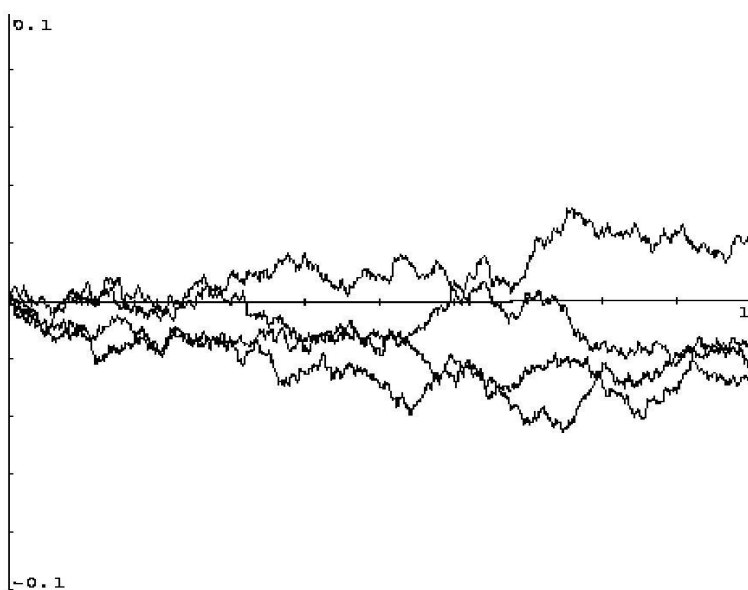


მადარ ფურთუნია

უმეტესობით პრეცედენტა თეორია



თსუ

წინამდებარე სახელმძღვანელო ავტორის მიერ წლების განმავლობაში ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში შემთხვევით პროცესთა თეორიასა და სხვა მომიჯნავე დისციპლინებში (ალბათობის თეორიის რჩეული თავები, სტოქასტური ანალიზი, მარტინგალების თეორია, სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების თეორია) წაკითხული ლექციათა კურსების გადამუშავებული ვარიანტია. მასში კომპაქტურადაა გადმოცემული თანამედროვე შემთხვევით პროცესთა თეორიის ძირითადი შედეგები და მეთოდები, აღწერილია შემთხვევით პროცესთა მნიშვნელოვანი კლასები, რომლებიც რეალური პროცესების დინამიკის ადეკვატური მათემატიკური აღწერის შესაძლებლობას იძლევიან. ნაშრომს ერთვის საილუსტრაციო მაგალითები და ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

წიგნი განკუთვნილია მათემატიკის მიმართულების სტუდენტებისა და მაგისტრანტებისათვის. იგი სასარგებლო იქნება შემთხვევით პროცესთა თეორიის გამოყენებებით დაინტერესებული სხვადასხვა პროფილის სპეციალისტთა ფართო წრისათვის.

შინაარსი

შესავალი	7
1. ზოგიერთი დამხმარე შედეგი და დებულება	11
2. შემთხვევითი პროცესი	18
3. ვინერის პროცესი	28
4. შემთხვევითი ორთოგონალური ზომით ინტეგრირება	42
5. პირობითი მათემატიკური ლოდინი	50
6. ნახევრად მარტინგალები დისკრეტული დროით	62
7. ნახევრად მარტინგალების კრებადობა	72
8. დამოუკიდებელნაზრდებიანი პროცესები	80
9. ლევი-ხინჩინის თეორემა	88
10. კავშირი ლევის ზომასა და ნახტომების ზომას შორის	98
11. სტაციონარული პროცესები (ფართო აზრით)	107
12. ტრაექტორიის სპექტრალური წარმოდგენა	116
13. ორნშტეინ-ულენბეკის პროცესი	121
14. პუასონის პროცესი	131
15. სტაციონარული პროცესები (ვინრო აზრით)	144
16. იტოს სტოქასტური ინტეგრალი	154
17. სტოქასტური ინტეგრალის თვისებები (H კლასისათვის)	165
18. სტოქასტური ინტეგრალის თვისებები (S კლასისათვის)	171
19. იტო-დიობლინის ფორმულა.....	186
20. იტო-დიობლინის ფორმულის ზოგიერთი გამოყენება	199

21. სტოქასტური დიფერენციალური განტოლება	220
22. ძლიერი ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა	235
დამატება I (მათემატიკური ლოდინი)	245
დამატება II (პირობითი ალბათობა და პირობითი მათემატიკური ლოდინი დაყოფის მიმართ)	258
დამატება III (ზღვარიანი თეორემები ბერნულის სქემისათვის)	268
აღნიშვნები	288
ლიტერატურა	290
საგნობრივი საძიებელი	293

შესავალი

ალბათობის თეორიის ნებისმიერი მიმართულების შესწავლა და განვითარება, როგორც წესი, დაკავშირებულია ადამიანის მოღვაწეობის ამა თუ იმ სფეროში წარმოშობილი შემთხვევითი მოვლენების ანალიზის დროს მისი გამოყენების შესაძლებლობასთან. მიუხედავად იმისა, რომ დღეს ალბათობის თეორიას იმდენივე საერთო აქვს აზარტულ თამაშებთან, რამდენიც გეომეტრიას ფართობების გაზომვასთან მიწის სამუშაოების დროს, ალბათობის თეორიის წარმოშობა სტიმულირებული იყო სწორედ პოპულარულ აზარტულ თამაშებთან დაკავშირებული „პარადოქსებით“. ალბათობის თეორია იძლევა ისეთი დაკვირვებადი ექსპერიმენტის მოდელს, მათემატიკურ აღწერას, რომლის მიმდინარეობაზე გავლენას ახდენს შემთხვევითი ფაქტორები.

ალბათობის თეორიის განსაკუთრებული მნიშვნელობა ისაა, რომ მის მეთოდებსა და შედეგებს არა მარტო დამოუკიდებელი მათემატიკური ინტერესი აქვს, არამედ ისინი მრავალფეროვან გამოყენებას პოულობენ სხვა სამეცნიერო დისციპლინებში, როგორიცაა ფიზიკა, ქიმია, ბიოლოგია, სოციალური მეცნიერებები, ეკონომიკა, ფინანსური და აქტუარული (სადაზღვევო) მათემატიკა და სხვა. პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით ნებისმიერი ცვალებადი სისტემა, რომელიც შემთხვევითი ფაქტორების ზემოქმედებას განიცდის, წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს. შემთხვევით პროცესთა თეორია თანამედროვე ალბათობის თეორიის უმნიშვნელოვანესი და განუყოფელი ნაწილია. ბუნებრივად იბადება კითხვა: როგორია მისი სპეციფიკა?

განვითარების საწყის ეტაპზე ალბათობის თეორიას საქმე ჰქონდა შემთხვევით ექსპერიმენტებთან (მონეტის აგდება, კამათლის გაგორება და სხვა), რომელთათვისაც ითვლიდნენ ამა თუ იმ ხდომილობის ალბათობებს. მოგვიანებით შემოღებულ იქნა შემთხვევითი სიდიდის ცნება, რომელიც საშუალებას იძლევა რაოდენობრივად აღწეროს დაკვირვებადი ექსპერიმენტის შედეგები, მაგალითად, მონეტის ხუთჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რაოდენობა.

ბოლოს, შემთხვევით ექსპერიმენტებში შემოტანილ იქნა დროის ფაქტორი და აგებულ იქნა სტოქასტური მოდელი, რომელიც აღწერს შესასწავლი შემთხვევითი მოვლენის დინამიკას. მას საფუძვლად უდევს შემთხვევითი პროცესის ცნება.

ცნობილია, რომ 1827 წელს ბრიტანელმა ბოტანიკოსმა რ. ბროუნმა აღმოაჩინა სითხეში ჩაძირული ყვავილის მტვრის ნაწილაკების ქაოსური მოძრაობა, რომელსაც მოგვიანებით ბროუნის მოძრაობა ეწოდა. მაგრამ, დიდი ხნის განმავლობაში აუხსნელი რჩებოდა ამ მოძრაობის ბუნება. მხოლოდ მე-19 საუკუნის მიწურულსა და მე-20 საუკუნის დასაწყისში იქნა გააზრებული, რომ აღნიშნული ქაოსური მოძრაობა ნივთიერების ატომებისა და მოლეკულების სითბური მოძრაობის ერთ-ერთი გამოვლინებაა. აღმოჩნდა, რომ ამ ტიპის პროცესების აღსაწერად საჭიროა ალბათურ-სტატისტიკური მიდგომა. ბროუნის მოძრაობისა და უფრო ზოგადი დიფუზიური პროცესების მათემატიკური და ფიზიკური მოდელები აგებული იყო ლ. ბაშელიეს, ა. ეინშტეინის, მ. პლანკის, ა. ფოკერის, ნ. ვინერის, პ. ლევის, ა. კოლმოგოროვის და სხვათა შრომებში. ბროუნის მოძრაობის გამოყენებით აგებულმა ფასიანი ქაღალდების ეკონომიკურმა მოდელებმა ამერიკელ მეცნიერებს ბლექს, შოულსს და მერტონს საშუალება მისცა, რევოლუციური ცვლილებები შეეტანათ ოფციონის ფასგათვლის პრობლემატიკაში, რისთვისაც მათ ნობელის პრემია მიენიჭათ. ქვემოთ ჩვენ შევხებით შემთხვევით პროცესებთან დაკავშირებულ ზოგიერთ ამოცანას.

აღსანიშნავია, რომ ბროუნის მოძრაობის ფუნქციონალების შესწავლა, თავის მხრივ, საშუალებას იძლევა დამტკიცდეს კოლმოგოროვის ცნობილი თანხმობის კრიტერიუმი, რომელიც წარმოადგენს მათემატიკური სტატისტიკის ერთ-ერთ ფუნდამენტურ შედეგს. გარდა ამისა, ბროუნის მოძრაობის საშუალებით შესაძლებელია ამოიხსნას ძალიან მნიშვნელოვანი „არაშემთხვევითი“ ამოცანები, მაგალითად, დირიხლეს ამოცანა: ვიპოვოთ არეში ჰარმონიული ფუნქცია, რომელიც ამ არის საზღვარზე ლებულობს მოცემულ მნიშვნელობას.

დიფუზიური პროცესების მოდელებმა სტიმული მისცა სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების თეორიის განვითარებას, რომელიც მოითხოვს სტოქასტური აღრიცხვის სპეციფიკურ აპარატს. სტოქასტური აღრიცხვის სპეციფიკა ისაა, რომ ბროუნის მოძრაობის (ანუ ვინერის პროცესის) ტრაექტორიები წარმოადგენენ უწყვეტ ფუნქციებს, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, მათ არც ერთ წერტილში არ გააჩნიათ წარმოებული. ამ ტიპის განტოლებებით შე-

იძლება მოცემულ იქნეს, მაგალითად, გამოსახულების აღდგენის, სახეების გამოცნობის, ხმაურში გაბნეული სასარგებლო სიგნალის გამოყოფის და სხვა ეფექტური მეთოდები.

ვინერის პროცესი ერთ-ერთი საკმაოდ კარგად შესწავლილი ლევის პროცესია (მარჯვნიდან უწყვეტი და მარცხნიდან ზღვრების მქონე პროცესი სტაციონარული დამოუკიდებელი ნაზრდებით), რომელიც მნიშვნელოვან როლს ასრულებს როგორც წმინდა (pure), ისე გამოყენებით მათემატიკაში, აგრეთვე ეკონომიკასა და ფიზიკაში. მათემატიკაში ვინერის პროცესმა დასაბამი მისცა ზოგადად უწყვეტი მარტინგალების შესწავლას. ის წარმოადგენს გასაღებს უფრო რთული სტოქასტური (შემთხვევითი) პროცესების დასახასიათებლად (აღსაწერად). იგი არსებითად მნიშვნელოვან როლს ასრულებს სტოქასტურ აღრიცხვაში, დიფუზიურ პროცესებში და პოტენციალთა თეორიაშიც კი. გამოყენებით მათემატიკაში ვინერის პროცესი გამოიყენება თეთრი ხმაურის პროცესის ინტეგრალის წარმოსადგენად და ამიტომ სასარგებლოა როგორც ხმაურის მოდელი ელექტრონულ ინჟინერიაში, როგორც მოწყობილობის ცდომილება – ფილტრაციის თეორიაში და როგორც უცნობი ძალები – მართვის თეორიაში.

ვინერის პროცესი გამოიყენება სხვა მეცნიერებებში, მაგალითად, ფიზიკაში ბროუნის მოძრაობის, სითხეში მცირე ნაწილაკების დიფუზიისა და დიფუზიის სხვა ტიპების შესასწავლად ფოკერ-პლანკისა და ლანჟევანის განტოლებების საშუალებით. ვინერის პროცესი არსებით როლს ასრულებს კვანტურ მექანიკაში ფეინმან-კაცის ფორმულის საშუალებით, რომელიც შროდინგერის განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს როგორც ვინერის ინტეგრალს.

პრაქტიკული პრობლემების გადაწყვეტისას დიდი მნიშვნელობა აქვს პროგნოზის ამოცანას: შემთხვევით პროცესზე დროის t მომენტამდე დაკვირვებების საფუძველზე საჭიროა გაკეთდეს დასკვნა მისი ყოფაცქევის შესახებ დროის $t + s$ ($s > 0$) მომენტებში. ასეთი ამოცანები წარმოიშობა, მაგალითად, ფინანსურ ბაზარზე ფასიანი ქაღალდების კურსის ევოლუციის ანალიზის დროს, რომელთან დაკავშირებითაც ძალიან მნიშვნელოვანია ოფციონის ჰეჯირების ამოცანა (დროის რომელიღაც მომენტში მომავალში აქციის ყიდვა-გაყიდვა წინასწარ დადგენილ ფასად, როდესაც აქციის რეალური ფასი განიცდის შემთხვევითი ფაქტორების ზემოქმედ-

ბას). ვინერის პროცესს აქაც თვალსაჩინო ადგილი უკავია, კერძოდ, ოფციონის გათვლის ბლექ-შოულსის მოდელში.

წარმოვიდგინოთ სადაზღვევო კომპანიის მუშაობა, რომელსაც გააჩნია რა გარკვეული კაპიტალი (რომელიც დროდადრო ივსება შემონატანებით), დროის შემთხვევით მომენტებში ახორციელებს თანხების გაცემას, რომელთა მოცულობა აგრეთვე შემთხვევითია. აღმოჩნდა, რომ ასეთი სიტუაციები კარგად აღინერება პუასონის პროცესით.

ამ ტიპის ამოცანებში, ერთი მხრივ, საჭიროა აიგოს შესასწავლი მოვლენის ადეკვატური მათემატიკური მოდელი, ხოლო მეორე მხრივ, ზუსტად დაისვას ამოცანა და შემდეგ გადაიჭრას იგი. ჩვენ ქვემოთ გავცნობით შემთხვევით პროცესთა მნიშვნელოვან კლასებს და დავინახავთ, რამდენად მრავალფეროვანია როგორც მათი აღწერისა და შესწავლის მეთოდები, ისე გამოყენების სფეროები.

დასასრულ, განსაკუთრებული მადლიერების გრძნობით მსურს აღვნიშნო, რომ მასალის დალაგებისა და გადმოცემის სტილზე დიდი გავლენა იქონია ჩემს მიერ თავის დროზე მოსმენილმა კურსმა შემთხვევით პროცესთა თეორიაში, რომელსაც კითხულობდა ჩემი სამეცნიერო ხელმძღვანელი, იმჟამად ლომონოსოვის სახელობის უნივერსიტეტის ცნობილი პროფესორი (დღეს იგი მინესოტას უნივერსიტეტის პროფესორია) ნ. კრილოვი.

აქვე მინდა დიდი მადლობა გადავუხადო პროფესორ თ. შერვაშიძეს მრავალი სასარგებლო რჩევისა და მითითებისათვის.

1. ზოგიერთი დამხმარე შედეგი და დეკლარაცია

ვიგულისხმობთ, რომ მოცემულია ალბათური სივრცე (Ω, F, P) .

ლემა 1.1. თუ $\xi: \Omega \longrightarrow X$, მაშინ: ა) წინარე სახის ალგებრის ოპერაცია ξ^{-1} ინარჩუნებს ყველა სიმრავლურ ოპერაციას; ბ) σ -ალგებრის წინარე სახე წარმოადგენს ისევ σ -ალგებრას.

დავუშვათ, რომ მოცემულია ზომადი სივრცეები (Ω, F) და (X, D) . ასახვას $\xi: \Omega \longrightarrow X$ ეწოდება *შემთხვევითი ელემენტი*, თუ $\xi^{-1}(D) \subset F$ (თუ $(X, D) \equiv (R^1, B(R^1))$), მაშინ იხმარება ტერმინი *შემთხვევითი სიდიდე*.

ξ შემთხვევითი ელემენტის განაწილება ეწოდება $P\xi^{-1}(B) \equiv P(\xi^{-1}(B))$ ალბათურ ზომას (X, D) ზომად სივრცეზე; იგი აღინიშნება F_ξ სიმბოლოთი.

იბადება კითხვა: ნებისმიერი ალბათური ზომა წარმოადგენს თუ არა რომელიმე შემთხვევითი ელემენტის განაწილებას?

თეორემა 1.1. თუ μ რაიმე ალბათური ზომაა (X, D) ზომად სივრცეზე, მაშინ არსებობს ალბათური სივრცე (Ω, F, P) და მასზე ისეთი შემთხვევითი სიდიდე $\xi: \Omega \longrightarrow X$, რომ $\mu = F_\xi$.

დამტკიცება. ავიღოთ (Ω, F, P) ალბათური სივრცის როლში (X, D, μ) , ხოლო $\xi(x) \equiv x$. მაშინ ნათელია, რომ $F_\xi(B) = P\{x: \xi(x) \in B\} = P(B) = \mu(B)$. თუ ξ შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია (Ω, F, P) ალბათურ სივრცეზე და

$$\int_{\Omega} |\xi(\omega)| P(d\omega) < \infty,$$

მაშინ ξ შემთხვევითი სიდიდეს გააჩნია *მათემატიკური ლოდინი* $E\xi$ (იხ. დამატება I), რომელიც შემდეგნაირად განიმარტება:

$$E\xi := \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega).$$

თეორემა 1.2. თუ $\xi: \Omega \longrightarrow X$ შემთხვევითი ელემენტი, ხოლო $f: X \longrightarrow R^1$ ზომადი და შემოსაზღვრული ფუნქციაა, მაშინ $f(\xi)$ შემოსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდეა და

$$Ef(\xi) = \int_X f(x) F_{\xi}(dx).$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ t -ს მთელი ნაწილი $\kappa(t)$ -თი და $\kappa_r(t) \equiv r^{-1}\kappa(rt)$. ცხადია, რომ $0 \leq t - \kappa(t) < 1$; $0 \leq t - \kappa_r(t) < 1/r$. $\kappa(t)$ -წარმოადგენს ბორელის ფუნქციას; ხოლო $\kappa_r(f(x))$ და $\kappa_r(f(\xi(\omega)))$ – ზომადი ფუნქციებია და ადგილი აქვს შეფასებებს:

$$|\kappa_r(f(x)) - f(x)| < \frac{1}{r}; \quad |\kappa_r(f(\xi(\omega))) - f(\xi(\omega))| < \frac{1}{r}.$$

მაჟორირებადი კრებადობის შესახებ ლებეგის თეორემის თანახმად (დამატება I, იხ. თეორემა 2)

$$Ef(\xi(\omega)) = \lim_{r \rightarrow \infty} E\kappa_r(f(\xi(\omega))).$$

ამიტომ საკმარისია თეორემის დამტკიცება $\kappa_r(f)$ ფუნქციების შემთხვევაში. მაგრამ, ვინაიდან $\kappa_r(f)$ ლებულობს მნიშვნელობათა სასრულ რაოდენობას, ამიტომ საკმარისია განვიხილოთ

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i I_{B_i}(x) \quad \text{ტიპის ფუნქციები. ხოლო, თუ გავითვალისწინებთ ინტეგრალის ადიცურობის თვისებას, დავრწმუნდებით,}$$

რომ თეორემის დებულება საკმარისია შემონმდეს მხოლოდ $f(x) = I_B(x)$ ფუნქციისათვის. ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\begin{aligned} Ef(\xi) &= \int_{\Omega} I_B(\xi(\omega))P(d\omega) = \int_{\Omega} I_{\xi^{-1}(B)}(\omega)P(d\omega) = \\ &= P(\xi^{-1}(B)) = F_{\xi}(B) = \int_X I_B(x)F_{\xi}(dx). \quad \square \end{aligned}$$

სრულ, სეპარაბელურ, მეტრულ სივრცეს *პოლონური სივრცე* ეწოდება.

თუ X პოლონური სივრცეა, მაშინ *ბორელის σ -ალგებრა* $B(X)$ ეწოდება უმცირეს σ -ალგებრას, რომელიც მოიცავს ყველა ჩაკეტილ ბირთვს.

თუ X და Y პოლონური სივრცეებია, მაშინ ასახვას $f: X \longrightarrow Y$ ეწოდება *ბორელის აზრით ზომადი* (ან უბრალოდ ბორელის ფუნქცია), თუ ნებისმიერი ბორელის სიმრავლისათვის $B \in B(Y): f^{-1}(B) \in B(X)$.

თეორემა 1.3. თუ X და Y პოლონური სივრცეებია, ხოლო $f: X \longrightarrow Y$ უწყვეტია, მაშინ f ბორელის ფუნქციაა.

μ ზომას $(X, B(X))$ ზომად სივრცეზე (სადაც X პოლონური სივრცეა) ეწოდება *რეგულარული ზომა*, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის და $\forall B \in B(X)$, მოიძებნება ისეთი ღია $G \in B(X)$ და ჩაკეტილი $K \in B(X)$ სიმრავლეები, რომ $K \subset B \subset G$ და $\mu(G \setminus K) \leq \varepsilon$.

თეორემა 1.4. თუ μ სასრული ზომაა $(X, B(X))$ ზომად სივრცეზე (სადაც X პოლონური სივრცეა), მაშინ ის რეგულარულია.

დამტკიცება. სიმრავლეს $B \subset X$ ვუწოდოთ „კარგი“, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, მოიძებნება ისეთი ღია $G \in B(X)$ და ჩაკეტილი $K \in B(X)$ სიმრავლეები, რომ $K \subset B \subset G$ და

$\mu(G, K) \leq \varepsilon$. „კარგი“ სიმრავლეების ერთობლიობა აღვნიშნოთ Σ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ Σ იქნება σ -ალგებრა. ამიტომ თეორემის სამართლიანობისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ Σ მოიცავს ყველა ჩაკეტილ ბირთვს $S_r(x_0) = \{x : \rho(x, x_0) \leq r\}$. განვიხილოთ r ცვლადის ფუნქცია $\mu(S_r(x_0))$. იგი სასრულია და უწყვეტია მარჯვნიდან. მართლაც, ვინაიდან

$$\lim_{t \downarrow r} I_{S_t(x_0)}(x) = I_{S_r(x_0)}(x),$$

ამიტომ ლებეგის თეორემის თანახმად მაჟორირებადი კრებადობის შესახებ, გვაქვს:

$$\begin{aligned} \mu(S_r(x_0)) &= \int_X I_{S_r(x_0)}(x) \mu(dx) = \\ &= \lim_{t \downarrow r} \int_X I_{S_t(x_0)}(x) \mu(dx) = \lim_{t \downarrow r} \mu(S_t(x_0)). \end{aligned}$$

ავიღოთ $\varepsilon > 0$, $K \equiv S_r(x_0)$, $G \equiv \{x : \rho(x, x_0) < t\}, t > r$ და $\mu(S_t(x_0)) - \mu(S_r(x_0)) < \varepsilon$, მაშინ ნათელია, რომ $K \subset S_r(x_0) \subset G$ და $\mu(G, K) \leq \mu(S_t(x_0), S_r(x_0)) < \varepsilon$. $\square$

პედიკი 1.1. თუ μ_1 და μ_2 სასრული ზომებია პოლონურ X სივრცეზე და ყოველი ჩაკეტილი K სიმრავლისათვის $\mu_1(K) = \mu_2(K)$, მაშინ $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ ნებისმიერი ბორელის B სიმრავლისათვის ($B \in B(X)$).

დამტკიცება. $\mu_1(X) = \mu_2(X)$, რადგანაც X ჩაკეტილია. ამიტომ ნებისმიერი ღია $G \in B(X)$ სიმრავლისათვის $\mu_1(G) = \mu_2(G)$. ავიღოთ $\varepsilon > 0$, მაშინ თეორემის ძალით მოიძებნება ისეთი ღია $G_i \in B(X)$ და ჩაკეტილი $K_i \in B(X)$ სიმრავლები, რომ $K_i \subset G_i \subset G$ და $\mu(G_i, K_i) \leq \varepsilon, i = 1, 2$. აღვნიშნოთ $G \equiv G_1 \cap G_2, K \equiv K_1 \cup K_2$,

მაშინ ცხადია, რომ: $K \subset B \subset G$, $\mu_1(G, K) \leq \varepsilon$, $\mu_1(G) \geq \mu_1(B) \geq \mu_1(K) = \mu_2(K) \leq \mu_2(B) \leq \mu_2(G) = \mu_1(G)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mu_1(B) - \mu_2(B) \leq \varepsilon$, რაც ε რიცხვის ნებისმიერობის გამო იმას ნიშნავს, რომ $\mu_1(B) = \mu_2(B)$. $\square$

პიქეტი 1.2. თუ μ_1 და μ_2 სასრული ზომებია პოლონურ X სივრცეზე და ყოველი შემოსაზღვრული უწყვეტი f ფუნქციისათვის

$$\int_X f(x) \mu_1(dx) = \int_X f(x) \mu_2(dx),$$

მაშინ $\mu_1 = \mu_2$.

დამტკიცება. ავიღოთ ჩაკეტილი სიმრავლე K და შემოვიღოთ ფუნქცია $\rho(x, K) = \inf\{\rho(x, y) : y \in K\}$. ნათელია, რომ ρ იქნება X -ის უწყვეტი ფუნქცია, $\rho(x, K) > 0, \forall x \notin K$. შესაბამისად, ფუნქცია $f_n(x) := \frac{1}{1+n\rho(x, K)}$ იქნება შემოსაზღვრული და უწყვეტი, $f_n(x) \downarrow I_K$, როცა $n \rightarrow \infty$ და, გარდა ამისა, შედეგის პირობიდან გამომდინარე

$$\int_X f_n(x) \mu_1(dx) = \int_X f_n(x) \mu_2(dx).$$

ამიტომ, ლებეგის თეორემის თანახმად მაჟორირებადი კრებადობის შესახებ, მივიღებთ, რომ

$$\mu_1(K) = \int_X I_K(x) \mu_1(dx) = \int_X I_K(x) \mu_2(dx) = \mu_2(K).$$

ამდენად, შედეგი 1.1-ის ძალით, დამტკიცება დასრულებულია. $\square$

თეორემა 1.5 (უღაში). თუ μ სასრული ზომაა $(X, B(X))$ პოლონურ სივრცეზე, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი კომპაქტი K_ε , რომ $\mu(X \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\{x_i, i=1, 2, \dots\}$ თვლადი ყველგან მკვერივი სიმრავლეა X სივრცეში. მაშინ ცხადია, რომ ნებისმიერი n რიცხვისათვის, $n \geq 1$, გვაქვს

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_{1/n}(x_i) = X$$

და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნომერი i_n , რომ

$$\mu(X \setminus \bigcup_{i=1}^{i_n} S_{1/n}(x_i)) \leq \varepsilon/2^n.$$

აღვნიშნოთ

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} S_{1/n}(x_i),$$

მაშინ ცხადია, რომ K ჩაკეტილია და ნებისმიერი n რიცხვისათვის მასში არსებობს სასრული $1/n$ ბადე. მაშასადამე, K წარმოადგენს კომპაქტს და ამასთანავე

$$\mu(X \setminus K) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X \setminus \bigcup_{i=1}^{i_n} S_{1/n}(x_i)) < \varepsilon. \quad \square$$

პედიკი 1.3. ნებისმიერი $B \in \mathcal{B}(X)$ ბორელის სიმრავლისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი კომპაქტი $K \subset B$, რომ $\mu(B \setminus K) \leq \varepsilon$.

დამტკიცება. როგორც ცნობილია, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე $C \subset B$, რომ $\mu(B \setminus C) \leq \varepsilon/2$, ხოლო ულამის თეორემიდან გამომდინარე, არსებობს ისეთი კომპაქტი $K_{\varepsilon/2}$, რომ $\mu(X \setminus K_{\varepsilon/2}) \leq \varepsilon/2$. ამიტომ, თუ ავიღებთ $K := C \cap K_{\varepsilon/2}$, მივიღებთ $\mu(B \setminus K) \leq \varepsilon$. $\square$

დავუშვათ, რომ $\mu, \mu_n, n=1, 2, \dots$ სასრული ზომებია $(X, \mathcal{B}(X))$ პოლონურ სივრცეზე. ამბობენ, რომ μ_n ზომათა მიმდევრობა **სუს-**

ტად კრებადია μ ზომისაკენ (და იყენებენ აღნიშვნას $\mu_n \Rightarrow \mu$), თუ ნებისმიერი შემოსაზღვრული უწყვეტი f ფუნქციისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x) \mu_n(dx) = \int_X f(x) \mu(dx).$$

M ზომათა ოჯახს ეწოდება **სუსტად კომპაქტური**, თუ ზომათა ნებისმიერი $\mu_n \in M$ მიმდევრობისათვის მოიძებნება ისეთი ქვემიმდევრობა μ_{n_i} , რომელიც სუსტად კრებადია რაიმე μ ზომისაკენ.

როგორც ცნობილია, თუ $x_n \in X$ მიმდევრობა ისეთია, რომ მისი ნებისმიერი ქვემიმდევრობიდან x_{n_i} ყოველთვის გამოიყოფა ქვემიმდევრობა $x_{n_{i_k}}$, რომელიც კრებადია ერთი და იგივე x_0 ელემენტისაკენ, მაშინ თვითონ x_n მიმდევრობაც კრებადია იგივე x_0 ელემენტისაკენ. ანალოგიურ ფაქტს ადგილი აქვს ზომების შემთხვევაშიც (იხ. § III. 2 [39]):

თეორემა 1.6. თუ $\mu, \mu_n, n=1, 2, \dots$, სასრული ზომები ისეთია, რომ ნებისმიერი μ_{n_i} ქვემიმდევრობიდან ყოველთვის გამოიყოფა ქვემიმდევრობა $\mu_{n_{i_k}}$, რომელიც სუსტად კრებადია ერთი და იმავე μ ზომისაკენ, მაშინ თვითონ μ_n მიმდევრობაც სუსტად კრებადია μ ზომისაკენ.

თეორემა 1.7 (პროხოროვი). იმისათვის, რომ $(X, B(X))$ პოლონურ სივრცეზე მოცემული ალბათურ ზომათა ოჯახი M იყოს სუსტად კომპაქტური, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი კომპაქტი K_ε , რომ ნებისმიერი $\mu \in M$ ზომისათვის ადგილი ჰქონდეს თანაფარდობას: $\mu(X \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$. ამასთანავე, ზომების კრებადი ქვემიმდევრობების სუსტი ზღვრები ისევ წარმოადგენენ ალბათურ ზომებს.

2. შემთხვევითი პროცესი

ვიგულისხმობთ, რომ მოცემულია ალბათური სივრცე (Ω, F, P) , არაცარიელი სიმრავლე $T \subset R^1$ და ზომადი სივრცე (X, D) .

განსაზღვრა 2.1. ამბობენ, რომ T სიმრავლეზე განსაზღვრულია შემთხვევითი პროცესი $\xi_t(\omega)$, თუ ნებისმიერი $t \in T$ -სათვის Ω -ზე განსაზღვრულია შემთხვევითი ელემენტი $\xi_t(\cdot)$ მნიშვნელობებით (X, D) სივრცეში.

ყოველი ფიქსირებული ω -სათვის $\xi_t(\omega)$ წარმოადგენს t -ს ფუნქციას და მას შემთხვევითი პროცესის **ტრაექტორია** ეწოდება. თუ $T = R^n$, $n \geq 2$, მაშინ საქმე გვაქვს შემთხვევით ველთან.

ლემა 2.1. თუ $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, მაშინ $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n})$ წარმოადგენს შემთხვევით ელემენტს მნიშვნელობებით (X^n, D^n) სივრცეში.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $\eta(\omega) \equiv (\xi_{t_1}(\omega), \xi_{t_2}(\omega), \dots, \xi_{t_n}(\omega)) \in X^n$. საჩვენებელია, რომ ნებისმიერი $B^{(n)} \in D^n$ -სათვის $\eta^{-1}(B^{(n)}) \in F$. აღვნიშნოთ $\Sigma \equiv \{B^{(n)} \in D^n : \eta^{-1}(B^{(n)}) \in F\}$. იგი წარმოადგენს σ ალგებრას. თუ ავიღებთ $B^{(n)} = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in B_1, x_2 \in B_2, \dots, x_n \in B_n\}$, მაშინ გვაქვს

$$\begin{aligned} \eta^{-1}(B^{(n)}) &= \{\omega : \eta(\omega) \in B^{(n)}\} = \\ &= \{\omega : \xi_{t_1}(\omega) \in B_1, \xi_{t_2}(\omega) \in B_2, \dots, \xi_{t_n}(\omega) \in B_n\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^n \{\omega : \xi_{t_i}(\omega) \in B_i\} \in F. \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $D^n \subset \Sigma$. $\square$

$(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n})$ შემთხვევით ელემენტის განაწილებას (X^n, D^n) სივრცეზე ეწოდება ξ_t პროცესის **სასრულგანზომილებიანი განაწილება** $t_1, t_2, \dots, t_n$ წერტილებში და აღინიშნება $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}$ სიმბოლოთი. იგი წარმოადგენს ალბათურ ზომას (X^n, D^n) სივრცეზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $X^T \equiv \{T \text{ -ზე განსაზღვრული ფუნქციების სიმრავლე მნიშვნელობებით } X \text{ -ში}\}$. ფუნქციები X^T -დან აღინიშნება X_t -ით, ხოლო მათი მნიშვნელობები t წერტილში X_t -თი.

სიმრავლეს $\{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in B^{(n)}\}$, სადაც $B^{(n)} \in D^n$, ეწოდება **ცილინდრული სიმრავლე**, ხოლო უმცირეს σ -ალგებრას, რომელიც შეიცავს ყველა სასრულგანზომილებიან ცილინდრულ სიმრავლეს, ეწოდება **ცილინდრული სიმრავლეების σ -ალგებრა**. შევნიშნოთ, რომ სასრულგანზომილებიანი ცილინდრული სიმრავლეები ქმნიან ალგებრას.

პროცესს $\xi_t(\omega)$ ეწოდება **უწყვეტი პროცესი**, თუ ნებისმიერი ფიქსირებული ω -სათვის $\xi_t(\omega)$ უწყვეტია როგორც t -ს ფუნქცია.

სიმარტივისათვის ვიგულისხმობთ, რომ $T = [0, 1]$, $C := C[0, 1]$. ρ იყოს თანაბარი მეტრიკა C -ში, ე. ი.

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x_t - y_t|.$$

$C[0, 1]$ წარმოადგენს სრულ, სეპარაბელურ, მეტრულ სივრცეს.

აღვნიშნოთ $B(C)$ და $\Sigma(C)$ სიმბოლოებით შესაბამისად ბორელისა და ცილინდრული სიმრავლეების σ -ალგებრები C სივრცეზე:

$$B(C) = \sigma\{S_r(x^0) = \{x : \rho(x^0, x) \leq r\}, r \in R_+^1, x^0 \in C\},$$

$$\Sigma(C) = \sigma\{x : x_t \in B\}, t \in [0, 1], B \in B(R^1)\}.$$

ლემა 2.2. $\Sigma(C) = B(C)$.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ ორადრაციონალური რიცხვების ერთობლიობა $[0,1]$ სეგმენტიდან Q_0 -ით, $Q_0 = \{\frac{k}{2^n}; n \geq 1, k \leq 2^n\}$. ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} S_r(x_t^0) &= \{x_t : \sup_{t \in Q_0} |x_t - x_t^0| \leq r\} = \bigcap_{t \in Q_0} \{x_t : |x_t - x_t^0| \leq r\} = \\ &= \bigcap_{t \in Q_0} \{x_t : x_t \in [x_t^0 - r, x_t^0 + r]\} \in \Sigma(C) \end{aligned}$$

და მაშასადამე, $B(C) \subset \Sigma(C)$.

მეორე მხრივ, თუ შემოვიღებთ ასახვას $\pi_t: C \rightarrow R^1$, $\pi_t(x) := x_t$, იგი იქნება უწყვეტი და შესაბამისად ბორელის ფუნქცია. ამიტომ განსაზღვრის თანახმად

$$\{x_t : \pi_t(x_t) \in B\} \in B(C) \quad (B \in B(R^1)).$$

მაგრამ, ვინაიდან $\{x_t : \pi_t(x_t) \in B\} = \{x_t : x_t \in B\} \in B(C)$, ამიტომ $\Sigma(C) \subset B(C)$. $\square$

თეორემა 2.1. თუ $\xi_t(\omega)$ უწყვეტი შემთხვევითი პროცესია, მაშინ $\xi_t(\omega)$ იქნება შემთხვევითი ელემენტი $(C, B(C))$ სივრცეში და პირიქით, თუ მოცემულია $\xi_t(\omega)$ შემთხვევითი ელემენტი $(C, B(C))$ სივრცეში, მაშინ $\xi_t(\omega)$ იქნება უწყვეტი შემთხვევითი პროცესი.

დამტკიცება. თეორემის პირველი ნაწილის დასამტკიცებლად უნდა შევამოწმოთ, რომ $\{\omega : \xi_t(\omega) \in B\} \in F$ ნებისმიერი $B \in B(C)$ ბორელის სიმრავლისათვის. აღვნიშნოთ, $\sigma := \{B \in B(C) : \xi^{-1}(\omega) \in F\}$. ცხადია, რომ იგი σ -ალგებრაა. ამავე დროს, ნებისმიერი $D \in B(R^1)$ ბორელის სიმრავლისათვის $B := \{x_t : x_t \in D\} \in \sigma$, ვინაიდან

$\xi(B) = \{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$. ე. ი. $B(C) \subset \Sigma(C) = \mathcal{F}$. ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. რაც შეეხება მეორე ნაწილს, იგი გამომდინარეობს $\xi_t(\omega) = \pi_t(\xi(\omega))$ წარმოდგენიდან, ვინაიდან ზომადი ფუნქციების სუპერპოზიცია ისევ ზომადი ფუნქციაა. $\square$

თეორემა 2.2 (არცელ). დავუშვათ, რომ K ჩაკეტილია C სივრცეში, მაშინ იმისათვის, რომ K იყოს კომპაქტი აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი იყოს თანაბრად შემოსაზღვრული და ერთნაირად (თანაბარხარისხვნად) უწყვეტი.

ლემა 2.3. დავუშვათ, რომ x_t წარმოადგენს $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ არაშემთხვევით, ნამდვილ ფუნქციას და არსებობს ისეთი $a > 0$ და $n \geq 0$ რიცხვები, რომ ნებისმიერი $m \geq n$ და $0 \leq i \leq 2^n - 1$ ინდექსებისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$|x_{\frac{i+1}{2^n}} - x_{\frac{i}{2^n}}| \leq 2^{-ma},$$

მაშინ ნებისმიერი ორადრაციონალური $t, s \in Q_0$ რიცხვებისათვის სამართლიანია შეფასება $|x_t - x_s| \leq N(a) |t - s|^a$, როდესაც $|t - s| \leq 2^{-n}$, სადაც $N(a) = 2^a(2^a + 1)(2^a - 1)^{-1}$.

დამტკიცება. ავიღოთ $t, s \in Q_0$. როგორც ცნობილია, ნებისმიერი რიცხვი $[0,1]$ სეგმენტიდან წარმოადგინება $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon(i) 2^{-i}$ მწკრივის სახით, სადაც $\varepsilon(i)$ ლებულობს მნიშვნელობას 0 ან 1. ე.ი.

$$t = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_1(i) 2^{-i} \quad \text{და} \quad s = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_2(i) 2^{-i}.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც რიცხვი ორადრაციონალურია, მწკრივის ნაცვლად გვაქვს სასრული ჯამი. აღვნიშნოთ

$$t_k \equiv \sum_{i=0}^k \varepsilon_1(i) 2^{-i}, \quad s_k \equiv \sum_{i=0}^k \varepsilon_2(i) 2^{-i}.$$

$\Rightarrow$ ო.ფურთუხია $\Leftarrow$

მაშინ არსებობს ისეთი n_0 , რომ $t_k = t$ და $s_k = s$, $k \geq n_0$. გარდა ამისა, არსებობს ისეთი რიცხვები r და p , რომ $t_k = r/2^k$ და $s_k = p/2^k$. ამიტომ, თუ $|t-s| \leq 2^{-k}$, მაშინ ან $t_k = s_k$ ან $|t_k - s_k| = 2^{-k}$.

ვიგულისხმობთ, რომ $k \geq n$, $|t-s| \leq 2^{-k}$. ცხადია, რომ

$$x_t = x_{t_k} + \sum_{m=k}^{\infty} (x_{t_{m+1}} - x_{t_m})$$

და

$$x_s = x_{s_k} + \sum_{m=k}^{\infty} (x_{s_{m+1}} - x_{s_m}).$$

ამიტომ ლემის პირობებში მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} |x_t - x_s| &\leq |x_{t_k} - x_{s_k}| + \sum_{m=k}^{\infty} (|x_{t_{m+1}} - x_{t_m}| + |x_{s_{m+1}} - x_{s_m}|) \leq \\ &\leq 2^{-ka} + 2 \sum_{m=k}^{\infty} 2^{-(m+1)a} \leq 2^{-ka} (2^a + 1)(2^a - 1)^{-1}, \end{aligned}$$

ვინაიდან, თუ $t_m = \frac{r}{2^m} \equiv \frac{2r}{2^{m+1}}$, მაშინ $t_{m+1} = t_m$ ან $t_{m+1} = \frac{r}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{2r}{2^{m+1}}$.

დავუშვათ, რომ $t, s \in Q_0$, $|t-s| \leq 2^{-n}$ და აღვნიშნოთ $k \equiv \lceil \log_2 \frac{1}{|t-s|} \rceil$

(-მთელი ნაწილი), მაშინ, ცხადია, $k \geq n$ და $|t-s| \leq 2^{-k}$. ამიტომ ზემოთ მიღებული შეფასების თანახმად

$$\begin{aligned} |x_t - x_s| &\leq 2^{-ka} (2^a + 1)(2^a - 1)^{-1} \leq \\ &\leq 2^{-a(\log_2 \frac{1}{|t-s|} - 1)} (2^a + 1)(2^a - 1)^{-1} = N(a) |t-s|^a. \quad \square \end{aligned}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$K_n(a) := \{x \in C : |x_0| \leq 2^n, |x_t - x_s| \leq N(a) |t-s|^a, \forall |t-s| \leq 2^{-n}\}.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ ამ აღნიშვნაში ჩავამატებთ მოთხოვნას $t, s \in Q_0$, ამით $K_n(a)$ არ შეიცვლება. არცელას თეორემის თანახმად $K_n(a)$ წარმოადგენს კომპაქტს.

თეორემა 2.3. დაუშვათ, რომ ξ_t უწყვეტი პროცესია და მოიძებნება ისეთი $\alpha, \beta > 0$ და $N < \infty$ მუდმივები, რომ:

$$E |\xi_t - \xi_s|^\alpha \leq N |t - s|^{1+\beta}, \quad \forall t, s \in [0, 1], 0 < a < \beta\alpha^{-1},$$

მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და n რიცხვისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$P\{\xi_{\cdot} \in K_n(a)\} \geq 1 - \varepsilon.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$\begin{aligned} A_n &\equiv \{\omega : |\xi_0(\omega)| \geq 2^n\} \cup \{\omega : \sup_{m \geq n} \sup_{i=0, \dots, 2^m-1} (|\xi_{(i+1)/2^m} - \xi_{i/2^m}| 2^{ma}) > 1\} = \\ &= \{\omega : |\xi_0(\omega)| \geq 2^n\} \cup \left[\bigcup_{m=n}^{\infty} \left(\bigcup_{i=0}^{2^m-1} \{\omega : |\xi_{(i+1)/2^m} - \xi_{i/2^m}|^\alpha > 2^{-ma\alpha}\} \right) \right]. \end{aligned}$$

თუ $\omega \in \Omega \setminus A_n$, მაშინ $\xi_{\cdot}(\omega) \in K_n(a)$. აქედან გამომდინარე, ჩებიშევის უტოლობის ძალით, გვექნება

$$\begin{aligned} (*) \quad P\{\xi_{\cdot} \notin K_n(a)\} &\leq P(A_n) \leq P\{|\xi_0(\omega)| \geq 2^n\} + \\ &+ \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{i=0}^{2^m-1} 2^{ma\alpha} N 2^{-m(1+\beta)} = P\{|\xi_0(\omega)| \geq 2^n\} + N \sum_{m=n}^{\infty} 2^{m(a\alpha-\beta)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

როცა $n \rightarrow \infty$ ვინაიდან a -ს შერჩევის ხარჯზე ავიღებთ $a\alpha - \beta < 0$. $\square$

თეორემა 2.4. დაუშვათ, რომ მოცემულია უწყვეტ შემთხვევით პროცესთა ისეთი მიმდევრობა ξ_t^k , რომ $\sup_k P\{|\xi_0^k| \geq c\} \rightarrow 0$, როცა $c \rightarrow \infty$ და არსებობს ისეთი მუდმივები $\alpha, \beta > 0, N < \infty$, რომ

$$E | \xi_t^k - \xi_s^k |^\alpha \leq N |t - s|^{1+\beta}, \forall t, s \in [0, 1], \forall k = 1, 2, \dots$$

მაშინ განაწილებათა F_{ξ^k} მიმდევრობა სუსტად კომპაქტურია C სივრცეში.

დამტკიცება. თეორემა 2.3-დან გამომდინარე, ნებისმიერი k - სათვის სამართლიანია (*) თანაფარდობა. ამიტომ

$$\sup_k P\{\xi^k \notin K_n(a)\} \leq \sup_k P\{|\xi_0(\omega)| \geq 2^n\} + N \sum_{m=n}^{\infty} 2^{m(a\alpha - \beta)} \rightarrow 0,$$

როცა $n \rightarrow \infty$. მაშასადამე, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი n , რომ $P\{\xi^k \notin K_n(a)\} \leq \varepsilon, \forall k = 1, 2, \dots$ ამიტომ პრობოროვის თეორემის ძალით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ბანსაზღვრა 2.2. ξ_t^1 და ξ_t^2 შემთხვევით პროცესებს ეწოდება სტოქასტურად ეკვივალენტური, თუ $P\{\omega : \xi_t^1(\omega) = \xi_t^2(\omega)\} = 1, \forall t \in T$.

ამ შემთხვევაში ამბობენ რომ ერთი პროცესი წარმოადგენს მეორის მოდიფიკაციას.

ბანსაზღვრა 2.3. ξ_t^1 და ξ_t^2 შემთხვევით პროცესებს ეწოდება განურჩეველი, თუ $P\{\omega : \xi_t^1(\omega) = \xi_t^2(\omega), \forall t \in T\} = 1$.

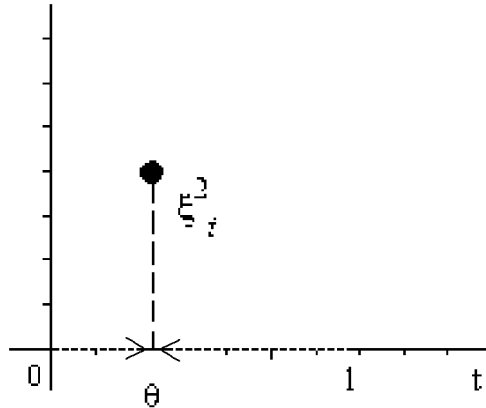
ცხადია, თუ ორი პროცესი განურჩეველია, მაშინ ისინი სტოქასტურად ეკვივალენტურია, მაგრამ, საზოგადოდ, არა პირიქით.

აშოცნა 2.1. ვაჩვენოთ, რომ თუ პროცესები რეგულარულ-ტრაექტორიებიანია (ტრაექტორიები აქვთ უწყვეტი, მარჯვნიდან უწყვეტი ან მარცხნიდან უწყვეტი), მაშინ სტოქასტურად ეკვივალენტურობა განურჩევლობის ტოლფასია.

ადვილი დასანახია, რომ თუ პროცესები სტოქასტურად ეკვივალენტურია, მაშინ მათი სასრულგანზომილებიანი განაწილებები ემთხვევა ერთმანეთს, მაგრამ, ცხადია, არა პირიქით.

რაც შეეხება ტრაექტორიებს, სტოქასტურად ეკვივალენტურ პროცესებს ისინი შეიძლება ჰქონდეთ სრულიად განსხვავებული.

მაგალითი 2.1. ვთქვათ, $T = [0,1]$ და θ იყოს $[0,1]$ -ში თანაბარი კანონით განაწილებული უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდე. დავუშვათ $\xi_t^1 \equiv 0$, ხოლო $\xi_t^2 = 0$, თუ $t \neq \theta$ და $\xi_t^2 = 1$, თუ $t = \theta$. ეს შემთხვევითი პროცესები სტოქასტურად ეკვივალენტურია: $P\{\omega : \xi_t^1(\omega) \neq \xi_t^2(\omega)\} = P\{\omega : t = \theta\} = 0$, მაშინ როდესაც ξ_t^1 -ის ყველა ტრაექტორია უწყვეტია, ხოლო ξ_t^2 -ის ყველა ტრაექტორია განიცდის ნყვეტას θ წერტილში.



თეორემა 2.5 (კოლმოგოროვის თეორემა უწყვეტი მოდიფიკაციის არსებობის შესახებ). დავუშვათ, რომ $[0, \infty)$ შუალედზე მოცემულია ნამდვილმნიშვნელობიანი შემთხვევითი პროცესი ξ_t და არსებობს ისეთი მუდმივები $\alpha, \beta > 0, N < \infty$, რომ ადგილი აქვს შეფასებას:

$$E |\xi_t - \xi_s|^\alpha \leq N |t - s|^{1+\beta},$$

მაშინ ξ_t პროცესს გააჩნია უწყვეტი მოდიფიკაცია $[0, \infty)$ შუალედზე.

დამტკიცება. ავიღოთ $0 < a < \beta/\alpha$ (მაგალითად, $a = \beta/(2\alpha)$) და აღვნიშნოთ

$$\Omega_{k,n} := \{\omega : \sup_{m \geq n} \sup_{i=0,1,\dots,k2^m-1} |\xi_{(i+1)/2^m} - \xi_{i/2^m}| 2^{ma} \leq 1\},$$

$$\Omega' := \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_n \Omega_{k,n}.$$

ნათელია, რომ თუ $\omega \in \Omega'$, მაშინ ნებისმიერი k -სათვის მოიძებნება ისეთი ნომერი n , რომ $\omega \in \Omega_{k,n}$. ე. ი. $[0, k]$ ინტერვალზე ყველა ეს სხვაობა არ აღემატება ერთს ანუ

$$|\xi_{(i+1)/2^m} - \xi_{i/2^m}| \leq 2^{-ma}, \forall m \geq n; \frac{i+1}{2^m}, \frac{i}{2^m} \in [0, 1].$$

აქედან, ლემა 2.3-ის ძალით, გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\omega \in \Omega'$ -სათვის $\xi_t(\omega)$ თანაბრად უწყვეტია $Q_0 \cap [0, k]$ სიმრავლეზე. ამიტომ, იგი შეიძლება უწყვეტად გაგრძელდეს $[0, k]$ სეგმენტზე. ამისათვის, კოშის კრიტერიუმის თანახმად, საკმარისია $\forall \omega \in \Omega'$ -სათვის განვსაზღვროთ

$$\tilde{\xi}_t(\omega) := \lim_{s \rightarrow t, s \in Q_0} \xi_s(\omega),$$

ხოლო როცა $\omega \notin \Omega'$, დავუშვათ, რომ $\tilde{\xi}_t(\omega) := 0$.

თეორემა 2.1-ის ძალით ნებისმიერი t -სათვის $\xi_t(\omega)$ იქნება შემთხვევითი სიდიდე. ამიტომ შესამონმეებელია, რომ $P\{\omega : \xi_t(\omega) = \tilde{\xi}_t(\omega)\} = 1, \forall t \in [0, \infty)$. მაგრამ, ვინაიდან როცა $t \in Q_0$: $P\{\omega : \xi_t(\omega) \neq \tilde{\xi}_t(\omega)\} \leq P\{\overline{\Omega'}\}$, ამიტომ, ამ შემთხვევაში, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\forall k : P\{\overline{\bigcup_n \Omega_{k,n}}\} = 0$. ცხადია, რომ

$$P\{\overline{\bigcup_n \Omega_{k,n}}\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\bigcup_{m \geq n} \bigcup_{i=0}^{k(2^m-1)} (|\xi_{(i+1)/2^m} - \xi_{i/2^m}| > 2^{-ma})\} \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} N_k \sum_{m=n}^{\infty} 2^{m(a\alpha - \beta)} = 0.$$

როცა t ნებისმიერია, მაშინ ფატუს ლემის ძალით, გვაქვს

$$E |\tilde{\xi}_t - \xi_t|^\alpha = E \lim_{s \rightarrow t, s \in Q_0} |\xi_s - \xi_t|^\alpha \leq \underline{\lim}_{s \rightarrow t, s \in Q_0} E |\xi_s - \xi_t|^\alpha = 0,$$

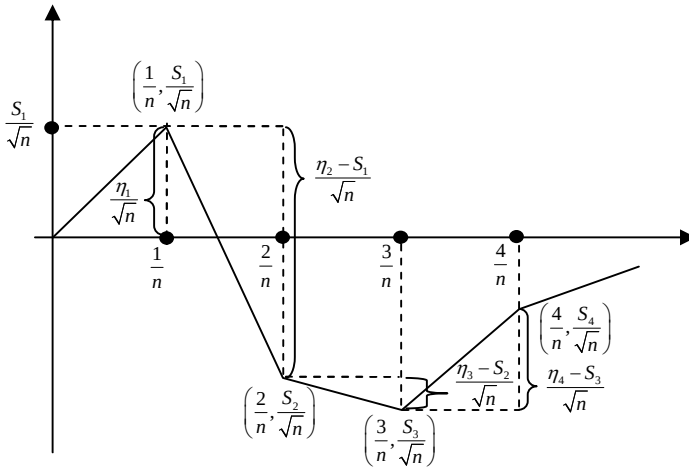
საიდანაც ჩანს, რომ

$$P\{\omega : \xi_t(\omega) = \tilde{\xi}_t(\omega)\} = 1, \forall t \in [0, \infty). \quad \square$$

3. ჰინტის პროცესი

დავუშვათ, რომ რაიმე (Ω, F, P) ალბათურ სივრცეზე მოცემულია ერთნაირად განაწილებული, დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ სასრული მეოთხე რიგის მომენტით ისეთი, რომ $E\eta_i = 0, E\eta_i^2 = 1, \forall i \geq 1$. ვიგულისხმობთ, რომ საწყის მომენტში ნაწილაკი იმყოფება ნულში და $\frac{k}{n}$ მომენტში იგი განიცდის დაჯახებას, რომლის შედეგადაც გადაადგილდება $\frac{1}{\sqrt{n}}\eta_k$ სიდიდით. აღვნიშნოთ $S_k = \eta_1 + \dots + \eta_k$. თუ შევაერთებთ $(\frac{k}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}S_k)$ წერტილებს ტეხილებით მივიღებთ უწყვეტ პროცესს:

$$\xi_t^n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}}S_{[nt]} + (nt - [nt])\frac{1}{\sqrt{n}}\eta_{[nt]+1}.$$



ლემა 3.1. განაწილებათა F_{ξ^n} მიმდევრობა სუსტად კომპაქტურია C სივრცეში.

დამტკიცება. თეორემა 2.4-დან გამომდინარე, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$E |\xi_t^n - \xi_s^n|^4 \leq N |t - s|^2.$$

აღვნიშნოთ $m_4 := E\eta_i^4, a_n := ES_n^4$. მაშინ ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= E(S_n + \eta_{n+1})^4 = ES_n^4 + 4ES_n^3\eta_{n+1} + \\ &+ 6ES_n^2\eta_{n+1}^2 + 4ES_n\eta_{n+1}^3 + m_4 = a_n + 6n + m_4. \end{aligned}$$

აქედან ინდუქციის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$a_n = 3n(n-1) + nm_4 \leq 3n^2 + nm_4.$$

განვიხილოთ ორი შესაძლებელი შემთხვევა: t და s ნერტილები ეკუთვნიან ერთსა და იმავე $[k/n, (k+1)/n]$ ინტერვალს ან არიან სხვადასხვა ინტერვალებში. ვიგულისხმობთ, რომ $s < t$.

I. თუ $t, s \in [k/n, (k+1)/n]$, მაშინ ξ_t^n წრფივია, $\xi_t^n - \xi_s^n = \sqrt{n}(t-s)\eta_{[nt]+1}$ და ამიტომ

$$E |\xi_t^n - \xi_s^n|^4 = n^2(t-s)^4 m_4 \leq (t-s)^2 m_4,$$

ვინაიდან $n^2(t-s)^2 \leq 1$.

II. თუ t და s სხვადასხვა ინტერვალებშია, მაშინ, აღვნიშნოთ s_1 -ით იმ ინტერვალის მარჯვენა ბოლო, რომელსაც ეკუთვნის s , ხოლო t_1 -ით იმ ინტერვალის მარცხენა ბოლო, რომელსაც ეკუთვნის t . თუ გამოვიყენებთ ელემენტარულ უტოლობას

$$(a+b+c)^4 \leq 27(a^4 + b^4 + c^4)$$

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

და ზემოთ მიღებულ შეფასებას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\begin{aligned}
 E | \xi_t - \xi_s |^4 &\leq 81 E | \xi_t - \xi_{t_1} |^4 + 27 E \left| \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt_1]} - \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[ns_1]} \right|^4 + \\
 &+ 27 E | \xi_s - \xi_{s_1} |^4 \leq 27 m_4 (t - t_1)^2 + 27 \frac{1}{n^2} a_{[nt_1] - ([ns_1] + 1)} + \\
 &+ 27 m_4 (s - s_1)^2 \leq 27 m_4 (t - s)^2 + 27 \frac{1}{n^2} 3([nt_1] - ([ns_1] + 1))^2 + \\
 &+ 27 \frac{1}{n^2} ([nt_1] - ([ns_1] + 1)) m_4 + 27 m_4 (t - s)^2.
 \end{aligned}$$

აქედან, იმის გავითვალისწინებით, რომ

$$([nt_1] - ([ns_1] + 1))^2 \leq (nt_1 - ns_1)^2 = n^2 (t_1 - s_1)^2 \leq n^2 (t - s)^2$$

ვღებულობთ

$$E | \xi_t - \xi_s |^4 \leq N |t - s|^2. \quad \square$$

განსაზღვრა 3.1. $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^k)$ შემთხვევით ვექტორს ეწოდება **გაუსის ანუ ნორმალური ვექტორი**, თუ მის მახასიათებელ ფუნქციას აქვს სახე:

$$\phi(\lambda) := E e^{i(\lambda, \xi)} = e^{i(\lambda, m) - (1/2)(R\lambda, \lambda)},$$

სადაც R არაუარყოფითად განსაზღვრული სიმეტრიული მატრიცაა.

აქ m წარმოადგენს ξ შემთხვევითი ვექტორის საშუალოების ვექტორს, $m = E\xi$, ხოლო $R = \|r^{i,j}\|$ – კოვარიაციის მატრიცას, $r^{i,j} = \text{cov}(\xi^i, \xi^j)$. ამ შემთხვევაში ხმარობენ აღნიშვნას $\xi \equiv N(m, R)$ და ამბობენ, რომ ξ ნორმალურია პარამეტრებით m და R .

ცხადია, რომ თუ ξ ნორმალური ვექტორია, ხოლო A ნებისმიერი მატრიცაა, მაშინ $A\xi$ აგრეთვე ნორმალურია, ვინაიდან

$$E e^{i(\lambda, A\xi)} = E e^{i(A^* \lambda, \xi)}.$$

აქედან, თავის მხრივ, გამომდინარეობს, რომ $(1, \dots, k)$ ინდექს-თა ნებისმიერი გადანაცვლებისათვის $(i_1, \dots, i_k)$ შემთხვევითი ვექტორი $\xi^{i_1}, \dots, \xi^{i_k}$ ისევ ნორმალურია, რადგანაც იგი მიიღება წრფივი გარდაქმნით.

დავუშვათ, რომ $\xi(n), n = 1, 2, \dots$, შემთხვევით ვექტორთა მიმდევრობაა E^k სივრციდან. მაშინ ამბობენ, რომ $\xi(n)$ მიმდევრობაა *ასიმპტოტურად ნორმალურია* (m, R) პარამეტრებით, თუ $F_{\xi(n)}$ განაწილების ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია რაიმე $N(m, R)$ ნორმალური ვექტორის განაწილებისაკენ.

ვიგულისხმობთ, რომ $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$. აღვნიშნოთ $r^{i,j} := \min(t_i, t_j)$, $R := \|r^{i,j}\|$.

ლემა 3.2. შემთხვევით ვექტორთა $(\xi_{t_1}^n, \dots, \xi_{t_k}^n)$, $n = 1, 2, \dots$, მიმდევრობა ასიმპტოტურად ნორმალურია პარამეტრებით $(0, R)$.

დამტკიცება. სიმარტივისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $k = 2$. ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \lambda_1 \xi_{t_1}^n + \lambda_2 \xi_{t_2}^n &= (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt_1]} + \{(nt_1 - [nt_1]) \frac{\lambda_1}{\sqrt{n}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{n}}\} \eta_{[nt_1]+1} + \\ &+ \frac{\lambda_2}{\sqrt{n}} (S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]+1}) + (nt_2 - [nt_2]) \frac{\lambda_2}{\sqrt{n}} \eta_{[nt_2]+1}. \end{aligned}$$

მიღებულ გამოსახულებაში ყველა შესაკრები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. გარდა ამისა $\eta_{[nt_1]+1}$ და $\eta_{[nt_2]+1}$ სიდიდეების წინ მდგომი მამრავლები მიისწრაფიან ნულისაკენ, როდესაც $n \rightarrow \infty$. ამიტომ, ლებეგის თეორემის თანახმად მაჟორირებული კრებადობის შესახებ, გვაქვს:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E e^{i(\lambda_1 \xi_{t_1}^n + \lambda_2 \xi_{t_2}^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} E e^{i(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt_1]}} \times E e^{i \frac{\lambda_2}{\sqrt{n}} (S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]+1})} =$$

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \phi\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{n}}\right) \right\}^{[nt_1]} \left\{ \phi\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{n}}\right) \right\}^{[nt_2] - ([nt_1] + 1)},$$

სადაც $\phi(\lambda) := Ee^{i\lambda\eta}$.

როგორც ცნობილია, ცენტრალური ზღვართი თეორემის თანახმად,

$$\ln \left| \phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) \right| = -\frac{\lambda^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \arg \phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

ამიტომ, იმის გათვალისწინებით, რომ $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, ვლევულობთ თანაფარდობას

$$\begin{aligned} \left\{ \phi\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{n}}\right) \right\}^{[nt_1]} &= \exp \left\{ [nt_1] \left(\ln \left| \phi\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{n}}\right) \right| + i \arg \phi\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{n}}\right) \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ [nt_1] \left(-\frac{\lambda^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right\} \rightarrow e^{-\frac{\lambda^2 t_1}{2}}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

სადაც $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$.

სრულიად ანალოგიურად გადავალთ ზღვარზე მეორე თანამამრავლში, რის შედეგადაც საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Ee^{i(\lambda_1 \xi_{t_1}^n + \lambda_2 \xi_{t_2}^n)} &= e^{-\frac{1}{2} t_1 (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \frac{1}{2} \lambda_2^2 (t_2 - t_1)} = \\ &= e^{-\frac{1}{2} \{ \lambda_1^2 \min(t_1, t_1) + 2\lambda_1 \lambda_2 \min(t_1, t_2) + \lambda_2^2 \min(t_2, t_2) \}}. \quad \square \end{aligned}$$

თეორემა 3.1 (ფონსკერი). F_{ξ^n} განაწილებათა მიმდევრობა

სუსტად კრებადია რაიმე განაწილებისაკენ C სივრცეში.

დამტკიცება. თეორემა 1.6-იდან გამომდინარე, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ $F_{\xi^{n_i}} \Rightarrow \mu$ და $F_{\xi^{m_i}} \Rightarrow \nu$, მაშინ $\mu = \nu$. დავაფიქსიროთ $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$. Π იყოს C სივრცის პროექცია

R^k სივრცეში: $\Pi(x) = (x_{t_1}, \dots, x_{t_k})$. ცხადია, რომ იგი უწყვეტია (ე. ი. ბორელისაა). თუ მას ჩვენ განვიხილავთ როგორც შემთხვევით ელემენტს $(C, B(C), \mu)$ და $(C, B(C), \nu)$ სივრცეებში, მაშინ, სუსტი კრებადობის განმარტების თანახმად, ნებისმიერი შემოსაზღვრული და უწყვეტი f ფუნქციისათვის თეორემა 1.2-ისა და ლემა 3.2-ის საფუძველზე მივიღებთ, რომ:

$$\begin{aligned} \int_{E^k} f(x^1, \dots, x^k) \mu \Pi^{-1}(dx^1, \dots, dx^k) &= \int_C f(\Pi(x)) \mu(dx) = \\ &= \lim_{n_i \rightarrow \infty} \int_C f(\Pi(x)) F_{\xi^{n_i}}(dx) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} Ef(\Pi(\xi^{n_i})) = \\ &= \lim_{n_i \rightarrow \infty} Ef(\xi_{t_1}^{n_i}, \dots, \xi_{t_k}^{n_i}) = Ef(\zeta^1, \dots, \zeta^k) = \dots = \\ &= \int_{E^k} f(x^1, \dots, x^k) \nu \Pi^{-1}(dx^1, \dots, dx^k), \end{aligned}$$

სადაც $(\zeta^1, \dots, \zeta^k)$ ნორმალური ვექტორია პარამეტრებით 0 და $\|\min(t_i, t_j)\|$, $i, j = 1, 2, \dots, k$ ($(\zeta^1, \dots, \zeta^k) \cong N(0, \|\min(t_i, t_j)\|)$).

აქედან, ვინაიდან f ნებისმიერი იყო, ვასკენით, რომ $\mu \Pi^{-1} = \nu \Pi^{-1}$. ე. ი. $\forall B^{(k)} \in B(E^k)$:

$$\begin{aligned} \mu(x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_k}) \in B^{(k)}) &:= \mu \Pi^{-1}(B^{(k)}) = \nu \Pi^{-1}(B^{(k)}) := \\ &= \nu(x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_k}) \in B^{(k)}). \end{aligned}$$

მაშასადამე, μ და ν ზომები ერთმანეთს ემთხვევა ალგებრაზე, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ისინი ერთმანეთს ემთხვევა ცილინდრული სიმრავლეების σ -ალგებრაზე, ანუ B -ზე. $\square$

შევნიშნოთ, რომ იმ F ზომას, რომლისკენაც სუსტად კრებადია F_{ξ^n} განაწილებები წინამდებარე თეორემიდან, უწოდებენ **ვინერის ზომას**.

განსაზღვრა 3.2. ნამდვილმნიშვნელობებიან შემთხვევით პროცესს ეწოდება გაუსის პროცესი, თუ ყველა მისი სასრულგანზომილებიანი განაწილება გაუსისაა.

აღვნიშნოთ ξ_t პროცესის საშუალო მნიშვნელობები და კოვარიაციის მატრიცა შესაბამისად m_t და $R(t, s)$ სიმბოლოებით: $m_t = E\xi_t$, $R(t, s) = \text{cov}(\xi_t, \xi_s)$.

ცხადია, რომ თუ გაუსის ორი უწყვეტი ξ_t^1 და ξ_t^2 პროცესისათვის $m_t^1 = m_t^2$ და $R^1(t, s) = R^2(t, s)$, მაშინ მათი შესაბამისი განაწილებებიც ერთმანეთს ემთხვევა C სივრცეზე.

განსაზღვრა 3.3. $[0, 1]$ ინტერვალზე განსაზღვრულ გაუსის პროცესს $m_t = 0$ საშუალოთი და $R(t, s) = \min(t, s)$ კოვარიაციის მატრიცით ეწოდება **ვინერის პროცესი** $[0, 1]$ ინტერვალზე.

ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარე, ორი ვინერის პროცესის განაწილებები C სივრცეზე ერთმანეთს ემთხვევა.

თეორემა 3.2. ვინერის პროცესი არსებობს და მისი განაწილება არის ვინერის ზომა.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ F ვინერის ზომაა თეორემა 3.1-დან, მაშინ თეორემა 1.1-ის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ისეთი უწყვეტი პროცესი $[0, 1]$ ინტერვალზე w_t , რომ $F_{w_t} = F$. ამიტომ შესაძლებელია, რომ $EW_t = 0$ და $\text{cov}(w_t, w_s) = \min(t, s)$. ავიღოთ ნებისმიერი შემოსაზღვრული და უწყვეტი f ფუნქცია, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\begin{aligned} Ef(w_{t_1}, \dots, w_{t_k}) &= \int_{E^k} f(x^1, \dots, x^k) F \Pi^{-1}(dx^1, \dots, dx^k) = \\ &= \int_C f(\Pi(x)) F(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f(\Pi(x)) F_{\xi^n}(dx) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} Ef(\Pi(\xi^n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ef(\xi_{t_1}^n, \dots, \xi_{t_k}^n) = Ef(\zeta^1, \dots, \zeta^k), \end{aligned}$$

სადაც $(\zeta^1, \dots, \zeta^k) \equiv N(0, \|\min(t_i, t_j)\|)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $(w_{t_1}, \dots, w_{t_k})$ ვექტორს გააჩნია იგივე განაწილება, რაც $(\zeta^1, \dots, \zeta^k)$ ვექტორს და, მაშასადამე, $m_{t_1} = Ew_{t_1} = 0$ და $cov(w_{t_1}, w_{t_2}) = Ew_{t_1} w_{t_2} = E\zeta^1 \zeta^2 = \min(t_1, t_2)$. □

თეორემა 3.3. იმისათვის, რომ $[0, 1]$ ინტერვალზე მოცემული უწყვეტი პროცესი w_t იყოს ვინერის პროცესი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულებული იყოს შემდეგი პირობები:

- ა) $w_0 = 0$ (P -თ. ყ.);
- ბ) $w_t - w_s \equiv N(0, t - s), 0 \leq s \leq t \leq 1$;
- გ) $w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \dots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$ შემთხვევითი სიდიდეები ერთობლივად დამოუკიდებელია, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq 1$;

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვინაიდან $Ew_t w_s = \min(t, s)$, ამიტომ $Ew_0^2 = 0$, ე. ი. $w_0 = 0$ (P -თ. ყ.); $w_t - w_s$ მიიღება (w_s, w_t) გაუსის ვექტორისაგან წრფივი გარდაქმნით, მაშასადამე, $w_t - w_s \equiv N(\cdot, \cdot)$. ამავე დროს $E(w_t - w_s) = 0$, $E(w_t - w_s)^2 = Ew_t^2 - 2Ew_t w_s + Ew_s^2 = t - 2s + s = t - s$, ე. ი. $w_t - w_s \equiv N(0, t - s)$.

შემოვიღოთ აღნიშვნები $\xi_i \equiv w_{t_i} - w_{t_{i-1}}, i = 1, \dots, n, t_0 := 0$, $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$. ცხადია, რომ ξ ვექტორი მიიღება $w_{t_1}, \dots, w_{t_n}$ გაუსის ვექტორისაგან წრფივი გარდაქმნით, ამიტომ იგი გაუსისაა. ამასთანავე $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = t_k - t_{k-1}$ და $E\xi_i \xi_j = E(w_{t_i} - w_{t_{i-1}})(w_{t_j} - w_{t_{j-1}}) = t_i - t_{i-1} - t_i + t_{i-1} = 0$, როცა $i < j$. საიდანაც, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ ξ ვექტორის კომპონენტები დამოუკიდებელია, ვინაიდან ერთობლივი მახასიათებელი ფუნქცია კომპონენტების მახასიათებელი ფუნქციების ნამრავლის ტოლია:

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

$$\begin{aligned} E e^{i \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k} &= e^{-1/2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \lambda_k \lambda_m \text{cov}(\xi_k, \xi_m)} = e^{-1/2 \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 (t_k - t_{k-1})} = \\ &= \prod_{k=1}^n e^{-1/2 \lambda_k^2 (t_k - t_{k-1})} = \prod_{k=1}^n E e^{i \lambda_k \xi_k}. \end{aligned}$$

საკმარისობა. ა), ბ) და გ) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\phi_{\xi}(\lambda) = E e^{i \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k} = e^{-1/2 \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 (t_k - t_{k-1})},$$

ე. ი. ξ გაუსის ვექტორია. მეორე მხრივ, ბ) პირობებიდან ჩანს, რომ $w_t \equiv N(0, t)$, მაშასადამე, $E w_t = 0$ და $E w_t^2 = t$. უკანასკნელი თანაფარდობიდან და ვ) პირობიდან კი მივიღებთ, რომ თუ $t \geq s$, მაშინ $E w_t w_s = E w_s (w_t - w_s) + E w_s^2 = s = \min(t, s)$. $\square$

თეორემა 3.4. იმისათვის, რომ $[0, 1]$ ინტერვალზე მოცემული უწყვეტი პროცესი w_t იყოს ვინერის პროცესი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულებული იყოს შემდეგი პირობები:

ა) $w_0 = 0$ (P - თ. ყ.);

ბ) $w_t - w_s \equiv N(0, t - s), 0 \leq s \leq t \leq 1$;

გ) შემთხვევითი სიდიდე $w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$ და შემთხვევითი ვექტორი $(w_{t_1}, \dots, w_{t_{n-1}})$ დამოუკიდებელია, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq 1$;

დამტკიცება. საკმარისია შემოწმდეს, რომ ა) და ბ) პირობების შესრულებისას გ) პირობები თეორემა 3.3-დან და თეორემა 3.4-დან ერთმანეთის ეკვივალენტურია. აღვნიშნოთ $\xi := (w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \dots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}) := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. დავუშვათ, რომ შესრულებულია გ)

პირობა თეორემა 3.4-დან. მაშინ, ვინაიდან $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \xi_k$ და $\lambda_n \xi_n$ დამოუკიდებელია, ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} Ee^{i \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k} &= Ee^{i (\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \xi_k + \lambda_n \xi_n)} = \\ &= Ee^{i \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \xi_k} Ee^{i \lambda_n \xi_n} = \dots = \prod_{k=1}^n Ee^{i \lambda_k \xi_k}. \end{aligned}$$

ე. ი. ξ_k შემთხვევითი სიდიდეები ერთობლივად დამოუკიდებელია.

პირიქით, დავუშვათ, რომ შესრულებულია გ) პირობა თეორემა 3.3-დან. საიდანაც, კერძოდ, გამოდის, რომ ξ_n შემთხვევითი სიდიდე დამოუკიდებელია $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ ვექტორისაგან. მეორე მხრივ, შემთხვევითი ვექტორი $(w_1, \dots, w_{t_{n-1}})$ წარმოადგენს $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ ვექტორის ფუნქციას და ამიტომ ξ_n დამოუკიდებელია $(w_1, \dots, w_{t_{n-1}})$ ვექტორისაგან. $\square$

თეორემა 3.5 (უნყვებობის მოდულის შესახებ). თუ w_t ვინერის პროცესია და $0 < \varepsilon < 1/2$, მაშინ თითქმის ყველა ω -სათვის მოიძებნება ისეთ $n \geq 1$ მთელი რიცხვი, რომ როცა $|t-s| \leq 2^{-n}$ ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$|w_t(\omega) - w_s(\omega)| \leq N |t-s|^{1/2-\varepsilon}$$

(კერძოდ, $|w_t(\omega)| \leq N t^{1/2-\varepsilon}$, როცა $t \leq 2^{-n}$), სადაც N მუდმივი დამოკიდებულია მხოლოდ ε -ზე და არაა დამოკიდებული ω -ზე.

დამტკიცება. ვიგულისხმობთ, რომ

$$\alpha > 2, \quad \beta = \alpha/2 - 1 > 0, \quad \xi \cong N(0,1), \quad E|\xi|^\alpha := N(\alpha),$$

მაშინ, ვინაიდან $w_t - w_s \cong N(0, |t-s|)$, ამიტომ ცხადია, რომ

$$w_t - w_s \cong \xi |t-s|^{1/2}$$

და

$$E|w_t - w_s|^\alpha = |t-s|^{\alpha/2}, \quad E|\xi|^\alpha = N|t-s|^{1+\beta}. \quad (1)$$

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

აღვნიშნოთ

$$K_n(a) \equiv \{x \in C : |x_0| \leq 2^n, |x_t - x_s| \leq N(a) |t - s|^a, |t - s| \leq 2^{-n}\}.$$

თეორემა 2.3-ის ძალით, თუ $0 < a < \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$, მაშინ

$$P\{w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n(a)\} = 1,$$

მაშასადამე, თითქმის ყველა ω -სათვის მოიძებნება ისეთი n , რომ $w \in K_n(a)$. ე. ი. $|w_t(\omega) - w_s(\omega)| \leq N(a) |t - s|^a$, როცა $|t - s| \leq 2^{-n}$. აქედან, თუ ავიღებთ $\alpha > 1/\varepsilon$, დავრწმუნდებით თეორემის სამართლიანობაში. $\square$

თეორემა 3.6. თუ $[s, t]$ ინტერვალის დანაწილებათა მიმდევრობა $s = t_{0,n} \leq t_{1,n} \leq \dots \leq t_{n,n} = t$ ისეთია, რომ მაქსიმალური დაყოფის ბიჯი $\lambda_n := \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1,n} - t_{i,n}) \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$, მაშინ

$$\xi_n := \sum_{s \leq t_{i,n} \leq t} (w_{t_{i+1,n}} - w_{t_{i,n}})^2 \xrightarrow{P} (t - s),$$

როცა $n \rightarrow \infty$.

დამტკიცება. თეორემა 3.5-ის (1) თანაფარდობის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\begin{aligned} D\xi_n &= \sum_{s \leq t_{i,n} \leq t} D(w_{t_{i+1,n}} - w_{t_{i,n}})^2 = N(2) \sum_{s \leq t_{i,n} \leq t} (t_{i+1,n} - t_{i,n})^2 \leq \\ &\leq N(2) \lambda_n \sum_{s \leq t_{i,n} \leq t} (t_{i+1,n} - t_{i,n}) \leq N(2) \lambda_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

ამიტომ ჩებიშევის უტოლობის თანახმად $\xi_n - E\xi_n \xrightarrow{P} 0$. მეორე მხრივ, $E\xi_n = \sum_{s \leq t_{i,n} \leq t} (t_{i+1,n} - t_{i,n}) \rightarrow t - s$. საბოლოოდ ვღებულობთ, რომ

$$\xi_n - (t-s) = \xi_n - E\xi_n + E\xi_n - (t-s) \xrightarrow{P} 0. \quad \square$$

შენიშვნა 3.1. არ არსებობს ისეთი ფუნქციები $\varepsilon(\omega)$ და $N(\omega)$, რომ დადებითი ალბათობით $\varepsilon(\omega) > 0, N(\omega) < \infty$ და $|w_t(\omega) - w_s(\omega)| \leq N(\omega) |t-s|^{1/2+\varepsilon(\omega)}$, როცა $|t-s| \leq \varepsilon(\omega)$. მართლაც, იმ ω წერტილებში, სადაც ეს უტოლობა სრულდება: $\xi_n(\omega) \rightarrow 0$, რადგანაც

$$\xi_n(\omega) \leq N(\omega) \sum_{s \leq t_{i,n} \leq t} (t_{i+1,n} - t_{i,n})^{1+2\varepsilon} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

მაშინ როდესაც თეორემა 3.6-ის ძალით $\xi_n \xrightarrow{P} t-s, n \rightarrow \infty$.

შენიშვნა 3.2. როგორც ვხედავთ, ვინერის პროცესის ტრაექტორიების კვადრატული ვარიაცია სასრულია, კერძოდ, მას გააჩნია ინტერვალის რიგი. მეორე მხრივ, ანალიზიდან ცნობილია, რომ გლუვი ფუნქციის კვადრატული ვარიაცია უსასრულოა, ხოლო ვარიაციას აქვს ინტერვალის რიგი. შესაბამისად, ვინერის ტრაექტორია ვერ იქნება გლუვი ფუნქცია, მას არც ერთ წერტილში არ გააჩნია წარმოებული, მისი ვარიაცია ნებისმიერ სასრულ ინტერვალზე უსასრულოა.

პიკეტი 3.1. $P\{\omega : \text{Var}_{[s,t]} w_t(\omega) = \infty\} = 1$.

დამტკიცება. იმ ω წერტილებზე, სადაც

$$\text{Var}_{[s,t]} w_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} |w_{t_{i+1,n}} - w_{t_{i,n}}| < \infty,$$

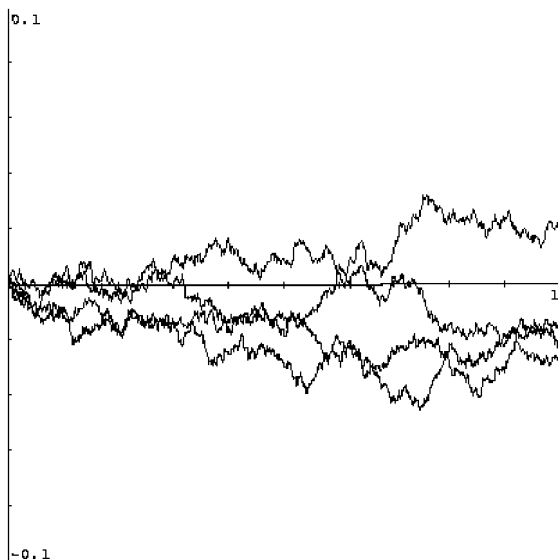
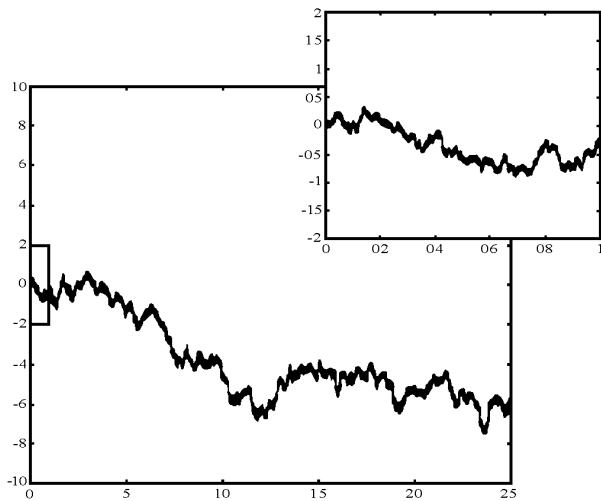
გვექნება, რომ $\xi_n(\omega) \rightarrow 0$, ვინაიდან

$$\xi_n(\omega) \leq \max_{0 \leq i \leq n-1} |w_{t_{i+1,n}} - w_{t_{i,n}}| \sum_{i=0}^{n-1} |w_{t_{i+1,n}} - w_{t_{i,n}}| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

რაც ეწინააღმდეგება იმას, რომ თეორემა 3.6-ის ძალით $\xi_n \xrightarrow{P} 1$.

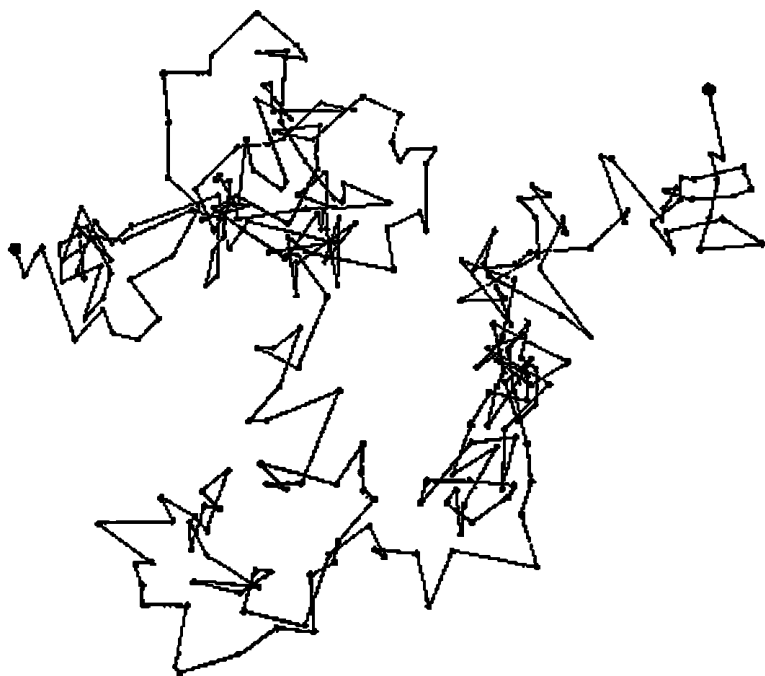
⇒ ო. ჟურთუხია ⇐

ქვემოთ ჩვენ მოგვყავს ვინერის პროცესის ერთი და ოთხი სხვადასხვა ტრაექტორიის რეალიზაციები



აქვე აღვნიშნავთ, რომ ლიტერატურაში ვინერის პროცესი ცნობილია აგრეთვე **ბროუნის მოძრაობის** სახელწოდებით. ეს უკავშირდება ბრიტანელი ბოტანიკოსის ბროუნის სახელს, რომელიც აკვირდებოდა სითხეში ჩაძირული მტვრის ნაწილაკის ქაოსურ მოძრაობას. ამ მოძრაობის მათემატიკური მოდელი კი შექმნა ამერიკელმა მეცნიერმა – ნორბერტ ვინერმა.

სითხეში ჩაძირული ნაწილაკის ქაოსური მოძრაობა ასე გამოიყურება:



4. შემათხვეპიტი ორთოგონალური ზომით ინტეგრირება

ვიგულისხმობთ, რომ (Ω, F, P) სრული ალბათური სივრცეა, $L_2 := L_2(P) \equiv L_2(\Omega, F, P)$, X – რაიმე სიმრავლე, Π X სიმრავლის ქვესიმრავლეების ნახევარგოლია ერთეულით, $X \in \Pi$, $\sigma := \sigma(\Pi)$ წარმოადგენს Π ნახევარგოლზე მოჭიმულ უმცირეს σ -ალგებრას, μ არის σ ადიციური სასრული ზომა σ -ზე. ნებისმიერ $\Delta \in \Pi$ ელემენტს შეესაბამება კომპლექსური ფუნქცია $\zeta(\Delta)$.

ბანსაზღვრა 4.1. $\{\zeta(\Delta) : \Delta \in \Pi\}$ ოჯახს ეწოდება შემთხვევითი ორთოგონალური ზომა μ სტრუქტურული ფუნქციით, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. $\zeta(\Delta) \in L_2, \forall \Delta \in \Pi$;
2. $M\zeta(\Delta_1)\overline{\zeta(\Delta_2)} = \mu(\Delta_1\Delta_2), \forall \Delta_1, \Delta_2 \in \Pi$.

შევნიშნობთ, რომ ეს ოჯახი ორთოგონალურია იმიტომ, რომ თუ $\Delta_1\Delta_2 = \emptyset$, მაშინ 2-ის ძალით $E\zeta(\Delta_1)\overline{\zeta(\Delta_2)} = 0$, ხოლო ზომაა იმის გამო, რომ თუ $\Delta_i, \Delta \in \Pi$ და $\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i$, მაშინ $\zeta(\Delta) = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta(\Delta_i)$ L_2 -ში. მართლაც,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left| \zeta(\Delta) - \sum_{i=1}^n \zeta(\Delta_i) \right|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [E \left| \zeta(\Delta) \right|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n E \zeta(\Delta) \overline{\zeta(\Delta_i)} + \\ &+ \sum_{i=1}^n E \left| \zeta(\Delta_i) \right|^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(\Delta) - 2 \sum_{i=1}^n \mu(\Delta_i) + \sum_{i=1}^n \mu(\Delta_i)] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(\Delta) - \sum_{i=1}^n \mu(\Delta_i)] = 0. \end{aligned}$$

ლემა 4.1. თუ $\Delta_i, B_j \in \Pi$ სიმრავლეები და c_i, d_j კომპლექსური რიცხვები $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$, ისეთია, რომ μ -თ.ყ.

$$\sum_{i=1}^n c_i \chi_{\Delta_i} = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j},$$

მაშინ $\sum_{i=1}^n c_i \zeta(\Delta_i) = \sum_{j=1}^m d_j \zeta(B_j)$ P -თ.ყ. და

$$E \left| \sum_{i=1}^n c_i \zeta(\Delta_i) \right|^2 = \int_X \left| \sum_{i=1}^n c_i \chi_{\Delta_i} \right|^2 \mu(dx).$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} E \left| \sum_{i=1}^n c_i \zeta(\Delta_i) \right|^2 &= E \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_i c_k \zeta(\Delta_i) \overline{\zeta(\Delta_k)} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_i \overline{c_k} \mu(\Delta_i \Delta_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_i \overline{c_k} \int_X \chi_{\Delta_i} \chi_{\Delta_k} \mu(dx) = \\ &= \int_X \left| \sum_{i=1}^n c_i \chi_{\Delta_i}(x) \right|^2 \mu(dx). \end{aligned}$$

აქედან, თავის მხრივ, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} E \left| \sum_{i=1}^n c_i \zeta(\Delta_i) - \sum_{j=1}^m d_j \zeta(B_j) \right|^2 &= \\ &= \int_X \left| \sum_{i=1}^n c_i \chi_{\Delta_i} - \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j} \right|^2 \mu(dx) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

აღვნიშნოთ $L_0(\mu)$ სიმბოლოთი მარტივი ფუნქციების კლასი:

$$L_0(\mu) := \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \chi_{\Delta_i}(x), \Delta_i \in \Pi \right\},$$

სადაც c_i კომპლექსური რიცხვებია.

$L_0(\mu) \subset L_2(\mu)$, $L_0(\mu)$ ყველგან მკვერთია $L_2(\mu)$ -ში, $\overline{L_0(\mu)} = L_2(\mu)$.

განვსაზღვროთ ოპერატორი $I : L_0(\mu) \longrightarrow L_2(P)$ შემდეგი თანაფარდობით:

$$I\left(\sum_{i=1}^n c_i \chi_{\Delta_i}\right) = \sum_{i=1}^n c_i \zeta(\Delta_i),$$

მაშინ, ლემა 4.1-ის ძალით, მარტივი f ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\|I(f)\|_{L_2(P)}^2 = E |I(f)|^2 = \int_X |f(x)|^2 \mu(dx) = \|f\|_{L_2(\mu)}^2,$$

ე. ი. I ნორმოადგენს იზომეტრულ ოპერატორს.

ლემა 4.2. თუ B_1, B_2 ბანახის სივრცეებია და B_1 სივრცის B_0 წრფივ ქვესივრცეზე (რომელიც საზოგადოდ არაჩაკეტილია) განსაზღვრულია წრფივი იზომეტრული ოპერატორი $I : B_0 \longrightarrow B_2$ ($\|I(b_0)\|_{B_2} = \|b_0\|_{B_1}$, $b_0 \in B_0$), მაშინ არსებობს ერთადერთი წრფივი იზომეტრული ოპერატორი $\tilde{I} : \overline{B_0} \longrightarrow B_2$, რომელიც B_0 ქვესივრცეზე ემთხვევა I ოპერატორს. $\square$

თეორემა 4.1. არსებობს და ამასთანავე ერთადერთია წრფივი ოპერატორი $I : L_2(\mu) \longrightarrow L_2(P)$, ისეთი, რომ:

1. $I\left(\sum_{i=1}^n c_i \chi_{\Delta_i}\right) = \sum_{i=1}^n c_i \zeta(\Delta_i)$;
2. $E |I(f)|^2 = \int_X |f(x)|^2 \mu(dx)$, $\forall f \in L_2(\mu)$. $\square$

თუ $f \in L_2(\mu)$ ნებისმიერი ფუნქციაა, მაშინ მოიძებნება მარტივი ფუნქციების მიმდევრობა $\{f_n, n \geq 1\}$, ისეთი, რომ $f_n \xrightarrow{L_2(\mu)} f$. ამ შემთხვევაში განვსაზღვროთ:

$$I(f) \equiv \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} I(f_n).$$

პანსაზღვრა 4.2. I ოპერატორის მნიშვნელობას f ფუნქციაზე უწოდებენ სტოქასტურ ინტეგრალს f ფუნქციიდან და აღნიშნავენ შემდეგნაირად:

$$I(f) = \int_X f(x) \zeta(dx).$$

ვინაიდან,

$$E |I(f + \lambda g)|^2 = \int_X |f(x) + \lambda g(x)|^2 \mu(dx), \quad \forall \lambda,$$

ამიტომ λ -სთან მდგომი კოეფიციენტების გატოლებით დავრწმუნდებით, რომ ნარჩუნდება სკალარული ნამრავლი:

$$E \int_X f(x) \zeta(dx) \overline{\int_X g(x) \zeta(dx)} = \int_X f(x) \overline{g(x)} \mu(dx). \quad (1)$$

განვმარტოთ $\sigma(\Pi)$ σ -ალგებრაზე $\tilde{\zeta}$ ზომა შემდეგნაირად:

$$\zeta(B) := \int_X \chi_B(x) \zeta(dx), \quad B \in \sigma(\Pi).$$

ცხადია, რომ თუ $B \in \Pi$, მაშინ $\zeta(B) = \zeta(B)$, ხოლო (1) თანაფარდობიდან გამომდინარე, $E \zeta(B_1) \overline{\zeta(B_2)} = \mu(B_1 B_2)$, ე. ი. $\tilde{\zeta}$ ზომა ζ ზომის გაგრძელებაა და ამასთანავე, იგი წარმოადგენს შემთხვევით ორთოგონალურ ზომას $\sigma(\Pi)$ σ -ალგებრაზე.

აშოცნა 4.1. თუ ζ_1, ζ_2 ზომები წარმოადგენენ ζ ზომის გაგრძელებებს $\sigma(\Pi)$ σ -ალგებრაზე, მაშინ მათი სტრუქტურული ფუნქციები ემთხვევა ერთმანეთს და ემთხვევა μ ზომას და, ამასთანავე,

$$\int_X f(x) \zeta_1(dx) = \int_X f(x) \zeta_2(dx) = \int_X f(x) \tilde{\zeta}(dx), \quad \forall f \in L_2(\mu).$$

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

ავილოთ $X = (0,1], \Pi = \{(s,t]: 0 \leq s \leq t \leq 1\}$. დავუშვათ, რომ w_t ვინერის პროცესია $[0,1]$ ინტერვალზე და განვმარტოთ $w((s,t]) \equiv w_t - w_s$. მაშინ ცხადია, რომ w იქნება შემთხვევითი ორთოგონალური ზომა, რომლის სტრუქტურული ფუნქცია იქნება ლებეგის ზომა, ვინაიდან

$$Ew((s,t])w((s_1,t_1]) = \int_0^1 \chi_{(s,t]}(x) \chi_{(s_1,t_1]}(x) dx.$$

ამიტომ, თუ $\int_0^1 f(s)^2 ds < \infty$, მაშინ განმარტებულია

$$\int_0^1 f(s)w(ds) := \int_0^1 f(s)dw(s).$$

მეორე მხრივ, თუ

$$f^n \xrightarrow{L_2([0,1])} f, \quad f^n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f^n(t_{i+1,n}) \chi_{t_{i,n} < t \leq t_{i+1,n}}(t),$$

მაშინ

$$\int_0^1 f(s)dw(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f^n(t_{i+1,n})(w_{t_{i+1,n}} - w_{t_{i,n}}).$$

აქედან გამომდინარე, ყველა ეს სტოქასტური ინტეგრალი გაუსის შემთხვევითი სიდიდეა.

შემოვიღოთ განსაზღვრა

$$\int_0^t f(s)dw(s) := \int_0^1 \chi_{(0,t]}(s) f(s)dw(s).$$

შევნიშნოთ, რომ სტოქასტური ინტეგრალი განსაზღვრულია როგორც L_2 -ის ელემენტი (ე. ი. როგორც ეკვივალენტობის კლასი).

ამდენად, შესაძლებელია ისეთი შერჩევა, რომ შემთხვევითი პროცესი

$$\xi_t := \int_0^t f(s)dw(s)$$

იყოს უწყვეტტრაექტორიებიანი პროცესი.

პროცესი 4.2. თუ $f \in L_2([0,1])$, მაშინ $\int_0^t f(s)dw(s)$ ნარმო-

ადგენს გაუსის პროცესს ნულოვანი საშუალოთი და კორელაციის ფუნქციით:

$$R(s,t) = \int_0^{s \wedge t} f^2(u)du = \left(\int_0^s f^2(u)du \right) \wedge \left(\int_0^t f^2(u)du \right).$$

განსაზღვრა 4.2. ვინერის პროცესი $[0, \infty)$ ნახევარღერძზე ეწოდება $[0, \infty)$ ნახევარღერძზე მოცემულ გაუსის პროცესს, ნულოვანი საშუალოთი და კორელაციის ფუნქციით $s \wedge t$, რომლის თითქმის ყველა ტრაექტორია უწყვეტია.

თეორემა 4.2. ვინერის პროცესი $[0, \infty)$ ნახევარღერძზე არსებობს.

დამტკიცება. ავიღოთ $[0,1]$ ინტერვალზე უწყვეტი ნებისმიერი $f(t) > 0$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $\int_0^1 f^2(s)ds = \infty$. ვთქვათ, $\phi(r)$

ფუნქცია არის $\int_0^t f^2(s)ds$ ფუნქციის შებრუნებული, ხოლო w_t

იყოს ვინერის პროცესი $[0,1]$ ინტერვალზე.

განვსაზღვროთ $y(t)$, $t < 1$ პროცესი შემდეგნაირად:

$$y(t) = \int_0^1 \chi_{[0,t]}(s) f(s)dw_s = \int_0^t f(s)dw_s.$$

(ვინაიდან f ფუნქცია უწყვეტია, იგი შემოსაზღვრულია სასრულ მონაკვეთზე და მაშასადამე, $\chi_{[0,t]} f \in L_2([0,1])$).

ცხადია, რომ $y(t)$ იქნება გაუსის პროცესი საშუალოთი ნული და კორელაციის ფუნქციით $R(s,t)$. აღვნიშნოთ $x(r) \equiv y(\phi(r)), r \geq 0$. ეს უკანასკნელი აგრეთვე იქნება გაუსის პროცესი (ჩვენ უბრალოდ შევცვალეთ დრო $\phi(r) < 1$). ამასთანავე, $Ex(r) = 0$ და $Ex(t)x(s) = Ey(\phi(t))y(\phi(s)) = s \wedge t$. გარდა ამისა, $x(r_1) - x(r_2) \cong N(0, |r_1 - r_2|)$, საიდანაც $E|x(r_1) - x(r_2)|^4 = 3|r_1 - r_2|^2$. ამიტომ კოლმოგოროვის თეორემის თანახმად უწყვეტი მოდიფიკაციის არსებობის შესახებ (თეორემა 2.5) $x(t)$ პროცესს გააჩნია უწყვეტი მოდიფიკაცია. ე. ი. $x(t)$ ვინერის პროცესია $[0, \infty)$ ნახევარღერძზე. $\square$

თეორემა 4.3. დავუშვათ, რომ w_t ვინერის პროცესია $[0, \infty)$ ნახევარღერძზე.

ა) თუ $c \neq 0$, მაშინ cw_{t/c^2} აგრეთვე ვინერის პროცესია (ე. ნ. ავტომოდელური ვინერის პროცესი, ნებისმიერი დიდი ტრაექტორიის მოდელირება შეიძლება პატარა ტრაექტორიებით);

ბ) პროცესი

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} tw_{1/t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

ნარმოადგენს ვინერის პროცესს.

დამტკიცება. ჩვენ შევჩერდებით მხოლოდ ξ_t პროცესის ტრაექტორიის ნულში უწყვეტობის დამტკიცებაზე. ვინაიდან $E|\xi_t - \xi_s|^4 = 3|t - s|^2$, ამიტომ კოლმოგოროვის თეორემის თანახმად უწყვეტი მოდიფიკაციის არსებობის შესახებ (თეორემა 2.5) ξ_t პროცესს გააჩნია უწყვეტი მოდიფიკაცია $\bar{\xi}_t$ $[0, +\infty)$ ნახევარღერძზე. აღვნიშნოთ

$$\Omega' := \bigcap_{r \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}_+} \{\omega : \xi_r(\omega) = \bar{\xi}_r(\omega)\} \cap \{\omega : \xi_t(\omega) \in C(0, +\infty)\},$$

სადაც Q_+ -ით აღნიშნულია რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე $[0, \infty)$ ნახევარღერძიდან, ხოლო $C(0, +\infty)$ -თი უწყვეტი ფუნქციების კლასი $(0, +\infty)$ -ზე.

ცხადია, რომ $P\{\Omega'\} = 1$. თუ $\omega \in \Omega'$, მაშინ $\xi_r(\omega) = \overline{\xi_r(\omega)}$, $\forall r \in Q_+$; $\overline{\xi_r}$ უწყვეტია, ხოლო ξ_t უწყვეტია, როცა $t > 0$. ამიტომ $\xi_t(\omega) = \overline{\xi_t(\omega)}$, როცა $t > 0$ და

$$\lim_{t \downarrow 0} \xi_t(\omega) = \lim_{t \downarrow 0} \overline{\xi_t(\omega)} = \overline{\xi_0(\omega)} = \xi_0(\omega),$$

რადგანაც $0 \in Q_+$. ამრიგად, თუ $\omega \in \Omega'$, მაშინ $\lim_{t \downarrow 0} \xi_t(\omega) = \xi_0(\omega)$.

ე. ი. ξ_t თ. ყ. უწყვეტია ნულში. $\square$

შედეგი 4.1. დავუშვათ, რომ $1/2 > \varepsilon > 0$, მაშინ $|w_s| \leq N_\varepsilon s^{1/2+\varepsilon}$, როცა $s \geq 2^n$.

დამტკიცება. თეორემა 3.6-ის ძალით თ. ყ. ω -სათვის მოიძებნება ისეთი ნომერი $n(\omega)$, რომ:

$$|\xi_t - \xi_s| \leq N_\varepsilon |t - s|^{1/2-\varepsilon}, |t - s| \leq 2^{-n}, t, s \leq 1.$$

კერძოდ, $|x_t| \leq N_\varepsilon |t|^{1/2-\varepsilon}$, $|t| \leq 2^{-n}$. ანუ

$$|tw_{1/t}| \leq N_\varepsilon |t|^{1/2-\varepsilon}, \quad |t| \leq 2^{-n}.$$

თუ უკანასკნელი თანაფარდობის ორივე მხარეს გავყოფთ t -ზე და აღვნიშნავთ $s := 1/t$, მაშინ დავრწმუნდებით შედეგის სამართლიანობაში.

შევნიშნოთ, რომ შედეგი 4.1-ის თანახმად ვინერის პროცესის თითქმის ყველა ტრაექტორია რაღაც მომენტიდან დაწყებული ვარდება $s^{1/2+\varepsilon}$ პარაბოლის შიგნით.

5. პირობითი მათემატიკური ლოდინი

დავუშვათ, რომ მოცემულია სრული ალბათური სივრცე (Ω, F, P) ; G არის F σ -ალგებრის სრული ქვე- σ -ალგებრა, $G \subset F$; ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებია, ისეთი, რომ $E|\xi| < \infty$, $E|\eta| < \infty$ და $\eta \in G$ -ზომადია.

განსაზღვრა 5.1. η შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი G σ -ალგებრის მიმართ და აღნიშნება $E[\xi | G]$ სიმბოლოთი, თუ ნებისმიერი A ხდომილობისათვის G σ -ალგებრიდან ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$E\xi\chi_A = E\eta\chi_A,$$

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში $E\xi = E\eta$.

აღნიშნული განსაზღვრა შეთანხმებულია პირობითი მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრასთან დაყოფის მიმართ (იხ. დამატება II).

ლემა 5.1. დავუშვათ, რომ $D = \{D_1, D_2, \dots\}$ სასრული ან თვლადი დაყოფაა ატომებით $D_i: \sum_i D_i = \Omega$ და $P(D_i) > 0$, $i \geq 1$. თუ $G = \sigma(D)$ და ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის განსაზღვრულია $E\xi$, მაშინ

$$E(\xi | D) = E(\xi | D_i) \quad (P - \text{თ. ყ. სიმრავლეზე } D_i)$$

ანუ

$$E(\xi | D) = \frac{E(\xi D_i)}{P(D_i)} \quad (P - \text{თ. ყ. სიმრავლეზე } D_i).$$

დამტკიცება. ცნობილია, რომ (იხ. ლემა II.4.3 [48]) თუ η $\sigma(D)$ -ზომადი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ იგი ლეზულობს მუდმივ მნიშვნელობას დაყოფის ელემენტებზე, ანუ წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\eta(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k I_{D_k}(\omega).$$

აღვნიშნოთ დაყოფის D_i ელემენტზე $\sigma(D)$ -ზომადი $E[\xi | G]$ შემთხვევითი სიდიდის მუდმივი მნიშვნელობა C_i სიმბოლოთი. მაშინ განსაზღვრის თანახმად:

$$E\xi\chi_{D_i} = E[E(\xi | G)]\chi_{D_i} = C_i P(D_i),$$

საიდანაც,

$$C_i = \frac{1}{P(D_i)} \cdot E\xi\chi_{D_i} = \frac{E\xi\chi_{D_i}}{P(D_i)} = E(\xi | D_i). \quad \square$$

თეორემა 5.1. თუ η_1 და η_2 შემთხვევითი სიდიდეები წარმოადგენენ ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობით მათემატიკურ ლოდინს G σ -ალგებრის მიმართ, მაშინ $\eta_1 = \eta_2$ (P -თ. ყ.).

დამტკიცება. განსაზღვრის თანახმად

$$E\eta_1\chi_A = E\eta_2\chi_A, \quad \forall A \in G.$$

აქედან

$$E(\eta_1 - \eta_2)\chi_A = 0, \quad \forall A \in G.$$

აღვნიშნოთ $A \equiv \{\omega : \eta_1(\omega) - \eta_2(\omega) > 0\}$. მაშინ ცხადია, რომ $A \in G$ და

$$0 = E(\eta_1 - \eta_2)\chi_A = E(\eta_1 - \eta_2)\chi_{\{\eta_1 - \eta_2 > 0\}},$$

საიდანაც გამოდის, რომ

$$(\eta_1 - \eta_2) \chi_{\{\eta_1 - \eta_2 > 0\}} = 0 \quad (P - \text{თ. ყ.}).$$

ე. ი. $\eta_1 - \eta_2 \leq 0$ (P - თ. ყ.). სრულიად ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ $\eta_1 - \eta_2 \geq 0$ (P - თ. ყ.), რაც მთლიანობაში გვაძლევს, რომ $\eta_1 = \eta_2$ (P - თ. ყ.). $\square$

ქვემოთ ჩვენ შევჩერდებით პირობითი მათემატიკური ლოდინის ზოგიერთ თვისებაზე.

თეორემა 5.2. თუ $E|\xi| < \infty$, მაშინ $E[\xi | G]$ არსებობს.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\xi \geq 0$ და განვსაზღვროთ (Ω, G, P) ალბათურ სივრცეზე ზომა $\mu(A) := E\xi \chi_A$, $A \in G$. ცხადია, რომ $\mu \ll P$. ამიტომ რადონ-ნიკოდიმის თეორემის თანახმად, არსებობს ისეთი G -ზომადი ფუნქცია η , რომ

$$\mu(A) = \int_A \eta(\omega) P(d\omega) = E\eta \chi_A = E\xi \chi_A.$$

ამიტომ პირობითი მათემატიკური ლოდინის როლში შეგვიძლია ავიღოთ η შემთხვევითი სიდიდე, როცა $\xi \geq 0$. ზოგად შემთხვევაში კი ვისარგებლებთ წარმოდგენით: $\xi = \xi^+ - \xi^-$ და პირობით მათემატიკურ ლოდინს განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად

$$E[\xi | G] := E[\xi^+ | G] - E[\xi^- | G]. \quad \square$$

თეორემა 5.3. 1. თუ $E|\xi| < \infty$, $c = \text{const}$, მაშინ $E[c\xi | G] = cE[\xi | G]$ (P - თ. ყ.), კერძოდ, $E[0 | G] = 0$ (P - თ. ყ.);

2. თუ $E|\xi| < \infty$, მაშინ $E\{E[\xi | G]\} = E\xi$;

3. თუ $E|\xi_1|, E|\xi_2| < \infty$, მაშინ $E[\xi_1 \pm \xi_2 | G] = E[\xi_1 | G] \pm E[\xi_2 | G]$ (P - თ. ყ.);

4. თუ $E|\xi| < \infty$ და ξ შემთხვევითი სიდიდე G -ზომადია, მაშინ

$$E[\xi | G] = \xi \quad (P - \text{თ. ყ.});$$

5. თუ $E|\xi| < \infty$, ხოლო $G_1 \subset G$, მაშინ

$$E\{E[\xi | G_1] | G\} = E\{E[\xi | G] | G_1\} = E[\xi | G_1] \quad (P - \text{თ. ყ.}).$$

დამტკიცება. 1-4 თვისებები ადვილად მოწმდება განსაზღვრის საფუძველზე. მე-5 თვისებაში დასამტკიცებელი თანაფარდობის განაპირა წევრების ტოლობა გამოდის მე-4 თვისებიდან. შევამოწმოთ ბოლო თანაფარდობა. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები $E[\xi | G_1] := \eta_1$, $E[\xi | G] := \eta$. ვინაიდან ნებისმიერი ხდომილება $A \in G_1$ იმავდროულად არის G - σ -ალგებრის ელემენტიც, ამიტომ განსაზღვრის თანახმად

$$E\eta\chi_A = E\xi\chi_A = E\eta_1\chi_A,$$

მაშასადამე, $\eta_1 = E[\eta | G_1]$. $\square$

თეორემა 5.4. 1. თუ $E|\xi_1|, E|\xi_2| < \infty$ და $\xi_2 \geq \xi_1$ (P -თ. ყ.), მაშინ

$$E[\xi_2 | G] \geq E[\xi_1 | G] \quad (P - \text{თ. ყ.});$$

2. (თეორემა მონოტონური კრებადობის შესახებ) თუ $E|\xi|, E|\xi_i| < \infty$, $i = 1, 2, \dots$, $\xi_{i+1} \geq \xi_i$ (P -თ. ყ.), $\xi = \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i$ (P -თ. ყ.), მაშინ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E[\xi_i | G] = E[\xi | G] \quad (P - \text{თ. ყ.});$$

3. (ფატუს ლემა) თუ $\xi_i \geq 0$, $E\xi_i < \infty$, $E\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i < \infty$, მაშინ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E[\xi_i | G] \geq E[\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i | G] \quad (P - \text{თ. ყ.});$$

4. (იენსენის უტოლობა) თუ ϕ სასრული, ამოზნექილი ფუნქციაა $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე და $E|\xi|, E|\phi(\xi)| < \infty$, მაშინ

$$E[\phi(\xi) | G] \geq \phi(E[\xi | G]) \quad (P - \text{თ. ყ.}).$$

დამტკიცება. 1. ალენიშნოთ $\eta_i := E[\xi_i | G], i = 1, 2; A := \{\omega : \eta_2(\omega) - \eta_1(\omega) \leq 0\}$. ვინაიდან $A \in G$, ამიტომ გვაქვს

$$\begin{aligned} E(\eta_2 - \eta_1)^- &= -E(\eta_2 - \eta_1)\chi_A = -E(\xi_2 - \xi_1)\chi_A \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\eta_2 - \eta_1)^- &= 0 \quad (P - \text{თ. ყ.}) \iff \eta_2 \geq \eta_1 \quad (P - \text{თ. ყ.}); \quad \square \end{aligned}$$

2. ალენიშნოთ $\eta_i := [\xi_i | G], i = 1, 2, \dots$, მაშინ 1-ლი თვისებიდან გამომდინარე, $\eta_{i+1} \geq \eta_i \quad (P - \text{თ. ყ.}) \Rightarrow \exists \tilde{\eta} = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta_i$. ამიტომ, მონოტონური კრებადობის თეორემის თანახმად, ნებისმიერი A ხდომილებისათვის G σ -ალგებრიდან, გვაქვს, რომ

$$\begin{aligned} E\xi\chi_A &= \lim_{i \rightarrow \infty} E\xi_i\chi_A = \lim_{i \rightarrow \infty} E\eta_i\chi_A = E \lim_{i \rightarrow \infty} \eta_i\chi_A = E\tilde{\eta}\chi_A \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{\eta} &= E[\xi | G] \quad (P - \text{თ. ყ.}); \quad \square \end{aligned}$$

3. მიმდევრობა $\inf_{i \geq n} \xi_i$ არაუარყოფითი და არაკლებადია, ამიტომ 1-ლი და მე-2 თვისებების ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned} E[\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n | G] &= E[\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{i \geq n} \xi_i | G] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\inf_{i \geq n} \xi_i | G] \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{i \geq n} E[\xi_i | G] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\xi_n | G] \quad (P - \text{თ. ყ.}); \quad \square \end{aligned}$$

4. მოიძებნება ისეთი მუდმივები $(a_i, b_i), i = 1, 2, \dots$ რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას $\phi(t) = \sup_{i \geq 1} (a_i t + b_i)$. ვინაიდან $\phi(t) \geq a_i t + b_i, \forall i \geq 1$, ამიტომ 1-ლი თვისებიდან გამომდინარე,

$$E[\phi(\xi) | G] \geq a_i E[\xi | G] + b_i \quad (P - \text{თ. ყ.}).$$

თუ ამ უტოლობის ორივე მხარეზე ავიღეთ $\sup_{i \geq 1}$, მივიღებთ, რომ

$$E[\phi(\xi) | G] \geq \phi(E[\xi | G]) \quad (P - \text{თ. ყ.}). \quad \square$$

- შედეგი 5.1.** 1. თუ $\xi \geq 0$, $E\xi < \infty$, მაშინ $E[\xi | G] \geq 0$ (P - თ. ყ.);
 2. თუ $p \geq 1$, $E|\xi|^p < \infty$, მაშინ $|E[\xi | G]|^p \leq E[|\xi|^p | G]$ (P - თ. ყ.), კერძოდ, $|E[\xi | G]| \leq E[|\xi| | G]$ (P - თ. ყ.);
 3. თუ $E|\xi| < \infty$ და $\lim_{i \rightarrow \infty} E|\xi - \xi_i| = 0$, მაშინ

$$\begin{aligned} E|E[\xi_i | G] - E[\xi | G]| &\leq E\{E[|\xi_i - \xi| | G]\} = \\ &= E|\xi_i - \xi| \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ე. ი. თუ $\xi_i \xrightarrow{L_1} \xi$, მაშინ $E[\xi_i | G] \xrightarrow{L_1} E[\xi | G]$.

თეორემა 5.5. 1. თუ $E|\xi| < \infty$ და ξ შემთხვევითი სიდიდე და-
 მოუკიდებელია G σ -ალგებრისგან, მაშინ $E[\xi | G] = E\xi$ (P -
 თ. ყ.), კერძოდ $E[c | G] = c$ (P - თ. ყ.), $c = \text{const}$;

2. თუ $E|\xi| < \infty$ და $B \in G$, მაშინ $E[\chi_B \xi | G] = \chi_B E[\xi | G]$ (P - თ. ყ.);

3. თუ $E|\xi| < \infty$, $E|\xi\xi'| < \infty$ და ξ შემთხვევითი სიდიდე G -
 ზომადია, მაშინ $E[\xi\xi' | G] = \xi E[\xi | G]$ (P - თ. ყ.).

დამტკიცება. 1. შემოვიღოთ აღნიშვნები $\kappa_n(t) := 2^{-n}[2^n t]$,
 $\xi_n := \kappa_n(\xi)$, სადაც $[\cdot]$ სიმბოლოთი აღნიშნულია მთელი ნაწილი.
 ცხადია, რომ $|\xi_n - \xi| \leq 1/2^n$. თუ ავიღებთ $A \in G$, მაშინ ლებეგის
 თეორემის თანახმად მაჟორირებადი კრებადობის შესახებ, გვქვნება

$$E\xi\chi_A = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n\chi_A = \lim_{n \rightarrow \infty} E \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{2^n} \chi_{\{\frac{k}{2^n} \leq \xi < \frac{k+1}{2^n}\} \cap A} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{2^n} P\left\{\frac{k}{2^n} \leq \xi < \frac{k+1}{2^n}\right\} \cap A = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{2^n} P\left\{\frac{k}{2^n} \leq \xi < \frac{k+1}{2^n}\right\} P(A) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n P(A) = E\xi P(A) = E\chi_A E\xi;
 \end{aligned}$$

2. აღვნიშნოთ $\eta := E[\xi | G]$. ნებისმიერი $A \in G$ ხდომილობისათვის გვაქვს

$$E(\xi \chi_B) \chi_A = E\xi \chi_{AB} = E\eta \chi_{AB} = E(\eta \chi_B) \chi_A;$$

3. ვინაიდან $\zeta = \zeta_+ - \zeta_-$, $|\xi \zeta_+|, |\xi \zeta_-| \leq |\xi \zeta|$, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\zeta \geq 0$. ამის შემდგომ კი შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ასევე $\xi \geq 0$. აღვნიშნოთ $\zeta_n := \kappa_n(\zeta)$, $B_{n,k} := \{\omega: \zeta_n(\omega) = k/2^n\}$. ცხადია, რომ $\zeta_n \xi \leq \zeta \xi$, $\zeta_n \uparrow \zeta$, $B_{n,k} \in G$. მეორე მხრივ, 2) თვისების ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned}
 \chi_{B_{n,k}} E[\xi \zeta_n | G] &= E[\xi \zeta_n \chi_{B_{n,k}} | G] = \\
 &= E\left[\xi \frac{k}{2^n} \chi_{B_{n,k}} | G\right] = \chi_{B_{n,k}} \zeta_n E[\xi | G] \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E[\xi \zeta_n | G] = \zeta_n E[\xi | G] \quad (P - \text{თ. ყ}) \quad B_{n,k} \text{ სიმრავლეზე} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[\xi \zeta_n | G] = \zeta_n E[\xi | G] \quad (P - \text{თ. ყ}).$$

ყოველივე ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარე, ვღებულობთ, რომ

$$E[\xi \zeta | G] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\xi \zeta_n | G] = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n E[\xi | G] = \zeta E[\xi | G] \quad (P - \text{თ. ყ}). \quad \square$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $E[\xi | \eta] := E[\xi | \sigma(\eta)]$. მაშინ, განსაზღვრის თანახმად, $E[\xi | \eta]$ არის $\sigma(\eta)$ -ზომადი შემთხვევითი სი-

დიდე. შესაბამისად, მოიძებნება ისეთი ბორელის აზრით ზომადი $m = m(y)$ ფუნქცია (იხ. თეორემა II. 4. 3 [48]), რომ

$$m(\eta(\omega)) = E[\xi | \eta](\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

ამ $m = m(y)$ ფუნქციას აღნიშნავენ $E[\xi | \eta = y]$ სიმბოლოთი და უწოდებენ ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობით მათემატიკურ ლოდინს $\{\eta = y\}$ ხდომილობის მიმართ ან ξ -ს პირობით მათემატიკურ ლოდინს პირობაში $\{\eta = y\}$.

განმარტების თანახმად ნებისმიერი $A \in \sigma(\eta)$ ხდომილობისათვის გვაქვს:

$$E(\xi \chi_A) = E\{E[\xi | \eta] \chi_A\} = E[m(\eta) \chi_A].$$

ამიტომ ლებეგის ინტეგრალში, ცვლადის შეცვლის თეორემის ძალით (იხ. თეორემა II. 6. 7 [48]), შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\int_{\{\omega: \eta \in B\}} m(\eta) P(d\omega) = \int_B m(y) P_\eta(dy), \quad B \in B(R^1),$$

სადაც P_η η -ს განაწილებაა. შესაბამისად, $m = m(y)$ წარმოადგენს ისეთ ბორელის ფუნქციას, რომლისთვისაც

$$\int_{\{\omega: \eta \in B\}} \xi P(d\omega) = \int_B m(y) P_\eta(dy), \quad B \in B(R^1).$$

ამრიგად, ჩვენ მივდივართ $E[\xi | \eta = y]$ პირობითი მათემატიკური ლოდინის შემდეგ განსაზღვრამდე:

განსაზღვრა 5.2. დავუშვათ, რომ $E\xi$ განმარტებულია. ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობით მათემატიკურ ლოდინი პირობაში, რომ $\{\eta = y\}$, ეწოდება ნებისმიერ ბორელის აზრით ზომად $m = m(y)$ ფუნქციას, რომლისთვისაც სრულდება თანაფარდობები:

$$\int_{\{\omega: \eta \in B\}} \xi P(d\omega) = \int_B m(y) P_\eta(dy), \quad B \in B(R^1).$$

ლემა 5.2. თუ $B \in B(R^2)$ და ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$E[I_B(\xi, \eta) | \eta = y] = EI_B(\xi, y) \quad (P_\eta - \text{თ. ყ.}). \quad (1)$$

დამტკიცება. თუ $B = B_1 \times B_2$, მაშინ (1) თანაფარდობის სამართლიანობისათვის საკმარისია შევამოწმოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_{\{\omega: \eta \in A\}} I_{B_1 \times B_2}(\xi, \eta) P(d\omega) = \int_A EI_{B_1 \times B_2}(\xi, y) P_\eta(dy).$$

მაგრამ, ვინაიდან უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარე ემთხვევა ალბათობას $P\{\xi \in B_1, \eta \in A \cap B_2\}$, მარჯვენა მხარე კი – $P\{\xi \in B_1\} \cdot P\{\eta \in A \cap B_2\}$ -ს, ამიტომ მათი ტოლობა გამომდინარეობს ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობიდან. □

პროპოზიცია 5.1. ლემა 5. 2-ისა და მონოტონურ კლასებზე თეორემის (იხ. თეორემა II. 2. 1 [48]) გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი დებულებები:

თეორემა 5.6. ა) ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, $f(x, y)$ ორი ცვლადის ბორელის ფუნქციაა ისეთი, რომ $E | f(\xi, \eta) | < \infty$, მაშინ

$$E[f(\xi, \eta) | \eta = y] = E[f(\xi, y)] \quad (P_\eta - \text{თ. ყ.});$$

ბ) თუ $f(x, y)$ ორი ცვლადის ბორელის ფუნქციაა, $\xi - G$ -ზომადია, ξ დამოუკიდებელია G σ -ალგებრისაგან და $E|f(\xi, \zeta)| < \infty$ მაშინ $\Phi(y) := Ef(\xi, y)$ ბორელის ფუნქციაა და $E[f(\xi, \zeta) | G] = \Phi(\zeta)$ (P - თ.ყ.).

თეორემა 5.7.1. თუ $H \equiv L_2(\Omega, F, P)$ და $H_1 \equiv L_2(\Omega, G, P)$ ნამდვილი ჰილბერტის სივრცეებია, H_1 არის H -ის ქვესივრცე, Π_G ორთოგონალური პროექტირების ოპერატორია H სივრცისა H_1 ქვესივრცეზე და $E\xi^2 < \infty$, მაშინ $E[\xi | G] = \Pi_G \xi$;

2. თუ $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega, G = \overline{\sigma}\{A_i, i \geq 1\}$ გასრულებული σ -ალგებრაა, $E|\xi| < \infty$ და $P(A_i) > 0 \quad \forall i \geq 1$, მაშინ

$$E[\xi | G] = \frac{1}{P(A_i)} E\xi \chi_{A_i} \quad (P - \text{თ. ყ.}) \quad A_i \text{ სიმრავლეზე};$$

3. (თეორემა ნორმალური კორელაციის შესახებ) თუ $(\xi, \xi_1, \dots, \xi_n)$ გაუსის ვექტორია და $G = \overline{\sigma}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, მაშინ

$$E[\xi | G] := E[\xi | \xi_1, \dots, \xi_n] = a + b_1 \xi_1 + \dots + b_n \xi_n \quad (P - \text{თ. ყ.}),$$

სადაც $a, b_1, \dots, b_n$ მუდმივები შემდეგი სისტემის ნებისმიერი ამონახსნია:

$$\begin{cases} E\xi = a + b_1 E\xi_1 + \dots + b_n E\xi_n \\ E\xi\xi_i = aE\xi_i + b_1 E\xi_1\xi_i + \dots + b_n E\xi_n\xi_i, i=1, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

ამასთანავე, უკანასკნელ სისტემას ყოველთვის გააჩნია ამონახსნი.

დამტკიცება. 1. როგორც ცნობილია, $\Pi_G \xi - \xi \perp H_1$. ე. ი. $\forall \eta \in H_1 : E\eta(\xi - \Pi_G \xi) = 0$. ამიტომ თუ ავიღებთ $\eta = \chi_A, A \in G$, გვექნება

$$E\xi \chi_A = E\chi_A \Pi_G \xi,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $E[\xi | G] = \Pi_G \xi$, ვინაიდან $\Pi_G \xi$ არის G -ზომადი, რადგანაც $\Pi_G \xi \in H_1$;

2. აღვნიშნოთ

$$\eta(\omega) \equiv \frac{1}{P(A_i)} E\xi\chi_{A_i}, \text{ როცა } \omega \in A_i.$$

ცხადია, რომ η G -ზომადი და ინტეგრებადია, ვინაიდან

$$E|\eta| = \sum_{i=1}^{\infty} E|\eta|\chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} |E\xi\chi_{A_i}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} E|\xi\chi_{A_i}| = E|\xi| < \infty.$$

ნებისმიერი $A \in G$ წარმოიდგინება შემდეგნაირად

$$A = \sum_j A_{i(j)} \cup N,$$

სადაც $i(j_1) \neq i(j_2)$, როცა $j_1 \neq j_2$ და $P(N) = 0$. ამიტომ გვაქვს

$$E\xi\chi_A = \sum_j E\xi\chi_{A_{i(j)}} = \sum_j E\eta\chi_{A_{i(j)}} = E\eta\chi_A;$$

3. აღვნიშნოთ

$$\Phi(a, b_1, \dots, b_n) := E[\xi - (a + b_1\xi_1 + \dots + b_n\xi_n)]^2.$$

ვინაიდან $\Phi(a, b_1, \dots, b_n)$ არაუარყოფითი კვადრატული ფუნქციაა, ამიტომ ის აღწევს თავის მინიმუმს. დავუშვათ, რომ მინიმუმის წერტილებია $a, b_1, \dots, b_n$. ამ წერტილებში წარმოებულები უნდა იყოს ნული. თუ ავიღებთ $\Phi(a, b_1, \dots, b_n)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულებს და გავუტოლებთ ნულს, დავრწმუნდებით, რომ მინიმუმის წერტილები აკმაყოფილებენ (1) სისტემას.

ავიღოთ (1) სისტემის რომელიმე ამონახსნი და განვიხილოთ სიდიდე $\eta = \xi - (a + b_1\xi_1 + \dots + b_n\xi_n)$. როგორც (1) სისტემიდან ჩანს, $E\eta = 0$ და $E[\eta(\xi_i - E\xi_i)] = 0$, $i = 1, \dots, n$. მაშასადამე, გვაქვს არაკორელირებულობა, რაც გაუხურობის გამო ტოლფასია დამოუკიდებლობის. ე. ი. η დამოუკიდებელია $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ვექტორისაგან. ამიტომ

$$E\eta\chi_{\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in B^{(n)}\}} = 0.$$

როგორც ცნობილია, ნებისმიერ ხდომილობას $\sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ -დან აქვს სახე

$$\{\omega : (\xi_1, \dots, \xi_n) \in B^{(n)}\},$$

ხოლო G σ -ალგებრის ელემენტს აქვს სახე $\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in B^{(n)}\} \cup N$, სადაც $P(N) = 0$. ამიტომ ნებისმიერი $A \in G$ ხდომილობისათვის გვაქვს $E\eta\chi_A = 0 \Rightarrow E[\eta | G] = 0$ (P -თ. ყ.) $\Rightarrow E[\xi | G] = a + b_1\xi_1 + \dots + b_n\xi_n$ (P -თ. ყ.). $\square$

პირობა 5.2. პირობითი მათემატიკური ლოდინი წარმოადგენს საუკეთესო შეფასებას საშუალო კვადრატული აზრით.

დამტკიცება. მართლაც, თუ $E\xi^2 < \infty$, $H = L_2(\Omega, G, P)$, მაშინ თეორემა 5.7.1)-ის თანახმად გვაქვს

$$\begin{aligned} \inf_{\eta \in G\text{-ზომადია}} E(\xi - \eta)^2 &= \inf_{\eta \in H} E(\xi - \eta)^2 = E(\xi - \Pi_G \xi)^2 = \\ &= E(\xi - E[\xi | G])^2. \quad \square \end{aligned}$$

პირობა 5.2. დავუშვათ, რომ $(\xi, \xi_1, \dots, \xi_n)$ გაუსის ვექტორია, $G = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $L(\xi_1, \dots, \xi_n) = \{a + b_1\xi_1 + \dots + b_n\xi_n : a, b_i \in \mathbb{R}^1, i = 1, \dots, n\}$, ხოლო Π_L - ორთოგონალური პროექტირების ოპერატორი $L_2(\Omega, F, P)$ სივრცისა $L(\xi_1, \dots, \xi_n)$ -ზე. ვაჩვენოთ, რომ $\Pi_L \xi = E[\xi | \xi_1, \dots, \xi_n]$.

6. ნახევრად მარტინგალები დისკრეტული დროით

ვიგულისხმობთ, რომ მოცემულია სრული ალბათური სივრცე (Ω, F, P) და F σ -ალგებრის სრულ ქვე- σ -ალგებრათა ზრდადი ოჯახი $F_n, n=1, \dots, N, F_n \subset F_{n+1} \subset F$. გარდა ამისა, მოცემულია ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_n, E|\xi_n| < \infty, n=1, \dots, N$.

მანსაზღვრა 6.1. შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_n, n=1, \dots, N$, მიმდევრობას ეწოდება შესაბამისად **მარტინგალი**, **სუბმარტინგალი** ან **სუპერმარტინგალი** σ -ალგებრათა F_n ნაკადის მიმართ თუ:

1. $\forall n=1, \dots, N$ შემთხვევითი სიდიდე ξ_n ზომადია F_n σ -ალგებრის მიმართ;

2. თითქმის ყველგან სრულდება შესაბამისად შემდეგი თანადარდობები: $E[\xi_m | F_n] = \xi_n, m \geq n; E[\xi_m | F_n] \geq \xi_n, m \geq n$ ან

$E[\xi_m | F_n] \leq \xi_n, m \geq n$ (სუბმარტინგალსა და სუპერმარტინგალს **ნახევრად მარტინგალებს** უწოდებენ).

განმარტებიდან გამომდინარე, მარტინგალური მიმდევრობის მათემატიკური ლოდინების მიმდევრობა მუდმივია, სუბმარტინგალურის – ზრდადი, ხოლო სუპერმარტინგალურის – კლებადი.

პაპალითი 6.1:

1. თუ $E|\xi| < \infty$ და $\xi_n := E[\xi | F_n]$, მაშინ $\{\xi_n, F_n\}$ მარტინგალია;

2. თუ $\eta_1, \dots, \eta_N$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, $F_n := \overline{\sigma}(\eta_1, \dots, \eta_n)$ და $\xi_n := \sum_{i=1}^n \eta_i$, მაშინ $\{\xi_n, F_n\}$ იქნება შესაბამისი

სად მარტინგალი, სუბმარტინგალი ან სუპერმარტინგალი, თუ შე-
საბამისად $E\eta_i = 0$, $E\eta_i \geq 0$ ან $E\eta_i \leq 0$, $\forall i = 1, \dots, N$;

3. თუ w_t ვინერის პროცესია და $F_n = \overline{\sigma}(w_1, \dots, w_n)$, მაშინ $\{w_n, F_n\}$ და $\{\xi_n, F_n\}$, სადაც $\xi_n := e^{w_n - n/2}$ წარმოადგენს მარტინგალს;

4. თუ ξ_n მარტინგალია, ϕ ამოზნექილი ფუნქციაა და $E|\phi(\xi_n)| < \infty \quad \forall n$, მაშინ $\phi(\xi_n)$ სუბმარტინგალია, კერძოდ, $|\xi_n|$, $(\xi_n)^+$ და $(\xi_n)^-$ სუბმარტინგალია;

5. თუ ξ_n სუბმარტინგალია, ხოლო ϕ ისეთი ამოზნექილი არა-
კლებადი ფუნქციაა, რომ $E|\phi(\xi_n)| < \infty \quad \forall n$, მაშინ $\phi(\xi_n)$ სუბმარ-
ტინგალია, კერძოდ, $(\xi_n)^+$ და $(\xi_n)^-$ სუბმარტინგალია.

ლემა 6.1. თუ $\forall n: \xi_n, F_n$ -ზომადია და $E|\xi_n| < \infty$, მაშინ $\{\xi_n, F_n\}$ სუბმარტინგალია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $E[\xi_{n+1} | F_n] \geq \xi_n \quad \forall n$ (P -თ.ყ.).

დამტკიცება. აუცილებლობა ცხადია. რაც შეეხება საკმარისობას, იგი ადვილად მიიღება ქვემოთ მოყვანილი თანაფარდობიდან:

$$E[\xi_{n+2} | F_n] = E\{E[\xi_{n+2} | F_{n+1}] | F_n\} \geq E[\xi_{n+1} | F_n] \geq \xi_n \quad (P\text{-თ.ყ.}).$$

ცხადია, რომ თუ $\{\xi_n, F_n\}_{n=1, \dots, N}$ მარტინგალია, მაშინ მარტინგალი იქნება აგრეთვე $\{\eta_n, F_n\}$, სადაც $\eta_n = \xi_n, n = 1, \dots, N$; $\eta_n = \xi_N, n \geq N$ და $F_n = F_N, n \geq N$. $\square$

პანსაზღვრა 6.2. ვიგულისხმობთ, რომ $\forall n \quad F_{n+1} \subset F_n \subset F$; $E|\xi_n| < \infty$ და $\xi_n - F_n$ -ზომადია. მაშინ ამბობენ, რომ $\{\xi_n, F_n\}$ შემო-
ბრუნებული მარტინგალია, თუ $E[\xi_{n-1} | F_n] = \xi_n \quad \forall n$ (P -თ.ყ.).

თეორემა 6.1. დავუშვათ, რომ $\eta_1, \dots, \eta_N$ დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული, ინტეგრებადი ($E|\eta_i| < \infty$) შემთხვევითი სიდიდეებია, $\xi_n := \frac{1}{n}(\eta_1 + \dots + \eta_n)$, $F_n := \overline{\sigma}\{\xi_m, m \geq n\}$, მაშინ $\{\xi_n, F_n\}_{n=1, \dots, N}$ შებრუნებული მარტინგალია.

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $E[\eta_1 | F_n] = \xi_n$ (თ.ყ.). ამ უკანასკნელი თანაფარდობის სამართლიანობისათვის კი საკმარისია შემოწმდეს, რომ $E[\eta_i | F_n] = E[\eta_1 | F_n]$, $i \leq n$. ვაჩვენოთ $i = 2$ -ის შემთხვევაში (ანალოგიურად შემოწმდება სხვა შემთხვევაშიც). ამისათვის გავითვალისწინოთ, რომ $A \in F_n$ ხდომილებას აქვს სახე $A = \{(\xi_n, \dots, \xi_N) \in B\} \cup A_0$, სადაც $B \in B(R^{N-n+1})$ და $P(A_0) = 0$. გარდა ამისა, ვინაიდან $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_N)$ და $(\eta_2, \eta_1, \eta_3, \dots, \eta_N)$ ვექტორებს გააჩნიათ ერთი და იგივე განაწილება, ამიტომ ერთი და იგივე განაწილება ექნებათ ვექტორებს

$$(\eta_1, \frac{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n}{n}, \dots, \frac{\eta_1 + \dots + \eta_N}{N})$$

და

$$(\eta_2, \frac{\eta_2 + \eta_1 + \eta_3 + \dots + \eta_n}{n}, \dots, \frac{\eta_2 + \eta_1 + \eta_3 + \dots + \eta_N}{N}).$$

ყოველივე ზემოთ აღნიშნულის საფუძველზე $\forall A \in F_n$ ხდომილებისათვის გვაქვს:

$$\begin{aligned} E\eta_1 \chi_A &= E\eta_1 \chi_{\{(\xi_n, \dots, \xi_N) \in B\}} = E\eta_1 \chi_{\{(\frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{n}, \dots, \frac{\eta_1 + \dots + \eta_N}{N}) \in B\}} = \\ &= E\eta_2 \chi_{\{(\frac{\eta_2 + \eta_1 + \eta_3 + \dots + \eta_n}{n}, \dots, \frac{\eta_2 + \eta_1 + \eta_3 + \dots + \eta_N}{N}) \in B\}} = E\eta_2 \chi_{\{(\xi_n, \dots, \xi_N) \in B\}} = E\eta_2 \chi_A. \quad \square \end{aligned}$$

პანსაზღვრა 6.3. არაუარყოფით, მთელმნიშვნელობიან შემთხვევით სიდიდეს $\tau(\omega)$ ეწოდება მარკოვის მომენტი σ -ალგებრათა F_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, ნაკადის მიმართ, თუ

$$\{\omega : \tau(\omega) > n\} \in F_n \quad \forall n.$$

აშოცნა 6.1. 1. $\tau(\omega)$ მარკოვის მომენტი F_n ნაკადის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in F_n \quad \forall n$;

2. თუ τ_1 და τ_2 მარკოვის მომენტებია, მაშინ $\tau_1 \vee \tau_2$, $\tau_1 \wedge \tau_2$ და $\tau_1 + \tau_2$ აგრეთვე მარკოვის მომენტებია.

მაგალითი 6.2. დავუშვათ, რომ ξ_n შემთხვევითი სიდიდეები F_n -ზომადია, $n = 0, 1, 2, \dots$, $c \in (-\infty, \infty)$. მაშინ

$$\tau(\omega) := \inf\{m \geq 0 : \xi_m(\omega) > c\}, \quad \inf \emptyset = +\infty$$

ნარმოადგენს მარკოვის მომენტს F_n ნაკადის მიმართ.

მართლაც, $\{\omega : \tau(\omega) > n\} = \{\omega : \xi_1(\omega) \leq c, \dots, \xi_n(\omega) \leq c\} \in F_n$.

თეორემა 6.2 (ლუზი). თუ $\{\xi_n, F_n\}_{n=0,1,\dots}$ სუბმარტინგალია, ხოლო τ – მარკოვის მომენტი F_n ნაკადის მიმართ, მაშინ $\{\xi_{n \wedge \tau}, F_n\}_{n=0,1,\dots}$ აგრეთვე სუბმარტინგალია.

დამტკიცება. ცხადია, რომ, ვინაიდან $\xi_{n \wedge \tau}$ წარმოადგენს სასრული ჯამის სახით

$$\xi_{n \wedge \tau} = \xi_0 \chi_{\{\tau=0\}} + \xi_1 \chi_{\{\tau=1\}} + \dots + \xi_n \chi_{\{\tau=n\}} + \xi_n \chi_{\{\tau>n\}},$$

ამიტომ $E | \xi_{n \wedge \tau} | < \infty$ და $\xi_{n \wedge \tau}$ არის F_n -ზომადი. გარდა ამისა,

$$\chi_{\{\tau \leq n\}} \xi_\tau = \xi_0 \chi_{\{\tau=0\}} + \xi_1 \chi_{\{\tau=1\}} + \dots + \xi_n \chi_{\{\tau=n\}}.$$

ამიტომ გვაქვს

$$\begin{aligned} E[\xi_{(n+1) \wedge \tau} | F_n] &= E[\xi_{(n+1) \wedge \tau} \chi_{\{\tau>n\}} | F_n] + E[\xi_{(n+1) \wedge \tau} \chi_{\{\tau \leq n\}} | F_n] = \\ &= E[\xi_{n+1} \chi_{\{\tau>n\}} | F_n] + E[\xi_\tau \chi_{\{\tau \leq n\}} | F_n] = \chi_{\{\tau>n\}} E[\xi_{n+1} | F_n] + \\ &+ \xi_\tau \chi_{\{\tau \leq n\}} \geq \chi_{\{\tau>n\}} \xi_{n+1} + \xi_\tau \chi_{\{\tau \leq n\}} = \xi_{n \wedge \tau} \quad (\text{თ.ყ.}), \end{aligned}$$

რაც ლემა 6.1-ის ძალით გვიჩვენებს, რომ $\{\xi_{n \wedge \tau}, F_n\}_{n=0,1,\dots}$ წარმოადგენს სუბმარტინგალს. $\square$

პედიკი 6.1. თუ τ შემოსაზღვრული მარკოვის მომენტია, მაშინ $\{\omega : \tau(\omega) \geq n\}$ სიმრავლეზე (P - თ.ყ.) სრულდება უტოლობა $E[\xi_\tau | F_n] \geq \xi_n$.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\tau(\omega) \leq N$, მაშინ $\xi_\tau = \xi_{\tau \wedge (N+n)}$ და ამიტომ თეორემის თანახმად გვაქვს

$E[\xi_\tau | F_n] = E[\xi_{\tau \wedge (N+n)} | F_n] \geq \xi_{\tau \wedge n} = \xi_n$ (P - თ.ყ.) $\{\omega : \tau(\omega) \geq n\}$ სიმრავლეზე.

პანსაზღვრა 6.4. თუ τ გაჩერების მომენტია, მაშინ F_τ σ -ალგებრა განიმარტება შემდეგნაირად

$$F_\tau \equiv \{A \in F : A \cap \{\tau \leq n\} \in F_n, n = 0, 1, 2, \dots, \infty\}.$$

ლემა 6.2. თუ τ და σ გაჩერების მომენტებია, ხოლო $\xi, \xi_n, n = 0, 1, \dots, \infty$ შემთხვევითი სიდიდეებია ისეთი, რომ $\forall n \quad \xi_n - F_n$ -ზომადია და $E|\xi| < \infty$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ დებულებებს:

1. $A \in F_\tau \iff A \cap \{\tau = n\} \in F_n, n = 0, 1, \dots, \infty$.
2. $\{\omega : \tau(\omega) \leq \sigma(\omega)\} \in F_\tau \cap F_\sigma$; თუ $\tau \leq \sigma$ მაშინ $F_\tau \subset F_\sigma$.
3. შემთხვევითი სიდიდეები τ, ξ_τ და $\xi_n \chi_{\{\tau=n\}}$ ზომადია F_τ σ -ალგებრის მიმართ, $n = 0, 1, \dots, \infty$.
4. $E[\xi | F_\tau] = E[\xi | F_n] \quad (P - \text{თ.ყ.}) \quad \{\tau = n\}$ სიმრავლეზე, $n = 0, 1, \dots, \infty$.

დამტკიცება. 1. ცხადია, ვინაიდან $\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}$;

2. ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \{\tau \leq \sigma\} \cap \{\tau = n\} &= \{\tau \leq \sigma, \tau = n\} = \{n \leq \sigma, \tau = n\} = \\ &= \{n \leq \sigma\} \cap \{\tau = n\} \in F_n, \end{aligned}$$

ამიტომ 1-ლის ძალით $\{\tau \leq \sigma\} \in F_\tau$. ანალოგიურად,

$$\{\tau \leq \sigma\} \cap \{\sigma = n\} = \{\tau \leq n\} \cap \{\sigma = n\} \in F_n \Rightarrow \{\tau \leq \sigma\} \in F_\sigma$$

და, მაშასადამე, $\{\omega : \tau(\omega) \leq \sigma(\omega)\} \in F_\tau \cap F_\sigma$.

დავუშვათ ახლა, რომ $\tau \leq \sigma$ და ავიღოთ $A \in F_\tau$, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\begin{aligned} A \cap \{\sigma = n\} &= \sum_{i=0}^n A \cap \{\sigma = n, \tau = i\} = \\ &= \sum_{i=0}^n (A \cap \{\tau = i\}) \cap \{\sigma = n\} \in F_n \Rightarrow A \in F_\sigma \Rightarrow F_\tau \subset F_\sigma; \end{aligned}$$

3. ავიღოთ მე-2-ში σ გაჩერების მომენტის როლში n , მაშინ მე-2-ის თანახმად $\{\tau \leq n\} \in F_\tau$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\tau \in F_\tau$ -ზომადია;

აღვნიშნოთ, $A \equiv \{\omega : \xi_{\tau(\omega)}(\omega) > c\}$, მაშინ გვაქვს

$$\begin{aligned} A \cap \{\tau = n\} &= \{\omega : \xi_n(\omega) > c\} \cap \{\omega : \tau(\omega) = n\} \in F_n \Rightarrow \\ A \in F_\tau &\Rightarrow \xi_\tau \in F_\tau\text{-ზომადია.} \end{aligned}$$

დაბოლოს, ვინაიდან $\xi_n \chi_{\{\tau=n\}} = \xi_\tau \chi_{\{\tau=n\}}$, ამიტომ $\xi_n \chi_{\{\tau=n\}}$ აგრეთვე F_τ -ზომადია;

4. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\eta := \chi_{\{\tau=n\}} E[\xi | F_\tau], \quad \zeta := \chi_{\{\tau=n\}} E[\xi | F_n].$$

ვინაიდან,

$$\{\eta > c\} = \{\tau \neq n, 0 > c\} + \{\tau = n, E[\xi | F_\tau] > c\} \in F_n,$$

ამიტომ $\eta \in F_n$ -ზომადია.

ანალოგიურად შემოწმდება, რომ ζ აგრეთვე F_n -ზომადია. გარდა ამისა, მე-3-ის ძალით, ნებისმიერი $A \in F_n$ ხდომილობისათვის $\chi_A \chi_{\{\tau=n\}} \in F_\tau$ -ზომადია, რადგანაც $\xi_n \equiv \chi_A$ შემთხვევითი სიდიდე F_n -ზომადია. საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ $\forall A \in F_n :$

$$\begin{aligned} E\chi_A\eta &= E\chi_A\chi_{\{\tau=n\}}E[\xi | F_\tau] = E\chi_A\chi_{\{\tau=n\}}\xi = \\ &= E\chi_{A\cap\{\tau=n\}}\xi = E\chi_{A\cap\{\tau=n\}}E[\xi | F_n] = E\chi_A\xi, \end{aligned}$$

ე. ი. $\eta = E[\xi | F_n] = \xi$ (P - თ. ყ.). $\square$

თეორემა 6.3 (დუბის თეორემა თავისუფალი ამორჩევის შესახებ). დაუშვათ, რომ $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots}$ სუბმარტინგალია, ხოლო $\tau_i, i = 1, \dots, m$ შემოსაზღვრული, არაკლებადი გაჩერების მომენტებია F_n ნაკადის მიმართ ($\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_m$), მაშინ $(\xi_{\tau_i}, F_{\tau_i})_{i=1,\dots,m}$ აგრეთვე სუბმარტინგალია.

დამტკიცება. ლემა 6.2-ის თანახმად ξ_{τ_i}, F_{τ_i} -ზომადია და $\{\tau_i = n\}$ სიმრავლეზე (P - თ. ყ.)

$$E[\xi_{\tau_{i+1}} | F_{\tau_i}] = E[\xi_{\tau_{i+1}} | F_n] \geq \xi_n = \xi_{\tau_i},$$

სადაც უტოლობა სამართლიანია 6.1 შედეგის საფუძველზე, რადგანაც აღნიშნულ სიმრავლეზე $\tau_{i+1} \geq n$. ე. ი.

$E[\xi_{\tau_{i+1}} | F_{\tau_i}] \geq \xi_{\tau_i}$ $\{\tau_i = n\}$ სიმრავლეზე (P - თ. ყ.) ყოველი n -სათვის, მაგრამ, ვინაიდან

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{\tau_i = n\} = \Omega,$$

ამიტომ თეორემის დამტკიცება დასრულებულია. $\square$

შევნიშნავთ, რომ დუბის თეორემას თავისუფალი ამორჩევის შესახებ შეიძლება მიეცეს შემდეგი ინტერპრეტაცია: თუ თამაში მომგებიანია, მაშინ თამაშში ჩართვის მომენტის შეცვლისას ის ისევ რჩება მომგებიანად.

პიკეტი 6.2. თუ $\tau \leq \sigma$ შემოსაზღვრული გაჩერების მომენტებია, მაშინ $E\xi_\tau \leq E\xi_\sigma$.

ამოცანა 6.2. თუ $\xi_n, n = 0, 1, \dots$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა ისეთია, რომ $E|\xi_n| < \infty$, ξ_n, F_n -ზომადია $\forall n$ და $E\xi_\tau \leq E\xi_\sigma$

ნებისმიერი $\tau \leq \sigma$ შემოსაზღვრული გაჩერების მომენტებისათვის, მაშინ (ξ_n, F_n) სუბმარტინგალია.

თეორემა 6.4 (კოლმოგოროვ-დუბის უტოლობები). 1. თუ $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots}$ სუბმარტინგალია, $c > 0$, ხოლო N მთელი რიცხვია, მაშინ:

$$ა) P\{\max_{n \leq N} \xi_n \geq c\} \leq \frac{1}{c} E\xi_N \chi_{\{\max_{n \leq N} \xi_n \geq c\}} \leq \frac{1}{c} E\xi_N^+;$$

$$ბ) P\{\sup_n \xi_n \geq c\} \leq \frac{1}{c} \sup_n E\xi_n^+;$$

2. თუ $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots}$ სუპერმარტინგალია ისეთი, რომ $\xi_n \geq 0 \ \forall n$ და $c > 0$, მაშინ:

$$P\{\sup_n \xi_n \geq c\} \leq \frac{1}{c} E\xi_0.$$

დამტკიცება. 1 ა) შემოვიღოთ გაჩერების მომენტი

$$\tau := \inf\{n \geq 0 : \xi_n \geq c\},$$

მაშინ 6.3 თეორემის ძალით $\xi_{\tau \wedge N} \leq E[\xi_N | F_{\tau \wedge N}]$ (თ.ყ.). ამიტომ ჩებიშევის უტოლობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\begin{aligned} P\{\max_{n \leq N} \xi_n \geq c\} &= P\{\xi_\tau \chi_{\{\tau \leq N\}} \geq c\} \leq \frac{1}{c} E\{\xi_\tau \chi_{\{\tau \leq N\}}\} = \\ &= \frac{1}{c} E\{\chi_{\{\tau \leq \tau \wedge N\}} \xi_{\tau \wedge N}\} \leq \frac{1}{c} E\{\chi_{\{\tau \leq \tau \wedge N\}} E[\xi_N | F_{\tau \wedge N}]\} = \\ &= \frac{1}{c} E\{E[\chi_{\{\tau \leq \tau \wedge N\}} \xi_N | F_{\tau \wedge N}]\} = \frac{1}{c} E\{\xi_N \chi_{\{\tau \leq N\}}\} = \\ &= \frac{1}{c} E\{\xi_N \chi_{\{\max_{n \leq N} \xi_n \geq c\}}\} \leq \frac{1}{c} E\xi_N^+; \end{aligned}$$

1 ბ) ავიღოთ $c > \varepsilon > 0$, მაშინ ცხადია ,

$$\{\sup_n \xi_n \geq c\} \subset \bigcup_N \{\max_{n \leq N} \xi_n \geq c - \varepsilon\},$$

ამიტომ 1 ა) თანაფარდობის საფუძველზე გვაქვს

$$\begin{aligned} P\{\sup_n \xi_n \geq c\} &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} P\{\max_{n \leq N} \xi_n \geq c - \varepsilon\} \leq \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{c - \varepsilon} E \xi_N^+ \leq \frac{1}{c - \varepsilon} \sup_n E \xi_n^+. \end{aligned}$$

აქედან, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$, ვღებულობთ ბ) შეფასებას;

2. შემოვიღოთ გაჩერების მომენტი $\tau := \inf\{n \geq 0 : \xi_n \geq c\}$, მაშინ ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} P\{\sup_{n \leq N} \xi_n \geq c\} &\leq \frac{1}{c} E\{\xi_\tau \chi_{\{\tau \leq N\}}\} = \\ &= \frac{1}{c} E\{\xi_{\tau \wedge N} \chi_{\{\tau \leq N\}}\} \leq \frac{1}{c} E \xi_{\tau \wedge N} \leq \frac{1}{c} E \xi_0. \end{aligned}$$

თუ აქ, ისევე როგორც 1 ბ) შეფასების მიღებისას, გადავალთ ზღვარზე, როცა $N \rightarrow \infty$, მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას. $\square$

თეორემა 6.5 (დუბის უტოლობა). დავუშვათ, რომ $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots}$ არაუარყოფითი სუბმარტინგალია და $p > 1$. მაშინ

$$E(\sup_n \xi_n)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_n E \xi_n^p.$$

დამტკიცება. ვიგულისხმობთ, რომ $a > 0$, N მთელი რიცხვია და $c > 0$. ცხადია, რომ

$$\{\max_{n \leq N} (\xi_n \wedge a) \geq c\} = \begin{cases} \emptyset, & a < c \\ \{\max_{n \leq N} \xi_n \geq c\}, & a \geq c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[\max_{n \leq N} (\xi_n \wedge a) \geq c] \leq \frac{1}{c} E[\xi_N \chi_{\{\max_{n \leq N} (\xi_n \wedge a) \geq c\}}].$$

თუ უკანასკნელი უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ pc^{p-1} -ზე, გავაინტეგრებთ dc -თი, ავიღებთ მათემატიკურ ლოდინს და ვისარგებლებთ თანაფარდობით

$$\eta^p = p \int_0^\infty c^{p-1} \chi_{\{\eta \geq c\}} dc \quad (\eta := \max_{n \leq N} (\xi_n \wedge a)),$$

მაშინ ფუბინის თეორემისა და ჰელდერის უტოლობის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\begin{aligned} E\eta^p &= E[\max_{n \leq N} (\xi_n \wedge a)]^p \leq p E[\xi_N \int_0^\infty c^{p-2} \chi_{\{\max_{n \leq N} (\xi_n \wedge a) \geq c\}} dc] = \\ &= \frac{p}{p-1} E[\xi_N \eta^{p-1}] \leq \frac{p}{p-1} (E\xi_N^p)^{1/p} (E\eta^p)^{\frac{p-1}{p}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow E[\max_{n \leq N} (\xi_n \wedge a)]^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\xi_N^p \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{a \rightarrow \infty} E(\max_{n \leq N} \xi_n)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\xi_N^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_n E\xi_n^p \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} E(\sup_n \xi_n)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_n E\xi_n^p. \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ ორივე ზღვარზე გადასვლა სამართლიანია მონოტონური კრებადობის თეორემის საფუძველზე. □

7. ნახევრად მარტინგალების კრებადობა

ვიგულისხმობთ, რომ მოცემულია $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots,N}$ სუბმარტინგალი და $a < b$. განვმარტოთ გაჩერების მომენტები:

$$\tau_1 = \inf\{n : \xi_n \leq a\} \wedge N, \quad \sigma_1 = \inf\{n > \tau_1 : \xi_n \geq b\} \wedge N, \dots,$$

$$\tau_n = \inf\{n > \sigma_{n-1} : \xi_n \leq a\} \wedge N,$$

$$\sigma_n = \inf\{n > \tau_n : \xi_n \geq b\} \wedge N, \quad n = 1, 2, \dots$$

გასაგებია, რომ

$$0 \leq \tau_1 \leq \sigma_1 \leq \tau_2 \leq \sigma_2 \leq \dots, \quad \tau_{N+i} = N, \quad \sigma_{N+i} = N, \quad i = 0, 1, \dots$$

აღვნიშნოთ $\beta(a, b)$ სიმბოლოთი ξ_n -ის მიერ $[a, b]$ მონაკვეთის ქვევიდან ზევით გადაკვეთათა რიცხვი. ფორმალურად,

$$\beta(a, b) = m \iff \xi_{\tau_m} \leq a, \quad \xi_{\sigma_m} \geq b \text{ და}$$

$$\text{ან } \xi_{\tau_{m+1}} > a \text{ ან } \xi_{\sigma_{m+1}} < b.$$

თეორემა 7.1 (ლუზის თეორემა გადაკვეთათა რიცხვის შესახებ). თუ $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots,N}$ სუბმარტინგალია, მაშინ

$$E\beta(a, b) \leq \frac{1}{b-a} E(\xi_N - a)^+.$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ $\eta_n := (\xi_n - a)^+$ არაუარყოფითი სუბმარტინგალია და $\beta_\xi(a, b) = \beta_\eta(0, b-a)$. ამიტომ საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\xi_n \geq 0$, $a = 0$. ვინაიდან, $\xi_{\sigma_i} - \xi_{\tau_i} \geq b \wedge 0$, $i = 1, \dots, N$, ამიტომ გვაქვს

$$\begin{aligned} b\beta(0,b) &\leq (\xi_{\sigma_1} - \xi_{\tau_1}) + (\xi_{\sigma_2} - \xi_{\tau_2}) + \dots + (\xi_{\sigma_N} - \xi_{\tau_N}) = \\ &= -\xi_{\tau_1} + (\xi_{\sigma_1} - \xi_{\tau_2}) + (\xi_{\sigma_2} - \xi_{\tau_3}) + \dots + \xi_{\sigma_N} \Rightarrow \\ &\Rightarrow bE\beta(0,b) \leq E\xi_{\sigma_N} = E\xi_N, \end{aligned}$$

რადგანაც, თეორემა 6.3-ის თანახმად, $\xi_{\sigma_i} \leq \xi_{\tau_{i+1}}$, $i = 1, 2, \dots, N$,
ხოლო $\xi_{\sigma_N} = \xi_N$, ვინაიდან $\sigma_N = N$. $\square$

საინტერესოა შემდეგი ფაქტი: მიუხედავად იმისა, რომ $\xi_{\sigma_1} \geq b$
და $\xi_{\tau_2} \leq a$, ადგილი აქვს უტოლობას $E\xi_{\sigma_1} \leq E\xi_{\tau_2}$. ეს აიხსნება
იმით, რომ დიდი ალბათობით $\sigma_1 = N$.

როცა $N = \infty$: $\beta(a,b) := \lim_{N \rightarrow \infty} \beta(N, [a,b])$.

პიქეტი 7.1. თუ $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots}$ სუბმარტინგალია, მაშინ

$$E\beta(a,b) \leq \frac{1}{b-a} (\sup_n E\xi_n^+ + |a|).$$

თეორემა 7.2 (უსასრულოაში ზღვრის არსებობის პიქეტი).

თუ (ξ_n, F_n) , $n = 0, 1, \dots$ ნახევრად მარტინგალია, მაშინ $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$
არსებობს ალბათობით ერთი შემდეგ პირობებში:

1. $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots}$ სუბმარტინგალია და $\sup_n E\xi_n^+ < \infty$;
2. $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots}$ სუპერმარტინგალია და $\sup_n E\xi_n^- < \infty$;
3. $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots}$ მარტინგალია და $\sup_n E|\xi_n| < \infty$.

დამტკიცება. ცხადია, რომ 1-დან მიიღება მე-2 და მე-3.
შევამოწმოთ 1-ლი დებულების სისწორე. გვაქვს:

$$\{\omega : \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)} > \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)}\} = \bigcup_{a < b; a, b \in \mathbb{Q}_+} \{\omega : \beta(a,b) = \infty\}.$$

მეორე მხრივ, შედეგი 7.1-ის თანახმად

$$E\beta(a,b) < \infty \Rightarrow P\{\beta(a,b) = \infty\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\{\omega: \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) > \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)\} = 0 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \text{ ალბათობით } 1. \square$$

პედიკი 7.2. 1. არაუარყოფით სუპერმარტინგალს გააჩნია ზღვარი უსასრულობაში ალბათობით 1 ;

2. თუ $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots}$ მარტინგალია, $|\xi_n| < \xi, \forall n$ და $E|\xi| < \infty$, მაშინ

$$\exists \xi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \text{ ალბათობით ერთი და } \xi_n = E[\xi_\infty | F_n]$$

(ე. ი. ყველა შემოსაზღვრული მარტინგალი ჩაინერება პირობითი მათემატიკური ლოდინის საშუალებით).

დამტკიცება. შევამოწმოთ უკანასკნელი თანაფარდობა. $\forall A \in F_n$ ხდომილობისათვის გვაქვს

$$E\xi_n \chi_A = E\chi_A \xi_{n+m} = \lim_{m \rightarrow \infty} E\chi_A \xi_{n+m} = E\chi_A \xi_\infty. \quad \square$$

პროცანა 7.1. $\xi_n \equiv e^{w_n - \frac{n}{2}} \geq 0$ მარტინგალია; $\exists \xi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ (თ.ყ.);

$$\xi_n \geq E[\xi_\infty | F_n] = 0 \text{ (თ.ყ.); } E \sup_n \xi_n = \infty.$$

თეორემა 7.3. თუ $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots}$ შებრუნებული მარტინგალია, მაშინ ალბათობით 1 არსებობს ზღვარი $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $\overline{\beta}_\xi(N, [a, b])$ (შესაბამისად $\overline{\beta}_\xi(a, b)$) სიმბოლოთი ξ_n -ის მიერ $[a, b]$ მონაკვეთის ზევიდან ქვევით გადაკვეთათა რიცხვი, როცა $n = 0, 1, \dots, N$ (შესაბამისად, როცა $n = 0, 1, \dots$). შევამოწმოთ, რომ

$$E\overline{\beta}_\xi(N, [a, b]) \leq \frac{1}{b-a} (E\xi_0^+ + |a|).$$

ამისათვის $(\xi_n, F_n)_{n=0,1,\dots,N}$ შებრუნებული მარტინგალიდან გადავიდეთ მარტინგალზე $(\eta_n, G_n) := (\xi_{N-n}, F_{N-n})$. ცხადია, რომ $\overline{\beta}_\xi(N, [a, b]) = \beta_\eta(N, [a, b])$. აქედან, მაჟორირებადი კრებადობის თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$E \overline{\beta}_\xi(a, b) \leq \frac{1}{b-a} (E \xi_0^+ + |a|) < \infty,$$

საიდანაც, ისევე როგორც თეორემა 7.2-ის დამტკიცებისას, ვღებულობთ, რომ ალბათობით 1 არსებობს ზღვარი $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$. $\square$

თეორემა 7.4 (ლევი). თუ ξ ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდეა $E|\xi| < \infty$, მაშინ:

1. თუ $F_n \subset F_{n+1}$, $\forall n = 0, 1, \dots$ და $F_\infty := \sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n)$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\xi | F_n] = E[\xi | F_\infty] \quad (P - \text{თ. ყ.}) \quad (1)$$

და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|E[\xi | F_n] - E[\xi | F_\infty]| = 0 \quad (P - \text{თ. ყ.}) \quad (2);$$

2. თუ $F_{n+1} \subset F_n$, $\forall n = 0, 1, \dots$ და $F_\infty := \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$, მაშინ აგრეთვე

სამართლიანია (1) და (2) თანაფარდობები.

წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი დამხმარე დებულება.

ლემა 7.1 (ჰეჯი). თუ ξ_n , $n = 0, 1, \dots$ არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდეებია, $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $E|\xi| < \infty$ და $E\xi_n \rightarrow E\xi$, მაშინ $\lim_{n \rightarrow \infty} E|\xi_n - \xi| = 0$.

დამტკიცება. ვინაიდან $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\xi - \xi_n \leq \xi$ და $E|\xi| < \infty$, ამიტომ ლებეგის თეორემის თანახმად მაჟორირებული კრებადობის შესახებ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\xi - \xi_n) = 0 \text{ და } \lim_{n \rightarrow \infty} E(\xi - \xi_n)^+ = 0.$$

$$\text{მეორე მხრივ, } |\xi - \xi_n| = 2(\xi - \xi_n)^+ - (\xi - \xi_n).$$

$$\text{და, მაშასადამე, } \lim_{n \rightarrow \infty} E|\xi_n - \xi| = 0. \quad \square$$

ლემის თეორემის დამტკიცება. 1. საკმარისია განვიხილოთ $\xi \geq 0$ შემთხვევა, რადგანაც $\xi = \xi^+ + \xi^-$. (2) თანათარდობა მიიღება (1) -დან შეფეს ლემის საფუძველზე. შევამოწმოთ (1). აღვნიშნოთ $\eta := E[\xi | F_\infty]$. ცხადია, რომ $\eta \geq 0$, η F_∞ -ზომადია და $E[\xi | F_n] = E[\eta | F_n]$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\eta | F_n] = \eta \text{ (} P \text{ - თ.ყ.)}.$$

ვინაიდან, $(E[\eta | F_n], F_n)_{n=0,1,\dots}$ არაუარყოფითი მარტინგალია, ამიტომ შედეგი 7.2-ის თანახმად არსებობს ზღვარი $\bar{\eta} := \lim_{n \rightarrow \infty} E[\eta | F_n]$, რომელიც ზომადია F_∞ σ -ალგებრის მიმართ, რადგანაც თითოეული $E[\eta | F_n]$ შემთხვევითი სიდიდე F_n -ზომადია, ხოლო $F_n \subset F_\infty$. დავუშვათ, რომ η შემოსაზღვრულია, მაშინ ნებისმიერი $A \in F_n$ ხდომილობისათვის, ლებეგის თეორემის თანახმად, გვაქვს

$$E\chi_A \bar{\eta} = \lim_{m \rightarrow \infty} E\{\chi_A E[\eta | F_m]\} \stackrel{m \geq n}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} E\chi_A \eta = E\chi_A \eta.$$

ე. ი.

$$0 = E\chi_A (\bar{\eta} - \eta) := \mu(A) \quad \forall A \in F_n, \quad \forall n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ზომა } \mu(A) = 0 \quad \forall A \in \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \Rightarrow \mu(A) = 0 \quad \forall A \in F_\infty.$$

თუ ავიღებთ $A = \{\omega : \bar{\eta}(\omega) - \eta(\omega) > 0\} \in F_\infty$, გვექნება $E\chi_A (\bar{\eta} - \eta) = E(\bar{\eta} - \eta)^+ = 0$. ანალოგიურად, შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $E(\bar{\eta} - \eta)^- = 0$. და, მაშასადამე $\bar{\eta} = \eta$ (P - თ.ყ.).

ზოგად შემთხვევაში, ფატუს ლემის თანახმად, გვაქვს

$$E\chi_A \bar{\eta} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E\{\chi_A E[\eta | F_n]\} = E\chi_A \eta, \quad \forall A \in F_n.$$

ე. ი. $0 \geq E\chi_A (\bar{\eta} - \eta)$, $\forall A \in F_n$ და $\forall n$. აქედან, ისევე როგორც ზემოთ, მივიღებთ, რომ $\bar{\eta} \leq \eta$ (P - თ.ყ.).

მეორეს მხრივ, თუ η შემთხვევითი სიდიდის ნაცვლად გადავალთ $\eta \wedge a$ შემოსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეზე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\eta | F_n] &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} E[\eta \wedge a | F_n] = \eta \wedge a \quad (P - \text{თ. ყ.}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{\eta} &\geq \eta \wedge a \quad (P - \text{თ. ყ.}) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \bar{\eta} \geq \eta \quad (P - \text{თ. ყ.}) \end{aligned}$$

და საბოლოოდ გვაქვს, რომ $\bar{\eta} = \eta$ (P - თ. ყ.);

2. ისევ ვიგულისხმობთ, რომ $\xi \geq 0$. შემოვიღოთ პროცესი $\xi_n := E[\xi | F_n]$. იგი წარმოადგენს შებრუნებულ მარტინგალს. ამიტომ არსებობს ზღვარი $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n := \bar{\eta}$. შემდეგ მივყევით პირველი ნაწილის დამტკიცების გზას. კერძოდ, თუ ξ შემოსაზღვრულია, მაშინ მაჟორირებული კრებადობის თეორემის საფუძველზე ვაჩვენებთ, რომ $\bar{\eta} = \eta$ (P - თ.ყ.). ზოგად შემთხვევაში კი, ერთი მხრივ, თუ $A \in F_\infty$ (ე. ი. $A \in F_n$, $\forall n$), მაშინ ფატუს ლემის საფუძველზე გვაქვს

$$\begin{aligned} E\chi_A \bar{\eta} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} E\chi_A \xi_n = E\chi_A \xi = E\{\chi_A E[\xi | F_\infty]\} = \\ &= E\chi_A \eta \quad (\eta := E[\xi | F_\infty]) \Rightarrow \bar{\eta} \leq \eta \quad (P - \text{თ. ყ.}), \end{aligned}$$

ხოლო მეორე მხრივ, თუ გადავალთ შემოსაზღვრულ $\xi \wedge a$ შემთხვევით სიდიდეზე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$\Rightarrow$ *ო. ფურთუხია* $\Leftarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\xi | F_n] \geq \lim_{n \rightarrow \infty} E[\xi \wedge a | F_n] = E[\xi \wedge a | F_\infty] \quad (P - \text{თ. ყ.}),$$

საიდანაც, მონოტონური კრებადობის თეორემის საფუძველზე, როცა $a \rightarrow \infty$, ვღებულობთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\xi | F_n] \geq E[\xi | F_\infty] \quad (P - \text{თ. ყ.}),$$

ე. ი. $\bar{\eta} \geq \eta$ (P - თ. ყ.) და საბოლოოდ გვაქვს, რომ $\bar{\eta} = \eta$ (P - თ. ყ.). $\square$

თეორემა 7.5 (კოლმოგოროვი, დიდ რიცხვთა გაქლირებული კანონი). თუ $\eta_1, \eta_2, \dots$ დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია, საშუალოთი $E\eta_i = m$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\eta_1 + \dots + \eta_n) = m \quad (P - \text{თ. ყ.})$$

და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left| \frac{1}{n} (\eta_1 + \dots + \eta_n) - m \right| = 0 \quad (P - \text{თ. ყ.}).$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები $\xi_n := \frac{1}{n} (\eta_1 + \dots + \eta_n)$, $F_n^N := \sigma(\xi_n, \dots, \xi_N)$, $F_n := \sigma(\bigcup_{N \geq n} F_n^N) = \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$. ცხადია, რომ $(\xi_n, F_n^N)_{n=1, \dots, N}$ შებრუნებული მარტინგალია. კერძოდ,

$$\xi_n = E[\xi_1 | F_n^N] = E[\xi_1 | F_n],$$

სადაც უკანასკნელი ტოლობა მიიღება ლევის თეორემიდან, როცა $N \rightarrow \infty$.

ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $m = 0$. ვინაიდან, $F_{n+1} \subset F_n$, $\forall n = 1, 2, \dots$, ამიტომ ლევის თეორემის თანახმად გვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = E[\xi_1 | \bigcap_n F_n] := \tilde{\xi}.$$

მაშასადამე, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\tilde{\xi} = 0$ (P - თ. ყ.). გვაქვს:

$$\xi_1 = \eta_1, \quad E\eta_1 = 0, \quad \phi(t) := Ee^{it\eta_1} = 1 + o(t^2) \Rightarrow Ee^{it\tilde{\xi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} Ee^{it\xi_n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [\phi(\frac{t}{n})]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + o(\frac{t}{n}))^n = 1 \Rightarrow \tilde{\xi} = 0 \quad (P - \text{თ. ყ.}). \quad \square$$

აქვე შევნიშნავთ, რომ ბერნულის სქემის შემთხვევაში დიდ რიცხვთა კანონი და მისი დაზუსტებები – ე. წ. ლოკალური და ინტეგრალური ზღვარიანი თეორემები – მოყვანილია III დამატებაში.

8. დამოუკიდებელნაზრდებიანი პროცესები

ვიგულისხმობთ, რომ რაიმე ალბათურ სივრცეზე მოცემულია ნამდვილმნიშვნელობიანი შემთხვევითი პროცესი ξ_t , $t \in [0, \infty)$.

განსაზღვრა 8.1. ξ_t შემთხვევით პროცესს ეწოდება დამოუკიდებელნაზრდებიანი, თუ $\xi_0 = 0$ ალბათობით 1 და შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ ($0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < \infty$) დამოუკიდებელია.

განსაზღვრა 8.2. ξ_t შემთხვევით პროცესს ეწოდება სტოქასტურად უწყვეტი t_0 წერტილში, თუ $P - \lim_{t \rightarrow t_0} \xi_t = \xi_{t_0}$ (ანუ

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P\{\omega : |\xi_t(\omega) - \xi_{t_0}(\omega)| > \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0).$$

ცხადია, რომ ჩებიშევის უტოლობის თანახმად, იმისათვის, რომ ξ_t შემთხვევითი პროცესი იყოს სტოქასტურად უწყვეტი t_0 წერტილში, საკმარისია, რომ $\lim_{t \rightarrow t_0} E |\xi_t - \xi_{t_0}| = 0$.

განსაზღვრა 8.3. თუ ξ_t შემთხვევითი პროცესი მოცემულია $I \subset [0, \infty)$ სიმრავლეზე, მაშინ ამბობენ, რომ იგი შემოსაზღვრულია ალბათობით, თუ

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} P\{\omega : |\xi_t(\omega)| > c\} = 0.$$

თეორემა 8.1. თუ ξ_t შემთხვევითი პროცესი სტოქასტურად უწყვეტია ყოველ წერტილში $[0, T]$ ინტერვალიდან, მაშინ ξ_t შემო-

საზღვრულია ალბათობით ერთი $[0, T]$ -ზე და თანაბრად სტოქასტურად უწყვეტია $[0, T]$ ინტერვალზე:

$$\forall \varepsilon > 0, \gamma > 0 \exists \delta > 0: \sup_{|t_1 - t_2| < \delta, t_1, t_2 \in [0, T]} P\{\omega: |\xi_{t_1}(\omega) - \xi_{t_2}(\omega)| > \varepsilon\} < \gamma.$$

თეორემა 8.2 (ლევის უტოლობა). დაუშვათ, რომ $\xi_k, k=1, \dots, n$, დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, $0 \leq \alpha \leq 1, a \geq 0$, $S_k := \xi_1 + \dots + \xi_k$ და

$$P\{\omega: |S_n - S_k| \geq a\} \leq \alpha, \forall k=1, \dots, n. \quad (1)$$

მაშინ $\forall c \geq 0$ ადგილი აქვს შეფასებას:

$$P\{\omega: \sup_{k=1, \dots, n} |S_k(\omega)| \geq a + c\} \leq \frac{1}{1 - \alpha} P\{\omega: |S_n(\omega)| \geq c\}.$$

დამტკიცება. გვაქვს:

$$\begin{aligned} & P\{\omega: \sup_{k=1, \dots, n} |S_k(\omega)| \geq a + c\} = \\ &= \sum_{k=1}^n P\{\omega: |S_i(\omega)| < a + c, i < k, |S_k(\omega)| \geq a + c\} \stackrel{(1)}{\leq} \\ &\leq \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^n P\{\omega: |S_i(\omega)| < a + c, i < k, |S_k(\omega)| \geq \\ &\geq a + c\} P\{\omega: |S_n(\omega) - S_k(\omega)| < a\} = \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^n P\{\omega: |S_i(\omega)| < a + c, i < k, |S_k(\omega)| \geq \\ &\geq a + c, |S_n(\omega) - S_k(\omega)| < a\} \leq \\ &\leq \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^n P\{\omega: |S_i(\omega)| < a + c, i < k, |S_k(\omega)| \geq \\ &\geq a + c, |S_n(\omega) - S_k(\omega)| \geq c\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1-\alpha} P\{\omega: \sup_{k=1, \dots, n} |S_k(\omega)| \geq a+c, |S_n(\omega)| \geq c\} \leq \\
 &\leq \frac{1}{1-\alpha} P\{\omega: |S_n(\omega)| \geq c\}. \square
 \end{aligned}$$

თეორემა 8.3. დავეშვათ, რომ $\xi_t, t \in [0, T]$ სტოქასტურად უწყვეტი, დამოუკიდებელნაზრდებიანი პროცესია ($T \in [0, \infty)$), ხოლო Q_0^T – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე $[0, T]$ ინტერვალთან. მაშინ

$$P\{\omega: \sup_{t \in Q_0^T} |\xi_t(\omega)| < \infty\} = 1$$

(ე. ი. ξ_t ალბათობით 1 შემოსაზღვრულია Q_0^T სიმრავლეზე).

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\forall h > 0, t \in [0, T]$:

$$P\{\omega: \sup_{s \in Q_0^T \cap [t, t+h]} |\xi_s(\omega)| < \infty\} = 1.$$

ავარჩიოთ h ისე, რომ

$$P\{\omega: |\xi_{s_1}(\omega) - \xi_{s_2}(\omega)| > 1\} \leq 1/2, \quad |s_1 - s_2| \leq h, \quad s_1, s_2 \in [0, T].$$

ავიღოთ რაციონალური რიცხვები $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$, $r_i \in Q_0^T \cap [t, t+h]$. $\xi_{r_1}, \xi_{r_2}, \dots, \xi_{r_n}$ წარმოადგენს დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამების მიმდევრობას: $\xi_{r_2} = \xi_{r_1} + (\xi_{r_2} - \xi_{r_1}), \dots, \xi_{r_n} = \xi_{r_1} + (\xi_{r_2} - \xi_{r_1}) + \dots + (\xi_{r_n} - \xi_{r_{n-1}})$. ამიტომ ლევის უტოლობის თანახმად ვწერთ

$$\begin{aligned}
 P\{\omega: \sup_{k=1, \dots, n} |\xi_{r_k}(\omega)| \geq c+1\} &\leq 2P\{\omega: |\xi_{r_n}(\omega)| \geq c\} \leq \\
 &\leq 2 \sup_{s \in Q_0^T} P\{\omega: |\xi_s(\omega)| \geq c\}.
 \end{aligned}$$

ეს უტოლობა სამართლიანია r_n წერტილთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის. შეიძლება ისინი დალაგდეს ზრდადობის მიხედვით $Q_0^T \cap [t, t+h] = \{r_1, r_2, \dots\}$. მაშინ ცხადია, რომ:

$$\sup_{k=1, \dots, n} |\xi_{r_k}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in Q_0^T \cap [t, t+h]} |\xi_r|.$$

სიმრავლეთა მიმდევრობა

$$\{\omega : \sup_{k=1, \dots, n} |\xi_{r_k}(\omega)| \geq c+1\}$$

ზრდადია და მათი გაერთიანება მოიცავს

$$\{\omega : \sup_{r \in Q_0^T \cap [t, t+h]} |\xi_r(\omega)| > c+1\}$$

სიმრავლეს. აქედან გამომდინარე გვაქვს:

$$\begin{aligned} & P\{\omega : \sup_{r \in Q_0^T \cap [t, t+h]} |\xi_r(\omega)| > c+1\} \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : \sup_{k=1, \dots, n} |\xi_{r_k}(\omega)| \geq c+1\} \leq \\ & \leq 2 \sup_{s \in Q_0^T} P\{\omega : |\xi_s(\omega)| \leq c\} \rightarrow 0, \text{ როცა } c \rightarrow \infty \Rightarrow \\ & \Rightarrow P\{\omega : \sup_{r \in Q_0^T \cap [t, t+h]} |\xi_r(\omega)| = \infty\} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

განსაზღვრა 8.4. სკოროხოვის სივრცე – $D([0, \infty))$ ეწოდება $[0, \infty)$ ინტერვალზე განსაზღვრული ყველა ისეთი კომპლექსური ფუნქციების ერთობლიობას, რომლებიც უწყვეტია მარჯვნიდან $[0, \infty)$ ინტერვალის ნებისმიერ წერტილში და რომელთაც გააჩნიათ სასრული მარცხენა ზღვარი $[0, \infty)$ ინტერვალის ყოველ წერტილში.

ანალოგიურად განისაზღვრება $D([0, T])$.

ვიგულისხმობთ, რომ Q_0 რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა $[0, 1]$ ინტერვალიდან, $Q_0 = \{r_1, r_2, \dots\}$, x ფუნქცია მოცემულია და შემოსაზღვრულია Q_0 -ზე, $a < b$, $\beta_n(x, a, b) = r_1, r_2, \dots, r_n$ წერტი-

ლებზე განხილული x_t ტრაექტორიის მიერ (a, b) ინტერვალის ქვევიდან ზევით გადაკვეთათა რიცხვი, $x_t := \lim_{r \downarrow t, r \in Q_0} x_r$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი :

ლემა 8.1. თუ ნებისმიერი რაციონალური a და b რიცხვებისათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(x, a, b) < \infty,$$

მაშინ ნებისმიერი $t \in [0, 1]$ რიცხვისათვის არსებობს x_t და $x_t \in D([0, 1])$, ამასთანავე, x_t შეიძლება განისაზღვროს ნებისმიერად.

ლემა 8.2. დაეუშვათ, რომ $\forall \lambda \in (-\infty, +\infty)$ და $\forall t \in [0, 1]$ განსაზღვრულია რაიმე ფუნქცია $\psi(t, \lambda)$, რომელიც უწყვეტია t -ს მიმართ, $\psi(t, \lambda) \neq 0$; ξ_t სტოქასტურად უწყვეტი პროცესია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\sup_{t \in Q_0} |\xi_t| < \infty \quad (P - \text{თ.ყ.})$$

და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \beta_n(\eta_t^i(\lambda), a, b) < \infty \quad \forall a < b, i = 1, 2,$$

სადაც

$$\eta_t^1(\lambda) := \operatorname{Re}\{e^{i\lambda\xi_t}\psi(t, \lambda)\}, \quad \eta_t^2(\lambda) := \operatorname{Im}\{e^{i\lambda\xi_t}\psi(t, \lambda)\}.$$

მაშინ ξ_t შემთხვევით პროცესს გააჩნია მოდიფიკაცია, რომლის ყველა ტრაექტორია ეკუთვნის $D([0, 1])$ სივრცეს.

დამტკიცება. ალენიშნოთ

$$\eta_t(\lambda) := e^{i\lambda\xi_t}\psi(t, \lambda);$$

$$\Omega' := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{a < b, a, b \in Q} \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n\left(\eta_t^i\left(\frac{1}{m}\right), a, b\right) < \infty, i = 1, 2, \sup_{t \in Q_0} |\xi_t| < \infty \right\}.$$

ვინაიდან Ω' სიმრავლის შემადგენელი ნებისმიერი სიმრავლის ალბათობა ერთია, ამიტომ $P\{\Omega'\} = 1$. განვმარტოთ ახალი პროცესი:

$$\bar{\eta}_t\left(\frac{1}{m}\right) := \begin{cases} \lim_{r \downarrow t, r \in Q_0} \eta_r\left(\frac{1}{m}\right), & t < 1, \omega \in \Omega'; \\ \eta_1\left(\frac{1}{m}\right), & t = 1, \omega \in \Omega' \quad (\Leftarrow \text{ლემა 8.1}); \\ 0, & \omega \notin \Omega'. \end{cases}$$

თუ გამოვიყენებთ ლემა 8.1-ს ცალკე ნამდვილი და ცალკე წარმოსახვითი ნაწილებისათვის, დავრწმუნდებით, რომ ასეთნაირად განმარტებული პროცესის ყველა ტრაექტორია $D([0,1])$ სივრცე-დანაა. ამასთანავე, შევნიშნოთ, რომ

$$|\bar{\eta}_t\left(\frac{1}{m}\right)\psi^{-1}\left(t, \frac{1}{m}\right)| \leq 1 \quad \forall t \quad (P - \text{თ. ყ.}) \quad (2)$$

და

$$\bar{\eta}_t\left(\frac{1}{m}\right) = \eta_t\left(\frac{1}{m}\right) \quad \forall t \in Q_0 \quad (P - \text{თ. ყ.}),$$

ვინაიდან η_t სტოქასტურად უწყვეტი პროცესია.

შემოვიღოთ სიდიდე

$$\mu = \mu(\omega) := [\sup_{t \in Q_0} |\xi_t(\omega)| + 1]$$

და განვმარტოთ პროცესი

$$\bar{\xi}_t := \arcsin[Im\{\bar{\eta}_t\left(\frac{1}{m}\right)\psi^{-1}\left(t, \frac{1}{m}\right)\}].$$

ახლა საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\bar{\xi}_t$ წარმოადგენს ξ_t შემთხვევითი პროცესის მოდიფიკაციას. მართლაც, თუ $t \in Q_0$, მაშინ (2) თვისების ძალით

$\Rightarrow$ *მ. ფურთუხია* $\Leftarrow$

$$\bar{\xi}_t = \arcsin(\sin \frac{1}{\mu} \xi_t)^{\mu > \xi_t} = \xi_t \text{ (P - თ. ყ.)},$$

ხოლო თუ t ირაციონალურია, მაშინ

$$\bar{\xi}_t = \lim_{r \downarrow t, r \in Q_0} \bar{\xi}_r = \lim_{r \downarrow t, r \in Q_0} \xi_r = \xi_t \text{ (P - თ. ყ.)}. \quad \square$$

თეორემა 8.4. თუ $[0, \infty)$ ინტერვალზე სტოქასტურად უწყვეტი ξ_t პროცესი დამოუკიდებელნაზრდებია, მაშინ მას გააჩნია მოდიფიკაცია $D([0, \infty))$ სივრციდან.

დამტკიცება. თეორემა საკმარისია დამტკიცდეს $[0, 1]$ ინტერვალის შემთხვევაში (ზოგად შემთხვევაზე გადასვლა მოხდება გადანებებით, ისევე როგორც კოლმოგოროვის თეორემაში). შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქციები

$$\phi(t, \lambda) := Ee^{i\lambda\xi_t}; \quad \phi(t_1, t_2, \lambda) := Ee^{i\lambda(\xi_{t_1} - \xi_{t_2})}.$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი λ -სათვის ფუნქცია $\phi(t_1, t_2, \lambda)$ უწყვეტია (t_1, t_2) -ით $[0, 1]^2$ კვადრატზე. ამიტომ ის თანაბრად უწყვეტია. ხოლო ვინაიდან $t_1 = t_2$ დიაგონალზე $\phi(t_1, t_2, \lambda) = 1$, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია, ისე შევარჩიოთ $\delta(\lambda) > 0$, რომ:

$$|\phi(t_1, t_2, \lambda)| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{როცა} \quad |t_1 - t_2| < \delta(\lambda).$$

მეორე მხრივ, თუ $t = t_n$, მაშინ

$$\phi(t, \lambda) = \phi(t_1, \lambda)\phi(t_2, t_1, \lambda) \cdots \phi(t_n, t_{n-1}, \lambda).$$

ამიტომ თუ ავიღებთ $|t_i - t_{i-1}| < \delta(\lambda)$, $i = 2, 3, \dots, n$, ვნახავთ, რომ $\phi(t, \lambda) \neq 0$ (ყველა თანამამრავლი $\geq 1/2$ -ზე).

განვიხილოთ პროცესი

$$\eta_t = \eta_t(\lambda) := e^{i\lambda\xi_t} \phi^{-1}(t, \lambda).$$

ავიღოთ $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n = 1$ რაციონალური რიცხვები და ალენიშნოთ

$$F_k := \overline{\sigma}\{\xi_{s_1}, \xi_{s_2} - \xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_n} - \xi_{s_{n-1}}\}.$$

ვაჩვენოთ, რომ $(\eta_{s_k}, F_k)_{k=1,2,\dots,n}$ მარტინგალია (ე. ი. როგორც ნამდვილი, ასევე წარმოსახვითი ნაწილი მარტინგალია). მართლაც, ξ_t პროცესის ნაზრდების დამოუკიდებლობის ძალით, გვაქვს

$$\begin{aligned} E[Re\{\eta_{s_{k+1}}\} | F_k] &= Re\{E[\eta_{s_{k+1}} | F_k]\} = \\ &= Re\{E[e^{i\lambda \xi_{s_k}} \phi^{-1}(s_{k+1}, \lambda) e^{i\lambda(\xi_{s_{k+1}} - \xi_{s_k})} | F_k]\} = \\ &= Re\{e^{i\lambda \xi_{s_k}} \phi^{-1}(s_{k+1}, \lambda) \phi(s_{k+1}, s_k, \lambda)\} = \\ &= Re\{i\lambda \xi_{s_k} \phi^{-1}(s_k, \lambda)\} = Re\{\eta_{s_k}\}. \end{aligned}$$

ანალოგიურად შემომდებლა წარმოსახვითი ნაწილისათვის.

გადავწოდოთ ახლა რაციონალური რიცხვები $[0,1]$ ინტერვალშიდან: $r_1, r_2, \dots$ დაუშვათ, $\{r_1, \dots, r_n\} = \{s_1, \dots, s_n\}$ რაიმე გადანაცვლებაა, მაშინ დუბის უტოლობის თანახმად:

$$\begin{aligned} E\beta_n(Re\{\eta\}, a, b) &\leq \frac{1}{b-a} (E |Re\{\eta_{s_n}\}| + a) \leq \\ &\leq \frac{1}{b-a} (E |\eta_{s_n}| + a) \leq \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{\inf_{t \in Q_0} \phi(t, \lambda)} + a \right). \end{aligned}$$

აქედან, კერძოდ, ვღებულობთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\beta_n(Re\{\eta\}, a, b) < \infty,$$

საიდანაც ლემა 8.2-ის საფუძველზე ვრწმუნდებით თეორემის სამართლიანობაში. $\square$

9. ლევი-ხინჩინის თეორემა

განმარტება 9.1. დამოუკიდებელნაზრდებიან ξ_t შემთხვევით პროცესს ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ $\xi_t - \xi_s$ ნაზრდების განაწილება დამოკიდებულია მხოლოდ $t - s$ სხვაობაზე (არაა დამოკიდებული დროის საწყის მომენტზე).

შემდგომში ყველგან ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ერთგვაროვან, სტოქასტურად უწყვეტ პროცესებს დამოუკიდებელი ნაზრდებით და მათ მოდიფიკაციებს $D([0, \infty])$ სივრციდან (იხ. თეორემა 8.4).

თეორემა 9.1 (ლევი-ხინჩინი). თუ $\xi_t, t \in [0, +\infty)$ სტოქასტურად უწყვეტი, დამოუკიდებელნაზრდებიანი, ერთგვაროვანი პროცესია, მაშინ არსებობს ისეთი სასრული μ ზომა $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალზე და სასრული b რიცხვი, რომ ნებისმიერი $t \in [0, +\infty)$ და $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ რიცხვებისათვის მახასიათებელი ფუნქცია $Ee^{i\lambda\xi_t}$ მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$Ee^{i\lambda\xi_t} = \exp\{t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, x) \mu(dx) + itb\lambda\}, \quad (1)$$

სადაც

$$f(\lambda, x) = \begin{cases} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda \sin x) \frac{1+x^2}{x^2}, & x \neq 0; \\ -\frac{1}{2}\lambda^2, & x = 0. \end{cases}$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ (1) ფორმულა ცნობილია ხინჩინის ფორმულის სახელწოდებით. აღვნიშნოთ $\phi(t, \lambda) := Ee^{i\lambda\xi_t}$.

ვინაიდან ξ_t სტოქასტურად უწყვეტია, ამიტომ $\phi(t, \lambda)$ უწყვეტია t -თი, ხოლო რადგანაც $\phi(t, \lambda)$ მახასიათებელი ფუნქციაა, ამიტომ იგი უწყვეტია აგრეთვე λ -ს მიმართ. $\phi(t, \lambda) \neq 0$. შემოვიღოთ ფუნქციები $a(t, \lambda) = \arg \phi(t, \lambda)$, $l(t, \lambda) = \ln |\phi(t, \lambda)|$. $l(t, \lambda)$ აგრეთვე უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო $a(t, \lambda)$ – არაცალსახა ფუნქცია, ამასთანავე, შესაძლებელია მისი ისე შერჩევა, რომ ისიც იყოს უწყვეტი t -თი და λ -თი. $a(0, \lambda) = 0$, $a(t, 0) = 0$.

როგორც ცნობილია

$$\phi(t, \lambda) = e^{l(t, \lambda) + ia(t, \lambda)},$$

ხოლო თეორემის პირობებში ცხადია, რომ

$$\phi(t + s, \lambda) = \phi(t, \lambda)\phi(s, \lambda),$$

ე. ი.

$$e^{l(t+s, \lambda) + ia(t+s, \lambda)} = e^{l(t, \lambda) + l(s, \lambda) + i(a(t, \lambda) + a(s, \lambda))}.$$

თუ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარიდან ავიღებთ აბსოლუტურ სიდიდეს, მივიღებთ:

$$l(t + s, \lambda) = l(t, \lambda) + l(s, \lambda). \quad (2)$$

ამიტომ წარმოსახვითი ნაწილები შეიძლება განსხვავდებოდნენ 2π -ის ჯერადით:

$$a(t + s, \lambda) = a(t, \lambda) + a(s, \lambda) + 2\pi k(t, s, \lambda). \quad (3)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $k(t, s, \lambda)$ აგრეთვე უწყვეტი ფუნქციაა. მეორე მხრივ, იგი მთელია და $k(t, 0, \lambda) = 0$. ამიტომ $k(t, s, \lambda)$ იგივეურად ნულია.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ (2) და (3) განტოლებების t -ს მიმართ უწყვეტი ამოხსნები უბრალოდ წრფივი ფუნქციებია $l(t, \lambda) = tl(\lambda)$ და $a(t, \lambda) = ta(\lambda)$ (სადაც $l(\lambda) = l(1, \lambda)$ და

$a(\lambda) = a(1, \lambda)$. ეს თავიდან უშუალოდ მტკიცდება მთელი t -ებისათვის, შემდეგ რაციონალურებისათვის და ბოლოს ზღვარზე გადასვლით უწყვეტობის საფუძველზე.

აღვნიშნოთ $g(\lambda) := l(\lambda) + ia(\lambda)$. იგი უწყვეტია λ -ს მიმართ და $\phi(t, \lambda) = e^{tg(\lambda)}$. ცხადია, რომ

$$g(\lambda) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{e^{tg(\lambda)} - 1}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\phi(t, \lambda) - 1}{t}.$$

ტეილორის ფორმულიდან გამომდინარე, ეს მისწრაფება თანაბარია λ -ს ცვლილების ნებისმიერ სასრულ მონაკვეთზე. ავიღოთ $t = 1/n$. დავუშვათ, რომ $F_t = F_{\xi_t}$ ξ_t შემთხვევითი სიდიდის განაწილებაა, მაშინ გვაქვს:

$$n \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda x} - 1) F_{\frac{1}{n}}(dx) \rightarrow g(\lambda), \quad n \rightarrow \infty,$$

თანაბრად λ -ს მიმართ ნებისმიერ სასრულ მონაკვეთზე. თუ გავაინტეგრებთ უკანასკნელ თანაფარდობას λ -ს მიმართ $[-h, h]$ ინტერვალზე, მივიღებთ:

$$n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{\sin xh}{xh}\right) F_{\frac{1}{n}}(dx) \rightarrow -\frac{1}{2h} \int_{-h}^h g(\lambda) d\lambda. \quad (4)$$

შევარჩიოთ $\varepsilon > 0$ ისე, რომ $h \left| \frac{1}{2h} \int_{-h}^h g(\lambda) d\lambda \right| < \varepsilon$ (ეს შესაძლებელია,

ბელია, რადგანაც $g(0) = 0$), მაშინ იმის გავითვალისწინებით, რომ $1 - \frac{\sin xh}{xh} \geq 1/2$, როცა $|xh| \geq 2$, გვაქვს

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{|x| > 2/h} n F_{\frac{1}{n}}(dx) \leq \varepsilon.$$

კერძოდ,

$$n \int_{|x| > 2/h} F_{\frac{1}{n}}(dx) \leq 2\varepsilon,$$

გარდა n -ების სასრული რაოდენობისა. h -ის შემცირების ხარჯზე უკანასკნელი თანაფარდობა სამართლიანი იქნება $\forall n$. ე. ი. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი h , რომ

$$n \int_{|x| > 2/h} F_{\frac{1}{n}}(dx) \leq 2\varepsilon, \quad \forall n.$$

შევარჩიოთ $\gamma > 0$ ისე, რომ $1 - \frac{\sin x}{x} \geq \gamma \frac{x^2}{1+x^2}$, მაშინ, თუ ავიღებთ (4) თანაფარდობაში $h = 1$, ვნახავთ, რომ მოიძებნება ისეთი მუდმივი C , რომ:

$$n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} F_{\frac{1}{n}}(dx) \leq C < \infty.$$

შემოვიღოთ ზომები

$$\mu_n(dx) := n \frac{x^2}{1+x^2} F_{\frac{1}{n}}(dx).$$

უკანასკნელი უტოლობის თანახმად ეს ზომები შემოსაზღვრულია. ამიტომ პროზოროვის თეორემის ძალით მოიძებნება ისეთი ქვემიმდევრობა n' და სასრული ზომა μ , რომ: $\mu_{n'} \Rightarrow \mu$.

საბოლოოდ, იმის გათვალისწინებით, რომ $f(\lambda, x)$ ფუნქცია უწყვეტია x -ის მიმართ და შემოსაზღვრულია, გვაქვს:

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \lim_{n' \rightarrow \infty} n' \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda x} - 1) F_{\frac{1}{n'}}(dx) = \lim_{n' \rightarrow \infty} n' \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda x} - 1) \frac{x^2}{1+x^2} \mu_{n'}(dx) = \\ &= \lim_{n' \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda \sin x) \frac{x^2}{1+x^2} \mu_{n'}(dx) + i\lambda n' \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x F_{\frac{1}{n'}}(dx) \right] = \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *მ. ფურთუხია* $\Leftarrow$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, x) \mu(dx) + i\lambda b,$$

სადაც

$$b := \lim_{n \rightarrow \infty} n' = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x F_{\frac{1}{n}}(dx). \quad \square$$

ლევის ფორმულა

$$Ee^{i\lambda\xi_t} = \exp\left\{t \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, x) \Lambda(dx) + i b \lambda - \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2\right\},$$

სადაც $\Lambda(dx)$ **ლევის ზომაა**, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \Lambda(dx) < \infty, \quad \Lambda(\{0\}) = 0.$$

ამოცანა 9.1. დავუშვათ, რომ $\sigma^2 := \mu(\{0\})$ და

$$\Lambda(B) := \int_{B \setminus \{0\}} \frac{x^2}{1+x^2} \mu(dx).$$

მაშინ ვაჩვენოთ, რომ ხინჩინის ფორმულიდან მიიღება ლევის ფორმულა.

ამოცანა 9.2. შემოვიღოთ μ ზომა შემდეგნაირად

$$\mu(B) := \int_B \frac{x^2}{1+x^2} \Lambda(dx) + \chi_B(0) \sigma^2.$$

ვაჩვენოთ, რომ ის იქნება სასრული ზომა და ლევის ფორმულიდან მიიღება ხინჩინის ფორმულა.

თეორემა 9.2. ა) არსებობს მხოლოდ ერთი სასრული ზომა μ და რიცხვი b , რომელთათვისაც შესაძლებელია $\phi(t, \lambda)$ მახასიათებელი ფუნქციის ხიჩინის ფორმით წარმოდგენა.

ბ) არსებობს მხოლოდ ერთი ზომა Λ და რიცხვი σ^2 , რომლებიც აკმაყოფილებენ 9.1 ამოცანის პირობებს, და რიცხვი b , რომელთათვისაც შესაძლებელია $\phi(t, \lambda)$ მახასიათებელი ფუნქციის ლევის ფორმით წარმოდგენა.

დამტკიცება. 9.1 და 9.2 ამოცანებიდან გამომდინარე, საკმარისია დავამტკიცოთ თეორემის მხოლოდ პირველი ნაწილი. ხოლო ვინაიდან $\phi(t, \lambda) = e^{tg(\lambda)}$, ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ μ ზომა და b რიცხვი ცალსახად აღდგებიან

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, x) \mu(dx) + i\lambda b$$

ფორმულიდან. აქედან კი ჩანს, რომ საკმარისია დამტკიცდეს, რომ μ ზომა აღდგება ცალსახად. უკანასკნელი ტოლობიდან ადვილად მიიღება, რომ

$$g(\lambda) - \frac{g(\lambda + h) - g(\lambda - h)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \frac{1 - \cos xh}{x^2} (1 + x^2) \mu(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \nu_h(dx), \quad (5)$$

სადაც $\nu_h(dx) := \frac{1 - \cos xh}{x^2} (1 + x^2) \mu(dx) := \rho(x, h) \mu(dx)$.

ცხადია, რომ (5) თანაფარდობის მარცხენა მხარე ცალსახად აღდგება $\phi(t, \lambda)$ ფუნქციის მიხედვით, ხოლო მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ν_h ზომის მახასიათებელ ფუნქციას და ამიტომ ν_h ზომა ცალსახად აღდგება თავისი მახასიათებელი ფუნქციიდან, რომელიც (5) თანაფარდობის მარცხენა მხარის ტოლია.

ავილოთ ნებისმიერი ბორელის აზრით ზომადი და შემოსაზღვრული სიმრავლე B , მაშინ არსებობს ისეთი h , რომ $B \subset [-\frac{1}{h}, \frac{1}{h}]$. შემოვიღოთ ფუნქცია

$$f(x) := \begin{cases} \rho(x, h), & x \in B; \\ 0, & x \notin B. \end{cases}$$

მაშინ გვექნება:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \nu_h(dx) = \int_B f(x) \rho(x, h) \mu(dx) = \int_B \mu(dx) = \mu(B).$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ν_h ზომა ცალსახად აღდგება $\phi(t, \lambda)$ ფუნქციის საშუალებით, ამიტომ უკანასკნელი თანაფარდობის ძალით μ ზომა აგრეთვე ცალსახად აღდგება $\phi(t, \lambda)$ ფუნქციის საშუალებით. $\square$

პიქეტი 9.1. თუ შემოვიტანთ $\mu(t)$ ზომებს შემდეგნაირად

$$\mu(t, dx) := \frac{1}{t} \frac{x^2}{1+x^2} F_t(dx)$$

(სადაც F_t არის ξ_t შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია), მაშინ ისინი სუსტად იკრიბებიან μ ზომისაკენ, რომელიც მონაწილეობს ხინჩინის წარმოდგენაში.

დამტკიცება. ლევი-ხინჩინის თეორემის დამტკიცებისას ჩვენ ვაჩვენეთ შედეგის სამართლიანობა $t = \frac{1}{n}$ -ის შემთხვევაში. ზომათა $\mu(t)$ ოჯახის სუსტად კომპაქტურობა მტკიცდება $\mu(\frac{1}{n})$ ოჯახის სუსტად კომპაქტურობის ანალოგიურად. $\mu(t_n)$ ზომების ნებისმი-

ერი ზღვრული ν ზომისათვის (როცა $t_n \downarrow 0$) სამართლიანი იქნება ხინჩინის წარმოდგენა მახასიათებელი ფუნქციისათვის.

მეორე მხრივ, ვინაიდან, ზომა, რომლის საშუალებითაც მოიცემა მახასიათებელი ფუნქცია, ერთადერთია, ამიტომ $\forall \nu = \mu$. ე. ი. მთელი ოჯახი სუსტად კრებადია μ ზომისაკენ. $\square$

პედი 9.2. ა) σ^2 შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს შემდეგნაირად

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} E \xi_t^2 \chi_{[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]}(\xi_t),$$

რაიმე $\varepsilon_n \downarrow 0$ მიმდევრობისათვის;

ბ) $\frac{1}{t} F_t$ სუსტად კრებადია Λ ზომისაკენ ნულის გარეთ: ნებისმიერი უწყვეტი და შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციისათვის, რომლისთვისაც $f(x) = 0$ ნულის რაიმე მიდამოში, ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) F_t(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Lambda(dx).$$

დამტკიცება. ბ) 9.1 შედეგის თანახმად გვაქვს:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Lambda(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1+x^2}{x^2} \mu(dx) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) F_t(dx);$$

ა)

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mu(\{0\}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,0]}(x) \mu(dx) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,0]}(x) (1+x^2) \mu(dx) = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_n \downarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]}(x) (1+x^2) \mu(dx) \stackrel{9.1}{=} \end{aligned}$$

$$\stackrel{9.1}{=} \lim_{\varepsilon_n \downarrow 0} \lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]}(x) x^2 F_t(dx). \quad (6)$$

შევნიშნოთ, რომ ბოლო ტოლობის დასაწერად შედეგი 9. 1-ის პირდაპირ გამოყენება არ შეიძლებოდა, ვინაიდან $\psi(x) := \chi_{[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]}(x)(1+x^2)$ წყვეტილი ფუნქციაა. სინამდვილეში ჩვენ აქ ვიყენებთ ფუნქციონალური ანალიზიდან ცნობილ ფაქტს: დავუშვათ, რომ რაიმე პოლონურ სივრცეზე $\mu_n \Rightarrow \mu$, ψ – შემოსაზღვრული ბორელის ფუნქციაა, D_ψ – ψ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლეა და $\mu(D_\psi) = 0$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \mu_n(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \mu(dx).$$

ჩვენს შემთხვევაში ψ ფუნქციას გააჩნია ორი წყვეტის წერტილი $\{-\varepsilon_n, \varepsilon_n\}$, ამიტომ თუ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ $\mu(\{-\varepsilon_n\}) = \mu(\{\varepsilon_n\}) = 0$, მაშინ სამართლიანი იქნება (6) თანაფარდობა $\lim_{\varepsilon_n \downarrow 0}$ ზღვრის გარეშე. ვინაიდან μ სასრული ზომაა, ამიტომ არსებობს მხოლოდ სასრული რაოდენობა ისეთი წერტილების, სადაც $\mu(\{t\}) \neq 0$. აქედან გამომდინარე, არსებობს მიმდევრობა $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ ისეთი, რომ $\mu(\{-\varepsilon_n\}) = \mu(\{\varepsilon_n\}) = 0$. სწორედ ამ $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ მიმდევრობისათვის სამართლიანი იქნება σ^2 -ის წარმოდგენა. $\square$

პენიშვა 9.1. იმისათვის, რომ მივიღოთ ვინერის პროცესის მახასიათებელი ფუნქცია ლევის ფორმით უნდა ავიღოთ

$$\Lambda = 0, \quad \sigma^2 = 1, \quad b = 0.$$

თუ ლევის ფორმულაში ავიღებთ

$$\sigma = 0, \quad \Lambda(B) = \chi_B(1)\lambda, \quad b = \sin 1,$$

მაშინ შესაბამის პროცესს ეწოდება **პუასონის პროცესი პარამეტრით λ** .

თუ ლევის ფორმულაში ავიღებთ

$$\sigma = b = 0, \quad \Lambda(dx) = \frac{1}{x^2} dx,$$

მაშინ შესაბამის პროცესს ეწოდება **კოშის პროცესი**.

ამოცანა 9.3. ვაჩვენოთ, რომ კოშის პროცესის მახასიათებელი ფუნქცია:

$$\phi(t, \lambda) = e^{-ct|\lambda|}, \quad c > 0.$$

ამოცანა 9.4. ვაჩვენოთ, რომ თუ $\sigma = 0$, $\Lambda = 0$, მაშინ $\xi_t = bt$ ყველა t -სათვის ერთდროულად (P - თ.ყ.) (პირიქით ტრივიალურია).

10. კავშირი ლევის ზომასა და ნახტომების ზომას შორის

დავუშვათ, რომ ξ_t სტოქასტურად უწყვეტი ერთგვაროვანი პროცესია, ტრაექტორიებით სკოროხოვის $D([0, +\infty))$ სივრცე-დან. განვსაზღვროთ **ნახტომების პროცესი** $\Delta\xi_t := \xi_t - \xi_{t-}$. დავუშვათ, B რაიმე ბორელის სიმრავლეა დადებითი ნახევარსიბრტყიდან $B \subset [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$. აღვნიშნოთ $P(B)$ სიმბოლოთი $(t, \Delta\xi_t)$ სახის წერტილების რაოდენობა, რომლებიც ეკუთვნიან B სიმრავლეს. $\forall \omega \in P(B)$ არის σ -ადიციური ფუნქცია და მას ეწოდება **ნახტომების ზომა**. $P(B)$ ზომა თავმოყრილია $(t, \Delta\xi_t)$ წერტილებზე და თითოეულ მათგანს შეუსაბამებს ერთეულოვან ზომას. აღვნიშნოთ $R_{T,\varepsilon} := [0, T] \times \{x : |x| \geq \varepsilon\}$. მაშინ $P(R_{T,\varepsilon})$ იქნება რაოდენობა ისეთი ნახტომების, რომლებიც მოდულით აღემატებიან ε -ს. ცხადია, რომ $P(R_{T,\varepsilon}) < \infty$, ვინაიდან თუკი ეს იქნებოდა უსასრულობა, მაშინ მოიძებნება ისეთი წერტილი u^* , რომლის რაიმე მიდამოს ნებისმიერ წერტილში $|\Delta\xi_u| \geq \varepsilon$, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ ტრაექტორიები ეკუთვნის სკოროხოვის სივრცეს.

ლემა 10.1. დავუშვათ, რომ f უწყვეტი ფუნქციაა და ტოლია ნულის, როცა $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). დავუშვათ, აგრეთვე, რომ $0 < s < t < \infty$ და დანაწილებათა მიმდევრობა $s = t_1^n < t_2^n < \dots < t_{k(n)+1}^n = t$ ისეთია, რომ $\max_j (t_{j+1}^n - t_j^n) \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$. მაშინ ყველა ω -სათვის

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(s,t]}(u) f(x) P(du dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k(n)} f(\xi_{t_{j+1}^n} - \xi_{t_j^n}).$$

დამტკიცება. გადავნიშნოთ ყველა ისეთი წერტილი $(s, t]$ ინტერვალდან, რომელშიც $\Delta \xi_u \neq 0$: $\{u \in (s, t] : |\Delta \xi_u| > 0\} = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ნახტომების ზომა თავმოყრილია $(r_1, \Delta \xi_{r_1}), \dots, (r_n, \Delta \xi_{r_n}), \dots$ წერტილებზე და თითოეულ მათგანს მიაწერს ერთეულოვან ზომას, ამიტომ ცხადია, რომ

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(s,t]}(u) f(x) P(dudx) = \sum_{i=1}^m f(\Delta \xi_{u_i}),$$

სადაც $\{u_1, \dots, u_m\} = \{u \in (s, t] : |\Delta \xi_u| \geq \varepsilon\}$. აღვნიშნოთ $t_{j(u_i)}^n$ სიმბოლოთი ისეთი დაყოფის წერტილი, რომლისთვისაც $t_{j(u_i)}^n < u_i \leq t_{j(u_i)+1}^n$, მაშინ ცხადია, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_{t_{j(u_i)+1}^n} - \xi_{t_{j(u_i)}^n}) = \Delta \xi_{u_i}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$I_1^n := \sum_{i=1}^m f(\xi_{t_{j(u_i)+1}^n} - \xi_{t_{j(u_i)}^n}), \quad I_2^n := \sum_{j=1}^{k(n)} f(\xi_{t_{j+1}^n} - \xi_{t_j^n}) - I_1^n.$$

ვინაიდან ξ_t პროცესის ტრაექტორიები ეკუთვნის სკოროხოვდის სივრცეს, ამიტომ მოიძებნება ისეთი N , რომ როცა $n > N$, მაშინ I_2^n გამოსახულების ყველა შესაკრებში f ფუნქციის არგუმენტის მოდული ნაკლები იქნება ε -ზე. ამიტომ, f ფუნქციის თვისებებიდან გამომდინარე, გვაქვს:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k(n)} f(\xi_{t_{j+1}^n} - \xi_{t_j^n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_1^n + \lim_{n \rightarrow \infty} I_2^n = \sum_{i=1}^m f(\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_{t_{j(u_i)+1}^n} - \xi_{t_{j(u_i)}^n})) = \\ &= \sum_{i=1}^m f(\Delta \xi_{u_i}) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(s,t]}(u) f(x) P(dudx). \quad \square \end{aligned}$$

ლემა 10.2. დავუშვათ, რომ f უწყვეტი ფუნქციაა, ისეთი, რომ $f(x) = 0$, როცა $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), ხოლო η_t პროცესი განმარტებულია შემდეგნაირად

$$\eta_t := \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(s,t]}(u) f(x) P(du dx) \quad (= \sum_{s \leq t} f(\Delta \xi_s)).$$

მაშინ η_t წარმოადგენს ერთგვაროვან, სტოქასტურად უწყვეტ, დამოუკიდებელნაზრდებიან პროცესს მახასიათებელი ფუნქციით:

$$E e^{i\lambda \eta_t} = \exp(t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda f(x)} - 1) \Lambda(dx)).$$

დამტკიცება. ვინაიდან ξ_t პროცესი ერთგვაროვანი და დამოუკიდებელნაზრდებიანია, ამიტომ ლემა 10.1-ის თანახმად, ასეთივე იქნება η_t პროცესიც. ინტეგრალის ჩვეულებრივი თვისებების საფუძველზე ცხადია აგრეთვე, რომ ყოველი ω -სათვის η_t უწყვეტია მარჯვნიდან და გააჩნია ზღვარი მარცხნიდან. ვაჩვენოთ სტოქასტური უწყვეტობა. ერთგვაროვნებისა და მარჯვნიდან უწყვეტობის გათვალისწინებით გვაქვს

$$\lim_{s \uparrow t} E e^{i\lambda(\eta_t - \eta_s)} = \lim_{s \uparrow t} E e^{i\lambda \eta_{t-s}} = E e^{i\lambda \eta_0} = 1.$$

ანალოგიურად,

$$\lim_{s \downarrow t} E e^{i\lambda(\eta_t - \eta_s)} = \lim_{s \downarrow t} E e^{-i\lambda \eta_{s-t}} = 1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\eta_s \xrightarrow{P} \eta_t$, როცა $s \rightarrow t$. ე. ი. η_t სტოქასტურად უწყვეტია.

ვიპოვოთ ახლა η_t პროცესის მახასიათებელი ფუნქცია. ამისათვის გამოვიყენოთ ლემა 11.1, შედეგი 9.2 და შემდეგი თანაფარდობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n(a_n - 1)}, \text{ როცა } a_n \rightarrow 1.$$

თუ ავიღებთ $s = 0$, $t_j^n = (j-1)\frac{t}{n}$, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} Ee^{i\lambda\eta_t} &= \lim_{n \rightarrow \infty} [Ee^{i\lambda f(\xi_{t/n})}]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(n \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda f(x)} - 1) F_{t/n}(dx)\right) = \\ &= \exp\left(t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda f(x)} - 1) \Lambda(dx)\right). \quad \square \end{aligned}$$

ბანსაზღვრა 10.1. $\eta_t^1, \dots, \eta_t^n$ შემთხვევით პროცესებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ ნებისმიერი $t_1, \dots, t_k$ წერტილებისათვის ვექტორები

$$(\eta_{t_1}^1, \dots, \eta_{t_k}^1), (\eta_{t_1}^2, \dots, \eta_{t_k}^2), \dots, (\eta_{t_1}^n, \dots, \eta_{t_k}^n)$$

დამოუკიდებელია.

აღნიშვნა $P_t(a, b] := P((0, t] \times (a, b])$, ($a < b$). ცხადია, რომ $P_t(a, b]$ უწყვეტია მარჯვნიდან.

თეორემა 10.1. 1. თუ $a, b > 0$, მაშინ $P_t(a, b]$ პუასონის პროცესია $\Lambda(a, b]$ პარამეტრით (იხ. §14), კერძოდ $EP_t(a, b] = \Lambda(a, b]$;

2. თუ $a_m < b_m$, $a_m, b_m > 0$, $m = 1, \dots, n$ და $(a_m, b_m]$ ინტერვალები თანაუკვეთია, მაშინ $P_t(a_m, b_m]$ პროცესები დამოუკიდებელია.

დამტკიცება. 1. ავიღოთ შემოსაზღვრული და უწყვეტი f_k ფუნქციების ისეთი მიმდევრობა, რომ $f_k(x) \rightarrow \lambda \chi_{(a, b]}(x)$ და $f_k(x) = 0$, როცა $|x| < \varepsilon$, რაიმე $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის (ეს შესაძლებელია, რადგანაც $a, b > 0$). მაშინ ცხადია, რომ ნებისმიერი ω -სათვის ადგილი ექნება თანაფარდობას

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(0,t]}(u) f_k(x) P(du dx) \rightarrow \lambda P_t(a, b].$$

ლემა 10.2-ის თანახმად უკანასკნელი თანაფარდობის მარცხენა მხარე ერთგვაროვანი და დამოუკიდებელნაზრდებიანი პროცესია, ამიტომ ასეთივე იქნება მარჯვენა მხარეც. თავის მხრივ, მარჯვნიდან უწყვეტობიდან და ერთგვაროვნებიდან გამომდინარეობს სტოქასტიურად უწყვეტობა. გარდა ამისა:

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(0,t]}(u) \chi_{\{|x| \geq \varepsilon\}} P(du dx) = P(R_{t,\varepsilon}) < \infty$$

და

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\{|x| \geq \varepsilon\}} \Lambda(dx) \leq \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\{|x| \geq \varepsilon\}} \frac{x^2}{1 + x^2} \Lambda(dx) < \infty.$$

თუ ახლა გამოვიყენებთ შეფასებას

$$|e^{if_k(x)} - 1| \leq 2\chi_{\{|x| \geq \varepsilon\}},$$

მაშინ ლემა 10.2-ისა და ლებეგის თეორემის საფუძველზე მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} Ee^{i\lambda P_t(a,b)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda f_k(x)} - 1) \Lambda(dx)\right) = \\ &= \exp\left(t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda \chi_{(a,b]}(x)} - 1) \Lambda(dx)\right) = \\ &= \exp\left(t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda} - 1) \chi_{(a,b]}(x) \Lambda(dx)\right) = \\ &= \exp(t(e^{i\lambda} - 1) \Lambda(a, b]). \end{aligned}$$

ამდენად, $P_t(a, b]$ მართლაც პუასონის პროცესია პარამეტრით $\Lambda(a, b]$.

2. შემოვიღოთ პროცესები $\eta_t^m := P_t(a_m, b_m]$. შევნიშნოთ, რომ დამოუკიდებლობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ დამოუკიდებელია ნაზრდების ვექტორები $(\eta_{t_1}^1, \eta_{t_2}^1 - \eta_{t_1}^1, \dots, \eta_{t_k}^1 - \eta_{t_{k-1}}^1), \dots, (\eta_{t_1}^n, \eta_{t_2}^n - \eta_{t_1}^n, \dots, \eta_{t_k}^n - \eta_{t_{k-1}}^n)$, ვინაიდან $(\eta_{t_1}^1, \dots, \eta_{t_k}^1), \dots, (\eta_{t_1}^n, \dots, \eta_{t_k}^n)$ ვექტორები ნაზრდების ვექტორების გარკვეული ფუნქციებია. ხოლო ამ უკანასკნელის შესამოწმებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნაზრდების ვექტორებში შემავალი ყველა სიდიდეები ერთობლივად დამოუკიდებელია (ვექტორი თავისი კოორდინატების ფუნქციაა). შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქციები :

$$f_j(x) = \begin{cases} \lambda_j^m \neq 0 & (a_m, b_m] \text{ ინტერვალზე, } m = 1, \dots, n, \\ 0, & \text{ამ ინტერვალების გაერთიანების გარეთ.} \end{cases}$$

აღვნიშნოთ $\zeta_m := \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j^m (\eta_{t_{j+1}}^m - \eta_{t_j}^m)$. გვაქვს:

$$E e^{i \sum_{m=1}^n \zeta_m} = E \exp \left\{ i \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(t_j, t_{j+1}]}(u) f_j(x) P(du dx) \right\}.$$

როგორც ცნობილია, ლემა 10.2-ის თანახმად, უწყვეტი ფუნქციებისათვის გვაქვს მახასიათებელი ფუნქციის წარმოდგენა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ აქ f_j ფუნქციები უწყვეტია, ვინაიდან ინდიკატორების მიახლოება შეიძლება უწყვეტი ფუნქციებით. გარდა ამისა, ζ_m არის დამოუკიდებელი ნაზრდების ფუნქცია, ამიტომ უკანასკნელ თანაფარდობაში შემავალი ინტეგრალები დამოუკიდებელია. ყოველივე ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარე, ლემა 10.2-ისა და თეორემის პირველი ნაწილის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\begin{aligned} E e^{i \sum_{m=1}^n \zeta_m} &= \prod_{j=0}^{k-1} \exp \left\{ (t_{j+1} - t_j) \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i f_j(x)} - 1) \Lambda(dx) \right\} = \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \prod_{m=1}^n \exp \left\{ (t_{j+1} - t_j) (e^{i \lambda_j^m} - 1) \Lambda(a_m, b_m] \right\} = \prod_{j=0}^{k-1} \prod_{m=1}^n E e^{i \lambda_j^m (\eta_{t_{j+1}}^m - \eta_{t_j}^m)}. \end{aligned}$$

ე. ი. მახასიათებელი ფუნქცია ტოლია მახასიათებელი ფუნქციების ნამრავლის და, მაშასადამე, $P_t(a_m, b_m]$ პროცესები დამოუკიდებელია. $\square$

პედიკი 10.1. თუ ξ_t უწყვეტი, ერთგვაროვანი და დამოუკიდებელნაზრდებიანი პროცესია, მაშინ $\xi_t = bt + \sigma w_t$, $\sigma \neq 0$, სადაც b და σ ლევის წარმოდგენიდანაა, ხოლო w_t ვინერის პროცესია; თუ $\sigma = 0$, მაშინ $\xi_t = bt$.

დამტკიცება. თუ ξ_t უწყვეტი პროცესია, მაშინ $P_t(a, c] = 0$, ამიტომ თეორემა 10.1-ის პირველი ნაწილის თანახმად $\Lambda(a, c] = 0$. ე. ი. მისი მახასიათებელი ფუნქცია ლევის ფორმულის თანახმად შემდეგი სახის იქნება

$$Ee^{i\lambda\xi_t} = e^{i\lambda bt - \frac{\sigma^2}{2}t\lambda^2}.$$

ამიტომ თუ $\sigma \neq 0$, მაშინ $\eta_t = \frac{1}{\sigma}(\xi_t - bt)$ პროცესს, რომელიც აგრეთვე ერთგვაროვანი, უწყვეტი და დამოუკიდებელნაზრდებიანი პროცესია, ექნება შემდეგი მახასიათებელი ფუნქცია

$$Ee^{i\lambda\eta_t} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}.$$

ე. ი. η_t ვინერის პროცესია. და, საბოლოოდ გვაქვს, რომ $\xi_t = bt + \sigma w_t$. $\square$

პედიკი 10.2. თუ $G \subset (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$ ღია სიმრავლე ისეთია, რომ $\Lambda(G) = 0$, მაშინ არსებობს ისეთი $\Omega' \subset \Omega$, რომ $P(\Omega') = 1$ და ნებისმიერი $\omega \in \Omega'$ და $t \geq 0$: $\Delta\xi_t \notin G$ (თუ ღია სიმრავლის ლევის ზომა ნულია, მაშინ არ არსებობს ნახტომები ამ სიმრავლიდან).

დამტკიცება. როგორც ცნობილია, ნებისმიერი ღია სიმრავლე ღერძიდან წარმოიდგინება ნახევრად ღია ინტერვალების თვლადი გაერთიანების სახით :

$$G = \bigcup_{m=1}^{+\infty} (a_m, b_m].$$

ამიტომ ყოველი m -სათვის $\Lambda(a_m, b_m] = 0$. აქედან გამომდინარე, $P_t(a_m, b_m] = 0$ (P - თ.ყ.) $\forall t$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\Omega' \equiv \{\omega : P_n(a_m, b_m] = 0, \forall n, m\}$. მაშინ ცხადია, რომ $P(\Omega') = 1$ და თუ $\omega \in \Omega'$, მაშინ $P_t(a_m, b_m] \leq P_n(a_m, b_m] = 0$, როცა $t < n$. ამიტომ $P_t(a_m, b_m] = 0$ ყველა t -სათვის ერთდროულად $\forall \omega \in \Omega'$. აქედან გამომდინარე, $P((0, t] \times G) = 0$, როცა $\omega \in \Omega'$ და, მაშასადამე, $\Delta \xi_t \notin G$. $\square$

თეორემა 10.2 (დისკრეტული ლევის ზომის მქონე პროცესების სტრუქტურის შესახებ). დაუშვათ, რომ ξ_t პროცესის ლევის ზომა თავმოყრილია $x_1, \dots, x_n$ წერტილებში, $x_i \neq 0, i = 1, \dots, n$; $x_i \neq x_j, i \neq j$ და $\sigma \neq 0$. მაშინ არსებობს ვინერის პროცესი w_t და ურთიერთდამოუკიდებელი პუასონის პროცესები $P_t^1, \dots, P_t^n$ პარამეტრებით $\Lambda(x_1), \dots, \Lambda(x_n)$ შესაბამისად, ისეთები, რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$\xi_t = \sigma w_t + x_1 P_t^1 + \dots + x_n P_t^n \quad \forall t \quad \text{ერთდროულად } (P - \text{თ.ყ.})$$

თუკი $\sigma = 0$, მაშინ სამართლიანია უკანასკნელი წარმოდგენა პირველი შესაკრების გარეშე.

დამტკიცება. ვინაიდან $(-\infty, +\infty)$, $\{x_1, \dots, x_n\}$ ღია სიმრავლეა და $\Lambda((-\infty, +\infty), \{x_1, \dots, x_n\}) = 0$, ამიტომ შედეგი 10.2-ის თანახმად $\Delta \xi_t \in \{x_1, \dots, x_n\}$. ავავოთ უწყვეტი და შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ისე, რომ $f(x_m) = x_m, m = 1, \dots, n$, ხოლო $f(x) = 0$, როცა $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) და აღვნიშნოთ

$$\eta_t := \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(0,t]}(u) f(x) P(du dx).$$

ცხადია, რომ $\Delta\eta_t = f(\Delta\xi_t) = \Delta\xi_t$. ე. ი. $\xi_t - \eta_t$ უწყვეტი, ერთ-გვაროვანი და დამოუკიდებელნაზრდებიანი პროცესია. ამიტომ შედეგი 10.1-ის თანახმად $\xi_t - \eta_t = \sigma w_t + bt$ ანუ $\xi_t = \eta_t + \sigma w_t + bt$. ავიღოთ თანუკვეთი $(a_m, b_m]$ ინტერვალები ისე, რომ $x_m \in (a_m, b_m]$ $\forall m = 1, \dots, n$. მაშინ ვინაიდან

$$P((0, t] \times \{x : x \neq x_m, x \in (a_m, b_m]\}) = 0,$$

გვაქვს:

$$\begin{aligned} \eta_t &= \sum_{m=1}^n \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(0,t]}(u) \chi_{(a_m, b_m]}(x) f(x) P(dudx) = \\ &= \sum_{m=1}^n \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(0,t]}(u) \chi_{(a_m, b_m]}(x) x_m P(dudx) = \\ &= x_m \sum_{m=1}^n \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(0,t]}(u) \chi_{(a_m, b_m]}(x) P(dudx). \end{aligned}$$

თუ ახლა შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$P_t^m := P_t(a_m, b_m] = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(0,t]}(u) \chi_{(a_m, b_m]}(x) P(dudx),$$

მაშინ თეორემა 10.1-ის ძალით P_t^m , $m = 1, \dots, n$, ურთიერთდამოუკიდებელი პუასონის პროცესებია და ამით თეორემის დამტკიცება დასრულებულია. $\square$

11. სტაციონარული პროცესები (ფართო აზრით)

განმარტება 11.1. შემთხვევით პროცესს ξ_t , $t \in (T, \infty)$ ეწოდება სტაციონარული ფართო აზრით (ან ხინჩინის პროცესი), თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. $E |\xi_t|^2 < \infty \quad \forall t \in (T, \infty)$;

2. $E \xi_t = \text{const}$;

3. $E \xi_s \overline{\xi_t}$ დამოკიდებულია მხოლოდ $s - t$ სხვაობაზე ($s, t > T$).

ასეთ შემთხვევაში ხმარობენ აღნიშვნას $R(s - t) := E \xi_s \overline{\xi_t}$ და $R(t)$ ფუნქციას უწოდებენ ξ_t პროცესის **კორელაციურ ფუნქციას**.

ვიგულისხმობთ, რომ $R(t)$ უწყვეტია t -ს მიმართ და $E \xi_t = 0$.

ამოცანა 11.1. იმისათვის, რომ $R(t)$ იყოს უწყვეტი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ξ_t იყოს უწყვეტი საშუალო კვადრატული აზრით (ე. ი. $\lim_{t \rightarrow s} E |\xi_t - \xi_s|^2 = 0$).

განსაზღვრა 11.2. ფუნქციას $r(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ ეწოდება დადებითად განსაზღვრული, თუ $\forall n \geq 1, t \in (-\infty, +\infty), z_i \in C, i = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j,k=1}^n r(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} \geq 0.$$

კორელაციური ფუნქციის თვისებები:

1. $\overline{R(-t)} = \overline{E \xi_s \overline{\xi_{s+t}}} = E \overline{\xi_s} \xi_{s+t} = R(t)$;

$\Rightarrow$ *მ. ფურთუხია* $\Leftarrow$

2. $R(t)$ დადებითად განსაზღვრულია.

მართლაც,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n R(t_j - t_k) \overline{z_j z_k} &= \sum_{j,k=1}^n E \xi_{t_j} \overline{\xi_{t_k} z_j z_k} = \\ &= E \left(\sum_{j=1}^n \xi_{t_j} z_j \right) \overline{\left(\sum_{k=1}^n \xi_{t_k} z_k \right)} = E \left| \sum_{j=1}^n \xi_{t_j} z_j \right|^2 \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

ლემა 11.1. თუ $r(t)$ უწყვეტი და დადებითად განსაზღვრული ფუნქციაა, მაშინ :

1. $r(0) \geq 0$;

2. $\overline{r(t)} = r(-t)$, $|r(t)| \leq 0$;

3. თუ $\int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)| dt < \infty$, მაშინ $\int_{-\infty}^{+\infty} r(t) dt \geq 0$;

4. $e^{itx} r(t)$ დადებითად განსაზღვრულია $\forall x$.

დამტკიცება. 1. განმარტება 11.2-ის თანახმად

$$\sum_{j=1}^n r(0) z_j^2 = r(0) |z|^2 \geq 0 \Rightarrow r(0) \geq 0;$$

2. ვაჩვენოთ $n = 2$ -ის შემთხვევაში. ავიღოთ

$$z_1 = z, \quad z_2 = \lambda, \quad \lambda \in R^1, \quad t_1 = t, \quad t_2 = 0,$$

მაშინ გვაქვს

$$r(0)(|z|^2 + \lambda^2) + r(t)z\lambda + r(-t)\lambda\bar{z} \geq 0.$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ $r(t)z\lambda + r(-t)\lambda\bar{z}$ ნამდვილია ნებისმიერი z -სათვის (ვინაიდან $r(0)(|z|^2 + \lambda^2)$ ნამდვილია).

აქედან გამომდინარე, თუ ავიღებთ $z = 1$, მაშინ $r(t) + r(-t)$ ნამდვილია, ხოლო თუ ავიღებთ $z = i$, მაშინ $r(t) - r(-t)$ წარმოსახვითია. ამიტომ $r(t) = \overline{r(-t)}$.

ავიღოთ ახლა $z = \overline{r(t)}$, მაშინ გვაქვს

$$r(0)(|z|^2 + \lambda^2) + 2\lambda |r(t)|^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^1 \Rightarrow \\ \Rightarrow |r(t)| \leq r(0);$$

3. ავიღოთ $z_j = \Delta t_j$, $z_k = \Delta T_k$, მაშინ თუ გავიხსენებთ ინტეგრალური ჯამებისა და დადებითად განსაზღვრულობის განმარტებებს და გამოვიყენებთ აგრეთვე ლებეგის თეორემას მაჟორირებადი კრებადობის შესახებ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ :

$$0 \leq \frac{1}{N} \int_{-N}^N \int_{-N}^N r(t-s) dt ds = \int_{-2N}^{2N} r(t) \left(2 - \frac{|t|}{N}\right) dt = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \chi_{\{|t| \leq 2N\}} \left(2 - \frac{|t|}{N}\right) dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) dt ;$$

4. გვაქვს

$$\sum_{j,k=1}^n e^{ix(t_j - t_k)} r(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} = \sum_{j,k=1}^n e^{ixt_j} e^{-ixt_k} z_j \overline{z_k} r(t_j - t_k) = \\ = \sum_{j,k=1}^n z_j' \overline{z_k} r(t_j - t_k) \geq 0 \quad (z_j' := z_j e^{ixt_j}). \quad \square$$

თეორემა 11.1 (პონხეარ-ხინჩინი). თუ $r(t)$ უწყვეტი და დადებითად განსაზღვრული ფუნქციაა, მაშინ არსებობს ერთადერთი ზომა $F(dx) \geq 0$ ისეთი, რომ $F(-\infty, +\infty) = r(0)$ და

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} F(dx).$$

დამტკიცება. ვიგულისხმობთ, რომ $r(0) = 1$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილავდით $\frac{r(t)}{r(0)}$ ფუნქციას). განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $r(t)$ აბსოლუტურად ინტეგრებადია

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)| dt < \infty.$$

აღვნიშნოთ

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) e^{-itx} dt.$$

ცხადია, რომ უკანასკნელი ინტეგრალი არსებობს, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x -ის მიმართ და $f(x) \geq 0$ ლემა 11.1-ის მეოთხე პუნქტის თანახმად.

გარდა ამისა, $r \in L_2(-\infty, +\infty)$ (ვინაიდან

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)|^2 dt \leq r(0) \int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)| dt < \infty).$$

ამიტომ $f \in L_2(-\infty, +\infty)$ და სამართლიანია პარსევალის ტოლობა:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{sx^2}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2s}} r(t) dt. \quad (1)$$

მართლაც, როგორც ცნობილია, თუ g_1 და g_2 ფუნქციებია ფურიეს გარდაქმნებს აღვნიშნავთ შესაბამისად $\overline{g}_1$ და $\overline{g}_2$ -ით, მაშინ $(g_1, g_2) = 2\pi(\overline{g}_1, \overline{g}_2)$. იმისათვის, რომ მივიღოთ (1) თანაფარდობა საჭიროა ავიღოთ $g_1 = e^{-\frac{t^2}{2s}}$ და $g_2 = r(t)$. მაშინ $\overline{g}_1 = e^{-\frac{sx^2}{2}}$ და $\overline{g}_2 = f(x)$.

დავუშვათ, რომ $\xi \cong N(0,1)$. მაშინ ცხადია, რომ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2s}} r(t) dt = Er(\sqrt{s}\xi).$$

ლებეგის თეორემის თანახმად

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Er(\sqrt{s}\xi) = r(0).$$

მეორე მხრივ, კი

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{sx^2}{2}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

ამიტომ (1)-ის თანახმად

$$r(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

თავის მხრივ, $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნა იქნება

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx \quad t - \text{თ.ყ.},$$

ხოლო, ვინაიდან $r(t)$ უწყვეტია, ამიტომ აქ იქნება ტოლობა $\forall t$ -ში. თუკი ახლა შემოვიღებთ აღნიშვნას $F(dx) := f(x)dx$, ამით თეორემა კერძო შემთხვევაში დამტკიცებული იქნება.

ზოგადი შემთხვევა. აღვნიშნოთ

$$r_\varepsilon(t) := r(t)e^{-\frac{\varepsilon^2 t^2}{2}} = Er(t)e^{i\varepsilon t\xi} \geq 0,$$

სადაც $\xi \cong N(0,1)$. ცხადია, რომ $r_\varepsilon(t)$ აბსოლუტურად ინტეგრებადია (ვინაიდან

$$|r_\varepsilon(t)| \leq e^{-\frac{\varepsilon^2 t^2}{2}}).$$

ამიტომ ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად

$$r_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} F_\varepsilon(dx).$$

გარდა ამისა, $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} r_\varepsilon(t) = r(t)$.

მეორე მხრივ, თუ მახასიათებელი ფუნქცია კრებადია ნულში უწყვეტი ფუნქციისაქენ, მაშინ ეს უკანასკნელიც მახასიათებელი ფუნქციაა. ე. ი.

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} F(dx). \quad \square$$

პანსაზღვრა 11.2. თუ კორელაციური ფუნქცია წარმოდგენება შემდეგი სახით

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} F(dx),$$

მაშინ $F(dx)$ ზომას ეწოდება **სპექტრალური ზომა**, ხოლო თუკი ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx,$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **სპექტრალური სიმკვრივე**.

პედეზი 11. 1. თუ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R(t)| dt < \infty$$

და არსებობს სპექტრალური სიმკვრივე, მაშინ იგი უწყვეტი და შემოსაზღვრულია.

პედეზი 11.2. თუ $R(t)$ ნამდვილმნიშვნელობიანი ფუნქციაა და არსებობს სპექტრალური სიმკვრივე $f(x)$, მაშინ $f(x) = f(-x)$ (თ. ყ.).

დამტკიცება. ჩვენს შემთხვევაში ლემა 11.1.2-ის თანახმად $\forall t$ გვაქვს

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx &= R(t) = \overline{R(t)} = R(-t) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(-t)x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(-x) dx. \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) &= f(-x) \text{ (თ.ყ.). } \square \end{aligned}$$

თეორემა 11.2. იმისათვის, რომ $r(t)$ იყოს კორელაციური ფუნქცია საშუალო კვადრატული აზრით უწყვეტი სტაციონარული პროცესის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $r(t)$ იყოს უწყვეტი და დადებითად განსაზღვრული.

დამტკიცება. აუცილებლობა უკვე დამტკიცებულია.

ვაჩვენოთ *საკმარისობა*. ლემა 11.1.1-ის თანახმად $r(0) \geq 0$. ბოხნერ-ხინჩინის თეორემის ძალით, თუ $r(0) = 0$, მაშინ $r(t) = 0$, ხოლო თუ $r(0) > 0$, მაშინ

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} F(dx), \quad F(-\infty, +\infty) = r(0).$$

შემოვიღოთ ალბათური ზომა

$$F_1(dx) := \frac{1}{r(0)} F(dx),$$

მაშინ თეორემა 1.1-ის საფუძველზე მოიძებნება ისეთი შემთხვევითი სიდიდე ξ , რომ $F_1 = F_\xi$. დავუშვათ, რომ ϕ თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა $[-\pi, \pi]$ ინტერვალზე დამოუკიდებელი ξ -საგან და ავაგოთ პროცესი

$$\xi_t \equiv \sqrt{r(0)} e^{i(t\xi + \phi)}.$$

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

ცხადია, რომ

$$Ee^{i\phi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dx = 0, \quad E\xi_t = 0, \quad E|\xi_t|^2 = r(0) < \infty \quad \text{და}$$

$$E\xi_s \overline{\xi_t} = r(0) Ee^{i(s-t)\xi} = r(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s-t)x} F_1(dx) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s-t)x} F(dx) = r(s-t). \quad \square$$

თეორემა 11.3 (კოტელნიკოვ-პენსონი). დავუშვათ, რომ ξ_t , $t \in (-\infty, +\infty)$ საშუალო კვადრატული აზრით უწყვეტი სტაციონარული პროცესია და მისი სპექტრალური ზომა თავმოყრილია $(-\pi, \pi)$ ინტერვალზე. მაშინ ადგილი აქვს წარმოდგენას ($L_2(\Omega)$ -ში)

$$\xi_t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \xi_n.$$

დამტკიცება. უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} E \left| \xi_t - \sum_{j=-m}^n \frac{\sin \pi(t-j)}{\pi(t-j)} \xi_j \right|^2 = 0.$$

ვინაიდან აქ ყველაფერი გამოისახება კორელაციური ფუნქციის საშუალებით, ამიტომ თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ჩვენ შევამოწმებთ უკანასკნელ თანაფარდობას რაიმე სტაციონარული პროცესისათვის, რომლის კორელაციური ფუნქცია მოცემულია. $F(dx)$ იყოს შესაბამისი სპექტრალური ზომა და ვიგულისხმობთ, რომ ξ და ϕ შემთხვევითი სიდიდეები აღებულია წინა თეორემის დამტკიცებიდან. მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$\xi_t = e^{i(t\xi + \phi)}.$$

ე. ი. დასამტკიცებელია, რომ

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} E \left| e^{it\xi} - \sum_{j=-m}^n \frac{\sin \pi(t-j)}{\pi(t-j)} e^{ij\xi} \right|^2 = 0.$$

აქ კერძო ჯამები შემოსაზღვრულია, ხოლო $\forall \omega$ სხვაობა მოდულის შიგნით მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა $n, m \rightarrow \infty$, რადგანაც e^{itx} ფუნქცია (როგორც x -ის მიმართ გლუვი ფუნქცია) იშლება ფურიეს მწკრივად

$$e^{itx} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi(t-j)}{\pi(t-j)} e^{ijx} \quad (\forall x \in (-\pi, \pi)),$$

ხოლო ჩვენს შემთხვევაში $\xi \in (-\pi, \pi)$. ამიტომ ლებეგის თეორემის თანახმად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შევნიშნოთ, რომ, ერთი მხრივ,

$$R(s-t) = E \xi_s \overline{\xi_t} = \int_{\Omega} \xi_s(\omega) \overline{\xi_t(\omega)} P(d\omega),$$

ხოლო, მეორე მხრივ, ბოხნერ-ხინჩინის თეორემის თანახმად

$$R(s-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} \overline{e^{itx}} F(dx).$$

12. ტრანსფორმირის სპექტრალური წარმოდგენა

თეორემა 12.1 (პრაზმარი). დავუშვათ, რომ ζ_t , $t \in (-\infty, +\infty)$, საშუალო კვადრატული აზრით უწყვეტი სტაციონარული პროცესია, ხოლო $F(dx)$ – შესაბამისი სპექტრალური ზომა. მაშინ არსებობს შემთხვევითი ორთოგონალური ზომა ζ ისეთი, რომ $E \zeta(a, b] = 0$, $E |\zeta(a, b]|^2 = F(a, b]$ და ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$\zeta_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \zeta(dx).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ სივრცე $L_2((-\infty, +\infty), F(dx))$ და ოპერატორი

$$\Phi : L_2((-\infty, +\infty), F(dx)) \longrightarrow L_2(\Omega, P),$$

რომელიც

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j e^{it_j x}$$

ფუნქციას შეესაბამებს

$$\Phi f = \sum_{j=1}^n c_j \zeta_{t_j}$$

შემთხვევით სიდიდეს. შევამოწმოთ ამ ოპერატორის იზომეტრულობა. გვაქვს

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2((-\infty, +\infty), F(dx))}^2 &= \sum_{j,k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} c_j \overline{c_k} e^{i(t_j - t_k)x} F(dx) = \\ &= \sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} E \zeta_{t_j} \overline{\zeta_{t_k}} = E \left| \sum_{j,k=1}^n c_j \zeta_{t_j} \right|^2 = \|\Phi f\|_{L_2(\Omega, P)}^2. \end{aligned}$$

ამიტომ შესაძლებელია Φ ოპერატორის გაგრძელება ზემოთ აღნიშნული f ფუნქციების ჩაკეტვაზე შესაბამისი ნორმით. ფუნქციონალური ანალიზიდან კარგადაა ცნობილი, რომ ეს ჩაკეტვა ემთხვევა მთელ სივრცეს :

$$\overline{\left\{ \sum_{j=1}^n c_j e^{it_j x}, \quad \forall t_j, c_j, n \right\}}_{L_2((-\infty, +\infty), F(dx))} = L_2((-\infty, +\infty), F(dx)).$$

კერძოდ, ასეთი ფუნქციებით შეიძლება მივუახლოვდეთ ინდიკატორსაც. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\zeta(a, b] := \Phi \chi_{(a, b]}.$$

აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი საფეხურა f ფუნქციისათვის გვექნება, რომ:

$$\Phi f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \zeta(dx). \quad (1)$$

ცხადია, რომ $E\Phi f = 0$. მართლაც, თუ

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j e^{it_j x},$$

მაშინ ეს გამოდის Φ ოპერატორის განმარტებიდან და იქიდან, რომ $E\xi_t = 0$.

ზოგად შემთხვევაში, $\forall f \in L_2((-\infty, +\infty), F(dx))$ არსებობს აღნიშნული სახის f_n ფუნქციების მიმდევრობა, რომელიც კრებადია f ფუნქციისაკენ $L_2((-\infty, +\infty), F(dx))$ სივრცეში. ამიტომ, Φ ოპერატორის იზომეტრულობის თანახმად, Φf_n მიმდევრობა კრებადია Φf -ისაკენ $L_2(\Omega, P)$ სივრცეში. მაშასადამე, $E\Phi f = 0$.

აქედან, ერთი მხრივ, გამოდის, რომ $E\zeta(a, b] = 0$, ხოლო, მეორე მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ ოპერატორი, რომელიც ინარჩუნებს ნორმას, ინარჩუნებს აგრეთვე სკალარულ ნამრავლსაც, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} E\zeta(a, b] \overline{\zeta(a_1, b_1]} &= (\Phi\chi_{(a, b]}, \Phi\chi_{(a_1, b_1]})_{L_2(\Omega, P)} = \\ &= (\chi_{(a, b]}, \chi_{(a_1, b_1]})_{L_2((-\infty, +\infty), F(dx))} = F((a, b] \cap (a_1, b_1]). \end{aligned}$$

ცხადია, აგრეთვე, რომ (1) სამართლიანია ნებისმიერი f ფუნქციისათვის $L_2((-\infty, +\infty), F(dx))$ სივრციდან. ავიღოთ $f = e^{itx}$, მაშინ გვექნება

$$\Phi e^{itx} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \zeta(dx),$$

ხოლო განსაზღვრის ძალით $\Phi e^{itx} = \zeta_t$. ამიტომ

$$\zeta_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \zeta(dx). \quad \square$$

განსაზღვრა 12.1. ζ შემთხვევით ორთოგონალურ ზომას კრამერის თეორემიდან **შემთხვევითი სპექტრალური ზომა** ეწოდება.

შემთხვევითი სპექტრალური ზომის ერთადერთობა. დავუშვათ, რომ არსებობს ორი შემთხვევითი სპექტრალური ზომა ζ_1 და ζ_2 . განვმარტოთ ოპერატორები

$$\Phi_i f := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \zeta_i(dx), \quad i = 1, 2.$$

ცხადია, რომ ორივე ოპერატორი იზომეტრულია სტოქასტური ინტეგრალის განმარტების ძალით. თუ ავიღებთ f ფუნქციის როლში e^{itx} ფუნქციას, კრამერის თეორემის საფუძველზე გვექნება

$$\Phi_1 e^{itx} = \zeta_t = \Phi_2 e^{itx}.$$

ე. ი. Φ_1 და Φ_2 ოპერატორები ერთმანეთს ემთხვევა ყველა ტრი-
გონომეტრიული პოლინომისათვის. აქედან გამომდინარე, ისინი ერ-
თმანეთს ემთხვევა ყველა ფუნქციისათვის $L_2((-\infty, +\infty), F(dx))$
სივრცეიდან. კერძოდ, ისინი ერთმანეთს დაემთხვევა ინდიკატო-
რებზე. ამიტომ

$$\zeta_1(a, b] = \Phi_1 \chi_{(a, b]} = \Phi_2 \chi_{(a, b]} = \zeta_2(a, b]. \quad \square$$

ბანსაზღვრა 12.2. კომპლექსურმნიშვნელობიან შემთხვევით
ვექტორს $(\xi^1, \dots, \xi^n)$ ეწოდება გაუსის, თუ ნებისმიერი $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$
კომპლექსური რიცხვებისათვის წრფივი კომბინაცია $\sum_{j=1}^n \lambda_j \xi^j$
წარმოიდგინება $\eta_1 + i\eta_2$ სახით, სადაც η_1 და η_2 ნამდვილმნიშვნე-
ლობიანი შემთხვევითი სიდიდეებია და წყვილი (η_1, η_2) გაუსისაა.

შედეგი 12.1. თუ ξ_t პროცესი გაუსისაა, მაშინ $\forall f_1, \dots, f_n \in$
 $L_2((-\infty, +\infty), F(dx))$ შემთხვევითი ვექტორი

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \zeta(dx), \dots, \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \zeta(dx) \right)$$

გაუსისაა.

დამტკიცება. ვინაიდან სტოქასტური ინტეგრალი წრფივია,
ამიტომ განმარტება 12.2-ში მონაწილე წრფივი კომბინაცია ისევ
იქნება სტოქასტური ინტეგრალი f_i , $i = 1, \dots, n$, ფუნქციების შესა-
ბამისი წრფივი კომბინაციიდან, რომელიც აგრეთვე $L_2((-\infty, +\infty), F(dx))$
სივრცის ელემენტია. ამიტომ საკმარისია შევამოწმოთ, რომ ერთი
 $f \in L_2((-\infty, +\infty), F(dx))$ ფუნქციის შემთხვევაში

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \zeta(dx)$$

გაუსისაა. ეს თავისთავად ასე იქნება, თუ $f(x) = e^{itx}$, ვინაიდან

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \zeta'(dx) = \xi_t.$$

ე.ი. გაუსურობა გვექნება ნებისმიერი ტრიგონომეტრიული პოლინომისათვის. მაგრამ ტრიგონომეტრიული პოლინომების ერთობლიობა ყველგან მკვერია $L_2((-\infty, +\infty), F(dx))$ სივრცეში, ხოლო გაუსის შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო კვადრატული აზრით ზღვარი ისევ გაუსისაა. ამიტომ ჩვენს შემთხვევაში სტოქასტური ინტეგრალი საზოგადოდ გაუსისაა. $\square$

შედეგი 12.2. თუ ξ_t ნამდვილმნიშვნელობიანი პროცესია, მაშინ

$$\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \zeta(dx)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-x)} \zeta(dx).$$

დამტკიცება. უკანასკნელი თანაფარდობა საკმარისია შევამო-
ნმოთ, როცა $f(x) = e^{itx}$. ამ დროს კი ორივე მხარე იძლევა ξ_t -ს. $\square$

ამოცანა 12.1. თუ ξ_t და მისი შესაბამისი ζ ნამდვილია, მაშინ $\xi_t = 0$ (P - თ.ყ.) $\forall t$.

ამოცანა 12.2. თუ ξ_t ნამდვილია, მაშინ არსებობს ნამდვილი შემთხვევითი ზომა ζ , ისეთი, რომ

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) \zeta(dx).$$

ამოცანა 12.3. დავუშვათ, რომ ζ შემთხვევითი ორთოგონალური ზომაა $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალზე. ვაჩვენოთ, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \zeta(dx)$$

იქნება საშუალო კვადრატული აზრით უწყვეტი სტაციონარული პროცესი.

13. ორნუთინ-ულანგჰკის პროცესი

დავუშვათ, რაიმე (Ω, F, P) ალბათურ სივრცეზე მოცემულია w_t ვინერის პროცესი და მისგან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სი-
დიდე ξ_0 . განვიხილოთ სტოქასტური განტოლება

$$\xi_t = \xi_0 - \alpha \int_0^t \xi_s ds + \beta w_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

სადაც $\alpha, \beta \in R^1$, $\alpha > 0$.

აღვნიშნოთ $\eta_t := \xi_t - \beta w_t$, მაშინ იგი დააკმაყოფილებს შემ-
დეგ პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\eta_t = \xi_0 - \alpha \int_0^t (\eta_s + \beta w_s) ds .$$

ამ განტოლების ამოხსნა შეიძლება ვიპოვოთ ნებისმიერი ω -
სათვის, $\omega \in \Omega$. კერძოდ, გვაქვს

$$\eta_t = \xi_0 e^{-\alpha t} - \alpha \beta \int_0^t e^{\alpha(s-t)} w_s ds .$$

ამიტომ (1) განტოლების ამოხსნა იქნება

$$\xi_t = \xi_0 e^{-\alpha t} - \alpha \beta \int_0^t e^{\alpha(s-t)} w_s ds + \beta w_t . \quad (2)$$

აშოცანა 13.1. დავუშვათ, რომ π ნახევარგოლზე ერთეუ-
ლით, რომელიც შედგება X სიმრავლის ქვესიმრავლეებისაგან,
მოცემულია შემთხვევითი ოთოგონალური ზომა ζ სტრუქტურუ-
ლი ფუნქციით μ . დავუშვათ, რომ $[a, b] \times X$ სიმრავლეზე მოცე-
მულია ფუნქცია $f(t, x)$, რომელიც უწყვეტია t -ს მიმართ, შემო-
საზღვრულია და $\sigma(\pi)$ -ზომადია X -ის მიმართ. ვაჩვენოთ, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) \zeta(dx)$$

უწყვეტია საშუალო კვადრატული აზრით და სამართლიანია ფუბი-
ნის თეორემა

$$\int_a^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) \zeta(dx) \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_a^b f(t, x) dt \right) \zeta(dx).$$

(2) წარმოდგენიდან ფუბინის ფორმულის საშუალებით შეიძ-
ლება უფრო მოხერხებული წარმოდგენის მიღება. კერძოდ, გვაქვს

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\alpha(s-t)} w_s ds &= \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(s-t)} \chi_{(a,b]}(u) w(du) \right) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t e^{\alpha(s-t)} ds \right) dw_u = \frac{1}{\alpha} w_t - \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{\alpha(u-t)} dw_u, \end{aligned}$$

საიდანაც (2) წარმოდგენის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ

$$\xi_t = \xi_0 e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{\alpha(s-t)} dw_s. \quad (3)$$

თეორემა 13.1. თუ ξ_0 ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი
სიდიდეა პარამეტრებით 0 და $\beta^2/(2\alpha)$ ($\xi_0 \cong N(0, \beta^2/(2\alpha))$),

მაშინ (1) განტოლების ამონახსნი ξ_t წარმოადგენს გაუსის სტაციონარულ პროცესს $[0, \infty)$ ინტერვალზე კორელაციური ფუნქციით

$$R(t) = \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$$

და სპექტრალური სიმკვრივით

$$\frac{\beta^2}{2\pi} \frac{1}{x^2 + \alpha^2}.$$

დამტკიცება. (1) განტოლების ξ_t ამონახსნის წარმოდგენებიდან, თეორემის პირობებში, ცხადია, რომ $E\xi_t = 0$. ვინაიდან ξ_0 დამოუკიდებელია ვინერის პროცესისაგან და სტოქასტური ინტეგრალი აგებული გაუსის პროცესით (დეტერმინისტული ფუნქციისაგან) ისევ გაუსისაა, ამიტომ ξ_t გაუსის პროცესია. შემდგომში, რომ ის სტაციონარულია. $\forall t \geq s$ გვაქვს :

$$\begin{aligned} E\xi_s \xi_t &\stackrel{(3)}{=} e^{-\alpha(s+t)} E\xi_0^2 + \beta^2 \int_0^t \chi_{\{u \leq s\}} e^{\alpha(u-s) + \alpha(u-t)} du = \\ &= \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{\alpha(s-t)} = \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\alpha|s-t|}. \end{aligned}$$

ამით სტაციონარულობა ნაჩვენებია. თეორემის დამტკიცების დასასრულებლად საჭიროა შემოწმდეს, რომ

$$R(t) = \frac{\beta^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \alpha^2} e^{itx} dx,$$

რისთვისაც მოწმდება, რომ

$$\frac{\beta^2}{2\pi} \frac{1}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} R(t) dt$$

და შემდეგ გადავდივართ ფურიეს შებრუნებულ გარდაქმნაზე. $\square$

განსაზღვრა 13.1. $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალზე მოცემულ ნამდვილ, გაუსის, სტაციონარულ პროცესს კორელაციური ფუნქციით:

$$R(t) = R(0)e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha \geq 0$$

ორნშტეინ-ულენბეკის პროცესი ეწოდება.

ამოცანა 13.2. ნამდვილი, გაუსის, მარკოვული, სტაციონარული პროცესი წარმოადგენს ორნშტეინ-ულენბეკის პროცესს და პირიქით (სადაც მარკოვულობა გაიგება შემდეგნაირად

$$E[f(\xi_t) | \xi_t, \dots, \xi_{t_n}] = E[f(\xi_t) | \xi_{t_n}], \quad t \geq 0, \quad 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n).$$

როგორც ვნახეთ, (1) განტოლებით განსაზღვრული პროცესი ორნშტეინ-ულენბეკის პროცესია. **ვაჩვენოთ პირიქით, რომ ორნშტეინ-ულენბეკის ნებისმიერი პროცესი აკმაყოფილებს ამ განტოლებას.** დავუშვათ, რომ ეს ასეა, განვსაზღვროთ (1) თანაფარდობიდან W_t და ვაჩვენოთ, რომ ის ვინერის პროცესია. გადავიდეთ სპექტრალურ ზომაზე:

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \zeta(dx).$$

(1) თანაფარდობიდან გამომდინარე, ფუბინის თეორემის გათვალისწინებით, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\begin{aligned} \beta W_t &= \xi_t - \xi_0 + \alpha \int_0^t \xi_s ds = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 + \alpha \int_0^t e^{isx} ds) \zeta(dx) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{ix} (ix + \alpha) \zeta(dx). \end{aligned}$$

აქედან, როცა $\beta \neq 0$, გვაქვს

$$W_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{ix} \frac{ix + \alpha}{\beta} \zeta(dx).$$

გადავიდეთ ახლა ახალ λ ზომაზე, რომლის წარმოდგენაშიც შედის პროცესის α და β პარამეტრები

$$\lambda(dx) := \sqrt{2\pi} \frac{ix + \alpha}{\beta} \zeta(dx),$$

მაშინ

$$\xi_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{\beta}{ix + \alpha} \lambda(dx).$$

ცხადია, რომ

$$E |\lambda(a, b]|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(a, b]} \frac{x^2 + \alpha^2}{\beta^2} \frac{\beta^2}{x^2 + \alpha^2} \frac{1}{2\pi} dx = b - a < \infty.$$

სრულიად ანალოგიურად, ვნახავთ, რომ $E\lambda(a, b]\overline{\lambda(a_1, b_1]}$ ტოლი იქნება $(a, b] \cap (a_1, b_1]$ თანაკვეთის სიგრძის. ე. ი. λ ყოფილა შემთხვევითი ორთოგონალური ზომა, რომლის მახასიათებელ ზომას წარმოადგენს ლებეგის ზომა. მაგრამ ლებეგის ზომა შემოუსაზღვრელია, ამიტომ ინტეგრალი განმარტებულია როგორც არასაკუთრივი ინტეგრალი. თუ გადავალთ შემოსაზღვრულ ზომეზე

$$\lambda^n(a, b] := \lambda((a, b] \cap (-n, n]),$$

მაშინ ჩვენ შევძლებთ განვმარტოთ ამ ზომების მიმართ ინტეგრალი ისეთი f ფუნქციებისათვის, რომელთათვისაც

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \chi_{(-n, n]}(x) dx < \infty$$

და მათთვის მტკიცდება, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \lambda^n(dx) = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{ix + \alpha}{\beta} \chi_{(-n, n]}(x) \zeta(dx).$$

მართლაც, თუ $f(x) = \chi_{(a,b]}(x)$, მაშინ ეს ტრივიალურია, ხოლო ზოგად შემთხვევაზე გადასვლა ხდება სტანდარტული გზით.

დავუშვათ, რომ f ფუნქცია კვადრატით ინტეგრებადია

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\eta_n \equiv \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{ix + \alpha}{\beta} \chi_{(-n,n]}(x) \zeta(dx).$$

ლებეგის თეორემის თანახმად

$$\begin{aligned} \lim_{n,m \rightarrow \infty} E |\eta_n - \eta_m|^2 &= \\ &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 |\chi_{(-n,n]}(x) - \chi_{(-m,m]}(x)|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

ამიტომ არსებობს $\{\eta_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი საშუალო კვადრატული აზრით, რომელსაც ჩვენ ვიღებთ f ფუნქციიდან λ ზომის მიმართ ინტეგრალის განსაზღვრებად :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \lambda(dx) &= l.i.m. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \lambda^n(dx) = \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{ix + \alpha}{\beta} \zeta(dx). \end{aligned}$$

ახლა w_t წარმოიდგინება შემდეგნაირად

$$w_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{ix} \lambda(dx), \quad t \geq 0.$$

გარდა ამისა, ცხადია, რომ

$$E \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x) \lambda(dx) \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x) \lambda(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x) \overline{g_2(x)} dx.$$

ლემა 13.1. დავუშვათ, რომ ξ_t ნამდვილი, გაუსის, საშუალო კვადრატული აზრით უწყვეტი, სტაციონარული პროცესია ζ სპექტრალური ზომითა და $f(x) \neq 0$ სპექტრალური სიმკვრივით. დავუშვათ, რომ f წარმოიდგინება შემდეგნაირად $f(x) = \phi(x) \overline{\phi(x)}$, სადაც ϕ წილად-რაციონალური ფუნქციაა, $\phi(x) = \overline{\phi(-x)}$ და $\phi(z)$ -ის პოლუსები მოთავსებულია ზედა ნახევარსიბრტყეში. განსაზღვროთ ზომა

$$\lambda(a, b] := \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(a, b]}(x) \frac{1}{\phi(x)} \zeta(dx) \quad \left(\frac{1}{0} \text{ ჩავთვალოთ ნულად} \right)$$

და აღვნიშნოთ

$$w_t := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{ix} \lambda(dx), \quad t \geq 0.$$

მაშინ w_t პროცესს გააჩნია უწყვეტი მოდიფიკაცია, w_t წარმოადგენს ვინერის პროცესს და იგი დამოუკიდებელია ξ_0 შემთხვევითი სიდიდისაგან.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ λ იქნება შემთხვევითი ორთოგონალური ზომა, რომლის მახასიათებელი ზომაა ლებეგის ზომა. მართლაც, გვაქვს

$$E |\lambda(a, b]|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(a, b]}(x) \frac{1}{|\phi(x)|^2} |\phi(x)|^2 dx = b - a.$$

⇒ ო.ფურთუხია ⇐

ვინაიდან

$$\frac{e^{itx} - 1}{ix} \in L_2(dx),$$

ამიტომ ინტეგრალი w_t -ში განსაზღვრულია და

$$w_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{ix} \frac{1}{\phi(x)} \zeta(dx).$$

რადგანაც $\phi(x) = \overline{\phi(-x)}$, ამიტომ w_t ნამდვილი პროცესია.

ცხადია, რომ $EW_t = 0$ და w_t გაუსისაა.

კორელაციური ფუნქციის გამოსათვლელად გავიხსენოთ, რომ

$$\frac{e^{itx} - 1}{ix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(0,s]}(u) e^{ixu} du$$

და გამოვიყენოთ პარსევალის ტოლობა, რომლის თანახმადაც სკალარული ნამრავლი ინვარიანტულია ფურიეს გარდაქმნის მიმართ. მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} EW_s w_t &= EW_s \overline{w_t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx} - 1}{-ix} \frac{e^{isx} - 1}{ix} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(0,t]}(u) \chi_{(0,s]}(u) du = \min(t, s). \end{aligned}$$

აქედან, კერძოდ, გამოდის, რომ $E(w_t - w_s)^2 = |t - s|$. გარდა ამისა,

$$E(w_t - w_s)^4 = 3|t - s|^2.$$

ამიტომ კოლმოგოროვის თეორემის თანახმად უწყვეტი მოდიფიკაციის არსებობის შესახებ w_t პროცესს გააჩნია უწყვეტი მო-

დიფიკაცია. ყოველივე ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარე, w_t ვინერის პროცესია.

შევამოწმოთ, რომ w_t ვინერის პროცესი დამოუკიდებელია ξ_0 შემთხვევითი სიდიდისაგან. ამისათვის ვაჩვენოთ, რომ ξ_0 დამოუკიდებელია $(w_{t_1}, \dots, w_{t_n})$ ვექტორისაგან. ვინაიდან $(\xi_0, w_{t_1}, \dots, w_{t_n})$ ვექტორის განაწილება გაუსისაა $(\xi_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(dx))$, ამიტომ საკმარისია შევამოწმოთ, რომ $E(\xi_0 w_t) = 0$. ვისარგებლოთ იმით, რომ $\phi(z)$ -ის პოლუსები მოთავსებულია ზედა ნახევარსიბრტყეში,

$$R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2 dx < \infty$$

და ϕ წილად-რაციონალურია. ამიტომ

$$|\phi(z)| = O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad \text{Im } z \leq 0, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

მეორე მხრივ, ვინაიდან ქვედა ნახევარსიბრტყეში e^{-ixt} შემოსაზღვრულია, ამიტომ ფუნქციას

$$\frac{e^{-itx} - 1}{-ix} \phi(x)$$

გააჩნია $\frac{1}{|x|^2}$ რიგი. საბოლოოდ კი ვღებულობთ, რომ

$$\begin{aligned} E(\xi_0 w_t) &= E(\xi_0 \overline{w_t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{e^{ixt} - 1}}{ix} \phi(dx) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt} - 1}{-ix} \phi(dx) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *ო. ფურთუხია* $\Leftarrow$

პენიშენა 13.1. თუ მოცემული გვაქვს ვინერის პროცესი

$$w_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt} - 1}{-ix} \lambda(dx),$$

მაშინ ამ თანადარდობის t -ს მიმართ ფორმალური განარმოებით მიღებულ

$$\dot{w}_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \lambda(dx)$$

სიდიდეს **თეორი ხმაური** ეწოდება.

14. პუასონის პროცესი

პუასონის პროცესი ვინერის პროცესთან ერთად წარმოადგენს უწყვეტ დროში შემთხვევით პროცესთა თეორიის ორ ფუნდამენტურ მაგალითს.

განსაზღვრა 14.1. პუასონის პროცესი პარამეტრით λ ($\lambda > 0$) ეწოდება $T = [0, \infty)$ -ზე მოცემულ N_t პროცესს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. $N_0 = 0$ (P - თ. ყ.);
2. ნებისმიერი $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ დაყოფისათვის შემთხვევითი სიდიდეები $N_{t_1} - N_{t_0}$, $N_{t_2} - N_{t_1}$, ..., $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ დამოუკიდებელია;
3. შემთხვევითი სიდიდეს $N_t - N_s$ ($0 \leq s < t$) გააჩნია პუასონის განაწილება პარამეტრით $\lambda(t-s)$, ე. ი.

$$P\{N_t - N_s = i\} = (\lambda(t-s))^i e^{-\lambda(t-s)} / i!, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

თეორემა 14.1. თუ პუასონის პროცესის ყველა ტრაექტორია უწყვეტია მარჯვნიდან, მაშინ თითქმის ყველა ტრაექტორია არაკლებადი მთელმნიშვნელობიანი ფუნქციაა, რომლებიც იზრდებიან მხოლოდ ერთი ტოლი ნახტომებით.

დამტკიცება. შემოვიღოთ ხდომილობები:

$A = \{N_t \text{ მთელია ყველა ორადრაციონალური } t\text{-სათვის,}$

ე. ი. $t = r / 2^n\}$,

$B = \{N_{t_1} \leq N_{t_2} \text{ ყველა ორადრაციონალური } t_1, t_2 \text{ -სათვის, } t_1 \leq t_2\}$,

$C_K = \{\text{ყველა მთელი } i\text{-სათვის } 0\text{-დან } N_K\text{-მდე არსებობს ორადრაციონალური } t \in [0, K], \text{ ისეთი, რომ } N_t = i\}.$

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

ვაჩვენოთ, რომ ამ ხდომილობების ალბათობები ერთის ტოლია.

A ხდომილება წარმოადგენს $A_t = \{N_t \text{ მთელია}\}$ ხდომილობების თვლად თანაკვეთას. ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} P(A_t) &= P\{N_t \text{ მთელია}\} = P\{N_t - N_0 \text{ მთელია}\} = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} P\{N_t - N_0 = i\} = 1 \end{aligned}$$

და ამიტომ აგრეთვე $P(A) = 1$.

ხდომილება B წარმოადგენს ხდომილობათა შემდეგი მიმდევრობის თანაკვეთას

$$\begin{aligned} B_n &= \{N_0 \leq N_{1/2^n} \leq N_{2/2^n} \leq \dots \leq N_{r/2^n} \leq N_{(r+1)/2^n} \leq \dots\} = \\ &= \bigcap_r \{N_{(r+1)/2^n} - N_{r/2^n} \geq 0\}. \end{aligned}$$

ცხადია, რომ $P\{N_{(r+1)/2^n} - N_{r/2^n} \geq 0\} = 1$, ამიტომ $1 = P(B_n) = P(B)$.

რაც შეეხება მესამე ხდომილობას, აქ ადგილი აქვს ჩართვას

$$C_K \supseteq \bigcap_{r=0}^{2^n K} \{N_{(r+1)/2^n} - N_{r/2^n} = 0 \text{ ან } 1\},$$

შესაბამისად, 14.1 განსაზღვრის მე-2 და მე-3 პირობების ძალით გვაქვს

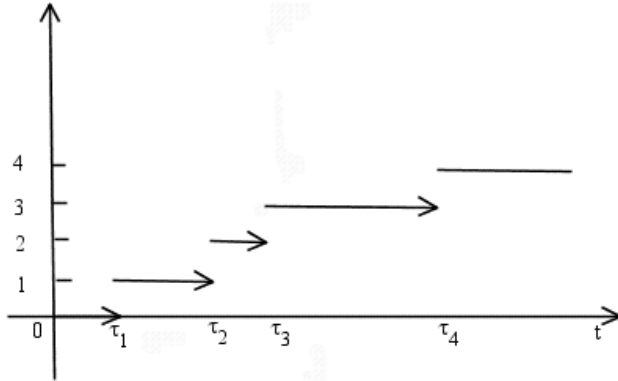
$$\begin{aligned} P(C_K) &\geq \prod_{r=0}^{2^n K} P\{N_{(r+1)/2^n} - N_{r/2^n} = 0 \text{ ან } 1\} = \\ &= [e^{-\lambda 2^{-n}} + \lambda 2^{-n} e^{-\lambda 2^{-n}}]^{2^n K}. \end{aligned}$$

მეორე მხრივ, $e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 1 - o(\lambda)$ როცა $\lambda \rightarrow 0$. ამიტომ $P(C_K) \geq [1 - o(\lambda 2^{-n})]^{K 2^n} \rightarrow 1$, როცა $n \rightarrow \infty$, და $P(C_K) = 1$.

თუ ახლა შევნიშნავთ, რომ ხდომილობა, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ N_t არაკლებადი მთელმნიშვნელობიანი ფუნქციაა, რომელიც იზრდება მხოლოდ ერთის ტოლი ნახტომებით, ემთხვევა

(N_t -ს მარჯვნიდან უწყვეტობის გამო) $AB \cap C_K$ თანაკვეთას, დავრწმუნდებით თეორემის სამართლიანობაში. $\square$

პუასონის პროცესის ტრაექტორიის გრაფიკი შემდეგნაირად გამოიყურება:



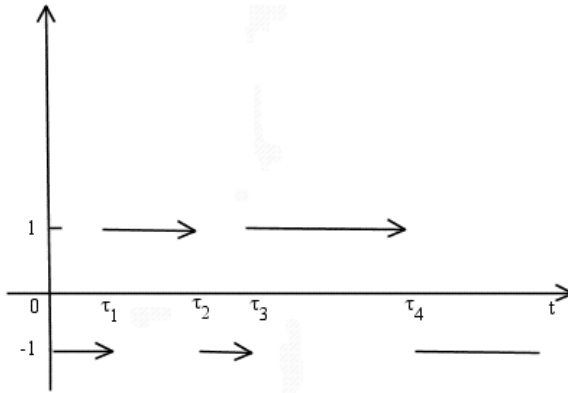
სადაც $\tau_1, \tau_2, \dots$ აღნიშნავს შესაბამისად პირველი, მეორე და ა.შ. ნახტომების მომენტებს. სიზუსტისათვის საჭიროა ითქვას (ვინაიდან ტრაექტორიებს აღნიშნული სახე აქვთ არა ნებისმიერი $\omega \in \Omega$ -სათვის, არამედ მხოლოდ თითქმის ყველასათვის, ხოლო შემთხვევითი სიდიდე უნდა იყოს განსაზღვრული ყველა ω -სათვის), რომ: $\tau_n := \min\{t \geq 0 : N_t = n\}$, ამასთანავე თუ ასეთი t არ არსებობს, მაშინ ვთვლით, რომ $\tau_n := \infty$. ასეთნაირად განსაზღვრული τ_n -ები შემთხვევითი სიდიდეებია მნიშვნელობებით $[0, +\infty]$ ინტერვალიდან. მართლაც,

$$\{\omega : \tau_n \leq t\} = \{\omega : N_t \geq n\} \in F.$$

ამოცანა 14.1. ვაჩვენოთ, რომ შემთხვევითი სიდიდეები: $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_{n-1}, \dots$ დამოუკიდებელია და მათ გააჩნიათ მაჩვენებელიანი განაწილება პარამეტრით λ .

პუასონის პროცესი მნიშვნელოვან როლს ასრულებს სხვადასხვა გამოყენებებში, მათ შორის მასობრივი მომსახურების თეორიაში. მაგალითად, ის წარმოადგენს კარგ მათემატიკურ მოდელს გამოძახებათა რიცხვისათვის, რომელიც მოვიდა სატელეფონო სადგურში დროის t მომენტისათვის (ეს ფუნქცია იზრდება ერთის ტოლი ნახტომებით და მისი ნაზრდი – გამოძახებათა რიცხვი თანაუკვეთ დროის ინტერვალებზე – შეიძლება ჩაითვალოს დამოუკიდებლად, თუ უგულებელვყოფთ მცირე ეფექტებს, რომლებიც გამოწვეულია, ვთქვათ, განმეორებითი გამოძახებებით უარის შემთხვევაში). მაგრამ, ავტომობილთა რაოდენობის აღსაწერად, რომლებიც მოყვნენ ავტოსაგზაო შემთხვევაში დროის t მომენტისათვის გზის მოცემულ მონაკვეთზე, პუასონის პროცესი არ გამოდგება, ვინაიდან ავტოსაგზაო შემთხვევაში ხშირად მონაწილეობს ორი და მეტი ავტომობილი და შესაბამისად, ფუნქციას, რომელიც დაითვლის ასეთი ავტომობილების რაოდენობას, შეუძლია გააკეთოს ნახტომი ერთბაშად ორ ან მეტ ერთეულზე.

დავუშვათ, რომ N_t პუასონის პროცესისაგან დამოუკიდებლად ვაგდებთ მონეტას. განვსაზღვროთ ახალი შემთხვევითი პროცესი Q_t შემდეგნაირად: თუ მონეტის აგდებისას მოვა გერბი, მაშინ დავუშვათ, რომ $Q_t = (-1)^{N_t}$, ხოლო საფასურის მოსვლისას – $Q_t = (-1)^{N_t+1}$. ცხადია, რომ საფასურის მოსვლის შემთხვევაში Q_t პროცესის ტრაექტორიას ექნება შემდეგი სახე:



ვიპოვოთ Q_t პროცესის სასრულგანზომილებიანი განაწილებები.
 ვიპოვოთ, მაგალითად, $P\{Q_{t_1} = -1, Q_{t_2} = 1, Q_{t_3} = -1\}$ ($t_1 < t_2 < t_3$).
 დამოუკიდებლობის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\begin{aligned}
 &P\{Q_{t_1} = -1, Q_{t_2} = 1, Q_{t_3} = -1\} = \\
 &= P\{\text{მოვიდა გერბი, } N_{t_1} \text{ კენჭია, } N_{t_2} - N_{t_1} \text{ კენჭია, } N_{t_3} - N_{t_2} \text{ ლუწია}\} + \\
 &+ P\{\text{მოვიდა საფასური, } N_{t_1} \text{ ლუწია, } N_{t_2} - N_{t_1} \text{ კენჭია, } N_{t_3} - N_{t_2} \text{ ლუწია}\} = \\
 &= [P\{\text{მოვიდა გერბი}\}P\{N_{t_1} \text{ კენჭია}\} + P\{\text{მოვიდა საფასური}\}P\{N_{t_1} \text{ ლუწია}\}] \times \\
 &\times P\{N_{t_2} - N_{t_1} \text{ კენჭია}\}P\{N_{t_3} - N_{t_2} \text{ ლუწია}\} = \\
 &= [1/2 \cdot P\{N_{t_1} \text{ კენჭია}\} + 1/2 \cdot P\{N_{t_1} \text{ ლუწია}\}] \times \\
 &\times P\{N_{t_2} - N_{t_1} \text{ კენჭია}\}P\{N_{t_3} - N_{t_2} \text{ ლუწია}\} = \\
 &= (1/2) \cdot P\{N_{t_2} - N_{t_1} \text{ კენჭია}\}P\{N_{t_3} - N_{t_2} \text{ ლუწია}\}.
 \end{aligned}$$

შემდგომ

$$P\{N_{t_2} - N_{t_1} \text{ კენჭია}\} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{2r+1}}{(2r+1)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} = (1 - e^{-2\lambda(t_2 - t_1)})/2.$$

ანალოგიურად,

$$P\{N_{t_3} - N_{t_2} \text{ ლუწია}\} = (1 + e^{-2\lambda(t_3 - t_2)})/2.$$

თუ $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$, საბოლოოდ ვღებულობთ, რომ:

$$P\{Q_{t_1} = -1, Q_{t_2} = 1, Q_{t_3} = -1\} = (1 - e^{-4\lambda(t_2 - t_1)})/8. \quad \square$$

დავუშვათ, რომ მოცემულია $(\Omega, F, (F_t)_{0 \leq t \leq \infty}, P)$ ალბათური სივრცე ფილტრაციით, რომელიც აკმაყოფილებს ჩვეულებრივ პირობებს. ვთქვათ, $(T_n)_{n \geq 1}$ დადებით შემთხვევით სიდიდეთა მკაცრად ზრდადი მიმდევრობაა, $T_0 = 0$ (P - თ.ყ.).

განსაზღვრა 14.2. $N_t = \sum_{n \geq 1} \chi_{\{t \geq T_n\}}$ პროცესს მნიშვნელობებით $\{0, 1, \dots, \infty\}$ სიმრავლიდან ეწოდება $(T_n)_{n \geq 1}$ **მიმდევრობასთან დაკავშირებული მთვლელი პროცესი**.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $T := \sup_n T_n$, მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} [T_n, \infty) &= \{N \geq n\} = \{(t, \omega) : N_t(\omega) \geq n\}; \\ [T_n, T_{n+1}) &= \{N = n\} \text{ და } [T, \infty) = \{N = \infty\}. \end{aligned}$$

შემთხვევითი სიდიდე T წარმოადგენს N -ის **აფეთქების დროს**. თუ $T = \infty$ (P - თ.ყ.), მაშინ N არის მთვლელი პროცესი **აფეთქების გარეშე**. აქვე შევნიშნავთ, რომ თუ $0 \leq s < t < \infty$, მაშინ გვაქვს

$$N_t - N_s = \sum_{n \geq 1} \chi_{\{s < T_n \leq t\}}.$$

ნაზრდი $N_t - N_s$ ითვლის იმ T_n შემთხვევითი დროების რაოდენობას, რომლებიც მოხვდნენ ფიქსირებულ s და t დროებს შორის.

ასეთნაირად განსაზღვრული მთვლელი პროცესი არ არის აუცილებლად შეთანხმებული $(F_t)_{t \geq 0}$ ფილტრაციასთან. სინამდვილეში ჩვენ გვაქვს შემდეგი:

თეორემა 14.2. მთვლელი პროცესი N შეთანხმებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მასთან დაკავშირებული $(T_n)_{n \geq 1}$ შემთხვევითი სიდიდეები გაჩერების მომენტებია.

დამტკიცება. თუ $(T_n)_{n \geq 0}$ გაჩერების მომენტებია ($T_0 = 0$ P -თ.ყ.), მაშინ ნებისმიერი n -ისათვის ხდომილობა

$$\{N_t = n\} = \{\omega : T_n(\omega) \leq t < T_{n+1}(\omega)\} \in F_t,$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ $N_t \in F_t$ და მაშასადამე, N შეთანხმებულია.

პირიქით, თუ N შეთანხმებულია, მაშინ ყოველი t -სათვის გვაქვს

$$\{T_n \leq t\} = \{N_t \geq n\} \in F_t,$$

ანუ T_n გაჩერების მომენტია. $\square$

შევნიშნოთ, რომ მთვლელ პროცესს აფეთქების გარეშე გააჩნია მარჯვნიდან უწყვეტი და მარცხნიდან ზღვრების მქონე ტრაექტორიები.

მთვლელი პროცესის საშუალებით შესაძლებელია მეორენაირად განვმარტოთ პუასონის პროცესი:

განსაზღვრა 14.3. შეთანხმებულ მთვლელ პროცესს N აფეთქების გარეშე ეწოდება **პუასონის პროცესი**, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) ყოველი s -ისა და t -სათვის ($0 \leq s < t < \infty$) $N_t - N_s$ დამოუკიდებელია F_s σ -ალგებრისაგან;

ბ) ყოველი s , t , u და v რიცხვებისათვის, $0 \leq s < t < \infty$, $0 \leq u < v < \infty$, თუ $t - s = u - v$, მაშინ $N_t - N_s$ -ის განაწილება იგივეა რაც $N_u - N_v$ -ს განაწილება.

ა) და ბ) თვისებები ცნობილია შესაბამისად როგორც **წარსულისაგან დამოუკიდებელი ნაზრდების** და **სტაციონარული ნაზრდების** მქონე პროცესები.

თეორემა 14.3. თუ N პუასონის პროცესია განსაზღვრა 14.3-ის მიხედვით, მაშინ რაიმე $\lambda \geq 0$ მუდმივისათვის

$$P\{N_t = n\} = (\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(ანუ N_t -ს აქვს პუასონის განაწილება პარამეტრით λt).

დამტკიცება. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ $\forall t: P\{N_t = 0\} = e^{-\lambda t}$ რაიმე $\lambda \geq 0$ მუდმივისათვის. ვინაიდან $\{N_t = 0\} = \{N_0 = 0\} \cap \{N_t - N_s = 0\}$ $0 \leq s < t < \infty$, ამიტომ ნაზრდების დამოუკიდებლობისა და სტაციონარულობის გამო გვაქვს

$$\begin{aligned} P\{N_t = 0\} &= P\{N_0 = 0\}P\{N_t - N_s = 0\} = \\ &= P\{N_0 = 0\}P\{N_{t-s} = 0\}. \end{aligned}$$

დავუშვათ, $\alpha(t) = P\{N_t = 0\}$. წინა თანაფარდობიდან ყოველი s, t -სათვის, $0 \leq s < t < \infty$, $\alpha(t) = \alpha(s)\alpha(t-s)$. ადვილი დასაბუთებაა, რომ $\alpha(t)$ მარჯვნიდან უწყვეტია t -ს მიმართ. საიდანაც ვასკვნით, რომ ან $\alpha(t) = 0 \quad \forall t, t \geq 0$ ან $\alpha(t) = e^{-\lambda t}$ რაიმე λ მუდმივისათვის, $\lambda \geq 0$. თუ $\alpha(t) = 0$, აქედან გამოვა, რომ $N_t = \infty$ *თ.ყ. ყოველი* t -სათვის, რაც ეწინააღმდეგება იმას, რომ N მთვლელი პროცესია. ე. ი. $\alpha(t) = e^{-\lambda t}$ რაიმე $\lambda \geq 0$ მუდმივისათვის.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ $P\{N_t \geq 2\} = \alpha(t)$ (ანუ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} P\{N_t \geq 2\} = 0$).

აღვნიშნოთ $\beta(t) := P\{N_t \geq 2\}$. ვინაიდან N -ის ტრაექტორიები არაკლებადია, ამიტომ არაკლებადი იქნება β -ც. ადვილი შესამოწ-

მებელია, რომ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \beta(t) = 0$ თანაფარდობა ეკვივალენტურია

$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \beta(n) = 0$ თანაფარდობის. დავყოთ $[0,1]$ ინტერვალი ტოლი

სიგრძის n ქვეინტერვალად და S_n -ით აღვნიშნოთ იმ ქვეინტერვლების რაოდენობა, რომლებიც შეიცავენ მოხდენის ორ დროს მაინც. ნაზრდების დამოუკიდებლობისა და სტაციონარულობის გამო S_n იქნება n დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული 0 და 1 მნიშვნელობის მქონე შემთხვევითი სიდიდის ჯამი და,

შესაბამისად, მას გააჩნია ბინომიალური განაწილება $Bi(n, p)$, სადაც $p = \beta(1/n)$. ამდენად $ES_n = np = n\beta(1/n)$.

ვინაიდან N მთვლელი პროცესია, მოხდენის დროები მკაცრად ზრდადია: $T_n < T_{n+1}$ (P - თ.ყ.), ამიტომ ფიქსირებული ω -სათვის საკმაოდ დიდი n -ის შემთხვევაში არ იარსებებს ინტერვალი, რომელიც შეიცავს ერთზე მეტ მოხდენის დროს (წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნება აფეთქება). აქედან გამომდინარე, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = 0$ (P - თ.ყ.). ვინაიდან $S_n \leq N_1$, თუ $EN_1 < \infty$, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლებეგის თეორემა მაჟორირებული კრებადობის შესახებ, რათა დავასკვნათ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \beta(n) = \lim_{n \rightarrow 0} ES_n = 0.$$

რადგანაც $P\{N_t = 1\} = 1 - P\{N_t = 0\} - P\{N_t \geq 2\}$, ზემოთ მიღებული თანაფარდობებიდან გვაქვს

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} P\{N_t = 1\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda t} + o(t)}{t} = \lambda.$$

აღვნიშნოთ $\varphi(t) = E\{\varepsilon^{N_t}\}$, $0 \leq t \leq 1$. მაშინ ყოველი s, t -სათვის, $0 \leq s < t < \infty$ ნაზრდების დამოუკიდებლობიდან და სტაციონარულობიდან გამომდინარეობს, რომ $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$, რაც, თავის მხრივ, გვაძლევს, რომ φ ფუნქციას აქვს სახე $\varphi(t) = e^{t\psi(\alpha)}$. მეორე მხრივ,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P\{N_t = n\} = \\ &= P\{N_t = 0\} + \alpha P\{N_t = 1\} + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n P\{N_t = n\}, \end{aligned}$$

და $\psi(\alpha) = \varphi'(0)$. ამიტომ

$$\begin{aligned}\psi(\alpha) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - 1}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{P\{N_t = 0\} - 1}{t} + \frac{\alpha P\{N_t = 1\}}{t} + \frac{1}{t} o(t) \right\} = -\lambda + \lambda \alpha.\end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე, $\varphi(t) = e^{-\lambda t + \lambda \alpha t}$, შესაბამისად,

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P\{N_t = n\} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n \alpha^n}{n!}.$$

უკანასკნელ ტოლობაში α -ს ერთი და იმავე ხარისხის კოეფიციენტების ერთმანეთთან გატოლებით მივიღებთ, რომ

$$P\{N_t = n\} = (\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \square$$

ბანსაზღვრა 14.4. პუასონის პროცესთან დაკავშირებულ λ პარამეტრს *პროცესის ინტენსივობა* ეწოდება.

შედეგი 14.1. N პუასონის პროცესისათვის λ ინტენსივობით სრულდება თანაფარდობები

$$EN_t = \lambda t, \quad DN_t = \lambda t.$$

არსებობს პუასონის პროცესის კიდევ ერთი ეკვივალენტური განსაზღვრა.

ბანსაზღვრა 14.5. მთვლელ N პროცესს აფეთქების გარეშე ეწოდება *პუასონის პროცესი*, თუ ყოველი s -ისა და t -სათვის, $0 \leq s < t < \infty$: $EN_t < \infty$ და

$$E[N_t - N_s | F_s] = \lambda(t - s).$$

თეორემა 14.4. თუ N პუასონის პროცესია λ ინტენსივობით, მაშინ პროცესები $N_t - \lambda t$ და $(N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$ წარმოადგენენ მარტინგალებს.

დამტკიცება. რადგანაც λt არაშემთხვევითია, შედეგი 14.1-ის ძალით პროცესებს $N_t - \lambda t$ და $(N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$ აქვთ ნულის ტოლი საშუალო და აგრეთვე ისინი მარტინგალებია, ყოველი s -ისა და t -სათვის, $0 \leq s < t < \infty$:

$$E[N_t - \lambda t - (N_s - \lambda s) | F_s] = E[N_t - \lambda t - (N_s - \lambda s)] = 0.$$

ანალოგიური მტკიცებულება სამართლიანია $(N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$ პროცესისათვის. $\square$

შევნიშნოთ, რომ პუასონისა და ვინერის პროცესები მიეკუთვნებიან ე. წ. **ლევის პროცესების** კლასს.

ბანსაზღვრა 14.6. შეთანხმებულ $X = (X_t)_{0 \leq t < \infty}$ პროცესს ($X_0 = 0$ P -თ.ყ.) ეწოდება **ლევის პროცესი**, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

(i) X -ს აქვს წარსულისაგან დამოუკიდებელი ნაზრდები: $X_t - X_s$ დამოუკიდებელია F_s σ -ალგებრისაგან, $0 \leq s < t < \infty$;

(ii) X -ს აქვს სტაციონარული ნაზრდები: $(X_t - X_s)$ -ს აქვს იგივე განაწილება, რაც X_{t-s} -ს, $0 \leq s < t < \infty$;

(iii) X_t სტოქასტურად (ალბათობით) უწყვეტია: $P\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_s$, სადაც $P\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty}$ აღნიშნავს ზღვარს ალბათობით.

ბანსაზღვრა 14.7. $\xi_1, \xi_2, \dots$ დამოუკიდებელ, ერთნაირად განაწილებულ, გადაუგვარებელ, არაუარყოფით შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობისათვის **აღდგენის პროცესი** განიმარტება ფორმულით:

$$X_0(\omega) = 0, \quad X_t(\omega) = \sup\{n : \sum_{j \leq n} \xi_j \leq t\}, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

(იგულისხმება, რომ $X_t(\omega) = 0$, თუ $\xi_1(\omega) > t$).

სახელწოდება „აღდგენის პროცესი“ აიხსნება შემდეგი ინტერპრეტაციით: დავუშვათ, რომ დაწყებული $t_0 = 0$ -დან მომენტებში, რომლებიც ერთმანეთისაგან დაშორებულია ξ_i შუალედებით, რაიმე მოწყობილობა მწყობრიდან გამოდის (მაგალითად, იწვება ელექტრონათურა), და მწყობრიდან გამოსული მოწყობილება ან მისი უვარგისი ნაწილი მყისიერად იცვლება მისი იდენტური ახლით. მაშინ $X_t(\omega)$ წარმოადგენს ცვლილებათა („აღდგენათა“) რაოდენობას $(0, t]$ დროით ინტერვალში.

(Ω, F, P) ალბათურ სივრცეზე განვიხილოთ არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდეების ორი მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \dots$ და $\eta_1, \eta_2, \dots$, თითოეული მიმდევრობის კომპონენტები ერთნაირადაა განაწილებული და $\{\xi_i, \eta_i, i \geq 1\}$ ერთობლივად დამოუკიდებელია. დადებითი y_0 და C მუდმივებისათვის განვმარტოთ პროცესი

$$Y_t(\omega) = y_0 + ct - \sum_{i=1}^{X_t(\omega)} \eta_i, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

სადაც X_t არის (1) ფორმულით მოცემული აღდგენის პროცესი.

(2) ტიპის პროცესები გამოიყენება დაზღვევის **კრამერ-ლუნდ-ბერგის მოდელში**, სადაც y_0 კომპანიის საწყისი კაპიტალია, C – შემონატანების შემოსვლის სიჩქარე, η_i – გადახდის მოცულობა

შემთხვევით $\tau_i = \sum_{j=1}^i \xi_j$ მომენტში, ხოლო $Y_t(\omega)$ -ს გააჩნია დროის

t მომენტში კომპანიის კაპიტალის ინტერპრეტაცია.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, თუ როგორაა მოწყობილი პუასონის პროცესის ტრაექტორიები:

თეორემა 14.5 (პუასონის პროცესის ცხადი სახე). დავუშვათ, რომ $\xi_1, \xi_2, \dots$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთაც გააჩნიათ ექსპონენციალური განაწილება პარამეტრით

$\lambda > 0$. მაშინ შესაბამისი აღდგენის პროცესი (1) წარმოადგენს პუასონის პროცესს ინტენსივობით λ .

თეორემა 14.6. თუ Y_t პროცესი განმარტებულია (2) თანაფარდობით, სადაც $\xi_1, \xi_2, \dots$ შემთხვევით სიდიდეებს გააჩნიათ ექსპონენციალური განაწილება პარამეტრით $\lambda > 0$, მაშინ Y_t პროცესს გააჩნია დამოუკიდებელი ნაზრდები.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ თუ Z_t დამოუკიდებელნაზრდებიანი ნამდვილი პროცესია და $h(t)$ – არაშემთხვევითი ნამდვილი ფუნქცია $[0, \infty)$ ინტერვალზე, მაშინ $Z_t + h(t)$ აგრეთვე დამოუკიდებელნაზრდებიანი პროცესია. ამიტომ Y_t პროცესს ექნება დამოუკიდებელი ნაზრდები, თუკი ასეთი თვისება ექნება

$$S_t = \sum_{i=1}^{X_t} \eta_i$$

პროცესს. თეორემა 14.5-ის თანახმად (1) ფორმულით მოცემული X_t პროცესი წარმოადგენს პუასონის პროცესს λ ინტენსივობით.

აღვნიშნოთ $\phi(u) := Ee^{iu\eta_1}$, $u \in R^1$. პუასონის პროცესის ნაზრდების დამოუკიდებლობისა და $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ და $\{\eta_i\}_{i \geq 1}$ მიმდევრობების დამოუკიდებლობის გათვალისწინებით, ყოველი $0 \leq s < t$ და $u \in R^1$ რიცხვებისათვის გვაქვს:

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

$$\begin{aligned}
 Ee^{iu(S_t-S_s)} &= \sum_{k,m=0}^{\infty} Ee^{iu(S_t-S_s)} I_{\{X_s=k\}} I_{\{X_t-X_s=m\}} = \\
 &= \sum_{k,m=0}^{\infty} E \exp\{iu \sum_{j=k+1}^{k+m} \eta_j\} P(X_s=k) P(X_t-X_s=m) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_s=k) \sum_{m=0}^{\infty} [\phi(u)]^m \frac{[\lambda(t-s)]^m}{m!} e^{-\lambda(t-s)} = e^{\lambda(t-s)[\phi(u)-1]}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

ანალოგიურად, (3) ფორმულის მიხედვით გამოითვლება S_t პროცესის ნაზრდების ერთობლიობის მახასიათებელი ფუნქცია, საიდანაც ადვილად ვრწმუნდებით თეორემის სამართლიანობაში. $\square$

15. სტაციონარული პროცესები (ვინრო აზრით)

განსაზღვრა 15.1. ნამდვილმნიშვნელობიან ξ_n პროცესს, რომელიც განმარტებულია მთელი n -ებისათვის $(T, +\infty)$ ინტერვალთან, ეწოდება **სტაციონარული ვინრო აზრით**, თუ $\forall k_1, \dots, k_m \in (T, +\infty)$ და $\forall i > 0$ განაწილებები $(\xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_m})$ და $(\xi_{k_1+i}, \dots, \xi_{k_m+i})$ შემთხვევითი ვექტორების ერთი და იგივეა.

გასაგებია, რომ თუ არსებობს ისეთი $n_0 \in (T, +\infty)$, რომ $E\xi_{n_0}^2 < \infty$, მაშინ $E\xi_k^2 < \infty \quad \forall k \in (T, +\infty)$ და $E\xi_k \xi_s = E\xi_{k+i} \xi_{s+i}$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში პროცესი აღმოჩნდება სტაციონარული ფართო აზრითაც. შებრუნებული დებულება სამართლიანია გაუსის პროცესისათვის.

თუ ξ_n სტაციონარულია ვინრო აზრით და f ბორელის ფუნქციაა, მაშინ ცხადია, რომ $f(\xi_n)$ აგრეთვე სტაციონარული იქნება ვინრო აზრით.

გავიხსენოთ, რომ (ξ_n, F_n) მიმდევრობას უწოდებენ შებრუნებულ მარტინგალს, თუ $E|\xi_n| < \infty$, ξ_n, F_n - ზომადია, $F_{n+1} \subset F_n \subset F$ და $E[\xi_{n+1} | F_n] = \xi_n$ (P - თ.ყ.) $\forall n$.

დავუშვათ, რომ $E|\xi_0| < \infty$, ξ_n, F_n - ზომადია, $F_{n+1} \subset F_n \subset F$, $\xi_n = E[\xi_0 | F_n] \quad \forall n$ და მოვიყვანოთ ლევის თეორემა (ξ_n, F_n) შებრუნებული მარტინგალის ზღვრის არსებობის შესახებ.

თეორემა 15.1 (ლევი). $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = E[\xi_0 | F_\infty]$, სადაც $F_\infty = \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n$.

დამტკიცება. კოლმოგოროვის უტოლობის საფუძველზე შეგიძლია დავწეროთ, რომ

$$\begin{aligned}
E\xi_0\chi_{\{\max_{i\leq n}\xi_i > p\}} &= \sum_{i=0}^{n-1} E\xi_0\chi_{\{\xi_n \leq p, \dots, \xi_{n-i} \leq p, \xi_{n-i+1} > p\}} + E\xi_0\chi_{\{\xi_n > p\}} = \\
&= E\xi_{n-i-1}\chi_{\{\xi_n \leq p, \dots, \xi_{n-i} \leq p, \xi_{n-i+1} > p\}} + E\xi_n\chi_{\{\xi_n > p\}} \geq \\
&\geq p(\sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_n \leq p, \dots, \xi_{n-i} \leq p, \xi_{n-i+1} > p) + P(\xi_n > p)) = \\
&= pP(\max_{i\leq n}\xi_i > p).
\end{aligned}$$

ი. ი.

$$E\xi_0\chi_{\{\max_{i\leq n}\xi_i > p\}} \geq pP(\max_{i\leq n}\xi_i > p).$$

სრულიად ანალოგიურად, ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$E\xi_0\chi_{\{A(\max_{i\leq n}\xi_i > p)\}} \geq pP(A(\max_{i\leq n}\xi_i > p)) \quad \forall A \in F_\infty.$$

თუ ავიღებთ აქ $A = B \cap C_p$, სადაც $B \in F_\infty$, ხოლო $C_p := \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n > p} \in F_\infty$, მივიღებთ, რომ

$$E\xi_0\chi_{\{BC_p\{\max_{i\leq n}\xi_i > p\}\}} \geq pP(BC_p\{\max_{i\leq n}\xi_i > p\}).$$

თუ ახლა მივასწრაფებთ n -ს უსასრულობისაკენ და გავითვა-
ლისწინებთ, რომ

$$C_p\{\max_{i\leq n}\xi_i > p\} \uparrow C_p\{\sup_i \xi_i > p\} = C_p,$$

მივიღებთ

$$E\xi_0\chi_{\{BC_p\}} \geq pP(BC_p), \quad \forall B \in F_\infty.$$

ანალოგიურად, ვინაიდან $(-\xi_n, F_n)$ აგრეთვე შებრუნებული
მარტინგალია, მიიღება შეფასება

$$E\xi_0\chi_{\{BD_q\}} \leq qP(BD_q),$$

სადაც $D_q := \{\varliminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n < q\} \in F_\infty$.

ავიღოთ ზედა შეფასებაში $b = D_q$, ხოლო ქვედა შეფასებაში $B = C_p$. მივიღებთ, რომ

$$qP(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n > p, \varliminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n < q) \geq pP(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n > p, \varliminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n < q).$$

თუ $q < p$, მაშინ უკანასკნელი შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$P(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n > p, \varliminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n < q) = 0 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n \quad (P - \text{თ. ყ.})$$

(ვინაიდან,

$$(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n > \varliminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n) = \bigcup_{p > q, p, q \in Q} (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n > p, \varliminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n < q)). \quad \square$$

პენსაზღვრა 15.2. A ხდომილობას ეწოდება *ინვარიანტული*, თუ ნებისმიერი მთელი $k_1, \dots, k_n, i \geq 0$ რიცხვებისათვის და ნებისმიერი შემოსაზღვრული ბორელის $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$Ef(\xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_n})\chi_A = Ef(\xi_{k_1+i}, \dots, \xi_{k_n+i})\chi_A.$$

ვიგულისხმობთ, რომ $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ ვიწრო აზრით სტაციონარული მიმდევრობაა. აღვნიშნოთ $S_n := \xi_0 + \dots + \xi_n, n \geq 0$.

ლემა 15.2. ხდომილობები

$$\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{1+n} > p\} \quad \text{და} \quad \{\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{1+n} < q\}$$

ინვარიანტულია.

დამტკიცება. შევამოწმოთ პირველი ხდომილებისათვის. ანა-
ლოგიურად შემოწმდება მეორისთვისაც. დავუშვათ, რომ $\phi(t)$ უნ-
ყვეტი და ზრდადი ფუნქციაა. აღვნიშნოთ $S_n^{(i)} := \xi_i + \dots + \xi_{i+n}$. მა-
შინ არაუარყოფითი შემოსაზღვრული ბორელის f ფუნქციისათვის
გვაქვს

$$\begin{aligned} Ef(\xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_n})\phi(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{1+n}) &= \lim_{m \rightarrow \infty} Ef(\xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_n})\phi(\sup_{m \geq r} \frac{S_m}{1+m}) = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} Ef(\xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_n})\phi(\sup_{s \geq m \geq r} \frac{S_m}{1+m}) = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} Ef(\xi_{k_1+i}, \dots, \xi_{k_n+i})\phi(\sup_{s \geq m \geq r} \frac{S_m^{(i)}}{1+m}) = \\ &= Ef(\xi_{k_1+i}, \dots, \xi_{k_n+i})\phi(\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{S_r^{(i)}}{1+r}) = \\ &= Ef(\xi_{k_1+i}, \dots, \xi_{k_n+i})\phi(\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{S_r}{1+r}) = \\ &= Ef(\xi_{k_1+i}, \dots, \xi_{k_n+i})\phi(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{1+n}). \end{aligned}$$

(ჩვენ აქ ვისარგებლეთ იმით, რომ

$$\sup_{m \geq r} \frac{S_m}{1+m} = \lim_{s \rightarrow \infty} \sup_{s \geq m \geq r} \frac{S_m}{1+m}$$

და იმ ფაქტით, რომ $(\xi_0, \dots, \xi_s)$ და $(\xi_i, \dots, \xi_{s+i})$ ვექტორები ერთნა-
ირადაა განაწილებული).

მიღებული თანაფარდობა, ცხადია, სამართლიანია ზოგადი f
ფუნქციის შემთხვევაშიც (ვინაიდან $f = f^+ - f^-$). ავიღოთ
 $\phi(t) = \chi_{\{t > p\}}$, მაშინ შესაძლებელია ზრდადი და უწყვეტი $\phi_n(t)$
ფუნქციების ისეთი მიმდევრობის აგება, რომელიც კრებადი იქნება
ამ $\phi(t)$ ფუნქციისაკენ. დავწეროთ $\phi_n(t)$ ფუნქციებისათვის ზემოთ

მიღებული თანაფარდობა და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $n \rightarrow \infty$. მივიღებთ, რომ

$$Ef(\xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_n}) \chi_{\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{1+n} > p\}} = Ef(\xi_{k_1+i}, \dots, \xi_{k_n+i}) \chi_{\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{1+n} > p\}}. \quad \square$$

ლემა 15.3 (პროპოზიცია). დავუშვათ, რომ A ინვარიანტული ხდომილობაა და $E|\xi_0| < \infty$, მაშინ სამართლიანია შეფასება

$$E\xi_0 \chi_{\{A(\max_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{1+i} > p)\}} \geq pP\{A(\max_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{1+i} > p)\}.$$

დამტკიცება. ეს დამტკიცება ეკუთვნის გარსიას. ცხადია, რომ ლემა საკმარისია დამტკიცდეს $p = 0$ შემთხვევაში, ვინაიდან ზოგად შემთხვევას მივიღებთ, თუ ξ_n -ის ნაცვლად განვიხილავთ $\eta_n = \xi_n - p$ შემთხვევით სიდიდეს. ე.ი. შესამოწმებელია, რომ

$$E\xi_0 \chi_{\{A(\max_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{1+i} > 0)\}} \geq 0,$$

ან რაც იგივეა

$$E\xi_0 \chi_{\{A(\max_{0 \leq i \leq n} S_i > 0)\}} \geq 0.$$

აღვნიშნოთ $a^+ := \max(0, a)$. მაშინ ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq n} S_i &= \xi_0 + \max(0, S_0^{(1)}, \dots, S_{n-1}^{(1)}) = \\ &= \xi_0 + (\max(0, S_0^{(1)}, \dots, S_{n-1}^{(1)}))^+ = \xi_0 + (\max_{0 \leq i \leq n-1} S_i^{(1)})^+. \end{aligned}$$

ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ A ხდომილების ინვარიანტულობას $f(x_0, \dots, x_n) = \max(x_0, \dots, x_0 + \dots + x_n)$ ფუნქციის შემთხვევაში და შემდეგ შეფასებებს $E|S_n| \leq E|\xi_0| + \dots + E|\xi_n| < \infty$

და $E|\max_{0 \leq i \leq n} S_i| \leq E \max_{0 \leq i \leq n} |S_i| \leq E \sum_{i=0}^n |S_i| < \infty$, მივიღებთ, რომ

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

$$\begin{aligned}
 E \xi_0 \chi_{\{A(\max_{0 \leq i \leq n} S_i > 0)\}} &= E \max_{0 \leq i \leq n} S_i \chi_{\{A(\max_{0 \leq i \leq n} S_i > 0)\}} - E(\max_{0 \leq i \leq n-1} S_i^{(1)})^+ \chi_{\{A(\max_{0 \leq i \leq n} S_i > 0)\}} \geq \\
 &\geq E(\max_{0 \leq i \leq n} S_i)^+ \chi_{\{A(\max_{0 \leq i \leq n} S_i > 0)\}} - E(\max_{0 \leq i \leq n} S_i^{(1)}) \chi_{\{A(\max_{0 \leq i \leq n} S_i > 0)\}} = \\
 &= E(\max_{0 \leq i \leq n} S_i) \chi_A - E(\max_{0 \leq i \leq n} S_i^{(1)}) \chi_A = 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

თეორემა 15.2 (პირკპოვო-ხინინი). დავუშვათ, რომ ξ_n ვიწრო აზრით სტაციონარული პროცესია, ისეთი, რომ $E |\xi_0| < \infty$, მაშინ ალბათობით ერთი არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{1+n}.$$

გარდა ამისა, თუ არსებობს ისეთი ბორელის f ფუნქცია, რომ $E |f(\xi_0)| < \infty$, მაშინ აგრეთვე ალბათობით ერთი არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\xi_0) + \dots + f(\xi_n)}{1+n}.$$

დამტკიცება. თეორემის მეორე მტკიცებულება მიიღება პირველიდან, თუ ავიღებთ $\eta_n = f(\xi_n)$, რომელიც აგრეთვე ვიწრო აზრით სტაციონარული პროცესია. პირველი მტკიცებულება კი მიიღება ლემა 15.2-იდან ისევე, როგორც შებრუნებული მარტინგალის ზღვრის არსებობა, სადაც ξ_n -ის ნაცვლად უნდა ავიღოთ $\frac{S_n}{1+n}$. ლემა 15.2-ის თანახმად ინვარიანტული A ხდომილობისათვის გვაქვს

$$E \xi_0 \chi_{\{A(\max_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{1+i} > p)\}} \geq p P\{A(\max_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{1+i} > p)\}. \quad (1)$$

აღვნიშნოთ

$$C_p := \{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{1+n} > p\}.$$

მაშინ ვინაიდან, როცა $n \rightarrow \infty$, გვაქვს

$$C_p (\max_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{1+i} \geq p) \uparrow C_p,$$

ამიტომ (1) თანაფარდობიდან, თუ ავიღებთ $A = BC_p$, მივიღებთ, რომ

$$E \xi_0 \chi_{\{BC_p\}} \geq pP\{BC_p\}.$$

მეორე მხრივ, მტკიცდება, რომ

$$E \xi_0 \chi_{\{BD_q\}} \leq qP\{BD_q\},$$

სადაც

$$D_q = \{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{1+n} < q\}.$$

თუ ახლა ავიღებთ ზედა შეფასებაში $B = D_q$, ხოლო ქვედა შეფასებაში $B = C_p$, მივიღებთ, რომ

$$qP\{C_p D_q\} \geq pP\{C_p D_q\}.$$

ამიტომ თუ $q < p$ გვექნება $P\{C_p D_q\} = 0$, ე. ი.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{1+n} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{1+n} \quad \text{ალბათობით ერთი.} \quad \square$$

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 15.2-ს აქვს დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის ფორმა. მართლაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$f^* := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\xi_0) + \dots + f(\xi_n)}{1+n},$$

მაშინ იმ შემთხვევაში, როცა f შემოსაზღვრულია, ხოლო f^* - დამოუკიდებელი ω -საგან, შეგვიძლია ავიღოთ მათემატიკური ლოდინი და გვექნება

$$Ef(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Ef(\xi_0) + \dots + Ef(\xi_n)}{1+n} = f^*.$$

პანსაზღვრა 15.3. ვიწრო აზრით სტაციონარულ ξ_n პროცესს ეწოდება *ერგოდული*, თუ იქიდან, რომ A ინვარიანტულია და $A \in \sigma(\xi_0, \dots, \xi_n, \dots)$ გამომდინარეობს, რომ $P(A) = 0$ ან $P(A) = 1$.

შევნიშნავთ, რომ თუ პროცესი ერგოდულია, მაშინ ლემა 15.1-ის თანახმად ხდომილობა $\{f^* > c\}$ ინვარიანტულია. მეორე მხრივ, f^* ზომადია (როგორც ზღვარი), ხოლო ერგოდულობიდან გამომდინარე, $P\{f^* > c\} = 0$ ან 1 . ე. ი. $f^* = \text{const}$ (P - თ.ყ.). გარდა ამისა, $f^* = Ef(\xi_0)$ (P - თ.ყ.).

მართლაც, თუ f შემოსაზღვრულია, მაშინ ჩვენ ეს უკვე ზემოთ აღვნიშნეთ. თუკი f ნებისმიერია, ოღონდ $Ef | (\xi_0) | < \infty$, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი შემოსაზღვრული g ფუნქცია, რომ

$$E | g(\xi_0) - f(\xi_0) | \leq \varepsilon,$$

ამიტომ

$$|f^* - Ef(\xi_0)| \leq \varepsilon + |f^* - g^*| = \varepsilon + m |f^* - g^*|,$$

საიდანაც, ფაქტს ლემის საფუძველზე გვაქვს, რომ

$$\begin{aligned} & |f^* - Ef(\xi_0)| \leq \\ & \leq \varepsilon + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E | f(\xi_0) - g(\xi_0) | + \dots + E | f(\xi_n) - g(\xi_n) |}{1+n} \leq \\ & \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

ე. ი. $f^* = Ef(\xi_0)$.

თეორემა 15.3. თუ ξ_n დამოუკიდებელ და ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, მაშინ ξ_n ერგოდული პროცესია.

დამტკიცება. ვიწრო აზრით სტაციონარულობა ცხადია. ვაჩვენოთ ერგოდულობა. ავიღოთ ინვარიანტული A ხდომილება $\sigma(\xi_0, \dots, \xi_n, \dots)$ σ -ალგებრიდან. როგორც ცნობილია, ეს უკანასკნელი წარმოადგენს მინიმალურ σ -ალგებრას, რომელიც მოჭიმულია $\alpha(\xi_0, \dots, \xi_n)$ ალგებრებზე. თავის მხრივ, $\alpha(\xi_0, \dots, \xi_n)$ ის მინიმალური ალგებრაა, რომელიც მოჭიმულია $R(\xi_0, \dots, \xi_n)$ ნახევარგოლზე, რომელიც შეიცავს შემდეგი ტიპის სიმრავლეებს:

$$\{\omega: \xi_0 < c_0, \dots, \xi_n < c_n\}, \quad \{\omega: d_0 \leq \xi_0 < c_0, \dots, d_n \leq \xi_n < c_n\}.$$

ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნომერი n და ხდომილება $B \in \alpha(\xi_0, \dots, \xi_n)$, რომ: $P(A\Delta B) \leq \varepsilon$. გარდა ამისა, $\forall B \in \alpha(\xi_0, \dots, \xi_n)$ არსებობს ისეთი ბორელის f ფუნქცია, რომ

$$\chi_B = f(\xi_0, \dots, \xi_n).$$

მართლაც, თუ $B \in R(\xi_0, \dots, \xi_n)$ და, მაგალითად, $B = \{\omega: d_0 \leq \xi_0 < c_0, \dots, d_n \leq \xi_n < c_n\}$, მაშინ

$$f(x_0, \dots, x_n) = \chi_{\{d_0 \leq x_0 < c_0\}} \cdots \chi_{\{d_n \leq x_n < c_n\}},$$

ხოლო ზოგად შემთხვევაში გავიხსენოთ, რომ სიმრავლეთა ალგებრის ნებისმიერი ელემენტი წარმოადგინება ნახევარგოლის თანაუკვეთი ელემენტების გაერთიანების სახით.

თუკი ახლა ვისარგებლებთ A ხდომილების ინვარიანტულობითა და იმ ფაქტით, რომ

$$\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B|,$$

$\Rightarrow$ *მ. ფურთუხია* $\Leftarrow$

მაშინ თეორემის პირობებში ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის გვაქვს

$$\begin{aligned} P(A) &= E\chi_A = E\chi_A\chi_A \leq E\chi_B\chi_A + \varepsilon = \\ &= Ef(\xi_0, \dots, \xi_n)\chi_A + \varepsilon = Ef(\xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n+1})\chi_A + \varepsilon \leq \\ &\leq Ef(\xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n+1})f(\xi_0, \dots, \xi_n) + 2\varepsilon = \\ &= Ef(\xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n+1})Ef(\xi_0, \dots, \xi_n) + 2\varepsilon = \\ &= [Ef(\xi_0, \dots, \xi_n)]^2 + 2\varepsilon = [P(B)]^2 + 2\varepsilon \leq [P(A)]^2 + 10\varepsilon. \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე, $P(A) \leq [P(A)]^2$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $P(A) = 0$ ან 1 . $\square$

16. იტოს სტოქასტური ინტეგრალი

ვიგულისხმობთ, რომ (Ω, F, P) სრული ალბათური სივრცეა, ხოლო $\{F_t\}_{t \geq 0}$ F σ -ალგებრის ქვე- σ -ალგებრათა ზრდადი ოჯახია გასრულებული P ზომის მიმართ ($F_t \subset F_s \subset F$, $t \leq s$).

განსაზღვრა 16.1. ვიტყვი, რომ (w_t, F_t) ნყვილი ვინერის პროცესია ან w_t ვინერის პროცესია F_t ოჯახის მიმართ, თუ $\forall t \geq 0$ w_t F_t -ზომადია, w_t (უწყვეტი) ვინერის პროცესია და $w_{t+h} - w_t$ დამოუკიდებელია F_t σ -ალგებრისაგან, $\forall h \geq 0$.

აღვნიშნოთ $F_t^w := \overline{\sigma}\{w_s, s \leq t\}$ ($\overline{\sigma}$ არის σ -ს გასრულება). ცხადია, რომ w_t ვინერის პროცესია F_t^w ნაკადის მიმართ.

განსაზღვრა 16.2. ვიტყვი, რომ $f_t(\omega)$ საფეხურა ფუნქციაა $[0, \infty)$ ინტერვალზე, თუ არსებობს ω -საგან დამოუკიდებელი $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \infty$ წერტილები და შემთხვევითი სიდიდეები $f_0, \dots, f_{n-1}$, ისეთი, რომ f_i F_{t_i} -ზომადია, $E |f_i|^2 < \infty$ და $\forall t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ ადგილი აქვს წარმოდგენას :

$$f_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega) \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t).$$

აღვნიშნოთ H_0 სიმბოლოთი ყველა საფეხურა ფუნქციების ერთობლიობა. **იტოს სტოქასტური ინტეგრალი** f ფუნქციიდან (w_t, F_t) ვინერის პროცესის მიმართ აღინიშნება If ან

$$\int_0^{\infty} f_t dw_t$$

სიმბოლოებით და საფეხურა f ფუნქციის შემთხვევაში განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$If = \int_0^{\infty} f_t dw_t := \sum_{i=0}^{n-1} f_i (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}).$$

განსაზღვრით აგრეთვე პროცესი

$$I_s f := \int_0^{\infty} \chi_{[0,s)}(t) f_t dw_t.$$

მოვიყვანოთ სტოქასტური ინტეგრალის თვისებები :

1. კორექტულობა:

If არაა დამოკიდებული f -ის წარმოდგენაზე.

2. წრფივობა:

$$I(c_1 f^1 + c_2 f^2) = c_1 If^1 + c_2 If^2 \quad (P - \text{თ.ყ}).$$

3. იზომეტრიულობა:

$$E(If)^2 = E \int_0^{\infty} f_t^2 dt.$$

განსაზღვრის თანახმად, თუ ვისარგებლებთ პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებებით, გვექნება:

$$\begin{aligned} E(If)^2 &= E \left[\sum_{i=0}^{n-1} f_i (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) \right]^2 = E \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 + \\ &+ E \sum_{i < j} f_i f_j (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})(w_{t_{j+1}} - w_{t_j}) = \\ &= E \{ E \left[\sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 \mid F_{t_i} \right] \} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +E\{E[\sum_{i<l} f_i f_j (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})(w_{t_{j+1}} - w_{t_j}) | F_{t_j}]\} = \\
 & = E\sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 E[(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 | F_{t_i}] + \\
 & + E\sum_{i<l} f_i f_j (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) E(w_{t_{j+1}} - w_{t_j}) = E\sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 E(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 + \\
 & + E\sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 E(t_{i+1} - t_i)^2 = E\int_0^\infty f_t^2 dt,
 \end{aligned}$$

სადაც ჩვენ ვისარგებლეთ იმ გარემოებით, რომ როცა $i < j$, მაშინ $t_{i+1} \leq t_j$. □

4. ($I_s f, F_s$) წარმოადგენს მარტინგალს, რომლისთვისაც $E[I_s f] = 0$.

მართლაც, დავაფიქსიროთ s . ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ იგი ემთხვევა ერთ-ერთს დაყოფის წერტილებიდან $s = t_k$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში დაყოფის წერტილების სიმრავლეს დავუმატებთ s წერტილს). მაშინ განსაზღვრის თანახმად:

$$I_s f = \sum_{i=0}^{k-1} f_i (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})$$

და ცხადია, რომ იგი F_s -ზომადია.

ავიღოთ ახლა რაიმე $u \leq s$. ისევ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $u = t_r$. გვაქვს:

$$\begin{aligned}
 E\{I_s f - I_u f | F_u\} &= E\left\{\sum_{i=r}^{k-1} f_i (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) | F_u\right\} = \\
 &= \sum_{i=r}^{k-1} E\{f_i E\{w_{t_{i+1}} - w_{t_i} | F_{t_i}\} | F_u\} = 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

5. დუბის უტოლობა:

$$E \sup_{s \geq 0} (I_s f)^2 \leq 4E \int_0^\infty f_t^2 dt.$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ $I_s f$ უწყვეტია S -ის მიმართ. ამიტომ სუპრემუმი შეიძლება ავიღოთ მხოლოდ რაციონალური რიცხვების მიმართ, რომელთა სიმრავლე თვლადია და ამიტომ $\sup_{s \geq 0} (I_s f)^2$ ზომადია. ავიღოთ რაციონალური რიცხვები $0 \leq s_0 < \dots \leq s_m < \infty$ მაშინ $(I_{s_k} f, F_{s_k})$ იქნება მარტინგალი და მარტინგალუბისათვის დუბის უტოლობის საფუძველზე გვაქვს

$$E \sup_{k=1, \dots, m} (I_{s_k} f)^2 \leq 4E (I_{s_m} f)^2 = 4E \int_0^\infty \chi_{[0, s_m)}(s) f_s^2 ds \leq 4E \int_0^\infty f_s^2 ds.$$

უკანასკნელი შეფასება სამართლიანი იქნება s_k წერტილების ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის, რომლებიც არაა აუცილებელი დალაგებული იყოს. ამიტომ შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $s_0, s_1, \dots, s_m$ პირველი $m+1$ რაციონალური რიცხვია. თუ ახლა მივასწრაფებთ m -ს უსასრულობისაკენ და ვისარგებლებთ ფატუს ლემით, მივიღებთ, რომ

$$E \sup_{s \geq 0} (I_s f)^2 = E \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k=1, \dots, m} (I_{s_k} f)^2 \leq 4E \int_0^\infty f_s^2 ds. \quad \square$$

როგორც დავინახეთ $I : H_0 \longrightarrow L_2(\Omega, P)$ იზომეტრული ოპერატორია, $H_0 \subset L_2([0, \infty) \times \Omega)$. I შეიძლება გაგრძელებულ იქნეს ერთადერთი გზით $\overline{H_0}$ -ზე იზომეტრიის შენარჩუნებით. $f \in \overline{H_0}$ შემთხვევაში ისევ ვისარგებლებთ აღნიშვნებით :

$$If = \int_0^\infty f_t dw_t$$

და

$$\int_0^s f_t dw_t := \int_0^\infty \chi_{[0,s)}(t) f_t dw_t.$$

შევნიშნოთ, რომ $H_0 \neq L_2([0, \infty) \times \Omega)$. მაგალითად, ფუნქცია

$$f_t(\omega) = w_1(\omega) \chi_{\{t \leq 1\}} \notin \overline{H_0},$$

და, შესაბამისად, არაა განსაზღვრული

$$\int_0^\infty w_1 \chi_{\{t \leq 1\}} dw_t$$

(მაშინ როცა თითქოს ეს უკანასკნელი უნდა ყოფილიყო w_1^2).

თეორემა 16.1. თუ $f \in \overline{H_0}$, მაშინ შემთხვევით პროცესს

$$\int_0^s f_t dw_t$$

გააჩნია s -ის მიმართ უწყვეტი მოდიფიკაცია.

დამტკიცება. განსაზღვრის თანახმად $\forall f \in \overline{H_0}$ მოიძებნება საფეხურა $f^n \in H_0$ ფუნქციების ისეთი მიმდევრობა, რომ

$$E \int_0^\infty |f_t^n - f_t|^2 dt \leq \frac{1}{2^n}.$$

ამიტომ

$$\chi_{[0,s)}(t) f_t = \chi_{[0,s)}(t) f_t^1 + \dots + \chi_{[0,s)}(t) (f_t^{n+1} - f_t^n) + \dots$$

კრებადია

$$L_2([0, T] \times \Omega) \text{-ში.}$$

ვინაიდან I ოპერატორი უწყვეტია, ამიტომ უკანასკნელი თანადგარდობიდან ვღებულობთ, რომ

$$\int_0^s f_t dw_t = \int_0^s f_t^1 dw_t + \dots + \int_0^s (f_t^{n+1} - f_t^n) dw_t + \dots \quad L_2(\Omega) \text{-ში.}$$

აქ ყველა შესაკრები უწყვეტია S -ის მიმართ (f^n საფეხურაა), ამიტომ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ P - თ.ყ. ω -სათვის უკანასკნელი მწკრივი კრებადია თანაბრად S -ის მიმართ.

ღუბის უტოლობის საფუძველზე გვაქვს

$$E \sup_s \left| \int_0^s (f_t^{n+1} - f_t^n) dw_t \right| \leq \frac{16}{2^n}.$$

ამიტომ ჩებიშევის უტოლობის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$P\left\{\sup_s \left| \int_0^s (f_t^{n+1} - f_t^n) dw_t \right| > \frac{1}{n^2}\right\} \leq \frac{16n^4}{2^n}.$$

მაგრამ, რადგანაც

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n^4}{2^n} < \infty,$$

ამიტომ ბორელ-კანტელის ლემის თანახმად ზემოთ აღნიშნული მწკრივი კრებადია თანაბრად S -ის მიმართ ერთეულოვანი ალბათობის მქონე Ω' სიმრავლეზე.

ყველგან ქვემოთ

$$\int_0^s f_t dw_t$$

პროცესის ქვეშ ჩვენ გავიგებთ S -ის მიმართ უწყვეტ პროცესს. აქვე შევნიშნავთ, რომ იგი არ წარმოადგენს გაუსის პროცესს.

გამოვიკვლიოთ ახლა $\overline{H_0}$ სიმრავლის სტრუქტურა. ამისათვის წინასწარ შემოვიღოთ შემდეგი ცნება.

განსაზღვრა 16.3. $[0, \infty) \times \Omega$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ, $B([0, \infty)) \times F$ ნამრავლის მიმართ ზომად $f_t(\omega)$ შემთხვევით ფუნქციას ეწოდება F_t შეთანხმებული, თუ ყოველი $t \geq 0$ რიცხვისათვის f_t შემთხვევითი სიდიდე ზომადია F_t σ -ალგებრის მიმართ.

თეორემა 16.2. თუ $f_t(\omega)$ შემთხვევითი ფუნქცია F_t შეთანხმებულია და

$$E \int_0^\infty f_t^2 dt < \infty,$$

მაშინ $f \in \overline{H_0}$.

დამტკიცება. ეს დამტკიცება ეკუთვნის ღუბს. თეორემა საკმარისია დამტკიცდეს t -ს მიმართ ფინიტური $f_t(\omega)$ შემთხვევითი ფუნქციების შემთხვევაში, ანუ როცა $f_t(\omega) = 0$, $t \geq T$. მართლაც, თუ ჩვენ გვეცოდინება, რომ $\chi_{[0, T)}(t) f_t(\omega) \in \overline{H_0}$ და $f_t(\omega)$ აკმაყოფილებს თეორემის პირობებს, მაშინ ცხადია, რომ

$$E \int_0^\infty |\chi_{[0, T)}(t) f_t - f_t|^2 dt = E \int_T^\infty f_t^2 dt \rightarrow 0,$$

როცა $T \rightarrow \infty$, და, მაშასადამე, $f_t(\omega) \in \overline{H_0}$. გავაგრძელოთ $f_t(\omega)$ უარყოფით ნახევარღერძზეც: $f_t(\omega) = 0$, როცა $t < 0$.

ცნობილია, რომ თუ $h(t) \in L_2([0, T])$ და $h(t) = 0$, როცა $t \notin [0, T]$, მაშინ

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{-T}^T |h(t+s) - h(t)|^2 dt = 0$$

(თუ h ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ ეს ტრივიალურია, ხოლო ზოგად შემთხვევაში მონმდება სტანდარტულად აპროქსიმაციის გზით).

ცხადია, რომ

$$\int_{-T}^T |f_{t+s} - f_t|^2 dt \leq 4 \int_0^T f_t^2 dt,$$

ამიტომ, ზემოთ მოყვანილი ფაქტისა და მაჟორირებული კრებადობის შესახებ ლებეგის თეორემის ძალით, გვაქვს

$$\lim_{s \rightarrow 0} E \int_{-T}^T |f_{t+s} - f_t|^2 dt = 0. \quad (1)$$

აღვნიშნოთ $\kappa_n(t) := 2^{-n} \lfloor 2^n t \rfloor$. ცხადია, რომ $|\kappa_n(t) - t| \leq 1/2^n$. ამიტომ (1) თანაფარდობის გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\begin{aligned} \int_0^1 E \int_0^T |f_{\kappa_n(t+s)-s} - f_t|^2 dt ds &= \\ &= \left(\int_0^{T+1} du \right) E \int_{u-1}^{u \wedge T} |f_{\kappa_n(u)-u+v} - f_v|^2 dv \rightarrow 0, \end{aligned}$$

როცა $n \rightarrow \infty$. აქედან ჩებიშევის უტოლობის თანახმად გვაქვს ზომით კრებადობა, საიდანაც, თავის მხრივ, გამომდინარეობს ისეთი n_k ქვემიმდევრობის არსებობა, რომ თ.ყ. s -ისათვის, $s \in [0, 1]$, ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \int_0^T |f_{\kappa_{n_k}(t+s)-s} - f_t|^2 dt = 0. \quad (2)$$

დავაფიქსიროთ ერთი ასეთი s . აღვნიშნოთ

$$f_t^k := f_{\kappa_{n_k}(t+s)-s}.$$

ცხადია, რომ f_t^k წარმოადგენს საფეხურა ფუნქციას. გარდა ამისა, ვინაიდან $\kappa_{n_k}(t+s) - s \leq t$ ამიტომ $f_t^k \in F_t$ -ზომადია. მეორეს მხრივ, (2) თანაფარდობიდან გამომდინარე, როცა k დიდია

$$E \int_0^T |f_t^k|^2 dt < \infty,$$

ე. ი. $f_t^k \in H_0$ და ამიტომ მათი ზღვარი $f_t \in \overline{H_0}$. $\square$

განსაზღვრა 16.4. აღვნიშნოთ H -ით სიმრავლე ყველა F_t შეთანხმებული $f_t(\omega)$ პროცესის, რომელთათვისაც

$$E \int_0^\infty f_t^2 dt < \infty.$$

ამოცანა 16.1. ნებისმიერი ფუნქცია $\overline{H_0}$ -დან ემთხვევა რომელიმე ფუნქციას H -დან თ.ყ. (t, ω) -სათვის, ე. ი. $\overline{H_0} = H$.

შენიშვნა 16.1. წინამდებარე თეორემის დამტკიცებიდან ჩანს, რომ თუ $f \in \overline{H_0}$, მაშინ არსებობს დანაწილებათა მიმდევრობა $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,k_n} = n$, ისეთი, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_i (t_{n,i+1} - t_{n,i}) = 0$ და თუ განსაზღვრავთ f_t^n საფეხურა ფუნქციათა მიმდევრობას შემდეგნაირად:

$$f_t^n := f_{t_{n,i}} \quad t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1}), \text{ როცა } t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1}),$$

მაშინ ადგილი ექნება თანაფარდობებს:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \int_0^\infty |f_t - f_t^n|^2 dt = 0,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^t f_s dw_s - \int_0^t f_s^n dw_s \right| = 0 \quad (P - \text{თ.ყ.}).$$

პენიზება 16.2. თუ $h(t) \in L_1([0, T])$ და $h(t) = 0$, როცა $t \notin [0, T]$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |f_{\kappa_n(t+s)-s} - f_t| dt = 0.$$

აქედან გამომდინარე,

$$\int_0^T f_{\kappa_n(t+s)-s} dt \rightarrow \int_0^T f_t dt, \quad \text{როცა } n \rightarrow \infty,$$

მაგრამ უკანასკნელი თანაფარდობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს რიმანის ჯამების მიმდევრობას, ხოლო მარჯვენა ლებეგის ინტეგრალია და, მაშასადამე, ლებეგის ინტეგრალის მიახლოება აგრეთვე შესაძლებელი ყოფილა რიმანის ჯამების საშუალებით.

პენსაზღვრა 16.5. $\tau(\omega) \geq 0$ არაუარყოფით შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება მარკოვის მომენტი $\{F_t\}_{t \geq 0}$ ნაკადის მიმართ, თუ $\forall t \geq 0 : \{\omega : \tau(\omega) > t\} \in F_t$.

ამოცანა 16.2. თუ τ მარკოვის მომენტია, მაშინ შემთხვევითი პროცესები $\chi_{\{t < \tau\}}$ და $\chi_{\{t \leq \tau\}}$ F_t შეთანხმებულია. გარდა ამისა, $\{t \leq \tau\} \in F_t$.

ამოცანა 16.3. თუ ξ_t შემთხვევითი პროცესი $\forall \omega$ უწყვეტია t -ს მიმართ მარჯვნიდან (ან მარცხნიდან), მაშინ ის ზომადია (t, ω) -ს მიმართ.

ამოცანა 16.4. თუ ξ_t უწყვეტია მარჯვნიდან და F_t შეთანხმებულია, მაშინ $\tau := \inf\{t : \xi_t \notin (a, b)\}$ მარკოვის მომენტია F_t ნაკადის მიმართ.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ თუ τ მარკოვის მომენტია, მაშინ $\tau_n := 2^{-n}[\tau 2^n] + 2^{-n}$ ისევ მარკოვის მომენტია. ცხადია, რომ $\tau \leq \tau_n$, $\tau_n - \tau \leq 2^{-n}$ და როცა $t \in [k/2^n, (k+1)/2^n)$ ამოცანა 16.2-ის საფუძველზე გვაქვს

$$\{\omega : t < \tau_n(\omega)\} = \{\omega : \frac{k}{2^n} \leq \tau\} \in F_{k/2^n} \subset F_t.$$

17. სტოქასტური ინტეგრალის თვისებები (H კლასისათვის)

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ სტოქასტური ინტეგრალის თვისებებს შემთხვევითი პროცესებისათვის H კლასიდან (იხ. განსაზღვრა 16.4).

1. წრფივობა:

$$\forall t \geq 0: \int_0^t (c_1 f_s^1 + c_2 f_s^2) dw_s = c_1 \int_0^t f_s^1 dw_s + c_2 \int_0^t f_s^2 dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.}).$$

$$2. E \int_0^\infty f_t dw_t = 0.$$

ეს შემდეგი ფაქტის შედეგია: თუ ξ_n შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა ისეთია, რომ $E\xi_n = 0$ და $E|\xi - \xi_n|^2 \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$, მაშინ $E\xi = 0$; $\square$

$$3. \left(\int_0^t f_s dw_s, F_t \right) \text{ მარტინგალია.}$$

მართლაც, ავიღოთ $f^n \in H_0$ ისეთი, რომ $f^n \rightarrow f$ $L_2([0, T] \times \Omega)$ -ში, როცა $n \rightarrow \infty$. მაშინ, როგორც ვიცით,

$$\left(\int_0^t f_s^n dw_s, F_t \right) \text{ მარტინგალია,}$$

ე. ი.

$$E \left\{ \int_0^t f_s^n dw_s \mid F_r \right\} = \int_0^r f_s^n dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.}).$$

თუ აქ გადავალთ ზღვარზე , როცა $n \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$E\left\{\int_0^t f_s dw_s \mid F_r\right\} = \int_0^r f_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.})$$

(აქვე შევნიშნავთ, რომ მარცხენა მხარეში კრებადობა გვაქვს $L_1(\Omega)$ -ში, ხოლო მარჯვენა მხარეში $L_2(\Omega)$ -ში და, მაშასადამე, გვექნება $L_1(\Omega)$ -შიც); $\square$

4. დუბის უტოლობა:

$$E \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t f_s dw_s \right|^2 \leq 4E \int_0^\infty f_s^2 ds ;$$

5. თუ $f, g \in H$ ისეთებია, რომ $f_t(\omega) = g_t(\omega)$, როცა $t \in [0, T]$ და $\omega \in A$ ($T > 0$, $A \in F$), მაშინ $\forall t \in [0, T]$:

$$\int_0^t f_s dw_s = \int_0^t g_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.}) \quad \omega \in A.$$

6. თუ $\xi_t = \int_0^t f_s dw_s$ და τ მარკოვის მომენტი, მაშინ

$$\xi_\tau = \int_0^\infty \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.})$$

დამტკიცება. ვიგულისხმობთ, რომ τ მარკოვის მომენტი ღებულობს თვლად რაოდენობა მნიშვნელობებს $t_1, t_2, \dots$ მაშინ, წინა თვისების გათვალისწინებით, $\{\tau = t_k\}$ სიმრავლეზე გვაქვს

$$\xi_\tau = \xi_{t_k} = \int_0^{t_k} \chi_{\{s \leq t_k\}} f_s dw_s = \int_0^s \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.})$$

ე.ი. $\forall k :$

$$\xi_\tau = \int_0^\infty \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.}) \quad \{\tau = t_k\} \text{ სიმრავლეზე,}$$

და, ვინაიდან,

$$\bigcup_{k=1}^\infty \{\tau = t_k\} = \Omega,$$

ამიტომ ξ_τ სიდიდის წარმოდგენა თვლადმნიშვნელობიანი მარკოვის მომენტებისათვის სამართლიანია.

ზოგად შემთხვევაში ნებისმიერ τ მარკოვის მომენტს მივუახლოვდებით თვლადმნიშვნელობიანი τ_n მარკოვის მომენტებით (იხ. წინა პარაგრაფის ბოლო აბზაცი). მათთვის გვაქვს :

$$\xi_{\tau_n} = \int_0^\infty \chi_{\{s \leq \tau_n\}} f_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.}).$$

აქედან ზღვარზე გადასვლით (როცა $n \rightarrow \infty$) მიიღება დასამტკიცებელი თანაფარდობა. მართლაც, მარცხენა მხარეში თუ ვისარგებლებთ ξ_τ პროცესის უწყვეტობით (იხ. თეორემა 16.1), გვექნება, რომ $\xi_{\tau_n} \rightarrow \xi_\tau$, როცა $n \rightarrow \infty$, მარჯვენა მხარეში კი იზომეტრულობისა და მაჟორირებული კრებადობის შესახებ თეორემის ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned} E \left| \int_0^\infty \chi_{\{s \leq \tau_n\}} f_s dw_s - \int_0^\infty \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s dw_s \right|^2 = \\ = E \int_0^\infty \left| \chi_{\{s \leq \tau_n\}} - \chi_{\{s \leq \tau\}} \right|^2 f_s^2 ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \square \end{aligned}$$

7. თუ τ მარკოვის მომენტი, მაშინ

$$E \left(\int_0^\tau f_s dw_s \right)^2 = E \int_0^\tau f_s^2 ds ;$$

8. თუ $\int_0^\infty f_s dw_s = 0$ (P - თ.ყ.), მაშინ $f_s(\omega) = 0$ თითქმის ყველა (s, ω) -ში;

9. სკოროხოდის (ლენგლიარის) უტოლობა. დაუშვათ, რომ $N > 0$, $c > 0$ და $T \leq \infty$, მაშინ

$$P\left\{\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t f_s dw_s \right| \geq c\right\} \leq P\left\{\int_0^T f_s^2 ds \geq N\right\} + \frac{1}{C^2} M\left(N \wedge \int_0^T f_s^2 ds\right). \quad (1)$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : \int_0^t f_s^2 ds \geq N\}.$$

ცხადია, რომ

$$\int_0^\tau f_s^2 ds = N; \quad \int_0^T f_s^2 ds \geq N, \text{ თუ } \tau \leq T \quad \text{და} \quad \int_0^T f_s^2 ds \leq N, \text{ თუ } \tau > T.$$

ამიტომ მარტინგალებისათვის კოლმოგოროვ-დუბის უტოლობის საფუძველზე გვაქვს:

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s dw_s \right| \geq c\right\} &\leq \frac{1}{C^2} E \int_0^T \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s^2 ds = \\ &= \frac{1}{C^2} E \int_0^{T \wedge \tau} f_s^2 ds = \frac{1}{C^2} E\left(N \wedge \int_0^T f_s^2 ds\right). \end{aligned}$$

აღვნიშნოთ

$$A := \left\{\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f_s dw_s \right| \geq c\right\}.$$

ცხადია, რომ სიმრავლეზე $A \cap \{\tau \geq T\}$ გვაქვს:

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

$$\int_0^t f_s dw_s = \int_0^t \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s dw_s, \quad t \in [0, T].$$

ამიტომ ზემოთ მიღებული შეფასების თანახმად

$$\begin{aligned} P(A \cap \{\tau \geq T\}) &= P(\{\sup_{t \leq T} |\int_0^t \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s dw_s| \geq c\} \cap \{\tau \geq T\}) \leq \\ &\leq \frac{1}{c^2} E(N \wedge \int_0^T f_s^2 ds). \end{aligned}$$

მეორე მხრივ, ნათელია, რომ

$$P(A \cap \{\tau < T\}) \leq P\{\tau < T\} \leq P\{\int_0^T f_s^2 ds \geq N\}.$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ

$$P(A) = P(A \cap \{\tau < T\}) + P(A \cap \{\tau \geq T\})$$

დავრწმუნდებით (1) შეფასების სამართლიანობაში. $\square$

ამოცანა 17.1. დავამტკიცოთ, რომ

$$\begin{aligned} P\{\int_0^T f_t^2 dt \geq N\} &\leq \frac{1}{N} E(c^2 \wedge \sup_{t \leq T} |\int_0^t f_s dw_s|^2) + \\ &= P\{\sup_{t \leq T} |\int_0^t f_s dw_s| \geq c\}. \end{aligned} \quad (2)$$

შემოვიღოთ მარკოვის მომენტი

$$\tau := \inf\{t : |\int_0^t f_s dw_s| \geq c\},$$

მაშინ სკოროხოდის უტოლობისა და ამოცანა 17.1-ის ძალით გვექნება

$$\begin{aligned}
 P\left\{\int_0^T f_t^2 dt \geq N, \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f_s dw_s \right| \geq c\right\} &= P\left\{\int_0^T f_t^2 dt \geq N, \tau \geq T\right\} = \\
 &= P\left\{\int_0^\tau f_t^2 dt \geq N\right\} \leq \frac{1}{N} E \int_0^\tau f_t^2 dt.
 \end{aligned}$$

აშოტაძე 17.2. დავამტკიცოთ ბურკჰოლდერ-განდი-დევისის უტოლობა

$$\frac{1}{3} E \left(\int_0^T f_s^2 ds \right)^{1/2} \leq E \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f_s dw_s \right| \leq 3 E \left(\int_0^T f_s^2 ds \right)^{1/2}.$$

მითითება. ავიღოთ (1) და (2) შეფასებებში $N = c^2$ და მიღებული თანაფარდობები ვაინტეგრიროთ c -თი $[0, \infty)$ ინტერვალზე.

18. სტოქასტური ინტეგრალის თვისებები (S კლასისათვის)

დავუშვათ, რომ (Ω, F, P) სრული ალბათური სივრცეა, ხოლო $\{F_t\}_{t \geq 0}$ არის F σ -ალგებრის ქვე- σ -ალგებრათა ზრდადი ოჯახი, გასრულებული P ზომის მიმართ ($F_t \subset F_s \subset F$, $t \leq s$).

პანსაზღვრა 18.1. აღვნიშნოთ S -ით ყველა ისეთი F_t -შეთანხმებული $f_t(\omega)$ პროცესის სიმრავლე, რომელთათვისაც $\forall T < \infty$:

$$P\left\{\int_0^T f_t^2 dt < \infty\right\} = 1.$$

ლემა 18.1. თუ $f \in S$, მაშინ $\int_0^t f_s^2 ds$ F_t -ზომადია $\forall t$.

დამტკიცება. შემოვიღოთ ფუნქციები

$$\chi_n(x) := \begin{cases} x, & |x| < n, \\ n \operatorname{sign}(x), & |x| \geq n. \end{cases}$$

ცხადია, რომ $\chi_n(x)$ შემოსაზღვრული ფუნქციებია და $\chi_n(x) \rightarrow x$, როცა $n \rightarrow \infty$. აღვნიშნოთ $f_s^n := \chi_n(f_s)$. ლემა დამტკიცებული იქნება, თუ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ $\int_0^t (f_s^n)^2 ds$ F_t -ზომადია და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (f_s^n)^2 ds = \int_0^t f_s^2 ds \quad \forall t.$$

მაჟორირებული კრებადობის შესახებ ლებეგის თეორემის თანახმად გვაქვს:

$$\begin{aligned} \int_0^t f_s^2 ds - \int_0^t (f_s^n)^2 ds &= \int_0^t (f_s^2 - n^2) \chi_{\{f_s \geq n\}} ds + \int_0^t (f_s^2 - n^2) \chi_{\{f_s < n\}} ds = \\ &= \int_0^t (f_s^2 - n^2) \chi_{\{f_s \geq n\}} ds \leq \int_0^t f_s^2 \chi_{\{f_s \geq n\}} ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

მეორე მხრივ, ცხადია, რომ $\forall n \quad f_s^n \in H$. ამიტომ თითოეული f_s^n ფუნქციისათვის მოიძებნება საფეხურა ფუნქციების (იხ. განსაზღვრა 16.2) ისეთი მიმდევრობა $\{f_s^{n,m}\}_{m \geq 1}$, რომელიც კრებადია აღნიშნული ფუნქციისაკენ $L_2([0, T] \times \Omega)$ სივრცეში, როცა $m \rightarrow \infty$. თავის მხრივ, ნათელია, რომ $\forall n, m \quad \int_0^t (f_s^{n,m})^2 ds \leq F_t$ - ზომადია $\forall t$. აქედან გამომდინარე, $\int_0^t (f_s^n)^2 ds \leq F_t$ - ზომადია $\forall t$ და ამით ლემის დამტკიცება დასრულებულია. $\square$

დავუშვათ, რომ $f \in S$ და $n \geq 0$, მაშინ

$$\tau(n) := \inf\{t \geq 0 : \int_0^t f_s^2 ds \geq n\}$$

იქნება მარკოვის მომენტი და ცხადია, რომ $\tau(n) \uparrow \infty$. შევნიშნოთ, რომ თუ $\tau(n) < \infty$, მაშინ

$$\int_0^{\tau(n)} f_s^2 ds = n,$$

ხოლო თუ $\tau(n) = \infty$, მაშინ

$$\int_0^{\tau(n)} f_s^2 ds < n.$$

ე. ი. ნებისმიერ შემთხვევაში:

$$\int_0^{\tau(n)} f_s^2 ds \leq n.$$

ამიტომ პროცესი $\chi_{\{s \leq \tau(n)\}}$ არის H კლასიდან და, მაშასადამე, განსაზღვრულია სტოქასტური ინტეგრალი:

$$\int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(n)\}} f_s dw_s.$$

ყოველივე ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარე, თუ ჩვენ შეგვეძლება განვსაზღვროთ სტოქასტური ინტეგრალი

$$\int_0^t f_s dw_s,$$

მაშინ ბუნებრივი იქნებოდა შემდეგი თანაფარდობა:

$$\int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(n)\}} f_s dw_s = \int_0^{t \wedge \tau(n)} f_s dw_s.$$

განსაზღვრის კორექტულობისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

ლემა 18.2. დაუშვათ, რომ $f \in S$. მაშინ არსებობს ისეთი $\Omega' \subset \Omega$, $P(\Omega') = 1$, რომ $\forall \omega \in \Omega'$, $m \geq n$, $t \in [0, \tau(n, \omega)]$ სამარ-თლიანია ტოლობა:

$$\int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(n)\}} f_s dw_s = \int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(m)\}} f_s dw_s.$$

დამტკიცება. ალენიშნოთ $A := \{\omega : t \leq \tau(n, \omega)\}$. ამ სიმრავლეზე

$$\chi_{\{s \leq \tau(n)\}} f_s = \chi_{\{s \leq \tau(m)\}} f_s \quad \forall s \leq t,$$

ხოლო

$$\chi_{\{s \leq \tau(n) \wedge t\}} f_s = \chi_{\{s \leq \tau(m) \wedge t\}} f_s \quad \forall s.$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ (P - თ.ყ.):

$$\begin{aligned} \int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(n)\}} f_s dw_s &= \int_0^\infty \chi_{\{s \leq \tau(n) \wedge t\}} f_s dw_s = \\ &= \int_0^\infty \chi_{\{s \leq \tau(m) \wedge t\}} f_s dw_s = \int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(m)\}} f_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.}) \quad A\text{-ზე} \end{aligned}$$

და

$$\chi_{\{t \leq \tau(n)\}} \int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(n)\}} f_s dw_s = \chi_{\{t \leq \tau(n)\}} \int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(m)\}} f_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.}) \quad \forall t. \quad (1)$$

უკანასკნელ თანაფარდობაში შემავალი ფუნქციები t -ს მიმართ მარცხნიდან უწყვეტებია. ამიტომ თუ ალენიშნავთ Ω' -ით იმ ω -ების სიმრავლეს, სადაც (1) შესრულებულია ნებისმიერი რაციონალური t -სათვის, მაშინ ცხადია, რომ $P(\Omega') = 1$ და (1) სამართლიანია ყველა t -სათვის ერთდროულად (P - თ.ყ.). $\square$

შედეგი 18.1. თუ $f \in S$, მაშინ ალბათობით ერთი

$$\int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(n)\}} f_s dw_s$$

იკრებება თანაბრად t -ს მიმართ ნებისმიერ სასრულ $[0, T]$ მონაკვეთზე, როცა $n \rightarrow \infty$.

ეს გამოდის იქიდან, რომ $\forall T$ მოიძებნება ისეთი n , რომ $\tau(n) > T$ (ვინაიდან $\tau(n) \uparrow \infty$) და აქედან დაწყებული მიმდევრობის წევრები არ იცვლება.

აღვნიშნოთ Ω' -ით სიმრავლე იმ ω -ების, სადაც

$$\int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(n)\}} f_s dw_s$$

კრებადია თანაბრად და შემოვიღოთ შემდეგი განმარტება:

განსაზღვრა 18.2.

$$\int_0^t f_s dw_s := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(n)\}} f_s dw_s, & \omega \in \Omega', \\ 0, & \omega \notin \Omega'. \end{cases}$$

ვნახოთ ახლა ასეთნაირად განსაზღვრული სტოქასტური ინტეგრალი იქნება თუ არა იგივე, რაც უკვე გვექონდა H კლასის ფუნქციებისათვის. ავიღოთ $f \in H$. გვაქვს:

$$\begin{aligned} E \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(n)\}} f_s dw_s - \int_0^t f_s dw_s \right|^2 &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E \left| \int_0^t \chi_{\{s > \tau(n)\}} f_s dw_s \right|^2 = \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E \int_0^t \chi_{\{s > \tau(n)\}} f_s^2 ds = 0 \end{aligned}$$

(უკანასკნელი ტოლობა მაჟორირებული კრებადობის შესახებ ლებეგის თეორემის შედეგია). ე. ი.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \chi_{\{s \leq \tau(n)\}} f_s dw_s = \int_0^t f_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.}) \quad \forall t.$$

აქედან კი უწყვეტობის გათვალისწინებით ტოლობა გვექნება ყველა t -სათვის ერთდროულად (P - თ.ყ.) და, მაშასადამე, სტო-

ქასტური ინტეგრალის ძველი და ახალი განმარტებები H კლასისათვის ერთმანეთს ემთხვევა.

ახლა მოვიყვანოთ სტოქასტური ინტეგრალის თვისებები S კლასის ფუნქციებისათვის.

1. ამოცანა 18.1 (დევისის უტოლობა). ვაჩვენოთ, რომ თუ $f \in S$, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას :

$$\frac{1}{3} E \int_0^t f_s^2 ds \leq E \sup_{s \leq t} \left| \int_0^s f_r dw_r \right| \leq 3 E \int_0^t f_s^2 ds ;$$

2. თუ $f \in S$, მაშინ $\int_0^t f_s dw_s$ უწყვეტია t -ს მიმართ და F_t -ზომადია (ეს გამოდის 18.2 განსაზღვრიდან);

3. თუ $f, g \in S$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ და $T \in (0, \infty)$, მაშინ

$$P\left\{\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f_s dw_s - \int_0^t g_s dw_s \right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P\left\{\int_0^T |f_s - g_s|^2 ds \geq \delta\right\}.$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ შესამოწმებელი უტოლობის მარცხენა მხარე (შესაბამისად მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრები) უწყვეტია ε -ის (შესაბამისად δ -ს) მიმართ მარცხნიდან და მონოტონურია ε -ით (შესაბამისად δ -თი). აქედან გამომდინარე, წყვეტის წერტილთა რაოდენობა არაა თვლადზე მეტი და ამიტომ უტოლობა საკმარისია დამტკიცდეს მხოლოდ იმ ε -ისა და δ -სათვის, სადაც შესაბამისი გამოსახულებები უწყვეტია.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\tau(n) := \inf\{t \geq 0 : \int_0^t f_s^2 ds \geq n\},$$

$$\sigma(n) := \inf\{t \geq 0 : \int_0^t g_s^2 ds \geq n\},$$

$$f_s^n := \chi_{\{s \leq \tau(n)\}} f_s, \quad g_s^n := \chi_{\{s \leq \sigma(n)\}} g_s.$$

მაშინ ცხადია, რომ $\forall n: f_s^n, g_s^n \in H$ და H კლასის ფუნქციებისათვის, სკოროხოვის უტოლობის ძალით, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\begin{aligned} P\{\sup_{t \leq T} |\int_0^t f_s^n dw_s - \int_0^t g_s^n dw_s| \geq \varepsilon\} &\leq P\{\int_0^T |f_s^n - g_s^n|^2 ds \geq \delta\} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2} E(\delta \wedge \int_0^T |f_s^n - g_s^n|^2 ds) \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P\{\int_0^T |f_s^n - g_s^n|^2 ds \geq \delta\}. \quad (2) \end{aligned}$$

მეორე მხრივ, ცხადია, რომ (P - თ.ყ.):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |f_s^n - g_s^n|^2 ds = \int_0^T |f_s - g_s|^2 ds$$

და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \leq T} |\int_0^t f_s^n dw_s - \int_0^t g_s^n dw_s| = \sup_{t \leq T} |\int_0^t f_s dw_s - \int_0^t g_s dw_s|.$$

ვისარგებლებთ ახლა შემდეგი ცნობილი ფაქტით: თუ შემთხვევით სიდიდეთა $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ მიმდევრობა (P - თ.ყ.) კრებადია ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ, მაშინ შესაბამისი განაწილების ფუნქციისათა $\{F_{\xi_n}(x)\}_{n \geq 1}$ მიმდევრობა იკრიბება ξ შემთხვევითი სიდიდის $F_\xi(x)$ განაწილების ფუნქციისაკენ ამ უკანასკნელის უწყვეტობის ნერტილებში. მაშინ ყოველივე ზემოთ აღნიშნულის გათვალისწინებით, (2) თანაფარდობაში ზღვარზე გადასვლით მიიღება სასურველი შეფასება; $\square$

4. თუ $f, f^n \in S$, $T \in (0, \infty)$ და $P - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |f_s^n - f_s|^2 ds = 0$,

მაშინ :

$$P - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f_s^n dw_s - \int_0^t f_s dw_s \right| = 0.$$

დამტკიცება. ნინა უტოლობაში g ფუნქციის ადგილას ჩავწენ-
როთ f^n ფუნქციები და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $n \rightarrow \infty$, მი-
ვიღებთ, რომ $\forall \delta > 0$:

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} P \left\{ \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f_s^n dw_s - \int_0^t f_s dw_s \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2}.$$

აქედან კი ადვილად მიიღება დასამტკიცებელი თანაფარდობა; $\square$

ამოცანა 18.2. ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია მე-4 თვისების
შებრუნებული დებულება.

5. თუ $f^i \in S$ და $c_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, n$, მაშინ $\forall t$:

$$\int_0^t \sum_{i=1}^n c_i f_s^i dw_s = \sum_{i=1}^n c_i \int_0^t f_s^i dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.}).$$

დამტკიცება. ავიღოთ $f \in S$, $T < \infty$ და ვისარგებლოთ ლემა
18.1-ში შემოტანილი $\chi_n(x)$ ფუნქციებით. აღვნიშნოთ
 $f_s^n := \chi_n(f_s) \chi_{\{s \leq T\}}$. მაშინ ცხადია, რომ $f_s^n \in H$ და

$$P - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |f_s^n - f_s|^2 ds = 0.$$

თუკი ახლა დავწერთ შესამოწმებელ თანაფარდობას H კლასის $f_s^{i^n}$ ფუნქციებისათვის და მიღებულ თანაფარდობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \rightarrow \infty$, მაშინ მე-4 თვისების გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით მე-5 თვისების სამართლიანობაში. $\square$

6. თუ $f \in S$ წარმოადგენს საფეხურა ფუნქციას, ე. ი. $f_t = f_{t_i}$, როცა $t \in [t_i, t_{i+1})$, სადაც $f_{t_i} = F_{t_i}$ -ზომადია, მაშინ თუ $t \in [t_k, t_{k+1})$, ადგილი აქვს ტოლობას :

$$\int_0^t f_s dw_s = \sum_{t_{i+1} < t} f_{t_i} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) + f_{t_k} (w_t - w_{t_k}) \quad (P - \text{თ.ყ}).$$

ეს თვისებაც მოწმდება მე-5 თვისების ანალოგიურად მე-4 თვისების გამოყენებით. $\square$

7. თუ $f, g \in S$, $T < \infty$, $A \in F$ და $f_s(\omega) = g_s(\omega)$, როცა $s \leq T$ და $\omega \in A$, მაშინ $\forall t \leq T$:

$$\int_0^t f_s dw_s = \int_0^t g_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.}) \quad A\text{-ზე.}$$

ისევ დავწეროთ შესამოწმებელი თანაფარდობა H კლასის ფუნქციებისათვის და გამოვიყენოთ შემდეგი ცნობილი ფაქტი : თუ $\xi^n = \eta^n$ (P - თ.ყ.), $P - \lim_{n \rightarrow \infty} \xi^n = \xi$ და $P - \lim_{n \rightarrow \infty} \eta^n = \eta$, მაშინ $\xi = \eta$ (P - თ.ყ.).

8. თუ $f \in S$, $T < \infty$, ხოლო τ მარკოვის მომენტი, ისეთი, რომ $\tau \leq T$, მაშინ

$$\int_0^\tau f_s dw_s = \int_0^T \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ}).$$

დამტკიცება. ისევ გადავიდეთ $f_s^n \in H$ ფუნქციებზე. მათთვის, ვინაიდან $\tau \leq T$, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\begin{aligned} \int_0^T \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s^n dw_s &= \int_0^\infty \chi_{\{s \leq \tau\}} \chi_{\{s \leq T\}} f_s^n dw_s = \\ &= \int_0^\infty \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s^n dw_s = \int_0^T \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s^n dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.}). \end{aligned}$$

თუ აქ გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \rightarrow \infty$, მივიღებთ დასამტკიცებელ თანაფარდობას. $\square$

9. თუ $f \in S$, ხოლო τ სასრული მარკოვის მომენტია, ისეთი, რომ

$$E \int_0^\infty \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s^2 ds < \infty,$$

მაშინ

$$\int_0^\tau f_s dw_s = \int_0^\infty \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ.}).$$

10. ვალდის იგივეობები. მე-9 თვისების პირობებში ადგილი აქვს თანაფარდობებს:

$$E \left(\int_0^\tau f_s dw_s \right)^2 = E \int_0^\tau f_s^2 ds$$

და

$$E \int_0^\tau f_s dw_s = 0.$$

კერძოდ, თუ $f \equiv 1$, მაშინ იმის გათვალისწინებით, რომ $E\tau < \infty$, მივიღებთ: $Ew_\tau^2 = E\tau$ და $Ew_\tau = 0$;

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

თუ $E \int_0^\infty \chi_{\{s \leq \tau\}} f_s^2 ds = \infty$, მაშინ ვალდის იგივეობები არაა სამართლიანი.

11. თუ $f \in S$ და $E \int_0^T f_s^2 ds < \infty$, მაშინ $(\int_0^t f_s dw_s, F_t)_{t \leq T}$ მარტინგალია.

ამოცანა 18.3. როცა $t < 1$ განვიხილოთ სტოქასტური ინტეგრალი

$$\xi_t := \int_0^t \frac{1}{1-s} dw_s + 1$$

და მარკოვის მომენტი $\tau := \inf\{t \geq 0 : \xi_t = 0\}$, მაშინ $P\{\tau < 1\} = 1$ და

$$\int_0^t \frac{1}{1-s} \chi_{\{s \leq \tau\}} dw_s + 1 = 0 \quad \forall t \geq 1.$$

აქედან, კერძოდ, მიიღება, რომ (ξ_t, F_t) არაა მარტინგალი (აქ ირლვევა მე-11 თვისების პირობა $E \int_0^1 (\frac{1}{1-s})^2 ds < \infty$).

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $\eta_t := \xi_t - 1 = \int_0^t \frac{1}{1-s} dw_s$, როცა $t < 1$. მა-

შინ ცხადია, $\tau = \inf\{t \geq 0 : \eta_t = -1\}$. ვინაიდან $\int_0^1 \frac{1}{(1-s)^2} ds < \infty$, როცა

$t < 1$, ამიტომ η_t პროცესი განსაზღვრულია და იგი წარმოადგენს გაუსის პროცესს. შევარჩიოთ მონოტონური $\phi(t) < 1$ ფუნქცია ისე, რომ

$$\tilde{w}_t := \eta_{\phi(t)} = \int_0^{\phi(t)} \frac{1}{1-s} dw_s$$

იყოს ვინერის პროცესი. ცხადია, რომ $E \tilde{w}_t = 0$. ე. ი. $\phi(t)$ უნდა შე-
ირჩეს ისე, რომ $E \tilde{w}_t \tilde{w}_s = \min(s, t)$. თუ $t_1 < t_2$, გვაქვს

$$\begin{aligned} E \tilde{w}_{t_1} \tilde{w}_{t_2} &= E \int_0^{\phi(t_1)} \frac{1}{1-s} dw_s \int_0^{\phi(t_2)} \frac{1}{1-s} dw_s = \\ &= E \int_0^{\phi(t_2)} \chi_{\{s < \phi(t_1)\}} \frac{1}{1-s} dw_s \int_0^{\phi(t_2)} \frac{1}{1-s} dw_s = \\ &= E \int_0^{\phi(t_2)} \chi_{\{s < \phi(t_1)\}} \frac{1}{(1-s)^2} ds = E \int_0^{\phi(t_1)} \frac{1}{(1-s)^2} ds = \frac{1}{1-s} \Big|_0^{\phi(t_1)} = \\ &= \frac{1}{1-\phi(t_1)} - 1 := t_1 \Rightarrow \phi(t_1) = \frac{t_1}{t_1 + 1}. \end{aligned}$$

ე. ი. $\tilde{w}_t = \eta_{\phi(t)}$ წარმოადგენს ვინერის პროცესს, თუ $\phi(t) = \frac{t}{t+1}$.
ცხადია, რომ პირიქით

$$\eta_t = \tilde{w}_{\phi^{-1}(t)} = \tilde{w}_{\frac{t}{1-t}}.$$

თუ w_t ვინერის პროცესია, მაშინ $-w_t$ აგრეთვე ვინერის პრო-
ცესია. ამიტომ

$$\inf\{t \geq 0 : w_t = -1\} = \inf\{t \geq 0 : w_t = 1\}.$$

აღვნიშნოთ $x \equiv \sqrt{T}y$, მაშინ არეკვლის პრინციპიდან გამომ-
დინარე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\begin{aligned} P\{\max_{t \leq T} \tilde{w}_t \geq 1\} &= 2P\{\tilde{w}_T \geq 1\} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \int_1^\infty e^{-\frac{x^2}{2T}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/\sqrt{T}}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy \rightarrow 1, \quad T \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

საიდანაც გამოდის, რომ $P\{\tau < 1\} = 1$.

გარდა ამისა, თუ $t \geq 1$, მაშინ გვაქვს

$$\int_0^t \chi_{\{s \leq \tau\}} \frac{1}{1-s} dw_s = \int_0^\tau \frac{1}{1-s} dw_s = -1.$$

ე. ი. η_t (და, მაშასადამე $\xi_t = \eta_t + 1$) პროცესი არ წარმოადგენს მარტინგალს. $\square$

აქვე შევნიშნავთ, რომ, არეკვლის პრინციპიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ვინერის პროცესს შეუძლია მიაღწიოს ნებისმიერ დონეს ალბათობით ერთი. მართლაც, გვაქვს :

$$\begin{aligned} P\{\max_{t \leq T} w_t \geq a\} &= 2P\{w_T \geq a\} = 2P\{\sqrt{T}w_1 \geq a\} = \\ &= 2P\{w_1 \geq \frac{a}{\sqrt{T}}\} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 2P\{w_1 \geq 0\} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

ამოცანა 18.4. თუ $f \in S$ და $E(\int_0^T f_s^2 ds)^{1/2} < \infty$, მაშინ

$(\int_0^t f_s dw_s, F_t)_{t \leq T}$ ისევ მარტინგალია.

12. დავუშვათ, რომ $f \in S$, $t_1 < t_2$ და $g = F_{t_1}$ -ზომადი შემთხვევითი სიდიდეა. განვმარტოთ ინტეგრალი

$$\int_{t_1}^{t_2} f_s dw_s := \int_0^{t_2} \chi_{[t_1, t_2)}(s) f_s dw_s,$$

მაშინ

$$g \int_{t_1}^{t_2} f_s dw_s = \int_{t_1}^{t_2} g f_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ}).$$

ეს თვისება უშუალოდ მოწმდება, როცა $f \in H_0$, ხოლო ზოგად შემთხვევაში მოიძებნება $f^n \in H_0$ ფუნქციების მიმდევრობა, რომელთათვისაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t |f_s - f_s^n|^2 ds = 0 \quad (P - \text{თ.ყ}) \quad \forall t$$

და სტანდარტული გზით ხორციელდება ზღვარზე გადასვლა f^n ფუნქციებისათვის დაწერილ ტოლობაში.

ცხადია, რომ ვინაიდან $\chi_{[t_1, t_2]}(s) = \chi_{[0, t_2]}(s) - \chi_{[0, t_1]}(s)$, ამიტომ

$$\int_{t_1}^{t_2} f_s dw_s = \int_0^{t_2} \chi_{[t_1, t_2]}(s) f_s dw_s = \int_0^{t_2} f_s dw_s - \int_0^{t_1} f_s dw_s \quad (P - \text{თ.ყ}). \quad \square$$

განსაზღვრა 18.3. ამბობენ, რომ $w_t = (w_t^1, \dots, w_t^n)$ – n -განზომილებიანი ვინერის პროცესია σ -ალგებრათა F_t ზრდადი ოჯახის მიმართ (ან $(w_t, F_t)_{t \geq 0}$ n -განზომილებიანი ვინერის პროცესია), თუ $\forall i = 1, \dots, n \quad (w_t^i, F_t)_{t \geq 0}$ ვინერის პროცესია და $w^1, \dots, w^n$ ურთიერთდამოუკიდებლებია (რისთვისაც საკმარისია, რომ $E w_t^i w_s^j = 0$ ($i \neq j$), როცა $w^1, \dots, w^n$ n -განზომილებიანი გაუსის პროცესია).

ჩვენ დავწერთ, რომ $f_t = (f_t^1, \dots, f_t^n) \in S^{(n)}$, თუ $f^i \in S \quad \forall i$. თუ $f_t \in S^{(n)}$, მაშინ მისგან სტოქასტური ინტეგრალი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\int_0^t f_s dw_s := \sum_{i=1}^n \int_0^t f_s^i dw_s^i.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ $f_t \in S^{(n)}$ ისეთია, რომ

$$E \int_0^T |f_s|^2 ds < \infty, \text{ მაშინ}$$

$$E \left(\int_0^T f_s dw_s \right)^2 = E \int_0^T |f_s|^2 ds.$$

თუ უკანასკნელ თანაფარდობაში f ფუნქციის ნაცვლად ავიღებთ $f + \lambda g$ ფუნქციას, მაშინ λ -სთან მდგომი კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ, რომ

$$E \left(\int_0^T f_s dw_s \int_0^T g_s dw_s \right) = E \int_0^T f_s g_s ds.$$

თუკი ახლა აქ ავიღებთ $f_s = (f_s^1, 0, \dots, 0)$ და $g_s = (0, g_s^2, 0, \dots, 0)$ ფუნქციებს, გვექნება

$$E \left(\int_0^T f_s^1 dw_s^1 \int_0^T g_s^2 dw_s^2 \right) = 0,$$

ე. ი. სტოქასტური ინტეგრალები დამოუკიდებელი ვინერის პროცესების მიმართ არაკორელირებულებია.

დავუშვათ, რომ $\sigma_t = (\sigma_t^{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, $\sigma_t^{ij} \in S$ $\forall i, j$, მაშინ

$$\left(\int_0^t \sigma_s dw_s \right)^i = \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_s^{ij} dw_s^j.$$

ლემმა 18.5. ვაჩვენოთ, რომ თუ $E \int_0^T \text{tr} \sigma_s \sigma_s^* ds < \infty$

$(\text{tr} \sigma \sigma^* = \sum_{i,j=1}^n (\sigma^{ij})^2)$, მაშინ

$$E \left| \int_0^T \sigma_s dw_s \right|^2 = E \int_0^T \text{tr} \sigma_s \sigma_s^* ds.$$

19. იტო-დოზლინის ფორმულა

ვიგულისხმობთ, რომ (Ω, F, P) სრული ალბათური სივრცეა, ხოლო (w_t, F_t) – მასზე განსაზღვრული n -განზომილებიანი ვინერის პროცესი. დავუშვათ, რომ ξ_t უწყვეტი, F_t -შეთანხმებული, n_1 -განზომილებიანი პროცესია; σ_t $n \times n$ მატრიცაა, რომლის ელემენტები $\sigma_t^{ij} \in S \quad \forall i, j$; b_t n_1 -განზომილებიანი, F_t შეთანხმებული პროცესია, ისეთი, რომ $\forall T$:

$$\int_0^T |b_t| dt < \infty.$$

განსაზღვრა 19.1. თუ $\forall t$ ξ_t პროცესს აქვს ინტეგრალური წარმოდგენა

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \sigma_s dw_s + \int_0^t b_s ds \quad (P - \text{თ.ყ.}),$$

მაშინ ამბობენ, რომ ξ_t პროცესს გააჩნია სტოქასტური დიფერენციალი და წერენ

$$d\xi_t = \sigma_t dw_t + b_t dt.$$

ლემმა 19.1. თუ ξ_t და η_t n_1 -განზომილებიანი პროცესებია, რომელთაც გააჩნიათ სტოქასტური დიფერენციალი, მაშინ მათ $\xi_t \eta_t$ ნამრავლს აგრეთვე გააჩნია სტოქასტური დიფერენციალი:

$$d(\xi_t \eta_t) = \xi_t d\eta_t + \eta_t d\xi_t + d\xi_t d\eta_t.$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \sigma_s dw_s + \int_0^t b_s ds$$

და

$$\eta_t = \eta_0 + \int_0^t \tilde{\sigma}_s dw_s + \int_0^t \tilde{b}_s ds,$$

სადაც σ , b , $\tilde{\sigma}$ და $\tilde{b}$ აკმაყოფილებენ 19.1 განსაზღვრის მოთხოვნებს. მაშინ, გამომდინარე ვინერის ტრაექტორიის თვისებებიდან, თუ ვიხელმძღვანელებთ შემდეგი გამრავლების ცხრილით:

$$dw_t^i dw_t^j = 0, \text{ როცა } i \neq j;$$

$$(dw_t^i)^2 = dt; \quad (dt)^2 = 0;$$

$$dt dw_t^i = 0,$$

მივიღებთ, რომ:

$$\xi_t \eta_t = \sum_{i=1}^{n_1} \xi_t^i \eta_t^i, \quad \xi_t d\eta_t = \sum_{i=1}^{n_1} \xi_t^i d\eta_t^i =$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \xi_t^i \left(\sum_{j=1}^n \xi_t^{ij} \tilde{\sigma}_t^{ij} dw_t^j + \tilde{b}_t^i dt \right) = (\tilde{\sigma}_t^*) dw_t + \xi_t \tilde{b}_t dt,$$

$$\eta_t d\xi_t = (\sigma_t^*) dw_t + \eta_t b_t dt,$$

$$\begin{aligned} d\xi_t d\eta_t &= \sum_{i=1}^{n_1} d\xi_t^i d\eta_t^i = \sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^n \sigma_t^{ij} dw_t^j \right) \left(\sum_{k=1}^n \tilde{\sigma}_t^{ik} dw_t^k \right) = \\ &= \text{tr} \sigma_t^* \tilde{\sigma}_t^* dt. \end{aligned}$$

ე. ი. ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\forall t$:

$$\begin{aligned}\xi_t \eta_t &= \xi_0 \eta_0 + \int_0^t (\sigma_s^* \eta_s + \tilde{\sigma}_s^* \xi_s) dw_s + \\ &+ \int_0^t (\eta_s b_s + \xi_s \tilde{b}_s + tr \sigma_s \tilde{\sigma}_s^*) ds \quad (P\text{-თ.ყ.})\end{aligned}\quad (1)$$

პირველ რიგში შევამოწმოთ, რომ (1) თანაფარდობის მარჯვენა მხარეში მდგომი ინტეგრალები არსებობს. ვინაიდან η_t უწყვეტი პროცესია: $\max_{s \in [0, t]} |\eta_s| < \infty \quad \forall \omega$. ამიტომ ნებისმიერი ω -სათვის გვაქვს:

$$\begin{aligned}\int_0^t |\eta_s b_s| ds &\leq \max_{s \in [0, t]} |\eta_s| \int_0^t |b_s| ds < \infty; \\ \int_0^t |tr \sigma_s \tilde{\sigma}_s^*| ds &= \int_0^t \left| \sum_{i, j} \sigma_s^{ij} \tilde{\sigma}_s^{ij} \right| ds \leq \\ &\leq \left(\int_0^t tr \sigma_s \sigma_s^* ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t tr \tilde{\sigma}_s \tilde{\sigma}_s^* ds \right)^{1/2} < \infty; \\ \int_0^t |\sigma_s^* \eta_s|^2 ds &\leq \int_0^t |\sigma_s^*|^2 |\eta_s|^2 ds \leq \\ &\leq \int_0^t tr \sigma_s \sigma_s^* |\eta_s|^2 ds \leq \max_{s \in [0, t]} |\eta_s|^2 \int_0^t tr \sigma_s \sigma_s^* ds < \infty.\end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ მეორე შეფასებაში ჩვენ ვისარგებლეთ კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობით, ხოლო უკანასკნელ შეფასებაში – იმ ფაქტით, რომ ნებისმიერი A მატრიცისათვის მისი ნორმა $|A| \leq \sqrt{tr A A^*}$.

როგორც ვხედავთ, (1) თანაფარდობის ორივე მხარე წრფივია ξ , σ და b -სათვის ფიქსირებული η -ს შემთხვევაში. ამიტომ თუ ჩვენ ვაჩვენებთ (1) ტოლობა $d\xi_t' = b_t dt$ და $d\xi_t'' = \sigma_t dw_t$ პროცესებისათვის, მაშინ მიღებული თანაფარდობების შეკრებით მივიღებთ ξ_t პროცესისათვის. ანალოგიურად მოვიქცევით η_t -ს მიმართაც. ე. ი. საკმარისია განვიხილოთ შემდეგი ოთხი შემთხვევა:

$$\begin{aligned} d\xi_t' &= b_t dt, & d\eta_t' &= \tilde{b}_t dt, \\ d\xi_t'' &= \sigma_t dw_t, & d\eta_t'' &= \tilde{\sigma}_t dw_t. \end{aligned}$$

ქვემოთ ჩვენ შტრიხებს აღარ დავწერთ.

I. $d\xi_t = b_t dt$, $d\eta_t = \tilde{b}_t dt$. ეს წარმოადგენს არა სტოქასტურ შემთხვევას და ამ დროს გვაქვს ჩვეულებრივი ნამრავლის დიფერენციალის ფორმულა.

II. III. $d\xi_t = \sigma_t dw_t$, $d\eta_t = \tilde{b}_t dt$. განვიხილოთ $[0, t]$ ინტერვალის დანაწილებათა მიმდევრობა $0 = t_{m_0} \leq t_{m_1} \leq \dots \leq t_{m_{k_m}} = t$, ისეთი, რომ $\max_{i=1, \dots, k_m} (t_{m_i} - t_{m_{i-1}}) \rightarrow 0$, როცა $m \rightarrow \infty$. შემოვიღოთ ფუნქციები:

$$\kappa_m(s) = t_{m_i}, \quad s \in [t_{m_i}, t_{m_{i+1}})$$

და

$$\tilde{\kappa}_m(s) = t_{m_{i+1}}, \quad s \in [t_{m_i}, t_{m_{i+1}}).$$

ცხადია, რომ $\kappa_m(s), \tilde{\kappa}_m(s) \rightarrow s$, როცა $m \rightarrow \infty$. თუ ახლა ვისარგებლებთ წარმოდგენით $ab - cd = (a - c)d + (b - d)a$, თითქმის ყველგან გვექნება:

⇒ ო.ფურთუხია ⇐

$$\begin{aligned}
 \xi_t \eta_t - \xi_0 \eta_0 &= \sum_{i=0}^{k_m-1} (\xi_{t_{m_{i+1}}} \eta_{t_{m_{i+1}}} - \xi_{t_{m_i}} \eta_{t_{m_i}}) = \\
 &= \sum_{i=0}^{k_m-1} (\eta_{t_{m_i}} \int_{t_{m_i}}^{t_{m_{i+1}}} \sigma_s dw_s + \xi_{t_{m_{i+1}}} \int_{t_{m_i}}^{t_{m_{i+1}}} \tilde{b}_s ds) = \\
 &= \int_0^t \sigma_s^* \eta_{\kappa_m(s)} dw_s + \int_0^t \xi_{\tilde{\kappa}_m(s)} \tilde{b}_s ds \rightarrow \\
 &\rightarrow \int_0^t \sigma_s^* \eta_s dw_s + \int_0^t \xi_s \tilde{b}_s ds, \quad m \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

ე.ი.

$$\xi_t \eta_t - \xi_0 \eta_0 = \int_0^t \sigma_s^* \eta_s dw_s + \int_0^t \xi_s \tilde{b}_s ds \quad (P\text{-თ.ყ.})$$

IV. საჩვენებელია, რომ თუ

$$\xi_t = \int_0^t \sigma_s dw_s, \quad \eta_t = \int_0^t \tilde{\sigma}_s dw_s,$$

სადაც $\sigma_s, \tilde{\sigma}_s \in S$, მაშინ

$$\xi_x \eta_t = \int_0^t \sigma_s^* \eta_s dw_s + \int_0^t \tilde{\sigma}_s^* \xi_s dw_s + \int_0^t tr \sigma_s \tilde{\sigma}_s^* ds \quad (P\text{-თ.ყ.}) \quad (2)$$

დავუშვათ, რომ (2) თანაფარდობა დამტკიცებულია რაიმე

$$\xi_t^n = \int_0^t \sigma_s^n dw_s, \quad \eta_t^n = \int_0^t \tilde{\sigma}_s^n dw_s$$

პროცესებისათვის, სადაც

$$P - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^n \int_0^t [|\sigma_s^{nij} - \sigma_s^{ij}|^2 ds + |\tilde{\sigma}_s^{nij} - \tilde{\sigma}_s^{ij}|^2] ds = 0, \quad (3)$$

მაშინ ზღვარზე გადასვლით დავრწმუნდებით (2) ფორმულის სამართლიანობაში ξ_t და η_t პროცესებისთვისაც.

მართლაც, (3) პირობიდან გამომდინარე,

$$P - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} [|\xi_s^n - \xi_s| + |\eta_s^n - \eta_s|] = 0. \quad (4)$$

შემდგომ, იმისათვის, რომ

$$P - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \sigma_s^{n*} \eta_s^n dw_s = \int_0^t \sigma_s^* \eta_s dw_s,$$

საკმარისია, რომ

$$P - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t |\sigma_s^{n*} \eta_s^n - \sigma_s^* \eta_s|^2 ds = 0.$$

(3) და (4) თანაფარდობების ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned} & \int_0^t |\sigma_s^{n*} \eta_s^n - \sigma_s^* \eta_s|^2 ds \leq \\ & \leq 2 \int_0^t [|\sigma_s^{n*} (\eta_s^n - \eta_s)|^2 ds + |(\sigma_s^{n*} - \sigma_s^*) \eta_s|^2] ds \leq \\ & \leq 2 \sup_{s \leq t} |\eta_s^n - \eta_s|^2 \int_0^t |\sigma_s^{n*}|^2 ds + \\ & + 2 \sup_{s \leq t} |\eta_s|^2 \int_0^t |\sigma_s^{n*} - \sigma_s^*|^2 ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

ანალოგიურად გადავალთ ზღვარზე მეორე სტოქასტურ ინტეგრალშიც. ამიტომ საკმარისია (2) ფორმულის დამტკიცება სა-

ფეხურა σ_s^n და $\tilde{\sigma}_s^n$ ფუნქციების შემთხვევაში. განვიხილოთ ფუნქციები:

$$\sigma_s = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^n \sigma_s^{ij} E_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_s = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^n \tilde{\sigma}_s^{ij} E_{ij},$$

სადაც E_{ij} წარმოადგენს $n_1 \times n$ -მატრიცას, რომლის i -ური სტრიქონისა და j -ური სვეტის გადაკვეთაზე დგას 1, ხოლო სხვაგან ყველგან ნული.

ვინაიდან (2) ფორმულა წრფივია σ_s და $\tilde{\sigma}_s$ ფუნქციების მიმართ, ამიტომ საკმარისია გამვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\sigma_s = \hat{\sigma}_s E_{ij}$ და $\tilde{\sigma}_s = \hat{\tilde{\sigma}}_s E_{kr}$, სადაც $\hat{\sigma}_s$ და $\hat{\tilde{\sigma}}_s$ რაიმე რიცხვითი ფუნქციებია. ცხადია, რომ $i = k$ (თუ $i \neq k$, მაშინ $\xi_t \eta_t = 0$,

$$tr \sigma_s \tilde{\sigma}_s^* = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^n \sigma^{ij} \tilde{\sigma}^{ij}) \text{ ე. ი. გვაქვს } \sigma_s = \hat{\sigma}_s E_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_s = \hat{\tilde{\sigma}}_s E_{ir},$$

$$\xi_t = \int_0^t \hat{\sigma}_s dw_s^j, \quad \eta_t = \int_0^t \hat{\tilde{\sigma}}_s dw_s^r \text{ და დასამტკიცებელია, რომ}$$

$$\xi_t \eta_t = \int_0^t \hat{\sigma}_s \eta_s dw_s^j + \int_0^t \hat{\tilde{\sigma}}_s \xi_s dw_s^r + \int_0^t \delta^{jr} \hat{\sigma}_s \hat{\tilde{\sigma}}_s ds, \quad (5)$$

სადაც δ^{jr} კრონეკერის სიმბოლოა.

სიმარტივისათვის ქვემოთ $\hat{\sigma}_s$ -ისა და $\hat{\tilde{\sigma}}_s$ -ის ნაცვლად ისევ ვიხმართ σ_s -სა და $\tilde{\sigma}_s$ -ს. ჩვენ ვთვლით, რომ ისინი საფეხურა ფუნქციებია. წრფივობის გამო კი შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ σ_s და $\tilde{\sigma}_s$ მუდმივი შემთხვევითი სიდიდეებია რომელიმე ინტერვალის შიგნით, გარეთ კი ნულები. დავუშვათ, რომ

$$\sigma_s = \alpha \chi_{[a,b)}(s), \quad \tilde{\sigma}_s = \beta \chi_{[c,d)}(s),$$

სადაც α და β შესაბამისად F_a და F_c ზომადი შემთხვევითი სი-
დიდეებია. მაშინ შესაძლებელია ორი შემთხვევა: $[a, b]$ და $[c, d]$
ინტერვალები ან ემთხვევიან ერთმანეთს, ან არ იკვეთებიან.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა და ვიგულისხმოთ, რომ
 $d \leq a$. მაშინ (5) ფორმულის მარცხენა მხარეში გვაქვს
 $\alpha\beta(w_{t \wedge b}^j - w_{t \wedge a}^j)(w_{t \wedge d}^r - w_{t \wedge c}^r)$, ხოლო მარჯვენა მხარეში - $\alpha\beta \times$
 $\times (w_{t \wedge b}^j - w_{t \wedge a}^j)(w_d^r - w_c^r)$ და ცხადია, რომ აღნიშნულ შემთხვევაში
ეს გამოსახულებები ერთმანეთს ემთხვევა.

გადავიდეთ მეორე შემთხვევაზე: $[a, b] = [c, d]$. ვინაიდან
 $\xi_{t \wedge b} - \xi_{t \wedge a} = \alpha(w_{t \wedge b}^j - w_{t \wedge a}^j)$ და $\eta_{t \wedge b} - \eta_{t \wedge a} = \beta(w_{t \wedge b}^r - w_{t \wedge a}^r)$, ამი-
ტომ დასამტკიცებელია, რომ

$$\begin{aligned} \alpha\beta(w_b^j - w_a^j)(w_b^r - w_a^r) &= \alpha\beta \int_a^b (w_b^r - w_a^r) dw_s^j + \\ &+ \alpha\beta \int_a^b (w_b^j - w_a^j) dw_s^r + \alpha\beta \delta^{ij} (b - a). \end{aligned}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ
 $a = 0$ (ვინაიდან $\tilde{w}_t^i = w_{t+a}^j - w_a^j$ ისევ ვინერის პროცესია) დავუშ-
ვათ, რომ $j = r$, მაშინ საჩვენებელია, რომ

$$(w_b^j)^2 = 2 \int_a^b w_s^j dw_s^j + b. \quad (6)$$

განვიხილოთ $[0, b]$ ინტერვალის დანაწილებათა მიმდევრობა
 $0 = t_0^m < t_1^m < \dots < t_m^m = b$, ისეთი, რომ $\max_{i=0,1,\dots,m-1} |t_{i+1}^m - t_i^m| \rightarrow 0$,
როცა $m \rightarrow \infty$. აღვნიშნოთ $\kappa_m(s) = t_i^m$, როცა $s \in [t_i^m, t_{i+1}^m)$. მაშინ
თუ ვისარგებლებთ ფორმულით $\gamma^2 - \theta^2 = 2\theta(\gamma - \theta) + (\gamma - \theta)^2$ შე-
გვიძლია, დავწეროთ, რომ:

$$\begin{aligned} (w_b^j)^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} [(w_{t_{i+1}^m}^j)^2 - (w_{t_i^m}^j)^2] = 2 \sum_{i=0}^{m-1} w_{t_i^m}^j (w_{t_{i+1}^m}^j - w_{t_i^m}^j) + \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (w_{t_{i+1}^m}^j - w_{t_i^m}^j)^2 = 2 \int_0^t w_{\kappa_m(s)}^j dw_s^j + \sum_{i=1}^{m-1} (w_{t_{i+1}^m}^j - w_{t_i^m}^j)^2. \end{aligned}$$

აქედან ზღვარზე გადასვლით (როცა $m \rightarrow \infty$) მიიღება (6).
ვთქვათ, ახლა $j \neq r$, $a = 0$. ვისარგებლოთ ტოლობით:

$$\gamma\gamma_1 - \theta\theta_1 = \theta(\gamma_1 - \theta_1) + \theta_1(\gamma - \theta) + (\gamma - \theta)(\gamma_1 - \theta_1).$$

მაშინ გვაქვს:

$$\begin{aligned} w_b^j w_b^r &= \int_0^b w_{\kappa_m(s)}^j dw_s^r + \int_0^b w_{\kappa_m(s)}^r dw_s^j + \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (w_{t_{i+1}^m}^j - w_{t_i^m}^j)(w_{t_{i+1}^m}^r - w_{t_i^m}^r). \end{aligned}$$

აღვნიშნოთ

$$\zeta := \sum_{i=0}^{m-1} (w_{t_{i+1}^m}^j - w_{t_i^m}^j)(w_{t_{i+1}^m}^r - w_{t_i^m}^r).$$

მაშინ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\zeta \rightarrow 0$, როცა $m \rightarrow \infty$.
ვინაიდან $E\zeta = 0$, ამიტომ საკმარისია შემოწმდეს, რომ $D\zeta \rightarrow 0$,
როცა $m \rightarrow \infty$. გვაქვს:

$$\begin{aligned} D\zeta &= \sum_{i=0}^{m-1} E[(w_{t_{i+1}^m}^j - w_{t_i^m}^j)^2 (w_{t_{i+1}^m}^r - w_{t_i^m}^r)^2] = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (t_{i+1}^m - t_i^m)^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

თეორემა 19.1 (იტი-დიოპლინის ფორმულა). დავუშვათ, რომ
 n_1 -განზომილებიან სტოქასტურ პროცესს ξ_t გააჩნია სტოქასტური

დიფერენციალი, ხოლო $u(x) = u(x^1, \dots, x^{n_1})$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ პროცესს $u(\xi_t)$ აგრეთვე გააჩნია სტოქასტური დიფერენციალი და სამართლიანია თანაფარდობა

$$du(\xi_t) = \sum_{i=1}^{n_1} u_{x^i}(\xi_t) d\xi_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n_1} u_{x^i x^j}(\xi_t) d\xi_t^i d\xi_t^j. \quad (7)$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ გვაქვს ფუნქციათა მიმდევრობა $u^m(x) \in C^2$, რომელთათვისაც სამართლიანია იტო-დიობლინის ფორმულა (7) და მიმდევრობები $\{u^m\}$, $\{u_{x^i}^m\}$ და $\{u_{x^i x^j}^m\}$ კრებადია ნებისმიერ შემოსაზღვრულ სიმრავლეზე შესაბამისად u , u_{x^i} და $u_{x^i x^j}$ ფუნქციებისაკენ, როცა $m \rightarrow \infty$, მაშინ იტო-დიობლინის ფორმულა სამართლიანი იქნება u ფუნქციისთვისაც. ამიტომ საკმარისია იტო-დიობლინის ფორმულა დამტკიცდეს ნებისმიერი პოლინომის შემთხვევაში. მეორე მხრივ, ნებისმიერი პოლინომის მიღება შესაძლებელია წრფივი ფუნქციების ერთმანეთზე გადამრავლებით. ამიტომ იტო-დიობლინის ფორმულა დამტკიცებული იქნება, თუ ჩვენ მას ვაჩვენებთ წრფივი ფუნქციის შემთხვევაში და ორი ფუნქციის ნამრავლის შემთხვევაში. დავუშვათ, რომ u ფუნქცია წრფივია: $u(x^1, \dots, x^{n_1}) = a^0 + \sum_{i=1}^{n_1} a^i x^i$, მაშინ ეს ტრივიალურია.

დავუშვათ ახლა, რომ იტო-დიობლინის ფორმულა სამართლიანია u^1 და u^2 ფუნქციებისათვის და ვაჩვენოთ, რომ იგი სამართლიანი იქნება მათი ნამრავლისათვის. ლემა 19.1-ის საფუძველზე გვაქვს:

$$\begin{aligned} d[u^1(\xi_t)u^2(\xi_t)] &= u^2(\xi_t)du^1(\xi_t) + u^1(\xi_t)du^2(\xi_t) + \\ &+ [du^1(\xi_t)][du^2(\xi_t)] = \sum_{i=1}^{n_1} (u^2 u_{x^i}^1 + u^1 u_{x^i}^2) d\xi_t^i + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n_1} (u^2 u_{x^i x^j}^1 + u^1 u_{x^i x^j}^2) d\xi_t^i d\xi_t^j + \sum_{i,j=1}^{n_1} u_{x^i}^1 u_{x^j}^2 d\xi_t^i d\xi_t^j, \end{aligned}$$

რაც წარმოადგენს იტო-დობლინის ფორმულას $u^1 u^2$ ნამრავლის შემთხვევაში, ვინაიდან

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n_i} (u^1 u^2)_{x^i x^j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n_i} (u^2 u^1_{x^i x^j} + u^1 u^2_{x^i x^j}) + \sum_{i,j=1}^{n_i} u^1_{x^i} u^2_{x^j}. \quad \square$$

იტო-დობლინის ფორმულას შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე: დავუშვათ, რომ $d\xi_t = \sigma_t dw_t + b_t dt$, მაშინ

$$du(\xi_t) = L_t u(\xi_t) dt + u_x(\xi_t) \sigma_t dw_t, \quad (8)$$

სადაც

$$L_t u(x) := \sum_{i,j=1}^{n_i} a_t^{ij} u_{x^i x^j}(x) + \sum_{i=1}^{n_i} b_t^i u_{x^i}(x),$$

ხოლო $(a_t^{ij}) := 1/2 \sigma_t \sigma_t^*$.

შევნიშნოთ, რომ

$$\sum_{i,j=1}^{n_i} a^{ij} \xi^i \xi^j = \frac{1}{2} (\sigma \sigma^* \xi, \xi) = \frac{1}{2} |\sigma^* \xi|^2 \geq 0,$$

ე. ი. L ელიფსური ოპერატორია.

გადავწეროთ (8) ინტეგრალური სახით. გვექნება:

$$u(\xi_t) - u(\xi_0) = \int_0^t L_s u(\xi_s) ds + \int_0^t u_x(\xi_s) \sigma_s dw_s. \quad (9)$$

შენიშვნა 19.1. შევნიშნავთ, რომ სტოქასტური აღრიცხვის თანამედროვე თეორიის ფუძემდებლად ითვლება იაპონელი მეცნიერი კ. იტო. მან შემოიღო სტოქასტური ინტეგრალი ვინერის პროცესის მიმართ და გამოიყვანა (7) ფორმულა (იხ. Ito K. Stochastic integral. Proc. Imperial Acad. Tokyo, 1944, 20, 519-524), რომელიც დღემდე იტოს ფორმულის სახელს ატარებდა. მხოლოდ მე-20 საუკუნის მიწურულს გაირკვა, რომ ანალოგიური ფორმულა მანამდე მიღე-

ბული იყო ვ. დიობლინის მიერ. ეს საოცარი ისტორია ასეთია: 1940 წლის თებერვალში საფრანგეთის მეცნიერებათა აკადემიამ მიიღო გერმანელთა არმიაში მყოფი ფრანგი ჯარისკაცის ვოლფგანგ დიობლინის წერილი. წერილის გაგზავნიდან მცირე დროის პერიოდში ვ. დიობლინი დაიღუპა და მის მიერ აკადემიაში გაგზავნილი წერილი გაუხსნელად ინახებოდა 2000 წლის მაისამდე. როდესაც წერილი გახსნეს, აღმოჩნდა რომ ის შეიცავდა სტოქასტური ინტეგრალის კონსტრუქციას (რომელიც უმნიშვნელოდ განსხვავდებოდა კ. იტოს მიერ შემოთავაზებულისაგან) და ცვლადის შეცვლის ფორმულის ცხად ფორმულირებას (იხ. Bru B., Yor M. Comment on the life and mathematical legacy of Wolfgang Doeblin, 2002, Fin. Stochastics 6, 3-47. აღსანიშნავია, რომ მანამდე ვ. დიობლინს გამოქვეყნებული ჰქონდა ნაშრომი: „Sur l'equation de Kolmogoroff~, C. R. Ser. I 331, 1059-1102).

შენიშვნა 19.2. (7) ფორმულას აგრეთვე უწოდებენ სტოქასტურ ინტეგრალში ცვლადის შეცვლის ფორმულას (ვინაიდან სტოქასტური დიფერენციალი, განმარტებით, შემოკლებული ჩანაწერია შესაბამისი ინტეგრალური თანაფარდობის). იტო-დიობლინის ფორმულის ჩვენ მიერ მოყვანილი დამტკიცება ეკუთვნის ნ. კრილოვს. როგორც ვხედავთ, განსხვავებით რთული ფუნქციის ჩვეულებრივი დიფერენციალისგან, აქ ჩნდება დამატებითი წევრი, რომელიც იტოს ეფექტის სახელითაა ცნობილი და გამოწვეულია იმით, რომ ვინერის პროცესის კვადრატული ვარიაცია ნებისმიერ სასრულ ინტერვალზე სასრულია და მას აქვს ინტერვალის სიგრძის რიგი.

მოვიყვანოთ **სტოქასტური დიფერენციალის გამოთვლის წესი**: იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $du(t, \xi_t)$, ვწერთ $u(t + dt, \xi_t + \xi_t)$ ფუნქციის ტეილორის გაშლას (t, ξ_t) წერტილის მახლობლობაში მეორე წარმოებულისა წევრების ჩათვლით; თავის თავად ვაკლებთ მას $u(t, \xi_t)$ -ს, შემდეგ ვაგდებთ იმ წევრებს, რომლებიც შეიცავენ $(dt)^2$, $dt dw_t^k$, $dw_t^k dw_t^l$, სადაც $k \neq l$, ხოლო $(dw_t^k)^2$ - ს ვცვლით dt -თი. ცხადია, გარდა ამისა, ვაერთებთ მსგავს წევრებს.

შემდეგი თეორემა მოგვყავს დამტკიცების გარეშე. განვიხილოთ ორგანზომილებიანი ვინერის პროცესი (w_t^1, w_t^2) და შევადგი-

ნოთ კომპლექსური ვინერის პროცესი $z_t = w_t^1 + iw_t^2$. მაშინ სამართლიანია (იხ. [13]):

თეორემა 19.2 (ჰიტსუდა). თუ f ანალიზური ფუნქციაა, მაშინ

$$df(z_t) = f'(z_t)dz_t$$

(ე. ი. გვაქვს რთული ფუნქციის დიფერენცირების ჩვეულებრივი წესი)

თეორემა 19.3. ვთქვათ, Q რაიმე არეა E_{n_1} -ში, ξ_0 არაშემთხვევითია, $\xi_0 \in Q$, τ პირველი გასვლის მომენტია ξ_t პროცესის Q არედან, $u \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$. დაუშვათ, რომ τ სასრულია ალბათობით ერთი ($P(\tau < \infty) = 1$) და $E \int_0^\tau |L_t u(\xi_t)| dt < \infty$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$u(\xi_0) = Eu(\xi_\tau) - E \int_0^\tau L_t u(\xi_t) dt.$$

დამტკიცება. ეს უშუალოდ მიიღება იტო-დიობლინის ფორმულიდან. მართლაც, გავაგრძელოთ u ფუნქცია მთელს E_{n_1} სივრცეზე სიგლუვის შენარჩუნებით და დავწეროთ მისთვის იტო-დიობლინის ფორმულა (9) სახით. მაშინ, თუ შევცვლით t -ს τ -თი, მიღებული თანაფარდობის ორივე მხარეს მოვდებთ მათემატიკურ ლოდინს და ვისარგებლებთ ვალდის იგივეობით, ადვილად დავრწმუნდებით თეორემის სამართლიანობაში. $\square$

ამოცანა 19.1. იტო-დიობლინის ფორმულის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ დეტერმინისტული $f(t)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია „ნაწილობრივი ინტეგრების“ ფორმულა:

$$\int_0^t f(s)dw_s = f(t)w_t - \int_0^t f'(s)w_s ds.$$

20. იტო-დოვბლინის ფორმულის ზოგიერთი გამოყენება

ვიგულისხმობთ, რომ w_t ერთგანზომილებიანი ვინერის პროცესია, $t \in [0, T]$, $x \in (c, d) \subset (-1, 1)$ და განვიხილოთ პროცესი $\xi_t = x + w_t$. აღვნიშნოთ $\tau := \{t : \xi_t \notin (c, d)\}$. ჩვენ ქვემოთ ვნახავთ, რომ τ სასრულია ალბათობით ერთი (იხ. მაგალითი 20.1). ξ_t პროცესის მიერ $[0, T]$ ინტერვალზე (c, d) არეში გატარებული დრო იქნება

$$\lambda(t \in [0, T] : c < \xi_t < d) = \int_0^T \chi_{(c,d)}(\xi_t) dt.$$

ვიპოვოთ

$$E \int_0^\tau \chi_{(c,d)}(\xi_t) dt = ?$$

ავიღოთ რაიმე ფუნქცია $u \in C^2([-1, 1])$, ისეთი, რომ $u(-1) = u(1) = 0$ და ვისარგებლოთ 19.3 თეორემით. მივიღებთ, რომ

$$u(x) = Eu(w_\tau + x) - E \int_0^\tau \frac{1}{2} u''(x + w_s) ds.$$

წინასწარ ავიღოთ უწყვეტი f ფუნქცია და მისთვის დავთვალოთ

$$E \int_0^\tau f(x + w_t) dt,$$

$\Rightarrow$ ო. ფურთუხია $\Leftarrow$

ხოლო შემდეგ მახასიათებელ ფუნქციას მივუახლოვდეთ უწყვეტი ფუნქციებით. ამისათვის ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება $(1/2)u''(y) = -f(y)$ სასაზღვრო პირობებით $u(-1) = u(1) = 0$. ზოგად ამონახსნს ექნება სახე

$$u(y) = 2 \int_{-1}^y \int_r^1 f(z) dz dr + c_1 y + c_2.$$

სასაზღვრო პირობები მოგვცემს, რომ

$$c_2 - c_1 = 0 \quad \text{და} \quad 2 \int_{-1}^1 \int_r^1 f(z) dz dr + c_1 + c_2 = 0.$$

აქედან

$$c_1 = c_2 = - \int_{-1}^1 \int_r^1 f(z) dz dr$$

და, მაშასადამე,

$$\begin{aligned} u(x) &= 2 \int_{-1}^x \int_r^1 f(z) dz dr - (x+1) \int_{-1}^1 \int_r^1 f(z) dz dr = \\ &= 2 \int_{-1}^1 f(z)(z \wedge x + 1) dz - (x+1) \int_{-1}^1 f(z)(z+1) dz = \\ &= \int_{-1}^1 f(z)[2(z \wedge x + 1) - (x+1)(z+1)] dz = \\ &= \int_{-1}^1 f(z)\{[(z+1)(1-x)] \wedge [(1-z)(1+x)]\} dz. \end{aligned}$$

აღვნიშნოთ $g(x, z) := [(z+1)(1-x)] \wedge [(1-z)(1+x)]$, ცხადია, რომ ჩვენს შემთხვევაში $|g(x, z)| \leq 4$. თუ ახლა მახასიათებელ $\chi_{(c,d)}$ ფუნქციას მივუახლოვდებით უწყვეტი f_n ფუნქციებით, მა-

შინ მაჟორირებული კრებადობის შესახებ ლებეგის თეორემის თანახმად საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$E \int_{-1}^{\tau} \chi_{(c,d)}(x + w_t) dt = \int_{-1}^1 \chi_{(c,d)}(z) g(x, z) dz.$$

პენსაზღვრა 20.1. ვინერის პროცესის მიერ ნულში გატარებული **ლოკალური დრო** ეწოდება სიდიდეს

$$L_t(0) := P\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(w_s) ds.$$

გამოვთვალოთ $L_t(0)$. იტო-დიობლინის ფორმულის თანახმად C^2 კლასის ფუნქციებისათვის გვაქვს

$$u(w_t) = u(0) + \int_0^t \frac{1}{2} u''(w_s) ds + \int_0^t u'(w_s) dw_s.$$

შევარჩიოთ ისეთი u ფუნქცია, რომ

$$\frac{1}{2} u''(y) = \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(y), \quad u(0) = 0$$

(ისევე, როგორც ზემოთ, აქაც მახასიათებელ ფუნქციას ვუახლოვდებით უწყვეტი ფუნქციების მიმდევრობით).

ცხადია, რომ

$$u(x) = \begin{cases} -x + \varepsilon, & x < -\varepsilon; \\ \frac{1}{2\varepsilon} x^2, & -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon; \\ x - \varepsilon, & x > \varepsilon. \end{cases}$$

ცხადია აგრეთვე, რომ $u(x) \rightarrow |x|$, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$; $u'(x)$ თანაბრად შემოსაზღვრულია და $u'(x) \rightarrow \text{sign}(x)$, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$. ამიტომ ლოკალური დრო არსებობს და ტოლია

$$L_t(0) = |w_t| - \int_0^t \text{sign}(w_s) dw_s. \quad (1)$$

აქედან, კერძოდ, გვაქვს, რომ

$$\int_0^t \text{sign}(w_s) dw_s < |w_t|.$$

გადავწეროთ (1) თანაფარდობა შემდეგი სახით

$$|w_t| = \int_0^t \text{sign}(w_s) dw_s + L_t(0). \quad (2)$$

ამ ტოლობას **ტანაკას ფორმულა** ეწოდება. იგი წარმოადგენს იტო-დიობლინის ფორმულის ანალოგს $u(x) = |x|$ ფუნქციისათვის, რომელიც არ არის C^2 კლასიდან.

ქვემოთ ჩვენ შევჩერდებით იტო-დიობლინის ფორმულის კიდევ რამდენიმე გამოყენებაზე.

ავილოთ 19.1 განმარტებაში $n_1 = n$, σ იყოს ერთეულოვანი მატრიცა, ხოლო $b \equiv 0$. ე. ი. $\xi_t = \xi_0 + w_t$. მაშინ იტო-დიობლინის ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$u(\xi_0 + w_t) = u(\xi_0) + \int_0^t \frac{1}{2} \Delta u(\xi_0 + w_s) ds + \int_0^t u_x(\xi_0 + w_s) dw_s. \quad (3)$$

მაგალითი 20.1. ავილოთ R რადიუსიანი ბირთვი E_n სივრცეში, $\xi_0 = 0$. აღვნიშნოთ $\tau := \inf\{t : |w_t| \geq R\}$ და გამოვთვალოთ $E\tau$.

ამისათვის უნდა ვიპოვოთ ისეთი u ფუნქცია, რომ (3) ფორმულაში $1/2 \Delta u(\xi_0 + w_s) = 1$ და შემდეგ t -ს ნაცვლად ჩავსვათ τ . u ფუნქციის როლში ავილოთ $u(x) = 1/n(R^2 - |x|^2)$. მაშინ $1/2 \Delta u = -1$ და $\forall t$ გვაქვს

$$u(w_t) = \frac{1}{n} R^2 - t - \frac{2}{n} \int_0^t w_s dw_s .$$

ჩავსვათ t -ს ნაცვლად $\tau \wedge t$, მივიღებთ, რომ

$$u(w_{\tau \wedge t}) = \frac{1}{n} R^2 - \tau \wedge t - \frac{2}{n} \int_0^{\tau \wedge t} w_s dw_s .$$

აქ

$$E \int_0^{\tau \wedge t} (w_s)^2 ds \leq R^2 E(\tau \wedge t) \leq t R^2 < \infty .$$

ამიტომ თუ მოვდებთ ტოლობის ორივე მხარეს მათემატიკურ ლოდინს, ვალდის იგივეობის საფუძველზე, გვექნება

$$E(\tau \wedge t) = \frac{1}{n} R^2 - Eu(w_{\tau \wedge t}) . \quad (4)$$

აქედან, კერძოდ $E(\tau \wedge t) \leq 1/n R^2 \quad \forall t$ (ვინაიდან $u(w_{\tau \wedge t}) \geq 0$). ამიტომ მაჟორირებადი კრებადობის შესახებ თეორემის საფუძველზე, როცა $t \rightarrow \infty$, ვღებულობთ, რომ $E\tau < \infty$. თუკი ახლა (4) ტოლობაში $t \rightarrow \infty$ (ამ დროს $\tau \wedge t \rightarrow \tau$, ე. ი. $u(w_{\tau \wedge t}) \rightarrow u(w_\tau) = 0$, ვინაიდან w_τ იმყოფება ბირთვის საზღვარზე, სადაც u ფუნქცია ნულის ტოლია), მივიღებთ, რომ

$$E\tau = \frac{1}{n} R^2$$

(ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ($n=1$) – $E\tau = R^2$) ე. ი. ნებისმიერი ბირთვიდან ვინერის პროცესი გამოდის ალბათობით ერთი. □

მაგალითი 20.2. დავუშვათ, რომ w_t ნულიდან გამომავალი ვინერის პროცესია, ხოლო x_0 რაიმე წერტილია E_n სივრციდან. შემოვაველოთ მას ε -რადიუსიანი ბირთვი, $\varepsilon < |x_0|$ და ვიპოვოთ ალ-

ბათობა იმისა, რომ ნულიდან გამოსული ვინერის პროცესი მოხვდება ამ ბირთვში. ავიღოთ უფრო დიდი R რადიუსიანი ბირთვი ცენტრით x_0 ნერტილში, რომელიც მოიცავს ნულს $0 \in B(x_0, R)$ და გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ პატარა $B(x_0, \varepsilon)$ ბირთვის პირველი მიღწევის მომენტი ნაკლებია, ვიდრე დიდი $B(x_0, R)$ ბირთვიდან გასვლის მომენტი.

აღვნიშნოთ

$$\tau_R := \inf\{t \geq 0 : |w_t| \geq R\}, \quad \tau^\varepsilon := \inf\{t \geq 0 : |w_t - x_0| \leq \varepsilon\}.$$

მაშინ

$$\tau := \tau_R \wedge \tau^\varepsilon$$

იქნება $R := B(x_0, R)$, $B(x_0, \varepsilon)$ რგოლიდან გასვლის მომენტი.

თუ $u \in C^2$, $\tau < \infty$ და $E \int_0^\tau |\Delta u(w_s)| ds < \infty$, მაშინ თეორემა

19.2-ის ძალით გვექნება, რომ

$$u(0) = Eu(w_\tau) - \frac{1}{2} E \int_0^\tau \Delta u(w_s) ds.$$

შევარჩიოთ u ისე, რომ $\Delta u = 0$ R რგოლის შიგნით. გარდა ამისა, თუ u -ს მოვძებნით ისეთს, რომ

$$u|_{|x-x_0|=\varepsilon} = 1 \quad \text{და} \quad u|_{|x-x_0|=R} = 0,$$

მაშინ

$$Eu(w_\tau) = E\chi_{\{\tau^\varepsilon < \tau_R\}} = P\{\tau^\varepsilon < \tau_R\}.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ u ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე

$$u(x) = \begin{cases} (|x - x_0|^{-(n-2)} - R^{-(n-2)})A, & \text{თუ } n > 2, \\ & \text{სადაც } A = (\varepsilon^{-(n-2)} - R^{-(n-2)})^{-1}; \\ (\ln |x - x_0| - \ln R)A, & \text{თუ } n = 2, \\ & \text{სადაც } A = (\ln \varepsilon - \ln R)^{-1}; \\ (|x - x_0| - R)A, & \text{თუ } n = 1, \text{ სადაც } A = (\varepsilon - R)^{-1}. \end{cases}$$

გარდა ამისა, $P\{\tau^\varepsilon < \tau_R\} = Eu(w_\tau) = u(0)$, ხოლო

$$P\{\tau^\varepsilon < \infty\} = P\{\tau^\varepsilon < \lim_{R \rightarrow \infty} \tau_R\} = \lim_{R \rightarrow \infty} P\{\tau^\varepsilon < \tau_R\} = \lim_{R \rightarrow \infty} u(0)$$

(ვინაიდან სასრული დროის განმავლობაში უწყვეტი წირი არ შეიძლება გავიდეს ყველა ბირთვის გარეთ. მართლაც, თუ თანაფარდობაში $|w_{\tau_R} - x_0| = R$, როცა $R \rightarrow \infty$ τ_R მიისწრაფის სასრული სიდიდისაკენ, მაშინ იარსებებს ისეთი სასრული წერტილი y , რომ $|y - x_0| = \infty$, რაც შეუძლებელია), ამიტომ

$$P\{\tau^\varepsilon < \infty\} = \begin{cases} \left(\frac{\varepsilon}{|x_0|}\right)^{n-2}, & \text{როცა } n > 2; \\ 1, & \text{როცა } n \leq 2. \end{cases} \quad (5)$$

ე.ი. ვინერის პროცესი ერთის ტოლი ალბათობით მიაღწევს ნებისმიერი წერტილის მიდამოს ერთ- და ორგანზომილებიან სივრცეში. ამასთანავე, როცა $n = 2$, მაშინ

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |w_t| = \infty,$$

მაგრამ ზღვარი არ არსებობს, ხოლო როცა $n > 2$, მაშინ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |w_t| = \infty \mod(P). \quad \square \quad (6)$$

მაგალითი 20.3. ვიგულისხმობთ, რომ $n > 2$ და შევამოწმოთ (6) თანაფარდობა.

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

ავიღოთ რაიმე წერტილი $x_0 \in E_n$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < |x_0|$ და წინასწარ ვაჩვენოთ, რომ

$$\xi_t := |w_{t \wedge \tau^\varepsilon} - x_0|^{2-n}$$

შემოსაზღვრული მარტინგალია.

ცხადია, რომ $\xi_t \leq \varepsilon^{2-n}$. გამოვიყენოთ იტო-დიობლინის ფორმულა

$$u(x) = \begin{cases} |x - x_0|^{2-n}, & \text{თუ } |x - x_0| \geq \varepsilon; \\ u(x), & \text{თუ } |x - x_0| < \varepsilon \end{cases}$$

ფუნქციისათვის. სათანადო გაგლუვებისა და ზღვარზე გადასვლის შემდეგ გვექნება:

$$u(w_t) = u(0) + \int_0^t \frac{1}{2} \Delta u(w_s) ds + \int_0^t u_x(w_s) dw_s.$$

ავიღოთ $t = t \wedge \tau^\varepsilon$, მაშინ პირველი ინტეგრანდი ნული იქნება და ამიტომ გვაქვს

$$u(w_{t \wedge \tau^\varepsilon}) = u(0) + \int_0^t \chi_{\{s \leq \tau^\varepsilon\}} u_x(w_s) dw_s.$$

ე.ი. $\xi_t = u(w_{t \wedge \tau^\varepsilon})$ მარტინგალია და, მაშასადამე, ნებისმიერი x_0 წერტილისათვის არსებობს მისი ზღვარი. აქედან გამომდინარე, არსებობს ზღვარი $|w_{t \wedge \tau^\varepsilon}|$, როცა $t \rightarrow \infty$. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\begin{aligned} |x_0|^{2-n} &= E\xi_0 = E\xi_t = E \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = \\ &= E\left(\frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} |w_t - x_0|^{n-2}} \chi_{\{\tau^\varepsilon = \infty\}}\right) + E(\varepsilon^{2-n} \chi_{\{\tau^\varepsilon < \infty\}}) = \end{aligned} \quad (5)$$

$$\stackrel{(5)}{=} E\left(\frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} |w_t - x_0|^{n-2}} \chi_{\{\tau^\varepsilon = \infty\}}\right) + |x_0|^{2-n},$$

მაშასადამე,

$$E\left(\frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} |w_t - x_0|^{n-2}} \chi_{\{\tau^\varepsilon = \infty\}}\right) = 0,$$

ე. ი. $\{\tau^\varepsilon = \infty\} \subset \{\lim_{t \rightarrow \infty} |w_t| = \infty\}$.

ამიტომ

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} |w_t| = \infty\} \geq P\{\tau^\varepsilon = \infty\} \stackrel{(5)}{=} 1 - \left(\frac{\varepsilon}{|x_0|}\right)^{n-2} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

აქედან კი ვღებულობთ, რომ

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} |w_t| = \infty\} = 1. \quad \square$$

ვიგულისხმობთ, რომ $b \in S$ და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\rho_t(b) = \exp\left\{\int_0^t b_s dw_s - \frac{1}{2} \int_0^t |b_s|^2 ds\right\}.$$

პროცესი $\rho_t(b)$ ცნობილია **ექსპონენციალური მარტინგალის** სახელწოდებით. სამართლიანია შემდეგი:

ლემა 20.1. ა) $\rho_t(b)$ პროცესს გააჩნია სტოქასტური დიფერენციალი

$$d\rho_t(b) = b_t \rho_t(b) dw_t;$$

ბ) $\rho_t(b)$ სუპერმარტინგალია;

გ) თუ b შემოსაზღვრულია, მაშინ $\rho_t(b)$ მარტინგალია.

დამტკიცება.

ა) ეს უშუალო შედეგია იტო-დიობლინის ფორმულის.

ბ) შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : \int_0^t |b_s|^2 \rho_s(b)^2 ds \geq n\}.$$

ცხადია, რომ $\tau_n \rightarrow \infty$, როცა $n \rightarrow \infty$ და

$$\chi_{t \leq \{\tau_n\}} \rho_t(b) b_t \in H. \quad (7)$$

ა)-დან გამომდინარე, გვაქვს

$$\rho_t(b) = 1 + \int_0^t \rho_s(b) b_s dw_s.$$

ჩავსვათ აქ $t = t \wedge \tau_n$, მივიღებთ, რომ

$$\rho_{t \wedge \tau_n}(b) = 1 + \int_0^t \chi_{s \leq \{\tau_n\}} \rho_s(b) b_s dw_s.$$

ამიტომ, (7) თანაფარდობის ძალით, $\rho_{t \wedge \tau_n}(b)$ წარმოადგენს მარტინგალს. ე. ი. თუ $t_1 \geq t_2$, მაშინ

$$E[\rho_{t_1 \wedge \tau_n}(b) | F_{t_2}] = \rho_{t_2 \wedge \tau_n}(b) \rightarrow \rho_{t_2}(b), \quad n \rightarrow \infty,$$

საიდანაც ფატუს ლემის ძალით

$$E[\rho_{t_1}(b) | F_{t_2}] \leq \rho_{t_2}(b).$$

ე. ი. $\rho_t(b)$ სუპერმარტინგალია.

გ) იმისათვის, რომ

$$\rho_t(b) = 1 + \int_0^t \rho_s(b) b_s dw_s$$

იყოს მარტინგალი, საკმარისია, რომ

$$E \int_0^t \rho_s^2(b) b_s^2 ds < \infty.$$

მაგრამ, ვინაიდან b შემოსაზღვრულია, ამიტომ საკმარისია შესრულდეს პირობა

$$E \int_0^t \rho_s^2(b) ds < \infty.$$

ვიგულისხმობთ, რომ $|b| \leq K$, მაშინ, იმის გათვალისწინებით, რომ $E \rho_t(b) \leq E \rho_0(b) = 1$, გვაქვს:

$$\begin{aligned} E \int_0^t \rho_s^2(b) ds &= \int_0^t E \rho_s^2(b) ds = \int_0^t E \exp \left\{ 2 \int_0^s b_r dw_r - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^s |2b_r|^2 dr + \int_0^s |b_r|^2 dr \right\} dt \leq \\ &\leq \int_0^t \exp \{ K^2 t \} E \rho_s(2b) dt \leq \int_0^t \exp \{ K^2 t \} dt < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

შედეგი 20.1. თუ b შემოსაზღვრულია, მაშინ

$$E \exp \left\{ \int_0^t b_s dw_s \right\} < \infty.$$

დამტკიცება. ლემა 20.1-ის თანახმად გვაქვს

$$1 \geq E \exp \left\{ \int_0^t b_s dw_s - \frac{1}{2} \int_0^t |b_s|^2 ds \right\} \geq \exp \left\{ -\frac{1}{2} K^2 t \right\} E \exp \left\{ \int_0^t b_s dw_s \right\}. \quad \square$$

ლემა 20.2. თუ b კომპლექსურმნიშვნელობიანი, შემოსაზღვრული პროცესია, მაშინ $\rho_t(b)$ აგრეთვე მარტინგალია. კერძოდ, $E \rho_T(b) = 1$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში $\rho_i(b)$ -ს განმარტებაში $|b|^2$ იცვლება სკალარული კვადრატით $-(b)^2$. შესაბამისმებელია, რომ თუ $t_2 > t_1$ და $A \in F_{t_1}$, მაშინ $E\chi_A \rho_{t_2}(b) = E\chi_A \rho_{t_1}(b)$. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ b^1 და b^2 ნამდვილმნიშვნელობიანებია, ხოლო Z კომპლექსური რიცხვია, მაშინ

$$\begin{aligned} E\chi_A \exp\left\{\int_0^{t_2} (b_s^1 + zb_s^2)dw_s - \frac{1}{2}\int_0^{t_2} (b_s^1 + zb_s^2)^2 ds\right\} = \\ = E\chi_A \exp\left\{\int_0^{t_1} (b_s^1 + zb_s^2)dw_s - \frac{1}{2}\int_0^{t_1} (b_s^1 + zb_s^2)^2 ds\right\} \end{aligned} \quad (8)$$

და, შემდეგ ავიღოთ $Z = i$. მაგრამ, ვინაიდან, (8) დამტკიცებულია $\forall Z \in R^1$, ამიტომ საკმარისია, რომ ამ თანაფარდობის ორივე მხარე იყოს ანალიზური. ე. ი. უნდა გვექონდეს უწყვეტობა Z -ის მიმართ და ინტეგრალი ნებისმიერი ჩაკეტილი კონტურის მიმართ იყოს ნული. ამისათვის საკმარისია მოიძებნოს ისეთი შემთხვევითი სიდიდე $\xi(R)$, რომ $E\xi(R) < \infty$ და

$$\left| \exp\left\{\int_0^t (b_s^1 + zb_s^2)dw_s - \frac{1}{2}\int_0^t (b_s^1 + zb_s^2)^2 ds\right\} \right| \leq \xi(R), \text{ როცა } |z| \leq R$$

(მართლაც, აქედან მაჟორირებადი კრებადობის შესახებ თეორემის ძალით ვღებულობთ უწყვეტობას Z -ით, ხოლო რადგანაც ფუბინის თეორემის თანახმად შეიძლება მათემატიკური ლოდინისა და ჩაკეტილი კონტურის მიმართ ინტეგრალების გადასმა, ამიტომ ინტეგრალი ნებისმიერი ჩაკეტილი კონტურის მიმართ იქნება ნული, ვინაიდან $\exp$ ანალიზური ფუნქციაა).

b^1 და b^2 პროცესების შემოსაზღვრულობის გამო საკმარისია შეფასდეს

$$\left| \exp\left\{\int_0^t (b_s^1 + zb_s^2)dw_s\right\} \right|.$$

თუ ვისარგებლოთ უტოლობით

$$e^\alpha \leq e^\alpha + e^{-\alpha} \leq e^\beta + e^{-\beta}, \text{ როცა } \alpha \leq \beta$$

მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} |\exp\{\int_0^t (b_s^1 + zb_s^2)dw_s\}| &= \exp\{\int_0^t (b_s^1 + b_s^2 \operatorname{Re} z)dw_s\} = \\ &= \exp\{\int_0^t b_s^1 dw_s\} \exp\{\operatorname{Re} z \int_0^t b_s^2 dw_s\} \leq \exp\{\int_0^t b_s^1 dw_s\} (\exp\{R \int_0^t b_s^2 dw_s\} + \\ &+ \exp\{-R \int_0^t b_s^2 dw_s\}) \equiv \xi(R). \quad \square \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ $\rho_t(b)$ სუპერმარტინგალი b პროცესზე უფრო ნაკლები მოთხოვნების დროსაც წარმოადგენს მარტინგალს. ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ შესაბამის შედეგს დამტკიცების გარეშე:

თეორემა 20.1 (ნოვიკოვი) (იხ. [42], თეორემა 6.1). თუ $b \in S$ და აკმაყოფილებს პირობას

$$E \exp\{\frac{1}{2} \int_0^T b_s^2 ds\} < \infty,$$

მაშინ $\rho_t(b)$ სუპერმარტინგალი წარმოადგენს მარტინგალს და, კერძოდ, $E\rho_t(b) = 1$, $t \leq T$.

ამოცანა 20.1. გამოთვალეთ ექსპონენციალური მარტინგალის n -ური რიგის მომენტი.

ამოცანა 20.2. ფიქსირებული t -სათვის და S_0 , μ და σ მუდმივებისათვის იპოვეთ

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma w_t}$$

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია და განაწილების სიმკვრივე.

თეორემა 20.2. დავუშვათ, რომ w_t n -განზომილებიანი ვინერის პროცესია (Ω, F, P) ალბათურ სივრცეზე $\{F_t\}$ ნაკადის მიმართ ($t \in [0, T]$, $T \in (0, \infty)$), ხოლო b – ნამდვილი, შემოსაზღვრული პროცესი S კლასიდან. (Ω, F) ზომად სივრცეზე შემოვიღოთ ზომა $\bar{P}(d\omega) := \rho_T(b)(\omega)P(d\omega)$. მაშინ

$$(w_t - \int_0^t b_s dw_s, F_t), \quad t \leq T$$

ვინერის პროცესია $(\Omega, F, \bar{P})$ ალბათურ სივრცეზე.

დამტკიცება. უწინარეს ყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ $\bar{P}$ ალბათური ზომაა, ვინაიდან ლემა 20.1-ის თანახმად

$$\int_{\Omega} \rho_T(b)(\omega) P(d\omega) = E \rho_T(b) = 1.$$

აღვნიშნოთ

$$\xi_t := w_t - \int_0^t b_s dw_s.$$

ცხადია, რომ ξ_t უწყვეტტრაექტორიებიანი პროცესია. გამოვთვალოთ მისი მახასიათებელი ფუნქცია. ამ მიზნით $[0, T]$ ინტერვალის ნებისმიერი $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ დაყოფისა და ნებისმიერი $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in R^n$ ვექტორისათვის ავაგოთ საფეხურა ფუნქცია

$$\lambda_t := \sum_{j=0}^{n-1} i \lambda_j \chi_{[t_j, t_{j+1})}(t).$$

მაშინ თუ აღვნიშნავთ $\bar{E}$ სიმბოლოთი მათემატიკურ ლოდინს $\bar{P}$ ალბათური ზომის მიმართ, გვექნება

$$\begin{aligned} \bar{E} \exp\{i \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j (\xi_{t_{j+1}} - \xi_{t_j})\} &= \\ &= E \exp\{i \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j (\xi_{t_{j+1}} - \xi_{t_j}) + \int_0^T b_s dw_s - \frac{1}{2} \int_0^T |b_s|^2 ds\} = \\ &= E \exp\{\int_0^T (b_s + \lambda_s) dw_s - \frac{1}{2} \int_0^T (b_s + \lambda_s)^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds\} = \\ &= \exp\{\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds\} = \exp\{-\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j^2 (t_{j+1} - t_j)\}. \end{aligned}$$

ე. ი. ξ_t ვინერის პროცესია. $\square$

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 20.2 წარმოადგენს კერძო შემთხვევას გირსანოვის თეორემის, რომელსაც ჩვენ მოვიყვანთ დამტკიცების გარეშე.

თეორემა 20.3 (გირსანოვი) (იხ. [42], თეორემა 6.2). თუ $E\rho_T(b) = 1$, მაშინ შემთხვევითი პროცესი

$$w_t = w_t - \int_0^t b_s ds$$

წარმოადგენს ვინერის პროცესს (F_t) ნაკადისა და $\tilde{P}$ ($d\tilde{P} = \rho_T(b)dP$) ალბათური ზომის მიმართ.

დავუშვათ, რომ (Ω, F, P) სრული ალბათური სივრცეა, ხოლო (w_t, F_t^w) , $t \leq T$ – ვინერის პროცესი. ვიგულისხმობთ, რომ F_t^w , $t \leq T$, გასრულებულია ნული ზომის სიმრავლეებით F -დან. მაშინ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 20.4 (კლარკი). თუ $\xi \in F_T^w$ -ზომადი შემთხვევითი სიდიდეა, ისეთი, რომ $E\xi = 0$ და $E\xi^2 < \infty$, მაშინ მოიძებნება ისეთი F_t^w -შეთანხმებული, $\alpha \in L_2([0, T] \times \Omega)$ პროცესი, რომ P -თ.ყ. ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$\xi = \int_0^T \alpha_s(\omega) dw_s. \quad (9)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ყველა ფუნქციონალი, რომელიც წარმოიდგინება (9) სახით

$$N := \left\{ \xi : \xi = \int_0^T \alpha_s(\omega) dw_s, \quad E \int_0^T \alpha_s^2 ds < \infty \right\}.$$

შემოვიღოთ, აგრეთვე, აღნიშვნა

$$L_2 := L_2(\Omega, F^w, P) \cap (E \cdot = 0).$$

მაშინ ცხადია, რომ $N \subset L_2$, ვინაიდან

$$E \left(\int_0^T \alpha_s(\omega) dw_s \right)^2 = E \int_0^T \alpha_s^2 ds < \infty.$$

ვაჩვენოთ, რომ N ჩაკეტილია. ავიღოთ $\xi_n \in N$ ისეთი, რომ

$$\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi, \quad n \rightarrow \infty,$$

და ვაჩვენოთ, რომ ξ წარმოიდგინება (9) სახით. გვაქვს, რომ

$$E \left(\int_0^T \alpha_s^n(\omega) dw_s - \xi \right)^2 \rightarrow 0, \quad \text{როცა } n \rightarrow \infty.$$

მაშასადამე, გვექნება ფუნდამენტურობაც

$$\begin{aligned} E \left| \int_0^T \alpha_s^n(\omega) dw_s - \int_0^T \alpha_s^m(\omega) dw_s \right|^2 = \\ = E \left| \int_0^T (\alpha_s^n - \alpha_s^m)^2 ds \right| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

ამიტომ $L_2([0, T] \times \Omega)$ და $L_2(\Omega)$ სივრცეების სისრულის გამო იარსებებს ისეთი $\alpha \in L_2([0, T] \times \Omega)$ პროცესი, რომ

$$\alpha^n \xrightarrow{L_2([0, T] \times \Omega)} \alpha, \quad n \rightarrow \infty$$

და $\xi = \int_0^T \alpha_s(\omega) dw_s$. ე. ი. N წარმოადგენს L_2 სივრცის ჩაკეტილ წრფივ ქვესივრცეს.

თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ $N = L_2$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. დავუშვათ, რომ მისი ორთოგონალური დამატება არა ცარიელია: $N^\perp \neq \emptyset$. ვაჩვენებთ, რომ ეს მიგვიყვანს წინააღმდეგობამდე. ავიღოთ $\xi \neq 0$, $\xi \in N^\perp$ და ვაჩვენებთ, რომ $\xi = 0$. ამ შემთხვევაში $\forall \eta \in N$: სკალარული ნამრავლი $(\xi, \eta) = 0$ ანუ

$$E \xi \int_0^T \alpha_s(\omega) dw_s = 0, \quad \forall \alpha \in L_2([0, T] \times \Omega). \quad (10)$$

ავიღოთ ნებისმიერი შემოსაზღვრული პროცესი b , ავავოთ მისი შესაბამისი ექსპონენციალური მარტინგალი $\rho_t(b)$ და α -ს როლში ავიღოთ $\alpha_s = \rho_s(b)b_s$. მაშინ ვინაიდან

$$\rho_T(b) = 1 + \int_0^T \rho_s(b)b_s dw_s = 1 + \int_0^T \alpha_s(\omega) dw_s,$$

⇒ ო.ფურთუხია ⇐

ამიტომ (10) თანაფარდობის ძალით გვაქვს, რომ $E\xi(\rho_T(b)-1)=0$

ანუ $E\xi\rho_T(b)=0$ (ვინაიდან $E\xi=0$)

ე. ი. ნებისმიერი შემოსაზღვრული b პროცესისათვის:

$$E\xi \exp\left\{\int_0^T b_s dw_s - \frac{1}{2} \int_0^T |b_s|^2 ds\right\} = 0.$$

ვიგულისხმობთ, რომ b არაშემთხვევითია. მაშინ უკანასკნელი თანაფარდობიდან

$$E[\xi \exp\{\int_0^T b_s dw_s\}] = 0.$$

თუ აქ ავიღებთ, რომ $\xi = f(w_T)$ და $b = ic$ მივიღებთ, რომ

$$E\{f(w_T) \exp\{\int_0^T ic dw_s\}\} = E[f(w_T) \exp\{icw_T\}] = 0.$$

ე.ი.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{icx} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx = 0, \quad \forall c \in R^1.$$

აქედან გამომდინარე, $f(x)=0$ თ. ყ. ლებეგის ზომით (შეიძლება მოვექცეულიყავით შემდეგნაირად

$$\begin{aligned} E[\xi \exp\{icw_T\}] = 0 &\Rightarrow E(\exp\{icw_T\} E[\xi | w_T]) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E[\xi | w_T] = 0). \end{aligned}$$

შემდეგ ავიღოთ $\xi = f(w_{t_1}, w_{t_2})$ და $b_s = ic_1$, თუ $0 \leq s < t_1$; $b_s = ic_2$, თუ $t_1 \leq s < t_2$, ხოლო სხვაგან $b_s = 0$. მაშინ მივიღებთ

$$\begin{aligned} E[f(w_{t_1}, w_{t_2}) \exp\{\int_0^T b_s dw_s\}] = \\ = E[f(w_{t_1}, w_{t_2}) \exp\{ic_1 w_{t_1} + ic_2(w_{t_2} - w_{t_1})\}] = 0, \end{aligned}$$

საიდანაც, ისევე როგორც ზემოთ, ვნახავთ, რომ $E[\xi | w_{t_1}, w_{t_2}] = 0$ და ა. შ. ნებისმიერი n -ისათვის გვექნება $E[\xi | w_{t_1}, \dots, w_{t_n}] = 0$. აქედან, ლევის თეორემის ძალით (იხ. თეორემა 7.4), ვღებულობთ, რომ

$$E[\xi | \sigma(w_s, s \leq T)] = 0$$

და ვინაიდან $\xi = F_T^w$ -ზომადია, ამიტომ გვაქვს

$$\xi = E[\xi | F_T^w] = 0. \quad \square$$

შენიშვნა 20.1. კლარკის თეორემა გირსანოვის ზომის შეცვლის თეორემასთან ერთად ფუნდამენტურ როლს ასრულებს თანამედროვე ფინანსურ მათემატიკაში. კერძოდ, მისი საშუალებით ხერხდება ევროპული ტიპის ოფციონებში ოპტიმალური სტრატეგიების აგება და ჰეჯირება.

დავუშვათ, რომ აქციის ფასის ევოლუცია აღინერება ე. წ. **გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის** პროცესით

$$S_t = S_0 \exp\{\mu t + \sigma w_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t\},$$

სადაც w_t ვინერის პროცესია ძირითადი P ზომის მიმართ.

გასაგებია, რომ აქციის ფასის პროცესი საზოგადოდ არ არის მარტინგალი (ის მარტინგალი იქნება მხოლოდ მაშინ, როცა $\mu = 0$).

ავიღოთ $b_t \equiv \frac{\mu - r}{\sigma}$ (სადაც r საპროცენტო განაკვეთია), შე-

მოვიღოთ ექსპონენციალური მარტინგალი $\rho_t(-b)$ და გადავიღეთ ახალ ზომაზე

$$P_0(A) := E[I_A \rho_T(-b)].$$

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

გირსანოვის თეორემის თანახმად

$$\bar{w}_t := w_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

იქნება ვინერის პროცესი ახალი P_0 ზომის მიმართ.

ადვილი დასანახია, რომ S_t შეიძლება გადაინეროს შემდეგი სახით

$$S_t = S_0 \exp\left\{rt + \sigma \bar{w}_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t\right\}.$$

განვიხილოთ აქციის ფასის ე. წ. დისკონტირებულ პროცესი:

$$\bar{S}_t := \exp\{-rt\} S_t = S_0 \exp\left\{\sigma \bar{w}_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t\right\}.$$

ცხადია, რომ ის უკვე მარტინგალია ახალი P_0 ზომის მიმართ.

მაგალითი 20.4. დავუშვათ, რომ (Ω, F, P) ალბათურ სივრცეზე მოცემულია w_t , $t \in [0, 1]$ ვინერის პროცესი. გამოვთვალოთ

$$P\{\max_{t \leq 1} (w_t + t) \geq 1\}.$$

შემოვიღოთ ახალი ზომა

$$\bar{P}(d\omega) = \exp\left\{-w_1 - \frac{1}{2}\right\} P(d\omega),$$

მაშინ გირსანოვის თეორემის ძალით $\bar{w}_t := w_t + t$ იქნება ვინერის პროცესი $\bar{P}$ -ს მიმართ. ამიტომ გვაქვს

$$\begin{aligned}
 P\{\max_{t \leq 1} (w_t + t) \geq 1\} &= \int_{\{\max_{t \leq 1} (w_t + t) \geq 1\}} P(d\omega) = \\
 &= \int_{\{\max_{t \leq 1} (w_t + t) \geq 1\}} \exp\{(w_1 + 1) - \frac{1}{2}\} \bar{P}(d\omega) = \\
 &= \bar{E} \chi_{\{\max_{t \leq 1} \bar{w}_t \geq 1\}} \exp\{\bar{w}_1 - \frac{1}{2}\} = E \chi_{\{\max_{t \leq 1} w_t \geq 1\}} \exp\{w_1 - \frac{1}{2}\},
 \end{aligned}$$

ვინაიდან $\bar{w}_t$ -სა და w_t -ს ერთი და იგივე განაწილებები გააჩნიათ.

ვიპოვოთ ახლა $\max_{t \leq 1} w_t$ -სა და w_1 -ის ერთობლივი განაწილება.

არეკვლის პრინციპიდან გამომდინარე, გვექნება: თუ $x < 1$, მაშინ

$$P\{\max_{t \leq 1} w_t \geq 1, w_1 \leq x\} = P\{\max_{t \leq 1} w_t \geq 1, w_1 \geq 2 - x\} = P\{w_1 \geq 2 - x\}.$$

თუკი $x \geq 1$, მაშინ

$$\begin{aligned}
 P\{\max_{t \leq 1} w_t \geq 1, w_1 \leq x\} &= P\{\max_{t \leq 1} w_t \geq 1\} - \\
 - P\{w_1 \geq x, \max_{t \leq 1} w_t \geq 1\} &= 2P\{w_1 \geq 1\} - P\{w_1 \geq x\}.
 \end{aligned}$$

ამიტომ საბოლოოდ გვაქვს

$$\begin{aligned}
 P\{\max_{t \leq 1} (w_t + t) \geq 1\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^1 \exp\{x - \frac{1}{2}\} \exp\{-\frac{(x-2)^2}{2}\} dx - \\
 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{\infty} \exp\{x - \frac{1}{2}\} \exp\{-x^2\} dx &= \\
 = \frac{\exp\{-1/2\}}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{\infty} (\exp\{x\} - \exp\{2-x\}) \exp\{-\frac{x^2}{2}\} dx. \quad \square
 \end{aligned}$$

21. სტოქასტური დიფერენციალური განტოლება

დავუშვათ, რომ x_t სითხეში მოთავსებული საკმარისად მცირე ნაწილაკის კოორდინატაა დროის t მომენტში. თუ უგულებელვყოფთ ნაწილაკის ინერციას, მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ნაწილაკის გადაადგილება შედგება ორი კომპონენტისაგან: „გასაშუალოებული“ წანაცვლებისაგან, რომელიც გამოწვეულია სითხის მაკროსკოპული მოძრაობის სიჩქარით და წანაცვლების ფლუქტუაციისაგან, რომელიც გამოწვეულია სითხის მოლეკულების სითხური მოძრაობის ქაოსური ხასიათით.

ვთქვათ, x წერტილში სითხის მაკროსკოპული მოძრაობის სიჩქარე დროის t მომენტში არის $b(t, x)$. ფლუქტუაციური წანაცვლება წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის განაწილება დამოკიდებულია ნაწილაკის x მდებარეობაზე, დროის t მომენტზე, რომელშიც განიხილება გადაადგილება და Δt სიდიდეზე – დროის შუალედის სიგრძეზე, რომელზეც განიხილება გადაადგილება, ამასთანავე ამ გადაადგილების საშუალო მნიშვნელობა ჩავთვალოთ ნულის ტოლად. მაშინ ნაწილაკის გადაადგილება შეიძლება ჩაინეროს შემდეგი მიახლოებითი თანაფარდობით:

$$x_{t+\Delta t} - x_t \approx b(t, x_t)\Delta t + \xi_{t, x_t, \Delta t}, \quad E\xi_{t, x_t, \Delta t} = 0$$

(თუ $b(t, x_t) = 0$, ხოლო $\xi_{t, x_t, \Delta t}$ დამოუკიდებელია x -საგან, მაშინ გვაქვს ბროუნის მოძრაობა ანუ ვინერის პროცესი).

რადგანაც, t და x -ის მცირე ცვლილებისას ბუნებრივია ვიგულისხმოთ, რომ გარემოს თვისებები მცირედ იცვლება, ამიტომ შეიძლება ჩაითვალოს, რომ პროცესი ერთგვაროვანია, ანუ შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ

$$\xi_{t, x_t, \Delta t} = \sigma(t, x)\xi_{t, \Delta t},$$

სადაც $\sigma(t, x)$ ახასიათებს გარემოს თვისებებს x წერტილში დროის t მომენტში, ხოლო $\xi_{t, \Delta t}$ გადაადგილების სიდიდეა, რომე-

ლიც მიიღებოდა ერთგვაროვან შემთხვევაში იმ პირობით, რომ $\sigma(t, x) = 1$. ამრიგად, $\xi_{t, \Delta t}$ ვინერის პროცესის ნაზრდის ტოლი უნდა იყოს. მაშასადამე,

$$x_{t+\Delta t} - x_t \approx b(t, x_t)\Delta t + \sigma(t, x_t)[w_{t+\Delta t} - w_t].$$

იმისათვის, რომ უკანასკნელი ფორმულა გახდეს ზუსტი, საჭიროა, როგორც ეს ყოველთვის კეთდება მათემატიკურ ანალიზში, ნაზრდები შეიცვალოს დიფერენციალებით. ამ შეცვლის შემდეგ x_t -სათვის მიიღება **სტოქასტური დიფერენციალური განტოლება**:

$$dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dw_t. \quad (1)$$

სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისა და „ამონახსნის ერთადერთობაში“ გარკვეული პერიოდის განმავლობაში შემთხვევით პროცესთა თეორიის სპეციალისტები დებდნენ სხვადასხვა შინაარსს, რაც ხშირად იწვევდა გაუგებრობასა და შეცდომებს. ამ სიტუაციიდან გარკვეულ გამოსავალს წარმოადგენდა ისეთი ცნებების შემოტანა, როგორიცაა: „ძლიერი ამონახსნი“ და „სუსტი ამონახსნი“, და აგრეთვე „ძლიერი ერთადერთობა“ და „სუსტი ერთადერთობა“.

განსაზღვრა 21.1 (ძლიერი ამონახსნი) მოცემულია ალბათური სივრცე (Ω, F, P) , მასზე განსაზღვრული ვინერის პროცესი (w_t, F_t^w) , $t \in [0, T]$ და ზომადი ფუნქციები $b, \sigma : [0, T] \times R^1 \rightarrow R^1$. საჭიროა აიგოს ისეთი პროცესი x_t , რომელიც $\forall t$ ზომადია F_t^w σ -ალგებრის მიმართ და ალბათობით ერთი ყველა t -სათვის, $t \in [0, T]$, ერთდროულად სრულდება ტოლობა

$$x_t = x_0 + \int_0^t b(s, x_s)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s)dw_s.$$

მაშინ პროცესთა წყვილს $\{(x_t, w_t), F_t^w\}$ ეწოდება (1) სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების $(x_0$ საწყისი პირობით) *ძლიერი ამონახსნი*.

ბანსაზღვრა 21.2 (სუსტი ამონახსნი). მოცემულია მხოლოდ ფუნქციები $b(t, x)$ და $\sigma(t, x)$. საჭიროა აიგოს ალბათური სივრცე (Ω, F, P) , F -ის ქვე- σ -ალგებრათა ზრდადი ოჯახი F_t , $t \in [0, T]$, და პროცესთა ისეთი წყვილი $\{(x_t, w_t), F_t\}$, რომ (w_t, F_t) იყოს ვინერის პროცესი და ალბათობით ერთი სრულდებოდეს (3) თანაფარდობა $\forall t \in [0, T]$ ერთდროულად. მაშინ შემთხვევით პროცესთა წყვილს $\{(x_t, w_t), F_t\}$ ეწოდება (1) სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების *სუსტი ამონახსნი*.

შევნიშნოთ, რომ ფორმალური განსხვავება ზემოთ მოყვანილ განმარტებებს შორის მდგომარეობს შემდეგში:

ა) ძლიერი და სუსტი ამონახსნი წარმოადგენს ორი სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნას: პირველ შემთხვევაში ასაგებია მხოლოდ x_t (სხვა ყველაფერი მოცემულია), ხოლო მეორე შემთხვევაში ასაგებია Ω , F , F_t , P , w_t და x_t ;

ბ) თუ (x_t, w_t) სუსტი ამონახსნია, მაშინ x_t არაა აუცილებელი იყოს ზომადი F_t^w -ს მიმართ. სიმარტივისათვის, ზოგჯერ, ჩვენ ამონახსნს ვუწოდებთ არა შემთხვევით პროცესთა წყვილს (x_t, w_t) , არამედ თვითონ x_t პროცესს. გარდა ამისა, სუსტი ამონახსნის ნაცვლად, ვიხმართ უბრალოდ ამონახსნს.

ბანსაზღვრა 21.3 (ძლიერი ერთადერთობა). თუ (1) განტოლების ნებისმიერი ორი ამონახსნისათვის (x'_t, w'_t) და (x''_t, w''_t) , რომლებიც მოცემულია ერთსა და იმავე ალბათურ სივრცეზე, იქიდან, რომ $x'_0 = x''_0$ და $w_t \equiv w'_t$ (P -თ. ყ.) გამოდის, რომ

$$P\{\sup_{t \in [0, T]} |x'_t - x''_t| > 0\} = 0,$$

მაშინ ამბობენ, რომ (1) განტოლების ამონახსნი *ერთადერთია ძლიერი აზრით*, ანუ *ერთადერთია ტრაექტორიულად*.

ბანსაზღვრა 21.4 (სუსტი ერთადერთობა). თუ (1) განტოლების ნებისმიერი ორი ამონახსნისათვის (x'_t, w'_t) და (x''_t, w''_t) პრო-

ცესთა ამ წყვილების ყველა სასრულგანზომილებიანი განაწილება ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ამბობენ, რომ (1) განტოლების ამოხსნა ერთადერთია სუსტი აზრით, ანუ ერთადერთია ზომის აზრით.

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ სუსტი ამონახსნის აგების ტიპურ მეთოდს:

მაგალითი 21.1. ავაგოთ ამონახსნი შემდეგი განტოლების

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t^t)dt + dw_t, \\ x_0 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

სადაც $b(t, x_0^t)$ შემოსაზღვრული არანიმსწრები (ე. ი. F_t^x -ზომადი $\forall t$) ფუნქციონალია.

ავიღოთ რაიმე ალბათური სივრცე (Ω, F, P) და მასზე განსაზღვრული ვინერის პროცესი ξ_t . განვიხილოთ ახალი პროცესი

$$\eta_t = \xi_t - \int_0^t b(s, \xi_0^s)ds.$$

გირსანოვის თეორემის თანახმად η_t აგრეთვე ვინერის პროცესია, ოღონდ ახალი $\tilde{P}$ ზომის მიმართ, რომელიც აბსოლუტურად უწყვეტია გამოსავალი P ზომის მიმართ შემდეგი რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულობით

$$\exp\left\{\int_0^T b(t, \xi_0^t)d\xi_t - \frac{1}{2}\int_0^T [b(t, \xi_0^t)]^2 dt\right\}.$$

გადავიდეთ ამ ახალ $\tilde{P}$ ზომაზე. მაშინ ვლევულობთ, რომ: η_t ვინერის პროცესია და

$$\xi_t = \int_0^t b(s, \xi_0^s)ds + \eta_t.$$

ე. ი. თუ აღვნიშნავთ $x_t := \xi_t$ და $w_t := \eta_t$, მაშინ მივიღებთ, რომ (x_t, w_t) წარმოადგენს (2) განტოლების ამონახსნს. $\square$

მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ ერთი და იგივე (ის, რომელიც თავიდან ვინერისაა) პროცესი ξ_t შეიძლება გამოდგეს (4) განტოლების ამონახსნად სხვადასხვა (t, x_t') ფუნქციონალის შემთხვევაში, ამასთანავე იცვლება მხოლოდ ზომა $\tilde{P}$ და ვინერის პროცესი η_t . ამრიგად, თავიდან იგება საძიებელი პროცესი X_t , ხოლო შემდეგ მისთვის შეირჩევა შესაბამისი ზომა $\tilde{P}$ და შესაბამისი ვინერის პროცესი W_t (შეირჩევა, იმის ნაცვლად, რომ თავიდანვე მოიცეს)

როგორც ვხედავთ, ერთი ვინერის პროცესისათვის (იმისათვის, რომელიც ჩვენ ავაგეთ) ამონახსნი არსებობს, ამიტომ ბუნებრივად იბადება კითხვა: თუკი ჩვენ წინასწარ მოგვცემენ სხვა ვინერის პროცესს, შეიძლება თუ არა მოხდეს ისე, რომ მის მიმართ ამონახსნი არ არსებობდეს? რითი შეიძლება განსხვავდებოდნენ ერთმანეთისაგან ეს ორი ვინერის პროცესი? ჯერჯერობით ჩვენ ამ კითხვებზე პასუხის გაცემა არ შეგვიძლია. შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ იმისათვის, რომ როგორღაც ავაგოთ X_t პროცესი W_t ვინერის პროცესის საშუალებით, საჭიროა, რომ X_t გამოისახებოდეს W_t -თი ზომადი ფუნქციის საშუალებით, მაგრამ, სწორედ ამას არ იძლევა სუსტი ამონახსნი.

შევნიშნოთ, რომ ეს მაგალითი საინტერესოა იმიტაც, რომ, როგორც ცნობილია, ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში განტოლებას

$$dx_t = \alpha(t, x_t)dt$$

არა ნებისმიერი α -ს შემთხვევაში გააჩნია ამონახსნი, მაშინ როდესაც განტოლებას, რომელიც მიიღება სტოქასტური წევრის დამატებით (იხ. (2)), უკვე გააჩნია ამონახსნი.

შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ნამდვილად არსებობს ისეთი სუსტი ამონახსნი, რომელიც არ არის ძლიერი და, რომ ზომით ერთადერთობისგან არ გამომდინარეობს ტრაექტორიული ერთადერთობა.

მაგალითი 21. 2 (ტანაკა). განვიხილოთ განტოლება

$$\begin{cases} dx_t = \sigma(x_t)dw_t, \\ x_0 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

სადაც

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \geq 0, \\ -1, & \text{თუ } x < 0 \end{cases}$$

(შევნიშნოთ, რომ $\sigma^2(x) \equiv 1$).

ა) სუსტი ერთადერთობა. მარტინგალი

$$x_t = \int_0^t \sigma(x_s)dw_s$$

წარმოადგენს ვინერის პროცესს ახალი

$$\tau_t = \int_0^t \sigma^2(x_s)ds = t$$

დროის მიმართ (იხ. §2.5 [16]), რომელიც ჩვენს შემთხვევაში ემთხვევა ძველ დროს. მაშასადამე, ნებისმიერ x_t ამონახსნს გააჩნია ერთი და იგივე (ვინერის) სასრულგანზომილებიანი განაწილება.

ბ) სუსტი ამონახსნის არსებობა. ავიღოთ x_t -ს როლში ნებისმიერი ვინერის პროცესი და ავაგოთ

$$\tilde{w}_t = \int_0^t \sigma(x_s)dx_s.$$

პროცესი $\tilde{w}_t$ აგრეთვე ვინერისაა (შეიძლება გაკეთდეს ისეთივე დროის შეცვლა, როგორც წინა პუნქტში), ამასთანავე

$$d\tilde{w}_t = \sigma(x_t)dx_t,$$

საიდანაც გვაქვს, რომ:

$$\sigma(x_t) d\tilde{w}_t = \sigma(x_t) \sigma(x_t) dx_t = dx_t.$$

ე. ი. $(x_t, \tilde{w}_t)$ არის (3) განტოლების სუსტი ამონახსნი.

გ) ძლიერი ერთადერთობის არარსებობა. $(x_t, \tilde{w}_t)$ ამონახსნთან ერთად (3) განტოლებას ყოველთვის გააჩნია კიდევ ერთი ამონახსნი მაინც, კერძოდ $(-x_t, \tilde{w}_t)$.

დ) ძლიერი ამონახსნის არარსებობა. ვაჩვენოთ, რომ (3) განტოლების არც ერთი ამონახსნი x_t არ არის ძლიერი ამონახსნი, ე. ი. x_t არ არის ზომადი F_t^w σ -ალგებრის მიმართ. ამ მიზნით, განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე θ_t , რომელიც წარმოადგენს x_t პროცესის მიერ ნულში გატარებულ ლოკალურ დროს. ვინაიდან x_t ვინერის პროცესია, ამიტომ θ_t წარმოიდგინება შემდეგი სახით (იხ. [16]):

$$\theta_t = x_t^+ - \int_0^t \chi_{[0,\infty)}(x_s) dx_s$$

(აქ და ქვემოთ $x^+ = \max(x, 0)$, $x_- = -\min(x, 0)$).

სიმეტრიის ძალით

$$\theta_t = x_t^- + \int_0^t \chi_{(-\infty, 0]}(x_s) dx_s.$$

უკანასკნელი ორი ტოლობის შეკრებით, მივიღებთ, რომ

$$2\theta_t = |x_t| - \int_0^t \text{sign} x_s dx_s = |x_t| - \int_0^t \text{sign} x_s \sigma(x_s) dw_s = |x_t| - w_t,$$

საიდანაც, ლოკალური დროის განმარტების ძალით, გვაქვს:

$$w_t = |x_t| - 2\theta_t = |x_t| - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \chi_{[0,\varepsilon]}(|x_s|) ds.$$

ე.ი. w_t ზომადად გამოისახება $|x_t|$ -ს საშუალებით, და $F_t^w \subset F_t^{|x|}$. ამიტომ, თუკი დავუშვებთ, რომ $F_t^x \subset F_t^w$, მივიღებთ წინააღმდეგობას $F_t^x \subset F_t^{|x|}$. □

ბუნებრივია, დაისვას საკითხი იმის შესახებ, თუ რა შემთხვევებშია საკმარისი სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების სუსტი ამონახსნი და როდის არის აუცილებელი ძლიერი ამონახსნის განხილვა. განსხვავება ძლიერ და სუსტ ამონახსნს შორის არსებითად ანალოგიურია განსხვავებისა შემთხვევითი სიდიდესა და მის განაწილებას შორის: სუსტი ამონახსნის აგებისას ჩვენ ვაგებთ საჭირო ზომას ტრაექტორიების სივრცეში, ხოლო ძლიერი ამონახსნის აგებისას – კონკრეტულ $x_t = x(t, \omega)$ ფუნქციას. ამიტომ სუსტი ამონახსნი ჩვენ დაგვაკმაყოფილებს იმ შემთხვევებში, როცა ჩვენთვის საინტერესო კითხვებზე პასუხები დაკავშირებულია მხოლოდ ზომასთან ტრაექტორიების სივრცეში. ასეთ კითხვებს განეკუთვნება: სხვადასხვა ალბათობებისა და მათემატიკური ლოდინების გამოთვლა; საკითხები, რომლებიც დაკავშირებულია პროცესების მდგრადობასთან და ინვარიანტული ზომების არსებობასთან; სხვადასხვა პროცესების ზომების აბსოლუტური უწყვეტობის საკითხები; კერძონარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნის ალბათური წარმოდგენადობა და სხვა.

მეორე მხრივ, გვხვდება სიტუაციები, როდესაც დიფუზიური პროცესი აუცილებელია განხილულ იქნეს როგორც ტრაექტორიების კონკრეტული ოჯახი. ამ შემთხვევებში აუცილებელია გვქონდეს ძლიერი ამონახსნი. მივიყვანოთ მაგალითები.

1. შემდეგი შედეგი ცნობილია „შედარების თეორემის“ სახელწოდებით (იხ. [26, 34]): თუ x_t' და x_t'' წარმოადგენს შესაბამისად შემდეგი განტოლებების ამონახსნებს:

$$dx_t' = b_1(t, x_t')dt + dw_t, \quad (4)$$

$$dx_t'' = b_2(t, x_t'')dt + dw_t, \quad (5)$$

ამასთანავე $x_0' = x_0''$, ხოლო $b_1(t, x) > b_2(t, x)$, მაშინ $\forall t > 0$ გვაქვს $x_t' > x_t''$ (P - თ.ყ.).

მოყვანილი შედეგი სუსტი ამონახსნების შემთხვევაში აზრს კარგავს თუნდაც იმის გამო, რომ ისინი შეიძლება სხვადასხვა ალბათურ სივრცეზე აღმოჩნდეს განსაზღვრული. მეორე მხრივ, თუ ჩვენ ავაგებთ (4) და (5) განტოლებების ამონახსნებს ერთსა და იმავე ალბათურ სივრცეზე იმ გზით, როგორც ეს გაკეთდა პირველ მაგალითში (2) განტოლებისათვის, ე. ი. ავარჩევთ x'_t და x''_t პროცესებს ნინასნარ ისე, რომ არ გვეცოდინება b_1 და b_2 კოეფიციენტები, მაშინ შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $x'_t(\omega) = x''_t(\omega)$, ან $x'_t(\omega) = -x''_t(\omega)$, და ა. შ., ე. ი. თეორემის დასკვნა აღმოჩნდება მცდარი.

2. დავუშვათ, რომ $[0, T]$ სეგმენტზე მოცემულია პროცესები

$$\begin{cases} dx_t = u_t dt + dw_t \\ x_0 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

სადაც მმართველი პარამეტრი u_t ჩვენ შეგვიძლია ავარჩიოთ რიცხვების სიმრავლიდან $\{u : |u| \leq 1\}$. დავუშვათ, რომ ჩვენი მიზანია, რაც შეიძლება ნაკლებად გადავიხაროთ $x = 0$ წრფისაგან ე. ი. მინიმალური გავხადოთ რომელიმე შემდეგი ფუნქციონალებიდან:

$$E |x_T|, \quad (7.1)$$

$$Ex_T^2, \quad (7.2)$$

$$E \int_0^T x_t^2 dt, \quad (7.3)$$

ან მაქსიმალური გავხადოთ რომელიმე შემდეგი ფუნქციონალებიდან

$$E\{\tau_a \wedge T\}, \quad (7.4.)$$

$$E\{|x_T| \wedge a\}, \quad (7.5)$$

სადაც

$$\tau_a = \inf\{t : |x_t| > a\}, \quad \tau_a \wedge T = \min(\tau_a, T),$$

და ა. შ. ასეთ შემთხვევაში ბუნებრივი ქმედება იქნებოდა x_t პროცესის მაქსიმალური ძალით ნულისკენ გაშვება, ე. ი. u_t უნდა ავარჩიოთ შემდეგნაირად:

$$u_t = \begin{cases} -1, & \text{თუ } x_t > 0, \\ 0, & \text{თუ } x_t = 0, \\ 1, & \text{თუ } x_t < 0. \end{cases}$$

მაშინ (6) განტოლება გადაინერება შემდეგი სახით

$$\begin{cases} dx_t = -\text{sign} x_t dt + dw_t, \\ x_0 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

ცხადია, რომ (7.1)–(7.5) ფუნქციონალების მნიშვნელობები ერთი და იგივე იქნება იმისგან დამოუკიდებლად (8) განტოლების რომელი ამონახსნი განიხილება: სუსტი თუ ძლიერი. მაგრამ არსებითად იცვლება ჩვენი მოქმედების შინაარსი. სინამდვილეში, მართვის აზრი ისაა, რომ, ვაკვირდებით რა x_t პროცესის ცალკეულ ტრაექტორიას, შევეცადოთ დავაბრუნოთ იგი ნულში, როგორც კი იგი მისგან გადაიხრება. მაშინ როდესაც, სხვადასხვა u_t სტრატეგიებისათვის (6) განტოლების სუსტი ამონახსნის აგებისას ჩვენ საერთოდ არ ვცვლით x_t პროცესს და ყველა მის ტრაექტორიასაც ვტოვებთ უცვლელად, ვცვლით მხოლოდ ზომას ტრაექტორიების სივრცეში, თუმცა ყველა დანარჩენი ტრაექტორიის ყოფაქცევა, გარდა იმისა, რომელსაც ჩვენ ვაკვირდებით, სავსებით არ გვანტერესებს.

3. განვიხილოთ ორგანზომილებიანი დიფუზიური პროცესის არადაკვირვებადი კომპონენტის ფილტრაციის ამოცანა. დავუშვათ, რომ მოცემულია პროცესი (θ_t, ξ_t) , რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\begin{aligned}d\theta_t &= a(t, \theta_t, \xi_t)dt + dw_t^{(1)}, \\d\xi_t &= A(t, \theta_t, \xi_t)dt + dw_t^{(2)}.\end{aligned}$$

საჭიროა θ_t -ს შეფასება ξ_0^t ტრაექტორიის მიხედვით. ცნობილია (იხ. [42], §8.3), რომ საშუალო კვადრატული აზრით საუკეთესო შეფასება $E(\theta_t | F_t^\xi)$ წარმოიდგინება შემდეგნაირად:

$$E(\theta_t | F_t^\xi) = E(\theta_0 | F_0^\xi) + \int_0^t [\cdot] ds + \int_0^t [\cdot] d\bar{w}_s$$

(ინტეგრალქვეშა გამოსახულებების კონკრეტულ სახეს მნიშვნელობა არა აქვს), სადაც

$$\bar{w}_t = \xi_t - \int_0^t E(A(s, \theta_s, \xi_s | F_s^\xi)) ds$$

ვინერის პროცესია.

ცხადია, რომ $\bar{w}_t$ პროცესი F_t^ξ -ზომადია, ე. ი. $F_t^{\bar{w}} \subset F_t^\xi$. ცნობილია, რომ განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება იმ შემთხვევას, როცა $\bar{w}_t$ პროცესი განმახლებელია, ე. ი.

$$F_t^{\bar{w}} = F_t^\xi$$

(რაც იმას ნიშნავს, რომ ξ_t პროცესიდან $\bar{w}_t$ პროცესზე გადასვლისას არ იკარგება ინფორმაცია), ხოლო უკანასკნელ თანაფარდობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა განტოლებას

$$d\xi_t = \alpha(t, \xi_0^t)dt + d\bar{w}_t,$$

სადაც

$$\alpha(t, \xi_0^t) = E(A(t, \theta_t, \xi_t) | F_t^\xi),$$

გააჩნია ძლიერი ამონახსნი.

4. განვიხილოთ განტოლება $\dot{x} = f(t, x)$ ანუ

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_s) ds. \quad (9)$$

თუ $f(t, x)$ არ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, მაშინ (9) განტოლების ამონახსნი შეიძლება არ აღმოჩნდეს ერთადერთი (მაგალითი: $\dot{x} = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 0$). ამ განტოლების ამონახსნები იქნება: $x(t) \equiv 0$, $x(t) = t^2$ და სხვა).

დავუმატოთ (9) განტოლების მარჯვენა მხარეს რაგინდ მცირე სტოქასტური წევრი, ე. ი. განვიხილოთ განტოლება

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_s) ds + \varepsilon w_t. \quad (10)$$

როგორც ჩვენ შემდგომში ვნახავთ (ძლიერი ერთადერთობის შედეგებზე დაყრდნობით), w_t პროცესის თითქმის ყველა w_0^T ტრანსფორმაციისათვის, (10) განტოლების x_t ამონახსნი იქნება ერთადერთი, რაც პარადოქსულია ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების თეორიის თვალსაზრისით.

შევნიშნოთ, რომ (10) განტოლების სუსტი ერთადერთობის შედეგებზე დაყრდნობით ასეთი დასკვნის გაკეთება შეუძლებელია. რაც შეეხება იტოს კლასიკურ თეორემას (ძლიერი ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ), იგი იძლევა (10) განტოლების ძლიერი ამონახსნის ერთადერთობას იმ შემთხვევაში, როცა $f(t, x)$ ფუნქცია ლიფშიცისაა x -ით, ე. ი. მაშინ, როცა (9) განტოლებას თავისთავად გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

შენიშვნა 21.1. $\varepsilon = 1$ შემთხვევაში (10) სტოქასტური დიფერენციალური განტოლება შეიძლება დაყვანილ იქნეს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე შემთხვევითი კოეფიციენტებით (ამისათვის საჭიროა გარდაქმნა $y_t = x_t - w_t$). მაგრამ ამ შემთხვევაში ამონახსნი შეიძლება აღარ იყოს შეთანხმებული, იგი შეიძლება დამოკიდებული იყოს მომავლისაგან.

ყველგან ქვემოთ ვიგულისხმობთ, რომ (1) განტოლების $b(t, x)$ და $\sigma(t, x)$ კოეფიციენტები აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნებს:

(i) $a := \sigma\sigma^*$ მატრიცის უწყვეტობა: $a(t, x)$ მატრიცა უწყვეტია არგუმენტთა წყვილის მიმართ.

(ii) x_t პროცესის შესაბამისი $L^{(x_t)}$ დიფერენციალური ოპერატორის თანაბრად ელიფსურობა: არსებობს ისეთი რიცხვი $\mu > 0$, რომ ნებისმიერი $e \in R^n$ -სათვის სამართლიანია უტოლობა

$$a(t, x)(e, e) \geq \mu |e|^2.$$

(iii) კოეფიციენტების შემოსაზღვრულობა: მოიძებნება ისეთი რიცხვი c , რომ

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq c.$$

თეორემა 21.1 (*ზოგიერთი შედეგი სუსტი ამონახსნების შესახებ*)

(ა) (1) განტოლების (სუსტი) ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია ზომის აზრით (იხ. [19], [27]);

(ბ) თუ განვიხილავთ (1) განტოლების ამონახსნებს $[t, T] \subset [0, T]$ მონაკვეთებზე სანყისი პირობებით $x_t = x \in R^n$, მაშინ მიღებულ ამონახსნთა ოჯახი ქმნის (არაერთგვაროვან) მკაცრად მარკოვულ პროცესს (ამ პროცესის შესაბამისი ზომის მიმართ აღებული მათემატიკური ლოდინი აღინიშნება $E_{(t,x)}$ -ით, ხოლო როცა $t = 0$, მაშინ $- E_x$ -ით) (იხ. [19], [27]);

(გ) დავუშვათ, რომ $D \subset R^n$ შემოსაზღვრული არეა, ხოლო $\tau - x_t$ პროცესის D არიდან პირველი გასვლის მომენტი და მოცემულია $f \in L_p([0, T] \times D)$ ფუნქცია, სადაც, $p \geq n + 1$, მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას:

$$E_x \int_0^{\tau \wedge T} |f(t, x_t)| dt \leq N \|f\|_{L_p},$$

სადაც N მუდმივი დამოკიდებულია მხოლოდ T -ზე, μ -სა და C -ზე (იხ. [39]);

(დ) განვიხილოთ პროცესი $y_t = u(t, x_t)$, სადაც $u \in W_p^{1,2}$, $p \geq n+1$. მაშინ მტკიცდება, რომ $u(t, x)$ ფუნქციის მიმართ შესაძლებელია იტო-დობლინის ფორმულის გამოყენება (იხ. [39]):

$$du(t, x_t) = L^{(x_t)}u(t, x_t)dt + u'_x(t, x_t)\sigma(t, x_t)dw_t;$$

(ე) განვიხილოთ განტოლება

$$\begin{cases} L^{(x_t)}u(t, x) + f(t, x) = 0, \\ u(T, x) = (x), \end{cases} \quad (11)$$

სადაც $f(t, x)$ და $\varphi(x)$ „ნელა ზრდადი“ ფუნქციებია (ე. ი. უსასრულობაში უფრო ნელა იზრდებიან, ვიდრე $\exp\{K|x|^2\}$ ნებისმიერი $K > 0$ -სათვის), $f \in L_p$, $\varphi \in W_p^2$ რაიმე p -სათვის, $p > (n+2)/2$. მაშინ ნელა ზრდადი ფუნქციების კლასში (11) განტოლების ამონახსნი არსებობს, ერთადერთია და $u \in W_p^{1,2}$ (იხ. [40]);

(ვ) თუ $p \geq n+1$, მაშინ (11) განტოლების ამონახსნს გააჩნია ალბათური წარმოდგენა (იხ. [39]):

$$u(t, x) = E_{(t,x)}\left(\int_t^T f(s, x_s)ds + \varphi(x_T)\right).$$

თეორემა 21.2. (1) განტოლების ამონახსნი იქნება ძლიერი ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი ერთადერთია ტრაექტორიულად (იხ. [34]).

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სამართლიანია შემდეგი:

ალტერნატივა: ან (1) განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი, მოცემული ნებისმიერ ალბათურ სივრცეზე არის ძლიერი და ერთადერთი ტრაექტორიულად, ან არც ერთი ამონახსნი არც ერთ ალბა-

თურ სივრცეზე არ არის ძლიერი და ეს ამონახსნები აუცილებლად არაერთადერთია ტრაექტორიულად.

პედიკი 21.1. დავუშვათ, რომ (1) განტოლებას რომელიღაც ალბათურ სივრცეზე გააჩნია ძლიერი ამონახსნი. მაშინ:

ა) (1) განტოლების ნებისმიერი სუსტი ამონახსნი წარმოადგენს ძლიერ ამონახსნს;

ბ) ნებისმიერ ალბათურ სივრცეზე (1) განტოლების ორი ძლიერი ამონახსნი ერთმანეთს ემთხვევა ყოველი T -სათვის ალბათობით ერთი.

პედიკი 21.2 (იაგადა-ვატანაგას თეორემა). ვთქვათ (1) განტოლებას აქვს სუსტი ამონახსნი და გააჩნია ტრაექტორიული ერთადერთობის თვისება. მაშინ ყველა მისი ამონახსნი წარმოადგენს ძლიერ ამონახსნს.

პედიკი 21.3. თუ რომელიმე ალბათურ სივრცეზე (1) განტოლებას გააჩნია ორი ამონახსნი (რომლებიც არ ემთხვევა ერთმანეთს ყოველი t -სათვის ალბათობით ერთი), მაშინ არც ერთ ალბათურ სივრცეზე მას არ გააჩნია ძლიერი ამონახსნი.

შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი შედეგი ადვილად მიიღება წინა ორი შედეგისაგან.

22. კლიური ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა

დავუშვათ, რომ მოცემულია სტანდარტული ალბათური სივრცე (Ω, F, P) და მასზე განსაზღვრული სტანდარტული ვინერის პროცესი $(w_t, F_t)_{t \geq 0}$. გარდა ამისა, მოცემულია ბორელის ფუნქციები $b(t, x)$ და $\sigma(t, x)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ წრფივი ზრდისა და ლიფშიცის პირობებს:

$$|\sigma(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq K(1 + x^2), \quad (1)$$

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 + |b(t, x) - b(t, y)|^2 \leq K |x - y|^2. \quad (2)$$

ვიგულისხმობთ, რომ $K \geq 1$. ავიღოთ F_0 -ზომადი ξ_0 შემთხვევითი სიდიდე და განვიხილოთ იტოს სტოქასტური განტოლება

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t b(s, \xi_s) ds + \int_0^t \sigma(s, \xi_s) dw_s, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

აღვნიშნოთ $\mathfrak{M}$ -ით სასრული მარკოვის მომენტების სიმრავლე.

ლემა 22.1. ა) დავუშვათ, რომ η_t და ζ_t არაუარყოფითი, უწყვეტი და F_t ნაკადთან შეთანხმებული პროცესებია; $f \in S$ (იხ. განსაზღვრა 18.1);

$$\eta_t \leq \zeta_t + \int_0^t f_s dw_s \quad \forall t;$$

ζ_t არაკლებადია და $E\zeta_\tau < \infty \quad \forall \tau \in \mathfrak{M}$, მაშინ $E\eta_\tau \leq E\zeta_\tau \quad \forall \tau \in \mathfrak{M}$.

ბ) თუ η_t პროცესი ა) პუნქტიდან აკმაყოფილებს პირობას: $E\eta_\tau \leq N \quad \forall \tau \in \mathfrak{R}$, მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის, $\varepsilon > 0$, სამართლიანია შეფასება:

$$P\{\sup_{t \geq 0} \eta_t \geq \varepsilon\} \leq \frac{N}{\varepsilon}.$$

დამტკიცება. ა) განვსაზღვროთ მარკოვის მომენტები

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : \int_0^t f_s^2 ds \geq n\}.$$

ცხადია, რომ

$$\eta_{\tau \wedge \tau_n} \leq \zeta_{\tau \wedge \tau_n} + \int_0^{\tau \wedge \tau_n} f_s dw_s \quad (4)$$

და $f_s \chi_{s \leq \tau_n} \in H$ (იხ. განსაზღვრა 16.4), საიდანაც ჩანს, რომ (4) თანაფარდობის ინტეგრანდი აგრეთვე H კლასიდანაა. ამიტომ სტოქასტური ინტეგრალის მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლი იქნება. ე. ი. გვაქვს: $E\eta_{\tau \wedge \tau_n} \leq E\zeta_{\tau \wedge \tau_n}$. აქედან ფატუს ლემის გამოყენებით ვრწმუნდებით ა) პუნქტის სამართლიანობაში.

ბ) აღვნიშნოთ $\tau := \inf\{t \geq 0 : \eta_t \geq \varepsilon\}$, მაშინ ფიქსირებული T -სათვის ჩებიშევის უტოლობის ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned} P\{\sup_{t \in [0, T]} \eta_t \geq \varepsilon\} &\leq P\{\tau \leq T, \eta_{\tau \wedge T} \geq \varepsilon\} \leq \\ &\leq P\{\eta_{\tau \wedge T} \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon} E\eta_{\tau \wedge T} \leq \frac{1}{\varepsilon} N. \end{aligned}$$

თუ ახლა T -ს მივასწრაფებთ უსასრულობისაკენ, ადვილად დავრწმუნდებით ბ) პუნქტის სამართლიანობაში. $\square$

თეორემა 22.1. (3) განტოლების ძლიერი ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია.

დამტკიცება. ამონახსნის არსებობის დასამტკიცებლად გამოვიყენებთ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდს. დავუშვათ, რომ $\psi_t := \exp\{-3Kt - |\xi_0|\}$, $\xi_t(0) := \xi_0$ და

$$\xi_t(n+1) := \xi_0 + \int_0^t b(s, \xi_s(n))ds + \int_0^t \sigma(s, \xi_s(n))dw_s, \quad n \geq 0.$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{R}} E[\psi_\tau \xi_\tau^2(n) + 2K \int_0^\tau \psi_s \xi_s^2(n)ds] < \infty. \quad (5)$$

ვისარგებლოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. ვინაიდან $|x| \exp\{-|x|\}$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა, ამიტომ ცხადია, რომ $\psi_t |\xi_0| \leq N \exp\{-3Kt\}$, სადაც $N := \max_x |x| \exp\{-|x|\}$ დამოუკიდებელია ω -საგან. ე. ი. $n = 0$ -ის შემთხვევაში (5) თანაფარდობა სამართლიანია. დავუშვათ, რომ (5) უტოლობა ფიქსირებული n -სათვის შესრულებულია და ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა $(n+1)$ -ის შემთხვევაში.

იტო-დობლინის ფორმულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\begin{aligned} d[\psi_t \xi_t^2(n+1)] &= \psi_t d[\xi_t^2(n+1)] + \xi_t^2(n+1) d\psi_t = \\ &= \psi_t [-3K \xi_t^2(n+1) + 2\xi_t(n+1)b(t, \xi_t(n)) + \sigma^2(t, \xi_t(n))]dt + \\ &+ \psi_t \xi_t(n+1) \sigma(t, \xi_t(n))dw_t. \end{aligned}$$

თუ უკანასკნელ გამოსახულებას ჩავწეროთ ინტეგრალური ფორმით, შემდეგ გამოვიყენებთ ელემენტარულ უტოლობას $2ab \leq a^2 + b^2$ და ვისარგებლებთ (1) პირობით, ადვილად დავინახავთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა

$$\begin{aligned} \psi_t \xi_t^2(n+1) + 2K \int_0^t \psi_s \xi_s^2(n+1)ds &\leq \psi_0 \xi_0^2 + \\ + K \int_0^t \psi_s (1 + |\xi_s(n)|^2)ds &+ \int_0^t 2\psi_s \xi_s(n+1) \sigma(s, \xi_s(n))dw_s, \end{aligned}$$

საიდანაც ლემა 22. 1 ა)-ს ძალით ვრწმუნდებით (5) შეფასების სამართლიანობაში $(n+1)$ -ის შემთხვევაში და, მაშასადამე, იგი სამართლიანია ყველა n -სათვის.

შევაფასოთ ახლა გამოსახულება $\psi_t[\xi_t(n+1) - \xi_t(n)]^2$. რისთვისაც ისევ ვისარგებლოთ იტო-დიობლინის ფორმულით, ზემოთ აღნიშნული ელემენტარული უტოლობით, ლიფშიცურობის პირობითა და ლემა 22. 1 ა)-თი. საბოლოოდ გვქენება, რომ

$$\begin{aligned} E\{\psi_t[\xi_t(n+1) - \xi_t(n)]^2 + 2K \int_0^\tau \psi_t[\xi_t(n+1) - \xi_t(n)]^2 dt\} \leq \\ \leq KE \int_0^\tau \psi_t[\xi_t(n) - \xi_t(n-1)]^2 dt, \quad \forall \tau \in \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

აქედან იტერირების საშუალებით ვდებულობთ, რომ

$$E \int_0^\tau \psi_t[\xi_t(n+1) - \xi_t(n)]^2 dt \leq \frac{1}{2^n} \sup_{\tau \in \mathfrak{R}} E \int_0^\tau \psi_t[\xi_t(1) - \xi_t(0)]^2 dt := \frac{N}{2^n}.$$

ამიტომ

$$E\psi_\tau[\xi_\tau(n+1) - \xi_\tau(n)]^2 \leq \frac{KN}{2^{n-1}}.$$

საიდანაც ლემა 22. 1 ბ)-ს ძალით გვაქვს

$$P\{\sup_{t \in [0, T]} \psi_t[\xi_t(n+1) - \xi_t(n)]^2 \geq n^{-n}\} \leq \frac{n^n}{2^{n-1}} KN.$$

ამიტომ ბორელ-კანტელის ლემის თანახმად, დანყებული რაღაც n_0 -დან სრულდება სანინაალმდეგო უტოლობა და მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_t^{1/2}[\xi_t(n+1) - \xi_t(n)]$$

კრებადია t -ს მიმართ თითქმის ყველა ω -ში. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\xi_t(n)$ მიმდევრობა კრებადია რაიმე ξ_t პროცესისაკენ თანაბრად

t -ს მიმართ ნებისმიერ სასრულ ინტერვალზე P -თ. ყ. ω -ში (ვინაიდან ψ_t დამოუკიდებელია n -საგან). გადავიდეთ ახლა ზღვარზე რეკურენტულ თანაფარდობაში, როცა $n \rightarrow \infty$. (1), (2) პირობის თანახმად ზღვარზე გადასვლა შესაძლებელია როგორც ლებეგის, ისე იტოს ინტეგრალში. ე. ი. ξ_t აკმაყოფილებს (3) განტოლებას.

ვაჩვენოთ ახლა ამონახსნის ერთადერთობა. დავუშვათ, რომ (3) განტოლებას გააჩნია ორი ამონახსნი ξ_t და η_t :

$$\eta_t = \xi_0 + \int_0^t b(s, \eta_s) ds + \int_0^t \sigma(s, \eta_s) dw_s.$$

იტო-დობლინის ფორმულის ძალით გვაქვს, რომ

$$d[\xi_t - \eta_t]^2 = 2\{(\xi_t - \eta_t)[b(t, \xi_t) - b(t, \eta_t)] +$$

$$+ [\sigma(t, \xi_t) - \sigma(t, \eta_t)]^2\} dt + 2(\xi_t - \eta_t)[\sigma(t, \xi_t) - \sigma(t, \eta_t)] dw_t$$

და

$$0 \leq [\xi_t - \eta_t]^2 \exp\{-N_1 t\} =$$

$$= \int_0^t \exp\{-N_1 s\} \{-N_1 [\xi_s - \eta_s]^2 + 2(\xi_s - \eta_s)[b(s, \xi_s) -$$

$$- b(s, \eta_s)] + [\sigma(s, \xi_s) - \sigma(s, \eta_s)]^2\} ds +$$

$$+ 2 \int_0^t \exp\{-N_1 s\} (\xi_s - \eta_s) [\sigma(s, \xi_s) - \sigma(s, \eta_s)] dw_s :=$$

$$:= I_1(t) + I_2(t).$$

(1), (2) პირობიდან ($2ab \leq a^2 + b^2$ უტოლობის გათვალისწინებით) ვღებულობთ, რომ

$$I_1(t) \leq \int_0^t \exp\{-N_1 s\} (-N_1 + 1 + K) [\xi_s - \eta_s]^2 ds.$$

$\Rightarrow$ *მ. ფურთუხია* $\Leftarrow$

ამიტომ თუ ავიღებთ $N_1 > 1+k$, მაშინ $I_1(t) \leq 0$ და მივიღებთ, რომ $I_2(t) \geq 0$.

შემოვიღოთ გაჩერების მომენტების მიმდევრობა

$$\tau_n := \inf\{t : \sup_{s \in [0, t]} (|\xi_s| \vee |\eta_s| > n)\}.$$

მაშინ $I_2(t \wedge \tau_n)$ გამოსახულების ინტეგრანდი იქნება H კლასიდან და ამიტომ $E I_2(t \wedge \tau_n) = 0$. თუკი ახლა n -ს მივასწრაფებთ უსასრულობისაკენ, მაშინ ფატუს ლემის ძალით დავრწმუნდებით, რომ $E I_2(t) = 0 \quad \forall t$, საიდანაც გამოდის, რომ ნებისმიერი t -სათვის $I_2(t) = 0$ (P - თ.ყ.), ე. ი. (3) განტოლების ამონახსნი ერთადერთია.

თეორემა 22.2. დავუშვათ, რომ ξ_0^n , $n=1, 2, \dots$, F_0 -ზომად შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, ისეთი, რომ $\xi_0^n \rightarrow \xi_0$ (P -თ.ყ.), როცა $n \rightarrow \infty$, ხოლო ξ_t^n არის (3) განტოლების ძლიერ ამონახსნთა მიმდევრობა $\xi_t^n|_{t=0} = \xi_0^n$ საწყისი პირობით:

$$\xi_t^n = \xi_0^n + \int_0^t b(s, \xi_s^n) ds + \int_0^t \sigma(s, \xi_s^n) dw_s, \quad t \geq 0.$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sup_{t \in [0, T]} |\xi_t^n - \xi_t| > \varepsilon\} = 0.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\psi_t := \exp\{-2Kt - \sup_n |\xi_0^n|\}$$

(თეორემის პირობებში ცხადია, რომ $\sup_n |\xi_0^n| < \infty$ (P -თ.ყ.)). იტო-დიობლინის ფორმულის ძალით გვაქვს:

$$\begin{aligned} d\{\psi_t[\xi_t^n - \xi_t]^2\} &= \psi_t\{-2K[\xi_t^n - \xi_t]^2 + \\ &+ 2(\xi_t^n - \xi_t)[b(t, \xi_t^n) - b(t, \xi_t)] + [\sigma(t, \xi_t^n) - \sigma(t, \xi_t)]^2\}dt + \\ &+ 2\psi_t[\sigma^*(t, \xi_t^n) - \sigma^*(t, \xi_t)](\xi_t^n - \xi_t)dw_t. \end{aligned}$$

აქედან ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \psi_t[\xi_t^n - \xi_t]^2 &\leq \psi_0[\xi_0^n - \xi_0]^2 + \\ &+ 2\psi_t[\sigma^*(t, \xi_t^n) - \sigma^*(t, \xi_t)](\xi_t^n - \xi_t)dw_t. \end{aligned}$$

ამიტომ ლემა 22. 1-ის თანახმად, ერთი მხრივ:

$$E\psi_t[\xi_t^n - \xi_t]^2 \leq E\psi_0[\xi_0^n - \xi_0]^2,$$

ხოლო მეორე მხრივ:

$$P\{\sup_{t \geq 0} \psi_t[\xi_t^n - \xi_t]^2 \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon} E\psi_0[\xi_0^n - \xi_0]^2,$$

საიდანაც მაჟორირებული კრებადობის შესახებ ლებეგის თეორემის ძალით ვასკენით, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sup_{t \geq 0} \psi_t[\xi_t^n - \xi_t]^2 \geq \varepsilon\} = 0.$$

ე. ი. პროცესი $\psi_t[\xi_t^n - \xi_t]^2$ ალბათობით კრებადია ნულისაკენ თანაბრად t -ს მიმართ მთელ ღერძზე, როცა $n \rightarrow \infty$. გარდა ამისა, $\psi_t[\xi_t^n - \xi_t]^2 \geq \psi_T[\xi_t^n - \xi_t]^2$, $t \leq T$. ამიტომ გვაქვს:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sup_{t \in [0, T]} |\xi_t^n - \xi_t| > \varepsilon\} &\leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\psi_T > \delta, \sup_{t \in [0, T]} \psi_t[\xi_t^n - \xi_t]^2 > \varepsilon^2 \delta\} + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\psi_T \leq \delta\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\psi_T \leq \delta\} \leq P\{\psi_T = 0\} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ ამონახსნის ერთადერთობა შეგვეძლო მიგველო ამ თეორემიდანაც.

მაგალითი 22.1. განვიხილოთ პოპულაციის ზრდის სტოქასტურად შეშფოთებული განტოლება

$$\frac{dX_t}{dt} = rX_t, \quad r = \text{const}. \quad (6)$$

უფრო ზუსტად, განვიხილოთ სტოქასტური წრფივი მუდმივ-კოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dw_t \quad (7)$$

საწყისი პირობით X_0 .

ვიგულისხმობთ, რომ X_0 არის F_0^w -ზომადი კვადრატით ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდე ($EX_0^2 < \infty$), $\sigma > 0$, $r \in \mathbb{R}^1$.
იტო-დობლინის ფორმულიდან გამომდინარე, პროცესი

$$X_t = X_0 e^{(r - \sigma^2/2)t + \sigma w_t} \quad (8)$$

წარმოადგენს (7) განტოლების ძლიერ ამონახსნს.

ვინაიდან ეს პროცესი შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$X_t = X_0 e^{r_t} e^{-\sigma^2 t/2 + \sigma w_t} = X_0 e^{r_t} \rho_t(\sigma)$$

(სადაც $\rho_t(\sigma)$ – ექსპონენციალური მარტინგალია, იხ. §20), თუ გავითვალისწინებთ, რომ X_0 დამოუკიდებელია ვინერის პროცესისაგან, 20.1 ლემის გ) პუნქტის თანახმად დავასკვნით, რომ:

$$EX_t = EX_0 \exp\{rt\}.$$

ამრიგად, თუ $EX_0 \neq 0$, მაშინ EX_t -ს საშუალო ზრდა (შესაბამისად, კლება, თუ $r < 0$) არის ისეთივე, რაც დეტერმინისტული (6) მოდელის შემთხვევაში.

აღსანიშნავია, რომ (7) განტოლება უაღრესად მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ფინანსურ მათემატიკაში. მის (8) ამონახსნს უწო-

დებენ გეომეტრიულ ბროუნის მოძრაობას. ლოკალური წანაცვლება $(r - \sigma^2 / 2)$ ახასიათებს X_t პროცესის საშუალო მნიშვნელობის ცვლილების სიჩქარეს, ხოლო σ^2 დიფუზიას ფინანსურ ლიტერატურაში ვოლატილობას უწოდებენ. პ. სამუელსონი იყო პირველი, ვინც გაიაზრა გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის მნიშვნელობა ფასების ევოლუციის აღსაწერად, თუმცა იგი მის ნაცვლად ხმარობდა ტერმინს: „ეკონომიკური ბროუნის მოძრაობა“.

მე-20 საუკუნის 70-იანი წლებიდან მოყოლებული უდიდესი აღიარება მოიპოვა ფასების ევოლუციის გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის მოდელში მიღებულმა ბლეკის, მერტონისა და შოულსის შედეგებმა. პ. მერტონისა და მ. შოულსის შრომებს 1997 წელს მიენიჭა ნობელის პრემია ეკონომიკაში (ამ დროისათვის ფ. ბლეკი უკვე გარდაცვლილი იყო, ხოლო სიკვდილის შემდეგ ნობელის პრემიას არ ანიჭებენ).

დავუშვათ, რომ (B, S) ფინანსური ბაზარი აღიწერება სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებებით:

$$dB_t = rB_t dt, \quad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dw_t), \quad (9)$$

სადაც $B = (B_t)_{t \geq 0}$ საბანკო ანგარიშზე განთავსებული თანხაა, ხოლო $S = (S_t)_{t \geq 0}$ – აქციის ფასის პროცესი. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან შედეგს (იხ. [3]):

თეორემა 22.3 (ბლეკ-შოულსის ფორმულა). $(S_T - K)^+$ გადასახადის ფუნქციის მქონე სტანდარტული ევროპული ტიპის ყიდვის ოფციონის სამართლიანი ფასი განისაზღვრება ფორმულით

$$C(T) = S_0 \Phi(y_+) - Ke^{-r} \Phi(y_-),$$

სადაც

$$y_{\pm} = \frac{\ln(S_0 / K) + T(r \pm \sigma^2 / 2)}{\sigma \sqrt{T}},$$

ხოლო Φ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა. კერძოდ, თუ $S_0 = K$ (დროის T მომენტში

აქციის ყიდვის ფასი ემთხვევა აქციის სანყის ფასს) და $r = 0$ (საპროცენტო განაკვეთი ნულია), მაშინ გვაქვს:

$$C(T) = K[\Phi(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}) - \Phi(-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2})] = K[2\Phi(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}) - 1],$$

ამასთანავე, $\lim_{T \rightarrow 0} \{C(T) / [K\sigma\sqrt{T/(2\pi)}]\} = 1$. $\square$

ამოცანა 22.1. გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის მოდელში გამოთვალეთ აქციის ფასის ე. წ. ამონაგების

$$\frac{S_{t+h} - S_t}{S_t}$$

მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და საზოგადოდ ნებისმიერი რიგის მომენტი.

ამოცანა 22.2. გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის მოდელში იპოვეთ სტანდარტული ყიდვის ოფციონის ე. წ. მიმდინარე ფასი

$$v(t, x) := E_0[\exp\{-r(T-t)\}(S_T - K)^+ | S_t = x],$$

სადაც E_0 მათემატიკური ლოდინია ახალი $dP_0 = \rho_T(-\frac{\mu-r}{\sigma})dP$ ზომის მიმართ (იხ. შენიშვნა 20.1)

მითითება. გამოვეყნოთ S_T -ის გამოსახულებიდან S_t თანამამრავლი.

შენიშვნა 22.1. თუ ამოცანა 22. 2-ში ავიღებთ $t = 0$ და $x = S_0$, მაშინ $v(0, S_0)$ იქნება სწორედ ბლექ-შოულსის ფორმულაში მოყვანილი $C(T)$.

დამატება I

მათემატიკური ლოდინი

დავუშვათ, რომ (Ω, F, P) ნებისმიერი ალბათური სივრცეა, ხოლო $\xi = \xi(\omega)$ – მასზე განსაზღვრული მარტივი შემთხვევითი სიდიდე

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k}(\omega) \quad (x_k \in R^1; A_k \in F, k=1, \dots, n), \quad (1)$$

მაშინ **მათემატიკური ლოდინი** განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$E\xi = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k). \quad (2)$$

ადვილად მოწმდება (იხილეთ როგორც სასრული ალბათური სივრცის შემთხვევაში), რომ ეს განმარტება კორექტულია (ანუ $E\xi$ -ს მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული $\xi = \xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის წარმოდგენაზე (1) სახით) და მტკიცდება მათემატიკური ლოდინის თვისებები. ამჟამად, ჩვენს მიზანს შეადგენს განვსაზღვროთ და შევისწავლოთ $E\xi$ მათემატიკური ლოდინის თვისებები ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში.

ვთქვათ, $\xi = \xi(\omega)$ არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდეა. ავავთოთ მარტივ არაუარყოფით შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი მიმდევრობა $\{\xi_n(\omega)\}_{n \geq 1}$, რომ $\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$, $n \rightarrow \infty$, ყოველი $\omega \in \Omega$ (ასეთი მიმდევრობა შეიძლება აგებულ იქნეს, მაგალითად, შემდეგნაირად:

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n^{2^n}} \frac{k-1}{2^n} I_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq \xi(\omega) < \frac{k}{2^n}\}}(\omega) + n I_{\{\xi(\omega) \geq n\}}(\omega).$$

ვინაიდან ამ შემთხვევაში $E\xi_n \leq E\xi_{n+1}$, ამიტომ იარსებებს $\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$, რომელიც შეიძლება იყოს $+\infty$ -ც.

განსაზღვრა 1. $\xi = \xi(\omega)$ – არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდიდან **ლემების ინტეგრალი**, ანუ მისი **მათემატიკური ლოდინი**, ეწოდება შემდეგ სიდიდეს:

$$E\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n. \quad (3)$$

იმისათვის, რომ ეს განმარტება იყოს კორექტული, უნდა ვაჩვენოთ, რომ ამ ზღვრის მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული მააპროქსიმირებელი მიმდევრობის არჩევაზე. წინასწარ ვაჩვენოთ შემდეგი:

ლემა 1. თუ η და ξ_n , $n \geq 1$, მარტივი არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდეებია, ისეთი, რომ $\xi_n \uparrow \xi \geq \eta$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \geq E\eta. \quad (4)$$

დამტკიცება. დავუშვათ, $\varepsilon > 0$ და აღვნიშნოთ $A_n = \{\omega : \xi_n \geq \eta - \varepsilon\}$. მაშინ ცხადია, რომ $A_n \uparrow \Omega$ და

$$\xi_n = \xi_n I_{A_n} + \xi_n I_{\overline{A_n}} \geq \xi_n I_{A_n} \geq (\eta - \varepsilon) I_{A_n}.$$

ამიტომ, თუ ვისარგებლებთ მარტივი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის მათემატიკური ლოდინის თვისებებით, გვექნება:

$$\begin{aligned} E\xi_n &\geq E(\eta - \varepsilon) I_{A_n} = E\eta I_{A_n} - \varepsilon P(A_n) = \\ &= E\eta - E\eta I_{\overline{A_n}} - \varepsilon P(A_n) \geq E\eta - CP(\overline{A_n}) - \varepsilon, \end{aligned}$$

სადაც $C = \max_{\omega} \eta(\omega)$. საიდანაც, ალბათობის უწყვეტობის თვისებისა და ε -ის ნებისმიერობის გამო, მიიღება (4) თანაფარდობა. $\square$

ამ ლემიდან გამომდინარე, თუ $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ და $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ მარტივ არაუარყოფით შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობებია, ისეთი, რომ $\xi_n \uparrow \xi$ და $\eta_n \uparrow \xi$, მაშინ, ერთი მხრივ: $\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \geq \lim_{m \rightarrow \infty} E\eta_m$, ხოლო მეორე მხრივ: $\lim_{m \rightarrow \infty} E\eta_m \geq \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$, საიდანაც ვასკენით, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n = \lim_{m \rightarrow \infty} E\eta_m$. ამით (3) განმარტების კორექტულობა შემოწმებულია.

ადგილი შესამოწმებელია აგრეთვე, რომ ξ არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინისათვის ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$E\xi = \sup_{\{\theta \in S: \theta \leq \xi\}} E\theta, \quad (5)$$

სადაც $S = \{\theta\}$ მარტივ არაუარყოფით შემთხვევით სიდიდეთა სიმრავლეა.

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\xi^+ = \max\{\xi, 0\}$ და $\xi^- = -\min\{\xi, 0\}$. მაშინ ზოგად შემთხვევაში მათემატიკური ლოდინი შემდეგნაირად განიმარტება:

განსაზღვრა 2. ამბობენ, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდის $E\xi$ მათემატიკური ლოდინი *არსებობს*, ან *განსაზღვრულია*, თუ $E\xi^-$ და $E\xi^+$ მათემატიკური ლოდინებიდან ერთი მაინც სასრულია: $\min(E\xi^-, E\xi^+) < \infty$ და, ამ შემთხვევაში

$$E\xi := E\xi^+ - E\xi^-.$$

განსაზღვრა 3. ამბობენ, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდის $E\xi$ მათემატიკური ლოდინი *სასრულია* (ან, ξ *ინტეგრებადია*), თუ $E\xi^-$ და $E\xi^+$ ორივე სასრულია.

ვინაიდან $|\xi| = \xi^- + \xi^+$, ამიტომ $E\xi$ მათემატიკური ლოდინის სასრულობა ტოლფასია იმისა, რომ $E|\xi| < \infty$. ამ აზრით ინტეგრებადობას გააჩნია „აბსოლუტური“ ხასიათი.

გადავიდეთ ახლა მათემატიკური ლოდინის თვისებების შეს-
ნავლაზე.

1. თუ c მუდმივია და $E\xi$ არსებობს, მაშინ $E(c\xi)$ აგრეთვე
არსებობს და $E(c\xi) = cE\xi$.

მარტივი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის თვისება ცხადია. და-
ვუშვათ, რომ $\xi \geq 0$, $\xi_n \uparrow \xi$, სადაც ξ_n მარტივი შემთხვევითი სი-
დიდეებია, და $c > 0$. მაშინ $c\xi_n \uparrow c\xi$ და, მაშასადამე:

$$E(c\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(c\xi_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n = cE\xi.$$

ზოგად შემთხვევაში ვისარგებლოთ წარმოდგენით $\xi = \xi^+ - \xi^-$
და შევნიშნოთ, რომ როცა $c > 0$: $(c\xi)^+ = c\xi^+$ და $(c\xi)^- = c\xi^-$, ხო-
ლო როცა $c < 0$: $(c\xi)^+ = -c\xi^-$ და $(c\xi)^- = -c\xi^+$. □

2. თუ $\xi \leq \eta$, მაშინ $E\xi \leq E\eta$ იმ აზრით, რომ თუ $-\infty < E\xi$,
მაშინ $-\infty < E\eta$ და $E\xi \leq E\eta$ ან თუ $E\eta < \infty$, მაშინ $E\xi < \infty$ და
 $E\xi \leq E\eta$.

თუ $0 \leq \xi \leq \eta$, მაშინ $E\xi$ და $E\eta$ განმარტებულია და უტო-
ლობა $E\xi \leq E\eta$ უშუალოდ გამომდინარეობს (5) თანაფარდობი-
დან. დავუშვათ ახლა, რომ $E\xi > -\infty$, მაშინ $E\xi^- < \infty$. თუ $\xi \leq \eta$,
მაშინ $\xi^+ \leq \eta^+$ და $\xi^- \geq \eta^-$. ამიტომ $E\eta^- < E\xi^- < \infty$, შესაბამი-
სად, $E\eta$ განმარტებულია და

$$E\xi = E\xi^+ - E\xi^- \leq E\eta^+ - E\eta^- = E\eta.$$

ანალოგიურად განიხილება $E\eta < \infty$ შემთხვევა. □

3. თუ $E\xi$ არსებობს, მაშინ $|E\xi| \leq E|\xi|$.

ვინაიდან, $-|\xi| \leq \xi \leq |\xi|$, ამიტომ პირველი და მე-2 თვისებე-
ბის თანახმად,

$$-E|\xi| \leq E\xi \leq E|\xi|,$$

რაც $|E\xi| \leq E|\xi|$ უტოლობის ტოლფასია.

4. თუ $E\xi$ არსებობს, მაშინ ნებისმიერი $A \in F$ ხდომილობისათვის $E(\xi I_A)$ აგრეთვე არსებობს. ამასთანავე, თუ $E\xi$ სასრულია, მაშინ $E(\xi I_A)$ აგრეთვე სასრულია.

ეს თვისება მიიღება მე-2 თვისებიდან შემდეგი თანაფარდობების გათვალისწინებით:

$$(\xi I_A)^+ = \xi^+ I_A \leq \xi^+ \quad \text{და} \quad (\xi I_A)^- = \xi^- I_A \leq \xi^- . \quad \square$$

5. თუ ξ და η არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდეებია ან მათთვის სრულდება თანაფარდობები: $E|\xi| < \infty$ და $E|\eta| < \infty$, მაშინ

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta .$$

დავუშვათ, რომ $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$ და $\{\xi_n\}$ და $\{\eta_n\}$ ისეთი მარტივ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობებია, რომ: $\xi_n \uparrow \xi$ და $\eta_n \uparrow \eta$. მაშინ ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} E(\xi_n + \eta_n) &= E\xi_n + E\eta_n \quad \text{და} \quad E(\xi_n + \eta_n) \uparrow E(\xi + \eta), \\ E\xi_n &\uparrow E\xi, \quad E\eta_n \uparrow E\eta, \end{aligned}$$

შესაბამისად, $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.

მეორე შემთხვევა: $E|\xi| < \infty$, $E|\eta| < \infty$ დაიყვანება უკვე განხილულზე, თუ ვისარგებლებთ შემდეგი თანაფარდობებით:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^+ - \xi^-, \quad \eta = \eta^+ - \eta^-, \quad \xi^+ \leq |\xi|, \quad \xi^- \leq |\xi|, \\ \eta^+ &\leq |\eta| \quad \text{და} \quad \eta^- \leq |\eta|. \quad \square \end{aligned}$$

6. თუ $\xi = 0$ (P -თ.ყ.), მაშინ $E\xi = 0$.

მართლაც, თუ ξ მარტივი შემთხვევითი სიდიდეა,

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k}(\omega) \quad \text{და} \quad x_k \neq 0, \quad \text{მაშინ პირობის თანახმად} \quad P(A_k) = 0,$$

და მაშასადამე, $E\xi = 0$. თუკი $\xi \geq 0$ და $0 \leq \theta \leq \xi$, სადაც θ

$\Rightarrow$ *მ. ფურთუხია* $\Leftarrow$

მარტივი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ $\theta = 0$ (P - თ.ყ.), და შესაბამისად, $E\theta = 0$ და $E\xi = \sup_{\{\theta \in S: \theta \leq \xi\}} E\theta = 0$.

ზოგადი შემთხვევა დაიყვანება უკვე განხილულზე, თუ ვისარგებლებთ წარმოდგენით $\xi = \xi^+ - \xi^-$ და გავითვალისწინებთ, რომ: $\xi^+ \leq |\xi|$, $\xi^- \leq |\xi|$ და $|\xi| = 0$ (P - თ.ყ.). $\square$

7. თუ $\xi = \eta$ (P - თ.ყ.) და $E|\xi| < \infty$, მაშინ $E|\eta| < \infty$ და $E\xi = E\eta$.

მართლაც, აღვნიშნოთ $N := \{\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\}$. მაშინ $P(N) = 0$. წარმოვადგინოთ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები შემდეგნაირად:

$$\xi = \xi I_N + \xi I_{\bar{N}} \quad \text{და} \quad \eta = \eta I_N + \eta I_{\bar{N}}.$$

მაშინ მე-5 და მე-6 თვისებების თანახმად გვაქვს, რომ

$$E\xi = E\xi I_N + E\xi I_{\bar{N}} = E\xi I_{\bar{N}} = E\eta I_{\bar{N}}.$$

მეორე მხრივ, $E\eta I_N = 0$. ამიტომ მე-5 თვისების ძალით:

$$E\xi = E\eta I_N + E\eta I_{\bar{N}} = E\eta. \quad \square$$

8. თუ $\xi \geq 0$ და $E\xi = 0$, მაშინ $\xi = 0$ (P - თ.ყ.)

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $A = \{\omega : \xi(\omega) > 0\}$ და $A_n = \{\omega : \xi_n(\omega) \geq 1/n\}$. ცხადია, რომ $A_n \uparrow A$ და $0 \leq \xi I_{A_n} \leq \xi I_A$. ამიტომ მე-2 თვისების ძალით:

$$0 \leq E\xi I_{A_n} \leq E\xi I_A \leq E\xi = 0.$$

შესაბამისად,

$$0 = E\xi I_{A_n} \geq \frac{1}{n} P(A_n)$$

და, მაშასადამე, $P(A_n) = 0 \quad \forall n \geq 1$.

მეორე მხრივ, $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ და შესაბამისად, $P(A) = 0$. $\square$

9. დავუშვათ, რომ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები ისეთია, რომ $E|\xi| < \infty$, $E|\eta| < \infty$ და ნებისმიერი $A \in F$ ხდომილები-სათვის: $E\xi I_A \leq E\eta I_A$. მაშინ

$$\xi \leq \eta \quad (P - \text{თ. ყ.}).$$

მართლაც, თუ აღვნიშნავთ $B := \{\omega : \xi(\omega) > \eta(\omega)\}$, მაშინ გვექ-ნება:

$$E(\eta I_B) \leq E(\xi I_B) \leq E(\eta I_B),$$

შესაბამისად, $E(\xi I_B) = E(\eta I_B)$. ამიტომ მე-5 თვისების თანახმად $E(\xi - \eta)I_B = 0$. საიდანაც მე-8 თვისების ძალით $(\xi - \eta)I_B = 0$ (P -თ. ყ.), ანუ $P(B) = 0$. ე. ი. $\xi \leq \eta$ (P -თ. ყ.). $\square$

10. თუ ξ გაფართოებული შემთხვევითი სიდიდეა და $E|\xi| < \infty$, მაშინ $|\xi| < \infty$ (P -თ. ყ.).

მართლაც, დავუშვათ, რომ $A := \{\omega : |\xi(\omega)| = \infty\}$ და $P(A) > 0$. მეორე მხრივ, $E|\xi| \geq E(|\xi| I_A) = \infty \cdot P(A) = \infty$, რაც ეწინააღმდე-გება დაშვებას $E|\xi| < \infty$. $\square$

ამოცანა 1. ვაჩვენოთ, რომ თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემ-თხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $E(\xi \cdot \eta) = E\xi \cdot E\eta$.

ამოცანა 2. ვაჩვენოთ, რომ თუ ξ ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ:

$$E\xi = \int_0^\infty P\{\xi > x\}dx - \int_{-\infty}^0 P\{\xi < x\}dx.$$

გადავიდეთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის საკმარისი პირობების შესწავლაზე.

თეორემა 1 (მონოტონური კრებადობის შესახებ). თუ $\eta, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ შემთხვევითი სიდიდეები ისეთია, რომ:

ა) $\xi_n \geq \eta \quad \forall n \geq 1, E\eta > -\infty$ და $\xi_n \uparrow \xi$, მაშინ $E\xi_n \uparrow E\xi$, როცა $n \rightarrow \infty$;

ბ) $\xi_n \leq \eta \quad \forall n \geq 1, E\eta < \infty$ და $\xi_n \downarrow \xi$, მაშინ $E\xi_n \downarrow E\xi$, როცა $n \rightarrow \infty$.

დამტკიცება. ა) ვიგულისხმობთ, რომ $\eta \geq 0$. დავუშვათ, რომ ნებისმიერი k -სათვის, $k \geq 1$, $\{\xi_k^{(n)}\}_{n \geq 1}$ მარტივ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, ისეთი, რომ $\xi_k^{(n)} \uparrow \xi_k$, როცა $n \rightarrow \infty$.

აღვნიშნოთ $\zeta^{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k^{(n)}$. მაშინ ცხადია, რომ

$$\zeta^{(n-1)} \leq \zeta^{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k^{(n)} \leq \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k = \xi_n.$$

აღვნიშნოთ $\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^{(n)}$. ვინაიდან როცა $1 \leq k \leq n$, მაშინ $\xi_k^{(n)} \leq \zeta^{(n)} \leq \xi_n$, ამიტომ ზღვარზე გადასვლით, როცა $n \rightarrow \infty$, ნებისმიერი k -სათვის, $k \geq 1$, მივიღებთ, რომ $\xi_k \leq \zeta \leq \xi$, და, მაშასადამე, $\xi = \zeta$.

ცხადია, რომ $\zeta^{(n)}$ აგრეთვე მარტივი შემთხვევითი სიდიდეებია და $\zeta^{(n)} \uparrow \zeta$. ამიტომ

$$E\xi = E\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} E\zeta^{(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n.$$

მეორე მხრივ, ვინაიდან, $\xi_n \leq \xi_{n+1} \leq \xi$, ცხადია, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq E\xi,$$

რაც საბოლოოდ გვადლევს, რომ $E\xi_n \uparrow E\xi$, როცა $n \rightarrow \infty$.

ვთქვათ, ახლა η ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდეა, ისეთი, რომ $E\eta > -\infty$. თუ $E\eta = \infty$, მაშინ მე-2 თვისების ძალით $E\xi_n = E\xi$ და ა) პუნქტი სამართლიანია. დავუშვათ, რომ $E\eta < \infty$. მაშინ $E|\eta| < \infty$ (ვინაიდან $E\eta > -\infty$). გარდა ამისა, ცხადია, რომ $0 \leq (\xi_n - \eta) \uparrow (\xi - \eta)$ ყოველი $\omega \in \Omega$ -სათვის.

ამიტომ უკვე დამტკიცებულის თანახმად

$$E(\xi_n - \eta) \uparrow E(\xi - \eta),$$

და, შესაბამისად, მე-5 თვისების ძალით

$$(E\xi_n - E\eta) \uparrow (E\xi - E\eta).$$

აქედან, ვინაიდან $E|\eta| < \infty$, ვასკვნით, რომ $E\xi_n \uparrow E\xi$, როცა $n \rightarrow \infty$.

რაც შეეხება ბ) პუნქტს, ის მიიღება ა) პუნქტიდან, თუ საწყისი შემთხვევითი სიდიდეების ნაცვლად განვიხილავთ შემთხვევით სიდიდეებს მინუს ნიშნით. $\square$

შედეგი 1. თუ $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ არაუარყოფით შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, მაშინ

$$E \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} E\eta_n.$$

ფაქტს ლემა. თუ $\eta, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ შემთხვევითი სიდიდეები ისეთია, რომ:

ა) $\xi_n \geq \eta \quad \forall n \geq 1$ და $E\eta > -\infty$, მაშინ

$$E \varliminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} E\xi_n;$$

ბ) $\xi_n \leq \eta \quad \forall n \geq 1$ და $E\eta < \infty$, მაშინ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq E\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n ;$$

გ) $|\xi_n| \leq \eta \quad \forall n \geq 1$ და $E\eta < \infty$, მაშინ

$$E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq E\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n .$$

დამტკიცება. ა) შემოვიღოთ აღნიშვნა $\varsigma_n = \inf_{m \geq n} \xi_m$. მაშინ ცხადია, რომ

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} \xi_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \varsigma_n .$$

მეორე მხრივ, $\varsigma_n \uparrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ და $\varsigma_n \geq \eta \quad \forall n \geq 1$. ამიტომ თეორემა 1-ის თანახმად გვაქვს:

$$E \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = E \lim_{n \rightarrow \infty} \varsigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E\varsigma_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\varsigma_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n .$$

ბ) პუნქტი მიიღება **ა)** პუნქტისაგან მოპირდაპირე შემთხვევით სიდიდეებზე გადასვლით, ხოლო **გ)** პუნქტი წარმოადგენს პირველი ორის გაერთიანებას. $\square$

ამოცანა 3. ვაჩვენოთ, რომ ხდომილობათა ნებისმიერი მიმდევრობისათვის $A_1, A_2, \dots$ ადგილი აქვს თანაფარდობებს:

$$P(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad \text{და} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) .$$

თეორემა 2 (ლეზევის თეორემა მაჟორირებული კრებადობის შესახებ). თუ $\eta, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ შემთხვევითი სიდიდეები ისეთია, რომ: $|\xi_n| \leq \eta \quad \forall n \geq 1$, $M\eta < \infty$ და $\xi_n \rightarrow \xi$ (P - თ.ყ.), მაშინ $E|\xi| < \infty$ და

$$E \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = E\xi . \quad (6)$$

გარდა ამისა,

$$E \lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n - \xi| = 0. \quad (7)$$

დამტკიცება. დაშვების თანახმად

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi \quad (P - \text{თ. ყ.}).$$

ამიტომ მათემატიკური ლოდინის მე-7 თვისებისა და ფატუს ლემის საფუძველზე გვაქვს:

$$E\xi = E \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \leq \overline{E \lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = E\xi,$$

რაც ამტკიცებს (6) თანაფარდობის სამართლიანობას. ცხადია აგრეთვე, რომ $|\xi| \leq \eta$. ამიტომ $E|\xi| < \infty$.

ანალოგიურად მტკიცდება (7) თანაფარდობა, თუ გავითვა-
ლისწინებით, რომ $|\xi_n - \xi| \leq 2\eta$. $\square$

პედიკი 2. თუ $\eta, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ შემთხვევითი სიდიდეები ისეთია, რომ: $|\xi_n| \leq \eta \quad \forall n \geq 1$, $\xi_n \rightarrow \xi$ (P -თ. ყ.) და $E\eta^p < \infty$ რაიმე $p > 0$ რიცხვისათვის, მაშინ $E|\xi|^p < \infty$ და

$$E \lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n - \xi|^p = 0.$$

შედეგის სამართლიანობაში დასარწმუნებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $|\xi| \leq \eta$ და $|\xi_n - \xi|^p \leq (|\xi_n| + |\xi|)^p \leq (2\eta)^p$. $\square$

შევნიშნავთ, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვ-
ლის საკმარისი პირობების – $|\xi_n| \leq \eta$, $E\eta < \infty$ შესუსტება შეიძ-
ლება ე. წ. თანაბრად ინტეგრებადობის პირობებში.

პანსაზღვრა 4. შემთხვევით სიდიდეთა $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება **თანაბრად ინტეგრებადი** (P ზომით), თუ

$$\sup_n \int_{\{|\xi_n| > c\}} |\xi_n| P(d\omega) \rightarrow 0, \text{ როცა } c \rightarrow \infty,$$

ანუ

$$\sup_n E[|\xi_n| I_{\{|\xi_n| > c\}}] \rightarrow 0, \text{ როცა } c \rightarrow \infty.$$

ცხადია, რომ თუ შემთხვევით სიდიდეთა $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს პირობას $|\xi_n| \leq \eta$, $E\eta < \infty$, მაშინ $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ მიმდევრობა თანაბრად ინტეგრებადი იქნება.

მეორე მხრივ, თუ შემთხვევით სიდიდეთა $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ მიმდევრობა თანაბრად ინტეგრებადია, მაშინ

$$\sup_n E|\xi_n| < \infty. \quad (8)$$

მართლაც, ნებისმიერი ფიქსირებული დადებითი ε რიცხვისა და საკმარისად დიდი დადებითი C რიცხვისათვის გვაქვს:

$$\begin{aligned} \sup_n E|\xi_n| &= \sup_n [E|\xi_n| I_{\{|\xi_n| > c\}} + E|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \leq c\}}] \leq \\ &\leq \sup_n E|\xi_n| I_{\{|\xi_n| > c\}} + \sup_n E|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \leq c\}} \leq \varepsilon + c. \end{aligned}$$

ეს ნიშნავს (8) თანაფარდობის სამართლიანობას. ე. ი. (8) არის თანაბრად ინტეგრებადობის აუცილებელი პირობა, მაგრამ იგი არ არის საკმარისი. დამატებით საჭიროა თანაბრად უწყვეტობის ტიპის პირობა.

ადგილი აქვს შემდეგ მტკიცებულებებს (იხ. [49], §II.6):

თეორემა 3. იმისათვის, რომ შემთხვევით სიდიდეთა $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ მიმდევრობა იყოს თანაბრად ინტეგრებადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $E|\xi_n|$, $n \geq 1$, იყოს თანაბრად შემოსაზღვრული (ანუ სრულდებოდეს მე-8 პირობა) და $E|\xi_n| I_A$, $n \geq 1$, იყოს თანაბრად უწყვეტი (ანუ $\sup_n E|\xi_n| I_A \rightarrow 0$, როცა $P(A) \rightarrow 0$).

აქვე მოვიყვანთ თანაბრად ინტეგრებადობის შესამოწმებელ მოხერხებულ საკმარის პირობას:

თეორემა 4. თუ $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ ინტეგრებად შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, ხოლო $g(t), t \geq 0$ – არაუარყოფითი ზრდადი ფუნქცია, ისეთი, რომ $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = \infty$ და $\sup_n E g(|\xi_n|) < \infty$, მაშინ შემთხვევით სიდიდეთა $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ მიმდევრობა თანაბრად ინტეგრებადია.

თეორემა 5. თუ შემთხვევით სიდიდეთა $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ მიმდევრობა თანაბრად ინტეგრებადია, მაშინ:

$$ა) \quad E \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E \xi_n \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} E \xi_n} \leq E \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n};$$

ბ) თუ ამასთანავე $\xi_n \rightarrow \xi$ (P - თ. ყ.), მაშინ შემთხვევითი სიდიდე ξ ინტეგრებადია და

$$E \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = E \xi \quad \text{და} \quad E \lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n - \xi| = 0.$$

თეორემა 6. დაუშვათ, რომ $0 \leq \xi_n \rightarrow \xi$ (P - თ. ყ.) და $E \xi_n < \infty$. მაშინ იმისათვის, რომ

$$E \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = E \xi < \infty$$

აუცილებელია და საკმარისი, შემთხვევით სიდიდეთა $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ მიმდევრობა იყოს თანაბრად ინტეგრებადი.

დამატება II

პირობითი ალბათობა და პირობითი მათემატიკური ლოდინი დაყოფის მიმართ

დავუშვათ, რომ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ სასრული ალბათური სივრცეა, ხოლო $D = \{D_1, \dots, D_k\}$ არის Ω -ს დაყოფა ($D_i \in \mathcal{A}$, $P(D_i) > 0$, $i = 1, \dots, k$, და $D_1 + \dots + D_k = \Omega$). თუ $A \in \mathcal{A}$, მაშინ $P(A | D_i)$ არის A ხდომილობის პირობითი ალბათობა D_i ხდომილების მიმართ.

განსაზღვრა 1. სიმბოლოთი $P(A | D)$ აღინიშნება შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც D დაყოფის D_i ატომებზე ღებულობს მუდმივ $P(A | D_i)$ მნიშვნელობას:

$$P(A | D) := \sum_{i=1}^k P(A | D_i) I_{D_i} \quad (1)$$

და მას უწოდებენ A ხდომილობის პირობით ალბათობას D დაყოფის მიმართ.

ცხადია, რომ პირობითი ალბათობა დაყოფის მიმართ იქნება ადიციური:

$$P(A + B | D) = P(A | D) + P(B | D).$$

გარდა ამისა, თუ D ტრივიალური დაყოფაა, რომელიც შედგება ერთი Ω სიმრავლისაგან, მაშინ პირობითი ალბათობა დაყოფის მიმართ იქნება მუდმივი:

$$P(A | D) = P(A).$$

ვინაიდან, $P(A|D)$ შემთხვევითი სიდიდეა, შეგვიძლია ვილაპარაკოთ მის მათემატიკურ ლოდინზე, რაც საშუალებას იძლევა სრული ალბათობის ფორმულა ჩაინეროს შემდეგი კომპაქტური სახით:

$$EP(A|D) = P(A). \quad (2)$$

მართლაც, მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრის ძალით, გვაქვს

$$EP(A|D) = \sum_{i=1}^k P(A|D_i)P(D_i) = \sum_{i=1}^k P(AD_i) = P(A).$$

დავუშვათ, $\eta = \eta(\omega)$ მარტივი შემთხვევითი სიდიდეა:

$$\eta(\omega) = \sum_{j=1}^k y_j I_{D_j}(\omega),$$

სადაც $D_j = \{\omega : \eta(\omega) = y_j\}$ (იგულისხმება, რომ $P(D_j) > 0$).
დაყოფას $D_\eta = \{D_1, \dots, D_k\}$ ეწოდება $\eta = \eta(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის მიერ წარმოქმნილი დაყოფა. $P(A|D_\eta)$ პირობით ალბათობას ჩვენ შემდგომში აღვნიშნავთ $P(A|\eta)$ სიმბოლოთი და ვუწოდებთ ***A ხდომილობის პირობით ალბათობას η შემთხვევითი სიდიდის მიმართ.*** $P(A|\eta = y_j)$ სიმბოლოში იგულისხმება $P(A|D_j)$ პირობითი ალბათობა, სადაც $D_j = \{\omega : \eta(\omega) = y_j\}$.

ანალოგიურად, თუ $\eta_1, \dots, \eta_m$ მარტივი შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო $D_{\eta_1, \dots, \eta_m}$ – მათ მიერ წარმოქმნილი დაყოფა ატომებით: $D_{y_1, \dots, y_m} = \{\omega : \eta_1(\omega) = y_1, \dots, \eta_m(\omega) = y_m\}$, მაშინ $P(A|D_{\eta_1, \dots, \eta_m})$ აღინიშნება $P(A|\eta_1, \dots, \eta_m)$ სიმბოლოთი და ეწოდება ***A ხდომილობის პირობითი ალბათობა $\eta_1, \dots, \eta_m$ შემთხვევითი სიდიდეების მიმართ.***

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $P(\xi + \eta = k | \eta)$, $k = 0, 1, 2$, სადაც ξ და η დამოუკიდებელი ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეებია $P(\xi = \eta = 1) = p$, $P(\xi = \eta = 1) = q$.

წინასწარ შევნიშნოთ შემდეგი ზოგადი ფაქტი: თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ როცა $P(\eta = y) > 0$, გვაქვს:

$$P(\xi + \eta = z | \eta = y) = P(\xi + y = z).$$

მართლაც,

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta = z | \eta = y) &= \frac{P(\xi + \eta = z, \eta = y)}{P(\eta = y)} = \\ &= \frac{P(\xi + y = z, \eta = y)}{P(\eta = y)} = \frac{P(\xi + y = z)P(\eta = y)}{P(\eta = y)} = \\ &= P(\xi + \eta = z). \end{aligned}$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta = k | \eta)(\omega) &= P(\xi + \eta = k | \eta = 0)I_{\{\eta=0\}}(\omega) + \\ &+ P(\xi + \eta = k | \eta = 1)I_{\{\eta=1\}}(\omega) = \\ &= P(\xi = k | \eta = 0)I_{\{\eta=0\}}(\omega) + P(\xi = k - 1 | \eta = 1)I_{\{\eta=1\}}(\omega) = \\ &= \begin{cases} qI_{\{\eta=0\}}(\omega), & \text{თუ } k = 0, \\ pI_{\{\eta=0\}}(\omega) + qI_{\{\eta=1\}}(\omega), & \text{თუ } k = 1, \\ pI_{\{\eta=1\}}(\omega), & \text{თუ } k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

უკანასკნელი თანაფარდობები შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$P(\xi + \eta = k | \eta) = \begin{cases} q(1 - \eta), & \text{თუ } k = 0, \\ q(1 - \eta), & \text{თუ } k = 0, \\ p\eta, & \text{თუ } k = 2. \end{cases}$$

განსაზღვრა 2. დავუშვათ, რომ $\xi = \xi(\omega)$ მარტივი შემთხვევითი სიდიდეა:

$$\xi = \sum_{j=1}^l x_j I_{A_j}, \quad A_j = \{\omega : \xi(\omega) = x_j\}$$

და $D = \{D_1, \dots, D_k\}$ რაიმე დაყოფაა. ისევე როგორც $P(A_j)$ ალბათობების საშუალებით ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის განსაზღვრული იყო მათემატიკური ლოდინი

$$E\xi = \sum_{j=1}^l x_j P(A_j),$$

ასევე $P(A_j | D)$ პირობითი ალბათობების საშუალებით ξ შემთხვევითი სიდიდის **პირობითი მათემატიკური ლოდინი D დაყოფის მიმართ**, რომელიც აღინიშნება $E(\xi | D)$ სიმბოლოთი, ბუნებრივია განისაზღვროს შემდეგი ფორმულით:

$$E(\xi | D)(\omega) = \sum_{j=1}^l x_j P(A_j | D)(\omega). \quad (3)$$

განმარტების თანახმად, პირობითი მათემატიკური ლოდინი $E(\xi | D)$ წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც D დაყოფის

D_i ატომზე ლეზულობს მუდმივ მნიშვნელობას: $\sum_{j=1}^l x_j P(A_j | D_i)$.

შესაბამისად, პირობითი მათემატიკური ლოდინი $E(\xi | D)$ შეგვეძლო განგვესაზღვრა სხვა გზითაც. კერძოდ, ჯერ განვმარტოთ $E(\xi | D_i)$ პირობითი მათემატიკური ლოდინი ξ შემთხვევითი სიდიდის D_i ხდომილობის მიმართ:

$$E(\xi | D_i) = \sum_{j=1}^l x_j P(A_j | D_i) \quad (= \frac{E[\xi D_i]}{P(D_i)}), \quad (4)$$

ხოლო შემდეგ განვსაზღვროთ $E(\xi | D)$ შემდეგნაირად:

$$E(\xi | D)(\omega) = \sum_{i=1}^l E(\xi | D_i) I_{D_i}(\omega). \quad (5)$$

შევნიშნოთ, რომ $E(\xi | D_i)$ -ისა და $E(\xi | D)$ -ს მნიშვნელობები არაა დამოკიდებული ξ შემთხვევითი სიდიდის წარმოდგენაზე.

ადვილი შესამოწმებელია პირობითი მათემატიკური ლოდინის შემდეგი თვისებები:

$$E(a\xi + b\eta | D) = aE(\xi | D) + bE(\eta | D), \quad a, b = \text{const};$$

$$E(\xi | \Omega) = E\xi;$$

$$E(c | D) = c, \quad c = \text{const};$$

$$E(I_A | D) = E(A | D).$$

უკანასკნელი თვისების თანახმად პირობითი ალბათობის თვისებები შესაძლებელია უშუალოდ მიღებულ იქნეს პირობითი მათემატიკური ლოდინის თვისებებიდან.

არსებითაა შემდეგი თვისება, რომელიც აზოგადებს *სრული ალბათობის ფორმულას*:

$$E[E(\xi | D)] = E\xi. \quad (6)$$

(2) თანაფარდობის თანახმად გვაქვს:

$$\begin{aligned} E[E(\xi | D)] &= E \sum_{j=1}^l x_j P(A_j | D) = \\ &= \sum_{j=1}^l x_j E P(A_j | D) = \sum_{j=1}^l x_j P(A_j) = E\xi. \end{aligned}$$

ვიტყვი, რომ η შემთხვევითი სიდიდე *ზომადია* $D = \{D_1, \dots, D_k\}$ დაყოფის მიმართ, ან D -ზომადია, თუ $D_\eta \prec D$, ე. ი. η შეიძლება

წარმოდგენილ იქნეს შემდეგი სახით: $\eta(\omega) = \sum_{i=1}^k y_i I_{D_i}(\omega)$, სადაც

ზოგიერთი მნიშვნელობები შეიძლება განმეორდეს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შემთხვევითი სიდიდე ზომადია რაიმე დაყოფის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ლეზულობს მუდმივ მნიშვნელობებს დაყოფის ატომებზე. ცხადია, რომ თუ $D = \{\Omega\}$ ტრივიალური დაყოფაა, მაშინ η შემთხვევითი სიდიდე D -ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი მუდმივია. η შემთხვევითი სიდიდე ზომადია D_η -ს მიმართ.

ლემა 1. თუ η შემთხვევითი სიდიდე D -ზომადია, მაშინ:

$$E(\xi\eta \mid D) = \eta E(\xi \mid D), \quad (7)$$

კერძოდ,

$$E(\eta \mid D) = \eta \quad (E(\eta \mid D_\eta) = \eta). \quad (8)$$

დამტკიცება. დავეშვათ, რომ $\xi = \sum_{j=1}^l x_j I_{A_j}$, მაშინ

$$\xi\eta = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k x_j y_i I_{A_j D_i},$$

და შესაბამისად გვექნება:

$$\begin{aligned} E(\xi\eta \mid D) &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k x_j y_i P(A_j D_i \mid D) = \\ &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k x_j y_i \sum_{m=1}^k P(A_j D_i \mid D_m) I_{D_m}(\omega) = \\ &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k x_j y_i P(A_j D_i \mid D_i) I_{D_i}(\omega) = \\ &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k x_j y_i P(A_j D_i) I_{D_i}(\omega). \end{aligned} \quad (9)$$

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

მეორე მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $I_{D_i}^2 = I_{D_i}$ და $I_{D_i} I_{D_m} = 0$, როცა $i \neq m$, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \eta E(\xi | D) &= [\sum_{i=1}^k y_i I_{D_m}(\omega)] \cdot [\sum_{j=1}^l x_j P(A_j | D)] = \\ &= [\sum_{i=1}^k y_i I_{D_m}(\omega)] \cdot \sum_{m=1}^k [\sum_{j=1}^l x_j P(A_j | D_m)] \cdot I_{D_m}(\omega) = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l y_i x_j P(A_j | D_i)] \cdot I_{D_i}(\omega), \end{aligned}$$

რაც (9)-ის გათვალისწინებით ამტკიცებს (7)-ს. $\square$

ლემა 2 („ტალესკოპური თვისება“). თუ $D^1 \prec D^2$ (D^2 – დაყოფა უფრო „წვრილია“, ვიდრე D^1 დაყოფა), მაშინ ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$E[E(\xi | D^2) D^1] = E(\xi | D^1). \quad (10)$$

დამტკიცება. ვიგულისხმობთ, რომ $D^1 = \{D_1^1, \dots, D_1^m\}$, $D^2 = \{D_1^2, \dots, D_1^n\}$, $\xi = \sum_{j=1}^l x_j I_{A_j}$. მაშინ განსაზღვრის თანახმად:

$$E(\xi | D^2) = \sum_{j=1}^l x_j P(A_j | D^2). \text{ ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ}$$

$$E[P(A_j | D^2) | D^1] = P(A_j | D^1). \text{ ვინაიდან:}$$

$$P(A_j | D^2) = \sum_{q=1}^n P(A_j | D_q^2) I_{D_q^2},$$

ამიტომ გვაქვს:

$$E[P(A_j | D^2) | D^1] = \sum_{q=1}^n P(A_j | D_q^2) P(D_q^2 | D^1) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{q=1}^n P(A_j | D_q^2) \left[\sum_{p=1}^m P(D_q^2 | D_p^1) I_{D_p^1} \right] = \\
 &= \sum_{p=1}^m I_{D_p^1} \sum_{q=1}^n P(A_j | D_q^2) P(D_q^2 | D_p^1) = \\
 &= \sum_{p=1}^m I_{D_p^1} \sum_{\{q: D_q^2 \subseteq D_p^1\}} P(A_j | D_q^2) P(D_q^2 | D_p^1) = \\
 &= \sum_{p=1}^m I_{D_p^1} \sum_{\{q: D_q^2 \subseteq D_p^1\}} \frac{P(A_j D_q^2)}{P(D_q^2)} \cdot \frac{P(D_q^2)}{P(D_p^1)} = \\
 &= \sum_{p=1}^m I_{D_p^1} P(A_j D_p^1) = P(A_j | D^1),
 \end{aligned}$$

რაც ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას. $\square$

იმ შემთხვევაში, როცა D დაყოფა წარმოქმნილია $\eta_1, \dots, \eta_m$ შემთხვევითი სიდიდეებით ($D = D_{\eta_1, \dots, \eta_m}$), პირობითი მათემატიკური ლოდინი $E(\xi | D_{\eta_1, \dots, \eta_m})$ აღინიშნება $E(\xi | \eta_1, \dots, \eta_m)$ სიმბოლური და მას ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის *პირობითი მათემატიკური ლოდინი* $\eta_1, \dots, \eta_m$ შემთხვევითი სიდიდეების მიმართ.

პირობითი მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ:

$$E(\xi | \eta) = E\xi. \quad (11)$$

გარდა ამისა, (8) თანაფარდობიდან გამომდინარე:

$$E(\eta | \eta) = \eta. \quad (12)$$

(11) თვისებას აქვს შემდეგი განზოგადოება: თუ ξ შემთხვევითი სიდიდე დამოუკიდებელია D დაყოფისაგან (ე. ი. D დაყოფის ნებისმიერი D_i ატომისათვის ξ და I_{D_i} შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია), მაშინ

$$E(\xi | D) = E\xi.$$

„ტელესკოპური“ თვისებიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ

$$E[E(\xi | \eta_1, \eta_2) | \eta_1] = E[\xi | \eta_1].$$

ამოცანა 1. ვაჩვენოთ, რომ

$$\inf_f E[\eta - f(\xi)]^2 = E[\eta - E(\eta | \xi)]^2.$$

მაგალითი 2. მაგალით 1-ში განხილული ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებისათვის გამოვთვალოთ $E(\xi + \eta | \eta)$.

(11) და (12) თანაფარდობებიდან გამომდინარე, გვაქვს:

$$E(\xi + \eta | \eta) = E\xi + \eta = p + \eta.$$

აღსანიშნავია, რომ ამ შედეგის მიღება შესაძლებელია (3) თანაფარდობიდან გამომდინარე:

$$\begin{aligned} E(\xi + \eta | \eta) &= \sum_{k=0}^2 kP(\xi + \eta = k | \eta) = \\ &= p(1 - \eta) + q\eta + 2p\eta = p + \eta. \quad \square \end{aligned}$$

მაგალითი 3. დავუშვათ, ξ და η დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ:

$$E(\xi | \xi + \eta) = E(\eta | \xi + \eta) = (\xi + \eta) / 2. \quad (13)$$

მართლაც, სიმარტივისათვის თუ ვიგულისხმებთ, რომ ξ და η ლებულობენ მნიშვნელობებს $1, 2, \dots, m$, მაშინ ვლებულობთ, რომ $(1 \leq k \leq m, 2 \leq l \leq 2m)$:

$$\begin{aligned} &= \sum_{q=1}^n P(A_j | D_q^2) \left[\sum_{p=1}^m P(D_q^2 | D_p^1) I_{D_p^1} \right] = \\ &= \sum_{p=1}^m I_{D_p^1} \sum_{q=1}^n P(A_j | D_q^2) P(D_q^2 | D_p^1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{p=1}^m I_{D_p^1} \sum_{\{q: D_q^2 \subseteq D_p^1\}} P(A_j | D_q^2) P(D_q^2 | D_p^1) = \\
 &= \sum_{p=1}^m I_{D_p^1} \sum_{\{q: D_q^2 \subseteq D_p^1\}} \frac{P(A_j D_q^2)}{P(D_q^2)} \cdot \frac{P(D_q^2)}{P(D_p^1)} = \\
 &= \sum_{p=1}^m I_{D_p^1} P(A_j D_p^1) = P(A_j | D^1),
 \end{aligned}$$

ამით ნაჩვენებია (13) თანაფარდობის პირველი ნაწილი. მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned}
 2E(\xi | \xi + \eta) &= E(\xi | \xi + \eta) + E(\eta | \xi + \eta) = \\
 &= E(\xi + \eta | \xi + \eta) = \xi + \eta. \quad \square
 \end{aligned}$$

პანსაზღვრა 3. ξ შემთხვევითი სიდიდის **პირობითი დისპერსია** D დაყოფის მიმართ ეწოდება შემთხვევით სიდიდეს:

$$D(\xi | D) = E\{[\xi - E(\xi | D)]^2 | D\}.$$

ამოცანა 2. ვაჩვენოთ, რომ

$$D\xi = E[D(\xi | D)] + D[E(\xi | D)].$$

ამოცანა 3. თუ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \tau$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, ამასთანავე $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ შემთხვევითი სიდიდეები ერთნაირადაა განაწილებული, ხოლო τ ლეზულობს მნიშვნელობებს $1, 2, \dots, n$, მაშინ შემთხვევით სიდიდეთა შემთხვევითი რაოდენობის $S_\tau = \xi_1 + \dots + \xi_\tau = (\xi_1 + \dots + \xi_k) I_{\{\tau=k\}}$ ჯამისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობებს:

- ა) $E(S_\tau | \tau) = \tau E\xi_1$;
- ბ) $D(S_\tau | \tau) = \tau D\xi_1$;
- გ) $ES_\tau = E\tau \cdot E\xi_1$;
- დ) $DS_\tau = E\tau \cdot D\xi_1 + D\tau \cdot (E\xi_1)^2$.

დამატება III

ზღვარიტი თეორემაჰი ბერნულის სქემისათჱვის

სამეულს (Ω, F, P) , სადაც $\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i = 0, 1\}$,
 $F = \{A : A \subseteq \Omega\}$, $p(\omega) = p^{\sum a_i} q^{n - \sum a_i}$, უწოდებენ ალბათურ მო-
 დელს, რომელიც შეესაბამება n დამოუკიდებელ ცდას ორი შედე-
 გით, ანუ ბერნულის სქემას. ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით ბერნულის
 სქემის ზოგიერთ ზღვრულ თვისებას.

შემოვიღოთ შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ შემდეგნაი-
 რად: $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ელემენტარული ხდომილობისათვის განვ-
 მარტოთ $\xi_i(\omega) := a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. მივიღებთ ბერნულის დამოუ-
 კიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას: $P\{\xi_i = 1\} = p$,
 $P\{\xi_i = 0\} = q$, $i = 1, 2, \dots, n$. გასაგებია, რომ ξ_i შემთხვევითი სი-
 დიდე ახასიათებს i -ური ცდის შედეგს. დაეუშვათ, $S_0(\omega) := 0$ და
 $S_k = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

როგორც ცნობილია: $ES_n = np$. შესაბამისად,

$$E(S_n / n) = p.$$

ე. ი. „წარმატების“ ფარდობითი სიხშირის საშუალო მნიშვნელ-
 ობა ემთხვევა „წარმატების“ ალბათობას. იბადება კითხვა: რამდენად
 დიდია გადახრა S_n / n „წარმატების“ ფარდობითი სიხშირისა მისი p
 ალბათობისგან? ამასთან დაკავშირებით შევაფასოთ

$\{\omega: |\frac{S_n(\omega)}{n} - p| > \varepsilon\}$ ხდომილობის ალბათობა. მოვიყვანოთ ერთი დამხმარე შედეგი:

ჩეხოვიჩის უტოლობა. თუ ξ არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}. \quad (1)$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ

$$\xi = \xi I_{\{\xi \geq \varepsilon\}} + \xi I_{\{\xi < \varepsilon\}} \geq \xi I_{\{\xi \geq \varepsilon\}} \geq \varepsilon I_{\{\xi \geq \varepsilon\}}.$$

ამიტომ მათემატიკური ლოდინის თვისებებიდან გამომდინარე, გვაქვს:

$$E\xi \geq \varepsilon E I_{\{\xi \geq \varepsilon\}} = \varepsilon P\{\xi \geq \varepsilon\},$$

რაც ამტკიცებს (1) თანაფარდობას. $\square$

შედეგები. თუ ξ ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის სამართლიანია შეფასებები:

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon}, \quad P\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq P\{\xi^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{E\xi^2}{\varepsilon^2} \text{ და} \\ P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \quad (2)$$

ავიღოთ $\xi = S_n / n$. მაშინ თუ ვისარგებლებთ (2) შეფასებითა და დისპერსიის თვისებებით, მივიღებთ:

$$P\{\omega: |\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(S_n / n)}{\varepsilon^2} = \frac{DS_n}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{npq}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

საიდანაც ჩანს, რომ დიდი n -ებისათვის ალბათობა იმისა, რომ S_n/n „წარმატების“ ფარდობითი სიხშირე მისი p ალბათობისგან ε -ზე მეტით გადაიხრება, საკმაოდ მცირეა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $P_n(k) := C_n^k p^k q^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 1$. მაშინ

$$P\{\omega: |\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon\} = \sum_{\{k: |\frac{k}{n} - p| \geq \varepsilon\}} P_n(k),$$

და, მაშასადამე, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ

$$\sum_{\{k: |\frac{k}{n} - p| \geq \varepsilon\}} P_n(k) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}. \quad (3)$$

ცხადია, უკანასკნელი უტოლობის მიღება შესაძლებელია ალბათური ინტერპრეტაციის გარეშეც. (3)-დან ნათელია, რომ:

$$\sum_{\{k: |\frac{k}{n} - p| \geq \varepsilon\}} P_n(k) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

(4) ტიპის მტკიცებულებებს უწოდებენ **ბერნულის დიდ რიცხვთა კანონს**. სანამ მოვიყვანდეთ ზუსტ ფორმულირებასა და დამტკიცებას, გავარკვიოთ დიდ რიცხვთა კანონის რეალური შინაარსი, როგორია მისი ემპირიული ინტერპრეტაცია.

დავუშვათ, რომ ტარდება ექსპერიმენტი საერიების დიდი რაოდენობა N , რომელთაგან თითოეული შედგება n დამოუკიდებელი ცდისაგან, სადაც ჩვენთვის საინტერესო A ხდომილობის ალბათობაა p . დავუშვათ i -ურ სერიასი A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირეა S_n^i/n , ხოლო N_ε იყოს იმ სერიათა რაოდენობა, სადაც S_n^i/n -ის გადახრა p -საგან ნაკლებია, ვიდრე ε : N_ε ტოლია იმ i -ების რაოდენობის, რომელთათვისაც: $|\frac{S_n^i}{n} - p| \leq \varepsilon$. ამიტომ

$$\frac{N_\varepsilon}{N} \sim P_\varepsilon, \quad (5)$$

სადაც $P_\varepsilon = P\{|\frac{S_n^1}{n} - p| \leq \varepsilon\}$.

უნდა აღინიშნოს, რომ (5) თანაფარდობის დასაზუსტებლად აუცილებელია გარკვეული ალბათური ზომის გამოყენება, ისევე როგორც S_n/n სიხშირის p ალბათობისგან გადახრის შეფასება შესაძლებელია თურმე მხოლოდ P ალბათური ზომის გამოყენების შემდეგ.

დავსვათ ახლა მათემატიკური სტატისტიკისათვის ტიპური შემდეგი კითხვა: როგორია დაკვირვებათა უმცირესი გარანტირებული რიცხვი n , რომლისთვისაც (ნებისმიერი $0 < p < 1$) შესრულდება თანაფარდობა

$$P\{\omega: |\frac{S_n}{n} - p| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \alpha, \quad (6)$$

სადაც α მოცემული მცირე რიცხვია?

ზემოთ მიღებული შეფასებების თანახმად გვაქვს:

$$P\{\omega: |\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon\} = \sum_{\{k: |\frac{k}{n} - p| \geq \varepsilon\}} P_n(k) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}, \quad (7)$$

საიდანაც გამოდის, რომ ასეთი რიცხვია უმცირესი მთელი n , რომლისთვისაც

$$n \geq 1/(n\varepsilon^2\alpha). \quad (8)$$

მაგალითად, თუ $\alpha = 0,05$ და $\varepsilon = 0,02$, მაშინ 12500 დაკვირვება იძლევა (6) უტოლობის შესრულების გარანტიას დამოუკიდებლად უცნობი p პარამეტრის მნიშვნელობისგან. ქვემოთ ჩვენ ვნახავთ, რომ დაკვირვებათა ეს რაოდენობა საკმაოდ გადამეტებულია, რაც აიხსნება იმით, რომ ჩებიშევის უტოლობა იძლევა

$P\{\omega: |\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon\}$ ალბათობის მეტისმეტად უხეშ შეფასებას ზემოდან.

აღვნიშნოთ $C(n, \varepsilon) = \{\omega: |\frac{S_n(\omega)}{n} - p| \leq \varepsilon\}$. (7) თანაფარდო-

ბიდან ჩანს, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის საკმაოდ დიდი n -სათვის $C(n, \varepsilon)$ სიმრავლეთა ალბათობები ახლოსაა ერთთან. ამ აზრით, ω ტრაექტორიებს (რეალიზაციებს) $C(n, \varepsilon)$ -დან ბუნებრივია, ეწოდოს *ტიპურები* (ან (n, ε) ტიპურები). დავსვათ შემდეგი კითხვა: როგორია ტიპური რეალიზაციების რაოდენობა და თითოეული ტიპური რეალიზაციის $p(\omega)$ წონა?

შევნიშნოთ, რომ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის წერტილთა საერთო რაოდენობა $N(\Omega) = 2^n$ და თუ $p = 0$ ან 1 -ს, მაშინ ტიპურ ტრაექტორიათა სიმრავლე $C(n, \varepsilon)$ შედგება მხოლოდ ერთი ტრაექტორიისაგან $(0, 0, \dots, 0)$ ან $(1, 1, \dots, 1)$. მაგრამ თუ $p = 1/2$, მაშინ ინტუიციურად გასაგებია, რომ „თითქმის ყველა“ ტრაექტორია (გარდა $(0, 0, \dots, 0)$ ან $(1, 1, \dots, 1)$) იქნება ტიპური და, შესაბამისად, მათი რაოდენობა ახლოს უნდა იყოს 2^n -თან.

აღმოჩნდა, რომ დასმულ კითხვაზე პასუხის გაცემა შეიძლება ნებისმიერი $0 < p < 1$. ამასთანავე, როგორც ტიპური რეალიზაციების რიცხვი, ისე მათი $p(\omega)$ წონები განისაზღვრება ე. წ. ენტროპიის საშუალებით.

$(p, 1-p)$ განაწილების *ენტროპია* ეწოდება სიდიდეს:

$$H := -p \ln p - (1-p) \ln(1-p), \quad (9)$$

სადაც $0 \cdot \ln 0 = 0$. ცხადია, რომ $H \geq 0$, ამასთანავე $H = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $p = 0$ ან 1 . ფუნქცია $f(x) = -x \ln x$, $0 \leq x \leq 1$ ამოზნექილია ზემოდან და კარგად ცნობილია, რომ ამოზნექილი ფუნქციებისათვის:

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

შესაბამისად,

$$H := -p \ln p - (1-p) \ln(1-p) \leq -2 \cdot \frac{p+1-p}{2} \cdot \ln\left(\frac{p+1-p}{2}\right) = \ln 2.$$

ე.ი. ენტროპია აღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას, როცა $p = 1-p = 1/2$.

თუ $(p, 1-p)$ ალბათობების განაწილებას განვიხილავთ როგორც რაიმე A_1 და A_2 (ცხადია, რომ $A_2 = \overline{A_1}$) ხდომილობების მოხდენის ალბათობებს, მაშინ სავსებით გასაგებია, რომ ამა თუ იმ ხდომილობის მოხდენის „განუზღვრელობის ხარისხი“ განსხვავებულია სხვადასხვა განაწილების დროს. მაგალითად, თუ $p = 1$ (შესაბამისად, $1-p = 0$), მაშინ გასაგებია, რომ ასეთი განაწილებას არ გააჩნია არანაირი განუზღვრელობა: დარწმუნებით შეიძლება ითქვას, რომ ცდის შედეგად მოხდება A_1 ხდომილობა. მაგრამ, თუკი $p = 1-p = 1/2$, მაშინ ასეთ განაწილებას გააჩნია მაქსიმალური განუზღვრელობა იმ აზრით, რომ არც ერთი ხდომილობის მოხდენას არ შეიძლება მიენიჭოს უპირატესობა. შესაბამისად, მნიშვნელოვანია გვეჩვენოს სხვადასხვა განაწილებების განუზღვრელობის ხარისხის რაოდენობრივი მახასიათებელი, რაც მათი შედარების საშუალებას მოგვცემდა. სწორედ ასეთი მოხერხებული მახასიათებელი აღმოჩნდა ენტროპია, რომელიც მნიშვნელოვან როლს ასრულებს სტატისტიკურ მექანიკაში და კოდირებისა და კავშირგაბმულობის ამოცანებში.

ისევ ვიგულისხმობ, რომ:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i = 0, 1\}, p(\omega) = p_1^{v_1} p_2^{v_2},$$

სადაც $p_1 = p$, $p_2 = 1-p$; v_1 (შესაბამისად, v_2) არის 1-ების (შესაბამისად, 0-ების) რაოდენობა ω -ში.

როცა $\varepsilon > 0$ და $n = 1, 2, \dots$, შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$C(n, \varepsilon) = \{\omega : |\frac{\nu_i(\omega)}{n} - p_i| < \varepsilon, \quad i = 1, 2\}.$$

ცხადია, რომ

$$P(C(n, \varepsilon)) \geq 1 - \sum_{i=1}^2 P\{|\frac{\nu_i(\omega)}{n} - p_i| \geq \varepsilon\},$$

და საკმაოდ დიდი n -ებისათვის, დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად, რომელიც გამოყენებულია

$$\xi_k(\omega) = 1 \cdot I_{\{a_k=i\}} + 0 \cdot I_{\{a_k \neq i\}}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

შემთხვევითი სიდიდეებისათვის, $P\{\omega : |\frac{\nu_i(\omega)}{n} - p_i| \geq \varepsilon\}$ ალბათო-

ბები საკმაოდ მცირეა. შესაბამისად, დიდი n -ებისათვის $C(n, \varepsilon)$ ხდომილობების ალბათობები ახლოსაა ერთთან. ამიტომ $C(n, \varepsilon)$ ხდომილებებში შემავალი ტრაექტორიები ტიპურია.

თუ ყველა $p_i > 0$, მაშინ ნებისმიერი ω -ს, $\omega \in \Omega$, წონა იქნება

$$p(\omega) = \exp\{-n \sum_{i=1}^2 (-\frac{\nu_i(\omega)}{n} \ln p_i)\}.$$

ამიტომ, თუ ω ტიპური ტრაექტორიაა, მაშინ (9) თანაფარდობის ძალით:

$$|\sum_{i=1}^2 (-\frac{\nu_i(\omega)}{n} \ln p_i) - H| \leq -\sum_{i=1}^2 |\frac{\nu_i(\omega)}{n} - p_i| \ln p_i \leq -\varepsilon \sum_{i=1}^2 \ln p_i.$$

აქედან გამოდის, რომ ტიპური ტრაექტორიებისათვის $p(\omega)$ ალბათობები ახლოსაა e^{-nH} რიცხვთან და ვინაიდან დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად დიდი n -ებისათვის ტიპური ტრაექტორიები „თითქმის“ ამოწურავენ Ω -ს, ამიტომ ასეთი ტრაექტორიების რაოდენობა უნდა იყოს e^{nH} -ის რიგის. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა (მაკმილანი). თუ $p_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, და $0 < \varepsilon < 1$, მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვი $n_0 = n_0(\varepsilon; p_1, \dots, p_r)$, რომ როცა $n > n_0$:

$$ა) \exp\{n(H - \varepsilon)\} \leq N(C(n, \varepsilon_1)) \leq \exp\{n(H + \varepsilon)\},$$

$$ბ) \exp\{-n(H + \varepsilon)\} \leq p(\omega) \leq \exp\{-n(H - \varepsilon)\}, \omega \in C(n, \varepsilon_1),$$

$$გ) P(C(n, \varepsilon_1)) = \sum_{\omega \in C(n, \varepsilon_1)} p(\omega) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty,$$

სადაც

$$\varepsilon_1 = \min(\varepsilon, \varepsilon(-2 \sum_{k=1}^r \ln p_k)^{-1}).$$

ბოლოს აღვნიშნავთ, რომ დიდ რიცხვთა კანონი ბერნულის სქემისათვის საშუალებას იძლევა, მარტივად და ლამაზად დავამტკიცოთ ვეიერშტრასის ცნობილი თეორემა უწყვეტი ფუნქციის პოლინომებით თანაბარი მიახლოების შესახებ.

დავუშვათ, რომ $f = f(p)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[0, 1]$ სეგმენტზე. შემოვიტანოთ პოლინომები:

$$B_n(p) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq p \leq 1, n \geq 0, \quad (10)$$

რომლებსაც **ბერნშტეინის პოლინომები** ეწოდება ქვემოთ მოყვანილი დამტკიცების ავტორის საპატივცემულოდ.

თუ $\xi_1, \dots, \xi_n$ ბერნულის დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა: $P\{\xi_i = 1\} = p$, $P\{\xi_i = 0\} = q$ და $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, მაშინ

$$Ef(S_n / n) = B_n(p).$$

ვინაიდან $[0, 1]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f = f(p)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის მოიძებნება ისეთი

$\delta > 0$, რომ თუ $|x - y| \leq \delta$, მაშინ $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. ცხადია აგრეთვე, რომ ასეთი ფუნქცია შემოსაზღვრულია $|f(x)| \leq M < \infty$. ყოველივე ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, (3) შეფასების გათვალისწინებით, გვაქვს:

$$\begin{aligned} |f(p) - B_n(p)| &= \left| \sum_{k=0}^n [f(p) - f(\frac{k}{n})] C_n^k p^k q^{n-k} \right| \leq \\ &\leq \sum_{\{k: |\frac{k}{n} - p| \leq \delta\}} |f(p) - f(\frac{k}{n})| C_n^k p^k q^{n-k} + \\ &+ \sum_{\{k: |\frac{k}{n} - p| > \delta\}} |f(p) - f(\frac{k}{n})| C_n^k p^k q^{n-k} \leq \\ &\leq \varepsilon + 2M \sum_{\{k: |\frac{k}{n} - p| > \delta\}} C_n^k p^k q^{n-k} \leq \varepsilon + \frac{2M}{4n\delta^2} = \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}. \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ბერნშტეინის (10) პოლინომებისათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq p \leq 1} |f(p) - B_n(p)| = 0,$$

რაც წარმოადგენს სწორედ ვეიერშტრასის თეორემის მტკიცებულებას. $\square$

ახლა გადავიდეთ ზღვართი თეორემების დამტკიცებაზე.

ისევ ვიგულისხმობთ, რომ $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. მაშინ

$$E(S_n / n) = p \quad (11)$$

და $DS_n = npq$. ამიტომ

$$E\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2 = \frac{pq}{n}. \quad (12)$$

(11) ფორმულიდან გამოდის, რომ $S_n / n \sim p$, სადაც ეკვივალენტობის ნიშანმა მიიღო ზუსტი ინტერპრეტაცია დიდ რიცხვთა კანონში $P\{\omega : |\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon\}$ ალბათობის შეფასების საშუალებით. შესაბამისად, ბუნებრივია ახლა (12)-დან თავისთავად გამომდინარე „თანაფარდობას“:

$$|\frac{S_n}{n} - p| \sim \sqrt{\frac{pq}{n}} \quad (13)$$

მივცეთ ზუსტი ალბათური შინაარსი, რისთვისაც უნდა განვიხილოთ, მაგალითად, შემდეგი ტიპის ალბათობები:

$$P\{|\frac{S_n}{n} - p| \leq x \sqrt{\frac{pq}{n}}\}, \quad x \in R^1,$$

ან, რაც იგივეა, ალბათობები:

$$P\{|\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}| \leq x\}.$$

ჩვენს აღნიშვნებში, ცხადია, რომ

$$P\{|\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}| \leq x\} = \sum_{\{k: |\frac{k - np}{\sqrt{npq}}| \leq x\}} P_n(k). \quad (14)$$

შესაბამისად, ჩვენ უნდა მოვძებნოთ მოხერხებული ასიმპტოტური ფორმულები $P_n(k)$ ალბათობებისა და მათი ჯამებისათვის იმ k -ებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (14)-ის მარჯვენა ნაწილის პირობებს (კერძოდ, $|k - np| = O(\sqrt{npq})$), როცა $n \rightarrow \infty$. უფრო ზოგად პირობებში სამართლიანია შემდეგი:

ლოკალური ზღვარიანი თეორემა. თუ $0 < p < 1$, მაშინ თანაბრად ყველა იმ k -ების მიმართ, რომელთათვისაც $|k - np| = o(npq)^{2/3}$ სამართლიანია თანაფარდობა:

$$P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}, \quad (15)$$

ე. ი.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{k: |k-np| \leq \varphi(n)\}} \left| \frac{P_n(k)}{e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} / \sqrt{2\pi npq}} - 1 \right| = 0, \quad (16)$$

სადაც $\varphi(n)$ ნებისმიერი არაუარყოფითი ფუნქციაა, ისეთი, რომ $\varphi(n) = o(npq)^{2/3}$.

დამტკიცება. ვისარგებლოთ სტირლინგის ფორმულით:

$$n! = \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n (1 + R(n)),$$

სადაც $R(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. მაშინ როცა $n \rightarrow \infty$ და $k \rightarrow \infty$ ისე, რომ $n - k \rightarrow \infty$ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\begin{aligned} C_m^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n}{\sqrt{2\pi k} \cdot \sqrt{2\pi(n-k)} e^{-k} k^k e^{-(n-k)} (n-k)^{n-k}} \times \\ &\times \frac{1 + R(n)}{(1 + R(k))(1 + R(n-k))} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \frac{k}{n} (1 - \frac{k}{n})}} \cdot \frac{1 + \varepsilon(n, k, n-k)}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k}}, \end{aligned}$$

სადაც გასაგებია, რომ $\varepsilon = \varepsilon(n, k, n-k) \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, $n - k \rightarrow \infty$.

ამიტომ

$$P_n(k) := C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \frac{k}{n} (1 - \frac{k}{n})}} \cdot \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{(\frac{k}{n})^k (1 - \frac{k}{n})^{n-k}} (1 + \varepsilon).$$

აღვნიშნოთ $\hat{p} = k/n$. მაშინ

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \hat{p}(1-\hat{p})}} \left(\frac{\hat{p}}{p}\right)^k \left(\frac{1-\hat{p}}{1-p}\right)^{n-k} (1 + \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \hat{p}(1-\hat{p})}} \exp\left\{k \ln \frac{\hat{p}}{p} + (n-k) \ln \frac{1-\hat{p}}{1-p}\right\} \cdot (1 + \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \hat{p}(1-\hat{p})}} \exp\left\{n\left[\frac{k}{n} \ln \frac{\hat{p}}{p} + \left(1 - \frac{k}{n}\right) \ln \frac{1-\hat{p}}{1-p}\right]\right\} \cdot (1 + \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \hat{p}(1-\hat{p})}} \exp\{-nH(\hat{p})\} \cdot (1 + \varepsilon), \end{aligned}$$

სადაც

$$H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p}.$$

ვინაიდან $|k - np| = o(npq)^{2/3}$, ცხადია, რომ $p - \hat{p} \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$.

მეორე მხრივ, როცა $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \ln \frac{x}{p} - \ln \frac{1-x}{1-p}, \quad H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}, \\ H'''(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

⇒ ო.ფურთუხია ⇐

ამიტომ, თუ წარმოვადგენთ $H(\hat{p})$ -ს როგორც $H(p + (\hat{p} - p))$ -ს და გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას, მაშინ საკმაოდ დიდი n -ებისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} H(\hat{p}) &= H(p) + H'(p)(\hat{p} - p) + \frac{1}{2}H''(p)(\hat{p} - p)^2 + O(|\hat{p} - p|^3) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(\hat{p} - p)^2 + O(|\hat{p} - p|^3). \end{aligned}$$

შესაბამისად,

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \hat{p}(1-\hat{p})}} \exp\left\{-\frac{n}{2pq}(\hat{p} - p)^2 + nO(|\hat{p} - p|^3)\right\}(1 + \varepsilon).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ:

$$\frac{n}{2pq}(\hat{p} - p)^2 = \frac{n}{2pq}\left(\frac{k}{n} - p\right)^2 = \frac{(k - np)^2}{2npq},$$

მივიღებთ:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} (1 + \varepsilon'(n, k, n-k)),$$

სადაც

$$1 + \varepsilon'(n, k, n-k) = (1 + \varepsilon(n, k, n-k)) e^{nO(|\hat{p} - p|^3)} \sqrt{\frac{p(1-p)}{\hat{p}(1-\hat{p})}}$$

და, როგორც ადვილი დასანახია

$$\sup |\varepsilon'(n, k, n-k)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

თუ სუპრემუმი აღებულია იმ k -ებით, რომელთათვისაც

$$|k - np| \leq \varphi(n), \quad \varphi(n) = o(npq)^{2/3}.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

პიკეტი. თუ $x = o(npq)^{1/6}$, ხოლო $np + x\sqrt{npq}$ მთელი რიცხვებია სიმრავლიდან $\{0, 1, \dots, n\}$, მაშინ

$$P_n(np + x\sqrt{npq}) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2}, \quad (17)$$

ანუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{x: |x| \leq \psi(n)\}} \left| \frac{P_n(np + x\sqrt{npq})}{e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi npq}} - 1 \right| = 0, \quad (18)$$

სადაც $\psi(n) = o(npq)^{1/6}$.

ალბათურ ენაზე მიღებული შედეგები შემდეგნაირად ფორმულირდება:

$$P\{S_n = k\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2}, \quad |k - np| = o(npq)^{2/3}, \quad (19)$$

$$P\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = x\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2}, \quad x = o(npq)^{1/6}, \quad (20)$$

სადაც $np + x\sqrt{npq} \in \{0, 1, \dots, n\}$.

$$\text{შემოვიღოთ აღნიშვნები } t_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \text{ და } \Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

მაშინ (20) თანაფარდობა მიიღებს სახეს:

$$P\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = x\right\} \sim \frac{\Delta t_k}{\sqrt{2\pi}} e^{-t_k^2/2}, \quad t_k = o(npq)^{1/6}. \quad (21)$$

ცხადია, რომ $\Delta t_k = \frac{1}{\sqrt{npq}} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ და $\{t_k\}$ ნერტილების

სიმრავლე „ავსებს“ რიცხვით ღერძს. ამიტომ, ბუნებრივია, ვიფიქროთ, რომ (21) თანაფარდობა შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი „ინტეგრალური“ ფორმულის მისაღებად:

$$P\left\{a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx, \quad -\infty < a \leq b < \infty.$$

აღვნიშნოთ $P_n(a, b] = \sum_{a < x \leq b} P_n(np + x\sqrt{npq})$, სადაც აჯამება ხდება

იმ X -ებით, რომელთათვისაც $np + x\sqrt{npq}$ მთელი რიცხვებია.

ლოკალური თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $k = np + t_k\sqrt{npq}$

ტოლობიდან განსაზღვრული იმ t_k -ებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $-|t_k| \leq T < \infty$ სამართლიანია თანაფარდობა:

$$P_n(np + t_k\sqrt{npq}) = \frac{\Delta t_k}{\sqrt{2\pi}} e^{-t_k^2/2} [1 + \varepsilon(t_k, n)],$$

სადაც $\sup_{|t_k| \leq T} |\varepsilon(t_k, n)| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. შესაბამისად, ფიქსირებული a

და b -სათვის, $-T \leq a \leq b \leq T$, სადაც $T < \infty$, გვაქვს:

$$\begin{aligned} \sum_{a < t_k \leq b} P_n(np + t_k\sqrt{npq}) &= \\ &= \sum_{a < t_k \leq b} \frac{\Delta t_k}{\sqrt{2\pi}} e^{-t_k^2/2} + \sum_{a < t_k \leq b} \varepsilon(t_k, n) \frac{\Delta t_k}{\sqrt{2\pi}} e^{-t_k^2/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx + R_n^{(1)}(a, b) + R_n^{(2)}(a, b), \end{aligned}$$

სადაც

$$R_n^{(1)}(a, b) = \sum_{a < t_k \leq b} \frac{\Delta t_k}{\sqrt{2\pi}} e^{-t_k^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx,$$

$$R_n^{(2)}(a, b) = \sum_{a < t_k \leq b} \varepsilon(t_k, n) \frac{\Delta t_k}{\sqrt{2\pi}} e^{-t_k^2/2}.$$

ინტეგრალური ჯამების ცნობილი თვისებების თანახმად:

$$\sup_{-T \leq a \leq b \leq T} |R_n^{(1)}(a, b)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

აქედან გამომდინარე, ცხადია, აგრეთვე, რომ:

$$\begin{aligned} \sup_{-T \leq a \leq b \leq T} |R_n^{(2)}(a, b)| &\leq \sup_{|t_k| \leq T} |\varepsilon(t_k, n)| \cdot \sum_{|t_k| \leq T} \frac{\Delta t_k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_k^2}{2}} \leq \\ &\leq \sup_{|t_k| \leq T} |\varepsilon(t_k, n)| \times \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-x^2/2} dx + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{-T \leq a \leq b \leq T} |R_n^{(1)}(a, b)| \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

ვინაიდან

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1. \quad (24)$$

აღვნიშნოთ

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

(21) – (23) თანაფარდობებიდან გამომდის, რომ:

$$\sup_{-T \leq a \leq b \leq T} |P_n(a, b) - (\Phi(b) - \Phi(a))| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

გადავიდეთ ახლა სასრული T -დან უსასრულო ($T = \infty$) შემთხვევაზე. (24)-ის ძალით მოცემული $\varepsilon > 0$ -სათვის მოიძებნება ისეთი სასრული $T = T(\varepsilon)$, რომ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-x^2/2} dx > 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \quad (26)$$

ხოლო (25)-ის თანახმად, მოიძებნება ისეთი N , რომ ყოველი $n > N$ და $T = T(\varepsilon)$:

$$\sup_{-T \leq a \leq b \leq T} |P_n(a, b) - (\Phi(b) - \Phi(a))| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (27)$$

აქედან და (26)-დან გამოდის, რომ $P_n(-T, T] > 1 - \varepsilon/2$, და მასადაამე,

$$P_n(-\infty, -T] + P_n(T, \infty] \geq \varepsilon/2,$$

სადაც $P_n(-\infty, T] = \lim_{S \downarrow -\infty} P_n(S, T]$ და $P_n(T, \infty] = \lim_{S \uparrow \infty} P_n(S, T]$.

მიღებული თანაფარდობების გაერთიანებით, ნებისმიერი $-\infty \leq -T \leq a \leq b \leq T \leq \infty$ ვლელბულობთ, რომ:

$$\begin{aligned} & |P_n(a, b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx| \leq |P_n(-T, T] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-x^2/2} dx| + \\ & + |P_n(a, -T] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{-T} e^{-x^2/2} dx| + |P_n(T, b] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T^b e^{-x^2/2} dx| \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{4} + P_n(-\infty, -T] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-T} e^{-x^2/2} dx + P_n(T, \infty] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T^{\infty} e^{-x^2/2} dx \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ

მუხრ-ლაპლასის ინტეგრალური თეორემა. თუ $0 < p < 1$,
 $P_n(k) := C_n^k p^k q^{n-k}$ და $P_n(a, b) := \sum_{a < x \leq b} P_n(np + x\sqrt{npq})$. მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\infty \leq a < b \leq \infty} |P_n(a, b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx| = 0. \quad (28)$$

(28) თანაფარდობა ალბათურ ენაზე ფორმულირდება შემდეგნაირად:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\infty \leq a < b \leq \infty} |P\{a < \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} \leq b\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx| = 0, \quad (29)$$

საიდანაც, თავის მხრივ, ცხადია, რომ

$$P\{A < S_n \leq B\} - [\Phi(\frac{B - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{A - np}{\sqrt{npq}})] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ლოკალური თეორემა გვიჩვენებს, რომ $P_n(np + x\sqrt{npq})$ ალბათობები, როცა $x = o(npq)^{1/6}$ კარგად „ლაგდება“ $\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2}$

წირზე, ხოლო ინტეგრალური თეორემა გვეუბნება, რომ

$$\begin{aligned} P_n(a, b) &= P\{a\sqrt{npq} < S_n - np \leq b\sqrt{npq}\} = \\ &= P\{np + a\sqrt{npq} < S_n \leq np + b\sqrt{npq}\} \end{aligned}$$

ალბათობა კარგად აპროქსიმირდება ინტეგრალით $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$.

აღვნიშნოთ $F_n(x) = P_n(-\infty, x] = P\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\}$. მაშინ (28)-ის

თანახმად

$$\sup_{-\infty \leq x \leq \infty} |F_n(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (30)$$

ცნობილია, რომ (იხ. **ბერი-ესენის თეორემა** ([47], § 1.6):

$$\sup_{-\infty \leq x \leq \infty} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}.$$

აქვე შევნიშნავთ, რომ შეფასების $1/\sqrt{npq}$ რიგი არ უმჯობესდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ $F_n(x)$ ფუნქციების აპროქსიმაცია $\Phi(x)$ ფუნქციით შეიძლება იყოს ცუდი p -ს იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც ახლოს არიან ნულთან ან ერთთან. ეს აიხსნება იმით, რომ p -ს პატარა მნიშვნელობებისათვის ბინომიალური განაწილება ხდება ასიმეტრიული. აღმოჩნდა, რომ p -ს პატარა მნიშვნელობებისათვის $\{P_n(k)\}$ ალბათობებისათვის კარგ აპროქსიმაციას იძლევა ე. წ. პუასონის განაწილება.

დავუშვათ, რომ $P_n(k) := C_n^k p^k q^{n-k}$, თუ $k = 0, 1, \dots, n$ და $P_n(k) := 0$, თუ $k = n+1, n+2, \dots$ ვიგულისხმობთ, აგრეთვე, რომ p არის n -ის ფუნქცია $p = p(n)$.

პუასონის თეორემა. ვთქვათ, $p(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ ისე, რომ $np(n) \rightarrow \lambda$, სადაც $\lambda > 0$. მაშინ ნებისმიერი $k = 0, 1, \dots$:

$$P_n(k) \rightarrow \pi_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (31)$$

დამტკიცება. ვინაიდან დაშვების თანახმად $p(n) = \lambda/n + o(1/n)$, ამიტომ ნებისმიერი ფიქსირებული k -სათვის, $k = 0, 1, \dots$, და საკმაოდ დიდი n -ებისათვის

$$\begin{aligned} P_n(k) &= C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left[\frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k \times \\ &\times \left[1 - \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} [\lambda + O(1)]^k \times \\ &\times \left[1 - \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k} \rightarrow \frac{1}{k!} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

რიცხვთა ერთობლიობა $\{\pi_k, k = 0, 1, \dots\}$ ქმნის ალბათობების ე. წ. **პუასონის განაწილებას**. კრებადობის სიჩქარის შესახებ მოვიყვანოთ **პროხოროვის შედეგი** (იხ. [49], § 1.6): თუ $np(n) = \lambda$, მაშინ

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_n(k) - \pi_k| \leq \frac{2\lambda}{n} \cdot \min(2, \lambda).$$

შევნიშნოთ, რომ დიდ რიცხვთა კანონის მიღება შეიძლება მუავრ-ლაპლასის თეორემიდანაც. მართლაც, ვინაიდან

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}\right| \leq \varepsilon \sqrt{\frac{pq}{n}}\right\},$$

ამიტომ (29) თანაფარდობის ძალით, $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის:

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{n/pq}}^{\varepsilon\sqrt{n/pq}} e^{-x^2/2} dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

საიდანაც
$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

გარდა ამისა,

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{n/pq}}^{\varepsilon\sqrt{n/pq}} e^{-x^2/2} dx, \quad n \rightarrow \infty,$$

⇒ *მ. ფურთუხია* ⇐

მაშინ როდესაც ჩებიშევის უტოლობა იძლეოდა მხოლოდ შემდეგ შეფასებას:

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

განვსაზღვროთ $k(\alpha)$ რიცხვი შემდეგი თანაფარდობიდან:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k(\alpha)}^{k(\alpha)} e^{-x^2/2} dx = 1 - \alpha,$$

მაშინ, ვინაიდან $\varepsilon\sqrt{n/pq} \geq 2\varepsilon\sqrt{n}$, თუ განვსაზღვრავთ უმცირეს მთელ n -ს უტოლობიდან: $2\varepsilon\sqrt{n} \geq k(\alpha)$, გვექნება

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \geq 1 - \alpha.$$

თუ ავიღებთ $\varepsilon = 0,02$ და $\alpha = 0,05$, დავინახავთ, რომ უკანასკნელი უტოლობის შესასრულებლად საკმარისია მხოლოდ 2500 დაკვირვება და არა 12500, როგორც ეს გამოდიოდა ჩებიშევის უტოლობიდან.

სიმბოლოები

$\square$ – დამტკიცების ან დებულების ფორმულირების დასასრული

$:=$ – ტოლია განმარტებით

$\equiv$ – იგივეურად ტოლია, ან განმარტებით ტოლია

$\perp$ – ორთოგონალურობის სიმბოლო

χ_A – A სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია

$\forall x$ – ნებისმიერი x -სათვის . . .

$\exists x$ – არსებობს ისეთი x . . .

$[x]$ – x -ის მთელი ნაწილი

$A \Rightarrow B$ – გამონათქვამი: თუ A მაშინ B

$x^- := -\min\{x, 0\}$

$x^+ := \max\{x, 0\}$

$a \wedge b := \min\{a, b\}$

$a \vee b := \max\{a, b\}$

1. $B(C)$ 19

2. $B^{(n)}$ 18

3. $B_n(p)$ 275

4. $B(R^1)$ 11

5. $B(X)$ 13

6. $C[0,1]$ 19

7. $\text{cov}(\xi^i, \xi^j)$ 30

8. $D([0, \infty))$ 83

9. $D\xi$ 38

10. $D(\xi | D)$ 267

11. $E(\xi | D)$ 261

12. $E(\xi | \eta_1, \dots, \eta_m)$ 265

13. $E[\xi | G]$ 50

14. $E[\xi | \eta]$ 57

15. $E[\xi | \eta = y]$ 57

16. $F_{t_1, \dots, t_n}$ 19

17. F_ξ 11

18. F_τ 66

19. If 154

20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ 44

21. $L_2(P)$ 42
22. $L_0(\mu)$ 43
23. $L_t(0)$ 201
24. $L_t u(x)$ 196
25. N_t 131
26. $N(m, R)$ 30
27. $P(A|D)$ 258
28. $P(A|\eta = y)$ 259
29. $P(A|\eta_1, \dots, \eta_m)$ 259
30. $P\xi^{-1}(B)$ 11
31. $P\text{-}\lim_{t \rightarrow t_0} \xi_t$ 80
32. P_η 57
33. Q_0 20
34. $R(t)$ 107
35. $S_r(x_0)$ 14
36. $tr\sigma\sigma^*$ 185
37. $Var_{[s,t]}w$ 39
38. w_t 130
39. (X^n, D^n) 18
40. $\int_B m(y)P_\eta(dy)$ 57
41. $\int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega)$ 12
42. $\beta_\xi(a, b)$ 72
43. $\kappa(t)$ 12
44. $\kappa_n(t)$ 55
45. $\Lambda(dx)$ 92
46. $\mu_n \Rightarrow \mu$ 17
47. $\mu \ll P$ 52
48. $\mu(t, dx)$ 94
49. $\xi_i \xrightarrow{L_1} \xi$ 55
50. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ 38
51. Π_G 58
52. $\pi_t(x)$ 20
53. $\rho_t(b)$ 207
54. $\rho(x, K)$ 15
55. $\rho(x, y)$ 19
56. $\sum(C)$ 19

$\xi \cong G$ -- ξ შემოსხვევითი ვექტორის განაწილებაა G .

გამოყენებული და რეკომენდებული ლიტერატურა

1. ბულონი პ., ტყეშუჩავა რ., ღლონტი ო. შემთხვევითი პროცესების თეორია (კურსი ეკონომისტებისათვის). "TEMPUS", 2002.
2. დოჭვირი ბ., მელაძე ჰ. ფინანსური მათემატიკა. თსუ, 2003.
3. ლაზრიევა ნ., მანია მ., მირზაშვილი გ., ტორონჯაძე თ., ღლონტი ო., ჯამბურია ლ. ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები. ფონდი "ევრაზია", თბილისი, 1999.
4. მანია გ. ალბათობის თეორიის კურსი. თსუ, თბილისი, 1962.
5. ნადარაია ე., აბსავა რ., ფაცაცია მ. ალბათობის თეორია. 2005.
6. ფურთუხია ო. ლექციათა კურსი ალბათობის თეორიის რჩეულ თავებში (ხელნაწერის უფლებით). თსუ, 1998.
7. ფურთუხია ო. ლექციათა კურსი შემთხვევით პროცესთა თეორიაში (ხელნაწერის უფლებით). თსუ, 2004.
8. ღლონტი ო. გამოკვლევები პირობით-გაუსურ შემთხვევით პროცესთა თეორიაში (რუსულ ენაზე). თბილისი, "მეცნიერება", 1985.
9. შერვაშიძე თ. ალბათობის თეორია. თსუ, თბილისი, 1980.
10. ხმალაძე ე. რვა ლექცია მათემატიკურ დემოგრაფიასა და სიცოცხლის დაზღვევაში. თბილისი. 2007.
11. Freedman D. Brownian motion and diffusion. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1983.
12. Kannan D. An introduction to stochastic processes. New York: Oxford, 1979.
13. Karatzas I., Shreeve S. Brownian motion and stochastic calculus. 2-nd ed. New York: Springer-Verlag, 2004.
14. Karlin S. and Taylor H. M. First course in stochastic processes, 2-nd ed. New York: Academic Press, 1975.
15. Krylov N.V. Introduction to the theory of diffusion processes. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1995.
16. McKean H.P. Jr. Stochastic integrals. New York: Academic Press, 1969.
17. Protter P. Stochastic integration and differential equations. New Approach. – Berlin: Springer-Verlag, 1990.

18. Rogers L.C.G., Williams D. Diffusion. Markov processes and martin-gales (1979-94, 1987). – V. 1. 2-nd ed. – and V. 2. – Chichester, Wiley.
19. Strook D.W. and Varadhan S. R. S. Multidimensional diffusion processes. New York: Springer-Verlag, 1979.
20. Watanabe S. On stochastic differential equations for multidimensional diffusion processes with boundary conditions. J. Math. Kyoto Univ., 1971, 11, 169-180.
21. Williams D. Probability and martingales. – Cambridge: Cambridge univ. Press, 1991.
22. Yamada T., Watanabe S. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. I, II. J. Math. Kyoto Univ., 1971, 11, 155-167, 553-563.
23. Анулова С.В., Веретенников А.Ю., Крылов Н.В., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Стохастические исчисления. Итоги науки и техники. Серия – "Современные проблемы математики". Вероятность – 3. Москва, т. 45, 1989.
24. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2003.
25. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. Москва, "Наука", 1972.
26. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, "Наукова думка", 1968.
27. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев, "Наукова думка", 1982.
28. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Москва, "Наука", 1965.
29. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т. 1. Москва, "Наука", 1971.
30. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т. 2. Москва, "Наука", 1973.
31. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т. 3. Москва, "Наука", 1975.
32. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. Москва, Физматгиз, 1963.
33. Дуб Дж. Вероятностные процессы. Москва, ИЛ, 1956.
34. Звонкин А.К., Крылов Н.В. О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений. Труды международной конференции по ТВ и МС (Друскининкай, 1974), Вильнюс, 1975, 2, 9-88.

35. Ито К. Вероятностные процессы. Вып. 1, 2. Москва, ИЛ, 1960, 1963.
36. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. Москва, "Мир", 1968.
37. Карлин С. Основы теории случайных процессов. Москва, "Мир", 1971.
38. Крылов Н.В. Введение в теорию случайных процессов. Части 1 и 2. Москва, Изд-во МГУ, 1986, 1987.
39. Крылов Н.В. Управляемые процессы диффузионного типа. Москва, "Наука", 1977.
40. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазILINEЙНЫЕ уравнения эллиптического типа. Москва, "Наука", 1973.
41. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. Москва, "Наука", 1972.
42. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. Москва, "Наука", 1974.
43. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. Москва, "Наука", 1986.
44. Розовский Б.Л. Эволюционные стохастические системы. Москва, "Наука", 1984.
45. Ширяев А.Н. Вероятность, статистика, случайные процессы, ч. I. Москва, Изд-во МГУ, 1972.
46. Ширяев А.Н. Вероятность, статистика, случайные процессы, ч. II. Москва, Изд-во МГУ, 1974.
47. Ширяев А.Н. Случайные процессы. Москва, Изд-во МГУ, 1975.
48. Ширяев А.Н. Вероятность. Москва, "Наука", 1989.
49. Ширяев А.Н. Вероятность - 1. Москва, Изд-во МЦНМО, 2004.
50. Ширяев А.Н. Вероятность - 2. Москва, Изд-во МЦНМО, 2004.
51. Цирельсон Б.С. Один пример стохастического уравнения, не имеющего сильного решения. Теория вероятностей и ее применения, 1975, 20, 2, 427-430.
52. Эллиот Р. Стохастический анализ и ее применения. Москва, "Мир", 1986.

საზნოვრივი საქიჯელი

ა

აფეთქების დრო 136

ბ

ბერნშტეინის პოლინომები 275
ბლეკ-შოულსის ფორმულა 243
ბროუნის მოძრაობა 41
– გეომეტრიული 243, 244
– ეკონომიკური 243

ბ

განურჩეველი პროცესები 24
გაუსის ანუ ნორმალური ვექ-
ტორი 30, 119

დ

დიდ რიცხვთა კანონი 78, 270
დუბის უტოლობა 70

ე

ენტროპია 272
ექსპონენციალური მარტინგა-
ლი 207, 211, 242

ვ

ვალდის იგივეობები 180
ვინერის ზომა 33

თ

თანაბრად ინტეგრებადობა 255
თეთრი ხმაური 130

თეორემა არცელასი 21
– ბერი-ესენისა 285
– ბირკჰოფ-ხინჩინისა 149
– ბოხნერ-ხინჩინისა 109
– გირსანოვისა 213, 217
– დისკრეტული ლევის ზომის
მქონე პროცესების
სტრუქტურის შესახებ 105
– დონსკერისა 32
– დუბისა 65, 68, 72
– ვეიერშტრასისა 275, 276
– იამადა-ვატანაბესი 234
– კლარკისა 213, 217
– კოტელნიკოვ-შენონისა 114
– კოლმოგოროვისა 25, 78
– კრამერისა 116
– ლებეგისა 254
– ლევისა 75
– ლევი-ხინჩინისა 88
– , ლოკალური ზღვართი 277
– მაკმილანისა 274
– მონოტონური კრებადობის
შესახებ 53, 252
– მუავრ-ლაპლასის ინტეგრა-
ლური 284
– ნახევრად მარტინგალის ზღვრის
არსებობის შესახებ 73
– ნოვიკოვისა 209
– ნორმალური კორელაციის
შესახებ 59
– პროხოროვისა 17
– პუასონისა 286
– პუასონის პროცესის ცხადი
სახის შესახებ 142

- უწყვეტობის მოდულის შესახებ 37
- ულამისა 15
- შედარებისა 227
- ჰიტსუდასი 197

ი

- ინვარიანტული ხდომილება 146
- იტო-დიობლინის ფორმულა 194, 195, 238

კ

- კორელაციური ფუნქცია 107
- კრამერ-ლუნდბერგის მოდელი 142

ლ

- ლევის ზომა 92
- ფორმულა 92
- ლემა ფატუს 53, 253
- შეფესი 75
- ჰოპფისა 148
- ლიფშიცის პირობა 231, 235
- ლოკალური დრო 201

მ

- მათემატიკური ლოდინი 11, 245, 246, 247
- მარკოვის მომენტი 64, 163, 164, 167, 236
- მარტინგალი 62, 156, 165, 183, 209, 218

ნ

- ნახტომების ზომა 98
- პროცესი 98
- ნაწილობრივი ინტეგრების ფორმულა 198

პ

- პირობითი ალბათობა დაყოფის მიმართ 258, 259
- პირობითი დისპერსია 267
- პირობითი მათემატიკური ლოდინი 50, 57, 261, 265
- - -, ტელესკოპური თვისება 264
- პოლონური სივრცე 13
- პროცესი აღდგენისა 141
- გაუსისა 34
- დამოუკიდებელ ნაზრდებთან 80, 82
- ერგოდული 151, 152
- ერთგვაროვანი 88
- ვინერისა 34, 46, 47, 96, 154, 184, 217
- - ავტომოდელური 48
- კოშისა 97
- ლევისა 140, 144
- მთვლელი 135
- - აფეთქების გარეშე 136
- ორნშტეინ-ულენბეკისა 124
- პუასონისა 96, 101, 102, 131, 137, 140
- სტაციონარული ვიწრო აზრით 144, 151
- სტაციონარული ფართო აზრით 107
- - სტოქასტურად უწყვეტი 80, 82, 86
- შეთანხმებული 160
- შემოსაზღვრული 80
- პროცესის ინტენსივობა 139

რ

- რეგულარული ზომა 13

ს

- სასრულგანზომილებიანი გა-
ნაწილება 19
- საფეხურა ფუნქცია 154
- სკოროხოვის სივრცე 83
- სპექტრალური ზომა 112
- სიმკვრივე 112
- სტოქასტური დიფერენცია-
ლის გამოთვლის წესი 197
- სტოქასტური დიფერენციალუ-
რი განტოლება 221
- სტოქასტური ინტეგრალი 45,
119, 154, 175
- სტოქასტურად ეკვივალენტუ-
რი პროცესები 24
- სტოქასტურად შეშფოთებული
განტოლება 242
- სუბმარტინგალი 62
- სუპერმარტინგალი 62, 208
- სუსტად კომპაქტური 17
- სუსტი ამონახსნი 222, 225, 231
- ერთადერთობა 222, 225
- სუსტი კრებადობა 17

ტ

- ტანაკას მაგალითი 225
- ფორმულა 202
- ტრაექტორია 17

უ

- უტოლობა ბურკჰოლდერ-გან-
დი-დევისის 170
- დევისისა 176
- დუბისა 70, 157, 166

- იენსენისა 54
- კოლმოგოროვ-დუბისა 69
- ლევისა 80
- სკოროხოვ-ლენგლიარისა
168
- ჩებიშევისა 269
- უნწყვეტი პროცესი 19

ფ

- ფილტრაციის ამოცანა 229

შ

- შებრუნებული მარტინგალი 63
- შემთხვევითი ელემენტი 11
- განაწილება 11
- ორთოგონალური ზომა 42
- პროცესი 18
- – დამოუკიდებელი ნაზრდე-
ბით 80, 137
- – ერთგვაროვანი 88
- – სტაციონარული ნაზრდე-
ბით 137
- – სტოქასტურად უწყვეტი
80
- – სტაციონარული ვინრო
აზრით 144
- – სტაციონარული ფართო
აზრით 107
- შემოსაზღვრული 80
- სპექტრალური ზომა 118

ძ

- ძლიერი ამონახსნი 221, 226,
233, 236
- ერთადერთობა 222, 226

