# მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის, 1&2

## თამაზ ზერეკიძის

(მიმართულების ხელმძღვანელი)

## კონსპექტი

— ამ ელექტრონულ ვერსიას აქვს "ელექტრონული სარჩევი" (მარცხენა პანელი).
— კონსპექტი ძალზე შეკუმშულია და შეიცავს აუცილებელ მასალას, (ორივე სემესტრისათვის).
— ამ საგნის ყველა ლექტორის ლექციებზე და პრაქტიკულ მეცადინეობებზე მასალა გადმოიცემა სილაბუსის თანმიმდევრობით (იხ. ცალკე). საჭიროა ლექციებზე და პრაქტიკული მეცადინეობზე ჩანაწერების რეგულარულად კეთება. საგნის შესწავლა უნდა მოხდეს ამ ჩანაწერებით, კონსპექტებით და იმ ლიტერატურით, რომელიც სილაბუსშია მითითებული.
— მათთან ერთად სასარგებლო იქნება, პარალელურ ნაკადებს და ჯგუფებში, სხვა კოლეგების მიერ შედგენილი კონსპექტებითაც სარგებლობა, ასევე ნებისმიერი წიგნით უმაღლეს მათემატიკაში, ნებისმიერ მისაწვდომ ენაზე— უამრავი სასარგებლო მასალაა ინტერნეტში.
— პრაქტიკულ მეცადინეობებზეც შეიძლება თეორიული მასალის შესახებაც კითხვების დასმა პედაგოგისადმი, თუ ისინი მაშინ მიმდინარე პრაქტიკულ საკითხებთანაა უშუალოდ კავშირში — ისინი გიპასუხებენ, თუ დრო ამის საშუალებას მისცემს მას პრაქტიკუმის მსვლელობისას.

საერთოდ

— კათედრაზე (აუდ. 604) რეგულარულად ჩატარდება კონსულტაციები; იქ მორიგე პროფესორს დაუსვამთ ნებისმიერ შეკითხვას. დაუსვით შეკითხვები თქვენს ამხანაგებს — ჩვეულებრივ ეს სასარგებლოა მათთვისაც.
— სემესტრის განმავლობაში ჩატარდება საკონტროლოები და შუალედური გამოცდა (დეტალები სილაბუსშია). იქ დაკარგულ ქულებს ვერ აღადგენთ! ამიტომ იყავით მუდმივად მობილიზებული...

თ. ზერეკიძის ამ კონსპექტის

ეს შესავალი გვერდი

და

კონსპექტის ელექტრონული გაწყობა

შეასრულა ნიკო გუნიამ.

# უმაღლესი ალგებრის ელემენტები

## მატრიცი, მატრიცთა სახეები, ოპერაციები მატრიცებზე

მართკუთხოვანი ცხრილის სახით დალაგებულ ელემენტთა სიმრავლეს **მატრიცი** ეწოდება. მატრიცს, რომლის სტრიქონების რაოდენობაა $m$, სვეტების რაოდენობა კი $n$, ეწოდება $m \times n$ რიგის მატრიცი. მატრიცის ის ელემენტი, რომელიც იმყოფება $i$-ური სტრიქონისა და $j$-ური სვეტის გადაკვეთაზე ჩვეულებრივ $a_{ij}$-თი აღინიშნება. მაგალითად, $m \times n$ რიგის მატრიცს აქვს სახე

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

თუ $m=n$, მაშინ მატრიცს **კვადრატული** ეწოდება. კვადრატულ მატრიცს გააჩნია **მთავარი** და **არამთავარი** დიაგონალები:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

არამთავარი          მთავარი

მატრიცს ეწოდება **დიაგონალური**, თუ მისი ყველა ელემენტი, გარდა მთავარ დიაგონალზე მყოფებისა, ნულის ტოლია. დიაგონალური მატრიცი შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \ d_n \end{pmatrix}.$$

ისეთ დიაგონალურ მატრიცს, რომლის მთავარ დიაგონალზე მდგომი თითოეული ელემენტი 1-ის ტოლია, **ერთეულოვანი** მატრიცი ეწოდება. ერთეულოვან მატრიცს $E$ ასოთი აღვნიშნავთ. ე.ი.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \ 1 \end{pmatrix}.$$

მართკუთხოვან მატრიცს, რომლის ყველა ელემენტი $0$-ის ტოლია, **ნულოვანი** მატრიცი ქვია. ნულოვან მატრიცს $O$ ასოთი აღვნიშნავთ. მაგალითად,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$A$ მატრიცის **ტრანსპონირებული** ეწოდება ისეთ მატრიცს, რომელიც მიიღება $A$ მატრიციდან, თუ მის სტრიქონებს დავწერთ სვეტებად, სვეტებს კი სტრიქონებად. $A$ მატრიცის ტრანს-

ტრანსპონირებული მატრიცი $A^T$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ე.ი.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ერთნაირი რიგის მართკუთხოვანი მატრიცების ჯამი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix};$$

მატრიცის რიცხვზე ნამრავლი განისაზღვრება ასე:

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

მატრიცების სხვაობა $A-B$ შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც $A+(-1)B$.

ვთქვათ, $A$ არის $m\times n$ რიგის მატრიცი, $B$ კი $n\times k$ რიგის. ნამრავლი $A\cdot B$ განისაზღვრება როგორც ისეთი $m\times k$ რიგის $C$ მატრიცი, რომლის $C_{ij}$ ელემენტის გამოსათვლელად $A$ მატრიცის $i$-ური სტრიქონის ელემენტები უნდა გავამრავლოთ $B$ მატრიცის $j$-ური სვეტის შესაბამის ელემენტებზე და მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ. ე.ი.

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $A\cdot E = E\cdot A = A$. შევნიშნოთ მხოლოდ, რომ მატრიცების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებისთვის ძალაშია ყველა ის კანონი, რაც რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებისთვის, გარდა გამრავლების გადანაცვლებადობის კანონისა. ე.ი. საზოგადოდ $A\cdot B \neq B\cdot A$.

## $n$-ური რიგის დეტერმინანტის ცნება

დეტერმინანტი განისაზღვრება მხოლოდ კვადრატული მატრიცებისთვის და იგი არის ამ მატრიცის ელემენტების საშუალებით გარკვეული წესით შედგენილი რიცხვი. $A$ მატრიცის დეტერმინანტი ერთ-ერთი შემდეგი სიმბოლოთი აღინიშნება: $\det(A)$, $|A|$.

დეტერმინანტის განსაზღვრის მიზნით წინასწარ შემოვიღოთ გადანაცვლებისა და მისი ლუწ-კენტობის ცნებები.

პირველი $n$ ნატურალური რიცხვისაგან შედგენილი **გადანაცვლება** ეწოდება ისეთ დალაგებულ სიმრავლეს, რომელიც $(1, 2, \cdots, n)$ სიმრავლისაგან მიიღება განსხვავებული მხოლოდ ელემენტთა დალაგების რიგით.

ვიტყვით, რომ გადანაცვლებაში ორი ელემენტი ქმნის **ინვერსიას**, თუ დიდი ელემენტი უფრო წინ დგას ვიდრე პატარა. გადანაცვლებას ეწოდება **კენტი**, თუ მასში ინვერსიათა რაოდენობა კენტია, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში ეწოდება ლუწი. მაგალითად, გადანაცვლება $(2, 1, 3)$ კენტია, რადგან მასში ინვერ-

სიას ქმნიან 2 და 1, ხოლო გადანაცვლება (2, 3, 1) ლუწია, რადგანაც მასში გვაქვს ორი ინვერსია, რომლებსაც ქმნიან 2 და 1, 3 და 1.

განვიხილოთ $n$-ური რიგის კვადრატული მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ ამ მატრიცის ელემენტებისაგან შედგენილი ყველა ისეთი ნამრავლი, რომლებსაც აქვთ შემდეგი ორი თვისება: 1) თითოეულ ნამრავლში არის ზუსტად $n$-ცალი თანამამრავლი, 2) თითოეულ ნამრავლში მონაწილეობს ზუსტად ერთი თანამამრავლი ყოველი სტრიქონიდან და ზუსტად ერთი თანამამრავლი ყოველი სვეტიდან. ადვილი შესამჩნევია, რომ ასეთი ნამრავლები არსებობს.

თითოეულ ასეთ ნამრავლში დავალაგოთ თანამამრავლები პირველი ინდექსების ზრდის მიხედვით, ე.ი. მივცეთ სახე: $a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. განვიხილოთ მეორე ინდექსებისაგან შედგენილი გადანაცვლება $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. თუ ეს გადანაცვლება ლუწია, ამ ნამრავლს დავუწეროთ ნიშანი „+", ხოლო თუ კენტი, ნამრავლს დავუწეროთ ნიშანი „−".

მატრიცის **დეტერმინანტი** ეწოდება ყველა ასეთი ნამრავლების ჯამს, სადაც თითოეული ნამრავლი აღებულია თავისივე ნიშნით.

## მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტები და მათი გამოთვლის წესები

მეორე რიგის დეტერმინანტს აქვს სახე

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

მისი ელემენტებისაგან შეიძლება შედგეს ზემოთაღწერილი თვისებების მქონე ორი ნამრავლი: $a_{11}a_{22}$ და $a_{12}a_{21}$. პირველი ინდექსები უკვე დალაგებულია ზრდის მიხედვით. განვიხილოთ მეორე ინდექსებისაგან შედგენილი გადანაცვლებები: (1,2) და (2,1). პირველი მათგანი ლუწია, მეორე კი კენტი, ამიტომ პირველ ნამრავლს ექნება ნიშანი „+", მეორეს კი − ნიშანი „−". ამიტომ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

მესამე რიგის დეტერმინანტს აქვს სახე

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

მისი ელემენტებისაგან შეიძლება შედგეს ზემოთხსენებული თვისებების მქონე ექვსი ნამრავლი: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$. პირველი ინდექსები დალაგებულია ზრდის მიხედვით. განვიხილოთ მეორე

ინდექსებისაგან შედგენილი გადანაცვლებები: (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1), (2,1,3), (1,3,2). პირველი სამი ლუწია, ბოლო სამი კი — კენტი, ამიტომ პირველ სამ ნამრავლს აქვთ ნიშანი „+", ბოლო სამს კი — ნიშანი „−". ამრიგად

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

არსებობს მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის მარტივი წესები. ესენია ე.წ. **სამკუთხედის** წესი და **სარუსის** წესი. სამკუთხედის წესი სქემატურად ასე გამოიყურება:

„+"　　　　„−"

ე.ი. „+" ნიშნით უნდა ავიღოთ მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ნამრავლი და ის ორი ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროებში მდგომი ელემენტების ნამრავლები, რომელთა ფუძეები მთავარი დიაგონალის პარალელურია, ხოლო „−" ნიშნით უნდა ავიღოთ არამთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ნამრავლი და ის ორი ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროებში მდგომი ელემენტების ნამრავლები, რომელთა ფუძეები არამთავარი დიაგონალის პარალელურია.

სარუსის წესი მდგომარეობს შემდეგში: დეტერმინანტს ქვემოდან უნდა მივუწეროთ მისივე პირველი ორი სტრიქონი და ნამრავლები თავისი ნიშნებით გამოვთვალოთ შემდეგი სქემის მიხედვით

$$\begin{array}{cccccc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ - & & & & + \\ - & a_{11} & a_{12} & a_{13} & + \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} & + \end{array}$$

## დეტერმინანტის ძირითადი თვისებები

დეტერმინანტს აქვს შემდეგი ძირითადი თვისებები:

1) მატრიცის ტრანსპონირებით დეტერმინანტი არ იცვლება.

(შეამოწმეთ ეს თვისება მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტებისთვის)

ამ თვისებიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი დასკვნა: დეტერმინანტის ყველა თვისება, რომელიც სამართლიანია სტრიქონებისთვის, სამართლიანი იქნება სვეტებისთვისაც. ამიტომ დანარჩენი თვისებები საკმარისია მოვიყვანოთ მხოლოდ სტრიქონებისთვის.

2) თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონი ნულოვანია, მაშინ ეს დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

ეს თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს დეტერმინანტის განსაზღვრებიდან. მართლაც, ყოველ ნამრავლში მონაწილეობს ერთი ელემენტი მოცემული ნულოვანი სტრიქონიდან.

ამიტომ თითოეული ეს ნამრავლი ნულის ტოლია და ცხადია ნულის ტოლი იქნება მათი ჯამიც, ე.ი. დეტერმინანტი.

3) თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონს გავამრავლებთ რაიმე რიცხვზე, მაშინ დეტერმინანტიც გამრავლდება ამ რიცხვზე.

მართლაც, ყოველ ნამრავლში მოცემულ რიცხვზე გამრავლდება თითო თანამამრავლი და ამიტომ ამ რიცხვზე გამრავლდება თითოეული ეს ნამრავლი და, მაშასადამე, მათი ჯამიც.

4) თუ დეტერმინანტის რომელიმე ორ სტრიქონს გავუცვლით ადგილებს, დეტერმინანტს შეეცვლება მხოლოდ ნიშანი.

ეს თვისება ადვილად მტკიცდება დეტერმინანტის განსაზღვრებისა და გადანაცვლების შემდეგი თვისების საფუძველზე: თუ გადანაცვლებაში ორ ელემენტს გავუცვლით ადგილებს, შეიცვლება გადანაცვლების ლუწ-კენტობა.

5) თუ დეტერმინანტს ორი ერთნაირი სტრიქონი აქვს, იგი ნულის ტოლია.

მართლაც, თუ ამ ერთნაირ სტრიქონებს გავუცვლით ადგილებს, დეტერმინანტი შეიცვლება მოპირდაპირე რიცხვით. მეორე მხრივ, სტრიქონების ერთნაირობის გამო, მივიღებთ იგივე დეტერმინანტს. ერთადერთი რიცხვი კი, რომელიც თავის მოპირდაპირეს უდრის, არის ნული.

6) თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ყოველი ელემენტი წარმოდგენილია ორი შესაკრების ჯამის სახით, მაშინ ეს დეტერმინანტი უდრის ორი დეტერმინანტის ჯამს, რომლებშიც ყველა სხვა სტრიქონი იგივეა, რაც მოცემულ დეტერმინანტში, აღნიშნული სტრიქონის ნაცვლად კი პირველ დეტერმინანტში არის პირველი შესაკრებებისაგან შედგენილი სტრიქონი, მეორე დეტერმინანტში კი — მეორე შესაკრებებისაგან შედგენილი სტრიქონი. ე.ი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

მართლაც, მოცემული დეტერმინანტის შემადგენელ ყოველ შესაკრებს აქვს სახე $a_{1j_1}\cdots(a'_{ij_i}+a''_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$. ფრჩხილების გახსნის შემდეგ იგი მიიღებს სახეს

$$a_{1j_1}\cdots a'_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+a_{1j_1}\cdots a''_{ij_i}\cdots a_{nj_n}.$$

პირველი ტიპის შესაკრებების ჯამი მოგვცემს პირველ დეტერმინანტს, მეორე ტიპის შესაკრებების ჯამი კი — მეორე დეტერმინანტს.

7) თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონს დავუმატებთ ამავე დეტერმინანტის სხვა სტრიქონს, გამრავლებულს რაიმე რიცხვზე, ამით მოცემული დეტერმინანტი არ შეიცვლება.

ეს თვისება უშუალოდ მიიღება დეტერმინანტის მე-6, მე-3 და მე-5 თვისებების დასახელებული თანმიმდევრობით გამოყენებით.

## დეტერმინანტის ელემენტის მინორი და ალგებრული დამატება. დეტერმინანტის გაშლა სტრიქონების და სვეტების მიხედვით

$n$-ური რიგის დეტერმინანტის ელემენტის **მინორი** ეწოდება იმ $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება მოცემული დეტერმინანტისაგან, თუ მასში ამოვშლით იმ სტრიქონსა და სვეტს, რომელთაც ეკუთვნის მოცემული ელემენტი. $a_{ij}$ ელემენტის მინორი $M_{ij}$ სიმბოლოთი აღინიშნება. $a_{ij}$ ელემენტის ალგებრული დამატება $A_{ij}$-თი აღინიშნება და იგი განისაზღვრება ტოლობით: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. სამართლიანია

**თეორემა.** დეტერმინანტი უდრის მისი ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების თავისივე ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამს. ე.ი.

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}.$$

(შევამოწმეთ ეს თეორემის სამართლიანობა მესამე რიგის დეტერმინანტისთვის).

**შენიშვნა.** ამ თეორემიდან და იმ თვისებიდან, რომ ორი ერთნაირი სტრიქონის მქონე დეტერმინანტი ნულის ტოლია, გამომდინარეობს დასკვნა: დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია, ე.ი.

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\dots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j).$$

## შებრუნებული მატრიცი, თეორემა შებრუნებული მატრიცის შესახებ

ვთქვათ, $A$ არის $n$-ური რიგის კვადრატული მატრიცი. $B$ მატრიცს ეწოდება $A$ მატრიცის **შებრუნებული** მატრიცი, თუ $A\cdot B=E$ და $B\cdot A=E$. იგი $A^{-1}$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თეორემის ჩამოსაყალიბებლად დაგვჭირდება მოცემული მატრიცის ე.წ. **მიკავშირებული** მატრიცის ცნება. $A$ მატრიცის მიკავშირებული მატრიცი $A^*$-ით აღინიშნება და განისაზღვრება შემდეგნაირად: $A$ მატრიცის ყოველი ელემენტის ადგილას უნდა ჩავწეროთ მისივე ალგებრული დამატება და მოვახდინოთ მიღებული მატრიცის ტრანსპონირება, ე.ი.

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

მატრიცს ეწოდება **არაგადაგვარებული**, თუ მისი დეტერმინანტი არ უდრის ნულს.

**თეორემა.** ყოველ არაგადაგვარებულ მატრიცს გააჩნია შებრუნებული და იგი გამოითვლება ფორმულით

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*.$$

**დამტკიცება.** უნდა დავამტკიცოთ, რომ $A\cdot\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=E$ და $\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)\cdot A=E$.

ორივე ტოლობა ანალოგიურად მტკიცდება, ამიტომ შევამოწმოთ პირველი. ამისათვის შევისწავლოთ $A\cdot A^*$ მატრიცი. მატრიცების გამრავლების წესის თანახმად, ნამრავლი მატრიცის $C_{ij}$ ელემენტი რომ გამოვთვალოთ, $A$ მატრიცის $i$-ური სტრიქონის ელემენტები $a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}$ უნდა გავამრავლოთ $A^*$ მატრიცის $j$-ური სვეტის

შესაბამის ელემენტებზე და მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ. მაგრამ, ტრანსპონირების გამო $A^*$-ის $j$-ურ სვეტში იქნებიან ელემენტები: $A_{j1}, A_{j2}, \cdots, A_{jn}$. ამიტომ

$$C_{ij} = a_{i1}\cdot A_{j1} + a_{i2}\cdot A_{j2} + \cdots + a_{in}\cdot A_{jn}.$$

აქედან, თუ გამოვიყენებთ სტრიქონების მიხედვით დეტერმინანტის გაშლის წესს, აგრეთვე მისგან გამომდინარე დასკვნას, მივიღებთ, რომ $C_{ij} = |A|$, როცა $i=j$ და $C_{ij} = 0$, როცა $i \neq j$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $A\cdot A^*$ მატრიცს ექნება სახე

$$\begin{pmatrix} |A| & & 0 \\ & |A| & \\ 0 & & \ddots \\ & & & |A| \end{pmatrix}.$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$A\cdot\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = E.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

## წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის მატრიცული ჩანაწერი და მისი ამოხსნა

$n$ უცნობიან $m$ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას აქვს სახე

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

სადაც $a_{ij}$, $b_j$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$ მოცემული რიცხვებია, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ კი საძიებელი უცნობები.

განვიხილოთ მატრიცები

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$A$ მატრიცს ეწოდება (1) სისტემის მატრიცი, $X$-ს საძიებელი მატრიცი (სვეტ-მატრიცი), $B$-ს კი სისტემის მარჯვენა მხარე. მატრიცების გამრავლების წესიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ (1) სისტემა მატრიცულად შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$A\cdot X = B.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $A$ არის არაგადაგვარებული კვადრატული მატრიცი, ეს მატრიცული განტოლება შეიძლება ასე ამოიხსნას:

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X) = A^{-1}\cdot B \Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow E\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow$$

$$X = A^{-1}\cdot B$$

## კრამერის თეორემა

კრამერის თეორემა შეეხება $n$ უცნობიან $n$ წრფივ განტოლებათა სისტემას, ე.ი. იმ შემთხვევას, როდესაც სისტემის მატრიცი კვადრატულია.

სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი $\Delta$-თი აღვნიშნოთ და მას სისტემის მთავარი დეტერმინანტი ვუწოდოთ. გარდა ამისა, განვიხილოთ $n$-ცალი ე.წ. დამხმარე დეტერმინანტი: $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$, რომლებიც განისაზღვრებიან ასე: $j$-ური დამხმარე დეტერმინანტი რომ მივიღოთ, სისტემის მთავარ დეტერმინანტში $j$-ური სვეტის ნაცვლად უნდა ჩავწეროთ სისტემის მარჯვენა მხარე, ე.ი.

$$\Delta_j = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} \cdots b_1 \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots b_2 \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots b_n \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \\ (j) \end{array} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

**თეორემა.** თუ $n$ უცნობიან $n$ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის მატრიცი არაგადაგვარებულია, მაშინ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და იგი მოიცემა ფორმულებით

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; \cdots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

**დამტკიცება.** ვისარგებლოთ სისტემის მატრიცული ამოხსნით, რომლის თანახმად

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

ამ ფორმულის საშუალებით გამოვთვალოთ $x_j$ უცნობი. იგი იმყოფება $X$ სვეტ-მატრიცის $j$-ურ სტრიქონსა და პირველ სვეტში. მის გამოსათვლელად $A^{-1}$ მატრიცის $j$-ური სტრიქონის ელემენტები უნდა გავამრავლოთ $B$ მატრიცის პირველი სვეტის ელემენტებზე და მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^*$, მიკავშირებული მატრიცის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, გვექნება

$$x_j = \frac{1}{\Delta} A_{1j} b_1 + \frac{1}{\Delta} A_{2j} b_2 + \cdots + \frac{1}{\Delta} A_{nj} b_n = \frac{b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}}{\Delta}.$$

მაგრამ, უკანასკნელი წილადის მრიცხველში დგას $\Delta_j$ დამხმარე დეტერმინანტის გაშლილი მისი $j$-ური სვეტის მიხედვით, ამიტომ

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

## მატრიცის რანგი. კრონეკერ-კაპელის თეორემა

ვთქვათ, $A$ არის $m \times n$ რიგის მართკუთხოვანი მატრიცი, ხოლო $k$ ისეთი ნატურალური რიცხვია, რომელიც არ აღემატება $m$ და $n$ რიცხვებს შორის უმცირესს. განვიხილოთ $A$ მატრიცის ნებისმიერი $k$ ცალი სტრიქონი და $k$ ცალი სვეტი. განვიხილოთ ამ სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან შედგენილი $k$ რიგის კვადრატული მატრიცი. ამ მატრიცის დეტერმინანტს ეწოდება

მოცემული $A$ მატრიცის $K$-ური რიგის მინორი. ცხადია, $K$-ური რიგის მინორი რამდენიმეა, რადგან თუ $K$-ს შევცვლით $1$-დან $\min(m,n)$-მდე, მივიღებთ მოცემული მატრიცის ყველანაირ მინორებს. შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ ზემოთგანხილული ელემენტის მინორი $n$-ური რიგის მატრიცში წარმოადგენს $(n-1)$ რიგის ერთ-ერთ მინორს.

**განსაზღვრება.** მატრიცის რანგი ეწოდება ისეთ $r$ ნატურალურ რიცხვს, რომელსაც აქვს შემდეგი ორი თვისება: 1) არსებობს მოცემული მატრიცის ერთი მაინც $r$ რიგის ნულისაგან განსხვავებული მინორი, 2) $r$-ზე უფრო მაღალი რიგის ყველა მინორი ნულის ტოლია.

მოკლედ რომ ვთქვათ, მატრიცის რანგი არის ამ მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული მინორის უდიდესი რიგი. $A$ მატრიცის რანგი $r(A)$-თი აღვნიშნოთ.

ვთქვათ, მოცემულია $n$ უცნობიან $m$ წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

ვთქვათ $A$ ამ სისტემის მატრიცაა. განვიხილოთ მატრიცა, რომელიც მიიღება $A$ მატრიცში მარჯვენა მხრიდან სისტემის მარჯვენა მხარისაგან შედგენილი სვეტის ჩამატებით. ამ მატრიცს სისტემის გაფართოებული მატრიცა ვუწოდოთ და $\tilde{A}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ, ე.ი.

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

ცხადია, რომ $r(A)\le r(\tilde{A})$.

სისტემას ეწოდება თავსებადი, თუ მას ერთი მაინც ამონახსნი აქვს, წინააღმდეგ შემთხვევაში — არათავსებადი.

სამართლიანია კრონეკერ-კაპელის თეორემა

**თეორემა.** $n$ უცნობიან $m$ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის მატრიცის რანგი ემთხვევა მისივე გაფართოებული მატრიცის რანგს, ე.ი. როცა $r(A)=r(\tilde{A})$.

**შენიშვნა.** როცა $r(A)<r(\tilde{A})$, კრონეკერ-კაპელის თეორემა გვეუბნება, რომ სისტემას ამონახსნი არ აქვს. როცა $r(A)=r(\tilde{A})$ — სისტემას ამონახსნი აქვს, მაგრამ რამდენი? ეს უნდა გაირკვეს შემდეგნაირად: ცხადია საზოგადოდ, $r(A)\le n$; თუ $r(A)=n$, მაშინ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს, ხოლო თუ $r(A)<n$, მაშინ სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.

## წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გაუსის მეთოდი

გაუსის მეთოდს, ანუ უცნობთა მიმდევრობითი გამორიცხვის მეთოდს ახლა გადმოვცეთ სქემატურად. იგი მიმდინარეობს რამდენიმე ეტაპად. პირველ ეტაპზე პირველი განტოლების საშუალებით გამოვრიცხოთ $x_1$ უცნობი ყველა დანარჩენი განტოლებიდან. ამისათვის საკმარისია პირველი განტოლებიდან გამოვსახოთ $x_1$ უცნობი დანარჩენი $x_2, x_3, \dots, x_n$ უცნობების საშუალებით და შევიტანოთ ყველა დანარჩენ განტოლებაში (ცხადია, იგულისხმება, რომ პირველ განტოლებაში $x_1$ უცნობი გვაქვს. წინააღმდეგ შემთხვევაში პირველი განტოლების როლში ავიღებთ $x_1$ უცნობის შემცველ რომელიმე სხვა განტოლებას). ამით ამ განტოლებებში დაგვრჩება მხოლოდ $x_2, x_3, \dots, x_n$ უცნობები. შემდეგ ეტაპზე მიღებული სისტემის მეორე განტოლების საშუალებით, ანალოგიური წესით გამოვრიცხოთ $x_2$ უცნობი ყველა მომდევნო განტოლებიდან. ამით ამ განტოლებებში დაგვრჩება მხოლოდ $x_3, x_4, \dots, x_n$ უცნობები. თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს, იმისდა მიხედვით თუ როგორია განტოლებების რაოდენობა $m$, გვექნება შემდეგი სამი შემთხვევა:

1) როცა $m=n$, სისტემა მიიღებს სამკუთხა სახეს, რომლის ბოლო განტოლებაში არის მხოლოდ უცნობი $x_n$. ვიპოვით $x_n$-ს და უკუსვლით, მიმდევრობით, ვიპოვით $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ უცნობებსაც.

2) როცა $m>n$, სისტემა მიიღებს სამკუთხა სახეს და კიდევ გვექნება რამდენიმე განტოლება, რომლებიც აგრეთვე შეიცავენ მხოლოდ $x_n$ უცნობს. თუ ამ ერთუცნობიან განტოლებებს შორის ორი მაინც არატოლფასია, სისტემა იქნება არათავსებადი. თუ ყველა მათგანი ტოლფასია, დავიტოვებთ რა ერთ-ერთ მათგანს, სისტემას ექნება სამკუთხა სახე და მოვიქცევით ისე, როგორც პირველ შემთხვევაში.

3) როცა $m<n$, სისტემა მიიღებს ტრაპეციის სახეს, რომლის ბოლო განტოლებაში იქნებიან $x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ უცნობები. თუ აქედან $x_m$-ს გამოვსახავთ $x_{m+1}, \dots, x_n$ უცნობების საშუალებით და შემდეგ ვივლით უკუსვლით, დანარჩენი $x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_1$ უცნობებიც გამოისახებიან $x_{m+1}, \dots, x_n$ უცნობების საშუალებით. ამით მივიღებთ სისტემის ზოგად ამონახსნს, საიდანაც $x_{m+1}, \dots, x_n$ უცნობებისათვის მნიშვნელობების ნებისმიერი მინიჭებით ვიპოვით სისტემის ყველა ამონახსნს.

## მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობები და მახასიათებელი განტოლება

რიგი თეორიული თუ პრაქტიკული საკითხის შესწავლისას, საჭირო ხდება მატრიცის ე.წ. საკუთარი მნიშვნელობის განსაზღვრა.

ვთქვათ, მოცემულია $n$-ური რიგის კვადრატული მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\lambda$ რიცხვს ეწოდება $A$ მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობა, თუ რაიმე არანულო-ვანი

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

მატრიცისთვის სრულდება ტოლობა

$$AX=\lambda X. \tag{1}$$

(1) ტოლობა გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=\lambda x_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=\lambda x_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=\lambda x_n, \end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0. \end{cases} \tag{2}$$

კრამერის თეორემიდან გამომდინარე, (2) სისტემას არანულოვანი ამონახსნი ექნება მხოლოდ მაშინ, როცა მისი მატრიცი გადაგვარებულია, ე.ი. როცა

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

(3) განტოლება $\lambda$-ს მიმართ წარმოადგენს $n$-ური ხარისხის ალგებრულ განტოლებას და მას ეწოდება მოცემული $A$ მატრიცის **მახასიათებელი განტოლება.**

ამრიგად, მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობები რომ ვიპოვოთ, საჭიროა ამოვხსნათ ამ მატრიცის მახასიათებელი განტოლება.

## წარმოების დარგთაშორისი ბალანსი

მრავალდარგოვანი მეურნეობის ეფექტური მართვისათვის საჭიროა განისაზღვროს თუ რა რაოდენობის პროდუქცია უნდა გამოუშვას $n$ დარგიდან თითოეულმა, რომ დაკმაყოფილდეს თითოეული მათგანის მიერ გამოშვებულ პროდუქციაზე არსებული მთელი მოთხოვნილება. ამასთან, იგულისხმება, რომ თითოეული დარგი არა მარტო გარკვეული პროდუქციის მწარმოებელია, არამედ სხვა დარგების და საკუთარი თავისთვის ნაწარმოები პროდუქციის მომხმარებელიცაა.

დარგთაშორისი ბალანსის მათემატიკური მოდელი შემუშავებულ იქნა 1936 წელს ამერიკელი მეცნიერის ვ. ლეონტიევის მიერ.

ვთქვათ, $i$ და $j$ ნატურალური რიცხვებია, $i \le n$, $j \le n$. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$x_i$ — დროის რაიმე მონაკვეთში (ვთქვათ, ერთ წელიწადში) $i$-ური დარგის მიერ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა; $x_{ij}$ — დროის იმავე პერიოდში $i$-ური დარგის მიერ გამოშვებული იმ პროდუქციის რაოდენობა, რომელსაც მოიხმარს $j$-ური დარგი თავისი საკუთარი საწარმოებისათვის (მაგ. რიცხვი $x_{ii}$ იქნება $i$-ური დარგის მიერ გამოშვებული იმ პროდუქციის რაოდენობა, რომელიც იხარჯება ამავე დარგის საკუთარი საწარმოებისათვის). $b_i$ — $i$-ური დარგის მიერ წარმოებული ე.წ. საბოლოო პროდუქციის რაოდენობა, ე.ი. იმ პროდუქციის რაოდენობა, რომელიც არ დაიხარჯება არცერთი და დარგთაშორისი საჭიროებისათვის.

ცხადია, რომ

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1}$$

ამ განტოლებებს ეწოდება წარმოების ბალანსის განტოლებები.

რადგან $j$-ური დარგის $x_j$ პროდუქციის დასამზადებლად იხარჯება $i$-ური დარგის $x_{ij}$ პროდუქცია, ამიტომ $j$-ური დარგის ერთეული რაოდენობის პროდუქციის დასამზადებლად დაიხარჯება $i$-ური დარგის პროდუქციის $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ რაოდენობა. ამ $a_{ij}$ რიცხვებს წარმოების ტექნოლოგიური კოეფიციენტები ეწოდება. რადგან $x_{ij} = a_{ij} x_j$, (1) განტოლებები მიიღებენ სახეს

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{2}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

(2) განტოლებათა სისტემა ჩაიწერება მატრიცულად შემდეგნაირად: $X = AX + B$, ანუ

$$(E - A)X = B. \tag{3}$$

თუ $(E-A)$ მატრიცი არაგადაგვარებულია, მაშინ იარსებებს მისი შებრუნებული $(E-A)^{-1}$ მატრიცი და (3) ტოლობის ორივე მხარის ამ შებრუნებულზე მარცხნიდან გადამრავლებით ვიპოვით საძიებელ $X$ მატრიცს

$$X = (E - A)^{-1} B.$$

ამრიგად, თუ ცნობილია თითოეულმა დარგმა რა რაოდენობის საბოლოო პროდუქცია უნდა გამოუშვას, ცნობილია აგრეთვე თითოეული სხვის პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად თითოეული დარგის რა რაოდენობის პროდუქცია იხარჯება, შეგვიძლია განვსაზღვროთ თითოეული დარგის მიერ გამოსაშვები მთლიანი პროდუქციის რაოდენობა.

არაა ძნელი იმის დანახვა, რომ $(E-A)^{-1}$ მატრიცის $c_{ij}$ ელემენტი განსაზღვრავს $i$-ური დარგის პროდუქციის იმ რაოდენობას, რომელიც საჭიროა $j$-ური დარგის საბოლოო პროდუქციის ერთი ერთეულის საწარმოებლად. ამის გამო ამ მატრიცს სრული დანახარჯების მატრიცს უწოდებენ.

## ვაჭრობის საერთაშორისო მოდელი

ვთქვათ, მოცემულია $n$ ქვეყანა, რომლებიც ეროვნული შემოსავლებია $x_1, x_2, \dots, x_n$. ვთქვათ, $i$-ური ქვეყნიდან საქონლის შესყიდვაზე $j$-ური ქვეყანა ხარჯავს თავისი ეროვნული შემოსავლის $a_{ij}$ ნაწილს. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი ქვეყანა თავის ეროვნულ შემოსავალს ხარჯავს საქონლის შესყიდვაზე ან ქვეყნის შიგნით ან სხვა ქვეყნებიდან იმპორტზე, ე.ი.

$$a_{1j}+a_{2j}+\dots+a_{nj}=1 \quad (j=1,2,\dots,n). \qquad (1)$$

მატრიცს

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

უწოდებენ ვაჭრობის **სტრუქტურულ მატრიცს**. შევნიშნოთ, რომ (1) ტოლობის გამო სტრუქტურული მატრიცის ყოველ სვეტში ელემენტთა ჯამი 1-ის ტოლია.

ცხადია, $i$-ური ქვეყნისათვის საშინაო და საგარეო ვაჭრობიდან მიღებული შემოსავალი იქნება

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i=1,2,\dots,n).$$

ჩვენი მიზანია დავადგინოთ, როდის იქნება ვაჭრობა ბალანსირებული, — ყოველი ქვეყნისათვის არადეფიციტური, ე.ი. ყოველი ქვეყნის მიერ ვაჭრობიდან მიღებული შემოსავალი როდის იქნება ამ ქვეყნის ეროვნულ შემოსავალზე არანაკლები? სხვანაირად რომ ვთქვათ, როდის შესრულდება $P_i \ge x_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ უტოლობები? თუ ამ უტოლობებს ჩავწერთ გაშლილი სახით

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ge x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ge x_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \ge x_n \end{cases} \qquad (2)$$

და მათ წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ

$$(a_{11}+a_{21}+\dots+a_{n1})x_1 + (a_{12}+a_{22}+\dots+a_{n2})x_2 + \dots + (a_{1n}+a_{2n}+\dots+a_{nn})x_n \ge x_1+x_2+\dots+x_n.$$

მიღებულ უტოლობაში, ფრჩხილებში მოთავსებული ყოველი გამოსახულება, (1) ტოლობების გამო, 1-ის ტოლია, ამიტომ ეს უტოლობა მიიღებს სახეს: $x_1+x_2+\dots+x_n \ge x_1+x_2+\dots+x_n$. ახლა ცხადია, რომ თუ ერთი მაინც $i$-ური ქვეყნისათვის შესრულდება მკაცრი უტოლობა $P_i > x_i$, მივიღებდით, რომ $x_1+x_2+\dots+x_n > x_1+x_2+\dots+x_n$, რაც შეუძლებელია. ამის გამო, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ყოველი $i$-სთვის $P_i = x_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ (თუ ჩავთვლით, რომ ქვეყნები შიდა ვაჭრობას არ აწარმოებენ, მაშინ ამ დასკვნის გაკეთება შეიძლებოდა იმ ცხადი მოსაზრების საფუძველზე, რომ ვერც ერთი ქვეყანა ვაჭრობის შედეგად ვერ მოიგებს, თუკი არ წააგებს რომელიმე სხვა ქვეყანა).

მაშასადამე, (2) უტოლობათა სისტემა გადაიქცევა განტოლებათა სისტემად, რომელიც მატრიცული სახით შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$AX = X, \qquad (3)$$

სადაც

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(ცხადია, რომ $X$ მატრიცი არანულოვანია, ამიტომ რიცხვი 1 ყოფილა ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობა).

(3) განტოლების ამოხსნით დავადგენთ თუ რომელი ეროვნული შემოსავლის პირობებში იქნება ვაჭრობა ბალანსირებული.

განვიხილოთ კონკრეტული

<u>მაგალითი</u>. ვთქვათ, სამი ქვეყნის ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცაა

$$A=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

ამ ქვეყნების ეროვნული შემოსავლების როგორი თანაფარდობის შემთხვევაში იქნება მათ შორის ვაჭრობა ბალანსირებული ?

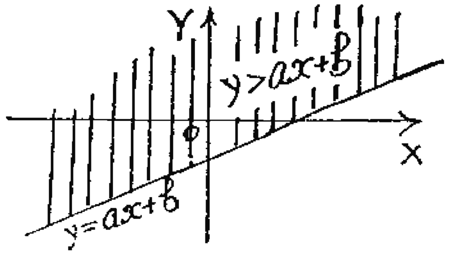
<u>ამოხსნა</u>. თუ (3) ტოლობას ჩავწერთ $(A-E)X=O$ სახით, მივიღებთ

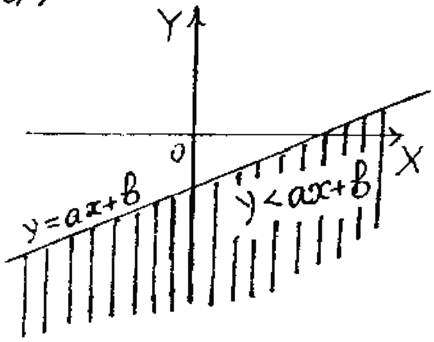
$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

რაც ფაქტიურად სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემაა (ამ სისტემის მატრიცა გადაგვარებული იქნება). თუ ამ სისტემას ამოვხსნით გაუსის მეთოდით, მივიღებთ, რომ მის ამონახსნებს აქვთ სახე $(3/2\,x_3, 2x_3, x_3)$, $x_3\in R$. ე.ი. ეროვნული შემოსავლები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც $3/2:2:1$, ანუ როგორც $3:4:2$.

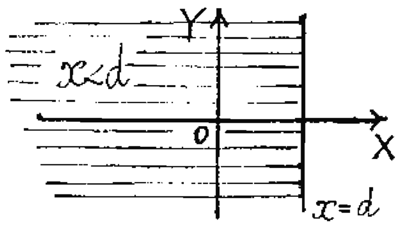
## ორცვლადიანი წრფივი უტოლობისა და უტოლობათა სისტემის გეომეტრიული ამოხსნა და მისი გამოყენება წრფივი დაპროგრამების ამოცანებში

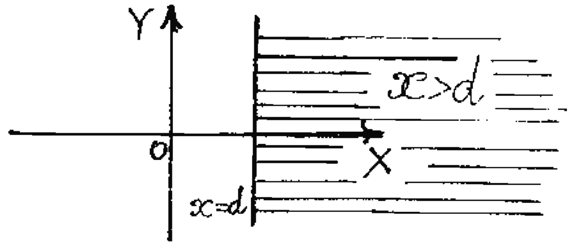
$y>ax+b$ ($y<ax+b$) ორცვლადიანი წრფივი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეს წარმოადგენს $XOY$ საკოორდინატო სიბრტყის ყველა ის წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც მდებარეობენ $y=ax+b$ წრფის ზემოთ (ქვემოთ).




ზოგადი შემთხვევაში, როცა ორცვლადიანი უტოლობა მოცემულია $ax+by>c$ სახით, ის შემთხვევაში თუ $b\neq 0$, უტოლობის ორივე მხარის $b$-ზე გაყოფით მივიღებთ ზემოთ განხილულ შემთხვევებს, ხოლო როცა $b=0$, მივიღებთ $x>d$ (ან $x<d$) სახის უტოლობას, რომლის ამონახსნთა სიმრავლეა $x=d$ წრფის მარჯვნივ (მარცხნივ) მდებარე ყველა წერტილთა სიმრავლე.



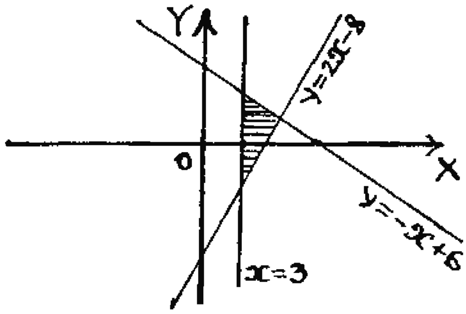




არამკაცრი $ax+by\geq c$ უტოლობის შემთხვევაში ამონახსნთა სიმრავლეში შედის თვითონ $ax+by=c$ წრფეც.

ორცვლადიან უტოლობათა სისტემის გეომეტრიული ამოხსნა საშუალებას გვაძლევს თვალსაჩინოდ მივიღოთ და ვიპოვოთ მისი ამონახსნთა სიმრავლეების თანაკვეთა. მაგალითად,

$$\begin{cases} y\geq 2x-8 \\ y<-x+6 \\ x>3 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე იქნება შემდეგ ნახაზზე დაშტრიხული სიმრავლე




წრფივი დაპროგრამების ამოცანას ეწოდება ისეთ ამოცანას, რომლებშიც მოსაძებნია წრფივი ფუნქციის უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა და რომლებშიც ცვლადები აკმაყოფილებენ წრფივი უტოლობების სისტემით მოცემულ შეზღუდვებს. მოცემულ წრფივ ფუნქციას **მიზნის** ფუნქცია ეწოდება, ხოლო შეზღუდვებით მოცემული სიმრავლე — **დასაშვები** სიმრავლე.

განვიხილოთ რამდენიმე ასეთი ამოცანა.

ამოცანა. საწარმო უშვებს $A$ და $B$ ტიპის პროდუქციას. $A$ ტიპის პროდუქციის ერთეული მოითხოვს 6 ლარის დანახარჯს და ღირს 7 ლარი, ხოლო $B$ ტიპის პროდუქციის ერთეული მოითხოვს 3 ლარის დანახარჯს და ღირს 4 ლარი. $A$ ტიპის პროდუქციის ერთეულის ტრანსპორტირება ჯდება 20 თეთრი, $B$ ტიპის პროდუქციის ერთეულისა კი — 30 თეთრი. საწარმოს შეუძლია ორივე ტიპის პროდუქციის წარმოებაზე დახარჯოს არაუმეტეს 2700 ლარისა, ტრანსპორტირებაზე კი — არაუმეტეს 120 ლარისა. თითოეული ტიპის რამდენი პროდუქცია უნდა გამოუშვას საწარმომ, რომ მოგება მაქსიმალური იყოს?

ამოხსნა. ვთქვათ, საწარმო აწარმოებს $A$ ტიპის პროდუქციის $x$ ერთეულს და $B$ ტიპის პროდუქციის $y$ ერთეულს. მათ წარმოებაზე დაიხარჯება $(6x+3y)$ ლარი, ტრანსპორტირებაზე კი — $(0,2x+0,3y)$ ლარი. რადგან მათი გაყიდვით მიღებული შემოსავალია $(7x+4y)$ ლარი, ამიტომ საწარმოს მოგება (წმინდა შემოსავალი) იქნება

$$m=(7x+4y)-(6x+3y)-(0,2x+0,3y),$$

რომელიც, გამარტივების შემდეგ მიიღებს სახეს

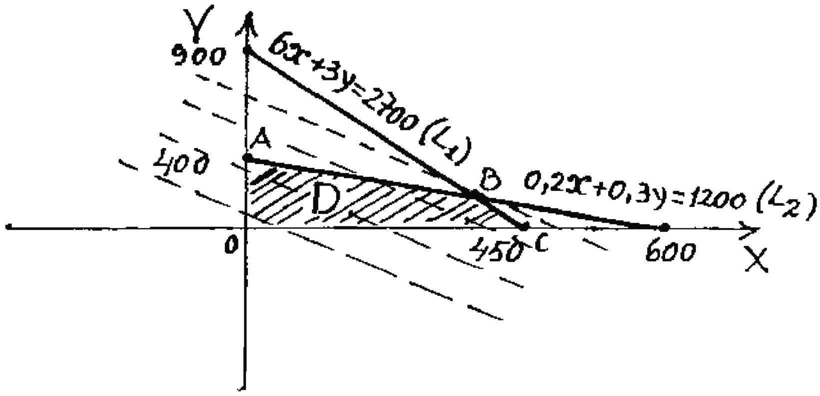
$$m=0,8x+0,7y.$$

ახლა დავადგინოთ ის შეზღუდვები, რომლებსაც $x$ და $y$ უცნობები უნდა აკმაყოფილებდნენ.

პირველ რიგში, ცხადია, რომ $x\geq 0$, $y\geq 0$. გარდა ამისა, რადგან საწარმოს 2700 ლარზე მეტის დახარჯვა არ შეუძლია, ამიტომ $6x+3y\leq 2700$. ასევე, რადგან ტრანსპორტირებაზე შეუძლია დახარჯოს არაუმეტეს 120 ლარისა, ამიტომ $0,2x+0,3y\leq 120$. ამოვხსნით რა ორუცნობიან წრფივ უტოლობათა შემდეგ სისტემას

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 6x+3y\leq 2700 \\ 0,2x+0,3y\leq 120, \end{cases}$$

დავადგენთ დასაშვებ სიმრავლეს, რომელიც იქნება შემდეგ ნახაზზე $OABC$ ოთხკუთხედით შემოსაზღვრული $D$ არე.




ამრიგად უნდა დავადგინოთ: ყველა იმ $(x,y)$ წყვილებიდან, რომლებიც ეკუთვნიან $D$ არეს, რომლისთვის იქნება $m=0,8x+0,7y$ გამოსახულება უდიდესი?

აქედან

$$y=-\frac{8}{7}x+\frac{m}{0,7}.$$

ეს განტოლებები ($m$-ის ცვლადი მნიშვნელობისთვის) მოგვცემს პარალელურ წრფეთა ოჯახს. რაც უფრო დიდია $m$, წრფე უფრო ზემოთ მდებარეობს. ჩვენ გვაინტერესებს ის შემთხვევა, როდესაც წრფე მდებარეობს იმ წრფეებს შორის ყველაზე ზემოთ, რომლებსაც $D$ არესთან საერთო წერტილი აქვთ. ადვილი მისახვედრია, რომ ეს საძიებელი წრფე უნდა გადიოდეს $OABC$ ოთხკუთხედის ერთ-ერთ წვეროზე, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ამ წრფის შემდგომი ზემოთ აწევის შემდეგ $D$ არესთან ექნება საერთო წერტილები. გამოვთვალოთ $m$-ის მნიშვნელობები აღნიშნული ნახაზის $O$, $A$, $B$ და $C$ წერტილებში ჩვენს შემთხვევაში. $O$, $A$ და $C$ წერტილების კოორდინატები ნახაზიდან ვიცით: $O=O(0;0)$, $A=A(0;400)$, $C=C(450;0)$. სისტემის ამოხსნით ვიპოვით $B$ წერტილის, რომელიც $L_1$ და $L_2$ წრფეების გადაკვეთის წერტილია, კოორდინატებს. მივიღებთ, რომ $B=B(375;150)$. ამის შემდეგ, სათანადო გამოთვლების შედეგად დავადგენთ, რომ $m_O=0$, $m_A=280$, $m_B=405$, $m_C=360$. ამრიგად ვი დასკვნით: მაქსიმალური მოგება შეიძლება იყოს 405 ლარი და ამისათვის საწარმომ უნდა აწარმოოს 375 ერთეული $A$ ტიპის პროდუქცია და 150 ერთეული $B$ ტიპის პროდუქცია.

დასაშვები სიმრავლეები, რომლებიც გვხვდება წრფივი დაპროგრამების ამოცანებში, როგორც წესი, წარმოადგენს ე.წ. ამოზნექილ სიმრავლეს.

<u>განსაზღვრება</u>. სიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილი, თუ იგი მის ნებისმიერ ორ წერტილთან ერთად შეიცავს ამ წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთსაც.

როგორც ვიცით, არითმეტიკული პროგრესია ეწოდება ისეთ მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრზე ერთი და იგივე რიცხვის დამატებით. ამ რიცხვს არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა ჰქვია და $d$ ასოთი აღინიშნება.

ვიცით აგრეთვე, რომ არითმეტიკული პროგრესიის $n$-ური წევრი გამოითვლება ფორმულით,

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

ხოლო პირველი $n$ წევრის ჯამი კი ფორმულით

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \qquad (1)$$

არითმეტიკულ პროგრესიასთან გვაქვს საქმე, როდესაც, მაგალითად, გარკვეული სესხი გაიცემა საბანკო მარტივი განაკვეთის პრინციპით, ე.ი. როდესაც სესხზე დარიცხულ თანხას ყოველწლიურად ემატება საწყისი თანხის ერთი და იგივე პროცენტი.

ვთქვათ, საწყისი თანხაა $a$ და მას ყოველწლიურად ემატება მისი $K\%$, მაშინ საქმე გვაქვს არითმეტიკულ პროგრესიასთან, რომლისთვისაც $a_1 = a + a\cdot K/100$ არის თანხა ერთი წლის შემდეგ, $d = a\cdot K/100$, ხოლო თანხა $n$ წლის შემდეგ იქნება

$$a_n = a + n\cdot a\cdot K/100 = a(1 + n\cdot K/100).$$

რიგი ამოცანის გადაწყვეტისას დაგვჭირდება არითმეტიკული პროგრესიის პირველი $n$ წევრის ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა.

მაგალითად, ვთქვათ, პიროვნებას ყოველი წლის დასაწყისში ბანკში თავის ანაბარზე შეაქვს $a$ თანხა და გვსურს გავიგოთ რა თანხა ექნება ანაბარზე ამ პიროვნებას $n$ წლის შემდეგ, თუ საქმე გვაქვს წლიურ $K\%$-იან მარტივ განაკვეთთან.

ვინაიდან პირველ წელს შეტანილი თანხა ბანკში იმყოფება $n$ წელიწადს, მეორე წელს შეტანილი თანხა $(n-1)$ წელიწადს, მესამე წელიწადს შეტანილი თანხა $(n-2)$ წელიწადს და ა.შ., ცხადია, რომ საძიებელი თანხა იქნება

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1.$$

მაშინ, (1) ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ

$$S_n = \frac{(a + a\cdot K/100) + a(1 + n\cdot K/100)}{2}\cdot n = a\cdot n\left(1 + \frac{K(n+1)}{200}\right).$$

ე.ი. თუ, მაგალითად, ყოველი წლის დასაწყისში შეტანილი თანხაა 1000 ლარი და ყოველ შეტანილ თანხას ყოველი წლის ბოლოსათვის ბანკი არიცხავს ამ თანხის 4%-ს, მაშინ პირველი შენატანის 9 წლის შემდეგ ანაბარზე იქნება თანხა

$$S_9 = 100\cdot 9\left(1 + \frac{4\cdot 10}{200}\right) = 10800 \text{ (ლარი)}.$$

## გეომეტრიული პროგრესია და საბანკო რთული განაკვეთი. დისკონტირება.

როგორც ვიცით, გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვთა ისეთ მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორიდან, მიიღება წინა წევრის ერთსა და იმავე რიცხვზე გამრავლებით. ამ რიცხვს გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი ჰქვია და $q$ ასოთი აღინიშნება.

ვიცით აგრეთვე, რომ გეომეტრიული პროგრესიის $n$-ური წევრი გამოითვლება ფორმულით

$$B_n = B_1 \cdot q^{n-1}, \qquad (1)$$

ხოლო პირველი $n$ წევრის ჯამი კი — ფორმულით

$$S_n = B_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1) \qquad (2)$$

გეომეტრიულ პროგრესიასთან გვაქვს საქმე, როდესაც, მაგალითად, გარკვეული სესხი გაიცემა საბანკო რთული განაკვეთის პირობით, ე.ი. როდესაც სესხზე დარიცხულ თანხას პროცენტი ემატება ამ პერიოდისათვის არსებული თანხის (და არა საწყისი თანხის — როგორც ეს იყო საბანკო მარტივი განაკვეთის შემთხვევაში) ერთი და იგივე პროცენტი.

ვთქვათ, საწყისი თანხაა $B$ და ყოველი წლის ბოლოს ამ პერიოდისათვის არსებულ თანხას ემატება მისი $K\%$. ვიპოვოთ თანხის რაოდენობა $n$ წლის შემდეგ.

თუ $B_m$-ით აღვნიშნავთ თანხას $m$ წლის შემდეგ, ცხადია, რომ

$$B_{m+1} = B_m + B_m \cdot K/100 = B_m(1+K/100).$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ $B_1, B_2, \dots$ რიცხვები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლისთვისაც $B_1 = B + B\cdot K/100 = B(1+K/100)$, ხოლო $q = 1+K/100$. მაშინ (1) ფორმულიდან მივიღებთ

$$B_n = B(1+K/100)^n.$$

გამოვთვალოთ ახლა ბანკში შეტანილი თანხა პირველი შეტანიდან $n$ წლის შემდეგ, თუ ცნობილია, რომ მეანაბრეს ყოველი წლის დასაწყისში თავის ანაბარზე შეაქვს $B$ თანხა და საქმე გვაქვს საბანკო წლიურ $K\%$-იან რთულ განაკვეთთან.

ვინაიდან პირველ წელს შეტანილი თანხა ბანკში იმყოფება $n$ წელიწადს, მეორე წელს შეტანილი თანხა $(n-1)$ წელიწადს და ა.შ., ცხადია, რომ საერთო თანხა იქნება

$$S_n = B_n + B_{n-1} + \dots + B_2 + B_1.$$

მაშინ, (2) ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ

$$S_n = B_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = Bq\,\frac{1-q^n}{1-q},$$

სადაც $q = 1+K/100$.

ე.ი. თუ, მაგალითად, ყოველი წლის დასაწყისში მეანაბრეს ბანკში შეაქვს 1000 ლარი და ყოველი წლის ბოლოსათვის ბანკი მეანაბრის ანაბარზე არსებულ თანხას უმატებს ამ თანხის 10%-ს, მაშინ პირველი შეტანიდან 10 წლის შემდეგ ანაბარზე იქნება თანხა:

$$S_{10} = 1000(1+1/10)\cdot\frac{1-(1+1/10)^{10}}{1-(1+1/10)} = 1100\cdot\frac{(1,1)^{10}-1}{0,1} \approx 17531 \text{ (ლარი)}.$$

საწყისი $x$ თანხის გამოთვლას დაგროვილი $x_n$ თანხის საშუალებით დისკონტირება ეწოდება, ხოლო $D = x_n - x$ სხვაობას კი — დისკონტი.

საბანკო მარტივი განაკვეთის შემთხვევაში

$$D = x_n - \frac{x_n}{1+n\cdot K/100} = x_n\left(1-\frac{1}{1+n\cdot K/100}\right),$$

ხოლო საბანკო რთული განაკვეთის შემთხვევაში კი

$$D = x_n\left(1-\frac{1}{(1+K/100)^n}\right).$$

# დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები

## რიცხვითი მიმდევრობა. რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი

**რიცხვითი მიმდევრობა.** ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, ცვლი-ლების არე კი — ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, **რიცხვითი მიმდევრობა** ეწოდება.

$f$ მიმდევრობა, რომლის მნიშვნელობებია $a_1=f(1), a_2=f(2),\dots,a_n=f(n),\dots$ აღინიშნება $(a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)$ ან, მოკლედ, $(a_n)$ სიმბოლოთი. $a_n$-ს ეწოდება მიმდევრობის $n$-ური ან ზოგადი წევრი.

**შემოსაზღვრულობა.** $(a_n)$ მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული ზემოდან (ქვემოდან), თუ მოიძებნება ისეთი $M$ $(m)$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $n$-ისთვის $a_n \le M$ $(a_n \ge m)$.

მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ იგი შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან.

**მონოტონურობა.** $(a_n)$ მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი (კლებადი, არაზრდადი, არაკლე-ბადი), თუ ყოველი $n$-ისთვის $a_n<a_{n+1}$ $(a_n>a_{n+1}, a_n\ge a_{n+1}, a_n\le a_{n+1})$.

ზრდად, კლებად, არაზრდად და არაკლებად მიმდევრობებს მონოტონური მიმდევრობები ეწოდება.

**მიმდევრობის ზღვარი.** $a$ რიცხვს ეწოდება $(a_n)$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმი-ერი დადებითი $\varepsilon$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $n_0$ რიცხვი, რომ $|a_n-a|<\varepsilon$ როცა $n>n_0$.

ის ფაქტი, რომ $a$ რიცხვი არის $(a_n)$ მიმდევრობის ზღვარი, ასე ჩაიწერება: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

თუ მიმდევრობას აქვს ზღვარი, მას **კრებადი** ეწოდება, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში — **განშლადი**.

## მიმდევრობის კრებადობის აუცილებელი პირობა

**თეორემა.** თუ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია.

**დამტკიცება.** ვთქვათ, $(a_n)$ კრებადი მიმდევრობაა და მისი ზღვარია $a$. ავიღოთ დადებითი $\varepsilon$ რიცხვი. არსებობს ისეთი $n_0$ ნომერი, რომ $|a_n-a|<\varepsilon$, როცა $n>n_0$, ანუ $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$, როცა $n>n_0$.

განვიხილოთ წევრები: $a_1, a_2,\dots,a_n$. ამ წევრებსა და $a-\varepsilon$ რიცხვს შორის უმცირესი აღვნიშნოთ $m$-ით, ხოლო ამ წევრებსა და $a+\varepsilon$ რიცხვს შორის უდიდესი — $M$-ით. მაშინ, ცხადია, მიმდევრობის ყველა წევრი დააკმაყოფილებს უტოლობას: $m\le a_n\le M$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $(a_n)$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

თეორემა დამტკიცებულია.

**შენიშვნა.** მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა არაა საკმარისი მისი კრებადობისთვის. მაგა-ლითად $(1,-1,1,-1,\dots)$ მიმდევრობა, ცხადია, შემოსაზღვრულია, მაგრამ არაა კრებადი.

## უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი მიმდევრობები. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა თვისებები

**უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა.** $(\alpha_n)$ მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, ე.ი. თუ ყოველი დადებითი $\varepsilon$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $n_0$ ნომერი, რომ $|\alpha_n|<\varepsilon$, როცა $n>n_0$.

**შენიშვნა.** მიმდევრობის ზღვრისა და უსასრულოდ მცირე მიმდევრობის განსაზღვრებიდან

უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მიმდევრობა $(a_n-a)$ უსასრულოდ მცირეა. სხვანაირად, ეს იმას ნიშნავს, რომ $a$ არის $(a_n)$ მიმდევრობის ზღვარი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a_n$ წარმოიდგინება სახით: $a_n=a+\alpha_n$, სადაც $(\alpha_n)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

**თეორემა.** უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა ჯამი უსასრულოდ მცირეა.

**დამტკიცება.** უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ $(\alpha_n)$ და $(\beta_n)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია, მაშინ $\gamma_n=\alpha_n+\beta_n$ მიმდევრობაც უსასრულოდ მცირეა.

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon$ რიცხვი. რადგან, პირობით, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, ამიტომ $\frac{\varepsilon}{2}>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $n_0'$ ნომერი, რომ $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$, როცა $n>n_0'$. ანალოგიურად, მოიძებნება ისეთი $n_0''$ ნომერი, რომ $|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$, როცა $n>n_0''$. აღვნიშნოთ $n_0$-ით უდიდესი $n_0'$-სა და $n_0''$-ს შორის. მაშინ, ცხადია, რომ როცა $n>n_0$, შესრულდება ორივე ზემოთმოყვანილი უტოლობა. თუ ვისარგებლებთ მოდულის ერთ-ერთი თვისებით, მივიღებთ

$$|\gamma_n|=|\alpha_n+\beta_n|\le|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ამრიგად, ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის ჩვენ ვიპოვეთ ისეთი $n_0$ ნომერი, რომ $|\gamma_n|<\varepsilon$, როცა $n>n_0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $(\gamma_n)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა.** შემოსაზღვრული მიმდევრობისა და უსასრულოდ მცირე მიმდევრობის ნამრავლი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

**დამტკიცება.** უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ $(a_n)$ შემოსაზღვრულია, $(\alpha_n)$ კი – უსასრულოდ მცირე, მაშინ $\beta_n=a_n\cdot\alpha_n$ ტოლობით განსაზღვრული მიმდევრობა უსასრულოდ მცირეა.

$(a_n)$-ის შემოსაზღვრულობის გამო არსებობს ისეთი $A>0$ რიცხვი, რომ $|a_n|\le A$ ყველა $n$-თვის. ვთქვათ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვი. რადგან $(\alpha_n)$ უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ $\frac{\varepsilon}{A}>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $n_0$ ნომერი, რომ $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{A}$, როცა $n>n_0$. მაშინ

$$|\beta_n|=|a_n\cdot\alpha_n|=|a_n|\cdot|\alpha_n|<A\cdot\frac{\varepsilon}{A}=\varepsilon.$$

ე.ი. $|\beta_n|<\varepsilon$, როცა $n>n_0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $(\beta_n)$ უსასრულოდ მცირეა.

თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა.** უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა.

**დამტკიცება.** ვინაიდან უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა კრებადია, კრებადი მიმდევრობა კი შემოსაზღვრულია, ამიტომ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. ამის გამო, თუ ორი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობიდან ერთ-ერთს განვიხილავთ როგორც შემოსაზღვრულს, მეორეს კი როგორც უსასრულოდ მცირეს, წინა თეორემის ძალით მათი ნამრავლი იქნება უსასრულოდ მცირე.

თეორემა დამტკიცებულია.

**უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა.** $(A_n)$ მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ დიდი, თუ ნებისმიერი $M>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $n_0$ ნომერი, რომ $|A_n|>M$, როცა $n>n_0$. ამ დროს წერენ: $\lim_{n\to\infty}A_n=\infty$.

იმ შემთხვევაში, როცა $(A_n)$ მიმდევრობა უსასრულოდ დიდია და მისი წევრები გარკვეული ნომრიდან დადებითია (უარყოფითია) წერენ: $\lim_{n\to\infty}A_n=+\infty$ ($\lim_{n\to\infty}A_n=-\infty$).

ადვილი შესამჩნევია, რომ $(A_n)$ $(A_n\neq0)$ მიმდევრობა უსასრულოდ დიდია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\left(\frac{1}{A_n}\right)$ მიმდევრობა არის უსასრულოდ მცირე.

**უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა შედარება.** თუ $(\alpha_n)$ და $(\beta_n)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია, მაშინ $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$ მიმდევრობა შეიძლება იყოს:

1) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა. მაგალითად, $\alpha_n=\frac{1}{n^2}$, $\beta_n=\frac{1}{n}$.

2) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა. მაგალითად, $\alpha_n=\frac{1}{n}$, $\beta_n=\frac{1}{n^2}$.

3) ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი $a$ რიცხვისაკენ კრებადი მიმდევრობა. მაგალითად, $\alpha_n=\frac{a}{n}$, $\beta_n=\frac{1}{n}$.

4) შემოსაზღვრული, მაგრამ განშლადი მიმდევრობა. მაგალითად, $\alpha_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $\beta_n=\frac{1}{n}$.

$\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ სახის შეფარდებას, სადაც $(\alpha_n)$ და $(\beta_n)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია, $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობას უწოდებენ.

ანალოგიურად, გვხვდება $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $\infty^0$, $0^0$, $1^\infty$ სახის განუზღვრელობები.

უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა შედარება. ვთქვათ, $(\alpha_n)$ და $(\beta_n)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია. ამბობენ, რომ: ა) $(\alpha_n)$ უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე $(\beta_n)$, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=0$; ბ) $(\alpha_n)$ და $(\beta_n)$ ერთნაირი რიგის უსასრულოდ მცირეებია, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=a\neq0$; გ) $(\alpha_n)$ და $(\beta_n)$ ეკვივალენტური, ანუ თანაბარი უსასრულოდ მცირეებია, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=1$.

## კრებად მიმდევრობათა ძირითადი თვისებები

**თეორემა.** თუ $(a_n)$ და $(b_n)$ მიმდევრობები კრებადია, მაშინ კრებადი იქნება $(a_n+b_n)$ მიმდევრობაც და $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

**დამტკიცება.** აღვნიშნოთ: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. მაშინ $a_n=a+\alpha_n$, $b_n=b+\beta_n$, სადაც $(\alpha_n)$ და $(\beta_n)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია. გვექნება

$$a_n+b_n=a+\alpha_n+b+\beta_n=(a+b)+(\alpha_n+\beta_n).$$

მაგრამ, $(\alpha_n+\beta_n)$ მიმდევრობა, როგორც უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა ჯამი, იქნება უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა. ამიტომ, $a_n+b_n=(a+b)+(\alpha_n+\beta_n)$ ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $(a_n+b_n)$ მიმდევრობა კრებადია და $\lim(a_n+b_n)=a+b$.

თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა.** თუ $(a_n)$ და $(b_n)$ მიმდევრობები კრებადია, მაშინ კრებადი იქნება $(a_n\cdot b_n)$ მიმდევრობაც და $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

**დამტკიცება.** აღვნიშნოთ: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. მაშინ $a_n=a+\alpha_n$, $b_n=b+\beta_n$, სადაც $(\alpha_n)$ და $(\beta_n)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია. გვექნება

$$a_n\cdot b_n=(a+\alpha_n)(b+\beta_n)=ab+\gamma_n,$$

სადაც $\gamma_n=a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n$. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა თვისებების თანახმად, $(\gamma_n)$ მიმდევრობა იქნება უსასრულოდ მცირე. ამიტომ, $a_nb_n=ab+\gamma_n$ ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $(a_n\cdot b_n)$ მიმდევრობა კრებადია და $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab$.

თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა.** თუ $(a_n)$ და $(b_n)$ მიმდევრობები კრებადია, ამასთან $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$, მაშინ კრებადი იქნება $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ მიმდევრობაც და $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$.

**დამტკიცება.** აღვნიშნოთ: $\lim b_n=b$ და ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$.

ვინაიდან $b_n=b+\beta_n$, სადაც $(\beta_n)$ უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ

$$\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b+\beta_n}-\frac{1}{b}=\frac{-\beta_n}{(b+\beta_n)b},$$

საიდანაც
$$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}+\left(-\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b+\beta_n}\cdot\beta_n\right).$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$ ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\left(-\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b+\beta_n}\cdot\beta_n\right)$ მიმდევრობა უსასრულოდ მცირეა. ვინაიდან $(\beta_n)$ უსასრულოდ მცირეა, შემოსაზღვრულისა და უსასრულოდ მცირის ნამრავლი კი უსასრულოდ მცირეა, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\left(\frac{1}{b+\beta_n}\right)$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

ვინაიდან $b\neq 0$, ამიტომ $\frac{|b|}{2}>0$. რადგან $(\beta_n)$ უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ გარკვეული ნომრიდან დაწყებული შესრულდება უტოლობა $|\beta_n|<\frac{|b|}{2}$. მაშინ, თუ მივიღებთ მხედველობაში მოდულის ერთ-ერთ თვისებას, გვექნება

$$|b+\beta_n|\geqslant|b|-|\beta_n|>|b|-\frac{|b|}{2}=\frac{|b|}{2}.$$

აქედან, $\left|\frac{1}{b+\beta_n}\right|<\frac{2}{|b|}$, საიდანაც დავასკვნით, რომ $\left(\frac{1}{b+\beta_n}\right)$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. ამრიგად, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$ ტოლობა დამტკიცებულია. ახლა, თუ გამოვიყენებთ თეორემას ნამრავლის ზღვრის შესახებ, მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot\frac{1}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\frac{1}{b}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მოვიყვანოთ დამტკიცების გარეშე ორი თეორემა უტოლობებში ზღვარზე გადასვლის შესახებ:

**თეორემა.** თუ $(a_n)$ და $(b_n)$ მიმდევრობები კრებადია და გარკვეული ნომრიდან დაწყებული $a_n\leqslant b_n$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

**თეორემა.** თუ $(a_n)$ და $(b_n)$ კრებადი მიმდევრობებია, აქვთ ტოლი ზღვრები, ხოლო $(c_n)$ მიმდევრობა ისეთია, რომ გარკვეული ნომრიდან დაწყებული $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$, მაშინ $(c_n)$ მიმდევრობაც კრებადია და მისი ზღვარი იგივე ზღვარია, რაც $(a_n)$-ს და $(b_n)$-ს.

## მონოტონური და შემოსაზღვრული მიმდევრობის კრებადობა. ნეპერის რიცხვი

**თეორემა (ვაიერშტრასი).** თუ მიმდევრობა მონოტონური და შემოსაზღვრულია, მაშინ იგი კრებადია.

**დამტკიცება.** განვიხილოთ ჯერ ის შემთხვევა, როცა მოცემული $(a_n)$ მიმდევრობა არაკლებადია და ზემოდან შემოსაზღვრული. ზემოდან შემოსაზღვრულობის გამო არსებობს ისეთი $M$ რიცხვი, რომ ყოველი $n$-თვის $a_n\leqslant M$. ცხადია, ასეთი $M$ რიცხვი უამრავია. მათ შორის უმცირესი აღვნიშნოთ $M_0$-ით (მტკიცდება, რომ ასეთი უმცირესი არსებობს). ვაჩვენოთ, რომ სწორედ ეს $M_0$ რიცხვი იქნება $(a_n)$ მიმდევრობის ზღვარი.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვი. $M_0$-ის უმცირესობის გამო $M_0-\varepsilon$ რიცხვისათვის არსებობს $(a_n)$ მიმდევრობის ისეთი წევრი (რომლის ნომერიც აღვნიშნოთ $n_0$-ით), რომ $a_{n_0}>M_0-\varepsilon$. ვთქვათ, $n>n_0$. მიმდევრობის არაკლებადობის გამო $a_n>a_{n_0}$, ამიტომ $a_n>M_0-\varepsilon$. მეორის მხრივ ვიცით, რომ $a_n\leqslant M_0$. მითუმეტეს $a_n<M_0+\varepsilon$. ამრიგად, როცა $n>n_0$, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ $M_0-\varepsilon<a_n<M_0+\varepsilon$, ანუ $|a_n-M_0|<\varepsilon$. მიმდევრობის

ზღვრის განსაზღვრების საფუძველზე დავასკვნით, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M_0$.

იმ შემთხვევაში, როცა მიმდევრობა არაზრდადია და ქვემოდან შემოსაზღვრული, თეორემა მტკიცდება ანალოგიურად. ამჯერად უნდა განვიხილოთ მიმდევრობის ქვემოდან შემოსაზღვრავ $m$ რიცხვების შორის უდიდესი რიცხვი $m_0$ და ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = m_0$.

**ნეპერის რიცხვი.** განვიხილოთ მიმდევრობა $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ და დავამტკიცოთ, რომ იგი კრებადია. ამისათვის განვიხილოთ აგრეთვე მიმდევრობა $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. ვინაიდან $a_n=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot b_n$, ცხადია, $(a_n)$-ის კრებადობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ $(b_n)$-ის კრებადობა. $(b_n)$ დადებით რიცხვთა მიმდევრობაა, ამიტომ იგი ქვემოდან შემოსაზღვრულია. მაშასადამე, ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად, საკმარისია ვაჩვენოთ $(b_n)$-ის არაზრდადობა. ამისათვის კი გამოვიყენოთ უტოლობა

$$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x \quad (x>-1,\ n\in \mathbb{N}),$$

რომელიც ბერნულის უტოლობის სახელწოდებითაა ცნობილი და რომელიც მარტივად მტკიცდება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით (დამტკიცება იხილეთ ქვემოთ). გვაქვს

$$\frac{b_{n-1}}{b_n}=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}>\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}\geq\left(1+n\cdot\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{n+1}=1,$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ $(b_n)$ მიმდევრობა არაზრდადია.

$(a_n)$ მიმდევრობის ზღვარი $e$-თი აღინიშნება და მას **ნეპერის** რიცხვი ეწოდება. ე.ი.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

მტკიცდება, რომ $e$ ირაციონალური რიცხვია და რომ $e\approx 2{,}718$.

**ბერნულის უტოლობის დამტკიცება.** როცა $n=1$, უტოლობა ცხადია. დავუშვათ, რომ უტოლობა სამართლიანია $n$-თვის და ვაჩვენოთ, რომ მაშინ იგი სამართლიანი იქნება $(n+1)$-თვისაც, ე.ი. ვაჩვენოთ, რომ $(1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x$. გვაქვს

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)\geq(1+nx)(1+x)=1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x.$$

უტოლობა დამტკიცებულია.

## ფუნქციის ზღვარი

**ფუნქციის ზღვარი.** ვამბობთ, რომ $A$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის ზღვარი როცა $x\to a$ და წერენ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, თუ განსაზღვრის არის $a$-გან განსხვავებულ წერტილთა $a$-კენ კრებადი ნებისმიერი $(x_n)$ მიმდევრობისათვის $(f(x_n))$ მიმდევრობა კრებადია $A$-კენ.

იგულისხმება, რომ ამ განსაზღვრებაში $a$ და $A$ შეიძლება იყვნენ როგორც რიცხვები, ისე სიმბოლოები: $-\infty, +\infty, \infty$.

თუ, $a$ და $A$ არიან რიცხვები, არაა ძნელი დასამტკიცებელი, რომ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი $\delta$ რიცხვი, რომ $|f(x)-A|<\varepsilon$, როცა $0<|x-a|<\delta$.

**ცალმხრივი ზღვრები.** ვამბობთ, რომ $A$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის მარცხენა (მარჯვენა) ზღვარი $a$ წერტილში და წერენ $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=A$ $\left(\lim\limits_{x\to a+} f(x)=A\right)$, თუ განსაზღვრის არეში $a$-ს მარცხნივ (მარჯვნივ) მდებარე წერტილთა $a$-კენ კრებადი ნებისმიერი $(x_n)$ მიმდევრობისათვის $(f(x_n))$ მიმდევრობა კრებადია $A$-კენ.

$a$ წერტილში $f(x)$ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები აღინიშნება, შესაბამისად, $f(a-)$ და $f(a+)$ სიმბოლოებით.

ადვილი შესამჩნევია, რომ რაიმე წერტილში ფუნქციას გააჩნია ზღვარი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ წერტილში მას გააჩნია მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები და ისინი ტოლნი არიან.

## ფუნქციის ზღვრის ძირითადი თვისებები

**თეორემა.** თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ და

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x).$$

**თეორემა.** თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$ და

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

**თეორემა.** თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ამასთან $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ და

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

**თეორემა.** თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ და $a$-ს რაიმე მიდამოში სრულდება უტოლობა $f(x)\le g(x)$, მაშინ $\lim\limits_{x\to a} f(x)\le \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

**თეორემა.** თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ისინი ტოლნი არიან, ხოლო $h(x)$ ისეთი ფუნქციაა, რომ $a$-ს რაიმე მიდამოში შესრულებულია უტოლობა $f(x)\le h(x)\le g(x)$, მაშინ არსებობს აგრეთვე $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ და $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

ყველა ეს თეორემა მტკიცდება ერთნაირი გზით, სახელდობრ, უნდა გამოვიყენოთ ფუნქციის ზღვრის ზემოთმოყვანილი განსაზღვრება და მიმდევრობის ზღვრის შესახებ შესაბამისი თეორემა. ჩვენ ვაჩვენოთ ერთ-ერთი, მაგალითად, პირველი. ამისათვის აღვნიშნოთ: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ და განვიხილოთ განსაზღვრის არის $a$-გან განსხვავებულ წერტილთა $a$-სკენ კრებადი ნებისმიერი $(x_n)$ მიმდევრობა. ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრების ძალით $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ და $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=B$. მიმდევრობის ჯამის ზღვრის შესახებ თეორემის თანახმად

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n))=\lim_{n\to\infty} f(x_n)+\lim_{n\to\infty} g(x_n),$$

ე.ი. $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n))=A+B$. ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრების თანახმად კი ეს იმას ნიშნავს, რომ $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B$. რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

## უსასრულოდ მცირე ფუნქცია. უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა რიგი. უსასრულოდ მცირეთა ტოლფასობა

**უსასრულოდ მცირე ფუნქცია.** $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ მცირე როცა $x\to a$, თუ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$. უსასრულოდ მცირე ფუნქციებს გააჩნიათ ისეთივე თვისებები, როგორიც უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებს, მაგალითად: 1) უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა ჯამი არის უსასრულოდ მცირე, 2) შემოსაზღვრული ფუნქციისა და უსასრულოდ მცირე ფუნქციის ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა, 3) უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა ნამრავლი აგრეთვე უსასრულოდ მცირეა.

უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა შეფარდება, ისევე როგორც მიმდევრობის შემთხვევაში წარმოადგენს განუზღვრელობას. მას ეწოდება $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობა ჰქვია

უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა რიგი და ტოლფასობა. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია, როცა $x \to a$.

$f(x)$-ს ეწოდება უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე, ვიდრე $g(x)$, როცა $x \to a$, თუ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

$f(x)$ და $g(x)$ ეწოდება ერთნაირი რიგის უსასრულოდ მცირეები, როცა $x \to a$, თუ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$.

$f(x)$ და $g(x)$ ეწოდება ტოლფასი უსასრულოდ მცირეები, როცა $x \to a$, თუ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

პრაქტიკულად ხშირად მოსახერხებელია ტოლფას უსასრულოდ მცირეთა შესახებ შემდეგი მარტივი ლემის გამოყენება: თუ თანამამრავლს შევცვლით მისი ტოლფასით, ამით მიღებული ზღვარი არ შეიცვლება. მართლაც, თუ $f(x)$ და $g(x)$ ტოლფასი უსასრულოდ მცირეებია, როცა $x \to a$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot h(x))=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)h(x)\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}(g(x)h(x))=\lim_{x\to a}(g(x)\cdot h(x)).$$

## ფუნქციის უწყვეტობა, წყვეტის წერტილთა სახეები

**უწყვეტობა წერტილში.** $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $a$ წერტილში, თუ $a$ წერტილში არსებობს მისი ზღვარი და იგი უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას ამ წერტილში, ე.ი. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

თუ $f(a-)=f(a)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება მარცხნიდან უწყვეტი $a$ წერტილში, ხოლო თუ $f(a+)=f(a)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება მარჯვნიდან უწყვეტი $a$ წერტილში.

**უწყვეტობა სიმრავლეზე.** ამბობენ, რომ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე სიმრავლეზე, თუ იგი უწყვეტია ამ სიმრავლის ყოველ წერტილში.

**შენიშვნა.** $[a;b]$ სეგმენტზე ფუნქციის უწყვეტობაზე ლაპარაკისას იგულისხმება, რომ ფუნქცია უწყვეტია ამ სეგმენტის ყოველ შიგა წერტილში, მარცხნიდან უწყვეტია $b$ წერტილში და მარჯვნიდან უწყვეტია $a$ წერტილში.

**წყვეტის წერტილთა სახეები.** თუ რაიმე წერტილში ფუნქცია არ არის უწყვეტი, მაშინ ამ წერტილს ეწოდება მოცემული ფუნქციის წყვეტის წერტილი.

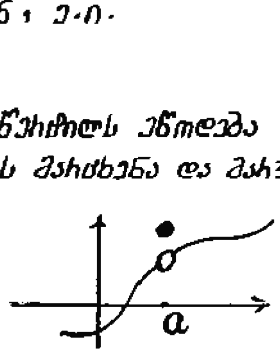
$a$ წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის აცილებადი წყვეტის წერტილი, თუ ამ წერტილში არსებობს ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები, ისინი ტოლნი არიან, მაგრამ არ ემთხვევიან $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობას $a$ წერტილში, ე.ი.

$$f(a-)=f(a+)\neq f(a).$$

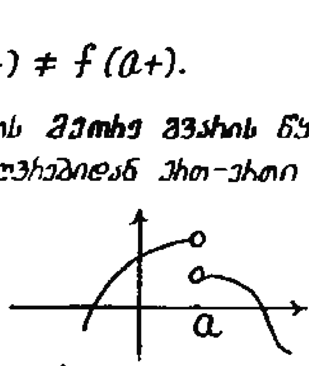
$a$ წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **პირველი გვარის** წყვეტის წერტილი, თუ ამ წერტილში არსებობენ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები, მაგრამ ისინი ტოლნი არ არიან, ე.ი.

$$f(a-)\neq f(a+).$$

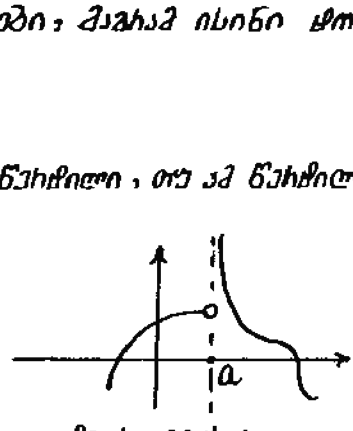
$a$ წერტილს ეწოდება ფუნქციის **მეორე გვარის** წყვეტის წერტილი, თუ ამ წერტილში არ არსებობს მარცხენა და მარჯვენა ზღვრებიდან ერთ-ერთი მაინც.



აცილებადი



პირველი გვარის



მეორე გვარის

## მოქმედებანი უწყვეტ ფუნქციებზე

**თეორემა.** უწყვეტ ფუნქციათა ჯამი, ნამრავლი უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო თუ მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ უწყვეტია შეფარდებაც.

**დამტკიცება.** მოყვანილი დებულების სამართლიანობა უშუალოდ გამოდის ფუნქციის უწყვეტობის განსაზღვრებიდან და ფუნქციის ზღვრის თვისებებიდან. მართლაც, მაგალითად, უწყვეტ ფუნქციათა ჯამისათვის გვექნება:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a).$$

მარტივად მტკიცდება აგრეთვე თეორემა უწყვეტ ფუნქციათა რთული ფუნქციის უწყვეტობის შესახებ: უწყვეტ ფუნქციათა რთული ფუნქცია აგრეთვე უწყვეტი ფუნქციაა.

შექცეული ფუნქციის შესახებ კი მტკიცდება, რომ სამართლიანია შემდეგი

**თეორემა.** თუ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე სეგმენტზე და გააჩნია შექცეული, მაშინ შექცეული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

## ძირითად ელემენტარულ ფუნქციათა უწყვეტობა

**მაჩვენებლიანი ფუნქცია.** $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ x\in R)$ ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არის ნებისმიერ $x_0$ წერტილში, ე.ი. $\lim_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$. ამის დამტკიცების მიზნით წინასწარ ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{x\to 0}a^x=1 . \qquad (1)$$

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a>1$. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\lim_{x\to 0+}a^x=1$ და $\lim_{x\to 0-}a^x=1$. პირველი ტოლობის დასამტკიცებლად ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის განვიხილოთ რიცხვი $\delta=\log_a(1+\varepsilon)$. ცხადია, $\delta>0$ და როცა $0<x<\delta$, მაშინ შესრულდება უტოლობა $a^x<1+\varepsilon$, ანუ $|a^x-1|<\varepsilon$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\lim_{x\to 0+}a^x=1$. მეორე ტოლობა მიიღება პირველი ტოლობიდან, თუ შემოვიღებთ $t=-x$ აღნიშვნას. მაშინ

$$\lim_{x\to 0-}a^x=\lim_{t\to 0+}a^{-t}=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{a^t}=\frac{1}{\lim_{t\to 0+}a^t}=\frac{1}{1}=1.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $0<a<1$, აღვნიშნოთ $b=\frac{1}{a}$. ცხადია $b>1$ და თუ გამოვიყენებთ უკვე დამტკიცებულ ნაწილს, გვექნება

$$\lim_{x\to 0}a^x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{b^x}=\frac{1}{\lim_{x\to 0}b^x}=\frac{1}{1}=1 .$$

ამით (1) ტოლობა დამტკიცებულია. მისი გამოყენებით მივიღებთ

$$\lim_{x\to x_0}a^x=\lim_{x\to x_0}\left(a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}\right)=a^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}\cdot 1=a^{x_0}.$$

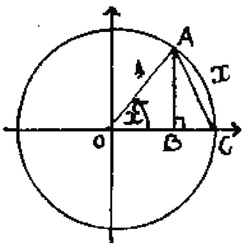
**ლოგარითმული ფუნქცია.** $f(x)=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$ ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში, როგორც მაჩვენებლიანი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

**ხარისხოვანი ფუნქცია.** ხარისხოვანი ფუნქცია ნატურალური მაჩვენებლით: $f(x)=x^n$ $(x\in R,\ n\in N)$ ფუნქცია უწყვეტია მთელს თავის განსაზღვრის არეში როგორც $y=x$ ხაზის უწყვეტ ფუნქციათა ნამრავლი, ხოლო ხარისხოვანი ფუნქცია ნამდვილი მაჩვენებ-

ლით: $f(x)=x^{\alpha}\ (x>0, \alpha\in R)$ აგრეთვე უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში. ეს გამომდინარეობს რთული ფუნქციის უწყვეტობის შესახებ თეორემიდან, რადგან $x^{\alpha}=a^{\alpha\log_a x}$.

**ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.** ა) $f(x)=\sin x$. ეს ფუნქცია უწყვეტია ნებისმიერ $x_0$ წერტილში. ე.ი. $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$. ამის დასამტკიცებლად წინასწარ ვაჩვენოთ უტოლობა

$$|\sin x|\le|x|.$$



თუ შევნიშნავთ, რომ კუთხის რადიანული ზომის სიდიდე ერთეულოვან წრეწირზე მისი შესაბამისი რკალის სიგრძის ტოლია, მივიღებთ

$$|\sin x|=AB\le AC\le|\breve{AC}|=|x|.$$

ამ უტოლობიდან, იმის გათვალისწინებით, რომ $|\cos x|\le 1$, გვექნება

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\right|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le$$

$$\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|.$$

ამრიგად, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$0\le|\sin x-\sin x_0|\le|x-x_0|.$$

ამ უტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ, რომ $\lim\limits_{x\to x_0}|\sin x-\sin x_0|=0$. აქედან კი, თავის მხრივ, გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

ბ) $f(x)=\cos x$. რადგან $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, თეორემიდან რთული ფუნქციის უწყვეტობის შესახებ დავასკვნით, რომ $\cos x$ ფუნქცია უწყვეტია ნებისმიერ წერტილში.

გ) $f(x)=\operatorname{tg}x$. რადგან $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ და $\sin x$, $\cos x$ ფუნქციები უწყვეტნი არიან, ამიტომ მათი შეფარდება უწყვეტი იქნება ყველა წერტილში, სადაც კი $\cos x\ne 0$, ე.ი. ყველა წერტილში, გარდა $\frac{\pi}{2}+\pi k\ (k\in Z)$ სახის წერტილებისა. ეს წერტილები არ შედიან $\operatorname{tg}x$-ის განსაზღვრის არეში. ე.ი. $f(x)=\operatorname{tg}x$ ფუნქცია უწყვეტია თავისი განსაზღვრის არის ნებისმიერ წერტილში.

დ) $f(x)=\operatorname{ctg}x$. ეს ფუნქციაც უწყვეტია თავისი განსაზღვრის არის ნებისმიერ წერტილში. ე.ი. ყველგან, გარდა $\pi k\ (k\in Z)$ სახის წერტილებისა.

**შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.** $f(x)=\arcsin x\ (-1\le x\le 1)$, $f(x)=\arccos x\ (-1\le x\le 1)$, $f(x)=\operatorname{arctg}x\ (x\in R)$, $f(x)=\operatorname{arcctg}x\ (x\in R)$.

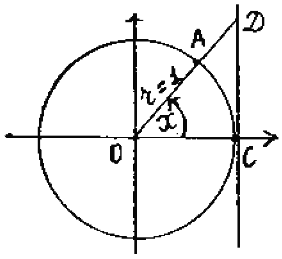
ეს ფუნქციები, როგორც უწყვეტ ფუნქციათა შექცეული ფუნქციები, უწყვეტნი არიან თავიანთ განსაზღვრის არეებში.

**დასკვნა.** ყველა ძირითადი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

**შენიშვნა.** ელემენტარული ეწოდება ისეთ ფუნქციას, რომელიც შედგენილია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებისა და არითმეტიკული ოპერაციების საშუალებით. უწყვეტი ფუნქციების თვისებებიდან და მოყვანილი დასკვნიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ელემენტარული ფუნქციაც უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

## ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ზღვარი

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. ამ ტოლობის დასამტკიცებლად ნახაზზე ვაჩვენოთ, რომ როცა $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, მაშინ $\sin x<x<\operatorname{tg}x$. ამ უტოლობის მარცხენა ნაწილი ჩვენთვის უკვე ცნობილია, ვაჩვენოთ მარჯვენა ნაწილი. ამისათვის შევადაროთ $OAC$ სექტორისა და $ODC$ სამკუთხედის ფართობები:




$$S_{OAC}=\frac{1}{2}r^2x=\frac{1}{2}x,\quad S_{\triangle ODC}=\frac{1}{2}OC\cdot DC=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,$$

და რადგან $S_{OAC}<S_{ODC}$, მივიღებთ, რომ $x<\operatorname{tg}x$.

დამტკიცებული უტოლობა შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

$\cos x$-ის ლუწობისა და $\sin x$-ის კენტობის ძალით, ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს უკანასკნელი უტოლობა სამართლიანია მაშინაც, როცა $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$. თუ მიღებულ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x\to 0$, ამასთან, გავითვალისწინებთ, რომ $\cos x$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$, მივიღებთ, რომ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ არსებობს და 1-ის ტოლია.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$. ჩვენ ნაჩვენები გვქონდა, რომ როცა $n\in N$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ არსებობს და ეს ზღვარი აღვნიშნეთ $e$-თი. მტკიცდება, რომ როცა $x\to\infty$ ნებისმიერად, მაშინაც $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს ზღვარი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირადაც: $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$, სადაც $\ln$ აღნიშნავს ლოგარითმს $e$ ფუძით: $\ln x=\log_e x$. ეს ტოლობა ადვილად მიიღება წინა პუნქტში მიღებული ტოლობიდან $\log_a x$ ფუნქციის უწყვეტობის გათვალისწინებით, მართლაც:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e=\frac{1}{\log_e a}=\frac{1}{\ln a}.$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $a=e$, დამტკიცებული ტოლობა მიიღებს სახეს: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$. ამ ტოლობის დამტკიცება შეიძლება წინა ტოლობის გამოყენებით. ამისათვის აღვნიშნოთ: $t=a^x-1$ და შევნიშნოთ, რომ $a^x$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო $t\to 0$, როცა $x\to 0$. მაშინ, გვექნება

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}}=\frac{1}{\frac{1}{\ln a}}=\ln a.$$

როცა $a=e$, ვღებულობთ, რომ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

დასკვნა. $\sin x$, $\ln(1+x)$, $e^x-1$ და $x$ ტოლფასი უსასრულოდ მცირებია, როცა $x\to 0$.

## პროცენტების უწყვეტად დარიცხვის ამოცანა

რიგ შემთხვევებში, შეთანხმების საფუძველზე, სარგებლის რთული K%-იანი განაკვეთის პირობებში, სარგებლის დარიცხვა ხდება არა ერთხელ (წლის ბოლოს) არამედ, მრავალ-ჯერ (ყოველკვარტალურად, ყოველთვიურად, ყოველდღიურად და ა.შ.).

სარგებლის წლიური რთული K%-იანი განაკვეთის პირობებში წელიწადში $m$-ჯერადი დარიცხვისას K% იყოფა $m$-ზე და წლის განმავლობაში დარიცხვა ხდება $m$-ჯერ, თი-თოეულ შემთხვევაში მიმდინარე ანაბრიდან $K/m\,\%$-ით.

აღნიშნულ პირობებში, $n$ წლის განმავლობაში დარიცხვა მოხდება $nm$-ჯერ, ამიტომ რთული პროცენტის გამოსათვლელი ფორმულის თანახმად, თანხა $n$ წლის შემდეგ იქნება

$$B_n^{(m)} = B\left(1+\frac{K/m}{100}\right)^{nm},$$

სადაც $B$ არის საწყისი თანხა, ხოლო $B_n^{(m)}$ - თანხა $n$-წლის შემდეგ, წელიწადში $m$-ჯერადი დარიცხვისას.

როდესაც $m \to \infty$, მივიღებთ თანხის უწყვეტად დარიცხვის შემთხვევას. ე.ი. თუ $B_n$-ით აღვნიშნავთ თანხას $n$-წლის შემდეგ პროცენტების უწყვეტად დარიცხვის შემთხვევაში, გვექნება

$$B_n = \lim_{m\to\infty} B\left(1+\frac{K/m}{100}\right)^{nm} = B\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{K}{100m}\right)^{nm}.$$

თუ აღვნიშნავთ $\frac{100m}{K} = x$, ცხადია, რომ $x \to \infty$, როცა $m \to \infty$. თუ გარდა ამისა, შევნიშნავთ, რომ $m = \frac{Kx}{100}$, გვექნება

$$B_n = B\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n\cdot\frac{Kx}{100}} = B\cdot\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{nK}{100}} = B\cdot e^{\frac{nK}{100}}.$$

ამრიგად, სარგებლის წლიური რთული K%-იანი განაკვეთის უწყვეტად დარიცხვის შემთხვევაში $n$ წლის განმავლობაში დაგროვილი თანხის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს სახე

$$B_n = B\cdot e^{\frac{Kn}{100}}.$$

შევნიშნოთ, რომ პრაქტიკაში ფინანსურ-საბანკო ოპერაციებში სარგებლის უწ-ყვეტად დარიცხვას იშვიათად მიმართავენ, მაგრამ რთული და მასშტაბური ფინანსური პროცესების ანალიზისას მიღებული ფორმულა საკმაოდ ეფექტური გამოდგება.

## რიცხვითი მწკრივი. მწკრივის კრებადობის ცნება

__რიცხვითი მწკრივი__. გამოსახულებას $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (1), სადაც $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, რიცხვითი მწკრივი ეწოდება. $a_n$-ს ეწოდება ამ მწკრივის ზოგადი წევრი.

აღვნიშნოთ: $S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2$, $\dots$, $S_n=a_1+a_2+\dots a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $\dots$ . ამ ჯამებს ეწოდებათ (1) მწკრივის კერძო ჯამები. სახელდობრ $S_n$-ს ეწოდება $n$-ური კერძო ჯამი.

__მწკრივის კრებადობა__. მწკრივის ჯამი ეწოდება ამ მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობის ზღვარს. თუ მწკრივს გააჩნია ჯამი, მას კრებადი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი - განშლადი.

მაშასადამე, თუ (1) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია $S$, მაშინ

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n\ , \text{ ანუ } \quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k .$$

## კრებად მწკრივთა ძირითადი თვისებები

1) მწკრივის წევრთა სასრული რაოდენობის შეცვლით მწკრივის კრებადობა არ დაირღვევა.

2) თუ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ და $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ კრებადი მწკრივებია, ხოლო $C$ რაიმე რიცხვია, მაშინ კრებადი იქნება მწკრივებიც $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Ca_n$ და

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty}Ca_n=C\sum_{n=1}^{\infty}a_n .$$

## უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი

გეომეტრიულ პროგრესიას $b_1, b_1q, b_1q^2, \dots$, როდესაც $|q|<1$, უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება.

ამ პროგრესიის წევრთა ჯამი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\frac{b_1}{1-q} .$$

მართლაც, თუ ვისარგებლებთ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი $n$ წევრის ჯამის გამოსათვლელი ფორმულით და შევნიშნავთ, რომ როცა $|q|<1$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, მივიღებთ

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\right)=\frac{b_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n)=\frac{b_1}{1-q} .$$

__შენიშვნა__. ეს მასალა უნდა ჩაემატოს ნაწილის რიცხვის შემდეგ.

## წარმოებულის ცნება, მისი გეომეტრიული და ფიზიკური (მექანიკური) აზრი.

წარმოებულის ცნება. ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x_0$ წერტილის რაიმე მიდამოში. აღვნიშნოთ: $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$. $\Delta x$ ეწოდება არგუმენტის, ხოლო $\Delta y$-ს — ფუნქციის ნაზრდი $x_0$ წერტილში.

ფუნქციის წარმოებული რაიმე წერტილში ეწოდება ამ წერტილში ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

$x_0$ წერტილში $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული აღინიშნება $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $y'$ ან $\frac{dy}{dx}$ სიმბოლოთი. ე.ი.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

თუ შევნიშნავთ, რომ $x=x_0+\Delta x$, წარმოებულის განსაზღვრება მიიღებს ასეთ ჩანაწერს

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

ეს ტოლობა საშუალებას გვაძლევს წარმოებული ჩავწეროთ $x$ წერტილშიც. მართლაც, თუ არგუმენტის ნაზრდს $x$ წერტილში კვლავ $\Delta x$-ით აღვნიშნავთ, გვექნება

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

თუ ფუნქციას რაიმე წერტილში გააჩნია წარმოებული, ვამბობთ, რომ იგი ამ წერტილში არის წარმოებადი ანუ დიფერენცირებადი. თუ ფუნქცია წარმოებადია რაიმე სიმრავლის ყოველ წერტილში, ვამბობთ, რომ იგი წარმოებადია ამ სიმრავლეზე.

კავშირი უწყვეტობასთან. სამართლიანია შედეგი

თეორემა. თუ ფუნქცია წარმოებადია რაიმე წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია ამ წერტილში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $x_0$ წერტილში. უნდა ვაჩვენოთ, რომ მაშინ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. აღვნიშნოთ

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=\alpha(x).$$

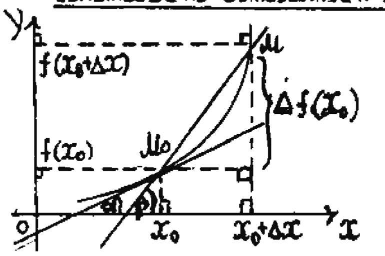
წარმოებადობის გამო, ცხადია, $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. მაშინ, თუ შევნიშნავთ, რომ

$$f(x)-f(x_0)=(\alpha(x)+f'(x_0))(x-x_0).$$

ამ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როცა $x\to x_0$, გვექნება, რომ $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$. აქედან კი ვღებულობთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

შენიშვნა. ამ თეორემის შებრუნებული დებულება არაა სამართლიანი. მართლაც, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $x_0=0$ წერტილში $f(x)=|x|$ ფუნქცია უწყვეტია, მაგრამ არაა წარმოებადი.

წარმოებულის გეომეტრიული აზრი გამომდინარეობს შედეგიდან: $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $x_0$ წერტილში უდრის ამ ფუნქციის გრაფიკის $M_0(x_0;f(x_0))$ წერტილში გავლებული მხების კუთხურ კოეფიციენტს. ე.ი. $K=f'(x_0)$.




მართლაც, რადგან $M_0$ წერტილში გავლებული მხები არის ზღვარი, რომელიც მიიღება $M_0M$ მკვეთისაგან, როცა გრაფიკზე მდებარე $M$ წერტილი მიისწრაფვის $M_0$ წერტილისაკენ, ე.ი. როცა $\Delta x\to 0$, მაშინ, ცხადია, რომ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta=\alpha$ და $tgx$-ის უწყვეტობის გამო გვექნება

$$K=tg\alpha=tg\left(\lim_{\Delta x\to 0}\beta\right)=\lim_{\Delta x\to 0}tg\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

წარმოებულის ფიზიკური აზრი გამომდინარეობს შედეგიდან: სხეულის მოძრაობის სიჩქარე უდრის განვლილი გზის წარმოებულს დროით. ე.ი. თუ $S(t)$ აღნიშნავს სხეულის მიერ დროის $t$ მომენტისათვის განვლილ გზას, $V(t)$-ს კი — სიჩქარეს $t$ მომენტში, მაშინ $V(t)=S'(t)$. მართლაც, დროის $[t;t+\Delta t]$ შუალედში განვლილი მანძილი იქნება $S(t+\Delta t)-S(t)$, ხოლო ამ შუალედში სხეულის საშუალო სიჩქარე იქნება $\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$. ცხადია, რომ რაც უფრო მცირეა დროის $\Delta t$ შუალედი, საშუალო სიჩქარე მით უფრო ახლოს იქნება $t$ მომენტში სიჩქარესთან. ე.ი

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}V_{საშ.}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=S'(t).$$

## წარმოებულის ეკონომიკური აზრი

ვთქვათ, $u=u(t)$ არის მწარმოებლის მიერ დროის $t$ მომენტისათვის გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა. ვიპოვოთ მისი შრომის ნაყოფიერება დროის $t$ მომენტში.

დროის $[t, t+\Delta t]$ შუალედში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობაა $u(t+\Delta t)-u(t)$, ამიტომ დროის ამ შუალედში საშუალო შრომის ნაყოფიერება იქნება

$$V_{საშ}=\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}.$$

ცხადია, რომ დროის $t$ მომენტში შრომის ნაყოფიერება $V(t)$ შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც დროის $[t, t+\Delta t]$ შუალედში შრომის საშუალო ნაყოფიერების ზღვარი, როცა $\Delta t\to 0$, ე.ი.

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0} V_{საშ}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}=u'(t).$$

ამრიგად, წარმოებულის ე კ ო ნ ო მ ი კ უ რ ი შ ი ნ ა ა რ ს ი მდგომარეობს შემდეგში: შრომის ნაყოფიერება უდრის პროდუქციის რაოდენობის წარმოებულს დროით.

განვიხილოთ წარმოებულის ეკონომიკური აზრის კიდევ ერთი ასპექტი.

ვთქვათ, $y(x)$ არის $x$ რაოდენობის პროდუქციის დამზადებაზე გაწეული დანახარჯები. თუ პროდუქციის რაოდენობა გაიზრდა $\Delta x$-ით, მას მოყვება დანახარჯების $\Delta y$-ით ზრდა, ხოლო შეფარდება $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ იქნება პროდუქციის ერთეულზე დანახარჯების საშუალო ნაზრდი. ზღვარი

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

გვიჩვენებს ე.წ. ზღვრულ დანახარჯებს და ახასიათებს იმ დამატებით დანახარჯებს, რაც საჭიროა ერთეული რაოდენობის დამატებითი პროდუქციის შესაქმნელად.

## გაწარმოების ძირითადი წესები

**თეორემა.** თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადნი არიან $x$ წერტილში, მაშინ ამ წერტილში წარმოებადი იქნება მათი ჯამიც და $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$.

**დამტკიცება.** აღვნიშნოთ: $\Phi(x)=f(x)+g(x)$. გვექნება

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x))-(f(x)+g(x))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x). \quad \text{რ.დ.გ.}$$

**თეორემა.** თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადნი არიან $x$ წერტილში, მაშინ ამ წერტილში წარმოებადი იქნება მათი ნამრავლიც და $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

**დამტკიცება.** აღვნიშნოთ: $\Phi(x)=f(x)\cdot g(x)$ და განვიხილოთ $\Phi(x)$ ფუნქციის ნაზრდი

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)=f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot g(x+\Delta x)-$$

$$-f(x)\cdot g(x)=(f(x+\Delta x)-f(x))\cdot g(x+\Delta x)+f(x)(g(x+\Delta x)-g(x)),$$ საიდან

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x\to 0$, და გავითვალისწინებთ, რომ წარმოებადობის გამო $g(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x$ წერტილში და ე.ი. $\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)=g(x)$, მივიღებთ რომ $\Phi'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

რ.დ.გ.

**შედეგი.** მუდმივი თანამამრავლი გამოდის წარმოებულის ნიშნის გარეთ, ე.ი.

$$(Cf(x))'=Cf'(x).$$

**დამტკიცება.** რადგანაც მუდმივი ფუნქციის ნაზრდი ნულის ტოლია, ამიტომ წარმოებულის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ მუდმივი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია. ე.ი. $C'=0$. მაშინ

$$(C\cdot f(x))'=C'\cdot f(x)+C\cdot f'(x)=0\cdot f(x)+Cf'(x)=Cf'(x).$$

რ.დ.გ.

**თეორემა.** თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადნი არიან $x$ წერტილში, ამასთან $g(x)\neq 0$, მაშინ ამ წერტილში წარმოებადი იქნება $\frac{f(x)}{g(x)}$ შეფარდებაც და

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

**დამტკიცება.** აღვნიშნოთ: $\Phi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ და განვიხილოთ $\Phi(x)$ ფუნქციის ნაზრდი

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}\cdot\left[f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)\right]=\frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}\times$$

$$\times\left[f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)\right]=\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\left[(f(x+\Delta x)-f(x))g(x)-f(x)(g(x+\Delta x)-g(x))\right].$$

მაშინ

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right].$$

ამ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როცა $\Delta x\to 0$ და $g(x)$-ის უწყვეტობის გათვალისწინებით მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა.** თუ $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $x$ წერტილში, ხოლო $x=\varphi(t)$ ფუნქცია წარმოებადია $t$ წერტილში, მაშინ $y=f(\varphi(t))$ რთული ფუნქცია წარმოებადი იქნება $t$ წერტილში და

$$(f(\varphi(t)))'=f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \quad \text{ანუ} \quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

**დამტკიცება.** წარმოებულის განსაზღვრების თანახმად

$$(f(\varphi(t)))'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}\right).$$

ვინაიდან, პირობით, $x=\varphi(t)$ ფუნქცია წარმოებადია, ამიტომ იგი უწყვეტია. ამის გამო $\lim_{\Delta t\to 0}\varphi(t+\Delta t)=\varphi(t)$.

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)]=0$, ანუ $\Delta x\to 0$, როცა $\Delta t\to 0$. ამიტომ

$$(f(\varphi(t)))'=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=f'(x)\cdot\varphi'(t)=f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

რ.დ.გ.

შენიშვნა. დამტკიცებისას ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)\neq 0$. მტკიცდება, რომ თეორემა სამართლიანია მაშინაც, როცა $\Delta x$ ზოგიერთი ან ყველა $\Delta t$-თვის შეიძლება გახდეს 0-ის ტოლი.

თეორემა. ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x_0$ წერტილში და მისი შებრუნებული $x=f^{-1}(y)$ ფუნქცია უწყვეტია შესაბამის $y_0=f(x_0)$ წერტილში. თუ $x_0$ წერტილში $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია და $f'(x_0)\neq 0$, მაშინ $f^{-1}(y)$ ფუნქცია წარმოებადი იქნება $y_0$ წერტილში და ადგილი აქვს ტოლობას

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

დამტკიცება. უწყვეტობის გამო $x\to x_0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $y\to y_0$. ამიტომ

$$(f^{-1})'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

## ძირითადი ელემენტარული ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი

1. $(a^x)'=a^x\ln a$, $(e^x)'=e^x$
2. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
3. ა) $(x^n)'=nx^{n-1}$ $(n\in N,\ x\in R)$
   ბ) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha\in R,\ x>0)$
4. $(\sin x)'=\cos x$
5. $(\cos x)'=-\sin x$
6. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
7. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
8. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$
11. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

დამტკიცება:

1. $$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\left|\begin{array}{c}\text{ერთ-ერთი}\\\text{მნიშვნელოვანი}\\\text{ზღვრის ძალით}\end{array}\right|=a^x\ln a.$$

2. $$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{x\cdot\frac{\Delta x}{x}}=$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\left|\begin{array}{c}\text{ერთ-ერთი}\\\text{მნიშვნელოვანი}\\\text{ზღვრის ძალით}\end{array}\right|=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

3. ა) ვაჩვენოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით: როცა $n=1$, გვაქვს

$$(x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1\cdot x^{1-1}.$$

ე.ი. $n=1$-თვის დასამტკიცებელი ტოლობა ჭეშმარიტია.

დავუშვათ, რომ დასამტკიცებელი ტოლობა ჭეშმარიტია $n$-თვის და ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა $(n+1)$-თვის. ე.ი. ვაჩვენოთ, რომ $(x^{n+1})'=(n+1)x^n$. ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად

$$(x^{n+1})'=(x^n\cdot x)'=(x^n)'\cdot x+x^n(x')=n\cdot x^{n-1}\cdot x+x^n\cdot 1=(n+1)x^n.$$

რ.დ.გ.

ბ) რთული და მაჩვენებლიანი ფუნქციების გაწარმოების წესების გამოყენებით გვექნება

$$(x^{\alpha})'=[(e^{\ln x})^{\alpha}]'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

4. $$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

5. $y=\cos x$ ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლა შეიძლება ისეთივე გზით, როგორც გამოვთვალეთ $y=\sin x$-ის წარმოებული, ან კიდევ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით, კერძოდ, შემდეგნაირად

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\sin x\cdot(-1)=-\sin x.$$

6. შეფარდების წარმოებულის შესახებ თეორემის ძალით

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

7. $$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

8. თუ $y=\arcsin x$, მაშინ $x=\sin y$ და შექცეული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად გვექნება

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9. თუ $y=\arccos x$, მაშინ $x=\cos y$ და წინა პუნქტის ანალოგიურად გვექნება

$$(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. თუ $y=\operatorname{arctg}x$, მაშინ $x=\operatorname{tg}y$. შეგვიძლია დავწეროთ

$$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg}y)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

11. თუ $y=\operatorname{arcctg}x$, მაშინ $x=\operatorname{ctg}y$. გვექნება

$$(\operatorname{arcctg}x)'=\frac{1}{(\operatorname{ctg}y)'}=\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}}=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

## ფუნქციის დიფერენციალი და მისი გეომეტრიული შინაარსი

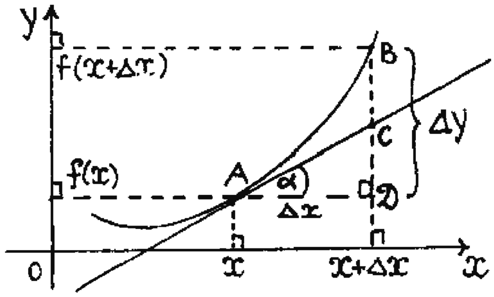
**დიფერენციალი.** ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $x$ წერტილში. როგორც ვიცით, $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. აღვნიშნოთ: $\alpha(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)$. ცხადია $\alpha(x)\to 0$, როცა $\Delta x\to 0$, ე.ი. $\alpha(x)$ არის უსასრულოდ მცირე, როცა $\Delta x\to 0$. წინა ტოლობა გადავწეროთ ასე

$$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(x)\cdot\Delta x.$$

მაშასადამე, ფუნქციის ნაზრდი წარმოდგენილია ორი შესაკრების სახით. ორივე მათგანი უსასრულოდ მცირეა, როცა $\Delta x\to 0$, მაგრამ თუ $f'(x)\neq 0$, ცხადია, რომ მეორე შესაკრები უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე პირველი. ე.ი. მოცემულ ნაზრდში მთავარ ნაწილს წარმოადგენს პირველი შესაკრები. ფუნქციის ნაზრდის ამ მთავარ ნაწილს ეწოდება ამ ფუნქციის დიფერენციალი $x$ წერტილში და იგი აღინიშნება $df(x)$ ან, მოკლედ, $dy$ სიმბოლოთი. მაშასადამე, $df(x)=f'(x)\Delta x$. ამ ტოლობის მიხედვით $dx=x'\cdot\Delta x$, ე.ი. $dx=\Delta x$. მაშასადამე, წინა ტოლობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$df(x)=f'(x)dx\text{, ანუ, მოკლედ }dy=y'\cdot dx.$$

<u>დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი</u> მდგომარეობს შემდეგში: ფუნქციის დიფერენციალი რაიმე წერტილში უდრის ფუნქციის გრაფიკის შესაბამის წერტილში გავლებული მხების წერტილის ორდინატის მიერ მიღებულ ნაზრდს.




მართლაც, $A$ წერტილზე გავლებული მხების წერტილის ორდინატის მიერ მიღებული ნაზრდია $CD$. მაგრამ $\Delta ACD$-დან $CD = \Delta x \cdot tg\alpha$, ხოლო $tg\alpha = k = f'(x)$. ე.ი.

$$CD = f'(x)\cdot\Delta x, \text{ ანუ } CD = df(x).$$

## <u>მაღალი რიგის წარმოებულები</u>

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია რაიმე შუალედზე, მაშინ $f'(x)$ იქნება ამ შუალედზე განსაზღვრული ფუნქცია. $f'(x)$ ფუნქციის წარმოებულს რაიმე წერტილში ეწოდება მოცემული $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული ამ წერტილში და იგი $f''(x)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ე.ი. $f''(x)=[f'(x)]'$. ანალოგიურად განისაზღვრება $f(x)$ ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული: $f'''(x) = [f''(x)]'$ და ა.შ. შემდეგი რიგის წარმოებულების აღსანიშნავად გამოიყენება რომაული ციფრები: $f^{IV}(x)$, $f^{V}(x), \dots$ . $n$-ური რიგის წარმოებული $f^{(n)}(x)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

გარდა ამისა, მეორე, მესამე და ა.შ. $n$-ური რიგის წარმოებულებს, შესაბამისად, ასე აღნიშნავენ

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2},\quad \frac{d^3f(x)}{dx^3}, \dots, \frac{d^{(n)}f(x)}{dx^n}.$$

## ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმები

__მაქსიმუმი__. $x_0$ წერტილს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის (ან, უბრალოდ, მაქსიმუმის) წერტილი, თუ არსებობს $x_0$ წერტილის ისეთი $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ მიდამო, რომ $f(x)\le f(x_0)$, როცა $x\in(x_0-\delta; x_0+\delta)$.

ფუნქციის მნიშვნელობას მაქსიმუმის წერტილში მაქსიმუმი ეწოდება. მაქსიმუმის წერტილი აღინიშნება $x_{max}$-ით, ხოლო მაქსიმუმი $y_{max}$-ით.

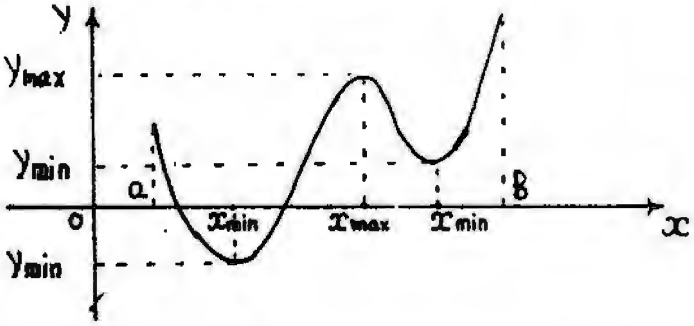
__მინიმუმი__. $x_0$ წერტილს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის (ან, უბრალოდ, მინიმუმის) წერტილი, თუ არსებობს $x_0$ წერტილის ისეთი $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ მიდამო, რომ $f(x)\ge f(x_0)$, როცა $x\in(x_0-\delta; x_0+\delta)$.

ფუნქციის მნიშვნელობას მინიმუმის წერტილში მინიმუმი ეწოდება. მინიმუმის წერტილი აღინიშნება $x_{min}$-ით, ხოლო მინიმუმი $y_{min}$-ით.

__ექსტრემუმი__. წერტილს ეწოდება ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი, თუ ის არის ამ ფუნქციის ან მაქსიმუმის ან მინიმუმის წერტილი.

ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში კი ფუნქციის ექსტრემუმები ეწოდებათ.

__შენიშვნა.__ ცხადია, რომ თუ ჩაკეტილ $[a; b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქცია ამ სეგმენტზე ღებულობს თავის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს, მაშინ ეს მნიშვნელობები მიიღწევა ან ექსტრემუმის წერტილებში ან სეგმენტის ბოლოებზე.




## ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა

ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას გვაძლევს შემდეგი

__თეორემა__ (ფერმას თეორემა). თუ $x_0$ წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი, მაშინ $f'(x_0)$ ან არ არსებობს ან $f'(x_0)=0$.

__დამტკიცება__. უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ $x_0$ ექსტრემუმის წერტილია და $f'(x_0)$ არსებობს, მაშინ $f'(x_0)=0$.

ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ $x_0$ მაქსიმუმის წერტილია. მაშინ არსებობს $x_0$-ის ისეთი $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ მიდამო, რომ $f(x)\le f(x_0)$, როცა $x\in(x_0-\delta; x_0+\delta)$. ე.ი. მთელს ამ მიდამოში სხვაობა უარყოფითია $f(x)-f(x_0)\le 0$. ამიტომ, ცხადია, რომ აღნიშნულ მიდამოში გვექნება:

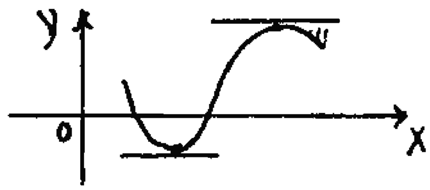
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0, \text{ როცა } x<x_0 \text{ და } \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0, \text{ როცა } x>x_0.$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0 \quad \text{და} \quad \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0.$$

მაგრამ, წარმოებულის არსებობის გამო არსებობს ცალმხრივი ფარდობის ზღვარი $x_0$ წერტილში. ჩვენ კი ვიცით, რომ მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები და თვითონ ზღვარიც ტოლი უნდა იყვნენ. მაშასადამე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $f'(x_0)\geq 0$ და $f'(x_0)\leq 0$, საიდანაც $f'(x_0)=0$.

<u>შენიშვნა</u>. ფერმას თეორემას აქვს შემდეგი გეომეტრიული შინაარსი:– წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკისადმი ექსტრემუმის წერტილში გავლებული მხები აბსცისთა ღერძის პარალელურია.




ეს ფაქტი უშუალოდ გამომდინარეობს ფერმას თეორემიდან და წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსიდან.

<u>შენიშვნა</u>. წარმოებულის ნულთან ტოლობა არაა საკმარისი პირობა ექსტრემუმის არსებობისთვის. მაგალითად, $f(x)=x^3$ ფუნქციისთვის $f'(0)=0$, მაგრამ $x_0=0$ არაა ექსტრემუმის წერტილი.

## <u>როლის თეორემა</u>

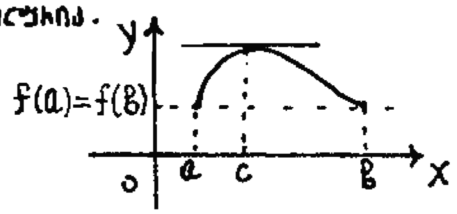
<u>თეორემა</u>. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე, წარმოებადია ამ სეგმენტის ყველა შიგა წერტილში და $f(a)=f(b)$. მაშინ $a$ და $b$ წერტილებს შორის არსებობს ისეთი $c$ წერტილი, რომ $f'(c)=0$.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ, $m$ და $M$ არის, შესაბამისად, $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები $[a;b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) $m=M$. ამ შემთხვევაში, ცხადია, $f(x)$ მუდმივია და $c$ წერტილის როლში შეგვიძლია ავიღოთ $a$ და $b$-ს შორის ნებისმიერი წერტილი.

2) $m\neq M$. მაშინ, $f(a)=f(b)$ პირობის გამო უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობებიდან ერთ-ერთი მაინც მიიღწევა $[a;b]$ სეგმენტის რომელიღაც შიგა $c$ წერტილზე. მაშინ, ცხადია, $c$ წერტილი იქნება ექსტრემუმის წერტილი. ფერმას თეორემის ძალით დავასკვნით, რომ $f'(c)=0$.

<u>შენიშვნა</u>. როლის თეორემას აქვს შემდეგი გეომეტრიული შინაარსი:– თუ წარმოებადი ფუნქცია რაიმე ორ წერტილში ტოლ მნიშვნელობებს ღებულობს, მაშინ ამ წერტილებს შორის არსებობს ისეთი წერტილი, რომლისთვისაც ფუნქციის გრაფიკისადმი შესაბამის წერტილში გავლებული მხები აბსცისთა ღერძის პარალელურია.




## <u>ლაგრანჟის თეორემა</u>

<u>თეორემა</u>. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და წარმოებადია ამ სეგმენტის ყველა შიგა წერტილში. მაშინ $a$ და $b$ წერტილებს შორის არსებობს ისეთი $c$ წერტილი, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

<u>დამტკიცება.</u> განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

ცხადია, რომ ეს ფუნქცია იქნება $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი და ამ სეგმენტის ყოველ შიგა წერტილში წარმოებადი. გარდა ამისა, $F(a)=f(a)$ და $F(b)=f(a)$, ე.ი. $F(a)=F(b)$. მაშასადამე, $F(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას. ამიტომ, $a$ და $b$ წერტილებს შორის იარსებებს ისეთი $C$ წერტილი, რომ $F'(C)=0$. მაგრამ

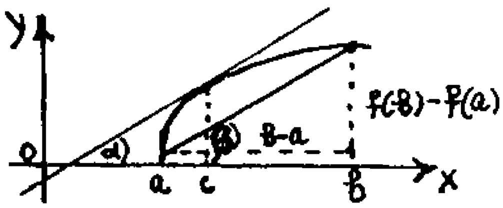
$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

ე.ი.

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

საიდანაც მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

<u>შენიშვნა.</u> ლაგრანჟის თეორემას აქვს შემდეგი გეომეტრიული შინაარსი:– წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკზე არსებობს მისი ორი წერტილის შორის ისეთი წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები ამ ორი წერტილის შემაერთებელი ქორდის პარალელურია.




მართლაც, მხების კუთხური კოეფიციენტია $tg\alpha=f'(c)$, ქორდის კი $tg\beta=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ლაგრანჟის თეორემის თანახმად, რომ $tg\alpha=tg\beta$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\alpha=\beta$ და ე.ი. მხები და ქორდა პარალელური არიან.

## კოშის თეორემა

<u>თეორემა.</u> ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები არიან უწყვეტნი $[a,b]$ სეგმენტზე და წარმოებადნი ამ სეგმენტის ყოველ შიგა წერტილში, ამასთან $g'(x)\neq 0$. მაშინ $a$ და $b$ წერტილებს შორის იარსებებს ისეთი $C$ წერტილი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

<u>დამტკიცება</u> ლაგრანჟის თეორემის ანალოგიურია, ოღონდ ამჯერად უნდა განვიხილოთ შემდეგი დამხმარე ფუნქცია

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right).$$

<u>შენიშვნა.</u> ადვილი შევამჩნევთ, რომ ლაგრანჟის თეორემა წარმოადგენს კოშის თეორემის იმ კერძო შემთხვევას, როცა $g(x)=x$.

## განუზღვრელობათა გახსნის ლოპიტალის წესი

<u>თეორემა.</u> ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადნი არიან $a$ წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა, შესაძლოა, თვითონ $a$ წერტილისა, ამასთან $g'(x)\neq 0$. ვთქვათ, გარდა ამისა, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. მაშინ, თუ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(41) იარსებებს ზღვარი $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ და ადგილი აქვს ტოლობას $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ, $x$ ნებისმიერი მიდამოს წერტილია. $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს $a$ წერტილში მივანიჭოთ $0$-ის ტოლი მნიშვნელობები. მაშინ ეს ფუნქციები იქნებიან უწყვეტნი $a$ წერტილშიც. კოშის თეორემის ძალით $a$ და $x$ წერტილებს შორის იარსებებს ისეთი $c$ წერტილი, რომ

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

საიდანაც

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

ვინაიდან $c$ მოთავსებულია $a$ და $x$ წერტილებს შორის, ამიტომ, ცხადია $c\to a$ როცა $x\to a$. ამიტომ, წინა ტოლობის საზღვარზე გადასვლით დავწერთ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

მაგრამ, $\lim\limits_{c\to a}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ იგივეა, რაც $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. ე.ი. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

<u>შენიშვნა</u>. მოყვანილი თეორემა ეხება $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობებს. ანალოგიური თეორემა სამართლიანია $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუზღვრელობისთვისაც.

## <u>ტეილორის ფორმულა</u>

<u>თეორემა</u>. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას $a$ წერტილის რაიმე მიდამოში გააჩნია წარმოებულები $n$ რიგამდე ჩათვლით. მაშინ, ამ მიდამოს ნებისმიერი $x$ წერტილისათვის მოიძებნება $a$ და $x$ წერტილებს შორის მდებარე ისეთი $c$ წერტილი, რომლისთვისაც

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \quad (1)$$

<u>დამტკიცება</u>. აღვნიშნოთ ისეთი $M$ რიცხვი, რომელიც განისაზღვრება ტოლობიდან

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{M}{n!}(x-a)^n. \quad (2)$$

ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ $a$ და $x$ შორის არსებობს ისეთი $c$ წერტილი, რომლისთვისაც $f^{(n)}(c)=M$. ამისათვის დავაფიქსიროთ $x$ წერტილი და განვიხილოთ $t$ არგუმენტის შემდეგი დამხმარე ფუნქცია

$$\varphi(t)=f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{M}{n!}(x-t)^n. \quad (3)$$

(3) ტოლობიდან ჩანს, რომ $\varphi(x)=f(x)$, ხოლო (3) და (2) ტოლობებიდან ვღებულობთ, რომ $\varphi(a)=f(x)$. მაშასადამე, $\varphi(a)=\varphi(x)$. გარდა ამისა, ცხადია, $\varphi(t)$ ფუნქცია იქნება წარმოებადი იმ უბანზე, რომლის ბოლოებია $a$ და $x$. ამიტომ, როლის თეორემის თანახმად, $a$ და $x$ შორის იარსებებს ისეთი $c$, რომ $\varphi'(c)=0$. მაგრამ

$$\varphi'(t)=f'(t)+\left[\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-f'(t)\right]+\left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right]+\dots$$
$$+\left[\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2}\right]-\frac{M}{(n-1)!}(x-t)^{(n-1)}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში ყველა წევრი ბათილდება გარდა

ორი ნამრავლისა, საიდანაც
$$\varphi'(t)=\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-\frac{M}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}.$$
საიდანაც, $\varphi'(c)=0$ როლის თეორემის დასკვნიდან გამომდინარე, რაც $f^{(n)}(c)=M$.

<u>შენიშვნა</u>. წევრს $r_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ ლაგრანჟის ფორმის ნაშთითი წევრი ეწოდება.

<u>შენიშვნა</u>. თუ (1) ფორმულაში ავიღებთ $a=0$, იგი მიიღებს სახეს
$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n,$$
სადაც $c$ არის $0$ და $x$ წერტილებს შორის მდებარე რაიმე წერტილი.

ამ ფორმულას მაკლორენის ფორმულა ეწოდება.

## <u>ფუნქციის მონოტონურობის პირობები</u>

<u>თეორემა.</u> ვთქვათ, $f(x)$ რაიმე შუალედზე წარმოებადი ფუნქციაა. ამ შუალედზე:

1) $f(x)$ მუდმივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f'(x)=0$;
2) $f(x)$ არაკლებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f'(x)\geq 0$;
3) $f(x)$ არაზრდადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f'(x)\leq 0$;
4) თუ $f'(x)>0$, მაშინ $f(x)$ ზრდადია;
5) თუ $f'(x)<0$, მაშინ $f(x)$ კლებადია.

<u>დამტკიცება.</u> 1) აქ უნდა ვაჩვენოთ, რომ: ა) თუ $f(x)$ მუდმივია, მაშინ $f'(x)=0$, ბ) თუ $f'(x)=0$, მაშინ $f(x)$ მუდმივია.

ა) წინადადების სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს წარმოებულის განსაზღვრებიდან. ბ) წინადადების სამართლიანობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ მოცემული შუალედის ნებისმიერი $x_1$ და $x_2$ წერტილისათვის $f(x_1)=f(x_2)$. ეს კი ასეა, რადგან ლაგრანჟის თეორემის თანახმად $x_1$ და $x_2$ შორის არსებობს ისეთი $x$ წერტილი, რომ $f(x_1)-f(x_2)=f'(x)(x_1-x_2)$, მაგრამ $f'(x)=0$. მაშინ $f(x_1)=f(x_2)$.

2) აქაც ჯერ ნაწილი დავამტკიცოთ წარმოებულის არსებობის საჭიროება, ამისათვის ვისარგებლოთ ლაგრანჟის თეორემის გამოყენებით. მართლაც, თუ $f(x)$ არაკლებადია, მაშინ $f(x)\geq f(x_0)$, როცა $x\geq x_0$ და $f(x)\leq f(x_0)$, როცა $x<x_0$. საიდანაც, ორივე შემთხვევაში
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0.$$
თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x\to x_0$, მივიღებთ, რომ $f'(x_0)\geq 0$, სადაც $x_0$ წერტილი ნებისმიერია. ამით ნაჩვენებია მოცემული ფუნქციის აუცილებლობა.

თუ $f'(x)\geq 0$ და $x_1<x_2$ მოცემული შუალედის ნებისმიერი ორი წერტილია, მაშინ, ლაგრანჟის თეორემის თანახმად, $f(x_1)-f(x_2)=f'(x)(x_1-x_2)\leq 0$, ე.ი. $f(x_1)\leq f(x_2)$. ეს კი ნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის არაკლებადობას.

3) ეს თეორემა შეიძლება დამტკიცდეს ანალოგიური მსჯელობით, ან $(-f(x))$ ფუნქციის განხილვით და უკვე დამტკიცებული 2) თეორემის გამოყენებით. სახელდობრ, შევნიშნოთ: — $f(x)$ არაზრდადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(-f(x))$ არაკლებადია, ეს კი ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(-f(x))' \geq 0$, ე.ი. როცა $f'(x) \leq 0$.

4) და 5) თეორემები მტკიცდება წინა თეორემის მსგავსად.

<u>შენიშვნა</u>. 4) და 5) თეორემებში მოყვანილი წინადადებების შებრუნებული წინადადებები არაა სამართლიანი. მაგალითად, $f(x)=x^3$ ფუნქცია ზრდადია მთელ თავის განსაზღვრის არეში, მაგრამ $f'(0)=0$.

<u>შენიშვნა</u>. მოყვანილ თეორემებში სიტყვა „შუალედი" არ შეიძლება შეიცვალოს სიტყვით „სიმრავლე". მაგალითად, $f(x)=\operatorname{tg}x$ ფუნქციის წარმოებული დადებითია ამ ფუნქციის განსაზღვრის არის ყოველ წერტილში, მაგრამ ეს ფუნქცია არაა ზრდადი მთელ თავის განსაზღვრის არეში.

## <u>ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები</u>

ვიტყვით, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია $x_0$ წერტილზე გავლისას იცვლის ნიშანს „−"-დან „+"-ზე, თუ არსებობს $x_0$ წერტილის ისეთი $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ მიდამო, რომ $\varphi(x) \leq 0$, როცა $x \in (x_0-\delta, x_0)$ და $\varphi(x) \geq 0$, როცა $x \in (x_0, x_0+\delta)$. ასევე განისაზღვრება გამოთქმა — „იცვლის ნიშანს „+"-დან „−"-ზე".

<u>თეორემა</u>. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $x_0$ წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა, შესაძლოა, თვითონ $x_0$ წერტილისა, ხოლო ამ წერტილში იგი უწყვეტია. მაშინ: 1) თუ $f'(x)$ $x_0$ წერტილზე გავლისას იცვლის ნიშანს „−"-დან „+"-ზე, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას $x_0$ წერტილში აქვს მინიმუმი, 2) თუ $f'(x)$ $x_0$ წერტილზე გავლისას იცვლის ნიშანს „+"-დან „−"-ზე, $f(x)$ ფუნქციას $x_0$ წერტილში აქვს მაქსიმუმი, 3) თუ $f'(x)$ $x_0$ წერტილზე გავლისას არ იცვლის ნიშანს, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას $x_0$ წერტილში არ აქვს ექსტრემუმი.

<u>დამტკიცება</u>. 1) ვთქვათ, $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ისეთი მიდამოა, რომ $f'(x) \leq 0$ როცა $x \in (x_0-\delta, x_0)$ და $f'(x) \geq 0$ როცა $x \in (x_0, x_0+\delta)$. ვთქვათ, $x \neq x_0$ ამ მიდამოს ნებისმიერი წერტილია. მაშინ, ლაგრანჟის თეორემის თანახმად, $x$ და $x_0$ შორის არსებობს ისეთი $c$ წერტილი, რომ $f(x)-f(x_0)=f'(c)\cdot(x-x_0)$. როცა $x<x_0$, მაშინ $c<x_0$ და პირობით $f'(c) \leq 0$. ამიტომ $f'(c)(x-x_0) \geq 0$. როცა $x>x_0$, მაშინ $c>x_0$ და პირობით $f'(c) \geq 0$, მაგრამ ვინაიდან ამ შემთხვევაში $x-x_0>0$, ამიტომ აქაც $f'(c)(x-x_0) \geq 0$. ე.ი. აღნიშნული მიდამოს ნებისმიერი $x$ წერტილისათვის $f(x)-f(x_0) \geq 0$ ანუ $f(x) \geq f(x_0)$. რაც ნიშნავს იმას, რომ $x_0$ წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

2) მტკიცდება ანალოგიურად ან $(-f(x))$ ფუნქციის განხილვით და 1)-ის გამოყენებით.

3) დანარჩენის დასამტკიცებლად ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ აღნიშნული მიდამოს ყველა წერტილში $f'(x)>0$. მაშინ მივიღებთ, რომ $f(x)<f(x_0)$ როცა $x<x_0$ და $f(x)>f(x_0)$ როცა $x>x_0$. პირველი და უტოლობებიდან ჩანს, რომ $x_0$ არაა მინიმუმის წერტილი, მეორე კი — $x_0$ არაა მაქსიმუმის წერტილი. ე.ი. $x_0$ არაა ექსტრემუმის წერტილი.

<u>შენიშვნა</u>. ფუნქციის განსაზღვრის არის ისეთ წერტილს, რომელშიც ფუნქციის წარმოებული ან არ არსებობს ან ნულის ტოლია, კრიტიკული წერტილს უწოდებენ.
ფერმას თეორემის თანახმად, ფუნქციის ექსტრემუმები მხოლოდ ასეთ წერტილებში შეიძლება მოხდეს. მაგრამ, როგორც ზემოთ ვნახეთ, ყოველი კრიტიკული წერტილი შეიძლება არ იყოს ექსტრემუმის წერტილი. ის, თუ რომელი კრიტიკული წერტილია ექსტრემუმის წერტილი და სახელდობრ რომელი — მინიმუმის თუ მაქსიმუმის, უნდა დავადგინოთ წინამდებარე თეორემის გამოყენებით.

მოვიყვანოთ ექსტრემუმის არსებობის კიდევ ერთი საკმარისი პირობა, რომელიც ეყრდნობა ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის მნიშვნელობებზე.

<u>თეორემა</u>. ვთქვათ, $x_0$ წერტილში $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის წარმოებული, ამასთან $f'(x_0)=0$. მაშინ:

1) თუ $f''(x_0)>0$, $x_0$ მინიმუმის წერტილია,
2) თუ $f''(x_0)<0$, $x_0$ მაქსიმუმის წერტილია,
3) თუ $f''(x_0)=0$, საჭიროა დამატებითი გამოკვლევა.

<u>დამტკიცება</u>. 1) მეორე რიგის წარმოებულის განსაზღვრების ძალით $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)-f'(x_0)}{x-x_0}$. პირობით $f''(x_0)>0$ და $f'(x_0)=0$. ამიტომ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$. ზღვრის ერთ-ერთი თვისების ძალით იარსებებს $x_0$ წერტილის ისეთი მიდამო, რომელშიც $\frac{f'(x)}{x-x_0}$ ფუნქციას ექნება იგივე ნიშანი, რაც მის ზღვარს. ე.ი. $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$. ამიტომ ამ მიდამოში $f'(x)$ და $x-x_0$ ერთნაირნიშნიანები იქნებიან. მაშასადამე, $f'(x)<0$, როცა $x<x_0$ და $f'(x)>0$, როცა $x>x_0$. წინა თეორემის თანახმად მაშინ $x_0$ წერტილში $f(x)$ ფუნქციას ექნება მინიმუმი.

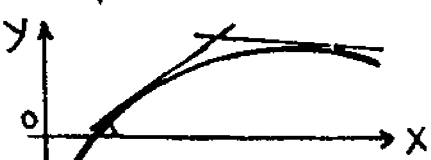
2) მტკიცდება ანალოგიურად ან $(-f(x))$ ფუნქციის განხილვით და 1)-ის გამოყენებით.

3) ნათქვამის დასამტკიცებლად საკმარისია მოვიყვანოთ სამი ისეთი ფუნქციის მაგალითი, რომ სამივე შემთხვევაში $f''(x_0)=0$, მაგრამ ერთ შემთხვევაში $x_0$ იყოს მინიმუმის წერტილი, მეორეში — მაქსიმუმის, ხოლო მესამეში არც მინიმუმის და არც მაქსიმუმის. ასეთი ფუნქციებია: $f(x)=x^4$, $f(x)=-x^4$, $f(x)=x^3$ $(x_0=0)$.

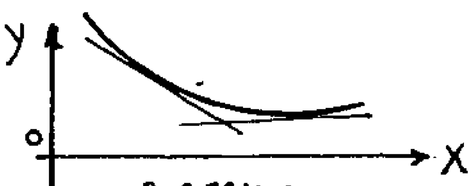
## ფუნქციის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გადაღუნვის წერტილი

<u>ამოზნექილობა</u>. რაიმე შუალედზე წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკს და თვითონ ფუნქციასაც ამოზნექილი ეწოდება, თუ გრაფიკის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხები მდებარეობს გრაფიკის ზემოთ.

<u>ჩაზნექილობა</u>. რაიმე შუალედზე წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკს და თვითონ ფუნქციასაც ჩაზნექილი ეწოდება, თუ გრაფიკის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხები მდებარეობს გრაფიკის ქვემოთ.

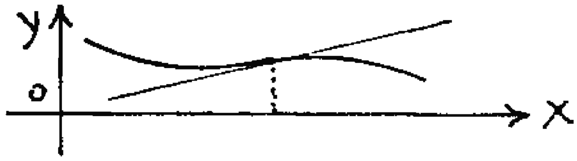


ამოზნექილი



ჩაზნექილი

გადაღუნვის წერტილი. წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკის წერტილს გადაღუნვის წერტილი ეწოდება, თუ ამ წერტილზე გავლისას გრაფიკის ამოზნექილობა იცვლება ჩაზნექილობით ან პირიქით.




ცხადია, რომ გადაღუნვის წერტილზე გავლებული მხების გრაფიკი გადადის მისი ერთი მხრიდან მეორეზე.

თეორემა. ვთქვათ, $f(x)$ არის მოცემულ შუალედზე წარმოებადი ფუნქცია. ამ შუალედზე:

1) $f(x)$ ამოზნექილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f'(x)$ არაზრდადია,

2) $f(x)$ ჩაზნექილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f'(x)$ არაკლებადია.

დამტკიცება. 1) წინასწარ ვაჩვენოთ, რომ რაიმე შუალედზე წარმოებადი ფუნქცია ამოზნექილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ შუალედის ნებისმიერი ორი $x$ და $x_0$ წერტილისათვის სრულდება უტოლობა

$$f(x)-f(x_0) \le f'(x_0)(x-x_0). \qquad (1)$$

ამისათვის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება. ვიცით, რომ მხების წრფის განტოლებას აქვს სახე $y-f(x_0)=K(x-x_0)$. წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსიდან გამომდინარე $K=f'(x_0)$. ე.ი. $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. საიდანაც $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. რადგანაც ამოზნექილი ფუნქციის გრაფიკი მხების ქვემოთ მდებარეობს, ამიტომ $f(x)\le y$, ანუ $f(x)\le f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. აქედან კი ვღებულობთ (1) ტოლობას.

ა) ახლა დავამტკიცოთ, რომ თუ $f(x)$ ამოზნექილია, მაშინ $f'(x)$ არაზრდადია. ამისათვის ავიღოთ მოცემული შუალედის ნებისმიერი $x_1<x_2$ წერტილები და ვაჩვენოთ, რომ $f'(x_1)\ge f'(x_2)$. თუ (1) უტოლობაში $x$-ის ნაცვლად ავიღებთ $x_1$-ს, $x_0$-ის ნაცვლად კი $x_2$-ს, მივიღებთ, რომ $f(x_1)-f(x_2)\le f'(x_2)(x_1-x_2)$. საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $x_1-x_2<0$, მივიღებთ

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \ge f'(x_2). \qquad (2)$$

თუ (1) უტოლობაში ავიღებთ პირიქით: $x$-ის ნაცვლად $x_2$-ს, $x_0$-ის ნაცვლად კი $x_1$-ს, მივიღებთ, რომ $f(x_2)-f(x_1)\le f'(x_1)(x_2-x_1)$. საიდანაც

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_1). \qquad (3)$$

(2) და (3) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $f'(x_1)\ge f'(x_2)$.

ბ) ახლა ვაჩვენოთ პირიქით, ე.ი. ვაჩვენოთ, რომ თუ $f'(x)$ არაზრდადია, მაშინ $f(x)$ ამოზნექილია. ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ (1). ლაგრანჟის თეორემის თანახმად $x$ და $x_0$ წერტილებს შორის იარსებებს ისეთი $C$ წერტილი, რომ $f(x)-f(x_0)=f'(C)(x-x_0)$. როცა $x<x_0$, მაშინ $C<x_0$ და $f'(x)$-ის არაზრდადობის გამო $f'(c)\ge f'(x_0)$. რადგან ამ შემთხვევაში $x-x_0<0$, მივიღებთ, რომ $f'(C)(x-x_0)\le f'(x_0)(x-x_0)$. ამიტომ $f(x)-f(x_0)\le f'(x_0)(x-x_0)$. ე.ი. ამ შემთხვევაში (1) სამართლიანია. როცა $x>x_0$, მაშინ $C>x_0$ და $f'(c)\le f'(x_0)$. რადგან $x-x_0>0$, ამიტომ ისევ მივიღებთ $f'(c)(x-x_0)\le f'(x_0)(x-x_0)$ უტოლობას. საიდანაც დავასკვნით, რომ (1) ამ შემთხვევაშიც სამართლიანია.

2) მტკიცდება ანალოგიურად, ან $(-f(x))$ ფუნქციის განხილვით და (1)-ის გამოყენებით.

დამტკიცებული თეორემიდან და ფუნქციის მონოტონურობის პირობებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ, $f(x)$ არის მოცემულ შუალედზე ორჯერ წარმოებადი ფუნქცია. ამ შუალედზე:

1) $f(x)$ ამოზნექილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f''(x)\le 0$,

2) $f(x)$ ჩაზნექილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f''(x)\ge 0$.

თეორემა. თუ $(x_0, f(x_0))$ არის ჩაზნექილი წერტილი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი, მაშინ $f''(x_0)$ ან არ არსებობს, ან $f''(x_0)=0$.

დამტკიცება. ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ $x_0$-ის მარცხნივ $f(x)$ ამოზნექილია, მარჯვნივ კი ჩაზნექილი. მაშინ, $x_0$-ის მარცხნივ $f'(x)$ იკლებს, მარჯვნივ კი – იზრდება. ამიტომ $f'(x) \geq f'(x_0)$, როცა $x < x_0$ და $f'(x) \geq f'(x_0)$, როცა $x > x_0$. ე.ი. ყველა შემთხვევაში $f'(x) \geq f'(x_0)$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $x_0$ არის $f'(x)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი. ფერმას თეორემის ძალით ვასკვნით, რომ $f''(x_0)$ ან არ არსებობს, ან $f''(x_0)=0$.

შენიშვნა. $f''(x_0)=0$ არის აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ $(x_0, f(x_0))$ იყოს $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი. მაგალითად, $f(x)=x^4$ ფუნქციისათვის $f''(0)=0$, მაგრამ ამ ფუნქციის გრაფიკს გადაღუნვის წერტილი არ გააჩნია, რადგან იგი ჩაზნექილია მთელ თავის განსაზღვრის არეში.

გადაღუნვის წერტილის არსებობის საკმარისი პირობა ასეთია:

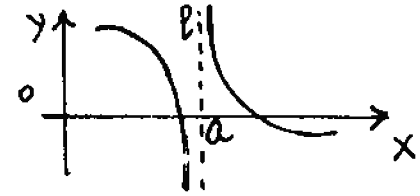
თეორემა. თუ $f''(x_0)$-ს $x_0$-ის მარცხნივ და მარჯვნივ სხვადასხვა ნიშანი აქვს, მაშინ $(x_0, f(x_0))$ არის $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი.

ეს თეორემა უშუალოდ გამომდინარეობს გადაღუნვის წერტილის განსაზღვრებიდან და ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის შესახებ წინათ დამტკიცებული თეორემებიდან.

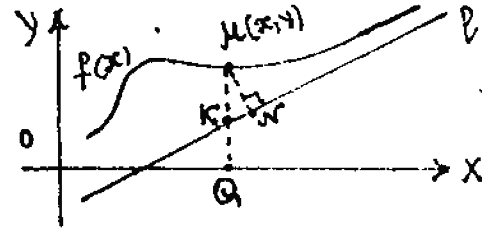
## ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

ასიმპტოტი. $l$ წრფეს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი, თუ მანძილი $l$-ის ცვლადი წერტილიდან $f(x)$-ის გრაფიკამდე უსასრულოდ მცირდება, როცა ეს წერტილი უსასრულოდ შორდება კოორდინატთა სათავეს.

არსებობს ორი სახის ასიმპტოტი: ვერტიკალური და დახრილი. ვერტიკალური ასიმპტოტია $x=a$ სახის წრფე, თუ სრულდება ერთი მაინც შემდეგი ტოლობებიდან: $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\infty$.




დახრილი ასიმპტოტის განტოლებას აქვს სახე $y=kx+b$. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ $k$ და $b$. აქ შემთხვევებია $x\to-\infty$ და $x\to+\infty$. ისინი ორივე ერთნაირად განიხილება, ამიტომ განვიხილოთ ერთ-ერთი, მაგალითად $x\to+\infty$.




ასიმპტოტის განმარტების თანახმად $\lim\limits_{x\to+\infty} MN=0$. ადვილი შესამჩნევია, რომ მაშინ $\lim\limits_{x\to+\infty} MK=0$. მაგრამ $MK=Ma-Ka=f(x)-(kx+b)$. ე.ი. $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$. მივიღებთ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-kx-b}{x}=0$, ანუ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0$. აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$, მივიღებთ $k$-ს გამოსათვლელ ფორმულას

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

თუ ვიცით, რომ $k$ უკვე ნაპოვნია, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$ ტოლობიდან ვიპოვით $b$-საც

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx).$$

ჰორიზონტალური ასიმპტოტი წარმოადგენს დახრილის კერძო შემთხვევას, როცა $k=0$.

## ფუნქციის ელასტიურობა

ზოგიერთი ეკონომიკური პროცესის დასახასიათებლად მოხერხებულია ე.წ. ფუნქციის ელასტიურობის გამოყენება. ფუნქციის ელასტიურობა მიახლოებით აჩვენებს ფუნქციის პროცენტულ ცვლილებას არგუმენტის 1%-ით შეცვლისას.

განსაზღვრება. ფუნქციის ფარდობითი ნაზრდის არგუმენტის ფარდობით ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფის ნულისაკენ, ეწოდება ფუნქციის ელასტიურობა.

$y=f(x)$ ფუნქციის ელასტიურობა $E_x(y)$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი.

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right).$$

ცხადია, რომ

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\,y'(x).$$

არაა ძნელი იმის შემოწმება, რომ ფუნქციის ელასტიურობას აქვს შემდეგი თვისებები

1) $E_x(u\cdot v)=E_x(u)+E_x(v)$

2) $E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v)$

3) $E_x(y)=\dfrac{1}{E_y(x)}$

## მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები და მათი ელასტიურობა ფასის მიმართ

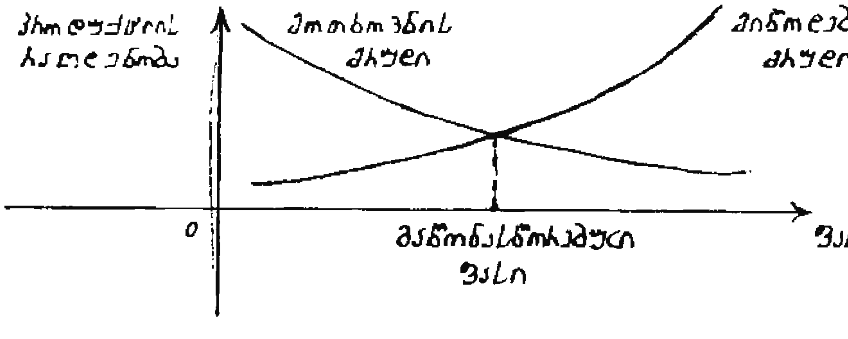
რაიმე ნაწარმზე მოთხოვნა არის ის რიცხვი, რომელიც გამოხატავს ბაზრის მიერ ამ ნაწარმზე დროის ერთეულში მოთხოვნილ პროდუქციის რაოდენობას, გაზომილს პროდუქციის ფიზიკურ ერთეულებში.

ვთქვათ, $x$ აღნიშნავს პროდუქციის ერთეულის საბაზრო ფასს. საბაზრო ეკონომიკის პირობებში $y$ მოთხოვნა დამოკიდებულია $x$ ფასზე. ე.ი. მოთხოვნა არის ფასის ფუნქცია

$$y=f(x).$$

როგორც წესი, ფასის მომატება იწვევს ამ პროდუქციაზე მოთხოვნის შემცირებას, ამიტომ მოთხოვნის ფუნქცია მკაცრად კლებადი ფუნქციაა.

მიწოდებაში იგულისხმება საქონლის ის რაოდენობა, რომელიც გამოტანილია ბაზარზე დროის ერთეულში გასაყიდად. როგორც წესი, რომელიმე საქონელზე მიწოდება არის ფასის ზრდადი ფუნქცია (თუმცა არის გამონაკლისები, როცა ფასის შემცირება აიძულებს მეწარმეს, შემოსავლის შენარჩუნების მიზნით, გაზარდოს საქონლის მიწოდება).




ნახაზზე გრაფიკულად გამოსახულია მოთხოვნისა და მიწოდების მრუდები. მათი საშუალებით შეიძლება დავადგინოთ მოცემულ პროდუქციაზე საბაზრო გაწონასწორებული ფასი კონკურენციის პირობებში.

ზოგჯერ საჭიროა შეისწავლონ არა თვითონ ბაზრის მოთხოვნილება ამა თუ იმ საქონელზე, არამედ მოთხოვნის ცვლილება ფასის ცვლილებასთან მიმართებაში, ე.ი. გაიგონ — რამდენი პროცენტით შეიცვლება მოთხოვნა პროდუქციაზე, თუ მისი ფასი 1%-ით შეიცვლება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ:— დაადგინოთ მოთხოვნის ელასტიურობა ფასის მიხედვით.

როდესაც მოთხოვნის ფუნქცია, რომლის წილი ეცემა, მაშინ მისი ელასტიურობა უარყოფითია.

მიწოდების ელასტიურობა ფასის მიმართ მიახლოებით გვიჩვენებს, თუ რამდენი პროცენტით შეიცვლება პროდუქციის მიწოდება, თუ ფასი 1%-ით შეიცვლება.

მიწოდების ელასტიურობა ფასის მიმართ, რომლის წილი, დადებითია.

## ორი ცვლადის ფუნქცია

### ორი ცვლადის ფუნქცია. ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

ორი ცვლადის ფუნქცია. ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე სიბრტყის წერტილთა რაიმე სიმრავლეა, ორი ცვლადის ფუნქცია ეწოდება. ჩვენ განვიხილავთ ორი ცვლადის ნამდვილ ფუნქციებს, ე.ი. ისეთ ფუნქციებს, რომელთა ცვლილების არე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა. თუ განსაზღვრის არის $M=M(x,y)$ წერტილს $f$ ფუნქცია უთანადებს $z$ რიცხვს, მაშინ წერენ $z=f(M)$, ან $z=f(x,y)$.

სიბრტყეზე რაიმე წერტილის მიდამო ეწოდება ნებისმიერ ღია წრეს, რომელიც ამ წერტილს შეიცავს. თუ წრის რადიუსია $\delta$, ცენტრი კი — ეს წერტილი, მას ამ წერტილის $\delta$-მიდამო ჰქვია. სიმრავლეს ეწოდება ღია, თუ ამ სიმრავლის ყოველი წერტილისთვის არსებობს მისი ისეთი მიდამო, რომელიც მთლიანად შედის ამ სიმრავლეში. ჩვენ განვიხილავთ ორი ცვლადის ისეთ ფუნქციებს, რომელთა განსაზღვრის არეები ღია სიმრავლეებია.

ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი. $OXYZ$ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში სივრცის ყველა იმ $(x,y,z)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომლისთვისაც $z=f(x,y)$, ეწოდება $f(x,y)$ ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი.

ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს სივრცეში ისეთ ზედაპირს, რომელსაც $OZ$ ღერძის პარალელური ნებისმიერი წრფე არაუმეტეს ერთ წერტილში კვეთს.

ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი. ვიტყვით, რომ $A$ არის $z=f(M)$ ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი $M_0$ წერტილში და წერენ $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$, თუ განსაზღვრის არის წერტილთა $M_0$-კენ კრებადი ნებისმიერი $(M_n)$ $(M_n\neq M_0)$ მიმდევრობისათვის $(f(M_n))$ მიმდევრობა კრებადია $A$-კენ.

შევნიშნოთ, რომ $(M_n)$ მიმდევრობა $M_0$ წერტილისაკენ კრებადია მაშინ, როცა $\lim\limits_{n\to\infty}|M_nM_0|=0$, სადაც $|M_nM_0|$ არის მანძილი $M_n$ და $M_0$ წერტილებს შორის.

ძნელი დასამტკიცებელი არაა, რომ ზღვრის ასეთი განსაზღვრება ტოლფასია შემდეგის: $A$ რიცხვი არის $z=f(M)$ ფუნქციის ზღვარი $M_0$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $|f(M)-A|<\varepsilon$, როცა $0<|MM_0|<\delta$, ანუ, გაშლილი სახით

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,\quad \text{როცა}\quad 0<\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}<\delta.$$

$f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი $(x_0,y_0)$ წერტილში აღინიშნება ასე: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$. ორი ცვლადის ფუნქციებისათვის სამართლიანია თეორემები ჯამის, ნამრავლის და შეფარდების ზღვრების შესახებ.

ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა. $z=f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $(x_0,y_0)$ წერტილში, თუ ამ წერტილში არსებობს მისი ზღვარი და $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

ორი ცვლადის ფუნქციების შემთხვევაშიც უწყვეტია უწყვეტ ფუნქციათა ჯამი, ნამრავლი და თუ მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან — შეფარდებაც.

### ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები და სრული დიფერენციალი

პირველი რიგის კერძო წარმოებულები. $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული $x$-ით $(x,y)$ წერტილში ეწოდება ზღვარს

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

ეს იგი აღინიშნება ერთ-ერთი შემდეგი სიმბოლოთი: $f'_x(x,y)$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ან, აგრეთვე, $z'_x$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

$z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული $y$-ით $(x,y)$ წერტილში ეწოდება ზღვარს

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

ეს იგი აღინიშნება ერთ-ერთი შემდეგი სიმბოლოთი: $f'_y(x,y)$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ან, აგრეთვე, $z'_y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

მაშასადამე, ერთ-ერთი ცვლადით გაწარმოებისას მეორე ცვლადი ფიქსირებულია და ამიტომ, გაწარმოებისას მას უნდა ვუყუროთ როგორც მუდმივს.

მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$ ფუნქციების კერძო წარმოებულებს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. ე.ი. მეორე რიგის კერძო წარმოებულები არის:

$\frac{\partial f'_x}{\partial x}, \frac{\partial f'_x}{\partial y}, \frac{\partial f'_y}{\partial x}, \frac{\partial f'_y}{\partial y}$. ისინი აღინიშნება, შესაბამისად, ასე: $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$, ან ასე: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$f''_{xy}$ და $f''_{yx}$ ეწოდება მეორე რიგის შ ე რ ე უ ლ ი კერძო წარმოებულები. მტკიცდება, რომ თუ ისინი უწყვეტი ფუნქციებია, მაშინ ერთმანეთის ტოლი არიან.

ზოგადად, $n$-ური რიგის კერძო წარმოებულები განისაზღვრება როგორც $(n-1)$ რიგის კერძო წარმოებულების კერძო წარმოებულები.

<u>სრული დიფერენციალი</u>. თუ $z=f(x,y)$ ფუნქციას აქვს პირველი რიგის კერძო წარმოებულები რაიმე წერტილში და უწყვეტია, მაშინ მტკიცდება, რომ ამ წერტილში ფუნქციის სრული ნაზრდი $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ წარმოიდგინება სახით $\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$, სადაც $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$, როცა $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის სრული ნაზრდის მთავარი ნაწილია $\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$. ამას ფუნქციის სრული დიფერენციალი ეწოდება და იგი $df(x,y)$ ან $dz$ სიმბოლოთი აღინიშნება. თუ გავითვალისწინებთ, რომ დამოუკიდებელი ცვლადის ნაზრდი უდრის მის დიფერენციალს, ე.ი. $\Delta x=dx$ და $\Delta y=dy$, მივიღებთ

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

<u>ორი ცვლადის რთული ფუნქციის კერძო წარმოებულები</u>. თუ $z=f(u,v)$ სადაც $u=g(x,y)$ და $v=h(x,y)$, მაშინ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

## ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

<u>ექსტრემუმი</u>. $(x_0,y_0)$ წერტილს ეწოდება $z=f(x,y)$ ფუნქციის მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომლის ყოველი $(x,y)$ წერტილისთვის სრულდება უტოლობა $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ $(f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$.

წერტილს ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი, თუ იგი არის ამ ფუნქციის ან მაქსიმუმის ან მინიმუმის წერტილი. ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში ფუნქციის ექსტრემუმები ეწოდება.

ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი პირობა შემდეგია

<u>თეორემა</u>. თუ ორი ცვლადის ფუნქციას რაიმე წერტილში აქვს ექსტრემუმი, მაშინ ამ წერტილში ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები ან ნულის ტოლია, ან არ არსებობს.

<u>დამტკიცება</u>. ორივე კერძო წარმოებულისთვის მსჯელობა ერთნაირია, ამიტომ ჩავატარებთ ერთ-ერთისთვის. ვაჩვენოთ მაგალითად, რომ თუ $(x_0,y_0)$ წერტილი არის $z=f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ $f'_x(x_0,y_0)$ ან ნულის ტოლია, ან არ არსებობს. დავუშვათ, მაგალითად, რომ $(x_0,y_0)$ მაქსიმუმის წერტილია. მაშინ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომლის ყოველი $(x,y)$ წერტილისთვის სრულდება $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ უტოლობა. ვთქვათ, ამ მიდამოს რადიუსია $\delta$. განვიხილოთ ამ მიდამოს ჰორიზონტალური დიამეტრი. ამ დიამეტრზე მდებარე წერტილებს აქვთ სახე $(x,y_0)$, სადაც $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. ცხადია, აღნიშნული უტოლობა ამ წერტილებისთვისაც სრულდება, ე.ი. $f(x,y_0)\le f(x_0,y_0)$, როცა $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. აღვნიშნოთ: $f(x,y_0)=\varphi(x)$. მაშინ $\varphi(x)\le\varphi(x_0)$, როცა $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $x_0$ არის ერთი ცვლადის $\varphi(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი. მაშინ, ფერმას თეორემის თანახმად, $\varphi'(x_0)$ ან ნულის ტოლია, ან არ არსებობს. მაგრამ

$$\varphi'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=f'_x(x_0,y_0),$$

ამიტომ $f'_x(x_0,y_0)$ აგრეთვე ან ნულია, ან არ არსებობს.

თეორემა დამტკიცებულია.

ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა შემდეგია

<u>თეორემა</u>. ვთქვათ, $(x_0,y_0)$ წერტილში $z=f(x,y)$ ფუნქციას გააჩნია ნულის ტოლი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და უწყვეტი მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. ვთქვათ, $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$ და $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$. მაშინ:

1) თუ $AC-B^2>0$, ფუნქციას $(x_0,y_0)$ წერტილში აქვს ექსტრემუმი, სახელდობრ – მინიმუმი, როცა $A>0$ და მაქსიმუმი, როცა $A<0$.

2) თუ $AC-B^2<0$, ფუნქციას $(x_0,y_0)$ წერტილში ექსტრემუმი არ აქვს.

3) თუ $AC-B^2=0$, ამ შემთხვევაში საჭიროა შემდგომი გამოკვლევა, ე.ი. ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს მაქსიმუმი, შეიძლება ჰქონდეს მინიმუმი, შეიძლება არ ჰქონდეს ექსტრემუმი.

## პირობითი ექსტრემუმი. ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი.

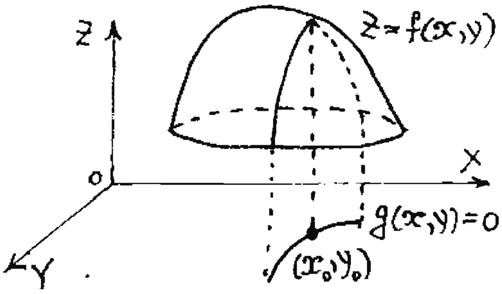
ხშირად საჭიროა ვიპოვოთ ორი ან რამდენიმე ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი არა განსაზღვრის მთელ არეზე, არამედ მის რაიმე ნაწილზე, რომელიც გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებს.

ვთქვათ, მოცემულია $z=f(x,y)$ ფუნქცია, რომლის $x$ და $y$ არგუმენტები აკმაყოფილებენ გარკვეულ $g(x,y)=0$ პირობას.

**განსაზღვრება.** $(x_0,y_0)$ წერტილს ეწოდება $z=f(x,y)$ ფუნქციის პირობითი მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოდან აღებული ყველა იმ $(x,y)$ წერტილისთვის, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობას $g(x,y)=0$, სრულდება უტოლობა

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\quad \left(f(x,y)\ge f(x_0,y_0)\right).$$

(იხ. ნახაზი, რომელზეც $(x_0,y_0)$ პირობითი მაქსიმუმის წერტილია).




თუ $g(x,y)=0$ ტოლობიდან ხერხდება ერთ-ერთი ცვლადის გამოსახვა მეორის საშუალებით, მაშინ პირობითი ექსტრემუმის მოძებნა დაიყვანება ერთი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნაზე. სახელდობრ, თუ გამოსახვის შედეგად მივიღეთ, რომ $y=\varphi(x)$, მაშინ უნდა ვიპოვოთ $z=f(x,\varphi(x))$ ერთი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი.

ზოგად შემთხვევაში პირობითი ექსტრემუმის მოძებნა ხდება ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით.

განვიხილოთ სამი ცვლადის ფუნქცია $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$. ამ ფუნქციას ლაგრანჟის ფუნქცია ჰქვია, $\lambda$-ს კი — ლაგრანჟის მამრავლი. სამართლიანია

**თეორემა.** თუ $(x_0,y_0)$ წერტილი $z=f(x,y)$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილია იმ პირობით, რომ $g(x,y)=0$, მაშინ არსებობს ისეთი $\lambda_0$, რომლისთვისაც $(x_0,y_0,\lambda_0)$ წერტილი წარმოადგენს ლაგრანჟის $L(x,y,\lambda)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილს.

ამრიგად, მოცემული ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილები რომ ვიპოვოთ, უნდა მოვძებნოთ ლაგრანჟის ფუნქციის ჩვეულებრივი (უპირობო) ექსტრემუმის წერტილები, რისთვისაც კი უნდა ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0, \end{cases}$$

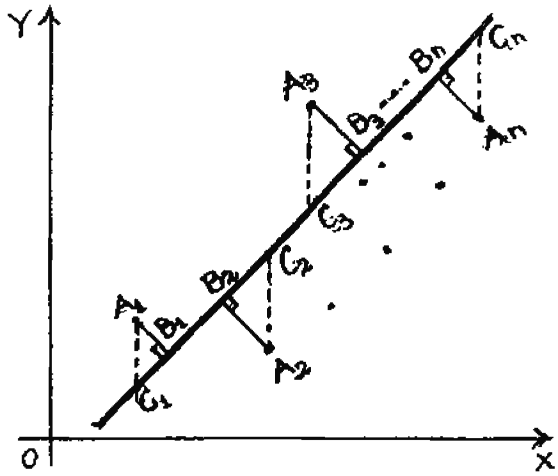
ანუ სისტემა

$$\begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda g'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)+\lambda g'_y(x,y)=0 \\ g(x,y)=0. \end{cases}$$

## უმცირეს კვადრატთა მეთოდის არსი

სხვადასხვა საკითხების გამოკვლევისას ხშირად გვიწევს შემდეგი ამოცანის ამოხსნა: მოცემული ერთის ფუნქციის მიხედვით ვიპოვოთ ის ფუნქცია, რომლისთვისაც მოცემულ წერტილებში ამ ფუნქციის მნიშვნელობებისა და წინასწარ მოცემული გარკვეული სიდიდეების გადახრების კვადრატების ჯამი არის უმცირესი.

განვიხილოთ, მაგალითად, ასეთი ამოცანა: გავიგოთ სწორხაზოვანი ბმა ისე, რომ მოცემული სიდიდეების და ამ წრფის გადახრების ჯამი იყოს უმცირესი.




სხვანაირად რომ ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია წერტილები: $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), \cdots, A_n(x_n,y_n)$ და მოითხოვება, რომ ვიპოვოთ ის $f(x)=ax+b$ წრფე, რომლისთვისაც მანძილების ჯამი $A_1B_1+A_2B_2+\cdots+A_nB_n=\sum_{k=1}^{n}A_kB_k$ იქნება უმცირესი.

ადვილი შესამჩნევია, რომ მანძილების ეს ჯამი იქნება უმცირესი, როცა უმცირესი იქნება ჯამი: $\sum_{k=1}^{n}A_kC_k$ ანუ ჯამი $\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-y_k|$. სინამდვილეში, უფრო მოხერხებულია ვიპოვოთ როდის იქნება უმცირესი შემდეგი ჯამი: $\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-y_k)^2$ (მოდულებიდან კვადრატებზე გადასვლა გამოწვეულია იმით, რომ $y=|x|$ ფუნქცია $x=0$ წერტილში არაა წარმოებადი, რის გამოც შეგვექმნებოდა გარკვეული სირთულეები).

გავაანალიზოთ, სხვა სიტყვით, ჩვენს წინაშე ჩამოყალიბდა შემდეგი ამოცანა: უნდა ვიპოვოთ ის $a$ და $b$ რიცხვები, რომლებისთვისაც $F(a,b)=\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b-y_k)^2$ ორი ცვლადის ფუნქცია ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობას. ეს ამოცანის ამოხსნა კი დაიყვანება ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის პირობების გამოყენებით. ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობის ძალით

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(a,b)}{\partial a}=0\\[2mm] \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial b}=0,\end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}2(ax_k+b-y_k)\cdot x_k=0\\ \sum_{k=1}^{n}2(ax_k+b-y_k)\cdot 1=0.\end{cases}$$

2-ზე შეკვეცის და წევრების სათანადო გაერთიანების შემდეგ სისტემა მიიღებს სახეს

$$\begin{cases}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)a+\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\cdot b=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\\ \left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)a+n\cdot b=\sum_{k=1}^{n}y_k.\end{cases}$$

რადგან $x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_n,y_n$ რიცხვები მოცემულია, მიღებული სისტემა $a$ და $b$ საძიებელი უცნობების მიმართ წარმოადგენს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, რომლის ამოხსნით ვიპოვით $a$ და $b$-ს. იმის დადგენა, რომ ნაპოვნი $(a,b)$ წერტილი იქნება $F(a,b)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი, საჭიროა ან წარმოებულის სისტემის.

# განუსაზღვრელი ინტეგრალი

## ფუნქციის პირველყოფილი და განუსაზღვრელი ინტეგრალი

<u>პირველყოფილი</u>. $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ჰქვია ისეთ $F(x)$ ფუნქციას, რომლისთვისაც მოცემული შუალედის ყოველ წერტილში სრულდება ტოლობა $F'(x)=f(x)$, ანუ, რაც იგივეა, $dF(x)=f(x)dx$.

ძნელი დასანახი არაა, რომ ყველა ფუნქციას არ აქვს პირველყოფილი. ქვემოთ ჩვენ დავინახავთ, რომ თუ ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ მას აქვს პირველყოფილი.

<u>თეორემა</u>. თუ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია ერთი მაინც პირველყოფილი $F(x)$, მაშინ მას გააჩნია უსასრულოდ პირველყოფილი და ყველა მათგანი ჩაიწერება სახით $\Phi(x)=F(x)+C$, სადაც $C$ ნებისმიერი მუდმივია.

<u>დამტკიცება</u>. $\Phi(x)=F(x)+C$ სახის ფუნქცია რომ $f(x)$-ის პირველყოფილი იქნება გამომდინარეობს იქიდან, რომ მუდმივის წარმოებული ნულის ტოლია. მართლაც, $\Phi'(x)=(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)=f(x)$.

$f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი პირველყოფილის რომ $\Phi(x)=F(x)+C$ სახე აქვს-ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ თუ რაიმე ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია, მაშინ ეს ფუნქცია მუდმივია. მართლაც, რადგან $(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$, ამიტომ $\Phi(x)-F(x)=C$, საიდანაც $\Phi(x)=F(x)+C$.

<u>განუსაზღვრელი ინტეგრალი</u>. $f(x)$ ფუნქციის ყველა პირველყოფილთა სიმრავლეს ეწოდება ამ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი და იგი აღინიშნება ერთ-ერთი შემდეგი სიმბოლოთი: $\int f$, $\int f(x)$, $\int f(x)dx$ (იხმარება, რომ უმეტეს შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია შესაბამისი აღნიშვნის გამოყენება), მაშასადამე

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

სადაც $F(x)$ არის $f(x)$-ის ერთ-ერთი პირველყოფილი, $C$ კი – ნებისმიერი მუდმივი.

## განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

1) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$ ან $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$,

2) $\int F'(x)dx=F(x)+C$ ან $\int dF(x)=F(x)+C$,

3) $\int Kf(x)dx=K\int f(x)dx$, სადაც $K$ ნებისმიერი მუდმივია,

4) $\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

1) და 2) თვისებები უშუალოდ ინტეგრალის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, ხოლო 3) და 4) მარტივად მტკიცდება წარმოებულის შესაბამისი თვისებების გამოყენებით. მართლაც, ვაჩვენოთ, მაგალითად, 4) თვისება.

ვთქვათ, $F(x)$ და $G(x)$ არიან, შესაბამისად, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების რაიმე პირველყოფილები. მაშინ

$$\int f(x)dx=F(x)+C_1 \quad \text{და} \quad \int g(x)dx=G(x)+C_2,$$

ამიტომ

$$\int f(x)dx+\int g(x)dx=(F(x)+G(x))+C, \tag{1}$$

სადაც $C=C_1+C_2$. მეორე მხრივ, იმის გამო, რომ $(F(x)+G(x))'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$ და, მაშასადამე, $(F(x)+G(x))$ არის $(f(x)+g(x))$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილი, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int [f(x)+g(x)]dx=(F(x)+G(x))+C. \tag{2}$$

(1) და (2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

## ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი

1) $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$

2) $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

3) $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$

$\int e^{x}dx=e^{x}+C$

4) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

5) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

9) $\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$

10) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C$

ამ ფორმულების დასამტკიცებლად საკმარისია გავაწარმოოთ მათი მარჯვენა მხარეები.

## ჩასმის ხერხი ანუ ცვლადის გარდაქმნის ფორმულა

__თეორემა__. ვთქვათ, $f(x)$ არის ისეთი ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია პირველყოფილი, ხოლო $x=\varphi(t)$ რაიმე უწყვეტად წარმოებადი ისეთი ფუნქციაა, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე ეკუთვნის $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს, მაშინ $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ ფუნქციასაც აქვს პირველყოფილი და შესრულდება ტოლობა

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

__დამტკიცება__. ვთქვათ, $F(x)$ არის $f(x)$-ის ერთ-ერთი პირველყოფილი. ე.ი. $F'(x)=f(x)$. მაშინ

$$\int f(x)dx=F(x)+C. \qquad (2)$$

განვიხილოთ $\Phi(t)=F(\varphi(t))$. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად $\Phi'(t)=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=$ $=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. ე.ი. $\Phi(t)$ არის $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილი, ამიტომ

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\Phi(t)+C, \qquad (3)$$

მაგრამ $\Phi(t)=F(\varphi(t))=F(x)$. მაშინ (2) და (3) ტოლობებიდან მივიღებთ (1) ტოლობას.

## ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

__თეორემა__. ვთქვათ, $u(x)$ და $v(x)$ რაიმე წარმოებადი ფუნქციებია, რომ $u'(x)v(x)$ ფუნქციას გააჩნია პირველყოფილი, მაშინ პირველყოფილი გააჩნია $u(x)v'(x)$ ფუნქციასაც და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

__დამტკიცება__. ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად $(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, საიდანაც

$$u(x)v'(x)=(u(x)v(x))'-u'(x)v(x).$$

$u'(x)v(x)$-ს გააჩნია პირველყოფილი პირობის თანახმად, $(u(x)v(x))'$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილი არის $u(x)v(x)$, ამიტომ, სხვაობაც, პირველყოფილი აქვს $u(x)v'(x)$ ფუნქციასაც. მაშინ, უკანასკნელი ტოლობის წევრ-წევრად ინტეგრებით მივიღებთ დამტკიცებულ ფორმულას.

რადგან ვიცით, $f'(x)dx=df(x)$, ამიტომ დამტკიცებული ფორმულა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x) \text{ ანუ, მოკლედ, } \int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

# განსაზღვრული ინტეგრალი

## განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი გეომეტრიული შინაარსი

**განსაზღვრული ინტეგრალი.** ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული რაიმე ფუნქცია. განვიხილოთ წერტილები $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$. ეს წერტილები მოცემულ სეგმენტს დაყოფს $n$ ცალ სეგმენტად. ვთქვათ, ეს სეგმენტებია, შესაბამისად, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. თითოეული ამ სეგმენტიდან ავიღოთ თითო წერტილი ნებისმიერად. ვთქვათ, ეს წერტილებია, შესაბამისად, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. ამ სეგმენტების სიგრძეები იყოს $|\Delta_1|, |\Delta_2|, \dots, |\Delta_n|$, ხოლო $\lambda$ იყოს ამ სიგრძეების უდიდესი. შევადგინოთ

$$S_\lambda = f(\xi_1)|\Delta_1| + f(\xi_2)|\Delta_2| + \cdots + f(\xi_n)|\Delta_n| = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k|.$$

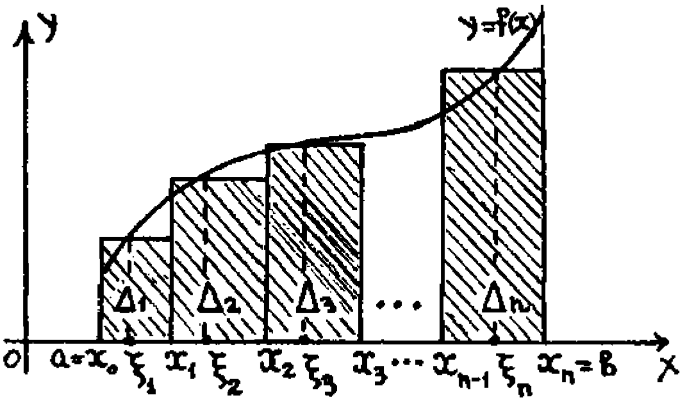
$S_\lambda$-ს ეწოდება $[a,b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის რიმანის ინტეგრალური ჯამი.

თუ არსებობს ისეთი $I$ რიცხვი, რომლისკენაც მიისწრაფვის $f(x)$ ფუნქციის რიმანის ჯამები, როდესაც $[a,b]$ სეგმენტის დაყოფის შედეგად მიღებული სეგმენტების სიგრძეები უსასრულოდ მცირდებიან, ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. რიცხვ $I$ ზღვარს ეწოდება მოცემულ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი და იგი აღინიშნება სიმბოლოთი $\int_a^b f(x)dx$. მაშასადამე,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} S_\lambda = \lim_{\substack{\max|\Delta_k|\to 0 \\ 1\le k\le n}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k|.$$

**შენიშვნა.** ეს ზღვარი არ უნდა იყოს დამოკიდებული არც $[a,b]$ სეგმენტის დაყოფის წესზე და არც დაყოფის შედეგად მიღებულ სეგმენტებში წერტილების არჩევაზე. გავიხსენოთ, რომ $\lim_{\lambda\to 0} S_\lambda = I$ ნიშნავს: ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ სეგმენტებად ნებისმიერი ისეთი დაყოფისთვის, რომლისთვისაც $\lambda<\delta$ და ამ სეგმენტებიდან ნებისმიერად აღებული $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ წერტილებისთვის სრულდება უტოლობა $|S_\lambda - I|<\varepsilon$.

**განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული შინაარსი.** ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი, არაუარყოფითი ფუნქცია. მისი გრაფიკით (უფრო ზუსტად, გრაფიკით, $OX$ ღერძით, $x=a$ და $x=b$ ვერტიკალური წრფეებით) შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი აღვნიშნოთ $S$-ით.




განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის რიმანის ჯამი $S_\lambda$. ცხადია, რომ ამ ჯამის ყოველი შესაკრები ნახაზზე აგებული შესაბამისი მართკუთხედის ფართობის ტოლია, მაშასადამე, $S_\lambda$ ტოლია ნახაზზე დაშტრიხული ფიგურის ფართობის. გასაგებია, რომ ეს ფართობი განსხვავდება მოცემული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობისაგან, მაგრამ რაც უფრო მცირე სეგმენტებად დავყოფთ $[a,b]$ სეგმენტს, ეს განსხვავება მით უფრო მცირე იქნება. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $\lim_{\lambda\to 0} S_\lambda = S$. მაშინ, განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტების თანახმად

$$\int_a^b f(x)dx = S.$$

მაშასადამე, განსაზღვრული ინტეგრალი უწყვეტი, არაუარყოფითი ფუნქციიდან ტოლია ამ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის.

## განსაზღვრული ინტეგრალის ეკონომიკური შინაარსი

ვიპოვოთ საწარმოს მიერ დროის $[T_1, T_2]$ შუალედში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა, თუ ცნობილია, რომ დროის $t$ მომენტში საწარმოს შრომის ნაყოფიერებაა $f(t)$, $t\in[T_1,T_2]$.

დავყოთ დროის $[T_1,T_2]$ შუალედი $n$-ცალ შუალედად შემდეგი წერტილებით:

$$T_1=t_0<t_1<\cdots<t_n=T_2.$$

განვიხილოთ თითოეული მიღებული $\Delta t_K=[t_{K-1},t_K]$ $(K=1,2,\dots,n)$ შუალედი. ვთქვათ, $\Delta U_K$ არის საწარმოს მიერ დროის $\Delta t_K$ შუალედში წარმოებული პროდუქცია, ხოლო $\xi_K\in\Delta t_K$ დროის ის მომენტია, რომელშიც საწარმოს დროის ამ შუალედისათვის საშუალო შრომის ნაყოფიერება აქვს (ასეთი მომენტი არსებობს, რადგან შრომის ნაყოფიერება დროის უწყვეტი ფუნქციაა). მაშინ

$$f(\xi_K)=\frac{\Delta U_K}{\Delta t_K} \text{ და } \Delta U_K=f(\xi_K)\cdot\Delta t_K.$$

თუ დროის $[T_1,T_2]$ შუალედში საწარმოს მიერ გამოშვებულ პროდუქციას $U$-თი აღვნიშნავთ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$U=\sum_{K=1}^{n}\Delta U_K=\sum_{K=1}^{n}f(\xi_K)\Delta t_K. \qquad (1)$$

გადავიდეთ ამ ტოლობაში ზღვარზე, როცა $\max\limits_{1\le K\le n}\Delta t_K\to 0$, მივიღებთ

$$U=\int_{T_1}^{T_2}f(t)dt.$$

ამრიგად, განსაზღვრული ინტეგრალის ეკონომიკური შინაარსი შემდეგნაირია: საწარმოს მიერ დროის რაიმე შუალედში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა უდრის საწარმოს შრომის ნაყოფიერებიდან ინტეგრალს დროის ამავე შუალედში.

შევნიშნოთ, რომ თავად (1) ტოლობის გამოყენება $U$-ს გამოსათვლელად პრაქტიკულად აზრსმოკლებულია, რადგან $\xi_K$ მომენტების შესახებ ჩვენ არ გვაქვს ზუსტი ინფორმაცია და გარდა ამისა, ასეთი ტიპის ჯამების გამოთვლა, როგორც წესი, უფრო რთულია, ვიდრე ინტეგრალის.

## ინტეგრებადობის პირობები

ინტეგრებადობის აუცილებელი პირობის შესახებ შედეგი

<u>თეორემა</u>. თუ ფუნქცია ინტეგრებადია რაიმე სეგმენტზე, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე.

<u>დამტკიცება</u>. დავუშვათ საწინააღმდეგო:– ვთქვათ, რაიმე $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ინტეგრებადია რაიმე $[a,b]$ სეგმენტზე, მაგრამ არ არის შემოსაზღვრული ამ სეგმენტზე.

ინტეგრებადობის თანახმად ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ როცა $\lambda<\delta$, მაშინ $|S_\lambda - I|<\varepsilon$ (სადაც $I$ მოცემული ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალია, $S_\lambda$ ინტეგრალური ჯამი). ახლა, თუ ვისარგებლებთ $|a+b|\le|a|+|b|$ უტოლობით, მივიღებთ

$$|S_\lambda|=|S_\lambda - I + I| \le |S_\lambda - I|+|I| < \varepsilon + I. \qquad (1)$$

ვთქვათ, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ არის $[a,b]$ სეგმენტის დაყოფით მიღებული ისეთი სეგმენტები, რომლებისთვისაც $\lambda<\delta$. რადგან $f(x)$ არ არის შემოსაზღვრული $[a,b]$-ზე, ამიტომ იგი არ იქნება შემოსაზღვრული ამ სეგმენტების ერთ-ერთზე მაინც. მარტივობისთვის ვიგულისხმოთ, რომ ასეთია $\Delta_1$. ავირჩიოთ $\Delta_2, \dots, \Delta_n$ სეგმენტებში ნებისმიერი $\xi_2, \dots, \xi_n$ წერტილები და დავაფიქსიროთ ისინი. შემოუსაზღვრელობის გამო $|f(x)|$ შეიძლება გახდეს ნებისმიერად დიდი $\Delta_1$-ზე. ამიტომ, არსებობს ამ სეგმენტში ისეთი $\xi_1$ წერტილი, რომლისთვისაც

$$|f(\xi_1)| > \frac{\varepsilon+|I| + |f(\xi_2)|\Delta_2|+\dots+|f(\xi_n)|\Delta_n||}{|\Delta_1|}.$$

მაშინ, თუ ვისარგებლებთ $|a+b|\ge|a|-|b|$ უტოლობით, მივიღებთ

$$|S_\lambda|=|f(\xi_1)|\Delta_1|+f(\xi_2)|\Delta_2|+\dots+f(\xi_n)|\Delta_n|| \ge |f(\xi_1)|\Delta_1||-|f(\xi_2)|\Delta_2|+\dots+f(\xi_n)|\Delta_n|| > \varepsilon+|I|,$$

რაც ეწინააღმდეგება (1) უტოლობას. ე.ი. ჩვენი დაშვება მცდარია და თეორემა დამტკიცებულია.

<u>შენიშვნა</u>. შემოსაზღვრულობა არის ინტეგრებადობის აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი პირობა. მაგალითად, ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია,}\\ 0, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია}\end{cases}$$

შემოსაზღვრულია, მაგრამ არ არის ინტეგრებადი არცერთ $[a,b]$ სეგმენტზე. მართლაც, თუ რიმანის ჯამში თითოეულ წერტილს ავიღებთ რაციონალურს, მივიღებთ, რომ $S_\lambda=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k| = \sum_{k=1}^{n} 1|\Delta_k| = b-a$, ხოლო თუ ავიღებთ ირაციონალურს, მაშინ $S_\lambda=\sum_{k=1}^{n} 0\cdot|\Delta_k|=0$. ასე რომ, შეუძლებელია რიმანის ჯამს ერთი ზღვარი ჰქონდეს.

ინტეგრებადობის საკმარისი პირობების შესახებ შედეგი თეორემები:

<u>თეორემა</u>. თუ ფუნქცია მონოტონურია რაიმე სეგმენტზე, მაშინ ის ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

<u>თეორემა</u>. თუ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე სეგმენტზე, მაშინ ის ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

## განსაზღვრული ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი ფუნქციები, $K$ – ნებისმიერი მუდმივი, ხოლო $c$ – $a$ და $b$ წერტილების შორის მდებარე ნებისმიერი წერტილი. მაშინ:

1) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ 2) $\int_a^b K f(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$

3) თუ $f(x)\le g(x)$, მაშინ $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ 4) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

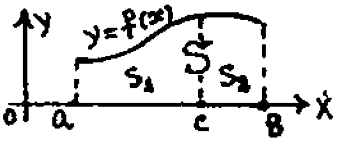
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

<u>დამტკიცება</u>. 1) თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს განსაზღვრებიდან: საკმარისია ტოლობაში

$$\sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k)+g(\xi_k))|\Delta_k| = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k| + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)|\Delta_k|$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta_k|\to 0$. 2) და 3) მტკიცდება ანალოგიურად.
4) უტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$ და გამოვიყენოთ 3) და 2) თვისებები. მივიღებთ, რომ $-\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx$ აქედან კი გამომდინარეობს დასამტკიცებელი უტოლობა.

5) თვისება, რომელსაც განსაზღვრული ინტეგრალის ადიტიურობის თვისება ჰქვია, ზუსტად მტკიცდება ზღვარზე, არაუარყოფითი $f(x)$ ფუნქციისთვის ინტეგრალის გეომეტრიული შინაარსის გამოყენებით:




$$\int_a^b f(x)dx=S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

## საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

<u>თეორემა</u>. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და $g(x)\ge 0$. მაშინ არსებობს $f(x)$-ის ზუსტ ქვედა და ზედა საზღვრებს შორის მოთავსებული ისეთი $\lambda$ რიცხვი, რომ

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=\lambda\int_a^b g(x)dx \tag{1}$$

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ, $m$ და $M$ არის, შესაბამისად, $f(x)$-ის ზუსტი ქვედა და ზედა საზღვრები $[a,b]$-ზე. მაშინ, $m\le f(x)\le M$. რადგან $g(x)\ge 0$ ამიტომ, გვექნება, რომ $m\cdot g(x)\le f(x)\cdot g(x)\le M\cdot g(x)$. აქედან კი მივიღებთ

$$m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx. \tag{2}$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1) როცა $\int_a^b g(x)dx=0$. ამ დროს (2) უტოლობიდან მივიღებთ, რომ $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$ და მაშინ, ცხადია, (1) ტოლობა შესრულდება ნებისმიერი $\lambda$ რიცხვისთვის. 2) როცა $\int_a^b g(x)dx>0$. ამ დროს (2) უტოლობიდან გვექნება

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M \tag{3}$$

და თუ აღვნიშნავთ

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=\lambda, \tag{4}$$

(4) და მივიღებთ (1)-ს, ხოლო (3)-დან კი ის, რომ $m\le\lambda\le M$. რ.დ.გ.

<u>შედეგი</u>. თუ $f(x)$ უწყვეტია, ხოლო $g(x)$ ინტეგრებადია $[a,b]$-ზე და $g(x)\ge 0$, მაშინ $a$ და $b$-ს შორის არსებობს ისეთი $c$ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

მართლაც, ამის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ უწყვეტი ფუნქცია თავის ზუსტ ქვედა და ზედა საზღვრებს შორის მოთავსებულ ყველა მნიშვნელობას, ამიტომ რომელიღაც $c$ წერტილში მიიღებს $\lambda$ მნიშვნელობასაც, ე.ი. $\lambda=f(c)$.

<u>შედეგი</u>. თუ $f(x)$ უწყვეტია $[a,b]$-ზე, მაშინ $a$ და $b$-ს შორის არსებობს $c$, რომ

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a).$$

მართლაც, ამის დასამტკიცებლად წინა შედეგში საკმარისია ავიღოთ $g(x)=1$ და შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტების თანახმად

$$\int_a^b 1\cdot dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}1\cdot|\Delta_k|=b-a.$$

<u>შენიშვნა</u>. განსაზღვრული ინტეგრალი განვმარტოთ იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $a\ge b$. ამ განმარტების თანახმად: როცა $a=b$ მაშინ $\int_a^b f(x)dx=0$, ხოლო როცა $a>b$, მაშინ $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ განსაზღვრული ინტეგრალის 1), 2), 5) თვისებები და საშუალო მნიშვნელობის თეორემა სამართლიანია ნებისმიერი $a$ და $b$ საზღვრებისათვის, ამასთან, 5) თვისება რჩება $a$, $b$ და $C$ წერტილების ნებისმიერი განლაგებისას. რაც შეეხება 3) და 4) თვისებებს, ისინი გარდაიქმნება შემდეგნაირად. სახელდობრ, როცა $a>b$, 3) თვისებაში უტოლობის ნიშანი იცვლება საპირისპიროთი. რაც შეეხება 4) თვისებას, იგი ნებისმიერი საზღვრებისთვის, საზოგადოდ, ასე ჩაიწერება

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|.$$

## ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით და მისი ძირითადი თვისება

ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი ფუნქცია და $x\in[a,b]$. განვიხილოთ

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

ამ ფორმულით განსაზღვრულ $F(x)$ ფუნქციას $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით ეწოდება.

**თეორემა.** თუ $f(x)$ უწყვეტია, მაშინ $F(x)$ წარმოებადია და $F'(x)=f(x)$.

**დამტკიცება.** ინტეგრალის ადიტიურობის თვისებისა და საშუალო მნიშვნელობის თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^x+\int_x^{x+\Delta x}-\int_a^x=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt=f(c)\cdot\Delta x,$$

სადაც $C$ არის $x$ და $x+\Delta x$-ს შორის მოთავსებული წერტილი. ამიტომ

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(c).$$

თუ აქ ზღვარზე გადავალთ, როცა $\Delta x\to 0$, გავითვალისწინებთ, რომ ამ დროს $c\to x$ და უწყვეტობის გამო $\lim\limits_{c\to x}f(c)=f(x)$, მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

**შენიშვნა.** ნებისმიერ უწყვეტ ფუნქციას გააჩნია პირველყოფილი და მისი ერთ-ერთი პირველყოფილია მისი ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით.

## ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

ეს ფორმულა აკავშირებს ერთმანეთთან განუსაზღვრელ და განსაზღვრულ ინტეგრალებს და, განსაზღვრული ინტეგრალის ცნების მნიშვნელობის გამო, მას ზოგჯერ ინტეგრალური და დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითად ფორმულასაც უწოდებენ.

**თეორემა.** თუ $f(x)$ უწყვეტია $[a,b]$-ზე, $\Phi(x)$ კი მისი ნებისმიერი პირველყოფილია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

**დამტკიცება.** განვიხილოთ $f(x)$-ის ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. როგორც ვიცით, $F(x)$ არის $f(x)$-ის ერთ-ერთი პირველყოფილი, ამიტომ $\Phi(x)=F(x)+C$. მაშინ

$$\Phi(b)-\Phi(a)=(F(b)+C)-(F(a)+C)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx.$$

**შენიშვნა.** თუ აღვნიშნავთ $\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi(x)\Big|_a^b$, ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(x)\Big|_a^b.$$

## ცვლადის გარდაქმნის და ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულები განსაზღვრული ინტეგრალისთვის

**თეორემა.** ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია, $x=\varphi(t)$ კი — $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[a,b]$, ამასთან $\varphi(\alpha)=a$ და $\varphi(\beta)=b$. მაშინ სამართლიანია ფორმულა

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

<u>თეორემა</u>. თუ $u(x)$ და $v(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები, მაშინ

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=(u(x)v(x))\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

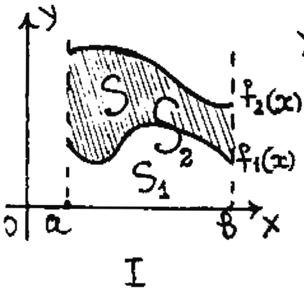
ეს თეორემები მტკიცდება იგივე გზით, როგორც შესაბამისი თეორემები განუსაზღვრელი ინტეგრალისათვის, ოღონდ საჭიროა ვისარგებლოთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით.

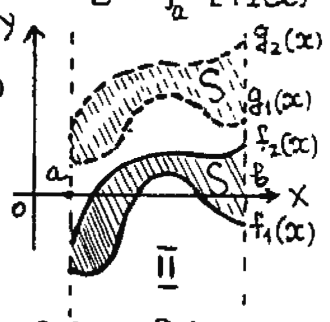
## <u>ზოგიერთი სახის ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალის საშუალებით</u>

განსაზღვრული ინტეგრალის საშუალებით შეიძლება მრავალი სახის ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა. ჩვენ განვიხილავთ ორ შემთხვევას.

1) თუ ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f_1(x)\le f_2(x)$ ფუნქციებით და $x=a$, $x=b$ ვერტიკალური წრფეებით, მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx.$$



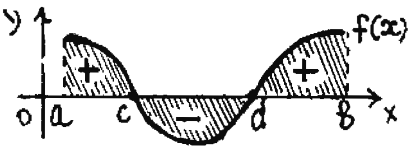


მართლაც, როდესაც ეს ფუნქციები არაუარყოფითია, ინტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობის თანახმად (ნახ. I)

$$S=S_2-S_1=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx.$$

როდესაც ეს ფუნქციები არ არის არაუარყოფითი, ავიღოთ ისეთი C მუდმივი, რომ მივიღოთ ფუნქციები $g_1(x)=f_1(x)+C$ და $g_2(x)=f_2(x)+C$ იქნება არაუარყოფითი (ასეთ C მუდმივად ავიღოთ $f_1(x)$-ის უმცირესი მნიშვნელობის მოდული, სხვანაირად, C-ს როლში შეიძლება ავიღოთ $f_1(x)$-ის მინიმალური მნიშვნელობის აბსოლუტური სიდიდე). ცხადია, რომ $g_1(x)$ და $g_2(x)$-ით შემოსაზღვრული ბრტყელი ფიგურის ფართობი იქნება S. მივიღებთ

$$S=\int_a^b[g_2(x)-g_1(x)]dx=\int_a^b[(f_2(x)+C)-(f_1(x)+C)]dx=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx.$$

2) 

ამ სახის ბრტყელი ფიგურის ფართობი გამოითვლება ასე:

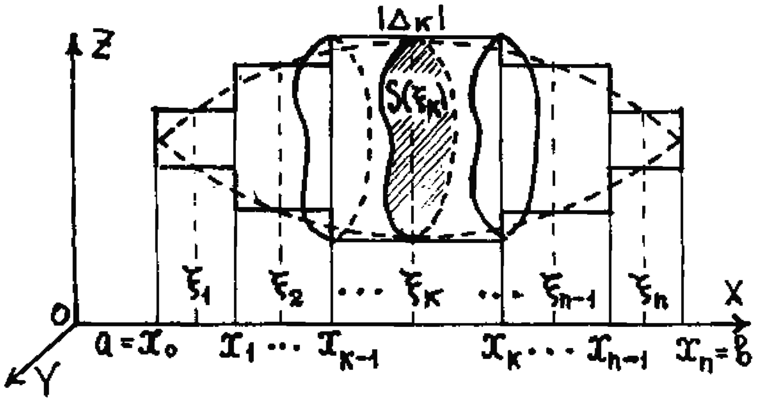
$$S=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx=\int_a^b|f(x)|dx.$$

## <u>სხეულის მოცულობის გამოთვლა მისი პარალელური კვეთების ფართობებით. ბრუნვითი სხეულის მოცულობა და ბრუნვითი ზედაპირის ფართობის ფორმულები</u>

ვთქვათ, OXYZ სივრცეში მოცემულია რაიმე სხეული, რომლის გეგმილი OX ღერძზე არის $[a,b]$ სეგმენტი. ნებისმიერ $x\in[a,b]$ წერტილში გავავლოთ OX ღერძის მართობული სიბრტყე. ამ სიბრტყისა და სხეულის თანაკვეთით მიღებული ბრტყელი ფიგურის ფართობი აღვნიშნოთ $S(x)$-ით. როცა $x$ იცვლება $[a,b]$ სეგმენტზე, $S(x)$ მოგვცემს ამ სეგმენტზე განსაზღვრულ ფუნქციას. ვიგულისხმოთ, რომ ეს ფუნქცია უწყვეტია. მაშინ მოცემული სხეულის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$V=\int_a^b S(x)dx. \qquad (1)$$

ამ ფორმულის დასაბუთებისათვის საკმარისია, რომ მივიღოთ მხედველობაში ცილინდრის მოცულობის ფორმულა (ამის სამართლიანობაში დავრწმუნდებით, თუ განვიხილავთ ისეთ სხეულს, რომლის პარალელური კვეთები ერთმანეთის ტოლია და რომლის ფუძის ფართობი ცილინდრის ფუძის ფართობის ტოლია).

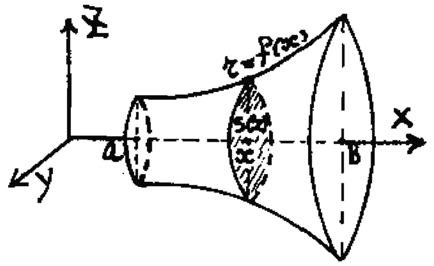



ავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი $a=x_0<x_1<\dots<x_{k-1}<x_k<\dots x_{n-1}<x_n=b$ წერტილებით $\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_k,\dots,\Delta_n$ სეგმენტებად. ამ სეგმენტებიდან ავიღოთ წერტილები $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_k,\dots,\xi_n$ და თითოეულ $\xi_k$ ($k=1,2,\dots,n$) წერტილზე გავავლოთ OX ღერძის მართობული სიბრტყე. განვიხილოთ ყველა მი-ლინდრი ფუძის ფართობით $S(\xi_k)$ და ის მართობული ცილინდრი, რომლის ფუძეები და მსხვილი ზედაპირი მოთავსებულია $x=x_{k-1}$ და $x=x_k$ სიბრტყეებში. ცხადია ამ ცილინდრის ფუძის ფართობი $S(\xi_k)$, სიმაღლე კი $|\Delta_k|$, ამიტომ მისი მოცულობა იქნება $S(\xi_k)|\Delta_k|$. ამ ცილინდრების გაერთიანება შემოსაზღვრავს სხეულს, რომლის მოცულობა იქნება $\sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)|\Delta_k|$. იგი, ცხადია, მიახლოებით იქნება მოცემული სხეულის მოცულობისა. მით უფრო, რაც უფრო წვრილ წერტილებად დავყოფთ, მით უფრო ზუსტი იქნება ეს მიახლოება. ე.ი.

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)|\Delta_k| \qquad (\lambda=\max_{1\le k\le n}|\Delta_k|),$$

საიდანაც, თუ გავიხსენებთ განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტებას, მივიღებთ დასამტკიცებელ ფორმულას.

<u>ბრუნვითი სხეულის მოცულობა</u>. იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $[a,b]$ სეგმენტზე არაუარყოფითი, უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით და $x=a$, $x=b$ ვერტიკალური წრფეებით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით, გამოითვლება ფორმულით



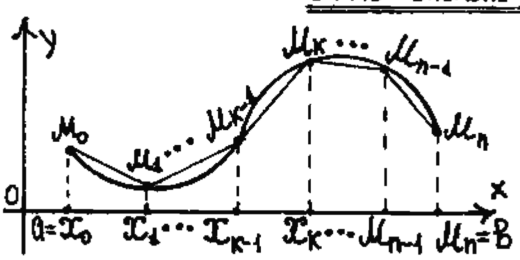

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (2)$$

ამ ფორმულის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ $x$-ზე გადავლებული სიბრტყით კვეთა არის წრე, რომლის რადიუსია $z=f(x)$ და ე.ი. $S(x)=\pi z^2=\pi f^2(x)$. მაშინ (1) ფორმულიდან მივიღებთ (2)-ს.

შევნიშნავთ, რომ თუ, გარდა ამისა, $f(x)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი წარმოებული, მაშინ OX ღერძის გარშემო მისი გრაფიკის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

<u>წირის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა</u>




იმ წირის სიგრძე, რომელიც არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, გამოითვლება ფორმულით

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

ამ ფორმულის დასამტკიცებლად დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი $a=x_0<x_1<\dots<x_{k-1}<x_k<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ წერტილებით, შესაბამისად ავიღოთ გრაფიკზე წერტილები $M_0<M_1<\dots M_{k-1}<M_k<\dots<M_{n-1}<M_n$ და ეს წერტილები მიმდევრობით შევაერთოთ მონაკვეთებით, მივიღებთ ტეხილს, რომლის სიგრძე $l_\lambda$ ($\lambda=\max_{1\le k\le n}|\Delta_k|=\max_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$), ბუნებრივია, ჩაითვალოს მიახლოებით წირის სიგრძედ და ზღვარში მივიღებთ წირის სიგრძეს, როცა $\lambda\to 0$. მაშასადამე

$$l=\lim_{\lambda\to 0}l_\lambda=\lim_{\lambda\to 0}(|M_0M_1|+\dots|M_{k-1}M_k|+\dots+|M_{n-1}M_n|)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}|M_{k-1}M_k|=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+[f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})]^2}=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,(x_k-x_{k-1})=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,|\Delta_k|=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

## არასაკუთრივი ინტეგრალები

**არასაკუთრივი ინტეგრალი უსასრულო შუალედზე.** ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a,+\infty)$ შუალედზე განსაზღვრული ისეთი ფუნქცია, რომელიც ინტეგრებადია ყოველ $[a,t]\subset[a,+\infty)$ სეგმენტზე. თუ არსებობს $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$, მაშინ ვამბობთ, რომ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a,+\infty)$ შუალედზე არასაკუთრივი აზრით, ამ ზღვარს უწოდებენ არასაკუთრივ ინტეგრალს და აღნიშნავენ ასე: $\int_a^{+\infty}f(x)dx$. ანალოგიურად განისაზღვრება არასაკუთრივი ინტეგრალი $(-\infty,b]$ სეგმენტზე, ხოლო $(-\infty,+\infty)$ შუალედზე განისაზღვრება არასაკუთრივი ინტეგრალი, როგორც ორი ასეთი ინტეგრალის ჯამი. ამრიგად,

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx\,,\quad \int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_c^{+\infty}f(x)dx.$$

(ადვილი საჩვენებელია, რომ ბოლო ჯამი $C$ რიცხვის არჩევაზე არაა დამოკიდებული).

თუ არასაკუთრივი ინტეგრალი არსებობს, ვამბობთ, რომ იგი არის კრებადი, წინააღმდეგ შემთხვევაში - განშლადი.

განვიხილოთ მაგალითი. ვაჩვენოთ, რომ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha>1$ და განშლადია, როცა $\alpha\le 1$. მართლაც, როცა $\alpha\neq 1$, გვაქვს

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^t=\frac{1}{-\alpha+1}\lim_{t\to+\infty}\left(t^{-\alpha+1}-1\right)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \text{როცა } \alpha>1\\ +\infty, & \text{როცა } \alpha<1\end{cases},$$

ხოლო, როცა $\alpha=1$, მივიღებთ

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}\ln x\Big|_1^t=\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty.$$

**არასაკუთრივი ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან.** ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a,b)$ შუალედზე ისეთი შემოუსაზღვრელი ფუნქცია, რომელიც ინტეგრებადია ყოველ $[a,t]\subset[a,b)$ სეგმენტზე (ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს განსაკუთრებულობა $b$ წერტილში). ინტეგრალის ცნების განზოგადება ასეთი ფუნქციისთვის ინტეგრალის ბუნებრივად შემოიღება ისე, რომ განვიხილოთ ზღვარი $\lim\limits_{t\to b-}\int_a^t f(x)dx$. თუ ეს ზღვარი არსებობს, ვამბობთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b)$ შუალედზე არასაკუთრივი აზრით, ამ ზღვარს უწოდებენ არასაკუთრივ ინტეგრალს და აღნიშნავენ ასე: $\int_a^b f(x)dx$. ანალოგიურად განისაზღვრება არასაკუთრივი ინტეგრალი $(a,b]$ სეგმენტზე იმ შემთხვევაში, როდესაც $f(x)$ ფუნქციას განსაკუთრებულობა აქვს $a$ წერტილში, ხოლო იმ შემთხვევაში, როდესაც $f(x)$ ფუნქციას განსაკუთრებულობა აქვს $[a,b]$ შუალედის რომელიმე შიდა $C$ წერტილში, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი ამ შუალედზე განისაზღვრება, როგორც $[a,c)$ და $(c,b]$ შუალედებზე არასაკუთრივი ინტეგრალების ჯამი. ამრიგად, ჩამოთვლილი შემთხვევებისთვის გვაქვს:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)dx\,,\quad \int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)dx\,,\quad \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

აქაც, თუ არასაკუთრივი ინტეგრალი არსებობს, მას ეწოდება კრებადი, ხოლო თუ არა - განშლადი.

ვაჩვენოთ, რომ $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha<1$ და განშლადია, როცა $\alpha\geqslant 1$. მართლაც, როცა $\alpha\neq 1$, მაშინ

$$\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to0+}\int_t^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to0+}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_t^1=\frac{1}{-\alpha+1}\lim_{t\to0+}\left(1-t^{-\alpha+1}\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{როცა } \alpha>1\\ \frac{1}{-\alpha+1}, & \text{როცა } \alpha<1\end{cases},$$

ხოლო, როცა $\alpha=1$, გვაქვს

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{t\to0+}\int_t^1\frac{dx}{x}=\lim_{t\to0+}\ln x\Big|_t^1=\lim_{t\to0+}(-\ln t)=+\infty.$$

## დიფერენციალური განტოლებები

განტოლებას, რომელიც აკავშირებს $x$ დამოუკიდებელ ცვლადს, საძიებელ $y=f(x)$ ფუნქციასა, მასთან ერთად ამ ფუნქციის წარმოებულებს $n$ რიგამდე ჩათვლით, ეწოდება $n$-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება. ეს განტოლება ზოგადად ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0. \tag{1}$$

$y=f(x)$ ფუნქციას, რომელიც ჩასმით (1) ტოლობაში ამ ტოლობას იგივეობად აქცევს, ეწოდება (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი. თუ $y=f(x;C_1,C_2,\dots,C_n)$ ფუნქცია, რომელიც, გარდა $x$ ცვლადისა, შეიცავს აგრეთვე $n$ ცალ ნებისმიერ მუდმივს და რომელიც ამ მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის აკმაყოფილებს (1) განტოლებას, ეწოდება ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ფუნქციას, რომელიც მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან მუდმივებისათვის კონკრეტული რიცხვითი მნიშვნელობების მინიჭებით, ეწოდება მოცემული დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი.

## განცალებადცვლადებიანი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე: $F(x,y,y')=0$. თუ ავხსნით $y'$-ს გამოსახვით $x$ და $y$-ის საშუალებით, მივიღებთ სახეს: $y'=g(x,y)$, ანუ $\dfrac{dy}{dx}=g(x,y)$. ვთქვათ, რომ ორცვლადიანი $g(x,y)$ ფუნქცია ისეთია, რომ იგი წარმოიდგინება ცალკეული ცვლადების ფუნქციების ნამრავლის სახით, ე.ი. $g(x,y)=g_1(x)\cdot g_2(y)$. მოცემული განტოლება ასე ჩაიწერება: $dy=g_1(x)\cdot g_2(y)dx$, საიდანაც ვღებულობთ, რომ $g_1(x)\cdot g_2(y)dx-dy=0$. ეს კი წარმოადგენს შემდეგი განტოლების კერძო სახეს

$$g_1(x)g_2(y)dx+h_1(x)h_2(y)dy=0. \tag{1}$$

ამ განტოლებას ეწოდება სწორედ განცალებადცვლადებიანი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება. მის ამოსახსნელად განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $h_1(x)\cdot g_2(y)$ ნამრავლზე, მივიღებთ

$$\frac{g_1(x)}{h_1(x)}dx+\frac{h_2(y)}{g_2(y)}dy=0.$$

აქედან

$$\int\frac{h_2(y)}{g_2(y)}dy=-\int\frac{g_1(x)}{h_1(x)}dx.$$

ინტეგრალების გამოთვლის შემდეგ მივიღებთ $A(y)=B(x)+C$ სახის ტოლობას, საიდანაც, თუ გამოვსახავთ $y$-ს, მივიღებთ სწორედ (1) განტოლების ზოგად ამონახსნს: $y=f(x,C)$.

## პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$a(x)y'+b(x)y+c(x)=0$ სახის განტოლებას, სადაც $a(x)$, $b(x)$ და $c(x)$ მოცემული ფუნქციებია, ხოლო $y=f(x)$ საძიებელი ფუნქციაა, ეწოდება პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. თუ $a(x)\neq 0$, განტოლების $a(x)$-ზე წევრ-წევრად გაყოფით მას მივიყვანთ სახეზე

$$y'+p(x)y+q(x)=0. \tag{1}$$

ვეძებოთ (1) განტოლების ამონახსნი $y=u(x)v(x)$ სახით. რადგან $y'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, გვექნება, რომ

$$(u'(x)v(x)+u(x)v'(x))+p(x)u(x)v(x)+q(x)=0.$$

მიღებული ტოლობა გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$v(x)(u'(x)+p(x)u(x))+(u(x)v'(x)+q(x))=0. \tag{2}$$

ცხადია, (2) ტოლობა შესრულდება, თუ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციებს ისე შევარჩევთ, რომ

$$u'(x)+p(x)u(x)=0 \tag{3}$$

და

$$u(x)v'(x)+q(x)=0. \tag{4}$$

თუ (3) განტოლებიდან ვიპოვით $u(x)$-ს, შევიტანთ რა მას (4) ტოლობაში, ვიპოვით $V(x)$-საც და, მაშასადამე, $y$-საც. (3)-დან გვაქვს

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx=-\int p(x)\,dx,$$

საიდანაც $\ln u(x)=-\int p(x)dx$, ანუ

$$u(x)=e^{-\int p(x)dx}.$$

მაშინ, (4)-დან მივიღებთ

$$V(x)=-\int \frac{q(x)}{u(x)}dx+C=-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

მაშასადამე, (1) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y=u(x)V(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right).$$

## მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება ეწოდება $ay''+by'+cy=0$ სახის განტოლებას, სადაც $a$, $b$ და $c$ ($a\neq 0$) მოცემული რიცხვებია, ხოლო $y=f(x)$ საძიებელი ფუნქცია. განტოლების $a$-ზე წევრ-წევრად გაყოფით მას მივიყვანთ შემდეგ სახეზე

$$y''+py'+qy=0. \tag{1}$$

ჩვენი მიზანია მოვძებნოთ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ამისათვის, პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ თუ $y_1$ და $y_2$ არის მისი ამონახსნები, ხოლო $C_1$ და $C_2$ ნებისმიერი მუდმივები, მაშინ $y=C_1y_1+C_2y_2$ აგრეთვე იქნება (1) განტოლების ამონახსნი. მართლაც

$$(C_1y_1+C_2y_2)''+p(C_1y_1+C_2y_2)'+q(C_1y_1+C_2y_2)=C_1(y_1''+py_1'+qy_1)+C_2(y_2''+py_2'+qy_2)=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0=0.$$

ამის გამო, ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად საკმარისია ვიცოდეთ, რომ თუ ვიპოვით (1) განტოლების რაიმე ორ $y_1$ და $y_2$ დამოუკიდებელ ამონახსნს (ე.ი. რომელთა ფარდობა არ არის მუდმივი), მაშინ

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{2}$$

იქნება (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ვთქვათ, საძიებელი ზოგადი ამონახსნის სახე დამოკიდებულია

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{3}$$

კვადრატულ განტოლებაზე, რომელსაც (1) ერთგვაროვანი განტოლების მახასიათებელი განტოლება ეწოდება. განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1) როცა მახასიათებელ განტოლებას აქვს ორი განსხვავებული ნამდვილი ფესვი. ვთქვათ, ეს ფესვებია $\lambda_1$ და $\lambda_1$. მაშინ ფუნქციები $y_1=e^{\lambda_1 x}$ და $y=e^{\lambda_2 x}$ იქნებიან (1) განტოლების დამოუკიდებელი ამონახსნები. მართლაც, დამოუკიდებლობა ცხადია, რადგან შეფარდება $\frac{y_1}{y_2}=e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}$ არაა მუდმივი. შევამოწმოთ, რომ ისინი აკმაყოფილებენ (1)-ს. შევამოწმოთ ეს, მაგალითად, $y_1$-თვის. რადგან $y_1'=\lambda_1 e^{\lambda_1 x}$, $y_1''=\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}$, ამიტომ გვექნება

$$y_1''+py_1'+qy_1=\lambda_1^2e^{\lambda_1 x}+p\lambda_1e^{\lambda_1 x}+qe^{\lambda_1 x}=e^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2+p\lambda_1+q)=e^{\lambda_1 x}\cdot 0=0.$$

თუ $y_1$ და $y_2$-ს შევიტანთ (2) ტოლობაში, მივიღებთ, რომ ამ შემთხვევაში (1) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}.$$

2) როცა მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვი. ვთქვათ, ეს ფესვია $\lambda$. მაშინ (1) განტოლების ორ დამოუკიდებელ ამონახსნს წარმოადგენენ ფუნქციები $y_1=e^{\lambda x}$ და $y_2=xe^{\lambda x}$. ეს ფუნქციები დამოუკიდებელია წრფივად. ჩვენ ვიცით, რომ $y_1$ აკმაყოფილებს (1)-ს. ვაჩვენოთ, რომ (1)-ს აკმაყოფილებს $y_2$-ც. გვაქვს

$$y_2'=x'e^{\lambda x}+x\lambda e^{\lambda x}=(1+\lambda x)e^{\lambda x};$$

$$y_2''=(1+\lambda x)'e^{\lambda x}+(1+\lambda x)\lambda e^{\lambda x}=\lambda e^{\lambda x}+(\lambda+\lambda^2 x)e^{\lambda x}=(2\lambda+\lambda^2 x)e^{\lambda x}.$$

მაშინ

$$y_2''+py_2'+qy_2=(2\lambda+\lambda^2 x)e^{\lambda x}+p(1+\lambda x)e^{\lambda x}+qxe^{\lambda x}=e^{\lambda x}(2\lambda+\lambda^2 x+p+p\lambda x+qx)=e^{\lambda x}((\lambda^2+p\lambda+q)x+(2\lambda+p)).$$

რადგან $\lambda$ არის (3) განტოლების ფესვი, ამიტომ $\lambda^2+p\lambda+q=0$, ხოლო იმის გამო, რომ იგი ჯერადი ფესვია, ადვილი მისახვედრია, რომ $\lambda=-\frac{p}{2}$, ე.ი. $2\lambda+p=0$. მაშასადამე

$$y_2''+py_2'+qy_2=e^{\lambda x}(0\cdot x+0)=0.$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (1) განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნება სახე

$$y=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}.$$

3) როცა მახასიათებელ განტოლებას არ აქვს ნამდვილი ფესვები. ამ დროს $p^2-4q<0$. აღვნიშნოთ $a=-\frac{p}{2}$, $b=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$. ამ შემთხვევაში (1) განტოლების ორ დამოუკიდებელ ამონახსნს წარმოადგენენ ფუნქციები $y_1=e^{ax}\sin bx$ და $y_2=e^{ax}\cos bx$. მართლაც, ისინი დამოუკიდებელია წრფივად, რადგან $\frac{y_1}{y_2}=\operatorname{tg} bx$, რაც არაა მუდმივი. შევამოწმოთ, რომ ისინი აკმაყოფილებენ (1)-ს. შემოწმება ორივესთვის ხდება ერთნაირად, ამიტომ ჩავატაროთ იგი ერთ-ერთისთვის, მაგალითად $y_1$-თვის. გვექნება:

$$y_1'=(e^{ax})'\sin bx+e^{ax}(\sin bx)'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx,$$

$$y_1''=a(ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx)+b(ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx)=e^{ax}((a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx).$$

ამიტომ

$$y_1''+py_1'+qy_1=e^{ax}((a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx)+pe^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)+qe^{ax}\sin bx=$$

$$=e^{ax}((a^2-b^2+pa+q)\sin bx+(2ab+pb)\cos bx).$$

ამ გამოსახულების ნულთან ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$a^2-b^2+pa+q=0$$

და

$$2ab+pb=0.$$

გვაქვს

$$a^2-b^2+pa+q=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2+p\left(-\frac{p}{2}\right)+q=\frac{p^2}{4}-\frac{4q-p^2}{4}-\frac{p^2}{2}+q=0,$$

$$2ab+pb=b(2a+p)=b\left(2\cdot\left(-\frac{p}{2}\right)+p\right)=b\cdot 0=0.$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (1) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y=c_1e^{ax}\sin bx+c_2e^{ax}\cos bx$$

ანუ

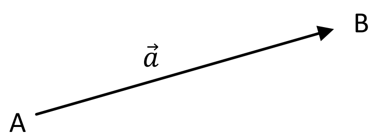
$$y=e^{ax}(c_1\sin bx+c_2\cos bx).$$

## ვექტორები

## ვექტორი, ვექტორთა შეკრება და რიცხვზე გამრავლება

არსებობენ ობიექტები, რომლებსაც გარდა სიდიდისა აქვთ მიმართულებაც. ასეთ ობიექტს ***ვექტორს*** უწოდებენ. ვექტორია, მაგალითად, სიჩქარე, აჩქარება, ძალა და სხვა.

გეომეტრიულად ვექტორი მიმართულების მქონე მონაკვეთით გამოისახება.




ნახაზზე გამოსახული $\vec{a}$ ვექტორი შეიძლება ასეც ჩაიწეროს $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ .

$A$-ს $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის ***საწყისი*** წერტილი ჰქვია, $B$-ს - ბოლო წერტილი. ვექტორის საწყის წერტილს ამ ვექტორის ***მოდების*** წერტილსაც უწოდებენ. ვექტორის საწყის და ბოლო წერტილს შორის მანძილს ვექტორის ***სიგრძე*** ეწოდება. $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე $|\vec{a}|$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

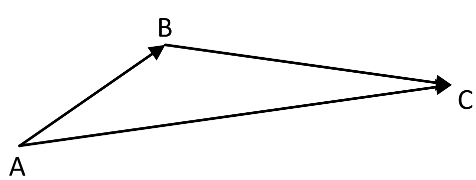
ორ ვექტორს ეწოდება ***ტოლი***, თუ მათ ერთნაირი აქვთ როგორც სიგრძე, ისე მიმართულება.

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს ე.წ. ***თავისუფალ*** ვექტორებთან. ე.ი. თუ ვექტორს გადავიტანთ თავისი თავის პარალელურად და მოვდებთ სხვა წერტილში, მივიღებთ მოცემულის ტოლ ვექტორს.

ვექტორს, რომელსაც აქვს იგივე სიგრძე, რაც $\vec{a}$ ვექტორს, მიმართულება კი საპირისპირო, $\vec{a}$ ვექტორის ***მოპირდაპირე*** ვექტორი ჰქვია და იგი $-\vec{a}$ –ჩანაწერით აღინიშნება.

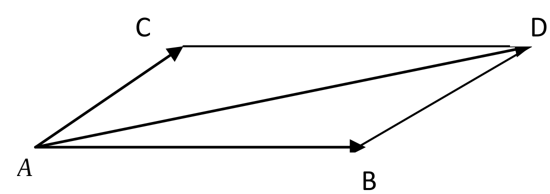
ვექტორს, რომლის სიგრძე ნულის ტოლია, ***ნულოვანი*** ეწოდება. ნულოვანი ვექტორის მიმართულება არაა განსაზღვრული– მის მიმართულებად შეგვიძლია ჩავთვალოთ ნებისმიერი მიმართულება.

$\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების ჯამი განისაზღვრება ე.წ. ***სამკუთხედის წესით***. იმ შემთხვევაში, როცა ვექტორები ერთსა და იმავე წერტილშია მოდებული , მათი შეკრება მოხერხებულია ე.წ. ***პარალელოგრამის წესით***(იხ.ნახაზები).




$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

ვექტორთა შეკრების
“სამკუთხედის წესი”

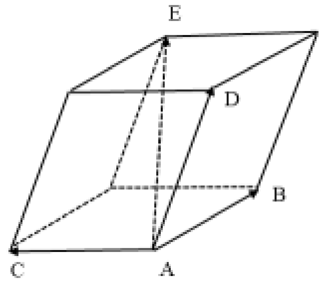



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$$

ვექტორთა შეკრების
“პარალელოგრამის წესი”

როცა ვექტორები არცერთი ამ სახით არაა მოცემული, პარალელელური გადატანით მათ მივიყვანთ ან ერთ ან მეორე შემთხვევამდე.

ასევე, სივრცის შემთხვევაში, სამი, ერთ სიბრტყეში არამდებარე, ერთ წერტილში მოდებული ვექტორების შეკრება შეიძლება ე.წ. ***პარალელეპიპედის*** წესით:




$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$$

სივრცის სამი ვექტორის შეკრების
“პარალელეპიპედის წესი”

ე.ი. მოცემული სამი ვექტორის ჯამი არის იმავე წერტილში მოდებული პარალელეპიპედის დიაგონალით გამოსახული ვექტორი.

$k$ ნამდვილი რიცხვისა და $\vec{a}$ ვექტორის ნამრავლი განისაზღვრება შემდეგნაირად:
$k\vec{a}$ ვექტორი არის ის ვექტორი, რომლის სიგრძეა $|k||\vec{a}|$ და რომელსაც აქვს $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულება, თუ $k>0$ და აქვს $\vec{a}$ ვექტორის საპირისპირო მიმართულება, თუ $k<0$.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა შეგვიძლია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

არ არის ძნელი იმის შემოწმება, რომ ვექტორებზე შემოტანილ ამ ოპერაციებს აქვთ შემდეგი თვისებები:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
5. $k_1(k_2\vec{a})=\left(k_1k_2\right)\vec{a}$
6. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$
7. $\left(-1\right)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$
8. $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$
9. $\left(k_1+k_2\right)\vec{a}=k_1\vec{a}+k_2\vec{a}$
10. $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$

## ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

**განსაზღვრება.** *ორი ვექტორის **სკალარული ნამრავლი** ეწოდება მათი სიგრძეების ნამრავლს ამ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსზე.*

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a}\cdot\vec{b}$ სიმბოლოთი.

ამ განსაზღვრების თანახმად

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha,\quad \text{სადაც}\ \ \alpha=(\widehat{\vec{a},\vec{b}}).$$

სკალარულ ნამრავლს აქვს შემდეგი ძირითადი თვისებები:

1. $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$ და $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vec{a}=0$
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
3. $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$
4. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

$\cos 0^0=1$ ტოლობის გათვალისწინებით შეგვიძლ;ია დავწეროთ

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2 \quad ,$$

მაშასადამე

$$|a|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\ .$$

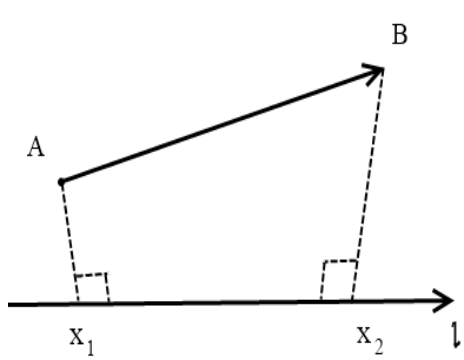
## ვექტორის კოორდინატები

როგორც ვიცით, რიცხვით ღერძზე მდებარე ყოველ წერტილს შესაბამება ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც ამ წერტილის კოორდინატი ეწოდება.

ღერძზე(რიცხვით ღერძზე) არამდებარე წერტილის კოორდინატი ეწოდება ამ წერილიდან ამ ღერძზე დაშვებული მართობის ფუძის კოორდინატს.

**განსაზღვრება**. ***ვექტორის კოორდინატი ღერძზე*** *ეწოდება მისი ბოლო და საწყის წერტილთა კოორდინატების სხვაობას.*

ვთქვათ, რაიმე ღერძზე $A$ წერტილის კოორდინატია $x_1$, $B$ წერტილისა კი $x_2$ (იხ. ნახაზი), მაშინ, ამ განსაზღვრების თანახმად, $\overline{AB}$ ვექტორის კოორდინატი ამ ღერძზე იქნება $x_2-x_1$.




$\overline{AB}$ ვექტორის კოორდინატია $x_2-x_1$

***შენიშვნა.*** ნახაზზე მოცემული მართობები არაა პარალელურად გამოსახული, რადგან სივრცეში ერთი და იმავე წრფის მართობული ორი წრფე შეიძლება არ იყოს ურთიერთპარალელური.

პარალელური გადატანის დროს ყველა წერტილის კოორდინატი რაიმე ღერძზე ერთი და იმავე რიცხვით იცვლება, ამიტომ ვექტორის კოორდინატი ღერძზე არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რომელ წერტილშია მოდებული ის.

ვექტორს ეწოდება ***ერთეულოვანი***, თუ მისი სიგრძე 1-ის ტოლია.
ერთეულოვან ვექტორს, რომელსაც ღერძის მიმართულება აქვს, ამ ღერძის ***მიმმართველი ვექტორი*** ანუ ***მგეზავი*** ეწოდება(ხშირად მგეზავს ***ორტსაც*** უწოდებენ).

$l$ ღერძის მგეზავი $\vec{e}_l$-ით აღვნიშნოთ.

ვთქვათ, $A$ და $B$ წერტილებიდან $l$ ღერძზე დაშვებული მართობების ფუძეებია $A_1$ და $B_1$, შესაბამისად. $\overrightarrow{A_1B_1}$ ვექტორს ეწოდება $l$ ღერძზე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის ***მდგენელი***. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\vec{e}_l$$

სადაც $x$ არის $\overrightarrow{AB}$-ს კოორდინატი $l$ ღერძზე, $\vec{e}_i$ კი ამ ღერძის მგეზავია.

***ამრიგად, ვექტორის მდგენელი ღერძზე უდრის ამ ღერძზე მისი კოორდინატისა და ღერძის მგეზავის ნამრავლს.***

ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია $OXYZ$ დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. $OX$, $OY$ და $OZ$ ღერძების მგეზავები, შესაბამისად, $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$-თი აღვნიშნოთ. ის ფაქტი, რომ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, $OX$, $OY$ და $OZ$ ღერძებზე არის $a_1$, $a_2$ და $a_3$ ,შესაბამისად, ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3),$$

ან ასე

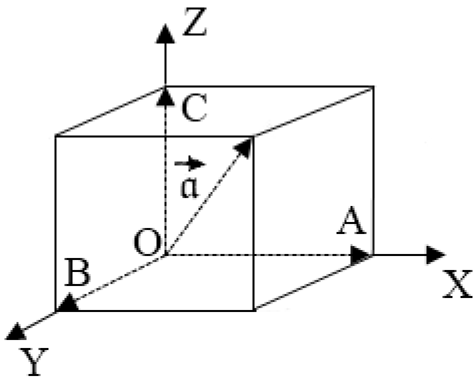
$$\vec{a} = \vec{a}(a_1; a_2; a_3).$$

სამართლიანია შემდეგი

**თეორემა.** თუ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, მაშინ $\vec{a}$ ვექტორი იშლება, საკოორდინატო ღერძების მგეზავების მიხედვით, შემდეგნაირად

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

**დამტკიცება.** მოვდოთ $\vec{a}$ ვექტორი კოორდინატთა სათავეში. ავაგოთ ისეთი მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის დიაგონალია $\vec{a}$ და რომლის წიბოები საკოორდინატო ღერძებზე მდებარეობენ(იხ. ნახაზი).




ვექტორთა შეკრების პარალელეპიპედის წესის თანახმად $\vec{a}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ .

მაგრამ, ადვილი შესამჩნევია, რომ $\overrightarrow{OA}$ არის $\vec{a}$ ვექტორის მდგენელი $OX$ ღერძზე, ამიტომ $\overrightarrow{OA}=a_1\vec{i}$. ანალოგიურად, $\overrightarrow{OA}=a_2\vec{j}$ და $\overrightarrow{OA}=a_3\vec{k}$. . მაშასადამე,

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}.$$

**თეორემა დამტკიცებულია**

.

## ოპერაციები კოორდინატებით მოცემულ ვექტორებზე

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ მოცემულია $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ და $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ვექტორები, აგრეთვე რაიმე $k$ ნამდვილი რიცხვი, მაშინ

1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$,

ე.ი. ვექტორთა შეკრებისას იკრიბება შესაბამისი კოორდინატები,

2) $k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$,

მაშასადამე, ვექტორის რიცხვზე გამრავლებისას, ვექტორის თითოეული კოორდინატი მრავლდება ამ რიცხვზე.

სამართლიანია აგრეთვე შემდეგი

**თეორემა.** *თუ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ და $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ , მაშინ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების* ***სკალარული ნამრავლი გამოითვლება*** *ფორმულით*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

**დამტკიცება.** დავშალოთ მოცემული ვექტორები საკოორდინატო ღერძების მგეზავების მიხედვით

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},$$

$$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}.$$

მაშინ გვექნება

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}).$$

სკალარული ნამრავლის თვისებების გათვალიწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1\vec{i}\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\vec{j}+a_3b_3\vec{k}\vec{k}+a_1b_2\vec{i}\vec{j}+a_1b_3\vec{i}\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\vec{i}+a_2b_3\vec{j}\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\vec{j}. \qquad (1)$$

რადგან $\vec{i}$ , $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ერთეულოვანი ვექტორებია, ამიტომ სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარე

$$\vec{i}\vec{i}=\vec{j}\vec{j}=\vec{k}\vec{k}=1\cdot1\cdot\cos0^0=1, \qquad (2)$$

ხოლო რადგან ისინი უთიერთმართობულია, გვექნება

$$\vec{i}\vec{j}=\vec{j}\vec{i}=\vec{i}\vec{k}=\vec{k}\vec{i}=\vec{j}\vec{k}=\vec{k}\vec{j}=1\cdot 1\cdot \cos 90^0=0, \qquad (3)$$

(1), (2) და (3) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

**თეორემა დამტკიცებულია.**

დამტკიცებული ფორმულიდან შეგვიძლია მივიღოთ ***ვექტორის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა***

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2},$$

სადაც $a_1, a_2, a_3$ არის $\vec{a}$ -ს კოორდინატები.

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებიდან

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

აქედან და ზემოთდადგენილი ფორმულებიდან მივიღებთ კოორდინატებით მოცემულ ვექტორებს შორის კუთხის გამოსათვლელ შემდეგ ფორმულას

$$\cos\alpha=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}},$$

სადაც $a_1, a_2, a_3$ არის $\vec{a}$ -ს კოორდინატები, ხოლო $b_1, b_2, b_3$ არის $\vec{b}$ -სი.

## $n-$განზომილებიანი ვექტორები, ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებლობა, ბაზისი

ტოლობას $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ საფუძვლად უდებენ ე.წ. “ $n-$ განზომილებიანი ვექტორის” განსაზღვრებას.

**განსაზღვრება.** ***$n-$განზომილებიანი $\vec{a}$ ვექტორი ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ $n-$ეულს:***

$$(a_1;a_2;..;a_n).$$

$a_1;a_2;...;a_n$ რიცხვებს $\vec{a}$ ვექტორის ***კოორდინატები*** ეწოდება. ეს ფაქტი ასე ჩავწეროთ

$$\vec{a}=(a_1;a_2;..;a_n) \text{ ან ასე } \vec{a}=\vec{a}(a_1;a_2;..;a_n).$$

$n$ -განზომილებიან ვექტორთა შეკრება და რიცხვზე გამრავლება განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$(a_1;a_2;..;a_n)+(b_1;b_2;..;b_n)=(a_1+b_1;a_2+b_2;..;a_n+b_n),$$

$$k(a_1;a_2;..;a_n)=(ka_1;ka_2;..;ka_n).$$

$n$ **-განზომილებიან** ვექტორთა სიმრავლეს, რომელშიც ვექტორთა შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები განსაზღვრულია ამ წესებით, ეწოდება ***ვექტორული სივრცე.***

**განსაზღვრება**. ***ვექტორს***

$$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+...+k_m\vec{a}_m,$$

***სადაც $k_1,k_2,...,k_m$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ვუწოდოთ $\vec{a}_1;\vec{a}_2;..;\vec{a}_n$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია.***

**განსაზღვრება.** ***ვექტორთა ერთობლიობას ვუწოდოთ წფივად დამოკიდებული, თუ ერთ-ერთი მათგანი წარმოადგენს დანარჩენთა წრფივ კომბინაციას. თუ ვექტორთა ერთობლიობა არაა წრფივად დამოკიდებული, მაშინ მას წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება.***

ცხადია, თუ ვექტორთა ერთობლიობის რომელიმე წევრი ნულოვანია, მაშინ ეს ერთობლიობა წრფივად დამოკიდებულია.

საინტერესოა შემდეგი

**თეორემა.** ***ვთქვათ, მოცემულია ვექტორები:***

$$\vec{a}_1=(a_{11};a_{12};..;a_{1n})$$

$$\vec{a}_2=(a_{21};a_{22};..;a_{2n})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\vec{a}_m=(a_{m1};a_{m2};..;a_{mn}).$$

***ამ ვექტორებს შორის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რაოდენობა უდრის მათი კოორდინატებისაგან შედგენილი***

$$\begin{pmatrix} a_{11};a_{12};..;a_{1n} \\ a_{21};a_{22};..;a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1};a_{m2};..;a_{mn} \end{pmatrix}$$

***მატრიცის რანგს.***

განსაზღვრება. ***ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელ ერთობლიობას ეწოდება სივრცის ბაზისი, თუ ამ სივრცის ნებისმიერი ვექტორი წარმოიდგინება აღნიშნული ერთობლიობის წრფივი კომბინაციის სახით.***

ადვილი შესამჩნევია, რომ $n-$ განზომილებიან ვექტორთა სივრცეში შემდეგი ვექტორები ქმნიან ბაზისს:

$$\vec{e}_1 = (1;0;..;0),$$
$$\vec{e}_2 = (0;1;..;0),$$
$$......................$$
$$\vec{e}_n = (0;0;..;1).$$

მართლაც, ცხადია, რომ არცერთი მათგანი არ წარმოადგენს დანარჩენთა წრფივ კომბინაციას—მაგალითად,შეუძლებელია $\vec{e}_1$ იყოს დანარჩენების წრფივი კომბინაცია, ვინაიდან ყოველი ასეთიკომბინაციის პირველი კოორდინატია 0, მაშინ როცა $\vec{e}_1$ -ის პირველი კოორდინატი არის 1. ე.ი. ვექტორთა ეს $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ ერთობლიობა წრფივად დამოუკიდებელია. მეორეს მხრივ, ნებისმიერი $\vec{a} = (a_1; a_2; ..; a_n)$ ვექტორი წარმოიდგინება მათი წრფივი კომბინაციის სახით. მართლაც

$$(a_1; a_2; ..; a_n) = a_1 (1;0;..;0) +$$
$$+a_2 (0;1;..;0) +$$
$$.....................$$
$$+a_n (0;0;..;1),$$

ანუ,

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + .. + a_n\vec{e}_n.$$

შევნიშნოთ, რომ სამგანზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ბაზისს ქმნის საკოორდინატო ღერძების მგეზავები: $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{k} = (0;0;1)$.

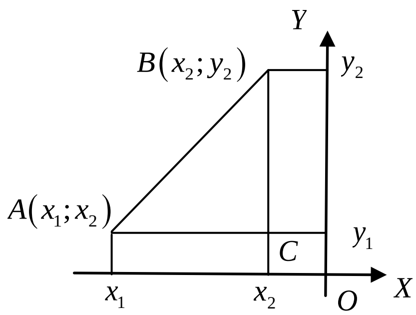
# წრფე სიბრტყეზე

## მანძილი ორ წერტილს შორის

**თეორემა.** *მანძილი სიბრტყის* $A(x_1;y_1)$ *და* $B(x_2;y_2)$ *წერტილებს შორის გამოითვლება ფორმულით*

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

**დამტკიცება.** $ABC$ მართკუთხა სანკუთხედიდან, პითაგორას თეორემის თანახმად,




$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}.$$

მაგრამ $AC=|x_1-x_2|$ და $BC=|y_1-y_2|$. ამიტომ

$$AB=\sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

**თეორემა დამტკიცებულია.**

**შენიშვნა.** მართკუთხა პარალელეპიპედის დია-გონალის თვისების გამოყენებით ასევე მარტივად დამტკიცდება, რომ სივრცეში მანძილი $A(x_1;y_1;z_1)$ და $B(x_2;y_2;z_2)$ წერტილებს შორის გამოითვლება ფორმულით

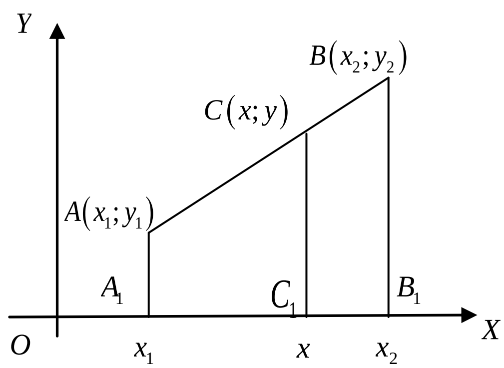
$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

## მონაკვეთის გაყოფა მოცემული შეფარდებით

**თეორემა.** *ვთქვათ,* $A(x_1;y_1)$ *და* $B(x_2;y_2)$ *წერტილები მონაკვეთის ბოლოებია , ხოლო* $\lambda>0$ *მოცემული ნამდვილი რიცხვია. მაშინ იმ* $C(x;y)$ *წერტილის კორდინატები, რომელიც* $AB$ *მონაკვეთს ყოფს* $\lambda$ *-შეფარდებით, ე.ი. რომლისთვისაც* $\frac{AC}{CB}=\lambda$*, გამოითვლება ფორმულებით:*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

**დამტკიცება.** პროპორციული მონაკეთების შესახებ თეორემის თანახმად $\frac{AC}{CB}=\frac{A_1C_1}{C_1B_1}$.




მაგრამ $\frac{AC}{CB}=\lambda$ და $\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x}$. ამის გამო

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

თუ აქედან, როგორც განტოლებიდან, ამოვხსნით $x$-ს, მივიღებთ, რომ $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$.

ანალოგიურად დამტკიცდება მეორე ფორმულაც.

**თეორემა დამტკიცებულია.**

**შენიშვნა.** ასეთივე ფორმულები სამართლიანია სივრცის წერტილთა შემთხვევაშიც, მაგრამ დაემატება კიდევ ერთი ფორმულა

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

**შენიშვნა.** როდესაც $C$ წერტილი $AB$ მონაკვეთის შუაწერტილია, მაშინ, ცხადია, $\lambda=1$. ამის გათვალისწინებით დამტკიცებული ფორმულებიან მივიღებთ ***მონაკვეთის შუაწერტი-ლის კოორდინატების გამოსათვლელ ფორმულებს:***

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

## წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით

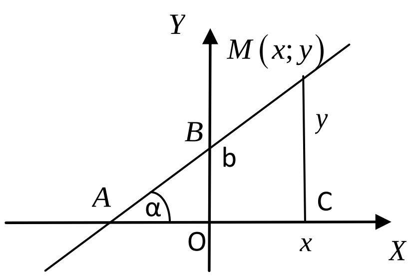
**განსაზღვრება.** სიბრტყეზე მდებარე რაიმე ***წირის განტოლება*** ეწოდება ისეთ ორცვლადიან განტოლებას, რომელსაც აკმაყოფილებენ მხოლოდ ამ წირის წერტილთა კოორდინატები.

**თეორემა.** ***იმ წრფის განტოლებას, რომელიც აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულე-ბასთან ქმნის $\alpha$ კუთხეს და რომელიც ორდინატთა ღერძს კვეთს $(0;b)$ წერტილში, აქვს სახე***

$$y=kx+b \tag{1}$$

***სადაც*** $k=tg\alpha$ ***და მას ეწოდება მოცემული წრფის კუთხური კოეფიციენტი.***

**დამტკიცება.** ავიღოთ მოცემულ წრფეზე ნებისმიერი $M(x;y)$ წერტილი და ვაჩვენოთ, რომ მისი კოორდინატები აკნაყოფილებს (1) განტოლებას.




$\triangle AMC$-დან $y=AM\cdot tg\alpha=(AO+OC)\cdot tg\alpha=AO\cdot tg\alpha+xtg\alpha$ .

მაგრამ, $\triangle ABO$-დან $AO\cdot tg\alpha=b$. მაშასადამე,

$$y=b+xtg\alpha,$$

რაც დასამტკიცებელი (1) ფორმულაა.

**თეორემა დამტკიცებულია.**

## წრფის ზოგადი სახის განტოლება

**განსაზღვრება.** ***პირველი რიგის ორცვლადიანი განტოლება*** ეწოდება

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

სახის განტოლებას, სადაც $x$ და $y$ ცვლადებია, $A$ და $B$ კი მოცემული ნამდვილი რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან ( ე.ი. $A^2 + B^2 \neq 0$).

**თეორემა.** ***ყოველი წრფის განტოლება პირველი რიგის ორცვლადიანი განტოლებაა და პირიქით, ყოვლი პირველი რიგის ორცვლადიანი განტოლება წრფის განტოლებას წარმოადგენს.***

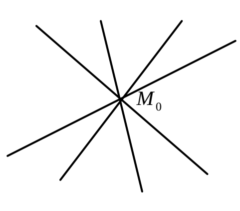
**დამტკიცება.** თუ წრფე აბსცისთა ღერძის მართობული არაა, მაშინ, როგორც ვიცით, მის განტოლებას აქვს სახე $y = kx + b$ , ანუ $kx - y + b = 0$ . ცხადია, ეს განტოლება (1) სახი-საა, სადაც $A = k$ , $B = -1$ და $C = b$ . თუ წრფე აბსცისთა ღერძის მართობულია, მაშინ მის განტოლებას აქვს სახე $x = a$ , ანუ $x - a = 0$ . ესეც (1) სახისაა, რომელშიც $A = 1$ , $B = 0$ და $C = -a$ .

პირიქით, თუ მოცემულია (1) სახის განტოლება , რომელშიც $B \neq 0$ , მაშინ მას შეგვიძ-ლია მივცეთ სახე $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ . ეს კი იქნება იმ წრფის განტოლება, რომლის კუთხური კოეფიციენტია $-\dfrac{A}{B}$ და რომელიც ორდინატთა ღერძს კვეთს $\left(0; -\dfrac{C}{B}\right)$ წერტილში. თუ $B = 0$ , მაშინ $A \neq 0$ და (1) განტოლება მიიღებს სახეს $x = -\dfrac{C}{A}$ . ეს კი, ცხადია, იმ წრფის განტო-ლებაა, რომელიც აბსცისთა ღერძის მართობულია და რომელიც მას $\left(-\dfrac{C}{A}; 0\right)$ წერტილში კვეთს.

**თეორემა დამტკიცებულია.**

## წრფეთა კონის განტოლება

**განსაზღვრება.** მოცემულ წერტილზე გამავალ წრფეთა ერთობლიობას ამ წერტილზე გამავალი ***წრფეთა კონა*** ეწოდება.



თეორემა. *სიბრტყის $M_0(x_0;y_0)$ წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის ნებისმიერი წრფის განტოლებას, გარდა აბსცისათა ღერძის მართობულისა, აქვს სახე*

$$y-y_0=k(x-x_0)\quad, \tag{1}$$

*სადაც $k$ ნამდვილი რიცხვია.*

**დამტკიცება.** როგორც ვიცით, ნებისმიერი წრფის განტოლება, გარდა აბსცისათა ღერძის მართობული წრფისა, შეიძლება ჩაიწეროს კუთხური კოეფიციენტით

$$y=kx+b. \tag{2}$$

რადგან ეს წრფე გადის $M_0$ წერტილზე, ამიტომ $M_0$ წერტილის კოორდინატები დააკმაყოფილებს ამ წრფის განტოლებას, ე.ი.

$$y_0=kx_0+b \tag{3}$$

თუ (2) განტოლებას წევრ-წევრად გამოვაკლებთ (3)-ს, მივიღებთ დასამტკიცებელ (1) ტოლობას.

**თეორემა დამტკიცებულია.**

**შენიშვნა.** (1)-ს $M_0(x_0;y_0)$ წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლებას უწოდებენ.

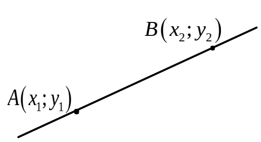
## ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება

თეორემა. *სიბრტყის $A(x_1;y_1)$ და $B(x_2;y_2)$ $(x_1\neq x_2, y_1\neq y_2)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებას აქვს სახე*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{1}$$

**დამტკიცება.** რადგან $AB$ წრფე ეკუთვნის წერტილზე გამავალ წრფეთა კონას, ამიტომ ამ წრფის განტოლებას აქვს სახე

$$y-y_1=k(x-x_1)\quad. \tag{2}$$



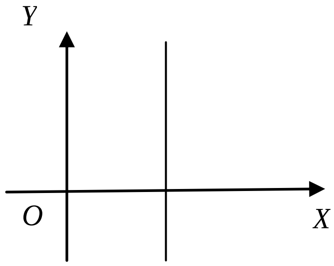

რადგან $M_0$ წერტილი ძევს ამ წრფეზე, ამიტომ $M_0$ წერტი-ლის კოორდინატები დააკმაყოფილებს (2) ტოლობას. ე.ი.

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1)\quad. \tag{3}$$

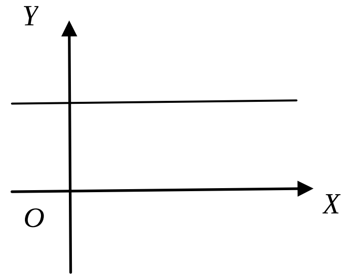
თუ (2) ტოლობას წევრ-წევრად გავყოფთ (3) ტოლობაზე, მივიღებთ დასამტკიცებელ (1) ტოლობას.

**თეორემა დამტკიცებულია.**

**შენიშვნა.** როცა $x_1=x_2$, მაშინ, ცხადია, $AB$ წრფე აბსცისათა ღერძის მართობულია და მის განტოლებას ექნება სახე $x=x_1$. ანალოგიურად, როცა $y_1=y_2$ მაშინ $AB$ წრფე ორდინატთა ღერძის მართობულია და მის განტოლებას აქვს სახე $y=y_1$.




$x = x_1$



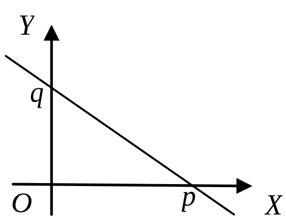

$y = y_1$

## წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში

თეორემა. *იმ წრფის განტოლებას, რომელიც აბსცისთა ღერძს და ორდინატთა ღერძს შესაბამისად* $(p;o)$ *და* $(0;q)$ $(p \neq 0, q \neq 0)$ *წერტილებში კვეთს, აქვს სახე*

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1. \qquad (1)$$

**დამტკიცება.** ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლების ძალით




$$\frac{x-p}{0-p}=\frac{y-0}{q-0}$$ , ანუ $$\frac{x}{-p}+1=\frac{y}{q}$$ , საიდანაც

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(1) -ს უწოდებენ ***წრფის განტოლებას ღერძთა მონაკვეთებში.***

## წრფის ნორმალური სახის განტოლება

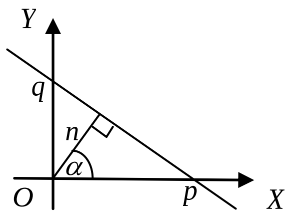
განსაზღვრება. ვთქვათ, წრფე არ გადის კოორდინატთა სათავეზე. ამ ***წრფის ნორმალი*** *ეწოდება კოორდინატთა სათავიდნ მასზე დაშვებულ მართობს.*

თეორემა. ვთქვათ წრფე არ გადის კოორდინატთა სათავეზე. *თუ მისი ნორმალის სიგრძეა* $n$ *და ეს ნორმალი აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან ქმნის* $\alpha$ *სიდიდის კუთხეს, მაშინ ამ წრფის განტოლებას აქვს სახე*

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - n = 0 \qquad (1)$$

**დამტკიცება.** დამტკიცება მოვიყვანოთ იმ შემთხვევისათვის, როცა მოცემული წრფე არ არის პარალელური არცერთი საკოორდინატო ღერძის.

ღერძთა მონაკვეთებში წრფის განტოლების ძალით $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$. ნახაზიდან




ჩანს, რომ $p=\frac{n}{\cos\alpha}$ და $q=\frac{n}{\sin\alpha}$. ე.ი.

$$\frac{x}{\frac{n}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\frac{n}{\sin\alpha}}=1,$$

საიდანაც მივიღებთ ტოლობას

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - n = 0.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თეორემა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც წრფე ერთ-ერთი საკოორდინატო ღერძის პარალელურია.

**თეორემა დამტკიცებულია.**

(1) -ს ***წრფის ნორმალური სახის განტოლება*** ეწოდება.

## წრფის ზოგადი სახის განტოლების დაყვანა ნორმალურზე

**თეორემა.** ***თუ წრფის ზოგადი სახის განტოლებაა*** $Ax+By+C=0$ ***, მაშინ ამავე წრფის ნორმალური სახის განტოლება იქნება***

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0 \quad , \qquad (1)$$

***სადაც რადიკალის წინ ნიშანი აიღება*** $C$ ***კოეფიციენტის ნიშნის საპირისპირო.***

**დამტკიცება.** ვთქვათ, მოცემული წრფის ნორმალური სახის განტოლებაა $x\cos\alpha + y\sin\alpha - n = 0$ . ადვილი მისახვედრია, რომ ერთი და იმავე წრფის სხვადასხვა განტოლებების კოეფიციენტები პროპორციულია, ამიტომ იარსებებს ისეთი $\lambda$ რიცხვი, რომ

$$\cos\alpha=\lambda A \ , \ \sin\alpha=\lambda B, \ -n=\lambda C . \qquad (2)$$

აქედან, პირველი ორი ტოლობის ორივე მხარის კვადრატში აყვანითა და წევრ-წევრად შეკრების შედეგად მივიღებთ $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\lambda^2\left(A^2+B^2\right)$, ანუ $\lambda^2\left(A^2+B^2\right)=1$. აქედან

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

თუ $\lambda$ -ს ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (2) ტოლობებში და $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $(-n)$-ის მიღე-ბულ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ $x\cos\alpha + y\sin\alpha - n = 0$ განტოლებაში, მივიღებთ საძიებელ (1) განტოლებას.

დაგვერჩა შევნიშნოთ, რომ $\lambda$ რიცხვს აქვს $C$ კოეფიციენტის საპირისპირო ნიშანი რად-განაც $\lambda C=-n<0$.

**თეორემა დამტკიცებულია.**

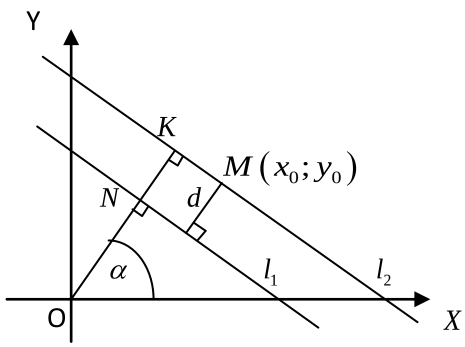
**შენიშვნა.** რიცხვს $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ მანორმირებელ მამრავლს უწოდებენ. დამტკიცებული თეორემიდან ვღებულობთ, რომ წრფის ზოგადო სახის განტოლების ნორმალურ სახეზე დასაყვანად საკმარისია ზოგადი სახის განტოლების ყველა კოეფიციენტი გავამრავლოთ მანორმირებელ მამრავლზე.

## მანძილი წერტილიდან წრფემდე

**თეორემა.** მანძილი $M(x_0;y_0)$ წერტილიდან იმ წრფემდე, რომლის ნორმალური სახის განტოლებაა $x\cos\alpha + y\sin\alpha - n = 0$, გამოითვლება ფორმულით

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - n| \qquad (1)$$

**დამტკიცება.** მოცემული წრფე აღვნიშნოთ $l_1$-ით. რადგან ამ წრფის ნორმალია $ON$, ამიტომ $ON = n$. $M$ წერტილზე გავავლოთ $l_1$-ის პარალელური $l_2$ წრფე და $l_2$-ის ნორმალის სიგრძე აღვნიშნოთ $m$-ით. ცხადია, რომ




$$d = |m - n| \qquad (2)$$

$l_2$ წრფის $AK$ ნორმალი აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან შექმნის იმავე $\alpha$ სიდი-დის კუთხეს, რასაც ქმნის $l_1$. ამის გამო $l_2$-ის გან-ტოლებას ექნება სახე

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - m = 0.$$

რადგან $M$ წერტილი ძევს $l_2$ წრფეზე, ამიტომ $M$-ის კოორდინატები დააკმაყოფილებენ $l_2$-ის განტოლე-ბას. ამიტომ $x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - m = 0$. აქედან კი

$$m = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha.$$

თუ $m$-ის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (2) ტოლობაში, მივიღებთ დასამტკიცებელ (1) ტო-ლობას

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - n|.$$

**თეორემა დამტკიცებულია.**

**შენიშვნა.** მანძილი $M(x_0;y_0)$ წერტილიდან იმ წრფემდე, რომლის ზოგადი სახის განტოლებაა $Ax + By + C = 0$, გამოითვლება ფორმულით

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

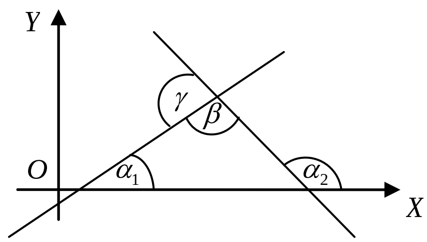
ამ ფორმულის მისაღებად საკმარისია წრფის ზოგადი სახის განტოლება დავიყვანოთ ნორ-მალურ სახეზე და შემდეგ ვისარგებლოთ (1) ფორმულით.

## კუთხე ორ წრფეს შორის. წრფეთა პარალელურობისა და მართობულობის პირობები

**თეორემა.** ***კუთხე იმ წრფეებს შორის, რომელთა კუთხური კოეფიციენტებია, შესაბამისად,*** $k_1$ ***და*** $k_2$***, გამოითვლება ფორმულით***

$$tg\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (1)$$

**დამტკიცება.** განსაზღვრების თანახმად, ორ წრფეს შორის კუთხე მათი გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან უმცირესის სიდიდეა, ამიტომ $\alpha = \beta$ ან $\alpha = \gamma$ . სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ




$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm\alpha \quad \text{ან} \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \pm(180^0 - \alpha)\,.$$

ყველა შემთხვევაში $|tg\alpha| = |tg(\alpha_1 - \alpha_2)|$ . აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $tg\alpha \ge 0$ და გამოვიყენებთ ორი არგუმენტის სხვაობის ტანგენსის ცნობილ ფორმულას, მივიღებთ

$$tg\alpha = \left|\frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}\right|, \quad \text{ანუ} \qquad tg\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

**თეორემა დამტკიცებულია.**

ცხადია, ორი წრფე პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1 = \alpha_2$. ე.ი. როდესაც $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, ანუ როცა

$$k_1 = k_2\,.$$

ეს ტოლობა წარმოადგენს ***ორი წრფის პარალელურობის პირობას.***

ორი წრფე მართობულია, როცა $\alpha = 90^0$ , ე.ი. როცა $tg\alpha$ არ არსებობს. (1) ფორმულიდან ჩანს, რომ ეს მოხდება მაშინ, როცა $1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2 = 0$, ანუ როდესაც

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \quad .$$

ეს ტოლობა წარმოადგენს ***ორი წრფის მართობულობის პირობას.***

კონსპექტი შეივსო დაპირებული ნაწილებით:

''ვექტორები''

''წრფე სიბრტყეზე''

ეს ნაწილები ელექტრონულ ფაილში შეადგენს

**67-82 გვერდებს**

ვისაც ამობეჭდილი ქონდა კონსპექტის წინა ვერსია (2 ნოემრამდე, 2011წ),

მან უნდა ამობეჭდოს ეს გვერდები და ჩართოს მე-19 გვერდის შემდეგ.