

ჭამლები მელაძე
ნუბზარ სხირტლაძე

ბამოყვენობითი მათემატიკის საწყისები

სახელმძღვანელო უნივერსიტეტის
სტუდენტებისათვის



51-7 (075.8)

2-53

ჰამლეტ მელაქე
ნუბზარ სხირტლაქე

ბამოყენებითი მათემატიკის საწყისები

სახელმძღვანელო უნივერსიტეტის
სტუდენტებისათვის

საქართველოს უნივერსიტეტის
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებების
ფაკულტეტი
№ 45669



თბილისის უნივერსიტეტის ბამოყენებლობა
თბილისი 2000

ГАМЛЕТ ВАРЛАМОВИЧ МЕЛАДЗЕ
НУГЗАР МИХАЙЛОВИЧ СХИРТЛАДЗЕ

НАЧАЛА ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ

УЧЕБНИК ДЛЯ СТУДЕНТОВ
УНИВЕРСИТЕТОВ

Издательство Тбилисского университета
Тбилиси, 2000

Meladze H. V., Skhirtladze N. M.

**FOUNDATION OF APPLIED
MATHEMATICS**

Manual for the University students

Tbilisi University Press

Tbilisi, 2000

სამყაროს შექმნების პროცესში გამოყენებითი მათემატიკის როლი და ადგილი, მეთოდოლოგია და მეთოდები წიგნში განხილულია კონკრეტული პრაქტიკული ამოცანების მაგალითზე. განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა შესასწავლი პროცესის, მოვლენის ან სიტუაციის მათემატიკური მოდელის აგების მეთოდების გაშუქებას. მოდელის აგების, გამოკვლევისა და ამოხსნისათვის საჭირო მათემატიკური აპარატი მოხმობილია წიგნის სპეციფიკის გათვალისწინებით.

სახელმძღვანელო განკუთვნილია უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა, მექანიკა-მათემატიკისა და საბუნებისმეტყველო პროფილის ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის. იგი სასარგებლო იქნება აგრეთვე სხვადასხვა დარგის იმ სპეციალისტებისათვის, რომლებიც ან თვითონ იყენებენ მათემატიკურ მეთოდებს ან მათემატიკოსებთან ერთად წყვეტენ შესაბამის დარგში წამოჭრილ ამოცანებს.

რედაქტორი

დოც. ნ. მჭედლიძე

რეცენზენტები:

პროფ. ვ. ცერცვაძე

დოც. თ. ვახეილაძე

© თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2000

ა 1602010000

608(06)-00

ISBN 99928-838-7-1

სარჩევი

წინასიტყვაობა	7
თავი I. მათემატიკური მოდელირება. არსი და ძირითადი პრინციპები	
§1. მოდელირება. მათემატიკური მოდელი. კომპიუტერული ექსპერიმენტი	8
1.1 მოდელირების შესახებ.....	8
1.2 მათემატიკური მოდელირების უმარტივესი მაგალითი – სხეულის ვარდნა დედამიწაზე.....	9
1.3 მათემატიკური მოდელის არსი.....	13
1.4 კომპიუტერული ექსპერიმენტის არსი.....	14
§2. კომივოიაჟორის ამოცანის შესახებ	18
2.1 ამოცანის დასმა.....	18
2.2 მათემატიკური მოდელის აგება.....	18
2.3 ამოცანის ზუსტი ამოხსნის ETS-ალგორითმი.....	20
2.4 ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის GTS-ალგორითმი.....	22
§3. დედამიწის ზედაპირიდან ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მათემატიკური მოდელირება	24
3.1 ამოცანის დასმა.....	24
3.2 ფიზიკური ვითარების ანალიზი.....	24
3.3 ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის მოძრაობა.....	27
3.4 სხეულის ვარდნა ჰაერის წინააღმდეგობის გათვალისწინებით.....	30
3.5 ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა.....	32
თავი II. ზოგიერთი რიცხვითი მეთოდის შესახებ	
§1. არაწრფივი ერთეულობიანი განტოლების ამოხსნის ბისექციის (დიხიტომის) მეთოდი	36
1.1 ამონახსნის მიახლოებითი მოძებნის ალგორითმების შესახებ.....	36
1.2 არსებობის თეორემის შესახებ.....	37
1.3 მიახლოებითი ამოხსნისა და განუმღვრელობის ინტერვალის შესახებ.....	39
1.4 ილუსტრაცია მაგალითზე $x = \cos x$	41
§2. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გაუსის მეთოდი	43
2.1 ამოცანის დასმა.....	43
2.2 გაუსის მეთოდი კერძო შემთხვევისათვის.....	44
2.3 გაუსის მეთოდი ზოგადი შემთხვევისათვის.....	45
2.4 ნულოვანი წამყვანი ელემენტის პრობლემა.....	47
§3. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მარტივი იტერაციის მეთოდი	49
3.1 მარტივის ნორმა.....	49
3.2 მარტივი იტერაციული პროცესი. თეორემები კრებალობისა და ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ.....	52
3.3 მარტივი იტერაციული პროცესის ილუსტრირება კონკრეტულ მაგალითზე.....	54

§4. პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის ეილერის მეთოდი	56
4.1 კოშის ამოცანის დასმა და მდგრადობა.....	56
4.2 ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების სხვაობიანი ანალოგი და ეილერის ალგორითმი.....	58
4.3 ცლომილების შესახებ.....	59
4.4 ეილერის სხვაობიანი მეთოდის მდგრადობა.....	61
4.5 ეილერის სხვაობიანი მეთოდის სიზუსტე.....	62
§5. ფუნქციათა ინტერპოლაცია	69
5.1 ინტერპოლაციის ამოცანა.....	69
5.2 წრფივი ინტერპოლაცია.....	70
5.3 ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი.....	72
§6. ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლა	74
6.1 ამოცანის დასმა.....	74
6.2 კვადრატული ჯამი და ნაშითი წევრი.....	75
6.3 კვადრატული ფორმულის აგება საინტერპოლაციო მრავალწევრით.....	75
6.4 მარტოკუთხედის ფორმულა.....	76
6.5 მარტოკუთხედების განზოგადოებული ფორმულა.....	78
6.6 ტრაპეციის ფორმულა.....	78
6.7 ტრაპეციების განზოგადოებული ფორმულა.....	79

თავი III. დიფერენციალური მოდელები

§1. სითბოგამტარებლობის განტოლების შემცველი მათემატიკური მოდელები	80
1.1 რამდენიმე შენიშვნა სითბოგამტარებლობის განტოლების შესახებ.....	80
1.2 კრიმინალისტიკის ერთი ამოცანა.....	82
1.3 ყავის გაცივების პროცესის მათემატიკური მოდელი.....	85
1.4 მოვლენების იზომორფულობის შესახებ.....	86
§2. მათემატიკური მოდელების შესახებ ბიოლოგიაში, მედიცინასა და ეკოლოგიაში	87
2.1 ბალანსის მეთოდი.....	87
2.2 მათემატიკური მოდელების შესახებ ეკოლოგიაში.....	88
2.3 ორი პოპულაციის – „მტაცებელი – მსხვერპლის“ განვითარების დინამიკის მათემატიკური მოდელი.....	95
2.4 ეპიდემიოლოგიის უმარტივესი მათემატიკური მოდელები.....	99
§3. რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	105
3.1 ჰარმონიული ოსცილატორის მათემატიკური მოდელი.....	105
3.2 უმარტივესი ჰარმონიული ოსცილატორი.....	107
3.3 მათემატიკური მოდელის შემოწმება.....	109
3.4 მათემატიკური ქანქარა.....	111
3.5 რხევითი კონტური.....	115
3.6 იქნება თუ არა ქანქარიანი საათი მუსიკა?.....	119
3.7 რხევითი მოძრაობის „ფაზური პორტრეტი“.....	122
§4. ყურეს მქონე წყალსაცავის გაჭუჭყიანების მათემატიკური მოდელი	124
4.1 ამოცანის დასმა.....	124
4.2 მათემატიკური მოდელის აგება ბალანსის მეთოდით.....	125
4.3 ამონახსნის მოძებნა და შედეგების ანალიზი.....	127

§5. საომარი მოქმედების ლანჩესტერის მათემატიკური მოდელი	129
5.1 ლანჩესტერის განზოგადოებული მოდელის აგება ბალანსის მეთოდის გამოყენებით	129
5.2 ლანჩესტერის მოდელეები რეგულარული ჯარების, პარტიზანული შენაერთებისა და ორივეს ერთად მოქმედებისათვის	130
5.3 პირველი ტიპის მათემატიკური მოდელი. „ჰიპერბოლური კანონი“	133
5.4 მეორე ტიპის მათემატიკური მოდელი. „წრფივი კანონი“	135
5.5 მესამე ტიპის მათემატიკური მოდელი. „პარაბოლური კანონი“	136
§6. მოთხოვნა-მიწოდების მათემატიკური მოდელი (მრავალდარგოვანი ეკონომიკის ლეონტიევის მათემატიკური მოდელი)	138
6.1 ამოცანის დასმა	138
6.2 ლეონტიევის მოდელი n დარგისათვის	139
6.3 ლეონტიევის მოდელი 4 დარგისათვის	141
6.4 ამონახსნის მოძებნის გზა რენკაბელური ეკონომიკის პირობებში	143

თავი IV. ოპტიმიზაციის ამოცანების შესახებ

§1. რამდენიმე წინასწარი შენიშვნა ოპტიმიზაციის ამოცანების შესახებ	145
1.1 ამოცანა საუკეთესო კონსერვის ქილის შესახებ	145
1.2 ოპტიმიზაციის ამოცანების მათემატიკური დასმის შესახებ	147
§2. რა პროდუქცია გამოუშვებთ?	148
§3. საგრანსპორტო ამოცანა	151
§4. წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის ერთი მეთოდის (სიმპლექს-მეთოდის) შესახებ	155
§5. გადაადგილების რა გეგმა ამოვირჩიოთ?	160
§6. ამოცანა რაციონის შესახებ	164
§7. გეომეტრიული კომენტარები პირობიანი მაქსიმუმის ამოცანებისათვის	166

თავი V. იმიტაციური მოდელირება

§1. რამდენიმე წინასწარი შენიშვნა იმიტაციური მოდელირების შესახებ	169
§2. „ხაბაზის“ გარდაქმნა	172
§3. როგორ გადავარჩინოთ ხორბალი?	175
§4. ისევ წყალსაცავის შესახებ	180
§5. მათემატიკური ეკოლოგიის ერთი იმიტაციური მოდელის შესახებ	184

თავი VI. შინაინსური მათემატიკის ელემენტები

შესავალი	191
§1. საკრედიტო ოპერაციების მათემატიკური საფუძვლები (მარტივი პროცენტები)	192
1.1 რამდენიმე შენიშვნა პროცენტის ეკონომიკური თეორიის შესახებ	192
1.2 საკრედიტო ოპერაციების მახასიათებელი პარამეტრები	193
1.3 ანაბრის მრდის ფორმულა მარტივი პროცენტის გამოყენებით	195
1.4 მარტივი პროცენტის გამოთვლის სქემები	196
1.5 მარტივი პროცენტის განაკვეთის ცვლა ინფლაციის გამო	197
1.6 პროცენტების რეინვესტირება	199
1.7 მათემატიკური დისკონტირება	200
1.8 დისკონტის ეფექტური განაკვეთი	201
1.9 მაგალითი კონკრეტული თამასუქის შემთხვევისათვის	201

§2. საკრედიტო ოპერაციების მათემატიკური საფუძვლები (რთული პროცენტები).....	203
2.1 რთული პროცენტი. კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტი.....	203
2.2 ბაზრის სტაბილურობის პრინციპი.....	204
2.3 კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტის გამოსათვლელი ფორმულები რთული პროცენტული განაკვეთისათვის.....	205
2.4 კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტების შედარება მარტივი და რთული პროცენტული განაკვეთებით დარიცხვის პირობებში.....	206
2.5 პროცენტების ნომინალური და ეფექტური წლიური განაკვეთები.....	207
2.6 რთული დისკონტი და რთული დისკონტის განაკვეთი.....	210
2.7 დისკონტის ნომინალური და ეფექტური განაკვეთები.....	212
§3. პროცენტების უწყვეტი დარიცხვა და უწყვეტი დისკონტირება.....	215
3.1 ამოცანის დასმა.....	215
3.2 კაპიტალის ზრდის ინტენსივობა – ნომინალური წლიური განაკვეთი პროცენტების უწყვეტი დარიცხვისას.....	215
3.3 გამრდილი ღირებულება, მომავალი ღირებულება, თანამედროვე მიმდინარე ღირებულება.....	220
§4. გადასახადების ნაკადი.....	221
4.1 გადასახადების ნაკადი.....	221
4.2 ფინანსური რენტა ანუ ანუიტეტი.....	222
4.3 პოსტნუმერანდო და პრენუმერანდო რენტების გაანგარიშება.....	224
4.4 რენტის დისკონტირებისა და რენტის ზრდის კოეფიციენტების ზოგიერთი თვისება.....	228
4.5 დროის ერთეულით გადავადებული რენტა.....	231
4.6 m-ჯერადი რენტა.....	233
4.7 უვადო რენტა.....	235
§5. ინფლაცია და ოჯახის შემოსავალი.....	237
5.1 ინფლაცია.....	237
5.2 ინფლაციის ინდექსი და ინფლაციის ტემპი.....	237
5.3 კაპიტალის ეროზია და ინფლაციური პრემია.....	242
5.4 ოჯახის ყოველკვირეული შემოსავლების ერთი კონკრეტული მაგალითი.....	243
5.5 ლორენცის მრუდი.....	244
5.6 ჯინის კოეფიციენტი.....	246
5.7 ბოლოთქმა.....	247

ღამათება

ოქროს კვეთი და ვეფხისცყაოსნის რითმათა სიმფონია.....	248
1.1 რა არის ოქროს კვეთა.....	248
1.2 მონაკვეთის ოქროს კვეთის პროპორციით დაყოფა ფარგლისა და სახამავეის საშუალებით.....	249
1.3 ოქროს კვეთის შეფარდების ზოგიერთი თვისება.....	250
1.4 ოქროს კვეთა, ფიბონაჩის რიცხვები და მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებები.....	252
1.5 მცირე ისტორიული მიმოხილვა.....	254
1.6 ოქროს კვეთა „ვეფხისცყაოსანში“.....	256
ლიგერატურა.....	259

წინასიტყვაობა

მათემატიკის განვითარება დასაბამიდან დღემდე ცხადყოფს, რომ მას ორი ძირითადი წყარო ახაზრდოვს.

ერთია, მათემატიკის მიღმა – სხვა მეცნიერებებში, გექნიკაში, ეკონომიკაში და ა. შ. წარმოქმნილი ამოცანების მათემატიკის საშუალებით გადაწყვეტის *აუცილებლობა*. ეს *გარე წყარო* ისტორიულად პირველი იყო.

მეორეა, მოპოვებული მათემატიკური ფაქტების სისტემატიზაციის, მათი ურთიერთკავშირების გარკვევის, ზოგადი კონცეფციების საფუძველზე მათი თეორიის სახით გაერთიანების, ამ თეორიის საკუთარი კანონების შესაბამისად განვითარებისა და სრულყოფის *აუცილებლობა*. სწორედ ეს *შიდა წყარო* გახდა თავის დროზე მათემატიკის, როგორც მეცნიერების გამოყოფის საფუძველი.

ამ წყაროების გამიჯვნა ზოგჯერ შეუძლებელია. მიუხედავად ამისა, მათი თავისებურებების გავლენისათვის თვალის გადაკვირება უმეტეს შემთხვევაში ძნელი არაა. ამ ორი წყაროს შესაფყვის ორ მიმართულებას, შესაბამისად, *გამოყენებითი და თეორიული (წმინდა) ეწოდება*.

ასეთ დაყოფაში, ცხადია, იგულისხმება თითოეული წყაროს უპირატესი გავლენა მათემატიკური მეთოდების, ცნებების, მტკიცებების შექმნასა და განვითარებაზე. თორემ ყოველგვარ აზრს იქნება მოკლებული უკვე ჩამოყალიბებული და სრულქმნილი ნებისმიერი მათემატიკური მონაპოვრის გამოყენებითი ან თეორიული მიმართულებებისადმი მიკუთვნების მცდელობა.

მათემატიკის საგანძური ერთია და ორივე მიმართულება ამდიდრებს მას.

მაგრამ არის გამოყენებითი და თეორიული მათემატიკის ერთი ფრიად მნიშვნელოვანი და არსებითი განმასხვავებელი ნიშანი. ესაა *დროის ფაქტორი*. თეორიულ (წმინდა) მათემატიკაში შინაგანი განვითარების ლოგიკით დასმული პრობლემა შეიძლება *წლებისა და ათწლეულების* განმავლობაში ელოდოს გადაწყვეტას, გამოყენებითი მათემატიკის წინაშე დასმული ამოცანა კი, როგორც წესი, *დროულად, ვადაში* უნდა იქნეს გადაწყვეტილი. ამის თაობაზე ასეთი აფორიზმიც კი არსებობს: „*წმინდა მათემატიკა აკეთებს იმას, რაც შესაძლებელია, ისე, როგორც საჭიროა, გამოყენებითი კი – იმას, რაც საჭიროა, ისე, როგორც შესაძლებელია*“.

წინამდებარე წიგნში ჩვენ შევეცადეთ მასალა ისე შეგვერჩია, დაგველაგებინა და ვადმოგვეცა, რომ აქტიური მკითხველი გასცნობოდა გამოყენებითი მათემატიკის პრობლემატიკის არსს, ამავე დროს, შეგვეიარაღებინა იგი გარკვეულ მეთოდოლოგიით, რომელიც დაეხმარება მას მომავალში *რაც საჭიროა* გააკეთოს, ისე, *როგორც შესაძლებელია და დროულად*.

ჩვენ ველით, რომ გამოყენებითი მათემატიკის სახელმძღვანელოს შექმნის ეს პირველი ცდა არაერთ საქმიან შენიშვნას დაიმსახურებს. წიგნის სრულყოფისათვის გამიზნულ საღ კრიტიკას როგორც საერთო გეგმის, ისე ცალკეული საკითხის გადმოცემის მიმართ, ჩვენ გულწრფელი მადლობით მოვისმენთ და გავითვალისწინებთ შემდგომ გამოცემაში.

სასიამოვნო მოვალეობად მიგვაჩნია გულწრფელი მადლობა გადავუხადოთ წიგნის რედაქტორს დოც. ნ. მჭედლიშვილს, რეცენზენტებს – პროფ. გ. ცერცვაძესა და დოც. თ. გაჩეჩილაძეს, აგრეთვე დოცენტებს – მ. მენთეშაშვილს, კ. გელაშვილს, გ. სირბილაძესა და თ. ზარქუას, რომელთაც გულდასმით წაიკითხეს ხელნაწერი (მთლიანად ან ცალკეული ნაკვეთი) და მოგვაწოდეს მრავალი სასარგებლო რჩევა თუ შენიშვნა.

პ. მელაძე, ნ. სხირგლაძე

თბილისი, 2000 წელი

მათემატიკური მოდელირება. არსი და ძირითადი პრინციპები

§1. მოდელირება. მათემატიკური მოდელი.

კომპიუტერული ექსპერიმენტი

1.1 მოდელირების შესახებ.

მოდელირება წარმოადგენს სხვადასხვა მოვლენისა თუ პროცესის, ნაგებობისა თუ დანადგარის და ა. შ. შესწავლის ერთ-ერთ ძირითად და საკმაოდ გავრცელებულ მეთოდს. სხვადასხვა ობიექტის მოდელეები, სხვადასხვა მოვლენის მოდელირება ყოველთვის იყო მეცნიერული კვლევის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი მეთოდი.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ავიაცია.

ახალი თვითმფრინავის დაპროექტების პროცესში ძალზე მნიშვნელოვანია მისი ოპტიმალური ფორმების დადგენა - აეროდინამიკური მახასიათებლების ოპტიმიზაცია. ამ პრობლემის გადაჭრისათვის სრულყოფილი თეორიული გამოკვლევების ჩატარება ჯერჯერობით შეუძლებელია. ამიგომ აუცილებელი ხდება ექსპერიმენტული გამოკვლევების ჩატარება. ცხადია, ექსპერიმენტები ახლად აგებულ თვითმფრინავზე ძალზე სახიფათოა და თანაც დიდ მატერიალურ დანახარჯებთანაა დაკავშირებული. სწორედ ამ შემთხვევაში, საკვლევი მიზნით, კონსტრუქტორები იყენებენ მოდელეებს. რეალური თვითმფრინავი და მისი შემცირებული ასლი - მოდელი ერთმანეთს ჰგავს არა მარტო გარეგნულად, არამედ „ფიზიკური შინაარსითაც“ - მათი აეროდინამიკური მახასიათებლები დაკავშირებულია ერთმანეთთან მსგავსების გარკვეული კანონებით. ცხადია, რომ მოდელის გამოცდა ხდება არა ჰაერში, არამედ აეროდინამიკურ მილში, რომელშიც იქმნება ექსპერიმენტისათვის საჭირო პირობები. თუ გარკვეულ პირობებში გავზომავთ მოდელის აეროდინამიკურ მახასიათებლებს, მაშინ შესაძლებელია გადავიანგარიშოთ ისინი „ნამდვილი“ თვითმფრინავისათვის.

ასეთი მაგალითების მოყვანა შესაძლებელია მეცნიერების, ტექნიკის, წარმოების ბევრი სხვა დარგიდანაც.

თუ არქიტექტორმა მიზნად დაისახა ააგოს სრულიად ახალი გიჟის (კონსტრუქციის, შესაძლებელია სტილის) შენობა, სანამ ამ სამუშაოს შეუდგება, იგი აკვებს ამ შენობის მაკეტს - მოდელს, რათა შეაფასოს მისი გარეგნული სახე და სხე.

იმისათვის, რომ ლექტორმა აუხსნას მსმენელებს ადამიანის ორგანიზმში სისხლის მიმოქცევის სისტემის ფუნქციონირება, იგი ახდენს იმ პლაკატ-სქემის დემონსტრირებას, სადაც ისრებით ნაჩვენებია სისხლის მოძრაობის მიმართულება. გარკვეული თვალსაზრისით, ესეც წარმოადგენს განსახილველი მოვლენის, მართალია უმარტივეს, მაგრამ მაინც მოდელს.

ცხადია, არქიტექტორმა შეიძლება ააგოს შენობა მისი მაკეტის შექმნის გარეშე, თუ შენობა უვარგისი აღმოჩნდა (ესთეტიკური და სხვა მოსაზრებებით), მაშინ ძნელი იქნება, თუ შეუძლებელი არა, მდგომარეობის გამოსწორება. ასე, რომ შენობის მაკეტის საშუალებით ექსპერიმენტების ჩატარებას სრულიად ობიექტური და გამამართლებელი მიზეზები აქვს.

შეიძლებოდა სისხლის მიმოქცევის სისტემის ფუნქციონირების ასახსნელად ლექტორს გამოეყენებინა სხვა მოდელი, მაგალითად, დაწვრილებითი ანაგომი-

ური აგლასი, მაგრამ მოდელზე საერთოდ უარის თქმა ამ შემთხვევაში შეუძლებელია. აქვე აღვნიშნოთ, რომ სწავლების საწყის ეტაპზე სრულიად საკმარისია პლაკატის გამოყენება. პლაკატის საშუალებით შესაძლებელია შესასწავლი სისტემის ძირითადი მახასიათებლების საკმაოდ კარგად გადმოცემა.

შეიძლება თვითმფრინავი აგვეგო ისე, რომ წინასწარ არ გამოგვეთვალა მისი აეროდინამიკური მახასიათებლები, მაგრამ ამ შემთხვევაში ჩვენ არ გვეცოდინებოდა თუ რა მექანიკური ძაბვები შეიძლება წარმოიშვას, მაგალითად, თვითმფრინავის ფრთაში და თუ ეს ძაბვები აღმოჩნდებოდა ნორმაზე მეტი, თვითმფრინავი დაიმსხვრეოდა. ასე რომ, გამოკვლევები აეროდინამიკურ მიღწევაში სრულიად კონკრეტულ მიზნებს ემსახურება.

ყველა შემთხვევაში მოყვანილ მაგალითში განხორციელებულია ერთი პრინციპი – ერთი თბიექტი იცვლება მისი მსგავსი თბიექტით – მოდელით, რომლის გამოკვლევაცა და შესწავლაც უფრო ადვილია. ამასთან, ყველა შემთხვევაში იგულისხმებოდა, რომ შესასწავლი თბიექტის გარკვეული თვისება (ან თვისებები) მენარჩუნებულია მოდელზე გადასვლისას ან, ყოველ შემთხვევაში, მოდელზე დაკვირვების საშუალებით შეიძლება ვიმსჯელოთ ამ თვისებაზე (ან თვისებებზე).

ჩვენ საქმე გვექნება სულ სხვა გიპის მოდელირებასთან, კერძოდ, გამოყენებითი მათემატიკის უმთავრეს მეთოდთან – მათემატიკურ მოდელირებასთან. მეცნიერების ეს მიმართულება სულ უფრო და უფრო მნიშვნელოვან როლს ასრულებს თანამედროვე მეცნიერებისა და ტექნიკის განვითარებაში, ბევრი ისეთი პრობლემის გადაჭრაში, რომელსაც სასიცოცხლო მნიშვნელობა აქვს კაცობრიობისათვის. ჩვენი უპირველესი მიზანია, გავერკვეთ „მათემატიკური მოდელირების“ ცნების არსში.

თავდაპირველად აღვნიშნოთ, რომ მათემატიკური მოდელირება სულაც არ წარმოადგენს ჩვენი საუკუნის აღმოჩენას. ასე მაგალითად, ფიზიკაში კვლევის ეს მეთოდი გამოიყენებოდა უკვე ამ მეცნიერების ჩასახვის პერიოდიდან. გალილეიდან დაწყებული, ფიზიკური მოვლენის აღწერა არ ითვლება საიმედოდ, თუ იგი არ არის გამოსახული რიცხვითი სიდიდეებით. ზოგიერთი ამ სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობის დადგენა ხდება ექსპერიმენტების სერიების ჩატარების შედეგად, სხვა სიდიდეების გამოსათვლელად კი განიხილება მათემატიკური ამოცანები. ეს ამოცანები უფრო ხშირად გარკვეული განტოლებებია, რომლებიც წარმოადგენენ სამყაროში მოქმედი კანონზომიერებების მათემატიკურ ჩანაწერებს. როგორც წესი, ისინი წარმოადგენენ შენახვის კანონებს: მასის შენახვის კანონს, ენერჯის შენახვის კანონს და ა. შ. ამ კანონებს ემპირიული ხასიათი აქვს, ისინი არ მიიღება სხვა, ცნობილი ფორმულებიდან და კანონებიდან. ეს კანონები გამოსახავს ბუნების მოვლენებზე კაცობრიობის მრავალწლიანი დაკვირვების შედეგებს. მეცნიერებისა და ტექნიკის საოცარი მიღწევების მიუხედავად, ჯერჯერობით არ არის აღმოჩენილი არც ერთი მოვლენა, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა ეჭვი შეგვეგანა ამ კანონების სისწორეში. ეს ფუნდამენტური კანონები შეიძლება ჩავთვალოთ ბუნების ამა თუ იმ მოვლენის მათემატიკური მოდელის საფუძვლად. იმისათვის, რომ უფრო სრულად გავერკვეთ „მათემატიკური მოდელირების“ ცნების არსში, განვიხილოთ შემდეგი უმარტივესი მაგალითი.

1.2 მათემატიკური მოდელირების უმარტივესი მაგალითი – სხეულის ვარდნა დედამიწაზე. განვიხილოთ ისეთი ჩვეულებრივი და ბუნებრივი მოვლენა, როგორცაა სხეულის ვარდნა დედამიწაზე. ამ მოვლენის ერთი შეხედვით სიმარტივის მიუხედავად, მისი სწორად ახსნა არის გოგონა ლემაც კი ვერ შეძლო. იგი თვლიდა, რომ თავისუფლად ვარდნილი სხეულის

სიჩქარე პროპორციულია მისი წონისა და უკუპროპორციულია გარემოს სიმკვრივის. ამ თვალსაზრისის მცდარობა XVI საუკუნის ბოლოს იქნა დამტკიცებული. მანამდე კი, მთელი ოცი საუკუნის განმავლობაში უცყურად და დამაჯერებლად ითვლებოდა.

ჩვენი წიგნისათვის მეცნიერების განვითარების ამ ეტაპს განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს.

სწორედ არისტოტელეს თვალსაზრისის სიმცდარე დაამტკიცა გალილეიმ გამოიყენა რა მის მიერ შემუშავებული მეცნიერული კვლევის ახალი მეთოდოლოგია, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს: *მოგადი მოსამრებიდან გამომდინარე, ჯერ ხდება მოვლენის წარმართავი კანონზომიერებების გამოცნობა – სამუშაო ჰიპოთეზის ჩამოყალიბება და შემდეგ ამ ჰიპოთეზის ექსპერიმენტულად შემოწმება*; თუ შედეგი დადებითი აღმოჩნდა, ჰიპოთეზა მეცნიერული ჭეშმარიტების სტატუსს იძენს. თუ შედეგი უარყოფითია, მაშინ ხდება ახალი ჰიპოთეზის ჩამოყალიბება, ამ ახალი ჰიპოთეზის ექსპერიმენტულად შემოწმება და ა. შ. ეს პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ არ იქნება ჩამოყალიბებული ის კანონი, რომელიც შესასწავლი მოვლენის წარმართავ კანონზომიერებას გამოსახავს.

არსებობს მეცნიერული ცოდნის მოპოვების მეორე სტრატეგიაც, რომელიც აგრეთვე უმნიშვნელოვანეს როლს ასრულებს მეცნიერების განვითარებაში – ჯერ ხდება ექსპერიმენტების მეშვეობით ინფორმაციის დაგროვება და შემდეგ მათი ანალიზით მოგადი კანონის მიღება. ასე მაგალითად, გალილეის თანამედროვემ, დანიელმა ასკრონომმა გიხო ბრაგემ გადაწყვიტა დაედგინა მზის, დედამიწისა და სხვა პლანეტების მოძრაობის კანონები. ამ მიზნით იგი წლების განმავლობაში აკვირდებოდა პლანეტების მოძრაობას და დაწვრილებით იწერდა მოპოვებულ ინფორმაციას. მან შეაგროვა უზარმაზარი ექსპერიმენტული მასალა. გიხო ბრაგეს გარდაცვალების შემდეგ, მისმა თანაშემწემ იოჰან კეპლერმა გააანალიზა მრავალწლიანი ასკრონომიული დაკვირვებების შედეგად მოპოვებული რიცხვითი მონაცემები და ჩამოაყალიბა კანონები, რომლებიც დღეს ყველასათვის კეპლერის კანონების სახელწოდებითაა ცნობილი.

ამ ერთგვარი ისტორიული ექსკურსის შემდეგ დავუბრუნდეთ სხეულის თავისუფალი ვარდნის პრობლემას.

ფრიად გონებამახვილური და ლოგიკურად მწყობრი მსჯელობის საფუძველზე, გალილეი მივიდა დასკვნამდე, რომ *თავისუფლად ვარდნილი სხეულის სიჩქარე იზრდება დროის პროპორციულად*:

$$v = kt, \tag{1.1}$$

სადაც $k \equiv \text{const}$.

პოპულარული გრაფიურა, რომელმედაც გამოსახულია პიზის დახრილი კოშკიდან გალილეის მიერ სხვადასხვა სხეულის ჩამოვლების პროცესი, სწორედ ამ კანონზომიერების ექსპერიმენტული შემოწმების ილუსტრაციაა. ამ ექსპერიმენტებით გალილეიმ დაადასტურა მისი ჰიპოთეზის სისწორე და საბოლოოდ დაადგინა თავისუფალი ვარდნის, და მოგადად, თანაბარაჩქარეული მოძრაობის კანონზომიერებანი, რომლებიც თანამედროვე აღნიშვნებში ასე ჩაიწერება:

$$v = v_0 + at, \tag{1.2}$$

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2}, \tag{1.3}$$

სადაც v არის სხეულის მყისი სიჩქარე, v_0 – საწყისი სიჩქარე, a – აჩქარების მოდული, s – სხეულის მიერ მოძრაობის დაწყებიდან t მომენტამდე გავლილი მანძილი.

თავისუფლად ვარდნილი სხეულის შემთხვევაში $v_0 = 0$ და (12) თანაფარდობა იღებს სახეს:

$$v = at. \quad (14)$$

მაშასადამე, (1.1) ფორმულაში შემაჯავალ k პროპორციულობის კოეფიციენტს აჩქარების შინაარსი ჰქონია

$$k \equiv a.$$

გალილეი ითვლება მოძრაობის კანონების აღმოჩენად. მან პასუხი გასცა კითხვას, თუ როგორ იცვლება დროის მიხედვით თავისუფლად ვარდნილი სხეულის სიჩქარე, მაგრამ ვერ მოახერხა დაედგინა, თუ რა არის სიჩქარის ასეთი ცვლილების მიზეზი ანუ რატომ წარმოიშობა აჩქარება.

სხეულის ვარდნის მიზეზი გამოიკვლია ნიუტონმა, ჩამოაყალიბა რა მიზიდულობის ცნობილი კანონი, რომლის თანახმადაც *ორი ნებისმიერი სხეული ერთმანეთს მიიზიდავს ძალით, რომელიც სიდიდით პირდაპირპროპორციულია ამ სხეულების მასების ნამრავლისა და უკუპროპორციულია მათ შორის მანძილის კვადრატისა*. თუ აღნიშნულ ორ სხეულს წარმოადგენს დედამიწა და ქვა, მაშინ მათემატიკურ გამოსახულებას მიზიდულობის ძალისათვის აქვს შემდეგი სახე:

$$F = G \frac{m \cdot M}{R^2}, \quad (15)$$

სადაც m და M წარმოადგენს შესაბამისად ქვისა და დედამიწის მასას, R – მათ ცენტრებს შორის მანძილს, G – პროპორციულობის კოეფიციენტს. იგი ერთ-ერთი უნივერსალური მუდმივაა და გრავიტაციული მუდმივა ეწოდება.

თუ ჩვენ ექსპერიმენტს ჩავატარებთ დედამიწის გედაპირიდან ახლო სიმაღლეზე, როგორც ამას აკეთებდა გალილეი, მაშინ მანძილი სხეულისა და დედამიწის ცენტრებს შორის შეიძლება ჩავთვალოთ დედამიწის რადიუსის ტოლად: $R \approx R_0$, სადაც R_0 – დედამიწის რადიუსია. ცხადია, რომ ეს დაშვება მცირე ცვლილებას შეიგანს (1.5) ფორმულაში. იგი იმდენად უმნიშვნელო იქნება, რომ შეიძლება უგულებელვყოთ. გარდა ამისა, თუ სხეულზე მოქმედებს F სიდიდის ძალა, მაშინ მისი მოძრაობა აღიწერება ნიუტონის მიერვე აღმოჩენილი კანონის საშუალებით:

$$F = ma, \quad (16)$$

სადაც m კვლავ წარმოადგენს სხეულის მასას, a – კი მისი აჩქარების მოდულია.

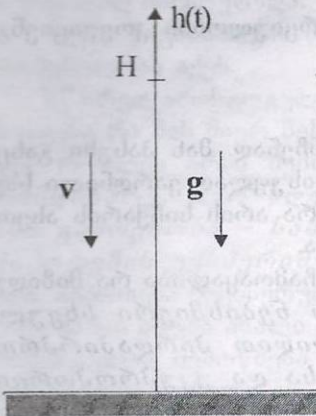
(1.5) და (1.6) ფორმულებიდან შეიძლება დავწეროთ:

$$k = a = G \frac{M}{R_0^2}. \quad (17)$$

ამრიგად, დადგინდა, რომ თავისუფლად ვარდნილი სხეულის აჩქარებას განპირობებს დედამიწის მიზიდულობა და თავისუფლად ვარდნილი სხეულისათვის გალილეის მიერ აღმოჩენილი მოძრაობის (1.1) კანონში შემაჯავალი პროპორციულობის კოეფიციენტის მნიშვნელობა გამოითვლება (1.7) ფორმულით.

(1.7) ფორმულის მარჯვენა მხარეს მუდმივი სიდიდეებია. მაშასადამე, დედამიწის გედაპირის ახლო სიმაღლიდან ყველა სხეული ვარდება ერთი და იმავე აჩქარებით, რომელსაც უწოდებენ თავისუფალი ვარდნის აჩქარებას, და, ჩვეულებრივ, აღნიშნავენ g სიმბოლოთი $k \equiv g$. მისი სიდიდე დადგენილია ექსპერიმენტულად: $g \approx 9,8 \text{ მ} \cdot \text{წმ}^{-2}$.

ამოცანის განსაზღვრულობისათვის, საჭიროა მათემატიკურ მოდელში ჩაერთოთ კონკრეტული სხეულის (იმ სხეულის, რომლის ჩამოგდებასაც ვაპირებთ) მოძრაობის საწყისი მექანიკური მახასიათებლები: სიმაღლე H , საიდანაც ის



ნახ. 1.1

ვარდება ანუ სიმაღლე, რომელზედაც ის იმყოფება საწყის $t = 0$ მომენტში ($h(0) = H$) და სიჩქარის მნიშვნელობა ვერტიკალური მიმართულებით v_0 , რომელიც სხეულს მიენიჭება საწყის მომენტში ($v(0) = v_0$). კერძოდ, თუ სხეულს გავუშვებთ ხელს, ყოველგვარი ბიძგის გარეშე, მაშინ $v_0 = 0$. ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $v_0 = 0$.

ათვლის სისტემა, რომელშიც განვიხილავთ მოძრაობას ასე ავირჩიოთ: კოორდინატთა სათავე ავიღოთ დედამიწის ზედაპირზე, ხოლო საკოორდინატო დერძი მიემართოს ვერტიკალურად ზევით (ნახ. 1.1).

დროის ათვლა დაიწყოთ იმ მომენტიდან, როდესაც სხეული დაიწყებს ვარდნას. სხეულის მდებარეობა დროის ყოველ მომენტში დავახასიათოთ $h(t)$ ფუნქციით, რომელიც გამოსახავს მანძილს სხეულიდან დედამიწამდე. თუ გავიხსენებთ, რომ მყისი სიჩქარე არის მდებარეობის ფუნქციის წარმოებული დროით, მაშინ (1.4) განტოლება შემოდება ასე გადავწერთ:

$$\frac{dh}{dt} = -gt. \quad (1.8)$$

ნიშანი „-“ მარჯვენა მხარეს აღებულია იმიტომ, რომ არჩეულ საკოორდინატო სისტემაში თავისუფალი ვარდნის აჩქარების g ვექტორის გეგმილი უარყოფითია: $g_h = -g$. დიფერენციალური განტოლებების თეორიიდან ცნობილია, რომ პირველი რიგის (1.8) დიფერენციალური განტოლების ერთადერთი ამონახსნის მისაღებად განტოლებასთან ერთად უნდა განვიხილოთ ე. წ. საწყისი პირობა. ჩვენ შემთხვევაში ეს არის სხეულის საწყისი მდებარეობა:

$$h(0) = H. \quad (1.9)$$

ამ შენიშვნით მთავრდება დედამიწის მახლობლად სხეულის ვარდნის პროცესის მათემატიკური მოდელის აგება: ეს არის (1.8) განტოლება (1.9) თანაფარდობის გათვალისწინებით.

მიღებული მათემატიკური მოდელის ამოხსნა არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს: (1.8) ვაინტეგრით t -თი, მივიღებთ:

$$h(t)|_0^t = -\frac{gt^2}{2},$$

ანუ

$$h(t) - h(0) = -\frac{gt^2}{2},$$

საიდანაც (1.9)-ს გათვალისწინებით მივიღებთ საძიებელ ამონახსნს:

$$h(t) = H - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.10)$$

(1.4) და (1.10) ფორმულების საშუალებით დროის ნებისმიერ მომენტში შეიძლება გამოვითვალოთ ვარდნილი სხეულის სიჩქარე $v(t)$ და სიმაღლე $h(t)$, სადაც იგი იმყოფება. ლაბორატორიულმა გამოკვლევებმა მთლიანად დაადასტურა თეორიული შედეგები, რომლებიც მიიღება მათემატიკური მოდელის საშუალებით.

1.3 მათემატიკური მოდელის არსი. დავსვათ შემდეგი კითხვა: ჩვენ მიერ განხილული მათემატიკური მოდელი ამომწურავად აღწერს თუ არა ნებისმიერი სხეულის ვარდნის პროცესს? სანამ ამ კითხვაზე დადებით ან უარყოფით პასუხს გავცემდეთ, გავიხსენოთ იმ ფიზიკური მოვლენების ზოგიერთი მაგალითი, რომელსაც ჩვენ ვხვდებით ყოველდღიურ ცხოვრებაში და რომელზედაც დაკვირვების საშუალება აქვს ნებისმიერ ჩვენგანს.

მაგალითად, განვიხილოთ ხიდან ფოთლის ვარდნის პროცესი. დაკვირვების შედეგად აღვიღალ შეიძლება აღმოვაჩინოთ, რომ მოძრაობა არ არის თანაბარ-სიჩქარეული. ის უფრო მოგვაგონებს თანაბარ მოძრაობას, ე. ი. მოძრაობას მუდმივი სიჩქარით. ფოთოლი თითქოს არ ემორჩილება მსოფლიო მიზიდულობის კანონს. ასევე რა სიმაღლიდანაც არ უნდა გადმოხტეს პარაშუტისტი, ის დედამიწაზე ყოველთვის ეშვება ერთი და იმავე სიჩქარით.

ორივე მაგალითი ეწინააღმდეგება ჩვენ მიერ აგებულ მათემატიკურ მოდელს და ამ მოდელის საშუალებით მიღებულ (1.10) ფორმულას. მაგრამ ამ სიტუაციის ახსნა აღვიღია, რადგან ჩვენ მიერ აგებული მათემატიკური მოდელი არ ითვალისწინებს ჰაერის წინააღმდეგობას, რაც ასე მნიშვნელოვანია როგორც ფოთლის ვარდნის, ასევე პარაშუტისტის მოძრაობისთვის.

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ მიერ აგებული მათემატიკური მოდელი და მისი საშუალებით მიღებული (1.10) ფორმულა არ გამოდგება სხეულის ვარდნის პროცესის აღსაწერად ყველა შემთხვევაში. საქმე იმაშია, რომ ნებისმიერი ფიზიკური მოვლენა, თუ მას მთელი სისრულით განვიხილავთ, წარმოადგენს არსებითად რთულ სისტემას, რადგან მას განსაზღვრავს სხვადასხვა ფაქტორის უამრავი რაოდენობა. ასე მაგალითად, ქვის ვარდნის შემთხვევაში, მის მოძრაობას, სიმძიმის ძალის გარდა, განსაზღვრავს ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც, თავის მხრივ, დამოკიდებულია სხეულის სიჩქარესა და ფორმაზე, მთვარის, მზისა და პლანეტების მიზიდულობის ძალები, ატმოსფეროს სიმკვრივის ზრდა სიმაღლის შემცირებასთან ერთად და აგრეთვე ის, რომ დედამიწა არის არა ბირთვი, არამედ უფრო რთული კონფიგურაციის გეომეტრიული ფიგურა. მსგავსი ფაქტორების ჩამოთვლა შეიძლება გაგრძელდეს.

თუ მოვინდომებთ ყველა ამ ფაქტორის გათვალისწინებას მათემატიკური მოდელის აგებისას, მაშინ მივიღებთ იმდენად რთულ მათემატიკურ ამოცანას, რომლის ამოხსნის მოძებნა თანამედროვე კომპიუტერების საშუალებითაც კი შეუძლებელი იქნებოდა. საბედნიეროდ, ასეთი მათემატიკური მოდელის შექმნის აუცილებლობა არ არსებობს, რადგან ყველა ბემოთ ჩამოთვლილი ფაქტორის შეგავლენა ქვის ვარდნის პროცესზე გოლფასი არ არის. სხეულის ვარდნის სხვადასხვა კონკრეტულ შემთხვევაში არსებით როლს თამაშობს ასეთი ფაქტორების მხოლოდ მცირე რაოდენობა, ხოლო დანარჩენი ფაქტორები პროცესის მიმდინარეობაზე უმნიშვნელო, არაარსებით გავლენას ახდენს.

როდესაც გვინდა ავაგოთ რაიმე მოვლენის ან პროცესის მათემატიკური მოდელი, წინასწარ უნდა შევაფასოთ, თუ რომელი ფაქტორი თამაშობს „მთავარ როლს“, რომელი „მეორეხარისხოვანს“, „მესამეხარისხოვანს“ და ა. შ. ცხადია, „როლების განაწილების“ ფორმალური კრიტერიუმი არ არსებობს, ამიტომ მათემატიკური მოდელის შედგენისას ძალზე ხშირად არსებითია მკვლევარის კვალიფიკაცია და პროფესიონალიზმი. ასე მაგალითად, განხილულ მაგალითში (ქვის ვარდნა), არსებითია დედამიწის მიზიდულობის ძალა. ჰაერის წი-

ნაადმდეგობა შეიძლება არ იქნეს გათვალისწინებული, თუ ქვის ვარდნა ხდება მცირე სიმაღლიდან. ამ შემთხვევაში ქვის მოძრაობის სიჩქარე ვერ აღწევს ისეთ სიდიდეს, რომლის დროსაც ჰაერის წინააღმდეგობა მასზე არსებით გავლენას მოახდენს. ყველა ის არსებითი ფაქტორი, რომელიც განსაზღვრავს პროცესის მიმდინარეობას, ჩაწერილ უნდა იქნეს მათემატიკურ ენაზე. თუ ეს არსებითი ფაქტორები სრულად იქნება გათვალისწინებული, მაშინ მათემატიკური მოდელი დიდი სიზუსტით აღეკვბურება შესასწავლი მოვლენისა და თეორიულად მიღებული შედეგები კარგად ეთანხმება ექსპერიმენტის შედეგებს.

ამრიგად, მივედით შემდეგ დასკვნამდე, რომელიც არსებითია მათემატიკური მოდელების შექმნის პროცესში: *მათემატიკური მოდელი არის არა მარტო განტოლებები, არამედ დამატებითი პირობებიც, რომლებიც განსაზღვრავენ ამ მოდელის გამოყენების საზღვრებს.* მათემატიკური მოდელის საშუალებით მიღებული ყველა დასკვნა სამართლიანია მხოლოდ ამ საზღვრებში და მათი გავრცელება ამ საზღვრებს გარეთ შეიძლება გახდეს მცდარი, პრინციპულად არასწორი დასკვნის საფუძველი.

თეორიული გამოკვლევები ფიზიკაში ყოველთვის ემყარებოდა მათემატიკურ საფუძველს. თანამედროვე ეტაპზე კი მეცნიერების, ტექნიკის, მეურნეობის ბევრი სხვა დარგიც აქტიურად იყენებს კვლევითი სამუშაოების ჩატარებისას მათემატიკური მოდელების მეთოდს. ამასთან, გამოყენებული მათემატიკური აპარატის სირთულის დონე, როგორც წესი, განისაზღვრება გამოსაკვლევი ობიექტისა თუ მოვლენის სირთულის დონით, აგრეთვე სიზუსტის იმ საზღვრებით, რომლითაც საჭიროა გამოკვლევის შედეგების მიღება. მათემატიკური მოდელების აუცილებლობას იწვევს ის ფაქტი, რომ ამა თუ იმ მეცნიერებისა და ტექნიკის განვითარებასთან ერთად თანდათან იზრდება მოთხოვნები გამოკვლევების სიზუსტის მიმართ, რადგან ასეთი გზით მიღებული ინფორმაცია წარმოადგენს საფუძველს, და ხშირად, ერთდღერით საფუძველს, ურთულესი აპარატურის დაპროექტებისა და აგების დროს, რთული სისტემის ყოფაქცევის პროგნოზირების დროს. გასათვალისწინებელია ის გარემოებაც, რომ არ არსებობს ზოგიერთი ობიექტის უშუალოდ, ექსპერიმენტული გზით შესწავლის საშუალება. პრინციპულად შეუძლებელია ექსპერიმენტები მზის სისტემის პლანეტების მიმართ, ძალზე ძვირადღირებული იქნება ექსპერიმენტები დედამიწის ხელოვნურ თანამგზავრზე, დაუშვებელია ექსპერიმენტები ქვეყნის ეკონომიკაზე წინასწარი პროგნოზირებისა და ოპტიმალური ვარიანტების შერჩევის გარეშე და ა. შ.

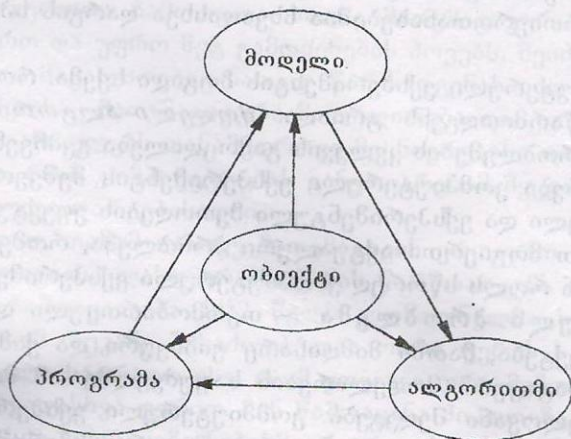
მათემატიკური მოდელების მიმართ გაზრდილი მოთხოვნები ბუნებრივად იწვევს შესასწავლი ობიექტის მათემატიკური მოდელის გართულებას, რაც ხშირად არის ისეთი სიტუაციის შექმნის მიზეზი, როდესაც მიღებული მათემატიკური ამოცანის ამოხსნა გრადიციული, კლასიკური მეთოდებით ხშირად შეუძლებელია. მათემატიკური მოდელების ეფექტურად გამოყენების საქმეში უდიდესი როლი დაეკისრა კომპიუტერს. კომპიუტერის შექმნამ და მასიურმა წარმოებამ გამოიწვია რთული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის ახალი მეთოდების შექმნა, არსებითად შეიცვალა სამეცნიერო გამოკვლევების სტილი და მეთოდიკა. ფაქტობრივად, უკანასკნელ სამ ათწლეულში შეიქმნა მათემატიკური მოდელების ახალი მიმართულება, რომელსაც ხშირად „*გამოთვლით ექსპერიმენტს*“ ან „*კომპიუტერულ ექსპერიმენტს*“ უწოდებენ.

1.4 კომპიუტერული ექსპერიმენტის არსი. კომპიუტერული ექსპერიმენტის არსი მდგომარეობს შემდეგში: მათემატიკური მოდელის საფუძველზე კომპიუტერის საშუალებით შეისწავლება ამა თუ იმ მოვლენის, საკვლევი ობიექტის ფუნქციონირების ძირითადი მახასიათებლები. ამასთან, ხშირად, ამ მახასიათებლების შესწავლა ხდება სხვადასხვა პირობებში, სხვადასხვა პარამეტრები-

სათვის, რის შედეგადაც შესაძლებელი ხდება საკვლევო ობიექტის ფუნქციონირების ოპტიმალური რეჟიმის დადგენა. ეს მიდგომა ხშირ შემთხვევაში ეკვივალენტურია დიდი ექსპერიმენტული ღანაღგარის შექმნისა. ამრიგად, კომპიუტერულ ექსპერიმენტს შეუძლია გარკვეულ ეტაპზე შეცვალოს ძვირადღირებული და ხანგრძლივი ნატურალური ექსპერიმენტი.

კომპიუტერული ექსპერიმენტის ტექნოლოგიური ციკლი პირობითად შეიძლება დაიყოს შემდეგ ეტაპებად (იხ. ნახ. 1.2).

კომპიუტერული ექსპერიმენტის საწყისი ეტაპია მათემატიკური მოდელის აგება. ჩვეულებრივ, უნდა შევარჩიოთ ისეთი მოდელები, რომელთა გამოკვლევა და ამონახსნის მოძებნა შესაძლებელია არსებული მათემატიკური აპარატისა და ჩვენს განკარგულებაში მყოფი კომპიუტერების საშუალებით. კომპიუტერების შექმნამდე არსებითად განიხილებოდა წრფივი მათემატიკური ამოცანები. მას



ნახ. 1.2

შემდეგ კი, რაც შეიქმნა მძლავრი კომპიუტერები, მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდებმა მეტი მრავალფეროვნება შეიძინა – განვითარების ახალ ეტაპზე ავიდა მათემატიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიმართულება – რიცხვითი მეთოდები. რიცხვით მეთოდებში იგულისხმება მათემატიკური ამოცანის ამოხსნის ისეთი მეთოდები, რომელთა რეალიზაციაც შესაძლებელია კომპიუტერზე. ცხადია, რომ ეს განმარტება არ არის ზუსტი, და ალბათ, ზუსტი განმარტების ჩამოყალიბება ამ ეტაპზე შეუძლებელიცაა, მაგრამ გარკვეული სიმუსტით იგი საკმაოდ კარგად ასახავს რიცხვითი მეთოდების არსს.

რიცხვითი მეთოდების განვითარების თანამედროვე დონე იძლევა საშუალებას, სხვადასხვა მოვლენის შესწავლისას გამოვიყენოთ საკმაოდ რთული არაწრფივი მათემატიკური მოდელები, რომლებიც ითვალისწინებს საკვლევო ობიექტის ფუნქციონირების არსებით მახასიათებლებს. იგი იძლევა იმის შესაძლებლობასაც, რომ პარამეტრები, რომლებიც განსაზღვრავენ ამა თუ იმ ფიზიკურ პროცესს, ვცვალოთ ფართო საზღვრებში.

მას შემდეგ, რაც აგებულია მათემატიკური მოდელი და შერჩეულია მიღებული მათემატიკური ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი, საჭიროა კომპიუტერისათვის შეიქმნას პროგრამა ან ვისარგებლოთ არსებული სტანდარტული პროგრამებით. პროგრამის გამართვის შემდეგ საჭიროა კომპიუტერის მეშვეობით გამოთვლების წარმოება, მიღებული შედეგების დამუშავება, ანალიზი და ინტერპრეტაცია. ბოლოს, მიღებული შედეგები უნდა შევადაროთ რეალური ექსპერიმენტის შედეგებს, ე. ი. დავადგინოთ – მიღებული შედეგები რამდენად აღეკავა გურად ასახავს შესასწავლი ობიექტის ფუნქციონირების არსებით მახასიათებლებს და აუცილებლობის შემთხვევაში მოვახდინოთ მათემატიკური მოდელის

დაბუსგება. ე. ი. უნდა დაებრუნდეთ საწყის ეტაპზე და გავიმეოროთ კომპიუტერული ექსპერიმენტის სრული ციკლი.

აღსანიშნავია, რომ კომპიუტერული ექსპერიმენტის ჩვენ მიერ მოყვანილი ეტაპებად დაყოფა, რომლის იდეაც აკადემიკოს ა. სამარსკის ეკუთვნის, პირობითია. ყველა ეს ეტაპი დაკავშირებულია ერთმანეთთან და ემსახურება ერთ მიზანს – მანქანური დროის შესაძლო მცირე დანახარჯების შედეგად დროულად მივიღოთ შესასწავლი მოვლენის ან ობიექტის ფუნქციონირების ძირითადი მახასიათებლების ადეკვატური რაოდენობრივი აღწერა.

კომპიუტერული ექსპერიმენტის სტრუქტურა გვიჩვენებს, რომ ის არის რთული სამეცნიერო-საწარმოო პროცესი. კვლევის წარმატება დამოკიდებულია ამ პროცესის ყველა მონაწილის შეთანხმებულ საქმიანობაზე, მათ პროფესიონალიზმზე და კერძოდ, უნარზე, მოძებნოს კომპრომისული გადაწყვეტილება იმ სფეროებში, სადაც ურთიერთთანახებაშია სხვადასხვა დარგის სპეციალისტების ინტერესები.

ასეთია კომპიუტერული ექსპერიმენტის მოგადი სქემა. როგორც დავინახეთ, მის საფუძველს წარმოადგენს გრიადა: *მოდელი-ალგორითმი-პროგრამა*. მნიშვნელოვანი პრობლემების კვლევის გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ მათემატიკური მოდელირება კომპიუტერული ექსპერიმენტის მეშვეობით ახდენს გრადიციული თეორიული და ექსპერიმენტული მეთოდების ეფექტურ სინთეზს.

ჩამოვთვალეთ მოგიერთი აქტუალური პრობლემა, რომელთა გადაწყვეტაშიც მნიშვნელოვან როლს სწორედ კომპიუტერული ექსპერიმენტი ასრულებს.

ენერგეტიკული პრობლემა – თერმობირთვული და ატომური რეაქტორების დაპროექტება, მათში მიმდინარე ფიზიკური და ქიმიური პროცესების დეტალური მათემატიკური მოდელირების საფუძველზე. ამ მიმართულებით მიღებულია მნიშვნელოვანი შედეგები. კომპიუტერული ექსპერიმენტი, რომელიც მჭიდროდ არის დაკავშირებული რეალურ, ფიზიკურ ექსპერიმენტებთან, იძლევა საშუალებას მნიშვნელოვნად დავაჩქაროთ გამოკვლევები.

კოსმოსური გექნიკა – საფრენი აპარატების გრეექტორიების გათვლა; აპარატების ოპტიმალური ფორმების დადგენა, ავტომატიზირებული დაპროექტების სისტემების შექმნა. რეალური ექსპერიმენტების მონაცემების დამუშავება. მაგალითად, თანამგზავრებიდან მიღებული გამოსახულებების დამუშავება, პლანეტის დიაგნოსტიკა (პლანეტის ძირითადი მახასიათებლების დადგენა), ბიოლოგიური და სამედიცინო ექსპერიმენტების ავტომატიზაცია და მიღებული შედეგების დამუშავება.

გექნოლოგიური პროცესები – ქიმიურ საწარმოებში გექნოლოგიური პროცესების ოპტიმალური რეჟიმების დადგენა; კრისტალებისა და ზოგიერთი სხვა, მოცემული თვისებების მქონე ნივთიერებების მიღება; ბევრი ამ ნივთიერებათაგანი, სხვათა შორის, გამოიყენება კომპიუტერის ელემენტური ბაზის შექმნის პრობლემის გადასაჭრელად.

ეკოლოგიური პროცესები – ეკოლოგიური სისტემების ფუნქციონირების პროგნოზირებისა და მართვის პრობლემები შესაძლებელია გადაიჭრას მხოლოდ მათემატიკური მოდელირების სიფუძველზე, რადგან ამ სისტემების მხოლოდ „ერთადერთი ეგზემპლარი“ არსებობს და მათზე ყოველმხრივ მეცნიერულად დაუსაბუთებელი ექსპერიმენტების ჩატარებამ, როგორც ამაში არაერთხელ დავრწმუნდით, შეიძლება მიგვიყვანოს კატასტროფულ შედეგებამდე.

გეო და ასტროფიზიკური მოვლენები – კლიმატის მოდელირება, ამინდის, მიწისძვრებისა და ცუნამის პროგნოზირება, მზის აქტივობისა და ვარსკვლავების განვითარების ფუნდამენტური პრობლემები.

ქიმია - ქიმიური რეაქციების გათვლა, მათში შემავალი ნივთიერებების თვისებათა დადგენა, ქიმიური პროცესების გამოკვლევა მაკრო და მიკრო დონეებზე.

ბიოლოგია - ბოლო პერიოდში განსაკუთრებით გაიზარდა ინტერესი ბიოლოგიის ფუნდამენტური პრობლემების შესწავლისას მათემატიკური მოდელირების გამოყენების მიმართ (გენეტიკა, მორფოგენეზი). საინტერესო შედეგებია მიღებული ბიოგენეტიკის ახალი მეთოდების დამუშავებისას. ბიოგენეტიკური პროცესების ოპტიმიზაციის პრობლემა მიეკუთვნება ისეთ პრობლემათა რიცხვს, რომელთა აქტუალობაც ეჭვს არ იწვევს.

დიდია ძვრები ეკონომიკის, სოციალური და ჰუმანიტარული მეცნიერების აქტიური პრობლემების კვლევისას მათემატიკური მოდელირების გამოყენების საქმეში.

ცხადია, იმ სფეროთა ჩამოთვლა, სადაც მათემატიკური მოდელირების მეთოდები სულ უფრო და უფრო მეტ გამოყენებას პოუვებს, შეიძლება გაგრძელდეს. თუმცა, მოყვანილი მაგალითებიც ნათელ წარმოდგენას იძლევა იმ მნიშვნელოვან როლზე, რომელსაც მათემატიკური მოდელირება და, კერძოდ, კომპიუტერული ექსპერიმენტი ასრულებს თანამედროვე მეცნიერებასა და ტექნიკაში.

აღსანიშნავია, რომ კომპიუტერების განვითარებამ შეცვალა მიდგომა მათემატიკის გრადიციული დარგებისადმი.

ასე, მაგალითად, თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს დარგს - გოპოლოგიის კლასიკურ ამოცანას წარმოადგენს ოთხი ფერის პრობლემა, რომელიც ჩამოაყალიბა 1852 წელს ლონდონელმა სტუდენტმა გუტრიმ. მან აღმოაჩინა, რომ რუკაზე შესაძლებელია ოთხი ფერის საშუალებით შეიღებოს ინგლისის ყველა საგრაფო ისე, რომ ყოველი ორი მეზობელი საგრაფო შეიღებულ იქნება სხვადასხვა ფერით. მან წამოაყენა ჰიპოთეზა, რომ ოთხი ფერის საღებავი საკმარისია სიბრტყეზე ნებისმიერი რუკის გასაფერადებლად.

ეს პრობლემა მხოლოდ 1976 წელს გადაწყვიტეს ამერიკელმა მეცნიერებმა კ. აპელმა და ე. ხაკენმა. მათ კომპიუტერის საშუალებით ყველა შესაძლო რუკა დაყვეს ორიათას სხვადასხვა გიჟად და შეადგინეს კომპიუტერული პროგრამა მათ გამოსაკვლევად. კომპიუტერის გამოყენების საშუალებით დამტკიცდა გუტრის ჰიპოთეზის სისწორე.

ამ ამოცანის ახალი ამოხსნა ასევე კომპიუტერის მეშვეობით 1978 წელს იქნა აგებული დ. კოენის მიერ. მან მოახერხა რუკების გიჟების რაოდენობის შემცირება. დ. კოენის აზრით, ყველა შესაძლო შემთხვევის განხილვას ერთი ადამიანი 2-3 წელს მოანდომებს.

რასაკვირველია, შეიძლება დავა იმაზე, თუ რამდენად ახლოა პრობლემის ასეთი გადაწყვეტა იდეალურისგან, მაგრამ გოპოლოგიაში კომპიუტერის ეფექტური გამოყენების მაგალითი სახეზეა.

ახლა განვიხილოთ რამდენიმე, შედარებით მარტივი პროცესის მათემატიკური მოდელირების პრობლემა. ეს მოგვცემს საშუალებას შევისწავლოთ, თუ როგორ ხდება ამა თუ იმ მოვლენის *მოდელის შექმნა*, მოგვცემს საშუალებას გავერკვეთ მათემატიკური მოდელირების ძირითად პრინციპებში.

საქართველოს შრომა რესურსების
სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ბ ი ბ ლ ი ო ტ ი კ ა
№ _____

§2. კომივოიაჟორის ამოცანის შესახებ

2.1 ამოცანის დასმა. განვიხილოთ კომივოიაჟორის (აგენტის, რომელიც აწარმოებს სხვადასხვა პროდუქციის გაყიდვას) საქმიანობა. ვთქვათ, გერიგორიაზე, რომელსაც იგი ემსახურება, n ქალაქია. ცნობილია, თუ რა ღირს მგზავრობა თითოეული ქალაქიდან ნებისმიერ სხვა ქალაქამდე. კომივოიაჟორი იწყებს მგზავრობას რომელიმე ქალაქიდან, იგი უნდა ჩავიდეს ყველა ქალაქში მხოლოდ ერთხელ და დაბრუნდეს საწყის პუნქტში. ბუნებრივია, რომ კომივოიაჟორის სურვილია მოახდინოს სამგზავრო დანახარჯების მინიმიზაცია.

რა ინფორმაციას ვფლობთ ამ ამოცანის ამოსახსნელად? საწყისი ინფორმაცია შეიცავს ქალაქების ჩამონათვალს და ღირებულებათა მატრიცას ელემენტებით C_{ij} , რომელიც i -ური ქალაქიდან j -ურ ქალაქში მგზავრობის ღირებულების ტოლია. ჩვენ მიერ განხილულ შემთხვევაში ღირებულების მატრიცა შეიცავს n სვეტს და n სტრიქონს:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{ქ} \\
 \text{ალ} \\
 \text{ქ} \\
 \text{ო}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 \vdots \\
 n
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{ქ} \\
 \text{ალ} \\
 \text{ქ} \\
 \text{ო}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 2 \\
 3 \\
 \vdots \\
 n
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 0 \\
 \dots \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 C_{12} \\
 \vdots \\
 C_{n1}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 0 \\
 \vdots \\
 C_{n2}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 C_{13} \\
 \vdots \\
 C_{n3}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \dots \\
 \vdots \\
 \dots
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 C_{1n} \\
 \vdots \\
 0
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (1.11)$$

ჩვენი მიზანია მოვახდინოთ კომივოიაჟორის სამგზავრო ხარჯების მინიმიზაცია, ე. ი. მას უნდა შევუდგინოთ მარშრუტი, რომლის სამგზავრო დანახარჯი სხვა მარშრუტებთან შედარებით იქნება მინიმალური.

კომივოიაჟორის ამოცანას უფრო ზოგადი სახე ექნება, თუ გავითვალისწინებთ ზოგიერთ დამატებით ინფორმაციას. მაგალითად, ჰყავს თუ არა რომელიმე ქალაქში კომივოიაჟორს, სხვა ქალაქებთან შედარებით, მეტი მყიდველი და ამიტომ მას სურს პირველად ამ ქალაქში გაემგზავროს, თუ ამ თვალსაზრისით იგი არც ერთ ქალაქს არ აძლევს უპირატესობას. შეიძლება ზოგიერთ ქალაქში კომივოიაჟორმა მოინდომოს რამდენჯერმე დაბრუნება, რადგან ამ ქალაქებში მას განსაკუთრებული მყიდველები ჰყავს, ან არის ზოგიერთი ქალაქი, რომლებშიც იგი სპეციალურად არ ჩადის და ამ ქალაქებში შეივლის მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც იგი მემობელ ქალაქში აღმოჩნდება და ა. შ. ამრიგად, ამოცანის სრულად დასმისათვის საჭიროა გვეჩინდეს ინფორმაცია კომივოიაჟორის *პრიორიტეტების* შესახებ და მათი გათვალისწინებით უნდა შედგეს მოძრაობის ისეთი გრაფიკი, რომლისთვისაც სამგზავრო დანახარჯები მინიმალური იქნება.

ჩვენი ინტერესებისათვის საკმარისია, თუ განვიხილავთ თავდაპირველად ჩამოყალიბებულ მარტივ შემთხვევას.

2.2 მათემატიკური მოდელის აგება. მას შემდეგ, რაც დაისვა ამოცანა, გაირკვა გამოკვლევის მიზანი, უნდა შევუდგეთ მათემატიკური მოდელის აგებას. ეს ძალზე მნიშვნელოვანი ეტაპია, რადგან მოდელის შერჩევა არსებითად განსაზღვრავს შემდგომი კვლევის მიმართულებას.

სამწუხაროდ, როგორც აღვნიშნეთ, მოდელირების პროცესის ავტომატიზაცია შეუძლებელია, ამოცანათა უმრავლესობის განხილვა ხდება ინდივიდუალურად, კონკრეტული ამოცანის სპეციფიკის გათვალისწინებით. ამასთან, ისეთი მოდელის შექმნა, რომელიც მეტ-ნაკლებად ადეკვატურად ასახავს შესასწავლი პროცესის ძირითად მახასიათებლებს, ხშირად არსებითად არის დამოკიდებული მკვლევრის კვალიფიკაციასა და გამოცდილებაზე.

სანამ შევუდგებოდეთ მათემატიკური მოდელის შექმნის პროცესს, ჯერ პასუხი უნდა გავცეს შემდეგ კითხვას:

არსებობს თუ არა ანალოგიური ამოცანების ამოხსნის ალგორითმები?

ცხადია, თუ ამ კითხვას დადებითი პასუხი გაცემა, მაშინ ჩვენს წინაშე დასმული ამოცანა არსებითად მარტივდება. თუ პასუხი უარყოფითია, მაშინ პასუხი უნდა გავცეს მეორე კითხვას.

რა მათემატიკური აპარატის გამოყენება არის მიზანშეწონილი განსახილველი ამოცანისათვის?

ჩვენი მიზანია მათემატიკურ ენაზე ჩავწეროთ ის, რაც ვიცით ამოცანის შესახებ და ისიც, რის მოძებნასაც ვაპირებთ. მათემატიკური აპარატის შერჩევისას ჩვენ უნდა გავითვალისწინოთ მრავალი ფაქტორი, მაგალითად: მიღებული მათემატიკური ამოცანის ამოხსნის შესაძლებლობა, ალგორითმის ეფექტურობა (მაგალითად, კომპიუტერზე რეალიზაციის რეალური დრო) და მრავალი სხვა.

ახლა დავუბრუნდეთ კომივოიაჟორისთვის მგზავრობის ოპტიმალური მარშრუტის შედგენის ამოცანას და ყოველივე ზემოთქმულის გათვალისწინებით შევადგინოთ მათემატიკური მოდელი. თუმცა ეს ამოცანა საკმაოდ ცნობილ ამოცანათა რიცხვს მიეკუთვნება, მკითხველთა დიდი ნაწილი, ვფიქრობთ, პირველად ხვდება მას. ამასთან, გავითვალისწინებთ იმასაც, რომ ჩვენი მიზანია გამოყენებითი მათემატიკის მეთოდების დემონსტრირება, ამიტომ გავეცნობით, თუ როგორ ხდება მიღებული მათემატიკური ამოცანისათვის მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმის შედგენა.

ჩვენ მიერ დასმული კითხვებიდან, პირველს, გავცეთ უარყოფითი პასუხი. ე. ი. ჩავთვალოთ, რომ ჩვენთვის არაფერი არ არის ცნობილი ამ და ანალოგიური ამოცანების ამოხსნის ალგორითმების შესახებ.

ყველა ჩვენგანის წინაშე დასმულა ამოცანა მოგზაურობის ჩვენთვის მოსახერხებელი მარშრუტის შერჩევის შესახებ და ამ მიზნით გამოგვიყენებია რუკა ან რაიმე სქემა. ჩვენც სწორედ ეს გზა ავირჩიოთ დასმული ამოცანის მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად.

ქალაქის ფურცელზე წერტილებით აღვნიშნოთ ქალაქები. ეს გავაკეთოთ სქემატურად ისე, რომ სრულებით არაა აუცილებელი სქემაზე მანძილი i და j წერტილებს შორის (რომლებიც შეესაბამებიან i -ურ და j -ურ ქალაქებს) იყოს ამ ორ ქალაქს შორის მგზავრობის C_{ij} ღირებულების პროპორციული. შევაერთოთ ეს წერტილები მონაკვეთებით და i და j ქალაქების შემაერთებელ მონაკვეთზე აღვნიშნოთ შესაბამისი „წონა“ – მგზავრობის ღირებულება C_{ij} . სქემა, რომელსაც ჩვენ მივიღებთ, წარმოადგენს მათემატიკაში ცნობილი გრაფის ან ქსელის კერძო შემთხვევას. ე. ი. ვიყენებთ გრაფთა თეორიის ელემენტებს.

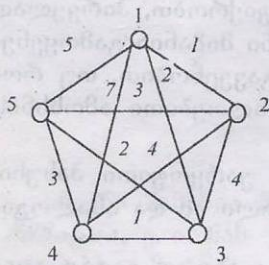
ამის შემდეგ შევადგინოთ ქალაქების სია ისე, რომ მივიღოთ ჩაკეტილი ციკლი. ამასთან, ეს სია უნდა იწყებოდეს და მთავრდებოდეს საბაზო ქალაქით და ყველა სხვა ქალაქი ამ სიაში შედიოდეს ერთხელ. ასეთი ციკლი შეესაბამება ურბნის უწყვეტ მოძრაობას ქსელის შემადგენელი მონაკვეთების გასწვრივ, ისე, რომ იგი თითოეულ წერტილს გაივლის მხოლოდ ერთხელ და მოძრაობას დამთავრებს საწყის წერტილში. ერთ ასეთ ციკლს ვუწოდოთ გური. გურის დი-

რებულება განისაზღვრება ყველა გავლილი წიბოს წონების ჯამით. ახლა უკვე შეგვიძლია ჩამოვყალიბოთ მათემატიკური ამოცანა: ვიპოვოთ ტური, რომლის ღირებულებაც უმცირესია.

თვალსაჩინოებისათვის განვიხილოთ მაგალითი: დავუშვათ, რომ კომივოიაჟორის სამოქმედო გერიტორიაზე არის ხუთი ქალაქი. თითოეული ქალაქიდან სხვა ქალაქში მგზავრობის ღირებულება წარმოვადგინოთ მაგრიცის სახით. აქვე დავუშვათ, რომ i -ური ქალაქიდან j -ურ ქალაქში მგზავრობის ღირებულება ემთხვევა j -ური ქალაქიდან i -ურ ქალაქში მგზავრობის ღირებულებას. თუმცა საზოგადოდ, ეს არ არის აუცილებელი. ცხადია, ამ შემთხვევაში მივიღებთ სიმეტრიულ მაგრიცას, რომლის დიაგონალიც შედგენილია ნულოვანი ელემენტებისაგან. მოვიყვანოთ ასეთი (1.11) მაგრიცის კონკრეტული მაგალითი, მივანიჭებთ რა $C_{ij}(i \neq j)$ ელემენტებს გარკვეულ მნიშვნელობებს:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \text{ქ} & \text{ა} & \text{ლ} & \text{ა} & \text{ქ} & \text{ი} \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
 \hline
 \text{ქ} & 1 & 0 & 1 & 2 & 7 & 5 \\
 \text{ა} & 2 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\
 \text{ლ} & 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\
 \text{ა} & 4 & 7 & 4 & 1 & 0 & 3 \\
 \text{ქ} & 5 & 5 & 3 & 2 & 3 & 0 \\
 \text{ი} & & & & & &
 \end{array} \quad (1.12)$$

ამოცანათ აგრეთვე შესაბამისი ქსელი (ნახ. 13).



ნახ. 13

მაგალითისათვის მოყვანილ ქსელში ერთ-ერთი ტური

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1, \quad (1.13)$$

რომლის ღირებულებაა $5 + 2 + 1 + 4 + 1 = 13$.

ჩვენ მიერ განხილული ეს ამოცანა ლიგურაგურაში ცნობილია კომივოიაჟორის ამოცანის სახელწოდებით. ის წარმოადგენს იმ ამოცანების ერთ-ერთ მაგალითს, რომლებიც ადვილად შეიძლება აღიწეროს მათემატიკური მოდელის საშუალებით, მაგრამ რომლის ამოხსნაც დიდ, ზოგჯერ გადაუღაბავ სიმძლეებთან არის დაკავშირებული. ამ მოსაზრების სისწორეში ჩვენ ცოტა ქვემოთ დავრწმუნდებით.

2.3 ამოცანის მუსტი ამოხსნის ETS-ალგორითმი. მას შემდეგ,

რაც დასმულ იქნა ამოცანა და ამ ამოცანისათვის შედგენილ იქნა მათემატიკური მოდელი, საჭიროა ავსაგოთ მიღებული მათემატიკური ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი.

მოცემული n ქალაქი ნებისმიერი წესით გადავნიშნოთ ნაგურალური რიცხვებით 1 -დან n -მდე ისე, რომ საბაზისო ქალაქს მივანიჭოთ ნომერი n . მაშასადამე, ყოველ ტურს შეესაბამება ნაგურალური რიცხვების $1, 2, \dots, n-1$ გადანაცვლება, ამავე დროს, ყოველი გადანაცვლება განსაზღვრავს გარკვეულ ერთადერთ ტურს. ამრიგად, ტურების სიმრავლესა და გადანაცვლებათა სიმრავლეს შორის დამყარდა ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. ყოველი მოცემული გადანაცვლებისათვის შეიძლება ადვილად ავსაგოთ შესაბამისი ტური და, ამავე დროს, გამოვთვალოთ მისი ღირებულება, რომელსაც მსჯელობის სიმარტივისთვის ვუწოდოთ გადანაცვლების ღირებულებაც.

გადავნიშნოთ პირველი $n - 1$ ნაგურალური რიცხვის ყველა შესაძლო გადანაცვლება და ყოველი გადანაცვლებისათვის გამოვთვალოთ მისი ღირებულება. თუ მეორე გადანაცვლების ღირებულება ნაკლებია პირველი გადანაცვლების ღირებულებაზე, მაშინ დავიმახსოვროთ მეორე გადანაცვლება, თუ არაა დავიმახსოვროთ პირველი, შემდეგ, თუ მესამე გადანაცვლების ღირებულება ნაკლებია დამახსოვრებული გადანაცვლების ღირებულებაზე, მაშინ დავიმახსოვროთ მესამე გადანაცვლება, თუ არაა წინა ეტაპზე დამახსოვრებული გადანაცვლების ღირებულება შევადაროთ მეოთხე გადანაცვლების ღირებულებას და ა. შ. დავამუშავებთ რა ასეთნაირად ყველა გადანაცვლებას, ვთვლით, რომ ალგორითმის ბოლო ეტაპზე მივიღებთ გურს მინიმალური სატრანსპორტო დანახარჯით.

ამ ალგორითმს *ამომწურავ კომივოიაჟორს* (ETS-ალგორითმს) უწოდებენ. კომპიუტერზე მისი რეალიზაციის პროგრამის შედგენა არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს.

შემდეგ ეტაპს წარმოადგენს ალგორითმის *სისწორის* შემოწმება. ძალზე მნიშვნელოვანია ალგორითმის სისწორის დამტკიცება თეორიული გამოკვლევების საშუალებებით, მაგრამ ეს ხშირად დიდ სიძნელებთან არის დაკავშირებული, რადგან მოითხოვს საკმაოდ მძლავრი და თანამედროვე მათემატიკური აპარატის გამოყენებას. არ არის გამორიცხული ის შემთხვევაც, როდესაც მკვლევრები ვერ ახერხებენ თეორიულად ალგორითმის სისწორის დასაბუთებას და იძულებულნი არიან ალგორითმის სისწორე *სატესტო* ამოცანების საშუალებით შეამოწმონ: მას შემდეგ, რაც შედგება პროგრამა, იღებენ სატესტო ამოცანას (ე. ი. ამოცანას, რომლის ამონახსნიც ცნობილია) და ახდენენ ამ ამოცანის ამოხსნისათვის შერჩეული ალგორითმის რეალიზაციას კომპიუტერზე. აღვნიშნოთ, რომ ეს მეთოდი არ არის სრულყოფილი — შეიძლება ალგორითმმა კარგად გაართვას თავი სატესტო ამოცანებს, მაგრამ არ არის გამორიცხული, რომ აღმოჩნდება ისეთი ამოცანა, რომლის ამოხსნაც ამ ალგორითმის საშუალებით ვერ მოხერხდება.

განხილული ამომწურავი კომივოიაჟორის ალგორითმი იმდენად მარტივია, რომ მისი სისწორის დამტკიცება ელემენტარულია. რადგან ხდება ყოველი გურის შემოწმება, ამიტომ შემოწმდება ის გურიც, რომელსაც გააჩნია მინიმალური ღირებულება, და როგორც კი დადგება მისი რიგი, ის იქნება დამახსოვრებული. ეს გური არ იქნება უკუგდებული, რადგან ეს მოხდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ იარსებებს გური უფრო დაბალი ღირებულებით.

ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ ალგორითმის *სისწორიდან* ჯერ კიდევ არ გამომდინარეობს მისი *ეფექტურობა*. უფრო მეტიც, ხშირად ამომწურავი ალგორითმების ეფექტურობა, როგორც წესი, საკმაოდ დაბალია.

განვიხილოთ ალგორითმის ეფექტურობის ერთ-ერთი კრიტერიუმი — *ოპერაციების რაოდენობა*, რომელიც საჭიროა მოცემული ალგორითმის რეალიზაციისათვის კომპიუტერზე. ETS-ალგორითმი, თუ ის გამოიყენება n ქალაქისათვის, ჩვენგან მოითხოვს პირველი $n - 1$ ნაგურალური რიცხვის ყველა გადანაცვლების ჩამოთვლას. როგორც ცნობილია, ასეთ გადანაცვლებათა რაოდენობა გოლია $(n - 1)!$ -ის. ყოველი გურის ღირებულების გათვლისათვის საჭიროა $O(n)$ რაოდენობის არითმეტიკული ოპერაცია, ე. ი. ETS-ალგორითმის რეალიზაციისათვის სულ საჭიროა $O(n!)$ რაოდენობის არითმეტიკული ოპერაცია.

დავუშვათ, კომივოიაჟორის სამოქმედო უბანი შეიცავს 20 ქალაქს, ამ შემთხვევაში საჭირო იქნება $O(20!)$ რაოდენობის არითმეტიკული ოპერაციის ჩატარება. ვთქვათ, ჩვენს განკარგულებაშია კომპიუტერი, რომელიც წამში აკეთებს 10^7 რაოდენობის ელემენტარულ ოპერაციას (შეკრება, გამრავლება, შედარება,

მაგრიცის ელემენტის მოძებნა და ა. შ.). რადგან $20! \approx 2 \cdot 10^{18}$, მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ დასმული ამოცანის ამოსახსნელად 20 ქალაქის შემთხვევაში საჭირო იქნება დაახლოებით 70 საუკუნე. თუ ქალაქების რაოდენობა 40-ის ტოლია, მაშინ ამოცანის ამოსახსნათვის საჭირო დრო აღემატება დედამიწაზე სიცოცხლის არსებობის ასაკს (4 მილიონ საუკუნეს).

რასაკვირველია, ალგორითმის ეფექტურობის ეს ანალიზი საკმარისია იმისათვის, რომ ETS-ალგორითმმა, ქალაქების საკმარისად დიდი რაოდენობის შემთხვევაში დაკარგოს რეპუტაცია. ამიტომ ბუნებრივად გაჩნდა მოთხოვნილება შეიქმნას ისეთი ალგორითმები, რომელთა საშუალებებითაც მიიღება, ოპტიმალური თუ არა, პრაქტიკულად მისაღები ამონახსნი მაინც. ჩვენ განვიხილავთ ერთ-ერთ ასეთ ალგორითმს.

2.4 ამოცანის მიახლოებითი ამოსხნის GTS-ალგორითმი. ჩვენ განვიხილავთ კომივოიაჟორის ამოცანის ამოსხნის ერთ-ერთ *ევრისტიკულ* ალგორითმს. ევრისტიკული ალგორითმები ჩვეულებრივ ხასიათდებიან შემდეგი თვისებებით:

ა) ისინი ჩვეულებრივ პოულობენ „*კარგ ამონახსნს*“, თუმცა ეს ამონახსნი შეიძლება არც იყოს *ოპტიმალური*;

ბ) მისი რეალიზაცია არ არის დაკავშირებული დიდ *სიძნელეებთან*. მისი რეალიზაციისათვის *დახარჯული დრო გაცილებით ნაკლებია, ვიდრე ამას მოითხოვს მუსტი ალგორითმის* (ე. ი. ალგორითმის, რომელიც ვარანტირებულად იძლევა ოპტიმალურ ამონახსნს) რეალიზაცია.

ცნება „*კარგი ამონახსნი*“ პირობითია. ეს ცნება განიცდის ცვლილებას სხვადასხვა ამოცანის განხილვისას. ასე მაგალითად, თუ რომელიმე ამოცანის ამონახსნის მოსაძებნად არსებული ყველა ცნობილი მუსტი ალგორითმის რეალიზაცია მოითხოვს მანქანურ დროს, რომელიც წლებით იზომება (როგორც ამას ჰქონდა ადგილი კომივოიაჟორის ამოცანის განხილვისას 20 ქალაქის შემთხვევაში), მაშინ ჩვენ უნდა დავკმაყოფილდეთ ამოცანის „*მიახლოებითი ამონახსნით*“, რომლის მიღებაც შესაძლებელია დროის ჩვენთვის სასურველ მონაკვეთში. ცნება „*მიახლოებითი ამონახსნი*“ აგრეთვე პირობითია. ყოველი კონკრეტული ამოცანის განხილვისას ეს ცნებაც მოითხოვს დაზუსტებას.

შეგნიშნავთ, რომ არ არსებობს არავითარი უნივერსალური სტრუქტურა, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია ევრისტიკული ალგორითმების აღწერა, მაგრამ შეიძლება ჩამოვყავალიბოთ ის მოთხოვნები, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ალგორითმი ეს მოთხოვნები ღვეყოთ ორ კლასად:

1) *მოთხოვნები, რომელთა მიმართაც შეიძლება კომპრომისზე წასვლა;*

2) *მოთხოვნები, რომლებიც აუცილებლად უნდა დაკმაყოფილდეს.* ადგილი დასანახია, რომ ეს მოთხოვნები შესაბამისად ზემოთ აღნიშნულ ა) და ბ) მოთხოვნების განზოგადებაა.

ყოველივე ზემოთქმულის გათვალისწინებით, ავაგოთ ერთი ევრისტიკული ალგორითმი კომივოიაჟორის ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის მოსაძებნად.

ამ მიახლოებითი ალგორითმის (GTS-ალგორითმის) იდეა მდგომარეობს შემდეგში: იგი განსახილველ ამოცანას დაიყვანს *კერძო მიზნების ერთობლიობაზე* – ყოველ ბიჯზე ვიპოვოთ მომდევნო ქალაქი, რომელამდეც მგზავრობა ყველაზე იაფია და გავემგზავროთ ამ ქალაქში. ამ ალგორითმის საშუალებით არ ხდება გლობალურად ოპტიმალური მოგზაურობის გეგმის შედგენა. უფრო მეტიც, შეიძლება ყველაზე ცუდი გეგმა შეირჩეს: მიმდინარე არჩევანი ხდება შემდგომი დანახარჯების გათვალისწინების გარეშე.

ამ ალგორითმის ტესტებზე შემოწმება არაფერს მოგვცემს, ვინაიდან არსებობს მაგალითი, როცა ალგორითმი გვაძლევს ოპტიმალურ ამონახსნს და არსებობს მაგალითი, როცა გვექნება ყველაზე ცუდი შედეგი. რეალური ამოცანის შემთხვევაში, როცა ქალაქების რაოდენობა დიდია, თუ GTS ალგორითმით მიღებული პასუხი, დანახარჯების თვალსაზრისით, აკმაყოფილებს კომპოზიციურს, მაშინ ასეთი ამონახსნი შეიძლება „*კარგ ამონახსნად*“ ჩაითვალოს და პრაქტიკაში განხორციელდეს შერჩეული გეგმა.

თუ ამ მიახლოებით ალგორითმს გამოვიყენებთ ჩვენ მიერ ხუთი ქალაქის შემთხვევაში განხილული ამოცანისათვის, იგი შეარჩევს შემდეგ გურს:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1. \quad (1.14)$$

როგორც ვხედავთ, ეს გური განსხვავდება ოპტიმალური (1.13) გურისაგან. მისი ღირებულებაა 14, მაშინ როდესაც ოპტიმალური გურის ღირებულებაა 13. ამ შემთხვევაში GTS-ალგორითმი იძლევა ოპტიმალური ამონახსნის შესაძლოდ კარგ მიახლოებას.

ცხადია, რომ GTS-ალგორითმისათვის პროგრამის შედგენა არ არის პრობლემა. GTS-ალგორითმი საკმაოდ ეფექტურია სისწრაფის თვალსაზრისით: n -ქალაქისათვის იგი მოითხოვს $O(n^2)$ რაოდენობის არითმეტიკული ოპერაციის შესრულებას.

GTS-ალგორითმი საკმაოდ კარგი ევრისტიკული ალგორითმია კომპოზიციურის ამოცანის ამოსახსნელად. რადგან ETS-ალგორითმი (ამომწურავი კომპოზიციური) ძალზე არაეფექტურია მისი რეალიზაციისათვის საჭირო არითმეტიკული ოპერაციების რაოდენობის თვალსაზრისით, ამ შემთხვევაში, ეპითეტი „*კარგი*“ მიუთითებს მხოლოდ იმ ფაქტზე, რომ GTS-ალგორითმი *ერთ-ერთი საუკეთესო* არსებულ ალგორითმებს შორის n -ის საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისათვის.

GTS-ალგორითმის ხარისხი შეიძლება გაუმჯობესდეს უბრალო მოდიფიკაციის შედეგად. ამ ალგორითმის ყველაზე არსებით ნაკლს წარმოადგენს ის გარემოება, რომ საწყის ეტაპებზე ვირჩევთ რა წიბოებს ყველაზე დაბალი ღირებულებებით, შემდეგ ეტაპებზე ალგორითმმა შეიძლება მიგვიყვანოს ისეთი წიბოების ამორჩევის აუცილებლობამდე, რომლებიც ყველაზე ძვირადღირებულნი არიან.

ამ გარემოების გასაუმჯობესებლად შეიძლება მოვახდინოთ ალგორითმის შემდეგი მოდიფიკაცია: შეირჩეს p რაოდენობის, საბაზისო ქალაქისგან განსხვავებული, საწყისი ქალაქი ($p < n$) შემდეგი პრინციპის მიხედვით: ჯერ ვიპოვოთ ქალაქი, რომელამდეც მგზავრობა ყველაზე იაფია საბაზისო ქალაქიდან (ასეთი ქალაქი შეიძლება რამდენიმეც იყოს), შემდეგ ვიპოვოთ მეორე ქალაქი, რომელიც, ღირებულების თვალსაზრისით, უკეთესია, ვიდრე დანარჩენი ქალაქები და ა. შ. ამ პრინციპით შევარჩიოთ საწყისი p ქალაქი და ყველა მათგანისათვის მოვახდინოთ GTS-ალგორითმის რეალიზაცია. ამის შედეგად მივიღებთ p რაოდენობის გურს, საიდანაც უნდა შეირჩეს ოპტიმალური გური. ამ მოდიფიცირებული ალგორითმის რეალიზაციისათვის საჭიროა $O(p \cdot n^2)$ რაოდენობის არითმეტიკული ოპერაცია. მოდიფიცირებული GTS-ალგორითმის გამოყენების შედეგად საკმაოდ დიდია იმის შესაძლებლობა, რომ ჩვენ მივიღებთ GTS-ალგორითმის შედეგად მიღებულ ამონახსნთან შედარებით ოპტიმალურ ამონახსნს (თუმცა გლობალური თვალსაზრისით ეს ამონახსნი შეიძლება არც იყოს ოპტიმალური).

შესაძლებელია ამ ალგორითმის სხვა მოდიფიკაციების განხილვაც, მაგრამ ეს არ შეადგენს ჩვენი წიგნის ამოცანას. დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია დაწვრილებითი ინფორმაცია ამ ამოცანის შესახებ მიიღოს სპეციალურ ლიტერატურაში, რომელიც ამ პრობლემებისადმი მიძღვნილი. ჩვენი ამრით, კომპიუტერული ამოცანა წარმოადგენს კარგ ილუსტრაციას იმისათვის, რომ გავერკვეთ მათემატიკური მოდელირების *პრინციპების არსში* და კარგად წარმოვიდგინოთ *ალგორითმის როლი* მიღებული მათემატიკური ამოცანის ამონახსნის მოძებნის პროცესში.

§3. დელამინის გელაპირიდან ჰორიზონტისაღმე კუთხით ბასროლილი სხეულის მოძრაობის მათემატიკური მოდელირება

3.1 ამოცანის დასმა. ვთქვათ, m მასის მქონე სხეულს დელამიწაზე მიანიჭეს ჰორიზონტისაღმე α_0 კუთხით მიმართული v_0 სიდიდის მქონე საწყისი სიჩქარე. ჩვენი მიზანია დავადგინოთ სხეულის მოძრაობის გრაფიკორია, ვიპოვოთ ასვლის მაქსიმალური სიმაღლე და ფრენის სიშორე (მანძილი საწყის და საბოლოო მდებარეობებს შორის). შევნიშნავთ, რომ ამ ამოცანის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ვერტიკალურად ზევით ასროლილი სხეულის მოძრაობის მახასიათებელი სიდიდეების დადგენა; ამ შემთხვევაში $\alpha_0 = 90^\circ$.

3.2 ფიზიკური ვითარების ანალიზი. ერთი შეხედვით, ასე კონკრეტულად დასმული ამოცანისთვისაც კი ბევრი ისეთი დეტალია დასაბუხებელი, რომელიც არსებითია შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნისათვის. კერძოდ:

ა) პირველი კითხვა, რომელსაც უნდა გავცეთ პასუხი, მდგომარეობს იმაში, რომ დავადგინოთ *მუდმივია თუ ცვლადი სხეულის მასა* მოძრაობის განმავლობაში? ცხადია, თუ განსახილველი სხეული რაკეტას წარმოადგენს, მაშინ მისი მასა ცვალებადი იქნება საწვავის ხარჯვის გამო და საჭიროა ვიცოდეთ რაკეტის მასის დროზე დამოკიდებულება: $m = m(t)$.

თუკი სხეული კატაპულტიდან გატყორცნილ ქვას ან ქვემეხიდან გატყორცნილ ჭურვს წარმოადგენს, მაშინ დასმული ამოცანისათვის მასა შეიძლება მუდმივად ჩავთვალოთ.

ბ) რა მიმართებაშია საწყისი v_0 სიჩქარის მნიშვნელობა რაიმე „სტანდარტულ“, ვთქვათ, ჰაერში ბგერის გავრცელების, სიჩქარესთან?

მართალია, თვით ბგერის გავრცელების სიჩქარე ჰაერში დამოკიდებულია ჰაერის მდგომარეობაზე (ტემპერატურა, წნევა, სიმკვრივე), მაგრამ შესაძლებლად შეიძლება ავირიხოთ ჰაერში 0°C -ის დროს ბგერის გავრცელების სიჩქარე, რომელიც უდრის $c = 331$ მ/წმ-ს (თუ ტემპერატურა 15°C -ია, მაშინ $c = 340$ მ/წმ).

თუ $v_0 < c$, მაშინ, ჯერ ერთი, შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ სხეულის მოძრაობის პერიოდში დელამიწის დელამური ბრუნვით გამოწვეული მისი ბელაპირის წერტილების მიერ გავლილი მანძილი *უმნიშვნელოა* და დელამიწა შეიძლება განვიხილოთ *უძრავ ათვლის სისტემა* (დელამიწა – ინერციული ათვლის სისტემა), მეორეც, ამ პირობებში ფრენის სიშორის შესაბამისი, დელამიწის ბელაპირზე აღებული რკალის სიმრუდე, უმნიშვნელოა და დელამიწის ბელაპირი განვიხილოთ, როგორც *სიბრტყე*.

თუ $v_0 \geq c$, მაშინ უკვე საჭირო იქნება დელამიწის ბელაპირის *სფერობური ფორმისა* და მისი *დელამური მოძრაობის* გათვალისწინება (დელამიწა – არაინერციული ათვლის სისტემა).

გ) ამის შემდეგ უნდა გავარკვეოთ კიდევ ერთი უმნიშვნელოვანესი საკითხი: რა მიზეზები (ან მიზეზები) იწვევს სხეულის საწყისი სიჩქარის შეცვლას? ცხადია, რომ, ვინაიდან, ჩვენი სხეული დედამიწის ზედაპირიდან იწყებს მოძრაობას, მასზე იმოქმედებს სიმძიმის ძალა.

$$P = ma. \quad (1.15)$$

მუდმივია თუ ცვალებადი ეს ძალა? პასუხი ამ კითხვამდე დამოკიდებული იქნება, ერთი მხრივ, იმაზე, მუდმივია თუ ცვალებადი სხეულის მასა, და, მეორე მხრივ, იმაზე, თუ როგორია ასვლის სიმაღლე. ჩვენ უკვე გვეტონდა საქმე დედამიწის მახლობლად თავისუფალი ვარდნის აჩქარების გამოსათვლელ ფორმულასთან (იხ. (1.7)). დედამიწის ზედაპირიდან h სიმაღლეზე კი სამართლიანია ფორმულა

$$a = G \frac{M}{(R_0 + h)^2}, \quad (1.16)$$

სადაც G გრავიტაციული მუდმივია, M - დედამიწის მასა, R_0 - მისი რადიუსი და h - დედამიწის ზედაპირიდან სხეულის დაშორება. მაშასადამე, თუ $h \ll R_0$, მაშინ a შეგვიძლია ჩავთვალოთ მუდმივად ($a = g$), სხვა შემთხვევებში კი - ცვალებადად.

აქ უნდა შევნიშნოთ, რომ სიმუსტე, რომლითაც მოითხოვება გამოთვლების ჩატარება, განაპირობებს (1.7) ფორმულის სამართლიანობის საზღვრებს. ვთქვათ, a სიდიდის გამოთვლა საჭიროა 1% სიმუსტით. ვიპოვოთ სიმაღლის ისეთი ზღვრული მნიშვნელობა h_m , რომ როდესაც $h \leq h_m$, განსხვავება a და g სიდიდეებს შორის, ე. ი. სხვაობა $g - a$ არ აღემატებოდეს $0,01g$ -ს:

$$g - a < 0,01a.$$

ამ უკანასკნელ უგოლობაში შევიგანოთ g -ს და a -ს მნიშვნელობები (1.7) და (1.16) ფორმულებიდან:

$$G \frac{M}{R_0^2} - G \frac{M}{(R_0 + h)^2} < 0,01G \frac{M}{(R_0 + h)^2},$$

საიდანაც ელემენტარული გარდაქმნებით მივიღებთ, რომ

$$(R_0 + h)^2 < 1,01R_0^2$$

თუ ამ უგოლობის ამოხსნისას გავითვალისწინებთ, რომ სფერულ ბირთვად განხილული დედამიწის რადიუსი $R_0 \approx 6400$ კმ-ს, h -სთვის მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$h < h_m \approx 32 \text{ კმ}. \quad (1.17)$$

ამრიგად, 32 კმ-ის სიმაღლემდე ჩვენ შეგვიძლია ერთი პროცენტის სიმუსტით თავისუფალი ვარდნის აჩქარება ჩავთვალოთ მუდმივად. ამიგომ, ცხადია, რომ თუ ჩვენს ამოცანაში მოცემული საწყისი სიჩქარე უზრუნველყოფს სხეულის ასვლას 32 კმ სიმაღლეზე გვეით, მაშინ უკვე არ შეიძლება თავისუფალი ვარდნის აჩქარების მუდმივად ჩათვლა.

საწყისი სიჩქარის შეცვლის მეორე მიზეზი შეიძლება იყოს წინააღობის ძალა, რომელიც ყოველთვის აღიძვრება, თუ ერთი სხეული მეორეს ეხება და მოძრაობს მის მიმართ. განსახილველ ამოცანაში სხეული მოძრაობს ჰაერში და ჰაერის მხრიდან განიცდის წინააღობის F ძალის მოქმედებას. შევნიშნოთ: თუ

$F \ll P$, მაშინ წინალობის ძალა შეიძლება არ იქნეს გათვალისწინებული, სხვა შემთხვევებში კი აუცილებელია მისი მხედველობაში მიღება. ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ ჰაერის წინააღმდეგობის ფაქტორის გავლენას სხეულის მოძრაობაზე, ახლა კი ჩავთვალოთ, რომ $F \ll P$.

მესამე მიზეზი, რამაც საწყისი სიჩქარის შეცვლა შეიძლება გამოიწვიოს, არის *გვერდითი ქარის* მხრიდან მოქმედი ძალა. თუ ასეთი ქარი არ ქრის ან მისი მხრიდან მოქმედი ძალა შეიძლება უგულვებელყოთ (სიმძიმის ძალასთან შედარებით), მაშინ გატყორცნილი სხეულის ტრაექტორია ბრტყელი წირი იქნება.

რაკეტის მოძრაობის შემთხვევაში ჩვენ *მეოთხე* მიზეზიც უნდა გავითვალისწინოთ – ესაა რაკეტის *წევის ძალა*.

ისევე, როგორც §1-ში, სადაც ვიხილავდით სხეულის თავისუფალი ვარდნის პრობლემას, აქაც უნდა ავირჩიოთ *ათვის სისტემა*, რომლის მიმართაც განვიხილება სხეულის მოძრაობა.

ათვის სხეულად მივიჩნიოთ დედამიწა. დედამიწის ის წერტილი, საიდანაც გაისროლეს სხეული, ავირჩიოთ კოორდინატთა სათავედ, ჰორიზონტალურად მივმართოთ Ox ღერძი, ვერტიკალურად ზემოთ კი Oy ღერძი (ნახ. 14).

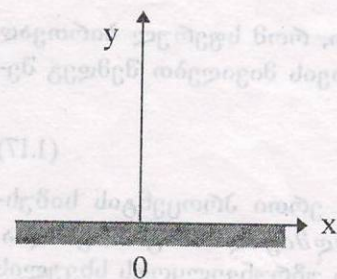
დროის ათვლა დავიწყოთ სხეულის გასროლის მომენტიდან.

დასმული ამოცანის გადაწყვეტა ნიშნავს, ვიპოვოთ გასროლილი სხეულის მდებარეობის დამოკიდებულება დროზე.

მაგრამ რა უნდა გვესმოდეს სხეულის მდებარეობის ქვეშ? საზოგადოდ სხეულს ხომ გააჩნია გარკვეული ფორმა და უჭირავს სივრცეში გარკვეული მოცულობა! ასე, რომ ერთი შეხედვით, სხეულის მდებარეობის ცოდნა მისი ყველა წერტილის მდებარეობის ცოდნას უნდა გულისხმობდეს. ჩავთვალოთ, რომ სხეული მოძრაობისას არ ბრუნავს. მაშინ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ მოძრაობისას სხეულის ყველა წერტილის ტრაექტორია ერთნაირი იქნება. ე. ი. სხეული ასრულებს *გადაგანით მოძრაობას*. ასეთი მოძრაობის დროს კი საკმარისია სხეულის ერთი რომელიმე წერტილის მოძრაობის შესწავლა: ვინაიდან ბრუნვა გამოვრიცხეთ, ამიგომ სხეულის სხვა წერტილების განლაგება არჩეული წერტილის მიმართ დროთა განმავლობაში არ შეიცვლება და ყოველთვის შეგვეძლება არჩეულ წერტილს „მივაშენოთ“ სხეულის დანარჩენი წერტილები.

ერთი სიგყვით, თვით სხეულის მდებარეობის დადგენის ნაცვლად ჩვენ განვიხილავთ ამ სხეულის ერთი წერტილის მდებარეობის პოენის ამოცანას. საზოგადოდ, თუ ამ წერტილს მივაწერთ სხეულის ზოგიერთ თვისებას – კერძოდ, მასას, მაშინ მას *ნივთიერ* ან *მაგერიალურ წერტილს* უწოდებენ.

ჩვენ მიერ განხილულ შემთხვევაში არ ვითვალისწინებთ სხეულის შიგნით მიმდინარე პროცესებს და საქმე გვაქვს გარკვეულ იდეალიზებულ ობიექტთან, რომელსაც არ გააჩნია *შინაგანი სტრუქტურა*. ცხადია, რომ ისეთი ობიექტები, როგორცაა პლანეტები, ქვები, ზარბაზნის ჭურვები, რაკეტები და სხვა სხეულები, არ წარმოადგენენ „მაგერიალურ წერტილებს“, მაგრამ ბევრ შემთხვევაში შეიძლება უგულვებელყოფილ იქნეს მათი შინაგანი სტრუქტურა, იქ მიმდინარე პროცესები და ჩავთვალოთ ისინი მაგერიალურ წერტილებად.



ნახ. 14

ამრიგად, ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, უკვე გაფაქტეთ ერთი მნიშვნელოვანი მიახლოება – სხეულის ნაცვლად განვიხილავთ მისი ზოგიერთი თვისების მაგარებელ მაგერიალურ წერტილს.

მაგერიალური წერტილი განსახილველი სხეულის ფიზიკური მოდელია.

გადავიდეთ ახლა იმ მიზეზების დეტალურ გამოკვლევებზე, რომლებიც, როგორც ითქვამს, მაგნიტული წერტილის მოძრაობის ხასიათს განსაზღვრავენ.

პირველ რიგში ესაა დედამიწის მიზიდულობის ძალა, რომელიც მის მახლობლად არსებულ ყველა სხეულზე მოქმედებს და ანიჭებს ვერტიკალურად ქვევით მიმართულ აჩქარებას. ეს აჩქარება წარმოადგენს გრავიტაციული ველის ინტენსივობის ბომას და იცვლება დედამიწის ზედაპირიდან სხეულის დამორებასთან ერთად. მაშასადამე, მუდმივი მასის სხეულზე მოქმედი დედამიწის მიზიდულობის ძალაც ცვალებადი იქნება და სხეულის მოძრაობის ხასიათზე გავლენას მოახდენს თავისუფალი ვარდნის აჩქარების მოდულის ცვალებადობა სიმალლის მიხედვით.

მეორე მიზეზი, რომელმაც შეიძლება გავლენა მოახდინოს სხეულის მოძრაობის ხასიათზე, არის დედამიწის ირგვლივ არსებული ჰაერის გარსის – ატმოსფეროს მხრიდან წინააღმდეგობა.

გავიხსენოთ, რომ თვითმფრინავიდან გადმომხგარი პარაშუტისტი დედამიწაზე ნარნარად ეშვება სიმძიმის ძალისა (რომელიც ამ შემთხვევაში აჩქარებს პარაშუტისტის მოძრაობას) და ჰაერის წინააღმდეგობის ძალის (რომელიც ანელებს პარაშუტისტის მოძრაობას) ერთობლივი მოქმედების შედეგად.

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ჰაერის წინააღმდეგობის გავლენას სხეულის მოძრაობის ხასიათზე. ჯერ კი შევისწავლით ვერტიკალურად ზემოთ ასროლილი სხეულის მოძრაობას ისე, რომ არ გავითვალისწინებთ ჰაერის წინააღმდეგობას.

3.3 ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის მოძრაობა. სხეულის ვერტიკალურად ზევით მოძრაობისათვის საჭიროა მას მივანიჭოთ ვერტიკალურად ზევით მიმართული v_0 საწყისი სიჩქარე. თუ OY საკოორდინატო ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ზევით, როგორც ეს ნახამ 1.4-ზეა, მაშინ v_0 ვექტორის v_{oy} პროექცია დადებითია ($v_{oy} > 0$), g ვექტორის პროექცია კი – უარყოფითი ($g_y = -g$).

რადგან ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის მოძრაობას შევისწავლით, არ გავამახვილებთ ყურადღებას იმაზე, რომ დედამიწასთან დაკავშირებული ათვლის სისტემა საზოგადოდ არაინერციულია (ამის მიზეზია დედამიწის რთული მოძრაობა სივრცეში – წლიური ბრუნვა მზის ირგვლივ და დღეღამური ბრუნვა საკუთარი ღერძის გარშემო. დედამიწის დღეღამური ბრუნვა პრაქტიკულად მუდმივი Ω კუთხური სიჩქარით წარმოებს. ერთი სრული ბრუნვის შესრულებას სჭირდება 23სთ 56წთ და 4წმ და $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{წმ}^{-1}$). თუ შევისწავლება ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა, მაშინ ამ ფაქტორების განხილვა ხშირად აუცილებლობით იქნება განპირობებული.

აქ მაინც შევნიშნავთ, რომ სხეულის მოძრაობის დროის განმავლობაში დედამიწის მზის ირგვლივ ორბიტაზე მოძრაობა კარგი სიზუსტით შეიძლება ჩაითვალოს წრფივად და თანაბრად და, ამდენად, მასთან დაკავშირებული ათვლის სისტემაც – ინერციულად. საზოგადოდ, სხეულის დედამიწის ზედაპირის გასწვრივ გადაადგილებისას, მის მოძრაობაზე, დედამიწის დღეღამური ბრუნვის გავლენის შეფასების აუცილებლობაზე შემდეგი ფაქტიც მიუთითებს. სწორედ დღეღამური ბრუნვის შედეგია, რომ ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში მდინარეები მოძრაობისას მარჯვნივ იხრებიან და უფრო მეტად ჩამორეცხავენ მარჯვენა ნაპირს, ვიდრე მარცხენას. ამიგომაც მარჯვენა ნაპირი დედამიწის ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში ყოველთვის უფრო ციცაბოა, სამხრეთ ნახევარსფეროში კი პირიქით – მარცხენა ნაპირია უფრო ციცაბო, ვინაიდან იქ მოძრაობის სხეული – მდინარე მოძრაობისას ყოველთვის მარცხნივ იხრება.

ამრიგად, ჩვენ ვუშვებთ, რომ ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის მოძრაობაზე გავლენას ახდენს მხოლოდ დედამიწის მიზიდულობის ანუ სიმძიმის ძალა. ეს ძალა არის სიჩქარის ცვლილების და, მაშასადამე, აჩქარების გამომწვევი მიზეზი.

ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ არჩეულ ათვლის სისტემაში (იხ. ნახ. 1.4) მაგერიალური წერტილის მოძრაობის დამახასიათებელი *კინემატიკური* სიდიდეები – მყისიერი კოორდინატი $y(t)$, სიჩქარის გვეგმილი $v_y(t)$ და აჩქარების გვეგმილი $a_y(t)$ შემდეგი დიფერენციალური განტოლებებით არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული:

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad (1.18)$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}. \quad (1.19)$$

გემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარე, ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის აჩქარება თავისუფალი ვარდნის აჩქარების ტოლია და დროზე არაა დამოკიდებული. მაშასადამე,

$$a_y = g_y = -g.$$

ამიტომ (1.19) განტოლება შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g.$$

ამ განტოლების ამოხსნა კი

$$v_y(0) = v_0 \quad (1.20)$$

საწყისი პირობით არაერთარ სიძნელეს არ წარმოადგენს: საკმარისია მისი ინტეგრება დროით. მართლაც,

$$\int_0^t \frac{dv_y}{dt} dt = - \int_0^t g dt,$$

აქედან

$$v_y(t) - v_y(0) = -gt.$$

და საბოლოოდ, (1.20)-ის გათვალისწინებით გვექნება:

$$v_y(t) = v_0 - gt. \quad (1.21)$$

ამ ფორმულით შეიძლება გამოითვალოს ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის მყისი სიჩქარე დროის *ნებისმიერ* მომენტში.

გამოვიყვანოთ, ახლა კოორდინატის გამოსათვლელი ფორმულა. ამისათვის (1.21) გამოსახულება შევიგანოთ (1.18) განტოლებაში და აქაც ჩავატაროთ ინტეგრება დროით. მაშინ, ისევე, როგორც გვეით, მივიღებთ:

$$\int_0^t \frac{dy}{dt} dt = \int_0^t (v_0 - g\tau) dt,$$

საიდანაც

$$y(t) - y(0) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.22)$$

თუ ახლა გავიხსენებთ, რომ საწყის მომენტში სხეული კოორდინატა სათავეში იმყოფებოდა, და მაშასადამე

$$y(0) = 0,$$

მაშინ (1.22) საბოლოოდ მიიღებს სახეს:

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.23)$$

ეს ფორმულა წარმოადგენს ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის მოძრაობის კანონს. მისი საშუალებით გამოითვლება სხეულის მდებარეობა დროის ნებისმიერ t მომენტში. ამით 3.3 პუნქტში დასმული ამოცანა გადაწყვეტილია.

აღსანიშნავია, რომ მიღებული ფორმულა შესაძლებლობას იძლევა პასუხი გავცეთ სხვა კითხვებსაც. მაგალითად, ვიპოვოთ დროის ის t მომენტი, როდესაც სხეული იმყოფება რაიმე $y = h$ სიმაღლეზე. ამისათვის (1.23) გოლობაში $y(t)$ -ს ნაცვლად ჩავსვათ h , მივიღებთ t -ს მიმართ შემდეგ კვადრატულ განტოლებას:

$$t^2 - \frac{2v_0}{g}t + \frac{2h}{g} = 0. \quad (1.24)$$

იმის გამო, რომ დროის ათვლის მომენტი შევუთავსეთ სხეულის აგყორცნის მომენტს, (1.24)-დან მიღებული t -ს მნიშვნელობა წარმოადგენს სწორედ საძიებელი დროის მომენტს. კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტს აქვს სახე:

$$D = \frac{1}{g^2}(v_0^2 - 2gh).$$

განვიხილოთ რამდენიმე კონკრეტული ამოცანა ერთი და იმავე საწყისი სიჩქარით - $v_0 = 20$ მ/წმ. გამოთვლების სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ $g \approx 10$ მ/წმ².

ა) $h = 15$ მ, მაშინ

$$D = 1 > 0,$$

ე. ი. (1.20) განტოლებას აქვს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ამონახსნი: $t_1 = 1$ წმ, $t_2 = 3$ წმ,

ბ) $h = 20$ მ, მაშინ

$$D = 0,$$

ე. ი. (1.20) განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი: $t = 2$ წმ.

გ) $h = 25$ მ, მაშინ

$$D = -1 < 0,$$

ე. ი. (1.20) განტოლებას არა აქვს ნამდვილი ფესვები.

მიღებული შედეგების გაანალიზების შემდეგ, შეიძლება დავასკვნათ, რომ:

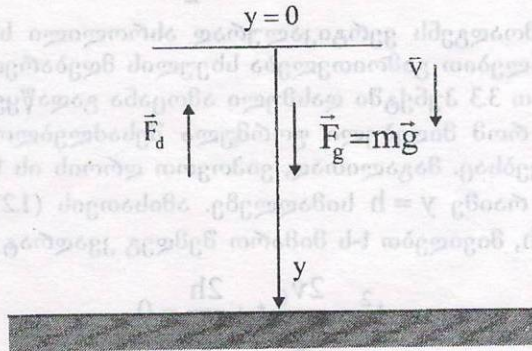
ა) სხეული იმყოფება $h = 15$ მ სიმაღლეზე ორჯერ: პირველად ზემოთ მოძრაობისას და მეორედ ქვემოთ მოძრაობისას.

ბ) $t = 2$ წმ შემდეგ სხეული აღწევს მაქსიმალურ სიმაღლეს $h = 20$ მ.

გ) განტოლების ამონახსნი არ არსებობს, ეს ნიშნავს, რომ სხეული ვერ მიადწევს 25მ სიმაღლეს.

3.4 სხეულის ვარდნა ჰაერის წინააღმდეგობის გათვალისწინებით. ჩვენ დაუბრუნდეთ §1-ში დასმულ ამოცანას, რომელშიც განხილული იყო ქვის ან სხვა სხეულის ვარდნის პროცესი, როდესაც არ ვითვალისწინებდით ჰაერის წინააღმდეგობას.

ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ სხეულის ვარდნის პროცესის მათემატიკური მოდელის აგებისას განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ჰაერის წინააღმდეგობის ფაქტორის გათვალისწინება. ეს მამუხრუჭებელი ძალა \vec{F}_d მიმართულია სხეულის მოძრაობის მიმართულების საწინააღმდეგოდ. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, როგორც ეს გამოსახულია ნახაზზე:



ნახ. 15

ამ შემთხვევაში სრული ძალის გეგმილი საკოორდინატო ღერძზე, რომელიც მოქმედებს მატერიალურ წერტილზე, შემდეგნაირად შეიძლება იქნეს ჩაწერილი:

$$F = ma = F_g - F_d = mg - F_d = P - F_d. \quad (1.25)$$

მოგად შემთხვევაში \vec{F}_d -ძალის დამოკიდებულება სხეულის ვარდნის სიჩქარეზე უნდა განისაზღვროს ექსპერიმენტულად, ჩავაგარებთ რა დაკვირვებათა სერიას ვარდნილ სხეულზე.

თუ სხეულის ვარდნისას სხეულის ვარდნის სიჩქარე არ აღემატება 300 მ/წმ და, ამავე დროს, არ არის მცირეც, მაშინ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალის განსაზღვრავად იყენებენ შემდეგ გამოსახულებას:

$$F_d = kv^2, \text{ სადაც } k = \frac{1}{2} C_y \rho S, \quad (1.26)$$

სადაც ρ -წარმოადგენს გარემოს სიმკვრივეს. მაგალითად ჰაერისათვის, თუ მისი ტემპერატურაა 15°C , ხოლო წნევა გოლია 760 მმ. მაშინ $\rho = \frac{1}{g} \frac{\text{კგ წმ}^2}{\text{გ}^4}$, S მ²

წარმოადგენს მოძრაობის პერპენდიკულარულ სიბრტყეზე სხეულის გეგმილის ფართობს, C_y წინააღმდეგობის უგანზომილებო კოეფიციენტი. მაგალითად, პარაშუტისათვის $C_y = 1,4$ -ს, სფეროსათვის $C_y = 0,15$ -ს და ა. შ. საბი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ (1.26) არ არის ფიზიკის მუსტი კანონი, არამედ წარმოადგენს ფენომენოლოგიურ გამოსახულებას, რომელიც მიახლოებით აღწერს F_d -ს - მამუხრუჭებელ ძალას სხეულის სიჩქარის ცვლილების გარკვეულ დიაპაზონში.

განვიხილოთ სხეულის ვარდნა H სიმაღლიდან, სადაც $H < 32$ კმ-ზე. ამ დაშვების შესახებ ჩვენ უკვე ვიმსჯელებთ 3.2 პუნქტში. გამოვიკვლიოთ სხეულის სიჩქარის დამოკიდებულება გავლილ მანძილზე, ე. ი. ვიპოვოთ $v(y)$ ფუნქცია. დავეუშვათ, რომ $v(0) = 0$. ამავე დროს ჩავთვალოთ, რომ ვარდნილი სხეულის

წონა P და ჰაერის სიმკვრივე ρ მუდმივი სიდიდეებია, რადგან $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt}$, ამ-

ასთან (1.18)-დან $\frac{dy}{dt} = v$, ამიტომ (1.19)-დან გვექნება $a = v \frac{dv}{dy}$. თუ ბოლო გამო-
სახულებას და (1.26)-ს გავითვალისწინებთ (1.25)-ში, მივიღებთ შემდეგ დიფერენ-
ციალურ განტოლებას:

$$\frac{P}{g} v \frac{dv}{dy} = P - \frac{1}{2} C_y \rho S v^2. \quad (1.27)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\frac{2P}{C_y \rho S} = b^2,$$

მაშინ (1.27) დიფერენციალურ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$v \frac{dv}{dy} = g \left(1 - \frac{v^2}{b^2} \right)$$

ან

$$\frac{v dv}{b^2 - v^2} = \frac{g}{b^2} dy$$

თუ ვაინტეგრებთ ტოლობის ორივე მხარეს, მივიღებთ:

$$\ln(b^2 - v^2) = -2 \frac{g}{b^2} y + C_1. \quad (1.28)$$

გავითვალისწინებთ რა საწყის პირობას $v(0) = 0$, დავადგენთ, რომ $C_1 = \ln b^2$. ამ ტოლობის გათვალისწინებით (1.28) ტოლობიდან შეიძლება დაეწ-
ერთ, რომ

$$\ln \frac{b^2 - v^2}{b^2} = -2 \frac{g}{b^2} y, \quad \frac{b^2 - v^2}{b^2} = e^{-\frac{2g}{b^2} y},$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$v = b \sqrt{1 - e^{-\frac{2g}{b^2} y}}. \quad (1.29)$$

(1.29) ფორმულა ამყარებს კავშირს ვარდნილი სხეულის მიერ გავლილ მან-
ძილსა და სიჩქარეს შორის.

ცხადია, რომ როდესაც y იზრდება, მაშინ ვარდნის სიჩქარე v სულ უფრო და
უფრო უახლოვდება მუდმივ b სიდიდეს. ამ სიდიდეს უწოდებენ ვარდნის მღვრულ
სიჩქარეს:

$$v_{\text{მღ.}} = b = \sqrt{\frac{2P}{C_y \rho S}}. \quad (1.30)$$

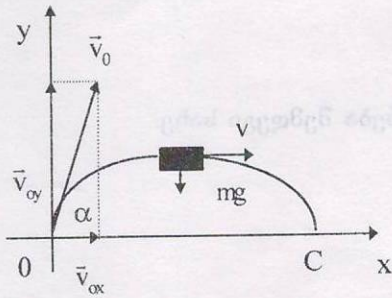
ამრიგად, თუ $v(0) = 0$, თავისუფლად ვარდნისას სხეულს არ შეუძლია გა-
ნავითაროს სიჩქარე, რომელიც აღემატება $v_{\text{მღ.}}$ -სიდიდეს. ცხადია, რომ ვარდნის
მღვრული სიჩქარე გაიზრდება სხეულის წონის ზრდისას და C_y , ρ , S -სიდიდეების
შემცირებისას.

ადვილი დასაბამია, რომ თუ (1.25)-ში გამოვიყენებთ (1.19) ფორმულას, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2} C_{\rho} \rho S v^2, \quad v(0) = 0, \quad (1.31)$$

საიდანაც შეიძლება დავადგინოთ ვარდნილი სხეულის სიჩქარე დროის ნებისმიერ მომენტში.

3.5 ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა. ვთქვათ, სხეული გასროლილია \vec{v}_0 სიჩქარით, რომელიც ჰორიზონტთან ადგენს α კუთხეს. ჩვენი მიზანია შევადგინოთ სხეულის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი. განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც მათემატიკური მოდელის შედგენისას არ იქნება გათვალისწინებული ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა. ისევე, როგორც ადრე, ჩვენ განვიხილავთ სხეულის ფიზიკურ მოდელს - მაგერიალურ წერტილს. დავუშვებთ აგრეთვე, რომ $g = \text{const}$, ხოლო სხეულის ასვლის სიმაღლე და მის მიერ გავლილი მანძილი დედამიწის რადიუსთან შედარებით მცირე სიდიდეებია. მიემართოთ კოორდინატთა სისტემის OX ღერძი ჰორიზონტის გასწვრივ, მისი პერპენდი-



ნახ. 1.6

კულარული მიმართულებით კი OY ღერძი. კოორდინატთა სათავე დავამთხვიოთ მაგერიალურ წერტილის საწყის მდებარეობას (იხ. ნახ. 1.6), მაშინ

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}.$$

სადაც $(v_x, v_y) = \vec{v}$, $(a_x, a_y) = \vec{a}$.

ნებისმიერი მდებარეობისას მაგერიალურ წერტილზე მოქმედებს მხოლოდ ერთი ძალა - მისი წონა $P = mg$. ამიტომ ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად, თუ განვიხილეთ ვექტორების გვემილებს საკოორდინატო ღერძებზე, შეიძლება

დავწეროთ $m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg$, სადაც x და y წარმოადგენენ მაგერიალური წერტილის კოორდინატებს, ეს განტოლებები, ცხადია, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad (1.32)$$

საწყის პირობებს ამ განტოლებებისათვის აქვს სახე: თუ $t = 0$, მაშინ

$$x = 0, \quad y = 0, \quad v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha. \quad (1.33)$$

ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ (1.32), (1.33) ამოცანის ამონახსნი შეიძლება ჩაწერილ იქნეს შემდეგი სახით:

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y(t) = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.34)$$

მას შემდეგ, რაც ჩვენ მიერ ნაპოვნ იქნა მაგერიალური წერტილის მოძრაობის განგოლება, შეიძლება გავაკეთოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი დასკვნა გასროლილი სხეულის მოძრაობის შესახებ:

ა) **მაგერიალური წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია.** (134) გამოსახულებიდან თუ გამოვირცხავთ t -დროს, მივიღებთ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიის განგოლებას:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (135)$$

ეს არის პარაბოლის განგოლება, რომლის ღერძიც პარალელურია OY ღერძის. ამრიგად, ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეული უჭაერო სივრცეში მოძრაობს პარაბოლის გასწვრივ. ეს დასკვნა გააკეთა ჯერ კიდევ გალილეიმ.

ბ) **მაგერიალური წერტილის ფრენის სიშორე.** განვსაზღვროთ მაგერიალური წერტილის ფრენის სიშორე, რისთვისაც უნდა გაიზომოს OC მანძილი. (135) განგოლებაში დავუშვათ, რომ $y = 0$:

$$x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) = 0,$$

რის შედეგადაც მივიღებთ ტრაექტორიისა და OX ღერძის გადაკვეთის წერტილებს:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g}.$$

x_2 - წარმოადგენს C წერტილის კოორდინატს და, მამასადამე, მაგერიალური წერტილის ფრენის სიშორეს

$$OC = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (136)$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ ფრენის იგივე სიშორე მიიღება ისეთი β კუთხისთვისაც, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $2\beta = 180^\circ - 2\alpha$ ანუ $\beta = 90^\circ - \alpha$. ამიტომ მოცემული v_0 საწყისი სიჩქარის დროს სხეული მოხვდება C წერტილში ორი ტრაექტორიის საშუალებით, როდესაც $\alpha < 45^\circ$ და $\beta = 90^\circ - \alpha > 45^\circ$. ცხადია, რომ ფრენის უდიდესი სიშორე უჭაერო სივრცეში მიიღწევა, როდესაც $\alpha = 45^\circ$.

გ) **ტრაექტორიის მაქსიმალური სიმაღლე.** ტრაექტორიის მაქსიმალური სიმაღლის მოსაძებნად ჩვენ უნდა ვიპოვოთ $\max y(t)$. ამ მიზნით (134)-ის მეორე გოლობის საშუალებით ვიპოვოთ $y'(t)$ და გავუტოლოთ იგი ნულს

$$y'(t) = -gt + v_0 \sin \alpha = 0$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

შევიგანოთ t -ს ეს მნიშვნელობა (134)-ის მეორე გამოსახულებაში, რის შედეგადაც მივიღებთ ტრაექტორიის მაქსიმალურ სიმაღლეს

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

დ) მაგერიალური წერტილის მოძრაობის დრო (1.34)-ის პირველი გოლობიდან გამომდინარეობს, რომ მოძრაობის დრო T განისაზღვრება შემდეგი გოლობიდან:

$$OC = v_0 T \cos \alpha.$$

ე. ო.

$$\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = v_0 T \cos \alpha,$$

საიდანაც ვიპოვიტ, რომ

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha.$$

მაგერიალური წერტილის ფრენის უდიდესი სიშორისას ($\alpha = 45^\circ$), მივიღებთ გამოთვლილი სიდიდეების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$OC = \frac{v_0^2}{g}; \quad y_{\max} = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{1}{4} OC, \quad T = \frac{v_0}{g} \sqrt{2}. \quad (1.37)$$

მიღებული შედეგები პრაქტიკულად შეიძლება გამოვიყენოთ ჭურვების (რაკეტების) მოძრაობის გრაფიკორიის მახასიათებლების გამოსაკვლევადა, თუ სროლის სიშორე იცვლება ფარგლებში $200 \div 600$ კმ, რადგან ამ შემთხვევაში (თუ $\alpha \approx 45^\circ$) ჭურვი ძირითადად მოძრაობს სგრაგოსფეროში, სადაც შეიძლება უგულვებლყოფილ იქნეს ჰაერის წინააღმდეგობა. სროლის ნაკლები სიშორისას უკვე მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ჰაერის წინააღმდეგობის ფაქტორი, ხოლო თუ სროლის სიშორე აღემატება 600 კმ-ს, მაშინ უკვე არ შეიძლება მუდმივად ჩავთვალოთ სიმძიმის ძალა g . ამის შესახებ ჩვენ ზემოთ გვექონდა ლაპარაკი.

აქვე აღვნიშნავთ ერთ საინტერესო ფაქტს. ცნობილია, რომ მეორე მსოფლიო ომის დროს გერმანულ ჭურვს ფაუ-2-ს ვერტიკალური სტარტის შემდეგ 20 კმ-ის სიმაღლეზე ჰქონდა სიჩქარე $v_0 \approx 1700$ მ/წმ და კუთხე $\alpha \approx 45^\circ$ (ჭურვის მობრუნება ხდებოდა სპეციალური მოწყობილობების საშუალებით). ჭურვის შემდგომი მოძრაობა ხდებოდა პრაქტიკულად ისევე, როგორც ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულისა. მაშინ (1.37) ფორმულების თანახმად მივიღებთ:

$$OC \approx 300 \text{ კმ}, \quad y_{\max} = 75 \text{ კმ}, \quad T \approx 245 \text{ წმ}.$$

ეს შედეგები ძალზე კარგად ასახავენ ჭურვის მოძრაობის მახასიათებლებს. ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ (1.32) განტოლებები (1.33) საწყისი პირობებით, იმ დაშვების ფარგლებში, რაზეც აღრე გვექონდა ლაპარაკი, უჰაერო სივრცეში ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის საკმაოდ კარგ მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს.

აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ ჰაერის წინააღმდეგობის გარეშე ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა ამომწურავად შეისწავლა ვალილეიმ XVII საუკუნეში. ნიუტონმა კი მიზნად დაისახა ჰაერის წინააღმდეგობის გათვალისწინება. ამას პრაქტიკული მიზნები, ან სხვანაირად რომ ვთქვათ, სოციალური დაკვეთა ელო საფუძვლად. მართალია, დენთის გამოგონების შემდეგ შექმნილი პირველი ქვემეხები შორს იყვნენ სრულყოფილებისაგან, მაგრამ ისინი იძლეოდნენ სროლის საკმაოდ სიშორეს 1 კმ-ის რიგისას. ჰაერის წინააღმდეგობის უგულვებლყოფა ფრენის 1 კმ სიშორის განსაზღვრისას ამ შემთხვევაში

გვაძლევს 15%-იან ცლომილებას, რაც შეადგენს 150 მ-ს. ეს კი, ცხადია, ყოვლად მიუღებელი იყო არტილერიისტებისათვის.

ჩვენ ამ ეტაპზე არ განვიხილავთ ლაწვრილებით ჰაერის წინააღმდეგობის გავლენას ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მახასიათებლებზე. მხოლოდ მოვიყვანთ შესაბამის მათემატიკურ მოდელს.

განვიხილოთ m მასის მქონე სხეული, რომელსაც დედამიწაზე მიანიჭეს ჰორიზონტისადმი α_0 კუთხით მიმართული v_0 სიდიდის მქონე საწყისი სიჩქარე. მათემატიკურ წერტილზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა \vec{F}_g და მამუხრუჭებელი ძალა – ჰაერის წინააღმდეგობა \vec{F}_α , რომელიც \vec{v} ვექტორის მოპირდაპირეა. \vec{F}_α ვექტორის სიდიდე განვსაზღვროთ შემდეგი გამოსახულების საშუალებით $F_\alpha = kv^2$.

k კოეფიციენტის შესახებ ჩვენ აღრე გვექონდა ლაპარაკი, ხოლო $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, მაშინ ნიუტონის განტოლებებს სიჩქარის კომპონენტებისათვის ექნება სახე:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -F_\alpha \cos \alpha,$$

$$m \frac{dv_y}{dx} = -mg - F_\alpha \sin \alpha,$$

$$F_\alpha = kv^2.$$

რადგან $v_x = v \cos \alpha$, $v_y = v \sin \alpha$, ამიტომ ეს განტოლებები შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{dv_x}{dt} = -Avv_x, \quad A = \frac{k}{m} \quad (138)$$

$$\frac{dv_y}{dx} = -g - Avv_y.$$

საწყის პირობებს ამ განტოლებათა სისტემისათვის ექნება სახე:

$$v_x(0) = v_0 \cos \alpha, \quad v_y(0) = v_0 \sin \alpha. \quad (139)$$

(138), (139) ამოცანა წარმოადგენს დედამიწის ზედაპირიდან ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მათემატიკურ მოდელს, როცა მასში გათვალისწინებულია ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა.

ამრიგად, ჩვენ მიერ განხილული მაგალითების საშუალებით უკვე შეგვექმნა გარკვეული წარმოდგენა მათემატიკური მოდელირების მეთოდოლოგიაზე. ეს მაგალითები გამოირჩეოდნენ იმითაც, რომ მიღებული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნა შესაძლებელი იყო მუსტი ანალიზური მეთოდებით, რაც მნიშვნელოვნად ამარტივებდა ჩვენს წინაშე დასმულ პრობლემებს. შემდგომში ჩვენ გავაგრძელებთ მათემატიკური მოდელების განხილვას მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგებიდან. ჩვენ მივიღებთ მათემატიკურ ამოცანებს, მათი გადაწყვეტისათვის უკვე საჭირო იქნება რიცხვითი მეთოდების გამოყენება, რომელთა რეალიზაციაც უნდა მოხდეს კომპიუტერის მეშვეობით.

სახელმძღვანელოს მეორე თავი მიეძღვნება სწორედ იმ რიცხვითი მეთოდების განხილვას, რომელთა გამოყენებაც აუცილებელი იქნება შემდგომ თავებში გადმოცემული მათემატიკური მოდელების შესასწავლად. ხაზი უნდა გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ სახელმძღვანელოს ამ ნაწილს არ აქვს რიცხვითი მეთოდების თუნდაც ელემენტარული კურსის პრეტენზია. მასში გადმოცემული იქნება მხოლოდ რამდენიმე რიცხვითი მეთოდი.

1.2 არსებობის თეორემის შესახებ. ჩვენ განვიხილავთ (2.1) განგლოლების ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოძებნის საკმაოდ ეფექტურ ალგორითმს იმ შემთხვევაში, როდესაც $f(x)$ წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას. სანამ ამ ალგორითმის აღწერასა და გამოკვლევას შევუდგებოდეთ, ჯერ მოვიყვანოთ მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ცნობილი ერთი მნიშვნელოვანი თეორემა უწყვეტი ფუნქციის ფესვის არსებობის შესახებ.

თეორემა 2.1. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტის ბოლოებზე ლებულობს მნიშვნელობებს, რომელთაც სხვადასხვა ნიშანი აქვთ: $f(a) \cdot f(b) < 0$, მაშინ ამ სეგმენტის შიგნით არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ $f(c) = 0$.

ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ ეს თეორემა იძლევა $[a, b]$ სეგმენტზე ფუნქციის ფესვის არსებობის გარანტიას, მაგრამ არ იძლევა საშუალებას დავადგინოთ ამ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის ფესვების რაოდენობა. ნახამ 2.1-ზე მოყვანილია ისეთი უწყვეტი ფუნქციის მაგალითი, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემის პირობებს და განსახილველ შუალედზე ფესვების ჯერადობის გათვალისწინებით აქვს ხუთი ფესვი.

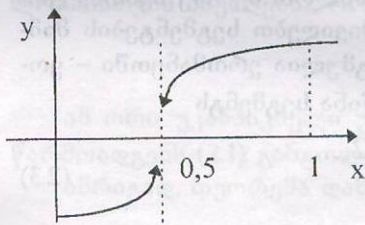


ნახ. 2.1

$f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის მოთხოვნა $[a, b]$ სეგმენტის ყველა წერტილში არსებითი მოთხოვნაა. წყვეტის ერთი წერტილის არსებობის შემთხვევაშიც კი – თეორემის დასკვნა შეიძლება არც იყოს სამართლიანი. სათანადო მაგალითი აგებულია შემდეგ ნახაზზე (ნახ. 2.2), სადაც მოყვანილია ისეთი $f(x)$ ფუნქციის მაგალითი, რომელიც განიცდის წყვეტას $x =$

$= 0,5$ წერტილში, $[0, 1]$ სეგმენტის ბოლოებზე იღებს მნიშვნელობებს, რომელთაც სხვადასხვა ნიშანი აქვთ: $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, მაგრამ ამ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს არც ერთი ფესვი.

ჩვენ მიერ მოყვანილი თეორემა 2.1 მიეკუთვნება ე. წ. არსებობის თეორემების რიცხვს. არსებობის თეორემების დამტკიცების მეთოდები შეიძლება პირობითად დავყოთ ორ ჯგუფად. პირველ ჯგუფს მივაკუთვნოთ ე. წ. კონსტრუქციული მეთოდები, რომელთა საშუალებითაც ფაქტობრივად აიგება საძიებელი ამონახსნის პოვნის ალგორითმი. ისინი განსაკუთრებით მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ გამოყენებითი მათემატიკის პრობლემების გადაწყვეტისას, რადგან ძალიან ხშირად სწორედ ამ პრობლემების განხილვისას მოითხოვება დასმული ამოცანის ამონახსნის მიღება. მეორე ჯგუფს



ნახ. 2.2

მიეკუთვნებიან არსებობის თეორემების დამტკიცების ე. წ. არაკონსტრუქციული მეთოდები. ამ ჯგუფს შეიძლება მივაკუთვნოთ, მაგალითად, ალგებრის ძირითადი თეორემის დამტკიცების მეთოდი, რომლის საშუალებითაც ვადგენთ, რომ ალგებრულ განგლოლებას (2.2) აქვს ერთი ფესვი მაინც (საზოგადოდ კომპლექსური), მაგრამ მტკიცების გზა არ იძლევა საშუალებას ვიპოვოთ ეს ფესვი.

ახლა ჩვენ მოვიყვანთ უწყვეტი ფუნქციის ფესვის არსებობის შესახებ თეორემის (თეორემა 2.1) დამტკიცების კონსტრუქციულ მეთოდს, რომელიც ამავე დროს წარმოადგენს არაწრფივი განგლოლების ფესვის მიახლოებითი მნიშვნე-

ლობის მოძებნის ერთ-ერთ ყველაზე უფრო მარტივ და ეფექტურ ალგორითმს. ეს ალგორითმი ცნობილია არაწრფივი განტოლებების ამოხსნის ბისექციის (დინიგომიის) მეთოდის სახელწოდებით.

განვიხილოთ (2.1) განტოლება. ვთქვათ, $f(x) \in C[a, b]$, სადაც $C[a, b]$ წარმოადგენს $[a, b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა კლასს. ვთქვათ, აგრეთვე, რომ $f(a) \cdot f(b) < 0$. განსაზღვრულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ $f(a) < 0$ და $f(b) > 0$.

ბისექციის მეთოდის ძირითადი იდეა მდგომარეობს ერთი მეორეში ჩალაგებული სეგმენტების მიმდევრობის აგებაში, ამასთან, ყოველი მათგანის სიგრძე გოლია წინა სეგმენტის სიგრძის ნახევრისა. აგების პროცედურა მიმდინარეობს ისე, რომ ყოველი სეგმენტის ბოლოებზე ფუნქცია დებულობს მნიშვნელობებს, რომელთაც სხვადასხვა ნიშანი აქვთ.

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის შუა წერტილი $\xi_1 = \frac{a+b}{2}$. თუ $f(\xi_1) = 0$, მაშინ ξ_1 წარმოადგენს განტოლების ფესვს და ამით ფესვის მოძებნის პროცესი შეწყდება. თუ $f(\xi_1) > 0$, შემდეგი ეტაპისთვის ავირჩიოთ $[a, \xi_1]$, ხოლო თუ $f(\xi_1) < 0$ ავირჩიოთ $[\xi_1, b]$ სეგმენტი. შერჩეული სეგმენტი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $[a_2, b_2]$. აგების თანახმად

$$f(a_2) < 0, \quad f(b_2) > 0.$$

შემდეგ განვიხილოთ $[a_2, b_2]$ მონაკვეთის შუა წერტილი ξ_2 . თუ $f(\xi_2) = 0$, მაშინ ξ_2 არის საძიებელი ფესვი და პროცესი შეწყდება. თუ $f(\xi_2) > 0$, მაშინ შემდეგი ეტაპისათვის ავირჩევთ $[a_2, \xi_2]$ მონაკვეთს, $f(\xi_2) < 0$ შემთხვევაში კი $[\xi_2, b_2]$ მონაკვეთს და შერჩეული მონაკვეთი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $[a_3, b_3]$. აგების თანახმად

$$f(a_3) < 0, \quad f(b_3) > 0.$$

და ა. შ., ეს პროცესი გავაგრძელოთ. ცხადია, რომ შესაძლებელია ორი შემთხვევა: ა) პროცესი შეწყდება n -ბიჯის შემდეგ იმის გამო, რომ $f(\xi_n) = 0$ ან ბ) პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ. პირველ შემთხვევაში (2.1) განტოლების ფესვის არსებობის საკითხი გადაწყვეტილია. ესლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა.

პროცესის უსასრულოდ გაგრძელების შედეგად მივიღებთ სეგმენტების მიმდევრობას $[a, b]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, ... ეს სეგმენტები ჩადგმულია ერთმანეთში – ყოველი სეგმენტი დაწყებული მეორედან მიეკუთვნება წინა სეგმენტს

$$\begin{aligned} a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n, \quad n = 1, 2, \dots \\ a_1 = a, \quad b_1 = b, \end{aligned} \tag{2.3}$$

ამასთან, $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$.

ცხადია, რომ აგებული სეგმენტების სიგრძეები n -ის ზრდასთან ერთად მიისწრაფვიან ნულისაკენ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

განვიხილოთ სეგმენტთა მარცხენა ბოლოების სიმრავლე: (2.3)-ის ძალით ისინი ქმნიან მონოტონურად არაკლებად მიმდევრობას $\{a_n\}$, რომელიც შემო-

ლობის მოძებნის ერთ-ერთ ყველაზე უფრო მარტივ და ეფექტურ ალგორითმს. ეს ალგორითმი ცნობილია არაწრფივი განგოლებების ამოხსნის ბისექციის (დიხომიის) მეთოდის სახელწოდებით.

განვიხილოთ (2.1) განგოლება. ვთქვათ, $f(x) \in C[a, b]$, სადაც $C[a, b]$ წარმოადგენს $[a, b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა კლასს. ვთქვათ, აგრეთვე, რომ $f(a) \cdot f(b) < 0$. განსაზღვრულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ $f(a) < 0$ და $f(b) > 0$.

ბისექციის მეთოდის ძირითადი იდეა მდგომარეობს ერთი მეორეში ჩალაგებული სეგმენტების მიმდევრობის აგებაში, ამასთან, ყოველი მათგანის სიგრძე გოლია წინა სეგმენტის სიგრძის ნახევრისა. აგების პროცედურა მიმდინარეობს ისე, რომ ყოველი სეგმენტის ბოლოებზე ფუნქცია ღებულობს მნიშვნელობებს, რომელთაც სხვადასხვა ნიშანი აქვთ.

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის შუა წერტილი $\xi_1 = \frac{a+b}{2}$. თუ $f(\xi_1) = 0$, მაშინ ξ_1 წარმოადგენს განგოლების ფესვს და ამით ფესვის მოძებნის პროცესი შეწყდება. თუ $f(\xi_1) > 0$, შემდეგი ეგაპისთვის ავირჩიოთ $[a, \xi_1]$, ხოლო თუ $f(\xi_1) < 0$ ავირჩიოთ $[\xi_1, b]$ სეგმენტი. შერჩეული სეგმენტი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $[a_2, b_2]$. აგების თანახმად

$$f(a_2) < 0, \quad f(b_2) > 0.$$

შემდეგ განვიხილოთ $[a_2, b_2]$ მონაკვეთის შუა წერტილი ξ_2 . თუ $f(\xi_2) = 0$, მაშინ ξ_2 არის საძიებელი ფესვი და პროცესი შეწყდება. თუ $f(\xi_2) > 0$, მაშინ შემდეგი ეგაპისათვის ავირჩევთ $[a_2, \xi_2]$ მონაკვეთს, $f(\xi_2) < 0$ შემთხვევაში კი $[\xi_2, b_2]$ მონაკვეთს და შერჩეული მონაკვეთი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $[a_3, b_3]$. აგების თანახმად

$$f(a_3) < 0, \quad f(b_3) > 0.$$

და ა. შ., ეს პროცესი გავაგრძელოთ. ცხადია, რომ შესაძლებელია ორი შემთხვევა: ა) პროცესი შეწყდება n -ბიჯის შემდეგ იმის გამო, რომ $f(\xi_n) = 0$ ან ბ) პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ. პირველ შემთხვევაში (2.1) განგოლების ფესვის არსებობის საკითხი გადაწყვეტილია. ესლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა.

პროცესის უსასრულოდ გაგრძელების შედეგად მივიღებთ სეგმენტების მიმდევრობას $[a, b]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, ... ეს სეგმენტები ჩადგმულია ერთმანეთში – ყოველი სეგმენტი დაწყებული მეორედან მიეკუთვნება წინა სეგმენტს

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n, \quad n = 1, 2, \dots \\ a_1 &= a, \quad b_1 = b, \end{aligned} \tag{2.3}$$

ამასთან, $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$.

ცხადია, რომ აგებული სეგმენტების სიგრძეები n -ის ზრდასთან ერთად მიისწრაფვიან ნულისაკენ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

განვიხილოთ სეგმენტთა მარცხენა ბოლოების სიმრავლე: (2.3)-ის ძალით ისინი ქმნიან მონოტონურად არაკლებად მიმდევრობას $\{a_n\}$, რომელიც შემო-

საზღვრულია ზემოდან. ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად ამ მიმდევრობას აქვს ზღვარი, რომელსაც აღვნიშნავთ c_1 -ით:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c_1. \quad (2.4)$$

(2.3)-ის თანახმად მივიღებთ, რომ

$$c_1 \leq b_n. \quad (2.5)$$

ახლა განვიხილოთ სეგმენტთა მარჯვენა ბოლოების სიმრავლე. ისინი ქმნიან მონოტონურად არამრღაღ შემოსაზღვრულ მიმდევრობას $\{b_n\}$, რომელსაც აგრეთვე გააჩნია ზღვარი ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად. აღვნიშნოთ ეს ზღვარი c_2 -ით:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c_2.$$

(2.3) და (2.5) უტოლობების თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$a_n \leq c_1 \leq c_2 \leq b_n,$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$c_2 - c_1 \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

ამრიგად $c_2 - c_1$ სხვაობა ნაკლებია ნებისმიერ წინასწარ ალებულ დადებით რიცხვზე. ეს ნიშნავს, რომ $c_2 - c_1 = 0$, ე. ი. $c_2 = c_1 = c$.

c წერტილს აქვს ის თვისება, რომ ის წარმოადგენს ერთადერთ საერთო წერტილს სეგმენტთა აგებული მიმდევრობისათვის. ვისარგებლოთ $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის თვისებით და დავამტკიცოთ, რომ c წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფესვს.

ჩვენ ვიცით, რომ $f(a_n) < 0$, n -ის ყველა მნიშვნელობისათვის. $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო მივიღებთ, რომ

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0.$$

ანალოგიურად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f(b_n) > 0$, n -ის ყველა მნიშვნელობისათვის მივიღებთ, რომ

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0.$$

ამ ორი უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $f(c) = 0$, ე. ი. c წარმოადგენს (2.1) განტოლების ფესვს.

ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია.

1.3 მიახლოებითი ამოხსნისა და განუზღვრელობის ინტერვალის შესახებ. ერთი მეორეში ჩადგმული სეგმენტების მიმდევრობის აგების პროცესი წარმოადგენს საკმაოდ ეფექტურ ალგორითმს (2.1) განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის (ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის) პოვნისათვის. სწორედ ეს ალგორითმი არის ცნობილი ბისექციის (დიხიტომის) მეთოდის სახელწოდებით. პროცესის n -ურ ბიჯზე სამართლიანია შეფასება:

$$a_n \leq c \leq b_n. \quad (2.6)$$

ეს ორმაგი უგოლობა გვიჩვენებს, რომ a_n უახლოვდება საძიებელ c ფესვს ნაკლებობით, ხოლო b_n რიცხვი კი — მეტობით. ცხადია, რომ, თუ ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად ავიღებთ რიცხვს $\xi_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, მაშინ ცლომილება

$$\delta_n = |\xi_n - c| \text{ ნაკლები იქნება } \Delta_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^n} \text{ სიდიდემდე, ე. ი. } [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

სეგმენტის სიგრძეზე $\delta_n \leq \frac{b-a}{2^n}$. ცხადია, რომ n -ის ზრდასთან ერთად ცლომილება მიისწრაფვის ნულისკენ იმ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით, რომლის მნიშვნელია $q = \frac{1}{2}$. თუ წინასწარ მოცემულია $\varepsilon > 0$

საკმარისად მცირე რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს იმ სიზუსტეს, რომლითაც უნდა გამოვთვალოთ (2.1) განგოლების ფესვი, რაც იმას ნიშნავს, რომ სამართლიანი უნდა იყოს უგოლობა $\delta_n \leq \varepsilon$, მაშინ ამ სიზუსტის მისაღწევად საკმარისია შესრულდეს უგოლობა

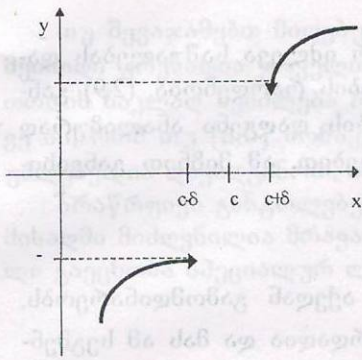
$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon.$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ საჭირო სიზუსტის მისაღწევად უნდა ჩავაგაროთ ბისექციის მეთოდის N ბიჯი, სადაც

$$N = \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right] + 1, \tag{2.7}$$

აქ $\left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right]$ აღნიშნავს ფრჩხილებში მოთავსებული რიცხვის მთელ ნაწილს.

შევნიშნოთ, რომ ბისექციის მეთოდის რეალიზაციისას გამოიყენება არა ფუნქციის მნიშვნელობები $f(\xi_j)$, არამედ $f(\xi_j)$ -ის ნიშანი. სანამ ფუნქციის მნიშვნელობების ნიშანი განისაზღვრება ზუსტად, ბისექციის მეთოდი არ არის მგრძობიარე დამრგვალების ცლომილებების მიმართ. შეიძლება ერთი შეხედვით მოგვეჩვენოს, რომ დამრგვალების ცლომილებანი არ არიან იმდენად დიდი სიდიდის, რომ გამოიწვიონ შეცდომა ფუნქციის მნიშვნელობების ნიშნის დადგენისას, მაგრამ ეს ასე არ არის. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლისას კონკრეტულ კომპიუტერზე დამრგვალების ცლომილების მოდულის მაქსიმუმი გოლია E -ს. მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ნიშანი სწორედ განისაზღვრება იმ მომენტამდე, სანამ შესრულებულია უგოლობა $|f(x)| > E$. რადგან c წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფესვს და $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიგომ არსებობს c წერტილის ისეთი მიდამო, სადაც ეს პირობა არ შესრულდება, ე. ი. იარსებებს c წერტილის ისეთი მიდამო ($c - \delta, c + \delta$), რომლის ყოველი წერტილისათვის სამართლიანი იქნება უგოლობა $|f(x)| \leq E$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ფესვის მახლობლად არსებობს ე. წ. განუზღვრელობის ინტერვალი ($c - \delta, c + \delta$), რომლის წერტილებშიც $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობების ნიშანი შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს არასწორად (იხ. ნახ. 2.3).



ნახ. 2.3

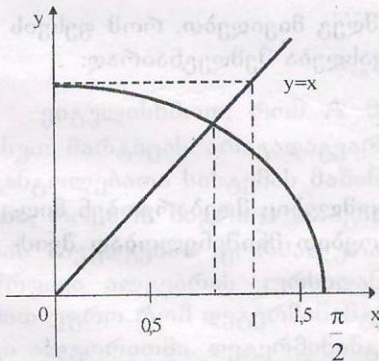
(2.1) განგოლების ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლისათვის არ მოითხოვება ისეთი სიზუსტე, რომ ბისექციის მეთოდის საშუალებით მიღებული მიახლოებები მოხვდნენ განუზღვრელობის ინტერვალში, რადგან გამოთვლების პროცესი შეწყდება ამ სიზუსტის წარმოშობამდე. შევნიშნოთ ისიც, რომ მაღალი კვალიფიკაციის სპეციალისტებს, რომელთაც აქვთ ასეთი ამოცანების ამოხსნის დიდი გამოცდილება, შეუძლიათ მიღებული მიახლოებების ყოფაქცევით დაადგინონ ის მომენტი, როდესაც ეს მიახლოებები მოხვდებიან განუზღვრელობის ინტერვალში.

ის ფაქტი, რომ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობების ნიშანი ფესვის გარკვეულ მიდამოში შეიძლება განისაზღვროს არასწორად, გავლენას ახდენს არა მარტო ბისექციის მეთოდის რეალიზაციაზე, არამედ სხვა რიცხვით მეთოდებზეც, რომელთა საშუალებითაც ხდება (2.1) განგოლების ან განგოლებათა სისტემების ფესვების მიახლოებითი მნიშვნელობების მოძებნა.

1.4 ილუსტრაცია მაგალითზე $x = \cos x$. ბისექციის მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი განგოლება

$$x = \cos x. \quad (2.8)$$

პირველ ყოვლისა, ჩვენ უნდა დავადგინოთ (უხეშად მაინც) ის შუალედი, რომელშიც მოთავსებულია (2.8) განგოლების ფესვი. ამ მიზნით განვიხილოთ $y = x$ და $y = \cos x$ ფუნქციების გრაფიკები (იხ. ნახ. 2.4).



ნახ. 2.4

როგორც ნახაზიდან ჩანს, ეს წირები ერთმანეთს გადაკვეთენ წერტილში, რომლის აბსცისაა $x = c$ ($0 < c < 1$). ეს c რიცხვი წარმოადგენს (2.8) განგოლების ფესვს, მისი მუსტი მნიშვნელობის მიღება შეუძლებელია.

(2.8) განგოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$f(x) = x - \cos x = 0. \quad (2.9)$$

ფუნქცია $f(x)$ უწყვეტია $[0, 1]$ სეგმენტზე, ხოლო ამ სეგმენტის ბოლოებზე მის მნიშვნელობებს აქვთ სხვადასხვა ნიშანი

$$f(0) = -1 \quad f(1) = 1 - \cos 1 > 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $[0, 1]$ სეგმენტზე არსებობს (2.9) განგოლების ერთი ფესვი მაინც, რაც ადასტურებს იმ დასკვნას, რომელიც ჩვენ ზემოთ გავაკეთეთ, როდესაც განვიხილეთ ამ განგოლების ამოხსნის გრაფიკული ხერხი.

როგორც ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, თეორემა 2.1 არ იძლევა საშუალებას დავადგინოთ განსახილველ შუალედში ფუნქციის ფესვების რაოდენობა. (2.9) განგოლებისთვის $[0,1]$ სეგმენტზე ფესვების რაოდენობის დადგენა ანალიზურად შესაძლებელია დამატებითი გამოკვლევების საშუალებით. ამ მიზნით განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული

$$f'(x) = 1 + \sin x.$$

როგორც ვხედავთ, $[0,1]$ სეგმენტზე $f'(x) > 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქცია $[0,1]$ სეგმენტზე მონოტონურად ზრდადია და მას ამ სეგმენტზე შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ერთი ფესვი. უფრო მეტიც, მარტივად შეიძლება იმის ჩვენება, რომ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია ყველგან და ამიტომ მას ექნება ერთადერთი ფესვი მთელ რიცხვით ღერძზე.

ახლა განვიხილოთ ბისექციის მეთოდი (2.9) განგოლებისათვის. ალგორითმის რეალიზაციის შედეგები მოყვანილია შემდეგ ცხრილში

n	a_n	b_n	$\xi_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(\xi_n)$
1	0,00000000	1,00000000	0,50000000	-0,377582
2	0,50000000	1,00000000	0,75000000	+0,018311
3	0,50000000	0,75000000	0,62500000	-0,185963
4	0,62500000	0,75000000	0,68750000	-0,085335
5	0,68750000	0,75000000	0,71875000	-0,033879
6	0,71875000	0,75000000	0,73437500	-0,007875
7	0,73437500	0,75000000	0,74218750	+0,005196
8	0,73437500	0,74218700	0,73828125	-0,001345
9	0,73828125	0,74218700	0,740234375	+0,01924
10	0,73828125	0,740234375	0,739257812	-0,000289
11	0,73828125	0,739257812	0,738769531	-0,000528
12	0,738769531	0,739257812	0,739013672	-0,000120
13	0,739013672	0,739257812	0,739135742	

ამრიგად, ბისექციის მეთოდის ცამეტი ბიჯის შემდეგ მივიღებთ, რომ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობისათვის ცლომილება შეფასდება შემდეგნაირად:

$$\delta_{13} < \left(\frac{1}{2}\right)^{13} < 0,000125.$$

ამრიგად, თუ უკუვაგდებთ ათწილად ნიშნებს, რომლებიც მდებარეობენ მიღწეული სიზუსტის მიღმა, საბოლოოდ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობად შეიძლება ავიღოთ რიცხვი:

$$\xi = \xi_{13} = 0,739135742.$$

ცხადია, რომ ფესვის ამ მიახლოებითი მნიშვნელობისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$|\xi - c| < 0,000125.$$

თუ საჭიროა მივალწით უფრო დიდ სიზუსტეს, საჭიროა გავრძელებს ბისექციის მეთოდის ალგორითმის რეალიზაცია საჭირო სიზუსტის მისაღწევად.

2.2 გაუსის მეთოდი კერძო შემთხვევისათვის. განვიხილოთ (2.10) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გაუსის მეთოდი. ვიგულისხმობთ, რომ A არაგადაგვარებული მატრიცაა. თუ A გადაგვარებული მატრიცაა, ე. ი. თუ მისი ლეგერმინანტი ნულის გოლია, ეს ფაქტი გამოქვეყნდება გაუსის მეთოდის რეალიზაციის პროცესში.

გაუსის მეთოდის აღწერისათვის განვიხილოთ შემდეგი წრფივ აღგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 4x_1 + x_2 &= -2, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7. \end{aligned} \quad (2.12)$$

ან

$$A\vec{x} = \vec{f}, \quad (2.13)$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

გაუსის მეთოდი (2.12) განტოლებათა სისტემისათვის შემდეგში მდგომარეობს:

ა) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ 2-ზე და გამოვაკლოთ მეორე განტოლებას.

ბ) პირველი განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ (-1) -ზე და გამოვაკლოთ მესამე განტოლებას.

ამ ოპერაციების ჩატარების შედეგად მივიღებთ (2.12) განტოლებათა სისტემის ეკვივალენტურ სისტემას:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ -x_2 - 2x_3 &= -4, \\ 3x_2 + 2x_3 &= 8. \end{aligned} \quad (2.15)$$

პირველ განტოლებაში x_1 ცვლადის კოეფიციენტს (ჩვენს შემთხვევაში 2-ს) ეწოდება გაუსის მეთოდის პირველი ბიჯის *წამყვანი ელემენტი*.

გამორიცხვის მეთოდის მეორე ბიჯის რეალიზაციისას პირველ განტოლებას ვგოვებთ უცვლელად. დანარჩენი ორი განტოლება შეიცავს ორ x_2 და x_3 უცნობს. ცხადია, რომ მათ მიმართაც შეიძლება გამოყენებულ იქნეს გამორიცხვის პროცედურა. ამ ბიჯის წამყვან ელემენტს წარმოადგენს -1 .

გ) მეორე განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ -3 -ზე და გამოვაკლოთ მესამე განტოლებას

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ -x_2 - 2x_3 &= -4, \\ -4x_3 &= -4. \end{aligned} \quad (2.16)$$

ამით გაუსის მეთოდის ერთი ნაწილი - ე. წ. „*პირდაპირი სვლა*“ დამთავრებულია. ამ უკანასკნელი სისტემის ამოხსნის გზა ნათელია. ბოლო განტოლებიდან მივიღებთ, რომ $x_3 = 1$. თუ ამ მნიშვნელობას შევიგანთ მეორე განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ, რომ $x_2 = 2$, დაბოლოს, პირველი განტოლებიდან ვიპოვიით x_1 -ის მნიშვნელობას $x_1 = -1$. ამ პროცესს ეწოდება გაუსის მეთოდის „*უკუსვლა*“.

ამრიგად, გაუსის მეთოდის საშუალებით ეპოულობთ (2.12) განტოლებათა სისტემის ამონახსნს.

2.3 გაუსის მეთოდი ზოგადი შემთხვევისათვის. ახლა განვიხილოთ (2.11) განტოლებათა სისტემა და აღვწეროთ მისთვის გაუსის მეთოდი.

ვთქვათ, $a_{11} \neq 0$, მაშინ შეიძლება გამოვთვალოთ $\beta_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$. ამის შემდეგ პირველი განტოლება გავამრავლოთ β_{21} -ზე და გამოვაკლოთ მეორე განტოლებას, მივიღებთ:

$$0 \cdot x_1 - a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)},$$

სადაც

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - a_{1j}\beta_{21}, \quad f_2^{(1)} = f_2 - f_1\beta_{21},$$

$$j = 2, 3, \dots, n$$

შემდეგ გამოვთვალოთ $\beta_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$, პირველი განტოლება გავამრავლოთ β_{31} -ზე და გამოვაკლოთ მესამე განტოლებას, მივიღებთ:

$$0 \cdot x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = f_3^{(1)},$$

სადაც

$$a_{3j}^{(1)} = a_{3j} - a_{1j}\beta_{31}, \quad f_3^{(1)} = f_3 - f_1\beta_{31}$$

$$j = 2, 3, \dots, n$$

და ა. შ. საბოლოოდ გამოვთვლით მამრავლს $\beta_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}}$, პირველ განტოლებას გავამრავლებთ β_{n1} მამრავლზე და გამოვაკლებთ n -ურ განტოლებას, მივიღებთ:

$$0 \cdot x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = f_n^{(1)},$$

სადაც

$$a_{nj}^{(1)} = a_{nj} - a_{1j}\beta_{n1}, \quad f_n^{(1)} = f_n - f_1\beta_{n1}.$$

$$j = 2, 3, \dots, n$$

გაუსის მეთოდის პირველი ბიჯი დამთავრებულია. ამ ბიჯის შემდეგ მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= f_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)}, \\ \dots & \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= f_n^{(1)}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

(2.17) განტოლებათა სისტემაში x_1 უცნობი შედის მხოლოდ პირველ განტოლებაში, ამიტომ შემდგომში საქმე გვექნება უფრო დაბალი, $(n - 1)$ -უცნობიან სისტემასთან

$$\begin{aligned}
 a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)}, \\
 a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n &= f_3^{(1)}, \\
 &\dots \\
 a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= f_n^{(1)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

თუ $a_{22}^{(1)} \neq 0$, მაშინ გაუსის მეთოდის პირველი ბიჯის ანალოგიურად, (2.18) განტოლებათა სისტემის მიმართ შეიძლება განვხორციელოთ გაუსის მეთოდის მეორე ბიჯი და ა. შ. თუ დავუშვებთ, რომ ყველა წამყვანი ელემენტი განსხვავებულია ნულისაგან, $(k-2)$ ბიჯის შემდეგ მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n &= f_1, \\
 a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2k-1}^{(1)}x_{k-1} + a_{2k}^{(1)}x_k + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)}, \\
 &\dots \\
 a_{k-1k-1}^{(k-2)}x_{k-1} + a_{k-1k}^{(k-2)}x_k + \dots + a_{k-1n}^{(k-2)}x_n &= f_{k-1}^{(k-2)}, \\
 a_{kk-1}^{(k-2)}x_{k-1} + a_{kk}^{(k-2)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k-2)}x_n &= f_k^{(k-2)}, \\
 &\dots \\
 a_{nk-1}^{(k-2)}x_{k-1} + a_{nk}^{(k-2)}x_k + \dots + a_{nn}^{(k-2)}x_n &= f_n^{(k-2)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

თუ $a_{k-1k-1}^{(k-2)} \neq 0$, მაშინ გამოვთვლით მამრავლს $\beta_{kk-1} = \frac{a_{kk-1}^{(k-2)}}{a_{k-1k-1}^{(k-2)}}$, $(k-1)$ -ე

განტოლებას გავამრავლებთ β_{kk-1} მამრავლზე და გამოვაკლებთ k -ურ განტოლებას.

შემდეგ გამოვთვლით მამრავლს $\beta_{k+1k-1} = \frac{a_{k+1k-1}^{(k-2)}}{a_{k-1k-1}^{(k-2)}}$, $(k-1)$ -ე განტოლებას გავამრავლებთ β_{k+1k-1} მამრავლზე და გამოვაკლებთ $(k+1)$ -ე განტოლებას და

ა. შ. საბოლოოდ გამოვთვლით მამრავლს $\beta_{nk-1} = \frac{a_{nk-1}^{(k-2)}}{a_{k-1k-1}^{(k-2)}}$ და $(k-1)$ განტოლებას

ბის ორივე მხარეს გავამრავლებთ β_{nk-1} -ზე და გამოვაკლებთ n -ურ განტოლებას. ამით დამთავრდება გაუსის მეთოდის $(k-1)$ -ე ბიჯი, რომლის შედეგად მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n &= f_1, \\
 a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2k-1}^{(1)}x_{k-1} + a_{2k}^{(1)}x_k + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)}, \\
 &\dots \\
 a_{k-1k-1}^{(k-2)}x_{k-1} + a_{k-1k}^{(k-2)}x_k + \dots + a_{k-1n}^{(k-2)}x_n &= f_{k-1}^{(k-2)}, \\
 a_{kk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= f_k^{(k-1)}, \\
 &\dots \\
 a_{nk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{nn}^{(k-1)}x_n &= f_n^{(k-1)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

და ა. შ. გაუსის $(n-1)$ -ე ბიჯის შემდეგ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას (ჯერჯერობით ვგულისხმობთ, რომ ყველა ეტაპზე $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0, k = 1, 2, \dots, n, a_{11}^{(0)} = a_{11}$):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n &= f_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2k-1}^{(1)}x_{k-1} + a_{2k}^{(1)}x_k + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_1^{(2)}, \\ &\dots \\ a_{k-1, k-1}^{(k-2)}x_{k-1} + a_{k-1, k}^{(k-2)}x_k + \dots + a_{k-1, n}^{(k-2)}x_n &= f_{k-1}^{(k-2)}, \\ &\dots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= f_k^{(k-1)}, \\ &\dots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= f_n^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

$a_{11}, a_{22}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ კოეფიციენტებს ეწოდებათ გაუსის მეთოდის წამყვანი კოეფიციენტები. თუ ყველა წამყვანი კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ შესაძლებელია (2.1) განტოლებათა სისტემა დავიყვანოთ (2.21) სახემდე და ამით გაუსის მეთოდის პირდაპირი სვლა დამთავრებულია.

გაუსის მეთოდის უკუსვლის საშუალებით შეგვიძლია მივიღოთ უცნობების მნიშვნელობები. (2.21) განტოლებათა სისტემის უკანასკნელი განტოლებიდან მივიღებთ:

$$x_n = \frac{f_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}.$$

ბოლოსწინა განტოლებას აქვს სახე

$$a_{n-1, n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1, n}^{(n-2)}x_n = f_{n-1}^{(n-2)}.$$

თუ ამ განტოლებაში შევიტანთ x_n -ის მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$x_{n-1} = \frac{f_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1, n}^{(n-2)}x_n}{a_{n-1, n-1}^{(n-2)}} = \frac{f_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1, n}^{(n-2)} \frac{f_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}}{a_{n-1, n-1}^{(n-2)}}$$

და ა. შ. შეგვიძლია გამოვითვალოთ $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_2, x_1$ ცვლადების მნიშვნელობები.

2.4 ნულოვანი წამყვანი ელემენტის პრობლემა. ახლა განვიხილოთ ძალზე მნიშვნელოვანი პრობლემა – ნულოვანი წამყვანი ელემენტის წარმოშობის შესაძლებლობა. ამ პრობლემას შეიძლება შევხვდეთ პროცესის დასაწყისშივე, თუ a_{11} ელემენტი ნულის ტოლია. განვიხილოთ უმარტივესი მაგალითი:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

აქ გაუსის მეთოდის რეალიზაცია შეუძლებელია: პირველი სტრიქონის არაერთარი ჯერადი არ გამოდგება (2.1) პოზიციაში ნულოვანი ელემენტის მისაღებად. მაგრამ, ამ შემთხვევაში, მდგომარეობიდან გამოსავალი ცხადად ჩანს – უნდა გადავაადგილოთ ეს ორი განტოლება. ამ უმარტივეს შემთხვევაში განტოლებათა სისტემის მაგრიცა გახდება ზედა სამკუთხა და მიღებული განტოლებათა სისტემა

$$3x_1 + 4x_2 = b_2$$

$$2x_2 = b_1$$

უმუშალოდ შეიძლება ამოხსნილ იქნეს უკუსვლის საშუალებით.

ჩვენ მიერ გამოთქმული მოსაზრება სამართლიანია ზოგად შემთხვევაშიც: თუ გაუსის მეთოდის რეალიზაციის რომელიმე ეტაპზე წამყვანი ელემენტი $a_{kk}^{(k-1)} = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, მაშინ სტრიქონების გადაადგილების საშუალებით უნდა შევეცადოთ მივალწით, რომ (k, k) პოზიციაში აღმოჩნდეს 0-სგან განსხვავებული ელემენტი. ცნობილია, რომ A მარტივის გადაუგვარებლობის შემთხვევაში ეს შესაძლებელია. სტრიქონების გადაადგილება აუცილებელია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც რომელიმე β_{ij} მამრავლი მოდულით აღემატება 1-ს. მტკიცდება, რომ ამ შემთხვევაში შესაძლებელია დამრგვალების ცლომილებების მნიშვნელოვანი დაგროვება, რაც თავის მხრივ გამოიწვევს შედეგის დამახინჯებას: მიღებული შედეგი და განტოლებათა სისტემის ამონახსნი მნიშვნელოვნად შეიძლება განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან. ამიტომ გაუსის გამორიცხვის მეთოდის ჩვენ მიერ აღწერილი ვარიანტი შეიძლება აღმოჩნდეს არამდგრადი დამრგვალების ცლომილებების მიმართ (მცირე დამრგვალების ცლომილებებმაც კი შეიძლება გამოიწვიოს დიდი საბოლოო ცლომილება) და ამ არამდგრადობის მიზეზია დიდი β_{ij} მამრავლები. ჩვენ დაწვრილებით არ განვიხილავთ ამ პრობლემას. დაინტერესებული მკითხველი მას შეიძლება გაეცნოს სპეციალურ ლიტერატურაში ([40], [45]).

ამრიგად, ჩვენ უნდა უზრუნველვყოთ, რომ გამოთვლების პროცესში β_{ij} მამრავლები მოდულით არ აღემატებოდეს 1-ს, ეს შესაძლებელია გაუსის მეთოდის მოდიფიკაციის საშუალებით, რომელიც ცნობილია *წამყვანი ელემენტის ნაწილობითი შერჩევის* სახელწოდებით. ვთქვათ, რეალიზებულია გაუსის მეთოდის $(k-1)$ ბიჯი. მაშინ, მიღებულ განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + a_{1k+1}x_{k+1} + \dots + a_{1n}x_n = f_1,$$

$$a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2k-1}^{(1)}x_{k-1} + a_{2k}^{(1)}x_k + a_{2k+1}^{(1)}x_{k+1} + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)},$$

.....

$$a_{k-1k-1}^{(k-2)}x_{k-1} + a_{k-1k}^{(k-2)}x_k + a_{k-1k+1}^{(k-2)}x_{k+1} + \dots + a_{k-1n}^{(k-2)}x_n = f_{k-1}^{(k-2)}, \quad (2.22)$$

$$a_{kk}^{(k-1)}x_k + a_{kk+1}^{(k-1)}x_{k+1} + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = f_k^{(k-1)},$$

$$a_{k+1k}^{(k-1)}x_k + a_{k+1k+1}^{(k-1)}x_{k+1} + \dots + a_{k+1n}^{(k-1)}x_n = f_{k+1}^{(k-1)},$$

.....

$$a_{nk}^{(k-1)}x_k + a_{nk+1}^{(k-1)}x_{k+1} + \dots + a_{nn}^{(k-1)}x_n = f_n^{(k-1)}.$$

შემდეგი ბიჯის რეალიზაციისათვის ავარჩიოთ $\max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k-1)}|$. ვთქვათ, ეს მაქსიმუმი მიიღწევა, როდესაც $i = i_0$, ე. ი. $\max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k-1)}| = |a_{i_0k}^{(k-1)}|$. შემდეგ მოვახდინოთ k -ური და i_0 -ური განტოლებების გადაადგილება, რის შედეგად (k, k) პოზიციაში აღმოჩნდება მოდულით უდიდესი ელემენტი, რის შედეგადაც სამართლიანი იქნება უტოლობები:

$$|\beta_{ik}| \leq 1, \quad i = k+1, k+2, \dots, n$$

ეს კი, უზრუნველყოფს გაუსის მეთოდის მდგრადობას დამრგვალების ცლომილებების მიმართ.

თუ ვიყენებთ გაუსის მეთოდს წამყვანი ელემენტის ნაწილობით შერჩევით, $A\bar{X} = \bar{F}$ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

ა) თუ $\det A \neq 0$, მაშინ ჩვენ მიერ აღწერილი ალგორითმი იძლევა საშუალებას ვიპოვოთ მოცემულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი.

ბ) მეთოდის რეალიზაციის $(k-1)$ ბიჯის შემდეგ ($k \leq n$) შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ

$$a_{kk}^{(k-1)} = 0, \quad a_{k+1k}^{(k-1)} = 0, \dots, a_{nk}^{(k-1)} = 0.$$

ამ შემთხვევაში მოცემულ განტოლებათა სისტემის მაგრიცა არის გადაგვარებული, ამიტომ განტოლებათა სისტემას ან არა აქვს ამონახსნი ან აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე. ამრიგად, გაუსის გამორიცხვის მეთოდს პრინციპულად აქვს შესაძლებლობა აღმოაჩინოს მაგრიცის გადაგვარებულობა, თუმცა, უნდა შევნიშნოთ, რომ დამრგვალების ცდომილებების გამო, ამ შესაძლებლობის გამოყენება პრაქტიკულად გაძნელებულია.

ჩვენ მიერ მოყვანილი დასკვნები შეიძლება შევაჯამოთ შემდეგნაირად:

თუ $A\bar{X} = \bar{F}$ განტოლებათა სისტემის მაგრიცა არაგადაგვარებულია, მაშინ არსებობს ამ განტოლებათა სისტემის ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც შეიძლება მოძებნილ იქნეს გაუსის გამორიცხვის მეთოდის საშუალებით. გადაგვარებული A მაგრიცის შემთხვევაში, განტოლებების ვერავითარი გადანაცვლება ვერ აგვაცილებს თავიდან ნულოვანი წამყვანი ელემენტის წარმოშობას.

შემდეგ პრობლემას, რომელიც მოითხოვს გამოკვლევას, უაღრესად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. შეიძლება ითქვას, რომ იგი ახასიათებს მეთოდის „ფინანსურ“ მხარეს. საქმე ეხება გაუსის მეთოდის რეალიზაციისათვის საჭირო არითმეტიკული ოპერაციების რაოდენობის შეფასებას. ჩვენ არ განვიხილავთ დაწვრილებით ამ პრობლემას, მხოლოდ აღვნიშნავთ, რომ გაუსის მეთოდის რეალიზაციისათვის საჭიროა $O(n^3)$ რაოდენობის არითმეტიკული ოპერაცია.

ამ პრობლემის შესახებ დაინტერესებული მკითხველი მიიღებს ინფორმაციას სპეციალურ ლიტერატურაში (მაგ. [40], [45]). იქვე შეიძლება მივიღოთ ამომწურავი ინფორმაცია გაუსის მეთოდის შესახებ და გავეცნოთ ბევრ ისეთ საკითხს, რომელმაც ვერ პოვა ასახვა ჩვენს სახელმძღვანელოში.

§3. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის

მარტივი იტერაციის მეთოდი

3.1 მაგრიცის ნორმა. სანამ განვიხილავთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მარტივი იტერაციის მეთოდს, შემოვიღოთ მაგრიცის ნორმის ცნება. განვიხილოთ A მაგრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

განსაზღვრება. A მარტივის ნორმა ეწოდება ნამდვილ $\|A\|$ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) $\|A\| \geq 0$, მასთან $\|A\| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც A ნულოვანი მატრიცაა, $A = 0$.

ბ) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, სადაც α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

გ) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

დ) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

შემდგომში A მატრიცისთვის განვიხილავთ შემდეგ ნორმებს, რომელთა გამოთვლაც არავითარ სიძნელეებთან არ არის დაკავშირებული:

$$\|A\|_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|;$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;$$

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.24)$$

უშუალოდ შეიძლება შევამოწმოთ, რომ (2.24) გოლობების საშუალებით შემოღებული ნორმები აკმაყოფილებენ ნორმის განსაზღვრებაში მოცემულ პირობებს.

მართლაც, ა) და ბ) პირობების სამართლიანობა, (2.24) გოლობით შემოღებული ნორმებისათვის, აშკარაა.

შევამოწმოთ, რომ ყველა ნორმისათვის სამართლიანია გ) პირობა. ვთქვათ,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

მაშინ

$$\|A + B\|_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \right\} \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \|A\|_0 + \|B\|_0.$$

ანალოგიურად შევამოწმოთ, რომ

$$\|A + B\|_1 \leq \|A\|_1 + \|B\|_1,$$

შემდეგ

$$\|A + B\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |b_{ij}|}.$$

თუ გამოვიყენებთ კოშის ცნობილ უტოლობას

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |b_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2},$$

მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \|A+B\|_2 &\leq \sqrt{\left\{ \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2 \right)^{1/2} \right\}^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \|A\|_2 + \|B\|_2. \end{aligned}$$

ამრიგად, (2.24) ტოლობებით განსაზღვრულ ყველა ნორმისთვის ნაჩვენებია გ) პირობის სამართლიანობა.

ახლა შევამოწმოთ დ) პირობის სამართლიანობა (2.24) ტოლობებით განსაზღვრული ყველა ნორმისათვის.

$$\begin{aligned} \|AB\|_0 &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n |a_{is}| |b_{sj}| = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{s=1}^n |a_{is}| \cdot \sum_{j=1}^n |b_{sj}| \right\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{s=1}^n |a_{is}| \|B\|_0 \right\} = \|B\|_0 \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{s=1}^n |a_{is}| \right\} = \|A\|_0 \cdot \|B\|_0. \end{aligned}$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \cdot \|B\|_1.$$

შემდეგ,

$$\|AB\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} \right|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{s=1}^n |a_{is}| |b_{sj}| \right\}^2}$$

თუ გამოვიყენებთ კოშის უტოლობას, აქედან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \|AB\|_2 &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{s=1}^n |a_{is}|^2 \cdot \sum_{s=1}^n |b_{sj}|^2 \right\}} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n |a_{is}|^2 \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n |b_{sj}|^2} = \sqrt{\|A\|_2^2 \cdot \|B\|_2^2} = \|A\|_2 \cdot \|B\|_2. \end{aligned}$$

ამრიგად, ჩვენ შევამოწმეთ, (2.24) ტოლობების საშუალებით შემოღებული ნორმებისათვის ნორმის განსაზღვრებაში მოცემული ყველა პირობა.

შენიშვნა. განვიხილოთ n -განზომილებიანი ვექტორების შემდეგი ნორმები:

$$\|\vec{x}\|_0 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (2.26)$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

ცნობილია, რომ სამართილიანია უკოლობები:

$$\|A\bar{x}\|_{\alpha} \leq \|A\|_{\alpha} \|\bar{x}\|_{\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, 2.$$

3.2 მარტივი იტერაციული პროცესი. თეორემები კრებადობის და ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ. განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$A\bar{x} = \bar{f}, \quad (2.27)$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

(2.27) განტოლებათა სისტემა შევცვალოთ შემდეგი სახის ეკვივალენტური განტოლებათა სისტემით

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c}. \quad (2.28)$$

ამის მიღწევა შეიძლება, მაგალითად, შემდეგნაირად: (2.27) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$A\bar{x} - \bar{f} = 0. \quad (2.29)$$

(2.29) განტოლების ორივე მხარე მარცხნიდან გადავამრავლოთ ნებისმიერ n -ური რიგის არაგადაგვარებულ $-D$ მატრიცაზე ($D(n \times n)$, $\det D \neq 0$), მივიღებთ:

$$-D(A\bar{x} - \bar{f}) = 0. \quad (2.30)$$

გოლობის ორივე მხარეს დავეუმატოთ \bar{x} ვექტორი

$$\bar{x} = \bar{x} - D(A\bar{x} - \bar{f}).$$

ამრიგად, მივიღეთ (2.27) განტოლებათა სისტემის (3.5) სახის ეკვივალენტური განტოლებათა სისტემა, სადაც

$$B = E - DA \quad \text{და} \quad \bar{c} = D\bar{f}.$$

(2.28) განტოლებათა სისტემის ამონახსნის მოსაძებნად განვიხილოთ შემდეგი იტერაციული მეთოდი

$$\bar{x}^{(k+1)} = B\bar{x}^{(k)} + \bar{c}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

$\bar{x}^{(0)}$ ნებისმიერი n -განზომილებიანი ვექტორია, (2.31) ფორმულებით განსაზღვრულ იტერაციულ პროცესს მარტივი იტერაციული პროცესი ეწოდება.

თეორემა 1. თუ $\|B\|_{\alpha} < 1$, $\alpha = 0, 1, 2$, მაშინ (2.27) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო (2.31) იტერაციული პროცესი კრებადია:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\|_{\alpha} = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2,$$

სადაც \bar{x}^* წარმოადგენს (2.27) განტოლებათა სისტემის ამონახსნს.

დამტკიცება. განვიხილოთ (2.27) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა

$$A\bar{x} = 0$$

მისი ეკვივალენტური განტოლებათა სისტემა იქნება:

$$\bar{x} = B\bar{x} \quad (2.32)$$

ამ უკანასკნელი გოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$\|\bar{x}\|_\alpha \leq \|B\|_\alpha \|\bar{x}\|_\alpha$$

$$(1 - \|B\|_\alpha) \|\bar{x}\|_\alpha \leq 0$$

რადგან $\|B\|_\alpha < 1$, ამიტომ გვექნება $\|\bar{x}\|_\alpha \leq 0$, ე. ი. $\|\bar{x}\|_\alpha = 0$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $\bar{x} = 0$. ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ (2.27) განტოლებათა სისტემის შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას აქვს მხოლოდ ტრივიალური (ნულოვანი) ამონახსნი. ეს ნიშნავს, რომ (2.27) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი ნებისმიერი \bar{f} მარჯვენა მხარისათვის.

განვიხილოთ ცლობილების ვექტორი $\bar{z}^{(k)} = \bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*$. ამ გოლობიდან განვსამღვროთ $\bar{x}^{(k)} = \bar{z}^{(k)} + \bar{x}^*$ და შევიგანოთ (2.31) გოლობაში, მივიღებთ:

$$\bar{z}^{(k+1)} + \bar{x}^* = B\bar{z}^{(k)} + B\bar{x}^* + \bar{c}$$

აქედან

$$\bar{z}^{(k+1)} = B\bar{z}^{(k)} \quad (2.33)$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\|\bar{z}^{(k+1)}\|_\alpha \leq \|B\|_\alpha \|\bar{z}^{(k)}\|_\alpha$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ:

$$\|\bar{z}^{(k+1)}\|_\alpha \leq \|B\|_\alpha \|\bar{z}^{(k)}\|_\alpha \leq \|B\|_\alpha^2 \|\bar{z}^{(k-1)}\|_\alpha \leq \dots \leq \|B\|_\alpha^{k+1} \|\bar{z}^{(0)}\|_\alpha$$

ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\|\bar{z}^{(k)}\|_\alpha \leq \|B\|_\alpha^k \|\bar{z}^{(0)}\|_\alpha$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{z}^{(k)}\|_\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\|_\alpha = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ (2.31) იტერაციული პროცესი კრებადია (2.27) განტოლებათა სისტემის ამონახსნისაკენ.

თეორემა დამტკიცებულია.

მტკიცება, რომ n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ყველა ნორმა ერთმანეთის ეკვივალენტურია, რაც ნიშნავს, რომ ნებისმიერი \bar{x} ვექტორისათვის სამართლიანია უტოლობები

$$m\|\bar{x}\|_\alpha \leq \|\bar{x}\|_\beta \leq M\|\bar{x}\|_\alpha, \quad \forall \bar{x} \in R^n,$$

სადაც $0 < m \leq M$ გარკვეული მუდმივებია, ხოლო $\|\bar{x}\|_\alpha$ და $\|\bar{x}\|_\beta$ წარმოადგენენ n -განზომილებიანი ვექტორის რაიმე ორ ნორმას.

ამრიგად, თუ ჩვენ მიერ დამტკიცებული თეორემის პირობები შესრულებულია რომელიმე $\|\cdot\|_\alpha$ ნორმისათვის, მაშინ (2.31) იტერაციული პროცესი კრებადი იქნება ნებისმიერი სხვა ნორმის შემთხვევაშიც.

თუ გავითვალისწინებთ მატრიცის ჩვენ მიერ შემოღებულ ნორმებს, შეიძლება დავესკვნათ, რომ სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. თუ შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან:

$$1) \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$2) \sum_{i=1}^n |b_{ij}| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$3) \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2 < 1.$$

სადაც b_{ij} წარმოადგენენ B მატრიცის ელემენტებს, მაშინ (2.27) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო (2.31) იტერაციული პროცესი კრებადია (2.27) განტოლებათა სისტემის ამონახსნისკენ ნებისმიერი საწყისი $\vec{x}^{(0)}$ ვექტორისათვის.

3.3 მარტივი იტერაციული პროცესის ილუსტრირება კონკრეტულ მაგალითზე. ცხადია, რომ თეორემა 1 საკმარისად მკაცრ პირობებს ითხოვს (2.28) განტოლებათა სისტემის B მატრიცის კოეფიციენტებისაგან. მაგრამ, შევნიშნოთ, რომ თუ $\det A \neq 0$, მაშინ (2.27) სისტემის განტოლებების წრფივი კომბინაციების საშუალებით ეს სისტემა ყოველთვის შეიძლება დავიყვანოთ (2.28) სახემდე ისე, რომ შესრულებული იქნება თეორემა 1-ის პირობები.

განვიხილოთ ასეთი დაყვანის ერთი მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -4 \end{aligned} \quad (2.34)$$

ამ განტოლებათა სისტემის მეოთხე განტოლებაში x_1 -ის კოეფიციენტი მეტია მოდულით ამავე განტოლებაში სხვა ცვლადის კოეფიციენტების მოდულების ჯამზე, ამიტომ მეოთხე განტოლება ჩავწერთ პირველი განტოლების ადგილზე. ასევე, მეორე განტოლებაში x_3 -ის კოეფიციენტი მეტია მოდულით ამავე განტოლებაში სხვა ცვლადების კოეფიციენტების მოდულების ჯამზე, ამიტომ ეს განტოლება ჩავწერთ მესამე განტოლების ადგილზე. მაშინ ახალი სისტემა მიიღებს სახეს:

$$10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 2$$

$$\dots \dots \dots$$

თუ მოვახდენთ საწყის განტოლებათა სისტემის ანალიზს, დავინახავთ, რომ მეორე განტოლების მისაღებად, რომლის x_2 ცვლადის კოეფიციენტი მოდულით აღემატება იმავე განტოლებაში სხვა ცვლადების კოეფიციენტების მოდულების ჯამს, საჭიროა განვიხილოთ პირველი და მეორე განტოლებების სხვაობა, მაშინ გვექნება:

$$x_1 + 5x_2 + x_3 - 0 \cdot x_4 = 1.$$

ამრიგად, მივიღეთ სისტემის სამი განტოლება:

$$10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4,$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 - 0 \cdot x_4 = 1,$$

$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 2,$$

.....

ამ განტოლებების მიღების პროცესში არ გვისარგებლია საწყისი სისტემის მესამე განტოლებით, ამიტომ მეოთხე განტოლების მისაღებად აუცილებლად უნდა გამოვიყენოთ. მამრავლების შერჩევით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ მეოთხე განტოლების მისაღებად, რომელშიც x_4 ცვლადის კოეფიციენტი მოდულით აღემატება იმავე განტოლებაში სხვა ცვლადების კოეფიციენტების მოდულების ჯამს, საკმარისია განვიხილოთ (2.34) სისტემის განტოლებების შემდეგი კომბინაცია:

$$2 \cdot (I) - (II) + 2(III) - (IV),$$

მაშინ მივიღებთ განტოლებას:

$$3x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 9x_4 = 10.$$

ამრიგად, (2.34) განტოლებათა სისტემა ჩავწერეთ შემდეგი სახით:

$$10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 - 0 \cdot x_4 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 2$$

$$3x_1 - 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 9x_4 = 10$$

ეს განტოლებათა სისტემა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$x_1 = 0 \cdot x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 - 0,2x_4 - 0,4$$

$$x_2 = 0,2x_1 + 0 \cdot x_2 - 0,2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0,2$$

$$x_3 = 0,2x_1 - 0,4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0,2x_4 - 0,4$$

$$x_4 = 0,333x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - 1,111$$

ამრიგად, მივიღებთ რომ

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c},$$

სადაც

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0,2 & -0,4 & 0 & 0,2 \\ 0,333 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0,2 \\ -0,4 \\ -1,111 \end{pmatrix}.$$

როგორც ვხედავთ, B მატრიცა აკმაყოფილებს თეორემა 2-ის პირობებს: $\|B\|_0 < 1$, $\|B\|_1 < 1$. ამიტომ მოცემულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის მოსაძებნად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მარტივი იტერაციის მეთოდი

$$\bar{x}^{(k+1)} = B\bar{x}^{(k)} + \bar{c}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

სადაც $\bar{x}^{(0)}$ ნებისმიერი n -განზომილებიანი ვექტორია.

§4. პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის ვიდეოს გათვლი

4.1 კოშის ამოცანის დასმა და მდგრადობა. განვიხილოთ კოშის ამოცანა პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t)) \quad 0 < t \leq T, \quad (2.35)$$

$$u(0) = u_0, \quad (2.36)$$

უნდა ვიპოვოთ $0 \leq t \leq T$ შუალედში უწყვეტი ფუნქცია $u(t)$, რომელიც აკმაყოფილებს (2.35) დიფერენციალურ განტოლებას, როდესაც $t > 0$ და (2.36) საწყის პირობას, როდესაც $t = 0$. შევნიშნოთ, რომ $f(t, u)$ - წარმოადგენს მოცემული ორი არგუმენტის უწყვეტ ფუნქციას.

ცნობილია, რომ თუ $f(t, u)$ ფუნქცია უწყვეტია მართკუთხედში $\bar{D} = \{0 \leq t \leq T, |u - u_0| \leq v\}$ და \bar{D} - არეში აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას u ცვლადის მიმართ

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq K|u_1 - u_2|, \quad (2.37)$$

ყველა $(t, u_1) \in \bar{D}$, $(t, u_2) \in \bar{D}$ -სთვის, სადაც $K = \text{const} > 0$, მაშინ (2.35), (2.36) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი საკმარისად მცირე T -სთვის.

კოშის ზოგიერთი ამოცანის ამონახსნის აგება შესაძლებელია ანალიზურად. მაგრამ, ხშირად პრაქტიკული მიზნებისათვის მნიშვნელოვანი ამოცანისათვის ამონახსნის პოვნის ასეთი გზა შესაძლებელი არ არის. ასეთ შემთხვევაში იყენებენ მიახლოებით მეთოდებს, კერძოდ, ე. წ. სხვაობიან მეთოდებს. ჩვენ განვიხილავთ პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ერთ-ერთ სხვაობიან მეთოდს, რომელიც ეილერის მეთოდის სახელწოდებით არის ცნობილი.

სანამ (2.35), (2.36) ამოცანისათვის ჩამოვყალიბებდეთ და შევისწავლიდეთ ეილერის მეთოდს, ჯერ განვიხილოთ ამ ამოცანის მდგრადობის ზოგიერთი ასპექტი. კერძოდ, შევეცადოთ პასუხი გავცეთ შემდეგ კითხვას: როგორ შეიცვლება (2.35), (2.36) ამოცანის ამონახსნი, თუ „მცირედ“ შევცვლით საწყის პირობას?

ვთქვათ, $\tilde{u}(t)$ წარმოადგენს შემდეგი ამოცანის ამონახსნს:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = f(t, \tilde{u}(t)), \quad 0 < t \leq T, \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0. \quad (2.38)$$

ვთქვათ, $f(t, u)$ ფუნქციას გააჩნია პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულება. განვიხილოთ ე. წ. ცლომილების ფუნქცია $z(t) = \tilde{u}(t) - u(t)$. ცხადია, რომ $z(t)$ ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგი ამოცანის ამონახსნს:

$$\frac{dz}{dt} = \alpha(t)z, \quad 0 < t \leq T, \quad z(0) = z_0 = \tilde{u}_0 - u_0, \quad (2.39)$$

სადაც $\alpha(t) = \frac{f(t, \tilde{u}) - f(t, u)}{z} = f'_u(t, u + \Theta z), \quad 0 \leq \Theta \leq 1.$

ე. ი. $\alpha(t) = \alpha(t, z(t))$ ფუნქცია დამოკიდებულია Z -ზე და t -ზე. (2.39) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ Z -ზე, მივიღებთ:

$$\frac{1}{2} \frac{dz^2}{dt} = \alpha(t, z) z^2.$$

თუ $f'_u(t, u) \leq 0$ ყველა t, u -სათვის, მაშინ $\alpha(t, z) \leq 0$ და $z^2(t) \leq z^2(0)$. საიდანაც ვდებულობთ:

$$|\tilde{u}(t) - u(t)| \leq |\tilde{u}_0 - u_0| \quad \text{ყველა } t \in [0, T]\text{-სთვის,} \quad (2.40)$$

რაც ნიშნავს, რომ (2.35), (2.36) ამოცანა მდგრადია საწყისი მონაცემების მიმართ.

თუ $f'_u \geq c_0 > 0$ და განსახილველი ამოცანის ამოხსნა არსებობს $[0, T]$ შუალედში, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{dz^2}{dt} \geq 2c_0 z^2,$$

საიდანაც, თუ $z(0) \neq 0$ ადვილად დავასკვნით, რომ $z^2(t)$ დადებითია. განვიხილოთ შემთხვევა $z(0) \neq 0$ და გავყოთ ბოლო უტოლობა $z^2(t)$ -ზე. ელემენტარული გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{d \ln z^2(t)}{dt} \geq 2C_0.$$

ვაინტეგრირებთ მიღებული უტოლობა

$$\int_0^t d \ln z^2(t) \geq \int_0^t 2C_0 dt,$$

რის შედეგადაც გვექნება:

$$\ln z^2(t) - \ln z^2(0) \geq 2C_0 t,$$

აქედან შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\frac{z^2(t)}{z^2(0)} \geq e^{2C_0 t},$$

რის საფუძველზეც მარტივი საჩვენებელია შემდეგი უტოლობა

$$|z(t)| \geq e^{2C_0 t} |z(0)|,$$

ამ უტოლობის სამართლიანობა, როცა $z(0) = 0$ აშკარაა.

ამრიგად, გვაქვს:

$$|z(t)| \geq e^{2c_0 t} |z(0)| \rightarrow \infty, \quad \text{როდესაც } t \rightarrow \infty,$$

რაც ნიშნავს, რომ (2.35), (2.36) ამოცანა არამდგრადია საწყისი მონაცემების მიმართ.

(2.35), (2.36) ამოცანის პარალელურად განვიხილოთ კომის ამოცანა პირველი რიგის წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$\frac{dz}{dt} + \lambda z = 0, \quad \lambda = \text{const}, \quad 0 < t \leq T, \quad z(0) = z_0. \quad (2.41)$$

როგორც ვიცით, ამ ამოცანის ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$z(t) = z_0 e^{-\lambda t}.$$

ცხადია, რომ თუ $\lambda \geq 0$, მაშინ $|z(t)| \leq |z_0|$, ყველა $t > 0$ -სთვის, ე. ი. (2.41) ამოცანა მდგრადია საწყისი მონაცემების მიმართ. თუ $\lambda < 0$, მაშინ $z(t) \rightarrow \infty$ როდესაც $t \rightarrow \infty$, რაც ნიშნავს, რომ ამოცანა არ არის მდგრადი საწყისი მონაცემების მიმართ.

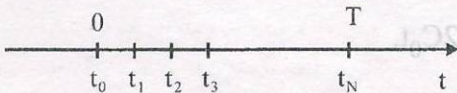
ამრიგად, (2.41) ამოცანის ამონახსნის ყოფაქცევა ანალოგიურია (2.35), (2.36) ამოცანის ამონახსნის ყოფაქცევასა. $\lambda \geq 0$ შეესაბამება შემთხვევას, როდესაც $f'_u \leq 0$, ხოლო $\lambda < 0$ შეესაბამება შემთხვევას, როდესაც $f'_u \geq c_0 > 0$. ამიგომ ხშირად სწორედ (2.41) ამოცანას იყენებენ, როგორც მოდელურ ამოცანას მდგრადობასთან დაკავშირებული ზოგიერთი პრობლემის შესწავლის დროს. ამ საკითხს ჩვენ კიდევ დავუბრუნდებით ვიღერის მეთოდის განხილვისას.

4.2 ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების სხვაობიანი ანალოგი და ვიღერის ალგორითმი. დიფერენციალური განტოლების სხვაობიანი მეთოდით ამოხსნისათვის პირველ რიგში საჭიროა არგუმენტის უწყვეტი ცვლილების არე შევცვალოთ წერტილთა დისკრეტული სიმრავლით, რომელსაც ბაღე ეწოდება. ვთქვათ, (2.35), (2.36) ამოცანის ამონახსნი უნდა ვიპოვოთ $0 < t \leq T$ შუალედში. ვიგულისხმობთ, რომ შესრულებულია პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ამ შუალედში ამოცანის ამოხსნის არსებობასა და ერთადერთობას. $[0, T]$ სეგმენტზე განვიხილოთ წერტილთა დისკრეტული სიმრავლე-ბაღე:

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n : t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N\}, \quad \tau = \frac{T}{N}$$

t_n - წერტილებს ბაღის კვანძები ეწოდება. $t_N = N\tau = T$.

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში ბაღის ნებისმიერი ორი მომდევნო კვანძისათვის შესრულებულია პირობა



$$t_{n+1} - t_n = \tau.$$

ამ შემთხვევაში ბაღეს რეგულარული ეწოდება. შევნიშნობთ, რომ სრულებით არ არის აუცილებელი, რომ მანძილი ყოველ ორ მომდევნო კვანძით წერტილს შორის იყოს მუდმივი. სიმარტივისათვის, რომელიც ამ შემთხვევაში არ აგარებს პრინციპულ ხასიათს, ჩვენ მხოლოდ რეგულარულ ბაღეებს განვიხილავთ.

ყოველ t_n კვანძში $\frac{du}{dt}$ წარმოებული შევცვალოთ მისი მიახლოებითი მნიშვნელობით

$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau}$. თუ (2.35) განტოლებაში წარმოებულის ნაცვლად შევიგანთ ამ გამოსახულებას, ცხადია, მივიღებთ მიახლოებით გოლობას:

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} \approx f(t_n, u(t_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

რომლის საშუალებითაც შეიძლება დავწეროთ შემდეგი განტოლებები

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\tau} = f(t_n, y(t_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.42)$$

სადაც $y(t_n)$ წარმოადგენს $u(t)$ ფუნქციის „მიახლოებით“ მნიშვნელობას t_n კვანძში. ტერმინს „მიხლოებით“ სჭირდება განმარტება და ამას ჩვენ ქვემოთ გავაკეთებთ. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $y(t_n) = y_n$, მაშინ (2.42) განტოლებები შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.43)$$

რაც შეეხება (2.36) საწყის პირობას, იგი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y_0 = u_0. \quad (2.44)$$

ამრიგად, (2.35), (2.36) ამოცანის ნაცვლად ჩვენ განვიხილავთ (2.43), (2.44) ამოცანას (შეენიშნოთ, რომ (2.43) განტოლება წარმოადგენს ე. წ. პირველი რიგის სხვაობიან განტოლებას, ხოლო (2.43), (2.44) ამოცანა კი – კოშის ამოცანას პირველი რიგის სხვაობიანი განტოლებისთვის).

თუ ვისარგებლებთ (2.43), (2.44) გოლობებით, ადვილად დავინახავთ, რომ y_n მნიშვნელობები ბადის კვანძებში შეიძლება გამოთვლილ იქნეს რეკურენტულად, შემდეგი ცხადი ფორმულის საშუალებით:

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.45)$$

$$y_0 = u_0.$$

ამრიგად, $u = u(t)$ ფუნქციის ნაცვლად ჩვენ ვპოულობთ \bar{u}_τ ბადის კვანძებში განსაზღვრულ, დისკრეტული არგუმენტის ფუნქციას $y_n = y(t_n)$, რომელსაც ვუწოდებთ (2.35), (2.36) ამოცანის „მიახლოებით“ ამონახსნს.

სწორედ ეს უმარტივესი ალგორითმი ატარებს ეილერის სხვაობიანი მეთოდის (ეილერის მეთოდის) სახელწოდებას. ცხადია, ეილერის მეთოდი მოითხოვს შესწავლას, რათა შევაფასოთ ის სიზუსტე, რომლითაც ხდება (2.35), (2.36) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის აგება. ამ პრობლემას ჩვენ ცოცხა ქვემოთ შევეხებით. ჯერ კი მოვიყვანოთ ეილერის მეთოდის გეომეტრიული შინაარსი, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში.

$[0, \tau]$ მონაკვეთზე ამონახსნი იცვლება $(0, u(0))$ წერტილში გავლებული მხების მონაკვეთით და ამ მხების საშუალებით ხდება y_1 – მნიშვნელობის გამოთვლა. მეორე ბიჯზე მიახლოებითი ამონახსნის აგება ხდება (2.35) განტოლების ამონახსნთა ოჯახის იმ წევრის საშუალებით, რომელიც გადის (τ, y_1) წერტილზე. კვლავ ვაივლება მხები (τ, y_1) წერტილში, ამ მხების საშუალებით მოხდება y_2 მნიშვნელობის აგება და ა. შ. ზოგიერთი დიფერენციალური განტოლებისათვის ეს პროცედურა არ იწვევს დიდ ცდომილებებს მიახლოებითი ამონახსნის აგებისას, ზოგიერთი დიფერენციალური განტოლებისათვის კი ეს ცდომილება შეიძლება ძალზე დიდი იყოს. ამ საკითხს ცოცხა ქვემოთ შევეხებით. ჯერ განვიხილოთ ეილერის მეთოდის გამოყენების ერთი მარტივი მაგალითი.

4.3 ცდომილების შესახებ. განვიხილოთ კოშის ამოცანა შემდეგი პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისთვის

$$\frac{du}{dt} = u^2(t) + 2t - t^4, \quad t > 0, \quad u(0) = 0. \quad (2.46)$$

შეიძლება ადვილად შევამოწმოთ, რომ ამ ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენს ფუნქცია $u(t) = t^2$.

(2.46) ამოცანის შემთხვევაში $f(t,u) = u^2 + 2t - t^4$. შესაბამისად ეილერის მეთოდს ამ ამოცანისათვის ექნება სახე:

$$y_{n+1} = y_n + \tau(y_n^2 + 2n\tau - n^4\tau^4), \quad n = 0, 1, \dots \quad y_0 = 0. \quad (2.47)$$

გამოთვლების დროს ღვეუშვით, რომ $\tau = 0,1$. ცხადია, რომ შესაძლებელია ავიღოთ τ -ს ნებისმიერი სხვა დადებითი მნიშვნელობა. ქვემოთ ცხრილში მოყვანილია ეილერის (2.47) მეთოდის საშუალებით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის მნიშვნელობა ბადის ბოვიერთ კვანძში და ზუსტი ამონახსნის შესაბამისი მნიშვნელობა:

t	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y-მიახლოებითი ამონახსნის მნიშვნელობები	0,00	0,02	0,06	0,12	0,20	0,30
u-ზუსტი ამონახსნის მნიშვნელობები	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36

როგორც ვხედავთ, რიცხვითი მეთოდის შედეგად მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის მნიშვნელობები საკმაოდ განსხვავდებიან ზუსტი ამონახსნის მნიშვნელობებისაგან ბადის t_n კვანძებში. ჩვენი მიზანია დავადგინოთ ამ ცდომილებების მიზეზები და საერთოდ, შევეცადოთ წინასწარ შევაფასოთ y_n - მიახლოებითი ამონახსნების სიზუსტე.

კომპიუტერზე გამოთვლების საშუალებით ჩვენ, როგორც წესი, შეგვიძლია მივიღოთ დასმული ამოცანის მხოლოდ მიახლოებითი ამონახსნი. ბუნებრივად ისმება საკითხი ცდომილების მიზეზების გამოკვლევის შესახებ. შეიძლება გამოვყოთ სამი ძირითადი მიზეზი, რომლებიც ცდომილების წარმოშობაში თამაშობენ ძირითად როლს. უპირველეს ყოვლისა, ესაა საწყის ამოცანაში შემაჯავლი სხვადასხვა მონაცემები (საწყისი და სასაზღვრო პირობები, კოეფიციენტები, განტოლებათა მარჯვენა მხარეები და სხვა), რომლებიც ძალიან ხშირად მოცემულია გარკვეული ცდომილებებით. ამ ცდომილებას ხშირად აუცილებელია ცდომილება ეწოდება და ჩვეულებრივ იგი მონაწილეობს ამოცანის ამოხსნის ყოველ ეტაპზე. შემდეგ, როდესაც საწყისი ამოცანა იცვლება სხვა ამოცანით (მაგალითად, ჩვენს შემთხვევაში დიფერენციალური განტოლება შეიცვალა სხვაობიანი განტოლებით), წარმოიშობა ცდომილება, რომელსაც მეთოდის ცდომილებას (ზოგჯერ დისკრეტიზაციის ცდომილებას) უწოდებენ. მაგალითად, ეილერის მეთოდის

ძირითად იდეას წარმოადგენს $\frac{du}{dt}$ წარმოებულის შეცვლა $\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau}$ გა-

მოსახულებით ყოველ t_n კვანძში. ამ დროს ჩვენ ვუშვებთ ცდომილებას, რომელსაც $u(t_n)$ ფუნქციის სიგლუვისადმი გარკვეული მოთხოვნის პირობებში აქვს $O(\tau)$ - რიგი. მართლაც, ვთქვათ, $u(t)$ ფუნქციას $[0, T]$ შუალედზე აქვს მორე რიგის უწყვეტი წარმოებული, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$u(t + \tau) = u(t) + \tau u'(t) + \frac{1}{2} \tau^2 u''(\xi),$$

სადაც $\xi = t + \theta\tau$, $0 < \theta < 1$.

(ამრიგად, გვექნება, რომ $0 < \theta < 1$ $u = \frac{ab}{b-x}$)

$$\frac{u(t + \tau) - u(t)}{\tau} = u'(t) + \frac{\tau}{2} u''(\xi),$$

საიდანაც შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი შეფასება:

$$\left| \frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau} - u'(\tau) \right| = O(\tau).$$

დაბოლოს, მესამე ძირითადი მიზნის შესახებ. როგორც აღრე გვექონდა აღნიშნული, კომპიუტერზე გამოთვლებს თითქმის ყოველთვის თან ახლავს დამრგვალების ცლომილება, რომელიც გამოთვლების პროცესში შეიძლება იმდენად დაგროვდეს, რომ მთლიანად დაამახინჯოს მიღებული შედეგები. ჩვეულებრივ, გამოთვლების ყოველ ეტაპზე ხდება დამრგვალების ცლომილების წარმოშობა. იმისდა მიხედვით, თუ რა შინაგანი თვისებები აქვს ალგორითმს, რომელსაც ჩვენ ვიყენებთ ამა თუ იმ ამოცანის ამოხსნისას, ეს ცლომილება შეიძლება დაგროვდეს და არასასურველ სიდიდეს მიაღწიოს ან პირიქით, არ მოხდეს მათი გაზრდა. თუ გამოთვლების პროცესში დამრგვალების ცლომილებას აქვს ისეთი ტენდენცია, რომ ხდება მისი დაგროვება და საბოლოო ჯამში უსასრულოდ მრდა, მაშინ ასეთ ალგორითმს არამდგრადს უწოდებენ. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი. თუ არ ხდება დამრგვალების ცლომილების დაგროვება, ალგორითმს მდგრადი უწოდება.

როგორც ზემოაღნიშნულიდან ჩანს, მთავარი მოთხოვნა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ესა თუ ის გამოთვლითი ალგორითმი – ეს არის სიზუსტის მოთხოვნა. ეს ნიშნავს, რომ გამოთვლითი ალგორითმის საშუალებით ჩვენ უნდა შეგვეძლოს ჩვენთვის საინტერესო ამოცანის ამონახსნი მივიღოთ წინასწარ მოცემული $\varepsilon > 0$ სიზუსტით და ალგორითმი უნდა იყოს რეალიზებადი, ე. ი. უნდა იძლეოდეს ამოცანის ამონახსნს ჩვენთვის ხელსაყრელ დროში. ხშირად, სიზუსტის გაზრდის შედეგად ოპერაციების რაოდენობა იმდენად იზრდება, რომ ამოცანის ამოხსნა შეუძლებელი ხდება რეალურ დროში. ცხადია, რომ ასეთი ალგორითმების გამოყენება პრაქტიკულად შეუძლებელია. ძალზე მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, რომ ალგორითმი იძლევა პრინციპულ შესაძლებლობას ნებისმიერი სიზუსტით მივიღოთ საძიებელი ამონახსნი, მაგრამ პრაქტიკულად $\varepsilon > 0$ -სიზუსტის მახასიათებლის შერჩევა ხდება იმ კომპიუტერის შესაძლებლობების გათვალისწინებით, რომელზედაც ხდება ალგორითმის რეალიზაცია. ყოველი მოცემული ამოცანისთვის, ალგორითმისა და კომპიუტერისათვის უნდა შერჩეულ იქნეს სიზუსტის მახასიათებლის ε -ის შესაბამისი მნიშვნელობა, ცხადია იმის გათვალისწინებით, თუ რა სიზუსტით გვჭირდება მივიღოთ დასმული ამოცანის ამონახსნი.

ასლა ჩვენ განვიხილავთ ეილერის მეთოდს ზემოთ გამოთქმული მოსაზრებების გათვალისწინებით.

4.4 ეილერის სხვაობიანი მეთოდის მდგრადობა. პირველ რიგში ჩვენ შევისწავლით ეილერის სხვაობიანი მეთოდის მდგრადობას. 2.1 კუნქტში განხილული იყო დიფერენციალური განტოლების მნიშვნელოვანი თვისება – მისი მდგრადობა. ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ (2.41) ამოცანა მდგრადია, თუ $\lambda > 0$ და ამ შემთხვევაში სამართლიანია შეფასება:

$$|z(t)| \leq |z_0|.$$

იქვე აღვნიშნეთ, რომ (2.16) ამოცანას ხშირად იყენებენ, როგორც მოდელურს, მდგრადობასთან დაკავშირებული მოგიერთი პრობლემის შესასწავლად.

განვიხილოთ მოდელური ამოცანა – კომის ამოცანა პირველი რიგის წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$\frac{du}{dt} + \lambda u = 0, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0. \quad (2.48)$$

ცხადია, რომ, რადგან $\lambda > 0$, (2.48) ამოცანის ამონახსნი მდგრადია საწყისი მონაცემების მიმართ. ეს პირობა შეესაბამება (2.35), (2.36) ამოცანის მდგრადობის პირობას $f'_y \leq 0$. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს შეფასებას:

$$|u(t)| \leq |u_0|. \quad (2.49)$$

(2.48) ამოცანისათვის განვიხილოთ ეილერის სხვაობიანი მეთოდი:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \lambda y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad y_0 = u_0. \quad (2.50)$$

ბუნებრივია, რომ ამ ამოცანისათვის მოვითხოვთ (2.49) პირობის ანალოგიური პირობის შესრულება:

$$|y_n| \leq |y_0|, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.51)$$

ეს უკანასკნელი უტოლობა ნიშნავს, რომ ეილერის სხვაობიანი მეთოდი მდგრადია საწყისი მონაცემის მიმართ. ჩვენ ქვემოთ დავრწმუნდებით, რომ დიფერენციალური ამოცანის მდგრადობიდან ავტომატურად არ გამომდინარეობს შესაბამისი სხვაობიანი ამოცანის მდგრადობა. სხვაობიანი მეთოდის მდგრადობისათვის ხშირად საჭიროა მოვითხოვთ დამატებითი პირობების შესრულება.

(2.50) განტოლებები გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y_{n+1} = (1 - \tau\lambda)y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad y_0 = u_0.$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ პირობა

$$|y_0| \geq |y_1| \geq \dots \geq |y_n| \geq \dots \quad (2.52)$$

შესრულება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $|1 - \tau\lambda| \leq 1$, საიდანაც ვღებულობთ, რომ

$$\tau \leq \frac{2}{\lambda}. \quad (2.53)$$

ახლა დავეუშვათ, რომ (2.53) პირობა არ სრულდება, მაშინ გვექნება:

$$|y_n| = |\tau\lambda - 1| |y_{n-1}| = \dots = |\tau\lambda - 1|^n |y_0|,$$

ე. ი. $|y_n| \rightarrow \infty$, როდესაც $n \rightarrow \infty$.

ამ უკანასკნელ შემთხვევაში არ შეიძლება ლაპარაკი (2.48) და (2.50) ამოცანების ამონახსნების სიახლოვეზე, რადგან (2.50) მეთოდი არამდგრადია.

ამრიგად, ეილერის სხვაობიანი მეთოდი მდგრადია პირობითად, ე. ი. იმ შემთხვევაში, როდესაც $\tau \leq \frac{2}{\lambda}$.

ცხადია, რომ ისევე, როგორც დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, თუ ეილერის სხვაობიანი მეთოდი მდგრადია, მაშინ „მცირე“ ცვლილებები საწყისი მომენტში (მათ შორის დამრგვალების ცდომილებანი) გამოიწვევს ამონახსნის „მცირე“ ცვლილებას. სიგყვა „მცირე“ ჩვენ მოვითავსეთ ბრჭყალებში იმიტომ, რომ ეს ტერმინი მოითხოვს დაზუსტებას და ყოველი კონკრეტული ამოცანის შემთხვევაში იგი რიცხვითი მახასიათებლებით უნდა დახასიათდეს.

4.5 ეილერის სხვაობიანი მეთოდის სიზუსტე. ახლა განვიხილოთ პრობლემა, რომელიც შეეხება ეილერის მეთოდის საშუალებით მიღებული ამონახსნის სიზუსტის შეფასებას. კვლავ დავებრუნდეთ (2.35), (2.36) ამოცანას

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u(0) = u_0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.54)$$

და ვიგულისხმობთ, რომ შესრულებულია პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ (2.54) ამოცანის ამონახსნის არსებობასა და ერთადერთობას.

ისევე, როგორც ადრე, $[0, T]$ სეგმენტზე შემოვიღოთ რეგულარული $\bar{\omega}_\tau$ - ბადე და (2.54) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი ვიპოვოთ ეილერის მეთოდით:

$$y_{k+1} = y_k + \tau f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad y_0 = u_0. \quad (2.55)$$

ვთქვათ, $u(t)$ წარმოადგენს საწყისი (2.29) ამოცანის ამონახსნს, სადაც $t \in [0, T]$, ხოლო $y_\tau(t)$ წარმოადგენს ეილერის მეთოდით მიღებულ ამონახსნს, სადაც $t \in \bar{\omega}_\tau$ ე. ი. $y_\tau(t)$ წარმოადგენს დისკრეტული არგუმენტის ფუნქციას. $y_\tau(t)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ ვექტორის სახით: $y_\tau(t) = (y_\tau(0), y_\tau(\tau), \dots, y_\tau(N\tau))$ ან $y = (y_0, y_1, \dots, y_N)$. რიცხვითი მეთოდების თეორიის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს $u(t)$ და $y_\tau(t)$ ფუნქციების სიახლოვის შეფასება. ეს არ არის გრივიალური ამოცანა, რადგან $u(t)$ და $y_\tau(t)$ სხვადასხვა ფუნქციონალური სივრცეების ელემენტებია - ერთი მათგანი წარმოადგენს უწყვეტი არგუმენტის ფუნქციას, იგი განსაზღვრულია $[0, T]$ შუალედის ყველა წერტილში, ხოლო მეორე კი - დისკრეტული არგუმენტის ფუნქციაა, მისი განსაზღვრის არეს წარმოადგენს $\bar{\omega}_\tau$ სიმრავლე. რიცხვითი მეთოდების თეორიაში განიხილავენ ასეთი ფუნქციების შედარების რამდენიმე შესაძლებლობას. ჩვენ განვიხილავთ ერთ-ერთ მათგანს.

$[0, T]$ სეგმენტზე დავაფიქსიროთ რაიმე წერტილი $t^* \in \bar{\omega}_\tau$. $t^* = t_n = n\tau$. განვიხილოთ $|u(t^*) - y_\tau(t^*)|$ სხვაობის მოდული და $\bar{\omega}_\tau$ ბადის ბიჯი τ მივასწრაფოთ ნულისაკენ ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა $t^* \in \bar{\omega}_\tau$.

თუ შესრულებულია პირობა

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} |u(t^*) - y_\tau(t^*)| = 0,$$

მაშინ ამბობენ, რომ (2.30) ეილერის მეთოდით მიღებული ამონახსნი კრებადია (2.54) ამოცანის ამონახსნისაკენ t^* წერტილში, ან უბრალოდ ამბობენ, რომ ეილერის მეთოდი კრებადია t^* წერტილში. თუ კრებადობას ადგილი აქვს $[0, T]$ სეგმენტის ყველა წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ ეილერის მეთოდი კრებადია $[0, T]$ სეგმენტზე. თუ ამავე დროს დამატებით შესრულებულია პირობა:

$$|u(t^*) - y_\tau(t^*)| \leq M\tau^p, \quad \tau \leq \tau_0,$$

სადაც $M > 0$, და $p > 0$ - ფიქსირებული მუდმივებია, მაშინ ამბობენ, რომ მიახლოებითი მეთოდის კრებადობის სიჩქარეა $O(\tau^p)$ და მეთოდს უწოდებენ P რიგის სიზუსტის რიცხვით მეთოდს. ჩვენ ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ გარკვეულ პირობებში ეილერის სხვაობიანი მეთოდის კრებადობის სიჩქარეა $O(\tau)$, ე. ი. ამ შემთხვევაში $p = 1$.

ამ მიზნით (2.54) განგოლება ვაინტეგრროთ $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ შუალედებზე, მივიღებთ:

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\xi, u(\xi)) d\xi \quad (2.56)$$

ხოლო (2.55) ტოლობა შევცვალოთ მისი ეკვივალენტური ტოლობით

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, y_k) d\xi \quad (2.57)$$

ამის შემდეგ (2.56) ტოლობას გამოვაკლოთ (2.57) ტოლობა, მივიღებთ:

$$u(t_{k+1}) - y_{k+1} = u(t_k) - y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(\xi, u(\xi)) - f(t_k, y_k)] d\xi \quad (2.58)$$

დავუშვათ, რომ $f(t, u)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ღია ამოზნექილ G სიმრავლეზე, აქვს პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები ორივე ცვლადის მიმართ და რომ წერტილები (t_k, y_k) , $(t_k, u(t_k))$ ეკუთვნიან G არეს.

გარდა ამისა დავუშვათ, რომ

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leq F, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \leq F, \quad \text{თუ } (t, u) \in G, \quad (2.59)$$

სადაც F გარკვეული დადებითი მუდმივია.

ახლა შევავსოთ $f(\xi, u(\xi)) - f(t_k, y_k)$ სვავობა. ამ მიზნით შევაერთოთ $(\xi, u(\xi))$ და (t_k, y_k) წერტილები მონაკვეთით.

ვთქვათ, (α, β) - ამ მონაკვეთზე მდებარე წერტილია, მაშინ

$$\alpha = t_k - \lambda(t_k - \xi), \quad \beta = y_k - \lambda(y_k - u(\xi)), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (2.60)$$

შემოვიღოთ დამხმარე ფუნქცია

$$\psi(\lambda) = f(t_k + \lambda(\xi - t_k); y_k + \lambda(u(\xi) - y_k)),$$

ამ ფუნქციის საშუალებით $f(\xi, u(\xi)) - f(t_k, y_k)$ სვავობა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\begin{aligned} f(\xi, u(\xi)) - f(t_k, y_k) &= \psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} (t_k + \lambda(\xi - t_k), y_k + \lambda(u(\xi) - y_k)) (\xi - t_k) d\lambda + \\ &+ \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u} (t_k + \lambda(\xi - t_k), y_k + \lambda(u(\xi) - y_k)) (u(\xi) - y_k) d\lambda = \\ &= (\xi - t_k) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} (t_k + \lambda(\xi - t_k), y_k + \lambda(u(\xi) - y_k)) d\lambda + \\ &+ (u(\xi) - y_k) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u} (t_k + \lambda(\xi - t_k), y_k + \lambda(u(\xi) - y_k)) d\lambda. \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.59) შეფასებებს, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} |f(\xi, u(\xi)) - f(t_k, y_k)| &\leq F\{|\xi - t_k| + |u(\xi) - y_k|\} \leq \\ &\leq F\{|\xi - t_k| + |u(\xi) - u(t_k)| + |u(t_k) - y_k|\}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

ვთქვათ, რომ G სიმრავლეზე ადგილი აქვს უტოლობას $|f(t, u)| \leq L = \text{const}$, მაშინ, ცხადია, რომ $\left| \frac{du}{dt} \right| \leq L$ და ამიგომ იქიდან, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$u(\xi) - u(t_k) = \int_{t_k}^{\xi} \frac{du}{dt} dt,$$

შეგვიძლია დავწეროთ:

$$|u(\xi) - u(t_k)| \leq L|\xi - t_k|.$$

შემდეგ, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $|\xi - t_k| \leq \tau$, მაშინ (2.61) უტოლობის საშუალებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$|f(\xi, u(\xi)) - f(t_k, y_k)| \leq F\{\tau + L\tau + |u(t_k) - y_k|\} = F(1+L)\tau + F|u(t_k) - y_k|.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $D = F(1+L)$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$|f(\xi, u(\xi)) - f(t_k, y_k)| \leq F|u(t_k) - y_k| + D\tau. \quad (2.62)$$

დავუბრუნდეთ (2.58) ტოლობას. (2.62) შეფასების გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{aligned} |u(t_{k+1}) - y_{k+1}| &\leq |u(t_k) - y_k| + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{F|u(t_k) - y_k| + D\tau\} d\xi = \\ &= (1+F\tau)|u(t_k) - y_k| + D\tau^2. \end{aligned} \quad (2.63)$$

აღვნიშნოთ $|u(t_k) - y_k| = \rho_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, მაშინ (2.63) უტოლობა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \rho_{k+1} &\leq (1+F\tau)\rho_k + D\tau^2, \\ \rho_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

ახლა განვიხილოთ $\{z_k\}$ მიმდევრობა, რომელიც განსაზღვრულია რეკურენტულად შემდეგი ტოლობების საშუალებით

$$z_{k+1} = z_k + \tau F z_k + D\tau^2, \quad z_0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.65)$$

ცხადია, რომ $z_k \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ და რომ $\{z_k\}$ მიმდევრობა ზრდადია. გადავწეროთ (2.64) უტოლობები შემდეგი სახით:

$$\rho_{k+1} \leq \rho_k + \tau F \rho_k + D\tau^2, \quad \rho_0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.66)$$

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის საშუალებით დავამტკიცოთ, რომ $\rho_k \leq z_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. მართლაც, ეს უტოლობა ჭეშმარიტია, როდესაც $k = 0$,

რადგან $z_0 = \rho_0 = 0$. შემდეგ, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად, დაეუშვათ, რომ უტოლობა $\rho_k \leq z_k$ სამართლიანია, როდესაც $k = k_0$. დავამტკიცოთ მისი ჭეშმარიტება $k = k_0 + 1$ -თვის.

(2.65) გლობიდან მივიღებთ, რომ

$$z_{k_0+1} = z_{k_0} + \tau F z_{k_0} + D\tau^2 \geq \rho_{k_0} + \tau F \rho_{k_0} + D\tau^2 \geq \rho_{k_0+1},$$

ე. ი. $\rho_{k_0+1} \leq z_{k_0+1}$.

ამრიგად, უტოლობები $\rho_k \leq z_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, სამართლიანია.

(2.65) გლობები გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} = Fz_k + D\tau, \quad z_0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.67)$$

ამ ამოცანის პარალელურად განვიხილოთ კომის ამოცანა შემდეგი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$\frac{dz(t)}{dt} = Fz + D\tau, \quad t \in (0, T], \quad z(0) = 0,$$

ადვილად დაგრწმუნდებით, რომ ამ ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენს შემდეგი ფუნქცია:

$$z(t) = \frac{D\tau}{F} [e^{Ft} - 1].$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $z_k \leq z(t_k)$. ამ მიზნით ისევ გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი. თუ $k = 0$, მაშინ, ცხადია, რომ უტოლობა სამართლიანია. შემდეგ, ვთქვათ, უტოლობა ჭეშმარიტია, როდესაც $k = k_0$. დავამტკიცოთ მისი ჭეშმარიტება $k = k_0 + 1$ -თვის.

$z(t)$ ფუნქციის მონოტონურობისა და (2.67) განტოლებების გათვალისწინებით შეიძლება დავწეროთ:

$$z(t_{k_0+1}) - z(t_{k_0}) = \int_{t_{k_0}}^{t_{k_0+1}} \frac{dz}{dt} dt = \int_{t_{k_0}}^{t_{k_0+1}} (Fz + D\tau) dt \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq \int_{t_{k_0}}^{t_{k_0+1}} [Fz(t_{k_0}) + \tau D] dt \geq \int_{t_{k_0}}^{t_{k_0+1}} [Fz_{k_0} + \tau D] dt = \\ &= (Fz_{k_0} + \tau D)\tau = z_{k_0+1} - z_{k_0}. \end{aligned}$$

ამრიგად მივიღებთ, რომ

$$z(t_{k_0+1}) - z(t_{k_0}) \geq z_{k_0+1} - z_{k_0},$$

$$z(t_{k_0+1}) \geq z_{k_0+1} + z(t_{k_0}) - z_{k_0}.$$

მაგრამ დაშვების თანახმად $z(t_{k_0}) - z_{k_0} \geq 0$, საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$z(t_{k_0+1}) \geq z_{k_0+1}.$$

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ სამართლიანია უტოლობები

$$z(t_k) \geq z_k \geq \rho_k = |u(t_k) - y_k|, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

ე. ი. $|u(t_k) - y_k| \leq z(t_k) = \frac{D\tau}{F} [e^{Ft_k} - 1].$

ამ უგლობებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ k -ს ნებისმიერი ნატურალური მნიშვნელობისათვის სამართლიანია შემდეგი შეფასებები:

$$|u(t_k) - y_k| \leq \frac{D\tau}{F} [e^{Ft_k} - 1], \quad \text{თუ } k\tau \leq T. \quad (2.68)$$

ამ უკანასკნელი შეფასებიდან, ცხადია, რომ როდესაც $\tau \rightarrow 0$ და $k\tau = t^*$, მაშინ

$$|u(t^*) - y_\tau(t^*)| \rightarrow 0.$$

ე. ი. ეილერის მეთოდი კრებადია t^* წერტილში. რადგან t^* წარმოადგენს $[0, T]$ სეგმენტის ნებისმიერ წერტილს, ამიტომ ეილერის მეთოდი კრებადია $[0, T]$ სეგმენტზე. (2.68) შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ ეილერის მეთოდი პირველი რიგის სიმუსტის რიცხვითი მეთოდია.

მაგალითი. განვიხილოთ კომის ამოცანა პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისთვის

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad t \in (0, 1], \quad x(0) = 1. \quad (2.69)$$

გამოვიყენოთ ეილერის მეთოდი ამ ამოცანის ამოსახსნელად. ამისათვის ჯერ $[0, 1]$ სეგმენტზე შემოვიღოთ რეგულარული ბადე

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad N \cdot \tau = 1\}$$

და მოვახდინოთ დიფერენციალური განტოლების აპროქსიმაცია ეილერის სქემის საშუალებით:

$$y_{k+1} = y_k + \tau y_k, \quad y_0 = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

ან

$$y_{k+1} = (1 + \tau)y_k, \quad y_0 = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$y_k = (1 + \tau)^k = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k. \quad (2.70)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ (2.69) ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენს ფუნქცია $x(t) = e^t$. შევადაროთ ეილერის მეთოდით მიღებული (2.70) ამონახსნი მუსგ ამონახსნს.

განვიხილოთ ცნობილი უგლობები:

$$\frac{1}{N} > \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) > \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$e^{\frac{k}{N}} \geq \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k \geq e^{\left(1 - \frac{1}{2N}\right)\frac{k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

სადაც გოლობებს ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $k = 0$.

ამრიგად, მივიღებთ:

$$e^{\frac{k}{N}} \geq \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k \geq e^{\left(1 - \frac{1}{2N}\right)\frac{k}{N}} = e^{\frac{k}{N} \left(1 - \frac{k}{2N^2} + \frac{k^2}{2!(2N^2)^2} - \dots\right)} \geq e^{\frac{k}{N} \left(1 - \frac{k}{2N^2}\right)}.$$

ამრიგად,

$$0 \leq e^{\frac{k}{N}} - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k \leq \frac{k}{2N^2} e^{\frac{k}{N}} \leq \frac{e}{2N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

ამ უკანასკნელი უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ ცლომილებების შემდეგ შეფასებებს:

$$|x(t_k) - y_k| \leq \frac{e}{2N} = \frac{e\tau}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (2.71)$$

ამრიგად,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} |x(t_k) - y_k| = 0, \quad t_k = t^*, \quad k\tau = t^*.$$

(2.71) შეფასება იძლევა საშუალებას დავადგინოთ კვანძების რაოდენობა N , რომლის დროსაც მიახლოებითი ამონახსნის ცლომილება იქნება ნაკლები, ვიდრე ჩვენ მიერ წინასწარ დასახელებული $\varepsilon > 0$ რიცხვი.

$|x(t_k) - y_k| < \varepsilon$ უტოლობა შესრულდება, თუ მოვითხოვთ, რომ N შეირჩეს შემდეგი უტოლობიდან $\frac{e}{2N} \leq \varepsilon$. საიდანაც მივიღებთ, რომ $N = \left\lceil \frac{e}{2\varepsilon} \right\rceil + 1$. ასე მაგალითად, თუ $\varepsilon = 10^{-2}$, მივიღებთ, რომ $N = 136$. თუ $\varepsilon = 10^{-3}$, მაშინ მივიღებთ, რომ $N = 1360$.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ეილერის მეთოდის სიზუსტის შეფასება (2.68) უტოლობების საშუალებით, საკმაოდ უხეშია. ამას ადასტურებს ჩვენ მიერ განხილული (2.69) ამოცანაც. ამ შემთხვევაში გვაქვს $F = 1$, $T = 1$, $f = e$, ამიგომ $D = e + 1$, ე. ი. ამ შემთხვევაში (2.68) შეფასებები მიიღებს სახეს:

$$|x(t_k) - y_k| \leq (e + 1)(e - 1)\tau = (e^2 - 1)\tau.$$

თუ ამ შეფასებებს შევადარებთ (2.71) უტოლობებს, დავინახავთ, რომ კოეფიციენტი τ -სთან გაზრდილია $\frac{2(e^2 - 1)}{e}$ -ჯერ, ე. ი. დაახლოებით 6-ჯერ. ამიგომ, თუ ვისარგებლებთ (2.68) თეორიული შეფასებებით, მაშინ $\varepsilon > 0$ - სიზუსტის მისაღწევად τ -ს მნიშვნელობად უნდა ავიღოთ 6-ჯერ უფრო ნაკლებ მნიშვნელობა, ვიდრე ეს საჭიროა რეალურად. ეს კი, ცხადია, გამოიწვევს გამოთვლითი სამუშაოს 6-ჯერ გაზრდას, რაც თავის მხრივ შესაბამისად გაზრდის ალგორითმის კომპიუტერზე რეალიზაციის დროს.

მოუწინაო მაგალითი წარმოადგენს კარგ ილუსტრაციას, თუ რა მდგომარეობაა დიფერენციალური განტოლებების მიახლოებითი ამონახსნის სიზუსტის შეფასების თვალსაზრისით. მოვიერთო კერძო გამოწვევის გარდა, ეს შეფასებები საკმაოდ უხეშია და, ცხადია, ეს იწვევს τ -ს მნიშვნელობის საკმაოდ უხეშად დადგენას საჭირო სიზუსტის მიღწევის მიზნით. სიძნელეები დაკავშირებულია

თეორიულ შეფასებებში შემაჯავალი მუდმივების განსაზღვრასთანაც, რაც ჩვეულებრივ ხერხდება და ისიც არა ყოველთვის, საკმაოდ უხეშად. ამიტომ ცდომილების შეფასებისათვის გამოიყენება სხვა, ირიბი მეთოდები. ასე მაგალითად,

ამოცანას მიახლოებითი მეთოდით ხსნიან ორჯერ τ და $\frac{\tau}{2}$ ბიჯებით. თუ ერთი

და იმავე წერტილებში მიღებული ამონახსნები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან უფრო მცირედ, ვიდრე მოცემული სიზუსტეა, მაშინ კრებადი მეთოდის შემთხვევაში თვლიან, რომ სიზუსტე მიღწეულია. ეს დასკვნა კრებადი მეთოდის შემთხვევაში საკმაოდ ზუსტია. თუ სიზუსტე არ არის მიღწეული, მაშინ ამოცანას

ხსნიან $\frac{\tau}{4}$ ბიჯით, აღარებენ $\frac{\tau}{2}$ ბიჯით გამოთვლების შედეგად მიღებულ ამონახსნს და ა. შ. ბიჯის განახევრების პროცესი ვრძელდება მანამ, სანამ არ მიიღწევა საჭირო სიზუსტე.

§5. უსუნქციათა ინტეგრირება

5.1 ინტეგრირების ამოცანა. რიცხვითი მეთოდების თეორიის ერთ-ერთ ძირითად პრობლემას წარმოადგენს ფუნქციის ინტეგრირების პრობლემა, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: ზოგ შემთხვევაში ფუნქცია $y = f(x)$, რომლის განსაზღვრის არეა $[a, b]$ სეგმენტი, მოიცემა ცხრილის სახით:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$...	$f(x_n)$

(2.72)

სადაც $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$. ხშირად საჭირო ხდება ვიპოვოთ $y = f(x)$ ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება ან ფუნქციის მნიშვნელობები ისეთ $x \in [a, b]$ წერტილებში, რომლებიც არ ემთხვევიან x_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) წერტილებს. სწორედ ამ პრობლემების (და არა მხოლოდ ამ პრობლემების) გადაწყვეტა ხერხდება ფუნქციათა ინტეგრირების საშუალებით.

ცხრილის სახით ფუნქცია მოიცემა მაგალითად, იმ შემთხვევაში, როდესაც საქმე გვაქვს რეალურ ექსპერიმენტთან, რომლის დროსაც დაკვირვებისა და გაზომვების შედეგად მიიღება ჩვენთვის საინტერესო სიდიდის დისკრეტული მნიშვნელობები. ასეთი ექსპერიმენტის დროს ხშირად ძალზე ძნელია გასაზომი სიდიდის მნიშვნელობების დაფიქსირება დროის ყოველ მომენტში. ამ შემთხვევაში შეიძლება მივმართოთ ფუნქციის ინტეგრირებას და აგებული ცხრილის საშუალებით დავადგინოთ გარკვეული სიზუსტით, გასაზომი სიდიდის მნიშვნელობა დროის ყოველ, ჩვენთვის საინტერესო მომენტში.

შესაძლებელია ისეთი შემთხვევაც, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე ანალიზური სახით, მაგრამ ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლა დაკავშირებულია დიდი მოცულობის გამოთვლით სამუშაოსთან. ამიტომ მიზანშეწონილია ამ ფუნქციისათვის ავარგოთ უფრო მარტივი (გამოთვლებისათვის ნაკლებად შრომატევადი) ანალიზური გამოსახულება, რომელიც მოგვცემდა საშუალებას საჭირო სიზუსტით ვიპოვოთ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობები $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ წერტილში.

შენიშნოთ, რომ ფუნქციითა ინტერპოლების გამოყენების სფერო მარტო ამ ორი ამოცანით არ შემოიფარგლება, იგი გაცილებით ფართოა და ხშირად ბევრი მათემატიკური თუ სხვა პრობლემის გადაჭრის საფუძველს წარმოადგენს.

ჩამოვყალიბოთ ინტერპოლების ამოცანა: ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. ფუნქციითა წინასწარ მოცემული კლასიდან უნდა აიგოს ინტერპოლანტი - $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობები მოცემული სეგმენტის x_0, x_1, \dots, x_n წერტილებში დაემთხვევა $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს

$$\varphi(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.73)$$

და ავრთვე შევაფასოთ $|f(x) - \varphi(x)|$ - სხვაობის მოდული $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ x წერტილში.

5.2 წრფივი ინტერპოლება. ხშირად სიმარტივისათვის $\varphi(x)$ -ინტერპოლანტად იყენებენ ალგებრულ მრავალწევრებს. უმარტივეს შემთხვევაში შეიძლება ვისარგებლოთ წრფივი ინტერპოლებით. განვიხილოთ ნებისმიერი ქვეშეაღებული $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ და მოცემული $f(x)$ ფუნქცია ამ შუალედზე შევცვალოთ წრფივი ფუნქციით:

$$\varphi^{(i)}(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (2.74)$$

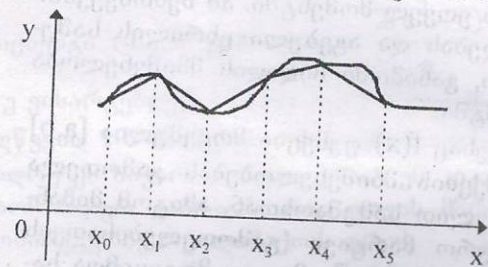
$$i = 1, 2, \dots, n,$$

სადაც $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. ჩვეულებრივ, სწორედ წრფივი ინტერპოლება გამოიყენება ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობების მოძებნისათვის, როდესაც ვიყენებთ ლოგარითმული, გრიგონომეტრიული და ბოგეირთი სხვა ფუნქციების მნიშვნელობათა სტანდარტულ ცხრილებს.

დავუბრუნდეთ (2.74) ფორმულით განსაზღვრულ წრფივ ფუნქციას. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\varphi^{(i)}(x)$ წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობები $x = x_{i-1}$ და $x = x_i$ წერტილებში ემთხვევა $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს:

$$\varphi(x_{i-1}) = y_{i-1} = f(x_{i-1}), \quad \varphi(x_i) = y_i = f(x_i).$$

ამრიგად, $\varphi^{(i)}(x)$ მრავალწევრი წარმოადგენს ინტერპოლანტს, რომელიც აგებულია ორი x_{i-1} და x_i წერტილისთვის (კვანძისათვის). გეომეტრიულად (2.74) ფუნქციას შეესაბამება იმ წრფის მონაკვეთი, რომელიც გადის $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ და



ნახ. 2.5

$(x_i, f(x_i))$ წერტილებზე. თუ პროცედურას გამოვიყენებთ ყველა ქვეშეაღებულიათვის, მაშინ, ცხადია, რომ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე იცვლება გაცილებით, რომლის საშუალებითაც შეიძლება მიახლოებით გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები ისეთ წერტილებში, რომლებიც არ ემთხვევა x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) კვანძებს.

შემდეგ ნახაზზე მოცემულია წრფივი ინტერპოლების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ექვსი კვანძის შემთხვევაში:

შევაფასოთ ცლომილება $r^{(i)}(x) = f(x) - \varphi^{(i)}(x)$, როდესაც $x \in [x_{i-1}, x_i]$. ამ მიზნით განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$g(x) = f(x) - \varphi^{(i)}(x) - k\omega(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (2.75)$$

სადაც k -გარკვეული მუდმივაა, ხოლო $\omega(x)$ წარმოადგენს კვადრატულ მრავალწევრს

$$\omega(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i).$$

ვთქვათ, $r^{(i)}(x)$ უნდა შევაფასოთ $\bar{x} \in (x_{i-1}, x_i)$ წერტილში. k მუდმივი შევარჩიოთ ისე, რომ შესრულდეს პირობა $g(\bar{x}) = 0$. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$k = \frac{f(\bar{x}) - \varphi^{(i)}(\bar{x})}{\omega(\bar{x})}. \quad (2.76)$$

დავუშვათ, რომ $f(x) \in C^2[a, b]$, სადაც $C^2[a, b]$ წარმოადგენს იმ ფუნქციათა სიმრავლეს, რომელთაც $[a, b]$ სეგმენტზე აქვთ მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებული. თუ k -მუდმივს შევარჩევთ (2.76) ფორმულის საშუალებით, მაშინ ადვილად დავინახავთ, რომ $g(x)$ ფუნქციას $[x_{i-1}, x_i]$ სეგმენტზე აქვს არანაკლებ სამი ფესვი: $x = \bar{x}$, $x = x_{i-1}$, $x = x_i$. ამის გამო $g'(x)$ -ს ექნება არანაკლებ ორი ფესვი, ხოლო $g''(x)$ -ს კი - არანაკლებ ერთი ფესვი (x_{i-1}, x_i) ქვეშეაღებში. ამრიგად, არსებობს ისეთი $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ წერტილი, სადაც შესრულებულია პირობა $g''(\xi) = 0$.

რადგან $\frac{d^2\varphi^{(i)}(x)}{dx^2} = 0$, ამიგომ მივიღებთ:

$$g''(x) = f''(x) - 2k,$$

საიდანაც, $g''(\xi) = 0$ პირობის გათვალისწინებით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f''(\xi) - 2k = 0$$

ი. ი.

$$k = \frac{f''(\xi)}{2}.$$

ამის შემდეგ, თუ ბოლო გოლობას გავითვალისწინებთ (2.76) გამოსახულებაში, მივიღებთ, რომ (x_{i-1}, x_i) ინტერვალის წერტილში წრფივი ინტერპოლაციის ცლომილება $r^{(i)}(\bar{x})$ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$r^{(i)}(\bar{x}) = f(\bar{x}) - \varphi^{(i)}(\bar{x}) = \frac{f''(\xi)}{2} \omega(\bar{x}), \quad (2.77)$$

სადაც $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ და $\omega(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)$.

ამ უკანასკნელი გოლობიდან მიიღება შეფასება:

$$|f(x) - \varphi^{(i)}(x)| \leq \frac{M_i}{2} |\omega(x)|,$$

სადაც $x \in [x_{i-1}, x_i]$, ხოლო $M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)|$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $h_i = x_i - x_{i-1}$, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$|f(x) - \varphi^{(i)}(x)| = O(h_i^2), \text{ თუ } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე არჩეულია კვანძები $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ და თითოეულ ქვეშეაღებზე $[x_{i-1}, x_i]$, ხდება ფუნქციის აპროქსიმაცია წრფივი ფუნქციის საშუალებით (წრფივი საინტერპოლაციო მრავალწევრით). შემოვიღოთ აღნიშვნა $M = \max_{1 \leq i \leq n} M_i$, $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$, მაშინ სეგმენტზე წრფივი ინტერპოლების ცლომილება შეიძლება შეფასებულ იქნეს შემდეგი უგოლობის საშუალებით

$$|f(x) - \bar{\varphi}(x)| \leq Mh^2/2, \quad (2.78)$$

სადაც

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi^{(1)}(x), & \text{თუ } x \in [x_0, x_1] \\ \varphi^{(2)}(x), & \text{თუ } x \in [x_1, x_2] \\ \dots \\ \varphi^{(n)}(x), & \text{თუ } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

და

$$\varphi^{(i)}(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

5.3 ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი. ასეთი უმარტივესი მიდგომა, როდესაც ყოველ წერტილში ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლისათვის მთელი საწყისი ინფორმაციიდან გამოიყენება მხოლოდ ორი კვანძი, ხშირად ვერ უზრუნველყოფს საჭირო სიზუსტეს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ინტერპოლების ცლომილება $|f(x) - \bar{\varphi}(x)|$, რომლის შეფასებაც მოცემულია (2.78) უგოლობის საშუალებით, შეიძლება აღემატებოდეს წინასწარ მოცემულ სიზუსტეს, რომელიც საჭიროა ამა თუ იმ ამოცანის ამოხსნისათვის. ამიტომ ფუნქციათა მიახლოებისათვის, როგორც წესი, იყენებენ უფრო მაღალი რიგის საინტერპოლაციო მრავალწევრებს. ამ შემთხვევაში ფუნქციათა ინტერპოლების ამოცანა დაისმება შემდეგნაირად:

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია (2.72) ცხრილის საშუალებით. ავაკოთ n -ური რიგის მრავალწევრი

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k, \quad (2.79)$$

რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.80)$$

ე. ი. $P_n(x)$ მრავალწევრი უნდა აიგოს ისე, რომ მისი მნიშვნელობები კვანძით წერტილებში დაემთხვეს $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს.

(2.79) და (2.80)-ის გათვალისწინებით მრავალწევრის c_k -კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის მივიღებთ შემდეგ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + \dots + c_nx_0^n &= f(x_0), \\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \dots + c_nx_1^n &= f(x_1), \\ \dots & \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \dots + c_nx_n^n &= f(x_n). \end{aligned} \quad (2.81)$$

ამ განტოლებათა სისტემის ლეტერმინანტი წარმოადგენს ვანდერმონდის ლეტერმინანტს

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{n \geq k > m \geq 0} (x_k - x_m) \neq 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (2.81) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, საიდანაც შეიძლება დავასკვნათ, რომ n -ური რიგის საინტერპოლაციო მრავალწევრი, რომელიც აკმაყოფილებს (2.80) პირობებს, არსებობს და ერთადერთია.

შენიშნით, რომ საინტერპოლაციო მრავალწევრის $c_k (k = 0, 1, \dots, n)$ კოეფიციენტების დადგენა შესაძლებელია (2.81) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით, მაგრამ ყოველი კონკრეტული $f(x)$ ფუნქციისათვის ასეთი მეთოდით საინტერპოლაციო მრავალწევრის ასაგებად ხელახლა უნდა ამოიხსნას (2.81) სისტემა, რაც, რასაკვირველია, არ არის მოსახერხებელი. ასევე, თუ n დიდი რიცხვია, (2.81) სისტემის ამოხსნა საკმაოდ შრომატევად გამოთვლით სამუშაოსთან არის დაკავშირებული. ამ მიზეზების გამო, ჩვეულებრივ, $P_n(x)$ საინტერპოლაციო მრავალწევრის ასაგებად იყენებენ სხვა მეთოდს.

ჯერ ავაგოთ n -ური რიგის პოლინომები $\{\ell_k(x)\}_{k=0}^n$, რომლებიც დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } i = k \\ 0, & \text{თუ } i \neq k \end{cases} \quad i, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ n -ური რიგის პოლინომები

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

აკმაყოფილებს ამ პირობებს.

შემდეგ, ცხადია, რომ $\ell_k(x)f(x_k)$ მრავალწევრი $x = x_k$ კვანძში მიიღებს $f(x_k)$ მნიშვნელობას და ნულის გოლი იქნება ინტერპოლების ყველა სხვა $x_i (i \neq k)$ კვანძში. ამრიგად, თუ განვიხილავთ n -ური რიგის მრავალწევრს:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \ell_k(x)f(x_k) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j}, \quad (2.82)$$

იგი დააკმაყოფილებს პირობებს:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

(2.82) მრავალწევრს უწოდებენ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრს. ცხადია, რომ თუ $n = 1$, მაშინ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი ემთხვევა წრფივ საინტერპოლაციო მრავალწევრს.

მტკიცდება, რომ თუ $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, სადაც $C^{n+1}[a, b]$ წარმოადგენს ისეთ ფუნქციათა სიმრავლეს, რომელთაც აქვთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი წარმოებულები $(n+1)$ -რიგამდე ჩათვლით, მაშინ ცდომილებისათვის სამართლიანი შემდეგი ფორმულა:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j), \quad \xi \in (a, b).$$

ჩვენ ამ თავში საკმაოდ დაწვრილებით განვიხილეთ რიცხვითი მეთოდების ბოგიერთი საკითხი (არაწრფივი განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის ბისექციის მეთოდი, პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის ამოხსნის ეილერის მეთოდი, ინტერპოლაცია მრავალწევრების საშუალებით).

ამ განხილვის მიზანია: ჯერ ერთი, ხელთ გვქონდეს ბოგიერთი ის მეთოდი, რომელიც გამოგვადგება შემდეგ თავებში გადმოცემული მათემატიკური მოდელების ამოსახსნელად და მეორეც, ვიცოდეთ თუ რა პრობლემები იქნება გადასაჭრელი ამ მოდელებისათვის რიცხვითი მეთოდების შემუშავებისას.

§6. ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა

6.1 ამოცანის დასმა. განსაზღვრული ინტეგრალის რიცხვითი გამოთვლის ამოცანას, მისი გეომეტრიული შინაარსის გამო, ხშირად კვადრატურას უწოდებენ. ჩვენ შევისწავლით კვადრატურების ბოგიერთ ისეთ მეთოდს, რომელიც საშუალებას მოგვცემს ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობა გამოვთვალოთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობების წრფივი კომბინაციის საშუალებით. ასეთ ფორმულებს, ხშირად, *კვადრატურულ ფორმულებს* უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

სადაც $F(x)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის რომელიმე პირველყოფილს, ინტეგრალის მნიშვნელობის გამოსათვლელად იშვიათად გამოიყენება, რადგან იმ ფუნქციათა კლასი, რომლისთვისაც პირველყოფილი გამოსახება ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით, საკმარისად ღარიბია.

$\int_a^b f(x) dx$ ინტეგრალის შეცვლა ინტეგრალური ჯამით $S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$,

თუმცა პრინციპულად ხსნის ინტეგრალის მნიშვნელობის ნებისმიერი სიზუსტით პოვნის ამოცანას, რადგან

$$\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx,$$

შავრამ ეს ხერხი პრაქტიკულად გამოუსადეგარია, რადგან S_n ჯამები საკმარისად ნელა იკრიბებიან $\int_a^b f(x)dx$ -სკენ.

6.2 კვადრატურული ჯამი და ნაშთითი წევრი. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int_a^b f(x)dx, \quad (2.83)$$

სადაც $[a, b]$ რიცხვითი ღერძის ნებისმიერი სასრული მონაკვეთია. შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე.

გამოყენების თვალსაზრისით ყველაზე უფრო გავრცელებულია ფორმულები, რომლებიც იძლევა საშუალებას ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობა გამოვითვალოთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობათა წრფივი კომბინაციის საშუალებით

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}), \quad (2.84)$$

სადაც $\sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$ -ს ვუწოდებთ **კვადრატურულ ჯამს**. ის შეიცავს შემდეგი

$(2n+3)$ რაოდენობის პარამეტრს: n -ს, $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ კვანძებსა და $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}$ კოეფიციენტებს. ეს პარამეტრები უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ ნაშთითი წევრი

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \quad (2.85)$$

იყოს „საკმარისად მცირე“ ყველა $f(x)$ ფუნქციისათვის, ფუნქციათა საკმარისად ფართო კლასიდან. თუ რა აზრით ისმარება ტერმინი „საკმარისად მცირე“ და როგორ ფუნქციათა კლასებთან გვექნება საქმე, ამას ცოტა ქვემოთ დავამუშავებთ.

6.3 კვადრატურული ფორმულის აგება საინტერპოლაციო მრავალწევრით. ხშირად კვადრატურული ფორმულის ასაგებად იყენებენ საინტერპოლაციო მრავალწევრებს. ამ მიზნით $f(x)$ ფუნქციას შეცვლიან $[a, b]$ სეგ-

მენტზე საინტერპოლაციო მრავალწევრით $P_n(x)$ -ით და შესაბამისად $\int_a^b f(x)dx$

ინტეგრალის მნიშვნელობის გამოთვლას შეცვლიან $\int_a^b P_n(x)dx$ ინტეგრალის მნი-

შვნელობის გამოთვლით. რადგან $P_n(x)$ მრავალწევრია, ამიტომ ამ უკანასკნელი ამოცანის ამოსხნა სიძნელეს არ წარმოადგენს. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში საძიებელი ინტეგრალის მნიშვნელობა გამოითვლება მიახლოებით

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx = R_n(f),$$

სადაც $R_n(f)$, როგორც აღვნიშნეთ, წარმოადგენს ნაშთით წევრს. იმისათვის, რომ ჩვენ შევძლოთ შევაფასოთ სიზუსტე, რომლითაც გამოვითვლით (2.83) ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელობას, აუცილებელია შევძლოთ ნაშთითი წევრის $R_n(f)$ -ის შეფასება. ამიტომ კვადრატურული ფორმულების ნაშთითი წევრის შეფასების ამოცანა წარმოადგენს ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის თეორიის უმნიშვნელოვანეს საკითხს.

განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა. ეს მოგვცემს საშუალებას მივიღოთ ისეთი კვადრატურული ფორმულები, რომლებიც ხშირად გამოიყენება პრაქტიკაში.

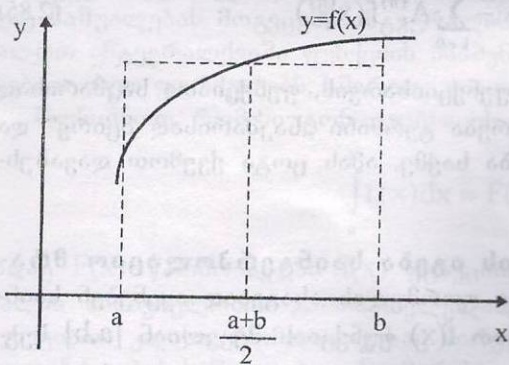
6.4 მართკუთხედის ფორმულა. ვთქვათ, $n = 0$, ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე შეიცვლება ნულოვანი რიჯის საინტეგრპოლაციო მრავალწევრით, რომელიც აგებულია $\frac{a+b}{2}$ კვანძისათვის. ე. ი. $f(x)$ ფუნქცია შეიცვლება საინტეგრპოლაციო მრავალწევრით

$$P_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

ამ საინტეგრპოლაციო მრავალწევრის გამოყენებით შეიძლება მიღებულ იქნეს შემდეგი კვადრატურული ფორმულა:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (2.86)$$

ამ შემთხვევაში, $[a, b]$ სეგმენტზე $y = f(x)$ ფუნქცია იცვლება $y = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



ნახ. 2.6

წრფის მონაკვეთით, ხოლო შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი იცვლება მართკუთხედის ფართობით, რომლის ფუძეა $(b-a)$,

ხოლო სიმაღლე $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$:

სწორედ ამ მიზეზის გამო (2.86) კვადრატურულ ფორმულას მართკუთხედის ფორმულას უწოდებენ.

შენიშვნა. ზოგიერთ შემთხვევაში (2.86) ფორმულას საშუალო მართკუთხედის ფორმულას უწოდებენ. ეს გამოწვეულია იმ მიზეზით, რომ ზოგჯერ განიხილავენ მარჯვენა და მარცხენა მართკუთხედის ფორმულებს:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(b),$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a).$$

შეგვიხსნით, რომ ამ კვადრატურულ ფორმულებს ჩვეულებრივ აქვთ სიბუს-
გის უფრო დაბალი ხარისხი (2.86) ფორმულასთან შედარებით.

თუ $f(x) \in C^2[a, b]$, მაშინ (2.86) კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევ-
რისათვის შეიძლება მიღებულ იქნეს მარტივი გამოსახულება. მართლაც, ტი-
ლორის ფორმულის საშუალებით შეიძლება დავწეროთ:

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{2} f''(\xi(x)), \quad (2.87)$$

$$\xi(x) \in [a, b].$$

(2.87) გოლობის ორივე მხარე ვაინტეგრირებთ $[a, b]$ სეგმენტზე, ამასთან, გა-
ვითვალისწინოთ, რომ

$$\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = \frac{1}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \left\{ \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \right\} \Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \left\{ \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 \right\} = 0$$

ამრიგად, გვექნება:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi(x)) dx.$$

საიდანაც, (2.86) მართკუთხედის ფორმულის ნაშთითი წევრისათვის მივი-
ღებთ გამოსახულებას:

$$R_0(f) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi(x)) dx.$$

თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემას, მაშინ შეგვიძლია
დავწეროთ:

$$R_0(f) = \frac{\mu}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24} \mu,$$

სადაც

$$\min_{x \in [a, b]} f''(x) \leq \mu \leq \max_{x \in [a, b]} f''(x)$$

რადგან $f(x) \in C^2[a, b]$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\bar{\xi}$ წერტილი, $\bar{\xi} \in [a, b]$,
რომ ადგილი ექნება გოლობას $f''(\bar{\xi}) = \mu$. ამრიგად, ნაშთითი წევრის გამოსახ-
ულება მიიღებს სახეს:

$$R_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\bar{\xi}).$$

დავალება. ვიპოვოთ მარცხენა და მარჯვენა მართკუთხედის ფორმულე-
ბის ნაშთითი წევრების გამოსახულებები.

6.5 მართკუთხედების განზოგადოებული ფორმულა. რიცხვითი ინტეგრების სიზუსტის გასაზრდელად დავეყოთ $[a, b]$ მონაკვეთი m ტოლ ქვეშეაღებად, რომელთა სიგრძეა $h = \frac{b-a}{m}$ და გამოვიყენოთ მართკუთხედის ფორმულა თითოეულ კერძო ქვეშეაღებად. მაშინ მივიღებთ:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + \dots + f\left(a + \frac{2m-1}{2}h\right) \right],$$

$$R_{m,0}(f) = \frac{h^3}{24} [f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_m)],$$
(2.88)

სადაც

$$a + (i-1)h \leq \xi_i \leq a + ih, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

რადგან

$$\min_{x \in [a,b]} f''(x) \leq \frac{1}{m} [f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_m)] \leq \max_{x \in [a,b]} f''(x),$$

და $f(x) \in C^2[a, b]$, ამიგომ მოიძებნება ისეთი $\xi \in [a, b]$ წერტილი, რომლისთვისაც ადვილი აქვს შემდეგ გოლობას:

$$\frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_m)}{m} = f''(\xi),$$

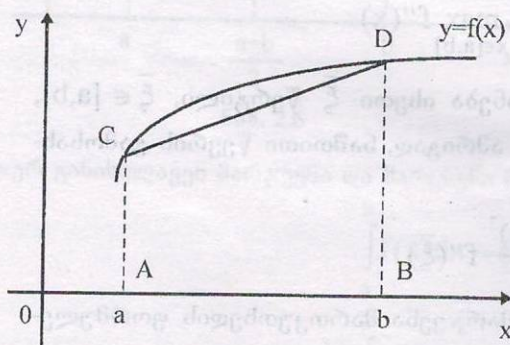
ამიგომ ნაშითი წევრისათვის საბოლოოდ გვექნება:

$$R_{m,0}(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^2} f''(\xi) = \frac{b-a}{24} f''(\xi) h^2.$$

(2.88) ფორმულას მართკუთხედების განზოგადოებულ ფორმულას უწოდებენ. ამ შემთხვევაში ნაშითი წევრი $R_{m,0}(f) = O(h^2)$.

დავალება. გამოვიყვანოთ მარცხენა და მარჯვენა მართკუთხედების განზოგადოებული ფორმულები და ვიპოვოთ ამ კვადრატურული ფორმულების ნაშითი წევრების გამოსახულებები. დავამტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში ნაშითი წევრი წარმოადგენს $O(h)$ რიგის სიდიდეს.

6.6 ტრაპეციის ფორმულა. $n = 1$. ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქცია შეიცვლება პირველი რიგის საინტერპოლაციო მრავალწევრით, რომლისთვისაც საინტერპოლაციო კვანძებად აღებულია ინტეგრების შუალედის საზღვრითი წერტილები a და b . ამ საინტერპოლაციო მრავალწევრის ინტეგრების შედეგად მივიღებთ შესაბამის კვადრატურულ ფორმულას. ამ შემთხვევაში $y = f(x)$ წირი $[a, b]$ შუალედზე იცვლება ქორდით, რომელიც აერთებს $(a, f(a))$; $(b, f(b))$ წერტილებს:



ნახ. 2.7

ინტეგრალი საინტეგრაციო მრავალწევრიდან მოგვცემს ABDC გრაპეციის ფართობის მნიშვნელობას, ამიტომ შესაბამის კვადრატურულ ფორმულას გრაპეციის ფორმულას უწოდებენ. ABDC გრაპეციის ფართობი, ცხადია,

$$\frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

სიდიდის გოლი იქნება.

ამრიგად, მივიღებთ შემდეგ კვადრატურულ ფორმულას (გრაპეციის ფორმულას):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)], \quad (2.89)$$

მტკიცდება, რომ თუ

$$f(x) \in C^2[a, b],$$

მაშინ (2.89) კვადრატურული ფორმულის ნაშთით წევრს აქვს სახე:

$$R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

6.7 გრაპეციების განზოგადოებული ფორმულა. გრაპეციის ფორმულის ცლომილება შეიძლება მნიშვნელოვნად შევამციროთ, თუ გრაპეციის ფორმულას გამოვიყენებთ არა მთლიანად $[a, b]$ შუალედზე, არამედ, წინასწარ ინტეგრების შუალელს დავეყოთ ქვეშუალედებად და შემდეგ, თითოეული ამ ქვეშუალედის მიმართ გამოვიყენებთ მას. კერძოდ, თუ $[a, b]$ მონაკვეთს დავეყოთ m რაოდენობის ერთმანეთის გოლ ქვეშუალედებად, სადაც თითოეული ქვეშუალედის სიგრძე იქნება $h = \frac{b-a}{m}$, მაშინ მივიღებთ შემდეგ კვადრატურულ ფორმულას და მის შესაბამის ნაშთით წევრს:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(a+(m-1)h) + f(a+mh)] \quad (2.90)$$

$$R_{m,1}(f) = -\frac{h^3}{12}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_m)]$$

სადაც

$$a + (i-1)h \leq \xi_i \leq a + ih, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

თუ ამ ნაშთითი წევრის გარდაქმნისას გავიმეორებთ მართკუთხედების განზოგადოებული კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრის გარდაქმნისას ჩაგარებულ ოპერაციებს, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$R_{m,1}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi)$$

(2.90) ფორმულას უწოდებენ გრაპეციების განზოგადოებულ ფორმულას. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ნაშთითი წევრი $R_{m,1}(f) = O(h^2)$.

ჩვენ განვიხილეთ უმარტივესი კვადრატურული ფორმულები. დაინტერესებული მკითხველი ამ პრობლემატიკას შეიძლება გაეცნოს სპეციალურ ლიტერატურაში (მაგ., [13], [40], [46]).

დეტერმინირებული მოდელები

დეტერმინიზმი – ეს არის ფილოსოფიური კონცეფცია, მოძღვრება მოვლენათა საყოველთაო კანონზომიერი კავშირის, მიზეზობრივი განპირობებულობის შესახებ. გერმინი წარმოიშვა ლათინური სიტყვისაგან „determino“ – ვსაზღვრავ. ეს კონცეფცია ნათლად გამოვლინდა მიზეზობრიობის იმ ფორმის აბსოლუტიზაციაში, რაც აისახება მექანიკის მკაცრი დინამიკური კანონებით, რაც იწვევს მიზეზობრიობის აუცილებლობასთან გაიგივებასა და შემთხვევითობის ობიექტური ხასიათის უარყოფას. მათემატიკური მოდელები თანამედროვე ეტაპზე ორ ძირითად გიჰადას დაყოფილი: ერთია ალბათური ანუ სტოქასტიკური (გერმინი წარმოიშვა ბერძნული სიტყვისაგან „στοχαστικός“ – ამოცნობის შემძლე) მოდელები, მეორე კი – დეტერმინირებული მოდელები. ამ თავში საქმე გვექნება დეტერმინირებულ მოდელებთან: დეტერმინირებულ მოდელებში შესასწავლი ობიექტის დამახასიათებელ ფიზიკურ სიდიდეთა შორის მყარდება სრულად განსაზღვრული ურთიერთცალსახა კავშირები, რაც გამომდინარეობს შედეგის მიზეზით განპირობებულობიდან.

§1. სითბოგამტარებლობის განტოლების შემსველი

ამთავაბიკური მოდელები

1.1 რამდენიმე შენიშვნა სითბოგამტარებლობის განტოლების შესახებ. სითბოს შესახებ რამდენიმე საუკუნის წინ იყო გამოთქმული ერთმანეთის საწინააღმდეგო ორი თვალსაზრისი. პირველი თვალსაზრისის მიხედვით, რომელიც ეკუთვნის გალილეის, სითბო არის თავისებური სახის ნივთიერება, რომელსაც შეუძლია შესვლა ყველა სხეულში, ან მისგან გამოსვლა. შემდეგში ამ ნივთიერებას სითბომბადი ეწოდა. ამ ჰიპოთეზის თვალსაზრისით სითბოს შესვლა სხეულში იწვევს მისი გემპერაგურის გადიდებას, გამოსვლა კი – გემპერაგურის დაცემას. თუ სხეულში სრულიად არ არის სითბომბადი, მისი გემპერაგურა იქნება აბსოლუტური ნული. ვინაიდან ცდები აჩვენებდა, რომ გემპერაგურის ცვლა არ იწვევს სხეულის წონის შეცვლას, ითვლებოდა, რომ სითბომბადი უწონოა. ცხადია, ამ თვალსაზრისით (ვინაიდან სითბო წარმოადგენდა ნივთიერებას) შეუძლებელი იყო მისი წარმოქმნა ან გაქრობა. შეიძლებოდა მხოლოდ მისი გადანაწილება სხეულებს შორის.

ეს თვალსაზრისი სითბოს ნივთიერი ბუნების შესახებ გაბატონებული იყო მთელი XVIII საუკუნის განმავლობაში და XIX საუკუნის დასაწყისში. ამ დროიდან მოდის გერმინები: სითბოგვევადობა, ფარული სითბო და ა. შ. სწორედ ამ პერიოდში დამუშავდა სითბოს რაოდენობის გაზომვის მეთოდები და დადგინდა მისი საზომი ერთეული – კალორია. განმარტების თანახმად, კალორია არის სითბოს ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა ერთი გრამი სუფთა წყლის გასათბობად ერთი გრადუსით. აღსანიშნავია, რომ გათბობა უნდა წარმოებდეს 19,5°C-დან 20,5°C-მდე ნორმალური ატმოსფერული წნევის დროს. ეს დამატება აუცილებელია, ვინაიდან გათბობისათვის საჭირო სითბოს რაოდენობა დამოკიდებულია იმ გემპერაგურასა და წნევაზე, რომლის დროსაც ხდება გათბობა.

საწინააღმდეგო თვალსაზრისი სითბოს ბუნების შესახებ გამოთქმული იყო ფ. ბეკონის მიერ. ამ თვალსაზრისის მიხედვით სითბო სხეულში მყოფი სითბობაა კი არაა, არამედ სხეულის შემადგენელი მცირე უხილავი ნაწილაკების შინაგანი მოძრაობაა. ამის მიხედვით, სხეულის ტემპერატურა განისაზღვრებოდა არა სითბობადის რაოდენობით სხეულში, არამედ მოძრავე ნაწილაკების სიჩქარით.

ამ თვალსაზრისის მიემხრო მრავალი ცნობილი მეცნიერი (ნიუტონი, ბოილი და ა. შ.), მათ შორის ლომონოსოვიც, რომელმაც ამ ჰიპოთეზაზე დაყრდნობით დაასაბუთა ტემპერატურის აბსოლუტური ნულის არსებობა, როგორც მდგომარეობის, როდესაც შეწყვეტილია ყოველგვარი მოძრაობა. მაგრამ ფ. ბეკონის ჰიპოთეზის გამოყენება და გავრცელება ძნელდებოდა იმის გამო, რომ ჯერ კიდევ მცირე იყო ცოდნა ატომებისა და მოლეკულების შესახებ.

პირველი ჰიპოთეზის წინააღმდეგობრიობა დაადასტურა იმ მრავალრიცხოვანმა ცდებმა, რომელთაც დაამტკიცეს, რომ სითბო არ არის მოუსპობადი, რომ იგი შეიძლება გაჩნდეს მექანიკური ენერჯიის ხარჯზე და გარდაიქმნას მექანიკურ ენერჯიად.

სითბოსა და მექანიკური ენერჯიის ურთიერთგარდაქმნადობა საბოლოოდ დადასტურდა, როდესაც დადგინდა, რომ სითბოს ერთეული ეკვივალენტურია მექანიკური ენერჯიის გარკვეული რაოდენობისა და სრულიად დამოუკიდებელია იმაზე, თუ რა მექანიზმით ხდება მათი ერთმანეთში გარდაქმნა. მრავალმა ცდამ და თეორიულმა გამოკვლევამ ცხადყვეს, რომ კალორიასა და ჯოულს შორის არსებობს შემდეგი თანაფარდობა.

$$1 \text{ კალ} = 4,182 \text{ ჯოული.}$$

შენიშვნა: ძალის ერთეულად მექანიკაში იყენებენ ნიუტონს. 1 ნიუტონი ისეთი ძალაა, რომელიც 1 კგ მასის სხეულს 1 მ/წმ² აჩქარებას ანიჭებს. 1 ჯოული არის ისეთი მუშაობა, რომელსაც ასრულებს 1 ნიუტონი ძალა მისი მოღების წერტილის ამ ძალის მიმართულებით 1 მ-ზე გადაადგილებისას.

მეცნიერებაში საბოლოოდ განმტკიცდა მეორე თვალსაზრისი სითბოს, როგორც ნაწილაკების ქაოსური მოძრაობის შესახებ, მაგრამ, ამასთანავე, გავრცელდა არასწორი შეხედულება სითბოზე, როგორც სიდიდეზე, რომელიც აქვს სხეულს და, მაშასადამე, წარმოადგენს მის თვისებას. ეს არასწორი შეხედულება გამოწვეულია ორი სიდიდის – შინაგანი, ან რაც იგივეა, სითბური ენერჯიისა და სითბოს ერთმანეთში არევის. მსგავსი აღრევა ზოგიერთ თანამედროვე სახელმძღვანელოებშიც ვხვდებით, ამიგომ, ჩვენი აზრით, ამ საკითხს განსაკუთრებული ყურადღება უნდა დაეთმოს.

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ რამდენიმე მათემატიკურ მოდელს, რომელთა საფუძველს წარმოადგენს სხვადასხვა სხეულებში სითბოს გავრცელების კანონები. კერძოდ, ჩვენ მიერ განხილული მოდელები შემდეგი კანონების შედეგია:

ა) ფურიეს კანონი ერთგანზომილებიან შემთხვევაში.

$$q = -\alpha \frac{dT}{dx},$$

სადაც q წარმოადგენს სითბური ნაკადის სიმკვრივეს, რომლის სიდიდეც გვიჩვენებს დროის ერთეულში X ღერძის მიმართულებით ზედაპირის ერთეულში გასულ სითბოს რაოდენობას, T წარმოადგენს X ღერძის შესაბამის წერტილში ტემპერატურას, ხოლო α – სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტს. ეს α კოეფიციენტი დამოკიდებულია სხეულის ფიზიკურ თვისებებსა და T ტემპერატურაზე. ზოგჯერ, უკულებელყოფენ α კოეფიციენტის დამოკიდებულებას T ტემპერატურაზე, იღებენ რა მის საშუალო მნიშვნელობას. ტემპერატურის ცვლილების მო-

გიერთ დიაპაზონში ასეთი გამარტივება საკმაოდ კარგად გადმოცემს პროცესის ძირითად მახასიათებლებს.

ბ) ნიუტონის კანონი, რომელიც აღწერს სითბურ ურთიერთქმედებას სხეულსა და იმ გარემოს შორის, რომელშიც ეს სხეული იმყოფება:

$$q = k(T - a),$$

სადაც q კვლავ წარმოადგენს სითბური ნაკადის სიმკვრივეს, T სხეულის ზედაპირის ტემპერატურაა, ხოლო a – გარემოს ტემპერატურა, k სითბოცვლის კოეფიციენტი. ისევე, როგორც სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტი, k -ც დამოკიდებულია, სხეულისა და გარემოს ფიზიკურ თვისებებსა და ტემპერატურაზე.

გ) იმ შემთხვევაში, თუ სხეულისა და იმ გარემოს ტემპერატურებს შორის სხვაობა, რომელშიც ეს სხეული იმყოფება, მცირეა, ხშირად სითბური ურთიერთქმედების აღსაწერად იყენებენ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - a), \quad (3.1)$$

აქაც T სხეულის ტემპერატურაა, a – გარემოს ტემპერატურა, t – დრო, k სითბოცვლის კოეფიციენტი, $k > 0$. მიხუხუნი მარჯვენა ნაწილში გამოწვეულია იმ გარემოებით, რომ როცა $T > a$, თავიდან ავიცილოთ დაბალი ტემპერატურის მქონე გარემოდან, მაღალ ტემპერატურის მქონე სხეულისადმი სითბოს გადაცემის არაფიზიკური ეფექტი. ზოგჯერ (3.1) განტოლება მოიხსენიება ნიუტონის სითბოგამტარებლობის კანონის სახელწოდებით.

საზოგადოდ, სითბური ურთიერთქმედება სხეულსა და იმ გარემოს შორის, რომელშიც ეს სხეული იმყოფება, საკმაოდ რთული პროცესია, იგი მრავალ ფაქტორზეა დამოკიდებული. მაგრამ ჩვენი დაშვების პირობებში, გარკვეული სიზუსტით, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ სხეულის ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია სხეულისა და გარემოს ტემპერატურის სხვაობისა.

1.2 კრიმინალისტიკის ერთი ამოცანა. ვთქვათ, ნაკრძალში აღმოჩნდა ბრაკონიერების მიერ მოკლული გარეული ღორის გვამი. გამოძიებისათვის აუცილებელია დადგინდეს იქნეს დრო, როდესაც მოხდა ღორის მკვლელობა. ამ მიზნის მიღწევაში ჩვენ დაგვეხმარება შესაბამისი მათემატიკური მოდელი, რომლის შედგენაზე ამ შემთხვევაში შესაძლებელია, თუ გავითვალისწინებთ ნიუტონის სითბოგამტარებლობის კანონს.

ამ კანონის თანახმად სხეულის ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე პროპორციულია სხეულის ტემპერატურისა და ჰაერის ტემპერატურის სხვაობისა:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - a), \quad (3.2)$$

აქ $T = T(t)$ ღორის ტემპერატურაა t მომენტში, a – ჰაერის ტემპერატურა, რომელსაც ჯერჯერობით ვთვლით მუდმივად (ე. ი. ვუშვებთ, რომ მკვლელობის მომენტიდან ღორის გვამის აღმოჩენის მომენტამდე ჰაერის ტემპერატურა მუდმივია), ხოლო k პროპორციულობის დადებითი კოეფიციენტი (ამ კოეფიციენტის ფიზიკური შინაარსის შესახებ ჩვენ ვისაუბრეთ 1.1-ში). შევნიშნოთ, რომ ღორის ათვლა იწყება გასროლის მომენტიდან, ე. ი. $t = 0$ მნიშვნელობა შეესაბამება გასროლის მომენტს. (3.2) დიფერენციალური განტოლების გარდა, მათემატიკური მოდელის შესადგენად აუცილებელია ვიცოდეთ სხეულის ტემპერატურა $t = 0$ მომენტში:

$$T(0) = T_0, \quad (3.3)$$

სადა T_0 წარმოადგენს გარეული ღორის სხეულის ტემპერატურას მკვლელობის მომენტში. ამრიგად, ჩვენთვის საინტერესო ფიზიკური პროცესის მათემატიკური მოდელი (3.2), (3.3) წარმოადგენს კოშის ამოცანას პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის. ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ (3.2), (3.3) ამოცანის ამონახსნს აქვს სახე:

$$T(t) = a + (T_0 - a)e^{-kt}. \quad (3.4)$$

დავუშვათ, რომ აღმოჩენის მომენტში გარეული ღორის გვამის ტემპერატურა იყო 31°C , ხოლო ერთი საათის შემდეგ კი 29°C . ცნობილია, რომ გარეული ღორის სხეულის ნორმალური ტემპერატურაა $T_0 = 37^\circ\text{C}$. როგორც აღვნიშნეთ, ჩვენ ჰაერის ტემპერატურას ჯერჯერობით ჩავთვლით მუდმივად, ე. ი. ჩვენ ვთვლით, რომ მკვლელობიდან გამოძიების დაწყების მომენტამდე ჰაერის ტემპერატურა არ შეცვლილა და ვთქვათ, $a = 21^\circ\text{C}$.

ვთქვათ, აგრეთვე, რომ მკვლელობიდან გარეული ღორის გვამის აღმოჩენამდე გაიარა t^* საათმა

$$T(t^*) = 31^\circ\text{C}, \quad T(t^* + 1) = 29^\circ\text{C}.$$

(3.4) გოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$e^{-kt} = \frac{T(t) - a}{T_0 - a}$$

ამ უკანასკნელი გოლობის ორივე მხარის გალოგარითმების შედეგად მივიღებთ:

$$-kt = \ln \frac{T(t) - a}{T_0 - a} \quad (3.5)$$

(3.5) გოლობაში მიმღევრობით შევიგანოთ მნიშვნელობები $t = t^*$, $t = t^* + 1$, მაშინ გვექნება:

$$-kt^* = \ln \frac{T(t^*) - a}{T_0 - a} = \ln \frac{31 - 21}{37 - 21}$$

$$-k(t^* + 1) = \ln \frac{T(t^* + 1) - a}{T_0 - a} = \ln \frac{29 - 21}{37 - 21}$$

ამ ორი უკანასკნელი გოლობის საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ პროპორციულობის k კოეფიციენტი:

$$k = \ln \frac{31 - 21}{29 - 21} = \ln 1,25 \approx 0,22314$$

ამრიგად, დავადგინეთ პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომელიც განსაზღვრავს სხეულის ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარეს. აქ, სხვა დაშვებებთან ერთად, რომელიც გამოვიყენეთ მათემატიკური მოდელის შესადგენად, ჩვენ გავაკეთეთ კიდევ ერთი დაშვება: პროპორციულობის k კოეფიციენტი (სითბოს გაცვლის კოეფიციენტი) წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს და არ არის დამოკიდებული სხეულის ტემპერატურაზე.

ახლა (3.5) ფორმულაში შევიგანოთ $k = 0,22314$ მნიშვნელობა, საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$t^* = \frac{1}{k} \ln \frac{37-21}{31-21} \approx 2,10630 \text{ (სთ).}$$

კრიმინალისტიკის ერთ თუ ვილაპარაკებთ, ეს შედეგი გვიჩვენებს, რომ გასროლის მომენტიდან გვამის აღმოჩენის მომენტამდე გავიდა დაახლოებით 2 საათი და 6 წუთი.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ჰაერის ტემპერატურა არ არის მუდმივი და იგი იცვლება დროის ჩვენთვის საინტერესო მონაკვეთში, ე. ი. ჩვენთვის, რომ ჰაერის ტემპერატურა არის დროის ფუნქცია. ამ შემთხვევაში სხეულის ტემპერატურის ცვლილების კანონი შემდეგი სახით დავწერთ:

$$\frac{dT}{dt} + kT = ka(t), \quad (3.7)$$

სადაც $a(t)$ წარმოადგენს ჰაერის ტემპერატურის მნიშვნელობას t მომენტში.

იმისათვის, რომ ამოვხსნათ (3.7) დიფერენციალური განტოლება, ცნობილი უნდა იყოს ჰაერის ტემპერატურის ცვლილების კანონი დროის ჩვენთვის საინტერესო დიაპაზონში.

განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა. კერძოდ, დავუშვათ, რომ დროის ჩვენთვის საინტერესო დიაპაზონში ჰაერის ტემპერატურა იკლებდა საათში 1°C -ით. ვთქვათ, ჰაერის ტემპერატურა სხეულის აღმოჩენის მომენტში შეადგენდა 0°C . თუ სხეული აღმოჩენილია გასროლის მომენტიდან t^* საათის შემდეგ, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ $a(t) = t^* - t$. ამრიგად, სხეულის ტემპერატურის ცვლილების აღწერისათვის მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dT}{dt} + kT = k(t^* - t). \quad (3.8)$$

(3.8) დიფერენციალური განტოლებისათვის განვიხილოთ კომის ამოცანა

$$T(0) = T_0, \quad (3.9)$$

სადაც T_0 წარმოადგენს სხეულის საწყის ტემპერატურას, ე. ი. სხეულის ტემპერატურას გასროლის მომენტში. ვთქვათ, გარეული დროის გვამის ტემპერატურა მისი აღმოჩენის პერიოდში იყო 30°C . დავუშვათ, რომ სხეულის აღმოჩენიდან 1 საათის შემდეგ მისი ტემპერატურა გახდა 25°C . ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში, დავუშვათ, რომ სხეულის საწყისი ტემპერატურა $T_0 = 37^{\circ}\text{C}$.

აღვიღალა შეიძლება შევამოწმოთ, რომ (3.8), (3.9) ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$T(t) = \left(T_0 - t^* - \frac{1}{k} \right) e^{-kt} + t^* - t + \frac{1}{k} \quad (3.10)$$

შემდეგ, რადგან $T(t^*) = 30$ და $T(t^* + 1) = 25$, ამიგომ (3.10) გამოსახულების საშუალებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left(37 - t^* - \frac{1}{k} \right) e^{-kt^*} + \frac{1}{k} = 30, \quad \left(37 - t^* - \frac{1}{k} \right) e^{-k(t^*+1)} + \frac{1}{k} = 26. \quad (3.11)$$

მივიღებთ ორუცნობიანი არაწრფივ განტოლებათა სისტემას, სადაც უცნობი ცვლადებია k და t^* . ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა მოგვცემს საშუალებას ვიპოვოთ ჩვენ მიერ დასმული ამოცანის ამონახსნი.

შევნიშნოთ, რომ (3.11) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა შეუძლებელია ანალიზური მეთოდებით. ამ სისტემის ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობის მიღება შესაძლებელია რიცხვითი მეთოდების საშუალებით. ერთადერთი გამარ-

გვივება, რაც შეიძლება გავაკეთოთ, არის ის, რომ (3.11) განგოლებათა სისტემიდან მივიღოთ ერთი არაწრფივი განგოლება k -ს მიმართ:

$$\left(30 - \frac{1}{k}\right)e^{-k} - 26 + \frac{1}{k} = 0, \quad \text{ან} \quad 30k - 1 + (1 - 26k)e^k = 0, \quad (3.12)$$

რომლის ამონახსნის მისაღებად შეიძლება გამოვიყენოთ ჩვენ მიერ II თავში განხილული არაწრფივი განგოლების მიახლოებითი ამოხსნის ბისექციის მეთოდი ან რომელიმე სხვა რიცხვითი მეთოდი, რომელსაც დაინტერესებული მკითხველი ადვილად აღმოაჩენს სპეციალურ ლიგურატურაში.

მას შემდეგ, რაც ნაპოვნი იქნება k კოეფიციენტის მიახლოებითი მნიშვნელობა, იგი შეიძლება შევიგანოთ (3.11)-ის პირველ განგოლებაში და კვლავ რიცხვითი მეთოდების საშუალებით ვიპოვოთ t^* -ის მნიშვნელობა, ე. ი. დავადგინოთ დრო, რომელიც გავიდა გასროლის მომენტიდან გარეული დორის გვამის აღმოჩენის მომენტამდე.

იმ შემთხვევაში, თუ $a(t)$ ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება რთულია, მაშინ ერთუცნობიან განგოლებაზე მიყვანა ხდება შეუძლებელი, ამიტომ უშუალოდ (3.7), (3.9) ამოცანის ამოსახსნელად უნდა გამოვიყენოთ რომელიმე რიცხვითი მეთოდი, მაგალითად, ეილერის მეთოდი, რომელიც ჩვენ II თავში განვიხილეთ. აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ $a(t)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილის სახით, მაშინ ამ ფუნქციის ანალიზური სახის მიახლოების დასადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ ფუნქციის ინტერპოლება.

13 ყავის გაცივების პროცესის მათემატიკური მოდელი. განვიხილოთ ყავის გაცივების პროცესი და აღვწეროთ იგი მათემატიკურად. ჩვეულებრივ, საწყის მომენტში ფინჯანში ჩასხმული ყავა ძალზე ცხელია. თუ ჩვენ გვინდა დავლიოთ ყავა, საჭიროა მასში ჩავასხათ ცივი რძე ან დაველოდოთ გარკვეული დროის განმავლობაში ყავის გაცივებას იმ ტემპერატურამდე, რომ შევძლოთ მისი დალევა.

ყავიდან გარემოში სითბოს გადაცემის ბუნება საკმაოდ რთულია და ზოგადად ის შეიცავს კონვექციას, გამოსხივებას, აორთქლებასა და სითბოს გადაცემის პროცესს ფინჯანის კედლებიდან გარემოში. იმ შემთხვევაში, როდესაც ობიექტისა და გარემოს ტემპერატურათა სხვაობა არცთუ ისე დიდია, მაშინ როგორც ეს აღრე გვქონდა აღნიშნული, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ობიექტის ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე პროპორციულია ამ ტემპერატურათა სხვაობისა:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s), \quad (3.13)$$

სადაც $T = T(t)$ - ყავის ტემპერატურა, T_s - გარემოს ტემპერატურა, ხოლო $k > 0$ - პროპორციულობის გარკვეული კოეფიციენტი, რომელიც დამოკიდებულია სითბოს გადაცემის მექანიზმზე, იმ სხეულის ზედაპირის ფართობზე, რომელიც იმყოფება გარემოსთან კონტაქტში და თვითონ სხეულის სითბურ თვისებებზე. (3.13) დიფერენციალური განგოლებისათვის განვიხილოთ კომის ამოცანა

$$T(0) = T_0, \quad (3.14)$$

სადაც T_0 წარმოადგენს ყავის ტემპერატურას საწყის მომენტში.

ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ (3.13), (3.14) ამოცანის ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}. \quad (3.15)$$

(3.14) ფორმულა ასახავს ყავის გემპერაგურის შემცირების პროცესს. ეს ფორმულა შეიცავს ჯერჯერობით უცნობ k კოეფიციენტს. საზოგადოდ, k კოეფიციენტის მნიშვნელობის დადგენა საკმაოდ რთულ ამოცანას წარმოადგენს. k კოეფიციენტის მიახლოებითი მნიშვნელობის დადგენისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ 1.2 პუნქტში განხილული მეთოდით, როდესაც ამ მიზნისათვის გამოყენებული იყო რეალური ექსპერიმენტის შედეგები. თუმცა უნდა შევნიშნოთ, რომ ექსპერიმენტის მონაცემებიდან მხოლოდ ორი მონაცემის გამოყენება ვერ მოგვცემს k კოეფიციენტის დამაკმაყოფილებელ მნიშვნელობას. ამ მიზნით უნდა იქნეს გამოყენებული მრავალჯერადი ექსპერიმენტის ყველა მონაცემი, რაც თავის მხრივ მოითხოვს უფრო დახვეწილი მათემატიკური აპარატის გამოყენებას. ექსპერიმენტის დამუშავების სხვადასხვა მეთოდს დაინტერესებული მკითხველი გაეცნობა სპეციალურ ლიტერატურაში.

1.4 მოვლენების იზომორფულობის შესახებ. სანამ გადავიდოდეთ სხვა მათემატიკური მოდელების განხილვაზე, გავაკეთოთ ერთი, ჩვენის აზრით, მნიშვნელოვანი შენიშვნა.

ჩვენ ამ პარაგრაფში საქმე გვაქვს ძალიან საინტერესო ფაქტთან. როგორც ვნახეთ, კრიმინალისტიკისა და ყავის გაცივებასთან დაკავშირებული ამოცანები, გარკვეული დაშვებების ფარგლებში, ერთი და იმავე დიფერენციალური განტოლებებით აღიწერება. ეს არ არის გამონაკლისი შემთხვევა. ამავე დიფერენციალური განტოლებებით აღიწერება ეკოლოგიის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა ამა თუ იმ პოპულაციის ევოლუციის შესახებ უმარტივეს შემთხვევაში. ა. შ. ჩვენ შეგვიძლია გავაგრძელოთ ასეთი მაგალითების ჩამოთვლა. იქმნება შთაბეჭდილება, რომ თითქოს ბუნებაში კანონზომიერებათა რაოდენობა ლიმიტირებულია.

ხშირად სხვადასხვა დარგის სპეციალისტი უშვებს შეცდომას, როდესაც ამ ამოცანებს განიხილავს ცალ-ცალკე. ეს ენერგიისა და რესურსების არარაციონალურად ხარჯვის მაგალითია. ჩვენ კარგად უნდა გავაცნობიეროთ, რომ საქმე გვაქვს არა სხვადასხვა ამოცანებთან, არამედ ერთ ამოცანასთან, ერთ მათემატიკურ მოდელთან, რომელსაც გააჩნია გამოყენების სხვადასხვა სფეროები. ხშირად აღმოჩნდება, რომ ორი მოვლენა, რომლებიც ერთი შეხედვით არაფრით არ არიან ერთმანეთთან დაკავშირებულნი და არსებითად სხვადასხვა მოვლენებად ითვლებიან, თურმე მათემატიკურად იდენტურნი, იზომორფულნი არიან, რადგან ისინი ერთი და იმავე კანონზომიერებას ემორჩილებიან. ა. პუანკარე წერდა: „მათემატიკა – ეს არის ხელოვნება სხვადასხვა საგანს დავარქვათ ერთი და იგივე სახელი“. სხვადასხვა მოვლენის მათემატიკური მოდელირება ხშირად ადასტურებს ამ თემისს.

§2. მათემატიკური მოდელების შესახებ ბიოლოგიაში, მელიცინასა და ეკოლოგიაში

2.1 ბალანსის მეთოდი. სანამ გადავიდოდეთ ბიოლოგიაში, მელიცინასა და ეკოლოგიაში ზოგიერთი მათემატიკური მოდელის შესწავლაზე, განვიხილოთ მათემატიკური მოდელების შექმნის ერთ-ერთი ეფექტური მეთოდი, რომელიც ბალანსის მეთოდის სახელწოდებით არის ცნობილი.

დავუშვათ, Σ ზელაპირით შემოსაზღვრულ Ω მოცულობაში მიმდინარე რაიმე პროცესი ან მოვლენა დროის t მომენტში ხასიათდება ადიტიური $G(t)$ სიდიდის მნიშვნელობით. G სიდიდის ადიტიურობა უნდა გავიგოთ შემდეგნაირად: თუ Ω მოცულობას გავყოფთ ორ ნაწილად $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ და თითოეულ ნაწილში მიმდინარე იგივე პროცესი ან მოვლენა დროის t მომენტში ხასიათდება $G_1(t)$ და $G_2(t)$ სიდიდეების მნიშვნელობებით, მაშინ $G(t) = G_1(t) + G_2(t)$. ამ $G(t)$ სიდიდეს შეიძლება ჰქონდეს მასის, ენერჯიის, იმპულსის, რაიმე რეგიონში მოსახლეობის რაოდენობის, საწარმოო ფონდების და ა. შ. შინაარსი. ცხადია, რომ თუ $G(t)$ აღნიშნავს რაიმე რეგიონში მოსახლეობის რაოდენობას, მაშინ Ω წარმოადგენს ამ რეგიონის შესაბამის ზელაპირს, ხოლო Σ -ს ქვეშ ამ ზელაპირის შემოსაზღვრული წირი იგულისხმება.

ჩვენი მიზანია გავარკვიოთ, თუ რამ შეიძლება გამოიწვიოს დროთა განმავლობაში $G(t)$ სიდიდის ცვლილება რაიმე ათვის სისტემის მიმართ ფიქსირებულ (უცვლელ) Ω მოცულობაში და როგორ შეიძლება ამ ცვლილების რიცხვითი მახასიათებლების გამოთვლა.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი. ვთქვათ, Ω არის რაიმე დასახლებული პუნქტი, Σ კი – მისი საზღვარი, მაშინ ამ დასახლებულ პუნქტში მოსახლეობის $G(t)$ რაოდენობის შეცვლის ორი ძირითადი, ერთმანეთისაგან არსებითად განსხვავებული ტიპის მიზეზი არსებობს.

პირველი მიზეზია დასახლებული პუნქტიდან მოსახლეობის გამგზავრება ანუ მისი Σ საზღვრის გადალახვა შიგნიდან და დასახლებულ პუნქტში მოსახლეობის ჩამოსვლა, ანუ Σ საზღვრის გადალახვა გარედან. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, დასახლებულ პუნქტში მოსახლეობის $G(t)$ რაოდენობის ცვლილების ერთი მიზეზია ამ პუნქტის შემოსაზღვრული Σ წირის გამჭოლი მოსახლეობის „ნაკადების“ არსებობა.

მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილების მეორე მიზეზია დასახლებულ პუნქტში ადამიანების დაბადება და სიკვდილი. აქაც, თუ სხვა სიტყვებით დავახასიათებთ ამ პროცესს, შეიძლება ვთქვათ, რომ Ω -ს შიგნით მოსახლეობის „წყაროების“ მოქმედების შედეგად ხდება რაოდენობრივი ცვლილებები. აქ და შემდგომში „წყაროების“ ცნების ქვეშ ვგულისხმობთ $G(t)$ სიდიდის როგორც „გაჩენას“, ასევე „გაქრობასაც“. ამ „გაჩენისა“ და „გაქრობის“ კონკრეტული მიზეზები სხვადასხვა შეიძლება იყოს, მაგრამ ამ მიზეზების დეტალური განხილვა ჩვენი სახელმძღვანელოს მიზანს არ შეადგენს.

ამრიგად, Σ ზელაპირით შემოსაზღვრულ Ω მოცულობაში $G(t)$ სიდიდის ცვლილებას ორი სახის პროცესი განაპირობებს: Σ ზელაპირის გამჭოლი $G(t)$ სიდიდის „ნაკადი“ და თვით მოცულობაში $G(t)$ სიდიდის „წყაროების“ მოქმედება.

როგორც აღვნიშნეთ, საზოგადოდ შესაძლებელია არსებობდეს როგორც „ნაკადების“, ასევე „წყაროების“ სხვადასხვა სახეობა. კერძოდ, ზემოთ განხი-

ლულ მაგალითში მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილების შესახებ როგორც „ნაკადის“, ასევე „წყაროების“ ორ-ორი სახეობა გვქონდა: „გასვლა“ და „შემოსვლა“, „დაბადება“ და „სიკვდილი“. ამ შემთხვევაში, მათემატიკური მოდელის შედგენისას გათვალისწინებულ უნდა იქნეს როგორც ნაკადების, ასევე წყაროების ყველა სახეობის ერთობლივი მოქმედების შედეგები.

გადავიდეთ ახლა რაოდენობრივი თანაფარდობების დადგენაზე.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $G(t)$ ფუნქცია უწყვეტი და წარმოებადია, მაშინ

$\frac{dG}{dt}$ წარმოებული წარმოადგენს Ω მოცულობაში G სიდიდის ცვლილების სისწრაფეს ანუ Ω მოცულობაში G სიდიდის ცვლილებას დროის ერთეულში.

$G(t)$ სიდიდის იმ რაოდენობას, რომელიც ნაკადების ყველა სახეობის ერთობლივი მოქმედების შედეგად გამჭოლი მოძრაობით გაივლის Σ მედაპირს დროის ერთეულში, ვუწოდოთ „ G სიდიდის ნაკადი“ და აღვნიშნოთ იგი Q სიმბოლოთი. ხოლო G სიდიდის იმ რაოდენობას, რომელიც წყაროების ყველა სახეობის ერთობლივი მოქმედების შედეგად ჩნდება (ქრება) Ω მოცულობაში დროის ერთეულში, ვუწოდოთ „ G სიდიდის წყაროების სიმძლავრე“ და აღვნიშნოთ იგი F -ით.

ახლა უკვე სირთულეს აღარ წარმოადგენს შევადგინოთ „ბალანსი“ – Ω მოცულობაში G სიდიდის შემცველობის ცვლილება დროის ერთეულში გავუტოლოთ G სიდიდის ნაკადისა და წყაროების სიმძლავრის ჯამს:

$$\frac{dG}{dt} = Q + F. \quad (3.16)$$

ამ განტოლებას ბალანსის განტოლებას ვუწოდებთ. სწორედ ის წარმოადგენს ბალანსის მეთოდის მათემატიკურ ფორმულირებას.

2.2 მათემატიკური მოდელების შესახებ ეკოლოგიაში. ეკოლოგიის ერთ-ერთ ძირითად პრობლემას შეადგენს ამა თუ იმ პოპულაციის ევოლუციის შესწავლა.

როდესაც ჩვენ გვინდა შევადგინოთ რთული სისტემის მათემატიკური მოდელი, ჩვენს წინაშე დგება ერთი მნიშვნელოვანი პრობლემა – ეს არის არსებითი ცვლადების შერჩევა, ე. ი. ისეთი პარამეტრების შერჩევა, რომელიც არსებითად განსაზღვრავს შესასწავლი რთული სისტემის ფუნქციონირებას. ეკოლოგიის პრობლემების შესწავლისას ასეთ ძირითად ცვლადად ჩვეულებრივ იღებენ ამა თუ იმ პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობას.

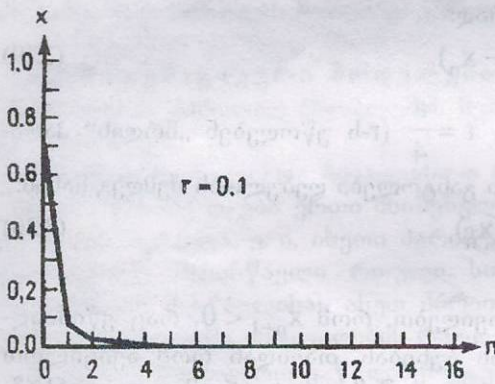
A. ჯერ განვიხილოთ ე. წ. დისკრეტული მოდელები.

არსებობს ისეთი ბიოლოგიური პოპულაციები, რომლებიც შედგებიან მხოლოდ ერთი თაობისაგან, ისე რომ ამ თაობას არა აქვს შეხება არც წინა და არც მომდევნო თაობასთან. მაგალითისათვის შეიძლება განვიხილოთ რაიმე იზოლირებული ტერიტორია (მაგ. კუნძული), რომელზედაც ცხოვრობს მწერების გარკვეული პოპულაცია. ეს მწერები წლის გარკვეულ პერიოდში დებენ კვერცხებს და იხოცებიან ამ კვერცხებიდან ახალი მწერების გამოჩეკვამდე. რადგან ასეთი პოპულაციის განვითარების პროცესი დისკრეტულია, ამიტომ მიზანშეწონილია ამ პოპულაციის ევოლუციის პროცესი აღვწეროთ რეკურენტული დამოკიდებულებების საშუალებით.

ვთქვათ, პოპულაციის n -ურ თაობაში არის P_n რაოდენობის ინდივიდი, ხოლო მომდევნო $(n+1)$ თაობაში კი P_{n+1} – რაოდენობის ინდივიდი. უმარტივესი

x_n	$r = 0,1$	$r = 0,6$	$r = 0,8$	$r = 0,9$
x_0	0,750000	0,750000	0,750000	0,750000
x_1	0,075000	0,450000	0,600000	0,675000
x_2	0,027750	0,594000	0,768000	0,789750
x_3	0,010792	0,578794	0,570163	0,597762
x_4	0,004270	0,585100	0,784247	0,865593
x_5	0,001701	0,582619	0,541452	0,418829
x_6	0,000679	0,583618	0,794502	0,876281
x_7	0,000271	0,583219	0,522460	0,390286
x_8	0,000109	0,583379	0,798386	0,856667
x_9	0,000043	0,583515	0,515091	0,442040
x_{10}	0,000017	0,583341	0,799271	0,887906
x_{11}	0,000007	0,583330	0,513398	0,358303
x_{12}	0,000003	0,583334	0,799426	0,827719
x_{13}	0,000001	0,583333	0,513102	0,513360
x_{14}	0,000000	0,583334	0,799451	0,899357
x_{15}	0,000000	0,583333	0,513054	0,325849
x_{16}	0,000000	0,583333	0,799455	0,790817

ქვემოთ მოყვანილია x_n -ის გრაფიკები r -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. როგორც ვხედავთ, $r = 0,9$ შემთხვევის გარდა (ნახ. 3.4), ცხრილში მოყვანილი



ნახ. 3.1

x_n -ის მნიშვნელობების ანალიზი გვიჩვენებს, რომ დაწყებული გარკვეული ნომრიდან, საქმე გვაქვს გარკვეულ კანონზომიერებასთან. ამ შემთხვევებში მიმდევრობის საწყის ნაწილს უწოდებენ გარდამავალ რეჟიმს, ხოლო დანარჩენი ნაწილი კი წარმოადგენს დამყარებულ რეჟიმს.

როდესაც $r = 0,1$ (ნახ. 3.1) და $r = 0,6$ (ნახ. 3.2), ჩვენ ვხედავთ, რომ მიმდევრობის წევრები კრებადია გარკვეული რიცხვისკენ. პირველ შემთხვევაში ეს არის 0, მეორე შემთხვევაში კი 0,583333. ეს ნიშნავს,

რომ პოპულაციაში, რომლის ევოლუციასაც ჩვენ მიერ შემოთავაზებული მათემატიკური მოდელი აღწერს, ხდება ინდივიდთა რაოდენობის გარკვეული მდგრადი სტაბილიზაცია – გასვლა სტაციონალურ რეჟიმზე. რაც შეეხება $r = 0,8$ შემთხვევას (ნახ. 3.3), აქ ვხედავთ, რომ x_n -ის მნიშვნელობები ოსცილირებენ ორი მნიშვნელობის გარშემო და ამ ოსცილირებას აქვს პერიოდული ხასიათი, პერიოდით 2. ეს ნიშნავს, რომ პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობის მრდა და კლება ხდება პერიოდულად, პერიოდით 2.

კვლევიან დროის ერთეულში, მაშინ ბალანსის მეთოდის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ არსებობს საკმაოდ სერიოზული საფუძველი იმისათვის, რათა $N(t)$ სიდიდის ცვლილების სიჩქარე განესაზღვროთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლების საშუალებით:

$$\frac{dN}{dt} = A - B. \quad (3.21)$$

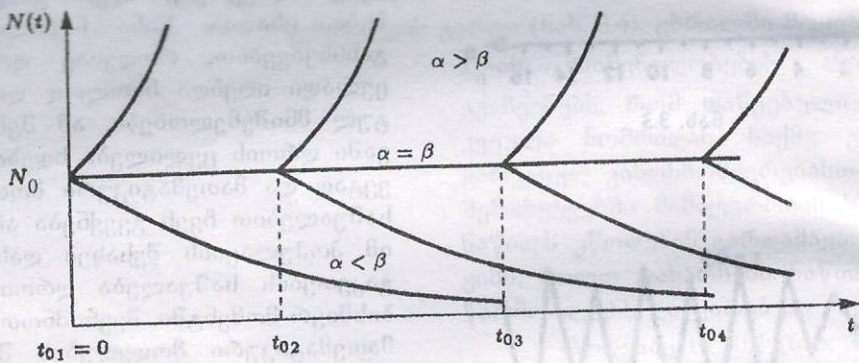
სადაც $A = \alpha N$, $B = \beta N$, ხოლო $\alpha = \alpha(t, N)$, $\beta = \beta(t, N)$ წარმოადგენენ შესაბამისად დაბადებისა და სიკვდილიანობის კოეფიციენტს. (3.21) განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t, N) - \beta(t, N)]N(t), \quad (3.22)$$

თუ $\alpha(t, N) = \alpha(t)$ და $\beta(t, N) = \beta(t)$, ე. ი. თუ α და β კოეფიციენტი დამოკიდებულია მხოლოდ t დროის ცვლადზე, მაშინ ადვილად შევამოწმებთ, რომ (3.22) განტოლების ამონახსნს აქვს სახე:

$$N(t) = N_0 \exp \left(\int_{t_0}^t [\alpha(t) - \beta(t)] dt \right), \quad (3.23)$$

სადაც N_0 წარმოადგენს პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობას $t = t_0$ საწყის მომენტში.



ნახ. 3.5

ნახაზზე (იხ. ნახ. 3.5) მოცემულია $N(t)$ ფუნქციის გრაფიკები, როდესაც $\alpha(t) \equiv \alpha_0$, $\beta(t) \equiv \beta_0$, სადაც α_0 და β_0 მუდმივებია (ერთმანეთის მსგავს მრუდეებს შეესაბამება საწყისი t_0 მომენტის სხვადასხვა მნიშვნელობა). განტოლების ამონახსნს შეადგენს ფუნქცია

$$N(t) = N_0 \exp[(\alpha_0 - \beta_0)(t - t_0)].$$

თუ $\alpha_0 = \beta_0$, მაშინ პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობა მუდმივია.

თუ $\alpha_0 > \beta_0$, მაშინ $N(t) \rightarrow \infty$ ექსპონენციალურად; როდესაც $t \rightarrow \infty$.

თუ $\alpha_0 < \beta_0$, მაშინ $N(t) \rightarrow 0$ ასევე ექსპონენციალურად; როდესაც $t \rightarrow \infty$.

ამ გარემოებამ მისცა საშუალება მალთუსს გამოეთქვა ეჭვი იმის შესახებ, რომ დედამიწაზე მოხდება მოსახლეობის მკვეთრი ზრდა აქედან გამომდინარე ყველა შედეგით.

თუმცა მოყვანილი მათემატიკური მოდელი უაღრესი გამარტივების გამო არარეალისტურია, ის, მიუხედავად ამისა, კარგად აღწერს ბაქტერიების კოლონიებში ინდივიდთა რაოდენობის ზრდის დინამიკას საკვები გარემოს გამოფიტვამდე ამრიგად, ჩვენ მიერ შემოთავაზებული მათემატიკური მოდელი სამართლიანია გარკვეულ პირობებში – დროის მცირე მონაკვეთში. ამ დასკვნას აღსატყობებს ზოგიერთი ტიპის ბაქტერიებზე ჩატარებული რეალური ექსპერიმენტების შედეგები.

ამასთან დაკავშირებით მოვიყვანოთ მათემატიკური მოდელის ერთი საინტერესო მაგალითი, რომელიც გარკვეული აზრით შეიძლება იუმორის სფეროსაც მივაკუთვნოთ, თუმცა თავდაპირველად იგი სამეცნიერო ჟურნალში გამოქვეყნდა. მკვლევრების მიზანი იყო შეესწავლათ დედამიწაზე მოსახლეობის რაოდენობის ზრდის დინამიკა.

ვთქვათ, მოსახლეობის ზრდის სიჩქარე მამაკაცებისა და ქალების რაოდენობის ნამრავლის პროპორციულია (ეს არის ჰიპოთეზა, რომელიც დასტურდება ბევრ პრაქტიკულად საინტერესო შემთხვევაში). ე. ი. დედამიწაზე მოსახლეობის რაოდენობის ზრდის დინამიკა აღეწეროთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N_1 \cdot N_2, \quad (3.24)$$

სადაც $N(t)$ – დედამიწაზე მოსახლეობის რაოდენობაა დროის t მომენტში, N_1 და N_2 – შესაბამისად მამაკაცებისა და ქალების რაოდენობა, α – პროპორციულობის გარკვეული კოეფიციენტი.

საკმარისად დიდი სიმუსტით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $N_1 = N_2 = \frac{1}{2} N$. მაშინ (3.24) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \frac{N^2}{4}. \quad (3.25)$$

ვთქვათ, t_0 მომენტში მოსახლეობის რაოდენობაა $N(t_0)$, მაშინ (3.25) განტოლების ამონახსნი ამ საწყისი მონაცემით გამოისახება შემდეგი ფორმულის საშუალებით (რამაც ადვილად შეიძლება დაერწმუნდეთ):

$$N(t) = \frac{4}{\alpha(t_f - t)}, \quad (3.26)$$

სადაც $t_f = t_0 + \frac{4}{\alpha} N^{-1}(t_0) > t_0$.

როგორც ვხედავთ, (3.26) ფორმულის თანახმად, დედამიწაზე მაცხოვრებელთა რაოდენობა გახდება უსასრულო $t = t_f$ მომენტში!

თუ გავითვალისწინებთ დედამიწის მოსახლეობის ზრდის სტატისტიკურ მონაცემებს, შეიძლება გამოვთვალოთ α კოეფიციენტის მნიშვნელობა და საკმარისად მუსკად მივუთითოთ „სამყაროს აღსასრულის“ დრო.

ეს სამუშაო იქნა ჩატარებული, რის შედეგადაც დაადგინეს, რომ „კატასტროფა“ მოხდება პარასკევს, 2026 წლის 13 ნოემბერს.

მიუხედავად ამ დასკვნისა, კაცობრიობამ შეიძლება მშვიდად იძინოს. გენერალური ანსამბლის მონაცემების თანახმად, რომელიც ეყრდნობა გაცილებით უფრო მუსგ მეთოდიკას, აღნიშნული პერიოდისათვის დედამიწაზე იცხოვრებს 10 მილიარდამდე ადამიანი. ეს მაგალითი კიდევ ერთხელ გვიჩვენებს, რომ მათემა-

გიკური მოდელი შეიძლება კარგად აღწერდეს ამა თუ იმ მოვლენის ძირითად თვისებებს გარკვეულ დაშვებებში, მაგრამ სხვა დაშვებებში იგი შეიძლება გახდეს პრინციპულად არასწორი დასკვნის მიზეზი.

C. როგორც აღვნიშნეთ, (3.22) განგოლება საკმარისად კარგად აღწერს მოცივრთ პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის ზრდის დინამიკას დროის მცირე მონაკვეთში. ამის შემდეგ არსებით გავლენას ამ პროცესზე ახდენს საკვები რესურსების ნაკლებობა, რაც შესაძინეველ ცვლის მათემატიკურ მოდელს. ამ შემთხვევაში შეიძლება მოხდეს პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის სტაბილიზაცია გარკვეულ დონეზე, ან ეს რაოდენობა შეიძლება განიცდიდეს რეგულარულ ან არარეგულარულ ფლუქტუაციებს, ან ეს რაოდენობა შეიძლება შემცირდეს.

ისეთი პოპულაციის ყოფაქცევა, რომელშიც ინდივიდთა რაოდენობა სტაბილიზირდება გარკვეულ მდგრად დონეზე, ხშირად აღიწერება შემდეგი ლოგისტიკური განგოლების საშუალებით:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2, \quad (3.27)$$

სადაც $x = x(t)$ წარმოადგენს t მომენტში ინდივიდთა რაოდენობას პოპულაციაში, ხოლო $a > 0, b > 0$ - გარკვეული მუდმივებია (იხ. განგოლება (3.18)).

(3.27) განგოლება წარმოადგენს უმარტივეს დიფერენციალურ განგოლებას, რომელსაც გააჩნია შემდეგი ორი მნიშვნელოვანი თვისება:

1) x -ის მცირე მნიშვნელობებისათვის (3.27) განგოლების ამონახსნი უახლოვდება (3.22) განგოლების ამონახსნს და მას აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.

2) t -ს ზრდასთან ერთად $x(t)$ მონოტონურად უახლოვდება გარკვეულ მუდმივ მნიშვნელობას, რაც პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის სტაბილიზაციას ასახავს.

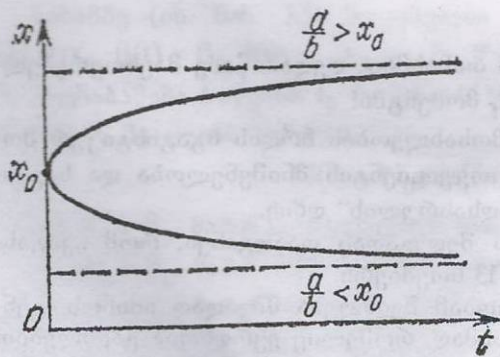
განვიხილოთ კომის ამოცანა (3.27) განგოლებისათვის

$$x(t_0) = x_0, \quad (3.28)$$

სადაც x_0 წარმოადგენს t_0 მომენტში პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობას.

ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ (3.27), (3.28) ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$x(t) = \frac{\frac{a}{b} x_0}{x_0 + \left[\frac{a}{b} - x_0 \right] e^{-a(t-t_0)}}. \quad (3.29)$$



ნახ. 3.6

აქედან ჩანს, რომ, როდესაც $t \rightarrow \infty$, მაშინ პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობა $x(t) \rightarrow \frac{a}{b}$. ამასთან, შესაძლებელია ორი შემთხვევა $\frac{a}{b} > x_0$ და

$\frac{a}{b} < x_0$. განსხვავება ამ ორ შემთხვევას შორის კარგად ჩანს ნახ.

3.6-ზე (აქ განხილულია შემთხვევა, როდესაც $t_0 = 0$).

შევნიშნოთ, რომ (3.27) განგოლე-

ბა და, მამასადამე, (3.29) ფუნქცია საკმაოდ კარგად აღწერს ზოგიერთი ტიპის ბაქტერიის პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობის ცვლილების დინამიკას საწყის ვეგაზე (მაგალითად, კულტურაში საფუარის უჯრედების ცვლილების დინამიკას).

2.3 ორი პოპულაციის - „მგაცებელი-მსხვერპლის“ განვითარების დინამიკის მათემატიკური მოდელი. 2.2 პუნქტში არსებით ცვლადად მივიღეთ ამა თუ იმ პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობა და შევეცადეთ შეგვექმნა რომელიმე ერთი ცალკეული პოპულაციის განვითარების მათემატიკური მოდელი იმ პირობით, რომ პოპულაცია იზოლირებულია.

ახლა გადავდგათ შემდეგი ნაბიჯი და უფრო მეტად დავუახლოვდეთ რეალურ სიტუაციას.

განვიხილოთ ორი სახეობის ურთიერთქმედება. შევისწავლოთ „იზოლირებული“ ორი პოპულაციის განვითარების დინამიკა სხვადასხვა ფაქტორების გათვალისწინებით.

ორ სხვადასხვა სახეობის პოპულაციას შორის ურთიერთქმედების მექანიზმები შეიძლება დავყოთ შემდეგ სამ კატეგორიად:

ა) კონკურენცია, როდესაც თითოეული სახეობის განვითარება ახდენს დამორგუნველ გეგავლენას მეორის განვითარებაზე.

ბ) კომენსალიზმი, როდესაც თითოეული სახეობა ახდენს მეორის განვითარების სტიმულირებას.

გ) მგაცებლობა, როდესაც ერთი სახეობა („მგაცებელი“) იკვებება მეორე სახეობით („მსხვერპლით“) და, მამასადამე, იწვევს ამ მეორე სახეობის რაოდენობის შემცირებას, ხოლო მსხვერპლი ხელს უწყობს მგაცებლების რაოდენობის ზრდას.

ჩვენს მიზანს არ შეადგენს სახეობათა ურთიერთქმედების ამ მექანიზმების დეტალური განხილვა. ჩვენ შევეცდებით მათემატიკური მოდელის საშუალებით აღვწეროთ ისეთი ორი სახეობის პოპულაციის განვითარების დინამიკა, რომლებიც ერთმანეთთან ურთიერთმოქმედებენ „მგაცებელ-მსხვერპლის“ პრინციპით.

მათემატიკური მოდელის შედგენისას ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ მსხვერპლს ყოველთვის აქვს საშუალება იპოვოს საკვები, ხოლო ყოველი მგაცებლისას მგაცებელი აუცილებლად კლავს მსხვერპლს, რაც მისი ერთადერთი საკვებია. ცხადია, რომ ამ დაშვების შედეგად ჩვენ მივიღებთ საკმაოდ „იდეალიზირებულ“ მოდელს, რომლის გამოყენებაც შეიძლება მხოლოდ ზოგიერთ შემთხვევაში. თუმცა ამ მოდელის საშუალებით შესაძლებელია ბევრი საინტერესო, პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვანი დასკვნის გაკეთება.

თუ განვიხილავთ ამ სიტუაციას, ცხადი გახდება, რომ მგაცებლების რაოდენობა იმატებს მანამ, სანამ მას საკმარისად აქვს საკვები, ე. ი. სანამ საკმარისი რაოდენობითაა მსხვერპლი. ბოლოს და ბოლოს დადგება მომენტი, როდესაც მგაცებლების გეგავლენით მსხვერპლის რაოდენობა საკმარისად შემცირდება, ამ დროს მგაცებლებს საკვები არ ეყოფათ და დაიწყება მათი რაოდენობის შემცირება. ეს მიგვიყვანს იქამდე, რომ მგაცებლების რაოდენობის შემცირების გამო დაიწყება მსხვერპლის რაოდენობის მატება. ეს კვლავ მისცემს სტიმულს მგაცებლების რაოდენობის ზრდას და ა. შ. ციკლი კვლავ გამეორდება. „მგაცებელ-მსხვერპლის“ ტიპის ურთიერთმოქმედება საკმაოდ ხშირად გვხვდება სხვადასხვა პრაქტიკული ამოცანის შესწავლისას. პრობლემის აქტუალურობის გამო მისი შესწავლა ბოლო პერიოდში მოექცა როგორც ეკოლოგიის, ისე სხვა დარგის მეცნიერების, მათ შორის მათემატიკოსების ყურადღების ცენტრში.

აღნიშნოთ $x = x(t)$ და $y = y(t)$ -თი შესაბამისად მგაცებლისა და მსხვერპლის რაოდენობა t მომენტში. იმისათვის, რომ ჩამოვყალიბოთ მათემატიკური მოდელი, რომელიც გარკვეულ მიახლოებაში აღწერს პოპულაციებში ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების დინამიკას, გავაკეთოთ რამდენიმე დაშვება, რომელიც გაამარტივებს ამოცანას. ჯერ ერთი, დავუშვათ, რომ იმ შემთხვევათა რაოდენობა, როდესაც მგაცებელი კლავს მსხვერპლს, დამოკიდებულია მათ შეხვედრათა სიხშირეზე, ჩავთვალოთ, რომ ეს სიდიდე პროპორციულია xy ნამრავლისა. მეორე, უგულებელვყოთ ის დრო, რომელიც სჭირდება მგაცებელს მსხვერპლის შესაჭმელად. რაც შეეხება პოპულაციის რაოდენობის ცვლილებას ბუნებრივი შობადობისა და სიკვდილის პირობებში, ის აღწეროთ ან (3.22), ან (3.27) სახის ლოგისტური განტოლებების საშუალებით.

(3.22) სახის ლოგისტური განტოლების საშუალებით მივიღებთ, რომ ორივე პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილება აღიწერება შემდეგი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის საშუალებით:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy, \quad (3.30)$$

$$\frac{dy}{dt} = cy - dxy, \quad (3.31)$$

სადაც a, b, c და d – გარკვეული დადებითი მუდმივებია.

აქ გათვალისწინებულია ის გარემოება, რომ მსხვერპლის არარსებობის შემთხვევაში მგაცებელთა რაოდენობა ბუნებრივი სიკვდილის გამო იკლებს (მათ არა აქვთ საკვები) და ამიტომ ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე პროპორციულია X სიდიდისა პროპორციულობის უარყოფითი კოეფიციენტით

მსხვერპლის საკმაო რაოდენობას არსებობის შემთხვევაში $\left(y > \frac{a}{b}\right)$, მგაცებელ-

თა რაოდენობა იზრდება. ანალოგიურად, მგაცებლების არარსებობის შემთხვევაში მსხვერპლთა რაოდენობა იმაგებს და ამ პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე პროპორციულია y სიდიდისა პროპორციულობის დადებითი კოეფიციენტით (აქ, ისევე როგორც ადრე, ვგულისხმობთ, რომ მსხვერპლის საკვების რაოდენობა შემოსაზღვრული არ არის). ამავე დროს, თუ

არსებობენ საკმაო რაოდენობის მგაცებლები $\left(x > \frac{c}{d}\right)$, მაშინ მსხვერპლის რაოდენობა იკლებს.

(3.30), (3.31) განტოლებები პირველად გამოყვანილ იქნა 1925 წელს და ცნობილია *ლოჯიკი-ვოლტერას განტოლებების* სახელწოდებით.

ამოცანა ჯერჯერობით მთლიანად დასმული არ არის – უნდა იყოს ცნობილი საწყის $t = t_0$ მომენტში თითოეულ პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობა. ამრიგად, (3.30), (3.31) განტოლებებს უნდა დაემატოს ე. წ. საწყისი პირობები

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (3.32)$$

სადაც x_0 და y_0 – მოცემული დადებითი რიცხვებია.

(3.30)-(3.32) წარმოადგენს კომის ამოცანას პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის. შევნიშნოთ, რომ განსხვავებით ზემოთ განხილული კომის ამოცანისაგან, არ არსებობს ამ ამოცანის ამოხსნის ანალიზური წარმოდგენა. ამ ამოცანის ამონახსნი შეიძლება მიღებულ იქნეს მხოლოდ რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით (მაგ., ეილერის მეთოდის საშუალებით).

შედეგად გამოვიყენოთ (3.30)-(3.32) ამოცანა და დავადგინოთ კავშირი $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციებს შორის. ამ მიზნით შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\tau = ct, \quad \alpha = \frac{a}{c}, \quad U(\tau) = \frac{d}{c} x\left(\frac{\tau}{c}\right), \quad V(\tau) = \frac{b}{a} y\left(\frac{\tau}{c}\right).$$

ამ აღნიშვნების შემდეგ (3.30), (3.31) დიფერენციალური განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\frac{dU}{d\tau} = \alpha U(V-1), \quad \frac{dV}{d\tau} = V(1-U), \quad (3.33)$$

სადაც $\alpha > 0$.

ამ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას დაემატება საწყისი პირობები:

$$U(\tau_0) = U_0, \quad V(\tau_0) = V_0, \quad (3.34)$$

სადაც $\tau_0 = ct_0$, $U(\tau_0) = \frac{d}{c} x_0$, $V(\tau_0) = \frac{b}{a} y_0$.

დასმული ამოცანის ფიზიკური შინაარსიდან გამომდინარე, შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ (3.33), (3.34) ამოცანის დადებით ამონახსნებს.

(3.33) განტოლებათა სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{dU}{d\tau} = -\alpha U + \alpha UV, \quad \frac{dV}{d\tau} = V - UV. \quad (3.35)$$

(3.35) სისტემის მეორე განტოლება გავამრავლოთ α -ზე და შემდეგ შევკრიბოთ ეს განტოლებები:

$$\frac{dU}{d\tau} + \alpha \frac{dV}{d\tau} = -\alpha U + \alpha V. \quad (3.36)$$

ამის შემდეგ (3.35) განტოლებათა სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{d\tau} = -\alpha + \alpha V, \quad \frac{1}{V} \frac{dV}{d\tau} = 1 - U,$$

$$\frac{d \ln U}{d\tau} = -\alpha + \alpha V, \quad \frac{d \ln V}{d\tau} = 1 - U. \quad (3.37)$$

(3.37) სისტემის მეორე განტოლება გავამრავლოთ α -ზე და მივუმაგოთ პირველს, მივიღებთ:

$$\frac{d \ln U}{d\tau} + \alpha \frac{d \ln V}{d\tau} = \alpha V - \alpha U.$$

ეს უკანასკნელი გამოვაკლოთ (3.36) განტოლებას, რის შედეგადაც გვექნება:

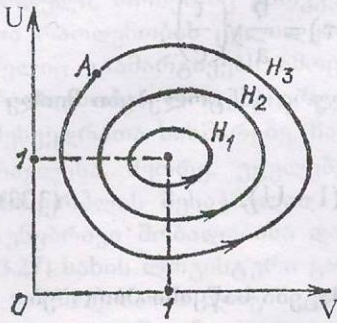
$$\frac{dU}{d\tau} + \alpha \frac{dV}{d\tau} - \frac{d \ln U}{d\tau} - \frac{d \ln V^\alpha}{d\tau} = 0.$$

გაინტეგრირებთ ეს განტოლებას τ_0 -დან τ -მდე, მივიღებთ:

$$U + \alpha V - \ln(UV^\alpha) = H, \quad (3.38)$$

სადაც $H = U_0 + \alpha V_0 - \ln(U_0 V_0^\alpha)$.

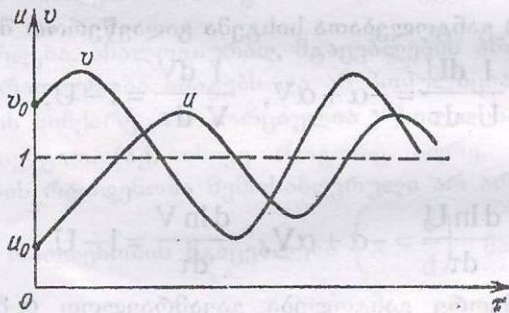
(3.38) გოლობა იძლევა საშუალებას ავაგოთ მისი შესაბამისი წირები H -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის:



ნახ. 3.7

როგორც ვხედავთ, (U, V) – სიბრტყეზე მივიღებთ ჩაკეტილ წირთა ოჯახს. დაეუშვათ, რომ საწყისი მონაცემები (U_0, V_0) მოცემულია A წერტილის იმ გრადიენტორიაზე, რომელიც შეესაბამება მნიშვნელობას $H = H_3$. ვთქვათ, A წერტილი შეესაბამება საწყის მნიშვნელობებს, ამიგომ $U_0 > 1$ და $V_0 < 1$. (3.33) სისტემის პირველი განტოლება გვიჩვენებს, რომ საწყის ეტაპზე U ცვლადი იკლებს. ანალოგიური თვისება გააჩნია V ცვლადსაც. შემდეგ, როდესაც U მიიღებს 1-ის გოლ მნიშვნელობას, მაშინ $V' = 0$ და შემდეგ τ -ს ცვლილების

გარკვეულ შუალედში V ცვლადი იწყებს ზრდას, ხოლო U ცვლადი აგრძელებს კლებას. როდესაც გვექნება გოლობა $V = 1$, მაშინ $U' = 0$ და ამ მომენტიდან დაიწყებს ზრდას U ცვლადიც და ა. შ. რადგან $A(U, V)$ წერტილი მოძრაობს ჩაკეტილ გრადიენტორიაზე, ამიგომ ეს ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი – $U(\tau)$ და $V(\tau)$ წარმოადგენენ პერიოდულ ფუნქციებს, ამასთან, რხევა ორივე პოპულაციაში ($U(\tau)$ და $V(\tau)$ – ფუნქციების საშუალებით აღიწერება პოპულაციებში ინდივიდთა რაოდენობა) ხდება სხვადასხვა ფაზაში. მოვიყვანოთ $U(\tau)$ და $V(\tau)$ ფუნქციების ტიპური გრაფიკი იმ შემთხვევაში, როდესაც $V_0 > 1$ და $U_0 < 1$, $\tau_0 = 0$.



ნახ. 3.8

შეენიშნოთ, რომ რადგან მტაცებლების საკვების რაოდენობა შემოსაზღვრულია (ეს რაოდენობა განისაზღვრება მსხვერპლის რაოდენობით), ამიგომ მტაცებლის პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობის აღწერისათვის მიმანშეწონილია გავითვალისწინოთ (3.27) ლოგისტური განტოლება. მაშინ ორი პოპულაციის ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილება „მტაცებელი-მსხვერპლის“ ტიპის ურთიერთქმედების შემთხვევაში აღიწერება შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის საშუალებით:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 + cxy, \quad \frac{dy}{dt} = ey - dxy,$$

სადაც a, b, c, d, e – გარკვეული დადებითი მუდმივებია, ხოლო $x(t)$ და $y(t)$ კვლავ მესაბამისად გამოსახავს მტაცებლისა და მსხვერპლის რაოდენობას t მომენტში.

ცხადია, რომ ჩვენ მიერ მოყვანილი მათემატიკური მოდელები აღწერენ ორი პოპულაციის ურთიერთქმედების მექანიზმს გარკვეულ, საკმარისად მკაცრი შეზღუდვების პირობებში. უფრო ზუსტი მათემატიკური მოდელების შესაქმნელად გათვალისწინებულ უნდა იქნეს მრავალი სხვა ფაქტორი (მაგალითად, პოპულაციის ინდივიდთა ასაკი, გამრავლების სეზონურობა, ის რომ მტაცებელი ყოველი შეხვედრისას ვერ ახერხებს მსხვერპლის დაჭერას და ა. შ.). ცხადია, ამ ფაქტორების გათვალისწინება საკმაოდ გაართულებს მათემატიკურ მოდელს, მაგრამ ამის საფასურად იგი უფრო კარგად აღწერს რეალურ სიტუაციას (იხ. მაგალითად, [43]).

2.4 ეპიდემიოლოგიის უმარტივესი მათემატიკური მოდელები. კაცობრიობის არსებობის ისტორია ხშირად აღნიშნავს ისეთ ფაქტს, როდესაც ილუპებოდნენ დიდი რაოდენობით ადამიანები სხვადასხვა ეპიდემიური დაავადებისაგან. ქოლერა, შავი ჭირი, გრიპი და სხვა ხშირად იწვევენ ადამიანთა მნიშვნელოვანი რაოდენობის დაავადებას. იმისათვის, რომ ეფექტურად ვებრძოლოთ ამ დაავადებათა გავრცელებას, საჭიროა წინასწარ განისაზღვროს, თუ რა შედეგი მოჰყვება დაავადების საწინააღმდეგო ღონისძიებებს, ე. ი. უნდა მოხდეს სხვადასხვა ღონისძიების ჩატარების შედეგად ავადმყოფთა რაოდენობის დინამიკის პროგნოზირება. აქედან გამომდინარე, ჩვენ მივიღებთ ისეთი მათემატიკური მოდელების შექმნის აუცილებლობამდე, რომელიც იძლევა დაავადების გავრცელების გარკვეული პროგნოზირების საშუალებას.

A. სიმარტივისათვის ჯერ განვიხილოთ სიტუაცია, როდესაც არაფერი არ კეთდება ამა თუ ამ ეპიდემიის გავრცელების წინააღმდეგ, ე. ი. მოვახდინოთ ეპიდემიის გავრცელების ბუნებრივი პროცესის პროგნოზირება.

ცხადია, რომ მათემატიკური მოდელი უნდა ითვალისწინებდეს ეპიდემიის გავრცელებაზე სხვადასხვა ფაქტორის გავლენას. ასე, მაგალითად, უნდა გათვალისწინებულ იქნეს ის კანონები, რომლის მიხედვითაც ხდება ამა თუ იმ ვირუსის გამრავლება, ცალკეული ადამიანის იმუნიტეტი ამა თუ იმ დაავადების მიმართ, ინფექციის მაგარბელი ადამიანების შეხვედრის ალბათობა ჯანმრთელ ადამიანებთან და კიდევ მრავალი სხვა ფაქტორი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ეპიდემიის ასე თუ ისე სრული მოდელი უნდა შეიცავდეს კვლევის შედეგებს, რომელსაც აწარმოებს მეცნიერების სულ ცოცხა ოთხი დარგი მაინც და, კერძოდ, მიკრობიოლოგია, მედიცინა, ფარმაკოლოგია და სოციალური ფსიქოლოგია.

რადგან ჩვენს მიზანს შეადგენს შევადგინოთ მხოლოდ საილუსტრაციო მოდელი, ამიტომ მათემატიკური მოდელების შედგენისას არ გავითვალისწინებთ ბევრ ფაქტორს. მიუხედავად ამისა, ასეთი უხეში მოდელების საშუალებითაც კი შეიძლება აღწერილ იქნეს ეპიდემიის გავრცელების მექანიზმი მის გარკვეულ ეტაპზე.

ამრიგად, განვიხილოთ ადამიანების ჯგუფი, რომელიც შედგება $(N - 1)$ ინდივიდისაგან. ვთქვათ, $t = 0$ მომენტში ამ ჯგუფში მოხვდა ავადმყოფი ადამიანი (ინფექციის წყარო). ვივლისხმობთ, რომ არ ხდება არც ერთი ავადმყოფის ჩამოშორება ამ ჯგუფისაგან (მაგალითად, კარანტინის საშუალებით), ასევე არ არის არც გამოჯანმრთელებისა და არც სიკვდილის შემთხვევები. ასეთი დაშვებები სრულიად ბუნებრივია ეპიდემიის დაწყებიდან ღრთის მცირე ინტერვალის განმავლობაში. ჩავთვალოთ აგრეთვე, რომ ნებისმიერი ადამიანი იქცევა ინფექციის წყაროდ მაშინვე, როდესაც ის დაავადდება.

აღნიშნოთ t მომენტში დაავადებული ადამიანების რაოდენობა $- x(t)$ სიმბოლოთი, ხოლო ჯერჯერობით ჯანმრთელი ადამიანების რაოდენობა $- y(t)$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ ჩვენი დაშვებების პირობებში, t -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის სამართლიანია გოლობა

$$x(t) + y(t) = N, \quad (3.39)$$

როდესაც $t = 0$, მაშინ $x(0) = 1$.

ცხადია, რომ დაავადებული ადამიანების რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე დამოკიდებულია ავადმყოფი და ჯანმრთელი ადამიანების შეხვედრაზე, ე. ი. შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ეს სიჩქარე პროპორციულია $x(t) \cdot y(t)$ ნამრავლისა. ამ დაშვების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(t)y(t)$$

ან თუ გავითვალისწინებთ (3.39) გოლობას:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(N - x), \quad (3.40)$$

სადაც $\alpha > 0$ - გარკვეული მუდმივია. მიღებული დიფერენციალური განტოლებისათვის განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$x(0) = 1. \quad (3.41)$$

(3.40), (3.41) წარმოადგენს ეპიდემიის გავრცელების უმარტივეს მოდელს, რომლის საშუალებითაც შეიძლება განისაზღვროს დაავადებული ადამიანების რაოდენობა დროის ნებისმიერ t მომენტში.

ამოვხსნათ ეს ამოცანა. ამ მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნა $U(t) = \frac{1}{x(t)}$, საი-

დანაც მივიღებთ, რომ $\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{x^2(t)} \cdot \frac{dx}{dt}$. თუ გავითვალისწინებთ ამ უკანასკნელ გოლობას, (3.40) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{dU}{dt} = -\alpha NU + \alpha, \quad (3.42)$$

რადგან $x(0) = 1$, ამიგომ $U(0) = 1$.

ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ (3.42) განტოლების ამონახსნს, $U(0) = 1$ საწყისი პირობის გათვალისწინებით, წარმოადგენს შემდეგი ფუნქცია:

$$U(t) = \frac{N-1}{N} e^{-\alpha Nt} + \frac{1}{N}$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$x(t) = \frac{N}{(N-1)e^{-\alpha Nt} + 1}. \quad (3.43)$$

გაგაანალიზოთ მიღებული ფორმულა. t -ს ბრდასთან ერთად წილადის მნიშვნელი მცირდება, ე. ი. $x(t)$ იზრდება. ეს შეესაბამება ჩვენს ვარაუდს, რომ ავადმყოფთა რაოდენობა შეიძლება მხოლოდ გაიზარდოს.

საინგერესოა გამოვიკვლიოთ, თუ როგორ იცვლება დაავადებული ადამიანების რაოდენობის ზრდის სიჩქარე. ამ საკითხის შესასწავლად უნდა გამოვიკვლიოთ სიდიდე $\frac{d^2x}{dt^2}$.

(3.43)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{N^3 \alpha^2 (N-1) [(N-1)e^{-2\alpha Nt} - e^{-\alpha Nt}]}{[(N-1)e^{-\alpha Nt} + 1]^3}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \text{ როდესაც } t = \frac{\ln(N-1)}{\alpha N};$$

$$\text{თუ } t \in \left[0, \frac{\ln(N-1)}{\alpha N}\right), \text{ მაშინ } \frac{d^2x}{dt^2} > 0;$$

$$\text{თუ } t \in \left[\frac{\ln(N-1)}{\alpha N}, +\infty\right), \text{ მაშინ } \frac{d^2x}{dt^2} < 0.$$

ამრიგად, $\frac{dx}{dt}$ ფუნქცია, რომელიც აღწერს ავადმყოფთა რაოდენობის ზრდის

სიჩქარეს, იზრდება $t = \frac{\ln(N-1)}{\alpha N}$ მომენტამდე, ხოლო შემდეგ კი იკლებს.

ეს შედეგი, უხეში მათემატიკური მოდელის მიუხედავად, საკმაოდ კარგად ეთანხმება ექსპერიმენტულ მონაცემებს, განსაკუთრებით ეპიდემიის საწყის ეტაპზე.

ახლა განვიხილოთ ეპიდემიის სხვა მათემატიკური მოდელი, რომელშიც ხდება ბოგიერთი ისეთი ფაქტორის გათვალისწინება, რომელსაც ჩვენ მიერ განხილული ეპიდემიის უმარტივესი (და, როგორც აღვნიშნეთ, უხეში) მოდელი არ ითვალისწინებდა.

B. ღაუშუშათ, რომ რაიმე პოპულაცია, რომელიც შედგება N ინდივიდისაგან, იყოფა სამ ჯგუფად. პირველ ჯგუფს მივაკუთვნოთ ინდივიდები, რომლებიც მოცემულ მომენტში ჯანმრთელები არიან, მაგრამ არა აქვთ იმუნიტეტი გარკვეული დაავადების მიმართ, ე. ი. არსებობს გარკვეული ალბათობა იმისა, რომ ისინი დაავადდებიან. ასეთი ინდივიდების რაოდენობა t მომენტში აღვნიშნოთ $S(t)$ სიმბოლოთი. მეორე ჯგუფს მივაკუთვნოთ ინდივიდები, რომლებიც ადებულ მომენტში არიან ავად და, მაშასადამე, ინფექციის გამავრცელებლად ითვლებიან. მათი რაოდენობა t მომენტში აღვნიშნოთ $I(t)$ სიმბოლოთი. დაბოლოს, მესამე ჯგუფს მივაკუთვნოთ ინდივიდები, რომლებიც არ არიან ავად და, ამავე დროს, აქვთ იმუნიტეტი ამ დაავადების მიმართ. მათი რაოდენობა აღვნიშნოთ $R(t)$ სიმბოლოთი. ე. ი.

$$S(t) + I(t) + R(t) = N. \quad (3.44)$$

ღაუშუშათ, რომ, იმ შემთხვევაში როდესაც დაავადებულთა რიცხვი $I(t)$ გადააჭარბებს გარკვეულ ფიქსირებულ რიცხვს I^* -ს, ე. ი. $I(t) > I^*$, მაშინ იწყება ეპიდემიის პროცესი, ე. ი. მათ შეუძლიათ დაავადონ ის ინდივიდები, რომელთაც არა აქვთ იმუნიტეტი ამ დაავადების მიმართ. ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ გარკვეულ მომენტამდე შესაძლებელია დაავადებულ ინდივიდთა იზოლაცია (მა-

გალითად, კარანგინის საშუალებით) და რომ საწყის ეტაპზე დაავადება მიმდინარეობს გარკვეული, მცირერიცხოვანი ჯგუფის შიგნით. დაავადების ამ ეტაპს ჩვენს მათემატიკურ მოდელში არ აღვწერთ. შემდეგ ჩავთვალთ, რომ $I(t) > I^*$ და იმუნიტეტის არმქონე ჯანმრთელი ინდივიდების ჯგუფში, დაავადების გამო ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე პროპორციულია ამ ჯგუფში მყოფი ინდივიდების რაოდენობისა. ამ დაშვებების შედეგად მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, & \text{თუ } I(t) > I^*, \\ 0, & \text{თუ } I(t) \leq I^*. \end{cases} \quad (3.45)$$

შემდეგ, დავუშვათ, რომ იმ ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე, რომლებიც მიეკუთვნებიან დაავადებულთა ჯგუფს, მაგრამ გამოჯანმრთელდნენ, პროპორციულია ამ ჯგუფში ინდივიდების რაოდენობისა და βI -ს გოლია. თუ გავითვალისწინებთ აგრეთვე, რომ იმუნიტეტის არმქონე ინდივიდი ბოლოს და ბოლოს ავადდება და თვითონ ხდება ინფექციის გამავრცელებელი (ე. ი. ასეთი ინდივიდი გადადის მეორე ჯგუფში), ამიგომ ინფექციის გამავრცელებელთა რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე დამოკიდებულია დროის ერთეულში დაავადებულ და გამოჯანმრთელებულ ინდივიდთა რაოდენობის სხვაობაზე. ამრიგად,

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & \text{თუ } I(t) > I^*, \\ -\beta I, & \text{თუ } I(t) \leq I^*. \end{cases} \quad (3.46)$$

(3.45) და (3.46) განტოლებებში პროპორციულობის $\alpha > 0$ და $\beta > 0$ კოეფიციენტებს შესაბამისად ვუწოდოთ დაავადებისა და გამოჯანმრთელების კოეფიციენტები.

დაბოლოს, თუ ჩავთვლით, რომ გამოჯანმრთელებული ინდივიდები იძენენ იმუნიტეტს, მაშინ ჯანმრთელი ინდივიდების (რომელთაც გააჩნიათ იმუნიტეტი ამ დაავადების მიმართ) რაოდენობის ცვლილება შეიძლება აღვწეროთ შემდეგი განტოლებით:

$$\frac{dR}{dt} = \beta I. \quad (3.47)$$

მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას (3.45)-(3.47). განვიხილოთ კომის ამოცანა ამ განტოლებათა სისტემისათვის (საწყის მომენტში თითოეულ ჯგუფში ინდივიდთა რაოდენობა):

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0 \quad (3.48)$$

(3.45)-(3.48) ამოცანა წარმოადგენს ეპიდემიის გავრცელების მათემატიკურ მოდელს გარკვეულ შემზღვევებში, რომელთა შესახებაც ზემოთ გვექონდა ლაპარაკი. ცხადია, რომ ამ განტოლებებიდან ნებისმიერი შეგვიძლია შევცვალოთ (3.44) განტოლებით. კერძოდ, თუ ამოვხსნით (3.45) და (3.46) განტოლებებს $R(t)$ შეგვიძლია მივიღოთ (3.44)-დან.

მსჯელობის სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ საწყის ეტაპზე აღებულ პოპულაციაში არ არიან ინდივიდები, რომელთაც აქვთ იმუნიტეტი გარკვეული დაავადების მიმართ, ე. ი. $R_0 = 0$. ამ დაშვების შედეგად იმუნიტეტს იძენენ ის ინდივიდები, რომლებიც ავადმყოფობის შემდეგ გამოჯანმრთელდებიან. დავუშვათ აგრეთვე, რომ დაავადებისა და გამოჯანმრთელების კოეფიციენტები ერთმანეთის გოლია $\alpha = \beta$ (შევნიშნოთ, რომ თუ $\alpha \neq \beta$, ეს არ გამოიწვევს რაიმე გართულებას მსჯელობაში).

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

I. ვთქვათ, $I(0) \leq I^*$. ჩვენი დაშვების თანახმად ამ დროს პოპულაციაში შემავალ ინდივიდებს არ გადაეცემათ დაავადება. ამ შემთხვევაში $\frac{dS}{dt} = 0$, რის საფუძველზეც (3.44) გოლობის და $R(0) = R_0 = 0$ პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$S(t) = S_0 = N - I_0$$

ეს მოდელი აღწერს იმ სიტუაციას, როდესაც ყველა დაავადებული ინდივიდი იმოლირებულია. ამ შემთხვევაში (3.46) განგოლება მიიღებს სახეს:

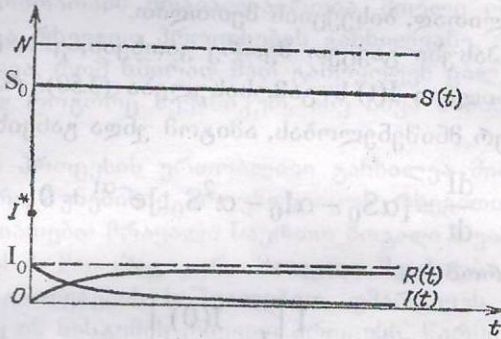
$$\frac{dI}{dt} = -\alpha I,$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$I(t) = I_0 e^{-\alpha t}$$

$$R(t) = N - S(t) - I(t) = I_0(1 - e^{-\alpha t}).$$

ნახ. 3.9-ზე გრაფიკულად არის გამოხატული სამივე ჯგუფში ინდივიდების რაოდენობის ცვლილება.



ნახ. 3.9

II. ვთქვათ, $I(0) > I^*$. ამ შემთხვევაში იარსებებს ინტერვალი $0 \leq t < T$, სადაც შესრულებული იქნება უგოლობა $I(t) > I^*$. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $t \in [0, T)$, მაშინ ავადმყოფობა გავრცელდება იმ ინდივიდებზე, რომელთაც არა აქვთ იმუნიტეტი ამ დაავადების მიმართ. მაშინ (3.45) განგოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$S(t) = S_0 e^{-\alpha t}, \quad \text{თუ } 0 \leq t < T. \quad (3.49)$$

ჩავსვათ $S(t)$ -ს ეს გამოსახულება (3.46) განგოლებაში, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{dI}{dt} + \alpha I = \alpha S_0 e^{-\alpha t}.$$

ამ განგოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $e^{\alpha t}$ -ზე:

$$\frac{d}{dt}(Ie^{\alpha t}) = \alpha S_0.$$

ამ გოლობის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$Ie^{\alpha t} = \alpha S_0 t + C,$$

სადაც C – ნებისმიერი მუდმივია. უკანასკნელი გოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$I(t) = Ce^{-\alpha t} + \alpha S_0 t e^{-\alpha t}.$$

თუ გავითვალისწინებთ საწყის პირობებს $I(0) = I_0$, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$I(t) = (I_0 + \alpha S_0 t) e^{-\alpha t}, \quad \text{თუ } 0 \leq t < T. \quad (3.50)$$

ცხადია, რომ, უპირველეს ყოვლისა, ჩვენ უნდა დავადგინოთ T -ს მნიშვნელობა, აგრეთვე t_{\max} – დროის ის მომენტი, როდესაც დაავადებულ ინდივიდთა რაოდენობა მაქსიმალურია.

პირველ კითხვაზე პასუხის გაცემა მნიშვნელოვანია იმდენად, რამდენადაც T მომენტში შეწყდება დაავადების შემდგომი გავრცელება. თუ განვიხილავთ (3.50) განტოლებას, მაშინ ჩვენ მიერ შემოთქმული მოსაზრების გამო, $t = T$ მომენტში სამართლიანია გოლობა:

$$(I_0 + \alpha S_0 T) e^{-\alpha T} = I^*. \quad (3.51)$$

მივიღეთ არაწრფივი განტოლება T -ს მიმართ, რომლის ამონახსნიც შეიძლება ვიპოვოთ, მაგალითად, ბისექციის მეთოდით.

იმისათვის, რომ პასუხი გავცეთ მეორე კითხვას, ე. ი. დავადგინოთ t_{\max} -ის მნიშვნელობა, განვიხილოთ $I(t)$ -ს გამოსახულება (3.50). რადგან t_{\max} შეესაბამება $I(t)$ -ს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ამიტომ უნდა განვიხილოთ განტოლება:

$$\frac{dI}{dt} = [\alpha S_0 - \alpha I_0 - \alpha^2 S_0 t] e^{-\alpha t} = 0,$$

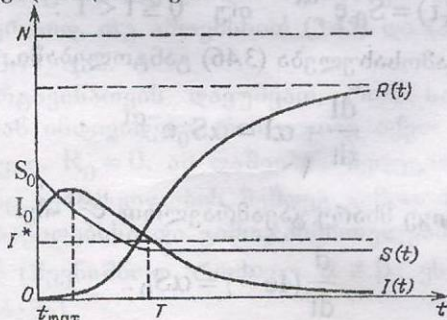
საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$t_{\max} = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \frac{I(0)}{S(0)} \right]. \quad (3.52)$$

როდესაც $t \geq T$, ინფექციის გავრცელება შეწყდება და (3.46) განტოლების ამონახსნი $I(T) = I^*$ საწყისი პირობით, როცა $\alpha = \beta$ იქნება:

$$I(t) = I^* e^{-\alpha(t-T)}.$$

შემდეგ ნახაზზე გრაფიკულად არის გადმოცემული თითოეულ ჯგუფში ინდივიდთა რაოდენობის ცვლის დინამიკა



ნახ. 3.10

ცხადია, რომ ანალოგიურად შეიძლება განხილულ იქნეს შემთხვევები, როდესაც $R_0 \neq 0$, $\alpha \neq \beta$.

შეზინით, რომ ჩვენ მიერ განხილული ეპიდემიის გავრცელების მათემატიკური მოდელი რამდენაღმე გამარტივებულად აღწერს რეალურ სიტუაციას, რადგან იგი არ ითვალისწინებს ზოგიერთ მნიშვნელოვან ფაქტორს. თუმცა, როგორც ექსპერიმენტულ მონაცემებთან შედარება გვიჩვენებს, ეს გამარტივებული მოდელიც იძლევა საკმაოდ კარგ წარმოდგენას ინფექციური დაავადებების გავრცელების შექანიზმზე.

§3. რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

3.1 ჰარმონიული ოსცილატორის მათემატიკური მოდელი.

ქანქარიანი საათი, ოკეანის ტალღები, საქანელა, დღისა და ღამის ცვლა და სხვა ბევრი, ჩვენთვის ცნობილი მოვლენა წარმოადგენს რხევითი პროცესის მაგალითს. არ არსებობს ბუნების თითქმის არც ერთი მოვლენა, რომელშიც არ იღებდეს მონაწილეობას მოძრაობის ეს სახე. ზემოთ ჩამოთვლილ მაგალითებს შეიძლება დავამატოთ: დედამიწის ქერქის მოძრაობა მიწისძვრების დროს, ჰაერის ბგერითი მოძრაობა და სხვა. მაგრამ მარტო მექანიკური რხევით არ ამოიწურება რხევითი მოძრაობის მრავალნაირობა. მთელი ოპტიკა და რადიოტექნიკა დამყარებულია რხევითი პროცესების განხილვაზე. რხევითი პროცესების როლი იმდენად დიდია, რომ ხშირად მათ გამოყოფენ ცალკე დარგის სახით და განიხილავენ ერთად როგორც მექანიკურ, ისე სხვა სახის (ელექტრულ, ოპტიკურ) რხევებს.

ყველა რხევითი პროცესის ერთობლივი განხილვა მით უფრო მიზანშეწონილია, რომ როგორი ბუნებისაც არ უნდა იყოს რხევითი სისტემა, მასში აღძრულ რხევებს ახასიათებთ მრავალი საერთო მოვლენა თვისება.

რხევითი პროცესის მათემატიკური მოდელი შეიძლება ჩაწერილ იქნეს დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით. უმარტივეს განტოლებას, რომელიც აღწერს ამა თუ იმ სისტემის რხევით პროცესს, წარმოადგენს ე. წ. წრფივი (ჰარმონიული) ოსცილატორის განტოლება

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.53)$$

სადაც $x(t)$ წარმოადგენს ფუნქციას, რომელიც აღწერს სისტემის გაღაზრას წონასწორული მდგომარეობიდან, ω_0 კი მუდმივი სიდიდეა. იგი გვიჩვენებს 2π წამში შესრულებული რხევების რაოდენობას. მას ციკლური სიხშირე ეწოდება. იგი დამოკიდებულია რხევითი სისტემის მახასიათებელ სიდიდეებზე. კონკრეტული მაგალითის განხილვის დროს თითოეული რხევითი პროცესისათვის ჩვენ დავადგენთ კონკრეტულ სახეს.

(3.53) განტოლება მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა. იმისათვის, რომ ამ შემთხვევაში მათემატიკური მოდელი იყოს კორექტული, აუცილებელია ორი დამატებითი პირობის მოცემა. ამ პირობებად ჩვენ ავიღებთ საძიებელი ფუნქციისა და მისი ცვლილების სისწრაფის საწყის მნიშვნელობებს:

$$x(0) = x_0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0, \quad (3.54)$$

სადაც x_0 და v_0 მუდმივი სიდიდეებია. ადვილი შესამოწმებელია, რომ (3.53) განგოლებას აკმაყოფილებენ $x_1(t) = x_m \cos \omega_0 t$ და $x_2(t) = x_m \sin \omega_0 t$ ფუნქციები. მათ (3.53) განგოლების კერძო ამონახსნები ეწოდებათ. ამ გამოსახულებებში შემავალი x_m მუდმივი სიდიდე გვიჩვენებს წონასწორული მნიშვნელობიდან რხევითი პროცესის დამახასიათებელი $x(t)$ სიდიდის უდიდეს გადახრას და მას *რხევის ამპლიტუდა* ეწოდება.

(3.53) განგოლება საძიებელ ფუნქციას და მის მეორე წარმოებულს პირველ ხარისხში შეიცავს (ე. ი. არ შეიცავს x^2 ან $\sin x$ ან \sqrt{x} ან $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2$ და ა. შ. წევრებს). ამიგომ მას წრფივ განგოლებას უწოდებენ.

(3.53) განგოლების უმნიშვნელოვანესი თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ კერძო ამონახსნების ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია კვლავ მისი ამონახსნია. მართლაც, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი A და B მუდმივებისათვის

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (3.55)$$

წარმოადგენს (3.53) ჩვეულებრივი წრფივი დიფერენციალური განგოლების ამონახსნს.

კონკრეტული მათემატიკური მოდელისათვის ან კონკრეტული ამოცანისათვის A და B ნებისმიერი მუდმივების დაკონკრეტება ხდება (3.54) საწყისი პირობების გამოყენებით.

მართლაც, თუ (3.55) ფუნქციას და მის პირველ წარმოებულს გამოვითვლით დროის საწყისი მნიშვნელობისათვის, (3.54)-ის თანახმად მივიღებთ:

$$A = x_0, \quad B \omega_0 = v_0.$$

მაშასადამე,

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (3.56)$$

წარმოადგენს (3.53)-(3.54) მათემატიკური მოდელის ამონახსნს.

რხევითი პროცესების მახასიათებლად ω_0 ციკლური სიხშირის გარდა, გამოიყენება რხევის პერიოდი. იგი გოლია ერთი სრული რხევის შესასრულებლად საჭირო დროის შუალედისა. თუ რხევის პერიოდს T ასოთი აღვნიშნავთ, მაშინ მისი კავშირი ციკლურ სიხშირესთან მოიცემა

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (3.57)$$

ფორმულით, ხოლო (3.56) ამონახსნი კი შემდეგი სახით ჩაიწერება:

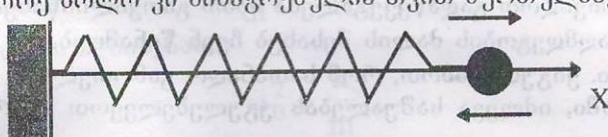
$$x(t) = x_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{v_0 T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \quad (3.58)$$

ცხადია, (3.56) ან (3.58) ფუნქციები წარმოადგენს T პერიოდის მქონე პერიოდულ ფუნქციებს. ასეთი ფუნქციებით აღწერილ რხევით პროცესებს *პერიოდული* ან *პარმონიული რხევები* ეწოდებათ.

ამ პარაგრაფის მომდევნო პუნქტებში ჩვენ განვიხილავთ სამ კონკრეტულ რხევით სისტემას, რომლებშიც შესაძლებელია პარმონიული რხევების არსებობა. თითოეულ შემთხვევაში მათემატიკური მოდელის აგების სხვადასხვა მეთოდი იქნება გამოყენებული, მაგრამ შედეგად ყველგან (3.53) სახის განგოლება მი-

ილება. ეს გარემოება იმ ფაქტის უტყუარი დამადასტურებელია, რომ განურჩევლად მათემატიკური მოდელის აგების მეთოდისა, თუ სწორად არის შესასწავლი პროცესის არსი გაგებული, ყოველთვის მიიღება მისი ადეკვატური მათემატიკური აღწერა.

3.2 უმარტივესი ჰარმონიული ოსცილატორი. განვიხილოთ ჰორიზონტულად დამაგრებულ ღეროზე ჩამოცმულ ბურთულას რხევითი მოძრაობა. იგი რხევაში მოჰყავს გამბარას, რომლის ერთი ბოლო კედელშია უძრავად დამაგრებული, მეორე ბოლო კი მიმაგრებულია თვით ბურთულაზე.



ნახ. 3.11

გამბარა და ბურთულა ერთად რხევითი სისტემაა. თუ ბურთულას გადახრით წონასწორობის მდგომარეობიდან, ე. ი. გამოვიწვევთ გამბარის დეფორმაციას (წაგრძელებას ან შეკუმშვას), მაშინ გამბარაში აღძრული დრეკალობის ძალის გავლენით ბურთულა აჩქარებით დაიწყებს მოძრაობას წონასწორობის მდებარეობისაკენ. ამ დროს გამბარის დეფორმაცია და, მამასადამე, დრეკალობის ძალაც მცირდება. იმ მომენტში, როდესაც ბურთულა წონასწორობის მდებარეობას მიაღწევს, გამბარის დრეკალობის ძალა ნულის გოლი გახდება. ამავდროულად ბურთულას მაქსიმალური სიჩქარე ექნება. ამიგომ იგი არ განგრძობს წონასწორობის მდებარეობაში და ინერგულობის გამო განაგრძობს მოძრაობას. ამ მოძრაობის შედეგად დაიწყება გამბარის დეფორმაცია და აღძვრება წონასწორობის მდებარეობისაკენ მიმართული დრეკალობის ძალა. ეს ძალა თანდათან იზრდება, ბურთულას სიჩქარე კი მცირდება. როცა სიჩქარე ნულს გაუტოლდება, გამბარა მაქსიმალურად იქნება დეფორმირებული და დრეკალობის ძალაც მიაღწევს მაქსიმუმს. ამის შემდეგ ბურთულა აჩქარებულად დაიწყებს მოძრაობას წონასწორობის მდებარეობისაკენ. მისი სიჩქარე გაიზრდება, დრეკალობის ძალა შემცირდება, წონასწორულ მდგომარეობას ბურთულა კვლავ მაქსიმალური სიჩქარით გაივლის და მთელი პროცესი გაიმეორდება – ბურთულა შეასრულებს რხევებს.

ვიდრე ბურთულის რხევის მათემატიკური მოდელის აგებას დავიწყებდეთ, ვაჟაანალიზოთ ამ პროცესში მონაწილე ყველა სხეულის როლი. ვინაიდან რხევები დედამიწაზე მიმდინარეობს დავიწყოთ დედამიწით. გამბარას ჰორიზონტალური მდებარეობა აქვს, ბურთულაც ჰორიზონტულად მოძრაობს (იხ. ნახ. 3.11). ეს საფუძველს გვაძლევს ვივარაუდოთ, რომ დედამიწა დროის ყოველ მომენტში ერთნაირად მოქმედებს მათზე და გავლენას არ ახდენს რხევით პროცესზე. კერძოდ, ბურთულას წონა ყოველთვის კომპენსირდება ღეროს რეაქციის ძალით.

მამასადამე, დედამიწის მიზიდულობის ძალა შეგვიძლია არ გავითვალისწინოთ.

შეიძლება იქნეს განხილული დრეკალობის სამი ძალა. ერთი, გამბარაში აღძრული, მეორე, კედელში აღძრული და მესამე ბურთულაში აღძრული. ბოლო ორ ძალას იწვევს გამბარის ბოლოების კედელზე და ბურთულაზე მოქმედება. თუ ვიგულისხმებთ, რომ კედელიცა და ბურთულაც გაცილებით ხისგია გამბარასთან შედარებით, მაშინ, ცხადია, ერთი და იმავე ძალით გამოწვეული დეფორმაციები კედელსა და ბურთულაში შეიძლება უკუვავდოთ გამბარის დეფორმაციასთან შედარებით და განსახილველად მხოლოდ გამბარის დრეკალობის ძალა დავიგოვოთ.

დრეკალობის ძალის დამოკიდებულება დეფორმაციის სიდიდეზე რთულია. მხოლოდ მცირე დეფორმაციების შემთხვევაშია შესაძლებელი ამ დამოკიდებუ-

ლების მარტივად აღწერა ჰუკის კანონის საფუძველზე. თუ დავუშვებთ, რომ წონასწორობის მდებარეობიდან გადახრები მცირეა, მაშინ უფლება გვექნება მათემატიკური მოდელის აგების დროს გამოვიყენოთ ჰუკის კანონი.

რაც შეეხება ხახუნის ძალებს, უნდა განვიხილოთ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა და ბურთულას ღეროსთან ხახუნის ძალა (ვგულისხმობთ, რომ თვით ზამბარას არ გააჩნია შინაგანი ხახუნი, ე. ი. მისი გაჭიმვა-შეკუმშვის დროს ენერჯია არ გადადის სითბოში). ბუნებრივია, ამ ძალის სიდიდე შევადაროთ ზამბარის დრეკადობის ძალის საშუალო მნიშვნელობას (დრეკადობის ძალა ხომ ცვალებადია) და მერე მივიღოთ გადაწყვეტილება მათი გათვალისწინების თაობაზე.

ჰაერის წინააღმდეგობის ძალის შესახებ ჩვენ წინამდებარე წიგნის I თავში გვექონდა საუბარი. ვიგულისხმობთ, რომ სათანადო გამოთვლები, სასურველი სიზუსტის ფარგლებში, იძლევა საშუალებას უგულებელვყოთ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა.

ბურთულასა და ღეროს შორის ხახუნის მინიმალურამდე შემცირება შესაძლებელია ეფექტური საპოხი საშუალების გამოყენებით. ასე რომ, ეს ძალაც ჩავთვალოთ იმდენად მცირედ, რომ არ მივიღოთ მხედველობაში.

დავვარაუდოთ ბურთულასა და ზამბარის ინერტულობის შეფასება. ცხადია, ამ მიზეზით მათი მასები უნდა შევადაროთ. ვიგულისხმობთ რომ, ისევე სასურველი სიზუსტის ფარგლებში, ზამბარის მასა გაცილებით ნაკლებია ბურთულის მასაზე.

ამრიგად, შესასწავლი პროცესის „ფიზიკური ანალიზის“ შედეგად შევვიძლია შევუდგეთ ზამბარაზე მიმაგრებული ბურთულის რხევის მათემატიკური მოდელის აგებას მხოლოდ ბურთულის მასისა და ზამბარის სიხისტის გათვალისწინებით.

ჩაგარებული მსჯელობიდან გამომდინარე, ბუნებრივია, მათემატიკური მოდელის საფუძველად ავიღოთ ნიუტონის მეორე კანონი. ამისათვის, როგორც აღრე, პირველ რიგში ავირჩიოთ ათვლის სისტემა.

ღეროს ათვლა დავიწყოთ იმ მომენტიდან, როდესაც ბურთულა მაქსიმალურად არის გადახრილი წონასწორობის მდგომარეობიდან.

ვინაიდან ბურთულას მოძრაობა ერთგანზომილებიანია, ერთადერთი OX ღერძი მივმართოთ ღეროს გასწვრივ, მარცხნიდან მარჯვნივ. კოორდინატთა სათავედ ავირჩიოთ წონასწორობის მდებარეობაში ბურთულის ცენტრის მდებარეობა.

თუ m მასის ბურთულაზე ზამბარის მხრიდან მოქმედ ძალას \vec{F} -ით აღვნიშნავთ, ამ ძალით გამოწვეულ აჩქარებას კი \vec{a} -თი, მაშინ ნიუტონის მეორე კანონი OX ღერძზე დაგვემძლეული ვექტორული სიდიდეებისათვის ასე ჩაიწერება:

$$F_x = ma_x. \quad (3.59)$$

მეორეს მხრივ, OX ღერძის გასწვრივ, აჩქარების გამოწვევი ძალა ჩვენს შემთხვევაში დრეკადობის ძალაა. ჰუკის კანონის თანახმად, ამ ძალის F_x გეგმილი წონასწორობის მდებარეობიდან ბურთულას გადახრის პირდაპირპროპორციულია. გადახრა კი ბურთულას X კოორდინატის ტოლია, თანაც ძალის გეგმილსა და კოორდინატს საპირისპირო ნიშნები აქვთ. მაშასადამე,

$$F_x = -kx, \quad (3.60)$$

სადაც $k > 0$ ზამბარის სიხისტეა.

ამრიგად, მივიღეთ, რომ

$$ma_x + kx = 0. \quad (3.61)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ერთგანზომილებიანი მოძრაობისათვის აჩქარების გეგმილი კოორდინატის მეორე წარმოებულია დროით

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2},$$

მაშინ (3.61) განტოლება შემდეგი სახით შეიძლება გადავწეროთ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

ან

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.62)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (3.63)$$

მაშინ (3.62) მიიღებს სახეს:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

ეს კი ჰარმონიული ოსცილატორის (3.53) განტოლებაა.

ამრიგად, მამბარაზე მიმაგრებული ბურთულას ჰორიზონტალური რხევა ხახუნისა და სხვა ფაქტორების გარეშე წარმოადგენს ჰარმონიულ რხევას, თვით რხევითი სისტემა კი — უმარტივეს ჰარმონიულ ოსცილატორს.

(3.57) და (3.63) ფორმულების თანახმად, უმარტივესი ჰარმონიული ოსცილატორის რხევის პერიოდი გამოითვლება ფორმულით:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.64)$$

ამრიგად, შეიძლება ითქვას, რომ აგებულია უმარტივესი ჰარმონიული რხევითი მოძრაობის მათემატიკური მოდელი და განსაზღვრულია რხევის მახასიათებელი სიდიდეები.

3.3 მათემატიკური მოდელის შემოწმება. სამოგადოდ, რეალური ამოცანის მათემატიკური მოდელირების დროს საჭიროა თვითკონტროლის სხვადასხვა მეთოდის გამოყენება. ამ მეთოდების რიგში შედის გზადაგზა რიცხვითი შეფასებების გაკეთება, მიღებულ ფარგლებში შემავალ შესაკრებთა განზომილებების შედარება, შენახვის კანონების შემოწმება და სხვა.

ენახთ ახლა, ინახება თუ არა უმარტივესი ჰარმონიული ოსცილატორის მათემატიკურ მოდელში ენერგია. ამ მიზნით (3.62) განტოლება შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$m \frac{dv}{dt} + kx = 0, \quad (3.65)$$

სადაც

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (3.66)$$

თუ (3.65) განტოლებას გადავამრავლებთ (3.66) გამოსახულებაზე, მივიღებთ:

$$\frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} + \frac{k}{2} \frac{dx^2}{dt} = 0. \quad (3.67)$$

(3.67) განტოლების ინტეგრება მოგვცემს:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const.} \quad (3.68)$$

ეს გამოსახულება წარმოადგენს ენერჯის მუდმივობის კანონის მათემატიკურ მოდელს. პირველი შესაკრები მარცხენა მხარეში აღწერს ბურთულას კინეტიკურ ენერჯიას, მეორე კი - დეფორმირებული გამზარის პოტენციურ ენერჯიას.

დავადგინოთ const-ის მნიშვნელობა.

როცა დროის ათვის დასაწყისი რხევის დასაწყისს შეესაბამება, მაშინ გამზარიანი ოსცილატორისათვის საწყის პირობებს აქვს შემდეგი სახე:

$$x(0) = x_0, v(0) = 0. \quad (3.69)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ საწყის მომენტში ბურთულა მაქსიმალურადაა გადახრილი ამპლიტუდის გოლ x_0 მანძილზე და უძრავია. ამ დროს გამზარა მაქსიმალურადაა დეფორმირებული. მისი პოტენციური ენერჯია $\frac{kx_0^2}{2}$ -ის გოლია და ვინაიდან, ბურთულას საწყისი კინეტიკური ენერჯია ნულის გოლია, რხევითი სისტემის საწყისი სრული ენერჯია მხოლოდ $\frac{kx_0^2}{2}$ -ის გოლი იქნება. ე. ი.

$$\text{const} = \frac{kx_0^2}{2}. \quad (3.70)$$

მამასადამე, დროის ნებისმიერი მომენტისათვის გამზარიანი ოსცილატორისათვის უნდა სრულდებოდეს პირობა;

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}. \quad (3.71)$$

რავა თქმა უნდა, ეს პირობა უნდა დააკმაყოფილოს ჰარმონიული რხევის აღმწერმა $x(t)$ ფუნქციამ, რომელიც (3.58) სახით გვაქვს ჩაწერილი. იმისათვის, რომ ამაში დავრწმუნდეთ, (3.58) გამოსახულება ჩავწერთ (3.69) საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \quad (3.72)$$

ვიპოვოთ მისი პირველი წარმოებული - მყისი სიჩქარე:

$$v(t) = -x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \quad (3.73)$$

ახლა (3.73) და (3.72) გამოსახულებების გამოყენებით ჩავწერთ გამზარიანი ოსცილატორის სრული ენერჯის მათემატიკური მოდელი:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2} \sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{kx_0^2}{2} \cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = \frac{kx_0^2}{2}.$$

ამრიგად, მივიღეთ (3.71) ფორმულა, რაც იმის დამადასტურებელია, რომ გამზარიანი ოსცილატორის ჩვენ მიერ აგებული მათემატიკური მოდელი სარწმუნოა და კორექტული.

3.4 მათემატიკური ქანქარა. პარმონიული რხევის მეორე მაგალითად განვიხილოთ მათემატიკური ქანქარას მცირე რხევები.



ნახ. 3.12

წარმოვიდგინოთ დელამიწის მიზიდულობის ველის უძრავ წერტილში l სიგრძის ძაფზე ან ღეროზე ჩამოკიდებული m დიამეტრის მქონე ბურთულა. თუ ბურთულას გადავხრით წონასწორული ვერტიკალური მდებარეობიდან და გავუშვებთ ხელს, იგი დაიწყებს რხევით მოძრაობას. სამოგადოდ, ასეთ სისტემაში აღძრულ რხევით მოძრაობას რთული ხასიათი ექნება. ჩავაგაროთ ამ რხევითი სისტემის ანალიზი და გამოვყოთ ჩვენთვის საინტერესო კერძო შემთხვევა.

დავიწყოთ სისტემაში მოქმედი ძალების განხილვით.

თუ ბურთულას მასას M -ით აღვნიშნავთ, თავისუფალი ვარდნის აჩქარებას g , როგორც ყოველთვის, \vec{g} -თი, მაშინ ბურთულაზე მოქმედი სიმძიმის ძალა მოიცემა ფორმულით $M\vec{g}$. ეს ძალა ბურთულას ცენტრშია მოდებული და ყოველთვის ვერტიკალურად ქვევითაა მიმართული. თუ ძაფის ან ღეროს მასას m' -ით აღვნიშნავთ, ცხადია, მათზეც იმოქმედებს სიმძიმის $m'\vec{g}$ ძალა. ეს ძალა ძაფის ან ღეროს მასათა ცენტრში იქნება მოდებული. ამიგომ მთლიანად რხევით სისტემაში მოქმედი სიმძიმის ძალის გოლქმედი შეიძლება აღმოჩნდეს ბურთულას გარეთ, ძაფის ან ღეროს რომელიმე წერტილში მოდებული. ცხადია, ეს იქნება ბურთულა – ძაფის ან ბურთულა – ღეროს მასათა ცენტრი. თუ დავუშვებთ, რომ ძაფის ან ღეროს მასა უმნიშვნელოა ბურთულას მასასთან შედარებით, ე. ი. $m' \ll m$, მაშინ შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ბურთულა – ძაფის ან ბურთულა – ღეროს მასათა ცენტრი ბურთულას ცენტრს ემთხვევა და რხევით სისტემაში მოქმედებს მხოლოდ $M\vec{g}$ სიმძიმის ძალა.

როგორც ადრე გვქონდა აღნიშნული, ბურთულის მოძრაობის დროს აღიძვრება ჰაერის მხრიდან მოქმედი წინააღმდეგობის ძალა. ამ ძალის უგულვებლყოფა შესაძლებელი იქნება თუ დავუშვებთ, რომ ბურთულა ძალიან პატარაა. ამ შემთხვევაში ბურთულას სიმცირის მათემატიკურ კრიტერიუმად გამოდგება დაშვება $d \ll l$. მაშასადამე, ბურთულა შეიძლება მაგერიალურ წერტილად იქნეს განხილული.

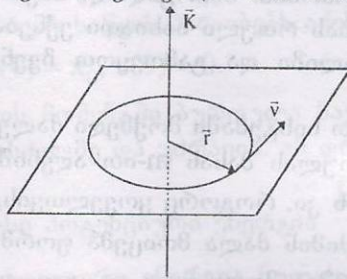
გადავიდეთ დრეკადობის ძალების განხილვაზე. ვიგულისხმოთ, რომ ძაფის ან ღეროს მოქმედებით გამოწვეული ბურთულას დეფორმაციისას აღძრული დრეკადობის ძალა გაცილებით ნაკლებია ძაფში ან ღეროში აღძრულ დრეკადობის ძალასთან შედარებით. ეს უკანასკნელი N -ით აღვნიშნოთ. გარდა ამისა, დავუშვათ, რომ რხევის პროცესში არ ხდება ძაფის ან ღეროს სიგრძის ცვლილება. ეს ნიშნავს, რომ სისტემის მასათა ცენტრი ყოველთვის l მანძილზეა დაკიდების წერტილიდან.

მხოლოდ ჩატარებული მსჯელობის შემდეგ არის შესაძლებელი მათემატიკური ქანქარას კლასიკური განმარტების ჩამოყალიბება, კერძოდ, *მათემატიკური ქანქარა ეწოდება დელამიწის მიზიდულობის ველში უწონად და უკიმად ძაფზე დაკიდებულ მაგერიალურ წერტილს.*

ცხადია, მათემატიკური ქანქარა რეალური რხევითი სისტემის გაიდვალბებული მოდელია, მაგრამ როგორც არაერთხელ იყო აღნიშნული, რეალური ვითარების ასეთი გამარტივება – ძირითადი ფაქტორების გათვალისწინება და მეორეხარისხოვნების უკუგდება, მათემატიკური მოდელირების პირველი ეტაპის არსს შეადგენს.

გადავიდეთ ახლა მათემატიკური ქანქარას რხევის აღმწერი მათემატიკური მოდელის აგებაზე ბალანსის მეთოდის გამოყენებით.

ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ადიტიურ ფიზიკურ სიდიდეს იმპულსის მომენტი წარმოადგენს. ის ყოველთვის წარმოიშობა, როცა ადგილი აქვს ბრუნვით მოძრაობას რაიმე უძრავი ღერძის მიმართ. იგი ვექტორული სიდიდეა. თუ \vec{r} -ით აღვნიშნავთ m მასის მქონე ნივთიერი წერტილის რადიუს-ვექტორს ბრუნვის ღერძის მიმართ, \vec{v} -თი კი მის მყის სიჩქარეს (იხ. ნახ. 3.13),



ნახ. 3.13

მაშინ იმპულსის მომენტი მოიცემა ფორმულით:

$$\vec{K} = [\vec{r}, m\vec{v}] \quad (3.74)$$

იმპულსის მომენტის წყაროს წარმოადგენს განსახილველ სხეულზე მოქმედი ძალის მომენტი. თავის მხრივ, ძალის მომენტი იმპულსის მომენტის ანალოგიურად განიხარტება:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (3.75)$$

სადაც \vec{F} სხეულზე მოქმედი ძალაა.

იმპულსის მომენტის ნაკადი მაგერიალური წერტილის დინამიკაში არ განიხილება, ამიტომ იმპულსის მომენტის ცვლილების სისწრაფეს მთლიანად განსაზღვრავს ძალის მომენტი. მაშასადამე, ბალანსის (3.16) განგოლებების თანახმად

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}$$

ანუ

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}, m\vec{v}] = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (3.76)$$

მათემატიკური ქანქარას შემთხვევაში, დაკიდების O წერტილი შეიძლება განვიხილოთ უძრავი ღერძის ვერტიკალური სიბრტყით (ქანქარას მოძრაობის სიბრტყით) გადაკვეთის წერტილად, მაშინ რადიუს-ვექტორი მოდულით ქანქარას ℓ სიგრძის გოლი იქნება. ვინაიდან ჩვენ ℓ უცვლელად გვაქვს მიჩნეული, გამოდის, რომ მაგერიალური წერტილი ℓ რადიუსიანი წრეწირის რკალზე მოძრაობს. მაშასადამე, მისი წირითი \vec{v} სიჩქარე ყოველთვის პერპენდიკულარული იქნება რადიუსის და (3.74) ვექტორული ნამრავლი მოგვცემს

$$K = mv\ell.$$

თუ ახლა მაგერიალური წერტილის ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს Ω -თი აღვნიშნავთ, მაშინ წირით სიჩქარესთან მისი კავშირი მოიცემა ფორმულით:

$$v = \Omega \ell$$

და მივიღებთ, რომ

$$K = m\Omega^2 \ell^2 \quad (3.77)$$

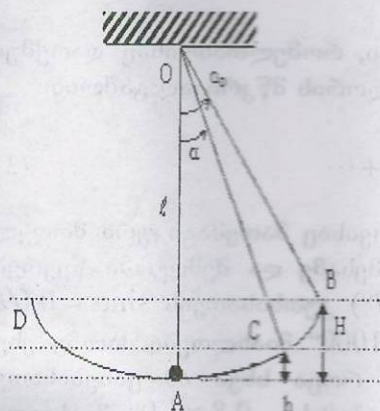
გავარკვიოთ ახლა ძალების მომენტების საკითხი.

ძაფში ან ღეროში აღძრული ღრეკადობის \vec{N} ძალის მოქმედების წრფე თვით ძაფს ან ღეროს ემთხვევა, ე. ი. ბრუნვის O წერტილში გადის. ეს იმას ნიშნავს, რომ ღრეკადობის ძალა და ℓ რადიუს-ვექტორი კოლინეარული ვექტორებია და მათი ვექტორული ნამრავლი ნულის ტოლია. მაშასადამე, ღრეკადობის ძალის მომენტი ნულია.

რაც შეეხება სიმძიმის ძალის მომენტს, ნახ. 3.14-დან ჩანს, რომ კუთხე სიმძიმის ძალის მიმართულებასა და რადიუს-ვექტორის მიმართულებას შორის გადახრის α კუთხის ტოლია, ამიტომ სათანადო ძალის მომენტი

$$M = mg \ell \sin \alpha \quad (3.78)$$

ვიდრე (3.77) და (3.78) ფორმულებს შევიგანთ (3.76) განტოლებაში, მივაქციოთ ყურადღება ერთ არსებით გარემოებას. სიმძიმის ძალის (3.78) მომენტი ყოველთვის ცდილობს გადახრის კუთხის შემცირებას. მათემატიკურად ეს ფაქტი (3.76) განტოლებაში (3.77) და (3.78) გამოსახულებების ურთიერთშებრუნებული ნიშნებით



ნახ. 3.14

შეგანაში აისახება:

$$-\frac{d(m\Omega \ell^2)}{dt} = mg \ell \sin \alpha$$

ანუ

$$-\frac{d\Omega}{dt} = \frac{g}{\ell} \sin \alpha \quad (3.79)$$

მოვიხმოთ კუთხური სიჩქარისა და გადახრის კუთხის კავშირი:

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

მაშინ, (3.79) შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \alpha = 0 \quad (3.80)$$

ამრიგად, მათემატიკური ქანქარას რხევები აღიწერება მეორე რიგის არა-წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებით.

თუ ღრის ათვლას დავიწყებთ იმ მომენტიდან, როცა ბურთულა მაქსიმალურადაა გადახრილი წონასწორობის მდებარეობიდან, მაშინ საწყის პირობებს ექნება სახე:

$$\alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{და} \quad \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (3.81)$$

(3.80) განტოლება (3.81) პირობებით წარმოადგენს მათემატიკური ქანქარას რხევის აღმწერ მათემატიკურ მოდელს.

შენიშნით, რომ არაწრფივი (3.80) განტოლების ამოხსნა ზოგად შემთხვევაში ადვილ საქმეს არ წარმოადგენს. მაგრამ თუ შემოვიფარგლებით მცირე რხევების განხილვით, როცა α მცირეა, მაშინ ამოცანა ფრიად მარტივდება. აქ კი კვლავ დგება მათემატიკური მოდელირების საკვანძო საკითხი, კერძოდ კი, რომელი კუთხეები ჩაითვალოს მცირედ? ფორმალურად ამ კითხვაზე შეიძლება სხვადასხვანაირად იქნეს პასუხი გაცემული. მაგალითად, ცნობილი თანაფარდობიდან

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1, \quad (3.82)$$

გამომდინარე, მცირედ ჩაითვალოს ის კუთხეები, რომელთათვისაც დათქმული სიზუსტით $\sin \alpha \approx \alpha$ ან ვისარგებლოთ $\sin \alpha$ -ს ტეილორის მწკრივად გამლით:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots \quad (3.83)$$

და მცირედ ჩავთვალოთ ის α კუთხე, რომლისთვისაც მათემატიკური მოდელის აგების სიზუსტის შესაბამისად შესაძლებელია მესამე და შემდგომი წევრების უკუგდება. შენიშნით, რომ, $\alpha = 0,10$ რად ($5,7^\circ$) კუთხისათვის $\sin \alpha = 0,0998$ და მთელი რიგი ამოცანებისათვის „ $0,0998 \approx 0,1000$ “ მიახლოება ძალზე უხეში და მიუღებელი შეიძლება აღმოჩნდეს, მაშინ, როცა სხვა ამოცანებისათვის $\alpha = 1,0$ რად ($57,3^\circ$) კუთხის $\sin \alpha = 0,841$ შესაბამისი „ $0,8 \approx 1,0$ “ მიახლოება მისაღები იქოს.

ჩავთვალოთ, რომ დასმული ამოცანის სიზუსტის ფარგლებში სამართლიანია

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad (3.84)$$

მიახლოების დაშვება და (3.80) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით;

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \alpha = 0. \quad (3.85)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}. \quad (3.86)$$

მაშინ (3.85) განტოლება ზუსტად დაემთხვევა ჰარმონიული რხევის (3.53) განტოლებას:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (3.87)$$

(3.81) საწყისი პირობების გათვალისწინებით (3.87) განტოლების (3.56) ამონახსნი მიიღებს სახეს:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos \omega_0 t. \quad (3.88)$$

(3.57) და (3.86) ფორმულების თანახმად კი მათემატიკური ქანქარას რხევის პერიოდისათვის მივიღებთ ფორმულას:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (3.89)$$

ამრიგად, მათემატიკური ქანქარას მცირე რხევები წარმოადგენს ჰარმონიულ რხევებს (3.89) პერიოდით.

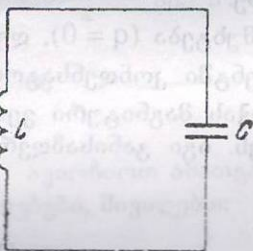
ჩვენ ქვემოთ დავუბრუნდებით (3.89) ფორმულას, ახლა კი იგი გამოვიყენოთ ერთი პრაქტიკული საკითხის გადასაჭრელად. ვთქვათ, გადავწყვიტეთ დავამზადოთ სეკუნდიანი ქანქარა, ე. ი. ისეთი ქანქარა, რომელიც ერთ წამში ერთ რხევას ასრულებს. მაშინ $T = 1$ წმ და (3.89) ფორმულიდან გავიგებთ ქანქარას სიგრძეს:

$$l = \frac{g}{4\pi^2} \approx 0,25 \text{ მ.} \quad (3.90)$$

სხვა რიცხვითი მონაცემები სეკუნდიანი ქანქარას დასამზადებლად არ დაგვიჭირდება. კერძოდ, ვინაიდან (3.89) ფორმულაში არ მონაწილეობს ძაფზე დაკიდებული სხეულის მასა, არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს თუ რა მასის სხეულს დავკიდებთ 0,25 მ სიგრძის ძაფზე. ოღონდ, ცხადია, მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ ყველა ის გარემოება, რაზეც ამ პუნქტში გვქონდა საუბარი.

3.5 რხევითი კონტური. განვიხილოთ კიდევ ერთი რხევითი სისტემა, რომელშიც შესაძლებელია ჰარმონიული რხევების აღძვრა, მაგრამ რომელიც არსებითად განსხვავდება გამზარბიანი ოსცილიატორისა და მათემატიკური ქანქარასაგან. განხილულ რხევით სისტემებში აღგილი ჰქონდა მექანიკურ რხევებს ანუ მერხვეი სხეულის მიერ წონასწორული მდებარეობიდან ხან ერთ, ხან მეორე მხარეს გადახრას. პერიოდულად იცვლებოდა სხეულის კოორდინატი (x ან α) და

სიჩქარე ($\frac{dx}{dt}$ ან $\frac{d\alpha}{dt}$). რხევით კონტურში მექანიკური რხევები არ გვაქვს, მაგრამ აქ პერიოდულად იცვლება მისი, როგორც რხევითი სისტემის დამახასიათებელი ელექტრული სიდიდეები. განვიხილოთ რხევით კონტურში მიმდინარე პროცესები დაწვრილებით. დავიწყოთ თვით რხევითი კონტურის განმარტებით.



ნახ. 3.15

წარმოვიდგინოთ კოჭა, რომელიც მიერთებულია კონდენსატორის შემონაფენებთან (ნახ. 3.15). როგორც ყოველი ელექტრომოწყობილობა, კოჭა და კონდენსატორი შეიძლება დავახასიათოთ ინდუქტივობით, გვევალბითა და წინალობით. აღენიშნოთ კოჭას ინდუქტივობა L -ით, გვევალბა C_L -ით და წინალობა R_L -ით. კონდენსატორისათვის შესაბამისად შემოვიღოთ აღნიშვნები: L_C , C , R_C . ასეთივე მახასიათებლები შეგვიძლია შემოვიღოთ კოჭასა და კონდენსატორის შემართებელი გამტარებისათვის შესაბამისად: L_R , C_R , R .

დავუშვათ, რომ სამართლიანია შემდეგი შეფასებები:

$$L_C \ll L, \quad L_R \ll L, \quad (3.91)$$

$$C_L \ll C, \quad C_R \ll C, \quad (3.92)$$

$$R_L \approx R_C \approx R \approx 0. \quad (3.93)$$

(3.91) უგოლობები ნიშნავს, რომ მთელი ინდუქტივობა თავმოყრილია კოჭაში.

(3.92) უგოლობის თანახმად მთელი გვევალბა თავმოყრილია კონდენსატორში.

(3.93) კი ნიშნავს, რომ შესაძლებელია ყველა ელემენტის წინალობის უგულებელყოფა.

სამივე ამ პირობის შესრულების შემთხვევაში კონდენსატორის შემონაფენების კოჭასთან მიერთებულ სისტემას რხევითი კონტური ეწოდება.

რხევითი კონგურის განმარგების სისრულისათვის აუცილებელია კიდევ დავუშვათ, რომ არ ხდება ელექტრომაგნიტური ენერგიის გამოსხივება.

ენახოთ, როგორ აღიძვრება რხევით კონგურში რხევები.

იმისათვის, რომ რხევით სისგემაში რხევები აღიძვრას, საჭიროა იგი გამოვიყვანოთ წონასწორობის მდგომარეობიდან. ეს ხორციელდება გარეშე ძალების მიერ სისგემაზე მუშაობის შესრულებით: გამბარაიანი ოსცილაგორისა და მათემაგაკური ქანქარას შემთხვევებში მუშაობა სრულდებოდა ბურთულების წონასწორული მდებარეობიდან გადაწევისას. ამ მუშაობის შედეგად რხევითი სისგემა იღებდა ენერგიას. განხილულ იდეალიზებულ შემთხვევებში ენერგია არ იხარჯებოდა ხახუნის დაძლევაზე და ერთი სახიდან მეორეში გარდაიქმნებოდა.

თუ რხევითი კონგურის კონდენსაგორს მცირე ხნით მიგუერთებთ დენის წყაროს, მაშინ კონდენსაგორი დაიმუხგება და მიიღებს ენერგიას:

$$E_0 = \frac{q_0^2}{2C}, \quad (3.94)$$

სადაც q_0 კონდენსაგორზე დაგროვილი მუხგია. (3.92) პირობის შესაბამისად, (3.94) იქნება მთლიანად რხევითი კონგურისათვის გადაცემული ენერგია.

როგორც კი კონდენსაგორს გამოვრთავთ დენის წყაროდან და მიგუერთებთ კოჭას, დაიწყება კონდენსაგორის განმუხგვა. რხევით კონგურში აღიძვრება ელექტრული დენი. კოჭაში დენის გაჩენასა და ზრდას, თვითინდუქციის მოვლენის გამო, მოჰყვება კოჭასავე გამჭოლი ცვლადი მაგნიტური ველის წარმოშობა და ზრდა. რაც, თავის მხრივ, კოჭაში წარმოქმნის გრიგალურ ელექტრულ ველს. გრიგალური ელექტრული ველი კი მაგნიტური ველის ზრდისას წარმოშობი დენის საწინააღმდეგოდაა მიმართული და ხელს უშლის მის მეყსეულად ზრდას. ის, თუ რამდენად ნელა მოხდება დენის მაქსიმალური მნიშვნელობის მიღწევა, დამოკიდებულია კოჭას L ინდუქციეობაზე.

იმ მომენტში, როცა კონდენსაგორი მთლიანად განიმუხგება ($q = 0$), დენის ძალა მაქსიმალურ i_0 მნიშვნელობას მიაღწევს. ამ მომენტში კონდენსაგორის ელექტრული ველის ენერგია ნულის გოლი ვახდება, კოჭას მაგნიტური ველის ენერგია კი თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას მიაღწევს. იგი განისაზღვრება ფორმულით:

$$W_0 = \frac{Li_0^2}{2}. \quad (3.95)$$

ვინაიდან ჩვენ ენერგიის ყოველგვარი დანაკარგი უგულებელვყავით, ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად, ცხადია,

$$E_0 = W_0. \quad (3.96)$$

მოხუდავად იმისა, რომ ამ მომენტისათვის კონდენსაგორის შემონაფენებს შორის და, მამასაღამე, კოჭას ბოლოებზე პოტენციალთა სხვაობა ნულის გოლი ხდება, ელექტრული დენი მყისვე არ შეწყდება. ამას თვითინდუქციის მოვლენა ეწინააღმდეგვება. როგორც კი დაიწყებს შემცირებას დენის ძალა და მის მიერ შექმნილი მაგნიტური ველი, აღიძვრება დენის მიმართულების თანხველნილი გრიგალური ელექტრული ველი და დააყოვნებს მას.

ამის შემდეგ კონდენსაგორი გადაიმუხგება მანამ, სანამ დენი ნულის გოლი არ ვახდება. ამ მომენტისათვის მაგნიტური ველის ენერგიაც ნულის გოლი იქნება, ხოლო კონდენსაგორის ელექტრული ველის ენერგია ისევ მაქსიმალური ვახდება.

შემდეგ კონდენსატორი კვლავ გადაიმუხტება და საწყის მდებარებას დაუბრუნდება.

ამრიგად, რხევით კონტურში ისეთი პროცესები მიმდინარეობს, რომ იგი პერიოდულად უბრუნდება ერთსა და იმავე მდგომარეობას – რხევით კონტურში მიმდინარეობს ელექტრომაგნიტური რხევები.

ელექტრომაგნიტური რხევების მათემატიკური მოდელის ასაგებად ვისარგებლოთ მათემატიკური მოდელირების ერთ-ერთი ძირითადი – ანალოგიის მეთოდით.

ამ მიზნით ჯერ დავწეროთ ენერგიის მუდმივობის კანონის მათემატიკური მოდელი.

თუ $q(t)$ -თი აღვნიშნავთ ღროის t მომენტში კონდენსატორის მუხტს, ხოლო $i(t)$ -თი დენის მყისიერ მნიშვნელობას იმავე მომენტში, მაშინ ღროის ერთსა და იმავე მომენტში ელექტრული და მაგნიტური ველების ენერგიების გამოსათვლელი ფორმულები შესაბამისად შემდეგი სახით მოიცემა:

$$E(t) = \frac{q^2(t)}{2C}, \quad (3.97)$$

$$W(t) = \frac{Li^2(t)}{2}, \quad (3.98)$$

გემოთქმულიდან გამომდინარე, რხევითი კონტურის სრული ელექტრომაგნიტური ენერგია კი ღროის ნებისმიერ მომენტში ელექტრული და მაგნიტური ველების ენერგიების ჯამის გოლია და მუდმივი რჩება. ამ მუდმივის მნიშვნელობა (3.96) გოლობის თანახმად განსაზღვრულია (3.94) და (3.95) ფორმულებით. მაშასადამე, ენერგიის მუდმივობის კანონი რხევითი კონტურისათვის შეიძლება შემდეგი ორი ეკვივალენტური სახით ჩაიწეროს:

$$E(t) + W(t) = E_0,$$

ან

$$E(t) + W(t) = W_0.$$

ავირჩიოთ ამათგან პირველი და შევიგანოთ მასში (3.97) და (3.98) გამოსახულებები, მივიღებთ:

$$\frac{q^2(t)}{2C} + \frac{Li^2(t)}{2} = \frac{q_0^2}{2C}. \quad (3.99)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ დენის ძალის მყისი მნიშვნელობა მუხტის ცვლილების სისწრაფის გოლია, ანუ

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad (3.100)$$

მაშინ (3.99) შემდეგი სახით გადაიწერება:

$$\frac{1}{2C}q^2(t) + \frac{L}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \frac{q_0^2}{2C}. \quad (3.101)$$

გადმოვწეროთ აქვე გამზარიანი ოსცილიატორისათვის გამოყვანილი ენერგიის მუდმივობის კანონის (3.71) მათემატიკური მოდელი იმის გათვალისწინებით, რომ $v = \frac{dx}{dt}$:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{k}{2}x^2(t) + \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{k}{2}x_0^2 \quad (3.102)$$

შევადართოთ ერთმანეთს (3.101) და (3.102) განგოლებებს ამგვარად ჩანს მსგავსება მათ შორის.

მექანიკური რხევითი სისტემის წონასწორული მდებარეობიდან გადახრას $x(t)$ ფუნქცია ახასიათებს. ენერჯის მუდმივობის გამოშახველი ორი კვივალენგური გამოსახულებიდან ჩვენ პირველი ავირჩიეთ. ეს არჩევანი იმის გოლფასია, რომ რხევითი კონტურის წონასწორულ მდგომარეობად ჩვენ მივიჩნიეთ ის მდგომარეობა, როცა კონდენსატორი განმუხტულია. მაშასადამე, $q(t)$ ამ შემთხვევაში ახასიათებს რხევითი კონტურის წონასწორული მდებარეობიდან გადახრას და იგი ანალოგიურია $x(t)$ -სი.

ასევე ერთმანეთის ანალოგიურია კოორდინატის ცვლილების დამახასიათებელი $\frac{dx}{dt}$ სიჩქარე და მუხგის ცვლილების სისწრაფის დამახასიათებელი დენის ძალა $\frac{dq}{dt}$.

უშუალო დაკვირვებით ადვილი დასადგენია, რომ გამბარის k სიხისგის ანალოგს წარმოადგენს ტევალობის შებრუნებული $\frac{1}{C}$ სიდიდე, ხოლო m მასის ანალოგს - L ინდუქციობა. ამ, ერთი შეხედვით, ფორმალურ ანალოგიას დრმა საფუძველი აქვს.

გამბარიან ოსცილატორში ბურთულას წონასწორობის მდებარეობაში დაბრუნება გამოწვეულია ამ მდებარეობიდან $x(t)$ გადახრის პროპორციული $F_x(t)$ დრეკალობის ძალით. პროპორციულობის კოეფიციენტს გამბარის სიხისგე წარმოადგენს. კონდენსატორის განმუხტვა, რასაც თან სდევს დენის გაჩენა კონტურში განპირობებულია კონდენსატორის ფირფიგებს შორის (კოჭას ბოლოებს) $U(t)$ ძაბვით, რომელიც $q(t)$ მუხგის პროპორციულია. პროპორციულობის კოეფიციენტია ტევალობის შებრუნებული $\frac{1}{C}$ სიდიდე, ვინაიდან $U(t) = \frac{1}{C} q(t)$.

მსგავსად იმისა, როცა ბურთულა ინერგულობის გამო თანდათანობით მრდის თავის სიჩქარეს ძალის მოქმედებით, და ეს სიჩქარე ძალის მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ მაშინვე არ ხდება ნულის გოლი, კოჭაში ელექტრული დენიც თვითინდუქციის მოვლენის გამო ძაბვის მოქმედებით თანდათანობით იმრდება და არ ქრება მაშინვე, როცა ძაბვა ნულის გოლი ხდება. კონტურის L ინდუქციობა იმავე როლს ასრულებს, რასაც ბურთულას m მასა მექანიკაში.

თუ ახლა გავიხსენებთ გამბარიანი ოსცილატორის ციკლური სიხშირის კავშირს სიხისგესა და მასასთან (იხ. (3.63))

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

დადგენილი ანალოგიის საფუძველზე ადვილად დავწერთ რხევით კონტურში ელექტრომაგნიტური რხევების ციკლური სიხშირის ფორმულას:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (3.103)$$

სათანადო პერიოდისათვის კი მივიღებთ:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.104)$$

ამრიგად, ანალოგიის მეთოდით ჩვენ დავადგინეთ რხევით კონტურში მიმდინარე ელექტრომაგნიტური ჰარმონიული რხევების ძირითადი მახასიათებლები – ციკლური სიხშირე და პერიოდი.

ახლა სიძნელეს არ წარმოადგენს ჩავწეროთ სათანადო მათემატიკური მოდელი.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0, \quad (3.105)$$

$$q(0) = q_0, \quad \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

რომლის ამონახსნსაც აქვს სახე:

$$q(t) = q_0 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t\right). \quad (3.106)$$

3.6 იქნება თუ არა ქანქარიანი საათი მუსტი? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად განვიხილოთ ქანქარიანი საათის იდეალიზებული მოდელი – მათემატიკური ქანქარა.

გამოვიყენოთ მისი რხევის პერიოდის გამოსათვლელი ფორმულა იმ შემთხვევისათვის, როცა წონასწორობიდან გადახრის კუთხე ნებისმიერია.

ავაგოთ ენერჯის მუდმივობის კანონის მათემატიკური მოდელი. წონასწორობის A მდებარეობიდან (იხ. ნახ. 3.14). დავიწყოთ პოტენციური ენერჯის ათვლა. მაშინ ვერტიკალურად მაქსიმალურ α_0 კუთხეზე B მდგომარეობაში მყოფი ბურთულას პოტენციური ენერჯია იქნება მაქსიმალური.

თუ H -ით აღვნიშნავთ აწევის სიმაღლეს, მაშინ B მდგომარეობაში ბურთულას პოტენციური ენერჯია იქნება mgH .

აწევის სიმაღლეს თუ მაქსიმალური α_0 კუთხით გამოვსახავთ, მაშინ პოტენციური ენერჯის გამოსახულება მიიღებს სახეს: $mg\ell(1 - \cos\alpha_0)$. A და B მდგომარეობებს შორის ნებისმიერ C მდგომარეობაში ბურთულას გააჩნია როგორც

პოტენციური mgh ენერჯია, ასევე კინეტიკური $\frac{mv^2}{2}$ ენერჯიაც, სადაც v არის ℓ რადიუსიანი წრეწირის რკალზე ბურთულას მოძრაობის სიჩქარე. თუ α -თი აღვნიშნავთ გადახრის მიმდინარე კუთხეს, მაშინ შესაბამისი აწევის h სიმაღლე შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$h = \ell(1 - \cos\alpha).$$

შესაბამისად, პოტენციურ ენერჯიას ექნება სახე: $mg\ell(1 - \cos\alpha)$.

ვიგულისხმობთ, რომ ქანქარის დამაგრების O წერტილი დედამიწასთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემაში უძრავია, ხოლო ბურთულაზე დედამიწის მიზიდულობის ძალისა და ძაფის ან ღეროს მხრიდან მოქმედი დაჭიმულობის ძალის

ვარდა, სხვა ძალები არ მოქმედებს. მაშინ, შეიძლება ითქვას, რომ მათემატიკურ ქანქარას, როგორც რხევითი სისტემის მექანიკური ენერგია მუდმივია და დროის ნებისმიერ მომენტში გოლია ბურთულას პოტენციური და კინეტიკური ენერგიების ჯამისა. ქანქარასათვის თავდაპირველად მინიჭებული mgH ენერგია ინახება. მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$mgh + \frac{mv^2}{2} = mgH \quad (3.107)$$

ან

$$mg\ell(1 - \cos\alpha) + \frac{mv^2}{2} = mg\ell(1 - \cos\alpha_0). \quad (3.108)$$

მაგრამ, ვინაიდან, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, გვექნება:

$$2mg\ell\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{mv^2}{2} = 2mg\ell\sin^2\frac{\alpha_0}{2}. \quad (3.109)$$

საიდანაც

$$v^2 = 4g\ell\left(\sin^2\frac{\alpha_0}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right). \quad (3.110)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$a = \sin\frac{\alpha_0}{2},$$

მაშინ (3.110) მიიღებს სახეს:

$$v^2 = 4g\ell\left(a^2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right). \quad (3.111)$$

ვინაიდან მათემატიკური ქანქარასათვის ℓ მუდმივია, ბურთულა მოძრაობს ℓ რადიუსიანი წრეწირის BD რკალზე (იხ. ნახ. 3.14) და წირითი v სიჩქარე კუთხურ $\frac{d\alpha}{dt}$ სიჩქარესთან დაკავშირებულია ფორმულით:

$$v = \ell \frac{d\alpha}{dt} \quad (3.112)$$

ამიტომ ამ გამოსახულების (3.111) განტოლებაში შეგანის შემდეგ მივიღებთ:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{\ell}\left(a^2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right). \quad (3.113)$$

გავითვალისწინოთ ახლა, რომ t -ს ზრდასთან ერთად α კუთხე მცირდება.

ე. ი. $\frac{d\alpha}{dt} < 0$, მაშინ (3.113)-დან გვექნება:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -2\sqrt{\frac{g}{\ell}} \cdot \sqrt{a^2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

ეს განტოლება კი შეიძლება შემდეგი სახით გადაიწეროს:

$$dt = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \quad (3.114)$$

α კუთხის α_0 -დან 0-მდე შეცვლას ერთი სრული რხევისათვის საჭირო დროის, ე. ი. პერიოდის მეოთხედი სჭირდება. ამიტომ, თუ T ქანქარას პერიოდია, (3.114)-ის ინტეგრება მოგვცემს:

$$\frac{T}{4} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{\alpha_0}^0 \frac{d\alpha}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

ანუ

$$T = 2 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \quad (3.115)$$

ამ უკანასკნელი ფორმულიდან გამოჩნდა, რომ ქანქარას რხევის პერიოდი დამოკიდებულია გადახრის მაქსიმალურ α_0 კუთხეზე.

რეალურ ვითარებაში, როცა ჩვენ მიერ მათემატიკური ქანქარას მოდელში უკუღებული ხახუნის ძალები იმოქმედებენ, თავდაპირველი mgH ენერგიის ნაწილი მოხმარდება მათ დაძლევაში. აწევის ყოველი მომდევნო სიმაღლე ნაკლები იქნება წინაზე. შესაბამისად, გადახრის ყოველი მომდევნო მაქსიმალური კუთხე ნაკლები იქნება წინაზე და პერიოდი T იქნება სხვადასხვა. საათისათვის კი საჭიროა პერიოდის უცვლელიობა. მაშასადამე, პრაქტიკულად ქანქარიანი საათი არ იქნება ზუსტი. სიზუსტის მისაღწევად გამოიყენება სპეციალური მოწყობილობა, რომელიც პერიოდის ყოველ ნახევარში ქანქარას უვსებს ხახუნის დაძლევაზე დახარჯული ენერგიის რაოდენობას. ამ მოწყობილობის განხილვა გადის ჩვენი წიგნის თემატიკიდან და მასზე არ შევჩერდებით.

ფაქტობრივად, პერიოდის გამოსათვლელი (3.115) ფორმულის ანალიზით ჩვენ ვუპასუხეთ დასმულ კითხვას. თუკი მოვიწადინებთ პერიოდის მნიშვნელობის გამოთვლას, ცხადია, ალებულ უნდა იქნეს (3.115) ფორმულაში შემავალი ინტეგრალი და საჭიროა დასახელდეს α_0 და ℓ , მულმივების კონკრეტული მნიშვნელობები.

ვინაიდან $a = \sin \frac{\alpha_0}{2} \geq \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|$, ამიტომ შეგვიძლია შემოვიღოთ აღნიშვნა

$\sin \frac{\alpha}{2} = a \sin \varphi$. ამ გოლობიდან გამოდის, რომ როცა α იცვლება 0-დან α_0 -მდე, φ იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{2}$ -მდე.

ამასთანავე,

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot d\alpha = a \cos \varphi d\varphi,$$

ანუ

$$d\alpha = \frac{2a \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{a^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

ამ ბოლო თანაფარდობის მეშვეობით (3.115) ფორმულა შემდეგი სახით გადაიწერება:

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}} = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot F\left(a, \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.116)$$

სადაც ფუნქციას

$$F\left(a, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.117)$$

ეწოდება პირველი გვარის სრული ელიფსური ინტეგრალი. იგი ელემენტარული ფუნქციებით არ გამოისახება და a -ს, ე. ი. α_0 -ის (გავიხსენოთ, რომ $a = \sin \frac{\alpha_0}{2}$) სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის მოიცემა ცხრილის სახით. კერძოდ, როცა α_0 მცირეა, მაშინ $F\left(a, \frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{\pi}{2}$ და (3.116) ფორმულა ემთხვევა მათემატიკური ქანქარას რხევის პერიოდის (3.89) გამოსახულებას, მიღებულს სწორედ მცირე რხევებისათვის.

3.7 რხევითი მოძრაობის „ფაზური პორტრეტი“. დიფერენციალური განტოლებებით ჩაწერილი მათემატიკური მოდელების გამოკვლევის ერთ-ერთ ეფექტურ მეთოდს სათანადო გეომეტრიული სურათის აგება წარმოადგენს. ამ მიზნით შემოაქვთ ფაზური სიბრტყის ცნება.

სიბრტყეზე აიღება ლეკარტეს ორთოგონალური სისტემა. აბსცისთა ღერძზე გაღებომა მოძრაობის დამახასიათებელი კინემატიკური სიდიდე, მაგალითად, ქანქარას გაღების α კუთხე, ორდინატთა ღერძზე კი ამ სიდიდის ცვლილების

სისწრაფე. მათემატიკური ქანქარისათვის ეს იქნება კუთხური $\frac{d\alpha}{dt}$ სიჩქარე. მა-

შინ ასეთი წყვილის (ქანქარას შემთხვევაში α და $\frac{d\alpha}{dt}$) ნებისმიერ მნიშვნელობას სიბრტყეზე შეესაბამება ერთადერთი წერტილი და პირიქით, სიბრტყის ყოველ წერტილს შეესაბამება სისტემის ერთადერთი მდგომარეობა. ამ სიბრტყეს მდგომარეობათა ანუ ფაზური სიბრტყე ეწოდება. სისტემის ყოველ ახალ მდგომარეობას ფაზური სიბრტყის სულ ახალი და ახალი წერტილები შეესაბამება. მაშასადამე, სისტემის მდგომარეობის ცვლილებას შეიძლება შევესაბამოთ ფაზურ სიბრტყეზე ე. წ. ამსახველი წერტილის მოძრაობა. ასეთი ამსახველი წერტილის მიერ შემოწერილ წირს ფაზური გრაეფტორია ეწოდება. იგი არ უნდა აგვერიოს მოძრაობის რეალურ გრაეფტორიაში. დიფერენციალური განტოლების შესაბამისი ყველა შესაძლო ფაზური გრაეფტორია ქმნის სწორედ შესასწავლი პროცესის „ფაზურ პორტრეტს“.

მათემატიკური ქანქარას მცირე რხევების ფაზური პორტრეტის ასაგებად გავიხსენოთ სათანადო (3.87) განტოლება:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0. \quad (3.118)$$

ეს მეორე რიგის განტოლება შეეცვალოთ მისი ეკვივალენტური ორი პირველი რიგის განტოლებით:

$$\frac{d\alpha}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2\alpha. \quad (3.119)$$

ფაზური გრაფიკორიის განტოლების მისაღებად (3.119)-დან უნდა გამოვირცხოთ დრო. ამ მიზნით მეორე განტოლება გავყოთ პირველზე:

$$\frac{dy}{d\alpha} = -\omega_0^2 \frac{\alpha}{y}. \quad (3.120)$$

მიღებულ განტოლებაში მოვახდინოთ ცვლადთა განცალკეება:

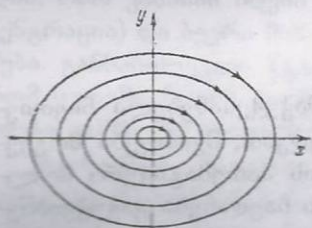
$$\alpha d\alpha + \frac{1}{\omega_0^2} y dy = 0. \quad (3.121)$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრება მოგვცემს:

$$\frac{\alpha^2}{2} + \frac{y^2}{2\omega_0^2} = C. \quad (3.122)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $2C = K^2$, მაშინ (3.122) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{\alpha^2}{K^2} + \frac{y^2}{K^2\omega_0^2} = 1. \quad (3.123)$$



ნახ. 3.16

ეს კი ელიფსის განტოლებაა კანონიკური სახით. მაშასადამე, მათემატიკური ქანქარას მოძრაობის ფაზურ პორტრეტს K მუდმივით განსაზღვრული ელიფსების ოჯახი წარმოადგენს (იხ. ნახ. 3.16).

დავადგინოთ K -ს შინაარსი.

გავიხსენოთ მათემატიკური ქანქარას ენერჯიის

(3.109) განტოლება:

$$2mg\ell \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{mv^2}{2} = 2mg\ell \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \quad (3.124)$$

ქანქარას მცირე რხევებისათვის

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \frac{\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_0}{2}$$

მაშასადამე, (3.124) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$g\ell \alpha^2 + v^2 = g\ell \alpha_0^2. \quad (3.125)$$

თუ ახლა გავიხსენებთ წირითი v სიჩქარის კავშირს კუთხურ $y = \frac{d\alpha}{dt}$ სიჩქარესთან (იხ. (3.112)), (3.125) შეიძლება ასეც გადავწეროთ:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} + \frac{\ell}{g} \frac{y^2}{\alpha_0^2} = 1. \quad (3.126)$$

მაგრამ ვინაიდან მათემატიკური ქანქარისათვის $\frac{\ell}{g} = \frac{1}{\omega_0^2}$ (იხ. (3.86)), (3.126) განტოლება მოგვცემს:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} + \frac{y^2}{\alpha_0^2 \omega_0^2} = 1. \quad (3.127)$$

მიღებული გამოსახულების (3.123) ფორმულასთან შედარებით ორი დასკვნა შევიძლია გამოვიტანოთ.

ჯერ ერთი, K მუდმივს საწყისი გადახრის მინიმალური ჰქონია, და მაშასადამე, ელიფსთა ოჯახს სწორედ საწყისი α_0 გადახრის კუთხის სხვადასხვა შესაძლო მნიშვნელობა იძლევა.

მეორე და ძალზე მნიშვნელოვანი დასკვნა ისაა, რომ ყოველ ელიფსს შეესაბამება საწყისი გადახრით განპირობებული ენერჯიის სათანადო მნიშვნელობა და ეს ენერჯია ინახება.

§4. ყურის მქონე წყალსატანის ბაჭუჭყიანების მათემატიკური მოდელი

4.1 ამოცანის დასმა. განვიხილოთ ხსნადი გამაჭუჭყიანებელი ნივთიერების წყალსაცავში დაგროვების პროცესი. ერთი შეხედვით, შეიძლება მოგეჩვენოს, რომ სრულებით არ არის საჭირო ამ პროცესის მათემატიკური მოდელის შექმნა, სურათი ისედაც ნათელია: თუ წყალსაცავში ჩაედინება გაჭუჭყიანებული წყალი და ჭუჭყის რაოდენობა არც ბუნებრივად და არც ხელოვნურად (წყალსაცავის გაწმენდის გზით) არ მცირდება, მაშინ მისი რაოდენობა წყალში, ცხადია, იმატებს მანამ, ვიდრე არ მიაღწევს გაჯერებას. ამის შემდეგ დაიწყება ნალექის წარმოქმნა. ამგვარად, ხდება ზღვებისა და ოკეანეების გამლაშება. მაგრამ სხვა პრობლემებთან ერთად დგება საკითხი, თუ რამდენად სწრაფად მიმდინარეობს ეს პროცესი.

ქვემოთ მოყვანილი უმარტივესი მაგალითებიდანაც კი ცხადად ჩანს მათემატიკური მოდელირების აუცილებლობა აღნიშნული პრობლემატიკის გადასაჭრელად.

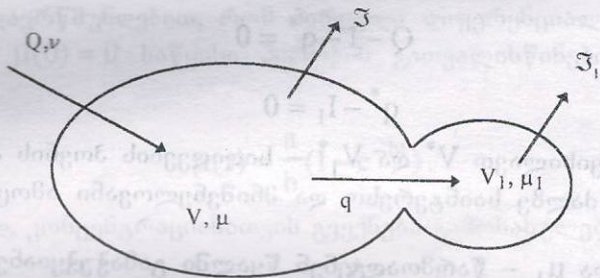
ვთქვათ, Q არის დროის ერთეულში წყალსაცავში ჩადენილი გაჭუჭყიანებული წყლის რაოდენობა, რომლის კონცენტრაციაა v . V სიმბოლოთი აღვნიშნოთ წყალსაცავში წყლის საერთო რაოდენობა. t დროის განმავლობაში წყალსაცავში შედის vQt გამაჭუჭყიანებული ნივთიერების რაოდენობა, რომელიც მასში გაწმენდება $n = \frac{vQt}{V}$ კონცენტრაციით. ვთქვათ, n^* წარმოადგენს გამაჭუჭყიან-

ბული ნივთიერების კონცენტრაციის კრიტიკულ მნიშვნელობას, ანუ წყლის გაჯერების კონცენტრაციას. მაშინ მის მისადწვევად საჭირო t^* დრო აღვიღად გა-

ზოითვლება $t^* = \frac{n^* V}{vQ}$. მაშასადამე, რაც უფრო დიდია წყალსაცავის მოცულობა

და რაც უფრო მცირეა v კონცენტრაცია, მით უფრო ნელა მიმდინარეობს წყალსაცავის გაჭუჭყიანების პროცესი.

4.2 მათემატიკური მოდელის აგება ბალანსის მეთოდით. განვიხილოთ უფრო რთული ამოცანა. ვთქვათ, წყალსაცავს აქვს ყურე, როგორც ეს შემდეგ ნახაზზეა ნაჩვენები.



ნახ. 3.17

შვევალოთ უფრო დაწვრილებით გავერკვეთ თუ როგორ მიმდინარეობს წყლის გაჭუჭყიანების პროცესი ამ შემთხვევაში. ამ მიზნით შევადგინოთ განსახილველი პროცესის მათემატიკური მოდელი.

ნახ. 3.17-ზე მოცემულია სქემატური მოდელი კასპიის ზღვის ყარა-ბოლაზის ყურით. დასმული ამოცანა კასპიის ზღვის გამლაშების პრობლემას ეხება. ცნობილია, რომ კასპიის ზღვის მლაშიანობა საკმაოდ მცირეა (მცირეა მარილის კონცენტრაცია) და ბევრი მიზეზის გამო არ არის სასურველი მისი შემდგომი გამლაშება. განსახილველი წყალსაცავის არსებით თავისებურებას წარმოადგენს ის, რომ ყურეში წყლის ღონე 4,5 მ-ით დაბალია, ვიდრე ზღვაში. ამ მიზეზის გამო ხდება ვიწრო სრუტით ზღვიდან ყურეში წყლის გადაღინება.

მდინარეები ჩაედინებიან ზღვაში და აჭუჭყიანებენ მას vQ სიჩქარით. ეს გამაჭუჭყიანებელი ნივთიერებები ნაწილდება ზღვის წყალში და იქიდან აღწევს ყურეში. წყლის გადაღინება ზღვიდან ყურეში იმიტომ ხდება, რომ ყურეში წყალი ორთქლდება და მისი ღონე დაბლა იწევს. წყალი, ცხადია, ზღვიდანაც ორთქლდება, მაგრამ იგი მდინარეებით იკვებება. თუ ზღვიდან წყლის აორთქლების ინტენსივობას ანუ დროის ერთეულში აორთქლებული წყლის რაოდენობას I -ით აღვნიშნავთ, ხოლო ყურიდან წყლის აორთქლების ინტენსივობას I_1 -ით, მაშინ ბალანსის მეთოდის გამოყენებით წყლის რაოდენობის ცვლილებისათვის ზღვასა და ყურეში შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

$$\frac{dV}{dt} = Q - I - q \tag{3.128}$$

$$\frac{dV_1}{dt} = q - I_1 \tag{3.129}$$

სადაც V_1 - აღნიშნავს ყურეში წყლის რაოდენობას, ხოლო q არის წყლის ნაკადი ზღვიდან ყურეში ანუ დროის ერთეულში გადაღინებული წყლის რაოდენო-

ბა. ცხადია, რომ წყლის რაოდენობა Q , რომელიც დროის ერთეულში ჩაედინება მდინარებიდან ზღვაში და აორთქლების I და I_1 - ინგენსივობები დროის მიხედვით იცვლებიან. უგულებელვყოთ ეს ცვლილებები და Q , I და I_1 სიდიდეებს მივანიჭოთ მათი საშუალო მნიშვნელობები. ჩავთვალოთ, რომ V და V_1 მოცულობები და აგრეთვე q ნაკადი საბოლოო ანგარიშში დებულობენ რაღაც მუდ-

მივ წონასწორულ V^* , V_1^* , q^* მნიშვნელობებს. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\frac{dV^*}{dt} = 0$;

$\frac{dV_1^*}{dt} = 0$ და მაშინ (3.128), (3.129) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$Q - I - q^* = 0 \quad (3.130)$$

$$q^* - I_1 = 0 \quad (3.131)$$

ჩვენ არ განვიხილავთ V^* და V_1^* - სიდიდეების პოვნის ამოცანას (თუმცა ეს თავისთავად ძალზე საინტერესო და მნიშვნელოვანი ამოცანაა), გავაგრძელოთ მსჯელობა.

ეთქვათ, μ და μ_1 - წარმოადგენენ წყალში გამაჰუჰყიანებელი ნივთიერების რაოდენობებს შესაბამისად ზღვასა და ყურეში. მაშინ ამ ნივთიერების კონცენტრაციები ზღვასა და ყურეში შესაბამისად იქნება $n = \frac{\mu}{V^*}$ და $n_1 = \frac{\mu_1}{V_1^*}$. გა-

მაჰუჰყიანებელი ნივთიერების რაოდენობის ცვლილებისათვის ზღვასა და ყურეში, ცხადია, რომ შეიძლება დაწვეროთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

$$\frac{d\mu}{dt} = vQ - q^* \frac{\mu}{V^*} \quad (3.132)$$

$$\frac{d\mu_1}{dt} = q^* \frac{\mu}{V^*}. \quad (3.133)$$

რაღვან დროის ერთეულში ყურეში გამაჰუჰყიანებელი ნივთიერების რაოდენობა $q^* \frac{\mu}{V^*}$ სიდიდით მატულობს, ცხადია, დადგება დროის ისეთი $t = t_1^*$ მომენტი, როდესაც ყურეში აღმოჩნდება გამაჰუჰყიანებელი ნივთიერების „კრიტიკული“ რაოდენობა. ამის შემდეგ აღარ მოხდება მისი გახსნა წყალში, ე. ი. მიიღწევა ნაჯერობა და მთელი შესული ნივთიერება ნალექის სახით გამოიყოფა ყურის ფსკერზე. ამ მომენტიდან დაწყებული ყურეში ნივთიერების კონცენტრაცია უცვლელი და ნაჯერობის n^* კონცენტრაციის გოლი დარჩება. გამოყოფილი მასის გამოთვლა $t > t_1^*$ მომენტისათვის შეიძლება შემდეგი ფორმულით:

$$M(t) = \frac{q^*}{V^*} \int_{t_1^*}^t \mu(\tau) d\tau,$$

რომელიც მიიღება (3.133) განტოლების ინტეგრირებით.

ცხადია, რომ (3.132), (3.133) განტოლებებთან ერთად უნდა განვიხილოთ საწყისი პირობები (საწყის ეტაპზე წყალში გამაჰუჰყიანებელი ნივთიერების რაოდენობა ზღვასა და ყურეში). განვიხილოთ შემდეგი საწყისი პირობები:

$$\mu(0) = 0, \quad \mu_1(0) = 0 \quad (3.134)$$

– საწყის ეტაპზე წყალი არც ზღვასა და არც ყურეში არ შეიცავს გამაჭკუკვი-
ანბულ ნივთიერებას.

4.3 ამონახსნის მოძებნა და შედეგების ანალიზი. შემოვიღოთ
აღნიშვნები $vQ \equiv a, \quad \frac{q^*}{V^*} \equiv b$. მაშინ გვექნება:

$$\frac{d\mu}{dt} = a - b\mu, \quad \frac{d\mu_1}{dt} = b\mu. \quad (3.135)$$

აღვიღად დავრწმუნდებით, რომ პირველი დიფერენციალური განტოლებე-
ბის ამონახსნს $\mu(0) = 0$ საწყისი პირობის გათვალისწინებით წარმოადგენს
ფუნქცია:

$$\mu(t) = \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}).$$

შესაბამისად, კონცენტრაციისათვის გვექნება გამოსახულება:

$$n(t) = \frac{\mu(t)}{V^*} = \frac{vQ}{q^*} \left(1 - e^{-\frac{q^*}{V^*}t} \right). \quad (3.136)$$

მორე დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს $\mu_1(0) = 0$ საწყისი პირო-
ბის გათვალისწინებით $t \in [0, t_1^*]$ შუალედზე წარმოადგენს შემდეგი ფუნქცია:

$$\mu_1(t) = at - \frac{a}{b}(1 - e^{-bt})$$

აბ

$$\mu_1(t) = at - \mu(t).$$

შესაბამისად, კონცენტრაციისათვის კი გვექნება შემდეგი გამოსახულება:

$$n_1(t) = \frac{\mu_1(t)}{V_1^*} = \frac{vQ}{V_1^*} t - \frac{1}{V_1^*} \mu(t). \quad (3.137)$$

(3.136)-დან ჩანს, რომ $\mu(t)$ ზრდადი ფუნქციაა და

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(t)}{V^*} = \frac{\mu^*}{V^*} = v \frac{Q}{q^*}.$$

$\frac{\mu^*}{V^*}$ სიდიდეს ვუწოდოთ *გაჭკუკვიანების მღვრული კონცენტრაცია*. თუ
ვისარგებლებთ (3.130), (3.131) თანაფარდობებით, მაშინ გვექნება:

$$\frac{\mu^*}{V^*} = v \left(1 + \frac{I}{I_1} \right).$$

თუ $\frac{\mu^*}{V^*}$ არ არის მეტი წყლის გაჯერების კონცენტრაციაზე, მაშინ (3.136)-დან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ამ შემთხვევაში არ მოხდება წყალსაცავის კონცენტრაციის ზრდა გაჭუჭყიანების ზღვრულ კონცენტრაციაზე უფრო მეტად.

ეს მაშინ იქნება სამართლიანი, თუ $\frac{I}{I_1}$ არ არის ძალზე დიდი. უხეში შეფასებით, $\frac{I}{I_1}$ ტოლია წყალსაცავისა და ყურის წყლის ზედაპირების ფართობების შეფარდებისა.

განვიხილოთ კონცენტრაციების სხვაობა:

$$n_1(t) - n(t) = \frac{at}{V_1^*} - \frac{\mu(t)}{V_1^*} - \frac{\mu(t)}{V^*}.$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$[n_1(t) - n(t)]_0 = 0.$$

ამოვხსნათ შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{d}{dt}[n_1(t) - n(t)] = \frac{a}{V_1^*} - \left[\frac{1}{V_1^*} + \frac{1}{V^*} \right] a e^{-bt} \leq 0.$$

უღებენგარული გარდაქმნებით მივიღებთ მის გოლფას უტოლობას:

$$e^{bt} \leq 1 + \frac{V_1^*}{V^*},$$

საიდანაც გვექნება:

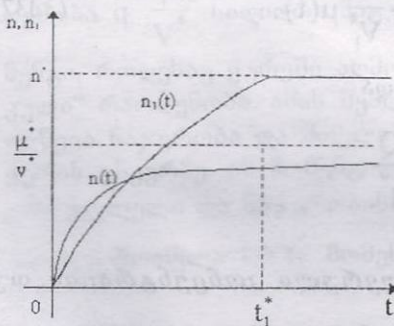
$$\frac{d}{dt}[n_1(t) - n(t)] \leq 0, \text{ როცა } t \leq \frac{V^*}{q} \ln \left(1 + \frac{V_1^*}{V^*} \right).$$

ამრიგად, ვინაიდან დასაწყისში კონცენტრაციების სხვაობა ნულის ტოლია, ხოლო შემდეგ მხოლოდ საწყისი გარკვეული დროის განმავლობაშია მისი წარმოებული არადადებითი, გარდა ამისა, თუ ჩავთვლით,

რომ $n^* > \frac{\mu^*}{V^*}$, ადვილად დავასკვნით: ზღვის

კონცენტრაცია დასაწყისში გარკვეული დროის განმავლობაში მეტია ყურის კონცენტრაციაზე, ხოლო შემდეგ პირიქით – ყურის კონცენტრაცია მეტი იქნება ზღვის კონცენტრაციაზე.

კონცენტრაციებისათვის სქემატურ გრაფიკებს შემდეგი სახე აქვთ:



ნახ. 3.18

ცხადია, ჩვენ მიერ მოყვანილი შედეგები ზოგადია და იგი სქემატურად ასახავს პროცესის მიმდინარეობას. ხოლო რაც შეეხება კასპიის ზღვას, მისი მცირე მარილიანობა დაკავშირებული აღმოჩნდა არა მის გეოლოგიურ ახალგაზრდობასთან, არამედ ყარა-ბოღაზის ყურის არსებობასთან.

მათემატიკური მოდელის აგებისას ჩვენ გავაკეთეთ ზოგიერთი დაშვება (მაგალითად Q, I და I_1 სიდიდეებს მივანიჭეთ მათი საშუალო მნიშვნელობები და სხვ.). რაც, ცხადია, ამცირებს მოდელის სიზუსტეს და იძლევა მხოლოდ ზოგადი მოსაზრებების ჩამოყალიბების საშუალებას. ცხადია, შესაძლებელია უფრო ზუსტი მათემატიკური მოდელის აგება, რომელიც უფრო ადეკვატურად ასახავს ყურის მქონე წყალსატევების გაჭუჭყიანების პროცესს და ადამიანის სამეურნეო საქმიანობით გამოწვეულ გავლენას.

აქვე ვთქვათ იმის შესახებ, რომ გარემოს მდგომარეობაზე ადამიანის სამეურნეო საქმიანობის გავლენას, ანალიზსა და შეფასებას თანამედროვე მეცნიერებაში აღნიშნავენ ტერმინით – „*მონიტორინგი*“.

ჩვენ მიერ განხილული მათემატიკური მოდელი წარმოადგენს ყარა-ბოლამის მონიტორინგის შემადგენელ ელემენტს. სამწუხაროდ, მონიტორინგის სპეციალისტების აზრი არ იქნა გათვალისწინებული და 1980 წელს საბჭოთა ავტორიტეტული მმართველობის გადაწყვეტილებით კასპიის ზღვისა და ყარა-ბოლამის ყურის შემაერთებული სრუტე გადაკეტეს – ააგეს ჯებირი. შეწყდა რა ზღვიდან წყლის გადაღინება, ყურეში დაიწყო ამოშრობა და მის წყალში გახსნილი ნივთიერებების კონცენტრაციისა და ქიმიური შემადგენლობის ცვლილება. მონიტორინგის სპეციალისტების მიერ მათემატიკური მოდელირების გამოყენებით ნახვენებ იქნა, რომ სულ რაღაც 8-10 წელიწადში ყურე გაქრებოდა. მხოლოდ 1984 წელს, მაშინ, როდესაც ყურეს მაქსიმალური სიღრმე 12 მეტრიდან 125 სმ-მდე შემცირდა, გაიყვანეს მილსადენები, რომელთა მეშვეობითაც კასპიის ზღვის წყალი ჩაედინება ყურეში 2 კმ³/წელიწადში. მათემატიკური მოდელირების საფუძველზე კი საჭირო იყო 6 კმ³/წელიწადში. ყურე თითქოს გადარჩა, მაგრამ მისი ბუდე კვლავ სავალალოა. იგი მსოფლიო საზოგადოებრიობის ბრუნვის საგანი გახდა.

§5. საომარი მოქმედებების ლანჩესტერის მათემატიკური მოდელი

5.1 ლანჩესტერის განზოგადოებული მოდელის აგება ბალანსის მეთოდის გამოყენებით. პირველ მსოფლიო ომში ავიაცია პირველად ჩაება საომარ მოქმედებებში. გამოითქვა მოსაზრება, რომ საბოლოო გამარჯვებისათვის საკმარისი იქნება საჰაერო ბრძოლების მოგება. მიმდინარეობდა სათანადო სტრატეგიისა და გაქტივის შემუშავება. ამისათვის კი, საჭირო გახდა საჰაერო ბრძოლების მათემატიკური მოდელის აგება. აქ თავი გამოიჩინა ინგლისელმა ინჟინერმა და მათემატიკოსმა ფ. უ. ლანჩესტერმა. მან საჰაერო ბრძოლების რამდენიმე მათემატიკური მოდელი ააგო. შემდგომში ეს მოდელები განზოგადებულ და გავრცელებულ იქნა იმ შემთხვევებისათვის, როცა საბრძოლო მოქმედებას აწარმოებენ რეგულარული ჯარები ან პარტიზანული შენაერთები ან ორივე ერთად.

ვთქვათ, საბრძოლო მოქმედებებში მონაწილეობს ორი დაპირისპირებული X_1 და X_2 მხარე. მათი ჯარების რიცხობრივი შემადგენლობა დროის t მომენტში შესაბამისად, აღვნიშნოთ $X_1(t)$ და $X_2(t)$ -თი. დროის ათვლა დავიწყოთ საბრძოლო მოქმედების დაწყების დღიდან. დრო გავზომოთ დღეებით.

მათემატიკური მოდელის აგებისას უგულებელვყოთ საბრძოლო მომზადებისა და შეიარაღების დონე, მეთაურთა შემადგენლობის გამოცდილება და ნიჭი, მებრძოლთა სულისკვეთება და სხვა მრავალი ფაქტორი. გავითვალისწინოთ მხოლოდ მხარეთა ჯარების რიცხობრივი შემადგენლობა და გამარჯვებულად

ვადიაროთ ის მხარე, რომელიც საბრძოლო მოქმედებების შემდეგ მთლიანად გაანადგურებს მოწინააღმდეგე მხარეს.

გადავიდეთ ახლა იმ ფაქტორების ჩამოთვლაზე, რომლებიც განაპირობებენ დაპირისპირებული მხარეების რიცხოვრივი შემადგენლობის ცვლილებას. ეს ფაქტორები დავაჯგუფოთ წყაროებისა და ნაკადების მიხედვით და მათემატიკური მოდელი ავაგოთ ბალანსის მეთოდის გამოყენებით. ეს იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ უნდა დავადგინოთ ის ფაქტორები, რომლებიც განაპირობებენ რიცხოვრივი შემადგენლობის ცვლილების სისწრაფეს.

საბრძოლო შეგაკების დროს ორივე მხარე განიცდის დანაკარგს. ეს ფაქტორი შეიძლება „წყაროდ“ (უარყოფითი ნიშნით!) იქნეს განხილული. დროის ერთეულში ანუ ყოველდღიური დანაკარგი X_i მხარისათვის ($i = 1, 2$) აღვნიშნოთ $-f_i$ -ით. საზოგადოდ, ცხადია, იგი დამოკიდებული იქნება ორივე დაპირისპირებული მხარის რიცხოვრივი შემადგენლობის ოდენობაზე დროის შესაბამის t მომენტში:

$$f_i = f_i[x_1(t), x_2(t)], \quad i = 1, 2. \quad (3.138)$$

$x_i(t)$ სიდიდის ცვლილებას, გარდა ამისა, იწვევს ორი სახის ნაკადის არსებობა: ერთია, ავადმყოფობის ან რაიმე სხვა მიზეზით ჯარისკაცთა გაყვანა საბრძოლო მოქმედების არიდან და მეორე, მაშველი ჯარის შეყვანა ამ არეში. დროის ერთეულში (ყოველდღიურად) გაყვანილი ჯარისკაცების რაოდენობა აღვნიშნოთ $-q_i$ -ით, შეყვანილისა კი $-p_i$ -ით. ცხადია, X_i მხარისათვის ეს სიდიდეები არაა დამოკიდებული მეორე მხარის რიცხოვრივ შემადგენლობაზე, ამიგომ

$$q_i = q_i[x_i(t)], \quad i = 1, 2. \quad (3.139)$$

$$p_i = p_i[x_i(t)], \quad i = 1, 2. \quad (3.140)$$

სხვა ფაქტორებს ჩვენ არ განვიხილავთ. ამიგომ ბალანსის განტოლების შესაბამისად ჩვენ შევვიძლია დაწეროთ:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1 + q_1 + p_1, \quad (3.141)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2 + q_2 + p_2. \quad (3.142)$$

მიღებული განტოლებების მარჯვენა მხარეები არაცხადად შეიცავს საძიებელ $x_i(t)$ ფუნქციებს. ვიდრე არ დავაკონკრეტებთ (3.138)-(3.140) ფუნქციების სახეს, მათემატიკური მოდელი არ შეიძლება ჩაითვალოს აგებულად. ამისათვის საჭიროა ცალ-ცალკე იქნეს განხილული შემთხვევები, როცა საბრძოლო მოქმედებებს აწარმოებენ რეგულარული ჯარები (I შემთხვევა), პარტიზანული შენაერთები (II შემთხვევა), ორივე ერთად (III შემთხვევა).

5.2 ლანჩესტერის მოდელები რეგულარული ჯარების, პარტიზანული შენაერთებისა და ორივეს ერთად მოქმედებისათვის. ლანჩესტერის მოდელებში სამივე შემთხვევისათვის (3.140) ფუნქციები მხოლოდ დროზე დამოკიდებულადაა მიღებული, ე. ი.

$$p_i = p_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (3.143)$$

და იგულისხმება, რომ იგი ცხადი სახით მოიყვება.

მარტივად აღიწერება ლანჩესტერის მოდელებში ბრძოლის ველიდან გასული ჯარისკაცების ნაკადის (3.139) სიდიდეც. ჩათვლილია, რომ იგი პროპორციულია მოცემულ t მომენტში ჯარის რიცხოვრივი შემადგენლობის:

$$q_i = -a_i x_i(t), \quad i = 1, 2, \quad (3.144)$$

სადაც a_i არაუარყოფითი მუდმივებია. ისინი წარმოადგენენ ბრძოლის ველიდან ჯარისკაცების გასვლის ფარდობით სიჩქარეს ანუ ჯარისკაცთა რაოდენობის ცვლილების სიჩქარის შეფარდებას ჯარისკაცთა რაოდენობასთან. მართლაც, თუ საბრძოლო მოქმედებები არ მიმდინარეობს ($f_i = 0$) და მაშველი ჯარი არ შემოდის ($p_i = 0$), მაშინ (3.141) და (3.142) განგოლებებიდან (3.144)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{x_1} \frac{dx_1}{dt} = \frac{q_1}{x_1} = -a_1, \quad \frac{1}{x_2} \frac{dx_2}{dt} = \frac{q_2}{x_2} = -a_2. \quad (3.145)$$

(3.144) ფორმულები სამართლიანია სამივე შემთხვევისათვის.

რაც შეეხება f_i ფუნქციების სახეს, იგი სამივე შემთხვევისათვის სხვადასხვაა.

დავიწყოთ პირველი შემთხვევის განხილვით. გავაკეთოთ ორი დაშვება. პირველი: დაპირისპირებულ მხარეთაგან თითოეული იმყოფება მეორე მხარის სასროლი საშუალებების მოქმედების ზონაში. მეორე: ცეცხლი მიმართულია მხოლოდ მოწინააღმდეგე საბრძოლო ძალის მიმართულებით. ამ დაშვების საფუძველზე ლანჩესტერმა ივარაუდა, რომ თითოეული მხარის დანაკარგი დროის ერთეულში პირდაპირპროპორციულია მოწინააღმდეგე მხარის რიცხოვრივი შემადგენლობისა. ასე, რომ რეგულარული ჯარების შეტაკების შედეგად დაღუპულთა რაოდენობისათვის (3.138) ფორმულა ცხადი სახით ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$f_i = -b_j x_j(t) \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (3.146)$$

სადაც b_j არაუარყოფითი მუდმივებია. მისი არსის გასარკვევად, დავუშვათ, რომ არ ხდება ბრძოლის ველიდან ჯარისკაცთა გასვლა ($q_i = 0$) და მაშველი ჯარების შემოყვანა ($p_i = 0$), მაშინ (3.146) ფორმულის გათვალისწინებით (3.141) და (3.142) განგოლებებიდან მივიღებთ:

$$\frac{1}{x_2} \frac{dx_2}{dt} = -b_2, \quad (3.147)$$

$$\frac{1}{x_1} \frac{dx_1}{dt} = -b_1. \quad (3.148)$$

მიღებული გამოსახულებებიდან ჩანს, რომ b_i კოეფიციენტები ახასიათებენ მოწინააღმდეგე მხარის ყოველი საბრძოლო ერთეულის საშუალო ეფექტურობას. მათი გამოთვლის ერთ-ერთი გზა შემდეგია. ვთქვათ, r_i არის X_i მხარის საცეცხლე ძალის კოეფიციენტი (დროის ერთეულში საბრძოლო ერთეულის მიერ გასროლიათა რაოდენობა), ω_i კი - ალბათობა იმისა, რომ i -ური მხარის ყოველი ვახროლა იქნება ბუსტი. მაშინ ეფექტურობის კოეფიციენტისათვის შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$b_i = r_i \omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.149)$$

საბოლოოდ, რეგულარული ჯარების საბრძოლო მოქმედების აღმწერ მათემატიკურ მოდელს ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{dx_1}{dt} = -b_2x_2 - a_1x_1 + p_1(t), \quad (3.150)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -b_1x_1 - a_2x_2 + p_2(t), \quad (3.151)$$

$$b_1 = r_1\omega_1, \quad b_2 = r_2\omega_2, \quad (3.152)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (3.153)$$

სადაც (3.153) გოლობები წარმოადგენს საწყის პირობებს. x_{10} ერთი მხარის, x_{20} კი მეორე მხარის რიცხობრივი შემადგენლობაა საბრძოლო მოქმედებების დაწყების წინ. შემდგომში ამ მოდელს მოვიხსენებთ, როგორც (I) გიპის მოდელს.

გადავიდეთ ახლა f_i ფუნქციების სახის დადგენაზე პარტიზანული შენაერთების საბრძოლო მოქმედების შემთხვევისათვის.

ვთქვათ, $x_i(t)$ რაოდენობის პარტიზანებს უკავიათ S_i ფართობის გერიგორია და ისინი უხილავნი არიან მოწინააღმდეგისათვის. თითოეულ მხარეს ცეცხლის ქვეშ აქვს მოწინააღმდეგის გერიგორია, მაგრამ არ იცის თავის მოქმედების ეფექტურობა. ამ ვითარებაში სავარაუდოა, რომ i -ური პარტიზანული შენაერთის დანაკარგი f_i პროპორციული იქნება მოწინააღმდეგის საბრძოლო ძალების $x_j(t)$ რაოდენობაზე. მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$f_i = -c_j(x_i(t))x_j(t) \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (3.154)$$

სადაც, $c_j(x_i(t))$ - არაუარყოფითია და ახასიათებს j -ური მხარის საბრძოლო მოქმედების ეფექტურობას.

$c_j(x_i(t))$ -ს გამოსათვლელი ფორმულების მისაღებად მივყვით ლანჩესტერის მსჯელობას. ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში, r_j -ით აღვნიშნოთ j -ური მხარის საცეცხლე ძალის კოეფიციენტი. S_{ij} -თი აღვნიშნოთ ფართობი, რომელსაც j -ური მხარის ერთი პარტიზანი ანადგურებს ერთი გასროლით. მაშინ X_j მხარის ზუსტი გასროლის ალბათობა გოლი იქნება შემდეგი გამოსახულების $\frac{S_{ij}}{S_i} x_i(t)$. მაშასადამე, ზოგადად, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$c_j(x_i(t)) = r_j \frac{S_{ij}}{S_i} x_i(t), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (3.155)$$

S_{ij} სიდიდეს j -ური მხარის ერთი გასროლის გერიგორიულ ეფექტიანობას უწოდებენ.

ამრიგად, პარტიზანული შენაერთების საბრძოლო მოქმედების აღმწერ მათემატიკურ მოდელს ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{dx_1}{dt} = -c_2x_1x_2 - a_1x_1 + p_1(t), \quad (3.156)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -c_1x_1x_2 - a_2x_2 + p_2(t), \quad (3.157)$$

$$c_1 = r_1 \frac{S_{r1}}{S_2}, \quad c_2 = r_2 \frac{S_{r2}}{S_1} \quad (3.158)$$

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20} \quad (3.159)$$

ამ მოდელს ვუწოდოთ (II) ტიპის მოდელი.

გადავიდეთ ახლა შერეული ტიპის საბრძოლო მოქმედებების განხილვაზე. ვთვათ, პირველ მხარეს წარმოადგენს პარტიზანული შენაერთები, მეორე მხარეს კი - რეგულარული ჯარი. მაშინ ბემოთქმულიდან გამომდინარე, სათანადო მათემატიკური მოდელი შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს:

$$\frac{dx_1}{dt} = -c_2 x_1 x_2 - a_1 x_1 + p_1(t), \quad (3.160)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -b_1 x_1 - a_2 x_2 + p_2(t), \quad (3.161)$$

$$b_1 = r_1 \omega_1, \quad c_2 = r_2 \frac{S_{r2}}{S_1} \quad (3.162)$$

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20} \quad (3.163)$$

ეს იყოს (III) ტიპის მოდელი.

ამრიგად, სამივე შემთხვევისათვის ჩვენ ავაგეთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ამ მოდელების ამოხსნისათვის საჭიროა კონკრეტული რიცხვითი მონაცემები, მაგრამ მიღებული დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის გარეშე შესაძლებელია ზოგიერთი მნიშვნელოვანი დასკვნის გაკეთება. ქვემოთ განვიხილავთ თითოეულ მათემატიკურ მოდელს ცალ-ცალკე.

53 პირველი ტიპის მათემატიკური მოდელი. „ჰიპერბოლური კანონი“. დავუშვათ, დაპირისპირებული რეგულარული ჯარები საბრძოლო მოქმედებას აწარმოებენ ისეთ სიტუაციაში, როცა არ ხდება ჯარისკაცების გასვლა ბრძოლის ველიდან ($a_1 = 0$) და მაშველი ძალების შემოსვლა ($p_1 = 0$). მაშინ (3.150)-(3.153) მათემატიკური მოდელი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{dx_1}{dt} = -b_2 x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -b_1 x_1, \quad (3.164)$$

$$b_1 = r_1 \omega_1, \quad b_2 = r_2 \omega_2, \quad (3.165)$$

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}. \quad (3.166)$$

თუ (3.164) სისტემაში შევაავალ მეორე განტოლებას გავყოფთ პირველზე, მივიღებთ:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{b_1 x_1}{b_2 x_2} \quad (3.175)$$

$$b_1 x_1 dx_1 = b_2 x_2 dx_2. \quad (3.167)$$

ამ უკანასკნელის ინტეგრება (3.166) პირობების გათვალისწინებით მოგვცემს:

$$b_1 [x_1^2(t) - x_{10}^2] = b_2 [x_2^2(t) - x_{20}^2]. \quad (3.168)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$K = b_2 x_{20}^2 - b_1 x_{10}^2 \quad (3.169)$$

და (5.31) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$b_2 x_2^2 - b_1 x_1^2 = K. \quad (3.170)$$

ეს კი ჰიპერბოლას განტოლებაა. ამიგომ (3.164) სისგემას ხშირად უწოდებენ დიფერენციალურ სისგემას „ჰიპერბოლური კანონით“.

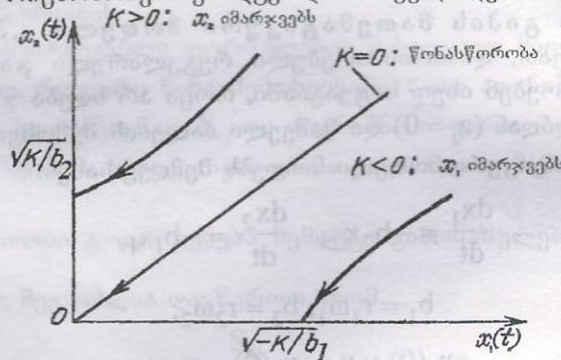
(3.170) განტოლება საშუალებას იძლევა ავაგოთ რეგულარული ჯარების საომარი მოქმედების ფაზური პორტრეტი. ამ მიზნით მართკუთხა საკოორდინატო სისგემის აბსცისთა ღერძზე გადავზომოთ $x_1(t)$, ხოლო ორდინატთა ღერძზე $x_2(t)$. ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, განვიხილოთ მხოლოდ პირველი კვადრანტი, სადაც $x_1(t) \geq 0$ და $x_2(t) \geq 0$.

K მუდმივი პარამეტრის (3.169) გამოსახულებიდან აშკარაა, რომ საჭიროა სამი შემთხვევის განხილვა: $K = 0$, $K > 0$ და $K < 0$.

როცა $K = 0$, მაშინ (3.170) განტოლება იძლევა სათავეზე გამავალი ორი წრფის შემდეგ განტოლებებს:

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} x_1 \quad (3.171)$$

პირველ კვადრანტში მოხვდება, ცხადია, პირველი წრფე, (იხ. ნახ. 3.19). ამ შემთხვევაში ვერც ერთი მხარე ვერ აღწევს უპირატესობას, ადგილი აქვს, ასე ვთქვათ, „წონასწორობას“. დროთა განმავლობაში ხდება ორივე მხარის რიცხოვრივი შემადგენლობის სრული განადგურება (ისარი წირებზე მიუთითებს დროის მიხედვით რიცხოვრივი შემადგენლობის ცვლილების მიმართულებას).



ნახ. 3.19

როცა $K > 0$, მაშინ (3.170) განტოლების თანახმად x_2 ვერასოდეს ვერ გადასვას ნულის გოლი, მაშინ, როდესაც $x_2 = \sqrt{\frac{K}{b_2}}$ მნიშვნელობისათვის x_1 ხდება

ნულის გოლი. ჩვენი შეთანხმების თანახმად ეს ნიშნავს, რომ x_1 მხარე განადგურებულია და იმარჯვებს x_2 მხარე. ნახ. 3.19-ზე ნაჩვენებია $K > 0$ შემთხვევის შესაბამისი ჰიპერბოლის პირველ კვადრანტში მოხვედრილი ნაწილი.

როცა $K < 0$, გვაქვს საპირისპირო სურათი: x_2 ხდება ნულის გოლი, როცა

$x_1 = \sqrt{-\frac{K}{b_1}}$ და, მაშასადამე, იმარჯვებს x_1 მხარე (იხ. ნახ. 3.19). ამრიგად,

იმარჯვებს ის მხარე, რომლისთვისაც $b_i x_i^2$ პარამეტრი მეტია.

უაღრესესტო მსჯელობა. $K > 0$ პირობა (3.169)-ის თანახმად ასეც შეიძლება დაწინაურდეს:

$$b_2 x_{20}^2 > b_1 x_{10}^2 \quad (3.172)$$

(3.165) გოლობის გამოყენებით (3.172) უგოლობა შემდეგი სახით გადაწეროთ:

$$\left(\frac{x_{20}}{x_{10}}\right)^2 > \frac{r_1 \omega_1}{r_2 \omega_2} \quad (3.173)$$

ამ უგოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ძალთა $\frac{x_{20}}{x_{10}}$ თანაფარდობის შეცვლა ერთ-ერთ მხარეს აძლევს უპირატესობას კვადრატული კანონის შესაბამისად!

ამე მაგალითად, თუ ძალთა თანაფარდობა $\frac{x_{20}}{x_{10}} = 1$ -დან შეიცვლება $\frac{x_{20}}{x_{10}} = 2$ -მდე,

მაშინ X_2 მხარე იღებს ოთხჯერად უპირატესობას, რაც იმაში გამოიხატება, რომ X_2 მხარეს შეუძლია ოთხჯერ შეამციროს საბრძოლო ერთეულის საშუალო ეფექტურობა $b_2 = r_2 \omega_2$.

იმავე (3.173) უგოლობიდან, ცხადია, გამომდინარეობს, რომ X_2 მხარის გამარჯვებისათვის საჭიროა შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$\sqrt{\frac{r_2 \omega_2}{r_1 \omega_1}} \cdot x_{20} > x_{10} \quad (3.174)$$

ეს უგოლობა კი საშუალებას აძლევს X_2 მხარეს შეარჩიოს გამარჯვებისათვის საჭირო სტრატეგია - საწყისი რაოდენობის (x_{20}), სიზუსტისა (ω_2) და ცეცხლის ძალის (r_2) შერჩევის გზით, კერძოდ, რაც შეიძლება ზუსტი უნდა იყოს ყოველი გასროლა (მაქსიმალური იყოს ω_2) და რაც შეიძლება გაზარდოს ცეცხლის ძალა (მაქსიმალური იყოს r_2).

5.4 მეორე გიპის მათემატიკური მოდელი. „წრფივი კანონი“.
 თუ ამ შემთხვევაშიც ვაგულისხმებთ, რომ არ ხდება პარტიზანთა შენაერთებიდან მებრძოლთა გასვლა ($a_i = 0$) და მაშველთა შემოსვლა ($p_i = 0$), მაშინ (3.156)-(3.159) მოდელი მიიღებს სახეს:

$$\frac{dx_1}{dt} = -c_2 x_1 x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -c_1 x_1 x_2, \quad (3.175)$$

$$c_1 = r_1 \frac{S_{r1}}{S_2}, \quad c_2 = r_2 \frac{S_{r2}}{S_1}, \quad (3.176)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (3.177)$$

ვაგუთ (3.175) სისტემის მეორე განტოლება პირველზე. მივიღებთ მარტივ განტოლებას:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{c_1}{c_2},$$

რომლის ინტეგრებას მოგვცემს შემდეგს:

$$c_2[x_2(t) - x_{20}] = c_1[x_1(t) - x_{10}]. \quad (3.178)$$

როგორც ვხედავთ, (3.168) განტოლებისაგან განსხვავებით, აქ საბრძოლო მოქმედების „წრფივ კანონთან“ გვაქვს საქმე.

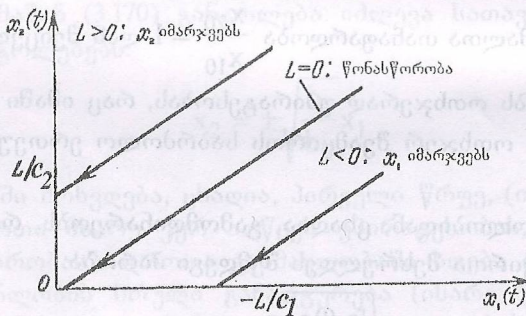
შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$c_2x_{20} - c_1x_{10} = L \quad (3.179)$$

და (3.178) განტოლება შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$c_2x_2(t) - c_1x_1(t) = L. \quad (3.180)$$

ამ უკანასკნელი განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $L > 0$, მაშინ იმარჯვებს X_2 მხარე, ხოლო თუ $L < 0$, მაშინ გამარჯვებული X_1 მხარე იქნება. ნახ. 3.20-ზე მოცემულია სათანადო გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.



ნახ. 3.20

გამოვიყენოთ ახლა რომელიმე მხარის, მაგალითად X_2 მხრის, გამარჯვებისათვის საჭირო სტრატეგიის განმსაზღვრელი ფორმულა. ამ მიზნით $L > 0$ პირობა (3.179) ტოლობის გამოყენებით შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$\frac{x_{20}}{x_{10}} > \frac{c_1}{c_2}. \quad (3.181)$$

(3.176) ფორმულების გათვალისწინებით (3.181) უტოლობა ასეც ჩაიწერება:

$$\frac{x_{20}}{x_{10}} > \frac{r_1 S_{r1} S_1}{r_2 S_{r2} S_2}. \quad (3.182)$$

ამრიგად, X_2 მხარის სტრატეგია იმაში მდგომარეობს, რომ გახადოს მაქსიმალური $\frac{x_{20}}{x_{10}}$ შეფარდება (ჰქონდეს რაც შეიძლება მეტი რიცხობრივი უპირატე-

სობა) და მინიმალური $\frac{S_1}{S_2}$ შეფარდება (განლაგდეს რაც შეიძლება მეტ ფართობზე ან მაქსიმალურად შეავიწროოს მოწინააღმდეგე).

5.5 მესამე ტიპის მათემატიკური მოდელი. „პარაბოლური კანონი“. კვლავ გავაკეთოთ ისეთივე დაშვებები, როგორც წინა შემთხვევებში. ე. ი. ვიგულისხმობთ, რომ არც რეგულარული ჯარიდან და არც პარტიზანთა შენაერთებიდან არ ხდება მებრძოლთა გასვლა ($a_i = 0$) და რომ არც ერთი მხარე არ იღებს შევსებას ($p_i = 0$). მაშინ (3.160)-(3.163) მათემატიკური მოდელი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{dx_1}{dt} = -c_2 x_1 x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -b_1 x_1, \quad (3.183)$$

$$b_1 = r_1 \omega_1, \quad c_2 = r_2 \frac{S_{r_2}}{S_1}, \quad (3.184)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (3.185)$$

(3.183) სისტემის მეორე განტოლების პირველზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{b_1}{c_2 x_2} \quad (3.186)$$

ამს შემდეგ (3.186) განტოლების ინტეგრება იძლევა შემდეგ გოლობას:

$$c_2 [x_2^2 - x_{20}^2] = 2b_1 [x_1 - x_{10}]. \quad (3.187)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

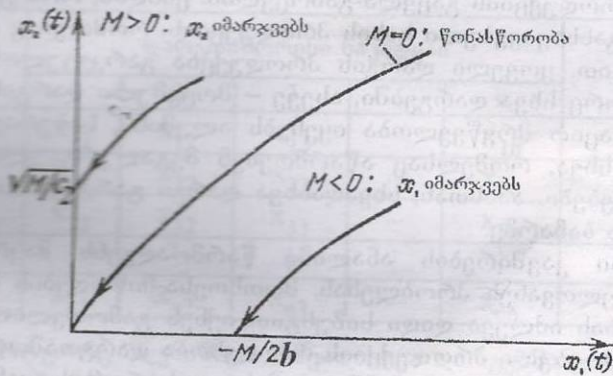
$$M = c_2 x_{20}^2 - 2b_1 x_{10} \quad (3.188)$$

და (3.187) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$c_2 x_2^2 = 2b_1 x_1 + M. \quad (3.189)$$

შუალედურ პარაბოლას განტოლება.

ამრიგად, (3.183)-(3.185) მათემატიკური მოდელი შეესაბამება საბრძოლო მოქმედების „პარაბოლურ კანონს“. ამასთან, თუ $M < 0$ იმარჯვენა პარტიზანები (X_1 მხარე), ხოლო თუ $M > 0$, პარტიზანები მარცხდებიან. ნახ. 3.21-ზე სქემატურადაა გამოხატული (3.189) განტოლებით მოცემული პარაბოლები M -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.



ნახ. 3.21

რეგულარული ჯარის (X_2 მხარის) სტრატეგიის განმსაზღვრელი ფორმულის გამოხატულება $M > 0$ უკოლობა ჩაეწეროს (3.188) და (3.184) ფორმულების გამოყენებით:

$$\frac{x_{20}^2}{x_{10}} > \frac{2r_1 \omega_1 S_1}{r_2 \cdot S_{r_2}} \quad (3.190)$$

X_2 მხარის მხარს ერთი გასროლის ტერიტორიულ ეფექტურობას თუ განქაზღვრავს, როგორც საბრძოლო მოქმედების დაწყების წინ რეგულარული ჯარის ერთ შემთხვევაში მოხერხებულ ფართობს, მაშინ შეგვიძლია დავეწეროთ, რომ

$$S_{r2} = \frac{S_2}{x_{20}}, \quad (3.191)$$

მაშინ (3.188) უგოლობა მიიღებს სახეს:

$$\frac{x_{20}}{x_{10}} > 2\omega_1 \frac{r_1}{r_2} \frac{S_1}{S_2}$$

მაშასადამე, პარგიზანების დასახმარებლად რეგულარულ ჯარს უნდა ჰქონდეს რაც შეიძლება მეტი რიცხობრივი უპირატესობა ($\frac{x_{20}}{x_{10}}$ იყოს მაქსიმალური)

თავი მოუყაროს დიდ საცეცხლე ძალას ($\frac{r_1}{r_2}$ იყოს მინიმალური) და შეუტეოს რაღაც

შეიძლება ფართო ფრონტით ($\frac{S_1}{S_2}$ იყოს მინიმალური).

§6. მოთხოვნა-მიწოდების მათემატიკური მოდელი (მრავალდარბოვანი ეკონომიკის ლეონტიევის მათემატიკური მოდელი)

6.1 ამოცანის დასმა. ნებისმიერი ქვეყნის, განსაკუთრებით განვითარებული ქვეყნების, ეკონომიკა, ჩვეულებრივ, შედგება მრავალი დარგისაგან. ან დარგების ფუნქციონირება მჭიდროდაა დაკავშირებული ერთმანეთთან. ადგილი აქვს მათ შორის პროდუქციის გაცვლა-გამოცვლას. ცხადია, რომ განსხვავებული დარგები უშვებენ განსხვავებული სახის პროდუქციას, რომლებიც იზომება სხვადასხვა ერთეულებით. ყოველი დარგის პროდუქცია გარკვეული რაოდენობით გამოიყენება როგორც სხვა დარგებში, ასევე – მოცემული დარგის შიგნით. ასე მაგალითად, საავიაციო მრეწველობა იყენებს ალუმინს, საბურავებს, ენერგომაგარებლებს და სხვა, რომელსაც აწარმოებენ მეტალურგიული ქიმიური და სხვა სახის წარმოებები. ამასთან, სხვადასხვა დარგი გარკვეული რაოდენობის პროდუქციას ყიდის ბაზარზე.

დარგთაშორისი კავშირების ანალიზი წარმოადგენს მაკროეკონომიკის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს პრობლემას. მოთხოვნა-მიწოდების მათემატიკური მოდელი საშუალებას იძლევა დიდი სიმუსხით იქნეს გამოთვლილი თითოეული დარგის მიერ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა დარგთაშორისი და საბაზრო მოთხოვნის დაკმაყოფილების მიზნით, იმისათვის, რომ ქვეყანაში არ შეიქმნას დეფიციტი რომელიმე დარგის პროდუქციაზე ან ადგილი არ ჰქონდეს რომელიმე პროდუქციის ჭარბწარმოებას.

ეკონომიკის სხვადასხვა დარგებს შორის კავშირი, როგორც წესი, აიხსნება დარგთაშორისი კავშირების ცხრილში, ხოლო მათემატიკური მოდელი, რომელიც იძლევა ამ ცხრილის ანალიზის საშუალებას, დამუშავებულ იქნა ჰარვარდის უნივერსიტეტის პროფესორის ვასილ ლეონტიევის მიერ. ნაშრომი პირველად გამოქვეყნდა 1936 წელს. ვ. ლეონტიევმა ამერიკის შეერთებული შტატების ეკონომიკა დაყო 500 დარგად და შეისწავლა მათი ურთიერთმოქმედების მექანიზმები. 1973 წელს აღნიშნული მოდელის შექმნისთვის ვ. ლეონტიევს მიენიჭა ნობელის პრემია ეკონომიკის დარგში.

დონგოვის მოთხოვნა-მიწოდების მათემატიკურ მოდელში იგულისხმება,

ა) ეკონომიკის თითოეული დარგი აწარმოებს მხოლოდ ერთი სახის პროდუქტს;

ბ) ყოველი დარგისთვის ცნობილია ამ დარგში პროდუქციის საწარმოებლად საჭირო პროდუქციის რაოდენობა. ამ პროდუქციას შეიძლება აწარმოებდეს თუთონ ან სხვა დარგი;

გ) დარგებს შორის მოთხოვნა-მიწოდების ღონე უცვლელია მთელი იმ პერიოდის განმავლობაში, რომლისთვისაც ხდება დაგეგმვა.

ჩვენ მიერ ვადმოცემული მათემატიკური მოდელი სამართლიანი იქნება დროის მხოლოდ ამ აღებული ინტერვალისთვის.

6.2 დონგოვის მოდელი n დარგისათვის. ახლა განვიხილოთ მოთხოვნა-მიწოდების მათემატიკური მოდელი, როდესაც ეკონომიკა შედგება n დარგისაგან. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

x_i წარმოადგენს i-ური ($i = 1, 2, \dots, n$) დარგის წარმოების სრულ მოცულობას.

x_{ij} აღნიშნავს i-ური დარგის პროდუქციის მოცულობას, რომელიც გამოიყენება j-ური დარგის პროდუქციის საწარმოებლად ($i, j = 1, 2, \dots, n$). ცხადია, რომ x_{ij} წარმოადგენს i-ური დარგის პროდუქციის მოცულობას, რომელიც გამოიყენება „შიდა მიზნით“ - i-ური დარგის პროდუქციის საწარმოებლად. x_{ij} - სიდიდებს უწოდებენ დარგთაშორის ნაკადებს.

b_i აღნიშნავს i-ური დარგის პროდუქციის მოცულობას, რომელიც გამოიყენება „არასაწარმოო“ მიზნისთვის, მაგალითად, იყიდება ბაზარზე, ექსპორტისთვის, მიმდინარე საწარმოო ხარჯების დასაფარავად და ა. შ.

შევაღვინოთ დარგთაშორისი კავშირების ცხრილი (ჩვენ მიერ ზემოთ გამოთქმული მოსაზრებები წარმოვადგინოთ ცხრილის სახით).

პროდუქციის მოცულობა	დარგთაშორისი ნაკადები					„არასაწარმოო“ პროდუქციის მოცულობა
	1	2	3	...	n	
x_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}	b_1
x_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}	b_2
x_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_{3n}	b_3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	...	x_{nn}	b_n

რადგან, როგორც აღვნიშნეთ, სხვადასხვა დარგებში გამოშვებული პროდუქციის სიდიდე იზომება სხვადასხვა ერთეულებით (წონის, სიგრძის და ა. შ. ერთეულები). მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად აუცილებელია შემოღებულ იქნეს ერთიანი საზომი ერთეული. ბუნებრივია, ასეთ ერთეულად ავიღოთ პროდუქციის ღირებულება. ასე, რომ ჩვენ მიერ ცხრილში მოყვანილი სიდიდეები წარმოადგენენ პროდუქციის შესაბამის ღირებულებებს. მაგ., x_i წარმოადგენს i-ური დარგის ($i = 1, 2, \dots, n$) მიერ წარმოებული პროდუქციის ღირებულებას, x_{ij} - i-ური დარგის იმ პროდუქციის ღირებულებას, რომელიც გამოიყენება j-ური დარგის პროდუქციის საწარმოებლად, b_i კი i-ური დარგის მიერ „არასაწარმოო“ მიზნით გამოშვებული პროდუქციის ღირებულებას.

ცხადია, რომ ცხრილის ყოველ სტრიქონში დარგთშორისი ნაკადებისა და „არასაწარმოო“ პროდუქციის ღირებულებების ჯამი გოლია მოცემული სტრიქონის შესაბამისი დარგის პროდუქციის ღირებულებისა, ამიტომ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n} + b_1, \\ x_2 &= x_{21} + x_{22} + x_{23} + \dots + x_{2n} + b_2, \\ x_3 &= x_{31} + x_{32} + x_{33} + \dots + x_{3n} + b_3, \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= x_{n1} + x_{n2} + x_{n3} + \dots + x_{nn} + b_n. \end{aligned} \quad (3.192)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.193)$$

ცხადია, რომ a_{ij} აღნიშნავს i -ური დარგის იმ პროდუქციის ღირებულებას, რომელიც საჭიროა j -ური დარგის ერთეულოვანი ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად. (3.193) – რიცხვებს ეწოდებათ წარმოების ტექნოლოგიური კოეფიციენტები. ჩვენ დაუშვებთ, რომ დროის გარკვეულ ინტერვალში a_{ij} – კოეფიციენტები მუდმივია. (3.193) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.194)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ j -ური დარგის პროდუქციის საწარმოებლად არ გამოიყენება i -ური დარგის პროდუქცია, მაშინ $a_{ij} = 0$.

თუ გავითვალისწინებთ (3.194) გოლობებს, (3.192) გოლობები შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n + b_1, \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n + b_2, \\ x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n + b_3, \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n + b_n. \end{aligned} \quad (3.195)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (3.196)$$

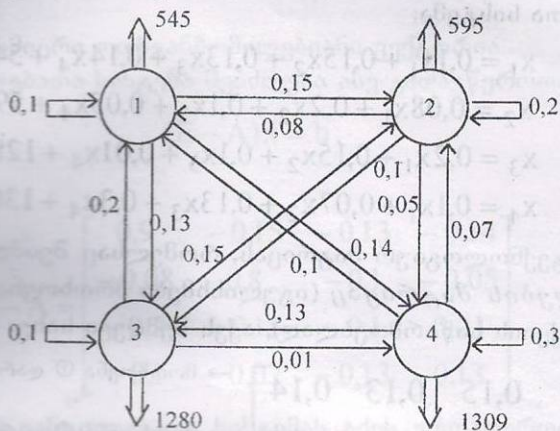
მაშინ (3.195) განტოლებათა სისტემა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{b}. \quad (3.197)$$

A მაგრიცას ხშირად წარმოების ტექნოლოგიურ მაგრიცას უწოდებენ, \bar{b} წარმოადგენს „არასაწარმოო“ პროდუქციის ღირებულების ვექტორს, ხოლო \bar{x} – საძიებელი ვექტორია, რომლის კომპონენტებიც სხვადასხვა დარგში გამოშვებული პროდუქციის ღირებულებებია.

6.3 ლეონტიევის მოდელი 4 დარგისათვის. ახლა განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

უფრო მეტი ეკონომიკა შედგება ოთხი, საავტომობილო, ენერგეტიკის, ფაბრიკა და საგრანსპორტო დარგისაგან. ქვემოთ მოყვანილ სქემაზე (იხ. ნახ. 3.22) მათ შესაბამისად ნომრები ①, ②, ③, ④:

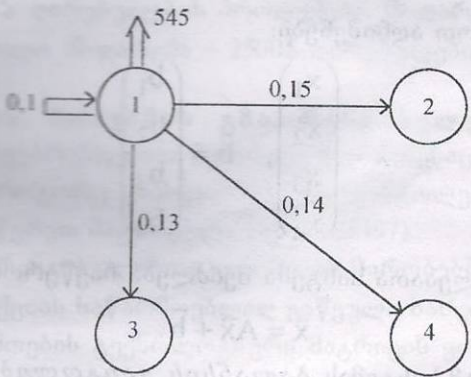


ნახ. 3.22

მათემატიკური მოდელის შესაღწევად საჭიროა ვიცოდეთ წარმოების ტექნოლოგიური კოეფიციენტების მნიშვნელობები, აგრეთვე თითოეული დარგის „არასაწარმოო“ პროდუქციის ღირებულება (ხშირად ეს ღირებულება განისაზღვრება მანქანის მოთხოვნილებით).

სქემაზე ისრებითა და მათზე მიწერილი რიცხვებით მოცემულია ეკონომიკის დარგებს შორის პროდუქციის ნაკადი.

აღნიშნული რიცხვები გვიჩვენებენ ისრით მითითებულ დარგში ერთეულოვანი ღირებულების, მაგალითად, 1\$ ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად საჭირო სხვა დარგების პროდუქციის ღირებულებებს. მაგალითად, განვიხილოთ ① დარგი (იხ. ნახ. 3.23).



ნახ. 3.23

ეს სქემა საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ ① დარგის 1\$ ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად საჭიროა ① დარგის 0,1\$ ღირებულების პროდუქცია, ② დარგის 0,15\$ ღირებულების პროდუქცია, ③ დარგის 0,13\$ ღირებულების პროდუქცია და ④ დარგის 0,14\$ ღირებულების პროდუქცია. ორმაგი ისარი აღნიშნავს „არასაწარმოო“ პროდუქციის ღირებულებას. ამრიგად, $a_{11} = 0,1$; $a_{12} = 0,15$; $a_{13} = 0,13$; $a_{14} = 0,14$, ხოლო $b_1 = 545$.

ამრიგად, მივიღებთ განტოლებას:

$$x_1 = 0,1x_1 + 0,15x_2 + 0,13x_3 + 0,14x_4 + 545.$$

ანალოგიურად შეიძლება განხილულ იქნეს ②, ③, ④ დარგებიც, რაც მოგვცემს საშუალებას დავწეროთ დანარჩენი სამი განტოლება. ამრიგად, მივიღეთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_1 + 0,15x_2 + 0,13x_3 + 0,14x_4 + 545, \\ x_2 &= 0,08x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_3 + 0,05x_4 + 595, \\ x_3 &= 0,2x_1 + 0,15x_2 + 0,1x_3 + 0,01x_4 + 1280, \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,07x_2 + 0,13x_3 + 0,3x_4 + 1309. \end{aligned} \quad (3.198)$$

წარმოების გეენოლოგიურ მაგრიცას, რომელსაც შეიძლება ვუწოდოთ *მოთხოვნა-მიწოდების მაგრიცა* (იგულისხმება მოთხოვნა-მიწოდება \$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად), აქვს შემდეგი სახე:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,15 & 0,13 & 0,14 \\ 0,08 & 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0,2 & 0,15 & 0,1 & 0,01 \\ 0,1 & 0,07 & 0,13 & 0,13 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{მოთხოვნა ① დარგის პროდუქციაზე} \\ \rightarrow \text{მოთხოვნა ② დარგის პროდუქციაზე} \\ \rightarrow \text{მოთხოვნა ③ დარგის პროდუქციაზე} \\ \rightarrow \text{მოთხოვნა ④ დარგის პროდუქციაზე} \end{array}$$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$
 მიწოდება მიწოდება მიწოდება მიწოდება
 ① დარ- ② დარ- ③ დარ- ④ დარ-
 გისთვის გისთვის გისთვის გისთვის

ამ მაგრიცის სკრიქონები წარმოადგენენ მოთხოვნას შესაბამის დარგის პროდუქციაზე, ხოლო სვეტები კი – სხვა დარგებიდან მიწოდებული პროდუქციის ღირებულებას.

ასევე, შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \quad (3.199)$$

მაშინ (3.198) განტოლებათა სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ მაგრიცული სახით

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{b}. \quad (3.200)$$

განტოლებათა ამ სისტემას *ბალანსის განტოლება* ეწოდება.

რენტაბელური ეკონომიკის პირობებში, ყოველ დარგში \$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად გავწეული ხარჯი ნაკლებია \$1-ზე. რაც იმას ნიშნავს, რომ მოთხოვნა-მიწოდების A მაგრიცის ყოველ სვეტში ელემენტების ჯამი ნაკლებია 1-ზე. აქედან კი ვღებულობთ, რომ

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq 4} \sum_{i=1}^4 |a_{ij}| < 1.$$

შეიძლება, თუ გაეხსენებთ თავი II-ის §3-ში მოყვანილ თეორემა 1-ს, შეიძლება დავსტუმროთ, რომ (3.200) განგოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მათხოებით შეიძლება მოძებნილ იქნეს კრებადი იტერაციული მეთოდის საშუალებით

$$\bar{x}^{(k+1)} = A\bar{x}^{(k)} + \bar{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.201)$$

სადა $\bar{x}^{(0)}$ - ნებისმიერი ოთხგანზომილებიანი ვექტორია.

(3.200) განგოლებათა სისტემა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$(E - A)\bar{x} = \bar{b}, \quad (3.202)$$

სადა

$$E - A = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,15 & -0,13 & -0,14 \\ -0,08 & 0,8 & -0,1 & -0,05 \\ -0,2 & -0,15 & -0,1 & 0,01 \\ -0,1 & -0,07 & -0,13 & 0,13 \end{bmatrix} \quad (3.203)$$

რადგან (3.200) განგოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ამიტომ ცხადია, რომ $(E - A)$ მაგრიცი არაგადაგვარებულია და არსებობს $(E - A)^{-1}$. შევნიშნოთ, რომ $(E - A)^{-1}$ მაგრიცას ხშირად ლეონგიევის მაგრიცასაც უწოდებენ.

ცხადია, რომ (3.202) განგოლებათა სისტემის ამონახსნის მოსაძებნად შეიძლება გამოვიყენოთ გაუსის მეთოდიც, ხოლო \bar{x} ამონახსნი ფორმალურად შეიძლება ასე ჩაწეროთ:

$$\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{b}. \quad (3.204)$$

თუ ამოვხსნით (3.198) (ან რაც იგივეა (3.200)) განგოლებათა სისტემას, მივიღებთ, რომ $x_1 = 1500$, $x_2 = 1300$, $x_3 = 2000$, $x_4 = 25000$.

ეს ნიშნავს, რომ ①-დარგმა უნდა აწარმოოს 1500\$ ღირებულების პროდუქცია, ②-დარგმა - 1300\$ ღირებულების პროდუქცია, ③-დარგმა - 2000\$ ღირებულების პროდუქცია, ხოლო ④-დარგმა - 2500\$ ღირებულების პროდუქცია.

6.4 ამონახსნის მოძებნის გზა რენგაბელური ეკონომიკის პირობებში. თუ დაუბრუნდებით შემთხვევას, როდესაც ეკონომიკა შედგება ④-დარგისგან, მაშინ, როგორც ვნახეთ, მიიღება განგოლებათა (3.195) სისტემა, რომელიც შემდეგ ჩაწერეთ მაგრიცული სახით (3.197).

ამ შემთხვევაშიც რენგაბელური ეკონომიკის პირობებში, ყოველ დარგში 1\$ ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად გაწეული ხარჯი ნაკლებია 1\$-ზე. ეს კი ნიშნავს, რომ წარმოების ტექნოლოგიური მაგრიცის ყოველ სვეტში ელემენტების ჯამი ნაკლებია 1-ზე, ე. ი.

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq 4} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| < 1.$$

იქედან გამოდინარეობს, რომ (3.195) განგოლებათა სისტემას ნებისმიერი \bar{b} ვექტორისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც შეიძლება მოძებნილ იქნეს კრებადი შარკივი იტერაციის მეთოდით:

$$\bar{x}^{(k+1)} = A\bar{x}^{(k)} + \bar{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.205)$$

სადაც $\bar{x}^{(0)}$ – ნებისმიერი n -განზომილებიანი ვექტორია.

მივიღეთ მეგად საინტერესო და მნიშვნელოვანი დასკვნა: რენკაბელური ეკონომიკის პირობებში ლეონტიევის მოდელს – ბალანსის განგოლებას ყოველთვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ეს ამონახსნი შეიძლება ვიპოვოთ მარტივი იტერაციის მეთოდის საშუალებით.

(3.197) განგოლებათა სისგემა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$(E - A)\bar{x} = \bar{b}, \quad (3.206)$$

სადაც

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 - a_{33} & \dots & -a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & -a_{nn} \end{bmatrix}$$

რადგან რენკაბელური ეკონომიკის პირობებში ლეონტიევის $(E - A)^{-1}$ მაგრიცა ყოველთვის არსებობს, ამიგომ (3.206) განგოლებათა სისგემის ამონახსნი შეიძლება ასე ჩაეწეროს:

$$\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{b}.$$

შევნიშნოთ, რომ (3.206) განგოლებათა სისგემა შეიძლება ამოხსნილ იქნეს, აგრეთვე, ვაუსის მეთოდის საშუალებით.

ამრიგად, ლეონტიევის მოდელი იძლევა საშუალებას დავადგინოთ, თუ ეკონომიკის თითოეულმა დარგმა რამდენი პროდუქცია უნდა გამოუშვას, რომ დააკმაყოფილოს სხვადასხვა დარგებისა და საბაზრო მოთხოვნილებები.

ოპტიმიზაციის ამოცანების შესახებ

§1. რამდენიმე წინასწარი

შენიშვნა ოპტიმიზაციის ამოცანების შესახებ

ჩვენს ყოველდღიურ ცხოვრებაში ცხადი ან არაცხადი სახით სისტემატურად ვხვდებით ოპტიმიზაციის ამოცანების გადაწყვეტას. ეს შეეხება როგორც ინდივიდუალურ საქმიანობას, ისე ზოგად სახელმწიფოებრივ პრობლემებს. პირადი ბიუჯეტის, საწარმოს ან ფირმის ბიუჯეტის თუ სახელმწიფო ბიუჯეტის მართვა, შემოსამზღერული რესურსების განაწილება, როული სისტემების დაპროექტება, გვირთის გრანსპორტირება, ელექტროენერგიის განაწილება და ა. შ. მოითხოვენ საუკეთესო ვარიანტის მოძებნას. საუკეთესოს – დასმული მიზნის განხორციელების თვალსაზრისით. ჩვენ მიერ პირველ თავში განხილული კომივიოიაკორის ამოცანაც სწორედ ასეთი ამოცანების კლასს მიეკუთვნება.

ოპტიმიზაციის ამოცანების არნახული მრავალფეროვნების პირობებში მხოლოდ მათემატიკას შეუძლია შემოგვთავაზოს მათი გადაწყვეტის მეთოდები. მაგრამ ამასათვის, რომ შევძლოთ გამოვიყენოთ მათემატიკური აპარატი, საჭიროა ჩვენთვის საინტერესო პრობლემა ჩამოვავალიბოთ მათემატიკურ ტერმინებში, მათემატიკური ამოცანის სახით ანუ, როგორც უკვე არაერთხელ აღვნიშნეთ, შევქნათ შესასწავლი მოვლენის თუ ობიექტის მათემატიკური მოდელი.

სანამ განვიხილავთ საკითხს ოპტიმიზაციის ამოცანების დასმის შესახებ, მოვიყვანოთ ერთი კონკრეტული მაგალითი.

1.1 ამოცანა საუკეთესო კონსერვის ქილის შესახებ. ვთქვათ, უნდა დამზადდეს კონსერვის ქილა, რომელსაც ექნება წრიული ცილინდრის ფორმა და რომლის მოცულობაც იქნება V . ამოცანა მდგომარეობს კონსერვის ქილის საუკეთესო ვარიანტის პოვნაში. ასეთი ფორმით ამოცანის ჩამოყალიბებას ბუნებრივად მოჰყვება შემდეგი კითხვის დასმა: როგორი ქილა ჩავთვალოთ საუკეთესოდ? რა ნიშნის მიხედვით შევადაროთ ერთმანეთს ქილები? სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, აუცილებლად უნდა იყოს მითითებული ოპტიმიზაციის მიზანი.

განვიხილოთ საუკეთესო კონსერვის ქილის შერჩევის კრიტერიუმის ორი ვარიანტი:

ა) საუკეთესო ქილას უნდა ჰქონდეს უმცირესი ზედაპირი S . ამ შემთხვევაში ქილის დასამზადებლად დაიხარჯება მასალის უმცირესი რაოდენობა.

ბ) საუკეთესო ქილას უნდა ჰქონდეს შესაძლებელი ნაწიბურების უმცირესი საფრთხე, რადგან ნაწიბური უნდა შედუღდეს, ამიგომ უმცირესი იქნება მოხმარებული ენერჯია, მაგალითად, ელექტროენერჯია, რაც დიდი რაოდენობის ქილების გამოშვებისა და ენერჯეტიკული კრიზისის პირობებში, მნიშვნელოვანი ეკონომიაა.

ჩამოვავალიბოთ განხილული ამოცანების მათემატიკური მოდელები. ამასათვის ქილის მოცულობის, მისი ზედაპირის ფართობისა და ნაწიბურების სიგ-

რძის გამოსათვლელად დაწვეროთ შესაბამისი ფორმულები. ვთქვათ, ცილინდრის ფუძის რადიუსია R , ხოლო სიმაღლე h , მაშინ გვექნება:

$$V = \pi R^2 h, \quad S = 2\pi R^2 + 2\pi R h, \quad l = 4\pi R + h, \quad (4.1)$$

სადაც V კონსერვის ქილის მოცულობაა, S - სრული ზედაპირის ფართობი, ხოლო l - ნაწიბურების სიგრძე.

(4.1) გოლობების პირველი გოლობიდან განვსაზღვროთ $h = \frac{V}{\pi R^2}$ და შევიტანოთ ეს გამოსახულება ზედაპირის ფართობისა და ნაწიბურების სიგრძის გამოსათვლელ ფორმულებში:

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}, \quad 0 < R < \infty, \quad (4.2)$$

$$l(R) = 4\pi R + \frac{V}{\pi R^2}, \quad 0 < R < \infty. \quad (4.3)$$

ამრიგად, ჩვენ მიერ დასმული პრობლემების გადაწყვეტა დადის $S(R)$ და $l(R)$ ფუნქციების მინიმუმის პოვნის ამოცანაზე.

ჯერ განვიხილოთ ა) ამოცანა, ე. ი. ამ შემთხვევაში უნდა ვიპოვოთ $S(R)$ ფუნქციის მინიმუმი. გამოვთვალოთ $S(R)$ ფუნქციის წარმოებული (მივიღოთ მხედველობაში, რომ $V \equiv \text{const}$):

$$S'(R) = \frac{2}{R^2}(2\pi R^3 - V).$$

$S'(R) = 0$ განგოლებების ამონახსნია

$$R = R_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

თუ $R < R_1$, მაშინ $S'(R) < 0$, თუ $R > R_1$, მაშინ $S'(R) > 0$. ეს ნიშნავს, რომ $R = R_1$ წარმოადგენს $S(R)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილს.

ამრიგად, V მოცულობის მქონე ქილას ექნება უმცირესი ზედაპირის ფართობი, თუ $R = R_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ და $h = 2R_1$.

$$\min S(R) = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

ახლა განვიხილოთ ბ) ამოცანა. ამ შემთხვევაში უნდა ვიპოვოთ $l(R)$ ფუნქციის წარმოებული

$$l'(R) = \frac{2}{\pi R^3}(2\pi^2 R^3 - V).$$

$l'(R) = 0$ განგოლებების ამონახსნია

$$R = R_2 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}$$

თუ $R < R_2$, მაშინ $l'(R) < 0$, თუ $R > R_2$, მაშინ $l'(R) > 0$. ეს ნიშნავს, რომ $R = R_2$ წარმოადგენს $l(R)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილს.

ამრავლ. V მოცულობის მქონე ქილას ექნება ნაწიბურების უმცირესი სიგ-
რძე, თუ $R = R_2 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}$ და $h = 2\pi R_2$.

$$\min l(R) = 3\sqrt[3]{4\pi V}.$$

როგორც ვხედავთ, ოპტიმიზაციის სხვადასხვა კრიტერიუმის შემთხვევაში
მაილსა არსებითად სხვადასხვა შედეგი. პირველ შემთხვევაში საუკეთესო ქი-
ლის სიმაღლე ფუძის დიამეტრის გოლია, ხოლო მეორე შემთხვევაში კი - სი-
მაღლე π -ჯერ მეტია დიამეტრზე.

**12 ოპტიმიზაციის ამოცანების მათემატიკური დასმის შესა-
ხვებ. ძალიან ხშირად ოპტიმიზაციის ამოცანების დასმა იწყება ალწერის საშუა-
ლებით. მაგალითისათვის მოვიყვანოთ დიდონის ცნობილი ამოცანა ბერძნული
მათემატიკიდან:**

მოცემულია წირი (ზღვის სანაპირო საზღვარი). ვიპოვოთ მოცემული სიგ-
რძის წირის (რაიმე მასალისაგან დამზადებული თოკის) ისეთი ფორმა, რომ
ზღვის სანაპიროს საზღვარსა და ამ წირს შორის მოთავსებული მიწის ფართობი
იყოს უდიდესი.

როდესაც საქმე გვაქვს ასეთი კლასის ამოცანებთან, უპირველეს ყოვლისა,
უნდა მოვახდინოთ ამოცანის ფორმალიზაცია, ე. ი. შევადგინოთ მოცემული ამო-
ცანის მათემატიკური მოდელი. ჩვეულებრივ ექსტრემალური ამოცანის (სწორედ
ასეთი ამოცანების კლასს მიეკუთვნებიან ოპტიმიზაციის ამოცანები) მათემატი-
კური დასმა შეიცავს შემდეგ სამ კომპონენტს:

ჯერ ერთი, მოცემული უნდა იყოს სკალარული ფუნქცია

$$f_0: X \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

რომელსაც უწოდებენ მიზნის ფუნქციას (ხარისხოვნების მაჩვენებელს). მისი
უანაბლერის არეა ელემენტების X სიმრავლე. შემდეგ X სიმრავლიდან გამოი-
ყოფენ D ქვესიმრავლეს $D \subseteq X$ - დასაშვებ ელემენტთა სიმრავლეს და
ამას შემდეგ ამოცანას ჩვეულებრივ აყალიბებენ შემდეგი ფორმით:

უპირობო $x \in D$ წერტილი, რომელზედაც მიიღწევა $f_0(x)$ ფუნქციის მინიმუ-
მი ან მაქსიმუმი:

$$\min_{x \in D} f_0(x) \text{ ან } \max_{x \in D} f_0(x). \quad (4.4)$$

x^* -ს უწოდებენ ექსტრემალური ამოცანის ამონახსნს.

შენიშნოთ, რომ შეიძლება შემოვიფარგლოთ მხოლოდ ფუნქციის მინიმუმის
წერტილის პოვნის ამოცანის განხილვით. მართლაც, $\max_{x \in D} f_0(x)$ ამოცანა შეიძ-
ლება შეიკვალოს $\min_{x \in D} \tilde{f}_0(x)$ ამოცანით, სადაც $\tilde{f}_0(x) = -f_0(x)$.

ცხადია, რომ ჩვენ მიერ გემოთ მოყვანილი ამოცანები წარმოადგენს პირო-
ბითი ექსტრემუმის ამოცანებს, ხოლო $x \in D$ პირობა კი წარმოადგენს შეზ-
ღულობის ელემენტთა იმ სიმრავლეზე, რომელზედაც უნდა მოიძებნოს $f_0(x)$ ფუნ-
ქციის ექსტრემუმი. ჩვეულებრივ ცდილობენ შეზღუდვები წარმოადგინონ გოლო-
ბულის ან უკულობების სახით. მოვიყვანოთ ექსტრემუმის ამოცანის ერთ-ერთი
შესაძლო ნაწიწერი:

ვთქვათ, მოცემულია ნაგურალურ რიცხვთა რაიმე ქვესიმრავლე I, აგრეთვე
სიმრავლე X, Y. ვთქვათ, აგრეთვე მოცემულია ფუნქციები:

$$g: X \rightarrow Y, f_i: X \rightarrow \mathbb{R}^1, i \in I, f_0: X \rightarrow \mathbb{R}^1$$

და ელემენტი $y_0 \in Y$. გარდა ამისა $D = \{x: g(x) = y_0, f_i(x) \leq 0, i \in I\}$. უნდა ვიპოვოთ $x^* \in D$ ისეთი, რომ

$$f_0(x^*) = \min_{x \in D} f_0(x).$$

ახლა ჩვენ განვიხილავთ რამდენიმე კონკრეტულ ამოცანას და მოვიყვანთ ამ ამოცანების ფორმალიზებულ ჩანაწერებს. შევნიშნოთ, რომ ყველა ეს ამოცანა წარმოადგენს ოპტიმიზაციის მეთოდების გრადიციულ, კლასიკურ ამოცანებს.

§2. რა პროლუქცია გამოვუშვათ?

ხშირად ნელეულის ერთი და იმავე სახეობებიდან შეიძლება დამზადდეს რამდენიმე სახის პროლუქცია. პროლუქციის მწარმოებლის წინაშე ბუნებრივად დგება შემდეგი ამოცანა: რა სახის და რა რაოდენობის პროლუქცია უნდა გამოუშვას, რომ მისთვის ეს იყოს ხელსაყრელი?

უპირველეს ყოვლისა, უნდა დავადგინოთ, თუ რა აზრით უნდა იქნეს გაგებული გერმინი „ხელსაყრელი“. დავუშვათ, რომ მწარმოებლის მიზანს შეადგენს დამზადდეს რაც შეიძლება მაღალი ღირებულების პროლუქცია ნელეულის არსებული მარაგიდან.

ცხადია, ამოცანის ასეთი დასმა არ ითვალისწინებს ყველა შესაძლო სიგუაციას, რომელსაც პროლუქციის მწარმოებელი შეიძლება შეხვდეს პრაქტიკული საქმიანობისას. მაგალითად, არ ითვალისწინებს შესაძლო მყიდველების მსყიდველობით უნარს – ხშირად ამის გამო არ არის მიზანშეწონილი მხოლოდ მაღალი ღირებულების პროლუქციის გამოშვება. არ ითვალისწინებს იმას, რომ ბაზარი შეიძლება გაჯერებული იყოს რომელიმე სახის პროლუქციით და ამიგომ გარკვეულ ეტაპზე არ იყოს გამართლებული ამ პროლუქციის დამზადება, არ ითვალისწინებს კონკურენციის მომენტს სხვა საწარმოებისა თუ ფირმების მხრივ, რომლებიც იმავე სახის პროლუქციას უშვებენ და ა. შ.

ყოველი ამ ფაქტორის გათვალისწინება აუცილებელია, რათა მათემატიკურმა მოდელმა ადეკვატურად ასახოს რეალური სიტუაცია, მაგრამ მოდელის გამარტივების მიზნით, განვიხილავთ მხოლოდ ჩვენ მიერ დასმულ ამოცანას.

ვთქვათ, გვაქვს სხვადასხვა ნელეულის m სახეობა. აღვნიშნოთ b_1 -ით პირველი სახის ნელეულის რაოდენობა, b_2 -ით – მეორე სახის ნელეულის რაოდენობა და ა. შ. b_m -ით – m -ური სახის ნელეულის რაოდენობა. ვთქვათ, ამ ნელეულების გამოყენებით შესაძლებელია გამოვუშვათ n სახეობის სხვადასხვა პროლუქცია. დავუშვათ j -ური პროლუქციის ერთეულის ღირებულებაა c_j , ხოლო j -ური პროლუქციის ერთეულის მისაღებად საჭიროა დაიხარჯოს a_{ij} ერთეული i -ური სახის ნელეული. აღვნიშნოთ x_j -ით j -ური სახის პროლუქციის რაოდენობა.

მიზნის ფუნქციას, რომლის მაქსიმუმსაც ვეძებთ, აქვს შემდეგი სახე:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j. \quad (4.5)$$

ეს გამოსახულება წარმოადგენს ყველა სახის პროლუქციის სრულ ღირებულებას.

შედეგად დაეძღვნათ ის შემდეგები, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ამოცანის შემდეგი სხვადასხვა ცვლადი. უპირველეს ყოვლისა, ცხადია, რომ თითოეული სახის პროდუქციის რაოდენობა არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, ე. ი. უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0. \quad (4.6)$$

შემდეგ, რადგან j -ური სახის პროდუქციის ერთეულის მისაღებად საჭიროა დაიხარჯოს i -ური სახის ნედლეულის a_{ij} ერთეული, ამიგომ, ცხადია, რომ j -ური სახის პროდუქციის x_j ერთეულის მისაღებად დაიხარჯება i -ური სახის ნედლეულის $a_{ij}x_j$ ერთეული. აქედან გამომდინარეობს, რომ უნდა დაკმაყოფილდეს შემდეგი უტოლობათა სისტემა:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.7)$$

ამრიგად, საბოლოოდ ჩვენ მივიღებთ შემდეგ ექსტრემუმის ამოცანას:

ვაპოვოთ ისეთი $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, რომლებიც აკმაყოფილებენ (4.6) და (4.7) პირობებს და

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \max_{\{x_j\}} \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

სადა x_j ცვლადებისათვის სრულდება (4.6) და (4.7) შემდეგები.

ეს ამოცანა წარმოადგენს ჩვენ მიერ ექსტრემუმის ამოცანის ფორმალიზებული დასმის ერთ-ერთ კერძო შემთხვევას, თუ დავუშვებთ, რომ

$$X = R^n, \quad Y = R^1, \quad I = \{1, 2, \dots, n+m\}$$

$$f_0(x) = -\sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

$$f_i(x) = -x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$f_{n+i}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$g(x) = 0, \quad y_0 = 0.$$

x_1, x_2, \dots, x_n მნიშვნელობების ყოველ ერთობლიობას, რომელიც აკმაყოფილებს (4.6), (4.7) პირობებს, ვუწოდებთ დასაშვებ გეგმას (სტრატეგიას). ის დასაშვები გეგმა (სტრატეგია), რომელიც მიზნის (4.5) ფუნქციას მინიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, წარმოადგენს ოპტიმალურ გეგმას (სტრატეგიას).

დასმულ ამოცანას აქვს საკმაოდ მარტივი სტრუქტურა – მიზნის ფუნქციაც და ყველა სხვა ფუნქცია წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას. ამოცანის ასეთ სპეციფიკურ აქვს როგორც თავისი უპირატესობა, ისე ნაკლოვანებანი. რასაკვირველია, ამოცანის ასეთი დასმა არსებითად ამარტივებს ამოხსნის პროცესს, მაგრამ მეორე მხრივ, ყველა რეალური სიტუაცია როდი აღიწერება წრფივი ფუნქციების საშუალებით – შესასწავლი კანონზომიერებანი შეიძლება არსებითად რთული ხასიათის მაგარებელნი იყვნენ, რაც თავის მხრივ გამოიწვევს მათემატიკური მოდელის არსებით გართულებას.

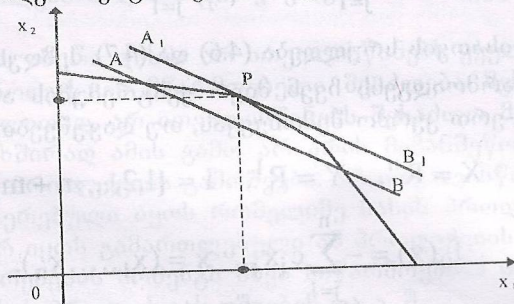
ამ შენიშვნის მიუხედავად, უნდა აღვნიშნოთ, რომ იმ ამოცანებს კლასი, რომლებიც საკმარისად კარგად აღიწერებიან წრფივი მოდელის მეშვეობით, საკმარისად ფართოა. ასეთი გიპის ექსტრემალურ ამოცანებს უწოდეს წრფივი დაპროგრამების ამოცანები.

ახლა განვიხილოთ პრობლემა: როგორ ამოვხსნათ წრფივი დაპროგრამების ამოცანები? საინტერესო დასკვნების საშუალებას იძლევა ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, რომელსაც ჩვენ მოვიყვანთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც მზადდება ორი სახეობის პროდუქცია ($n = 2$).

სიბრტყეზე ავაგოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა X_1OX_2 . უპირველეს ყოვლისა, დავადგინოთ, თუ რას წარმოადგენს გეომეტრიულად დასაშვებ გეგმათა სიმრავლე – ავაგოთ ცხადად საკოორდინატო სიბრტყეზე ეს სიმრავლე. (4.6) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ წერტილი, რომელიც შეესაბამება დასაშვებ გეგმათა სიმრავლეს, მდებარეობს პირველ მეოთხედში. (4.7) უტოლობებიდან თითოეული განსაზღვრავს ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც მდებარეობს

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

წრფის ერთ მხარეს. ამრიგად, დასაშვებ გეგმათა სიმრავლე სიბრტყეზე გამოიხატება ყველა იმ წერტილით, რომლებიც მდებარეობენ გარკვეულ მრავალკუთხედის შიგნით და საზღვარზე. გამოვსახოთ ეს მრავალკუთხედი სქემატურად



ნახ. 4.1

წერტილთა ამ სიმრავლეში უნდა ვიპოვოთ ის წერტილი (ან წერტილთა სიმრავლე), რომელიც შეესაბამება ოპტიმალურ გეგმას. ამ წერტილის მოსაძებნად გამოვიყენოთ შემდეგი ალგორითმი. ავიღოთ რაიმე a რიცხვი ისე, რომ წრფე $c_1x_1 + c_2x_2 = a$ კვეთდეს მრავალკუთხედს (ცხადია, რომ ასეთი a რიცხვი ყოველთვის მოიძებნება) (იხ. ნახ. 4.1). ამ წრფისა და მრავალკუთხედის საერთო წერტილები შეესაბამებიან დასაშვებ გეგმებს ერთნაირი ეკონომიკური ეფექტით – ყოველი ამ დასაშვები გეგმისათვის დამზადებული პროდუქციის საერთო ღირებულება a -ს ტოლია. ახლა (AB) წრფე გადავაადგილოთ თავის თავის პარალელურად a -ს ზრდის მიმართულებით. რაც უფრო მეტ მნიშვნელობას მიიღებს a , მით უფრო ხელსაყრელი იქნება დასაშვები გეგმა. ბოლოს და ბოლოს (AB) წრფე გაივლის მრავალკუთხედის ერთ-ერთ წვეროზე ან თუ მრავალკუთხედს აქვს გვერდი, რომელიც პარალელურია $c_1x_1 + c_2x_2 = a$ წრფისა, მაშინ ეს წრფე გაივლის ამ გვერდზე. პირველ შემთხვევაში არსებობს ერთადერთი ოპტიმალური გეგმა, რომელსაც შეესაბამება მრავალკუთხედის წვერო, ხოლო მეორე შემთხვევაში – სიმრავლე თანაბრად ეფექტური ოპტიმალური გეგმებისა, რომელსაც შეესაბამება მრავალკუთხედის გვერდი.

მოვენილი გეომეტრიული ინტერპრეგაციიდან უმუალოდ გამომდინარეობს წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის შემდეგი ალგორითმი: რადგან მიზნის ფუნქციის მაქსიმუმი აუცილებლად მიიღწევა დასაშვებ გვერდით მრავალკუთხედის ერთ ან რამდენიმე წვეროში, ამიტომ საჭიროა გამოვთვალოთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები ამ მრავალკუთხედის წვეროებში და მათგან შევარჩიოთ ის, სადაც მიიღწევა მაქსიმუმი. თითქოსდა, მოიძებნა წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის ეფექტური ალგორითმი. მაგრამ ეს დასკვნა, სამწუხაროდ, ძალიან შორს არის სიმართლისაგან. თუ საქმე გვაქვს n რაოდენობის სხვადასხვა სახეობის პროდუქციასთან, მაშინ ორგანიზაციის სივრცეში მრავალკუთხედის ნაცვლად მივიღებთ დასაშვები გეგმების მრავალწახნაგს n განზომილებიან სივრცეში, ხოლო A_1B_1 წრფის ნაცვლად - ჰიპერსიბრკვეს. რომელიც გაივლის ამ მრავალწახნაგს ერთ ან რამდენიმე წვეროზე. შეიძლება თუ არა ამ შემთხვევაშიც გამოვთვალოთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები მრავალწახნაგს წვეროებში და შემდეგ შევადაროთ ერთმანეთს ეს მნიშვნელობები? რასაკვირველია, არ არსებობს არავითარი წინააღმდეგობა შევეცადოთ განვახორციელოთ ეს ალგორითმი, მაგრამ შევნიშნოთ, რომ ამავე დროს არ არსებობს წარმატების არავითარი გარანტია: თუ n და m რიცხვების მნიშვნელობა რამდენიმე ათეულს აღწევს, მაშინ რეალურ დროში ამ ამოცანის გადაწყვეტას ვერ მოახერხებს ვერც ერთი თანამედროვე კომპიუტერი. ის, რაც ასე ბუნებრივი იყო $n = 2$ მნიშვნელობისათვის, აღმოჩნდა სრულიად მიუღებელი n -ის დიდი მნიშვნელობებისათვის გამოსათვლელი სამუშაოს უზარმაზარი მოცულობის გამო. ამიტომ, ბუნებრივია, ამ ამოცანის ამოსახსნელად მოიძებნოს სხვა ენა, რომელიც მოგვცემს საშუალებას რეალურ დროში დავადგინოთ ოპტიმალური სტრატეგია.

ჩვენს მიზანს არ შეადგენს ამ მეთოდების განხილვა. შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ ამაჟამად შემუშავებულია საკმარისად ეფექტური ალგორითმები წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნის მოსაძებნად.

შემდეგ პარაგრაფებში ჩვენ მოვიყვანთ კიდევ რამდენიმე მათემატიკური მოდელის მაგალითს, რომლებიც წარმოადგენენ ოპტიმიზაციის ამოცანებს და განვიხილავთ ამ ამოცანების ამოხსნის ერთ-ერთ, საკმაოდ ეფექტურ ალგორითმს.

§3. სატრანსპორტო ამოცანა

სანამ განვიხილავთ ამ ამოცანის დასმას ზოგად შემთხვევაში, მოვიყვანოთ ერთი მარტივი მაგალითი.

ვთქვათ, ქალაქში არის ფქვილის ორი საწყობი და პურის ორი ქარხანა. ყოველდღიურად პირველი საწყობიდან გამოაქვთ 50 ტ ფქვილი, ხოლო მეორე საწყობიდან - 70 ტ. ეს ფქვილი მიაქვთ პურის ქარხნებში, მასთან პირველი ქარხანა იღებს 40 ტ ფქვილს, ხოლო მეორე ქარხანა - 80 ტ-ს. დავუშვათ, რომ ერთი ტონა ფქვილის გადაგანა პირველი საწყობიდან პირველ ქარხანაში ღირს 1,2 ლარი, პირველი საწყობიდან - მეორე ქარხანაში 1,6 ლარი, მეორე საწყობიდან პირველ ქარხანაში - 0,8 ლარი, ხოლო მეორე საწყობიდან მეორე ქარხანაში კი - 1 ლარი. ჩვენი მიზანია ისე დაგვეგმოთ გადაზიდვები, რომ სატრანსპორტო ხარჯები იყოს მინიმალური.

ამ კითხვაზე პასუხის ვასაყენებლად საჭიროა ამოცანა დავსვათ მათემატიკურად - შევადგინოთ მათემატიკური მოდელი. აღვნიშნოთ, შესაბამისად, X_1 და

x_2 -ით ფქვილის ის რაოდენობა, რომელიც გადაზიდულ უნდა იქნეს პირველი საწყობიდან შესაბამისად პირველ და მეორე ქარხანაში, ხოლო x_3 და x_4 -ით – ფქვილის ის რაოდენობა, რომელიც გადაზიდულ უნდა იქნეს მეორე საწყობიდან შესაბამისად პირველ და მეორე ქარხანაში. ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 50, \\ x_3 + x_4 &= 70, \\ x_1 + x_3 &= 40, \\ x_2 + x_4 &= 80, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{4.8}$$

გადაზიდვების მთლიანი ღირებულება (საგრანსპორტო ხარჯები) გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$f = 1,2x_1 + 1,6x_2 + 0,8x_3 + x_4. \tag{4.10}$$

ამრიგად, მივიღებთ ოპტიმიზაციის შემდეგ ამოცანას: უნდა ვიპოვოთ x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (4.8), (4.9) პირობებს და რომლებიც გადაზიდვის ღირებულების (საგრანსპორტო ხარჯების) (4.10) ფუნქციას მინიჭებენ მინიმალურ მნიშვნელობას.

ცხადია, რომ დასმული ამოცანა წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ერთ კერძო, უმარტივეს შემთხვევას.

განვიხილოთ განტოლებათა (4.8) სისტემა. შევნიშნოთ, რომ ამ განტოლებათა სისტემის მეოთხე განტოლება წარმოადგენს პირველი სამი განტოლების წრფივ კომბინაციას: მეოთხე განტოლების მისაღებად საკმარისია შევკრიბოთ პირველი და მეორე განტოლებები და გამოვაკლოთ მესამე განტოლება. ამიგონ საკმარისია განვიხილოთ (4.8) განტოლებათა სისტემის ეკვივალენტური შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 50, \\ x_3 + x_4 &= 70, \\ x_1 + x_3 &= 40. \end{aligned} \tag{4.11}$$

ამ სისტემაში განტოლებათა რიცხვი ერთით ნაკლებია უცნობთა რაოდენობაზე. ასე რომ, ჩვენ შეგვიძლია შევარჩიოთ ერთ-ერთი უცნობი, მაგალითად, x_1 და დანარჩენი უცნობები (4.11) განტოლებების გამოყენებით გამოვსახოთ ამ უცნობის საშუალებით:

$$\begin{aligned} x_2 &= 50 - x_1, \\ x_3 &= 40 - x_1, \\ x_4 &= 30 + x_1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.9) შემლუღებს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, \\ 50 - x_1 &\geq 0, \\ 40 - x_1 &\geq 0, \\ 30 + x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$0 \leq x_1 \leq 40. \quad (4.13)$$

გამოვსახოთ ღირებულების f ფუნქცია x_1 ცვლადის საშუალებით. ამისათვის საჭიროა გადაზიდვის ღირებულების f ფუნქციის (4.10) გამოსახულებაში x_2, x_3 და x_4 -ის ნაცვლად, (4.12) ცოლობებიდან შევიგანოთ შესაბამისი მნიშვნელობები, რას შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$f(x_1) = 142 - 0,2x_1. \quad (4.14)$$

ეს ფორმულა განსაზღვრავს ერთი ცვლადის $f(x_1)$ ფუნქციას, სადაც x_1 ცვლადი აკმაყოფილებს (4.13) პირობას. $f(x_1)$ მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, თუ $x_1 = 40$. ვ. ა. საგრანსპორტო ხარჯები იქნება მინიმალური, თუ $x_1 = 40$. დანარჩენი x_i ($i = 2, 3, 4$) ცვლადების მნიშვნელობები შეიძლება მოძებნილ იქნეს (4.12) ფორმულის საშუალებით.

ამრიგად, გადაზიდვის ღირებულების თვალსაზრისით ოპტიმალურია გადაზიდვის შემდეგი გეგმა:

$$x_1 = 40 \text{ ტ.}, \quad x_2 = 10 \text{ ტ.}, \quad x_3 = 0 \text{ ტ.}, \quad x_4 = 70 \text{ ტ.}$$

ამ შემთხვევაში საგრანსპორტო ხარჯები გოლია 134 ლარის. ყველა სხვა დანაშეუბნებელი გადაზიდვის გეგმის შემთხვევაში ეს ღირებულება გაიზრდება. ჩვენ მიერ განხილული იყო საგრანსპორტო ხარჯების მინიმიზაციის უმარტივესი ამოცანა საწყოებისა და პურის ქარხნების მინიმალური რაოდენობით. ამან მოიწვევა საშუალება ამოცანის ამოხსნისათვის გამოგვეყენებინა უმარტივესი ალგორითმი. საწყობაროდ, ამოცანა საკმარისად რთულდება, როდესაც მწარმოებელთა (მყენ მურ განხილულ ამოცანაში - საწყობების) და მომხმარებელთა (მყენ მურ განხილულ ამოცანაში - პურის ქარხნების) რაოდენობა მნიშვნელოვნად იზრდება, და ეს გართულება გამოწვეულია არა ამოცანის დასმის თვალსაზრისით, არამედ სწორედ ევქტკური ალგორითმის აგების თვალსაზრისით.

განვიხილოთ ამ ამოცანის დასმა ზოგადად.

ვთქვათ, m რაოდენობის სხვადასხვა საწარმო A_1, A_2, \dots, A_m უშვებს ერთი და იმავე პროდუქციას, რომლებიც ერთმანეთისაგან არ განსხვავდებიან ხარისხით. ვთქვათ A_j -ურს საწარმო უშვებს ამ პროდუქციის a_j (პირობით ერთეულებში) რაოდენობას ($j = 1, 2, \dots, m$). ვთქვათ, აგრეთვე, რომ ამ პროდუქციას ჰყავს n რაოდენობის მომხმარებელი, რომლებიც იმყოფებიან პუნქტებში B_1, B_2, \dots, B_n . მასთან B_j -ურ პუნქტში მყოფი მომხმარებელი იძენს ამ პროდუქციის b_j (პირობით ერთეულებში) რაოდენობას ($j = 1, 2, \dots, n$). ვიგულისხმობთ, რომ ყველა საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის მთლიანი რაოდენობა ემთხვევა მომხმარებელთა მიერ შეძენილ პროდუქციის მთლიან რაოდენობას (ე. ი. მთლიანად სადღება საწარმოების მიერ გამოშვებული პროდუქცია). i -ური საწარმოდან j -ურ მომხმარებელამდე პროდუქციის ერთეულის გადაგანის ღირებულება გოლია c_{ij} პარამეტრი ერთეულის, ჩავთვალოთ, რომ c_{ij} -ს ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) ყველა მნიშვნელობა ცნობილია. ამ პირობებში უნდა დავადგინოთ გადაზიდვის ოპტიმალური გეგმა (ვ. ა. დასაშვები გეგმა, როდესაც საგრანსპორტო ხარჯები მინიმალურია).

ამ ამოცანის განხილვისას შეგნებულად არ ვითვალისწინებთ ბევრ ფაქტორს (დანაშარჯები პროდუქციის საწარმოებლად, რომელიც შეიძლება სხვადასხვა საწარმოში სხვადასხვა იყოს, პროდუქციის სხვადასხვა ხარისხი, ჭარბი

პროდუქციის წარმოება და, აქედან გამომდინარე – კონკურენცია წარმოებებს შორის და ა. შ.), რათა შესწავლილ იქნეს მხოლოდ გერიგორიალური ფაქტორის გავლენა, რაც არსებითად ვლინდება საგრანსპორტო ხარჯებში.

შევადგინოთ დასმული ამოცანის მათემატიკური მოდელი.

აღვნიშნოთ x_{ij} -ით იმ პროდუქციის რაოდენობა (პირობით ერთეულებში), რომელიც A_i -ური საწარმოდან მიეწოდება B_j -ურ მომხმარებელს. ამოვწეროთ ცხადი სახით ის შეზღუდვები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ეს სიდიდეები:

უპირველეს ყოვლისა, რადგან ყოველმა მომხმარებელმა უნდა მიიღოს ზუსტად იმდენი პროდუქცია, რამდენიც მას სჭირდება, ამიტომ უნდა შესრულდეს შემდეგი გოლობები:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

რადგან წარმოებული პროდუქცია მთლიანად მიეწოდება მომხმარებელს, ამიტომ ყოველი საწარმოდან პროდუქცია მთლიანად უნდა იქნეს გაგანილი:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც მიეწოდება A_i -ური საწარმოდან B_j -ურ პუნქტში მყოფ მომხმარებელს, არ შეიძლება იყოს უარყოფითი:

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n).$$

მიზნის ფუნქციას წარმოადგენს საგრანსპორტო დანახარჯები, რომელიც საჭიროა პროდუქციის გადაგანისათვის საწარმოებიდან მომხმარებელამდე. ეს დანახარჯი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

ჩვენს მიზანს შეადგენს ვიპოვოთ პროდუქციის გრანსპორტირების ისეთი გეგმა, რომლის დროსაც საგრანსპორტო დანახარჯები მინიმალურია.

საბოლოოდ, მათემატიკური მოდელი ასე ჩამოყალიბდება:

ვიპოვოთ x_{ij}^* $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, ისეთი, რომ:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^* = \min_{\{x_{ij}\}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij},$$

თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^* = \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^* = \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_{ij}^* \geq 0, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

უპირველეს ყოვლისა, (4.17) სისტემიდან გადავიღეთ მის ეკვივალენტურ შემდეგ სისტემაზე:

$$\begin{cases} -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 + a \geq 0, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 - b \geq 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$-\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 + a = x_4.$$

მაშინ მივიღებთ, რომ $x_4 \geq 0$. ანალოგიურად შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 - b = x_5.$$

ამ შემთხვევაშიც გვექნება, რომ $x_5 \geq 0$.

ამრიგად, შემოვიღებთ რა „ღამაგებით“ ცვლადებს x_4 -ს და x_5 -ს. ზოგადი ამოცანა (4.17) შეზღუდვებით შეგვიძლია შევცვალოთ შემდეგი ეკვივალენტური კანონიკური ამოცანით:

ვიპოვოთ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ცვლადების არაუარყოფითი მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 - x_4 = -a, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 - x_5 = b \end{cases}$$

და ამ განტოლებათა სისტემის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლეზე

$$L(x_1, x_2, \dots, x_5) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5.$$

ფუნქციას ანიჭებენ მინიმუმს.

ამის შემდეგ შეიძლება დავასკვნათ, რომ წრფივი დაპროგრამების ნებისმიერი ამოცანა შეიძლება დაყვანილ იქნეს (4.15), (4.16) კანონიკურ სახეზე.

(4.15) განტოლებათა სისტემის ამონახსნს $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ ვუწოდოთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის დასაშვები ამონახსნი, თუ $x_i^0 \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). ამრიგად, ჩვენი მიზანია დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეში ვიპოვოთ ისეთი ამონახსნი $-\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ ვექტორი, რომელიც მინიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეზე (4.16) მიზნის ფუნქციას $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ს.

წრფივი დაპროგრამების ზოგიერთ კონკრეტულ ამოცანას შეიძლება არც გააჩნდეს ამონახსნი. ამის მიზეზი შეიძლებაა:

1) (4.15) განტოლებათა სისტემა შეიძლება არ იყოს თავსებადი, ე. ი. მას არ გააჩნდეს ამონახსნი.

2) (4.15) განტოლებათა სისტემა შეიძლება იყოს თავსებადი, მაგრამ შეიძლება მას არ გააჩნდეს დასაშვები ამონახსნი, ე. ი. ისეთი ამონახსნი, როდესაც ვექტორის (რომელიც წარმოადგენს (4.15) განტოლებათა სისტემის ამონახსნს) ყველა კომპონენტი არაუარყოფითია.

3) (4.15) განტოლებათა სისტემას შეიძლება ჰქონდეს დასაშვები ამონახსნები, მაგრამ მათ შორის არ იყოს ოპტიმალური: (4.16) ფუნქცია შეიძლება არ იყოს შემოსაზღვრული ქვემოდან დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეზე.

მაგრამ აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ წრფივი დაპროგრამების ამოცანების დიდ ნაწილს, რომლებიც გამოიყენება პრაქტიკული მიზნებისათვის, ჩვეულებრივ აქვთ ამონახსნები.

დავუშაოთ, რომ (4.15) განტოლებათა სისტემა თავსებადია და ამ სისტემის განტოლებები წრფივად დამოუკიდებელია, ე. ი. არც ერთი განტოლება არ შეიძ-

ლება იქნეს მიღებული დანარჩენი განტოლებების წრფივი კომბინაციის საშუალებით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, (4.15) განტოლებათა სისტემის მაგრიცის $A = (a_{ij})$ სტრიქონები წრფივად დამოუკიდებელია, ან რაც იგივეა, A მაგრიცის რანგი $r = m$. როგორც წრფივი ალგებრის კურსიდან არის ცნობილი, ეს შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც სამართლიანია უტოლობა $m \leq n$.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $m = n$. მაშინ A მაგრიცის რანგი $r = n = m$ და როგორც წრფივი ალგებრის კურსიდან არის ცნობილი, ამ შემთხვევაში (4.15) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. თუ ეს ამონახსნი ეკუთვნის დასაშვებ ამონახსნთა კლასს, მაშინ ასარჩევი არაფერია და ეს ამონახსნი ავტომატურად წარმოადგენს ოპტიმალურ ამონახსნს.

საინტერესოა შემთხვევა, როდესაც $m < n$ (პრაქტიკული ამოცანების განხილვისას ეს შეესაბამება მოქმედების სხვადასხვა გეგმის არჩევის შესაძლებლობას). აღნიშნოთ $k = n - m$. რაღვან A მაგრიცის რანგი $r = m$, ამიტომ როგორც წრფივი ალგებრის კურსში მტკიცდება, გარკვეული ჯგუფი უცნობი ცვლადებისა (ეს ჯგუფი შედგება m ცვლადისაგან და მათ ბაზისურ ცვლადებს უწოდებენ) შეიძლება გამოვსახოთ დანარჩენი k ცვლადის საშუალებით (მათ უწოდებენ თავისუფალ უცნობებს). ამ ცვლადების დასაღვენად შეიძლება გამოვიყენოთ მაგალითად გაუსის მეთოდი (იხ. [39]). ამ შემთხვევაში (4.15) განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე (ისინი ქმნიან n განზომილებიანი სივრცის $k = n - m$ განზომილებიან ქვესივრცეს): მივანიჭებთ რა თავისუფალ უცნობებს ნებისმიერ მნიშვნელობებს, გამოვთვლით შესაბამისი ბაზისური უცნობების მნიშვნელობებს. ვცვლით რა თავისუფალი უცნობების მნიშვნელობებს, ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში მივიღებთ (4.15) განტოლებათა სისტემის ახალ ამონახსნს. შემოვიდოთ შემდეგი

განსაზღვრება: (4.15) განტოლებათა სისტემის ამონახსნს ვუწოდებთ საყრდენი ამონახსნი, თუ მასში არანაკლებ k უცნობის (კომპონენტის) მნიშვნელობა გოლია 0-ის.

წრფივი დაპროგრამების თეორიიდან ცნობილია, რომ ოპტიმალური ამონახსნი წარმოადგენს საყრდენ ამონახსნს, ე. ი. ოპტიმალური ამონახსნი უნდა ვეძებოთ საყრდენი ამონახსნების კლასში.

ამ უკანასკნელი დებულებიდან გამომდინარეობს წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის შემდეგი სტრატეგია: უნდა შეირჩეს k თავისუფალი უცნობი. თავისუფალ უცნობებს მივანიჭოთ ნულოვანი მნიშვნელობები და შემდეგ ამოვსნათ განტოლებათა სისტემა დარჩენილი m ბაზისური უცნობის მიმართ. ამის შემდეგ მივიღებთ საყრდენ ამონახსნს. თუ იგი შედის დასაშვებ ამონახსნთა კლასში, მაშინ მისი საშუალებით გამოვითვლით მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობას.

შემდეგ შევარჩევთ თავისუფალი უცნობების სხვა ჯგუფს, ჩავატარებთ იმავე პროცედურას და ა. შ. უნდა განვიხილოთ თავისუფალი უცნობების შერჩევის ყველა ვარიანტი. ამის შემდეგ ერთმანეთს უნდა შევადაროთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები და შევარჩიოთ ის საყრდენი ამონახსნი, რომლისთვისაც ეს მნიშვნელობა უმცირესია. გემოთ მოყვანილი დებულების საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ სწორედ ეს საყრდენი ამონახსნი წარმოადგენს ოპტიმალურ ამონახსნს.

მარტივი ამოცანებისათვის, რომელშიც ცვლადების რაოდენობა n მცირეა, ამონახსნის მოძებნის ასეთი მეთოდი პრინციპში შეიძლება იქნეს გამოყენებული. მაგრამ პრაქტიკულად საინტერესო ამოცანებისათვის m -ისა და n -ის მნიშვნელობები ჩვეულებრივ საკმაოდ დიდია - მათი მნიშვნელობები ხშირად აღ-

ლება, რადგან ჩვენ მიერ (4.20) ამონახსნში ყველა მათგანის მნიშვნელობა 0-ის გოლია და რომელიმე მათგანის შემცირება გამოიწვევს ამ ცვლადისთვის უარყოფითი მნიშვნელობის მინიჭებას და მიღებული ახალი ამონახსნი უკვე არ მიეკუთვნება დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეს.

თუ ყველა d_1, d_2, \dots, d_k კოეფიციენტი (4.21) გამოსახულებაში არაუარყოფითია, მაშინ x_1, x_2, \dots, x_k ცვლადების მნიშვნელობების გაზრდით ჩვენ ვერ შევძლებთ $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობის შემცირებას. ამ შემთხვევაში (4.20) ამონახსნი წარმოადგენს ოპტიმალურ ამონახსნს.

თუ (4.21) ტოლობაში d_1, d_2, \dots, d_k კოეფიციენტებს შორის არის უარყოფითი რიცხვები, მაშინ გავზრდით რა შესაბამისი თავისუფალი ცვლადის მნიშვნელობას, ჩნდება შანსი, რომ ჩვენ შევძლებთ შევამციროთ L მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა, ე. ი. გავაუმჯობესოთ ამონახსნი. ამ შემთხვევაში ჩვენ მიერ აგებული (4.20) ამონახსნი არ წარმოადგენს ოპტიმალურ ამონახსნს.

ზოგალობის შეუმღუდავად დაეუშვათ (4.21) ტოლობაში უარყოფითია d_1 კოეფიციენტი: $d_1 < 0$. თუ (4.19) სისტემაში შემავალ ყველა განტოლებაში x_1 ცვლადის კოეფიციენტები არაუარყოფითია $\alpha_{k+1,1} \geq 0, \alpha_{k+2,1} \geq 0, \dots, \alpha_{n,1} \geq 0$, მაშინ x_1 ცვლადის ნებისმიერი გაზრდის შედეგად $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ ცვლადების მნიშვნელობები კვლავ არაუარყოფითი იქნება და მიღებული ამონახსნი კვლავ დარჩება დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეში, მაშინ, როცა $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} L(x) \rightarrow -\infty$. ეს კი

თავის მხრივ ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში არ არსებობს წრფივი დაპროგრამების დასმული ამოცანის ამონახსნი.

დაბოლოს, დაეუშვათ, რომ (4.19) განტოლებათა სისტემაში არის ერთი მაინც განტოლება, რომელშიც x_1 ცვლადის კომპონენტი უარყოფითია. იმ ცვლადისათვის, რომელიც მდებარეობს ამ განტოლების მარცხენა მხარეში, x_1 ცვლადის უკონტროლო გაზრდა საშიშია: ამ პროცესში ეს ცვლადი შეიძლება გახდეს უარყოფითი და მაშინ მიღებული ამონახსნი უკვე აღარ მიეკუთვნება დასაშვებ ამონახსნების კლასს.

ასე მაგალითად, თუ $\alpha_{k+1,1} < 0$, მაშინ ცხადია, რომ x_1 ცვლადის მნიშვნელობა $\frac{-\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1,1}}$ -ზე მეტი ვერ გახდება (თუ $x_1^{(0)} = \frac{-\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1,1}}, x_2^{(0)}, \dots, x_k^{(0)} = 0$, მივი-

ღებთ, რომ $x_{k+1}^{(0)} = 0$). იმ ცვლადებს შორის, რომელთათვისაც x_1 ცვლადის მნიშვნელობის გაზრდა საშიშია, შევარჩიოთ ის x_r , რომლის შესაბამისი სიდიდე

$\frac{-\beta_r}{\alpha_{r,1}}$ ($k+1 \leq r \leq n$) უმცირესია.

თუ ავიღებთ $x_1^{(1)} = \frac{-\beta_r}{\alpha_{r,1}}$ და $x_2^{(1)}, \dots, x_k^{(1)} = 0$, მაშინ

$$x_r^{(1)} = 0, \quad x_i^{(1)} \geq 0, \quad i = k+1, \dots, r-1, r+1, \dots, n$$

და (4.21)-დან

$$L(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) = d_0 - d_1 \frac{\beta_r}{\alpha_{r,1}} \leq d_0.$$

ამის შემდეგ X_1 გამოვიყვანოთ თავისუფალ უცნობთა ერთობლიობიდან და მის ნაცვლად ამ ერთობლიობაში შევიტანოთ X_f და გავიმეოროთ პროცედურა, სანამ მიზნის L ფუნქციის გამოსახულებაში ყველა კოეფიციენტი არ აღმოჩნდება არაუარყოფითი, მაშინ მიღებული ამონახსნი წარმოადგენს ოპტიმალურ ამონახსნს.

შენიშნოთ, რომ სიმპლექს-მეთოდის მნიშვნელოვანი თავისებურება იმაში მდგომარეობს, რომ გადაუგვარებელ შემთხვევაში ანუ როცა ყველა β_i , $i = k + 1, k + 2, \dots, n$ დადებითია, ამ მეთოდის რეალიზაციის პროცესში მცირდება მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა.

შეიძლება ნაჩვენებ იქნეს, რომ სიმპლექს-მეთოდის ალგორითმი მონოტონური და სასრულია.

სიმპლექს-მეთოდის ალგორითმის მონოტონურობა მარგინალ ჩანს. ყოველი ბიჯის (იტერაციის) ჩატარებისას ჩვენ თანდათან უფრო ვუახლოვდებით L მიზნის ფუნქციის საძიებელ მინიმუმს.

რაც შეეხება სიმპლექს-მეთოდის სასრულობის, ანუ იმის დამტკიცებას, რომ ოპტიმალური ამონახსნი აუცილებლად მოიძებნება სასრული რაოდენობა ბიჯების (იტერაციების) საშუალებით, დაინტერესებული მკითხველი შეიძლება გაეცნოს წრფივი დაპროგრამების ნებისმიერ სახელმძღვანელოში.

შემდეგ პარაგრაფში განვიხილავთ წრფივი დაპროგრამების კიდევ რამდენიმე ამოცანას და ერთ-ერთი მათგანის ამოხსნის საშუალებით მოვახდენთ სიმპლექს-მეთოდის ილუსტრაციას.

§5. ბალაღგილეების რა გეგმა ამოვირჩიოთ?

სამ სტუდენტს სურს გაემგზავროს ქალაქში, რომელიც მათი სახლიდან დაშორებულია 20 კმ-ით. მათ აქვთ მხოლოდ ორბალაღიანი მოკედი, რომლითაც შეიძლება მგზავრობა 36 კმ/სთ სიჩქარით. ფეხით თითოეულ სტუდენტს შეუძლია იმოძრაოს 4 კმ/სთ სიჩქარით. გადაადგილების რა გეგმა ამოვირჩიოთ, რომ სამივე სტუდენტი რაც შეიძლება მოკლე დროში ჩავიდეს ქალაქში? რა მინიმალური დრო იქნება საჭირო ამ გეგმის განსახორციელებლად? თუ მოძრაობა მოხდება ქვემოთ აღწერილი წესით.

შევადგინოთ სტუდენტთა გადაადგილების შემდეგი გეგმა: საწყის მომენტში D პუნქტიდან (სახლიდან) ერთდროულად გაემგზავრა მოკედით ორი სტუდენტი, ხოლო მესამე სტუდენტი ფეხით გაუღმა გზას ქალაქისაკენ. საშუალოდ T წერტილში მოკედლის მძღოლი გადმოსვამს თავის მგზავრს, რომელიც ქალაქამდე (H პუნქტამდე) გზას გააგრძელებს ფეხით. მოკედი ბრუნდება უკან მესამე სტუდენტთან, რომელსაც ხვდება K პუნქტში და მიჰყავს იგი H ქალაქისაკენ. მოძრაობის ორგანიზაციის ჩვენ მიერ აღწერილი გეგმა მიიღებს კონკრეტულ სახეს, თუ დავაფიქსირებთ მანძილს $|DT| = x$. ჩვენ უნდა ვიპოვოთ x -ის ის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც H ქალაქში უკანასკნელი სტუდენტის მისვლის t დრო იქნება მინიმალური.



ნახ. 4.2

აღენიშნოთ t_1 -ით დრო, რომელსაც დახარჯავს ქალაქში ჩასასვლელად ის სკულენტი, რომელიც ჯერ გაემგზავრა მოპედით T პუნქტამდე, ხოლო შემდეგ ფეხით H ქალაქამდე. t_2 -ით აღენიშნოთ დრო, რომელსაც ქალაქში ჩასასვლელად დახარჯავს მოპედის მძღოლი (მესამე სკულენტთან ერთად). ცხადია, რომ

$$t_1 = \frac{x}{36} + \frac{20-x}{4}.$$

ვთქვათ, $|KT| = y$. მაშინ $\frac{x-y}{4} = \frac{x+y}{36}$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $y = \frac{4}{5}x$.

ამის შემდეგ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$t_2 = \frac{20+2y}{36} = \frac{5}{9} + \frac{2}{45}x.$$

ცხადია, რომ $t = \max(t_1, t_2)$.

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ X-ის ის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც ფუნქცია $t = \max(t_1, t_2)$ მიიღებს უმცირეს მნიშვნელობას, გარდა ამისა, X-ის ამ მნიშვნელობისათვის უნდა დავადგინოთ t-ს მნიშვნელობა.

დასმული ამოცანა ჩამოვყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ X და t ცვლადების არაუარყოფითი მნიშვნელობები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ უგოლობათა სისტემას

$$\begin{cases} t \geq \frac{x}{36} + \frac{20-x}{4}, \\ t \geq \frac{5}{9} + \frac{2}{45}x. \end{cases} \quad (4.22)$$

და რომლებიც მიაწიჭებენ მინიმალურ მნიშვნელობას შემდეგ ფუნქციას

$$L(x, t) = 0 \cdot x + 1 \cdot t = t. \quad (4.23)$$

ამრიგად, მივიღეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანა. დავიყვანოთ იგი კანონიკურ სახეზე.

უგოლობათა (4.22) სისტემა გოლფასია უგოლობათა შემდეგი სისტემისა:

$$\begin{cases} 2x + 9t - 45 \geq 0, \\ -2x + 45t - 25 \geq 0. \end{cases} \quad (4.24)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\begin{aligned} 2x + 9t - 45 &= y_1, & y_1 &\geq 0, \\ -2x + 45t - 25 &= y_2, & y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

ამის შემდეგ ამოცანა ასე შეიძლება ჩამოვყალიბოთ: ვიპოვოთ X, t, y_1 , y_2 ცვლადების არაუარყოფითი მნიშვნელობები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ განგოლობათა სისტემას

$$\begin{cases} 2x + 9t - y_1 = 45, \\ -2x + 45t - y_2 = 25. \end{cases} \quad (4.25)$$

და მიაწიჭებენ მინიმალურ მნიშვნელობას შემდეგ მიზნის ფუნქციას:

$$L(x, t, y_1, y_2) = t.$$

ამრიგად, მივიღეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის კანონიკური სახე. ამოვხსნათ იგი სიმპლექს-მეთოდით.

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში ჩვენს მიზანს შეადგენს მეთოდის ილუსტრაცია.

(4.25) განგოლებათა სისტემაში ბაზისურ ცვლადებად შევარჩიოთ y_1 და y_2 , ხოლო თავისუფალ ცვლადებად x და t . ბაზისური ცვლადები გამოვსახოთ თავისუფალი ცვლადების საშუალებით

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x + 9t - 45, \\ y_2 &= -2x + 45t - 25. \end{aligned} \quad (4.26)$$

თუ თავისუფალ ცვლადებს მივანიჭებთ ნულის გოლ მნიშვნელობებს, მაშინ მივიღებთ (4.26) განგოლებათა სისტემის შემდეგ ამონახსნს:

$$x^{(1)} = t^{(1)} = 0, \quad y_1^{(1)} = -45, \quad y_2^{(1)} = -25.$$

ცხადია, რომ ეს ამონახსნი არ მიეკუთვნება დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეს.

შევარჩიოთ ბაზისურ უცნობებად სხვა ორი ცვლადი, მაგალითად, t და y_2 (შევნიშნოთ, რომ წრფივი დაპროგრამების თეორიაში დამუშავებულია მეთოდები, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება შერჩეულ იქნეს ახალი თავისუფალი ცვლადები ისე, რომ თანდათან მივუახლოვდეთ დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეს. ჩვენ არ განვიხილავთ ამ მეთოდებს, დაინგერესებულ მკითხველს შეუძლია მათ გაეცნოს სპეციალურ ლიტერატურაში).

ამის შემდეგ (4.25) განგოლებათა სისტემიდან ბაზისური t და y_2 ცვლადები გამოვსახოთ თავისუფალი x და y_1 ცვლადების საშუალებით.

$$\begin{aligned} t &= -\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y_1 + 5, \\ y_2 &= -12x + 5y_1 + 200. \end{aligned} \quad (4.27)$$

თუ თავისუფალ ცვლადებს მივანიჭებთ ნულის გოლ მნიშვნელობებს, მივიღებთ (4.27) განგოლებათა სისტემის შემდეგ ამონახსნს:

$$x^{(2)} = y_1^{(2)} = 0, \quad t^{(2)} = 5, \quad y_2^{(2)} = 200. \quad (4.28)$$

ეს ამონახსნი უკვე მიეკუთვნება დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეს. შევამოწმოთ, წარმოადგენს თუ არა (4.28) ოპტიმალურ ამონახსნს. ამისათვის მიზნის ფუნქცია $L(x, t, y_1, y_2)$ გამოვსახოთ თავისუფალი x და y_1 ცვლადების საშუალებით

$$L(x, t, y_1, y_2) = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y_1 + 5. \quad (4.29)$$

L მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა (4.28) ამონახსნზე გოლია 5-ის.

რადგან (4.29) გამოსახულებაში x -ის კოეფიციენტი უარყოფითია, ამიგომ (4.28) ამონახსნი არ წარმოადგენს ოპტიმალურ ამონახსნს. მართლაც, თუ გავზრდით x ცვლადის მნიშვნელობას, ამით ჩვენ შევამცირებთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობას.

(4.27) განგოლებათა სისტემის ორივე განგოლებაში x -ის კოეფიციენტები უარყოფითია, ამიგომ x ცვლადის მნიშვნელობების უკონტროლო გაზრდა „საშიშია“ როგორც t , ისე y_2 ცვლადებისათვის, რადგან ამ ცვლადებმა შეიძლება მიი-

ღონ უარყოფითი მნიშვნელობები. (4.27) განგოლებათა სისტემის პირველი განგოლებიდან გამომდინარეობს, რომ x ცვლადის მნიშვნელობა შეიძლება გავზარდოთ $\frac{5}{2} = \frac{45}{2}$ -მდე (x ცვლადის ამ მნიშვნელობისათვის, თუ $y_1 = 0$, მივიღებთ, რომ $t = 0$. x -ის შემდგომი გაზრდის შემთხვევაში t ცვლადი გახდება უარყოფითი). ამავე სისტემის მეორე განგოლებიდან გამომდინარეობს, რომ x ცვლადის მნიშვნელობა შეიძლება გავზარდოთ $\frac{200}{12} = \frac{50}{3}$ -მდე. ამრიგად, x ცვლადის მნიშვნელობების ზრდის შემთხვევაში უფრო ადრე გახდება ნულის გოლი y_2 ცვლადი.

x ცვლადი გამოვრიცხოთ თავისუფალი ცვლადების ჯგუფიდან და ამ ჯგუფში მის ნაცვლად გადავიყვანოთ y_2 . ე. ი. (4.25) განგოლებათა სისტემაში ახალი ბაბისური უცნობები x და t გამოვსახოთ თავისუფალი უცნობების y_1 და y_2 -ის საშუალებით:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{12}y_1 - \frac{1}{12}y_2 + \frac{50}{3}, \\ t = \frac{1}{54}y_1 + \frac{1}{54}y_2 + \frac{35}{27}. \end{cases} \quad (4.30)$$

თუ თავისუფალ ცვლადებს გავუტოლოებთ ნულს, მივიღებთ (4.30) განგოლებათა სისტემის შემდეგ ამონახსნს:

$$y_1^{(3)} = y_2^{(3)} = 0, \quad x^{(3)} = \frac{50}{3}, \quad t^{(3)} = \frac{35}{27}. \quad (4.31)$$

ცხადია, რომ ეს ამონახსნი მიეკუთვნება დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეს. გამოვსახოთ L მიზნის ფუნქცია თავისუფალი y_1 და y_2 ცვლადების საშუალებით:

$$L(x, t, y_1, y_2) = \frac{1}{54}y_1 + \frac{1}{54}y_2 + \frac{35}{27}. \quad (4.32)$$

(4.32) გამოსახულებაში y_1 და y_2 ცვლადების კოეფიციენტები დადებითია, რაც ნიშნავს, რომ (4.31) ამონახსნი წარმოადგენს ოპტიმალურ ამონახსნს.

ამრიგად, ჩვენ მიერ დასმული ამოცანა ამოხსნილია. მოკედის მძლოლმა პირველი მგზავრი უნდა ჩამოსვას სახლიდან $\frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$ კმ-ის მანძილზე. გადაადგილების ამ გეგმის განხორციელებას დასჭირდება $\frac{35}{27} = 1\frac{8}{27}$ სთ, ე. ი. $1\frac{8}{27}$ სთ არის ის უმცირესი დრო, რომელიც დასჭირდება სამივე სტუდენტის ქალაქში ჩასვლას.

§6. ამოცანა რაციონის შესახებ

ჯერ განვიხილოთ ერთი კონკრეტული ამოცანა, ხოლო შემდეგ ამოცანა რაციონის შესახებ განვიხილოთ ზოგადად და შევადგინოთ მისი მათემატიკური მოდელი.

უთქვათ, უნდა შევადგინოთ მენიუ. ჩვენს განკარგულებაშია ხუთი სახის პროდუქტი: პური, ბოსტნეული, ხილი, ხორცი, თევზი. ცნობილია, რომ ერთი კილოგრამი პური ღირს c_1 ლარი, კილოგრამი ბოსტნეული c_2 ლარი და ა. შ. ცნობილია აგრეთვე, რომ კილოგრამი პური შეიცავს a_{11} კგ ცილას, a_{12} კგ ცხიმსა და a_{13} კგ ნახშირწყლებს. ანალოგიური ინფორმაცია ცნობილია ყველა სხვა პროდუქტის შესახებ.

უნდა შევადგინოთ ისეთი მენიუ, რომ მასში შემაველ პროდუქტებში ცილის საერთო რაოდენობა იყოს არანაკლებ b_1 კგ-ის, ცხიმის – b_2 კგ-ის, ხოლო ნახშირწყლების – b_3 კგ-ის. ამავე დროს უნდა შევეცადოთ, რომ მენიუს ღირებულება იყოს მინიმალური.

შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

			1	2	3
			ცილა	ცხიმი	ნახშირწყლები
1	პური	c_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2	ბოსტნეული	c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
3	ხილი	c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}
4	ხორცი	c_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}
5	თევზი	c_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}
			b_1	b_2	b_3

აღვნიშნოთ X_1 -ით პურის რაოდენობა, რომელიც შევა მენიუში, X_2 -ით – ბოსტნეულის რაოდენობა, X_3 -ით – ხილის რაოდენობა, X_4 -ით ხორცის რაოდენობა და X_5 -ით თევზის რაოდენობა. მაშინ მენიუს საერთო ღირებულება გამოისახება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$L(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = \sum_{i=1}^5 c_i X_i. \quad (4.33)$$

მენიუში ცილების, ცხიმებისა და ნახშირწყლების რაოდენობაზე შეზღუდვა გამოისახება უტოლობათა შემდეგი სისტემის საშუალებით:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + a_{31}X_3 + a_{41}X_4 + a_{51}X_5 &\geq b_1, \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{32}X_3 + a_{42}X_4 + a_{52}X_5 &\geq b_2, \\ a_{13}X_1 + a_{23}X_2 + a_{33}X_3 + a_{43}X_4 + a_{53}X_5 &\geq b_3. \end{aligned} \quad (4.34)$$

ამრიგად, ამოცანა მენიუს შედგენის შესახებ ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად: ვიპოვოთ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ცვლადების არაუარყოფითი მნიშვნელობები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ (4.34) უტოლობათა სისტემას და მიაწიფებენ მინიმალურ მნიშვნელობას (4.33) მიზნის ფუნქციას. ცხადია, რომ მიღებული ამოცანა წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების ამოცანას. რაციონის შედგენის ეს მოდელი, რასაკვირველია, არ არის სრული. იგი, მაგალითად, არ ითვალისწინებს კვების პროდუქტებში შემაველი ზოგიერთი ელემენტის მავნე გავლენას ორგანიზმზე, არ ითვალისწინებს ცალკეული შემადგენელი ნაწილების რაოდენობის გემოლან შემოსაზღვრულობის პირობას (არ შეიძლება საკვებში ღომინირებლეს,

მაგალითად, ცხიმი, ცილა ან ნახშირწყალი. თითოეული კომპონენტის რაოდენობა რაციონში შემოსაზღვრული უნდა იყოს როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან). მაგრამ ამ მოთხოვნების გათვალისწინებით მათემატიკური მოდელის შეცვლა არ არის დაკავშირებული პრინციპულ სიძნელეებთან და ჩვენ კვლავ წრფივი დაპროგრამების ამოცანასთან გვექნება საქმე.

ახლა ამოცანა რაციონის შესახებ დავსვათ ზრგადად. ვთქვათ, მოცემულია პროდუქტების გარკვეული ასორტიმენტი. თითოეული მათგანისათვის ცნობილია მკვებავი ნივთიერების შემადგენლობა და ღირებულება. უნდა შედგეს რაციონი, რომელიც დააკმაყოფილებს მომხმარებელთა მოთხოვნებს მინიმალური დანახარჯებით.

ვთქვათ, რომ

n – წარმოადგენს სხვადასხვა პროდუქტების რაოდენობას,

m – მკვებავი ნივთიერების რაოდენობას (ცილები, ცხიმები და ა. შ.),

a_{ij} – i -ური მკვებავი ნივთიერების რაოდენობას, j -ური პროდუქტის წონის ერთეულში.

b_i – i -ური მკვებავი ნივთიერების სადღეღამისო მინიმალური მოთხოვნილება,

x_j – j -ური პროდუქტის სადღეღამისო დანახარჯი, რომელიც განსაზღვრულ უნდა იქნეს ამოცანაში მოცემული პირობებიდან. უპირველეს ყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ $x_j \geq 0, j=1,2,\dots,n$.

ცხადია, რომ $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ წარმოადგენს i -ური მკვებავი ნივთიერების რაოდენობას რაციონში, ამიტომ უნდა მოვითხოვოთ შემდეგი უტოლობების შესრულება

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i=1,2,\dots,m.$$

c_j წარმოადგენს j -ური პროდუქტის წონის ერთეულის ფასს, მაშინ მთელი რაციონის ღირებულება გამოისახება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

ამრიგად, რაციონის შერჩევის ამოცანის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\min L(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i=1,2,\dots,m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n.$$

მიღებული ამოცანა წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების ამოცანას, რომლის ამოხსნისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სიმპლექს-მეთოდი ან რომელიმე სხვა მეთოდი.

ცხადია, რომ ანალოგიური ამოცანების განხილვა შეიძლება გაგრძელდეს. შეიძლება განხილულ იქნეს გაცილებით უფრო რთული ამოცანებიც. მაგრამ, ვფიქრობთ, ჩვენ მიერ მოყვანილი ამოცანებიც იძლევა საკმაოდ ნათელ სურათს იმის შესახებ, თუ რა როლი შეუძლია შეასრულოს მათემატიკური მოდელირების მეთოდმა და, კერძოდ, ოპტიმიზაციის ამოცანებმა, ეკონომიკისა და ბევრი სხვა დარგის პრობლემების შესწავლასა და გადაწყვეტაში.

§7. გეომეტრიული კომენტარები

პირობიანი მაქსიმუმის ამოცანებისათვის

ეთქვათ, გვაქვს E^n სივრცეზე განსაზღვრული რაიმე $F(x)$ ფუნქციონალი, გარდა ამისა, მოცემული გვაქვს X სიმრავლე, რომელიც შედის E^n -ში. პირობიანი მაქსიმუმის ამოცანა ზოგადად შეიძლება ასე ჩამოვყალიბოთ:

ვიპოვოთ $x^* \in X$ ისეთი, რომ

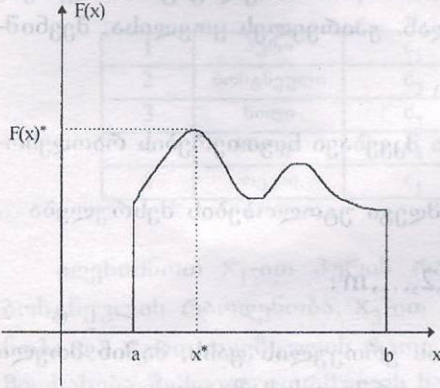
$$F(x^*) = \max_{x \in X} F(x) \quad (4.35)$$

X სიმრავლეს დასაშვებ სიმრავლეს უწოდებენ, ხოლო $F(x)$ ფუნქციონალს – მიზნის ფუნქციას.

ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ($n = 1$), (4.35) ამოცანას შეიძლება მიეცეს თვალსაჩინო გეომეტრიული ილუსტრაცია.

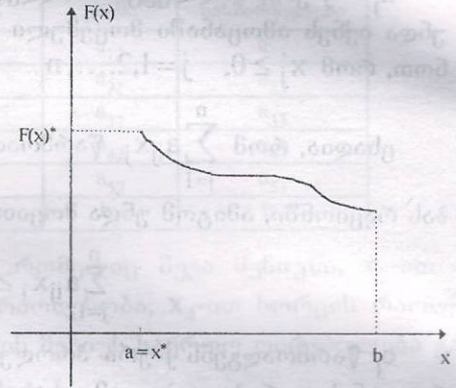
დასაშვები სიმრავლე $X = [a, b]$ და მიზნის ფუნქცია F გამოსახება სიბრტყეზე. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ორი შემთხვევა:

პირველ შემთხვევაში (ნახ. 4.3)



$X = [a, b]$ – დასაშვები სიმრავლე

ნახ. 4.3



$X = [a, b]$ – დასაშვები სიმრავლე

ნახ. 4.4

F -ის მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა X სიმრავლის შიგნით x^* წერტილზე;

მეორე შემთხვევაში (ნახ. 4.4) F -ის ის მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა X სიმრავლის საზღვრის x^* წერტილზე.

როდესაც $n = 2$, დასაშვები სიმრავლე უშუალოდ განისაზღვრება, ხოლო მიზნის ფუნქცია $F(x)$ განისაზღვრება დონის წირებისა და უსწრაფესი მრდის მიმართულების საშუალებით.

მიზნის ფუნქციის დონის წირი ეწოდება ისეთი წერტილების ერთობლიობას ევკლიდეს E^2 სივრცეში, რომელთათვისაც ფუნქციის მნიშვნელობები ერთი და იგივეა, ე. ი.

$$\{x \in E^2, F(x) = \text{const}\}. \quad (4.36)$$

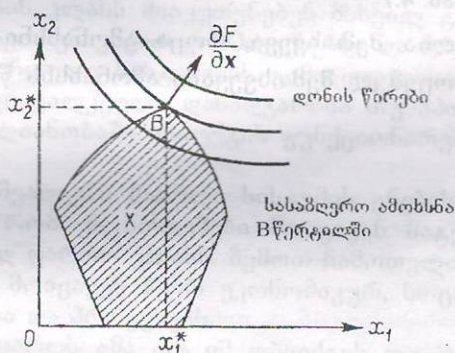
თუ (4.36)-ში შევცვლით კონსტანტებს, მივიღებთ დონის წირების ერთობლიობას, რომელსაც ეწოდება დონის წირების რუკა. დონის წირების კარგად ცნობილ მაგალითებს წარმოადგენენ ერთი და იმავე სიმაღლის დონეები გეოგრაფიულ რუკასა და ბარომეტრული წნევის წირები ამინდის რუკაზე.

მიმართულება, რომლის გასწვრივაც მიზნის ფუნქციის ზრდის სიჩქარე მაქსიმალურია, იწოდება უსწრაფესი ზრდის მიმართულებად. იგი გამოისახება ვექტორით, რომელიც შედგენილია მიზნის ფუნქციის პირველი კერძო წარმოებულებისაგან

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \right).$$

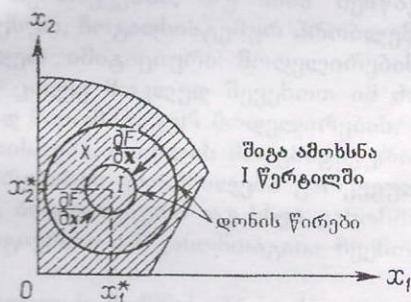
კერძო წარმოებულების ვექტორი, ანუ გრადიენტი, განსაზღვრავს $F(x)$ ფუნქციის უსწრაფესი ზრდის მიმართულებას.

ჩვენი მიზანია მოვებნოთ ისეთი წერტილი ან წერტილთა ერთობლიობა დასაშვები სიმრავლიდან, რომელზედაც მიღწევა $\max F(x)$. შემდეგ ნახაზზე მოცემულია შემთხვევა, როცა ამონახსნი მიიღწევა X სიმრავლის საზღვრის B წერტილზე:



ნახ. 4.5

შემდეგ მაგალითში ამონახსნი მიიღწევა X სიმრავლის შიდა I წერტილზე (იხ. ნახ. 4.6):

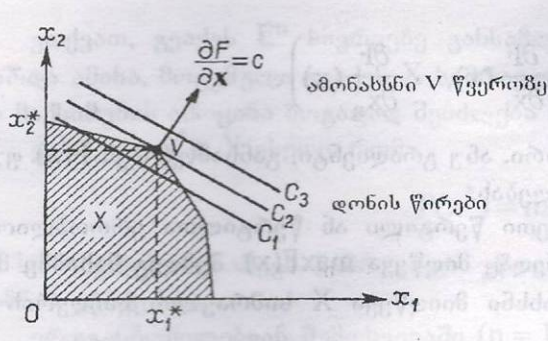


ნახ. 4.6

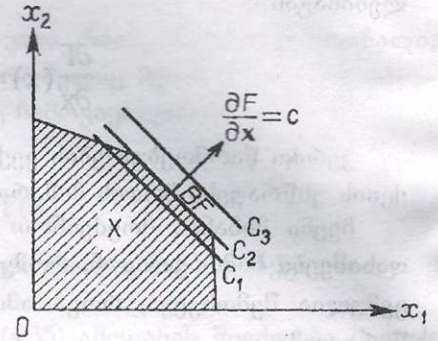
შემდეგ ნახაზებზე ილუსტრირებულია წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ორი შესაძლო ამონახსნი (იხ. ნახ. 4.7, 4.8).

c_k წრფივი დონის წირებია, ხოლო წრფივი შეზღუდვები და პირობები $x_j \geq 0$ ქმნიან დასაშვებ სიმრავლეს, რომელიც შემოსაზღვრულია წრფითა მონაკვეთებით (ნახაზებზე დაშვებული). რადგან ფუნქცია წრფივია, ამიტომ $\frac{\partial F}{\partial x} = c$ და ის მიმართულება, რომლის გასწვრივაც მიზნის ფუნქცია იზრდება მაქსიმალური სი-

ქართ, ყველგან ერთი და იგივეა. ამიტომაც ამ შემთხვევაში ვერ გვექნება შიდა ამონახსნი; იგი იქნება ან წვერო, ანდა ამონახსნს წარმოადგენს მთელი მო- ნაკვეთი, რომელიც შემოსაზღვრავს დასაშვებ სიძრაველს.



ნახ. 4.7



ნახ. 4.8

ნახაბ 4.7-ზე მოცემულია შემთხვევა, როცა ამონახსნი მიიღწევა V წვეროზე, ხოლო ნახაბ 4.8-ზე მოცემულ შემთხვევაში ამონახსნს წარმოადგენს BF მონაკ- ვეთი.

იმიტაციური მოღელჩიება

§1. რამდენიმე წინასწარი

შენიშვნა იმიტაციური მოღელჩიების შესახებ

თანამედროვე მეცნიერების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან პრობლემას წარმოადგენს რთული სისტემების ფუნქციონირების დინამიკის გამოკვლევა. ჩვეულებრივ, რთული სისტემების კლასს მიაკუთვნებენ მსხვილ ტექნოლოგიურ, საწარმოო, ენერგეტიკულ, საკომუნიკაციო კომპლექსებსა და მრავალ სხვა ობიექტს. ბუნებრივია, რომ რთული სისტემების გამოკვლევისას საჭირო ხდება არა მარტო მასში შემავალი ცალკეული დანაღვარისა თუ აპარატურის თვისებების შესწავლა, არამედ მთლიანობაში ობიექტის ფუნქციონირების კანონზომიერების დადგენა.

ჩვენს მიზანს არ შეადგენს რთული სისტემის ცნების მკაცრი განმარტება. შევნიშნოთ მხოლოდ, რომ ეს სისტემები მოიცავენ მაგერიალური სამყაროს ობიექტების საკმარისად ფართო კლასს. მემოთ ჩამოთვლილი „ტექნიკური“ სისტემების გარდა, ისინი მოიცავენ ბევრ ეკონომიკურ, სოციალურ, ბიოლოგიურ, ეკოლოგიურ სისტემებსა და პროცესებს.

მაგერიალური სამყაროს ამა თუ იმ ობიექტის თუ მოვლენის მიკუთვნება რთული სისტემის ან მარტივი სისტემის კლასისათვის, მეტად პირობითია. ამ დროს გათვალისწინებულ უნდა იქნეს არა მარტო მისი შემადგენელი ნაწილების მრავალფეროვნება, არამედ ისიც, თუ რა ამოცანა დგას მკვლევრის წინაშე. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ობიექტის, როგორც რთული სისტემის განხილვა მიზანშეწონილია იმ შემთხვევაში, თუ მისი შესწავლისას არსებითი როლი მიეკუთვნება კომპლექსურ, ზოგადსისტემურ პრობლემებს.

სანამ გადავიდოდეთ იმიტაციური მოღელჩიების ძირითადი პრინციპების განხილვაზე, ერთხელ კიდევ მოკლედ შევხებით იმ ძირითად ასპექტებს, რომელიც უღევს საფუძვლად მათემატიკურ მოღელჩიებას.

ყოველი რთული სისტემა, რომლის მათემატიკური მოღელჩის შექმნასაც ჩვენ ვაპირებთ, ფუნქციონირებისას ემორჩილება გარკვეულ კანონებს. ეს კანონებია – ფიზიკური, ქიმიური, ბიოლოგიური თუ სხვა კანონზომიერებანი. სავსებით შესაძლებელია, რომ ზოგიერთი ამ კანონთაგანი ჩვენთვის ჯერჯერობით ცნობილი არ იყოს.

მათემატიკური მოღელჩის შექმნის პროცესი, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ეტაპების საშუალებით:

1. უნდა დადგინდეს ის ძირითადი საკითხები, რომლის შესახებაც გვინდა მივიღოთ ინფორმაცია მათემატიკური მოღელჩის საშუალებით.

2. იმ მრავალრიცხოვანი კანონზომიერებიდან, რომელთა საფუძველზეც ხდება ამა თუ იმ სისტემის ფუნქციონირება, უნდა შეირჩეს ისინი, რომელთა გავლენაც არსებითია დასმულ კითხვებზე პასუხის გასაცემად (ამ შემთხვევაში ხშირად არსებით როლს თამაშობს მკვლევრის გამოცდილება და კვალიფიკაცია).

3. თუ აუცილებლობა მოითხოვს, ამ კანონზომიერებებს უნდა დაუშვათ გარკვეული პიპოთეზები მთლიანად რთული სისტემისა და მისი ნაწილების ფუნქციონირების შესახებ. როგორც წესი, ეს პიპოთეზები შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ მათ სასარგებლოდ შეიძლება მოვიყვანოთ

გარკვეული დასაბუთებანი (ამ შემთხვევაში აუცილებელია სპეციალისტი, რომელიც ღრმად იცნობს შესასწავლ რთულ სისტემას).

4. როგორც კანონები, ისე ჰიპოთეზები უნდა ჩამოყალიბდეს გარკვეული მათემატიკური დამოკიდებულების (განტოლებების, უტოლობების და ა. შ.) სახით, რომელთა ერთობლიობაც გვაძლევს შესასწავლი რთული სისტემის მათემატიკურ მოდელს.

ამით არსებითად მთავრდება მათემატიკური მოდელის აგების პროცესი. შემდეგ იწყება მიღებული მათემატიკური მოდელის შესწავლა ანალიზური და რიცხვითი მეთოდების საშუალებით, რომელიც ბოლოს და ბოლოს მიგვიყვანს ჩვენ მიერ დასმულ კითხვებზე პასუხის გაცემამდე. თუ მათემატიკური მოდელი ასე თუ ისე ადეკვატურად აღწერს შესასწავლი სისტემის ფუნქციონირების პროცესს, მაშინ მიღებული შედეგები ახლოს იქნება სისტემის რეალურ მახასიათებლებთან. უფრო მეტიც, ზოგჯერ შეიძლება პასუხი გავცეს ისეთ კითხვებს, რომლებიც თავდაპირველად მკვლევრების მიერ არც კი იყო დასმული. თუ შედეგები ცუდია, რაც მიუთითებს იმაზე, რომ შექმნილი მათემატიკური მოდელი ადეკვატურად არ ასახავს სისტემის ფუნქციონირებას, მაშინ უნდა მოხდეს ამ მოდელის დაზუსტება ან საერთოდ ახალი მათემატიკური მოდელის შექმნა. შემდეგ კვლავ უნდა შევისწავლოთ ეს მათემატიკური მოდელი და ა. შ. ეს პროცესი გაგრძელდება მანამ, სანამ არ მიიღება ისეთი მათემატიკური მოდელი, რომელიც შეესაბამება მისდამი წაყენებულ მოთხოვნებს.

იმისათვის, რომ დავადგინოთ მათემატიკური მოდელის ვარგისიანობა, საჭიროა გვექონდეს დამატებითი ინფორმაცია შესასწავლი სისტემის ფუნქციონირების შესახებ, მაგალითად, ექსპერიმენტის შედეგები. შევნიშნოთ, რომ მათემატიკური მოდელის ვარგისიანობის კრიტერიუმები არ არის ფორმალიზებული და ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში მოითხოვს დამატებითი გამოკვლევების ჩატარებას.

ახლა მოკლედ განვიხილოთ მათემატიკური მოდელირების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიმართულების – იმიტაციური მოდელირების ზოგიერთი ასპექტი. გერმინს „იმიტაცია“ აქვს რამდენიმე განმარტება, ხოლო თითოეულ განმარტებას თან ახლავს მთელი რიგი ნიუანსები, რომლებიც ხშირად დამოკიდებულია გამოყენებითი მათემატიკის იმ დარგზე, სადაც ეს ტერმინი გამოიყენება.

პირველად გერმინი „იმიტაცია“ წარმოიშვა ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკასთან დაკავშირებით, სადაც ამ ტერმინით აღნიშნული იყო რთული შემთხვევითი პროცესის მახასიათებლების გამოთვლის მიახლოებითი მეთოდები. ეს მეთოდები გულისხმობდა შესასწავლი პროცესის მათემატიკური მოდელის მრავალჯერად რეალიზაციას და შემდეგ ამ „ექსპერიმენტების“ საშუალებით მიღებული შედეგების დამუშავებას.

მას შემდეგ, რაც დაიწყო გამოყენებითი მათემატიკის მეთოდების აქტიური გამოყენება ისეთ დარგებში, როგორცაა: ეკონომიკა, ოპერაციათა გამოკვლევა, სოციოლოგია, ეკოლოგია და ბევრი სხვა, ტერმინმა „იმიტაცია“ შეიძინა მნიშვნელობა, რომელიც მთლიანად არ თანხვდება მის თავდაპირველ განმარტებას. ამ ტერმინით დაიწყო „რთული“ პროცესების რაციონალური მართვის ხერხების არჩევის მეთოდების აღნიშვნა. ეს მეთოდები მდგომარეობს შესასწავლი სისტემის მათემატიკური მოდელის კომპიუტერზე მრავალჯერად რეალიზაციაში და შემდეგ, მიღებული შედეგების ანალიზისა და ურთიერთშედარების საფუძველზე, რაციონალური გეგმის ამორჩევაში. შედეგების შედარება, რომლის შესახებაც ჩვენ გვაქვს ლაპარაკი, შეიძლება მოხდეს გარკვეული ფორმალური კრიტერიუმების საშუალებით ან შეიძლება აგარედდეს არაფორმალურ ხასიათს. ამასთან, რაც უფრო რთულია შესასწავლი პროცესის მათემატიკური მოდელი, ის შეიცავს მით უფრო მეტ სხვადასხვა პარამეტრს და ამ შემთხვევაში უფრო მეტ მნიშვნელობას იძენს მიღებული შედეგების შედარების არაფორმალური კრიტერიუმები.

ტერმინ „იმიტაციის“ ორი მოყვანილი განმარტება, მათი არაიდენტიფიკაციის მიუხედავად, ბევრ შემთხვევაში პრაქტიკულად ერთმანეთს ემთხვევა. მართლაც, თუ განვიხილავთ რთულ, მართვად პროცესებს და შევეცდებით შევადგინოთ

გარკვეული აზრით, მათი აღეკვბტური მათემატიკური მოდელი, დავინახავთ, რომ ჩვეულებრივ ეს მოდელი შეიცავს ბევრ შემთხვევით პარამეტრს. ან პროცესის მართვის ალტერნატიული ვარიანტების განხილვისას აუცილებელი ხდება მათემატიკური მოდელის კომპიუტერზე მრავალჯერადი რეალიზაცია და შემდეგ, მიღებული შედეგების სტატისტიკური დამუშავება, ე. ი. ჩვენ ამ შემთხვევაში საქმე გვექნება მეთოდებთან, რომლებიც ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში აღინიშნება ტერინით – „იმიტაცია“.

ამ შენიშვნის მიუხედავად, როდესაც გამოიყენებითი მათემატიკის სპეციალისტები იყენებენ ტერმინს „იმიტაცია“, გულისხმობენ არა შემთხვევითი პროცესის მახასიათებლების დადგენას სტატისტიკური მასალის საშუალებით (ეს მომენტი მათთვის წარმოადგენს გარკვეულ ტექნიკურ დეტალს), არამედ იმას, რომ გამოსაკვლევი სისტემის ფუნქციონირების, მართვის, კონსტრუქციის ალტერნატიული ვარიანტები მათემატიკურ მოდელს მოეწოდება „გარედან“ და შემდეგ ხდება მიღებული შედეგების შედარება გარკვეული აზრით საუკეთესო ვარიანტის შესარჩევად. ამიგომ ხშირად იმიტაციას უწოდებენ ალტერნატიული ვარიანტების შედარებას, როდესაც პროცესის მრავალჯერადი რეალიზაცია ხდება პარამეტრების გარკვეული რაოდენობის შემცველი დეტერმინირებული მოდელის საშუალებით. ამ ტერმინმა („იმიტაცია“) შეიძინა ისეთი შინაარსობრივი დატვირთვა, რომელიც გარკვეული თვალსაზრისით უპირისპირდება ტერმინს „ოპტიმიზაცია“.

იმიტაციური მოდელირება ხშირად გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როდესაც შეუძლებელია ოპტიმიზაციის ამოცანის ამოხსნა.

გარდა ტერმინისა „იმიტაცია“, რთული სისტემების შესწავლისას გამოიყენება ტერმინი „იმიტაციური მოდელი“, „იმიტაციური ექსპერიმენტი“, „იმიტაციური ექსპერიმენტის სცენარი“. ტერმინი „იმიტაციური მოდელი“ გამოიყენება სპეციალურად იმ შემთხვევაში, როდესაც სხვადასხვა გეგმების შედარება ხდება მრავალვარიანტული გათვლების (მათემატიკური მოდელის მრავალჯერადი რეალიზაციის) შედეგად. ამრიგად, ტერმინი „იმიტაციური მოდელი“ ახასიათებს არა იმდენად თვითონ მოდელს, არამედ მისი გამოყენების ხერხებს. ამიგომაც ერთი და იგივე მოდელი, რომელიც გამოიყენება როგორც ვარიანტული გათვლებით, ისე ოპტიმალური ამოცანის ამოხსნისათვის, ერთდროულად შეიძლება იყოს იმიტაციურიცა და არაიმიტაციურიც.

როგორც წესი, იმიტაციური მოდელები რთულია, აქვთ დიდი განზომილება, ხოლო ბევრ პარამეტრს, რომელიც შედის მოდელში, აქვს შემთხვევითი ხასიათი. ხშირად ასეთი მოდელების განხილვისას შეუძლებელია (და ზოგჯერ არაბუნებრივიც) ოპტიმიზაციის ამოცანების დასმა, რადგან შეუძლებელია მიზნის ფუნქციის, ამოცანის ამოხსნის შეფასების კრიტერიუმების დადგენა. ეს გარემოება, როგორც აღვნიშნეთ, გარკვეული აზრით ამართლებს ტერმინის „იმიტაციური მოდელირება“ შემოღებას.

ამა თუ იმ პროცესის მიმდინარეობის, რთული სისტემის ფუნქციონირების აღწერის პროცესს, როდესაც გამოიყენება იმიტაციური მოდელირების მეთოდი, ხშირად უწოდებენ „იმიტაციურ ექსპერიმენტს“. რადგან შესასწავლი რთული სისტემები ჩვეულებრივ ძალზე განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, ამიგომ იმიტაციური ექსპერიმენტები მეტად მრავალფეროვანია. ეს მრავალფეროვნება განსაკუთრებით იჩენს თავს, როდესაც ექსპერიმენტის მიზანია რთული პროცესის მართვის რაციონალური მეთოდების დადგენა.

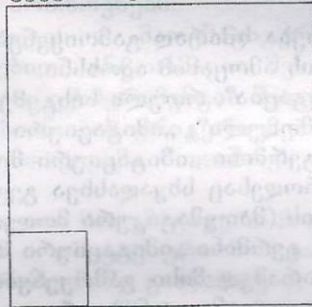
ხშირად იმიტაციური ექსპერიმენტის ორგანიზაცია ხდება ისე, რომ მასში მონაწილეობას იღებს ექსპერტი (ან ექსპერტების ჯგუფი). ეს ექსპერტები კომპიუტერის საშუალებით იღებენ სრულ ინფორმაციას შესასწავლი პროცესის შესახებ ექსპერიმენტის მიმდინარეობის ნებისმიერ ეტაპზე. ახანალიზებენ ამ ინფორმაციას, ამის შემდეგ იღებენ გადაწყვეტილებას პროცესის მართვის შესახებ (ეს გადაწყვეტილება ამ ექსპერტების აზრით ოპტიმალურია) და ამ გადაწყვეტილებას აწვდიან კომპიუტერს, რის საფუძველზეც ხდება ექსპერიმენტის შემდგომი გაგრძელება. თუ შესასწავლი პროცესი ისეთია, რომ მას რეალურად მართავს

რამდენიმე ექსპერტი, იღებს რა თითოეული მათგანი სრულ ინფორმაციას პროცესის შესახებ, მაშინ ამ შემთხვევაში ხშირად იმიტაციურ პროცესს უწოდებენ იმიტაციურ თამაშებს. ეს ტერმინი გამოიყენება მაშინ, როდესაც შესასწავლი პროცესი ატარებს კონფლიქტურ ხასიათს. ასეთი პროცესის მაგალითებია კონკურენცია ბაზრის მოსაპოვებლად, საომარი მოქმედება და ა. შ.

იმისათვის, რომ კარგად წარმოიდგინოთ იმიტაციური მოღველირების არსი, ჩვენ განვიხილავთ რამდენიმე მაგალითს.

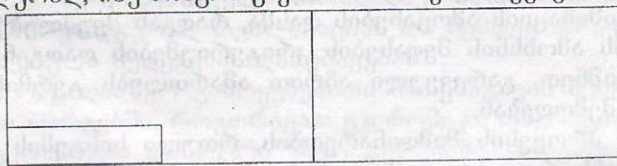
§2. „ხაბაზის“ ბარლაქმნა

ვთქვათ, ჩვენი მიზანია გამოვაცხოთ პური. ამ მიზნით, უპირველეს ყოვლისა, უნდა მოვზილოთ ცომი. შემდეგ დავაცადოთ ცომს ამოსვლა და სპეციალური მოწყობილობით (რომელიც დიასახლისებისათვის კარგად არის ცნობილი), ცომი გავაბრტყელოთ და მას მივცეთ კვადრატის ფორმა. უცებ გავგახსენდა, რომ ცომი უმარილოა. ავიღოთ სუფრის კოვზით მარილი. ვთქვათ, ჩვენდა უნებურად, მოულოდნელად, მარილი დაგვეყარა ცომის კუთხეში (იხ. ნახ. 5.1).



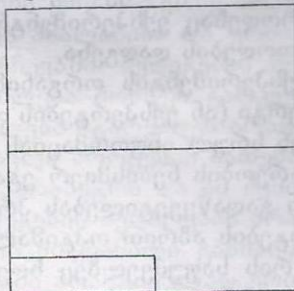
ნახ. 5.1

მაგრამ აქ საშიში არაფერია. გამოვიყენოთ ხაბაზის გამოცდილება: კვადრატი გავწელოთ პორიბონგალურად, ისე, რომ მისი სიგრძე ორჯერ გაიზარდოს, ხოლო სიგანე კი ორჯერ შემცირდეს. შემდეგ მიღებული მართკუთხედი გავჭრათ შუაზე ვერტიკალურად, ისე როგორც ეს ნახ. 5.2-ზეა ნაჩვენები



ნახ. 5.2

და კვლავ შევადგინოთ ახალი კვადრატი: ამ მიზნით, მიღებული მართკუთხედის მარჯვენა ნაწილი გემოლან მივადლოთ მის მარცხენა ნაწილს (იხ. ნახ. 5.3).

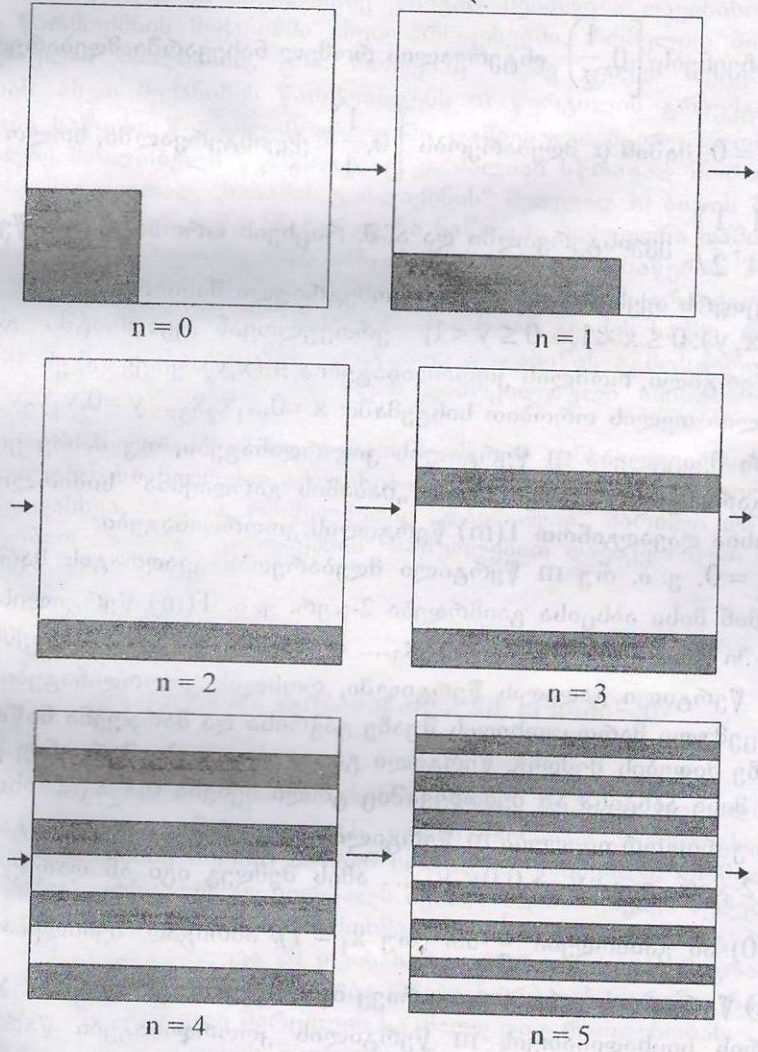


ნახ. 5.3

გარდაქმნას, რომელიც ჩვენ ჩავაგარეთ კვადრატის მიმართ, ხშირად „ხაბაზის გარდაქმნასაც“ უწოდებენ. ნებისმიერმა ხაბაზმა თუ დიასახლისმა იცის, რომ ამ პროცედურის მრავალჯერ ჩაგარების შედეგად, დაყრილი მარილი თანაბრად განაწილება მთელ ცომში. აქ ბუნებრივად ისმება კითხვა: რამდენჯერ უნდა ჩავაგართ ეს გარდაქმნა, რომ მიღებული ცომი იყოს ერთგვაროვანი. ამ კითხვაზე პასუხის გაცემის მიზნით განვიხილოთ „ხაბაზის გარდაქმნის“ გეომეტრიული შინაარსი.

ვნახოთ, თუ რა ევოლუციას განიცდის ცომის ის ნაწილი, რომელზედაც დაიყარა მარილი, „ხაბაზის გარდაქმნების“ შედეგად. ვთქვათ, ეს ნაწილი წარმოადგენს კვადრატს (თუმცა ის შეიძლება იყოს ნებისმიერი სხვა ფიგურაც).

როგორც ნახაზი 5.4-დან ჩანს საკმარისად დიდი n -სათვის მარილი განაწილებული იქნება გარკვეული ამრით თანაბრად.



ნახ. 5.4

ახლა შევეცადოთ აღვწეროთ „ხაბაზის გარდაქმნა“ ფორმულების საშუალებით. შუაზე გაყოფა, რომელიც მონაწილეობს აღნიშნულ გარდაქმნაში, გვკარნახობს, რომ ასეთ აღწერაში შეიძლება სასარგებლო აღმოჩნდეს თვლის ორობითი სისტემა. გავიხსენოთ, რომ ყოველი რიცხვი $[0,1)$ ინტერვალიდან შეიძლება

წარმოვუდგინოთ იქნეს შემდეგი სახით: $\alpha = 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ სადაც ყოველი α_i გოლია ან 0-ის ან 1-ის. ასე მაგალითად, $\frac{1}{2}$ -ის ორობითი ჩანაწერია 0,1; ხოლო $\frac{1}{3}$ -ის კი - 0,010101...

[0,1) ინტერვალის გავყოთ შუაზე. თუ $\alpha_1 = 0$, მაშინ α რიცხვი მდებარეობს ინტერვალის მარცხენა ნაწილში - $\left[0, \frac{1}{2}\right)$, ხოლო თუ $\alpha_1 = 1$, მაშინ იგი მდებარეობს ინტერვალის მარჯვენა ნახევარში - $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. ვთქვათ, $\alpha_1 = 0$, მაშინ α_2 რიცხვი გვიჩვენებს $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ ინტერვალის რომელ ნახევარში მდებარეობს α რიცხვი: თუ $\alpha_2 = 0$, მაშინ α მდებარეობს $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ ქვეინტერვალში, ხოლო თუ $\alpha_2 = 1$, მაშინ - $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ქვეინტერვალში და ა. შ. რიცხვის ორობითი ჩანაწერის ყველა დანარჩენ ციფრს აქვს ანალოგიური გეომეტრიული შინაარსი.

$k = \{(x, y): 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$ ერთეულოვან კვადრატში განვიხილოთ რაიმე m წერტილი, რომლის კოორდინატებია $m(x, y)$. ვთქვათ, ეს კოორდინატები ჩაწერილია თვლის ორობით სისტემაში: $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$ ენახოთ, თუ როგორ შეიცვლება m წერტილის კოორდინატები, თუ მასზე ვიმოქმედებთ „ხაზაზის გარდაქმნით“. აღვნიშნოთ „ხაზაზის გარდაქმნა“ სიმბოლოთი T . ე. ი. ჩვენი მიზანია დავადგინოთ $T(m)$ წერტილის კოორდინატები.

თუ $x_1 = 0$, ე. ი. თუ m წერტილი მდებარეობს კვადრატის მარცხენა ნახევარში, მაშინ მისი აბსცისა გაიზრდება 2-ჯერ. ე. ი. $T(m)$ წერტილის აბსცისა ამ შემთხვევაში გოლი იქნება $x = 0, x_2 x_3 \dots$ თუ $x_1 = 1$, მაშინ გარდაქმნის პირველ ეტაპზე m წერტილი გადადის წერტილში, რომლის კოორდინატებია $1, x_2 x_3 \dots$ ხოლო მოცემული მართკუთხედის შუაზე გაჭრისა და მარჯვენა ნაწილს მარცხენა ნაწილზე მიდების შემდეგ, წერტილი გადაადგილდება მარცხნივ ერთი ერთეულით და მისი აბსცისა ამ შემთხვევაშიც გოლი იქნება $0, x_2 x_3 \dots$ ახლა გამოვიკვლიოთ, თუ როგორ იცვლება m წერტილის ორდინატი. პირველ ეტაპზე იგი შემცირდება 2-ჯერ, ე. ი. $y \rightarrow 0, 0 y_1 y_2 \dots$ ამის შემდეგ იგი ან ღარჩება უცვლელი (თუ $x_1 = 0$) ან გაიზრდება $\frac{1}{2}$ -ით (თუ $x_1 = 1$). ამრიგად, შეიძლება დავწეროთ, რომ $T(m)$ წერტილის ორდინატი ორივე შემთხვევაში გოლია $0, x_1 y_1 y_2 \dots$ -ის.

ჩაწერის სიცხადისათვის m წერტილის კოორდინატები წარმოვადგინოთ ერთ სტრიქონში:

$$m \leftrightarrow (\dots y_3 y_2 y_1, x_1 x_2 x_3 \dots) \leftrightarrow (\dots z_{-2} z_{-1}, z_0 z_1 z_2 \dots),$$

მაშინ $T(m)$ წერტილის კოორდინატები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$T(m) \leftrightarrow (\dots y_2 y_1 x_1, x_2 x_3 x_4 \dots) \leftrightarrow (\dots z_{-2} z_{-1} z_0, z_1 z_2 \dots)$$

როგორც ვხედავთ, წერტილის კოორდინატის ორობითი ჩანაწერი იძლევა საშუალებას T გარდაქმნა წარმოვადგინოთ ძალზე მარტივი სახით: მას შეესაბამება ორივე მხრივ უსასრულო მიმდევრობაში მძიმის მიმართ მარცხნივ ერთი თანრიგით გადაადგილება (ცხადია, რომ ეს მიმდევრობა შედგება მხოლოდ 0-სგან და 1-სგან):

$$T : (...z_{-1}, z_0 z_1 z_2 ...) \rightarrow (...z_{-1} z_0, z_1 z_2 ...).$$

ამ ჩანაწერში $z_n, n > 0$ ციფრებს აქვთ ცხადი გეომეტრიული შინაარსი: თუ $z_n = 0$, მაშინ „ხაზაზის გარდაქმნის“ n -ჯერ ჩაგარებისას წერტილი გადადის კვადრატის მარცხენა ნახევარში, თუ $z_n = 1$, მაშინ – მარჯვენა ნახევარში.

სიმარტივის მიუხედავად, „ხაზაზის გარდაქმნა“ ძალიან კარგად ახდენს ბევრი რეალური ფიზიკური პროცესის მოდელირებას.

აღვნიშნოთ, რომ ამ მაგალითზე კარგად შეიძლება დავინახოთ შემთხვევითობის წარმოქმნის მექანიზმი ისეთ პროცესებში, რომელთა მიმდინარეობა განსაზღვრულია მთლიანად, ე. ი. როდესაც საქმე გვაქვს დეტერმინირებულ პროცესთან. ასეთ მექანიზმს წარმოადგენს m წერტილის გრაექტორიის არამდგრადობა საწყისი წერტილის არჩევაში დაშვებული მცირე ცდომილების მიმართ. ძალზე მახლობელი წერტილებიც კი ძალიან სწრაფად შორდებიან ერთმანეთს. ასე მაგალითად, „ხაზაზის გარდაქმნის“ შედეგად 30 ბიჯის შემდეგ წერტილის კვადრატის მარცხენა ან მარჯვენა ნაწილში მოხვედრა დამოკიდებულია წერტილის საწყისი მდებარეობის აბსცისის ორობითი ჩანაწერის 30-ე ნიშანზე. ასე რომ, მცირე ცდომილებამაც კი შეიძლება გამოიწვიოს გრაექტორიის არსებითი ცვლილება. ანალოგიურ არამდგრადობასთან გვაქვს საქმე, როდესაც ვიხილავთ განცოლებებს, რომლებიც აღწერენ დედაძიწის აგმოსფეროს მოძრაობას. ეს ვარაუდობა კი უშუალოდ არის დამოკიდებული ამინდის პროგნოზის არასაიმედობაზე.

„ხაზაზის გარდაქმნის“ გამოყენებით შეიძლება განხილულ იქნეს იმიტაციური მოდელირების საინტერესო ამოცანები. ამ მიზნით შეიძლება ავიღოთ საწყის ეტაპზე სხვადასხვა არეები, რომელზედაც „დაყრილია“ მარილი და კომპიუტერის მეშვეობით „ხაზაზის გარდაქმნის“ საშუალებით დავაკვირდეთ ამ არეების გრანსფორმაციას.

§3. როგორ ბალავარჩინოთ ხორბალი?

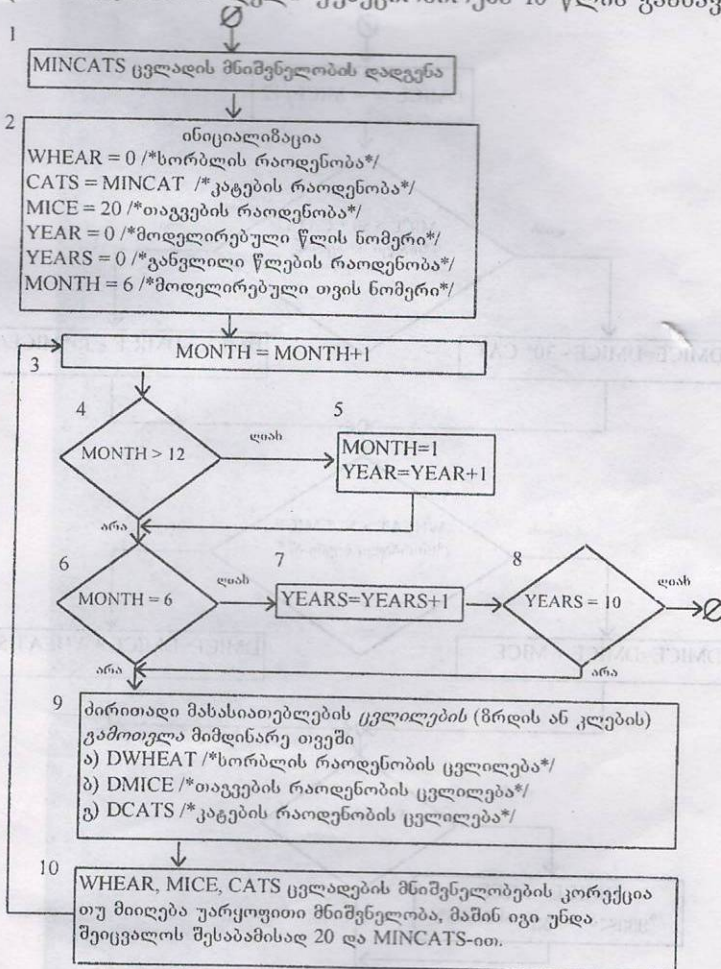
ვთქვათ, გარკვეული რეგიონის მოსახლეობას მოჰყავს ხორბლის მოსავალი, რომელიც მათთვის წარმოადგენს კვების ძირითად პროდუქტს. ისინი ყოველწლიურად (ივლისის თვეში) იღებენ ხორბლის მოსავალს, რომელიც 1 მლნ კილოგრამს შეადგენს. აღებულ ხორბალს შესანახად ათავსებენ ბედელში. რეგიონის მოსახლეობის ყოველთვიური მოხმარება შეადგენს 50000 კგ პურის მარცვალს. ე. ი. მოსავალი იძლევა 20 თვის სამყოფ პროდუქციას. მაგრამ ზოგჯერ ხდება ისე, რომ რეგიონის მოსახლეობა რჩება ხორბლის გარეშე, რადგან თავვეები ანადგურებენ შენახული მარცვლის საკმაოდ დიდ რაოდენობას.

დავუშვათ, რომ რეგიონის ეკოლოგიური სისუფთავის შენარჩუნების მიზნით, მოსახლეობა თავგების წინააღმდეგ არ იყენებს შხამ-ქიმიკატებს, ამიგომ ისინი ცდილობენ თავგების წინააღმდეგ კატების გამოყენებას. მაგრამ ხშირ შემთხვევაში აღმოჩნდება, რომ კატებიც ვერ ახერხებენ პრობლემის გადაწყვეტას და მოსახლეობა პერიოდულად მაინც განიცდის მარცვლეულის ნაკლებობას და იძულებულია ხორბალი შეისყიდოს სხვა რეგიონებიდან.

7. როდესაც თავგები ბევრია ($M > 50C$), მაშინ ყოველი დედალი კატა (კატების მთელი რაოდენობის ნახევარი) შობს 6 ცინდალს წელიწადში ორჯერ (მარტი და სექტემბერი). მაგრამ, თუ $M < 25C$, მაშინ კატები იმდენად დასუსტებულნი არიან, რომ ისინი სრულებით არ მრავლდებიან. თუ $25C \leq M \leq 50C$, მაშინ ახლად დაბადებული კატების რაოდენობა (მარტში და სექტემბერში) იცვლება 0-დან ($M = 25C$) 3C-მდე ($M = 50C$). ამ შემთხვევაში ახლად დაბადებული კატების რაოდენობა გოლია $\left[3 \left(\frac{M}{25} - C \right) \right]$ -ს.

8. ყოველი კატა ცხოვრობს საშუალოდ 10 წელიწადს, ამიგომ ყოველთვიურად კვდება 1 კატა ყოველი 120 კაგიდან. როდესაც $C < 120$, მაშინ ყოველთვიურად $\frac{C}{120}$ ალბათობით კვდება ერთი კატა. ამავე დროს, დაუშვებელია, რომ კატების რაოდენობა აღმოჩნდეს რაღაც მინიმალურ რაოდენობაზე ნაკლები. კატების ეს მინიმალური რაოდენობა აღვნიშნოთ სიმბოლოთი MINCATS.

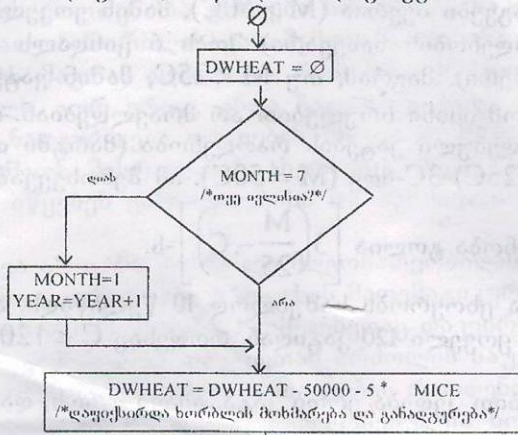
მოვიყვანოთ შემთხვევითი მოდელისათვის ფუნქციონირების ბლოკ-სქემა. ვნახოთ, რომ მოდელი ფუნქციონირებს 10 წლის განმავლობაში.



ნახ. 5.5

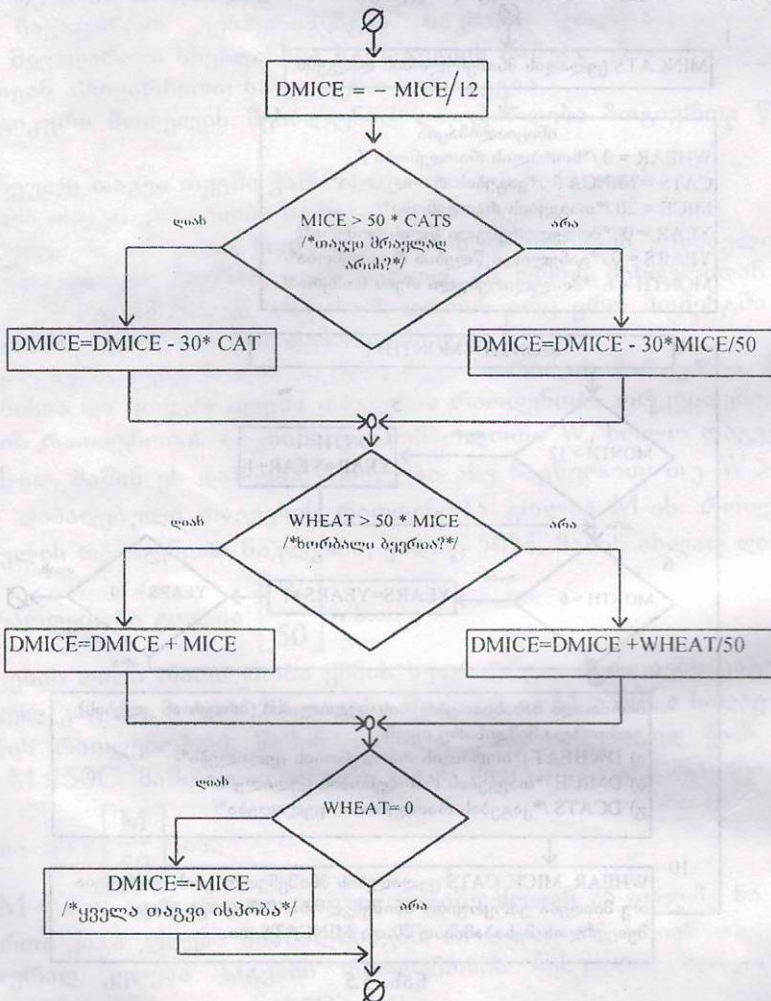
მე-9 ბლოკი განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით. ცხადია, რომ ეს არის მოდელის ძირითადი ბლოკი, რომელშიც ხდება მოდელის ძირითადი მახასიათებლების ცვლილების (ნაზრდის) დადგენა.

მოვიყვანოთ მე-9 ბლოკის ა) ნაწილის ბლოკ-სქემა.



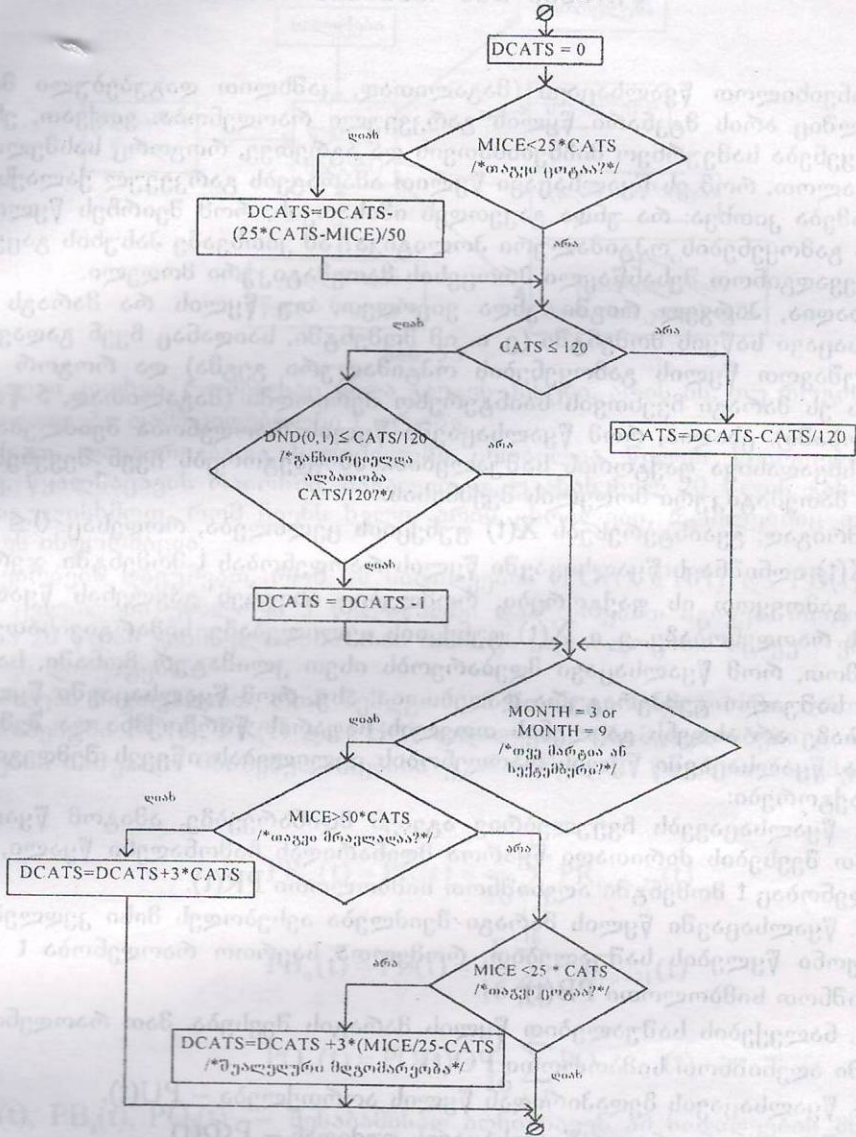
ნახ. 5.6

მოვიყვანოთ მე-9 ბლოკის ბ) ნაწილის ბლოკ-სქემა.



ნახ. 5.7

მოციყვანოთ მე-9 ბლოკის გ) ნაწილის ბლოკ-სქემა.



ნახ. 5.8

ნორ როგორც ვხედავთ, მოციყვანილ სქემებში ნაგულისხმევია, რომ ხორბლის მარცელის მთლიანი რაოდენობა იხახება ერთ ბელელში, გარდა ამისა, ღაფიქსირებულია მოსავლის რაოდენობა. ცხადია, რომ ამ მაჩვენებლების ვარირების ხარჯზე მოციყვანილი მოდელი შეიძლება კიდევ უფრო გამრავალფეროვნდეს.

§4. ისევ წყალსაცავის შესახებ

განვიხილოთ წყალსაცავი (მაგალითად, კაშლით დაგუბებული მდინარე), რომელშიც არის მტკნარი წყლის გარკვეული რაოდენობა. ვთქვათ, ეს წყალი გამოიყენება სამეურნეო მიზნებისათვის და აგრეთვე, როგორც სასმელი წყალი. ჩავთვალოთ, რომ ეს წყალსაცავი წყლით ამარაგებს გარკვეულ ქალაქს.

ისმება კითხვა: რა უნდა გაკეთდეს იმისათვის, რომ შეირჩეს წყლის ამ მარაგის გამოყენების ოპტიმალური პოლიტიკა? ამ კითხვაზე პასუხის გაცემის მიზნით შევადგინოთ შესასწავლი პროცესის მათემატიკური მოდელი.

ცხადია, პირველ რიგში უნდა ვიცოდეთ, თუ წყლის რა მარაგს შეიცავს წყალსაცავი საწყის მომენტში (ე. ი. იმ მომენტში, საიდანაც ჩვენ გადავწყვიტეთ შევიმუშავოთ წყლის გამოყენების ოპტიმალური გეგმა) და როგორ იცვლება წყლის ეს მარაგი ჩვენთვის საინტერესო პერიოდში (მაგალითად, 5 წლის განმავლობაში). ცხადია, რომ წყალსაცავში წყლის რაოდენობა შეიძლება შეიცვალოს სხვადასხვა ფაქტორის საშუალებით. ამ ფაქტორებს ჩვენ შევვებით ამოცანის მათემატიკური მოდელის შექმნისას.

ამრიგად, გვაინტერესებს $X(t)$ ფუნქციის ცვლილება, როდესაც $0 \leq t \leq 5$, სადაც $X(t)$ აღნიშნავს წყალსაცავში წყლის რაოდენობას t მომენტში. ჯერ შევეცადოთ გამოვყოთ ის ფაქტორები, რომლებიც ახდენენ გავლენას წყალსაცავში წყლის რაოდენობაზე, ე. ი. $X(t)$ ფუნქციის ცვლილებაზე. სიმარტივისათვის ვიგულისხმობთ, რომ წყალსაცავი მდებარეობს ისეთ კლიმატურ ზონაში, სადაც ზამთრის საშუალო ტემპერატურა დადებითია. ასე, რომ წყალსაცავში წყლის რაოდენობაზე არ ახდენს გავლენას თოვლის საფარის წარმოქმნა და შემდეგ მისი დნობა. წყალსაცავში წყლის რაოდენობის ცვლილებას იწვევს შემდეგი არსებითი ფაქტორები:

1. წყალსაცავებს ჩვეულებრივ აკებენ მდინარეებზე. ამიგომ წყალსაცავის წყლით შევსების ძირითადი წყაროა მდინარიდან ჩამონადენი წყალი, რომლის რაოდენობაც t მომენტში აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $PR(t)$.

2. წყალსაცავში წყლის მარაგი შეიძლება ივსებოდეს მისი კელეებიდან გამონაკონი წყლების საშუალებით, რომელთა საერთო რაოდენობა t მომენტში აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $PB(t)$.

3. ნალექების საშუალებით წყლის მარაგის შევსება. მათ რაოდენობა t მომენტში აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $PO(t)$.

4. წყალსაცავის გელაპირიდან წყლის აორთქლება - $PU(t)$.

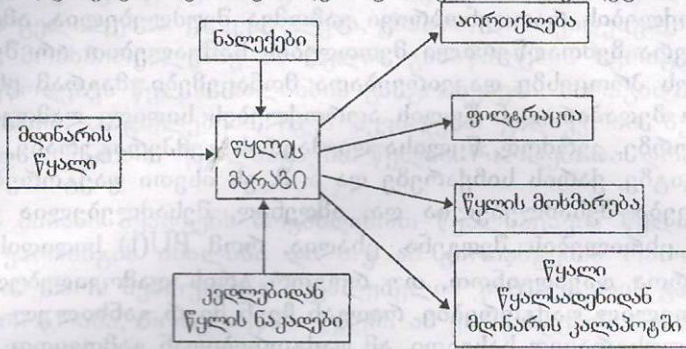
5. წყლის ფილტრაცია წყალსაცავის ფუძიდან - $P\Phi(t)$.

6. წყლის გარკვეული მარაგი იხარჯება სხვადასხვა მომხმარებლის მოთხოვნილებათა დასაკმაყოფილებლად (სიმარტივისათვის ვიგულისხმობთ, რომ მომხმარებელთა რაოდენობა გოლია ორის - სოფლის მეურნეობა, რომელიც გამოიყენებს წყლის $Z^{(1)}(t)$ რაოდენობას და კომუნალური წყალმომარაგება, რომელიც გამოიყენებს წყლის $Z^{(2)}(t)$ რაოდენობას).

7. წყლის ნაწილი წყალსაცავიდან გამოდის და კვლავ მიედინება მდინარის კალაპოტში. ეს სიდიდე აღვნიშნოთ $PII(t)$ სიმბოლოთი.

ამავე დროს ვიგულისხმობთ, რომ წყლის რაოდენობა წყალსაცავში არ შეიძლება იყოს ნაკლები, გარკვეულ ფიქსირებულ რაოდენობაზე X_{\min} . ცხადია, რომ წყლის მოცულობა არ შეიძლება აღემატებოდეს წყალსაცავის მოცულობას V . გარდა ამისა, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ წყალი მომხმარებელზე ნაწილდება მათი მოთხოვნილების პროპორციულად, კერძოდ, სოფლის მეურნეობის ობიექტებს წყალი მიეწოდება $S^{(1)}(t)$ სიდიდის პროპორციულად, ხოლო კომუნალურ წყალმომარაგებას - $S^{(2)}(t)$ სიდიდის პროპორციულად.

სქემაგურად ეს კავშირები შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგნაირად:



ნახ. 5.9

შემდეგი კითხვა, რომელსაც უნდა გაეცეს პასუხი, არის ის, თუ როგორ არიან ეს სიდიდეები დამოკიდებულნი t დროზე.

ვთქვათ, დაკვირვებათა საფუძველზე ცნობილია წყლის წყაროების სიმძლავრე, წყალსაცავის რაიონში, მაგალითად, უკანასკნელ 20 წლის განმავლობაში. ვიგულისხმობთ, რომ ჩვენს ხელთ არის ცხრილები, რომლებშიც თავმოყრილია ეს ინფორმაცია.

ბუნებრივია დავეუშვათ, რომ ამ სიდიდეების ($PO(t)$, $PR(t)$ და $PB(t)$ სიდიდეების) ცვლილება უახლოეს 5 წელიწადში დაახლოებით იგივეა, როგორც ეს იყო წინა 20 წლის განმავლობაში. რას ნიშნავს „დაახლოებით იგივე“? ეს ცნება მოითხოვს დაზუსტებას.

შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ შემდგომი 5 წლის განმავლობაში, დროის ყოველ t მომენტში $PO(t)$, $PR(t)$ და $PB(t)$ სიდიდეების მნიშვნელობები გოლია ამ სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობებისა უკანასკნელ 20 წლის მონაცემების მიხედვით:

$$\begin{aligned}
 PR_n(t) &= PR(t) = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} PR_{i+n-21}(t) \\
 PB_n(t) &= PB(t) = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} PB_{i+n-21}(t) \\
 PO_n(t) &= PO(t) = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} PO_{i+n-21}(t)
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

$PR_i(t)$, $PB_i(t)$, $PO_i(t)$ – შესაბამისად აღნიშნავენ ამ სიდიდეების მნიშვნელობებს i -ური საწყისი წელიწადით t დროში $0 \leq t \leq 5$.

სხვა სიგეებით რომ ვთქვათ, $PR(t)$, $PB(t)$, $PO(t)$ სიდიდეები ჩავთვალოთ ლეგერმინირებულ სიდიდეებად და 5 წლის განმავლობაში მათი ცვლილებების კანონები განვსაზღვროთ წინა 20 წლის მონაცემების მიხედვით.

უფრო ბუნებრივია ვიგულისხმობთ, რომ მდინარის წყლის რაოდენობა, ნალექების რაოდენობა და კელლებიდან წყლის ნაკადები წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეებს. მათი მნიშვნელობა დამოკიდებულია ბევრ შემთხვევით ფაქტორზე. ამიტომ მათი გამოკვლევისათვის უნდა მივმართოთ სტატისტიკურ მეთოდებს, რომელთაც სახელმძღვანელოს მოცულობის შემზღვეულობის გამო აქ არ მოვიყვანთ.

ჩვენ მიერ განხილული იყო $PR(t)$, $PB(t)$, $PO(t)$ სიდიდეების წარმოდგენისა და მომდევნო 5 წელიწადში მათი მნიშვნელობების პროგნოზირების ლეგერმინირებული ვარიანტი. ეს სიდიდეები აღწერენ წყალსაცავის წყლით შევსების პროცესს. ახლა განვიხილოთ პროცესები, რომლებიც დაკავშირებულია წყლის ხარჯვასთან. ერთ-ერთი მათგანია – აორთქლება.

PR(t), PB(t) და PO(t) სიდიდეებისაგან განსხვავებით, წყალსადენიდან წყლის აორთქლების რაოდენობრივი გამოშვა შეუძლებელია, ამიგომ ამ სიდიდის განსაზღვრა შემოაღწერილი მეთოდების საშუალებით არ შეიძლება, რადგან არ გვაქვს პროცესზე დაკვირვებათა მონაცემები. მაგრამ ცნობილია, რომ წყალსადენის ბედაპირიდან წყლის აორთქლების სიდიდე დამოკიდებულია მოვიერთ ფაქტორზე, კერძოდ, წყლისა და ჰაერის ტემპერატურაზე, ჰაერის ტენიანობის დეფიციტზე, ქარის სიჩქარეზე და ა. შ. ეს ისეთი ფაქტორებია, რომელზედაც დაკვირვება შესაძლებელია და, ამდენად, შესაძლებელია დაკვირვებათა მონაცემების ცხრილების შედგენა. ცხადია, რომ PU(t) სიდიდის განსაზღვრისათვის საჭიროა დავადგინოთ, თუ როგორ არის დამოკიდებული ეს სიდიდე ბემოთ ჩამოთვლილ ფაქტორებზე. რადგან ჩვენ მერ განხილულ ამოცანას აქვს მხოლოდ საილუსტრაციო ხასიათი, ამ ფაქტორებთან გამოვეყოთ ყველაზე მნიშვნელოვანი – ჰაერის ტენიანობის დეფიციტი D(t) და ჩავთვალოთ, რომ RU(t) სიდიდე პირდაპირპროპორციულია ჰაერის ტენიანობის დეფიციტისა

$$RU(t) = \alpha D(t),$$

სადაც α წარმოადგენს პროპორციულობის უმარტიველ კოეფიციენტს. D(t) სიდიდის გამოსათვლელად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ბემოთ აღნიშნული მეთოდები (დეტერმინირებული და სტოქასტური).

ასევე შეუძლებელია წყალსაცავის ფსკერიდან ფილტრაციის საშუალებით წყლის PΦ(t) დანაკარგის გამოშვა. შეიძლება ვთქვათ, რომ RΦ(t) სიდიდე პირდაპირპროპორციულია წყლის მოცულობისა და დამოკიდებულია იმ გრუნტის თვისებებზე, რომელიც შეადგენს წყალსაცავის ფსკერს, ე. ი. PΦ(t) = kX(t), სადაც k წარმოადგენს პროპორციულობის კოეფიციენტს, რომელიც დამოკიდებულია, როგორც აღნიშნეთ, გრუნტის თვისებებზე.

წყლის ნაკადი, რომელიც გამოდის წყალსაცავიდან და კვლავ მიედინება მდინარის კალაპოტში, წარმოადგენს სიდიდეს, რომლის რეგულირებაც შესაძლებელია და რომელიც დამოკიდებულია წყალსაცავში წყლის რაოდენობაზე. სიმარტივისათვის ვიგულისხმობთ, რომ ის აკმაყოფილებს პირობებს:

$$PI(t) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } X(t) \leq V; \\ X(t) - V, & \text{თუ } X(t) > V. \end{cases}$$

Z⁽¹⁾(t) და Z⁽²⁾(t) სიდიდეები აგრეთვე წარმოადგენენ მართვად სიდიდეებს. მათი მნიშვნელობები დამოკიდებულია წყალსაცავში წყლის რაოდენობასა და მომხმარებლების მოთხოვნილებებზე S⁽¹⁾(t) და S⁽²⁾(t)-ზე.

ამრიგად, ჩვენ განვიხილეთ წყალსაცავში წყლის მარაგის შექმნის პროცესი. ამავე დროს ცნობილია, რომ შენარჩუნებულია ბალანსი წყლის მარაგი დროის ყოველ მონაკვეთში იზრდება „შემოსული“ წყლის რაოდენობით და მცირდება „გასული“ წყლის რაოდენობით. ჩავწერთ წყლის მასის შენახვის ეს კანონი:

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \Pi(t) - Y(t),$$

სადაც

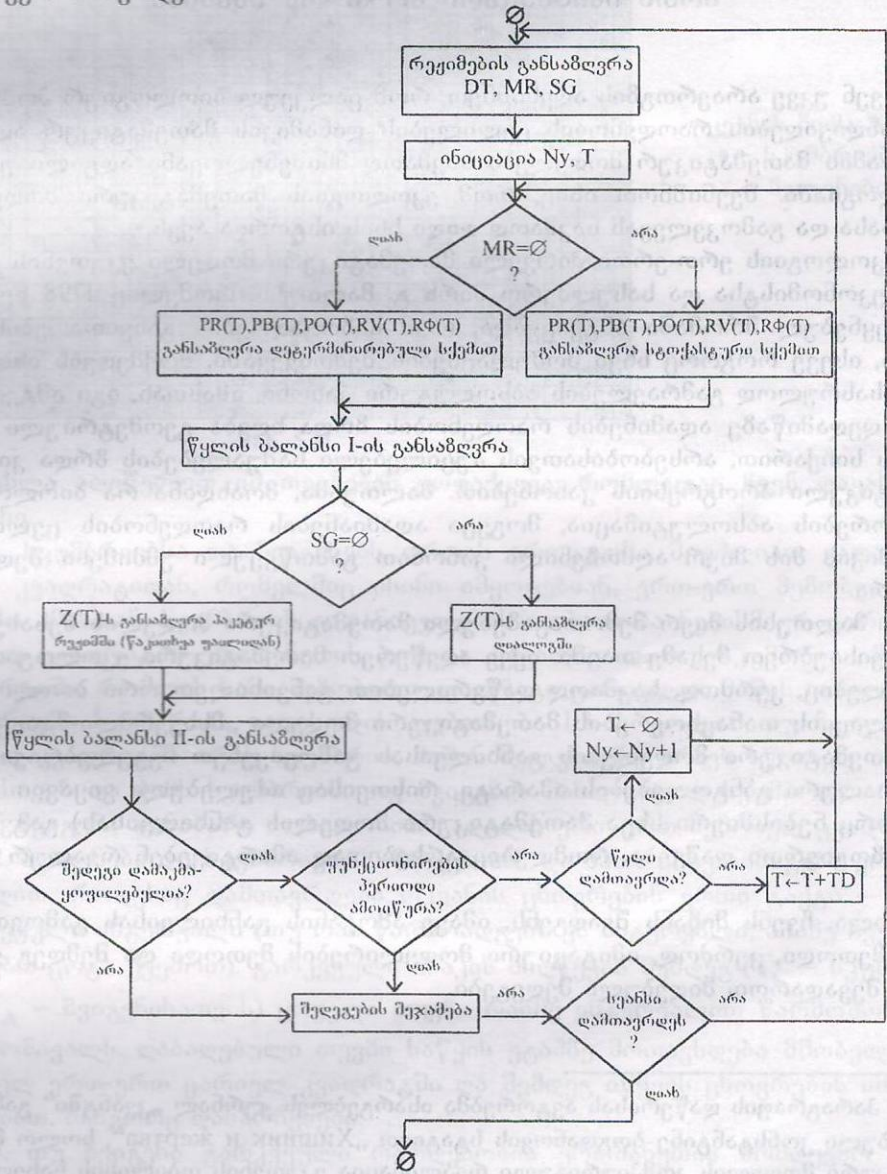
$$\Pi(t) = \int_t^{t+\Delta t} [PR(\tau) + PB(\tau) + PO(\tau)] d\tau,$$

$$Y(t) = \int_t^{t+\Delta t} [PU(\tau) + P\Phi(\tau) + PPI(\tau) + Z(\tau)] d\tau,$$

$$Z(t) = Z^{(1)}(t) + Z^{(2)}(t).$$

ამრიგად, მივიღეთ განგოლებები, რომლებიც აღწერენ წყალსადენში წყლის რაოდენობის ცვლილებას. ეს ცვლილება, ცხადია, დამოკიდებულია ბუნებრივ პირობებსა და მოხმარებლებზე ამ წყლის განაწილების სტრატეგიაზე. ამ განგოლებებს უწოდებენ წყლის ბალანსის განგოლებებს. ამრიგად, თუ ამოვხსნით წყლის ბალანსის განგოლებებს, ჩვენ შევძლებთ ვადავჭრათ ზემოთ დასმული ამოცანა – დავადგინოთ წყალსაცავში წყლის რაოდენობა ღრრის ნებისმიერ მომენტში.

თუ ჩვენ მიზანს შეადგენს მოვახდინოთ წყალსაცავის წყლის გამოყენების სხვადასხვა ვარიანტის ანალიზი და თუ ამ ვარიანტების რაოდენობა დიდია, ცხადია, ამ სამუშაოს შესრულება შეუძლებელია კომპიუტერის გარეშე. უნდა შევადგინოთ პროგრამა, რომელიც მოგვცემს ამ ვარიანტების რეალიზაციის საშუალებას და მათგან საუკეთესო, გარკვეული აზრით, ოპტიმალური ვარიანტის შერჩევის საშუალებას.



ნახ. 5.10

ეს ბლოკ-სქემა არ მოითხოვს სპეციალურ განმარტებას. შევნიშნოთ, რომ „წყლის ბალანსი – I“ წარმოადგენს ბლოკს წყალსაცავში წყლის რაოდენობის დასათვლელად ანთროპოგენური ფაქტორების (ანუ ფაქტორების, რომლებიც განპირობებულია ბუნების ცალკეული კომპონენტისა და ბუნებრივ კომპლექსებზე ადამიანის გემოქმედების სხვადასხვა ფორმით) მოქმედებამდე, ხოლო „წყლის ბალანსი – II“ – კი ბლოკს, წყალსაცავში წყლის რაოდენობის დასათვლელად ამ ფაქტორების მოქმედების შემდეგ. შევნიშნოთ, რომ ეს ფაქტორები წარმოადგენენ წყლის ხარჯვის სტრატეგიის უშუალო შედეგს.

§5. მათემატიკური ეკოლოგიის ერთი იმიტაციური მოდელის შესახებ*

ჩვენ უკვე არაერთგზის აღვნიშნეთ, რომ ცალკეულ ბიოლოგიურ პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობის ცვლილების დინამიკის მათემატიკურ აღწერას, შესაბამის მათემატიკურ მოდელებს საკმაოდ მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს ეკოლოგიაში. შევნიშნოთ ისიც, რომ ეკოლოგიის მათემატიკური მოდელების შექმნასა და გამოკვლევას საკმაოდ დიდი ხნის ისტორია აქვს.

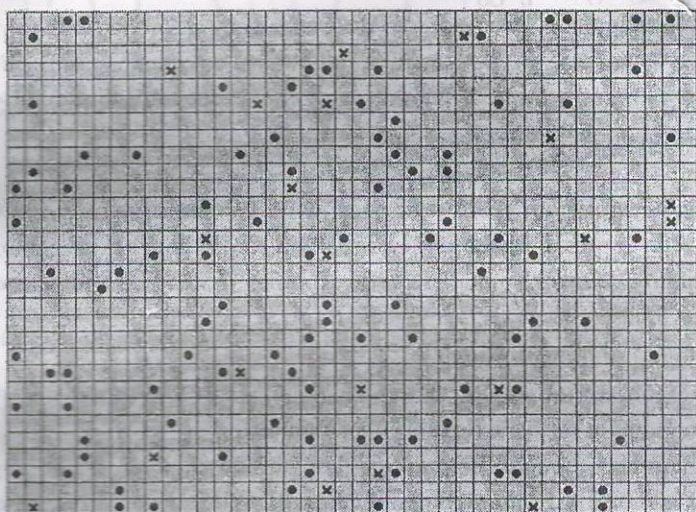
ეკოლოგიის ერთ-ერთი პირველი მათემატიკური მოდელი ეკუთვნის ინგლისელ ეკონომისგსა და სასულიერო პირს გ. მალთუსს, რომელიც 1798 წელს გამოქვეყნებულ შრომაში ამტკიცებდა, რომ საზოგადოების განვითარების პროცესში, ისევე როგორც სხვა პოპულაციების შემთხვევაში, მოქმედებს ინდივიდების უსასრულოდ გამრავლების აბსოლუტური კანონი. ამასთან, იგი ამტკიცებდა, რომ დედამიწაზე ადამიანების რაოდენობის ზრდა ხდება გეომეტრიული პროგრესის სიჩქარით, არსებობისათვის აუცილებელი საშუალებების ზრდა კი – არითმეტიკული პროგრესიის კანონებით. მალთუსმა, შოახდინა რა ბიოლოგიური ფაქტორების აბსოლუტიზაცია, მოგვცა ადამიანების რაოდენობის ცვლილების დინამიკის მის მიერ აღმოჩენილი კანონით გამოწვეული უმძიმესი შედეგების აღწერა.

გ. მალთუსის მიერ შემოთავაზებული მათემატიკური მოდელის შესახებ ჩვენ უკვე ვისაუბრეთ მესამე თავში. იქვე აღვწერეთ მათემატიკური ეკოლოგიის სხვა მოდელებიც, კერძოდ, საკმაოდ დაწვრილებით განვიხილეთ ორი ბიოლოგიური პოპულაციის თანაცხოვრების მათემატიკური მოდელი „მსხვერპლი-მტაცებელი“. ამ მათემატიკური მოდელების განხილვისას გამოვიყენეთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების აპარატი, რისთვისაც იძულებული ვიყავით (ისევე, როგორც ნებისმიერი სხვა მათემატიკური მოდელის განხილვისას) გაგვეკეთებინა ზოგიერთი დაშვება, რომლებიც არსებითად ამარტივებენ რეალურ სიტუაციას.

ახლა, ჩვენს მიზანს შეადგენს, იმავე ამოცანის განხილვისას გამოვიყენოთ სხვა მეთოდი, კერძოდ, იმიტაციური მოდელირების მეთოდი და შემდეგ ერთმანეთს შევადაროთ მიღებული შედეგები.

* ამ პარაგრაფის დაწერისას ავტორებმა ისარგებლეს ჟურნალ „კვანტში“ გამოქვეყნებული კონსტანტინე ბოგდანოვის სტაგიით „Хищник и жертва“, ხოლო მათემატიკური მოდელის კომპიუტერული რეალიზაცია ეკუთვნის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის კომპიუტერების მათემატიკური უზრუნველყოფისა და ინფორმაციულ ტექნოლოგიების კათედრის მაგისტრანტს მარიანა რუხაძეს.

წარმოვიდგინოთ, რომ ჩვენს წინაშეა ჰიპოტეზური ორგანზომილებიანი ოკეანე, რომელიც დაყოფილია ერთი და იმავე ზომის კვადრატებად. ვთქვათ, ოკეანე დასახლებულია მხოლოდ ორი სახეობის თევზით – სკუმბრიებითა და ზვიგენებით. ვთქვათ, აგრეთვე, რომ ზვიგენების ერთადერთ საკვებს შეადგენს სკუმბრია და სკუმბრიები საკვების ნაკლებობას არ განიცდიან. დავუშვათ, რომ თითოეულ კვადრატში შესაძლებელია იყოს ან ერთი ზვიგენი ან ერთი სკუმბრია. ზოგიერთი კვადრატი შეიძლება იყოს ცარიელი, ე. ი. არ იყოს არც ერთი ზვიგენი და არც ერთი სკუმბრია. მაგალითად, განვიხილოთ ზვიგენებისა და სკუმბრიების შემდეგი განაწილება (ნახ. 5.11).



ოკეანის ზომა 30X40
 • – სკუმბრიები
 X – ზვიგენები

ნახ. 5.11

ახლა აღვწერთ იმ თევზების ყოფაქცევას, რომლითაც ჩვენ დავასახლეთ ოკეანე.

1. სკუმბრიებსა და ზვიგენებს დროის ერთეულში შეუძლიათ გადაადგილდნენ კვადრატიდან, რომელშიც ისინი იმყოფებიან, ერთ-ერთ მეზობელ კვადრატში. ამასთან, სკუმბრიის გადანაცვლების ალბათობა ნებისმიერ ცარიელ მეზობელ კვადრატში ერთმანეთის ტოლია. მაგალითად, თუ სკუმბრია იმყოფება კვადრატში, რომლის სამი მეზობელი კვადრატი ცარიელია, მაშინ თითოეულ ამ კვადრატში სკუმბრიის გადასვლის ალბათობა $1/3$ -ის ტოლია. თუ ზვიგენის მეზობელ კვადრატში არის სკუმბრია, მაშინ ზვიგენი მიცურავს სწორედ ამ კვადრატისაკენ და ჭამს სკუმბრიას. თუ ზვიგენის მახლობლად სკუმბრია არ არის, მაშინ ზვიგენი თანაბარი ალბათობით გადადის ერთ-ერთ მეზობელ კვადრატში.

2. ზვიგენები და სკუმბრიები „იზრდებიან“ და მათი ასაკი იმაგებს ერთი ერთეულით, როდესაც დამთავრდება ოკეანის ცხოვრების ერთი ტაქტი – დროის გარკვეული ინტერვალი (თუ რას წარმოადგენს ეს ინტერვალი, ამაზე ჩვენ ვისაუბრებთ ცოტა ქვემოთ). გარკვეული ასაკის მიღწევის შემდეგ (T_C – სკუმბრიასა და T_A – ზვიგენისათვის) ყოველი თევზი რაიმე ინტერვალში წარმოშობს ერთ შთამომავალს. დაბადებული თევზი საწყის ეტაპზე მოთავსდება მშობელის მახლობელ ერთ-ერთ ცარიელ კვადრატში და შემდეგ იწყებს ცხოვრებას იმავე კანონებით, როგორც დანარჩენები.

3. თუ ზვიგენი გარკვეული რაოდენობის ერთმანეთის მომდევნო ტაქტის განმავლობაში (ტაქტების ამ რაოდენობას ჩვენ აღვნიშნავთ სიმბოლოთი Γ) ვერც ერთხელ ვერ დაიჭერს სკუმბრიას, მაშინ ის იღუპება შიმშილისაგან. სკუმ-

ბრია ილუპება მხოლოდ ზვიგენტან შეხვედრის შემდეგ, რადგან ის იკვებება პლანქტონით, რომლის მარაგი ოკეანეში უსასრულოა.

4. ოკეანეს აქვს სასრული ზომა და მართკუთხედის ფორმა. თევზები, რომლებიც აღმოჩნდებიან ოკეანის საზღვრის მახლობელ კვადრატში, არასოდეს არ გაირიყებიან ნაპირზე. ხოლო ის თევზები, რომელთაც ამის „სურვილი“ აღმოაჩნდებათ, მაშინვე ოკეანის მოპირდაპირე მხარეზე აღმოჩნდებიან.

5. თუ სკუმბრიას არც ერთი მეზობელი კვადრატი არ არის ცარიელი, მაშინ იგი რჩება ადგილზე და არ წარმოშობს შთამომავალს, ასევე იქცევა ზვიგენი, თუ მის ყველა მეზობელ კვადრატში ზვიგენია.

ამრიგად, ოკეანეში ზვიგენებისა და სკუმბრიების თანაცხოვრების გარკვეული წესები შემუშავებულია (ცხადია. ეს წესები საკმარისად მარტივია. ისინი შეიძლება გავართულოთ, დავამატოთ სხვა წესებიც, თუ გავითვალისწინებთ სხვა ფაქტორებსაც, მაგალითად, ასაკის გამო დაღუპვას და ა. შ.).

ამის შემდეგ

ა) შემთხვევით რიცხვთა გენერირების საშუალებით (ასეთი გენერატორი, ჩვეულებრივ, ყოველი კომპიუტერის მეხსიერებაში არის ჩაწერილი) მოვათავსებთ ზვიგენებსა და სკუმბრიებს იმ კვადრატებში, რომლებითაც დაყოფილია ოკეანე და გადავნიშნავთ მათ.

ბ) თითოეულ თევზს მივაკუთვნებთ ასაკს.

გ) ყოველი ზვიგენისათვის დავაწესებთ დროის ინტერვალს (გაქტების რაოდენობას), როდესაც ის მოკვდება, თუ არ შეჭამს სკუმბრიას.

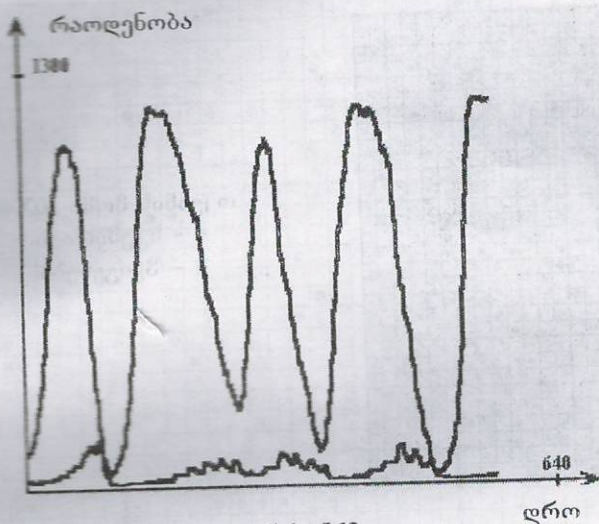
ყოველივე ამ ინფორმაციას, ცხადია, მოვათავსებთ კომპიუტერის მეხსიერებაში და ასევე კომპიუტერის საშუალებით მოვახდენთ მათემატიკური მოდელის რეალიზაციას. ამ მიზნით, ჯერ საჭიროა აღვწეროთ ალგორითმი.

იწყება ოკეანის ცხოვრების პირველი გაქტი. დასაწყისში ერთ ბიჯით გადაინაცვლებს სკუმბრია, რომელსაც მიკუთვნებული აქვს პირველი ნომერი. ამავე დროს, თუ ამ სკუმბრიას შეუწყობს ხელს ასაკი, იგი წარმოშობს კიდევ ერთ ახალ სკუმბრიას. ამის შემდეგ იმავე ოპერაციას შევასრულებთ მეორე, მესამე და ა. შ. ყველა სკუმბრიასთვის. მას შემდეგ, რაც ყველა სკუმბრია დაამთავრებს გადანაცვლებას, იწყებენ თავიანთ ერთგაქტიან ნადირობას ზვიგენები (ამ შემთხვევაშიც, ჯერ ნადირობას იწყებს ზვიგენი, რომლის ნომერია პირველი, შემდეგ მეორე და ა. შ.). გაქტის ბოლოს შევაჯამებთ პირველი გაქტის შედეგებს, გამოვირიცხავთ იმ ზვიგენებს, რომლებიც დაიხოცნენ შიმშილისაგან და იმ სკუმბრიებს, რომლებიც შეჭმულ იქნენ ზვიგენების მიერ. გარდა ამისა, დავამატებთ ახლად დაბადებულ თევზებს. ამის შემდეგ შეიძლება განვახორციელოთ მეორე გაქტი, მესამე გაქტი და ა. შ. ცხადია, ამ მათემატიკური მოდელის კომპიუტერზე რეალიზაცია საშუალებას მოგვცემს დავაკვირდეთ, თუ როგორ იცვლება ოკეანეში თევზების რაოდენობა.

მოვიყვანოთ ამ მათემატიკური მოდელის რეალიზაციის ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი I. განვიხილოთ ზვიგენებისა და სკუმბრიების საწყისი განაწილება, რომელიც მოცემულია ნახ. 5.11-ზე. ამ შემთხვევაში A (ზვიგენების რაოდენობა) = 20, C (სკუმბრიების რაოდენობა) = 100, $T_A = 18$, $T_C = 6$, $\Gamma = 5$.

ზვიგენებისა და სკუმბრიების რაოდენობის ცვლილების დინამიკა მოცემულია შემდეგ ნახაზზე (ნახ. 5.12).

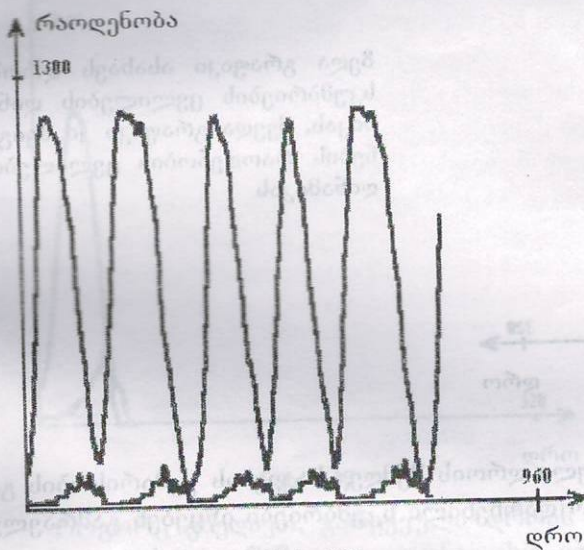


ნახ. 5.12

ზედა გრაფიკი ასახავს დროში სკუმბრიების რაოდენობის ცვლილების დინამიკას, ქვედა გრაფიკი კი ზვიგენების რაოდენობის ცვლილების დინამიკას

როგორც ვხედავთ, მიღებული სურათი ძალზე წააგავს თვისებრივად დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით მიღებულ შედეგს.

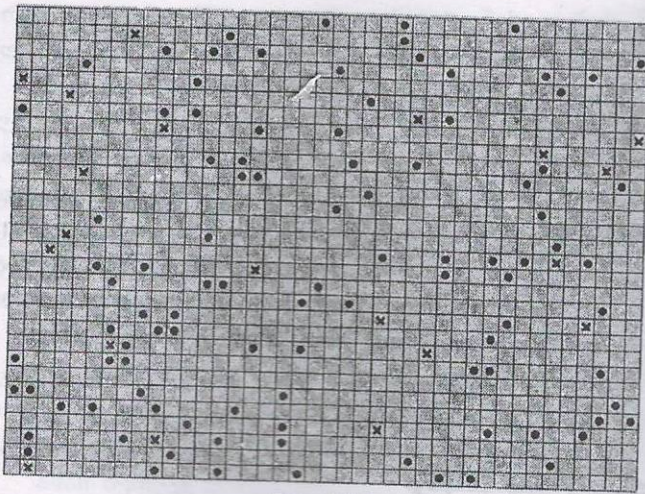
მსგავსება კიდევ უფრო მნიშვნელოვანია შემდეგ ნახაზზე (ნახ. 5.13), სადაც რეალიზებულია იგივე მათემატიკური მოდელი იმავე პარამეტრებით, მაგრამ სხვა საწყისი განაწილებით.



ნახ. 5.13

ზედა გრაფიკი ასახავს დროში სკუმბრიების რაოდენობის ცვლილების დინამიკას. ქვედა გრაფიკი კი ზვიგენების რაოდენობის ცვლილების დინამიკას

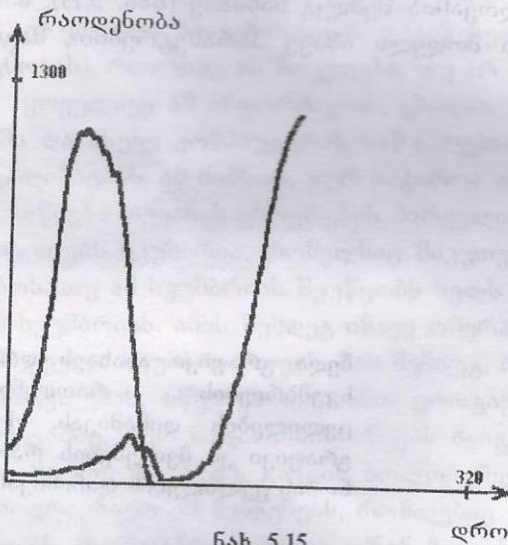
მაგალითი II. სრულად განსხვავებულ სურათს მივიღებთ, თუ განვიხილავთ მათემატიკურ მოდელს იმავე პარამეტრებით (ოკეანის ზომა 30×40 , $A = 20$, $C = 100$, $T_A = 18$, $T_C = 6$, $\Gamma = 5$), მხოლოდ შემდეგი საწყისი განაწილებით.



ოკეანის ზომა 30X40
 • - სკუმბრიები
 X - ზვიგენები

ნახ. 5.14

ამ შემთხვევაში ზვიგენებისა და სკუმბრიების რაოდენობის ცვლილების დინამიკა მოცემულია შემდეგ ნახაზზე.

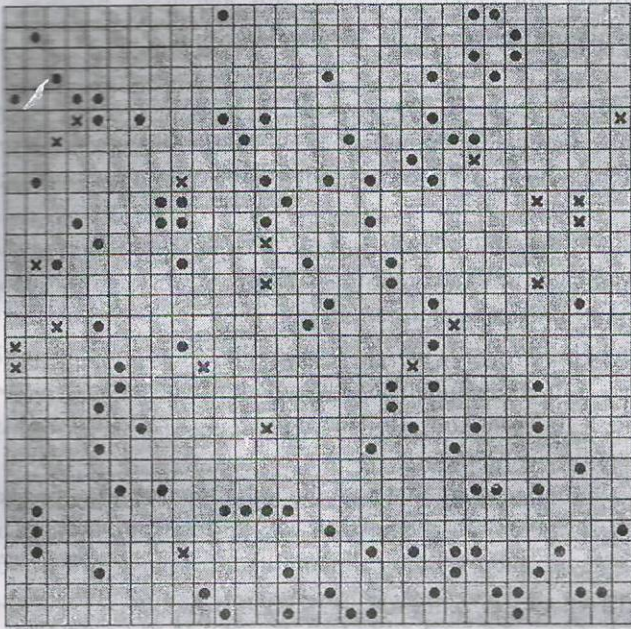


ზელა გრაფიკი ასახავს დროში სკუმბრიების ცვლილების დინამიკას, ქველა გრაფიკი კი ზვიგენების რაოდენობის ცვლილების დინამიკას

ნახ. 5.15

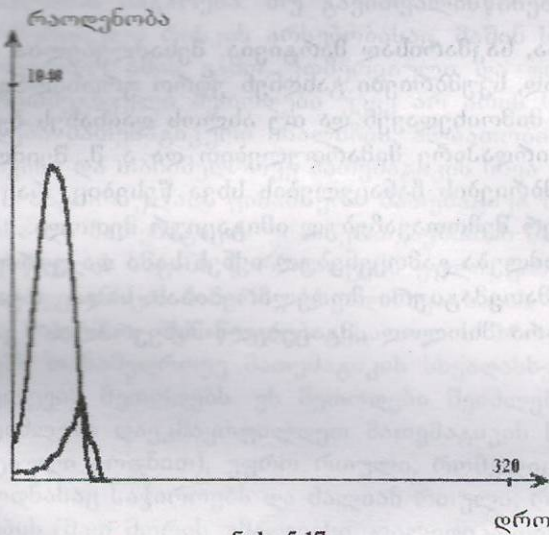
ნახაზიდან ჩანს, რომ ვარკვეული დროის შემდეგ საკვების უკმარისობის გამო ყველა ზვიგენი იხოცება, ხოლო დარჩენილი სკუმბრიები იწყებენ გამრავლებას და ლაფარავენ მთელ ოკეანეს.

მაგალითი III. განვიხილოთ იგივე მათემატიკური მოდელი შემდეგი პარამეტრებით: ოკეანის ზომა 30X30, $A = 20$, $C = 100$, $T_A = 9$, $T_C = 3$, $\Gamma = 4$ და შემდეგი საწყისი განაწილებით.



ნახ. 5.16

ამ შემთხვევაში ზვიგენებისა და სკუმბრიების რაოდენობის ცვლილების დინამიკა მოცემულია შემდეგ ნახაზზე (ნახ. 5.17).



ნახ. 5.17

ზელა გრაფიკი ასახავს დროში სკუმბრიების ცვლილების დინამიკას, ქველა გრაფიკი კი ზვიგენების რაოდენობის ცვლილების დინამიკას

როგორც ვხედავთ, გარკვეული დროის შემდეგ ზვიგენები შეჭამენ ყველა სკუმბრიას, ხოლო შემდეგ თვითონაც იხოცებიან საკვების უკმარისობის გამო.

ჩაგარებული გამოთვლითი ექსპერიმენტების საშუალებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ოკეანეში ზვიგენებისა და სკუმბრიების რაოდენობა იცვლება გარკვეული სიხშირით. შევნიშნოთ, რომ სკუმბრიების რაოდენობის მაქსიმუმი (ნახ. 5.12 და ნახ. 5.13) მიიღწევა ცოგათი უფრო ადრე, ვიდრე ზვიგენების რაოდენობის მაქსიმუმი, რაც ეთანხმება დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით მიღებულ შედეგებს. როგორც ექსპერიმენტები გვიჩვენებს, ცხოველთა რაოდენობის ცვლილების პერიოდები არსებითად დამოკიდებულია მათემატიკური მოდელის პარამეტრებზე.

მაგრამ პროცესი ყოველთვის არ მიმდინარეობს ასე გლუვად. ხშირად ეს რხევითი პროცესი ირღვევა ან მათი პერიოდები სხვადასხვა საზღვარში იწყებს ცვლას.

ზოგიერთ შემთხვევაში (როგორც ეს III მაგალითში იყო აღწერილი), გვიგენები აღმოჩნდებიან საკმარისად შორს სკუმბრიებისაგან, ამიგომ ყველა მათგანი იხოცება შიმშილით, რის შედეგადაც იწყება სკუმბრიების უსასრულოდ გამრავლება.

აქ აუცილებელია აღვნიშნოთ, რომ ის ანომალური სიგუაციები, რომლებიც დაკავშირებული აღმოჩნდა თევზების საწყის განაწილებასთან, არ აღიწერებიან დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით.

ამრიგად, იმიტაციურმა მოდელირებამ მოგვცა თითქმის იგივე შედეგები, რაც მივიღეთ დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით და, ამავე დროს, მოგვცა საშუალება განგვეხილა ზოგიერთი ისეთი შემთხვევა, რომელიც არ აღიწერება დიფერენციალური განტოლებებით.

ცხადია, ისმება მოდელის კორექტულობის საკითხი. ეს პრობლემა ყოველთვის წამოიჭრება, როდესაც ვცდილობთ შევადგინოთ ამა თუ იმ პროცესის თუ მოვლენის მათემატიკური მოდელი. ერთი მხრივ, ნებისმიერი მოდელირება შეუძლებელია პროცესის გარკვეული გამარტივებული აღწერის გარეშე, როდესაც უარს ვამბობთ ე. წ. „მეორეხარისხოვან“ ფაქტორებზე. მეორე მხრივ, მოდელის ძალზე გამარტივების შემდეგ ძნელია მივიღოთ შესასწავლი პროცესის ადეკვატური სურათი. ამიგომ მკვლევრის მიზანს შეადგენს ააგოს სწორედ ისეთი მათემატიკური მოდელი, რომელიც მეგ-ნაკლებად ასახავს შესასწავლი პროცესის ძირითად პარამეტრებს.

განხილული მოდელიც, ცხადია, საკმარისად მარტივია. შესაძლებელია მისი შემდგომი გართულება. მაგალითად, სკუმბრიები გახდნენ უფრო ფრთხილნი. სანამ ისინი გააკეთებენ ბიჯს, ჯერ მიმოიხედავენ და თუ ახლოს დაინახეს გვიგენი, მაშინ გადაადგილდებიან მოპირდაპირე მიმართულებით და ა. შ. შეიძლება შემოვიღოთ გვიგენებისა და სკუმბრიების ჩანაცვლების სხვა წესებიც, რაც უფრო რეალისტურს გახდის ჩვენ მიერ შემოთავაზებულ იმიტაციურ მეთოდს.

იმიტაციური მოდელირება შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სამი და უფრო მეტი პოპულაციის თანაცხოვრების მათემატიკური მოდელირებისას, სადაც რეალური იქნება თანაცხოვრების არა მხოლოდ „მტაცებელი-მსხვერპლის“ კანონები.

ფინანსური მათემატიკის ელემენტები*

შესავალი

ფინანსური მათემატიკა წარმოადგენს ფინანსური ანალიზის მნიშვნელოვან შემადგენელ ნაწილს. ერთი შეხედვით შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ არითმეტიკის კურსი სრულიად საკმარისია ფინანსური მათემატიკის პრობლემების გადასაწყვეტად. ყოველდღიურ ცხოვრებაში ეს მართლაც ასეა, მაგრამ სიგუაცია არსებითად რთულდება, როდესაც საქმე გვაქვს მარტივ კომერციულ ოპერაციასთანაც კი, რომ არაფერი ვთქვათ საბანკო-საბირჟო საქმიანობაზე. მართლაც, ნებისმიერი კომერციული ოპერაციის ჩასაგარებლად აუცილებელია ჩამოყალიბდეს მის მონაწილეებთან შეთანხმებული გარკვეული წესების ერთობლიობა, კერძოდ კი, კრედიტის (სესხის) რაოდენობა და მისი დაფარვის პირობები, მოგების განაწილების წესი, საჯარიმო სანქციები და სხვ. რადგან ასეთი ფაქტორების რაოდენობა საკმარისად დიდია და მათ შორის ურთიერთკავშირი ხშირად ძალზე რთულ ხასიათს აგარებს, ამიტომ აუცილებელი ხდება რაოდენობრივი ანალიზის ჩაგარება. თუ გავითვალისწინებთ ამ დროს სხვადასხვა ხასიათის კომერციული რისკის არსებობასაც, მაშინ სირთულეები კიდევ უფრო იზრდება. ყოველივე ამის გამო, კომერციული და ფინანსური გათვლების ჩაგარებისას, არითმეტიკული მეთოდები უკვე არ არის საკმარისი. ამ შემთხვევაში საჭირო ხდება მათემატიკური ანალიზის, ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკისა და თანამედროვე მათემატიკის სხვა დარგების გამოყენება.

ისგორიულად, ფინანსური მათემატიკა ჩამოყალიბდა ფინანსური შეცნირებისა და მათემატიკის ურთიერთკავშირის საფუძველზე. ფინანსური მათემატიკის შესწავლის საგანს წარმოადგენს ფული, ფასიანი ქაღალდები და მათი საშუალებით ფინანსურ ბაზარზე სხვადასხვა სახის ოპერაციები. იმისდა მიხედვით, თუ რა ხიღრმით შეისწავლება ესა თუ ის პრობლემა, ფინანსური მათემატიკა იყენებს თანამედროვე მათემატიკის სხვადასხვა დარგში მიღებულ შედეგებსა და კვლევის მეთოდებს. ეს მეთოდები შეიძლება იყოს ელემენტარული (ამ დროს შეიძლება დავკმაყოფილდეთ მათემატიკის სასკოლო კურსის შესწავლისას მიღებული ცოდნით), უფრო რთული, რომელიც უმაღლესი მათემატიკის აპარატის ცოდნასაც საჭიროებს და ძალიან რთული, რომელიც პროფესიული მათემატიკოსების (მათ შორის უმაღლესი კვალიფიკაციის მათემატიკოსების) ჩარევას მოითხოვს. უფრო მეტიც, ფინანსურ მათემატიკაში არსებობს მთელი რიგი პრობლემები, რომლებიც ჯერჯერობით გადაწყვეტილი არ არის.

ჩვენი სახელმძღვანელოს მიზანს წარმოადგენს ფინანსური მათემატიკის უმარტივესი და მასთან, არსებითი ცნებებისა და მათემატიკური მოდელების გაცნობა.

ფინანსური ანალიზისას ძალზე მნიშვნელოვანია დროის ფაქტორის გათვალისწინება. ამ გარემოებას საფუძველად უდევს სხვადასხვა კალენდარულ პერიოდში ფულის ერთი და იმავე მასის არათანაბარი ფასეულობის პრინციპი:

* ამ თავის დაწერისას ავტორებმა არსებითად ისარგებლეს [11] და [23] წიგნებით.

ფულის ერთი და იგივე რაოდენობა „დღეს“ და „ხვალ“ შეიძლება სხვადასხვანაირად შეფასდეს.

კრედიტის გაცემა წარმოადგენს მნიშვნელოვან ფინანსურ ოპერაციას. უმარტივესი ფორმით ის გულისხმობს ორი სუბიექტის, კრედიტორისა და დებიტორის მონაწილეობას და სესხის ერთჯერად გაცემას. ამასთან, დებიტორი ვალდებულია ფული დააბრუნოს ზუსტად დათქმულ ვადაში და, ამასთან, ვადაისხადოს ხელშეკრულებით გათვალისწინებული პროცენტები. ცხადია, რომ კრედიტის გაცემის დროს არსებობს გარკვეული რისკი, რაც დაკავშირებულია სხვადასხვა შემთხვევით ფაქტორთან (მაგ., ინფლაცია, ეკონომიკური კრიზისი და ა. შ.).

ის მათემატიკური აპარატი, რომელსაც გამოვიყენებთ, არ ითვალისწინებს ამ შემთხვევით ფაქტორებს, რომლებიც შეიძლება გამოწვევდეს ანგარიშის ნაკლებობითაც. ასეთი ფაქტორების გათვალისწინებით მათემატიკური მოდელების შექმნისას აუცილებელია მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდების გამოყენება, რაც სცილდება ჩვენი სახელმძღვანელოს მიზანს.

§1. საკრედიტო ოპერაციების

მათემატიკური საშუალებები (მარტივი პრინციპები)

1.1 რამდენიმე შენიშვნა პროცენტის ეკონომიკური თეორიის შესახებ. ჯერ გავაკეთოთ რამდენიმე შენიშვნა პროცენტის ეკონომიკური თეორიის შესახებ.

საპროცენტო განაკვეთები, ალბათ, ფინანსური საქმიანობის უფლანგ უფრო ხშირად გამოყენებადი მაჩვენებლებია. ბევრი ჩვენგანი ხშირად იღებს კრედიტს და იხდის შესაბამის პროცენტს. ბევრ ჩვენგანს შეაქვს ფული ბანკში ან სხვა ფინანსურ დაწესებულებაში და ამისათვის იღებს პროცენტულ დანართს. შეუძნელია, რომ არსებობს საპროცენტო განაკვეთების მრავალი ნაირსახეობა. ეს განაკვეთები ერთმანეთისაგან განსხვავდება არა მარტო სიდიდის მიხედვით, არამედ მათი გაანგარიშების მეთოდის მიხედვითაც. ზოგიერთი საპროცენტო განაკვეთი ფიქსირებულია ხელშეკრულების მოქმედების მთელი პერიოდის განმავლობაში, სხვები კი შეიძლება შეიცვალოს დათქმული პირობების შესაბამისად დროის განსაზღვრულ ინტერვალებში. არსებობს ისეთი საპროცენტო განაკვეთებიც, რომლებიც შეიძლება შეიცვალოს კრედიტორის სურვილის მიხედვით. ბუნებრივია დავსვათ კითხვა: საერთოდ რატომ ხდება კრედიტებისა და დებიტების მიხედვით პროცენტული განაკვეთების გადახდა?

იმისათვის, რომ შევძლოთ ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა, საჭიროა კარგად გავიაზროთ, რომ ფულს, წარმოადგენს რა გაცვლის სამუალებს, მოაქვს სარგებლობა მხოლოდ არაპირდაპირი გზით. ეს ნიშნავს, რომ ფული უნდა გაიცვალოს სხვა საქონელზე ან მომსახურებაზე, რათა მივიღოთ პირდაპირი სარგებელი. მაშასადამე, თავისთავად ფული (ბანკნოტები, მონეტები, საკრედიტო ბარათები, საბანკო ანგარიშები) უშუალოდ არ აკმაყოფილებს ცხოვრებისეულ მოთხოვნილებებს. ეს ხორციელდება ფულის მასის სხვადასხვა საქონელზე ან მომსახურებაზე გაცვლის გზით.

როდესაც რომელიმე პიროვნება ან ორგანიზაცია ახორციელებს ფულის ინვესტირებას, იგი ამის შედეგად უარს ამბობს ფულის საქონელზე ან მომსახურებაზე გაცვლის შესაძლებლობაზე. ამრიგად, ამ პიროვნებასა თუ ორგანიზაციას შეუძლია საქონლისა და მომსახურების უფრო ნაკლები რაოდენობით შექმნა, ვიდრე ეს შესაძლებელი იქნებოდა სესხის ან ინვესტიციის გაცემამდე. ბუნებრივ-

ვია, ინვესტორს გაუჩნდეს სურვილი მიიღოს კომპენსაცია მსყიდველობითი უნარის დაქვეითების სანაცვლოდ – სწორედ ამაში მდგომარეობს პროცენტის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ფუნქცია.

შემდეგ, კრედიტორი დგას ისეთი განუზღვრელობის წინაშე, როდესაც გაცემული კრედიტის მომავალი ღირებულება გაურკვეველია. ამ განუზღვრელობის რაოდენობრივი ზომა რისკის სახელწოდებით არის ცნობილი. კრედიტორები შეიძლება აღმოჩნდნენ სხვადასხვა სახის რისკის პირისპირ. რისკის პირველ სახეს წარმოადგენს მსყიდველობითი უნარის დაკარგვის რისკი. თუ ფულის ინვესტირების ან სესხის გაცემის პერიოდში ეკონომიკა ხასიათდება ინფლაციით, მაშინ იმ თანხის საშუალებით, რომელიც დაუბრუნდება კრედიტორს, შესაძლებელი იქნება საქონლისა და მომსახურების უფრო ნაკლები რაოდენობის შეძენა, ვიდრე სესხის გაცემამდე ან ინვესტირებამდე იყო შესაძლებელი. პროცენტის ერთ-ერთ ფუნქციას წარმოადგენს რისკის გამო გამოწვეული შესაძლო დანაკარგის კომპენსაცია.

გარდა ამისა, არსებობს რისკი, რომ ფული შეიძლება არ იქნეს დაბრუნებული ინვესტირებული პროექტის წარუმაგებლობის შემთხვევაში ან ფულის მსესხებლის მხრიდან მოგყუების ან სხვა გაუთვალისწინებელ გარემოებათა გამო. ამ რისკს ეწოდება ვალდებულებათა შეუსრულებლობის რისკი. ცხადია, ამ შემთხვევაშიც ინვესტორმა უნდა მიიღოს კომპენსაცია, რაც წარმოადგენს პროცენტის კიდევ ერთ ფუნქციას.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ჩვენ მიერ განხილული შემთხვევების გარდა, არსებობს კიდევ სხვა სახის რისკებიც, რომლებიც თან სდევს ფინანსურ ოპერაციებს.

ყოველივე ამის შემდეგ არ უნდა გაგვიკვირდეს, რომ არსებობს სხვადასხვა საპროცენტო განაკვეთი, რომლებიც გამოიყენება ფინანსური ოპერაციების წარმოებისას. ამ მრავალფეროვნებიდან, ბუნებრივია, რომ საკრედიტო ოპერაციების მათემატიკური საფუძვლების განხილვა დავიწყოთ უმარტივესი შემთხვევით, რომლის საფუძველსაც მარტივი საპროცენტო განაკვეთის ცნება წარმოადგენს.

1.2 საკრედიტო ოპერაციების მახასიათებელი პარამეტრები.

ჩვეულებრივ, საკრედიტო ოპერაციებს, რაოდენობრივი თვალსაზრისით ახასიათებენ შემდეგი პარამეტრების საშუალებით:

t_0 – სესხის გაცემის დრო;

T – პერიოდი, რა ვადითაც გაცემულ იქნა სესხი;

$t_0 + T$ – სესხის დაფარვის დრო (date of maturity);

$S(t_0)$ – გაცემული სესხის რაოდენობა;

$S(t_0 + T)$ – დასაბრუნებელი თანხის რაოდენობა;

$I(t_0, T, S(t_0))$ – საწყისი კაპიტალის ნაზრდი სესხზე პროცენტული განაკვეთის დარიცხვის შედეგად.

ცხადია, რომ სამართლიანია შემდეგი გოლობა

$$S(t_0 + T) = S(t_0) + I(t_0, T, S(t_0)). \quad (6.1)$$

კრედიტის გაცემისას განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს სიდიდეს $I(t_0, T, S(t_0))$, რომელიც წარმოადგენს კრედიტის საშუალებით მიღებულ შემოსავალს.

განვიხილოთ საბაზრო ეკონომიკის პირობებში საყოველთაოდ მიღებული ალგორითმები, რომლებიც გამოიყენება პროცენტული განაკვეთის დარიცხვის დროს. პროცენტული განაკვეთის სიდიდე დამოკიდებულია კრედიტის რაოდენობაზე, სესხის დაფარვის დროზე, პროცენტის გიჰზე, პროცენტული განაკვეთის დარიცხვის სქემაზე და ა. შ.

კრედიტი უნდა იყოს ურთიერთსასარგებლო ორივე მხარისათვის, რაც წარმოადგენს საკრედიტო პოლიტიკის რეგულარულად გამოყენების წინაპირობას. უნდა აღინიშნოს, რომ აუცილებელია შეფასებულ იქნეს მისი ეფექტურობაც.

შემოვიღოთ კრედიტის ეფექტურობის ორი მაჩვენებელი, რომელთაგანაც თითოეულს გააჩნია თავისი გამოყენების არეალი. პირველ მაჩვენებელს წარმოადგენს სიდიდე:

$$i(t_0, T) = \frac{S(t_0+T) - S(t_0)}{S(t_0)} = \frac{I(t_0, T, S(t_0))}{S(t_0)}, \quad (6.2)$$

რომელიც არის T დროში კაპიტალის ნაზრდის შეფარდება საწყისი კაპიტალის სიდიდესთან. ამ მნიშვნელოვან მაჩვენებელს უწოდებენ პროცენტულ განაკვეთს, ხესხის ეფექტურობას, ინტერესს (interest rate, return).

მეორე მაჩვენებელია სიდიდე:

$$d(t_0, T) = \frac{S(t_0+T) - S(t_0)}{S(t_0 + T)} = \frac{I(t_0, T, S(t_0))}{S(t_0 + T)}, \quad (6.3)$$

რომელიც წარმოადგენს კაპიტალის ნაზრდის შეფარდებას საბოლოო კაპიტალის სიდიდესთან. ამ მაჩვენებელს უწოდებენ დისკონტს (discount rate).

აღვიღალ შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი გოლობები:

$$i(t_0, T) = \frac{d(t_0, T)}{1 - d(t_0, T)}, \quad (6.4)$$

$$d(t_0, T) = \frac{i(t_0, T)}{1 + i(t_0, T)}, \quad (6.5)$$

$$S(t_0 + T) = S(t_0)[1 + i(t_0, T)], \quad S(t_0) = S(t_0 + T)[1 - d(t_0, T)]. \quad (6.6)$$

ბევრ შემთხვევაში მოსახერხებელია კიდევ ერთი მაჩვენებლის გამოყენება:

$$v(t_0, T) = 1 - d(t_0, T) = \frac{1}{1 + i(t_0, T)} = \frac{S(t_0)}{S(t_0 + T)}, \quad (6.7)$$

რომელსაც დისკონტ-ფაქტორს (discount factor) უწოდებენ. თითოეულ ამ მაჩვენებელს შემდგომში განვიხილავთ დაწვრილებით.

შენიშნოთ, რომ (6.2), (6.3) ფორმულებით განსაზღვრულ $i(t_0, T)$ და $d(t_0, T)$ სიდიდეებს ხშირად გამოსახავენ პროცენტებში, რისთვისაც მათ ამრავლებენ 100-ზე.

თეორიული ანალიზისას, ხშირად მოსახერხებელია კრედიტის ვაცემის მომენტი ნულოვანი საწყის მომენტად, ე. ი. დავუშვათ, რომ $t_0 = 0$, მაშინ $S(t_0)$ და $S(t_0 + T)$ სიდიდეებს ნაცვლად დავწეროთ $S(0)$ და $S(T)$. ხშირად კრედიტის დაფარვის T დროს ჩაწერენ ინდექსის სახით:

$$i_T, d_T, v_T.$$

ესაა, რომ ეს დამეხებები ეხება მხოლოდ თეორიულ ანალიზს, რადგან კრედიტის შესახებ ხელშეკრულებაში უნდა იყოს მითითებული ორივე დრო – როგორც კრედიტის ვაცემის, ისე კრედიტის დაფარვის დრო, ე. ი. t_0 და $t_0 + T$.

უნდა აღინიშნოს ერთი მაგალითი.

მაგალითი 1. ვთვალოთ, ვაიყავ კრედიტი $T = 1$ წლის ვადით. კრედიტის პირობებით ერთ წელს შემდეგ უნდა იქნეს დაბრუნებული 3 მილიონი ლარი, ხოლო დისკონტი ვადა 20%-ის, ე. ი. $S(1) = 3$ მილიონ ლარს, $d_1 = 20\%$, მაშინ

$$v_1 = 1 - d_1 = 0,8.$$

ბოლო (6.7) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$S(0) = S(T) \cdot v_1 = 2,4 \text{ მილიონ ლარს.}$$

ვ. ა. ლებიგორი ბანკიდან მიიღებს 2,4 მილიონ ლარს.

განსაზღვრება. დროის ძირითად ერთეულს, მაგალითად, წელიწადს, ეწოდება საბაზისო ერთეული.

დროის ინგერვალს, რომლის ბოლო მომენტში (ზოგჯერ საწყის მომენტში) ხდება ამ ინგერვალის მიხედვით პროცენტული განაკვეთის დარიცხვა, უწოდებენ კონვერსიულ პერიოდს ან დარიცხვის პერიოდს.

თუ კონვერსიული პერიოდი ემთხვევა დროის საბაზისო ერთეულს, მაშინ შესაბამის პროცენტულ განაკვეთს უწოდებენ ეფექტურს.

პროცენტების დარიცხვის დროს პრაქტიკაში გამოიყენებენ მარტივ პროცენტებს (Simple interest), რთულ პროცენტებს (compound interest) და მათ სხვადასხვა კომბინაციას.

ახლა მოკლედ განვიხილოთ ჩვენ მიერ აღწერილი საკრედიტო ოპერაციის არსი. კრედიტორისათვის ეს ოპერაცია წარმოადგენს ინვესტიციას, რადგან იგი ამ დროს იღებს შემოსავალს პროცენტული დაზარისების სახით. ამ შემთხვევაში კრედიტორი წარმოადგენს ინვესტორს, ხოლო დებიტორისათვის გამოყოფილი თანხა წარმოადგენს კრედიტორის კაპიტალს. შეიძლება ერთი და იგივე ფიზიკური ან იურიდიული პირი სხვადასხვა გარიგებაში მოგვევლინოს როგორც კრედიტორის, ისე დებიტორის როლში. ასე მაგალითად, ბანკში ფულის შეგანისას შენაბრე წარმოადგენს კრედიტორს (ინვესტორს), ხოლო ბანკი – დებიტორს. მაგრამ, ამავე დროს, ბანკი თავის მხრივ გასცემს კრედიტს, მაშასადამე, წარმოადგენს კრედიტორს (ინვესტორს).

ფინანსურ ანალიზში, როგორც აღვნიშნეთ, დიდ როლს თამაშობს დრო. ეს როლი საკმარისად დიდია მცირე ინფლაციის დროსაც, ხოლო ინფლაციის დიდი ტემპის დროს მან შეიძლება გადამწყვეტი ფაქტორის როლი შეასრულოს. თუ საწყის t_0 მომენტში ჩვენ გვაქვს $S(t_0)$ რაოდენობის თანხა, ხოლო $t_1 > t_0$ მომენტში $S(t_1)$ რაოდენობის თანხა და $S(t_0) = S(t_1)$, ეკონომიკურად ეს თანხები არ არის ეკვივალენტური; ათასი ლარი დღეს უფრო „ძვირია“, ვიდრე ერთი წლის შემდეგ. ამ მნიშვნელოვან ფაქტს თანამედროვე ლიბერალურაში აღნიშნავენ გერმანია „time value of money“; ე. ი. ფულის დროითი ღირებულება. ინფლაციისა და მასთან დაკავშირებული სხვადასხვა სახის ნეგატიური თუ პოზიტიური ეფექტების გამო ეს გერმინი ყველასათვის გასაგებია. შემდგომში ჩვენ კიდევ ერთხელ დავუბრუნდებით ამ საკითხს.

1.3 ანაბრის ზრდის ფორმულა მარტივი პროცენტის გამოყენებით. მივიღოთ დროის საბაზისო ერთეულად ერთი წელიწადი და შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები

$$i_1 \equiv i, d_1 \equiv d, v_1 \equiv v,$$

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $t_0 = 0$ ე. ი. კალენდარულ დროს ავთელით ხელშეკრულების დადების მომენტიდან.

ვთქვათ, შენაბრეს ბანკში შეაქვს $S(0)$ რაოდენობის თანხა მოთხოვნამდე. ვთქვათ, ამ თანხაზე პროცენტული განაკვეთის დარიცხვა ბანკის მიერ ხდება მარტივი პროცენტის საშუალებით, ე. ი. რამდენი ხანიც არ უნდა იყოს შენახული ანაბარი, პროცენტის დარიცხვა ხდება საწყისი $S(0)$ თანხიდან. ბანკიდან ფულის გაგანა შენაბრეს შეუძლია ნებისმიერ მომენტში. ვთქვათ, წლიურ (დროის ერ-

თეულ) პროცენტულ განაკვეთს წარმოადგენს i , t დროში პროცენტული განაკვეთი იქნება it , მაშინ საწყისი კაპიტალის ნაზრდი თუ გამოვიყენებთ (6.2) ფორმულას, გამოისახება შემდეგი გოლობის საშუალებით:

$$I(0,t,S(0)) = S(0) \cdot i \cdot t, \quad (6.8)$$

სადაც t წარმოადგენს დროის იმ მნიშვნელობას, გამოსახულს დროის ერთეულში (ე. ი. წლებში), როდესაც ხდება ანაბარის ბანკიდან გაგანა.

ამრიგად, მეანაბრის შემოსავალი იზრდება წრფივად t -ს ზრდასთან ერთად, ხოლო t წელიწადში მეანაბრის კაპიტალი გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით

$$S(t) = S(0) + I(0,t,S(0)) = S(0)(1 + it). \quad (6.9)$$

შევნიშნოთ, რომ პროცენტული განაკვეთი (სესხის ეფექტურობა, ინტერესი) i შეიძლება დამოკიდებული იყოს $S(0)$ -ის სიდიდემ და იზრდებოდეს ამ უკანასკნელთან ერთად. პრაქტიკულად ამ სიგუაციას ამარტივებენ და აწესებენ, მაგალითად, i -ს ერთ მნიშვნელობას 100 ლარიდან 100000 ლარამდე, სხვა მნიშვნელობას 100 ათასი ლარიდან – 1 მილიონ ლარამდე და ა. შ.

განსაზღვრება. (6.9) გამოსახულებას ხშირად უწოდებენ ანაბარის ზრდის ფორმულას მარტივი პროცენტების საშუალებით, ხოლო მამრავლს

$$\frac{S(t)}{S(0)} = 1 + it$$

უწოდებენ ზრდის კოეფიციენტს და მას აღნიშნავენ სიმბოლოთი $A(t)$.

ამრიგად, (6.9) ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$S(t) = A(t) \cdot S(0). \quad (6.10)$$

მარტივ პროცენტებს, ჩვეულებრივ, იყენებენ შემდეგ შემთხვევებში:

- i) მოკლევადიანი სესხის შემთხვევაში, როდესაც სესხის დაფარვის ვადა არ აღემატება ერთ წელიწადს.
- ii) როდესაც პროცენტული დანარიცხები არ ემაგება ვალს, რადგან ეს დანარიცხები გადაიხდება პერიოდულად ყოველი კონვერსიული პერიოდის ბოლოს.
- iii) ისეთი ანაბრების დროს, როდესაც პროცენტული დანარიცხების გადახდა ხდება ყოველთვიურად და ა. შ.

1.4 მარტივი პროცენტის გამოთვლის სქემები. მოკლევადიანი მოპერაციებისას ინვესტირების ვადა – τ მოსახერხებელია გამოვიღოთ იქნეს დღეებში, ხოლო წლის ხანგრძლივობად ამ შემთხვევაში იღებენ $360 = 12 \cdot 30$ დღეს ან წელიწადში დღეების რეალურ რაოდენობას. პირველ შემთხვევაში მარტივ პროცენტს უწოდებენ *ჩვეულებრივს*, ხოლო მეორე შემთხვევაში – *ზუსტს*. i -ს ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის ჩვეულებრივი პროცენტის სიდიდე აღემატება ზუსტი პროცენტის სიდიდეს. ამრიგად, ამ შემთხვევაში (1.9) ფორმულა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$S(\tau) = S(0) \left(1 + i \frac{\tau}{k} \right), \quad (6.11)$$

სადაც $k = 360$ ან 365 (366) დღეს.

ინვესტირების ვადის დღეების τ რაოდენობის დასათვლელად იყენებენ ორ ვარიანტს. პირველი ვარიანტი (მუსკი): უფრო ხშირად ითვლიან დღეების მუსკი რაოდენობას. ამ მიზნით იყენებენ სპეციალურ ცხრილს, რომელშიც წლის ყოველ დღეს მინიჭებული აქვს თავისი ნომერი 1-დან 365-მდე (366-მდე). ამასთან, სტუმარ ვაკემისა და დაფარვის დღე ითვლება ერთ დღედ. მეორე ვარიანტი (მიმლოებითი): ითვლიან თვეების რაოდენობას, ამ რაოდენობას ამრავლებენ 30-ზე (თითოეული თვის ხანგრძლივობა განისაზღვრება 30 დღით) და შემდეგ დაამატებენ დარჩენილი დღეების რაოდენობას. მეორე ვარიანტი, ჩვეულებრივ, იძლევა τ სიდიდის უფრო მცირე მნიშვნელობას.

ამრიგად, ჩვეულებრივ გამოიყენება მარტივი პროცენტების გამოთვლის შემდეგი სქემები:

i) *მუსკი პროცენტები დღეების მუსკი რაოდენობით.* ამ სქემის გამოყენებისას, (6.11) ფორმულაში k არის 365 ან 366, ხოლო დღეების დათვლისას იყენებენ მუსკი ვარიანტს. ეს არის ყველაზე უფრო მუსკი სქემა, იგი ფართოდ გამოიყენება დიდი ბრიტანეთის ბანკებში.

ii) *ჩვეულებრივი პროცენტები დღეების მუსკი რაოდენობით.* ამ შემთხვევაში გამოიყენებენ (6.11) ფორმულას, სადაც $k = 360$, ხოლო დღეების რაოდენობა დაითვლება ისე, როგორც წინა შემთხვევაში. ამ სქემას იყენებენ საფრანგეთის ბანკებში. ამ შემთხვევაში მიიღება $S(\tau)$ -ს უფრო დიდი მნიშვნელობა, ვიდრე i) შემთხვევაში.

iii) *ჩვეულებრივი პროცენტები დღეების მიმლოებითი რაოდენობით.* ამ შემთხვევაში გამოიყენებენ კვლავ (6.11) ფორმულას, სადაც $k = 360$, ხოლო დღეების დათვლისას იყენებენ მეორე ვარიანტს. პროცენტების დათვლის ამ სქემას იყენებენ გერმანიის ბანკებში.

1.5 მარტივი პროცენტის განაკვეთის ცვლა ინფლაციის გამო. ვიგულისხმობთ, რომ ინფლაცია გვაიძულებს ვცვალოთ მარტივი პროცენტის განაკვეთები (floating rate). ვთქვათ, ხელშეკრულების მოქმედების $(t_0, t_0 + T)$ პერიოდში პროცენტების წლიური განაკვეთის ცვლა ხდება $(m - 1)$ -ჯერ შემდეგ მომენტებში:

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{m-2} < t_{m-1}$$

აღნიშნოთ $t_m = t_0 + T$ და ხელშეკრულების მოქმედების (t_0, t_m) პერიოდში დავეთვინოთ m ინტერვალად. თითოეულ ინტერვალში წლიური მარტივი პროცენტის განაკვეთი მუდმივია. ასე, რომ (t_0, t_1) ინტერვალში ეს განაკვეთი შეადგენს j_0 -ს (t_1, t_2) ინტერვალში $-j_1$ -ს და ა. შ. უკანასკნელ (t_{m-1}, t_m) ინტერვალში კი $-j_{m-1}$ -ს.

თეორემა 1.1 ვთქვათ, ბანკში შეგანილი საწყისი თანხა გოლია $S(0)$ -ის და გამოიყენება პროცენტების წლიური განაკვეთების ცვლის შემთხვევაში აღწერილი სქემა, მაშინ, თუ არ გამოიყენება საშუალოდ ოპერაციები, ანაბრის მრდის კოეფიციენტი მთელ (t_0, t_m) ინტერვალში გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$A(t_0, t_m) = \frac{S(t_m)}{S(t_0)} = 1 + \sum_{s=0}^{m-1} (t_{s+1} - t_s) j_s \quad (6.12)$$

დამტკიცება. (1.1) ფორმულის თანახმად

$$S(t_m) = S(t_0) + I(t_0, t_m, S(t_0)), \quad (6.13)$$

სადაც $I(t_0, t_m, S(t_0))$ წარმოადგენს საწყისი კაპიტალის ნაზარდს სესხზე პროცენტული განაკვეთის დარიცხვის შედეგად (t_0, t_m) ინტერვალზე.

ჩვენ შევთანხმდით, რომ მარტივი პროცენტების დარიცხვა ყოველ (t_s, t_{s+1}) ინტერვალში საწყის $S(t_0)$ თანხაზე ხდება დამოუკიდებლად იმისა, თუ რა თანხა იქნა დარიცხული წინა ინტერვალში. აღნიშნოთ $I(t_s, t_{s+1}, S(t_0))$ სიმბოლოთი აბსოლუტური ნაზრდი (t_s, t_{s+1}) ინტერვალზე.

ცხადია, რომ აბსოლუტური ნაზრდი მთელ (t_0, t_m) ინტერვალზე გოლია თითოეულ ინტერვალზე აბსოლუტური ნაზრდების ჯამის:

$$I(t_0, t_m, S(t_0)) = \sum_{s=0}^{m-1} I(t_s, t_{s+1}, S(t_0)). \quad (6.14)$$

(6.8) ფორმულის თანახმად ყოველ (t_s, t_{s+1}) ინტერვალზე სამართლიანია ფორმულა

$$I(t_s, t_{s+1}, S(t_0)) = S(t_0) \cdot j_s(t_{s+1} - t_s), \quad (6.15)$$

ამიგომ (6.14) გოლობიდან მივიღებთ:

$$I(t_0, t_m, S(t_0)) = S(t_0) \sum_{s=0}^{m-1} (t_{s+1} - t_s) j_s \quad (6.16)$$

თუ $I(t_0, t_m, S(t_0))$ -ის ამ უკანასკნელ გამოსახულებას შევიგანთ (6.13) გოლობაში და გავყოფთ $S(t_0)$ -ზე, მივიღებთ (6.12) გოლობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, პროცენტების წლიური განაკვეთები ყოველ (t_s, t_{s+1}) ინტერვალზე ერთმანეთის გოლია:

$$j_0 = j_1 = j_2 = \dots = j_{m-1} = j,$$

მაშინ (6.12) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$S(t_m) = S(t_0)[1 + (t_m - t_0)j],$$

რაც ემთხვევა, როგორც მოსალოდნელი იყო, (6.9) ფორმულას.

მაგალითი. ხელშეკრულება ითვალისწინებს მარტივი პროცენტების დარიცხვის შემდეგ სქემას: პირველ წელს - 60%, ხოლო ყოველ მომდევნო ნახევარწელიწადში პროცენტების წლიური განაკვეთი იზრდება 10%-ით. ვიპოვოთ სესხის ბრდის კოეფიციენტი 2,5 წლის განმავლობაში.

ამოხსნა. ამ ხელშეკრულების პირობებში საწყისი ინტერვალის სიგრძე შეადგენს ერთ წელიწადს, ხოლო პირველი, მეორე, მესამე ინტერვალების სიგრძე ნახევარ წელიწადს. ხელშეკრულების თანახმად $j_0 = 0,6$, $j_1 = 0,7$, $j_2 = 0,8$, $j_3 = 0,9$. თუ გავითვალისწინებთ ამ მონაცემებს, (6.12) ფორმულის თანახმად შეიძლება გამოვთვალოთ სესხის ბრდის კოეფიციენტი:

$$A(2,5) = 1 + \sum_{s=0}^3 (t_{s+1} - t_s) j_s = 1 + 1 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 2,8.$$

ამრიგად, თუ $S(0)$ წარმოადგენს გაცემული სესხის რაოდენობას, მაშინ შემოთ აღნიშნული ხელშეკრულების პირობებში, 2,5 წლის შემდეგ კრედიტორი მიიღებს თანხის შემდეგ რაოდენობას

$$S(2,5) = A(2,5) \cdot S(0) = 2,8 \cdot S(0),$$

ვ. ა. ვაყუშვილი სესხის რაოდენობა გაიზარდა 2,8-ჯერ.

1.6 პროცენტების რეინვესტირება. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მარტივი პროცენტების განაკვეთების ცვლილებების ყოველი ეგაპის ბოლოს აბსოლუტური ნამრდი ემატება არსებულ თანხას და ანაბარის ეს ახალი რაოდენობა რჩება საბანკო ანგარიშზე. ცხადია, რომ შემდეგ ეგაპზე შეიძლება შეიქმნას პროცენტული განაკვეთი, როგორც ეს შემთხვევაში აღნიშნული. ამ სურათის უწოდებენ პროცენტების რეინვესტირებას ან კაპიტალიზაციას.

თეორემა 1.2 რეინვესტირებისას, თუ დროის ყოველ ინტერვალში ხდება მარტივი პროცენტების წლიური განაკვეთის ცვლა, (t_0, t_m) ინტერვალის ბოლოს $S(t_m)$ თანხის რაოდენობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$S(t_m) = S(t_0) \prod_{s=0}^{m-1} [1 + (t_{s+1} - t_s)j_s], \quad (6.17)$$

სადაც j_s -წარმოადგენს (t_s, t_{s+1}) ინტერვალში წლიური მარტივი პროცენტის განაკვეთს.

დამტკიცება. ანაბრის (სესხის) ზრდის კოეფიციენტი (t_0, t_1) ინტერვალზე შეადგენს:

$$A(t_0, t_1) = 1 + (t_1 - t_0)j_0,$$

ახე რომ ამ ინტერვალის ბოლოს თანხის რაოდენობა გოლია შემდეგი სიდიდის:

$$S(t_1) = A(t_0, t_1)S(t_0) = [1 + (t_1 - t_0)j_0]S(t_0)$$

შემდეგ ეს თანხა გადაფორმდება შემდეგი ვადით, (t_1, t_2) ინტერვალზე. ამ ინტერვალზე ანაბრის (სესხის) ზრდის კოეფიციენტი შეადგენს:

$$A(t_1, t_2) = 1 + (t_2 - t_1)j_1$$

მაშინ

$$S(t_2) = A(t_1, t_2)S(t_1) = A(t_1, t_2)A(t_0, t_1)S(t_0) = [1 + (t_1 - t_0)j_0][1 + (t_2 - t_1)j_1]S(t_0)$$

თუ ამ პროცესს ვაუჯერებულბთ, მაშინ მივიღებთ (6.17) გოლობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_m - t_{m-1} = 1$ კონვერსიულ პერიოდს, ხოლო $j_0 = j_1 = j_{m-1} = j$, სადაც j წარმოადგენს კონვერსიულ პერიოდში მარტივი პროცენტის განაკვეთს, მაშინ

$$S(t_m) = S(t_0)(1+j)^m. \quad (6.18)$$

მაგალითი. ვთქვათ, ბანკში შეგანილი ანაბრის რაოდენობაა $S(t_0)$. ერთი კვარტლის განმავლობაში, თანხის ღარიცხვა ხდება შემდეგი სქემის მიხედვით: პირველი თვის ბოლოს - 9%, მეორე თვის ბოლოს - 10%, მესამე თვის ბოლოს - 11%. მაშინ რეინვესტირებისას სესხის ზრდის კოეფიციენტი გამოითვლება შემდეგი გოლობის საშუალებით:

$$A(t_0, t_3) = (1 + 0,09)(1 + 0,1)(1 + 0,11) = 1,319.$$

ახე რომ

$$S(t_3) = A(t_0, t_3)S(t_0) = 1,319 S(t_0).$$

1.7 მათემატიკური დისკონტირება. ფინანსური ოპერაციების ჩაგარებისას ხშირად განიხილება ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული ამოცანების შებრუნებული ამოცანა. ვთქვათ, კონვენსიულ პერიოდში მარტივი პროცენტული განაკვეთი მუდმივია და შეადგენს $i(t_0)$. რა რაოდენობის თანხის ინვესტირება უნდა მოვახდინოთ t_0 მომენტში, ე. ი. უნდა განვსაზღვროთ $S(t_0)$ -ის მნიშვნელობა, რომ τ დღის შემდეგ გაზრდილი თანხის რაოდენობა ვახდეს $S(t_0 + \tau)$. თუ გავითვალისწინებთ (6.11) ფორმულას, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$S(t_0) = \frac{S(t_0 + \tau)}{1 + i(t_0) \frac{\tau}{k}} \quad (6.19)$$

სადაც τ წარმოადგენს დღეების რაოდენობას, ხოლო k - წელიწადში დღეების რაოდენობას. თუ დროს გამოვსახავეთ ძირითადი ერთეულის, წლის საშუალებით - T წელიწადი, მაშინ (6.19) ფორმულა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$S(t_0) = \frac{S(t_0 + T)}{1 + i(t_0)T} \quad (6.20)$$

განსაზღვრება. თანხის გაზრდილი $S(t_0 + T)$ რაოდენობის ახლანდელი ანუ მიმდინარე ღირებულება (present value) ეწოდება $S(t_0)$ თანხას, რომელიც მიმდინარე t_0 მომენტში ინვენსტირებისას, მუდმივი წლიური პროცენტული $i(t_0)$ განაკვეთის შემთხვევაში, T დროის შემდეგ იძლევა თანხის წინასწარ მოცემულ რაოდენობას $S(t_0 + T)$.

თანხის მომავალი გაზრდილი რაოდენობის თანამედროვე ღირებულების გამოთვლის ოპერაციას მათემატიკური დისკონტირება ეწოდება, ხოლო

$$\frac{1}{1 + i(t_0)T}$$

სიდიდეს კი - დისკონტური მამრავლი.

$$D(T) = S(t_0 + T) - S(t_0)$$

სხვაობას ეწოდება $S(t_0 + T) -$ თანხის დისკონტი.

მაგალითი. ბანკი გასცემს კრედიტს წლიური 80%-იანი განაკვეთით. მსესხებელმა მიიღო კრედიტი 6 თვით და ამ ვადის ბოლოს მან უნდა დაუბრუნოს ბანკს 3 მილიონი ლარი. რა თანხა მიუღია მსესხებელს ხელშეკრულების დადების t_0 მომენტში და რისი გოლია თანხის დისკონტი $D(T)$?

ამოხსნა. ვთქვათ, მარტივი პროცენტების გამოთვლისას ბანკი სარგებლობს შემდეგი სქემით: ჩვეულებრივი პროცენტები დღეების მიახლოებით რაოდენობით. ამ შემთხვევაში შეიძლება ვისარგებლოთ (6.19) ფორმულით, სადაც $k = 360$ დღეს, ხოლო $\tau = 180$ დღეს (6 თვე):

$$S(t_0) = \frac{3 \cdot 10^6}{1 + 0,8 \cdot \frac{1}{2}} = 2,143 \text{ მილიონი ლარი,}$$

თანხის დისკონტი

$$D(T) = 857 \text{ ათასი ლარი.}$$

1.1 დისკონტის ეფექტური განაკვეთი. ვთქვათ, ბანკმა გასცა კრედიტი 1 წლის ვადით, მუდმივი წლიური მარგივი პროცენტული განაკვეთით i . ვთქვათ, აგრეთვე, რომ დებიტორი ხელშეკრულების დადების მომენტში, ე. ი. წინასწარ აძღს თანხას, რომელიც წარმოადგენს ერთი წლის განმავლობაში საწყისი კაპიტალის ნაზრდის ახლანდელ (მიმდინარე) ღირებულებას, ამ თანხისა და საწყისი კაპიტალის შეფარდება აღვნიშნოთ d -თი და ვუწოდოთ მას დისკონტის განაკვეთი.

თეორემა 1.3 წლიური დისკონტის განაკვეთი d , მარგივი პროცენტის შემთხვევაში, წლიურ მარგივ პროცენტულ განაკვეთთან დაკავშირებულია შემდეგი გოლობის საშუალებით

$$d = \frac{i}{1+i} \quad (6.21)$$

დამტკიცება. საწყისი $S(0)$ კრედიტისათვის თანხის გაზრდილი რაოდენობა ერთი წლის განმავლობაში გოლია $S(0)(1+i)$, ე. ი. მისი ნაზრდი ერთი წლის შემდეგ გოლია $S(0)i$. ვიპოვოთ ამ ნაზრდის თანამედროვე ღირებულება. თუ ვისარგებლებთ (6.20) ფორმულით, მივიღებთ, რომ $S(0) \cdot i$ ნაზრდის თანამედროვე ღირებულებაა $\frac{S(0)i}{1+i}$ (რადგან $T=1$). თუ მას შევაფარდებთ საწყისი $S(0)$ კაპიტალთან მივიღებთ (6.21) ფორმულას.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, d წარმოადგენს მარგივ პროცენტს, რომლის მიხედვითაც ნაზრდის გადახდა ხდება წინასწარ და რომელიც ეკვივალენტურია წლიური მარგივი პროცენტული განაკვეთისა i .

შევნიშნოთ, რომ (1.21) გოლობის ძალით

$$d < 1 \text{ და } d < i,$$

$$d < \min(1, i). \quad (6.22)$$

თუ i -ს გამოვსახებთ d -ს საშუალებით, მივიღებთ:

$$i = \frac{d}{1-d} \quad (6.22)$$

განსაზღვრება. დისკონტის ეფექტურ განაკვეთს უწოდებენ სიდიდეს:

$$v = 1 - d = \frac{1}{1+i}$$

1.9 მაგალითი კონკრეტული თამასუქის შემთხვევისათვის. განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, გაცემულია შემდეგი შინაარსის თამასუქი:

თბილისი, 1 სექტემბერი, 1999წ.
 ვალდებულებას ვიღებ, გემოთ მითითებული რისკვიდან
 60 დღის განმავლობაში გადავიხადო X -ის სასარგებლოდ
 2000\$ წლიური მარგივი პროცენტული განაკვეთით 11%.
 ხელისმოწერა

თამასუქის ნომინალური ღირებულება შეადგენს 2000\$. მისი ფაქტობრივი ღირებულებაა ნომინალურ ღირებულებას დამატებული 60 დღის განმავლობაში პროცენტული დანამატი:

$$2000 \left(1 + 0,11 \cdot \frac{60}{365} \right) = 2036,16\$.$$

თუმცა გადახდის ვადა 1999 წლის 31 ოქტომბერია, თამასუქი შეიძლება გაიყილოს ადრე, მხოლოდ ეს გაყიდვა მოხდება დისკონტით, განვიხილოთ ეს სიტუაცია. ვთქვათ, X პირი ბანკს მიჰყიდის თამასუქს 1999 წლის 2 ოქტომბერს წლიური დისკონტის განაკვეთით 9,5%. გამოვთვალოთ, თუ რა ფასად იყიდის თამასუქს ბანკი და X-ისა და ბანკის შემოსავალი.

იმისათვის, რომ თამასუქის ფასი განვსაზღვროთ მისი ვალამდე გაყიდვისას, დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა 1.4 განვიხილოთ დროის ინტერვალი $(0,1)$, რომლის სიგრძეა 1 წელი. ვთქვათ, d შეადგენს დისკონტის წლიურ განაკვეთს. t წარმოადგენს დროს, გამოსახულს წლებში, $S(1)$ შეადგენს საწყისი $S(0)$ ვალისათვის გამრდილი თანხის რაოდენობას. მაშინ t მომენტში ვალის რაოდენობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$S(t) = S(1)[1 - (1 - t)d], \quad 0 < t < 1. \quad (6.23)$$

დამტკიცება. ჯერ $S(t)$ გამოვსახოთ $S(0)$ -ისა და i -ს საშუალებით. მივიღებთ:

$$S(t) = S(0)(1 + ti). \quad (6.24)$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$S(0) = \frac{S(1)}{1+i}, \quad \frac{1}{1+i} = 1-d, \quad \frac{i}{1+i} = d,$$

მაშინ (6.24) გოლობიდან მივიღებთ:

$$S(t) = S(1) \left(\frac{1}{1+i} + t \frac{i}{1+i} \right) = S(1)[1 - d + td] = S(1)[1 - (1 - t)d].$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, $S(t)$ -ს მნიშვნელობა მიღებულია $S(0)$ -ისთვის $I(t) = S(0)ti$ ნაზრდის დამატებით. იგივე $S(t)$ შეიძლება მიღებულ იქნეს (6.23) გოლობიდან $S(1)$ -დან დისკონტით (ჩამოკლებით):

$$S(t) = S(1) - D(1 - t), \quad (6.25)$$

სადაც

$$D(1 - t) = S(1)(1 - t)d,$$

რომელიც დამოკიდებულია ვალის გასვლამდე დარჩენილი დროის რაოდენობაზე.

დავუბრუნდეთ ჩვენ მიერ განხილულ მაგალითს თამასუქის შესახებ. თამასუქის გაყიდვის მომენტიდან თამასუქის ვალის გასვლამდე არის 29 დღე. ამიტომ თამასუქის გაყიდვის ფასი, წლიური დისკონტის განაკვეთით 9,5%, შეიძლება დავადგინოთ (6.23) ფორმულის გამოყენებით:

$$S(t) = 2036,16 \left(1 - \frac{29}{365} \cdot 0,095 \right) = 2020,79\$.$$

ამრიგად, X-ისა და ბანკის შემოსავალი შესაბამისად შეადგენს 20,79\$ და 15,37\$.

$[1 - (1 - t)d]$ სიდიდეს უწოდებენ *დისკონტის მამრავლს*, რომელიც, ცხადია, უნდა იყოს დადებითი, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებთ თამაშურს გაყიდვისას მის უარყოფით ან ნულოვან ფასს (ეს შეიძლება მოხდეს როდესაც დისკონტი დიდია, მაგ., $d = 200\%$ და $t = 0,5$ წელი).

§2. საკრედიტო ოპერაციების

მათემატიკური საფუძვლები (რთული პროცენტები)

2.1 რთული პროცენტი. კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტი. ვთქვათ, შენაბრე ბანკში ხსნის ანგარიშს საწყისი ანაბრით $S(0)$. ვთქვათ, ბანკის მიერ დაჩქებული მარგინი პროცენტის განაკვეთი წელიწადში შეადგენს i -ს, მასთან ამ განაკვეთის მოქმედების დროა ორი წელიწადი.

თუ შენაბრე ანგარიშს დახურავს ერთი წლის შემდეგ, მაშინ ის ბანკისაგან მიიღებს თანხის შემდეგ რაოდენობას (იხ. §1):

$$S(1) = S(0) (1 + i). \quad (6.26)$$

დაეუბნათ, რომ შენაბრემ კვლავ გახსნა ანგარიში უკვე $S(1)$ ანაბრით კიდევ ერთი წლის ვადით. მაშინ მეთრე წლის ბოლოს იგი მიიღებს თანხის შემდეგ რაოდენობას:

$$S(2) = S(1) (1 + i) = S(0) (1 + i)^2 = S(0) (1 + 2i + i^2). \quad (6.27)$$

თუ შენაბრე არ გადააფორმებს თავის ანგარიშს, მაშინ იგი, როგორც წინა პარაგრაფში გქვონდა აღნიშნული, მიიღებს თანხის შემდეგ რაოდენობას:

$$S(0) (1 + 2i),$$

ე. ი. $S(0) i^2$ -ით ნაკლებს. ეს დამატებითი ნაზრდი $[S(0)i]^2$ წარმოადგენს პირველი წლის შემდეგ მიღებულ $S(0)i$ ნაზრდისათვის პროცენტულ დანარიცხს მეორე წლის განმავლობაში.

ამასათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ გარკვეული ვადის შემდეგ ბანკში გახსნილი ანგარიშის ხელახალი გადაფორმება, გრძელვადიანი ანაბრების მიზიდვის მიზნით, ბანკები შეტანილი თანხის ნაზრდის გამოსათვლელად ხშირად იყენებენ რთულ პროცენტებს.

გრძელვადიანი საფინანსო-საკრედიტო ოპერაციების ჩატარებისას პროცენტული განაკვეთის ღარიცხვის შედეგად მიღებულ ნაზრდს ან გასცემენ მაშინვე, მისი ღარიცხვის მომენტში, ან მოახდენენ მის რეინვესტირებას, გამოიყენებენ რა ამ მიზნით რთულ პროცენტებს (compound interest). საწყისი თანხა იზრდება პროცენტული განაკვეთის ღარიცხვის ყოველი პერიოდის შემდეგ, მაშინ, როდესაც მარგინი პროცენტების შემთხვევაში ეს საწყისი თანხა მუდმივად გოლია $S(0)$ -ის. პროცენტული განაკვეთის ღარიცხვის შედეგად მიღებული თანხის დამატებას საწყის თანხაზე უწოდებენ პროცენტების კაპიტალიზაციას.

დავადგინოთ პროცენტული განაკვეთის ღარიცხვის შედეგად მიღებული თანხის გამოსათვლელი ფორმულა იმ პირობით, რომ პროცენტების კაპიტალიზაცია ხდება წელიწადში ერთხელ.

ვთქვათ, $S(0)$ წარმოადგენს ანაბრის საწყის რაოდენობას, i – წლიურ პროცენტულ განაკვეთს, n – წლების რაოდენობას. ამასთან, ვიგულისხმობთ, რომ ანაბრე არ ხდება არავითარი საშუალო ოპერაცია. თუ გამოვთვლით ერთი წლის შემდეგ გაზრდილ თანხის რაოდენობას, მივიღებთ:

$$S(1) = S(0) + S(0)i = S(0)(1 + i).$$

ახვევ, თუ გამოვთვლით ორი წლის შემდეგ გაზრდილი თანხის რაოდენობას, მივიღებთ:

$$S(2) = S(1) + S(1)i = S(0)(1 + i) + S(0)(1 + i)i = S(0)(1 + i)^2.$$

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით ადვილად დავამტკიცებთ, რომ n -წლის შემდეგ გაზრდილი თანხის რაოდენობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$S(n) = S(0)(1 + i)^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.28)$$

ამრიგად, რთული პროცენტის მიხედვით ანაბარის ზრდა აღიწერება გეომეტრიული პროგრესის საშუალებით, რომლის პირველი წევრი $a_0 = S(0)$, ხოლო მნიშვნელი $q = 1 + i$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A(0, n) = \frac{S(n)}{S(0)} = (1 + i)^n. \quad (6.29)$$

$A(0, n)$ სიდიდეს უწოდებენ კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტს (accumulation factor).

2.2 ბაზრის სტაბილურობის პრინციპი. ფორმულა (6.28), რომელიც გამოიყენება კაპიტალის გაზრდილი რაოდენობის გამოსათვლელად, ჩვენ მიერ გამოყვანილი იყო იმ შემთხვევაში, როდესაც n -ნაკურალური რიცხვია. შევნიშვნოთ, რომ ეს ფორმულა სამართლიანია n -ის ნებისმიერი არაუარყოფითი მნიშვნელობისათვის. თუ აღვნიშნავთ ანაბარის შეტანის მომენტს t_0 -ით, ხოლო დროს გაგზომავთ წლებში, მაშინ t მომენტში გაზრდილი თანხის რაოდენობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$S(t) = S(t_0)(1 + i)^{t - t_0}, \quad t \geq t_0. \quad (6.30)$$

სადაც $S(t_0)$ წარმოადგენს საწყისი თანხის რაოდენობას. კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტი (t_0, t) ინტერვალზე ტოლია $A(t_0, t)$ -ს, სადაც

$$A(t_0, t) = (1 + i)^{t - t_0}, \quad t \geq t_0. \quad (6.31)$$

თეორემა 2.1 (ბაზრის სტაბილურობის პრინციპი). ვთქვათ, $[t_0, t]$ ინტერვალი დაყოფილია ქვეინტერვალებად $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. თუ არ მივიღებთ მხედველობაში გადასახადებსა და მედნადებ ხარჯებს, მაშინ $[t_0, t]$ ინტერვალზე კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტი ამ ქვეინტერვალებზე კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტების ნამრავლის ტოლია. დამტკიცება. კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტის განმარტების თანახმად ვეპქნება:

$$S(t_2) = S(t_0)A(t_0, t_2)$$

მეორე მხრივ,

$$S(t_2) = S(t_1)A(t_1, t_2) = S(t_0)A(t_0, t_1)A(t_1, t_2),$$

საიდანაც, მივიღებთ, რომ

$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2).$$

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით ადვილად დავამტკიცებთ, რომ

$$A(t_0, t_n) = A(t_0, t_1) A(t_1, t_2) \dots A(t_{n-1}, t_n), \quad (6.32)$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ ამ მნიშვნელოვანი თეორემის პირობები პრაქტიკაში სრულდება მხოლოდ მიახლოებით, რადგან, როგორც აღვნიშნეთ, იგი არ ითვალისწინებს გადასახადებს, შედნადებ ხარჯებსა და სხვა ფაქტორებს. მაგრამ შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ თეორემის პირობების გართულების ხარჯზე, პრინციპულად შესაძლებელია ამ ფაქტორების გათვალისწინება (ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში მივიღებთ სხვა თეორემას).

2.3 კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტის გამოსათვლელი ფორმულები რთული პროცენტული განაკვეთისათვის. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც პროცენტების დარიცხვის პერიოდი ნაკლებია წელიწადზე და დავუშვათ, რომ წელიწადი შეიცავს m ასეთ პერიოდს, სადაც m ნატურალური რიცხვია. ცხრილში მოყვანილია პროცენტების დარიცხვის ის პერიოდები, რომლებიც ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში და m -ის შესაბამისი მნიშვნელობები.

პროცენტების დარიცხვის პერიოდი	1 დღე	1 კვირა	1 თვე	2 თვე	3 თვე	4 თვე	6 თვე	12 თვე
m	365	52	12	6	4	3	2	1

ვთქვათ, პროცენტების დარიცხვის პერიოდში რთული პროცენტული განაკვეთი გვწოდება g_m -ის, n წლის განმავლობაში დარიცხვის პერიოდების რაოდენობა აღწევა mn , ასე, რომ დროის $(0, n)$ ინტერვალში, (6.29) ფორმულის თანახმად, კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$A(0, n) = (1 + g_m)^{mn}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.33)$$

ვარდა ამისა ცნობილია, რომ თუ ანაბარი შეგანილია ბანკში t_0 მომენტში, ხოლო პროცენტების დარიცხვის პერიოდში რთული პროცენტული განაკვეთი გვწოდება g_m -ის, მაშინ $(t_0, t_0 + T)$ ინტერვალში, სადაც T - დროის ნებისმიერი ინტერვალისაა, გამოიღვი წლის ერთეულში, კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$A(t_0, t_0 + T) = (1 + g_m)^{mT}, \quad T \geq 0. \quad (6.34)$$

ამისათვის, რომ ნაწილობრივ მაინც იქნეს გათვალისწინებული ინფლაცია, ხანა, შენაძრუთან შეთანხმებით, ზოგჯერ პერიოდულად ცვლის რთულ პროცენტულ განაკვეთს. ვთქვათ, ხელშეკრულება ითვალისწინებს რთული პროცენტული განაკვეთის ცვლის წესს T_1, T_2, \dots, T_k პერიოდებში, სადაც $t_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k$. ვთქვათ, აგრეთვე რომ (t_0, T_1) პერიოდში რთული პროცენტული განაკვეთი გვწოდება g_1 -ის (T_1, T_2) პერიოდში - g_2 -ის და ა. შ. (T_{k-1}, T_k) პერიოდში - g_k . დავუშვათ, რომ g_1, g_2, \dots, g_k ინტერვალის შეიცავს n_1 რაოდენობის პროცენტების დარიცხვის პერიოდს, g_2, g_2 ინტერვალის - n_2 რაოდენობის პროცენტების დარიცხვის პერიოდს, g_k, g_k ინტერვალის - n_k რაოდენობის პროცენტების დარიცხვის პერიოდს. მაშინ კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტი გამოითვლება შემდეგი ფორ-

$$A(t_0, T_k) = (1 + j_1)^{n_1} (1 + j_2)^{n_2} \dots (1 + j_k)^{n_k} = \prod_{p=1}^k (1 + j_p)^{n_p} \quad (6.35)$$

თუ ბანკი ცდილობს გაითვალისწინოს ინფლაცია და პერიოდულად ცვლის პროცენტულ განაკვეთს, მაშინ, ცხადია, გაზრდილი თანხის რაოდენობის პროგნოზირება შესაძლებელია მხოლოდ მიახლოებით ან საერთოდ არ არის შესაძლებელი (ეს დამოკიდებულია იმაზე, არის თუ არა პროგნოზირებადი ინფლაციის ტემპი).

განვიხილოთ ერთი საინტერესო მაგალითი, რომელიც ფინანსური მათემატიკისადმი მიძღვნილ ბევრ სახელმძღვანელოშია მოყვანილი. ეს მაგალითი ასახავს კაპიტალის კოლოსალურ ზრდას, როდესაც რთული პროცენტების დარიცხვის პერიოდების რაოდენობა დიდია. 1624 წელს კუნძულ მანჰეტენისათვის, რომელიც ნიუ-იორკის ცენტრში მდებარეობს, ინდიულების ერთ-ერთი გომის ბეჭადს გადაუხადეს 24 დოლარი. 350 წლის შემდეგ, 1974 წელს ამ კუნძულის დირექტორებმა შეფასებული იყო 40 მილიარდ დოლარად, ე. ი. კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტმა შეადგინა $1,667 \cdot 10^9$. შევნიშნოთ, კაპიტალის ეს კოლოსალური გაზრდა მოხდა რთული პროცენტის მცირე წლიური განაკვეთის პირობებში – ამ განაკვეთმა შეადგინა 6,3%.

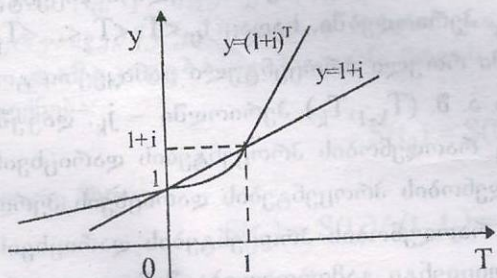
2.4 კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტების შედარება მარტივი და რთული პროცენტული განაკვეთებით დარიცხვის პირობებში. ახლა ერთმანეთს შევადაროთ კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტები მარტივი და რთული პროცენტული განაკვეთებით დარიცხვის პირობებში. შემდეგ ცხრილში მოყვანილია კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტების მნიშვნელობები, როდესაც წლიური პროცენტული განაკვეთი გოლია $i = 8\%$ -ის, ხოლო რთული ან მარტივი პროცენტის დარიცხვის პერიოდი შეადგენს ერთ წელიწადს (365 დღეს). ცხრილში T აღნიშნავს სესხის ვადას, გამოსახულს ერთი წლის ერთეულში.

კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტი	სესხის ვადა						
	30 დღე	60 დღე	1 წელი	5 წელი	10 წელი	50 წელი	100 წელი
მარტივი პროცენტების შემთხვევაში $1 + iT$	1,00657	1,0394	1,08	1,40	1,80	5,0	9,0
რთული პროცენტების შემთხვევაში $(1 + i)^T$	1,00635	1,0392	1,08	1,47	2,16	46,9	2200

შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობები

$$1 + iT > (1 + i)^T, \text{ თუ } 0 < T < 1, \quad (6.36)$$

$$1 + iT < (1 + i)^T, \text{ თუ } T > 1. \quad (6.37)$$



ნახ. 6.1

მართლაც, განვიხილოთ წრფივი ფუნქცია $y = 1 + iT$ და მარცხენა მხარის ფუნქცია $y = (1 + i)^T$. მათი გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების აბსცისებია $T = 0$ და $T = 1$. ვინაიდან $i > 0$, ამიტომ $y = (1 + i)^T$ ფუნქცია ამოზნექილია ქვემოთ და ზრდადია. ყოველივე ამის გათვალისწინებით ცხადად ჩანს (6.36) და (6.37) უტოლობების სამართლიანობა (ნახ. 6.1).

წინააღმდეგობის ილუსტრაციას წარმოადგენს ჩვენ მიერ გედა
 კლასიკური მოდელი მონაცემები.

თუ T წარმოადგენს წილად რიცხვს, მაშინ იგი შეიძლება ასე წარმოვადგი-

$$T = [T] + \{T\},$$

სადა $[T]$ აღნიშნავს T რიცხვის მთელ ნაწილს, ხოლო $\{T\}$ - წილად ნაწილს.
 პროცენტული განაკვეთის დარიცხვის შედეგად გაზრდილი თანხის რაოდენობა
 შეიძლება გამოთვლილ იქნეს ზოგადი ფორმულის საშუალებით

$$S(T) = S(0)(1 + i)^T, T > 0, \tag{6.38}$$

ან შეიძლება გამოყენებულ იქნეს კომბინირებული მეთოდი, როდესაც $[T]$
 რაოდენობის პერიოდში დარიცხვა მოხდება რთული პროცენტული განაკვეთის
 საშუალებით, ხოლო $\{T\}$ პერიოდში კი - მარტივი პროცენტული განაკვეთის საშუ-

$$S(T) = S(0)(1 + i)^{[T]}(1 + \{T\}i), T > 0, \tag{6.39}$$

თუ გავითვალისწინებთ (6.36) და (6.37) უტოლობებს, დავინახავთ, რომ $S(T)$ -ს
 მნიშვნელობა, თუ მას გამოვიყენებთ (6.39) ფორმულის საშუალებით, აღემატება
 (6.38) ფორმულით გამოთვლილი $S(T)$ -ს მნიშვნელობას. ამიტომ შეანაბრებო-
 ხათვის ხელსაყრელია პროცენტული განაკვეთის დარიცხვის მეორე წესი, ხოლო
 პირველის კი - პირველი.

2.5 პროცენტების ნომინალური და ეფექტური წლიური განაკ-
ვეთები. ინფლაციის პირობებში პროცენტების კაპიტალიზაცია ხდება წელიწად-
 ში რამდენჯერმე - ყოველდღიურად, ყოველკვირეულად, ყოველთვიურად და
 ამ მიზნით ფინანსურ ხელშეკრულებებში ჩვეულებრივ ფიქსირდება წლიური
 რთული პროცენტული განაკვეთი და წელიწადში პროცენტების დარიცხვის პე-
 რიოდების რაოდენობა m .

განსაზღვრება. წლიურ განაკვეთის $i^{(m)}$ -ს ეწოდება ნომინალური
 (nominal rate), თუ დარიცხვის ერთ პერიოდში, რომლის ხანგრძლივო-
 ბაა $\frac{1}{m}$ წელიწადი, შესაბამისი რთული პროცენტული განაკვეთი გა-
 მოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$j_{1/m} = \frac{i^{(m)}}{m}, m = 1, 2, 3, \dots \tag{6.40}$$

თუ T წარმოადგენს ბანკის მიერ გაცემული სესხის (ინვენსტიციის) ვადას,
 გამოსახულს წლებში, მაშინ ცხადია, რომ

$$S(T) = S(0) \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^{mT}, \tag{6.41}$$

სადა mT წარმოადგენს დარიცხვის პერიოდების რაოდენობას T წელიწადში.
 m -ის შრდასთან ერთად, ფიქსირებული ნომინალური განაკვეთის შემთხვე-
 ვაში, იმდება კაპიტალის შრდის კოეფიციენტი

$$A(T) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^{mT}$$

მაგალითი. ვთქვათ, ბანკმა გასცა კრედიტი 2 წლის ვადით წლიური ნომინალური განაკვეთით 120%. უნდა ვიპოვოთ ამ დროის შემდეგ გაზრდილი თანხის რაოდენობა, თუ დარიცხვის პერიოდს შეადგენს: ა) ერთი წელიწადი; ბ) ექვსი თვე; გ) სამი თვე; დ) ერთი თვე.

ამ შემთხვევაში $T=2$, $i^{(m)}=120\%$, $m=1,2,4,12$. ვთქვათ, $S(0)=10^7$ ლარს. მოვიყვანოთ ცხრილი, რომელშიც აღნიშნულია საჭირო სიდიდეების მნიშვნულობები.

შემთხვევა	m	$A(T) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{2m}$	S(2) მილიონ ლარებში	I(2) = S(2) - S(0) მილიონ ლარებში
ა	1	$\left(1 + \frac{1,2}{1}\right)^2 = 4,8400$	48,400	38,400
ბ	2	$\left(1 + \frac{1,2}{2}\right)^4 = 6,5536$	65,536	55,536
გ	4	$\left(1 + \frac{1,2}{4}\right)^8 = 8,1573$	81,573	71,573
დ	12	$\left(1 + \frac{1,2}{12}\right)^{24} = 9,8497$	98,497	88,497

როგორც ვხედავთ, m-ის (წელიწადში პროცენტების დარიცხვის პერიოდების რაოდენობა) ზრდასთან ერთად, როცა არ იცვლება ნომინალური განაკვეთი, იზრდება კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტი და მასთან ერთად, აბსოლუტური წლიური შემოსავალიც.

შემოვიღოთ კიდევ ერთი ახალი ცნება - პროცენტების ეფექტური განაკვეთი.

განსაზღვრება. პროცენტების ეფექტური წლიური განაკვეთი $i_{\text{ეფ}}$ ნომინალური წლიური $i^{(m)}$ განაკვეთისათვის განისაზღვრება შემდეგი პირობიდან

$$1 + i_{\text{ეფ}} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \quad (6.42)$$

ე. ი.

$$S(1) = S(0)(1 + i_{\text{ეფ}}), \quad S(1) = S(0) \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

ამრიგად, $i_{\text{ეფ}}$ გამოსახავს პროცენტის წლიურ განაკვეთს, რომლის საშუალებითაც დარიცხვა იძლევა $S(1)$ -ის იმავე მნიშვნელობას, რასაც წლიური ნორმალური განაკვეთი $i^{(m)}$.

ცხადია, რომ თუ $m = 1$, მაშინ

$$i^{(1)} = i_{\text{ეფ}} = j_1.$$

(6.42) გოლობიდან გვაქვს:

$$i_{\text{ეფ}} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1. \quad (6.43)$$

ცხადია, რომ $i_{\text{ეფ}}$ ეკვივალენტურია რთული პროცენტული $\frac{i^{(m)}}{m}$ განაკვეთისა, თუ წელიწადში პროცენტების დარიცხვის პერიოდების რაოდენობა გოლია m-ის.

თუ x საკმაოდ მცირე დადებითი რიცხვია (მაგალითად, $0 < x \leq 0,1$) და m არ იღებს დიდ მნიშვნელობებს, მაშინ $(1+x)^m$ გამოსახულების მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულა:

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2. \quad (6.45)$$

თუ ამ ფორმულას გამოვიყენებთ (6.43) გამოსახულებაში, მივიღებთ პროცენტების ეფექტური წლიური განაკვეთის გამოსათვლელ მიახლოებით ფორმულას:

$$i_{\text{ეფ}} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 \approx i^{(m)} + \frac{m-1}{2m} [i^{(m)}]^2. \quad (6.46)$$

2.6 რთული დისკონტი და რთული დისკონტის განაკვეთი. ხშირად აუცილებელია შემდეგი ამოცანის ამოხსნა: უნდა განისაზღვროს $S(0)$ -ის მნიშვნელობა, რომ T წლის შემდეგ მივიღოთ სასურველი თანხა $S(T)$, თუ გამოყენებული იქნება რთული პროცენტული განაკვეთი. ამ შემთხვევაში $S(0)$ წარმოადგენს $S(T)$ -ს თანამედროვე მნიშვნელობას.

$$I(T) = S(T) - S(0) \quad (6.47)$$

სხვაობას ეწოდება *რთული დისკონტი*, ხოლო თანხის გაზრდილი $S(T)$ რაოდენობის თანამედროვე $S(0)$ ღირებულების გამოთვლის ოპერაციას *მათემატიკური დისკონტირება*.

თუ მოცემულია $S(T)$ -ს მნიშვნელობა და წლიური რთული პროცენტული განაკვეთი i , მაშინ (6.30) ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$S(0) = \frac{S(T)}{(1+i)^T}, \quad T > 0. \quad (6.48)$$

ხოლო, თუ მოცემულია $S(T)$ -ს მნიშვნელობა და ნორმალური წლიური განაკვეთი $i^{(m)}$, მაშინ (6.41) ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$S(0) = \frac{S(T)}{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mT}}, \quad T > 0. \quad (6.49)$$

(6.48) და (6.49) ფორმულები ერთმანეთს უკავშირებს ფულის თანამედროვე $S(0)$ და მომავალ $S(T)$ მნიშვნელობებს.

ფულის რაოდენობა, მისი მიღების თარიღის მითითების გარეშე, შეიცავს საკმაოდ მცირე ეკონომიკურ ინფორმაციას. მაგალითად, პალიან ძნელია გავცეთ პასუხი შემდეგ შეკითხვაზე:

რომელია მეტი 1 ათასი ლარი 1997 წლის 1 იანვარს, თუ 2 ათასი ლარი 1999 წლის 1 იანვარს?

ამაგომ, თუ უნდა შევადაროთ ერთმანეთს სხვადასხვა დროის მომენტი, აუცილებელია ფულის რაოდენობა, საჭიროა გამოვთვალოთ მათი ღირებულება ერთსა და იმავე მომენტში. მაგალითად, ვთქვათ, ხელშეკრულება იდება t_0 მომენტში, რომლის თანახმადაც t_1 მომენტში მივიღებთ $C(t_1)$ რაოდენობის თანხას ან

ეფექტური წლიური განაკვეთის $i_{\text{ეფ}}$ -ის გამოთვლა წარმოადგენს ფინანსური ანალიზის ერთ-ერთ ძირითად ინსტრუმენტს. მისი ცოდნა იძლევა საშუალებას ერთმანეთს შევადაროთ სხვადასხვა ხელშეკრულება, რომლებიც შედგენილია სხვადასხვა სქემის მიხედვით: სხვა თანაბარი პირობების შემთხვევაში მით უფრო ხელსაყრელია ხელშეკრულება კრედიტორისათვის, რაც უფრო მაღალია ეფექტური წლიური განაკვეთი.

მაგალიტი. ვთქვათ, ბანკმა გასცა ინვენსტიცია ერთი წლის ვადით წლიური განაკვეთით 120%.

ყოველთვიური კაპიტალიზაციისას პროცენტების ეფექტური განაკვეთი შეადგენს:

$$i_{\text{ეფ}} = \left(1 + \frac{1,2}{12}\right)^{12} - 1 = 1,1^{12} - 1 \approx 2,138.$$

ყოველდღიური კაპიტალიზაციისას პროცენტების ეფექტური განაკვეთი შეადგენს:

$$i_{\text{ეფ}} = \left(1 + \frac{1,2}{365}\right)^{365} - 1 \approx 1,00329^{365} - 1 \approx 2,316.$$

როგორც ვხედავთ, პროცენტების ეფექტური განაკვეთის ამ ორ მნიშვნელობას შორის განსხვავება მნიშვნელოვანია.

ამერიკის შეერთებულ შტატებში წელიწადში m -ჯერ პროცენტული განაკვეთის ღარიცხვა ხდება უშუალოდ (6.41) ფორმულის საშუალებით. ევროპულ ქვეყნებში კი ჯერ დაადგენენ $i_{\text{ს}}$, ხოლო გაზრდილ თანხას ითვლიან შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$S(T) = S(0)(1 + i_{\text{ს}})^T,$$

სადაც T – ინვენსტიციის დაფარვის ვადაა, გამოსახული წლებში.

განსაზღვრება. *ორ ნომინალურ წლიურ განაკვეთს ეწოდება ეკვივალენტური, თუ მათი შესაბამისი პროცენტების ეფექტური წლიური განაკვეთები ერთმანეთს ემთხვევა, ე. ი.*

$$\left(1 + \frac{i^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{i^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2} = 1 + i_{\text{ეფ}}.$$

შევნიშნოთ, რომ კონგრატის დადებისას ზოგჯერ მოცემულია $i_{\text{ს}}$ და m , მაშინ ნომინალური წლიური განაკვეთი $i^{(m)}$ გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$i^{(m)} = m \left[(1 + i_{\text{ეფ}})^{1/m} - 1 \right]. \quad (6.44)$$

გავიხსენოთ ნიუტონის ბინომის ფორმულა:

$$(1 + x)^m = \sum_{S=0}^m C_m^S x^S,$$

სადაც

$$C_m^S = \frac{m(m-1)\dots(m-S+1)}{S!}, \quad m \text{ ნატურალური რიცხვია.}$$

მომენტში $C(t_2)$ რაოდენობის თანხას. ვთქვათ, აგრეთვე, რომ წლიური პროცენტული განაკვეთი გოლია i -ის. მაშინ რაიმე t მომენტში ამ თანხების ღირებულება იქნება:

$$S_1(t) = \frac{C(t_1)}{(1+i)^{t_1-t}}, \quad S_2(t) = \frac{C(t_2)}{(1+i)^{t_2-t}}.$$

რადგან $S_1(t)$ და $S_2(t)$ -ს მნიშვნელობები გამოთვლილია ერთი და იმავე t მომენტში, ამიგომ უკვე შესაძლებელია მათი შედარება. ანალოგიურად შესაძლებელია $C(t_1)$ და $C(t_2)$ თანხების შედარება, თუ მოცემულია ნომინალური წლიური განაკვეთი $i^{(m)}$.

ვთქვათ, ბანკმა გასცა კრედიტი 1 წლის ვადით, რთული პროცენტული წლიური განაკვეთით i . ვთქვათ, აგრეთვე, რომ დებიტორი ხელშეკრულების დადების მომენტში, ე. ი. წინასწარ იხდის თანხას, რომელიც წარმოადგენს ერთი წლის განმავლობაში საწყისი კაპიტალის ნაზრდის თანამედროვე ღირებულებას. ამ თანხისა და საწყისი კაპიტალის შეფარდება აღვნიშნოთ d -თი და ვუწოდოთ მას რთული დისკონტის განაკვეთი.

თუ პროცენტული განაკვეთის დარიცხვა ხდება წლის ბოლოს, მაშინ პირველი წლისათვის დისკონტის განაკვეთი ემთხვევა რთული დისკონტის განაკვეთს, ისევე როგორც რთული პროცენტი მარტივ პროცენტს. ამ შემთხვევაში (6.21) გოლობის თანახმად სამართლიანია შემდეგი გოლობა:

$$(1-d)(1+i) = 1, \quad d < 1.$$

გოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ T ხარისხში, სადაც T გამოსახავს წლების რაოდენობას, მივიღებთ:

$$(1-d)^T(1+i)^T = 1.$$

ამ გოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $S(0)$ -ზე:

$$(1-d)^T(1+i)^T S(0) = S(0),$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$S(0) = (1-d)^T S(T), \quad d < 1. \quad (6.50)$$

აქედან მარტივად მივიღებთ, რომ

$$S(t) = S(T)(1-d)^{T-t}, \quad d < 1. \quad (6.51)$$

განვიხილოთ §1-ის 1.9 პუნქტში მოყვანილი მაგალითი იმ შემთხვევაში, როდესაც ვადახდა ხდება რთული წლიური პროცენტული განაკვეთით 11%. თამასუქის ნომინალური ღირებულება შეადგენს 2000\$. მისი ფაქტობრივი ღირებულებაა ნომინალურ ღირებულებას დამატებული 60 დღის განმავლობაში ერთული პროცენტული განაკვეთის დანამაგი. რადგან 60 დღე $\approx 0,1644$ წელიწადს, ამიგომ თამასუქის ფაქტობრივი ღირებულება შეადგენს:

$$2000 \cdot (1 + 0,11)^{0,1644} \approx 2034,61\$.$$

რადგან თამასუქის ვადა ნაკლებია ერთ წელზე, ამიგომ კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტი რთული პროცენტების შემთხვევაში რამდენაღმე ნაკლებია, ვიდრე მარტივი პროცენტის შემთხვევაში, რაც დასტურდება ჩვენი გამოთვლებით. წლიური რთული დისკონტის განაკვეთი შეადგენს $d = 9,5\%$. რადგან თამასუქის გაყიდვის მომენტში თამასუქის ვადის გასვლაღმე არის 29 დღე $\approx 0,07945$ წელი, ამიგომ წლიური რთული დისკონტის განაკვეთის გათვალისწინებით, თამასუქის გაყიდვის ფასი შეადგენს:

$$2034,61 \cdot (1 - 0,095)^{0,07945} \approx 2018,54\$.$$

ამრიგად, X-ისა და ბანკის შემოსავალი შესაბამისად შეადგენს 18,54\$ და 16,07\$.

2.7 დისკონტის ნომინალური და ეფექტური განაკვეთები. ჩვენ შემოვიღეთ ნომინალური და ეფექტური პროცენტული განაკვეთების ცნება. ახლა შემოვიღოთ ანალოგიური ცნებები დისკონტისათვისაც.

განსაზღვრება. ვთქვათ, დისკონტირება ხდება წელიწადში m -ჯერ. მაშინ წლიურ რთულ დისკონტის განაკვეთს $d^{(m)}$ -ს ეწოდება ნომინალური, თუ დარიცხვის ყოველი პერიოდის დასაწყისში დისკონტის განაკვეთია $\frac{d^{(m)}}{m}$ (დარიცხვის ერთი პერიოდის ხანგრძლივობაა $\frac{1}{m}$ წელიწადი).

თუ გავიმეორებთ (6.51) ფორმულის დამტკიცების გზას, მაშინ $d^{(m)}$ ნომინალური დისკონტური განაკვეთისათვის, სამართლიანია შემდეგი გოლობა:

$$S(t) = S(T) \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m} \right)^{(T-t)m} \quad (6.52)$$

სადაც $t \in (0, T)$, ხოლო $S(t)$ წარმოადგენს კაპიტალის გაზრდილი მნიშვნელობის $S(T)$ -ს თანამედროვე ღირებულებას t მომენტში.

განსაზღვრება. დისკონტის ეფექტური წლიური განაკვეთი $d_{\text{ეფ}}$ ნომინალური წლიური $d^{(m)}$ განაკვეთისათვის განისაზღვრება შემდეგი გოლობიდან:

$$1 - d_{\text{ეფ}} = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m} \right)^m \quad (6.53)$$

ამრიგად, $d_{\text{ეფ}}$ - გამოსახავს დისკონტის წლიურ განაკვეთს, რომლის საშუალებითაც გამოთვლილი $S(1)$ -ის თანამედროვე მნიშვნელობა ემთხვევა წლიური ნომინალური $d^{(m)}$ დისკონტური განაკვეთის საშუალებით $S(1)$ -ის თანამედროვე მნიშვნელობას. (6.53) გოლობიდან უშუალოდ გამოდინარეობს, რომ

$$d_{\text{ეფ}} = 1 - \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m} \right)^m \quad (6.54)$$

ახლა შევადაროთ ერთმანეთს საწყისი კაპიტალის ნაზრდის გამოთვლის ორი სქემა: 1) როდესაც დარიცხვა ხდება დარიცხვის პერიოდების დასაწყისში, 2) როდესაც დარიცხვა ხდება დარიცხვის პერიოდების ბოლოს. ვიგულისხმობთ, რომ წლის განმავლობაში ხდება m რაოდენობის დარიცხვა.

ვთქვათ, $d^{(m)}$ წარმოადგენს წლიური რთული დისკონტის ნომინალურ განაკვეთს, ხოლო $i^{(m)}$ წლიურ რთულ პროცენტულ ნომინალურ განაკვეთს. ვთქვათ, საწყის ეგაპზე ხდება $S(0)$ რაოდენობის თანხის ინვესტირება. ამ თანხას მაშინვე დაერიცხება $S(0) \frac{d^{(m)}}{m}$ რაოდენობის თანხა. თუ დებიტორი მაშინვე გაღაიხ-

დის ამ თანხას, $\frac{1}{m}$ ხანგრძლივობის პერიოდის შემდეგ ინვესტორს შეუძლია მიიღოს საწყისი თანხა $S(0)$.

თუ $S(0) \frac{d^{(m)}}{m}$ რაოდენობის თანხა მაშინვე ინვესტირდება იმავე პირობებში, მაშინ მას ინვესტირების მომენტში დაერიცხება $\left[S(0) \frac{d^{(m)}}{m} \right] \frac{d^{(m)}}{m}$ რაოდენობის თანხა, ხოლო დარიცხვის პირველი პერიოდის ბოლოს ინვესტორმა შეიძლება მიიღოს დამატებით $S(0) \frac{d^{(m)}}{m}$ რაოდენობის თანხა და ა. შ. ეს პროცესი შეიძლება გავაგრძელოთ უსასრულოდ. ეს თეორიული სქემა გვიჩვენებს, რომ ინვესტორს ჩადებული $S(0)$ თანხისაგან $\frac{1}{m}$ წლის განმავლობაში შეუძლია მიიღოს თანხის შემდეგი რაოდენობა:

$$S\left(\frac{1}{m}\right) = S(0) + S(0) \frac{d^{(m)}}{m} + S(0) \left(\frac{d^{(m)}}{m}\right)^2 + \dots = \frac{S(0)}{1 - \frac{d^{(m)}}{m}}, \quad (6.55)$$

სადაც $d^{(m)} < m$.

ამრიგად, $\frac{1}{m}$ წლის განმავლობაში კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტი, თუ მას გამოვსახებთ $d^{(m)}$ წლიური რთული დისკონტის ნომინალური განაკვეთის საშუალებით, გამოისახება შემდეგნაირად:

$$A\left(\frac{1}{m}; d^{(m)}\right) = \frac{1}{1 - \frac{d^{(m)}}{m}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

თუ $\frac{1}{m}$ წლის განმავლობაში კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტს გამოვსახებთ პროცენტების წლიური ნომინალური განაკვეთის $i^{(m)}$ -ის საშუალებით, მივიღებთ:

$$A\left(\frac{1}{m}; i^{(m)}\right) = 1 + \frac{i^{(m)}}{m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

ამრიგად ვღებულობთ, რომ

$$\frac{1}{1 - \frac{d^{(m)}}{m}} = 1 + \frac{i^{(m)}}{m}. \quad (6.56)$$

საიდანაც

$$d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}}. \quad (6.57)$$

თეორემა 2.2 ვთქვათ, $m \rightarrow \infty$ და ფიქსირებულია ეფექტური წლიური განაკვეთი $i_{\text{წ}}$ მაშინ ნომინალურ წლიურ განაკვეთებს $d^{(m)}$ და $i^{(m)}$ აქვთ ერთი და იგივე მღვარი:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \delta, \quad (6.58)$$

და სამართლიანია შემდეგი უტოლობები:

$$d^{(1)} < d^{(2)} < \dots < d^{(m)} < \dots < \delta < \dots < i^{(m)} < \dots < i^{(2)} < i^{(1)}. \quad (6.59)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია:

$$i(x) = x[(1 + i_{\text{წ}})^{1/x} - 1], \quad x > 0 \quad (6.60)$$

და ვაჩვენოთ, რომ იგი კლებადია. ამისათვის (6.60)-ში მოვახდინოთ ჩასმა $1 + i_{\text{წ}} = e^{\alpha}$, რის შედეგადაც გვექნება:

$$i(x) = x(e^{\alpha/x} - 1).$$

$i(x)$ ფუნქციის გაწარმოებით მივიღებთ, რომ

$$i'(x) = e^{\alpha/x} - 1 - \frac{\alpha}{x} e^{\alpha/x}.$$

ამ უკანასკნელში მოვახდინოთ ჩასმა $\frac{\alpha}{x} = y$ და მიღებული ფუნქცია აღვნიშნოთ $\varphi(y)$ -ით:

$$\varphi(y) = e^y - ye^y - 1, \quad y \geq 0$$

აღვილი საჩვენებელია, რომ $\varphi(y)$ ფუნქციის წარმოებული უარყოფითია, როცა $y > 0$.

მართლაც

$$\varphi'(y) = -ye^y < 0, \quad \text{როცა } y > 0.$$

აქედან დავასკვნით, რომ $\varphi(y)$ ფუნქცია კლებადია, როცა $y > 0$. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ $\varphi(0) = 0$, მაშინ მივიღებთ, რომ $\varphi(y) < 0$, როცა $y > 0$. ე. ი. $i'(x) < 0$, როცა $x > 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $i(x)$ ფუნქცია კლებადია $(0, \infty)$ ინტერვალზე.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (6.44) ფორმულას, რის თანახმადაც

$$i^{(m)} = m[(1 + i_{\text{წ}})^{1/m} - 1], \quad m = 1, 2, \dots$$

და გამოვიყენებთ მისთვის $i(x)$ ფუნქციის კლებადობის თვისებას, მივიღებთ:

$$i^{(1)} > i^{(2)} > \dots > i^{(m)} > \dots \quad (6.61)$$

ანალოგიურად, იმის გათვალისწინებით, რომ $0 < d_{\text{წ}} < 1$, დავამტკიცებთ შემდეგი უტოლობების სამართლიანობას:

$$d^{(1)} < d^{(2)} < \dots < d^{(m)} < \dots \quad (6.62)$$

(6.57) ფორმულიდან აღვილი დასაწახია, რომ

$$d^{(m)} < i^{(m)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

აქედან და (6.61), (6.62) ფორმულებიდან მარტივი მსჯელობით, ვაჩვენებთ, რომ ნებისმიერი $d^{(m)}$ ნაკლებია ნებისმიერ $i^{(m)}$ -ზე:

$$d^{(1)} < d^{(2)} < \dots < d^{(m)} < \dots < i^{(m)} < \dots < i^{(2)} < i^{(1)}.$$

ამრიგად, $\left\{d^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ ზრდადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზემოდან, ხოლო $\left\{i^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ კლებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ქვემოდან, ამიტომ თითოეულ მათგანს გააჩნია სასრული ზღვარი.

ამის შემდეგ თუ გადავალთ (6.57) ტოლობაში ზღვარზე მივიღებთ:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \delta.$$

ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია.

§3. პროცენტების უწყვეტი ღარიცხვა და უწყვეტი დისკონტირება

3.1 ამოცანის დასმა. საბანკო საქმიანობაში განსაკუთრებით უკანასკნელ პერიოდში, როდესაც აქტიურად დაიწყო ინფორმაციული ტექნოლოგიების დანერგვა, როდესაც ბანკი წარმოუდგენელია თანამედროვე კომპიუტერების გარეშე, ხშირად გზვდება სიტუაცია, როდესაც პროცენტების დარიცხვა ხდება 1 დღე-ღამის ან რამდენიმე საათის განმავლობაშიც კი. მაგალითად, მოსკოვში მდებარე კომპიუტერულმა ბანკმა შეიძლება ასესხოს გარკვეული რაოდენობის თანხა ვლადივოსტოკში მდებარე ბანკს 12 საათით - 20 საათიდან მომდევნო დღის 8 საათამდე მოსკოვის დროით. ისარგებლებს რა დროის განსხვავებით, ვლადივოსტოკის ბანკს შეუძლია ეს თანხა დაამატოს თავის მოკლევადიანი კრედიტების ფონდს, ხოლო შემდეგ დააბრუნოს ვალი გარკვეული პროცენტული განაკვეთით მოსკოვის ბანკის მუშაობის დაწყების დროისათვის. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში (და ზოგიერთ სხვა შემთხვევაშიც), დგება ამოცანა პროცენტული განაკვეთების დარიცხვის შესახებ ძალიან მოკლე დროის განმავლობაში, ე. ი. ფაქტობრივად დაპარაკია პროცენტების უწყვეტ დარიცხვასა და მათ უწყვეტ კაპიტალიზაციაზე.

ანალოგიური პრობლემა წამოიჭრება ზოგჯერ ამა თუ იმ ინვესტიციის ანალიზისას, რადგან ბევრი საწარმოო თუ ეკონომიკური პროცესი თავისი ბუნებით უწყვეტია და ასეთივე უნდა იყოს მათი ფინანსური მოდელიც. წინა ორ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ დისკრეტული შემთხვევა, როდესაც დარიცხვის პერიოდს შევძლო მიეღო მნიშვნელობა 1 დღიდან დაწყებული დამთავრებული ერთი წლით. ახლა განვიხილოთ პროცენტების უწყვეტი დარიცხვის მოდელი და ამ პროცენტების უწყვეტი კაპიტალიზაციის პროცესი.

3.2 კაპიტალის ზრდის ინტენსივობა - ნომინალური წლიური განაკვეთი პროცენტების უწყვეტი დარიცხვისას. დროის ბაზურ ერთეულად მივიღოთ ერთი წელიწადი. ვთქვათ, წელიწადი შეიცავს m რაოდენობის დარიცხვის პერიოდს, სადაც m ნატურალური რიცხვია. ამ შემთხვევაში დარიცხვის პერიოდის ხანგრძლივობა $h = \frac{1}{m}$ წელიწადს, $m = 1, 2, 3, \dots$ ვთქვათ, $i^{(m)} = i^{(1/h)}$ წარმოადგენს ნომინალურ წლიურ განაკვეთს. ის დაკავშირებულია ნომინალურ წლიურ განაკვეთთან შემდეგი ტოლობის საშუალებით.

$$1 + i_{\text{წ}} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = \left[1 + hi^{(1/h)}\right]^{1/h}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad 0 < h \leq 1. \quad (6.63)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $i^{(1/h)} = i_h$. თუ $h = m = 1$, მაშინ მივიღებთ:

$$i_{\text{ეფ}} = i^{(1)} = i_1. \quad (6.64)$$

ჩავწეროთ $(0, T)$ ინტერვალის ნებისმიერ $(t, t+h)$ ქვენტერვალში კაპიტალის ზრდის კოეფიციენტის $A(t, h)$ -ს გამოსახულება, სადაც $h = \frac{1}{m}$:

$$A(t, h) = \begin{cases} 1 + hi_h, & \text{მარტივი პროცენტების შემთხვევაში,} \\ (1 + i_h)^h, & \text{რთული პროცენტების შემთხვევაში.} \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ რთული პროცენტების შემთხვევაში $A(t, h)$ -ის გამოსახულების

მისაღებად $A(T) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mT}$ ფორმულაში უნდა დავუშვათ, რომ $m = 1$ და

$$T = h, i^{(m)} = i_h.$$

როცა h მცირე სიდიდეა, განსხვავება $A(t, h)$ კოეფიციენტის ორ მნიშვნელობას შორის, რომლებიც მიიღება მარტივი და რთული პროცენტების შემთხვევაში, უმნიშვნელოა $(1 + i_h)^h \approx 1 + hi_h$. მცირე h -თვის რადგან $A(t, 0) = 1$ (საწყის t მომენტში კაპიტალის ზრდას აღვილი არა აქვს, მივიღებთ:

$$\Delta A(t, h) = A(t, h) - A(t, 0) \approx hi_h.$$

$\Delta A(t, h)$ წარმოადგენს ფაქტობრივად ფულის ერთეულის ნაზრდს დროის h პერიოდში. მართლაც,

$$S(t+h) = S(t) \cdot A(t, h);$$

$$S(t) = S(t) \cdot A(t, 0).$$

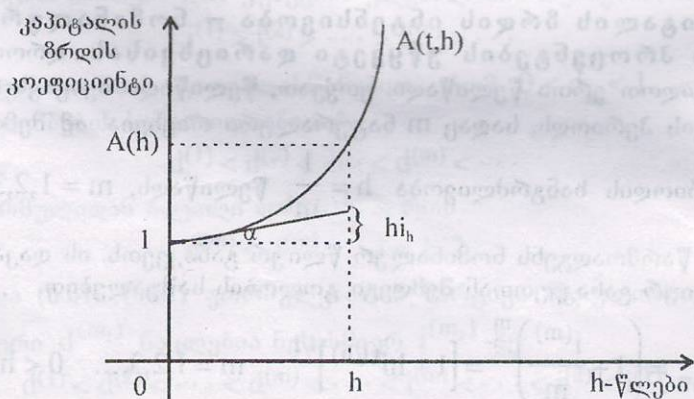
გამოვაკლოთ ეს სიდიდეები ერთმანეთს, მივიღებთ:

$$S(t+h) - S(t) = (A(t, h) - A(t, 0))S(t) = \Delta A(t, h)S(t).$$

აქედან თუ $S(t)$ წარმოადგენს ფულის ერთეულს, მაშინ $S(t+h) - S(t)$ წარმოადგენს ფულის ერთეულის ნაზრდს h პერიოდში, ხოლო მარჯვენა მხარეში გვექნება $\Delta A(t, h)$.

თუ $A(h) = A(t, h)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია O წერტილში მარჯვნიდან, მაშინ, ცნობილია, რომ შესაბამისი გრაფიკის მხების საკუთხო კოეფიციენტი ამ წერტილში გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$(\text{მარჯვნიდან}) \frac{d}{dh} A(t, h) = \text{tg} \alpha \approx i_h \quad (t \text{ ფიქსირებულია}).$$



ნახ. 6.2

ვთქვათ, ეფექტური წლიური განაკვეთი $i_{\frac{1}{m}} = i$ ფიქსირებულია, მაშინ თუ გავითვალისწინებთ §2-ის შედეგებს (თეორემა 2.2), შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = i^\infty = \delta, \quad \text{ან} \quad \lim_{h \rightarrow 0} i_h = i_0 = \delta, \quad (hm = 1) \quad (6.65)$$

სადაც δ – გარკვეული დადებითი რიცხვია.

განსაზღვრება. $i^{(m)}$ ნომინალური წლიური პროცენტული განაკვეთის ბღვარს, როდესაც $m \rightarrow \infty$ ეწოდება მრდის ძალა (force of interest) ან კაპიტალის მრდის ინტესივობა წლის განმავლობაში, პროცენტების უწყვეტი დარიცხვისას.

δ სიდიდეს აგრეთვე ეწოდებენ ნომინალურ წლიურ განაკვეთს პროცენტების უწყვეტი დარიცხვისას.

თეორემა 3.1 ფიქსირებული ეფექტური წლიური განაკვეთი i და ნომინალური წლიური განაკვეთი δ ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი ტოლობით:

$$1 + i = e^\delta. \quad (6.66)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, ეფექტური წლიური განაკვეთი i ფიქსირებულია, მაშინ

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m. \quad (6.67)$$

მათემატიკური ანალიზის კურსში დამტკიცებულია, რომ თუ $X_n \rightarrow X$, როცა $n \rightarrow \infty$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{X_n}{n}\right)^n = e^X, \quad -\infty < X < \infty. \quad (6.68)$$

სადაც e – წარმოადგენს ნეპერის რიცხვს.

თუ გავითვალისწინებთ ამ შენიშვნას, (6.67) ტოლობიდან (6.65)-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$1 + i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^\delta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ცნობილია, რომ ნეპერის რიცხვი წარმოადგენს ირაციონალურ რიცხვს, ე. ი. უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს:

$$e = 2,718281\dots$$

შენიშვნა. (6.66) ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$\delta = \ln(1 + i). \quad (6.69)$$

ეს კანასკნელი ტოლობა იძლევა საშუალებას ნომინალური წლიური განაკვეთი δ გამოთვალოს ფიქსირებული ეფექტური წლიური i განაკვეთის საშუალებით.

თეორემა 3.2 ვთქვათ, ეფექტური წლიური დისკონტის განაკვეთი ფიქსირებულია $d_{\frac{1}{m}} = d$. მაშინ ფიქსირებული ეფექტური წლიური დისკონტის განაკვეთი d და ნომინალური წლიური განაკვეთი δ ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი ტოლობით:

$$1 - d = v = e^{-\delta}$$

დამტკიცება. თუ ეფექტური დისკონტის განაკვეთი d ფიქსირებულია, მაშინ

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

ამ ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$v = 1 - d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m = e^{-\delta}$$

რადგან

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^{(m)} = \delta,$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(6.69) ტოლობა $d = \frac{i}{1+i}$ ტოლობასთან ერთად იძლევა საშუალებას ცხრილის სახით წარმოვადგინოთ კავშირი i , d და δ სიდიდეებს შორის i -ს მოვიყვართი მნიშვნელობისათვის:

i	d	δ
0,01	0,00990	0,00995
0,05	0,04761	0,04879
0,10	0,09091	0,09631
0,20	0,16667	0,18232
0,25	0,20000	0,22314
0,50	0,33333	0,40547
0,75	0,42857	0,55962
1,00	0,50000	0,69315
1,50	0,60000	0,91629
2,00	0,66667	1,09861

ცხრილიდან ჩანს, რომ

$$d < \delta < i.$$

i -ს მცირე მნიშვნელობებისათვის ეს სიდიდეები საკმარისად ახლოს არიან ერთმანეთთან, მაგრამ i -ს ზრდასთან ერთად სხვაობა ამ სამ ეფექტურ განაკვეთს შორის თანდათან იზრდება.

მაგალითი. ვთქვათ, ინვესტიციის საწყისი თანხაა $S(0) = 10^6$ ლარი. ვიპოვოთ გაზრდილი თანხის რაოდენობა 5 წლის შემდეგ, თუ

ა) რეინვესტირება ხდება მუდმივი ნომინალური წლიური განაკვეთით $i^{(m)} = 25\%$ -ს m -ის შემდეგი მნიშვნელობებისათვის:

1) ერთხელ წელიწადში, $m = 1$;

2) ორჯერ წელიწადში, $m = 2$;

ბ) პროცენტების ღარიცხვა ხდება უწყვეტად, ნომინალური წლიური განაკვეთით $\delta = 0,25$.

გამოვთვალოთ i_{eff} -ის მნიშვნელობა პროცენტების უწყვეტი ღარიცხვის შემთხვევაში.

ამოხსნა.

1) $S(5) = (1 + 0,25)^5 \cdot 10^6 = 3,05 \cdot 10^6$ ლარი,

2) $S(5) = (1 + \frac{0,25}{2})^{10} \cdot 10^6 = 3,25 \cdot 10^6$ ლარი,

ბ) $S(5) = (e^{0,25})^5 \cdot 10^6 = 3,49 \cdot 10^6$ ლარი,

$i_{\text{eff}} = e^{0,25} - 1 = 0,284025$.

სხვადასხვა ამოცანის განხილვისას, მოსახერხებელია ერთ-ერთი შემდეგი ოთხი პარამეტრიდან δ , i , v და d მივიღოთ ბაზურ პარამეტრად და მისი საშუალებით გამოვსახოთ დანარჩენი სამი. ქვემოთ მოყვანილი ცხრილი იძლევა ამის საშუალებას, მასში თავმოყრილია ამ პუნქტში გადმოცემული შედეგები:

ფუნქცია	არგუმენტი (ბაზური პარამეტრი)			
	δ	i	v	d
δ	δ	$\ln(1 + i)$	$-\ln v$	$-\ln(1 - d)$
i	$e^\delta - 1$	i	$\frac{1}{v} - 1$	$\frac{d}{1 - d}$
v	$e^{-\delta}$	$\frac{1}{1 + i}$	v	$1 - d$
d	$1 - e^{-\delta}$	$\frac{i}{1 + i}$	$1 - v$	d

მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

თუ x საკმარისად მცირე სიდიდეა, მაშინ საკმარისად დიდი სიმუსკით შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \quad \ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

თუ ამ გამოსახულებებს შევიგანოთ (6.66) გოლობაში e^δ -ს ნაცვლად, ხოლო (6.69) გოლობაში $\ln(1 + i)$ -ს ნაცვლად, i -სა და δ -ს მცირე მნიშვნელობებისათვის ($0 < i < 0,2$; $0 < \delta < 0,2$) შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$i = \delta + \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3), \quad \delta = i - \frac{i^2}{2} + O(i^3)$$

და i , δ -ს მნიშვნელობების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ შემდეგი მიახლოებითი გოლობებით:

$$i \approx \delta + \frac{\delta^2}{2}, \quad \delta \approx i - \frac{i^2}{2} \tag{6.70}$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$v = 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3), \quad d = \delta - \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3) \tag{6.71}$$

და v , d სიდიდეების მნიშვნელობების გამოსათვლელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი მიახლოებითი გოლობები:

$$v \approx 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2}, \quad d \approx \delta - \frac{\delta^2}{2}. \quad (6.72)$$

შენიშნოთ, რომ (6.70)-(6.72) მიახლოებითი გოლობები მისაღებია მხოლოდ წინასწარი, საორიენტაციო გათვლებისათვის. რაც შეეხება ფინანსურ ანგარიშებს, მათ შესაძგენად, ცდომილებების თავიდან ასაცილებლად, i და d -ს მცირე მნიშვნელობებისთვისაც კი საჭიროა ვისარგებლოთ ზუსტი გოლობებით.

3.3 გაზრდილი ღირებულება, მომავალი ღირებულება, თანამედროვე მიმდინარე ღირებულება. შემოვიღოთ ზოგიერთი აღნიშვნა.

გაზრდილ ღირებულებას (Accumulated Value) ჩვეულებრივ აღნიშნავენ სიმბოლოთი AV. ამ ტერმინის პარალელურად ლიგურაგურაში ზოგჯერ იხმარება ამავე შინაარსის სხვა ტერმინი - მომავალი ღირებულება (Future Value), რომელსაც აღნიშნავენ სიმბოლოთი FV. ანალოგიურად, PV სიმბოლოთი აღინიშნება თანამედროვე მიმდინარე ღირებულება (Present Value).

დავუშვათ, რომ ადებულ t_0 მომენტში ბანკი ახდენს $S(t_0)$ თანხის ინვესტირებას პროცენტების უწყვეტი ღარიცხვით მუდმივი ეფექტური წლიური განაკვეთით i , მაშინ თუ გავითვალისწინებთ რთული პროცენტული განაკვეთის ღარიცხვის ფორმულას, $t = t_0 + \tau$ მომენტში გაზრდილი თანხის AV რაოდენობა შეადგენს

$$S(t) = AV[S(t_0)] = S(t_0)(1+i)^\tau = S(t_0)e^{\delta\tau}, \quad \delta > 0, \quad (6.73)$$

სადაც $\delta = \ln(1+i)$ წარმოადგენს ნომინალურ წლიურ განაკვეთს, ხოლო დრო იზომება წლის ერთეულებში.

თუ, ჩვენ $t > t_0$ მომენტში უნდა გადავიხალოთ ან მივიღოთ $S(t)$ თანხა, მაშინ მისი მიმდინარე ღირებულება t_0 მომენტში შეადგენს:

$$S(t_0) = PV[S(t)] = S(t)(1+i)^{-\tau} = S(t)e^{-\delta\tau}, \quad \tau > 0. \quad (6.74)$$

ამრიგად, ჩვენ მიერ დამტკიცებულ იქნა შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა 3.3 ფიქსირებული ეფექტური წლიური i განაკვეთისა და ნომინალური წლიური $\delta = \ln(1+i)$ განაკვეთისათვის, პროცენტების უწყვეტად ღარიცხვისას კაპიტალის მრდის კოეფიციენტი დამოკიდებულია მხოლოდ ინვესტირების τ დროზე, რომელიც იზომება წლის ერთეულებში და გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$A(\tau) = \frac{S(t_0 + \tau)}{S(t_0)} = e^{\delta\tau}, \quad \tau \geq 0; \quad (6.75)$$

დისკონტირების კოეფიციენტი τ წლის განმავლობაში შეადგენს

$$v(\tau) = \frac{S(t_0)}{S(t_0 + \tau)} = e^{-\delta\tau} = \frac{1}{A(\tau)}, \quad \tau \geq 0. \quad (6.76)$$

თუ $A(\tau)$ და $v(\tau)$ უწყვეტებს გავაგრძელებთ $(-\infty, 0)$ ინტერვალზე შემდეგნაირად $A(\tau) = e^{\delta\tau}$, $v(\tau) = e^{-\delta\tau}$, $\tau < 0$ მაშინ ცხადია, რომ

$$v(\tau) = A(-\tau), \quad \tau \geq 0.$$

ეს გოლობა შეიძლება გავიგოთ, როგორც კაპიტალის „უარყოფითი“ ზრდა, რომელიც ემთხვევა დისკონტირებას. ანალოგიურად შეიძლება გავიგოთ გოლობა

$$v(-\tau) = A(\tau), \tau \geq 0.$$

ამრიგად, პროცენტების უწყვეტი ღარიცხვისა და უწყვეტი დისკონტირებისას კაპიტალის ზრდისა და დისკონტირების კოეფიციენტები ერთმანეთთან დაკავშირებულია მარტივი გოლობებით – შესაძლებელია მათი ჩანაცვლება და მათუბატიკური თვალსაზრისით, იქნებ მიზანშეწონილიცაა ვისარგებლოთ მხოლოდ ერთ-ერთი მათგანით. მაგრამ თვალსაჩინოებისათვის უფრო მოსახერხებელია ვისარგებლოთ ორი კოეფიციენტით, რადგან უფრო ადვილად აღიქმება თითოეული მათგანის შინაარსი.

ამრიგად, თუ $e^{\delta\tau}$ ფუნქციას განვიხილავთ $(-T, T)$ ინტერვალზე, მივიღებთ:

$$e^{\delta\tau} = \begin{cases} v(|\tau|), & \text{თუ } -T < \tau \leq 0, \\ A(\tau), & \text{თუ } 0 \leq \tau < T. \end{cases}$$

მაგალითი. ვთქვათ, B დებიტორმა გადაუხადა A კრედიტორს თამასუქის მიხედვით:

1000 დოლარი 01.01.1996 წელს,
2500 დოლარი 01.01.1997 წელს,
3000 დოლარი 01.07.1997 წელს.

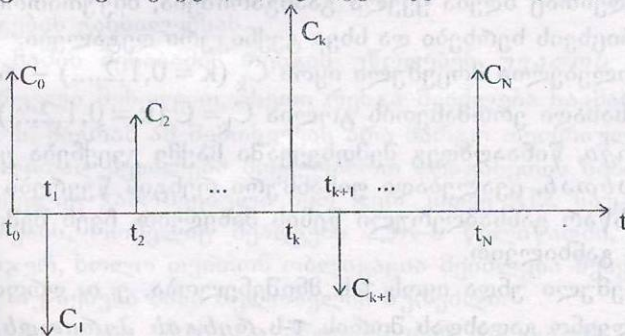
ვიპოვოთ $C(t)$ ვალის თანამედროვე ღირებულება 1994 წლის იანვრისათვის. თუ $\delta = 0,06$ წელიწადში (δ ნომინალური წლიური განაკვეთია, პროცენტების უწყვეტ ღარიცხვისას).

ამოხსნა.

$$\begin{aligned} C(01.01.94) &= 1000 \cdot v(2) + 2500 \cdot v(3) + 3000 \cdot v(3,5) = \\ &= 1000 \cdot e^{-0,12} + 1500 \cdot e^{-0,18} + 3000 \cdot e^{-0,21} = 5406,85\$. \end{aligned}$$

§4. ბალანსბალების ნაკადი

4.1 გადასახადების ნაკადი. გადასახადების ნაკადი – ეს არის დროში განაწილებული ფულის მასის შემოსავლებისა და გასაღების სიმრავლე. თუ გავითვალისწინებთ გადასახადების ორ, ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებას, შემოსავალს შევუსაბამებთ დადებით რიცხვებს, ხოლო გასაღებს კი – უარყოფით რიცხვებს, გადასახადების ეს ორმხრივი ნაკადი მოსახერხებელია წარმოვადგინოთ გრაფიკულად, შემდეგი სქემის საშუალებით:



ნახ. 6.3

ფინანსურ ოპერაციებს, ჩვეულებრივ, ხანგრძლივი ხასიათი აქვთ და შედგებიან არა ერთჯერადი გადასახადებისაგან, არამედ მემოთ აღნიშნული გადასახადების ნაკადისაგან. ასეთი ფინანსური ოპერაციების მაგალითებია: საარენდო გადასახადი, ინვესტიცია წარმოებაში, ფასიანი ქაღალდები. ნაკადის მაგალითს წარმოადგენს შესაგანები საპენსიო ფონდში, შემდეგ პენსიების გაცემა და ა. შ. ასეთი მაგალითების ჩამოთვლა შეიძლება გაგრძელდეს.

აღამიანები, რომლებიც იღებენ შემოსავალს, დაინტერესებულნი არიან ამ შემოსავლის გაზრდით. ისინი ფინანსური ოპერაციის წარმატებას აფასებენ ჯამური შემოსავლით, რომელიც მიიღება ფინანსური ოპერაციის ხანგრძლივობის მთელი პერიოდის განმავლობაში. ცხადია, რომ ფინანსისგები არ კმაყოფილდებიან მხოლოდ გადასახადების აღგებრული ჯამის გამოთვლით, არამედ ითვალისწინებენ ფულის ერთი და იმავე მასის, სხვადასხვა კალენდარულ პერიოდში, არათანაბარი ფასეულობის პრინციპს. ცხადია, რომ საბოლოო შემოსავალი დამოკიდებულია გადასახადების ნაკადის პარამეტრებზე (C_i , t_i , N). რაც შეეხება პროცენტული განაკვეთის რაოდენობას, იგი დამოკიდებულია ფინანსური ოპერაციის ხასიათზე და ჩვეულებრივ, ამ განაკვეთს განსაზღვრებენ კონკრეტული პირობების გათვალისწინებით.

გადასახადების ნაკადის დიდი მრავალფეროვნებიდან ჩვენ განვიხილავთ უმარტივესი გადასახადების ნაკადს, ე. წ. *ფინანსურ რენტას*, რომელიც ფართოდ არის გავრცელებული და, ამავე დროს, შესწავლილია საკმარისად კარგად.

4.2 ფინანსური რენტა ანუ ანუიტეტი. განსაზღვრება. თუ ყველა გადასახადი C_i ($i=0,1,2,\dots$) ერთი და იმავე ნიშნისაა (მაგალითად, დადებითი) და დროითი ინტერვალები ერთმანეთის გოლია $t_k - t_{k-1} = \tau$, $k = 1,2,\dots$ მაშინ გადასახადების ასეთ ნაკადს ეწოდება *ფინანსური რენტა ან ანუიტეტი* (annuity).

შევნიშნოთ, რომ ფინანსური რენტის განმარტებაში არ ფიგურირებს, თუ რა მიზანს ემსახურება ეს გადასახადები.

ფინანსური რენტები საკმაოდ ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში. მისი მაგალითებია: ბინის გადასახადი, საბანკო დეპოზიტებზე პროცენტების რეგულარული გადახდა, შესაგანი სამომსახურებლო კრედიტის დასაფარავად, პენსია და ა. შ. ჯერ განიხილებოდა მხოლოდ ყოველწლიური (annuo – ლათინურად ნიშნავს წელიწადს) გადასახადები, სწორედ აქედან წარმოიშვა მათი სახელი „ანუიტეტი“. შემდეგში მან მოიცვა ერთი და იმავე ნიშნის გადასახადების ნებისმიერი მიმდევრობა, ხოლო დროითი ინტერვალი τ შეიძლება იყოს ნებისმიერი.

შემოვიღოთ ახლა ძირითადი პარამეტრები და მოვახდინოთ ფინანსური რენტის კლასიფიკაცია. უპირველეს ყოვლისა, უნდა შემოვიღოთ დროის საბაზო ერთეული და განვსაზღვროთ რთული პროცენტის ეფექტური მუდმივი განაკვეთი i , რომლის მიხედვითაც ხდება ყველა გაანგარიშება, მივუთითოთ პროცენტული განაკვეთის დარიცხვის ხერხები და სხვა ტექნიკური დეტალები.

შემდეგ აუცილებელია მოცემული იყოს C_k ($k = 0,1,2,\dots$) – რენტის წევრები. თუ ყველა გადასახადი ერთმანეთის გოლია $C_k = C$ ($k = 0,1,2,\dots$), მაშინ რენტას ეწოდება *მუდმივი*, წინააღმდეგ შემთხვევაში საქმე გვექნება *ცვალებად ფინანსურ რენტასთან*, ცვალებადი ფინანსური რენტის წევრები შეიძლება იცვლებოდნენ წინასწარ განსაზღვრული წესის მიხედვით. ჩვენ შემოვიფარგლებით მუდმივი რენტის განხილვით.

შემდეგ მოცემული უნდა იყოს τ -ს მნიშვნელობა, ე. ი. დროის ინტერვალის სიგრძე ორ მომდევნო გადახდას შორის. τ -ს *რენტის პერიოდს ან გადასახადების პერიოდს* უწოდებენ. თუ მოცემული გვაქვს გადასახადების N რაოდენ-

ნოსა, მაშინ მივიღებთ რენტის კალენდარულ ვადას – n . თეორიული ანალიზისას n -ს მნიშვნელობად ხშირად იღებენ დროის საბაზო ერთეულს, ასე რომ $k = k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. ამ შემთხვევაში t_k აღნიშნავს გადასახადების გადახდის მომენტს, ხოლო n დაემთხვევა რენტის კალენდარულ ვადას.

რენტის გადახდა შეიძლება მოხდეს წელიწადში ერთხელ ან l -ჯერ. პროცენტების დარიცხვა შეიძლება მოხდეს წელიწადში m -ჯერ ($m = 1, 2, \dots$). ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს დისკრეტულ, (l, m) -ჯერად ფინანსურ რენტასთან. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ იმ შემთხვევას, როდესაც $l = m$.

თუ პროცენტების დარიცხვა და გადახდა ხდება ძალიან ხშირად (მაგალითად, ყოველკვირეულად ან ყოველდღიურად), მაშინ ანალიზის სიმარტივისათვის ეს შემთხვევა შეიძლება გავაიგივოთ პროცენტების უწყვეტ დარიცხვასთან, ამ შემთხვევაში საქმე გვექნება უწყვეტ ფინანსურ რენტასთან.

თუ გადახდა ხდება ყოველი პერიოდის ბოლოს, მაშინ რენტას უწოდებენ *პოსტნუმერანდოს* ან *ჩვეულებრივს* (ordinary annuity). თუ გადახდა ხდება ყოველი პერიოდის დასაწყისში, მაშინ მას ეწოდება *პრენუმერანდო* ან *ავანსირებული* რენტა (annuity due).

მოგჯერ გადახდა შეიძლება მოხდეს ყოველი პერიოდის რომელიმე დღეს. მაგალითად, პენსიების ყოველთვიური გადახდა თითოეული პენსიონერისათვის დადგენილ რიცხვში. ამ შემთხვევის მახასიათებლები მოთავსებული იქნება პრენუმერანდო და პოსტნუმერანდო რენტების მახასიათებლებს შორის.

ვადის თვალსაზრისით რენტები იყოფა ორ ჯგუფად: *უპირობო* (annuity certain), როდესაც წინასწარ არის შეთანხმებული გადახდის პირველი და უკანასკნელი ვადები და *პირობითი* (contingent annuity), როდესაც პირველი და უკანასკნელი, ან მხოლოდ უკანასკნელი გადახდის ვადა დამოკიდებულია იმაზე, შესრულდება თუ არა რაიმე დამატებითი პირობა. მაგალითისათვის შეიძლება მოვიყვანოთ პენსია (life annuity), რომლის გადახდაც იწყება მას შემდეგ, როდესაც ადამიანს შეუსრულდება ვარკვეული ასაკი და წყდება პენსიონერის გარდაცვალების შემდეგ.

პირობითი რენტის ანალიზი წარმოადგენს სადამზღვევო მათემატიკის ერთ-ერთ ფუნდამენტალურ ნაწილს. ამ ანალიზის შედეგები საფუძვლად ედება მთლიანად სადამზღვევო საქმიანობას. ამ ანალიზის გარეშე შეუძლებელია სადამზღვევო ფირმებისა და საპენსიო ფონდების კანონიერი ფუნქციონირება. რადგან პირობითი რენტების ანალიზი დაკავშირებულია მათემატიკური სტატისტიკისა და ალბათობის თეორიის გამოყენებასთან, ჩვენი სახელმძღვანელოს მიზნებიდან გამომდინარე, ამ პრობლემას არ შევხებით და შემოვიფარგლებით უპირობო რენტების განხილვით, შევნიშნოთ, რომ უპირობო რენტის ანალიზი თავისთავად მნიშვნელოვანი პრობლემაა. ამავე დროს, იგი წარმოადგენს შესავალ ნაწილს პირობითი რენტების განხილვისას.

თუ $n = \infty$, მაშინ შესაბამის რენტას უწოდებენ *უვადოს* ან *სამუდამოს* (perpetuity). პირველი შეხედვით, ასეთი რენტა შეიძლება საკმარისად უცნაურადაც მოგვეჩვენოს, მაგრამ ამ შემთხვევას არა მარტო თეორიული მნიშვნელობა აქვს. ამის მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ ბრიტანეთის ხაზინის უვადო ობლიგაციები, რომელიც გამოშვებული იყო ჯერ კიდევ XIX საუკუნეში. პროცენტული განაკვეთების, რომელიც შეადგენს 2,5%-ს წელიწადში, გადახდა ხდება წელიწადში ორჯერ, ხოლო თვითონ ობლიგაცია შეიძლება შესყიდულ იქნეს ნებისმიერ დროს, თუ იქნება მისი მფლობელის სურვილი.

თუ რენტის პერიოდი ემთხვევა პროცენტების დარიცხვის პერიოდს, მაშინ რენტას უწოდებენ *მარტივს*, წინააღმდეგ შემთხვევაში – *მოკაღს*. ჩვენ შემ-

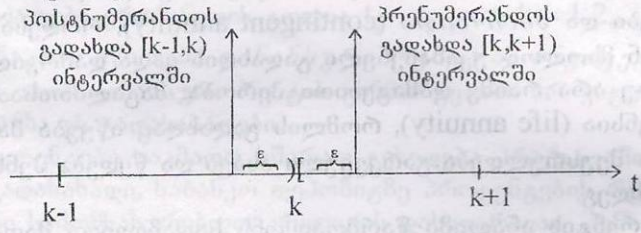
დგომში განვიხილავთ მარტივ, მუდმივ, უპირობო რენტებს, რომელთაც ქვემოთ უბრალოდ ვუწოდებთ რენტას.

4.3 პოსტნუმერანდო და პრენუმერანდო რენტების გაანგარიშება. მივიღოთ რენტის τ პერიოდი დროის საბაზო ერთეულად, მაშინ მისი ვადა შეადგენს n ასეთ ერთეულს, სადაც n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, $n \geq 1$. ვთქვათ, რენტის თითოეული წვერი გოლია Y ფულის ერთეულის, ხოლო რთული პროცენტის ეფექტური განაკვეთი დროის ბაზურ ერთეულში გოლია i -ს. ჩაწერის სიმარტივისათვის პრენუმერანდო რენტა აღვნიშნოთ R_0 -ით, ხოლო პოსტნუმერანდო რენტა კი R_1 -ით. დროის საწყის მომენტად მივიღოთ $t = 0$. $[0, n)$ ინტერვალი, რომელიც წარმოადგენს ხელშეკრულების მოქმედების ვადას, დავეოთ ურთიერთარაგადაძვეთ ინტერვალებად, რომელთაგანაც თითოეულის სიგრძე 1-ის გოლია:

$$[0,1), [1,2), \dots, [n-1, n).$$

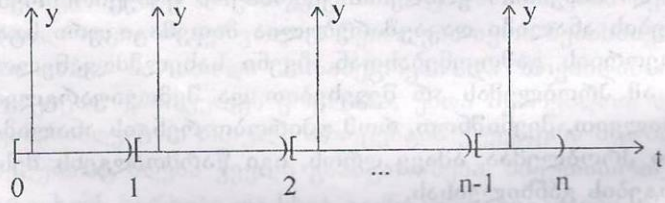
შემდეგ ავარჩიოთ რაიმე, საკმაოდ მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვი და შევთანხმდეთ, რომ $[k-1, k)$ ინტერვალში პოსტნუმერანდოს გადახდა ხდება $k - \varepsilon$ მომენტში, ხოლო $[k, k+1)$ ინტერვალში პრენუმერანდოს გადახდა ხდება $k + \varepsilon$ მომენტში, $k = 1, 2, \dots, n-1$. ასეთი მიდგომა აგვაცილებს გაუგებრობას k მომენტში გადახდების დათვლისას და, მაშასადამე, გადახდების საერთო რაოდენობის დათვლისას.

შემდეგ ნახაზზე მოცემულია გადახდის ასეთი წესი $[k-1, k)$, $[k, k+1)$ ინტერვალების საზღვარზე.



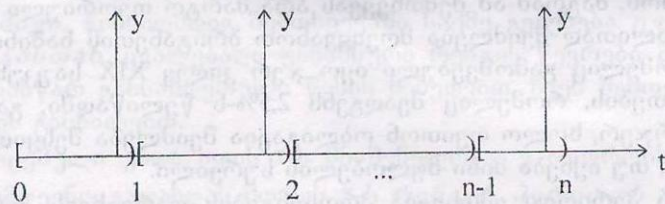
ნახ. 6.4

შემდეგ ნახაზზე მოცემულია R_0 პრენუმერანდო რენტის სქემა:



ნახ. 6.5

შემდეგ ნახაზზე მოცემულია R_1 პოსტნუმერანდო რენტის სქემა:



ნახ. 6.6

როგორც წესი, ჩვენ ვისარგებლებთ დაშვებით, რომ პოსტნუმერანდოს გადახდა ხდება უშუალოდ k რიცხვის წინ, ხოლო პრენუმერანდოს გადახდა კი – უშუალოდ k რიცხვის შემდეგ. ეს შეთანხმება ნიშნავს, რომ ε საკმაოდ მცირე სიდიდეა.

ახლა გადავიდეთ ფინანსურ ანალიზზე.

თქვათ, $S_0(t)$ წარმოადგენს R_0 რენტის ყველა გადასახადის ჯამის მიმდინარე ღირებულებას t მომენტში, ხოლო $S_1(t)$ წარმოადგენს ანალოგიურ სიდიდეს R_1 რენტისათვის, $0 \leq t \leq n$. გამოვიყვანოთ ფორმულები, რომლებიც მოგვცემენ საშუალებას გამოვთვალოთ ამ რენტების ჯამური თანამედროვე ღირებულება $t=0$ მომენტში ან, რაც იმავე რენტის PV , და $t=n$ მომენტში, ე. ი. რენტის გამრდილი ღირებულება ანუ რენტის AV . ეს სიდიდეები ჩვენ გვჭირდება, რათა სწორად დავადგინოთ რენტის გაყიდვისა და ყიდვის ფასები.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$PV(R_0) = S_0(0), \quad AV(R_0) = S_0(n),$$

$$PV(R_1) = S_1(0), \quad AV(R_1) = S_1(n).$$

ისევე, როგორც ადრე, შემოვიღოთ დისკონტირების კოეფიციენტი v , რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$v = \frac{1}{1+i} = 1-d,$$

ხოლო d წარმოადგენს ეფექტურ დისკონტურ განაკვეთს დროის ბაზურ ერთეულში.

თუ გავიხსენებთ, რომ

$$S(0) = S(1)(1-d) = S(1)v,$$

სადაც $S(0)$ წარმოადგენს $S(1)$ თანხის მიმდინარე ღირებულებას $t=0$ მომენტში,

$$S(0) = S(2)(1-d)^2 = S(2)v^2,$$

სადაც $S(0)$ წარმოადგენს $S(2)$ თანხის მიმდინარე ღირებულებას $t=0$ მომენტში და ა. შ. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$S_0(0) = Y(1+v+\dots+v^{n-1}) = Y \frac{1-v^n}{1-v} = Y \cdot \frac{1-v^n}{d}, \quad (6.77)$$

$$S_1(0) = Y(v+v^2+\dots+v^n) = Yv \frac{1-v^n}{1-v} = Yv \cdot \frac{1-v^n}{d}. \quad (6.78)$$

შემდეგ გავითვალისწინოთ, რომ

$$\frac{v}{d} = \frac{1-d}{d}, \quad 1+i = \frac{1}{1-d}, \quad i = \frac{1}{1-d} - 1 = \frac{d}{1-d},$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\frac{v}{d} = \frac{1}{i},$$

რაც გვაძლევს საშუალებას (6.78) გოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$S_1(0) = Y \cdot \frac{1-v^n}{i} \quad (6.79)$$

ახლა გადავიდეთ რენტების ღირებულების შეფასებაზე $t = n$ მომენტში, ე. ი. გამოვთვალოთ პრენუმერანდო და პოსტნუმერანდო რენტების გაზრდილი ღირებულებები.

$$S_0(n) = (1+i)^n S_0(0) = v^{-n} \cdot Y \frac{1-v^n}{d} = Yv^{-n} \cdot \frac{1-v^n}{d}, \quad (6.80)$$

$$S_1(n) = (1+i)^n S_1(0) = Yv^{-n} \cdot \frac{1-v^n}{i} \quad (6.81)$$

თუ საქმე გვაქვს რენტებთან, სადაც $Y = 1$ ფინანსურ ერთეულს, საერთაშორისო ფინანსურ პრაქტიკაში მიღებულია სპეციალური აღნიშვნები. ასე, მაგალითად, პოსტნუმერანდო და პრენუმერანდო რენტების თანამედროვე ღირებულებას $t = 0$ მომენტში, შესაბამისად ასე აღნიშნავენ:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{S_1(0)}{Y} = v + v^2 + \dots + v^n, \quad (6.82)$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{S_0(0)}{Y} = 1 + v + \dots + v^{n-1}. \quad (6.83)$$

აქედან და (6.77)-(6.79)-დან გამომდინარეობს შემდეგი გოლობების სამართლიანობა:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}, \quad \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{d}. \quad (6.84)$$

n მომენტისათვის პოსტნუმერანდო და პრენუმერანდო რენტების გაზრდილი ღირებულება შესაბამისად ასე აღინიშნება:

$$S_{\overline{n}|i} = AVa_{\overline{n}|i} = v^{-n} \frac{1-v^n}{i}, \quad (6.85)$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i} = AV\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^{-n} \frac{1-v^n}{d}. \quad (6.86)$$

$a_{\overline{n}|i}$ და $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ სიდიდეებს უწოდებენ რენტის დისკონტირების კოეფიციენტებს, ხოლო $S_{\overline{n}|i}$ და $\ddot{S}_{\overline{n}|i}$ სიდიდეებს კი - რენტის გაზრდის კოეფიციენტებს. შევნიშნოთ, რომ თუ პროცენტის ეფექტური განაკვეთი i დროის ბაზურ ერთეულში ფიქსირებულია, მაშინ $\overline{n}|i$ ინდექსის ნაცვლად ხშირად იყენებენ $\overline{n}|$ ინდექსს.

შემოგანილი სიდიდეები ეფექტურია, ვინაიდან თუ რენტის თითოეული წვერი გოლია Y -ის, მაშინ რენტის შესაბამისი ღირებულებების გამოსათვლელად საკმარისია რენტის ღირებულება $Y=1$ შემთხვევაში ((6.84)-(6.86)) გადავამრავლოთ Y -ზე.

ქვემოთ, ცხრილებში მოყვანილია $S_{\overline{n}|i}$ და $a_{\overline{n}|i}$ ბოგიერთი მნიშვნელობა.

i	0,01	0,05	0,10	0,20
$a_{4 i}$	3,9020	3,5459	3,1699	2,5887
$a_{20 i}$	18,0456	12,4622	8,5136	4,8696
$a_{50 i}$	39,1961	18,2559	9,9148	4,9995
$a_{100 i}$	63,0289	19,8479	9,9993	5,0000
$a_{\infty i}$	100	20	10	5

i	0,01	0,05	0,10	0,20
$S_{4 i}$	4,060	4,31	4,64	5,37
$S_{20 i}$	22,019	33,07	57,28	186,7
$S_{50 i}$	64,463	209,35	1164	45497
$S_{100 i}$	170,481	2610,02	137796	$4,141 \cdot 10^8$

მაგალითი. კრედიტი, რომლის რაოდენობაა 5 მილიარდი ლარი, უნდა დაფარულ იქნეს წლის განმავლობაში ყოველთვიურად თანაბარი რაოდენობის შენაგანებით. უნდა დავადგინოთ ყოველთვიური შესაგანი $Y(i)$: ა) პოსტნუმერანდო რენტის შემთხვევაში; ბ) პრენუმერანდო რენტის შემთხვევაში, თუ კრედიტის დადგენილია ყოველთვიური პროცენტული განაკვეთი $i = 1\%, 3\%$.

ამოხსნა. სპეციალური ცხრილების საშუალებით დავადგინოთ შემდეგი სიდიდეების მნიშვნელობები (შევიშნოთ, რომ ეს სიდიდეები შეიძლება ჩვენ მიერ იქნეს გამოთვლილი ზემოთ მოყვანილი ფორმულების საშუალებით):

$$a_{\overline{12}|0,01} = 11,25508, \quad a_{\overline{12}|0,03} = 9,95400,$$

$$\ddot{a}_{\overline{12}|0,01} = 11,36763, \quad \ddot{a}_{\overline{12}|0,03} = 10,25262.$$

ა) შემდეგ:

ა) პოსტნუმერანდო რენტის შემთხვევაში $Y_1(i)$ შენაგანი შეიძლება ვიპოვოთ შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$Y_1(i) \cdot a_{\overline{12}|i} = 5 \text{ მილიარდი ლარი,}$$

ამიგომ

$$Y_1(0,01) = \frac{5 \text{ მილიარდი ლარი}}{11,25508} = 444244000 \text{ ლარი,}$$

$$Y_1(0,03) = \frac{5 \text{ მილიარდი ლარი}}{9,95400} = 502311000 \text{ ლარი.}$$

ბ) პრენუმერანდო რენტის შემთხვევაში $Y_0(i)$ შენაგანი შეიძლება ვიპოვოთ შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$Y_0(i) \cdot \ddot{a}_{\overline{12}|i} = 5 \text{ მილიარდი ლარი,}$$

ამიგომ

050	$Y_0(0,01) = \frac{5 \text{ მილიარდი ლარი}}{11,36763} = 439845000 \text{ ლარი,}$	
050	$Y_0(0,03) = \frac{5 \text{ მილიარდი ლარი}}{10,25262} = 487680000 \text{ ლარი.}$	
	შენიშვნა. $\ddot{a}_{\overline{n} i}$ კოეფიციენტის გამოსათვლელად შეიძლება ვისარგებლოთ შემდეგი გოლობის საშუალებით (გავითვალისწინოთ, რომ $d = vi$):	
	$\ddot{a}_{\overline{n} i} = \frac{1-v^n}{d} = i \frac{1-v^n}{id} = \frac{i}{d} a_{\overline{n} i} \quad (6.87)$	

ასე, რომ ცხრილის ან გამოთვლების საშუალებით შეიძლება დავადგინოთ $a_{\overline{n}|i}$ -ის მნიშვნელობა, ხოლო შემდეგ (6.87) გოლობის საშუალებით გამოვთვალოთ $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ -ს მნიშვნელობა.

4.4 რენტის დისკონტირებისა და რენტის ზრდის კოეფიციენტების ზოგიერთი თვისება. ახლა მოვიყვანოთ რენტის დისკონტირებისა და რენტის ზრდის კოეფიციენტების ზოგიერთი თვისება. ისევე, როგორც ადრე, დავეუშვებთ, რომ დროის ბაზური ერთეული ემთხვევა რენტის პერიოდს.

1) თუ $i = 0$, მაშინ $v = 1$ და n -ის ყველა მნიშვნელობისათვის

$$a_{\overline{n}|0} = \ddot{a}_{\overline{n}|0} = S_{\overline{n}|0} = \ddot{S}_{\overline{n}|0} = \underbrace{1+1+\dots+1}_n = n. \quad (6.88)$$

ეს შედეგი გამომდინარეობს როგორც ამ სიდიდეების ფორმალური განმარტებიდან, ასევე მათი ფინანსური ინტერპრეტაციიდან: რადგან ამ შემთხვევაში ადგილი არ აქვს არც კაპიტალის ზრდასა და არც დისკონტირებას, ამიტომ რენტის ღირებულება ყოველ მომენტში უბრალოდ გოლია ყველა გადასახადის ჯამის. გავიხსენოთ, რომ ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს რენტებთან, სადაც $Y = 1$ ფინანსურ ერთეულს.

2) განვიხილოთ შემთხვევები, როდესაც $n = 0$ და $n = 1$.

$n = 0$ შემთხვევა აღნიშნავს, რომ გადახდები არ მომხდარა. ამიტომ

$$a_{\overline{0}|i} = \ddot{a}_{\overline{0}|i} = S_{\overline{0}|i} = \ddot{S}_{\overline{0}|i} = 0. \quad (6.89)$$

თუ $n = 1$, მაშინ (6.82), (6.83) გოლობებიდან მივიღებთ, რომ

$$\ddot{a}_{\overline{1}|i} = 1, \quad a_{\overline{1}|i} = v. \quad (6.90)$$

3) სამართლიანია შემდეგი გოლობა

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}, \quad n \geq 1, \quad (6.91)$$

მართლაც, (6.89) და (6.90) გოლობებიდან გვაქვს, რომ

$$\ddot{a}_{\overline{1}|i} = 1 \text{ და } a_{\overline{0}|i} = 0.$$

საიდანაც გამომდინარეობს (6.91) გოლობის სამართლიანობა, როცა $n = 1$. თუ $n \geq 2$, მაშინ

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + (v + v^2 + \dots + v^{n-1}) = 1 + a_{\overline{n-1}|i}.$$

ამრიგად, (6.91) გოლობის სამართლიანობა დამტკიცებულია ყველა $n \geq 1$ -სთვის.

ამრიგად, უსასრულო რაოდენობის გადახდების შემთხვევაშიც კი, მათი თანამედროვე ღირებულება სასრულია, რადგან შორეული ფულის ღირებულება არცთუ ისე დიდია. ინფლაციის დიდი ტემპის შემთხვევაში შორეული ფულის გაუფასურება ხდება საკმაოდ სწრაფად. ამ ფაქტის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 1. ვთქვათ, ყოველწლიურად წარმოებს უსასრულო რენტის გადახდა, რომელშიც $Y = 10^6$ ლარს. უნდა ვიპოვოთ ამ რენტის თანამედროვე ღირებულება პოსტნუმერანდო და პრენუმერანდო რენტების შემთხვევაში, თუ წლიური განაკვეთი $i = 5\%, 10\%, 100\%$.

ამოხსნა. (6.94) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$a_{\infty|0,05} = 20, \quad a_{\infty|0,1} = 10, \quad a_{\infty|1} = 1.$$

ამის შემდეგ, რადგან (იხ. (6.92)):

$$\ddot{a}_{\infty|i} = (1+i)a_{\infty|i},$$

ამიგომ

$$\ddot{a}_{\infty|0,05} = 21, \quad \ddot{a}_{\infty|0,1} = 11, \quad \ddot{a}_{\infty|1} = 2.$$

ამრიგად, პოსტნუმერანდო უვალო რენტის თანამედროვე ღირებულება შესაბამისად შეადგენს $20 \cdot 10^6$ ლარს, $10 \cdot 10^6$ ლარს და $1 \cdot 10^6$ ლარს, ხოლო პრენუმერანდო უვალო რენტის თანამედროვე ღირებულება კი - $21 \cdot 10^6$ ლარს, $11 \cdot 10^6$ ლარს, $2 \cdot 10^6$ ლარს.

ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ რომ, თუ $a_{\infty|1} = 1$, ე. ი. თუ საქმე გვაქვს მუდმივ და დიდი მასშტაბის ინფლაციასთან, მაშინ პოსტნუმერანდო უვალო რენტის თანამედროვე ღირებულება გოლია მხოლოდ ერთი გადასახადის სიდიდისა, ხოლო პრენუმერანდო უვალო რენტის შემთხვევაში კი - ორჯერ მეტია ერთი გადასახადის სიდიდემდე.

7) უვალო რენტის შემთხვევაში, $i > 0$ -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, სამართლიანია შემდეგი გოლობა:

$$\ddot{a}_{\infty|i} - a_{\infty|i} = \frac{1}{d} - \frac{1}{i} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d/(1-d)} = \frac{1}{d} - \frac{1-d}{d} = 1,$$

ე. ი.

$$\ddot{a}_{\infty|i} - a_{\infty|i} = 1. \quad (6.96)$$

ამ გოლობის ილუსტრაციას წარმოადგენს ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული მაგალითი.

მაგალითი 2. ვთქვათ, კერძო საპენსიო ფონდს სურს ამ ფონდში გაერთიანებულ პენსიონერებს ყოველწლიურად გადაუხადოს 10^5 ლარი. უნდა ვიპოვოთ იმ თანხის რაოდენობა, რომელიც უნდა დაიღოს საპენსიო ფონდის ანგარიშზე, თუ დავეშვებით, რომ ფონდს შეუძლია მოახდინოს თავისი კაპიტალის ინვესტირება თვეში $0,5\%$ -ის განაკვეთით.

ამოხსნა. მყარი ფინანსური სისტემის შემთხვევაში, ამ ამოცანის ამოხსნის პირველ მიახლოებად შეიძლება გამოვიყენოთ უვალო რენტის მოდელი, რომელშიც $Y = 10^5$ ლარს და $i = 0,005$. რადგან არ არის მითითებული, თუ რა სქემით ხდება პენსიების გადახდა, ჩვენ განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1) გადახდები წარმოებს თვის დასაწყისში; 2) გადახდები წარმოებს თვის ბოლოს.

პირველ შემთხვევაში მივიღებთ (იხ. (6.79)):

$$S_1(0) = \frac{Y}{i} = \frac{10^5}{0,005} = 20 \cdot 10^6 \text{ ლარს.}$$

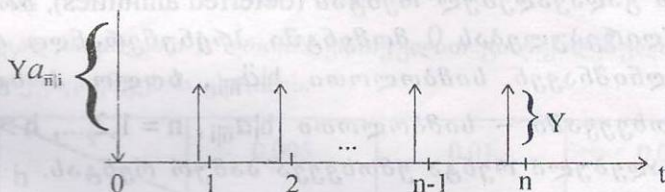
შორე შემთხვევაში გვექნება (იხ. (6.77)):

$$S_0(0) = \frac{Y}{d} = \frac{Y(1+i)}{i} = 20 \cdot 10^6 \cdot 1,005 = 20 \text{ მილიონ } 1000 \text{ ათას ლარს.}$$

შედგის საკონტროლოდ შეიძლება ვისარგებლოთ (6.96) ცოლობით:

$$S_0(0) - S_1(0) = Y(\ddot{a}_{\overline{n}|i} - a_{\overline{n}|i}) = Y = 10^5 \text{ ლარს}$$

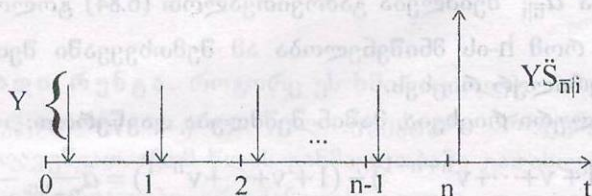
მაგალითი 3. განვიხილოთ კიდევ ერთი საინტერესო მაგალითი. ვთქვათ, კლიენტს, n რაოდენობის ერთი და იმავე სიგრძის ყოველ პერიოდის ბოლოს სურს მიიღოს Y რაოდენობის ფულის ერთეული. თუ პროცენტული განაკვეთი მუდმივია და გოლია i -ს, მაშინ კლიენტმა დეპოზიტზე უნდა დადოს $Y \cdot a_{\overline{n}|i}$ რაოდენობის ფულის ერთეული. დროის n პერიოდის გასვლის შემდეგ მოხდება ანაბარის ანუღირება. ასეთი სიტუაციის სქემა მოცემულია შემდეგ ნახაზზე:



ნახ. 6.7

ცხადია, რომ n -ის დიდი მნიშვნელობებისათვის ბანკს გაუჭირდება მუდმივი i განაკვეთის გარანტირება, ამიტომ ბანკმა ეს განაკვეთი უნდა დააწესოს საკმარისად მცირე ან პერიოდულად უნდა მოახდინოს მისი კორექტირება.

მაგალითი 4. ვთქვათ, კლიენტს ფინანსურ ორგანიზაციაში (მაგ., ბანკში) გახსნილი აქვს ანგარიში, რომელშიც მას ყოველ პერიოდის დასაწყისში შეაქვს Y რაოდენობის ფულის ერთეული, ვთქვათ, ყოველი პერიოდის სიგრძე მუდმივია. მაშინ, თუ პროცენტული განაკვეთი მუდმივია და გოლია i -ს, კლიენტი n რაოდენობის პერიოდის გასვლის შემდეგ მიიღებს $Y \cdot \ddot{S}_{\overline{n}|i}$ რაოდენობის ფულის ერთეულს, ამ სიტუაციის სქემა მოცემულია შემდეგ ნახაზზე:

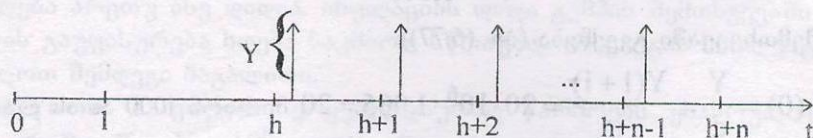


ნახ. 6.8

4.5 დროის ერთეულით გადავადებული რენტა. განვიხილოთ ბაზური რენტის განზოგადება, როდესაც პირველი გადასახადის გადახდა $h + \varepsilon$ მომენტში ხდება პრენუმერანდო რენტის შემთხვევაში და $h + 1 - \varepsilon$ მომენტში - პოსტ-პრენუმერანდო რენტის შემთხვევაში ($h > 0$).

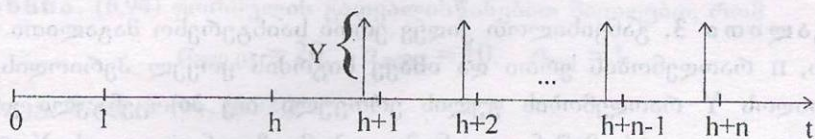
ასეთი რენტების სქემები მოცემულია შემდეგ ნახაზებზე:

ა) პრენუმერანდო რენტის შემთხვევა



ნახ. 6.9

ბ) პოსტნუმერანდო რენტის შემთხვევა



ნახ. 6.10

განსაზღვრება. გადასახადების ასეთ ნაკადს უწოდებენ დროის h ერთეულით გადავადებულ რენტას (deferred annuities), ხოლო მის თანამედროვე ღირებულებას 0 მომენტში პრენუმერანდო რენტის შემთხვევაში აღნიშნავენ სიმბოლოთი $h|\ddot{a}_{\overline{n}|i}$, ხოლო პოსტნუმერანდო რენტის შემთხვევაში - სიმბოლოთი $h|a_{\overline{n}|i}$, $n = 1, 2, \dots$, $h > 0$. თუ $h = 0$, მაშინ გადავადებული რენტა ემთხვევა ბაზურ რენტას.

(6.82) და (6.83) ფორმულების ანალოგიურად მივიღებთ, რომ:

$$h|\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^h + v^{h+1} + \dots + v^{h+n-1} = v^h \sum_{k=0}^{n-1} v^k = v^h \ddot{a}_{\overline{n}|i}, \quad (6.97)$$

$$h|a_{\overline{n}|i} = v^{h+1} + v^{h+2} + \dots + v^{h+n} = v^h \sum_{k=1}^n v^k = v^h a_{\overline{n}|i}. \quad (6.98)$$

ამრიგად, $h > 0$ ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გადავადებული რენტის თანამედროვე ღირებულების გამოსათვლელად შეიძლება ვისარგებლოთ შემდეგი ფორმულებით:

$$h|\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^h \ddot{a}_{\overline{n}|i}, \quad h|a_{\overline{n}|i} = v^h a_{\overline{n}|i}, \quad (6.99)$$

სადაც $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ და $a_{\overline{n}|i}$ შეიძლება გამოვითვალოთ (6.84) გოლობების საშუალებით. შევნიშნოთ, რომ h -ის მნიშვნელობა ამ შემთხვევაში შეიძლება არ წარმოადგენდეს ნატურალურ რიცხვს.

თუ h ნატურალური რიცხვია, მაშინ შეიძლება დავწეროთ:

$$h|\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1 + v + \dots + v^{h+n-1}) - (1 + v + \dots + v^{h-1}) = \ddot{a}_{\overline{n+h}|i} - \ddot{a}_{\overline{h}|i}, \quad (6.100)$$

$$h|a_{\overline{n}|i} = (v + v^2 + \dots + v^{h+n}) - (v + v^2 + \dots + v^h) = a_{\overline{n+h}|i} - a_{\overline{h}|i}. \quad (6.101)$$

ამრიგად, თუ h წარმოადგენს ნატურალურ რიცხვს, მაშინ გადავადებული რენტის დისკონტირების კოეფიციენტების გამოსათვლელად შეიძლება ვისარგებლოთ როგორც (6.97), (6.98) ფორმულებით, ასევე (6.100), (6.101) ფორმულებითაც. მაგრამ თუ $h > 0$ წარმოადგენს წილადს, მაშინ ამ კოეფიციენტების გამოსათვლელად უნდა ვისარგებლოთ (6.97), (6.98) ფორმულებით.

ამოცანა. კლიენგს სურვილი აქვს ბანკში შეიძინოს რენტა, იმ პირობით, რომ ოთხი წლის განმავლობაში ყოველი თვის ბოლოს მიიღოს 1000 დოლარი. (კლიენგის სიკვდილის შემთხვევაში თანხას მიიღებენ მისი მემკვიდრეები). მუდმივი თვიური საბანკო i ($i = 0,5\%, 1\%, 2\%$) განაკვეთის შემთხვევაში ბანკისთვის უნდა დავადგინოთ რენტის თვითღირებულება გაყიდვის მომენტში, თუ: ა) რენტის გადახდა დაიწყება მაშინვე, ხელშეკრულების დადების მომენტიდან; ბ) რენტის გადახდა დაიწყება გადავადებით წელიწად ნახევრის შემდეგ; გ) რენტის გადახდა დაიწყება გადავადებით სამი წლის შემდეგ.

ამოხსნა. ამ ამოცანის ამოხსნისათვის, უპირველეს ყოვლისა, უნდა შევადგინოთ $h|a_{\overline{48}|i}$; სიდიდის მნიშვნელობების ცხრილი i და h -ის ამოცანის პირობაში მითითებული მნიშვნელობებისათვის. შევნიშნოთ, რომ ჩვენ ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს პოსტნუმერანდო რენტასთან. ამ მიზნით შეიძლება ვისარგებლოთ $a_{\overline{n}|i}$ სიდიდის მნიშვნელობების ცხრილით და შემდეგ (6.101) ან (6.99) ფორმულებით, ან თუ ასეთი ცხრილი არა გვაქვს, (6.98) ფორმულის საშუალებით შევადგინოთ $h|a_{\overline{48}|i}$ სიდიდის მნიშვნელობების ცხრილი.

ამის შედეგად მივიღებთ h დროის ერთეულით გადავადებული რენტის დისკონტირების კოეფიციენტების ცხრილს:

$h \backslash i$	0,005	0,01	0,02
0	42,5803	37,9740	30,6731
18	25,4179	21,5757	15,6811
36	9,7093	7,8665	5,1843

ამოცანაში დასმულ კითხვებზე პასუხის გასაცემად საკმარისია ცხრილში მოცემული $h|a_{\overline{48}|i}$ კოეფიციენტების მნიშვნელობები გავამრავლოთ 1000 დოლარზე. ამრიგად, ყოველ განხილულ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ რენტის თვითღირებულება გაყიდვის მომენტში. როგორც ცხრილიდან ჩანს, რენტის თანამედროვე ღირებულება თანდათან მცირდება გადავადების h სიდიდისა და i განაკვეთის ზრდასთან ერთად. შევნიშნოთ, რომ ამოცანის პირობის თანახმად ბანკი კლიენგს 4 წლის განმავლობაში, ყველა შემთხვევაში გადაუხდის 48000 დოლარს.

4.6 m-ჯერადი რენტა. როგორც ეს ხშირად ხდება პრაქტიკაში, დროის საბაზო ერთეულად ავირჩიოთ ერთი წელი. ეფექტური პროცენტული განაკვეთი აღნიშნოთ i -ით. დავუშვათ, რომ წლის განმავლობაში გადახდება ხდება m -ჯერ, ამასთან, დროის ინტერვალები ერთმანეთის გოლია. თითოეული გადასახადი შეადგენს $\frac{1}{m}$ ფულის ერთეულს. ვიგულისხმობთ აგრეთვე, რომ პროცენტების დასახლება ხდება წელიწადში m -ჯერ, $m = 1, 2, \dots$ ცხადია, რომ n წლის განმავლობაში გადახდების რაოდენობა გოლია mn -ის, ხოლო, თუ $i = 0$, გადასახადების ჯამური რაოდენობა გოლია n ფულის ერთეულის. პოსტნუმერანდო რენტის შემთხვევაში გადახდა და პროცენტების დასახლება ხდება შემდეგ მომენტში:

$$\underbrace{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}}_{m\text{-რაოდენობის გადასახადი}}, 1, \dots, n-1, n-1 + \underbrace{\frac{1}{m}, \dots, n - \frac{1}{m}}_{m\text{-რაოდენობის გადასახადი}}, n$$

პრენუმერანდო რენტის შემთხვევაში გადახდა და პროცენტების ღარიცხვა ხდება შემდეგ მომენტებში:

$$\underbrace{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}}_{m\text{-რაოდენობის გადასახადი}}, 1, \dots, n-1, n-1 + \underbrace{\frac{1}{m}, \dots, n - \frac{1}{m}}_{m\text{-რაოდენობის გადასახადი}}$$

ასეთ რენტებს m -ჯერადი რენტები ეწოდება.

წელიწადში m რაოდენობის გადასახადებისა და m რაოდენობის პროცენტების ღარიცხვის შემთხვევაში პოსტნუმერანდო და პრენუმერანდო რენტების დისკონტირების კოეფიციენტები აღვნიშნოთ

$$a_{\overline{ni}|i}^{(m)} \text{ და } \ddot{a}_{\overline{ni}|i}^{(m)}$$

სიმბოლოებით, ხოლო გამრდილი ღირებულების შესაბამისი კოეფიციენტები

$$S_{\overline{ni}|i}^{(m)} \text{ და } \ddot{S}_{\overline{ni}|i}^{(m)}$$

სიმბოლოებით. აქ $i^{(m)}$ აღვნიშნავს ნომინალურ წლიურ განაკვეთს.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ თითოეული გადასახადი შეადგენს $\frac{1}{m}$ ფულის ერთეულს, შეიძლება გამოვითვალოთ პოსტნუმერანდოს რენტის თანამედროვე ღირებულება $t = 0$ მომენტისათვის:

$$a_{\overline{ni}|i}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{mn} v^{k/m} = \frac{v^{1/m}}{m} \frac{1 - v^n}{1 - v^{1/m}} \quad (6.102)$$

რადგან $v = \frac{1}{1+i}$, ხოლო

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1,$$

ამიგომ გვექნება:

$$\frac{1}{m} \frac{v^{1/m}}{1 - v^{1/m}} = \frac{1}{m} \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{m}}}{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m} \frac{1}{(1+i)^{1/m}} = \frac{1}{m[(1+i)^{1/m} - 1]} = \frac{1}{i^{(m)}}$$

ამ უკანასკნელი გოლობის და (6.84)-ის გათვალისწინებით (6.102)-დან მივიღებთ:

$$a_{\overline{ni}|i}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{ni}} \quad (6.103)$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$S_{\overline{ni}|i}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{nm-1} (1+i)^{k/m} = \frac{1}{m} \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/m} - 1} = (1+i)^n \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}$$

(6.84) და (6.103)-ის ვათვალისწინებით, ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი გოლობის სამართლიანობაში

$$S_{n|i}^{(m)} = (1+i)^n a_{n|i}^{(m)}. \quad (6.104)$$

(6.104) გოლობის სამართლიანობა დასტურდება ფინანსური მოსაზრებებითაც.

თუ ანალოგიურ ალგებრულ გარდაქმნებს გამოვიყენებთ პრენუმერანდო რენტგის შემთხვევაში, მივიღებთ, რომ

$$\ddot{a}_{n|i}^{(m)} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}} = \frac{d}{d^{(m)}} \ddot{a}_{n|i}, \quad (6.105)$$

$$\ddot{S}_{n|i}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} = (1+i)^n \ddot{a}_{n|i}. \quad (6.106)$$

n -ის დიდი მნიშვნელობებისათვის, თუ (6.103) და (6.104) გოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $n \rightarrow \infty$, მუდმივი m ჯერადი რენტგებისათვის და ვათვალისწინებთ (6.94), (6.95) გოლობებს, მივიღებთ, რომ

$$a_{\infty|i}^{(m)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n|i}^{(m)} = \frac{1}{i^{(m)}}, \quad (6.107)$$

$$\ddot{a}_{\infty|i}^{(m)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{a}_{n|i}^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}}. \quad (6.108)$$

ამრიგად, ჩვენ მიერ ერთჯერადი რენტგების შემთხვევა განზოგადებულ იქნა (l, m) ჯერადი რენტგებისათვის იმ შემთხვევისათვის, როდესაც გადასახადების l რაოდენობა ემთხვევა პროცენტების დარიცხვის m რაოდენობას. შევნიშნოთ, რომ პრაქტიკაში ყველაზე უფრო ხშირად სწორედ ასეთ შემთხვევას აქვს ადგილი.

4.7 უკვადო რენტგა. ვთქვათ, საწყისი 0 მომენტიდან $n > 0$ მომენტამდე რენტგის გადახდა ხდება ძალიან ხშირად, ისე, რომ ის შეიძლება ჩავთვალოთ უწყვეტ რენტგად. ცხადია, რომ უწყვეტი გადახდის შემთხვევაში პოსტნუმერანდო და პრენუმერანდო რენტგებს შორის განსხვავება ქრება. ვთქვათ, რენტგის გადახდა ხდება უწყვეტად, მუდმივი ინტენსივობით, მასთან დროის ერთეულში ხდება ფულის ერთეულის გადახდა. ვთქვათ, პროცენტების დარიცხვა ხდება უწყვეტად მუდმივი δ ინტენსივობით (δ წარმოადგენს ნომინალურ წლიურ განაკვეთს). ასეთი რენტგის თანამედროვე ღირებულება აღენიშნოთ $\bar{a}_{n|\delta}$ სიმბოლოთი. განვიხილოთ მცირე Δt სიგრძის ინტერვალი $(t, t + \Delta t)$. დროის ამ ინტერვალში მოხდება Δt ფულის ერთეულის გადახდა, ხოლო ამ თანხის მიმდინარე ღირებულება დროის 0 მომენტში გოლია $e^{-\delta t} \Delta t$. $(0, n)$ ინტერვალი დავყოთ ქვეინტერვალებად, რომელთა სიგრძეა Δt_i , შემდეგ ყოველი ასეთი ქვეინტერვალისათვის განვიხილოთ გამოსახულება $e^{-\delta t_i} \Delta t_i$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), $\Delta t_0 + \Delta t_1 + \dots + \Delta t_n = n$ და შევადგინოთ ჯამი:

$$\sum_{i=0}^n e^{-\delta t_i} \Delta t_i. \quad (6.109)$$

ამის შემდეგ განვიხილოთ (6.109) გამოსახულების ზღვარი, როდესაც $\max \Delta t_i \rightarrow 0$, მივიღებთ:

$$\bar{a}_{n|\delta} = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n e^{-\delta t_i} \Delta t_i = \int_0^n e^{-\delta t} dt. \quad (6.110)$$

(6.110) ტოლობაში n -ს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი არაუარყოფითი მნიშვნელობა. თუ $\delta = 0$, მაშინ $\bar{a}_{n|0} = n$. ამ ტოლობის სამართლიანობა გამომდინარეობს ფინანსური მოსაზრებებიდანაც.

რადგან პროცენტების უწყვეტი დარიცხვისას $v = e^{-\delta}$, ამიტომ (6.110) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\bar{a}_{n|\delta} = \frac{1 - e^{-n\delta}}{\delta} = \frac{1 - v^n}{\delta} \quad (\delta > 0) \quad (6.111)$$

ან (6.84)-ის გამოყენებით

$$\bar{a}_{n|\delta} = \frac{i}{\delta} a_{n|i}. \quad (6.112)$$

სადაც i წარმოადგენს ეფექტურ წლიურ განაკვეთს, ხოლო δ წარმოადგენს ნომინალურ წლიურ განაკვეთს პროცენტების უწყვეტი დარიცხვისას.

თქვათ, h წარმოადგენს ნებისმიერ არაუარყოფით რიცხვს, ხოლო $h|\bar{a}_{n|\delta}$

ერთეულით გადავადებული უწყვეტი რენტის თანამედროვე ღირებულებას, რომლის გადახდა ხდება უწყვეტად, მუდმივი ინტენსივობით. ამასთან, ისევე როგორც ზემოთ, დროის ერთეულში ხდება ფულის ერთეულის გადახდა, ხოლო პროცენტების დარიცხვა ხდება უწყვეტად მუდმივი δ ინტენსივობით. მაშინ

$$h|\bar{a}_{n|\delta} = \int_h^{h+n} e^{-\delta t} dt = \int_0^{h+n} e^{-\delta t} dt - \int_0^h e^{-\delta t} dt;$$

აქედან

$$\begin{aligned} h|\bar{a}_{n|\delta} &= \int_h^{h+n} e^{-\delta t} dt = \frac{e^{-\delta t}}{-\delta} \Big|_h^{h+n} = \frac{e^{-(h+n)\delta}}{-\delta} - \frac{e^{-\delta h}}{-\delta} = \\ &= e^{-\delta h} \left(\frac{e^{-n\delta}}{-\delta} - \frac{1}{-\delta} \right) = e^{-\delta h} \int_0^n e^{-\delta s} ds. \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ უკანასკნელ ტოლობებს, მაშინ h ერთეულით გადავადებული უწყვეტი რენტის თანამედროვე ღირებულება შეიძლება გამოვსახოთ ჩვეულებრივი უწყვეტი რენტის თანამედროვე ღირებულების საშუალებით:

$$h|\bar{a}_{n|\delta} = \bar{a}_{n+h|\delta} - a_{h|\delta} = v^h \bar{a}_{n|\delta}. \quad (6.113)$$

(6.111) ტოლობიდან ადვილად გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა 4.1 უვადო რენტის შემთხვევაში, თუ $\delta > 0$, მაშინ

$$\bar{a}_{\infty|\delta} = \frac{1}{\delta}.$$

ჩვენ განვიხილეთ გადასახადების ნაკადის ერთი კერძო შემთხვევა. საზოგადოდ, გადასახადების ნაკადის შესწავლა წარმოადგენს საკმაოდ რთულ ამოცანას, რადგან იგი შეიცავს გარკვეული რისკისა თუ განუსაზღვრელობის ფაქტორებს. ასეთი ფაქტორების გათვალისწინება მოითხოვს რთული მათემატიკური აპარატის გამოყენებას, რაც სცილდება ჩვენი სახელმძღვანელოს ფარგლებს. თუმცა უნდა აღვნიშნოთ, რომ მარტივი თეორიული მათემატიკური მოდელების საშუალებითაც შეიძლება გავაკეთოთ პრაქტიკული მიზნებისათვის მეტად მნიშვნელოვანი დასკვნები, რაც პროფესიონალების გამოცდილებისა და ინტუიციის ფონზე, მოგვცემს საშუალებას მივიღოთ სწორი გადაწყვეტილებანი.

§5. ინფლაცია და ოქახის შემოსავალი

5.1 ინფლაცია. ინფლაცია წარმოადგენს ძალიან რთულ და მნიშვნელოვან ფინანსურ-ეკონომიკურ მოვლენას. ინფლაციის დონე ხშირად არსებითად განსაზღვრავს ქვეყნის ეკონომიკურ მდგომარეობას, მისი განვითარების პერსპექტივებს. ინფლაცია დამოკიდებულია მრავალ ფაქტორზე. მისი შესწავლა ეკონომიკური თეორიის სხვადასხვა მიმართულების, მათ შორის ფინანსური მათემატიკის ერთ-ერთ ძირითად პრობლემას წარმოადგენს. ინფლაციის პროცესის მეტად თუ ნაკლებად დამაკმაყოფილებლად შესწავლისათვის ფინანსური მათემატიკა იყენებს ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის საკმაოდ რთულ აპარატს, ამდენად, მას ჩვენი სახელმძღვანელოს კურსში არ შევხებით. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ზოგიერთ უმარტივეს მეთოდს, რომელიც მოგვცემს საშუალებას გავითვალისწინოთ ინფლაციის გავლენა ზოგიერთ ფინანსურ ოპერაციაზე.

ინფლაციის ტემპი ჩვეულებრივ იზომება ინფლაციის ინდექსების სპეციალური ინსტრუმენტების საშუალებით, რომლებიც ახასიათებენ საქონლის გარკვეული ფიქსირებული ერთობლიობის (კალათის) ღირებულების ცვლილებას დროის გარკვეულ პერიოდში. ამ კალათაში შეიძლება შედიოდეს მომსახურების ზოგიერთი სფეროც. ასე მაგალითად, ბევრი ქვეყნის, მათ შორის საქართველოს გაბეთებში ხშირად ქვეყნდება ინფლაციის ინდექსის მნიშვნელობა კვირის, თვის ან წლის განმავლობაში. ხშირად ინფლაციის ინდექსი ითვლება სამომხმარებლო კალათის საფუძველზე. შევნიშნოთ, რომ კალათის შემადგენლობა დამოკიდებულია ამ მიზანზე, რომელსაც ემსახურება კონკრეტული გამოკვლევა. თუ ლაპარაკია საბაზოცხოვრო მინიმუმზე, მაშინ მასში შეაქვთ არა მარტო გარკვეული სახის პროდუქტები, არამედ სამრეწველო საქონელი, მომსახურების ზოგიერთი სფერო და ა. შ. ინფლაციის ინდექსი შეიძლება გამოთვლილ იქნეს წარმოების გარკვეული დარგებისათვის ან ქვეყნის ნაციონალური შემოსავლისათვის.

5.2 ინფლაციის ინდექსი და ინფლაციის ტემპი. ვთქვათ, სამომხმარებლო კალათა შეიცავს k რაოდენობის საქონელსა და მომსახურების სფეროს ამასთან, დავუშვათ, რომ S დასახელების საქონლის ან მომსახურების რაოდენობა კალათაში შეადგენს q_S შესაბამის ერთეულს, ხოლო მისი ერთი ერთეულის ფასი t მომენტში შეადგენს $x_S(t)$ ფულის ერთეულს, $S = 1, 2, \dots, k$. მაშინ კალათის ღირებულება t მომენტში გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუა-

$$X(t) = \sum_{S=1}^k x_S(t) q_S. \quad (6.114)$$

განსაზღვრება. ინფლაციის (სამომხმარებლო ფასების მრდის) ინდექსი დროის t_1 მომენტიდან t_2 მომენტამდე ეწოდება შემდეგ უკანმოძილებო სიდიდეს

$$H(t_1, t_2) = \frac{X(t_2)}{X(t_1)}, \quad t_2 > t_1, \quad (6.115)$$

ხოლო ამ პერიოდში ინფლაციის ტემპი h - შემდეგ სიდიდეს

$$h(t_1, t_2) = \frac{X(t_2) - X(t_1)}{X(t_1)} = H(t_1, t_2) - 1. \quad (6.116)$$

ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$H(t_1, t_2) = 1 + h(t_1, t_2). \quad (6.117)$$

ინფლაციის ინდექსი H გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ გაიზარდა ფასები განსახილველ პერიოდში.

ინფლაციის ტემპი h გვიჩვენებს, თუ რამდენი პროცენტით გაიზარდა ფასები განსახილველ პერიოდში.

შევნიშნოთ, რომ ინფლაციის ტემპის (6.116) განსაზღვრება ფორმალურად ემთხვევა §1-ში მოყვანილ პროცენტული განაკვეთის განსაზღვრებას. ამიგომ $h(t_1, t_2)$ -ს შეიძლება ფორმალურად ვუწოდოთ ინფლაციის განაკვეთი. მაგრამ ფინანსურ საქმიანობაში ეს ტერმინი არ არის მიღებული, რადგან ინფლაცია წარმოადგენს სტიქიურ პროცესს, რომელიც თითქმის არ ემორჩილება რეგულირებას.

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს თეორემა 2.1-ის ანალოგს ინფლაციის ინდექსის შესახებ.

თეორემა 5.1 ვთქვათ, $[t_0, t_n]$ ინტერვალის დაყოფილია ქვეინტერვალებად $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. მაშინ $[t_0, t_n]$ ინტერვალზე ინფლაციის ინდექსი გოლია ამ ქვეინტერვალებზე ინფლაციის ინდექსების ნამრავლის:

$$H(t_0, t_n) = 1 + h(t_0, t_n) = \prod_{s=1}^n [1 + h(t_{s-1}, t_s)]. \quad (6.118)$$

დამტკიცება. (6.115)-(6.117) გოლობების გათვალისწინებით შეიძლება დავადგინოთ, თუ როგორ შეიძლება გამოვთვალოთ სამომხმარებლო კალათის ღირებულება t_n მომენტში:

$$\begin{aligned} X(t_n) &= X(t_{n-1})[1 + h(t_{n-1}, t_n)] = X(t_{n-2})[1 + h(t_{n-2}, t_{n-1})][1 + h(t_{n-1}, t_n)] = \\ &= \dots = X(t_0) \prod_{s=1}^n [1 + h(t_{s-1}, t_s)]. \end{aligned}$$

გარდა ამისა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$X(t_n) = X(t_0)[1 + h(t_0, t_n)],$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$H(t_0, t_n) = \frac{X(t_n)}{X(t_0)} = 1 + h(t_0, t_n) = \prod_{s=1}^n [1 + h(t_{s-1}, t_s)].$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა ავარჩიოთ დროის საბაზო ერთეული. ამ ერთეულის არჩევა ხდება კონკრეტული მიზნის გათვალისწინებით, იმის გათვალისწინებით თუ რა ამოცანის გადაწყვეტას ვაპირებთ. ერთეულოვანი დროის ინტერვალისათვის $(t-1, t)$

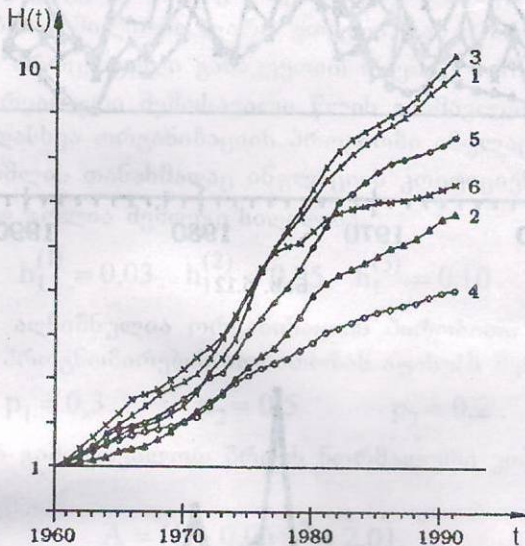
ინფლაციის ინდექსი $H(t)$ და ინფლაციის ტემპი $h(t)$ შემდეგი ფორმულებით:

$$H(t) = \frac{X(t)}{X(t-1)}, \quad h(t) = H(t) - 1. \quad (6.119)$$

ამ გოლობებიდან გამოდინარეობს, რომ

$$X(t) = X(t-1)[1 + h(t)]. \quad (6.120)$$

ამრიგად, ფასების ზრდა დროის $(t-1, t)$ ინტერვალში ხდება იმ რთული პროცენტის სქემის ანალოგიურად, რომლის განაკვეთია $h(t)$. პრაქტიკაში $H(t)$ -ს ზვეულებრივად გამოსახავენ უგანზომილებო რიცხვის საშუალებით, ხოლო $h(t)$ სადიდეს კი - პროცენტებში. ასე მაგალითად, თუ $H(t) = 1,5$, მაშინ $h(t) = 0,5$ და ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ განხილული დროით ინტერვალში სამომხმარებლო ფასები გაიზარდა 1,5-ჯერ, რაც ეკვივალენტურია ფასების ზრდისა 50%-ით. შევნიშნოთ, რომ ინფლაციის ტემპი ახასიათებს ფასების ზრდის ფარდობით სიჩქარეს დროის საბაზო ერთეულის განმავლობაში.



- | | |
|-------------------|-------------------------------------|
| 1. დიდი ბრიტანეთი | 2. ამერიკის შეერთებული შტატები |
| 3. ფინეთი | 4. გერმანიის ფედერაციული რესპუბლიკა |
| 5. საფრანგეთი | 6. იაპონია |

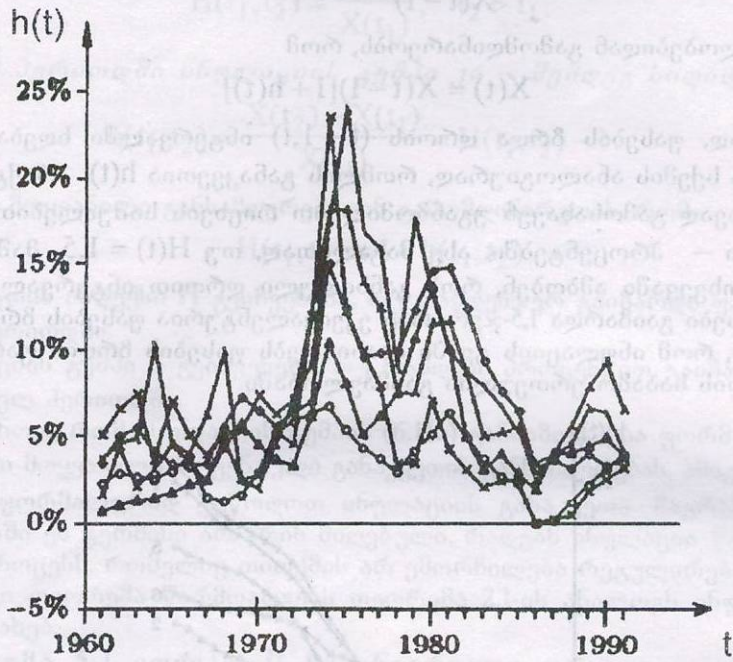
ნახ. 6.11

ნახ. 6.11 და 6.12-ზე მოყვანილია ინფლაციის $H(t)$ ინდექსისა და $h(t)$ ტემპის გრაფიკები ექვსი სახელმწიფოსათვის, რომლებიც ხასიათდებიან მდგრადი ეკონომიკით. გრაფიკი მოიცავს დროის შუალედს 1960 წლიდან 1991 წლამდე, დროის საბაზო ერთეულად აღებულია ერთი წელიწადი.

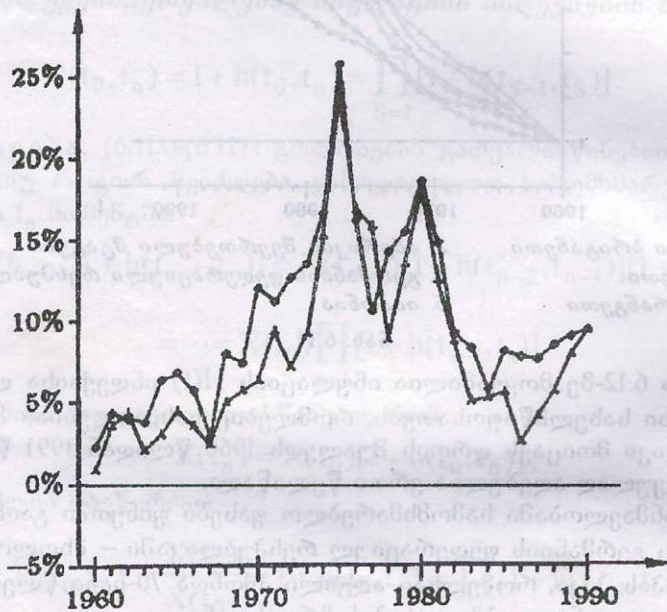
31 წლის განმავლობაში სამომხმარებლო ფასები ფინეთში გაიზარდა 10-ჯერ, მაშინ, როდესაც გერმანიის ფედერაციულ რესპუბლიკაში - მხოლოდ 4-ჯერ. $h(t)$ ინფლაციის ტემპის პიკი, რომელსაც ადგილი ჰქონდა 70-იანი წლების დასაწყისში, დაკავშირებულია ნავთობზე ფასების ზრდასთან.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ სამომხმარებლო ფასების ზრდასთან ერთად, უნაყოფო პროდუქტების ზრდასთან ერთად ხდება საშუალო წლიური შემოსავლის (მათ შორის ხელფასის) ზრდაც. ასე მაგალითად, ნახ. 6.13-ზე მოყვანილია სამომხმარებლო ფასების ინფლაციის ტემპისა და საშუალო წლიური შემოსავლის გრაფიკები დიდი ბრიტანეთისათვის 1960 წლიდან 1990 წლამდე. ამ გრაფიკებიდან კარგად

ჩანს, რომ რეალური ცხოვრების დონე ამ ქვეყნებში ყოველწლიურად იმატებს. გამონაკლისს შეადგენს 70-იანი წლების ბოლო პერიოდი, როდესაც ეს დონე იკლებდა წელიწადში დაახლოებით 5%-ით და ეს უკავშირდება ენერგეტიკულ კრიზისს.



6ახ. 6.12



- ▲ - სამომხმარებლო ფასების ინფლაციის ტემპი
- ◆ - საშუალო წლიური შემოსავალი

6ახ. 6.13

მაგალიტი 1. ზოგიერთ შემთხვევაში მომდევნო წლისათვის ინფლაციის ყოველთვიური ტემპის პროგნოზის მიხედვით საჭიროა განისაზღვროს ინფლაციის H ინდექსი. აღნიშნოთ ინფლაციის ყოველთვიური ტემპი h_1 -ით და ვისარგებლოთ (6.118) ფორმულით, მაშინ მივიღებთ:

$$H = (1 + h_1)^{12} \quad (6.121)$$

ინფლაციის წლიური ტემპი აღნიშნოთ h -ით. კავშირი h_1 , H და h სიდიდეებს შორის h_1 -ის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის მოყვანილია შემდეგ ცხრილში:

h_1	1%	2%	3%	4%	5%	10%	12%	15%	20%
H	1,13	1,27	1,43	1,60	1,80	3,14	3,90	5,35	8,92
h	13%	27%	43%	60%	80%	214%	290%	435%	792%

მომდევნო მაგალითის განხილვისას ჩვენ დაგეგმირდება ელემენტარული ინფორმაცია ალბათობის თეორიის კურსიდან

მაგალიტი 2. ვთქვათ, საბანკო დეპოზიტზე 1 იანვარს დაილო ანაბარი, რომლის რაოდენობაა 2 მილიონი ლარი. ვთქვათ, ბანკი პროცენტების დარიცხვას ახდენს რთული პროცენტული განაკვეთით თვეში $j = 6\%$ -ით. უნდა გამოვთვალოთ მეანაბრის რეალური შემოსავალი წლის განმავლობაში, თუ გამოქვეყნებულია სამი სხვადასხვა ორგანიზაციის პროგნოზი ინფლაციის ყოველთვიური ტემპის შესახებ, რომლის თანახმადაც ინფლაციის კოეფიციენტი h_1 იქნება მუდმივი და შესაბამისად გოლია შემდეგი სიდიდისა:

$$h_1^{(1)} = 0,03 \quad h_1^{(2)} = 0,05 \quad h_1^{(3)} = 0,10.$$

მელა ინდექსით აღნიშნულია ორგანიზაციის პირობითი ნომერი. მეანაბრე ამ ორგანიზაციების პროგნოზირების ალბათობას აფასებს შემდეგნაირად:

$$p_1 = 0,3 \quad p_2 = 0,5 \quad p_3 = 0,2.$$

ამოხსნა. ჯერ გამოვთვალოთ ზრდის ნორმალური კოეფიციენტი 12 თვის განმავლობაში:

$$A = (1 + 0,06)^{12} \approx 2,01.$$

ინფლაცია შეამცირებს ამ კოეფიციენტის მნიშვნელობას $H^{(k)}$ -ჯერ, სადაც

$$H^{(k)} = (1 + h_1^{(k)})^{12}, \quad k = 1, 2, 3,$$

მაშინ ზრდის რეალური კოეფიციენტი წლის განმავლობაში გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$\bar{A}^{(k)} = \frac{A}{H^{(k)}} = \frac{(1 + 0,06)^{12}}{(1 + h_1^{(k)})^{12}} \approx \frac{2,01}{(1 + h_1^{(k)})^{12}},$$

ხოლო $j^{(k)}$ შემოსავალი კი – შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$j^{(k)} = 2 \text{ მილიონი ლარი } (\bar{A}^{(k)} - 1), \quad k = 1, 2, 3.$$

k -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის გამოთვლების შედეგები მოყვანილია შემდეგ ცხრილში:

	k		
	1	2	3
j	0,06	0,06	0,06
A	2,01	2,01	2,01
$h_1^{(k)}$	0,03	0,05	0,10
p_k	0,3	0,5	0,2
$H^{(k)}$	1,43	1,80	3,14
$\bar{A}^{(k)}$	1,406	1,117	0,640
$j^{(k)}$	812	234	- 720

რადგან k ნომრის პროცნომის ალბათობაა p_k ($k = 1, 2, 3$), ამიგომ შეანაბრის მოსალოდნელი წლიური შემოსავალი გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$\bar{j} = \sum_{k=1}^3 p_k j^{(k)} = 216,6 \text{ ათასი ლარი.}$$

ამრიგად, შესაბამისი ალბათობებით ინფლაციის ზემოთ აღნიშნული პროცნომების შემთხვევაში, შეანაბრის მოსალოდნელი წლიური შემოსავალი გოლი იქნება 216,6 ათასი ლარის.

5.3 კაპიტალის ეროზია და ინფლაციური პრემია. ვთქვათ, საბანკო დეპოზიტზე დაილო $S(0)$ ფულის ერთეულის რაოდენობის თანხა n თვის ვადით. ვთქვათ, ბანკი პროცენტების დარიცხვას ახდენს რთული პროცენტული განაკვეთით თვეში $j = \frac{i^{(12)}}{12}$, სადაც $i^{(12)}$ წარმოადგენს პროცენტების ნომინალურ წლიურ განაკვეთს. ვთქვათ, h წარმოადგენს ინფლაციის პროცნომირებულ ყოველთვიურ ტემპს. n თვის შემდეგ შეანაბრეს ანგარიშზე დაერიცხება

$$S(n) = S(0)(1 + j)^n \text{ ფულის ერთეული,}$$

მაგრამ ამ თანხის რეალური ღირებულება ინფლაციის გამო შეადგენს:

$$\bar{S}(n) = S(0) \frac{(1 + j)^n}{(1 + h)^n} \text{ ფულის ერთეულს.}$$

თუ $h = j$, მაშინ $S(0)$ თანხის რეალური ღირებულება შენარჩუნებული იქნება, ხოლო თუ $h > j$, მაშინ ეს ღირებულება შემცირდება (ფინანსურ ლიგერაგურაში ამ მოვლენას *კაპიტალის ეროზიას* უწოდებენ). მხოლოდ, თუ $h < j$, მაშინ $S(0)$ -ის რეალური ღირებულება გაიზრდება n თვის განმავლობაში, მაგრამ არა იმდენად, რამდენადაც დაგეგმილი იყო. ამიგომ ხშირად მიმართავენ საწყისი პროცენტული განაკვეთის ანუ პროცენტული ნეგო-განაკვეთის *ინდექსაციას* (ზრდას) ე. წ. *ინფლაციური პრემიის* სიდიდით.

ვთქვათ, j წარმოადგენს პროცენტების საწყის ეფექტურ ნეგო-განაკვეთს, ხოლო r წარმოადგენს მის შესაბამის ბრუგო-განაკვეთს, ე. ი. განაკვეთს დროის იმავე საბაზო ერთეულისათვის, რომელიც ითვალისწინებს ინფლაციურ პრემიას. იმისათვის, რომ $\bar{S}(n)$ რეალური ღირებულება დაემთხვეს $S(n)$ ნომინალურ ღირებულებას, საჭიროა ზრდის კოეფიციენტი გაიზარდოს შემდეგნაირად:

$$1 + r = (1 + j)(1 + h),$$

$$r = j + h + jh.$$

თუ j და h , ბაზური დროის ერთეულისათვის, მცირე სიდიდეებია, მაშინ jh ნამრავლი შეიძლება უგულებელვყოთ და ბრუტო-განაკვეთი გამოვითვალოთ შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$r \approx j + h.$$

თუ ინფლაციის ტემპი დიდი არ არის, მაშინ დროის ბაზურ ერთეულად შეიძლება ავიღოთ წელიწადი. თუ ინფლაციის ტემპი დიდია, მაშინ დროის ბაზურ ერთეულად უმჯობესია ავიღოთ თვე.

5.4 ოჯახის ყოველკვირეული შემოსავლების ერთი კონკრეტული მაგალითი. წინა პუნქტებში ჩვენ განვიხილეთ ინფლაციის ინდექსის ცნება. სტატისტიკურ მეთოდებთან ერთად ინდექსების სისტემა ფართოდ გამოიყენება ეკონომიკური და ფინანსური ანალიზის დროს. ინდექსები ახდენენ სხვადასხვა საქონლისა თუ მომსახურების შესახებ არსებული სხვადასხვა ინფორმაციის გარკვეული აზრით გასაშუალებას. ამიჯომ მათ გააჩნიათ საშუალო მნიშვნელობის ყველა უპირატესობა და ნაკლოვანება – ისინი იძლევიან ყველა არსებული ინფორმაციის სასარგებლო და მნიშვნელოვან შეფასებებს, მაგრამ ამ შემთხვევაში ხდება ბევრი არსებითი დეტალის შესახებ ინფორმაციის უგულებელყოფა (მაგ, საშუალო ხელფასი, სამომსახურებლო კალათის საშუალო ფასი და ა. შ.).

შემოსავლების არათანაბრობის გასაზომად და შესაფასებლად ხშირად სარგებლობენ ინდექსების სპეციალური სისტემით.

მაგალითისათვის მოვიყვანოთ დიდ ბრიტანეთში 1992 წელს ჩატარებული გამოკვლევის შედეგები, რომელიც შეიცავს ოჯახის შემოსავლების ყოველკვირეულ მონაცემებს მოსახლეობის სხვადასხვა ჯგუფისათვის. გამოკვლევის შედეგები მოცემულია შემდეგ ცხრილში. სპეციალური პროგრამების საშუალებით შეირჩა 7418 ოჯახი, ამასთან, გათვალისწინებულია ოჯახის ყველა შემოსავალი პენსიის ჩათვლით. ცხრილში მოცემულია ოჯახების შემოსავლის რაოდენობა საშემოსავლო გადასახადების გადახდამდე. შემოსავლის მიხედვით ოჯახები დაყოფილია 8 ჯგუფად, რომელთა საზღვრებიც მოყვანილია მეორე სვეტში. მესამე სვეტში მოცემულია ინტერვალის შუა წერტილის მნიშვნელობა a_j , ხოლო მეოთხე სვეტში – შესაბამის ჯგუფში (ინტერვალში) შემავალი ოჯახების რაოდენობა f_j , $j = 1, 2, \dots, 8$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	[0-80)	40	909	0,122	0,122	36360	0,015	0,015
2	[80-130)	105	949	0,128	0,250	99645	0,040	0,055
3	[130-200)	165	955	0,129	0,379	157575	0,063	0,118
4	[200-280)	240	905	0,122	0,501	217200	0,087	0,205
5	[280-330)	325	1020	0,137	0,638	331500	0,133	0,338
6	[330-540)	455	1356	0,183	0,821	616980	0,247	0,585
7	[540-800)	670	866	0,117	0,938	580220	0,232	0,817
8	[800, ∞)	1000	458	0,062	1,000	458000	0,183	1,000
Σ			f = 7418	1,000		2497480	1,000	

1. ინტერვალის ნომერი j ;
2. ყოველკვირეული შემოსავალი (ფუნტ სტერლინგებში);
3. ინტერვალის შუაწერტილი a_j (ფუნტ სტერლინგებში);
4. ოჯახების რაოდენობა ინტერვალში;

5. j ინტერვალში ოჯახების ფარდობითი რაოდენობა ოჯახების მთლიან f რაოდენობასთან შედარებით $\frac{f_j}{f}$;

6. 1-დან j -მდე ჩათვლით ინტერვალებში ოჯახების ჯამური რაოდენობის შეფარდება ოჯახების მთლიან რაოდენობასთან

$$x_j = \frac{1}{f} \sum_{s=1}^j f_s; \quad (6.122)$$

7. j ჯგუფის ოჯახების საერთო შემოსავლის მიახლოებითი შეფასება $a_j f_j$ (ფუნგ სტერლინგებში);

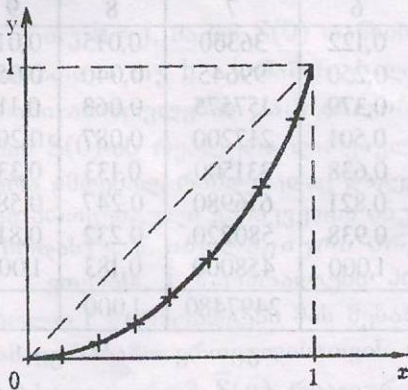
8. j ჯგუფის ოჯახების საერთო შემოსავლის ფარდობითი რაოდენობა ყველა ოჯახის საერთო შემოსავალთან

$$\frac{a_j f_j}{\sum_{s=1}^8 a_s f_s};$$

9. 1-დან j -მდე ჩათვლით ინტერვალებში ოჯახების შემოსავლების ჯამური რაოდენობის შეფარდება ყველა ოჯახის საერთო შემოსავალთან

$$y_j = \frac{\sum_{s=1}^j a_s f_s}{\sum_{s=1}^8 a_s f_s}, \quad j = 1, 2, \dots, 8. \quad (6.123)$$

5.5 ლორენცის მრუდი. როგორც ცხრილიდან ჩანს, ოჯახების შემოსავლებში არსებითი განსხვავებაა. ასე მაგალითად, უღარიბესი ოჯახების ფენის, რომელიც შეადგენს ოჯახების საერთო რაოდენობის 12%-ს, შემოსავალი შეადგენს 80 ფუნგ სტერლინგზე ნაკლებს კვირაში, ხოლო ყველა მდიდარი ოჯახების (საერთო რაოდენობის 6%) კვირეული შემოსავალი კი 800 ფუნგ სტერლინგზე მეტს. ეს წარმოადგენს შემოსავლების განაწილების შესახებ ძალიან მნიშვნელოვან ინფორმაციას, მაგრამ ის ემყარება მხოლოდ ორი უკიდურესი ჯგუფების ოჯახების შემოსავლების ანალიზს. ახლა ავაგოთ ე. წ. ლორენცის მრუდი, რომელიც იძლევა ოჯახების შემოსავლების შესახებ ცხად გრაფიკულ წარმოდგენას.



ნახ. 6.14

განსაზღვრება. თუ m წარმოადგენს ჯგუფების საერთო რაოდენობას, მაშინ ლორენცის მრუდი გაივლის საყრდენ წერტილებზე

$$(0,0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{m-1}, y_{m-1}), (x_m, y_m) = (1,1). \quad (6.124)$$

ნახ. 6.14-ზე მოყვანილია ლორენცის გლუვი მრუდი ჩვენ მიერ ზემოთ მოყვანილი მაგალითის შემთხვევაში (ოჯახების შემოსავლების განაწილება დიდი ბრიტანეთის მაგალითზე).

აქვე ცხადად წარმოაჩენს ჩვენ მიერ განხილული მაგალითის ძირითად თვისებურებებს. ასე, მაგალითად, პირველი საყრდენი წერტილი (0,122; 0,015) გვიჩვენებს, რომ უღარიბეს ოჯახებს (რომლებიც შეადგენენ ოჯახების საერთო რაოდენობის 12,2%) აქვთ მთელი შემოსავლის მხოლოდ 1,5%. მეოთხე საყრდენი წერტილი (0,501; 0,205) გვიჩვენებს, რომ ოჯახების ნახევარს აქვს მთელი შემოსავლის მხოლოდ 20,5%. ბოლოს წინა საყრდენი წერტილი (0,938; 0,817) გვიჩვენებს, რომ ყველაზე მდიდარ ოჯახებს (რომლებიც შეადგენენ ოჯახების საერთო რაოდენობის 6,2%-ს) აქვთ მთელი შემოსავლის 18,3%.

ვთქვათ, $0 \leq i < j \leq m$. α_{ij} -თი აღვნიშნოთ i -ურ და j -ურ საყრდენ წერტილებზე გამავალი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი:

$$\alpha_{ij} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} = \frac{f}{\sum_{s=1}^m a_s f_s} \frac{\sum_{s=i+1}^j a_s f_s}{\sum_{s=i+1}^j f_s}.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\alpha_{kk+1} < \alpha_{kk+2} < \dots < \alpha_{km}, \quad k = 0, 1, \dots, m-2. \quad (6.125)$$

მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$b = \frac{f}{\sum_{s=1}^m a_s f_s}, \quad A_{ij} = \sum_{s=i+1}^j a_s f_s, \quad F_{ij} = \sum_{s=i+1}^j f_s$$

და განვიხილოთ შემდეგი სხვაობები

$$\alpha_{kk+i+1} - \alpha_{kk+i}, \quad i = 1, 2, \dots, m-k-1$$

$$\begin{aligned} \alpha_{kk+i+1} - \alpha_{kk+i} &= b \left[\frac{A_{kk+i} + a_{k+i+1} f_{k+i+1}}{F_{kk+i} + f_{k+i+1}} - \frac{A_{kk+i}}{F_{kk+i}} \right] = \\ &= \frac{b f_{k+i+1}}{F_{kk+i} F_{kk+i+1}} [a_{k+i+1} F_{kk+i} - A_{kk+i}]. \end{aligned}$$

ვინაიდან ოჯახების ჯგუფები დალაგებულია უფრო ღარიბი ოჯახებიდან უფრო მდიდარი ოჯახებისკენ $a_{k+i+1} > a_s$, $s = 1, 2, \dots, k+i$, გვექნება:

$$a_{k+i+1} F_{kk+i} - A_{kk+i} > 0,$$

რის საფუძველზეც მივიღებთ, რომ ნებისმიერი k -სთვის, $0 \leq k < m-1$, სამართლიანია უტოლობები:

$$\alpha_{kk+i+1} - \alpha_{kk+i} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-k-1.$$

ბოლო უტოლობების საფუძველზე მარტივად დავასკვნით (6.125) უტოლობების სამართლიანობას.

შედეგი 1. (6.125)-დან, როცა $k = 0$ მივიღებთ:

$$0 < \frac{y_1}{x_1} < \frac{y_2}{x_2} < \dots < \frac{y_m}{x_m} = 1,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ნულოვანი და ბოლო საყრდენი წერტილების გარდა, რომლებიც მდებარეობენ პირველი საკორდინატო მეოთხედის ბისექტრისაზე, ყველა დანარჩენი საყრდენი წერტილი მდებარეობს ამ ბისექტრის ქვემოთ.

შედეგი 2. (6.125) უკოლობებიდან ადვილად დავასკვნით, რომ თუ $k < i < n$, მაშინ i -ური საყრდენი წერტილი მოთავსებულია k -ურ და n -ურ საყრდენ წერტილებზე გამავალი წრფის ქვემოთ.

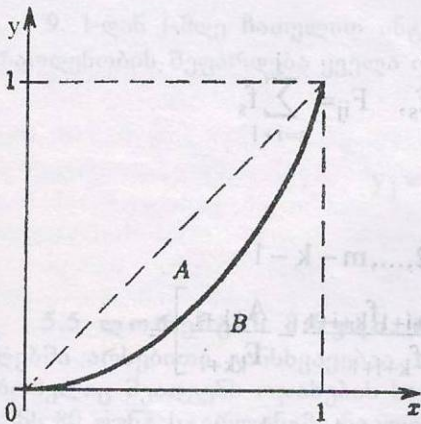
ლორენცის მრუდს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) ნულოვანი საყრდენი წერტილი $(0; 0)$ და ბოლო საყრდენი წერტილი $(1; 1)$ შესაბამისად ნიშნავენ იმას, რომ ოჯახების 0%-ს აქვს საერთო შემოსავლის 0% ხოლო ოჯახების 100%-ს აქვს საერთო შემოსავლის 100%.

2) რადგან ოჯახების ჯგუფები დალაგებულია უფრო ღარიბი ოჯახებიდან უფრო მდიდარი ოჯახებისაკენ, ამიტომ ლორენცის მრუდი მდებარეობს პირველი საკოორდინატო მეოთხედის ბისექტრისის ქვემოთ (შედეგი 1). ბისექტრისა წარმოადგენს ლორენცის მრუდის შემთხვევას, როდესაც ოჯახების საერთო შემოსავალი ერთმანეთის ტოლია.

3) რადგან X -ის ზრდასთან ერთად შესაბამისი ოჯახების ჯგუფები შეიცავენ სულ უფრო და უფრო მდიდარ ოჯახებს, ამიტომ ამ ოჯახების შემოსავლების ჯამური რაოდენობა იზრდება სულ უფრო და უფრო სწრაფად (შედეგი 2). აქედან გამომდინარე, ლორენცის მრუდი ქვემოთ ამოზნექილ წირს წარმოადგენს.

5.6 ჯინის კოეფიციენტი. ახლა ჩვენ შემოვიღებთ სპეციალურ კოეფიციენტს, რომელსაც *ჯინის კოეფიციენტს* უწოდებენ და რომელიც იძლევა ოჯახის შემოსავლების არათანაბრობის რიცხვით შეფასებას. ამ კოეფიციენტის გამოთვლა შესაძლებელია ლორენცის მრუდის საშუალებით.



ნახ. 6.15

ნახ. 6.15-ზე კვლავ გამოსახულია ლორენცის მრუდი. ადვილად იშვიათად A -თი იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია ამ მრუდისა და ბისექტრისას შორის. იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ლორენცის მრუდით, აბსცისათა ღერძითა და $x = 1$ წრფის მონაკვეთით, ადვილად იშვიათად B -თი. ცხადია, რომ

ნახ. 6.15-ზე კვლავ გამოსახულია ლორენცის მრუდი. ადვილად იშვიათად A -თი იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია ამ მრუდისა და ბისექტრისას შორის. იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ლორენცის მრუდით, აბსცისათა ღერძითა და $x = 1$ წრფის მონაკვეთით, ადვილად იშვიათად B -თი. ცხადია, რომ

$$A + B = \frac{1}{2}. \quad (6.126)$$

განსაზღვრება. *ჯინის კოეფიციენტი ეწოდება რიცხვს*

$$G = \frac{A}{A + B} = 2A, \quad (6.127)$$

მახათან $0 \leq G \leq 1$.

შემთხვევა, როდესაც $A = G = 0$ ნიშნავს, რომ ლორენცის მრუდი ემთხვევა ბისექტრისას, ე. ი. ადგილი აქვს შემოსავლების სრულ თანასწორობას. შემთხვევა, როდესაც $G = 1$ და $B = 0$, ნიშნავს, რომ ლორენცის მრუდი გადაგვარდება აბსცისათა ღერძის $[0,1]$ შუალედში და $(1,1)$ წერტილში. ეს ნიშნავს, რომ მთლიან შემოსავალს იღებს მხოლოდ ერთი ოჯახი. ცხადია, რომ ეს ორი უკიდურესი შემთხვევა მხოლოდ თეორიული ინტერესის საგანია. პრაქტიკულად, ადგილი აქვს შეფასებას $0 < G < 1$, ამასთან, შევნიშნოთ, რომ G -ს ზრდასთან ერთად არათანაბრობა ოჯახების შემოსავლებში სულ უფრო ღრმავდება.

ჯინის კოეფიციენტი იძლევა საშუალებას შევისწავლოთ და ერთმანეთს შევადაროთ ერთი ქვეყნის სხვადასხვა რეგიონში ან სხვადასხვა ქვეყანაში ოჯახების შემოსავლების განაწილება, შევისწავლოთ ამ პროცესის დინამიკა და ა. შ.

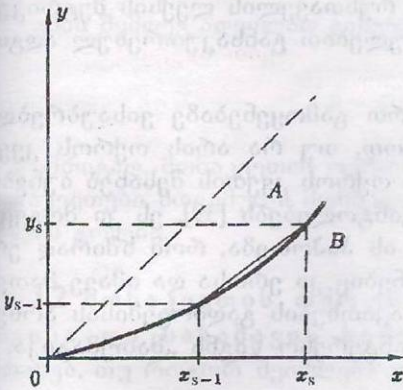
(6.127) ფორმულის საშუალებით G ჯინის კოეფიციენტის მნიშვნელობის გამოსათვლელად საკმარისია ლორენცის წირის ქვემოთ მდებარე ფიგურის B ფართობის გამოთვლა, რის შემდეგაც (6.126) გოლობის საშუალებით ადვილად დავადგენთ A -ს მნიშვნელობასაც.

რადგან ლორენცის მრუდის შესაბამისი ფუნქცია მოცემულია ცხრილის სახით (არსებითად, ლორენცის მრუდი წარმოადგენს ბაღურ ფუნქციას, რომლის საშუალებითაც უნდა იქნეს მიღებული ამ ფუნქციის ანალიზური სახე, რაც არსებით სიძნელეებთანაა დაკავშირებული), ამიტომ B ფიგურის ფართობის გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ რომელიმე კვადრატურული ფორმულა. მაგალითად, გრაპეციის ფორმულა (იხ. ნახ. 6.16). ამ შემთხვევაში (x_{s-1}, x_s) შუალედში ლორენცის მრუდი იცვლება (x_{s-1}, y_{s-1}) , (x_s, y_s) წერტილებზე გამავალი ქორდი და შემდეგ გამოითვლება მიღებული გრაპეციის ფართობი:

$$B \approx \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m (x_s - x_{s-1})(y_s + y_{s-1}). \quad (6.128)$$

თუ B -ს გამოსათვლელად გამოვიყენებთ (6.128) ფორმულას, მაშინ ადვილად მივიღებთ ჯინის G კოეფიციენტის მნიშვნელობას ჩვენ მიერ განხილული მაგალითის შემთხვევაში.

შევნიშნოთ, რომ, რადგან ლორენცის მრუდი ჩაზნექილია, ამიტომ (6.128) ფორმულის გამოყენებით მიიღება B -ს მნიშვნელობა მეტობით.



ნახ. 6.16

5.7 ბოლო თქმა. ჩვენ გავყვანით ფინანსური მათემატიკის ელემენტებს – მათემატიკის ამ მნიშვნელოვანი და საინტერესო მიმართულების მხოლოდ ელემენტარულ ცნებებს და მათთან დაკავშირებული მოგიერთი პრობლემების გადაწყვეტის გზებს. მაგრამ ამ შემთხვევაში ჩვენ ხაზი უნდა გავუსვათ ერთ გარემოებას – ფინანსური მათემატიკის შესწავლას აზრი აქვს მხოლოდ ეკონომიკური თეორიების შესწავლის პარალელურად. ფინანსური მათემატიკის საფუძველს სწორედ ეკონომიკური მეცნიერებანი წარმოადგენენ. ფინანსური მათემატიკა იძლევა საშუალებას მათემატიკური მოდელების საშუალებით უფრო ღრმად ჩაეწვდეთ მოგიერთი ეკონომიკური პრობლემის არსს და მისი დახმარებით მოვახდინოთ საზოგადოების განვითარების მნიშვნელოვანი პროცესების პროგნოზირება.

ცხადია, რომ ჩვენი სახელმძღვანელოს მიღმა დარჩა ფინანსური მათემატიკის მნიშვნელოვანი სფეროები (ფასიანი ქაღალდები, საღაბღვევო მათემატიკა და ა. შ.), აგრეთვე ფინანსური ოპერაციების დროს რისკის ფაქტორის გათვალისწინება. მაგრამ, როგორც აღვნიშნეთ, ამ საკითხების ღრმა განხილვა მოითხოვს თანამედროვე მათემატიკის ურთულესი აპარატის გამოყენებას და, ამდენად, ჩვენ მათ ვერ შევხებით. ჩვენი მიზანი იყო, უპირველეს ყოვლისა, გვეჩვენებინა მკითხველისათვის, რომ მათემატიკური მოდელების მეთოდი ისევე მნიშვნელოვანია ეკონომიკის ამოცანების გადასაწყვეტად, როგორც ეს არის ფიზიკაში, თუ მეცნიერების ბევრ სხვა დარგში.

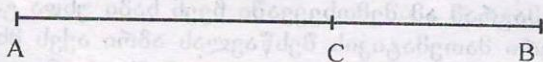
ოქროს კვეთა და ვეფხისგყაოსნის რითმათა სიმფონია

1973 წელს გამოცემლობა „მეცნიერება“ გამოაქვეყნა აკადემიკოს გიორგი წერეთლის მონოგრაფია „მეგრი და რითმა ვეფხისგყაოსანში“. უფრო ადრე ამ პრობლემას მიექდვნა ამავე ავტორის რამდენიმე სამეცნიერო სტატია. მეგად საინტერესო და ფუნდამენტურ გამოკვლევაში ავტორი ახლებურად წყვეტს პრობლემას „ვეფხისგყაოსნის“ ლექსთა წყობის შესახებ. აკად. გ. წერეთელი ასაბუთებს, რომ რუსთაველის გენიალური ქმნილება სიმეგრისა და ოქროს კვეთაზეა აგებული. იგი მონოგრაფიის შესავალ ნაწილში წერს: „დღემდე შეუმჩნეველი დარჩა, რომ „ვეფხისგყაოსნის“ სიმფონია ძირითადად „ოქროს კვეთას“ ემყარება. ვეფხისგყაოსანში „ოქროს კვეთის“ ანუ „ღვთაებრივი პროპორციის“ გამოვლენა ახლებურად სვამს საკითხს რუსთაველის ლექსის მეტრიკული სტრუქტურის შესახებ, ხოლო მის ავტორს სრულებით განსაკუთრებულ ადგილს ანიჭებს მსოფლიო პოეზიის ისტორიაში“.

სანამ მათემატიკის მეთოდების კიდევ ერთ გამოყენებაზე ვისაუბრებდეთ, ამჯერად პოეზიაში, აუცილებელია გავარკვეოთ, თუ რა არის ოქროს კვეთა. ცოცხა ქვეშით ჩვენ დავინახავთ, რომ საკითხი ოქროს კვეთის შესახებ ბუნებრივად უკავშირდება მეორე რიგის სხვაობიან განტოლებებს [39]. ეს კი მოვცემს საშუალებას კიდევ ერთხელ დავადასტუროთ ის ჰიპოთეზა, რომ ხშირად ერთმანეთისაგან სრულად განსხვავებული მოვლენებიც კი ერთსა და იმავე მათემატიკურ კანონზომიერებებს ემორჩილება. ამ საკითხების გადმოცემისას არსებითად დავეყრდნობით ა. ბენდუქიძის მეგად საინტერესო წიგნს „მათემატიკა, სერიოზული და სახალისო“.

1.1 რა არის ოქროს კვეთა. ამბობენ, რომ C წერტილი |AB| მონაკვეთის ოქროს კვეთის პროპორციით ყოფს, ან, მოკლედ, |AB| მონაკვეთის ოქროს კვეთას ახდენს, თუ

$$|AC|:|AB| = |BC|:|AC| \tag{დ.1}$$



ნახ. დ.1

ამრიგად, ოქროს კვეთა არის მონაკვეთის ისეთი გაყოფა ორ, ერთმანეთის არაგოლ ნაწილად, როდესაც დიდი ნაწილი ისე შეეფარდება მთელს, როგორც მცირე ნაწილი – დიდ ნაწილს. გეომეტრიაში ოქროს კვეთას ზოგჯერ საშუალო და კიდურა შეფარდებით გაყოფასაც უწოდებენ.

ვთქვათ, $|AB| = a$ და $|AC| = x$, მაშინ $|BC| = a - x$ და პროპორცია ასე გადაიწერება

$$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x} \tag{დ.2}$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$x = \sqrt{a(a - x)} \tag{დ.3}$$

ამრიგად, ოქროს კვეთისას დიდი მონაკვეთის სიგრძე მთელ მონაკვეთისა და მცირე მონაკვეთის სიგრძეთა საშუალო გეომეტრიულია ან როგორც ხშირად ამბობენ, საშუალო პროპორციულია.

ცხადია, რომ (დ2) გოლობის საშუალებით შეიძლება მივიღოთ x -ის მიმართ კვადრატული განტოლება

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

საიდანაც

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} a.$$

რადგან $x > 0$ (გავიხსენოთ, რომ x -ით აღნიშნულია $[AC]$ მონაკვეთის სიგრძე), ამიტომ

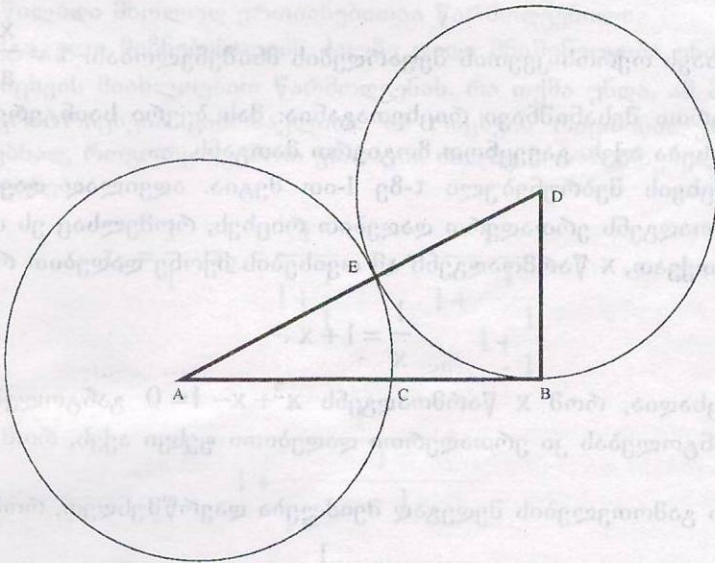
$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a \approx 0,618a.$$

ამის შემდეგ ადვილად განვსაზღვრავთ $(a-x)$ -ის მნიშვნელობას

$$a-x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} a \approx 0,372a.$$

ამრიგად, მონაკვეთის ოქროს კვეთის პროპორციით დაყოფისას, მიღებული მონაკვეთები მოცემული მონაკვეთის დაახლოებით 0,618 ნაწილისა და 0,372 ნაწილის გოლია.

1.2 მონაკვეთის ოქროს კვეთის პროპორციით დაყოფა ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით. ახლა განვიხილოთ საკითხი იმის შესახებ, თუ როგორ შეიძლება ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით მოვახდინოთ მონაკვეთის დაყოფა ოქროს კვეთის პროპორციით.



ნახ. დ2

განვიხილოთ $|AB|$ მონაკვეთი და მის ერთ-ერთ, მაგალითად, B ბოლოზე აღმართოთ მისი მართობი $|BD|$ მონაკვეთი, რომლის სიგრძეც $|AB|$ -ს სიგრძის

ნახევარს უდრის. შევავერთოთ A და D წერტილები, მივიღებთ მართკუთხა $\triangle ABD$ -ს (იხ. ნახ. დ.2). მის $|AD|$ ჰიპოტენუზაზე გადავდოთ $|BD|$ -ს გოლი $|ED|$ მონაკვეთი. შემდეგ $|AB|$ მონაკვეთზე გადავდოთ $|AE|$ -ს გოლი $|AC|$ მონაკვეთი დავამტკიცოთ, რომ C საძიებელი წერტილია. იგი ახდენს $|AB|$ მონაკვეთის ოქროს კვეთის პროპორციით დაყოფას.

მართლაც, $\triangle ABD$ -დან პითაგორას თეორემის თანახმად მივიღებთ:

$$(|AE| + |ED|)^2 = |AB|^2 + |BD|^2.$$

თუ ამ გოლობაში გავითვალისწინებთ, რომ აგების თანახმად $|AE| = |AC|$, $|ED| = |BD| = 0,5|AB|$, მივიღებთ:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |AC||AB|,$$

საიდანაც შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$|AC| = \sqrt{|AB| \cdot (|AB| - |AC|)}.$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ (დ.3) გოლობა, რაც ნიშნავს, რომ C წერტილის საშუალებით ხდება $[AB]$ მონაკვეთის ოქროს კვეთის პროპორციით დაყოფა.

1.3 ოქროს კვეთის შეფარდების ზოგიერთი თვისება. დავუბრუნდეთ (დ.2) გოლობას. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x = a\tau$, მაშინ ამ გოლობიდან τ -ს მიმართ მივიღებთ კადრატულ განტოლებას:

$$\tau^2 + \tau - 1 = 0. \quad (\text{დ.4})$$

ცხადია, რომ ამ განტოლების დადებითი ფესვი გოლია ჩვენ მიერ აღრე მიღებული რიცხვის

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

რაც გამოსახავს ოქროს კვეთის შეფარდების მნიშვნელობას: $\tau = \frac{x}{a}$.

τ ერთ-ერთი შესანიშნავი რიცხვთაგანია: მას ბევრი საინტერესო და საგულისხმო თვისება აქვს. გავეცნოთ ზოგიერთ მათგანს.

i) τ რიცხვის შებრუნებული τ -ზე 1-ით მეტია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ τ წარმოადგენს ერთადერთ დადებით რიცხვს, რომელსაც ეს თვისება აქვს მართლაც, ვთქვათ, x წარმოადგენს ამ თვისების მქონე დადებით რიცხვს, ე. ი.

$$\frac{1}{x} = 1 + x.$$

მაშინ, ცხადია, რომ x წარმოადგენს $x^2 + x - 1 = 0$ განტოლების დადებით ფესვს. ამ განტოლებას კი ერთადერთი დადებითი ფესვი აქვს, რომელიც τ -ს გოლია.

უშუალო გამოთვლების შედეგად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ

$$\tau = 0,618033989\dots \quad \frac{1}{\tau} = 1,618033989\dots$$

ii) (დ.4) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\tau = \frac{1}{1+\tau}$$

თუ ამ უკანასკნელი გოლობის მარჯვენა ნაწილში τ -ს შევცვლით მისი გოლობის $\frac{1}{1+\tau}$ გამოსახულებით, მაშინ τ შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\tau = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\tau}}$$

თუ ამ გოლობაში მოვახდენთ იმავე ჩასმას, მივიღებთ:

$$\tau = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\tau}}}$$

და ა. შ. ეს პროცესი უსასრულოდ შეიძლება გავაგრძელოთ, რის შედეგადაც მივიღებთ, რომ

$$\tau = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (დ5)$$

ამ გოლობის მარჯვენა ნაწილში შემავალ გამოსახულებას ჯაჭვწილადს უწოდებენ. ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ τ რიცხვის წარმოდგენა უსასრულო ჯაჭვწილადის სახით. არ შეიძლება არ აღინიშნოს ამ წარმოდგენის უკიდურესი სიმარტივე - ჯაჭვწილადი მხოლოდ ერთიანებითაა წარმოდგენილი.

iii) პრაქტიკული მიზნებისათვის ძალზე დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ირაციონალური რიცხვის მიახლოებით წარმოდგენას. რა თქმა უნდა, ამ მხრივ არც τ ირაციონალური რიცხვია გამონაკლისი. ამ რიცხვის რაციონალურ მიახლოებათა მოსაძებნად, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ძალზე მოსახერხებელია (დ5) გოლობის გამოყენება:

$$\tau_1 = \frac{1}{1}, \tau_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}, \tau_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}, \dots$$

$$\tau_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (დ6)$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$$

უშუალო გამოთვლების საშუალებით შეიძლება მივიღოთ:

$$\tau_1 = 1, \tau_2 = \frac{1}{2}, \tau_3 = \frac{2}{3}, \tau_4 = \frac{3}{5} \dots$$

წილადთა ეს მიმდევრობა ძალიან მარტივი კანონით არის შედგენილი. კერძოდ, მიმდევრობის ყოველი წევრი, მეორედან დაწყებული, წარმოადგენს წინა წილადის მნიშვნელის შეფარდებას მრიცხველისა და მნიშვნელის ჯამთან. ღვაძლიანთ, რომ ეს დებულება სამართლიანია n -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. მართლაც, τ_n -ის ზოგადი გამოსახულებიდან (დ.6) მივიღებთ, რომ სამართლიანია შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულება

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{1 + \tau_n}$$

ვთქვათ, $\tau_n = \frac{m}{k}$, მაშინ $\tau_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{m}{k}} = \frac{k}{k + m}$. მიღებული გოლობა ამ

გვიჩვენებს ჩვენ მიერ მოყვანილი დებულების სამართლიანობას.

τ -ს რაციონალური მიახლოებების აგების ეს მარტივი კანონი იძლევა საშუალებას სულ ადვილად, თითქმის მექანიკურად დავწეროთ τ -ს რაციონალური მიახლოებანი:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \dots$$

რიცხვთა თეორიის კურსში მგვიცდება ჯაჭვწილადის რაციონალურ მიახლოებათა შემდეგი თვისება, კერძოდ, კენგნომრიანი რაციონალური მიახლოებანი კლებად მიმდევრობას ქმნიან და ზემოდან მიისწრაფვიან მათი წარმომქმნელი, ჯაჭვწილადით გამოსახული რიცხვისაკენ, ლუწნომრიანი რაციონალური მიახლოებანი კი ქმნიან ზრდად მიმდევრობას და ქვემოდან მიისწრაფვიან იმავე რიცხვისაკენ. კერძოდ, τ რიცხვის შემთხვევაში გვექნება:

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{8}{13} < \frac{21}{34} < \dots < \tau < \dots < \frac{13}{21} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3} < 1.$$

1.4 ოქროს კვეთა, ფიბონაჩის რიცხვები და მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებები. განვიხილოთ რიცხვთა (U_n) მიმდევრობა, რომელიც მოცემულია რეკურენტულად: მიმდევრობის პირველი და მეორე წევრი გოლია 1-ის, ხოლო ყოველი შემდგომი წევრი უდრის წინა ორი წევრის ჯამს. ამრიგად,

$$U_1 = 1, U_2 = 1, \dots, U_{n+2} = U_{n+1} + U_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (დ.7)$$

ეს მიმდევრობა ფიბონაჩის მიმდევრობის სახელითაა ცნობილი, რადგან იგი, ერთ ამოცანასთან დაკავშირებით, შემოიღო XII-XIII საუკუნეების გამოჩენილმა მათემატიკოსმა ლეონარდო პიზელმა, რომლის ფსევდონიმსაც წარმოადგენდა ფიბონაჩი (ფიბონაჩი - ბონაჩის ვაჟიშვილი). ამოვწეროთ ამ მიმდევრობის რამდენიმე საწყისი წევრი:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.$$

თუ გავიხსენებთ τ რიცხვის რაციონალურ მიახლოებებს, შევამჩნევთ, რომ ფიბონაჩის მიმდევრობის ნებისმიერი წევრის მომდევნო წევრთან შეფარდება

არის τ -ს რაციონალური მიახლოება, ე. ი. ოქროს კვეთის შეფარდების მიახლოებითი მნიშვნელობა.

თუ ფიბონაჩის მიმდევრობის ერთმანეთის მომდევნო სამ წევრს ავიღებთ: U_n, U_{n+1}, U_{n+2} , მაშინ

$$\frac{U_n}{U_{n+1}} \text{ და } \frac{U_{n+1}}{U_{n+2}}$$

წილადები წარმოადგენენ τ -ს ორ რაციონალურ მიახლოებას. ერთი მიახლოება იქნება მეგობით, მეორე – ნაკლებობით.

თუ დავუბრუნდებით (დ.7) რეკურენტულ დამოკიდებულებებს, დავინახავთ, რომ იგი წარმოადგენს კოშის ამოცანას მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი სხვაობიანი განტოლებისათვის [39]:

$$U_{n+2} - U_{n+1} - U_n = 0, U_1 = 1, U_2 = 1. \quad (\text{დ.8})$$

ამ სხვაობიანი განტოლების კერძო ამონახსნები ვეძებთ შემდეგი სახით: $U_n = q^n$ ($q \neq 0$). თუ ამ გამოსახულებას შევიგანთ (დ.8) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$q^{n+2} - q^{n+1} - q^n = 0$$

ან

$$q^2 - q - 1 = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ამრიგად, (დ.8) სხვაობიანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება:

$$U_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (\text{დ.9})$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. განვსაზღვროთ ეს მუდმივები ისე, რომ (დ.9) ფუნქციამ დააკმაყოფილოს საწყისი პირობები $U_1 = 1, U_2 = 1$.

როცა $n = 1$, გვექნება:

$$C_1 q_1 + C_2 q_2 = 1,$$

ხოლო თუ $n = 2$, მივიღებთ:

$$C_1 q_1^2 + C_2 q_2^2 = 1.$$

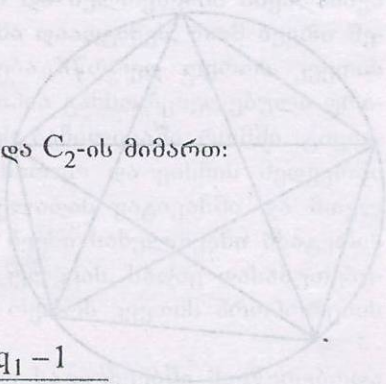
ამრიგად, მივიღეთ განტოლებათა სისტემა C_1 და C_2 -ის მიმართ:

$$\begin{cases} C_1 q_1 + C_2 q_2 = 1, \\ C_1 q_1^2 + C_2 q_2^2 = 1. \end{cases}$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამონახსნია

$$C_1 = \frac{1 - q_2}{q_1(q_1 - q_2)}, \quad C_2 = \frac{q_1 - 1}{q_2(q_1 - q_2)}.$$

თუ C_1 და C_2 -ის ამ მნიშვნელობებს შევიგანთ (დ.9) გლობაში, მივიღებთ (დ.8) ამოცანის ამონახსნს:



$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

მარტივი მსჯელობით შეიძლება ვახვეწოთ, რომ რაღვან $U_n \in \mathbb{N}$, ამიგომ ადგილი ექნება გოლობებს

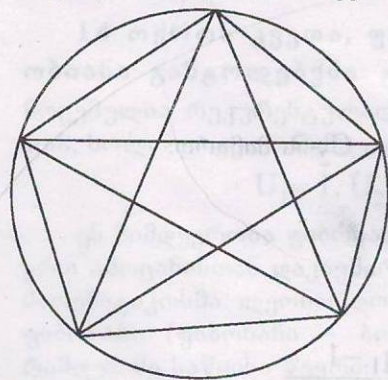
$$U_n = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \text{ თუ } n \text{ ლუწია,}$$

$$U_n = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] + 1, \text{ თუ } n \text{ კენგია,}$$

სადაც $\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ აღნიშნავს $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$ რიცხვის მთელ ნაწილს.

ამრიგად, ფიბონახის რიცხვების საშუალებით შეიძლება მივიღოთ τ რიცხვის რაციონალური მიახლოებანი. შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}$ წარმოადგენენ τ -ს საკმაოდ კარგ მიახლოებებს და პრაქტიკული მიზნებისათვის, როდესაც ვახდენთ მონაკვეთის დაყოფას ოქროს კვეთის პროპორციით, ვისარგებლებლოთ ამ რიცხვებით.

15 მცირე ისტორიული მიმოხილვა. პირველი წერილობითი ლიგურატურული წყარო, რომელმაც ჩვენამდე მოაღწია და რომელშიც მონაკვეთის ოქროს კვეთის პროპორციით გაყოფა გვხვდება, ევკლიდეს ცნობილი „საწყისებია“ (III საუკუნე ჩვენს წელთაღრიცხვამდე). საწყისების უკვე მეორე წიგნში, რომლის შინაარსსაც გეომეტრიული აღგებრა შეადგენს (სულ ნაშრომი 13 წიგნისაგან შედგება), ევკლიდე იძლევა ინფორმაციას მონაკვეთის ოქროს კვეთის პროპორციით დაყოფის შესახებ, რასაც იგი შემდგომში იყენებს წესიერი ხუთ და ათკუთხედების ასაგებად. ოქროს კვეთა გამოყენებულია სტერეომეტრიაშიც – წესიერი მრავალწახნაგების ასაგებად.



ნახ. დ.3

შეგნიშნოთ, რომ სახაზავისა და ფარგლის საშუალებით გეომეტრიული ფიგურების აგების ამოცანებს ძალზე დიდი ყურადღება ექცეოდა ძველი საბერძნეთის მეცნიერების მიერ და ასეთი აგების ხელოვნებამ უკვე მაშინ მიაღწია დიდ სიმაღლეებს. ასეთი ამოცანების ამოხსნისას საკმაოდ დიდ როლს სწორედ მონაკვეთების ოქროს კვეთის პროპორციით დაყოფა თამაშობდა. ერთ-ერთ ასეთ ფიგურათაგანს წარმოადგენს პენტოგრამა – წესიერი ხუთკუთხედის დიაგონალებით შედგენილი ხუთქიმიანი ვარსკვლავი (ნახ. დ.3). ამ ფიგურის განსაკუთრებულობა მდგომარეობს იმაში, რომ ნებისმიერი დიაგონალი მემობელ წვეროდან გამოსულ ორივე დიაგონალს ოქროს კვეთით ყოფს.

პენტოგრაჰმა ცნობილი იყო ძველი ბაბილონელებისათვისაც. ამრიგად, ოქროს კვეთას კარგად იცნობდნენ ევკლიდემდეც. კერძოდ, იგი ცნობილი იყო პითაგორასა და მისი მოწაფებისათვის (VI საუკუნე ჩვენს წელთაღრიცხვამდე). პითაგორას ფილოსოფიურ სკოლაში ფილოსოფიისა და მათემატიკის გარდა, ჰარმონიასაც სწავლობდნენ. ჰარმონიის თეორიის შესწავლისას პითაგორელები იმ დასკვნამდე მივიდნენ, რომ შესაძლებელია სამყაროს ყველა კანონზომიერება რიცხვებით გამოესახათ (მათემატიკური მოდელირების ერთ-ერთი პირველი, თუმცა უშედეგო ცდა), რამდენადაც მათი აზრით, ღმერთმა ყველაფრის საფუძვლად რიცხვი აიღო. სწორედ ამიტომ იყო, რომ პითაგორა და მისი მიმდევრები რიცხვებში, მონაკვეთების შეფარდებებში ეძიებდნენ მაგიურსა და ზებუნებრივს. კერძოდ, დიდი პატივისცემით სარგებლობდა ოქროს კვეთა, რომელიც პითაგორელების ღრმა რწმენით ესთეტიკურად ყველაზე სრულყოფილი პროპორცია იყო და, ამდენად, თვალისათვის მეტად სასიამოვნო. ამიტომაც გასაკვირი არ არის, რომ მათ საცნობ ნიშანს სწორედ პენტოგრაჰმა წარმოადგენდა. ოქროს კვეთას ვერ აცდა თავის გამოკვლევებში პლატონიც. პლატონის „ტიმეოსის“ მიხედვით წმინდა პროპორცია (ასე უწოდებენ ოქროს კვეთას) აძლევს ფორმალურ არსს თვით ზეცას.

განსაკუთრებული მნიშვნელობა მოიპოვა ოქროს კვეთის პროპორციამ იგალიური რენესანსის ეპოქაში, როდესაც ის მიჩნეული იყო „სრულყოფილებისა და ჰარმონიის უმაღლეს გამოვლინებად ბუნებასა და ხელოვნებაში“. მას ხშირად იყენებდნენ არა მარტო გეომეტრიაში, არამედ ხელოვნებაში და განსაკუთრებით არქიტექტურაში. ამიტომ სრულებით არ არის შემთხვევითი, რომ სწორედ ამ პერიოდში (XV საუკუნის დასასრულს) დაიწერა სპეციალური წიგნი ოქროს კვეთის შესახებ. მისმა ავტორმა, იმ ეპოქის ერთ-ერთმა შესანიშნავმა მათემატიკოსმა ლუკა პაჩოლიმ, წიგნს სათაურად დაარქვა „ღვთაებრივი პროპორცია“, რითაც აშკარად გამოხატა ავტორის დამოკიდებულება ოქროს კვეთის მიმართ. ამ წიგნში მოყვანილია ოქროს კვეთის ცამეტი თვისება, რომელთაგანაც თითოეულს ისეთი ეპითეტებით ამკობს, როგორიცაა: „განსაკუთრებული“, „უბრწყინვალესი“, „უშესანიშნავესი“, „ენით უთქმელი“, „ზებუნებრივი“ და ა. შ. საინტერესოა, რომ წიგნის დაწერის ერთ-ერთი სულისჩამდგმელი და მისი მხატვრულად გამოთქმებული იყო გენიალური ლეონარდო და ვინჩი. სხვათა შორის, არსებობს მოსაზრება, რომ თვით ტერმინი „ოქროს კვეთა“ შემოღებული იყო ლეონარდოს მიერ.

ოქროს კვეთას იყენებენ ხუროთმოძღვრებასა და ხელოვნების სხვადასხვა დარგში. აზომვის შედეგად ხელოვნებათმცოდნეებმა დაადგინეს, რომ ბევრი შედეგრი არქიტექტურასა და მხატვრობაში ემყარება სწორედ ოქროს კვეთის პროპორციას. ოქროს კვეთის პროპორციის პრინციპია განხორციელებული ფრიგის აკლამბესა და ათენის პართენონში, პეტრეს ბაზილიკაში რომში, გიციანის „ღვთისმშობლის მოგზაურობა ზეცაში“, ლეონარდო და ვინჩის შედეგში „მონა ლიზა“, რაფაელის მადონაში სიქსტის კაპელადან ვატიკანში და მთელ რიგ სხვა შედეგში. აქვე გვერდს ვერ ავუვლით ჩვენი სახელოვანი მხატვრის სერგო ქობულაძის ჯერაც გამოუქვეყნებელ გამოკვლევას, სადაც დასაბუთებულია, რომ მცხეთის ჯვრის დიდებული მონასტერი ოქროს კვეთის პროპორციის მიხედვით არის აგებული.

პენტოგრაჰმას ძველ საბერძნეთში და საშუალო საუკუნეებში მიეწერებოდა მისტიკური და მაგიური ძალა, როგორც ავი სულებისაგან დასაცავ თილისმას. ეს წარმოდგენები ასახულია გოეთეს ფაუსტში. ყოველივე ამის გამო, არც კომპიტიორები და პოეტები დარჩენილან გულგრილნი ოქროს კვეთის მიმართ.

ცნობილია, მაგალითად, რომ გამოჩენილმა უნგრელმა კომპოზიტორმა ბელა ბარტოკმა ბევრ თავის მუსიკალურ ნაწარმოებში სწორედ ოქროს კვეთის პროპორცია განახორციელა. რაც შეეხება პოეზიას, როგორც აკადემიკოსი გიორგი წერეთელი აღნიშნავს, „პოეზიაში რუსთაველი პირველია მსოფლიოში და შეიძლება ერთადერთი, რომელმაც ოქროს კვეთაზე ააგო ესოდენ დიდი მოცულობის პოეტური ნაწარმოები. მისი პოემის 1587 სტროფიდან 863 ოქროს კვეთაზეა აგებული“. შემდგომ პუნქტში სწორედ ვეფხისგყაოსნის რითმათა სიმჟონის შესახებ ვისაუბრებთ.

1.6 ოქროს კვეთა „ვეფხისგყაოსანში“. სანამ უშუალოდ ამ პრობლემის განხილვაზე გადავიდოდეთ, გავაკეთოთ ზოგიერთი წინასწარი შენაშენა. ეს შენიშვნა ეხება ლექსის მთავარი სქემებიდან ერთ-ერთს, კერძოდ, შაირს.

შაირი თექვსმეტმარცვლიანი ლექსია. მის სახესხვაობას წარმოადგენს რვა-მარცვლიანი და ოთხმარცვლიანი ტაქტები, რომლებიც შაირის ზომით დაწერილი სრული სალექსო სტრიქონის ორად და ოთხად დაყოფის შედეგად მიიღება.

შაირი ქართული ლექსის ყველაზე უფრო ძველი და ყველაზე უფრო გავრცელებული ფორმაა. შაირით არის დაწერილი შოთა რუსთაველის გენიალური ქმნილება „ვეფხისგყაოსანი“. ქართულ ლექსში ორი სახის შაირი გვხვდება: მაღალი და დაბალი. მათი სხვადასხვაობა გამოწვეულია შემდეგი ვარემოებით: შაირით დაწერილი ტაქტები ორგვარი აღნაგობისაა – ერთი სახის შაირის ტაქტები იკითხება ჩქარი ტემპით, რადგან იგი ოთხი ოთხმარცვლიანი ტერფისაგან შედგება (მარცვალთა ჯგუფს, რომელიც შედგება ერთი მახვილი და რამდენიმე უმახვილო მარცვლისაგან, ტერფი ეწოდება. ტერფი უმარტივესი რიგმული ერთეულია):

შაე ცხენი | სადავითა, || ჰყვა ლომსა და | ვითა გმირსა.
(4) (4) (4) (4)

მეორე სახის ტაქტი ასეთი ტერფებისაგან შედგება:

იყო | არაბეთს | როსტევან, || მეფე | ღმრთისაგან | სვიანი.
(2) (3) (3) (2) (3) (3)

ეს ტაქტი ექვსტერფიანია. ამის გამო პირველისაგან განსხვავებით იგი ნელი ტემპით იკითხება.

რიგმულად ჩქარი ტემპის მქონე ტერფებისაგან შედგენილ შაირს მაღალი შაირი ეწოდება, ხოლო რიგმულად ნელი ტემპის მქონე ტერფებისაგან შედგენილ შაირს – დაბალი შაირი.

მაღალი და დაბალი შაირის შეჯამებულად გამოყენება პოეზიაში ინტონაციის მრავალფეროვნებას ქმნის.

„ვეფხისგყაოსანში“ სულ 1587 სტროფია. თითოეულ სტროფში – ოთხი სტრიქონი, ანუ კარელი. კარელი იყოფა ორ ნახევარკარელად – თითოეულში 8 მარცვლია. საგულისხმოა, რომ ნახევარკარელების საზღვარი სიგყვათგასაყარია – პოემაში არ მოიძებნება არც ერთი შემთხვევა, როცა სიგყვის ერთი ნაწილი ერთ ნახევარკარელშია მოთავსებული, ნაწილი კი – მეორეში. ნახევარკარელი კი, თავის მხრივ, ორ სეგმენტად იყოფა, თანაც სეგმენტების დანაწილება ორგვარია:

A. სიმეტრიული, როცა ნახევარკარელში ორი თანაბარი ზომის სეგმენტია, ოთხ-ოთხი მარცვლით თითოეულში.

B. ასიმეტრიული, როცა ნახევარკარელი ორი სხვადასხვა ზომის, კენტმარცვლიანი სეგმენტისაგან შედგება.

საგულისხმოა, რომ A და B ტიპის სეგმენტების მონაცვლეობა ნახევარკარედის, კარედის ან მთელი სგროფის ფარგლებში არსად არ გვხვდება. ისინი შეიძლება მონაცვლეობდნენ მხოლოდ სგროფების მიხედვით და ამის შესაბამისად ქმნიან მაღალ ან დაბალ შაირს (A დანაწილება – მაღალ შაირს; B დანაწილება – დაბალ შაირს).

მაღალი შაირის შემთხვევაში, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ნახევარკარედში ორი თანაბარი ზომის სეგმენტი და თითოეულში ოთხი მარცვალი. ეს სიმბოლურად შეიძლება ასე ჩავწეროთ (4,4 || 4,4). მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი:

გახსოვს, ოღეს | შენ და როსტანს || მინდორს მხეცი | დაგეხსოვა.
მგერი მგერსა | ვერას ავნებს || რომე კაცი | თავსა ივნებს.
ვარდსა ჰკითხვს | „ეგზომ გურფა || რამან შეგქმნა | ტანად, პირად?“
მე სიკვდილსა | მოველოდი || შენ სიცოცხლე | გამიწამე.
გვაჯები, | საყვარელსა || შემახვეწე, შემაბრალე.

რაც შეეხება დაბალ შაირს, ამ შემთხვევაში სეგმენტთა სგროუქტურა შედარებით რთულია და ის ოქროს კვეთასთან არის დაკავშირებული. საქმე ის არის, რომ ამ შემთხვევაში ნახევარკარედის შემადგენელი ორი სეგმენტიდან ერთი

სამმარცვლიანია, მეორე კი ხუთმარცვლიანი. თუ გავიხსენებთ, რომ $\frac{3}{5}$ წარმოადგენს ოქროს კვეთის შეფარდების რაციონალურ მიახლოებას, შეიძლება დავასკვნათ, რომ დაბალი შაირის შემთხვევაში ნახევარკარედის ორ სეგმენტად დაყოფა წარმოადგენს ოქროს კვეთას.

საინტერესოა ისიც, თუ როგორი მიმდევრობით გვხვდება სამმარცვლიანი და ხუთმარცვლიანი სეგმენტები მთელი კარედის მანძილზე. აქ მხოლოდ ორი შემთხვევა გვაქვს – ეკვივალენტური და ინვერსიული სიმეტრიის.

ეკვივალენტური სიმეტრიის დროს პირველ და მეორე ნახევარკარედების სეგმენტებად დაყოფა ერთნაირია (5,3 || 5,3) ან (3,5 || 3,5). მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი:

მოვინადირეთ | მინდორი || ძირი მთისა და | გორისა.
გახარებოდა | ხვარაზმშას || სიხარულითა | დიდითა.
თუ მკვდარი მნახოს | დამმარხოს || თქვას ვაგლახი და | უები.
მიღწვიან, | მომიგონებენ || დამლოცვენ, მოვეგონები.
კვლა ნუ მიქმ | ერთგულობასა || გამტეხლად | და-ცა-მღეწეალად.

ინვერსიული სიმეტრიის შემთხვევაში მეორე ნახევარკარედის სეგმენტები პირველი ნახევარკარედის სეგმენტების სარკული ანარეკლია, ე. ი. ამ შემთხვევაში გვექნება (5,3 || 3,5) ან (3,5 || 5,3). მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი:

პასუხად გაგეც: | ქამია || მართალ ხარ | გაკვირვებასა.
მოვიდა კაცი | მეფისა || ცისკრობს, არ | დანადამია.
მომობიერდა, | მომიტკბა || გამწყრალი | გამქისებული.
თუ არ შმაგი ხარ, | დამეხსენ; || შმაგი ხარ, | მოდი ცნობასა!
მედა ჯდა | შავსა ტაიჭსა, || აწ ესე მე მითქმს | რომელი.
დამოსნა | გურფა – გურფითა || ერთმანეთისა | მჯობითა.

ბუნებრივია დაისვა კითხვა და სწორედ ამ კითხვას სვამს თავის მონოგრაფიაში აკადემიკოსი გიორგი წერეთელი: პოეზმა გენიალური ინტუიციის საფუძველზე გამოიყენა ოქროს კვეთის მიმართება თავის პოემაში, თუ ავტორი იცნობდა ამ მიმართებას და შეგნებულად იყენებდა მას?

გიორგი წერეთელი აღნიშნავს, რომ ძნელია ზუსტი პასუხი გავცეთ ამ კითხვას, მაგრამ არსებობს საკმაო საფუძველი, რომ ერთგვარი ვარაუდი გამოვთქვათ.

პოეტი მიზნად ისახავდა შეექმნა დიდი მოცულობის მხაგვრული ნაწარმოები ლექსად. იგი მას რომ ერთი ზომითა და რიგით დაეწერა, ეს იქნებოდა ერთფეროვანი და მონოტონური. პოეტის წინაშე ბუნებრივად დადგა ამოცანა, შეერჩია ისეთი ზომა, რომლის ფარგლებში შესაძლებელი იქნებოდა რიგმის კანონზომიერი მონაცვლეობა. ამიგომ რუსთაველმა თავისი ლექსის ზომად აიღო სწორედ ის რიცხვი, რომელიც მას საშუალებას აძლევდა შეექმნა ორი სრულყოფილი რიგმი. საფიქრებელია, რომ ოქროს კვეთის პროპორცია შეგნებულად არის არჩეული და კანონზომიერად ენაცვლება ეკვივალენტური სიმეტრიის საფუძველზე შექმნილ მაღალ შაირს.

ჩვენი სახელმძღვანელოს ფარგლებში ამით დაეკავოფილდეთ, თუმცა უნდა ვივარაუდოთ, რომ დაინტერესებული მკითხველი აუცილებლად გაეცნობა გიორგი წერეთლის მონოგრაფიას და უთუოდ გაიაზრებს ავტორის აზრს შოთა რუსთაველის შესახებ: „რუსთაველმა პოეზიაში მოგვცა ჩვენ სრულყოფილი სიმეტრია, მსგავსად იმისა, როგორც გიცაინმა, რაფაელმა და ლეონარდო და ვინჩიმ მხაგვრობაში და საერთოდ ხელოვნებაში, და ახლა, როდესაც ეს სრულყოფილება გამოვლინებულია, ქართველი პოეტის ადგილი მსოფლიო პოეზიის ისტორიაში სრულებით განსაკუთრებულად გვეჩვენება“.

ლიტერატურა

1. ა. ბენდუქიძე. მათემატიკა, სერიოზული და სახალისო. თბ., „ნაკადული“, 1988
2. ჰ. მელაძე, ნ. სხირგლაძე, ი. ბლიაძე, რ. ბოჭორიშვილი, ჰ. წერეთელი. მოდელი+ალგორითმი+პროგრამა=ინფორმატიკა. თბ., „თსუ“, 2000
3. ვ. მანია. წრფივი პროგრამირება. თბ., „განათლება“, 1967
4. ა. სამარსკი. რიცხვითი მეთოდების შესავალი, ნაწილი I. თბ., თსუ, 1992
5. თ. შერვაშიძე. ალბათობის თეორია. თბ., „თსუ“, 1980
6. დ. ნაგროშვილი, ლ. გიორგაშვილი, მ. უსანეთაშვილი, ვ. ჯაშიაშვილი, მათემატიკა ეკონომისტიკისთვის, თბ., „გლობალი პრინცი“, 1999
7. მეგრი და რითმა ვეფხისტყაოსანში გიორგი წერეთლის რედაქციითა და გამოკვლევით. თბ., „მეცნიერება“, 1973
8. В. В. Амелькин. Дифференциальные уравнения в приложениях, – Москва: “Наука”. 1987. - 160 с.
9. В. И. Арнольд. Теория катастроф. Москва: “Наука”, 1990
10. Ю. М. Арский, В. И Данилов-Данилян и др. Экономические проблемы. Что происходит, кто виноват и что делать // Уч. пособие под ред. В. И. Данилов-Даниляна. – М.: изд-во МНЭПУ, 1997
11. Г. П. Башарин. Начала финансовой математики. Москва: „ИНФРА-М“, 1998. - 160 с.
12. Н. П. Бусленко. Моделирование сложных систем, – М., “Наука”, 1978, 400 стр.
13. Н. С. Бахвалов. Численные методы. – М.: “Наука”, 1975
14. В. Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование. Пер. с фр. – М., “Наука”, 1976
15. П. П. Волосеевич, Е. И. Леванов. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. – М., изд-во МФТИ, 1997
16. П. П. Волосеевич, Н. А. Дарьин, Е. И. Леванов, Н. М. Схиртладзе. Задача о поршне в газе с источниками и стоками (автомодельные решения). – Тб., изд-во ТГУ, 1986
17. А. Б. Горстко. Познакомьтесь с математическим моделированием. Изд-во “Знание”. 1991. - 160 с.
18. Х. Гулд, Ю. Тобочник. Компьютерное моделирование в физике (часть первая). – М., “Мир”. 1990
H. Could, Y. Tjbjchnik. An Introduction to Computer. Simubation Methods Applications to Physical Systems, Port 1. 1988
19. С. Гудмон, С. Хидетниеми. Введение в разработку и анализ алгоритмов. – М., “Мир”. 1981, 366 стр.
S. E. Coodman, S. T. Hedetniemi. Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 1977, McGram- Hill Book Company.
20. Л. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис. Элементы прикладной математики. – Москва: “Наука”. 1972
21. К. Жаблон, Ж. К. Симон. Применение ЭВМ для численного моделирования в физике. – М., “Наука”, 1983
G. Jablon, J. C. Simon. Applications des Modeles Numeriques en Physique, Birklauser Verlag, Basel. 1978
22. С. П. Капица, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий. Синергетика и прогнозы будущего. – М., “Наука”, 1997

23. *В. В. Капитаненко.* Финансовая математика и её приложения (Учебно-практическое пособие для вузов), М., "Приор", 1998. - 144 с.
24. *Д. Кокс, А. Э. Снел.* Прикладная статистика. Принципы и примеры. - М., "Мир", 1984
D. R. Cox. E. Y. Snell. Applied Statistics. Principles and Examples. London, New-York, 1981. Chapman and Hall.
25. *А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров.* Введение в теорию вероятностей, - М., "Наука", 1982
26. *В. П. Коробейников.* Математическое моделирование катастрофических явлений природы. - М., "Знание", 1986
27. *П. С. Краснощекоев, А. А. Петров.* Принципы построения моделей, - М., Изд-во МГУ, 1983. - 264 с.
28. *Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман.* Высшая математика для экономистов, М., "Банки и биржи", 1998, 472 стр.
29. *О. В. Мантуров.* Курс высшей математики, - М., "Высшая школа", 1991
30. *А. П. Михайлов.* Математическое моделирование распределения власти в иерархических структурах // Математическое моделирование, 1994, т.6, №6, с. 108-138
31. *Н. Н. Моисеев.* Математика ставит эксперимент. - Москва: "Наука", 1979. - 224 с.
32. *Н. Н., Моисеев.* Как далеко до завтрашнего дня... Свободные размышления 1917-1993. - М., Аспект Пресс, 1997
33. *Н. Н., Моисеев.* Математические задачи системного анализа. - М., "Наука", 1981
34. *Ю. И. Неймарк.* Простые математические модели // Природа, 1991, №11, стр. 9-18
35. *Ю. Н. Павловский.* Имитационные системы и модели, научно-популярная серия "Математика. Кибернетика". - М., "Знание", 1990
36. *А. А. Петров, И. Г. Поспелов, А. А. Шананин.* Опыт математического моделирования экономики. - М., Энергоиздат, 1996
37. *Ю. П. Попов, А. А. Самарский.* Вычислительный эксперимент. - М., "Знание", 1983
38. *А. А. Самарский.* Что такое вычислительный эксперимент? // "Наука и жизнь", 1979, №2
39. *А. А. Самарский.* Введение в численные методы. 2-е изд. - М., "Наука", 1987
40. *А. А. Самарский, А. В. Гулин.* Численные методы. - М., "Наука", 1989
41. *А. А. Самарский, А. П. Михайлов.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. - Москва: "Наука", 1997. - 320 с.
42. *А. А. Самарский.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестник АН СССР, 1979, №5, с. 38-49
43. *Дж. Смит.* Модели в экологии. - М., "Мир". 1976
Y. M. Smith. Models in Ecology, Gambridge at the University. Press, 1974
44. Современный компьютер. Сборник научно-популярных статей. - М., "Мир", 1986

45. Г. Стренг. Линейная алгебра и применения. – М., “Мир”, 1980
46. А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. Вводные лекции по прикладной математике. – Москва: “Наука”, 1984, 192 с.
47. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. – Москва: Изд-во МГУ, 1999
48. Т. Дж. Уотшем, К. Парамоу. Количественные методы в финансах. – М., “Финансы”, 1999, 527 стр.
49. Р. Фейнман. Характер физических законов. – М., “Наука”, 1987
R. Feynman. The Character of Physical Law, London, 1965
50. Г. Хакен. Синергестика. Пер. с англ. – М., “Мир”, 1995
51. Р. Шеннон. Имитационное моделирование систем-искусство и наука. – Москва: “Мир”, 1978. – 418 с.
52. Т. Шуп. Решение инженерных задач на ЭВМ. – М., “Мир”, 1982
T. E. Shoup. A Practical Guide to Computers Methods for Engineers, 1979
53. N. Anderson, F. Breedon, M. Deacon, A. Derry and G. Murphy. Estimating and Interpreting the Yield Curve. John Wiley, Chichester, 1996
54. F. A. Berder. An Introduction to Mathematical Modelling. N. Y. Wiley, 1978
55. R. L. Burden, Y. D. Faires. Analisis Numerico, Grupo Editorial Iberoamerica, S. A. de C.V. p. 731, Mexico, 1985
56. G. L. Dym, F. s. Ivey. Principles of Mathematical Modelling. N. Y. Academic Press, 1980
57. A. P. French. Newtonian Mechanics. W. W. Norton. Company, 1971
58. M. Gross, A. O. Moscardini. Learning the Art of Mathematical Modelling. N. Y. Wiley, 1985
59. N. Keyfitz. Applied Mathematical Demography. Wiley, N. Y., 1977
60. R. S. Lehman. Computer, Simulation and Modelling. An Introduction. N. Y. Wiley, 1977
61. T. R. Malthus. An essay on the principle of population: or a view of its past and present effects on human happiness, with an inquiry into our prospects respecting the future removal or mitigation of the evils which it occasions / Selected and introduced by Donald Winch using the text of the 1803 ed. Cambridge Univer. Press, 1992
62. D. Meadows. et al. Limits to growth. Universe Book, N. Y., 1972
63. D. Meadows. et al. Beyond the limits. Toronto, 1992
64. Nancy Roberts, David Andersen, Ralph Deal, et al. Introduction to Computer Simulations: The System Dynamics Approach, Addison-wesley, 1983
65. Y. H. Pollard. Mathematical models for the growth of human population. Cambridge Univ. Pres, 1973
66. M. R. Spiegel. Applied differential equations - Englewood Cliffs, N. Y.: Prentine-Hall, 1981, 654 p.
67. I. Terry. Watsham and Keith Parranore. Quantitative Methods of Finance, International Tomson Business Press, 1996
68. T. J. Watsham. Options and Futures in International Portfolio Management. Charpman Hall, London, 1992
69. J. B. Williams. The Tleory of Investment Value. Harvard University Press, Cambridge, Ma, 1938
70. R. Willian, Bennet. Scientific and Enginoering Problem Solving with the Computer, Prentice-Hall, 1976

გამომცემლობის რექტორი ნ. კლიზბარაშვილი

ტექნოლოგიური ფ. ბუდალაშვილი

კორექტორი ნ. ილუროძე

ხელმოწერილია დასაბუჭდად 21.12.00

საბუჭები ქალაქი 70X108 1/16

პირ. ნაბუჭები თბილისი 28,05 სააღრ.-საგამომც. თბილისი 17,73

ტირაჟი 300 შეკვეთის №96

ფასი სხვებზე

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
380028, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 14

დაიბეჭდა თსუ სარედაქციო-საგეგმობიანი
კომპიუტერულ სამსახურში, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 1

