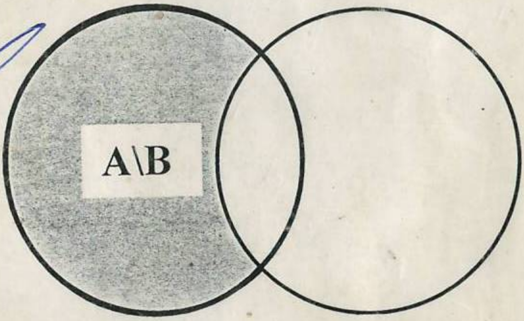
ავთანდილ დოგრაშვილი

მათემატიკა



ბიბლიოთეკას ავტორისგან

14.00

ავთანდილ დოგრაშვილი

მათემატიკა

საქართველოს რესპუბლიკის განათლების სამინისტრომ
დაამტკიცა სახელმძღვანელოდ დაწყებითი განათლების,
პედაგოგიკისა და მეთოდიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის

რედაქტორი: პროფ. გურამ ჩაჩანიძე

გამომცემლობა „განათლება“
თბილისი - 1996

22.1
51 (0758)
დ 666

სახელმძღვანელო განკუთვნილია პედაგოგიური უნივერსიტეტებისა და ინსტიტუტების დაწყებითი განათლების, პედაგოგიკისა და მეთოდიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. წიგნი დაწერილია ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით; იგი გამოადგება აგრეთვე დაწყებითი კლასების მასწავლებლებს.

რეცენზენტები: დოცენტი თ. როინიშვილი
დოცენტი თ. ბეიტრიშვილი

Д $\dfrac{4306020500}{M\text{-}602(08)\text{-}96}$ -96

ISBN 5-505-01978-1

ავტორისაგან

დაწყებითი კლასების მასწავლებელთა მომზადების მიზნით რამდენიმე ათეული წლის წინათ საქართველოს უმაღლეს პედაგოგიურ სასწავლებლებში გაიხსნა დაწყებითი განათლების, პედაგოგიკისა და მეთოდიკის ფაკულტეტები, სადაც ისწავლება სპეციალური პროგრამით შედგენილი საგანი „მათემატიკა“.

წინამდებარე ნაშრომი ამჟამად მოქმედი პროგრამით შედგენილი სახელმძღვანელოა. წიგნში შეტანილია ის არსებითი მნიშვნელობის ცვლილებები, რომლებიც ემყარება ავტორის მიერ თბილისის სულხან-საბა ორბელიანის სახელობის სახელმწიფო პედაგოგიურ უნივერსიტეტში ხანგრძლივი დროის განმავლობაში წაკითხული ლექციების თეორიულ და პრაქტიკულ გამოცდილებას. გათვალისწინებულია აგრეთვე პედაგოგიკისა და მეთოდიკის თანამედროვე მეცნიერული მიღწევები.

წიგნი გამოადგება რესპუბლიკაში არსებული უმაღლესი პედაგოგიური სასწავლებლების სტუდენტებს, პედაგოგიური კოლეჯებისა და სასულიერო სასწავლებლების დაწყებითი განათლების განყოფილების მსმენელებს.

წინასწარ მადლობა გვინდა მოვახსენოთ ყველას, ვინც მოგვაწოდებს შენიშვნებს და საქმიან წინადადებებს შემდეგ მისამართზე:

თბილისი - 380079, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 32,

I თავი

სიმრავლეთა თეორიისა და კომბინატორიკის ელემენტები

§1. სიმრავლის ცნება. სიმრავლის ელემენტები. ცარიელი სიმრავლე. სიმრავლის მოცემის ხერხები

ბუნებასა და პრაქტიკულ ცხოვრებაში შეიმჩნევა საგნები, რომლებსაც აქვთ საერთო თვისება; მაგალითად, სკოლის მოსწავლეებისათვის საერთო ის არის, რომ ყველა მოსწავლეა.

არითმეტიკაში თვისება „8-ს ყოფს უნაშთოდ“ აქვს 1,2,4,8 რიცხვებს.

შეიძლება ჩამოვთვალოთ საგნები, რომელთაც საერთო თვისება არა აქვთ, მაგალითად, დედამიწა, მონაკვეთი, რიცხვი, რომელიც არც მარტივია და არც შედგენილი. ამ საგნებისათვის საერთო ის არის, რომ ჩამოთვლისას თითოეული ჩვენ მივუთითეთ, ისინი ერთ ობიექტად შეგვიძლია მივიჩნიოთ.

საერთო ნიშნის ან თვისების მქონე საგნები, რომლებიც ერთ ცალკე ობიექტად გავიაზრეთ, სიმრავლის სახელწოდებითაა ცნობილი. სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებელმა, გერმანელმა მათემატიკოსმა კანტორმა, სიმრავლე შემდეგნაირად განმარტა: **სიმრავლე არის ერთმანეთისაგან განსხვავებული იმ განსაზღვრულ ობიექტთა ნებისმიერი ერთობლიობა, რომელიც ჩვენს ინტუიციაში აღიქმება, როგორც ერთიანი მთლიანი.**

სიმრავლე არის მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნება, რომლის გაცნობა ხდება მაგალითებზე. სიმრავლის მაგალითებია: ქალაქ თბილისში მცხოვრებ ადამიანთა სიმრავლე, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, ურთიერთ გადამკვეთ პარალელურ წრფეთა გადაკვეთის წერტილთა სიმრავლე და სხვ. ნებისმიერი ბუნების ობიექტებს, რომლებიც სიმრავლეს adგენენ, სიმრავლის ელემენტებს უწოდებენ. სიმრავლე იყოფა ორ კლასად - სასრულ და უსასრულო სიმრავლეებად. თუ სიმრავლე შეიცავს ელემენტთა სასრულ რიცხვს, მაშინ იგი სასრული სიმრავლეა, ამასთან არაა აუცილებელი, ცნობილია თუ არა ეს რიცხვი. მთავარია, რომ ეს რიცხვი სასრულია. თუ სიმრავლე შეიცავს ელემენტების უსასრულო რაოდენობას, ასეთ სიმრავლეს უსასრულო ეწოდება. სიმრავლეებს აღნიშნავენ ლათინური ანბანის დიდი ასოებით A,B,C,..., ხოლო მათ ელემენტებს იმავე ანბანის პატარა ასოებით $a,b,c,\ldots$ თუ a ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს, მას ასე ჩაწერენ: $a\in A$, რომელიც იკითხება „a ეკუთვნის A სიმრავლეს“. „a არ ეკუთვნის A სიმრავლეს“ აღინიშნება $a\notin A$ ან $a\overline{\in}A$. სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ ელემენტს, ცარიელ სიმრავლეს უწოდებენ და აღნიშნავენ $\varnothing$ სიმბოლოთი.

მაგალითად: $x^2+16=0$ განტოლების ფესვთა სიმრავლე ცარიელია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში. სიმრავლის რომელიმე ელემენტი შეიძლება იყოს ისევ სიმრავლე, მაგალითად, ავიღოთ რომელიმე სკოლის კლასების სიმრავლე. ამ სიმრავლის ელემენტებია კლასები, რომლებიც შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მოსწავლეთა სიმრავლე. სიმრავლე ითვლება მოცემულად, თუ ნებისმიერი ობიექტის მიმართ შეიძლება ითქვას, რომ იგი ეკუთვნის ან არ ეკუთვნის ამ სიმრავლეს. არსებობს სიმრავლის მოცემის ორი ხერხი.

პირველი ხერხი გულისხმობს მისი ყველა ელემენტის ჩამოთვლას; ამ დროს იყენებენ ფიგურულ ფრჩხილებს. თუ A სიმრავლის ელემენტებია a,b,c,d ობიექტები, მაშინ A სიმრავლე ასე ჩაიწერება:

$$A=\{a;b;c;d\}.$$

A სიმრავლე ოთხელემენტიანია, ხოლო თუ განვიხილავთ $B=\{5;6;\{2;3\}\}$ სიმრავლეს, იგი სამელემენტიანია. $X=\{5;5;5\}$ სიმრავლე ითვლება ერთელემენტიან სიმრავლედ, რადგან განსაზღვრის თანახმად სიმრავლეში ერთი და იგივე ელემენტი არ შეიძლება განმეორდეს, ამიტომ მოცემული სიმრავლე ასე ჩაიწერება $X=\{5\}$. სიმრავლის მოცემის ეს ხერხი გამოიყენება მაშინ, როდესაც სიმრავლის ელემენტები სასრულია.

სიმრავლის მოცემის მეორე ხერხის დროს სარგებლობენ სიმრავლეში შემავალი ელემენტების საერთო თვისებით, რომელიც მხოლოდ ამ სიმრავლის ელემენტებს ახასიათებს და არ ახასიათებს სხვა სიმრავლის არცერთ ელემენტს. ამგვარად, სიმრავლე შეიძლება მოცემულ იქნეს რაიმე კანონის საშუალებით, რომლის თანახმადაც შესაძლებელი იქნება სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტის განსაზღვრა. თუ A სიმრავლის ელემენტებს ავღნიშნავთ x-ით, ხოლო მახასიათებელ თვისებას $p(x)$-ით, მაშინ A სიმრავლე ასე ჩაიწერება:

$$A=\{x\,|\,p(x)\}.$$

ეს ასე იკითხება: A არის სიმრავლე ისეთი ობიექტებისა, რომლებსაც აქვთ $p(x)$ თვისება. მაგალითად, 15-ზე ნაკლებ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე

$$M=\{x\,|\,x<15;\ x\in N\}$$

ან

$$M=\{x\,|\,x<15 \text{ და } x\in N\}.$$

ლუწ რიცხვთა სიმრავლე $B=\{x\,|\,x=2n;\ n\in N\}$.

წრფეთა სიმრავლე შეიძლება მოცემულ იქნას $y=kx$ განტოლებით. სიმრავლის მოცემის მეორე ხერხი გამოიყენება როგორც სასრული, ისე უსასრულო რაოდენობის ელემენტების მქონე სიმრავლეებისათვის. ერთი და იგივე სიმრავლე შეიძლება ჩავწეროთ სხვადასხვა ფორმით.

მაგალითად,

$$A=\{1;2;3\};$$

$$A=\{x\,|\,1\le x\le 3;\ x\in N\};$$

$$A=\{x\,|\,(x-1)(x-2)(x-3)=0\}.$$

§2. მიმართებანი სიმრავლეთა შორის: თანაკვეთის მიმართება, ჩართვის მიმართება და ტოლობის მიმართება. უნივერსალური სიმრავლე. სასრული სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რიცხვი

ორი A და B სიმრავლე შეიძლება იყოს ერთმანეთთან გარკვეული სახის მიმართებაში. თუ ელემენტი ერთდროულად მიეკუთვნება როგორც A, ისე B სიმრავლეს, მაშინ მას საერთო ელემენტს უწოდებენ, თუ A და B სიმრავლეებს აქვთ საერთო ელემენტი, მაშინ ამბობენ, რომ ისინი თანაკვეთის მიმართებაში არიან, ანუ გადაკვეთენ ერთმანეთს და წერენ $A \cap B \neq \varnothing$. თუ A და B სიმრავლეები იკვეთებიან და A სიმრავლის ყველა ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლეს, მაშინ ამბობენ, რომ A სიმრავლე არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე და მას ასე ჩაწერენ $A \subset B$. ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ე.ი. $\varnothing \subset A$. ყოველი სიმრავლე თავისთავის ქვესიმრავლეა $A \subseteq A$. თუ B სიმრავლე A სიმრავლის ქვესიმრავლეა, მაშინ ამბობენ, რომ B სიმრავლე ჩართულია A სიმრავლეში $B \subset A$. ცარიელ სიმრავლეს და A სიმრავლეს უწოდებენ A სიმრავლის არასაკუთრივ ქვესიმრავლეებს. ქვესიმრავლეების რიცხვის მოსაძებნად განვიხილოთ სამი მარტივი მაგალითი.

ვთქვათ, გვაქვს სამი სიმრავლე $\{a\}$, $\{a;b\}$ და $\{a;b;c\}$. მოვძებნოთ თითოეულისათვის ქვესიმრავლეთა რიცხვი.

ქვესიმრავლეები იქნება

ა) $\varnothing$; $\{a\}$; $\qquad n=2=2^1$

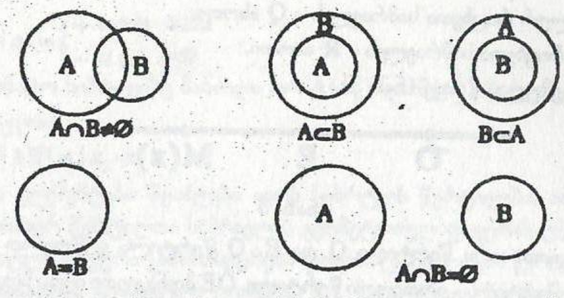
ბ) $\varnothing$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{a;b\}$; $\qquad n=4=2^2$

გ) $\varnothing$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{a;b\}$; $\{a;c\}$; $\{b;c\}$; $\{a;b;c\}$. $\qquad n=8=2^3$

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ, თუ სიმრავლე შეიცავს n ელემენტს, მაშინ ყველა ქვესიმრავლის რიცხვი იქნება 2^n. ნებისმიერი X სიმრავლისათვის არსებობს სიმრავლეთა $p(x)$ ოჯახი, რომლის ელემენტებსაც წარმოადგენს X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე (ხარისხის აქსიომა). $p(x)$ სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა ტოლი იქნება 2^n, სადაც n არის საწყისი X სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა.

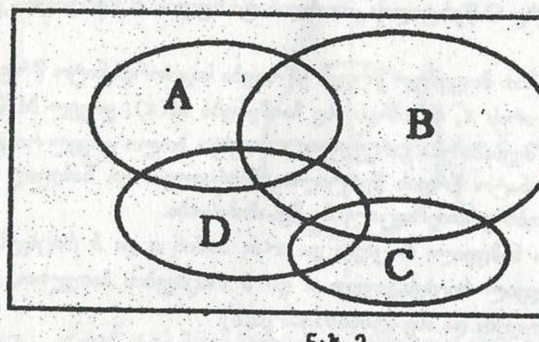
თუ $A \subset B$ და $B \subset A$, მაშინ A და B სიმრავლეებს ეწოდებათ ტოლი, ე.ი ისინი შეიცავენ ერთსა და იმავე ელემენტებს $A=B$. სიმრავლეთა ჩართვას ახასიათებს ტრანზიტულობის თვისება: თუ $A \subset B$ და $B \subset C$, მაშინ $A \subset C$. თუ A და B სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო ელემენტები, მაშინ მათ უწოდებენ არაგადამკვეთ სიმრავლეებს $A \cap B=\varnothing$. სიმრავლეთა შორის ჩვენს მიერ აქ ჩამოთვლილ დამოკიდებულებას უფრო თვალსაჩინოდ გამოსახავენ ეილერის წრეებით. A და B სიმრავლეების ყველა შესაძლო გადაკვეთა მოცემულია 1-ელ ნახაზზე.

ვთქვათ, A,B,C და D სიმრავლეები I სიმრავლის ქვესიმრავლეებია. ამ შემთხვევაში I სიმრავლეს უწოდებენ მოცემულ A,B,C და D სიმრავლეთა სისტემისათვის უნივერსალურ



ნახ. 1

სიმრავლეს. მაგალითად, ვთქვათ, A სიმრავლე არის რომელიმე ინსტიტუტის პირველკურსელთა სიმრავლე, B - სტუდენტ სპორტსმენთა სიმრავლე, C- ფრიადოსან სტუდენტთა სიმრავლე და D - ოლიმპიადაში გამარჯვებულ სტუდენტთა სიმრავლე, მაშინ უნივერსა-



ნახ. 2

ლური სიმრავლე იქნება ამ ინსტიტუტის სტუდენტთა სიმრავლე. ეილერის დიაგრამებზე უნივერსალური I სიმრავლე წარმოდგენილია მართკუთხედის წერტილთა სიმრავლის, ხოლო მისი ქვესიმრავლეები- რგოლების სახით (ნახ. 2).

§3. რიცხვითი სიმრავლეები. წრფეზე წერტილის კოორდინატები, წრფის ორ წერტილს შორის მანძილი, რიცხვითი შუალედების ჩაწერა, წერტილოვანი სიმრავლეები

სიმრავლეს, რომლის ელემენტები რიცხვებია, რიცხვითი სიმრავლე ეწოდება. ზოგიერთ რიცხვით სიმრავლეს საკუთარი აღნიშვნა აქვს.

1) ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება N, მთელ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლე N_0 ასოებით;

2) მთელ რიცხვთა, მთელ დადებით და მთელ უარყოფით რიცხვთა სიმრავლეებს შესაბამისად აღნიშნავენ Z,Z+,Z-ასოებით;

3) რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს - Q ასოთი;

4) ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს - R ასოთი.

ვთქვათ, მოცემულია წრფე. (ნახ. 3).

ნახ. 3

წრფეზე ავილოთ ორი წერტილი O და E. O წერტილს ვუწოდოთ კოორდინატთა სათავე, ხოლო E წერტილს - ერთეული წერტილი. OE მონაკვეთი იყოს სიგრძის ერთეული. O წერტილიდან E მიმართულებას ვუწოდოთ დადებითი მიმართულება, ხოლო საწინაა- ლმდეგოს - უარყოფითი. ყოველ M წერტილს შეესაბამება x კოორდინატი. x რიცხვის მოდული უდრის მანძილს O წერტილიდან M წერტილამდე $|x|=|OM|$. თუ $M\neq 0$, მაშინ x დადებითია, როცა M ძევს OE სხივზე, ხოლო უარყოფითია, როცა M ძევს საწინაა- ლმდეგოდ მიმართულ სხივზე. O წერტილის კოორდინატი ნულია, E წერტილის კოორდი- ნატი ერთეულის ტოლია.

კოორდინატთა სისტემით მოცემულ წრფეს ეწოდება საკოორდინატო წრფე. თუ M წერტილის კოორდინატი არის x, მაშინ ეს ასე ჩაიწერება M(x). ყოველ M წერტილს საკოორდინატო წრფეზე შეესაბამება გარკვეული x რიცხვი, ხოლო ყოველ რიცხვს ერთი წერტილი, ე.ი. საკოორდინატო წრფის წერტილთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

ვთქვათ, a და b ორი ნამდვილი რიცხვია და $a<b$, მაშინ a და b რიცხვებს შორის მოთავსებულ ყველა ნამდვილ რიცხვს, თვით a და b რიცხვების ჩათვლით, ჩაკეტილი შუალედი (მონაკვეთი) ეწოდება და ასე აღინიშნება $[a;b]$.

ნახ. 4

თუ a და b წერტილები შუალედს არ ეკუთვნის, მაშინ მას ღია შუალედს უწოდებენ.

$]a;b[=\{x\,|\,x\in R$ და $a<x<b\}$. (ნახ. 4).

ანალოგიურად განისაზღვრება სხივი $[a;+\infty[=\{x\,|\,x>a$ და $x\in R\}$.

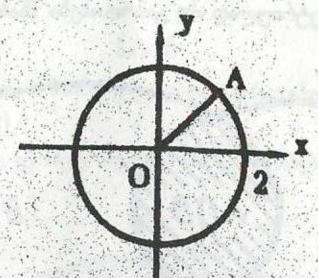
განსაზღვრება: a რიცხვის მოდული ეწოდება თვით a რიცხვს, თუ a არაუარყოფითია და $-a$-ს, თუ a უარყოფითია.

$$|a|=\begin{cases}+a \text{ თუ } a\geq 0\\ -a \text{ თუ } a<0\end{cases}$$

საკოორდინატო სიბრტყეზე მანძილი ორ A(x_1) და B(x_2) წერტილს შორის გამოი- თვლება ფორმულით

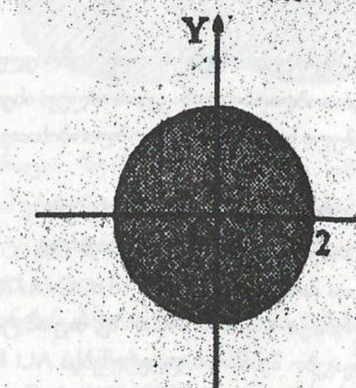
$$|AB|=|x_2-x_1|$$

სიმრავლის ელემენტები შეიძლება იყოს სიბრტყის წერტილები, ამიტომ რიცხვითი სიბრტყის ნებისმიერ წერტილთა სიმრავლეს გეომეტრიულ ფიგურას უწოდებენ. ზოგიე- რთი გეომეტრიული ფიგურა განისაზღვრება როგორც სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, რომელსაც ახასიათებს გარკვეული თვისება, ასე, მაგალითად, წრეწირი არის სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, რომლის ყველა წერტილი თანაბარი მანძილით დაშორებული წინასწარ მოცემული წერტილიდან, $\{(x;y)\,|\,x^2+y^2=4\}$. ეს არის წრეწირის წერტილთა სიმრავლე, რომლის რადიუსია 2 (ნახ. 5).



ნახ. 5

$\{(x;y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\}$ წრის წერტილთა სიმრავლეა (ნახ. 6).



ნახ. 6

§4 სიმრავლეთა თანაკვეთა და გაერთიანება

ვთქვათ, გვაქვს ორი სიმრავლე:

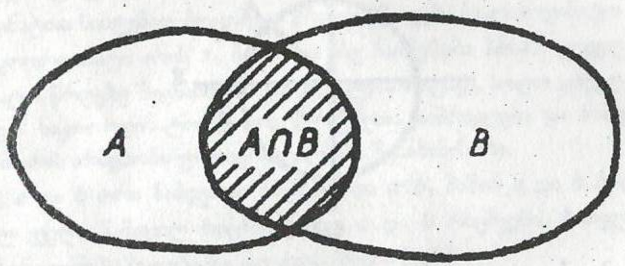
$A=\{a;b;c;d\}$ და $B=\{k;b;d;e\}$.

ამ ორი სიმრავლიდან შევადგინოთ ახალი სიმრავლე, რომლის ელემენტები ეკუთვნის როგორც A, აგრეთვე B სიმრავლეს: $p=\{b;d\}$. ამ შემთხვევაში p-ს უწოდებენ A და B სიმრავლეების თანაკვეთას.

ორი A და B სიმრავლის თანაკვეთა ეწოდება ისეთ მესამე სიმრავლეს, რომელშიც შედის ის ელემენტები, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის A და B სიმრავლეებს. A და B სიმრავლეთა თანაკვეთა ასე აღინიშნება $A\cap B$, ე.ი.

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ და } x\in B\}.$$

თუ A და B სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო ელემენტი, მაშინ $A\cap B=\varnothing$. ორი A და B სიმრავლის თანაკვეთა გეომეტრიულად ასე გამოისახება (ნახ. 7):



ნახ. 7

თანაკვეთის ოპერაცია შეიძლება ჩავატაროთ სიმრავლეთა ერთობლიობაზე, $A_1, A_2, \dots, A_n$. სიმრავლეთა ერთობლიობის თანაკვეთა იძლევა ისეთ A სიმრავლეს, რომლის ელემენტები საერთოა მოცემული სიმრავლის ერთობლიობისათვის .

$A=A_1\cap A_2\cap \dots\cap A_n$.

სიმრავლეთა თანაკვეთას ახასიათებს შემდეგი თვისებები:

1) სიმრავლეთა თანაკვეთა კომუტატიურია $A\cap B=B\cap A$.

2) სიმრავლეთა თანაკვეთა ასოციატიურია $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

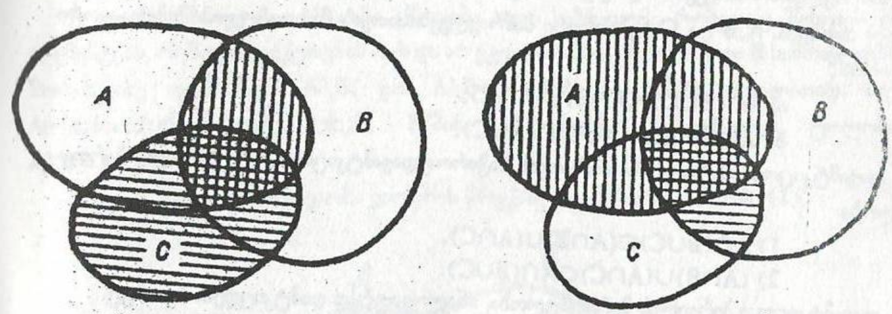
ამ თვისების მართებულობა კარგად ჩანს ნახ. 8-ზე, თუ ამ ტოლობისათვის გამოვიყენებთ ეილერის წრეებს და ავაგებთ შესაბამის დიაგრამებს.

3) თუ $A\subset B$, მაშინ $A\cap B=A$,

4) ნებისმიერი A სიმრავლისათვის გვაქვს

$A\cap A=A$; $A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cap I=A$.

ორი A და B სიმრავლის გაერთიანება ეწოდება სიმრავლეს, რომლის ელემენტები A

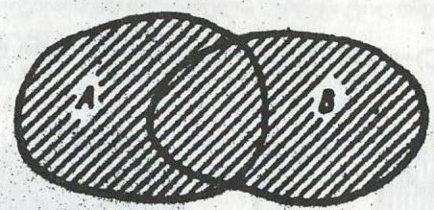


ნახ. 8

და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნის. გაერთიანებას ასე აღნიშნავენ

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ ან } x\in B\}.$$

სიმრავლეთა გაერთიანება გეომეტრიულად ასე გამოისახება:



ნახ. 9

გაერთიანების ოპერაცია შეიძლება ჩავატაროთ სიმრავლეთა ერთობლიობაზე $A_1, A_2, \dots, A_n$. სიმრავლეთა ერთობლიობის გაერთიანება იძლევა ისეთ A სიმრავლეს, რომლის ნებისმიერი ელემენტი ეკუთვნის მოცემული ერთობლიობიდან ერთ-ერთს მაინც

$$A=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n.$$

სიმრავლეთა გაერთიანებას ახასიათებს შემდეგი თვისებები:

1) $A\cup B=B\cup A$ (კომუტატიურობა).

2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (ასოციატიურობა).

3) თუ $B\subset A$, მაშინ $A\cup B=A$.

$$4)\ A\cup A=A;\ A\cup\varnothing=A;\ A\cup I=I.$$

სიმრავლეთა თანაკვეთას და გაერთიანებას ახასიათებს განრიგადობის (დისტრიბუტივობის) თვისება. A,B და C ნებისმიერი სიმრავლეებისათვის მართებულია შემდეგი ორი ტოლობა

$$ა)\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

$$ბ)\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

დავამტკიცოთ ა) ტოლობა. ამისათვის საჭიროა დავამტკიცოთ ორი ჩართვის მართებულობა

$$1)\ A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

$$2)\ (A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C).$$

დავამტკიცოთ პირველის მართებულობა, ანალოგიურად დამტკიცდება მეორეც.

დავუშვათ, $x\in A\cap(B\cup C)$, ვაჩვენოთ, რომ x ეკუთვნის $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ სიმრავლეს. $x\in A\cap(B\cup C)$ ნიშნავს $x\in A$ და $x\in(B\cup C)$. $x\in(B\cup C)$ ნიშნავს $x\in B$ ან $x\in C$ ან $x\in B$ და $x\in C$. განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

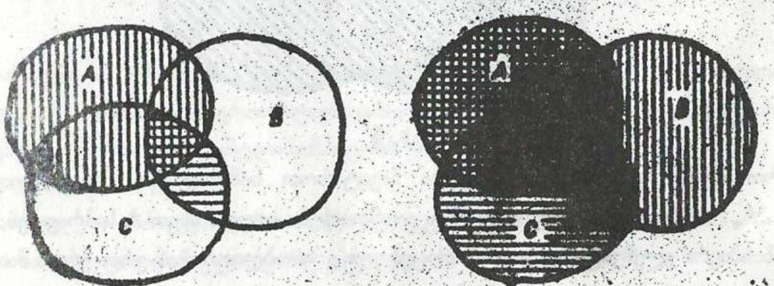
ა) თუ $x\in A$ და $x\in B$, ეს ნიშნავს $x\in(A\cap B)$;

ბ) თუ $x\in A$ და $x\in C$, ეს ნიშნავს $x\in(A\cap C)$.

ეს კი ნიშნავს, რომ $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, ე.ი. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$:

მეორე თვისების მართებულობა კარგად გამოისახება ეილერ-ვენის დიაგრამების აგებით.

ავაგოთ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეები შესაბამისად (ნახ. 10).

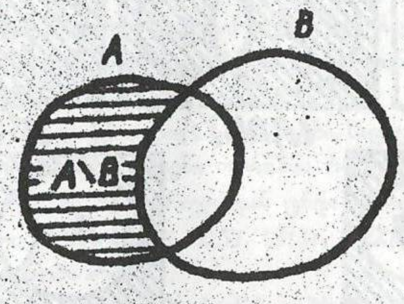


ნახ. 10

§5. სიმრავლეთა სხვაობა. ქვესიმრავლის დამატება, სიმრავლეთა დაყოფა არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად

A და B სიმრავლეთა სხვაობა ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს იმ ელემენტებს, რომლებიც ეკუთვნის A-ს და არ ეკუთვნის B-ს. სხვაობა A და B სიმრავლეებს შორის ასე აღინიშნება $A\setminus B$, ე.ი. $A\setminus B=\{x\mid x\in A$ და $x\notin B\}$. მაგალითად, თუ $A=\{a;b;c;d;e\}$; $B=\{b;d;e;k;f\}$, მაშინ $A\setminus B=\{a;c\}$, მართებულია ტოლობა $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

A და B სიმრავლეთა სხვაობა ეილერის წრეებზე ასე გამოისახება (ნახ. 11).



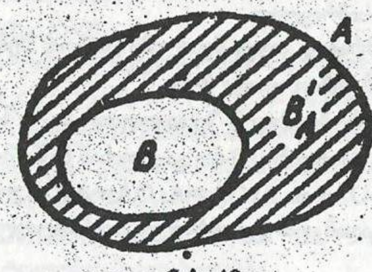
ნახ. 11

A,B და C სიმრავლეებისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$ა)\ A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C).$$

$$ბ)\ A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C.$$

ვთქვათ, B არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე. A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომელიც არ ეკუთვნის B სიმრავლეს, უწოდებენ B ქვესიმრავლის დამატებას და აღნიშნავენ B'_A. მაგალითად, თუ A არის კლასში მოსწავლეთა სიმრავლე, ხოლო B-გოგონათა სიმრავლე, მაშინ B'_A იქნება ვაჟების სიმრავლე. მე-12 ნახაზზე B'_A გამოსახულია დაშტრიხული ნაწილით.



ნახ. 12

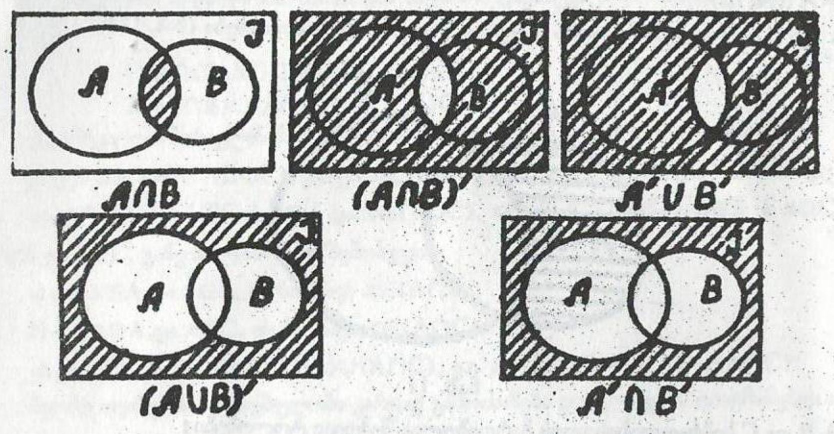
A სიმრავლის დამატებას მეორენაირად უარყოფის ოპერაციასაც უწოდებენ და აღნიშნავენ $\bar{A}$-ით. განისაზღვრება $\bar{A}=I\backslash A$, სადაც I უნივერსალური სიმრავლეა.

თუ A და B სიმრავლეები I უნივერსალური სიმრავლის ქვესიმრავლეებია, მაშინ გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

ა) $(A\cap B)'=A'\cup B'$;

ბ) $(A\cup B)'=A'\cap B'$.

ამ ტოლობათა მართებულობა კარგად ჩანს მე-13 ნახაზზე.



ნახ. 13

ვთქვათ, მოცემულია X სიმრავლე და მისი რამდენიმე არაცარიელი ქვესიმრავლე, მაშინ ამბობენ, რომ X სიმრავლე დაყოფილია წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთ (კლასებად) ქვესიმრავლეებად, თუ სრულდება ორი პირობა:

1) ორი ნებისმიერი ქვესიმრავლის თანაკვეთა ცარიელია.

2) ყველა ქვესიმრავლის გაერთიანება არის X სიმრავლე.

მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე დაიყოფა ორ სიმრავლედ: კენტ რიცხვთა სიმრავლედ და ლუწ რიცხვთა სიმრავლედ.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე კიდევ შეიძლება დავყოთ შემდეგ ქვესიმრავლეებად: A_1 სიმრავლე რიცხვებისა, რომლებიც იყოფა 3-ზე.

A_2 სიმრავლე რიცხვებისა, რომლებიც 3-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 1-ს.

A_3 სიმრავლე რიცხვებისა, რომლებიც 3-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 2-ს.

მაშინ, ცხადია $N=A_1\cup A_2\cup A_3$ და $A_1\cap A_2=A_1\cap A_3=A_2\cap A_3=\varnothing$.

სიმრავლეთა დაყოფა არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად საფუძვლად უდევს სიმრავლეთა ყოველგვარ კლასიფიკაციას.

§6. კომბინატორიკის ელემენტები

1. დალაგებული წყვილი. ორი სიმრავლის დეკარტის ნამრავლი

დალაგებული წყვილის განსაზღვრისათვის განვიხილოთ მაგალითი: რიცხვი 25 ჩაწერილია 2 და 5 ციფრებით, ეს ციფრები ჩაწერილია განსაზღვრული რიგით. ჯერ დაწერილია ციფრი 2, შემდეგ ციფრი 5. თუ მათ გადავაადგილებთ, მივიღებთ სხვა რიცხვს 52-ს. ამ შემთხვევაში წყვილს (2;5)-ს უწოდებენ დალაგებულ წყვილს. დალაგებული წყვილი, რომელიც შედგება x და y ციფრებისაგან, ასე ჩაიწერება $(x;y)$; რიცხვში 55 შედის ორი ერთნაირი ციფრი - 5 და 5, ამიტომ (5;5) წყვილი ითვლება დალაგებულ წყვილად. დალაგებული წყვილები შეიძლება შევადგინოთ სიმრავლის ელემენტებისაგან. $(x;y)$ წყვილში x-სა და y-ს უწოდებენ კომპონენტებს, ანუ კოორდინატებს. თუ $x\neq y$, მაშინ (x,y) და $(y;x)$ წყვილები სხვადასხვაა.

დაწყებით კლასებში გვაქვს ისეთი სავარჯიშოები, სადაც საჭიროა დალაგებული წყვილების შედგენა. მაგალითად, რამდენი ორნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება 2; 3; 5 ციფრებისაგან, ე.ი. {2; 3; 5} სიმრავლიდან უნდა გამოვყოთ ყველა ორელემენტიანი დალაგებული წყვილი (2;2), (2;3), (2;5), (3;3), (3;2), (3;5), (5;5), (5;2), (5;3). სულ წყვილთა რაოდენობა არის 9.

ვთქვათ, გვაქვს ორი სიმრავლე $X=\{a;b\}$ და $Y=\{2;3;4\}$. ამ ორი სიმრავლეს ელემენტებისაგან შევადგინოთ წყვილები ისე, რომ პირველ ადგილზე იყოს X სიმრავლის ელემენტები, ხოლო მეორეზე Y სიმრავლის ელემენტები. ასეთ წყვილთა სიმრავლე იქნება

$\{(a;2); (a;3); (a;4); (b;2); (b;3); (b;4)\}$.

ამ სიმრავლეს უწოდებენ X და Y სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლს და ასე აღნიშნავენ $X\times Y$, ე.ი. X და Y სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლი ეწოდება $X\times Y$ სიმრავლეს, რომლის ელემენტებია $(x;y)$ წყვილი, ისე რომ $x\in X$ და $y\in Y$.

$X\times Y=\{(x;y)\mid x\in X$ და $y\in Y\}$.

თუ $X=Y$, მაშინ $X\times X=\{x,y)\mid x\in X$ და $y\in X\}$. მაგალითად, თუ $X=\{a;b\}$, მაშინ $X\times X=\{(a;a);(a,b);(b;a);(b,b)\}$.

$$X\times\varnothing=\varnothing\times X=\varnothing.$$

სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლს არ ახასიათებს კომუტატიურობის და ასოციატიურობის თვისება, ე.ი. $X\times Y\neq Y\times X$; $X\times(Y\times Z)\neq(X\times Y)\times Z$.

ამ თვისებათა მართებულობა გამომდინარეობს სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლის განმარტებიდან. სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლისათვის მართებულია დისტრიბუტიულობის კანონი გაერთიანების ოპერაციის მიმართ

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C).$$

დავამტკიცოთ ამ ტოლობის მართებულობა.

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ, $A\times(B\cup C)\subset(A\times B)\cup(A\times C)$; ამისათვის ტოლობის

მარცხენა ნაწილიდან ავიღოთ ნებისმიერი $(x;y)$ წყვილი, ე.ი.

$$(x;y)\in A\times(B\cup C).$$

დეკარტის ნამრავლის განსაზღვრის თანახმად, ვწერთ: $x\in A$ და $y\in(B\cup C)$. გაერთიანების ოპერაციის თანახმად ვწერთ, რომ $y\in B$ ან $y\in C$, ე.ი. გვაქვს ორი შემთხვევა:

1) $x\in A$ და $y\in B$ ან 2) $x\in A$ და $y\in C$.

თუ $x\in A$ და $y\in B$, მაშინ $(x;y)\in(A\times B)$ და, ცხადია,

$$(x;y)\in(A\times B)\cup(A\times C).$$

ასევე, თუ $x\in A$ და $y\in C$, მაშინ $(x;y)\in(A\times C)$ და, ცხადია,

$$(x;y)\in(A\times B)\cup(A\times C).$$

რადგან ტოლობის მარცხენა ნაწილიდან აღებული ნებისმიერი წყვილი ამავე დროს წარმოადგენს ტოლობის მარჯვენა სიმრავლის ელემენტს, ამიტომ

$$A\times(B\cup C)\subset(A\times B)\cup(A\times C).$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $(A\times B)\cup(A\times C)\subset A\times(B\cup C)$.

დავუშვათ, $(x;y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$. გვექნება ორი შემთხვევა:

1) $(x;y)\in(A\times B)$ ან 2) $(x;y)\in(A\times C)$.

პირველიდან გამომდინარეობს, რომ $x\in A$ და $y\in B$. თუ $y\in B$, ცხადია, $y\in(B\cup C)$ და რადგან $x\in A$ და $y\in(B\cup C)$, მაშინ

$$(x;y)\in A\times(B\cup C).$$

ასევე, თუ $(x,y)\in(A\times C)$, მაშინ $x\in A$ და $y\in C$, ცხადია, მართებული იქნება $(x;y)\in A\times(B\cup C)$. ამის საფუძველზე დავასკვნით, რომ

$$(A\times B)\cup(A\times C)\subset A\times(B\cup C).$$

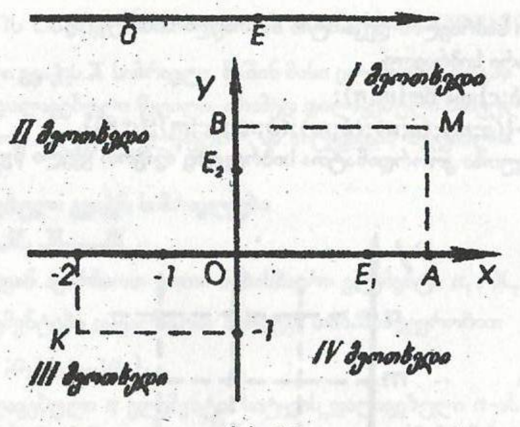
მოცულობის აქსიომის თანახმად ვწერთ, რომ

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C).$$

2. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე. ორ წერტილს შორის მანძილი სიბრტყეზე. ორი სიმრავლის დეკარტის ნამრავლის გამოსახვა გრაფიკულად

საკოორდინატო წრფეზე წერტილის მდებარეობა შეიძლება განისაზღვროს ორი წერტილით — O კოორდინატთა სათავისა და E ნებისმიერი წერტილის საშუალებით. წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე განსაზღვრავს ორი კოორდინატი - აბსცისა და ორდინატი. რომ განვსაზღვროთ ამ რიცხვების მნიშვნელობა, ამისათვის ავიღოთ სამი დალაგებული წერტილი $(O;E_1;E_2)$ ისე, რომ OE_1 წრფე პერპენდიკულარული იყოს OE_2-სი და $|OE_1|=|OE_2|=1$.

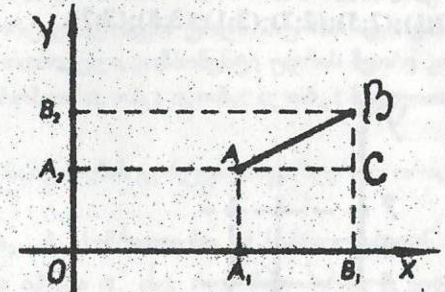
OE_1 წრფეს ეწოდება აბსცისთა ღერძი და აღინიშნება OX-ით; OE_2 წრფეს ეწოდება ორდინატთა ღერძი და აღინიშნება OY-ით. ორივე ღერძს მთლიანად ეწოდება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა XOY. (ნახ 14).



ნახ. 14

კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეს ყოფს ოთხ ნაწილად. თითოეულ მათგანს მეოთხედი ეწოდება. M წერტილის კოორდინატებია $|OA|=x$ და $|OB|=y$ და ასე ჩაიწერება: $M(x;y)$. მაგალითად, ავაგოთ $k(-2;-1)$. გამოვთვალოთ სიბრტყის ორ $A(x_1;y_1)$ და $B(x_2;y_2)$ წერტილს შორის მანძილი (ნახ. 15).

— 814 —



ნახ.15

ΔABC მართკუთხაა $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$;

$|A_1B_1|=|x_2-x_1|$; $\qquad |A_2B_2|=|y_2-y_1|$;

$|A_1B_1|=|AC|$; $\qquad |A_2B_2|=|BC|$;

$|AB|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$; $\qquad |AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

AB მონაკვეთის შუა M წერტილის კოორდინატები

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

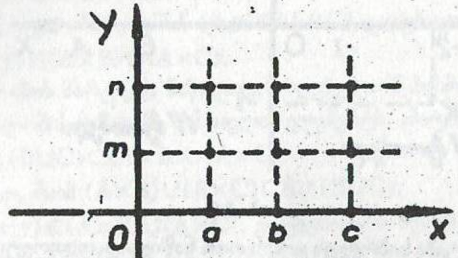
გამოვსახოთ ორი სიმრავლის დეკარტის ნამრავლი სიბრტყეზე.

ვთქვათ, გვაქვს ორი სიმრავლე

$$A=\{a;b;c\} \text{ და } B=\{m;n\};$$

$$A\times B=\{(a;m);(a;n);(b;m);(b;n);(c;m);(c;n)\}.$$

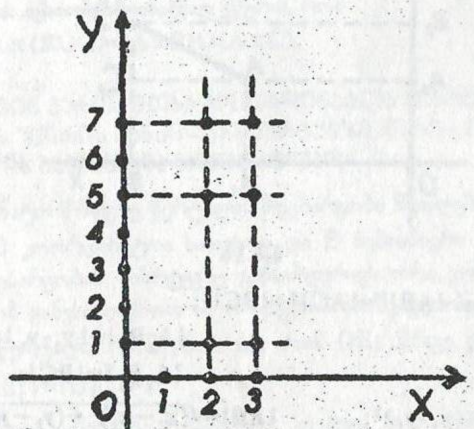
დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სიბრტყეზე ავაგოთ ყველა წყვილი.



ნახ. 16

როგორც ნახაზიდან ჩანს, ორი სიმრავლის დეკარტის ნამრავლი გრაფიკულად არის წერტილთა სიმრავლე. მაგალითად, $X=\{2;3\}$; $Y=\{1;5;7\}$;

$$X\times Y=\{(2;1);(2;5);(2;7);(3;1);(3;5);(3;7)\}.$$



ნახ. 17

3. კორტეჟის ცნება. n სიმრავლის დეკარტის ნამრავლის ცნება

თუ მოცემული გვაქვს X სიმრავლე, მაშინ მისი ელემენტებისაგან შეგვიძლია შევადგინოთ არა მარტო დალაგებული წყვილი, არამედ დალაგებული სამეული, ოთხეული და ა.შ. მაგალითად, ავიღოთ სიტყვა „ტელეფონი". ამ სიტყვიდან შეგვიძლია შევადგინოთ დალაგებული რვაეული.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს სიმრავლეები

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n.$$

X_1 სიმრავლიდან ავირჩიოთ ერთი ნებისმიერი ელემენტი a_1, X_2-დან a_2 და X_n-დან a_n. არჩეული ელემენტები დავალაგოთ შემდეგი თანამიმდევრობით

$$(a_1;a_2;a_3;\ldots;a_n).$$

მივიღეთ დალაგებული n ელემენტი. სიტყვის „დალაგებული n-ის" ნაცვლად ხმარობენ სიტყვას „კორტეჟი". ჩვენ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ „ავტომანქანების კორტეჟზე", „მექორწილეთა კორტეჟზე", „რიცხვში ციფრების კორტეჟზე" და სხვ.

n რიცხვს უწოდებენ კორტეჟის სიგრძეს. მაგალითად, სიტყვა „ტელეფონი" - კორტეჟის სიგრძე $n=8$, კორტეჟში შემავალ $(a_1; a_2; a_3; \ldots;a_n)$ ელემენტებს კომპონენტები ეწოდება.

კორტეჟის კომპონენტი შეიძლება იყოს ისევ კორტეჟი. ორ $(a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n)$ და $(b1; b2; b3; \ldots; bm)$ კორტეჟს ეწოდება ტოლი, თუ მათ აქვთ ერთნაირი სიგრძე $n=m$ და პირველი კორტეჟის თითოეული კომპონენტი უდრის მეორე კორტეჟის კომპონენტებს შემდეგი თანამიმდევრობით: $a_1=b_1$; $a_2=b_2$; $a_n=b_m$; მაგალითად, $(a;b;c)$ კორტეჟი არ უდრის $(b;a;c)$-ს.

კორტეჟის ცნება საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ორი, სამი და ა.შ. სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლი.

თუ გვაქვს $A_1, A_2 \ldots A_n$ სიმრავლეები, ამ სიმრავლეებიდან შევადგენთ კორტეჟებს, რომელთა სიგრძეები იქნება n, ისე, რომ მისი პირველი ელემენტი მიეკუთვნება A_1 სიმრავლეს, მეორე A_2-ს და ა.შ. n კომპონენტი - A_n-ს.

სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლს ასე აღნიშნავენ

$$A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times A_n \quad \text{ან} \quad \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

4. კომბინატორული ამოცანები დაწყებით კლასებში და მათი გამოყენება კომბინატორიკის ელემენტების განსაზღვრისათვის

დაწყებითი კლასების მათემატიკის სახელმძღვანელოებში არის ამოცანები, რომლებიც კომბინატორული ხასიათისაა.

ამოცანა კომბინატორული შინაარსისაა, თუ მასში მოცემული სიმრავლის ელემენტებისაგან საჭიროა შევადგინოთ ყველა შესაძლო კომბინაცია და მოვძებნოთ მათი რიცხვი. მაგალითად, დაწყებით კლასებში გვხვდება შემდეგი ამოცანები: რამდენი ორნიშნა, სამნიშნა რიცხვების შედგენა შეიძლება მოცემული ციფრებისაგან. ამ ამოცანების ამოხსნისას ხდება სიმრავლეებიდან დალაგებული ქვესიმრავლეების გამოყოფა და შემდეგ მათი რიცხვის მოძებნა.

განვიხილოთ კომბინატორიკის ელემენტები.

ა) ჯამის წესი

ზოგიერთი კომბინატორული ამოცანის ამოხსნის დროს საჭიროა ორი სიმრავლის გაერთიანების ელემენტების რაოდენობის დადგენა. ამისათვის იყენებენ ჯამის წესს, ხოლო ორი სიმრავლის დეკარტის ნამრავლის ელემენტების რაოდენობის დასადგენად გამოიყენება ნამრავლის წესი. განვიხილოთ ისინი ცალ-ცალკე. სასრული X სიმრავლის ელემენტების რიცხვი ავღნიშნოთ $n(X)$-ით; ასე, მაგალითად, თუ $X=\{2;3;7;8\}$, მაშინ $n(X)=4$. ვთქვათ, X სიმრავლე შეიცავს $n(X)$ ელემენტს, ხოლო Y $m(Y)$-ს. რამდენ ელემენტს შეიცავს $X\cup Y$ გაერთიანება, თუ X და Y სიმრავლეები არ გადაიკვეთებიან, ე.ი. მათ არა აქვთ საერთო ელემენტი, მაშინ მათი გაერთიანება შეიცავს $m+n$ ელემენტს. აქედან შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი წესი: **თუ X სიმრავლე შეიცავს n ელემენტს და Y სიმრავლე m ელემენტს და ისინი არ გადაიკვეთებიან, მაშინ $X\cup Y$ სიმრავლე შეიცავს $m+n$ ელემენტს**, ე.ი. თუ $X\cap Y=\varnothing$, მაშინ $n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)$.

თუ X და Y სიმრავლეთა თანაკვეთა არ არის ცარიელი სიმრავლე, ე.ი. $X\cap Y\neq\varnothing$, მაშინ $X\cup Y$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა იქნება

$$n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y).$$

მართლაც, თუ $X=\{a;b;c;d;e\}$ და $Y=\{d;k;i;b\}$, სადაც $n(X)=5$ და $n(Y)=4$, მაშინ

$$X\cup Y=\{a;b;c;d;e;i;k\}\ n(X\cup Y)=7,$$

ე. ი. $7=5+4-2$, სადაც $2=n(X\cap Y)$. აქედან შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასეთი წესი: **ორი სიმრავლის გაერთიანების ელემენტების რიცხვი უდრის თითოეული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობათა ჯამს, გამოკლებული მათი საერთო ელემენტების რიცხვი.**

დაწყებით კლასებში რიცხვების შეკრებისას იყენებენ სიმრავლეთა გაერთიანებას, მაგრამ იქ იგულისხმება, რომ მათ არა აქვთ საერთო ელემენტი.

$$n(X\cup Y\cup Z)=n(X)+n(Y)+n(Z)-n(X\cap Y)-n(X\cap Z)-n(Y\cap Z)-n(X\cap Y\cap Z).$$

ბ) ნამრავლის წესი

ვთქვათ, გვაქვს ორი სიმრავლე

$$X=\{x_1;x_2;x_3;\ldots x_m\}\ \text{და}\ Y=\{y_1;y_2;y_3;\ldots y_n\}.$$

დავსვათ კითხვა: რამდენი წყვილის შედგენა შეიძლება ამ ორი სიმრავლიდან, თუ წყვილებს ჩამოვწერთ შემდეგი სახით:

$$(x_1;y_1),(x_1;y_2),\ldots,(x_1;y_n);$$
$$(x_2;y_1),(x_2;y_2),\ldots,(x_2;y_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x_m;y_1),(x_m;y_2),\ldots,(x_m;y_n).$$

სულ გვაქვს m სტრიქონი და n სვეტი, ე.ი. mn წყვილი.

დალაგებულ წყვილთა რიცხვი m-ელემენტიანი X სიმრავლისა და n - ელემენტიანი Y სიმრავლისა უდრის mn, ე.ი. X და Y სიმრავლეთა ელემენტების რაოდენობათა ნამრავლს. ამ წესს ნამრავლის წესს უწოდებენ. $X\times Y$ არის დეკარტის ნამრავლი, ამიტომ $n(X\times Y)=n(X)\cdot n(Y)$. აღნიშნული წესი შეიძლება გამოვიყენოთ დაწყებით კლასებში შემდეგი ამოცანის ამოსახსნელად.

თბილისიდან თელავში სამი გზა მიდის, თელავიდან ყვარელში - ოთხი. რამდენნაირად შეიძლება მგზავრი ჩავიდეს თბილისიდან ყვარელში თელავზე გავლით, თუ გზების სიმრავლეებს ავღნიშნავთ: $A=\{1;2;3\}$; $B=\{4;5;6;7\}$, მაშინ $n(A\times B)=3\cdot 4=12$.

გ) გადანაცვლება. გადანაცვლებათა რიცხვი

სასრულ სიმრავლეს ეწოდება დალაგებული, თუ მისი ელემენტები დანომრილია რაიმე წესით. ერთი და იგივე სიმრავლე შეიძლება დავალაგოთ სხვადასხვა წესით. მაგალითად, კლასში მოსწავლეთა სიმრავლე შეიძლება დავალაგოთ წლოვანებით, სიმაღლით, წონით, ალფაბეტით და სხვ... ისმება კითხვა: რამდენნაირად შეიძლება დავალაგოთ სიმრავლე, რომელიც შეიცავს m ელემენტს? სიმრავლის ყველა შესაძლო დალაგებათა რიცხვს გადანაცვლებას უწოდებენ. გადანაცვლებათა რიცხვის მოსაძებნად განვიხილოთ დაწყებითი კლასების მათემატიკის სახელმძღვანელოდან შემდეგი შინაარსის ამოცანა.

რამდენი ერთნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება ერთი ციფრისაგან; რამდენი ორნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება ორი ციფრისაგან და რამდენი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება სამი ციფრისაგან, ისე, რომ რიცხვში ციფრი არ გამეორდეს?

ერთი ციფრისაგან შეიძლება ერთი რიცხვის შედგენა. მაგალითად, ციფრი 5 არის რიცხვი 5. ორი ციფრისაგან - 4-სა და 7-საგან- შეგვიძლია შევადგინოთ რიცხვები: 47 და 74, სულ 2. სამი ციფრისაგან 3;6;8 შეგვიძლია შევადგინოთ შემდეგი სამნიშნა რიცხვები: 368; 386; 638; 683; 863; 836. სულ 6. თუ დავამყარებთ კავშირს ციფრების რაოდენობასა და შედგენილი რიცხვების რაოდენობას შორის, მივიღებთ:

ციფრების რაოდენობა		რიცხვების რაოდენობა
1	. . . .	1
2	. . . .	$2=2\cdot 1$
3	. . . .	$6=3\cdot 2\cdot 1$

აქედან ჩანს, რომ, თუ გვექნებოდა 4 ციფრი, მაშინ შედგენილი ოთხნიშნა რიცხვების რაოდენობა იქნებოდა $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$. ახლა შეგვიძლია ამოცანა ასე დავსვათ. რამდენნაირად შეგვიძლია დავალაგოთ 5 - ელემენტიანი სიმრავლე? 5 - ელემენტიანი სიმრავლე შეგვიძლია დავალაგოთ $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$.

მათემატიკაში პირველი m ნატურალური რიცხვების ნამრავლს უწოდებენ m-ის ფაქტორიალს და ასე აღნიშნავენ: $m!$ იკითხება „m-ის ფაქტორიალი". მაგალითად, $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$. გვაქვს შემდეგი დებულება:

თუ სიმრავლე შეიცავს m ელემენტს, მაშინ გადანაცვლებათა რიცხვი ელემენტების გამეორების გარეშე უდრის $m!$, გადანაცვლებათა რიცხვს აღნიშნავენ P_m-ით, ე.ი. $P_m=m!$ აღნიშნული დებულების მართებულობაში შეიძლება დავრწმუნდეთ მარტივი მსჯელობით. თუ X სიმრავლე შეიცავს m ელემენტს, მაშინ მათი გადანომრვა შეიძლება $1;2;3;...;m$ ნატურალური რიცხვებით. ამ სიმრავლიდან პირველი ელემენტის შერჩევა შეიძლება m საშუალებით, ის შეიძლება იყოს ელემენტი, რომლის ნომერია 1 ან 2, ან 3 და ა.შ. თუ პირველ ელემენტს შევარჩევთ, მაშინ დაგვრჩება $m-1$ ელემენტი. მეორე ელემენტის შერჩევა შეიძლება $m-1$ საშუალებით. მესამე ელემენტი შეგვიძლია შევარჩიოთ $m-2$ საშუალებით. უკანასკნელი ერთი ელემენტი შეგვიძლია შევარჩიოთ ერთი საშუალებით. თუ გამოვიყენებთ ნამრავლის წესს, მაშინ m-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო დალაგებათა რიცხვი იქნება

$$P_m=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdots3\cdot2\cdot1=m!$$

დ) წყობა. წყობათა რიცხვი

სიმრავლის ელემენტებისაგან შეგვიძლია შევადგინოთ ქვესიმრავლეები, რომლებშიაც შეიძლება ელემენტების დალაგებას ჰქონდეს მნიშვნელობა, ე.ი. გამოვყოთ დალაგებული ქვესიმრავლეები. კომბინატორიკაში მოცემული სიმრავლიდან დალაგებული ქვესიმრავლეების გამოყოფას წყობებს უწოდებენ და აღნიშნავენ A ასოთი. n-ელემენტიანი სიმრავლიდან m - ელემენტიან წყობებს ასე აღნიშნავენ A_n^m , სადაც $1\leq m\leq n$. წყობის გამოსათვლელი ფორმულის დასადგენად ჩავატაროთ შემდეგი მსჯელობა. ვთქვათ, გვაქვს X სიმრავლე, რომელიც შეიცავს n ელემენტს. ამ ელემენტებისაგან რომ შევადგინოთ m-ელემენტიანი დალაგებული ქვესიმრავლეები, ამისათვის პირველ შერჩევაზე შეგვიძლია შევარჩიოთ ნებისმიერი n ელემენტიდან, მეორე შერჩევაზე - დარჩენილი $n-1$ ელემენტიდან, მესამეზე -$n-2$ ელემენტიდან და მე-m შერჩევაზე $n-m+1$ ელემენტიდან. თუ გამოვიყენებთ ნამრავლის წესს, მივიღებთ წყობის გამოსათვლელ ფორმულას

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

ე) ჯუფთება

***m* ელემენტიანი ჯუფთებათა რიცხვი *n* ელემენტისაგან ეწოდება ნებისმიერ *m* ელემენტიან ქვესიმრავლეს აღებულს *n* ელემენტისაგან $0\leq m\leq n$;** m ელემენტიან ჯუფთებას n ელემენტისაგან ასე აღნიშნავენ C_n^m . სიმრავლიდან, რომლის ელემენტების რაოდენობაა n, გამოყოფილი დალაგებული m ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რიცხვი არის A_n^m, ხოლო m ქვესიმრავლეთა რიცხვს აღვნიშნავთ C_n^m -ით,

მაშინ $A_n^m=m!C_n^m$, საიდანაც $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{m!}$.

რადგან $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$, ამიტომ $C_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}$

$$A_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)=$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\cdot(n-m)\cdots3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-m)}=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

სავარჯიშოები

1. შემდეგი ჩანაწერებიდან რომელია მართებული?

ა) $125\in N$;	ბ) $0\in N$;	გ) $-20\in N$;
დ) $1\frac{2}{3}\in N$;	ე) $-5\in Z$;	ვ) $-3.5\in N$.

2. შემდეგი სიმრავლეებიდან რომელია ცარიელი?

ა) მარსზე მცხოვრებ ადამიანთა სიმრავლე;

ბ) 5-ზე ნაკლები ნატურალური რიცხვების სიმრავლე;

გ) 1-ზე ნაკლები ნატურალური რიცხვების სიმრავლე;

დ) იმ მართკუთხა სამკუთხედების სიმრავლე, რომელთა ჰიპოტენუზის კვადრატი არ უდრის კათეტების კვადრატების ჯამს.

3. გამოსახეთ რიცხვით ღერძზე შემდეგი სიმრავლეები:

$A=\{x\mid x\in R,\ x>3,2\}$

$B=\{x\mid x\in R,\ x<3,2\}$

$C=\{x\mid x\in Z,\ -3,5<x<0\}$

$D=\{x\mid x\in Z_0,\ -16<x<5\}$

4. ჩამოაყალიბეთ წრის განსაზღვრა, როგორია სიბრტყის წერტილთა მახასიათებელი თვისება?

5. გამოარკვიეთ რა მიმართებაშია სიმრავლეთა თითოეული წყვილი?

ა) $A=\{m;n;p\}$ და $B=\{k;n;m\}$

ბ) $A=\{1;2;3\}$ და $B=\{5;1;4;2;3\}$

გ) $A=\{5;2\}$ და $B=\{8;7\}$.

6. რამდენი ელემენტია სიმრავლეში, რომელსაც აქვს 32 ქვესიმრავლე? 128 ქვესიმრავლე?

7. იპოვეთ შემდეგ სიმრავლეთა გაერთიანება, თანაკვეთა და სხვაობა:

ა) $A=\{x|x\in R, -\frac{2}{3}<x<\frac{7}{4}\}$ და $B=\{x|x\in R, -\frac{1}{4}<x<2\}$;

ბ) $A=\{x|x\in R, -2<x<\frac{12}{7}\}$ და $B=\{x|x\in R, 0<x<\frac{19}{11}\}$.

8. ეილერ-ვენის დიაგრამების გამოყენებით დაამტკიცეთ:

ა) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$,

ბ) $A\cup(B\setminus C)=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

9. გამოარკვიეთ სიმრავლეებზე ოპერაციათა რომელი კანონების საფუძველზეა შესრულებული გარდაქმნები?

ა) $A\cap B\cap A'\cup C=A\cap A'\cap B\cap C=(A\cap A')\cap(B\cap C)=\varnothing$;

ბ) $(A\setminus B)\cap B'=(A\cap B')\setminus(B\cap B')=A\cap B'$.

10. დაამტკიცეთ ტოლობები:

ა) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$;

ბ) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$;

გ) $(A\setminus B)\cap(A\cap B)=\varnothing$;

დ) $(A\setminus B)\cap B=\varnothing$;

ე) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

ვ) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

ზ) $A\cap B\subset A\cup B$;

11. გამოსახეთ კოორდინატთა სიბრტყეზე სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი $A\times B$, თუ:

ა) $A=\{x|\ -3<x<5,\ x\in Z\}$ $B=\{x|-1<x<3,\ x\in R\}$;

ბ) $A=\{x|\ -3<x<5,\ x\in R\}$ $B=\{x|-1<x<3,\ x\in R\}$.

12. 100 მოსწავლიდან 40 თამაშობს ფეხბურთს და 50 - კალათბურთს. დაასახელეთ, როგორი შეიძლება იყოს მოსწავლეთა რიცხვი, რომელიც თამაშობს ორივე თამაშს ან ერთს მაინც ამ ორი თამაშიდან.

13. მთის მწვერვალზე ადის 7 გზა. რამდენნაირად შეუძლია სპორტსმენს ასვლა მწვერვალზე და უკან დაბრუნება?

14. რამდენი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება ციფრებისაგან: 1,2,3,4,5 ისე, რომ რიცხვში ციფრი არ გამეორდეს?

15. რამდენნაირად შეიძლება მრგვალ მაგიდასთან დასვათ 8 კაცი?

16. ავტომანქანების დასანომრავად გამოყენებულია 26 რუსული ასო და

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ციფრები; ნებისმიერი ნომერი შედგება სამი ასოსა და ოთხი ციფრისაგან. რამდენი ავტომანქანის ნომერი შეიძლება შევადგინოთ საქართველოს რესპუბლიკისათვის?

17. ორგკომიტეტის 10 წევრისაგან უნდა შეირჩეს თავმჯდომარე, მოადგილე და მდივანი. რამდენნაირად შეიძლება მათი არჩევა?

18. რამდენი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება 5,8,7 ციფრებით?

19. რამდენი წრფის გავლება შეიძლება 10 წერტილზე, თუ არც ერთი ორი მათგანი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს?

20. იპოვეთ გამოსახულებათა მნიშვნელობა:

ა) $\frac{9!}{4!-5!}$, ბ) $\frac{7!+6!+5!}{8!-7!}$.

21. გაამარტივეთ გამოსახულებანი:

ა) $\frac{A_m^8+A_m^7}{C_m^6\cdot P_6}$, ბ) $\frac{A_m^4\cdot P_{m-4}}{P_{m-2}}$.

22. ამოხსენით განტოლებანი;

ა) $\frac{A_x^5}{C_{x-3}^{x-5}}=336$;

ბ) $A_x^3-C_x^2=10\cdot C_x^3-1$;

გ) $A_x^3=720x$;

დ) $\frac{A_x^7-A_x^5}{A_x^5}=89$;

ე) $\frac{P_{x+3}}{A_x^5\cdot P_{x-5}}=720$.

II თავი

მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები

§1. გამონათქვამი, მოქმედებანი გამონათქვამებზე

1. გამონათქვამის ცნება. მარტივი და შედგენილი გამონათქვამები

გამონათქვამი რომ განვსაზღვროთ, ამისათვის განვიხილოთ ქვემოთ მოყვანილი წინადადებები და მივუთითოთ, რომელი მათგანია ჭეშმარიტი და რომელი მცდარი.

1. თბილისი საქართველოს დედაქალაქია;
2. სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი უდრის 180^0-ს;
3. რიცხვი 9 მარტივი რიცხვია;
4. 68 იყოფა 17-ზე?

პირველი ორი წინადადება ჭეშმარიტია, ხოლო მესამე მცდარი, მეოთხე წინადადების მიმართ არ დაისმის კითხვა, იგი მცდარია, თუ ჭეშმარიტი.

აქ ჩამოთვლილი პირველი სამი წინადადება არის გამონათქვამი, გამონათქვამის ლოგიკური მნიშვნელობა „ჭეშმარიტი", „მცდარი" შემოკლებულად ასე ჩაიწერება „ჭ", „მ".

წინადადება არ იქნება გამონათქვამი, თუ მის მიმართ არ შეიძლება დაისვას კითხვა - ჭეშმარიტია თუ მცდარი. ამიტომ მეოთხე მაგალითში მოყვანილი კითხვითი წინადადება არ არის გამონათქვამი. გამონათქვამები არ არის კითხვითი წინადადებები, განსაზღვრება, მოწოდება და სხვ.

ზემოთ მოყვანილის საფუძველზე გამონათქვამი ასე შეიძლება განისაზღვროს: გამონათქვამი არის ნებისმიერი წინადადება ან მტკიცება, რომელიც შეიძლება კლასიფიცირებული იყოს როგორც ჭეშმარიტი ან მცდარი და არავითარ შემთხვევაში ორივე ერთდროულად.

გამონათქვამები შეიძლება ჩაიწეროს სხვადასხვა სახით, მაგალითად:

$3+2=5$ (ჭეშმარიტი გამონათქვამია).

$-5<-8$ (მცდარი გამონათქვამია).

H_2SO_4 მჟავაა (ჭეშმარიტი გამონათქვამია).

ერთი და იგივე გამონათქვამი შეიძლება გამოვთქვათ სხვადასხვა ტოლძალოვანი საშუალებით, მაგალითად, გამონათქვამი „თუ სამს მივუმატებთ ოთხს, მივიღებთ შვიდს". „3+4=7", „III+IV=VII" ერთი და იგივეა.

ორ გამონათქვამს ეწოდება ტოლძალოვანი, თუ აზრობრივად ისინი ერთდროულად

ორივე ჭეშმარიტი ან ორივე მცდარია. მაგალითად, „გუშინ იყო ხუთშაბათი" ან "ხვალ იქნება შაბათი". თუ დღეს პარასკევია, მაშინ ორივე გამონათქვამი იქნება ჭეშმარიტი, სხვა დღე ორივე მცდარია. გამონათქვამებს აღნიშნავენ ლათინური ანბანის დიდი ასოებით: A,B,C,..

თუ მოცემულია A და B გამონათქვამები, მათგან შეგვიძლია შევადგინოთ ახალი გამონათქვამები, რისთვისაც უნდა გამოვიყენოთ ლოგიკური კავშირები: "და", "ან", "არა", "თუ.. მაშინ" და "მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც". მაგალითად, ვთქვათ, A არის გამონათქვამი "ამჟამად მზიანია" და B გამონათქვამი "ამჟამად ქარიანია", მაშინ გამონათქვამი "A და B" იქნება: "ამჟამად მზიანი და ქარიანია", გამონათქვამი "თუ A არა, მაშინ არც B" ნიშნავს "თუ ამჟამად მზიანი არაა, მაშინ არც ქარიანია". ასეთ გამონათქვამებს უწოდებენ შედგენილს, ხოლო მასში შემავალ A და B-ს ელემენტარულ (მარტივ) გამონათქვამებს.

2. გამონათქვამთა უარყოფა

A გამონათქვამის უარყოფა არის ახალი გამონათქვამი, რომელიც მცდარია, როცა A ჭეშმარიტია და ჭეშმარიტია, როცა A მცდარია. A გამონათქვამის უარყოფას აღნიშნავენ $\bar{A}$-თი. მაგალითად, A: „27 იყოფა 3-ზე" მაშინ $\bar{A}$: „27 არ იყოფა 3-ზე", ე.ი. თუ რომელიმე გამონათქვამი ჭეშმარიტია, მაშინ მისი უარყოფა მცდარია და პირიქით. ეს დასკვნა შეგვიძლია ჩავწეროთ ცხრილის სახით (ნახ. 18)

A	$\bar{A}$
ჭ	მ
მ	ჭ

ნახ. 18

ასეთ ცხრილებს უწოდებენ ჭეშმარიტობის ცხრილს. $\bar{A}$ გამონათქვამის უარყოფა აღნიშნავენ $\bar{\bar{A}}$ ორმაგი უარყოფა. ნებისმიერი A გამონათქვამი ტოლძალოვანია $\bar{\bar{A}}$ გამონათქვამისა, ე.ი. $A=\bar{\bar{A}}$; A: „17 მარტივი რიცხვია"; $\bar{A}$: „17 არ არის მარტივი რიცხვი"; $\bar{\bar{A}}$ „17 მარტივი რიცხვია".

3. გამონათქვამთა კონიუნქცია

ვთქვათ, ორი A და B მარტივი გამონათქვამი შეერთებულია "და" კავშირით, მაშინ მივიღებთ ახალ გამონათქვამებს A და B, რომელსაც A და B გამონათქვამთა კონიუნქციას უწოდებენ და აღნიშნავენ $A \wedge B$. იკითხება ასე: A და B. ორი გამონათქვამის კონიუნქცია ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე გამონათქვამი ჭეშმარიტია. თუ ერთი მაინც მცდარია, მაშინ კონიუნქცია მცდარია. ჭეშმარიტობის ცხრილ

წარმოდგენილია მე-19 ნახაზზე.

A	B	$A \wedge B$
ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ
მ	ჭ	მ
მ	მ	მ

ნახ. 19.

მაგალითად, ორი გამონათქვამის "3<8" და "8<11" კონიუნქცია იქნება "$3<8 \wedge 8<11$", კონიუნქცია ჭეშმარიტია, რადგან მასში შემავალი თითოეული გამონათქვამი ჭეშმარიტია. ეს კონიუნქცია შეგვიძლია ჩავწეროთ მოკლედ „3<8<11", ე.ი. ორმაგი რიცხვითი უტოლობა წარმოადგენს ორ უტოლობათა კონიუნქციას. A და B გამონათქვამთა კონიუნქციას ახასიათებს კომუტატიურობის თვისება

$$A \wedge B = B \wedge A.$$

თუ გვაქვს სამი გამონათქვამი A, B და C, მაშინ მართებულია ასოციატიურობის კანონი

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C).$$

ეს ტოლობები ადვილად მტკიცდება, თუ მათთვის შევადგენთ ჭეშმარიტობის ცხრილს. შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი შემდეგი გამონათქვამებისათვის $A \wedge \bar{A}$.

A	$\bar{A}$	$A \wedge \bar{A}$
ჭ	მ	მ
მ	ჭ	მ

ნახ. 20

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $A \wedge \bar{A}$ ფორმულა იგივურად მცდარია და ასე ჩაწერენ

$A \wedge \bar{A} =$ მ.

4. გამონათქვამთა დიზიუნქცია

ორი A და B მარტივი გამონათქვამი შეერთებული ლოგიკური „ან" კავშირით გვაძლევს ახალ გამონათქვამს, რომელსაც A და B გამონათქვამთა დიზიუნქციას უწოდებენ და აღნიშნავენ $A \vee B$, იკითხება A ან B. A და B გამონათქვამთა დიზიუნქცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის მცდარი, როცა ორივე მცდარია, დანარჩენ ყველა შემთხვევაში

ჭეშმარიტია.

დიზიუნქციის ჭეშმარიტობის ცხრილი წარმოდგენილია 21-ე ნახაზზე.

A	B	$A \vee B$
ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	ჭ
მ	ჭ	ჭ
მ	მ	მ

ნახ. 21

ორი გამონათქვამიდან „5>2" და „5=2" შევადგინოთ დიზიუნქცია "5>2 ან 5=2", ეს გამონათქვამი ჭეშმარიტია: ეს ორი უტოლობა ასე ჩაიწერება $5 \geq 2$, ე.ი. არამკაცრი უტოლობა წარმოადგენს მკაცრი უტოლობის და ტოლობის დიზიუნქციას.

გამონათქვამთა დიზიუნქციას ახასიათებს კომუტატიურობის და ასოციატიურობის თვისებები

$$A \vee B = B \vee A;$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C).$$

ეს ტოლობები ადვილად მტკიცდება ჭეშმარიტობის ცხრილების შედგენით.

დისტრიბუტიულობის კანონები, რომლებიც აკავშირებს გამონათქვამების კონიუნქციას და დიზიუნქციას, გამოისახება შემდეგი ტოლობებით:

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C);$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C).$$

დავამტკიცოთ პირველი ტოლობა ჭეშმარიტობის ცხრილის შედგენით.

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	ტოლობა
ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ=ჭ
ჭ	ჭ	მ	ჭ	მ	მ	მ	მ	მ=მ
ჭ	მ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	მ	ჭ	ჭ=ჭ
ჭ	მ	მ	ჭ	მ	მ	მ	მ	მ=მ
მ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	მ	ჭ	ჭ	ჭ=ჭ
მ	ჭ	მ	ჭ	მ	მ	მ	მ	მ=მ
მ	მ	ჭ	მ	მ	მ	მ	მ	მ=მ
მ	მ	მ	მ	მ	მ	მ	მ	მ=მ

ნახ 22.

შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი $A \vee A$ დიზიუნქციისათვის,

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
ჭ	მ	ჭ
მ	ჭ	ჭ

ნახ. 23

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $A \vee \overline{A}$ ფორმულა იგივურად ჭეშმარიტია და ასე ჩაწერენ $A \vee \overline{A} =$ ჭ.

მოქმედებანი დიზიუნქცია, კონიუნქცია და უარყოფა ერთმანეთთან დაკავშირებულია დე მორგანის ფორმულებით:

ა) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$;

ბ) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.

ამ ფორმულების სისწორეში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ შევადგენთ ჭეშმარიტობის ცხრილებს.

5. გამონათქვამთა იმპლიკაცია

განვიხილოთ შედგენილი გამონათქვამი, რომელიც ორი მარტივი გამონათქვამისაგან შედგება და გამოყენებულია ლოგიკური კავშირი „თუ... მაშინ“. მაგალითად, ვთქვათ, გვაქვს ორი გამონათქვამი: A. „გუშინ იყო კვირა“, B. „მე არ ვიყავი სამუშაოზე“ და ისინი დაკავშირებული არიან ასე: „თუ A, მაშინ B“. გამონათქვამს „თუ A, მაშინ B“-ს უწოდებენ A და B გამონათქვამთა იმპლიკაციას და აღნიშნავენ $A \Rightarrow B$.

A გამონათქვამს ეწოდება პირობა, B-ს — დასკვნა. $A \Rightarrow B$ იმპლიკაცია მცდარია მხოლოდ მაშინ, როცა A გამონათქვამი ჭეშმარიტია და B მცდარი, დანარჩენ შემთხვევაში კი ჭეშმარიტია. იმპლიკაციის ჭეშმარიტობის ცხრილი წარმოდგენილია 24-ე ნახაზზე.

A	B	$A \Rightarrow B$
ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ
მ	ჭ	ჭ
მ	მ	ჭ

ნახ. 24

A და B გამონათქვამთა იმპლიკაცია შეიძლება გამოვსახოთ უარყოფისა და დიზიუნქციის საშუალებით $A \Rightarrow B = (\overline{A} \vee B)$. ამ გამოსახულებისათვის შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი (ნახ. 25).

A	B	$\overline{A}$	$A \Rightarrow B$	$\overline{A} \vee B$
ჭ	ჭ	მ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ	მ	მ
მ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
მ	მ	ჭ	ჭ	ჭ

ნახ. 25

თუ გვაქვს იმპლიკაცია $A \Rightarrow B$ და შევუცვლით ადგილებს პირობას და დასკვნას, მივიღებთ ახალ იმპლიკაციას $B \Rightarrow A$, რომელსაც უწოდებენ მოცემულის შებრუნებულ იმპლიკაციას, თუ $A \Rightarrow B$, იმპლიკაცია ჭეშმარიტია, მაშინ $B \Rightarrow A$ ყოველთვის ჭეშმარიტი არ არის.

გვაქვს აგრეთვე შემდეგი ტოლობები:

$$A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A};$$

$$\overline{A \Rightarrow B} = \overline{A} \vee B;$$

6. გამონათქვამთა ეკვივალენცია

A და B მარტივი გამონათქვამებიდან შევადგინოთ გამონათქვამი, რომელიც ასე წაიკითხება „A მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა B“, ამ გამონათქვამს უწოდებენ A და B გამონათქვამთა ეკვივალენციას და ასე აღნიშნავენ $A \Leftrightarrow B$. $A \Leftrightarrow B$ ეკვივალენცია ჭეშმარიტია, როცა A და B გამონათქვამები ორივე ჭეშმარიტია ან ორივე მცდარი, დანარჩენ შემთხვევაში მცდარია. ჭეშმარიტობის ცხრილი წარმოდგენილია 26-ე ნახაზზე.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ
მ	ჭ	მ
მ	მ	ჭ

ნახ. 26

განვიხილოთ შემდეგი გამონათქვამი: „რიცხვი 126 იყოფა 3-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ციფრების ჯამი იყოფა სამზე“. შემოვიტანოთ აღნიშვნა A: „126 იყოფა სამზე“, B: „126-ის ციფრების ჯამი იყოფა სამზე“, მაშინ მოცემული გამონათქვამი ასე ჩაიწერება $A \Leftrightarrow B$. როცა $A =$ ჭ და $B =$ ჭ, მაშინ $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A) =$ ჭ.

§2. პრედიკატი და მათზე მოქმედებანი

1. პრედიკატის განსაზღვრა

გამონათქვამის ლოგიკაში არ განიხილებოდა მარტივი წინადადებების შიგა სტრუქტუ-
რა; პრედიკატთა ლოგიკა კი განიხილავს მარტივი წინადადებების სახელდობრ შიგა აგებუ-
ლებას. ამრიგად, პრედიკატთა ლოგიკა წარმოადგენს გამონათქვამთა ალგებრის განვითა-
რებას. ცნობილია, რომ მარტივი წინადადების ძირითადი წევრებია ქვემდებარე და შემა-
სმენელი. პრედიკატთა ლოგიკაში პირველს სუბიექტს, ხოლო მეორეს პრედიკატს უწოდე-
ბენ. პრედიკატი გვიჩვენებს სუბიექტის მოქმედებას, ე.ი. პრედიკატი გვაწვდის ინფორმაციას
სუბიექტის შესახებ.

განვიხილოთ საგანთა რაიმე $X=\{x_1;x_2;x_3;x_4\}$ სიმრავლე. თითოეულ საგანს შეი-
ძლება ახასიათებდეს რაიმე თვისება ან ეს საგნები განსაზღვრულ დამოკიდებულებაში
(მიმართებაში) იყოს ერთმანეთთან. მაგალითად, თუ N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა,
მაშინ მართებული იქნება გამონათქვამები: 4 ლუწი რიცხვია, 13 მარტივი რიცხვია, 20 მეტია
19-ზე, 15 იყოფა 5-ზე. ცხადია, პირველ ორ მაგალითში საქმე გვაქვს რიცხვთა თვისებებთან,
ხოლო მომდევნო მაგალითებში ორი რიცხვი ერთმანეთთან გარკვეულ დამოკიდებუ-
ლებაშია.

თვისება „არის ლუწი რიცხვი“ აღვნიშნოთ F-ით, ხოლო დამოკიდებულება "არის მეტი"
- p-თი. ჩანაწერი $F(x)$ აღნიშნავს, რომ „x არის ლუწი რიცხვი“, სადაც F პრედიკატის
სიმბოლოა, ხოლო x ობიექტია. მოცემულ შემთხვევაში F **პრედიკატის თვისებაა.**

ახლა განვიხილოთ p დამოკიდებულება „არის მეტი“. იგი ამყარებს დამოკიდებულებას
ორ x და y საგანს შორის. ჩვენს შემთხვევაში ჩანაწერი $p(x,y)$ ნიშნავს, რომ „x არის
მეტი y-ზე“. ამ შემთხვევაში p არის პრედიკატი **დამოკიდებულება.**

როგორც ვხედავთ, პრედიკატში გვაქვს ცვლადი, რომელიც ღებულობს კონკრეტულ
მნიშვნელობას რაიმე სიმრავლიდან. თვითონ პრედიკატი წარმოადგენს განუსაზღვრელ
გამოსახულებას, ხოლო ცვლადის ადგილზე მუდმივის ჩასმის შემდეგ პრედიკატი იქცევა
გამონათქვამად, რომელიც იქნება ან მცდარი, ან ჭეშმარიტი. მაგალითად, პოეტმა x-მა
დაწერა ლექსი „ფიქრი მტკვრის პირას“ - არ წარმოადგენს გამონათქვამს, რადგან მასში
არ არის მითითებული, რომელმა პოეტმა დაწერა ეს ლექსი. ცხადია, x ცვლადისათვის
არსებობს განსაზღვრის არე, საიდანაც იგი ღებულობს კონკრეტულ მნიშვნელობას. ამ
შემთხვევაში განსაზღვრის არე იქნება პოეტების სიმრავლე.

X= {წერეთელი, ბარათაშვილი, ჭავჭავაძე,...}. თუ შევეცდებით და x-ის ადგილზე
ჩავსვამთ სიტყვა ჭავჭავაძეს, მივიღებთ მცდარ გამონათქვამს, ხოლო თუ ჩავსვამთ ბარათა-
შვილს, მაშინ გამონათქვამი „პოეტმა ბარათაშვილმა დაწერა ლექსი "ფიქრი მტკვრის პირას"
იქნება ჭეშმარიტი გამონათქვამი.

როგორც ვხედავთ, პრედიკატი შეიძლება შეიცავდეს ერთ ცვლადს, ორ ცვლადს და n
ცვლადს. შესაბამისად ასეთ პრედიკატებს ერთადგილიან, ორადგილიან და n-ადგილიან

პრედიკატს უწოდებენ. n-ადგილიანი პრედიკატი ასე ჩაიწერება $F(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$.

არსებობს 0-ადგილიანი პრედიკატი, რომელიც არ შეიცავს ცვლადს და იგი უბრალოდ
ჭეშმარიტი ან მცდარი გამონათქვამია.

ყოველივე ზემოაღნიშნულის საფუძველზე შეიძლება მოვიყვანოთ შემდეგი **განსა-
ზღვრება: პრედიკატი არის ფუნქცია ერთი ან რამდენიმე ცვლადით, რომელიც განსაზღვრუ-
ლია მოცემულ X სიმრავლეზე და ღებულობს მნიშვნელობას ორელემენტიანი {ჭ,მ,}
სიმრავლიდან.**

ხშირად პრედიკატს უწოდებენ აგრეთვე ლოგიკურ ან გამონათქვამიან ფუნქციას,
ხოლო X სიმრავლეს - საგნობრივ არეს. x-ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომელთა ჩასმა
პრედიკატში მას გადააქცევს ჭეშმარიტ გამონათქვამად, უწოდებენ პრედიკატის ჭეშმარი-
ტობის სიმრავლეს და აღნიშნავენ T ასოთი. ჩვენს მაგალითში T={ბარათაშვილი}, ცხადია,
რომ

$$T\subseteq X.$$

პრედიკატს, რომელიც შეიცავს x ცვლადს და რომლის განსაზღვრის არეა X, ასე
აღნიშნავენ: $A(x)\ x\in X$, $B(x);\ x\in X$, რომელიც შემდეგნაირად იკითხება: „X სიმრავლეზე
მოცემულია $A(x)$ და $B(x)$ პრედიკატი“.

ერთცვლადიან პრედიკატად შეიძლება მივიღოთ $x^2-7x+12=0$ განტოლება. ამ პრე-
დიკატის ჭეშმარიტობის სიმრავლეა {3,4}. ორ **A(x)** და **B(x)** პრედიკატს **ეწოდება
ეკვივალენტური, თუ ორივე განისაზღვრება ერთსა და იმავე X სიმრავლეზე და ჭეშმარი-
ტობის სიმრავლეც ერთი და იგივე აქვთ.** ეკვივალენტობას ასე სწერენ $A(x)\sim B(x)$. მაგა-
ლითად, $3x-5=7$ განტოლება ეკვივალენტურია $3x=12$ განტოლების, რადგან ორივესათვის
X=R და T={4}, ე.ი. ეს განტოლებები ეკვივალენტური პრედიკატებია.

2. კვანტორები

განვიხილოთ შემდეგი წინადადება: „ყველა ლუწი რიცხვი იყოფა 2-ზე“. ვთქვათ, $F(x)$
პრედიკატი აღნიშნავს „x არის ლუწი რიცხვი“, ხოლო $S(x)$ პრედიკატი აღნიშნავს, რომ
x იყოფა 2-ზე“. რადგან მოცემული წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ საქმე ეხება
ყველა ლუწ რიცხვს, ამიტომ ეს უკანასკნელი ლოგიკური ოპერაცია იმპლიკაციის გამოყე-
ნებით შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

„ყველა x-სათვის $F(x)\Rightarrow S(x)$“. სიტყვათა შერწყმას „ყველა x-სათვის“ ეწოდება
ზოგადობის კვანტორი და მას შემდეგნაირად აღნიშნავენ $\forall x$. შესაბამისად საწყისი წინა-
დადება ლოგიკურად ასე ჩაიწერება: $\forall x(F(x)\Rightarrow S(x))$. ზოგადობის $\forall$ სიმბოლო წარმოა-
დგენს ინგლისური სიტყვის ALL (ყველა) პირველ ასოს ამოტრიალებულს.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი წინადადება: „ზოგიერთი ნატურალური რიცხვი მარტივია“.
ვთქვათ, $P(y)$ პრედიკატი აღნიშნავს, რომ „y არის ნატურალური რიცხვი“, ხოლო $Q(y)$ - "y

არის მარტივი რიცხვი", მაშინ მოცემული წინადადება ლოგიკური ოპერაციაა და კონიუნქციის გამოყენებით შემდეგნაირად ჩაიწერება: „არსებობს ისეთი y, რომ $P(y) \wedge Q(y)$". სიტყვათა შერწყმას „არსებობს y" არსებობის კვანტორს უწოდებენ და $\exists y$-ით აღნიშნავენ.

შესაბამისად საწყისი წინადადების ფორმალიზებული სახეა შემდეგი გამოსახულება: $\exists y(P(y) \wedge Q(y))$. არსებობის $\exists$ სიმბოლო წარმოადგენს ინგლისური სიტყვის Exist (არსებობს) პირველ ასოს ამოტრიალებულს.

ზოგადობისა და არსებობის კვანტორები შეიძლება ერთნაირად ზემოქმედებდნენ როგორც ერთ x, ასევე რამდენიმე $x, y, z\ldots$ ცვლადზე, მაგალითად $\forall x \forall y\, P(x,y)$; $\exists x \exists y \exists z\, P(x,y,z)$. ასეთ ცვლადებს, რომლებზედაც ზემოქმედებენ კვანტორები, ბმული ცვლადები ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში გვაქვს თავისუფალი ცვლადი. მაგალითად, ფორმულებში

$$\forall x_1\, F(x_1, x_2, z);\ \exists x_1 (x_1, x_2)$$

x_1 ცვლადი არის ბმული, ხოლო x_2 და z თავისუფალი ცვლადებია.

ვთქვათ, რაიმე $F(x)$ პრედიკატი განსაზღვრულია A სიმრავლეზე. მაშინ გამონათქვამი $\forall x\, F(x)$ იქნება ჭეშმარიტი, თუ $F(a)$ ჭეშმარიტია ყოველი $a \in A$-სათვის. გამონათქვამი $\exists x\, F(x)$ იქნება ჭეშმარიტი, თუ $F(a)$ ჭეშმარიტია თუნდაც ერთი $a \in A$-სათვის. წინააღმდეგ შემთხვევაში $\forall x\, F(x)$ და $\exists x\, F(x)$ გამონათქვამები იქნება მცდარი. განვიხილოთ მრავალადგილიანი პრედიკატი $\forall x_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, რომელიც განსაზღვრულია A სიმრავლეზე.

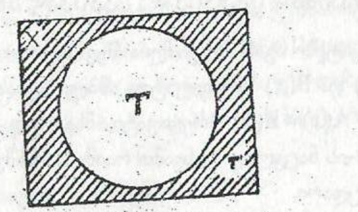
აქ კვანტორი ზემოქმედებს x_1 ცვლადზე. ამ შემთხვევაში $\forall x_1 F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ პრედიკატი იქნება ჭეშმარიტი, თუ ნებისმიერი $a_1 \in A$, $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ჭეშმარიტია, ხოლო, თუ არსებობს ისეთი $a_1 \in A$, რომლის დროსაც $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ მცდარია, მაშინ $\forall x_1 F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ იქნება მცდარი.

3. ორი პრედიკატის კონიუნქცია და დიზიუნქცია

პრედიკატი შეიძლება იყოს მარტივი და შედგენილი. შედგენილ პრედიკატში გამოყენებულია ლოგიკური კავშირები, იმ აზრით, როგორც ლოგიკური გამონათქვამების დროს. ასე, მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული შედგენილი პრედიკატებია. „რიცხვი x ლუწია და იყოფა 3-ზე", „$x>2$ ან $x=2$"; „$x>3$ ან $x<-2$."

ვთქვათ, X სიმრავლეზე განსაზღვრულია პრედიკატი $A(x)$, მის უარყოფას უწოდებენ $\overline{A(x)}$ პრედიკატს, რომელიც განსაზღვრულია იმავე X სიმრავლეზე.

თუ T არის $A(x)$ პრედიკატის ჭეშმარიტობის სიმრავლე, როცა $x \in X$, მაშინ $\overline{A(x)}$ პრედიკატის ჭეშმარიტობის $x \in X$ სიმრავლეს უწოდებენ T სიმრავლის დამატებას X სიმრავლემდე და აღნიშნავენ T'. გეომეტრიულად იგი გამოისახება 27-ე ნახაზზე.

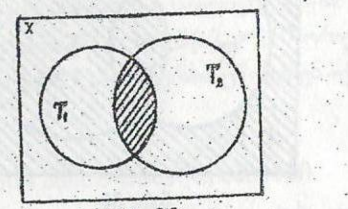


ნახ. 27

ვთქვათ, X სიმრავლეზე მოცემულია ორი პრედიკატი $A(x)$ და $B(x)$ $x \in X$, მაშინ მათი კონიუნქცია არის პრედიკატი $A(x) \wedge B(x)$. ის ჭეშმარიტია x-ის იმ მნიშვნელობებზე X სიმრავლიდან, როცა ჭეშმარიტია ორივე პრედიკატი

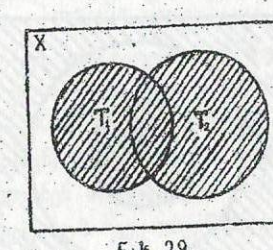
$$A(x) \text{ და } B(x).$$

ეს კი ნიშნავს, რომ კონიუნქციის ჭეშმარიტობის სიმრავლე არის თანაკვეთა $A(x)$ და $B(x)$ პრედიკატების ჭეშმარიტობის სიმრავლისა, ე.ი. თუ T_1 არის $A(x)$ ჭეშმარიტობის სიმრავლე, T_2 არის $B(x)$-ის ჭეშმარიტობის სიმრავლე და $x \in X$. მაშინ $A(x) \wedge B(x)$ კონიუნქციის ჭეშმარიტობის სიმრავლე იქნება $T = T_1 \cap T_2$ (ნახ. 28).



ნახ. 28

$A(x) \vee B(x)$ $x \in X$ პრედიკატს $A(x)$ და $B(x)$ პრედიკატების დიზიუნქცია ეწოდება. ის ჭეშმარიტია მაშინ, როცა ჭეშმარიტია $A(x)$ და $B(x)$, $x \in X$ პრედიკატებიდან ერთი მაინც $T = T_1 \cup T_2$ (ნახ. 29).



ნახ. 29

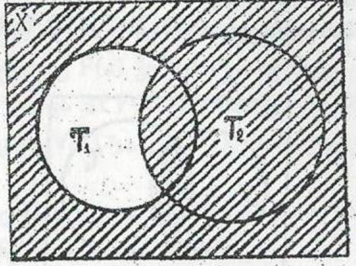
4. ორი პრედიკატის იმპლიკაცია და ეკვივალენცია

$A(x)$ და $B(x)$ პრედიკატებისაგან შეგვიძლია შევადგინოთ პრედიკატი $A(x)\Rightarrow B(x)$, $x\in X$. მას უწოდებენ $A(x)$ და $B(x)$ პრედიკატთა იმპლიკაციას, რომელიც ასე იკითხება: „თუ $A(x)$, მაშინ $B(x)$“. $A(x)\Rightarrow B(x)$ პრედიკატი, მსგავსად გამონათქვამებისა, ხდება მცდარი, როდესაც მასში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ რაიმე a მნიშვნელობას და $A(a)$ იქნება ჭეშმარიტი, ხოლო $B(a)$ მცდარი.

თუ $A(x)$-ის ჭეშმარიტობის სიმრავლეს აღვნიშნავთ T_1-ით და $B(x)$-ისას T_2-ით, მაშინ $A(x)\Rightarrow B(x)$ პრედიკატი მცდარია $T_1\cap T_2'$ სიმრავლეზე, სადაც T_2' არის T_2 სიმრავლის დამატება X სიმრავლემდე.

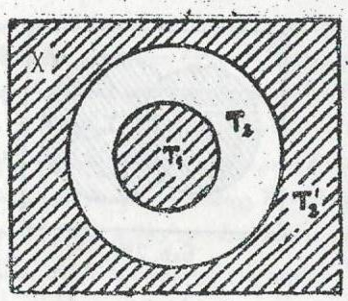
$$(T_1\cap T_2')'=T_1'\cup(T_2')'=T_1'\cup T_2,$$

ე.ი. $A(x)\Rightarrow B(x)$ პრედიკატის ჭეშმარიტობის სიმრავლე არის გაერთიანება $B(x)$ პრედიკატის ჭეშმარიტობის სიმრავლისა $A(x)$ პრედიკატის ჭეშმარიტობის T_1 სიმრავლის T_1' დამატებასთან. გეომეტრიულად იგი გამოსახულია 30-ე ნახაზზე.



ნახ. 30

$A(x)\Rightarrow B(x)$ ჭეშმარიტია ყოველი $x\in X$-თვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A(x)$-ის ჭეშმარიტობის სიმრავლე არის $B(x)$-ის ჭეშმარიტობის სიმრავლის ქვესიმრავლე, ე.ი. $T_1\subset T_2$.



ნახ. 31

იმ შემთხვევაში, როდესაც $A(x)\Rightarrow B(x)$ იმპლიკაცია ჭეშმარიტია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის X სიმრავლიდან, მაშინ ამბობენ, რომ $B(x)$ პრედიკატი ლოგიკურად გამომდინარეობს $A(x)$ პრედიკატიდან და $B(x)$ პრედიკატს უწოდებენ აუცილებელ პირობას $A(x)$-თვის, ხოლო $A(x)$ პრედიკატს - საკმარის პირობას $B(x)$ პრედიკატისათვის. მაგალითად,

„თუ (x) რიცხვი ნატურალურია, მაშინ ის მთელია“.

$A(x)$: „x რიცხვი ნატურალურია“.

$B(x)$: „x რიცხვი მთელია“.

აქედან ცხადია, რომ $B(x)$ პრედიკატი გამომდინარეობს $A(x)$ პრედიკატიდან, ე.ი. „x რიცხვი მთელია“ აუცილებელი პირობაა „x რიცხვი ნატურალურია“ პრედიკატის და პრედიკატი „x რიცხვი ნატურალურია“ საკმარისი პირობაა „x რიცხვი მთელია“ პრედიკატისა. თუ $A(x)$ და $B(x)$ პრედიკატები, რომლებიც განსაზღვრულია X სიმრავლეზე, ეკვივალენტურია, ე.ი. მათ აქვთ ერთი და იგივე ჭეშმარიტობის სიმრავლე $T_1=T_2$, მაშინ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის ჭეშმარიტია ეკვივალენცია

$$A(x)\Leftrightarrow B(x).$$

მაგალითად, $A(x)$ „ნატურალური რიცხვები, რომლებიც იყოფა 10-ზე“.

$B(x)$ „ნატურალური რიცხვები, რომლებიც ბოლოვდება 0-ით“.

ყველა ნატურალური რიცხვისათვის $A(x)\Leftrightarrow B(x)$ $x=150$ ორივე ჭეშმარიტია. $x=152$ ორივე მცდარია. თუ $A(x)\Leftrightarrow B(x)$, $x\in X$, მაშინ ერთს უწოდებენ აუცილებელ და საკმარის პირობას მეორისათვის.

5. თეორემა, თეორემის აგებულება და სახეები

მათემატიკაში, როგორც წესი, განიხილავენ წინადადებებს, რომლებსაც თეორემებს უწოდებენ. თეორემები სხვადასხვა შინაარსისაა, მაგრამ ყველა ისინი წარმოადგენენ გამონათქვამებს, რომელთა ჭეშმარიტობაში ვრწმუნდებით მსჯელობით, დამტკიცების გზით. ამ მიზნით საჭიროა განვიხილოთ თეორემის აგებულება გამონათქვამის, პრედიკატის და კვანტორების გამოყენებით.

განვიხილოთ შემდეგი თეორემა: „თუ ნატურალურ რიცხვში ციფრთა ჯამი უდრის 9-ს, მაშინ ეს რიცხვი იყოფა 9-ზე“. ეს თეორემა შედგება ორი წინადადებისაგან „ნატურალურ რიცხვში ციფრთა ჯამი უდრის 9-ს“ და „ნატურალური რიცხვი იყოფა 9-ზე“. პირველ წინადადებას პირობას უწოდებენ, ხოლო მეორეს - დასკვნას. მოცემული თეორემის პირობა და დასკვნა წარმოადგენენ პრედიკატებს, რომელთა განსაზღვრის არე არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე. თუ პირველს აღვნიშნავთ $A(x)$-ით და მეორეს $B(x)$-ით, მაშინ ამ ორი პრედიკატის იმპლიკაცია $A(x)\Rightarrow B(x)$. პრედიკატი „თუ $x\in N$ რიცხვში ციფრთა ჯამი იყოფა 9-ზე, მაშინ x რიცხვი იყოფა 9-ზე“. რადგან ეს გამონათქვამი

ჭეშმარიტია $x\in N$-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, ამიტომ, თუ გამოვიყენებთ ზოგადობის კვანტორს, თეორემა ასე ჩაიწერება

$$(\forall x\in N)\ (A(x)\Rightarrow B(x)).$$

„თუ ნატურალურ რიცხვში ციფრთა ჯამი იყოფა 9-ზე, მაშინ ეს რიცხვი იყოფა 9-ზე". აქედან შეგვიძლია გამოვყოთ სამი ნაწილი;

1) თეორემის პირობა, $A(x)$, რომელიც განსაზღვრულია N-ზე.

2) თეორემის დასკვნა, $B(x)$, რომელიც განსაზღვრულია N-ზე.

3) განმარტებითი ნაწილი, სადაც აღწერილი უნდა იყოს იმ სიმრავლის ელემენტები, რომლებსაც ვიყენებთ თეორემაში და რა უნდა გვესმოდეს გამოყენებულ სიმბოლოებში. მაგალითად, თუ ჩვენ მიერ ჩამოყალიბებულ თეორემაში პირობას და დასკვნას ადგილებს შევუცვლით და განმარტებით ნაწილს უცვლელს დავტოვებთ, მივიღებთ ახალ თეორემას $(\forall x\in N)(B(x)\Rightarrow A(x))$, რომელიც სიტყვიერად ასე ჩამოყალიბდება: „თუ ნატურალური რიცხვი იყოფა 9-ზე, მაშინ მისი ციფრთა ჯამი იყოფა 9-ზე". მიღებულ თეორემას უწოდებენ მოცემულის შებრუნებულს, ჩვენ მიერ აქ ჩამოყალიბებული თეორემა „თუ ნატურალურ რიცხვში ციფრთა ჯამი იყოფა 9-ზე, მაშინ თვით ეს რიცხვიც იყოფა 9-ზე" და მისი შებრუნებული თეორემა ორივე ჭეშმარიტია, მაგრამ ეს ყოველთვის ასე არ ხდება. მაგალითად, თეორემა „ვერტიკალური კუთხეები ტოლია". შებრუნებული თეორემა ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: „თუ კუთხეები ტოლია, მაშინ ისინი ვერტიკალურია", რაც ყოველთვის ჭეშმარიტი არ არის. თუ თეორემაში $(\forall x\in X)\ (B(x)\Rightarrow A(x))$ პირობას და დასკვნას შევცვლით მათი უარყოფებით, მივიღებთ ახალ თეორემას, რომელსაც შებრუნებული თეორემის მოპირდაპირეს უწოდებენ.

სავარჯიშოები

1. ჩაწერეთ მათემატიკური სიმბოლოების გამოყენებით წინადადებები. მიუთითეთ მათ შორის ჭეშმარიტი და მცდარი გამონათქვამები:

ა) 2 რიცხვისა და 7 რიცხვის ჯამი 9-ის ტოლია.

ბ) x რიცხვისა და 2 რიცხვის ჯამი 10-ის ტოლია.

გ) 7 რიცხვისა და 12 რიცხვის სხვაობა 5-ის ტოლია.

დ) 4-ის 0-ზე გაყოფისას განაყოფი 0-ის ტოლია.

2. განსაზღვრეთ შემდეგი გამონათქვამებიდან რომელია ჭეშმარიტი და რომელი მცდარი:

ა) ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის სწორია უტოლობა $x+1>x$.

ბ) არსებობს ისეთი ნატურალური x რიცხვი, რომ $x-2=7$.

გ) ნებისმიერი სამკუთხედი მართკუთხაა.

დ) ნებისმიერი სამი მონაკვეთი შეიძლება იყოს სამკუთხედის გვერდები.

3. დაამტკიცეთ, რომ $A=\overline{\overline{A}}$.

4. შეადგინეთ ჭეშმარიტობის ცხრილი შემდეგი გამოსახულებებისათვის:

$\overline{A}\wedge B$, $A\vee(B\wedge C)$, $\overline{A}\wedge\overline{B}$, $\overline{A\wedge B}$, $A\Rightarrow B\vee C$, $(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$.

5. ჭეშმარიტობის ცხრილის დახმარებით დაამტკიცეთ:

ა) $A\Rightarrow B=\overline{A}\vee B$;

ბ) $\overline{A\wedge B}=\overline{A}\vee\overline{B}$; $\overline{A\vee B}=\overline{B}\wedge\overline{A}$;

გ) $A\wedge B=B\wedge A$;, $A\vee B=B\vee A$;

დ) $A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$;

ე) $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

6. Z სიმრავლეზე მოცემულია პრედიკატი $A(x)$: „$x+1<7$". ეკუთვნის თუ არა მის ჭეშმარიტობის სიმრავლეს რიცხვები: - 3;5;12:2:7.

7. იპოვეთ შემდეგი პრედიკატების ჭეშმარიტობის სიმრავლეები:

$A(x)$: „$x<8$", $x\in N$;

$B(x)$: „$5<x\leq 11$", $x\in N$;

$C(x)$: „$x\cdot y=18$", $x\in Z$, $y\in Z$.

8. $A=\{1;2;3;\ldots;20\}$ სიმრავლეზე მოცემულია პრედიკატები: $A(x)$: „x რიცხვი 5-ის ჯერადია". $B(x)$: „x რიცხვი ლუწია", $C(x)$: „x რიცხვი 3-ის ჯერადია", $D(x)$: „x რიცხვი შედგენილია". ჩამოაყალიბეთ შემდეგი პრედიკატები და იპოვეთ მათი ჭეშმარიტობის სიმრავლეები:

ა) $A(x)\wedge B(x)$; $C(x)\wedge D(x)$; $A(x)\vee B(x)$; $C(x)\vee D(x)$.

ბ) $A(x)\wedge B(x)\wedge D(x)$; $A(x)\vee B(x)\vee D(x)$.

III თავი

სიმრავლეთა თეორიისა და ლოგიკის გამოყენება სასკოლო მათემატიკის კურსის ცნებათა განსაზღვრისას

რიცხვითი ტოლობა და უტოლობა

§1. გამოსახულებანი. რიცხვითი ტოლობა და უტოლობა

1. რიცხვითი გამოსახულება. რიცხვითი ტოლობა და უტოლობა

ამოცანების ამოხსნისას ზოგჯერ აღნიშნავენ მხოლოდ მოქმედებებს და შემდეგ ანგარიშობენ შედეგს. მიიღება ჩანაწერები, რომლებსაც **რიცხვით გამოსახულებებს** ვუწოდებთ. განვიხილოთ ამოცანა: „გიამ მოიტანა 6 სტაფილო, ხოლო ნანამ - 4. 8 სტაფილო მისცეს ბაჭიებს. რამდენი სტაფილო დარჩათ?“. ჩანაწერი 6+4-8, რომელიც მიიღება ამ ამოცანის ამოხსნისას, არის რიცხვითი გამოსახულება. რიცხვითი გამოსახულების მაგალითებია: 2+3; 8-5; 4×7; 20:4; 3^2+1; $2\sqrt{9}-\frac{1}{2}$; 3/15:3; 1/-10; $\frac{3\cdot2-1}{2}$; $15-(12\cdot3-6:3)$.

თუ რიცხვით გამოსახულებაში შევასრულებთ იქ აღნიშნულ მოქმედებებს, მივიღებთ რიცხვს, რომელსაც ეწოდება **რიცხვითი გამოსახულებების მნიშვნელობა** ან მოკლედ **გამოსახულების მნიშვნელობა**. მაგალითად, $3+4^2$ მნიშვნელობაა 19, ხოლო $18:6+2\sqrt{9}-\log_5 25$-ისა უდრის 7-ს. გამოსახულება შესაძლოა შეიცავდეს მხოლოდ ერთ რიცხვს; ასეთ შემთხვევაში გამოსახულების მნიშვნელობა არის თვითონ ეს რიცხვი. გვხვდება ისეთი გამოსახულება, რომელსაც არა აქვს რიცხვითი მნიშვნელობა, მაგალითად, 8:(4-4) და $1+\sqrt{-16}$ გამოსახულებებს არა აქვს მნიშვნელობა, რადგანაც პირველ მათგანში შეუძლებელია შევასრულოთ ნულზე გაყოფა, ხოლო მეორისათვის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს მეორე ხარისხის ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან. 5:3 გამოსახულებას მთელ რიცხვთა სიმრავლეში მნიშვნელობა არა აქვს, რადგანაც შედეგი მთელი რიცხვი არ არის. მაგრამ, თუ ამ გამოსახულებას განვიხილავთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, მაშინ მისი მნიშვნელობა არსებობს და უდრის $1\frac{2}{3}$-ს.

თუ ორი რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა ერთნაირია, მაშინ ამბობენ, რომ რიცხვითი გამოსახულებანი ტოლია; მაგალითად, ტოლია გამოსახულებანი: 8-3 და 2^2+1; $3\sqrt{16}$ და 72:6, ე.ი. გვაქვს გამოსახულებათა შორის ტოლობის მიმართება (ე.ი. ასეთ მიმართებას ახასიათებს რეფლექსურობის, სიმეტრიულობის და ტრანზიტულობის თვისებანი). რიცხვით გამოსახულებათა სიმრავლე შეიძლება დავყოთ კლასებად, სადაც თითოეულ კლასში გაერთიანდება ისეთი გამოსახულებანი, რომლებსაც ერთნაირი მნიშვნელობანი აქვთ.

თუ ორ რიცხვით გამოსახულებას ერთმანეთთან შევაერთებთ ტოლობის ნიშნით, მივიღებთ **გამონათქვამს, რომელსაც ეწოდება რიცხვითი ტოლობა.** რიცხვითი ტოლობა, როგორც ნებისმიერი გამონათქვამი, შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი ტოლობა (სწორი) ან მცდარი (არასწორი). ანალოგიურად: თუ ორ რიცხვით გამოსახულებას ერთმანეთთან შევაერთებთ უტოლობის რომელიმე ნიშნით „>“ (მეტია), „<“ (ნაკლებია), მივიღებთ **გამონათქვამს, რომელსაც ეწოდება რიცხვითი უტოლობა.** რიცხვითი უტოლობის მაგალითებია:

17>12- ჭეშმარიტია, $\sqrt{3}>1$**- ჭეშმარიტია,**

$2^2<3$**- მცდარია,** $3<\sqrt{6}$ **- მცდარია.**

მოვიგონოთ ჭეშმარიტ ტოლობათა და უტოლობათა ის თვისებები, რომლებიც ცნობილია სასკოლო მათემატიკის კურსიდან (a, b, c ასოებით აღნიშნულია ნამდვილი რიცხვები).

2. რიცხვით ტოლობათა ძირითადი თვისებები

1. თუ ჭეშმარიტი ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, ისევ მივიღებთ ჭეშმარიტ ტოლობას, ე.ი. თუ $a=b$, მაშინ $a+m=b+m$. მაგალითად, 18+6=48:2 ჭეშმარიტი ტოლობაა და ამიტომ ტოლობაც

$$18+6+(-3)=48:2+(-3)$$

აგრეთვე ჭეშმარიტია. მართლაც, თუ შევასრულებთ მითითებულ მოქმედებებს, მივიღებთ 21=21-ს. მათემატიკური ლოგიკის სიმბოლოებით ეს თვისება ჩაიწერება იმპლიკაციის სახით

$$\forall a\,\forall b\,\forall m\in R\ (a=b)\Rightarrow(a+m)=(b+m),$$

რომელიც ჭეშმარიტია მისი განსაზღვრის მთელ **R** სიმრავლეში.

შენიშვნა: შემდეგში, გადმოცემის გამარტივების მიზნით, ლოგიკურ სიმბოლოებს არ გამოვიყენებთ.

2. თუ ჭეშმარიტი ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე რიცხვზე, ისევ მივიღებთ ჭეშმარიტ ტოლობას, ე.ი. თუ $a=b$, მაშინ $am=bm$. მაგალითად, $3\cdot2=10-4$ ჭეშმარიტი ტოლობაა და ამიტომ ტოლობაც $3\cdot2\cdot(-\frac{1}{2})=(10-4)\cdot(-\frac{1}{2})$ ჭეშმარიტი იქნება, მართლაც, მოქმედებათა შესრულების შემდეგ მივიღებთ, რომ -3=-3-ს.

3. რიცხვითი უტოლობანი და მათი ძირითადი თვისებები

ნებისმიერ ორ ციფრს (რიცხვს) შორის შეიძლება დავამყაროთ მოწესრიგების დამოკიდებულება. ვთქვათ, ორი a და b ციფრი განსხვავებული ციფრებია. ვეცადოთ გამოვარკვიოთ, რის საფუძველზე შეიძლება მოხდეს ეს განსხვავება. ცხადია, a და b ციფრი ორივე

საწყისს იღებს ციფრი 1-დან. ორივე ციფრის აგება ერთნაირად მიმდინარეობს მანამ, სანამ ერთ-ერთი მათგანისათვის აგების პროცესი არ გაწყდება, ხოლო მეორისათვის ისევ გრძელდება (აგებაში იგულისხმება,რომ ციფრი 3 აიგება სამი ერთიანით- 111, ციფრი 5 აიგება ხუთი ერთიანით- 11111 და ა.შ.).

აგების გაწყვეტის პროცესის დადგომის მომენტში ერთი ციფრი ემთხვევა მეორის ნაწილს, ანუ უფრო ზუსტად, ამ ციფრის აგება ემთხვევა მეორე ციფრის აგების საწყის მონაკვეთს.

თუ a ციფრი ემთხვევა b ციფრის ნაწილს, მაშინ ამბობენ, რომ a ნაკლებია b-ზე ან b მეტია a-ზე. ფორმალურად ეს ასე ჩაიწერება

$a<b$ ან $b>a$.

ზემოთ თქმულის საფუძველზე შეიძლება განვსაჯოთ, რომ ნებისმიერი ორი ციფრისათვის (რიცხვისათვის) ადგილი ექნება შემდეგი დამოკიდებულებებიდან ერთ-ერთს

$a=b;\ a<b;\ b<a.$

უნდა ითქვას, რომ თითოეული შემთხვევა გამორიცხავს ორ დარჩენილ შემთხვევას.

ახლა განვიხილოთ რიცხვითი უტოლობის ძირითადი თვისებები.

1. ნებისმიერი a და b რიცხვისათვის: თუ $a>b$, მაშინ $b<a$. მაგალითად, $-5>-7$; $-7<-5$.

2. ნებისმიერი a,b და c რიცხვისათვის: თუ $a>b$, $b>c$, მაშინ $a>c$. მაგალითად, $-8>-15$ და $-15>-20$, მაშინ $-8>-20$.

3. ნებისმიერი a რიცხვისათვის: $a\not>a$ და $a\not<a$.

მაგალითად,

$5\not<5$ და $5\not>5$.

4. ნებისმიერი a,b და c რიცხვისათვის: თუ $a>b$, მაშინ $a+c>b+c$, ე.ი. თუ არატოლ რიცხვებს მივუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, ამით უტოლობის ნიშანი არ შეიცვლება (მეტი რიცხვი დარჩება მეტ რიცხვად).

მაგალითად, $5>-1$ მივუმატოთ -8, მივიღებთ $-3>-9$.

შედეგი: უტოლობის ერთი ნაწილიდან მეორეში შეიძლება გადავიტანოთ ნებისმიერი რიცხვი, ამასთანავე მისი ნიშანი უნდა შეიცვალოს მოპირდაპირეთი.

5. ა) ნებისმიერი a,b და $c>0$ რიცხვისათვის: თუ $a>b$, მაშინ $ac>bc$.

ბ) ნებისმიერი a,b და $c<0$ რიცხვისათვის: თუ $a>b$, მაშინ $ac<bc$.

სიტყვიერად: ა) თუ უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე დადებით რიცხვზე, ამით უტოლობის ნიშანი არ შეიცვლება.

ბ) თუ უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე უარყოფით რიცხვზე, ამით უტოლობის ნიშანი შეიცვლება მოპირდაპირეთი.

მაგალითად, თუ $-2>-3$ უტოლობის ნაწილებს გავამრავლებთ 5-ზე, მივიღებთ $-10>-15$, ხოლო, თუ გავამრავლებთ -5-ზე, მაშინ $10<15$.

შენიშვნა: ჩამოთვლილი 1-5 თვისებანი გამოთქმულია, როცა უტოლობაშია მეტობის

(">") ნიშანი, თუმცა ისინი მართებულია მაშინაც, როცა უტოლობებშია ნაკლებობის ("<") ნიშანი.

6. ნებისმიერი a,b,c და d რიცხვისათვის: თუ $a>b$ და $c>d$, მაშინ $a+c>b+d$.

თუ $a<b$ და $c<d$, მაშინ $a+c<b+d$.

სიტყვიერად: ერთნაირი აზრის ორი უტოლობა შეიძლება წევრ-წევრად შევკრიბოთ.

მაგალითად,

ა) $$+\begin{array}{r}15>10\\ -6>-8\\ \hline 9>2\end{array}$$ ბ) $$+\begin{array}{r}-8<-3\\ 5<11\\ \hline -3<8\end{array}$$

7. ნებისმიერი a,b,c და d რიცხვისათვის: თუ $a>b$ და $c<d$, მაშინ $a-c>b-d$.

სიტყვიერად: მოპირდაპირე აზრის ორი უტოლობა შეიძლება გამოვაკლოთ წევრ-წევრად და გამოკლებისას შევინარჩუნოთ იმ უტოლობის ნიშანი, რომლისგანაც ვაკლებთ მეორე უტოლობას.

მაგალითად,

ა) $$-\begin{array}{r}15>17\\ -7<-4\\ \hline 22>21\end{array}$$ ბ) $$-\begin{array}{r}-18<-12\\ 8>5\\ \hline -26<-17\end{array}$$

შენიშვნა: ვთქვათ, $5>3$ უტოლობას უნდა გამოვაკლოთ $-10<-2$ უტოლობა. გამოკლება შეიძლება შევცვალოთ შეკრებით, თუ, მაგალითად, პირველ უტოლობას დავტოვებთ უცვლელად, ხოლო მეორეს გავამრავლებთ -1-ზე, რადგან მივიღებთ ერთნაირი აზრის უტოლობებს: $5>3$ და $10>2$.

8. თუ $a>b>0$ და n ნატურალური რიცხვია, მაშინ $a^n>b^n$, $n\in N$. მაგალითად, თუ $5>3$, მაშინ $5^2>3^2$, ხოლო, თუ

$$\frac{2}{3}<1, \quad \text{მაშინ} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3<1.$$

რიცხვით ტოლობებსა და უტოლობებზე, ისე, როგორც ნებისმიერ გამონათქვამებზე, შეიძლება შევასრულოთ კონიუნქციის, დიზიუნქციის და სხვა ლოგიკური ოპერაციები. მოვიტანოთ მაგალითები.

1) გამონათქვამი „$8+2=10$ და $5\cdot3=15$" არის ტოლობათა კონიუნქცია და იწერება ასე

$$\begin{cases}8+2=10\\ 5\cdot3=15\end{cases}$$

ეს კონიუნქცია ჭეშმარიტია, რადგან მასში შემავალი ორივე უტოლობა ჭეშმარიტია.

2) გამონათქვამი „$-2>-7$ და $15>7$ და $11<28$" არის უტოლობათა კონიუნქცია

$$\begin{cases} -2>-7 \\ 15>7 \\ 11<28 \end{cases}$$

მოცემული კონიუნქცია ჭეშმარიტია, რადგან ჭეშმარიტია ის უტოლობები, რომლებისგანაც იგი შედგება.

3) კონიუნქცია

$$\begin{cases} 3>1 \\ -4<-8 \\ 16>8 \\ 3=3 \end{cases}$$

მცდარია, რადგანაც მასში შედის მცდარი უტოლობა -4<-8.

შენიშვნა: მოვიგონოთ, რომ გამონათქვამი „$b>a$ და $b<c$" არის უტოლობათა კონიუნქცია და იწერება აგრეთვე ორმაგი უტოლობის სახით $a<b<c$.

4) გამონათქვამი „3>8 ან -4<2" არის უტოლობათა დიზიუნქცია და იწერება კვადრატული ფრჩხილით

$$\left[\begin{array}{l} 3>8 \\ -4<2 \end{array}\right.$$

აღნიშნული დიზიუნქცია ჭეშმარიტია, რადგანაც შეიცავს ჭეშმარიტ უტოლობას -4<2.

5) დიზიუნქცია

$$\left[\begin{array}{l} 3>7 \\ -2<-15 \\ 1>2 \end{array}\right.$$

მცდარია, რადგან მასში შემავალი ყველა უტოლობა მცდარია.

6) დიზიუნქცია $5\geq 3$, რომელიც შეიძლება ასე დავწეროთ:

$$\left[\begin{array}{l} 5>3 \\ 5=3 \end{array}\right.$$

ჭეშმარიტია,

7) ორი უტოლობის „$3\geq 1$" და „$3\leq 5$" კონიუნქცია იწერება ორმაგი უტოლობის სახით $1\leq 3\leq 5$.

ამ კონიუნქციას შემდეგნაირადაც წერენ

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3>1 \\ 3=1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 5>3 \\ 5=3 \end{array}\right. \end{cases}$$

4. გამოსახულება ცვლადით. იგივური გარდაქმნები

განვიხილოთ ამოცანა: „მშენებლობაზე ჯერ 18 მანქანა აგური მოიტანეს, შემდეგ x მანქანა. თითოეულ მანქანაში 3 ტ აგური იყო. რამდენი ტონა აგური მოიტანეს მშენებლობაზე?". მშენებლობაზე მოიტანეს $(18+x)$ მანქანა აგური. რადგან თითოეულ მანქანაზე 3 ტ იყო, სულ მოტანილია $3\cdot(18+x)$ ტ აგური.

თუ მიღებულ გამოსახულებაში x ასოს ადგილზე ჩავსვამთ 12-ს, მივიღებთ რიცხვით გამოსახულებას $3\cdot(18+12)$, რომლის მნიშვნელობაა 90. თუ x-ის ადგილზე ჩავსვამთ 21-ს, მივიღებთ სხვა რიცხვით გამოსახულებას - $3\cdot(18+21)$, რომლის მნიშვნელობაა 117. ვხედავთ, რომ გამოსახულებაში ასო x მიუთითებს ადგილს, სადაც დასაშვებია ჩავსვათ კონკრეტული რიცხვები. საზოგადოდ, გამოსახულებაში შემავალ ასეთ ასოს უწოდებენ ცვლადს, ხოლო თვითონ გამოსახულებას - გამოსახულებას ცვლადით.

გამოსახულება შეიძლება იყოს ერთი, ორი, სამი და ა.შ. რამდენიმე ცვლადით. მაგალითად, $3\cdot(18+x)$ გამოსახულება შეიცავს ერთ ცვლადს - x-ს, ხოლო $x+2y$ გამოსახულება - ორ ცვლადს, x-ს და y-ს. გამოსახულება ცვლადით შეიძლება განვიხილოთ სხვადასხვა რიცხვით სიმრავლეზე. მაგალითად, თუ $2(x+1)$ გამოსახულება მოცემულია მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე, ეს ნიშნავს, რომ x-ის ადგილზე ამ გამოსახულებაში შეგვიძლია ჩავსვათ მხოლოდ მთელი რიცხვი (ნებისმიერი). თუ $2(x-1)$ გამოსახულება მოცემულია ყველა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე, მაშინ x-ის ნაცვლად შეიძლება მასში ჩავსვათ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი. შევთანხმდეთ და ზოგადად გამოსახულება x ცვლადით აღვნიშნოთ $f(x)$-ით ან $\varphi(x)$-ით და ა.შ.

ვთქვათ, $\varphi(x)=5x^2+2x$ გამოსახულება მოცემულია ყველა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე. ადვილი შესამჩნევია, რომ x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის $\varphi(x)$-ს აქვს მხოლოდ ერთი გარკვეული რიცხვითი მნიშვნელობა. მაგალითად, თუ $x=3$, მაშინ მისი მნიშვნელობა იქნება $\varphi(3)=5\cdot 3^2+2\cdot 3=51$, ხოლო თუ $x=-1$, მაშინ $\varphi(-1)=5\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)=3$.

ვთქვათ, მოცემულია გამოსახულება $f(y)=\frac{3y}{2y-1}$, სადაც $y\in R$. ამ გამოსახულებას ყოველი y-ისათვის, გარდა $y=\frac{1}{2}$-ისა, აქვს რიცხვითი მნიშვნელობა. მართლაც, თუ $y=\frac{1}{2}$-ს, მაშინ ვღებულობთ რიცხვით გამოსახულებას

$$\frac{3\cdot\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{3}{2}}{1-1},$$

რომელსაც არა აქვს რიცხვითი მნიშვნელობა - ნულზე გაყოფა არ შეიძლება; ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ, როცა $y=\frac{1}{2}$-ს, მაშინ $\frac{3y}{2y-1}$ გამოსახულებას აზრი არა აქვს.

მაგალითად, $g(x)=\sqrt{x-1}$ გამოსახულებას, თუ იგი მოცემულია ყველა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე, აზრი არა აქვს x ცვლადის ყველა იმ მნიშვნელობისათვის, რომელიც ნაკლებია 1-ზე.

საზოგადოდ, თუ რომელიმე X სიმრავლეზე მოცემულია $f(x)$ გამოსახულება, მაშინ $x \in X$ ყველა მნიშვნელობას, რომლისთვისაც $f(x)$-ს აზრი აქვს, უწოდებენ ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს ან $f(x)$ გამოსახულების განსაზღვრის არეს.

მაგალითად, გამოსახულების $\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{z-3}}$ განსაზღვრის არეა $]3;+\infty[$ სიმრავლე, რომელსაც აღნიშნავენ ასეც

$$\{z \mid z \in R,\ z>3\}$$

გამოსახულება $\frac{x}{x-y}$, სადაც $x,y \in R$ შეიცავს ორ ცვლადს და აქვს აზრი, თუ $x \neq y$. მისი განსაზღვრის არე შეიძლება აღვნიშნოთ ასე

$$\{x;y \mid x,y \in R,\ x \neq y\}.$$

განსაზღვრება: $f(x)$-სა და $\varphi(x)$-ს **გამოსახულებებს ეწოდებათ იგივურად ტოლი X სიმრავლეზე, თუ: 1) ორივე გამოსახულებაში ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე ერთი და იგივეა და 2) X სიმრავლეზე ნებისმიერი $x=a$ რიცხვისათვის $f(a)=\varphi(a)$ ტოლობა ჭეშმარიტია.** მოვიტანოთ იგივურად ტოლ გამოსახულებათა მაგალითები.

მაგალითი 1. თუ $f(x)=5x+2x$ და $\varphi(x)=7x$ გამოსახულებანი მოცემულია R სიმრავლეზე, მაშინ ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე ორივე გამოსახულებისათვის ერთი და იგივეა (R) და ამ R სიმრავლის ნებისმიერი $x=a$ რიცხვისათვის მათი მნიშვნელობები ტოლია $5a+2a=7a$.

მაგალითი 2. ვთქვათ, რაციონალურ Q სიმრავლეზე მოცემულია გამოსახულებანი

$$f(x)=\frac{x}{x-1} \qquad \text{და} \qquad \varphi(x)=\frac{x^2}{x(x-1)}.$$

$f(x)$ გამოსახულებაში ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეა ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა 1-ისა. ხოლო $\varphi(x)$ გამოსახულებაში ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე გარდა 0-ისა და 1-ისა, რადგანაც ამ გამოსახულებათა განსაზღვრის არეები სხვადასხვაა, ამიტომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეზე ისინი იგივურად ტოლი არ არიან. მაგრამ, თუ აღნიშნულ გამოსახულებებს განვიხილავთ ყველა რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლეზე, გარდა 0-ისა და 1-ისა, მაშინ $f(x)$ და $\varphi(x)$ იგივურად ტოლი იქნება.

მაგალითი 3. გამოსახულებანი $2x$ და $\sqrt{4x^2}$ R სიმრავლეზე იგივურად ტოლი არ არიან, რადგანაც მათი მნიშვნელობათა არეები სხვადასხვაა. $2x$-ის მნიშვნელობათა არე ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო მეორის არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე. ამასთანავე, ცხადია, რომ აღნიშნული გამოსახულებები $A=\{x \mid x \in R,\ x \geq$ სიმრავლეზე იგივურად ტოლია.

თუ ორ იგივურად ტოლ გამოსახულებას შევაერთებთ ტოლობის ნიშნით, მივიღებთ ტოლობას, რომელსაც იგივეობა ეწოდება. მათემატიკური სიმბოლოების საშუალებით შეიძლება დავწეროთ, რომ $\forall x \in R\ (5x+2x=7x)$.

ეს იგივეობა (გამონათქვამი), როგორც ზემოთ დავრწმუნდით, ჭეშმარიტია. მათემატიკაში განიხილება ისეთი იგივეობები, რომლებიც შეიცავენ ერთს, ორს და ა.შ. რამდენიმე ცვლადს. მაგალითად, $a+b=b+a$ ტოლობა, სადაც a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, არის ჭეშმარიტი იგივეობა, რომელიც ლოგიკური სიმბოლოების გამოყენებით ასე დაიწერება

$$\forall a \forall b\ (a+b=b+a),\ a,b \in R.$$

იგივეობათა მაგალითებია აგრეთვე ჩანაწერები

$$\forall a \forall b\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2;\ \ a,b \in R;$$

$$\forall a \forall b\ (a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)\ a,b \in R \text{ და სხვა} \ldots$$

მათ უწოდებენ შემოკლებული გამრავლების ფორმულებს და წარმოადგენენ ჭეშმარიტ იგივეობებს.

იგივეობათა დაწერის თუ წაკითხვის დროს სიტყვებს „ყოველი x-სათვის X სიმრავლიდან", „ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისათვის" ჩვეულებრივად გამოტოვებენ, მაგრამ მათ ყოველთვის გულისხმობენ.

ერთი გამოსახულების შეცვლას იგივურად მისი ტოლი გამოსახულებით გამოსახულების იგივურად გარდაქმნას უწოდებენ. მაგალითად, $x-7y+2z+4y$ გამოსახულებაში $-7y+4y$ შეიძლება შევცვალოთ $-3y$-ით და მივიღებთ

$$x-7y+2z+4y=x-3y+2z.$$

§2. განტოლება

1. ერთცვლადიანი განტოლებანი

განვიხილავთ განტოლებებს მხოლოდ ერთი ცვლადით. ვთქვათ, X სიმრავლეზე მოცემულია ორი გამოსახულება x ცვლადით: $f(x)$ და $\varphi(x)$. $f(x)=\varphi(x)$ პრედიკატს ეწოდება განტოლება, თუ დასმულია ამოცანა: იპოვეთ x ცვლადის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთა პრედიკატში ჩასმით მიიღება ჭეშმარიტი რიცხვითი ტოლობა. რიცხვს X სიმრავლიდან, რომელიც x-ის ადგილზე ჩასმით $f(x)=\varphi(x)$ განტოლებას გადააქცევს ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად, განტოლების ფესვს ან განტოლების ამონახსნს უწოდებენ. ყველა ასეთი რიცხვის სიმრავლეს მოცემული განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება. ამოხსნათ განტოლება - ეს ნიშნავს ვიპოვოთ მისი ამონახსნთა სიმრავლე, მაგალითად, თუ R სიმრავლეზე მოცემულია $f(x)=5x$ და $\varphi(x)=3x-2$ გამოსახულებანი, მაშინ $5x=3x-2$ განტოლება გადაიქცევა ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად, როცა $x=-1$-ს რიცხვი - 1 არის განტოლების ფესვი - ამონახსნი. საზოგადოდ განტოლებას R სიმრავლეზე შეიძლება

ჰქონდეს ერთი, ორი, რამდენიმე და უსასრულოდ მრავალი ფესვი, შესაძლოა, სრულიადაც
არ ჰქონდეს ფესვი. მაგალითად, $5x=3x-2$ განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი $x=-1$
და ფესვთა ამ სიმრავლეს ჩაწერენ ასე $\{-1\}$; R სიმრავლეზე განტოლებას $x^2-x-2=0$ აქვს
ორი ფესვი $x_1=2$ და $x_2=-1$, ხოლო

$$(x-1)(x+2)(x-\frac{1}{2})(x+\sqrt{2})=0 \text{ განტოლებას}$$

ოთხი ფესვი $x_1=1$; $x_2=-2$; $x_3=\frac{1}{2}$ და $x_4=-\sqrt{2}$.

ამ განტოლების ფესვთა სიმრავლეები შესაბამისად დაიწერება ასე $\{-1;2\}$ და

$\{-2;-\sqrt{2};\frac{1}{2};1\}$.

$x^2+3=0$ $x\in R$ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს ან, როგორც ამბობენ, მისი ამონა-
ხსნთა სიმრავლე ცარიელია. თუ განვიხილავთ განტოლებას

$$3(x-4)=3x-12 \quad x\in R,$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მას აკმაყოფილებს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი,
ე.ი. ამ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა R. მათემატიკური ლოგიკის ენაზე ეს ნიშნავს,
რომ ჭეშმარიტია გამონათქვამი

$$\forall x\in R \quad (3(x-4)=3x-12).$$

თუ, მაგალითად, მთელ რიცხვთა Z სიმრავლეზე მოცემულია განტოლება

$$(x-2)(x-\frac{1}{2})=0,$$

მაშინ მისი ამონახსნია მხოლოდ $x=2$-ს, რადგანაც $\frac{1}{2}\notin Z$.

ყოველ განტოლებასთან (პრედიკატთან) დაკავშირებულია ორი სიმრავლე:
1. ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე (პრედიკატის განსაზღვრის სიმრავლ
S_0 არე);
2. განტოლების ფესვთა S სიმრავლე (პრედიკატის) ჭეშმარიტების სიმრავლეა; ამასთან
$S\subset S_0$. $\frac{x}{x-1}-1=\frac{4}{x^2-1}$ განტოლებაში $x\neq\pm1$, ე.ი. x ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათ
სიმრავლეა $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, ხოლო მისი ფესვების სიმრავლეა $S=\{3\}$.

სასკოლო მათემატიკის კურსიდან ცნობილია, რომ განტოლების ამოხსნა არის გარდა
ქმნათა ისეთი პროცესი, როცა მოცემულ განტოლებას თანდათანობით ვცვლით მარტივ
განტოლებით მანამ, ვიდრე არ მივიღებთ განტოლებას, რომლის ამოხსნა ჩვენთვის ცნო
ბილია. წესები, რომელთა საშუალებითაც გასრულებთ გადასვლას ერთი განტოლებიდა
მეორეზე- უფრო მარტივზე, ემყარება განტოლებათა ტოლძალოვნების ცნებას და თეო
რემებს განტოლებათა ტოლძალოვნების შესახებ.

განსაზღვრება. ორ განტოლებას ტოლძალოვანი ეწოდება X სიმრავლეზე, თუ მა

ამონახსნთა სიმრავლეები ტოლია და თითოეული X-ის ქვესიმრავლეა.

განსაზღვრების თანახმად, თუ X სიმრავლეზე მოცემულია $f_1(x)=\varphi_1(x)$ და
$f_2(x)=\varphi_2(x)$ განტოლებები და ცნობილია, რომ $S_1=S_2$; S_1-ით აღნიშნულია პირველი
განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე, ხოლო S_2-ით მეორე განტოლების ამონახსნთა სი-
მრავლე, მაშინ ისინი ტოლძალოვანია ამ X სიმრავლეზე. განვიხილოთ რამდენიმე მაგა-
ლითი: 1) თუ, მაგალითად, $2x=5$ და $3x+\frac{1}{2}=8$ განტოლებები მოცემულია რაციონალურ
რიცხვთა Q სიმრავლეზე, მაშინ პირველი განტოლების ფესვების სიმრავლეა $S_1=\{2\frac{1}{2}\}$,
ხოლო მეორე განტოლების ფესვთა სიმრავლეა $S_2=\{2\frac{1}{2}\}$, რადგან $S_1=S_2$. ამიტომ მოცე-
მული განტოლებები ტოლძალოვანია რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლეზე.

2) $x^2+1=0$ და $2x+1=2x$ განტოლებები ტოლძალოვანია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრა-
ვლეზე, რადგან მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ცარიელია $S_1=S_2=\varnothing$.

3) მოცემული განტოლებები შეიძლება არ იყვნენ ტოლძალოვანი ერთ სიმრავლეზე,
მაგრამ ტოლძალოვანი იყვნენ მეორე სიმრავლეზე. მაგალითად, $2x+3(x-1)=7$ და
$(x-2)(x+\frac{1}{2})=0$ განტოლებები არ არიან ტოლძალოვანი R სიმრავლეზე. მართლაც,
პირველი განტოლების ფესვების სიმრავლეა $S_1=\{2\}$, ხოლო მეორე განტოლების $S_2=\{2;
-\frac{1}{2}\}$ და $S_1\neq S_2$. თუ იმავე განტოლებებს განვიხილავთ მთელ რიცხვთა Z სიმრავლეზე,
მაშინ $S_1=S_2=\{2\}$ და, მაშასადამე, ისინი ტოლძალოვანია ამ Z სიმრავლეზე.

გავეცნოთ თეორემებს განტოლებათა ტოლძალოვნების შესახებ.

თეორემა 1. თუ განტოლების

$$f(x)=\varphi(x), \quad x\in X \tag{1}$$

ორივე ნაწილს მივუმატებთ ისეთ $F(x)$ გამოსახულებას, რომელსაც აზრი აქვს ცვლადის
ყველა დასაშვები მნიშვნელობისათვის, მივიღებთ ახალ განტოლებას

$$f(x)+F(x)=\varphi(x)+F(x), \tag{2}$$

რომელიც X სიმრავლეზე მოცემულის ტოლძალოვანია.

დამტკიცება: ა) ვთქვათ, a რიცხვი (1) განტოლების ფესვია, მაშინ $f(a)=\varphi(a)$ ჭეშმა-
რიტი რიცხვითი ტოლობაა. რადგანაც $F(a)$ გამოსახულებას აზრი აქვს x ცვლადის ყველა
დასაშვები მნიშვნელობისათვის, ე.ი. განსაზღვრულია მთელ X სიმრავლეზე, ამიტომ
$F(a)$ გარკვეული რიცხვია. თუ რიცხვითი ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატებთ $F(a)$
რიცხვს, მივიღებთ ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობას

$$f(a)+F(a)=\varphi(a)+F(a).$$

მიღებული ტოლობა გვიჩვენებს, რომ a არის (2) განტოლების ფესვიც. მივიღებთ,

რომ (1) განტოლების ყოველი ფესვი (2) განტოლების ფესვია. X-ით აღნიშნულია x ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ბ) ვთქვათ, a რიცხვი (2) განტოლების ფესვია, მაშინ

$$f(a)+F(a)=\varphi(a)+F(a)$$

ჭეშმარიტი რიცხვითი ტოლობაა. თუ ამ რიცხვითი ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატებთ $-F(a)$ რიცხვს, მივიღებთ აგრეთვე ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობას $f(a)=\varphi(a)$, რომელიც გვიჩვენებს, რომ a არის (1) განტოლების ფესვიც. ამრიგად, მივიღებთ, რომ (1) და (2) განტოლებებს ერთი და იგივე ფესვები აქვთ და ამით დამტკიცდა მათი ტოლძალოვნება X სიმრავლეზე.

მაგალითად, თუ მოცემულია განტოლება $3x-x^3=6-x^3$ და მის ორივე ნაწილს მივუმატებთ x^3-ს, რომელსაც აზრი აქვს x-ის ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, მივიღებთ ახალ $3x=6$ განტოლებას, რომელიც R სიმრავლეზე მოცემულის ტოლძალოვანია.

შედეგი: 1-ლი თეორემის საფუძველზე ადვილად მტკიცდება, რომ განტოლების ნებისმიერი წევრი შეიძლება გადავიტანოთ მისი ერთი ნაწილიდან მეორეში მოპირდაპირე ნიშნით (დაამტკიცეთ).

თეორემა 2. თუ განტოლების

$$f(x)=y(x), \quad x\in X \qquad (3)$$

(X-ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეა) ორივე ნაწილს გავამრავლებთ ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე ან F(x) გამოსახულებაზე, რომელსაც აზრი აქვს ყოველი $x\in X$ და ამასთანავე არ ღებულობს ნულოვან მნიშვნელობას, მივიღებთ ახალ განტოლებას

$$f(x).F(x)=\varphi(x).F(x), \qquad (4)$$

რომელიც X სიმრავლეზე მოცემულის ტოლძალოვანია.

ეს თეორემა მტკიცდება 1-ლი თეორემის ანალოგიურად. მოვიყვანოთ მაგალითი: ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$\frac{5x+1}{x^2+3}=0, \quad \text{სადაც} \quad x\in R.$$

თუ ამ განტოლების ორივე ნაწილს გავამრავლებთ (x^2+3-)ზე, მივიღებთ $5x+1=0$ განტოლებას, რომელიც R სიმრავლეზე მოცემულის ტოლძალოვანია. აღნიშნული გარდაქმნა კანონიერია მე-2 თეორემის ძალით: x^2+3 გამოსახულებას აზრი აქვს x ცვლადის ყოველი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის და ამავე დროს არც ერთ შემთხვევაში არ ღებულობს ნულოვან მნიშვნელობას.

ვაჩვენოთ ამ თეორემათა გამოყენება კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, უნდა ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{5}{1+x}+\frac{4}{1-x}=-\frac{3x+1}{x^2-1}.$$

ამოხსნა: მოცემულ განტოლებაში ჯერ უნდა დავადგინოთ X ცვლადის დასაშვებ

მნიშვნელობათა სიმრავლე. თუ ამ სიმრავლეს აღვნიშნავთ X-ით, მაშინ

$$X=]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[,$$

ე.ი. x-ის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე, გარდა ± 1-სა.

I ნაბიჯი. გამოსახულება $\frac{4}{1-x}$ შევცვალოთ იგივურად მისი ტოლი $-\frac{4}{x-1}$ გამოსახულებით:

$$\frac{5}{x+1}-\frac{4}{x-1}=-\frac{3x+1}{x^2-1};$$

II ნაბიჯი. განტოლება გავანთავისუფლოთ წილადი წევრებისაგან, რისთვისაც მისი ორივე ნაწილი გავამრავლოთ (x^2-1)-ზე. აღნიშნული გარდაქმნა კანონიერია მე-2 თეორემის ძალით. გამოსახულება x^2-1 არ კარგავს აზრს არც ერთი $x\in X$-სათვის და არც ნულოვან მნიშვნელობას ღებულობს:

$$5(x-1)-4(x+1)=-3x-1;$$

III ნაბიჯი. გავხსნათ ფრჩხილები და შევაერთოთ მსგავსი წევრები:

$$4x=8;$$

IV ნაბიჯი. განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $\frac{1}{4}$-ზე, $x=2$.

მივიღეთ უმარტივესი განტოლება, რომლის ფესვია 2. მოცემული განტოლების ამოხსნისას ჩვენ შევასრულეთ ისეთი გარდაქმნები, როდესაც ყოველი შემდეგი განტოლება წინას ტოლძალოვანია და ამიტომ ბოლო განტოლების $x=2$.

ფესვი 2 არის მოცემული განტოლების ფესვიც. პასუხი დაიწერება ასე: $\{2\}$.

2. განტოლებათა სისტემა. განტოლებათა ერთობლიობა

გამოსახულება შეიძლება შეიცავდეს ორ ცვლადს, სამ ცვლადს და ა.შ. მაგალითად, გამოსახულება $3x^2-5y$ შეიცავს ორ ცვლადს, ხოლო გამოსახულება $x+y^2-4z$-სამ ცვლადს. გამოსახულებას, რომელიც შეიცავს ორ ცვლადს, ჩვენ, ზოგადად, აღვნიშნავთ $f(x,y)$-ით ან $\varphi(x,y)$-ით. ვთქვათ, მოცემულია ორი გამოსახულება:

$$f(x,y)=3x+y \text{ და } \varphi(x,y)=1-xy.$$

თუ ამ გამოსახულებებს შევაერთებთ ტოლობის ნიშნით, მივიღებთ $f(x,y)=\varphi(x,y)$ პრედიკატს, რომელსაც ეწოდება ორცვლადიანი განტოლება (ან განტოლება ორი ცვლადით). მაგალითად, $3x-1=2y$ პრედიკატი არის პირველი ხარისხის ორცვლადიანი განტოლება, ხოლო $xy=3,5x+y$ პრედიკატი - მეორე ხარისხის ორცვლადიანი განტოლება.

$f(x,y)=\varphi(x,y)$ განტოლების ამონახსნი ეწოდება ისეთ რიცხვთა $(a;b)$ წყვილს, რომლის ჩასმით განტოლებაში მივიღებთ ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობას. **ყველა ასეთი წყვილის სიმრავლეს უწოდებენ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეს.** მაგალითად, $2x-1=y$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა და მისთვის შეიძლება მოინახოს უამრავ

წყვილი; მაგალითად, (0;-1), (1;1); (-1;-3).

ვთქვათ, მოცემულია ორი ორცვლადიანი განტოლება

$$f_1(x,y)=\varphi_1(x,y) \text{ და } f_2(x,y)=\varphi_2(x,y).$$

ამ განტოლებათა კონიუნქციას

$$(f_1(x,y)=\varphi_1(x,y))\wedge(f_2(x,y)=\varphi_2(x,y))$$

ეწოდება განტოლებათა სისტემა და იწერება ფიგურული ფრჩხილით

$$\begin{cases} f_1(x,y)=\varphi_1(x,y); \\ f_2(x,y)=\varphi_2(x,y). \end{cases} \qquad (1)$$

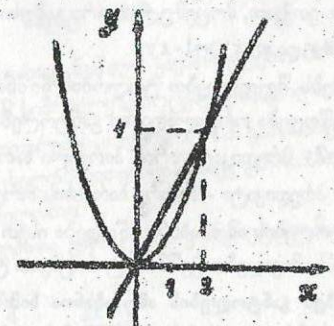
განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას საჭიროა ვიპოვოთ რიცხვთა ყველა ისეთი წყვილი, რომელთა ჩასმით სისტემის თითოეული განტოლება გადაიქცევა ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად. წყვილების ასეთ სიმრავლეს ეწოდება მოცემული სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე, ხოლო მისი პოვნის პროცესს - სისტემის ამოხსნა. განტოლებათა სისტემის (კონიუნქციის) ამონახსნთა სიმრავლე არის მისი შემადგენელი განტოლებების ამონახსნთა სიმრავლეების გადაკვეთა.

თუ, მაგალითად, (1) განტოლებათა სისტემის (პრედიკატთა კონიუნქციის) ამონახსნია რიცხვთა $(a;b)$ წყვილი, მაშინ a და b -ს ჩასმით შესაბამისად x-ისა და y-ის ადგილზე მივიღებთ ორ ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობას, ე.ი. ამ რიცხვით ტოლობათა ჭეშმარიტ კონიუნქციას და, მაშასადამე, $(a;b)$ წყვილი იქნება (1) სისტემის ამონახსნი.

მაგალითი 1. განვიხილოთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} y=x^2; \\ 2x-y=0. \end{cases}$$

ამ სისტემას ამოვხსნით გრაფიკულად, რადგან აღნიშნულ შემთხვევაში თვალსაჩინოდ დავინახავთ ამოხსნის არსს. მართლაც, თუ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ავაგებთ მოცემულ სისტემაში შემავალი თითოეული განტოლების გრაფიკს, მაშინ პარაბოლას ყოველი წერტილის კოორდინატები $y=x^2$ განტოლებას გადააქცევს ჭეშმარიტ რიცხვით



ნახ. 32

ტოლობად, ხოლო წრფის წერტილთა კოორდინატები $2x-y=0$ განტოლებაში ჩასმით ამ განტოლებას გადააქცევს ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად.

რადგანაც სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს მასში გაერთიანებულ განტოლებათა ამონახსნთა სიმრავლეების გადაკვეთას, ამიტომ ვიღებთ აგებული წირების (პარაბოლისა და წრფის) გადაკვეთის წერტილების კოორდინატებს, მივიღებთ მოცემული სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეს $S=\{(0;0);(2;4)\}$, რომლის ელემენტებია რიცხვთა წყვილები: (0;0) და (2;4).

მაგალითი 2. განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 3x+y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

ამოვხსნათ ალგებრული შეკრების მეთოდით, პირველი განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ -2-ზე და მიღებული განტოლება შევკრიბოთ სისტემის მეორე განტოლებასთან

$$\begin{cases} -6x-2y=2 \\ x+2y=3 \end{cases}$$
$$\overline{\quad -5x=5 \quad}$$

გამარტივების შემდეგ განტოლება მიიღებს სახეს

$$5x=-5,$$

საიდანაც $x=-1$, შემდეგ x-ის ნაპოვნ მნიშვნელობას ჩავსვამთ სისტემის ნებისმიერ განტოლებაში და განვსაზღვრავთ y-ს. თუ, მაგალითად, -1-ს ჩავსვამთ პირველ განტოლებაში, მაშინ $-3+y=-1$, $y=2$. მივიღებთ, რომ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი (-1;2), ე.ი. $x=-1$, $y=2$.

შემოწმება: თუ მოცემულ სისტემაში x-ისა და y-ის ადგილზე ჩავსვამთ ამ ცვლადების ნაპოვნ მნიშვნელობებს, ე.ი. შესაბამისად -1 და 2-ს, მივიღებთ ჭეშმარიტ კონიუნქციას

$$\begin{cases} 3(-1)+2=1 \\ -1+4=3, \end{cases}$$

რაც ადასტურებს, რომ მოცემული განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას შეცდომა არ დაგვიშვია. შემოწმება მიზანშეწონილია შევასრულოთ თვითკონტროლის მიზნით.

ვთქვათ, მოცემულია $f_1(x)=\varphi_1(x)$ და $f_2(x)=\varphi_2(x)$. ამ განტოლებათა დიზიუნქციას $(f_1(x)=\varphi_1(x))\vee(f_2(x)=\varphi_2(x))$ ეწოდება განტოლებათა ერთობლიობა და წერენ კვადრატული ფრჩხილებით:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=\varphi_1(x) \\ f_2(x)=\varphi_2(x) \end{array}\right.$$

x ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომელიც ჩასმის შემდეგ მოცემულთაგან რომელიმე ერთ განტოლებას მაინც გადააქცევს ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად, ეწოდება ამ განტოლებათა ერთობლიობის ამონახსნი. ყველა ასეთი ამონახსნი შეადგენს მოცემულ განტო-

ლებათა ერთობლიობის ამონახსნთა სიმრავლეს. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი

მაგალითი 1. ვთქვათ, უნდა ვიპოვოთ $(x-3)(2x-1)=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრა-
ვლე. მოცემული განტოლება ტოლძალოვანია განტოლებათა დიზიუნქციის $(x-3=0) \vee (2x-$
$1=0)$, რადგან $(x-3)(2x-1)=0$, ამიტომ $x-3=0$ ან $2x-1=0$. მაშასადამე, გვაქვს შემდეგ
განტოლებათა ერთობლიობა

$$\left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ 2x-1=0, \end{array}\right. \quad \text{საიდანაც} \quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

მივიღებთ, რომ $(x-3)(2x-1)=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე $\{3; \frac{1}{2}\}$

მაგალითი 2. $|x-3|=1$ განტოლება ტოლძალოვანია შემდეგ განტოლებათა ერთობლი-
ობის (დიზიუნქციის) $\left[\begin{array}{l} x-3=1 \\ 3-x=1, \end{array}\right.$ საიდანაც $\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2. \end{array}\right.$ მოცემული $|x-3|=1$ განტოლების
ამონახსნთა სიმრავლეა $\{4;2\}$.

§3. ცვლადიანი უტოლობა. უტოლობათა ამოხსნა

1. უტოლობა ცვლადით

ვთქვათ, X სიმრავლეზე $f(x)$ და $\varphi(x)$ გამოსახულებებს აქვს აზრი. მაშინ $f(x)>\varphi(x)$
$[f(x)<\varphi(x)]$; $x \in X$ პრედიკატს ეწოდება ერთცვლადიანი უტოლობა ან უტოლობა ერთ
ცვლადით. საზოგადოდ, უტოლობათა მიმართ შეიძლება დაისვას ორი სახის ამოცანა: 1
დაამტკიცეთ, რომ მოცემული უტოლობა ჭეშმარიტია ყველა $x \in X$-ისათვის და 2. იპოვე
$x \in X$-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთა ჩასმით მოცემული უტოლობა გადაიქცე
ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობად. პირველ შემთხვევაში ამბობენ, რომ უტოლობა უნ
დავამტკიცოთ, ხოლო მეორეში - უტოლობა უნდა ამოვხსნათ. ყოველ უტოლობასთ
$f(x)>\varphi(x)$ $[f(x)<\varphi(x)]$ დაკავშირებულია ორი სიმრავლე: ცვლადის დასაშვებ მნიშ
ლობათა სიმრავლე და სიმრავლე ცვლადის იმ მნიშვნელობებისა, რომელთა ჩასმით მიიღ
ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობა. მაგალითად, $5x<x+2$ უტოლობაში x ცვლადის დასაშ
მნიშვნელობათა სიმრავლეა R, ხოლო უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე $S=]-\infty; \frac{1}{4}[$

**განსაზღვრება: ორ ერთცვლადიან უტოლობას ეწოდება ტოლძალოვანი (X სიმ
ვლეზე), თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ტოლია და თითოეული X-ის ქვესიმრავლე**

უტოლობათა ამოხსნა ემყარება შემდეგ თეორემებს:

**თეორემა 1. თუ $f(x)>\varphi(x)$ უტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატებთ ისეთ F(
გამოსახულებას, რომელსაც აზრი აქვს x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის X სიმ
ვლიდან, მივიღებთ ახალ $f(x)+F(x)>\varphi(x)+F(x)$ უტოლობას, რომელიც მოცემულის ტ
ლძალოვანია ამ სიმრავლეზე**

თეორემა 2. თუ $f(x)>\varphi(x)$ უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე დადებით რიცხვზე ან $F(x)>0$ გამოსახულებაზე ყველა $F(x)>0$ $x \in X$-ისათვის, მივიღებთ ახალ უტოლობას $f(x) \cdot F(x)>\varphi(x) \cdot F(x)$, რომელიც მოცემულის ტოლძალოვანია X სიმრავლეზე.

თეორემა 3. თუ $f(x)>\varphi(x)$ უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე უარყოფით რიცხვზე ან $F(x)<0$ გამოსახულებაზე ყველა $x \in X$-ისათვის, მივიღებთ ახალ უტოლობას $f(x) \cdot F(x)<\varphi(x) \cdot F(x)$, რომელიც მოცემულის ტოლძალოვანია X სიმრავლეზე. ეს თეორემები ემყარება რიცხვით უტოლობათა თვისებებს და მტკიცდება განტოლებათა ტოლძალოვნების თეორემების ანალოგიურად.

დავამტკიცოთ მხოლოდ 1-ლი თეორემა. ვთქვათ, $f(x)>\varphi(x)$ უტოლობის ამონახსნია a რიცხვი, მაშინ $f(a)>\varphi(a)$ ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობაა. თუ ამ უტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატებთ $F(a)$ რიცხვს, მივიღებთ ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობას $f(a)+F(a)>\varphi(a)+F(a)$, რომელიც გვიჩვენებს, რომ a რიცხვი არის $f(x)+F(x)>\varphi(x)+F(x)$ უტოლობის ფესვიც. დავამტკიცეთ, რომ $f(x)>\varphi(x)$ უტოლობის ყოველი ფესვი არის $f(x)+F(x)>\varphi(x)+F(x)$ უტოლობის ფესვიც.

ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება, რომ, თუ a რიცხვი არის $f(x)+F(x)>\varphi(x)+F(x)$ უტოლობის ფესვი, მაშინ ის იქნება $f(x)>\varphi(x)$ უტოლობის ფესვიც და ამით დამთავრდება პირველი თეორემის დამტკიცება.

ვაჩვენოთ აღნიშნულ თეორემათა გამოყენება რამდენიმე მაგალითზე.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ უტოლობა

$$3x+10+(x-1)^2<7+(x-1)^2.$$

ამოხსნა:

1. პირველად დავადგინოთ x ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა X სიმრავლე X=R.

2. უტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატოთ $-(x-1)^2$ გამოსახულება, რომელსაც აზრი აქვს $x \in R$ ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის მივიღებთ, $3x+10<7$.

3. 10 გადავიტანოთ მარჯვენა ნაწილში და შევკრიბოთ 7-თან; $3x<-3$.

4. გავყოთ ორივე ნაწილი 3-ზე: $x<-1$. მივიღეთ უმარტივესი უტოლობა, რომელიც მოცემულის ტოლძალოვანია და რომლის ამონახსნთა სიმრავლეა $S=]-\infty; -1[$. სიმრავლე შეიძლება აღვნიშნოთ რიცხვით წრფეზე (ნახ. 33).

ნახ. 33

პასუხი: $S=]-\infty; -1[$.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ უტოლობა $\frac{3x+11}{x^2+5}>\frac{18}{x^2+5}$.

ამოხსნა:

1. x ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეა R.

2. უტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ x^2+5-ზე, მივიღებთ ახალ $3x+11>18$ უტოლობას, რომელიც მოცემულის ტოლძალოვანია (რატომ?). ამოხსნის შემდეგი მსვლელობა ცნობილია.

მაგალითი 3. $(x-0,5)(3x+5)>15(x-0,5)$ $x\in R$ უტოლობა არ არის $3x+5>15$ უტოლობის ტოლძალოვანი, რადგანაც მეორე უტოლობა მივიღეთ პირველი უტოლობის გამრავლებით გამოსახულებაზე $\frac{1}{x-0.5}$, რომელიც დადებითია x ცვლადის არაყოველი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ $3+ax<x+2a$ უტოლობა x-ის მიმართ, $x\in R$.

ამოხსნა: მოცემულ უტოლობას მივცეთ სახე $x(a-1)<2a-3$. შესაძლოა შემდეგი შემთხვევები:

1. $a-1>0$, ე.ი. $a>1$, მაშინ $x<\frac{2a-3}{a-1}$;

2. $a-1<0$, ე.ი. $a<1$, მაშინ $x>\frac{2a-3}{a-1}$;

3. $a-1=0$, ე.ი. $a=1$, მაშინ მოცემულ უტოლობას $x\cdot 0<-1$ ამონახსნი არა აქვს.

პასუხი:

$x<\frac{2a-3}{a-1}$, თუ $a>1$. $\quad x>\frac{2a-3}{a-1}$, თუ $a<1$.

უტოლობას არა აქვს ამონახსნი, თუ $a=1$.

მაგალითი 5. ამოვხსნათ $2x\geq 5$ უტოლობა.

ამოხსნა: როგორც ვიცით, ჩანაწერი $2x\geq 5$ წარმოადგენს $2x>5$ უტოლობისა და $2x=5$ განტოლების დიზიუნქციას. აღნიშნულის გამო $2x\geq 5$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე იქნება $2x>5$ უტოლობისა და $2x=5$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეთა გაერთიანება, ე.ი. $x\geq 2,5$.

პასუხი: $S=[2,5; +\infty[$

2. უტოლობათა სისტემა და უტოლობათა ერთობლიობა

ყოველი ცვლადიანი უტოლობა წარმოადგენს პრედიკატს და ამიტომ შეიძლება განვიხილოთ ასეთ უტოლობათა კონიუნქცია და დიზიუნქცია. $f_1(x)>\varphi_1(x)$ და $f_2(x)>\varphi_2(x)$ უტოლობათა კონიუნქციას ე. ი. $(f_1(x)>\varphi_1(x)\wedge f_2(x)>\varphi_2(x)$ პრედიკატს უწოდებენ უტოლობათა სისტემას და წერენ ასე

$$\begin{cases} f_1(x)>\varphi_1(x) \\ f_2(x)>\varphi_2(x) \end{cases}$$

სისტემის (კონიუნქციის) ამონახსნთა S სიმრავლე არის სისტემაში შემავალი უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეების გადაკვეთა.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ სისტემა $\begin{cases} 3x+1>-11 \\ 2x-1<2 \end{cases}$

ამოხსნა: პირველი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $S_1=[-4; +\infty[$, მეორესი $S_2=]-\infty; 1\frac{1}{2}[$, ხოლო თვით სისტემის $S=S_1\cap S_2=[-4; 1\frac{1}{2}[$.

ნახ. 34

პასუხი: $[-4; 1\frac{1}{2}[$.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ $|2x-1|<3$ უტოლობა.

ამოხსნა: მოცემული უტოლობა ტოლძალოვანია $2x-1>-3$ და $2x-1<-3$ უტოლობათა კონიუნქციის და ამიტომ უნდა ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 2x-1>-3 \\ 2x-1<3 \end{cases}$$

ამოხსნა:

I ხერხი, პირველი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $S_1=]-1; +\infty[$, მეორესი $S_2=]-\infty; 2[$, ხოლო თვით სისტემის, რომელიც S_1 და S_2-ის გადაკვეთაა, $S=]-1;2[$.

ნახ. 35

II ხერხი. თუ მოცემულ უტოლობას დავწერთ სხვა სახით $-3<2x-1<3$, მაშინ იგი მარტივად ამოიხსნება $-2<2x<4$, ე.ი. $-1<x<2$, $S=]-1; 2[$.

$f_1(x)>\varphi_1(x)$ და $f_2(x)>\varphi_2(x)$ უტოლობათა დიზიუნქციას, ე.ი. $(f_1(x)>\varphi_1(x)\vee f_2(x)>\varphi_2(x))$ პრედიკატს უტოლობათა ერთობლიობას უწოდებენ და ასე წერენ:

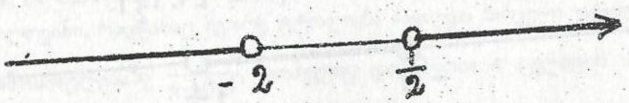
$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)>\varphi_1(x) \\ f_2(x)>\varphi_2(x) \end{array}\right.$$

უტოლობათა ერთობლიობის (დიზიუნქციის) ამონახსნთა S სიმრავლე არის ამ ერთობლიობაში შემავალი უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეების გაერთიანება

მაგალითი 3. ამოვხსნათ უტოლობათა ერთობლიობა

$$\left[\begin{array}{l}2x-1>0\\ 3x-1<-7\end{array}\right.$$

ამოხსნა: პირველი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $S_1=]\frac{1}{2};+\infty[$, მეორესი $S_2=]-\infty;-2[$, ხოლო უტოლობათა ერთობლიობისა $S=S_1\cup S_2=]-\infty;-2[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$.



ნახ. 36

პასუხი: $S=]-\infty;-2[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ $|x-1|>2$ უტოლობა.

ამოხსნა: მოცემული უტოლობა ტოლძალოვანია უტოლობათა დიზიუნქციის $(x-1<-2)\vee(x-1>2)$ და ამიტომ ამოვხსნით შემდეგ უტოლობათა ერთობლიობას:

$$\left[\begin{array}{l}x-1<-2\\ x-1>2\end{array}\right.$$

ამ უტოლობათა ერთობლიობის ამოხსნის S სიმრავლეს ადვილად ვიპოვით.

$$S=]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[.$$

მაგალითი 5. ამოვხსნათ უტოლობა $\frac{3x+1}{4-x}<0$.

ამოხსნა: მოცემული წილადი იქნება უარყოფითი, თუ

$$\begin{cases}3x+1>0\\ 4-x<0\end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases}3x+1<0\\ 4-x>0\end{cases}$$

ამრიგად, მოცემული უტოლობა $\frac{3x+1}{4-x}<0$ ტოლძალოვანია სისტემათა დიზიუნქციის:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x+1>0\\ 4-x<0\end{cases}\\ \begin{cases}3x+1<0\\ 4-x>0\end{cases}\end{array}\right.$$

ამ ერთობლიობის (დიზიუნქციის) პირველი სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეა $S_1=]4;+\infty[$, მეორესი $S_2=]-\infty;-\frac{1}{3}[$, ხოლო თვით ერთობლიობის ამონახსნთა S სიმრავლე იქნება მათი გაერთიანება.

$$S=S_1\cup S_2=]-\infty;-\frac{1}{3}[\cup]4;+\infty[.$$

პასუხი:

$$S=]-\infty;-\frac{1}{3}[\cup]4;+\infty[.$$

სავარჯიშოები

1. შეასრულეთ ყველა მითითებული მოქმედება და განსაზღვრეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

1) $\frac{1}{1-2\frac{1}{2}}-\frac{1}{1-3\frac{1}{2}}$;

2) $0,039:[\frac{1}{20}\cdot(2,31:0,077)]$;

3) $\frac{5,2+17:25-(3,36:0,3)}{(2,7:0,18)+(0,65:0,13)}\cdot 0,05$;

4) $\frac{(2,1-1,965):(0,12\cdot 0,45)}{0,0325:0,13}-\frac{1:0,25}{0,16\cdot 6,25}$;

5) $\frac{(1,25:3,75+4\frac{4}{9}:3\frac{1}{3}):1\frac{1}{9}}{\frac{5}{18}+\frac{4}{15}-0.35}:13,5$;

6) $\frac{[(3\frac{7}{24}-1\frac{41}{96}\cdot 2):4\frac{3}{8}]\cdot 0,1}{19,76\cdot 32,5-0,358}$;

7) $\frac{15,2\cdot 0,975}{2,8:0,7-0,75}+\frac{(4-1,15:0,5)\cdot 24}{0,25\cdot 20+10:100}$.

2. გამოარკვიეთ, შემდეგი გამოსახულებებიდან რომელს არა აქვს აზრი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე:

1) $\frac{5,3:2,4-1\frac{1}{12}}{0,702:1,3-0,54}$;

2) $\frac{10\frac{5}{9}-8}{9,936:1,38-3,18\cdot 2,4+0,432}$;

3) $\dfrac{5.8:7.2-\dfrac{5}{9}+\dfrac{3}{8}}{1.323:2.1+1.245}$;

4) $\dfrac{9}{2\frac{3}{7}\cdot 7+3\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-16\frac{2}{3}}$.

3. არსებობს თუ არა შემდეგი გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა მთელ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეზე?

1) $[(4-7)+3\cdot 5]\cdot(8-6)$;

2) $[(5+3):24]\cdot 16-5$;

3) $(3\cdot 7-2\cdot 8)+15\cdot 10$.

4. 56-24:2+6 გამოსახულებაში ფრჩხილები განალაგეთ ისე, რომ გამოსახულების მნიშვნელობა ტოლი იყოს:

1) 50, 2) 53, 3) 38, 4) 4, 5) 22.

5. თითოეული ამოცანის ამოხსნა ჩაწერეთ რიცხვითი გამოსახულების სახით.

1) სკოლამ ექსკურსიისათვის დაუკვეთა 32-ადგილიანი 9 ავტობუსი, ხოლო ავტობუსი მივიდა ერთით ნაკლები. რამდენი ადამიანი დაჯდებოდა თითოეულ ავტობუსში?

2) ტურისტს უნდა გაევლო 25,6 კმ; დილით ადრე 2 საათის განმავლობაში იარა 5,2 -კმ სთ სიჩქარით, შემდეგ 3 საათი - 4,.3 კმ/სთ სიჩქარით. დარჩენილი მანძილი გაიარა 1 საათში. როგორი იქნებოდა მისი სიჩქარე გზის უკანასკნელ მონაკვეთზე?

3) დედამიწის მეორე ხელოვნური თანამგზავრი იწონიდა 508,3 კგ-ს, ხოლო პირველი იყო 424,7 კგ-ით მსუბუქი. რამდენს იწონიდა მესამე ხელოვნური თანამგზავრი, თუ სამივე ერთად იწონიდა 1918 კგ-ს

6. შემდეგი გამონათქვამები ჩაწერეთ ტოლობის სახით:

1) 7 მეტია 4-ზე 3-ით;

2) 6 მეტია 1-ზე 5-ით;

3) 7 ნაკლებია 9-ზე 2-ით;

4) 3 ნაკლებია 9-ზე 6-ით.

7. შეამოწმეთ ტოლობათა ჭეშმარიტება

1) $\left[(520\cdot 0.43):0.26-217\cdot 2\frac{3}{7}\right]-\left(31.5:12\frac{3}{5}+114\cdot 2\frac{1}{3}+61\frac{1}{2}\right)=$

$$=\frac{(3.4-1.275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\left(1\frac{7}{85}+6\frac{2}{17}\right)}+0.5\cdot\left(2+\frac{12.5}{5.75+\frac{1}{2}}\right);$$

2) $\dfrac{\left[0.3275-\left(2\frac{15}{88}+\frac{4}{33}\right):12\frac{2}{9}\right]:0.07}{(13-0.416):6.05+1.92}=\left[\dfrac{(2.7-0.8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5.2-1.4):\frac{3}{70}}+0.125\right]:2\frac{1}{2}+0.43.$

8. შეადარეთ ორი რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა.

$\left(\frac{1}{14}-\frac{2}{7}:(-3)\right)-6\frac{1}{13}:\left(-6\frac{1}{13}\right)$;

$\left(7-8\frac{4}{5}\right)\cdot 2\frac{7}{9}-15:\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\right)$.

9. ცვლადის რა მნიშვნელობისთვის არა აქვს რიცხვითი მნიშვნელობა შემდეგ გამოსახულებებს:

1) $\dfrac{12x-25}{x-5}$;

2) $\dfrac{y-3}{y+5}$;

3) $\dfrac{p^2-3p+7}{p}$;

4) $\sqrt{x-3}$;

5) $\dfrac{a^2-3a+1}{a^2-16}$;

6) $\dfrac{\sqrt{x+5}}{x-2}$.

10. ჩაწერეთ ცვლადიანი გამოსახულება, რომელსაც არა აქვს აზრი:

1) $x=5$-ისათვის, 2) $y=-3$-ისათვის, 3) $x<3$-ისათვის.

11. იპოვეთ შემდეგ გამოსახულებათა განსაზღვრის არე:

1) $3x+4y-5xy$;

2) $\dfrac{x^2-4}{(x+3)(x-1)}$;

3) $\dfrac{5+2x}{x^2-3x}$;

4) $\dfrac{5-3y}{\sqrt{y-4}}$.

12. იპოვეთ ცვლადიან გამოსახულებათა მნიშვნელობების სიმრავლე:

1) $7x+2(x-4)$, თუ $x\in\{0;1,2;\ 2;\ 4;\ 6,1\}$;

2) x^2-2x-1, თუ $x\in\{-4;\ -3;\ -1;\ 0\}$;

3) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, თუ $x\in\{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

13. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები შესაბამისად ტოლია 3 და 4 სანტიმეტრის. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

14. ოსტატმა 12 დღეში გამოიმუშავა a ლარი, მისმა მოწაფემ კი 10 დღეში - b ლარი. რამდენით მეტს გამოიმუშავებდა ოსტატი 30 დღეში თავის მოწაფეზე?

15. იპოვეთ ABC სამკუთხედის AC გვერდის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ AC გვერდი 5 სმ-ით ნაკლებია AB-ზე და 10 სმ-ით ნაკლები BC გვერდზე, ხოლო ABC სამკუთხედის პერიმეტრი c სმ-ის ტოლია.

16. x-ის რა მნიშვნელობებისთვის არა აქვს აზრი შემდეგ გამოსახულებებს:

1) $\frac{3x-1}{x^2+2x+1}$; 4) $\frac{x^2+4}{x^2-4}$;

2) $\frac{2x-7}{x^2-7x+12}$; 5) $\frac{5x}{2x+5}$;

3) $\frac{3x-6}{x^2-6x+9}$; 6) $\frac{5x^3-x}{x^2+x-2}$.

17. x-ის რა მნიშვნელობებისთვის წარმოადგენს იგივეობას შემდეგი ტოლობები:

1) $8x+9+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-4}=8x+9$;

2) $\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=x+2$;

3) $\dfrac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}=\frac{1}{x}$.

18. შეამოწმეთ ტოლობათა მართებულობა:

1) $\frac{3a^2-b^3}{3a-b(a+4b)}=\frac{(4b-a)b+a}{a^2+b^2}$, თუ $a=3$, $b=-2$;

2) $\frac{x^2-y(3x-y)}{x^3-2xy(x+y)+y^3}=\frac{(x+3y)y-x^2}{x^3+x(2x+y)-y^2}$, თუ $x=-\frac{1}{3}$;

3) $\left(\frac{1}{p-2q}+\frac{6q}{4q^2-p^2}-\frac{2}{p+2q}\right):\left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2}+1\right)=-\frac{1}{2p}$;

4) $\left[\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}\cdot\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cdot\frac{a^2+c^2}{a^2c^2}\right]:\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}$, თუ $a=-2$, $b=1\frac{1}{2}$, $c=-1$.

19. დაამტკიცეთ იგივეობა:

1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$;

2) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$;

3) $\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(y-z)(y-x)}+\frac{1}{(z-x)(z-y)}=0$;

4) $\frac{x}{(x-y)(x-z)}+\frac{y}{(y-z)(y-x)}+\frac{z}{(z-x)(z-y)}=0$.

20. იპოვეთ $2x^2-7x+4=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე, თუ 1) $x\in R$, 2) $x\in Q$, 3) $x\in Z$, 4) $x\in N$, 5) $x\in\{0,1,2,3\}$.

21. მიუთითეთ სიმრავლე, რომელზედაც ტოლძალოვანია მოცემული განტოლებები:

1) $(x+4)(x-1)=5(x-1)$ და $x+4=5$;

2) $\frac{3x+4}{(x-2)(x-3)}=1$ და $3x+4=(x-2)(x-3)$;

3) $\frac{x^2}{4x^2+3}=\frac{2x+1}{4x^2+3}$ და $x^2=2x+1$;

4) $\frac{x+2}{2x-3}=\frac{1}{2x-3}$ და $x+2=1$.

22. იპოვეთ შემდეგ განტოლებათა განსაზღვრის არე და ამონახსნთა სიმრავლე:

1) $8-3x+\frac{1-2x}{7}=1-\frac{1-3x}{2}$;

2) $\frac{12x+1}{2(1-3x)}-\frac{5-9x}{3x+1}=\frac{36x^2-108x+9}{4(9x^2-1)}$;

3) $(7-2x)^2-(2x+3)(2x-3)=1000$;

4) $\frac{2}{x^2-x+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2x-1}{x^3+1}$;

5) $\frac{1}{x-3}+\frac{4}{x+1}=\frac{4}{x^2-2x-3}$;

6) $\frac{8x}{x+1}-\frac{6}{x^2+3x+2}-\frac{9}{x+2}=0$;

7) $\frac{1}{2x-2}-\frac{2x-1}{x^2+x+1}+\frac{3}{2x+2}=0$;

8) $\frac{2(x^2+1)}{2x-1}-\frac{4x^3-13}{4x^2-1}=1$.

23. ამოხსენით განტოლებები:

1) $\frac{3x-2}{x-3}+\frac{x-4}{x+3}=\frac{15x-3}{x^2-9}$;

2) $\frac{6}{x^2-9}+\frac{2}{x^2+4x}=\frac{7}{x^2+x-12}$;

3) $\frac{3}{2x-1}+\frac{7}{2x+1}-\frac{4-20x^2}{1-4x^2}=0$;

4) $\frac{6}{x^2-4x+3}-\frac{13-7x}{1-x}=\frac{3}{x-3}$.

24. ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 1056-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვები.

25. ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვის კვადრატების სხვაობა 29-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვები.

26. წილადის მნიშვნელი 3-ით ნაკლებია მრიცხველზე, ხოლო ამ წილადისა და მის შებრუნებულ წილადს შორის სხვაობა 24/35-ის ტოლია. იპოვეთ ეს წილადი.

27. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის (კონიუნქციის) ამონახსნთა სიმრავლე:

1) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ 6x+2y=3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-2=y \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-y=8 \\ y+5=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+2y=10 \\ x-y=-1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy=12 \\ 3x+2y=12 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=x^2+2x-1 \end{cases}$

28. განტოლებათა სისტემა ამოხსენით ჩასმის ხერხით:

1) $\begin{cases} 12x-5y=7 \\ 3x-y=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+10y-8=0 \\ 7x-6=5y \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x-y-27=0 \\ 8x-5y=9 \end{cases}$

29. განტოლებათა სისტემა ამოხსენით ალგებრული შეკრების ხერხით:

1) $\begin{cases} 5x-6y=2 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-3y=-12 \\ -2x+4y=-6 \end{cases}$

30. განტოლებათა სისტემა ამოხსენით გრაფიკულად:

1) $\begin{cases} x-y=5 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=-2x+6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy=-2 \\ y=1-x \end{cases}$.

31. მოცემულია განტოლებათა სისტემა, რომელ მათგანს აქვს ერთადერთი ამონახსნი, არა აქვს ამონახსნი, აქვს უამრავი ამონახსნი?

1) $\begin{cases} 2x+9y+6=0 \\ 3(x-2)+y=5(x+2y) \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x+5(y-2x)+1=2 \\ 8x-5y=3 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 7(x-3)+2(y+5)=3 \\ 2x-y=8 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ -2x+4y-8=0 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ 6x+4y+1=0 \end{cases}$.

32. ორი მთელი რიცხვის ჯამი 46-ის, ხოლო მათი ნამრავლი 527-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვები.

33. ორნიშნა რიცხვი 4-ჯერ მეტია მის ციფრთა ჯამზე და 3-ჯერ მეტია მის ციფრთა ნამრავლზე, იპოვეთ ეს რიცხვი.

34. ტოლძალოვანია თუ არა უტოლობები: 1) ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, 2) ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე:

1) $2x(x^2+1)>3(x^2+1)$ და $2x>3$;

2) $\frac{2x}{x+4}>\frac{8}{x+4}$ და $2x>8$;

3) $\frac{3x}{-x^2-1}<\frac{5}{-x^2-1}$ და $3x>5$;

4) $(x-1)+\frac{1}{4-x}>\frac{1}{4-x}$ და $x-1>0$;

5) $\frac{3x+5}{x-3}>1$ და $3x+5>x-3$.

35. ამოხსენით უტოლობა, ამონახსნთა სიმრავლე გამოსახეთ რიცხვით ღერძზე.

1) $4-\frac{2}{3}x>\frac{13}{8}-\frac{1}{6}(4x-3)$;

2) $\frac{1,3-3x}{2}+\frac{5x-0,4}{0,3}\le\frac{1,8-8x}{1,2}$

36. დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ცნებათა გამოყენებით ამოხსენით უტოლობები

1) $(x+1)(x-5)>0$; 2) $\frac{12x+4}{x+4}<0$;

3) $\frac{x+1}{2x+1}>-1$; 4) $|x-3|\leq 5$.

37. ამოხსენით უტოლობათა სისტემები:

1) $\begin{cases} x^2-2x+1<0 \\ x^2-5x+6>0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-2x+1\leq 0 \\ x^2-2x+8<0 \end{cases}$

38. ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობები:

1) $\left[\begin{array}{l} x-y>1 \\ 2x-2y<5 \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} x-y<-1 \\ 2x-5y\leq -1 \end{array}\right.$

IV თავი

მიმართებანი

§I. მიმართებანი ერთი და ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის. მიმართების მოცემის ხერხები

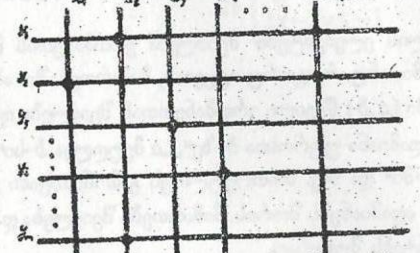
ერთი სიმრავლის ელემენტები შეიძლება ერთმანეთის მიმართ იყოს რაიმე დამოკიდებულებაში, ანუ, როგორც იტყვიან, მიმართებაში. ასე, მაგალითად, ადამიანთა სიმრავლეში (a,b) წყვილი ერთმანეთთან შეიძლება იყოს შემდეგ დამოკიდებულებაში: „a ადამიანი უფროსია b-ზე“, „a მეუღლეა b-სი“, „a და b სწავლობს ერთ სასწავლებელში“ და სხვ. თითოეული ეს გამონათქვამი გვიძლევს გარკვეულ მიმართებას a და b ადამიანებს შორის. მიმართება შეიძლება დამყარდეს სხვადასხვა სიმრავლის ელემენტებს შორისაც.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი სიმრავლე X და Y. ამ ორ სიმრავლეს შორის შესაბამისობა შეიძლება დავამყაროთ ორი ცვლადის შემცველი $R(x,y)$ პრედიკატით, სადაც x გაირბენს X სიმრავლეს, ხოლო y-Y სიმრავლეს. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ X და Y სიმრავლეებს შორის გვაქვს ბინარული შესაბამისობა. გარდა ამისა, არსებობს დამოკიდებულება სამ (ტერნარულ), ოთხ და ა.შ. n ობიექტებს შორის, რომელსაც n-არული დამოკიდებულება ეწოდება. ბინარულ დამოკიდებულებას R-ით აღნიშნავენ. თუ X=Y, მაშინ ამბობენ არა შესაბამისობას, არამედ მიმართებას ერთი და იმავე სიმრავლის ელემენტებს შორის. მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში შეგვიძლია განვიხილოთ მრავალნაირი მიმართება: „x ტოლია y რიცხვის“ და ა.შ. R მიმართებას x და y შორის ასე აღნიშნავენ xRy და იგი შემდეგნაირად წაიკითხება: x ობიექტი R დამოკიდებულებაშია y ობიექტთან.

R ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე ეს არის სიმრავლე წყვილებისა, რომელსაც გვაძლევს დეკარტის ნამრავლი $R\subseteq X\times X$, ე.ი. R მიმართება $X\times X$ სიმრავლიდან ამოკრეფს იმ (x,y) წყვილებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ R დამოკიდებულებას.

X სიმრავლეს R დამოკიდებულების განსაზღვრის არე ეწოდება.

ახლა განვიხილოთ მიმართების მოცემის ხერხები. მიმართება შეიძლება მოცემული იყოს ცხრილების საშუალებით. ვთქვათ, მოცემულია ორი სიმრავლე: $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ და $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. ვიპოვოთ ამ სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლი $X \times Y$. დავუშვათ, $X \times Y$ სიმრავლეზე მოცემულია $R \subseteq X \times Y$ მიმართება. გავატაროთ ჰორიზონტალური და ვერტიკალური წრფეები. თუ (x,y) წყვილი აკმაყოფილებს მოცემულ R დამოკიდებულებას, ე.ი. $(x,y) \in R$, მაშინ ამ წრფეთა გადაკვეთაზე შესაბამისი წყვილებისათვის მივიღებთ წერტილებს (ნახ. 37).

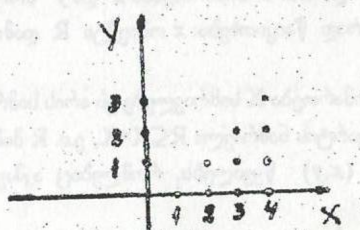


ნახ. 37

მოვიყვანოთ კონკრეტული მაგალითი: ვთქვათ, გვაქვს $X=\{1,2,3,4\}$ სიმრავლე და მასზე მოცემულია $x>y, x \in X, y \in X$ მიმართება. ვიპოვოთ $X \times X$. ცხადია,
$X \times X=\{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),$
$(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$. ამ სიმრავლიდან მოცემული დამოკიდებულება ამოკრეფს შემდეგ წყვილებს:

$(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3).$

ავაგოთ ამ დამოკიდებულებისათვის გრაფიკი. მას ექნება შემდეგი სახე (ნახ.38).



ნახ. 38

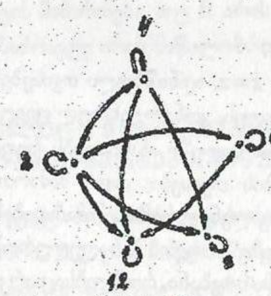
ბინარული მიმართება შეიძლება მოცემულ იქნეს ისრების საშუალებით შემდეგნაირად. სიმრავლის ელემენტებს გამოსახავენ წერტილებით, შემდეგ გაავლებენ ისრებს x– დან y–ისაკენ, ყველა წყვილი წერტილისათვის. მიღებულ ნახაზს უწოდებენ R მიმართების გრაფს. წერტილებს, რომლებიც გამოსახავენ X სიმრავლის ელემენტებს, გრაფის მწვერვალებს უწოდებენ. მაგალითად, ავაგოთ გრაფი მიმართებისა $R(x>y)$, რომელიც მოცემულია სიმრავლეზე

$$X=\{2,4,6,8,12\}.$$

შესაბამის გრაფს ექნება შემდეგი სახე (ნახ. 39)

ნახ. 39

იმავე სიმრავლეზე ავაგოთ მიმართების გრაფი $R\ x/y$: „x რიცხვი არის გამყოფი y რიცხვის“ (ნახ. 40)



ნახ. 40

თუ R არის მიმართება x და y შორის, xRy. $x \in X$, $y \in X$, მაშინ შექცეულ მიმართებას აღნიშნავენ R^{-1} და ჩაწერენ $yR^{-1}x$.

§2. სიმრავლის ელემენტებს შორის ბინარულ მიმართებათა თვისებები

ვთქვათ, X სიმრავლეზე მოცემულია რაიმე R მიმართება. განვიხილოთ მიმართების ზოგიერთი თვისება.

1. თუ ნებისმიერ $x \in X$-სათვის ჭეშმარიტია xRx, ანუ x ელემენტი R დამოკიდებულებაშია თავის თავთან, ასეთ თვისებას რეფლექსურობის თვისება ეწოდება. მაგალითად, ვთქვათ, X არის ჩვენი ინსტიტუტის დაწყებითი განათლებისა და პედაგოგიკის ფაკულტეტის სტუდენტთა სიმრავლე და მასში მოცემულია მიმართება: „x სტუდენტი თანაკურსელია y სტუდენტის". მას ახასიათებს თვისება, რომ x თანაკურსელია x-ის, y თანაკურსელია y-ის, ე.ი. xRx; yRy.

2. თუ ნებისმიერი x და y ელემენტისათვის X სიმრავლეში სრულდება xRy და yRx, მიმართების ასეთ თვისებას სიმეტრიულობის თვისება ეწოდება. ჩვენ მაგალითში, თუ x თანაკურსელია y-ის, მაშინ y თანაკურსელია x-ის.

3. თუ x, y და z ელემენტებისათვის X სიმრავლიდან სრულდება პირობა, რომ xRy და yRz ორი მიმართებიდან გამომდინარეობს xRz. ასეთ თვისებას ტრანზიტულობის თვისება ეწოდება. ჩვენ შემთხვევაში, თუ x თანაკურსელია y-ის და y თანაკურსელია z-ის, მაშინ x თანაკურსელია z-ის, ან თუ $a>b$ და $b>c$, მაშინ $a>c$.

განვიხილოთ მაგალითი. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ტოლობის მიმართება „$x=y$". ამ მიმართებას ახასიათებს სამივე თვისება:

1. $x=x$;

2. თუ $x=y$, მაშინ $y=x$;

3. $x=y$ და $y=z$, მაშინ $x=z$. აღნიშნული თვისებები ახასიათებს სიბრტყეზე პარალელურ წრფეთა სიმრავლეს, კონგრუენტულ ფიგურებს და სხვ.

თუ R მიმართებას X სიმრავლეში ახასიათებს რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისება, ასეთ მიმართებას ეკვივალენტურობის მიმართებას უწოდებენ. ეკვივალენტურობის მიმართების მაგალითებია: ფიგურათა კონგრუენტულობა, სიბრტყეზე წრფეთა პარალელურობა და სხვ. მათ ახასიათებთ სამივე თვისება. არსებობს მიმართებანი, რომლებსაც არ ახასიათებს სამივე თვისება. შეიძლება ახასიათებდეს მხოლოდ ორი თვისება ან ერთი, ან არც ერთი. მაგალითად, წრფეთა სიმრავლეში წრფეთა პერპენდიკულარობის მიმართებას ახასიათებს სიმეტრიულობის თვისება. თუ $x \perp y$, მაშინ $y \perp x$, მაგრამ მას არ ახასიათებს რეფლექსურობისა და ტრანზიტულობის თვისება. მართლაც, წრფე თავისთვის პერპენდიკულარული არ არის ან კიდევ

$$\text{თუ } x \perp y \text{ და } y \perp z, \text{ მაშინ } x \not\perp z.$$

მიმართებათა შორის გვხვდება ისეთი მიმართებანი, რომლებიც გარკვეულ წესრიგს ამყარებს სიმრავლის ელემენტებს შორის. მაგალითად, „x რიცხვი მეტია y რიცხვზე" N-ში. „x მაღალია y-ზე" ადამიანთა სიმრავლეში. „x ქალაქში მცხოვრებთა რიცხვი ნაკლებია y ქალაქში მცხოვრებთა რიცხვზე" ქალაქთა სიმრავლეში. ყველა ამ მიმართებას მოწესრიგების ან რიგის მიმართებას უწოდებენ.

განასხვავებენ მოწესრიგების შემდეგ მიმართებებს:

1. მკაცრი მოწესრიგების მიმართება. იგი ხასიათდება ტრანზიტულობის თვისებით. მაგალითად, განვიხილოთ $X=\{3,7,6,4,5\}$ სიმრავლე და $x<y$ მიმართება. ამ მიმართების მიხედვით მოცემული სიმრავლე შეიძლება მოვაწესრიგოთ შემდეგნაირად: $X=\{3,4,5,6,7\}$. პირველ ადგილზე აქ დგას ელემენტი 3, ვინაიდან 3 ნაკლებია სიმრავლის ყველა სხვა ელემენტზე. შემდეგ მოდის ელემენტი 4 და ა.შ. მოცემული მიმართება შეიძლება ჩაიწეროს წყვილების საშუალებითაც:

$$\{(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(4,5),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7),(6,7)\}.$$

2. არამკაცრი მოწესრიგების მიმართება. იგი ხასიათდება რეფლექსურობისა და ტრანზიტულობის თვისებებით. მაგალითად, მოვაწესრიგოთ $X=\{3,7,6,4,5\}$ სიმრავლე $x \geq y$ მიმართებით. მივიღებთ $X=\{7,6,5,4,3\}$. თუ ჩავწერთ წყვილების სახით, გვექნება:

$$\{(7,7),(7,6),(7,5),(7,4),(7,3),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(5,5),(5,4),(5,3),(4,4),(4,3),(3,3)\}.$$

3. X სიმრავლეს ეწოდება დალაგებული, თუ მასში განსაზღვრული R მიმართება არის მკაცრი რიგის მიმართება. თუ R არის არამკაცრი რიგის მიმართება, მაშინ ამბობენ, რომ X სიმრავლე არის ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლე.

§3. ფუნქციონალური მიმართებანი. ფუნქცია. ფუნქციის მოცემის ხერხები. წრფივი ფუნქცია

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი სიმრავლე $A=\{a;b;c\}$ და $B=\{1;2;3\}$. განვიხილოთ ამ სიმრავლეთა შორის h, g და q მიმართებანი (ნახ. 41).

h მიმართებაში A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლიდან ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი. ასევე g მიმართებაშიაც. ასეთ მიმართებებს უწოდებენ ცალსახა მიმართებებს, ანუ ფუნქციას, ხოლო q მიმართებაში A სიმრავლის a ელემენტს B სიმრავლეში შეესაბამება ორი ელემენტი 1 და 2. ასეთი მიმართება არ წარმოადგენს ფუნქციას.

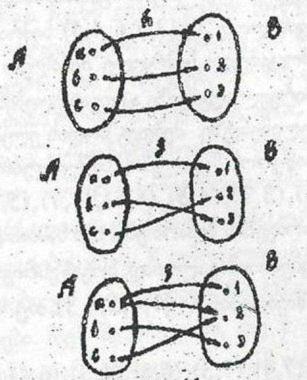
განსაზღვრება: ორ სიმრავლეს შორის მიმართებას ეწოდება ფუნქცია, თუ პირველი სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება მეორე სიმრავლის ერთი და მხოლოდ

ერთი ელემენტი.

თუ A სიმრავლის ელემენტებს აღვნიშნავთ x-ით, ხოლო B სიმრავლისას y-ით, მაშინ ფუნქცია $(x;y)$ წყვილების ისეთი f სიმრავლეა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: ნებისმიერი x-თვის არ არსებობს f სიმრავლეში ერთზე მეტი $(x;y)$ წყვილი, რომლის პირველი ელემენტია x, ხოლო მეორე - $f(x)$.

x-სა და y-ს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულება ასე ჩაიწერება:

$$y=f(x).$$



ნახ. 41

x-ს უწოდებენ დამოუკიდებელ ცვლადს - არგუმენტს, ხოლო y-ს x-ზე დამოკიდებულ ცვლად ფუნქციას.

x არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს უწოდებენ $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს და მას ასე აღნიშნავენ $D(f)$. ჩვენ შემთხვევაში $D(f)=\{a;b;c\}$.

y-ის მნიშვნელობათა სიმრავლეს უწოდებენ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს და მას ასე აღნიშნავენ $E(f)$. ჩვენ შემთხვევაში $E(f)=\{1;2;3\}$.

არსებობს ფუნქციის მოცემის სამი ხერხი:

1. ფუნქციის მოცემა წყვილთა ჩამოთვლის გზით, ანუ ცხრილური წესი. განხილულ მაგალითში ცხრილი შეიძლება შევადგინოთ შემდეგი სახით (ნახ.42).

x	a	b	c
y	1	2	3

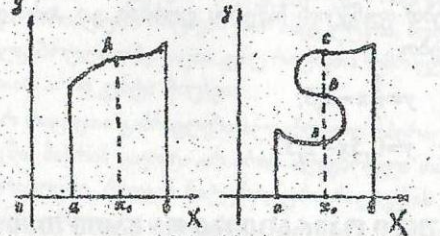
ნახ. 42

2. ფუნქციის მოცემა ფორმულის საშუალებით. მაგალითად,

$$y=kx+b;\quad y=ax^2;\quad y=ax^2+bx+c.$$

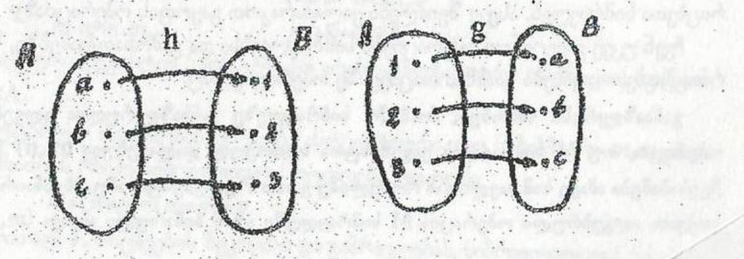
3. ფუნქციის მოცემა გრაფიკული ხერხით. ამ შემთხვევაში ცხრილის მიხედვით აიგება ყველა წყვილი საკოორდინატო სიბრტყეზე, რის შედეგად მიღებული წერტილთა სიმრავლე წარმოადგენს მოცემული ფუნქციის გრაფიკს. ფუნქციის გრაფიკზე x-ის ერთ რომელიმე მნიშვნელობას უნდა შეესაბამებოდეს გრაფიკის ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი.

43-ე ნახაზზე გამოსახული პირველი მრუდი არის ფუნქციის გრაფიკი, რადგან x_0-ს გრაფიკზე შეესაბამება ერთი წერტილი A, ხოლო მეორე ნახაზზე გამოსახული მრუდი არ არის ფუნქციის გრაფიკი, რადგან x_0-ს გრაფიკზე შეესაბამება სამი სხვადასხვა A,B და C წერტილი.



ნახ. 43

ფუნქციას, რომელიც მოცემულია შემდეგი ფორმულით: $y=kx+b$, სადაც k და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, უწოდებენ წრფივ ფუნქციას. მაგალითად, წრფივი ფუნქციებია $y=2x+3$ და $y=x+5$. საშუალო სკოლის მათემატიკაში შეისწავლება სხვადასხვა სახის ფუნქციები, როგორიცაა: $y=kx$ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება, $y=\frac{k}{x}$ უკუპროპორციული დამოკიდებულება. ვთქვათ, გვაქვს რომელიმე h და g მიმართება A და B სიმრავლეებს შორის (ნახ. 44).



ნახ. 44

h და g მიმართებები ფუნქციებია. ამ შემთხვევაში h და g ფუნქციებს უწოდებენ შექცეულ ფუნქციებს. h ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(h)=E(g)$ და h ფუნქციის მნიშვნელობათა არე $E(h)=D(g)$. შექცევადია მხოლოდ და მხოლოდ ის ფუნქცია, რომელიც თავის ყოველ მნიშვნელობას მხოლოდ ერთხელ იღებს. ურთიერთშექცეულ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია წრფის მიმართ.

მაგალითად, ვიპოვოთ $y=2x+5$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. ეს ფუნქცია შექცევადია, რადგან x-ის ერთ მნიშვნელობას ყოველთვის შეესაბამება y-ის ერთი მნიშვნელობა. რომ ვიპოვოთ ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, ამისათვის მოცემული განტოლებიდან x გამოვსახოთ y-ის საშუალებით

$$2x=y-5,$$

$$x=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}.$$

თუ გამოვიყენებთ ფუნქციის ჩაწერის ფორმას, ე.ი. x-სა და y-ს ადგილებს შევუცვლით, მივიღებთ

$$y=\frac{1}{2}x-2{,}5,$$

$$y=0{,}5x-2{,}5.$$

§4. ალგებრული ოპერაციები და მათი თვისებები. ჯგუფი, რგოლი და ველი

1. ალგებრული ოპერაციები და მათი თვისებები

მათემატიკის სასკოლო კურსში შეისწავლება სხვადასხვა ოპერაცია რიცხვებზე: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა. ამ ოპერაციათა შესრულების დროს ხდება ორი მოცემული რიცხვიდან მესამე რიცხვის პოვნა. რიცხვებზე ოპერაცია ზოგიერთ შემთხვევაში რაიმე სიმრავლეზე შეიძლება განსაზღვრული არ იყოს. მაგალითად, შეკრება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე ყოველთვის განსაზღვრულია, მაგრამ გამოკლება არა. მაგალითად, 4-7=-3, -3 არ ეკუთვნის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს. ასევე შეიძლება ვილაპარაკოთ გაყოფის ოპერაციაზე.

ჩვენ უკვე გავეცანით ოპერაციებს სიმრავლეებსა და გამონათქვამებზე, ზოგიერთი მსგავსი თვისება გააჩნია რიცხვებზე ოპერაციებსაც.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ M სიმრავლეზე განსაზღვრულია ალგებრული ოპერაცია, თუ M სიმრავლის ელემენტთა თითოეულ დალაგებულ (m,n) წყვილს შეესაბამება ამავე სიმრავლიდან რომელიმე ერთი P ელემენტი, ანუ, სხვანაირად რომ ვთქვათ, ალგებრული ოპერაცია M სიმრავლეში არის ბინარული ასახვა $(m,n)\Rightarrow P$,

სადაც $m\in M$, $n\in M$, ე.ი. $M\times M$ სიმრავლიდან ნებისმიერ ელემენტს M სიმრავლეში შეესაბამება P ელემენტი. P-ს უწოდებენ m და n ელემენტების კომპოზიციას და წერენ $m*n=P$. ეს ასე იკითხება „m კომპოზიციაში n-თან გვაძლევს P-ს. „*" სიმბოლო აღნიშნავს რომელიმე ალგებრულ ოპერაციას. მათემატიკაში ალგებრულ ოპერაციას განიხილავენ უფრო ზოგადი სახით. განვიხილოთ მაგალითები:

1) ნატურალურ რიცხვთა შეკრება არის ალგებრული ოპერაცია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, რადგან (m,n) ორ ნატურალურ რიცხვთა წყვილს შეკრების ოპერაცია შეუსაბამებს მათ ჯამს $m+n$; რომელიც ისევ ნატურალური რიცხვია.

2) მთელი რიცხვების შეკრება არის ალგებრული ოპერაცია მთელ რიცხვთა სიმრავლეში. ლუწი რიცხვების შეკრება არის ალგებრული ოპერაცია ლუწ რიცხვთა სიმრავლეში, რადგან ორი ლუწი რიცხვის ჯამი ისევ ლუწია, ხოლო კენტ რიცხვთა შეკრება არ არის ალგებრული ოპერაცია კენტ რიცხვთა სიმრავლეში, რადგან ორი კენტი რიცხვის ჯამი არ არის კენტი რიცხვი.

3) ნატურალურ რიცხვთა გამრავლება ალგებრული ოპერაციაა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, მაგრამ გაყოფა არ არის ალგებრული ოპერაცია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, რადგან ნატურალური რიცხვების გაყოფისას ყოველთვის არ მიიღება ნატურალური რიცხვები.

4) ნატურალურ რიცხვთა ახარისხება არის ალგებრული ოპერაცია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში. თუ $m\in N$ და $n\in N$, მაშინ $m^n\in N$. მაგალითად, $2^3=8$.

ალგებრულ ოპერაციებს ახასიათებს შემდეგი თვისებები:

1. ალგებრულ ოპერაციას ეწოდება კომუტატიური, თუ მისი გამოყენების შედეგი არ არის დამოკიდებული კომპონენტების რიგზე, ე.ი. სრულდება პირობა

$$m*n=n*m.$$

რიცხვების შეკრება და გამრავლება, სიმრავლეთა თანაკვეთა და გაერთიანება კომუტატიური ალგებრული ოპერაციებია.

$$m+n=n+m, \qquad A\cup B=B\cup A,$$

$$m\cdot n=n\cdot m, \qquad A\cap B=B\cap A.$$

სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლი არ არის კომუტატიური ოპერაცია, რადგან $A\times B\neq B\times A$.

2. ალგებრულ ოპერაციას ეწოდება ასოციატიური, თუ ნებისმიერი m,n და p ელემენტისათვის რაიმე სიმრავლიდან სრულდება ტოლობა

$$m*(n*p)=(m*n)*p.$$

მაგალითად: 1. რიცხვების შეკრებას და გამრავლებას, სიმრავლეთა თანაკვეთას და გაერთიანებას ახასიათებს ასოციატიურობის თვისება

$$(m+n)+p=m+(n+p),$$
$$(m\cdot n)\cdot p=m\cdot(n\cdot p),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),$$
$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

2. მთელ რიცხვთა სიმრავლეში გამოკლების ოპერაცია არ არის ასოციატიური. თუ a, b და c მთელი რიცხვებია, მაშინ, როცა $c\neq 0$, გვაქვს $(a-b)-c\neq a-(b-c)$. აგრეთვე გაყოფა დადებით რიცხვთა სიმრავლეში, თუ $c\neq 1$, მაშინ $a:(b:c)\neq(a:b):c$. მაგალითად, $100:(20:5)\neq(100:20):5$, $25\neq 1$.

რიცხვი ნული განსაკუთრებულ როლს ასრულებს შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების დროს. თუ რაიმე რიცხვს მივუმატებთ ნულს, მივიღებთ ისევ ამ რიცხვს, ე.ი. $a+0=a$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ნული არის შეკრების ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური ელემენტი.

რაიმე e ელემენტს X სიმრავლიდან ეწოდება ნეიტრალური ოპერაციის მიმართ, თუ X სიმრავლის ყველა a ელემენტისათვის სრულდება ტოლობა

$$a*e=e*a=a.$$

გამრავლების მიმართ ნეიტრალური ელემენტი არის ერთი $a\cdot 1=1\cdot a=a$. რიცხვი ნული განსაკუთრებულ როლს ასრულებს გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ნებისმიერი რიცხვის ნამრავლი ნულზე უდრის ნულს $a\cdot 0=0\cdot a=0$. ამ შემთხვევაში ნულს გამრავლების მიმართ უწოდებენ შთამნთქავ ელემენტს.

თუ სრულდება პირობა $a+(-a)=0$, მაშინ $-a$-ს უწოდებენ a-ს მოპირდაპირე რიცხვს. a რიცხვის შებრუნებული რიცხვია $\frac{1}{a}=a^{-1}$.

2. ჯგუფი და მისი თვისებები

განსაზღვრება: ჯგუფი ეწოდება არა ცარიელ G სიმრავლეს, რომელზედაც განსაზღვრულია ისეთი ასოციატიური ალგებრული ოპერაცია, რომ G სიმრავლე შეიცავს ამ ოპერაციის მიმართ ნეიტრალურ e ელემენტს, ე.ი. $e*g=g*e=g$, $g\in G$, აგრეთვე ნებისმიერი g ელემენტისათვის G სიმრავლეში არსებობს მისი სიმეტრიული $\bar{g}$ (ე.ი. ისეთი, რომ $g*\bar{g}=\bar{g}*g=e$). ზოგიერთი გარდაქმნის დროს ნეიტრალური ელემენტის როლს ასრულებს იგივური გარდაქმნები. y ელემენტის შებრუნებული ელემენტია $\frac{1}{y}=y^{-1}$.

მაგალითად, დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე $Q+$ არის ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ. მართლაც, ორი დადებითი რაციონალური რი-

ცხვის ნამრავლი დადებითი რაციონალური რიცხვია, გამრავლების ოპერაცია ასოციატიურია. ნეიტრალური ელემენტი გამრავლების მიმართ არის რიცხვი 1. $a\cdot 1=a$-ს. სიმეტრიული ელემენტის როლს ასრულებს რიცხვი $\frac{1}{a}=a^{-1}$. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე შეკრებისა და გამრავლების მიმართ არ წარმოადგენს ჯგუფს, რადგან ის არ შეიცავს რიცხვის მოპირდაპირე $\bar{a}$ რიცხვს და a-ს შებრუნებულ რიცხვს.

ჯგუფს ახასიათებს შემდეგი თვისებები:

1. თუ $k\in G$ და $k^{-1}\in G$; k^{-1} თუ არის k-ს შებრუნებული, მაშინ k არის k^{-1} შებრუნებული. მართლაც $(k^{-1})^{-1}=k$.

2. თუ m რიცხვის სიმეტრიულია $-m$, მაშინ ჭეშმარიტია ტოლობა $-(-m)=m$.

3. ჯგუფში $mx=n$ და $my=n$ განტოლებებს აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$x=n\cdot m^{-1} \qquad y=n\cdot m^{-1}$$
$$m+x=n \qquad m+y=n$$
$$x=n-m \qquad y=n-m.$$

4. თუ $mn=np$, მაშინ $m=p$.

5. $m^{-1}\cdot n^{-1}=(mn)^{-1}$.

6. $-(m+n)=(-m)+(-n)$.

3. რგოლი და ველი

განსაზღვრება: X სიმრავლეს, რომელშიც განსაზღვრულია ორი ალგებრული ოპერაცია შეკრება და გამრავლება, ეწოდება რგოლი ამ ოპერაციის მიმართ, თუ ის ქმნის შეკრების მიმართ კომუტატიურ ჯგუფს, და გამრავლების ოპერაცია შეკრების მიმართ დისტრიბუტიულია, ე.ი. სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$m(n+p)=mn+mp,$$
$$(n+p)m=nm+pm.$$

მაგალითად, მთელ რიცხვთა Z სიმრავლე არის რგოლი.

1) Z სიმრავლეზე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები განსაზღვრულია.

თუ $m\in Z$ და $n\in Z$, მაშინ $(m+n)\in Z$ და $m\cdot n\in Z$.

2) შეკრება კომუტატიური და ასოციატიურია

$m+n=n+m$; $(m+n)+p=m+(n+p)$,

3) არსებობს შეკრების მიმართ ნეიტრალური ელემენტი

$e=0$, $m+0=m$.

4) არსებობს Z სიმრავლეში m-ის სიმეტრიული ელემენტი $-m \in Z$.

$m+(-m)=0$.

5) სრულდება დისტრიბუტიულობის კანონი, ე.ი. Z არის რგოლი.

განსაზღვრება: ველი ეწოდება ისეთ კომუტატიურ და ასოციატიურ რგოლს, რომელშიც ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული a ელემენტისათვის მოიძებნება მისი შებრუნებული a^{-1} ელემენტი (ე.ი. $a \cdot a^{-1}=e$). ველს, რომლის ელემენტებს რიცხვები წარმოადგენს, რიცხვითი ველი ეწოდება.

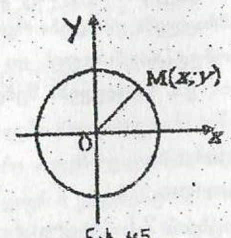
მაგალითად, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არის ველი $(Q+,\cdot)$. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არსებობს ყოველი ნულისაგან განსხვავებული რიცხვის შებრუნებული რიცხვი. $(Z;+,\cdot)$. მთელ რიცხვთა სიმრავლე არ არის ველი, რადგან არ არსებობს მთელი რიცხვების შებრუნებული რიცხვები. $(+,\cdot)$ ნიშნავს, რომ მოცემულ სიმრავლეში განსაზღვრულია შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები.

სიმრავლე, რომელზედაც განსაზღვრულია ერთი ან რამდენიმე ოპერაცია, წარმოადგენს ალგებრულ სტრუქტურებს.

§5. ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები

1. წრეწირის განტოლება

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს წრეწირი, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეში მდებარეობს (ნახ. 45).



ნახ. 45.

წრეწირზე შევარჩიოთ ნებისმიერი M წერტილი $M(x;y)$, $|OM|=R$, $O(0;0)$ ორ წერტილს შორის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით დავწერთ:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};$$

$$R=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2};$$

$$R=\sqrt{x^2+y^2};$$

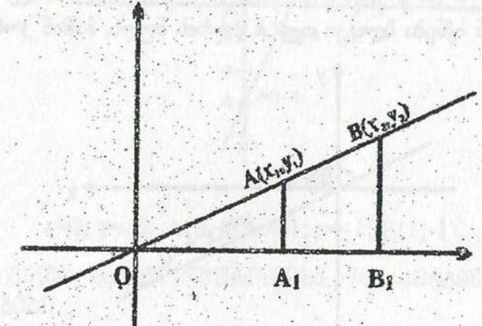
აქედან $x^2+y^2=R^2$.

ეს არის განტოლება იმ წრეწირისა, რომლის რადიუსია R და ცენტრი — $O(0;0)$. თუ O წერტილის კოორდინატებია $O(a;b)$, მაშინ წრეწირის განტოლება იქნება

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

2. წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით

განვიხილოთ წრფე, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე (ნახ. 46).



ნახ. 46

წრფეზე ავიღოთ A წერტილი, $A \neq 0$, $A(x_1;y_1)$ რომელიც მდებარეობს I მეოთხედში.

დავამტკიცოთ, რომ შეფარდება $\frac{y_1}{x_1}$ არ არის დამოკიდებული A წერტილის მდებარეობაზე.

იმავე წრფეზე ავიღოთ მეორე წერტილი $B(x_2;y_2)$; ΔOAA_1 და ΔOBB_1 მსგავსია:

$$\frac{|AA_1|}{|OA_1|}=\frac{|BB_1|}{|OB_1|}$$

$$|OA_1|=x_1;\ |OB_1|=x_2;\ |AA_1|=y_1;\ |BB_1|=y_2;\ \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2};$$

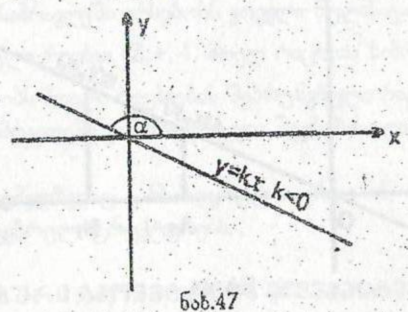
ეს პროპორცია გვიჩვენებს, რომ $\frac{y}{x}$ შეფარდება არ არის დამოკიდებული $A(x;y)$ წერტილის მდებარეობაზე.

თუ ამ შეფარდებას აღვნიშნავთ k-თი, მივიღებთ $\frac{y}{x}=k$. k რიცხვი ახასიათებს წრფის დახრას OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან და მას უწოდებენ წრფის

საკუთხო კოეფიციენტს.

$k=tg\alpha$, სადაც α არის კუთხე წრფესა და OX ღერძს შორის.

თუ $\frac{y}{x}=k$ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ x-ზე, მივიღებთ $y=kx$, რომელიც მართებულია ამ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილისთვის, მათ შორის O(0;0) წერტილისთვის, რადგან $0=k\cdot 0$. თუ წრფე გადის II და IV მეოთხედში (ნახ. 47); მაშინ $k<0$ და წრფის მიერ შედგენილი კუთხე OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან იქნება ბლაგვი თუ k უდრის ნულს, მაშინ $y=0$. ამ პირობას



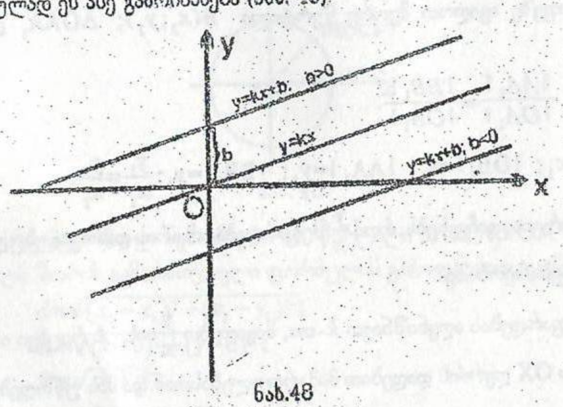
ნახ.47

აკმაყოფილებს ის წერტილები, რომლებიც მდებარეობს აბსცისათა ღერძზე.

თუ წრფე პარალელურია $y=kx$ წრფისა და y-თა ღერძზე მოჰკვეთს b-ს ტოლ ერთეულს, მაშინ მის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

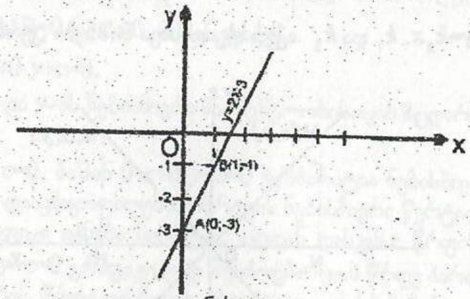
$$y=kx+b$$

გრაფიკულად ეს ასე გამოისახება (ნახ. 48).



ნახ.48

$y=kx+b$ წრფის გრაფიკის ასაგებად უნდა ავაგოთ ჯერ წერტილი $B(0,b)$; შემდეგ მეორე ნებისმიერი წერტილი მოცემული წრფისა $M(x_1;y_1)$, სადაც $y_1=kx_1+b$. მაგალითად, ავაგოთ $y=2x-3$ წრფის გრაფიკი (ნახ. 49).

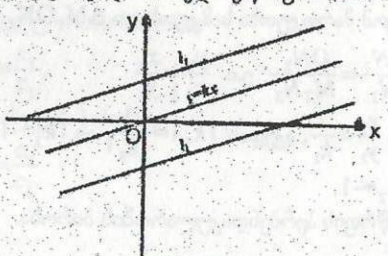


ნახ. 49.

$$x=0;\ y=-3;\ A(0,-3);\ x=1;\ y=-1;\ B(1,-1).$$

3. წრფეთა პარალელურობისა და პერპენდიკულარობის პირობები

თუ l_1 და l_2 წრფეები პარალელურია, მაშინ ისინი პარალელური იქნება კოორდინატთა სათავეზე გამავალი რომელიმე წრფისა (ნახ. 50).



ნახ. 50

კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფის განტოლებაა

$$y=kx.$$

l_1 და l_2 წრფეები მიიღება $y=kx$ წრფის პარალელური გადატანით b_1 და b_2 ერთეულებით y-თა ღერძზე და მათი განტოლებანი იქნება

$$y=kx+b_1 \text{ და } y=kx+b_2,$$

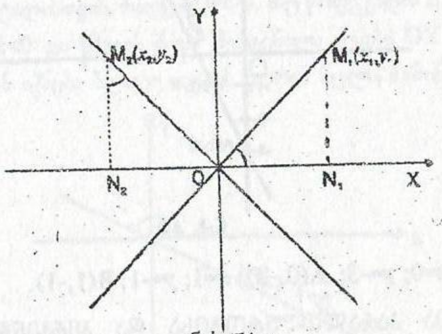
ე.ი. პარალელური წრფეების საკუთხო კოეფიციენტები ტოლია. აქედან გამომდინარეობს: ორი წრფე (რომლებიც ორდინატთა ღერძის პარალელური არ არის) პარალელური რომ იყოს, აუცილებელი და საკმარისია მათი საკუთხო კოეფიციენ-

ტების ტოლობა.

ახლა გამოვიყვანოთ ორი წრფის პერპენდიკულარობის პირობა.

კოორდინატთა სათავეზე გავავლოთ ორი ურთიერთპერპენდიკულარული წრფე (ნახ. 51).

$y=k_1x$ და $y=k_2x$. k_1 და k_2 აქვთ სხვადასხვა ნიშნები ,კერძოდ $k_1>0$ და $k_2<0$



ნახ. 51

თითოეულ წრფეზე შევარჩიოთ წერტილები $M_1(x_1;y_1)$და $M_2(x_2;y_2)$. კუთხე $M_1ON_1=N_2M_2O$, კუთხეს როგორც ურთიერთპერპენდიკულარულ გვერდებიანი კუთხეები, ამიტომ მართკუთხა სამკუთხედი $\Delta M_1ON_1 \sim \Delta M_2ON_2$.

$$\frac{M_1N_1}{ON_1}=\frac{ON_2}{M_2N_2} \quad \text{ე.ი.} \quad \frac{y_1}{x_1}=\frac{x_2}{y_2}$$

$\frac{y_1}{x_1}=k_1$, ხოლო $\frac{x_2}{y_2}=\frac{1}{k_2}$, აქედან $|k_1|=\frac{1}{|k_2|}$ ან $|k_1|\cdot|k_2|=1$ რადგან $k_1>0$, და $k_2<0$ ამიტომ $k_1\cdot k_2=-1$.

ეს არის ორი წრფის პერპენდიკულარობის პირობა.

4. წრფის ზოგადი სახის განტოლება. ორი წრფის გადაკვეთის წერტილი.

წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით ვერ ამოწურავს სიბრტყეზე მდებარე ყველა წრფეს, ის არის კერძო შემთხვევა წრფის ზოგადი სახის განტოლებისა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე

$$Ax+By+c=0.$$

ამ განტოლებაში x და y შედის პირველ ხარისხში, ამიტომ მას უწოდებთ წრფივ განტოლებას. თუ $A=-k$, $B=1$ და $c=-b$, მაშინ $-kx+y-b=0$, აქედან

$$y=kx+b.$$

ვთქვათ, $A=0$, მაშინ $By+c=0$.

$y=-\frac{c}{B}$ არის x-თა ღერძის პარალელური წრფე.

$B=0$, მაშინ $Ax+c=0$, $x=-\frac{c}{A}$ არის y-თა ღერძის პარალელური წრფე.

$A=0$, $B=0$ და $c\neq0$, მაშინ გვაქვს

$$0\cdot x+0\cdot y+c=0.$$

ეს ტოლობა x და y-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის მცდარია, მისი გრაფიკი ცარიელია.

$A=0$, $B=0$ და $c=0$, მაშინ $0\cdot x+0\cdot y+c=0$ ჭეშმარიტია ნებისმიერი მნიშვნელობებისთვის, ე.ი. მას დააკმაყოფილებს სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები, ამიტომ გრაფიკი იქნება სიბრტყე. აქედან დასკვნა: წრფის ზოგადი სახის განტოლება $Ax+By+c=0$ გრაფიკულად შეიძლება იყოს წრფე პარალელური საკოორდინატო ღერძების, წრფე დახრილი აბსცისათა ღერძის მიმართ, მთელი სიბრტყე და ცარიელი სიმრავლე. თუ გვაქვს ორი წრფე $A_1x+B_1y+c_1=0$ და $A_2x+B_2y+c_2=0$, მათი გადაკვეთის წერტილის მოსაძებნად უნდა ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+c_1=0 \\ A_2x+B_2y+c_2=0 \end{cases}$$

ორი წრფის გადაკვეთის პირობაა:

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$$

ორი წრფის პარალელურობის პირობაა

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{c_1}{c_2}.$$

ორი წრფის თანამთხვევის პირობაა

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

სავარჯიშოები

1. ააგეთ კოორდინატთა სიბრტყეზე R: „$x>y$" მიმართების გრაფიკი, თუ იგი მოცემულია სიმრავლეზე

$$X=\{x \mid -3\leq x\leq 3,\ x\in Z\}.$$

2. $D=\{6;3;1;2;4\}$ სიმრავლეზე მოცემულია მიმართება R: „x რიცხვი 2-ჯერ მეტია y რიცხვზე".

ა) ააგეთ R მიმართების გრაფი და გრაფიკი.

ბ) ჩაწერეთ R მიმართება სხვადასხვა ხერხით.

გ) ააგეთ R^1 და R^{-1} მიმართების გრაფიკები.

3. $X=\{3;4;5;6\}$ სიმრავლეზე მოცემულია მიმართება R: „უშუალოდ მოსდევს". ააგეთ R მიმართების გრაფი და ჩამოთვალეთ, რა თვისებებით ხასიათდება იგი.

4. $X=\{5;6;7;8;9;10;11;12;13;14\}$ სიმრავლეზე მოცემულია მიმართება P: „4-ზე გაყოფისას ჰქონდეს ერთი და იგივე ნაშთი". არის თუ არა იგი ეკვივალენტურობის მიმართება? რატომ?

5. $A=\{2;4;6;8\}$ სიმრავლის ელემენტებს შორის R მიმართება მოცემულია ასე: $R=\{(2,4);\ (2;6);\ (2;8);\ (2,2);\ (4,4);\ (4,8);\ (6,6);\ (8,8)\}$. სწორია თუ არა, რომ R არის რიგის მიმართება A სიმრავლეზე? რატომ?

6. მოცემულია სიმრავლეები $X=\{-4;-3;-2;-1;\ 0;1;2;3;4\}$ და $Y\in No$, შესაბამისობის წესია: „a რიცხვის შესაბამისია a^2", სადაც $a\in X$, $a^2\in Y$.

ა) ააგეთ შესაბამისობის გრაფი და გრაფიკი

ბ) შეადგინეთ შესაბამისობის განსაზღვრის და ცვლილების არეები.

7. დაწერეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრის კოორდინატებია $\{-3,2\}$, ხოლო რადიუსი 5.

8. იპოვეთ წრეწირის ცენტრი და რადიუსი მოცემული განტოლების მიხედვით

ა) $x^2+y^2+8x+8y+16=0$

ბ) $x^2+y^2-6x-4y=3$.

9. ერთსა და იმავე ნახაზზე ააგეთ შემდეგი ორი წრფის გრაფიკი

$y=2x+3$ და $y=-2x+3$.

10. ააგეთ შემდეგ უტოლობათა გრაფიკები:

ა) $y\leq x+3$; ბ) $(x-6)^2+(y-5)^2\leq 4$;

გ) $\begin{cases} y=x; \\ x^2+y^2\leq 36. \end{cases}$ დ) $\begin{cases} y\geq x; \\ x^2+y^2\leq 49. \end{cases}$

11. გამოარკვიეთ შემდეგი განტოლებებით მოცემული წრფეების ურთიერთგანლაგება:

ა) $y=3x-4$ და $y=-\frac{1}{3}x+7$;

ბ) $y=-2x+4$ და $y=-2x+7$.

12. იპოვეთ $y=2x+3$ წრფის პარალელური და პერპენდიკულარული წრფეების საკუთხო კოეფიციენტები.

13. გამოიკვლიეთ შემდეგ წრფეთა ურთიერთმდებარეობა (გადაკვეთს, ემთხვევა, არ გადაკვეთს), რომელთა განტოლებებია.

ა) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=10 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 6x-y-3=0 \\ 3x-4y+9=0 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} 5x+4y=9 \\ 10x+8y=20 \end{cases}$

V თავი

მთელი არაუარყოფითი რიცხვები

§1. არაუარყოფით მთელ რიცხვთა აქსიომატიკა

1. ცნება აქსიომატიკური მეთოდი მათემატიკაში

თითოეულმა მათემატიკურმა ცნებამ წარმოშობიდან თანამედროვე მეცნიერულ განსაზღვრებამდე ხანგრძლივი ისტორიული გზა განვლო. თავდაპირველად მათემატიკური ცნებები წარმოიქმნენ ამა თუ იმ პრაქტიკული ხასიათის ამოცანების გადაწყვეტისას. მაგალითად, მართი კუთხის წარმოშობა დაკავშირებული იყო სახლების მშენებლობასთან. მათემატიკური ცნებების ასეთნაირი განსაზღვრებები, რა თქმა უნდა, არ იყო ზუსტი, ცნების განსაზღვრისას კმაყოფილდებოდნენ მისი თვალსაჩინო წარმოდგენით.

ისტორიის განვითარებასთან ერთად გაფართოვდა პრაქტიკული ამოცანების შინაარსი და საჭირო შეიქნა უფრო რთული მათემატიკური თვისებების შესწავლა, რომლისთვისაც საკმარისი აღარ იყო ცდები და თვალსაჩინოებანი, აუცილებელი გახდა დახვეწილი ლოგიკური მსჯელობის გამოყენება. განვითარდა მათემატიკური მეცნიერება და საჭირო შეიქნა მათემატიკური თეორიის ისეთნაირად აგება, რომ სხვადასხვა მათემატიკურ ცნებებს შორის დამყარებულიყო მჭიდრო კავშირი.

მათემატიკური თეორიის აგებისათვის საჭირო შეიქნა ზოგიერთი ცნების მიღება განსაზღვრის გარეშე, რომლებსაც ეწოდა ძირითადი ცნებები, ხოლო ზოგიერთი განისაზღვრება ძირითადი ცნებების საშუალებით. ასეთნაირად აგებულ მათემატიკურ თეორიას აქსიომატიკურს უწოდებენ. ძირითად ცნებად არ შეიძლება შერჩეულ იქნეს ნებისმიერი ცნება, ის უნდა ასახავდეს რეალურ ობიექტს და მის თვისებებს.

სასკოლო გეომეტრიაში ძირითად ცნებებად მიღებულია წერტილი, წრფე, სიბრტყე, მანძილი და სიმრავლე.

მაგალითად, წრეწირის განსაზღვრებაში გამოყენებულია ოთხი ძირითადი ცნება.

წრეწირი ეწოდება სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც თანაბარი მანძილითაა დაშორებული წინასწარ მოცემული წერტილიდან.

წინადადებებს, რომლებიც ყალიბდება ძირითადი ცნებების საფუძველზე და მიღებულია დამტკიცების გარეშე, აქსიომები ეწოდება, ხოლო წინადადებებს, რომლებიც მტკიცდება ძირითადი ცნებებისა და აქსიომების გამოყენებით, თეორემებს უწოდებენ.

აქსიომატიკური მეთოდით აგებულ თეორიულ კურსს აქვს შემდეგი სახე:

1) ჩამოთვლილია განსაზღვრების გარეშე მიღებული ძირითადი ცნებები.

2) მათი საშუალებით განისაზღვრება ყველა დანარჩენი ცნება.

3) ჩამოყალიბებულია ძირითადი წინადადებები, აქსიომები, რომლებითაც გამოთქმულია ძირითადი ცნებების თვისებები.

4) ცნებებისა და აქსიომების გამოყენებით ლოგიკური მსჯელობის საფუძველზე მტკიცდება თეორემები.

აქსიომატიკური სისტემა არ უნდა იყოს წინააღმდეგობრივი, უნდა იყოს დამოუკიდებელი და სრული.

2. პეანოს აქსიომები

სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ნულ მთელს და ყველა დადებით, მთელ რიცხვს მთელი არაუარყოფითი რიცხვთა სიმრავლის სახელით არის ცნობილი და აღინიშნება N_0-ით.

არსებობს არაუარყოფითი მთელ რიცხვთა სიმრავლის სხვადასხვა თეორია. ერთ-ერთი არის აქსიომატიკური თეორია, რომელიც ეკუთვნის იტალიელ მათემატიკოსს ჯუზეპე პეანოს. ამ თეორიის მიხედვით წინასწარ აღწერილია არაუარყოფით მთელ რიცხვთა ზოგიერთი თვისება აქსიომებისა და მიმართებების საშუალებებით, დანარჩენი თვისებები მიიღება ლოგიკური მსჯელობით.

მთელ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეში ძირითად მიმართებად შეგვიძლია მივიღოთ მიმართება „უშუალოდ მოსდევს". ისეთი p რიცხვი, რომელიც უშუალოდ მოსდევს n რიცხვს, აღვნიშნოთ n'-ით. პეანომ ჩამოაყალიბა შემდეგი აქსიომები:

1) ყოველი მთელი არაუარყოფითი რიცხვისათვის არსებობს უშუალოდ მომდევნო რიცხვი.

2) თუ p და q რიცხვები უშუალოდ მოსდევს n რიცხვს, მაშინ $p=q$.

3) არც ერთი მთელი არაუარყოფითი რიცხვი არ შეიძლება უშუალოდ მოსდევდეს ორ სხვადასხვა მთელ არაუარყოფით რიცხვს, თუ $m'=n'$, მაშინ $m=n$.

4) მთელ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეში არსებობს რიცხვი ნული,

რომელიც უშუალოდ არ მოსდევს არც ერთ მთელ არაუარყოფით რიცხვს.

5) თუ N_0 რიცხვთა სიმრავლის რომელიმე ქვესიმრავლე A შეიცავს ნულს და ყოველ n რიცხვთან ერთად მოიცავს n'-ს, მაშინ $A=N_0$.

$0'$-ს აღნიშნავენ სიმბოლოთი 1 და უწოდებენ „ერთს"; $1'$-ს აღნიშნავენ სიმბოლოთი 2 და უწოდებენ „ორს". რიცხვთა მიმდევრობას $1,2,3,\dots n$, უწოდებენ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს და აღნიშნავენ N-ით.

3. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი

ინდუქცია ლათინური სიტყვაა და ნიშნავს მიყვანას, მიხვედრას, ცალკეული დებულებიდან ზოგადი დასკვნის გამოყვანას.

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი გამოიყენება ზოგიერთი დებულების დასამტკიცებლად, რისთვისაც სარგებლობენ ნატურალურ რიცხვთა თვისებებით.

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით რაიმე დებულების დამტკიცებისას უნდა გამოვყოთ სამი ძირითადი მომენტი:

1) შევამოწმოთ $p(n)$ დებულების ჭეშმარიტობა, როცა $n=1$, ე.ი. $p(1)$ წინადადების ჭეშმარიტობა.

2) დავუშვათ, რომ $p(n)$ ჭეშმარიტია, როცა $n=k\in N$.

3) უნდა დავამტკიცოთ $p(n)$-ის ჭეშმარიტობა, როცა $n=k+1$, ე.ი. $p(k)\Rightarrow p(k+1)$.

თუ მტკიცების სამივე ნაწილი ჩატარებულია, მაშინ $p(n)$ წინადადება ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის.

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობის მართებულობა

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2 \, n\in N.$$

შევამოწმოთ ამ ტოლობის მართებულობა, როცა $n=1, 1=1^2$, ე.ი. $p(1)$ ჭეშმარიტია.

ახლა დავუშვათ, რომ ეს ტოლობა მართებულია n-ისათვის, ე.ი. $p(n)$ ჭეშმარიტია, მაშინ გვექნება $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2, n\in N$ ტოლობა.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ეს ტოლობა მართებულია $n+1$-ისათვის, რომ

$$p(n)\Rightarrow p(n+1),$$

ე.ი. უნდა დამტკიცდეს მართებულობა ტოლობის

$$1+3+5+\dots+(2n-1)+[2(n+1)-1]=(n+1)^2.$$

რადგან $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$, ამიტომ

$$n^2+(2n+2-1)=(n+1)^2;$$

$$n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

ეს კი ნიშნავს მოცემული ტოლობის დამტკიცებას.

4. არაუარყოფითი მთელი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების აქსიომატიკური განსაზღვრა

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება N-ით, ხოლო მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე N_0-ით, ე.ი. N_0 არის ნულისა და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გაერთიანება.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ხასიათდება ოთხი აქსიომით, ეგრეთ წოდებული პეანოს აქსიომებით. აღნიშნულ აქსიომათა სისტემა ისეთნაირად გავაფართოოთ ახალი აქსიომების შემოტანით, რომ შევძლოთ არაუარყოფითი მთელი რიცხვებისათვის შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციათა განსაზღვრა.

მთელ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეში „+" ნიშნით აღვნიშნოთ ისეთი $N_0^2\to N_0$ ასახვა, ანუ ბინარული ოპერაცია, რომელიც ნებისმიერ არაუარყოფით მთელ რიცხვთა ყოველ (x,y) წყვილს, სადაც $(x,y)\in N_0^2$, ერთადერთ $x+y$ არაუარყოფით მთელ რიცხვს შეუსაბამებს $x+y\in N_0$ და ასე იკითხება „x პლუს y". ასეთ ბინარულ ოპერაციას შეკრება ვუწოდოთ, x და y რიცხვებს - შესაკრებები, ხოლო $x+y$-ს x და y რიცხვების ჯამი ვუწოდოთ და დავახასიათოთ შემდეგი ორი აქსიომით:

I. ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვისა და ნულის ჯამი თვით ამ რიცხვის ტოლია, ე.ი

$$\forall x\ [x+0=x].$$

II. ნებისმიერი x არაუარყოფითი მთელი რიცხვისა და y რიცხვის მომდევნო y' რიცხვის ჯამი $(x+y')$ x და y რიცხვთა ჯამის მომდევნო რიცხვის $(x+y)'$ ტოლია, ე.ი

$$\forall x\,\forall y\ [x+y'=(x+y)'].$$

I აქსიომიდან ჩანს, რომ ნულთან შეკრებით x ელემენტი უცვლელი რჩება. ამიტომ N_0 სიმრავლეში 0-ს შეკრების მიმართ **ნეიტრალური ელემენტი** ეწოდება.

I და II აქსიომებს **შეკრების აქსიომები** ეწოდება.

შეკრების აქსიომებიდან შედეგის სახით გამომდინარეობს, რომ

$$\forall x\ [x+1=x'].$$

მართლაც, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $y=0$, მაშინ II აქსიომის ძალით მივიღებთ

$$x+0'=(x+0)'. \qquad (1)$$

მაგრამ $0'=1$ და I აქსიომის ძალით $x+0=x$. ამიტომ (1)-დან ვღებულობთ $x+1=x'$, ანუ $x'=x+1$. ამ შედეგისა და II აქსიომის გამოყენებით ნებისმიერი ნატურალური რიცხვების შეკრება ხორციელდება.

მაგალითად, $x=7$, $y'=2$.

რადგან $y'=y+1=2$, ამიტომ $y=1$.

$x+y'=(x+y)'=(7+1)'=8'=9$, ე.ი. 2-ის მიმატება შეიცვალა 1-ისა და კიდევ 1-ის მიმატებით.

მთელ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეში „·“ ნიშნით აღვნიშნოთ ისეთი $N_0^2 \to N_0$ ასახვა, ანუ ბინარული ოპერაცია, რომელიც ნებისმიერ არაუარყოფით მთელ რიცხვთა ყოველ (x,y) წყვილს, სადაც $(x,y)\in N_0^2$, ერთადერთ $x\cdot y$ არაუარყოფით მთელ რიცხვს შეუსაბამებს $x\cdot y\in N_0$ და ასე იკითხება „x გამრავლებული y-ზე.“

ასეთ ბინარულ ოპერაციას გამრავლება ვუწოდოთ, x და y რიცხვებს თანამამრავლები ვუწოდოთ, $x\cdot y$-ს — x და y რიცხვების ნამრავლი და შემდეგი ორი აქსიომით დავახასიათოთ:

III. ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვისა და ნულის ნამრავლი ნულის ტოლია, ე.ი

$$\forall x\ [x\cdot 0=0].$$

IV. ნებისმიერი x-სა და y-ის მომდევნო y' არაუარყოფითი მთელი რიცხვების ნამრავლი $(x\cdot y')$ x და y რიცხვთა ნამრავლისა და x რიცხვის ჯამის $(x\cdot y+x)$ ტოლია, ე.ი

$$\forall x,\forall y\ [x\cdot y'=x\cdot y+x].$$

III აქსიომიდან ჩანს, რომ x რიცხვის 0-ზე ნამრავლი 0-ის ტოლია, ამიტომ N_0 სიმრავლეში 0-ს გამრავლების მიმართ **შთამნთქმელი** ელემენტი ეწოდება.

III და IV აქსიომებს გამრავლების აქსიომები ეწოდება.

გამრავლების აქსიომებიდან შედეგის სახით გამომდინარეობს, რომ

$$\forall x[x\cdot 1=x].$$

მართლაც, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $y=0$, მაშინ IV აქსიომის ძალით მივიღებთ

$$x\cdot 0'=x\cdot 0+x. \qquad (2)$$

მაგრამ $0'=1$ და III აქსიომის ძალით

$$x\cdot 0=0,$$

ამიტომ (2)-დან ვღებულობთ

$$x\cdot 1=x.$$

შედეგიდან ჩანს, რომ 1 გამრავლების მიმართ ნეიტრალური ელემენტია.

ამ შედეგისა და IV აქსიომის გამოყენებით ნებისმიერი ნატურალური რიცხვების გამრავლება ხორციელდება.

მაგალითად, $7\cdot 1=7$,

$$7\cdot 2=7\cdot 1+7=14,$$

$$7\cdot 3=7\cdot 2+7=7\cdot 1+7=14 \text{ და ა.შ.}$$

5. არაუარყოფითი მთელი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ძირითადი კანონები

მათემატიკის სასკოლო კურსიდან ჩვენთვის ცნობილია არაუარყოფითი მთელი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების მთელი რიგი თვისებები. ყველა ეს თვისება გამომდინარეობს განხილული აქსიომებიდან და შეიძლება დამტკიცდეს, როგორც თეორემები.

N-დან აღებული ნებისმიერი x,y და z რიცხვისათვის გვაქვს შემდეგი თეორემები (თვისებები):

1) შეკრების შესრულებადობა (არსებობა) და ცალსახობა.

2) გამრავლების შესრულებადობა (არსებობა) და ცალსახობა.

3) $0+x=x$.

4) $x+y=y+x$ (შეკრების კომუტატიურობა).

5) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (შეკრების ასოციატიურობა).

6) $x=y\Rightarrow x+z=y+z$ (შეკრების კვეცადობა).

7) $x<y\Rightarrow x+z<y+z$ (შეკრების მონოტონურობა).

8) $0\cdot x=0$.

9) $x\cdot y=y\cdot x$ (გამრავლების კომუტატიურობა).

10) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (გამრავლების ასოციატიურობა).

11) $x=y\Rightarrow x\cdot z=y\cdot z$ (გამრავლების კვეცადობა).

12) $x<y\Rightarrow x\cdot z<y\cdot z$ (გამრავლების მონოტონურობა).

13) $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ (გამრავლების დისტრიბუტიულობა შეკრების მიმართ).

ნიმუშის სახით დავამტკიცოთ რამდენიმე თეორემა. თეორემების დამტკიცებისათვის გამოვიყენოთ ძირითადად მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი.

პირველ ყოვლისა დავამტკიცოთ N_0 სიმრავლეში ჯამისა და ნამრავლის შესრულებადობა და ცალსახობა.

თეორემა 1. **არსებობს $N_0^2 \to N_0$ ტიპის მხოლოდ ერთი ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს I და II შეკრების აქსიომებს.**

დამტკიცება. ა) ჯერ დავამტკიცოთ ასეთი ასახვის ცალსახობა. დავაფიქსიროთ პირველი შესაკრები a და მისდამი b რიცხვის მიმატების შედეგი აღვნიშნოთ x_b-თი. დავუშვათ საწინააღმდეგო და, ვთქვათ, არსებობს ორი ისეთი ასახვა, რომ ნებისმიერად აღებული ფიქსირებული a რიცხვისადმი b რიცხვის მიმატებით ერთი ასახვა ჯამში გვაძლევს x_b-ს, ხოლო მეორე ასახვა y_b-ს, ე.ი. $a+b=x_b$ და $a+b=y_b$.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\forall b \in N_0 [x_b=y_b].$$

ვთქვათ, M არის იმ b რიცხვების სიმრავლე, რომლებისთვისაც $x_b=y_b$. დავამტკიცოთ, რომ $M=N_0$.

1) I აქსიომის თანახმად $x_0=a+0=a$

და $y_0=a+0=a$,

ე.ი. $x_0=y_0$ და გამოდის, რომ $0 \in M$.

2) დაშვებიდან, რომ $b \in M$, ე.ი. $x_b=y_b$, პეანოს აქსიომის ძალით გამოდის $(x_b)'=(y_b)'$, მაგრამ II აქსიომის ძალით $(x_b)'=(a+b)'=a+b'=x_{b'}$. ანალოგიურად გამოვა, რომ $(y_b)'=y_{b'}$, მაშასადამე, $x_{b'}=y_{b'}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $b' \in M$.

1 და 2 მსჯელობებიდან, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად, გამომდინარეობს $M=N_0$ ტოლობა.

ამრიგად, შეკრების ცალსახობა დამტკიცებულია ფიქსირებული a-სა და ნებისმიერი b რიცხვისათვის N_0 სიმრავლიდან.

ბ) ახლა დავამტკიცოთ $N_0^2 \to N_0$ ტიპის ასახვის შესრულებადობა ნებისმიერი a არაუარყოფითი მთელი რიცხვისათვის.

ვთქვათ, M არის იმ a რიცხვების სიმრავლე, რომლებისთვისაც ასეთი ასახვა არსებობს.

1) როცა $a=0$, ასახვა აკმაყოფილებს I და II აქსიომებს. მართლაც $a+0=0+0=0$ და I აქსიომა დაკმაყოფილებულია

$$a+b'=0+b'=b'.$$

პეანოს აქსიომის ძალით $a+b=b \Rightarrow (a+b)'=b'$, ე.ი. გამოდის, რომ $a+b'=(a+b)'$ და II აქსიომაც კმაყოფილდება. ამრიგად, $0 \in M$.

2) თუ $a \in M$, მაშინ $a+b$ რიცხვი არსებობს და კმაყოფილდება თვისებები: $a+0=a$ და $a+b'=(a+b)'$.

a'-სათვის ნებისმიერ b რიცხვს შევუსაბამოთ რიცხვი

$$a'+b=(a+b)'.$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს რიცხვიც აკმაყოფილებს I და II აქსიომებს. მართლაც, $a'+0=(a+0)'=a'$, ე.ი. I აქსიომა კმაყოფილდება.

$$a'+b'=(a+b')'=((a+b)')'=(a'+b)',$$ ე.ი. II აქსიომაც კმაყოფილდება.

გამოდის, რომ $a \in M \Rightarrow a' \in M$ და რადგან a ნებისმიერად აღებული რიცხვია, ამიტომ

$$\forall x \; [x \in M \Rightarrow x' \in M].$$

1 და 2 მსჯელობებიდან, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად, გამომდინარეობს, რომ $M=N_0$.

ამრიგად, $N_0^2 \to N_0$ ასახვის არსებობა და ცალსახობა დამტკიცებულია. ეს ასახვა ყოველ $(x,y) \in N_0^2$ წყვილ რიცხვს ერთადერთ $x+y$ რიცხვს შეუსაბამებს, $x+y \in N_0$, რომელიც აკმაყოფილებს I და II შეკრების აქსიომებს, ე.ი. შეკრება ბინარულ ალგებრულ ოპერაციას წარმოადგენს N_0 სიმრავლეში.

თეორემა 2. **არსებობს $N_0^2 \to N_0$ ტიპის მხოლოდ ერთი ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს III და IV გამრავლების აქსიომებს.**

ეს თეორემაც მტკიცდება I თეორემის ანალოგიურად და მის დამტკიცებაზე არ შევჩერდებით.

თეორემა 3. $0+x=x$.

დამტკიცება: ვთქვათ, $p(x)$ აღნიშნავს $0+x=x$-ს. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\forall x \; p(x)$ ჭეშმარიტია.

1) I აქსიომის თანახმად $0+0=0$, ე.ი. $p(0)$ ჭეშმარიტია.

2) ახლა დავამტკიცოთ, რომ $p(x) \Rightarrow p(x')$.

დავუშვათ, რომ $0+x=x$, მაშინ, პეანოს აქსიომის თანახმად, $(0+x)'=x'$. მეორე მხრივ, II აქსიომის თანახმად, $(0+x)'=0+x'$. გამოდის, რომ $0+x'=x'$, მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ

$$(0+x=x \Rightarrow (0+x'=x').$$

1 და 2 მსჯელობებიდან, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად, გამომდინარეობს, რომ

$$\forall x\ [0+x=x].$$

თეორემა 4. შესაკრებთა ადგილების შეცვლით ჯამი არ შეიცვლება, ე.ი. $x+y=y+x$ (კომუტატიურობის კანონი).

დამტკიცება. ეს თეორემა დავამტკიცოთ y-ის მიმართ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით ნებისმიერი x-სათვის.

ვთქვათ, $p(y)$ აღნიშნავს $x+y=y+x$. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\forall y\ p(y)$ ჭეშმარიტია.

1) როცა $y=0$, მაშინ

$x+0=x$, I აქსიომის თანახმად.

$0+x=x$, თეორემა 3-ის ძალით.

ამრიგად, როცა $y=0$, მაშინ $x+0=0+x$, ე.ი. $p(0)$ ჭეშმარიტია.

2) ახლა დავამტკიცოთ, რომ $p(y)\Rightarrow p(y')$.

დავუშვათ, რომ $p(y)$ ჭეშმარიტია, ე.ი. $x+y=y+x$. მაშინ $(x+y)'=(y+x)'$, პეანოს აქსიომის თანახმად, მაგრამ $(x+y)'=x+y'$, II აქსიომის თანახმად, ხოლო $(y+x)'=y'+x$, თეორემა 1-ის (ბ) შემთხვევის თანახმად.

ამრიგად, $x+y'=y'+x$, რითაც დამტკიცდა, რომ $(x+y=y+x)\Rightarrow(x+y'=y'+x)$.

1 და 2 მსჯელობებიდან, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად, ვღებულობთ, რომ $\forall y\ p(y)$ ჭეშმარიტია.

რადგან დამტკიცება ჩავატარეთ ნებისმიერი x-ისათვის, ამიტომ $\forall x,y\ [x+y=y+x]$ და თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. $(x+y)+z=x+(y+z)$ **შეკრების ასოციატიურობა.**

დამტკიცება ჩავატაროთ z-ის მიმართ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით ნებისმიერი x-ისა და y-ისათვის.

ვთქვათ, $p(z)$ აღნიშნავს ფორმულას

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

დავამტკიცოთ, რომ $\forall z\ p(z)$ ჭეშმარიტია.

1) როცა $z=0$, $(x+y)+0=x+y$ და $y+0=y$, I აქსიომის თანახმად. მაშინ $x+(y+0)=x+y$. გამოდის, რომ $(x+y)+0=x+(y+0)$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $p(0)$ ჭეშმარიტია.

2) ახლა დავამტკიცოთ, რომ $p(z)\Rightarrow p(z')$, ე.ი. თუ დავუშვებთ $(x+y)+z=x+(y+z)$ ფორმულის ჭეშმარიტობას, მაშინ $(x+y)+z'=x+(y+z')$ ფორმულის ჭეშმარიტობაც გამომდინარეობს.

მართლაც, II აქსიომის თანახმად $(x+y)+z'=((x+y)+z)'$, (1)

ჩვენი დაშვებით $(x+y)+z=x+(y+z)$, ამიტომ პეანოს აქსიომის თანახმად

$$((x+y)+z)'=(x+(y+z))'. \quad (2)$$

(1) და (2) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(x+y)+z'=(x+(y+z))'. \quad (3)$$

II აქსიომის თანახმად

$$x+(y+z')=x+(y+z)' \quad (4)$$

და

$$x+(y+z)'=(x+(y+z))'. \quad (5)$$

(4) და (5) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$x+(y+z')=(x+(y+z))'. \quad (6)$$

(3) და (6) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(x+y)+z'=x+(y+z'),$$

საიდანაც ჩანს, რომ $p(z')$ ჭეშმარიტია.

1 და 2 მსჯელობებიდან, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად, $p(z)$ წინადადება ჭეშმარიტია ნებისმიერი z-ისათვის.

რადგან დამტკიცება ჩავატარეთ ნებისმიერი x-სა და y-სათვის, ამიტომ დამტკიცდა, რომ

$$\forall x, \forall y, \forall z\ [(x+y)+z=x+(y+z)].$$

§2. მთელი არაუარყოფითი რიცხვის ცნებისადმი თეორიულ-სიმრავლური მიდგომა (რაოდენობითი თეორია)

1. ნატურალური რიცხვის ცნება. ნულის ცნება. ტოლობის მიმართება. მიმართება „ნაკლები" და მათი თვისებები

ნატურალური რიცხვის ცნება ისტორიულად სასრული სიმრავლის ელემენტე-
ბის დათვლის საფუძველზე ჩამოყალიბდა. ასე, მაგალითად, ყოფნიდა თუ არა ყველა
მონადირეს იარაღი, მეთევზეებს ბადე და სხვ. ფაქტობრივად ხდებოდა ორი სიმრა-
ვლის შედარება ელემენტების რაოდენობის თვალსაზრისით. ნატურალურ რი-
ცხვთა ცნების მეცნიერული დაზუსტება დაკავშირებულია გერმანელი მათემატი-
კოსის გეორგ კანტორის სახელთან, რომელიც მოღვაწეობდა 1845-1918 წლებში.
მან შექმნა სიმრავლეთა თეორია და მის საფუძველზე - ნატურალურ რიცხვთა
თეორია. საფუძველი ამ თეორიის შექმნისა იყო სასრული სიმრავლის ცნება და
ურთიერთცალსახა შესაბამისობა სიმრავლეთა ელემენტებს შორის. ორ A და B
სასრულ სიმრავლეს ეწოდება თანაბარრაოდენობრივი, თუ მათ შორის შეიძლება
დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. მიმართებას „A თანაბარრაოდე-
ნობრივია B სიმრავლისა" ახასიათებს რეფლექსურობა, სიმეტრიულობის და ტრა-
ნზიტულობის თვისებები. სიმრავლეთა თანაბარრაოდენობრიობა საშუალებას
გვაძლევს სასრული სიმრავლეები დავყოთ ეკვივალენტურობის კლასებად.

ერთი კლასი შეიძლება შეიცავდეს სხვადასხვა სიმრავლეს, მაგრამ მათთვის
საერთო იყოს ის, რომ ისინი შეიცავენ ელემენტების ერთსა და იმავე რაოდენობას,
მაგალითად, კლასი, რომელიც შეიცავს $\{a;b\}$ სიმრავლეს, შეიძლება იყოს შემდეგი
სიმრავლეები: ადამიანის თვალების სიმრავლე, ფრინველის ფრთების სიმრავლე,
კვადრატის დიაგონალების სიმრავლე და სხვ. ყველა აქ ჩამოთვლილი სიმრავლე
ერთი კლასის ეკვივალენტური სიმრავლეებია, რომელთაც აქვთ საერთო რაოდე-
ნობრივი თვისება. ამ საერთო რაოდენობრივი თვისებით განისაზღვრება ნატურა-
ლური რიცხვი.

**განსაზღვრება: ნატურალური რიცხვი ეწოდება იმ საერთო თვისებას, რომელიც
ახასიათებს ერთმანეთის მიმართ არაცარიელი ეკვივალენტური კლასის სიმრავლე-
ებს:** ერთი კლასის ყველა სიმრავლე ხასიათდება ერთი რიცხვით, ჩვენ მიერ მოყვა-
ნილ მაგალითში ყველა სიმრავლე ხასიათდება ერთი და იგივე რაოდენობრივი
თვისებით - რიცხვი ორით, ე.ი. რიცხვი ორი გამოსახავს ყველა ორელემენტიანი
სიმრავლის საერთო თვისებას, ამიტომ ყოველი ნატურალური რიცხვი გამოსახავს
რომელიმე კლასის საერთო თვისებას.

A სასრული სიმრავლის მახასიათებელ ნატურალურ რიცხვს აღნიშნავენ $n(A)$-თი და უწოდებენ A სიმრავლის სიმძლავრეს. ჩვენ მაგალითში $n(A)=2$. თუ სასრულ სიმრავლეს დავუმატებთ ერთ ელემენტს, რომელსაც ის არ შეიცავს, მივიღებთ ახალ არაეკვივალენტურ სიმრავლეს, რომლის ელემენტების რაოდენობა ერთით მეტი იქნება, ე.ი. ნატურალური რიცხვი გაიზრდება ერთით. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ ერთმანეთის მიმართ არაეკვივალენტურ სასრულ სიმრა-ვლეთა უსასრულო მიმდევრობას, რომელთა სიმძლავრეები დახასიათდება შემდეგი რიცხვითი მიმდევრობით

$$1;2;3;4;\ldots n,\ldots$$

ამ მიმდევრობას ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობას უწოდებენ.

ცარიელი სიმრავლის სიმძლავრედ მიჩნეულია ნული, თუ $A=\varnothing$, მაშინ $n(A)=0$.

ვთქვათ, გვაქვს ორი A და B სასრული სიმრავლე $n(A)=a$ და $n(B)=b$.

თუ A სიმრავლე ეკვივალენტურია B სიმრავლის $A\sim B$, მაშინ $n(A)=n(B)$, ე.ი. $a=b$. თუ A და B სიმრავლეები არა ეკვივალენტურია. ე.ი. ისინი ეკუთვნიან სხვადასხვა კლასს, მაშინ მათი შესაბამისი რიცხვები ერთმანეთის ტოლი არ იქნე-ბიან $a\neq b$.

ვთქვათ, სასრული A სიმრავლე შეიცავს a ელემენტს, ხოლო სასრული B სიმრავლე - b ელემენტს.

თუ A სიმრავლე თანაბარრაოდენობრივია რომელიმე B_1 სიმრავლისა, რომე-ლიც B სიმრავლის საკუთრივ ქვესიმრავლეა, მაშინ ამბობენ, რომ a რიცხვი ნაკლებია b რიცხვზე და მას ასე ჩასწერენ $a<b$. მაშასადამე,

$$(a<b)\Leftrightarrow(A\sim B_1\subset B\wedge B_1\neq B\wedge B_1\neq\varnothing).$$

ტოლობის ნიშანი „=" პირველად გამოიყენა ინგლისელმა მათემატიკოსმა რ. რეკორდომ (1510-1558); ნიშნები „>" და „<" ინგლისელმა მათემატიკოსმა ტ. ხარრიოტმა (1560-1621). $a<b$ მიმართებას ახასიათებს ასიმეტრიულობის და ტრა-ნზიტულობის თვისება. ამიტომ ეს მიმართება არის მკაცრი რიგის მიმართება და შესაბამისად ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა არის დალაგებული.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. მას არა აქვს ბოლო ელემენტი, ყოველი მომდევნო რიცხვი მიიღება წინასაგან ერთის მიმატებით. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე არის აგრეთვე დისკრეტული, ორ ერთმანეთის მომდევნო მთელ რიცხვებს შორის არ მოიძებნება შუალედური მთელი რიცხვი.

2. მთელი არაუარყოფითი რიცხვების ჯამის განსაზღვრა სიმრავლეთა გაერთიანების საფუძველზე. ჯამის არსებობა და ერთადერთობა

ყოველი სასრული სიმრავლე ხასიათდება რიცხობრივი მახასიათებლით, რომელსაც ნატურალური რიცხვი ვუწოდეთ. სიმრავლეთა შორის რომელიმე რაოდენობითი ხასიათის დამოკიდებულება აისახება ამ სიმრავლეების რიცხობრიობის გამომსახველ ნატურალურ რიცხვებს შორის შესაბამის დამოკიდებულებაში.

ვთქვათ, მოცემულია ორი სიმრავლე A და B, რომლებსაც საერთო ელემენტი არა აქვთ. $n(A)=a$ და $n(B)=b$. ამ ორი სიმრავლის გაერთიანება არის ახალი C სიმრავლე, რომელიც შეიცავს A და B სიმრავლეთა ყველა ელემენტს.

$C=A\cup B$. C სიმრავლის ელემენტების c რაოდენობას უწოდებენ a და b რიცხვების ჯამს $a+b=c$. რადგან არსებობს A და B სიმრავლეთა გაერთიანება, ამიტომ $a+b$ ჯამიც იარსებებს.

ახლა დავამტკიცოთ ჯამის ერთადერთობა. ჯამის ასეთნაირად განსაზღვრა არ არის დამოკიდებული არაგადამკვეთი A და B სიმრავლეების შერჩევაზე. თუ $A\sim A_1$, $B\sim B_1$ და $A\cap A_1=B\cap B_1=\varnothing$, მაშინ

$$C=A\cup B\sim C_1=A_1\cup B_1.$$

დავამტკიცოთ, რომ C და C_1 სიმრავლეთა რიცხობრივი მახასიათებლები ტოლია, ე.ი. $n(C)=n(C_1)$.

ვთქვათ, φ არის ურთიერთცალსახა ასახვა A სიმრავლისა A_1-ზე, ხოლო ψ B სიმრავლისა B_1-ზე. ნებისმიერი c ელემენტი $c\in A\cup B$ ეკუთვნის ან A სიმრავლეს, ან B სიმრავლეს, რადგან $A\cap B=\varnothing$. თუ $c\in A_1$, მაშინ მივიღებთ $f(c)=\varphi(c)$. თუ $c\in B_1$, მაშინ გვექნება $f(c)=\psi(c)$. ამით განისაზღვრება f ასახვა C სიმრავლისა C_1 სიმრავლეზე.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა C და C_1 სიმრავლეებს შორის, ე.ი. ვაჩვენოთ, რომ $c_1\in C_1$ არის ერთადერთი სახე $c\in C$ ელემენტისა. თუ c_1 ეკუთვნის A_1 სიმრავლეს, მაშინ ის არის სახე A სიმრავლიდან ერთადერთი ელემენტის. თუ $c_1\in B_1$, მაშინ ის არის სახე ერთადერთი ელემენტისა B სიმრავლიდან. ამიტომ c_1 არ შეიძლება იყოს სახე რომელიმე ელემენტისა როგორც A, ასევე B სიმრავლიდან. ასე რომ, ის მიეკუთვნებოდა მხოლოდ ერთს A_1-სა და B_1-ს, რადგან ეს სიმრავლეები არ იკვეთებიან.

ამით დამყარდა ურთიერთცალსახა ასახვა C და C_1 სიმრავლეებს შორის, რაც ნიშნავს, რომ $n(C)=n(C_1)$.

3. ორი არაუარყოფითი მთელი რიცხვის სხვაობის განსაზღვრა ქვესიმრავლის დამატებით

ვთქვათ, მოცემულია ორი სასრული სიმრავლე A და B, ამასთან $B\subseteq A$. განვიხილოთ $A\setminus B$ სიმრავლის ელემენტთა რიცხვის განსაზღვრის ამოცანა, ე.ი. ვიპოვოთ A სიმრავლემდე B სიმრავლის დამატება. იმის გამო, რომ

$$B\cup(A\setminus B)=A$$

და

$$B\cap(A\setminus B)=\varnothing,$$

$B\cup(A\setminus B)$ რიცხობრივი მახასიათებელი იქნება

$$m(B\cup(A\setminus B))=m(B)+m(A\setminus B)=m(A).$$

ამრიგად, B სიმრავლის ელემენტთა რიცხვისა და $A\setminus B$ სიმრავლის ელემენტთა რიცხვის ჯამი A სიმრავლის ელემენტების რიცხვს იძლევა. $m(A\setminus B)$-ს ($A\setminus B$ სიმრავლის ელემენტთა რიცხვს) $m(A)$-ისა და $m(B)$-ის სხვაობა ეწოდება და აღინიშნება $m(A)-m(B)$ სიმბოლოთი, ე.ი $m(A\setminus B)=m(A)-m(B)$.

$m(A)$ და $m(B)$ შესაბამისად A და B სიმრავლეების ელემენტთა რიცხვია.

რადგან სასრული სიმრავლეების ელემენტთა რიცხვი არაუარყოფითი მთელი რიცხვებით გამოისახება, ამიტომ სიმრავლეებზე განხილული ამოცანიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ არაუარყოფითი მთელი რიცხვების გამოკლების ოპერაცია.

განსაზღვრება: *a რიცხვიდან b რიცხვის გამოკლება ეწოდება ისეთ c რიცხვის მოძებნის ოპერაციას, რომ $a=b+c$.*

a რიცხვს **საკლები** ეწოდება, b რიცხვს - **მაკლები**, c რიცხვს **სხვაობა** ეწოდება. c სხვაობა $a-b$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი. $a-b=c$.

ამრიგად, განსაზღვრის თანახმად, $a-b=c \Rightarrow a=b+c$.

4. გამოკლების კავშირი შეკრებასთან

გამოკლების განსაზღვრაში გათვალისწინებულია გამოკლების უშუალო კავშირი შეკრებასთან. სხვაობა არის შეკრების ოპერაციის ერთ-ერთი შესაკრები, სადაც საკლებად გვევლინება ჯამი, ხოლო მაკლებად - მეორე შესაკრები.

გამოკლებისა და შეკრების ამ კავშირის საფუძველზე გამოკლებას შეკრების შებრუნებული ოპერაცია ეწოდება.

განსაზღვრება: გამოკლება არის შეკრების შებრუნებული მოქმედება, როდესაც მოცემული ჯამითა და ერთ-ერთი შესაკრებით პოულობენ მეორე შესაკრებს. ამასთან, მოცემულ ჯამს ეწოდება საკლები, ცნობილ შესაკრებს - მაკლები, ხოლო საძებნ შესაკრებს - სხვაობა.

5. გამოკლების შესრულებადობის (არსებობის) და ცალსახობის პირობა

$A \setminus B$ სიმრავლის ელემენტთა რიცხვის განსაზღვრის ამოცანა, რომლის საფუძველზეც არაუარყოფითი მთელი რიცხვების გამოკლების ოპერაციამდე მივედით, განხილული იყო $B \subseteq A$ პირობის საფუძველზე და მხოლოდ ამ პირობის დროს აქვს მას აზრი. მაგრამ

$$B \subseteq A \Rightarrow m(B) \leq m(A)$$

და შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1) $B=A$, მაშინ $m(B)=m(A)$. ამ შემთხვევაში $A \setminus B=\varnothing$, შესაბამისად $m(A \setminus B)=0$ და $m(A)-m(B)=0$.

2) $B \subset A$, მაშინ $m(B)<m(A)$, ანუ $m(A)>m(B)$. ამ შემთხვევაში $A \setminus B \neq \varnothing$, შესაბამისად $m(A \setminus B)>0$ და $m(A)-m(B)>0$.

განხილულის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ გამოკლება ყოველთვის არ სრულდება, იგი ნაწილობრივი ოპერაციაა N_0 სიმრავლეში და არაუარყოფითი მთელი რიცხვების გამოკლების შესრულებადობა და ცალსახობა შემდეგი თეორემით ჩამოყალიბდება.

თეორემა. $a-b$ **სხვაობა ცალსახად არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ** $a \geq b$ **(ანუ** $b \leq a$**), ე.ი.** $\forall a, \forall b \; \exists c \; (c=a-b) \Leftrightarrow a \geq b$.

დამტკიცება: დავამტკიცოთ, რომ

1) $\exists c \; [c=a-b] \Leftrightarrow a \geq b$,

2) $a \geq b \Rightarrow \exists c [c=a-b]$,

3) $\exists c_1 \exists c_2 \; [(c_1 \neq c_2) \wedge (c_1=a-b) \wedge (c_2=a-b)]$.

1) განსაზღვრის თანახმად $c=a-b \Rightarrow a=b+c$. თუ $c=0$, მაშინ $a=b$, მაგრამ, თუ $c>0$, მაშინ $a>b$. ორივე შემთხვევის გაერთიანების შედეგად $c \geq 0$ შემთხვევიდან გამომდინარეობს $a \geq b$.

2) თუ $a=b$, მაშინ $a=b+0$ და გამოკლების განსაზღვრის თანახმად $0=a-b$, ე.ი.

$$\exists c \; [c=a-b].$$

თუ $a>b$, მაშინ „მეტობის" მიმართების განსაზღვრის თანახმად

$$\exists c \; [a=c+b],$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\exists c \; [c=a-b].$$

3) დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, რომ

$$\exists c_1 \exists c_2 \; [(c_1 \neq c_2) \wedge (c_1=a-b) \wedge (c_2=a-b)].$$

მაშინ გამოკლების განსაზღვრის თანახმად

$$a=b+c_1 \text{ და } a=b+c_2,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $b+c_1=b+c_2$.

მივიღეთ წინააღმდეგობა $c_1 \neq c_2$ და $c_1=c_2$, რაც ამტკიცებს სხვაობის ცალსახობას. თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

ამრიგად, არაუარყოფითი მთელი რიცხვების გამოკლება ყოველთვის შესაძლებელია, როცა საკლები მეტია ან ტოლია მაკლებისა, ხოლო შეუძლებელია, როცა საკლები ნაკლებია მაკლებზე.

გამოკლების განსაკუთრებული შემთხვევებია:

1) $a-a=0$,

2) $a-0=a$,

3) $0-0=0$.

6. გამოკლების თვისებები

არაუარყოფითი მთელი რიცხვების გამოკლებას მთელი რიგი თვისებები ახასიათებს. ამ თვისებებიდან მხოლოდ მათზე შევჩერდეთ, რომლებიც დაწყებით კლასებში გამოკლების სწავლების თეორიულ საფუძვლად გვევლინებიან.

ჯამიდან რიცხვის გამოკლება

უკვე პირველი კლასიდანვე განიხილება ისეთი სავარჯიშოები, რომლებშიც ბავშვს ვერ ავუვლით ჯამიდან რიცხვის გამოკლების გამოყენებას.

მაგალითად, $(5+4)-3$ გამოსახულება გამოიანგარიშება შემდეგი სამი ხერხით:

I. $(5+4)-3=9-3=6$;

II. $(5+4)-3=(5-3)+4=2+4=6$;

III. $(5+4)-3=5+(4-3)=5+1=6$.

პირველი ხერხით გამოანგარიშება სრულდება მოქმედებათა რიგის წესების გამოყენებით (პირველად ფრჩხილებში მოთავსებული მოქმედება სრულდება), II და III ხერხების გამოყენება კი ემყარება შემდეგ თეორემებს:

თეორემა 1. თუ $a \geq c$ **და** $b \geq c$**, მაშინ მართებულია ტოლობა**

$$(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c).$$

დამტკიცება: მაგალითისათვის დავამტკიცოთ $(a+b)-c=(a-c)+b$ ტოლობის მართებულობა, როცა $a \geq c$.

რადგან $a \geq c$, ამიტომ არსებობს $a-c$ სხვაობა. ეს სხვაობა აღვნიშნოთ k-თი ($k \in N_0$). მაშინ $a-c=k$, საიდანაც $a=k+c$. $(a+b)-c$ გამოსახულებაში a შევცვალოთ $k+c$-თი და მივიღებთ

$$(a+b)-c=(k+c+b)-c=k+b.$$

მაგრამ $k=a-c$, ამიტომ $k+b=(a-c)+b$. ამრიგად, $(a+b)-c=(k+c+b)-c=k+b=(a-c)+b$ ტოლობის ტრანზიტულობის თვისების გამო მივიღებთ $(a+b)-c=(a-c)+b$ და თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $(a+b)-c=a+(b-c)$.

ამ თეორემის საფუძველზე ყალიბდება ჯამიდან რიცხვის გამოკლების წესი: **ორი რიცხვის ჯამიდან რომ გამოვაკლოთ რომელიმე რიცხვი, საკმარისია ეს რიცხვი გამოვაკლოთ ერთ-ერთ შესაკრებს, მეორე შესაკრები კი უცვლელი დავტოვოთ (იგულისხმება, რომ თითოეული შესაკრები მაკლებ რიცხვზე მეტია).**

რიცხვიდან ჯამის გამოკლება

რიცხვიდან ჯამის გამოკლებაც სამი ხერხით ხორციელდება. მაგალითად, 8-(2+3) შეიძლება გამოვიანგარიშოთ სამი ხერხით:

I. $8-(2+3)=8-5=3$;
II. $8-(2+3)=(8-2)-3=6-3=3$;
III. $8-(2+3)=(8-3)-2=5-2=3$.

აქაც პირველი ხერხით გამოანგარიშება სრულდება მოქმედებათა რიგის წესების გამოყენებით, II და III ხერხების გამოყენება კი ემყარება შემდეგ თეორემას:

თეორემა 2. თუ $a \geq b+c$, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b.$$

დამტკიცება: მაგალითისათვის დავამტკიცოთ

$a-(b+c)=(a-c)-b$ ტოლობის მართებულობა.

რადგან $a \geq b+c$, ამიტომ $a-(b+c)$ სხვაობა არსებობს. ეს სხვაობა აღვნიშნოთ k-თი, ე.ი. $a-(b+c)=k$. მაშინ სხვაობის განსაზღვრის თანახმად $a=k+(b+c)$, ხოლო ჯამის ასოციატიურობის თანახმად

$$k+(b+c)=(k+b)+c, \text{ ე.ი. } a=(k+b)+c.$$

ამ ბოლო ტოლობიდან, გამოკლების განსაზღვრის თანახმად, გამომდინარეობს ტოლობები:

$$k+b=a-c,$$

$$k=(a-c)-b.$$

აღნიშვნის თანახმად $a-(b+c)=k$, ხოლო დამტკიცების თანახმად $k=(a-c)-b$. თუ გამოვიყენებთ ტოლობის ტრანზიტულობის თვისებას, გვექნება:

$$a-(b+c)=(a-c)-b,$$

რითაც თეორემის ერთი ნაწილი დამტკიცებულია.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $a-(b+c)=(a-b)-c$.

ამ თეორემის საფუძველზე ყალიბდება რიცხვიდან ჯამის გამოკლების წესი: **რიცხვიდან რომ გამოვაკლოთ ორი რიცხვის ჯამი, საკმარისია ამ რიცხვს გამოვაკლოთ ერთ-ერთი შესაკრები და მიღებულ შედეგს გამოვაკლოთ მეორე შესაკრებიც.**

ჯამიდან რიცხვის გამოკლებისა და რიცხვიდან ჯამის გამოკლების წესებს ხშირად იყენებენ დაწყებით კლასებში გამოანგარიშებათა გამარტივების მიზნით. ასევე იყენებენ სხვაობიდან რიცხვის გამოკლების და რიცხვისათვის სხვაობის მიმატების წესებს, რომლებზედაც არ შევჩერდებით. სამაგიეროდ დავამტკიცოთ კიდევ ერთი თეორემა, რომელიც საკლებისა და სხვაობის შედარების საშუალებას იძლევა.

თეორემა 3. თუ $a \geq b$, მაშინ $a-b$ სხვაობა მეტი არ არის საკლებზე, ე.ი. $a-b \leq a$.

დამტკიცება: ეს თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს გამოკლებისა და „ნაკლებობის" მიმართების განსაზღვრებიდან.

გამოკლების განსაზღვრების თანახმად a და b რიცხვების სხვაობა $a-b$ აკმაყოფილებს პირობას $(a-b)+b=a$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $a-b \leq a$, ამასთან: როცა $b>0$, მაშინ $a-b<a$; როცა $b=0$, მაშინ $a-b=a$.

7. ორი არაუარყოფითი მთელი რიცხვის გამრავლების განსაზღვრა სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლის საშუალებით

ნატურალური რიცხვების გამრავლების ოპერაცია დაკავშირებულია სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლში ელემენტების რაოდენობის გათვლასთან. ვთქვათ, A სიმრავლის სიმძლავრეა a, B სიმრავლის - b. $n(A)=a$; $n(B)=b$. a და b რიცხვების ნამრავლი ეწოდება A და B სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლის სიმძლავრეს

$$a \cdot b=n(A \times B)=n(A) \cdot n(B),$$

ე.ი. a და b რიცხვების ნამრავლი არის ყველა შესაძლო წყვილის რაოდენობა, რომლის შედგენაც შეიძლება A და B სიმრავლეთა ელემენტებისაგან. სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლი არაკომუტატიურია, ე.ი. $A \times B \neq B \times A$, მაგრამ მართებულია ტოლობა

$$n(A \times B)=n(B \times A).$$

ამ ტოლობის მართებულობა ადვილი შესამოწმებელია, თუ დავამყარებთ შესაბამისობას $(a;b)$ წყვილებს $A\times B$ სიმრავლიდან და $(b;a)$ სახის წყვილებს შორის $B\times A$ სიმრავლიდან. აქედან გამომდინარე გამრავლება კომუტატიურია. ასევე მტკიცდება, რომ

$$n(A\times(B\times C))=n((A\times B)\times C).$$

აქედან გამომდინარე გამრავლება ასოციატიურია.

სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლის გამოყენებით დავამტკიცოთ ნამრავლის არსებობა და ერთადერთობა. ამისათვის შევამოწმოთ შემდეგი ორი ტოლობის მართებულობა

$a\cdot 1=a$ და $a\cdot(b+1)=a\cdot b+a$. დავამტკიცოთ, რომ $a\cdot 1=a$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისათვის; $a\cdot 1$ ეს არის A და B სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლის ელემენტების რაოდენობა, სადაც $n(A)=a$ და $n(B)=1$. B სიმრავლე შეიცავს ერთ ელემენტს. ვთქვათ, $B=\{\beta\}$, $(a;\beta)$ სახის წყვილების რაოდენობა იქნება A სიმრავლის ელემენტების რაოდენობის ტოლი, ე.ი. $n(A\times B)=a\cdot 1=a$. ახლა დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი a და b ნატურალური რიცხვებისათვის სრულდება ტოლობა $a\cdot(b+1)=a\cdot b+a$. ვთქვათ, $n(A)=a$ და $n(B)=b$. ვთქვათ, B_1 სიმრავლე მიიღება B სიმრავლისაგან ერთი γ ელემენტის დამატებით, მაშინ $A\times B_1$ დეკარტის ნამრავლში შევა პირველ რიგში ყველა ის წყვილი, რომელიც ეკუთვნის $A\times B$ ნამრავლს, მეორე რიგში შევა $(a;\gamma)$ სახის წყვილები, სადაც $a\in A$ და $\gamma\in B_1$; მიღებული ახალი წყვილების რაოდენობა ტოლი იქნება A სიმრავლის ელემენტების რაოდენობის, ე.ი

$$n(A\times B_1)=n(A\times B)+n(A)=a\cdot(b+1)=a\cdot b+a.$$

8. მთელი არაუარყოფითი რიცხვის გაყოფა ნატურალურ რიცხვზე სიმრავლეთა კლასებად დაყოფის საშუალებით. გაყოფის განსაზღვრა

გაყოფის ოპერაცია არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლეში მიიღება სასრული სიმრავლის ერთნაირი რიცხობრივობის მქონე ქვესიმრავლეებად დაშლის ამოცანებიდან. ასეთი ამოცანა ორია:

1) A სიმრავლე, რომელიც შეიცავს a ელემენტს, უნდა დაიშალოს არაგადამკვეთ ტოლი b რიცხობრივობის მქონე ქვესიმრავლეებად. ასეთი დაშლით რამდენი ქვესიმრავლე მიიღება? ასეთ ამოცანას ჩვეულებრივ შემცველობით გაყოფას უწოდებენ.

2) A სიმრავლე, რომელიც a ელემენტს შეიცავს, უნდა დაიშალოს ერთმანეთის არაგადამკვეთ ტოლი რიცხობრივობის მქონე c ქვესიმრავლეებად. რამდენი ელემენტი იქნება თითოეულ ქვესიმრავლეში? ასეთ ამოცანას ჩვეულებრივ ტოლ ნაწილებად გაყოფას უწოდებენ.

დავუშვათ, რომ ორივე ამოცანა ამოხსნილია. ვთქვათ, პირველი ამოცანის ამონახსნი არის x, ხოლო მეორის - y. A სიმრავლის ელემენტებად ვიგულისხმოთ ერთი და იმავე სახელწოდების საგნები (ვაშლები, ფანქრები და ა.შ.), მაშინ დაშლის შედეგად მიღებული ქვესიმრავლეებიც იმავე სახელწოდების ელემენტებისაგან იქნება შედგენილი, ხოლო ქვესიმრავლეების რაოდენობა განყენებული რიცხვი იქნება.

გავითვალისწინოთ თითოეული ამოცანის აზრი და ამონახსნები A სიმრავლის ელემენტების დათვლით შევამოწმოთ, რისთვისაც გამრავლების ოპერაცია გამოვიყენოთ.

პირველი ამოცანის პირობის თანახმად, თითოეულ ქვესიმრავლეში არის b ელემენტი, ამიტომ x ქვესიმრავლეში იქნება $b\cdot x$ ელემენტი, ე.ი. $b\cdot x=a$.

მეორე ამოცანის ამოხსნის თანახმად, თითოეულ ქვესიმრავლეში არის y ელემენტი, ამიტომ c ქვესიმრავლეში იქნება $y\cdot c$ ელემენტი, ე.ი. $y\cdot c=a$.

ჩანს, რომ პირველ ამოცანაში მოითხოვება უცნობი მამრავლის პოვნა ცნობილი ნამრავლისა და სამრავლის მიხედვით, ხოლო მეორე ამოცანაში - უცნობი სამრავლის პოვნა ცნობილი ნამრავლისა და მამრავლის მიხედვით.

გამრავლების კომუტატიურობის ძალით ორივე ამოცანა დაიყვანება უცნობი თანამამრავლის მოძებნაზე ცნობილი ნამრავლისა და მეორე თანამამრავლის მიხედვით.

გაყოფასთან დაკავშირებულ ორივე ამოცანაში ლაპარაკი იყო გაყოფის ორგვარ აზრზე, მაგრამ დავადგინეთ, რომ ორივე ამოცანის ამოხსნისათვის გამრავლების შებრუნებული გამოანგარიშება შესრულდა. ეს გამოანგარიშება განვსაზღვროთ როგორც ოპერაცია.

განსაზღვრება: a **რიცხვის გაყოფა** b **რიცხვზე არის ისეთი** c **რიცხვის მოძებნის ოპერაცია, რომ** $a=b\cdot c$. **გაყოფის ოპერაციისათვის იყენებენ ჩანაწერებს**

$$a:b=c \quad \text{ან} \quad \frac{a}{b}=c.$$

a რიცხვს ეწოდება გასაყოფი, b რიცხვს - გამყოფი. გაყოფის შედეგად მიღებულ c რიცხვს განაყოფს უწოდებენ.

ამრიგად, განსაზღვრების თანახმად $a:b=c\Leftrightarrow a=b\cdot c$.

9. ᲒᲐᲧᲝᲤᲘᲡ ᲙᲐᲕᲨᲘᲠᲘ ᲒᲐᲛᲠᲐᲕᲚᲔᲑᲐᲡᲗᲐᲜ

გაყოფის განსაზღვრებაში გათვალისწინებულია გაყოფის უშუალო კავშირი გამრავლებასთან. განაყოფი არის გამრავლების ოპერაციის ერთ-ერთი თანამამრავლი, სადაც ნამრავლი ტოლია გასაყოფისა, ხოლო მეორე თანამამრავლი - გამყოფისა.

გამრავლებისა და გაყოფის ამ კავშირის საფუძველზე გაყოფას ეწოდება გამრავლების შებრუნებული ოპერაცია (მოქმედება).

განსაზღვრება: გაყოფა ეწოდება გამრავლების შებრუნებულ მოქმედებას, რომლის საშუალებით ორი თანამამრავლის მოცემული ნამრავლით და ერთ-ერთი ამ თანამამრავლით ვპოულობთ მეორე თანამამრავლს.

ამასთან, მოცემულ ნამრავლს ეწოდება **გასაყოფი**, ცნობილ თანამამრავლს - **გამყოფი**, ხოლო საძიებელ თანამამრავლს - **განაყოფი**..

10. ᲒᲐᲧᲝᲤᲘᲡ ᲨᲔᲡᲠᲣᲚᲔᲑᲐᲓᲝᲑᲘᲡ ᲓᲐ ᲪᲐᲚᲡᲐᲮᲝᲑᲘᲡ ᲞᲘᲠᲝᲑᲐ

გაყოფის განსაზღვრების თანახმად $a:b=c \Leftrightarrow a=b\cdot c$. მსგავსად გამოკლებისა, გაყოფაც ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. მართლაც: ა) თუ გასაყოფი $a\neq0$, ხოლო გამყოფი $b=0$, მაშინ $a:0$-ს არ შეიძლება მიეცეს რაიმე c რიცხვითი მნიშვნელობა, რადგან $0\cdot c=a(a\neq0)$ ტოლობა შეუძლებელია c-ს რომელიმე მნიშვნელობისათვის. ამიტომ ამბობენ, რომ **ნულზე გაყოფა შეუძლებელია.**

ბ) თუ გასაყოფი $a=0$ და გამყოფი $b=0$, მაშინ $0:0$-ს შეიძლება მიეცეს ნებისმიერი c რიცხვითი მნიშვნელობა, რადგან $0\cdot c=0$ ტოლობა მართებულია ნებისმიერი c-სათვის. ამ შემთხვევაში c განაყოფი არ იქნება ერთი გარკვეული რიცხვი და ამიტომ $0:0$-ს აზრი არა აქვს.

ა) და ბ) შემთხვევებიდან დავასკვნით, რომ, თუ გამყოფი ნულის ტოლია, გაყოფა შეუძლებელია. მაშასადამე, b გამყოფი აუცილებლად ნულისაგან განსხვავებული მთელი რიცხვი უნდა იყოს, ე.ი. $b\in N$.

გ) ვთქვათ, გამყოფი $b\neq0$, $b\in N$. შემოვიღოთ მოცემული ნატურალური რიცხვის ჯერადის ცნება.

განვიხილოთ b რიცხვისა და ყოველი არაუარყოფითი მთელი რიცხვის ნამრავლთა მიმდევრობა:

$$b\cdot0=0,\ b\cdot1=b,\ b\cdot2=2b,\ \dots,\ b\cdot n=nb;\dots$$

ცხადია, გამრავლების მონოტონურობის თვისების თანახმად, ეს მიმდევრობა ზრდადობის მიხედვით არის დალაგებული

$$0<b<2b<3b<\dots<nb<\dots$$

ამ მიმდევრობის რიცხვებს b რიცხვის ჯერადები ვუწოდოთ.

განსაზღვრება: მოცემული ნატურალური რიცხვის ჯერადი ეწოდება მის ნამრავლს ნებისმიერ არაუარყოფით მთელ რიცხვზე.

1) თუ $b=1$, მაშინ ყოველი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი b-ს ჯერადია.

2) თუ $b>1$, b-ს ჯერადი არაუარყოფითი მთელი რიცხვების გარდა იარსებებს ისეთი არაუარყოფითი მთელი რიცხვებიც, რომლებიც b-ს ჯერადები არ იქნებიან. ყოველი a რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს $b\cdot k<a<b\cdot(k+1)$ პირობას, სადაც $k\in N_0$ b-ს არაჯერადია, ხოლო $a=b\cdot k$ სახის რიცხვები b-ს ჯერადებია.

მაგალითად, $b=5$.

5-ის ჯერადი რიცხვები იქნება

$$5\cdot0,\ 5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\dots,5\cdot n,\dots$$

$$0,\ 5,\ 10,\ 15,\ \dots\ 5\cdot n,\dots$$

დანარჩენი არაუარყოფითი მთელი რიცხვები

$$1,2,3,4,6,7,8,9,11,\dots$$

5-ის არაჯერადი რიცხვებია.

თუ a რიცხვი b რიცხვის ჯერადია, მაშინ $a=b\cdot k$, $(b\in N,\ k\in N_0)$ და გაყოფის განსაზღვრების თანახმად $a:b=k$, რაც იმას ნიშნავს, რომ a იყოფა b-ზე. გაყოფის ამ შემთხვევას სრული გაყოფა ვუწოდოთ.

შევნიშნოთ, რომ ნული ნებისმიერი ნატურალური რიცხვის ჯერადია, ე.ი. ნული იყოფა ნებისმიერ ნატურალურ რიცხვზე და განაყოფშიც მიიღება ნული.

$$0:b=0,\ \text{რადგან}\ b\cdot0=0.$$

ამრიგად, სრული გაყოფისათვის აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი შეზღუდვები: გამყოფი უნდა განსხვავდებოდეს ნულისაგან; გასაყოფი იყოს გამყოფის ჯერადი.

დასკვნა: a არაუარყოფითი მთელი რიცხვის b ნატურალურ რიცხვზე სრული გაყოფა შესრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა გასაყოფი a რიცხვი ჯერადია გამყოფი b რიცხვისა და გამყოფი b განსხვავებულია ნულისაგან.

თუ a რიცხვი b რიცხვზე სრულად იყოფა, მას სიმბოლურად ასე წერენ $a\vdots b$ და გამოთქვამენ: a რიცხვი ჯერადია b რიცხვისა; a რიცხვი იყოფა b რიცხვზე; b რიცხვი გამყოფია a რიცხვისა.

გაყოფის შესრულებადობის პირობიდან გამომდინარეობს გაყოფის სამი კე-

რძო შემთხვევა:

1) $a:1=a$, რადგან $a\cdot 1=a$,

ე.ი. ნებისმიერი რიცხვის ერთზე განაყოფი ამავე რიცხვის ტოლია.

2) $a:a=1$, რადგან $1\cdot a=a$ $(a\neq 0)$, ე.ი. ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვის თავის თავზე განაყოფი ერთის ტოლია.

3) $0:a=0$, რადგან $0\cdot a=0$ $(a\neq 0)$, ე.ი. ნული გაყოფილი ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ რიცხვზე ნულის ტოლია.

ახლა დავასაბუთოთ გაყოფის ცალსახობა.

თეორემა. თუ a რიცხვი b რიცხვზე იყოფა, მაშინ განაყოფი ერთადერთია.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, რომ

$$(a:b=c_1)\wedge(a:b=c_2)\wedge(c_1\neq c_2),$$

ე.ი. a რიცხვის b რიცხვზე გაყოფის შედეგად მიიღება ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული განაყოფი c_1 და c_2. იგულისხმება, რომ $a\in \mathrm{N}_0$, $b\in \mathrm{N}$.

გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $c_1<c_2$.

რადგან $b\neq 0$, ამიტომ $b\cdot c_1<b\cdot c_2$, მაგრამ დაშვებისა და გაყოფის განსაზღვრების თანახმად

$$b\cdot c_1=a \text{ და } b\cdot c_2=a.$$

გამოდის, რომ $a<a$, რაც შეუძლებელია. მიღებული წინააღმდეგობა უარყოფს ჩვენს დაშვებას, რომ $c_1\neq c_2$, მაშასადამე, $c_1=c_2$ და თეორემა ცალსახობის შესახებ დამტკიცებულია.

11. გაყოფის თვისებები

როგორც ვნახეთ, სრული გაყოფის ოპერაცია ყველა არაუარყოფითი მთელი რიცხვისათვის არ სრულდება. შევნიშნოთ, რომ ქვემოთ მოყვანილ თვისებებში, როცა ვიხმართ გაყოფის ცნებას, იგულისხმება სრული გაყოფის შესრულებადობა. განვიხილოთ ის თვისებები, რომლებიც დაწყებით კლასებში რიცხვების გაყოფის სწავლების თეორიულ საფუძვლად გვევლინებიან.

ორი რიცხვის ჯამის გაყოფა რიცხვზე

$$(a\vdots c)\wedge(b\vdots c)\Rightarrow(a+b)\vdots c=(a:c)+(b:c),$$

ე.ი. ორი რიცხვის ჯამი რომ გავყოთ რომელიმე რიცხვზე, შეიძლება თითოეული შესაკრები ამ რიცხვზე გავყოთ ცალ-ცალკე და მიღებული განაყოფები შევკრიბოთ.

დამტკიცება: შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$(a+b):c=x, \qquad (1)$$

$$a:c+b:c=y \qquad (2)$$

და ვაჩვენოთ, რომ $x=y$.

გაყოფის განსაზღვრების თანახმად (1) ტოლობიდან მივიღებთ

$$c\cdot x=a+b. \qquad (3)$$

თუ (2) ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ c-ზე, გამოვიყენებთ გამრავლების დისტრიბუტიულობის თვისებას შეკრების მიმართ და ურთიერთშებრუნებულ მოქმედებათა თვისებას, მივიღებთ

$$c\cdot y=(a:c)\cdot c+(b:c)\cdot c=a+b. \qquad (4)$$

(3) და (4) ტოლობების საფუძველზე $c\cdot x=c\cdot y$, საიდანაც

$$x=y, \quad \text{ე.ი. } (a+b):c=a:c+b:c.$$

ორი რიცხვის სხვაობის გაყოფა რიცხვზე

$$(a\vdots c)\wedge(b\vdots c)\Rightarrow(a-b)\vdots c=a:c-b:c,$$

ე.ი. ორი რიცხვის სხვაობა რომ გავყოთ რომელიმე რიცხვზე, შეიძლება საკლები და მაკლები ცალ-ცალკე გავყოთ ამ რიცხვზე და პირველ განაყოფს გამოვაკლოთ მეორე განაყოფი.

დამტკიცება მოხდება წინა თეორემის ანალოგიურად.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$(a-b):c=x; \qquad (1)$$

$$a:c-b:c=y \qquad (2)$$

და ვაჩვენოთ, რომ $x=y$.

გაყოფის განსაზღვრების თანახმად (1) ტოლობიდან მივიღებთ

$$c\cdot x=a-b. \qquad (3)$$

თუ (2) ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ c-ზე, გამოვიყენებთ გამრავლების დისტრიბუტიულობის თვისებას გამოკლების მიმართ და ურთიერთშებრუნებული მოქმედებების თვისებას, მივიღებთ

$$c\cdot y=(a:c)\cdot c-(b:c)\cdot c=a-b. \qquad (4)$$

(3) და (4) ტოლობების საფუძველზე $c\cdot x=c\cdot y$, ე.ი. $x=y$.

ორი რიცხვის ნამრავლის გაყოფა რიცხვზე

$$(a\vdots c)\wedge(b\vdots c)\Rightarrow(a\cdot b)\vdots c=(a:c)\cdot b=a\cdot(b:c),$$

ე.ი. ორი რიცხვის ნამრავლი რომ გავყოთ რომელიმე რიცხვზე, შეიძლება

ერთ-ერთი თანამამრავლი გავყოთ ამ რიცხვზე, მეორე თანამამრავლი კი უცვლელ დავტოვოთ.

დავამტკიცოთ $(a\cdot b):c=(a:c)\cdot b$ ტოლობის მართებულობა. შემოვიტანო აღნიშვნები:

$$(a\cdot b):c=x; \quad (1)$$

$$(a:c)\cdot b=y \quad (2)$$

და ვაჩვენოთ, რომ $x=y$.

გაყოფის განსაზღვრების თანახმად (1) ტოლობიდან მივიღებთ

$$a\cdot b=c\cdot x\,. \quad (3)$$

თუ (2) ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ c-ზე, გამოვიყენებთ ჯუფ ბადობისა და ურთიერთშებრუნებული მოქმედებების თვისებებს, მივიღებთ

$$c\cdot y=[(a:c)\cdot b]\cdot c=[(a:c)\cdot c]\cdot b=a\cdot b. \quad (4)$$

(3) და (4) ტოლობების საფუძველზე $c\cdot x=c\cdot y$, ე.ი. $x=y$. ანალოგიურად დ მტკიცდება $(a\cdot b):c=a\cdot(b:c)$ ტოლობის მართებულობა.

რიცხვის გაყოფა ორი რიცხვის ნამრავლზე

$$(a\vdots b)\wedge(a\vdots c)\Rightarrow a:(b\cdot c)=(a:b):c=(a:c):b.$$

რიცხვი რომ გავყოთ ორი რიცხვის ნამრავლზე, შეიძლება ეს რიცხვი გავყო ჯერ ერთ-ერთ თანამამრავლზე და მიღებული შედეგები გავყოთ მეორე თანამამრ ვლზეც.

დავამტკიცოთ $a:(b\cdot c)=(a:b):c$ ტოლობის მართებულობა. შემოვიტანო აღნიშვნები:

$$a:(b\cdot c)=x; \quad (1)$$

$$(a:b):c=y \quad (2)$$

და ვაჩვენოთ, რომ $x=y$.

გაყოფის განსაზღვრების თანახმად (1) ტოლობიდან მივიღებთ

$$a=(b\cdot c)\cdot x. \quad (3)$$

(2) ტოლობიდან ჯერ მივიღებთ $a:b=c\cdot y$, საიდანაც

$$a=b\cdot(c\cdot y)=(b\cdot c)\cdot y. \quad (4)$$

(3) და (4) ტოლობების საფუძველზე $(b\cdot c)\cdot x=(b\cdot c)\cdot y$, საიდანაც გამრავლე კვეცადობის თვისების გამოყენებით მივიღებთ $x=y$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $a:(b\cdot c)=(a:c):b$.

განაყოფის უცვლელობის თვისება

$$\forall c>0[a:b=(a\cdot c):(b\cdot c)].$$

თუ გასაყოფსა და გამყოფს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ერთსა და იმავე ნატუ- ალურ რიცხვზე, ამით განაყოფი არ შეიცვლება.

დამტკიცება: ვთქვათ, $(a\cdot c):(b\cdot c)=x,$ (1)

მაშინ გაყოფის განსაზღვრების თანახმად $a\cdot c=x\cdot(b\cdot c)=(x\cdot b)\cdot c$. ნამრავლის ცადობის თვისების თანახმად $a=x\cdot b$, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$a:b=x. \quad (2)$$

(1) და (2) ტოლობების საფუძველზე $a:b=(a\cdot c):(b\cdot c)$.

12. გაყოფა ნაშთით

ჩვენ ვნახეთ, რომ არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლეში სრული გაყოფის შესასრულებლად აუცილებელია გამყოფის ნულისაგან განსხვავებულობა და გასაყოფის გამყოფთან ჯერადობა.

შევნიშნოთ, რომ, თუ გამყოფი ნულის ტოლია, მაშინ გასაყოფის არც ერთი მნიშვნელობისათვის განაყოფი არ არსებობს. ამიტომ გაყოფის შესრულებადობის პირველი შეზღუდვა (გამყოფის ნულისაგან განსხვავებულობა) გაყოფის ყველა შემთხვევისათვის ძალაში უნდა დარჩეს.

სულ სხვა მდგომარეობა გვაქვს მეორე შეზღუდვის დროს. მეორე შეზღუდვის პირობებში (გასაყოფის გამყოფთან ჯერადობა) ზოგიერთი რიცხვისათვის სრულდება გაყოფა, ზოგიერთისათვის კი არა.

მაგალითად, $24\vdots 4$ $(24:4=6)$, მაგრამ $\overline{26\vdots 4}$.

ჩვენს წინაშე დგას გაყოფის ცნების ისეთნაირად განზოგადების საკითხი, რომ მეორე შეზღუდვა მოიხსნას და ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვის ნატურალურ რიცხვზე გაყოფის შესაძლებლობა მოგვეცეს. ასეთ განზოგადებულ გაყოფას **ნაშთით გაყოფა** ეწოდება.

რიცხვი 26 წარმოვადგინოთ ორი რიცხვის ჯამად, რომელთაგან ერთ-ერთი იყოს 4-ის შესაძლო უდიდესი ჯერადი. ასეთი რიცხვი არის 24, ე.ი. $26=24+2=4\cdot 6+2$.

26-ის 4-ზე გაყოფის შემთხვევაში 6-ს არასრული განაყოფი ეწოდება, ხოლო 2-ს ნაშთი ეწოდება, რასაც ხშირად ასე წერენ: $26:4=6$ (ნაშთი 2), სადაც ნაშთი ნაკლებია გამყოფზე $(2<4)$.

ამავე მეთოდით 26-ის გაყოფა 2-ზე მოგვცემს: **$26=2\cdot13+0$**, ე.ი. **$26:2=1$**
(ნაშთი 0).

ამრიგად, ადრე განხილული სრული გაყოფა ნაშთიანი გაყოფის იმ კერძ
შემთხვევას წარმოადგენს, როდესაც გაყოფის ნაშთი ნულის ტოლია.

ნაშთიანი გაყოფის დროს მოცემული ორი რიცხვით - გასაყოფითა და გამყო
ფით - პოულობენ ორ რიცხვს - განაყოფსა და ნაშთს, ხოლო სრული გაყოფი
დროს პოულობენ მხოლოდ ერთ რიცხვს - განაყოფს.

**განსაზღვრება: a არაუარყოფითი მთელი რიცხვის ნაშთით გაყოფა b ნატურა
ლურ რიცხვზე ეწოდება ისეთი q განაყოფისა და r ნაშთის მოძებნის ოპერაციას, რომ
$a=b\cdot q+r$ და $r<b$.**

მოკლედ, a გავყოთ b-ზე ($b\neq0$) ნიშნავს ისეთი q განაყოფისა და r ნაშთი
პოვნას, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $a=b\cdot q+r$, სადაც $r<b$.

ნაშთიანი გაყოფა იწერება ასე: $a:b=q$ (ნაშთი r).

მაგალითი. გასაყოფია 25, გამყოფი 7. ვიპოვოთ განაყოფი და ნაშთი.

განაყოფის მოსაძებნად ვიპოვოთ გამყოფის ორი მომდევნო ჯერადი რიცხვ
რომელთა შორისაც გასაყოფია მოთავსებული.

$$7\cdot1=7;\ 7\cdot2=14;\ 7\cdot3=21;\ 7\cdot4=28.$$

$$21<25<28, \text{ ე.ი. } 7\cdot3<25<7\cdot4.$$

საძიებელი განაყოფი არის 3.

ნაშთის მოსაძებნად გასაყოფს გამოვაკლოთ გამყოფისა და განაყოფის ნამრა
ვლი

$$25-7\cdot3=25-21=4.$$

საძიებელი ნაშთი არის 4.

ამრიგად, $25:7=3$ (ნაშთი 4), რადგან $25=7\cdot3+4$.

ნაშთიანი გაყოფის შესაბამისი ასახვა შეიძლება ჩაიწეროს $N_0\times N\to N_0^2$ სახით
რაც იმას ნიშნავს, რომ $N_0\times N$ წყვილში პირველი ელემენტი (გასაყოფი) არის
არაუარყოფითი მთელი რიცხვი, ხოლო მეორე ელემენტი (გამყოფი) არის ნატურა
ლური რიცხვი, ე.ი. არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს, საძიებელი (q,r) რიცხვთა
წყვილი კი ეკუთვნის N_0^2 -ს, ე.ი. $(q,r)\in N_0^2$.

დავამტკიცოთ თეორემა განაყოფისა და ნაშთის არსებობისა და ცალსახობი
შესახებ.

თეორემა. $(a,b)\in N_0\times N$ რიცხვთა ყოველი წყვილისათვის არსებობს და ამა

სთან ერთადერთი ისეთი $(q,r)\in N_0^2$ რიცხვთა წყვილი, რომ $a=b\cdot q+r$ და $r<b$.

ჯერ დავამტკიცოთ (q,r) წყვილის არსებობა.

I. თუ $a=0$, მაშინ $0=b\cdot q+0$ ტოლობა ჭეშმარიტია და გამოდის, რომ $q=0$, $r=0$, ე.ი. ამ შემთხვევისათვის არსებობს $(0,0)$ რიცხვთა წყვილი.

II. თუ a არის b-ს ჯერადი, ე.ი. $a=b\cdot k$, მაშინ $q=k$ და $r=0$, რადგან $a=b\cdot k+0$ და $r=0$, ე.ი. ამ შემთხვევისათვის არსებობს $(k,0)$ რიცხვთა წყვილი.

III. თუ a არ არის b-ს ჯერადი და $a<b$, მაშინ $q=0$ და $r=a$, რადგან $a=b\cdot0+a$ ტოლობა ჭეშმარიტია და $r=a<b$. ამ შემთხვევისათვის არსებობს $(0,a)$ რიცხვთა წყვილი.

IV. თუ a არ არის b-ს ჯერადი და $a>b$, მაშინ q განაყოფი გვიჩვენებს b რიცხვი რა უდიდეს რიცხვჯერ თავსდება a-ში (იგულისხმება $b>1$). ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაშიც არსებობს (q,r) რიცხვთა წყვილი, რომლებიც აკმაყოფილებს $a=b\cdot q+r$ ტოლობას, სადაც $r<b$.

განვიხილოთ b-დან და 1-დან a-მდე ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი.

$$b\cdot1;\ b\cdot2;\ b\cdot3;\ldots;\ b\cdot q;\ b\cdot(q+1);\cdots;b\cdot a. \qquad (1)$$

ცხადია, $b\cdot1<a$, ხოლო $b\cdot a>a$, მაშასადამე, a რიცხვი მოთავსებულია (1) მიმდევრობის რომელიმე ორ მეზობელ რიცხვს შორის. ვთქვათ, a მოთავსებულია $b\cdot q$ და $b\cdot(q+1)$ რიცხვებს შორის

$$b\cdot q<a<b\cdot(q+1)=b\cdot q+b,$$

ე.ი. $a<b\cdot q+b$; აქედან $a-b\cdot q<b$ და $a-b\cdot q=r$, $r<b$, საიდანაც ვღებულობთ·

$$a=b\cdot q+r,\ r<b.$$

ამ შემთხვევისათვის არსებობს (q,r) რიცხვთა წყვილი.

განხილული ოთხი შემთხვევა ამოწურავს a-ს ყველა მნიშვნელობას N_0-დან, ე.ი. ნებისმიერი a-სათვის დაკმაყოფილებულია ნაშთით გაყოფის განსაზღვრა და a რიცხვის b რიცხვზე გაყოფისას ყოველთვის არსებობს ისეთი (q,r) რიცხვთა წყვილი, რომ კმაყოფილდება ტოლობა

$a=bq+r$, სადაც $r<b$.

ახლა დავამტკიცოთ (q,r) წყვილის ცალსახობა.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, განაყოფი და ნაშთი არ არის ერთადერთი და სულ მცირე არსებობს ორი წყვილი მაინც (q,r) და (q_1,r_1) ისეთი, რომ $q\neq q_1$,

$r \neq r_1$ და აკმაყოფილებენ ერთსა და იმავე პირობას.

$$a=b\cdot q+r \text{ და } a=b\cdot q_1+r_1,\ r<b,\ r_1<b.$$

მაშინ გამოდის, რომ

$$b\cdot q+r=b\cdot q_1+r_1. \qquad (1)$$

გარკვეულობისათვის, ვთქვათ $r_1>r$, მაშინ (1) ტოლობიდან ვღებულობთ $bq-bq_1=r_1-r$ და $r_1-r\in N_0$. რადგან $b>0$, ამიტომ

$$b(q-q_1)=r_1-r \text{ და } q-q_1=(r_1-r):b. \qquad (2)$$

რადგან $q-q_1$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვი უნდა იყოს, გამოდის, რომ $(r_1-r):b$, მაგრამ $r_1-r<b$, რადგან $r_1<b$. b-ზე ნაკლები r_1-r რიცხვი მაშინ გაიყოფა b-ზე, როცა $r_1-r=0$, ე.ი. $r_1=r$. მაშინ (2) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$q-q_1=0;\ b=0,\ q-q_1=0 \text{ და } q=q_1.$$

ამრიგად, $q=q_1$, $r=r_1$ და (q,r) წყვილის ერთადერთობა დამტკიცებულია.

§3. თვლის სისტემები

1. თვლის არაპოზიციური სისტემები

მათემატიკაში თვლის სისტემას უწოდებენ რიცხვების დასახელების, ჩაწერისა და მათზე ოპერაციათა შესრულების ენას.

რიცხვი ძველთაძველი ცნებაა. შორეულ წარსულში სხვადასხვა ხალხმა განვითარების სხვადასხვა საფეხურზე ამა თუ იმ სახის თვლის სისტემა შექმნა. ყველა ხალხი რიცხვების გამოსახვისათვის იყენებდა თავისებურ ნიშანთა ერთობლიობას, დაწყებული ჯოხებზე ჭრილებიდან დამთავრებული თანამედროვე პოზიციური სისტემით.

თვლის ყველა სისტემა აგებულებისა და შინაარსის მიხედვით იყოფა ორ ჯგუფად: არაპოზიციურ და პოზიციურ სისტემებად.

თვლის არაპოზიციური სისტემისათვის დამახასიათებელია ის, რომ ამ სისტემაში ხმარებული რიცხვთა ნიშნებიდან (ციფრებიდან) ყოველი ნიშანი აღნიშნავს ერთ გარკვეულ რიცხვს, რა ადგილიც არ უნდა ეკავოს მას რიცხვის ჩანაწერში, ე.ი. არაპოზიციურ სისტემაში ციფრის მნიშვნელობა დამოკიდებული არ არის ჩაწერის ადგილზე (პოზიციაზე).

თვლის არაპოზიციური უძველესი სისტემა არის ეგვიპტური იეროგლიფური ნუმერაცია, რომელიც წარმოიშვა 4000-4500 წლის წინათ. არაპოზიციური სისტემები ჰქონდათ აგრეთვე ბერძნებს, სირიელებს, რომაელებს და სხვ, რომელთაგან რომაული არაპოზიციური სისტემა დღემდე შემორჩა და გამოყენებულია

რიგობითი ნატურალური რიცხვების ჩასაწერად.

რომაულ არაპოზიციურ სისტემაში რიცხვების ჩასაწერად გამოყენებულია ლათინური ალფაბეტის შვიდი ასო: I,V,X,L,C,D,M.

ამასთან, ნებისმიერ ადგილზე ჩაწერილი I ყოველთვის აღნიშნავს ერთს, V-ხუთს, X-ათს, L-ორმოცდაათს, C-ასს, D-ხუთასს, M- ათასს.

მაგალითად, რიცხვი 238 რომაული ნუმერაციით ჩაიწერება CCXXXVIII სახით, რომელშიც CC აღნიშნავს ორ ასეულს, XXX - სამ ათეულს, V- ხუთს და III სამ ერთეულს. 200+30+5+3=238.

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ რომაული ნუმერაციით ჩაწერილ რიცხვში თუ ციფრები კლებადობის პრინციპით არის დალაგებული, ე.ი. ნაკლები რიცხვის გამომსახველი ციფრი მოთავსებულია მეტი რიცხვის გამომსახველი ციფრის მარჯვნივ, მაშინ მეტ რიცხვს ემატება ნაკლები.

თუ ნაკლები რიცხვის გამომსახველი ციფრი მოთავსებულია მეტი რიცხვის გამომსახველი ციფრის მარცხნივ, მაშინ მეტ რიცხვს აკლდება ნაკლები.

მაგალითად, XI აღნიშნავს თერთმეტს, ხოლო IX - ცხრას.

LX აღნიშნავს სამოცს, ხოლო XL - ორმოცს.

(50+10=60, 50-10=40).

მაგალითად, რიცხვი 248 ჩაიწერება CCXLVIII სახით, რომელშიც XL აღნიშნავს 50-10=40-ს.

რომაული ნუმერაციით დიდი რიცხვების ჩაწერა ძნელდება, რადგან ხმარებული შვიდი ნიშანი დიდი რიცხვების გამოსახვისათვის საკმარისი არ არის.

თვლის არაპოზიციურ სისტემებს მიეკუთვნებოდა აგრეთვე ალფაბეტური სისტემები, რომლებიც რომაელების გარდა ჰქონდათ ძველ ბერძნებს, სლავებს, ებრაელებს, ქართველებს და სხვ. საინტერესოა, რომ ქართველები ძველთაგანვე რიცხვების ჩასაწერად იყენებდნენ ასომთავრული ანბანის ასო-ნიშნებს. ამ ანბანის თითოეულ ასო-ნიშანს თავისი რიცხვითი მნიშვნელობა შეესაბამება. ანბანის მწკრივში დალაგებულ პირველ ცხრა ასო-ნიშანს შეესაბამება ერთეულები, ანუ ციფრები 1-დან 9-ის ჩათვლით. მომდევნო ცხრა ასო - ნიშანს შეესაბამება ათეულები: 10, 20, ..., 90, შემდეგი ცხრა აღნიშნავს ასეულებს: 100, 200, ..., 900, შემდეგ გვაქვს ათასეულები: 1000, 2000, ..., ბოლო ასო - ნიშანს „ჰოეს" შეესაბამება რიცხვი 10000.

ამგვარად, ანბანის ასო-ნიშანთა დაჯგუფებით შესაძლებლობა გვეძლევა ამა თუ იმ რიცხვების ჩაწერისა, მაგალითად, რიცხვი 1992 შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად: „ჩშჟბ", რიცხვი 300-„ტ", რიცხვი 803 - „ყგ" და ა.შ.

2. თვლის პოზიციური სისტემები

მათემატიკის განვითარებაში დიდ მიღწევად არის მიჩნეული თვლის პოზიცი-
ური სისტემების შექმნა.

თვლის პოზიციურ სისტემაში ერთი და იგივე ციფრით შეიძლება აღინიშნოს
სხვადასხვა რიცხვი იმისდა მიხედვით, თუ რიცხვის ჩანაწერში რა ადგილი (პოზიცია)
უკავია ამ ციფრს.

იმის გამო, რომ ხალხთა უმრავლესობამ სტანდარტულ სიმრავლედ შეარჩია
ხელების ათი თითი, რომლებსაც იყენებდნენ თვლა-ანგარიშის დროს, თვლის
პოზიციური სისტემებიდან პრაქტიკაში დამკვიდრდა თვლის ათობითი პოზიციური
სისტემა. იგი გამოიგონეს ინდოეთში; შემდეგ გავრცელდა არაბულ ქვეყნებში,
არაბული ქვეყნებიდან კი - ევროპაში.

ათობით სისტემაში ნებისმიერი რიცხვის ჩასაწერად გამოყენებულია ათი ნი-
შანი, რომლებსაც ციფრები ეწოდება. ესენია: 0 (ნული), 1 (ერთიანი), 2 (ორიანი),
3 (სამიანი), 4 (ოთხიანი), 5 (ხუთიანი), 6 (ექვსიანი), 7 (შვიდიანი), 8 (რვიანი), 9
(ცხრიანი). როგორც ჩანს, ათობით სისტემაში შემოვისაზღვრეთ ცხრიანით და
ციფრი „ათიანი" არა გვაქვს.

ამ ათი ციფრით შეიძლება ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი გამო-
ისახოს. ზემოთ დასახელებული ცალკეული ციფრით, შესაბამისად, 0-დან 9-მდე
ჩათვლით რიცხვები გამოისახება. უფრო დიდი რიცხვების ჩაწერისას გამოყენე-
ბულია პოზიციურობის პრინციპი, რომლის დროსაც თითოეული ციფრის მნიშვნე-
ლობა თვითონ ამ ციფრითა და მის მიერ დაკავებული ადგილით განისაზღვრება.

თვლის ათობით სისტემაში ათი მარტივი ერთეული მომდევნო მეორე თანრი-
გის ერთ ერთეულს - ათეულს შეადგენს: ათი ათეული, უფრო მაღალი, მესამე
თანრიგის ერთ ერთეულს- ასეულს შეადგენს; ათი ასეული მეოთხე თანრიგის ერთ
ერთეულს - ათასეულს შეადგენს და ა.შ.

რიცხვის ჩანაწერში მარჯვნიდან პირველი ციფრი მარტივი ერთეულების რაო-
დენობას გამოსახავს; მარჯვნიდან მეორე ციფრი ათეულების რაოდენობას; მა-
რჯვნიდან მესამე ციფრი - ასეულების რაოდენობას და ა.შ.

მარტივ ერთეულს, ათეულს, ასეულს, ათასეულს და ა.შ. თანრიგითი ერთეუ-
ლები ეწოდება. ყოველი შემდგომი თანრიგითი ერთეული ათჯერ მეტია მარჯვნივ
მდგომ თანრიგით ერთეულზე.

მაგალითად, „352" ათობით სისტემაში აღნიშნავს რიცხვს, რომელიც შედგება
2 მარტივი ერთეულისაგან, 5 ათეულისაგან, 3 ასეულისაგან და წარმოადგენს
$3\cdot100+5\cdot10+2$, ანუ $3\cdot10^2+5\cdot10+2$ გამოსახულების მოკლე ჩანაწერს.

„555" სამი ხუთიანით არის გამოსახული, მაგრამ მარჯვნიდან პირველი ხუთიანი
პირველი თანრიგის 5 ერთეულს, ანუ 5 მარტივ ერთეულს გამოსახავს, მარჯვნიდან
მეორე ხუთიანი მეორე თანრიგის 5 ერთეულს, ანუ 5 ათეულს გამოსახავს, ხოლო
მესამე ხუთიანი - მესამე თანრიგის 5 ერთეულს, ანუ 5 ასეულს გამოსახავს,

ე.ი. $555=5\cdot10^2+5\cdot10+5$.

ამრიგად, თვლის ათობითი პოზიციური სისტემის გამოყენებით საკმაოდ დიდი
გამოსახულება, რომელიც შედგება თანრიგითი ერთეულებისაგან (ათის ხარისხები
და ციფრებით გამოსახული რიცხვების ნამრავლთა ჯამისაგან), შეიძლება შეიცვა-
ლოს მოკლე, პირობითი ჩანაწერით.

მაგალითად, $4\cdot10^3+5\cdot10^2+7\cdot10+8$ შეიძლება შეიცვალოს მოკლე, პირობითი
ჩანაწერით „4578", რომელშიაც ათის ხარისხები და შეკრებისა და გამრავლების
ნიშნები გამოტოვებულია.

საზოგადოდ, ყოველი N ნატურალური რიცხვი თვლის ათობით პოზიციურ
სისტემაში შეიძლება ცალსახად გაიშალოს შემდეგი გამოსახულების სახით

$$N=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0, \qquad (1)$$

რომელიც მოკლედ ასე იწერება $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}$ (2)

და ყოველი a_i ათობითი სისტემის ციფრებს აღნიშნავს, ე.ი. $0\le a_i\le9$ და იგულის-
ხმება, რომ $a_n\neq0$.

N რიცხვის განაშლის (1) ფორმულაში განსაკუთრებულ როლს რიცხვი 10
ასრულებს, რომელსაც თვლის სისტემის ფუძე ეწოდება, ხოლო თვლის სისტემას -
ათობითი.

ათობითი სისტემა თვლის პოზიციური სისტემების ერთ-ერთი კერძო სახეა.
განვიხილოთ თვლის პოზიციური სისტემები ზოგადი სახით.

თვლის სისტემის ფუძედ შეიძლება შერჩეულ იქნეს 1-ზე მეტი ნებისმიერი
ნატურალური რიცხვი. ვთქვათ, ფუძედ მივიღეთ $p>1$ ნატურალური რიცხვი, მაშინ
რიცხვების ჩასაწერად საკმარისი იქნება p ციფრი: $0,1,2,3,\ldots,p-1$, ე.ი. $0\le a_i\le p-1$.
თითოეული ციფრით, შესაბამისად, 0-დან $p-1$-მდე რიცხვები გამოისახება. p
რაოდენობის მარტივი ერთეული შეადგენს მეორე თანრიგის ერთეულს; p რაო-
დენობის მეორე თანრიგის ერთეული, ე.ი. $p\cdot p=p^2$ - მესამე თანრიგის ერთეულს, p
რაოდენობის მესამე თანრიგის ერთეული, ე.ი. $p\cdot p^2=p^3$ - მეოთხე თანრიგის ერთე-
ულს და ა.შ.

ყოველი N ნატურალური რიცხვი თვლის პოზიციურ სისტემაში, რომლის

ფუძეა p ცალსახად წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$N=a_n\cdot p^n+a_{n-1}\cdot p^{n-1}+\ldots+a_1\cdot p+a_0\cdot \qquad (3)$$

მას მოკლედ ასე წერენ $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\ldots a_1 a_0}_{(p)}$ (4)

და ყოველი a_i ციფრების აღმნიშვნელი სიმბოლოებია, ე.ი. $0\leq a_i\leq p-1$ და ამასთანავე $a_n\neq 0$ (a_0-ის ქვემოთ მიწერილი (p) ინდექსი თვლის სისტემის ფუძეს გვიჩვენებს. ათობით სისტემაში ჩაწერილ რიცხვებს თვლის სისტემის ფუძის ინდექსი არ ეწერება და ვგულისხმობთ 10-ს).

p ფუძის მქონე თვლის პოზიციურ სისტემას, მოკლედ, p-ობითი სისტემა ეწოდება, ხოლო p-ობითი სისტემით წარმოდგენილ რიცხვს - p-ობითი რიცხვი.

ცნობილია, რომ თვლის ათობით სისტემაში სისტემის ფუძე, რიცხვი ათი იწერება „10“-ის სახით $(10=1\cdot 10+0)$, ხოლო 10^k იწერება „100...0“-ის (k ნული) სახით.

ანალოგიურად, თვლის p-ობით სისტემაში სისტემის ფუძე, რიცხვი p ჩაიწერება „$10p$“-ს სახით $(p=1\cdot p+0)$, ხოლო $P^k=1\cdot P^k+0\cdot P^{k-1}+\ldots+0$ იწერება „100...0p“-ის (k ნული) სახით.

მაგალითები: როცა $p=5$, მაშინ (3) ზოგადი ფორმულიდან მივიღებთ რიცხვის ჩაწერას ხუთობით სისტემაში

$$N=a_n\cdot 5^n+a_{n-1}\cdot 5^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 5+a_0,$$

სადაც $0\leq a_i\leq 4$ და რიცხვების ჩასაწერად საკმარისი იქნება შემდეგი ხუთი ციფრი: 0,1,2,3,4.

როცა $p=8$, მაშინ (3) ზოგადი ფორმულიდან მივიღებთ N რიცხვის ჩაწერას რვაობით სისტემაში

$$N=a_n\cdot 8^n+a_{n-1}\cdot 8^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 8+a_0,$$

სადაც $0\leq a_i\leq 7$ და რიცხვების ჩასაწერად საკმარისი იქნება შემდეგი რვა ციფრი: 0,1,2,3,4,5,6,7.

როცა $p=2$, მაშინ N რიცხვს ჩავწერთ ორობით სისტემაში

$$N=a_n\cdot 2^n+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 2+a_0$$

და რიცხვების ჩასაწერად საკმარისი იქნება მხოლოდ ორი ციფრი: 0 და 1.

როგორც ჩანს, ამა თუ იმ ფუძიან თვლის პოზიციურ სისტემაში რიცხვის ჩასაწერად იმდენი ციფრია საჭირო, რამდენი ერთეულიც არის სისტემის ფუძეში:

ათობით პოზიციურ სისტემაში - ათი ციფრი;

რვაობით პოზიციურ სისტემაში - რვა ციფრი;

ორობით პოზიციურ სისტემაში - ორი ციფრი და ა.შ.

ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ ათობით სისტემაში რიცხვი ათი იწერება 10-ის სახით.

ანალოგიურად, რვაობით სისტემაში რიცხვი რვა ჩაიწერება $10_{(8)}$-ის სახით $(8=1\cdot 8+0=10_{(8)})$, ორობით სისტემაში რიცხვი ორი იწერება $10_{(2)}$-ის სახით $(2=1\cdot 2+0=10_{(2)})$ და ა.შ.

რიცხვს, რომელიც გამოსახულია ამა თუ იმ ფუძიანი თვლის პოზიციური სისტემით, **სისტემატური რიცხვი** ეწოდება.

3. თვლის ერთი სისტემიდან მეორეზე გადასვლა

ერთი და იგივე ნატურალური რიცხვი შეიძლება ნებისმიერფუძიან თვლის სისტემაში გამოისახოს. თვლის ერთ სისტემაში გამოსახული რიცხვიდან რომ მივიღოთ მეორე სისტემაში გამოსახული იგივე რიცხვი, საკმარისია ვიცოდეთ ნებისმიერ სისტემაში გამოსახული რიცხვის ათობით სისტემაში გამოსახვა და პირიქით, ათობით სისტემაში გამოსახული რიცხვის ნებისმიერ სისტემაში გამოსახვა.

შევნიშნოთ, რომ 10-ზე ნაკლები ფუძის მქონე სისტემატური რიცხვების ჩასაწერად შეიძლება ათობითი სისტემის სათანადო ციფრები გამოვიყენოთ, ხოლო 10-ზე მეტი ფუძის მქონე სისტემატური რიცხვების ჩასაწერად ათზე მეტი ციფრია საჭირო და იძულებული ვიქნებით შემოვიღოთ დამატებითი სიმბოლოები. ჩვენ შემოვიფარგლებით 10-ზე ნაკლებფუძიანი სისტემატური რიცხვებით.

ამოცანა 1. მოცემულია p-ობით სისტემაში ჩაწერილი ნატურალური რიცხვი $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\ldots a_1 a_0}_{(p)}$. იგივე რიცხვი ჩავწეროთ ათობითი სისტემით.

ამოხსნისათვის საკმარისია p-ობითი რიცხვის მოკლე ჩანაწერი გავშალოთ სისტემის ფუძის ხარისხებისა და შესაბამისი ციფრების ნამრავლთა ჯამად.

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\ldots a_1 a_0}_{(p)}=a_n\cdot p^n+a_{n-1}\cdot p^{n-1}+\ldots+a_1\cdot p+a_0. \qquad (5)$$

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2},\ldots, a_1, a_0$ ციფრები და p ფუძე ჩავთვალოთ ათობითი სისტემის რიცხვებად და შევასრულოთ (5)-ში ნაჩვენები მოქმედებანი. ათობით სისტემაში ჩაწერილი მიღებული შედეგი მოგვცემს ამოცანის პასუხს.

მაგალითები:

1) $432_{(5)}$ სისტემატური რიცხვი გამოვსახოთ ათობითი სისტემით.

ამოხსნა: $432_{(5)}=4\cdot 5^2+3\cdot 5+2=4\cdot 25+15+2=100+15+2=117$. ამრიგად, $432_{(5)}=117$.

2) $237_{(8)}$ გამოვსახოთ ათობითი სისტემით.

ამოხსნა: $237_{(8)}=2\cdot 8^2+3\cdot 8+7=2\cdot 64+24+7=128+24+7=159$, ე.ი. $237_{(8)}=159$.

3) $10100_{(2)}$ გამოვსახოთ ათობითი სისტემით.

ამოხსნა: $10100_{(2)}=1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2+0=16+0+4+0+0=20$, ე.ი. $10100_{(2)}=20$.

ამოცანა 2. მოცემულია ათობით სისტემაში ჩაწერილი ნატურალური რიცხვი

$a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$. იგივე რიცხვი ჩავწეროთ p-ობითი სისტემით.

ამ ამოცანის ამოხსნისათვის საჭიროა ათობით სისტემაში ჩაწერილი მოცემული ნატურალური რიცხვი გავყოთ p-ზე ათობითი სისტემით. გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი იქნება p-ობით სისტემაში ჩანაწერის ბოლო a_0 ციფრი (პირველი თანრიგის ერთეულების რიცხვი), პირველი არასრული განაყოფი კიდევ უნდა გავყოთ p-ზე; ახალი ნაშთი p-ობითი სისტემის მეორე a_1 ციფრი იქნება (მეორე თანრიგის ერთეულების რიცხვი). თუ გავაგრძელებთ ამგვარ გაყოფას p-ზე მანამდე, ვიდრე განაყოფში ნული არ მიიღება, ვიპოვით ყველა ნაშთს, ე.ი. მოცემული ნატურალური რიცხვის p-ობით სისტემაში ჩაწერის ყველა ციფრს, რომელთაგან ბოლო ნაშთი უმაღლესი თანრიგის ერთეულების რაოდენობის მაჩვენებელი ციფრი იქნება.

მაგალითები: 1) რიცხვი 323 ჩავწეროთ ხუთობით სისტემაში.

ამოხსნა: 323 გავყოთ 5-ზე

$$\begin{array}{r|l} 323 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{30} & 64 \\ 23 & \\ \underline{20} & \\ 3 & \end{array}$$

ნაშთი 3 გვიჩვენებს პირველი თანრიგის ერთეულების რაოდენობას 5-ობით სისტემაში. ხოლო განაყოფი 64 - ხუთეულების რაოდენობას, ახლა 64 გავყოთ 5-ზე

$$\begin{array}{r|l} 64 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{5} & 12 \\ 14 & \\ \underline{10} & \\ 4 & \end{array}$$

ნაშთი 4 გვიჩვენებს მეორე თანრიგის ერთეულების რაოდენობას 5-ობით სისტემაში. ახლა 12 გავყოთ 5-ზე

$$\begin{array}{r|l} 12 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{10} & 2 \\ 2 & \end{array}$$

ნაშთი 2 გვიჩვენებს მესამე თანრიგის ერთეულების რაოდენობას 5-ობით სისტემაში.

ბოლოს 2 გავყოთ 5-ზე

$$\begin{array}{r|l} \underline{2} & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 0 \end{array}$$

ბოლო ნაშთი 2 გვიჩვენებს მეოთხე, უმაღლესი თანრიგის ერთეულების რაოდენობას.

ათობითი სისტემით მოცემული რიცხვი ხუთობით სისტემაში ასე ჩაიწერება.
$323=2243_{(5)}$.

ზემოთ ჩატარებული 5-ზე თანდათანობითი გაყოფა შეიძლება ჩაიწეროს ასეთი სახით

$$\begin{array}{rrrrr} 323 & 5 & & & \\ 3 & 64 & 5 & & \\ & 4 & 12 & 5 & \\ & & 2 & 2 & 5 \\ & & & 2 & 0 \end{array}$$

ამრიგად, ათობით სისტემაში მოცემული რიცხვი რომ გამოვსახოთ რომელიმე ახალ სისტემაში, საჭიროა მოცემული რიცხვი გავყოთ ახალი სისტემის ფუძეზე, მიღებული განაყოფი ხელახლა გავყოთ სისტემის ფუძეზე, ახალი განაყოფი კვლავ გავყოთ სისტემის ფუძეზე და ა.შ., სანამ განაყოფში არ მივიღებთ ნულს. მაშინ მიღებული ნაშთები საძიებელი რიცხვის თანრიგითი ერთეულების რიცხვები იქნება და ბოლო ნაშთიდან დაწყებული მიმდევრობით ამოწერილი ნაშთებით მოცემული რიცხვის ახალ სისტემაში გამოსახვას მივიღებთ.

განხილული ორი ამოცანის გამოყენებით შეიძლება ათობითი სისტემისაგან განსხვავებული ერთი სისტემიდან გადავიდეთ მეორე სისტემაში.

მაგალითები. 1) $532_{(8)}$ რიცხვი გამოვსახოთ ხუთობით სისტემაში.

$532_{(8)}=x_{(5)}$.

$532_{(8)}$ ჯერ გამოვსახოთ ათობით სისტემაში.

$532_{(8)}=5\cdot8^2+3\cdot8+2=5\cdot64+24+2=320+24+2=346.$

ახლა 346 გამოვსახოთ ხუთობით სისტემაში.

$$\begin{array}{rrrrr} 346 & 5 & & & \\ 1 & 69 & 5 & & \\ & 4 & 13 & 5 & \\ & & 3 & 2 & 5 \\ & & & 2 & 0 \end{array}$$

$346=2341_{(5)}$

მაშასადამე, $532_{(8)}=346=2341_{(5)}$.

შემოწმება: $2341_{(5)}=2\cdot5^3+3\cdot5^2+4\cdot5+1=2\cdot125+3\cdot25+4\cdot5+1=250+75+20+1=346$

$$\begin{array}{r|r|r|r}
346 & 8 & & \\
2 & 43 & 8 & \\
 & 3 & 5 & 8 \\
 & & 3 & 0
\end{array}$$

ამრიგად, $2341_{(5)}=346=532_{(8)}$.

2) $532_{(8)}$ გამოვსახოთ ორობით სისტემაში.

ვიცით, რომ $532_{(8)}=346$.

ახლა 346 გამოვსახოთ ორობით სისტემაში.

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r|r|r|r}
346 & 2 & & & & & & & & \\
0 & 173 & 2 & & & & & & & \\
 & 1 & 86 & 2 & & & & & & \\
 & & 0 & 43 & 2 & & & & & \\
 & & & 1 & 21 & 2 & & & & \\
 & & & & 1 & 10 & 2 & & & \\
 & & & & & 0 & 5 & 2 & & \\
 & & & & & & 1 & 2 & 2 & \\
 & & & & & & & 0 & 1 & 2 \\
 & & & & & & & & 1 & 0
\end{array}$$

$346=101011010_{(2)}$.

ამრიგად, $532_{(8)}=101011010_{(2)}$.

შემოწმება:

$$101011010=1\cdot2^8+0\cdot2^7+1\cdot2^6+0\cdot2^5+1\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+2+0=256+0+$$
$$+64+0+16+8+0+2+0=346=532_{(8)}.$$

არსებობს რვაობითი სისტემიდან ორობით სისტემაში გადასვლის უფრო იოლი ხერხი. შევნიშნოთ, რომ რვაობითი სისტემის ფუძე $8=2^3$, ე.ი. 8 წარმოადგენს ორობითი სისტემის მეოთხე თანრიგით ერთეულს ($8=1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2+0=1000_{(2)}$), ხოლო რვაობითი სისტემის თითოეული ციფრი შეიძლება გამოისახოს ორობითი სისტემის სამი ციფრით. ეს გამოსახვა შემდეგ ცხრილშია მოცემული

რვაობითი	0	1	2	3	4	5	6	7
ორობითი	000	001	010	011	100	101	110	111

რვაობით სისტემაში მოცემული რიცხვი რომ გამოვსახოთ ორობით სისტემაში, საკმარისია რვაობითი სისტემის თითოეული ციფრი შევცვალოთ ორობითი სისტემის შესაბამისი სამი ციფრით – „სამეულით“, ამასთან ორობითი სისტემის

ყველა ნული იწერება, გარდა უმაღლესი თანრიგის წინა ნულებისა.

ეს კარგად ჩანს წინა მაგალითში.

$432_{(8)}=101011010_{(2)}$; $5_{(8)}=101_{(2)}$, $3_{(8)}=011_{(2)}$, $2_{(8)}=010_{(2)}$.

ამრიგად, სრულიად მექანიკურად, ზედა ცხრილის გამოყენებით შეიძლება რვაობითი სისტემიდან ორობითზე გადასვლა.

მაგალითები: $2563_{(8)}=10101110011_{(2)}$,

$46354_{(8)}=100110011101100_{(2)}$.

მექანიკურად ხორციელდება შებრუნებული ოპერაციაც – ორობითი სისტემიდან რვაობითზე გადასვლა: ორობითი სისტემით გამოსახული რიცხვი მარჯვნიდან მარცხნივ უნდა დაიყოს სამეულებად (ბოლო „სამეული“ შეიძლება არასრული იყოს) და ყოველი „სამეული“ რვაობითი სისტემის ციფრებით შეიცვალოს.

მაგალითები: $11\ 101\ 011\ 111_{(2)}=3537_{(8)}$,

$101\ 000\ 000\ 111_{(2)}=5007_{(8)}$.

ძნელი არ არის რვაობითი და ორობითი სისტემების ამ ურთიერთკავშირის ზოგადი სახით დამტკიცება. სიცხადისათვის შემოვიფარგლოთ გარკვეული ნიშნადობის რიცხვით. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორობით სისტემაში გამოსახული ექვსნიშნა რიცხვი

$$N=a_5a_4c_3a_2a_1a_{0\,(2)},$$

რომელშიც ყოველი a_i ციფრი 0 ან 1-იანია.

ათობით სისტემაში ეს რიცხვი ასე ჩაიწერება

$$N=a_5\cdot2^5+a_4\cdot2^4+a_3\cdot2^3+a_2\cdot2^2+a_1\cdot2+a_0.$$

იგი წარმოვადგინოთ ასეთი სახით $N=(a_5\cdot2^2+a_4\cdot2+a_3)\cdot2^3+(a_2\cdot2^2+a_1\cdot2+a_0)$.

$(a_5\cdot2^2+a_4\cdot2+a_3)$ და $(a_2\cdot2^2+a_1\cdot2+a_0)$ ორობით სისტემაში გამოსახული სამნიშნა რიცხვებია, რომლებიც რვაზე ნაკლები რომელიმე არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია და, მაშასადამე, გამოისახებიან რვაობითი სისტემის თითო ციფრით. ვთქვათ, $(a_5\cdot2^2+a_4\cdot2+a_3)=b_1$ და $(a_2\cdot2^2+a_1\cdot2+a_0)=b_0$, მაშინ $N=b_1\cdot8+b_0=$ $=b_1b_{0\,(8)}$,

ე.ი. მივიღეთ რვაობით სისტემაში გამოსახული ორნიშნა რიცხვი.

რვაობითი და ორობითი თვლის სისტემების ამ ურთიერთკავშირს ფართოდ იყენებენ თანამედროვე ელექტრონულ-გამომთვლელ მანქანებში (ეგმ).

4. თვლის პოზიციურ სისტემაში მოცემულ არაუარყოფით მთელ რიცხვებზე მოქმედებათა მაგალითები

ჩვენთვის ცნობილია თვლის ათობით პოზიციურ სისტემაში მოცემული არაუარყოფითი მთელი რიცხვების შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის წესები (ალგორითმები).

მოქმედების წესები თვლის სისტემის ფუძეზე არ არის დამოკიდებული, ამიტომ არაათობითი თვლის პოზიციურ სისტემებში მოცემულ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებანი იმავე წესებს ემორჩილება, რასაც ათობით სისტემაში.

შეკრება და გამოკლება. ნებისმიერფუძიან თვლის პოზიციურ სისტემაში მოცემული არაუარყოფითი მთელი რიცხვების შეკრება და გამოკლება ერთნიშნა რიცხვების შეკრებისა და გამოკლების ცხრილის შესწავლით იწყება. ეს ცხრილები სხვადასხვა ფუძის მქონე სისტემატური რიცხვებისათვის სხვადასხვაა.

ორობითი თვლის პოზიციურ სისტემაში ერთნიშნა რიცხვების შეკრებისა და გამოკლების ცხრილი მარტივია და შემდეგი სახისაა.

a/b	0	1
0	0	1
1	1	10

ახლა შევადგინოთ რვაობითი თვლის პოზიციურ სისტემაში ერთნიშნა რიცხვების შეკრებისა და გამოკლების ცხრილი.

a/b	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3.	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

ამ ცხრილის მიხედვით, 6-ისა და 4-ის ჯამი ასე მოიძებნება: პირველ სვეტში ვპოულობთ 6-ს, პირველ სტრიქონში -4-ს. აღებული სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთის უჯრედში ვნახავთ 12-ს, რაც რვაობით სისტემაში ნიშნავს 2 მარტივ ერთეულსა და 1 მეორე თანრიგის ერთეულს, ე.ი. რვას, სულ ათ მარტივ ერთეულს.

$$6_{(8)}+4_{(8)}=12_{(8)}.$$

იგივე ცხრილი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ერთნიშნა რიცხვებისა და ისეთი ორნიშნა და ერთნიშნა რიცხვების გამოკლებისათვის, რომელთა სხვაობა ერთნიშნა რიცხვს იძლევა.

მაგალითად, შევასრულოთ გამოკლება $12_{(8)}-6_{(8)}$. პირველ სვეტში ვეძებთ მაკლებს - 6-ს, მის გასწვრივ სტრიქონში ვპოულობთ საკლებს- $12_{(8)}$-ს. ამ საკლებიდან ავყვებით სვეტის გასწვრივ და პირველ სტრიქონში ვპოულობთ პასუხს 4-ს, ე.ი. $12_{(8)}-6_{(8)}=4_{(8)}$.

ნებისმიერ სისტემაში ერთნიშნა რიცხვების შეკრებისა და გამოკლების ცხრილების ცოდნის საფუძველზე შეიძლება მრავალნიშნა რიცხვების შეკრება და გამოკლებაც. შეკრების დროს შესაკრებები უნდა ჩაიწეროს ერთმანეთის ქვეშ, ისე, რომ ერთნაირი თანრიგის ერთეულები ერთ სვეტში მოხვდეს. ერთი და იმავე თანრიგის ერთეულების ჯამი მოიძებნება ცხრილის მიხედვით.

რვაობით სისტემაში ჩაწერილი ორი მრავალნიშნა რიცხვის შეკრებას ასეთი სახე ექნება

$$+\begin{array}{r}52374_{(8)}\\34602_{(8)}\\\hline 107176_{(8)}\end{array}$$

ანალოგიურად სრულდება გამოკლებაც

$$-\begin{array}{r}645324_{(8)}\\37241_{(8)}\\\hline 606063_{(8)}\end{array}$$

ორობითი სისტემით მოცემული მრავალნიშნა რიცხვების შეკრება და გამოკლება ასე გამოისახება

$$+\begin{array}{r}1011011_{(2)}\\11001_{(2)}\\\hline 1110100_{(2)}\end{array}\qquad -\begin{array}{r}11011_{(2)}\\1101_{(2)}\\\hline 1110_{(2)}\end{array}$$

ანალოგიურად სრულდება სხვა სისტემის რიცხვების შეკრება და გამოკლება. მაგალითად:

$$+\begin{array}{r}532_{(6)}\\343_{(6)}\\\hline 1315_{(6)}\end{array}\qquad -\begin{array}{r}4635_{(7)}\\2563_{(7)}\\\hline 2042_{(7)}\end{array}$$

გამრავლება. გამრავლებაც უნდა დაიწყოს ერთნიშნა რიცხვების გამრავლების ცხრილის შესწავლით. თვლის ორობით სისტემაში გამრავლების ცხრილი ასეთი სახისაა

a/b	0	1
0	0	0
1	0	1

ხოლო რვის რვაობით სისტემაში გამრავლების ცხრილი ასეთია:

a/b	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

ამ ცხრილებით სარგებლობენ შეკრების ცხრილების მსგავსად. ნებისმიერ სისტემაში მრავალნიშნა რიცხვების გამრავლების ჩაწერა ისევე სრულდება, როგორც ათობით სისტემაში.

განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია ორობითი სისტემით მოცემული რიცხვების გამრავლება. რადგან ნულზე გამრავლება ყოველთვის გვაძლევს ნულს და ერთზე გამრავლებით რიცხვი არ იცვლება, ამიტომ ორობითი სისტემით მოცემული მრავალნიშნა რიცხვების გამრავლება სამრავლის მარჯვნივ გადაადგილებისა და შეკრების ოპერაციამდე დაიყვანება.

მაგალითები.

1)
$$\begin{array}{r} \times\, 11011_{(2)} \\ 1101_{(2)} \\ \hline 11011 \\ +\,11011 \\ +\,11011 \\ \hline 101011111_{(2)} \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} \times\, 101011_{(2)} \\ 1101_{(2)} \\ \hline 101011 \\ +\,101011 \\ +\,101011 \\ \hline 110000011_{(2)} \end{array}$$

რვაობით სისტემაში მოცემული მრავალნიშნა რიცხვების გამრავლების მაგალითი

$$\begin{array}{r} \times\, 7062_{(8)} \\ 13_{(8)} \\ \hline 21226 \\ +\,7062 \\ \hline 116046_{(8)} \end{array}$$

გაყოფა. ერთნიშნა რიცხვების გამრავლების ცხრილი შეიძლება გამოვიყენოთ ერთნიშნა რიცხვების გაყოფისა და ისეთი ორნიშნა რიცხვების ერთნიშნა რიცხვზე გაყოფისათვის, როცა განაყოფში ერთნიშნა რიცხვს ვღებულობთ.

ნებისმიერ სისტემაში მოცემული მრავალნიშნა რიცხვების გაყოფა იმგვარადვე წარმოებს, როგორც ათობით სისტემაში, მხოლოდ ერთი თანრიგითი ერთეულის სხვა თანრიგის ერთეულებად გადაქცევისას მხედველობაში სისტემის ფუძე უნდა მივიღოთ.

მაგალითები.

1)
$$\begin{array}{r|l} 1101001_{(2)} & 101_{(2)} \\ \cline{2-2} -\,101 & 10101_{(2)} \\ \cline{1-1} 110 & \\ -\,101 & \\ \cline{1-1} 101 & \\ -\,101 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|l} 2651_{(8)} & 25_{(8)} \\ \cline{2-2} -\,25 & 105_{(8)} \\ \cline{1-1} 151 & \\ -\,151 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

§4. ნატურალურ რიცხვთა გაყოფადობა

1. გაყოფადობის მიმართება და მისი ძირითადი თვისებები

გაყოფის ოპერაციის განხილვისას აღვნიშნეთ, რომ არაუარყოფითი მთელ რიცხვთა სიმრავლეში იგი ყოველთვის არ სრულდება, დავადგინეთ მისი შესრულებადობის პირობები, რის შემდეგაც გავარჩიეთ ორი სახის გაყოფა: სრული, ანუ უნაშთო გაყოფა და ნაშთიანი გაყოფა.

ნაშთიანი გაყოფის დროს მოცემული ორი რიცხვით - $a(a\in N_0)$ გასაყოფითა და b $(b\in N)$ გამყოფით - ვპოულობთ ისეთ ორ რიცხვს $q(q\in N_0)$ განაყოფს და $r(r\in N_0)$ ნაშთს, რომ $a=b\cdot q+r$, სადაც $0\le r<b$.

სრული, ანუ უნაშთო გაყოფის დროს მოცემული ორი რიცხვით - a გასაყოფითა და b გამყოფით - ვპოულობთ მხოლოდ ერთ რიცხვს - q განაყოფს - ისეთს, რომ $a=b\cdot q$.

a რიცხვის b რიცხვზე უნაშთო გაყოფა სიმბოლურად ასე ჩავწეროთ $a \vdots b$ და გამოვთქვით სამი სახით: a რიცხვი იყოფა b რიცხვზე; a რიცხვი ჯერადია b რიცხვისა; b რიცხვი გამყოფია a რიცხვისა.

აღნიშნული სამი გამოთქმა საშუალებას იძლევა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, სრულ გაყოფასთან დაკავშირებით, შემოვიტანოთ სამი ბინარული მიმართება - გაყოფადობის, ჯერადობის და გაყოფის მიმართებანი.

ჯერ განვიხილოთ გაყოფადობის მიმართება:

$$\forall a, \forall b\ [a \vdots b] \Leftrightarrow (\exists q\in N)\ [a=bq]\ a,b\in N,$$

a ნატურალური რიცხვი იყოფა b ნატურალურ რიცხვზე მაშინ და მხოლოდ

მაშინ, როდესაც არსებობს ისეთი ნატურალური q რიცხვი, რომ $a=bq$.

შევნიშნოთ, რომ გაყოფადობის მიმართებაში გამყოფი ეწოდება მხოლოდ იმ ნატურალურ რიცხვს, რომელზედაც სრულად, ანუ უნაშთოდ იყოფა მოცემული ნატურალური რიცხვი, მაშინ, როდესაც მოქმედება გაყოფაში გამყოფი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი, სულერთია, გაყოფა ნაშთიანია თუ უნაშთო.

თუ a რიცხვი სრულად, ანუ უნაშთოდ არ იყოფა b რიცხვზე, მაშინ წერენ $\overline{a \vdots b}$.

მაგალითად, $12 \vdots 3$, რადგან $12=3 \cdot 4$,

$12 \vdots 2$, რადგან $12=2 \cdot 6$.

მაგრამ $\overline{12 \vdots 5}$, რადგან არ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი q, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $12=5 \cdot q$.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში გაყოფადობის მიმართებას ახასიათებს რეფლექსურობის, ანტისიმეტრიულობის და ტრანზიტულობის თვისებები. ამ თვისებების დამტკიცებისას და შემდგომშიც, სიმარტივისათვის, „ნატურალური რიცხვის" ნაცვლად ხშირად ვიხმართ „რიცხვს".

1) გაყოფადობის მიმართება **რეფლექსურია**, ე.ი. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი იყოფა თავის თავზე

$$\forall a \in N \; a \vdots a.$$

დამტკიცება: ნებისმიერი $a (a \in N)$ რიცხვისათვის გვაქვს $a=a \cdot 1$, რადგან $1 \in N$ ამიტომ $a \vdots a$.

2) ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნატურალური რიცხვისათვის გაყოფადობის მიმართება **ანტისიმეტრიულია**

$$\forall a,b \in N \; (a \vdots b) \wedge (a \neq b) \Rightarrow \overline{(b \vdots a)}$$

(თუ a იყოფა b-ზე, მაშინ b არ იყოფა a-ზე).

დამტკიცება: თუ $a \vdots b$, მაშინ $a=b \cdot c$, სადაც $c \in N$.

$$a-b=bc-b=b(c-1).$$

როდესაც $c>1, c-1>0$ და $a-b>0$, მაშასადამე, $a>b$.

ამ უტოლობიდან გამოდის, რომ $b<a$ და ამიტომ b რიცხვი არ გაიყოფა a რიცხვზე. მაშასადამე, $\overline{b \vdots c}$.

შენიშვნა: განხილულ შემთხვევაში, თუ $c=1$, მაშინ $a-b=0$ და $a=b$. რადგან ტოლი რიცხვების განაყოფი ერთის ტოლია ($a:b=b:a=1$), ამიტომ $a \vdots b \Rightarrow b \vdots a$. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ტოლი ნატურალური რიცხვებისათვის გაყოფადობის მიმართება სიმეტრიულია

$$\forall a,b \in N \; (a \vdots b) \wedge (a=b) \Rightarrow b \vdots a.$$

3) გაყოფადობის მიმართება **ტრანზიტულია**

$$\forall a,b,c \in N \; (a \vdots b \wedge b \vdots c) \Rightarrow (a \vdots c).$$

თუ a იყოფა b-ზე და b იყოფა c-ზე, მაშინ a გაიყოფა c-ზე.

დამტკიცება: $a \vdots b$ მიმართებიდან გამომდინარეობს, რომ $a=b \cdot k$, ხოლო $b \vdots c$ მიმართებიდან - $b=c \cdot e$, სადაც k და e რიცხვები ნატურალურია.

გვაქვს, რომ $a=b \cdot k=(c \cdot e) \cdot k=c \cdot (e \cdot k)$.

$e \cdot k$ ნატურალური რიცხვია, ამიტომ $a \vdots c$.

2. ჯამის, სხვაობის და ნამრავლის გაყოფადობა

ჩვენს მიერ დამტკიცებული ორი რიცხვის ჯამის, სხვაობის და ნამრავლის რიცხვზე გაყოფის თვისებები საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ გაყოფადობის მიმართების სამი ანალოგიური თვისება და მათგან გამომდინარე შედეგები

I.) $\forall a,b,c \in N \; (a \vdots c \wedge b \vdots c) \Rightarrow ((a+b) \vdots c)$.

თუ a და b რიცხვები იყოფა c რიცხვზე, მაშინ a და b რიცხვების ჯამიც გაიყოფა c რიცხვზე.

დამტკიცება: $a \vdots c$ და $b \vdots c$ პირობის თანახმად მოიძებნება ისეთი k და e ნატურალური რიცხვები, რომ $a=c \cdot k$ და $b=c \cdot e$, მაშინ $a+b=c \cdot k+c \cdot e=c \cdot (k+e)$.

რადგან k და e ნატურალური რიცხვებია, ჯამი $k+e$ ისევ ნატურალური რიცხვია, ამიტომ $(a+b) \vdots c$.

თვისება მართებულია ორზე მეტი შესაკრებისათვისაც, ე. ი.

$$\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in N \; (a_1 \vdots c \wedge a_2 \vdots c \wedge \ldots \wedge a_n \vdots c) \Rightarrow ((a_1+a_2+..+a_n) \vdots c)$$

და დამტკიცების მეთოდიც ანალოგიურია.

შევნიშნავთ, რომ შებრუნებულ თვისებას ყოველთვის არა აქვს ადგილი, შეიძლება ჯამი გაიყოს რიცხვზე, მაგრამ შესაკრებები არ გაიყოს ამ რიცხვზე.

II. $\forall a,b,c \in N \wedge (a>b) \; (a \vdots c \wedge b \vdots c) \Rightarrow ((a-b) \vdots c)$.

თუ a და b რიცხვები იყოფა c-ზე და $a>b$, მაშინ a და b რიცხვების სხვაობაც გაიყოფა c რიცხვზე.

დამტკიცება: $a \vdots c$ და $b \vdots c$ პირობის თანახმად $a=c \cdot k$ და $b=c \cdot e$, სადაც k და e ნატურალური რიცხვებია, მაშინ $a-b=c \cdot k-c \cdot e=c \cdot (k-e)$. რადგან $a-b>0$, ამიტომ $k-e$ სხვაობა ნატურალური რიცხვია და, მაშასადამე, $(a-b) \vdots c$.

III. თუ a რიცხვი იყოფა c რიცხვზე, მაშინ a რიცხვისა და ნებისმიერი b რიცხვის ნამრავლიც გაიყოფა c რიცხვზე. სხვანაირად, თუ ერთ-ერთი თანამამრავლი იყოფა რაიმე რიცხვზე, მაშინ ნამრავლიც გაიყოფა ამ რიცხვზე.

დამტკიცება: $a \vdots c$ პირობის თანახმად $a=c \cdot k$, სადაც $k \in \mathrm{N}$, მაშინ $a \cdot b=(c \cdot k) \cdot b=c \cdot (k \cdot b)$. რადგან $k \cdot b \in \mathrm{N}$, ამიტომ $(a \cdot b) \vdots c$.

შევნიშნავთ, რომ შებრუნებულ თვისებას ყოველთვის არა აქვს ადგილი, ე.ი. ნამრავლი შეიძლება გაიყოს რაიმე რიცხვზე, მაგრამ არც ერთი თანამამრავლი არ გაიყოფა ამ რიცხვზე. მაგალითად, $8 \cdot 6=48$. ნამრავლი 48 იყოფა 12-ზე ($48:12=4$, ე.ი. $48=12 \cdot 4$), თუმცა არც ერთი თანამამრავლი არ იყოფა 12-ზე ($\overline{8 \vdots 12}$ და $\overline{6 \vdots 12}$).

დამტკიცებული სამი თვისებიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი შედეგი.

IV. თუ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ რიცხვები იყოფა c რიცხვზე, მაშინ ნებისმიერი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვებისათვის $a_1 x_1+a_2 x_2+\ldots+a_n x_n$ ჯამიც გაიყოფა c რიცხვზე.

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{N}_0 \ (a_1 \vdots c \wedge a_2 \vdots c \wedge \ldots \wedge a_n \vdots c) \Rightarrow ((a_1 x_1+a_2 x_2+\ldots+a_n x_n) \vdots c).$$

მართლაც, III თვისების ძალით ნებისმიერი შესაკრები $a_i x_i$ გაიყოფა c-ზე, ხოლო I თვისების ძალით ჯამიც გაიყოფა c-ზე.

განვიხილოთ ჯამის გაყოფადობის კიდევ ერთი თვისება, რომელსაც ფართოდ იყენებენ გაყოფადობის თეორიაში.

V. თუ ერთი შესაკრები არ იყოფა რაიმე რიცხვზე, ხოლო ყველა დანარჩენი შესაკრები იყოფა ამ რიცხვზე, მაშინ ჯამიც არ გაიყოფა ამ რიცხვზე.

დამტკიცება: ვთქვათ, მოცემულია ჯამი

$$S=a_1+a_2+\ldots+a_n+b$$

და დავუშვათ, რომ ყოველი $a_i \vdots c$. (სადაც $i=1,2,\ldots,n$),

ხოლო $\overline{b \vdots c}$, ე. ი. $a_1=c \cdot k_1$, $a_2=c \cdot k_2, \ldots, a_n=c \cdot k_n$,

ხოლო $b=c \cdot q+r$, სადაც $k_i, q \in \mathrm{N}$ და $1 \leq r<c$.

დავამტკიცოთ, რომ $\overline{S \vdots c}$.

$$S=ck_1+ck_2+\ldots+ck_n+cq+r=c \cdot (k_1+k_2+\ldots+k_n+q)+r.$$

$k_1+k_2+\ldots+k_n+q$ რაიმე ნატურალური რიცხვია. ვთქვათ, იგი უდრის m-ს, მაშინ $S=cm+r$, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ S ჯამი არ იყოფა c-ზე. $\overline{S \vdots c}$.

შევნიშნოთ, რომ ამ პარაგრაფში აღნიშნული გაყოფადობის მიმართების თვისებები დამოკიდებული არ არის ნატურალური რიცხვების აღრიცხვის სისტემაზე და ჭეშმარიტია ნებისმიერი ფუძის მქონე თვლის პოზიციური სისტემისათვის.

3. გაყოფადობის ნიშნები

თვლის ათობითი სისტემისათვის 2,3,4,5,8,9,25-ზე გაყოფადობის ნიშნები

პრაქტიკაში ხშირად საჭირო ხდება გაყოფის შეუსრულებლად წინასწარ გავარკვიოთ a ნატურალური რიცხვი უნაშთოდ გაიყოფა თუ არა b ნატურალურ რიცხვზე. მრავალი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტის დროს გვიხდება ისეთი b რიცხვის მოძებნა, რომელზედაც უნაშთოდ გაიყოფა მოცემული a რიცხვი. ასეთ შემთხვევებში ვიყენებთ ე.წ. გაყოფადობის ნიშნებს.

a რიცხვის b რიცხვზე გაყოფადობის ნიშანი ეწოდება წესს, რომელიც საშუალებას იძლევა გაყოფის შეუსრულებლად a რიცხვის რაიმე პოზიციური სისტემით ჩანაწერის მიხედვით გამოვიცნოთ a რიცხვი იყოფა თუ არა b რიცხვზე.

ათობითი პოზიციური სისტემით წარმოდგენილი რიცხვებისათვის განვიხილოთ სათაურში დასახელებულ რიცხვებზე გაყოფადობის ნიშნები. გავიხსენოთ, რომ ათობით სისტემაში რიცხვების ჩასაწერად გამოყენებულია ათი ციფრი: 0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9, რომელთაგან 0,2,4,6 და 8-ს ლუწი ციფრები ეწოდება, ხოლო 1,3,5,7,9-ს - კენტები.

ჯერ განვიხილოთ 2-ზე და 5-ზე გაყოფადობის ნიშნები, რადგან მათი დამტკიცების ხერხები ერთნაირია.

1) 2-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც დაბოლოებულნი არიან ლუწი ციფრით (მარტივი ერთეულების რიცხვი ლუწია).

დამტკიცება: თვლის ათობით პოზიციურ სისტემაში ყოველი ნატურალური რიცხვი შეიძლება ასეთნაირად ჩავწეროთ.

$$a=a_n \cdot 10^n+a_{n-1} \cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1 \cdot 10+a_0, \qquad (1)$$

სადაც $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ ათობითი სისტემის ციფრებია, ე.ი. $0 \leq a_i \leq 9$.

(1) ტოლობით მოცემული a რიცხვის მნიშვნელობა წარმოვადგინოთ ორ შესაკრებად.

$$a=(a_n \cdot 10^n+a_{n-1} \cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1 \cdot 10)+a_0. \qquad (2)$$

რიცხვი 10 იყოფა 2-ზე, ამიტომ $10^2, 10^3, \ldots, 10^n$ რიცხვებიც გაიყოფა 2-ზე. გაყოფადობის IV თვისების თანახმად (2) ტოლობის ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება აუცილებლად გაიყოფა 2-ზე. a რიცხვიდან განუხილავი დაგვრჩა მხოლოდ a_0. თუ a_0 არის 0,2,4,6,8 ციფრთაგან ერთ-ერთი, მაშინ მისით გამოსახული რიცხვი გაიყოფა 2-ზე და, მაშასადამე, მთლიანად a რიცხვიც გაიყოფა 2-ზე.

2) 5-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც დაბოლოებულნი არიან

0-ით ან 5-იანით (მარტივი ერთეულების რიცხვი არის ნული ან ხუთი).

დამტკიცება: ვისარგებლოთ (2) ტოლობით.

$$a=(a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot10)+a_0.$$

რიცხვი 10 იყოფა 5-ზე, ამიტომ $10^2,10^3,\ldots,10^n$ რიცხვებიც გაიყოფა 5-ზე. გაყოფადობის IV თვისების თანახმად (2) ტოლობის ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება აუცილებლად გაიყოფა 5-ზე. a რიცხვის 5-ზე გაყოფადობა დამოკიდებულია მხოლოდ a_0-ზე. თუ a_0 არის 0 ან 5, მაშინ მისით გამოსახული რიცხვი გაიყოფა 5-ზე და, მაშასადამე, მთლიანად a რიცხვიც გაიყოფა 5-ზე.

ახლა განვიხილოთ 4-ზე და 25-ზე გაყოფადობის ნიშნები.

3) 4-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომელთა ორი ბოლო ციფრით გამოსახული რიცხვი იყოფა 4-ზე.

დამტკიცება: (1) ტოლობით მოცემული a რიცხვის მნიშვნელობა წარმოვადგინოთ ორ ასეთ შესაკრებად

$$a=(a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_2\cdot10^2)+(a_1\cdot10+a_0). \qquad (3)$$

რიცხვი $10^2=100$ იყოფა 4-ზე, ამიტომ $10^2,10^3,\ldots,10^n$ რიცხვებიც გაიყოფა 4-ზე. გაყოფადობის IV თვისების თანახმად (3) ტოლობის პირველ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება აუცილებლად გაიყოფა 4-ზე.

რიცხვის 4-ზე გაყოფადობა დამოკიდებულია მხოლოდ მეორე ფრჩხილებში მოთავსებულ გამოსახულებაზე, ე.ი. $a_1\cdot10+a_0$-ზე, რაც ორი ბოლო ციფრით გამოსახულ ორნიშნა რიცხვს წარმოადგენს. თუ იგი გაიყოფა 4-ზე, მაშინ მთლიანად a რიცხვიც გაიყოფა 4-ზე.

4) 25-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც დაბოლოებულია 00-ით, 25-ით, 50-ით ან 75-ით.

დამტკიცება: ვისარგებლოთ (3) ტოლობით.

რიცხვი 100 იყოფა 25-ზე, ამიტომ $10^3,10^4,\ldots,10^n$ რიცხვებიც გაიყოფა 25-ზე. გაყოფადობის IV თვისების თანახმად (3) ტოლობის პირველ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება აუცილებლად გაიყოფა 25-ზე. რიცხვის 25-ზე გაყოფადობა დამოკიდებულია მხოლოდ $a_1\cdot10+a_0$-ზე, რაც ორი ბოლო ციფრით გამოსახულ ორნიშნა რიცხვს წარმოადგენს. თუ იგი გაიყოფა 25-ზე, მაშინ მთლიანად a რიცხვიც გაიყოფა 25-ზე. ორნიშნა რიცხვებიდან 25-ზე იყოფა მხოლოდ 0,25,50 და 75, ამიტომ ჩამოყალიბებული თვისება დამტკიცებულია.

განვიხილოთ 8-ზე გაყოფადობის ნიშანი.

5) 8-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომელთა სამი ბოლო ციფრით გამოსახული რიცხვი იყოფა 8-ზე.

დამტკიცება: (1) ტოლობით მოცემული a რიცხვის მნიშვნელობა წარმოვადგინოთ ორ შესაკრებად

$$a=(a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_3\cdot10^3)+(a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0). \qquad (4)$$

რიცხვი $10^3=1000$ იყოფა 8-ზე, ამიტომ $10^4,10^5,\ldots,10^n$ რიცხვებიც გაიყოფა 8-ზე. IV თვისების თანახმად (4) ტოლობის პირველ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება აუცილებლად გაიყოფა 8-ზე. a რიცხვის 8-ზე გაყოფადობა დამოკიდებულია მხოლოდ მეორე ფრჩხილებში მოთავსებულ გამოსახულებაზე – $a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0$-ზე, რაც სამი ბოლო ციფრით გამოსახულ სამნიშნა რიცხვს წარმოადგენს. თუ იგი გაიყოფა 8-ზე, მაშინ მთლიანად a რიცხვიც გაიყოფა 8-ზე.

ბოლოს განვიხილოთ 3-ზე და 9-ზე გაყოფადობის ნიშნები.

6) 3-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომელთა ციფრთა ჯამიც იყოფა 3-ზე.

7) 9-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომელთა ციფრთა ჯამიც იყოფა 9-ზე.

დამტკიცება: წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ათობითი სისტემის თანრიგითი რიცხვები 10, 100, 1000 და ა.შ. შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს 3-ისა და 9-ის ჯერადი რიცხვისა და 1-ის ჯამის სახით: $10=9+1$, $100=99+1$, $1000=999+1$ და ა.შ.

$$10^n=\underbrace{999\ldots9}_{\text{n ცხრიანი}}+1.$$

თანრიგითი ერთეულების ახეთი სახით დაშლა საშუალებას გვაძლევს თვლის ათობით პოზიციურ სისტემაში გამოსახული ყოველი a ნატურალური რიცხვი ჯუფდებადობისა და განრიგებადობის თვისებების გამოყენებით გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$a=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0=a_n\cdot(\underbrace{99\ldots9}_{\text{n ცხრიანი}}+1)+a_{n-1}\cdot(\underbrace{99\ldots9}_{\text{n-1 ცხრიანი}}+1)+$$
$$+\ldots+a_2\cdot(99+1)+a_1\cdot(9+1)+a_0=a_n\cdot99\ldots9+a_n+a_{n-1}\cdot99\ldots9+a_{n-1}+\ldots+a_2\cdot99+a_2+$$
$$+a_1\cdot9+a_1+a_0=(a_n\cdot\underbrace{99\ldots9}_{\text{n ცხრიანი}}+a_{n-1}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{\text{n-1 ცხრიანი}}+a_2\cdot99+a_1\cdot9)+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1+a_0).$$

a რიცხვი დავშალეთ ორ შესაკრებად. პირველი შესაკრები (პირველ ფრჩხილებში მოთავსებული მრავალწევრი) არის 9-ის ჯერადი რიცხვების ჯამი და ამიტომ გაიყოფა 3-ზე და 9-ზე. a რიცხვის 3-ზე და 9-ზე გაყოფადობა დამოკიდებულია მე-2 შესაკრებზე (მეორე ფრჩხილებში მოთავსებულ მრავალწევრზე), რომელიც

არის a რიცხვის თითოეული ციფრით გამოსახული რიცხვების ჯამი და სიმარტივისათვის „ციფრთა ჯამს" უწოდებენ. თუ მეორე შესაკრები იყოფა 3-ზე და 9-ზე, მაშინ ჯამის გაყოფადობის ნიშნის თანახმად მთლიანად a რიცხვიც გაიყოფა 3-ზე და 9-ზე.

შევნიშნოთ, რომ, თუ a რიცხვი იყოფა 9-ზე, მაშინ იგი აუცილებლად გაიყოფა 3-ზე, მაგრამ შებრუნებული დასკვნის გაკეთება ყოველთვის ჭეშმარიტი არ არის, ე.ი. შეიძლება a რიცხვი გაიყოს 3-ზე, მაგრამ არ გაიყოს 9-ზე. მაგალითად, $972 \vdots 9$ და $972 \vdots 3$. ($9+7+2=18$, $18 \vdots 9$ და $18 \vdots 3$), მაგრამ $852 \vdots 3$ და $\overline{852 \vdots 9}$. $8+5+2=15$, $15 \vdots 3$, მაგრამ $\overline{15 \vdots 9}$.

4. მარტივი და შედგენილი რიცხვები

ნატურალურ რიცხვთა სამი კლასი

ვთქვათ, a ნატურალური რიცხვი უნაშთოდ იყოფა b ნატურალურ რიცხვზე. ნებისმიერი b გამყოფი არ აღემატება a რიცხვს ($1 \le b \le a$), ამიტომ a რიცხვს აქვს გამყოფების სასრული რიცხვი და მათი რაოდენობა ნაკლებია a სხვადასხვა მნიშვნელობაზე.

გამყოფების რაოდენობის მიხედვით ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს ყოფენ კლასებად.

ნატურალურ რიცხვებს შორის რიცხვი 1 განსაკუთრებული ხასიათისაა, მას აქვს მხოლოდ ერთი ნატურალური გამყოფი - ეს არის რიცხვი 1.

ერთზე მეტ a ნატურალურ რიცხვს ორი გამყოფი მაინც აქვს: 1 და a არის ისეთი ნატურალური რიცხვები, რომლებსაც ორზე მეტი გამყოფი აქვს. მაგალითად, 4-ს აქვს სამი გამყოფი - 1,2 და 4, 6-ს აქვს ოთხი გამყოფი - 1, 2, 3 და 6.

განსაზღვრება: ერთზე მეტ a ნატურალურ რიცხვს მარტივი ეწოდება, თუ მას აქვს მხოლოდ ორი გამყოფი - 1 და a.

ერთზე მეტ a ნატურალურ რიცხვს შედგენილი ეწოდება, თუ მას აქვს ორზე მეტი სხვადასხვა გამყოფი.

მარტივი რიცხვებია: 2,3,5,7,11,13,17,19,...

თითოეულ მათგანს აქვს მხოლოდ ორი გამყოფი - 1 და თავისი თავი.

შედგენილი რიცხვებია: 4,6,8,9,10,12,14,15,16,... თითოეულ მათგანს აქვს ორზე მეტი გამყოფი - 1, თავისი თავი და კიდევ სხვა რომელიმე ნატურალური რიცხვი.

ამრიგად, ნატურალური გამყოფების რიცხვის მიხედვით ნატურალურ რი-

ცხვთა სიმრავლე ნაწილდება სამ არაგადამკვეთ ქვესიმრავლედ:

1) რიცხვი 1. აქვს მხოლოდ ერთი ნატურალური გამყოფი.
2) მარტივი რიცხვები. აქვთ მხოლოდ ორი ნატურალური გამყოფი.
3) შედგენილი რიცხვები. აქვთ ორზე მეტი ნატურალური გამყოფი.

შენიშვნა: რიცხვი 0 იყოფა ყოველ ნატურალურ რიცხვზე, ე.ი. 0-ს აქვს მრავალი ნატურალური გამყოფი და არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე ნაწილდება ოთხ არაგადამკვეთ ქვესიმრავლედ.

5. თეორემა მარტივი გამყოფის არსებობის შესახებ

ვაჩვენოთ, რომ ერთზე მეტ ყოველ ნატურალურ რიცხვს აქვს ერთი მაინც მარტივი გამყოფი. კერძოდ, მართებულია თეორემა: **ერთზე მეტი a ნატურალური რიცხვის ერთისაგან განსხვავებული p უმცირესი გამყოფი მარტივი რიცხვია.**

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, a რიცხვის უმცირესი გამყოფი p, რომელიც ერთისაგან განსხვავდება, მარტივი რიცხვი არ არის. მაშინ მოიძებნება ისეთი t რიცხვი, რომ $p \vdots t$ და $t<p$. გაყოფადობის ტრანზიტულობის ძალით $a \vdots p \wedge p \vdots t \Rightarrow a \vdots t$. t არის a რიცხვის გამყოფიც.

თუ დავუშვებთ, რომ $t>1$, მაშინ a რიცხვი გაიყოფა ერთისაგან განსხვავებულ t რიცხვზე, რომელიც ნაკლებია p რიცხვზე და ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას, რომ p რიცხვი არის ერთისაგან განსხვავებული უმცირესი გამყოფი. ამიტომ დაგვრჩენია ვთქვათ, რომ $t=1$, ე.ი. p რიცხვს აქვს მხოლოდ ორი ნატურალური გამყოფი 1 და p, მაშასადამე, p რიცხვი მარტივია. თეორემა დამტკიცებულია.

a რიცხვის უმცირეს მარტივ p გამყოფს აქვს ერთი მნიშვნელოვანი თვისება:

თეორემა. a შედგენილი რიცხვის p უმცირესი მარტივი გამყოფი არ აღემატება $\sqrt{a}$-ს;

დამტკიცება: რადგან a შედგენილი რიცხვია, ხოლო p-მისი უმცირესი მარტივი გამყოფი, ამიტომ $a=pb$. ამასთან $p \le b$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში b რიცხვი p რიცხვზე ნაკლები იქნებოდა და a რიცხვს ექნებოდა p-ზე მცირე მარტივი გამყოფი.

$p \le b$ უტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ p-ზე, მივიღებთ $p^2 \le pb=a$, ე.ი. $p^2 \le a$, საიდანაც $p \le \sqrt{a}$.

ამ თეორემიდან შედეგის სახით გამომდინარეობს:

თუ a რიცხვი არ იყოფა არც ერთ მარტივ რიცხვზე, რომლებიც არ აღემატებიან $\sqrt{a}$-ს, მაშინ a რიცხვი მარტივია.

საერთოდ, მოცემული მრავალნიშნა რიცხვის მარტივობის ან შედგენილობის დადგენა დიდ შრომას მოითხოვს და დაკავშირებულია მოქმედება გაყოფის მრავალჯერ შესრულებასთან. ამ თეორემის შედეგის გამოყენება თითქმის ანახევრებს ამ შრომას.

მაგალითი. დავადგინოთ 137-ის მარტივობა.

კვადრატული ფესვის ამოღებით დავრწმუნდებით, რომ $11<\sqrt{137}<12$.

12-ზე ნაკლები მარტივი რიცხვებია 2,3,5,7,11. უშუალო გაყოფით დავრწმუნდებით, რომ 137 არც ერთ ამ მარტივ რიცხვზე არ იყოფა. 11-ზე მეტ მარტივ რიცხვებზე გაყოფა, თეორემის ძალით, საჭირო აღარ არის. 137 მარტივი რიცხვია.

6. მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობა

როგორც აღვნიშნეთ, ნატურალურ რიცხვთა უსასრულო სიმრავლე ნაწილდება სამ არაგადამკვეთ ქვესიმრავლედ: რიცხვი 1, შედგენილი რიცხვების სიმრავლე და მარტივი რიცხვების სიმრავლე.

პირველი ქვესიმრავლე სასრულია, რადგან შეიცავს მხოლოდ ერთ ელემენტს 1-ს, მეორე და მესამე ქვესიმრავლეები კი უსასრულო სიმრავლეებია.

შედგენილ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობის დამტკიცება ადვილია, რადგან ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობაში არ შეიძლება დასახელდეს ყველაზე მეტი შედგენილი რიცხვი. მართლაც, ვთქვათ, x მიჩნეულია ყველაზე მეტ შედგენილ რიცხვად, მაგრამ $2x$, $3x$,... მეტია x-ზე და კვლავ შედგენილი რიცხვებია. ამრიგად, შედგენილ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.

მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობა შედარებით ძნელი წარმოსადგენია შემდეგი ორი გარემოების გამო:

ა) ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობის დასაწყისში მარტივ რიცხვთა რაოდენობა შედარებით მეტია, ვიდრე შემდგომში. მაგალითად, პირველი ასეულის ფარგლებში არის 25 მარტივი რიცხვი, მეორე ასეულში - 21 მარტივი რიცხვი, მესამე ასეულში - 16 მარტივი რიცხვი და ა.შ. ამის გამო იქმნება აზრი, რომ რიცხვთა ზრდით მარტივი რიცხვები თანდათანობით გამეჩხერდება და ბოლოს სრულიად გაქრება.

ბ) ძლიერ ძნელია უკვე აღმოჩენილ უდიდეს მარტივ რიცხვზე უფრო დიდი მარტივი რიცხვის მოძებნა. მაგალითად, 1957 წელს ელექტროგამომთვლელი მანქანების გამოყენებით მოიძებნა უდიდესი მარტივი რიცხვი $2^{3217}-1$, რომელიც ათობით სისტემაში იწერება 1000 ციფრით. რა თქმა უნდა, ბევრ არასპეციალისტს ჰგონია, რომ მარტივი რიცხვების სიმრავლე ამით ამოიწურა. ასეთი მოსაზრება არასწორია. ჯერ კიდევ III საუკუნეში ჩვენს წელთაღრიცხვამდე გენიალურმა

ბერძენმა მათემატიკოსმა **ევკლიდემ** მნიშვნელოვანი შრომები უძღვნა მარტივ რიცხვთა შესწავლის საკითხებს და დაამტკიცა თეორემა მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობის შესახებ, ამიტომ მას ევკლიდეს თეორემა ეწოდება.

ევკლიდეს თეორემა. **მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.**

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულია და განისაზღვრება სასრული მიმდევრობით $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$, რომელშიც p_n უდიდესი მარტივი რიცხვია. ყველა მარტივი რიცხვის ნამრავლი გავადიდოთ ერთით და მიღებული რიცხვი აღვნიშნოთ S-ით, ე.ი. $S=p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_n+1$.

ცხადია, $p_n<S$. რადგან დაშვების თანახმად, p_n არის უდიდესი მარტივი რიცხვი, S უნდა იყოს შედგენილი რიცხვი და წინა თეორემის თანახმად იგი უნდა იყოფოდეს ერთ-ერთ p_i მარტივ რიცხვზე მაინც. მაგრამ $p_1 \cdot p_2 \dots p_n \vdots p_i$ და $\overline{1 \vdots p_i}$, ამიტომ $\overline{S \vdots p_i}$ და ჩვენი დაშვება S რიცხვის შედგენილობის შესახებ არასწორია. S რიცხვი მარტივია, რომელიც p_n მარტივ რიცხვზე დიდია და ევკლიდეს თეორემა დამტკიცებულია.

ევკლიდეს თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი დიდი მარტივი რიცხვის შემდეგ კიდევ მოიძებნება მასზე უფრო დიდი მარტივი რიცხვი.

7. ერატოსთენეს ცხრილი (საცერი)

იმის გამორკვევა, მოცემული a რიცხვი მარტივია თუ შედგენილი, დიდ შრომას მოითხოვს, მით უმეტეს, როცა a რიცხვი მრავალნიშნაა. ამისათვის მოცემული a რიცხვი მიმდევრობით უნდა გავყოთ მარტივ რიცხვებზე 2,3,5,7-ზე და ა.შ. მანამ, ვიდრე არ მივიღებთ მოცემული რიცხვის სრულ განაყოფს. თუ მოცემული a რიცხვი არ გაიყო მარტივ რიცხვებზე, რომლებიც $\sqrt{a}$-ს არ აღემატებიან, მაშინ a რიცხვი მარტივი იქნება.

მაგალითად, გავარკვიოთ რიცხვი 269 მარტივია თუ შედგენილი. ჩანს, რომ ეს რიცხვი 2-ზე, 3-ზე და 5-ზე არ იყოფა, რადგან არ აკმაყოფილებს არც ერთი მათგანის გაყოფადობის ნიშანს. გავყოთ ახლა 7-ზე, 11-ზე და 13-ზე. ვნახავთ, რომ 269 არც ამ რიცხვებზე იყოფა უნაშთოდ.

მომდევნო მარტივი რიცხვი $17>\sqrt{269}$. გაყოფა შეიძლება შევწყვიტოთ თეორემის ძალით. 269 მარტივი რიცხვია.

იმისათვის, რომ მომდევნო თაობებისათვის შეემსუბუქებინათ მარტივი რიცხვების მოძებნის შრომა, უძველესი დროიდანვე მათემატიკოსებმა დაიწყეს მარტივ რიცხვთა ცხრილების შედგენა. მარტივ რიცხვთა ცხრილის შედგენის ხერხი

პირველად გვიჩვენა ბერძენმა მათემატიკოსმა ერატოსთენემ, რომელიც ცხოვრობდა III საუკუნეში ჩვენს წელთაღრიცხვამდე, ევკლიდეს შემდეგ, რა თქმა უნდა, ვერც ერატოსთენე და ვერც სხვა ვინმე ყველა მარტივი რიცხვის ცხრილს ვერ შეადგენდა და ვერც ამის შემდეგ შეადგენენ, რადგან მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. მარტივ რიცხვთა ცხრილი დგება 1-დან გარკვეულ n რიცხვამდე.

ერატოსთენეს მიერ მოცემული 1-დან n-მდე მარტივ რიცხვთა ცხრილის შედგენის ხერხი ძლიერ მარტივია. იგი იმაში მდგომარეობს, რომ მოცემული ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობის მონაკვეთიდან თანდათანობით ამოიშალოს ყველა შედგენილი რიცხვი.

1-დან n-მდე ამოწერილი ნატურალური რიცხვებიდან პირველად ამოიშლება რიცხვი 1, როგორც არა მარტივი. მომდევნო რიცხვი 2 მარტივია, მას ვტოვებთ და ამოვშლით მის ჯერად $2k$ სახის ყველა რიცხვს; მომდევნო ამოუშლელი რიცხვი 3 მარტივია, მას ვტოვებთ და ამოვშლით მის ჯერად $3k$ სახის ყველა რიცხვს; მომდევნო ამოუშლელი რიცხვი 5 მარტივია, მას ვტოვებთ და ამოვშლით მის ჯერად $5k$ სახის ყველა რიცხვს და ა.შ.

პროცესი დამთავრებულად ჩაითვლება მაშინ, როდესაც მივაღწევთ იმ p მარტივ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $p>\sqrt{n}$.

ცხრილის შედგენის პროცესში შეინიშნება ერთი მნიშვნელოვანი გარემოება: **რომელიმე P მარტივი რიცხვის ჯერადების ამოშლის შემდეგ p-ს მომდევნო ამოუშლელი q რიცხვი მარტივია. დავამტკიცოთ ეს.**

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, q შედგენილია, ე.ი. $q⋮d$ და $d>1$. ჩავთვალოთ, რომ d არის q-ს ერთზე მეტი უმცირესი გამყოფი; მაშინ d მარტივი რიცხვი უნდა იყოს. თუ $d<q$, მაშინ $d\leq p$, რადგან p და q რიცხვებს შორის ყველა რიცხვი ამოშლილია. ასეთ შემთხვევაში q რიცხვი ამოშლილი უნდა ყოფილიყო როგორც d-ს $(d\leq q)$ ჯერადი.

ამრიგად, $d<q$ შეუძლებელია. დაგვრჩენია ვთქვათ, რომ $d=q$ და q რიცხვი მარტივია.

მაგალითი. შევადგინოთ 1-სა და 40-ს შორის მოთავსებული მარტივი რიცხვების ცხრილი

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37.

5-ის ჯერადების ამოშლის შემდეგ მომდევნო მარტივი რიცხვი არის 7. რადგან $7>\sqrt{40}$, ამიტომ შედგენილი რიცხვების ამოშლის პროცესი დამთავრებულად ჩაითვლება და ყველა ამოუშლელი რიცხვი მარტივი იქნება.

ამრიგად, 1-დან 40-მდე მარტივ რიცხვთა ცხრილი არის

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37.

მარტივი რიცხვების მოძებნის ამ მეთოდმა იმიტომ მიიღო „ერატოსთენეს ცხრილის" სახელწოდება, რომ ერატოსთენე რიცხვებს წერდა სანთლის ფენით დაფარულ ფიცარზე. შედგენილი რიცხვების გადახაზვის მაგიერ მათ ადგილზე წვეტიანი ჯოხით აკეთებდა ნახვრეტებს და სანთლის ფენით დაფარული ფიცარი ცხრილს ემსგავსებოდა.

8. ჯერადები, საერთო ჯერადები, უმცირესი საერთო ჯერადი

მოქმედება გაყოფისა და გაყოფადობის მიმართების შესწავლის დროს შემოვიტანეთ და ვიხმარეთ ჯერადისა და გამყოფის ცნებანი.

თუ a რიცხვი უნაშთოდ იყოფა b ნატურალურ რიცხვზე, მაშინ a რიცხვს b რიცხვის ჯერადი ეწოდება.

რადგან 0 იყოფა ყოველ ნატურალურ რიცხვზე, ამიტომ იგი ჯერადია ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისა.

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ნატურალურ ჯერადებს და მათ თვისებებს. საზოგადოდ, მოცემული b ნატურალური რიცხვის ჯერადები $a=k\cdot b$ სახისაა, სადაც $k\in N$ კერძოდ, b, $2b$, $3b,\ldots nb,\ldots$ b რიცხვის ჯერადი რიცხვებია. ყოველი ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს მისი ჯერადების უსასრულო სიმრავლე.

მაგალითად, 5-ის ჯერადი რიცხვებია $1\cdot5, 2\cdot5,\ldots,n\cdot5,\ldots$, ე.ი. $5,10,15,\ldots n\cdot5,\ldots$

გაყოფადობის მიმართების მსგავსად, ჯერადობაშიც სრული, ანუ უნაშთო გაყოფა იგულისხმება, ამიტომ ზემოთ განხილული გაყოფადობის მიმართების ყველა თვისება აქაც ძალაშია და შეიძლება გამოვთქვათ ჯერადობის მიმართების გამოყენებით. მაგალითად, ტრანზიტიულობის თვისება ასე ჩამოყალიბდება: თუ a რიცხვი ჯერადია b რიცხვისა და b რიცხვი ჯერადია c რიცხვისა, მაშინ a რიცხვი ჯერადი იქნება c რიცხვისა.

ავიღოთ a და b ორი ნატურალური რიცხვი. თუ m რიცხვი წარმოადგენს a რიცხვის ჯერადსაც და b რიცხვის ჯერადსაც, მაშინ m რიცხვს a და b რიცხვების საერთო ჯერადი ეწოდება.

საზოგადოდ, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ რამდენიმე რიცხვის საერთო ჯერადი ეწოდება ისეთ m რიცხვს, რომელიც ჯერადია ყოველი a_i რიცხვისა, სადაც $1\leq i\leq k$

თუ m რიცხვი არის $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ რიცხვების საერთო ჯერადი, მაშინ

$2m, 3m, \ldots nm$ რიცხვებიც, სადაც n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, აგრეთვე იქნება ამ რიცხვების საერთო ჯერადი. მართლაც, ჯერადობის ტრანზიტულობის თვისების თანახმად $nm \vdots m$ და $m \vdots a_i$, ამიტომ $nm \vdots a_i$ ნებისმიერი $1 \le i \le k$ -სათვის. როგორც ჩანს, რამდენიმე რიცხვის საერთო ჯერადთა სიმრავლე უსასრულოა.

შევნიშნოთ, რომ ერთ-ერთი საერთო ჯერადი თვით ამ რიცხვების ნამრავლი იქნება, რადგან იგი იყოფა ყოველ a_i-ზე, $1 \le i \le k$; $a_1, a_2, \ldots, a_k$ რამდენიმე რიცხვის საერთო ჯერადთა სიმრავლე არის თითოეული a_i რიცხვის ჯერადების სიმრავლეთა თანაკვეთა. მაგალითად, 4-ისა და 6-ის საერთო ჯერადების სიმრავლე არის 4-ის ჯერადებისა და 6-ის ჯერადების სიმრავლეთა თანაკვეთა. მართლაც, 4-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლე

$A=\{4,8,12,16,20,24,28,32,36,\ldots\}$.

6-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლე

$B=\{6,12,18,24, 30, 36, 42, \ldots\}$

$A \cap B=\{12,24,36,\ldots\}$.

ამ თანაკვეთის ყველა რიცხვი და მხოლოდ ისინი არიან 4-ისა და 6-ის საერთო ჯერადები.

საერთო ჯერადების უსასრულობის გამო რამდენიმე რიცხვის უდიდესი საერთო ჯერადი არ არსებობს, მაგრამ უმცირესი საერთო ჯერადი არსებობს. მოცემული $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$ რიცხვების საერთო ჯერადებიდან ყველაზე უმცირესს უმცირესი საერთო ჯერადი ეწოდება.

განსაზღვრება: მოცემული $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ რამდენიმე რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი ეწოდება იმ უმცირეს ნატურალურ რიცხვს, რომელიც ჯერადია ყველა მოცემული რიცხვისა.

მას მოკლედ ასე აღნიშნავენ: უსჯ $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

ზემოთ განხილულ მაგალითში 4-ისა და 6-ის საერთო ჯერადების სიმრავლეა $\{12,24,36,\ldots\}$, რომლის ელემენტებიდან ყველაზე უმცირესია 12, ე.ი. უსჯ $(4,6)=12$.

9. ნებისმიერი საერთო ჯერადის უმცირეს საერთო ჯერადზე გაყოფადობა

ზემოთ განხილულ მაგალითში 4-ისა და 6-ის საერთო ჯერადების სიმრავლის $\{12,24,36,\ldots\}$ ყველა ელემენტი ამავე რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადის 12-ის ჯერადს წარმოადგენს. დავამტკიცოთ, რომ ეს თვისება ნებისმიერი ნატურა-

ლური რიცხვების საერთო ჯერადებს ახასიათებს.

თეორემა. მოცემული რიცხვების ნებისმიერი საერთო ჯერადი იყოფა ამავე რიცხვების უმცირეს საერთო ჯერადზე.

დამტკიცება: ვთქვათ, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ რიცხვების ნებისმიერი საერთო ჯერადია M რიცხვი, ხოლო უსჯ $(a_1, a_2, \ldots, a_k)=m$. M გავყოთ m-ზე. ნაშთით გაყოფის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ.

$$M=m \cdot q+r, \qquad (6)$$

სადაც $0 \le r < m$.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ ნაშთი ნულის ტოლია.

(6) ტოლობიდან $r=M-mq$.

რადგან $M \vdots a_i$ და $m \vdots a_i$, ამიტომ, სხვაობის გაყოფადობის თვისების თანახმად, r-იც უნდა გაიყოს ნებისმიერ a_i-ზე $(1 \le i \le k)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ r ნაშთიც არის რომელიმე საერთო ჯერადი $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ რიცხვებისა. r რომ ნატურალური რიცხვი იყოს, მაშინ $r<m$ უტოლობის ძალით, m-ის მაგიერ r იქნებოდა უმცირესი საერთო ჯერადი, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. $r<m$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $r=0$, მაშინ $M=mq$, ე.ი. $M \vdots m$. თეორემა დამტკიცებულია.

10. გამყოფები, საერთო გამყოფები, უდიდესი საერთო გამყოფები

თუ a რიცხვი უნაშთოდ იყოფა b ნატურალურ რიცხვზე, მაშინ b რიცხვს a რიცხვის გამყოფი ეწოდება. როგორც ჩანს, მიმართება „გამყოფი“ მიმართება „ჯერადის“ შებრუნებულია: **თუ a რიცხვი b ნატურალური რიცხვის ჯერადია, მაშინ b ნატურალური რიცხვი a რიცხვის გამყოფი იქნება. სხვანაირად, b ნატურალური რიცხვი არის a რიცხვის გამყოფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც a რიცხვი ჯერადია b რიცხვისა.**

ნულის გამყოფად გვევლინება ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი. განვიხილავთ მხოლოდ ნატურალური რიცხვების გამყოფებსა და მათ თვისებებს.

ჯერადობის მსგავსად, გაყოფადობის მიმართების ყველა თვისება მართებულია გამყოფობის მიმართებისათვისაც. მაგალითად, ტრანზიტულობის თვისება გამყოფობის მიმართებით ასე გამოითქმება: თუ b რიცხვი გამყოფია a რიცხვისა და c რიცხვი გამყოფია b რიცხვისა, მაშინ c გამყოფი იქნება a-სი, ე.ი. თუ $a \vdots b$ და $b \vdots c$,

მაშინ $a \vdots c$.

ჩვენთვის ცნობილია, რომ ერთზე მეტ ყოველ a ნატურალურ რიცხვს ორი გამყოფი მაინც აქვს - 1 და a. თუ a რიცხვი შედგენილია, მაშინ მას ორზე მეტი გამყოფი ექნება.

რადგან ნებისმიერი a ნატურალური რიცხვის d გამყოფი არ შეიძლება ნაკლები იყოს 1-ზე და მეტი იყოს a რიცხვზე $(1 \le d \le a)$, ამიტომ a რიცხვის გამყოფების სიმრავლე სასრულია და ყველა მათგანის მოძებნა შესაძლებელია. მაგალითად, $a=18$; 18-ის გამყოფები არის 1,2,3,6,9 და 18, ე.ი. 18-ს აქვს ექვსი გამყოფი.

ავიღოთ a და b ორი ნატურალური რიცხვი. თუ d რიცხვი არის a რიცხვის გამყოფიც და b რიცხვის გამყოფიც, მაშინ d რიცხვს a და b რიცხვების საერთო გამყოფი ეწოდება.

საზოგადოდ, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ რამდენიმე რიცხვის საერთო გამყოფი ისეთ d რიცხვს ეწოდება, რომელიც გამყოფია ყოველი a_i რიცხვისა, სადაც $1 \le i \le k$.

რომ ვიპოვოთ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ რიცხვების საერთო გამყოფები, საჭიროა ჯერ ვიპოვოთ თითოეული a_i რიცხვის გამყოფების სიმრავლე და მერე ვიპოვოთ ამ სიმრავლეთა თანაკვეთა. რადგან თითოეული a_i რიცხვის გამყოფების სიმრავლე სასრულია, ბუნებრივია, მათი თანაკვეთაც, ე.ი. საერთო გამყოფების სიმრავლეც სასრული იქნება.

თუ მოცემული რიცხვების საერთო გამყოფებს ზრდის მიხედვით დავალაგებთ, პირველ ადგილზე რიცხვი 1 აღმოჩნდება, რადგან იგი ყველა ნატურალური რიცხვის საერთო გამყოფია. საერთო გამყოფების სიმრავლის სასრულობის გამო, ბოლოში აღმოჩნდება ერთადერთი უდიდესი საერთო გამყოფი.

მოცემული რიცხვების საერთო გამყოფებიდან ყველაზე უდიდესს უდიდესი საერთო გამყოფი (უსგ) ეწოდება.

განსაზღვრება: მოცემული $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ ნატურალური რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება იმ უდიდეს რიცხვს (საერთო გამყოფთა შორის უდიდესს), რომელიც ყველა მოცემული რიცხვის გამყოფია.

უდიდეს საერთო გამყოფს მოკლედ ასე აღნიშნავენ

უსგ $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$.

მაგალითი: ვიპოვოთ უსგ (18,24)

18-ის გამყოფების სიმრავლეა $A=\{1,2,3,6,9,18\}$, 24-ის გამყოფების სიმრავლეა $B=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$. 18-ისა და 24-ის გამყოფთა სიმრავლეების თანაკვეთა,

ე.ი. საერთო გამყოფებია $A \cap B=\{1,2,3,6\}$.

უსგ (18,24)=6.

11. ურთიერთმარტივი რიცხვები და მათი უსჯ

რიცხვი 1 ნებისმიერი a და b ორი ნატურალური რიცხვის საერთო გამყოფს წარმოადგენს. არსებობს ნატურალური რიცხვების ისეთი წყვილები, რომელთაც 1-ის გარდა სხვა საერთო გამყოფი არა აქვთ და, მაშასადამე, ასეთი ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფი იქნება 1. ასეთ ორ რიცხვს ურთიერთმარტივი რიცხვები ეწოდება.

განსაზღვრება. a და b ნატურალურ რიცხვებს ურთიერთმარტივი რიცხვები ეწოდება, თუ მათი უდიდესი საერთო გამყოფი 1-ის ტოლია. უსგ $(a,b)=1$.

მაგალითად, შედგენილ რიცხვებს 8-ს და 15-ს არა აქვთ ერთისაგან განსხვავებული საერთო გამყოფი, ამიტომ უსგ $(8,15)=1$. 8 და 15 ურთიერთმარტივი რიცხვებია.

თუ უსგ $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)=1$, მაშინ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ რიცხვებსაც ასევე ურთიერთმარტივი ეწოდება.

სრულიად ადვილად მოიძებნება ორი ურთიერთმარტივი რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი.

თეორემა. a და b ორი ურთიერთმარტივი ნატურალური რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი ამ რიცხვების ნამრავლის ტოლია,

ე.ი. უსგ. $(a,b)=1 \Rightarrow$ უსჯ $(a,b)=ab$.

დამტკიცება: ვთქვათ, უსჯ $(a,b)=m$. ცნობილია, რომ a და b რიცხვების ერთ-ერთი საერთო ჯერადი არის მათი ნამრავლი ab, რომელიც იყოფა მათ უმცირეს საერთო ჯერადზე, ე.ი. m-ზე. ამის გამო

$$ab=mt. \tag{7}$$

დავამტკიცოთ, რომ $t=1$. დაშვების თანახმად უსჯ $(a,b)=m$, ამიტომ $m=aq$ (q ნატურალური რიცხვია). თუ m-ის ამ მნიშვნელობას (7) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ $ab=qta$, რომელიც a-ზე შეკვეცის შემდეგ მიიღებს $b=qt$ სახეს. ეს კი ნიშნავს, რომ $b \vdots t$.

სრულიად ანალოგიურად $m=bS$ (S ნატურალური რიცხვია) და თუ m-ის ამ მნიშვნელობას (7) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ $ab=bst$, რომელიც b-ზე შეკვეცის შემდეგ მიიღებს სახეს $a=St$. ეს კი ნიშნავს, რომ $a \vdots t$.

ამრიგად, t წარმოადგენს a და b რიცხვების საერთო გამყოფს, რაც პირობის

თანახმად 1-ის ტოლია (უსგ $(a,b=1)$), ე.ი. $k=1$ და $ab=m$. მაშასადამე, უსჯ $(a,b)=ab$. თეორემა დამტკიცებულია.

12. შედგენილ რიცხვებზე გაყოფადობის ნიშნები

შედგენილ რიცხვებზე გაყოფადობის ნიშნები ემყარება შემდეგ დებულებას.

თეორემა. თუ a და b ურთიერთმარტივი რიცხვებია და S რიცხვი იყოფა თითოეულ მათგანზე, მაშინ S რიცხვი გაიყოფა მათ ab ნამრავლზეც.

$$(\text{უსგ}(a,b)=1)\wedge S\vdots a\wedge S\vdots b\Rightarrow S\vdots ab.$$

დამტკიცება: პირობის თანახმად, უსგ $(a,b)=1$, $S\vdots a$ და $S\vdots b$. ამის გამო უსჯ$(a,b)=ab$ და S რიცხვი წარმოადგენს a და b რიცხვების საერთო ჯერადს, ნებისმიერი საერთო ჯერადი კი იყოფა მათ უმცირეს საერთო ჯერადზე, ე.ი. $S\vdots$უსჯ(a,b). რადგან უსჯ$(a,b)=ab$, ამიტომ $S\vdots ab$. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემის გამოყენებით შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ისეთ შედგენილ რიცხვებზე გაყოფადობის ნიშნები, რომლებიც იშლება ორ ურთიერთმარტივ რიცხვთა ნამრავლად.

პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება 6-ზე, 12-ზე, 15-ზე და 18-ზე გაყოფადობის ნიშნები.

1) $6=2\cdot3$; უსგ$(2,3)=1$.

ამიტომ 6-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც იყოფიან 2-ზეც და 3-ზეც. მაგალითი: $732\vdots3$, რადგან $(7+3+2)\vdots3$, $732\vdots2$, რადგან $2\vdots2$, ამიტომ $732\vdots6$.

2) $12=3\cdot4$, უსგ $(3,4)=1$.

ამიტომ 12-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც იყოფიან 3-ზეც და 4-ზეც.

მაგალითი. $324\vdots3$, რადგან $(3+2+4)\vdots3$,

$324\vdots4$, რადგან $24\vdots4$, ამიტომ $324\vdots12$,

3) $15=3\cdot5$; უსგ $(3,5)=1$.

ამიტომ 15-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც იყოფიან 3-ზეც და 5-ზეც.

მაგალითი. $975\vdots3$, რადგან $(9+7+5)\vdots3$,

$975\vdots5$, რადგან $5\vdots5$, ამიტომ $975\vdots15$,

4) $18=2\cdot9$; უსგ $(2,9)=1$.

ამიტომ 18-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც იყოფიან 2-ზეც და 9-ზეც.

მაგალითი: $108\vdots2$, რადგან $8\vdots2$,

$108\vdots9$, რადგან $(1+0+8)\vdots9$, ამიტომ $108\vdots18$.

შენიშვნა: $18=3\cdot6$. მაგრამ 3 და 6 ურთიერთმარტივი რიცხვები არ არის და ამიტომ რიცხვი, რომელიც გაიყოფა 3-ზეც და 6-ზეც, შეიძლება არ გაიყოს 18-ზე.

მაგალითი. $24\vdots3$, $24\vdots6$, მაგრამ $\overline{24\vdots18}$.

13. ურთიერთმარტივი რიცხვების ძირითადი თვისება

დავამტკიცოთ ურთიერთმარტივ რიცხვთა შემდეგი თვისება:

თეორემა. თუ a და b ნატურალური რიცხვების ab ნამრავლი იყოფა c ნატურალურ რიცხვზე და c ურთიერთმარტივია a-სთან, მაშინ b რიცხვი იყოფა c-ზე

(უსგ$(a,c=1)\wedge ab\vdots c\Rightarrow(b\vdots c)$).

დამტკიცება: პირობის თანახმად უსგ $(a,c)=1$ და $ab\vdots c$. მეორე მხრივ $ab\vdots a$. გამოდის, რომ ab რომელიმე საერთო ჯერადია a და c რიცხვებისა, პირობის თანახმად კი უსჯ$(a,c)=ac$. ab (a და c-ს რომელიმე საერთო ჯერადი) გაიყოფა ac-ზე. (a და c-ს უმცირეს საერთო ჯერადზე), ე.ი. $ab\vdots ac$ და $ab=ac\cdot t$, სადაც t რაიმე ნატურალური რიცხვია, ხოლო ტოლობის a-ზე შეკვეცით მივიღებთ $b=ct$, ე.ი. $b\vdots c$. თეორემა დამტკიცებულია.

14. ნატურალური და მარტივი რიცხვის ურთიერთმარტივობის პირობა

თეორემა. თუ a რომელიმე ნატურალური რიცხვია და p მარტივი რიცხვი, მაშინ ან $a\vdots p$, ან a და p ურთიერთმარტივი რიცხვებია.

დამტკიცება: უსგ (a_1,p) წარმოადგენს p მარტივი რიცხვის გამყოფს, ამიტომ მას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა 1 და p.

თუ უსგ $(a,p)=1$, მაშინ a და p ურთიერთმარტივი რიცხვები იქნება.

თუ უსგ $(a,p)=p$, მაშინ $a\vdots p$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემით მოცემულია a ნატურალური რიცხვისა და p მარტივი რიცხვის ურთიერთმარტივობის საკმარისი პირობა.

თუ $\overline{a\vdots p}$, მაშინ a და p ურთიერთმარტივი რიცხვებია.

მაგალითად, $a=12$, $p=5$ $12:5$, ამიტომ 12 და 5 ურთიერთმარტივი რიცხვებია.

შედგენილი p რიცხვისათვის ეს პირობა საკმარისი არ არის.

მაგალითად, $a=18, p=12, \overline{18 \vdots 12}$, მაგრამ 18 და 12 ურთიერთმარტივი რიცხვები არ არიან უსგ $(18,12)=6$.

15. ნამრავლის გაყოფადობა მარტივ რიცხვზე

თეორემა. თუ $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$ ნატურალური რიცხვების ნამრავლი იყოფა p მარტივ რიცხვზე, მაშინ p-ზე გაიყოფა ერთ-ერთი თანამამრავლი მაინც.

დამტკიცება: დამტკიცება ჩავატაროთ $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$ ნამრავლში თანამამრავლების რიცხვის მიმართ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით.

1) თეორემის მართებულობა ჯერ დავამტკიცოთ ორი თანამამრავლისათვის, ე.ი. $k=2$.

პირობის თანახმად $a_1 \cdot a_2 \vdots p$. თუ $a_1 \vdots p$, მაშინ თეორემის დამტკიცება დამთავრებული იქნება. თუ $a_1 \vdots p$, მაშინ წინა თეორემის თანახმად უსგ$(a_1, p)=1$ და ურთიერთმარტივ რიცხვთა ძირითადი თვისების თანახმად $a_2 \vdots p_1$ ე.ი. $k=2$ შემთხვევისათვის თეორემა დამტკიცებულია.

2) დავუშვათ, რომ თეორემა მართებულია k-1 თანამამრავლისათვის. დავამტკიცოთ, რომ თეორემა მართებული იქნება k თანამამრავლისათვისაც.

ვთქვათ, $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \vdots p$. ჯუფთებადობის თვისების გამოყენებით გასაყოფი ჩავწეროთ ასეთნაირად $a_1 \cdot (a_2 a_3 \cdots a_k) \vdots p$.

თუ $a_1 \vdots p$, მაშინ თეორემის დამტკიცება დამთავრებული იქნება. თუ $\overline{a_1 \vdots p}$, მაშინ ორი თანამამრავლისათვის დამტკიცებული შემთხვევის თანახმად p-ზე გაიყოფა მეორე თანამამრავლი, ე.ი. $a_2 \cdot a_3 \cdots a_k \vdots p$. $a_2 \cdot a_3 \cdots a_k$ ნამრავლში კი ზუსტად k-1 თანამამრავლია და ინდუქციის პრინციპის თანახმად მოიძებნება ისეთი a_i თანამამრავლი, რომ $a_i \vdots p$. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი:

თუ $p_1 \cdot p_2 \dots p_k$ მარტივ რიცხვთა ნამრავლი იყოფა p-ზე, მაშინ ერთ-ერთი $p_i=p$, სადაც $1 \le i \le k$.

16. არითმეტიკის ძირითადი თეორემა

საშუალო სკოლაში ხშირად ვიყენებდით შედგენილი რიცხვების მარტივ მა-

მრავლებად დაშლას, მაგრამ მაშინ პასუხი არ გაგვიცია შემდეგ ორ კითხვაზე:

1) ყოველი შედგენილი რიცხვი იშლება თუ არა მარტივ მამრავლებად?

2) შეიძლება თუ არა შედგენილი რიცხვი სხვადასხვანაირად დაიშალოს მარტივ მამრავლებად?

პირველ კითხვას ადვილად გავცემთ პასუხს. ყოველი შედგენილი რიცხვი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს მარტივ რიცხვთა ნამრავლის სახით.

მართლაც, ვთქვათ, a რიცხვი შედგენილია. მაშინ მას აქვს ერთი მაინც მარტივი გამყოფი p_1 და $a=p_1 \cdot a_1$. თუ a_1 მარტივი რიცხვია, მაშინ პირველ კითხვაზე პასუხი გაცემული იქნება. თუ a_1 შედგენილი რიცხვია, მაშინ a_1-ის მიმართაც ვიმსჯელებთ ისევე, როგორც a-ს მიმართ. გვექნება $a_1=p_2 \cdot a_2$, ხოლო $a=p_1 \cdot p_2 \cdot a_2$. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, რამდენიმე ნაბიჯის შემდეგ მივიღებთ $a=p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$, სადაც ყველა p_i რიცხვი მარტივი იქნება. ეს პროცესი არ შეიძლება უსასრულოდ გაგრძელდეს, რადგან $p_1, p_2, \dots p_k$ რიცხვები a რიცხვის გამყოფებია და მათი რიცხვი სასრულია. ამრიგად, a შედგენილი რიცხვი წარმოიდგინება მარტივი რიცხვების ნამრავლის სახით.

მეორე კითხვაზე პასუხის გაცემამდე შევთანხმდეთ, რომ მარტივ მამრავლებად ორი დაშლა ერთნაირ დაშლად ითვლება, თუ ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ თანამამრავლების რიგით, მაგალითად, $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ და $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2$ ერთნაირ დაშლად ითვლება.

მაშინ მართებულია შემდეგი დებულება, რომელსაც ნატურალურ რიცხვთა არითმეტიკის ძირითად თეორემას უწოდებენ.

თეორემა: ყოველი შედგენილი ნატურალური რიცხვი მხოლოდ ცალსახად შეიძლება იქნეს წარმოდგენილი მარტივი რიცხვების ნამრავლის სახით.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, რომ არსებობს ისეთი შედგენილი რიცხვები, რომლებიც შეიძლება ორნაირად იქნეს წარმოდგენილი მარტივ რიცხვთა ნამრავლის სახით. მაშინ ასეთ შედგენილ რიცხვებს შორის იარსებებს უმცირესი რიცხვი. დავუშვათ, ასეთი უმცირესი რიცხვი არის a.

ვთქვათ, $a=p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ და $a=q_1 \cdot q_2 \cdots q_n$,

სადაც ყველა p_i და q_j მარტივი რიცხვებია $(1 \le i \le k,\ 1 \le j \le n)$.

ტრანზიტულობის თვისების თანახმად

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_k = q_1 \cdot q_2 \cdots q_n. \qquad (1)$$

რადგან a რიცხვი იყოფა p_1-ზე, ამიტომ $q_1 \cdot q_2 \ldots q_n$ ნამრავლიც გაიყოფა p_1-ზე ($q_1 \cdot q_2 \ldots q_n \vdots p_1$) და წინა თეორემის თანახმად ერთ-ერთი თანამამრავლი გაიყოფა p_1-ზე, $q_j \vdots p_1$, რადგან q_j მარტივი რიცხვია და $p_1 > 1$, ამიტომ $p_1 = q_j$, თუ (1) ტოლობას გავყოფთ p_1-ზე, მივიღებთ

$$p_2 \cdot p_3 \cdots p_k = q_1 \cdot q_2 \cdots q_{j-1} \cdot q_{j+1} \cdots q_n, \qquad (2)$$

თუ (2)-ის მიმართ გავაგრძელებთ ზემოთ მოყვანილ მსჯელობას, ანალოგიურად მრვიღებთ, რომ p_2 ტოლი იქნება რომელიმე q_r-ისა, $p_2 = q_r$, $1 \le r \le n$, $p_3 = q_i$ და ა.შ.

ახლა განვიხილოთ a რიცხვის ორივე განაშალში თანამამრავლთა რიცხვის საკითხი.

1) თუ $k<n$, მაშინ k გაყოფის შემდეგ გვექნებოდა: $1 = q_{k+1} \cdot q_{k+2} \cdots q_n$

ეს ტოლობა შეუძლებელია, რადგან ყოველი q_i მარტივი ნატურალური რიცხვია, ისინი მეტი არიან ერთზე და მათი ნამრავლიც მეტი იქნება 1-ზე. მაშასადამე, $k<n$ უტოლობაც შეუძლებელია.

2) თუ $k>n$, მაშინ n გაყოფის შემდეგ გვექნება

$p_{n+1} \cdot p_{n+2} \cdots p_k = 1.$

ეს ტოლობაც შეუძლებელია, რადგან ყოველი p_i მარტივი ნატურალური რიცხვია, ისინი მეტნი არიან ერთზე და მათი ნამრავლიც მეტი იქნება 1-ზე. მაშასადამე, $k>n$ უტოლობაც შეუძლებელია.

დაგვრჩენია ვთქვათ, რომ $k=n$ და ზემოთ ჩატარებული მტკიცების თანახმად a შედგენილი რიცხვის მარტივ მამრავლებად დაშლა მხოლოდ ცალსახად შეიძლება.

ჩვეულებრივად a ნატურალური რიცხვის დაშლის დროს მარტივ მამრავლებს წერენ მათი ზრდის მიხედვით.

მაგალითად, $30=2 \cdot 3 \cdot 5$; $12=2 \cdot 2 \cdot 3$.

ხშირია შემთხვევა, რომ ზოგიერთი მარტივი მამრავლი რამდენჯერმე მეორდება თანამამრავლად. ასეთ შემთხვევებში გამეორებულ მარტივ მამრავლებს ხარისხის სახით წერენ.

მაგალითად, $120=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5=2^3 \cdot 3 \cdot 5$,

$1200=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5=2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

ამრიგად, ყოველი a შედგენილი ნატურალური რიცხვი შეიძლება წარმოდგე-

ნილ იქნეს ასეთი სახით

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \qquad (3)$$

სადაც $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ მარტივი რიცხვებია, ხოლო $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_k$ მაჩვენებლები არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია, ე.ი. ყოველი a რიცხვის (3) სახის დაშლას, სადაც $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული მარტივი რიცხვებია და $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, **a რიცხვის კანონიკური დაშლა ანუ კანონიკური სახე** ეწოდება.

ყოველ ნატურალურ რიცხვს აქვს ერთადერთი კანონიკური სახე.

მაგალითები: 12-ის კანონიკური სახეა $12=2^2 \cdot 3$.

50-ის კანონიკური სახეა $50=2 \cdot 5^2$

1260-ის კანონიკური სახეა $1260=2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ და ა.შ.

ზოგადობის თვალსაზრისით a რიცხვის კანონიკურ სახეში თანამამრავლებად ყველა მარტივი რიცხვი შეიძლება ვიგულისხმოთ, მაგრამ რომელი მარტივი რიცხვებიც არ შედიან თანამამრავლებად, მათ ვწერთ ნულოვანი მაჩვენებლით.

მაგალითად, $98=2 \cdot 7^2$; მასში მარტივ მამრავლებად არ შედის 3 და 5 მარტივი რიცხვები, მაგრამ შეიძლება იგი წარმოვადგინოთ ასე: $98=2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^2$ (შეიძლება მივუწეროთ 7-ზე მეტი მარტივი რიცხვებიც ნულოვანი მაჩვენებლით).

ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს, ნებისმიერი ორი ნატურალური რიცხვის კანონიკურ სახეში მამრავლებად ვიგულისხმოთ ერთი და იგივე მარტივი რიცხვები.

კანონიკური სახით მოცემულ რიცხვებზე ადვილად სრულდება გამრავლება, გაყოფა და ახარისხება.

მაგალითები: 1)

$12 \cdot 50=(2^2 \cdot 3 \cdot 5^0) \cdot (2 \cdot 3^0 \cdot 5^2)=2^{2+1} \cdot 3^{1+0} \cdot 5^{2+0}=2^3 \cdot 3 \cdot 5^2=600.$

2) $3600:48=(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2):(2^4 \cdot 3 \cdot 5^0)=2^{4-4} \cdot 3^{2-1} \cdot 5^{2-0}=2^0 \cdot 3 \cdot 5^2=75.$

3) $36^2=(2^2 \cdot 3^2)^2=2^4 \cdot 3^4=1296.$

§5. უდიდესი საერთო გამყოფისა და უმცირესი საერთო ჯერადის პოვნა

1. კანონიკური სახით წარმოდგენილი რიცხვების გაყოფადობის ნიშანი

თეორემა. **a რიცხვის b რიცხვზე გაყოფადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია a რიცხვის კანონიკურ სახეში ყველა მარტივი მამრავლი შედიოდეს იმაზე**

არანაკლებ ხარისხში, ვიდრე მათ აქვთ b რიცხვის კანონიკურ სახეში.

თუ $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$

და $b=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k}$,

a და b რიცხვების კანონიკური სახეებია. a რიცხვის b რიცხვ გაყოფადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ერთდროულად შესრუ ლდეს k უტოლობა $\alpha_1\geq\beta_1,\ \alpha_2\geq\beta_2,\dots,\alpha_k\geq\beta_k$.

აუცილებლობის დამტკიცება: ვთქვათ, $a\vdots b$, ე.ი. $a=b.c.$ თუ გადავალთ კანონი კურ სა. ხეზე, მივიღებთ:

$$p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}=(p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k})\cdot(p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\dots p_k^{\gamma_k}),$$

სადაც ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მეორე ფრჩხილებში მოთავსებულია c რიცხვის კანონიკური სახე. მარჯვენა ნაწილში ტოლფუძიანი ხარისხების გამრა ვლების შემდეგ მივიღებთ

$$p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}=(p_1^{\beta_1+\gamma_1}\cdot p_2^{\beta_2+\gamma_2}\dots p_k^{\beta_k+\gamma_k}).$$

არით მეტიკის ძირითადი თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ

$\alpha_1=\beta_1+\gamma_1,\ \alpha_2=\beta_2+\gamma_2,\dots,\alpha_k=\beta_k+\gamma_k$.

რადგან ყველა γ_i არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, მათი ჩამოშორებით ვღე ბულობთ თეორემის მოთხოვნილებას:

$\alpha_1\geq\beta_1,\ \alpha_2\geq\beta_2\dots\alpha_k\geq\beta_k$.

საკმარისობის დამტკიცება. ვთქვათ, აუცილებელი პირობა შესრულებულია, ე.ი

$\alpha_1\geq\beta_1,\ \alpha_2\geq\beta_2\dots\alpha_k\geq\beta_k$,

შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $\delta_1=\alpha_1-\beta_1,\quad \delta_2=\alpha_2-\beta_2,\quad \delta_k=\alpha_k-\beta_k$

და ვთქვათ $d=p_1^{\delta_1}\cdot p_2^{\delta_2}\dots p_k^{\delta_k}$,

მაშინ $b\cdot d$ ნამრავლს იგივე კანონიკური სახე ექნება, რაც a რიცხვს და არითმეტიკის ძირითადი თეორემის საფუძველზე $b\cdot d=a$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $a\vdots b$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის გამოყენებით, გაყოფის შესრულებამდე შეიძლება გავარკვიოთ, ერთი რიცხვი იყოფა თუ არა მეორე რიცხვზე, თუ ცნობილია მათი კანონიკური სახეები.

მაგალითად, $a=2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11;\ b=2\cdot 3^2\cdot 11;\ c=2^1\cdot 3^2\cdot 5^3$.

თეორემის გამოყენების საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ

$a\vdots b$ და $\overline{a\vdots c}$.

2. კანონიკური სახით წარმოდგენილი რიცხვების უსგ და უსჯ პოვნა

კანონიკური სახით წარმოდგენილი რიცხვების გაყოფადობის ნიშანი საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ კანონიკური სახით წარმოდგენილი რიცხვების უსგ და უსჯ. წინასწარ შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნა.

ვთქვათ, $a_1, a_2,\dots a_n$ რიცხვების კანონიკური სახეებია:

$$a_1=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k},$$
$$a_2=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n=p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\dots p_k^{\gamma_k}.$$

$\alpha_1,\beta_1,\dots,\gamma_1$ რიცხვებიდან უმცირესი აღვნიშნოთ δ_1-ით, ხოლო უდიდესი μ_1-ით, ე.ი.

$$min(\alpha_1,\beta_1,\dots,\gamma_1)=\delta_1,\ max(\alpha_1,\beta_1,\dots,\gamma_1)=\mu_1.$$

ანალოგიურად

$$min(\alpha_2,\beta_2,\dots,\gamma_2)=\delta_2,\ max(\alpha_2,\beta_2,\dots,\gamma_2)=\mu_2$$

და ა.შ

$$min(\alpha_k,\beta_k,\dots,\gamma_k)=\delta_k,\ max(\alpha_k,\beta_k,\dots,\gamma_k)=\mu_k,$$

მაშინ მართებულია თეორემები:

თეორემა I. უსგ $(a_1,a_2,\dots,a_k)=p_1^{\delta_1}\cdot p_2^{\delta_2}\dots p_k^{\delta_k}$.

თეორემა II. უსჯ $(a_1,a_2,\dots,a_k)=p_1^{\mu_1}\cdot p_2^{\mu_2}\dots p_k^{\mu_k}$,

რომლებიც სიტყვიერად ასე გამოითქმებიან:

I. რამდენიმე რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფი რომ ვიპოვოთ, საჭიროა მათი კანონიკური სახეებიდან თითოეული მარტივი მამრავლი ამოვარჩიოთ უმცირესი მაჩვენებლით და ერთმანეთზე გადავამრავლოთ.

II. რამდენიმე რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი რომ ვიპოვოთ, საჭიროა მათი კანონიკური სახეებიდან თითოეული მარტივი მამრავლი ამოვარჩიოთ უმაღლესი მაჩვენებლით და ერთმანეთზე გადავამრავლოთ.

დამტკიცება: I. კანონიკური სახით წარმოდგენილი რიცხვების გაყოფადობის ნიშნის თანახმად რიცხვი $d=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ წარმოადგენს ნებისმიერი a_i რიცხვის გამყოფს, სადაც $1\leq i\leq n$, ე.ი. d a_1, a_2, a_k რიცხვების ერთ-ერთი საერთო გამყო-

ფია. ვთქვათ, უსგ$(a_1, a_2, \dots a_k)=D$ და $D>d$, მაშინ $D:d$ და წინა თეორემის თანახმად $D=p_1^{\delta_1+x_1}\cdot p_2^{\delta_2+x_2}\dots p_k^{\delta_k+x_k}$.

დავამტკიცოთ, რომ ყოველი $x_i=0$ ნებისმიერი $1\le i\le n$-სათვის. ვთქვათ, მაგალითად, $x_1>0$, მაშინ ის a_i რიცხვი, რომლის კანონიკურ სახეშიც შედიოდა $p_1^{\delta_1}$, უკვე არ გაიყოფა D-ზე, რადგან $\delta_1<\delta_1+x_1$, ამიტომ $x_1=0$. ანალოგიური მსჯელობით დამტკიცდება, რომ ყოველი $x_i=0$ და ამიტომ $D=d=p_1^{\delta_1}\cdot p_2^{\delta_2}\cdots p_k^{\delta_k}$. არითმეტიკის ძირითადი თეორემის თანახმად, I თეორემა დამტკიცებულია.

II. კანონიკური სახით წარმოდგენილი რიცხვების გაყოფადობის ნიშნის თანახმად რიცხვი $M=p_1^{\mu_1}\cdot p_2^{\mu_2}\dots p_k^{\mu_k}$ გაიყოფა ნებისმიერ a_i რიცხვზე, სადაც $1\le i\le n$, ე.ი. M წარმოადგენს $a_1, a_2, \dots a_k$ რიცხვების ერთ-ერთ საერთო ჯერადს. ვთქვათ, უსჯ$(a_1, a_2, \dots, a_k)=m<M$, მაშინ $M:m$ და წინა თეორემის თანახმად

$$m=p_1^{\mu_1-x_1}\cdot p_2^{\mu_2-x_2}\dots p_k^{\mu_k-x_k}.$$

აქაც, ანალოგიურად, უნდა დავამტკიცოთ, რომ ყოველი $x_i=0$ ვთქვათ, მაგალითად, $X_2>0$, მაშინ წინა თეორემის თანახმად m არ გაიყოფა იმ a_i რიცხვზე, რომლის კანონიკურ სახეშიც შედიოდა $p_2^{\mu_2}$ თანამამრავლი, რადგან $\mu_2-x_2<\mu_2$, ამრიგად, $x_2=0$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ ყოველი $x_i=0$, ე.ი. $m=M=p_1^{\mu_1}\cdot p_2^{\mu_2}\dots p_k^{\mu_k}$.

II თეორემა დამტკიცებულია

განვიხილოთ უსგ და უსჯ მოძებნის კონკრეტული მაგალითი. ვიპოვოთ 36, 72 და 80-ის უსგ და უსჯ.

ეს რიცხვები დავშალოთ მარტივ მამრავლებად და მივცეთ კანონიკური სახე.

ამრიგად, $80=2^4\cdot5=2^4\cdot3^0\cdot5$,

36	2	72	2	80	2
18	2	36	2	40	2
9	3	18	2	20	2
3	3	9	3	10	2
1		3	3	5	5
		1		1	

$72=2^3\cdot3^2=2^3\cdot3^2\cdot5^0$,

$36=2^2\cdot3^2=2^2\cdot3^2\cdot5^0$.

სამივე რიცხვის კანონიკურ სახეებში გვხვდება მარტივი მამრავლები 2, 3, 5

სხვადასხვა მაჩვენებლით.

მარტივი მამრავლების უმცირესი ხარისხებია: 2^2, 3^0 და 5^0. ამიტომ უსგ (36, 78, 80)$=2^2\cdot3^0\cdot5^0=4$.

მარტივი მამრავლების უდიდესი ხარისხებია: 2^4, 3^2, 5. ამიტომ უსჯ (36, 72, 80)$=2^4\cdot3^2\cdot5=720$.

3. ორი რიცხვის უსგ-სა და უსჯ-ს ურთიერთდამოკიდებულება

წინა ორი თეორემა საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ უსგ-ს და უსჯ-ს მნიშვნელოვანი თვისება, რომელსაც ფართოდ იყენებენ მათი მოძებნის საქმეში.

თეორემა. ორი მოცემული რიცხვის უსგ-ისა და უსჯ-ის ნამრავლი უდრის ამავე რიცხვების ნამრავლს, ე.ი. უსგ $(a,b)\cdot$უსჯ $(a,b)=a\cdot b$.

დამტკიცება: ვთქვათ, a და b რიცხვების კანონიკური სახეებია

$$a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k} \text{ და } b=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}, \quad (1)$$

მაშინ

$$a\cdot b=(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k})\cdot(p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}). \quad (2)$$

წინა თეორემის აღნიშვნების თანახმად $min(\alpha_i,\beta_i)=\delta_i$ და $max(\alpha_i,\beta_i)=\mu_i$, სადაც $1\le i\le k$. გამოდის, რომ ყოველი $\delta_i<\mu$ ნამრავლის გადანაცვლებადობისა და ჯუფთებადობის თვისებების გამოყენებით. (2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში $p_i^{\alpha_i}$ და $p_i^{\beta_i}$ თანამამრავლები დავალაგოთ ორ ჯგუფად ისე, რომ პირველ ფრჩხილებში მოხვდეს p_i მარტივი რიცხვები მცირე მაჩვენებლით, ხოლო მეორე ფრჩხილებში - დიდი მაჩვენებლებით. მაშინ მივიღებთ $a\cdot b=(p_1^{\delta_1}\cdot p_2^{\delta_2}\cdots p_k^{\delta_k})\cdot(p_1^{\mu_1}\cdot p_2^{\mu_2}\cdots p_k^{\mu_k})$

წინა თეორემის თანახმად $p_1^{\delta_1}\cdot p_2^{\delta_2}\cdots p_k^{\delta_k}=$უსგ$(a,b)$, ხოლო $p_1^{\mu_1}\cdot p_2^{\mu_2}\cdots p_k^{\mu_k}=$უსჯ$(a,b)$, ამიტომ უსგ$(a,b)\cdot$უსჯ$(a,b)=ab$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის ძალით უსჯ $(a,b)=\dfrac{a\cdot b}{\text{უსგ}(a,b)}$, ე.ი. ორი რიცხვის უსჯ რომ მივიღოთ, ამისათვის შეიძლება ვიპოვოთ ამ რიცხვების უსგ და მასზე გავყოთ მოცემული რიცხვების ნამრავლი.

შენიშვნა: თუ a და b ურთიერთმარტივი რიცხვებია, მაშინ უსგ$(a,b)=1$ და გამოდის, რომ უსჯ$(a,b)=ab$, რაც ადრე უკვე დამტკიცებული გვაქვს.

4. ევკლიდეს ალგორითმი

ზოგიერთი მრავალნიშნა რიცხვის მარტივ მამრავლებად დაშლა და მისი კანონიკური სახით წარმოდგენა ძლიერ ძნელდება და მრავალგზის უშედეგო გაყოფასთან არის დაკავშირებული. ამის გამო უსგ-ისა და უსჯ-ის მოძებნის ზემოთ განხილული ხერხი ზოგჯერ ძნელი გამოსაყენებელია. მაგალითად, 6889-ის უმცირესი მარტივი გამყოფი არის 83 და მის საპოვნელად მასზე ნაკლებ ყველა მარტივ რიცხვზე გაყოფადობის შემოწმება დაგვჭირდებოდა, რაც დიდ შრომას მოითხოვს.

არსებობს უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნის სხვა ხერხი, რომელიც მხოლოდ ნაშთით გაყოფის ცოდნას ემყარება. ეს ხერხი ბერძენმა მათემატიკოსმა ევკლიდემ შეიმუშავა. მან თავის შესანიშნავ წიგნში „საწყისები" მოგვცა ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნის წესი თანამიმდევრობითი გაყოფის ხერხით, რასაც **ევკლიდეს ალგორითმი** ეწოდება.

ევკლიდეს ალგორითმი ემყარება შემდეგ ორ თეორემას:

თეორემა I. თუ a და b ორი ნატურალური რიცხვიდან a რიცხვი არის b რიცხვის ჯერადი, მაშინ ამ ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფი იქნება b რიცხვი (იგულისხმება $a \geq b$), ე.ი. $(a \geq b) \wedge (a \vdots b) \Rightarrow$ უსგ$(a,b)=b$.

დამტკიცება: რადგან $a \vdots b$ და $b \vdots b$, ამიტომ a და b რიცხვების ერთ-ერთი საერთო გამყოფი არის b, მაგრამ b რიცხვის ნებისმიერი გამყოფი არ შეიძლება მეტი იყოს b-ზე, ამიტომ a და b რიცხვების ნებისმიერი საერთო გამყოფი არ აღემატება b-ს. ამრიგად, უსგ $(a,b)=b$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა II. თუ a და b ორი ნატურალური რიცხვიდან a არ არის b-ს ჯერადი და მათი გაყოფის ნაშთი არის r $(0<r<b)$, მაშინ a და b რიცხვების საერთო გამყოფების სიმრავლე b და r რიცხვების საერთო გამყოფების სიმრავლეს ემთხვევა და მათი უდიდესი საერთო გამყოფები ტოლია (იგულისხმება $a>b$),

ე.ი. $(a>b) \wedge a=b \cdot q+r \Rightarrow$ უსგ$(d,b)=$უსგ(b,r).

დამტკიცება: ვთქვათ, b და r რიცხვების რაიმე საერთო გამყოფი არის d რიცხვი, ე.ი. $b \vdots d$ და $r \vdots d$, რადგან $a=b \cdot q+r$, მაშინ ჯამისა და ნამრავლის გაყოფადობის თვისებების ძალით a რიცხვიც გაიყოფა d რიცხვზე, ე.ი. $a \vdots d$. მაშასადამე, b და r რიცხვების ნებისმიერი საერთო გამყოფი a და b რიცხვების საერთო გამყოფსაც წარმოადგენს.

შებრუნებით, ვთქვათ, d არის a და b რიცხვების რაიმე საერთო გამყოფი, ე.ი. $a \vdots d$ და $b \vdots d$. $a=b \cdot q+r$. $r=a-b \cdot q$ ტოლობიდან და სხვაობისა და ნამრავლის გაყოფადობის თვისებების ძალით r რიცხვი გაიყოფა d რიცხვზე, ე.ი. $r \vdots d$. მაშასადამე, a

და b რიცხვების ნებისმიერი საერთო გამყოფი b და r რიცხვების საერთო გამყოფსაც წარმოადგენს.

ამრიგად, a და b რიცხვების საერთო გამყოფების სიმრავლე b და r რიცხვების საერთო გამყოფების სიმრავლეს ემთხვევა. მაშინ ორივე სიმრავლეს ერთი და იგივე უდიდესი ელემენტი ექნება, ე.ი. უსგ$(a,b)=$უსგ(b,r). თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემების გამოყენებით უკვე შეგვიძლია აღვწეროთ a და b ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნის პროცესი ევკლიდეს ალგორითმით.

ვთქვათ, $a>b$. გავყოთ a რიცხვი b რიცხვზე. თუ $a \vdots b$, მაშინ I თეორემის თანახმად უსგ $(a,b)=b$. თუ a არ იყოფა b-ზე, მაშინ $a=b \cdot q_1+r_1$, სადაც $r_1<b$.

II თეორემის თანახმად უსგ $(a,b)=$უსგ (b,r_1) და a და b რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნის ამოცანა დაიყვანება უფრო მცირე b და r_1 რიცხვების უსგ-ის მოძებნის ამოცანაზე, რომელიც შედარებით ადვილია.

ახლა b რიცხვი გავყოთ r_1 რიცხვზე.

თუ $b \vdots r_1$, მაშინ გაყოფის პროცესი დამთავრებულად ჩაითვლება და უსგ $(a,b)=$უსგ$(b,r_1)=r_1$.

თუ $\overline{b \vdots r_1}$, მაშინ $b=r_1 \cdot q_2+r_2$, სადაც $r_2<r_1$.

II თეორემის თანახმად უსგ $(b,r_1)=$უსგ(r_1,r_2) და ამოცანა დავიდა უფრო მცირე r_1 და r_2 რიცხვების უსგ-ს მოძებნაზე, რომელიც უფრო ადვილია.

ახლა r_1 გავყოთ r_2-ზე.

თუ $r_1 \vdots r_2$, მაშინ უსგ $(a,b)=$უსგ$(b,r_1)=$უსგ$(r_1,r_2)=r_2$. თუ $\overline{r_1 \vdots r_2}$, მაშინ $r_1=r_2 \cdot q_3+r_3$, სადაც $r_3<r_2$.

ახლა ამოცანა დაიყვანება უსგ (r_2,r_3) მოძებნის ამოცანაზე და ა.შ.

აღწერილი თანამიმდევრობითი გაყოფის პროცესით მიღებული ნაშთებიდან ყოველი შემდგომი ნაშთი წინა ნაშთზე ნაკლებია, ე.ი. $b>r_1>r_2>r_3>\ldots>r_n$.

მივიღეთ ნატურალური რიცხვების კლებადი მიმდევრობა, რომლის უდიდესი რიცხვი b სასრულია. მაშასადამე, ამ მიმდევრობის შეკრება არ შეიძლება უსასრულოდ გაგრძელდეს და ბოლოს და ბოლოს მივალთ ისეთ უმცირეს r_n ნაშთამდე, რომ მასზე უნაშთოდ გაიყოფა წინა r_{n-1} ნაშთი. ნულისაგან განსხვავებული ეს უმცირესი r_n ნაშთი იქნება a და b რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი, ე.ი. უსგ$(a,b)=$უსგ$(b,r_1)=$უსგ$(r_1,r_2)=\ldots=$უსგ$(r_{n-1},r_n)=r_n$.

ამრიგად, ევკლიდეს ალგორითმი მდგომარეობს შემდეგში:

როგორიც არ უნდა იყოს a და b ნატურალური რიცხვები, ხოლო $a>b$ თანმიმდევრობითი გაყოფის შედეგად – მეტი რიცხვისა ნაკლებზე, ნაკლები რიცხვისა პირველ ნაშთზე, პირველი ნაშთისა მეორე ნაშთზე, მეორე ნაშთისა მესამე ნაშთზე და ა.შ. – მივიღებთ რომელიმე r_n ნაშთს, რომელზედაც უნაშთოდ გაიყოფა წინა r_{n-1} ნაშთი. ნულისაგან განსხვავებული უკანასკნელი r_n ნაშთი a და b რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი იქნება.

მაგალითი. ევკლიდეს ალგორითმის გამოყენებით ვიპოვოთ უსგ (2585, 7975).

1) 7975:2585=3
−7755
220 (I ნაშთი)

2) 2585:220=11
−220
385
−220
165 (II ნაშთი)

3) 220:165=1
−165
55 (III ნაშთი)

4) 165:55=3
−165
0

ნულისაგან განსხვავებული უკანასკნელი ნაშთი არის 55, მაშასადამე, უსგ (2585,7975)=55.

ევკლიდეს ალგორითმით უსგ-ს მოძებნის პროცესს შეიძლება მივცეთ ერთი ჩანაწერის სახე, თუ ყოველი ნაშთიანი გაყოფის შემდეგ გასაყოფს დავწერთ მიღებული ნაშთის მარცხნივ.

```
        −7975 | 2585
         7755 | 3
  −2585 | 220 (I ნაშთი)
   220  | 11
    385
   −220
  −220 | 165 (II ნაშთი)
   165 | 1
 −165 | 55 (III ნაშთი)
  165 | 3
    0
```

ევკლიდეს ალგორითმის გამოყენებით ორი რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადის მოსაძებნად სარგებლობენ ფორმულით

$$\text{უსჯ}(a,b)=\frac{a\cdot b}{\text{უსგ}(a,b)}.$$

დაუმტკიცებლად მივიღეთ, რომ ევკლიდეს ალგორითმით შეიძლება მოძებნილ იქნეს ორზე მეტი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფიც. ამისათვის საჭიროა ჯერ მოძებნილ იქნეს ორი მათგანის უსგ, შემდეგ მოიძებნოს ამ ორი რიცხვის უსგ-ისა და მესამე რიცხვის უსგ; შემდეგ მიღებული უსგ-ისა და მეოთხე რიცხვის უსგ და ა.შ. მანამდე, ვიდრე არ ვიპოვით უსგ-ის ყველა რიცხვს.

მაგალითი. ვიპოვოთ უსგ (324, 480, 548),

უსგ (324, 480)=12,

უსგ (12,548)=4,

მაშასადამე, უსგ (324,480,548)=4.

რიცხვთა გაყოფადობისა და მოცემული რიცხვების უსგ-ისა და უსჯ-ის მოძებნის ცოდნას ფართოდ იყენებენ მთელი რიგი პრაქტიკული საკითხების გადაწყვეტისათვის.

სავარჯიშოები

1. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობები:

ა) $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

ბ) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

გ) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

დ) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}=n(n+1)$;

ე) $a_n=a_1+d(n-1)$; $\quad S_n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}n$.

2. დაამტკიცეთ, რომ სამი მომდევნო ნატურალური რიცხვის კუბების ჯამი იყოფა 9-ზე.

3. A არის 57275 რიცხვის ციფრთა სიმრავლე, B-33687 რიცხვის ციფრთა სიმრავლე.

წაიკითხეთ გამონათქვამები:

„n(A)=5", „n(A)=3", „n(B)=5", „n(B)=4";

A∩B=∅, „n(A∪B)=n(A)+n(B)=3+4=7";

„n(A∪B)=n(A)+n(B)=5+5=10"; „n(A∪B)=0".

ამ გამონათქვამებიდან რომელია ჭეშმარიტი და რომელია მცდარი?

4. შეიძლება თუ არა ორი მთელი არაუარყოფითი რიცხვის ჯამი იყოს ტოლი:
ა) ერთ-ერთი შესაკრების; ბ) ნულის.

5. დაამტკიცეთ:

ა) $(\forall a,b,c \in N_0)\ [b>c \Rightarrow (a+b)-c=a+(b-c)]$;

ბ) $(\forall a,b,c \in N_0)\ [a>b+c \Rightarrow a-(b+c)=(a-b)-c]$.

6. მოცემულია A={ა;ბ;გ;დ;ე;ვ} და B={ა,გ}. სიმრავლეები. იპოვეთ :

1) $A \setminus B$ სიმრავლე, $n(A \setminus B)$;

2) ეილერის წრეების დახმარებით გამოსახეთ A,B და $A \setminus B$ სიმრავლეები.

3) ჭეშმარიტია თუ არა ტოლობა

$$B \cup (A \setminus B) = A.$$

4) ახსენით, რატომ არის ჭეშმარიტი ტოლობა

$$n(B \cup B'_A) = n(A).$$

5) ჭეშმარიტია თუ არა ტოლობა

$$n(B)+n(B'_A)=n(A).$$

7. მოცემულია ორი სიმრავლე
$A=\{a;b;c\}$ და $B=\{1;2;3;4\}$. იპოვეთ დეკარტის ნამრავლები $A \times B$ და $B \times A$. და დაადგინეთ, რომელი გამონათქვამია ჭეშმარიტი?

1) $A \times B = B \times A$;

2) $n(A \times B) = n(B \times A)$.

8. ჩაწერეთ:

ა) რიცხვი 54102_6 თვლის ხუთობით სისტემაში.

ბ) რიცხვი 11010111_2 თვლის ექვსობით სისტემაში.

გ) რიცხვი 3026514_8 თვლის ოთხობით სისტემაში.

9. შეასრულეთ მოქმედებანი:

ა) 437_8+357_8; გ) 2231_5-2443_5;

ბ) 5264_7+4625_7; დ) $70324_8-47665_8$;

10. შეასრულეთ მოქმედებანი:

ა) $615_7 \cdot 364_7$; გ) $4747_8:31_8$;

ბ) $11101_2 \cdot 1011_2$ დ) $1022_3:12_3$.

11. თვლის რომელ სისტემაშია შესრულებული მოქმედებები:

ა) $17+38=56$; გ) $2 \cdot 3=12$; ე) $30:2=14$;

ბ) $12+13=30$; დ) $12 \cdot 7=80$; ვ) $55:13=4$.

12. თვლის რომელ სისტემაშია ჭეშმარიტი ტოლობები:

ა) $312_x+213_x=143$;

ბ) $752_x-647_x=67$;

გ) $31_x \cdot 22_x=130$.

13. დაამტკიცეთ, რომ:

ა) ორი ლუწი რიცხვის ჯამი ლუწი რიცხვია.

ბ) ორი კენტი რიცხვის ჯამი ლუწი რიცხვია.

გ) $(4^n-1):3$, $(n^3-7n+6):6$.

14. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი და უმცირესი საერთო ჯერადი:

ა) 351 და 28;

ბ) 238, 266 და 413.

15. თანდათანობით გაყოფის საშუალებით მონახეთ შემდეგი რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი:

ა) 464799 და 2278;

ბ) 26733 და 72561.

16. იპოვეთ a და b, თუ ცნობილია, რომ:

ა) $a:b=11:13$ უსგ.$(a,b)=5$;

ბ) უსგ$(a,b)=5$ უსჯ$(a,b)=105$;

გ) უსჯ$(a,b)=75$ $ab=375$;

დ) უსჯ$(a,b)=224$ $a:b=7:8$.

VI თავი

რიცხვის ცნების გაფართოება. სიდიდეები და მათი გაზომვა

§1. სიდიდის ცნება

სიდიდის ცნება ერთ-ერთი ძირითადი მათემატიკური ცნებაა, რომელიც იხმა-რება არა მხოლოდ მათემატიკაში, არამედ ფიზიკაშიც, ქიმიაშიც და სხვა დისციპ-ლინებშიც.

მათემატიკური მეცნიერების მრავალმხრივად განვითარებამ სიდიდის ცნების აზრის დაზუსტება და მთელი რიგი განზოგადებანი წარმოშვა. ამჟამად განიხილავენ სხვადასხვა სახის სიდიდეებს: ადიციურ-სკალარულ სიდიდეებს, ვექტორულ სიდი-დეებს, ტენზორულ სიდიდეებს და სხვ.

შევჩერდეთ მათ შორის ყველაზე პირველადის — ადიციურ-სკალარულ სიდი-დეთა განსაზღვრაზე, რომელიც სიგრძის, ფართობის, მოცულობის, მასის, დროის და სხვა კონკრეტული ცნებების უშუალო განზოგადებას წარმოადგენს.

სიდიდის ცნება მჭიდროდ უკავშირდება გაზომვისა და რიცხვის ცნებებს, ამი-ტომ სიდიდეში უნდა გვესმოდეს ყოველივე ის, რაც გაიზომება და შედეგი გამოისა-ხება რიცხვით.

განვიხილოთ ისეთი სიმრავლეები, როგორიცაა, წრფის მონაკვეთების სიმ-რა-ვლე, ბრტყელი ფიგურების ფართობთა სიმრავლე, სივრცითი სხეულების მოცულო-ბათა სიმრავლე, დროის შუალედების სიმრავლე, სხეულების წონათა სიმრავლე და სხვ. ჩამოთვლილ სიმრავლეთა ელემენტებს ახასიათებს ზოგიერთი საერთო თვისება. ნათელი წარმოდგენის მიზნით ეს თვისებები შეიძლება ვაჩვენოთ **მონაკვეთების სიმრავლეზე**, როგორც ყველაზე თვალსაჩინოზე.

მათემატიკის სასკოლო კურსიდან და პრაქტიკული საქმიანობიდან ყველა ჩვე-ნგანს გარკვეული წარმოდგენა აქვს მანძილების გაზომვის უმარტივეს ხერხებზე, უშუალო გაზომვის პროცესზე. ნებისმიერი ფიქსირებული e საზომი ერთეულით გაზომვის შემთხვევაში ყოველ მონაკვეთს შეესაბამება გარკვეული არაუარყოფითი რიცხვი, რომელსაც ამ **მონაკვეთის ზომა** ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ ადიციურ-სკალარული სიდიდეებისათვის და, კერძოდ, მო-

ნაკვეთებისათვის დამახასიათებელია გაზომვის შესაძლებლობა და გაზომვის შედე-გად მიღებული რიცხვი — მნიშვნელობა-ზომა, რომლებსაც აქვთ შემდეგი ზოგადი თვისებები:

1) ერთი და იმავე საზომი ერთეულით გაზომვის შემთხვევაში კონგრუენტულ (ტოლ) მონაკვეთებს ერთი და იგივე ზომა აქვს.

2) თუ a მონაკვეთი შედგება b და c მონაკვეთებისგან, მაშინ a მონაკვეთის ზომა ტოლია b და c მონაკვეთების ზომათა ჯამისა, ერთი და იმავე საზომი ერთეუ-ლით გაზომვის შემთხვევაში.

3) საზომ ერთეულად შერჩეული e მონაკვეთის ზომა 1-ის ტოლია.

4) საზომი ერთეულის შეცვლა მისი არატოლი ახალი საზომი ერთეულით იწვევს ყველა მონაკვეთის ზომის „ერთნაირად" შეცვლას, რაც იმას ნიშნავს, რომ ყოველი მონაკვეთის ახალი ზომა მიიღება ძველი ზომის ერთსა და იმავე რიცხვზე გამრავლე-ბით (ეს რიცხვი არის ძველი საზომი ერთეულის ზომა ახალი საზომი ერთეულით). მაგალითად, თუ სანტიმეტრით გაზომვის დროს $a_1=5$ სმ, ხოლო $a_2=3$ სმ; მილიმეტ-რით გაზომვის დროს $a_1=(10\cdot5)$მმ$=50$ მმ, ხოლო $a_2=(10\cdot3)$მმ$=30$ მმ. ამ შემთხვე-ვაში რიცხვი 10 არის ძველი საზომი ერთეულის — სანტიმეტრის ზომა ახალი საზომი ერთეულით — მილიმეტრით.

ყველა ზემოთქმულის გათვალისწინების საფუძველზე ამბობენ, რომ მონაკვეთს აქვს **სიდიდე**, რომელსაც ამ მონაკვეთის სიგრძე ეწოდება. ყოველი მონაკვეთის სიგრძე ხასიათდება რაიმე არაუარყოფითი რიცხვით.

ამგვარად, მონაკვეთების თვისება, რომ მათ აქვთ სიგრძე, ხასიათდება შემდე-გით: ნებისმიერი e საზომი ერთეულის შერჩევის შემთხვევაში ყოველ მონაკვეთს შეიძლება შევუსაბამოთ არაუარყოფითი რიცხვი (ზომა), ისე, რომ დაცულ იქნეს ზემოთ აღნიშნული 4 თვისება. მათგან მთავარია, რომ კონგრუენტულ მონაკვეთებს აქვთ ერთი და იგივე ზომა (სკალარულობა), რომელიმე მონაკვეთის სიგრძე უდრის მისი შემადგენელი ნაწილების სიგრძეთა ჯამს (ადიციურობა).

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ზემოთ აღნიშნული 4 თვისება დამახასიათებელია არა მხოლოდ მონაკვეთების სიმრავლისათვის, არამედ ბრტყელი ფიგურების ფარ-თობთა სიმრავლისათვის, სივრცითი სხეულების მოცულობათა სიმრავლისათვის, სხეულების წონათა სიმრავლისათვის და სხვ, რომელთა ელემენტების ზომათა ტოლობა გამომდინარეობს კონგრუენტულობაზე უფრო ზოგადი ეკვივალენტუ-რობის მიმართებიდან, შეიძლება **ადიციურ-სკალარული სიდიდის ცნება ასე ჩამოვა-ყალიბოთ:**

ვთქვათ, S წარმოადგენს ისეთ სიმრავლეს, რომელშიც განსაზღვრულია ორი სახის მიმართება:

ა) ეკვივალენტურობის მიმართება $a \sim b$.

ბ) რომელიმე სამი a, b და c ელემენტის დამაკავშირებელი მიმართება a შედგება b და c-გან და იწერება $a=b+c$ სახით.

ჩვენ ვიტყვით, რომ S სიმრავლეზე განსაზღვრულია სიდიდე (S სიმრავლის ყოველ ელემენტს აქვს სიდიდე), თუ ამ სიმრავლეზე შეიძლება დადგინდეს ზომათა სისტემა, რაც იმას ნიშნავს, რომ S სიმრავლის ყოველ a ელემენტს შეესაბამება არაუარყოფითი $m(a)$ რიცხვი (ზომა) ისე, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობები:

1) თუ $a \sim b$, მაშინ $m(a)=m(b)$.

2) თუ $a=b+c$, მაშინ $m(a)=m(b)+m(c)$.

3) S სიმრავლის რომელიმე e ელემენტს შეესაბამება რიცხვი 1. ასეთ ელემენტს ზომათა სისტემის საზომი ერთეული ეწოდება.

4) თუ S სიმრავლეზე დადგენილია ზომათა ორი სისტემა, რომლებიც აკმაყოფილებენ 1-3 თვისებებს და S სიმრავლის ნებისმიერ a ელემენტს ზომათა პირველ სისტემაში შეესაბამება $m(a)$ რიცხვი, ხოლო ზომათა მეორე სისტემაში — $m'(a)$, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი k რიცხვი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას $m'(a)=k \cdot m(a)$. k არის ძველი საზომი ერთეულის ზომა ახალი საზომი ერთეულით.

როგორც განსაზღვრებიდან ჩანს, ადიციურ-სკალარული სიდიდეებისათვის დამახასიათებელია გაზომვის პროცესი და გაზომვის შედეგად მიღებული რიცხვი (ზომა). ქვემოთ ჩვენ თანდათანობით დავაზუსტებთ გაზომვის პროცესს და მის შესაბამისად გავაფართოებთ რიცხვის ცნებას.

§2. წილადი რიცხვები

1. ჩვეულებრივი წილადის განსაზღვრა

თუ გასაზომი სიდიდე საზომი ერთეულის ჯერადია, მაშინ სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობა არაუარყოფითი მთელი რიცხვია. თუ გასაზომი სიდიდე არ წარმოადგენს საზომი ერთეულის ჯერადს, მაშინ მისი ზომა არ გამოისახება არაუარყოფითი მთელი რიცხვით, რაც იმას ნიშნავს, რომ არჩეული საზომი ერთეულით მოცემული სიდიდე არ იზომება აბსოლუტურად ზუსტად. იმისათვის, რომ ადამიანს მისცემოდა სიდიდეთა გაზომვის უფრო ვრცელი შესაძლებლობა, იძულებული შეიქნა გაეფართოებინა რიცხვზე წარმოდგენა, არაუარყოფით მთელ რიცხვებთან ერთად შემოეღო ისეთი რიცხვები, რომ საზომი ერთეულის არაჯერად სიდიდეებსაც შეუზღუდველად ჰქონოდა ზომა.

სამისოდ ადამიანმა გამოიყენა სიდიდის ნებისმიერ ტოლ ნაწილებად დაყოფის

შესაძლებლობა. ვთქვათ, a სიდიდე უნდა გაიზომოს მისი არაჯერადი e საზომი ერთეულით. მაშინ წინასწარი გაანგარიშებით ზოგჯერ შესაძლებელია e საზომი ერთეული გაიყოს ისეთ n ტოლ ნაწილად, რომ მისი მე-n-ედი ნაწილი სიდიდეში მთელ m რიცხვჯერ თავსდებოდეს. ამრიგად, e საზომი ერთეულის მე-n-ედი ნაწილი a სიდიდეში თავსდება m-ჯერ, რაც იმას ნიშნავს, რომ a სიდიდე ხასიათდება ორი ნატურალური m და n რიცხვით, $m \in N$, $n \in N$.

დადგენილია ასეთი m და n წყვილი რიცხვი ჩაიწეროს ასე: $\frac{m}{n}$, რომელსაც **არაუარყოფითი წილადი** ეწოდება. ვიტყვით, რომ $\frac{m}{n}$ წილადი არის a სიდიდის გაზომვის შედეგი, ანუ გამოსახვა e საზომი ერთეულის შემთხვევაში. როგორც ვთქვით, m და n ნატურალური რიცხვებია. n-ს ეწოდება მნიშვნელი, ხოლო m-ს მრიცხველი. n მნიშვნელი გვიჩვენებს, რამდენ ტოლ ნაწილად არის გაყოფილი e საზომი ერთეული, ხოლო m მრიცხველი გვიჩვენებს, რამდენჯერ თავსდება a სიდიდეში საზომი ერთეულის მე-n-ედი ნაწილი.

განსაზღვრება. ნატურალურ რიცხვთა წყვილს $<m,n>$, რომელთაგან ერთს ეწოდება მნიშვნელი და გვიჩვენებს, რამდენ ტოლ ნაწილადაა გაყოფილი სიდიდე, ხოლო მეორეს — მრიცხველი და გვიჩვენებს, რამდენი ასეთი ნაწილია აღებული, არაუარყოფითი წილადი ეწოდება.

მიღებულია, რომ ასეთი წყვილი ჩაიწეროს ასე: $\frac{m}{n}$.

ამგვარად, წილადების წარმოშობის „პრაქტიკულ" საფუძვლად მიჩნეულია სიდიდეთა გაზომვა. სიდიდეთა გაზომვის შედეგი უმრავლეს შემთხვევაში გამოისახება წილადით. მართალია, არსებობს წილადების შემოტანის სხვა საფუძვლებიც, მაგრამ მათზე არ შევჩერდებით. ქვემოთ წილადებთან დაკავშირებული ყველა საკითხი გაშუქებული იქნება გაზომვის ოპერაციით.

2. წილადების ეკვივალენტურობა და წილადის ძირითადი თვისება

ვთქვათ, რომელიმე a სიდიდის გაზომვის შედეგი e საზომი ერთეულის შემთხვევაში გამოისახება $\frac{m}{n}$ წილადით. ეს იმას ნიშნავს, რომ e საზომი ერთეულის მე-n-ედი ნაწილი a სიდიდეში თავსდება m-ჯერ. თუ e საზომ ერთეულს გავყოფთ q ტოლ ნაწილად და მისი მე-q-ედი ნაწილი a სიდიდეში მოთავსდა p-ჯერ, მაშინ

იმავე e საზომი ერთეულის შემთხვევაში a სიდიდის გაზომვის შედეგი გამოისახება $\frac{p}{q}$ წილადით და ა.შ. ასეთი მსჯელობით მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ ერთი და იგივე a სიდიდის გაზომვის შედეგი შეიძლება გამოისახოს არაუარყოფითი წილადების უსასრულო სიმრავლით, რომელთაც აქვთ სხვადასხვა მრიცხველი და მნიშვნელი.

მართალია, ერთი და იგივე სიდიდის გაზომვის შედეგად მიღებული წილადები სხვადასხვანაირად გამოისახებიან, მაგრამ მათ აქვთ რაღაც საერთო რიცხობრივობის თვალსაზრისით.

შემოვიტანოთ განსაზღვრება: **ერთი და იმავე საზომი ერთეულის შემთხვევაში მოცემული a სიდიდის გაზომვის შედეგად მიღებულ $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ ორ წილადს ეკვივალენტური წილადები ეწოდება და აღინიშნება ასე:**

$$\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}.$$

ეკვივალენტური წილადები შეიძლება მივიღოთ ასეც. ვთქვათ, a სიდიდის გაზომვის შედეგი e საზომი ერთეულის შემთხვევაში გამოისახა $\frac{m}{n}$ წილადით. თუ e ერთეულის თითოეულ n-ურ ნაწილს კიდევ გავყოფთ k ($k \in \mathrm{N}$) ტოლ ნაწილად, მაშინ e ერთეული გაიყოფა nk ტოლ ნაწილად და ეს ახალი nk-ური ნაწილი a სიდიდეში მოთავსდება mk-ჯერ, რაც იმას ნიშნავს, რომ a სიდიდე გამოისახება $\frac{mk}{nk}$ წილადით. ამრიგად, $\frac{m}{n}$ და $\frac{mk}{nk}$ წილადები მიიღება ერთი და იმავე a სიდიდის სხვადასხვა ხერხით გაზომვის შედეგად, მაშასადამე, $\frac{m}{n} \sim \frac{mk}{nk}$, სადაც k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია.

ეს თვისება ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: **თუ წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე ნატურალურ რიცხვზე, მივიღებთ მოცემულის ეკვივალენტურ ახალ წილადს (წილადის ძირითადი თვისება)**

$$\frac{m}{n} \sim \frac{mk}{nk}.$$

როგორც საერთოდ ეკვივალენტური მიმართებისათვის, ორი წილადის ეკვივალენტურობის მიმართებასაც ახასიათებს რეფლექსურობის ($\frac{m}{n} \sim \frac{m}{n}$), სიმეტრიულობის ($\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} \sim \frac{m}{n}$) და ტრანზიტულობის (თუ $\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}$ და

$\frac{p}{q} \sim \frac{r}{s}$, მაშინ $\frac{m}{n} \sim \frac{r}{s}$) თვისებები.

ზემოაღნიშნულის საფუძველზე შეიძლება აღმოვაჩინოთ ორი წილადის ეკვივალენტურობის კრიტერიუმი.

ვთქვათ, $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ ორი წილადი ერთმანეთის ეკვივალენტურია, ე.ი. $\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}$ წილადის ძირითადი თვისების თანახმად

$$\frac{m}{n} \sim \frac{mq}{nq} \quad \text{და} \quad \frac{p}{q} \sim \frac{np}{nq}.$$

ეკვივალენტური წილადების ტრანზიტულობის თვისების თანახმად

$$\frac{mq}{nq} \sim \frac{np}{nq}.$$

მიღებული ეკვივალენტური წილადების მნიშვნელები ტოლია, ამიტომ მათი ეკვივალენტურობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა მრიცხველებიც ტოლია, ე.ი. $mq=np$.

ამგვარად, თუ $\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}$, მაშინ $mq=np$.

მართებულია შებრუნებული დებულებაც: თუ $mq=np$, მაშინ $\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}$. მართლაც, $\frac{m}{n} \sim \frac{mq}{nq}$ და $\frac{p}{q} \sim \frac{np}{nq}$, რადგან $mq=np$, ამიტომ $\frac{mq}{nq} \sim \frac{np}{nq}$, საიდანაც ვღებულობთ

$$\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}.$$

ამრიგად, დამტკიცებულია წილადების ეკვივალენტურობის შემდეგი კრიტერიუმი: **$\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ ორი წილადი ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა პირველი წილადის მრიცხველის ნამრავლი მეორე წილადის მნიშვნელზე ტოლია პირველი წილადის მნიშვნელისა და მეორე წილადის მრიცხველის ნამრავლისა, ე.ი. შესრულებულია პირობა $mq=np$.**

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ნებისმიერი ორი წილადი $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ მაშინ შეიძლება იყოს ერთი და იმავე a სიდიდის გაზომვის შედეგი, როცა $mq=np$, ე.ი. $\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}$.

3. არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვები

როგორც აღვნიშნეთ, ერთი და იმავე a სიდიდის გაზომვის შედეგი შეიძლება გამოისახოს ერთმანეთის ეკვივალენტური მრავალი არაუარყოფითი წილადით. რაც შეეხება ერთგვაროვან a და b სხვადასხვა სიდიდეს, ერთი და იმავე საზომი ერთეულით გაზომვის შემთხვევაში გამოისახებიან ერთმანეთის არაეკვივალენტური არაუარყოფითი წილადებით. ამგვარად, არაუარყოფითი წილადების სიმრავლეში გვხვდება როგორც ეკვივალენტური, ასევე არაეკვივალენტური წილადები. მაშასადამე, შესაძლებელია ამ სიმრავლის ეკვივალენტურობის კლასებად დაყოფა. არაუარყოფითი წილადების ერთ კლასში აღმოჩნდება ერთმანეთის ეკვივალენტური წილადები, ხოლო სხვადასხვა კლასში — არაეკვივალენტური წილადები.

რამდენადაც ერთი და იგივე a სიდიდის ზუსტად გაზომვის შედეგები ერთი და იმავე საზომი ერთეულით მხოლოდ ერთი რიცხვი უნდა იყოს, ამიტომ მივიჩნევთ, რომ ერთმანეთის ეკვივალენტური არაუარყოფითი წილადების კლასი ხასიათდება ერთი და იგივე რიცხვით. ამ რიცხვს არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვი ეწოდება.

განსაზღვრება. არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვი ეწოდება ეკვივალენტური არაუარყოფითი წილადების კლასს, ამასთან $\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}$ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $mq=np$.

ამგვარად, ერთმანეთის ეკვივალენტური არაუარყოფითი წილადები გამოსახავენ ერთ რომელიმე არაუარყოფით რაციონალურ რიცხვს. მაშასადამე, ცალკეული წილადი არ წარმოადგენს რიცხვს, არამედ არის რაციონალური რიცხვის გამოსახვის ერთ-ერთი ფორმა. რა თქმა უნდა, არაეკვივალენტური წილადები სხვადასხვა არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვების გამოსახვის ფორმებია.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ წილადების სახით. მართლაც, a სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობა არაუარყოფითი მთელი n რიცხვით გამოისახება მაშინ, როცა e საზომი ერთეული a სიდიდეში თავსდება ზუსტად n-ჯერ. თუ e საზომ ერთეულს არ გავყოფთ ნაწილებად, მაშინ წილადის მნიშვნელად შეიძლება ვიგულისხმოთ 1, ხოლო მრიცხველად დარჩება იგივე n. ამგვარად, არაუარყოფითი მთელი n რიცხვი გამოისახება $\frac{n}{1}$ წილადით: $n=\frac{n}{1}$.

$\frac{n}{1}$-ის ნებისმიერ ეკვივალენტურ წილადს ექნება $\frac{nk}{k}$ სახე. მაშასადამე,

$\frac{nk}{k}$ $(k\in N)$ სახის წილადები წარმოადგენენ n ნატურალური რიცხვის გამოსახვის ფორმებს.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ **არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვების სიმრავლეში ერთიანდება ყველა არაუარყოფითი წილადი და ყველა არაუარყოფითი მთელი რიცხვი.**

ერთმანეთის ეკვივალენტურ არაუარყოფით წილადებს შორის, რომლებიც გამოსახავენ ერთ რომელიმე არაუარყოფით რაციონალურ რიცხვს, არის ერთადერთი წილადი, რომლის მრიცხველი და მნიშვნელი ურთიერთმარტივი რიცხვებია. ასეთ წილადს **უკვეცი წილადი** ეწოდება. უმრავლეს შემთხვევაში არაუარყოფით რაციონალურ რიცხვებს გამოსახავენ უკვეცი წილადით და ამბობენ, რომ **არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვი ამ წილადის ტოლია.**

მაგალითად, $r=\frac{3}{5}$ ჩანაწერი უნდა გვესმოდეს ასე: r არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვი განსაზღვრულია $\frac{3}{5}$ წილადით. მაგრამ უმრავლეს შემთხვევაში ვამბობთ მოკლედ: r რაციონალური რიცხვი $\frac{3}{5}$-ის ტოლია.

არაუარყოფითი მთელი რიცხვებიც შეიძლება გამოისახოს უკვეცი წილადების სახით. მაგალითად, $5=\frac{5}{1}$, $6=\frac{6}{1}$, $0=\frac{0}{1}$.

ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ მკვრივი ადიციურ-სკალარული სიდიდეებისათვის დამახასიათებელია გაზომვა, რის შედეგადაც მიიღება არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვები. არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვების სიმრავლესაც ახასიათებს სიმკვრივის თვისება (რიცხვთა სიმრავლეს ეწოდება მკვრივი, თუ მის ყოველ ორ ელემენტს შორის იმყოფება შუალედური ელემენტი).

რადგან ყოველი სიდიდე შეიძლება გაიზომოს და რიცხვითი მნიშვნელობა გამოისახოს არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვით, ხოლო ეს უკანასკნელი — წილადით, ამიტომ სიდიდეებს შორის ყოველგვარი დამოკიდებულებანი შეიძლება შევცვალოთ რიცხვითი მნიშვნელობების დამოკიდებულებით. ამასთან არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვის ცნების მაგიერ ვიხმართ წილადის ცნებას.

4. წილადების შეკვეცა

თუ a სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობის გამომსახველი $\frac{m}{n}$ წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის უსგ მეტია 1-ზე, ე.ი. $D(m,n)=d>1$, მაშინ $m=m_1d$, $n=n_1d$,

ისე, რომ $D(m_1,n_1)=1$, ე.ი. m_1 და n_1 ურთიერთმარტივი რიცხვებია. ამის საფუძველზე შეიძლება დავწეროთ

$$\frac{m}{n}=\frac{m_1d}{n_1d}=\frac{m_1}{n_1}.$$

$\frac{m_1d}{n_1d}$ წილადიდან მისივე ეკვივალენტურ $\frac{m_1}{n_1}$ წილადზე გადასვლას $\frac{m_1d}{n_1d}$ წილადის d-ზე შეკვეცა ეწოდება.

დასკვნა. $\frac{m}{n}$ წილადის შეკვეცა ეწოდება ამ წილადის შეცვლას მისივე ეკვივალენტური წილადით, რომელიც მიიღება მოცემული წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის მათსავე უდიდეს საერთო გამყოფზე გაყოფით.

ადვილი მისახვედრია, რომ a სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობის გამომსახველი ეკვივალენტური წილადებიდან მხოლოდ ერთი წილადი იქნება ისეთი, რომლის მრიცხველი და მნიშვნელი ურთიერთმარტივი რიცხვებია. მას უკვეცი წილადი ეწოდება და, როგორც აღვნიშნეთ, მისით გამოსახავენ შესაბამის რაციონალურ რიცხვს.

პრაქტიკულ საქმიანობაში არჩევენ ორი სახის შეკვეცას: 1) ერთბაშად შეკვეცა. ამ შემთხვევაში წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს ერთბაშად ყოფენ მათ უსგ-ზე და ღებულობენ უკვეც წილადს.

მაგალითი. $\frac{36}{48}=\frac{3\cdot12}{4\cdot12}=\frac{3}{4}$; $D(36,48)=12$.

2) თანდათანობითი შეკვეცა. ამ შემთხვევაში წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს ჯერ ყოფენ არაუდიდეს საერთო გამყოფზე. ასევე იქცევიან მიღებული წილადის მიმართ და პროცესს აგრძელებენ მანამდე, ვიდრე არ მიიღებენ უკვეც წილადს.

მაგალითი: $\frac{36}{48}=\frac{18}{24}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

5. წილადების გაერთმნიშვნელიანება

განსაზღვრება. რამდენიმე მოცემული წილადის გაერთმნიშვნელიანება ეწოდება ისეთ გარდაქმნას, რომლის დროსაც თითოეული იცვლება მისივე ეკვივალენტური ისეთი წილადით, რომელთა მნიშვნელები ტოლია.

ვთქვათ, მოცემულია უკვეცი წილადები: $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ და $\frac{r}{s}$.

მათი მნიშვნელების ერთ-ერთი საერთო ჯერადი იქნება nqs. ვისარგებლოთ წილადის ძირითადი თვისებით და მოცემული წილადები შევცვალოთ მათი ეკვივა-

ლენტური შემდეგი წილადებით: $\frac{m}{n}=\frac{mqs}{nqs}$; $\frac{p}{q}=\frac{nps}{nqs}$; $\frac{r}{s}=\frac{nqr}{nqs}$.

qs, ms და nq რიცხვებს ეწოდება შესაბამისი წილადის დამატებითი მამრავლი. $\frac{mqs}{nqs}$, $\frac{nps}{nqs}$ და $\frac{nqr}{nqs}$ წილადები წარმოადგენენ გაერთმნიშვნელიანებულ წილადებს.

იმისათვის, რომ გამარტივდეს წილადების გაერთმნიშვნელიანების პროცესი, მიზანშეწონილია საერთო მნიშვნელად ავიღოთ მოცემული წილადების მნიშვნელების უსჯ.

დასკვნა. წილადები რომ გავაერთმნიშვნელიანოთ, საჭიროა მოვძებნოთ ამ წილადების მნიშვნელების უსჯ და თითოეული წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ მათ შესაბამის დამატებით მამრავლზე.

მაგალითი. გავაერთმნიშვნელიანოთ წილადები: $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}$ და $\frac{7}{18}$.

უსჯ $(8,6,18)=72$, $72:8=9$, $72:6=12$, $72:18=4$.

$$\frac{3}{8}=\frac{27}{72},\quad \frac{5}{6}=\frac{60}{72}\ \text{და}\ \frac{7}{18}=\frac{28}{72}.$$

6. წილადების შედარება

ადიციურ-სკალარული სიდიდეებისათვის დამახასიათებელი ორი მიმართება ($a\sim b$, $a=b+c$) და მათთან დაკავშირებულ ზომებს შორის დამოკიდებულებანი ($m(a)=m(b)$, $m(a)=m(b)+m(c)$) სიდიდეთა რიცხვითი მნიშვნელობების (წილადების) შედარებისა და მათზე ოპერაციების შესრულების შესაძლებლობას იძლევა.

ჯერ განვიხილოთ რომელიმე ადიციურ-სკალარული სიდიდის იმ ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც ერთი და იმავე e საზომი ერთეულით გაზომვის დროს გამოისახებიან ტოლმნიშვნელიანი უკვეცი წილადებით. ვთქვათ, a და b ორი ელემენტის ზომა შესაბამისად არის $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{n}$ წილადები. ეს იმას ნიშნავს, რომ e საზომი ერთეულის n-ური ნაწილი a-ში თავსდება m-ჯერ, ხოლო b-ში — p-ჯერ. a და b სიდიდეების შედარება შეიძლება გამოვიყენოთ შესაბამისი წილადების შედარებისათვის და შემდეგი სამი შესაძლებლობიდან ადგილი ექნეს ერთ-ერთს.

1) $a\sim b$, მაშინ სიდიდის განსაზღვრის თანახმად, $m(a)=m(b)$, ე.ი. $\frac{m}{n}=\frac{p}{n}$, ანუ $mn=np$ და $m=p$. უკვეცი წილადების მრიცხველებისა და მნიშვნელების ტო-

ლობიდან დავასკვნით თვით წილადების ტოლობასაც: $\frac{m}{n}=\frac{p}{n}$.

დასკვნა. ტოლმნიშვნელიანი უკვეცი წილადები ტოლად ითვლება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ტოლია მათი მრიცხველები, ე.ი. $\frac{m}{n}=\frac{p}{n}$, მაშინ, როცა $m=p$.

2) a არის $\sim b$ და $a=b+c$, მაშინ $a>b$, $m(a)=m(b)+m(c)$. თუ $m(c)>0$, მაშინ $m(a)>m(b)$, ე.ი. უკანასკნელი თანადობა იმის მაჩვენებელია, რომ e საზომი ერთეულის n-ური ნაწილი a-ში თავსდება უფრო მეტჯერ, ვიდრე b-ში, მაშასადამე, $m>p$,

ე.ი. $\frac{m}{n}>\frac{p}{n}$, როცა $m>p$.

დასკვნა. ტოლმნიშვნელიანი წილადებიდან ის წილადია მეტი, რომლის მრიცხველიც მეტია.

3) a არ არის $\sim b$ და $a<b$. ანალოგიური მსჯელობით დავადგენთ, რომ $m(a)<m(b)$, $\frac{m}{n}<\frac{p}{n}$, მაშასადამე, $m<p$, ე.ი. $\frac{m}{n}<\frac{p}{n}$.

დასკვნა. ტოლმნიშვნელიანი წილადებიდან ის წილადია ნაკლები, რომლის მრიცხველიც ნაკლებია.

ახლა განვიხილოთ ისეთი a და b ორი ელემენტი, რომლებიც ერთი და იმავე e საზომი ერთეულით გაზომვის დროს გამოისახებიან სხვადასხვამნიშვნელიანი წილადებით. ვთქვათ, a ელემენტის ზომა არის $\frac{m}{n}$, ხოლო b ელემენტისა $\frac{p}{q}$. $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ სხვადასხვამნიშვნელიანი წილადები შეიძლება წარმოვადგინოთ ტოლმნიშვნელიანი წილადებით, რომლებიც მოცემული წილადების ეკვივალენტურია.

$$\frac{m}{n}\sim\frac{mq}{nq},\quad \frac{p}{q}\sim\frac{np}{nq}$$

მოცემული წილადების შედარება დაიყვანება მათი ეკვივალენტური $\frac{mq}{nq}$ და $\frac{np}{nq}$ ტოლმნიშვნელიანი წილადების შედარებაზე.

აქაც საქმე გვაქვს სამ შემთხვევასთან.

1) $a\sim b$; მაშინ $\frac{m}{n}\sim\frac{p}{q}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $mq=np$.

რადგან ეკვივალენტური წილადები ხასიათდებიან ერთი არაუარყოფითი რაციონალური რიცხვით, შეიძლება გავაკეთოთ დასკვნა: **თუ პირველი წილადის მრიცხველის ნამრავლი მეორე წილადის მნიშვნელზე ეტოლება პირველი წილადის**

მნიშვნელისა და მეორე წილადის მრიცხველის ნამრავლს, ასეთი წილადები ეკვივალენტურია და გამოსახავენ ერთი და იმავე არაუარყოფით რაციონალურ რიცხვს.

2) $a<b$; მაშინ $\frac{m}{n}<\frac{p}{q}$, ანუ $\frac{mq}{nq}<\frac{np}{nq}$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $mq<np$.

დასკვნა. ერთი წილადი მეორე წილადზე ნაკლებად ითვლება მაშინ, როცა პირველი წილადის მრიცხველის ნამრავლი მეორე წილადის მნიშვნელზე ნაკლებია პირველი წილადის მნიშვნელისა და მეორე წილადის მრიცხველის ნამრავლზე, ე.ი.

$$\frac{m}{n}<\frac{p}{q},\ \text{როცა } mq<np.$$

3) $a>b$, მაშინ $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$, ანუ $\frac{mq}{nq}>\frac{np}{nq}$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $mq>np$.

დასკვნა. ერთი წილადი მეორე წილადზე მეტია მაშინ, როცა პირველი წილადის მრიცხველის ნამრავლი მეორე წილადის მნიშვნელზე მეტია პირველი წილადის მნიშვნელისა და მეორე წილადის მრიცხველის ნამრავლზე,

ე. ი. $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$, როცა $mq>np$.

7. წილადების სახეები ერთეულთან შედარებით

განსაზღვრება. წილადს, რომლის მრიცხველი ნაკლებია მნიშვნელზე, წესიერი წილადი ეწოდება. ე.ი. $\frac{m}{n}$ წილადი წესიერია, როცა $m<n$.

მაგალითად, $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{8}$ წესიერი წილადებია.

წესიერი წილადი ერთზე ნაკლებია. მართლაც, თუ $\frac{m}{n}$ წილადი წესიერია, მაშინ $m<n$, $e=1$. საზომ ერთეულს თუ გავყოფთ n ტოლ ნაწილად, მაშინ $e=1=\frac{n}{n}$. რადგან $m<n$, ამიტომ $\frac{m}{n}<\frac{n}{n}$, ე.ი. $\frac{m}{n}<1$.

განსაზღვრება: წილადს, რომლის მრიცხველი მეტია მნიშვნელზე ან მისი ტოლია, არაწესიერი წილადი ეწოდება, ე.ი. $\frac{m}{n}$ წილადი არაწესიერია, როცა $m\geq n$.

მაგალითად, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{5}{5}$ არაწესიერი წილადებია.

არაწესიერი წილადი ერთზე მეტია ან ერთის ტოლია. მართლაც, თუ $\frac{m}{n}$ წილადი არაწესიერია, მაშინ $m \geq n$; $e=1=\frac{n}{n}$, ამიტომ $\frac{m}{n} \geq \frac{n}{n}$, ე.ი. $\frac{m}{n} \geq 1$.

§3. წილადების შეკრება და გამოკლება

1. წილადების შეკრება

1. ვთქვათ, a და b სიდიდეების რიცხვითი მნიშვნელობანი გამოისახება შესაბამისად $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{n}$ ტოლმნიშვნელიანი წილადებით. განვსაზღვროთ $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{n}$ წილადების ჯამი ისე, რომ იგი წარმოადგენდეს a და b სიდიდეთა ჯამის რიცხვით მნიშვნელობას. ასეთი მიდგომა საშუალებას იძლევა სიდიდეთა ჯამი გავიგოთ მათი ზომების დახმარებით.

a და b სიდიდეების $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{n}$ ზომები გვიჩვენებს, რომ e საზომი ერთეულის n-ური ნაწილი a სიდიდეში თავსდება m-ჯერ, ხოლო b სიდიდეში - p- ჯერ. ეს იმას ნიშნავს, რომ e საზომი ერთეულის n-ური ნაწილი $a+b$ ჯამში მოთავსდება $(m+p)$-ჯერ და $a+b$ ჯამის რიცხვითი მნიშვნელობა $\frac{m+p}{n}$ წილადით გამოისახება.

მაშასადამე, $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{n}$ წილადების ჯამს განსაზღვრავენ ტოლობით

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}.$$

განსაზღვრება. ტოლმნიშვნელიანი წილადების ჯამი ეწოდება ისეთ წილადს, რომლის მრიცხველი ეტოლება მოცემული წილადების მრიცხველების ჯამს, ხოლო მნიშვნელი — მოცემული წილადების მნიშვნელს.

მაგალითი. $\frac{7}{13}+\frac{5}{13}=\frac{7+5}{13}=\frac{12}{13}$.

2. ახლა, ვთქვათ, e საზომი ერთეულით გაზომვის შემთხვევაში a და b სიდიდეთა რიცხვითი მნიშვნელობანი გამოისახება $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ სხვადასხვამნიშვნელიანი უკვეცი წილადებით. აქაც $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ წილადების ჯამი ისე განვსაზღვროთ, რომ იგი იყოს a და b სიდიდეთა ჯამის რიცხვითი მნიშვნელობა.

წილადის ძირითადი თვისების გამოყენებით მოცემული წილადები შეიძლება

გამოვსახოთ მათივე ეკვივალენტური ტოლმნიშვნელიანი წილადებით: $\frac{m}{n}=\frac{mq}{nq}$ და $\frac{p}{q}=\frac{np}{nq}$, ე.ი. a სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობა გამოისახება $\frac{mq}{nq}$ წილადით, ხოლო b სიდიდისა - $\frac{np}{nq}$ წილადით. ეს იმას ნიშნავს, რომ e საზომი ერთეულის nq-ური ნაწილი a სიდიდეში თავსდება mq-ჯერ, b სიდიდეში - np-ჯერ, ხოლო $a+b$ სიდიდეში მოთავსდება $(mq+np)$ -ჯერ და $a+b$ ჯამის რიცხვითი მნიშვნელობა გამოისახება $\frac{mq+np}{nq}$ წილადით.

ამრიგად, $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ სხვადასხვამნიშვნელიანი წილადების ჯამი განისაზღვრება ტოლობით

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}.$$

განსაზღვრება: $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ სხვადასხვამნიშვნელიანი წილადების ჯამი ეწოდება ისეთ წილადს, რომლის მრიცხველი ეტოლება მოცემული წილადების საერთომნიშვნელიანების შედეგად მიღებული წილადების მრიცხველების ჯამს, ხოლო მნიშვნელი — მოცემული წილადების საერთო მნიშვნელს.

სხვადასხვამნიშვნელიანი წილადების შეკრების დროს შეიძლება გვქონდეს შემდეგი კერძო შემთხვევები:

1. შესაკრები უკვეცი წილადების მნიშვნელები ურთიერთმარტივი რიცხვებია, მაშინ მათი საერთო მნიშვნელი იქნება შესაკრები წილადების ყველა მნიშვნელის ნამრავლი.

მაგალითი. $\frac{4}{7}+\frac{2}{3}=\frac{4\cdot3+7\cdot2}{21}=\frac{12+14}{21}=\frac{26}{21}$.

2. შესაკრები უკვეცი წილადების მნიშვნელების უსჯ მეტია ერთზე, მაშინ მათი საერთო მნიშვნელი იქნება ყველა მნიშვნელის უსჯ.

მაგალითი. $\frac{5}{21}+\frac{3}{35}+\frac{2}{7}=\frac{5\cdot5+3\cdot3+2\cdot15}{105}=\frac{25+9+30}{105}=\frac{64}{105}$.

3. თუ მოცემული წილადების მნიშვნელებიდან უდიდესი დანარჩენის ჯერადია, მაშინ საერთო მნიშვნელად აიღება უდიდესი მნიშვნელი.

მაგალითი. $\frac{5}{12}+\frac{7}{36}+\frac{11}{18}=\frac{5\cdot3+7\cdot1+11\cdot2}{36}=\frac{15+7+22}{36}=\frac{44}{36}=\frac{11}{9}$.

შეიძლება ზოგჯერ საქმე გვქონდეს არაუარყოფითი მთელი რიცხვისა და წილადის შეკრებასთან.

განსაზღვრება. არაუარყოფითი მთელი რიცხვისა და წილადის ჯამს შერეული რიცხვი ეწოდება.

რადგან ყოველი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი შეიძლება გამოისახოს წილადით, ეს შემთხვევაც დაიყვანება წილადების შეკრებაზე

$$m+\frac{p}{q}=\frac{mq}{q}+\frac{p}{q}=\frac{mq+p}{q}.$$

მთელისა და წილადის ჯამი, ე.ი. შერეული რიცხვი არაწესიერი წილადია.

ამგვარად, $m+\frac{p}{q}$ **სახის შერეული რიცხვი არაწესიერი წილადის სახით რომ ჩავწეროთ, საჭიროა მთელი რიცხვი გავამრავლოთ წილადის მნიშვნელზე, მიღებულ ნამრავლს მივუმატოთ მრიცხველი და შედეგი დავწეროთ მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელი იგივე დავტოვოთ.**

მაგალითი. $3+\frac{4}{7}=\frac{3\cdot 7+4}{7}=\frac{25}{7}$.

$3+\frac{4}{7}$ სახის ჯამები მოკლედ ასე იწერება -$3\frac{4}{7}$.

არაწესიერი წილადი შეიძლება წარმოვადგინოთ შერეული რიცხვის სახით. მართლაც, ვთქვათ, $\frac{m}{n}$ არაწესიერი წილადია და $m\geq n$. m მრიცხველი გავყოთ n მნიშვნელზე, განაყოფი აღვნიშნოთ q-თი, ხოლო ნაშთი r-ით. მაშინ $m=nq+r$, სადაც $r<n$. ზემოთქმულის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{m}{n}=\frac{nq+r}{n}=\frac{nq}{n}+\frac{r}{n}=q+\frac{r}{n}.$$

ამგვარად, **არაწესიერი წილადი შერეული რიცხვის სახით რომ წარმოვადგინოთ, საჭიროა მრიცხველი გავყოთ მნიშვნელზე, მიღებული განაყოფი დავწეროთ მთელად, ნაშთი — მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელი იგივე დავტოვოთ.**

მაგალითი. $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$; $\frac{36}{7}=5\frac{1}{7}$.

2. წილადების შეკრების თვისებები

არაუარყოფითი მთელი რიცხვების შეკრების ყველა თვისება ძალაშია არაუარყოფითი წილადი რიცხვებისთვისაც.

არსებობის თვისება. როგორიც უნდა იყოს მოცემული არაუარყოფითი წილადი რიცხვები, ყოველთვის არსებობს ისეთი წილადი, რომელიც მათ ჯამს წარმოადგენს.

ამ თვისების მართებულობა გამომდინარეობს თვით ადიციურ-სკალარული სიდიდის განსაზღვრიდან.

შეიძლება ვისარგებლოთ ნატურალური რიცხვების ჯამის ამავე თვისებითაც. მართლაც, მოცემული წილადების გაერთმნიშვნელიანების შემდეგ მათი შეკრება დაიყვანება მრიცხველში მიღებული ნატურალური რიცხვების შეკრებამდე, რაც ყოველთვის არსებობს. მაშასადამე, წილადების ჯამიც ყოველთვის არსებობს.

ერთადერთობის თვისება. როგორიც უნდა იყოს მოცემული წილადი რიცხვები, ყოველთვის არსებობს ისეთი ერთადერთი უკვეცი წილადი, რომელიც მათ ჯამს წარმოადგენს.

როგორც აღვნიშნეთ, $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ წილადების ჯამი განისაზღვრება ტოლობით

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}.$$

მაგრამ ჩვენთვის ცნობილია, რომ თითოეული სიდიდე შეიძლება გამოისახოს არა მხოლოდ $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ წილადებით, არამედ მათი ეკვივალენტური წილადების უსასრულო სიმრავლით.

ვთქვათ, $\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n_1}$ და $\frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}$, მაშინ $\frac{m_1}{n_1}+\frac{p_1}{q_1}=\frac{m_1q_1+n_1p_1}{n_1q_1}$. ისმის კითხვა: $\frac{m_1q_1+n_1p_1}{n_1q_1}$ წილადი ეკვივალენტურია თუ არა $\frac{mq+np}{nq}$ წილადისა? სხვანაირად რომ ვთქვათ, წილადების ჯამი ცალსახად განისაზღვრება თუ არა აღნიშნული ხერხით შეკრების დროს? დასმულ კითხვას შეიძლება პასუხი გავცეთ შემდეგი თეორემით: **მოცემული წილადების ჯამი მათი ეკვივალენტური წილადების ჯამის ეკვივალენტურია.**

დამტკიცება. მოცემულია

$$\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n_1} \text{ და } \frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\frac{mq+np}{nq}=\frac{m_1q_1+n_1p_1}{n_1q_1}.$$

წილადების ეკვივალენტურობის კრიტერიუმის თანახმად, მოცემული ეკვივალენტურობიდან შეიძლება დავწეროთ: $mn_1=m_1n$...(1) და $pq_1=p_1q$...(2). (1) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ qq_1-ზე, ხოლო (2) ტოლობის ორივე ნაწილი — nn_1-ზე, მივიღებთ შემდეგი სახის ჭეშმარიტ ტოლობებს:

$$mn_1qq_1=m_1nqq_1 \ldots \qquad (3)$$
$$nn_1pq_1=nn_1p_1q \ldots \qquad (4)$$

(3) და (4) ტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ ჭეშმარიტ ტოლობას

$$mn_1qq_1+nn_1pq_1=m_1nqq_1+nn_1p_1q. \qquad (5)$$

თუ გამოვიყენებთ ნატურალური რიცხვების ჯამის მიმართ ნამრავლის განრიგებადობის (დისტრიბუტიულობის) თვისებას, მივიღებთ ჭეშმარიტ ტოლობას $(mq+np)n_1q_1=(m_1q_1+n_1p_1)nq$, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\frac{mq+np}{nq}=\frac{m_1q_1+n_1p_1}{n_1q_1},$$ რითაც თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ზემოთ აღნიშნული ხერხის მიხედვით წილადების ჯამი განისაზღვრება ცალსახად, ე.ი. ერთადერთია.

გადანაცვლებადობის (კომუტატიურობის) თვისება. როგორიც უნდა იყოს მოცემული წილადი რიცხვები, მათი ადგილების შენაცვლებით წილადების ჯამი არ იცვლება:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{p}{q}+\frac{m}{n}.$$

მართლაც,

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}=\frac{np+mq}{nq}=\frac{np}{nq}+\frac{mq}{nq}=\frac{p}{q}+\frac{m}{n}$$

(გამოვიყენეთ არაუარყოფითი მთელი რიცხვების შესაბამისი თვისება).

ჯუფთებადობის (ასოციატიურობის) თვისება. როგორიც უნდა იყოს მოცემული წილადები, თუ შესაკრებთა რომელიმე ჯგუფს მათი ჯამით შევცვლით, ამით საბოლოო ჯამი არ შეიცვლება.

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)+\frac{r}{s}.$$

ჩამოყალიბებული თვისების დამტკიცებისას შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ყველა წილადი დაყვანილია საერთო მნიშვნელზე.

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{m_1}{k}+\frac{p_1}{k}+\frac{r_1}{k}=\frac{m_1+p_1+r_1}{k}=\frac{m_1+(p_1+r_1)}{k}=\frac{m_1}{k}+\frac{p_1+r_1}{k}=$$
$$=\frac{m_1}{k}+\frac{p_1+r_1}{k}=\frac{m_1}{k}+\left(\frac{p_1}{k}+\frac{r_1}{k}\right)=\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right).$$

ამგვარად, დამტკიცდა, რომ $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)$.

ანალოგიური მსჯელობით დამტკიცდება $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)+\frac{r}{s}$ ტოლობ(ა)

მონოტონურობის თვისება.

ა) თუ $\frac{m}{k}>\frac{n}{k}$, მაშინ $\frac{m}{k}+\frac{p}{k}>\frac{n}{k}+\frac{p}{k}$.

მართლაც, რადგან $\frac{m}{k}>\frac{n}{k}$, ამიტომ $m>n$. მაშინ $m+p>n+p$ და $\frac{m+p}{k}>\frac{n+p}{k}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{m}{k}+\frac{p}{k}>\frac{n}{k}+\frac{p}{k}$.

ბ) თუ $\frac{m}{k}>\frac{n}{k}$ და $\frac{p}{k}>\frac{q}{k}$, მაშინ $\frac{m}{k}+\frac{p}{k}>\frac{n}{k}+\frac{q}{k}$.

მართლაც, მოცემული პირობებიდან გვექნება: $m>n$ და $p>q$, $m+p>n+q$ და $\frac{m+p}{k}>\frac{n+q}{k}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{m}{k}+\frac{p}{k}>\frac{n}{k}+\frac{q}{k}$.

3. წილადების გამოკლება

ადიციურ-სკალარული სიდიდის განსაზღვრის თანახმად, ერთგვაროვან სიდიდეთა სიმრავლეში ყოველთვის მოიძებნება ისეთი სამი a, b და c ელემენტი, რომ $a=b+c$ და $m(a)=m(b)+m(c)$. ამ შემთხვევაში c-ს უწოდებენ a და b სიდიდეების სხვაობას და წერენ ასე: $c=a-b$.

სიდიდეთა გამოკლება ეწოდება შეკრების შებრუნებულ მოქმედებას, როცა ორი სიდიდის მოცემული ჯამითა და ერთ-ერთი სიდიდით ვპოულობთ მეორე სიდიდეს.

a და b სიდიდეთა სხვაობა ყოველთვის იარსებებს, თუ $a \geq b$.

ვთქვათ, a და b სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობანი შესაბამისად გამოსახულია $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ წილადებით ($m(a)=\frac{m}{n}$ და $m(b)=\frac{p}{q}$), მაშინ სიდიდეთა სხვაობის ნაცვლად შეიძლება ვილაპარაკოთ წილადი რიცხვების სხვაობაზე.

განსაზღვრება. $\frac{m}{n}$ **და** $\frac{p}{q}$ **არაუარყოფითი წილადების სხვაობა** ($\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$) **ეწოდება ისეთ** $\frac{x}{y}$ **არაუარყოფით წილადს, რომელიც** $\frac{p}{q}$ **წილადთან შეკრების შედეგად ჯამში გვაძლევს** $\frac{m}{n}$ **წილადს.**

თუ $\frac{m}{n}\geq\frac{p}{q}$, მაშინ $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$ არსებობს და ამასთან ცალსახად განისაზღვრება ტოლობით

$$\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{mq-np}{nq}. \qquad (1)$$

(1) ტოლობის მართებულობის დასამტკიცებლად საკმარისია დავეყრდნოთ წილადების სხვაობის განსაზღვრას და ვაჩვენოთ, რომ $\frac{p}{q}$ და $\frac{mq-np}{nq}$ წილადების ჯამი ეტოლება $\frac{m}{n}$-ს.

მართლაც, $\frac{p}{q}+\frac{mq-np}{nq}=\frac{np}{nq}+\frac{mq-np}{nq}=\frac{np+mq-np}{nq}=\frac{mq}{nq}=\frac{m}{n}$

და (1) ტოლობის მართებულობა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება. $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ **წილადების სხვაობა ეწოდება ისეთ წილადს, რომლის მრიცხველი ეტოლება მოცემული წილადების გაერთმნიშვნელიანების შედეგად მიღებული წილადების მრიცხველების სხვაობას, ხოლო მნიშვნელი — მოცემული წილადების საერთო მნიშვნელს.**

მაგალითი. $\frac{7}{9}-\frac{2}{5}=\frac{7\cdot5-2\cdot9}{9\cdot5}=\frac{35-18}{45}=\frac{17}{45}$.

ტოლმნიშვნელიანი წილადების გამოკლება ემორჩილება ტოლობას

$$\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{m-p}{n}.$$

მაგალითი. $\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=\frac{7-5}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

4. წილადების გამოკლების თვისებები

არაუარყოფითი წილადების გამოკლებისათვის ძალაშია არაუარყოფითი მთელი რიცხვების გამოკლების ყველა თვისება.

არსებობისა და ერთადერთობის თვისება. როგორიც უნდა იყოს მოცემული წილადები, თუ შესრულებულია პირობა $\frac{m}{n}\geq\frac{p}{q}$, მაშინ $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$ სხვაობა არსებობს და იგი ერთადერთია.

არსებობის დამტკიცება. $\frac{m}{n}\geq\frac{p}{q}$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $mq\geq np$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $mq-np$ ნატურალური რიცხვების სხვაობა არსებობს; მაშასადამე, არსებობს $\frac{mq-np}{nq}$.

ერთადერთობის დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{x}{y}$, $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{x_1}{y_1}$ და $\frac{x}{y}\neq\frac{x_1}{y_1}$.

წილადების სხვაობის განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}+\frac{x}{y} \quad \text{და} \quad \frac{m}{n}=\frac{p}{q}+\frac{x_1}{y_1}.$$

მიღებული ტოლობების შედარება გვაძლევს

$$\frac{p}{q}+\frac{x}{y}=\frac{p}{q}+\frac{x_1}{y_1},$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ $\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1}$. მიღებული შედეგი ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას, რაც გვარწმუნებს იმაში, რომ $\frac{x}{y}\neq\frac{x_1}{y_1}$ დაშვება არასწორია. $\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1}$ და, მაშასადამე, სხვაობა ერთადერთია.

შეკრებასთან ურთიერთკავშირში განხილულ წილადების გამოკლებას იგივე თვისებები ახასიათებს, რაც არაუარყოფითი მთელი რიცხვების გამოკლებას. ეს თვისებებია:

1) $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{m}{n}-\frac{r}{s}+\frac{p}{q}$.

2) $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{m}{n}-\frac{r}{s}-\frac{p}{q}$.

3) $\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)-\frac{r}{s}=\left(\frac{m}{n}-\frac{r}{s}\right)+\frac{p}{q}=\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right)$.

4) $\frac{m}{n}-\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\left(\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\right)-\frac{r}{s}=\left(\frac{m}{n}-\frac{r}{s}\right)-\frac{p}{q}$,

5) $\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right)=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)-\frac{r}{s}=\left(\frac{m}{n}-\frac{r}{s}\right)+\frac{p}{q}$.

6) $\frac{m}{n}-\left(\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right)=\left(\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\right)+\frac{r}{s}=\left(\frac{m}{n}+\frac{r}{s}\right)-\frac{p}{q}$.

წილადების გაერთმნიშვნელიანების შემდეგ ამ თვისებების დამტკიცება დაიყვანება არაუარყოფითი მთელი რიცხვების ანალოგიური თვისებების გამოყენებაზე. მაგალითად, დავამტკიცოთ მე-5 თვისების პირველი ნაწილი. ვთქვათ, წილადები დაყვანილია საერთო მნიშვნელზე

$$\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{n}-\frac{r}{n}\right)=\frac{m}{n}+\frac{p-r}{n}=\frac{m+(p-r)}{n}=\frac{(m+p)-r}{n}=\frac{m+p}{n}-\frac{r}{n}=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{n}\right)-\frac{r}{n}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება დანარჩენი თვისებებიც.

§4. წილადების გამრავლება და გაყოფა

1. წილადის გამრავლება არაუარყოფით მთელ რიცხვზე

განსაზღვრება. $\frac{m}{n}$ წილადის ნამრავლი არაუარყოფით მთელ k რიცხვზე ეწოდება ისეთ წილადს, რომელიც მოიძებნება შემდეგნაირად:

1. $\frac{m}{n}$ წილადის ნამრავლი $k>1$ ნატურალურ რიცხვზე ეწოდება $\frac{m}{n}$ წილადის ეკვივალენტური k შესაკრების ჯამს და აღინიშნება ასე

$$\frac{m}{n}\cdot k=\underbrace{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\ldots+\frac{m}{n}}_{k\ \text{შესაკრები}}.$$

2. $\frac{m}{n}$ წილადის ნამრავლი 1-ზე არის $\frac{m}{n}$ წილადი

$$\frac{m}{n}\cdot 1=\frac{m}{n}.$$

3. $\frac{m}{n}$ წილადის ნამრავლი 0-ზე არის 0.

$$\frac{m}{n}\cdot 0=0.$$

ვთქვათ, $\frac{m}{n}$ წილადი უნდა გავამრავლოთ $k>1$ ნატურალურ რიცხვზე. განსაზღვრების თანახმად გვექნება

$$\frac{m}{n}\cdot k=\underbrace{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\ldots+\frac{m}{n}}_{k\ \text{შესაკრები}}=\frac{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{k\ \text{შესაკრები}}}{n}=\frac{m\cdot k}{n},$$

ე.ი. $\frac{m}{n}\cdot k=\frac{m\cdot k}{n}$.

დასკვნა. წილადი რომ ერთისაგან განსხვავებულ ნატურალურ რიცხვზე გავამრავლოთ, საჭიროა მისი მრიცხველი გავამრავლოთ ამ რიცხვზე, ხოლო მნიშვნელი უცვლელი დავტოვოთ.

მაგალითები. $\frac{17}{45}\cdot 2=\frac{17\cdot 2}{45}=\frac{34}{45}$,

$$\frac{3}{7}\cdot 5=\frac{3\cdot 5}{7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}.$$

თუ წილადის მნიშვნელსა და ნატურალურ რიცხვს აქვთ ერთისაგან განსხვავებული საერთო გამყოფი, მაშინ, ვიდრე გამრავლებას შევასრულებდეთ, მიზანშეწონილია მოვახდინოთ შეკვეცა.

მაგალითი. $\frac{7}{12}\cdot 8=\frac{7\cdot 8}{12}=\frac{7\cdot 2}{3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$.

შერეული რიცხვის ნატურალურ რიცხვზე გამრავლების დროს მიზანშეწონილია შერეული რიცხვი გადავაქციოთ არაწესიერ წილადად და იგი გავამრავლოთ ნატურალურ რიცხვზე.

მაგალითი. $3\frac{4}{7}\cdot 3=\frac{25}{7}\cdot 3=\frac{25\cdot 3}{7}=\frac{75}{7}=10\frac{5}{7}$.

განსაზღვრების თანახმად,

$$\frac{3}{7}\cdot 1=\frac{3}{7};\qquad \frac{7}{12}\cdot 0=0.$$

2. წილადის გაყოფა ნატურალურ რიცხვზე

წილადის ნატურალურ რიცხვზე გაყოფა შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც წილადის ნატურალურ რიცხვზე გამრავლების შებრუნებული მოქმედება.

განსაზღვრება. $\frac{m}{n}$ **წილადის განაყოფი k ნატურალურ რიცხვზე ეწოდება ისეთ** $\frac{x}{y}$ **წილადს, რომელიც k-ზე გამრავლებული გვაძლევს** $\frac{m}{n}$**-ს, ე.ი.** $\frac{m}{n}:k=\frac{x}{y}$ **ნიშნავს, რომ** $\frac{x}{y}\,k=\frac{m}{n}$.

ვაჩვენოთ, რომ $\frac{m}{n}$ წილადის განაყოფი k ნატურალურ რიცხვზე ეტოლება $\frac{m}{n\cdot k}$ წილადს, ე.ი. $\frac{m}{n}:k=\frac{m}{n\cdot k}$.

მართლაც, თუ დავემყარებით წილადის ნატურალურ რიცხვზე გაყოფის განსაზღვრას და გამოვიყენებთ წილადის ნატურალურ რიცხვზე გამრავლების წესს, მივიღებთ

$$\frac{m}{n\cdot k}\cdot k=\frac{m\cdot k}{n\cdot k}=\frac{m}{n}.$$

ამრიგად, დამტკიცდა შემდეგი ტოლობის მართებულობა

$$\frac{m}{n}:k=\frac{m}{n\cdot k}.$$

დასკვნა: **წილადი რომ ნატურალურ რიცხვზე გავყოთ, საჭიროა წილადის მნიშვნელი გავამრავლოთ ამ რიცხვზე და მრიცხველი უცვლელი დავტოვოთ.**

მაგალითები: $\frac{5}{6}:4=\frac{5}{6\cdot4}=\frac{5}{24}$,

$$\frac{16}{17}:8=\frac{16}{17\cdot8}=\frac{16:8}{17}=\frac{2}{17}.$$

როგორც ბოლო მაგალითიდან ჩანს, წილადის ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას უმჯობესია მისი მრიცხველი გავყოთ ამ რიცხვზე, როცა ეს შესაძლებელია.

ვაჩვენოთ, რომ $\frac{m}{n}:1=\frac{m}{n}$.

მართლაც, $\frac{m}{n}:1=\frac{m}{n\cdot1}=\frac{m}{n}$.

დასკვნა: **წილადის 1-ზე გაყოფა ამ წილადს უცვლელად ტოვებს.**

როგორც არაუარყოფით მთელ რიცხვთა არითმეტიკაში იყო აღნიშნული, აქაც წილადის ნულზე განაყოფი არ არსებობს.

3. წილადის გამრავლება წილადზე

ვთქვათ, რომელიმე a სიდიდის ზომა e საზომი ერთეულით გაზომვის შემთხვევაში გამოისახება m ნატურალური რიცხვით $|a=me|$. თუ e საზომ ერთეულს შევცვლით ახალი e_1 საზომი ერთეულით, რომელიც ძველის მე-n-ედ ნაწილს უდრის $e_1=\frac{e}{n}$, ე.ი. $e=ne_1$, მაშინ ადვილი მისახვედრია, რომ a სიდიდის ზომა ახალი e_1 ერთეულით გამოისახება m და n ნატურალური რიცხვების ნამრავლით, სადაც n გამოსახავს ძველი e ერთეულის ზომას ახალი e_1 ერთეულით $a=me=m\cdot(ne_1)=(m\cdot n)e_1$;

$$a=(m\cdot n)e_1.$$

მაშასადამე, რაიმე a სიდიდის ზომა ახალი საზომი ერთეულის შემთხვევაში უდრის იმავე სიდიდის ზომას ძველ საზომ ერთეულში გამრავლებული ძველი საზომი ერთეულის ზომაზე ახალი საზომი ერთეულით.

ამგვარად, m და n ნატურალური რიცხვების $m\cdot n$ ნამრავლი ასახავს ძველი საზომი ერთეულიდან ახალ საზომ ერთეულზე გადასვლის ოპერაციას, სადაც m ნამრავლში იგულისხმება a სიდიდის ზომა ძველი e საზომი ერთეულით, n მამ-

ელში კი - ძველი e საზომი ერთეულის ზომა e_1 ახალი ერთეულით, ხოლო mn ნამრავლში იგულისხმება a სიდიდის ზომა ახალი e_1 საზომი ერთეულით.

კონკრეტული სიდიდეების ზომების გამომსახველი ნატურალური რიცხვების გამრავლება ყოველთვის დაკავშირებულია ერთი საზომი ერთეულიდან მეორე საზომ ერთეულზე გადასვლასთან, ამასთან შეიძლება საქმე გვქონდეს როგორც ერთგვაროვანი, ასევე სხვადასხვა გვარის სიდიდეების საზომ ერთეულებთან.

პირველ შემთხვევას განეკუთვნება დიდი საზომი ერთეულების დაშლა მცირე საზომ ერთეულებად.

მაგალითად, 5 მ=(5·10) დმ=50 დმ;

5 მ=(5.100) სმ=500 სმ.

როგორც ჩანს, ახალ საზომ ერთეულზე გადასვლის დროს ძველი ზომა მრავლდება ძველი საზომი ერთეულის ზომაზე ახალი საზომი ერთეულით. პირველ მაგალითში 10-ზე, ხოლო მეორეში 100-ზე.

მეორე შემთხვევას განეკუთვნება ასეთი სახის ამოცანები: 1 კგ ნამცხვრის ფასი 40 თეთრია. რამდენი ღირება 5 კგ ნამცხვარი?

ამ სახის ამოცანებს ადვილად ხსნიან დაწყებითი კლასების მოსწავლეები:

5·40 თეთრი=200 თეთრი.

ამ ამოცანაში საქმე გვაქვს ნამცხვრის, როგორც ობიექტის, ორი სხვადასხვა სიდიდის საზომ ერთეულთან - კილოგრამთან და თეთრთან. ძველ საზომ ერთეულად გვევლინება კილოგრამი, ხოლო ახალ საზომ ერთეულად - თეთრი, 1 კგ ნამცხვრის ფასი. უნდა გავიგოთ ღირებულება, ე.ი. გაზომვის შედეგი თეთრებში. ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა კილოგრამებით გაზომვის პირველი შედეგი (5) გამრავლდეს ძველი ერთეულის ზომაზე ახალი ერთეულით - თეთრებით გაზომილ 1 კგ-ის ფასზე - 40-ზე.

5·40 თეთრი =(5·40) თეთრი = 200 თეთრი = 2 ლარი.

ნატურალური რიცხვების გამრავლების ეს ხერხი გავავრცელოთ წილადების მიმართაც და მის საფუძველზე დავადგინოთ წილადების გამრავლების წესი.

ვთქვათ, a სიდიდის ზომა e საზომი ერთეულით გაზომვის დროს გამოისახება $\frac{m}{n}$ წილადით, ხოლო e საზომი ერთეულის ზომა ახალი e_1 საზომი ერთეულით გაზომვის დროს გამოისახება $\frac{p}{q}$ წილადით.

$\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ წილადების ნამრავლი - $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$ ვუწოდოთ ახალი e_1 საზომი ერთეულით a სიდიდის გაზომვის შედეგს.

ვეცადოთ ეს ნამრავლი გამოვსახოთ მოცემული წილადების წევრებით - m, n, p და q ნატურალური რიცხვებით.

დასმული ამოცანის გადაწყვეტის ნათლად წარმოდგენის მიზნით, ჯერ განვიხილოთ კონკრეტული მონაკვეთის გაზომვის მაგალითი. ვთქვათ, a მონაკვეთის ზომა e საზომი ერთეულით უდრის $\frac{7}{4}$-ს, ხოლო e საზომი ერთეულის ზომა ახალი e_1 საზომი ერთეულით - $\frac{3}{5}$-ს. ვიპოვოთ e_1 საზომი ერთეულით გამოსახული a მონაკვეთის ზომა, რომელიც წესის თანახმად, ჩაითვლება $\frac{7}{4}$ და $\frac{3}{5}$ წილადების ნამრავლად.

პირობის თანახმად e ძველი საზომი ერთეულის ზომა e_1 საზომი ერთეულით გამოისახება $\frac{3}{5}$-ით, ე.ი. $e=\frac{3}{5}e_1$, ანუ $e=\frac{21}{20}e_1$ $(\frac{3}{5}=\frac{21}{20})$. შემოვიტანოთ პირველი დამხმარე ერთეული $e'=\frac{1}{20}e_1$. მაშინ $e_1=20e'$ და $e=12e'$ ... (1)

იმავე პირობის თანახმად $a=\frac{7}{4}e$. შემოვიტანოთ მეორე დამხმარე ერთეული $e''=\frac{1}{4}e$.

მაშინ $e=4e''$ ... (2) და $a=7e''$ ...(3)

(1) და (2) ტოლობათა შედარება გვაძლევს $4e''=12e'$, ანუ $e''=3e'$ ... (4)

თუ (4) ტოლობის მნიშვნელობას ჩავსვამთ (3)-ში, მივიღებთ

$a=7\cdot 3e'=21e'$.

რადგან $e'=\frac{1}{20}e_1$, ამიტომ $a=\frac{21}{20}e_1$.

ამრიგად, e_1 საზომი ერთეულით გაზომილი a სიდიდის ზომა გამოისახა $\frac{21}{20}$-ით, რაც უნდა მივიჩნიოთ მოცემული წილადების ნამრავლად.

$\frac{21}{20}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 5}$, მაშასადამე, $\frac{7}{4}$ და $\frac{3}{5}$ წილადების ნამრავლი გამოისახება $\frac{7\cdot 3}{4\cdot 5}$ წილადით

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 5}.$$

იგივე მსჯელობა ჩავატაროთ ზოგადი სახით. ვთქვათ, a სიდიდის ზომა ძველი e საზომი ერთეულით უდრის $\frac{m}{n}$ წილადს, ხოლო e საზომი ერთეულის ზომა ახალი e_1 საზომი ერთეულით - $\frac{p}{q}$ წილადს. ვიპოვოთ e_1 საზომი ერთეულით გამოსახული a სიდიდის ზომა.

პირობის თანახმად e ძველი საზომი ერთეულის ზომა e_1 ახალი საზომი ერთეულით გამოისახება $\frac{p}{q}$ წილადით, ე.ი

$$e=\frac{p}{q}e_1=\frac{np}{nq}e_1 \ (\frac{p}{q}=\frac{np}{nq}).$$

შემოვიტანოთ პირველი დამხმარე ერთეული $e'=\frac{1}{nq}e_1$, მაშინ

$$e_1=(qn)e' \text{ და } e=(np)e' \ldots(1)$$

იმავე პირობის თანახმად $a=\frac{m}{n}e$. შემოვიტანოთ მეორე დამხმარე ერთეული $e''=\frac{1}{n}e$, მაშინ $e=ne''$... (2)

და $a=me''$... (3)

(1) და (2) ტოლობათა შედარებით მივიღებთ

$ne''=(np)e'$ ანუ $e''=pe'$...(4)

თუ (4) ტოლობის მნიშვნელობას ჩავსვამთ (3)-ში, მივიღებთ

$$a=m(pe')=(mp)e'.$$

რადგან $e'=\frac{1}{nq}e_1$, ამიტომ $a=\frac{mp}{nq}e_1$.

ამრიგად, e_1 საზომი ერთეულით გაზომილი a სიდიდის ზომა გამოისახა $\frac{mp}{nq}$ წილადით, მაშასადამე, იგი წარმოადგენს $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ წილადების ნამრავლს

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}.$$

დასკვნა. ორი წილადის ნამრავლი ეტოლება ისეთ წილადს, რომლის მრიცხველია მოცემული წილადების მრიცხველების ნამრავლი, ხოლო მნიშვნელი - მნიშვნელების

ნამრავლი.

მაგალითი: $\frac{4}{9}\cdot\frac{21}{16}=\frac{4\cdot21}{9\cdot16}=\frac{7}{12}$.

წილადების გამრავლებისას, თუ შესაძლებელია, უნდა მოვახდინოთ შეკვეცა მანამდე, სანამ ვიპოვიდეთ მოცემული წილადების მრიცხველებისა და მნიშვნელების ნამრავლებს.

შერეული რიცხვების გამრავლებისას საჭიროა ისინი გადავაქციოთ არაწესიერ წილადებად და შემდეგ შევასრულოთ მოქმედება.

მაგალითი: $3\frac{3}{4}\cdot1\frac{1}{5}=\frac{15}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{15\cdot6}{4\cdot5}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$.

წილადების გამრავლების წესი გამოდგება ნატურალური რიცხვების გამრავლების დროსაც.

$$m\cdot n=\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{1}=\frac{m\cdot n}{1\cdot1}=mn;$$

$$7\cdot5=\frac{7}{1}\cdot\frac{5}{1}=\frac{7\cdot5}{1\cdot1}=7\cdot5=35.$$

წილადის გამრავლების თვისებები

არაუარყოფითი მთელი რიცხვების გამრავლების ყველა თვისება ძალაშია არაუარყოფითი წილადი რიცხვებისათვის.

არსებობისა და ერთადერთობის თვისება: როგორიც უნდა იყოს მოცემული წილადი რიცხვები, ყოველთვის არსებობს და მასთან ერთადერთი უკვეცი წილადი, რომელიც ნამრავლს წარმოადგენს.

მართლაც, წილადების გამრავლება დაიყვანება მრიცხველსა და მნიშვნელში მოთავსებული ნატურალური რიცხვების გამრავლებამდე, რაც ყოველთვის არსებობს. ამიტომ წილადების ნამრავლიც არსებობს.

როგორც წილადების შეკრების დროს, აქაც ისმის კითხვა: ზემოთ აღნიშნული გამრავლების ხერხით ცალსახად განისაზღვრება თუ არა წილადების ნამრავლი? სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ წილადების მაგივრად ავიღებთ მათ ეკვივალენტურ $\frac{m_1}{n_1}$ და $\frac{p_1}{q_1}$ წილადებს, მაშინ $\frac{mp}{nq}$ წილადი ეკვივალენტური იქნება თუ არა $\frac{m_1p_1}{n_1q_1}$ წილადისა? დასმულ კითხვას შეიძლება პასუხი გავცეთ შემდეგი თეორემით:

თეორემა. მოცემული წილადების ნამრავლი მათი ეკვივალენტური წილადების ნამრავლის ეკვივალენტურია.

დამტკიცება: მოცემულია $\frac{m}{n}\sim\frac{m_1}{n_1}$ და $\frac{p}{q}\sim\frac{p_1}{q_1}$.

დავამტკიცოთ, რომ $\frac{mp}{nq}\sim\frac{m_1p_1}{n_1q_1}$. $(m,n,p,q,m_1,n_1,p_1,q_1)$ ნატურალური რიცხვებია.

წილადების ეკვივალენტურობის კრიტერიუმის თანახმად, მოცემული ეკვივალენტურობებიდან შეიძლება დავწეროთ

$mn_1=m_1n$ (1) და $pq_1=p_1q$. (2)

(1) და (2) ტოლობები გავამრავლოთ წევრ-წევრად, მივიღებთ შემდეგ სწორ ტოლობას $(mn_1)(pq_1)=(m_1n)(p_1q)$.

თუ ვისარგებლებთ ნატურალური რიცხვების გამრავლების, გადანაცვლებადობისა და ჯუფთებადობის თვისებებით, შეიძლება დავწეროთ

$$(mp)(n_1q_1)=(nq)(m_1p_1),$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{mp}{nq}\sim\frac{m_1p_1}{n_1q_1}$, ამითაც თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ზემოთ აღნიშნული ხერხის მიხედვით წილადების ნამრავლი განისაზღვრება ცალსახად, ე.ი. ერთადერთია.

გადანაცვლებადობის (კომუტატიურობის) თვისება. როგორიც უნდა იყოს მოცემული წილადი რიცხვები, მათი ადგილების შენაცვლებით წილადების ნამრავლი არ იცვლება, ე.ი.

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}.$$

დამტკიცება: $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}=\frac{p\cdot m}{q\cdot n}=\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}$.

ჯუფთებადობის (ასოციატიურობის) თვისება. სამი თანამამრავლის შემთხვევაში გვექნება:

$$\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{r}{s}=\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}\right).$$

დამტკიცება:

$$\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{r}{s}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{(m\cdot p)\cdot r}{(n\cdot q)\cdot s}=\frac{m\cdot(p\cdot r)}{n\cdot(q\cdot s)}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p\cdot r}{q\cdot s}=\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}\right).$$

ჯამის (სხვაობის) მიმართ გამრავლების განრიგებადობის (დისტრიბუტიულობის) თვისება.

$$\left(\frac{m}{n}\pm\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{r}{s}=\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}\pm\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}.$$

დამტკიცება:

$$\left(\frac{m}{n}\pm\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{r}{s}=\frac{mq\pm np}{nq}\cdot\frac{r}{s}=\frac{(mq\pm np)\cdot r}{nqs}=\frac{mqr\pm npr}{nqs}=\frac{mqr}{nqs}\pm$$

$$\pm\frac{npr}{nqs}=\frac{m\cdot r}{n\cdot s}\pm\frac{pr}{qs}=\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}\pm\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}.$$

მონოტონურობის თვისება

ა) თუ $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$, მაშინ $\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}>\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}$;

ბ) თუ $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$ და $\frac{r}{s}>\frac{x}{y}$, მაშინ $\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}>\frac{p}{q}\cdot\frac{x}{y}$.

დავამტკიცოთ (ა) შემთხვევა. $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$ პირობიდან $mq>np$. ამ უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ rs-ზე, მივიღებთ $mqrs>nprs$, ანუ $(mr)\cdot(qs)>(ns)\cdot(pr)$, საიდანაც $\frac{m\cdot r}{n\cdot s}>\frac{pr}{qs}$, ანუ $\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}>\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}$, რ.დ.გ. ანალოგიურად მტკიცდება (ბ) შემთხვევაც.

5. წილადის გაყოფა წილადზე

მსგავსად არაუარყოფითი მთელი რიცხვების გაყოფისა, წილადების გაყოფაც შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც წილადების გამრავლების შებრუნებული მოქმედება.

განსაზღვრება: $\frac{m}{n}$ **წილადის განაყოფი** $\frac{p}{q}$ **წილადზე ეწოდება ისეთ** $\frac{x}{y}$ **წილადს, რომლის ნამრავლი** $\frac{p}{q}$ **წილადზე გვაძლევს** $\frac{m}{n}$ **წილადს.**

ვაჩვენოთ, რომ $\frac{m}{n}$ წილადის $\frac{p}{q}$ წილადზე განაყოფი $\frac{x}{y}$ გამოისახება $\frac{m\cdot q}{n\cdot p}$ წილადით, ე.ი. $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}$.

მართლაც, გაყოფის განსაზღვრის თანახმად

$$\frac{mq}{np}\cdot\frac{p}{q}=\frac{(mq)\cdot p}{(np)\cdot q}=\frac{m\cdot(pq)}{n\cdot(pq)}=\frac{m}{n}.$$

ამრიგად,

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}.$$

დასკვნა: ორი წილადის განაყოფი უდრის წილადს, რომლის მრიცხველი ეტოლება პირველი წილადის მრიცხველისა და მეორე წილადის მნიშვნელის ნამრავლს, ხოლო მნიშვნელი - პირველი წილადის მნიშვნელისა და მეორე წილადის მრიცხველის ნამრავლს.

მაგალითი: $\frac{4}{5}:\frac{8}{25}=\frac{4\cdot25}{5\cdot8}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$.

შერეული რიცხვების გაყოფის შემთხვევაში საჭიროა ისინი გადავაქციოთ არაწესიერ წილადებად და შემდეგ შევასრულოთ მოქმედება.

მაგალითი: $5\frac{2}{5}:4\frac{1}{2}=\frac{27}{5}:\frac{9}{2}=\frac{27\cdot2}{5\cdot9}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$.

წილადების გაყოფის წესი გამოდგება არაუარყოფითი მთელი რიცხვების გაყოფის დროსაც. $m:n=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=\frac{m\cdot1}{n\cdot1}=\frac{m}{n}$.

მაგალითი: $7:9=\frac{7}{9}$.

6. წილადების გაყოფის თვისებები

არსებობისა და ერთადერთობის თვისება. როგორიც უნდა იყოს მოცემული წილადი რიცხვები (გარდა შემთხვევისა, როცა გამყოფი უდრის ნულს), ყოველთვის არსებობს და ამასთან ერთადერთი უკვეცი წილადი, რომელიც მათ განაყოფს უდრის. როგორც აღვნიშნეთ, $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}$, როცა $\frac{p}{q}\neq0$. $\frac{mq}{np}$ განაყოფი ყოველთვის არსებობს, რადგან mq და np ნამრავლები, როგორც ნატურალური რიცხვები, ყოველთვის არსებობს და მათი განაყოფიც არსებობს, რაც ამტკიცებს წილადების განაყოფის არსებობას.

შევნიშნოთ, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში განაყოფი ყოველთვის არ არსებობს, წილად რიცხვებში კი იგი ყოველთვის არსებობს.

ერთადერთობა ადვილად მტკიცდება საწინააღმდეგოს დაშვებით. დავუშვათ, რომ $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ წილადების განაყოფი ერთმანეთის არაეკვივალენტური $\frac{x_1}{y_1}$ და $\frac{x_2}{y_2}$ ორი სხვადასხვა წილადია, ე.ი.

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{x_1}{y_1},\quad \frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{x_2}{y_2}\ \text{და}\ \frac{x_1}{y_1}\neq\frac{x_2}{y_2},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $x_1 y_2 \neq x_2 y_1$. (I)

წილადების გაყოფის განსაზღვრის თანახმად

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{x_1}{y_1} = \frac{m}{n} \quad \text{და} \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{x_2}{y_2} = \frac{m}{n}.$$

მაშასადამე, $\frac{px_1}{qy_1} = \frac{px_2}{qy_2}$ და $(px_1)\cdot(py_2) = (qy_1)\cdot(px_2)$, ანუ $(pq)\cdot(x_1 y_2) = (pq)\cdot(y_1 x)$, საიდანაც ვღებულობთ $x_1 y_2 = x_2 y_1$, რაც (I) დაშვებას ეწინააღმდეგება, ე.ი. ჩვენი დაშვება არასწორია და $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$.

მაშასადამე, განაყოფი ერთადერთია.

ჯამის (სხვაობის) მიმართ განაყოფის განრიგებადობის (დისტრიბუტიულობის) თვისება. $\left(\frac{m}{n} \pm \frac{p}{q}\right) : \frac{r}{s} = \frac{m}{n} : \frac{r}{s} \pm \frac{p}{q} : \frac{r}{s}$.

დამტკიცება: $\left(\frac{m}{n} \pm \frac{p}{q}\right) : \frac{r}{s} = \frac{mq \pm np}{nq} : \frac{r}{s} = \frac{(mq \pm np)\cdot s}{nqr} = \frac{mqs}{nqr} \pm \frac{nps}{nqr} =$

$= \frac{m\cdot s}{n\cdot r} \pm \frac{p\cdot s}{q\cdot r} = \frac{m}{n} : \frac{r}{s} \pm \frac{p}{q} : \frac{r}{s}$, რ. დ. გ.

გამრავლებისა და გაყოფის ჭუფთებადობის თვისება.

ა) $\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q} : \frac{r}{s}\right) = \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) : \frac{r}{s}$;

ბ) $\frac{m}{n} : \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}\right) = \left(\frac{m}{n} : \frac{p}{q}\right) : \frac{r}{s}$,

გ) $\frac{m}{n} : \left(\frac{p}{q} : \frac{r}{s}\right) = \left(\frac{m}{n} : \frac{p}{q}\right) \cdot \frac{r}{s}$.

ამ თვისების დამტკიცებაც ძნელი არ არის.

§5. ათწილადები. მოქმედებანი ათწილადებზე

1. ათწილადის ცნება

განსაზღვრება: ათწილადი ეწოდება ისეთ ჩვეულებრივ წილადს, რომლის მნიშვნელი წარმოადგენს 10-ის რომელიმე მთელ ხარისხს, ხოლო მრიცხველი არის ათობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილი ნატურალური რიცხვი.

მაგალითები:

$$1)\ 37{,}503 = 3\cdot 10 + 7 + \frac{5}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{3}{10^3} =$$

$$= \frac{3\cdot 10^4 + 7\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 0\cdot 10 + 3}{10^3} = \frac{37503}{1000};$$

$$2)\ 586{,}129 = 5\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 6 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{9}{10^3} =$$

$$= \frac{5\cdot 10^5 + 8\cdot 10^4 + 6\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 9}{10^3} = \frac{586129}{1000}.$$

განხილული ორი მაგალითი საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: ათწილადი რომ გამოვსახოთ ჩვეულებრივი წილადის სახით, საჭიროა უკუვაგდოთ მძიმე და მრიცხველად დავწეროთ მიღებული ნატურალური რიცხვი, ხოლო მნიშვნელად დავწეროთ 10-ის ხარისხი, რომლის მაჩვენებელი უდრის მძიმის მარჯვნივ მდგომ ციფრთა რიცხვს. პირიქით, ჩვეულებრივი წილადის სახით დაწერილი ათწილადი რომ ჩავწეროთ უმნიშვნელოდ, საჭიროა დავწეროთ მისი მრიცხველი და მარჯვნიდან მძიმით გამოვყოთ იმდენი ციფრი, რამდენ ერთეულსაც უდრის მნიშვნელში მყოფი 10-ის ხარისხის მაჩვენებელი. თუ მრიცხველის ციფრთა რაოდენობა მნიშვნელის ხარისხის მაჩვენებელზე ნაკლებია, მრიცხველის ციფრების მარცხნივ უნდა დავწეროთ იმდენი ნული, რამდენიც საჭიროა მძიმის დასმისათვის.

მაგალითები:

$$1)\ 15{,}27 = \frac{1527}{10^2} = \frac{1527}{100};$$

$$2)\ 0{,}0355 = \frac{355}{10^4} = \frac{355}{10000};$$

$$3)\ \frac{574}{100} = 5{,}74;$$

$$4)\ \frac{17}{1000} = 0{,}017$$

2. ათწილადის თვისებები

აღვნიშნოთ ათწილადების რამდენიმე თვისება, რომლებიც უშუალოდ მისი განსაზღვრებიდან გამომდინარეობენ.

თვისება 1. ათწილადში ერთმანეთის მომდევნო ორი ციფრიდან მარცხენა ციფრს აქვს ათჯერ დიდი თანრიგითი ერთეული, ვიდრე მარჯვენას.

თვისება 2. ათწილადის 10^i-ზე გამრავლება ხორციელდება მძიმის i ციფრით მარჯვნივ გადატანით, ხოლო 10^i-ზე გაყოფა მძიმის i ციფრით მარცხნივ გადატანით.

თვისება 3. მარჯვნიდან ნულების მიწერა ან ჩამოშორება არ ცვლის ათწილადის სიდიდეს.

თვისება 4. ორი ათწილადის საერთო მნიშვნელზე დაყვანისათვის საკმარისია ნაკლები რაოდენობის ათწილადის ნიშნების მქონე რიცხვი მარჯვნიდან ნულების მიწერით გავათანაბროთ მეორე რიცხვის ათწილადის ნიშნების რაოდენობასთან.

ამგვარად, ათწილადების გაერთმნიშვნელიანება ხორციელდება ნულების მიწერით და ტოლი რაოდენობის ათწილადის ნიშნების მქონე ყველა ათწილადი ითვლება საერთო მნიშვნელზე დაყვანილად.

3. ათწილადების შედარება

როგორც ცნობილია, ჩვეულებრივი წილადების შედარების ერთ-ერთი ხერხია ტოლმნიშვნელიანი წილადების შედარება. ორი ტოლმნიშვნელიანი ჩვეულებრივი წილადიდან ის არის მეტი, რომლის მრიცხველიც მეტია. რადგან ათწილადების გაერთმნიშვნელიანება ადვილად ხერხდება ნულების მიწერით (თვისება 4), ამიტომ ათწილადების შესადარებლად ხელსაყრელია გამოვიყენოთ გაერთმნიშვნელიანების ხერხი.

ვთქვათ, შესადარებელი ათწილადები შეიცავენ როგორც მთელ ნაწილებს, ასევე არატოლი რაოდენობის ათწილადის ნიშნებს. ამ შემთხვევაში შესადარებელი რიცხვების ათწილადის ნიშნების რიცხვი შეიძლება გავათანაბროთ ნულების მიწერით. თუ მიღებულ რიცხვებს გავაერთმნიშვნელიანებთ, მივიღებთ ტოლმნიშვნელიან წილადებს, რომელთა მრიცხველები ნატურალური რიცხვებია.

ამგვარად, ათწილადების შედარება დაიყვანება ტოლმნიშვნელიანი ჩვეულებრივი წილადების შედარებამდე, ეს უკანასკნელი კი მრიცხველში მდგომი ნატურალური რიცხვების შედარებამდე.

თუ შესადარებელი ათწილადები მთელ ნაწილებს არ შეიცავენ, მათი შედარება დაიყვანება ტოლი რაოდენობის ციფრების მქონე ნატურალური რიცხვების შედარებამდე.

მაგალითად, 0,5 და 0,473 ათწილადების შესადარებლად პირველ მათგანს

მარჯვნიდან ორი ნული მივუწეროთ. ახლა შევადაროთ რიცხვები 0,500 და 0,473. თითოეულ მათგანს სამი ათწილადის ნიშანი აქვს, ამიტომ ამ წილადების საერთო მნიშვნელი არის $10^3=1000$.

$$0,500=\frac{500}{1000} \text{ და } 0,473=\frac{473}{1000}.$$

ახლა საკმარისია შევადაროთ მათი მრიცხველები 500 და 473. როგორც ცნობილია, ტოლი რაოდენობის ციფრების მქონე ორი ნატურალური რიცხვიდან ისაა მეტი, რომელშიც მარცხნიდან ადრე გვხვდება დიდი ციფრი (მეტი რიცხვის გამომსახველი ციფრი).

500>473 და, მაშასადამე, 0,5>0,473.

კონკრეტული ათწილადების შედარების დროს შეიძლება ისინი არც დავიყვანოთ საერთო მნიშვნელზე და შევადაროთ ერთი და იმავე თანრიგის ერთეულები უმაღლესი თანრიგის ერთეულებიდან დაწყებით. ის ათწილადი იქნება მეტი, რომელშიც ადრე შევხვდებით დიდ ციფრს.

ყოველივე ზემოთქმულის საფუძველზე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ათწილადების შედარების შემდეგი წესი:

ორი ათწილადიდან მეტია ის, რომლის მთელი ნაწილიც მეტია; თუ მთელი ნაწილები ტოლია, მაშინ მეტია ის ათწილადი, რომელსაც მარცხნიდან პირველად შემხვედრი ერთი და იმავე თანრიგის არატოლი ციფრებიდან უფრო დიდი ციფრი აქვს.

მაგალითები:

1) 7,21>5,497, რადგან 7>5;

2) 78,65<78,8, რადგან 6<8.

4. რაციონალური რიცხვის ათწილადებში გამოსახვის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

რადგან ათწილადები სისტემატური წილადების კერძო შემთხვევებია, ამიტომ ყოველი რაციონალური რიცხვი (ჩვეულებრივი წილადი) არ შეიძლება გადაიქცეს სასრული რაოდენობის ათწილადის ნიშნების მქონე ათწილადად, ე.ი. სასრულ ათწილადად. დავამტკიცოთ თეორემა, რომელიც გვიჩვენებს მოცემული უკვეცი წილადის სასრულ ათწილადად წარმოდგენის შესაძლებლობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს.

თეორემა: ჩვეულებრივი უკვეცი $\frac{m}{n}$ წილადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ შეიძლება

ჩაიწეროს სასრული ათწილადის სახით, როცა n მნიშვნელის ყოველი მარტივი თანამამრავლი 10-ის თანამამრავლსაც წარმოადგენს, ე.ი. n-ის კანონიკურ განაშლს აქვს $n=2^{\alpha}\cdot5^{\beta}$ სახე (α და β მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია).

დამტკიცება:

საკმარისობა. ვთქვათ, $n=2^{\alpha}\cdot5^{\beta}$. დავუშვათ, რომ $\gamma>\alpha$ და $\gamma>\beta$. მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ $2^{\gamma-\alpha}\cdot5^{\gamma-\beta}$, მაშინ

$$\frac{m}{n}=\frac{m}{2^{\alpha}\cdot5^{\beta}}=\frac{m\cdot2^{\gamma-\alpha}\cdot5^{\gamma-\beta}}{2^{\alpha}\cdot5^{\beta}\cdot2^{\gamma-\alpha}\cdot5^{\gamma-\beta}}=\frac{m\cdot2^{\gamma-\alpha}\cdot5^{\gamma-\beta}}{2^{\gamma}\cdot5^{\gamma}}=$$

$$=\frac{m\cdot2^{\gamma-\alpha}\cdot5^{\gamma-\beta}}{(2\cdot5)^{\gamma}}=\frac{m\cdot2^{\gamma-\alpha}\cdot5^{\gamma-\beta}}{10^{\gamma}},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{m}{n}$ შეიძლება ჩაიწეროს ათწილადის სახით γ ათწილადის ნიშნით.

აუცილებლობა. ვთქვათ, $\frac{m}{n}=\frac{e}{10^{\gamma}}$ და წილადი $\frac{m}{n}$ უკვეცია. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ $m\cdot10^{\gamma}=ne$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $m\cdot10^{\gamma}\vdots n$.

m-ისა და n-ის ურთიერთმარტივობიდან გამომდინარეობს $10^{\gamma}\vdots n$, რაც იმის მომასწავებელია, რომ n უნდა იყოს $n=2^{\alpha}\cdot5^{\beta}$ სახის, სადაც α და β მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია. თეორემა დამტკიცებულია.

5. მოქმედებანი ათწილადებზე

შეკრება და გამოკლება. რადგან ათწილადებში მარჯვნიდან ნულების მიწერით ყოველთვის შესაძლებელია ათწილადის ნიშნების რიცხვის გათანაბრება და, მაშასადამე, მათი გაერთმნიშვნელიანება, ამიტომ ათწილადების შეკრება და გამოკლება დაიყვანება მათი მრიცხველების შეკრებამდე და გამოკლებამდე, რომლებიც ნატურალური რიცხვებია.

მაგალითები:

$$1)\ 17,27+5,4=17.27+5,40=\frac{1727}{100}+\frac{540}{100}=$$

$$=\frac{1727+540}{100}=\frac{2267}{100}=22,67.$$

ეს მაგალითი შემოკლებულად, სვეტში ჩაიწერება ასე:

$$\begin{array}{r} +\ 17,27 \\ 5.40 \\ \hline 22,67 \end{array}$$

$$2)\ 0,68-0.3472=0,6800-0.3472=$$

$$=\frac{6800}{10000}-\frac{3472}{10000}=\frac{6800-3472}{10000}=\frac{3328}{10000}=0,3328.$$

მოკლედ:

$$\begin{array}{r} -\ 0,6800 \\ 0,3472 \\ \hline 0,3328 \end{array}$$

პრაქტიკაში სვეტში ჩაწერით ათწილადების შეკრებისა და გამოკლების დროს, ათწილადის ნიშნების რაოდენობის გათანაბრების მიზნით, ნულებს არ უწერენ, მაგრამ გულისხმობენ. ამ შემთხვევაში ათწილადები ერთმანეთს უნდა მივუწეროთ ისე, რომ ყველა მათგანში მძიმე მდებარეობდეს ერთ სვეტში, ერთნაირი თანრიგებიც მდებარეობდეს ერთ სვეტში და მოქმედება (შეკრება და გამოკლება) შესრულდეს ნატურალური რიცხვების მსგავსად. მიღებულ შედეგში მძიმე იწერება იმავე სვეტში.

მაგალითები:

$$1)\ \begin{array}{r} +\ 27,5 \\ 8,345 \\ \hline 35,845 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} -\ 7,4 \\ 4,5834 \\ \hline 2,8166 \end{array}$$

შესაკრებთა რიცხვი შეიძლება ორზე მეტიც იყოს

$$3)\ \begin{array}{r} 72,027 \\ +5,2 \\ 0,548 \\ \hline 77,775 \end{array}$$

რადგან ათწილადების შეკრება დაიყვანება ნატურალური რიცხვების შეკრებამდე, ამიტომ, ცხადია, ათწილადების შეკრებას ახასიათებს გადანაცვლებადობისა და ჯუფთებადობის თვისებები.

გამრავლება. ათწილადების გამრავლების წესის დასადგენად საკმარისია ის ნი ჩავწეროთ ჩვეულებრივი წილადების სახით, შეკვეცა არ მოვახდინოთ და მოქმედება ჩვეულებრივი წილადების გამრავლების წესის მიხედვით შევასრულოთ.

მაგალითი.

$$4,37\cdot3,2=\frac{437}{100}\cdot\frac{32}{10}=\frac{437\cdot32}{100\cdot10}=\frac{13984}{1000}=13,984\,.$$

ვთქვათ, ჩვეულებრივი წილადის სახით ჩაწერილ ორ ათწილადს აქვს $\frac{A}{10^{\alpha}}$ და $\frac{B}{10^{\beta}}$ სახე, რაც იმას ნიშნავს, რომ პირველ მათგანს აქვს α ათწილადის ნიშანი, ხოლო მეორეს -β ათწილადის ნიშანი (A,B,α,β ნატურალური რიცხვებია). მაშინ

$$\frac{A}{10^{\alpha}}\cdot\frac{B}{10^{\beta}}=\frac{A\cdot B}{10^{\alpha+\beta}}.$$

მიღებული წილადი რომ ჩაიწეროს უმნიშვნელოდ, საჭიროა A·B ნატურალურ რიცხვის მარჯვნიდან მძიმის საშუალებით გამოვყოთ $\alpha+\beta$ ათწილადის ნიშანი განხილული კერძო მაგალითი. აქ და ზოგადი მსჯელობის საფუძველზე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ათწილადების გამრავლების წესი: ორი ათწილადი რომ გავამრავლოთ, ყურადღება არ უნდა მივაქციოთ მძიმეებს, გავამრავლოთ ისინ ისე, როგორც ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვები და მიღებულ ნამრავლში მარჯვნიდან გამოვყოთ იმდენი ათწილადის ნიშანი, რომელიც უდრის თანამამრავლების ათწილადის ნიშნების ჯამს.

ამ წესის გამოყენებ ზემოთ განხილული მაგალითი მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\begin{array}{r} 4,37\\ \times\ 3,2\\ \hline 874\\ +\ 1311\ \\ \hline 13,984 \end{array}$$

როგორც ვნახეთ, ათწილადების გამრავლება ჩვეულებრივი წილადების გამრავლების კერძო შემთხვევაა. ამიტომ ჩვეულებრივი წილადების მსგავსად ათწილადების გამრავლებას ახასიათებს გადანაცვლებადობის, ჯუფთებადობისა და აგრეთვე ჯამისა და სხვაობის მიმართ გამრავლების განრიგებადობის კანონები.

გაყოფა. ჩვენთვის ცნობილია, რომ ნებისმიერი ჩვეულებრივი წილადის მეორე წილადზე გაყოფის შედეგ ისევ ჩვეულებრივი წილადით გამოისახება, ე.ი. შ ძლება ვთქვათ, რომ ჩვეულებრივი წილადები გაყოფის მიმართ ჩაკეტილი სიმრავლე როგორც აღვნიშნეთ, ყოველი ათწილადი წარმოიდგინება ჩვეულებრივი წილადის სახით, ამიტომ ათწილადების განაყოფიც, საზოგადოდ, ჩვეულებრივი წილადი იქნება, მაგრამ ყოველი ჩვეულებრივი წილადი არ წარმოიდგინება ათწილადის სახით, რაც იმას ნიშნავს, რომ ათწილადის ათწილადზე განაყოფი ყოველთვის არ გამოისახება სასრული ათწილადის სახით. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია ორი ათწილადი დავიყვანოთ საერთო მნიშვნელზე და ერთი მათგანი გავყოთ მეორეზე როგორც ჩვეულებრივი წილადები

$$\frac{A}{10^{\alpha}}:\frac{B}{10^{\alpha}}=\frac{A\cdot10^{\alpha}}{B\cdot10^{\alpha}}=\frac{A}{B}. \qquad (1)$$

თუ $\frac{A}{B}$ წილადის მნიშვნელს შეკვეცის შემდეგ ექნება 2-ისა და 5-ისაგან განსხვავებული ერთი მაინც მარტივი თანამამრავლი, მაშინ ეს წილადი არ წარმოიდგინება სასრული ათწილადის სახით.

რადგან 2-ისა და 5-ისაგან განსხვავებულ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულოდ დიდია, ამიტომ ნათელია, რომ ორი ათწილადის განაყოფი ძლიერ იშვიათად იქნება სასრული ათწილადი. ჯერჯერობით შევჩერდეთ ამ იშვიათ შემთხვევაზე, როცა ორი ათწილადის განაყოფი ისევ ათწილადი იქნება, ე.ი. (1) ფორმულის განაყოფი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\frac{A}{10^{\alpha}}:\frac{B}{10^{\alpha}}=\frac{A}{B}=\frac{C}{10^{\gamma}}. \qquad (2)$$

(2) ფორმულიდან გამომდინარეობს ნატურალური რიცხვების გაყოფასთან დაკავშირებული ტოლობა

$$A\cdot10^{\gamma}:B=C, \qquad (3)$$

რომელშიც როგორც გასაყოფი, აგრეთვე გამყოფი (B) და განაყოფი (C) ნატურალური რიცხვებია.

(3) ფორმულიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი დასკვნა: როცა ორი ათწილადის განაყოფი ისევ ათწილადია, მაშინ მოიძებნება 10-ის ისეთი მთელი ხარისხი, რომ გასაყოფისა და ამ ხარისხის ნამრავლი მთლიანად გაიყოფა გამყოფზე, ე.ი. განაყოფშიც მიიღება მთელი რიცხვ. ფაქტიურად ამ თვისებაზეა დამყარებული ათწილადი რიცხვების გაყოფის შემდეგი წესი:

ათწილადი რომ ათწილადზე გავყოთ, საჭიროა გამყოფ ა უკუვაგდოთ მძიმე და რათა განაყოფი არ შეიცვალოს, გასაყოფიც გავადიდოთ იმდენჯერ, რამდენჯერაც გადიდდა გამყოფი მძიმის უკუგდებით, ე.ი. გასაყოფიც გავამრავლოთ 10-ის იმ ხარისხზე, რაზედაც გამრავლდა გამყოფი. შემდეგ გაყოფა, ჩვეულებრივად, მთელ რიცხვზე გაყოფის წესის მიხედვით შევასრულოთ. ამასთან გასაყოფს ნულებს უწერენ მანამდე, ვიდრე გაყოფა არ დასრულდება. განაყოფში მძიმე უნდა დაისვას გასაყოფის მთელი ნაწილის ამოწურვის მომენტში.

ათწილადების გაყოფის დროს შეიძლება დავიდეთ:

ა) მთელი რიცხვების გაყოფამდე

1) $12,8:0,4=128:4=32$

$$\begin{array}{r} -\,12\ \\ \hline 8\\ -\,8\\ \hline 0 \end{array}$$

ბ) ათწილადის მთელ რიცხვზე გაყოფამდე

$1,25:1,6=12,5:16=0,78125.$

6. პერიოდული ათწილადები და მათი გარდაქმნა ჩვეულებრივ წილადად

ჩვეულებრივი უკვეცი $\frac{m}{n}$ წილადი მაშინ წარმოიდგინება სასრული ათწილადის სახით, როცა $n=2^{\alpha}\cdot5^{\beta}$. ამ შემთხვევაში, როგორც აღვნიშნეთ, მოიძებნება 10-ის ისეთი მაჩვენებელი γ, რომ $m\cdot10^{\gamma}$ უნაშთოდ გაიყოფა n-ზე და განაყოფშიც მიიღება მთელი რიცხვი.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა მოცემული უკვეცი $\frac{m}{n}$ წილადის მნიშვნელი (n) ან სრულებით არ შეიცავს 2-სა და 5-ს, ან, გარდა ამ თანამამრავლებისა, შეიცავს კიდევ სხვა მარტივ თანამამრავლსაც. თუ წინა შემთხვევის შესაბამისად მრიცხველს გავყოფთ მნიშვნელზე, მაშინ გაყოფის პროცესი უსასრულოდ გაგრძელდება და განაყოფში მიიღება უსასრულო ათწილადი. გაყოფის პროცესი რომ დასრულდეს, მაშინ განაყოფშიც მიიღება სასრული ათწილადი.

ამ შემთხვევაში m მრიცხველის n მნიშვნელზე გაყოფისას ყოველთვის მიიღება ესა თუ ის ნიშანი, რომელიც ნაკლები იქნება n გამყოფზე. ნაშთი შეიძლება იყოს მხოლოდ $1,2,3,\ldots n-1$ ნატურალური რიცხვებიდან რომელიმე. აქედან გამოდის, რომ, თუ ადრე არა, უკიდურეს შემთხვევაში მე-n ნაშთი მაინც უნდა იყოს გამეორებული ზემოთ დაწერილი ნატურალური რიცხვების მიმდევრობიდან. ნაშთის გამეორება გამოიწვევს შესაბამისი განაყოფის ციფრის გამეორებასაც. ამის შემდეგ ნაშთები და შესაბამისი განაყოფის ციფრებიც გამეორდება ადრინდელი რიგის მიხედვით. როგორც ჩანს, ნაშთები და შესაბამისი განაყოფის ციფრებიც გამეორდება უსასრულოდ და $\frac{m}{n}$ წილადი წარმოიდგინება უსასრულო ათწილადის სახით.

კონკრეტული მაგალითების განხილვით გავარკვიოთ, როგორი სახე ექნება ასეთი წილადებიდან მიღებულ უსასრულო ათწილადებს.

მაგალითი 1.

$$\frac{2}{3}=2:3=0,666\ldots$$

მაგალითი 2.

$$\frac{5}{11}=5:11=0,4545\ldots$$

მაგალითი 3.

$$\frac{41}{55}=41:55=0,74545\ldots$$

როგორც განხილული მაგალითებიდან ჩანს, გაყოფის დროს მიღებული ნაშთები და შესაბამისად განაყოფის ციფრებიც პერიოდულად უსასრულოდ მეორდება.

უსასრულო ათწილადს, რომელშიც ერთი ციფრი (მაგალითი 1) ან ციფრთა ჯგუფი (მაგალითი 2,3) უსასრულოდ მეორდება ერთი და იმავე თანამიმდევრობით **უსასრულო პერიოდული ათწილადი** ეწოდება. ერთი და იმავე თანამიმდევრობით გამეორებულ ციფრს ან ციფრთა ჯგუფს **პერიოდი** ეწოდება. პერიოდში მყოფ ციფრთა რიცხვს **პერიოდის სიგრძეს** უწოდებენ. არჩევენ ორი სახის უსასრულო პერიოდულ ათწილადებს - **წმინდას და შერეულს.**

წმინდა ეწოდება ისეთ უსასრულო პერიოდულ ათწილადს, რომელშიც პერიოდი უშუალოდ მძიმის შემდეგ პირველი ციფრით იწყება (მაგალითი 1,2); შერეული ეწოდება ისეთ უსასრულო პერიოდულ ათწილადს, რომელშიც მძიმესა და პერიოდს შორის ერთი ან რამდენიმე განუმეორებელი ციფრიც არის (მაგალითი 3).

ჩანაწერის შემოკლების მიზნით უსასრულო პერიოდული ათწილადების პერიოდს მხოლოდ ერთხელ წერენ, მრავალწერტილის გარეშე, და ათავსებენ მრგვალ ფრჩხილებში.

მაგალითად:

1) $\frac{2}{3}=0,666\ldots=0,(6)$; პერიოდის სიგრძე - 1;

2) $\frac{5}{11}=0,454545\ldots=0,(45)$; პერიოდის სიგრძე - 2;

3) $\frac{5}{11}=0,7454545\ldots=0,7(45)$; პერიოდის სიგრძე - 2.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი სასრული ათწილადი შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც უსასრულო პერიოდული ათწილადი ნული პერიოდით.

მაგალითად, $0,27=0,27(0)$;

$7,4=7,4(0)$ და ა.შ

ყოველივე ზემოთ თქმულისა და განხილული მაგალითების მიხედვით უნდა ვივარაუდოთ, რომ ნებისმიერი ჩვეულებრივი წილადისათვის (რაციონალური რიცხვებისათვის) არსებობს ასეთი კანონზომიერება: ყოველი ნებისმიერი ჩვეულებრივი უკვეცი წილადი წარმოიდგინება ან სასრული ათწილადის, ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით.

წმინდა პერიოდული ათწილადი უდრის ისეთ ჩვეულებრივ წილადს, რომლის მრიცხველია პერიოდით გამოსახული ნატურალური რიცხვი, ხოლო მნიშვნელი

დაწერილია მხოლოდ ცხრიანებით, რომელთა რიცხვი პერიოდის სიგრძეს უდრის.

მაგალითები:

1) $0,(15)=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}$;

2) $0,(522)=\frac{522}{999}=\frac{58}{111}$.

შერეული პერიოდული ათწილადი უდრის ისეთ ჩვეულებრივ წილადს, რომლის მრიცხველი არის მძიმიდან მეორე პერიოდამდე დაწერილი რიცხვისა და მძიმიდან პირველ პერიოდამდე დაწერილი რიცხვების სხვაობა, ხოლო მნიშვნელი არის რიცხვი, რომელიც დაწერილია იმდენი ცხრიანით, რამდენი ციფრიც არის პერიოდში და მარჯვნიდან მიწერილი აქვს იმდენი ნული, რამდენი ციფრიც არის მძიმიდან პირველ პერიოდამდე.

მაგალითები:

1) $0,5(23)=\frac{523-5}{990}=\frac{518}{990}=\frac{259}{495}$;

2) $0,24(7)=\frac{247-24}{900}=\frac{223}{900}$.

§6. სიდიდეთა გაზომვა. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე

1. ერთეულოვან მონაკვეთთან თანაზომადი მონაკვეთის სიგრძის გაზომვა

ჩვეულებრივი წილადების და ათწილადების შესწავლისას ვაჩვენეთ, რომ ადიციურ-სკალარული სიდიდეებისათვის დამახასიათებელია გაზომვის შესაძლებლობა და მონაკვეთების მაგალითზე გაზომვის შედეგი გამოისახება დადებითი რაციონალური რიცხვით, მთელით ან წილადით. როცა გასაზომი a მონაკვეთი e საზომი ერთეულის ჯერადია, მაშინ a მონაკვეთის ზომა გამოისახება დადებითი მთელი me რიცხვით

$$a=me. \quad (1)$$

როცა გასაზომი a მონაკვეთი e საზომი ერთეულის არაჯერადია, მაშინ პრაქტიკაში ხშირად შესაძლებელია e საზომი ერთეული გაიყოს ისეთ n ტოლ ნაწილად, რომ მისი ერთი $\frac{e}{n}$ ნაწილი m მთელ რიცხვჯერ მოთავსდეს a მონაკვეთში. ამ შემთხვევაში a მონაკვეთის ზომა გამოისახება დადებითი $\frac{m}{n}$ წილადით

$$a=\frac{m}{n}\cdot e. \quad (2)$$

ორივე შემთხვევაში ვიტყვით, რომ გასაზომი a მონაკვეთი და e საზომი ერთეული თანაზომადნი არიან, რადგან მათ აღმოაჩნდათ რაღაც „საერთო საზომი“,

(1) ფორმულაში ასეთი საერთო საზომი არის e საზომი ერთეული, რომელიც a მონაკვეთში თავსდება m-ჯერ, ხოლო თავის თავში - 1-ჯერ.

(2) ფორმულაში საერთო საზომი არის $\frac{e}{n}$ მონაკვეთი, რომელიც a მონაკვეთში თავსდება m-ჯერ, ხოლო e საზომ ერთეულში - n-ჯერ (საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსიდან ცნობილია, რომ ორი მონაკვეთის საერთო საზომი ეწოდება ისეთ მესამე მონაკვეთს, რომელიც ორივე მოცემულ მონაკვეთში მთელ რიცხვჯერ თავსდება. ორ მონაკვეთს თანაზომადი ეწოდება, თუ მათ გააჩნიათ საერთო საზომი, ხოლო უთანაზომო, თუ მათ არ გააჩნიათ საერთო საზომი. საზოგადოდ, თუ გვაქვს (2) ფორმულა, სადაც m და n ნატურალური რიცხვებია, მაშინ a და e თანაზომადნი არიან, წინააღმდეგ შემთხვევაში a და e მონაკვეთები უთანაზომონი იქნებიან).

ამრიგად, დადებითი რაციონალური რიცხვების გამოყენებით შეიძლება გამოვსახოთ ნებისმიერ საზომ ერთეულთან თანაზომადი მონაკვეთის ზომა (სიგრძე). თუ

გავითვალისწინებთ, რომ ყოველი რაციონალური რიცხვი წარმოიდგინება სასრული ათწილადის ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით, შეიძლება დავასკვნათ: **საზომ ერთეულთან თანაზომადი მონაკვეთის ზომა შეიძლება გამოისახოს დადებითი სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით.** ამის განხორციელება შეიძლება პირდაპირი გაზომვის პროცესის გამოყენებით, გასაზომ მონაკვეთში საზომი ერთეულისა და მისი ათწილადი ნაწილების თანდათანობითი მოზომვის საშუალებით.

ერთეულოვან მონაკვეთთან თანაზომადი მონაკვეთის ზომა შეიძლება გამოისახოს ნატურალური რიცხვით, სასრული ათწილადით ან უსასრულო პერიოდული ათწილადით. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველი ნატურალური რიცხვი და სასრული ათწილადი შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც უსასრულო პერიოდული ათწილადი 0 პერიოდით, მაშინ შეიძლება ვთქვათ, რომ ერთეულოვან მონაკვეთთან თანაზომადი მონაკვეთის ზომა, საზოგადოდ, დადებითი რაციონალური რიცხვია, რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით.

დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს Q_+-ით აღნიშნავენ. ამ რიცხვთა სიმრავლეს რიცხვ ნულსაც თუ დავუმატებთ, მიიღება არაუარყოფით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე Q_0

$$Q_0=Q_+\cup\{0\}.$$

2. ერთეულოვან მონაკვეთთან არათანაზომადი მონაკვეთის სიგრძის ათობითი გაზომვა

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსიდან ცნობილია, რომ თანაზომადი მონაკვეთების გარდა არსებობს არათანაზომადი მონაკვეთებიც. არათანაზომადი მონაკვეთების მაგალითია ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და კათეტი (კვადრატის დიაგონალი და გვერდი). თუ სიგრძის საზომ ერთეულად მივიღებთ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის კათეტს, ხოლო გასაზომ მონაკვეთად ჰიპოტენუზას, მაშინ საქმე გვექნება ერთეულოვან მონაკვეთთან არათანაზომადი მონაკვეთის გაზომვასთან. ამ შემთხვევაში ჩვენ მიერ აღწერილი ათობითი გაზომვის პროცესი არ შეიძლება დამთავრდეს. თუ დავუშვებთ, რომ გაზომვა დამთავრდება რომელიმე n_k საფეხურზე, მაშინ ჰიპოტენუზის ზომა გამოისახებოდა რომელიმე სასრული ათწილადით, ე.ი. რაციონალური რიცხვით და ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი და ჰიპოტენუზა თანაზომადნი აღმოჩნდებოდნენ, რაც შეუძლებელია.

ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის საშუალებით ჰიპოტენუზის ათობითი გაზომვის პროცესი უსასრულოდ გაგრძელდება, მაგრამ ჰიპოტენუზის ზომა არ გამოისახება უსასრულო პერიოდული ათწილადით, რადგან ამ შემთხვევაშიც ზომა რაციონალური რიცხვი იქნება და კათეტი და ჰიპოტენუზა ისევ თანაზომად მონაკვეთებად მოგვევლინებოდნენ, რაც შეუძლებელია.

განხილული მაგალითის მიხედვით ჩატარებული მსჯელობის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ ერთეულოვან მონაკვეთთან არათანაზომადი მონაკვეთის ზომა, მართალია, გამოისახება უსასრულო ათწილადის სახით, მაგრამ იგი არ არის პერიოდული ათწილადი, ე.ი. არ არის რაციონალური რიცხვი.

ამრიგად, ერთეულოვან მონაკვეთთან არათანაზომადი მონაკვეთის ზომის გამოსახვისათვის რაციონალური რიცხვები საკმარისი არ არის. იმისათვის, რომ ყოველი მონაკვეთის სიგრძე განისაზღვროს და გამოისახოს რაიმე რიცხვით, ზომებისათვის უკვე გამოყენებული დადებითი რაციონალური რიცხვები აუცილებლად უნდა გავამდიდროთ რაღაც ახალი სახის რიცხვებით.

როგორც აღვნიშნეთ, ერთეულოვან მონაკვეთთან არათანაზომადი მონაკვეთის სიგრძე გამოისახება დადებითი უსასრულო ათწილადის სახით, მაგრამ იგი პერიოდული არ არის, მაშასადამე, იგი უნდა იყოს არაპერიოდული. დადებითი უსასრულო არაპერიოდული ათწილადების შემოტანის შემდეგ ყოველი მონაკვეთის სიგრძე განისაზღვრება რომელიმე რიცხვით.

ამრიგად, თუ რომელიმე მონაკვეთი საზომი ერთეულის არათანაზომადია, მაშინ მისი ზომა (სიგრძე) ჩაიწერება დადებითი უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით.

3. დადებითი ირაციონალური რიცხვი, როგორც უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი

დავრწმუნდით, რომ ნებისმიერი მონაკვეთის ზომის გამოსახვისათვის დადებითი რაციონალური რიცხვები საკმარისი არ არის. ამრიგად, მონაკვეთების გაზომვის ამოცანას მივყევართ დადებითი რაციონალური რიცხვების სიმრავლის გაფართოების აუცილებლობამდე, ამ სიმრავლისათვის დადებითი უსასრულო არაპერიოდული ათწილადების მიმატებით.

განსაზღვრება: რიცხვებს, რომლებიც შეიძლება წარმოვადგინოთ დადებითი უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით, დადებითი ირაციონალური რიცხვები ეწოდება.

დადებითი ირაციონალური რიცხვების შემოტანის შემდეგ, შეიძლება ვთქვათ, რომ ნებისმიერ მონაკვეთს ნებისმიერი საზომი ერთეულით გაზომვის შემთხვევაში

აქვს ზომა. ეს ზომა, შეიძლება იყოს დადებითი რაციონალური (მთელი, სასრული ათწილადი, უსასრულო პერიოდული ათწილადი) რიცხვი ან დადებითი ირაციონალური (უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი) რიცხვი. ამასთან, დადებითი ირაციონალური რიცხვით გამოისახება საზომ ერთეულთან არათანაზომადი მონაკვეთის სიგრძე.

ხშირად ირაციონალური რიცხვების შემოტანის აუცილებლობას ვაწყდებით ალგებრაში $x^2=a$ სახის განტოლების ამოხსნის დროს, სადაც a რაციონალური რიცხვია. a რაციონალური რიცხვი შეიძლება ისე შეირჩეს, რომ $x^2=a$ განტოლებას არ ჰქონდეს რაციონალური ამონახსნები. მაგალითად, $x^2=2$ განტოლებას რაციონალური ამონახსნები არ გააჩნია. ამაში გვარწმუნებს საშუალო სკოლიდან ცნობილი შემდეგი თეორემა: **არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი უდრის 2-ს.**

თეორემა დამტკიცდება საწინააღმდეგოს დაშვებით. ვთქვათ, რომ არსებობს უკვეცი რაციონალური $\frac{m}{n}$ რიცხვი, რომლის კვადრატიც უდრის 2-ს.

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2.$$

ამ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{m^2}{n^2}=2$, $m^2=2n^2$. ვინაიდან $2n^2$ ლუწი რიცხვია, ამიტომ m^2-იც ლუწი უნდა იყოს, მაშინ m-იც ლუწი რიცხვი იქნება, რადგან ლუწი რიცხვის კვადრატი გვაძლევს ლუწ რიცხვს. ამრიგად, $m=2k$, სადაც k რაიმე მთელი რიცხვია. თუ m-ის ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ $m^2=2n^2$ ფორმულაში, მივიღებთ $4k^2=2n^2$, საიდანაც $n^2=2k^2$. ასეთ შემთხვევაში n^2 იქნება ლუწი რიცხვი და, მაშასადამე, n-იც უნდა იყოს ლუწი რიცხვი. გამოდის, რომ m და n ლუწი რიცხვებია, ეს კი ეწინააღმდეგება იმას, რომ $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადია. მაშასადამე, ჩვენი ვარაუდი ისეთი $\frac{m}{n}$ წილადის არსებობის შესახებ, რომელიც აკმაყოფილებს $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ ტოლობას, არასწორია. თეორემა დამტკიცებულია.

$x^2=2$ განტოლების დადებითი ამონახსნისათვის შემოღებულია სპეციალური აღნიშვნა $\sqrt{2}$ ($x=\sqrt{2}$). ამრიგად, დადებით რაციონალურ რიცხვებში არ არსებობს რიცხვი $\sqrt{2}$. თუ გავიხსენებს კვადრატული ფესვის ალგორითმს, დავრწმუნდებით, რომ $\sqrt{2}$ ჩაიწერება დადებითი უსასრულო არაპერიოდული ათწი-

ლადის სახით, ე.ი. $\sqrt{2}$ ირაციონალური რიცხვია.

მაშასადამე, დადებითი ირაციონალური რიცხვები მიიღება როგორც მონაკვეთების გაზომვისას, ასევე კვადრატული ფესვის ამოღების დროს. არსებობს ირაციონალური რიცხვების მიღების სხვა წყაროებიც. დადებითი ირაციონალური რიცხვის კლასიკური მაგალითია π რიცხვი, იგი წრეწირის სიგრძის მის დიამეტრთან შეფარდების შედეგს გვიჩვენებს ($\pi=3,14159265\ldots$).

4. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე

მონაკვეთის სიგრძის გაზომვის მაგალითზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ ადიციურ-სკალარული სიდიდის გაზომვის შედეგის გამოსახვა დადებითი ნამდვილი რიცხვების საშუალებით შეიძლება. მაგრამ პრაქტიკაში რიცხვებს იყენებენ არა მხოლოდ სიდიდეების გაზომვებში, არამედ სიდიდეების ცვლილებების დასადგენადაც. ხშირად რიცხვებით აჩვენებენ რამდენით შეიცვალა ესა თუ ის სიდიდე. სიდიდეების შეცვლის სამ შემთხვევას განასხვავებენ: სიდიდე შეიძლება გაიზარდოს, შეიძლება შემცირდეს და შეიძლება უცვლელი დარჩეს. შეთანხმების საფუძველზე, სიდიდის ზრდას დადებითი ნამდვილი R_+ რიცხვებით გამოსახავენ. სიდიდის კლებისა და უცვლელობის გამოსახვისათვის დადებითი ნამდვილი რიცხვები აღარ გამოდგება და საჭიროა R_+ სიმრავლის სხვა სახის რიცხვებით გაფართოება.

თვით შინაარსიდან აშკარად ჩანს, რომ სიდიდის კლება სიდიდის ზრდის საპირისპიროა, ამიტომ დადებით ნამდვილ რიცხვებთან ერთად მათ მოპირდაპირე უარყოფით ნამდვილ რიცხვებსაც განიხილავენ, რითაც ფართოვდება რიცხვის ცნება. სიდიდის უცვლელობას ნულით გამოსახავენ.

ამრიგად, რიცხვების ძირითად ბაზად მიღებულია დადებითი ნამდვილი რიცხვების R_+ სიმრავლე. R_+-დან აღებულ ყოველ x რიცხვს ($x\in R_+$) შეუსაბამებენ მის მოპირდაპირე ახალ რიცხვს, რომელსაც $-x$-ით აღნიშნავენ. გარდა ამ რიცხვებისა, შემოაქვთ რიცხვი 0, რომლითაც სიდიდის უცვლელობას აღნიშნავენ. ყველა უარყოფითი ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს R_--ით აღნიშნავენ. R_+, R_- და $\{0\}$ სიმრავლეთა გაერთიანებას ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს უწოდებენ და R-ით აღნიშნავენ.

ამრიგად, $R=R_+\cup R_-\cup\{0\}$.

R_+, R_- და $\{0\}$ არაგადამკვეთი სიმრავლეებია,

$R_+\cap R_-\cap\{0\}=\varnothing$,

ეს იმას ნიშნავს, რომ რომელიმე რიცხვი ერთდროულად არ შეიძლება იყოს დადებითიც და უარყოფითიც, უარყოფითი და ნული ან დადებითი და ნული.

განსაზღვრება: დადებით ნამდვილ რიცხვებს, მათ მოპირდაპირე უარყოფით ნამდვილ რიცხვებს და ნულს - ერთად ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება.

ვთქვათ, ს ‿იდის მნიშვნელობა იყო დადებითი ნამდვილი x რიცხვი და შეცვლის შემდეგ გახდა y; $x \in R_+$, $y \in R_+$.

ა) თუ $<y$, მაშინ საქმე გვაქვს სიდიდის ზრდასთან და სიდიდის ცვლილება გამოისახება დადებითი ნამდვილი $y-x$ რიცხვით, მაგალითად, თუ სიდიდის მნიშვნელობა იყო 3 და გახდა 8, მაშინ საქმე გვაქვს ზრდასთან და იგი გამოისახება $8-3=5$-ით, 5 არის დადებითი ნამდვილი რიცხვი.

ბ) თუ $x>y$, მაშინ საქმე გვაქვს სიდიდის კლებასთან და სიდიდის ცვლილება გამოისახება უარყოფითი ნამდვილი $-(x-y)$ რიცხვით. მაგალითად, თუ სიდიდის მნიშვნელობა იყო 8 და გახდა 3, მაშინ საქმე გვაქვს კლებასთან და იგი გამოისახება $-(8-3)=-5$-ით, -5 არის უარყოფითი ნამდვილი რიცხვი.

ორივე შემთხვევაში (3-დან 8-მდე და 8-დან 3-მდე) ცვლილებანი თანაბარია და ეს ცვლილებანი ხასიათდება 5 ერთეულით, მაგრამ ურთიერთსაპირისპირო ხასიათი აქვთ, ამიტომ 5 და -5 მოპირდაპირე რიცხვები ეწოდება.

გ) თუ $x=y$, მაშინ სიდიდის ცვლილება არ მომხდარა და მას გამოსახავენ ნულით (0), $x-y=0$. მაგალითად, თუ სიდიდის მნიშვნელობა იყო 3 და დარჩა ისევ 3, მაშინ სიდიდის ცვლილება არის $0, 3-3=0$.

ყოველი ნამდვილი რიცხვისათვის არსებობს მისი მოპირდაპირე ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი. a რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვს $-a$-თი აღნიშნავენ.

თუ $a=12$, მაშინ $-a=-12$.

თუ $a=2,3$, მაშინ $-a=(-2,3)=2,3$.

საზოგადოდ ჩანაწერი $-(-a)$ აღნიშნავს $-a$-ს მოპირდაპირე რიცხვს, ვინაიდან $-a$-ს მოპირდაპირე რიცხვი არის a, ამიტომ $-(-a)=a$. ნულის მოპირდაპირე რიცხვად თვლიან ისევ ნულს $-0=0$.

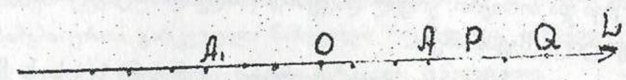
5. ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და რიცხვითი ღერძის წერტილებს შორის

ჩვენ მიერ ზემოთ აღწერილი მონაკვეთის გაზომვის ზოგადი პროცესი საშუალებას იძლევა სპეციალურად არჩეული წრფის ყოველ წერტილს შევუსაბამოთ

ერთი გარკვეული ნამდვილი რიცხვი და პირიქით, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეიძლება შევუსაბამოთ წრფის ერთი გარკვეული წერტილი.

ავიღოთ რაიმე L წრფე და მასზე ავირჩიოთ საწყისი O წერტილი. O წერტილს ვუწოდოთ სათავე. O სათავის მარჯვნივ მდებარე L წრფის ნაწილს მარჯვენა სხივი ვუწოდოთ, ხოლო O სათავის მარცხნივ მდებარეს - მარცხენა სხივი. რაიმე e მონაკვეთი მივიჩნიოთ სიგრძის საზომ ერთეულად და O სათავიდან მარჯვენა სხივზე ჯერ მოვნიშნოთ საზომი ერთეულის ტოლი მონაკვეთების ბოლოები, მერე ერთეულის მეათედი ნაწილის ბოლოები, მერე მეასედის ბოლოები და ა.შ. მარჯვენა სხივი დაიყოფა ნაწილებად (სკალად), რომლის თითოეული გაყოფის წერტილი შეესაბამება რომელიმე სასრულ ათწილადს. თუ ათვლას დავიწყებთ O სათავიდან, მაშინ მარჯვენა სხივის ყოველი A წერტილი განსაზღვრავს ერთადერთ OA მონაკვეთს, ხოლო OA მონაკვეთის სიგრძე გამოისახება რომელიმე დადებითი ნამდვილი რიცხვით. ეს რიცხვი მივიჩნიოთ A წერტილის შესაბამის რიცხვად.

ნათელი წარმოსადგენია, რომ მარჯვენა სხივის სხვადასხვა წერტილს სხვადასხვა დადებითი ნამდვილი რიცხვი შეესაბამება. წერტილი, რომელიც უფრო მარჯვნივ მდებარეობს, უფრო დიდ მონაკვეთს განსაზღვრავს და მისი ზომაც შედარებით დიდი რიცხვით გამოისახება, მაგალითად, P წერტილს შეესაბამება რიცხვი α_1, ხოლო Q წერტილს - რიცხვი α_2, რადგან $|OQ|>|OP|$; ამიტომ $\alpha_2>\alpha_1$ (ნახ.52).



ნახ. 52

ამრიგად, მარჯვენა სხივზე O წერტილიდან მარჯვნივ მოძრაობის დროს დადებითი ნამდვილი რიცხვები იზრდება, ხოლო მარჯვნიდან O წერტილისაკენ მარცხნივ მოძრაობის დროს ეს რიცხვები მცირდება და უახლოვდება ნულს.

წრფის მარჯვენა სხივს მარცხნიდან მარჯვნივ მიმართულად თვლიან. ამ მიმართულებით დადებითი ნამდვილი რიცხვები იზრდება და მის ყოველ წერტილს გარკვეული დადებითი ნამდვილი რიცხვი შეესაბამება. თვითონ O წერტილს რიცხვი „ნული" შეესაბამება.

მართებულია შებრუნებული დებულებაც: ყოველ დადებით ნამდვილ რიცხვს მარჯვენა სხივის ერთადერთი სრულიად გარკვეული წერტილი შეესაბამება.

ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი დადებითი ნამდვილი რიცხვი

წერტილიდან მის მარჯვნივ აღებული რომელიმე გარკვეული მონაკვეთის სიგრძეს წარმოადგენს. თუ α დადებითი მთელი ან სასრული ათწილადით გამოსახული ნამდვილი რიცხვია, მაშინ მარჯვენა სხივზე ამ რიცხვის შესაბამისი წერტილი L წრფეზე მონიშნული ათობითი სკალის რომელიმე დანაყოფი იქნება და ეს რიცხვი O სათავიდან ამ დანაყოფამდე მონაკვეთის ზომას წარმოადგენს, მაგრამ მხოლოდ ასეთი წერტილებით ვერ ამოიწურება მარჯვენა სხივის წერტილთა სიმრავლე. მართლაც, თუ α დადებითი უსასრულო პერიოდული ან არაპერიოდული ათწილადით გამოსახული ნამდვილი რიცხვია, მაშინ მისი შესაბამისი წერტილი სკალის რომელიმე დანაყოფი არ იქნება. ასეთი α რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ რაციონალურბოლოებიანი თავმოყრილ სეგმენტთა ისეთი მიმდევრობა, რომელთა შორისაც იქნება მოთავსებული ეს α რიცხვი. მოძებნილი თავმოყრილი სეგმენტებისათვის არსებობს შესაბამისი თავმოყრილი მონაკვეთების მიმდევრობა, რომელთა შორისაც იქნება მოთავსებული ერთადერთი გარკვეული წერტილი. კანტორის აქსიომის თანახმად, რაციონალურბოლოებთან თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობით განსაზღვრულ დადებით ნამდვილ α რიცხვს შესაბამისი თავმოყრილი მონაკვეთების მიმდევრობით განსაზღვრული, სრულიად გარკვეული ერთადერთი წერტილი შეესაბამება.

ამრიგად, მარჯვენა სხივის ყოველ წერტილს შეესაბამება გარკვეული დადებითი ნამდვილი რიცხვი და პირიქით, ყოველ დადებით ნამდვილ რიცხვს მარჯვენა სხივის გარკვეული წერტილი შეესაბამება.

ახლა განვიხილოთ მარცხენა სხივი, რომელიც მარჯვენა სხივს L წრფემდე ავსებს. ჩვენი მიზანია მარცხენა სხივის წერტილებსაც ნამდვილი რიცხვები შევუსაბამოთ. საზომი ერთეულისა და მისი ათწილადი ნაწილების საშუალებით მარცხენა სხივზეც O სათავიდან იგივე აგებანი შევასრულოთ. მარჯვენა სხივის ყოველი A წერტილისათვის შეიძლება მოიძებნოს მარცხენა სხივის ისეთი A_1 წერტილი, რომლებიც ტოლი მანძილებით იქნებიან დაშორებული O სათავიდან. ასეთ წერტილებს მოპირდაპირე, ანუ სიმეტრიული წერტილები ვუწოდოთ. OA და OA_1 მონაკვეთები ტოლია და მათი სიგრძეები გამოისახება ერთი და იმავე α რიცხვით ($|OA|=|OA_1|$), მაგრამ მათ O სათავიდან საპირისპირო მიმართულებები აქვთ. OA მიმართულია მარცხნიდან მარჯვნივ, ხოლო OA_1 — მარჯვნიდან მარცხნივ. იმისათვის, რომ შევინარჩუნოთ წრფის წერტილებსა და ნამდვილ რიცხვებს შორის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, მიზანშეწონილია A და A_1 წერტილებს შევუსაბამოთ მოპირდაპირე ნამდვილი რიცხვები. თუ A წერტილს შევუსაბამეთ დადე-

ბითი ნამდვილი α რიცხვი, მაშინ A_1 წერტილს უნდა შევუსაბამოთ მისი მოპირდაპირე უარყოფითი ნამდვილი $-\alpha$ რიცხვი.

გამოდის, რომ მარცხენა სხივის ყოველ წერტილს შეესაბამება გარკვეული უარყოფითი ნამდვილი რიცხვი და, პირიქით, ყოველ უარყოფით ნამდვილ რიცხვს მარცხენა სხივის ერთი გარკვეული წერტილი შეესაბამება.

რა თქმა უნდა, მარცხენა სხივის ორ სხვადასხვა წერტილს სხვადასხვა უარყოფითი ნამდვილი რიცხვი შეესაბამება. მარცხენა სხივზე აღებული ორი სხვადასხვა წერტილიდან ის, რომელიც უფრო მარცხნივ მდებარეობს, O სათავიდან ათვლით უფრო დიდ მონაკვეთს განსაზღვრავს და მეტი ზომაც შეესაბამება, მაგრამ, რომ შევინარჩუნოთ მარჯვენა სხივისათვის შერჩეული ნამდვილ რიცხვთა ზრდის მიმართულება (ორი დადებითი ნამდვილი რიცხვიდან ის არის მეტი, რომელიც სხივზე უფრო მარჯვნივ მდებარე წერტილს შეესაბამება), მიზანშეწონილია უფრო მარცხნივ მდებარე წერტილის შესაბამისი რიცხვი ჩავთვალოთ ნაკლებად. მაშასადამე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ორი უარყოფითი ნამდვილი რიცხვიდან ის არის მეტი, რომელიც მარცხენა სხივზე უფრო მარჯვნივ მდებარე წერტილს შეესაბამება.

ასეთი დაშვებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ლაგდება ზრდის მიხედვით, რომელიც L წრფის წერტილების მარცხნიდან მარჯვნივ განლაგებას ემთხვევა.

ამრიგად, L წრფის წერტილებსა და ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს შორის მყარდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. **L წრფის ყოველ წერტილს შეესაბამება ერთი გარკვეული ნამდვილი რიცხვი და, პირიქით ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება L წრფის ერთი გარკვეული წერტილი.**

ეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა სავსებით განსაზღვრული იქნება, თუ წრფეზე ნაჩვენები იქნება საწყისი O წერტილი, მიმართულება და საზომი ერთეული. ასეთნაირად შერჩეულ წრფეს **რიცხვითი წრფე, ანუ რიცხვითი ღერძი ეწოდება**.

როგორც აღვნიშნეთ, α და $-\alpha$ მოპირდაპირე რიცხვები, სადაც $\alpha \in R_+$, შეესაბამება რიცხვითი ღერძის O სათავიდან ტოლად დაშორებულ A და A_1 წერტილებს. O სათავიდან A და A_1 წერტილებამდე მანძილი ტოლია და ისინი ხასიათდებიან ერთი და იმავე α რიცხვით. ამასთან დაკავშირებით შემოაქვთ რიცხვის მოდულის (აბსოლუტური მნიშვნელობის) ცნება.

განსაზღვრება: 1. ნამდვილი რიცხვის მოდულს (აბსოლუტურ მნიშვნელობას) უწოდებენ მანძილს რიცხვით წრფეზე სათავიდან ამ რიცხვის შესაბამის წერტილამდე და აღნიშნავენ $|\alpha|$-ით.

განსაზღვრება: 2. დადებითი ნამდვილი რიცხვის მოდული თვით ამ რიცხვს

ეწოდება, უარყოფითი ნამდვილი რიცხვის მოდული - მის მოპირდაპირე დადებით ნამდვილ რიცხვს; ნულის მოდული ისევ ნულია.

ამრიგად,

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{თუ } a \text{ დადებითია,} \\ -a, & \text{თუ } a \text{ უარყოფითია;} \\ 0, & \text{თუ } a=0. \end{cases}$$

მაგალითად, $|13|=13$, $|-5|=5$, $|0|=0$.

ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულობის თვისება და მოდულის ცნება ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვების შედარებისა და მათზე მოქმედებათა განსაზღვრის საშუალებას იძლევა. ორი დადებითი ნამდვილი რიცხვიდან ის არის მეტი, რომლის მოდულიც მეტია.

ყოველი დადებითი ნამდვილი რიცხვი მეტია ნულზე, ე.ი. $a>0$ a-ს დადებითობას ნიშნავს.

ყოველი უარყოფითი ნამდვილი რიცხვი ნაკლებია ნულზე, ე.ი. $a<0$ a-ს უარყოფითობას ნიშნავს.

ყოველი დადებითი ნამდვილი რიცხვი მეტია ყოველ უარყოფით ნამდვილ რიცხვზე.

ორი უარყოფითი ნამდვილი რიცხვიდან ის არის მეტი, რომლის მოდულიც ნაკლებია და ნაკლებია ის, რომლის მოდულიც მეტია.

ჩვენ აღარ განვიხილავთ არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებანი. საქმის არსი არ შეიცვლება იმ შემთხვევაშიც, როცა ერთ-ერთი კომპონენტი ან შეიძლება ორივეც უარყოფითი ნამდვილი რიცხვია. ამ შემთხვევაში მთავარი არის მოქმედების შედეგის ნიშნის დადგენის წესების ცოდნა. ეს წესები საშუალო სკოლაში ნასწავლ დადებით და უარყოფით რაციონალურ რიცხვებზე მოქმედებათა წესებს ემთხვევა. ამიტომ ამ წესებს მხოლოდ აღვნიშნავთ და მათი სისწორის დასაბუთებაზე არ შევჩერდებით.

ორი ერთნაირნიშნიანი ნამდვილი რიცხვის ჯამი იმავე ნიშნის რიცხვია. ჯამის მოდული რომ ვიპოვოთ, შესაკრებების მოდულები უნდა შევკრიბოთ.

სხვადასხვანიშნიანი ორი ნამდვილი რიცხვის ჯამი არის რიცხვი, რომელსაც იგივე ნიშანი აქვს, რაც უდიდესი მოდულის მქონე შესაკრებს. ჯამის მოდული რომ ვიპოვოთ, უდიდეს მოდულს უმცირესი უნდა გამოვაკლოთ. მოპირდაპირე ნამდვილი რიცხვების ჯამი ნულის ტოლია.

რიცხვის ნულთან შეკრება ამ რიცხვს არ ცვლის.

ერთ ნამდვილ რიცხვს რომ მეორე ნამდვილი რიცხვი გამოვაკლოთ, ამისათვის საკლებს უნდა მივუმატოთ მაკლების მოპირდაპირე რიცხვი.

ორი ერთნაირნიშნიანი ნამდვილი რიცხვის ნამრავლი დადებითი ნამდვილი რიცხვია. ნამრავლის მოდული რომ ვიპოვოთ, ამ რიცხვების მოდულები უნდა გადავამრავლოთ.

სხვადასხვანიშნიანი ორი ნამდვილი რიცხვის ნამრავლი უარყოფითი ნამდვილი რიცხვია. ნამრავლის მოდული რომ ვიპოვოთ, ამ რიცხვების მოდულები უნდა გადავამრავლოთ.

თუ ერთ-ერთი თანამამრავლი ნულის ტოლია, მაშინ ნამრავლიც ნულის ტოლი იქნება.

ორი ერთნაირნიშნიანი ნამდვილი რიცხვის განაყოფი არის დადებითი ნამდვილი რიცხვი. განაყოფის მოდული რომ ვიპოვოთ, გასაყოფის მოდული გამყოფის მოდულზე უნდა გავყოთ.

სხვადასხვანიშნიანი ორი ნამდვილი რიცხვის განაყოფი არის უარყოფითი ნამდვილი რიცხვი. განაყოფის მოდული რომ ვიპოვოთ, გასაყოფის მოდული გამყოფის მოდულზე უნდა გავყოთ.

ნულის გაყოფა ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვზე გვაძლევს ნულს.

ნულზე გაყოფა არ შეიძლება.

ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებებს ახასიათებს ყველა ის კანონი, რაც რაციონალურ რიცხვებზე მოქმედებებს.

ნ. ᲤᲐᲠᲗᲝᲑᲘᲡ ᲒᲐᲖᲝᲛᲕᲐ. ᲛᲐᲠᲗᲙᲣᲗᲮᲔᲓᲘᲡ ᲤᲐᲠᲗᲝᲑᲘ

მონაკვეთის სიგრძე გამოისახება დადებითი ნამდვილი რიცხვებით; ამ რიცხვების გამოყენებით შესაძლებელია ფიგურის ფართობის გამოთვლა. ფიგურის ფართობი არის არაუარყოფითი სიდიდე, რომელიც ხასიათდება ორი თვისებით:

1. ტოლ ფიგურებს ტოლი ფართობები აქვს.

2. თუ წრფის საშუალებით ფიგურა გაჭრილია ორ ნაწილად, მაშინ ამ ფიგურის ფართობი მისი ნაწილების ფართობთა ჯამის ტოლია. საშუალო სკოლიდან ცნობილია ფართობის გაზომვის ორი ხერხი — ერთი პალეტის საშუალებით, ხოლო მეორე — ხაზოვანი ელემენტების გაზომვათა და ფორმულების გამოყენებით. პალეტი არის კვადრატების ბადე, რომელიც დახაზულია გამჭვირვალე ქაღალდზე. პალეტით ფართობის გამოთვლისას ასე იქცევიან. პალეტს ათავსებენ გასაზომ ფართობზე და შემდეგ ახდენენ კვადრატების დათვლას. კვადრატების ნაწილი მოექცევა ფიგურის შიგნით მთლიანად, ზოგიერთი კვადრატის ნაწილი — ფიგურის გარეთ. თუ შიგნით მოთავსებულ კვადრატების რიცხვს აღვნიშნავთ m-ით, ხოლო მეორეებს n-ით, F

ფიგურის ფართობი S(F)-ით და საზომ ერთეულს e-თი, მაშინ საძებნი ფიგურის ფართობი დააკმაყოფილებს პირობას

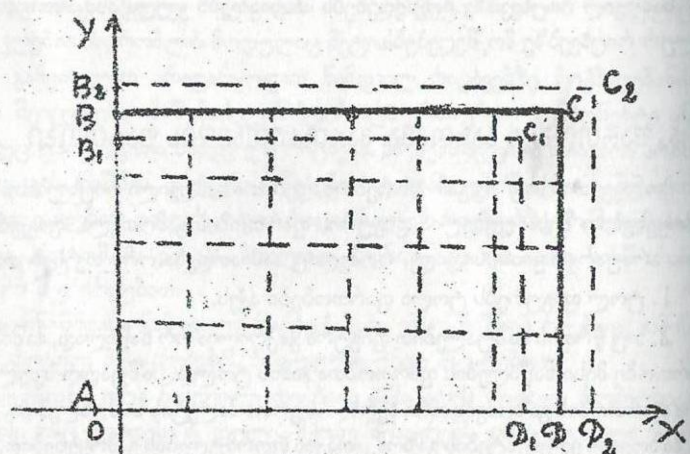
$$me^2 \leq S(F) < (m+n)e^2.$$

თუ ფიგურის საზღვრით გადაკვეთილი კვადრატების ფართობები იყოფა შუაზე, მაშინ ასეთი n რაოდენობის კვადრატებისაგან შედგება $\frac{n}{2}$ მთლიანი კვადრატი და ფიგურის ფართობი იქნება

$$S(F)=(m+\frac{n}{2})e^2.$$

პალეტის საშუალებით ფიგურების ფართობთა პირდაპირი გაზომვა არ ხასიათდება დიდი სიზუსტით. ამასთან დიდ შრომასაც მოითხოვს. გეომეტრიაში შემუშავებულია ფიგურების ფართობის გაზომვის შედარებით სრულყოფილი და უფრო ზუსტი, არაპირდაპირი ხერხი, რომელიც გარკვეული მონაკვეთების სიგრძეთა გაზომვასა და შესაფერისი ფორმულების გამოყენებაზე დაიყვანება. მაგალითის სახით განვიხილოთ მართკუთხედის ფართობის გაზომვის არაპირდაპირი ხერხი და დავადგინოთ მისი ფართობის გამოსაანგარიშებელი ფორმულა.

ვთქვათ, გვინდა გავზომოთ ABCD მართკუთხედის ფართობი. მართკუთხედის



ნახ. 53.

A წვერო შევუთავსოთ კვადრატული ბადის O სათავეს ისე, რომ მართკუთხედის AD და AB მოსაზღვრე გვერდები შესაბამისად გაჰყვეს OX და OY ღერძებს (ნახ 53).

მართკუთხედის AD და AB გვერდების სიგრძეები შესაბამისად აღვნიშნოთ a

და b-თი. $AD=a$, $AB=b$.

განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1) a და b დადებითი მთელი რიცხვებია. მაშინ AD და AB გვერდების D და B ბოლოები შეუთავსდებიან შესაბამისი ღერძის e სიგრძის ერთეულის დანაყოფს და მართკუთხედის კონტურით გადაკვეთილი კვადრატები არ იარსებებს. მართკუთხედი დაიფარება მხოლოდ შიგა e^2 ერთეული კვადრატების სისტემით, რომელთა რაოდენობა იქნება დადებითი n მთელი რიცხვი. გავიგოთ n.

AD გვერდის გასწვრივ ერთ ზოლში დაეტევა a ერთეული კვადრატი, ე.ი. იმდენი, რამდენ სიგრძის e ერთეულსაც უდრის მართკუთხედის AD გვერდის სიგრძე. მართკუთხედში გვექნება ასეთი b ზოლი, ე.ი. იმდენი, რამდენ სიგრძის e ერთეულსაც უდრის AB გვერდის სიგრძე. ამიტომ ABCD მართკუთხედი შეიცავს $a \cdot b$ კვადრატულ ერთეულს, $n=ab$. მართკუთხედის ფართობი $a \cdot b$ ერთეული კვადრატის ფართობის ტოლი იქნება

$$S=a \cdot b \cdot e^2.$$

ამრიგად, განხილულ შემთხვევაში მართკუთხედის ფართობი გამოისახება მოსაზღვრე გვერდების ზომების ნამრავლით.

დავამტკიცოთ, რომ დანარჩენ ორ შემთხვევაშიც მართკუთხედის ფართობი იმავე ფორმულით გამოითვლება.

2) a და b დადებითი სასრული ათწილადით გამოსახული რაციონალური რიცხვებია:

$$a=\frac{a_k}{10^k}, \qquad b=\frac{b_k}{10^k}.$$

მაშინ D და B წერტილები შეუთავსდება ღერძების k რიგის ათწილად დანაყოფს და მართკუთხედის კონტურით $\frac{e}{10^k}$ სიგრძის მქონე კვადრატები არ გადაიკვეთება. ABCD მართკუთხედი მთლიანად დაიფარება $\frac{e^2}{10^{2k}}$-ს ტოლი კვადრატებით, რომელთა რიცხვიც აღვნიშნოთ n_k-თი. გავიგოთ n_k.

სიგრძის e ერთეულის $\frac{1}{10^k}$ ნაწილი სიგრძის ახალ (დამხმარე) ერთეულად მივიჩნიოთ, $e_k=\frac{e}{10^k}$, მაშინ ფართობის საზომი ახალი (დამხმარე) ერთეული იქნება $\frac{e^2}{10^{2k}}$. მოცემული ABCD მართკუთხედის AD და AB გვერდების სიგრძეები $a_k=a \cdot 10^k$ და $b_k=b \cdot 10^k$ მთელი დადებითი რიცხვებით გამოისახება და პირველი შემთხვევის დამტკიცების საფუძველზე მართკუთხედის ფართობი შეადგენს

$$a_k \cdot b_k = a \cdot 10^k \cdot b \cdot 10^k = ab \cdot 10^{2k}$$

ახალ კვადრატულ ერთეულს, ე.ი. $S = a \cdot b \cdot 10^{2k} e_k^{\,2}$.

თუ ფართობის ძირითად საზომ ერთეულზე გადავალთ, მივიღებთ

$$S = a \cdot b \cdot 10^{2k} \cdot e_k^2 = a \cdot b \cdot 10^{2k} \cdot \frac{e^2}{10^{2k}} = a \cdot b \cdot e^2.$$

3) a და b დადებითი ირაციონალური რიცხვებია, მაშინ D და B წერტილები რიცხვით ღერძებზე აღებულ დანაყოფებს არ შეუთავსდება და იარსებებს $\frac{e}{10^k}$ გვერდის მქონე კვადრატები, რომლებსაც გადაკვეთს ABCD მართკუთხედის კონტური. ამ შემთხვევაში ავიღოთ a და b დადებითი ირაციონალური რიცხვების მიახლოებითი რაციონალური მნიშვნელობანი k ათწილადი ნიშნით ნაკლებობით და მეტობით. ნაკლებობით აღებული მნიშვნელობანი აღვნიშნოთ a_k და b_k-თი, ხოლო მეტობით აღებული a_k^1 და b_k^1-ით. (53-ე ნახაზზე $AD_1 = a_k$, $AD_2 = a_k^1$; $AB_1 = b_k$, $AB_2 = b_k^1$), მაშინ გვექნება შემდეგი ორმაგი უტოლობები:

$$a_k < a < a_k^1;$$
$$b_k < b < b_k^1.$$

ორი დადებითი ნამდვილი რიცხვის ნამრავლის განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ

$$a_k \cdot b_k < a \cdot b < a_k^1 \cdot b_k^1,$$

სადაც $a_k \cdot b_k$ ნამრავლი აღნიშნავს $e_k^{\,2}$ ზომის შიგა კვადრატების რიცხვს (ნახაზზე $AB_1C_1D_1$ მართკუთხედი), ხოლო $a_k^1 \cdot b_k^1$ ნამრავლი - იმავე ზომის გადამფარავი კვადრატების რიცხვს (ნახაზზე $AB_2C_2D_2$ მართკუთხედი). k-ს უსასრულო გადიდებით $a_k \cdot b_k$ ნამრავლი, ცხადია, გადიდდება, ხოლო $a_k^1 \cdot b_k^1$ ნამრავლი შემცირდება და ორივე მიმდევრობას ექნება ერთი და იგივე ზღვარი. კანტორის აქსიომის თანახმად, ეს ზღვარი a და b დადებითი ირაციონალური რიცხვების ab ნამრავლის ტოლია. სწორედ ეს ზღვარი არის მიჩნეული მართკუთხედის ფართობის ზომად.

$$S = a \cdot b \cdot e^2.$$

ამრიგად, სამივე შემთხვევაში გვერდების ერთი და იმავე საზომი ერთეულით გაზომვის დროს **მართკუთხედის ფართობი განისაზღვრება მოსაზღვრე გვერდების ზომების ნამრავლით.**

ასეთნაირად განსაზღვრული მართკუთხედის ფართობი ადიციურ-სკალარული სიდიდის ორივე მოთხოვნას აკმაყოფილებს.

სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, R არის ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე.

$A = \{x \mid -1 \le x \le 7,\ x \in R\}$. $B = \{x \mid |x| \le 5\}$. იპოვეთ სიმრავლეები: ა) $A \cap B$; ბ) $A \cup B$; გ) $A \setminus B$;

2. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს ისეთი რაციონალური r რიცხვი, რომლისთვისაც:

ა) $r^2 = 5$; ბ) $r^2 = 3$; გ) $r^2 = 7$.

3. შეადარეთ ერთმანეთს $\sqrt{15{,}7}$ და $\sqrt{15{,}(7)}$.

4. შეასრულეთ მოქმედებანი:

ა) $5\sqrt{8} - 2\sqrt{50}$; ბ) $8\sqrt{2\frac{3}{4}} - \sqrt{44} - 14\sqrt{\frac{11}{49}}$

5. როგორ შეიცვლება კვადრატის ფართობი, თუ მის გვერდს გავადიდებთ 2-ჯერ, შევამცირებთ 3-ჯერ?

ლიტერატურა

1. ა. ბენდუქიძე, სიმრავლეები და მათზე მოქმედებანი („ფიზიკა-მათემატიკა სკოლაში“, 1967, №4).

2. ა. დოგრაშვილი, კომბინატორიკისა და ალბათობის თეორიის ზოგიერთი საკითხი საშუალო სკოლაში. „განათლება“, 1984.

3. ა. დოგრაშვილი, კომბინატორული ამოცანები დაწყებით კლასებში („დაწყებითი სკოლა“, 1974. №3).

4. ალ. წერეთელი, ნ. თოფურიძე, გ. გორგოძე, გ. ჯაფარიძე, რ. თავართქილაძე, თეორიული და პრაქტიკული არითმეტიკის კურსი, „განათლება“, 1970.

5. ა. ფარჯანაძე, სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები და გეომეტრიული გარდაქმნები VIII–IX კლასებში, 1973.

6. ჯ. ჯინჯიხაძე მათემატიკა, „განათლება“, 1993.

7. Виленкин И.Я., Пышкало А.М., Рождественская Б.В., Стойлова А.П., Математика, М., „Просвещение“, 1972.

8. Виленкин И.Я., Лаврова Н.Н., Задачник-практикум по математике, М., „Просвещение“, 1977.

შინაარსი

III თავი

სიმრავლეთა თეორიისა და ლოგიკის გამოყენება მათემატიკის სასკოლო კურსის ცნებათა განსაზღვრისას

IV თავი

მიმართებანი

V თავი

მთელი არაუარყოფითი რიცხვები

VI თავი

რიცხვის ცნების გაფართოება სიდიდეები და მათი გაზომვა

გამომც. რედაქტორი ც. ანდღულაძე
ტექნიკური რედაქტორი ნ. ჯავახიშვილი
კორექტორი ნ. ბიბილური

ს.ბ. N 5275
გადაეცა ასაწყობად 10.10.94. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 19.02.96.
ქაღალდის ზომა 60X90 1/16. საბეჭდი ქაღალდი N2. ოფსეტური ბეჭდვა.
ნაბეჭდი თაბახი 14. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 13,85. ტირაჟი 1000 ც. შეკვ. № 4

ფასი შეთანხმებით

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, გ. ჭუბინაშვილის ქ. 50
Издательство „Ганатлеба", Тбилиси, ул. Г.Чубинашвили, 50
1996

თბილისი, სტამბა „ცის ნამი", დ. აღმაშენებლის 121
Тбилиси,типография „Цис нами", Д. Агмашенебели 121