ზოგადი ფიზიკა მათემატიკა

შინაარსი

სტატიები

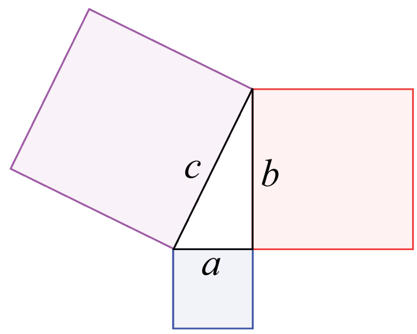
მინიშნებები

ლიცენზიის სტატია

ალბათბა

პითაგორას თეორემა

მათემატიკაში **პითაგორას თეორემა** არის ურთიერთდამოკიდებულება ევკლიდეს გეომეტრიაში მართკუთხა სამკუთხედის სამ გვერდს შორის. თეორემას სახელი ბერძენი მათემატიკოსი პითაგორას გამო დაერქვა, რომელმაც პირველად დაამტკიცა მისი მართებულობა.



პითაგორას თეორემა: კათეტების კვადრატთა ჯამი (ლურჯი და წითელი) უდრის ჰიპოტენუზის კვადრატს (ვარდისფერი).

თეორემა შემდეგში მდგომარეობს:

> *ნებისმიერ მართკუთხა სამკუთხედში, კვადრატის ფართობი, რომლის გვერდი ჰიპოტენუზის ტოლია უდრის დანარჩენ ორ გვერდზე მდებარე კვადრატთა ფართობების ჯამს.*

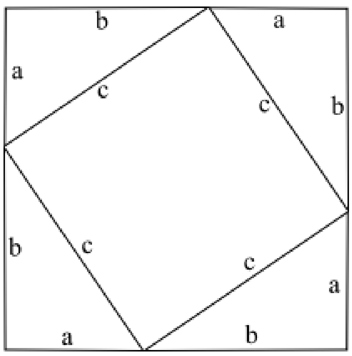
ვთქვათ c არის ჰიპოტენუზის სიგრძე, ხოლო a და b დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძე, მაშინ თეორემა შემდეგი ტოლობით გამოიხატება:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

ეს ტოლობა გამოხატავს მარტივ ურთიერთდამოკიდებულებას მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს შორის, ანუ თუ მისი ორი ნებისმიერი გვერდის სიგრძე ცნობილია, მესამის გამოთვლაც შესაძლებელია. ამ თეორემიდან გამომდინარეობს კოსინუსების თეორემაც, რომელიც საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ ნებისმიერი სამკუთხედის მესამე გვერდი, თუ ცნობილია ორი გვერდის სიგრძე და მათ შორის მდებარე კუთხე.

ამ თეორემის შებრუნებული ვერსიაც (კონვერსია) ასევე ჭეშმარიტია:

> *ნებისმიერ სამი დადებითი რიცხვისთვის a, b, და c სადაც $a^2 + b^2 = c^2$, არსებობს სამკუთხედი გვერდებით a, b და c, და ყოველ ასეთ სამკუთხედს აქვს მართი კუთხე გვერდებს a და b შორის.*



ისტორია

ის, რომ ეს თეორემა ეკუთვნის პითაგორას, ამტკიცებდა ძველი ბერძენი მეცნიერი და ისტორიკოსი პლუტარქე (I ს.) და ძველი ბერძენი მწერალი და ისტორიკოსი პროკლე (V ს.). გადმოცემის თანახმად, ამ აღმოჩენის საპატივცემულოდ, პითაგორამ ღმერთებს შესწირა ასი ხარი.

დიდხანს თვლიდნენ, რომ პითაგორამდე ეს თეორემა არ იყო ცნობილი, ამიტომაც დაარქვეს მისი სახელი, მაგრამ ცნობილია, რომ პითაგორამდე მას იყენებდნენ ძველი ეგვიპტელები, ბაბილონელები, ჩინელები, ინდუსები და ძველი სამყაროს ხალხები სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნისას. პრაქტიკაში მართი კუთხის ასაგებად (ანუ ურთიერთმართებული წრეების ასაგებად) იყენებენ სამკუთხედს, რომლის გვერდებია 3, 4, 5, რაც, ცხადია, ცნობილი იყო ძველი აღმოსავლეთის ხალხებისათვის. სწორედ ასეთი პროპორციებითაა ნაკვეთი არქეოლოგების მიერ ნაპოვნი ჰეფრენის პირამიდის ფილები. საინტერესოა ის ფაქტიც, რომ ხეოფსის ცნობილ პირამიდაში ე.წ. სამეფო ოთახის ზომებს აქვს სწორედ 3, 4, 5 ციფრებთან კავშირი.

ძველი ინდოეთის მათემატიკური ცოდნის ფასეულ წყაროს წარმოადგენს წიგნი ,,თოკის წესები" (სულვა-სუტრა), რომელიც მიეკუთვნება ძვ.წ.აღ-ის VII-V ს-ებს. წიგნის დიდი ნაწილი დათმობილი აქვს მართი კუთხის, კვადრატის, სამკუთხედების აგებას. მასში მოყვანილია პითაგორას თეორემაც. ამრიგად, მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს შორის დამოკიდებულების აღმოჩენის მიკუთვნება პითაგორასთვის არ შეიძლება. მან მხოლოდ მოგვცა ამ თეორემის პირველი განზოგადება და მკაცრი დამტკიცება, გადაიტანა ეს მტკიცებულება პრაქტიკიდან მეცნიერებაში.

ბუნებრივია, რომ პითაგორელებისთვის, რომლებიც ციფრებში მისტიკას ხედავდნენ, განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენდნენ სამკუთხედები, რომელთა გვერდები გამოსახული იყო მთელი რიცხვებით და აკმაყოფილებდნენ პირობას: a2 + b2 = c2. ასეთ სამკუთხედებს ეწოდებათ პითაგორას სამკუთხედები.

ამიტომ, თეორემის დამტკიცებასთან ერთად, პითაგორელებმა მიაგნეს ე.წ. ,,პითაგორას" რიცხვების (n, (n2-1)/2, (n2+1)/2, სადაც n კენტი რიცხვია) სამეულის უსასრულო მწკრივის პოვნის.

მოგვიანებით აღმოჩენილ იქნა აგრეთვე სხვა დამოკიდებულებები, რომლებიც იძლევა, "პითაგორას რიცხვების" პოვნის საშუალებას. მაგ.: პლატონის თანახმად, ,,პითაგორას" სამეული შეიძლება მოიძებნოს შემდეგი სახითაც: n; (n/2)2-1; (n/2)2+1, სადაც n ლუწი რიცხვია.

აი, ,,პითაგორას" სამეულის რამდენიმე რიცხვის ცხრილი:

მათემატიკის ისტორიკოსები თვლიან, რომ პითაგორას თეორემა ჯერ დაამტკიცეს ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედებისთვის. ეს სამკუთხედები ხშირად გვხვდება ორნამენტებში და წააგავს კვადრატებისა და მისი დიაგონალების ბადეს. როგორც ნახ. 1-დან ჩანს, იმ კვადრატის ფართობი, რომელიც აგებულია ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე, ტოლია კათეტებზე აგებული კვადრატების ფართობთა ჯამის.

მართლაც, სამკუთხედ ABC-ს ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატი შეიცავს 4 სამკუთხედს, ხოლო კათეტებზე აგებული კვადრატები - 2-2 სამკუთხედს.

საუკუნეების განმავლობაში ეს თეორემა მრავალჯერ იქნა დამტკიცებული. ამჟამად იგი არის რეკორდსმენი თეორემა განსხვავებულ დამტკიცებათა რაოდენობის მიხედვით და შესულია გინესის რეკორდების წიგნში. დამტკიცებათა ერთი ნაწილი დაფუძნებულია კვადრატის დაყოფაზე _ ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატი შედგება ნაწილებისგან, რომლებიც აგრეთვე ეკუთვნის კათეტებზე აგებულ კვადრატებსაც; მეორე ნაწილი ეფუძნება ტოლდიდ ფიგურებამდე შევსებას; მესამე ნაწილი კი იმას, რომ მართი კუთხიდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე სამკუთხედს ჰყოფს მის მსგავს ორ სამკუთხედად.

თეორემის რამდენიმე დამტკიცება

პითაგორას დამტკიცებები

I დამტკიცება. 2 ნახაზზე გამოსახულია ორი ტოლი კვადრატი, თითოეულის გვერდის სიგრძეა a + b. თითოეული მათგანი დაყოფილია ნაწილებად, რომლებიც შედგება მართკუთხა სამკუთხედებისა და კვადრატებისაგან. ნათლად ჩანს, რომ თუ კვადრატის ფართობს გამოვაკლებთ a და b კათეტების მქონე მართკუთხა სამკუთხედის გაოთხკეცებულ ფართობს, დარჩება ტოლი ფართობები, c2 = a2 + b2 .

ეს დამტკიცება მიეწერება პითაგორას და ეყრდნობა სამკუთხედების მსგავსებას. (ნახ.3). ABC მართკუთხა სამკუთხედის C მართი წვეროდან დავუშვათ CM სიმაღლე. სამკუთხედები ABC, CMB, ACM მსგავსია ორი კუთხით (<ACB = <BMC = <CMA, <ABC = <BMC = <MCA). ABC და ACM სამკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარეობს ტოლობა: AB/AC = AC/MA, საიდანაც AC2 = AB x MA (1). ABC და CBM სამკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარეობს ტოლობა: AB/CB=CB/MB, საიდანაც CB2 = AB x MB (2)

(1) და (2) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ: AC2 + CB2 = AB2. ე.ი. c2 = a2 + b2 . თეორემა დამტკიცებულია.

შუასაუკუნეების დამტკიცებები

ბჰასკარის დამტკიცება

ინდოელ მათემატიკოსს ბჰასკარს (ჩვ.წ. XII ს.) თავის ცნობილ წიგნში - ,,მეცნიერების გვირგვინი”, მოჰყავს დამტკიცება, რომელიც ეყრდნობა ფიგურათა ტოლდიდობას. ეს დამტკიცება შედგება მხოლოდ ნახაზისა და ერთადერთი სიტყვისაგან "უყურე!"

მართლაც, თუ ოთხ ტოლ მართკუთხა სამკუთხედს, რომელთა კათეტებია a და b, ისე განვალაგებთ, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები და შევკრებთ მათ ფართობებსა და ცენტრში მოთავსებული კვადრატის ფართობს, მივიღებთ a2 + b2. ეს კი დიდი კვადრატის ფართობის c 2 -ის ტოლია. c2 = a2 + b2 .

ნასირ-ედ-დინ-ალ-ტუსის დამტკიცება

XII საუკუნის გამოჩენილი აღმოსავლელი მეცნიერ-ენციკლოპედისტის, ევკლიდეს "საწყისების" არაბულ ენაზე მთარგმნელის - ნასირედდინ-ალ-ტუსის დამტკიცებაც ეყრდნობა ფიგურათა ტოლდიდობას. (ნახ. 5). ABC სამკუთხედის გვერდებზე ავაგოთ კვადრატები ABGK, ACED და BCQN. გავაგრძელოთ ABGK კვადრატის AK გვერდი, ACED კვადრატის DP გვერდის გაგრძელებასთან F წერტილში გადაკვეთამდე, ხოლო ABGK კვადრატის BG გვერდი BCQN კვადრატის QN გვერდთან M წერტილში გადაკვეთამდე. DE და QN გვერდების გაგრძელებები იკვეთება P წერტილში. რადგან DP||AQ და PN||EB, ხოლო <ECQ=900, როგორც მართი კუთხის ვერტიკალური, ამიტომ ECQP არის მართკუთხედი. ABC სამკუთხედის C კუთხის წვეროდან დაშვებული CO სიმაღლე გავაგრძელოთ KG – ს გადაკვეთამდე L წერტილში. L, O, C , P წერტილები ერთ წრფეზეა.

SKLOA = SACPF = SACED = a2

SLGBO = SCBMP = SCBNQ = b2

SAKGB = SAKLO + SLGBO = c2

ამრიგად, ვიღებთ: c2 = a2 + b2 .

თანამედროვე დამტკიცებები

გადიოდა წლები და საუკუნეები. პითაგორას თეორემა გახდა მათემატიკის სასწავლო კურსის ნაწილი. XIII ს-ის დასაწყისში იგი ისწავლებოდა ევროპის ყველა სასწავლო დაწესებულებაში. რუსეთში მას ასწავლიდნენ პეტრე I-ის მიერ დაარსებულ მათემატიკისა და ნავიგაციის სკოლაში. საოცარია, მაგრამ თითქმის ყველა ასწლეული უმატებდა ახალ-ახალ დამტკიცებებს ამ მრავალჯერ დამტკიცებულ თეორემას.

ტემპელგოფის დამტკიცება

გერმანელი მათემატიკოსის ტემპელგოფის დამტკიცებაში (ნახ. 6) მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებზე აგებულია კვადრატები და ამ ფიგურაზე დამატებულია 1 და 2 სამკუთხედები, რომლებიც საწყისი სამკუთხედის ტოლია (ე.ი. შევსებულია ორ ტოლდიდ ფიგურამდე). პითაგორას თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს AEDFPBDA და ACBNMQ ექვსკუთხედების ტოლდიდობიდან. აქ EP წრფე ყოფს AEDFPB ექვსკუთხედს ორ ტოლდიდ ოთხკუთხედად, CM წრფე ყოფს ACBNMQ ექვსკუთხედს ორ ტოლდიდ ოთხკუთხედად. სიბრტყის მობრუნება A წერტილის გარშემო 900- ით AEPB ოთხკუთხედს ასახავს თავის ტოლ ACMQ ოთხკუთხედში. ტოლდიდ AEDFPB და ACBNMQ ექვსკუთხედებს აქვთ საერთო სამკუთხედები ABC, DCF და QMN , ამიტომ მათი დანარჩენი ნაწილებიც ტოლი იქნება. ე.ი. SABNQ = SAEDC + SCBPF , ანუ c2 = a2 + b2

გოფმანის დამტკიცება

ეს არასტანდარტული დამტკიცება ხდება ნახაზის მეშვეობით. მასზე არ არის მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებზე აგებული კვადრატები (ნახ.7). ABC სამკუთხედის წვეროებზე გავავლოთ AD, BE და BF მონაკვეთები ისე, რომ AD2AC, BE 2AB და BF2CB, თან AD=AC, BF=BC და BE=AB. ე.ი. კვადრატების ნაცვლად ავაგეთ მათი ნახევრები. F, C, D წერტილები ერთ წრფეზეა; ADFB და ACBE ოთხკუთხედები ტოლდიდია, რადგან Δ ABF = Δ ECB; ADF და ACE სამკუთხედებიც ტოლდიდია. ორივე ოთხკუთხედიდან საერთო ABC სამკუთხედის გამოკლებით მივიღებთ: a2/2 + b2/2 = c2/2, ანუ c2 = a2 + b2 .

ალგებრული დამტკიცება

ყველა ზემოთხსენებული დამტკიცება ეყრდნობა ფიგურათა ტოლდიდობას ან ტოლშემცველობას. თუმცა არსებობს ალგებრული დამტკიცებაც. განვიხილოთ ერთ-ერთი მათგანი - მიოლმანის დამტკიცება (ნახ.8):

მოცემულ სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი, რომლის რადიუსია r, ხოლო p - ნახევარპერიმეტრი. გავავლოთ რადიუსები წრეწირთან შეხების წერტილებში. ABC სამკუთხედის ფართობი ერთის მხრივ ტოლია ab / 2, მეორეს მხრივ - rp / 2. r = (a + b _c)/2 . ე.ი. S = (a+b-c)/2 * (a+b+c)/2 = ab / 2, აქედან კი c2 = a2 + b2 .

ზოგჯერ საკმარისია შევხედოთ ნახაზს, რომ მივხვდეთ მის დამტკიცებას. X საუკუნის ბაღდადელმა მათემატიკოსმა და ასტრონომმა ან-ნაირიზმ (ლათინურად ანარიცმა) წარმოადგინა ასეთი დამტკიცება (ნახ.9). ამავე დამტკიცებას ეფუძნება XIX-XX ს-ების სახელმძღვანელოებში გაჩენილი დამტკიცება წყვილ-წყვილად ტოლ ფიგურებად დაყოფის გზით.

აი, კიდევ ერთი დამტკიცება (ნახ.11): პითაგორას სამკუთხედი შევსებულია მართკუთხედამდე. მას ჯერ გამოვაკლოთ 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ფიგურები, მივიღებთ ჰიპოტენუზაზე აგებულ კვადრატს. ხოლო ამავე მართკუთხედს თუ გამოვაკლებთ 5, 6, 7 და დაშტრიხულ მართკუთხედებს, მივიღებთ კათეტებზე აგებულ კვადრატებს (9 და 8). ეს ამტკიცებს, რომ ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატის ფართობი ტოლია კათეტებზე აგებული კვადრატების ფართობების ჯამის.

აინშტაინის დამტკიცება

ეს დამტკიცება ეფუძნება ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატის დაყოფას 8 სამკუთხედად (ნახ.12). ევკლიდეს დამტკიცება გეომეტრიის ცნობილ სახელმძღვანელოში `საწყისები” ევკლიდეს მოჰყავს პითაგორას თეორემის რვა დამტკიცება (ნახ. 13- 20).

პითაგორის თეორემის მნიშვნელობა

პითაგორას თეორემა საფუძვლად უდევს ბევრ გეომეტრიულ გამოთვლას. ჯერ კიდევ ძველ ბაბილონში მისი საშუალებით ანგარიშობდნენ ტოლფერდა სამკუთხედის სიმაღლეს მისი ფუძისა და გვერდის მიხედვით; წრის დიამეტრისა და ქორდის სიგრძის მიხედვით - სეგმენტის სხივს; სხვადასხვა წესიერი მრავალკუთხედების ელემენტებს შორის კავშირს; ამ თეორემის მიხედვით მტკიცდება მისი განზოგადებაც, რაც მახვილი ან ბლაგვი კუთხის პირდაპირ მდებარე გვერდის სიგრძის განსაზღვრის საშუალებას იძლევა: c2 = a2 + b2 – 2ab cos C.

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს d12 + d22 = 2(a2 + b2) - პარალელოგრამის დიაგონალებსა და გვერდებს შორის კავშირი, საიდანაც ადვილია სამკუთხედის მედიანის სიგრძის გამოთვლა მისის გვერდების მიხედვით.

პითაგორას თეორემაზე დაყრდნობით გამოდის ე.წ. ჰერონის ფორმულა - სამკუთხედების ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა მისი გვერდების სიგრძეების მიხედვით. ცხადია, ამ თეორემას იყენებდნენ პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრისთვისაც.

მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებზე კვადრატების ნაცვლად შეიძლება აიგოს ნებისმიერი მსგავსი ფიგურები (ტოლგვერდა სამკუთხედები, ნახევარწრეები და ა.შ.). ამასთან, ჰიპოტენუზაზე აგებული ფიგურის ფართობი ყოველთვის ტოლია კათეტებზე აგებული ფიგურების ფართობთა ჯამის. პითაგორას თეორემა გვხვდება მხოლოდ ევკლიდეს გეომეტრიაში. იგი არ არის მოყვენილი არც ლობაჩევსკის, არც სხვა არაევკლიდურ გეომეტრიაში. ამ თეორემით იანგარიშება საკოორდინატო სიბრტყეზე ორ ნებისმიერ წერტილს M(x1; y1) და N(x2; y2) შორის მანძილი:

ეს თეორემა დღესაც არ კარგავს თავის მნიშვნელობას და ალბათ, მის მრავალრიცხოვან დამტკიცებებს კიდევ ბევრი ორიგინალური დამტკიცებაც დაემატება.

ალბათობის თეორია

ალბათობის თეორია არის მათემატიკის ნაწილი შემთხვევითი პროცესების და მათი მათემატიკური მოდელირების შესახებ.


კამათელის გაგორება შემთხვევითი მოვლენაა, ე. ი. ალბათობის თეორიის საკითხი.

ისტორია

დარგის წარმოშობა დაკავშირებულია XVII საუკუნეში გალილეო გალილეის, პიერ ფერმის და ბლეზ პასკალის შედეგებთან. შემდეგ განივითარდა აბრაამ დე მუავრის პიერ სიმონ ლაპლასის სიმეონ დენი პუასონის შრომებით. XIX საუკუნიდან აღსანიშნავია კარლ ფრიდრიხ გაუსის, პაფნუტი ჩებიშევის, ალექსანდრე ხინჩინის, ანდრეი კოლმოგოროვის, მორის რენე ფრეშეს, ემილ ბორელის, ჰარალდ კრამერის და სხვათა წვლილი.

ელემენტარული აღწერა

ალბათობის თეორიის სტანდარტული ამოცანაა მოცემული შემთხვევითი პროცესის მომცველი ცდისთვის დაადგინოს რაიმე კონკრეტული „მოვლენის“ მოხდენის ალბათობა. მოცემული ცდის პირობებში ყოველ A „მოვლენას“, ხდომილებას (ე. ი. ცდის კონკრეტულ შესაძლო შედეგს) შეესაბამება გარკვეული რიცხვი $P(A)$, 0-დან 1-მდე ინტერვალში — A ხდომილების ალბათობა (ე.ი. ცდის ამ შედეგით დასრულების ალბათობა). ისე რომ, თუ $P(A) = 0$, მაშინ ცდა A ხდომილებით არ დასრულდება; რაც მეტია ხდომილების ალბათობა მით მეტია ხდომილების მოხდენის შესაძლებლობა; ხოლო თუ $P(A) = 1$, მაშინ ცდის შედეგი აუცილებლად იქნება ხდომილება A .
მაგალითად, დავუშვათ ცდა მდგომარეობს კამათლის გაგორებაში. ეს ცდა შეიძლება დასრულდეს ექვსი განსხვავებული შედეგით — გაგორდეს „ერთიანი“, „ორიანი“, „სამიანი“, „ოთხიანი“, „ხუთიანი“ ან „ექვსიანი“, თითოეული მათგანი ამ ცდის ხდომილებაა და თუ კამათელი იდეალურია, თითოეულს მათგანის ალბათობა არის 1/6.

კამათლის გაგორების ამოცანაში ხდომილებების ალბათობები ფაქტიურად აპრიორი ცნობილია. არატრივიალურ შემთხვევებში ალბათობის თეორია განიხილავს ერთმანეთთან ამა თუ იმ წესით დაკავშირებულ ხდომილებებს. მოცემული A და B ხდომილობების საშუალებით შეიძლება განიმარტოს ახალი ხდომილებები, *გაერთიანება* A U B და *თანაკვეთა* $A \cap B$. A U B არის ხდომილება, რომელსაც ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ ადგილი აქვს ან A ან B ხდომილებას[1]. $A \cap B$ არის ხდომილება, რომელსაც ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც A და B ხდომილებები ერთდროულად ხდებიან[1]. სრულდება ტოლობა: $A \cup B = P(A) + P(B) - A \cap B$. ალბათობას იმისა, რომ " A მოხდება, თუ B მოხდა" ეწოდება A ხდომილების პირობითი ალბათობა B—ს მიმართ. თუ A მოვლენის პირობითი ალბათობა მოცემული B-თი იგივეა რაც A-ს (უპირობო) ალბათობა $P(A)$, მაშინ A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია. დამოუკიდებელი ხდომილებებისთვის ადგილი აქვს ტოლობას:P($A \cap B$)= P(A)P(B).
თანამედროვე ალბათობის თეორია ემყარება აქსიომატურ სისტემებს. ამ გზით ხერხდება ალბათობის თეორიის ამოცანების ზუსტი მათემატიკური ფორმულირება და შესაძლებელი ხდება მათ გადასაჭრელად მძლავრი მათემატიკური აპარატის გამოყენება.

აქსიომატური ალბათობის თეორია

ისევე როგორც თანამედროვე მათემატიკის ყველა სხვა დარგი, ალბათობის თეორიაც ყალიბდება სიმრავლეთა თეორიის ენაზე და ეფუძნება აქსიომებს. ალბათობის თეორიისადმი აქსიომატური მიდგომა პირველად შემოიტანა ანდრეი კოლმოგოროვმა 1930–იან წლებში. აქსიომატური ალბათობის თეორიისთვის პრინციპული ცნებაა ალბათური სივრცე. აქსიომებს, რომელთაც იგი აკმაყოფილებს, კოლმოგოროვის აქსიომები ეწოდება.

განმარტება

ალბათური სივრცე არის სამეული $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ სადაც:

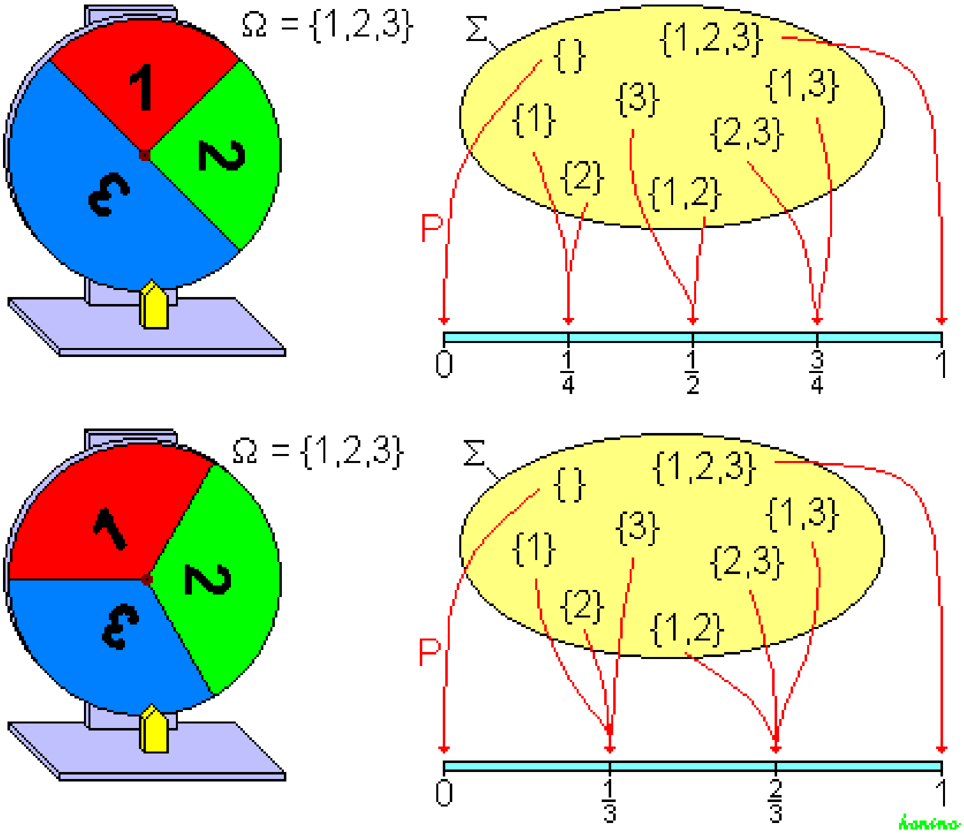
- Ω არის სიმრავლე;
- $\mathcal{F}$ არის Ω–ს ქვესიმრავლეების σ-ალგებრა;
- P არის ზომა $\mathcal{F}$ σ-ალგებრაზე, ისეთი რომ $P(\Omega)=1$.

Ω–ზე უნდა ვიფიქროთ როგორც გარკვეული შემთხვევითი პროცესის ყველა შესაძლო შედეგის ერთობლიობაზე, ეწოდება *ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე*[1]. მის ელემენტებს ეწოდება ელემენტარული ხდომილებები. $\mathcal{F}$–ის ელემენტებს ეწოდება ხდომილებები. თითოეული A ხდომილება Σ –დან შედგება გარკვეული ელემენტარული ხდომილებებისაგან. P ზომას ეწოდება ალბათობა, იგი ნებისმიერ A ხდომილებას $\mathcal{F}$–დან უსაბამებს რიცხვს $P(A)$–ს [0, 1] ინტერვალში.

მაგალითად ორი კამათელის გაგორების შემთხვევაში ელემენტარული ხდომილება შეიძლება აღინიშნოს წყვილით (x, y), სადაც x და y შესაბამისად პირველ და მეორე კამათელზე მოსული რიცხვებია. ამ შემთხვევაში Ω შეიცავს 36 ელემენტარულ ხდომილებას. ხდომილება A – "ერთ კამათელზე მაინც მოვა ექვსიანი" მოიცავს 11 ელემენტატული ხდომილებას (1, 6), ..., (6, 6), (6, 5),..., (6, 1). ამრიგად ამ შემთხვევაში $P(A)=11/36$.

თუ Ω თვლადი სიმრავლეა $\mathcal{F}$, როგორც წესი, არის Ω–ს ყველა ქვესიმრავლის სიმრავლე. ზოგად შემთხვევაში Ω არათვლადი უსასრულო სიმრავლეა.

ალბათობის თეორიაში ცდის შედეგთან დაკავშირებულ რიცხვს შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება. მაგალითად ორი კამათლის გაგორების მაგალითში ორივე კამათელზე მოსული რიცხვების ჯამი არის შემთხვევითი სიდიდე. ფორმალურად შემთხვევითი სიდიდე არის Ω–ზე განსაზღვრული ზომადი ფუნქცია. ალბათობის თეორიის ამოცანები უკავშირდება ამა თუ იმ შემთხვევით სიდიდის გამოკვლევას.



მაგალითი: ორი სატრიალებელი და მათი ალბათური სივრცეები

იხილეთ აგრეთვე

- ალბათობის აქსიომები
- განაწილების ფუნქცია
- დისპერსია
- ზომის თეორია
- კომბინატორიკა
- მათემატიკური ლოდინი
- მათემატიკური სტატისტიკა
- შემთხვევითი სიდიდე

სქოლიო

[1] ქართული საბჭოთა ენციკლოპედია, ტ. 1, გვ. 269, თბ., 1975 წელი.

დისპერსია

ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში **დისპერსია** წარმოადგენს მონაცემთა გაფანტულობის საზომს. შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ეწოდება რიცხვს, რომელიც გამოხატავს, თუ რამდენადაა გაფანტული შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები მისი მათემატიკური ლოდინიდან. დისპერსია წარმოადგენს მეორე რიგის ცენტრალურ მომენტს.

განმარტება

თუ X შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ მისი დისპერსია აღინიშნება, როგორც $D(X)$ და

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu)^2].$$

სადაც $\mu = E[X]$ არის X შემთხვევითი სიდიდის ლოდინი. შემდგომი მარტივი გარდაქმნებით დისპერსია შესაძლებელია შემდეგ სახეზე იქნას მიყვანილი:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(X) &= \mathrm{E}[(X-\mu)^2]\\ &= \mathrm{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2]\\ &= \mathrm{E}[X^2] - 2\mu\,\mathrm{E}[X] + \mu^2\\ &= \mathrm{E}[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2\\ &= \mathrm{E}[X^2] - \mu^2\\ &= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2.\end{aligned}$$

როგორც წესი, დისპერსია აღინიშნება, როგორც σ_X^2 ან, თუ ცხადია, რომელი შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიაზეა ლაპარაკი, უბრალოდ σ^2(სიგმა კვადრატი), სადაც σ საშუალო სტანდარტული გადახრაა. დასავლურ ლიტერატურაში მიღებულია ტერმინი „ვარიაცია“ და შემდეგი ფორმალური ჩაწერა: $\mathrm{Var}(X)$.

თვისებები

- დისპერსია ყოველთვის არაუარყოფითია: $D[X] \geqslant 0$;
- თუ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია სასრულია, მაშინ მისი მათემატიკური ლოდინიც სასრულია;
- თუ შემთხვევითი სიდიდე მუდმივია, მაშინ მისი დისპერსია ნულის ტოლია: $D[a] = 0.$ სამართლიანია შებრუნებულიც: თუ $D[X] = 0,$ მაშინ $X = E[X]$ თითქმის ყველგან;
- ორი შემთხვევით სიდიდის ჯამის დისპერსია შემდეგნაირად გამოითვლება:

  $D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2\operatorname{cov}(X,Y)$, სადაც $\operatorname{cov}(X,Y)$— ამ შემთხვევით სიდიდეთა კოვარიაციაა;
- ზოგადად, ნებისმიერი რაოდენობა შემთხვევითი სიდიდეების წრფივი კომბინაციისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

  $$D\left[\sum_{i=1}^n c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n c_i^2 D[X_i] + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} c_i c_j \operatorname{cov}(X_i, X_j),$$ სადაც $c_i \in \mathbb{R}$;

  კერძოდ, $D[X_1 + \ldots + X_n] = D[X_1] + \ldots + D[X_n]$, თუ შემთხვევითი სიდიდეები $X_1, \ldots, X_n$ დამოუკიდებლებია (ამ შემთხვევაში მათი კოვარიაცია ნულის ტოლია);
- $D\left[aX\right] = a^2 D[X]$;
- $D\left[-X\right] = D[X]$;
- $D\left[X+b\right] = D[X]$.

მაგალითი

ვთქვათ, მოცემულია $[0,1]$ სეგმენტზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე X , ანუ განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

გამოვთვალოთ ამ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია.

$$E\left[X^2\right] = \int\limits_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$E\left[X\right] = \int\limits_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

საბოლოოდ:

$$D[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

იხილეთ აგრეთვე

- შერჩევითი დისპერსია
- საშუალო სტანდარტული გადახრა
- მომენტი
- კოვარიაცია
- მათემატიკური ლოდინი

ლიტერატურა

- *ე. ნადარაია, რ. აბსავა, მ. ფაცაცია*, ალბათობის თეორია – თსუ, 2005
- *Ширяев А.Н*, Вероятность - Наука, Москва, 1989 ISBN 5-02-013955-6

ქართული რესურსები ინტერნეტში

- მათემატიკა, მარტივად ამოხსნის ხელოვნება [1]

მინიშნებები

[1] http://math.ge

მათემატიკური ლოდინი

ალბათობის თეორიაში შემთხვევითი სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი** (იგივე **ლოდინი** ან **პირველი რიგის მომენტი**) ეწოდება მის ყველა მნიშვნელობათა ალბათობით შეწონილ საშუალოს. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში შეწონვა ხდება მნიშვნელობათა ალბათობებით, ხოლო უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში - მისი განაწილების სიმკვრივით.

ტერმინი „მათემატიკური ლოდინი“ მიგვანიშნებს, თუ საშუალოდ რა მნიშვნელობის მოსვლას უნდა ველოდოთ. აუცილებელი არაა, რომ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი მისი ერთ-ერთი მნიშვნელობა იყოს. მაგალითად, თუ იდეალური მონეტის აგდებისას გერბის მოსვლას აღვნიშნავთ 0-ით, ხოლო საფასურისას - 1-ით, მაშინ მათემატიური ლოდინი იქნება 0.5.

მათემატიკური ლოდინი არ განისაზღვრება ყველანაირი განაწილებისთვის. მაგალითად, კოშის განაწილებას მათემატიკური ლოდინი არ გააჩნია.

განსაზღვრება

X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი აღინიშნება, როგორც $E(X)$ (რუსულ ლიტერატურაში $M(X)$) და განისაზღვრება, როგორც შემდეგი ლებეგის ინტეგრალი:

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \, \mathbb{P}(d\omega).$$

თუ ეს ინტეგრალი არსებობს. სხვა შემთხვევაში ვამბობთ, რომ განაწილებას მათემატიკური ლოდინი არ გააჩნია.

იხილეთ აგრეთვე

- საშუალო
- მომენტი
- დისპერსია

რეკომენდირებული ლიტერატურა

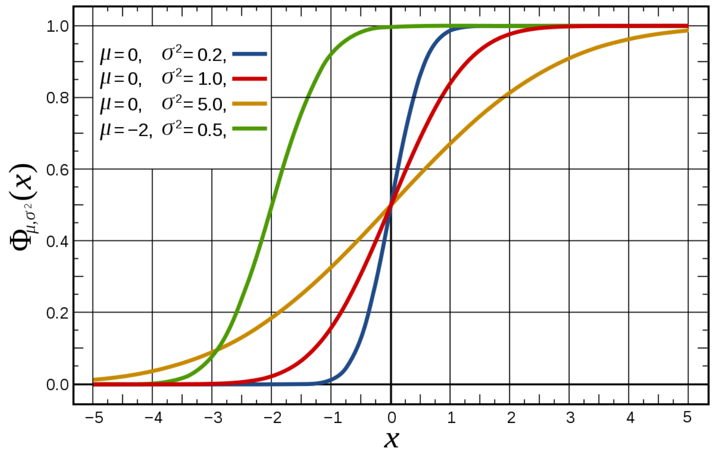
- *ე. ნადარაია, რ. აბსავა, მ. ფაცაცია*, ალბათობის თეორია — თსუ, 2005
- *Ширяев А.Н*, Вероятность - Наука, Москва, 1989 ISBN 5-02-013955-6

შემთხვევითი სიდიდე

ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში **შემთხვევითი სიდიდე** ეწოდება ზომად ფუნქციას ალბათური სივრციდან ნამდვილ n–განზომილებიან სივრცეში მასზე განმარტებული ბორელის სიგმა–ალგებრით. შემთხვევითი სიდიდე შემოღებული იქნა იმისთვის, რომ შესაძლებელი ყოფილიყო ხდომილებების რიცხვებით აღწერა (მაგალითად, ორი კამათლის გაგორების შედეგები შეიძლება იყოს (3,5) – ანუ 3–იანი პირველ კამათელზე და 5–იანი მეორეზე). შემთხვევითი სიდიდეები იყოფა ორ ძირითად ტიპად: დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, ანუ შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც იღებს სასრულ ან თვლად რაოდენობა მნიშვნელობებს და უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც იღებს მნიშვნელობებს ინტერვალზე (ანუ წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას).

ალბათური განაწილების ფუნქცია

ალბათობის თეორიაში **ალბათური განაწილების ფუნქცია** (იგივე **განაწილების ფუნქცია** ან **კუმულატიური განაწილების ფუნქცია**) წარმოადგენს ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობაც ყოველ x წერტილში არის ალბათობა იმისა, რომ ამ განაწილების ფუნქციის შესაბამისი შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს x-ზე ნაკლებ მნიშვნელობას.



სხვადასხვა პარამეტრების მქონე ნორმალურ განაწილებათა განაწილების ფუნქციები.

განსაზღვრება

ვთქვათ, მოცემულია ალბათური სივრცე $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ მასზე განსაზღვრული შემთხვევით სიდიდით X და განაწილებით $\mathbb{P}_X$. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ვუწოდოთ ფუნქციას $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \equiv \mathbb{P}_X((-\infty, x]).$$

ანუ, განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობა წერტილში x წარმოადგენს ალბათობას ხდომილებისა $\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$.

აღსანიშნავია, რომ ზოგჯერ განაწილების ფუნქციას განსაზღვრავენ შემდეგნაირად:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) \equiv \mathbb{P}_X((-\infty, x)).$$

თვისობრივი განსხვავება ამ ორ განმარტებას შორის არ არის; მეორენაირად განმარტებული განაწილების ფუნქცია მარცხნიდან უწყვეტია (ნაცვლად მარჯვნიდან უწყვეტისა).

თვისებები

განაწილების ფუნქციას ოთხი ძირითადი თვისება გააჩნია:

- F_X უწყვეტია მარჯვნიდან:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$$

- F_X არაკლებადია მთელ ღერძზე.
- $\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0$.
- $\lim_{x\to +\infty} F_X(x) = 1$.

შემთხვევითი სიდიდის განაწილება $\mathbb{P}_X$ ცალსახად განსაზღვრავს განაწილების ფუნქციას. სამართლიანია შებრუნებულიც: თუ ფუნქცია $F(x)$ აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ ოთხ თვისებას, მაშინ არსებობს ალბათური სივრცე და მასზე განსაზღვრული ისეთი შემთხვევითი სიდიდე, რომ $F(x)$ მის განაწილების ფუნქციას წარმოადგენს.
მარჯვნიდან უწყვეტობის თვისების ძალით განაწილების ფუნქციას ყოველთვის გააჩნია მარჯვენა ზღვარი $F_X(x+)$ და ის ემთხვევა $F_X(x)$-ს ყოველი $x \in \mathbb{R}$. არაკლებადობის თვისება კი უზრუნველყოფს $F_X(x-)$ ზღვრის არსებობას, თუმცა არაა აუცილებელი, რომ ეს უკანასკნელი ემთხვეოდეს ფუნქციის მნიშვნელობას x წერტილში. აქიდან გამომდინარე, ნებისმიერი $x \in \mathbb{R}$ წერტილისთვის F_X ან უწყვეტია, ან გააჩნია პირველი გვარის წყვეტა.

კავშირი ალბათობასთან

ალბათობის თვისებებიდან გამომდინარე, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a, b \in \mathbb{R}$, თუ $a < b$, სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

- $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$;
- $\mathbb{P}(X < x) = F_X(x-)$;
- $\mathbb{P}(X \geqslant x) = 1 - F_X(x-)$;
- $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$;
- $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$;
- $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a-)$;
- $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a)$;
- $\mathbb{P}(a \leqslant X < b) = F_X(b-) - F_X(a-)$.

ლიტერატურა

- *ე. ნადარაია, რ. აბსავა, მ. ფაცაცია*, ალბათობის თეორია – თსუ, 2005
- *Ширяев А.Н*, Вероятность - Наука, Москва, 1989 ISBN 5-02-013955-6

კოლმოგოროვის აქსიომატიკა

ალბათობის თეორიაში **კოლმოგოროვის აქსიომატიკა** (იგივე **ალბათობის აქსიომები**) წარმოადგენს ხდომილების ალბათობის მათემატიკურ აღწერას. ეს აქსიომები შემოთავაზებული იყო რუსი მათემატიკოსის, ანდრეი კოლმოგოროვის მიერ 1933 წელს და სახელი ეწოდათ მისსავე პატივსაცემად.

ალბათური სივრცე

ალბათობის თეორიაში **ალბათური სივრცე** ეწოდება სამეულს $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, სადაც Ω წარმოადგენს ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლეს, $\mathcal{F}$ არის Ω-ზე მოჭიმული სიგმა-ალგებრა, ხოლო P კი - ალბათური ზომა. ალბათური სივრცე გამოიყენება რეალური ექსპერიმენტის მათემატიკური მოდელის ასაგებად.

მოდელის მორგება რეალურ ექსპერიმენტზე შემდეგნაირად ხდება: Ω შედგება ყველა შესაძლო ელემენტარული ხდომილებებისაგან, $\mathcal{F}$ წარმოადგენს ხდომილებების სიმრავლეს (თითოეული ხდომილება წარმოადგენს ელემენტარულ ხდომილებას ან რამდენიმე ელემენტარული ხდომლების გაერთიანებას), ხოლო P უსაბამებს ალბათობას Ω-ს თითოეულ ელემენტს.

სიმრავლეთა თეორია

სიმრავლეთა თეორია — მათემატიკის დარგი სიმრავლეების შესახებ. სიმრევლეთა თეორიას ეფუძნება რიგი მათემატიკირი დისციპლინებისა, მათ შორის: ალგებრა, ანალიზი, ტოპოლოგია, ალბათობის თეორია.

XIX საუკუნის ბოლოს გერმანელმა მათემატიკოსმა გეორგ კანტორმა შექმნა მათემატიკის სტანდარტიზაციის მისეული პროგრამა, რომლის მიხედვით ყველა მათემატიკური ობიექტი „სიმრავლე" უნდა ყოფილიყო, სიმრავლეს კი კანტორი მხოლოდ ზედაპირულად განმარტავდა, როგორც „ბევრი გააზრებული ერთიანად" და ა. შ. კანტორის ამგვარი დამოკიდებულება თვით სიმრავლის ცნების მიმართ იმაშიც აისახება, რომ იგი თავის თეორიას ეძახდა არა „სიმრავლეთა თეორიას" არამედ *სწავლებას* სიმრავლეების შესახებ (Mengenlehre). დღეს ეს თეორია ხშირად ცნობილია „გულუბრყვილო სიმრავლეთა თეორიის" სახელით.

XX საუკუნის დასაწყისში ბერტრან რასელი გულუბრყვილო სიმრავლეთა თეორიის შესწავლისას მივიდა პარადოქსთან (მას შემდეგ ცნობილი როგორც რასელის პარადოქსი), რითაც ნათელი გახდა, რომ სიმრავლეთა თეორია უფრო მკაცრ ლოგიკურ დაფუძნებას მოითხოვდა. ამგვარად დავიდ ჰილბერტის და სხვების მიერ შემუშავებული იქნა სხვადასხვა აქსიომატური სიმრავლეთა თეორიები.

დღესდღეობით სიმრავლეთა თეორიის ყველაზე უფრო გავრცელებული აქსიომატიური თეორიაა ცერმელო—ფრანკელის თეორია.

იხილეთ აგრეთვე

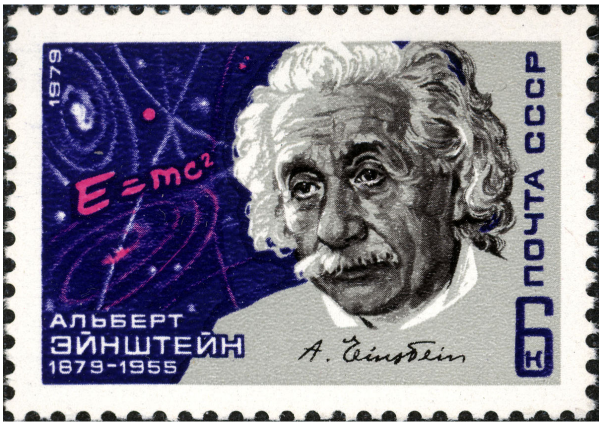
- ამორჩევის აქსიომა
- თვლადი სიმრავლე
- ორდინალური რიცხვი
- კარდინალური რიცხვი
- მოქმედებები სიმრავლეებზე
- პეანოს აქსიომები
- ცორნის ლემა

ზოგადი ფიზიკა

ფარდობითობის თეორია

ფარდობითობის ზოგადი თეორია

ფარდობითობის სპეციალური თეორია

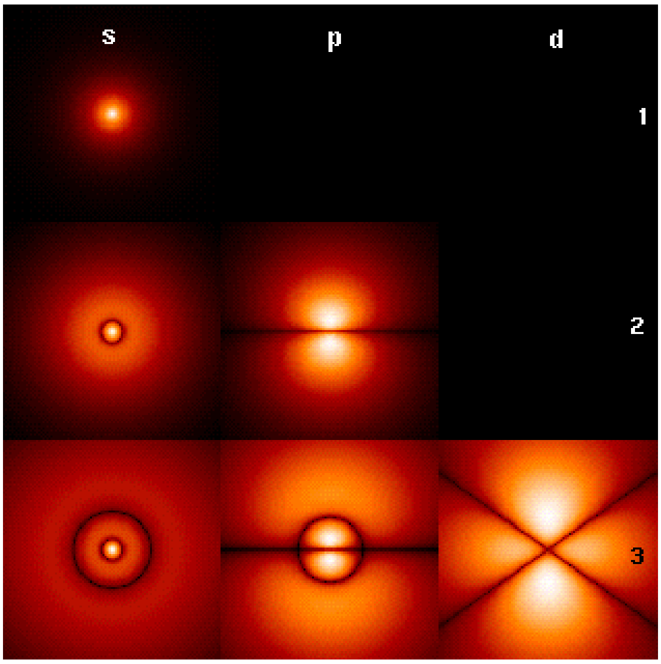


$E = mc^2$

ფარდობითობის თეორია, ფიზიკური თეორია, რომელიც შეისწავლის სივრცისა და დროის თვისებებს. ფარდობითობის თეორია კვანტურ მექანიკასთან ერთად თანამედროვე ფიზიკის საფუძველია. იგი ჩამოყალიბდა იმ ღრმა წინააღმდეგობათა გადალახვის შედეგად, რომლებიც წარმოიშვა კლასიკურ ფიზიკაში მექანიკური და ელექტრომაგნიტური მოვლენების თეორიების, როგორც ერთმანეთთან, ისე ექსპერიმენტთან შეთანხმების დროს. ამ წინააღმდეგობათა დასაძლევად აუცილებელი გახდა კლასიკური ფიზიკის ფუნდამენტური ცნებებისა და დებულებების შეცვლა. ეს ცვლილებები განსაკუთრებით შეეხო ჩვენს წარმოდგენებს სივრცესა და დროზე და მათთან მატერიის კავშირს. ფარდობითობის თეორიამ გამოაშკარავა მოძრავი ობიექტის სივრცული და დროითი მახასიათებლების დამოკიდებულება ათვლის სისტემის მიმართ ამ ობიექტის სიჩქარეზე და შემოიღო სივრცისა და დროის ერთიანი ოთხგანზომილებიანი კონტინუუმი – სივრცე–დრო. ყველა პროცესისათვის სივრცულ–დროითი კანონზომიერებანი ერთნაირია, რაც საშუალებას გვაძლევს ვილაპარაკოთ სივრცე–დროის თვისებებზე. ფარდობითობის ზოგადი თეორია, ანუ გრავიტაციის თეორია, სივრცულ–დროით თვისებებს შეისწავლის გრავიტაციულ ველში. ფარდობითობის სპეციალური თეორია ამ თვისებებს ისეთი მიახლოებით იკვლევს, როცა შესაძლებელია გრავიტაციული ეფექტების უგულებელყოფა. მაშასადამე, ეს თეორია ფარდობითობის ზოგადი თეორიის კერძო შემთხვევაა. ფარდობითობის სპეციალური თეორიას ხშირად აინშტაინის ფარდობითობის თეორიას, ან მოკლედ ფარდობითობის თეორიას უწოდებენ.

კვანტური მექანიკა

კვანტური მექანიკა (ტალღური მექანიკა) — თეორია, რომელიც ადგენს მიკრონაწილაკებისა (ელემენტარული ნაწილაკების, ატომების, მოლეკულების, ატომთა ბირთვების) და მათი სისტემების (მაგ., კრისტალების) აღწერის ხერხებსა და მოძრაობის კანონებს, აგრეთვე ნაწილაკებისა და სისტემებისათვის დამახასიათებელ სიდიდეთა კავშირს მაკროსკოპული ცდის დროს უშუალოდ გაზომილ ფიზიკურ სიდიდეებთან.



წყალბადის ატომის ელექტრონის ტალღური ფუნქცია. ღია შეფერილობის არე მიუთითებს მაღალი სიმკვრივის ალბათობას.

კვანტური მექანიკა ცნებათა სისტემის და მისი ადეკვატური მათემატიკური აპარატის სინთეზია, რომელიც აუცილებელია და საკმარისი შესაბამისი ფიზიკური სისტემების და მათი მოძრაობის დამახასიათებელი ყველა დამზერადი სიდიდის აღწერისათვის. კვანტური მექანიკის კანონები ნივთიერების აგებულების შესახებ მეცნიერებათა ქვაკუთხედს წარმოადგენენ. ამ კანონებით აიხსნა ატომების და ატომბირთვების აგებულება, გაირკვა ქიმიური ბმის ბუნება, გასაგები გახდა, თუ რა კანონზომიერება განსაზღვრავს ელემენტთა პერიოდულ სისტემაში ელემენტების განლაგებას. რადგან ნივთიერების მაკროსკოპულ თვისებებს მისი შემადგენელი ნაწილაკების მოძრაობა და ურთიერთქმედება განსაზღვრავს, ამიტომ კვანტური მექანიკის კანონები ხშირად მაკროსკოპული მოვლენების ასახსნელად გამოიყენება. მყარი სხეულების (ლითონების, ნახევარგამტარების, დიელექტრიკების) თეორიას და მის მრავალრიცხოვან გამოყენებას საფუძვლად უდევს კვანტური მექანიკის კანონები. მხოლოდ მათ ნიადაგზე შეიქმნა ნივთიერების მაგნიტური თვისებების თანმიმდევრული თეორია. კვანტურმა მექანიკამ კლასიკური სტატისტიკური ფიზიკის პარადოქსები ახსნა. ზეგამტარობა და ზედენადობა მაკროსკოპულ კვანტურ ეფექტებს წარმოადგენენ. კვანტური მექანიკა ასტროფიზიკის მძლავრი იარაღია. კვანტური მექანიკის კანონები განსაზღვრავენ ვარსკვლავებში თერმობირთვული რეაქციების მსვლელობას, ხსნიან ნეიტრონული ვარსკვლავების წარმოშობის და მომდევნო ევოლუციის პროცესებს, და ა. შ. XX საუკუნის უდიდესი ტექნიკური მიღწევები კვანტურ ეფექტებზეა დაფუძნებული. კვანტური მექანიკის კანონების აღმოჩენამ მეცნიერულ—ტექნიკური რევოლუცია განაპირობა.

მნიშვნელობა

XX საუკუნის დასაწყისში გაირკვა, რომ კლასიკური მექანიკა განზოგადოებას საჭიროებს. მისი გამოყენების არე შეზღუდულია. ისეთ სიჩქარეებზე, რომლებიც სინათლის სიჩქარესთან ახლოსაა, კლასიკური მექანიკა ექსპერიმენტს ეწინააღმდეგება. ალბერტ აინშტაინის ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ნიადაგზე რელატივისტური მექანიკა შეიქმნა. გარდა ამისა, კლასიკურ მექანიკაში ნაწილაკის მოძრაობა აღწერილია, თუ ცნობილია კოორდინატების და სიჩქარის დროზე დამოკიდებულება. ასეთ აღწერას შეესაბამება ნაწილაკისგანზომილების მქონე სიდიდეები $\hbar$ —ს ბევრად აღემატება, მაშინ კლასიკური მექანიკის გამოყენება ნებადართულია.

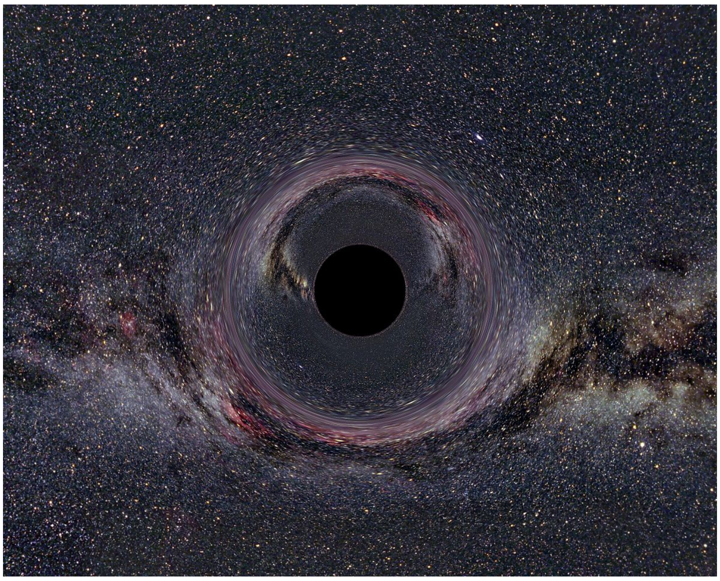
შექმნის ისტორია

XX საუკუნის დასაწყისში აღმოჩენილი მოვლენები იმაზე მეტყველებდნენ, რომ ატომის შიგნით მიმდინარე პროცესების აღწერა კლასიკური მექანიკით და ელექტროდინამიკით შეუძლებელია. კლასიკური ფიზიკა სინათლის და ნივთიერების ურთიერთქმედებასაც ადეკვატურად ვერ აღწერდა. აღნიშნული პრობლემების გადაჭრის მცდელობას კვანტური მექანიკის წარმოქმნა მოჰყვა. პირველადი კვანტური წარმოდგენები ფიზიკაში 1900 წელს მაქს პლანკმა შემოიღო (იხ. შავი სხეული). იგი სითბური გამოსხივების პრობლემაზე მუშაობდა. კლასიკურ ელექტროდინამიკაზე და სტატისტიკურ ფიზიკაზე აგებული თეორია უაზრო შედეგს იძლეოდა: თერმოდინამიკური წონასწორობა გამოსხივებას და ნივთიერებას შორის შეუძლებელია, რადგან მთელი ენერგია გამოსხივებაში უნდა გარდაიქმნას. პლანკმა დაუშვა, რომ სინათლე უწყვეტად კი არ გამოსხივდება, როგორც ამას კლასიკური ფიზიკა გულისხმობს, არამედ დისკრეტული პორციებით — კვანტებით. ასეთი კვანტის ენერგია სიხშირის პროპორციულია: $\epsilon = \hbar\,\nu$. ექსპერიმენტმა პლანკის თეორიის ჭეშმარიტება ცხადჰყო, თუმცა პლანკის ჰიპოთეზის დასაბუთება კლასიკური ფიზიკის ფარგლებში შეუძლებელი აღმოჩნდა. პლანკის ჰიპოთეზას ფიზიკოსები ორი განსხვავებული მიმართულებით ავითარებდნენ, რის გამოც 1927 წელს ჩამოყალიბდა კვანტური მექანიკის ორი დასრულებული ფორმულირება. განვიხილოთ ორივე მიმართულება. 1) 1905 წელს აინშტაინმა ფოტოეფექტის თეორია შექმნა. მან ივარაუდა, რომ სინათლე ცალკეული კვანტებისაგან — ფოტონებისაგან — შედგება.თითოეული ფოტონის ენერგია $\epsilon = \hbar\,\nu$. ამ ჰიპოთეზის მეშვეობით აინშტაინმა ფოტოეფექტის კანონზომიერებები ახსნა, კლასიკური ფიზიკა კი ამჯერადაც უძლური აღმოჩნდა. სინათლის კორპუსკულური ბუნების კიდევ ერთი მტკიცებულება 1922 წელს არტურ კომპტონმა მოიპოვა. მან ექსპერიმენტულად დაამტკიცა, რომ თავისუფალ ელექტრონებზე რენტგენული სხივების გაბნევისას სხივების სიხშირე ისე იცვლება, თითქოს ადგილი აქვს ორი ნაწილაკის – ფოტონის და ელექტრონის დრეკად დაჯახებას (იხ. კომპტონის ეფექტი). დაჯახების კინემატიკა ენერგიის და იმპულსის მუდმივობის კანონებით განისაზღვრება. ფოტონს აქვს $p = \dfrac{h}{\lambda}$ იმპულსი (λ - ტალღის სიგრძე), რომელიც ენერგიას $\epsilon = pc$ ფორმულით უკავშირდება. ეს თანაფარდობა რელატივისტურ მექანიკაში ნულოვანი მასის მქონე ნაწილაკს შეესაბამება. ამგვარად, ექსპერიმენტულად დამტკიცდა, რომ სინათლეს, ცნობილ ტალღურ თვისებებთან ერთად (დიფრაქცია, ინტერფერენცია, პოლარიზაცია), კორპუსკულური თვისებებიც გააჩნია. სწორედ ამაში მდგომარეობს სინათლის კორპუსკულურ – ტალღური დუალიზმი. შეიქმნა ლოგიკური წინააღმდეგობა: ექსპერიმენტების ერთ ნაწილში სინათლე ტალღურ ბუნებას იჩენს, ზოგიერთი მოვლენის ანალიზი კი მის კორპუსკულურ ბუნებას ცალსახად ადასტურებს. 1924 წელს ლუი დე ბროილმა კორპუსკულურ–ტალღური დუალიზმის უნივერსალობის ჰიპოთეზა გამოთქვა. დე ბროილის თანახმად, ნებისმიერ ნაწილაკს გარკვეული სიგრძის ტალღა შეესაბამება. აქედან გამომდინარე, დე ბროილმა ნაწილაკების დიფრაქცია იწინასწარმეტყველა. 1927 წელს ელექტრონების დიფრაქცია დევისონ–ჯერმერის ცდამ დაადასტურა, ხოლო მომდევნო ექსპერიმენტებში სხვა ნაწილაკების ტალღური ბუნება დამტკიცდა. 1926 წელს ერვინ შრედინგერმა ასეთი ტალღების აღმწერი განტოლება გამოიყვანა, მაქს ბორნმა კი მათი სტატისტიკური ინტერპრეტაცია შეიმუშავა. ასე შეიქმნა *ტალღური მექანიკა*. შრედინგერის განტოლება არარელატივისტური კვანტური მექანიკის ძირითად განტოლებას წარმოადგენს. 1928 წელს პოლ დირაკმა გარეშე ველში მოძრავი ელექტრონის აღმწერი რელატივისტური განტოლება მიიღო; ეს განტოლება რელატივისტური კვანტური მექანიკის ძირითადი განტოლებაა. 2) პლანკის ჰიპოთეზის განვითარების მეორე მიმართულებას საფუძველი ჩაუყარა ალბერტ აინშტაინმა, რომელმაც 1907 წელს მყარი სხეულების სითბოტევადობის საკითხი გამოიკვლია. ელექტრომაგნიტური გამოსხივება სხვადასხვა სიხშირის მქონე ტალღების ერთობლიობაა. აინშტაინმა აჩვენა, რომ გამოსხივება ოსცილატორების ერთობლიობის ეკვივალენტურია. გამოსხივება და შთანთქმა შესაბამისი ოსცილატორების აგზნებას ან ძირითად (არააგზნებულ) მდგომარეობაში გადასვლას ნიშნავს. ნივთიერება ასხივებს ან შთანთქავს ენერგიას $\hbar\,\nu$ კვანტების სახით. ეს იმას ნიშნავს, რომ ველის ოსცილატორს აქვს დისკრეტული ენერგეტიკული დონეები, რომელთა შორის მანძილია $\hbar\,\nu$. აინშტაინმა ელექტრომაგნიტური ველის ოსცილატორის დაკვანტვის იდეა ნებისმიერი ბუნების ოსცილატორზე განაზოგადა. მყარ სხეულში სითბური მოძრაობა ატომების რხევითი მოძრაობაა, ამიტომ მყარი სხეული შეიძლება განვიხილოთ როგორც ოსცილატორების ერთობლიობა. 1913

წელს ნილს ბორმა ენერგიის დაკვანტვის იდეა ატომის აგებულების პლანეტარული მოდელის განხილვისას გამოიყენა. ერნსტ რეზერფორდის მოდელის თანახმად, ატომის ცენტრში დადებითად დამუხტული ბირთვი მდებარეობს, რომელშიც ატომის მასის უდიდესი ნაწილია თავმოყრილი. ბირთვის გარშემო უარყოფითად დამუხტული ელექტრონები ბრუნავენ. ასეთი მოძრაობის განხილვა კლასიკური წარმოდგენების ნიადაგზე პარადოქსულ შედეგს იძლეოდა, რომლის მიხედვით სტაბილური ატომების არსებობა შეუძლებელია. კლასიკური ელექტროდინამიკიდან გამომდინარე, მბრუნავი ელექტრონი უწყვეტად ასხივებს ელექტრომაგნიტურ ტალღებს და, მაშასადამე, კარგავს ენერგიას; მისი ორბიტის რადიუსი სწრაფად უნდა შემცირდეს და 10^{-11} წამში იგი ბირთვს უნდა დაეცეს. ეს ნიშნავდა, რომ კლასიკური ფიზიკის კანონების გამოყენება ატომში მოძრავი ელექტრონების მიმართ არ შეიძლება. ატომების მდგრადობა ბორმა შემდეგნაირად ახსნა (იხ. ბორის პოსტულატები): ელექრონის გამოსხივება, ემორჩილება რა კვანტურ კანონზომიერებებს, ხდება დისკრეტულად, გარკვეული ულუფებით. ნიუტონის მექანიკის ფარგლებში არსებული ყველა შესაძლო ორბიტიდან რეალურად მხოლოდ ის ხორციელდება, რომლის შესაბამისი ქმედება პლანკის მუდმივის ჯერადია. ასეთ ორბიტებს სტაციონალური ორბიტები ეწოდა. ყოველ მათგანს გარკვეული ენერგია შეესაბამება. ბორმა ჩათვალა, რომ სტაციონალურ ორბიტებზე მოძრაობისას ელექტრონი არ ასხივებს. გამოსხივება ხდება მაშინ, როცა ელექტრონი ერთი სტაციონალური მდგომარეობიდან მეორეში გადადის.

ფარდობითობის ზოგადი თეორია

ფარდობითობის ზოგადი თეორია არის გრავიტაციის გეომეტრიული თეორია, რომელიც ალბერტ აინშტაინმა გამოაქვეყნა 1915 წელს. ეს თეორია აერთიანებს ფარდობითობის სპეციალურ თეორიასა და მსოფლიო მიზიდულობის კანონს და აღწერს გრავიტაციას როგორც სივრცისა და დროის (ანუ სივრეცე-დროის) გეომეტრიულ თვისებას. კერძოდ, ამ თეორიის მიხედვით სივრცე-დროის სიმრუდე უშუალოდაა დაკავშირებული ენერგიასა და იმპულსთან. ეს კავშირი მოიცემა აინშტაინის განტოლებებით.

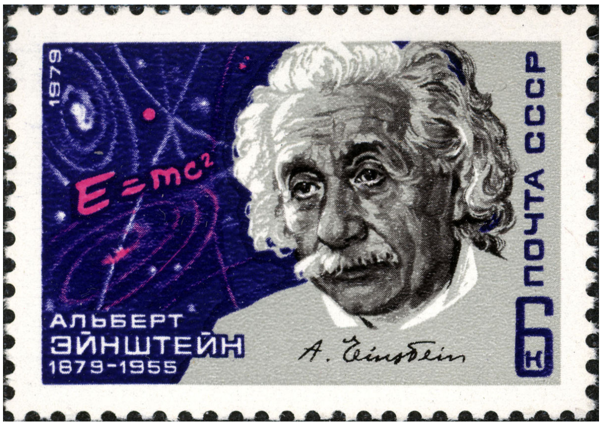


ათი მზის მასის მქონე შავი ხვრელის სიმულაცია. ფონად არის ირმის ნახტომი.

ფარდობითობის ზოგადი თეორიის ბევრი წინასწარმეტყველება მნიშვნელოვნად განსხვავდება კლასიკური ფიზიკის წინასწარმეტყველებებისგან. ასეთი განსხვავებები მოიცავს გრავიტაციულ დროის გაწელვას, გრავიტაციულ წითელი წანაცვლებას და სხვა ეფექტებს. ფარდობითობის ზოგადი თეორიის წინასწარმეტყველებები დადასტურდა დღემდე ჩატარებული ყველა ექსპერიმენტით.

ფარდობითობის ზოგად თეორიას აქვს ბევრი მნიშვნელოვანი ასტროფიზიკური შედეგი. ეს თეორია მიუთითებს შავი ხვრელის არსებობას - ისეთი არისა, რომელიც იმდენად გამრუდებულია, რომ არაფერს, სინათლესაც კი არ შეუძლია მისი დატოვება.

ფარდობითობის სპეციალური თეორია



აინშტაინისადმი მიძღვნილი საბჭოთა საფოსტო მარკა

ფარდობითობის სპეციალური თეორია არის 1905 წელს ალბერტ აინშტაინის მიერ (თეორიის ჩამოყალიბებაში მნიშვნელოვანი და დამოუკიდებელი წვლილი შეტანილი იქნა ჰენრიკ ლორენცის, ანრი პუანკარესა და სხვათა მიერ) შემოთავაზებული ფიზიკური თეორია რომელიც აღწერს მექანიკის კანონებს მაღალ სიჩქარეებზე.[1] ეს თეორია არის გალილეის ფარდობითობის პრინციპის განზოგადება, რომელიც ამტკიცებს, რომ ყველა თანაბარი მოძრაობა არის ფარდობითი, და არ არსებობს აბსოლუტური, გამორჩეული უძრაობის სისტემა. ფარდობითობის სპეციალური თეორია ამ პრინციპს ამატებს კიდევ ერთ პრინციპს, რომლის მიხედვითაც სინათლის სიჩქარე ერთიდაიგივეა ათვლის ყველა ინერციული სისტემაში, მიუხედავად სინათლის წყაროს მოძრაობისა.[2]

თეორიას აქვს მრავალი ექსპერიმენტულად შემოწმებული, ორიგინალური წინასწარმეტყველება,[3] როგორიცაა სიგრძის შემცირება, დროის გაწელვა, ერთდროულობის ფარდობითობა, განსხვავებით კლასიკური მექანიკისგან, რომლის მიხედვითაც დრო ნებისმიერ ორ მოვლენას შორის ერთიდაიგივეა ნებისმიერი ორი დამკვირვებლისთვის. ფიზიკის სხვა კანონებთან ერთად ეს ორი პოსტულატი წინასწარმეტყველებს მასისა და ენერგიის ექვივალენტობას, რომელიც გამოისახება ფორმულით $E = mc^2$, სადაც c არის სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში.[4][5] ფარდობითობის ზოგადი თეორია დადის კლასიკურ (ნიუტონის) მექანიკაზე როდესაც სხეულების სიჩქარე მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით. ფარდობითობის სპეციალური თეორია ამტკიცებს, რომ c არ არის მხოლოდ ელექტრომაგნიტური ტალღის გავრცელების სიჩქარე ვაკუუმში, არამედ არის ფუნდამენტური ფიზიკური მუდმივა. თეორიის ერთ-ერთი წინასწარმეტყველება იმაში მდგომარეობს, რომ არცერთ სხეულს, რომელსაც არანულობანი მასა აქვს არ შეუძლია მოძრაობა სინათლის სიჩქარით.

თეორიას ქვია **სპეციალური**, რადგან იგი უყენებს რელატივიზმის პრინციპს მხოლოდ ათვლის ინერციულ სისტემებს.[6] შემდგომში აინშტაინმა განავითარა ფარდობითობის ზოგადი თეორია, რომელიც თავისუფალია ამ შეზღუდვისგან. გარდა ამისა ეს თეორია აღწერს აგრეთვე გრავიტაციის ეფექტებს.

ქართული რესურსები ინტერნეტში

- ფიზიკა, მარტივად ამოხსნის ხელოვნება [7]

სქოლიო

[1] Albert Einstein (1905) " Zur Elektrodynamik bewegter Körper (http://www.pro-physik.de/Phy/pdfs/ger_890_921.pdf)", *Annalen der Physik* 17: 891; English translation On the Electrodynamics of Moving Bodies (http://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/www/) by George Barker Jeffery and Wilfrid Perrett (1923); Another English translation On the Electrodynamics of Moving Bodies by Megh Nad Saha (1920).

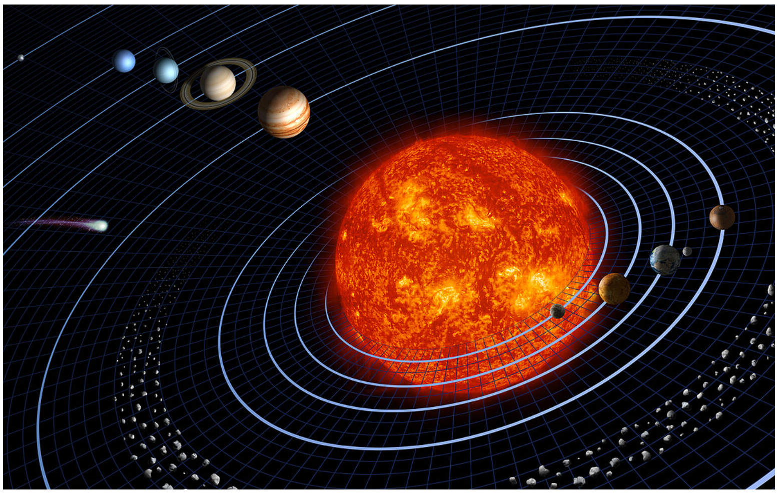
[2] Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler (1992). *Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity*. W. H. Freeman. ISBN 0-7167-2327-1.

[3] Tom Roberts and Siegmar Schleif (October 2007). What is the experimental basis of Special Relativity? (http://www.edu-observatory.org/physics-faq/Relativity/SR/experiments.html). *Usenet Physics FAQ*. წაკითხვის თარიღი: 2008-09-17.

[4] Albert Einstein (2001). *Relativity: The Special and the General Theory* (http://books.google.com/books?id=idb7wJiB6SsC&pg=PA50), Reprint of 1920 translation by Robert W. Lawson, Routledge, გვ. 48. ISBN 0415253845.

[5] Richard Phillips Feynman (1998). *Six Not-so-easy Pieces: Einstein's relativity, symmetry, and space-time* (http://books.google.com/books?id=ipY8onVQWhcC&pg=PA68), Reprint of 1995, Basic Books, გვ. 68. ISBN 0201328429.
[6] Albert Einstein, Relativity - The Special and General Theory, chapter 18 (http://www.marxists.org/reference/archive/einstein/works/1910s/relative/ch18.htm)
[7] http://math.ge/RelativityI%20.pdf

გრავიტაცია



გრავიტაციის გამო პლანეტები ბრუნავენ მზის გარშემო

გრავიტაცია არის ერთ-ერთი ოთხ ფუნდამენტურ ურთიერთქმედებას შორის (დანარჩენი ფუნდამენტური ურთიერთქმედებებია სუსტი ურთიერთქმედება, ძლიერი ურთიერთქმედება და ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება), რომლის მეშვეობითაც მასის მქონე სხეულები ერთმანეთს იზიდავენ. ყოველდღიურ ცხოოვრებაში გრავიტაციის გამოვლინებაა ის, რომ სხეულებს გააჩნიათ წონა და ისინი საყრდენის ან საკიდის არარსებობის შემთხვევაში დედამიწაზე ეცემიან. გრავიტაციის გავლენით სხეულები ერთმანეთს იზიდავენ, რაც არის დედამიწის, მზის, და სამყაროში არსებული მაკროსკოპული სხეულების უმეტესობის წარმოქმნის მიზეზი. გრავიტაციის გამო პლანეტები ბრუნავენ მზის გარშემო წრიულ ორბიტებზე.

იხილეთ აგრეთვე

- სუსტი ურთიერთქმედება
- ძლიერი ურთიერთქმედება
- აინშტაინის განტოლებები
- მსოფლიო მიზიდულობის კანონი
- წონა
- ფარდობითობის ზოგადი თეორია

მატერია

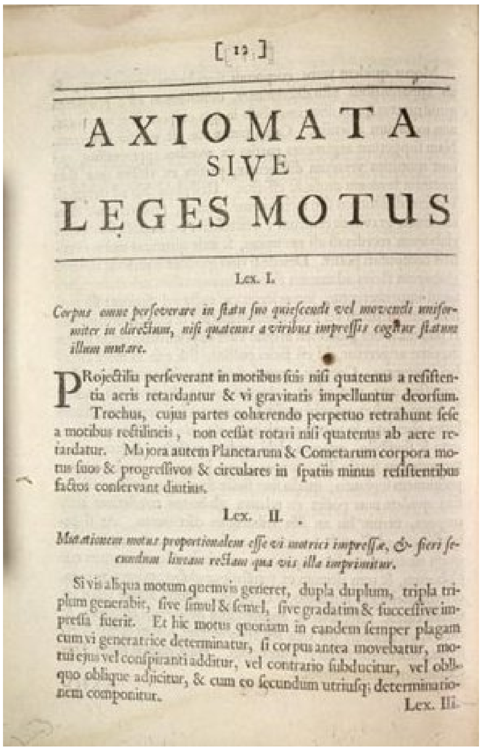
მატერია არის ფიზიკური სუბსტანცია რომელიც შედგება ფიზიკური ობიექტებისაგან.

ნიუტონის კანონები

ნიუტონის კანონები — დინამიკის სამი ძირითადი კანონი, სხეულზე ძალის მოქმედებისა და მის მოძრაობის შესახებ. კანონები ჩამოაყალიბა ფიზიკოსმა ისააკ ნიუტონმა თავის ნაშრომში „Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica“, რომელიც გამოქვეყნდა 1687 წლის 5 ივლისს. კანონები საფუძველია კლასიკური მექანიკისა[1].

ნიუტონის კანონები არის ნიუტონის გალილეის ჰიუგენსონის და სხვათა მრავალი დაკვირვების, ცდების და თეორიული კვლევის შედეგი. თანამედროვე წარმოდგენებისა და ტერმინოლოგიის თანახმად, ი და ii კანონის განხილვისას უნდა გვესმოდეს მატერიალური წერტილი, ხოლო მოძრაობაში — მოძრაობა ათვლის ინერციული სისტემის მიმართ[1].

აღსანიშნავია რომ ნიუტონის კანონები მართობული აღარ არის ძალიან მცირე ზომის ობიექტების(ელემენტარული ნაწილაკები) მოძრაობის დროსა და სინათლის სიჩქარის მახლობელი სიჩქარეებით მოძრაობისას(იხილეთ კვანტური მექანიკა, ფარდობითობის თეორია)[1].


[13]

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

PRojectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinationem componitur.

Lex. III.

ნიუტონის პირველი და მეორე კანონი. ორიგინალი (ენა — ლათინური)

კანონების ფორმულირება

ნიუტონის პირველი კანონი

ნიუტონის პირველი კანონი შეიძლება ჩამოყალიბდეს ასე: არსებობს ათვლის ისეთი სისტემები, რომელთა მიმართაც სხეული,მოძრაობს წრფივად და თანაბრად და ინარჩუნებს მუდმივ სიჩქარეს, თუ მასზე სხვა სხეულებს ზემოქმედება კომპენსირებულია.

თვით ამ მოვლენას, როდესაც სხეული მოძრაობის სიჩქარეს ინარჩუნებს, მასზე გარეშე ზემოქმედებათა კომპენსირებისას, ინერციას უწოდებენ.

ათვლის ინერციული სისტემა — ათვლის სისტემა, რომლის მიმართ სხეული, გარეშე ზემოქმედებათა კომპენსირებისას, წრფივად და თანაბრად მოძრაობს ან უძრავია.

ნიუტონის მეორე კანონი

მეორე კანონი ყალიბდება ასე: სხეულზე მოქმედი ძალა ტოლია სხეულის მასისა და ამ ძალის მიერ მინიჭებული აჩქარების ნამრავლისა. კლასიკურ მექანიკაში ნიუტონის მეორე კანონი მათემატიკურად გამოისახება ასე:

$F = m\frac{dv}{da}$ ან $\vec{F} = m\vec{a}$

სადაც $\vec{a}$ არის სხეულის აჩქარება, $\vec{F}$ — სხეულზე მოქმედი ძალა და m — სხეულის მასა.

ნიუტონის მესამე კანონი

> სხეულები ერთმანეთზე მოქმედებენ ძალებით, რომლებიც მიმართულია ერთი და იმავე წრფის გასწვრივ, მოდულით ტოლია, ხოლო მიმართულებით — საპირისპირო.

$$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$$

იხილეთ აგრეთვე

- ნიუტონის აკვანი
- კლასიკური მექანიკა
- კვანტური მექანიკა
- ფარდობითობის თეორია

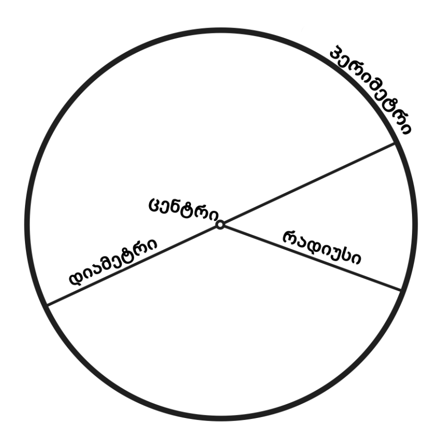
სქოლიო

[1] ქართული საბჭოთა ენციკლოპედია, ტ. 7, გვ. 450, თბ., 1984 წელი.

გეომეტრია

წრეწირი

წრეწირი ჩაკეტილი ბრტყელი წირი, რომლის ყველა წერტილი ერთი და იმავე მანძილითაა დაშორებული მოცემული წერტილიდან (წრის ცენტრი), ამასთან ეს წერტილი მდებარეობა იმავე სიბრტყეში, რომელშიც მდებარეობს წირი. R მონაკვეთს, რომელიც აერთიანებს წრეწირის ცენტრს მის ნებისმიერ წერტილთან, ეწოდება წრეწირის რადიუსი. წრეწირის სიგრძის ფარდობა მის დიამეტრთან მუდმივი სიდიდე და აღინიშნება π ასოთი, π=3,14159..., მისი სიგრძე განისაზღვრება ფორმულით : $l = 2\pi\ R$. წრეწირის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს **წრეწირის ქორდა** ეწოდება. ყველაზე დიდი ქორდა **დიამეტრია**, თუმცა მისგან განსხვავებით დიამეტრი აუცილებლად გადის წრეწირის ცენტრზე. ორი რადიუსის მიერ ჩამოჭრილ ნაწილს - **სექტორი** ეწოდება, ხოლო ქორდის მიერ ჩამოჭრილს კი **სეგმენტი**. ჩვენ შეგვიძლია წრეწირში ჩავხაზოთ სხვადასხვა ფიგურები, თუმცა იმისათვის რომ იგი ჩახაზულად ჩაითვალოს, აუცილებელია მისი ყველა წვერო ეხებოდეს წრეწირს.



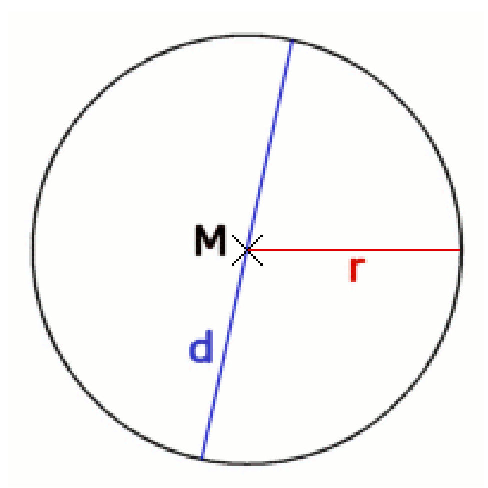
წრეწირი

წრე

წრე — წრეწირით შემოსაზღვრული და მისი ცენტრის შემცველი სიბრტყის ნაწილი. წრის ფართობი ტოლია πR^2, სადაც R არის წრეწირის რადიუსი, ხოლო π — წრეწირის სიგრძის ფარდობა მის დიამეტრთან.

იხილეთ აგრეთვე

- პი
- წრის კვადრატურა

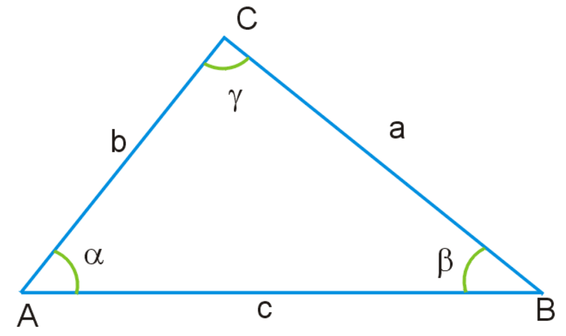


წრე

სამკუთხედი

„სამკუთხედი“ ამ სტატიაზე გადმოდის. სხვა მნიშვნელობებისთვის იხ. სამკუთხედი (მრავალმნიშვნელოვანი).

სამკუთხედი — უმარტივესი მრავალკუთხა გეომეტრიული ფიგურა (მრავალკუთხედი) სამი გვერდითა და სამი კუთხით; სიბრტყის ნაწილი, რომელიც ერთ წრფეზე არმდებარე სამი წერტილითა და მათი შემაერთებელი სამი მონაკვეთით შემოიფარგლება. სამკუთხედი შეიძლება იყოს მრავალი სახის, მაგრამ ყოველ მათგანს გააჩნია ექვსი ძირითადი ელემენტი: წვეროებით და გვერდებით შედგენილი სამი შიგა კუთხე და სამი გვერდი. ყოველი სამკუთხედი ამოზნექილი მრავალკუთხედია.

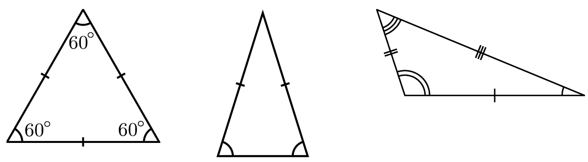


სამკუთხედი.

სამკუთხედის ტიპები

სამკუთხედების კლასიფიკაცია ხდება მათი გვერდების სიგრძეთა შედარებით:

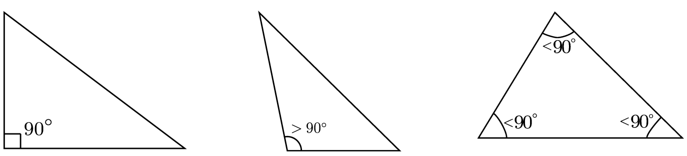
- ტოლგვერდა სამკუთხედში ყველა გვერდს ტოლი სიგრძე აქვს. ტოლგვერდა სამკუთხედი ასევე ტოლკუთხაა, ანუ მისი ყველა შიგა კუთხე ერთმანეთის ტოლია და 60°-ია. ასეთ სამკუთხედს წესიერი სამკუთხედიც ჰქვია.
- ტოლფერდა სამკუთხედში მინიმუმ ორი გვერდი მაინც არის ერთმანეთის ტოლი. ტოლ გვერდებს ფერდები ეწოდებათ, მესამე გვერდს კი — ფუძე. ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლფერდა სამკუთხედში ტოლია. ტოლგვერდა სამკუთხედი ასევე ტოლფერდაცაა, თუმცა არა პირიქით — ყველა ტოლფერდა სამკუთხედი ტოლგვერდა არ არის.
- სხვადასხვაგვერდა სამკუთხედში ყველა გვერდი სხვადასხვა სიგრძისაა. მისი შიგა კუთხეებიც ერთმანეთისგან განსხვავდება.



ტოლგვერდა ტოლფერდა არაწესიერი

სამკუთხედების კლასიფიკაცია ასევე შესაძლებელია მათი უდიდესი შიგა კუთხის მიხედვით:

- მართკუთხა (სწორკუთხა) სამკუთხედის შიდა კუთხე 90°-ია (მართია). მართი კუთხის მოპირდაპირე გვერდს ჰიპოტენუზა ჰქვია, და ის მართკუთხა სამკუთხედის უდიდესი გვერდია. დანარჩენ ორ გვერდს კათეტები ეწოდება.
- ბლაგვკუთხა სამკუთხედის ერთი შიგა კუთხე 90°-ს აღემატება (ბლაგვია).
- მახვილკუთხა სამკუთხედის ყველა შიგა კუთხე 90°-ზე მცირეა (მახვილია).



მართი ბლაგვი მახვილი

ძირითადი ნიშნები

სამკუთხედის ნებისმიერ გარე კუთხე (შიგა კუთხის მოსაზღვრე კუთხე) მისი ორი არამოსაზღვრე შიგა კუთხის ჯამის ტოლია. ევკლიდურ გეომეტრიაში ნებისმიერი სამკუთხედის გვერდები და კუთხეები უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

- სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი $180°$-ია.
- ნებისმიერი ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამი მეტია მესამე გვერდის სიგრძეზე (სამკუთხედის უტოლობა).

სამკუთხედის კუთხეებსა და გვერდებს შორის არსებობს გარკვეული კავშირი. მაგ., თუ ვუდარებთ ორ გვერდს და მათ მოპირდაპირე ორ კუთხეს, მაშინ უდიდესი გვერდის პირდაპირ უდიდესი კუთხე მდებარეობს. საზოგადოდ, სამკუთხედში უფრო დიდი გვერდის პირდაპირ უფრო დიდი კუთხე იმყოფება. ამას ეფუძნება ის, რომ მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზა უდიდესი გვერდია (მართლაც, მართკუთხა სამკუთხედში უდიდესი კუთხე მართი კუთხეა), ბლაგვკუთხა სამკუთხედში კი — ბლაგვი კუთხის მოპირდაპირე გვერდი.

ორ სამკუთხედს ტოლი ეწოდება, თუ მათ აქვთ ერთი და იგივე ძირითადი ელემენტები (სამი გვერდი და სამი კუთხე). იმისათვის რომ ტოლი სამკუთხედების ტოლობაში დავრწმუნდეთ, არაა საჭირო მათი თითოეული ელემენტის შედარება. უმჯობესია გამოვიყენოთ სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები:

1. თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის და მათ შორის მდებარე კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.
2. თუ ერთი სამკუთხედის ერთი გვერდი და მასთან მდებარე ორი კუთხე ტოლია მეორე სამკუთხედის ერთი გვერდის და მასთან მდებარე ორი კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.
3. თუ ორ სამკუთხედს ერთი და იგივე სიგრძის გვერდები აქვს, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

თუ გვინდა ორი მართკუთხა სამკუთხედის ტოლობის ჩვენება, უნდა გავითვალისწინოთ, რომ მათ თითო კუთხე მართი და, შესაბამისად, ტოლი აქვთ. ამასთანაა დაკავშირებული მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები:

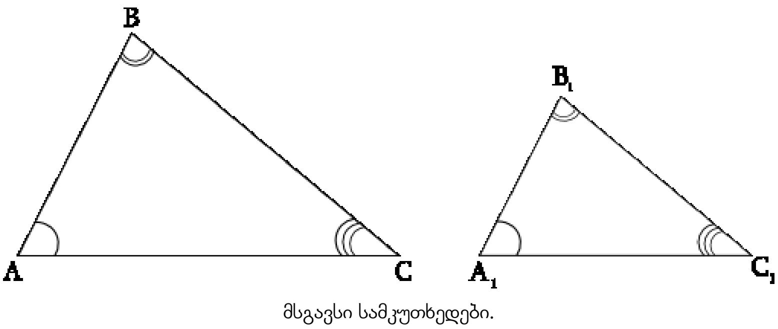
1. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და მახვილი კუთხე, შესაბამისად, ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის და მახვილი კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.
2. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი და მისი მოპირდაპირე კუთხე, შესაბამისად, ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის და მისი მოპირდაპირე კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.
3. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და კათეტი, შესაბამისად, ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის და კათეტის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

თუ მოცემული ორი ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედისთვის სრულდება:

$$\angle A = \angle A_1,$$
$$\angle B = \angle B_1 \text{ და}$$
$$\angle C = \angle C_1,$$

მაშინ მათ ეწოდება მსგავსი სამკუთხედები და ვწერთ:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1.$$



მსგავსი სამკუთხედები.

უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ჩანაწერში წვეროების მიმდევრობაში დგას ტოლი კუთხეების შესაბამისი წვეროები. თუ

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1,$ მაშინ

- A და A_1,
- B და B_1,
- C და C_1,

შესაბამისი წვეროების წყვილებია. შესაბამისი წვეროებისგან შედგენილ გვერდებს შესაბამისი გვერდები ეწოდება.

მსგავს სამკუთხედებში შესაბამისი გვერდების შეფარდება მუდმივი სიდიდეა, რომელსაც მსგავსების ან პროპორციულობის კოეფიციენტი ეწოდება. მაგ., თუ

$$\triangle ABC \sim \triangle MNK,$$

მაშინ არსებობს მსგავსების კოეფიციენტი $k \neq 0$, რომლისთვისაც

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NK} = \frac{AC}{MK} = k.$$

ასე რომ, სამკუთხედების ტოლობა სამკუთხედების მსგავსების კერძო შემთხვევაა მსგავსების კოეფიციენტით 1.

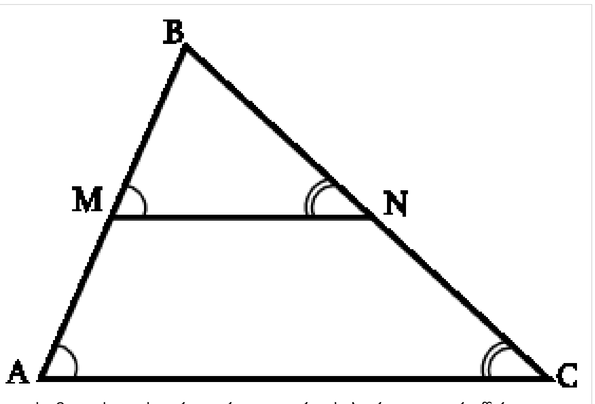
სამკუთხედების მსგავსების დასადგენად გამოიყენება სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები:

1. თუ ერთი სამკუთხედის ორი კუთხე, შესაბამისად, ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.
2. თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი, შესაბამისად, პროპორციულია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის და ამ გვერდებით შედგენილი კუთხეები ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.
3. თუ ერთი სამკუთხედის გვერდები, შესაბამისად, პროპორციულია მეორე სამკუთხედის გვერდების, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.

რადგან მართკუთხა სამკუთხედებს თითო კუთხე მართი და, შესაბამისად, ტოლი აქვთ, მათთვის სამკუთხედების მსგავსების პირველი ორი ნიშანი შემდეგია:

1. მართკუთხა სამკუთხედები მსგავსია, თუ მათ თითო მახვილი კუთხე ტოლი აქვთ.
2. მართკუთხა სამკუთხედები მსგავსია, თუ ერთი მათგანის კათეტები მეორეს კათეტების პროპორციულია.

სამკუთხედების მსგავსებასთანაა დაკავშირებული მისი ერთი თვისება: ნებისმიერ სამკუთხედში რომელიმე გვერდის პარალელური და დანარჩენი ორი გვერდის გადამკვეთი წრფით მიღებული სამკუთხედი მოცემული სამკუთხედის მსგავსია.



სამკუთხედის ერთ-ერთი გვერდის პარალელური წრფით დანარჩენი ორი გვერდის გადაკვეთისას მოცემული სამკუთხედის მსგავსი სამკუთხედი „ჩამოიჭრება“.

მსგავსი სამკუთხედების პერიმეტრების (ისევე, როგორც მედიანების, ბისექტრისების და სიმაღლეების) შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის ტოლია, ფართობების შეფარდება კი - მსგავსების კოეფიციენტის კვადრატის.

მართკუთხა სამკუთხედების უმნიშვნელოვანესი თვისებაა, რომ ჰიპოტენუზის კვადრატი კათეტების კვადრატების ჯამის ტოლია. ეს დებულება პითაგორას თეორემის სახელითაა ცნობილი. ზოგადად:

- თუ სამკუთხედის ერთი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია, ეს სამკუთხედი მართკუთხაა (პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემა).
- თუ სამკუთხედის ერთი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე მეტია, ეს სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა.
- თუ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე ნაკლებია, ეს სამკუთხედი მახვილკუთხაა.

სამკუთხედის პერიმეტრი, მასთან დაკავშირებული მონაკვეთები, წერტილები და წრეწირები

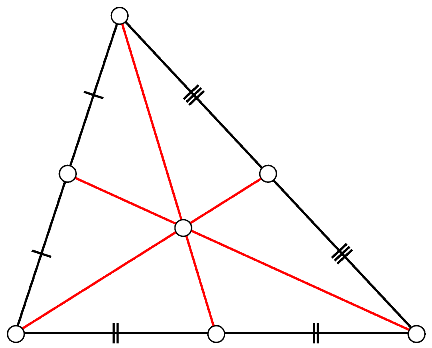
პერიმეტრი

სამკუთხედის პერიმეტრი ეწოდება მისი გვერდების სიგრძეთა ჯამს. ABC სამკუთხედისთვის P-თი აღნიშნავენ: P=AB+BC+AC. საჭიროებისამებრ, p-თი აღნიშნავენ ნახევარპერიმეტრს:

$$p = \frac{P}{2} = \frac{AB + BC + AC}{2}$$

აღსანიშნავია, რომ მსგავსი სამკუთხედების პერიმეტრების შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის ტოლია — მსგავსი სამკუთხედების პერიმეტრები ისე შეეფარდება, როგორც შესაბამისი გვერდები.

მედიანა

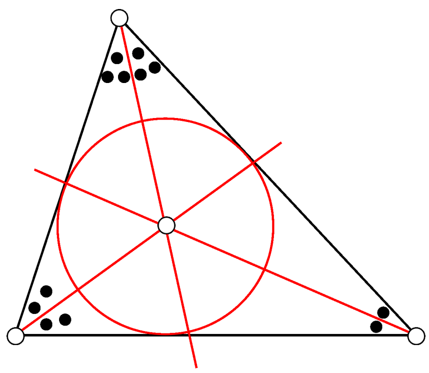


სამკუთხედის სამივე მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება.

მედიანა ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც სამკუთხედის ნებისმიერ წვეროს აერთებს მისი მოპირდაპირე გვერდის შუაწერტილთან. სამკუთხედის სამივე მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება და ეს წერტილი თითოეულ მედიანას ყოფს პროპორციით 2:1 წვეროს მხრიდან. მედიანით სამკუთხედი ორ ტოლდიდ (ტოლი ფართობის მქონე) სამკუთხედად იყოფა. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან გავლებული მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევარია, ხოლო ჰიპოტენუზისადმი გავლებული მედიანა ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის ტოლია .

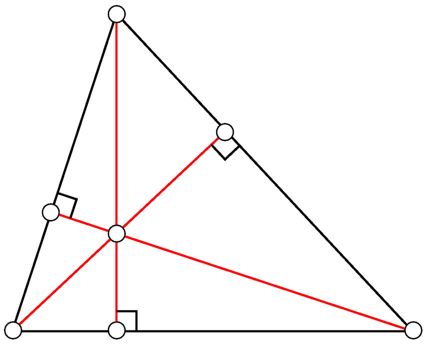
ბისექტრისა

სამკუთხედის შიგა კუთხის ბისექტრისის მონაკვეთს კუთხის წვეროდან მის მოპირდაპირე გვერდამდე სამკუთხედის ბისექტრისა ეწოდება. ნებისმიერი სამკუთხედის სამივე ბისექტრისა ერთ წერტილში იკვეთება, რომელიც ყოველთვის სამკუთხედის შიგნით მდებარეობს. სამკუთხედის ბისექტისათა გადაკვეთის წერტილი ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია.



სამკუთხედის სამივე ბისექტრისა ერთ წერტილში იკვეთება და ეს წერტილი ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია

სიმაღლე



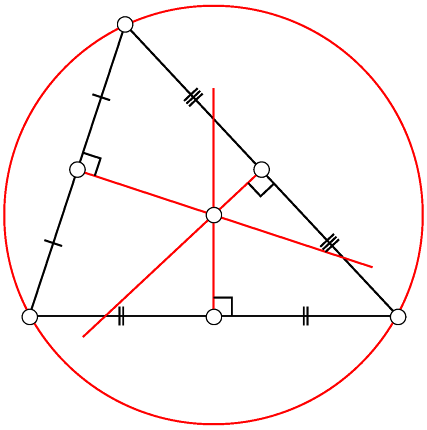
სამკუთხედის სამივე სიმაღლის შემცველი წრფეები ერთ წერტილში იკვეთება.

სამკუთხედის სიმაღლე ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც სამკუთხედის ნებისმიერ წვეროს აერთებს მის მოპირდაპირე გვერდთან ან მოპირდაპირე გვერდის გაგრძელებასთან და მისი მართობულია. სამკუთხედის სამივე სიმაღლის შემცველი წრფეები ერთ წერტილში იკვეთება და ეს წერტილი:

- მახვილკუთხა სამკუთხედში სამკუთხედის შიგნითაა.
- მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროა.
- ბლაგვკუთხა სამკუთხედში სამკუთხედის გარეთაა.

ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე ამავდროულად მედიანაცაა და ბისექტრისაც. ტოლგვერდა სამკუთხედის ყველა სიმაღლე მედიანაცაა და ბისექტრისაც. აქედან გამომდინარეობს, რომ მართკუთხა სამკუთხედში $30°$-იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია.

შემოხაზული წრეწირი



სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი მისი გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილია.

წრეწირს, რომელიც მოცემული სამკუთხედის სამივე წვეროზე გადის, სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი ეწოდება, თავად სამკუთხედს კი — წრეწირში ჩახაზული სამკუთხედი. სამკუთხედის სამივე გვერდის შუამართობები ერთ წერტილში იკვეთება და ეს წერტილი სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია. სიბრტყეზე განლაგებულ ნებისმიერ სამკუთხედზეა შესაძლებელი წრეწირის შემოხაზვა. სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრი ამ სამკუთხედის ერთ-ერთი გვერდისა და ამ გვერდის მოპირდაპირე კუთხის სინუსის შეფარდების ტოლია. აგრეთვე, თუ სამკუთხედის გვერდებია a, b და c, ფართობი — S, მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი კი — R,

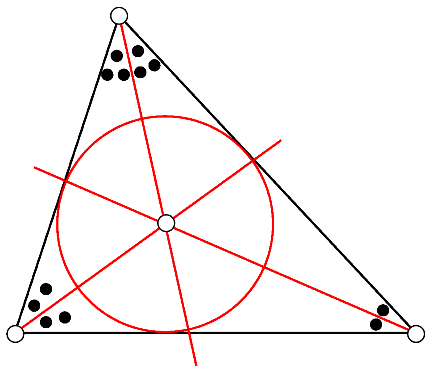
$$R = \frac{abc}{4S}.$$

მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ჰიპოტენუზის ნახევარია, მისი ცენტრი კი — ჰიპოტენუზის შუაწერტილი. ტოლგვერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი გამოითვლება ფორმულით

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

სადაც a ამ სამკუთხედის გვერდია, R — მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

ჩახაზული წრეწირი



სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი მისი ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია.

წრეწირს, რომელიც მოცემული სამკუთხედის სამივე გვერდს ეხება, სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი ეწოდება, თავად სამკუთხედს კი — წრეწირზე შემოხაზული სამკუთხედი. სამკუთხედის სამივე ბისექტრისა ერთ წერტილში იკვეთება და ეს წერტილი სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია. სიბრტყეზე განლაგებულ ნებისმიერ სამკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ამ სამკუთხედის ფართობისა და ნახევარპერიმეტრის შეფარდების ტოლია. ანუ, თუ სამკუთხედის ნახევარპერიმეტრია p, ფართობი — S, მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძე კი — r,

$$r = \frac{S}{p}.$$

თუ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეებია a და b, ჰიპოტენუზისა კი — c, ჩახაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძე იქნება

$$\frac{a+b-c}{2}.$$

ტოლგვერდა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი გამოითვლება ფორმულით

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}},$$

სადაც a ამ სამკუთხედის გვერდის სიგრძეა, r — მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძე.

დამოკიდებულებები სამკუთხედში

სინუსების თეორემა: სამკუთხედის გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

კოსინუსების თეორემა: სამკუთხედის ნებისმიერი გვერდის კვადრატი უდრის დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული ამ გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის გაორკეცებული ნამრავლი.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

სამკუთხედის კუთხეების ჯამი: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (π)

სადაც a, b და c სამკუთხედის გვერდებია, α, β და γ — ამ გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები შესაბამისად.

სხვა დამოკიდებულებები

სიბრტყეზე მდებარე სამკუთხედისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

- $\frac{a}{b} = \frac{a_L}{b_L}$,
- $l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} = \sqrt{ab - a_L b_L}$,
- $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$,
- $h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$,

- $\mathrm{ctg}A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$,
- $\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$,
- $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C$,
- $\mathrm{ctg}B\mathrm{ctg}C + \mathrm{ctg}C\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}A\mathrm{ctg}B = 1$.

აქ:

a, b, c — სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები, A, B, C — ამ გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები, შესაბამისად

l_c — c გვერდის მოპირდაპირე წვეროს ბისექტრისის სიგრძე

a_L, b_L — მონაკვეთების სიგრძეები, რომლებსაც l_c ბისექტრისა c გვერდზე მოკვეთს

m_c — c გვერდის მოპირდაპირე წვეროს მედიანის სიგრძე

h_c — c გვერდის მოპირდაპირე წვეროდან დაშვებული სიმაღლის სიგრძე

p — სამკუთხედის ნახევარპერიმეტრი

S — სამკუთხედის ფართობი

ფართობი

სამკუთხედის ფართობის გამოთვლის სხვადასხვაგვარი გზები არსებობს:

- სამკუთხედის ფართობი მისი ერთ-ერთი გვერდის სიგრძის და ამ გვერდისადმი დაშვებული სიმაღლის სიგრძის ნამრავლის ნახევარია.
- სამკუთხედის ფართობი მისი რაიმე ორი გვერდისა და ამ გვერდებს შორის კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევარია.
  - კერძოდ, მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი მისი კათეტების სიგრძეების ნამრავლის ნახევარია.
  - კერძოდ, ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობია

    $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

სადაც a ამ სამკუთხედის გვერდის სიგრძეა.

- ჰერონის ფორმულა: თუ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია a, b და c, ფართობი — S, ნახევარპერიმეტრი — p, სამკუთხედის ფართობი

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}.$$

- სამკუთხედის ფართობი მისი ნახევარპერიმეტრისა და მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძის ნამრავლის ტოლია.
- თუ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია a, b და c, მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძე — R, სამკუთხედის ფართობი

  $$S = \frac{abc}{4R}.$$

- $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A} = \dfrac{a^2 \sin B \sin(180^\circ - \angle A - \angle B)}{2\sin A} = \dfrac{c^2}{2(\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B)}$,

სადაც a და c სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია, A და C — მათი მოპირდაპირე კუთხეები, B — მესამე კუთხე.

ლიტერატურა

- *გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი* – გეომეტრია (მეცხრე კლასის სახელმძღვანელო). თბილისი, „ინტელექტი“ 2004.
- *ბ. ღვაბერიძე, ფ. დვალიშვილი, ალ. მოსიძე, კ. გელაშვილი, გ. სირბილაძე* – მათემატიკა: გეომეტრია.
- *ა. პოგორელოვი* — გემოეტრია 7–11. მეექვსე გამოცემა. გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი 1995.
- *ს. თოფურია, გ. აბესაძე, გ. ოზბეგაშვილი, ვ. ხოჭოლავა, ზ. მეტრეველი* - მათემატიკა, II ნაწილი. გეომეტრია (თეორია და ამოცანათა კრებული). მესამე გამოცემა. გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი 1991.

რესურსები ინტერნეტში

- სამკუთხედის ფართობი - 7 სხვადასხვა გზა [1]
- ანიმაციური დემონსტრაცია [2] სამკუთხედის აგების ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით.
- დამტკიცება იმის, რომ სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180 გრადიუსია [3]
- სამკუთხედის კალკულატორი [4] - აგებს სამკუთხედს მოცემული სამი ელემენტით (გვერდებით, კუთხეებით, ფართობით, სიმაღლით და მისთ.).
- ინტერაქტიული აპლეტი საკლასო ჩვენებისთვის [5].

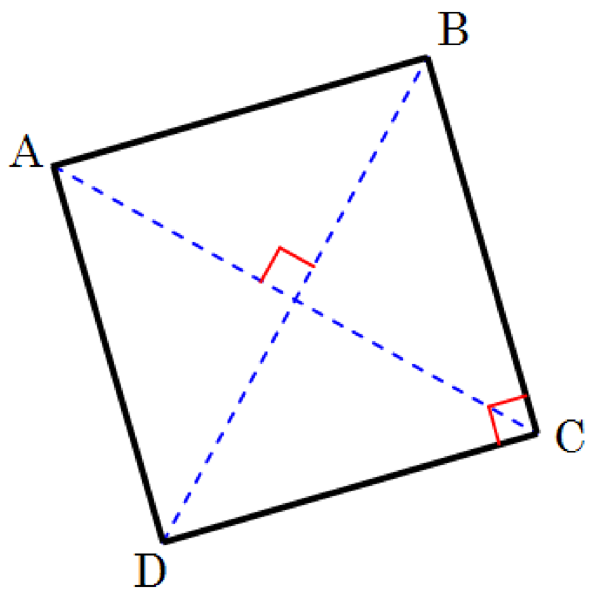
მრავალკუთხედები	
სამკუთხედი I ოთხკუთხედი I ხუთკუთხედი I ჰექსაგონი I ჰეპტაგონი I ოქტაგონი I ნონაგონი I დეკაგონი I ჰენდეკაგონი I დოდეკაგონი I ტრიდეკაგონი I ტეტრადეკაგონი I პენტადეკაგონი I იკოსაგონი I ტრიკონტაგონი I პენტაკონტაგონი I ჰექტაგონი I კილიაგონი I მირიაგონი	

მინიშნებები

[1] http://www.btinternet.com/~se16/hgb/triangle.htm
[2] http://www.mathopenref.com/tocs/constructionstoc.html
[3] http://www.apronus.com/geometry/triangle.htm
[4] http://www.3eck.org/triangle/en/calculator_simple.php
[5] http://www.mathopenref.com/tocs/triangletoc.html

კვადრატი

კვადრატი არის ამოზნექილი ოთხკუთხედი, რომლის ყველა გვერდი ტოლია და რომლის ყველა კუთხე მართია.



კვადრატი, დიაგონალები გადაკვეთისას ორ ტოლ ნაწილად იყოფა

თვისებები

კვადრატს, პლანიმეტრიაში, თვისებებით ყველაზე მდიდარი ფიგურაა. იგი ერთდროულად არის პარალელოგრამი, რომბი და მართკუთხედი, ამიტომ მას ყველა ამ ფიგურის თვისებები გააჩნია:

- კვადრატი, როგორც პარალელოგრამი:
  - მოპირდაპირე გვერდები ტოლია (რადგან ყველა გვერდი ერთმანეთის ტოლია).
  - ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეთა ჯამი 180^0-ის ტოლია.
  - დიაგონალები გადაკვეთისას ორ ტოლ ნაწილად იყოფა. (სურათზე)
  - მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია
- კვადრატი, როგორც რომბი:
  - ყველა გვერდი ტოლია
  - დიაგონალები კუთხეების ბისექტრისებია
  - დიაგონალები ერთმანეთის მართობულია
- კვადრატი, როგორც მართკუთხედი
  - ოთხივე კუთხე მართია
  - დიაგონალები ტოლია

კვადრატის ფორმულები	
ფართობი	$S = a^2$
პერიმეტრი	$P = 4 \cdot a$
დიაგონალი	$d = a \cdot \sqrt{2}$
გარე წრის რადიუსი	$r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$
შიდა წრის რადიუსი	$r = \frac{1}{2} \cdot a = \frac{a}{2}$
გვერდის სიგრძე	a

კვადრატის ფორმულები

პერიმეტრი

კვადრატის პერიმეტრი არის მისი გვერდების სიგრძეთა ჯამი. შესაბამისად იგი გამოითვლება ფორმულით:

- $P = a + b + c + d$

(a, b, c და დ კვადრატის გვერდებია)

რადგან კვადრატს ოთხივე გვერდი ტოლი აქვს, ეს ფორმულა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

- $P = 4a$

მეორე ფორმულა უფრო მიღებულია.

ფართობი

რადგან კვადრატი პარალელოგრამია, ამიტომ მისი ფართობის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ პარალელოგრამის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა:

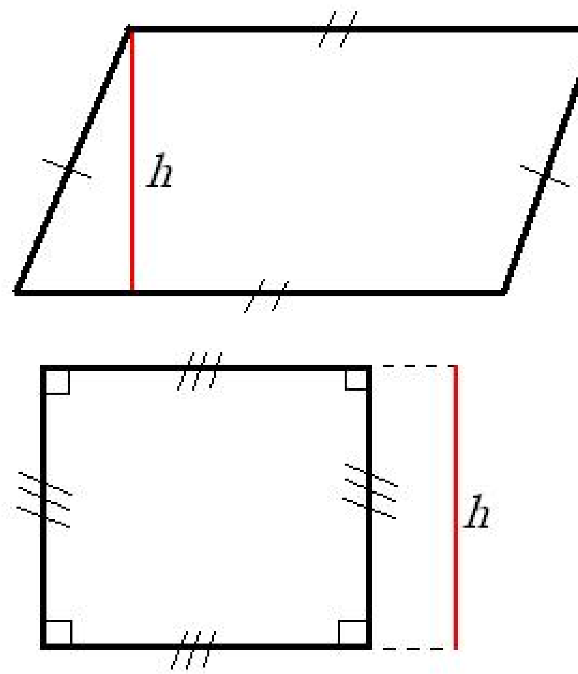
- $S = ha$

(a არის გვერდი, რომელზეც დაშვებულია სიმაღლე) რადგან კვადრატის სიმაღლე მისი გვერდის ტოლია, ამიტომ შეგვიძლია ეს ფორმულა ასე შევცვალოთ:

- $S = ab$ (a და b კვადრატის გვერდებია)

ან

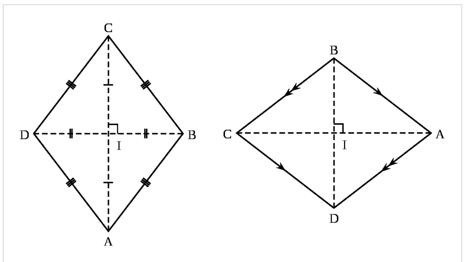
- $S = a^2$



კვადრატის სიმაღლე მისი გვერდია

რომბი

რომბი არის პარალელოგრამი, რომლის ყველა გვერდი ტოლია. მისი დიაგონალები მართი კუთხით გადაკვეთს ერთმანეთს. რომბის დიაგონალები მისი ბისექტრისებია.



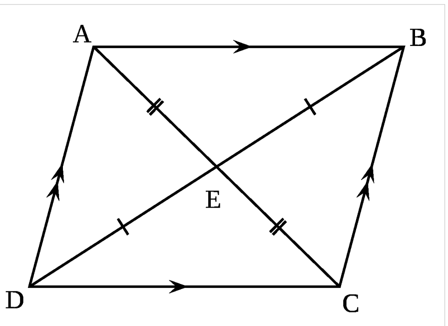
რომბი

პარალელოგრამი

პარალელოგრამი არის ოთხკუთხედი, რომლის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია.

პარალელოგრამის საპირისპირო კუთხეები ტოლია. პარალელოგრამის ფართობი ფუძისა და ამ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

პარალელოგრამს, რომლის ყველა კუთხე მართია, აწოდება მართკუთხედი. პარალელოგრამს, რომლის ოთხივე გვერდი ტოლია, ეწოდება რომბი. პარალელოგრამი, რომელიც ერთდროულად არის რომბიც და მართკუთხედიც, არის კვადრატი.



პარალელოგრამი

ოთხკუთხედი

ოთხკუთხედი — წარმოადგენს მრავალკუთხედს, რომელიც შეიცავს ოთხ წვეროს და ოთხ გვერდს.

თვისებები

ნებისმიერი ამოზნექილი ოთხკუთხედის ფართობი ტოლია დიაგონალებისა და მათ შორის კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრისა. ოთხკუთხედის კუთხეების ჯამი ტოლია $2\pi = 360°$.

ოთხკუთხედი შეიძლება ჩაიხაზოს წრეში, თუ მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

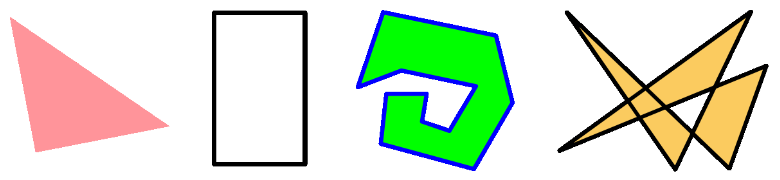
ოთხკუთხედი წრეზე შემოხაზულია, თუ მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია. ($AB + CD = BC + AD$)

პრიზმა

პრიზმა არის მრავალწახნაგი, რომელიც შედგება ორი მრავალკუთხედისგან, რომლებიც ერთიმეორისგან პარალელური გადატანით მიიღება და ამ მრავალკუთხედების შესაბამისი გვერდების შემაერთებელი წახნაგებისგან. ეს წახნაგები პარალელოგრამებია. პრიზმის შემადგენელ მრავალკუთხედს მისი ფუძე ეწოდება.

მრავალკუთხედი

მრავალკუთხედი, ასევე **პოლიგონი** გეომეტრიაში ბრტყელი ფიგურაა, რომელიც შემოსაზღვრულია მონაკვეთების სასრული რაოდენობით. ამ მონაკვეთებს მრავალკუთხედის გვერდები ეწოდება, ხოლო წერტილები, სადაც ეს გვერდები ერთმანეთს კვეთს, მრავალკუთხედის წვეროებია. სხვანაირად, მრავალკუთხედი ეწოდება მარტივ შეკრულ ტეხილს, რომლის მეზობელი გვერდები ერთ წრფეზე არ ძევს, მის მიერ შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილთან ერთად.



მრავალკუთხედების ნიმუშები

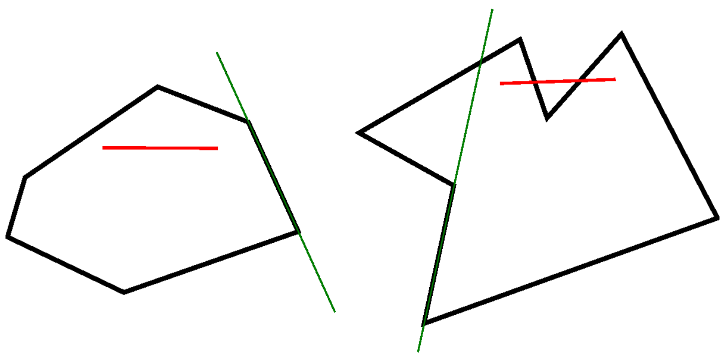
მრავალკუთხედის ორ წვეროს ეწოდება მეზობელი, თუ ისინი ერთსა და იმავე გვერდს ეკუთვნის. მრავალკუთხედის ორ გვერდს ეწოდება მეზობლი, თუ მათ საერთო წვერო გააჩნიათ. მრავალკუთხედში ორი არამეზობელი გვერდის შემაერთებელ მონაკვეთს დიაგონალი ეწოდება.

მრავალკუთხედის კუთხე ეწოდება იმ კუთხეს, რომელსაც მისი გვერდები ადგენენ (მრავალკუთხედის მხრიდან).

მრავალკუთხედის სახეები

სამი გვერდის მქონე მრავალკუთხედს სამკუთხედი ეწოდება, ოთხი გვერდის მქონეს — ოთხკუთხედი, ხუთისას — ხუთკუთხედი და ა.შ. n გვერდის მქონე მრავალკუთხედს n-კუთხედი ჰქვია.
მრავალკუთხედს ეწოდება ამოზნექილი, თუ ის აკმაყოფილებს ნებისმიერს ამ პირობებიდან:

1. ძევს მის ნებისმიერ გვერდზე გამავალი წრფის მხოლოდ და მხოლოდ ცალ მხარეს;
2. წარმოადგენს ორი ნახევარსიბრტყის თანაკვეთას (მათი საერთო წერტილების სიმრავლეს);
3. მასში ნებისმიერად აღებული ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი მთლიანად მრავალკუთხედს ეკუთვნის;



ამოზნექილი და არაამოზნექილი მრავალკუთხედები. როგორც ჩანს, ამოზნექილი მრავალკუთხედი მის გვერდზე გამავალი წრფის ცალ მხარეს მდებარეობს და მასში აღებული ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი მთლიანად მრავალკუთხედს ეკუთვნის, რასაც ვერ ვიტყვით არაამოზნექილ მრავალკუთხედზე.

მაშასადამე, ნებისმიერი სამკუთხედი ამოზნექილი მრავალკუთხედია.
ამოზნექილ მრავლკუთხედს ეწოდება წესიერი, თუ მისი ყოველი გვერდი ტოლია და ყოველი კუთხე ტოლია. ამის მაგალითებია წესიერი (ტოლგვერდა) სამკუთხედი, კვადრატი და ა.შ.
ამოზნექილ მრავალკუთხედს ეწოდება წრეწირზე შემოხაზული, თუ მისი თითოეული გვერდი ერთსა და იმავე წრეწირს ეხება. წრეწირში ჩახაზული მრავალკუთხედი ისეთ პოლიგონს ეწოდება, რომლის თითოეული წვერო ერთსა და იმავე წრეწირზე ძევს.

მრავალკუთხედები	
სამკუთხედი | ოთხკუთხედი | ხუთკუთხედი | ჰექსაგონი | ჰეპტაგონი | ოქტაგონი | ნონაგონი | დეკაგონი | ჰენდეკაგონი | დოდეკაგონი | ტრიდეკაგონი | ტეტრადეკაგონი | პენტადეკაგონი | იკოსაგონი | ტრიკონტაგონი | პენტაკონტაგონი | ჰექტაგონი | კილიაგონი | მირიაგონი	

დიფერენციალური გეომეტრია და ტოპოლოგია

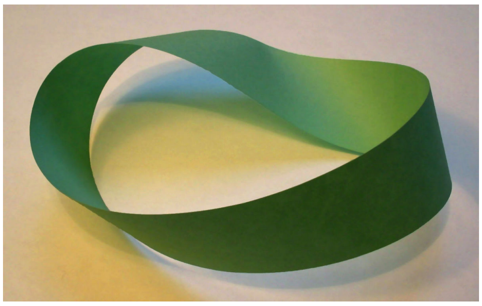
დიფერენციალური გეომეტრია და ტოპოლოგია — მათემატიკის ორი მომიჯნავე დარგი. მათემატიკის ამ ორი დარგის გაყოფა თითქმის შეუძლებელია.

კლასიკურ დიფერენციალურ გეომეტრიაში შეისწავლებოდა წირები და ზედაპირები სამგანზომილებიან სივრცეში. დიფერენციალური ტოპოლოგია სწავლობს დიფერენციალურ მრავალნაირობებს და მათზე განსაზღვრულ დიფერენცირებად ფუნქციებს. იგი ბუნებრივად აღმოცენდა დიფერენციალური განტოლებების შესწავლიდან.

ტოპოლოგია

ტოპოლოგია (*ბერძნ.* topos - ადგილი, logos - სწავლა) — მათემატიკის დარგი, რომლის შესწავლის ობიექტებია ტოპოლოგიური სივრცეები, უწყვეტი ასახვები, და დაკავშირებული მათემატიკური ცნებები. მისი მეშვეობით ხდება მათემატიკაში ისეთი ფუნდამენტური ცნებების ფორმალიზება, როგორიცაა ბმულობა, კრებადობა, უწყვეტობა და ა.შ. მე–20 საუკუნის დასაწყისში დარგის დაარსებისას, მას *geometria situs* (ლათ. "ადგილის გეომეტრია") და *analysis situs* (ლათ. "ადგილის ანალიზი") უწოდებდნენ. 1925-75 წლებში მატემატიკის განვითარების ყველაზე მნიშვნელოვანი სფერო იყო.

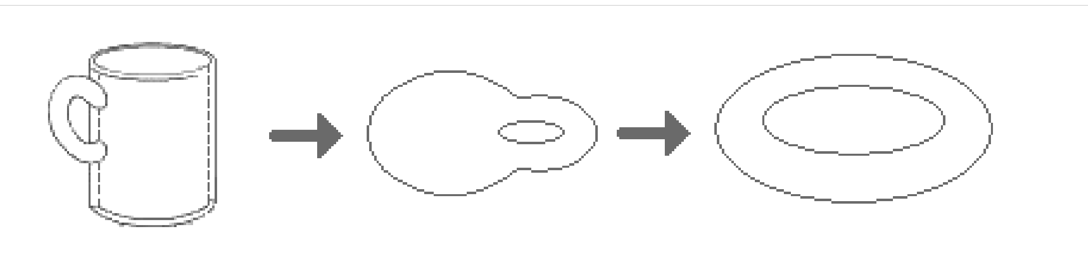
ელემენტარული აღწერა



მობიუსის ლენტი, ერთმხრიანი ზედაპირი. მსგავსი ფიგურები ხშირად გვხვდება ტოპოლოგიაში

ტოპოლოგიის ერთ-ერთი თეორემა პოპულარულ ენაზე შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოყალიბდეს: "შეუძლებელია თმით დაფარული ბურთის მთლიანად გლუვად დავარცხნა". ეს ინტუიციურად გასაგები ფაქტია. ფორმალურად კი იგივე თეორემა შემდეგში მდგომარეობს: "სფეროზე არ არსებობს არაქრობადი უწყვეტი მხები ვექტორი", და მისი დამტკიცება არატრივიალურია. ეს თეორემა სამართლიანია არა მარტო სფეროსათვის არამედ ყველა შეკრული ზედაპირისთვის ნახვრეტების გარეშე (გარკვეული პირობების დაკმაყოფილების შემთხვევაში) და უკავშირდება "გეომეტრიული ფიგურების" გარკვეულ ზოგად თვისებებს. ამ თვისებების გამოკვლევა ტოპოლოგიის საკითხია.

ხშირად ტოპოლოგიას აღწერენ როგორც გეომეტრიის ნაწილს, გეომეტრიული ობიექტების უზოგადესი თვისებების შესახებ, თვისებების რომლებიც უცვლელი რჩება უწყვეტი დეფორმაციების დროს (შეკუმშვა, გაწელვა, მოღუნვა; იხ. ნახატი ქვემოთ). გეომეტრიული ფიგურები, რომლებიც ერთიმეორისგან ამგვარი უწყვეტი დეფორმაციების საშუალებით მიიღება, ტოპოლოგიის თვალსაზრისით არ განსხვავდება (ჰომეომორფიზმი).



ფინჯანი, გირი და ბლითი "ტოპოლოგიურად" ერთიდაიგივე გეომეტრიულ ფიგურებია

ალგებრული ტოპოლოგიის ზოგადი მეთოდია სხვადასხვა "გეომეტრიული" ობიექტებისთვის უფრო გამოთვლადი "ალგებრული" (დისკრეტული) ინვარიანტების შეთანადება. ამბობენ რომ ალგებრული ტოპოლოგია სწავლობს გეომეტრიას, ალგებრის გამოყენებით. (ტოპოლოგიის სხვადასხვა დარგების შესახებ იხილეთ ქვემოთ).

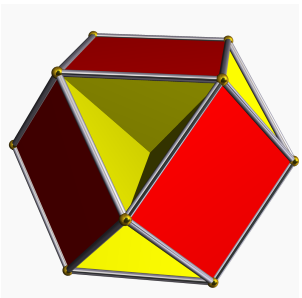
ტოპოლოგიამ უმთავრესი გავლენა მოახდინა მათემატიკის ისეთ დარგებზე როგორიცაა: ალგებრული გეომეტრია, დიფერენციალური გეომეტრია, დინამიკური სისტემები, დიფერენციალური განტოლებები და სხვ.

ისტორია

ტოპოლოგიური სივრცეები ბუნებრივად ჩნდება მათემატიკურ ანალიზში და გეომეტრიაში. როგორც მათემატიკის დამოუკიდებელი დისციპლინა ტოპოლოგია ჩამოყალიბდა 20–ე საუკუნის დასაწყისში და მალევე მათემატიკური კვლევის ერთ-ერთი უმთავრესი მიმართულება გახდა. ტოპოლოგიის წარმოშობას წინ უძღოდა 19–ე საუკუნის ბოლოს გეორგ კანტორის მიერ სიმრავლეთა თეორიის შექმნა. ტოპოლოგია არის მათემატიკის პირველი დარგი, რომლის ფორმულირება სიმრავლეთა თეორიის მეშვეობით განხორციელდა. ეს, თავის მხვრივ, გახდა სიმრავლეთა თეორიის თანამედროვე მათემატიკს დაფუძნების სტანდარტულ საშუალებად ქცევის მნიშვნელოვანი პირობა.

ტოპოლოგიის წარმოშობისათვის განსაკუთრებით აღსანიშნავია ანრი პუანკარეს შრომები, სადაც პირველად ჩნდება ჰომოლოგიის და ჰომოტოპიის ცნებები (1895). მოგვიანებით, 1906 წელს მორის ფრეშემ ფუნქციათა სივრცეებზე სხვადასხვა მათემატიკოსების შრომებიდან ერთიანი თეორიის შექმნის მიზნით შემოიტანა მეტრიკული სივრცის ცნება. სახელდობრ, ტოპოლოგიური სივრცის განმარტებები კი პირველად ჩამოაყალიბეს ფელიქს ჰაუსდორფმა (1914) და ოდნავ უფრო ზოგადი სახით კაზიმირ კურატოვსკიმ (1922). საქართველოში ტოპოლოგიურ კვლევას საფუძველი ჩაუყარა გიორგი ჭოღოშვილმა. ქართულ ტოპოლოგიურ სკოლას მრავალი შესანიშნავი მათემატიკოსი ამშვენებს, მათ შორის გამორჩეულნი არიან ნოდარ ბერიკაშვილი, თორნიკე ქადეიშვილი, ალიკო ჩიგოგიძე და სხვები.

ტოპოლოგიის მიმართულებები



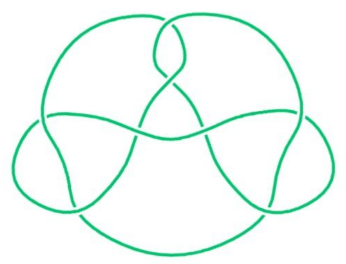
პოლიჰედრა (კუბო-ჰემიოკტაჰედრონი)

ტოპოლოგია მოიცავს ერთმანეთისგან საკმაოდ დაშორებულ რამდენიმე ქვედარგს.

- სიმრავლური ტოპოლოგია ანუ ზოგადი ტოპოლოგია იკვლევს ზოგად ტოპოლოგიურ სივრცეებს. მისი პირველი თეორემები შეეხება ტოპოლოგიური სივრცეების ფუნდამენტურ თვისებებს (იხ. ქვემოთ), რომლებიც მნიშვნელოვანია მათემატიკის სხვა ნაწილებში. სიმრავლური ტოპოლოგია თანამედროვე მათემატიკური ანალიზის სტანდარტული საფუძველია.
- ალგებრულ ტოპოლოგიაში შეისწავლება უფრო ვიწრო ტოპოლოგიური სივრცეების კლასები, მაგალითად პოლიჰედრები და CW კომპლექსები.

დარგი ინტენსიურად იყენებს აბსტრაქტულ ალგებრას. მე–20 საუკუნის მეორე ნახევრიდან მასზე გავლენა იქონია კატეგორიათა თეორიამ (იხ. წარმოუბული ფუნქტორი, სიმპლიციალური სიმრავლე). თავის მხრივ, ალგებრული ტოპოლოგიის იდეებს გავლენა აქვთ ალგებრულ გეომეტრიაზე, ალგებრასა და კატეგორიათა თეორიაზე. ალგებრულმა ტოპოლოგიამ თანამედროვე მათემატიკაში შემოიტანა ისეთი მნიშვნელოვანი ცნებები, როგორიცაა: დამფარავი ასახვა, ფიბრაცია, ფუნდამენტური ჯგუფი, ჰომოტოპია, ჰომოლოგია, კოჰომოლოგია, სპექტრალური მიმდევრობა.

- ტოპოლოგიის კიდევ ერთი ვრცელი დარგი დიფერენციალური ტოპოლოგია იკვლევს აბსტრაქტულ დიფერენციალურ სტრუქტურებს, ეს მოიცავს: დიფერენციალურ მრავალნაირობებს, დიფერენციალურ ფორმებს და ა.შ. ისტორიულად იგი აღმოცენდა დიფერენციალური განტოლებების შესწავლიდან. დიფერენციალური ტოპოლოგიის ცნობილი სტოქსის თეორემა არის ანალიზის ფუნდამენტური თეორემის განზოგადება დიფერენციალური ფორმებისთვის.



კვანძების თეორია. ტოპოლოგიის ქვედარგი

ტოპოლოგიის სხვა მიმართულებებია, მაგალითად, კვანძების თეორია, (კო)ბორდიზმების თეორია, ტოპოლოგიური K-თეორია და სხვ.

ზოგადი ტოპოლოგიის ზოგიერთი თეორემა

- ტიხონოვის თეორემა: კომპაქტური სივრცეების ნამრავლი კომპაქტურია.
- თეორემები უძრავი წერტილის შესახებ გამოიყენება დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად.
- ტიცეს გაფართოების თეორემა: ნორმალური სივრცის ნებისმიერ ჩაკეტილ ქვესიმრავლეზე განმარტებული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქცია შეიძლება გავრცელდეს მთელ სივრცეზე.
- მეტრიზაციის თეორემები იძლევა ტოპოლოგიური სივრცის მეტრიზებადობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს.
- ბერის კატეგორიის თეორემა: თუ X სრული მეტრიკული სივრცეა ან ლოკალურად კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცე, მაშინ მისი არსადმკვრივი ქვესიმრავლეების ნებისმიერი თვლადი გაერთიანების ბირთვი ცარიელია.

უფრო ზოგადი თეორიები

შედეგების ანალიზს და შემდგომ მათემატიკურ აბსტრაგირებას მივყავართ უფრო ზოგადი სტრუქტურების კვლევისკენ. უწერტილო ტოპოლოგია სწავლობს ტოპოლოგიურ სივრცეებთან დაკავშირებულ თვისებებს კიდევ უფრო ზოგად სიტუაციებში. თავდაპირველად ტოპოლოგიაში გაჩენილმა იდეებმა აგრეთვე განვითარება ჰპოვა კატეგორიათა თეორიის სხვადასხვა კონტექსტში.

ლიტერატურა

- James Munkres (1999). *Topology*, 2nd edition, Prentice Hall.
- John L. Kelley (1975). *General Topology*. Springer-Verlag.
- Allen Hatcher, *Algebraic Topology* , Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович, Наглядная топология [1] выпуск 21 серии «Библиотечка квант» М., Наука, 1982.

იხილეთ აგრეთვე

- ბმული სივრცე
- ეილერის მახასიათებელი
- კომპაქტური სივრცე
- მეტრიზაცია (ტოპოლოგია)
- უწყვეტი ასახვა
- ღია სიმრავლე
- ჰაუსდორფის სივრცე

მინიშნებები

[1] http://www.mccme.ru/free-books/djvu/geometry/boltiansky-nagl-topo.htm

მათემატიკური თეორემები

ალგებრის ფუნდამენტური თეორემა

ალგებრის ფუნდამენტური თეორემა შემდეგში მდგომარეობს:

> ერთი ცვლადის კომპლექსურ კოეფიციენტებიან მრავალწევრს გააჩნია ერთი მაინც კომპლექსური ფესვი. ე.ი. თუ $p(z)$ კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრია, მაშინ არსებობს ისეთი კომპლექსური რიცხვი z_0, რომ $p(z_0)=0$.
>
> სხვა სიტყვებით, კომპლექსურ რიცხვთა ველი ალგებრულად ჩაკეტილი ველია.

არითმეტიკის ფუნდამენტური თეორემა

არითმეტიკის ფუნდამენტური თეორემა - მდგომარეობს შემდეგში:

> ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი $n > 1$ შეიძლება წარმოდგინდეს ნამრავლის სახით: $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, სადაც $p_1, \ldots, p_k$ მარტივი რიცხვებია; ეს წარმოდგენა ერთადერთია მამრავლების მიმდევრობის სიზუსტით.

ხშირად ასევე წერენ $n = p_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{d_k}$, სადაც $p_1 < \ldots < p_k$ *განსხვავებული* მარტივი რიცხვებია, ხოლო $d_1, \ldots, d_k$ რაღაც ნატურალური რიცხვები.

კალკულუსის ფუნდამენტური თეორემები

ანალიზის ფუნდამენტური თეორემა – მდგომარეობს შემდეგში:

თუ f და F $[a, b]$ ინტერვალზე განსაზღვრული ფუნქციებია და $f(x) = F'(x)$. მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

თუ f $[a, b]$ ინტერვალზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

მაშინ

$$F'(x) = f(x).$$

გოდელის არასრულობის თეორემები

გოდელის არასრულობის თეორემები - კურტ გიოდელის მიერ დამტკიცებული ცნობილი თეორემები მათემატიკურ ლოგიკაში.

გოდელის არასრულობის პირველი თეორემა: ნებისმიერი თავსებადი ფორმალური თეორიისათვის, რომელიც შეიცავს *ძირითად არითმეტიკულ ჭეშმარიტებებს* შეიძლება აიგოს არითმეტიკულ ფორმულა F ისეთი რომ არც F და არც "არა F" არ არის მოცემული თეორიის თეორემა (ე.ი. არ არის დამტკიცებადი მოცემულ ფორმალურ თეორიაში).

სხვა სიტყვებით ნებისმიერი ესეთი თეორია არასრულია.

გოდელის არასრულობის მეორე თეორემა: ნებისმიერი საკმარისად მდიდარ ფორმალური თეორიაში თეორემა ამავე თეორიის თავსებადობის შესახებ დამტკიცებადია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ეს თეორია არათავსებადია.

კანტორის თეორემა

სიმრავლეთა თეორიაში **კანტორის თეორემა**, გვეუბნება რომ, ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლე უფრო მაღალი კარდინალობისაა ვიდრე თვითონ ეს სიმრავლე. ანუ შეუძებელია არსებობდეს ფუნქცია სიმრავლიდან მის ქვესიმრავლეთა სიმრავლეში, რომლისთვისაც მნიშვნელობათა არე მთელი ქვესიმრავლეთა სიმრავლეა.

გეორგ კანტორმა ეს თეორემა, თავისი დამტკიცებით (რომელიც აქვეა მოყვანილი) გამოაქვეყნა 1891 წელს. მიუხედავად იმისა, რომ მანამდე არსებობდა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლის არათვლადობის სხვა დამტკიცებები, ეს დამტკიცება მათზე უფრო მარტივი აღმოჩნდა და დღემდე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის არათვლადობა ამ დამტკიცების გამოყენებით ისწავლება.

დამტკიცება

ამ თეორემის დამტიკების ყველაზე გავრცელებული მეთოდი ცნობილია როგორც **კანტორის დიაგონალური არგუმენტი**. რადგან, როდესაც ამ მეთოდით ვამტკიცებთ რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლე არათვლადია, იმ ფუნქციას, რომლიც არარსებობას ვამტკიცებთ კვადრანტში ვწერთ და მის დიაგონალზე განლაგებულ რიცხვებს განვიხილავთ.

უშუალოდ დამტკიცება კი ასეთია:

დავუშვათ A არის განსახილველი სიმრავლე P(A) კი მის ქვესიმრავლეთა სიმრავლე. დავუშვათ თეორემის საწინააღმდეგო - რომ არსებობს ფუნქცია f A-დან P(A)-ში, რომელიც P(A)-ს თითოეულ ელემენტს ფარავს.

განვიხილოთ A-ს შემდეგი ქვესიმრავლე. $B = \{ x \in A : x \notin f(x) \}$.

მაშინ სიმრავლე B არის f-ის მნიშვნელობათა არეში დაშვების თანახმად. ანუ B=f(x) (სადაც x A-ს რომელიმე ელემენტია). გვაქვს ორი შესაძო შემთხვევა.

1. $x \in f(x)$ ანუ B-ს განმარტებით $x \notin B$. მაგრამ f(x) და B ერთიდაიგივეა და არ შეიძლება x თან ეკუთვნოდეს და თან არ ეკუთვნოდეს ერთსადაიმავე სიმრავლეს.

2. $x \notin f(x)$ ანუ B-ს განმარტებით $x \in B$. ამ შემთხვევაშიც იგივე პრობლემას ვაწყდებით.

ანუ ორივე შემთხვევას წინააღმდეგობაში შევყავართ. შესაბამისად ჩვენი საწყისი დაშვება f ფუნქციის არსებობის შესახებ არასწორი იყო. რითიც თეორემა დამტკიცებულია.

ოთხი ფერის პრობლემა

ოთხი ფერის პრობლემა – ამ სახელწოდებით ცნობილია შემდეგი ამოცანა:

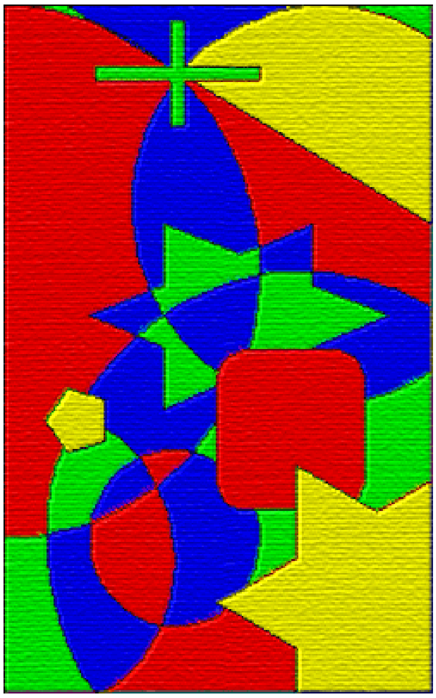
> შესაძლებელია თუ არა სიბრტყეზე დახატული ნებისმიერი პოლიტიკური რუკა შეიღებოს მხოლოდ ოთხი ფერის გამოყენებით ისე, რომ არცერთი მოსაზღვრე ქვეყანა არ აღმოჩნდეს ერთი და იგივე ფერით შეღებილი.

უფრო მათემატიკური სახით იგივე ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

> შესაძლებელია თუ არა ნებისმიერი ბრტყელი გრაფის წვეროები შევღებოთ ოთხი ფერის გამოყენებით ისე, რომ ყოველი მომიჯნავე წვერო შეღებილი იყოს განსხვავებული ფერებით.

ოთხი ფერის ამოცანა პირველად დასვა ფ. გოსრიმ 1852 წელს. მასზე დადებითი პასუხი გასცეს ამერიკელმა მათემატიკოსებმა კ. აპელმა და ვ. ჰაკენმა 1976 წელს.

ოთხი ფერის პრობლემა პოპულარული მათემატიკური ლიტერატურის ერთ-ერთი საყვარელი თემაა. ყველაზე ხშირად მას სვამენ ზემოთ მოყვანილი სახით, პოლიტიკური რუკის შეღებვის შესახებ. თუმცა, რა თქმა უნდა, პრაქტიკული კარტოგრაფიის თვალსაზრისით ამოცანას დიდი მნიშვნელობა არ აქვს.



ოთხ ფერით შეღებილი რუკის მაგალითი

ფერმას დიდი თეორემა

ფერმას ბოლო თეორემა (ხშირად **ფერმას დიდი თეორემა**) ცნობილი თეორემაა მათემატიკის ისტორიაში; მდგომარეობს შემდეგში:

> არ არსებობს ისეთი a, b და y მთელი რიცხვები, რომელთათვისაც სრულდება ტოლობა $a^n + b^n = y^n$, სადაც $n > 2$(n ორზე მეტი მთელი რიცხვია).

პიერ დე ფერმა

ფერმას ბოლო თეორემა ალბათ მათემატიკის ყველაზე პოპულარული თეორემაა. იგი ჩამოაყალიბა ფრანგმა მათემატიკოსმა პიერ ფერმამ დიოფანტეს წიგნ "არითმეტიკაზე" მინაწერის სახით, რასაც დაუმატა, რომ მან გადაჭრა ეს ამოცანა, მხოლოდ ადგილის უქონლობის გამო ვერ ახერხებდა დამტკიცების იქვე დაწერას. დღესდღეობით ცნობილია, რომ ამოცანის ამოხსნა შეუძლებელი იყო ფერმის დროინდელი ელემენტარული მათემატიკის საშუალებით. ასე რომ, დამტკიცება, რომელზედაც ფერმა მიუთითებდა, სავარაუდოდ მცდარი იყო ან საერთოდ არ არსებობდა.

სრული სახით ამოცანა გადაიჭრა მხოლოდ 1994 წელს ენდრიუ ვაილსის შრომებში. მანამდე სხვადასხვა დროს გადაჭრილი იქნა 600–ზე მეტო კერძო შემთხვევა. მაგალითად $n = 4$ შემთხვევისთვის ერთ-ერთი დამტკიცება გამოაქვეყნა თვითონ ფერმამ.

ამოცანის ჩამოყალიბების ელემენტარულმა სახემ განაპირობა მისი პოპულარობა არასპეციალისტებს შორის. სინამდვილეში კი ფერმას თეორემა უკავშირდებება თანამედროვე მათემატიკაში მდგარ რამდენიმე უფრო ღრმა პრობლემას.

აღნიშვნისათვის $n = 2$ შემთხვევაში ტოლობას $a^n + b^n = y^n$ აქვს უამრავი ამონახსენი მთელ რიცხვებში.

იხილეთ აგრეთვე

- პიერ ფერმა

ცორნის ლემა

ცორნის ლემა (იგივე **კურატოვსკი–ცორნის** ლემა) ყალიბდება შემდეგნაირად:

ყოველი ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლე, რომლის ნებისმიერ სრულად დალაგებულ ქვესიმრავლეს გააჩნია ზედა ზღვარი, შეიცავს ერთ მაინც მაქსიმალურ ელემენტს.

სიმრავლეთა თეორიაში ცორნის ლემა ეკვივალენტურია ამორჩევის აქსიომის, ანუ შესაძლებელია განხილულ იქნას ამ აქსიომის შემცვლელ აქსიომად.

Article Sources and Contributors

პითაგორას თეორემა *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1857549 *Contributors*: Alsandro, Henry McClean, Otogi, Sosali51, პაატა შ, 10 anonymous edits

ალბათობის თეორია *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1876564 *Contributors*: Alsandro, CommonsDelinker, Dixtosa, Gogitastrong, ITshnik, Island, Leovizza, Mishnadar, Paata Ivanishvili, Prtmrz, Tamok, Turtli, Zangala, 34 anonymous edits

დისპერსია *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1897648 *Contributors*: Mishnadar, Nodar Kherkheulidze, Otogi, Paata Ivanishvili

მათემატიკური ლოდინი *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1853211 *Contributors*: Mishnadar, Nodar Kherkheulidze

შემთხვევითი სიდიდე *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1693586 *Contributors*: Mishnadar

ალბათური განაწილების ფუნქცია *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1923885 *Contributors*: Leovizza, Mishnadar

კოლმოგოროვის აქსიომატიკა *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1577422 *Contributors*: Mishnadar

ალბათური სივრცე *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1707779 *Contributors*: Mishnadar

სიმრავლეთა თეორია *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1874237 *Contributors*: Chano, Giorgi13, Island, Nt258, Ottoshmidt, Tamok

ფარდობითობის თეორია *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1919465 *Contributors*: Alsandro, Fotoni, Givi Kats, Linguistus, Nugo92, Paata Ivanishvili, Schekinov Alexey Victorovich, Tegera

კვანტური მექანიკა *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1895788 *Contributors*: Aeterna, Alsandro, DavKh, Island, Zangala, წკაპო, 6 anonymous edits

ფარდობითობის ზოგადი თეორია *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1833489 *Contributors*: Gogober, პაატა შ

ფარდობითობის სპეციალური თეორია *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1833688 *Contributors*: Gogober, Paata Ivanishvili

გრავიტაცია *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1895908 *Contributors*: BRUTE, Fotoni, Giorgi13, Gogober, ITshnik, Zolokin, კაიშაური, 2 anonymous edits

მატერია *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1879500 *Contributors*: Ikeshel, Zangala

ნიუტონის კანონები *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1922172 *Contributors*: Dixtosa, Otogi, Surprizi, Unmerklich, 4 anonymous edits

წრეწირი *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1900609 *Contributors*: Rustavizauri, Tamok, Zangala, 1 anonymous edits

წრე *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1819117 *Contributors*: Chano, Deu, M., Paata Ivanishvili, Zangala, გიგა, 1 anonymous edits

სამკუთხედი *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1921413 *Contributors*: Alsandro, ITshnik, Melberg, Rastrelli F, Vancho, Zangala, გიგა, 5 anonymous edits

კვადრატი *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1923698 *Contributors*: Alsandro, Deu, Tamok, გიგა, 1 anonymous edits

რომბი *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1892148 *Contributors*: Alsandro, Gnome

პარალელოგრამი *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1904579 *Contributors*: Deu, Island, Tamok, 2 anonymous edits

ოთხკუთხედი *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1896029 *Contributors*: Alsandro, Island, Malafaya, გიგა, 13 anonymous edits

პრიზმა *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1792402 *Contributors*: Island, Tamok, Zangala

მრავალკუთხედი *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1889020 *Contributors*: Alsandro, Vancho

დიფერენციალური გეომეტრია და ტოპოლოგია *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1814163 *Contributors*: Deu, Island, Paata Ivanishvili, Tamok

ტოპოლოგია *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1869410 *Contributors*: Alsandro, George Tarielashvili, Giorgi13, ITshnik, Island, Lika2672, Linguistus, Malafaya, Paata Ivanishvili, Tamok, Zangala, 40 anonymous edits

ალგებრის ფუნდამენტური თეორემა *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1764090 *Contributors*: Alsandro, Mishnadar, Zangala, 3 anonymous edits

არითმეტიკის ფუნდამენტური თეორემა *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1788176 *Contributors*: Alsandro, Linguistus, Zangala, 10 anonymous edits

კალკულუსის ფუნდამენტური თეორემები *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1830810 *Contributors*: Alsandro, Dixtosa, Zangala, 1 anonymous edits

გოდელის არასრულობის თეორემები *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1865925 *Contributors*: Alsandro, Dixtosa, Linguistus, Tamok

კანტორის თეორემა *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1706218 *Contributors*: Alsandro, Nt258, Tamok

ოთხი ფერის პრობლემა *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1808390 *Contributors*: Alsandro, Giorgi13, Linguistus, Tamok, Zangala

ფერმას დიდი თეორემა *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1830623 *Contributors*: Alsandro, Dixtosa, Tamok, Ventusa, Zangala, პაატა შ, წკაპო, 8 anonymous edits

ცორნის ლემა *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?oldid=1477730 *Contributors*: Alsandro, Mishnadar, Tamok, Zangala, 1 anonymous edits

Image Sources, Licenses and Contributors

ფაილი:Pythagorean.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Pythagorean.svg *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: en:User:Wapcaplet

ფაილი:pythagoralg.png *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Pythagoralg.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: EugeneZelenko, HB

Image:Qsicon_Exzellent.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Qsicon_Exzellent.svg *License*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0,2.5,2.0,1.0 *Contributors*: User:Niabot

ფაილი:Facebook_Light_Logo.jpg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Facebook_Light_Logo.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Dvorapa

ფაილი:Dice.jpg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Dice.jpg *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Gaz at en.wikipedia

ფაილი:Glücksrad.PNG *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Glücksrad.PNG *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Original uploader was Honina at de.wikipedia

File:Normal Distribution CDF.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Normal_Distribution_CDF.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Inductiveload

ფაილი:Albert Einstein 1979 USSR Stamp.jpg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Albert_Einstein_1979_USSR_Stamp.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: П. Бендель

ფაილი:HAtomOrbitals.png *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:HAtomOrbitals.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Admrboltz, Benjah-bmm27, Dbc334, Dbenbenn, Ejdzej, Falcorian, Kborland, MichaelDiederich, Mion, Saperaud, 6 anonymous edits

ფაილი:Black Hole Milkyway.jpg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Black_Hole_Milkyway.jpg *License*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.0 *Contributors*: CorvinZahn, Er Komandante, EvaK, Hotshot977, KaragouniS, Qblik, Spuk968, Tano4595, Warrakkk, 27 anonymous edits

ფაილი:Solar sys.jpg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Solar_sys.jpg *License*: unknown *Contributors*: Harman SMith and Laura GEEEEerosa (nee Berwin), graphic artists and contractors to NASA's Jet Propulsion Laboratory.

ფაილი:Newtons laws in latin.jpg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Newtons_laws_in_latin.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Bestiasonica, JdH, Man vyi, Tttrung, Wst, 4 anonymous edits

სურათი:წრეწირი.png *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:წრეწირი.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Alsandro, Rustavizauri

ფაილი:Kreis.png *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Kreis.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Dbenzhuser, EugeneZelenko, Rimshot, Sven, Ævar Arnfjörð Bjarmason, 1 anonymous edits

ფაილი:Triangle.png *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Triangle.png *License*: unknown *Contributors*: Zangala

ფაილი:Triangle.Equilateral.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Triangle.Equilateral.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Darapti, Limaner, Nandhp, Syp, Túrelio, ゆいしあす, 5 anonymous edits

ფაილი:Triangle.Isosceles.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Triangle.Isosceles.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Limaner, Syp, 3 anonymous edits

ფაილი:Triangle.Scalene.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Triangle.Scalene.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Heaven's Wrath, Limaner, Str4nd, Syp, 4 anonymous edits

ფაილი:Triangle.Right.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Triangle.Right.svg *License*: Public Domain *Contributors*: HB, Herzi Pinki, Limaner, Syp, Zzyzx11, 4 anonymous edits

ფაილი:Triangle.Obtuse.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Triangle.Obtuse.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Limaner, Syp

ფაილი:Triangle.Acute.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Triangle.Acute.svg *License*: Copyrighted free use *Contributors*: User:Darsie

ფაილი:Msgavsi samkutkhedebi.png *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Msgavsi_samkutkhedebi.png *License*: Public Domain *Contributors*: Vancho

ფაილი:Samkutkh_paral_msgavseba.png *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Samkutkh_paral_msgavseba.png *License*: Public Domain *Contributors*: Vancho

ფაილი:Triangle.Centroid.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Triangle.Centroid.svg *License*: Public Domain *Contributors*: HB, JMCC1, Limaner, Maksim, RDBury, Str4nd, Wouterhagens, Wutsje, 5 anonymous edits

ფაილი:Triangle.Incircle.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Triangle.Incircle.svg *License*: Public Domain *Contributors*: en:Limaner

ფაილი:Triangle.Orthocenter.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Triangle.Orthocenter.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Darapti, Juliancolton, Limaner, Maksim, 1 anonymous edits

ფაილი:Triangle.Circumcenter.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Triangle.Circumcenter.svg *License*: Public Domain *Contributors*: en:User:Limaner

ფაილი:Geometrie carre.png *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Geometrie_carre.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Bvs-aca, GeorgHH, Maksim, 1 anonymous edits

ფაილი:To ogoros.jpg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:To_ogoros.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Deu

ფაილი:Rhombus.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Rhombus.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Andrejj, Chechof, Darapti, Limaner, Maksim, Tryphon, 2 anonymous edits

ფაილი:Parallelogram.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Parallelogram.svg *License*: Public domain *Contributors*: HB, Laurentius, Limaner, Thomas Reid

ფაილი:Assorted polygons.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Assorted_polygons.svg *License*: Public Domain *Contributors*: CountingPine

ფაილი:Mravalkutkh Amozn Araamozn.svg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Mravalkutkh_Amozn_Araamozn.svg *License*: Public Domain *Contributors*: მომხმარებელი:Vancho

ფაილი:Möbius strip.jpg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Möbius_strip.jpg *License*: Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contributors*: David Benbennick

ფაილი:Homeo tasse.png *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Homeo_tasse.png *License*: Public Domain *Contributors*: Original uploader was CHW at de.wikipedia

ფაილი:Cubohemioctahedron.png *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Cubohemioctahedron.png *License*: Public Domain *Contributors*: Jidari, Rtc

ფაილი:Knot 8sb19.jpg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Knot_8sb19.jpg *License*: Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contributors*: Dbenbenn, EugeneZelenko, Marnanel, 1 anonymous edits

image:FourColorMapEx.png *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:FourColorMapEx.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Anarkman, Darapti, Dcoetzee, Inductiveload, Pamri, Shizhao, Umherirrender, Ysangkok, 1 anonymous edits

ფაილი:Pierre de Fermat.jpg *Source*: http://ka.wikipedia.org/w/index.php?title=ფაილი:Pierre_de_Fermat.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: -

ლიცენზია