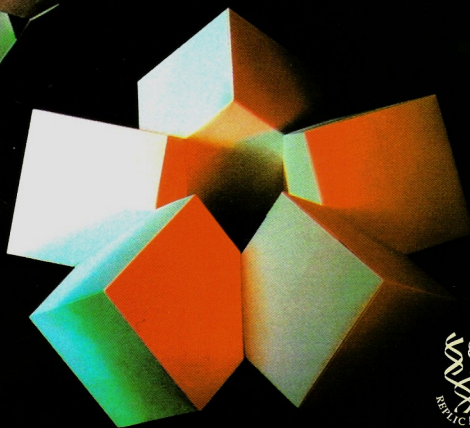


Origami matemáticos

Dobragens de papel para fazer figuras geométricas

David Mitchell



Índice

Notas introdutórias	5
Dicionário de símbolos	12
Cubo	14
Cubos de Colombo	16
Tetraedro	20
Icosaedro	22
Octaedro	24
Octaedro esquelético	28
Tetrahexaedro esquelético	30
Cubo esquelético	32
Dodecaedro rômbo	36
Pirâmide rômbo	38
Tetraedro rômbo	40
Anel rotativo de tetraedros rômbo	44
Dodecaedro rômbo decorativo	46
Estrela rômbo	48
Dodecaedro	52
Dodecaedro em contorno	58
Ir mais longe	62
Transformação	63
Bibliografia	64

Notas Introdutórias

Origami modulares

Os modelos descritos neste livro são exemplos da arte matemática relativamente nova de dobragem modular de papel, em que se reúne um número de módulos simples dobrados para criar um modelo poliédrico. Este tipo de dobragem de papel teve origem nos Estados Unidos, nos tempos de mistura de culturas do início dos anos 60. Desde então, ganhou aderentes no Reino Unido e por todo o mundo, tornando-se popular até no Japão, o lar tradicional de dobragem de papel com uma só folha, onde é conhecido por origami unitário.

Para além de muitas dobragens novas, esta colecção contém alguns dos melhores modelos clássicos, escolhidos pela simplicidade e elegância do seu design e pela pura beleza matemática dos próprios poliedros acabados.

Mesmo que nunca tenha dobrado papel, deverá conseguir atingir resultados louváveis na primeira vez que fizer todos os modelos desta colecção, embora recomende vivamente que comece pelo cubo e pelo tetraedro. Em geral, os modelos fáceis estão no início do livro e os mais difíceis na segunda metade do livro.

Qualidade do papel

O papel normal para fotocópias, de 80 gramas, é o ideal para fazer os modelos desta colecção.

Tamanho do papel

As instruções de todos os modelos começam com papel A4, que é geralmente acessível por baixo preço em quase todo o mundo. No entanto, se não tiver acesso a papel deste tamanho, pode fazê-lo facilmente a partir de qualquer outro rectângulo. O método é descrito como parte das instruções do dodecaedro em contorno, na página 58. Uma das propriedades especiais do rectângulo A4 – que tem lados na proporção de 1 para a raiz quadrada de 2 – é que pode cortá-lo ao meio e fica com dois rectângulos com a mesma forma, que pode cortar ao meio e fica com... *ad infinitum*. Isto torna muito mais fácil aumentar ou diminuir o tamanho dos modelos à escala. As instruções de dobragem especificam o tamanho ideal para começar, mas pode fazer os módulos do tamanho que a qualidade do seu papel e a sua dobragem permitirem.

O limite de aumento do tamanho de um modelo à escala costuma ser a resistência do papel. Os modelos demasiado grandes sucumbem devido ao próprio peso, por isso, se quiser construir modelos mesmo grandes, experimente utilizar cartolina fina. Trabalhar com tamanhos pequenos apresenta um problema diferente. À medida que o modelo fica mais pequeno, a grossura do papel faz com que as dobras se deformem. Se preferir modelos pequenos, utilize o papel de boa qualidade mais fino que conseguir encontrar.

Cortar o papel de acordo com o tamanho desejado

Embora as instruções comecem com A4, por vezes a base do módulo é um quadrado ou um rectângulo intermédio e uma parte do papel tem de ser eliminada. É melhor fazer estes cortes com um x-ato, passando-o cuidadosamente junto a uma régua de metal. Actualmente, a maior parte das boas lojas de arte e trabalhos manuais vendem tapetes de corte de plástico – com propriedades de auto-restabelecimento notáveis – por um preço muito razoável, e a utilização de um destes tapetes evita a danificação de qualquer outra superfície menos adequada. Um tapete de tamanho A4 é suficiente.

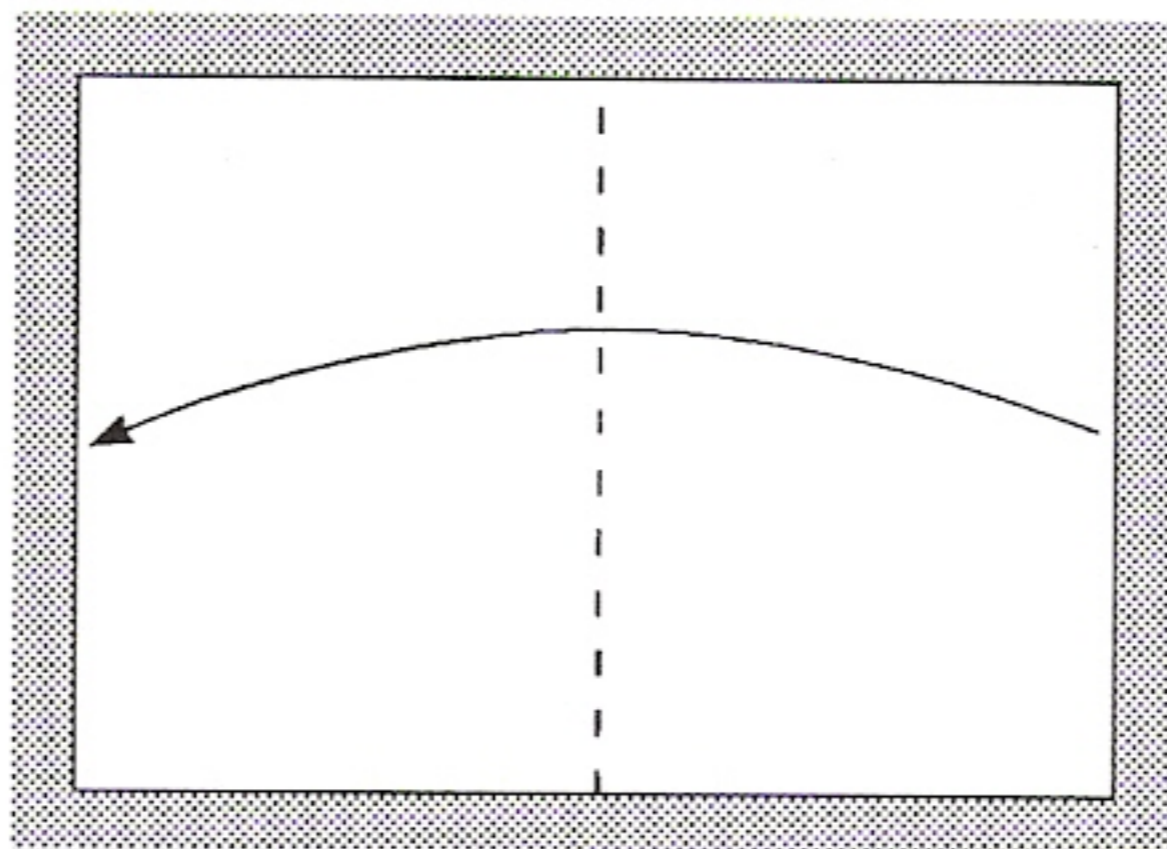
Por uma questão de segurança, faça sempre os cortes ao longo da beira da régua de metal que esteja mais afastada de si. Geralmente, isto significa virar a folha de papel antes de começar a cortar e, depois, voltar a orientá-la de acordo com os esquemas.

Como seguir as instruções de dobragem

As instruções de dobragem do papel estão organizadas numa série de figuras “antes” e “depois”. Cada passo está numerado para que seja clara a sequência de dobras. Os símbolos utilizados neste livro são baseados no sistema inventado por Akira Yoshizawa, do Japão, que são actualmente utilizados e compreendidos por dobradores de papel de todo o mundo. No fim desta introdução, há um dicionário de símbolos e dos seus significados.

Uma figura “antes” típica para uma dobragem simples pode ter o seguinte aspecto:

1

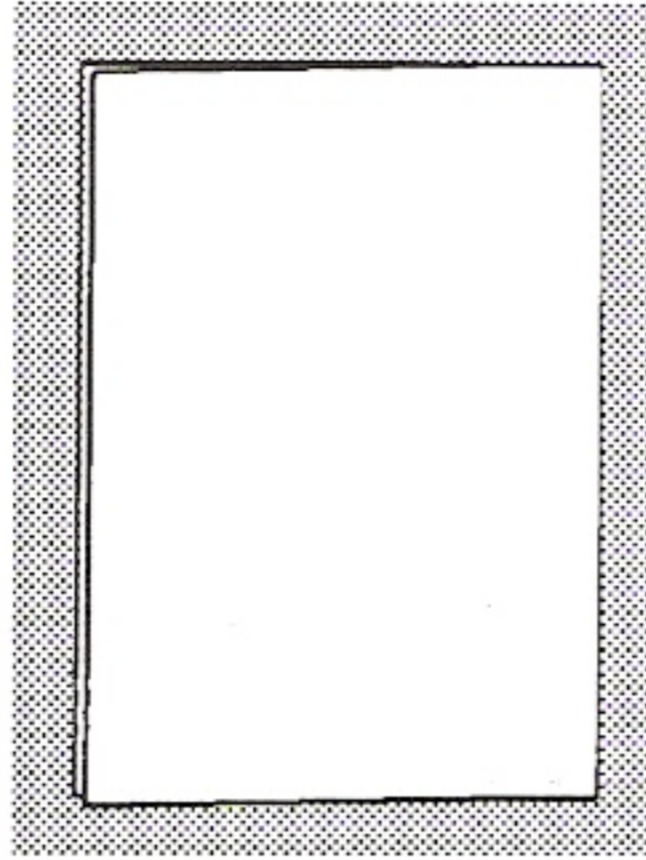


Coloque a orla direita sobre a esquerda e vinque a dobra.

Neste caso, o significado dos símbolos é clarificado pela instrução escrita. Para fazer esta dobra, a orla direita do papel é levantada, levada na direcção indicada pela seta e colocada exactamente sobre a orla esquerda. É boa ideia experimentar fazer isto. Segure o papel no sítio com firmeza e vinque suavemente o centro da dobra até se tornar uma dobra macia. Se as orlas não se tiverem movido, vinque esta dobra em ambas as direcções até o papel ficar plano e passe uma unha sobre a nova orla para acentuar a dobra no papel.

O resultado teria este aspecto:

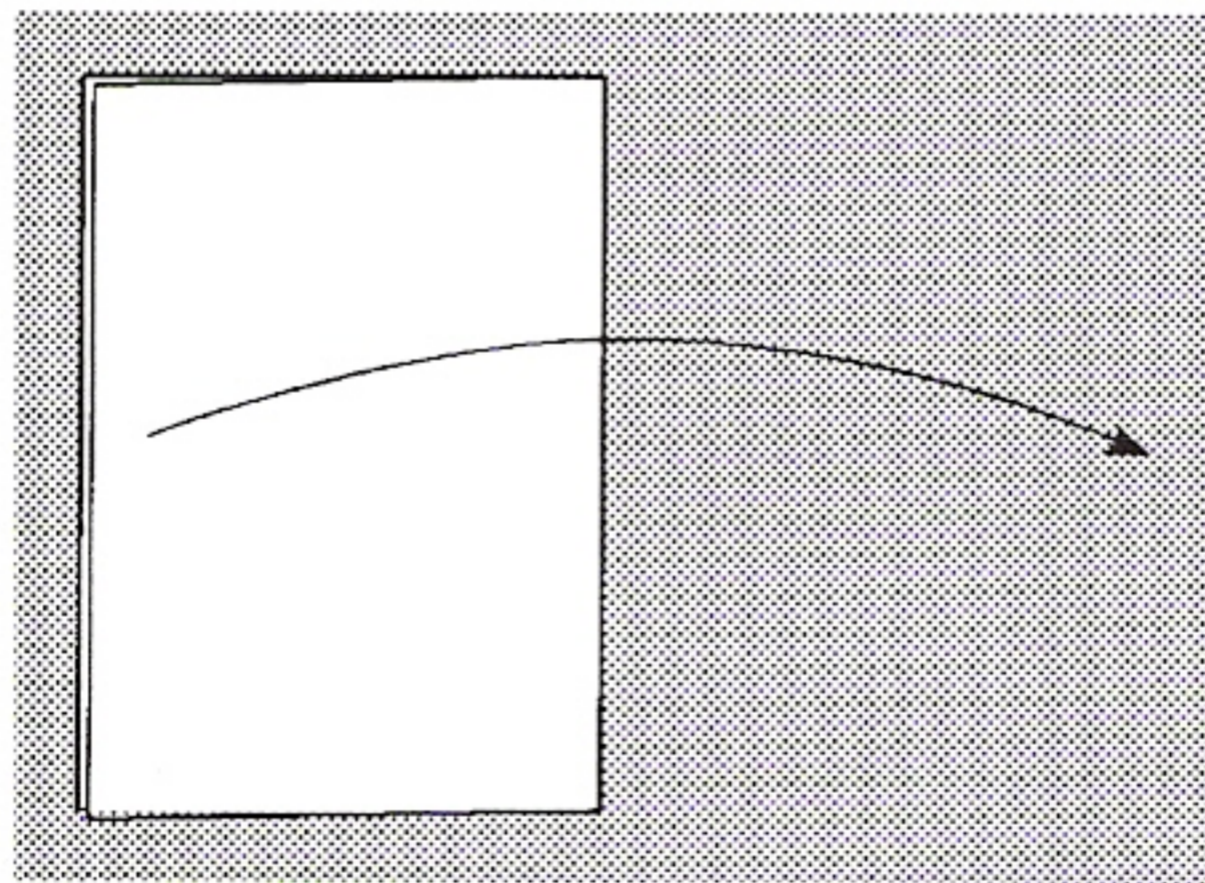
2



Bem... quase este aspecto. Nesta figura "depois", a metade superior do papel está ligeiramente levantada para que se vejam duas camadas na orla esquerda, mas se tiver feito bem a dobra, só poderá ver uma orla no seu modelo. As figuras "depois" são sempre desenhadas desta forma porque é preciso que saiba que deverá haver duas orlas. Se não fosse suposto fazer a dobra com as duas orlas juntas, teria havido uma instrução especial na figura "antes".

A maior parte das figuras "depois" também são a figura "antes" para a dobra seguinte, por isso o segundo passo poderia ter o seguinte aspecto:

2

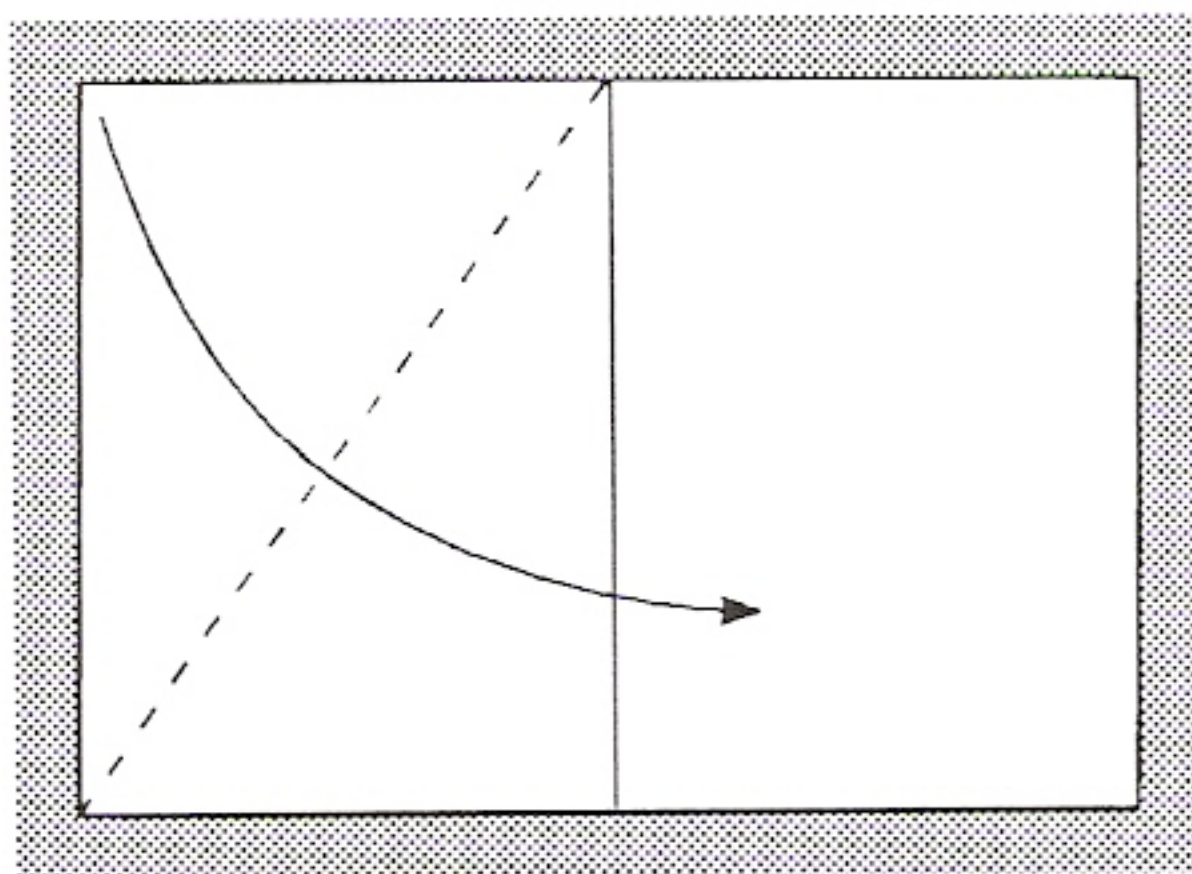


Neste caso, não há instruções escritas porque o significado da figura é óbvio. Significa "abra a folha". Geralmente, as instruções escritas são guardadas para quando a figura não dá informação suficiente.

Depois de ter feito esta dobra, haverá um vinco a meio da folha, de cima a baixo. Pode vê-lo na figura "depois" do passo 3, a seguir. Os vincos são sempre mostrados logo a seguir a serem feitos, mas às vezes há tantos vincos, que mostrá-los todos pode ser confuso. Não se preocupe com aqueles que desaparecem entre figuras, pois isso quer dizer que não precisará mais deles.

A maior parte das instruções de dobragem dizem-lhe simplesmente para colocar uma orla sobre outra, ou um canto sobre um vinco, etc., mas, geralmente, o que é preciso é bastante óbvio se olhar para a figura "depois" antes de fazer a dobra. Porém, utiliza-se neste livro outro tipo de dobra que tem de ser feito de uma maneira bastante diferente. Aqui está uma figura "antes" típica para uma dessas dobras:

3

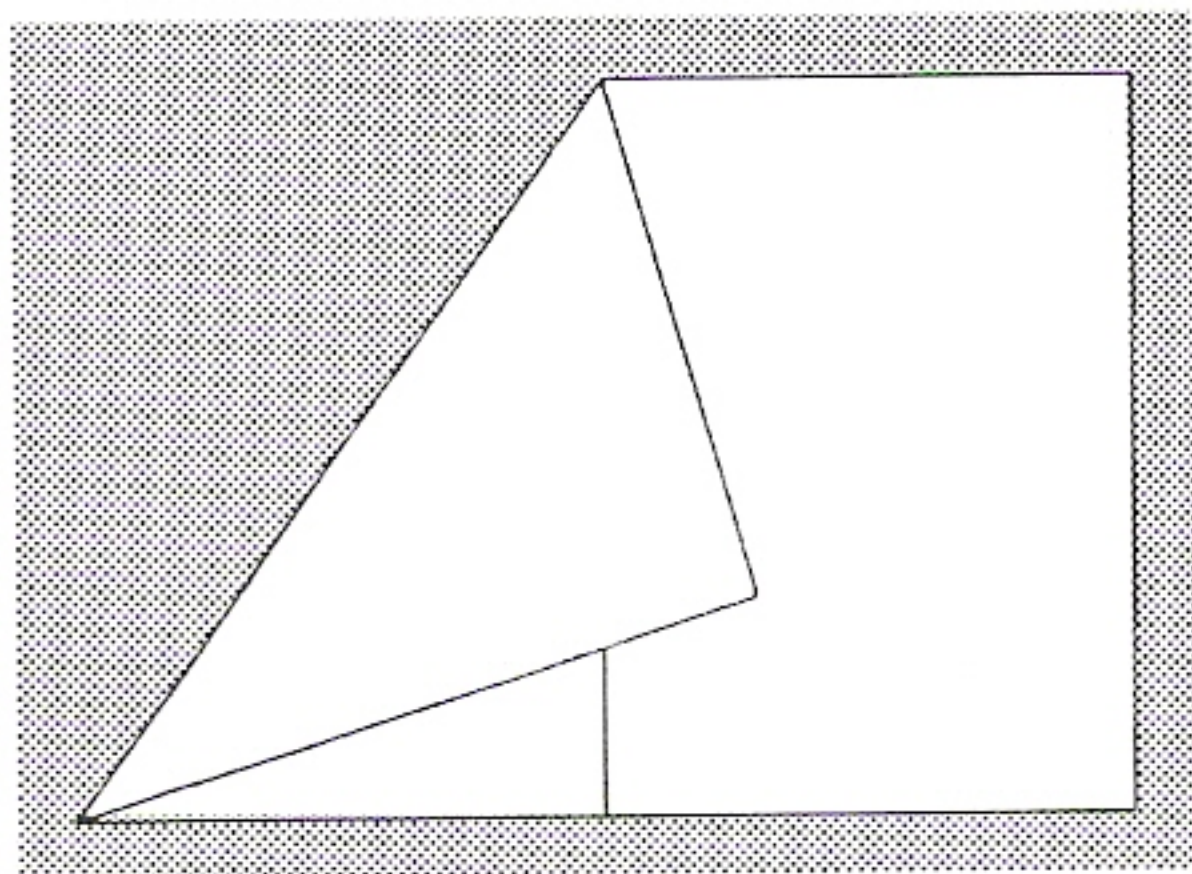


A linha tracejada assinala onde ficará o vinco quando dobrar o papel. Neste caso, o novo vinco irá do vinco central existente até ao canto inferior esquerdo. O problema é que a seta de movimento termina num espaço vazio, por isso não pode saber exactamente onde colocar o canto que vai mover.

A melhor maneira de fazer esta dobra é vincar pequenas secções de cada vez. Trabalhe com secções de aproximadamente um centímetro de comprimento começando do cimo do vinco existente e avançando mais ou menos na direcção certa. Vinque firmemente esta primeira secção, mas mantenha o resto da dobra indefinida até ter a certeza que passa exactamente no ponto do canto. Dobre o papel por fases, ajustando-o sempre que for preciso até acertar.

O resultado é este:

4



A ponta do canto inferior esquerdo deverá ser um bico.

A instrução "vire a folha" é uma das instruções escritas mais comuns no livro. Se achar que o seu modelo deixou de se assemelhar às figuras "depois", é provável que tenha saltado um passo.

Conselhos relativos à dobragem

- É mais fácil fazer dobras com o papel pousado sobre uma superfície dura e lisa. Se quiser descontraí-lo num cadeirão enquanto dobra, use um livro de capa grossa do tamanho de uma mesa de apoio. Fazer dobragem no ar está restrito exclusivamente a especialistas ou aves.
- Não receie virar a folha ao contrário para poder fazer a dobra da forma mais natural. As figuras foram desenhadas para lhe explicar as dobras, não para lhe dizer como as fazer. O que seria perfeitamente confortável para uma pessoa dextra poderia ser uma tortura para uma pessoa canhota.
- Os melhores instrumentos para acentuar vincos são unhas fortes, mas se as suas não o forem, ou, como as minhas, se gastarem de tanto dobrar, pode utilizar as partes curvas do punho de uma faca ou tesoura.
- Sempre que terminar uma dobragem, examine o exterior do modelo para se certificar de que nenhuma das orlas ou cantos ficou numa posição incorrecta e corrija os defeitos.
- Trate o papel com suavidade. Se o manusear bruscamente, vai amachucá-lo, estragando o aspecto limpo do modelo acabado.
- Se, apesar disso, o seu papel ficar mole devido a muito manuseamento, pode restaurá-lo abrindo-o e engomando-o com o ferro seco e ligeiramente quente. Será fácil voltar a fazer os vincos, pois as linhas permanecerão no papel. Esta é uma boa maneira de avivar módulos velhos, mas tenha cuidado – demasiado calor fará com que as orlas do papel se enrolem.

Conselhos relativos à montagem dos modelos

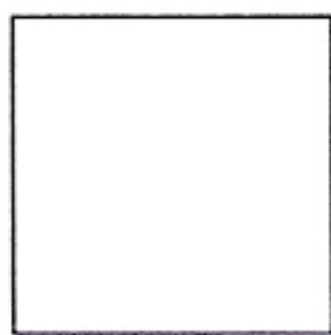
- Dobre todos os módulos antes de os começar a juntar.
- Durante a montagem, tenha com os módulos o mesmo cuidado que teve com o papel quando o dobrou. A construção de qualquer montagem modular tem um elemento de puzzle. Aprecie-o.
- O último módulo é sempre o mais difícil de colocar no sítio. Se se tratar de inserir uma aba numa bolsa, costuma ajudar enrolar ligeiramente a aba. Também pode tentar afrouxar todo o modelo.
- Se todos os módulos estiverem no sítio, mas não conseguirem encaixar bem uns nos outros, tente encaixar cada módulo um pouco de cada vez. Em alternativa, pode ser preciso que todos os módulos que se encontrem num ponto sejam empurrados ao mesmo tempo. Todos os modelos são diferentes. Não há regras específicas para todos.

A utilização de cola

Todos os modelos básicos ficam encaixados firmemente sem cola, mas há diferentes graus de firmeza. Alguns modelos são completamente sólidos e podem ser atirados ao ar sem perigo. Outros requerem um manuseamento mais delicado.

Não há qualquer problema em colar os modelos mais estáveis, mas não exagere. Se fizer uma dobra no sítio errado, pode sempre desfazê-la e voltar a tentar, mas depois de colar um modelo é difícil desmanchá-lo sem destruir todo o modelo. Por este motivo, é melhor utilizar um tipo de cola branca, em bâton – que permanece reposicionável durante algum tempo depois de juntar as superfícies – e praticar primeiro a montagem, para poder apreciar o conjunto exacto dos módulos.

Dicionário de Símbolos



O contorno do papel é assinalado por uma linha grossa.



A seta de movimento indica a direcção em que se deve fazer a dobra. Normalmente, a seta é curva para representar o movimento do papel, em três dimensões, à medida que é dobrado.



As linhas tracejadas são utilizadas para assinalar o eixo de simetria da dobra. Esta linha tracejada mostra que o papel se move em arco em direcção à pessoa que o dobra.



A alternativa da linha tracejada e pontilhada é utilizada com muito menos frequência. Indica que o papel se move em arco na direcção contrária à pessoa que o dobra.



Uma linha estreita assinala o sítio onde foi feito um vinco e o mesmo desdobrado, deixando uma linha no papel.

Muitas vezes, os vincos são feitos no papel numa fase inicial para, mais tarde, termos facilidade em fazer dobras mais complexas.



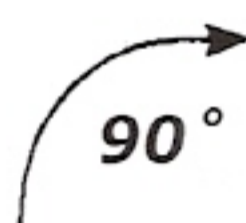
Esta é uma segunda forma de seta de movimento que significa "dobre e desdobre". Só é utilizada quando o resultado da parte "dobre" da instrução é óbvia e não precisa de ser representada.



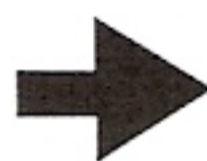
Este símbolo significa que deverá ser aplicada uma pressão suave no modelo na direcção que a seta indica.



Um círculo é utilizado para identificar, no modelo, um ponto que é referido na instrução escrita.



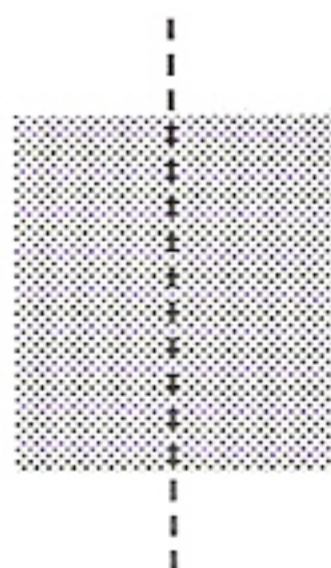
Isto significa que uma dobra só deve ser feita até ao número de graus indicados.



A seta de inserção é utilizada para mostrar como são montados os módulos acabados.



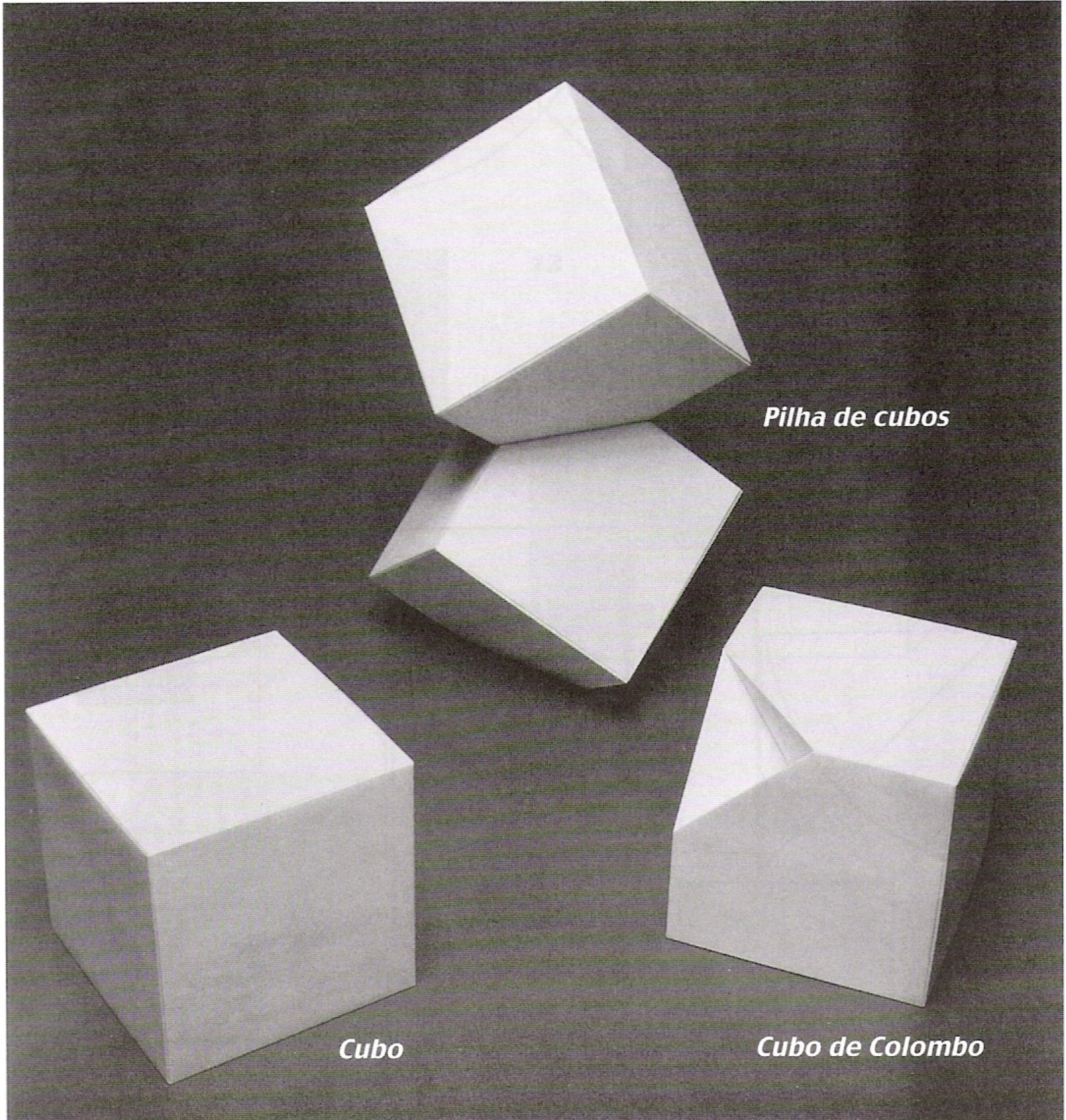
O símbolo da régua indica que deverá ser cortada a extremidade do papel. O corte deverá ser feito ao longo da orla marcada com a linha mais grossa.



Uma caixa sombreada sem contorno é utilizada para indicar que o aspecto do modelo acabado será melhorado se a área sombreada não tiver vincos (embora, evidentemente, o eixo da dobra a atravesse).

Cubo

Cubos de Colombo



Pilha de cubos

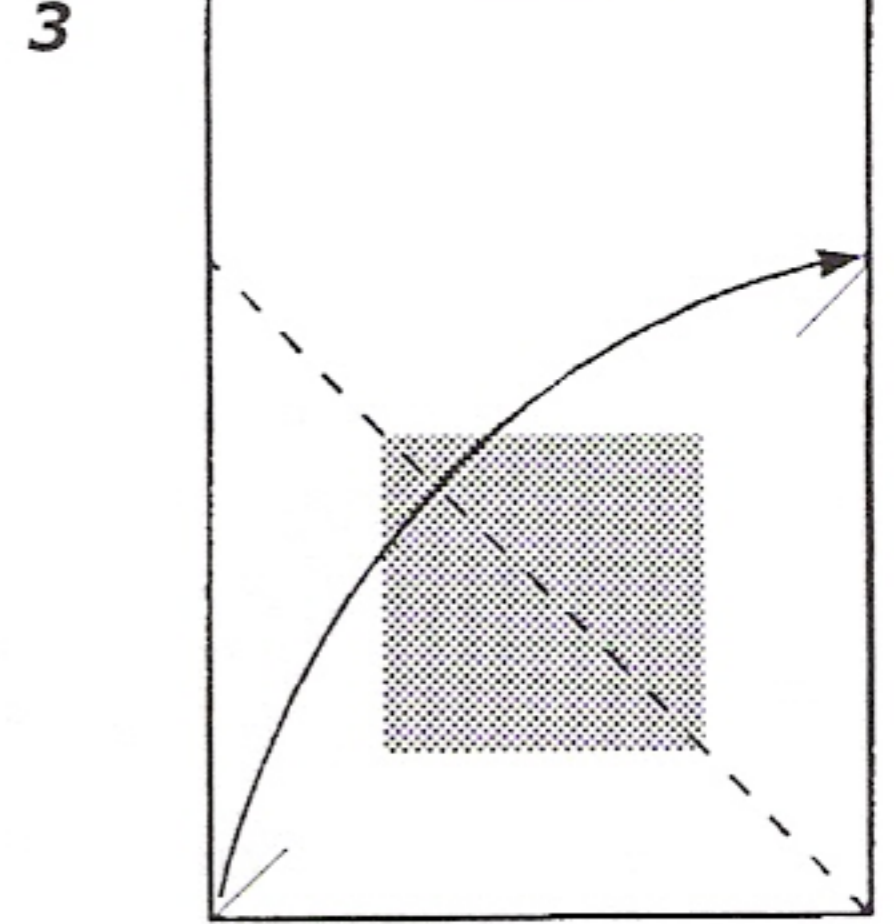
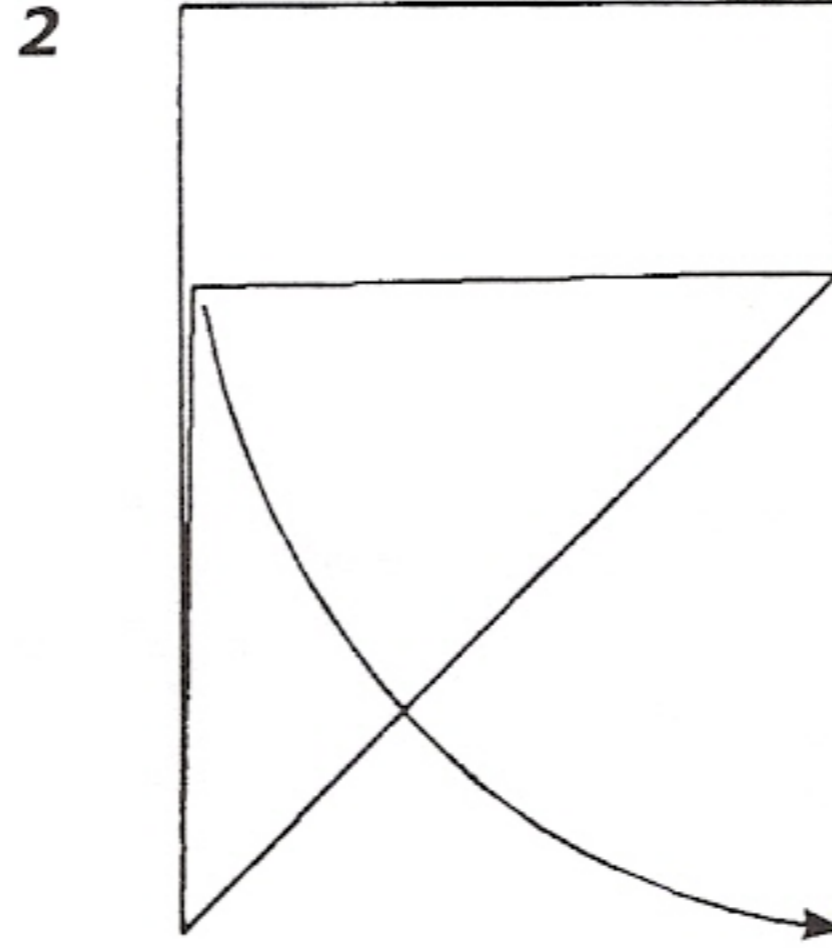
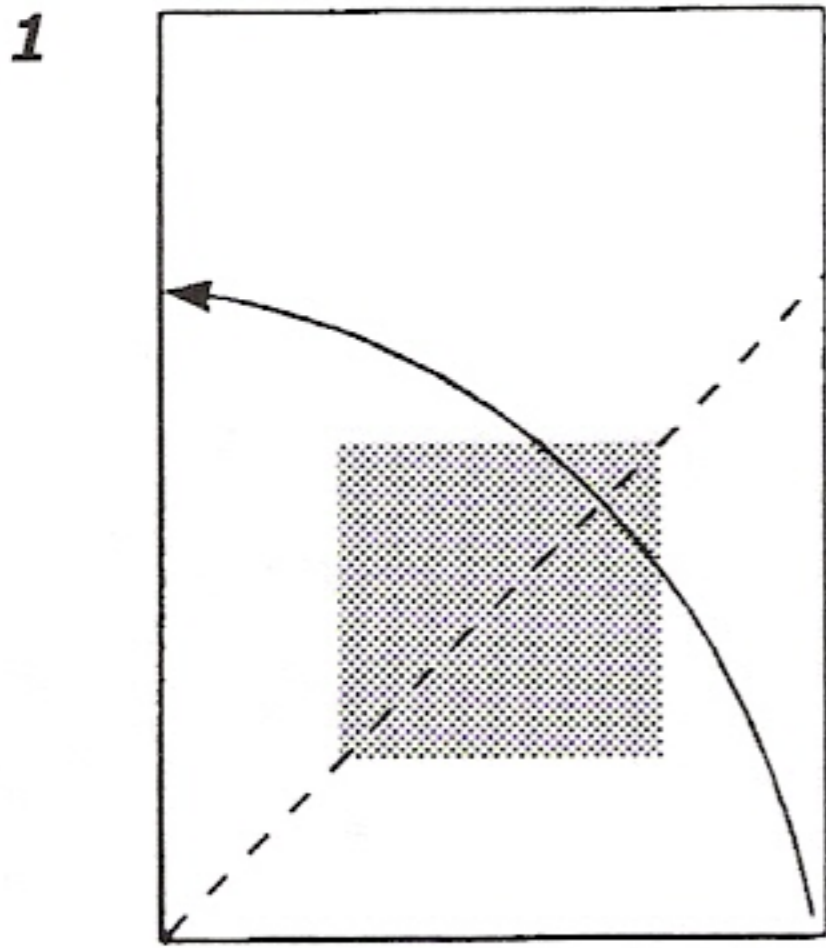
Cubo

Cubo de Colombo

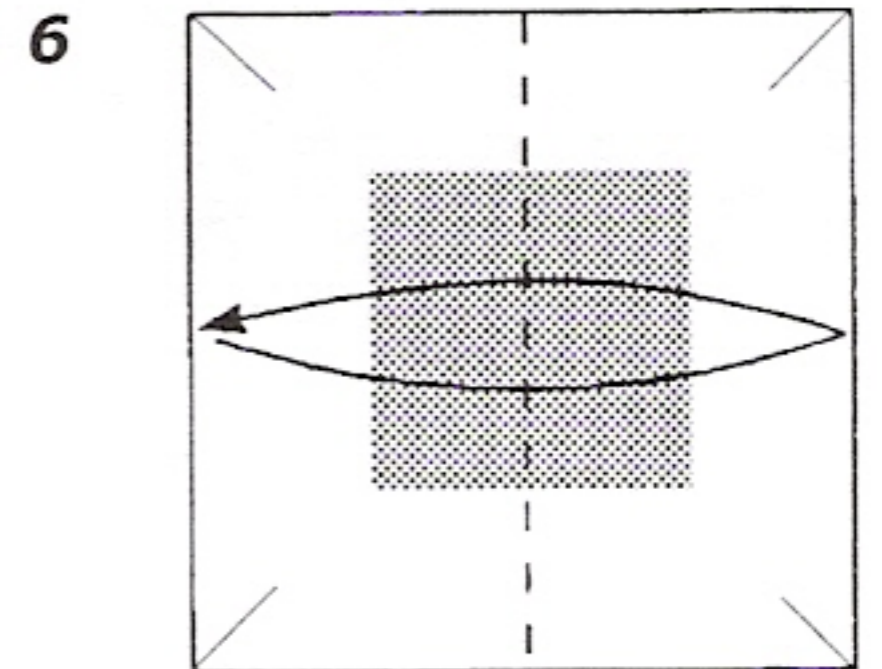
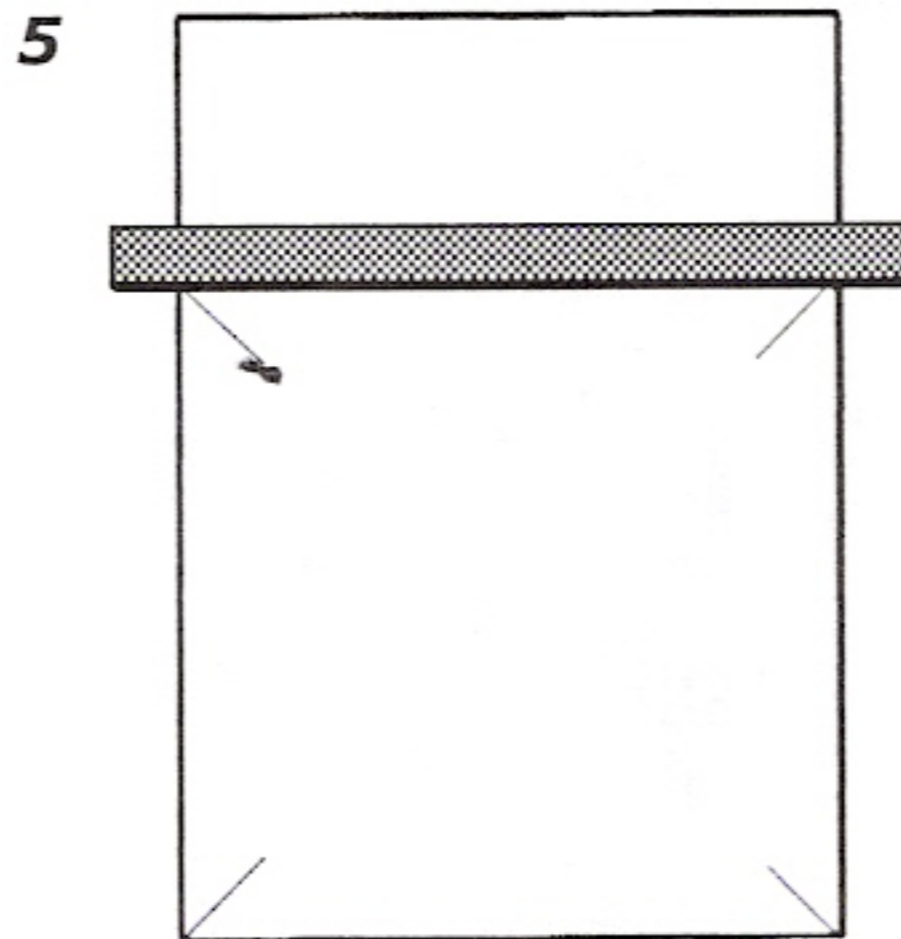
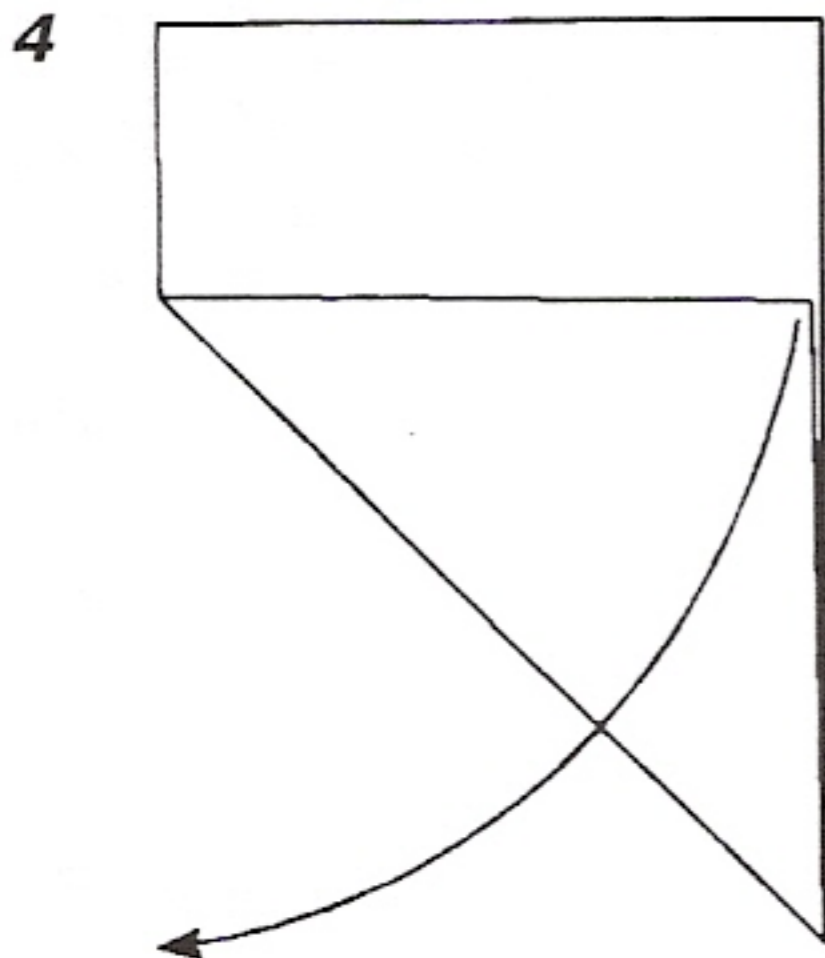
Cubo

Esta forma em que seis módulos se encaixam firmemente, formando um cubo, foi descoberta por Paul Jackson, de Londres.

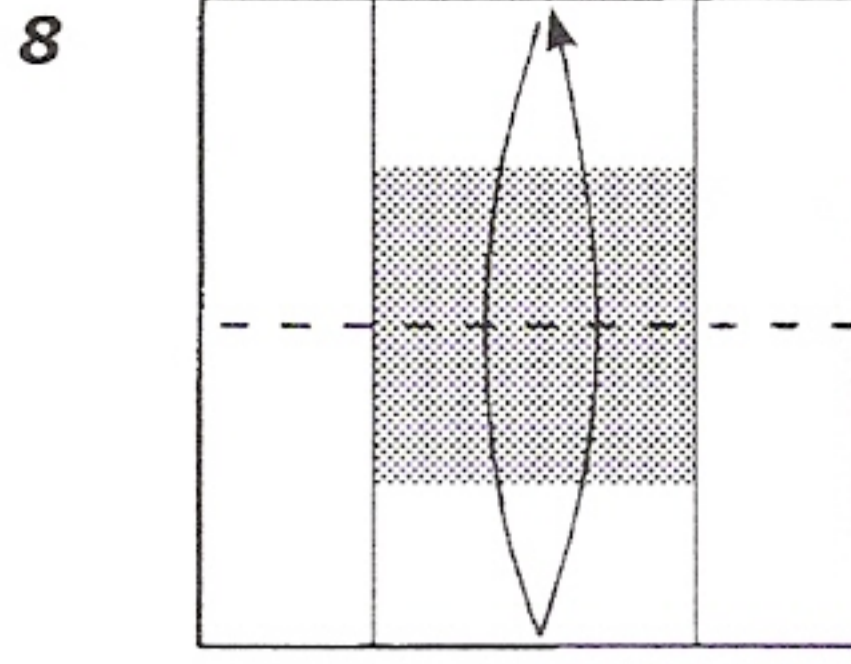
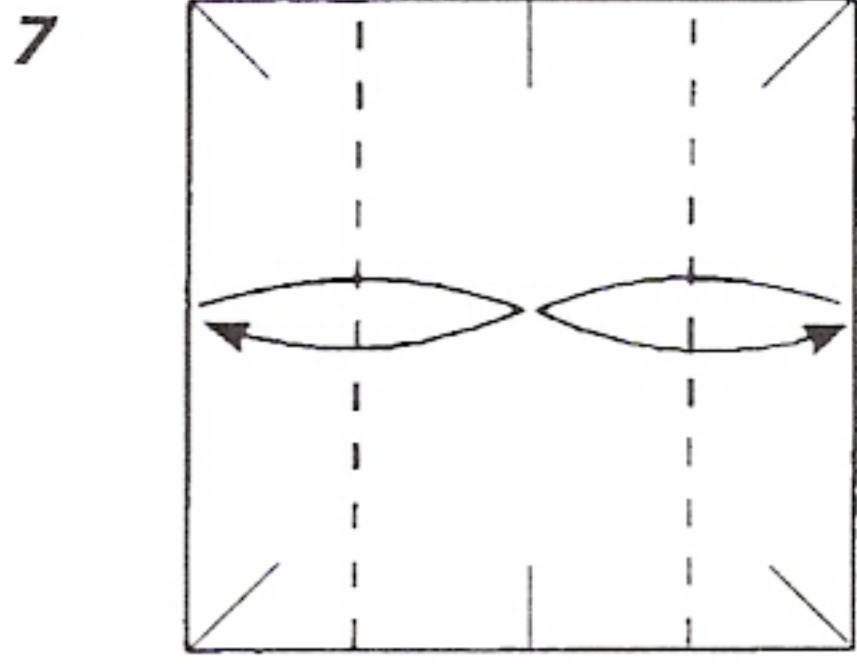
São necessárias seis folhas de papel A4.



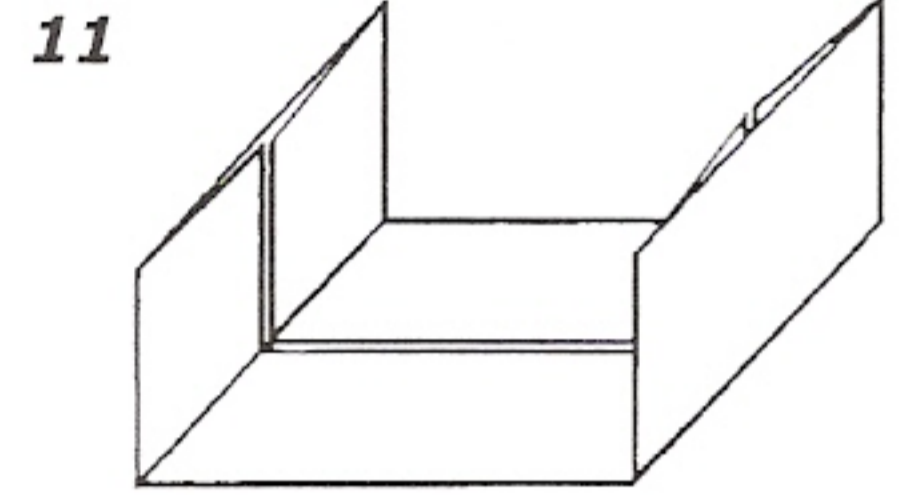
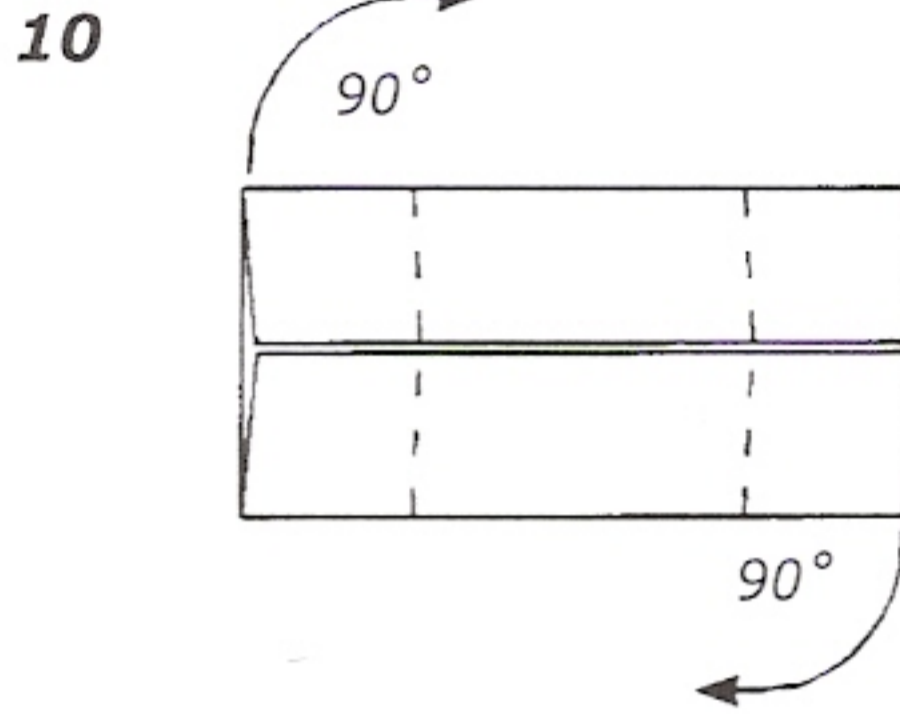
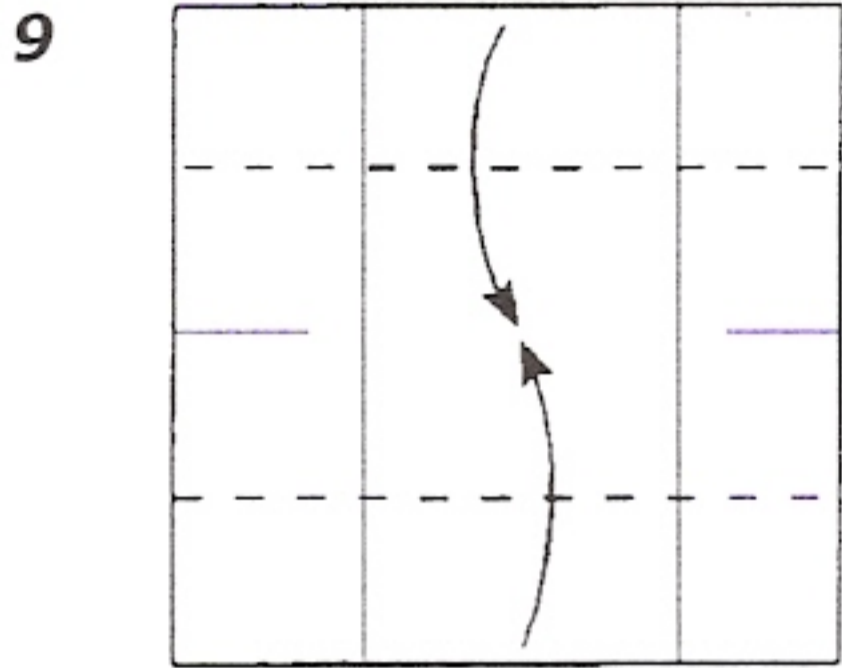
Tente não vincar o papel dentro da área sombreada.



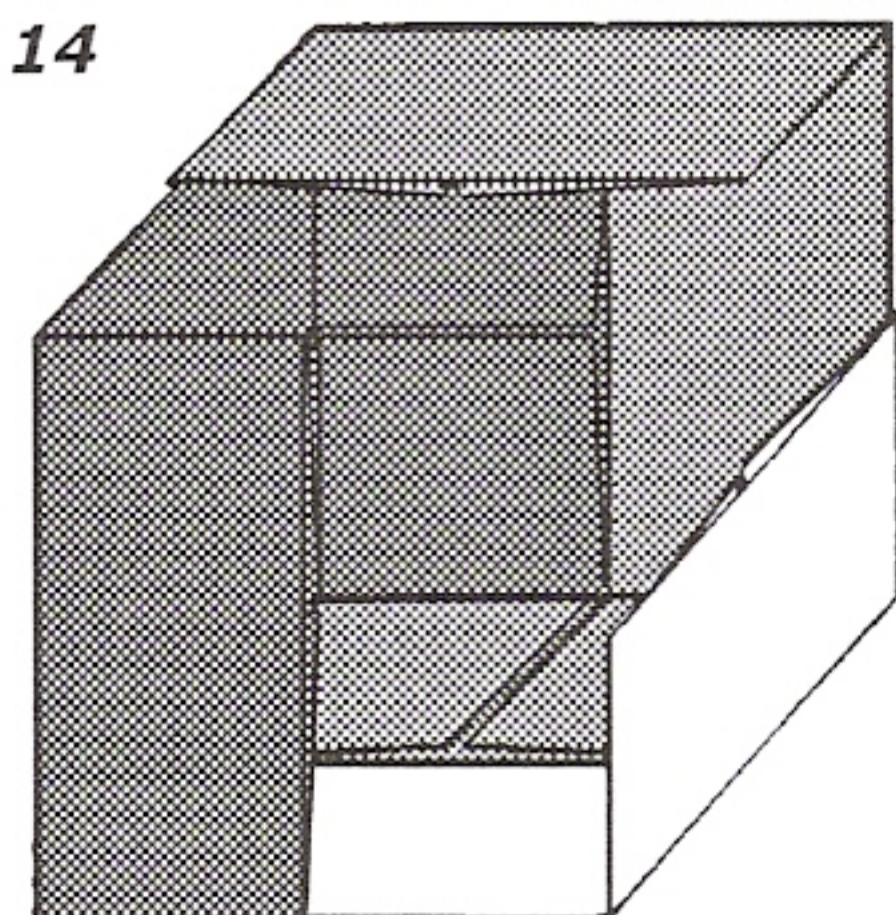
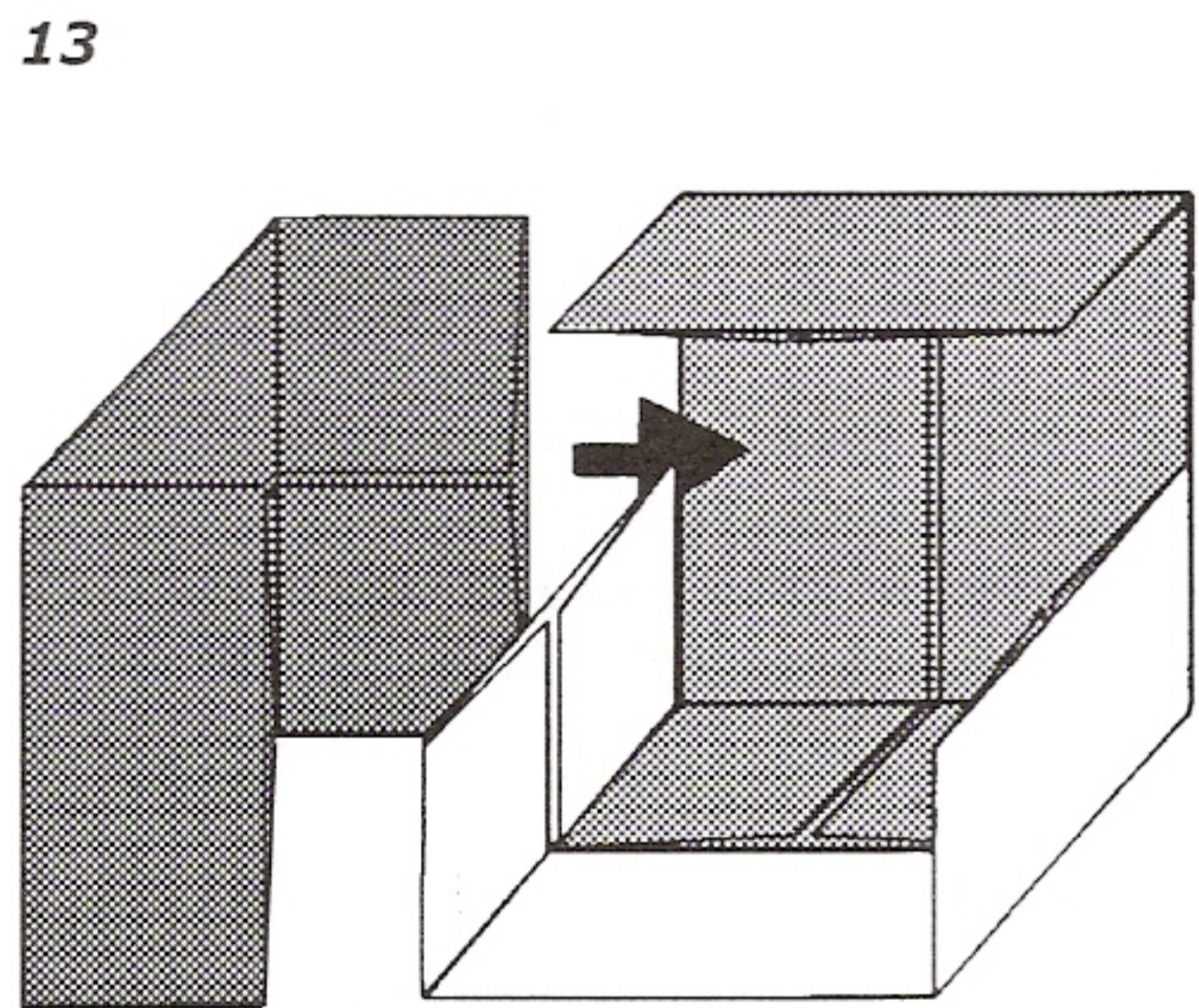
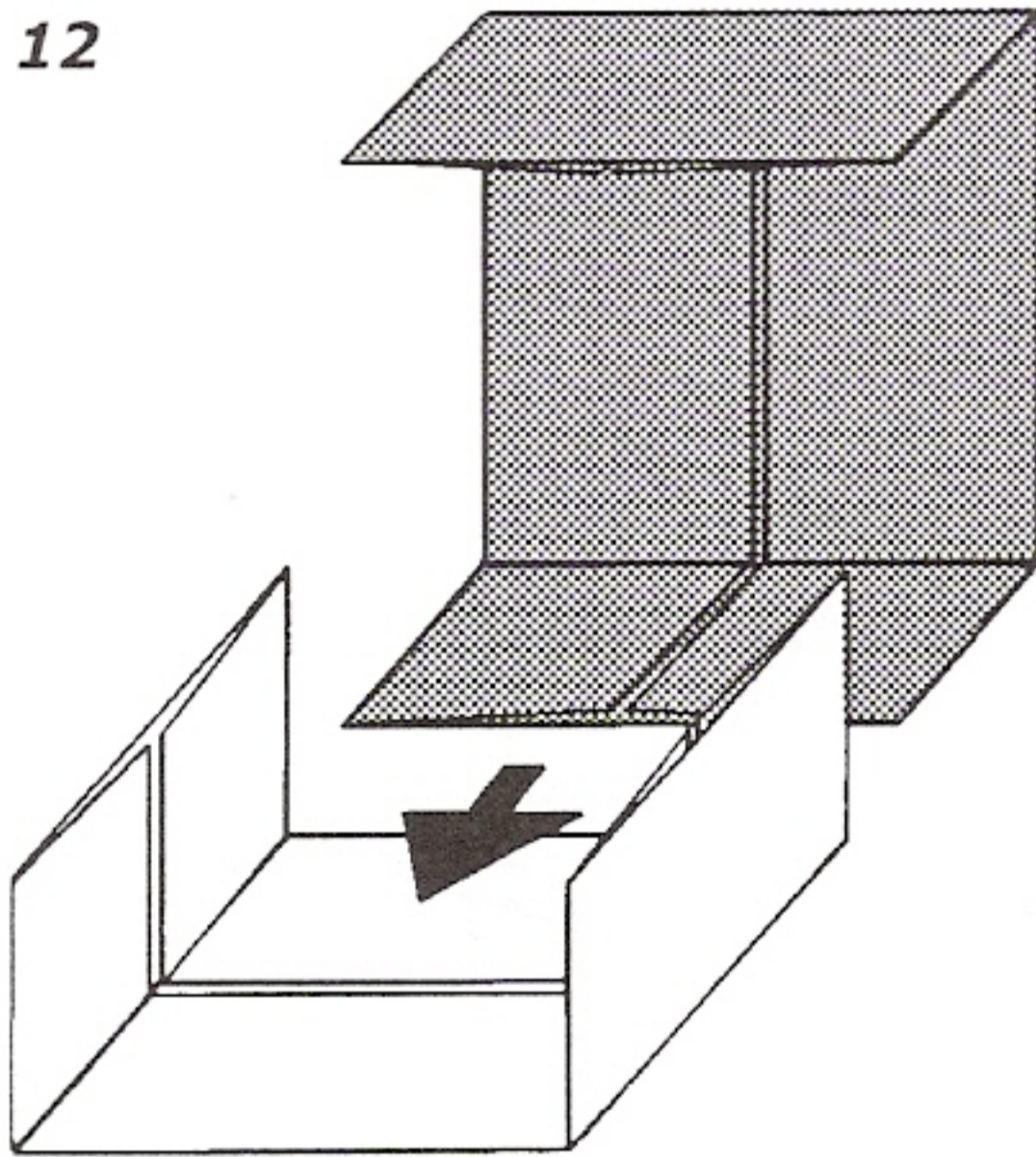
Tente não vincar o papel dentro da área sombreada.



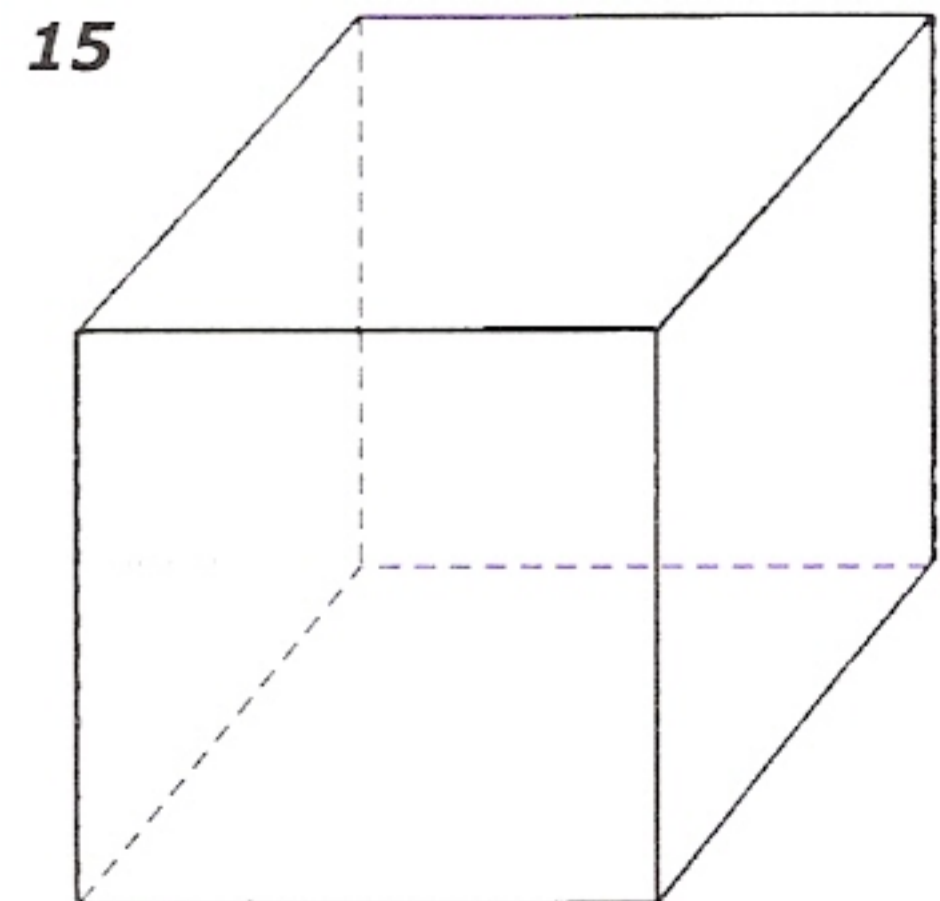
Tente não vincar o papel dentro da área sombreada.



Faça os seis módulos.



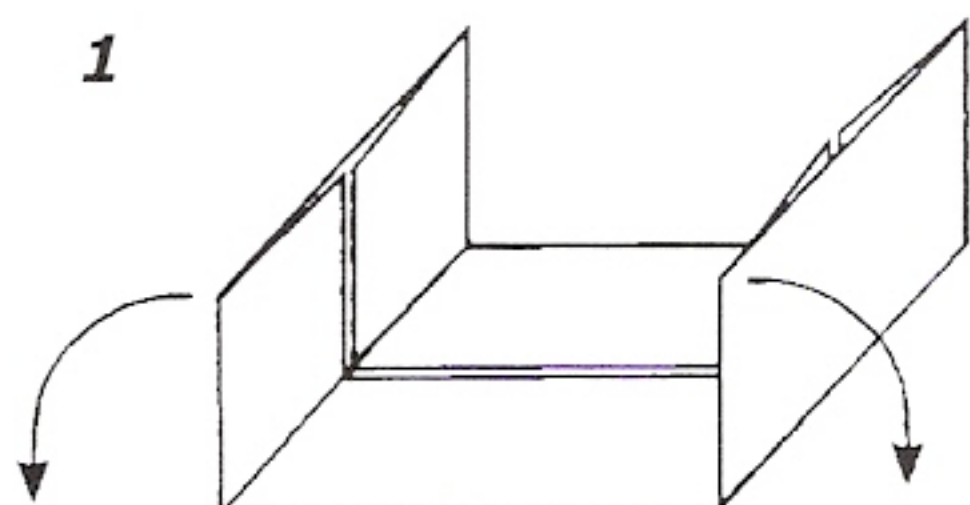
Para completar o cubo, adicione os três módulos restantes de forma semelhante.



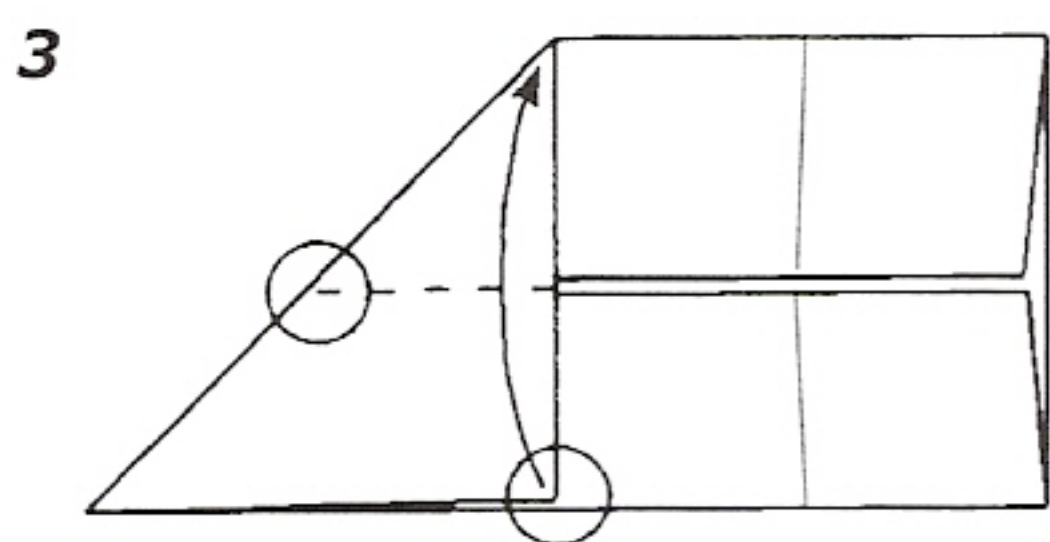
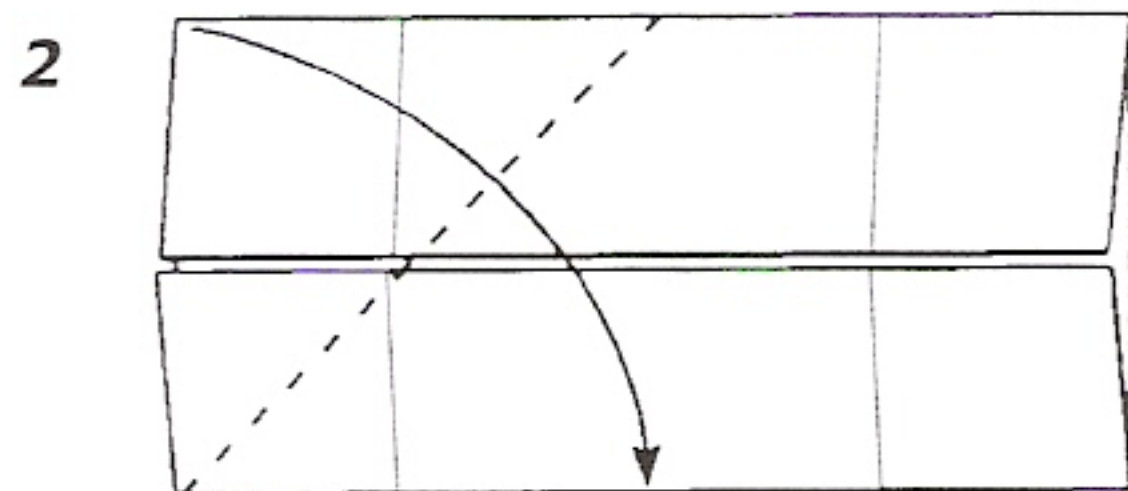
Cubos de Colombo

O cubo de Colombo é uma variação simples do cubo básico que possibilita combinar cubos de maneira a formar estruturas maiores.

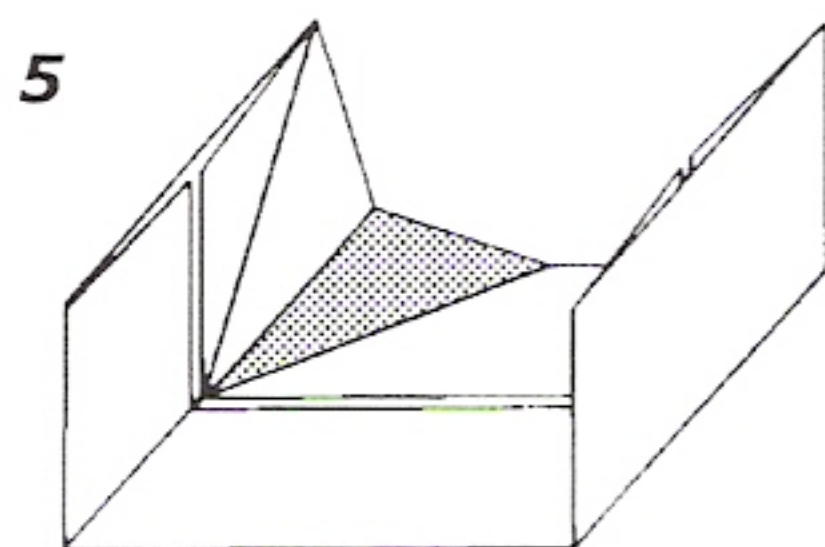
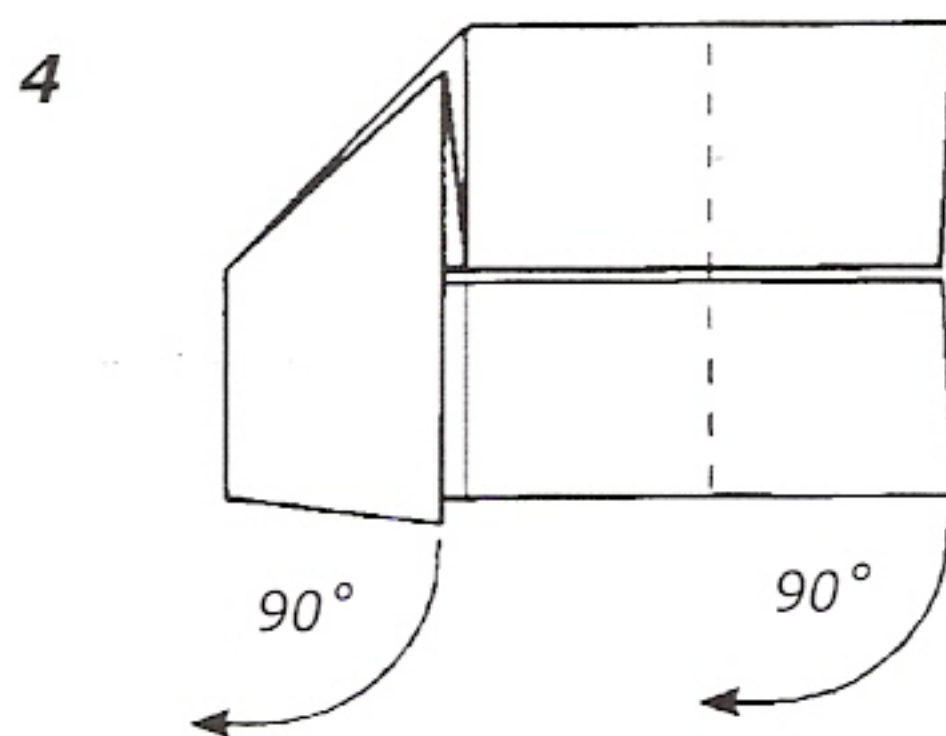
Comece por desmanchar o cubo básico. Três dos módulos deverão ser alterados da forma, a seguir, indicada. Quando o modelo é montado, um canto do cubo fica invertido.



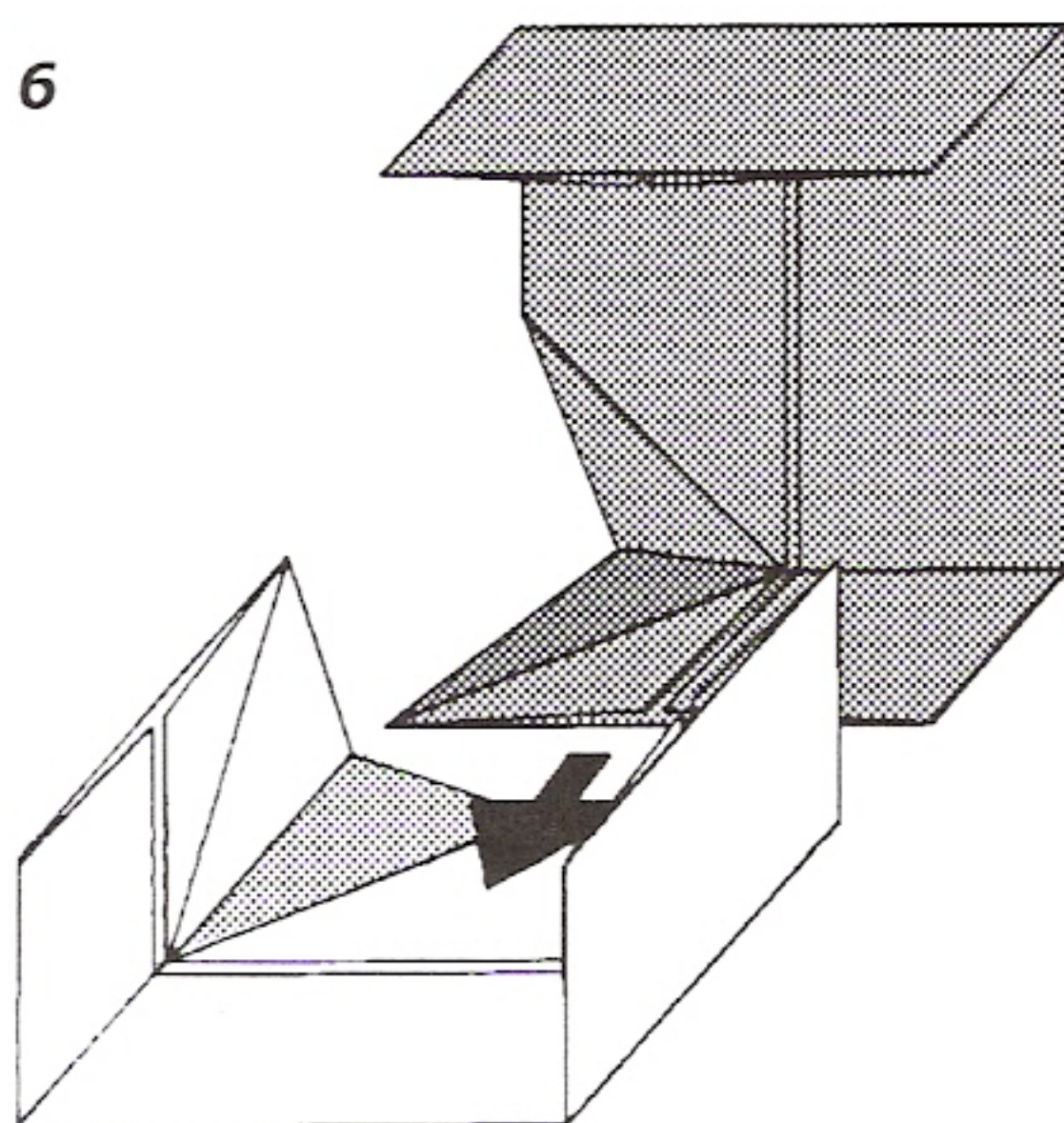
Abra o módulo

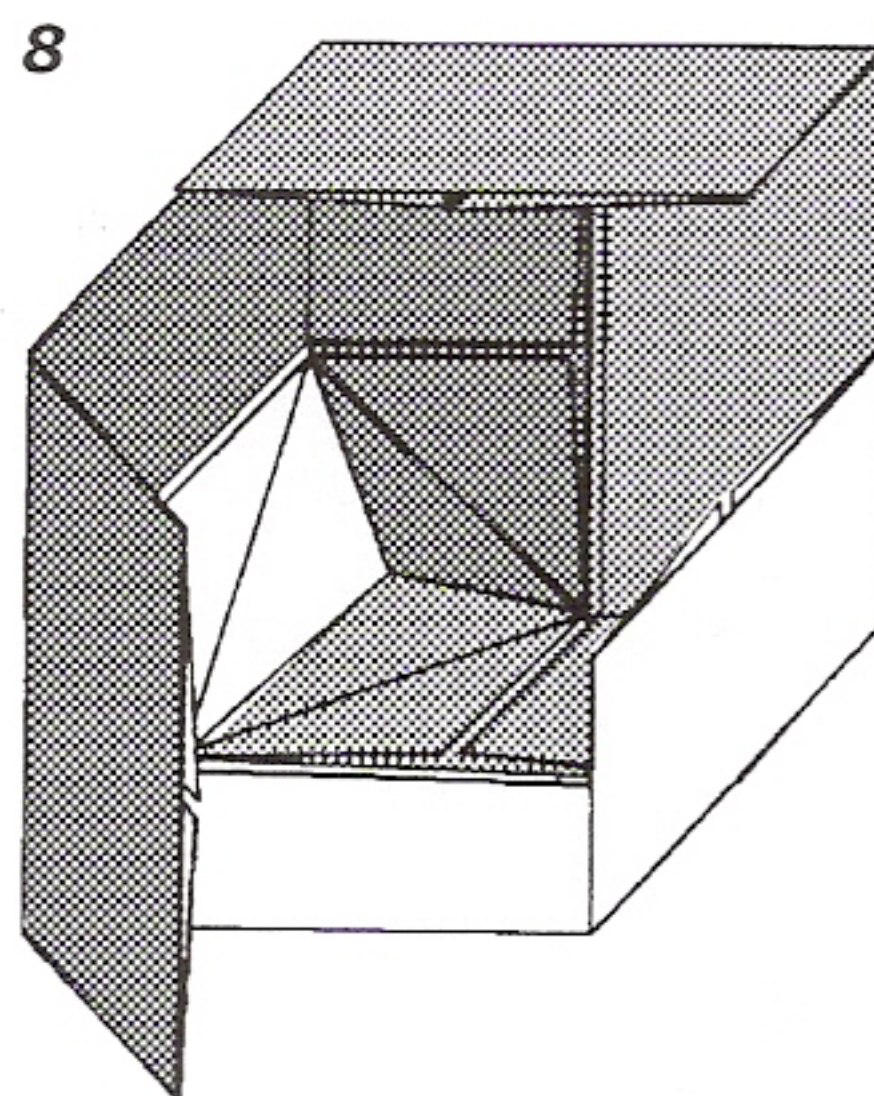
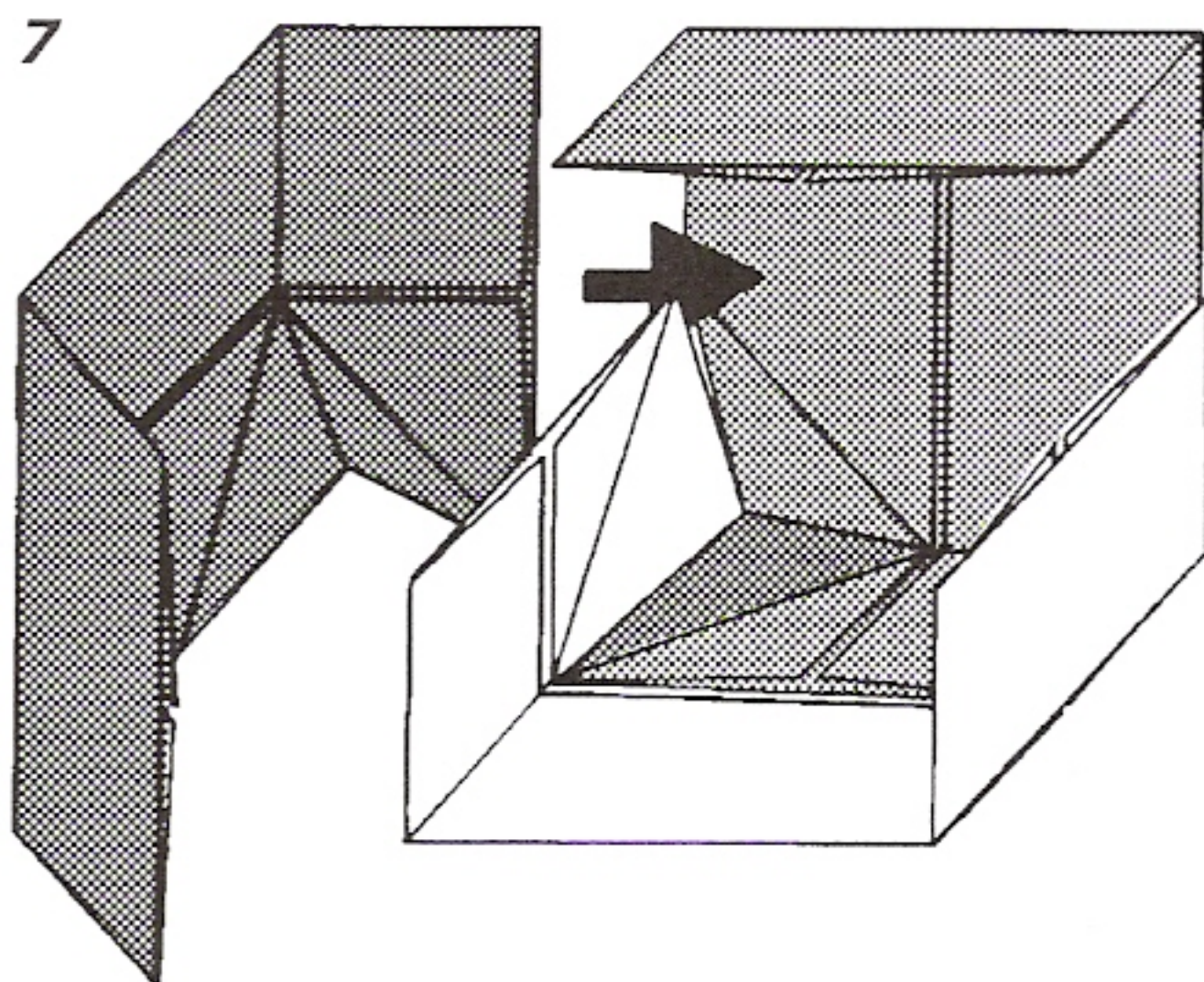


Faça esta dobra e, depois, vinque o papel. Formar-se-á um vinco inteiramente novo entre os dois pontos com um círculo.



Refaça três unidades procedendo da maneira acabada de descrever.





Adicione os outros três módulos para completar o cubo de Colombo.

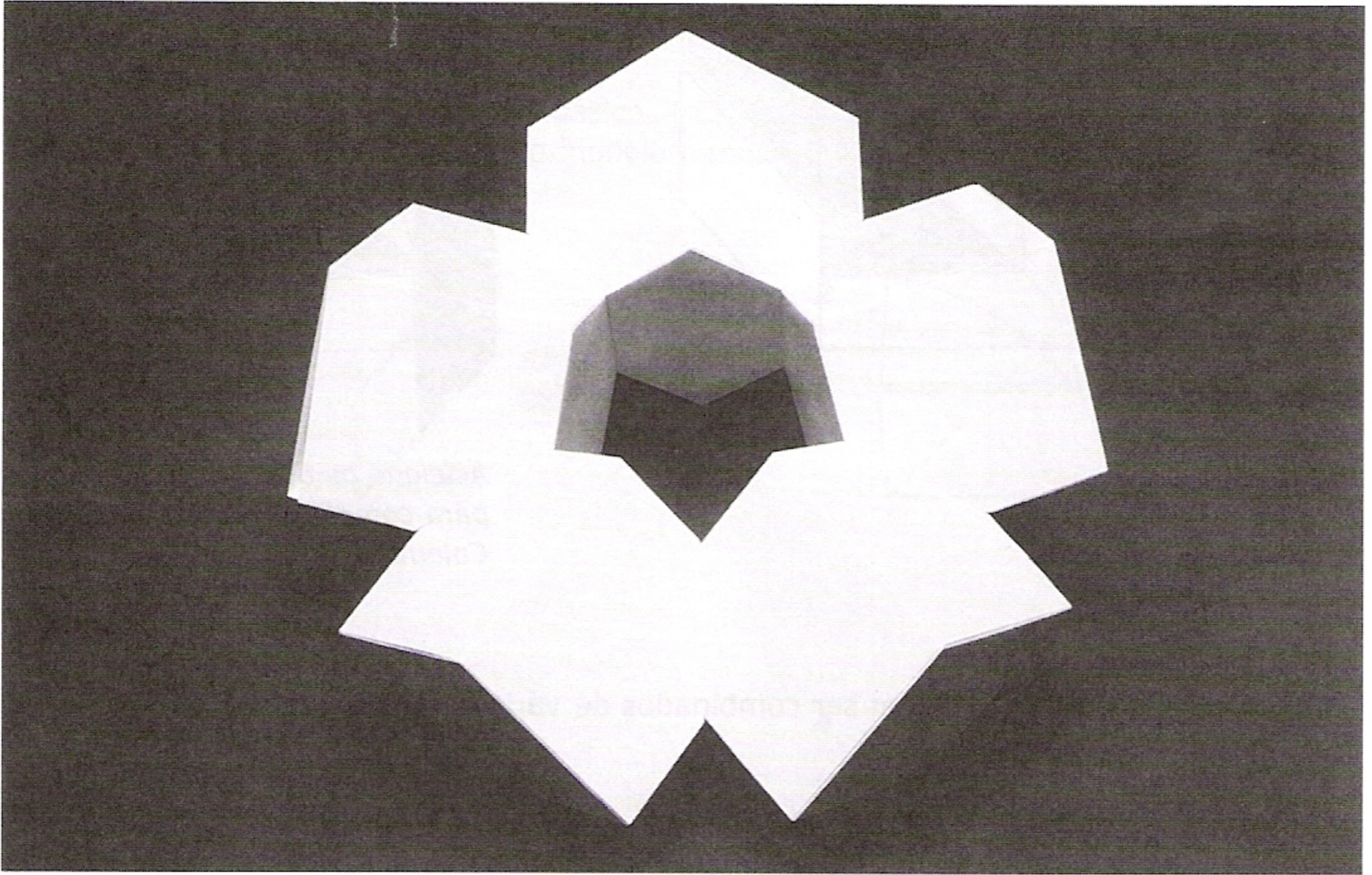
Os cubos de Colombo podem ser combinados de várias maneiras diferentes.

Pilha de cubos

Como um canto foi metido para dentro, é possível colocar um cubo de Colombo sobre uma mesa de forma que o canto oposto aponte para cima, e colocar quantos cubos de Colombo quiser em cima do primeiro. A fotografia da página 13 mostra o início de uma pilha deste tipo.

Se pintar cada face dos cubos de uma cor diferente, as cores podem formar uma espiral em torno da pilha.

Anel de cubos

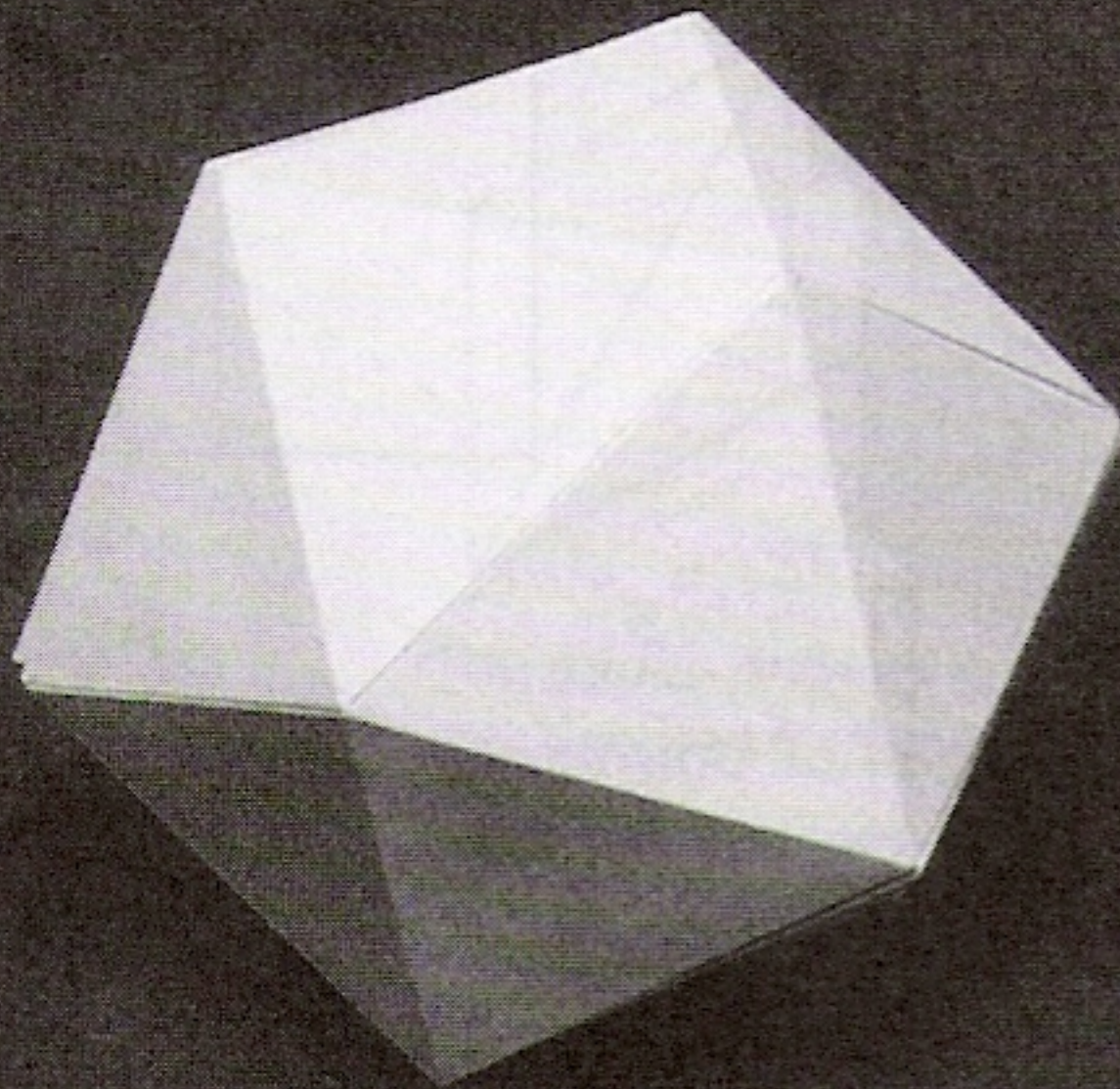


Se juntar o segundo cubo de Colombo a um dos três cantos adjacentes ao canto invertido e, depois, adicionar outros três cubos da mesma maneira, cinco cubos de Colombo formarão um anel. (Será preciso um pouco de cola para manter os cubos juntos.)

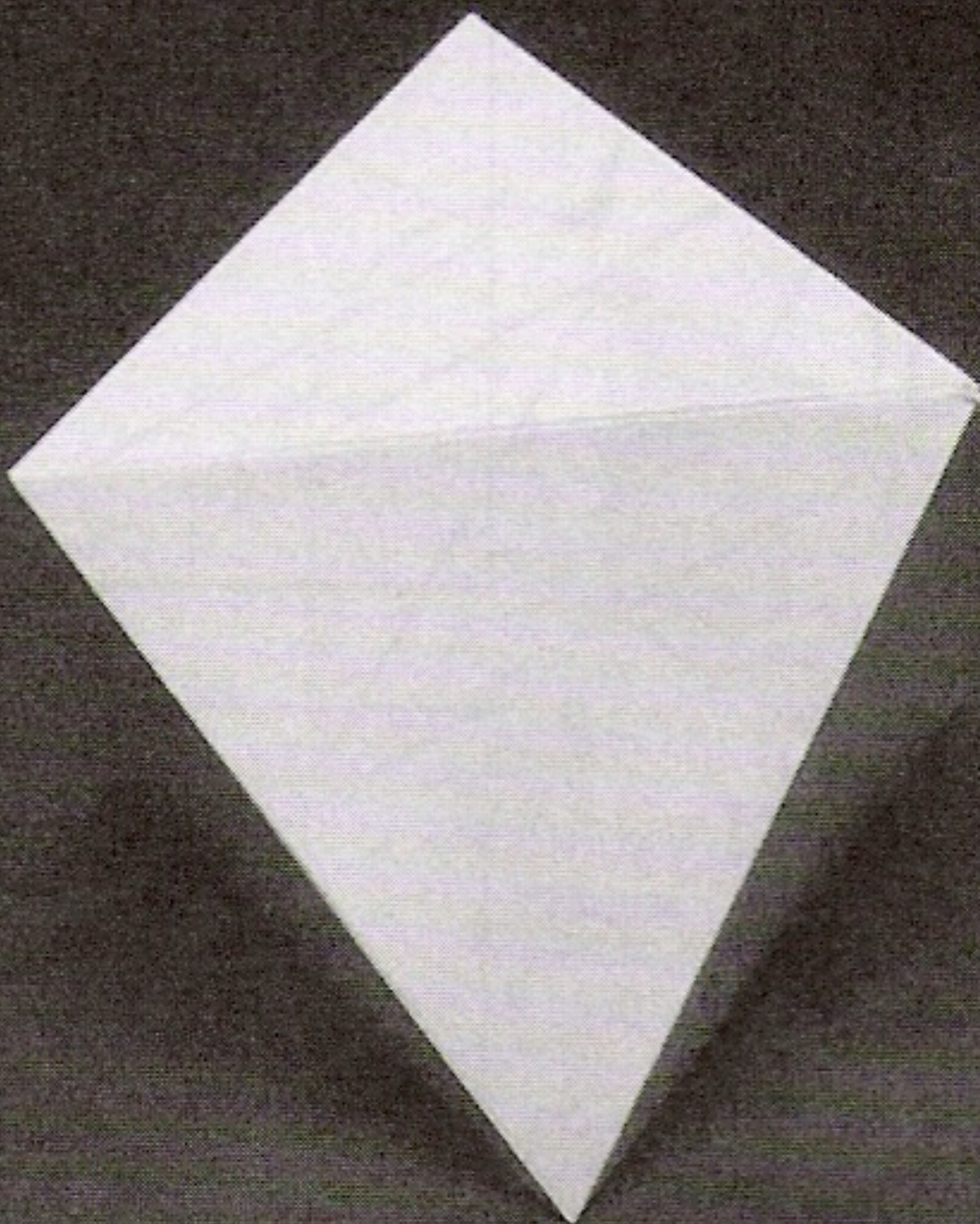
Bola de cubos

Seguindo o mesmo princípio, vinte cubos de Colombo podem ser combinados de maneira a formarem uma bola dodecaédrica com doze destes anéis. Cada cubo é partilhado por três anéis e, para completar o modelo, será preciso inverter dois cantos adjacentes de metade dos cubos. Isto pode ser realizado muito simplesmente, aplicando o mesmo método de dobragem aos módulos que formam o segundo canto.

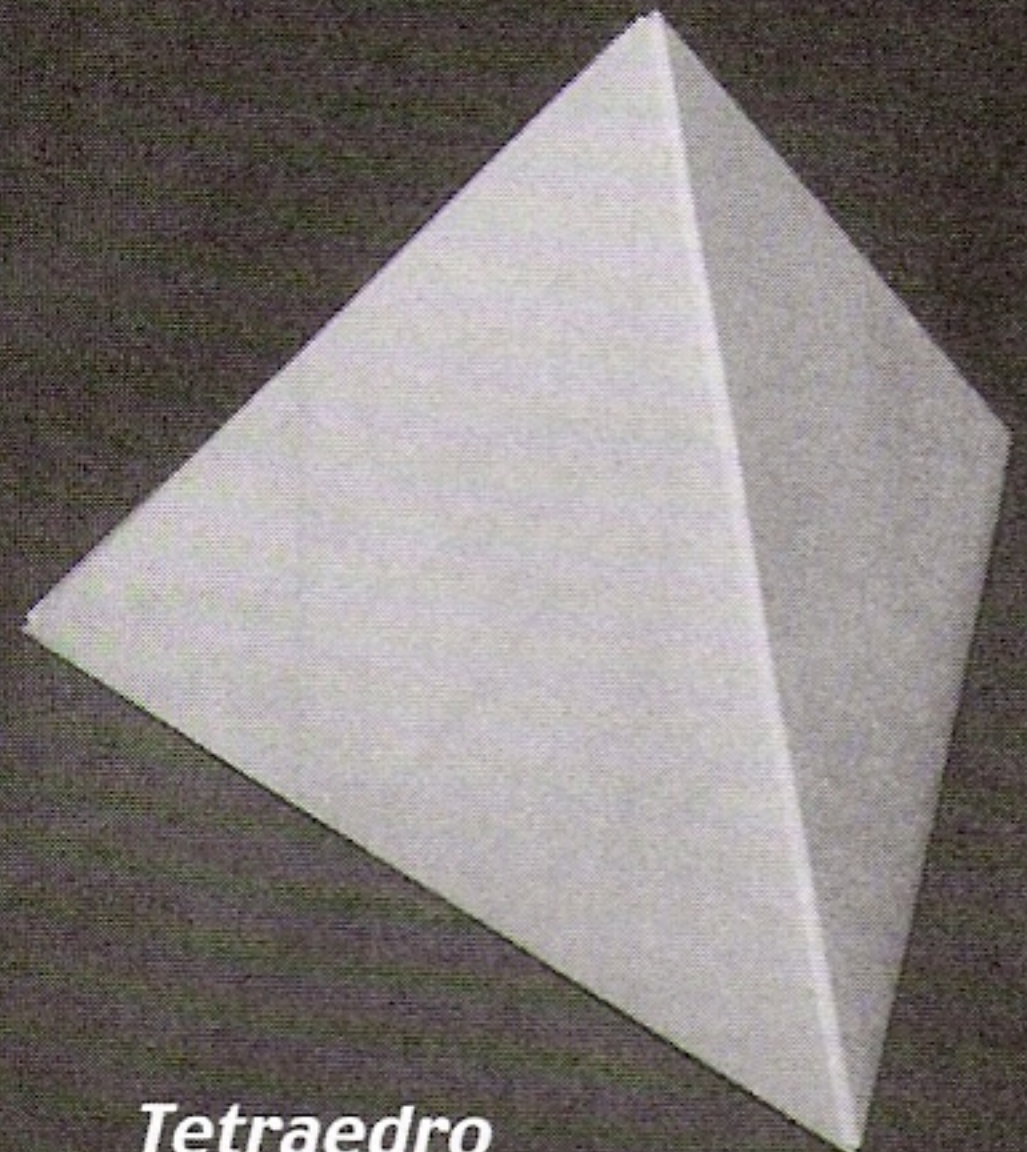
Tetraedro
Icosaedro
Octaedro



Icosaedro



Octaedro



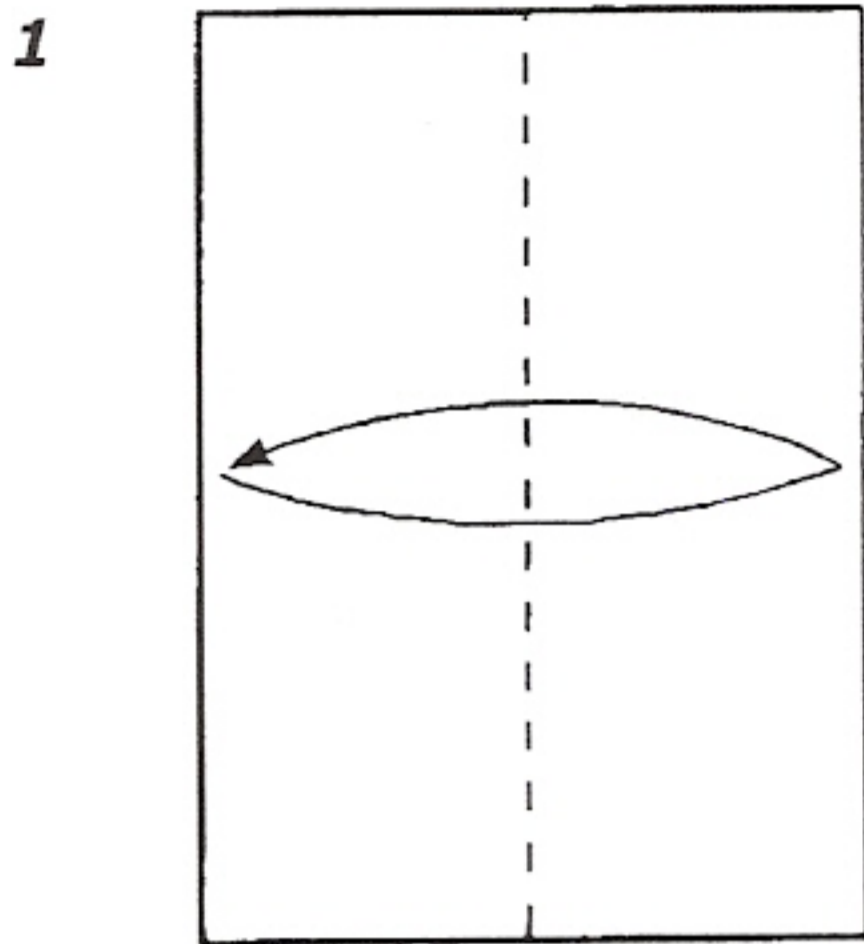
Tetraedro

Tetraedro

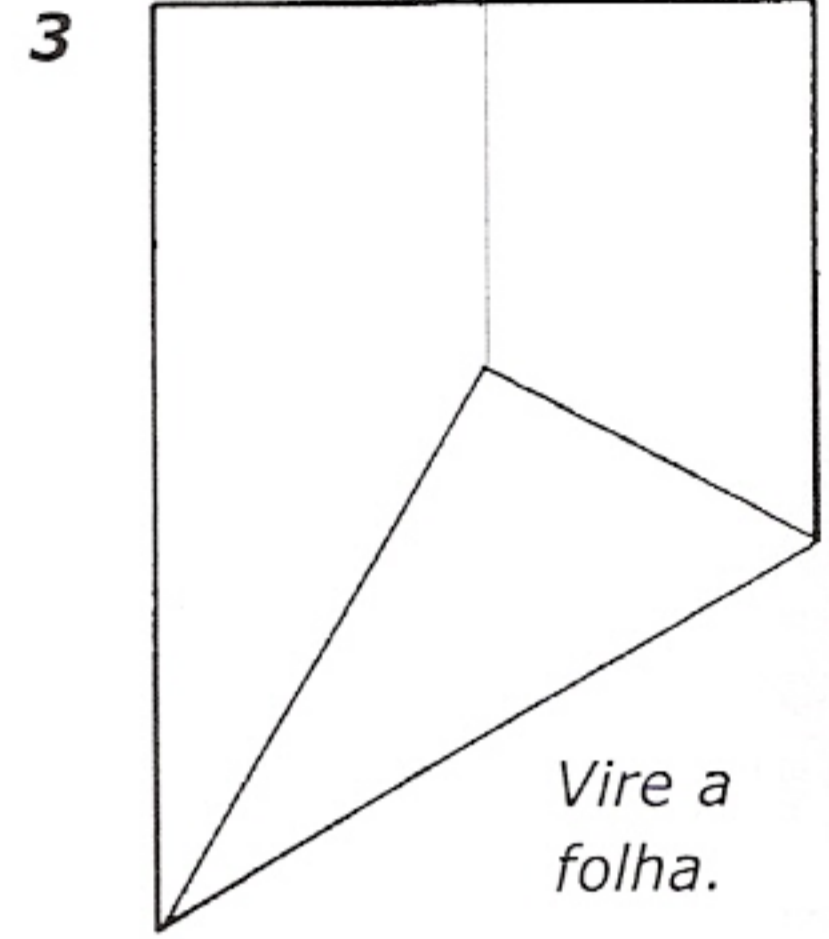
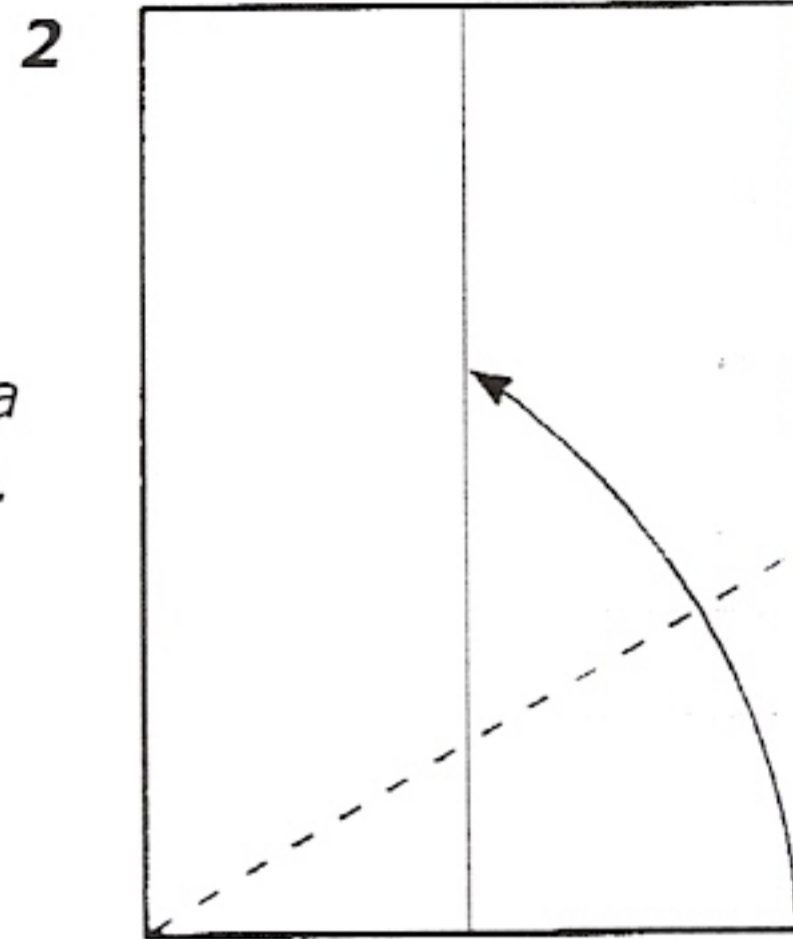
Este é o primeiro de vários modelos deste livro que utilizam módulos que são um reflexo um do outro.

São necessárias duas folhas de papel A4.

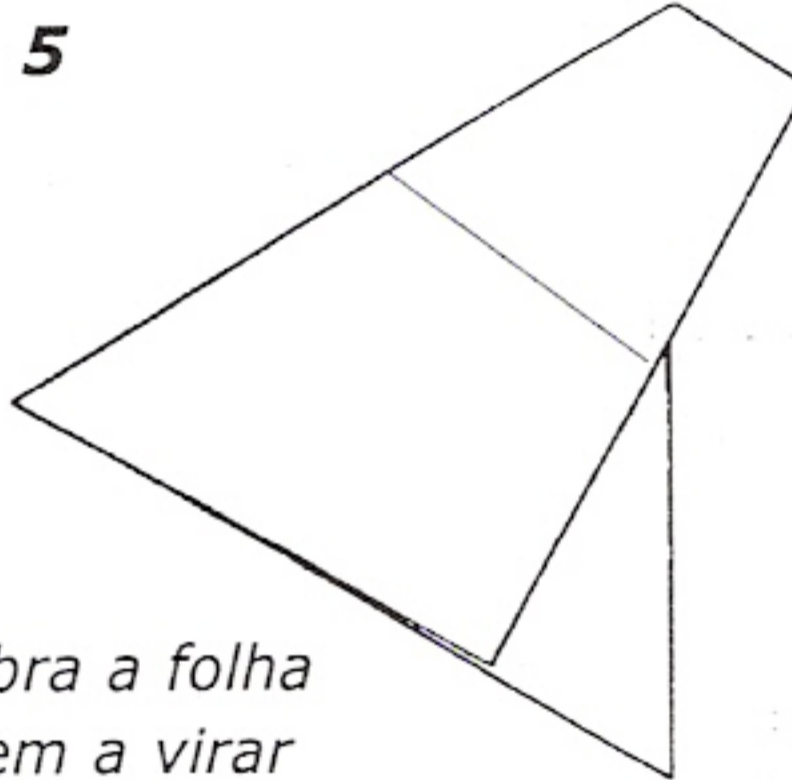
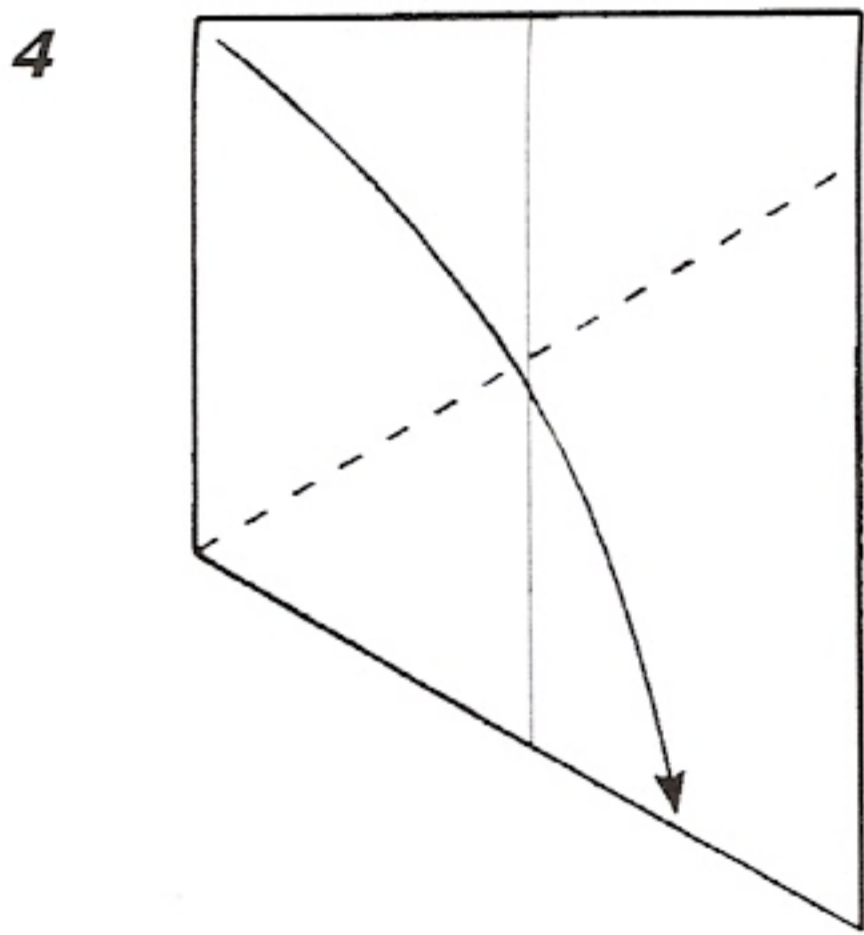
O rectângulo formado no passo oito é da proporção de $2 : \sqrt{3}$



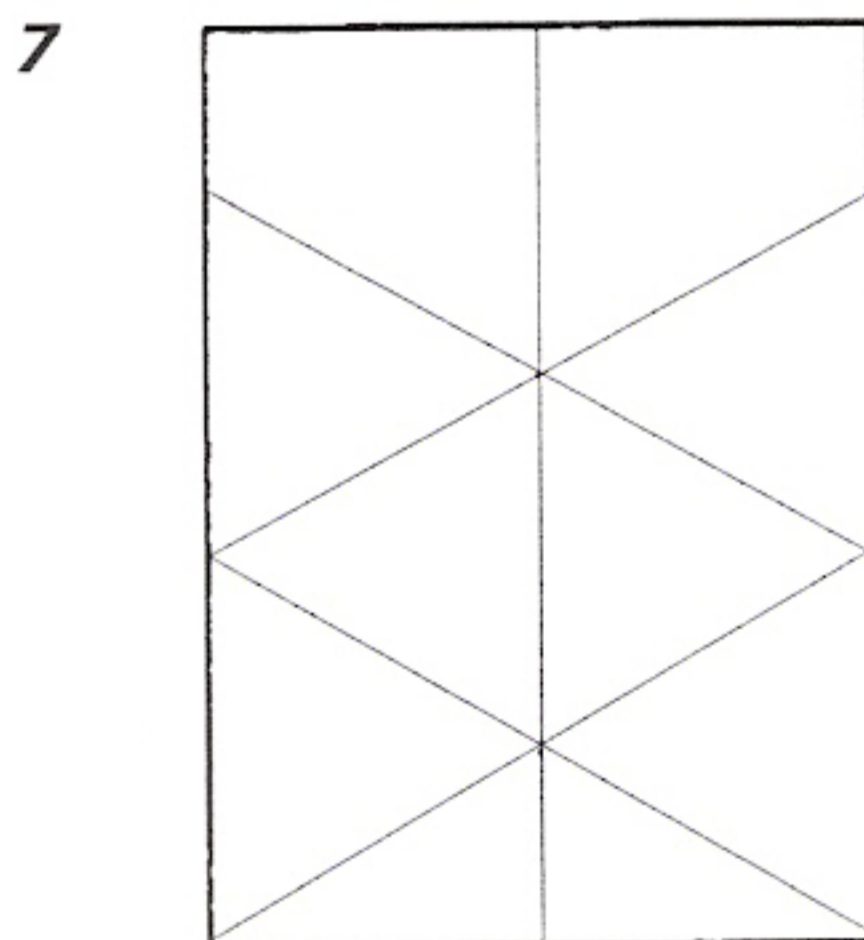
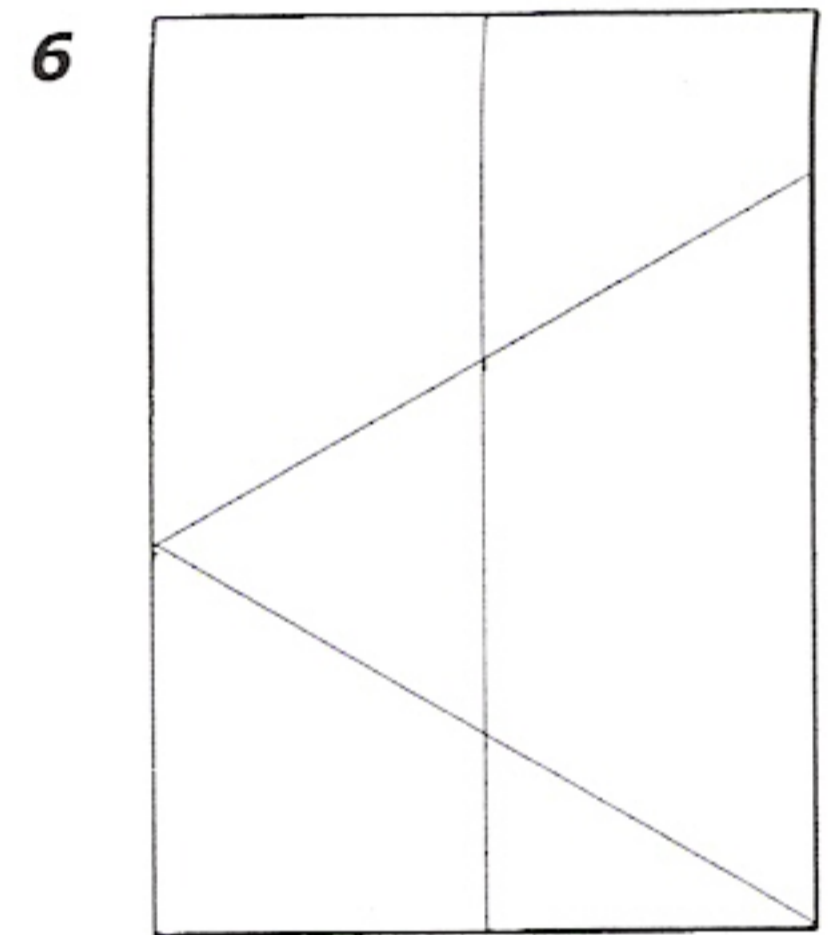
Vire a
folha.



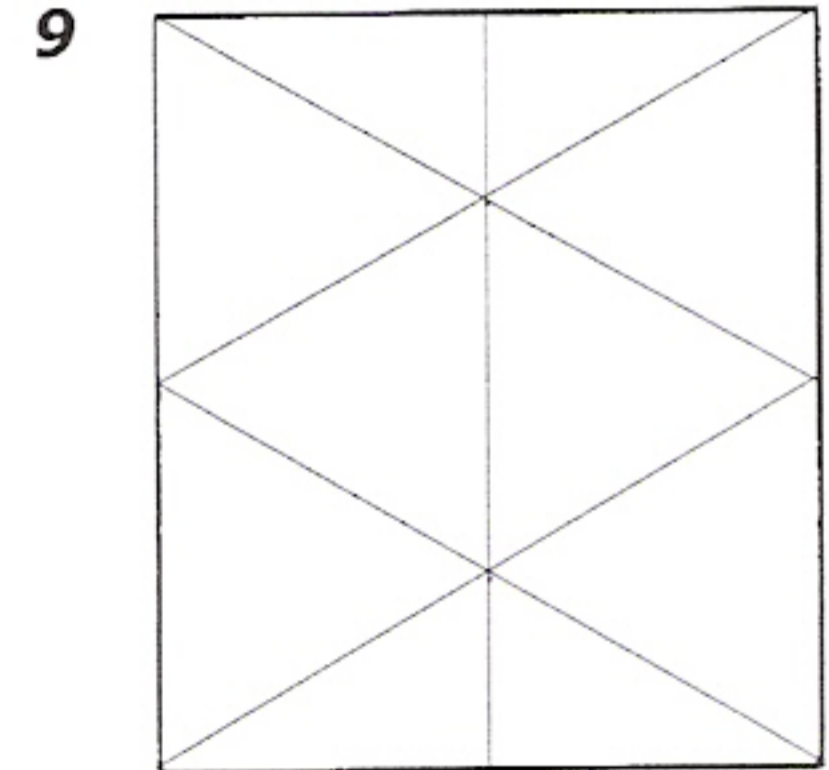
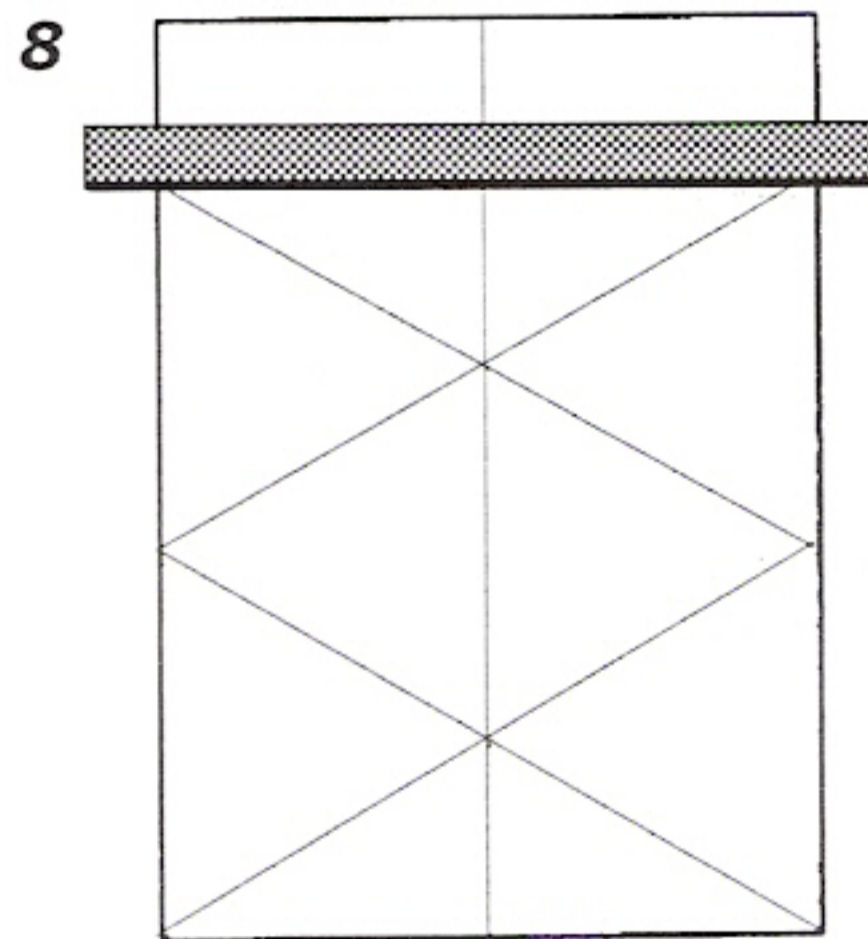
Vire a
folha.



Abra a folha
sem a virar



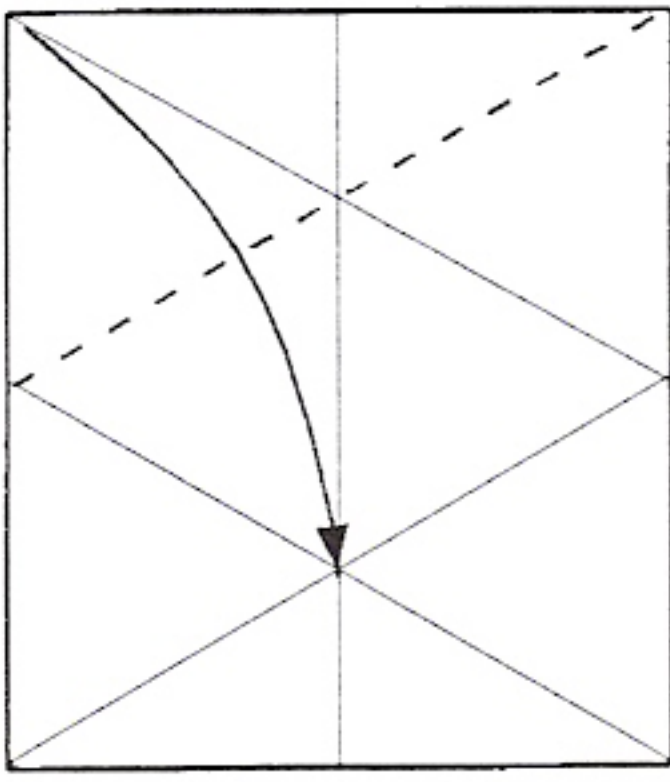
Repita os passos
2 a 5 até o papel
ficar vincado
desta forma.



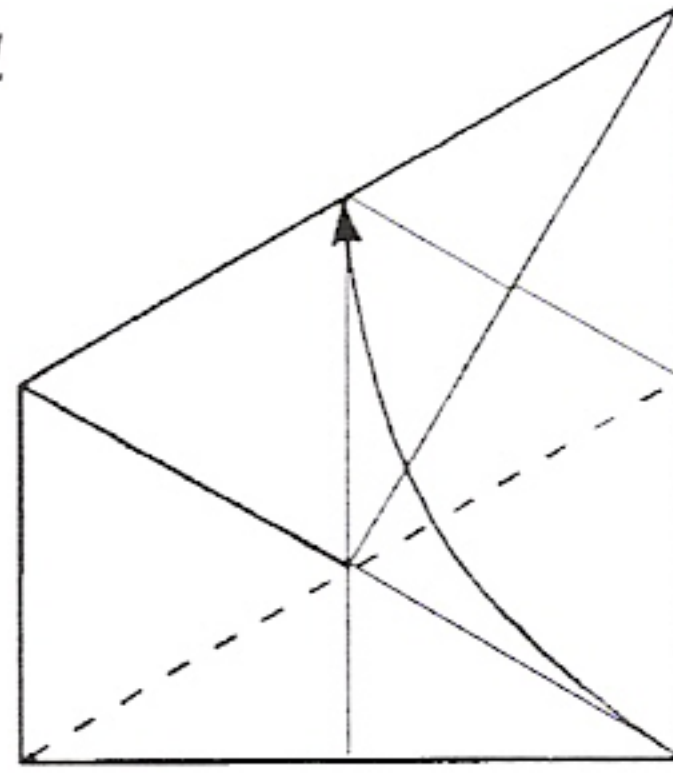
Prepare ambas as folhas
até este ponto. A partir daqui,

os dois módulos são o reflexo um do outro. Só foi descrito o método de dobragem para o módulo básico mas, se tiver alguma dificuldade em fazer o módulo-reflexo, tente seguir as instruções dos passos 10 a 13 fazendo as dobras em frente a um espelho.

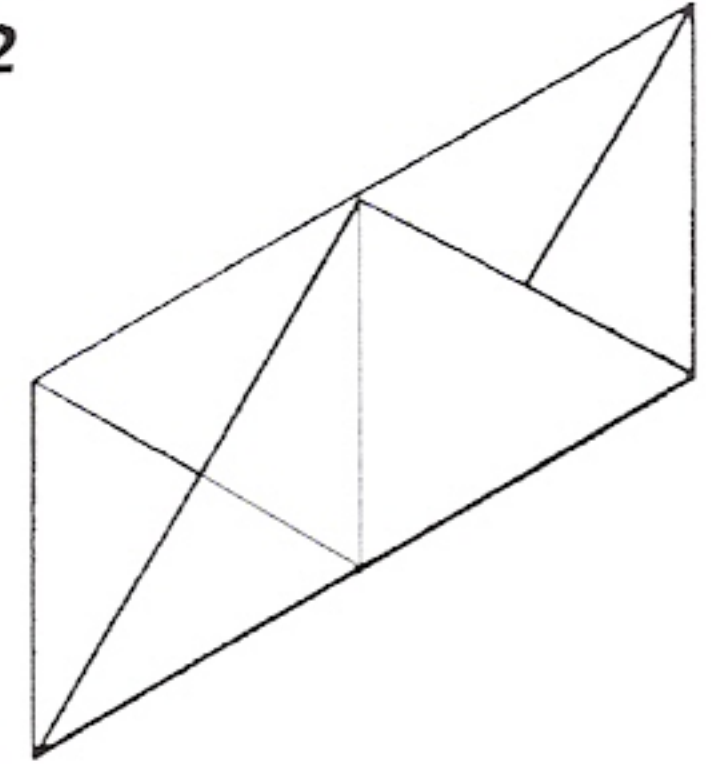
10



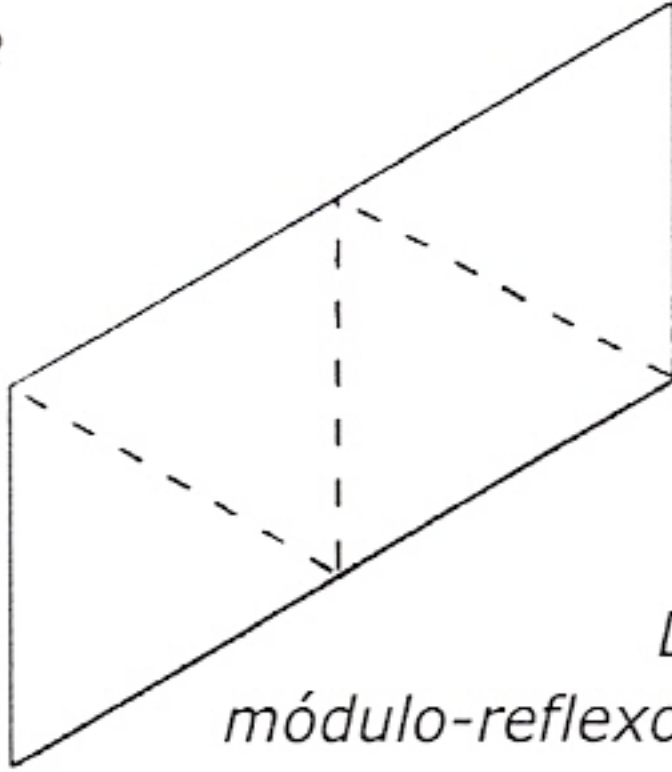
11



12



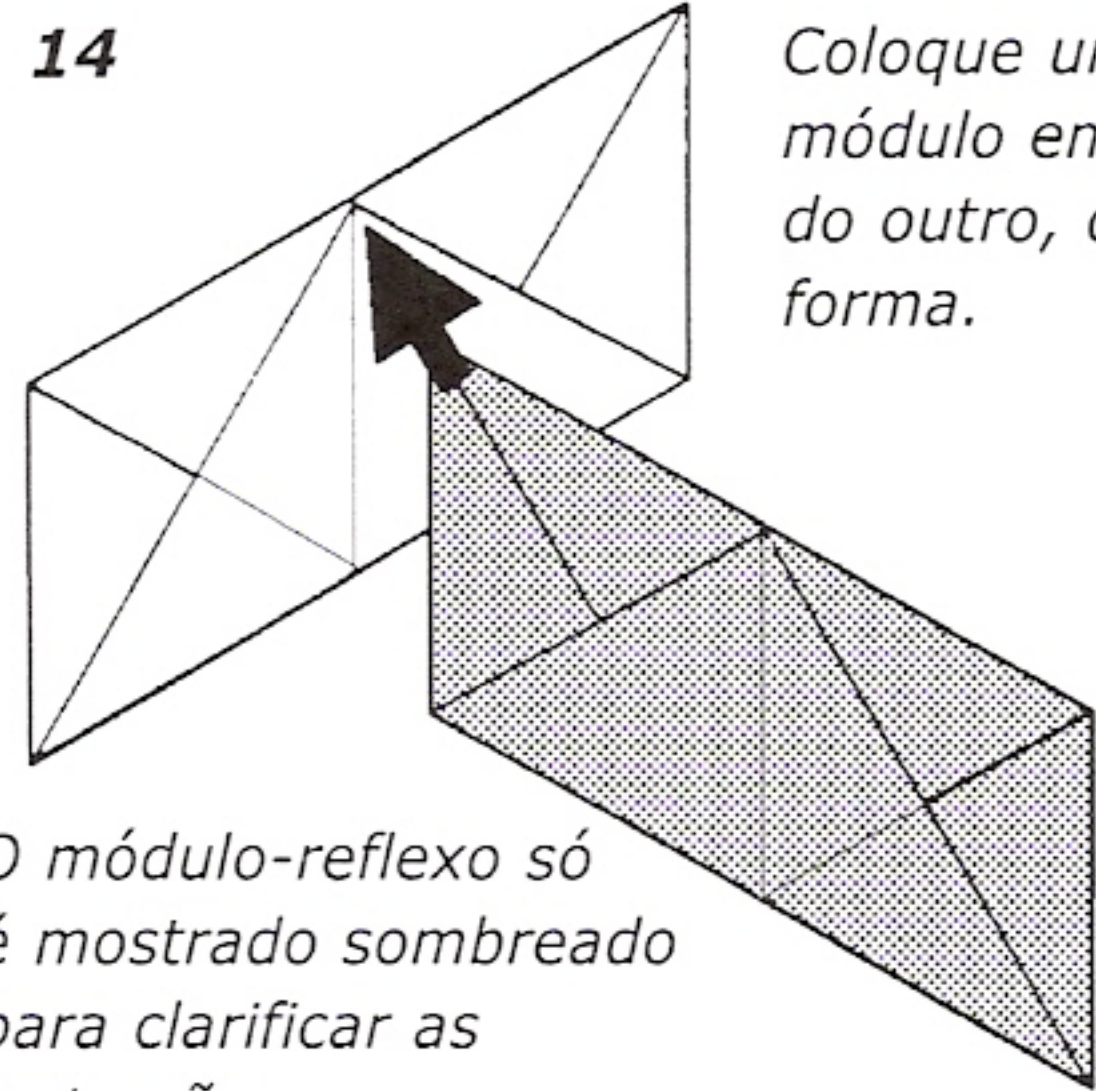
13



Certifique-se de que o módulo se dobra facilmente ao longo de todas estas linhas.

Dobre também o módulo-reflexo até este ponto.

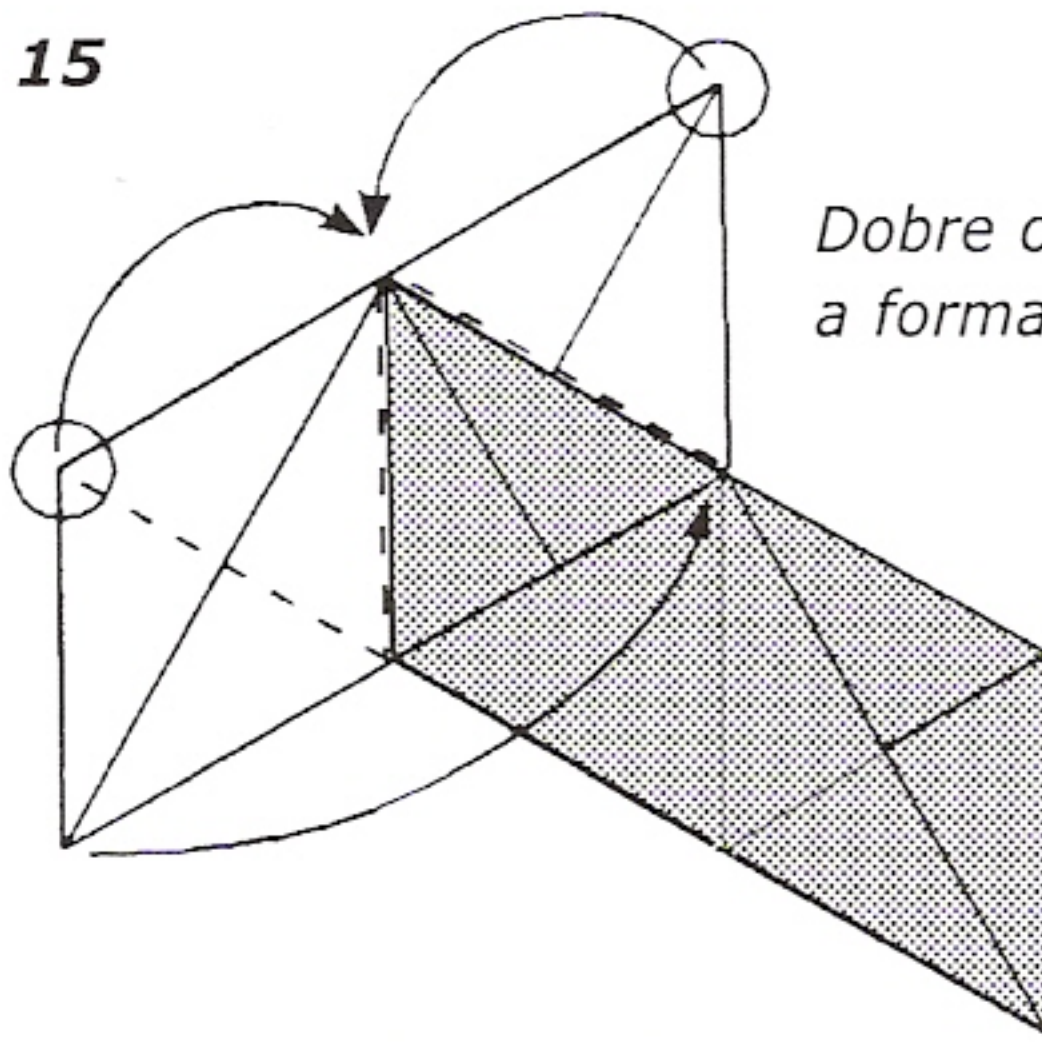
14



Coloque um módulo em cima do outro, desta forma.

O módulo-reflexo só é mostrado sombreado para clarificar as instruções.

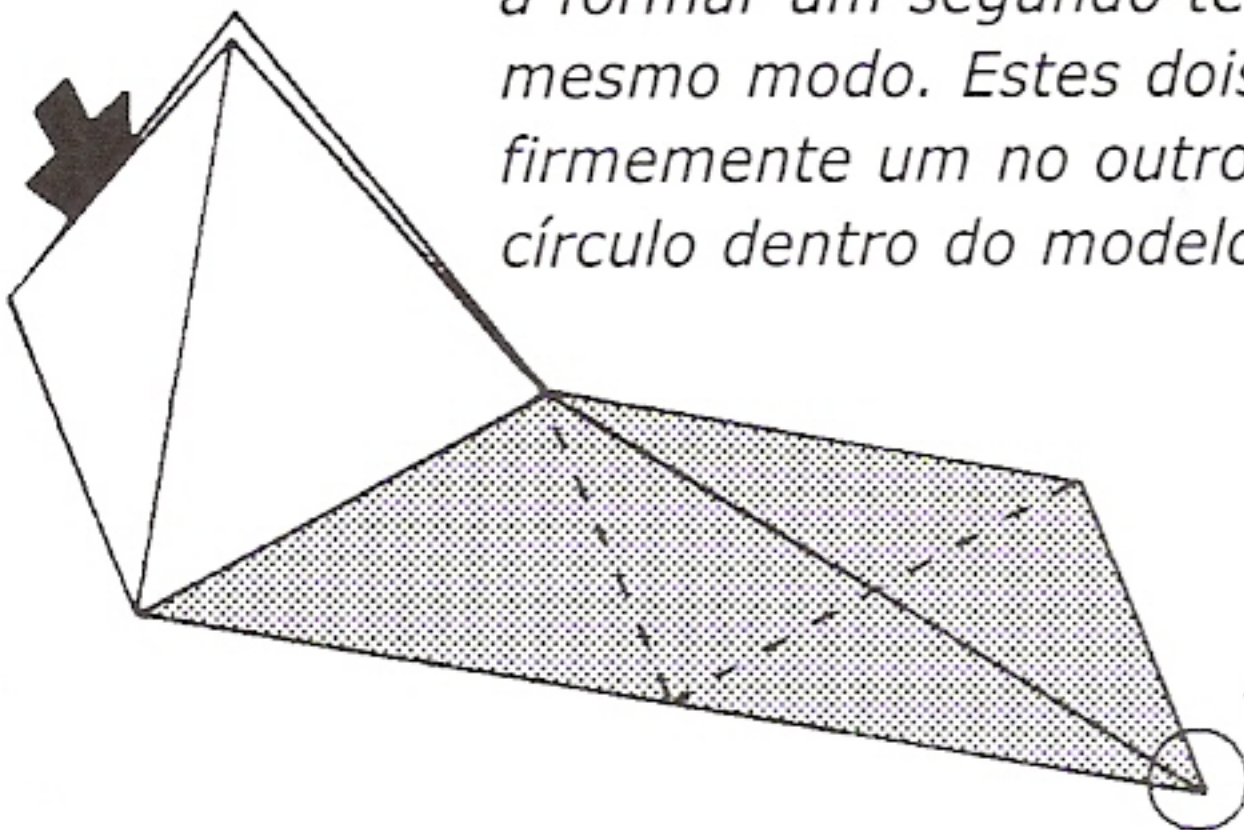
15



Dobre o módulo inferior de maneira a formar um tetraedro folgado.

O canto superior do tetraedro é formado juntando os dois pontos com um círculo.

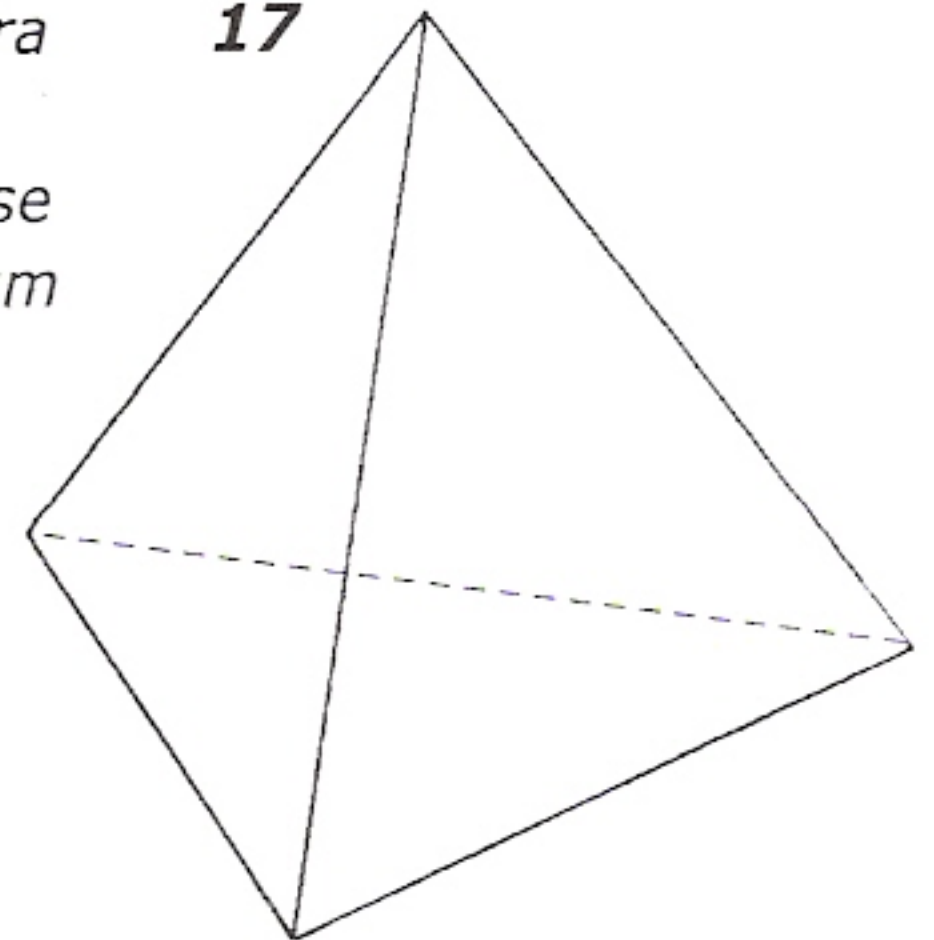
16



Dobre o módulo-reflexo (sombreado) de maneira a formar um segundo tetraedro folgado, do mesmo modo. Estes dois tetraedros encaixam-se firmemente um no outro inserindo a aba com um círculo dentro do modelo, como indica a figura.

Finalmente, pressione todos os cantos e, se for preciso, aguce as orlas.

17



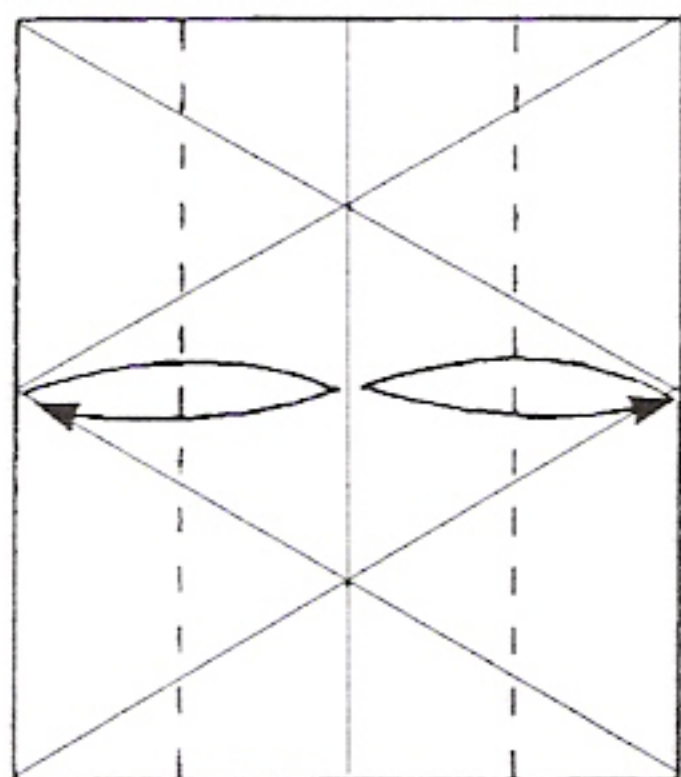
Icosaedro

Este modelo foi concebido por Tomoko Fuse, a melhor praticante de origami do Japão, que publicou mais de vinte livros sobre dobragens modulares de papel.

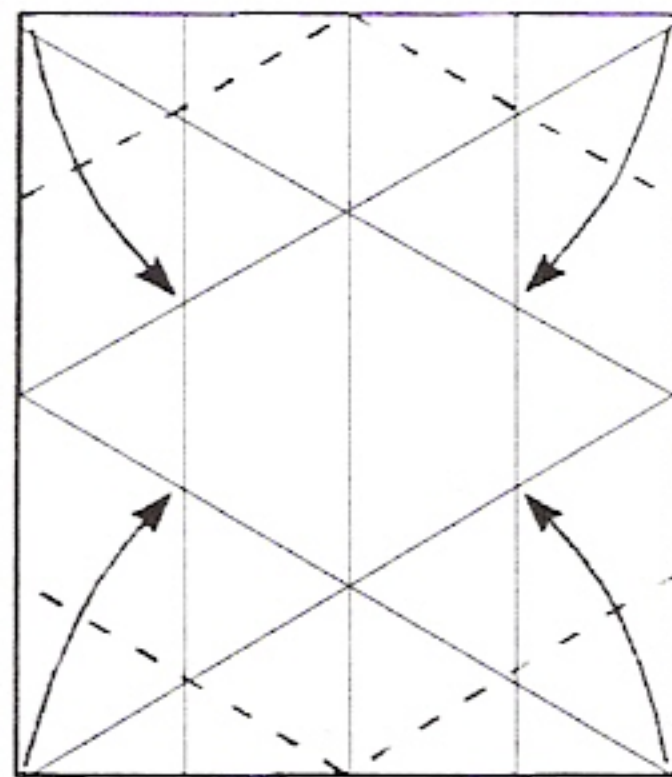
São necessárias cinco folhas de papel A4 ou, ainda melhor, A3 (formato duplo de A4).

Prepare todas as folhas até ao passo 9 do tetraedro.

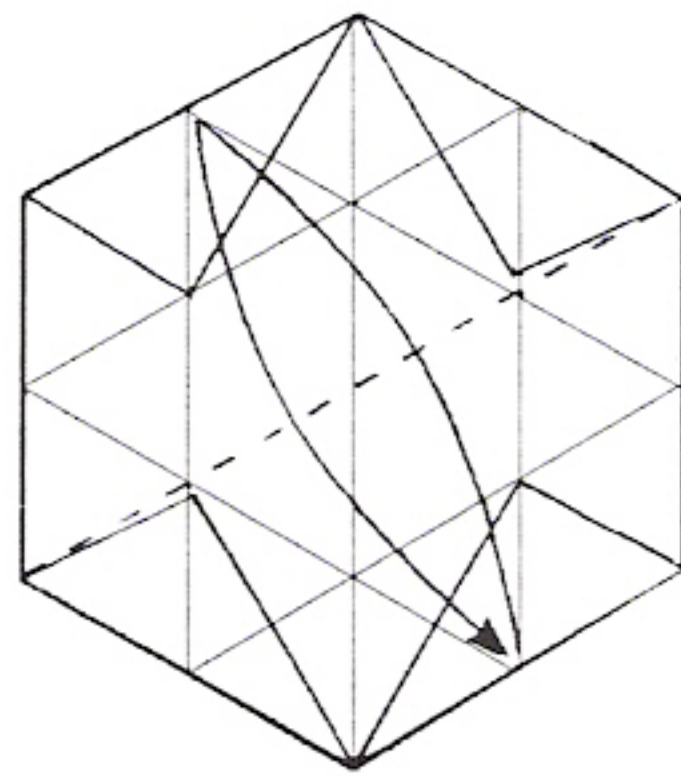
1



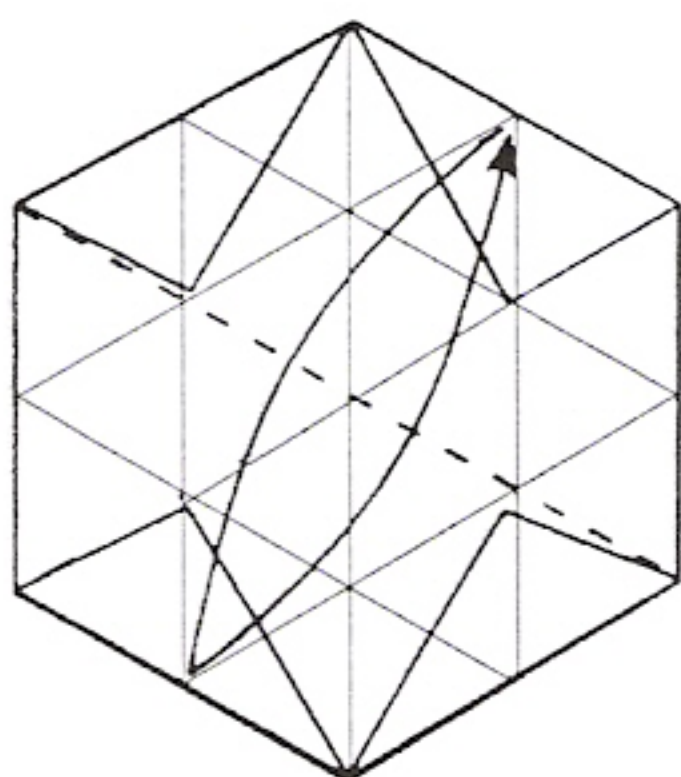
2



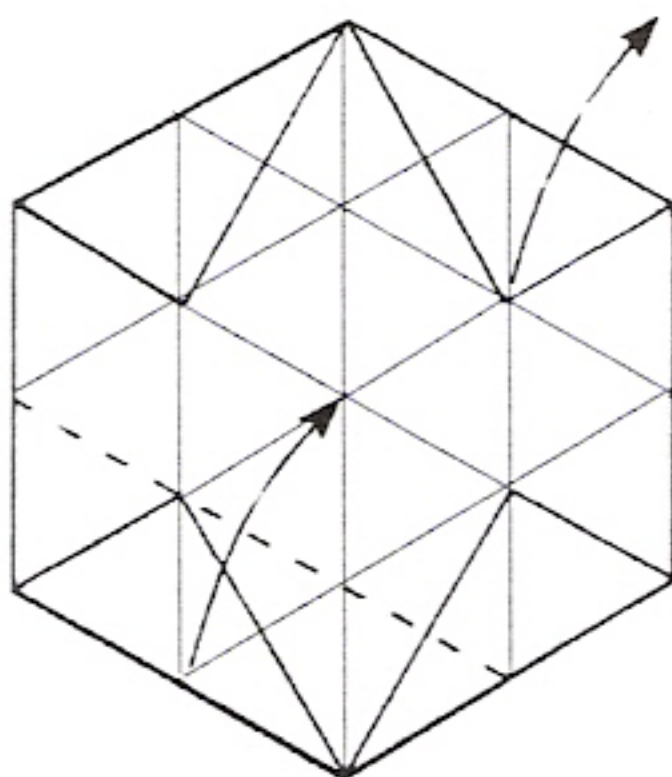
3



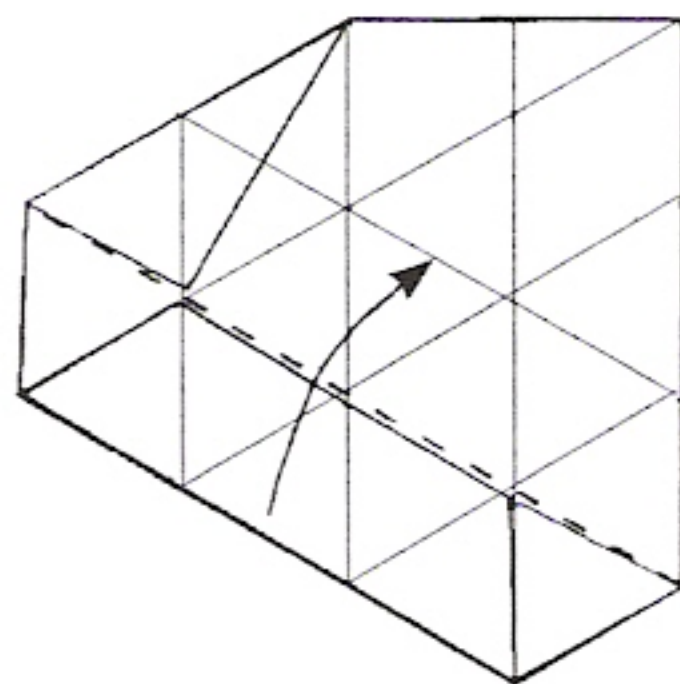
4



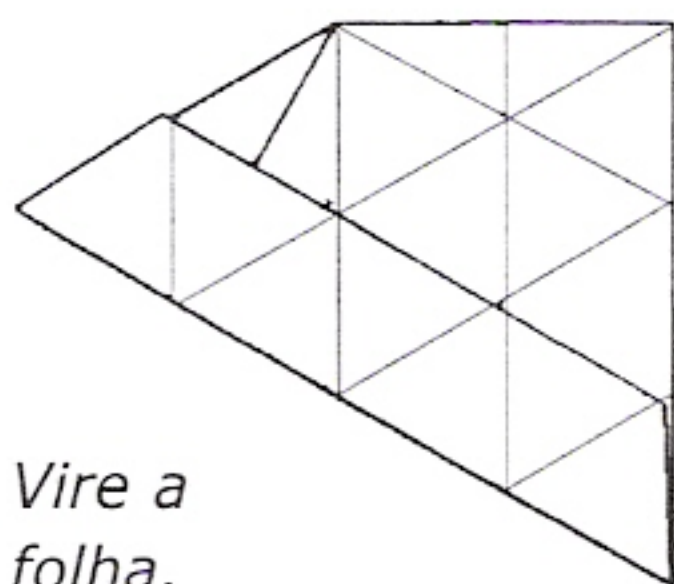
5



6

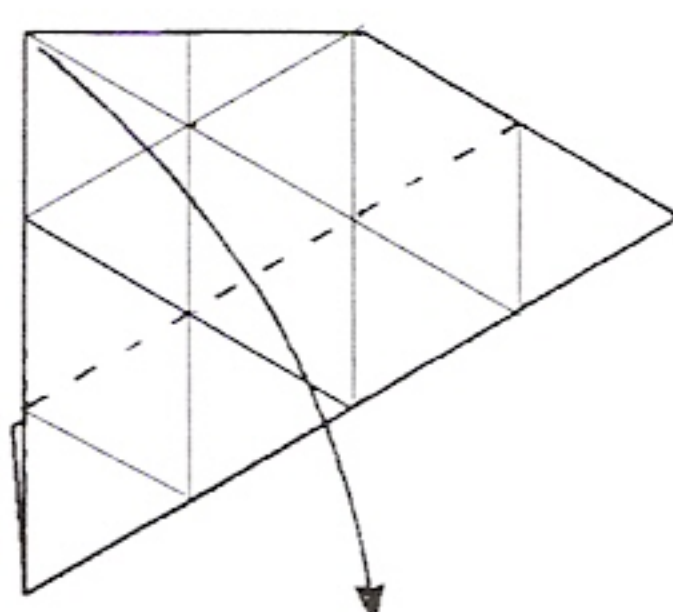


7

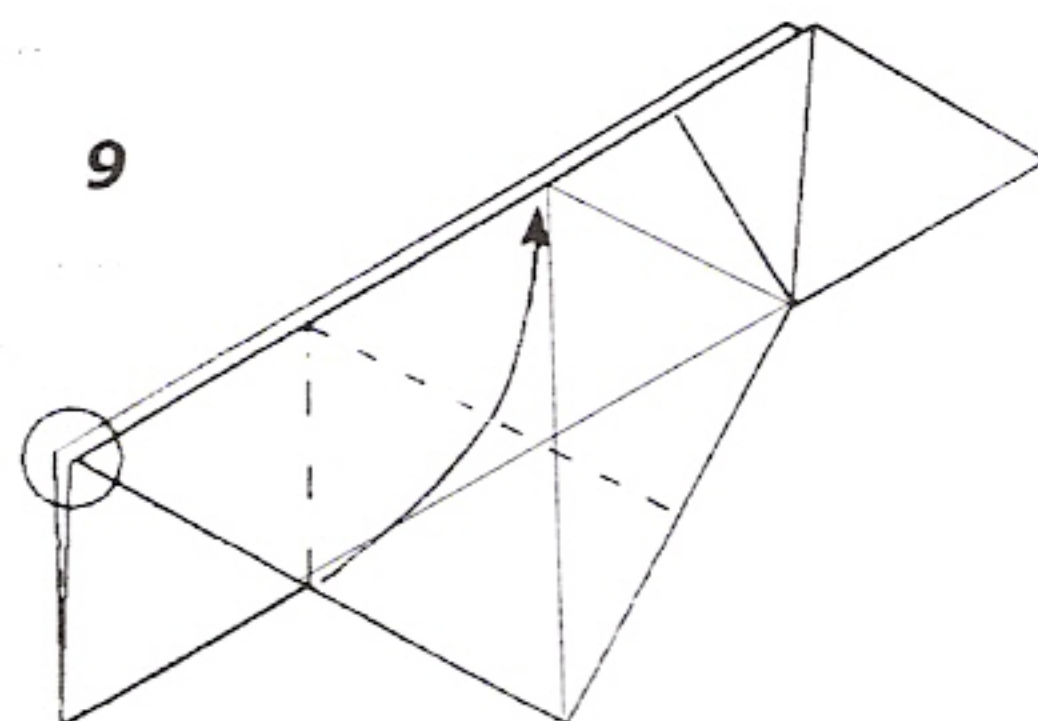


Vire a
folha.

8

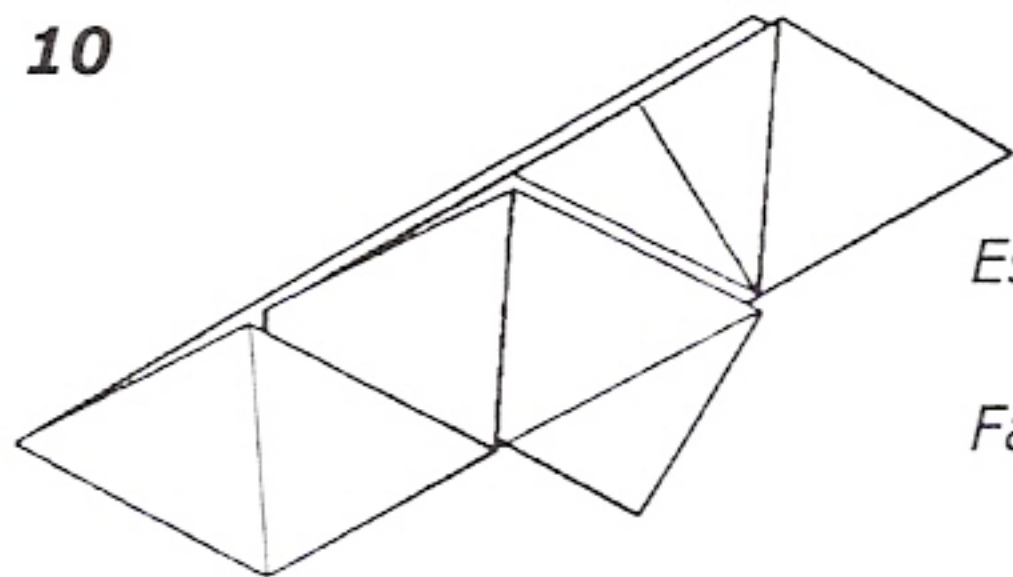


9



Quando fizer esta dobra,
abrir-se-ão as abas no local marcado com
um círculo. Achate-as na nova posição
sem adicionar qualquer vinco extra.

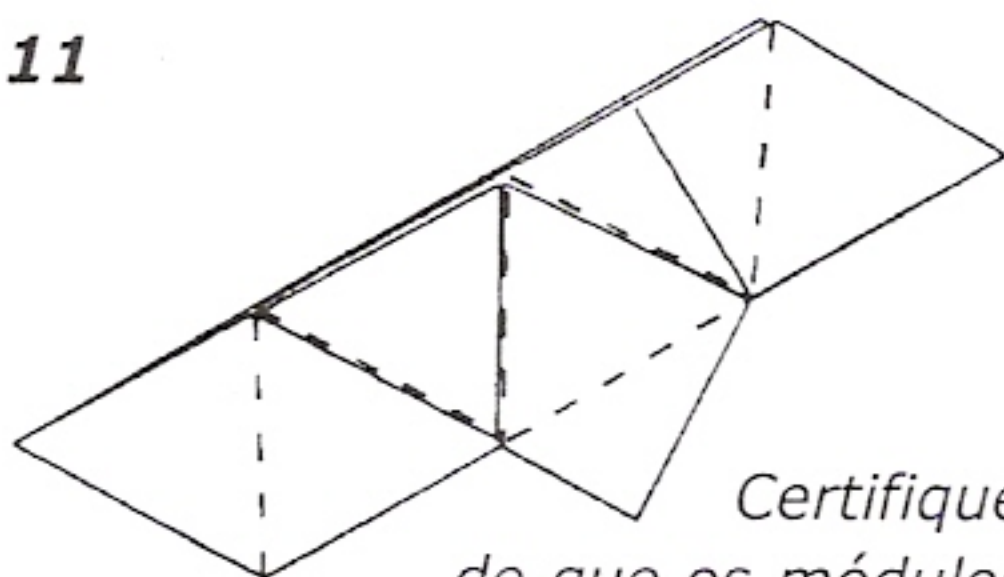
10



Este é o resultado.

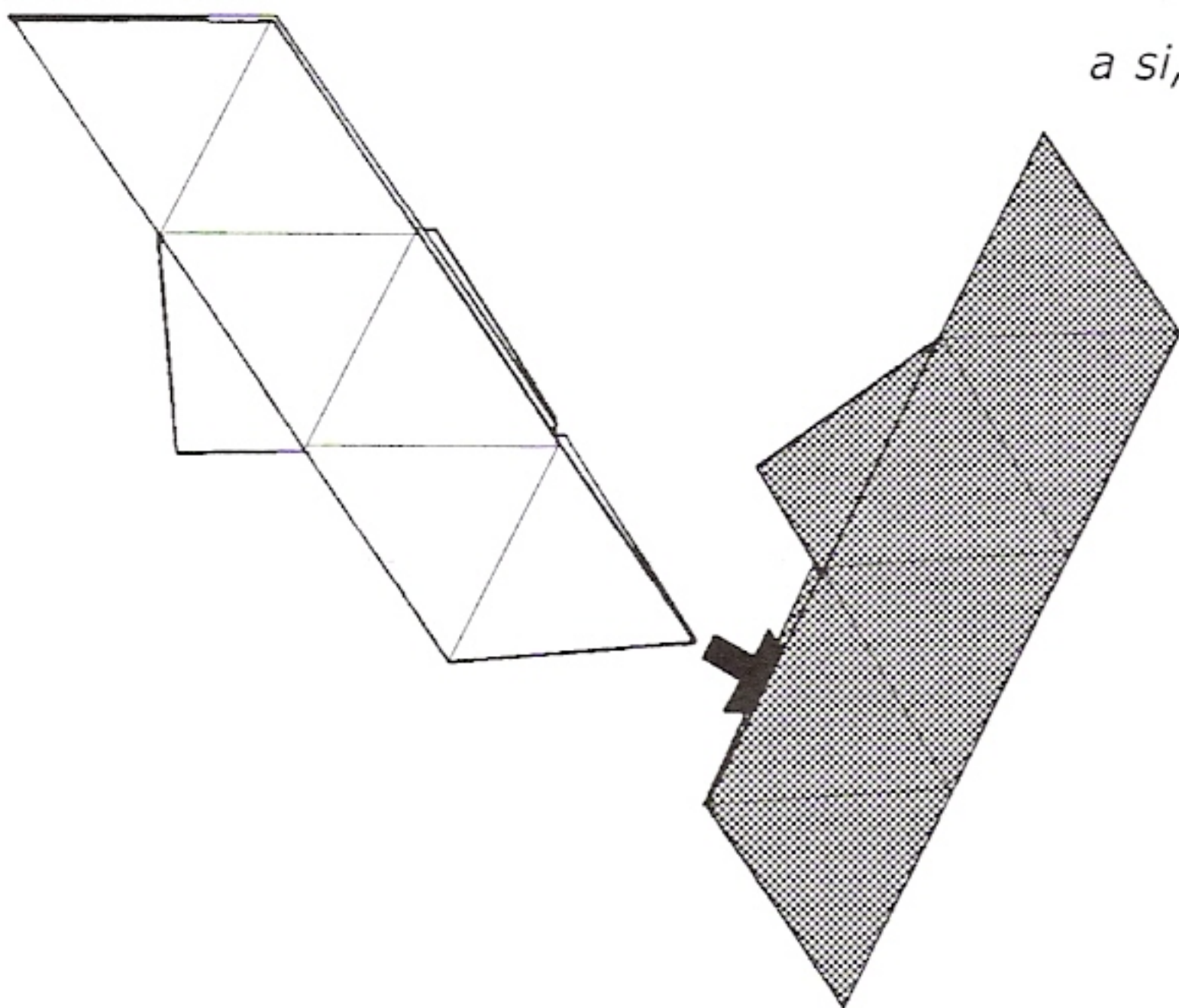
Faça os cinco módulos.

11



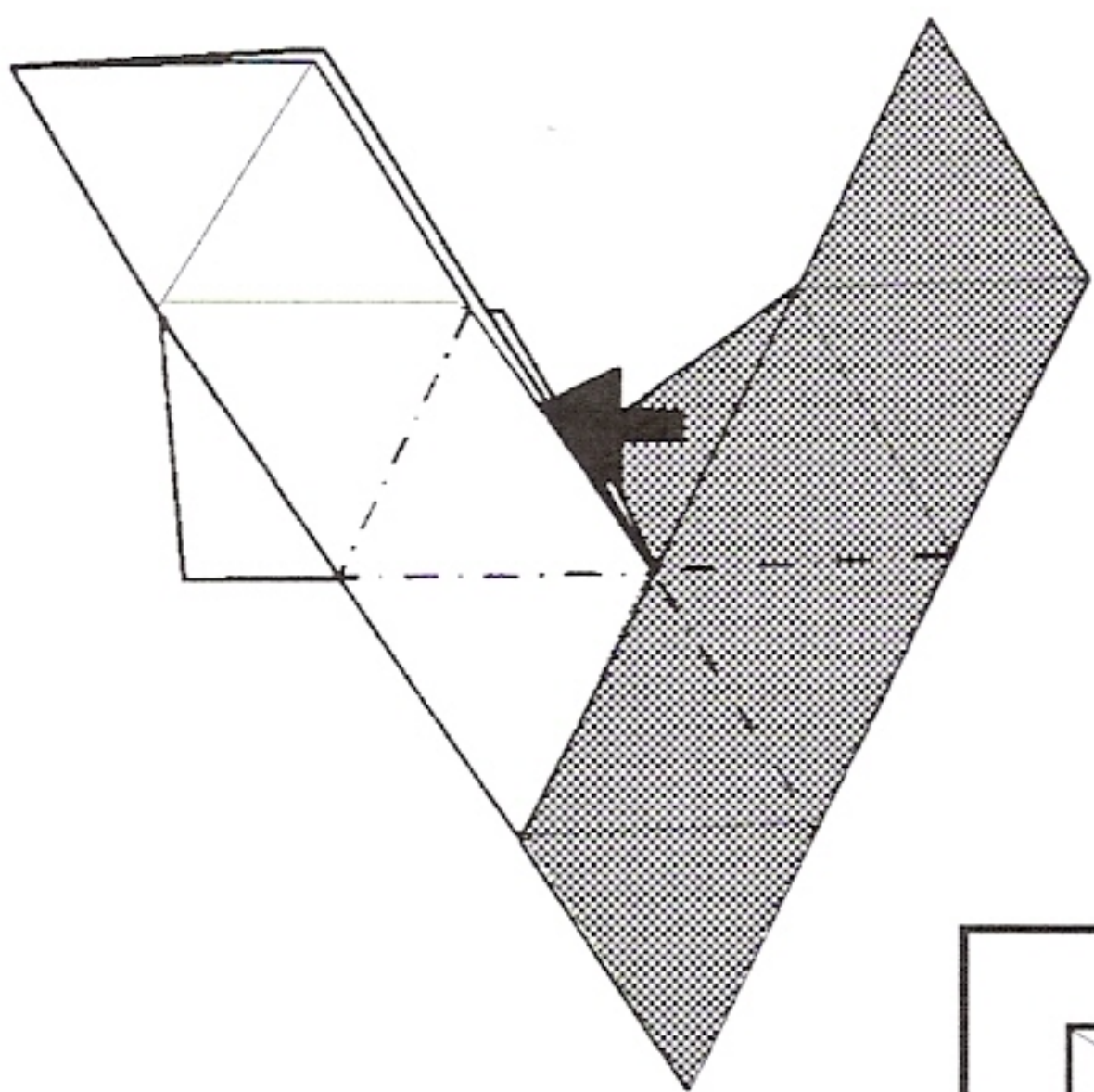
Certifique-se de que os módulos se dobram facilmente em direcção a si, ao longo de todas estas linhas. Depois, vire a folha.

12

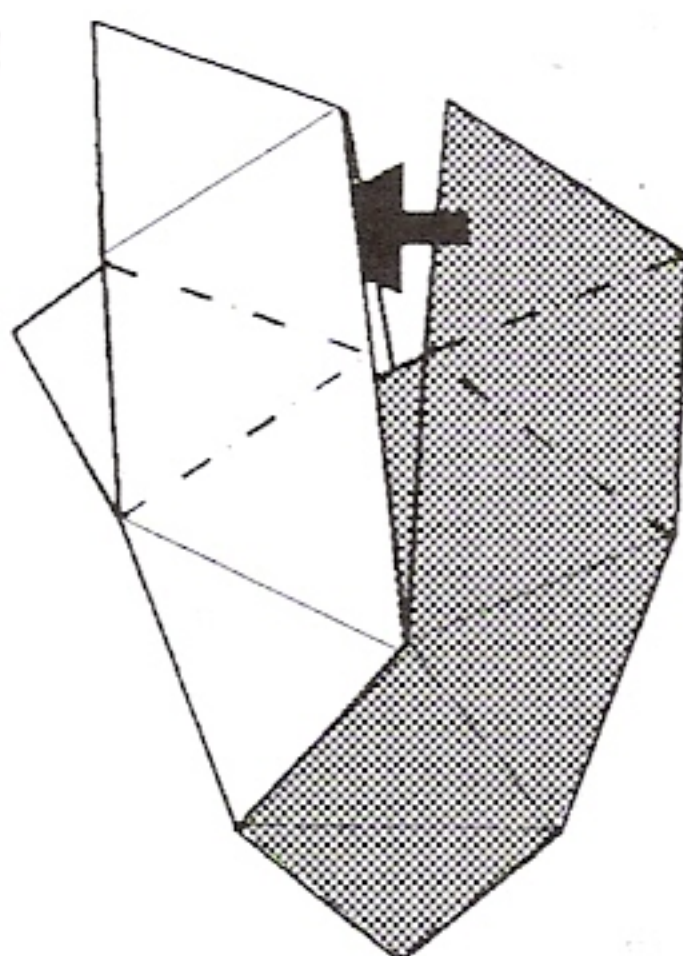


A partir daqui, o segundo módulo está sombreado para tornar as instruções claras, embora, na prática, o modelo resulte melhor se todos os módulos forem da mesma cor.

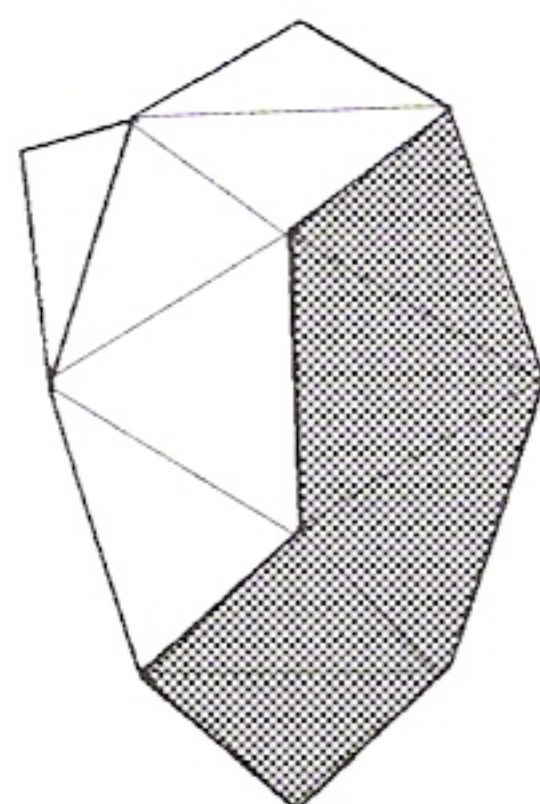
13



14



15



Continue a juntar módulos até o icosaedro estar completo.

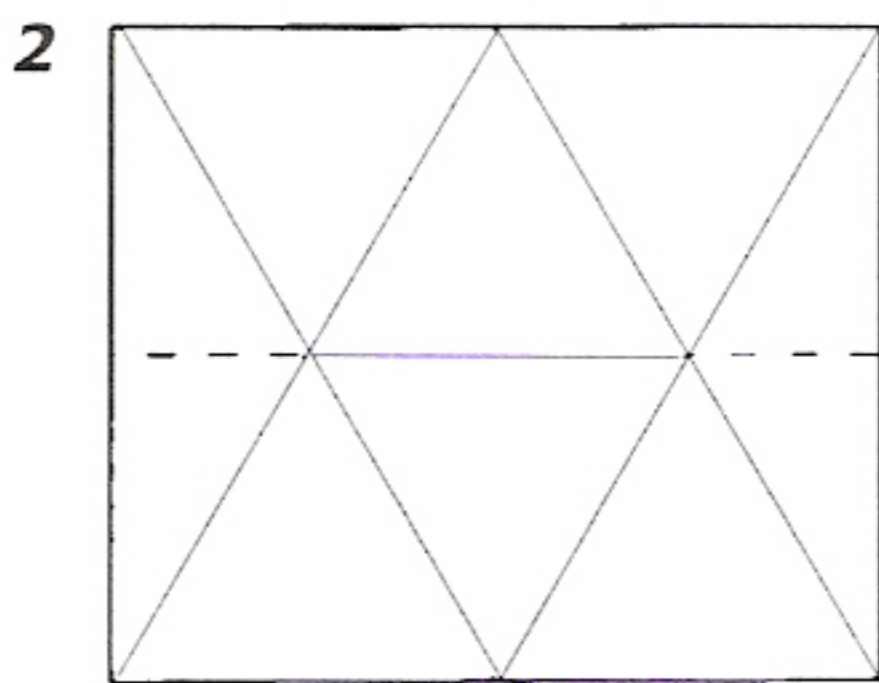
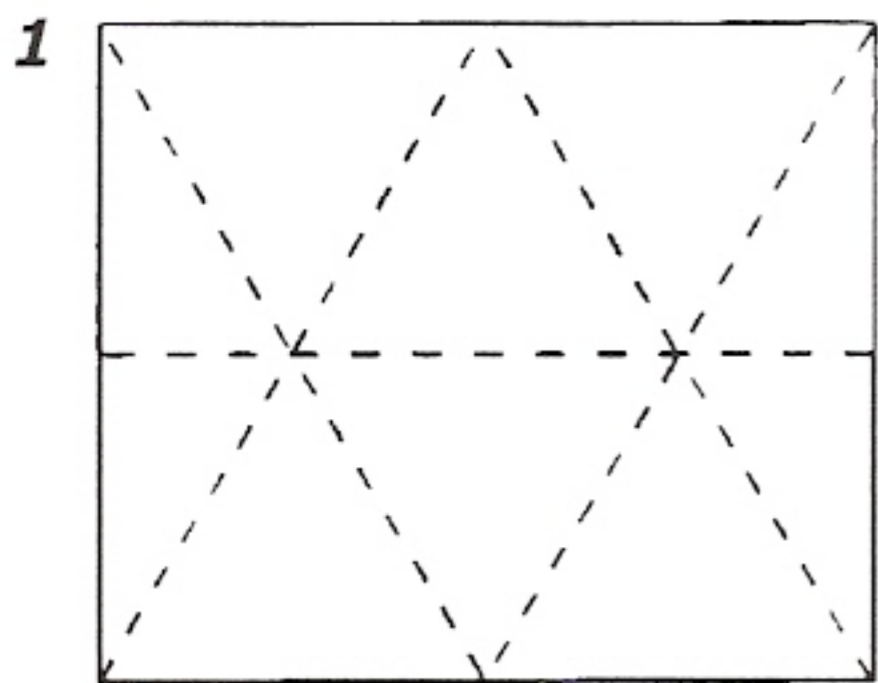


A Tomoko faz este módulo com uma folha de papel quadrada, usando apenas a proporção do rectângulo de $2 : \sqrt{3}$ que é mostrado a sombreado. Trabalhar com menos papel torna o modelo mais elegante, mas a dobragem é ligeiramente mais difícil.

Octaedro

São necessárias duas folhas de papel A4.

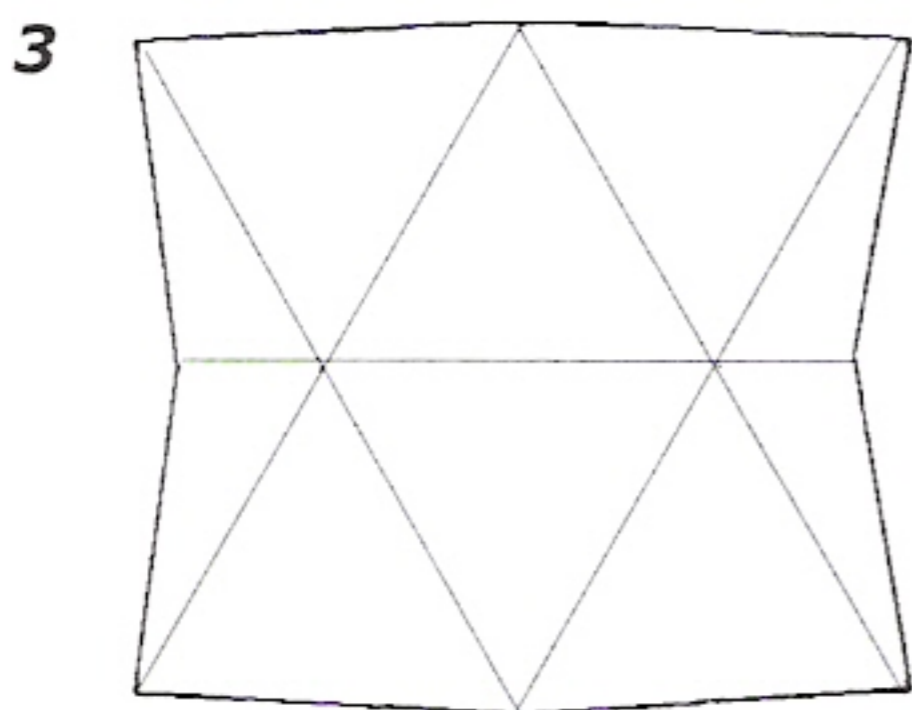
Comece por preparar ambas as folhas até ao passo 9 do tetraedro.



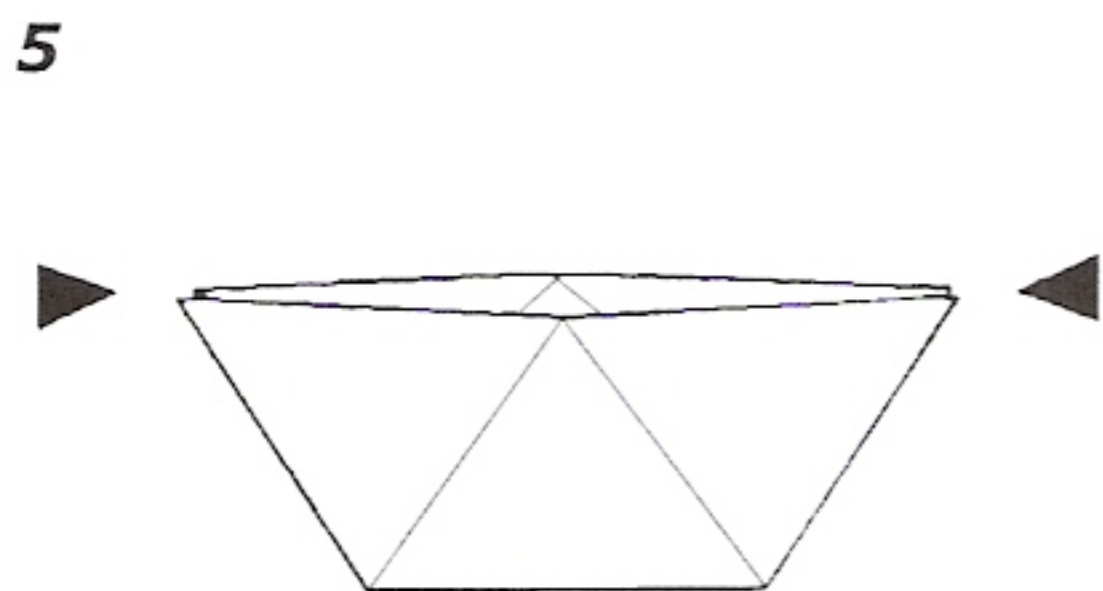
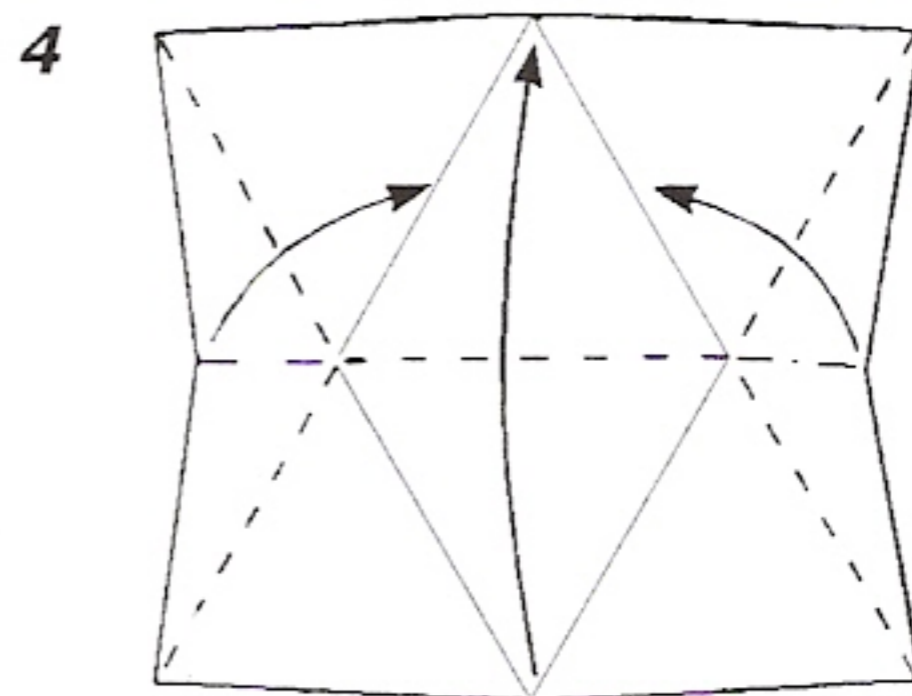
Inverta o sentido destes dois pequenos vincos, mas não inverta qualquer parte do vinco entre eles.

Volte a virar a folha.

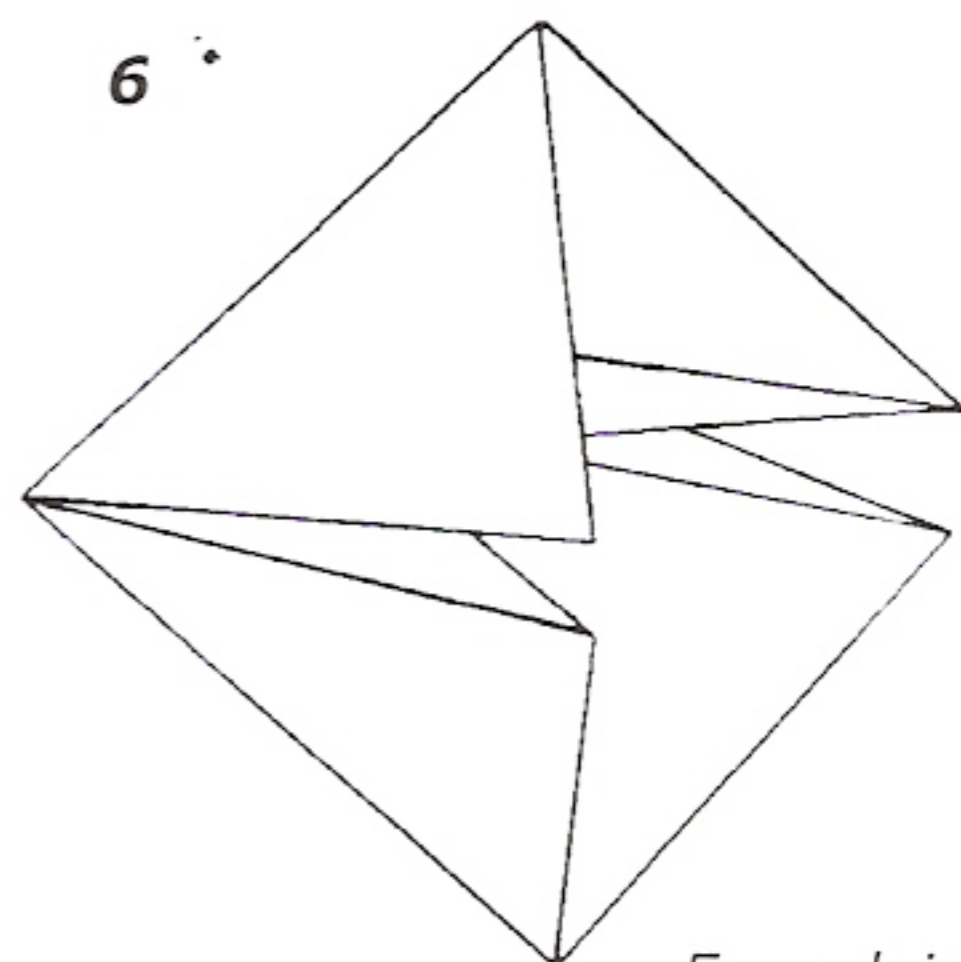
Certifique-se de que todos os vincos se dobram facilmente em direcção a si. Vire a folha.



Deixe que o papel permaneça ligeiramente tridimensional.

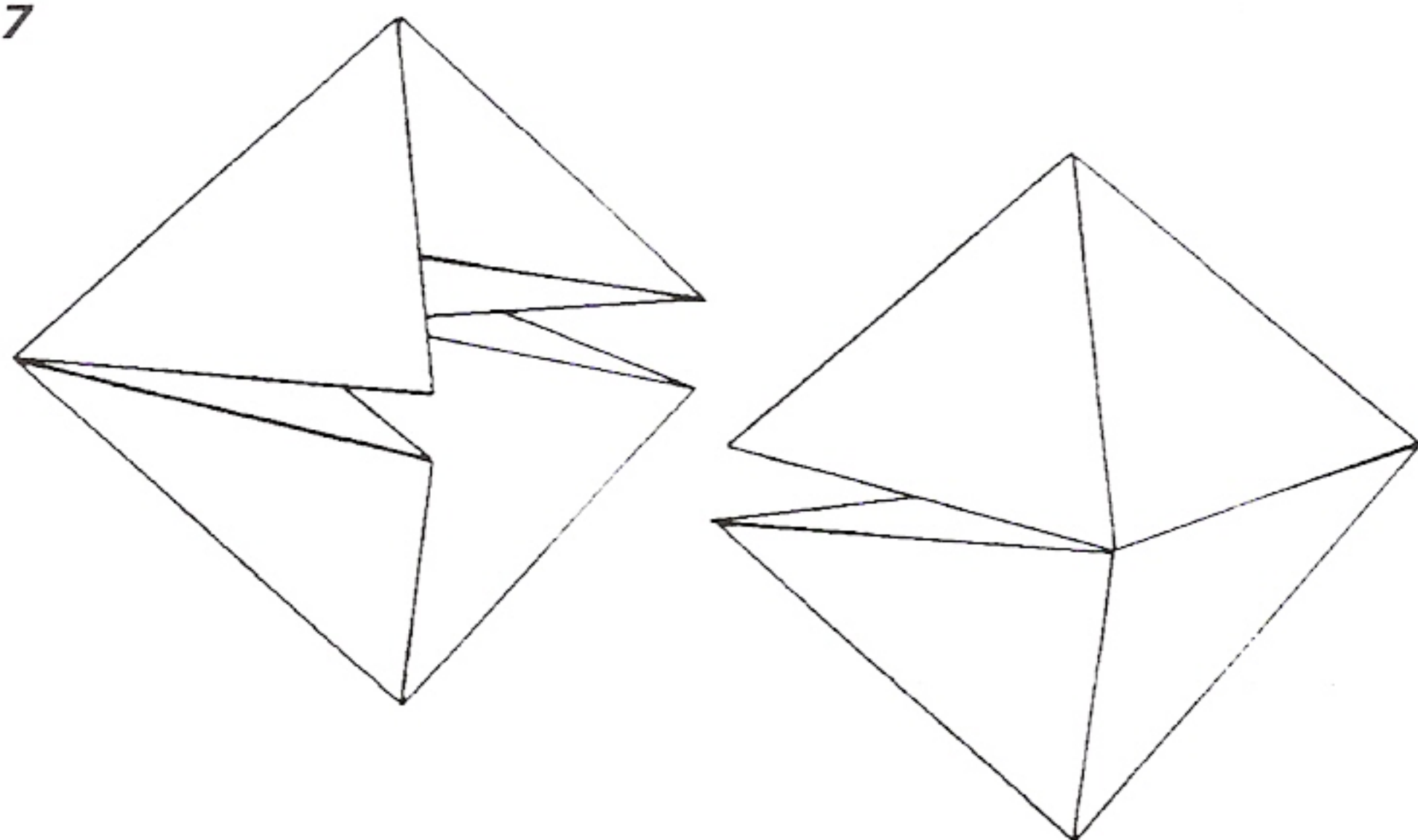


Aplique uma pressão suave ao modelo, e este tornar-se-á tridimensional, como indica a figura.



Faça dois módulos.

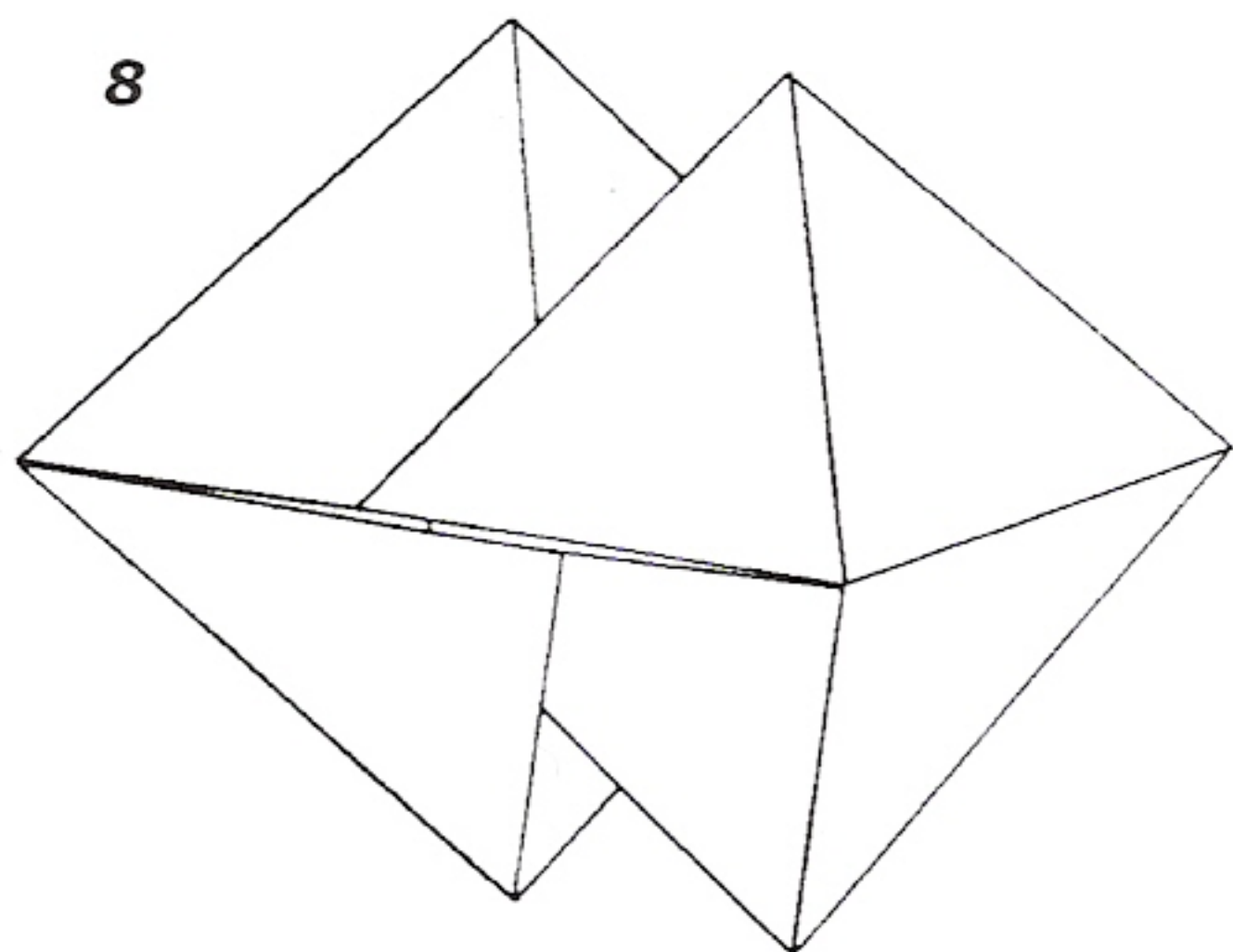
7



Disponha os módulos desta maneira e junte-os delicadamente. As abas de um módulo deverão ser tecidas alternadamente por cima e por baixo das abas do outro módulo.

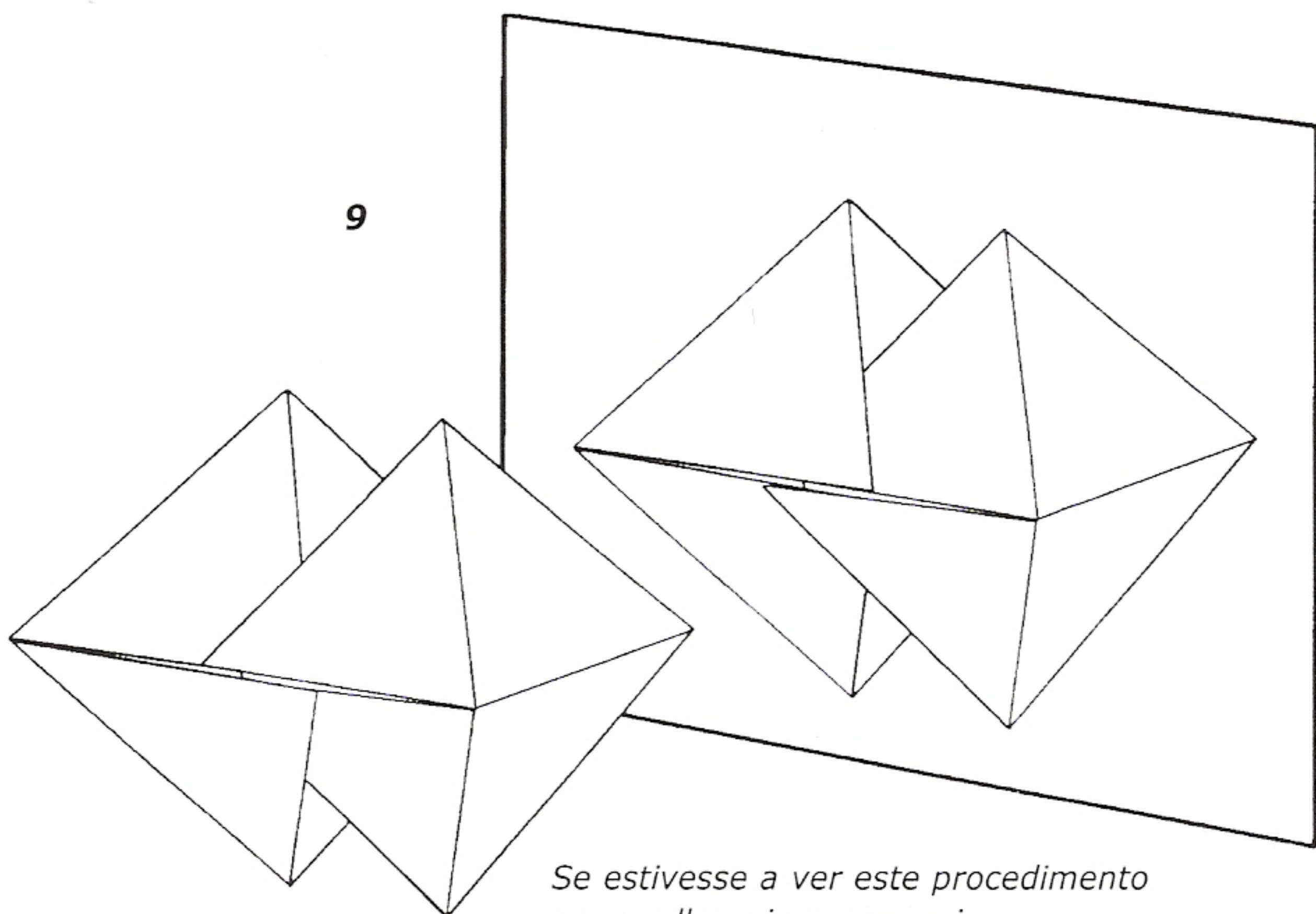
Tenha cuidado para não amarrotar os módulos quando fizer isto.

8



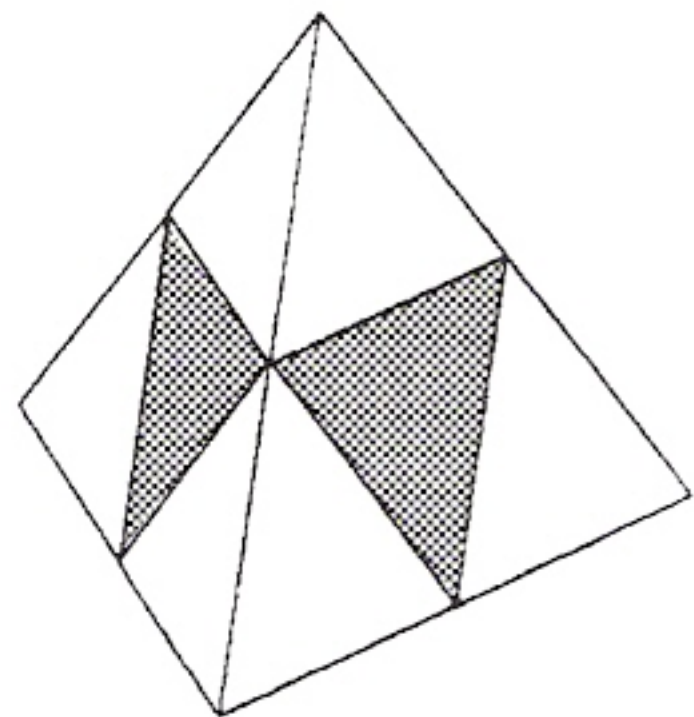
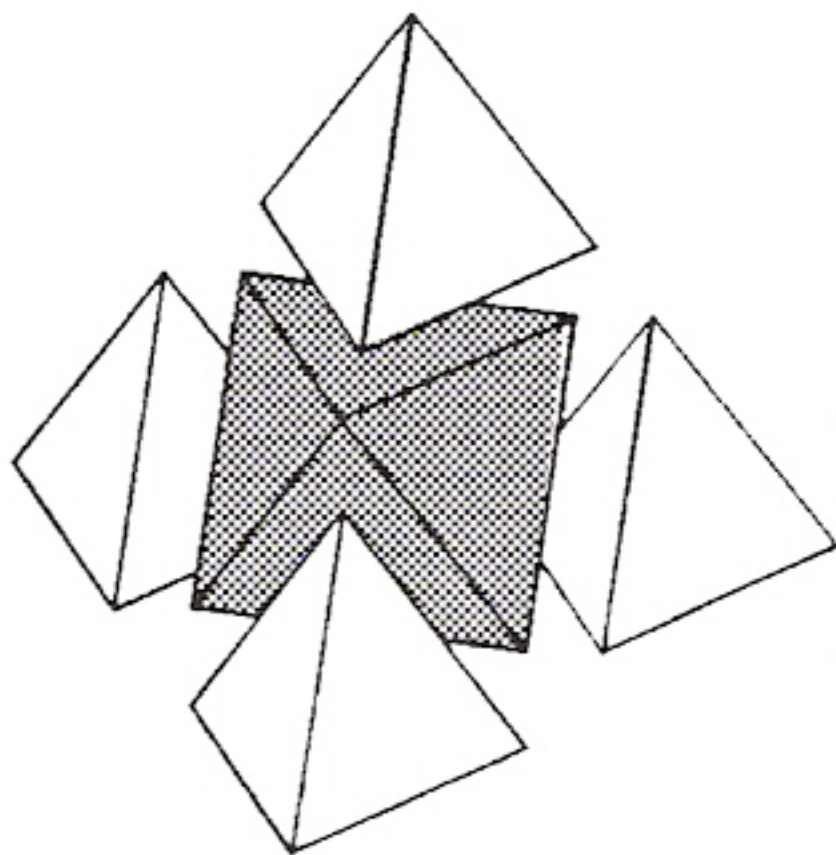
Metade já está feita.

9

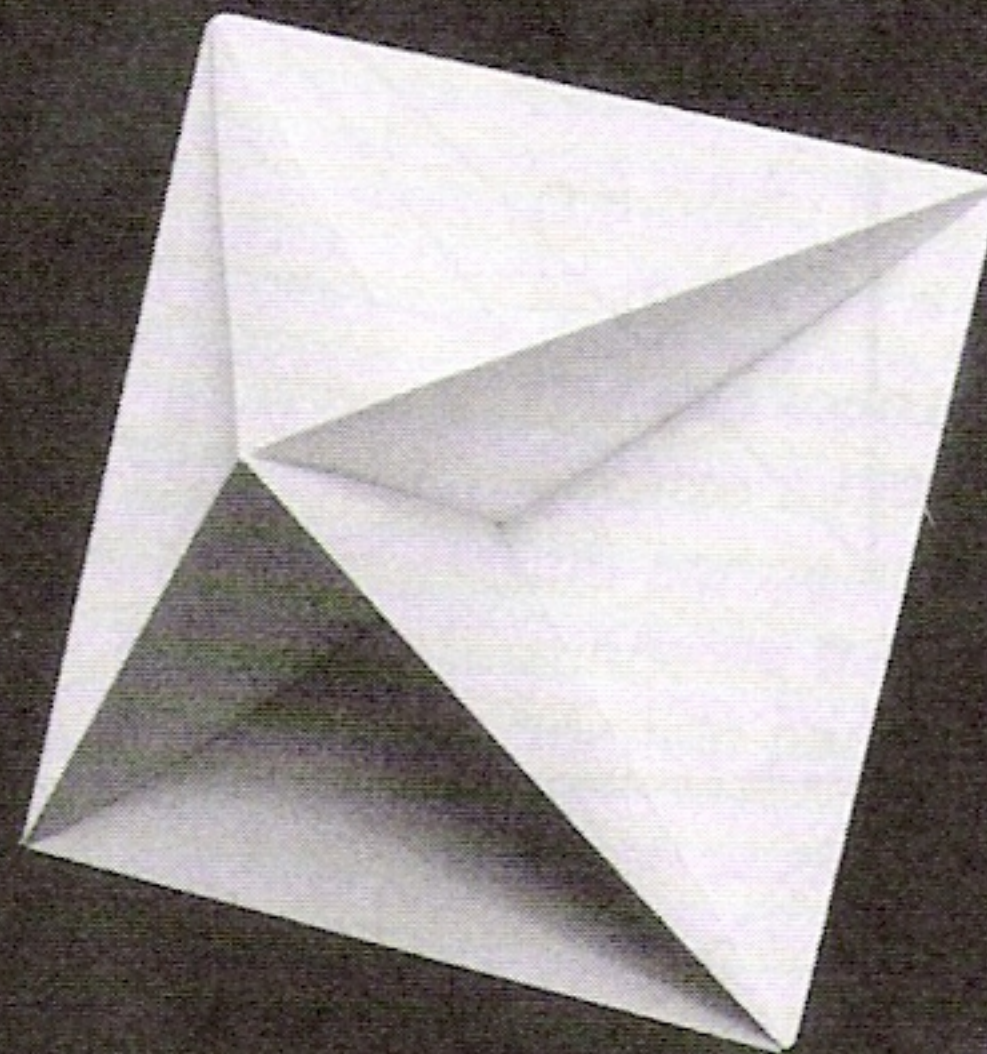


Se estivesse a ver este procedimento ao espelho, eis o que veria.

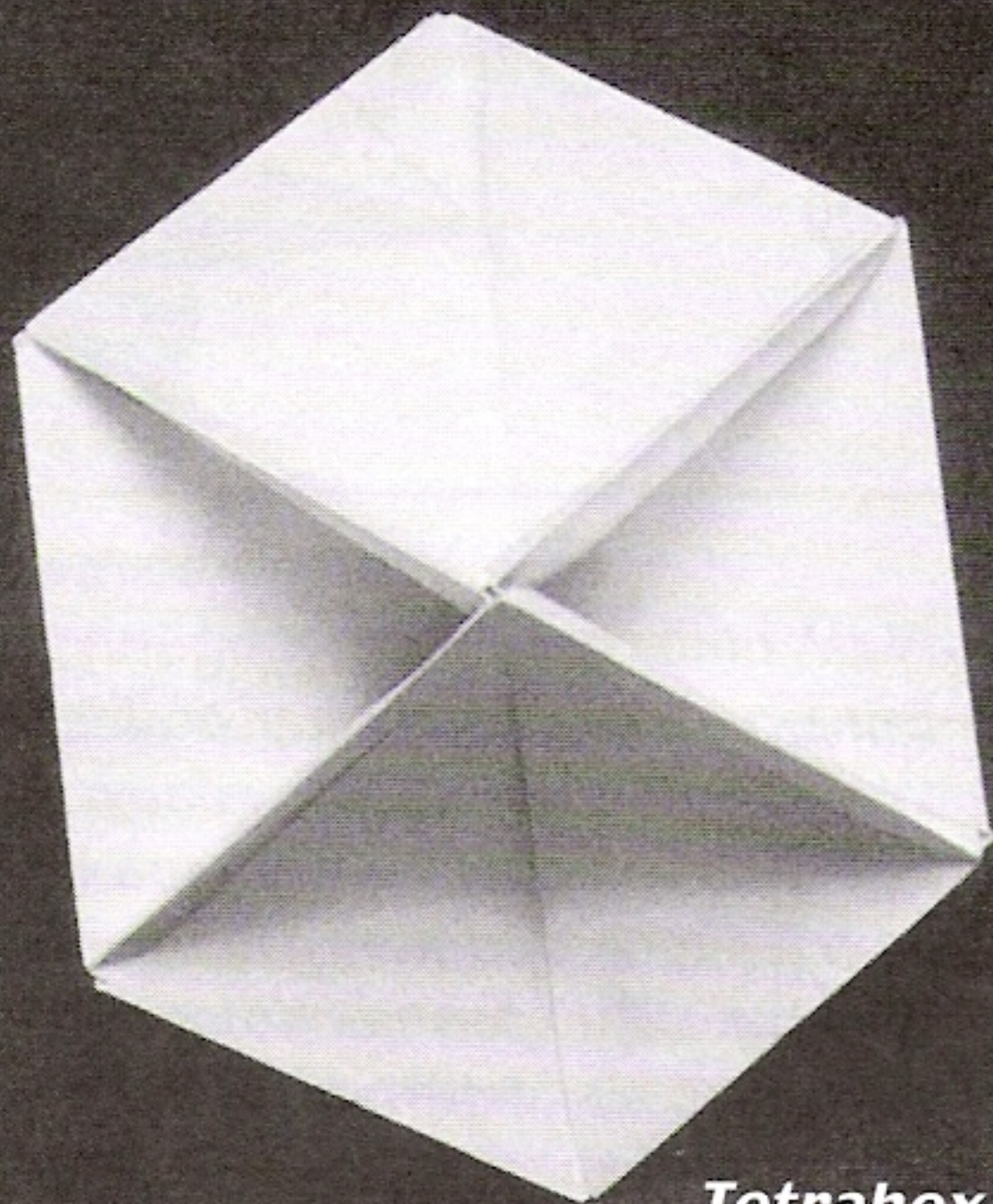
Como as faces do tetraedro e octaedro normais são à escala – quando feitos com papel do mesmo tamanho –, estes podem ser combinados de várias formas e produzir o familiar tetraedro composto, como mostram as figuras ao lado:



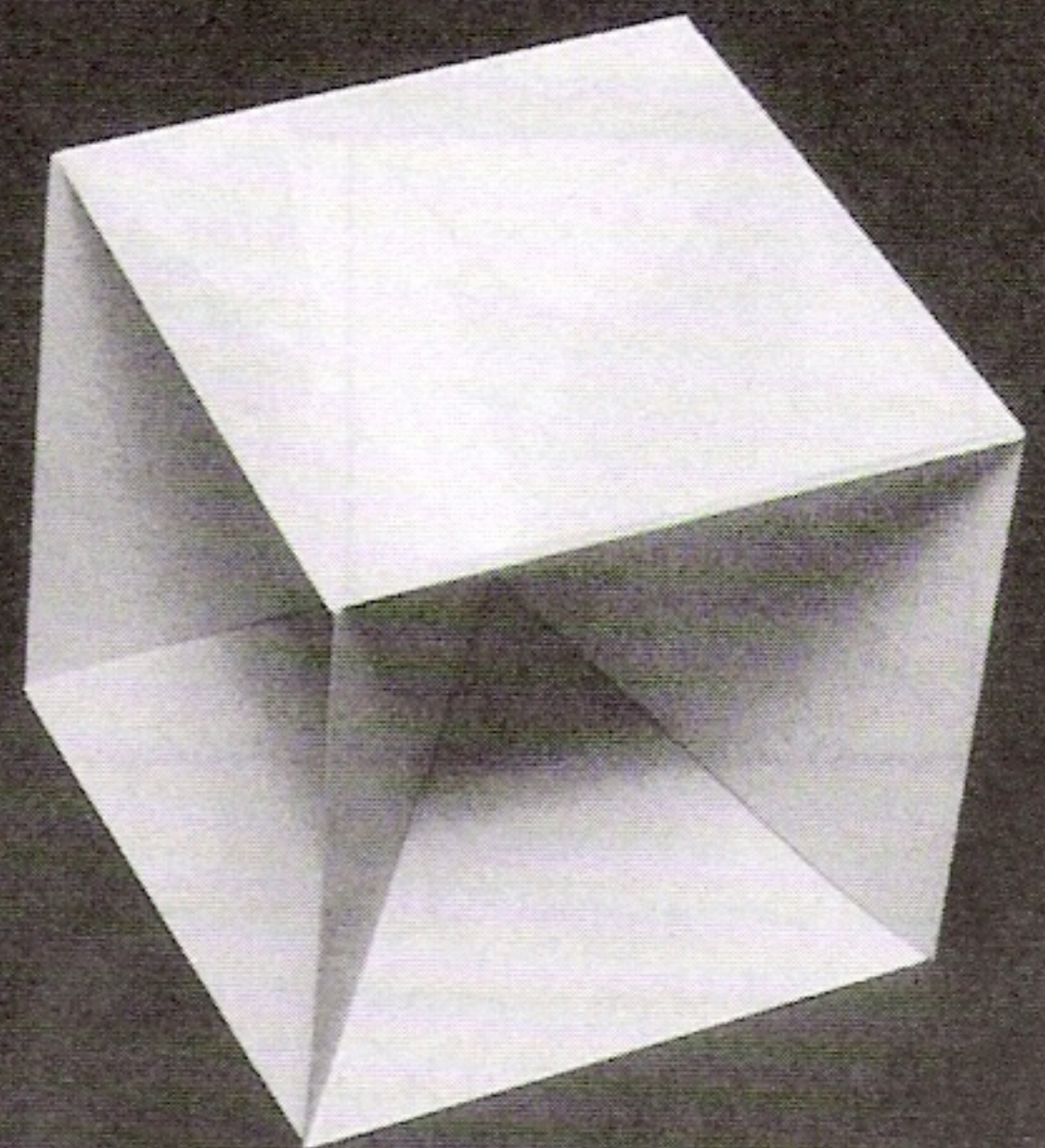
Octaedro esquelético
Tetrahexaedro esquelético
Cubo esquelético



Octaedro esquelético



Tetrahexaedro esquelético

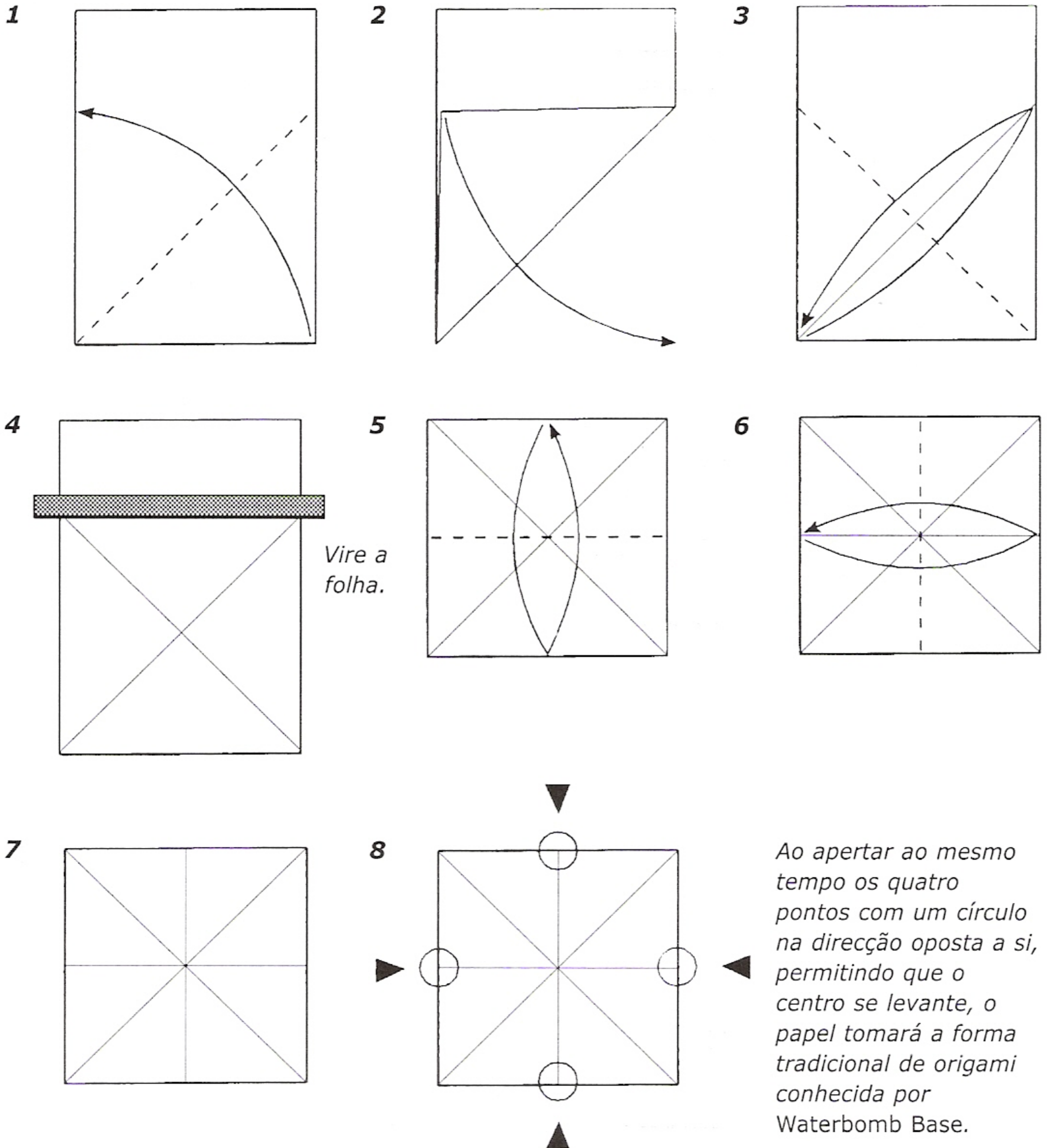


Cubo esquelético

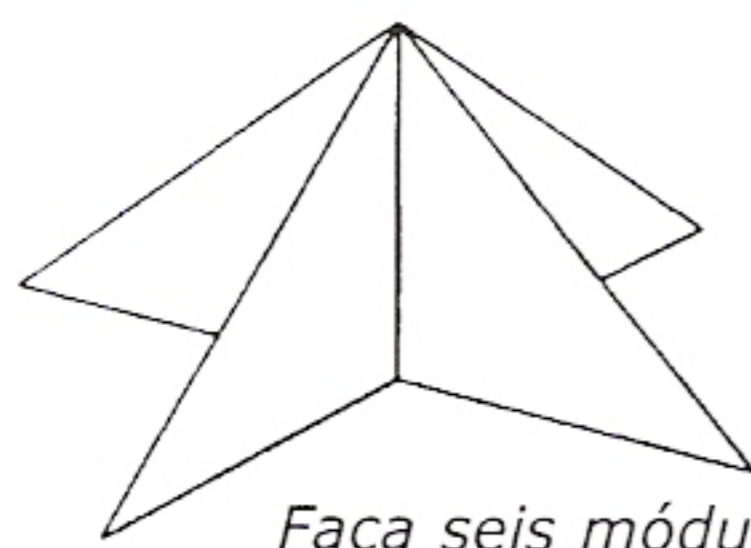
Octaedro esquelético

A descoberta deste modelo por Bob Neale, dos Estados Unidos da América, no início da década de 60, foi a semente inspiradora a partir da qual cresceu grande parte do melhor origami modular. Ele mostrou que o origami modular não só é uma técnica eficaz de modelar poliedros, mas também pode, no seu melhor, ser um instrumento de investigação e desenvolvimento das figuras e formas.

São necessárias seis folhas de papel A4. Para realçar os planos de intersecção, utilize pares de folhas de três cores contrastantes.



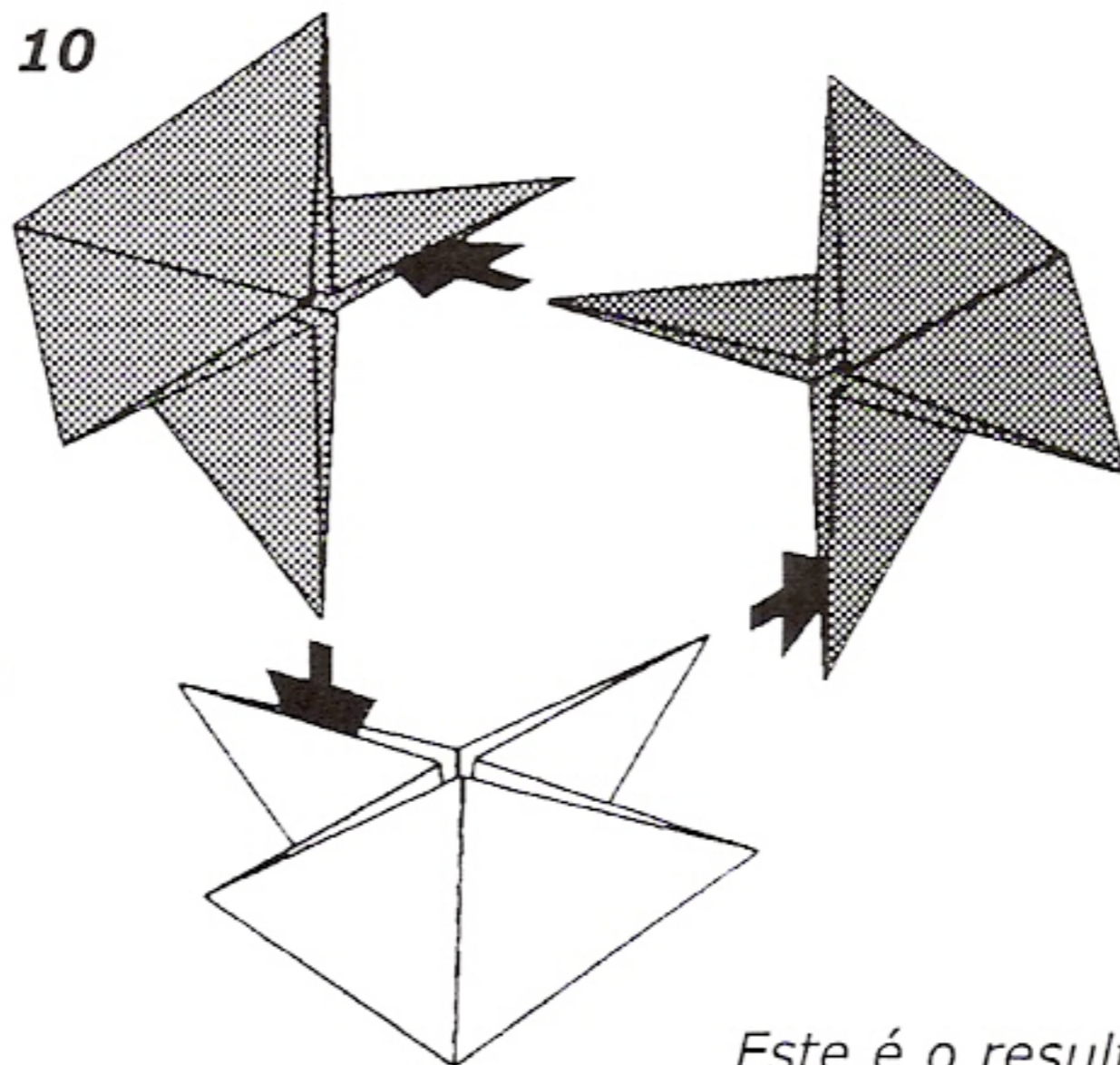
9 A Waterbomb
Base é assim.



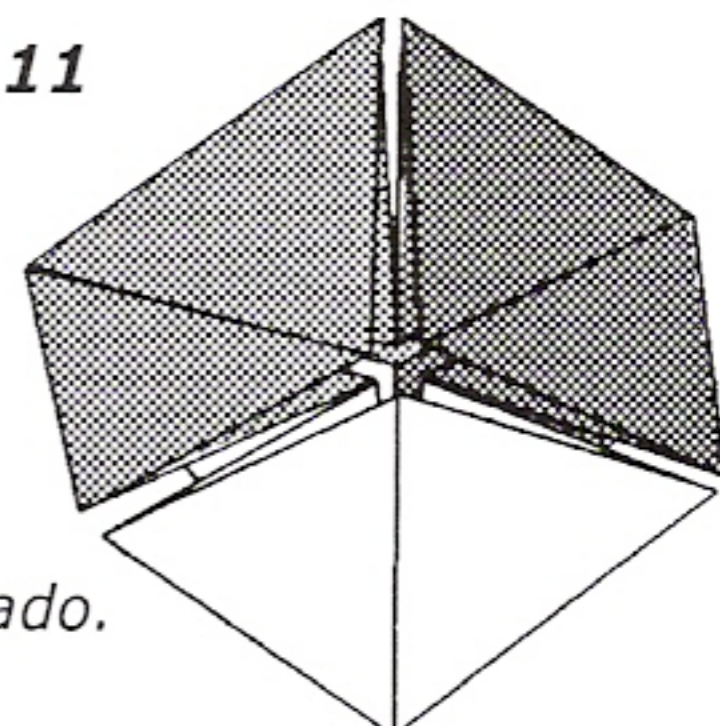
Faça seis módulos.

Vinque todas as orlas
com firmeza.

10

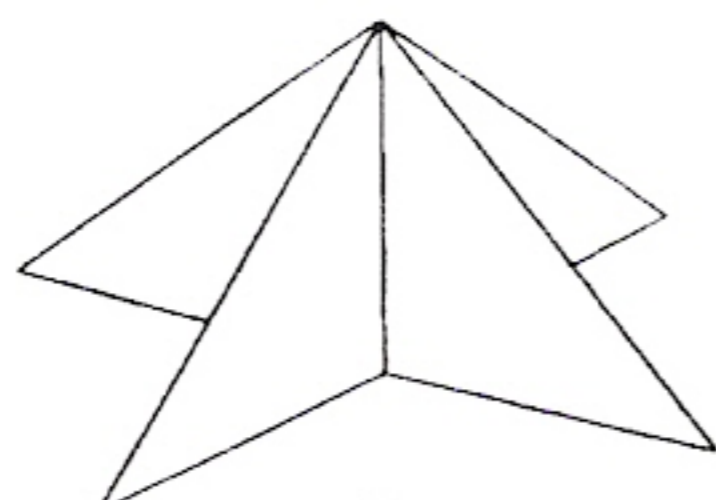


11



Este é o resultado.

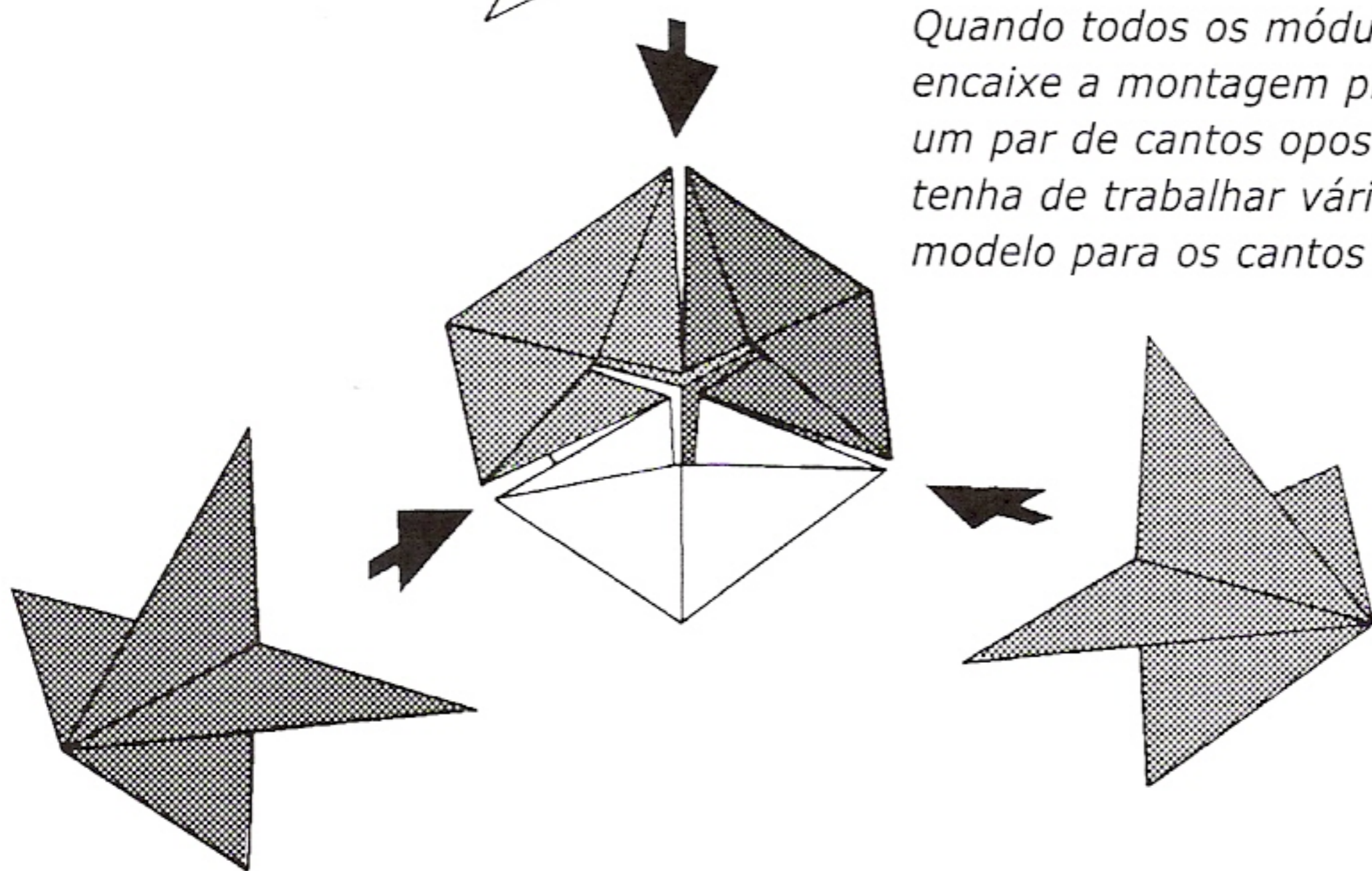
12



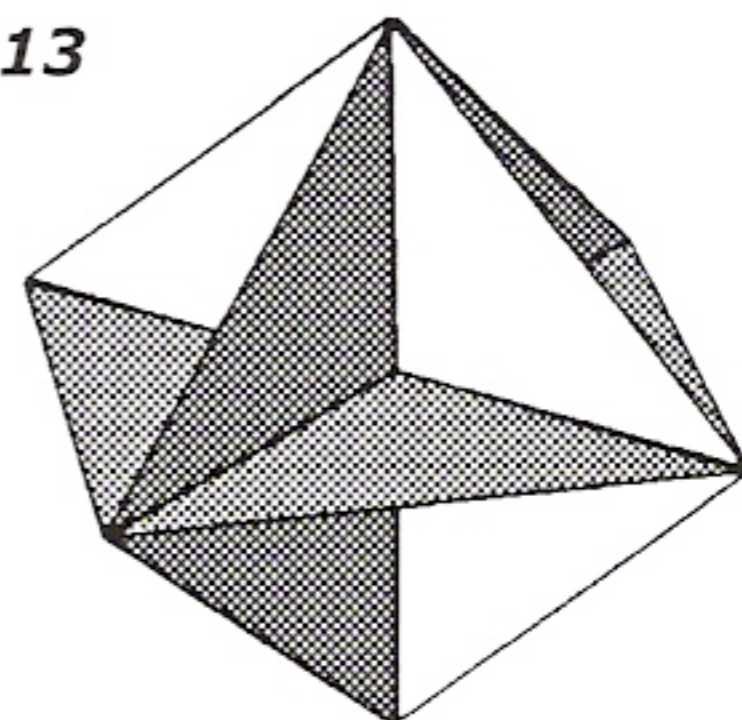
Adicione os três módulos restantes um a um,
certificando-se de que se mantém o padrão por
baixo/cima.

O módulo final encaixar-se-á com mais facilidade
se mantiver a montagem um pouco folgada.

Quando todos os módulos estiverem no sítio,
encaixe a montagem pressionando delicadamente
um par de cantos opostos de cada vez. Talvez
tenha de trabalhar várias vezes em torno do
modelo para os cantos ficarem realmente aguçados.



13



Poliedros esqueléticos

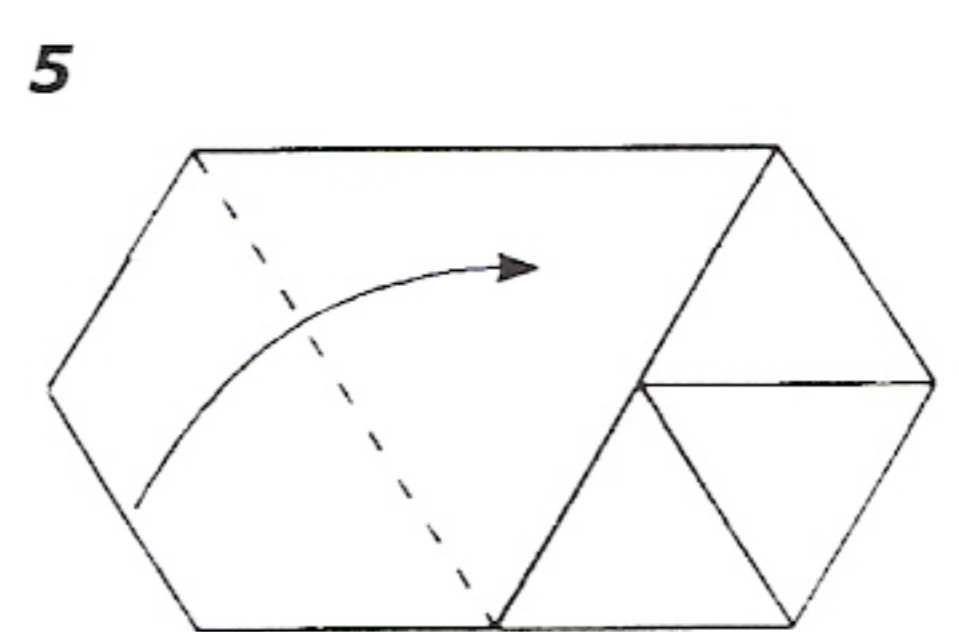
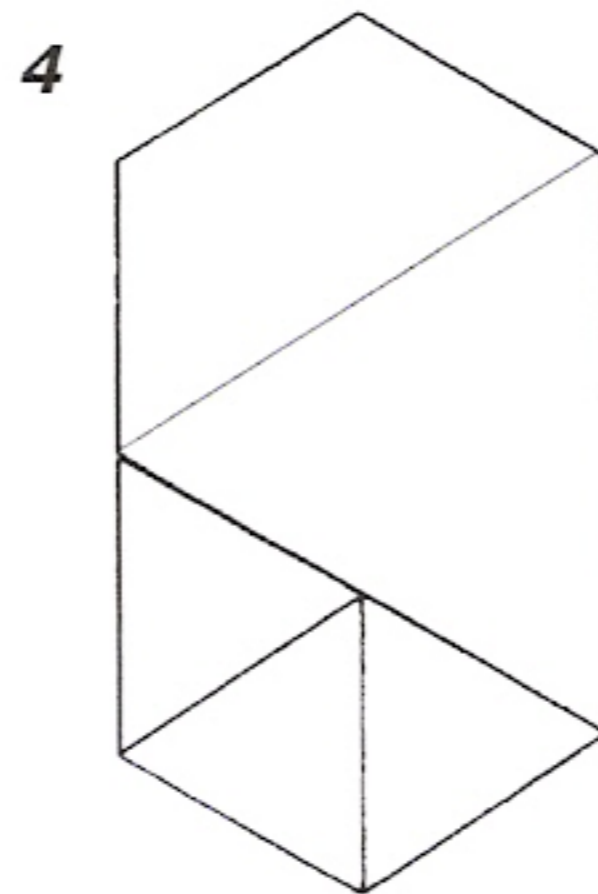
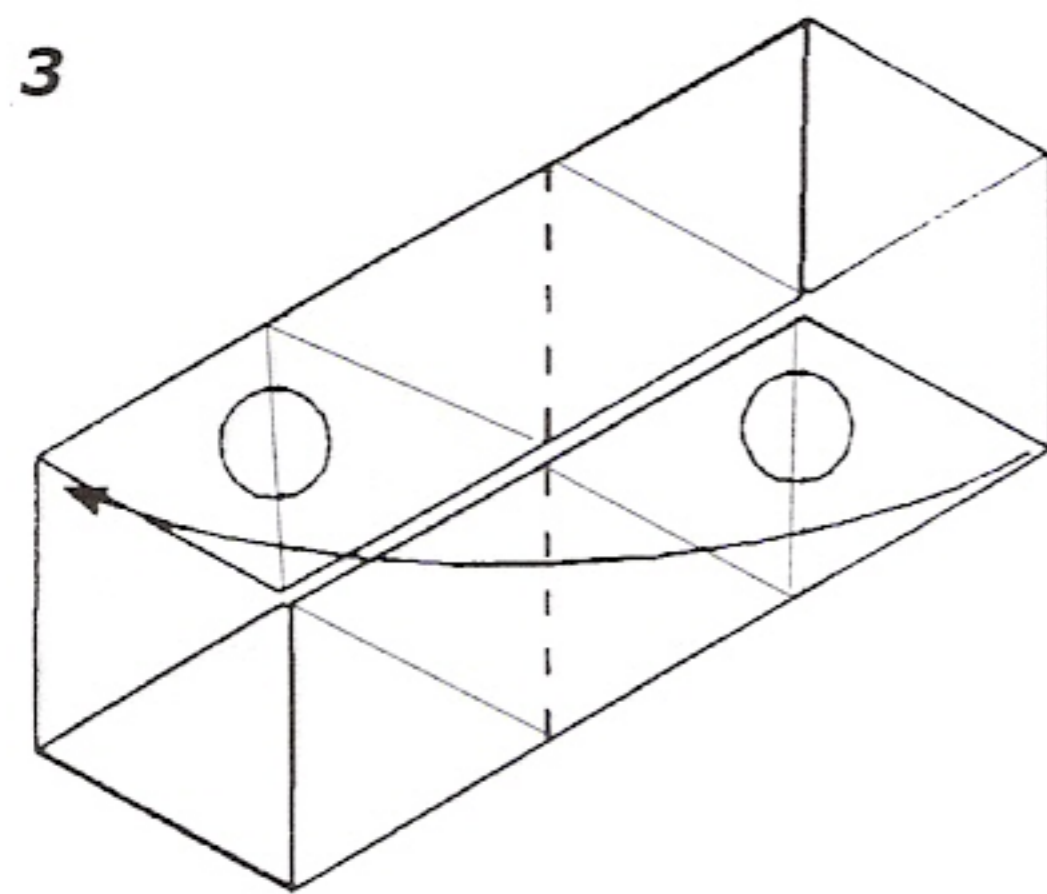
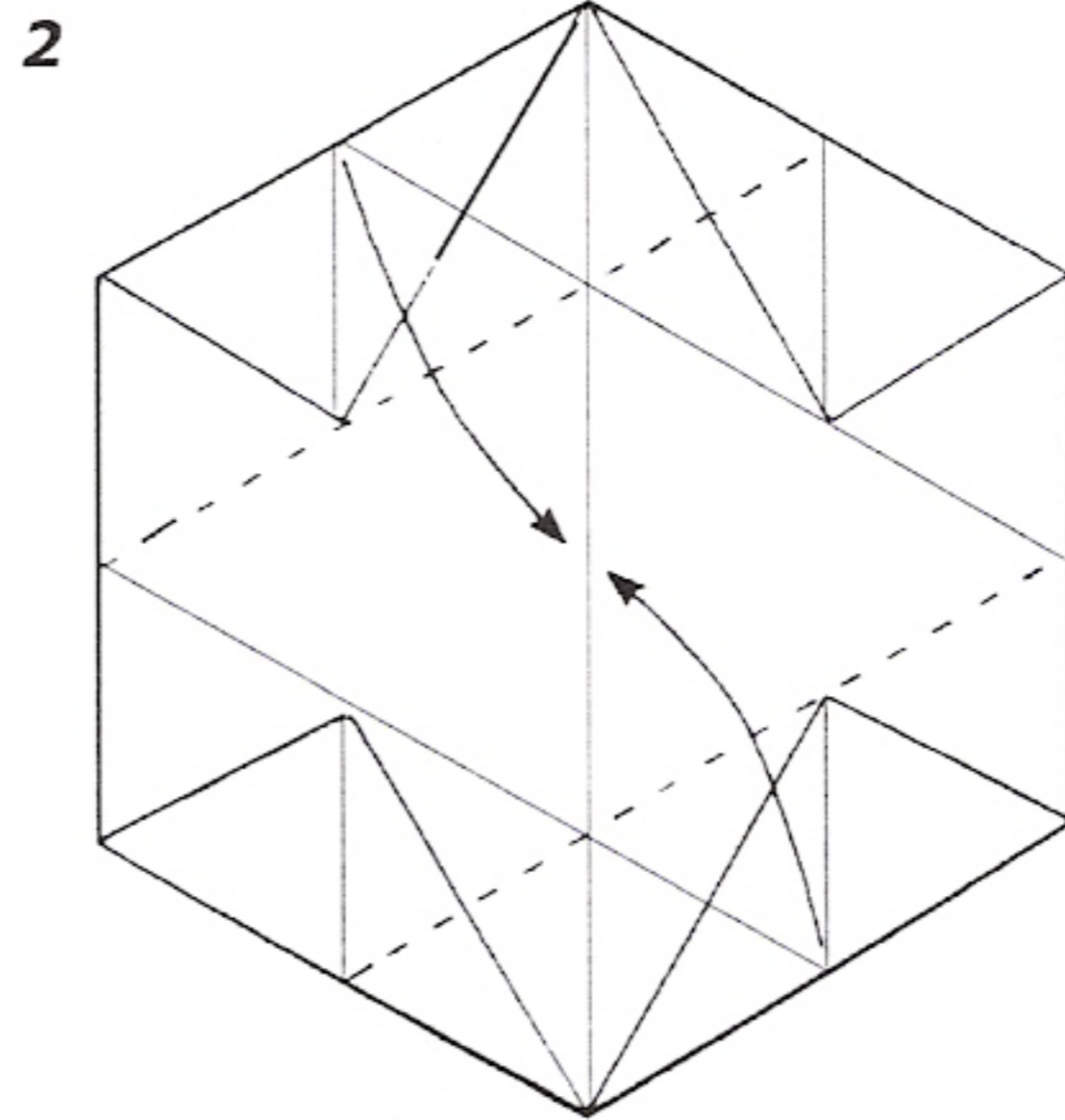
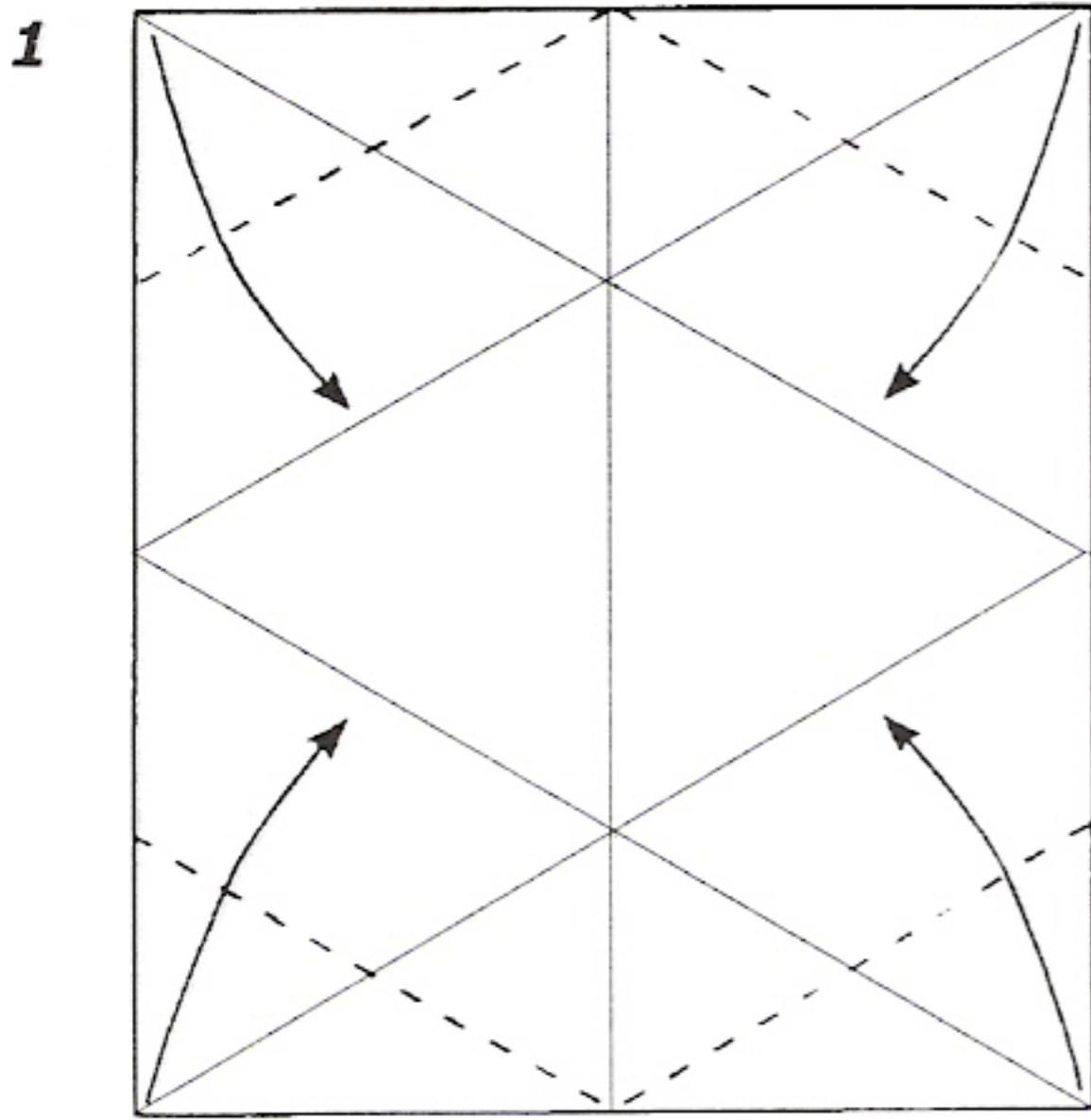
Conhecidos por vezes como *Nolids*, estas formas interessantes são compostas por planos finitos que se estendem entre cada orla e o centro de simetria do poliedro. O próximo modelo – o cubo esquelético – demonstra um método geral para produzir módulos para muitos poliedros esqueléticos. Só é necessário um rectângulo cujas diagonais se cruzem no ângulo certo. Um Rectângulo Dourado, por exemplo, produzirá o ângulo central correcto para modelar um icosaedro esquelético.

Há três casos especiais em que os planos se combinam para formar polígonos que se interpenetram. O octaedro esquelético consiste em três quadrados que se interpenetram, o tetrahexaedro esquelético em quatro hexágonos que se interpenetram e o icosidodecaedro (que, infelizmente, ultrapassa o alcance deste livro) em seis decágonos que se interpenetram.

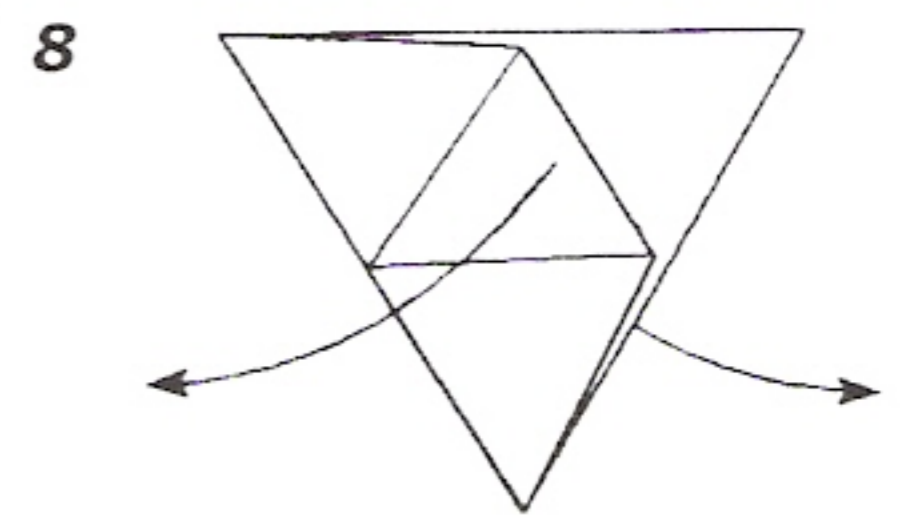
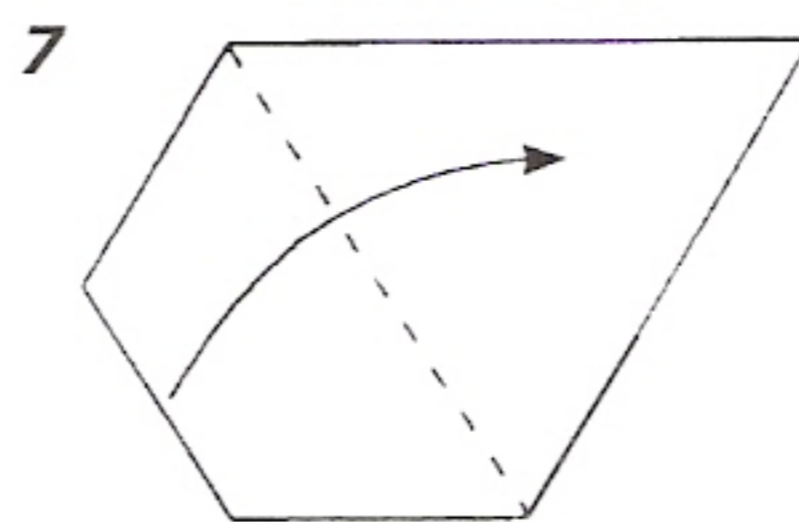
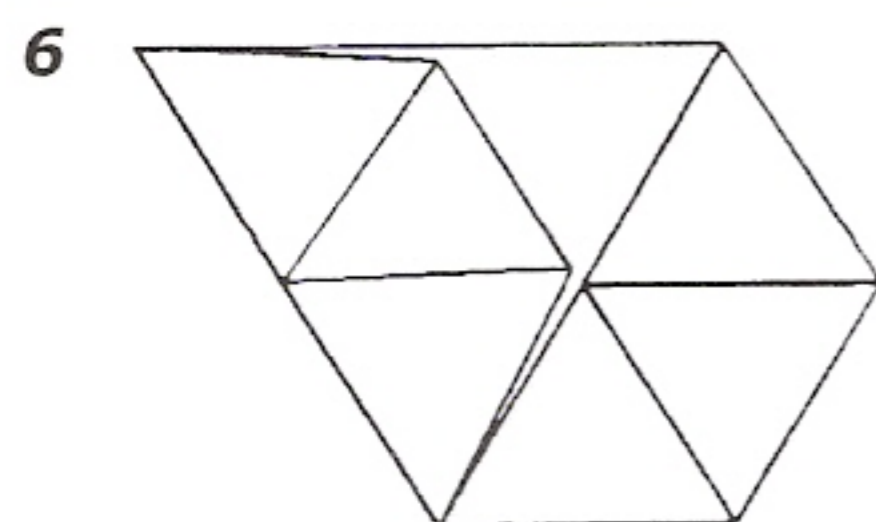
Tetrahexaedro esquelético

São necessárias doze folhas de papel A4. Para realçar os planos hexagonais que se cruzam, utilize trios de folhas de quatro cores contrastantes.

Comece por dividir ao meio as folha A4, para que fiquem com o tamanho A5, e preparar todas as folhas A5 até ao passo 9 do tetraedro.



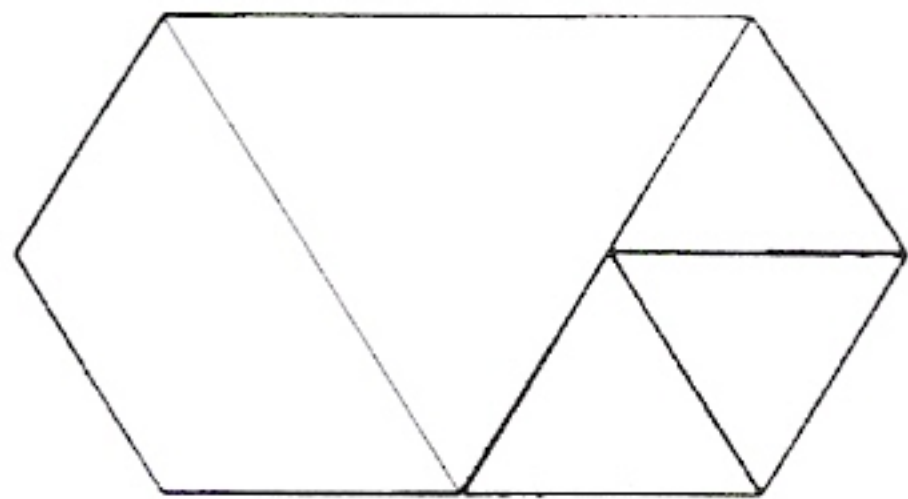
Quando fizer esta dobra, encaixe as duas abas marcadas com um círculo para manter os dois lados do módulo juntos.



Vire a folha.

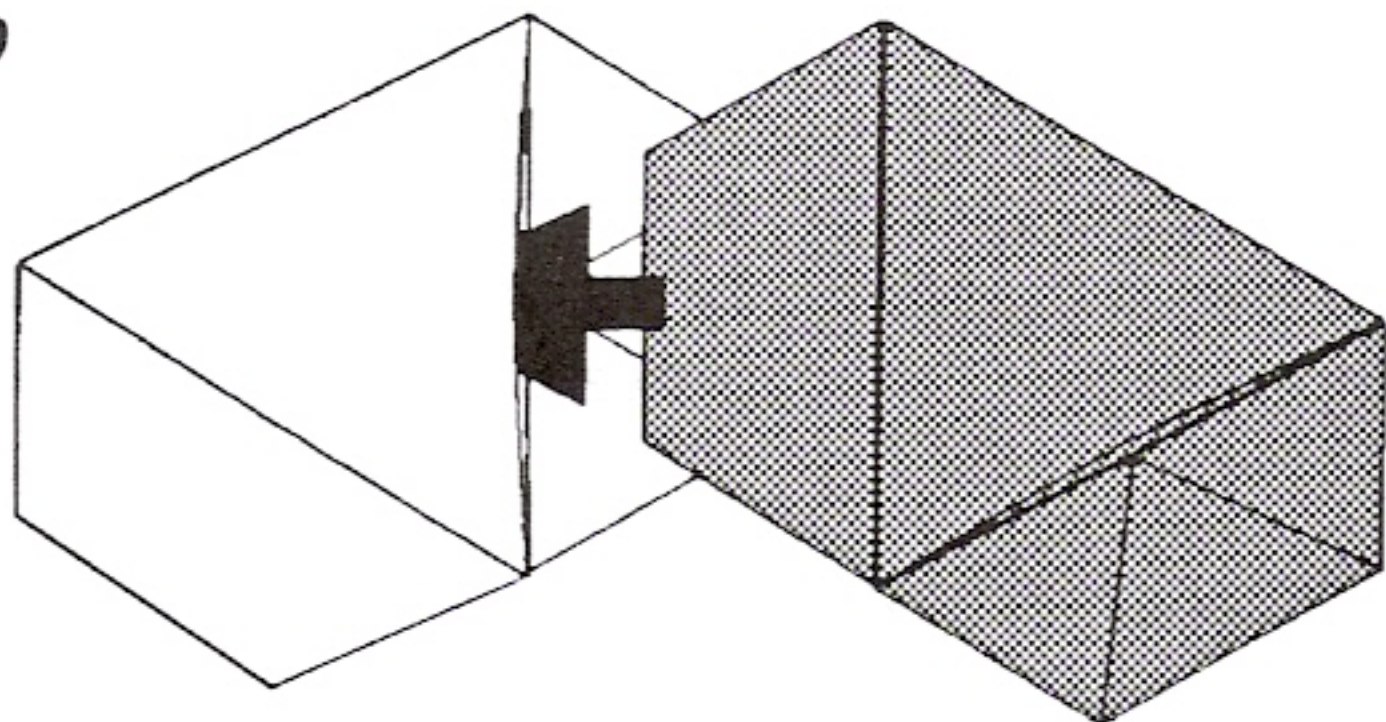
Vinque com firmeza.

9

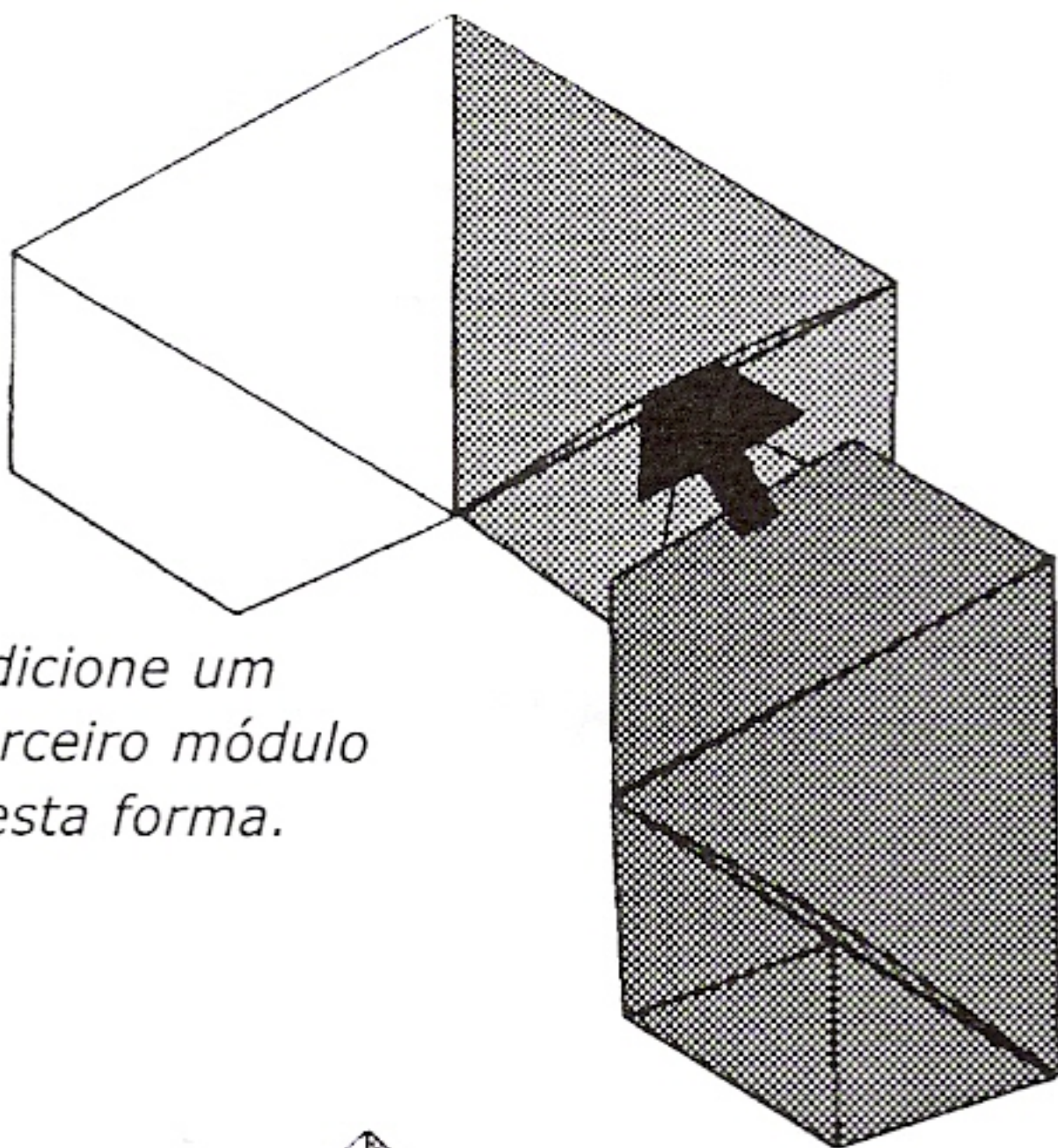


Faça os vinte e quatro módulos.

10

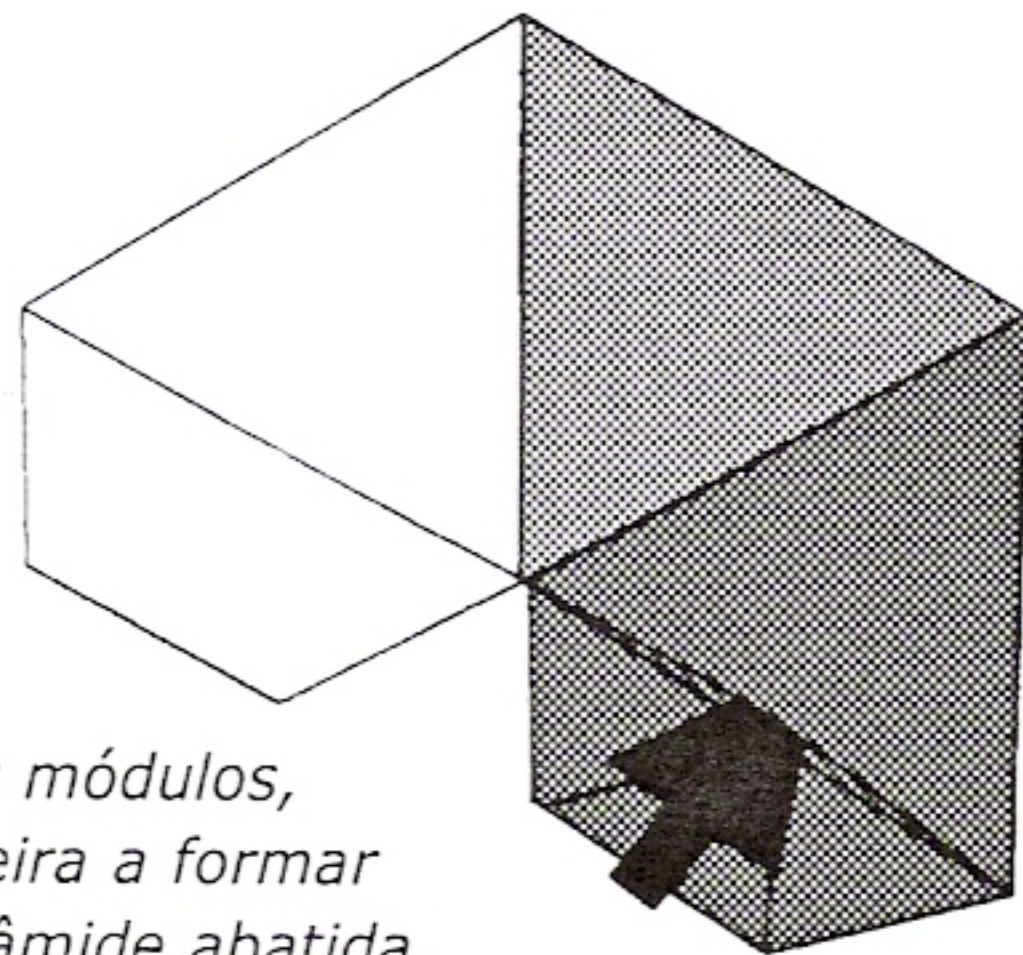


11



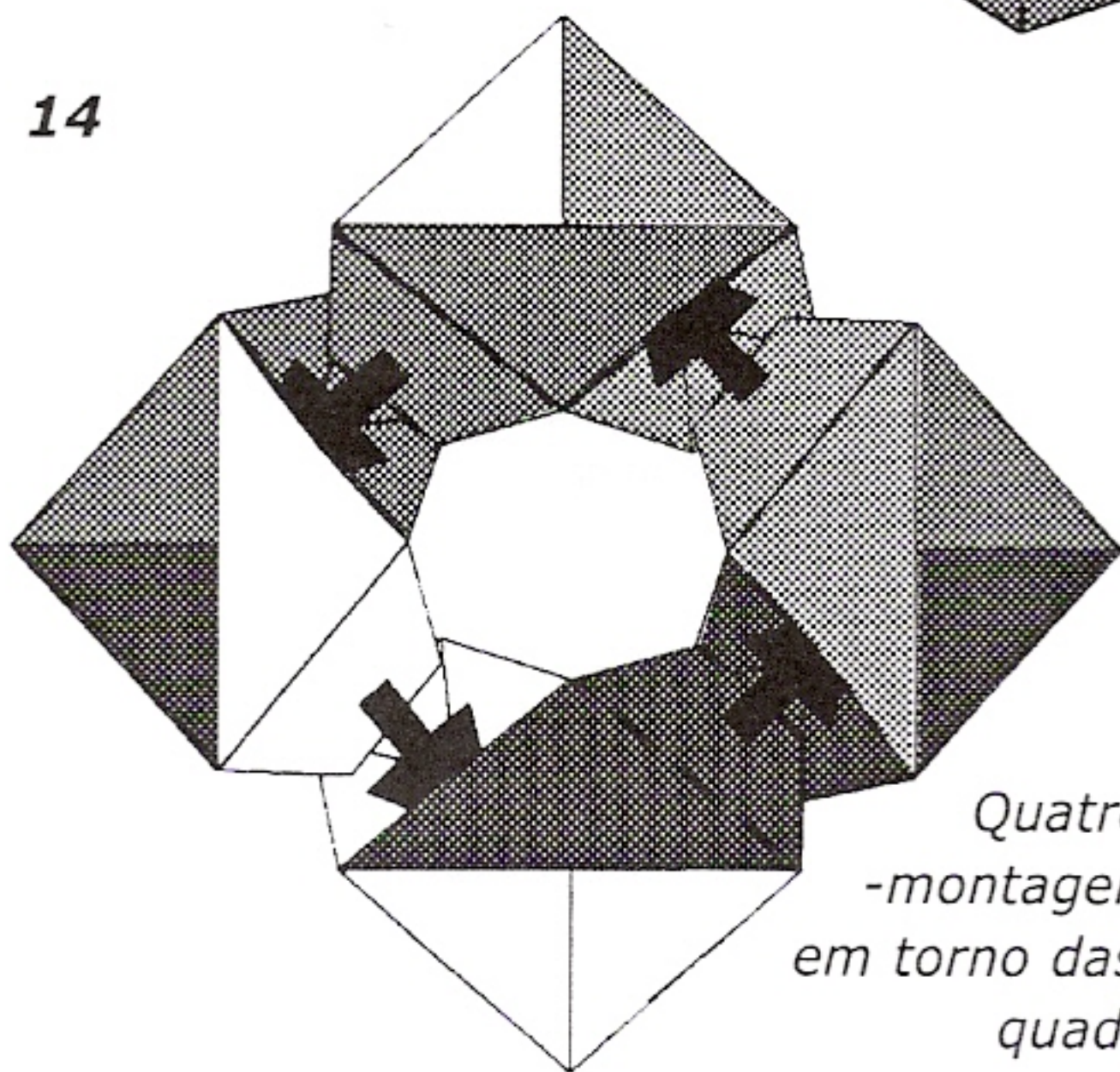
Adicione um terceiro módulo desta forma.

12



Junte os módulos, de maneira a formar uma pirâmide abatida.

14

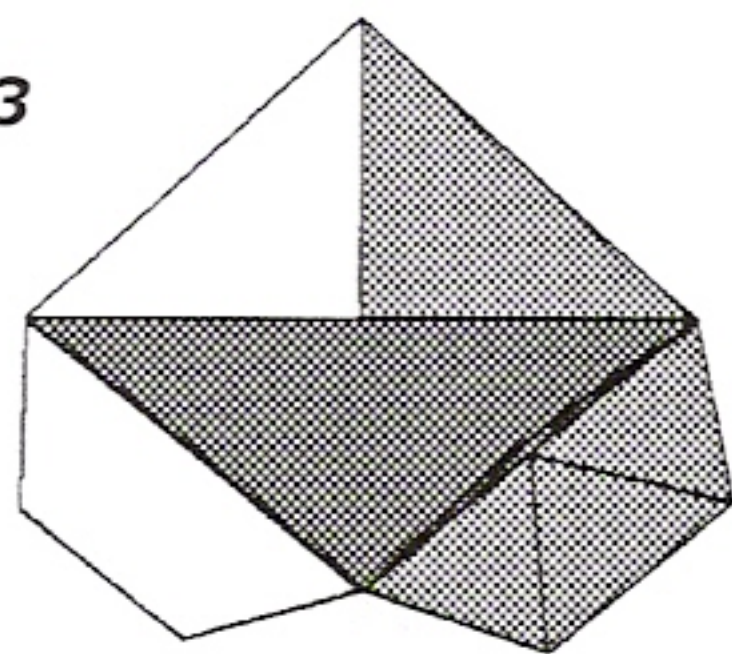


Quatro destas sub-montagens são unidas em torno das orlas de um quadrado abatido.

No ponto em que uma sub-montagem se une a outra, há sempre duas abas e duas bolsas. Certifique-se de que ambas as abas são inseridas, ao mesmo tempo, dentro das bolsas.

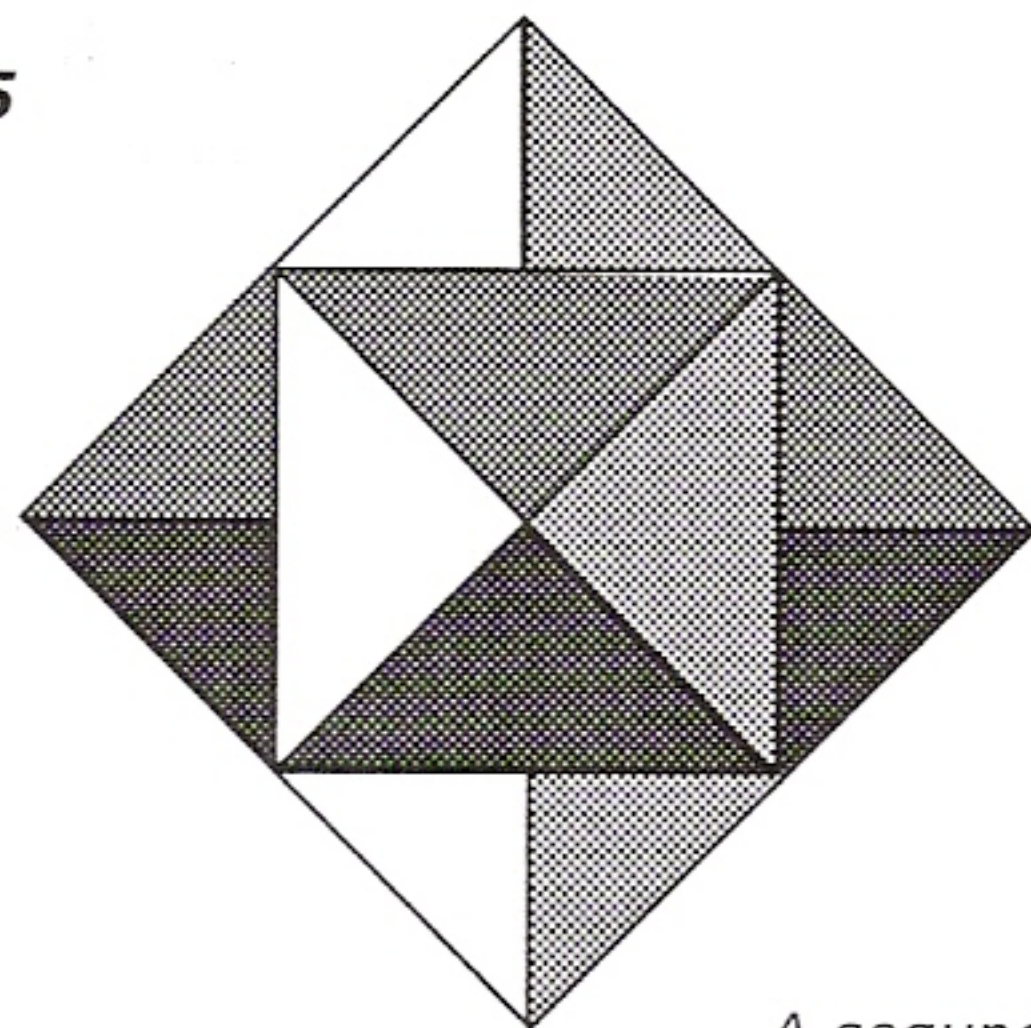
Se estiver a utilizar uma cor diferente para cada plano hexagonal, tenha cuidado para manter o esquema de cores à medida que os une.

13



O modelo é construído a partir de oito sub-montagens como esta.

15

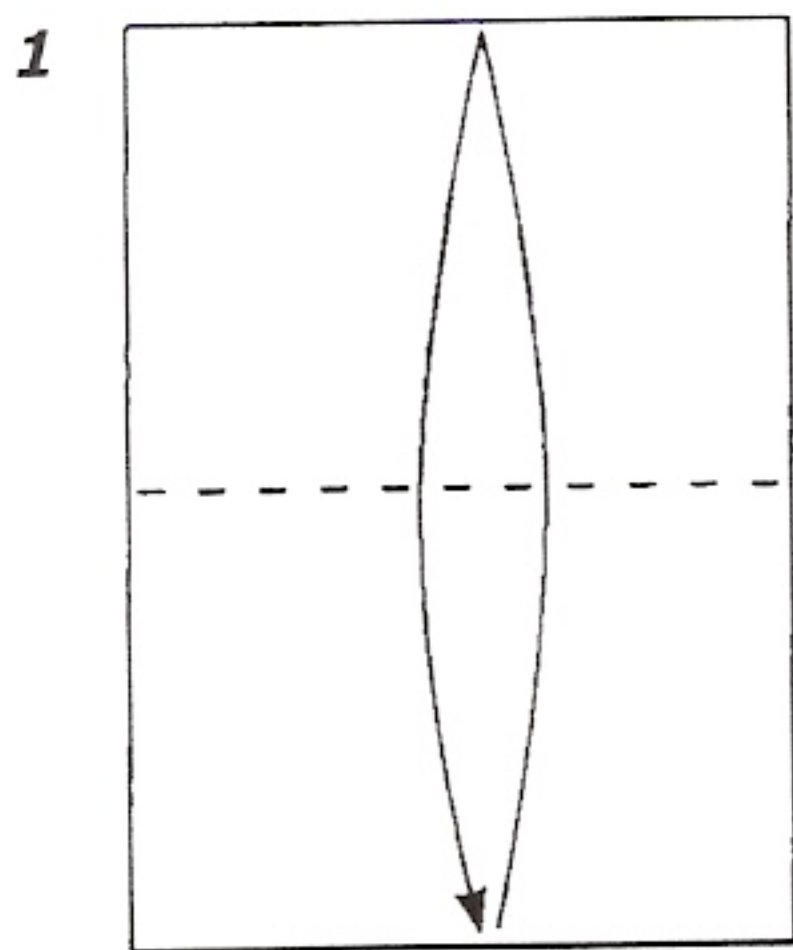


A segunda metade do modelo é exactamente idêntica à primeira, mas é mais fácil juntar as sub-montagens restantes, uma de cada vez.

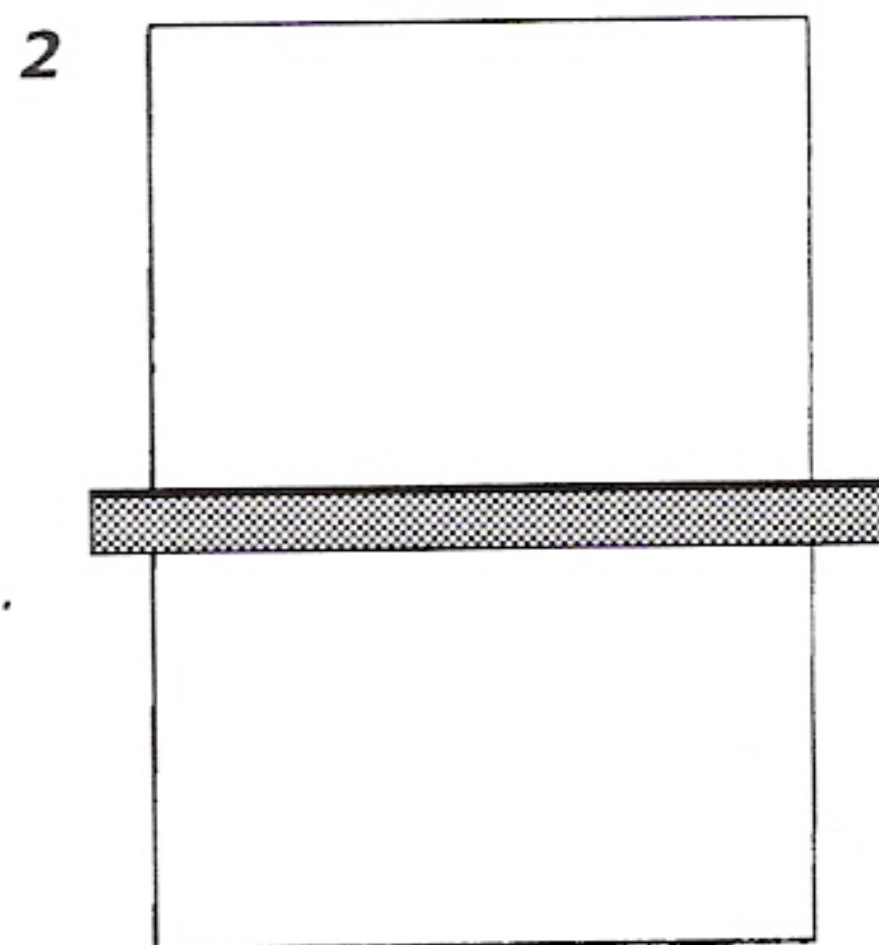
Cubo esquelético

Este modelo maravilhosamente simples foi concebido pelo David Brill, de Stockport.

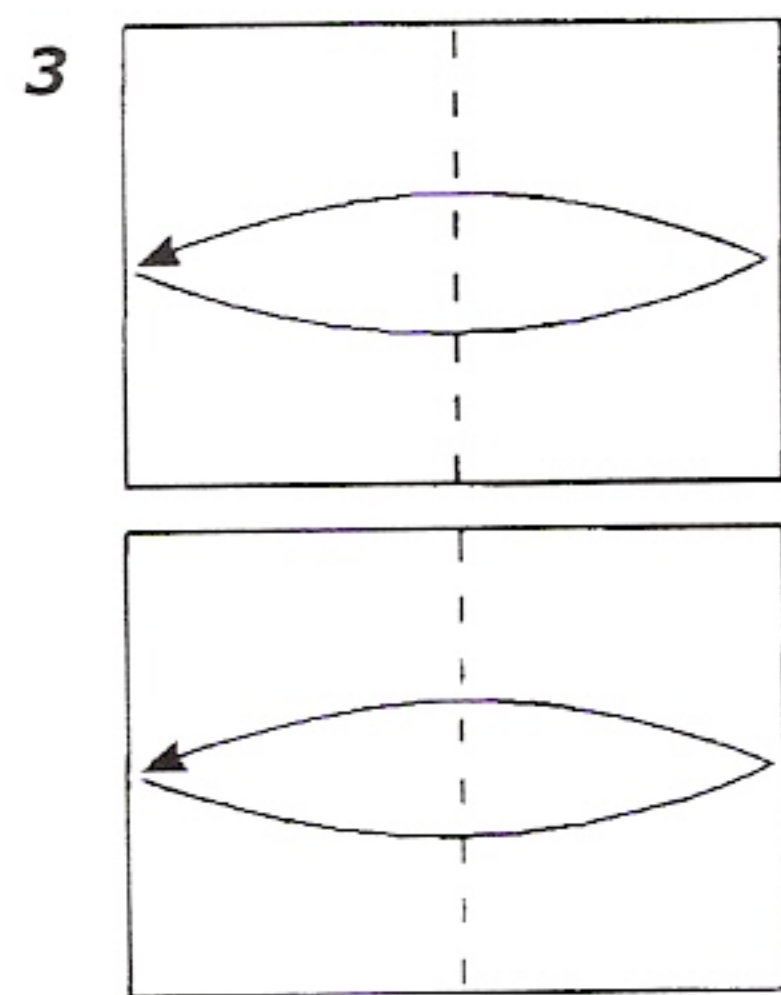
São necessárias três folhas de papel A4. Divida cada folha em quartos, como indicam as figuras, antes de começar a dobrar os módulos.



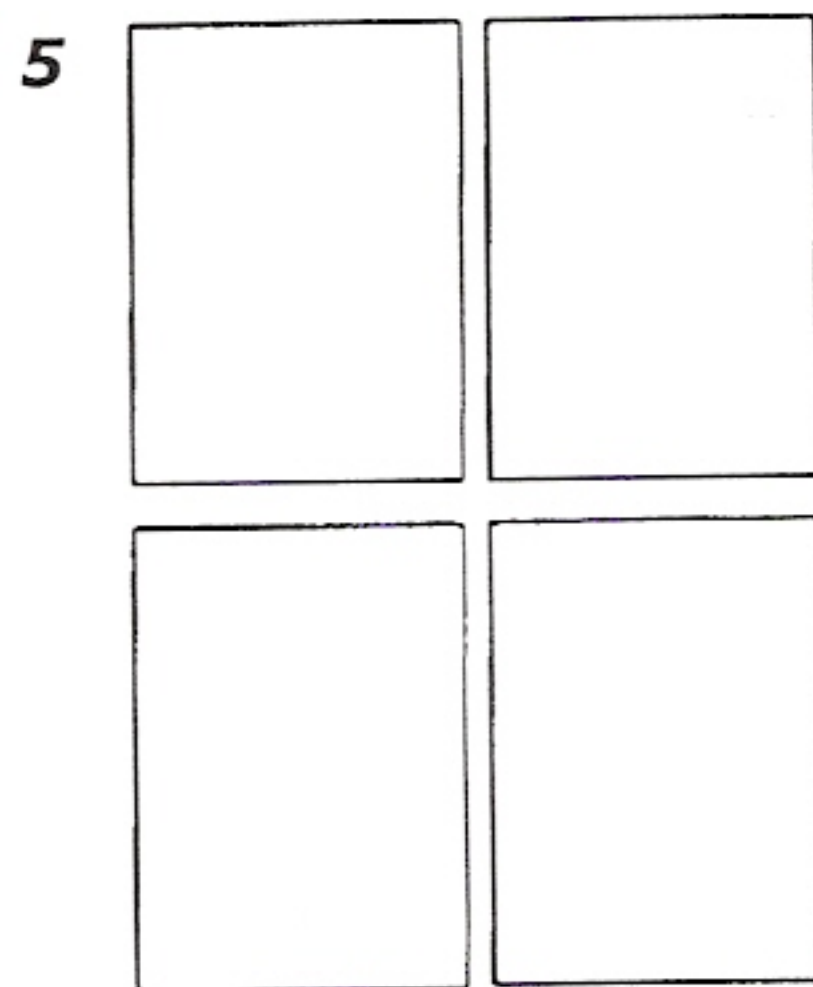
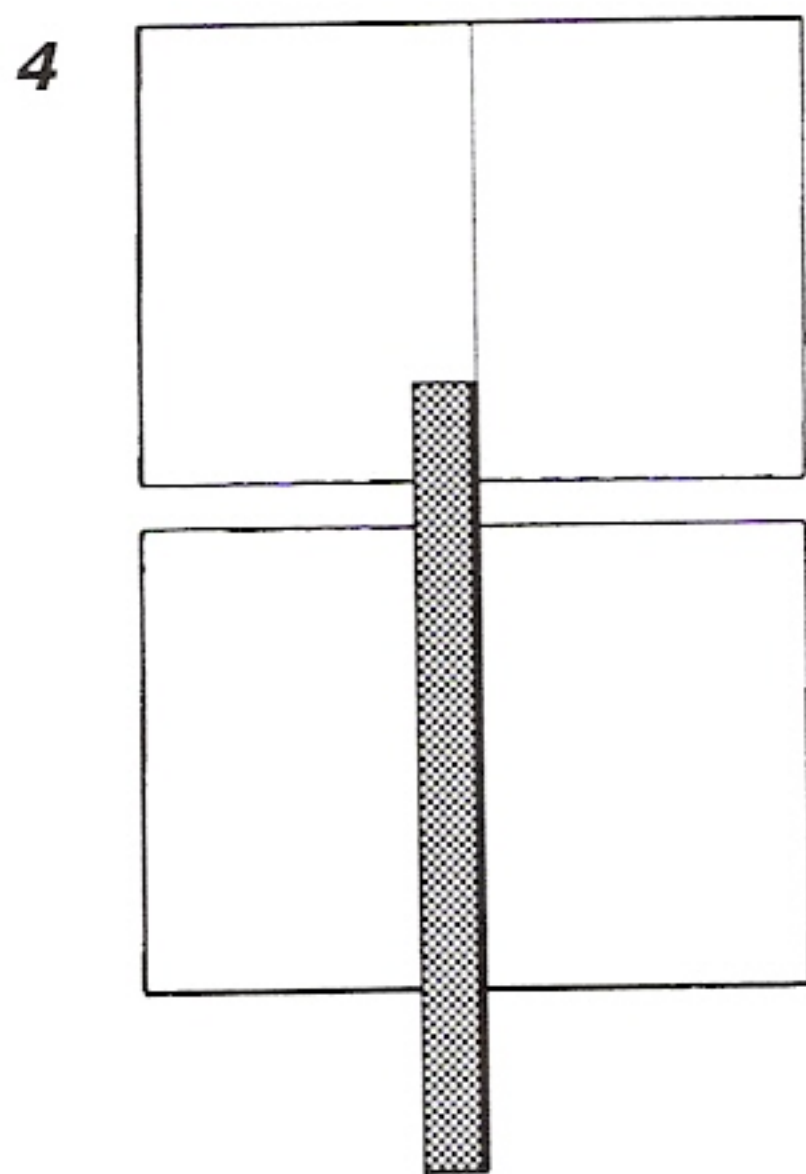
Vire a folha.



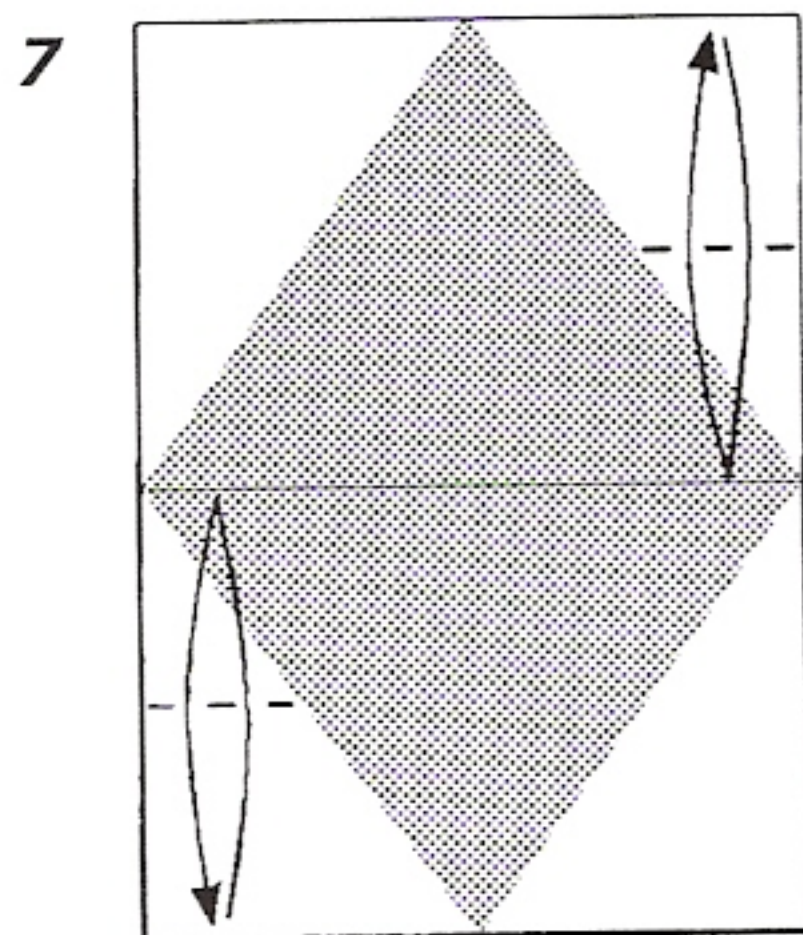
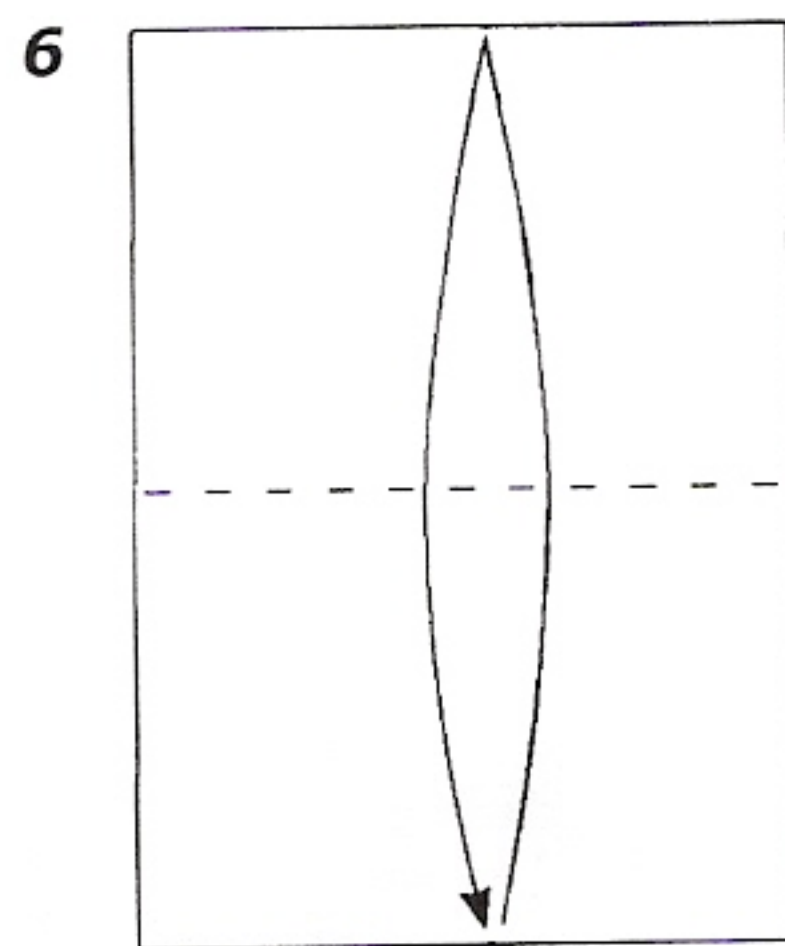
Corte ao longo da dobra.



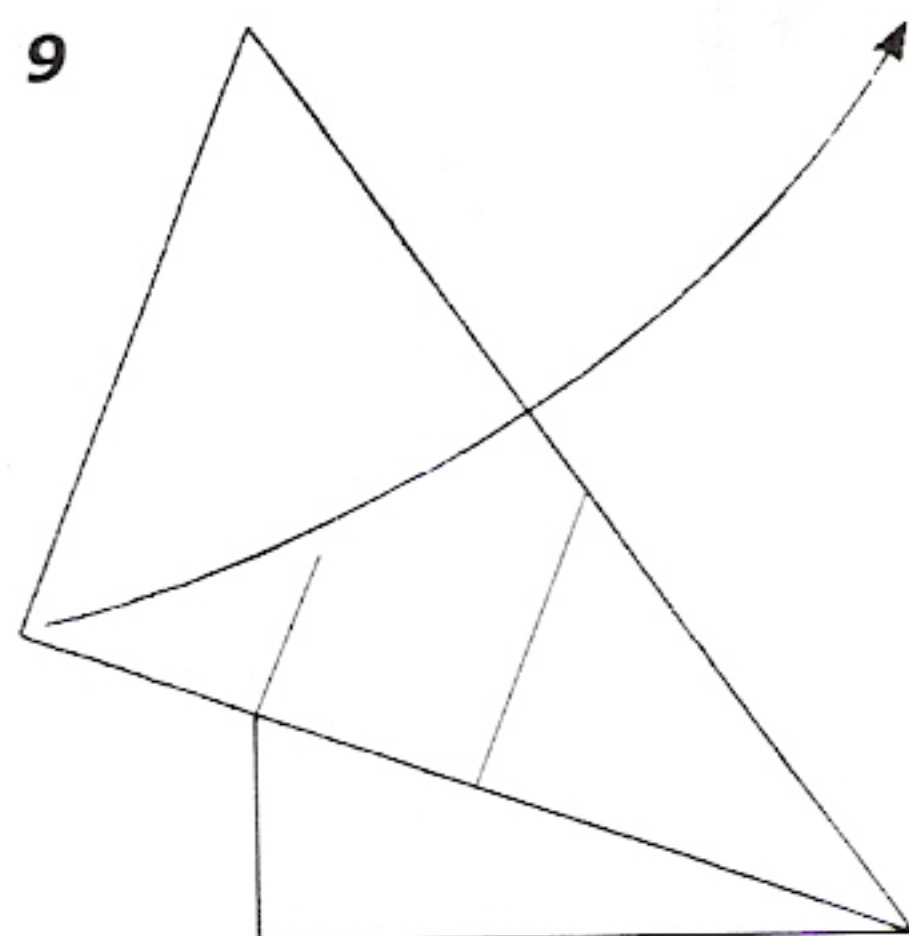
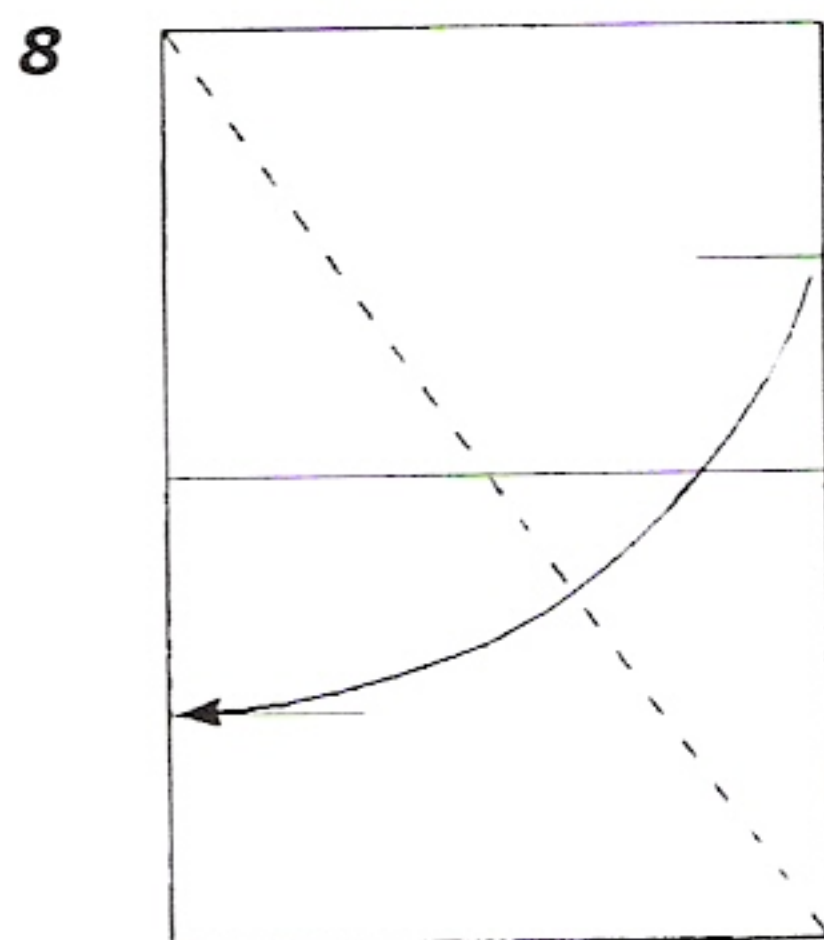
Vire a folha.

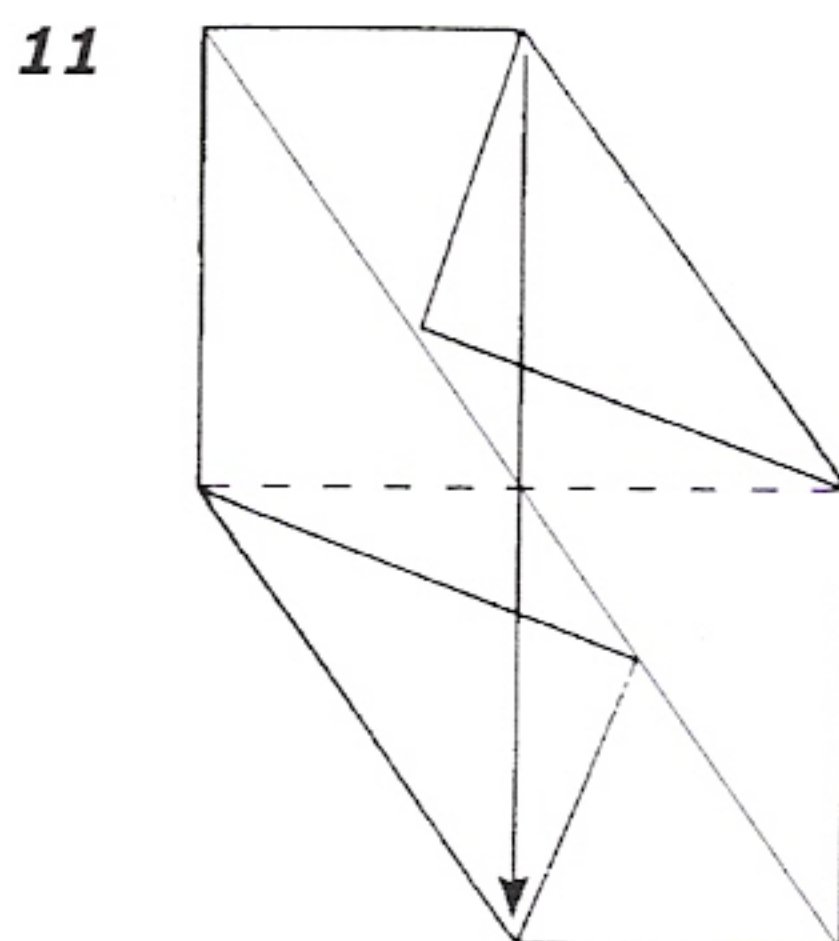
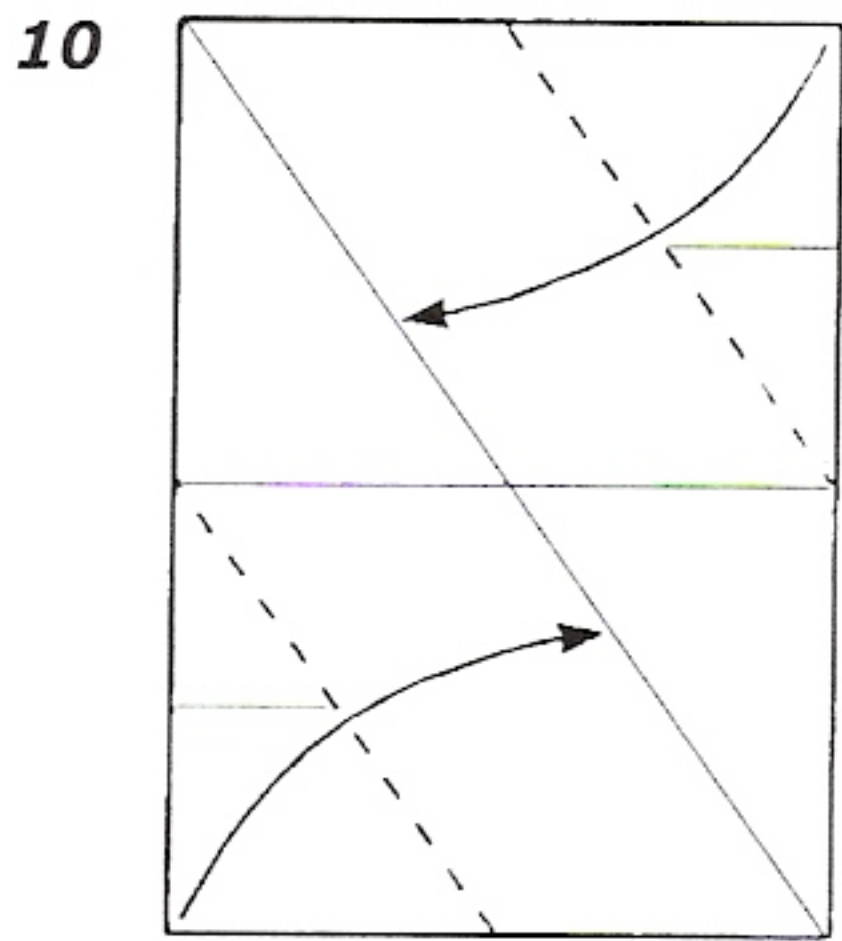


Cada parte torna-se um módulo.

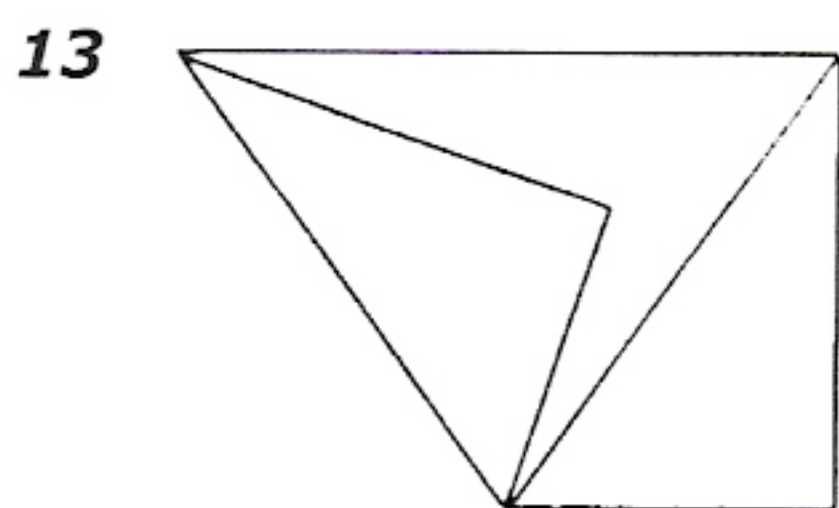
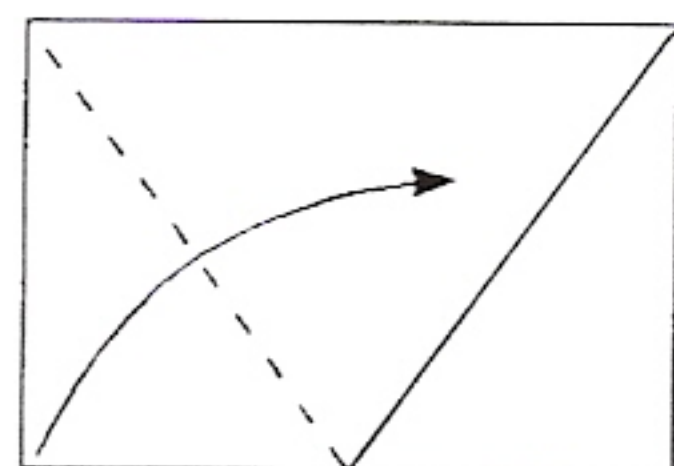


Tenha cuidado para não vincar a área sombreada.

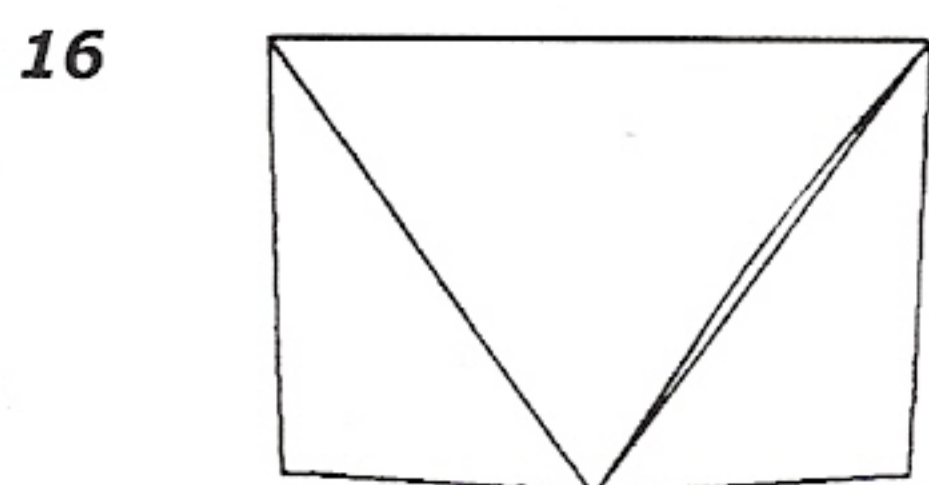
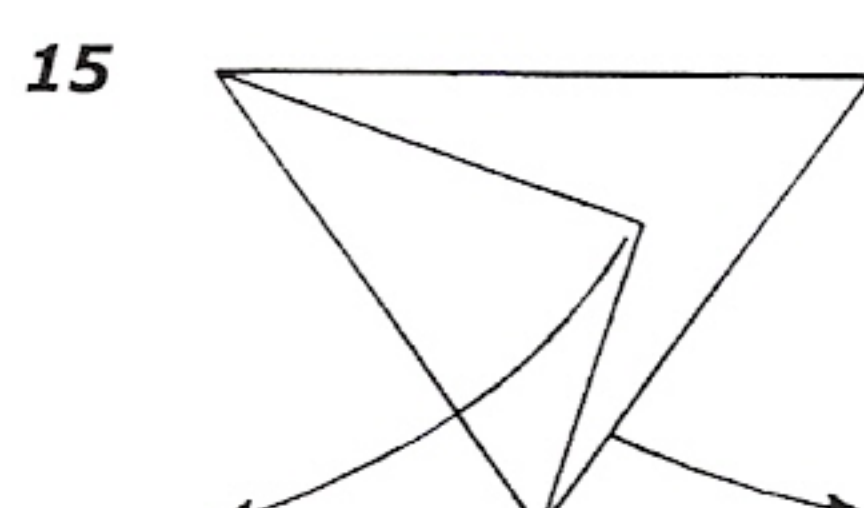
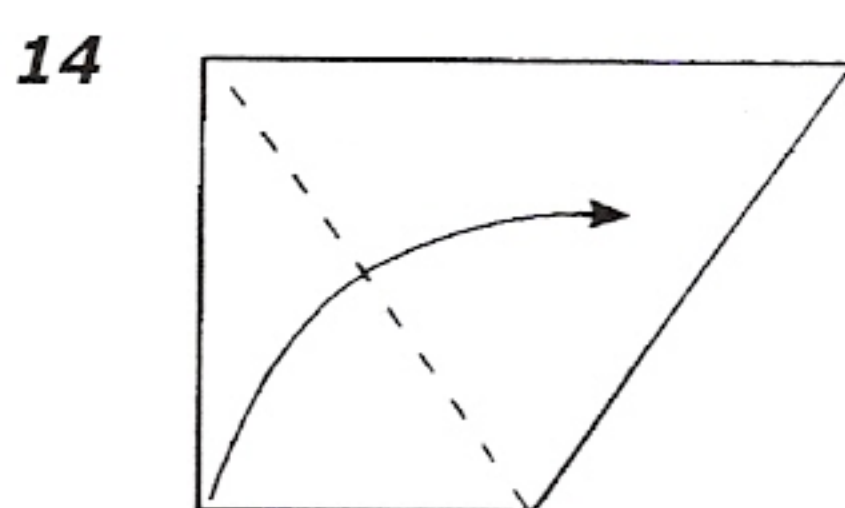




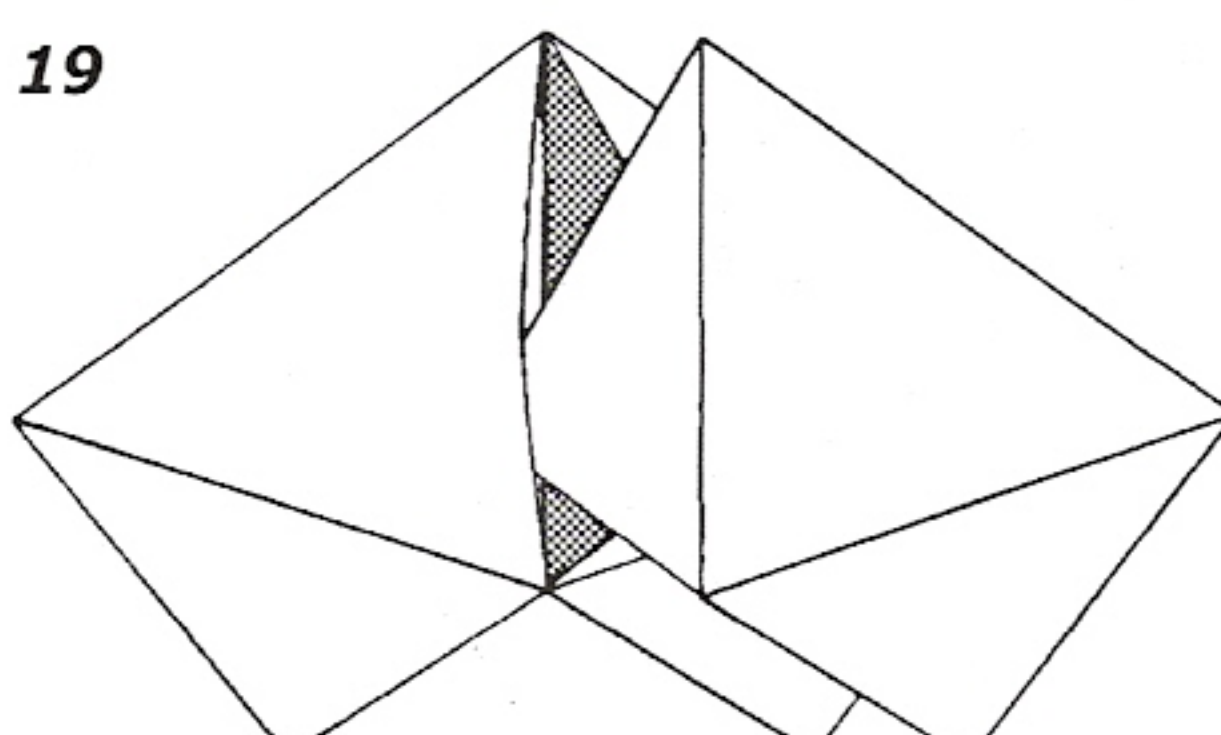
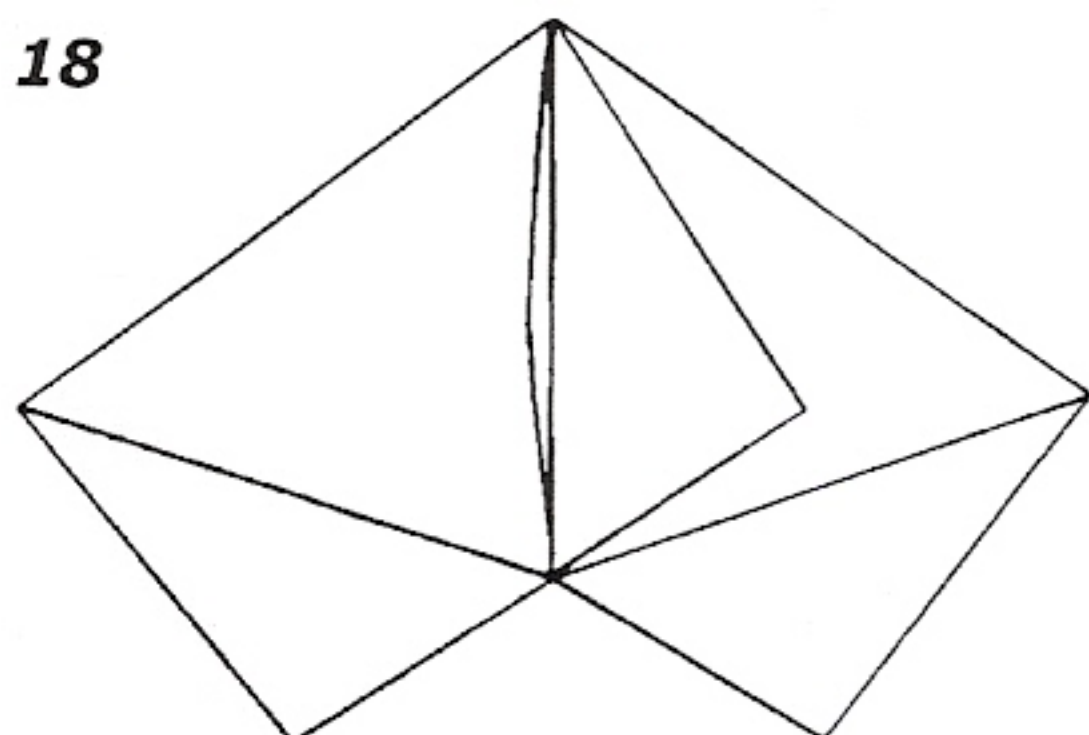
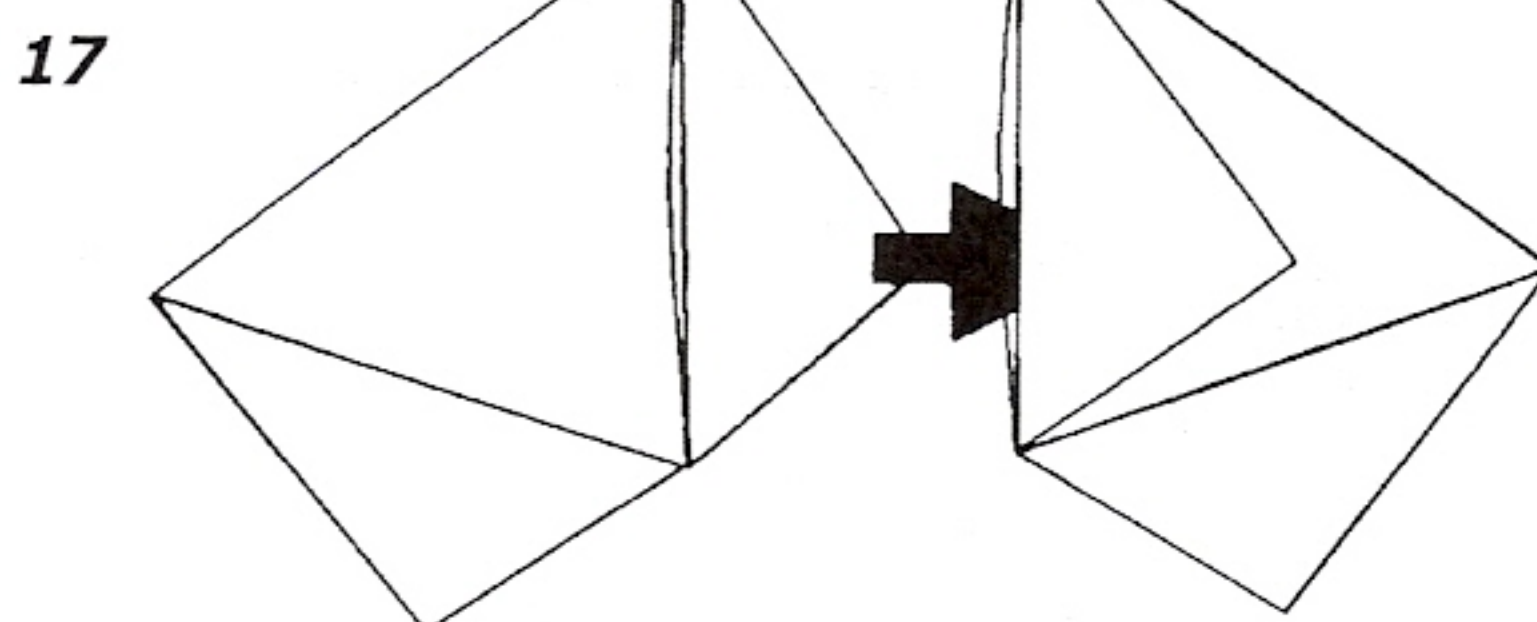
12 Quando fizer esta dobra, encaixe as abas internas para manter os dois lados do módulo juntos.



Vire a folha.

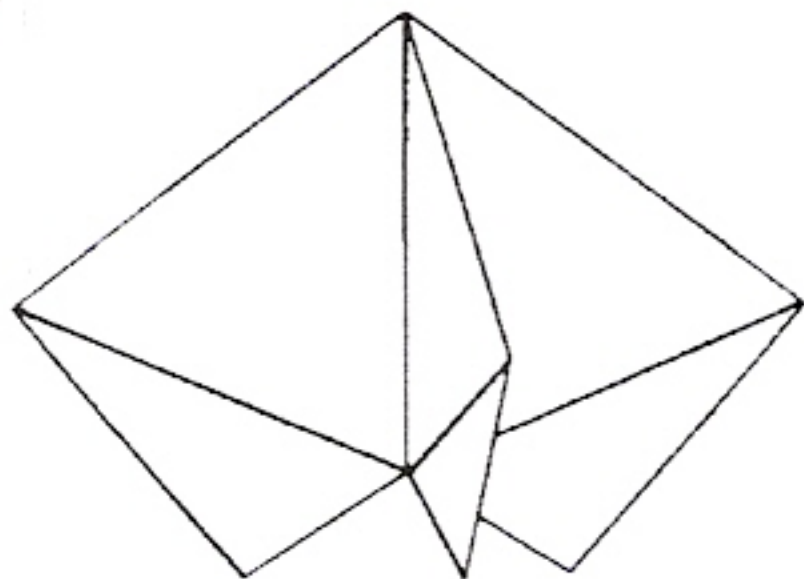


Faça os doze módulos.



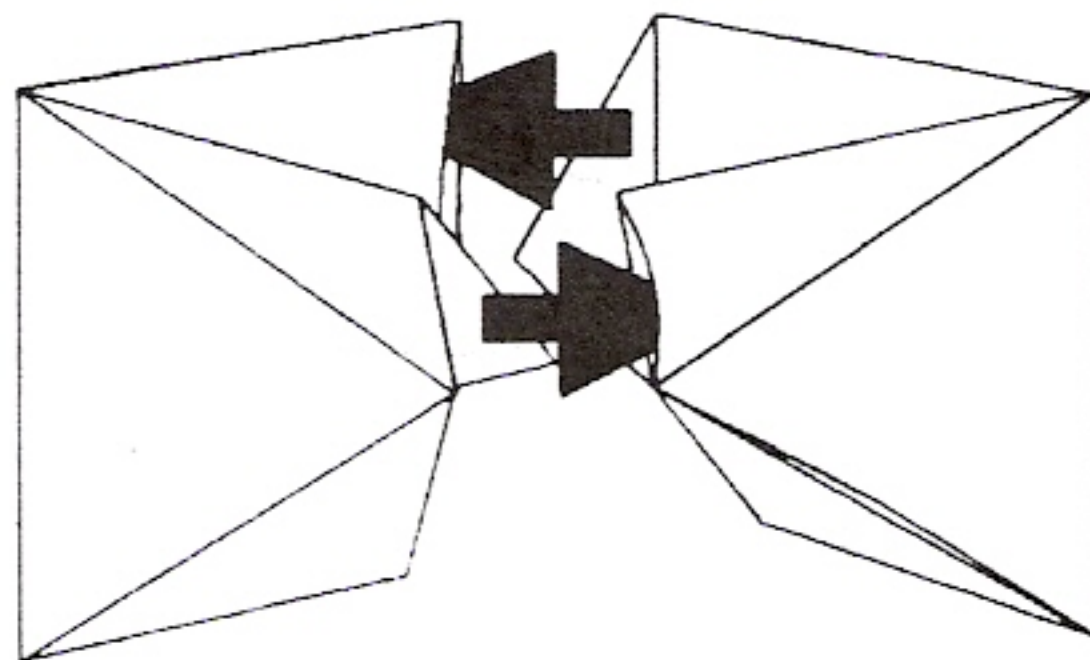
Certifique-se de que a aba do módulo esquerdo - sombreada nesta figura por questões de clareza - é inserida na bolsa escondida do módulo que está a adicionar.

20



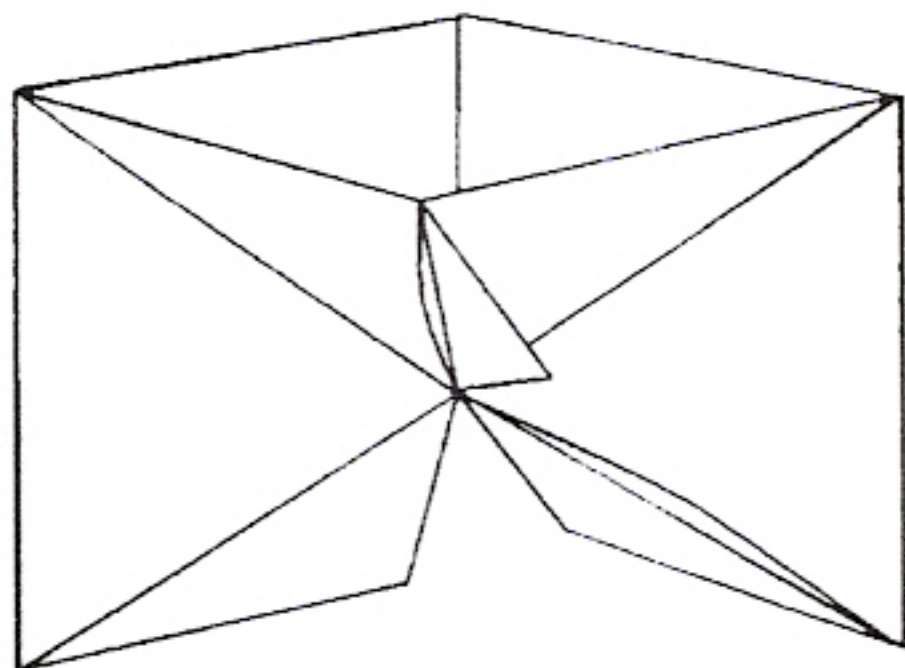
Faça quatro módulos destes.

21



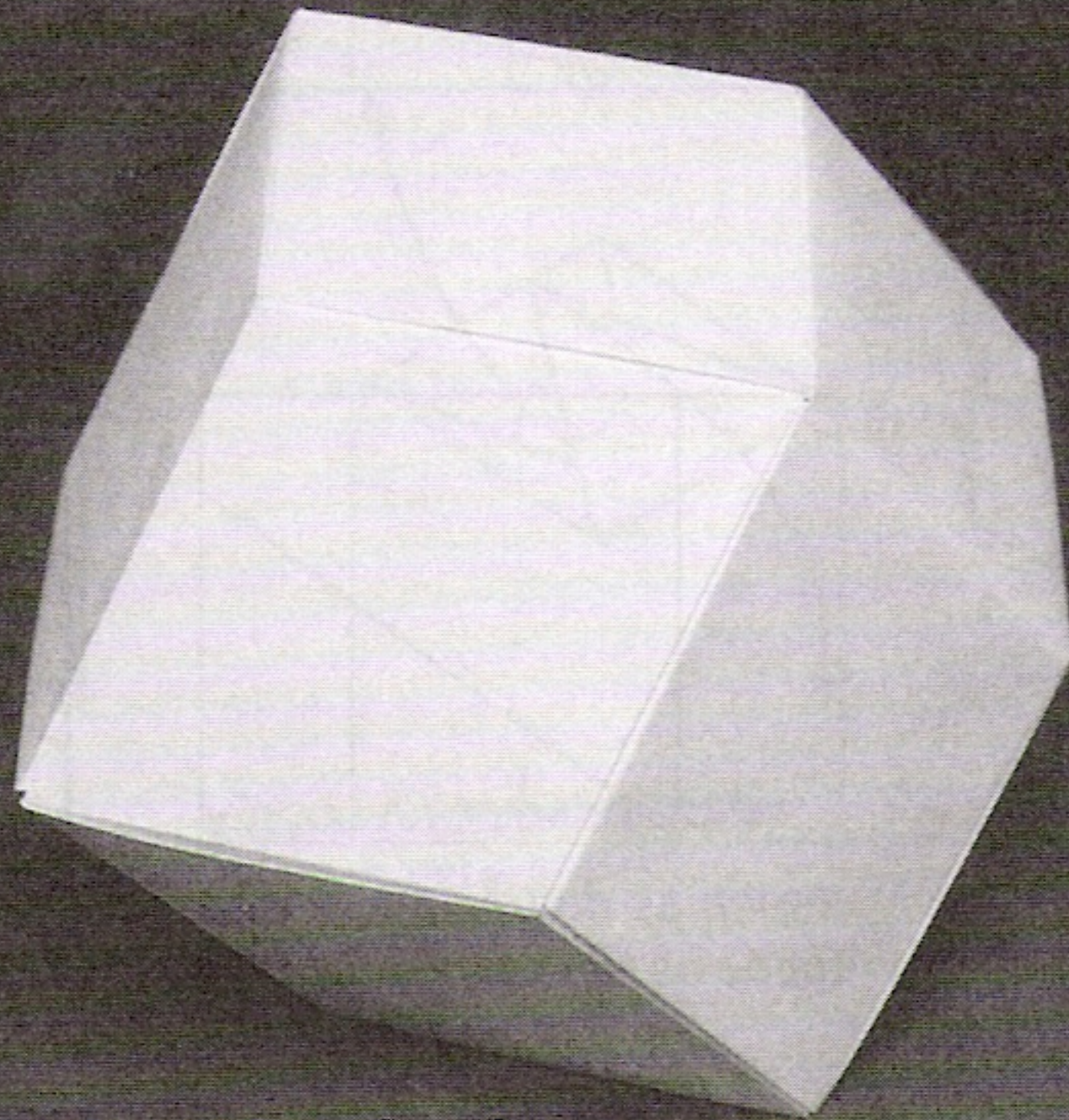
Junte dois módulos.

22



*Adicione os
módulos restantes
para completar o
cubo esquelético.*

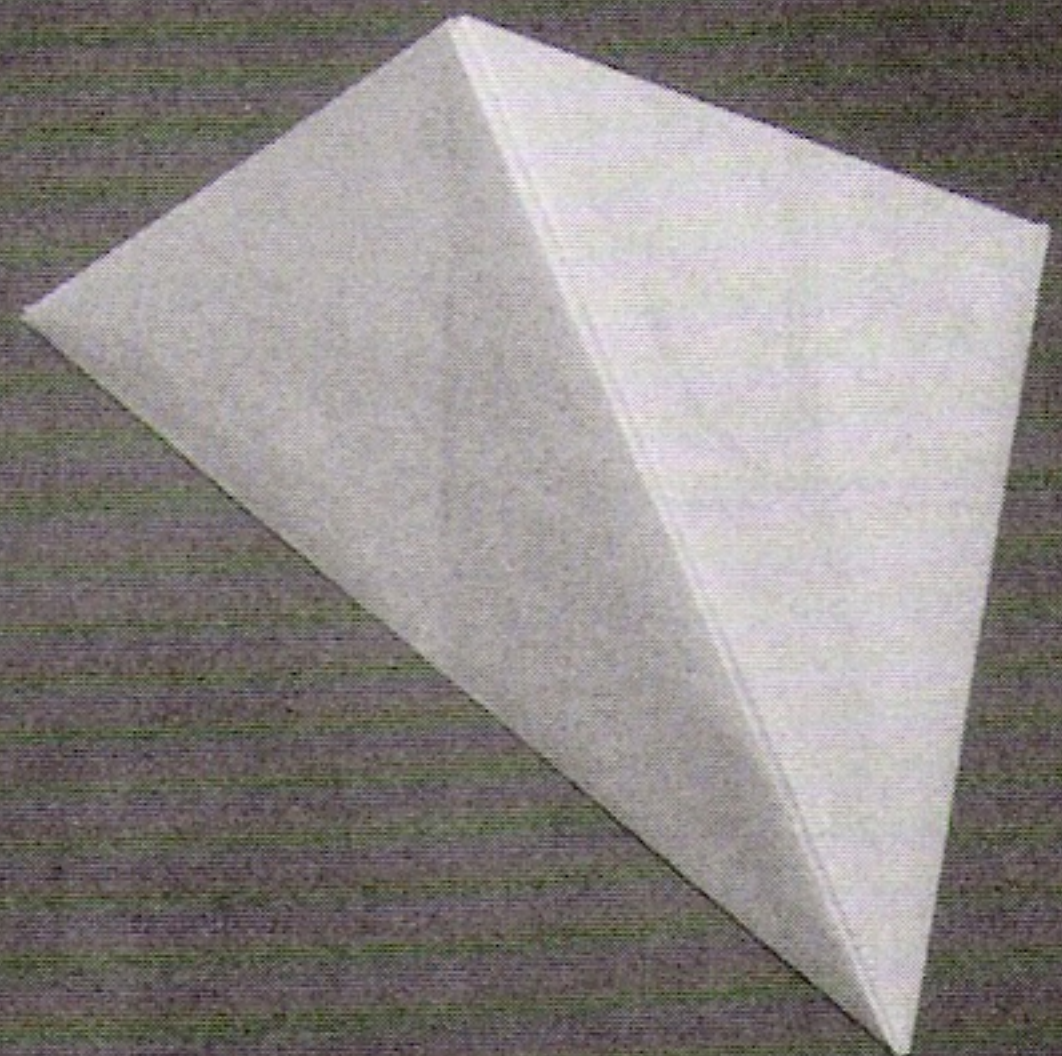
Dodecaedro rômbo
Pirâmide rômbrica
Tetraedro rômbrico



Dodecaedro rômbrico



Pirâmide rômbrica



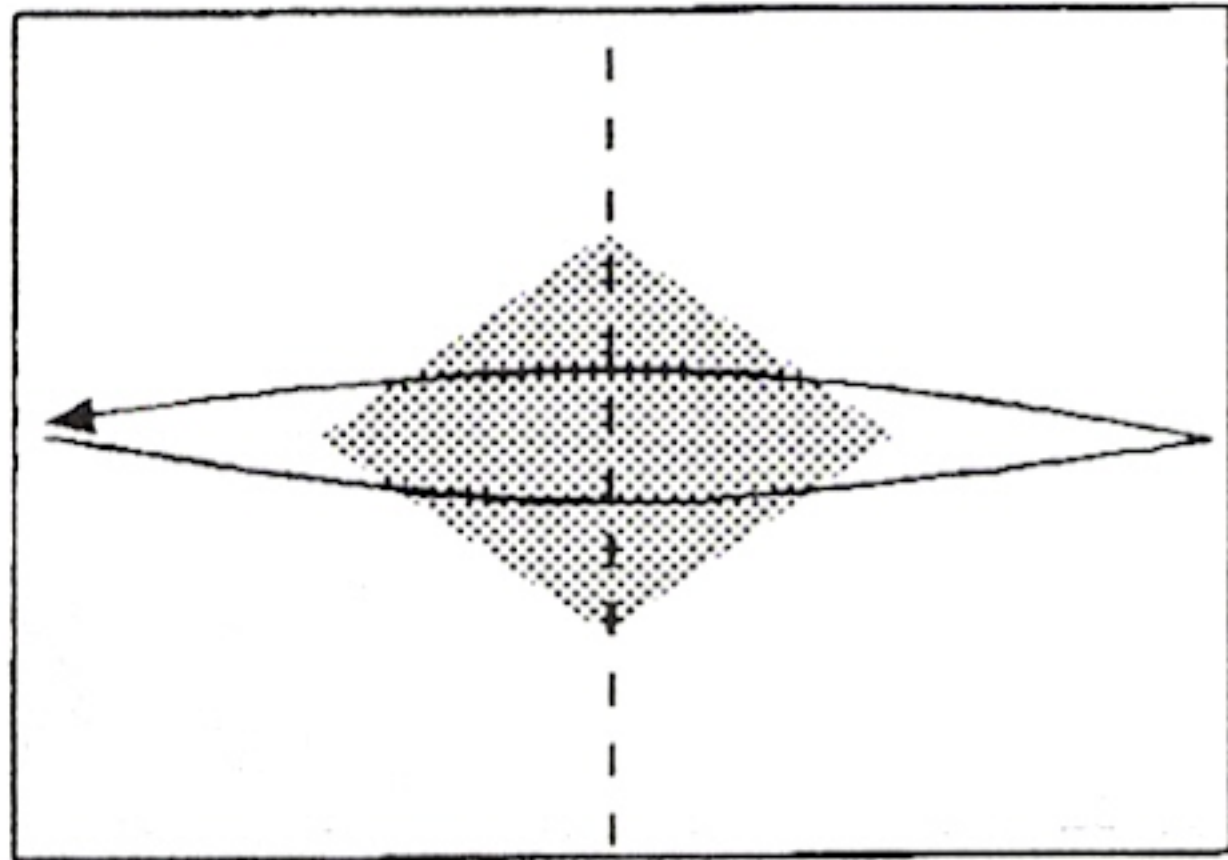
Tetraedro rômbrico

Dodecaedro rômboico

Este modelo clássico foi concebido pelo Nick Robinson, de Sheffield.

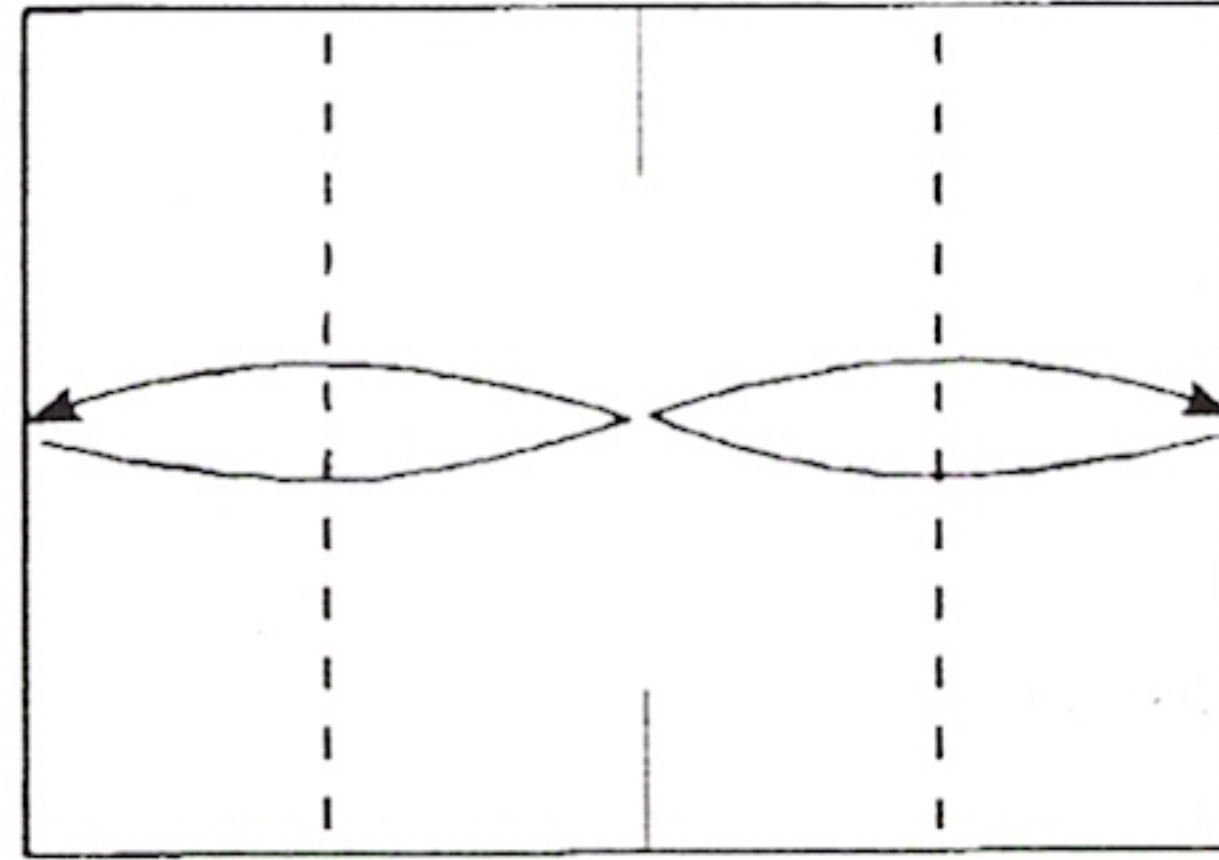
São necessárias doze folhas de papel A4.

1

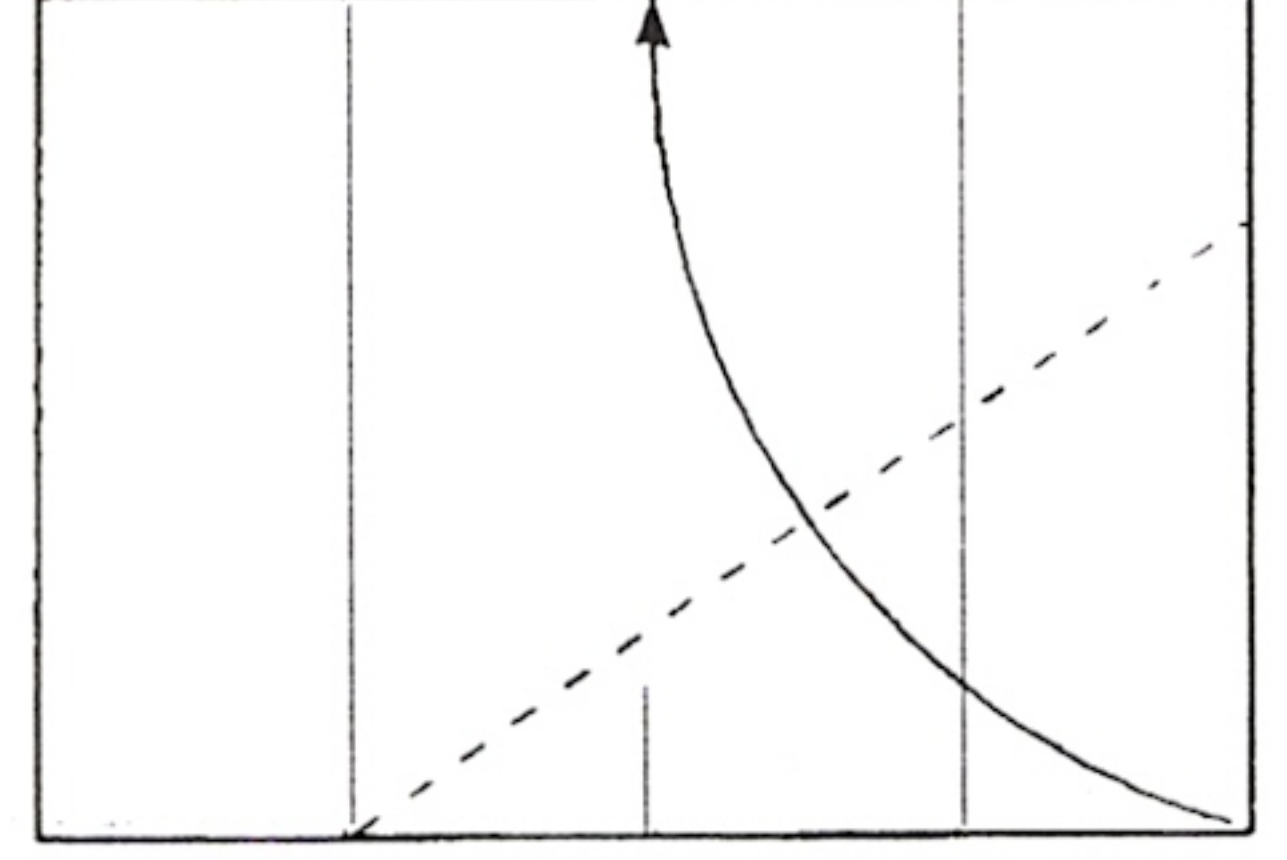


2

Vire
a
folha

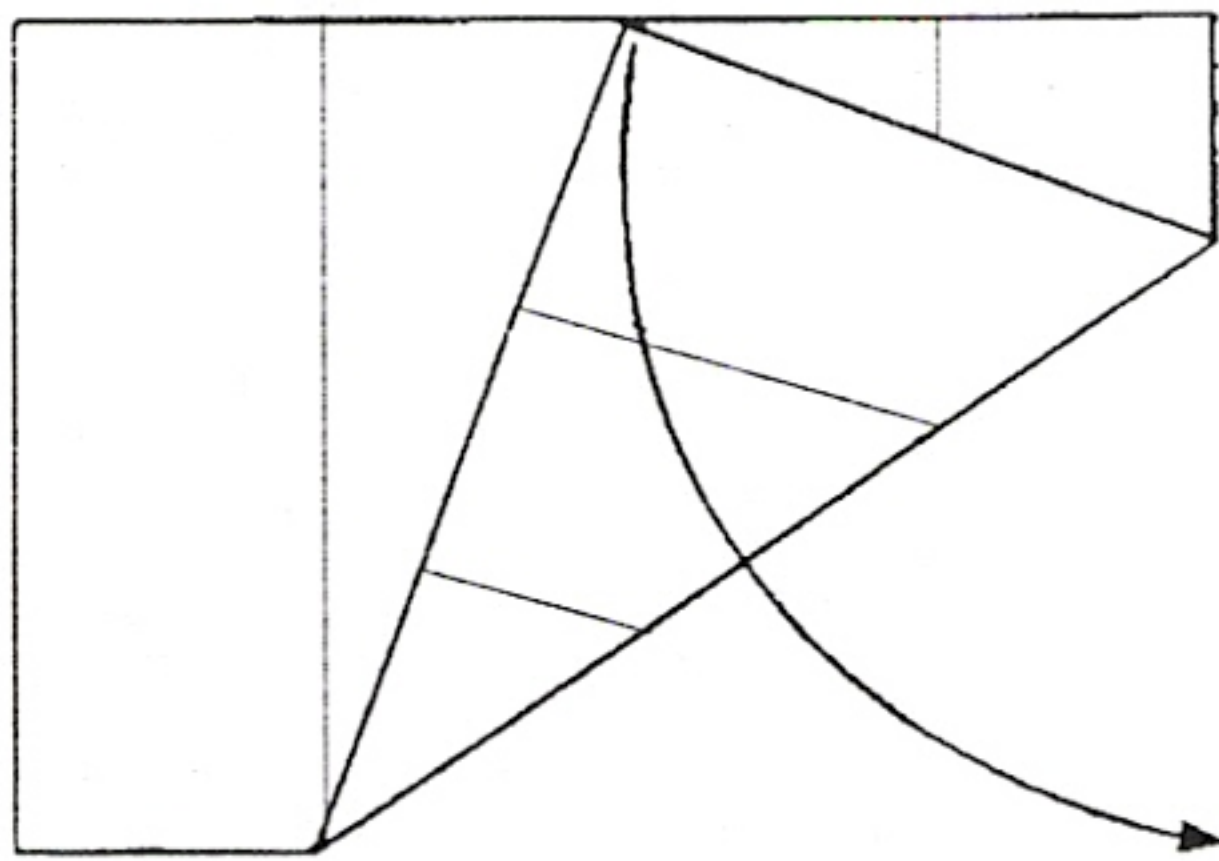


3

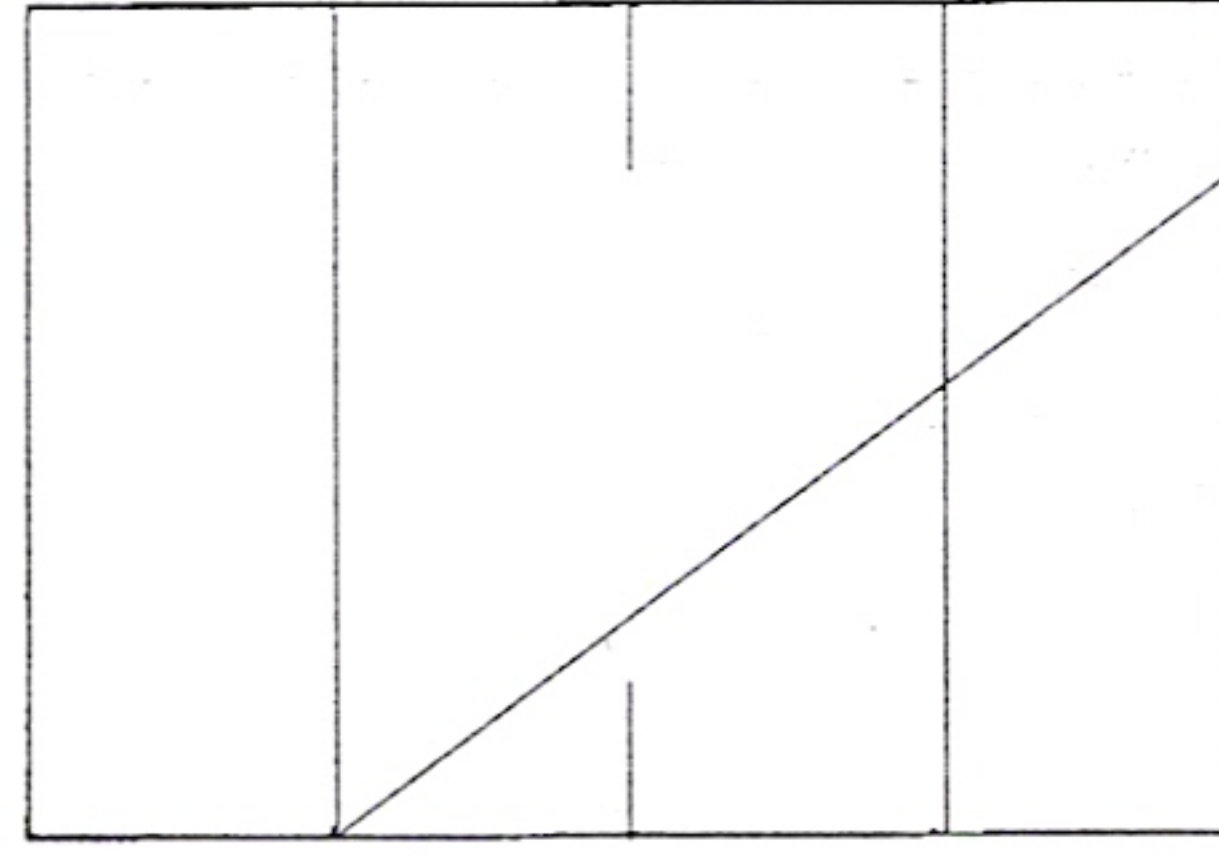


Tente não vincar
a área sombreada.

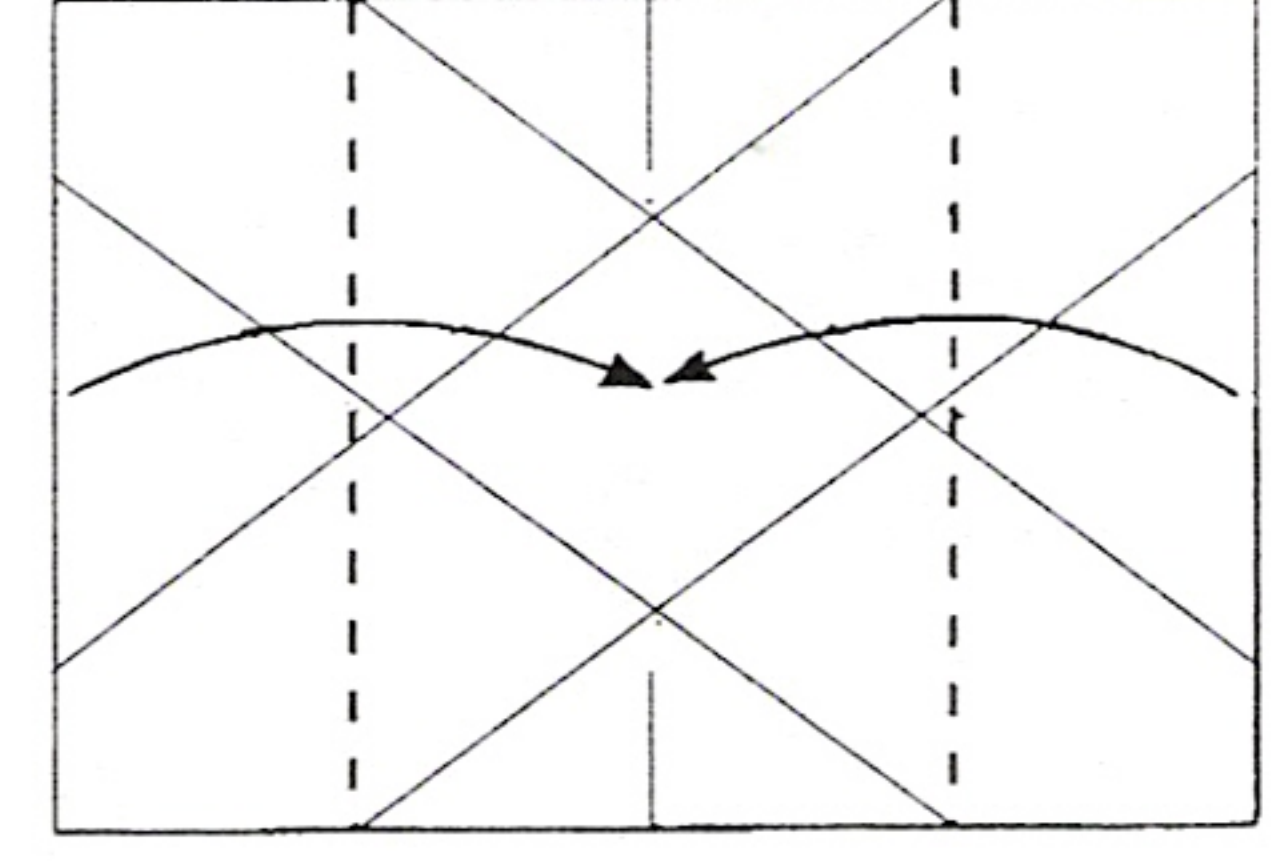
4



5

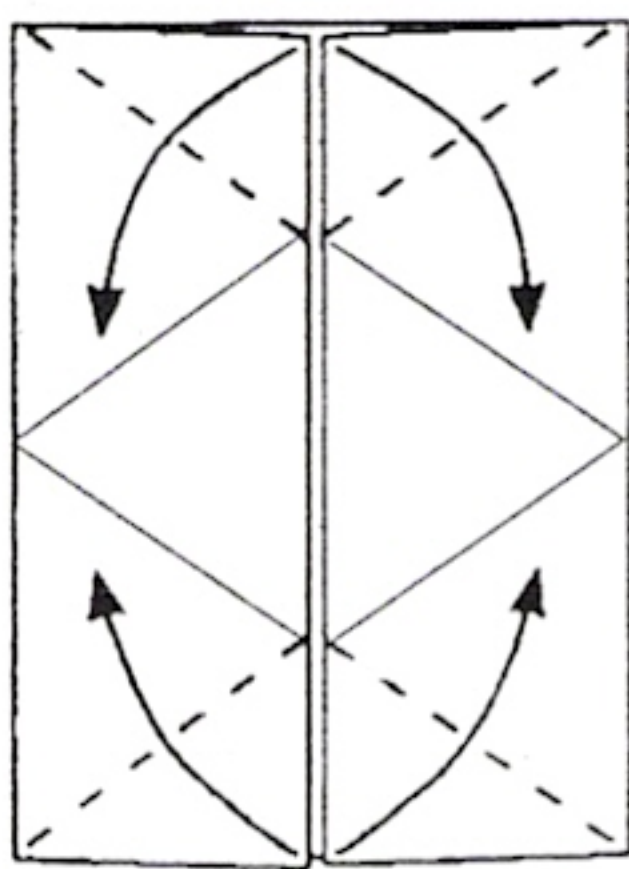


6

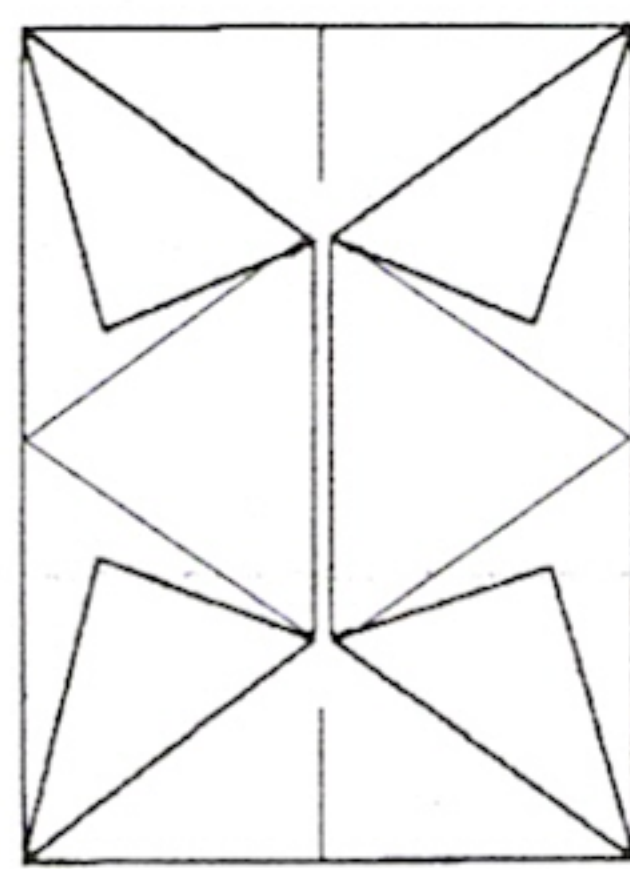


Repita as dobras 3 e 4 em
todos os outros cantos.

7

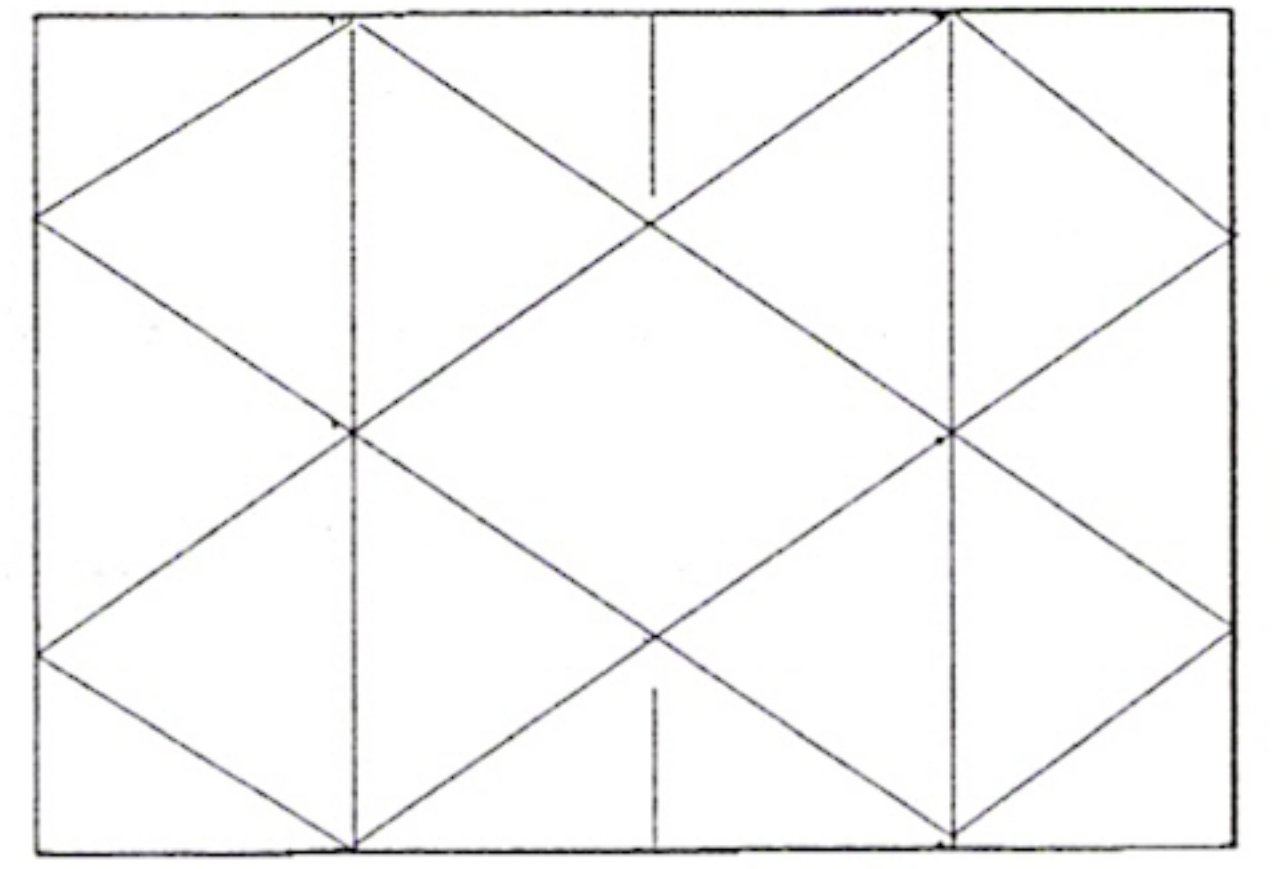


8

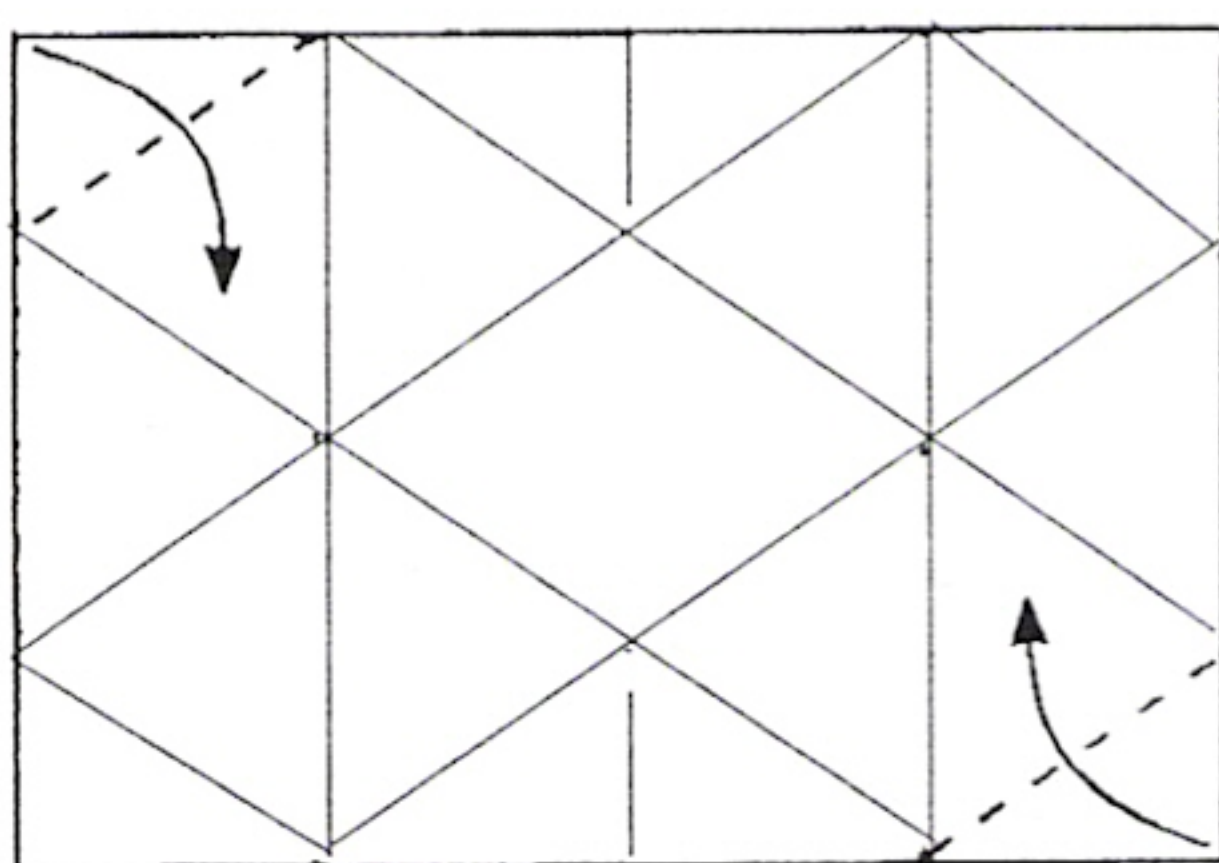


9

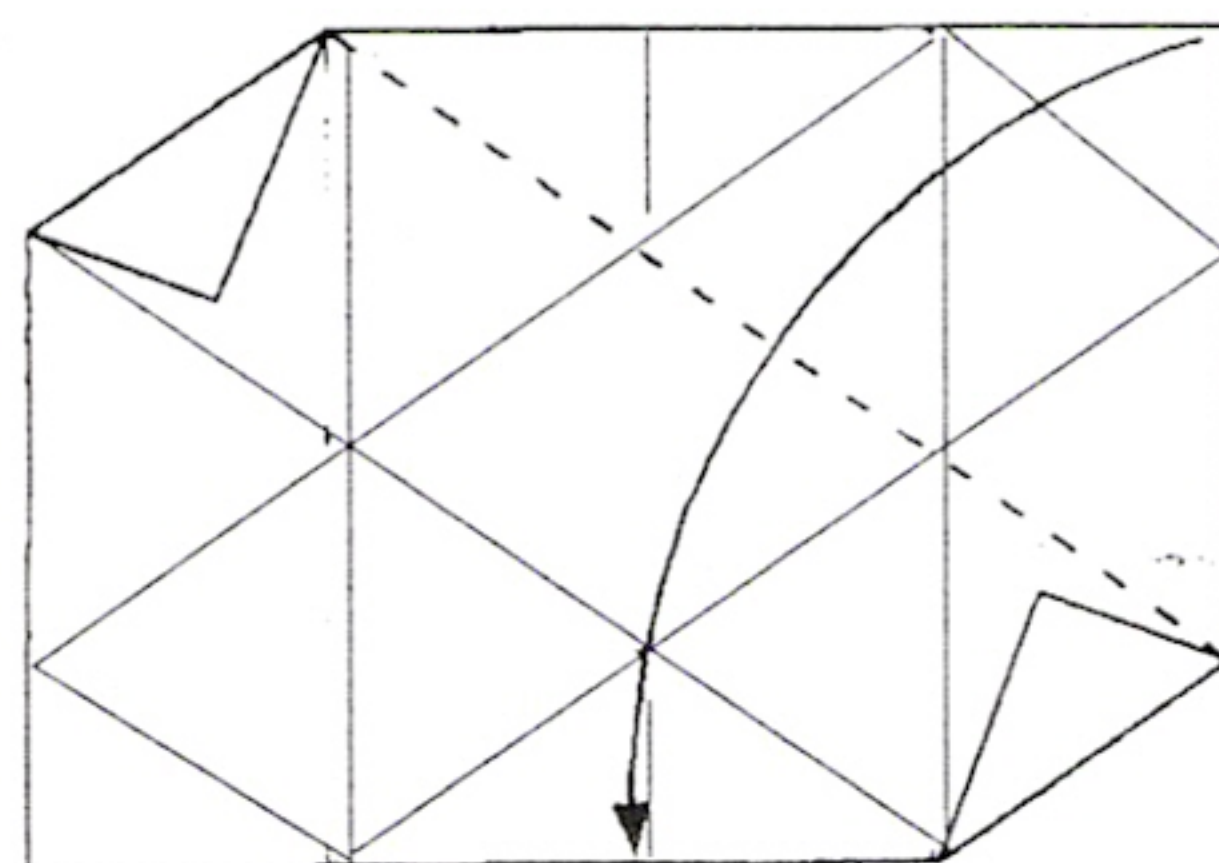
Abra.



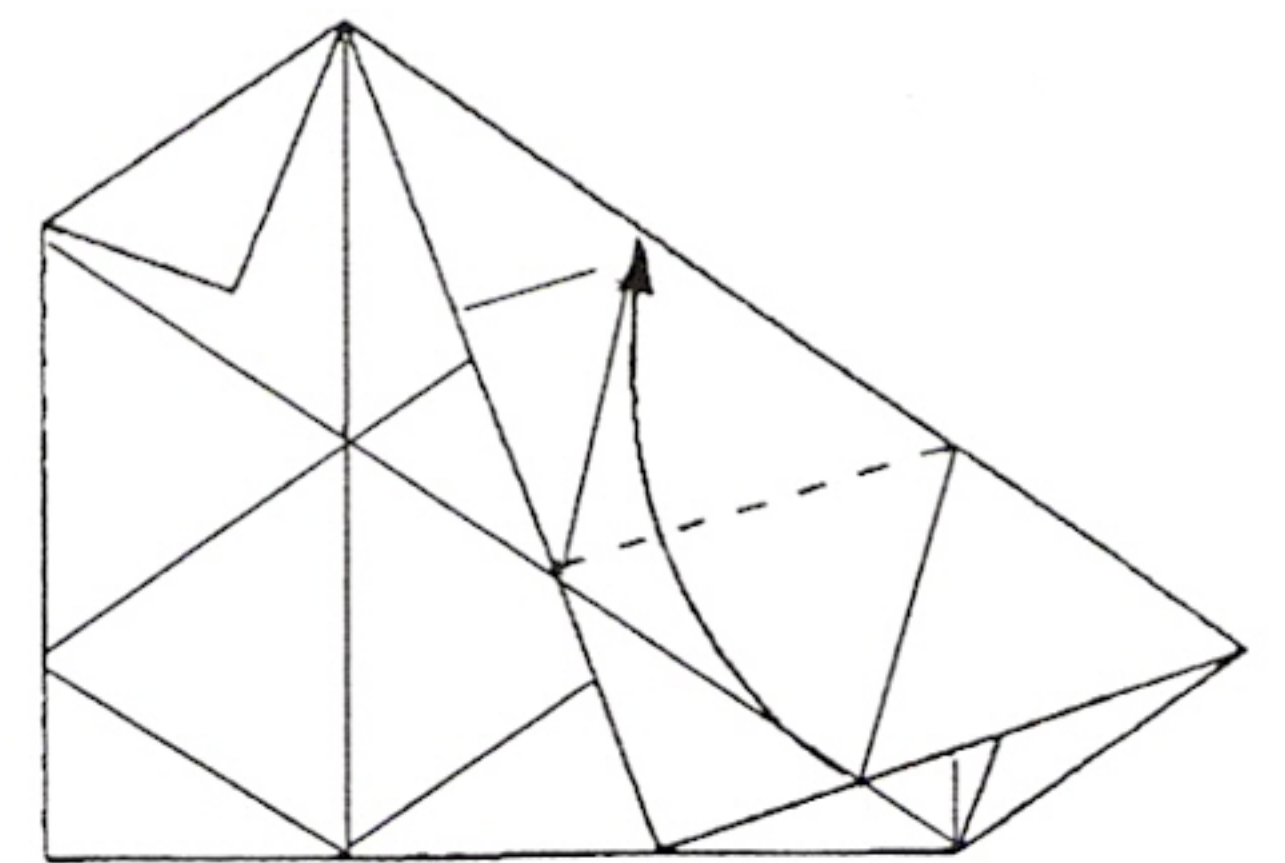
10



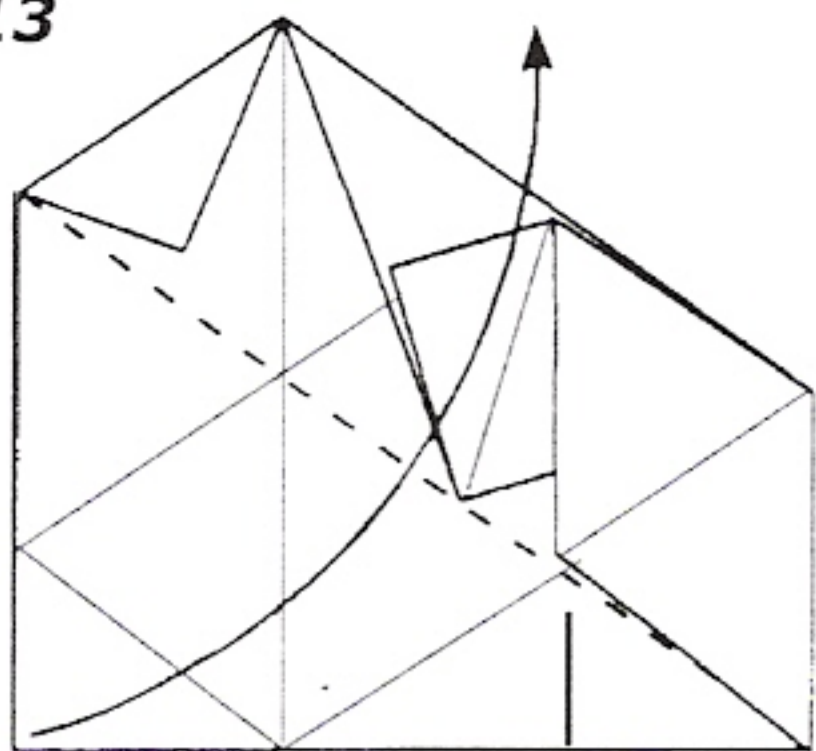
11



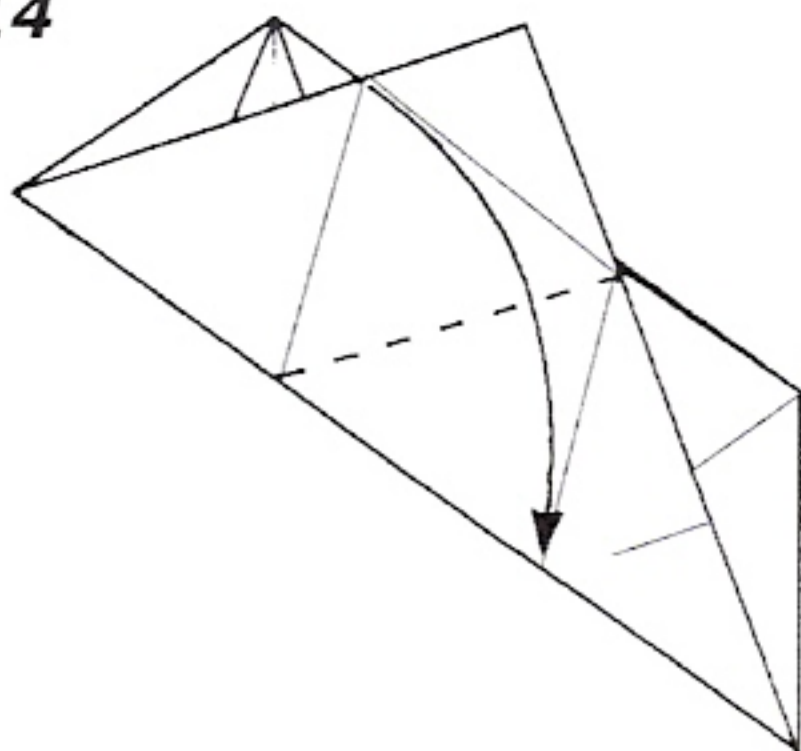
12



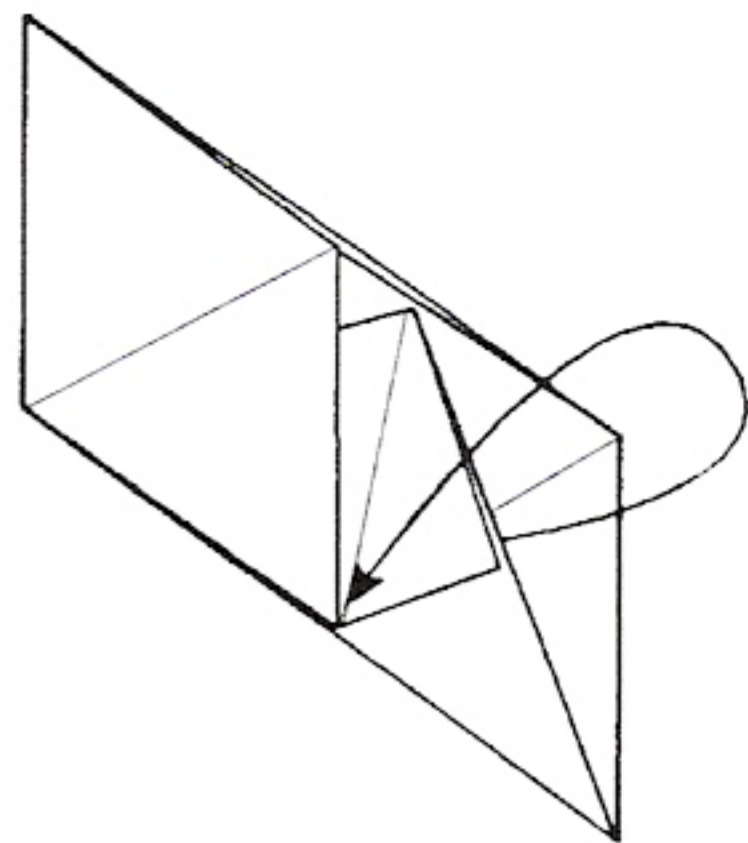
13



14

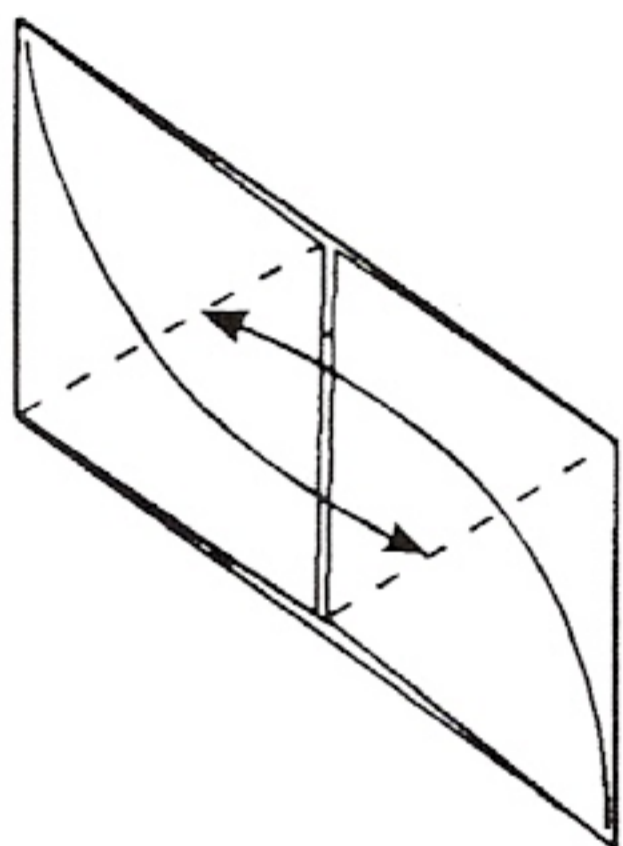


15

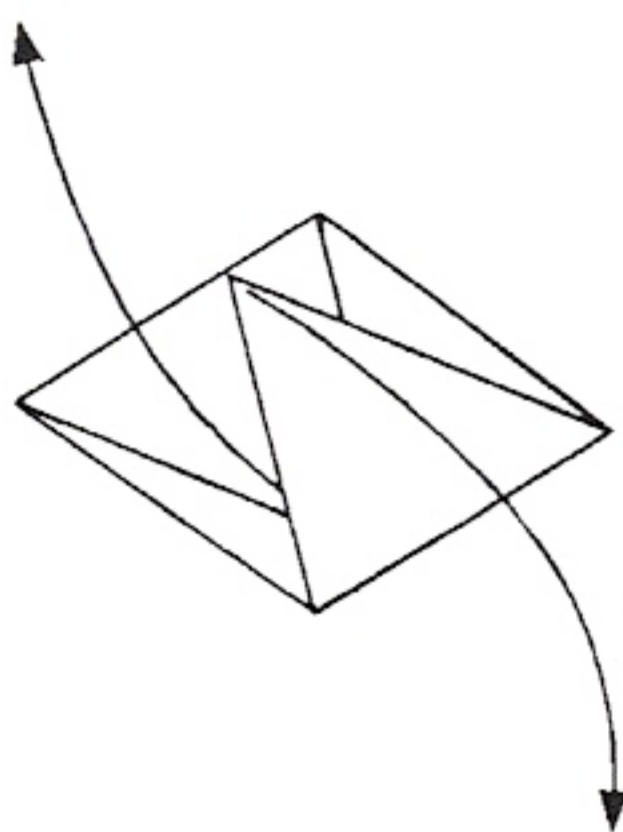


Puxe esta aba para fora e coloque-a sobre as outras dobras.

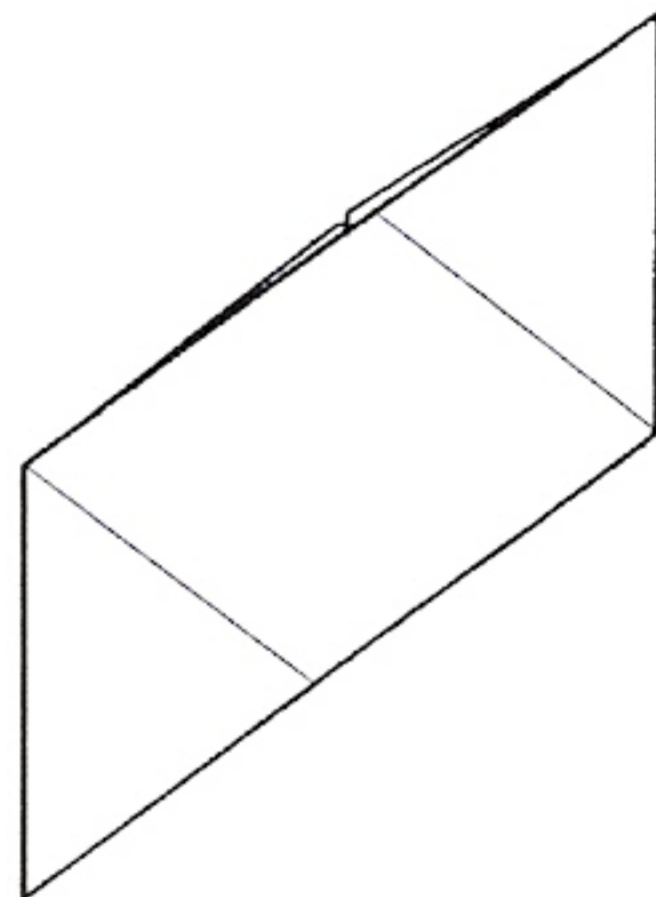
16



17



18

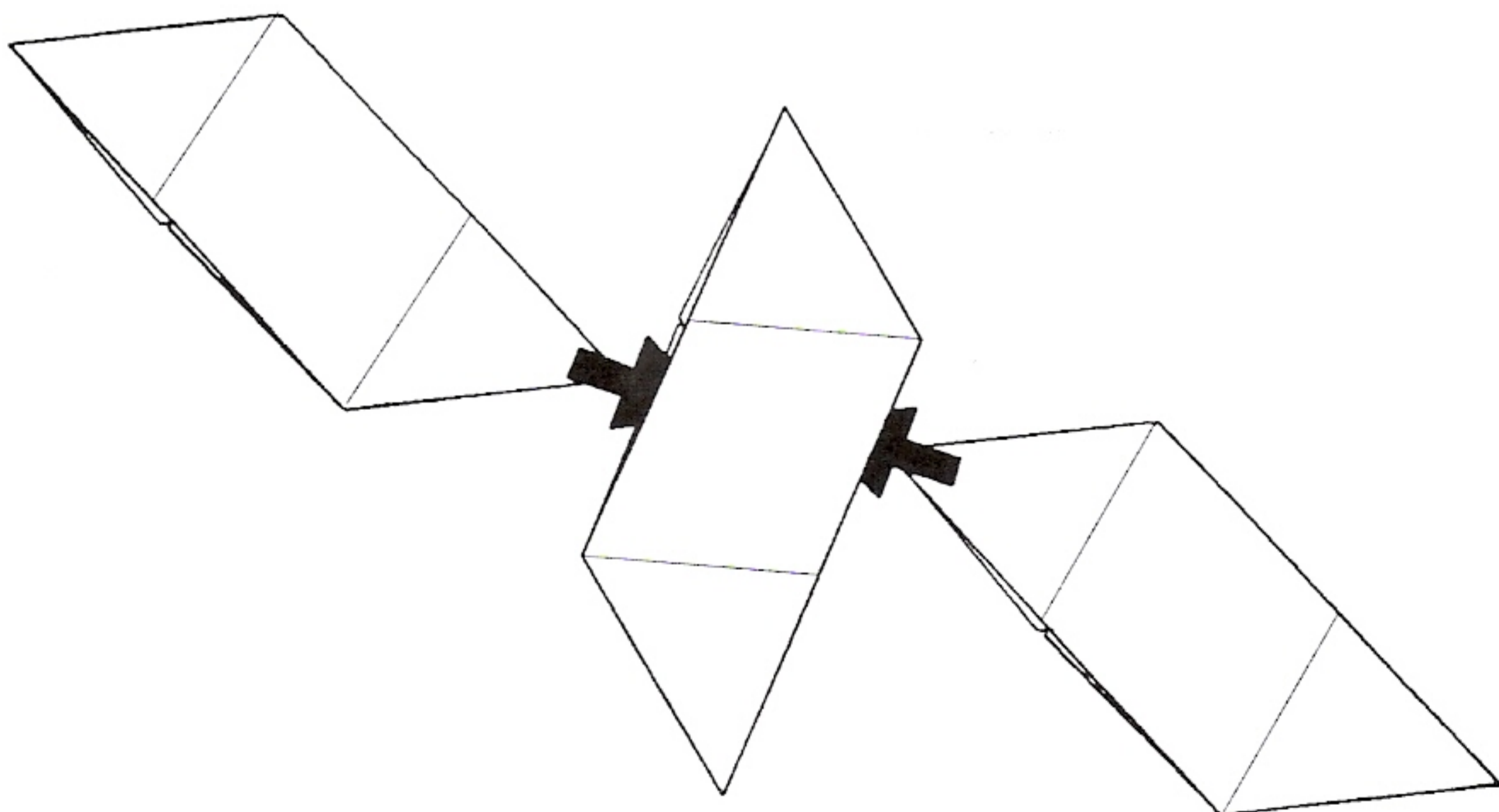


Vire a folha.

Vinque firmemente todas as orlas exteriores.

Faça os doze módulos.

19

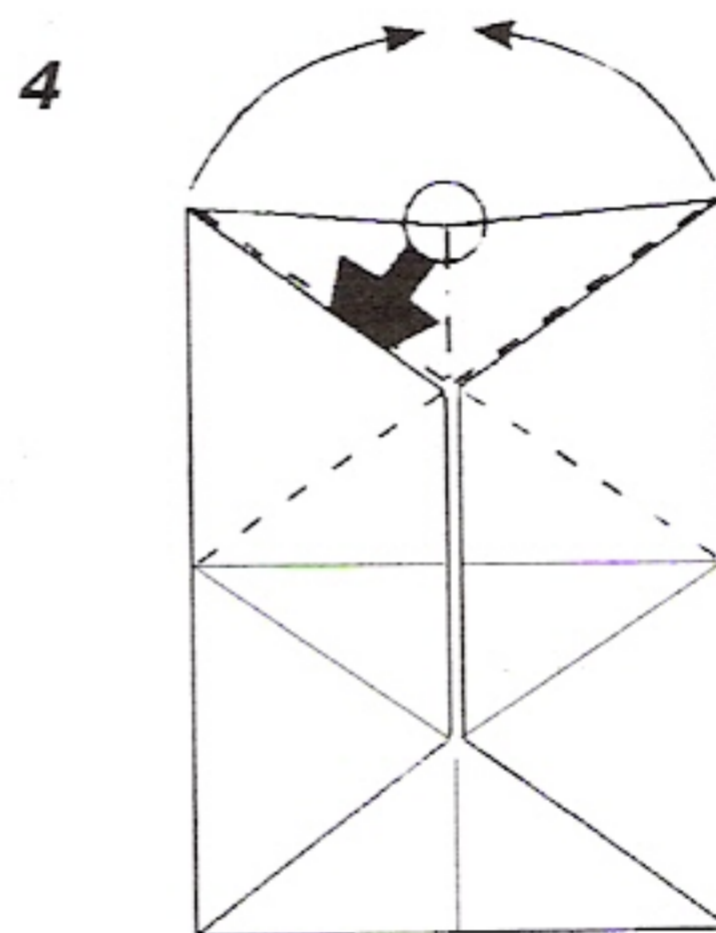
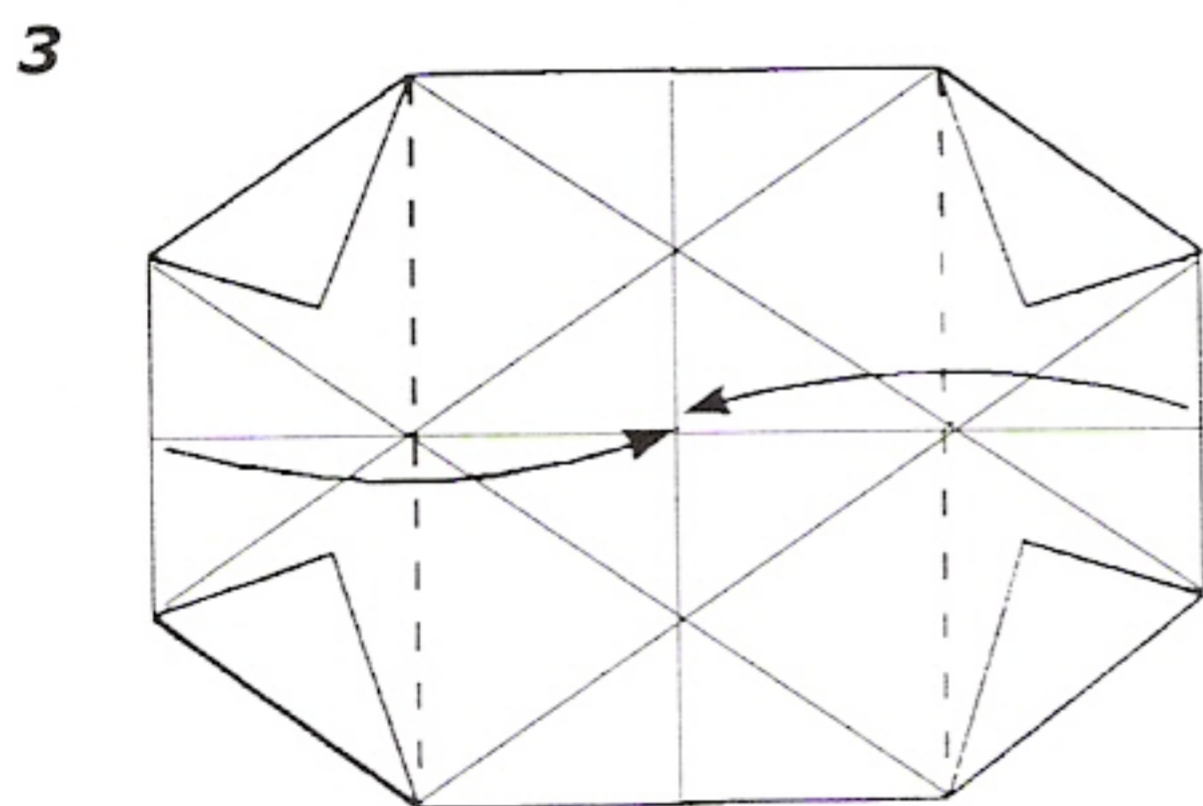
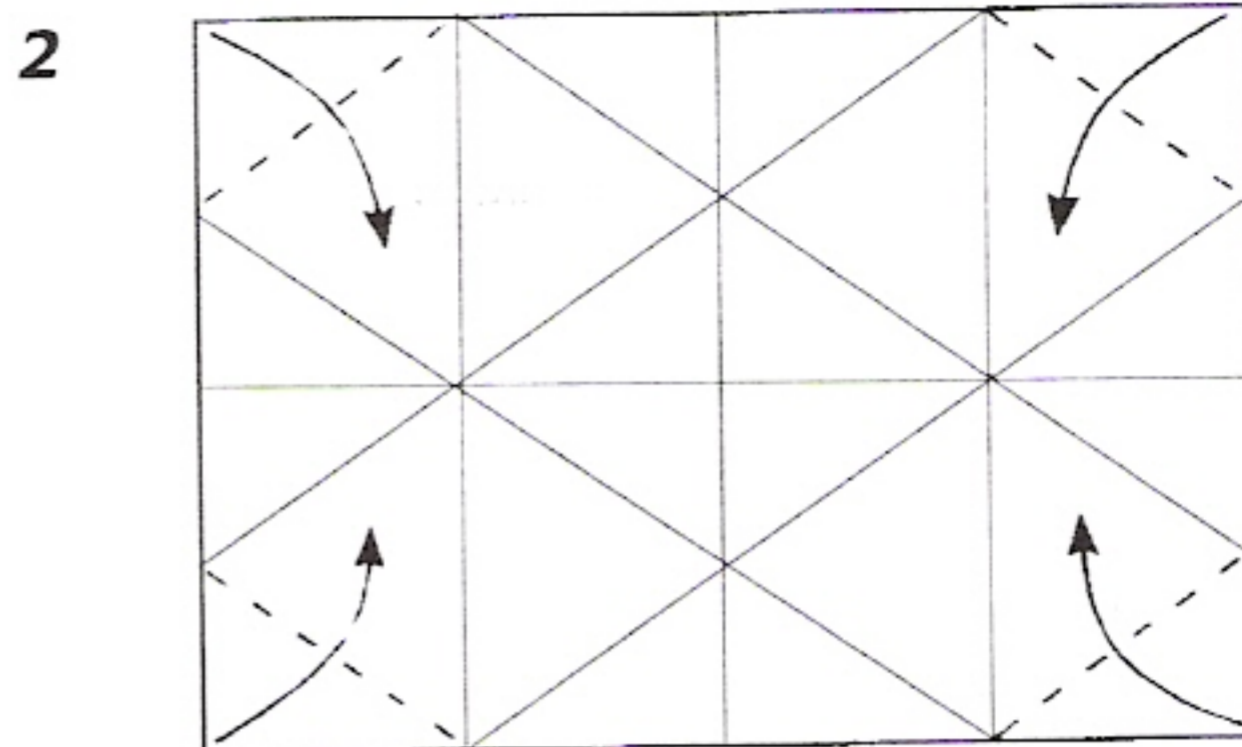
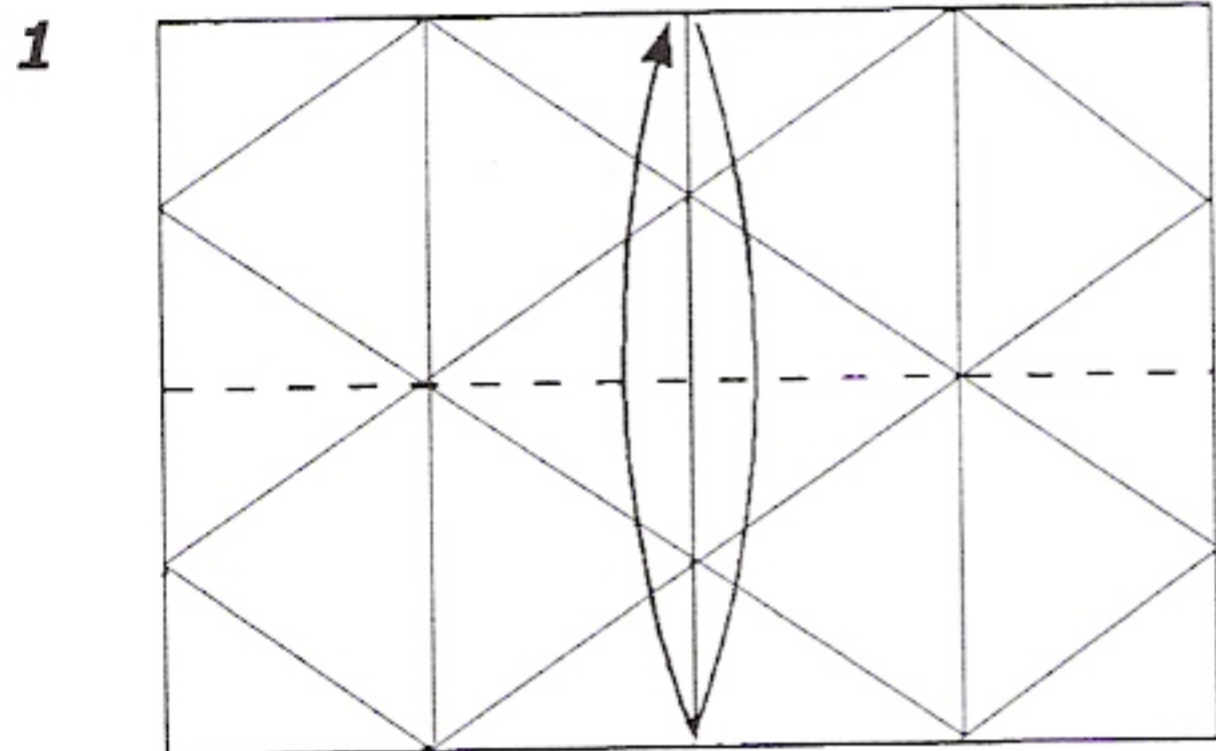


Adicione o resto da mesma maneira.

Pirâmide rômbrica

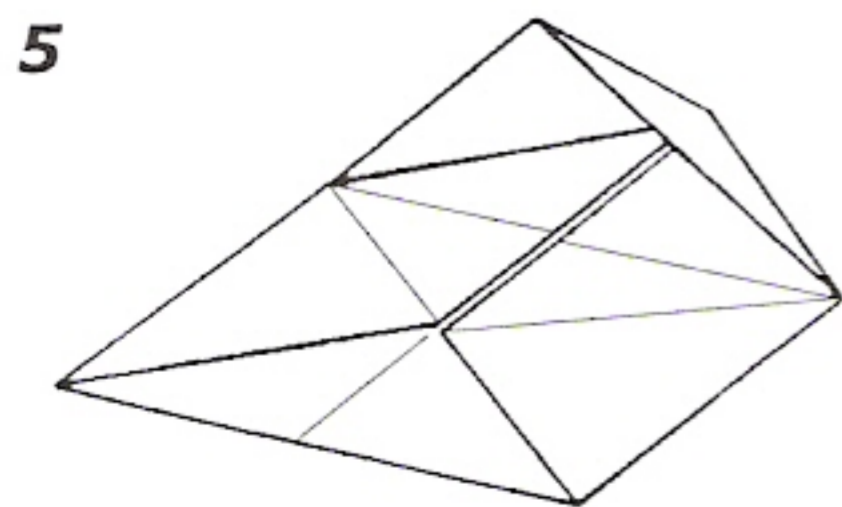
É necessária uma folha de papel A4 para cada pirâmide.

Comece por dobrar o papel até ao passo 9 do dodecaedro rômbrico, mas achate a dobra feita no passo 1 dessas instruções para formar um vinco ao longo de toda a largura da folha.



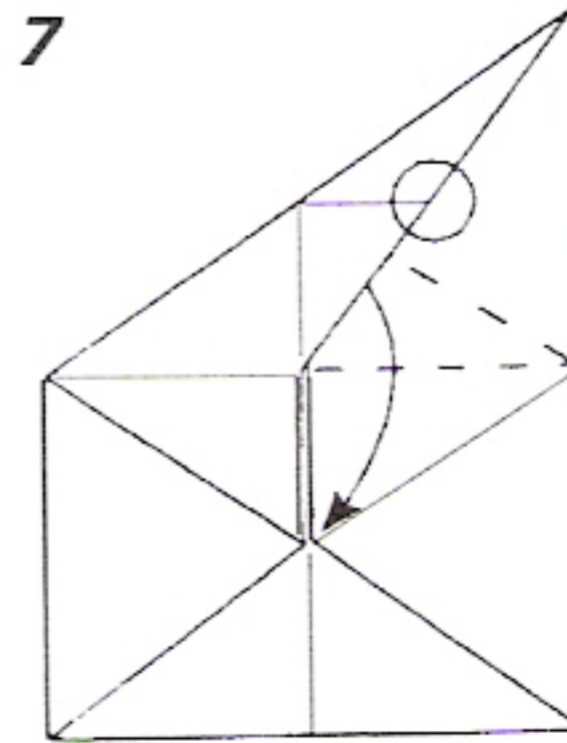
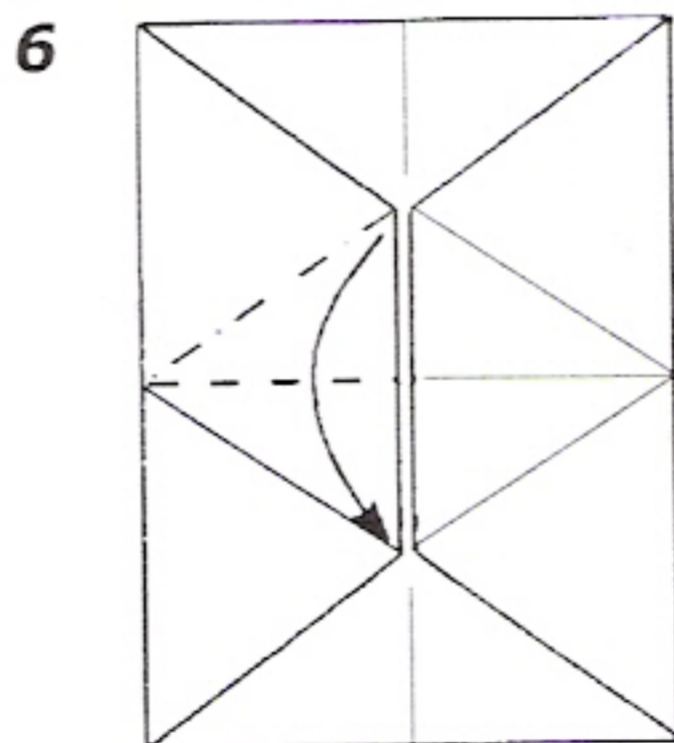
Ao juntar os dois cantos superiores, o modelo tornar-se-á tridimensional e o ponto com um círculo formará uma aba.

Esta aba deverá ser inserida de lado na bolsa, como indica a figura, para prender a dobra no sítio.



Vinque com firmeza e desfaça o passo 4.

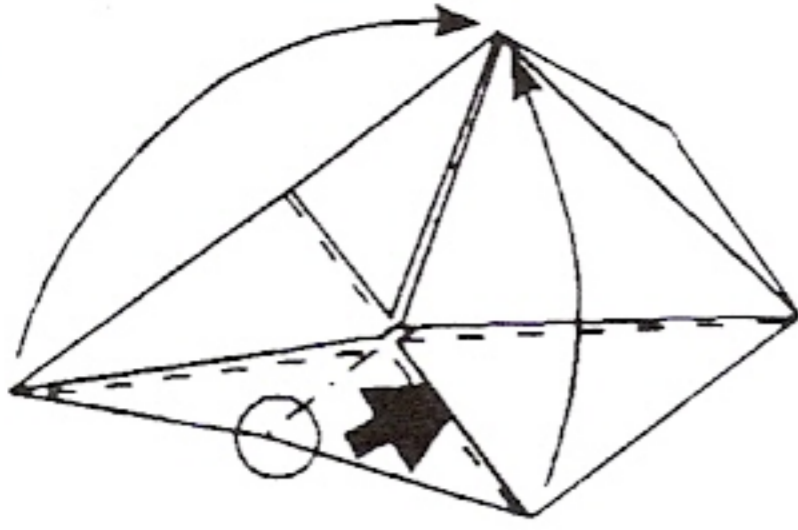
Rode a folha.



Repita a mesma dobra na outra metade da folha, para formar uma pirâmide folgada.

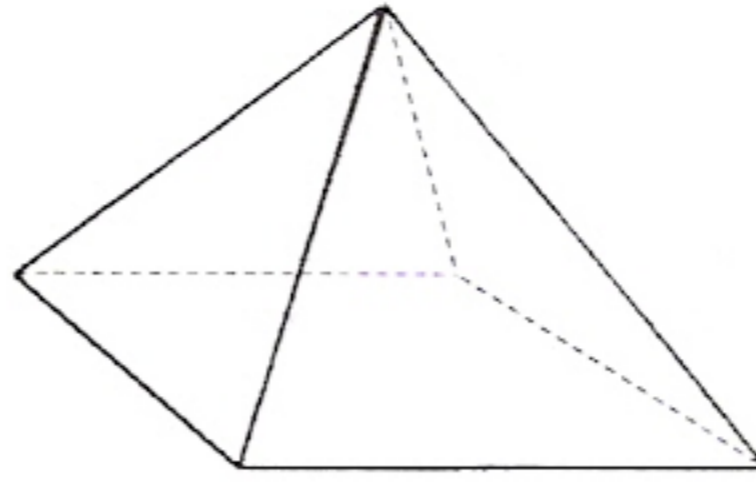
O ponto com um círculo ficará dentro do modelo.

8



Volte a dobrar a outra extremidade para prender a pirâmide no sítio.

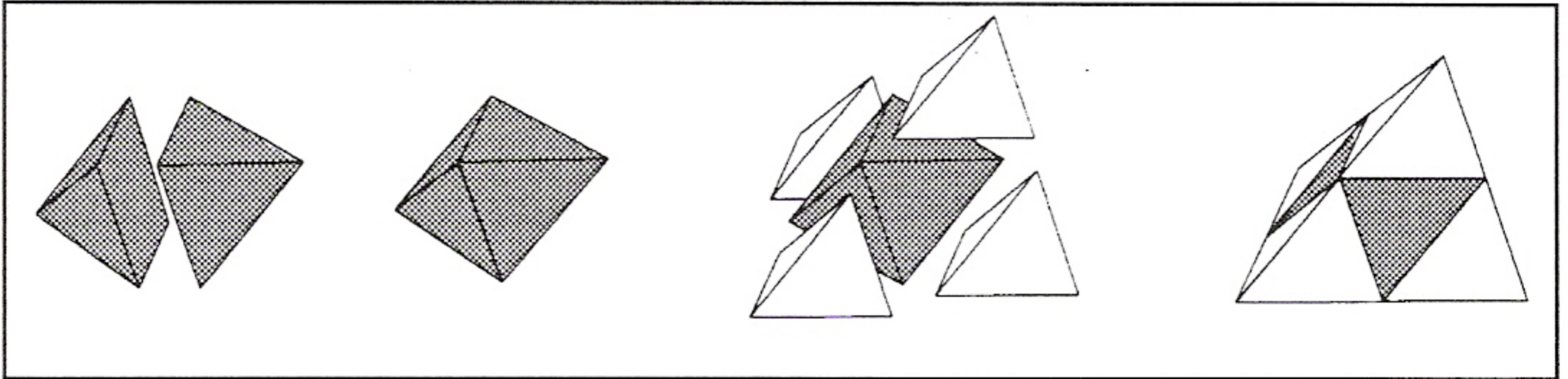
9



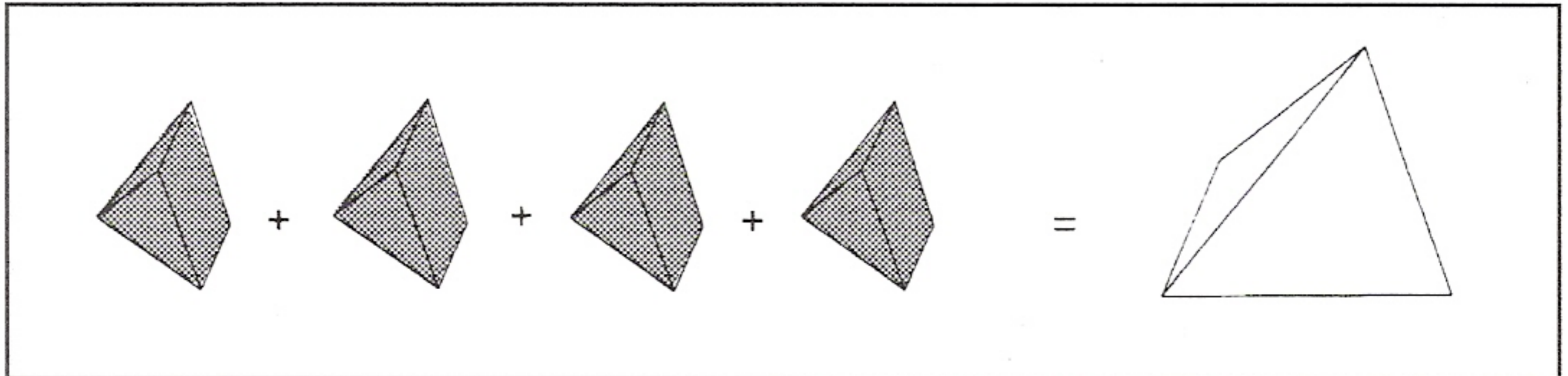
Está terminada.

Os passos 6 a 8 devem ser a sequência de dobragem mais difícil deste livro. Se os achar impossíveis de executar, pode completar uma pirâmide rômbrica semelhante – embora menos rígida – repetindo simplesmente o passo 4 na segunda metade do papel.

Pode fazer-se um tetraedro rômbrico composto combinando duas pirâmides rômbricas, de maneira a formar um octaedro rômbrico e rodeando-o com quatro tetraedros rômbricos. Para que as faces sejam à escala, faça os tetraedros com uma folha de metade do tamanho da folha utilizada para fazer as pirâmides.



Também pode juntar quatro pirâmides rômbricas para formar um tetraedro rômbrico.

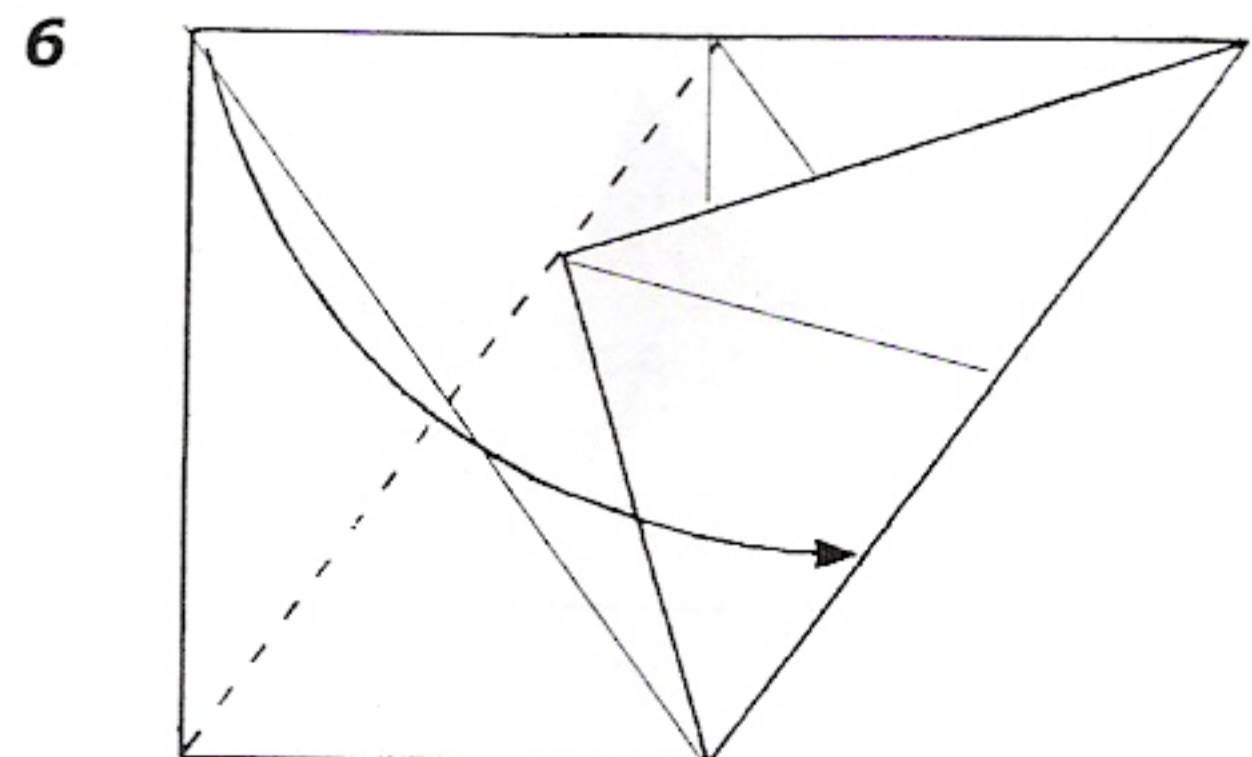
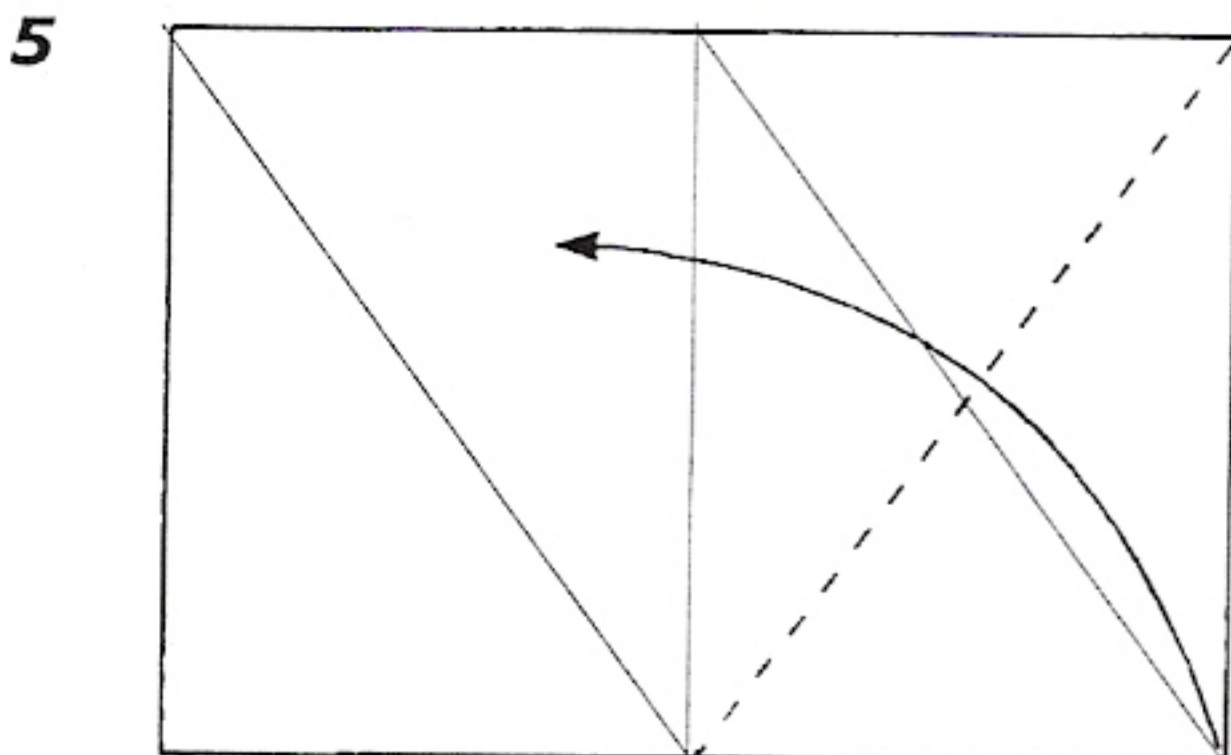
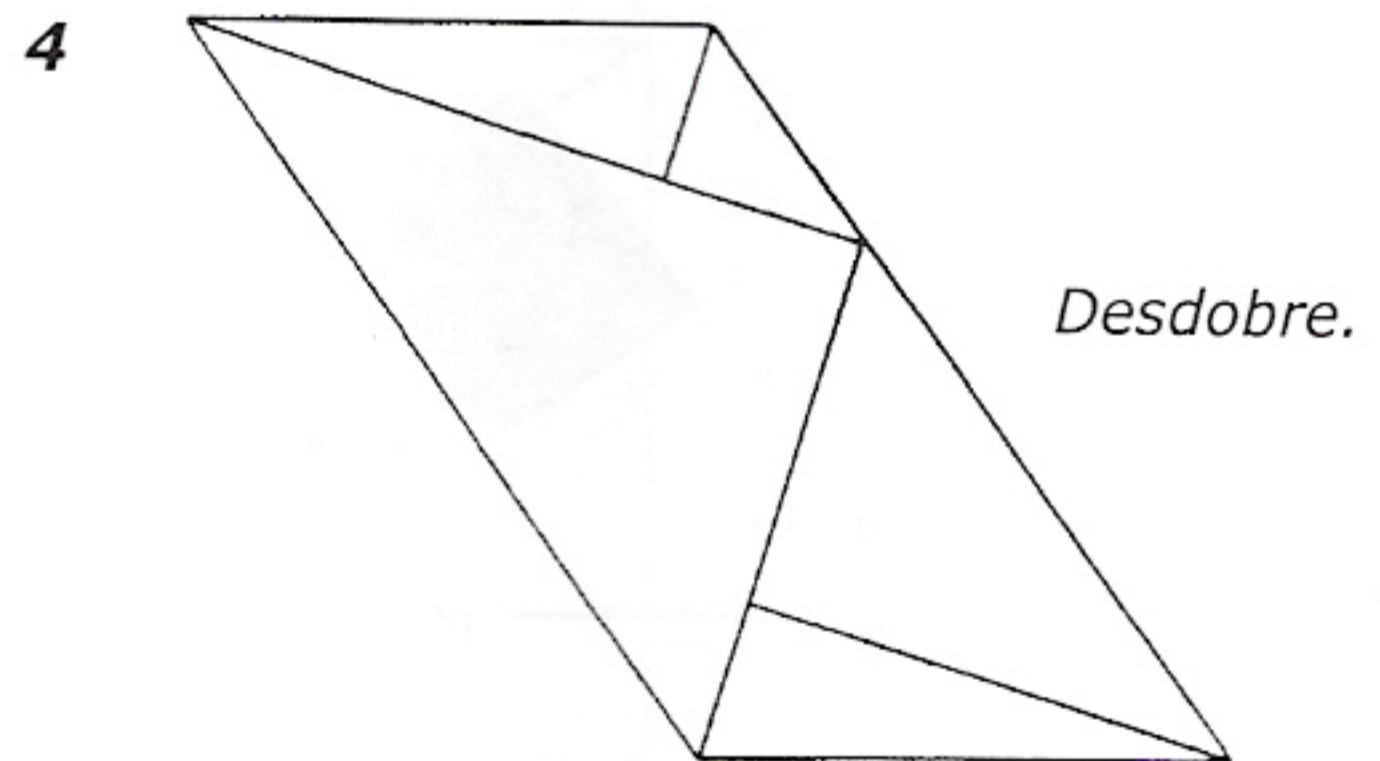
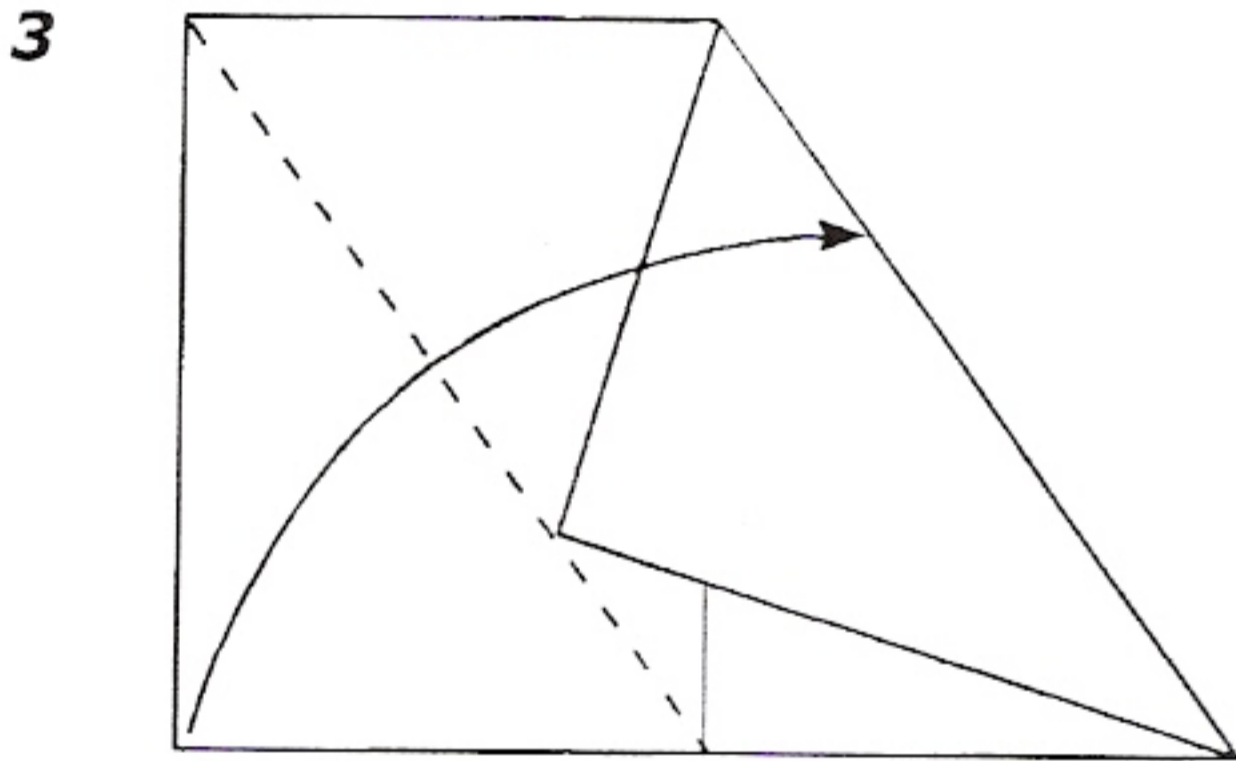
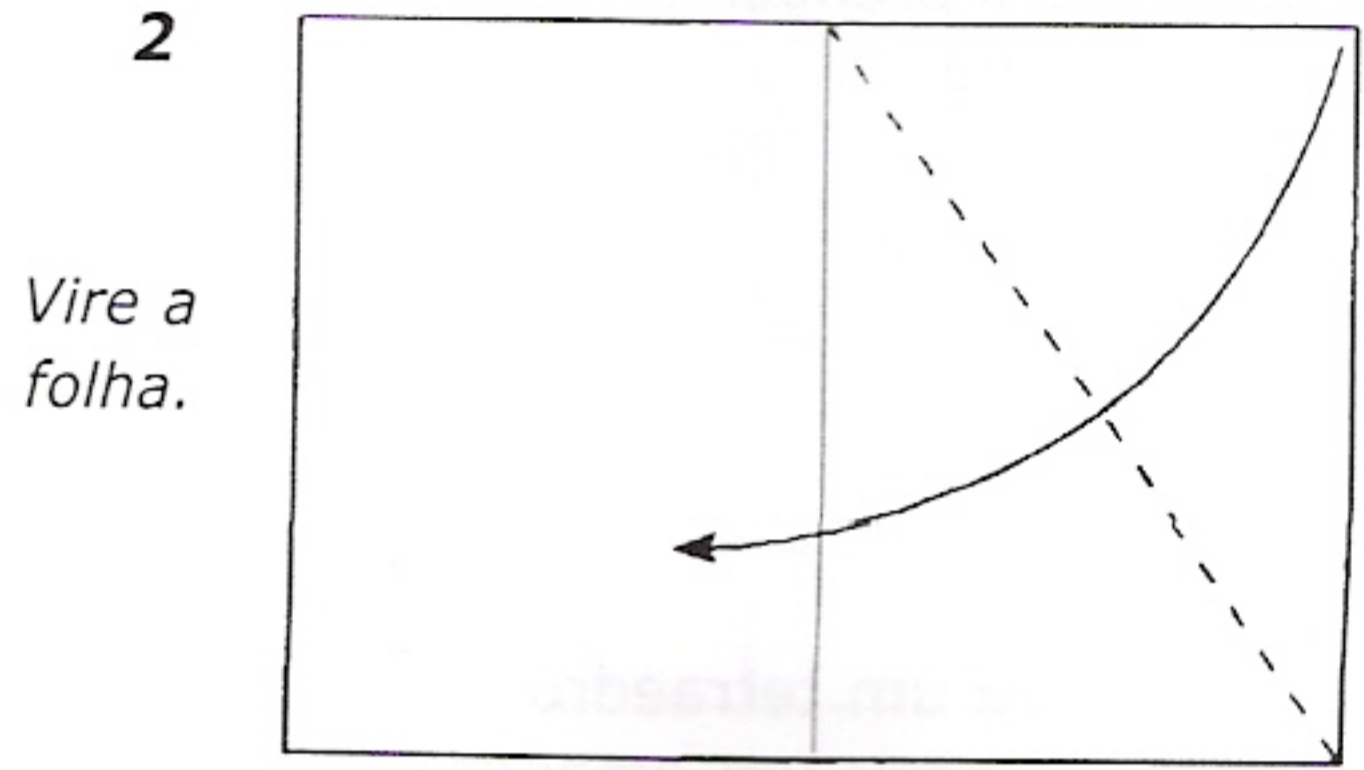
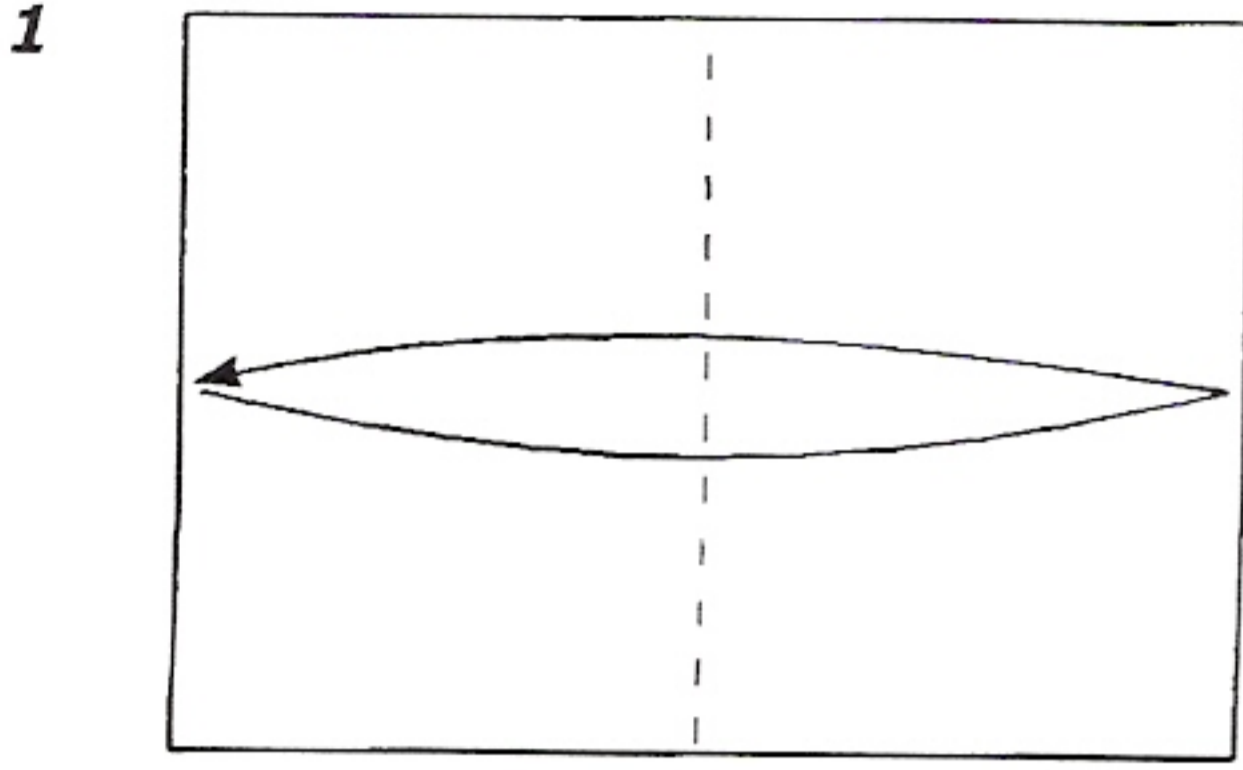


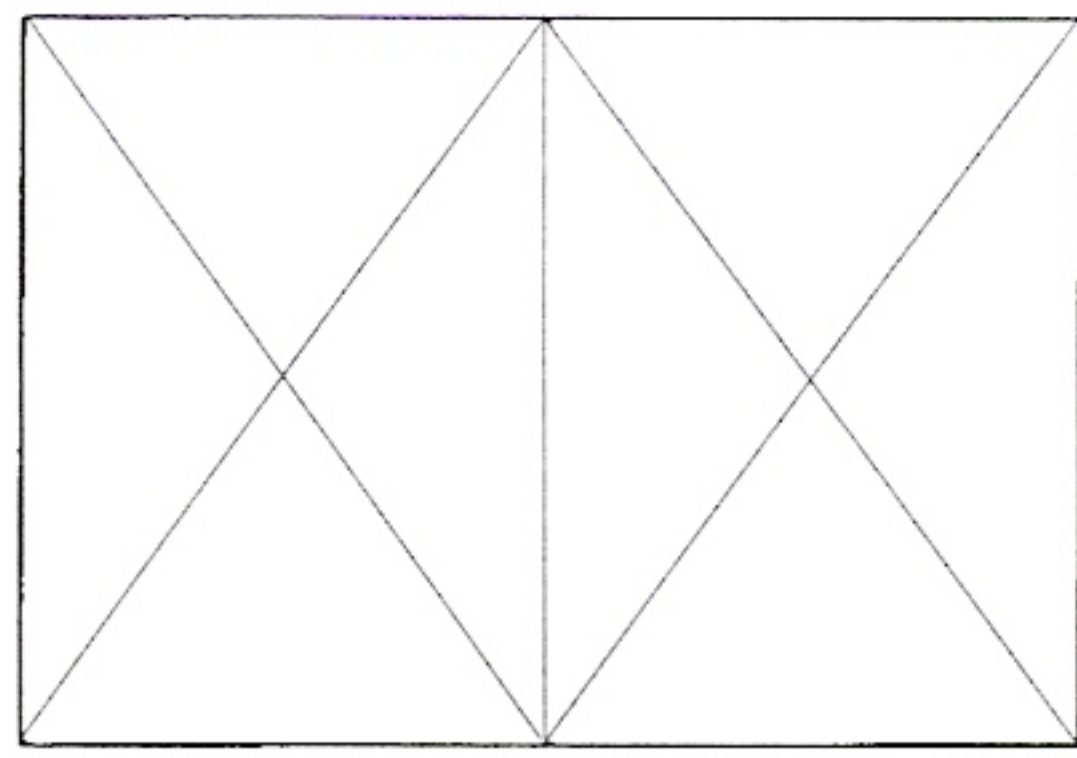
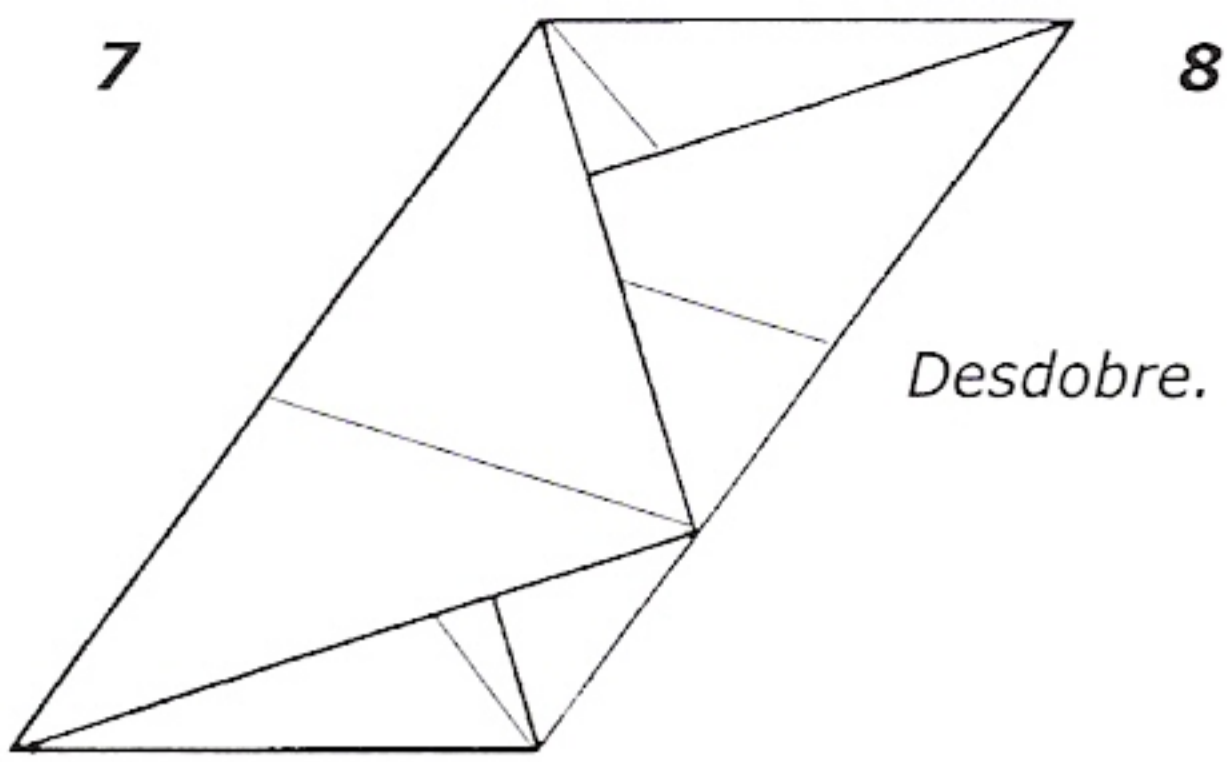
Ao manusear as pirâmides, a solução não é imediatamente óbvia e constitui um interessante quebra-cabeças de manipulação.

Tetraedro rômboico

São necessárias duas folhas de papel A4.

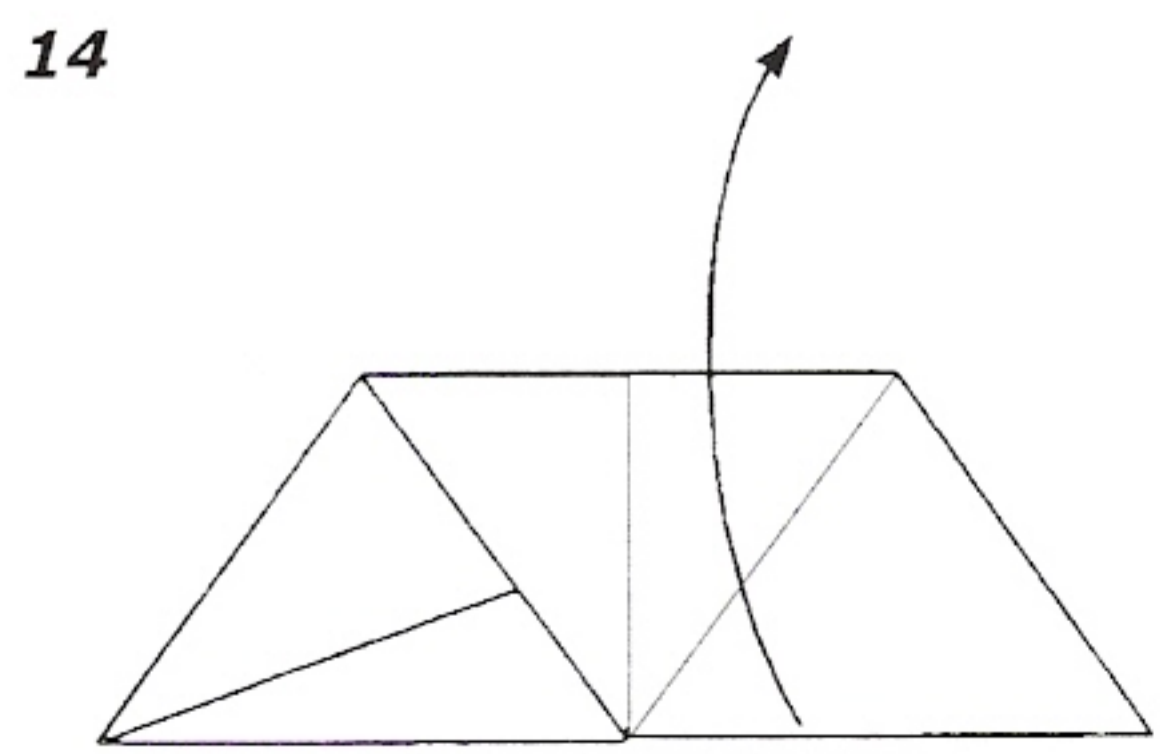
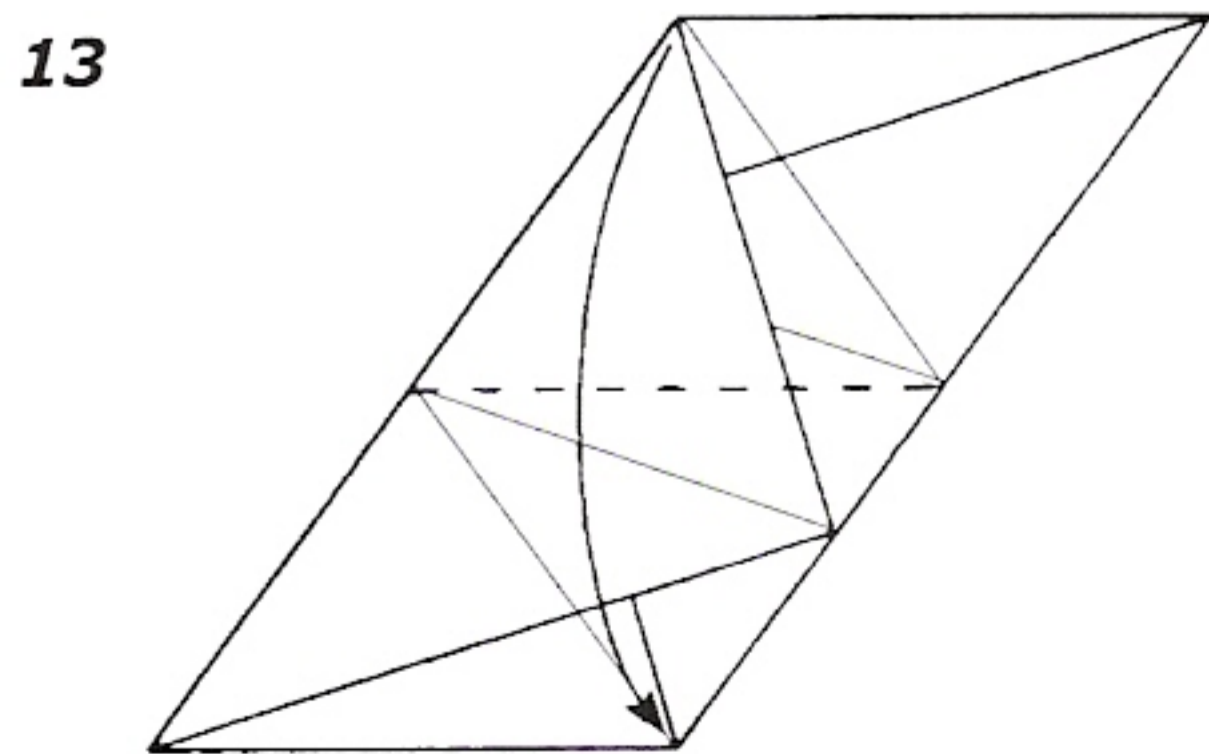
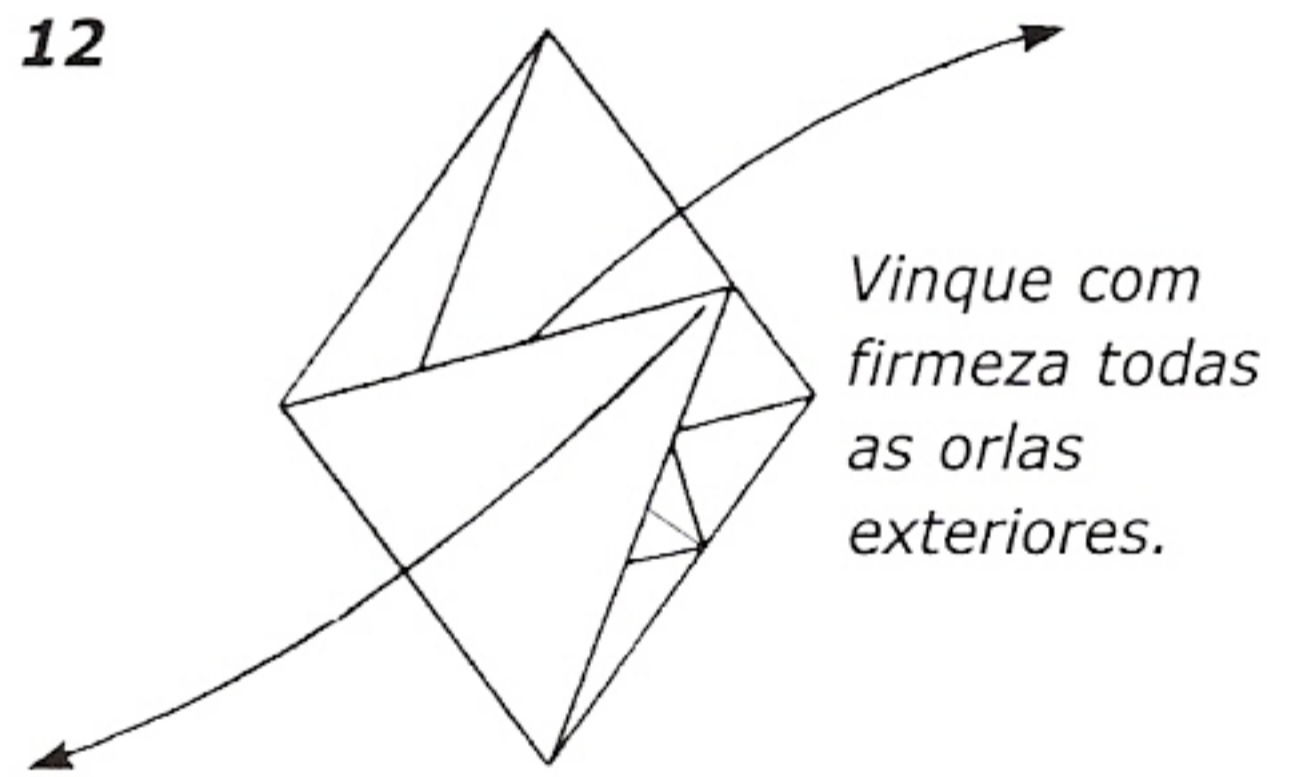
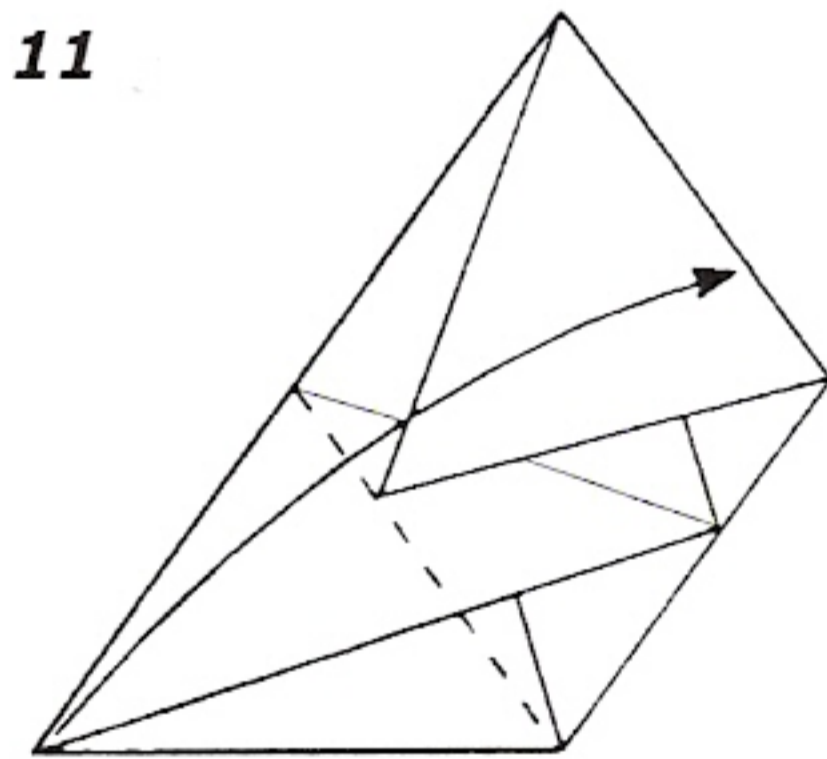
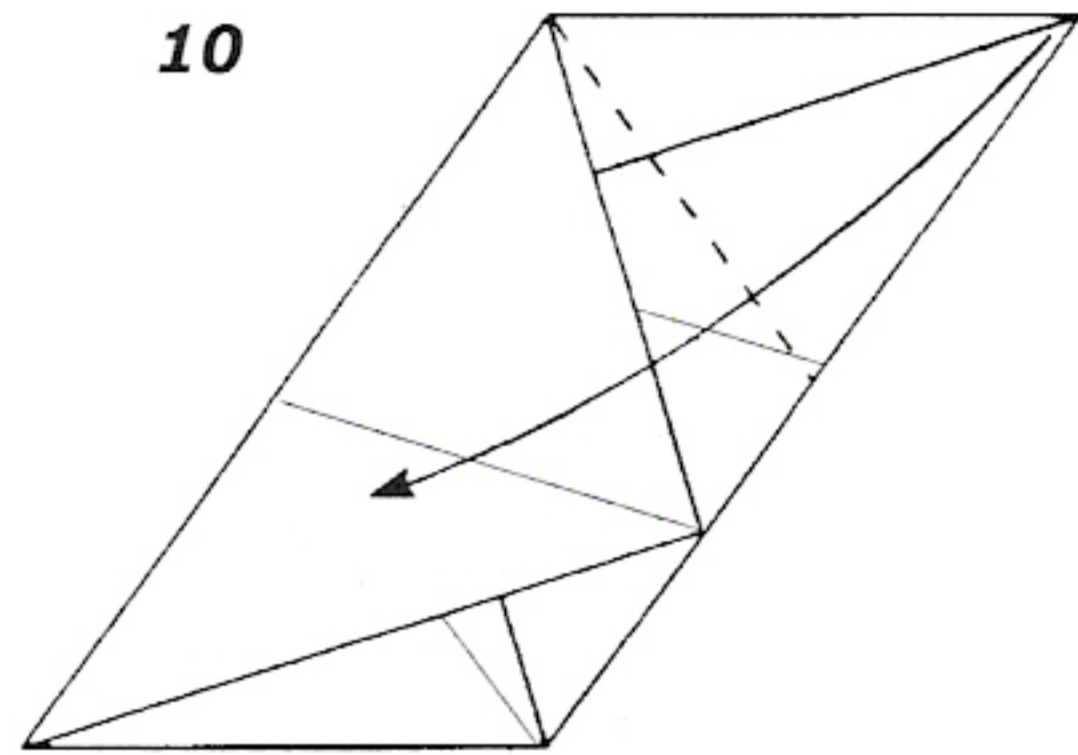
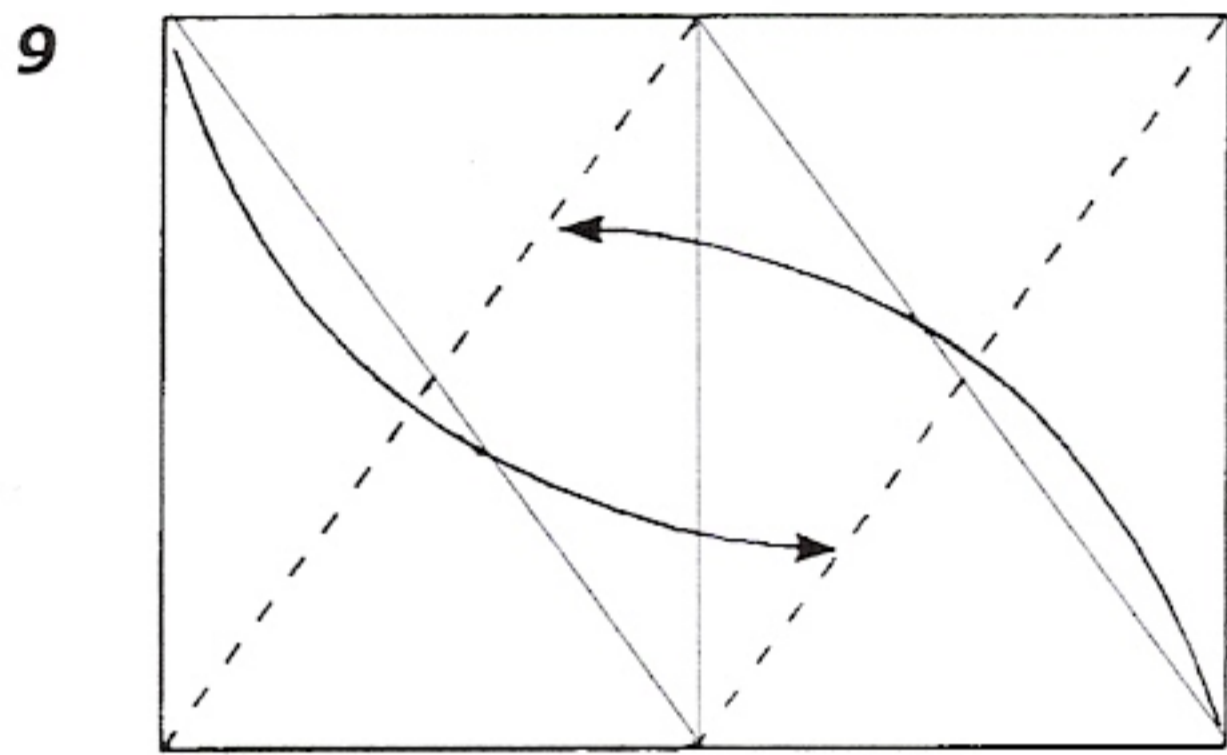
Este modelo é feito de uma forma muito parecida com a do tetraedro normal, mas a montagem dos dois módulos é mais difícil devido aos ângulos mais agudos. Provavelmente, vale a pena fazer primeiro o modelo mais fácil.



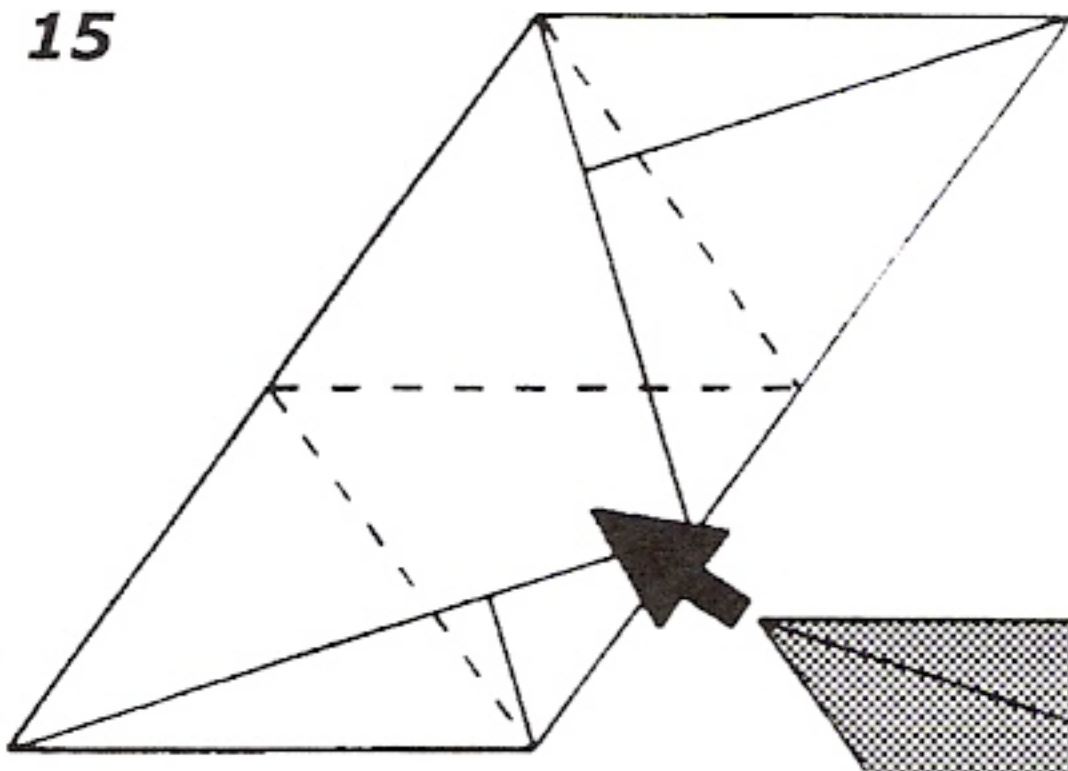


Dobre ambos os módulos até esta etapa. A partir daqui, o segundo módulo é dobrado como um reflexo do primeiro.

Só é descrito o método de dobragem do módulo básico.

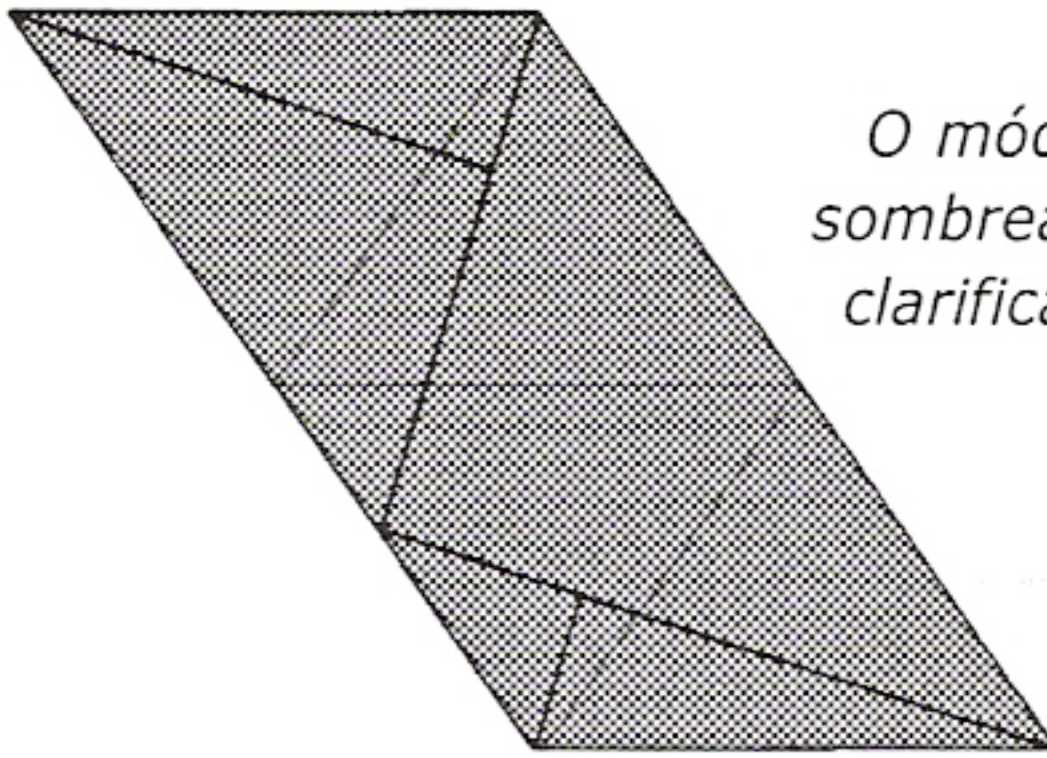


15

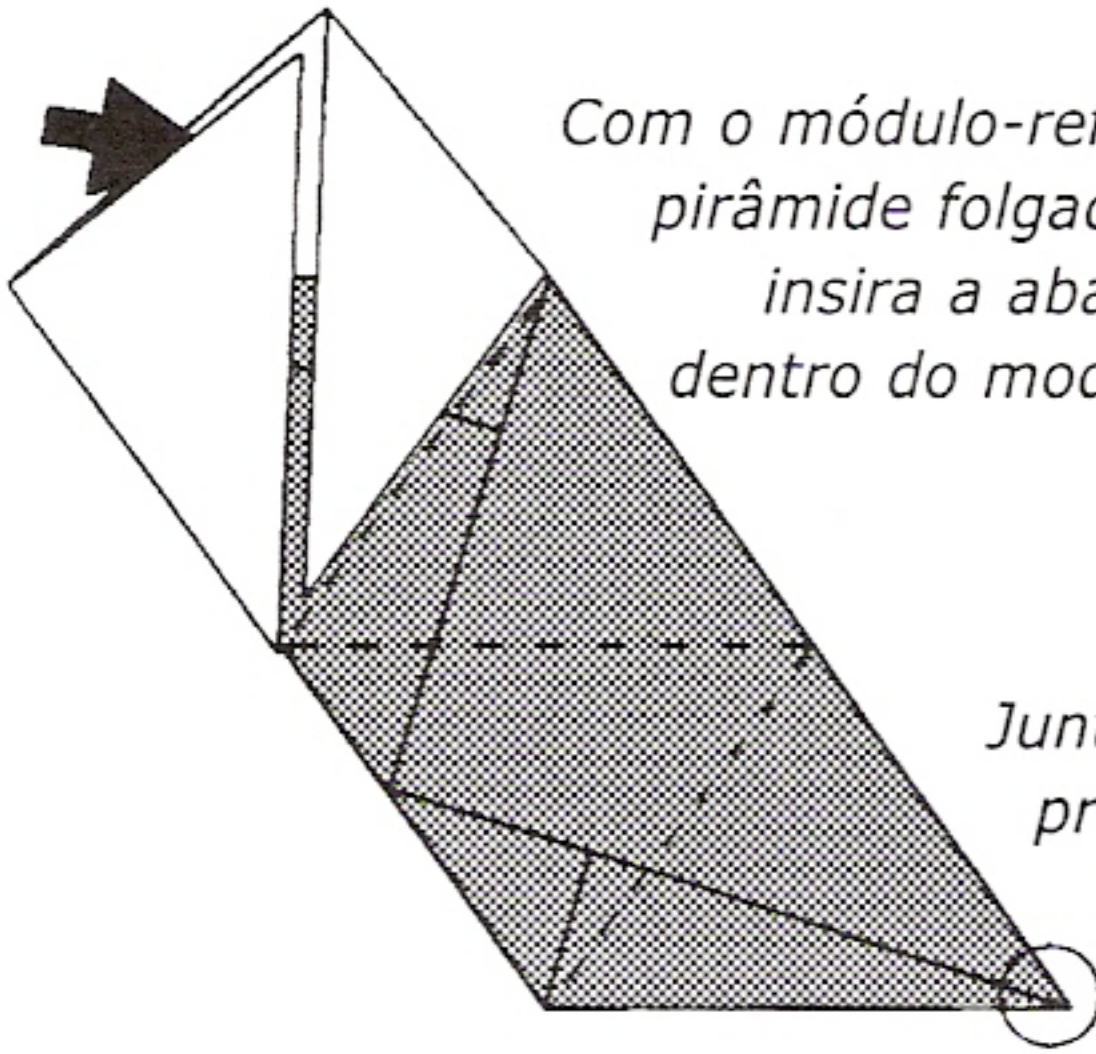


Junte os dois módulos como indica a figura e forme uma pirâmide folgada com o módulo da esquerda.

O módulo-reflexo está sombreado apenas para clarificar as instruções.



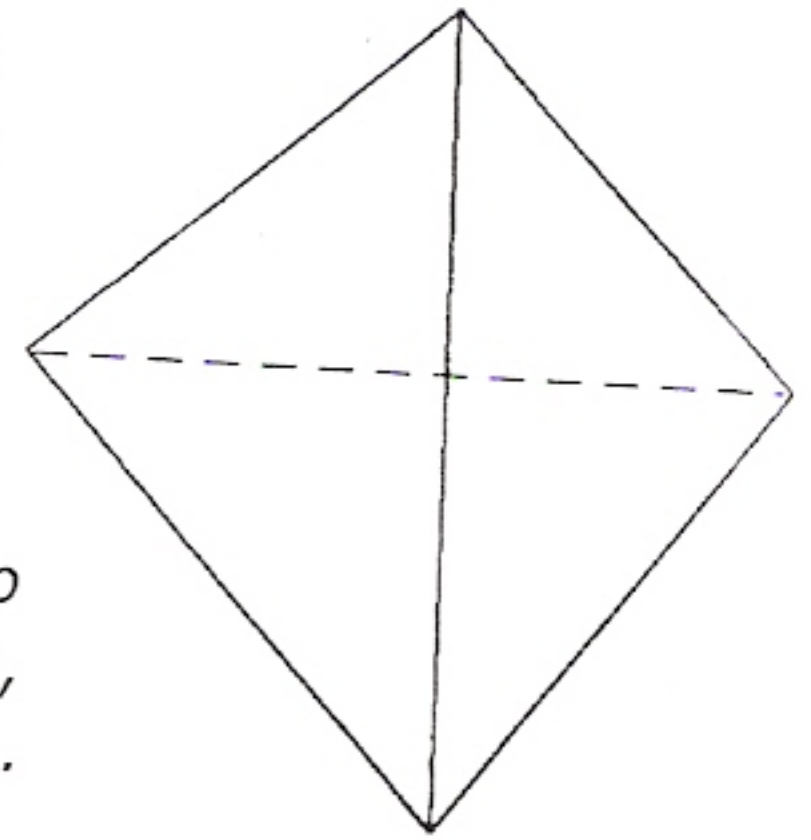
16



Com o módulo-reflexo, forme uma segunda pirâmide folgada em torno da primeira e insira a aba marcada com um círculo dentro do modelo, como indica a figura.

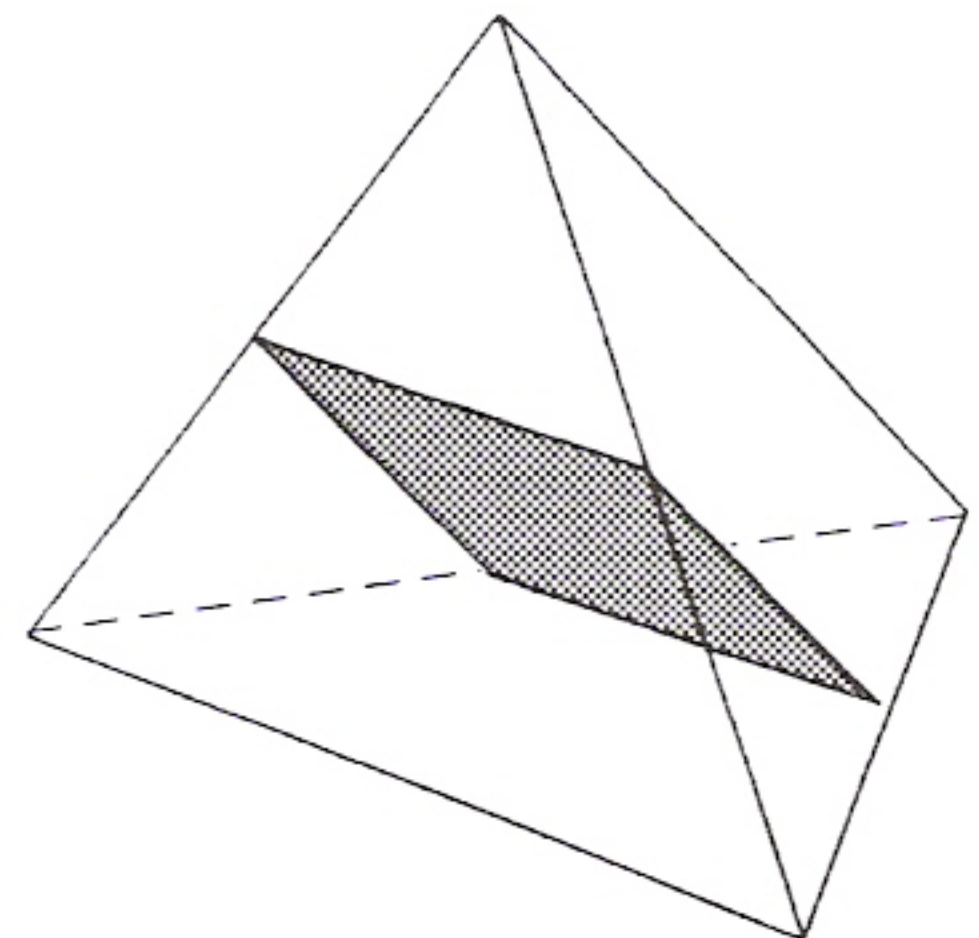
Junte todos os cantos fazendo pressão e, se for necessário, fortaleça as orlas.

17

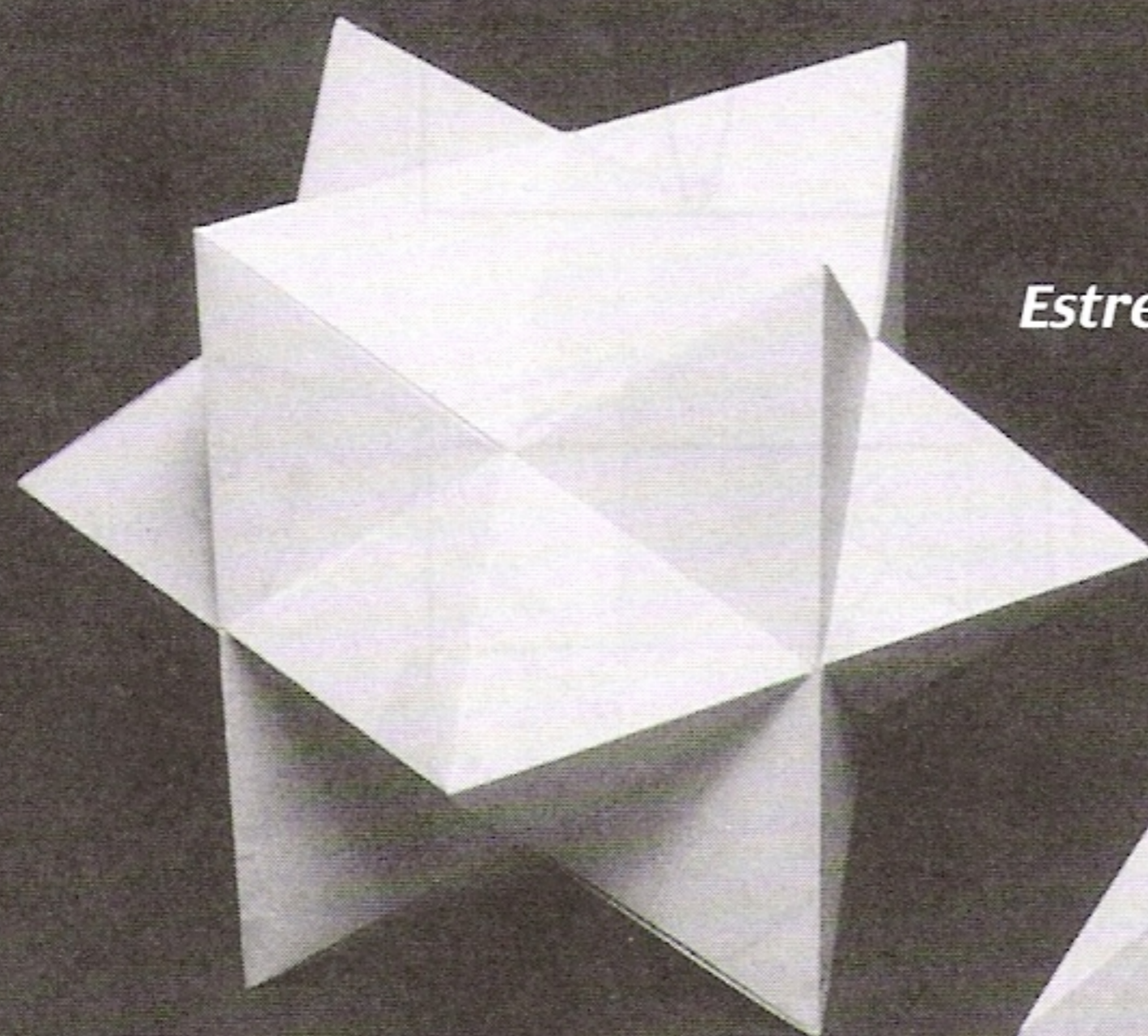


O tetraedro rômbo é o denominador comum de todos os modelos rômboicos desta coleção e tem muitas qualidades interessantes. Tal como o cubo, ocupa pouco espaço e, tal como oito cubos pequenos se juntam para formar um cubo grande, oito tetraedros rômboicos juntam-se para formar um tetraedro rômboico grande – embora de uma forma mais complexa.

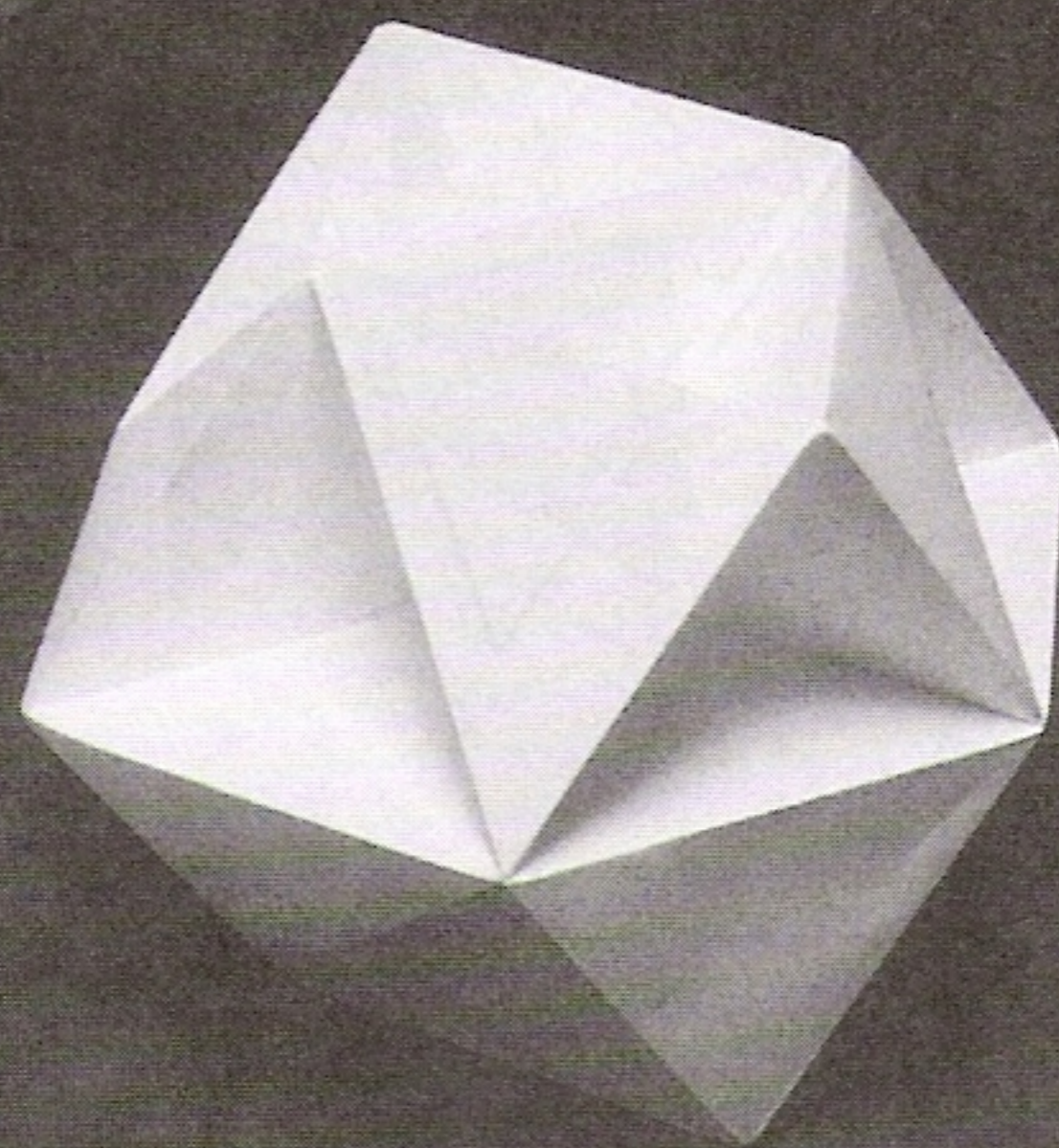
A forma é rômboica por analogia com as faces do dodecaedro rômboico. As suas quatro faces são formadas a partir de dois losangos dobrados ao longo do eixo mais curto. Curiosamente, se cortar o tetraedro em duas metades iguais através dos centros de quatro das suas orlas, o plano formado pelo corte também é um losango idêntico (ver figura). Se cortar o tetraedro normal da mesma forma, o plano resultante é, obviamente, um quadrado.



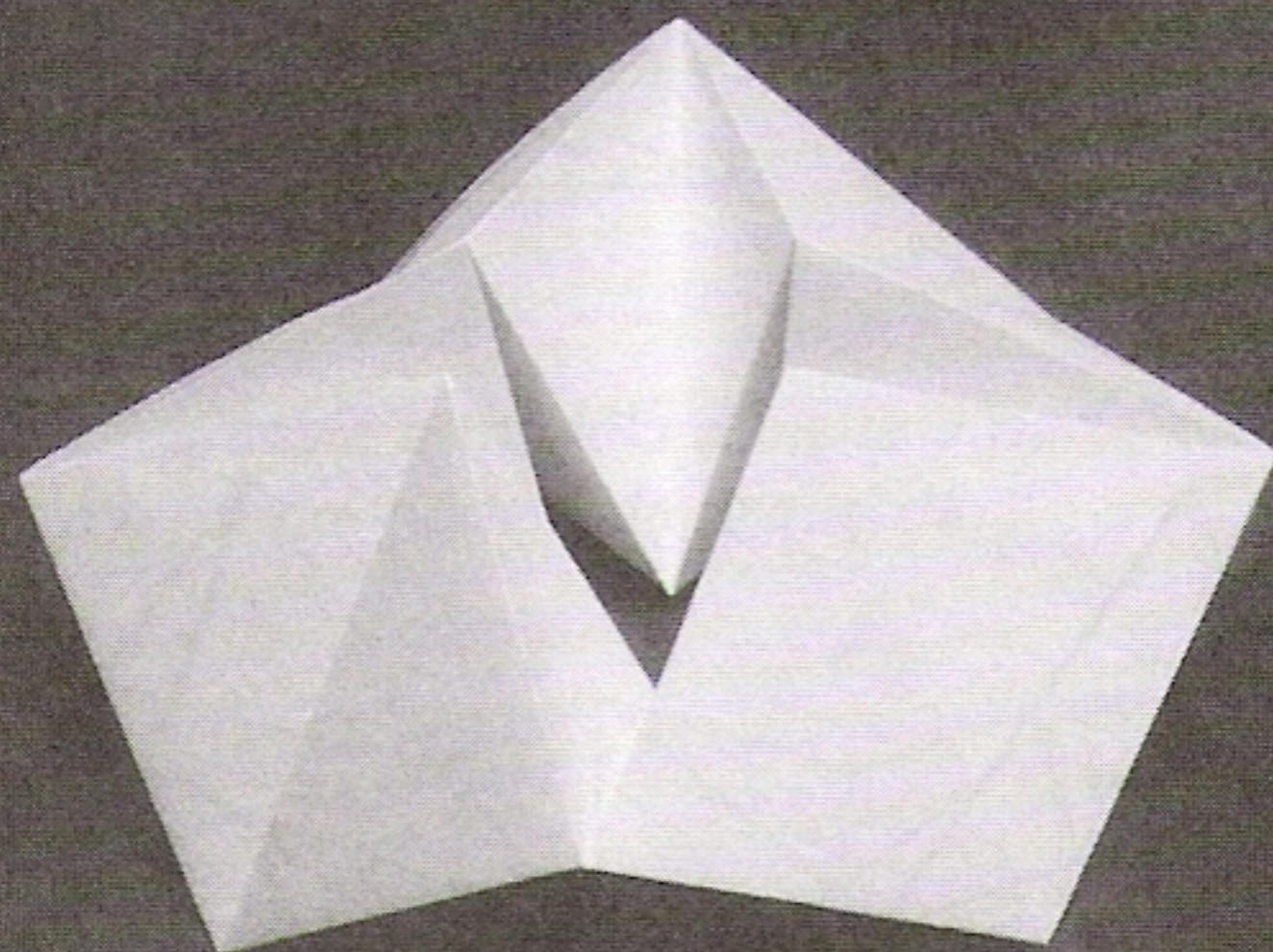
Anel rotativo de tetraedros rômnicos
Dodecaedro rômnico decorativo
Estrela rômnica



Estrela rômnica



***Dodecaedro rômnico
decorativo***

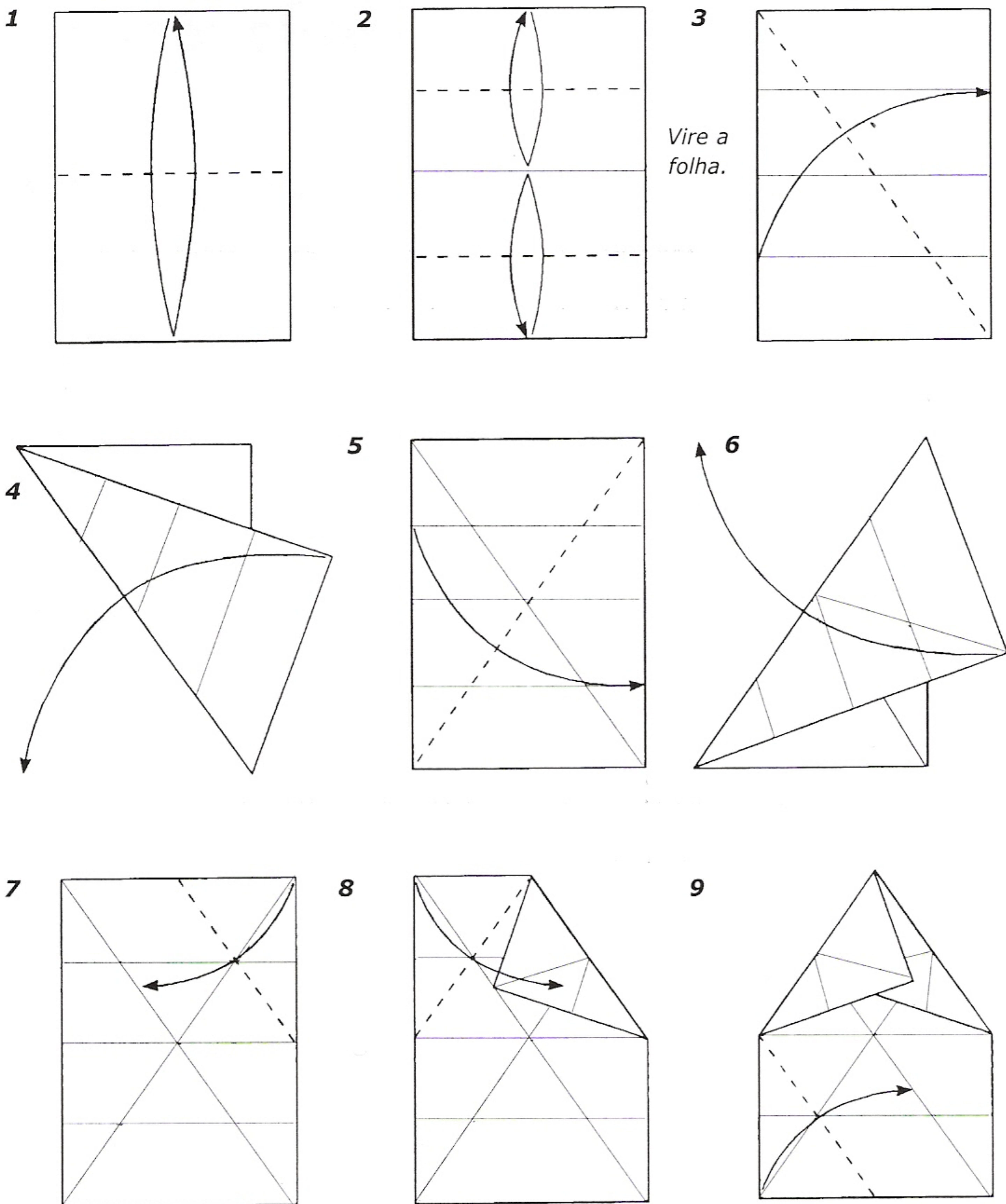


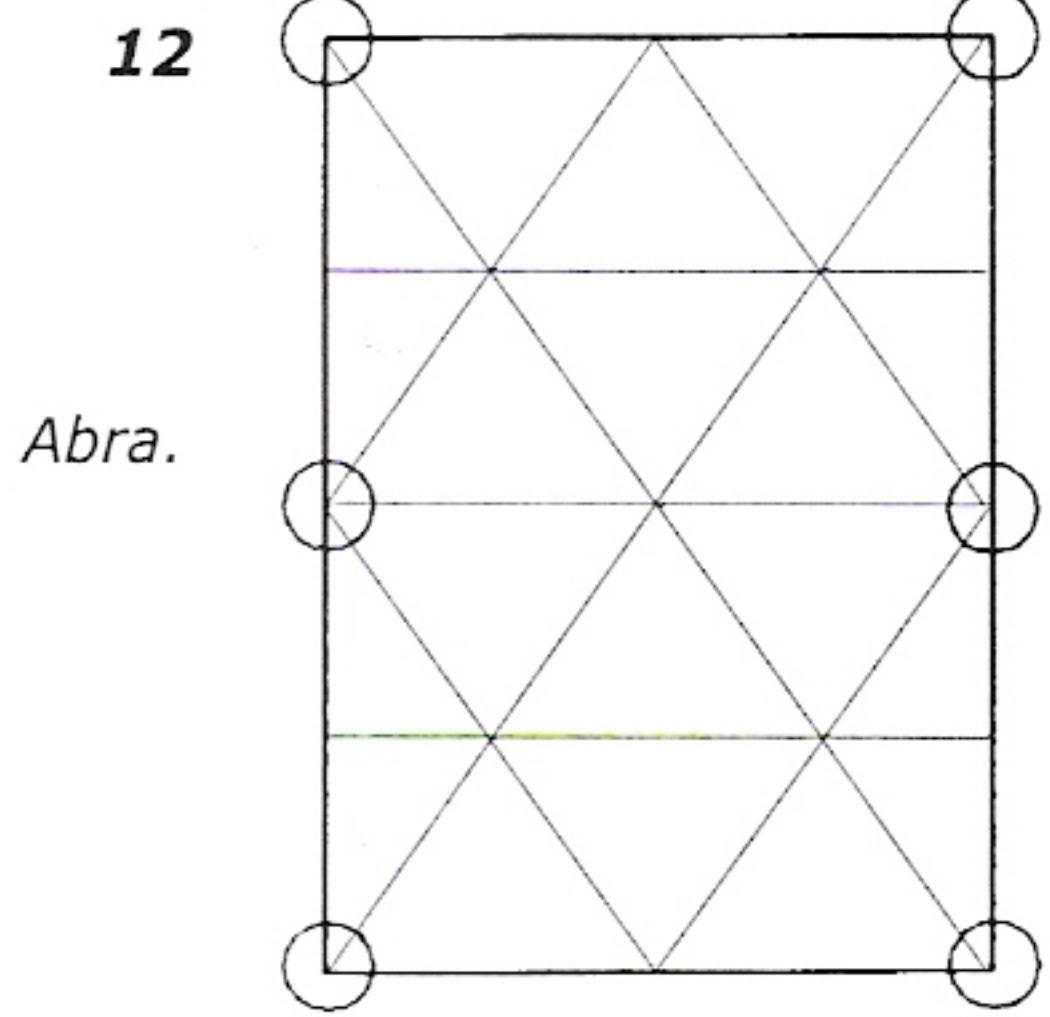
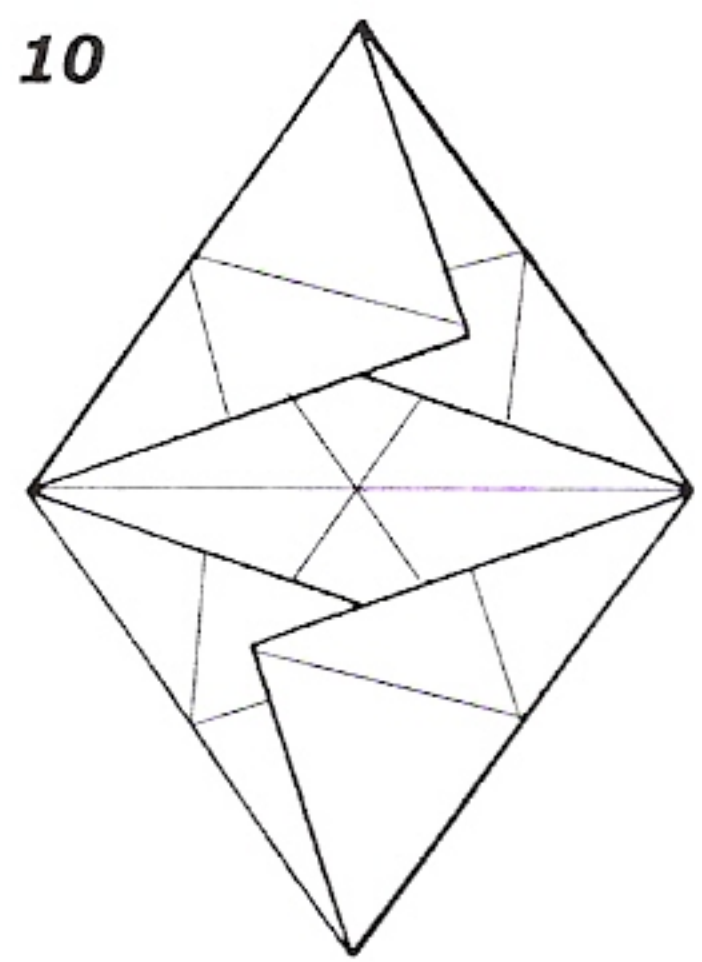
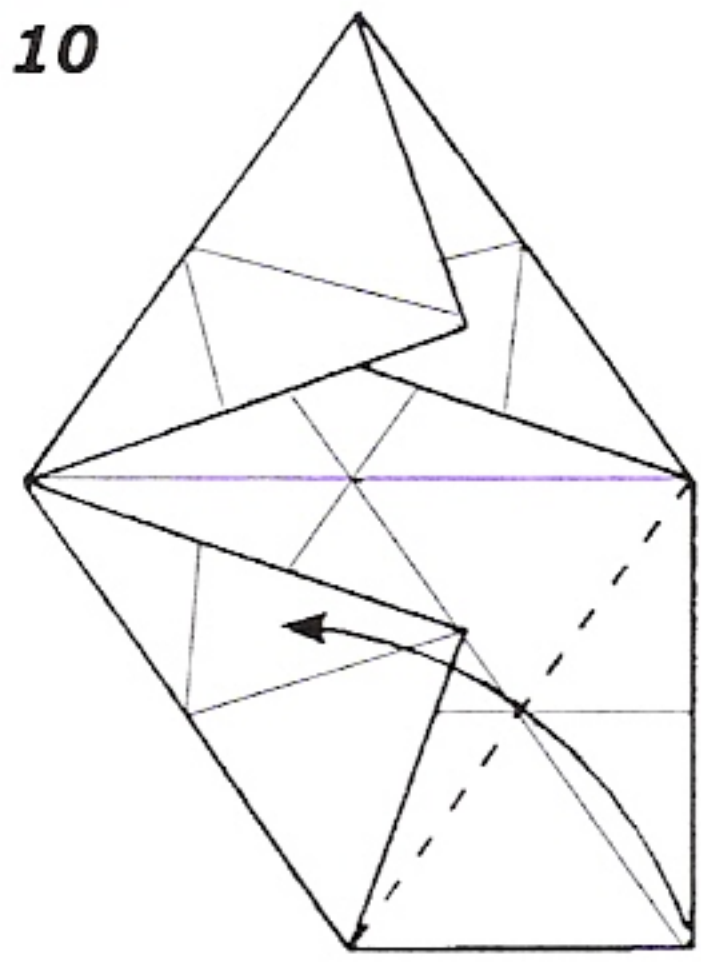
***Anel rotativo de
tetraedros rômnicos***

Anel rotativo de tetraedros rômnicos

Apesar do seu nome exacto, mas pouco inspirador, este modelo é simples de dobrar e montar e o resultado é um brinquedo atraente.

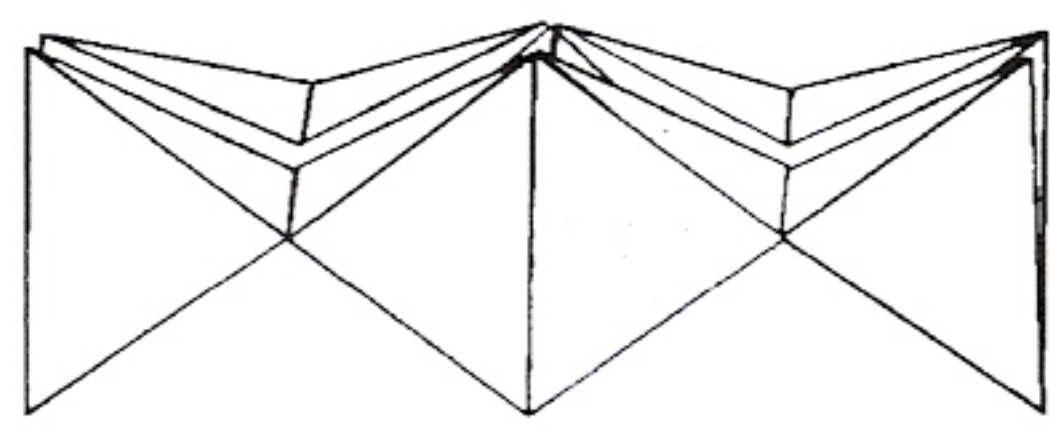
São necessárias quatro folhas de papel A4.





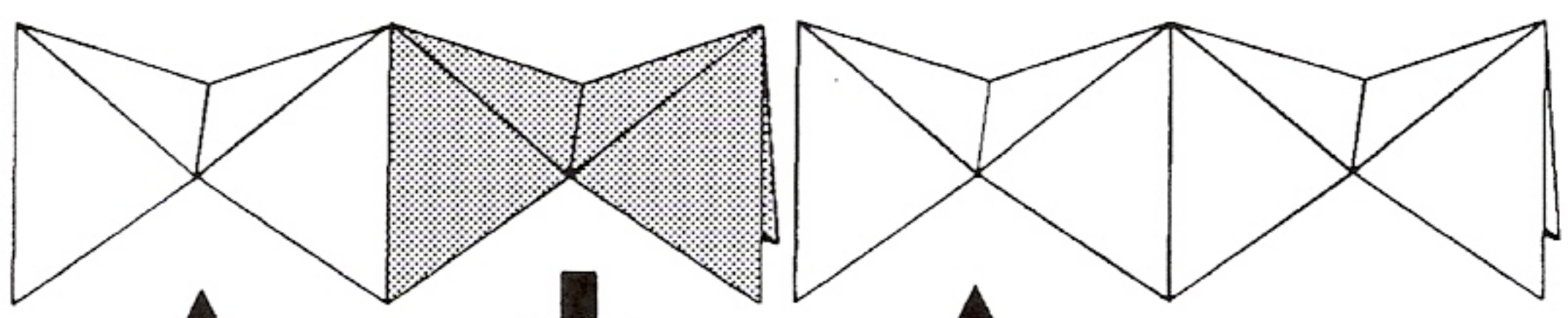
Junte à frente cada par de círculos.

13 Se não se tiver esquecido de virar a folha entre os passos 2.e 3, o modelo tomará uma forma tridimensional, como esta:

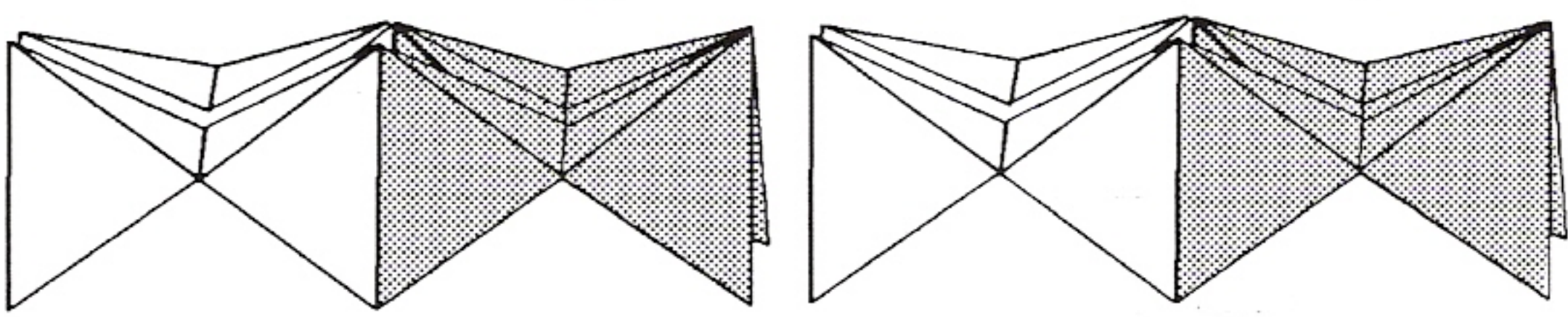


Faça os quatro módulos.

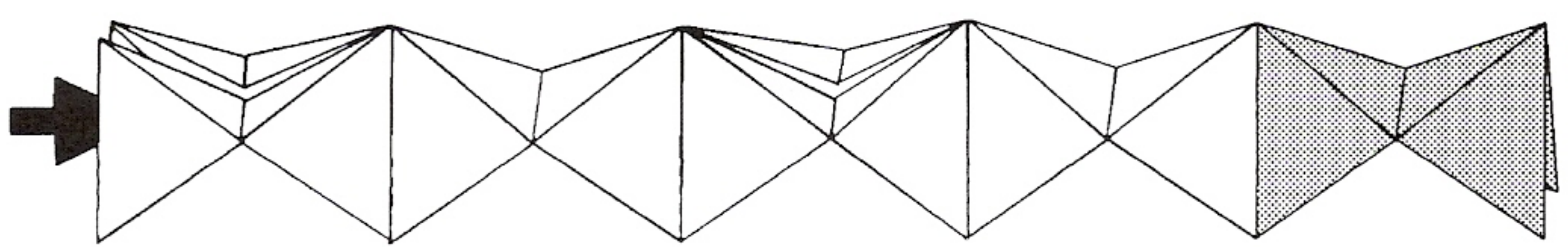
14 Junte os quatro módulos como indica a figura.



As metades sombreadas são medidas nas metades brancas dos outros módulos.



15 Encaracole o modelo e insira a parte sombreada do módulo da direita na extremidade aberta do modelo da esquerda.



Feito isto, o anel rotativo está completo.

Os tetraedros rodam através do centro do anel. Depois de algumas rotações, as dobras ajustar-se-ão e o anel rodará sem esforço.

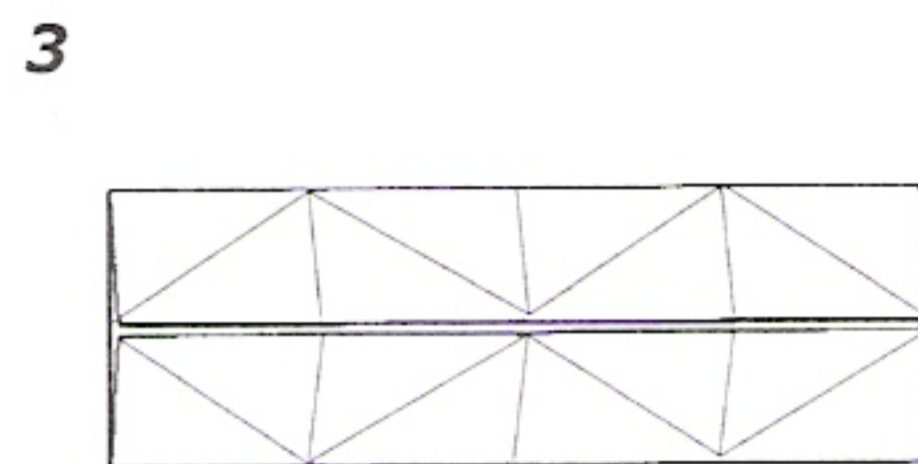
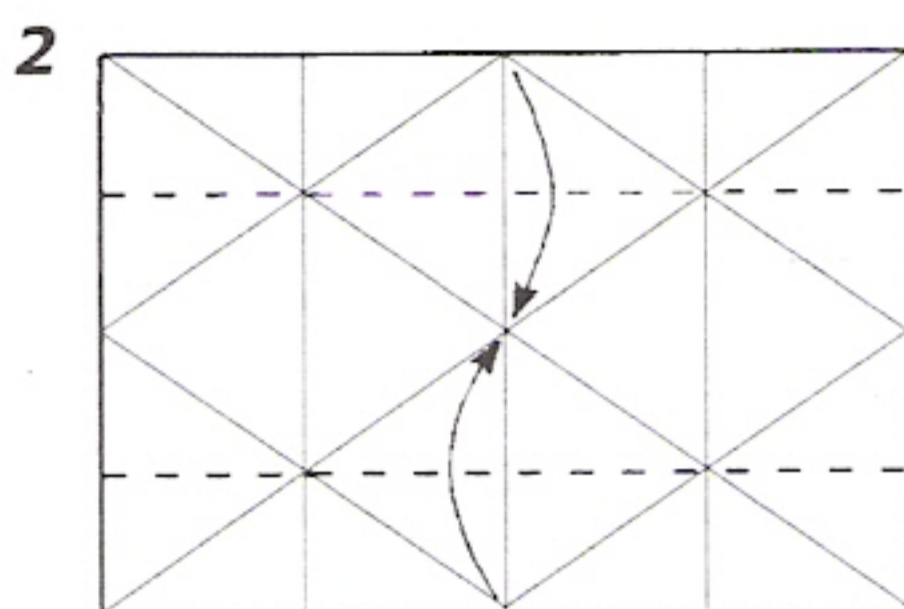
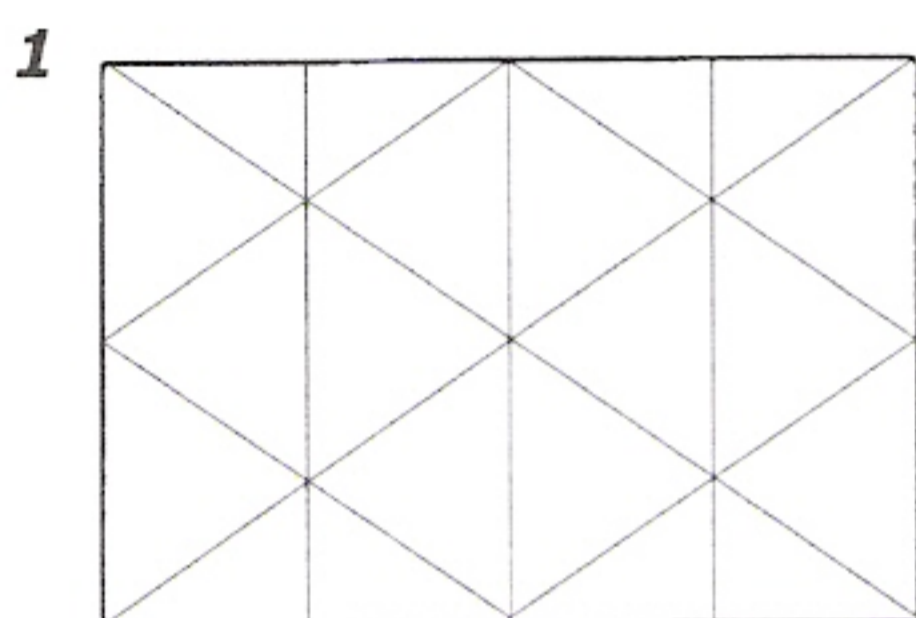
Dodecaedro rômboico decorativo

Este modelo é um belo exemplo de uma forma elegante, mas invulgar, que ocorre naturalmente quando começamos a brincar com as possibilidades inerentes aos origami modulares. Há muitas maneiras de o fazer, mas esta é a mais simples.

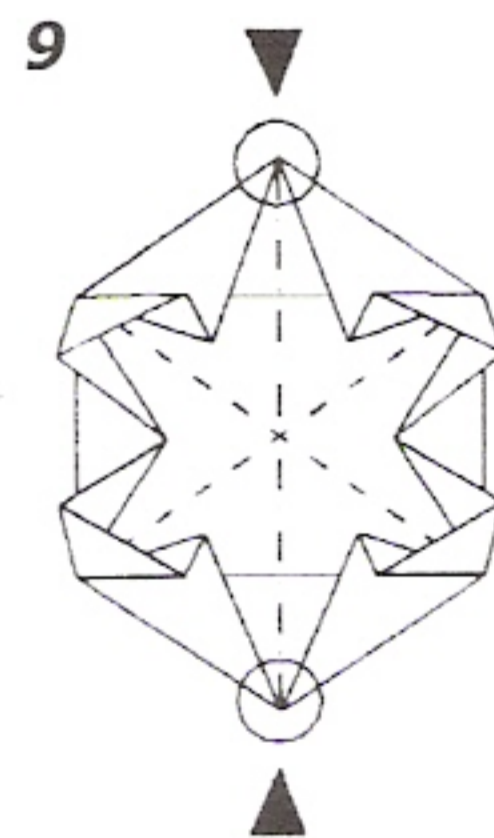
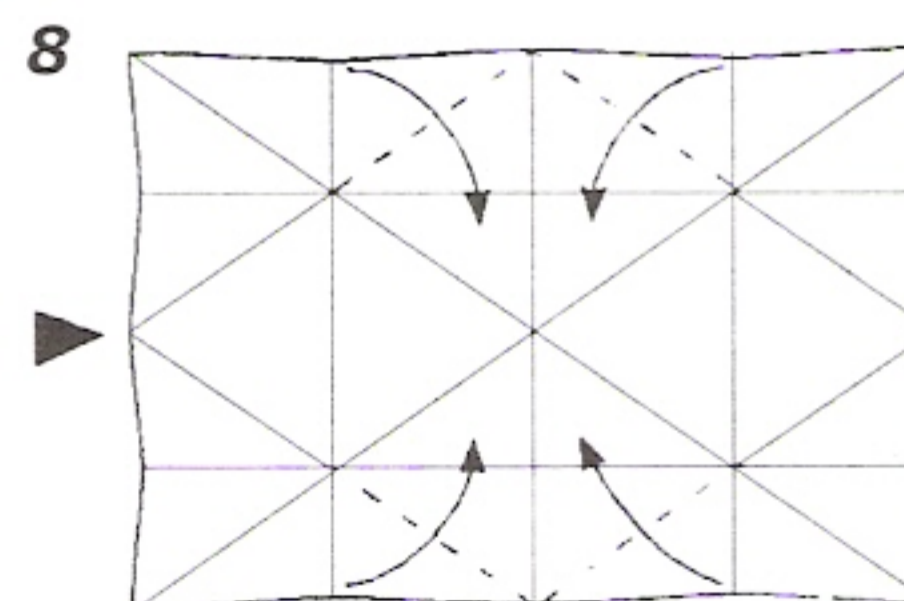
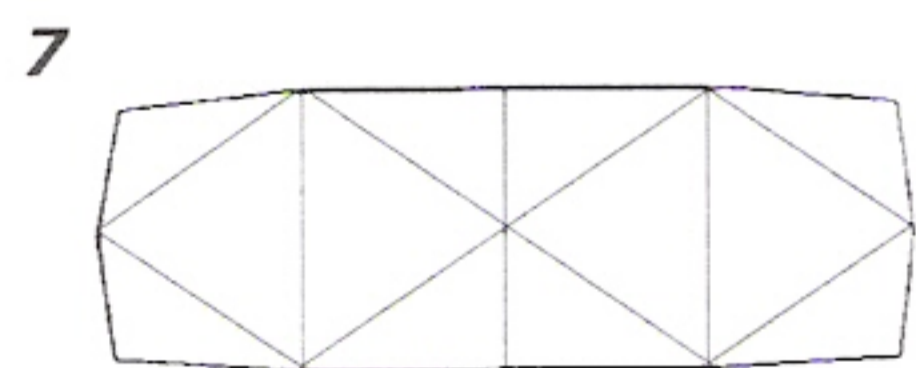
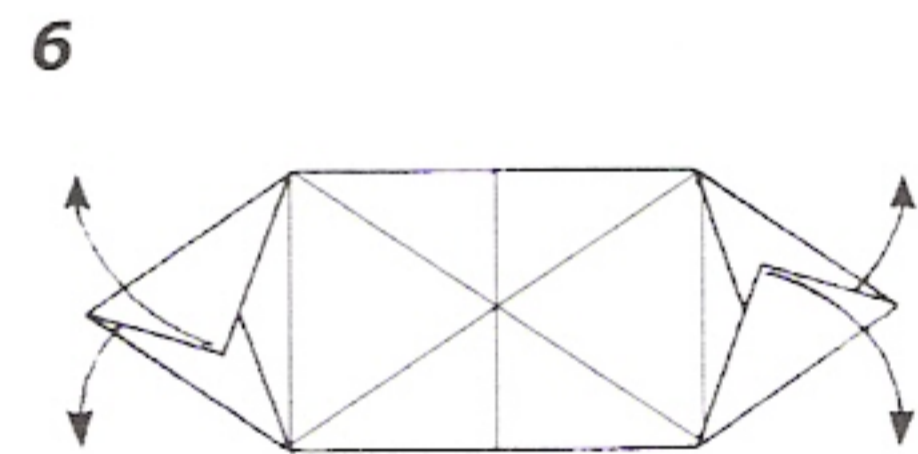
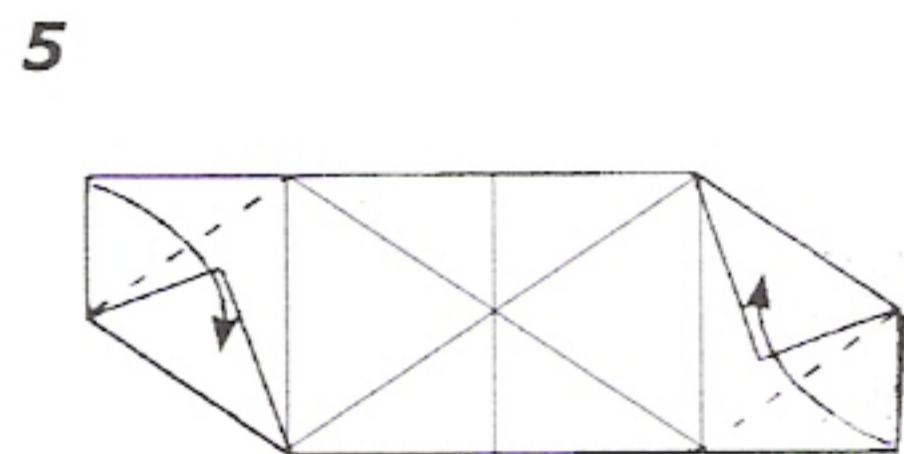
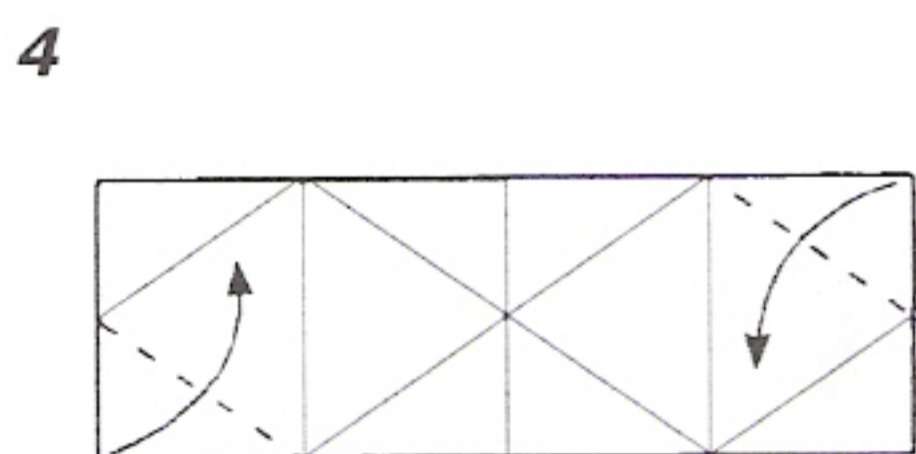
São necessárias seis folhas de papel A4.

Os seis módulos rodeiam um cubo esquelético feito com uma folha de papel A4.

Comece por dobrar cada folha até ao passo 11 do anel rotativo de tetraedros rômnicos.



Vire a folha.



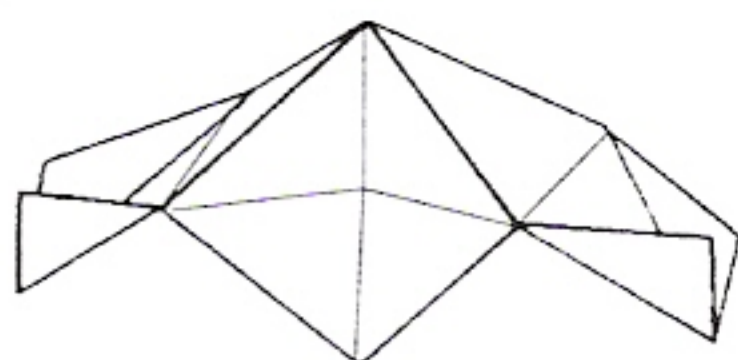
Vire a folha e abra-a por completo.

Deixe que o papel se mantenha ligeiramente tridimensional.

Junte os dois pontos marcados com um círculo, de forma a que o centro se afunde.

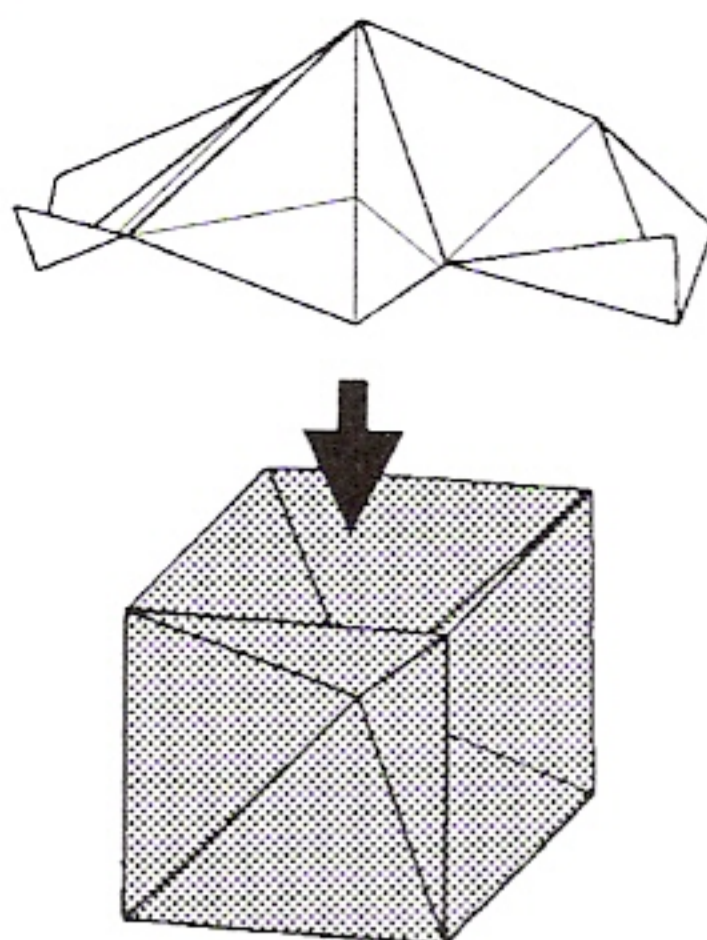
Vire a folha.

10

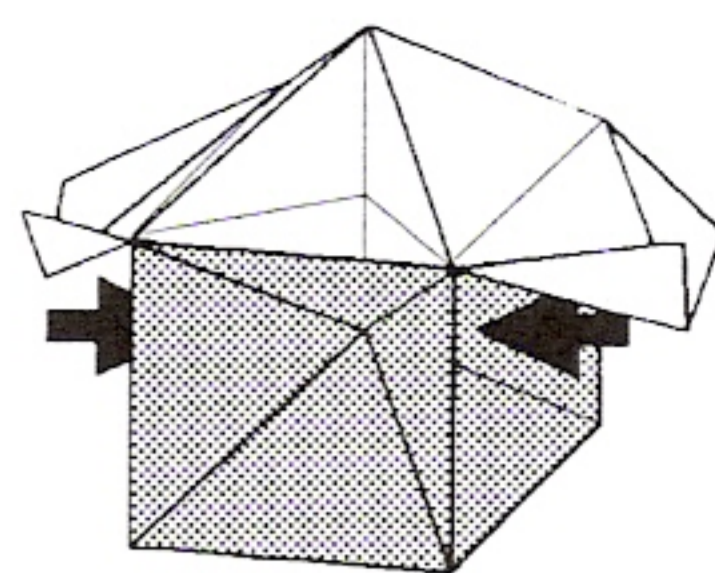


O módulo terminado.
Faça os seis módulos.

11

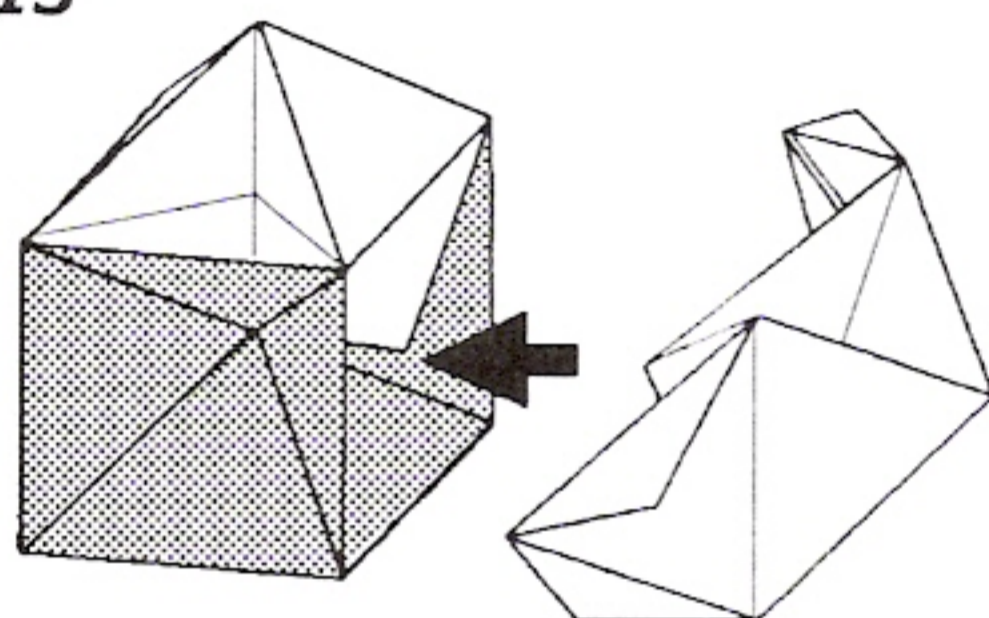


12



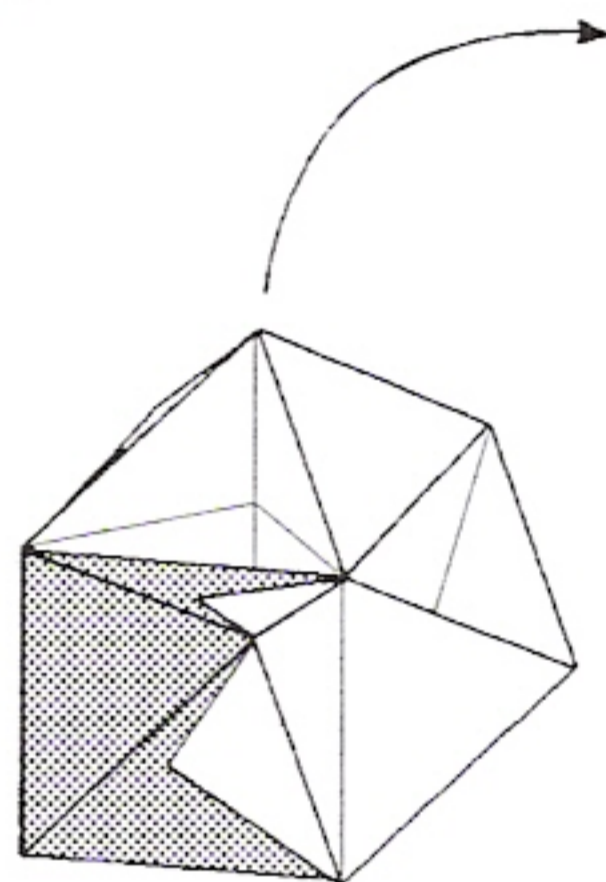
Insira as abas dentro
do modelo.

13



O corpo do segundo módulo
mantém as abas do primeiro
no sítio.

14



Levante este módulo para
adicionar o terceiro e quarto
módulos à frente e atrás,
e volte a baixá-lo para prender
as abas superiores no sítio.

Adicione o quinto módulo.

Descobrirá que é impossível adicionar o último módulo desta forma porque o módulo que precisa de levantar para inserir a última aba está bem preso pelos outros.

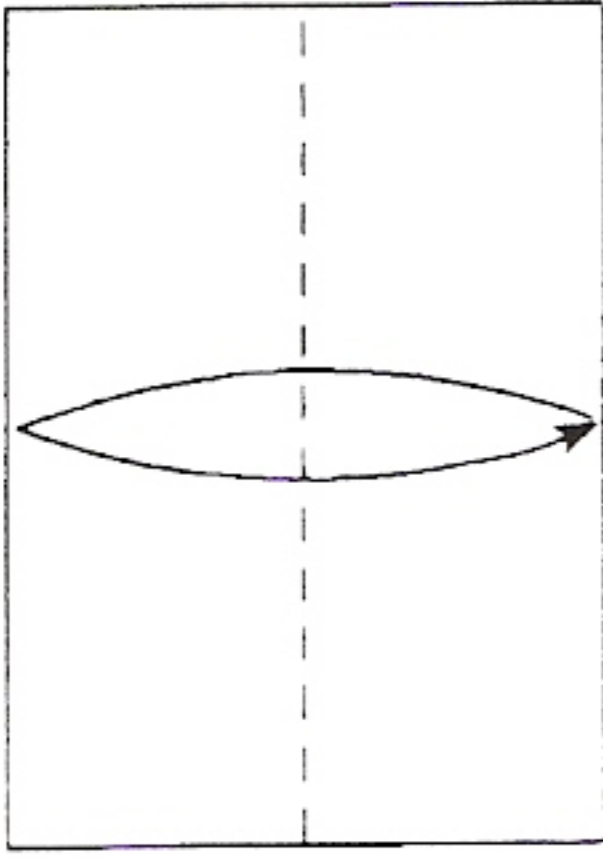
Felizmente, pode completar o modelo enrolando a aba e inserindo-a delicadamente na fenda entre o cubo esquelético subjacente e os módulos exteriores. Terá muita mais facilidade em fazer isto se começar a inserir a aba o mais próximo possível dos cantos do cubo subjacente.

Estrela rômbrica

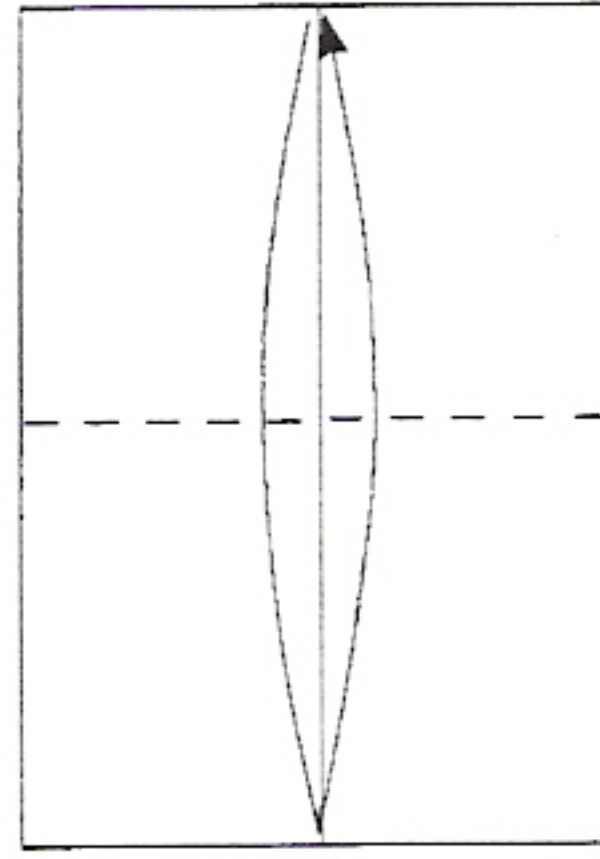
Matematicamente, e também na forma como é construído, este modelo atraente é um dodecaedro rômbrico estrelado.

Comece por fazer módulos para o dodecaedro rômbrico já descrito neste livro. São necessárias mais doze folhas de papel A4 para as unidades adicionais.

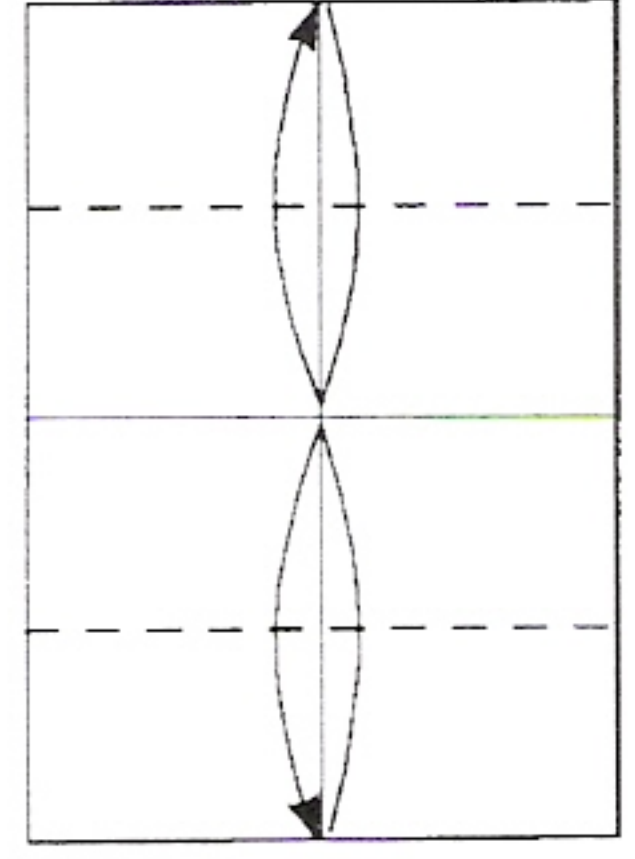
1



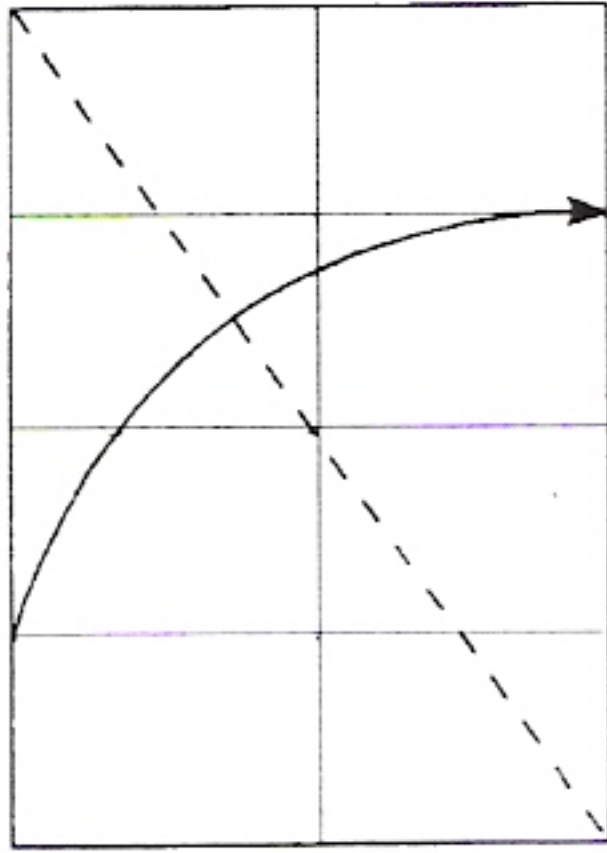
2



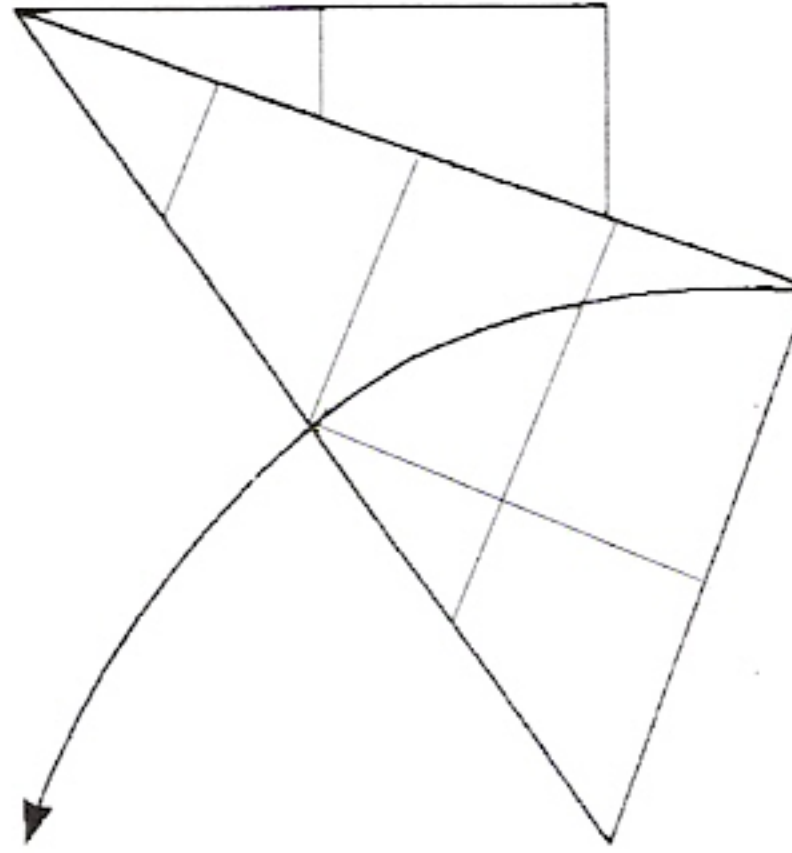
3



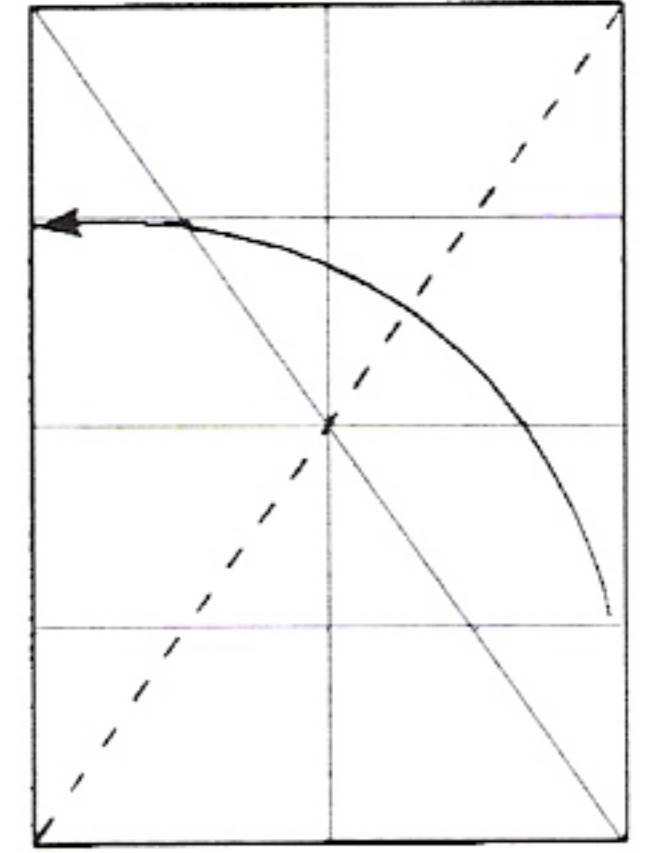
4



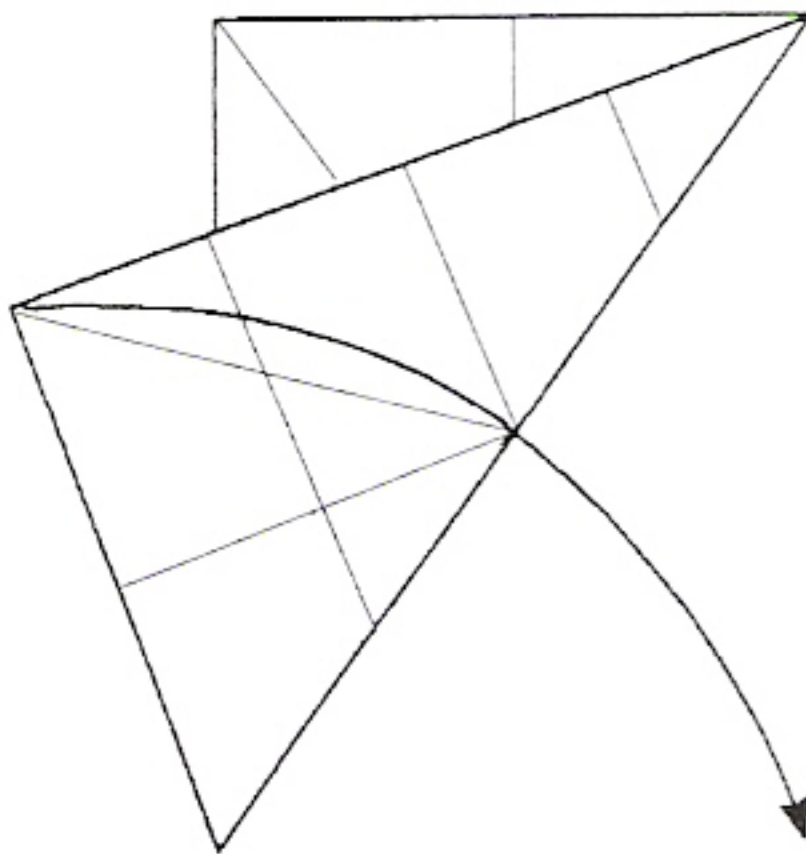
5



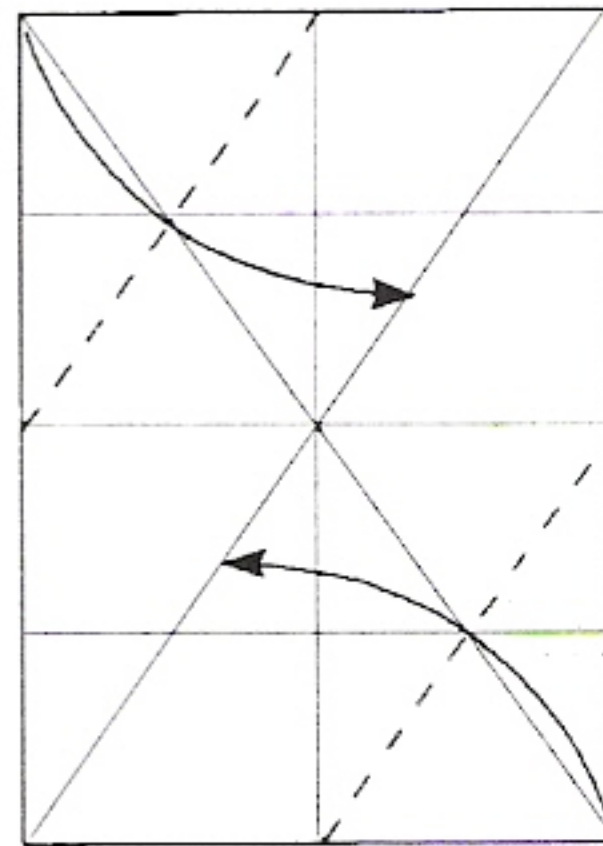
6



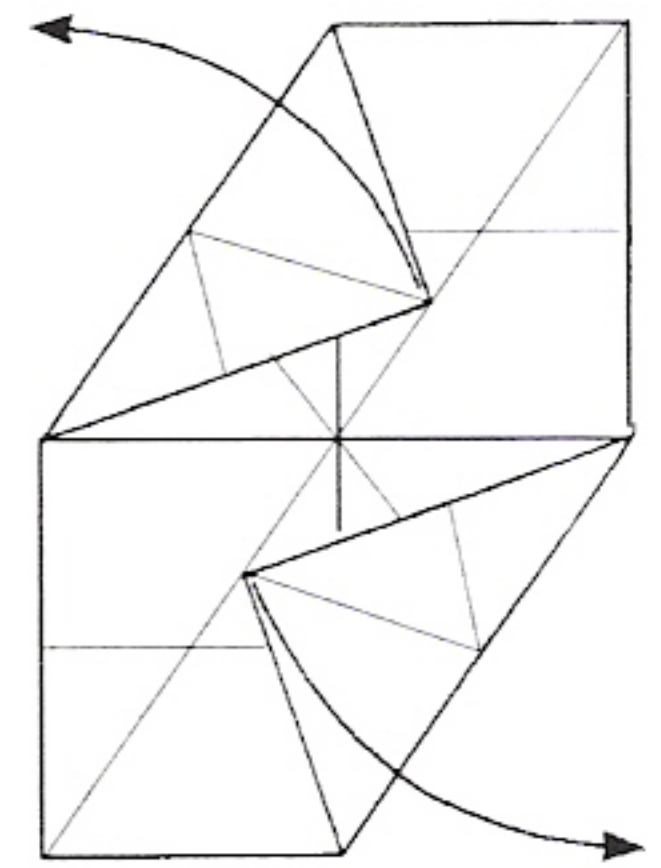
7

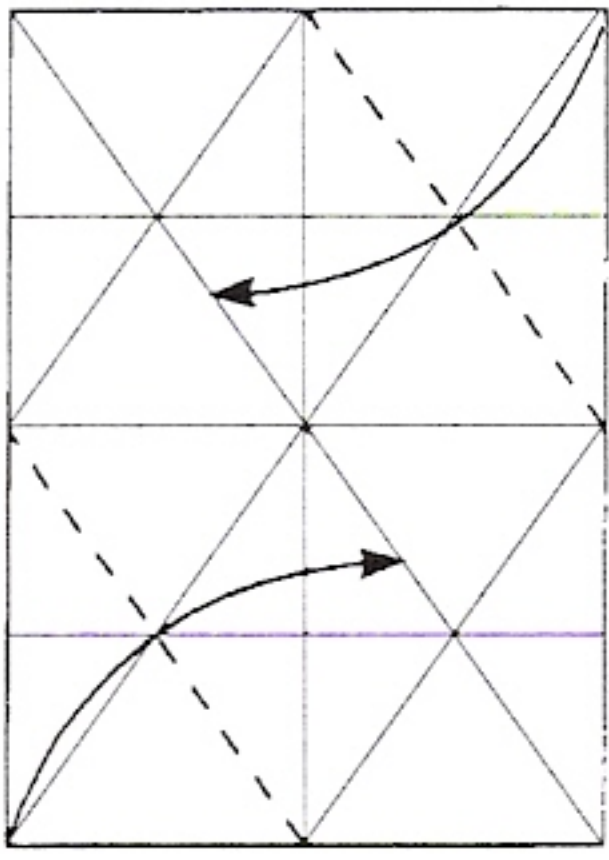
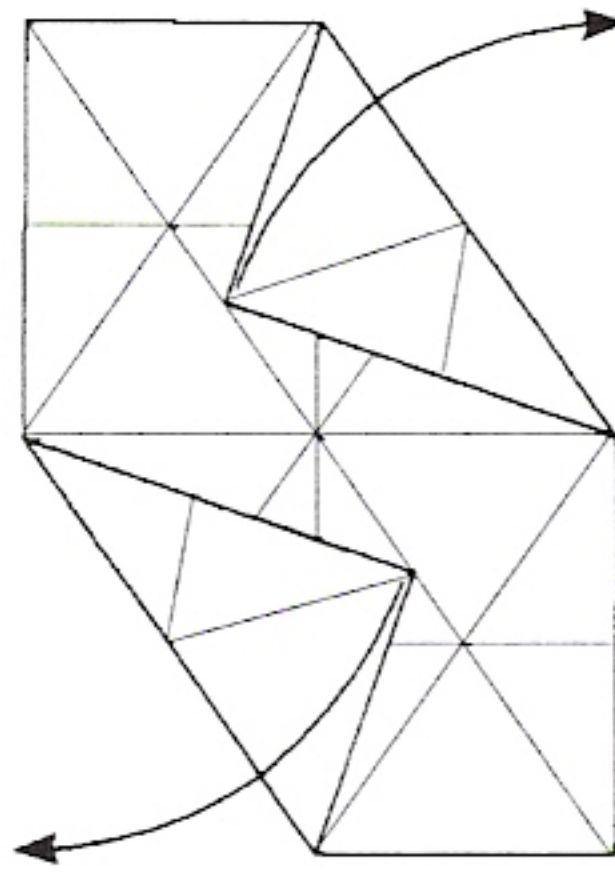
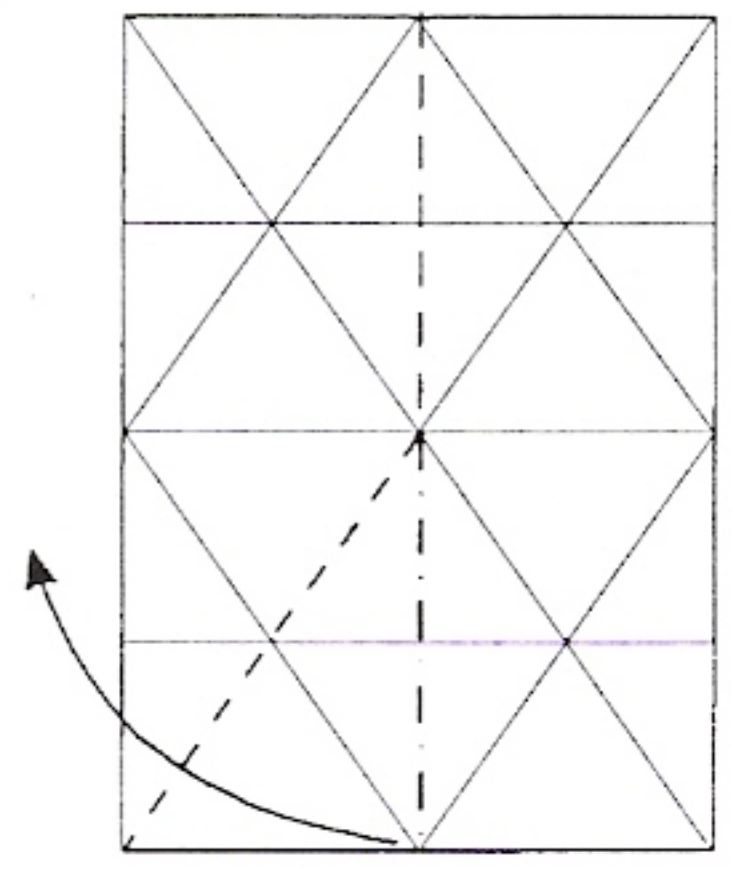


8

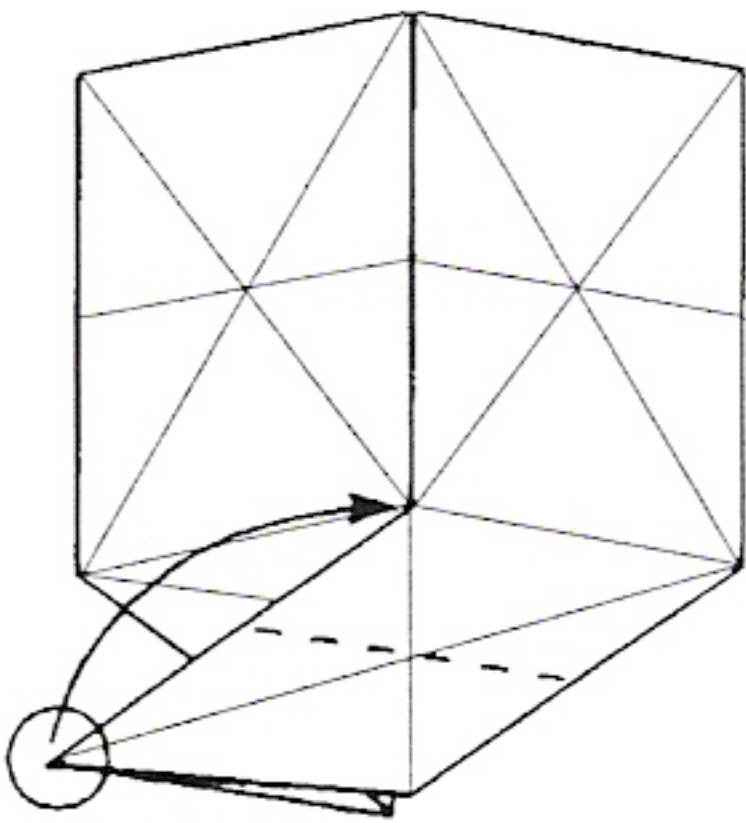
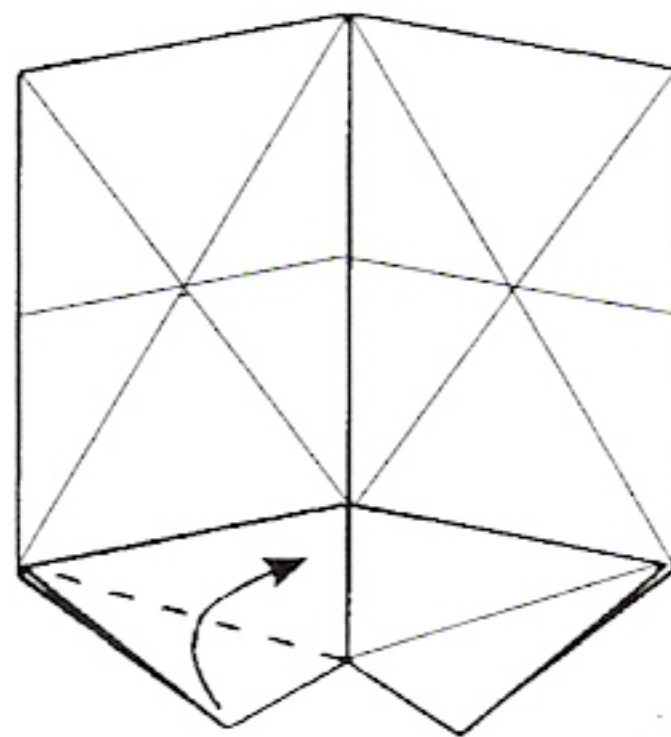


9



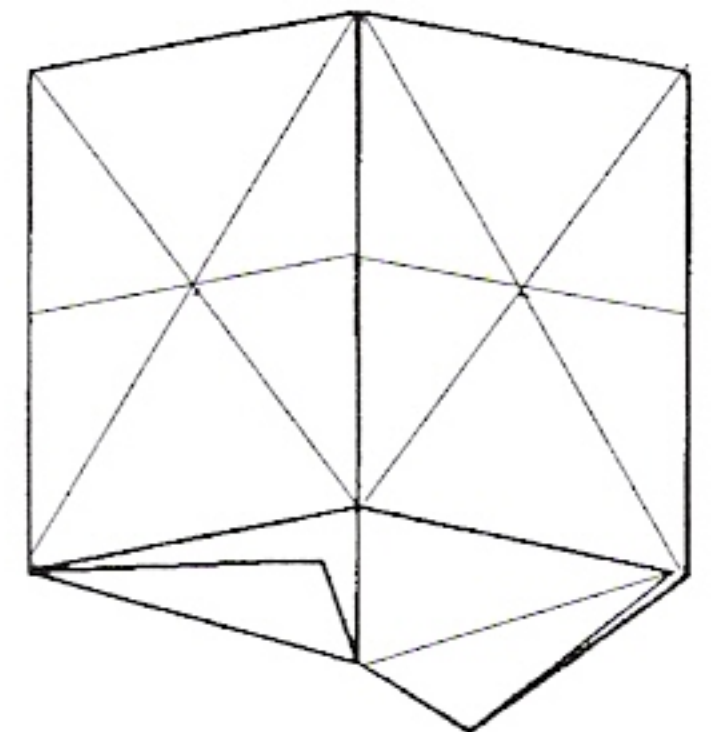
10**11****12**

Quando fizer esta dobra, o modelo tornar-se-á tridimensional.

13**14**

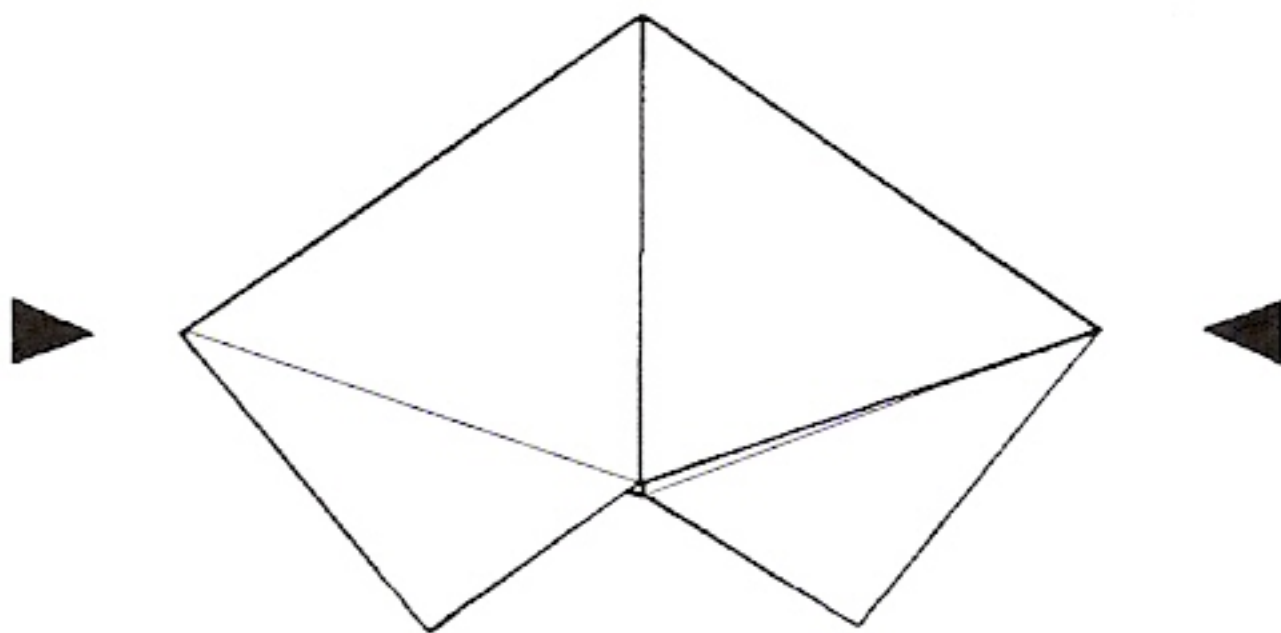
Faça esta dobra apenas na camada superior da folha de papel, certificando-se de que o canto com um círculo fica exactamente no centro do modelo. Ao fazê-lo, a pequena aba escondida por baixo mover-se-á para a esquerda e pode ser achatada como indica a figura 14.

O resultado é o que se apresenta na figura.

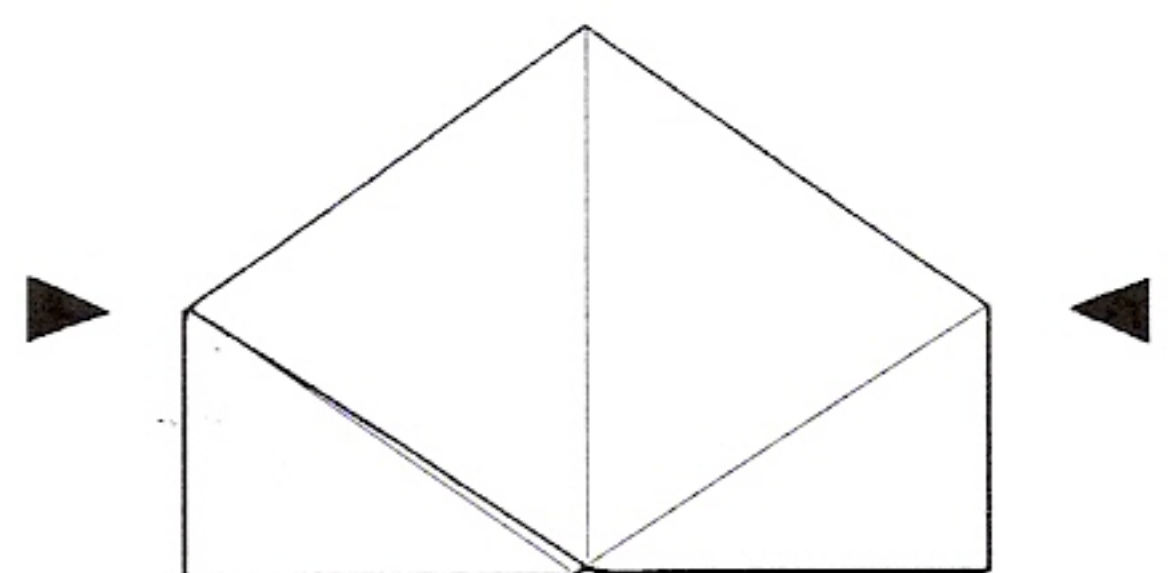
15

Desfaça as últimas dobras, rode o modelo e repita as dobras 12 a 14 na outra extremidade do papel.

Volte a dobrar também a primeira extremidade.

16

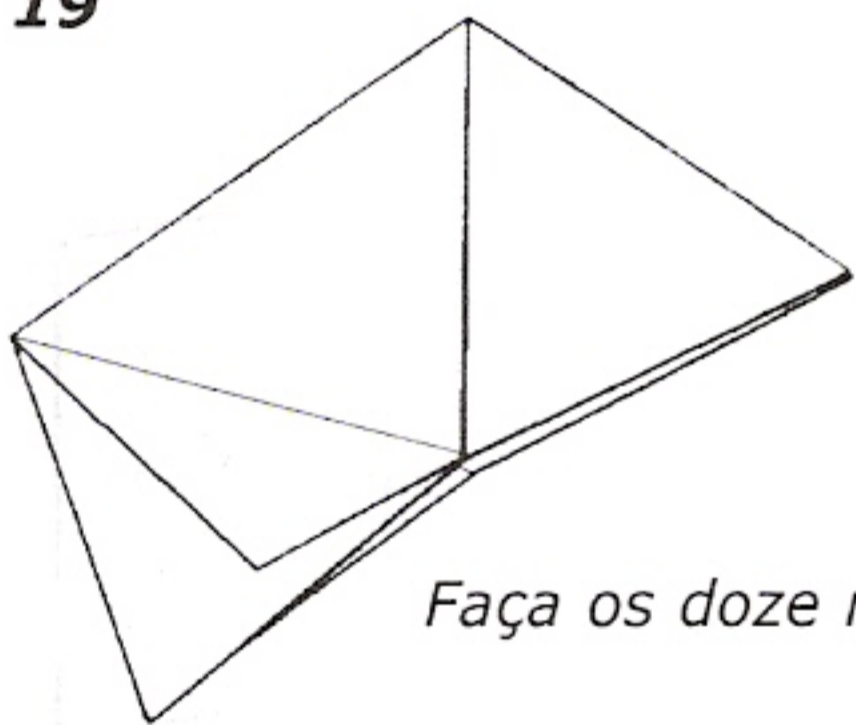
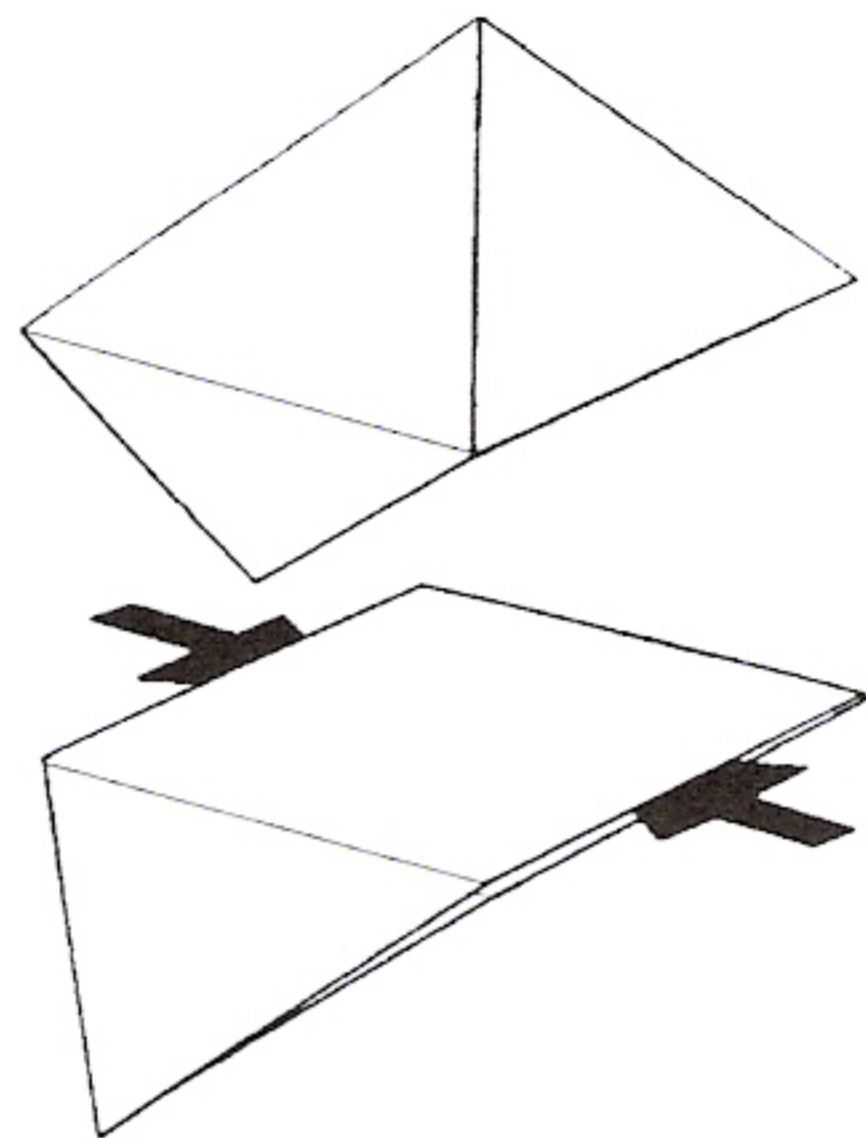
Vinque com firmeza todas as orlas exteriores e aplique pressão em ambos os lados. O módulo abrir-se-á em forma de pirâmide e achatar-se-á no sentido contrário.

17

Vinque firmemente as duas orlas superiores e abra o modelo de forma a tornar-se de novo uma pirâmide rômbrica.

Cada pirâmide rômbrica é encaixada num dos módulos do dodecaedro rômbrico da forma que se apresenta.

As duas abas escondidas dentro da pirâmide são inseridas nas cavidades do módulo-base como indica a figura.



A partir daqui, o modelo é montado exactamente da mesma forma que o dodecaedro rômbrico.

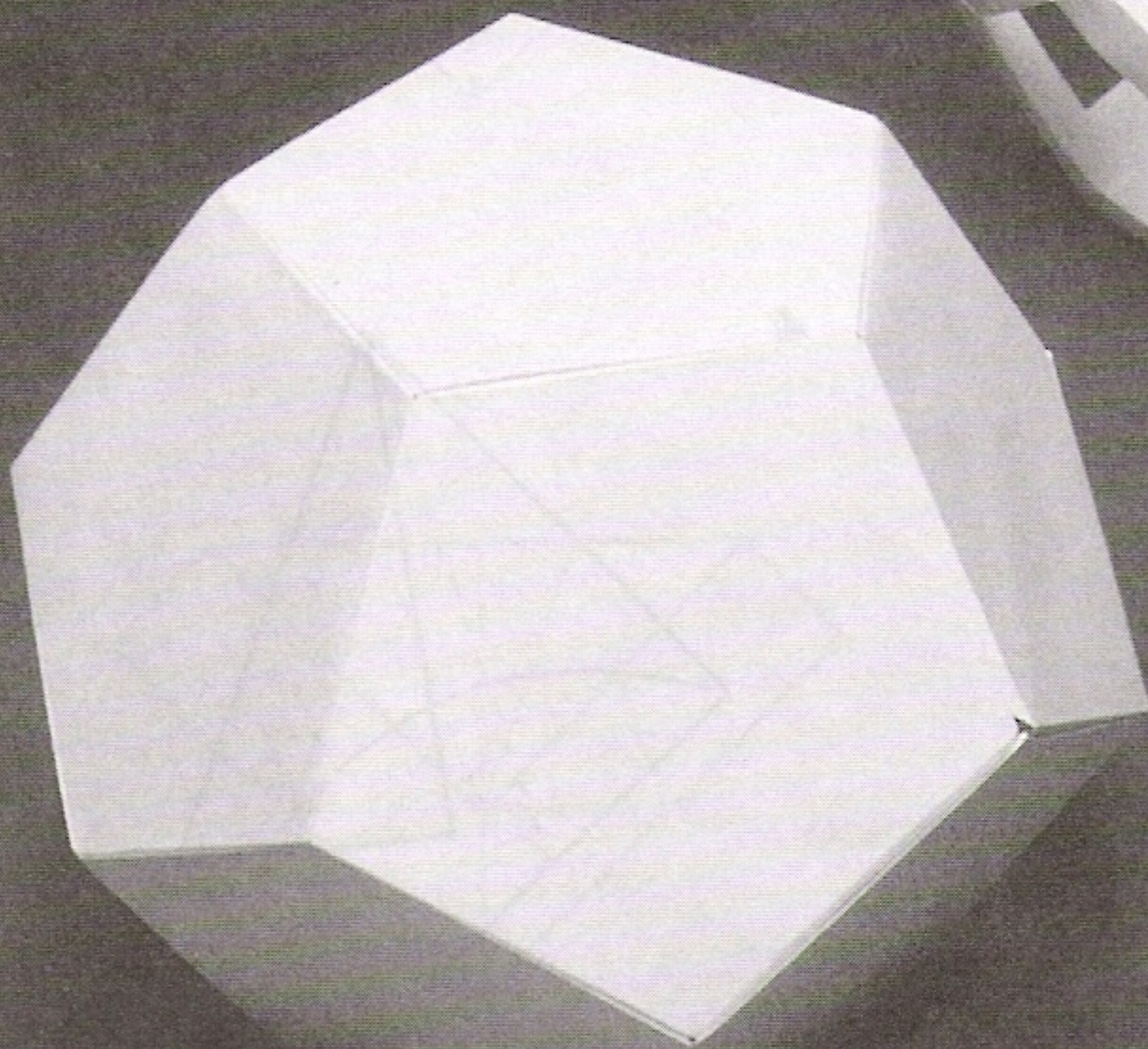
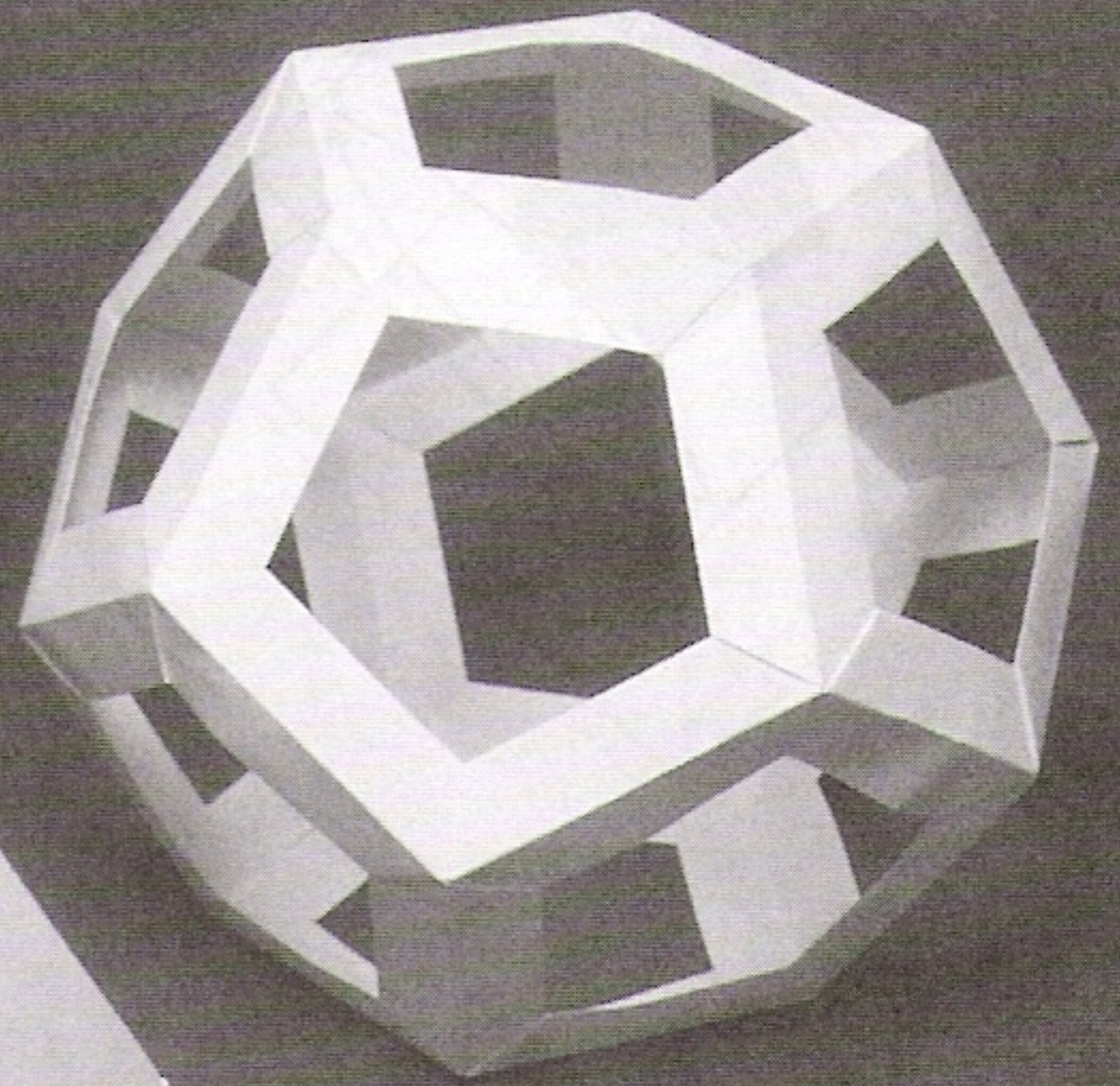
Faça os doze módulos.

Como alternativa, é possível adicionar as pirâmides aos módulos-base, depois de terem sido montados, de maneira a formarem o dodecaedro rômbrico. Neste caso, se começar por adicionar apenas quatro pirâmides numa linha recta qualquer, em torno do dodecaedro, o modelo transforma-se primeiramente num octaedro rômbrico.

Dodecaedro

Dodecaedro em contorno

Dodecaedro em contorno



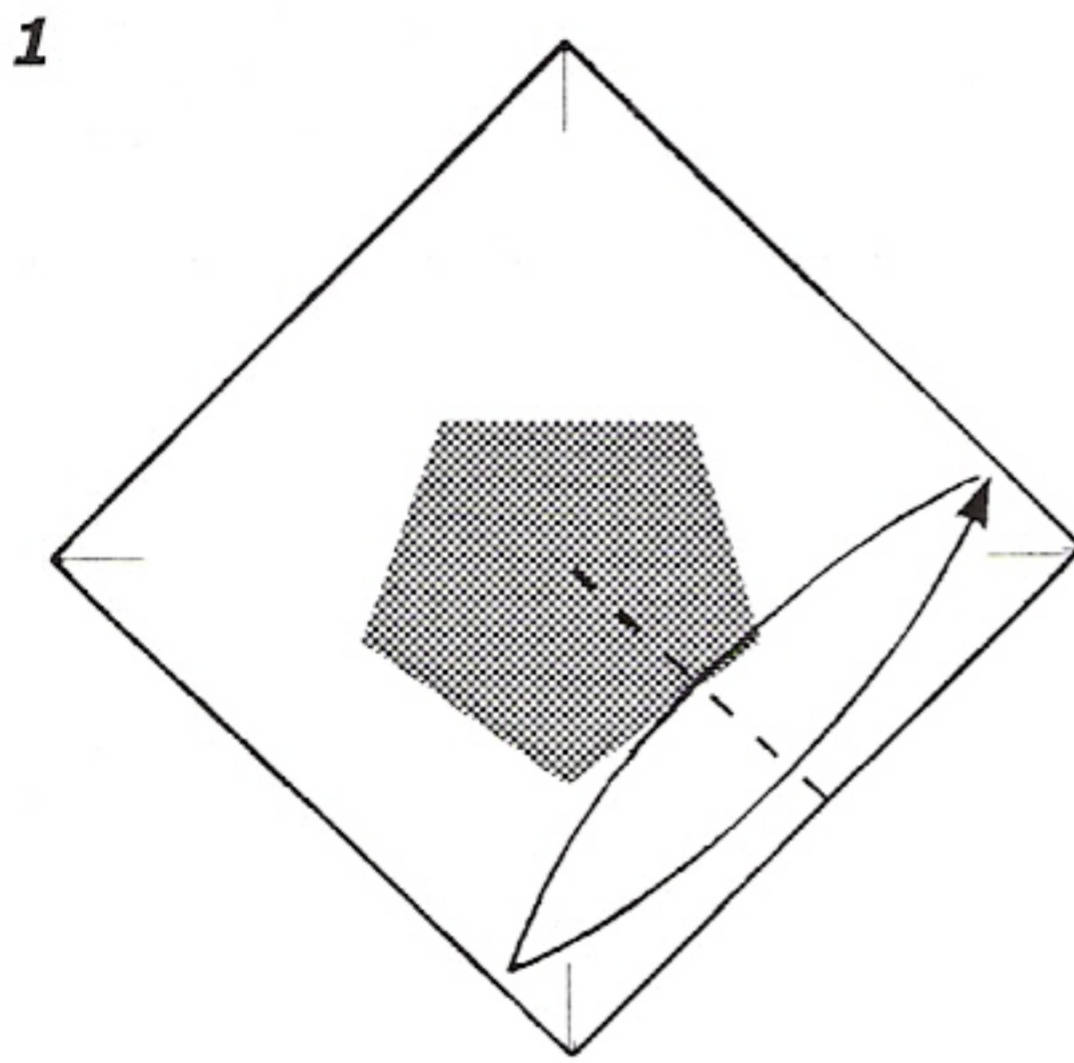
Dodecaedro

Dodecaedro

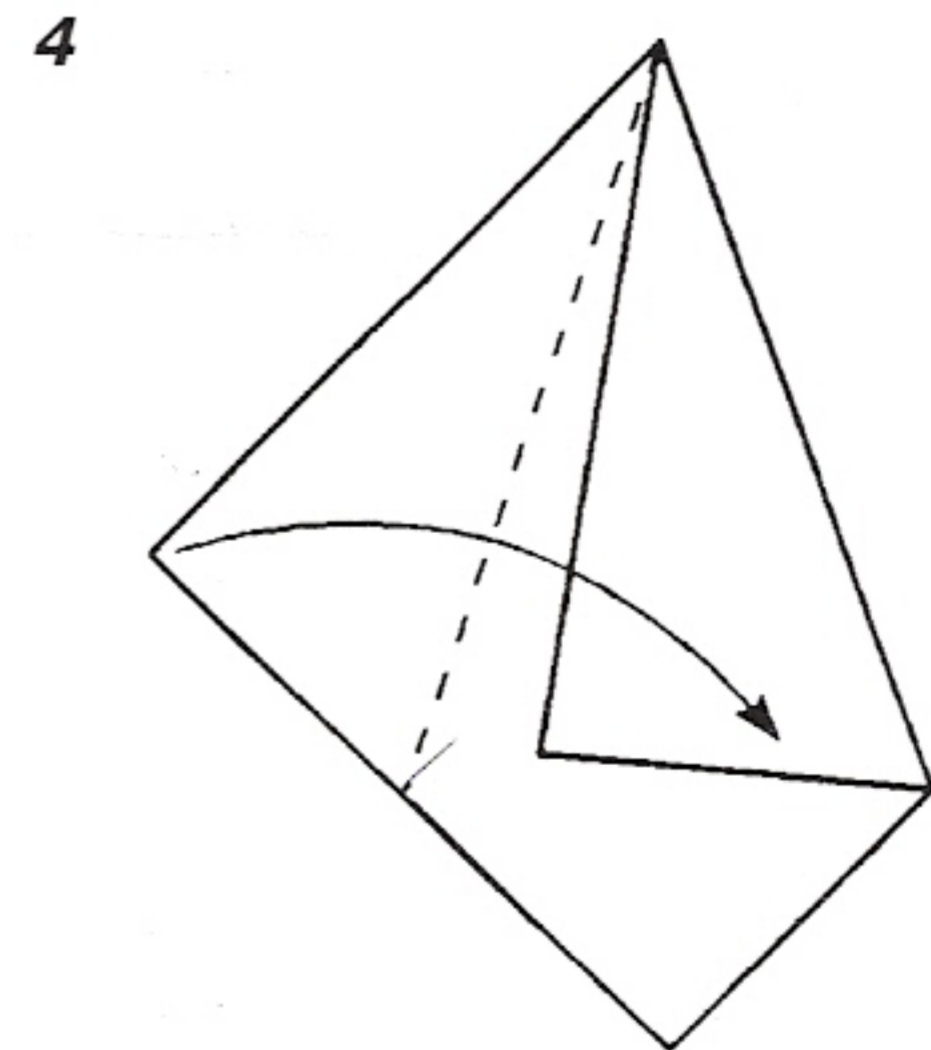
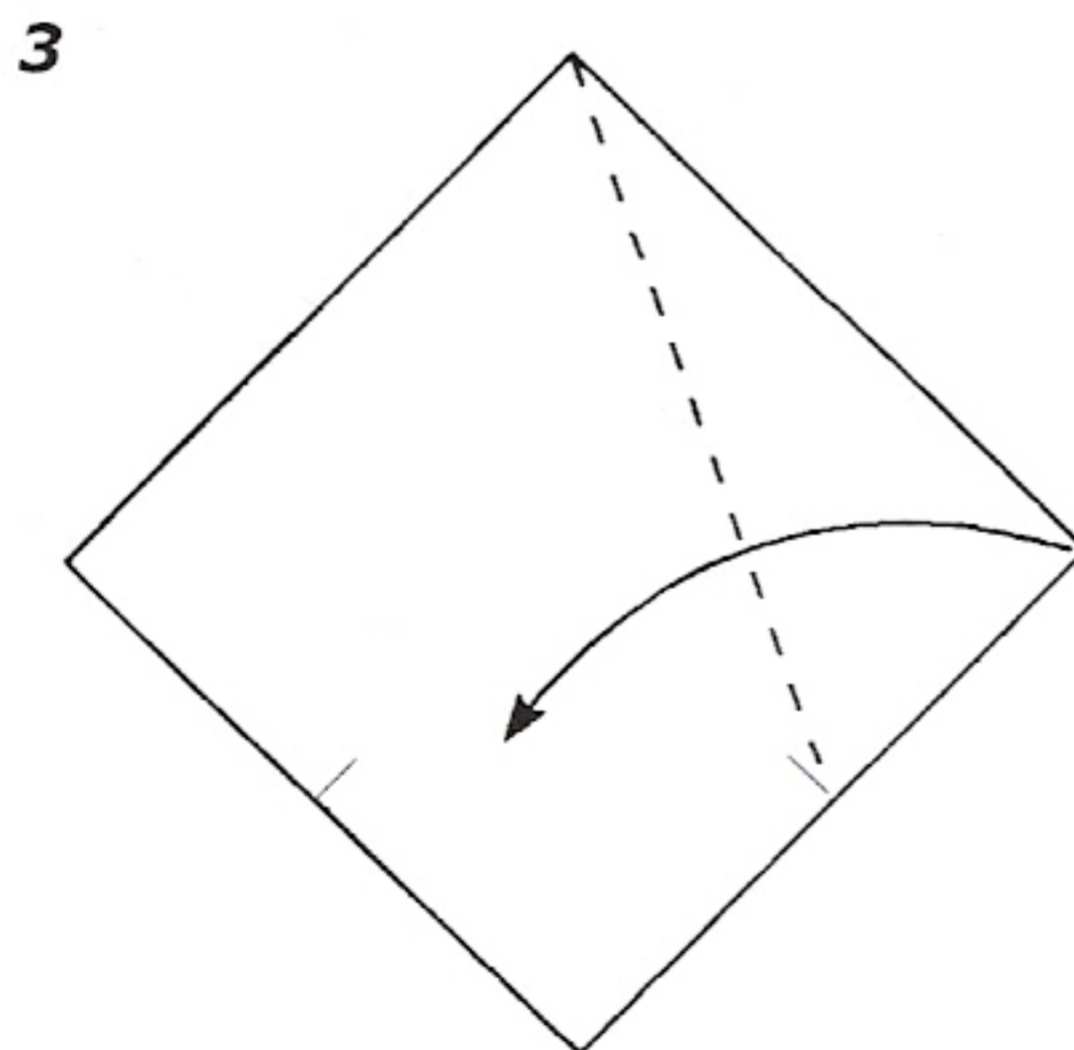
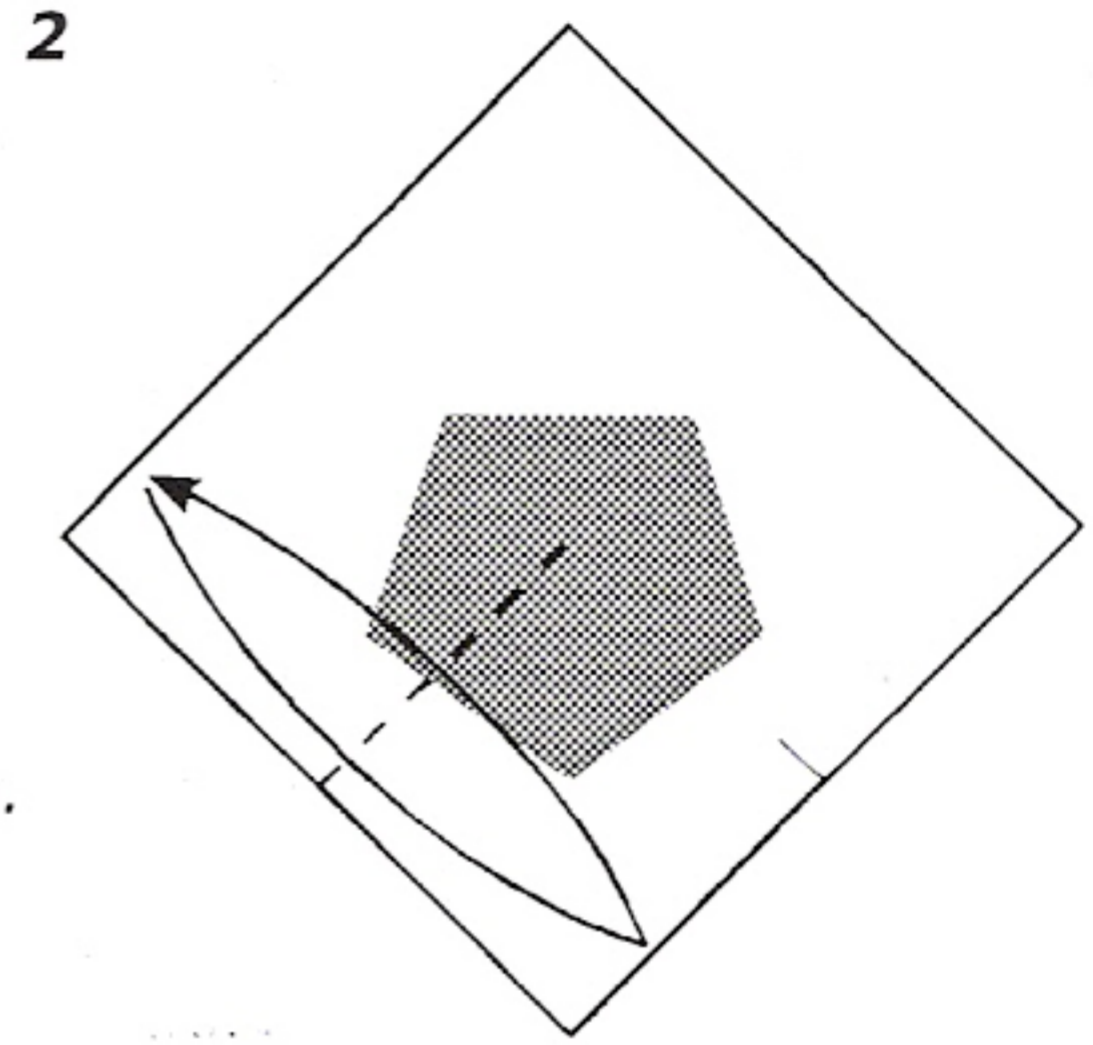
São necessárias doze folhas de papel A4.

Este é, de longe, o modelo mais difícil do livro e, para obter um bom resultado, é essencial uma precisão total.

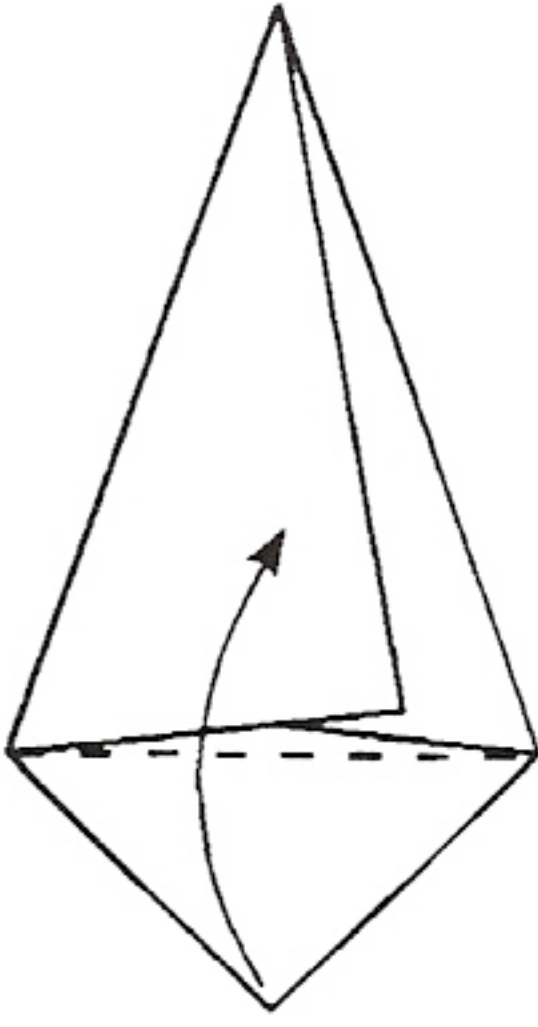
Comece por preparar cada folha até ao passo 5 do cubo.



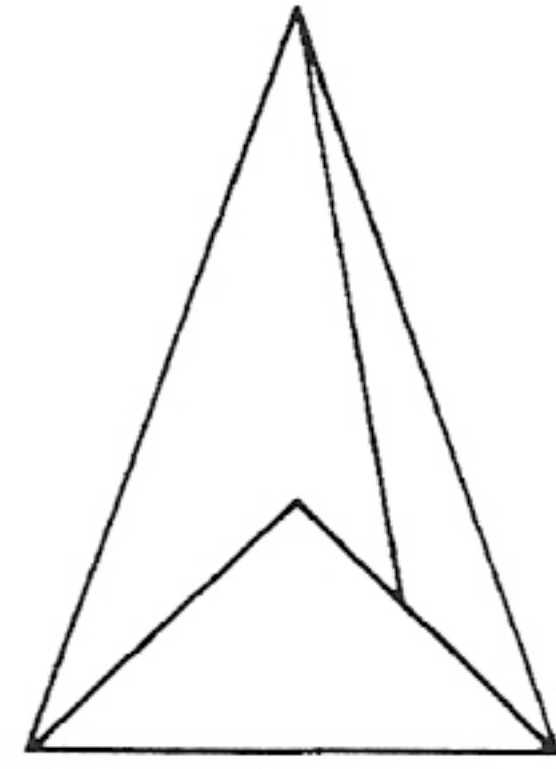
Tente não vincar o papel na área central sombreada.



5

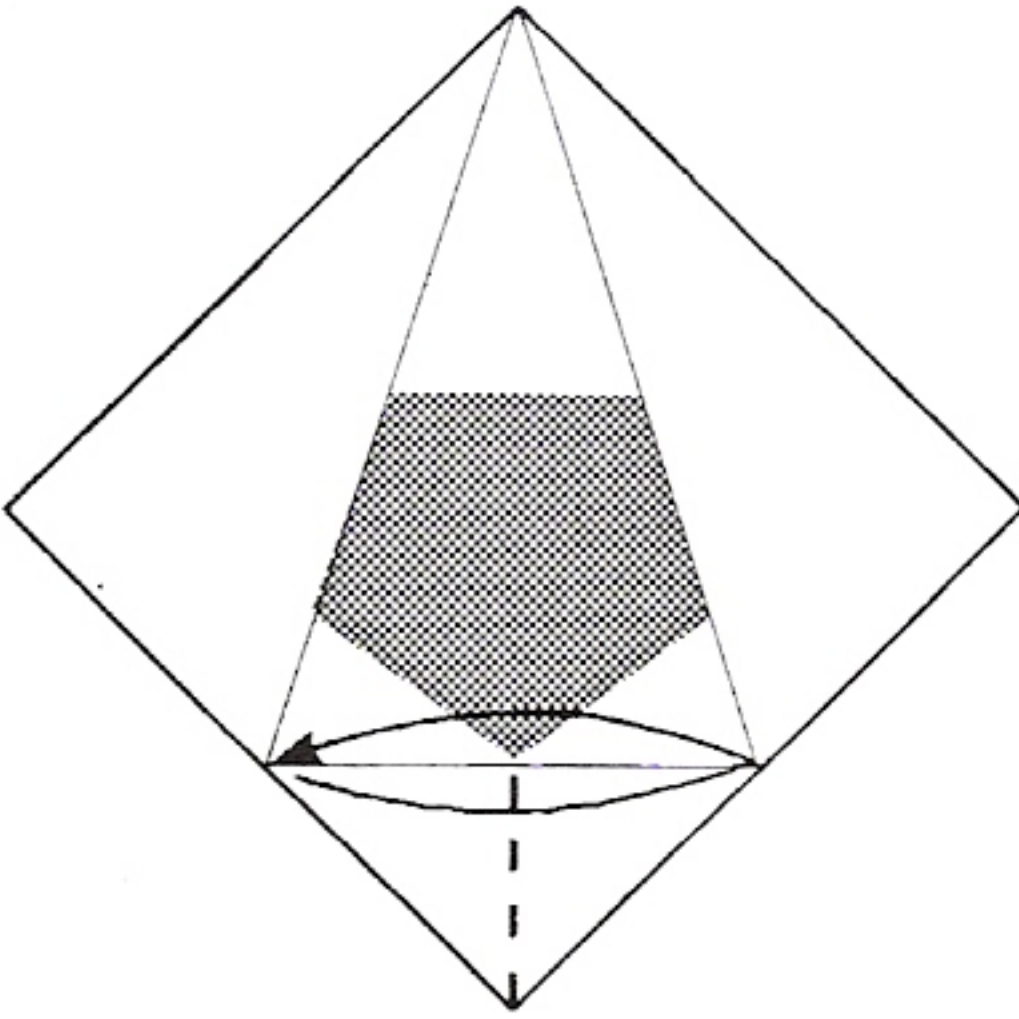


6

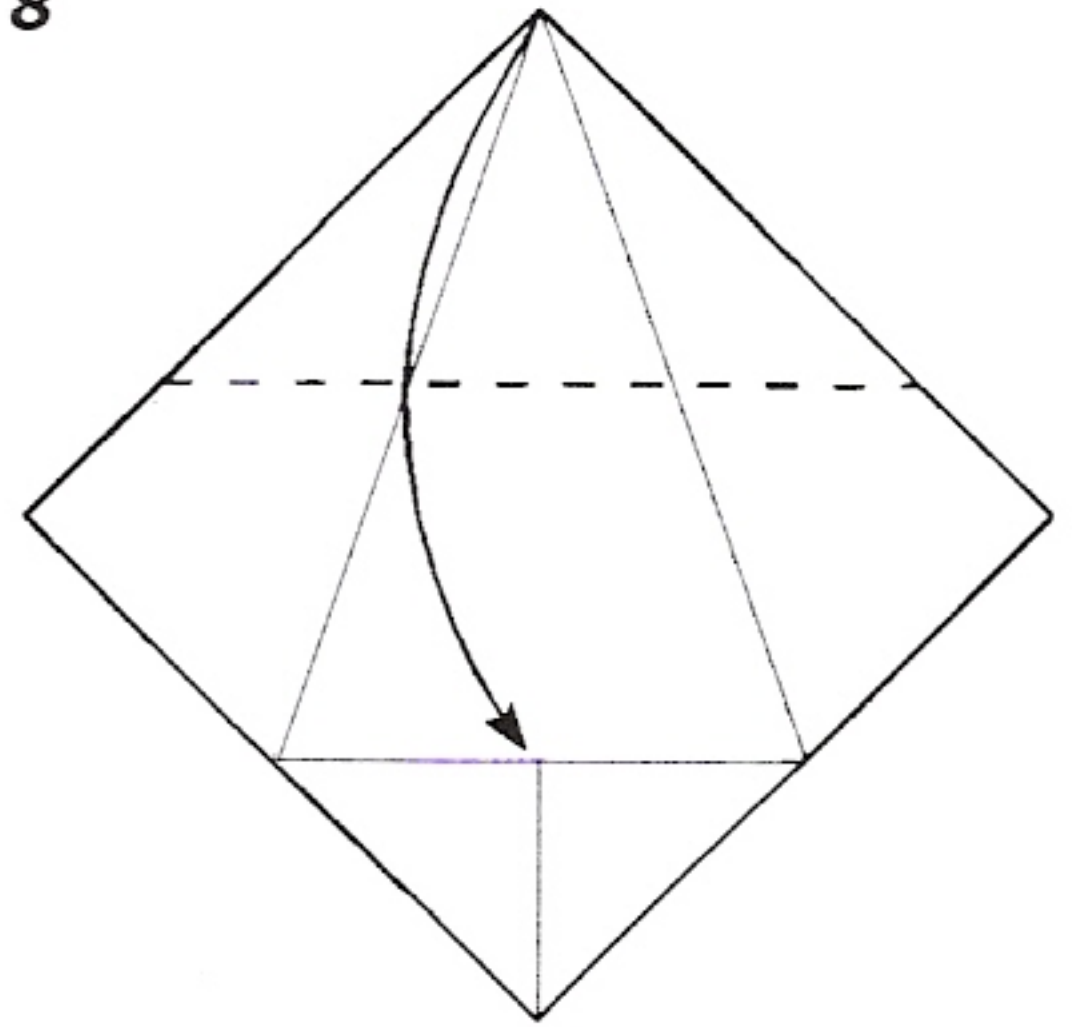


Desdobre.

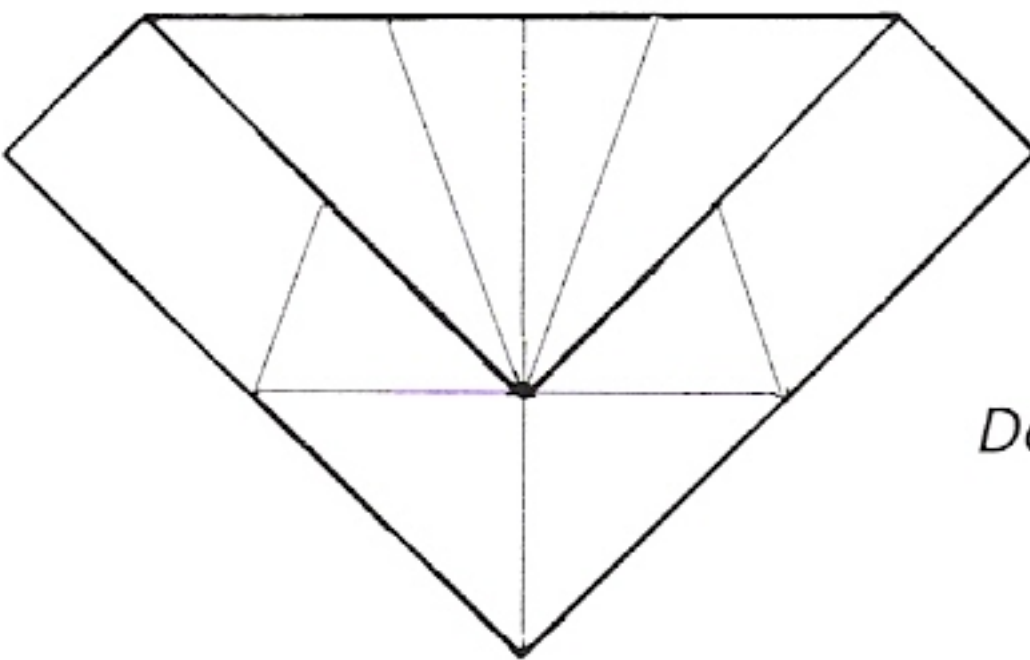
7



8

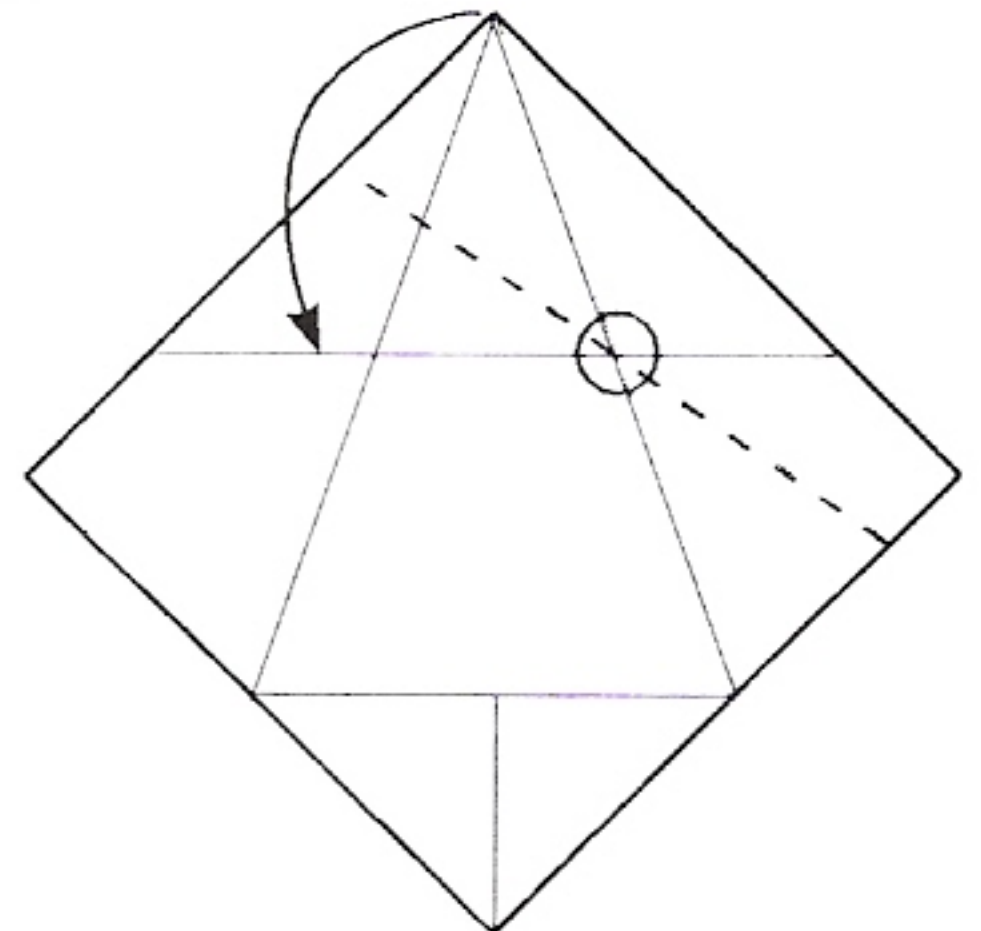


9



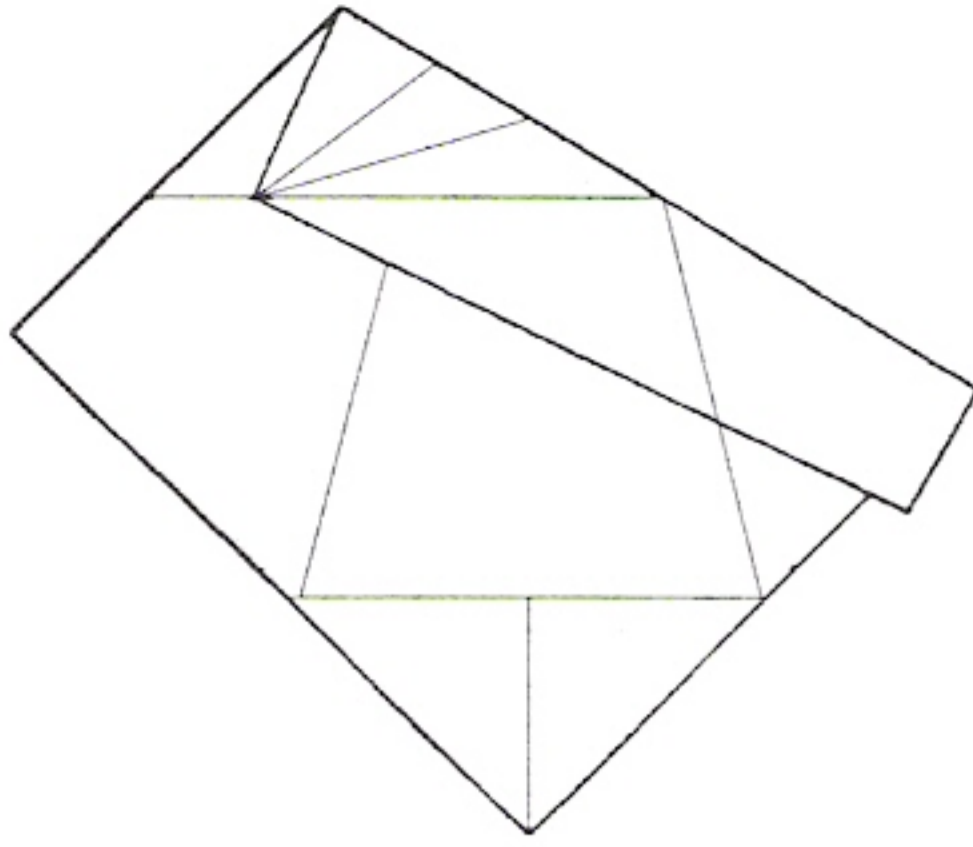
Desdobre.

10



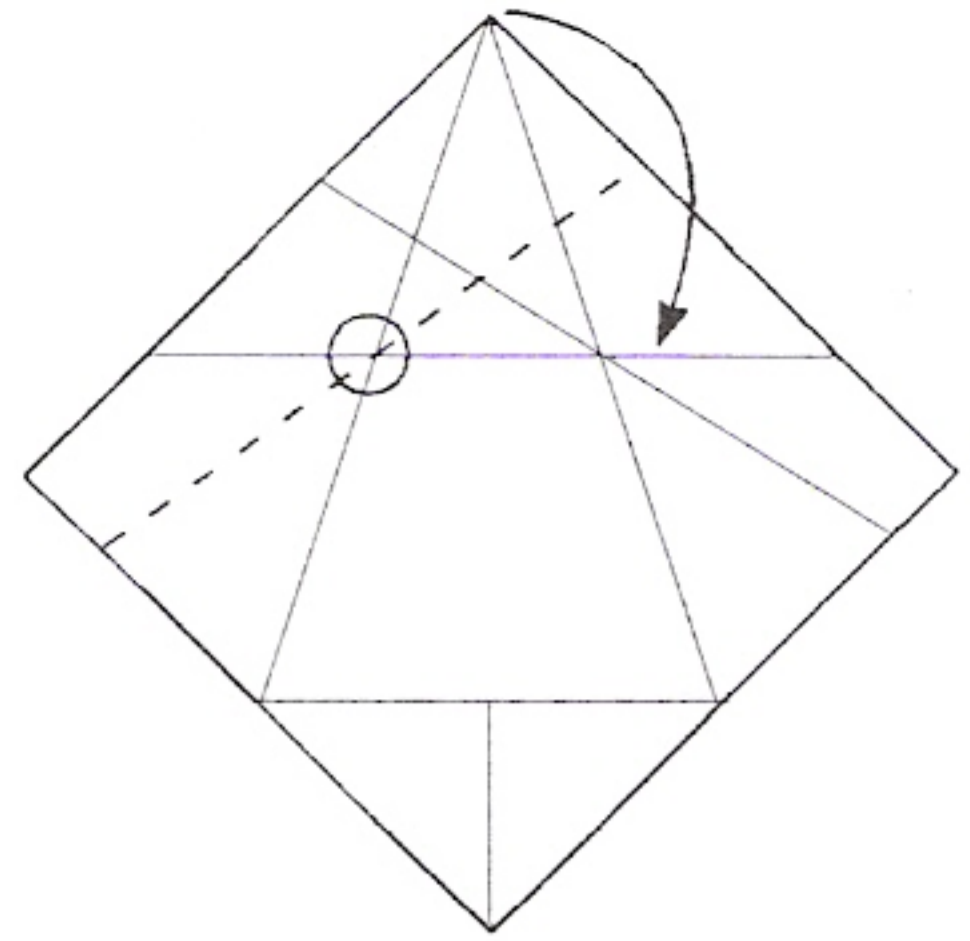
Esta nova dobra deverá passar exactamente pelo ponto onde os dois vincos se cruzam.

11



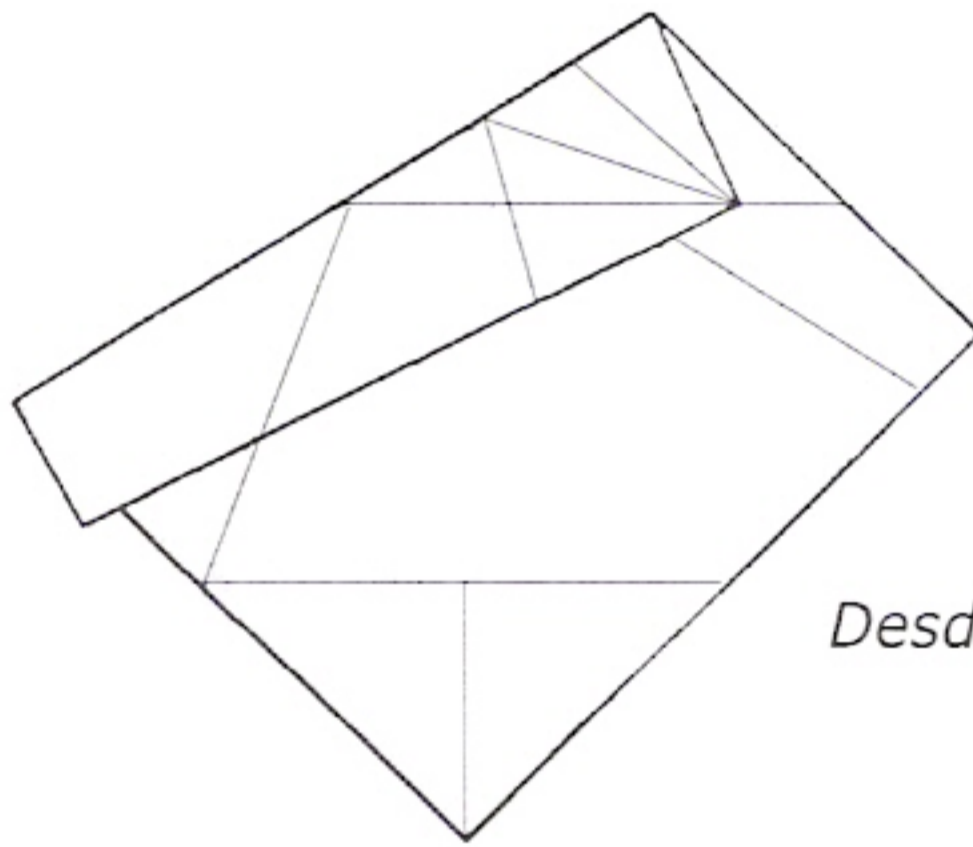
Desdobre.

12



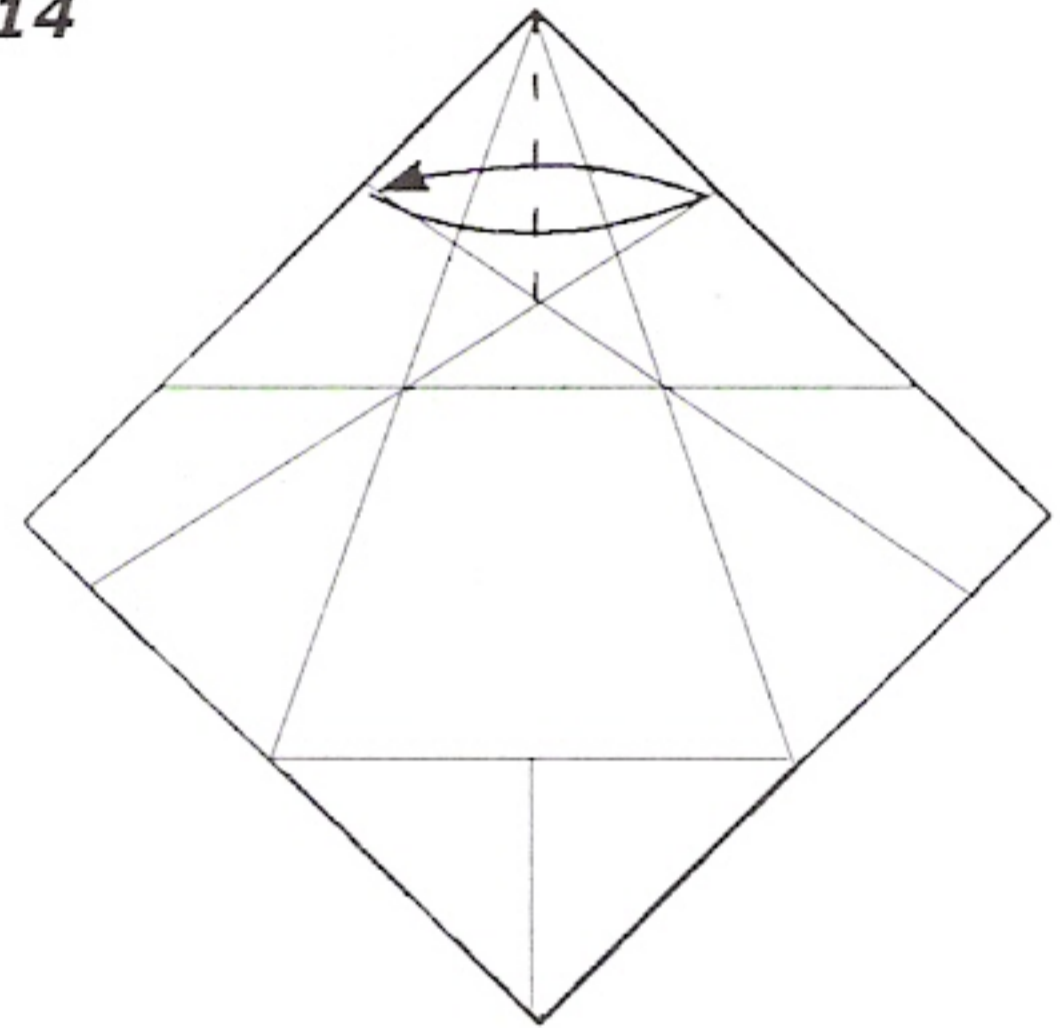
Esta nova dobra deverá passar exactamente pelo ponto onde os dois vincos se cruzam.

13

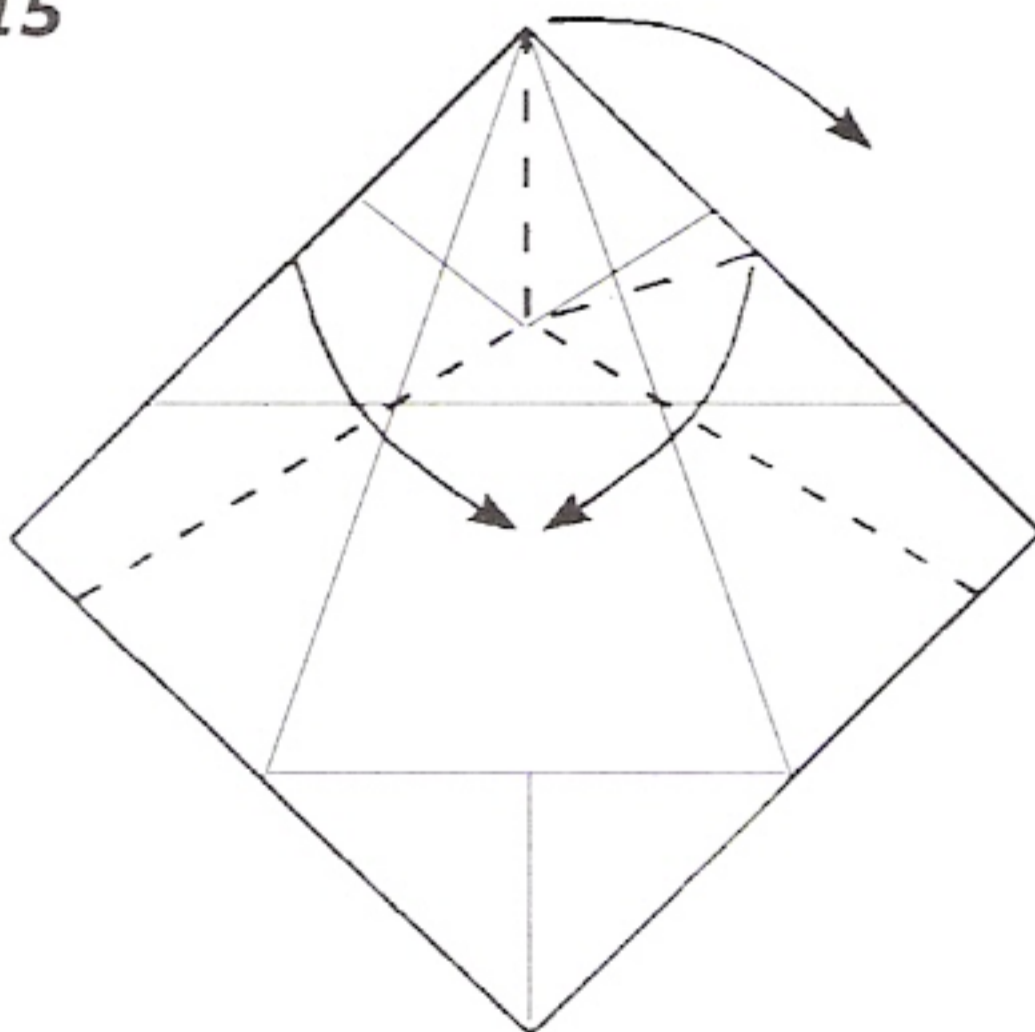


Desdobre.

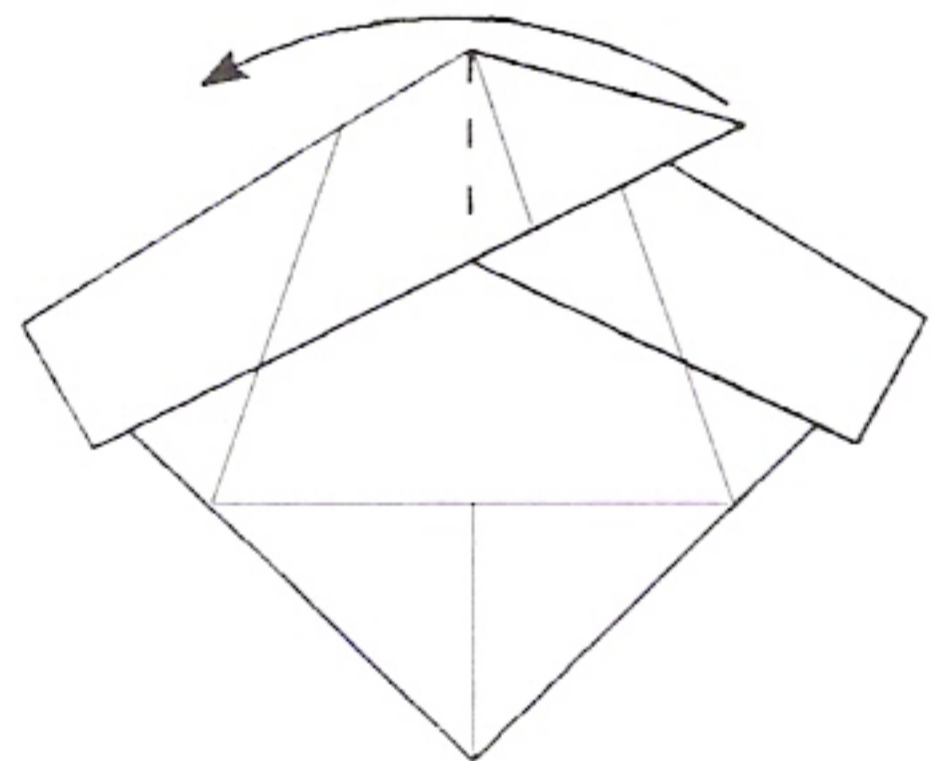
14



15

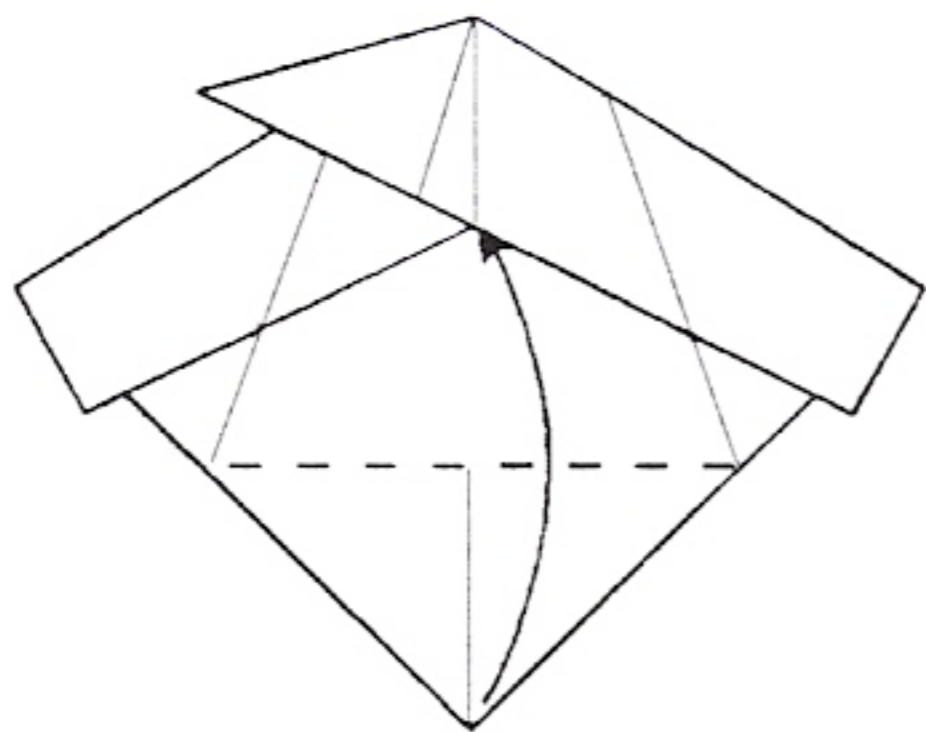


16



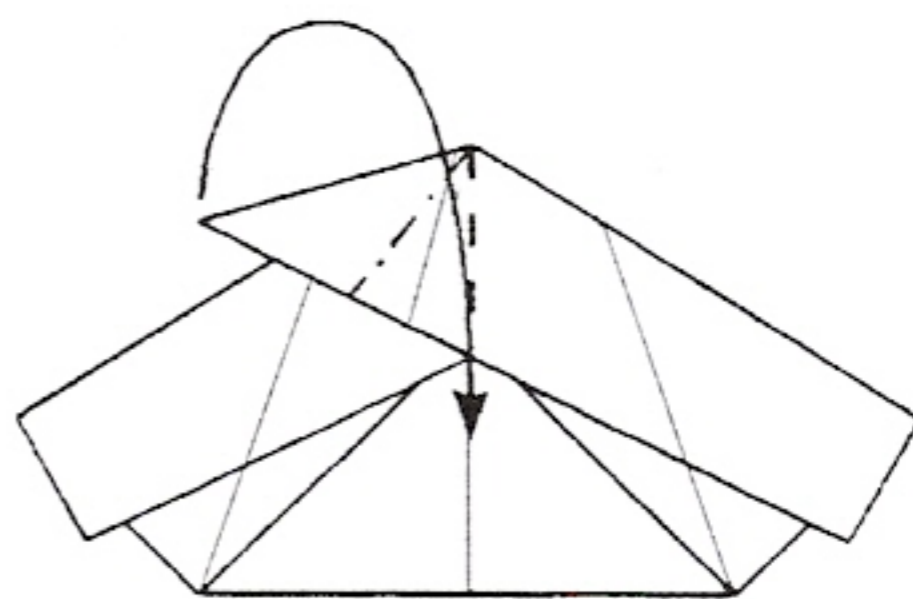
Dobre ambos os lados para dentro ao mesmo tempo e achate a parte de cima para os lados. Formar-se-á um novo vinco na posição indicada.

17



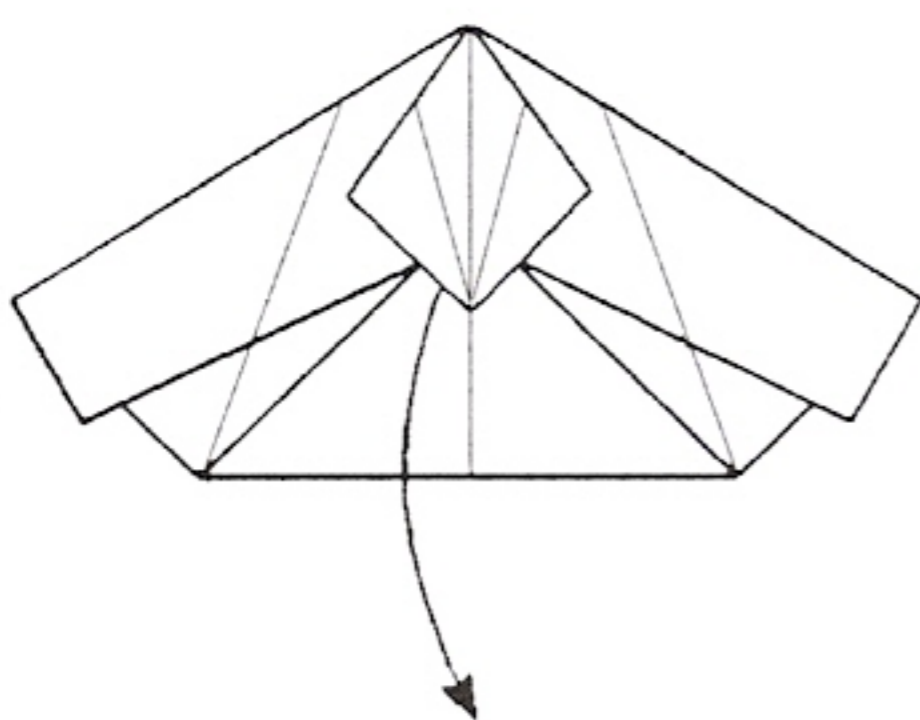
Insira a ponta da aba por baixo das dobras superiores.

18

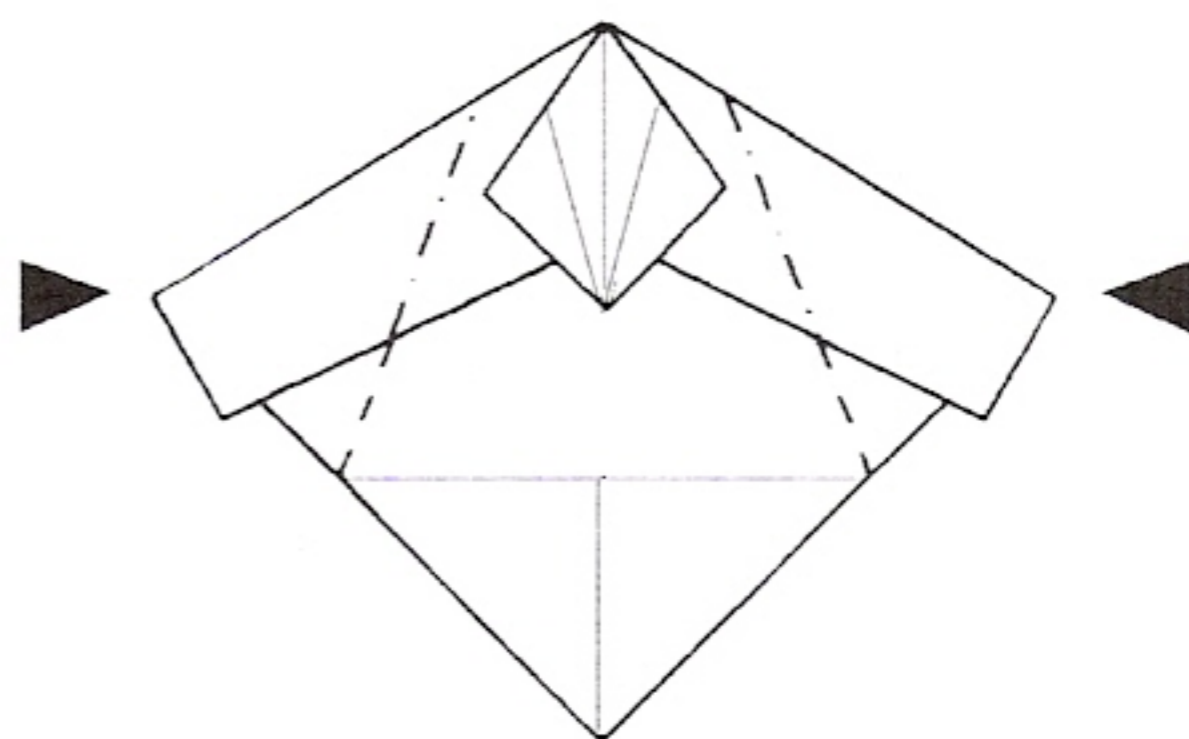


Levante a ponta para cima, separe as camadas e achate a ponta de modo que ela fique sobre a linha central.

19

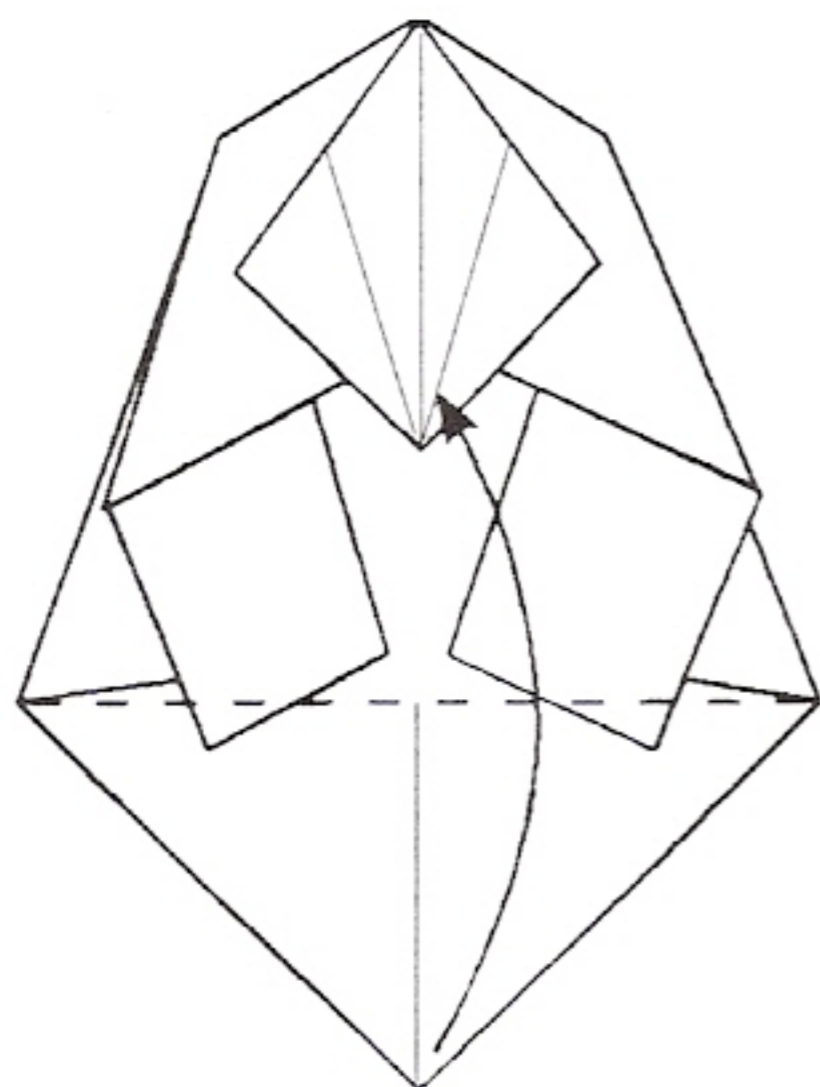


20

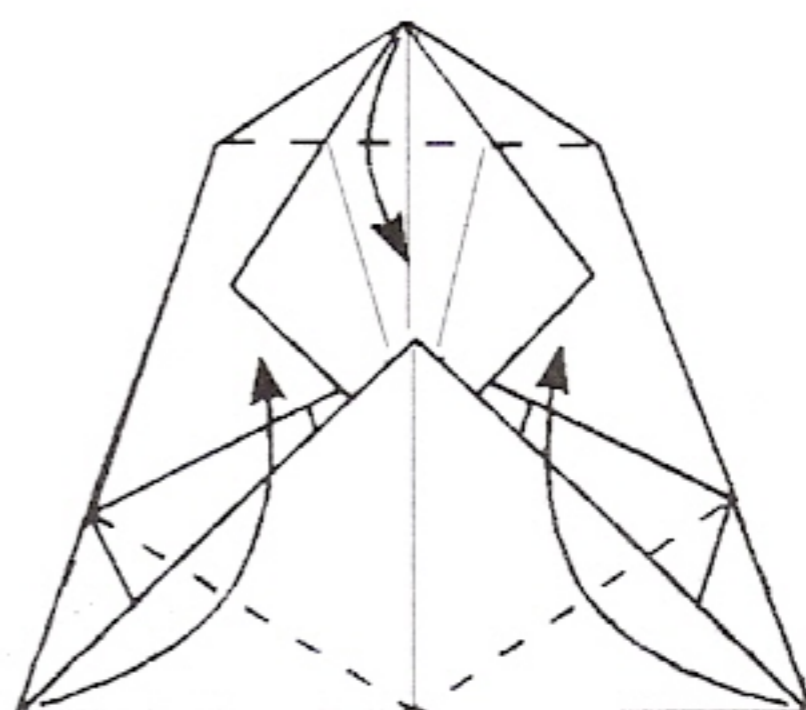


Dobre as abas laterais para dentro, entre as camadas da frente e de trás.

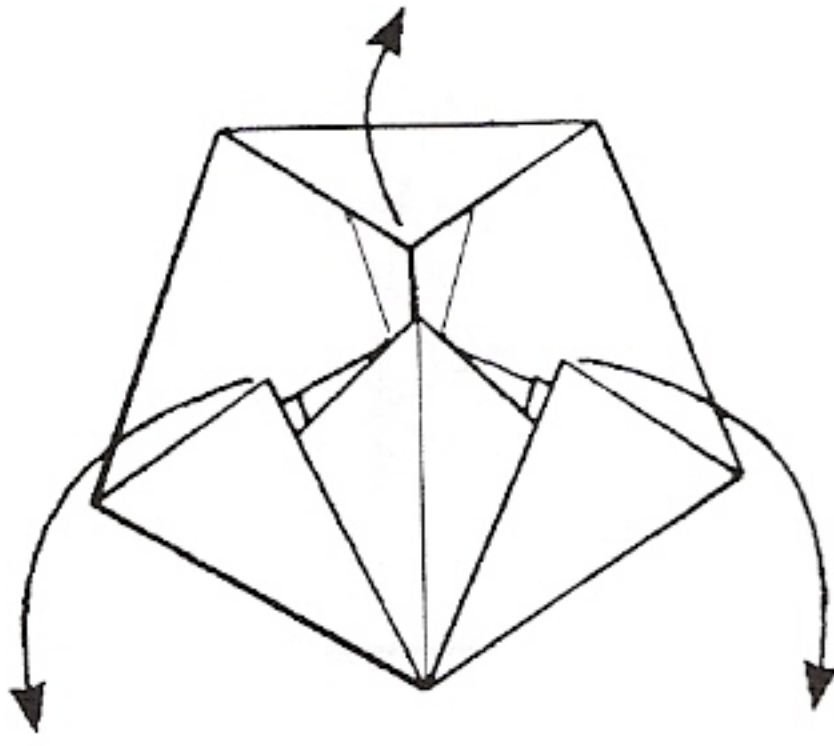
21



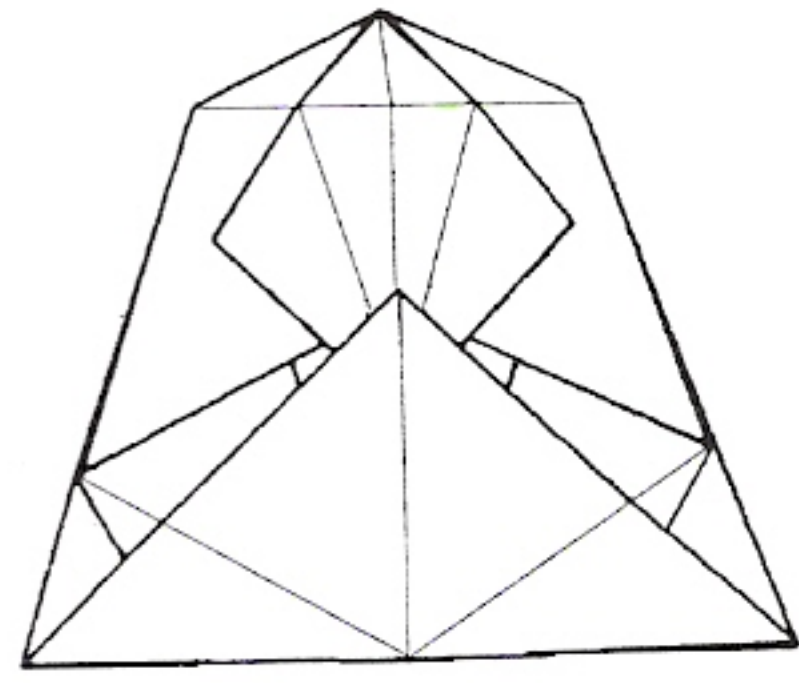
22



23



24

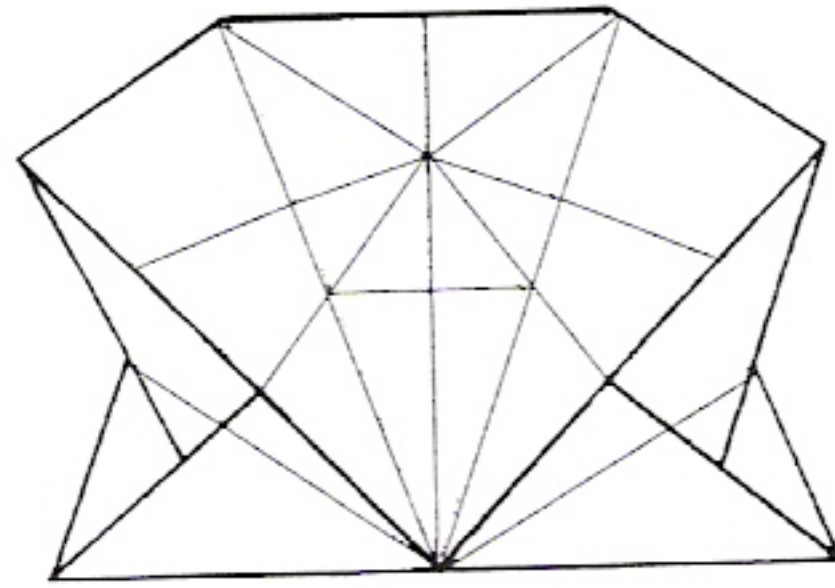


Os módulos encaixam-se em pares macho/fêmea.

Esta é a versão macho do módulo.

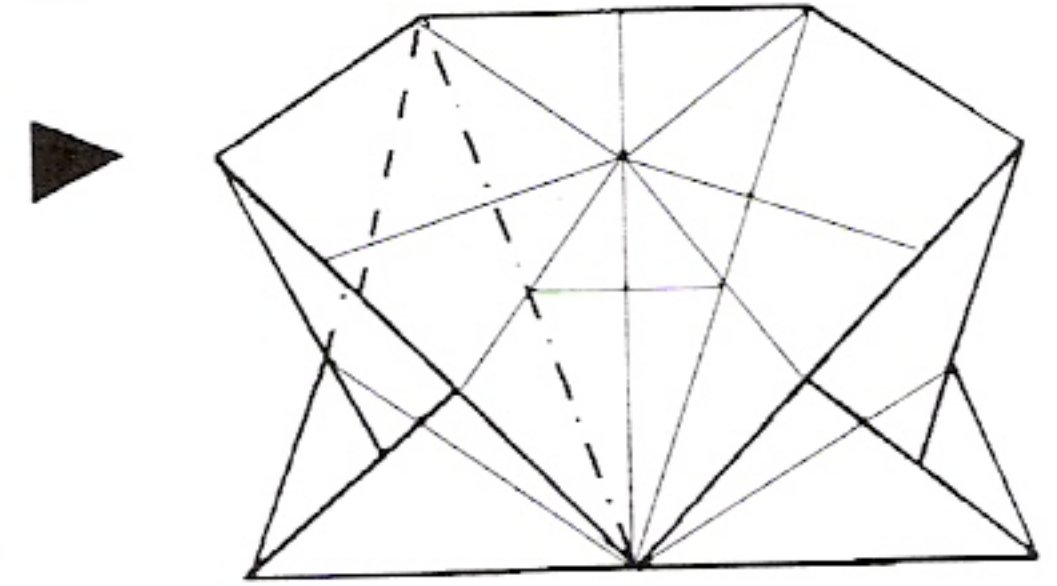
Para fazer a forma fêmea, é necessário encaixar a aba superior.

25



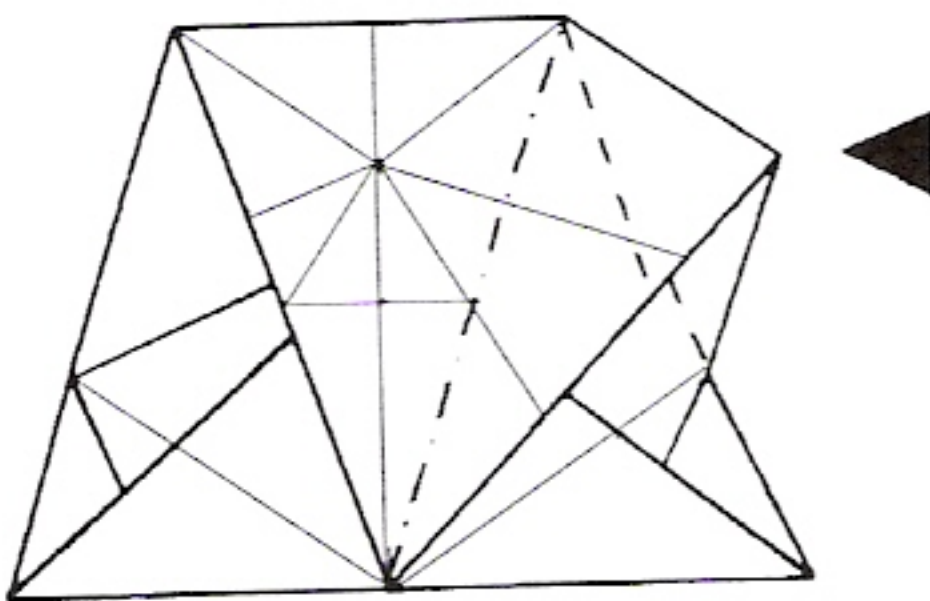
Comece por abrir a parte de cima do módulo e dobre-a, tal como indica a figura.

26



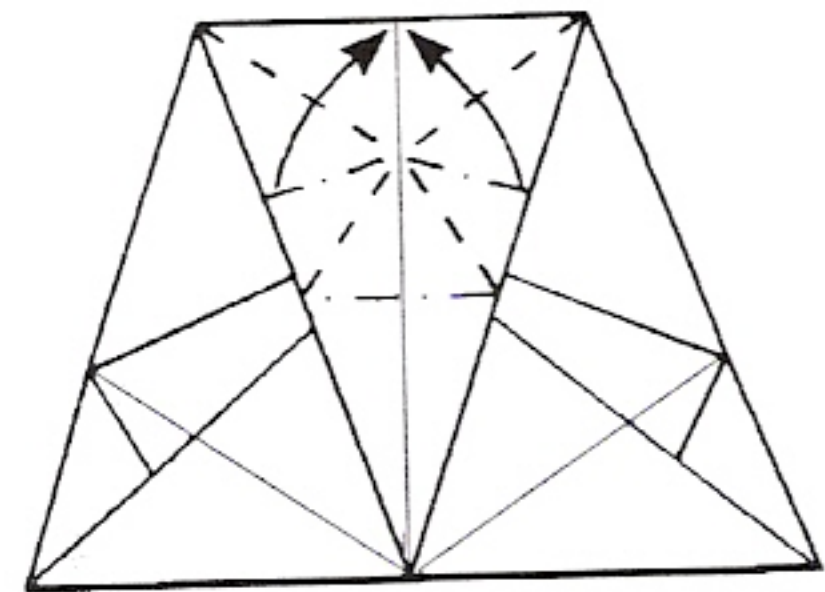
Levante a aba esquerda e insira-a dentro do módulo.

27



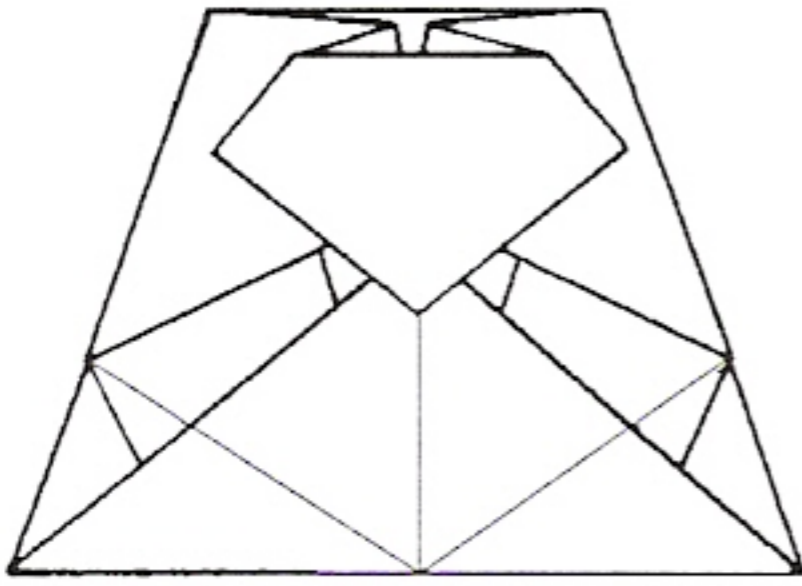
Repita esta manobra com a aba direita.

28



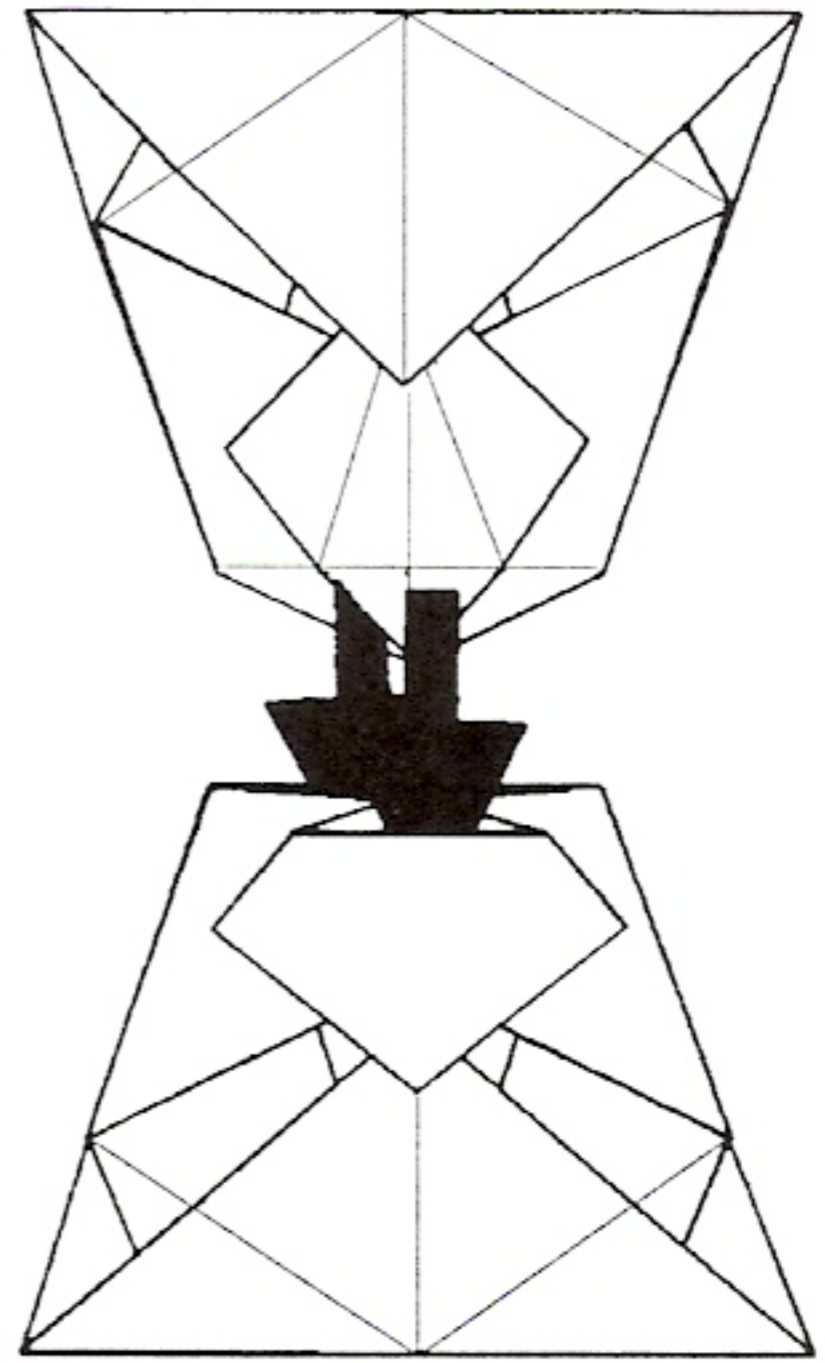
Ao fazer estas duas pequenas dobras, a ponta do topo ficará mais larga. Achate-a.

29



Este é o módulo fêmea.

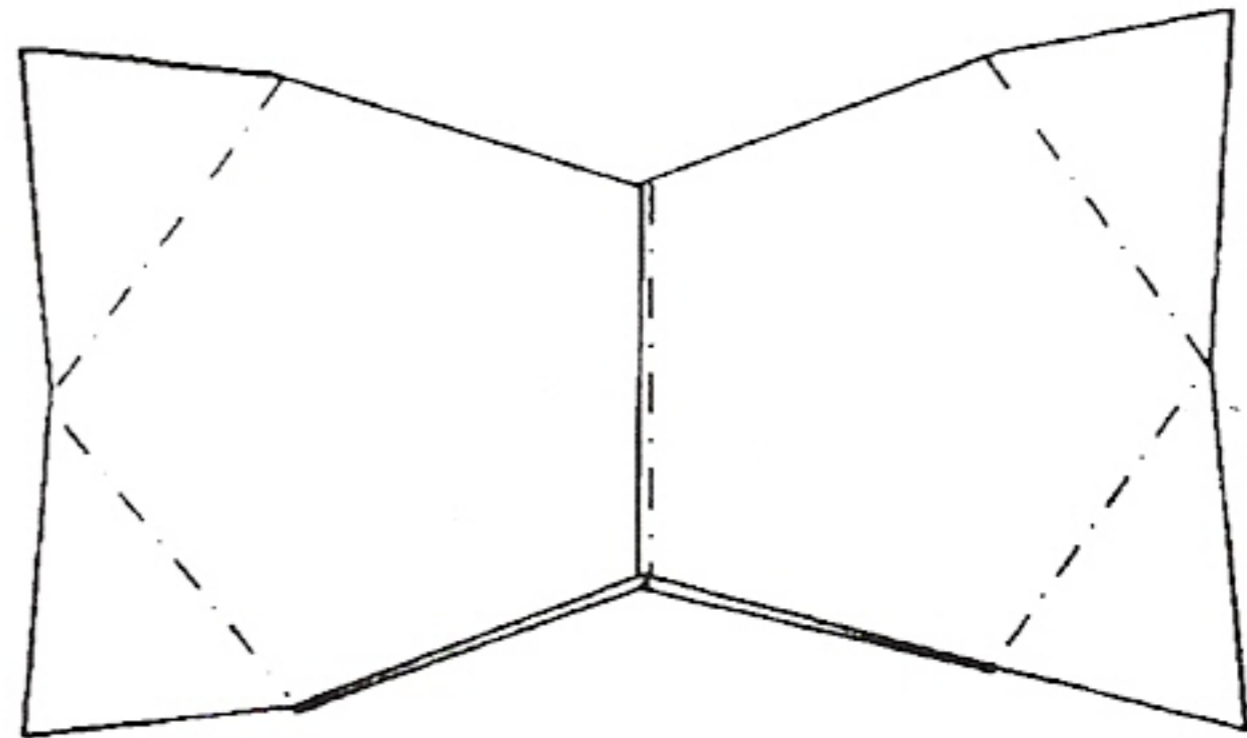
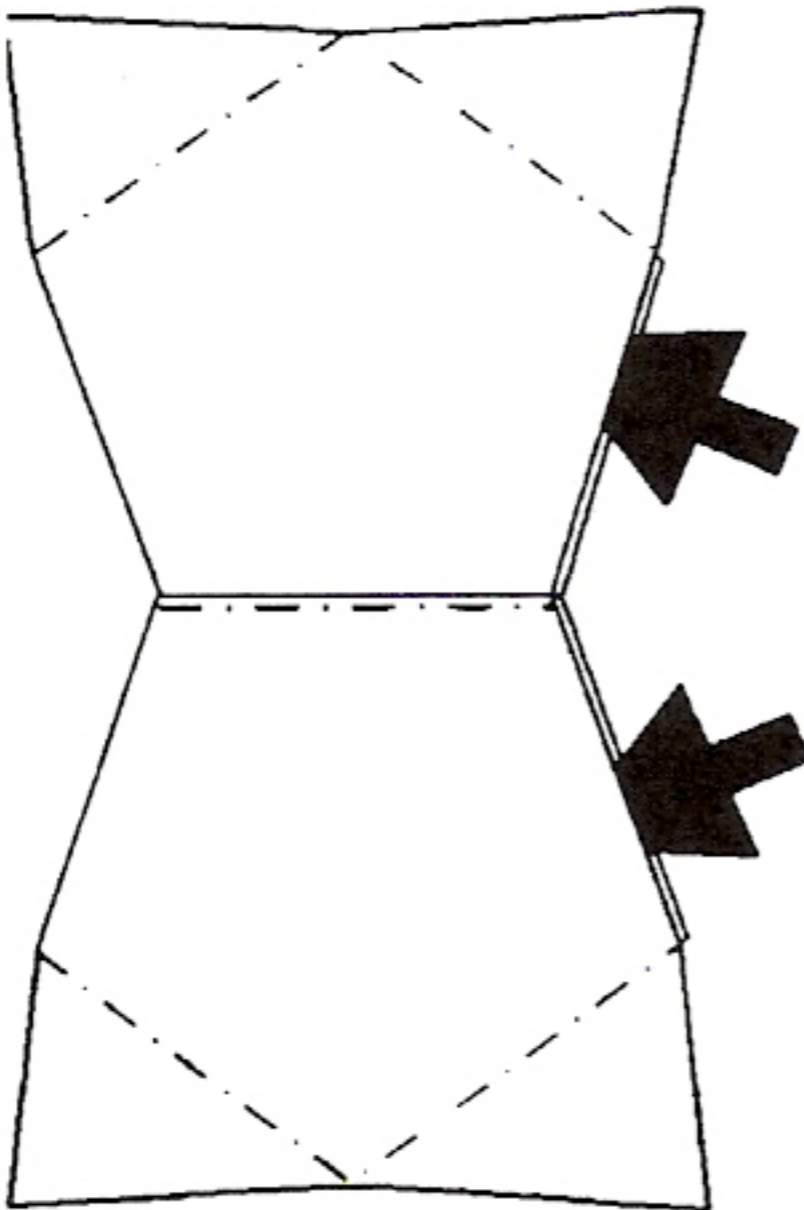
30



Note que há duas abas e duas cavidades. Ambas as abas deverão ser inseridas simultaneamente.

Vire a folha.

31



Desta forma juntam-se dois pares macho/fêmea.

Cada par de módulos terá de se curvar ligeiramente no ponto de junção.

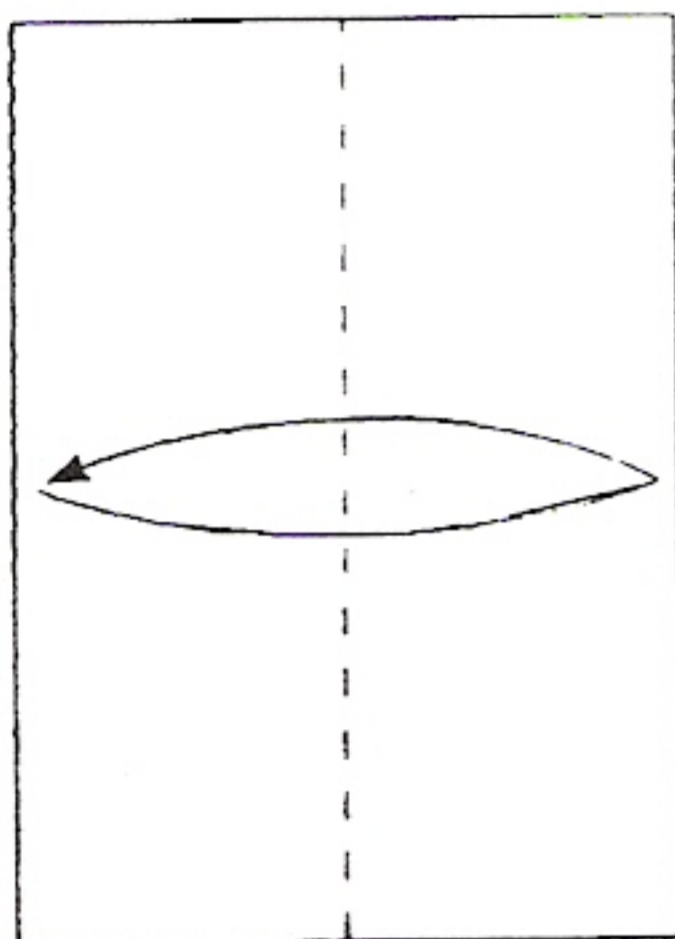
Se os módulos forem bem dobrados, as abas e bolsas deverão ter quase a mesma largura e profundidade.

Dodecaedro em contorno

São necessárias oito folhas de papel A4.

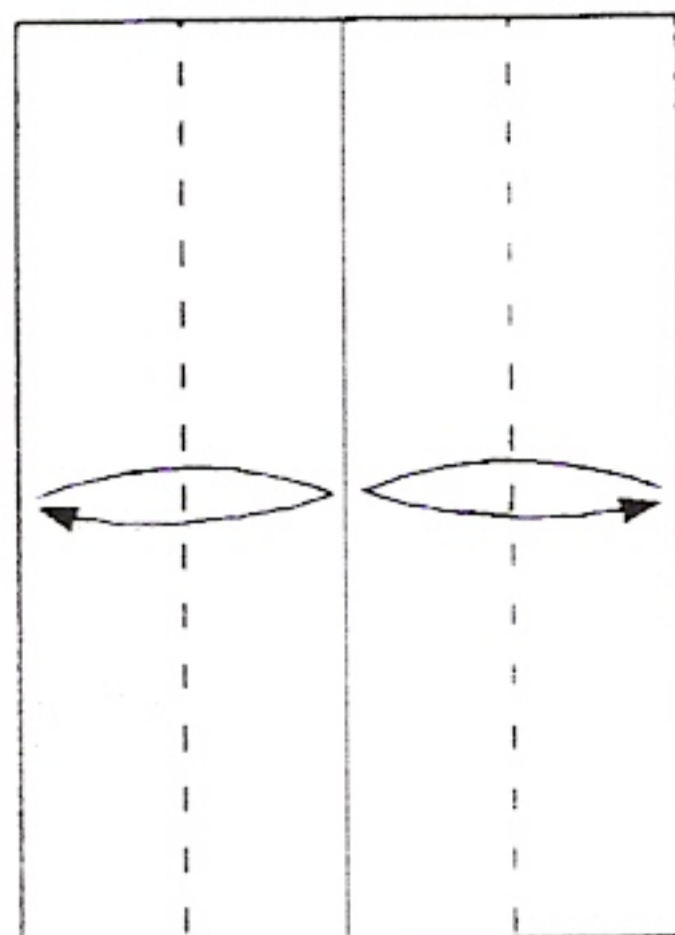
Comece por dividir cada folha em quartos. As trinta e duas folhas deverão ser dobradas até ao passo 14, embora sejam precisos apenas trinta módulos.

1



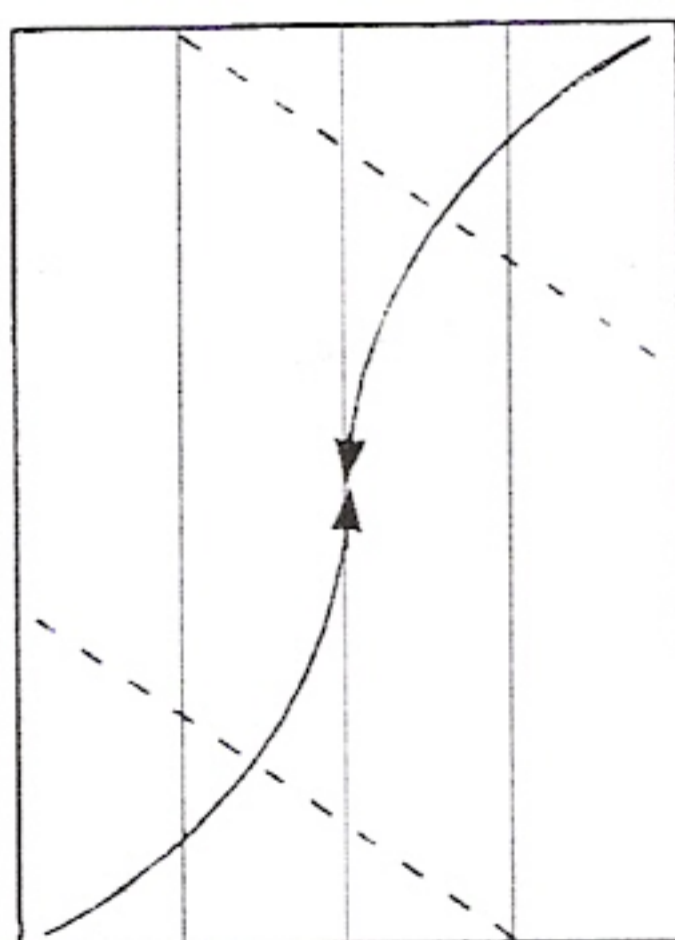
*Vire a
folha.*

2

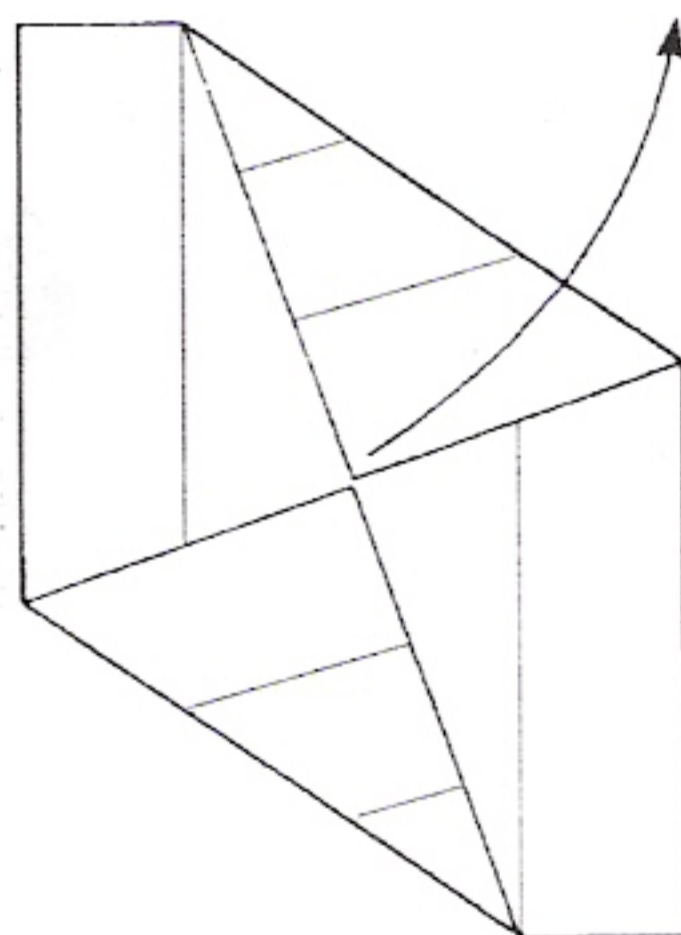


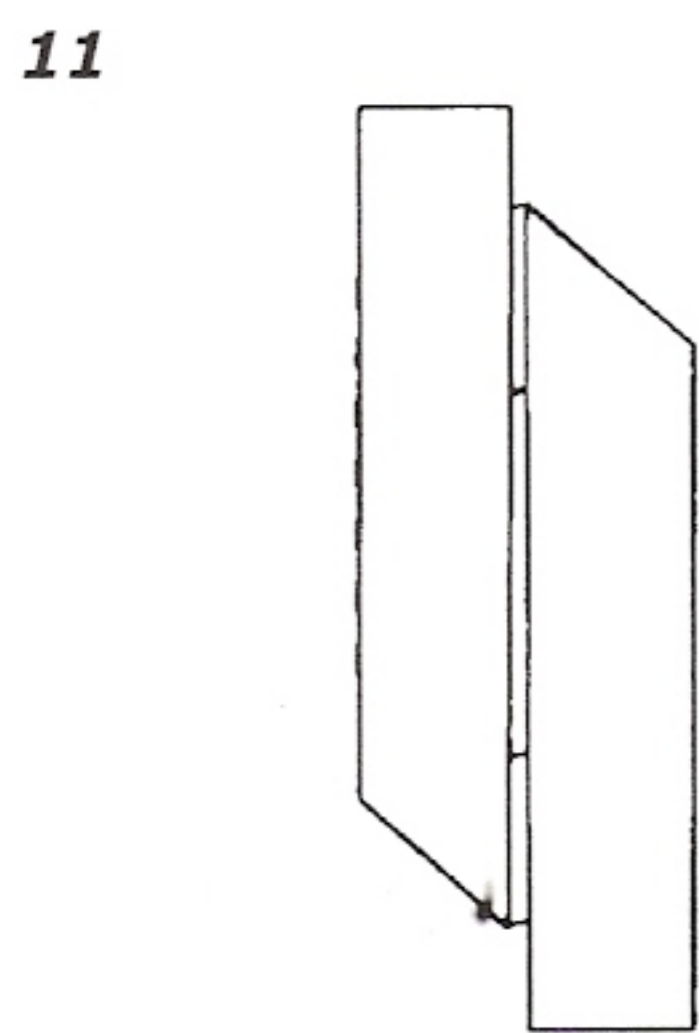
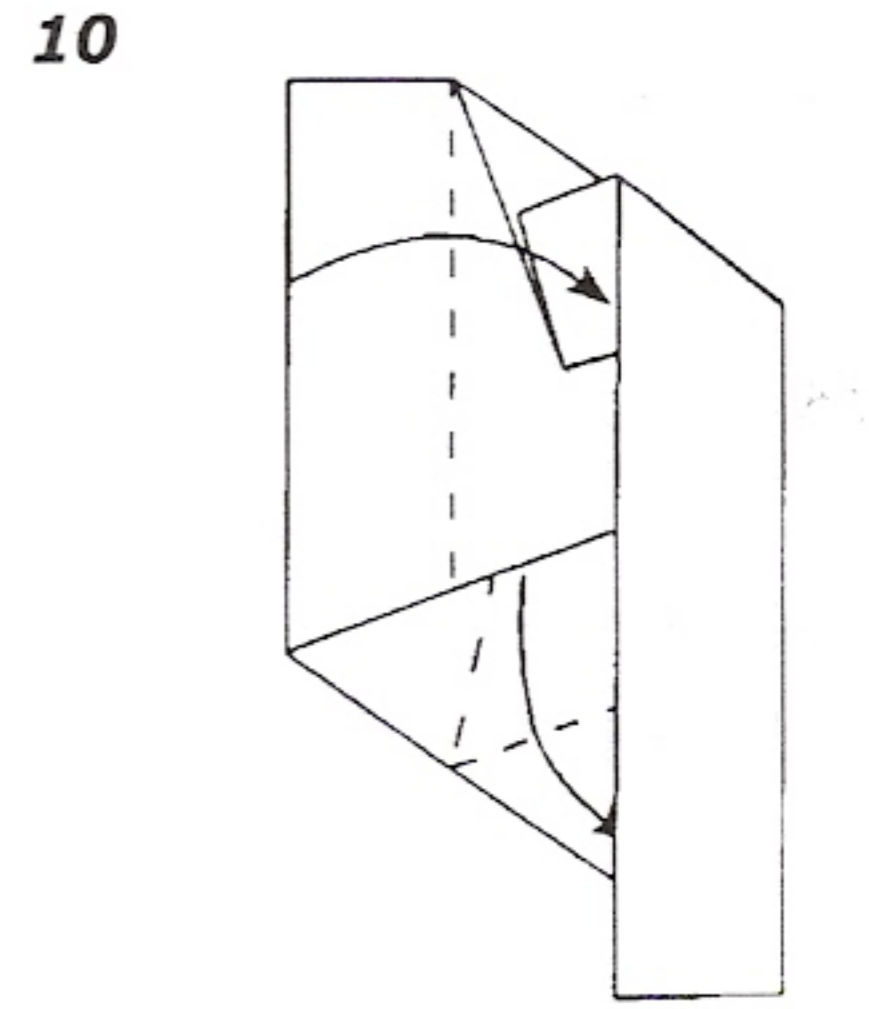
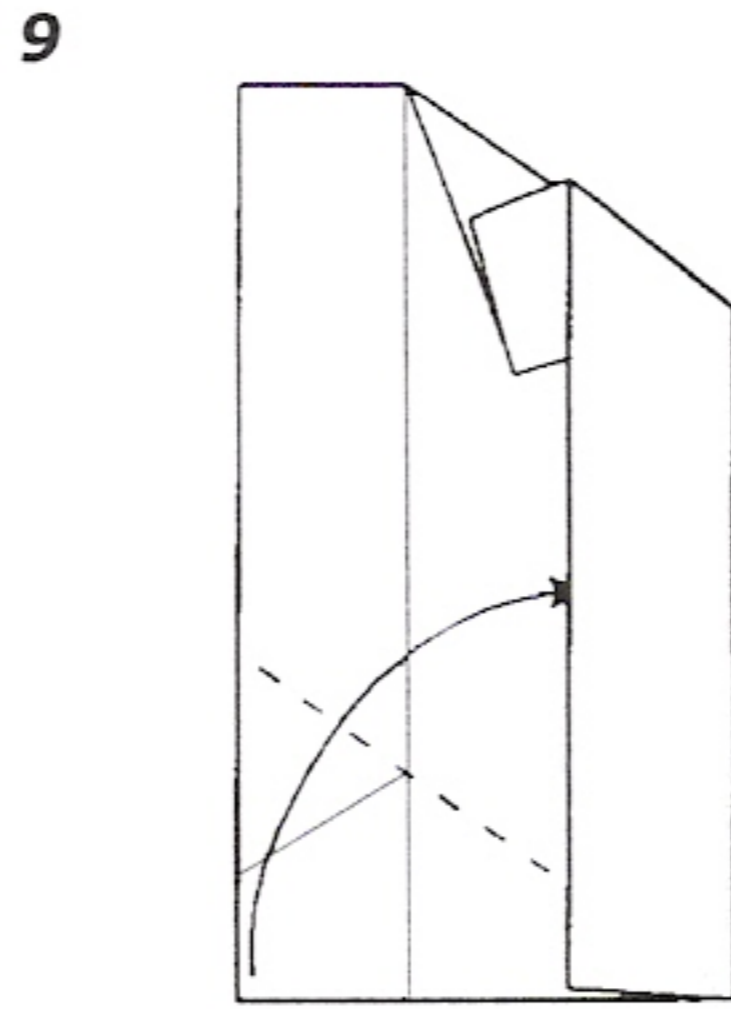
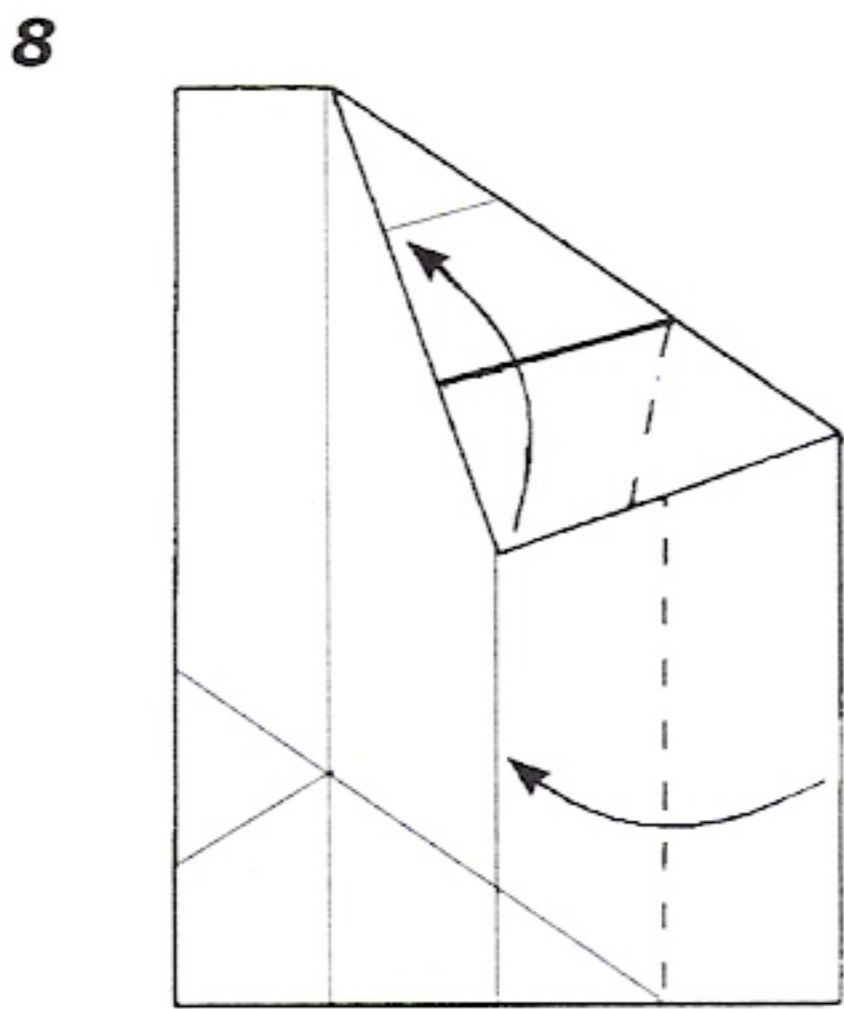
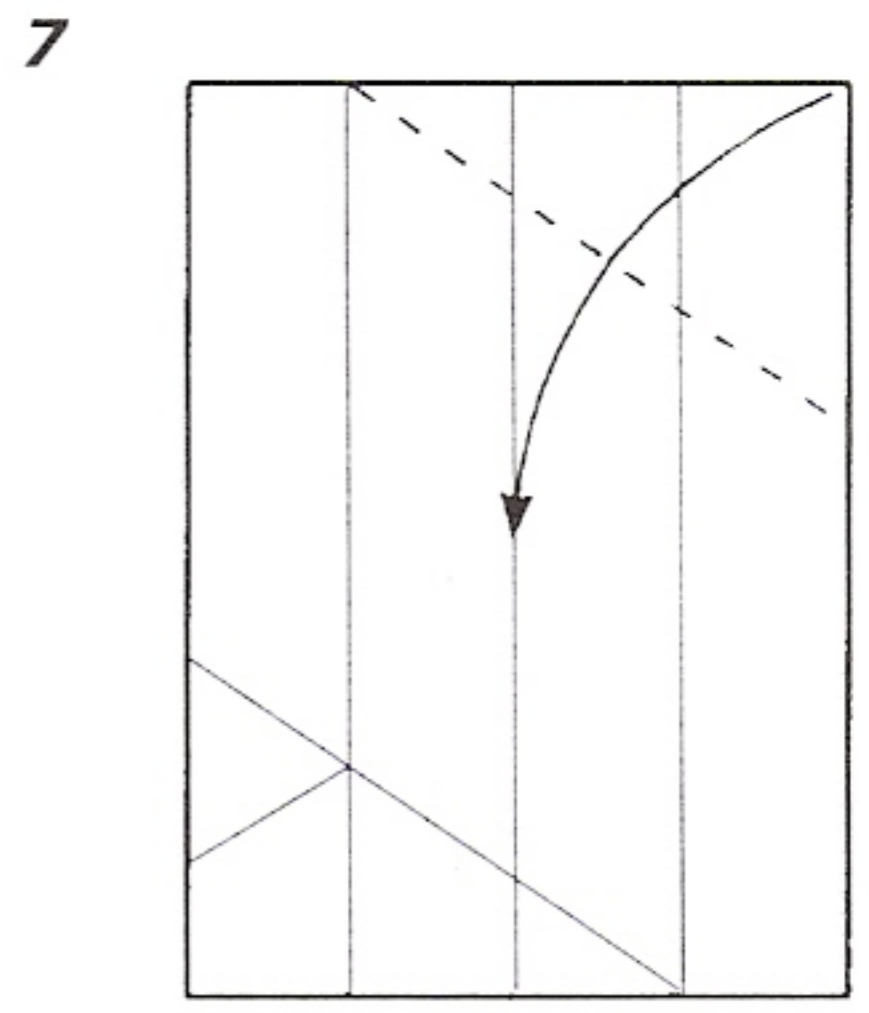
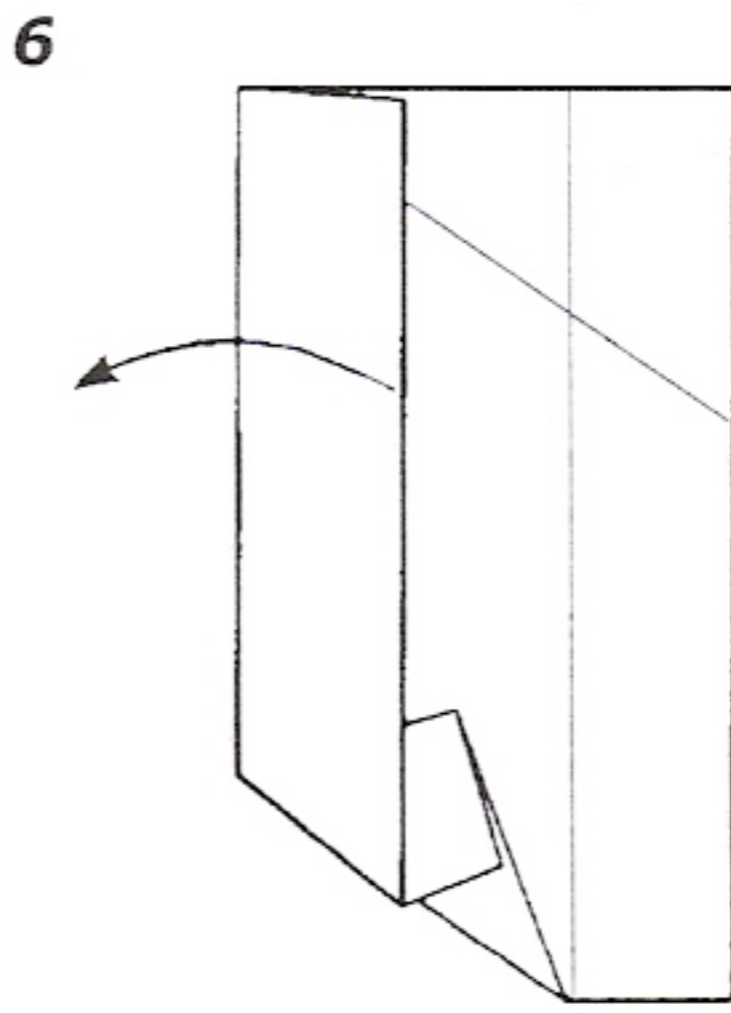
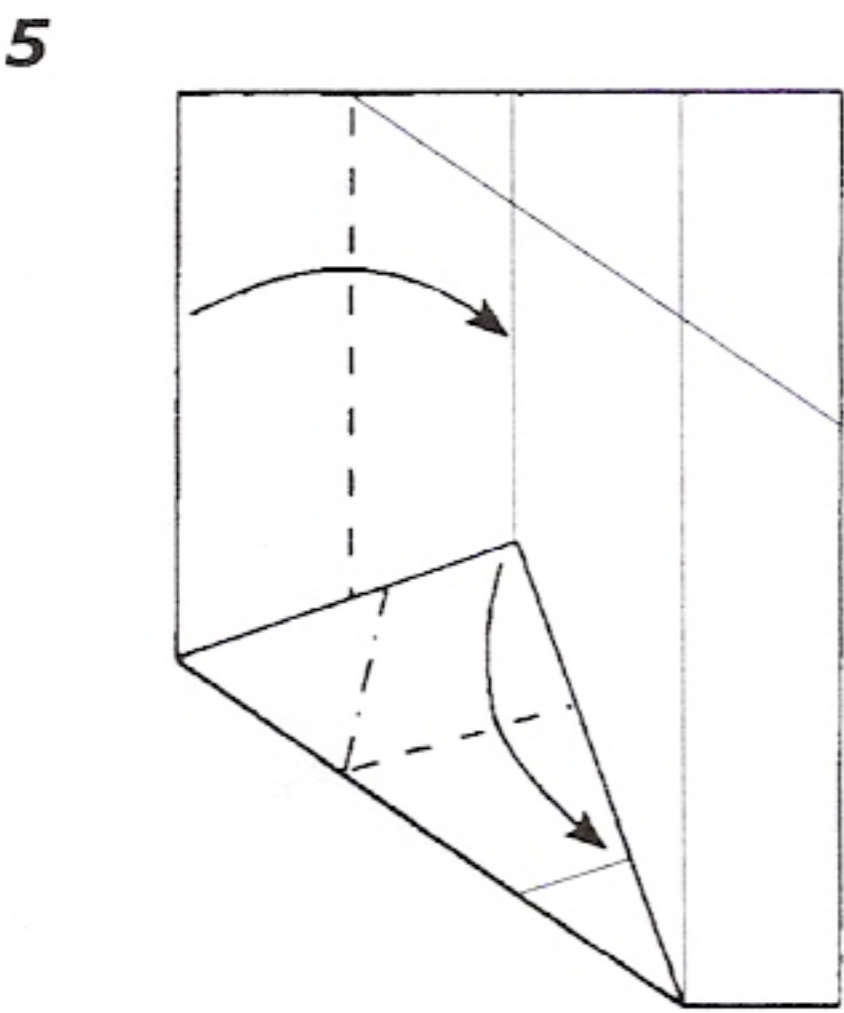
*O módulo é mais fácil de dobrar
se cada orla não chegar a tocar
na linha central.*

3

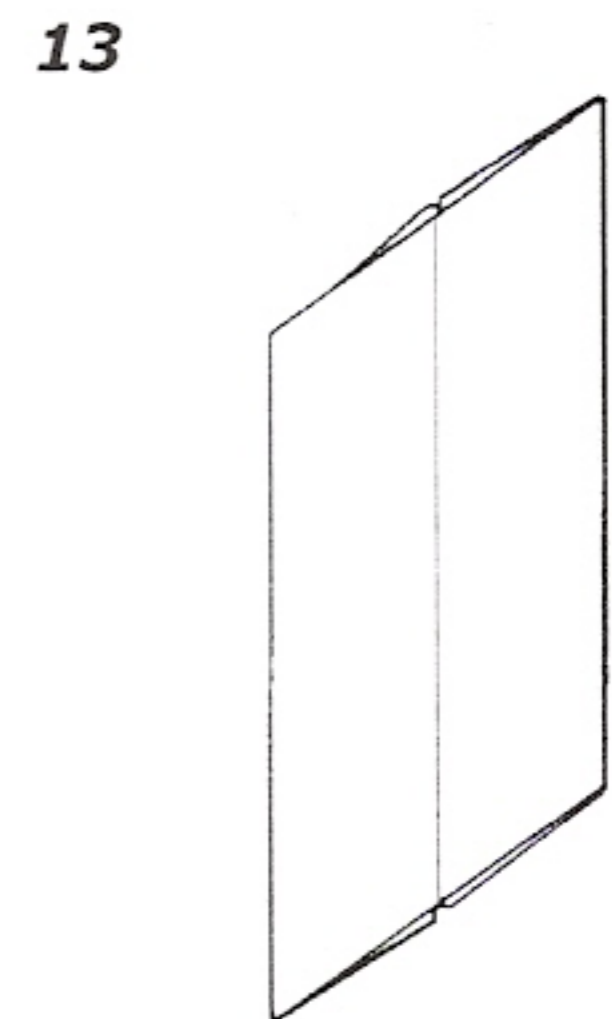
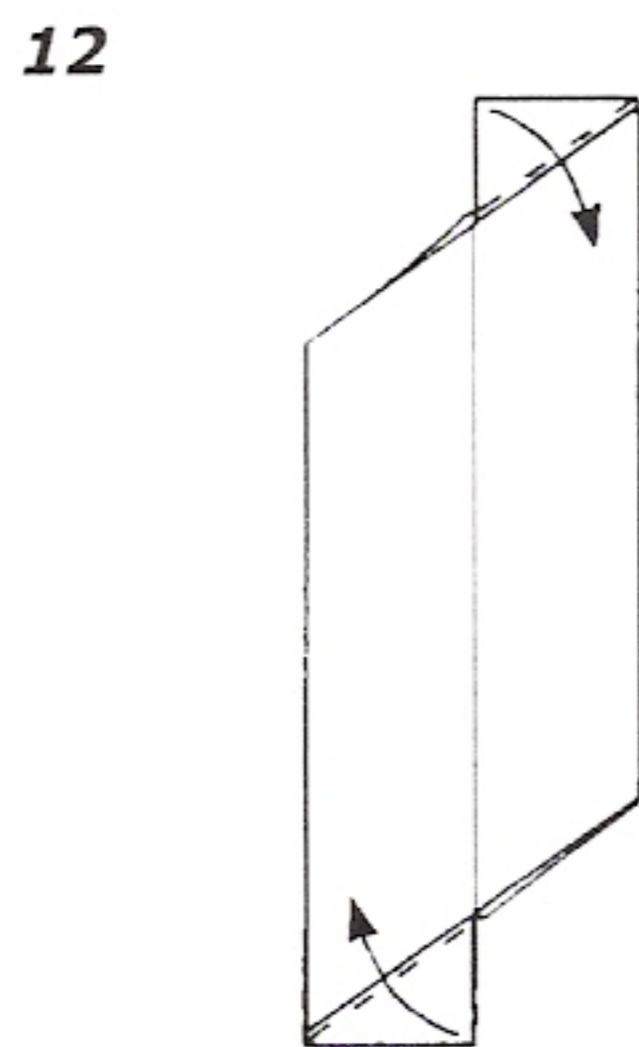


4





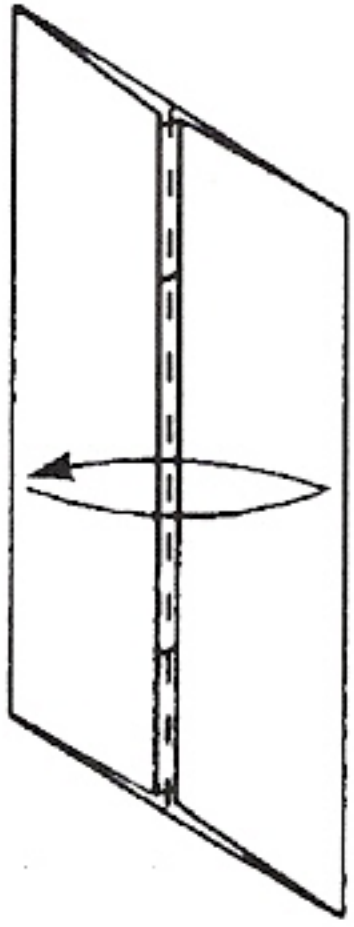
Vire.



Vire.

Vingue estas abas minúsculas da forma indicada e insira-as no módulo.

14

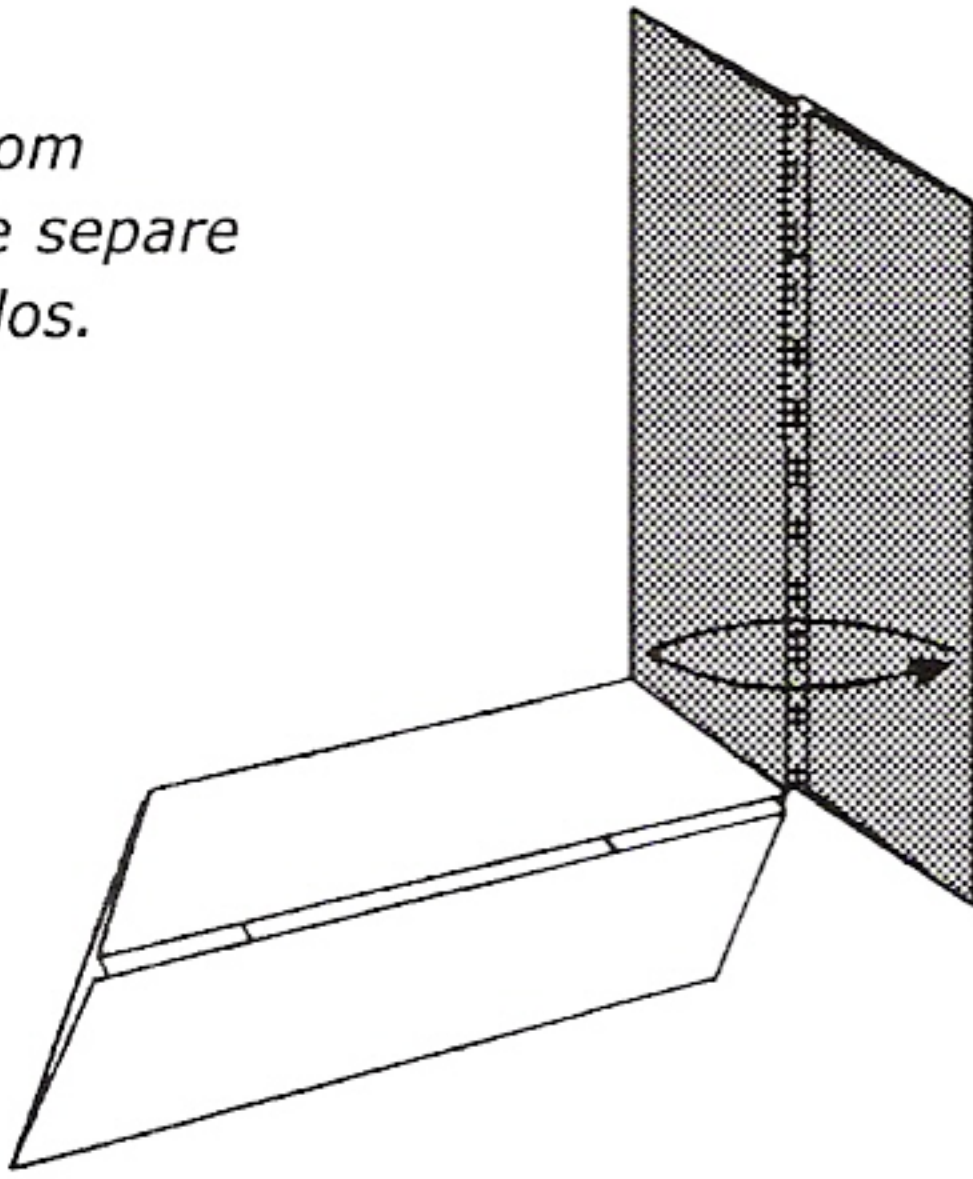


Faça este vinco ao de leve em todas as camadas.

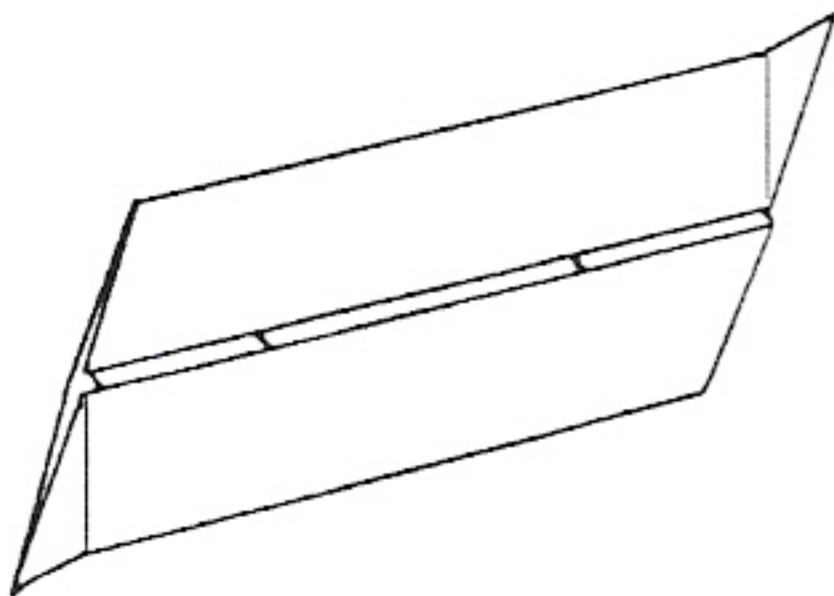
Dobre as 32 folhas até esta etapa.

16

Vinque com firmeza e separe os módulos.



16



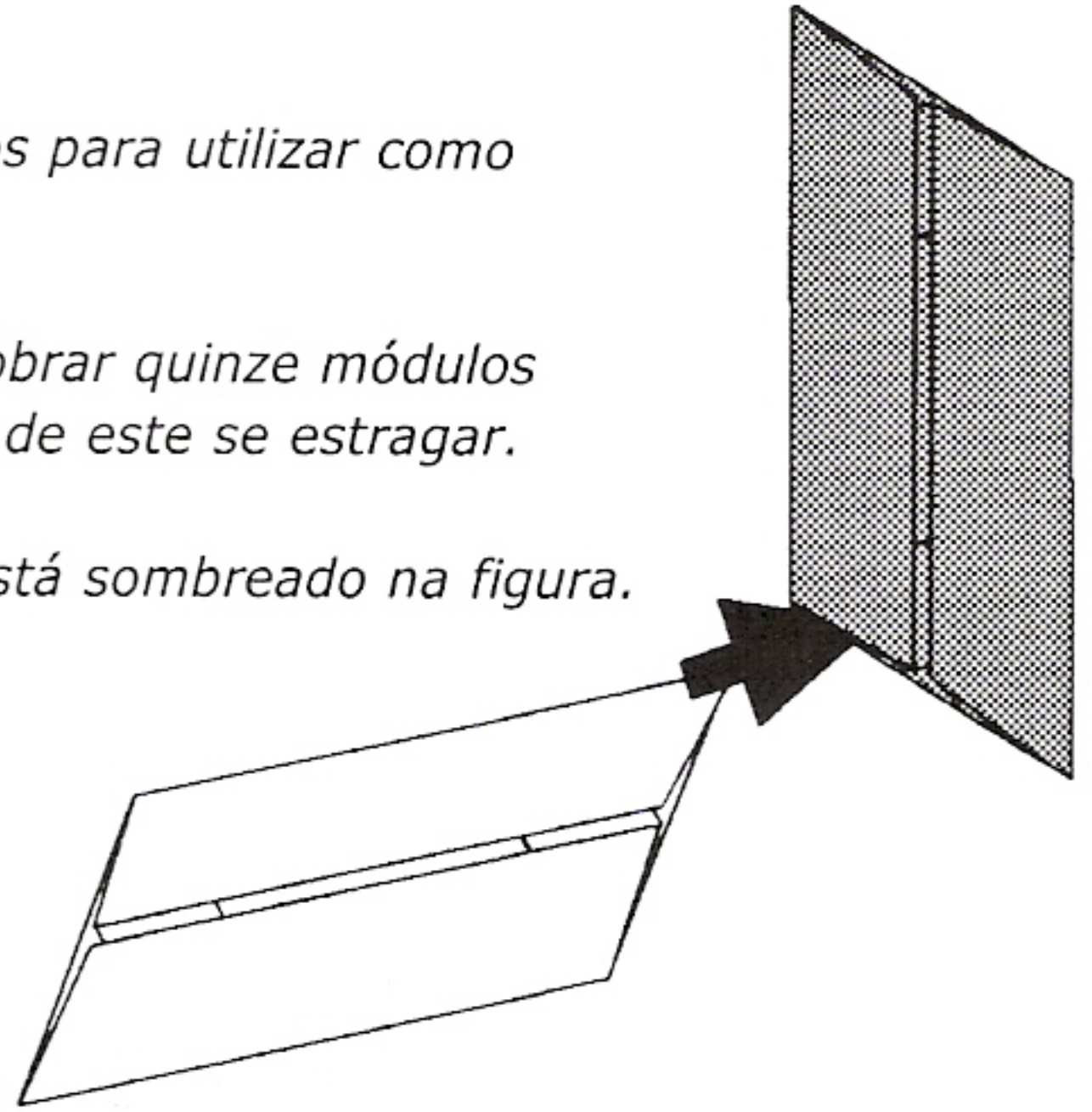
Vire a folha.

15

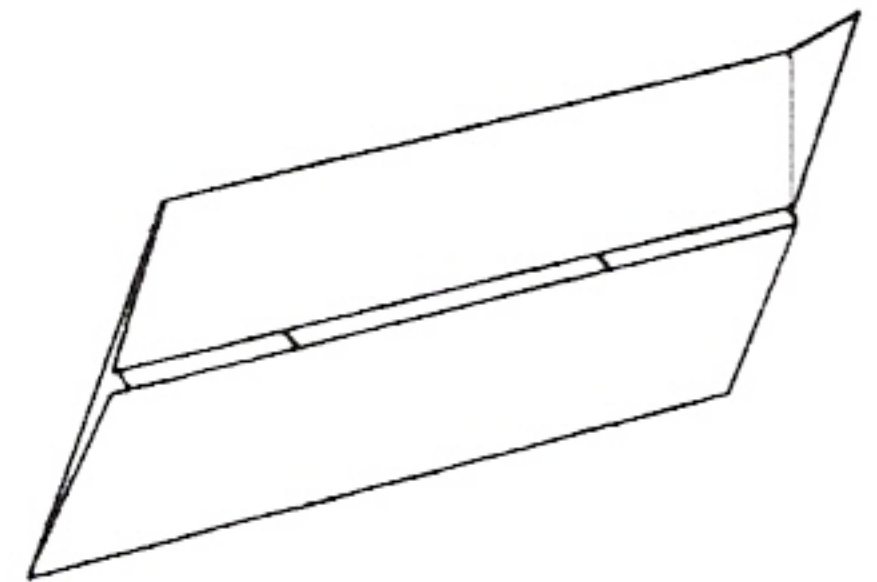
Escolha dois módulos para utilizar como modelos.

Deverá conseguir dobrar quinze módulos com cada um antes de este se estragar.

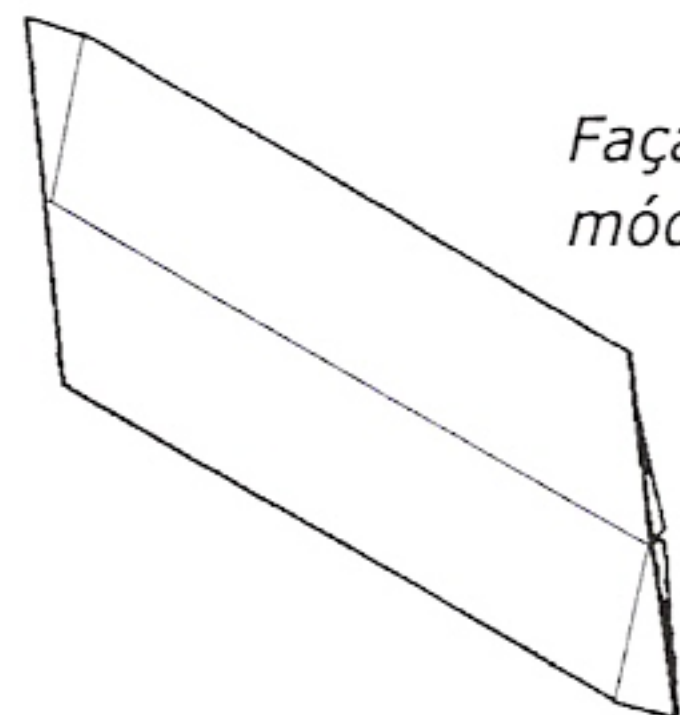
O módulo-modelo está sombreado na figura.



17 *Repita os passos 15 e 16 na outra extremidade do mesmo módulo.*



16

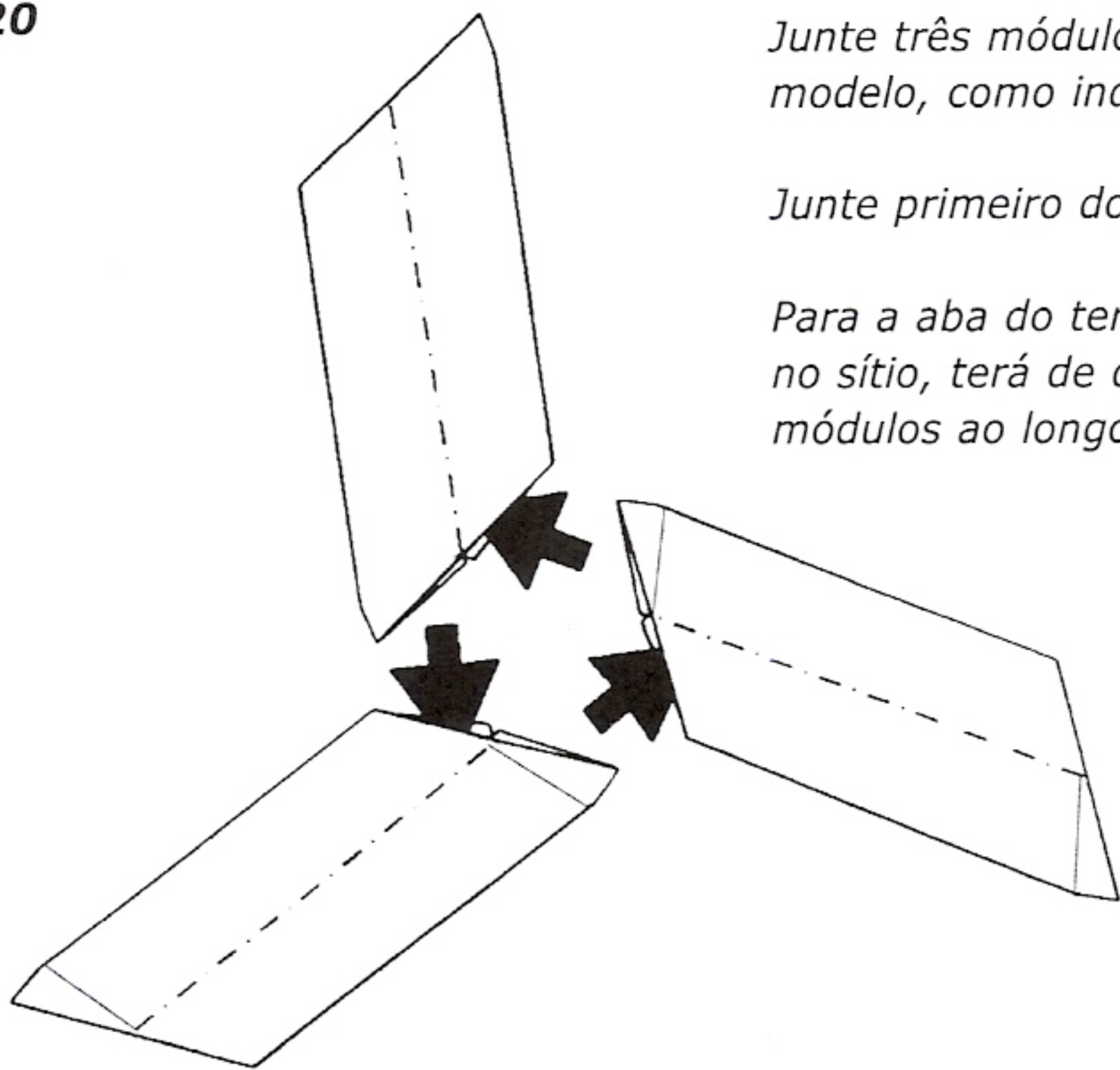


Faça os trinta módulos.

Junte três módulos para formar um canto do modelo, como indica a figura.

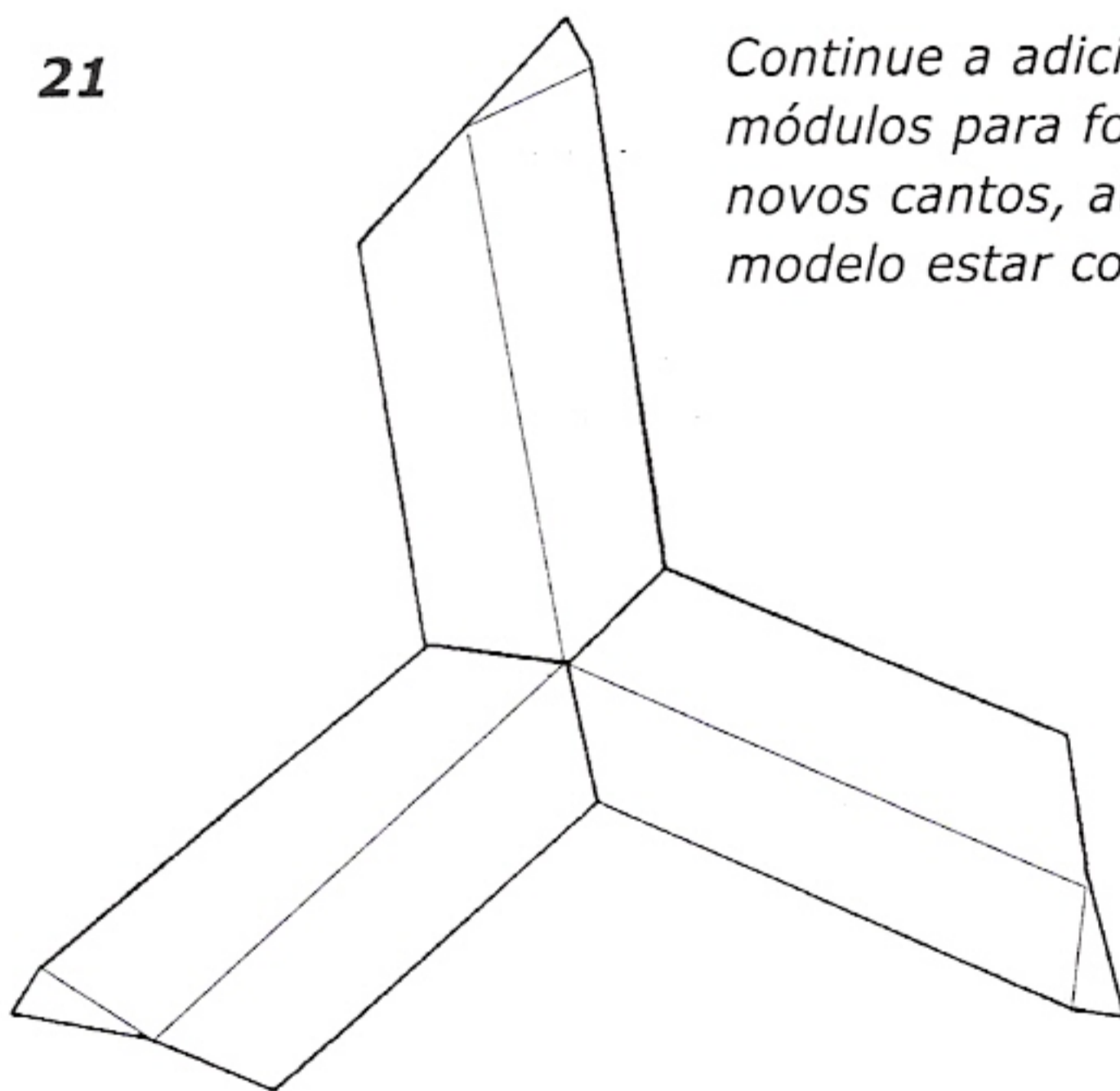
Junte primeiro dois módulos.

Para a aba do terceiro módulo ficar exactamente no sítio, terá de dobrar ligeiramente os três módulos ao longo do eixo comprido.

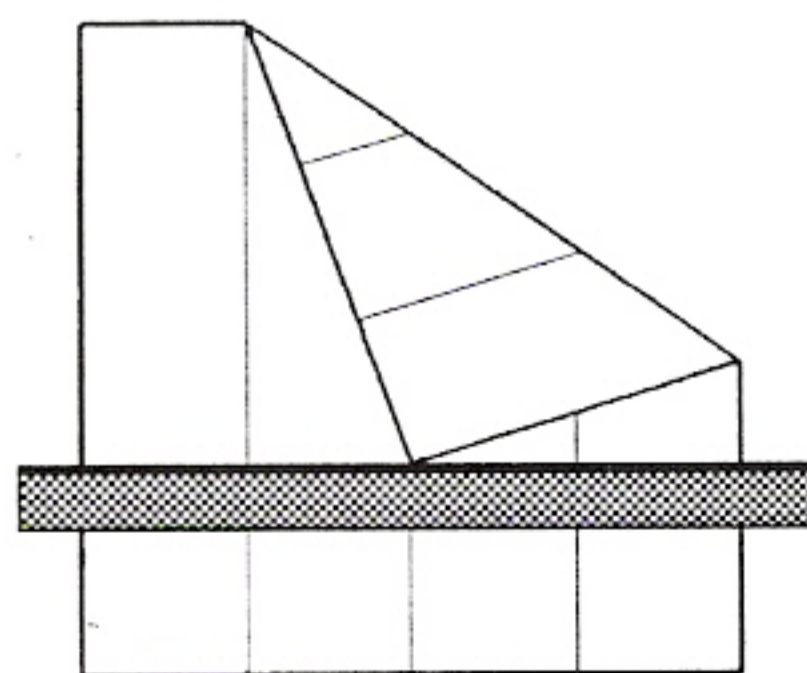


21

Continue a adicionar módulos para formar novos cantos, até o modelo estar completo.



Os passos 1 a 3 proporcionam um método útil para fazer um rectângulo $1 : \sqrt{2}$ a partir de um quadrado (ou um rectângulo de quaisquer outras proporções), assim:



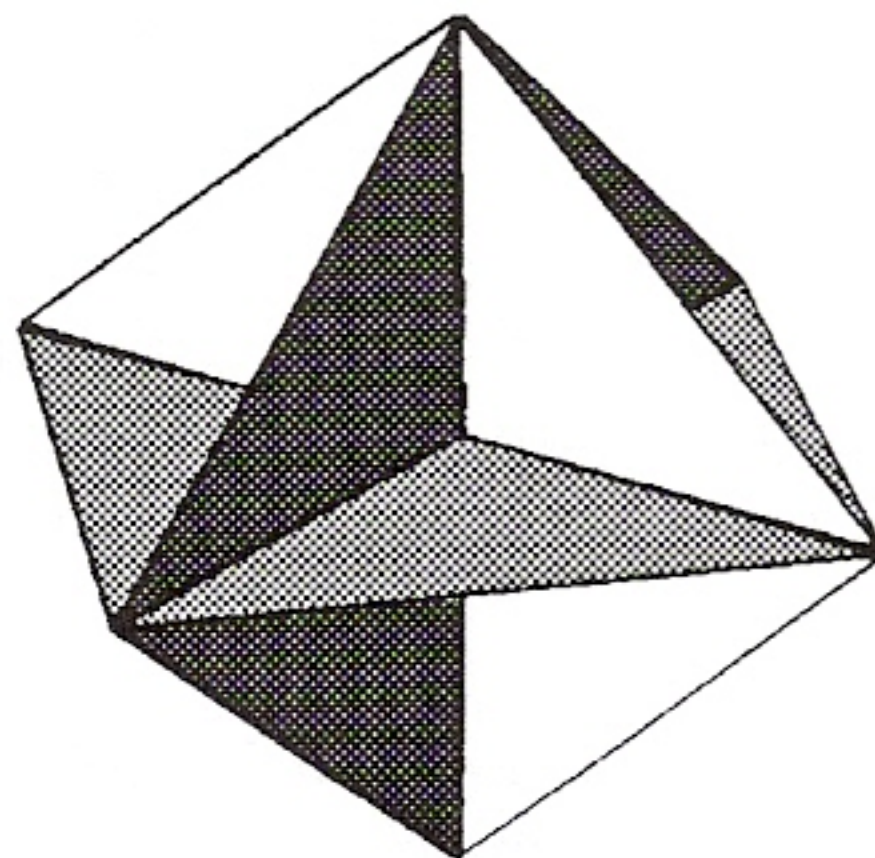
Ir mais longe com os origami modulares

Estes modelos são apenas uma pequena amostra das muitas criações maravilhosas que os dobradores de papel desenvolveram ao longo dos anos.

A melhor maneira de conceber outras criações – e de se manter a par de novos desenvolvimentos – é inscrever-se num clube de dobragem de papel.

Aquele a que pertença chama-se *British Origami Society* – embora tenha membros em mais de trinta países de todo o mundo. Pode obter pormenores das actividades da sociedade e as vantagens de se ser membro – incluindo uma revista bi-mensal – escrevendo para a secretária de inscrições, Penny Groom, 2a The Chestnuts, Leicester LE8 5TL, England.

Transformação

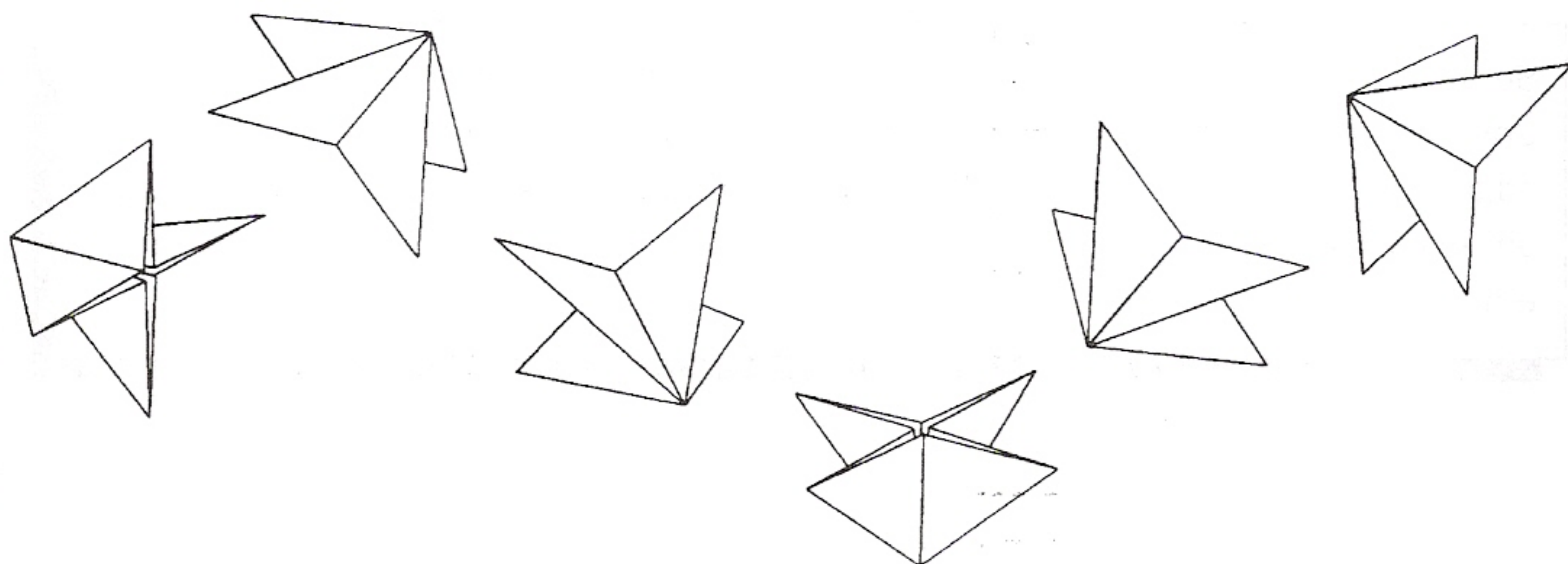


O octaedro esquelético descrito na página 28 é feito de seis módulos idênticos. Se o montar da forma sugerida nessa página e aqui ilustrada, pode ver que a superfície exterior da forma pode ser considerada uma espécie de cubo distorcido. Os oito cantos de um cubo foram metidos para dentro até se encontrarem no centro.

Depois de ter apreciado esta maneira de ver o modelo, volte a separar delicadamente os seis módulos. Estranhamente, é possível montar estes mesmos módulos de maneira a formarem outra figura poliédrica bastante diferente. Esta figura também é uma distorção de um cubo, mas a distorção é feita de uma forma diferente, menos óbvia.

Deixo-o com esta transformação como quebra-cabeças para pensar e resolver. Não tem de adicionar mais vincos a qualquer módulo nem tem de inverter o sentido dos vincos existentes.

Precisará, todavia, de uma grande dose de pensamento lateral!



Bibliografia

Quem quiser explorar mais profundamente os aspectos matemáticos do origami poderá estar igualmente interessado em consultar os seguintes livros:

Origami for the Connoisseur, de Kasahara e Takahama

Publicado em Inglês por *Japan Publications Inc.* (ISBN 0 87040 670 1)

Além de alguns notáveis modelos representativos, este livro contém dobragens poliédricas modulares e unitárias de grandes dobradores japoneses, muitos dos quais são professores e catedráticos de matemática.

Unit Origami, de Tomoko Fuse

Publicado em Japonês por Chukuma (ISBN 4 480 04078 1)

Uma obra clássica que se concentra principalmente na forma como os módulos dobrados podem ser utilizados para dividir as faces de cada um dos poliedros platónicos em segmentos modelados de várias maneiras. Embora o texto seja em Japonês, as figuras são claras, utilizam símbolos-padrão internacionais e são fáceis de seguir. É possível que este livro esteja esgotado e seja difícil de obter.

Multi-Dimensional Transformations, de Tomoko Fuse

Publicado em Inglês por *Japan Publications Inc.* (ISBN 0 87040 852 6)

Uma colecção variada de engenhosos modelos modulares representados em figuras pelo estilo claro e elegante habitual de Tomoko.

Brilliant Origami, de David Brill

Publicado em Inglês por *Japan Publications Inc.* (ISBN 0 87040 896 8)

Contém muitas dobragens modulares encantadoras, bem como a espantosa obra representativa do autor, incluindo uma porca e um parafuso que funcionam.

The Encyclopedia of Origami and Papercraft Techniques, de Paul Jackson

Publicado por *Headline Book Publishing* (ISBN 0 7472 0416 0)

Contém muito material de interesse sobre origami modular e unitário, bem como outros trabalhos manuais com papel, mais naturalmente orgânicos.

Se gostou deste livro, há outros livros que lhe poderão interessar, incluindo *Compound Polyhedra*, *Stellated Polyhedra* e a colecção "Make Shapes..." da editora *Tarquin Publications*. Pode adquiri-los nas livrarias, ou, se tiver dificuldade em encontrá-los, directamente da *Editora Replicação, Lda.*, distribuidora exclusiva em Portugal dos materiais *Tarquin*.