	0	0	73	72,02
13	0	0	74	72,02

ცდის №	T, °C	P, კპა	y
1	90	4	77
2	90	8	39
3	110	4	91
4	110	8	89
5	85,86	6	67
6	114,14	6	109
7	100	3,172	74
8	100	8,828	46
9	100	6	72
10	100	6	71
11	100	6	70
12	100	6	73
13	100	6	74

ნატურალურცვლადებიან გეგმაზე გადასვლისას ვითვალისწინებთ, რომ პირველი ფაქტორის <<-1,414>> დონეს შეესაბამება 100-1,414·10=85,86 °C, <<+1,414>> დონეს – 100+1,414·10=114,14 °C, ანალოგიურად მეორე ფაქტორის <<-1,414>> დონეს შეესაბამება 6-1,414·2= =3,172 კპა, ხოლო <<+1,414>> დონეს – 6+1,414·2=8,828 კპა. გეგმის 13 წერტილში ცდების რეალიზაციის შედეგად მიღებულია y სვეტში მოცემული მნიშვნელობები გამოსავალი პარამეტრისა. კოდირებულცვლადებიანი გეგმის და დაკვირვებათა შედეგების სვეტის მიხედვით მიიღება მეორე რიგის პოლინომის კოეფიციენტების შეფასებები. ამისათვის გამოვთვალოთ დამხმარე სიდიდეები:

$$(0y) = \sum_{u=1}^{13} y_u = 77 + 39 + 91 + 89 + 67 + 109 + 74 + 46 + 72 + 71 + 70 + 73 + 74 = 952,$$

$$(1y) = \sum_{u=1}^{13} \tilde{x}_{1u} y_u = -77 - 39 + 91 + 89 - 1,414 \cdot 67 + 1,414 \cdot 109 = 123,388,$$

$$(2y) = \sum_{u=1}^{13} \tilde{x}_{2u} y_u = -77 + 39 - 91 + 89 - 1,414 \cdot 74 + 1,414 \cdot 46 = -79,592,$$

$$(11y) = \sum_{u=1}^{13} \tilde{x}_{1u}^2 y_u = 77 + 39 + 91 + 89 + (-1,414)^2 \cdot 67 + 1,414^2 \cdot 109 = 647,894,$$

$$(22y) = \sum_{u=1}^{13} \tilde{x}_{2u}^2 y_u = 77 + 39 + 91 + 89 + (-1,414)^2 \cdot 74 + 1,414^2 \cdot 46 = 535,927,$$

$$(12y) = \sum_{u=1}^{13} \tilde{x}_{1u} \tilde{x}_{2u} y_u = 77 - 39 - 91 + 89 = 36.$$

მაშინ კოეფიციენტების შეფასებებისათვის მივიღებთ:

$$b_0 = 0,2 \cdot 952 - 0,1[647,894 + 535,927] = 72,02,$$

$$b_1 = 0,125 \cdot 123,388 = 15,42,$$

$$b_2 = 0,125 \cdot (-79,592) = -9,95,$$

$$b_{11} = 0,125 \cdot 647,894 + 0,01875[647,894 + 535,927] - 0,1 \cdot 952 = 7,98,$$

$$b_{22} = 0,125 \cdot 535,927 + 0,01875[647,894 + 535,927] - 0,1 \cdot 952 = -6,01,$$

$$b_{12} = 0,25 \cdot 36 = 9.$$

ცდის დისპერსია გამოვთვალოთ გეგმის ცენტრში პარალელურ დაკვირვებათა შედეგების მიხედვით:

$$S_y^2 = \frac{1}{5-1} = \left[(70 - 72)^2 + (71 - 72)^2 + (72 - 72)^2 + (73 - 72)^2 + (74 - 72)^2\right] = 2,5.$$

საშუალო კვადრატული გადახრა

$$S_y = \sqrt{S_y^2} = \sqrt{2,5} = 1,58.$$

მნიშვნელოვნობის q=0,05 დონისა და 5-1=4 თავისუფლების ხარისხისათვის t - კრიტერიუმის ცხრილური მნიშვნელობაა $t_{ცხ}$=2,78.

კრიტიკული მნიშვნელობებისათვის

$$\Delta_{b_0} = 0,447 \cdot t \cdot S_y = 0,447 \cdot 2,78 \cdot 1,58 = 1,96,$$

$$\Delta_{b_1} = 0,354 \cdot t \cdot S_y = 0,354 \cdot 2,78 \cdot 1,58 = 1,56,$$

$$\Delta_{b_{ii}} = 0,379 \cdot t \cdot S_y = 0,379 \cdot 2,78 \cdot 1,58 = 1,66,$$

$$\Delta_{b_{12}} = 0,5 \cdot t \cdot S_y = 0,5 \cdot 2,78 \cdot 1,58 = 2,20.$$

ვინაიდან კოეფიციენტების შეფასებები აბსოლუტური სიდიდით აღემატება შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობებს, მნიშვნელოვნობის 5 %–იანი დონის პირობებში ყველა კოეფიციენტი სტატისტიკურად მნიშვნელოვანია. საბოლოოდ მეორე რიგის მოდელი

$$y = 72,02 + 15,42\tilde{x}_1 - 9,95\tilde{x}_2 + 7,98\tilde{x}_1^2 - 6,01\tilde{x}_2^2 + 9\tilde{x}_1\tilde{x}_2.$$

მიღებული მოდელის ადეკვატურობის შემოწმებისათვის მასში სტანდარტული გეგმის წერტილების კოორდინატების ჩასმით მივიღოთ გეგმის წერტილებში ნაწინასწარმეტყველები მნიშვნელობები:

$$\hat{y}_1 = 72,02 + 15,42(-1) - 9,95(-1) + 7,98(-1)^2 - 6,01(-1)^2 + 9(-1)(-1) = 77,52,$$

$$\hat{y}_2 = 72,02 + 15,42(-1) - 9,95(+1) + 7,98(-1)^2 - 6,01(+1)^2 + 9(-1)(+1) = 39,62,$$

$$\hat{y}_3 = 72,02 + 15,42(+1) - 9,95(-1) + 7,98(+1)^2 - 6,01(-1)^2 + 9(+1)(-1) = 90,36,$$

$$\hat{y}_4 = 72,02 + 15,42(+1) - 9,95(+1) + 7,98(+1)^2 - 6,01(+1)^2 + 9(+1)(+1) = 88,46,$$

$$\hat{y}_5 = 72,02 + 15,42(-1,414) - 9,95 \cdot 0 + 7,98(-1,414)^2 - 6,01 \cdot 0^2 + 9(-1,414)0 = 66,18,$$

$$\hat{y}_6 = 72,02 + 15,42 \cdot 1,414 - 9,95 \cdot 0 + 7,98 \cdot 1,414^2 - 6,01 \cdot 0^2 + 9 \cdot 1,414 \cdot 0 = 109,78,$$

$$\hat{y}_7 = 72,02 + 15,42 \cdot 0 - 9,95 \cdot (-1,414) + 7,98 \cdot 0^2 - 6,01 \cdot (-1,414)^2 + 9 \cdot 0 \cdot (-1,414) = 74,07,$$

$$\hat{y}_8 = 72,02 + 15,42 \cdot 0 - 9,95 \cdot 1,414 + 7,98 \cdot 0^2 - 6,01 \cdot 1,414^2 + 9 \cdot 0 \cdot 1,414 = 45,93,$$

$$\hat{y}_9 = 72,02 + 15,42 \cdot 0 - 9,95 \cdot 0 + 7,98 \cdot 0^2 - 6,01 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 \cdot 0 = 72,02,$$

$$\hat{y}_{10} = 72,02 + 15,42 \cdot 0 - 9,95 \cdot 0 + 7,98 \cdot 0^2 - 6,01 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 \cdot 0 = 72,02,$$

$$\hat{y}_{11} = 72,02 + 15,42 \cdot 0 - 9,95 \cdot 0 + 7,98 \cdot 0^2 - 6,01 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 \cdot 0 = 72,02,$$

$$\hat{y}_{12} = 72,02 + 15,42 \cdot 0 - 9,95 \cdot 0 + 7,98 \cdot 0^2 - 6,01 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 \cdot 0 = 72,02,$$

$$\hat{y}_{13} = 72,02 + 15,42 \cdot 0 - 9,95 \cdot 0 + 7,98 \cdot 0^2 - 6,01 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 \cdot 0 = 72,02,$$

განვსაზღვროთ გადახრების კვადრატების ჯამი

$$\sum_{u=1}^{13} (y_u - \hat{y}_u)^2 = (77 - 77,52)^2 + (39 - 39,62)^2 + (91 - 90,36)^2 + (89 - 88,46)^2 +$$
$$+ (67 - 66,18)^2 + (109 - 109,78)^2 + (74 - 74,07)^2 + (46 - 45,93)^2 + (72 - 72,02)^2$$
$$+ (71 - 72,02)^2 + (70 - 72,02)^2 + (73 - 72,02)^2 + (74 - 72,02)^2 = 12,649$$

და l=6 არსებითი კოეფიციენტის გათვალისწინებით გამოვთვალოთ $S^2_{\text{არად}}$ დისპერსია

$$S^2_{\text{არად}} = \frac{\sum_{u=1}^{13} (y_u - \hat{y}_u)^2}{13 - 6} = \frac{12,649}{7} = 1,81.$$

ფიშერის კრიტერიუმის საანგარიშო მნიშვნელობა $F = S^2_{\text{არად}} / S^2_y = 1,81/2,5 = 0,72$. ცხრილური მნიშვნელობა მნიშვნელოვნობის 5 %–იანი დონისათვის მოვძებნოთ ფიშერის ცხრილის 13-6=7 სვეტისა და 5-1=4 სტრიქონის გადაკვეთაზე: $F(7;4)$=6,09. ვინაიდან საანგარიშო მნიშვნელობა ცხრილურზე ნაკლებია, კოდირებულცვლადიანი მიღებული მოდელი ადეკვატურია.

მიღებული მოდელის გარდაქმნისათვის ფორმაში ნატურალური ცვლადებით საკმარისია მასში ჩავსვათ კოდირების პირობები

$$\tilde{x}_1 = \frac{T - 100}{10} \quad \text{და} \quad \tilde{x}_2 = \frac{P - 6}{2}.$$

6.3.2. მეორე რიგის გეგმები სამი ფაქტორისათვის

იმ შემთხვევაში როდესაც ვსწავლობთ სამი ფაქტორის გავლენას, გამოიყენება 43–ე ცხრილში მოცემული სტანდარტული უნიფორმ–როტატაბელური გეგმა.

ცხრილი 43

ცდის №	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$
1	-1	-1	-1
2	-1	-1	+1
3	-1	+1	-1
4	-1	+1	+1
5	+1	-1	-1
6	+1	-1	+1
7	+1	+1	-1
8	+1	+1	+1
9	-1,682	0	0
10	+1,682	0	0
11	0	-1,682	0
12	0	+1,682	0
13	0	0	-1,682
14	0	0	+1,682
15	0	0	0
16	0	0	0
17	0	0	0
18	0	0	0
19	0	0	0
20	0	0	0

ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნას შემდეგი სახე აქვს:

$$b_0 = 0{,}166338(0y) - 0{,}056791\sum_{i=1}^{3}(iiy),$$

$$b_i = 0{,}073224(iy), \qquad i = 1,2,3,$$

$$b_{ii} = 0{,}062500(iiy) + 0{,}06889\sum_{i=1}^{3}(iiy) - 0{,}056791(0y), \qquad i = 1,2,3,$$

$$b_{ij} = 0{,}125000(ijy), \qquad 1 \le i < j \le 3,$$

სადაც

$$(0y) = \sum_{u=1}^{20} y_u, \qquad (iy) = \sum_{u=1}^{20} \widetilde{x}_{iu} y_u,$$

$$(iiy) = \sum_{u=1}^{20} \widetilde{x}_{iu}^2 y_u, \qquad (ijy) = \sum_{u=1}^{20} \widetilde{x}_{iu}\widetilde{x}_{ju} y_u.$$

რეგრესიული განტოლების

$$y = b_0 + b_1\widetilde{x}_1 + b_2\widetilde{x}_2 + b_3\widetilde{x}_3 + b_{11}\widetilde{x}_1^2 + b_{22}\widetilde{x}_2^2 + b_{33}\widetilde{x}_3^2 + b_{12}\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2 + b_{13}\widetilde{x}_1\widetilde{x}_3 + b_{23}\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3$$

კოეფიციენტები არსებითია შემდეგი პირობების შესრულებისას

$$|b_0| \ge 0{,}408t \cdot S_y,$$

$$|b_i| \ge 0{,}271t \cdot S_y,$$

$$|b_{ii}| \ge 0{,}263t \cdot S_y,$$

$$|b_{ij}| \ge 0{,}354t \cdot S_y.$$

6.3.3. მეორე რიგის გეგმები ოთხი ფაქტორისათვის

იმ შემთხვევაში როდესაც ვსწავლობთ ოთხი ფაქტორის გავლენას, გამოიყენება 44–ე ცხრილში მოცემული სტანდარტული უნიფორმ-როტატაბელური გეგმა.

ცხრილი 44

ცდის №	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4$	ცდის №	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4$
1	-1	-1	-1	-1	17	-2	0	0	0
2	-1	-1	-1	+1	18	+2	0	0	0
3	-1	-1	+1	-1	19	0	-2	0	0
4	-1	-1	+1	+1	20	0	+2	0	0
5	-1	+1	-1	-1	21	0	0	-2	0
6	-1	+1	-1	+1	22	0	0	+2	0
7	-1	+1	+1	-1	23	0	0	0	-2
8	-1	+1	+1	+1	24	0	0	0	+2
9	+1	-1	-1	-1	25	0	0	0	0
10	+1	-1	-1	+1	26	0	0	0	0
11	+1	-1	+1	-1	27	0	0	0	0
12	+1	-1	+1	+1	28	0	0	0	0
13	+1	+1	-1	-1	29	0	0	0	0
14	+1	+1	-1	+1	30	0	0	0	0
15	+1	+1	+1	-1	31	0	0	0	0
16	+1	+1	+1	+1					

ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნას ამ შემთხვევაში აქვს სახე:

$$b_0 = 0{,}142857\ (0y) - 0{,}035714\sum_{i=1}^{4}(iiy),$$

$$b_i = 0{,}041667\ (iy), \qquad i = 1,2,3,4,$$

$$b_{ii} = 0{,}031250\ (iiy) + 0{,}003720\sum_{i=1}^{4}(iiy) - 0{,}035714\ (0y), \qquad i = 1,2,3,4,$$

$$b_{ij} = 0{,}0625\ (ijy), \qquad 1 \le i < j \le 4,$$

სადაც

$$(0y) = \sum_{u=1}^{31} y_u, \qquad (iy) = \sum_{u=1}^{31} \widetilde{x}_{iu} y_u,$$

$$(iiy) = \sum_{u=1}^{31} \widetilde{x}_{iu}^2 y_u, \qquad (ijy) = \sum_{u=1}^{31} \widetilde{x}_{iu}\widetilde{x}_{ju} y_u.$$

რეგრესიული განტოლების

$$y = b_0 + b_1\widetilde{x}_1 + b_2\widetilde{x}_2 + b_3\widetilde{x}_3 + b_4\widetilde{x}_4 + b_{11}\widetilde{x}_1^2 + b_{22}\widetilde{x}_2^2 + b_{33}\widetilde{x}_3^2 + b_{44}\widetilde{x}_4^2 + b_{12}\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2 + b_{13}\widetilde{x}_1\widetilde{x}_3 + b_{14}\widetilde{x}_1\widetilde{x}_4 + b_{23}\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3 + b_{24}\widetilde{x}_2\widetilde{x}_4 + b_{34}\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4$$

კოეფიციენტები მნიშვნელოვანია შემდეგი პირობების შესრულებისას:

$$|b_0| \ge 0{,}378t \cdot S_y, \qquad |b_{ii}| \ge 0{,}187t \cdot S_y,$$
$$|b_i| \ge 0{,}204t \cdot S_y, \qquad |b_{ij}| \ge 0{,}250t \cdot S_y.$$

6.3.4. მეორე რიგის გეგმები ხუთი ფაქტორისათვის

იმ შემთხვევაში როდესაც ვსწავლობთ ხუთი ფაქტორის გავლენას, გამოიყენება 45-ე ცხრილში მოცემული სტანდარტული უნიფორმ-როტატაბელური გეგმა.

ცხრილი 45

ცდის №	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4$	ცდის №	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$
1	-1	-1	-1	-1	+1	17	-2	0	0	0	0
2	-1	-1	-1	+1	-1	18	+2	0	0	0	0
3	-1	-1	+1	-1	-1	19	0	-2	0	0	0
4	-1	-1	+1	+1	+1	20	0	+2	0	0	0
5	-1	+1	-1	-1	-1	21	0	0	-2	0	0
6	-1	+1	-1	+1	+1	22	0	0	+2	0	0
7	-1	+1	+1	-1	+1	23	0	0	0	-2	0
8	-1	+1	+1	+1	-1	24	0	0	0	+2	0
9	+1	-1	-1	-1	-1	25	0	0	0	0	-2
10	+1	-1	-1	+1	+1	26	0	0	0	0	+2
11	+1	-1	+1	-1	+1	27	0	0	0	0	0
12	+1	-1	+1	+1	-1	28	0	0	0	0	0
13	+1	+1	-1	-1	+1	29	0	0	0	0	0
14	+1	+1	-1	+1	-1	30	0	0	0	0	0
15	+1	+1	+1	-1	-1	31	0	0	0	0	0
16	+1	+1	+1	+1	+1	32	0	0	0	0	0

ნორმალურ განტოლებათა ამოხსნას ამ შემთხვევაში აქვს სახე:

$$b_0 = 0{,}159091(0y) - 0{,}034091\sum_{i=1}^{5}(iiy),$$

$$b_i = 0{,}041667(iy), \qquad i = 1,2,3,4,5,$$

$$b_{ii} = 0{,}031250(iiy) + 0{,}002841\sum_{i=1}^{5}(iiy) - 0{,}034091(0y), \qquad i = 1,2,3,4,5,$$

$$b_{ij} = 0{,}0625(ijy), \qquad 1 \le i < j \le 5,$$

სადაც

$$(0y) = \sum_{u=1}^{32} y_u, \qquad (iy) = \sum_{u=1}^{32} \tilde{x}_{iu} y_u,$$

$$(iiy) = \sum_{u=1}^{32} \tilde{x}_{iu}^2 y_u, \qquad (ijy) = \sum_{u=1}^{32} \tilde{x}_{iu}\tilde{x}_{ju} y_u.$$

რეგრესიული განტოლების

$$y = b_0 + b_1\tilde{x}_1 + b_2\tilde{x}_2 + b_3\tilde{x}_3 + b_4\tilde{x}_4 + b_5\tilde{x}_5 + b_{11}\tilde{x}_1^2 + b_{22}\tilde{x}_2^2 + b_{33}\tilde{x}_3^2 + b_{44}\tilde{x}_4^2 +$$
$$+ b_{55}\tilde{x}_5^2 + b_{12}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + b_{13}\tilde{x}_1\tilde{x}_3 + b_{14}\tilde{x}_1\tilde{x}_4 + b_{15}\tilde{x}_1\tilde{x}_5 + b_{23}\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + b_{24}\tilde{x}_2\tilde{x}_4 +$$
$$+ b_{25}\tilde{x}_2\tilde{x}_5 + b_{34}\tilde{x}_3\tilde{x}_4 + b_{35}\tilde{x}_3\tilde{x}_5 + b_{45}\tilde{x}_4\tilde{x}_5$$

კოეფიციენტები მნიშვნელოვანია შემდეგი პირობების შესრულებისას:

$$|b_0| \ge 0{,}399t \cdot S_y, \qquad |b_{ii}| \ge 0{,}185t \cdot S_y,$$
$$|b_i| \ge 0{,}204t \cdot S_y, \qquad |b_{ij}| \ge 0{,}250t \cdot S_y.$$

განხილული მეორე რიგის სიმეტრიული უნიფორმ-როტატაბელური გეგმების გარდა პრაქტიკაში ფართოდ გამოიყენება აგრეთვე სპეციალურად ორიენტირებული არასიმეტრიული კომპოზიციური გეგმები [8].

თუ მეორე რიგის პოლინომები არაადეკვატურია, იყენებენ მესამე რიგის ოთხდონიან გეგმებს და აღწერენ გამოსაკვლევ ობიექტს მესამე რიგის პოლინომებით, მაგრამ ასეთი გეგმები მოითხოვენ ცდების დიდ რაოდენობას და იშვიათად გამოიყენება პრაქტიკაში.

დანართი

დანართში ძირითადად მოცემულია სტატისტიკური
ჰიპოთეზების შემოწმებისათვის აუცილებელი
სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმების ცხრილები. პროცე-
დურა ზოგად შემთხვევაში ფორმალურად წარმოადგენს
ექსპერიმენტული მონაცემებით გამოთვლილი რომელიმე
კრიტერიუმის შედარებას მის ცხრილურ მნიშვნელო-
ბასთან მნიშვნელოვნობის წინასწარ შერჩეული q დონი-
სათვის ან, რაც იგივეა, $\alpha=1\text{-}q$ სანდო ალბათობისათ-
ვის (თუ ალბათობა ერთეულის ნაწილებშია გამოსახუ-
ლი). მნიშვნელოვნობის q დონე განსაზღვრავს სწორი
ჰიპოთეზის უარყოფის უდიდეს ალბათობას, მაგალითად,
თუ მნიშვნელოვნობის დონე 0,05 ტოლია (რასაც ადგი-
ლი აქვს ტექნიკურ ამოცანებში), ეს ნიშნავს, რომ და-
საშვებია არასწორი გადაწყვეტილების 5 %-იანი ალბა-
თობა და სწორი გადაწყვეტილების 95 %-იანი სანდო
ალბათობა.

თუ ექსპერიმენტული მონაცემებით განსაზღვრული
კრიტერიუმის მნიშვნელობა თავსდება მნიშვნელოვნობის
დონის შესაბამის არეში, შესამოწმებელი ჰიპოთეზა არას-
წორია და ის უნდა უგულვებელვყოთ (შეცდომის ჩადენის
q ალბათობით). თუ კრიტერიუმის ექსპერიმენტული მნიშ-
ვნელობა ხვდება $1\text{-}q$ ალბათობის შესაბამის არეში, შე-
სამოწმებელი ჰიპოთეზა უნდა მივიღოთ (შეცდომა ამ
შემთხვევაში დაკავშირებულია უკვე ალტერნატიულ ჰი-
პოთეზასთან).

t–ს მნიშვნელობები სხვადასხვა სანდო ალბათობისათვის

თავისუფლების ხარისხი	სანდო ალბათობები			
	0,90	0,95	0,975	0,99
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,684	2,021	2,423	2,704
60	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

დანართი 2

χ^2–კრიტერიუმის კრიტიკული მნიშვნელობები სხვადასხვა სანდო ალბათობისათვის

თავისუფლების ხარისხი	χ^2			
	99 %	95 %	5 %	1 %
1	0,000157	0,00393	3,841	6,635
2	0,0201	0,103	5,991	9,210
3	0,115	0,352	7,815	11,345
4	0,297	0,711	9,488	13,277
5	0,554	1,145	11,070	15,086
6	0,872	1,635	12,592	16,812
7	1,239	2,167	14,067	18,475
8	1,646	2,733	15,507	20,090
9	2,088	3,325	16,919	21,666
10	2,558	3,940	18,307	23,209
11	3,053	4,575	19,675	24,725
12	3,571	5,226	21,026	26,217
13	4,107	5,892	22,362	27,688
14	4,660	6,571	23,685	29,141
15	5,229	7,261	24,996	30,578
16	5,812	7,962	26,296	32,000
17	6,408	8,672	27,587	33,409
18	7,015	9,390	28,869	34,805
19	7,633	10,117	30,144	36,191
20	8,260	10,851	31,410	37,566
21	8,897	11,591	32,671	38,932
22	9,542	12,338	33,924	40,289
23	10,196	13,091	35,172	41,638
24	10,856	13,848	36,415	42,980
25	11,524	14,611	37,652	44,314
26	12,198	15,379	38,885	45,642
27	12,879	16,151	40,113	46,963
28	13,565	16,928	41,337	48,278
29	14,256	17,708	42,557	49,588
30	14,953	18,493	43,773	50,892

დანართი 3

F–ის მნიშვნელობები 0,05 მნიშვნელოვნობის დონისათვის

თავისუფლების ხარისხი მნიშვნელისათვის k_2	თავისუფლების ხარისხი მრიცხველისათვის k_1																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	50	100	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,10	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,41	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,71	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,76	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,59	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,46	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,35	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,31	2,26	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,19	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,12	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,12	2,07	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,08	2,02	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,04	1,98	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,94	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,97	1,91	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,91	1,85	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,86	1,80	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,82	1,76	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,79	1,73	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,70	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,59	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,48	1,39
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,24	1,11

კრიტიკული მნიშვნელობები G კოკრენის კრიტერიუმისათვის 0,05 მნიშვნელოვნობის დონისათვის

L \ $n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6338	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2363	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,2137	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

K კოეფიციენტის მნიშვნელობა ტოლერანტული ინტერვალებისათვის

თავისუფლების ხარისხი	$\alpha=0{,}95$			$\alpha=0{,}99$		
	P_0			P_0		
	0,9973	0,95	0,9	0,9973	0,95	0,9
4	8,26	5,11	4,29	12,80	7,92	6,64
5	7,17	4,44	3,72	10,31	6,38	5,35
6	6,50	4,02	3,38	8,91	5,51	4,62
7	6,05	3,74	3,14	8,01	4,95	4,15
8	5,72	3,54	2,97	7,38	4,56	3,83
9	5,48	3,39	2,84	6,91	4,27	3,59
10	5,28	3,26	2,74	6,55	4,05	3,40
12	4,99	3,08	2,59	6,03	3,73	3,13
14	4,78	2,96	2,49	5,67	3,52	2,95
16	4,62	2,86	2,40	5,41	3,35	2,81
18	4,50	2,79	2,34	5,21	3,22	2,70
20	4,39	2,72	2,29	5,05	3,12	2,62
25	4,20	2,61	2,19	4,76	2,94	2,47
30	4,10	2,54	2,13	4,57	2,82	2,37
40	3,94	2,44	2,05	4,31	2,67	2,24
50	3,84	2,37	1,99	4,15	2,57	2,16
60	3,76	2,33	1,96	4,05	2,50	2,10
70	3,70	2,30	1,93	3,96	2,45	2,06
80	3,66	2,27	1,91	3,90	2,41	2,02
90	3,63	2,25	1,89	3,84	2,38	2,00
100	3,60	2,23	1,87	3,80	2,35	1,98
500	3,35	2,07	1,74	3,41	2,12	1,78
1000	3,29	2,11	1,71	3,33	2,07	1,74

დანართი 6

აბეს კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობები v

ჯგუფების რაოდენობა L	მნიშვნელოვნობის დონე q		ჯგუფების რაოდენობა L	მნიშვნელოვნობის დონე q	
	0,01	0,05		0,01	0,05
4	0,3128	0,3902	32	0,6089	0,7177
5	2690	4102	33	6141	7216
6	2808	4451	34	6193	7256
7	3070	4680	35	6242	7292
8	3314	4912	36	6290	7328
9	0,3544	0,5121	37	0,6337	0,7363
10	3759	5311	38	6381	7396
11	3957	5482	39	6425	7429
12	4140	5638	40	6467	7461
13	4309	5778	41	6508	7491
14	0,4466	0,5908	42	0,6548	0,7521
15	4611	6027	43	6587	7550
16	4746	6137	44	6622	7576
17	4872	6237	45	6659	7603
18	4989	6330	46	6693	7628
19	0,5100	0,6417	47	0,6727	0,7653
20	5203	6498	48	6757	7676
21	5301	6574	49	6787	7698
22	5393	6645	50	6814	7718
23	5479	6713	51	6842	7739
24	0,5562	0,6776	52	0,6869	0,7759
25	5639	6836	53	6896	7779
26	5713	6893	54	6924	7799
27	5784	6946	55	6949	7817
28	5850	6996	56	6974	7836
29	0,5915	0,7046	57	0,6999	0,7853
30	5975	7091	58	7024	7872
31	6034	7136	59	7049	7891
			60	7071	7906

დანართი 7

კორელაციის კოეფიციენტის კრიტიკული მნიშვნელობები

თავისუფლების ხარისხი	მნიშვნელოვნობის დონე			თავისუფლების ხარისხი	მნიშვნელოვნობის დონე		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	0,988	0,997	1,000	16	0,400	0,468	0,590
2	0,900	0,950	0,990	17	0,389	0,456	0,575
3	0,805	0,878	0,959	18	0,378	0,444	0,561
4	0,729	0,811	0,917	19	0,369	0,433	0,549
5	0,669	0,754	0,874	20	0,360	0,423	0,537
6	0,621	0,707	0,834	25	0,323	0,381	0,487
7	0,582	0,666	0,798	30	0,296	0,349	0,449
8	0,549	0,632	0,765	35	0,276	0,325	0,418
9	0,521	0,602	0,735	40	0,257	0,304	0,393
10	0,497	0,576	0,708	45	0,243	0,287	0,372
11	0,476	0,553	0,684	50	0,231	0,273	0,354
12	0,457	0,532	0,661	60	0,211	0,250	0,325
13	0,441	0,514	0,641	70	0,195	0,232	0,302
14	0,426	0,497	0,623	80	0,183	0,217	0,283
15	0,412	0,482	0,606	90	0,173	0,205	0,267
				100	0,164	0,195	0,254

ლოგარითმები

რიცხვები	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	პროპორციული ნაწილები								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

რიცხვები	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	პროპორციული ნაწილები								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9185	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ანტილოგარითმები

ლოგარითმები	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	პროპორციული ნაწილები 1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

ლოგარითმები	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	პროპორციული ნაწილები 1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

კვადრატები

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	2	4	6	8	10	13	15	17	19
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	2	5	7	9	11	14	16	18	21
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932	3	5	8	12	13	16	19	22	24
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220	3	6	9	12	14	17	20	23	26
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528	3	6	9	12	15	19	22	25	28
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856	3	7	10	13	16	20	23	26	30
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572	4	7	11	15	18	22	26	30	33
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960	4	8	12	16	19	23	27	31	35
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368	4	8	12	16	20	25	29	33	37
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796	4	9	13	17	21	26	30	34	39
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244	4	9	13	18	22	27	31	36	40
2,3	5,290	5, 336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712	5	9	14	19	23	28	33	38	42
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200	5	10	15	20	24	29	34	39	44
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708	5	10	15	20	25	31	36	41	46
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236	5	11	16	21	26	32	37	42	48
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784	5	11	16	22	27	33	38	44	49
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352	6	11	17	23	28	34	40	46	51
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940	6	12	18	24	29	35	41	47	53
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9, 425	9,486	9,548	6	12	18	24	30	37	43	49	55
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986				6	13	19	25	31	38	44	50	56
3,1								10,05	10,11	10,18	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18	1	1	2	3	3	4	5	6	6
3,5	12,25	12, 32	12,39	12,46	12, 53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62	1	1	2	3	4	4	5	6	7
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56	1	2	2	3	5	5	6	7	7
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27	1	2	3	3	4	5	7	7	8
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05	1	2	3	4	5	6	7	9	10
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14	1	2	3	4	6	7	8	9	10
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25	1	2	3	4	6	7	8	9	10
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69	1	2	4	5	6	7	8	9	11
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88	1	2	4	5	6	7	8	10	11

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12	1	3	4	5	6	8	9	10	12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43	1	3	4	5	7	8	9	10	12
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47	1	3	4	5	7	8	10	11	12
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70	1	3	4	6	7	9	10	11	13
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25	2	3	5	6	8	9	11	13	14
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08	2	3	5	7	8	10	11	13	15
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8,3	68,98	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08	2	3	5	7	8	10	12	14	15
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79	2	3	5	7	9	10	12	14	15
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52	2	3	5	7	9	10	12	14	16
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46	2	4	5	7	9	11	13	15	16
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06	2	4	6	8	9	11	13	15	17
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97	2	4	6	8	10	11	13	15	17
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90	2	4	6	8	10	12	14	15	17
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84	2	4	6	8	10	12	14	16	18
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81	2	4	6	8	10	12	14	16	18
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80	2	4	6	8	10	12	14	16	18

კვადრატში რომ ავახარისხოთ სამნიშნა რიცხვი, რომელიც 1-სა და 10-ს შორის იმყოფება, ამისათვის ვპოულობთ იმ სტრიქონს, რომლის ნომერი ხვდება რიცხვის პირველ ორი ციფრს, და იმ სვეტს, რომლის ნომერი ხვდება რიცხვის მესამე ციფრს. გადაკვეთის დროს ვიპოვით საძებნ კვადრატს, რომელიც დამრგვალებულია ოთხ ნიშნამდე. მაგალითები: $2,86^2=8,180$ („2,8" სტრიქონი და „6" სვეტი), $9,4^2=9,40^2=88,36$ („9,4" სტრიქონი და „0" სვეტი).

ოთხნიშნა რიცხვების კვადრატში ახარისხება მოითხოვს შესწორებების შეტანას. შესწორებების შეტანა და 1-ზე ნაკლები და 10-ზე მეტი რიცხვების კვადრატში ახარისხება ახსნილია ბრადისის ოთხნიშნა მათემატიკურ ცხრილებში.

თუ N რიცხვში მძიმე ერთი ციფრით გადაგვაქვს, მაშინ N^2 რიცხვში მძიმე ორ ციფრზე უნდა გადავიტანოთ.

ლიტერატურა

1. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976.

2. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики М.: Наука, 1983.

3. Браунли К.А. Статистическая теория и методология в науке и технике. М.: Наука, 1977. – 407 с.

4. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Кн.1. М.: Финансы и статистика, 1986. – 366 с.

5. Журцев В.Г., Кубарев А.И., Усан М.В. Статистические методы контроля качества на часовом производстве. М.: Издательство стандартов, 1972. – 219 с.

6. Зедгинидзе И.Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. М.: Наука, 1976.– 390 с.

7. Зедгинидзе И.Г. Введение в планирование эксперимента (учебное пособие). Тбилиси: Изд.-во Грузинского технического университета, 1975. – 180 с.

8. Зедгинидзе И.Г., Берая Н.О. Специально ориентированные несимметричные композиционные планы второго порядка для двух переменных. Тбилиси: Изд.-во Грузинского технического университета, 1998. – 110 с.

9. ზედგინიძე ი. მეტროლოგიის, სტანდარტიზაციის და ხარისხის მართვის ალბათური საფუძვლები (სახელმძღვანელო). თბილისი: ტექნიკური უნივერსიტეტი, 1999. – 128 გვ.

10. Кудряшова Ж.Ф., Рабинович С.Г., Резник К.А. Рекомендация по методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях // Труды метрологических институтов СССР, вып. 134 (194). М. – Л.: Изд.-во стандартов, 1972. – 117с.

11. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов М.: Наука, 1965.

12. Налимов В.В. Теория эксперимента. М.: Наука, 1971.

13. Новик Ф.С., Арсов Я.Б. оптимизация процессов технологии металлов методами планирования экспериментов. М.: Машиностроение; София: Техника, 1980.–304 с.

14. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. М.: ИЛ, 1956.

15. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. М.: Физматгиз, 1963.

სარჩევი

საინჟინრო ექსპერიმენტის ორგანიზაცია და დაგეგმვა

პროფ. ი.გ. ზედგინიძე

ი. ზედგინიძე. საინჟინრო ექსპერიმენტის ორგანიზაცია და დაგეგმვა. ტექნიკური უნივერსიტეტი. თბილისი, 2000, გვ.240.

სახელმძღვანელო დაწერილია იმ კურსის შესაბამისად, რომელიც ეკითხებათ მეტროლოგიის, სტანდარტიზაციის, სერტიფიკაციისა და ხარისხის მართვის და საინფორმაციო-საზომი ტექნიკისა და ტექნოლოგიების სპეციალობების სტუდენტებს.

მასში განხილულია დაკვირვებათა შედეგების დამუშავების, დისპერსიული, კორელაციური, გამოყენებითი რეგრესიული ანალიზის, ექსპერიმენტის დაგეგმვის საფუძვლები.

I.Zedginidze. *Organization and Planning of Engineering Experiment*. The book is published by G.T.U. Tbilisi, 2000, p. 240.

The text - book is written according to the course given to the students of the speciality «Metrology, Standardization, Certification and Quality Control» and «Information – Measuring Techniques and Technology». The text - book studies the basics of treatment of experimental results, analysis of variance, correlation, applied regression analysis and design of experiment.

Зедгинидзе И.Г. *Организация и планирование инженерного эксперимента.* Технический университет. Тбилиси, 2000, - с.240.

Учебник написан в соответствии с одноименным курсом, читаемым в течение ряда лет студентам специальности «Метрология, стандартизация, сертификация и управление качеством» и «Информационно-измерительная техника и технологии» в Грузинском техническом университете. Может представить интерес для научных и инженерно-технических работников, аспирантов, связанных со статистической обработкой результатов наблюдений и моделированием различных процессов.

Рассматриваются современные статистические методы организации и планирования инженерного эксперимента. Кроме богатого арсенала статистических методов обработки результатов одной или нескольких групп наблюдений, дисперсионного, корреляционного и регрессионного анализа, особое внимание уделяется методам математического планирования эксперимента.

Так как данная книга, написанная инженером для инженеров, отличается от большинства существующих направленностью на практическое применение, то теоретические результаты во многих случаях приводятся без доказательств. Подобное описание методов, их богатая иллюстрация примерами оригинальных задач, дает возможность использовать их непосредственно на практике. Каждая приведенная в примере задача решена до конца, и читатель, повторив пример, может лучше уяснить себе идею метода, его особенности и возможности, достоинства и недостатки

წიგნი ეძღვნება
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
საინფორმაციო-საზომი ტექნიკის კათედრის
30 წლისთავს

საინფორმაციო-საზომი ტექნიკის კათედრა შექმნილია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში გამოჩენილი მეცნიერისა და საზოგადო მოღვაწის, დ. მენდელეევის სახელობის სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტის თბილისის ფილიალის დირექტორის გიორგი ზედგინიძის მიერ 1969 წელს.

1972 წლიდან კათედრას ხელმძღვანელობს ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, კავშირგაბმულობის საერთაშორისო აკადემიის აკადემიკოსი, ინფორმატიზაციის საერთაშორისო აკადემიის აკადემიკოსი ირაკლი ზედგინიძე.

30 წლის განმავლობაში დინამიური განვითარების შედეგად კათედრა გახდა უნივერსიტეტის ერთ-ერთი წამყვანი ქვედანაყოფი. კათედრაზე მოღვაწეობს სამი პროფესორი - ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ათი დოცენტი - ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ორი უფროსი მასწავლებელი, ასისტენტები და სასწავლო-დამხმარე პერსონალი. კათედრის თანამშრომლებს შორის არის სამი აკადემიკოსი, სახელმწიფო პრემიის ლაურეატი, საქართველოს კომკავშირის პრემიის ორი ლაურეატი. კათედრის თანამშრომლების მიერ გამოქვეყნებულია 12 მონოგრაფია, 40-ზე მეტი სახელმძღვანელო და დამხმარე სახელმძღვანელო, 400-ზე მეტი სტატია საზღვარგარეთულ და სამამულო ჟურნალებში, მიღებულია რამდენიმე ათეული საავტორო მოწმობა, საწარმოებში დანერგილია რაციონალიზატორული წინადადებების დიდი რაოდენობა. კათედრაზე შექმნილი სტენდ-ტრენაჟორები ექსპონირებული იყო გამოფენებზე და დაიმსახურა ქ. მოსკოვის სახალხო მეურნეობის მიღწევათა საკავშირო გამოფენაზე ვერცხლის მედალი. შექმნილია ექსპერიმენტის დაგეგმვის ქართული სკოლა და ინსტიტუტის ბაზაზე ჩატარდა საკავშირო კონფერენცია ექსპერიმენტის მათემატიკურ დაგეგმვაში, რამდენიმე რესპუბლიკური კონფერენცია, თათბირ-სემინარი სტანდარტიზაციისა და ხარისხის მართვაში.

კათედრაზე ხდება როგორც ბაკალავრების, ისე მაგისტრების მომზადება სპეციალობებით „საინფორმაციო-საზომი ტექნიკა“ და „მეტროლოგია, სტანდარტიზაცია და ხარისხის მართვა“. საბიუჯეტო ჯგუფების გარდა ორივე სპეციალობაში დაკომპლექტებულია ფასიანი ჯგუფები.

კათედრაზე შექმნილია თანამედროვე მოწყობილობებით აღჭურვილი 14 ლაბორატორია, კომპიუტერული ცენტრი, სტანდარტიზაციის კაბინეტი. კათედრასთან ფუნქციონირებს: მეტროლოგიის და სტანდარტიზაციის სამეცნიერო-კვლევითი ლაბორატორია, სადაც შექმნილია და დანერგილი რამდენიმე სტანდარტი; ინფორმატიზაციის ცენტრი, რომელიც სხვა სამუშაოებთან ერთად აწყობს და აქვეყნებს სამეცნიერო, სასწავლო და მეთოდურ ლიტერატურას.

ზედგინიძე ირაკლი გიორგის ძე

საინჟინრო ექსპერიმენტის ორგანიზაცია და დაგეგმვა

რედაქტორი ლ. მამალაძე
ტექნიკური რედაქტორი მ. ბალიაშვილი
დამკაბადონებელი თ. მოდებაძე
კომპიუტერული დიზაინი მ. ბალიაშვილი, ნ. ბერაია

გადაეცა წარმოებას 22.01.2000 წ. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 27.02.2000 წ. ქაღალდის ზომა 60X84 1/16. გარნიტურა ACADEMIURI A&V. ნაბეჭდი თაბახი 15. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 12,5. ტირაჟი 200 ეგზ. შეკვეთა 2000/2
ფასი სახელშეკრულებო

გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი",
თბილისი, მ.კოსტავას, 77

ორიგინალ-მაკეტი დამზადებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის „ინფორმატიზაციის ცენტრში",
თბილისი, მ.კოსტავას, 77

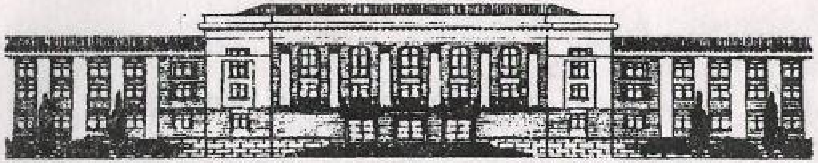
ტირაჟი დაბეჭდილია შპს „მერანი-3", თბილისი, რუსთაველის გამზირი, 42

სახელმძღვანელოს როლი თანამედროვე ეტაპზე, ინფორმაციის მნიშვნელოვანი ზრდის პირობებში, განუსაზღვრელად დიდია.

XX საუკუნის ბოლოს გაერთიანებული ერების ორგანიზაციამ ჩაატარა ექსპერტული გამოკითხვა იმასთან დაკავშირებით, თუ ისტორიულად რომელმა გამოგონებამ მოახდინა მეორე ათასწლეულში ყველაზე დიდი გავლენა ცივილიზაციაზე. პირველ ადგილზე დიდი უპირატესობით გავიდა წიგნის ბეჭდვა, ხოლო მეორეზე – კომპიუტერი.

კაცობრიობა ინფორმაციული აფეთქების დამღუპველ მორევში რომ არ მოექცეს, საჭირო გახდა ახალ საუკუნეში მეცნიერების, ტექნიკისა და კულტურის სფეროში სრულიად ახალი შინაარსისა და ფორმის სახელმძღვანელოების შექმნა.

წინამდებარე ნაშრომი „სახელმძღვანელო XXI საუკუნისათვის" ავტორის მოკრძალებული ცდაა კარგად წარმოჩნდეს ექსპერიმენტის მათემატიკური დაგეგმვის სხვადასხვა მიმართულების განვითარების სამომავლო ტენდენციები, განისაზღვროს ამ მეცნიერების მნიშვნელობა და როლი ახალ საუკუნეში საინფორმაციო საზოგადოების ფორმირების მიმართულებით.



ინფორმატიზაციის ცენტრი ჩამოყალიბდა სტუ-ს რექტორის პროფ. რ. ხუროძის ბრძანებით ინფორმატიზაციის საერთაშორისო აკადემიის დებულების თანახმად ინფორმატიზაციის დარგში სამუშაოთა წარმოებისათვის. ცენტრს დებულების თანახმად მიეცა ინფორმატიზაციის დარგში მონოგრაფიების, სახელმძღვანელოებისა და დამხმარე სახელმძღვანელოების გამოცემისათვის მომზადების უფლება. გამომცემლობა ტექნიკური უნივერსიტეტის გამოცდილ თანამშრომლებთან მჭიდრო კონტაქტში ინფორმატიზაციის ცენტრის მიერ ბოლო ორ წელიწადში მომზადებულ და გამოცემულ იქნა შემდეგი ძირითადი მონოგრაფიები, სახელმძღვანელოები და დამხმარე სახელმძღვანელოები:

1. ი. ზედგინიძე, ნ. ბერაია. მეორე რიგის სპეციალურად ორიენტირებული არასიმეტრიული კომპოზიციური გეგმები ორი ცვლადისათვის, 1998 წ.
2. ი. ზედგინიძე. ზოგადტექნიკური სტანდარტების კომპლექსური სისტემები, 1998 წ.
3. ი. ზედგინიძე, მ. ბალიაშვილი. სტანდარტიზაციის თეორია (სახელმძღვანელო), 1998 წ.
4. რ. ჟვანია. გამოყენებითი მეტროლოგია (დამხმარე სახელმძღვანელო), 1998 წ.
5. რ. კალიტჩევი, ი. ზედგინიძე. პოტენციომეტრული გაზომვების მეთოდიკა და პრაქტიკა (დამხმარე სახელმძღვანელო), 1998 წ.
6. ი. ზედგინიძე. ექსპერტიზა: მეთოდები და საშუალებები (სახელმძღვანელო), 1999 წ.
7. ი. ზედგინიძე. მეტროლოგიის, სტანდარტიზაციისა და ხარისხის მართვის ალბათური საფუძვლები (სახელმძღვანელო), 1999 წ.
8. ლ. ხარატიშვილი. ამოცანათა კრებული საზომ ტექნიკაში, 1999 წ.
9. ი. ზედგინიძე. შესავალი სპეციალობაში (სახელმძღვანელო), 1999 წ.
10. ი. ჩხეიძე. თეორიული მეტროლოგია (დამხმარე სახელმძღვანელო), 1999 წ.
11. ი. ზედგინიძე. საინჟინრო ექსპერიმენტის ორგანიზაცია და დაგეგმვა (სახელმძღვანელო), 2000 წ.

ტექნიკური უნივერსიტეტი
„ინფორმატიზაციის ცენტრი"