დ. ნატროშვილი

ლ. გიორგაშვილი, გ. ჯაშიაშვილი

მათემატიკა ეკონომისტებისათვის

დ. ნატროშვილი

ლ. გიორგაშვილი, გ. ჯაშიაშვილი

მათემატიკა ეკონომისტებისათვის

საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ უმაღლესი სასწავლებლების ეკონომიკური და საბანკო-საფინანსო სპეციალობების სტუდენტებისათვის

თბილისი
გამომცემლობა „ახალი ივირონი“
2008

ავტორები:

დავით ნატროშვილი, ლევან გიორგაშვილი, გურამ ჯაშიაშვილი

„მათემატიკა ეკონომისტებისათვის" განკუთვნილია სახელმძღვანელოდ უმაღლესი სასწავლებლების ეკონომიკური და საბანკო-საფინანსო პროფილის ბაკალავრის საფეხურის სტუდენტებისათვის. იგი დაწერილია მსოფლიოს წამყვან უნივერსიტეტებში მოქმედი და მრავალი წლის განმავლობაში აპრობირებული პროგრამების შესაბამისად. თავისი შინაარსით, სტრუქტურითა და სტილით წიგნი არსებითად განსხვავდება ქართულ ენაზე აქამდე გამოქვეყნებული ანალოგიური დანიშნულების სახელმძღვანელოებისაგან. წიგნში ძირითადი აქცენტი გადატანილია მათემატიკური მასალის ეკონომიკურ ინტერპრეტაციაზე და ეკონომიკის მათემატიკური მოდელების გაანალიზებაზე.

შემოთავაზებული წიგნი წარმოადგენს ამავე სახელწოდების სახელმძღვანელოს მეორე — შესწორებულ და გაფართოებულ გამოცემას.

რედაქტორი: პროფესორი დ. ნატროშვილი

რეცენზენტები: აკადემიკოსი თ. ბურჭულაძე
პროფესორი კ. ლურწკაია
დოცენტი ო. კუპატაძე
დოცენტი ო. მელაძე
დოცენტი ტ. კიკვაძე
დოცენტი ი. ცაგარელი

შესავალი

უნდა შევისწავლოთ მხოლოდ აუცილებელი
და არა ყველაფერი, რაც გზად შეგვხვდება.

სოკრატე

მათემატიკის წინამდებარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი სასწავლებლების ეკონომიკური და ფინანსური პროფილის ბაკალავრის საფეხურის სტუდენტებისათვის.

ზოგადი მეთოდოლოგიისა და კონკრეტული მათემატიკური საკითხების შერჩევისას ჩვენ გავყევით იმ გზას, რომელიც მრავალი წლის განმავლობაში წარმატებითაა აპრობირებული მსოფლიოს წამყვან უნივერსიტეტებში.

ეს წიგნი შინაარსით, სტრუქტურითა და სტილით არსებითად განსხვავდება ქართულ ენაზე გამოქვეყნებული ანალოგიური დანიშნულების სხვა სახელმძღვანელოებისაგან. მის უმთავრეს ღირსებად მიგვაჩნია ის, რომ:

(ა) სახელმძღვანელო ემყარება საკმარისად მცირე მოცულობის საბაზისო ცოდნას და თვითონ აფართოებს მას ლოგიკურად და ოპტიმალურად საჭიროების მიხედვით;

(ბ) ეკონომიკური და ფინანსური პროფილის სტუდენტს (ან მსგავსი საკითხებით დაინტერესებულ პირს) სახელმძღვანელოს კითხვისას ეჭვი არ გაუჩნდება, რომ მას სთავაზობენ ისეთ აბსტრაქტულ მასალას, რომელიც არ ეხება მისი ინტერესების სფეროს;

(გ) არამათემატიკოსისათვის სახელმძღვანელო ადვილად იკითხება და მარტივად ასათვისებელია;

(დ) სერიოზულად დაინტერესებულ და მონდომებულ მკითხველს სახელმძღვანელო მისცემს საკმარისად ფართო კლასის მათემატიკური მეთოდების პრაქტიკულ ცხოვრებაში გამოყენების უნარ-ჩვევებს.

ამ სახელმძღვანელოს შესწავლა შეუძლია დაიწყოს იმ მკითხველმა, ვინც ფლობს ელემენტარულ მათემატიკურ ცოდნას, კერძოდ, ვინც იცის მოქმედებები არითმეტიკულ და ალგებრულ წილადებზე და გააჩნია მათემატიკურ

ამოცანებზე მუშაობის უმარტივესი ჩვევები. დანარჩენი საჭირო მასალა მათემატიკის სასკოლო კურსიდან შედარებით კომპაქტურად, მაგრამ სრულყოფილად, თვით სახელმძღვანელოში არის ასახული.

სახელმძღვანელოს თითქმის ყველა თავი და პარაგრაფი იწყება იმ ტიპობრივი ეკონომიკური ამოცანების განხილვით, რომელთა ამოხსნისა და გაანალიზებისათვის საჭირო მათემატიკური აპარატი გადმოცემულია შესაბამის განაკვეთში. ამის გამო, ეკონომიკური პრობლემების სიღრმისეული შესწავლით სერიოზულად დაინტერესებული სტუდენტი ყოველგვარი ეჭვის გარეშე იგრძნობს შეთავაზებული მათემატიკური მეთოდების დაუფლების აუცილებლობას.

ამ სახელმძღვანელოს წერისას ჩვენ შეგნებულად ავუარეთ გვერდი ზოგიერთი მათემატიკური დებულების დამოუკიდებელი თეორემის სახით ჩამოყალიბებასა და დამტკიცებას. დავკმაყოფილდით მხოლოდ მათი სიტყვიერი დახასიათებით და კონკრეტულ მაგალითებზე ინტერპრეტაციით.

ახალი მათემატიკური მეთოდის არსის ახსნის შემდეგ ფართოდ ვახდენთ მისი გამოყენების ილუსტრაციას ეკონომიკური შინაარსის ამოცანებზე. მრავალი ეკონომიკური ამოცანა და მაგალითი წიგნში დაწვრილებითაა ამოხსნილი და გაანალიზებული, რაც ახალისებს მკითხველს და ადვილად ასათვისებელს ხდის მასალას.

ყოველ განყოფილებას ერთვის დამოუკიდებელი სამუშაო მასალა მრავალრიცხოვანი სავარჯიშოების სახით, რომელთა დიდი ნაწილი ეკონომიკური და ფინანსური შინაარსის ამოცანებია. მათი დამოუკიდებლად ამოხსნა დიდად დაეხმარება სტუდენტს პრაქტიკული ამოცანების ოპტიმალურად გადაჭრის უნარ-ჩვევების გამომუშავებაში.

სასურველი მასალის მოძებნის გაადვილების მიზნით, სახელმძღვანელოს ბოლოში დართული აქვს საგნობრივი საძიებელი, რომელიც დალაგებულია ანბანური რიგით მთავარი თემატიკური ტერმინების მიმართ.

წიგნის მოცულობის შეზღუდულობის გამო, სახელმძღვანელოში ვერ აისახა ისეთი მნიშვნელოვანი თემები, როგორიცაა ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდები, ოპერაციული გამოკვლევა, დინამიკური და არაწრფივი დაპროგრამების საკითხები და სხვა. აღნიშნული მასალა შევა ცალკე სახელმძღვა-

ნელოში, რომელიც, ფაქტობრივად, ამ წიგნის გაგრძელება იქნება.

ავტორები დიდი სიამოვნებითა და გულისხმიერებით მიიღებენ ყველა იმ შენიშვნას, რომელიც სახელმძღვანელოს გაუმჯობესების სურვილით იქნება გამოთქმული.

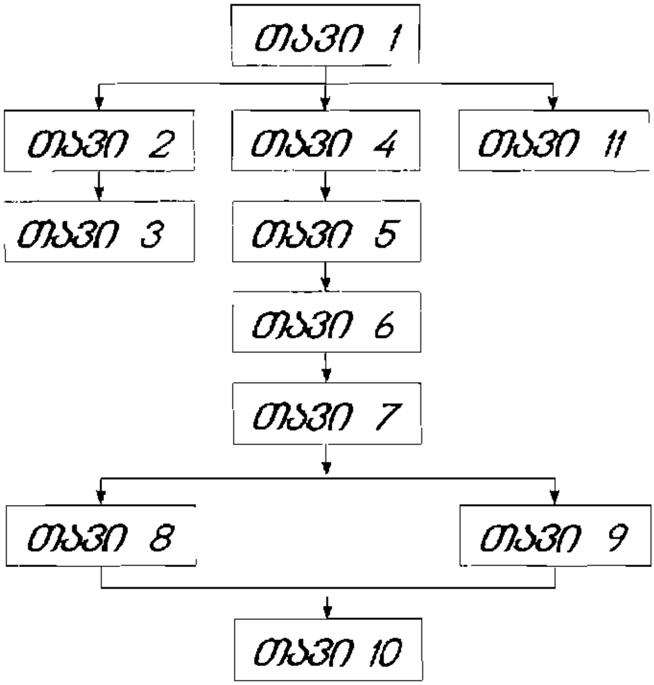
განსაკუთრებული მადლიერების გრძნობით გვინდა აღვნიშნოთ რეცენზენტების: აკადემიკოს თ. ბურჭულაძის, პროფესორ კ. ღურწკაიას, დოცენტ ტ. კიკვაძის, დოცენტ ო. კუპატაძის, დოცენტ ო. მელაძისა და დოცენტ ი. ცაგარელის მიერ გაწეული შრომა, რომლის წყალობითაც სახელმძღვანელოს ტექსტი კიდევ უფრო დაიხვეწა ტერმინოლოგიურად და სტილისტურად.

დიდი მადლობა გვინდა გადავუხადოთ საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის უმაღლესი მათემატიკის №99 კათედრის თანამშრომლებს: ე.ელერდაშვილს, ზ.თედიაშვილს, ი.სიგუას, ქ.სხვიტარიძეს, გ.ქარსელაძეს, მ.ხარაშვილს, მ.ხმიადაშვილსა და ლ.შონიას, რომლებმაც არსებითი დახმარება გაგვიწიეს სახელმძღვანელოს ტექსტის ხელნაწერის მომზადებაში.

ავტორები

მაისი, 2007 წ.

სახელმძღვანელოს სქემატური აგებულება



გამოყენებული სიმბოლიკა:

● განსაზღვრების ან თემატიკურად მნიშვნელოვანი დებულების დასაწყისი.

▼ ამოცანის ამოხსნის ან თეორემის დამტკიცების დასაწყისი.

■ განსაზღვრების, ამოცანის ამოხსნის, თემატიკურად მნიშვნელოვანი დებულების ან თეორემის დამტკიცების დასასრული.

$(n.k)$ ფორმულის ნომერი: n მიუთითებს თავის ნომერს, k კი — რიგით ნომერს მოცემულ თავში.

$m.j$ პარაგრაფის ნომერი: m მიუთითებს თავის ნომერს, j კი — რიგით ნომერს მოცემულ თავში.

მკითხველის ყურადღების გამახვილების მიზნით არსებითი მნიშვნელობის მქონე ფორმულები და დებულებები ჩასმულია მართკუთხა ჩარჩოში.

სარჩევი

თავი 1. ელემენტარული მათემატიკა და ეკონომიკის უმარტივესი მათემატიკური მოდელები

ამ თავში ჩვენი ძირითადი მიზანია გავიმეოროთ მათემატიკის სასკოლო კურსის ის მასალა, რომელსაც სისტემატურად გამოვიყენებთ შემდგომში. არჩევანი შევაჩერეთ ისეთ უმარტივეს საკითხებზე, როგორიცაა სიმრავლეები, ნამდვილი რიცხვები და მათი დამრგვალება, პროცენტები, ერთცვლადიანი და ორცვლადიანი წრფივი განტოლებები და უტოლობები, წრფის განტოლება. ეს მასალა ძირითადად წარმოდგენილია საცნობარო ფორმით, რადგანაც სკოლაში მათ შესწავლას საკმარისად დიდი დრო ეთმობა.

შედარებით დაწვრილებითაა განხილული მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები, რომელთაც დიდი გამოყენება აქვთ ეკონომიკისა და ფინანსების თეორიის მრავალ სფეროში. ეს საკითხები შეისწავლება საშუალო სკოლის მაღალ კლასებში და განათლების თანამედროვე დიფერენცირებული სწავლების მოდელის მოქმედებისას მოსწავლეთა გარკვეულ ნაწილს ისინი ან საერთოდ არა აქვთ შესწავლილი სკოლაში, ან შესწავლილი აქვთ არასაკმარისი დონით.

ამ ტრადიციული საკითხების გარდა გადავწყვიტეთ ამავე თავში ჩაგვერთო რამდენიმე თემა, რომელიც არაა შესული თანამედროვე სასკოლო მათემატიკის პროგრამაში, მაგრამ ორგანულად ერწყმის მას. ასეთებია კომპლექსური რიცხვები, კომბინატორიკის ელემენტები და ნიუტონის ბინომური ფორმულა.

თეორიული მასალის გადმოცემასთან ერთად შევეცადეთ ფართოდ წარმოგვეჩინა ზემოთ მითითებული უმარტივესი მათემატიკური აპარატის გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში. ვფიქრობთ, მკითხველი ისიამოვნებს იმის აღმოჩენით, რომ მათემატიკის სრულიად ელემენტარული მასალის ცოდნით შესაძლებელი ყოფილა მრავალი, ერთი შეხედვით რთული, ეკონომიკური ამოცანის ამოხსნა.

1.1. სიმრავლის ცნება

სიმრავლის ცნება იმდენად პირველადია, რომ იგი არ განისაზღვრება უფრო მარტივი ცნებების საშუალებით. ამიტომ ჩვენ სიმრავლის ცნებას კონკრეტულ მაგალითებზე გავეცნობით. მაგალითად, განვიხილოთ ქართული ანბანის ყველა ასოს სიმრავლე, რომელიმე ბიბლიოთეკის ყველა წიგნის სიმრავლე, რომელიმე ფირმის თანამშრომლების სიმრავლე, რომელიმე ქალაქის სუპერმარკეტების სიმრავლე და სხვა.

იმ ობიექტებს, რომლებისგანაც სიმრავლე შედგება, სიმრავლის ელემენტები ეწოდება. ზემოთ მოყვანილ პირველ მაგალითში სიმრავლის ელემენტებია ქართული ანბანის ასოები, მეორეში — წიგნები, მესამეში — ადამიანები, მეოთხეში — სუპერმარკეტები.

ზოგადად, სიმრავლე მოცემულად ითვლება, თუ დასახელებულია ან რაიმე წესით აღწერილია ყველა მისი ელემენტი. სიმრავლის ელემენტებს, როგორც წესი, წერენ ფიგურულ ფრჩხილებში. მაგალითად,

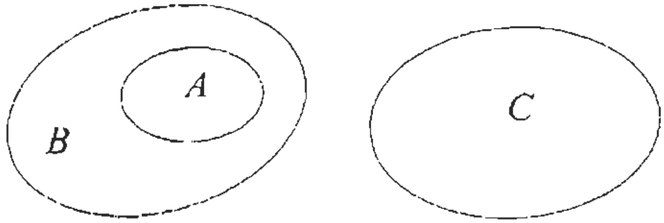
$$A=\{1;\ 2;\ 3;\ 5\},\qquad B=\{\,x\ \mid\ x^2-4=0\,\}.$$

აქ A სიმრავლე აღწერილია ყველა მისი ელემენტის დასახელებით, B სიმრავლე კი — იმ პირობით, რასაც აკმაყოფილებენ მისი ელემენტები: B არის სიმრავლე ყველა იმ x რიცხვისა, რომლისთვისაც $x^2-4=0$. ცხადია, რომ B შეიცავს მხოლოდ ორ ელემენტს: 2-ს და -2-ს. ამიტომ შეგვეძლო დაგვეწერა ასეც: $B=\{-2;\ 2\}$.

თუ A რაიმე სიმრავლეა, ხოლო a წარმოადგენს რაიმე ობიექტს, მაშინ ჩანაწერი $a\in A$ ნიშნავს, რომ a არის A სიმრავლის ელემენტი და იკითხება ასე: „a შედის A სიმრავლეში" ან „a ეკუთვნის A სიმრავლეს". თუ a ობიექტი არ ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაშინ წერენ $a\notin A$ ან $a\,\overline{\in}\,A$.

სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ ელემენტს, **ცარიელი სიმრავლე** ეწოდება და აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი.

ხშირად, თვალსაჩინოების მიზნით, სიმრავლეებს სქემატურად გამოსახავენ სიბრტყის ფიგურების სახით (იხ. ნახ. 1.1).



ნახ. 1.1

შემოვიღოთ ახლა რამდენიმე მნიშვნელოვანი განმარტება.

● A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ნაწილი ანუ **ქვესიმრავლე**, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლესაც (იხ. ნახ. 1.1). ■

ამ შემთხვევაში წერენ

$$A \subset B \quad \text{ან} \quad B \supset A,$$

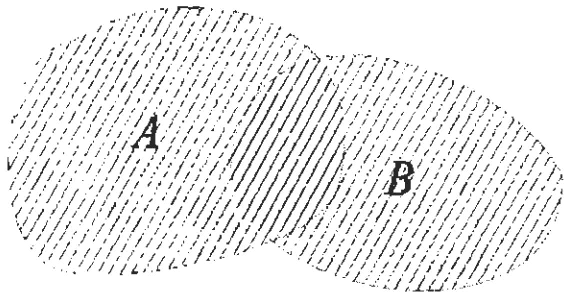
და ასე კითხულობენ: „A სიმრავლე შედის B სიმრავლეში" ან „B სიმრავლე მოიცავს A სიმრავლეს".

● თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი შედის B სიმრავლეში (ე. ი. $A \subset B$) და, პირიქით, B სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს (ე. ი. $A \supset B$), მაშინ A და B სიმრავლეებს **ტოლი სიმრავლეები** ეწოდება და წერენ

$$A = B. \qquad \blacksquare$$

მაგალითად, $C = \{1;\ 7;\ 9\}$ და $D = \{9;\ 1;\ 7\}$ სიმრავლეები ტოლია.

● ორი A და B **სიმრავლის ჯამი** ანუ **გაერთიანება** ეწოდება სიმრავლეს ყველა იმ ელემენტისა, რომელიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნის. A და B სიმრავლეების ჯამი აღინიშნება $A \cup B$ სიმბოლოთი (იხ. ნახ. 1.2). ■

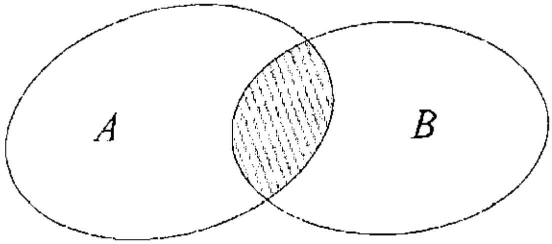


ნახ. 1.2

სიმრავლეთა ჯამი შეიძლება განისაზღვროს სიმრავლეთა ნებისმიერი რაოდენობისათვის. ვთქვათ, გვაქვს სიმრავლეთა სისტემა $A_1, A_2, \dots, A_n$, სადაც $n \geq 2$ ნატურალური რიცხვია. ამ სიმრავლეების ჯამი ეწოდება სიმრავლეს ყველა იმ ელემენტისა, რომელიც ეკუთვნის მოცემული სისტემის ერთ-ერთ სიმრავლეს მაინც. სიმრავლეთა ჯამი ასე აღინიშნება

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

● ორი A და B სიმრავლის **თანაკვეთა** ეწოდება სიმრავლეს ყველა იმ ელემენტისა, რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის როგორც A, ისე B სიმრავლეს. A და B სიმრავლეების თანაკვეთა $A \cap B$ სიმბოლოთი აღინიშნება (იხ. ნახ. 1.3). ■



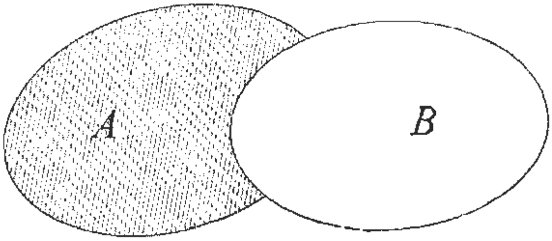
ნახ. 1.3

თანაკვეთის განმარტება შეიძლება განზოგადდეს სიმრავლეთა ნებისმიერი რაოდენობის შემთხვევაში. კერძოდ, თუ კვლავ განვიხილავთ სიმრავლეთა $A_1, A_2, \dots, A_n$ სისტემას, მაშინ მათი თანაკვეთა ეწოდება სიმრავლეს ყველა იმ ელემენტისა, რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის აღებული სისტემის ყველა სიმრავლეს. სიმრავლეთა თანაკვეთა ასე აღინიშნება

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

თუ A და B სიმრავლეების თანაკვეთა ცარიელია, $A \cap B = \varnothing$, მაშინ მათ **ურთიერთარათანამკვეთი სიმრავლეები** ეწოდება.

● A და B სიმრავლეების **სხვაობა** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტს, რომელიც არ ეკუთვნის B სიმრავლეს. A და B სიმრავლეების სხვაობა აღინიშნება $A \setminus B$ სიმბოლოთი (იხ. ნახ. 1.4). ■



ნახ. 1.4

● სიმრავლეს ეწოდება **სასრული,** თუ იგი შეიცავს ელემენტების სასრულ რაოდენობას. წინააღმდეგ შემთხვევაში სიმრავლეს ეწოდება **უსასრულო.** ■

თუ სიმრავლის ელემენტები რიცხვებია, მაშინ მას **რიცხვითი** სიმრავლე ეწოდება. ჩვენ მათ დაწვრილებით განვიხილავთ მომდევნო პარაგრაფებში.

ამოცანა 1.1. სასპორტო მაღაზიაში 160 ადამიანია, რომელთაგან 80-ს სურს შეიძინოს თხილამურები, ხოლო 70-ს – ციგები. 20 ადამიანს სურს შეიძინოს როგორც თხილამურები, ასევე ციგები. დავადგინოთ:

(ა) რამდენი ადამიანი შეიძენს მხოლოდ თხილამურებს?

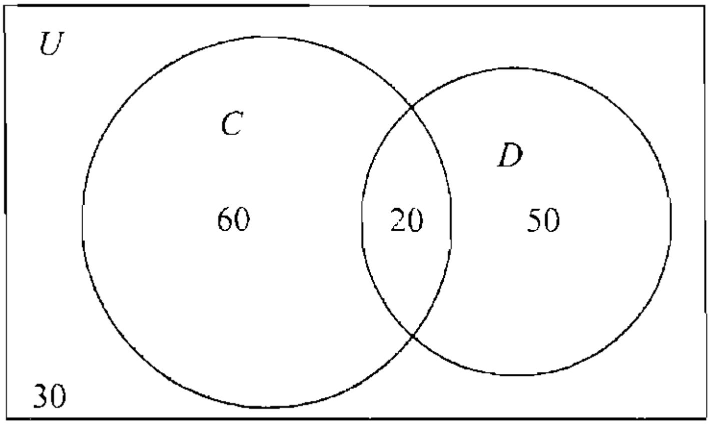
(ბ) რამდენი ადამიანი შეიძენს მხოლოდ ციგებს?

(გ) რამდენი ადამიანი შეიძენს თხილამურებს ან ციგებს?

(დ) რამდენი ადამიანი არ შეიძენს არც თხილამურებს და არც ციგებს?

▼ მაღაზიაში მყოფ ადამიანთა სიმრავლე აღვნიშნოთ U ასოთი, ამ სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა კი – $n(U)$ სიმბოლოთი. პირობის თანახმად $n(U)=160$. იმ ადამიანთა სიმრავლე, რომლებსაც სურთ შეიძინონ თხილამურები, აღვნიშნოთ C ასოთი. პირობის თანახმად $n(C)=80$. იმ ადამიანთა სიმრავლე, რომლებსაც სურთ შეიძინონ ციგები, აღვნიშნოთ D ასოთი. ამ სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობაა $n(D)=70$. იმ ადამიანთა სიმრავლე, რომლებსაც სურთ შეიძინონ როგორც თხილამურები, ასევე ციგები, არის $C\bigcap D$ და მათი რაოდენობაა $n(C\bigcap D)=20$.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი ნახაზი (იხ. ნახ. 1.5):



ნახ. 1.5

ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ:

(ა) იმ ადამიანთა რაოდენობა, რომლებსაც სურთ შეიძინონ მხოლოდ თხილამურები, არის $n\left(C\setminus D\right)=n\left(C\right)-n\left(C\bigcap D\right)=80-20=60$;

(ბ) იმ ადამიანთა რაოდენობა, რომლებსაც სურთ შეიძინონ მხოლოდ ციგები, არის $n\left(D\setminus C\right)=n\left(D\right)-n\left(C\bigcap D\right)=70-20=50$;

(გ) იმ ადამიანთა რაოდენობა, რომლებსაც სურთ შეიძინონ თხილამურები ან ციგები, არის $n\left(C\bigcup D\right)=130$;

(დ) იმ ადამიანთა რაოდენობა, რომლებიც არ შეიძენენ არც თხილამურებს და არც ციგებს, არის $n\left(U\right)-n\left(C\bigcup D\right)=160-130=30$. ■

1.2. ნამდვილი რიცხვები

რიცხვის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა.

● თვლის შედეგად მიღებულ რიცხვებს **ნატურალური რიცხვები** ეწოდება. ■

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს აღნიშნავენ $\mathbb{N}$ ასოთი: $\mathbb{N}=\left\{1;2;\ \ldots\right\}$. ყოველი $n\in\mathbb{N}$ რიცხვისათვის არსებობს მისი მოპირდაპირე $-n$ მთელი უარყოფითი რიცხვი.

● ნატურალურ რიცხვებს, მათ მოპირდაპირე რიცხვებსა და ნულს **მთელი რიცხვები** ეწოდება. ■

მთელ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება $\mathbb{Z}$ ასოთი: $\mathbb{Z}=\{0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots\}$.

● $\frac{m}{n}$ სახის წილად რიცხვებს, სადაც $m\in\mathbb{Z}$ და $n\in\mathbb{N}$, **რაციონალური რიცხვები** ეწოდება. ■

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება $\mathbb{Q}$ ასოთი:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\ \middle|\ m\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}\right\}.$$

● წილადს, რომლის მნიშვნელია 10^n, სადაც $n\in\mathbb{N}$, **ათწილადი რიცხვი** ეწოდება. ■

$\frac{m}{n}$ სახის წილადი რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს ათწილადის სახითაც.

ათწილადი რიცხვების სიმრავლე შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\left\{\, a.b_1b_2b_3\ldots \ \middle|\ a\in\mathbb{Z},\quad b_1,b_2,\ldots,b_n\in\{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;9\}\,\right\}.$$

შევნიშნოთ, რომ ათწილადი რიცხვების ჩაწერისას მთელი და წილადური ნაწილები გამოყოფილი იქნება წერტილით (და არა მძიმით).

არსებობს სასრული, უსასრულო პერიოდული და უსასრულო არაპერიოდული ათწილადები.

● უსასრულო ათწილადს, რომელშიც ერთი ან რამდენიმე ციფრისაგან შედგენილი ჯგუფი უცვლელად მეორდება ერთი და იმავე მიმდევრობით, **პერიოდული ათწილადი** ეწოდება. ■

მაგალითად, $7.3535\ldots=7.(35)$ ან $7.15777\ldots=7.15(7)$.

ციფრს ან ციფრთა ჯგუფს, რომელიც პერიოდულად მეორდება, **პერიოდი** ეწოდება. არსებობს ორი სახის პერიოდული ათწილადი: წმინდა **პერიოდული** და **შერეული პერიოდული** ათწილადი.

თუ პერიოდულ ათწილადში პერიოდი იწყება უშუალოდ წერტილის შემდეგ, მაშინ ათწილადს წმინდა პერიოდული ათწილადი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — შერეული პერიოდული ათწილადი.

ზემოთ მოტანილი პერიოდული ათწილადებიდან, პირველი წმინდა პერიოდული ათწილადია, მეორე კი – შერეული პერიოდული ათწილადი. უსასრულო პერიოდული ათწილადი შეიძლება წარმოვადგინოთ ჩვეულებრივი წილადის სახით.

მაგალითად, გადავაქციოთ წმინდა პერიოდული ათწილადი

$$x = 0.4343... = 0.(43)$$

ჩვეულებრივ წილადად. რადგან

$$100x = 43.4343... = 43 + 0.4343... = 43 + x,$$

ამიტომ $100x - x = 43$. აქედან $x = \dfrac{43}{99}$.

მაშასადამე, წმინდა პერიოდული ათწილადი რომ გადავაქციოთ ჩვეულებრივ წილადად, საჭიროა, პერიოდი გავყოთ იმდენი ცხრიანით შედგენილ რიცხვზე, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში. ანალოგიურად შეიძლება შერეული პერიოდული ათწილადის წარმოდგენა ჩვეულებრივი წილადის სახით. ამისათვის საჭიროა, რიცხვს წერტილიდან პერიოდის ბოლომდე გამოვაკლოთ რიცხვი წერტილიდან პერიოდამდე და მიღებული სხვაობა გავყოთ რიცხვზე, რომელიც გამოსახულია იმდენი ცხრიანით, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში, და მარჯვნივ მიწერილი იმდენი ნულით, რამდენი ციფრიცაა წერტილიდან პერიოდამდე.

მაგალითად,

$$3.41(6) = 3\,\frac{416-41}{900} = 3\,\frac{375}{900} = 3\,\frac{5}{12}.$$

შევნიშნოთ, რომ ჩვეულებრივი სასრული ათწილადი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც პერიოდული ათწილადი, რომლის პერიოდია ნული.

მტკიცდება, რომ უსასრულო პერიოდული ათწილადების სიმრავლე იგივეა, რაც რაციონალური რიცხვების სიმრავლე.

● უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს **ირაციონალური რიცხვი** ეწოდება. ■

ასეთებია, მაგალითად, $\sqrt{2} \approx 1.4142136...$, $\pi \approx 3.14...$.

● რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანე-

ბას **ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე** ეწოდება. ■

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება ℝ ასოთი. რიცხვები, რომლებთანაც საქმე გვაქვს პრაქტიკაში ორი სახისაა. ერთნი ზუსტად იძლევიან ნამდვილ სიდიდეს, სხვები კი — მხოლოდ მიახლოებით. პირველს **ზუსტ რიცხვებს** უწოდებენ, მეორეს კი — **მიახლოებით რიცხვებს**.

მაგალითად, გამონათქვამში „წიგნში 420 გვერდია", რიცხვი 420 არის ზუსტი რიცხვი, რადგან ეს რიცხვი ზუსტად მიუთითებს გვერდების რაოდენობას მოცემულ წიგნში. ხოლო წინადადებაში „გამყიდველმა სასწორზე, რომლის მინიმალური დანაყოფი შეესაბამება 10 გრამს, აწონა 500გ კარაქი", რიცხვი 500 არის მიახლოებითი, ვინაიდან სასწორი არაა მგრძნობიარე, მაგალითად, 0.5გ წონის მომატების ან მოკლების მიმართ.

პრაქტიკაში ხშირად გვიხდება როგორც მიახლოებითი, ისე ზუსტი ათწილადი რიცხვების დამრგვალება, როდესაც მათ ჩამოვაცილებთ ერთ ან რამდენიმე უკანასკნელ ციფრს. იმის უზრუნველსაყოფად, რომ დამრგვალებული რიცხვი უფრო მეტად უახლოვდებოდეს დასამრგვალებელ რიცხვს, უნდა დავიცვათ შემდეგი სამი წესი:

(ა) თუ ჩამოცილებული ციფრებიდან პირველი მეტია ხუთზე, მაშინ შენარჩუნებული ციფრებიდან უკანასკნელი დიდდება ერთი ერთეულით. შენარჩუნებულ უკანასკნელ ციფრს ადიდებენ ერთი ერთეულით მაშინაც, თუ ჩამოცილებული ციფრებიდან პირველი 5-ის ტოლია და მას მოსდევს ერთი ან რამდენიმე ნიშნადი ციფრი (ნულისგან განსხვავებული ციფრი).

მაგალითად, 27.874-ის პირველ ათწილად ნიშნამდე (მეათედამდე) დამრგვალების შემდეგ გვექნება 27.9 მეათედების შესაბამისი ციფრი 8 გადიდდა ერთი ერთეულით, ვინაიდან ჩამოცილებულ ციფრთაგან პირველი ანუ 7 მეტია 5-ზე. რიცხვი 27.9 უფრო ახლოს არის მოცემულ რიცხვთან, ვიდრე რიცხვი 27.8 .

ამავე წესის თანახმად 9.4501-ის დამრგვალებით მეათედამდე სიზუსტით მივიღებთ 9.5-ს, რადგან პირველი ჩამოცილებული ციფრი 5-ის ტოლია და მას მოსდევს ნიშნადი ციფრები.

(ბ) თუ ჩამოცილებული ციფრებიდან პირველი ნაკლებია 5-ზე, მაშინ

შენარჩუნებული ციფრებიდან უკანასკნელს არ ადიდებენ ერთი ერთეულით.

მაგალითად, 27.482-ის დამრგვალებით მეორე ათწილად ნიშნამდე (მეასედამდე) მივიღებთ რიცხვს 27.48. ეს რიცხვი უფრო ახლოს არის მოცემულ რიცხვთან, ვიდრე რიცხვი 27.49.

(გ) თუ ჩამოცილებული ციფრებიდან პირველი ციფრი არის 5, ხოლო მის შემდეგ არ არის ნიშნადი ციფრები, მაშინ უკანასკნელი შენარჩუნებული ციფრი რჩება უცვლელი, თუ იგი ლუწია და ემატება 1, თუ იგი კენტია.

მაგალითად, 0.0465-ის დამრგვალებით მესამე ათწილად ნიშნამდე (მეათასედამდე) მივიღებთ რიცხვს 0.046, ხოლო 0.935-ის მეორე ათწილად ნიშნამდე (მეასედამდე) დამრგვალებით მივიღებთ 0.94-ს.

ანალოგიურად ხდება მთელი რიცხვების დამრგვალება, იმ განსხვავებით, რომ ბოლო ციფრების ჩამოცილების მაგიერ ისინი ნულით იცვლება.

აშკარაა, რომ რიცხვის დამრგვალებისას საქმე გვაქვს გარკვეულ ცდომილებასთან. განიხილავენ ორი სახის ცდომილებას: აბსოლუტურსა და ფარდობითს.

● მიახლოებითი რიცხვის **აბსოლუტური ცდომილება** ეწოდება ამ რიცხვისა და მისი ზუსტი მნიშვნელობის სხვაობას (უდიდესს აკლდება უმცირესი). ■

მაგალითად, 1284-ის ასეულებამდე სიზუსტით დამრგვალებით მივიღებთ რიცხვს 1300. ამ შემთხვევაში აბსოლუტური ცდომილება იქნება $1300-1284=16$. თუ იმავე რიცხვს დავამრგვალებთ ათეულებამდე სიზუსტით, მივიღებთ რიცხვს 1280. ამ შემთხვევაში აბსოლუტური ცდომილება იქნება $1284-1280=4$.

● მიახლოებითი რიცხვის **ფარდობითი ცდომილება** ეწოდება მიახლოებითი რიცხვის აბსოლუტური ცდომილების შეფარდებას თვით ამ რიცხვთან. ■

მაგალითად, ვთქვათ, გამყიდველი შაქარს წონის სასწორზე, რომლის თითოეული დანაყოფი შეესაბამება 10გ-ს. გამყიდველმა აწონა 500გ შაქარი. ეს რიცხვი მიახლოებითი რიცხვია (ზუსტი წონა უცნობია). ცხადია, აბ-

სოლუტური ცდომილება არ აღემატება 10 გრამს. ფარდობითი ცდომილება კი არ გადააჭარბებს $\frac{10}{500} = 0.02$-ს.

1.3. პროცენტები

პროცენტები გვხვდება ადამიანთა ცხოვრებისა და მოღვაწეობის თითქმის ყველა სფეროში. მათ განსაკუთრებით დიდი და მრავალმხრივი გამოყენება აქვთ ეკონომიკაში.

● პროცენტი ეწოდება რიცხვის მეასედ ნაწილს და აღინიშნება სიმბოლოთი %. ■

ამ პარაგრაფში პროცენტებთან დაკავშირებით განვიხილავთ მხოლოდ შემდეგი სამი ტიპის ამოცანას.

(ა) ვიპოვოთ მოცემული a რიცხვის მოცემული K პროცენტი.

▼ ამ ამოცანის ამოსახსნელად მოცემული a რიცხვი უნდა გავამრავლოთ პროცენტების K რიცხვზე და შედეგი გავყოთ 100-ზე (ანუ a რიცხვის მეასედი გავამრავლოთ K რიცხვზე)

$$\boxed{b = \frac{a \cdot K}{100}} \quad ■ \tag{1.1}$$

ამოცანა 1.2. გეგმის მიხედვით შახტში ქვანახშირის სადღეღამისო მოპოვება 2860 ტონას უნდა უდრიდეს. მეშახტეთა ბრიგადამ აიღო ვალდებულება, რომ გეგმა 115%-ით შეასრულოს. რამდენ ტონა ქვანახშირს ამოიღებს ბრიგადა დღე-ღამეში?

▼ ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ბრიგადამ ვალდებულების შესაბამისად უნდა ამოიღოს ქვანახშირის ის რაოდენობა, რომელიც ტოლია 2860-ის 115 პროცენტისა. თუ გამოვიყენებთ (1.1) ფორმულას, მივიღებთ:

$$b = \frac{2860 \cdot 115}{100} = 3289 \quad (\text{ტ}). \ ■$$

(ბ) ვიპოვოთ a რიცხვი, თუ ცნობილია, რომ მისი $K\%$ უდრის b-ს.

▼ ცხადია, ამ ამოცანის ამოსახსნელად (1.1) ტოლობიდან უნდა განისა-

ზღვრის a რიცხვი. ამისათვის კი მოცემული b სიდიდე უნდა გავყოთ პროცენტების K რიცხვზე და შედეგი გავამრავლოთ 100-ზე:

$$\boxed{a = \frac{b \cdot 100}{K}} \quad \blacksquare \qquad (1.2)$$

ამოცანა 1.3. შაქრის ფხვნილის წონა შეადგენს გადამუშავებული შაქრის ჭარხლის 12.5 %-ს. რამდენი შაქრის ჭარხალია საჭირო 3 000 ტ შაქრის ფხვნილის დასამზადებლად?

▼ ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ უნდა ვიპოვოთ ისეთი a რიცხვი, რომლის 12.5 % უდრის 3 000-ს. ამიტომ (1.2) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$a = \frac{3\,000 \cdot 100}{12.5} = 24\,000 \quad (\text{ტ}). \ \blacksquare$$

(გ) ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდების პოვნა.

ამ ამოცანაში მოცემულია ორი a და b რიცხვი და უნდა ვიპოვოთ, a რიცხვის რამდენი პროცენტია b რიცხვი.

▼ საძიებელი K პროცენტის გამოსათვლელად უნდა ვიპოვოთ b და a რიცხვების შეფარდება და შედეგი გავამრავლოთ 100-ზე (იხ. (1.1))

$$\boxed{K = \frac{b \cdot 100}{a}} \quad \blacksquare \qquad (1.3)$$

ამოცანა 1.4. გეგმის მიხედვით დღიურად უნდა ამოეღოთ 161 ტ ნავთობი. ფაქტობრივად, იღებენ 166 ტონას. რამდენი პროცენტით სრულდება ნავთობის მოპოვების გეგმა?

▼ ამოცანის პირობის თანახმად, უნდა ვიპოვოთ 166 და 161 რიცხვების პროცენტული ფარდობა. (1.3) ფორმულის თანახმად მივიღებთ

$$K = \frac{166 \cdot 100}{161} \approx 103.1.$$

ამრიგად, გეგმა სრულდება 103.1 %-ით. ■

პროცენტების გამოყენებას ეკონომიკისა და ფინანსების უფრო რთულ სფეროებში ჩვენ შემდგომში შევეხებით (იხ. თავი 4).

1.4. რიცხვით უტოლობათა თვისებები

ამ პარაგრაფში გავიხსენებთ უტოლობის განმარტებას და გამეორების მიზნით ჩამოვაყალიბებთ რიცხვითი უტოლობის ძირითად თვისებებს.

● ორ გამოსახულებას, რომლებიც შეიძლება ცვლადებსაც შეიცავდნენ, შეერთებულს „>“ (მეტია) ან „<“ (ნაკლებია) ნიშნით უტოლობა ეწოდება. ნამდვილი a და b რიცხვების შემთხვევაში $a>b$ ნიშნავს, რომ $a-b$ სხვაობა დადებითია, ხოლო $a<b$ ნიშნავს, რომ $a-b$ სხვაობა უარყოფითია. ■

გავიხსენოთ, რომ უტოლობებს გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1) თუ $a>b$ და $b>c$, მაშინ $a>c$;

2) თუ $a>b$ და c ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ $a+c>b+c$;

3) თუ $a>b$ და $c>d$, მაშინ $a+c>b+d$;

4) თუ $a>b$ და $c<d$, მაშინ $a-c>b-d$;

5) თუ $a>b$, მაშინ $ac>bc$, როცა $c>0$, და $ac<bc$, როცა $c<0$;

6) თუ $a>b$ (a და b რიცხვებს ერთნაირი ნიშნები აქვთ), მაშინ

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{b};$$

7) თუ $a>b>0$ და $c>d>0$, მაშინ $ac>bd$.

შევნიშნოთ, რომ ყველა ზემოთ მოტანილ თანაფარდობაში მკაცრი უტოლობის ნიშანი $>$ ან $<$ შეიძლება შევცვალოთ, შესაბამისად, არამკაცრი უტოლობის ნიშნით $\geq$ ან $\leq$.

1.5. რიცხვითი შუალედები

ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ $a\leq x\leq b$ უტოლობას, ჩაკეტილი შუალედი (სეგმენტი) ეწოდება და აღინიშნება $[a,b]$ სიმბოლოთი:

$$[a,b]=\{\,x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\,\}.$$

ანალოგიურად,

$$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

სიმრავლეს ღია შუალედი (ინტერვალი) ეწოდება.

სიმრავლეებს

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \},$$

$$(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \},$$

ეწოდება ნახევრად ღია შუალედები.

a და b რიცხვებს განხილული შუალედების საზღვრები ან ბოლოები ეწოდება, $b-a$ რიცხვს კი – შუალედის სიგრძე.

ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $-\infty < x < +\infty$, უსასრულო შუალედი ეწოდება და აღინიშნება $(-\infty, +\infty)$ სიმბოლოთი

$$(-\infty, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty \}.$$

ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $x \geq a$, ნახევრად უსასრულო შუალედი ეწოდება და აღინიშნება $[a, +\infty)$ სიმბოლოთი

$$[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}.$$

შემდეგი სიმრავლეები

$$(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \},$$

$$(-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \},$$

$$(-\infty, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \},$$

აგრეთვე ნახევრად უსასრულო შუალედებია.

1.6. ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე

ნამდვილი a რიცხვის **აბსოლუტური სიდიდე (მოდული)** აღინიშნება სიმბოლოთი $|a|$ და შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ როცა } a \geq 0, \\ -a, \text{ როცა } a < 0. \end{cases}$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი a რიცხვისათვის $|a| \geq 0$, ამასთან, თუ $|a| = 0$, მაშინ $a = 0$.

განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $|5| = 5$ და $|-5| = -(-5) = 5$.

ზოგადად, ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტურ სიდიდეს აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $|-a| = |a|$,

2) $|a+b| \leq |a|+|b|$,

3) $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$,

4) $|a\,b| = |a|\,|b|$,

5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

შევნიშნოთ, რომ თუ a-ს და b-ს ერთნაირი ნიშნები აქვს, მაშინ მეორე და მესამე თვისებებში გვექნება ტოლობის ნიშნები. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი – მკაცრი უტოლობის ნიშნები. მაგალითად,

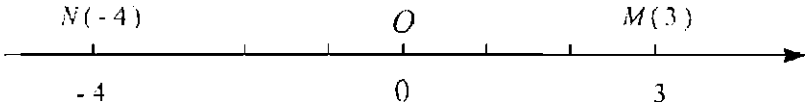
$$|5-2| = |5+(-2)| < |5|+|-2| = 7, \qquad |5+2| = |5|+|2| = 7.$$

1.7. წერტილის კოორდინატები ღერძზე, სიბრტყეზე და სივრცეში

წრფეს, რომელზეც არჩეულია მიმართულება, უწოდებენ ღერძს. დავაფიქსიროთ მოცემულ ღერძზე რაიმე O წერტილი (სათავე) და შევარჩიოთ სიგრძის საზომი ერთეული (მასშტაბი). მაშინ, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეიძლება შევუსაბამოთ ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი ღერძზე და პირიქით. კერძოდ, თუ $x = 0$, მაშინ მას შევუსაბამოთ O წერტილი (სათავე). თუ $x > 0$, მაშინ მას შევუსაბამოთ ღერძის $M(x)$ წერტილი, რომელიც მო-

თავსებულია O წერტილის მარჯვნივ და დაშორებულია O წერტილიდან x მანძილით. თუ $x<0$, მაშინ მას შევუსაბამოთ $N(x)$ წერტილი, რომელიც მოთავსებულია O წერტილის მარცხნივ და დაშორებულია O წერტილიდან $|x|$ მანძილით.

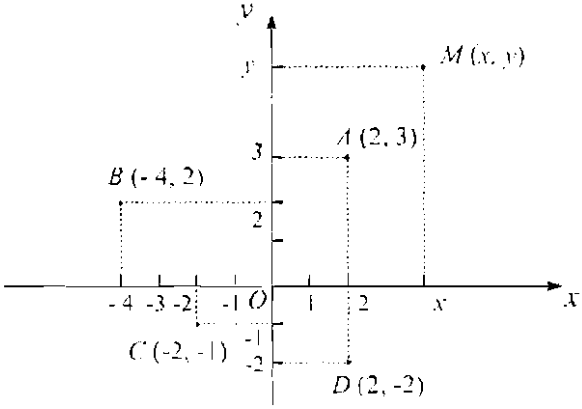
აღვნიშნოთ ეს ღერძი Ox-ით და ვუწოდოთ მას **რიცხვითი ღერძი**. Ox ღერძზე რომელიმე M წერტილის მდებარეობა სავსებით დახასიათებულია იმ ნამდვილი x რიცხვით, რომელიც მას შეესაბამება. ამ რიცხვს უწოდებენ M წერტილის კოორდინატს და წერენ $M=M(x)$. ხშირად, ნახაზებზე ღერძის $M(x)$ წერტილს აწერენ მხოლოდ მის შესაბამის x რიცხვს (იხ. ნახ. 1.6) და ნაცვლად ტერმინისა: „$M(x)$ წერტილი“ ხმარობენ ტერმინს „x წერტილი“. ფაქტობრივად, ეს ნიშნავს, რომ პრაქტიკაში რიცხვითი ღერძი გაიგივებულია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესთან, ხოლო ტერმინები „x რიცხვი“ და „x წერტილი“ იხმარება როგორც სინონიმები.



ნახ. 1.6

სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობის განსაზღვრის მიზნით, შემოვიღოთ ე. წ. **დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა**. სიბრტყეზე დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა განსაზღვრულია, თუ მოცემულია სიგრძის საზომი ერთეული (მასშტაბი) და ორი ურთიერთმართობული Ox და Oy ღერძი, რომლებიც იკვეთებიან O წერტილში. ამ ღერძებს უწოდებენ კოორდინატთა ღერძებს, ხოლო O წერტილს — კოორდინატთა სათავეს. სიბრტყეზე აღებულ ყოველ M წერტილს შევუსაბამოთ ნამდვილ რიცხვთა გარკვეული დალაგებული (x,y) წყვილი, რომელსაც M წერტილის კოორდინატები ეწოდება. ამ რიცხვებიდან x-ს, რომელიც Ox ღერძზე M წერტილის გეგმილის კოორდინატია, ეწოდება M წერტილის **აბსცისა,** ხოლო y-ს, რომელიც Oy ღერძზე M წერტილის გეგმილის კოორდინა-

ტია, ეწოდება M წერტილის **ორდინატი**. ამ შემთხვევაში წერენ $M = M(x, y)$ (იხ. ნახ. 1.7).



ნახ. 1.7

მაგალითად, ნახ.1.7-ზე აგებულია წერტილები $A = A(2,\ 3)$, $B = B(-4,\ 2)$, $C = C(-2,\ -1)$ და $D = D(2,\ -2)$.

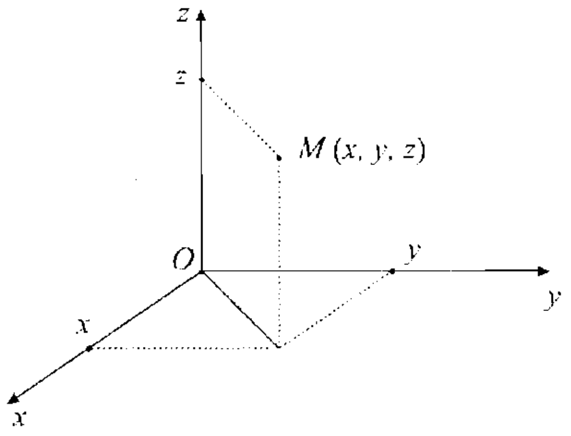
შევნიშნოთ, რომ $(x, 0)$ ტიპის წერტილები მდებარეობენ Ox ღერძზე, ხოლო $(0, y)$ ტიპის წერტილები – Oy ღერძზე.

ანალოგიურად შეგვიძლია დავახასიათოთ წერტილის მდებარეობა სივრცეში. განვიხილოთ სივრცეში ერთ წერტილში თანამკვეთი სამი ურთიერთმართობული რიცხვითი ღერძი. მათი გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ O ასოთი და ვუწოდოთ კოორდინატთა სათავე. რიცხვითი ღერძები აღვნიშნოთ Ox-ით, Oy-ით, Oz-ით და ვუწოდოთ შესაბამისად აბსცისათა ღერძი Ox, ორდინატთა ღერძი Oy და აპლიკატთა ღერძი Oz.

განვიხილოთ სივრცის ნებისმიერი M წერტილი. დავაგეგმილოთ M წერტილი სამივე საკოორდინატო ღერძზე. შევნიშნოთ, რომ სივრცის M წერტილის გეგმილი ღერძზე ეწოდება ამ ღერძის მართობულად M წერტილზე გავლებული სიბრტყისა და ღერძის თანაკვეთის წერტილს.

M წერტილის გეგმილის კოორდინატები Ox, Oy და Oz ღერძებზე განისაზღვრება ცალსახად. აღვნიშნოთ ისინი შესაბამისად x, y და z ასოებით. ამრიგად, სივრცის ნებისმიერი წერტილის მდებარეობა ცალსახად ხასიათდება ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული სამეულით. ამ რიცხვებს უწო-

დებენ M წერტილის კოორდინატებს სივრცეში და წერენ $M=M(x,y,z)$ (იხ. ნახ. 1.8).



ნახ. 1.8

1.8. წრფივი განტოლება

გავიხსენოთ, რომ ტოლობას, რომელიც ცვლადს შეიცავს, განტოლება ეწოდება. იმის მიხედვით, თუ რამდენ ცვლადს შეიცავს განტოლება, იგი შეიძლება იყოს ერთუცნობიანი, ორუცნობიანი და ა. შ.

ა) წრფივი ანუ პირველი ხარისხის ერთუცნობიანი განტოლება ეწოდება

$$ax+b=0 \tag{1.4}$$

სახის განტოლებას, სადაც x საძიებელი სიდიდეა (უცნობია), ხოლო a და b — მოცემული ნამდვილი რიცხვებია. a რიცხვს ეწოდება უცნობის კოეფიციენტი, b-ს კი — თავისუფალი წევრი.

● ერთცვლადიანი (1.4) განტოლების ამონახსნი (ფესვი) ეწოდება x ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომელიც (1.4) განტოლებას ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად აქცევს. ■

მარტივად ჩანს, რომ თუ $a \neq 0$, მაშინ (1.4) განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$x = -\frac{b}{a}.$$

თუ $a=0$, მაშინ (1.4) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$0 \cdot x + b = 0.$$

ამიტომ, როდესაც $b \neq 0$, განტოლებას ამონახსნი არა აქვს, ხოლო როდესაც $b=0$, მაშინ ნებისმიერი რიცხვი განტოლების ამონახსნია (ე. ი. განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა).

ბ) წრფივი ანუ პირველი ხარისხის ორუცნობიანი განტოლება ეწოდება

$$ax + by + c = 0 \tag{1.5}$$

სახის განტოლებას, სადაც x და y უცნობებია, ხოლო a, b და c — მოცემული ნამდვილი რიცხვებია.

● ორუცნობიანი (1.5) განტოლების ამონახსნი ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ (x_0, y_0) წყვილს, რომელიც ამ განტოლებას ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად აქცევს, ე. ი. $ax_0 + by_0 + c = 0$. ■

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ a და b კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ვთქვათ, $b \neq 0$. მაშინ (1.5)-დან შეგვიძლია განვსაზღვროთ y ცვლადი

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ წყვილი

$$\left(x,\ -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)$$

(1.5) განტოლების ამონახსნია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ანალოგიურად, თუ $a \neq 0$, მაშინ $\left(x,\ -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)$ წყვილი არის (1.5) განტოლების ამონახსნი y-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ამრიგად, (1.5) განტოლებას გააჩნია ამონახსნების უსასრულო რაოდენობა, თუ a და b კოეფიციენტები ერთდროულად არაა ნულის ტოლი. როგორც შემდეგ პარაგრაფში ვნახავთ, აღნიშნულ შემთხვევაში ამონახსნე-

ბის სიმრავლე განსაზღვრავს გარკვეულ წრფეს Oxy საკოორდინატო სიბრტყეზე.

ახლა, ვთქვათ, ორივე კოეფიციენტი ნულია, ე. ი. $a=0$ და $b=0$. მაშინ (1.5) მიიღებს სახეს

$$0\cdot x+0\cdot y+c=0.$$

ცხადია, თუ $c\neq 0$, მაშინ ამ განტოლებას არ გააჩნია ამონახსნი და, თუ $c=0$, მაშინ ნებისმიერი წყვილი (x,y) ამონახსნია.

ამოცანა 1.5. ვიპოვოთ $3x-4y+13=0$ განტოლების ყველა ამონახსნი. არის თუ არა $(-1,\ 7)$ წყვილი ამ განტოლების ამონახსნი? ამოვწეროთ განტოლების ის ამონახსნი, რომელშიც პირველი კომპონენტი 0-ის ტოლია.

▼ რადგან $3\cdot(-1)-4\cdot 7+13=-18\neq 0$, ამიტომ წყვილი $(-1,\ 7)$ არ არის განტოლების ამონახსნი.

რადგან უცნობებთან მდგომი ორივე კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან, ამიტომ შეგვიძლია ერთი ცვლადი გამოვსახოთ მეორეთი. კერძოდ, განსახილველი განტოლებიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}.$$

ამიტომ $\left(x,\ \frac{3}{4}x+\frac{13}{4}\right)$ წყვილი x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის წარმოადგენს ამონახსნს. თუ აქ დავუშვებთ, რომ $x=0$, მივიღებთ კონკრეტულ ამონახსნს $\left(0,\ \frac{13}{4}\right)$. ■

1.9. წრფის განტოლება

დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემაში ყოველი წრფე აღიწერება პირველი ხარისხის განტოლებით x და y ცვლადების მიმართ. პირიქით, ყოველი პირველი ხარისხის ორცვლადიანი განტოლება განსაზღვრავს წრფეს, თუ ცვლადებთან მდგომი კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

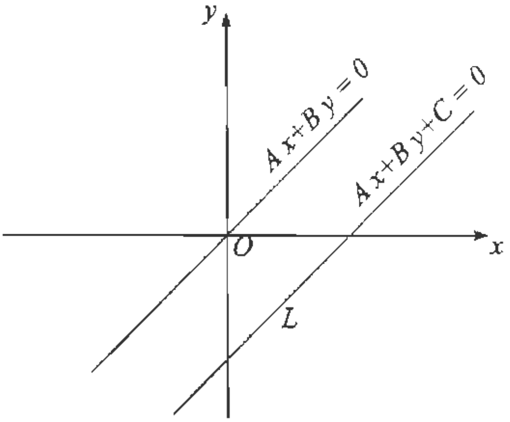
წრფის განტოლება სიბრტყეზე შეიძლება სხვადასხვა სახით იყოს მოცემული. ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ მხოლოდ იმ სახის განტოლებებს, რომელთაც შემდგომ გამოვიყენებთ ეკონომიკური ამოცანების გამოკვლევისას.

წრფის განტოლება ზოგადი სახით ასე ჩაიწერება

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \tag{1.6}$$

სადაც A, B და C მოცემული ნამდვილი რიცხვებია. ამასთან, იგულისხმება, რომ A და B კოეფიციენტები ერთდროულად არაა ნული, ე. ი. $|A|+|B|\neq 0$.

(1.6) განტოლება განსაზღვრავს L წრფეს, ნიშნავს იმას, რომ L წრფის ყოველი $M(x,y)$ წერტილის კოორდინატების წყვილი ამონახსნია (1.6) განტოლებისა და პირიქით, (1.6) განტოლების ყოველი (x,y) ამონახსნის შესაბამისი წერტილი ძევს L წრფეზე (იხ. ნახ. 1.9)



ნახ. 1.9

აქედან გამომდინარეობს, რომ, რადგან ყოველი წრფე ცალსახად განისაზღვრება მასზე მდებარე ორი წერტილით, ამიტომ წრფივი ორუცნობიანი განტოლების შესაბამისი წრფე რომ ავაგოთ, საკმარისია, მოვძებნოთ მოცემული განტოლების ნებისმიერი ორი ამონახსნი, მოვნიშნოთ მათი შესაბამისი წერტილები და ამ ორ წერტილზე გავავლოთ წრფე.

განვიხილოთ წრფის ზოგადი განტოლების კერძო სახეები და მათი შესაბამისი წრფეები დავახასიათოთ გეომეტრიულად.

ა) $C=0$. მაშინ (1.6) განტოლებას აქვს სახე

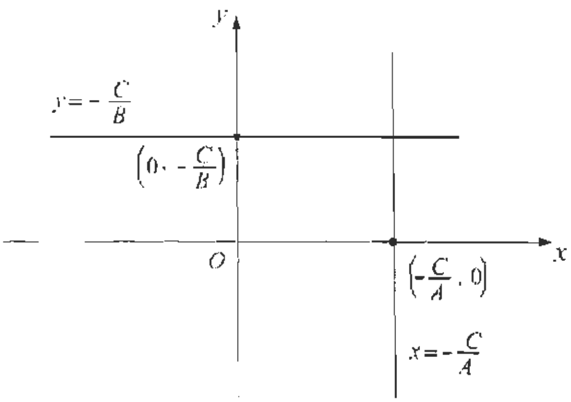
$$Ax + By = 0. \tag{1.7}$$

იგი განსაზღვრავს კოორდინატთა სათავეზე გამავალ წრფეს, რადგანაც (1.7) განტოლების ამონახსნია $(0, 0)$ წყვილი (იხ. ნახ. 1.9). შევნიშნოთ, რომ (1.6) და (1.7) განტოლებების შესაბამისი წრფეები პარალელურია.

ბ) $B = 0$, $A \neq 0$. მაშინ (1.6) განტოლებიდან გვაქვს

$$x = -\frac{C}{A},$$

ე. ი. (1.6) განტოლების ამონახსნებია შემდეგი სახის წყვილები $\left(-\frac{C}{A}, y\right)$, სადაც y ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. რადგან ამ წყვილების შესაბამისი წერტილების აბსცისები ერთი და იგივეა, ამიტომ ისინი განსაზღვრავენ წრფეს, რომელიც Ox ღერძის მართობია (ე. ი. Oy ღერძის პარალელურია) და კვეთს მას $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ წერტილში (იხ. ნახ. 1.10). კერძოდ, $x = 0$ წარმოადგენს Oy ღერძის განტოლებას.



ნახ. 1.10

გ) $A = 0$, $B \neq 0$. მაშინ (1.6)-დან გამომდინარეობს

$$y = -\frac{C}{B},$$

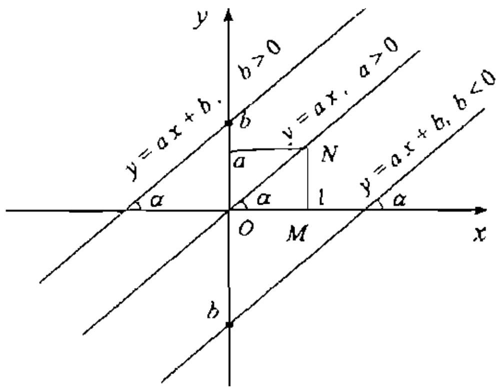
რომელიც განსაზღვრავს Oy ღერძის პერპენდიკულარულ (ანუ Ox ღერძის პარალელურ) წრფეს. ეს წრფე კვეთს Oy ღერძს $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ წერტილში (იხ. ნახ. 1.10). კერძოდ, $y = 0$ წარმოადგენს Ox ღერძის განტოლებას.

წრფის განტოლებას კუთხური კოეფიციენტით აქვს შემდეგი სახე

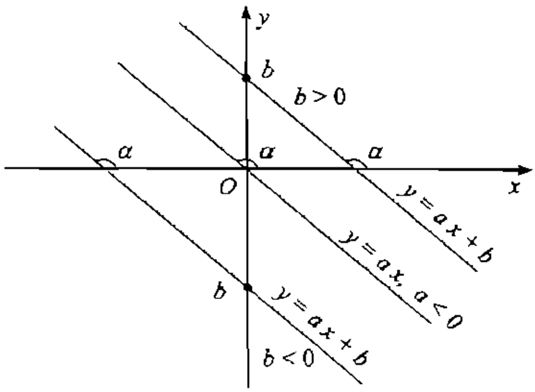
$$y = a x + b\,, \tag{1.8}$$

სადაც a და b ნამდვილი მუდმივებია. ამ განტოლების სახელწოდება განპირობებულია იმ ფაქტით, რომ a კოეფიციენტი რიცხობრივად უდრის იმ α კუთხის ტანგენსს, რომელსაც (1.8) განტოლებით განსაზღვრული წრფე ადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან (იხ. ნახ. 1.11 და 1.12). მართლაც, OMN მართკუთხა სამკუთხედიდან გვაქვს (ნახ. 1.11)

$$\boxed{MN = a = \operatorname{tg}\alpha}$$



ნახ. 1.11



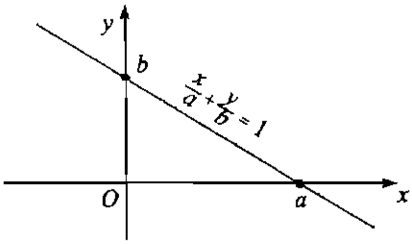
ნახ. 1.12

ამიტომ, თუ $a>0$, მაშინ შესაბამისი წრფე Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს მახვილ კუთხეს, ხოლო, თუ $a<0$, მაშინ – ბლაგვ კუთხეს. ეს წრფე Oy ღერძს კვეთს $(0, b)$ წერტილში. აქვე შევნიშნოთ, რომ (1.8) განტოლებით განსაზღვრული წრფე პარალელურია $y = a x$ განტოლებით მოცემული კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფისა (იხ. ნახ. 1.11 და 1.12). შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ თუ წრფე y ღერძის პარალელურია, მაშინ მისი შესაბამისი განტოლება არ შეიძლება ჩაიწეროს (1.8) სახით.

თუ ცნობილია, რომ წრფე საკოორდინატო ღერძებს კვეთს $(a, 0)$ და $(0, b)$ წერტილებში, ამასთან, $a \neq 0$ და $b \neq 0$, მაშინ მისი განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \tag{1.9}$$

რომელსაც ეწოდება **წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში** (იხ. ნახ. 1.13).



ნახ. 1.13

დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის წინასწარ მოცემულ ორ $M_1=(x_1,y_1)$ და $M_2=(x_2,y_2)$ წერტილზე.

თუ $x_1=x_2$, მაშინ, ცხადია, რომ წრფე პარალელურია Oy ღერძის და საძიებელი განტოლება იქნება $x=x_1$. ანალოგიურად, თუ $y_1=y_2$, მაშინ წრფე Ox ღერძის პარალელურია და საძიებელი განტოლება იქნება $y=y_1$.

ახლა დავუშვათ, რომ $x_1\neq x_2$ და $y_1\neq y_2$. მაშინ საძიებელ წრფის განტოლებას აქვს სახე

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}} \tag{1.10}$$

და მას ეწოდება **ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.** მართლაც, მარტივად, უშუალო ჩასმით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ M_1 და M_2 წერტილების კოორდინატები აკმაყოფილებენ ამოწერილ განტოლებას.

1.10. ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა და უტოლობათა სისტემების გრაფიკული ამოხსნა

განვიხილოთ **ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა**

$$\begin{cases} a_1 x+b_1 y=c_1 \\ a_2 x+b_2 y=c_2, \end{cases} \tag{1.11}$$

სადაც a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 მოცემული ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო x და y

უცნობებია. a_1, a_2, b_1, b_2 რიცხვებს უწოდებენ სისტემის კოეფიციენტებს, c_1 და c_2 რიცხვებს კი — თავისუფალ წევრებს. (1.11) სისტემის ამონახსნი ეწოდება x და y ცვლადების დალაგებულ (x, y) წყვილს, რომელიც ჭეშმარიტ ტოლობად აქცევს (1.11) სისტემის ორივე განტოლებას.

როგორც ვიცით, თუ (1.11) სისტემაში შემავალი თითოეული განტოლების ერთი კოეფიციენტი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ შესაბამისი განტოლების გრაფიკი წარმოადგენს წრფეს სიბრტყეზე, ხოლო სისტემის ამონახსნი იქნება ამ წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატთა წყვილი (თუ ასეთი წერტილი არსებობს).

განვიხილოთ ერთ სიბრტყეში გავლებული ორი წრფის ყველა შესაძლო ურთიერთმდებარეობა, რაც საშუალებას გვაძლევს გრაფიკულად ამოვხსნათ (1.11) სისტემა.

(ა) თუ (1.11) სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი წრფეები ერთ წერტილში იკვეთება, მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ამონახსნთა წყვილი (x_0, y_0) წარმოადგენს გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებს. ამ შემთხვევას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სრულდება პირობა

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}}$$

(ბ) თუ (1.11) სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი წრფეები ერთმანეთის პარალელურია, მაშინ სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია. ამ შემთხვევას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სრულდება პირობა

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}$$

(გ) თუ (1.11) სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ამ წრფის ყოველი წერტილის შესაბამისი კოორდინატების წყვილი (1.11) სისტემის ამონახსნია, ე. ი. სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი. ამ შემთხვევას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ,

როდესაც სრულდება პირობა

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

ფაქტობრივად, ეს ნიშნავს, რომ (1.11) სისტემა ერთი ორუცნობიანი განტოლების ეკვივალენტურია.

მაგალითად, ვიპოვოთ ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

ამონახსნი. რადგან $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{4}$, ამ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. ამონახსნის მოსაძებნად სისტემის ერთ-ერთი განტოლებიდან (მაგალითად, პირველიდან) განვსაზღვროთ ერთ-ერთი უცნობი (მაგალითად, y)

$$y = \frac{7 - 2x}{5}$$

და შევიტანოთ მეორე განტოლებაში. მივიღებთ

$$3x + 4 \cdot \frac{7 - 2x}{5} = 8.$$

აქედან

$$15x + 28 - 8x = 40 \quad \text{ანუ} \quad 7x = 12 .$$

მაშასადამე,

$$x = \frac{12}{7} .$$

თუ x-ის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ y-ის გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$y = \frac{7 - 2x}{5} = \frac{7 - 2 \cdot \frac{12}{7}}{5} = \frac{49 - 24}{35} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7} .$$

ამრიგად, განტოლებათა სისტემის ამონახსნია $x = \frac{12}{7}$ და $y = \frac{5}{7}$, ანუ წყვილი $\left(\frac{12}{7}, \frac{5}{7}\right)$.

სისტემის ამოხსნის ამ მეთოდს ეწოდება **ჩასმის ხერხი**.

ახლა განვიხილოთ **ორუცნობიანი წრფივი უტოლობა**

$$ax+by>c, \tag{1.12}$$

რომელშიც a და b კოეფიციენტები ერთდროულად არაა ნულის ტოლი.

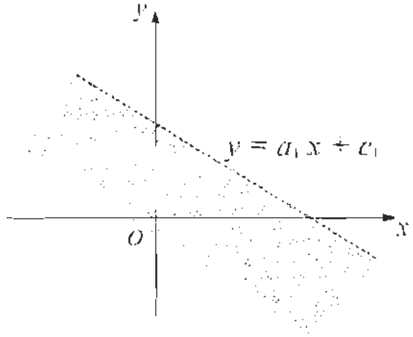
ამოვხსნათ ეს უტოლობა, ნიშნავს, ვიპოვოთ x და y ცვლადების შესაბამისი ყველა იმ (x, y) წყვილების (ანუ წერტილების) სიმრავლე, რომლებიც მოცემულ უტოლობას ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობად გადააქცევს.

თუ $b \neq 0$, მაშინ ეს უტოლობა ეკვივალენტური გარდაქმნებით შეგვიძლია დავიყვანოთ შემდეგი ორი ტიპის უტოლობიდან ერთ-ერთზე:

$$y<a_1x+c_1, \tag{1.13}$$

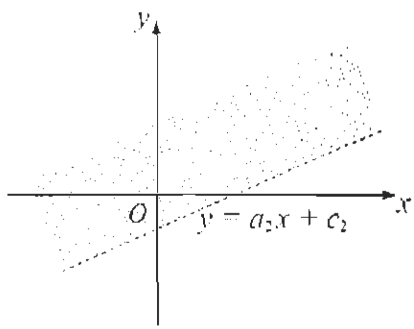
$$y>a_2x+c_2. \tag{1.14}$$

(1.13) ტიპის უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $y=a_1x+c_1$ წრფის ქვემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყის წერტილთა სიმრავლე (იხ. ნახ. 1.14).



ნახ. 1.14

ანალოგიურად, (1.14) უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $y=a_2x+c_2$ წრფის ზემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყის წერტილთა სიმრავლე (იხ. ნახ. 1.15).



ნახ. 1.15

თუ $b=0$ (და, მაშასადამე, $a \neq 0$), მაშინ (1.12) უტოლობა მიიღებს სახეს

$$ax > c, \quad a \neq 0,$$

რომელიც ეკვივალენტურია

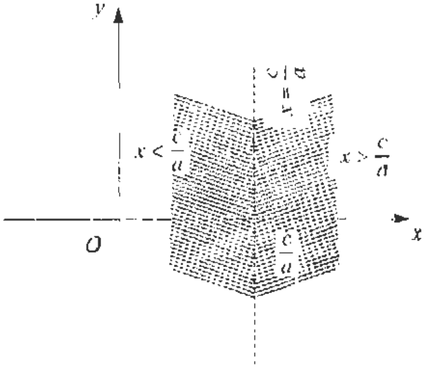
$$x > \frac{c}{a}$$

უტოლობისა, როდესაც $a > 0$, და

$$x < \frac{c}{a}$$

უტოლობისა, როდესაც $a < 0$.

პირველ შემთხვევაში, უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $x = \frac{c}{a}$ წრფის მარჯვნივ მდებარე ნახევარსიბრტყე, მეორე შემთხვევაში კი — მარცხნივ მდებარე ნახევარსიბრტყე (იხ. ნახ. 1.16).



ნახ. 1.16

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორუცნობიან წრფივ უტოლობათა სისტემა

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y > c_1 \\ a_2 x + b_2 y > c_2 . \end{cases} \tag{1.15}$$

იმისათვის, რომ ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა, საჭიროა, ამოვხსნათ ამ სისტემაში შემავალი თითოეული უტოლობა და ვიპოვოთ მათი ამონახსნების სიმრავლეთა თანაკვეთა.

(1.15) სისტემაში შემავალი თითოეული უტოლობა წარმოადგენს ორუცნობიან წრფივ უტოლობას, ამიტომ მათი ამონახსნები წარმოადგენენ გა-

რკვეული წრფეების ერთ მხარეს მდებარე ნახევარსიბრტყეებს. ამ ნახევარსიბრტყეების თანაკვეთა მოგვცემს (1.15) სისტემის ამონახსნს.

თუ (1.12) უტოლობაში მკაცრი უტოლობის (>) ნიშნის ნაცვლად გვექნება არამკაცრი უტოლობის (≥) ნიშანი, მაშინ უტოლობის ამონახსნი იქნება შესაბამისი ნახევარსიბრტყე საზღვრის (წრფის) წერტილების ჩათვლით.

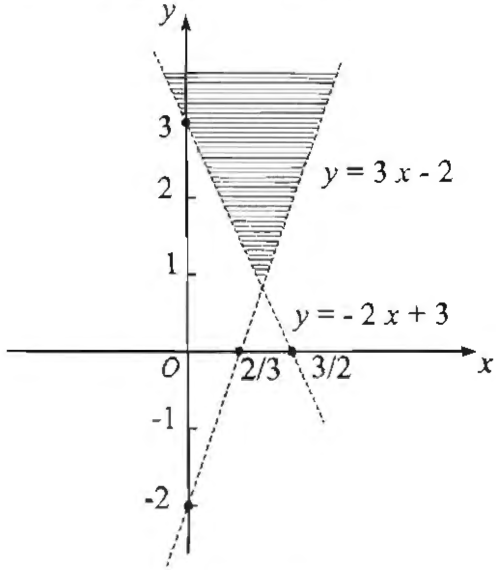
განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი. ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა

$$\begin{cases} 3x - y < 2 \\ 2x + y > 3. \end{cases}$$

პირველ რიგში, გადავწეროთ ეს სისტემა ეკვივალენტური სახით

$$\begin{cases} y > 3x - 2 \\ y > -2x + 3. \end{cases}$$

სისტემის პირველი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $y = 3x - 2$ წრფის ზემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე, მეორე უტოლობისა კი — $y = -2x + 3$ წრფის ზემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე. სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე იქნება აღნიშნული ნახევასიბრტყეების თანაკვეთა (იხ. ნახ. 1.17).



ნახ. 1.17

1.11. წრფივი ფუნქციების გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

ამ პარაგრაფში ელემენტარული მათემატიკის, კერძოდ, წრფივი განტოლებებისა და უტოლობების თეორიის გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილავთ რამდენიმე ეკონომიკურ ამოცანას. შევნიშნოთ, რომ თითქმის ყველა ამოცანის ამოხსნისას მოგვიწევს გარკვეული ცვლადების შემოტანა.

წმინდა მათემატიკური თეორიისაგან განსხვავებით, აქ ცვლადები შეზღუდულია და ისინი შეიძლება იცვლებოდნენ მხოლოდ ამოცანის პირობებით განსაზღვრულ სიმრავლეებზე. ამიტომ ყოველ კონკრეტულ ამოცანაში აუცილებელია, მივუთითოთ ცვლადების შესაბამისი დასაშვები სიმრავლეები, რომ თავიდან ავიცილოთ მცდარი პასუხები და გავაკეთოთ სწორი დასკვნები.

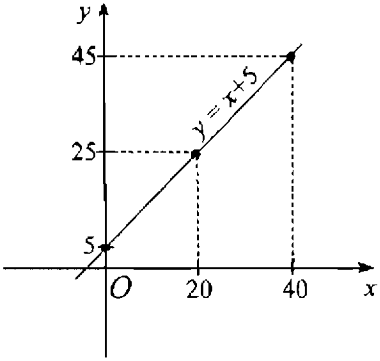
ამოცანა 1.6. (ტვირთის გადატანის ხარჯების განსაზღვრა). ვთქვათ, ერთი და იმავე ტვირთის გადატანა. მოცემული ქალაქიდან 20 კმ-ით დაშორებულ პუნქტამდე ღირს 25 დოლარი, ხოლო 40 კმ-ით დაშორებულ პუნქტამდე – 45 დოლარი. რა ეღირება იმავე ტვირთის გადატანა x კმ მანძილზე მოცემული ქალაქიდან, თუ ცნობილია, რომ დამოკიდებულება მანძილსა და ტვირთის გადატანის ხარჯებს შორის წრფივია? ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი.

▼ პირობის თანახმად, მანძილი ქალაქიდან დანიშნულ პუნქტამდე x კმ-ია. ტვირთის გადატანის ხარჯები აღვნიშნოთ y-ით (დოლარობით). ვნახოთ, როგორი დამოკიდებულება იქნება დანახარჯსა და მანძილს შორის. ამოცანის პირობის თანახმად, საძიებელ დამოკიდებულებას განსაზღვრავს წრფე. ამასთან, როდესაც $x=20$, მაშინ $y=25$, ხოლო როდესაც $x=40$, მაშინ $y=45$. ამიტომ აღნიშნული წრფე გაივლის $(20, 25)$ და $(40, 45)$ წერტილებზე (იხ. ნახ. 1.18). მისი შესაბამისი განტოლება ჩაიწერება ასე (იხ. ფორმულა (1.10))

$$\frac{x-20}{40-20}=\frac{y-25}{45-25}.$$

აქედან მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას $y=x+5$, რომელიც გა-

ნსაზღვრავს ქალაქიდან x კმ მანძილზე მდებარე პუნქტამდე ტვირთის გადატანის ხარჯებს. ამრიგად, x კმ-ზე ტვირთის გადატანის ხარჯი იქნება $(x+5)$ დოლარი. ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარეობს, რომ აქ $x>0$ და $y>0$. ამ წრფის გრაფიკი გამოსახულია ნახ. 1.18-ზე. ■



ნახ. 1.18

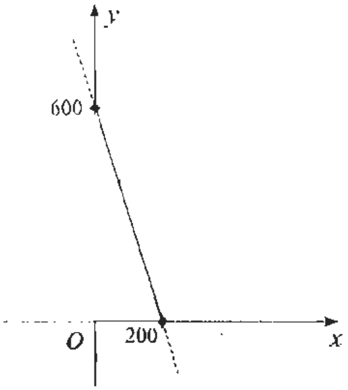
ამოცანა 1.7. (წარმოების სიმძლავრის განსაზღვრა). ქარხნის საწარმოო სიმძლავრე ისეთია, რომ მას ერთ საათში შეუძლია ჩამოასხას ან 200 ლიტრი ლუდი ან 600 ლიტრი ლიმონათი. ქარხანას შეუძლია ერთდროულად გამოუშვას ლუდიც და ლიმონათიც. შევადგინოთ განტოლება, რომელიც დაახასიათებს ქარხნის საწარმოო სიმძლავრეს, თუ დამოკიდებულება ჩამოსხმული ლუდისა და ლიმონათის რაოდენობებს შორის წრფივია. ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი.

▼ აღვნიშნოთ x-ით ქარხნის მიერ 1 საათში ჩამოსხმული ლუდის რაოდენობა, ხოლო y-ით ქარხნის მიერ 1 საათში ჩამოსხმული ლიმონათის რაოდენობა. ამოცანის პირობის თანახმად, რადგან შესაბამისი წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკი გადის $(200, 0)$ და $(0, 600)$ წერტილებზე, ამიტომ საძიებელი წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში ჩაიწერება ასე (იხ. ფორმულა (1.9))

$$\frac{x}{200}+\frac{y}{600}=1 .$$

აქედან $3x+y=600$. ამ განტოლებით განისაზღვრება ქარხნის საწარმოო სიმძლავრე, რომელიც აკავშირებს 1 სთ-ში ჩამოსხმული ლუდისა და ლიმონათის რაოდენობებს. ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ აქ

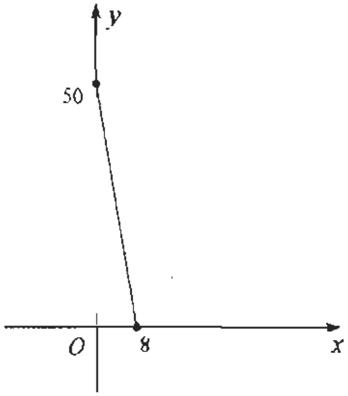
$0 \le x \le 200$ და $0 \le y \le 600$. ამ წრფის შესაბამისი გრაფიკი გამოსახულია ნახ. 1.19-ზე. ■



ნახ. 1.19

ამოცანა 1.8. (პროდუქციის დანახარჯის განსაზღვრა დროის მიხედვით). ვთქვათ, რაიმე წარმოებას აქვს 50 ტ საწვავი, რომელიც უნდა დაიხარჯოს 8 დღის განმავლობაში. ვიპოვოთ კავშირი დასახარჯი საწვავისა და გასული დღეების რაოდენობებს შორის, თუ ეს დამოკიდებულება წრფივია. ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი.

▼ ამოცანის პირობის თანახმად, დასაწყისში, როდესაც გასული დღეების რაოდენობა 0-ის ტოლია, დასახარჯია 50 ტ საწვავი, ხოლო 8 დღის გასვლის შემდეგ დასახარჯი საწვავის რაოდენობა 0-ის ტოლია. ამიტომ, თუ Ox ღერძზე გადავზომავთ დღეების რაოდენობას, ხოლო Oy ღერძზე — საწვავის რაოდენობას, მაშინ საძიებელი წრფივი განტოლების გრაფიკი გაივლის (0, 50) და (8, 0) წერტილებზე (იხ. ნახ. 1.20).



ნახ. 1.20

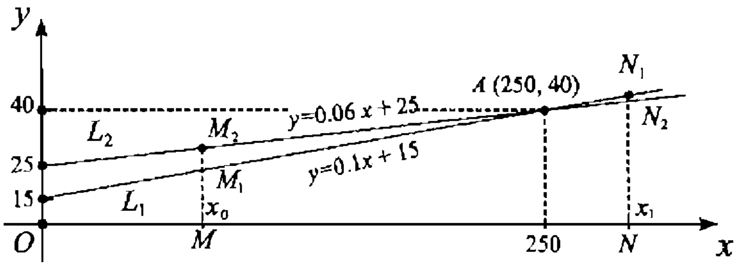
ღერძთა მონაკვეთებში ამ წრფის განტოლებას ექნება სახე (იხ. ფორმულა (1.9))

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{50}=1.$$

აქედან $25x+4y=200$. ამ განტოლებითაა მოცემული კავშირი დასახარჯი საწვავისა და გასული დღეების რაოდენობებს შორის. ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $0 \le x \le 8$ და $0 \le y \le 50$. ■

ამოცანა 1.9 (ტვირთის გადატანის ოპტიმალური ვარიანტის არჩევა). ვთქვათ, ტვირთის გადატანის ხარჯები (დოლარობით) ქალაქიდან x კმ მანძილზე დაშორებულ პუნქტამდე პირველი სახის ტრანსპორტით გამოისახება $y=0.1x+15$ ფორმულით, მეორე სახის ტრანსპორტით კი — $y=0.06x+25$ ფორმულით. გამოვიკვლიოთ, რა სახის ტრანსპორტითაა უფრო ხელსაყრელი ტვირთის გადატანა.

▼ გამოკვლევა ჩავატაროთ გრაფიკული მეთოდით. ამისათვის ავაგოთ ამოცანაში მითითებული წრფივი ფუნქციების შესაბამისი L_1 და L_2 წრფეები Oxy სიბრტყეზე (იხ. ნახ. 1.21). შევნიშნოთ, რომ ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, x ცვლადი დადებითი უნდა იყოს. ამიტომ უნდა განვიხილოთ ის ნახევარწრფეები, რომლებიც შეესაბამება $x>0$ შუალედს.



ნახ. 1.21

აღნიშნული წრფეების გადაკვეთის A წერტილი მარტივად მოიძებნება შემდეგი სისტემის ამოხსნით

$$\begin{cases} y=0.1x+15 \\ y=0.06x+25. \end{cases}$$

მივიღებთ $A=A(250,40)$. ახლა ჩავატაროთ ანალიზი. ნახაზიდან დავა-

სკვნით, რომ თუ $0 < x_0 < 250$, მაშინ x_0 მანძილის შესაბამისი ხარჯები პირველი სახის ტრანსპორტით იქნება MM_1, მეორე სახის ტრანსპორტით კი – MM_2 (იხ. ნახ. 1.21). რადგან $MM_1 < MM_2$, ამიტომ ამ შემთხვევაში (ე. ი. როდესაც $0 < x_0 < 250$), ტვირთის გადაზიდვა ხელსაყრელი იქნება პირველი სახის ტრანსპორტით. ანალოგიურად, თუ მანძილი 250 კმ-ზე მეტია (ე. ი. $x_1 > 250$), მაშინ ტვირთის გადაზიდვა ხელსაყრელი იქნება მეორე სახის ტრანსპორტით, რადგან $NN_1 > NN_2$. თუ მანძილი 250 კმ-ის ტოლია, მაშინ ორივე ტრანსპორტის შემთხვევაში დანახარჯები ერთი და იგივეა და უდრის 40 დოლარს. ■

ამოცანა 1.10 (კომპლექსური საწარმოს ოპტიმალური მუშაობის პროგრამის შედგენა). მექანიკურ საამქროს ერთი თვის განმავლობაში შეუძლია დაამზადოს ან A სახის მანქანისათვის ნაწილების 60 კომპლექტი ან B სახის მანქანისათვის ნაწილების 120 კომპლექტი. ამწყობ საამქროს ერთი თვის განმავლობაში შეუძლიაააწყოს A სახის 120 მანქანა ან B სახის 80 მანქანა. შევადგინოთ ორივე საამქროს მუშაობის ყველაზე ოპტიმალური და ეკონომიკური პროგრამა, თუ თითოეული საამქროს სიმძლავრე ისეთია, რომ A და B სახის გამოშვებულ პროდუქტებს შორის დამოკიდებულება წრფივია. (ყველაზე ოპტიმალური და ეკონომიკური პროგრამა არის მუშაობის ისეთი სასურველი და ამავე დროს იდეალური რეჟიმი, როდესაც მექანიკური საამქრო ერთ თვეში აწარმოებს n რაოდენობის A სახისა და m რაოდენობის B სახის კომპლექტებს და ამწყობი საამქროც ერთ თვეში აწყობს n რაოდენობის A სახისა და m რაოდენობის B სახის მანქანებს. ფაქტობრივად, ეს ნიშნავს, რომ სიმძლავრეთა შეუცვლელად ამ ორი საამქროს კომპლექსი უნაშთოდ და მოცდენის გარეშე მუშაობს).

▼ აქაც გამოვიყენოთ გრაფიკული მეთოდი. Ox ღერძზე გადავზომოთ A სახის პროდუქციის რაოდენობა, ხოლო Oy ღერძზე – B სახისა. პირობის თანახმად, მექანიკური საამქროს მიერ გამოშვებული A და B სახის კომპლექტებს შორის დამოკიდებულების წრფე $(60, 0)$ და $(0, 120)$ წერტილებზე გადის. ამიტომ შესაბამისი წრფის განტოლება იქნება (იხ. ფო-

რმულა (1.9))

$$\frac{x}{60}+\frac{y}{120}=1$$

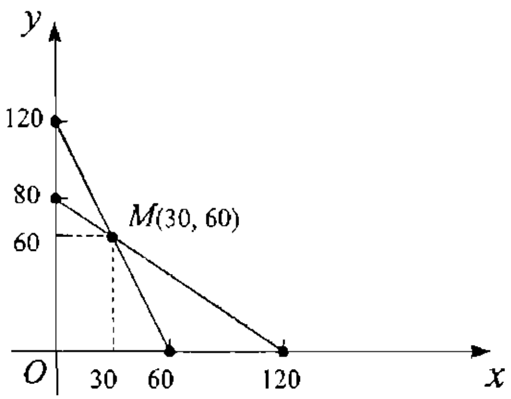
ანუ $2x+y=120$. ეს განტოლება ნიშნავს შემდეგს: მექანიკური საამქროს სიმძლავრე ისეთია, რომ მას შეუძლია ერთ თვეში აწარმოოს x კომპლექტი A სახის მანქანისათვის და $y=120-2x$ კომპლექტი B სახის მანქანისათვის.

ასევე ამოცანის პირობის თანახმად, ამწყობი საამქროს მიერ გამოშვებული A და B სახის მანქანების რაოდენობებს შორის დამოკიდებულება აღიწერება წრფით, რომელიც $(120, 0)$ და $(0, 80)$ წერტილებზე გადის. ამიტომ მისი განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში ასე ჩაიწერება

$$\frac{x}{120}+\frac{y}{80}=1$$

ანუ $2x+3y=240$. ამ განტოლების შინაარსი ამწყობი საამქროსათვის მსგავსია იმისა, რაც მივუთითეთ მექანიკური საამქროს შემთხვევაში. ამრიგად, ამწყობი საამქროს სიმძლავრე ისეთია, რომ თუ ერთ თვეში იგი გამოუშვებს x რაოდენობის A სახის მანქანას, მაშინ მან უნდა გამოუშვას $y=\frac{1}{3}(240-2x)$ რაოდენობის B სახის მანქანა.

ავაგოთ მიღებული წრფეების გრაფიკები და შევუდგეთ ანალიზს (იხ. ნახ. 1.22).



ნახ. 1.22

ეს ორი წრფე ერთმანეთს კვეთს M წერტილში. ცხადია, რომ მისი

კოორდინატები უნდა მოვძებნოთ შემდეგი სისტემიდან

$$\begin{cases} 2x + y = 120 \\ 2x + 3y = 240. \end{cases}$$

მარტივად მივიღებთ, რომ სისტემის ამონახსნია $x = 30$ და $y = 60$, ე. ი. $M = M(30, 60)$.

რადგან M წერტილი ორივე გრაფიკს ეკუთვნის, ეს ნიშნავს, რომ მექანიკურ საამქროს თავისი სიმძლავრის პირობებში შეუძლია აწარმოოს 30 კომლექტი A სახის მანქანისათვის და 60 კომპლექტი B სახის მანქანისათვის, ხოლო ამწყობ საამქროს შეუძლია გამოუშვას 30 ცალი A სახის მანქანა და 60 ცალი B სახის მანქანა. ამიტომ $M(30, 60)$ წერტილი იძლევა ყველაზე ოპტიმალური და ეკონომიკური მუშაობის პროგრამას, რომლის მოძებნაც იყო ჩვენი მიზანი. ამრიგად, მექანიკური და ამწყობი საამქროების კომპლექსმა უნდა იმუშაოს ისე, რომ მათ გამოუშვან 30 ცალი A სახის და 60 ცალი B სახის პროდუქცია. ■

ამოცანა 1.11 (წარმოების მაქსიმალური მოგების განსაზღვრა). ვთქვათ, ფაბრიკა აწარმოებს ორი A და B სახის პროდუქციას. A სახის ერთი ერთეულის წარმოებას სჭირდება 1 სამუშაო საათი და 2 კვტ/სთ ელექტროენერგია, B სახის ერთეულის წარმოებას კი — 2 სამუშაო საათი და 1 კვტ/სთ ელექტროენერგია. დღის განმავლობაში, ორივე სახის პროდუქციის წარმოებისათვის განკუთვნილია არა უმეტეს 8 სამუშაო საათისა და 7 კვტ/სთ ელექტროენერგიისა. მოგება A სახის პროდუქციის ერთეულზე არის 30 დოლარი, ხოლო B სახის ერთეულზე — 20 დოლარი. როგორ უნდა წარიმართოს წარმოება, რომ მოგება იყოს მაქსიმალური?

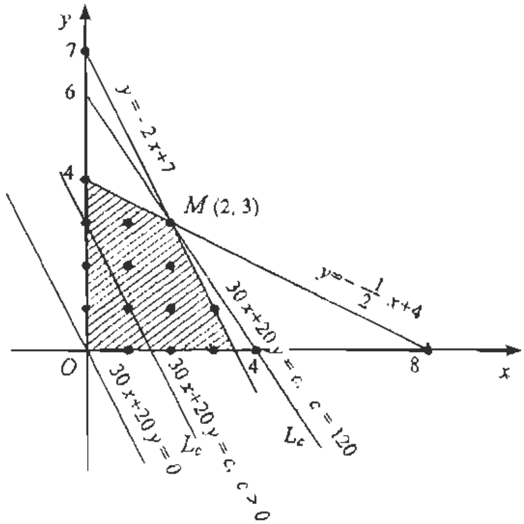
▼ დავუშვათ, რომ ფაბრიკამ აწარმოა x რაოდენობის A სახის პროდუქცია და y რაოდენობის B სახის პროდუქცია. შევნიშნოთ, რომ $x \geq 0$ და $y \geq 0$. პირობის თანახმად, მოგება გამოითვლება ფორმულით $30x + 20y$ (დოლარი). ცხადია, რომ აღნიშნული რაოდენობის პროდუქციის წარმოება მოითხოვს $(x + 2y)$ საათს და $(2x + y)$ კვტ/სთ ელექტროენერგიას. ამიტომ ამოცანის პირობის თანახმად, მივიღებთ უტოლობათა სისტემას

$$\begin{cases} x+2y\le 8 \\ 2x+y\le 7 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases} y\le -0.5\,x+4 \\ y\le -2x+7 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0. \end{cases}$$

ამოვხსნათ ეს სისტემა გრაფიკული ხერხით (იხ. ნახ. 1.23).



ნახ. 1.23

ნახაზზე დაშტრიხული არე წარმოადგენს უტოლობათა სისტემის საძიებელ ამონახსნს. რადგან x და y მთელი რიცხვები უნდა იყოს, უტოლობათა სისტემის ამონახსნი იქნება მხოლოდ მთელ კოორდინატებიანი წერტილები, რომლებიც ეკუთვნიან დაშტრიხულ არეს (ამ კონკრეტულ შემთხვევაში ასეთი იქნება 15 წერტილი, რომლებიც გამუქებულია ნახ. 1.23-ზე). ჩვენი მიზანია, ვნახოთ x და y პარამეტრების როგორი მნიშვნელობებისათვის იქნება მოგების ფუნქცია $30x+20y=c$ მაქსიმალური.

შევნიშნოთ, რომ თუ Oxy საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგებთ ამ

წრფივი ფუნქციის L_c გრაფიკს ($c>0$ განვიხილოთ, როგორც პარამეტრი), მაშინ ამ L_c წრფეს გააჩნია შემდეგი ეკონომიკური ინტერპრეტაცია: თუ A და B სახის წარმოებული პროდუქციების რაოდენობებია შესაბამისად x_0 და y_0, ამასთან $(x_0, y_0)\in L_c$, მაშინ მოგება ტოლია c-სი, ე. ი. მოგების $30x+20y$ ფუნქცია L_c წირის გასწვრივ მუდმივია და c-ს ტოლია. ცხადია, რომ $30x+20y=c$ ფუნქციის გრაფიკი $30x+20y=0$ განტოლებით მოცემული წრფის პარალელურია. c პარამეტრის ზრდას მოსდევს გრაფიკის პარალელური გადატანა მარჯვნივ. c-ს ზრდა კი ეკვივალენტურია მოგების ზრდისა. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მაქსიმალური მოგება ხსენებულ პირობებში, უნდა მოვძებნოთ L_c წრფის ისეთი მდებარეობა, როდესაც L_c წრფე შეიცავს დაშტრიხული არის ერთ წერტილს მაინც და ამასთან მის მარჯვნივ დაშტრიხული არის არც ერთი წერტილი არ ძევს. ამას მივაღწევთ L_c წრფის თანდათანობით პარალელური გადატანით მარჯვნივ. ჩვენს შემთხვევაში L_c წრფის ასეთი ზღვრული მდებარეობა მიიღწევა მაშინ, როდესაც ის გაივლის $M(2, 3)$ წერტილზე. მაშინ შესაბამისი c გამოითვლება ტოლობით $c=30\cdot 2+20\cdot 3=120$ და ამიტომ შესაბამისი წრფის განტოლება იქნება $30x+20y=120$ ანუ $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$. ეს წრფე კვეთს Ox და Oy ღერძებს, შესაბამისად, $(4, 0)$ და $(0, 6)$ წერტილებში და ამიტომ მდებარეობს $x+2y=8$ და $2x+y=7$ წრფეებს შორის. ამრიგად, მოძებნილია L_c წრფის უკიდურესად ზღვრული მარჯვენა მდებარეობა, როდესაც ის შეიცავს ერთადერთ წერტილს დაშტრიხული არიდან, კერძოდ, $M(2, 3)$ წერტილს და მის მარჯვნივ დაშტრიხული არის სხვა წერტილები აღარ მდებარეობს. ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მოგება მაქსიმალური იქნება, როდესაც ფაბრიკა აწარმოებს A სახის პროდუქციის 2 ერთეულს და B სახის პროდუქციის 3 ერთეულს. ამასთან, ეს მაქსიმალური მოგება ტოლი იქნება $30\cdot 2+20\cdot 3=120$ დოლარის. ■

ეს უკანასკნელი ამოცანა განეკუთვნება იმ ამოცანათა კლასს, რომლებიც მარტივად იხსნება წრფივი დაპროგრამების მეთოდებით და რომლებსაც ჩვენ დაწვრილებით მეთერთმეტე თავში განვიხილავთ.

1.12. მოთხოვნისა და მიწოდების ანალიზი

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ მიკროეკონომიკის ორ ძირითად სფეროს, რომელთაც **მიწოდება და მოთხოვნა** ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ მიკროეკონომიკა შეისწავლის ინდივიდუალური ფირმებისა და ბაზრების ეკონომიკური თეორიისა და ეკონომიკური პოლიტიკის ანალიზს.

ამ თავში ზემოთ გადმოცემული მათემატიკური მასალა სრულიად საკმარისია იმისათვის, რომ გავაანალიზოთ საბაზრო ეკონომიკის ერთი მეტად მნიშვნელოვანი საკითხი, რომელსაც უწოდებენ **მიწოდებისა და მოთხოვნის წონასწორობას.**

სანამ შევუდგებოდეთ აღნიშნული საკითხის შესწავლას, გავიხსენოთ რიცხვითი ფუნქციის ცნება.

ვთქვათ, გვაქვს ორი ცვლადი სიდიდე x და y, რომლებიც ღებულობენ მნიშვნელობებს შესაბამისად X და Y რიცხვითი სიმრავლეებიდან.

თუ მოცემულია რაიმე f წესი, რომელიც ყოველ $x \in X$ რიცხვს შეუსაბამებს ერთადერთ $y \in Y$ რიცხვს, მაშინ ვამბობთ, რომ მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქცია.

აქვე აღვნიშნოთ, რომ x-ს ეწოდება დამოუკიდებელი ცვლადი, ხოლო y-ს — დამოკიდებული ცვლადი.

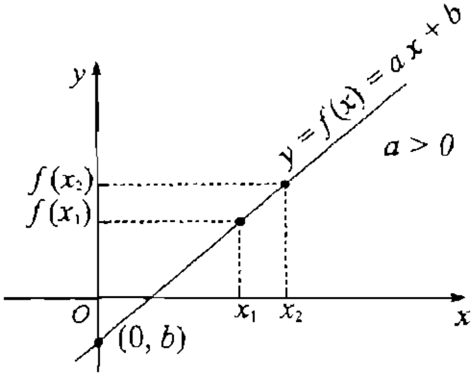
თუ x-ის ზრდა იწვევს $y = f(x)$-ის ზრდას, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება ზრდადი, ხოლო, თუ x-ის ზრდა იწვევს $y = f(x)$-ის კლებას, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება კლებადი.

ამ პარაგრაფში საქმე გვექნება მხოლოდ წრფივ ფუნქციებთან, ე.ი.

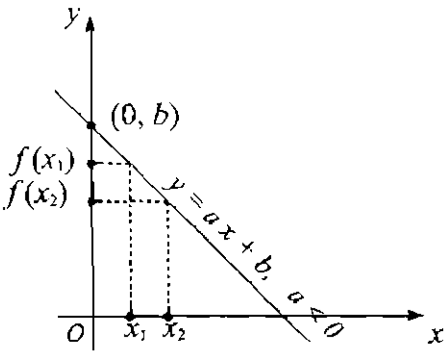
$$y = f(x) = ax + b. \qquad (1.16)$$

აქ a და b მოცემული მუდმივი რიცხვებია. როგორც ჩვენთვის უკვე

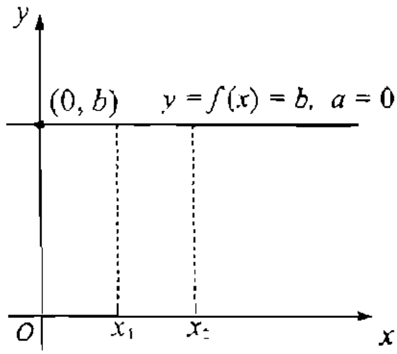
ცნობილია, საკოორდინატო Oxy სიბრტყეზე ამ ფუნქციის გრაფიკია წრფე, რომელიც Ox ღერძის მიმართულებასთან ადგენს მახვილ კუთხეს, თუ $a>0$, და ბლაგვ კუთხეს, თუ $a<0$. თუ $a=0$, მაშინ შესაბამისი წრფე Ox ღერძის პარალელურია (იხ. ნახ. 1.24, 1.25, 1.26).



ნახ. 1.24



ნახ. 1.25



ნახ. 1.26

ვთქვათ, $x_1<x_2$. მაშინ მოყვანილი ნახაზებიდან ჩანს, რომ

$$f(x_1)<f(x_2), \quad \text{თუ} \quad a>0,$$

$$f(x_1)>f(x_2), \quad \text{თუ} \quad a<0,$$

$$f(x_1)=f(x_2), \quad \text{თუ} \quad a=0.$$

სხვა სიტყვებით ეს ფაქტები ასე შეგვიძლია დავახასიათოთ: თუ $a>0$, მაშინ x-ის ზრდასთან ერთად იზრდება $y=f(x)$ ფუნქცია (ე. ი. ფუნქცია ზრდადია), ხოლო თუ $a<0$, მაშინ x-ის ზრდა იწვევს $y=f(x)$ ფუნქციის კლებას (ე. ი. ფუნქცია კლებადია). თუ $a=0$, მაშინ ფუნქცია $y=f(x)=b$

არაა დამოკიდებული x-ის ცვალებადობაზე და იღებს მუდმივ b მნიშვნელობას. შევნიშნოთ, რომ როდესაც x მოძრაობს მარცხნიდან მარჯვნივ, მაშინ ზრდადი $y = f(x) = ax + b$ ფუნქციის შემთხვევაში შესაბამისი $(x, f(x))$ წერტილი გრაფიკზე (წრფეზე) „მიემართება" ზევით, კლებადი ფუნქციის შემთხვევაში კი — ქვევით.

შემოვიღოთ **მოთხოვნის ფუნქცია და მიწოდების ფუნქცია**.

ვთქვათ, ბაზრის მოთხოვნა რაიმე ფიქსირებულ ნაწარმზე არის Q. ცხადია, Q არის რიცხვი, რომელიც აღნიშნავს მოთხოვნილი ნაწარმის რაოდენობას და იზომება გარკვეული (პროდუქციის შესაბამისი) ერთეულებით. აღვნიშნოთ პროდუქციის ერთეულის საბაზრო ფასი P სიმბოლოთი.

საბაზრო ეკონომიკის პირობებში მოთხოვნა Q დამოკიდებულია საბაზრო P ფასზე

$$Q = f(P). \tag{1.17}$$

f ფუნქციის კონკრეტული სახე დგინდება ან ეკონომიკური თეორიიდან ან საბაზრო მონაცემებიდან. (1.17) ტიპის დამოკიდებულებას უწოდებენ **მოთხოვნის ფუნქციას** და ამის მისათითებლად f-ს ინდექსად მიუწერენ D ასოს (იხ. დანართი):

$$\boxed{Q = f_D(P)} \tag{1.18}$$

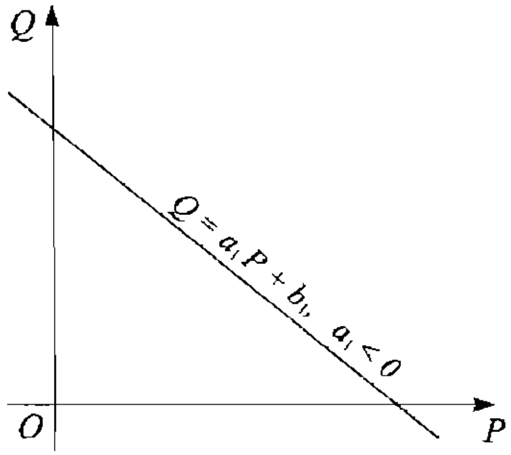
ზოგადად, f_D შეიძლება ძალიან რთული ფუნქცია იყოს. ამის კონკრეტულ მაგალითებს ჩვენ შემდგომში შევხვდებით. აქ კი უბრალოდ შევნიშნოთ, რომ f_D, ზოგადად, დამოკიდებულია P ფასზე, მომხმარებლის Y შემოსავალზე, ალტერნატიული პროდუქციის P_S ფასზე, დამატებითი საქონლის P_C ფასზე, რეკლამის A დანახარჯზე და მომხმარებელთა T გემოვნებაზე.

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ იმ შემთხვევას, როდესაც f_D წრფივი ფუნქციაა P-ს მიმართ, კერძოდ,

$$Q = f_D(P) = a_1 P + b_1, \tag{1.19}$$

სადაც a_1 და b_1 რაიმე კონკრეტული მუდმივებია, რომლებსაც ეკონომი-

კაში პარამეტრებს უწოდებენ. რეალურ ცხოვრებაში რაიმე პროდუქციაზე ფასის ზრდა იწვევს ამ პროდუქციაზე მოთხოვნის შემცირებას, ე. ი. (1.19) ფუნქცია უნდა იყოს კლებადი. ეს კი ნიშნავს, რომ $a_1 < 0$. ამიტომ შესაბამისი გრაფიკი OP ღერძის დადებით მიმართულებასთან ბლაგვ კუთხეს შეადგენს (იხ. ნახ. 1.27).



ნახ. 1.27

ტრადიციულად, ეკონომისტები მოთხოვნის ფუნქციას წერენ არა (1.18) სახით, არამედ შემდეგნაირად

$$\boxed{P = g_D(Q)}$$

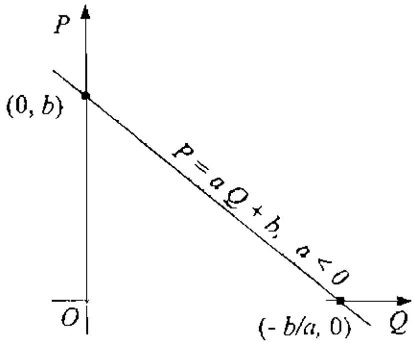
ე. ი. ფასს გამოსახავენ როგორც მოთხოვნის ფუნქციას. ეს ტოლფასია იმისა, რომ (1.18) განტოლებიდან ვიპოვოთ P ცვლადი Q ცვლადის საშუალებით. ამის შესაბამისად, გრაფიკის აგების დროს ვერტიკალურ (ორდინატთა) ღერძზე გადაზომავენ P ფასს, ჰორიზონტალურ (აბსცისათა) ღერძზე კი – Q მოთხოვნას. აქ P არის ფასი, რომელსაც მომხმარებელი იხდის საქონლის ერთი ერთეულის საყიდლად.

(1.19) ტიპის წრფივი დამოკიდებულებიდან მარტივად მივიღებთ

$$P = g_D(Q) = aQ + b, \tag{1.20}$$

სადაც $a = \dfrac{1}{a_1}$, $b = -\dfrac{b_1}{a_1}$. შევნიშნოთ, რომ, რადგან a_1 უარყოფითი სიდიდეა, a პარამეტრიც უარყოფითია. ამიტომ (1.20) ფუნქცია კლებადია

და მის შესაბამის წრფეს ნახ. 1.28-ზე გამოსახული მდებარეობა ექნება (იგი OQ ღერძთან შეადგენს ბლაგვ კუთხეს). მას უწოდებენ **მოთხოვნის წირს (წრფეს)**.



ნახ. 1.28

ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ $P \geq 0$ და $Q \geq 0$. ამასთან, $P = 0$ ნიშნავს, რომ, ფაქტობრივად, პროდუქცია უფასოდ ეძლევა ყველა მსურველს, ხოლო $Q = 0$ ნიშნავს, რომ მოთხოვნა განსახილველ პროდუქციაზე არ არსებობს.

გავარკვიოთ b პარამეტრის ეკონომიკური შინაარსი (1.20) ტოლობაში.

ცხადია, როდესაც $P = b$, მაშინ $Q = 0$, ე. ი. როდესაც ფასი არის b-ს ტოლი, მაშინ განსახილველ პროდუქციაზე მოთხოვნა არ არსებობს (რაღაც მიზეზების გამო, მაგალითად, მაღალი ფასის გამო). ამრიგად, b პარამეტრი დადებითია და პროდუქციის ფასი ბაზარზე შემოსაზღვრულია ამ b რიცხვით.

ასევე ცხადია, როდესაც $P = 0$, მაშინ $Q = -\dfrac{b}{a} > 0$. ამიტომ $-\dfrac{b}{a}$ რიცხვი მიუთითებს ბაზრის მაქსიმალურ მოთხოვნას.

ამოცანა 1.12. ავაგოთ მოთხოვნის წირი, თუ მოთხოვნის ფუნქციაა

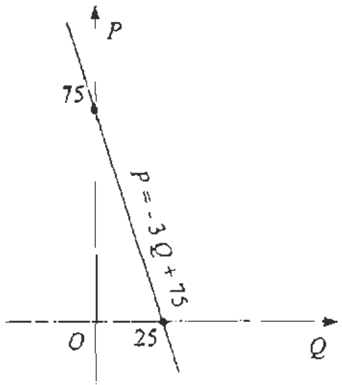
$$P = -3Q + 75;$$

(ა) რას უდრის ფასი, თუ მოთხოვნაა 23?

(ბ) რას უდრის მოთხოვნა, როდესაც ფასია 18?

(გ) როგორ იცვლება ფასი მოთხოვნის ერთი ერთეულით შემცირებისას?

▼ მოთხოვნის წირის (წრფის) ასაგებად მოვძებნოთ მისი OQ და OP ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები: როდესაც $P=0$, მაშინ $Q=25$, ხოლო როდესაც $Q=0$, მაშინ $P=75$. ამიტომ შესაბამისი წრფე გაივლის $(25, 0)$ და $(0, 75)$ წერტილებზე (იხ. ნახ. 1.29).



ნახ. 1.29

(ა) მოცემული მოთხოვნის ფუნქციიდან მივიღებთ, რომ თუ $Q=23$, მაშინ

$$P=-3\cdot 23+75=6,$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში პროდუქციის ფასია $P=6$;

(ბ) როდესაც $P=18$, მაშინ გვაქვს $18=-3Q+75$ ანუ $Q=19$, ე. ი. როდესაც ფასია $P=18$, მაშინ მოთხოვნაა $Q=19$;

(გ) როდესაც მოთხოვნაა Q, მაშინ ფასია

$$P=-3Q+75.$$

ამიტომ, როდესაც მოთხოვნა იქნება $Q-1$, მაშინ ფასი გამოითვლება ტოლობით $P_1=-3(Q-1)+75=-3Q+78$. აქედან მივიღებთ $P_1-P=(-3Q+78)-$ $-(-3Q+75)=3$ ანუ $P_1=P+3$.

ამრიგად, თუ მოთხოვნა შემცირდა ერთი ერთეულით, მაშინ ფასი იზრდება 3 ერთეულით. ■

ახლა განვიხილოთ **მიწოდების ფუნქცია**. იგი შესაბამისობას ამყარებს რაიმე პროდუქციის ერთეულის P ფასსა და ამავე პროდუქციის იმ Q რა-

ოდენობას შორის, რომლის ბაზარზე შეტანასაც გეგმავს მწარმოებელი. ეკონომიკური თეორია და რეალური ცხოვრება უჩვენებს, რომ ფასის ზრდას მოსდევს მიწოდების ზრდა. ამიტომ მიწოდების ფუნქცია

$$P = g_S(Q) \tag{1.21}$$

ზრდადი ფუნქციაა. აქ P არის მწარმოებლის მიერ დადგენილი მიწოდებული საქონლის ერთი ერთეულის ფასი. ამრიგად, P და Q სიდიდეებს მოთხოვნის და მიწოდების ფუნქციებში სხვადასხვა შინაარსი აქვს (!).

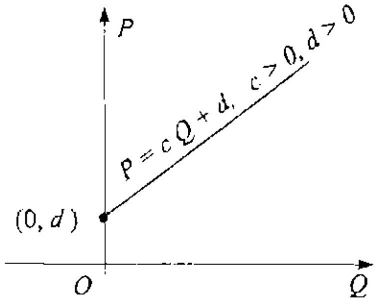
აქაც განვიხილავთ იმ კონკრეტულ შემთხვევას, როცა $g_S(Q)$ წრფივი ფუნქციაა, ე. ი.

$$P = g_S(Q) = cQ + d\,, \tag{1.22}$$

სადაც c და d მუდმივებია. ზრდადობიდან გამომდინარეობს, რომ c კუთხური კოეფიციენტი დადებითია. რადგან ფასი ყოველთვის დადებითია, ამიტომ d პარამეტრიც დადებითია. ამრიგად, (1.22) ტოლობაში

$$c > 0\,, \qquad d > 0\,. \tag{1.23}$$

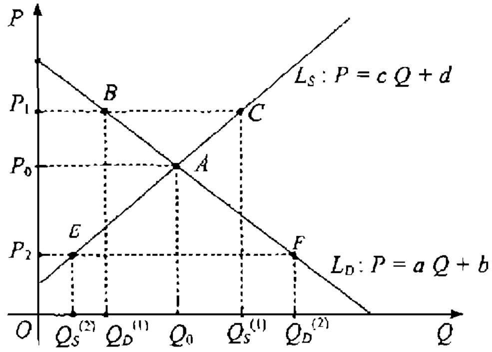
აქედან დავასკვნით, რომ შესაბამისი გრაფიკი OQ ღერძთან ადგენს მახვილ კუთხეს და OP ღერძს კვეთს d წერტილში (იხ. ნახ. 1.30). ამ გრაფიკს **მიწოდების წირი (წრფე)** ეწოდება.



ნახ. 1.30

ზემოთ მოტანილი მსჯელობიდან (იხ. აგრეთვე ნახ. 1.30) გამომდინარეობს, რომ მწარმოებელი დაგეგმავს პროდუქციის შეტანას ბაზარზე მხოლოდ მაშინ, თუ ფასი გადააჭარბებს d სიდიდეს.

ავაგოთ ახლა ერთსა და იმავე OQP სიბრტყეზე მოთხოვნის L_D და მიწოდების L_S წირები (იხ. ნახ. 1.31).



ნახ. 1.31

ჩავატაროთ ამ ნახაზის ანალიზი.

ჯერ განვიხილოთ P_1 ფასის შესაბამისი B და C წერტილები L_D და L_S წრფეებზე. რადგან $B \in L_D$ და $C \in L_S$, ამიტომ P_1 ფასს შეესაბამება $Q_D^{(1)}$ მოთხოვნა და $Q_S^{(1)}$ მიწოდება, ამასთან $Q_D^{(1)} < Q_S^{(1)}$, ე. ი. მოთხოვნა ჩამორჩება მიწოდებას. ეს კი ნიშნავს, რომ ბაზარი გაჯერებულია მიწოდებული პროდუქციით და ამიტომ ეს პროდუქცია მთლიანად არ გაიყიდება. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ბაზარზე გვაქვს ჭარბი პროდუქცია.

ახლა განვიხილოთ P_2 ფასის შესაბამისი $E \in L_S$ და $F \in L_D$ წერტილები. ცხადია, რომ P_2 ფასს შეესაბამება $Q_D^{(2)}$ მოთხოვნა და $Q_S^{(2)}$ მიწოდება. ამასთან, $Q_D^{(2)} > Q_S^{(2)}$, ე. ი. მოთხოვნა ჭარბობს მიწოდებას. ეს კი ნიშნავს, რომ მოთხოვნა მთლიანად ვერ კმაყოფილდება და საქმე გვაქვს პროდუქციის დეფიციტთან. ეს ორივე ვარიანტი არასასურველია საბაზრო ეკონომიკისათვის.

ახლა განვიხილოთ P_0 ფასის შესაბამისი სიტუაცია. მას შეესაბამება L_D და L_S წრფეების საერთო A წერტილი, რომლის აბსცისაა Q_0. ბუნებრივია, რომ P_0 ფასის შესაბამისი Q_0 მოთხოვნა და Q_0 მიწოდება ერთმანეთის ტოლია, ე. ი. მოთხოვნა ემთხვევა მიწოდებას. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ბაზარი **გაწონასწორებულია** (იყიდება იმ რაოდენობის პროდუ-

ქცია, რა რაოდენობის პროდუქციაც მიეწოდება ბაზარს). ამ P_0 ფასს ეწოდება **წონასწორობის ფასი**, შესაბამის Q_0-ს კი — **წონასწორობის სიდიდე (მოცულობა)**.

აშკარაა, რომ გაწონასწორებული ბაზარი წარმოადგენს იდეალურ ვარიანტს. ამ იდეალური ვარიანტის შესაბამისი წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე განისაზღვრება შემდეგი სისტემის ამოხსნით

$$\boxed{\begin{cases} P = aQ + b \\ P = cQ + d \end{cases}}$$

რომლის (Q_0, P_0) ამონახსნიც განსაზღვრავს მოთხოვნის L_D და მიწოდების L_S წრფეების საერთო A წერტილის კოორდინატებს.

ამოცანა 1.13. მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები შესაბამისად მოცემულია შემდეგი ტოლობებით

$$P = g_D(Q) = -2Q + 50, \tag{1.24}$$

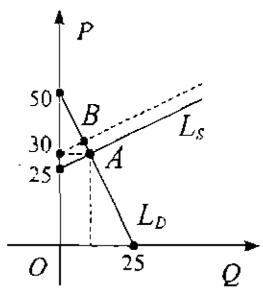
$$P = g_S(Q) = 0.5Q + 25, \tag{1.25}$$

სადაც პირველ განტოლებაში Q არის მოთხოვნა, ხოლო მეორე განტოლებაში — მიწოდება.

(ა) განვსაზღვროთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე.

(ბ) მთავრობამ გადაწყვიტა დააწესოს ფიქსირებული გადასახადი 5 დოლარის ოდენობით პროდუქციის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე. ვიპოვოთ ამ ღონისძიების გავლენა ბაზრის წონასწორობაზე.

▼ (ა) პირველ რიგში ავაგოთ მოთხოვნის L_D და მიწოდების L_S წირები (იხ. ნახ. 1.32).



ნახ. 1.32

ამ ორი წრფის გადაკვეთის A წერტილის კოორდინატები უნდა დავადგინოთ შემდეგი სისტემის ამოხსნით

$$\begin{cases} P = -2Q + 50 \\ P = 0.5\,Q + 25. \end{cases}$$

მარტივად ვაჩვენებთ, რომ სისტემის ამონახსნია $P_0 = 30$, $Q_0 = 10$. ამრიგად, წონასწორობის ფასია $P_0 = 30$, წონასწორობის სიდიდე კი — $Q_0 = 10$.

(ბ) თუ მთავრობა დააწესებს 5 დოლარ ფიქსირებულ გადასახადს პროდუქციის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე, მაშინ მოთხოვნის ფუნქცია (1.24) უცვლელი დარჩება, მიწოდების ფუნქცია (1.25) კი შეიცვლება. მართლაც, თუ პროდუქციის ერთეული P დოლარად იყიდებოდა, რასაც მომხმარებელი ფირმას უხდიდა, ახლა უკვე მომხმარებლის მიერ გადახდილი P დოლარიდან 5 დოლარი „მიაქვს" სახელმწიფოს, ხოლო $P-5$ რჩება ფირმას. ამიტომ მიწოდების ფუნქციაში P-ს ნაცვლად ახლა უნდა ჩავსვათ $P-5$. ამის შედეგად მივიღებთ ახალი სიტუაციის შესაბამის მიწოდების ფუნქციას $P-5 = 0.5\,Q + 25$ ანუ

$$P = 0.5\,Q + 30. \tag{1.26}$$

ამ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი ნახ. 1.32-ზე აგებულია წყვეტილი ხაზით. წონასწორობის ახალი P_0' ფასისა და წონასწორობის ახალი Q_0' სიდიდის მოსაძებნად უნდა ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} P = -2Q + 50 \\ P = 0.5\,Q + 30. \end{cases}$$

მივიღებთ: $P_0' = 34$, $Q_0' = 8$. ეს სიდიდეები წონასწორობის ახალი B წერტილის კოორდინატებია (იხ. ნახ. 1.32).

ახლა გავაანალიზოთ მიღებული ეფექტი, რაც მთავრობის აღნიშნულმა გადაწყვეტილებამ გამოიწვია.

ჯერ ერთი, მოთხოვნის წირი უცვლელი დარჩა, ხოლო მიწოდების წირმა აიწია ზემოთ 5 ერთეულით. ამან გამოიწვია წონასწორობის ფასის გაზრდა $P_0 = 30$-დან $P_0' = 34$-მდე. ამრიგად, მომხმარებლისათვის პროდუქცია 4 დოლარით გაძვირდა. გარდა ამისა, ფირმამ ერთეული პროდუ-

ქციის გაყიდვით მიღებული 34 დოლარიდან 5 დოლარი მთავრობას უნდა გადაუხადოს, რის გამოც მას 29 დოლარი ანუ ერთი დოლარით ნაკლები რჩება, ვიდრე მას მთავრობის მიერ გადასახადის შემოღებამდე რჩებოდა (გავიხსენოთ, რომ ადრე ფირმა პროდუქციის ერთეულს $P_0 = 30$ დოლარად ყიდდა). ამრიგად, ზემოთ მოტანილი მსჯელობა გვიჩვენებს, რომ მთავრობის მიერ 5 დოლარიანი ფიქსირებული გადასახადის შემოღებამ შეცვალა ბაზრის წონასწორობის მდგომარეობა. ბაზრის ახალი წონასწორობის დამყარება იწვევს პროდუქციის 4 დოლარით გაძვირებას და მიწოდებას 10-დან 8 ერთეულამდე ამცირებს. გარდა ამისა, მთავრობის მიერ დადგენილი 5 დოლარი გადასახადი ასე ნაწილდება: 4 დოლარს იხდის მომხმარებელი (რადგან მისთვის 4 დოლარით გაძვირდა პროდუქცია), ხოლო 1 დოლარს — ფირმა (რადგან ფირმის შემოსავალმა პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით დაიკლო 1 დოლარით). შევნიშნოთ, რომ მთლიანი ამონაგები პირველ შემთხვევაში არის $30 \cdot 10 = 300$, ხოლო მეორე შემთხვევაში — $34 \cdot 8 = 272$, ე.ი. მთავრობის გადაწყვეტილებას მოჰყვა მთლიანი ამონაგების შემცირებაც. ■

ზემოთ განხილული მაგალითები შეესაბამება ერთსაქონლიან ბაზარს, ე.ი. განსახილველი პროდუქციის მახასიათებლები (ფასი, მოთხოვნა, მიწოდება) დამოუკიდებელია ბაზრის სხვა პროდუქტებისაგან.

ახლა, კონკრეტულ მაგალითზე განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც გვაქვს ორი პროდუქტი, რომლებიც ურთიერთდამოკიდებულია ანუ სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მათი მოთხოვნის რაოდენობები და ფასები გავლენას ახდენენ ერთმანეთზე. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ საქმე გვაქვს ორსაქონლიან ბაზართან. ცხადია, რაც უფრო დიდია ურთიერთდამოკიდებული პროდუქტების რაოდენობა, მით უფრო რთულდება ბაზრის ეკონომიკური ანალიზი.

ამოცანა 1.14. ბაზარზე შემოდის ორი ურთიერთდამოკიდებული პროდუქტი. პირველი სახის პროდუქტის მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები, შესაბამისად,

$$Q_1 = 10 - 2P_1 + P_2 \quad \text{(მოთხოვნის ფუნქცია)}, \tag{1.27}$$

$$Q_1 = -3 + 2P_1 \quad \text{(მიწოდების ფუნქცია)}, \tag{1.28}$$

ხოლო მეორე სახის პროდუქტის მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციებია, შესაბამისად,

$$Q_2 = 5 + 2P_1 - 2P_2 \quad \text{(მოთხოვნის ფუნქცია)}, \tag{1.29}$$

$$Q_2 = -2 + 3P_2 \quad \text{(მიწოდების ფუნქცია)} . \tag{1.30}$$

აქ P_1 და P_2 შესაბამისად პირველი და მეორე სახის პროდუქტის ერთეულის ფასებია.

განვსაზღვროთ ამ შემთხვევაში ორსაქონლიანი ბაზრის წონასწორობის ფასები და წონასწორობის მოცულობები.

▼ ცხადია, ბაზრის წონასწორობა ნიშნავს, რომ მოთხოვნა ორივე პროდუქტზე ემთხვევა მათ მიწოდებას. რადგან (1.27) ტოლობაში Q_1 მოთხოვნაა, (1.28) ტოლობაში კი – მიწოდება, მათი გატოლება გვაძლევს

$$10 - 2P_1 + P_2 = -3 + 2P_1,$$

ანუ

$$4P_1 - P_2 = 13 .$$

ანალოგიურად, (1.29) ტოლობაში Q_2 წარმოადგენს მეორე სახის პროდუქტზე მოთხოვნას, (1.30) ტოლობაში კი – მიწოდებას, ამიტომ წონასწორობის პირობა გვაძლევს

$$5 + 2P_1 - 2P_2 = -2 + 3P_2$$

ანუ

$$2P_1 - 5P_2 = -7 .$$

მიღებული ორივე განტოლება უნდა შესრულდეს ერთდროულად, ამიტომ მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} 4P_1 - P_2 = 13 \\ 2P_1 - 5P_2 = -7. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $P_1 = 4$, $P_2 = 3$, რომლებიც წონასწორობის საძიებელი ფასებია. მაშინ (1.28) და (1.30) ტოლობებიდან მივიღებთ $Q_1 = 5$, $Q_2 = 7$. ისინი წონასწორობის საძიებელი მოცულობებია, შესაბამისად, პირველი და მეორე პროდუქტისათვის. ■

1.13. ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის განტოლე-ბათა სისტემა

ამ პარაგრაფში ჩვენ გავეცნობით მაკროეკონომიკის ერთ-ერთ კონკრეტულ ამოცანას, რომელიც შეეხება ეროვნული (ნაციონალური) შემოსავლის ანალიზს (მაკროეკონომიკა შეისწავლის ეკონომიკური თეორიისა და ეკონომიკური პოლიტიკის ანალიზს სახელმწიფო დონეზე).

ვთქვათ, ეროვნულ ეკონომიკას გააჩნია ორი სექტორი: საოჯახო მეურნეობები და ფირმები. პროდუქციის წარმოებისა და მომსახურებისათვის ფირმები ისეთ რესურსებს იყენებენ, როგორიცაა მიწა, კაპიტალი და შრომა. ამ რესურსებს **წარმოების ფაქტორები** ეწოდებათ და, როგორც წესი, ისინი საოჯახო მეურნეობების სექტორს მიეკუთვნება. აღნიშნულ შემთხვევაში **ეროვნული შემოსავალი** იმ თანხების ნაკადია, რომლებსაც ფირმები უხდიან საოჯახო მეურნეობებს წარმოების ფაქტორებისათვის.

საოჯახო მეურნეობებს მიღებული თანხა შეუძლიათ მოიხმარონ ორი მიმართულებით:

(ა) მათ შეუძლიათ თანხის ნაწილით შეიძინონ ფირმების მიერ წარმოებული პროდუქცია ან ისარგებლონ ფირმების მომსახურებით;

(ბ) დაზოგილი თანხა ანაბრების ან სხვა სახით შეინახონ ან დააბანდონ, მაგალითად, ბანკებში, აქციებში და ა.შ.

ცხადია, რომ საოჯახო მეურნეობათა მიერ დახარჯული C თანხისა და დაზოგილი S თანხის რაოდენობები დამოკიდებულია ეროვნულ Y შემოსავალზე, ე. ი.

$$C = f(Y), \tag{1.31}$$

$$S = g(Y). \tag{1.32}$$

აქ f-ს **მოხმარების (დანახარჯის) ფუნქცია** ეწოდება, ხოლო g-ს — **დანაზოგის ფუნქცია.** რეალურ ცხოვრებაში Y-ის ზრდას მოსდევს როგორც მოხმარების ხარჯების, ისე დანაზოგების ზრდა. ამიტომ f და g ზრდადი ფუნქციებია.

ჯერ გავეცნოთ მოხმარების f ფუნქციას. ვთქვათ, მოხმარების C და-

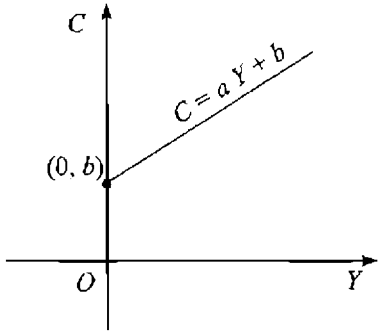
ნახარჯი წრფივადაა დამოკიდებული Y შემოსავალზე, ე. ი.

$$C = aY + b\,. \tag{1.33}$$

ამ ფუნქციის ზრდადობიდან გამომდინარეობს, რომ a უნდა იყოს დადებითი. ამასთან, $a < 1$, რადგან, ზოგადად, დანახარჯმა არ უნდა გადააჭარბოს შემოსავალს. b პარამეტრს **ავტონომიური დანახარჯი** ეწოდება და იგი დადებითია. ამრიგად, (1.33) ტოლობაში a და b პარამეტრები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$0 < a < 1, \qquad b > 0\,. \tag{1.34}$$

ამიტომ მოხმარების ფუნქციის გრაფიკს ნახ. 1.33-ზე ნაჩვენები სახე ექნება.



ნახ. 1.33

ცხადია, რომ საოჯახო მეურნეობათა დანახარჯებისა და დანაზოგების ჯამი ემთხვევა ეროვნულ შემოსავალს **(ბალანსის განტოლება)**

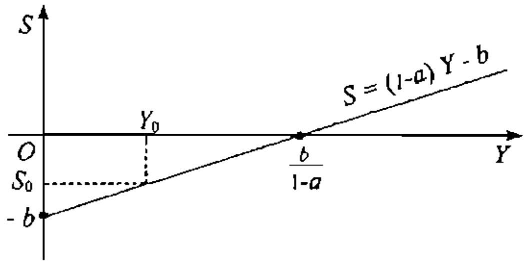
$$\boxed{C + S = Y} \tag{1.35}$$

ამიტომ (1.33) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$S = (1 - a)\,Y - b\,, \tag{1.36}$$

რომელსაც **დანაზოგის ფუნქცია** ეწოდება.

მისი შესაბამისი გრაფიკი ნაჩვენებია ნახ. 1.34-ზე. (1.36) ფორმულიდან დავასკვნით, რომ დანაზოგი დადებითია მხოლოდ მაშინ, როდესაც ეროვნული შემოსავალი გადააჭარბებს გარკვეულ დადებით სიდიდეს, კერძოდ, $\dfrac{b}{1-a}$ სიდიდეს.

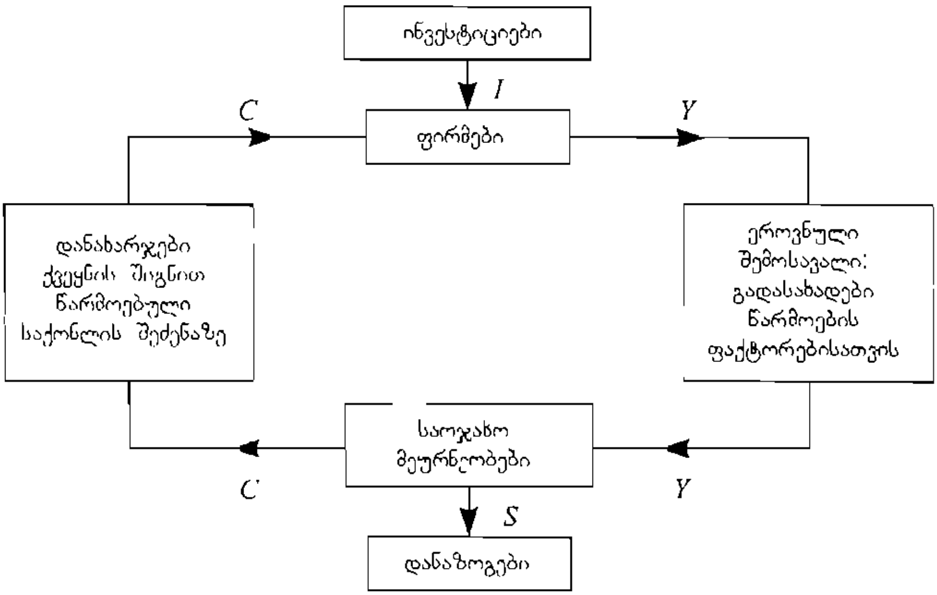


ნახ. 1.34

მრავალი ეკონომიკური ფუნქციისაგან განსხვავებით, დანაზოგის ფუნქციამ შეიძლება მიიღოს უარყოფითი მნიშვნელობაც. კერძოდ, როდესაც $0 < Y < \frac{b}{1-a}$, მაშინ დანაზოგი უარყოფითია. მაგალითად, ნახ. 1.34-ზე Y_0-ის შესაბამისი S_0 დანაზოგი უარყოფითია.

ეს რეალურ ცხოვრებაში იმ ფაქტზე მიუთითებს, რომ როდესაც შემოსავალი საკმარისი არაა აუცილებელი დანახარჯების დასაფარავად, მაშინ დანახარჯების ნაწილი იფარება, მაგალითად, ანაბრებიდან დანაზოგების მოხსნით.

გამოვსახოთ ეროვნული ეკონომიკის განხილული უმარტივესი მოდელი შემდეგი სქემის სახით (ის. ნახ. 1.35).



ნახ. 1.35

პარამეტრს, რომელიც მოცემულ მოდელში მუდმივია, **ეგზოგენური (გარე) ცვლადი** ეწოდება. ხოლო იმ პარამეტრს, რომელიც იცვლება მოცემული მოდელის შიგნით, **ენდოგენური (შიგა) ცვლადი** ეწოდება.

ეროვნული ეკონომიკის განხილულ მოდელში I ინვესტიცია დაგეგმილია მოდელის გარეთ და, ამდენად, იგი ეგზოგენური ცვლადია (ანუ იგი მუდმივია მოდელის შიგნით), ხოლო C, S და Y ცვლადები ენდოგენურია (ანუ ისინი იცვლებიან მოდელის შიგნით).

ვთქვათ, ფირმები გეგმავენ რაიმე კონკრეტული, ფიქსირებული $I = I^*$ რაოდენობის თანხის ინვესტიციას. მაშინ (იხ. ნახ. 1.35) უჯრედში „ფირმები" შედის C და I^* თანხების ნაკადი, ხოლო გამოდის Y თანხის ნაკადი. თუ შესრულებულია ტოლობა

$$\boxed{C + I^* = Y} \tag{1.37}$$

მაშინ ამბობენ, რომ **ეკონომიკა წონასწორობაშია**. როგორც აღვნიშნეთ, აქ I^* არის ფიქსირებული მუდმივი სიდიდე, რომელიც დაგეგმილია მოდელის გარეთ, ხოლო C და Y ცვლადი სიდიდეებია. შევნიშნოთ, რომ ეკონომიკის წონასწორობის შემთხვევაში დანაზოგების სიდიდე (S) ემთხვევა ინვესტიციის სიდიდეს (I), რასაც ადვილად დავასკვნით (1.35) და (1.37) ტოლობების შედარებით.

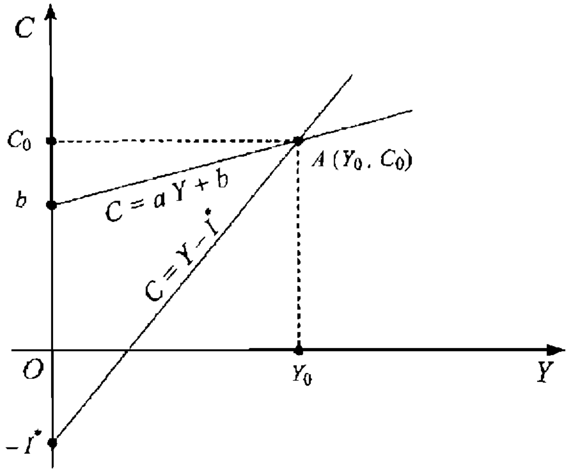
თუ დავუშვებთ, რომ C დანახარჯი და Y შემოსავალი ერთმანეთთან დაკავშირებულია (1.33) ტოლობით, სადაც a და b ცნობილი მუდმივებია, მაშინ ეკონომიკის წონასწორობის (1.37) განტოლების გათვალისწინებით მივიღებთ ორუცნობიან წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} C = aY + b \\ Y = C + I^* \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} C = aY + b \\ C = Y - I^*. \end{cases} \tag{1.38}$$

ამ სისტემის ამონახსნი (Y_0, C_0) განსაზღვრავს ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის შესაბამის Y_0 შემოსავლისა და C_0 დანახარჯის დონეებს.

ავაგოთ (1.38) სისტემაში შემავალი წრფეების გრაფიკები OYC სიბრტყეზე (Y გადაზომილია აბსცისათა ღერძზე, ხოლო C — ორდინატთა ღერძზე). რადგან (1.38) განტოლების კუთხური კოეფიციენტები ერთმანეთის-

გან განსხვავებულია $(0<a<1)$, ამიტომ ეს ორი წრფე აუცილებლად გადაიკვეთება ერთ წერტილში. გარდა ამისა, რადგან $b>0$ და $I^*>0$, ეს გადაკვეთის $A(Y_0, C_0)$ წერტილი მდებარეობს პირველ მეოთხედში (იხ. ნახ. 1.36).



ნახ. 1.36

ამოცანა 1.15. ვიპოვოთ ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების წონასწორობის დონე, თუ მოხმარების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$C = 0.6\,Y + 10$$

და დაგეგმილი საინვესტიციო თანხაა $I = 12$ (ერთეული).

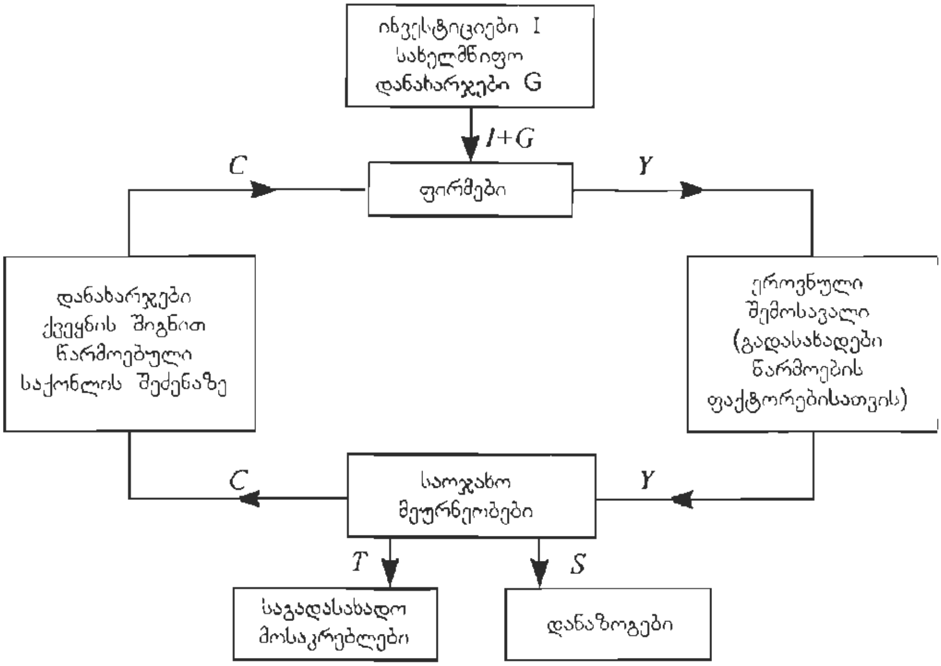
▼ გამოვიყენოთ ეკონომიკის წონასწორობის განმსაზღვრელი წრფივ ალგებრულ განტოლებათა (1.38) სისტემა. ჩვენს შემთხვევაში, ამოცანის პირობის თანახმად, $a = 0.6$, $b = 10$, $I^* = 12$. ამიტომ მივიღებთ

$$\begin{cases} C = 0.6\,Y + 10 \\ Y = C + 12. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით დავადგენთ, რომ $Y = 55$ და $C = 43$. ამ რიცხვებით განისაზღვრება ეკონომიკის წონასწორობის შესაბამისი ეროვნული შემოსავალი და დანახარჯები. ■

ზემოთ აღწერილი მოდელი, რომელიც გამოსახულია 1.35 სქემაზე, უფრო რთულდება, თუ მასში გავითვალისწინებთ **სახელმწიფო დანახარჯებს** (G) და **საგადასახადო მოსაკრებლებს (ბეგარას)** (T). სქემატურად ეს შე-

იძლება ასე გამოვსახოთ:



ნახ. 1.37

ახლა უკვე უჯრედში „ფირმები“ (იხ. ნახ. 1.37) შედის თანხის სამი ნაკადი C, I და G, ხოლო გამოდის Y თანხის ნაკადი ეროვნული შემოსავლის სახით. უჯრედში „საოჯახო მეურნეობები“ შედის Y თანხის ნაკადი, რომელიც იყოფა სამ S, T და C ნაკადად.

ამდენად, თანხა, რომელიც საოჯახო მეურნეობებს რჩება საქონლის შესაძენად და დანაზოგისთვის უკვე არის არა Y, არამედ $Y-T$.

სიდიდეს

$$Y_d = Y - T, \tag{1.39}$$

ეწოდება **წმინდა შემოსავალი (შემოსავალი გადასახადების გადახდის შემდეგ).**

ვთქვათ, $G = G^*$ არის რაიმე ფიქსირებული სახელმწიფო დანახარჯების სიდიდე, $I = I^*$ კი – ფიქსირებული ინვესტიციებისა. მაშინ **ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის პირობა** ასე დაიწერება

$$C + I^* + G^* = Y. \tag{1.40}$$

„საოჯახო მეურნეობების“ უჯრედის ბალანსის განტოლება განსახილველ

შემთხვევაში ასე ჩაიწერება (იხ. ნახ. 1.37)

$$C + S + T = Y . \tag{1.41}$$

ახლა უკვე წრფივი კავშირი C დანახარჯებსა და წმინდა Y_d შემოსავალს შორის შემდეგ სახეს მიიღებს (შეადარე (1.33) ფორმულას)

$$C = a\,Y_d + b \qquad \text{ანუ} \qquad C = a\left(Y - T\right) + b , \tag{1.42}$$

სადაც Y_d განსაზღვრულია (1.39) ფორმულით.

თვით საგადასახადო T მოსაკრებლები დამოკიდებულია ეროვნულ Y შემოსავალზე. ძალიან ხშირად ამ დამოკიდებულებას (**საგადასახადო მოსაკრებლების ფუნქციას**) იღებენ წრფივი სახით

$$T = h\left(Y\right) = k\,Y + T^{*} , \tag{1.43}$$

სადაც k და T^* ფიქსირებული მუდმივებია.

რადგან საგადასახადო მოსაკრებლები არ აღემატება შემოსავალს, ამიტომ $0 \le k < 1$. გარდა ამისა, ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარე, $T^* > 0$.

ზემოთ ამოწერილი (1.39)-(1.43) განტოლებები გვაძლევს ხუთი წრფივი ალგებრული განტოლებისაგან შედგენილ სისტემას ხუთი (Y, T, Y_d, C და S) ცვლადის მიმართ:

$$\begin{cases} Y_d = Y - T & \text{(წმინდა შემოსავალი)} \\ Y = C + I^* + G^* & \text{(წონასწორობის განტოლება)} \\ Y = C + S + T & \text{(ბალანსის განტოლება)} \\ C = a\,Y_d + b & \text{(მოხმარების ფუნქცია)} \\ T = k\,Y + T^* & \text{(საგადასახადო მოსაკრებლების ფუნქცია)} \end{cases} \tag{1.44}$$

აქ I^*, G^*, a, b, k და T^* მოცემული ფიქსირებული რიცხვებია.

ეს სისტემა **ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის განტოლებათა სისტემაა**, როდესაც გათვალისწინებულია სახელმწიფო დანახარჯები და საგადასახადო მოსაკრებლები.

ამ განტოლების მარტივი სტრუქტურა საშუალებას იძლევა ადვილად ამოვხსნათ კონკრეტული ეკონომიკური ამოცანები.

ამოცანა 1.16. დავადგინოთ ეროვნული შემოსავლის წონასწორობის დონე, თუ ცნობილია, რომ

$G^* = 20$ (მთავრობის დანახარჯები),

$I^* = 35$ (ინვესტიციები),

$C = 0.9\ Y_d + 70$ (მოხმარების ფუნქცია),

$T = 0.2\ Y + 25$ (საგადასახადო მოსაკრებლების ფუნქცია).

ვიპოვოთ ამ წონასწორობის შესაბამისი S დანაზოგის დონე, საგადასახადო T თანხა, წმინდა Y_d შემოსავალი და მოხმარების C დონე.

▼ ამოცანის პირობის თანახმად $G^* = 20$, ხოლო $I^* = 35$. ამიტომ წონასწორობის (1.40) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$C + 35 + 20 = Y$$

ანუ

$$C = Y - 55\,. \tag{1.45}$$

გავიხსენოთ, რომ $Y_d = Y - T$ (იხ. (1.39) ფორმულა) და გადავწეროთ ამოცანის პირობებში მოცემული მოხმარების ფუნქცია, საგადასახადო მოსაკრებლების ფუნქცია და (1.45) განტოლება ერთი სისტემის სახით

$$\begin{cases} C = Y - 55 \\ C = 0.9\left(Y - T\right) + 70 \\ T = 0.2\ Y + 25. \end{cases} \tag{1.46}$$

რადგან პირველ და მეორე განტოლებებში მარცხენა მხარეები ერთი და იგივეა, ამიტომ მარჯვენა მხარეთა გატოლება გვაძლევს

$$Y - 55 = 0.9\ Y - 0.9\ T + 70$$

ანუ

$$0.1\ Y + 0.9\ T = 125\,.$$

დავაჯგუფოთ ეს უკანასკნელი განტოლება (1.46) სისტემის მესამე განტოლებასთან

$$\begin{cases} T = 0.2\ Y + 25 \\ 0.1\ Y + 0.9\ T = 125\,. \end{cases}$$

მივიღეთ ორუცნობიანი წრფივ განტოლებათა სისტემა. პირველი განტოლებიდან T-ს მნიშვნელობის მეორეში ჩასმით მივიღებთ

$$0.1\,Y + 0.9\,(0.2\,Y + 25) = 125\,.$$

აქედან კი მარტივად ვიპოვით

$$Y = \frac{102.5}{0.28} \approx 366.07142 \approx 366\,,$$

რაც ეროვნული შემოსავლის წონასწორობითი დონეა. შესაბამისი საგადასახადო თანხა გამოითვლება ამოცანაში მოცემული T ფუნქციის საშუალებით

$$T \approx 0.2 \cdot 366 + 25 = 98.2\,.$$

რადგან წმინდა შემოსავალი გამოითვლება (1.39) ფორმულით, ამიტომ მივიღებთ

$$Y_d = Y - T \approx 267.8\,.$$

გამოვთვალოთ ახლა მოხმარების C დონე (1.45) ფორმულით

$$C = Y - 55 \approx 311\,.$$

და ბოლოს, დანაზოგების S თანხის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (1.41) ფორმულა. მივიღებთ

$$S = Y - T - C \approx 366 - 98.2 - 311 = -\,43.2\,.$$

ამრიგად, ამოცანის პირობებით მოცემული მოდელის შესაბამისი ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობა განისაზღვრება რიცხვებით: $Y = 366$, $T = 98.2$, $Y_d = 267.8$, $C = 311$, $S = -43.2$. (შევნიშნოთ, რომ ამ კონკრეტული მოდელის წონასწორობის პირობებში დადებითი დანაზოგი არ მიიღება!). ■

განვიხილოთ ამ პუნქტის დასაწყისში შემოტანილი ორსექტორიანი მოდელი, რომლის წონასწორობის მდგომარეობაც აღიწერება განტოლებებით:

$$Y = C + I\,, \tag{1.47}$$

$$C = aY + b\,. \tag{1.48}$$

ადრე ჩვენ ვიხილავდით შემთხვევას, როდესაც I იყო მუდმივი. რეალურად ინვესტიციები დამოკიდებულია დაბანდების სარგებლის r განაკვეთზე. ცხადია, სარგებლის რაც უფრო მეტ განაკვეთს ითხოვს ინვესტორი, მით უფრო ნაკლები იქნება ფირმების მოთხოვნა საინვესტიციო თანხაზე. ეს

კი ნიშნავს, რომ I ინვესტიცია r პარამეტრის კლებადი ფუნქციაა. კერძოდ, თუ მათ შორის დამოკიდებულება წრფივია, ე. ი.

$$I = cr + d\,, \tag{1.49}$$

მაშინ $c < 0$ (კლებადობის გამო) და $d > 0$ (ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარე). აქ c და d მოცემული ფიქსირებული რიცხვებია. ამასთან, d-ს **ავტონომიური (მუდმივი) ინვესტიცია** ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ ამოწერილი სამი განტოლება — (1.47), (1.48) და (1.49) — შეიცავს ოთხ უცნობს: Y, C, I, r. ეს საშუალებას იძლევა ერთმანეთთან დავაკავშიროთ Y და r სიდიდეები. მართლაც, თუ (1.48) და (1.49) ტოლობებიდან C-ს და I-ს მნიშვნელობებს შევიტანთ (1.47) ტოლობაში, მივიღებთ

$$Y = aY + b + cr + d$$

ანუ

$$(1-a)\,Y - cr = b + d\,. \tag{1.50}$$

ამ ტოლობას, რომელიც ეროვნული შემოსავლის Y და სარგებლის განაკვეთის r სიდიდეებს აკავშირებს, IS თანაფარდობა ეწოდება (იხ. დანართი). ამ განტოლების გრაფიკს IS **მრუდს** უწოდებენ.

საჭიროა კიდევ ერთი განტოლება Y და r უცნობების მიმართ, რომ ისინი C და I უცნობებთან ერთად ცალსახად განისაზღვროს. ეს კავშირი მყარდება ფულის ბაზრის წონასწორობით.

ამბობენ, რომ ფულის ბაზარი წონასწორობაშია, თუ ბაზარზე მიწოდებული ფულის M_S რაოდენობა ტოლია ფულზე ბაზრის მოთხოვნის M_D რაოდენობისა, ე. ი.

$$M_S = M_D\,.$$

ბაზარზე მიწოდებულ ფულში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ქაღალდის ბანკნოტები და ლითონის მონეტები, რომლებიც ყოველდღიურ ბრუნვაშია; აგრეთვე ის ფულიც, რომელიც ინახება საბანკო დეპოზიტებზე (ანგარიშებზე). ამ ფულს აკონტროლებს სახელმწიფოს ცენტრალური ბანკი და მისი რაოდენობა ითვლება რაღაც ფიქსირებულ M_S^* სიდიდედ. ამრიგად, ფულის

M_S რაოდენობა მუდმივი M_S^* სიდიდის ტოლია

$$M_S = M_S^*.$$

მეორე მხრივ, ფულზე მოთხოვნა ხორციელდება სამი წყაროდან (რომლებსაც **კეინზის ანალიზის კატეგორიებს** უწოდებენ):

> 1) გარიგებისათვის საჭირო ფულზე მოთხოვნა (ყოველდღიური საქონელგაცვლისა და მოხმარებისათვის);
>
> 2) გაუთვალისწინებელი მიზნებისათვის ფულზე მოთხოვნა (მაგალითად, საგანგებო შემთხვევის დაფინანსებისათვის);
>
> 3) სპეკულაციური მიზნებისათვის ფულზე მოთხოვნა (ეს არის სარეზერვო თანხები იმ შემთხვევისათვის, როცა კერძო პირები ან ფირმები გადაწყვეტილებებს მიიღებენ ინვესტიციების ჩასადებად ალტერნატიულ სფეროში, როგორიცაა, მაგალითად, სახელმწიფო აქციები და ა.შ.).

პირველ და მეორე პუნქტში მითითებული მოთხოვნების ჯამს ერთ სიდიდედ აერთიანებენ და გულისხმობენ, რომ ეს ჯამი (აღვნიშნოთ იგი L_1-ით) ეროვნული Y შემოსავლის პროპორციულია, ე. ი.

$$L_1 = k_1 Y, \tag{1.51}$$

სადაც k_1 არის დადებითი მუდმივი.

მოთხოვნის მესამე პუნქტში აღწერილ სიდიდეს (აღვნიშნოთ იგი L_2-ით) უკავშირებენ სარგებლის r განაკვეთს შემდეგი თანაფარდობით

$$L_2 = k_2 r + k_3, \tag{1.52}$$

სადაც $k_2 < 0$ და $k_3 > 0$ ფიქსირებული მუდმივებია. ფულზე მოთხოვნა სპეკულაციური მიზნებისათვის რომ r-ის კლებადი ფუნქციაა, ჩვენ ამას დავასაბუთებთ მეოთხე თავში (იხ. პარაგრაფი 4.4).

ფულზე მთლიანი M_D მოთხოვნა სამივე მოთხოვნის ჯამია, ანუ

$$M_D = L_1 + L_2 = k_1 Y + k_2 r + k_3. \tag{1.53}$$

ამიტომ ფულის ბაზრის წონასწორობის პირობა $M_S = M_D$ მიიღებს შემდეგ სახეს

$$k_1 Y + k_2 r + k_3 = M_S^* \tag{1.54}$$

ამ ტოლობას, რომელიც ეროვნულ Y შემოსავალსა და სარგებლის r განაკვეთის სიდიდეს აკავშირებს, LM თანაფარდობა ეწოდება (იხ. დანართი). ეს არის სწორედ ის მეორე განტოლება, რომელიც (1.50) განტოლებასთან ერთად გვაძლევს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას Y და r უცნობებისათვის:

$$\begin{cases} (1-a)\,Y - c\,r = b + d \\ k_1 Y + k_2 r = M_S^* - k_3 . \end{cases} \tag{1.55}$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა ყოველთვის ამოხსნადია, რადგან

$$\frac{1-a}{k_1} \neq \frac{-c}{k_2} .$$

ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ $\dfrac{1-a}{k_1} > 0$, ხოლო $\dfrac{-c}{k_2} < 0$. (1.55) განტოლებათა სისტემა (1.47) – (1.49) ტოლობებთან ერთად მთლიანად განსაზღვრავს ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის ყველა პარამეტრს.

ამოცანა 1.17. განვსაზღვროთ წონასწორობის შესაბამისი ეროვნული შემოსავალი და საინვესტიციო თანხის სარგებლის განაკვეთი, თუ ცნობილია სასაქონლო ბაზრის შემდეგი მონაცემები:

$$C = 0.8\,Y + 100,$$

$$I = -20r + 1000,$$

და ფულის ბაზრის შემდეგი ინფორმაცია:

$$M_S = 2375,$$

$$L_1 = 0.1\,Y,$$

$$L_2 = -25r + 2000.$$

რა ეფექტს ახდენს ბაზარზე ფულის მიწოდების შემცირება Y და r სიდიდეების წონასწორობის დონეზე?

▼ ამოვწეროთ (1.55) სისტემა ჩვენს კონკრეტულ შემთხვევაში. თუ შე-

ვადარებთ (1.48), (1.49), (1.51) და (1.52) განტოლებებს და ამოცანაში მოყვანილ პირობებს, მივიღებთ:

$$a=0.8\,,\ \ b=100\,,\ \ c=-20\,,\ \ d=1000\,,$$

$$M_S=M_S^*=2375\,,\ \ k_1=0.1\,,\ \ k_2=-25\,,\ \ k_3=2000\,.$$

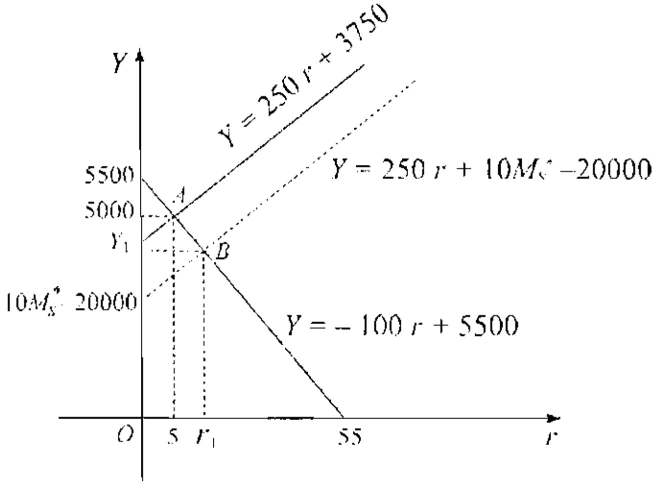
ამიტომ (1.55) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases}0.2\,Y+20r=1100\\0.1\,Y-25r=375\end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases}Y=-100r+5500\\Y=250r+3750.\end{cases}\qquad(1.56)$$

ამოვხსნათ ეს სისტემა ალგებრულად და გრაფიკულად (იხ. ნახ. 1.38).



ნახ. 1.38

ამ სისტემის ამონახსნია

$$\begin{cases}Y_0=5000\\r_0=5.\end{cases}$$

ამრიგად, ეროვნული შემოსავლის შესაბამისი წონასწორობითი დონეა $Y_0=5000$, ხოლო შესაბამისი სარგებლის განაკვეთია $r_0=5$. ახლა გავარკვიოთ, როგორ მოქმედებს წონასწორობაზე ფულის ბაზარზე მიწოდების ანუ M_S^* სიდიდის შემცირება. განვიხილოთ კვლავ (1.55) სისტემის კერძო

სახე ჩვენი შემთხვევისათვის, ოღონდ მონაცემად დავტოვოთ M_S^*, რომელიც ნაკლებია 2375-ზე. მივიღებთ (შეადარეთ (1.56) სისტემას)

$$\begin{cases} 0.2\ Y + 20r = 1100 \\ 0.1\ Y - 25r = M_S^* - 2000. \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ $M_S^* - 2000 < 375$, რადგან $M_S^* < 2375$. გადავწეროთ ეს სისტემა შემდეგი სახით

$$\begin{cases} Y = -100r + 5500 \\ Y = 250r + 10M_S^* - 20000 \end{cases} \tag{1.57}$$

და ავაგოთ თითოეული განტოლების შესაბამისი გრაფიკი (იხ. ნახ. 1.38).

ცხადია, რომ (1.56) და (1.57) სისტემების პირველი განტოლებები ერთი და იგივეა და მათი გრაფიკები ერთმანეთს დაემთხვევა. რაც შეეხება მეორე განტოლებების შესაბამის წრფეებს, რადგან

$$10\ M_S^* - 20000 < 23750 - 20000 = 3750,$$

ამიტომ (1.57) სისტემის მეორე განტოლების გრაფიკი მიიღება (1.56) სისტემის მეორე განტოლების გრაფიკის პარალელურად ქვემოთ გადაადგილებით (იგი ნახ. 1.38-ზე გავლებულია წყვეტილად). ამის შედეგად მივიღებთ, რომ ნაცვლად $A(r_0, Y_0)$ წერტილის კოორდინატებისა, ამონახსნი იქნება $B(r_1, Y_1)$ წერტილის კოორდინატები.

ამიტომ, ცხადია, რომ $Y_1 < Y_0 = 5000$, ხოლო $r_1 > r_0 = 5$. ამრიგად, წონასწორობის ახალ მდგომარეობაში, რაც განპირობებულია M_S^* ფულის მიწოდების შემცირებით, ეროვნული შემოსავალი მცირდება, ხოლო საინვესტიციო თანხის სარგებლის განაკვეთი იზრდება. ■

1.14. კომპლექსური რიცხვები. კვადრატული განტოლება

სანამ გადავიდოდეთ ამ პარაგრაფის ძირითად თემაზე, კიდევ ერთხელ გადავავლოთ თვალი და მიმოვიხილოთ, როგორ მოხდა რიცხვითი სიმრავლის გაფართოება თანდათანობით ნატურალური რიცხვებიდან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლემდე. ჩვენ ამას გავაკეთებთ განტოლებების ენაზე. უნდა

გვახსოვდეს, რომ პრაქტიკულ ცხოვრებაში მრავალი პრობლემის გადაწყვეტა მიიყვანება ამა თუ იმ განტოლებაზე. ამდენად, განტოლებებზე და მათ ამონახსნებზე მსჯელობა ტოლფასია რეალურ, ცხოვრებისეულ ამოცანებზე საუბრისა.

საკითხის განხილვა დავიწყოთ ელემენტარული განტოლებით

$$x + n = k\,, \tag{1.58}$$

სადაც x უცნობია, n და k კი — რაიმე ნატურალური რიცხვებია $(n, k \in \mathbb{N})$.

დავსვათ კითხვა: არსებობს თუ არა (1.58) განტოლების ამონახსნი ნატურალურ რიცხვთა $\mathbb{N}$ სიმრავლეში? თუ, მაგალითად, $n = 3$ და $k = 9$, მაშინ ცხადია, რომ $x = 6 \in \mathbb{N}$ და (1.58) განტოლებას გააჩნია ამონახსნი $\mathbb{N}$-ში. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა: $n = 5$ და $k = 1$. მაშინ გვაქვს განტოლება

$$x + 5 = 1\,,$$

რომელსაც გააჩნია ამონახსნი $x = -4$ და რომელიც უკვე აღარაა ნატურალური რიცხვი. იგი არის უარყოფითი მთელი რიცხვი. ამრიგად, გამოკლების ოპერაციამ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში განაპირობა უარყოფითი მთელი რიცხვებისა და რიცხვი 0-ის შემოტანა. ამით ნატურალურ რიცხვთა $\mathbb{N}$ სიმრავლე გაფართოვდა მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლემდე. (1.58)-დან გვაქვს

$$x = k - n\,.$$

ცხადია, რომ $k - n$ მთელი რიცხვია, თუ k და n მთელი რიცხვებია. ამრიგად, (1.58) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია მთელ რიცხვთა სიმრავლეში, თუ k და n მთელი რიცხვებია. ამიტომ (1.58) ტიპის განტოლების ამოხსნა აღარ საჭიროებს მთელ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოებას.

ახლა განვიხილოთ

$$n x = k \tag{1.59}$$

განტოლება, სადაც x უცნობია, ხოლო n და k — მთელი რიცხვებია $(n, k \in \mathbb{Z})$.

კვლავ დავსვათ კითხვა: (1.59) განტოლებას გააჩნია თუ არა ამონახსნი მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლეში?

ვთქვათ, $n = 3$, $k = 27$. მაშინ $3x = 27$ და გვაქვს $x = 9 \in \mathbb{Z}$. მაგრამ, თუ $n = 3$ და $k = 2$, მაშინ (1.59) განტოლებიდან მივიღებთ

$$3x = 2\,, \tag{1.60}$$

რომლის ამონახსნია $x = \dfrac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, ე. ი. ამ შემთხვევაში (1.60) განტოლებას მთელ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არა აქვს, მაგრამ მას გააჩნია ამონახსნი რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლეში. ამრიგად, გაყოფის ოპერაციამ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში განაპირობა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის შემოტანა. (1.59)-დან ცხადია, რომ, თუ $n \neq 0$, მაშინ

$$x = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}\,.$$

აქედან კი დავასკვნით, რომ (1.59) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, თუ $n, k \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. ამიტომაც (1.59) ტიპის განტოლების ამოხსნა აღარ ითხოვს რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლის გაფართოებას.

ახლა განვიხილოთ განტოლება

$$x^2 = q\,, \tag{1.61}$$

სადაც x უცნობია, ხოლო $q \geq 0$ მოცემული რაციონალური რიცხვია.

კვლავ დავსვათ „ტრადიციული" კითხვა: ამოხსნადია თუ არა (1.61) განტოლება $\mathbb{Q}$ სიმრავლეში? ვთქვათ, $x^2 = \dfrac{49}{25}$. მაშინ $x = \pm\dfrac{7}{5} \in \mathbb{Q}$. მაგრამ, თუ $q = 2$, მაშინ გვაქვს განტოლება

$$x^2 = 2\,,$$

რომლის ამონახსნებია $x = \pm\sqrt{2}$. ეს რიცხვები კი ირაციონალური რიცხვებია. ამრიგად, (1.61) განტოლება ყოველთვის არ არის ამოხსნადი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში.

ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლის შემოტანამ კი განაპირობა ის, რომ (1.61) ტიპის განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია $\mathbb{R}$-ში, ე. ი. ნებისმიერი ნამდვილი არაუარყოფითი q რიცხვისათვის $(q \in \mathbb{Q},\ q \geq 0)$ (1.61)-ს გააჩნია ნამდვილი ამონახსნები

$$x = \pm\sqrt{q} \in \mathbb{R}\,.$$

ისმება ბუნებრივი კითხვა: საჭიროა თუ არა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის შემდგომი გაფართოება?

განვიხილოთ კვლავ კვადრატული განტოლება:

$$x^2+1=0, \tag{1.62}$$

ცხადია, რომ თუ x ნამდვილი რიცხვია, მაშინ $x^2 \geq 0$ და ამიტომ $1+x^2>0$, ე. ი. (1.62) განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არ გააჩნია.

შემდგომი ბუნებრივი კითხვა ასეთია: არსებობს თუ არა ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლის ისეთი გაფართოება, რომ (1.62) ტიპის განტოლება გახდეს ამოხსნადი იმ გაფართოებულ რიცხვთა სიმრავლეში? საბედნიეროდ, ამ კითხვაზე პასუხი დადებითია. ასეთ გაფართოებას წარმოადგენს ე. წ. **კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე.**

კომპლექსურ რიცხვთა თეორია ძირითადად ეფუძნება **წარმოსახვითი ერთეულის** შემოტანას. წარმოსახვითი ერთეული აღინიშნება i სიმბოლოთი და მას გააჩნია (ერთი შეხედვით მეტად არაბუნებრივი) თვისება

$$\boxed{i^2=-1} \tag{1.63}$$

ანუ ეს ისეთი რიცხვია, რომლის კვადრატიც (-1)-ის ტოლია. (1.63) ტოლობიდან გამომდინარე ფორმალურად წერენ

$$\boxed{i=\sqrt{-1}} \tag{1.64}$$

ამის შემდეგ შემოდის კომპლექსური რიცხვის ცნება:

$z=a+ib$ ტიპის რიცხვებს, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $i=\sqrt{-1}$ წარმოსახვითი ერთეულია, ეწოდება კომპლექსური რიცხვი

a-ს ეწოდება z კომპლექსური რიცხვის **ნამდვილი ნაწილი,** ხოლო b-ს – **წარმოსახვითი** ib ნაწილის კოეფიციენტი. ისინი აღინიშნება, შესაბამისად, სიმბოლოებით $\operatorname{Re} z=a$ და $\operatorname{Im} z=b$. თუ $b=0$, მაშინ $z=a+i\cdot 0=a$, ე. ი. ამ შემთხვევაში z ნამდვილი რიცხვია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ქვესიმრავლეა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლისა, რაც იმას ნიშნავს, რომ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე გაფართოებაა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლისა.

თუ $a=0$, მაშინ $z=ib$ ტიპის რიცხვებს ეწოდებათ **წმინდა წარმოსახვითი რიცხვები.**

ორი კომპლექსური $z_1 = a_1 + i b_1$ და $z_2 = a_2 + i b_2$ რიცხვი ტოლია, თუ ტოლია მათი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, ე.ი. $a_1 = a_2$ და $b_1 = b_2$. შევნიშნოთ, რომ კომპლექსური z რიცხვი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\operatorname{Re} z = 0$ და $\operatorname{Im} z = 0$, ე. ი. $z = a + ib = 0$ ტოლობა ეკვივალენტურია ტოლობათა სისტემისა: $a = 0$, $b = 0$.

შემოვიღოთ ორი მეტად მნიშვნელოვანი ცნება

1. $z = a + ib$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული ეწოდება $\bar{z} = a - ib$ კომპლექსურ რიცხვს;

2. $z = a + ib$ კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება ნამდვილ არაუარყოფით რიცხვს, რომელიც აღინიშნება $|z|$ სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

ცხადია, რომ $|z| = |\bar{z}|$

ახლა შემოვიღოთ ძირითადი ოპერაციები კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში.

$z_1 = a_1 + i b_1$ და $z_2 = a_2 + i b_2$ კომპლექსური რიცხვების ჯამი განისაზღვრება ტოლობით

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$$

ანალოგიურად გამოითვლება $z_1 = a_1 + i b_1$ და $z_2 = a_2 + i b_2$ რიცხვების სხვაობა

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

იმისათვის, რომ გავამრავლოთ ორი კომპლექსური რიცხვი, ისინი უნდა გავამრავლოთ როგორც ორწევრები და გავითვალისწინოთ (1.63) ტოლობა:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(a_1 + i b_1\right)\left(a_2 + i b_2\right) = a_1 a_2 + i b_1 a_2 + i a_1 b_2 + i^2 b_1 b_2 =$$
$$= \left(a_1 a_2 - b_1 b_2\right) + i \left(a_1 b_2 + b_1 a_2\right)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $z = a + ib$, მაშინ უკანასკნელი ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = \left[a\,a - b\,(-b)\right] + i\,[ab - ab] = a^2 + b^2,$$

ე. ი. ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური რიცხვების ნამრავლი ნამდვილია და უდრის მათი მოდულის კვადრატს

$$\boxed{z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2}$$

ისევე, როგორც ნამდვილი რიცხვების შემთხვევაში, აქაც z კომპლექსური რიცხვის ხარისხი ნატურალური n მაჩვენებლით განიმარტება შემდეგი ნამრავლით

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n-\text{ჯერ}}.$$

გამრავლების ეს წესი სრულ თანხმობაშია (1.63) განმარტებასთან. მართლაც,

$$i^2 = i \cdot i = (0 + i \cdot 1)(0 + i \cdot 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i\,(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

ორი კომპლექსური რიცხვის გაყოფა ხდება შემდეგი ალგორითმის მიხედვით

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{\left|z_2\right|^2} = \frac{\left(a_1 + i b_1\right)\,\left(a_2 - i b_2\right)}{a_2^2 + b_2^2} =$$
$$= \frac{\left(a_1 a_2 + b_1 b_2\right) + i\,\left(b_1 a_2 - a_1 b_2\right)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

ე. ი. ჯერ მრიცხველი და მნიშვნელი უნდა გავამრავლოთ მნიშვნელის შეუღლებულზე და შემდეგ მრიცხველში გამოვიყენოთ ორი კომპლექსური რი-

ცხვის გამრავლების წესი. მაგალითად, თუ $z_1 = 1 - i$ და $z_2 = 2 + 3i$, მაშინ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{2+3i} = \frac{(1-i)\ (2-3i)}{(2+3i)\ (2-3i)} = \frac{2-2i-3i+3i^2}{2^2+3^2} = \frac{-1-i5}{13} = -\frac{1}{13} - i\ \frac{5}{13}.$$

მარტივად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ თუ z_1 და z_2 ნამდვილი რიცხვებია (ე. ი. $b_1 = b_2 = 0$), მაშინ ზემოთ მითითებული ფორმულებით გამოთვლილი ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და განაყოფი კვლავ ნამდვილია. ეს კი მიუთითებს იმ ფაქტზე, რომ აღნიშნული ოპერაციები სრულ თანხმობაშია ანალოგიურ ოპერაციებთან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, რომელთა თვისებები ჩვენთვის კარგადაა ცნობილი.

კერძოდ, კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ზემოთ შემოღებული ოპერაციები აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\boxed{\begin{aligned}
&z_1 + z_2 = z_2 + z_1\\
&(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)\\
&z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1\\
&(z_1 \cdot z_2)\ z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)\\
&(z_1 + z_2)\ z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3\\
&0 \cdot z = 0\\
&1 \cdot z = z\\
&(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n\\
&\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n}
\end{aligned}}$$

კომპლექსურმა რიცხვებმა და მათთან დაკავშირებულმა მეთოდებმა უდიდესი გამოყენება ჰპოვეს როგორც წმინდა მათემატიკური, ისე საბუნებისმეტყველო და სოციალურ-ეკონომიკური პრობლემების გამოკვლევაში. ჩვენ გავეცნობით მათ უმარტივეს გამოყენებას კვადრატული განტოლების ამოხსნისას. თქვენთვის კარგადაა ცნობილი, რომ, თუ განვიხილავთ კვადრატულ

$$ax^2+bx+c=0$$

განტოლებას, სადაც a, b და c კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია $(a \neq 0)$, მაშინ მისი ნამდვილი ამონახსნები წარმოიდგინება ფორმულებით

$$x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

როდესაც დისკრიმინანტი არაუარყოფითია $D=b^2-4ac \geq 0$.

რა ხდება, როდესაც $D=b^2-4ac<0$?

თქვენთვის ასევე კარგადაა ცნობილი, რომ ამ უკანასნელ შემთხვევაში ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში კვადრატულ განტოლებას არ გააჩნია ამონახსნი. არსებობს თუ არა ამონახსნი ამ შემთხვევაში კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში?

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი (1.62). მარტივად შევამოწმებთ, რომ $x=i$ ან $x=-i$ ამონახსნებია ამ განტოლებისა, რადგან $(\pm i)^2=-1$.

განვიხილოთ მეორე მაგალითი

$$x^2+x+1=0.$$

ცხადია, აქ $D=b^2-4ac=1-4=-3<0$. ამიტომ ამ განტოლებას არ გააჩნია ნამდვილი ამონახსნები. არსებობს თუ არა კომპლექსური ამონახსნები?

ფორმალურად ვისარგებლოთ კვადრატული განტოლების ამონახსნის ზემოთ ამოწერილი ფორმულით, რომელშიც $\sqrt{D}=\sqrt{-3}$ და რომელიც უაზრობაა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში. გადავწეროთ უკანასკნელი გამოსახულება ფორმალურად შემდეგი სახით: $\sqrt{-3}=\sqrt{-1\cdot 3}=\sqrt{-1}\sqrt{3}=i\sqrt{3}$ და გავითვალისწინოთ იგი ამონახსნის ფორმულაში. მივიღებთ

$$x_{1,2}=\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს რიცხვები განსახილველი განტოლების ამონახსნებია. მართლაც,

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+1=\frac{1-i2\sqrt{3}-3}{4}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+1=\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}+2\right)=0.$$

სრულიად ანალოგიურად შემოწმდება, რომ მეორე რიცხვიც ამონახსნია.

ამრიგად, ჩვენ მოვძებნეთ ამონახსნები კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში უარყოფითი დისკრიმინანტის შემთხვევაშიც.

ზოგადად, მართებულია შემდეგი:

განტოლებას $ax^2+bx+c=0$, a, b, $c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, აქვს

(ა) ნამდვილი ამონახსნები

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ \text{როცა}\ D=b^2-4ac\geq 0,\ \text{და}$$

(ბ) კომპლექსური ამონახსნები

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a},\quad \text{როცა}\ D=b^2-4ac<0$$

შევნიშნოთ, რომ როდესაც დისკრიმინანტი უარყოფითია, მაშინ $-D>0$ და $\sqrt{-D}$ ნამდვილი რიცხვია.

ამრიგად, თუ $D<0$, მაშინ კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი კომპლექსური ურთიერთშეუღლებული ამონახსნი

კომპლექსური რიცხვების გამოყენებას ჩვენ კვლავ შევხვდებით მეათე თავში.

1.15. კომბინატორიკის ელემენტები

კომბინატორიკა შეისწავლის იმ ქვესიმრავლეების (კომბინაციების) რიცხობრივ მახასიათებლებს, რომლებიც შეიძლება შევადგინოთ გარკვეულ ელემენტთა მოცემული სასრული სიმრავლიდან.

ჩვენ ქვემოთ განვსაზღვრავთ კონკრეტული ტიპის ისეთ კომბინაციებს, რომლებსაც ფართო გამოყენება აქვთ პრაქტიკაში, კერძოდ, გადანაცვლებას, წყობას, ჯუფთებას და ამოვწერთ მათი რაოდენობის გამოსათვლელ ფორმულებს.

● სასრულ სიმრავლეს ეწოდება **დალაგებული სიმრავლე,** თუ მასში დადგენილია ელემენტთა თანმიმდევრობა, ე.ი. თუ ცნობილია და დაფიქსი-

რებულია მისი პირველი ელემენტი, მეორე ელემენტი და ა. შ. ■

დალაგებული სიმრავლის აღსანიშნავად მის ელემენტებს მოვათავსებთ მრგვალ ფრჩხილებში მოცემული რიგის მიხედვით.

ორი სასრული დალაგებული სიმრავლე ტოლია, თუ მათი ელემენტების რაოდენობა ერთი და იგივეა და შესაბამის ადგილებზე მდგომი ელემენტები ტოლია.

მაგალითად, $A=(1;7;3)$ და $B=(7;1;3)$ დალაგებული სიმრავლეები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

● სასრულ სიმრავლეში დადგენილ რიგს მისი ელემენტების **გადანაცვლება** ეწოდება. ■

განვიხილოთ ამოცანა: რამდენი გადანაცვლება შეიძლება შევადგინოთ სამი a, b, c ელემენტისგან შედგენილ სიმრავლეში?

ეს რიცხვი ტოლია ექვსის. მართლაც, ამ ელემენტებისაგან შესაძლებელია მხოლოდ ექვსი გადანაცვლება $(a;b;c)$, $(a;c;b)$, $(c;a;b)$, $(c;b;a)$, $(b;a;c)$, $(b;c;a)$.

ზოგადად, n ელემენტიან სიმრავლეში ყველა შესაძლო განადაცვლებათა რიცხვი აღინიშნება P_n სიმბოლოთი და გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\boxed{P_n=1\cdot 2\cdot 3\cdots n=n!} \qquad (1.65)$$

სიმბოლო $n!$ იკითხება ასე: „n ფაქტორიალი". შეთანხმებით მიღებულია, რომ $0!=1$, $1!=1$. n-ის ზრდასთან ერთად n ფაქტორიალი ძალიან სწრაფად იზრდება.

მაგალითად, $P_1=1!=1$; $P_4=4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$; $P_{10}=3628800$.

ამრიგად, დაფაზე 10 ერთმანეთისაგან განსხვავებული სარეკლამო ფურცლის გასაკრავად არსებობს მათი განლაგების P_{10} ანუ 3628800 შესაძლებლობა!

● n ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს ეწოდება m ელემენტიანი **წყობა** n ელემენტისაგან $(m\le n)$.■

n ელემენტისაგან m ელემენტიან წყობათა რიცხვი აღინიშნება A_n^m სიმბოლოთი. განვიხილოთ კვლავ სამელემენტიანი სიმრავლე $\{a; b; c\}$ და მისი ელემენტებისგან შევადგინოთ ორელემენტიანი კომბინაციები, რომლებიც ერთმანეთისგან განსხვავდებიან ელემენტთა განლაგებით ან ელემენტებით. მივიღებთ: $(a; b)$, $(b; a)$, $(a; c)$, $(c; a)$, $(b; c)$, $(c; b)$, ე. ი. $A_3^2 = 6$.

ზოგადად, n ელემენტისაგან m ელემენტიან წყობათა რიცხვი A_n^m გამოითვლება ფორმულით

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}} \tag{1.66}$$

ვთქვათ, მოცემულია n ელემენტიანი სიმრავლე და ამ სიმრავლისგან შევადგინოთ m $(m \le n)$ ელემენტიანი ჩვეულებრივი (არადალაგებული) ქვესიმრავლეები. ცხადია, რომ ორი არადალაგებული სიმრავლე უნდა ჩავთვალოთ განსხვავებულად, თუ ისინი განსხვავდებიან ერთი ელემენტით მაინც.

● n ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან ქვესიმრავლეს $(m \le n)$ ეწოდება m ელემენტიანი **ჯუფთება** n ელემენტისაგან. ■

n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო m ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი აღინიშნება C_n^m სიმბოლოთი. განვიხილოთ კვლავ სამელემენტიანი სიმრავლე $\{a; b; c\}$ და მისი ელემენტებისგან შევადგინოთ ყველა შესაძლო ორელემენტიანი ქვესიმრავლე (ჯუფთება): $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$, ე.ი. $C_3^2 = 3$.

მტკიცდება, რომ ჯუფთებათა რიცხვი გამოითვლება ფორმულით

$$\boxed{C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}}$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობაში გავითვალისწინებთ (1.65) და (1.66) ფორმულებს, მივიღებთ

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}} \qquad (1.67)$$

მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $C_n^m = C_n^{n-m}$.

მოვიტანოთ რამდენიმე ამოცანა კომბინატორიკის პრაქტიკული გამოყენების საილუსტრაციოდ.

ამოცანა 1.18. ოთხოთახიან ოფისში განლაგებულმა ფირმამ იყიდა ოთხი განსხვავებული ავეჯის კომპლექტი. ავეჯის განლაგების რამდენი ვარიანტი არსებობს ოფისის მოსაწყობად?

▼ ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში მნიშვნელობა აქვს ავეჯის ოთახებში განლაგების რიგს. ამიტომ ყველა შესაძლო ვარიანტის გამოსათვლელად საჭიროა გამოვთვალოთ 4 ელემენტიან გადანაცვლებათა რიცხვი. (1.65) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$P_4 = 4\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24\,.$$

ამრიგად, არსებობს ოფისის მოწყობის 24 განსხვავებული ვარიანტი. ■

ამოცანა 1.19. გაზის სამმართველოს დავალებული აქვს მოამარაგოს გაზის ბალონებით 6 დასახლებული პუნქტი. ერთ დღეში სამმართველოს შეუძლია მოამარაგოს მხოლოდ 3 დასახლებული პუნქტი. რამდენი მარშრუტი შეიძლება შედგეს ერთი დღისათვის?

▼ ცხადია, რომ მარშრუტის შედგენისას მნიშვნელობა აქვს პუნქტების დალაგების რიგს. რომ დავთვალოთ ყველა შესაძლო მარშრუტის რაოდენობა, უნდა გამოვთვალოთ 3 ელემენტიან წყობათა რიცხვი 6 ელემენტისაგან. (1.66) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 120\,.$$

მაშასადამე, ერთი დღისათვის მარშრუტების შედგენა შეიძლება 120 განსხვავებული წესით. ■

ამოცანა 1.20. ვთქვათ, ვალუტის გადამცვლელ პუნქტში აქვთ 10 სახის ვალუტა. ყოველდღე დავალებული აქვთ გასაყიდად გამოიტანონ 4 სახის ვალუტა. რამდენ ვარიანტად შეუძლიათ ვალუტის გამოტანა პუნქტში?

▼ რადგან ვალუტის დალაგების რიგს ამ შემთხვევაში მნიშვნელობა

არა აქვს, ამიტომ უნდა გამოვთვალოთ ოთხელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი 10 ელემენტისაგან. (1.67) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!\,(10-4)!}=\frac{10!}{4!\,6!}=210\,.$$

მაშასადამე, სულ შესაძლებელია $C_{10}^{4}=210$ ვარიანტის შედგენა. ■

1.16. ნიუტონის ბინომური ფორმულა

(1.67) ფორმულის გამოყენებით კარგად ცნობილი შემოკლებული გამრავლების ფორმულები შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$(a+b)^{1}=a+b=C_{1}^{0}\,a+C_{1}^{1}\,b$$

$$(a+b)^{2}=a^{2}+2\,a\,b+b^{2}=C_{2}^{0}\,a^{2}+C_{2}^{1}\,a\,b+C_{2}^{2}\,b^{2}$$

$$(a+b)^{3}=a^{3}+3\,a^{2}\,b+3\,a\,b^{2}+b^{3}=C_{3}^{0}\,a^{3}+C_{3}^{1}\,a^{2}\,b+C_{3}^{2}\,a\,b^{2}+C_{3}^{3}\,b^{3}$$

ამ ფორმულებში ჩვენ გამოვიყენეთ შემდეგი ტოლობები

$$C_{j}^{0}=C_{j}^{j}=1\,,\quad j=1,\,2,\,3,\qquad C_{2}^{1}=2\,,\qquad C_{3}^{1}=C_{3}^{2}=3\,.$$

მტკიცდება, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$(a+b)^{n}=C_{n}^{0}\,a^{n}+C_{n}^{1}\,a^{n-1}\,b+C_{n}^{2}\,a^{n-2}\,b^{2}+\cdots+C_{n}^{m}\,a^{n-m}\,b^{m}+\cdots+C_{n}^{n}\,b^{n}\,,\quad(1.68)$$

სადაც C_{n}^{m} კვლავ (1.67) ტოლობით განისაზღვრება.

(1.68) ფორმულას უწოდებენ **ნიუტონის ბინომურ ფორმულას**, ხოლო C_{n}^{m} კოეფიციენტებს – **ბინომურ კოეფიციენტებს**.

(1.68) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\boxed{C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+\cdots+C_{n}^{n}=2^{n}}$$

ეს ფორმულა შემოკლებით ასეც ჩაიწერება

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}=2^{n}}$$

(შევნიშნოთ, რომ $a_1+\cdots+a_n$ ჯამი შეჯამების $\sum$ სიმბოლოს გამოყენებით ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$a_1+\ \cdots\ +a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\ ;$$

k-ს ეწოდება შეჯამების ინდექსი).

1.17. ხარისხები და ლოგარითმები

ამ პარაგრაფში შედარებით დაწვრილებით შევეხებით ხარისხებზე მოქმედებებს, შემოვიტანთ ლოგარითმის ცნებას, გავეცნობით ლოგარითმების ძირითად თვისებებსა და გამოსახულებათა გალოგარითმების წესებს. ყველა ამ საკითხს არსებითი გამოყენება აქვს ეკონომიკაში, განსაკუთრებით კი ფინანსების მათემატიკაში, რომელსაც ჩვენ მეოთხე თავში შევისწავლით.

დავიწყოთ ელემენტარული ცნებების გახსენებით. გამოსახულებაში

$$a^b=M \tag{1.69}$$

a-ს ეწოდება ფუძე, b-ს — ხარისხის მაჩვენებელი, ხოლო a^b-ს ანუ M-ს — ხარისხი.

თუ $b=n$ ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$M=a^n=\underbrace{a\cdot a\ \cdots\ a}_{n-\text{ჯერ}},$$

და მას აზრი აქვს ნებისმიერი ნამდვილი a რიცხვისათვის.

თუ $b=\dfrac{k}{n}$, სადაც k და n ნატურალური რიცხვებია, მაშინ

$$M=a^{\frac{k}{n}}=\sqrt[n]{a^k}$$

და ეს გამოსახულება ეკუთვნის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, როდესაც $a\geq 0$.

შევნიშნოთ, რომ (1.69) ტოლობაში b შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი. იმისათვის, რომ $M=a^b$ ხარისხი დარჩეს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, a ფუძეს ედება გარკვეული შეზღუდვა. კერძოდ, a

უნდა იყოს დადებითი. ამ შემთხვევაში $M = a^b > 0$.

გავიხსენოთ აგრეთვე შემდეგი ელემენტარული, მაგრამ მეტად მნიშვნელოვანი ფორმულები:

$$\boxed{\begin{aligned} & a^0 = 1\ ,\ a \neq 0 \\ & a^{-b} = \frac{1}{a^b}\ ,\ a \neq 0 \\ & a^b \cdot a^d = a^{b+d} \\ & a^b : a^d = a^{b-d} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} & \left(a^b\right)^d = a^{bd} \\ & \left(a_1 \cdot a_2\right)^b = a_1^b \cdot a_2^b \\ & \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^b = \frac{a_1^b}{a_2^b} \end{aligned}} \qquad (1.70)$$

თუ (1.69) ტოლობაში შემავალი a, b და M სამი სიდიდიდან ორი მათგანი ცნობილია, მაშინ ყოველთვის შესაძლებელია მესამე სიდიდის განსაზღვრა. ჩვენ ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$a > 0, \qquad a \neq 1. \qquad (1.71)$$

ვთქვათ, $a = 4$, $b = 3$. მაშინ

$$M = 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64.$$

ახლა ვთქვათ, $a = 3$, $M = 27$. მაშინ

$$27 = 3^b,$$

საიდანაც მივიღებთ $b = 3$, რადგან $3^3 = 27$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ 27 წარმოვადგინეთ მაჩვენებლიანი ფორმით 3-ის ტოლი ფუძით.

ბოლოს, ვთქვათ, $b = 4$, $M = 16$, მაშინ

$$a^4 = 16$$

და გვექნება $a = \sqrt[4]{16} = 16^{1/4} = 2$. მართლაც, $2^4 = 16$.

როგორც ვხედავთ, პირველ შემთხვევაში საქმე გვაქვს უბრალოდ ახარისხებასთან, ხოლო მესამე შემთხვევაში — ამოფესვასთან. მეორე შემთხვევაში ჩვენ გვიხდება უცნობი ხარისხის მაჩვენებლის განსაზღვრა ცნობილი ფუძისა და ხარისხის საშუალებით. ისმება კითხვა: შეიძლება თუ არა, რომ ნებისმიერი დადებითი M რიცხვი წარმოვადგინოთ მაჩვენებლიანი ფორმით ნებისმიერი a-ს ტოლი ფუძით? ამ კითხვაზე პასუხი დადებითია. სწორედ ამ ამოცანის გადასაწყვეტად შემოდის ლოგარითმის ცნება.

იმ ხარისხის მაჩვენებელს, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a ფუძე, რომ მივიღოთ M რიცხვი, ეწოდება M რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით. ამრიგად, თუ $M=a^b$, მაშინ ვწერთ $b=\log_a M$. აქ იგულისხმება, რომ a აკმაყოფილებს (1.71) პირობებს და $M>0$

მაგალითად, რადგან $4^2=16$, ამიტომ $\log_4 16=2$.

ასევე ცხადია, რომ

$$\log_a a=1, \text{ რადგან } a^1=a.$$

ანალოგიურად, თუ გვინდა, რიცხვი 64 წარმოვადგინოთ მაჩვენებლიანი ფორმით 2-ის ტოლი ფუძით, საჭიროა, ამოიხსნას განტოლება $2^x=64$. ცხადია, რომ $x=6$, რადგან $2^6=64$. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$x=\log_2 64=6.$$

ვთქვათ, გვინდა, იგივე რიცხვი 64 წარმოვადგინოთ მაჩვენებლიანი ფორმით 3-ის ტოლი ფუძით, ე. ი. საძიებელია ისეთი y რიცხვი, რომ $3^y=64$. ასეთი რიცხვია $y=\log_3 64$, რომელიც უკვე აღარ ჩაიწერება „ცხადი" სახით. ასეთი რიცხვების მიახლოებითი მნიშვნელობების მოსაძებნად არსებობს სპეციალური ცხრილი, რომელიც ჩადებულია თითქმის ყველა გამომთვლელი მანქანის მათემატიკური უზრუნველყოფის მონაცემთა ბაზაში. ეს საშუალებას გვაძლევს, სასურველი სიზუსტით მოვძებნოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვის ლოგარითმი ნებისმიერი ერთისაგან განსხვავებული დადებითი ფუძით.

ხშირად გამოიყენება ლოგარითმები 10-ის ტოლი ფუძით. ამ შემთხვევაში შემოკლების მიზნით ხმარობენ აღნიშვნას $\log M$ ან $\lg M$ ნაცვლად ჩანაწერისა $\log_{10} M$.

ძალიან ხშირად ელექტროგამომთვლელი მანქანების მათემატიკურ უზრუნველყოფაში (მონაცემთა ბაზაში) ჩადებულია პროგრამა, რომელიც ითვლის ლოგარითმებს e რიცხვის ტოლი ფუძით. e წარმოადგენს ირაციონალურ რიცხვს, რომლის მიახლოებითი მნიშვნელობაა 2.718281828459045. ამ რიცხვის ზუსტ განმარტებას ჩვენ შემოვიღებთ მეხუთე თავში. ლოგარითმს

e-ს ტოლი ფუძით ეწოდება ნატურალური ლოგარითმი და მისთვისაც იხმარება სპეციალური შემოკლებული აღნიშვნა:

$$\boxed{\log_e M = \ln M}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\log_a M_1 = \log_a M_2$, მაშინ $M_1 = M_2$.

შემდეგ ფორმულებს უწოდებენ გალოგარითმების ძირითად წესებს:

$$\begin{aligned} &\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad x > 0, \quad y > 0 \\ &\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad x > 0, \quad y > 0 \\ &\log_a x^b = b \log_a x, \quad x > 0, \quad b \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.72}$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს შემდეგი მეტად საჭირო ფორმულა

$$\boxed{\log_a a^n = n \log_a a = n}$$

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი a რიცხვისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს (1.71) პირობებს, გვაქვს

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

რადგან $a^0 = 1$.

პრაქტიკაში ხშირად აუცილებელია ლოგარითმის ფუძის შეცვლა. იგი ხორციელდება ერთი ფუძიდან მეორე ფუძეზე გადასვლის შემდეგი ფორმულით

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_d x}{\log_d a}, \quad d > 0, \quad d \neq 1} \tag{1.73}$$

კერძოდ,

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}} \tag{1.74}$$

ზემოთ გადმოცემული მასალა საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ე. წ. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები.

ამოცანა 1.21. ამოვხსნათ განტოლება

$$5^x = 3 \cdot 7^x.$$

▼ გავალოგარითმოთ ეს ტოლობა e-ს ტოლი ფუძით

$$\ln 5^x = \ln\left(3 \cdot 7^x\right).$$

აქედან, (1.72) ფორმულების გამოყენებით, გვაქვს

$$x \ln 5 = \ln 3 + x \ln 7$$

ანუ

$$x\left(\ln 5 - \ln 7\right) = \ln 3 .$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 5 - \ln 7} \approx -0.3063 . \; \blacksquare$$

ამოცანა 1.22. ამოვხსნათ განტოლება

$$2 \lg\left(x+2\right) - 2 = \lg\left(\frac{x^2}{100} + 6x\right).$$

▼ ისევე, როგორც წინა ამოცანაში, აქაც გამოვიყენოთ (1.72) ფორმულები. გავითვალისწინოთ, რომ $2 = \lg 100$ და ჩავწეროთ განტოლება შემდეგი სახით

$$\lg\left(x+2\right)^2 - \lg 100 = \lg\left(\frac{x^2}{100} + 6x\right)$$

ანუ

$$\lg \frac{x^2 + 4x + 4}{100} = \lg\left(\frac{x^2}{100} + 6x\right).$$

რადგან ერთნაირფუძიანი ლოგარითმების ტოლობიდან გამომდინარეობს გასალოგარითმებელი სიდიდეების ტოლობა, ამიტომ

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{100} = \frac{x^2 + 600x}{100} .$$

აქედან კი მარტივად მივიღებთ $4x + 4 = 600x$. საიდანაც დავასკვნით

$$x = \frac{4}{596} \approx 0.0067 . \; \blacksquare$$

ფუნქციას

$$y = a^x, \qquad a > 0, \qquad a \neq 1, \tag{1.75}$$

ეწოდება **მაჩვენებლიანი ფუნქცია.**

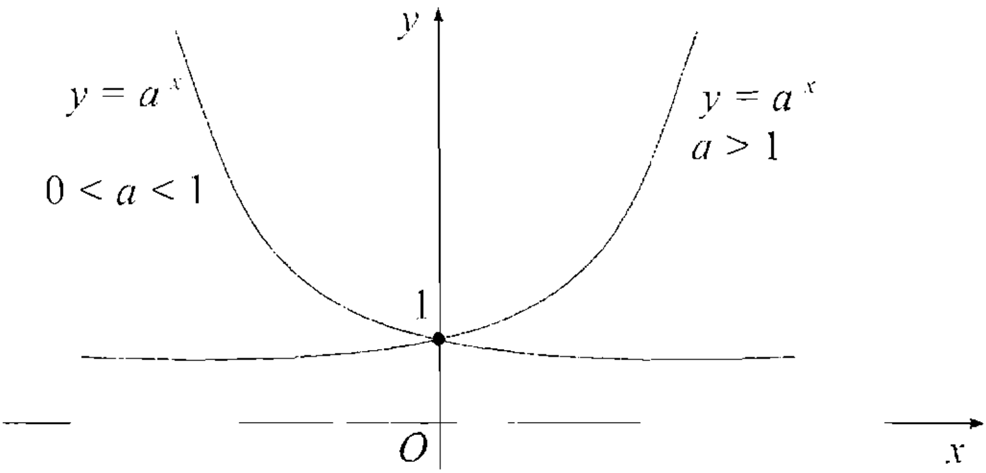
მაჩვენებლიანი ფუნქციის განსაზღვრის არეა მთელი რიცხვითი ღერძი $(-\infty, +\infty)$. არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის მაჩვენებლიანი ფუნქცია იღებს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს, ე. ი.

$$\boxed{y = a^x > 0, \qquad x \in (-\infty, +\infty)}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ მისი გრაფიკი არ კვეთს აბსცისათა ღერძს.

ამასთან, მაჩვენებლიანი ფუნქცია ზრდადია, როცა $a > 1$, ხოლო კლებადია, როცა $0 < a < 1$.

ნახ. 1.39-ზე გამოსახულია მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკი. მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკი ყოველთვის გადის წერტილზე $(0, 1)$, რადგან $a^0 = 1$.



ნახ. 1.39

ამოცანა 1.23. ვაჩვენოთ გრაფიკულად, რომ თუ $a > 0$, მაშინ

$$(1+a)^x < 1 + ax, \quad \text{როცა} \quad 0 < x < 1,$$

და

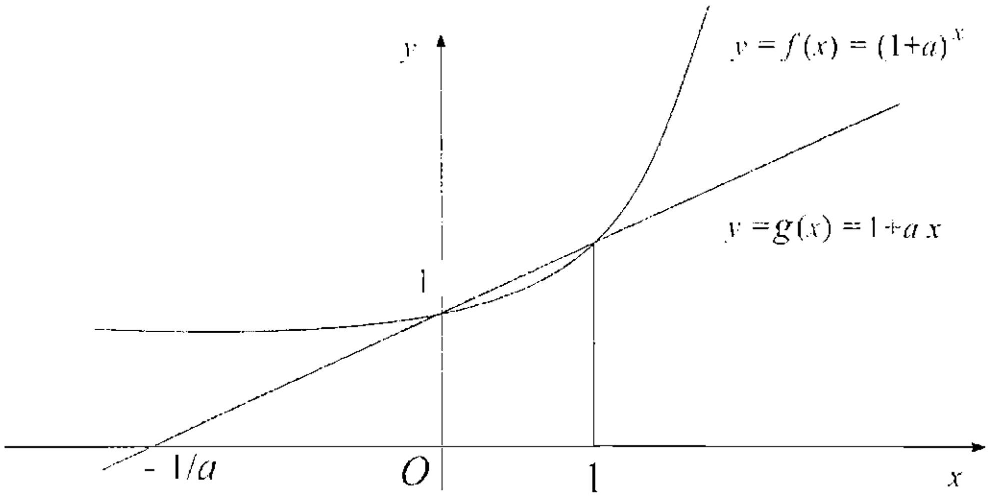
$$(1+a)^x > 1 + ax, \quad \text{როცა} \quad x > 1.$$

▼ აღვნიშნოთ $f(x) = (1+a)^x$, $g(x) = 1 + ax$. ცხადია, რომ

$$f(0) = g(0) = 1, \qquad f(1) = g(1) = 1 + a.$$

ამიტომ მაჩვენებლიანი $f(x)$ ფუნქციის და წრფივი $g(x)$ ფუნქციის

გრაფიკებს აქვთ ორი საერთო წერტილი $(0,1)$ და $(1,1+a)$ (იხ. ნახ. 1.40).



ნახ. 1.40

ნახაზიდან ჩანს, რომ როცა $0<x<1$, მაშინ $f(x)<g(x)$, ხოლო როცა $x>1$, მაშინ $f(x)>g(x)$.

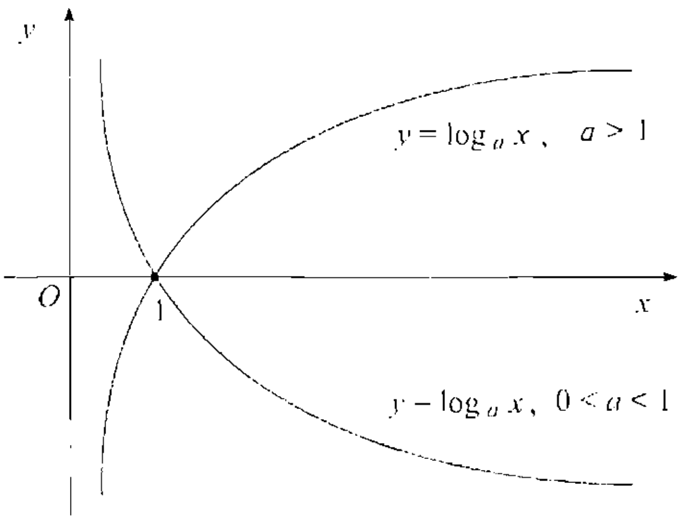
ამ უტოლობის მკაცრი დამტკიცება შეიძლება წარმოებულის გამოყენებით, რომელსაც შევისწავლით მეშვიდე თავში. ■

ახლა განვიხილოთ **ლოგარითმული ფუნქცია**

$$y=\log_a x, \qquad a>0, \qquad a\neq 1. \tag{1.76}$$

ცხადია, (1.76) ტოლობა $a^y=x$ ტოლობის ეკვივალენტურია. ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(0,+\infty)$ შუალედი. ლოგარითმულ ფუნქციას შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა $(-\infty,+\infty)$ შუალედიდან. ისევე როგორც მაჩვენებლიანი ფუნქცია, ლოგარითმული ფუნქციაც ზრდადია, როცა $a>1$, ხოლო კლებადია, როცა $0<a<1$.

ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი გამოსახულია ნახ. 1.41-ზე.



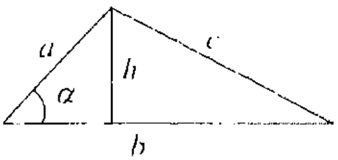
ნახ. 1.41

ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი ყოველთვის გადის $(1, 0)$ წერტილზე, რადგან $\log_a 1 = 0$.

1.18. ზოგიერთი ფორმულა ელემენტარული გეომეტრიიდან და ტრიგონომეტრიიდან

აღნიშვნები: S — ფართობი, h — სიმაღლე,
V — მოცულობა, r — რადიუსი,
$S_{\text{გვ}}$ — გვერდითი ზედაპირის ფართობი,
$S_{\text{სრ}}$ — სრული ზედაპირის ფართობი,
$S_{\text{ფ}}$ — ფუძის ფართობი, L — მსახველი.

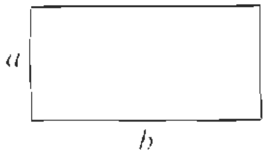
1) სამკუთხედი:



$$S = \frac{1}{2}\,b\,h = \frac{1}{2}\,a\,b\sin\alpha = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

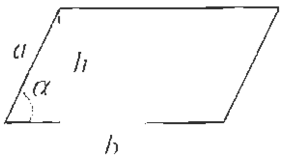
$$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

2) მართკუთხედი:



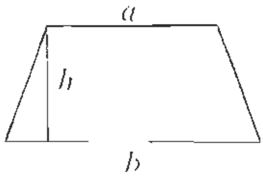
$$S = ab$$

3) პარალელოგრამი:



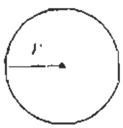
$$S = bh = ab\sin\alpha$$

4) ტრაპეცია:



$$S = \frac{a+b}{2}h$$

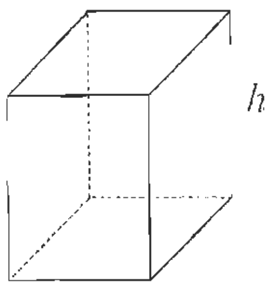
5) წრე, წრეწირი:



$S = \pi r^2$ (წრის ფართობი)

$c = 2\pi r$ (წრეწირის სიგრძე)

6) პრიზმა:

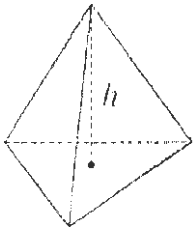


$$V = S_{ფ} h$$

$$S_{სრ} = S_{გვ} + 2S_{ფ}$$

(h – პრიზმის სიმაღლე)

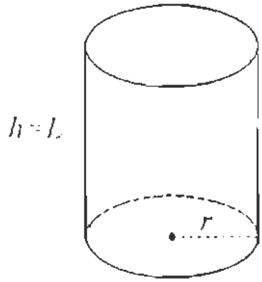
7) პირამიდა:



$$V = \frac{1}{3} S_{ფ} h$$

$$S_{სრ} = S_{გვ} + S_{ფ}$$

8) ცილინდრი:

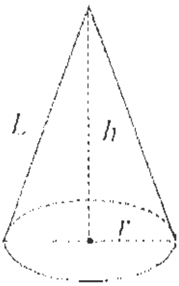


$$V = \pi r^2 h$$

$$S_{გვ} = 2\pi r L$$

$$S_{სრ} = 2\pi r (r + L)$$

9) კონუსი:

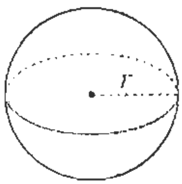


$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$S_{გვ} = \pi r L$$

$$S_{სრ} = \pi r (r + L)$$

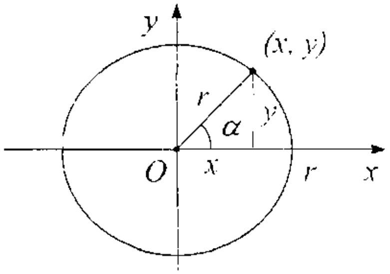
10) ბირთვი, სფერო:



$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ (ბირთვის მოცულობა)

$S = 4 \pi r^2$ (სფეროს ფართობი)

11) ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:



$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

12) შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:

ა) $\sin y = x, \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2};$ მაშინ $y = \arcsin x, \quad -1 \le x \le 1;$

ბ) $\cos y = x, \quad 0 \le y \le \pi;$ მაშინ $y = \arccos x, \quad -1 \le x \le 1;$

გ) $\operatorname{tg} y = x, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2};$ მაშინ $y = \operatorname{arctg} x, \quad -\infty < x < +\infty.$

1.19. სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, $A = \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11\}$ და $B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$. იპოვეთ $A \cup B$, $A \cap B$ და $A \setminus B$.

2. 150 ადამიანის გამოკითხვისას დადგინდა, რომ 80-ს ფული დაბანდებული ჰქონდა აქციებში, 40-ს ობლიგაციებში, ხოლო 23-ს ფული დაბანდებული ჰქონდა ორივეში — აქციებშიც და ობლიგაციებშიც. გამოკითხული ადამიანებიდან:

(ა) რამდენს ჰქონდა ფული დაბანდებული მხოლოდ აქციებში?

(ბ) რამდენს ჰქონდა ფული დაბანდებული მხოლოდ ობლიგაციებში?

(გ) რამდენმა არ დააბანდა ფული არც აქციებში და არც ობლიგაციებში?

3. სკოლაში 500 მოსწავლეა. 200 მოსწავლე ეუფლება მათემატიკას, 180 — ინგლისურ ენას, 170 — ბიოლოგიას, 40 — მათემატიკასა და ინგლისურ ენას, 45 — ინგლისურ ენასა და ბიოლოგიას, 50 — მათემატი-

კასა და ბიოლოგიას, ხოლო 15 — სამივე საგანს ერთად. მოსწავლეებიდან რამდენი:

(ა) სწავლობს მხოლოდ მათემატიკას?

(ბ) სწავლობს მათემატიკასა და ინგლისურს, მაგრამ არა ბიოლოგიას?

(გ) სწავლობს მათემატიკას ან ინგლისურს, მაგრამ არა ბიოლოგიას?

(დ) სწავლობს ამ კურსებიდან ერთ-ერთს მაინც?

(ე) არ გადის არც ერთ კურსს?

4. ფირმას უნდა დაემზადებინა ვაშლის ჯემი. ჯემის დამზადებისას იკარგება ნედლეულის 25 %. რამდენი ტონა ვაშლი უნდა შეიძინოს ფირმამ, რომ დაამზადოს 3 ტ ჯემი?

5. საწარმოს გეგმით კვირაში უნდა გამოეშვა 15 კომპიუტერი. ფირმამ გეგმა შეასრულა 120 %-ით. რამდენი კომპიუტერი გამოუშვია საწარმოს?

6. ფირმამ ბაზარზე გასაყიდად შეიტანა 1000 დოლარის ღირებულების პროდუქცია. გაყიდა 800 დოლარის ღირებულების პროდუქცია. პროდუქციის მთლიანი ღირებულების რამდენ პროცენტს შეადგენს ნავაჭრი?

7. ქსოვილი გაიაფდა ორჯერ: პირველად 15 %-ით, ხოლო მეორედ — 20%-ით. რამდენი პროცენტით გაიაფდა ქსოვილი?

8. ორ ბიზნესმენს შორის დაიდო ხელშეკრულება, რომლის თანახმადაც A პარტნიორი მიიღებს მოგების 35 %-ს, ხოლო B — 65 %-ს. რამდენ დოლარს მიიღებს თითოეული მათგანი, თუ წლიური მოგება 56400 დოლარია?

9. ტურისტმა უცხოეთის მაღაზიაში შეიძინა გარკვეული თანხის საქონელი. სამშობლოში დაბრუნებისას სასაზღვრო საბაჟოზე მას მასპინძელი ქვეყანა უბრუნებს ნავაჭრი საქონლის ღირებულების 8.7 %-ს. რა თანხის საქონელი შეუძენია ტურისტს, თუ მას საბაჟოზე დაუბრუნეს 150 დოლარი?

10. რესტორანში შესვლისათვის თითო კაცზე ფიქსირებული გადასახადია 10 დოლარი, მომსახურებისთვის გადასახადი კი შეადგენს დანახარჯის 2 %-ს. ხუთი სტუდენტისაგან შემდგარმა ჯგუფმა გადაწყვიტა ივახშმოს რესტორანში. რა თანხა შეუძლიათ დახარჯონ სტუდენტებმა სავახშმოდ,

თუ მათ აქვთ მხოლოდ 200 დოლარი?

11. სახლის აშენების მსურველებს ბანკი სთავაზობს მთლიანი ღირებულების 90 %-ის ტოლ სესხს. რა რაოდენობის სესხს მიიღებს ამ ბანკიდან ახალგაზრდა ოჯახი, თუ მათ სურთ აიშენონ 300000 დოლარის ღირებულების სახლი?

12. მთავრობის დადგენილებით წარმოებული პროდუქცია იბეგრება 15 %-იანი გადასახადით.

(ა) განსაზღვრეთ გადასახადი, თუ წარმოებული პროდუქციის მთლიანი ღირებულებაა 1000 დოლარი;

(ბ) რა თანხის გადახდა მოუწევთ მომხმარებლებს ამ საქონლის შესაძენად?

13. ერთ წელიწადში ფირმის ვაჭრობის დონე პროდუქციის 50000 ერთეულიდან გაიზარდა 55000 ერთეულამდე. გამოსახეთ ეს ზრდა პროცენტობით.

14. საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ წერტილები: $A(-3,\ 1)$, $B(-2,\ 7)$, $C(3,\ -5)$ და $D(-2,\ -5)$.

15. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $(3,\ 4)$ და $(4,\ 3)$ წერტილებზე.

16. ჩაწერეთ წრფეთა განტოლებები კუთხური კოეფიციენტით:

(ა) $4x+5y+8=0$; (ბ) $5x-8y-1=0$.

17. მოცემულია წრფის განტოლება ზოგადი სახით: $2x-4y+11=0$. დაიყვანეთ ეს განტოლება წრფის განტოლებაზე ღერძთა მონაკვეთებში.

18. წარმოების დანახარჯი გარკვეული საქონლის 100 ერთეულის საწარმოებლად შეადგენს 300 დოლარს, ხოლო 500 ერთეულის საწარმოებლად — 600 დოლარს. განსაზღვრეთ წარმოების დანახარჯი საქონლის 400 ერთეულის საწარმოებლად, თუ ვიგულისხმებთ, რომ დანახარჯის ფუნქცია წრფივია.

19. ერთ საწყობში 100ტ შაქარია, ხოლო მეორეში — 140ტ. პირველი საწყობი ყოველდღე გასცემს 5ტ შაქარს, მეორე კი — 6ტ შაქარს. რამ-

დენი დღის შემდეგ იქნება მეორე საწყობში 2-ჯერ მეტი შაქარი, ვიდრე პირველში?

20. მოქალაქემ თავისი ბიუჯეტიდან მანქანის დასაქირავებლად გამოყო 250 დოლარი. რამდენი კილომეტრის გავლა შეუძლია მოქალაქეს, თუ საწყისი ფიქსირებული გადასახადი არის 90 დოლარი, ხოლო ყოველ გავლილ კილომეტრზე მან დამატებით უნდა გადაიხადოს 16 ცენტი?

21. ორი სახის ტრანსპორტით გადაზიდვის ხარჯები გამოისახება ფუნქციებით $y=50x+150$ და $y=25x+250$, სადაც x მანძილია, ხოლო y — სატრანსპორტო ხარჯები. როდისაა უფრო ეკონომიური მეორე სახის ტრანსპორტის გამოყენება?

22. ფირმის თანამშრომელი ვალდებულია იმუშაოს კვირაში 40 სთ. თუ მისი სამუშაო საათების რაოდენობა კვირაში გადააჭარბებს 40-ს, მაშინ მას ყოველ ზენორმატიულ საათში უხდიან 2-ჯერ მეტ თანხას. როგორია თანამშრომლის საათობრივი ანაზღაურება, თუ ერთ კვირაში 55 საათის მუშაობისათვის მან მიიღო 420 დოლარი?

23. ერთი ცალი A ტიპის აქცია იყიდება 140 დოლარად, ხოლო B ტიპის აქცია — 37 დოლარად. ინვესტორს აქვს 10000 დოლარი საინვესტიციოდ. მას სურს იყიდოს 6-ჯერ მეტი A ტიპის აქცია B ტიპის აქციებთან შედარებით.

(ა) რა მაქსიმალური რაოდენობის A და B ტიპის აქციების ყიდვა შეუძლია ინვესტორს?

(ბ) რა თანხა დარჩება ინვესტორს?

24. მევახშეს სურს დააბანდოს 10000 დოლარი — ნაწილი სარგებლის 5%-იანი და ნაწილი 7%-იანი წლიური განაკვეთით. მინიმუმ რა რაოდენობის თანხა უნდა დააბანდოს მან 7%-ად, რომ ორივე განაკვეთით ერთ წელიწადში დარიცხულმა თანხამ გადააჭარბოს 616 დოლარს?

25. ააგეთ მოთხოვნის ფუნქციის გრაფიკი, თუ

$$P=-2Q+50.$$

(ა) იპოვეთ, რა ფასი შეესაბამება $Q=9$ მოთხოვნას?

(ბ) იპოვეთ, რას უდრის მოთხოვნა, როდესაც $P=10$;

(გ) როგორ იცვლება ფასი მოთხოვნის ერთი ერთეულით გადიდებისას?

26. მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციებია, შესაბამისად,

$$P = g_D(Q) = -4\,Q + 120, \qquad P = g_S(Q) = \frac{1}{3}\,Q + 29.$$

(ა) გამოთვალეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე;

(ბ) გამოთვალეთ ახალი წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე, თუ პროდუქტის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე მთავრობამ დააწესა გადასახადი 13 დოლარის ოდენობით. როგორ ნაწილდება ეს გადასახადი მომხმარებელსა და ფირმას შორის?

27. იპოვეთ წონასწორობის ფასები და წონასწორობის სიდიდეები თითოეული პროდუქტისათვის, თუ მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები ორსაქონლიანი ბაზრისათვის, შესაბამისად, განისაზღვრება ტოლობებით:

(ა) $Q_1 = 40 - 5\,P_1 - P_2$ (მოთხოვნის ფუნქცია),

$Q_1 = -3 + 4\,P_1$ (მიწოდების ფუნქცია),

$Q_2 = 50 - 2\,P_1 - 4\,P_2$ (მოთხოვნის ფუნქცია),

$Q_2 = -7 + 3\,P_2$ (მიწოდების ფუნქცია);

(ბ) $Q_1 = 100 - 2\,P_1 + P_2$ (მოთხოვნის ფუნქცია),

$Q_1 = -10 + P_1$ (მიწოდების ფუნქცია),

$Q_2 = 5 + 2\,P_1 - 3\,P_2$ (მოთხოვნის ფუნქცია),

$Q_2 = -5 + 6\,P_2$ (მიწოდების ფუნქცია).

28. მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$Q = 100 - P + 2\,Y + \frac{1}{2}\,A,$$

სადაც Q მოთხოვნაა, P ფასია, Y მომხმარებელთა (საშუალო) შემოსავალია, ხოლო A რეკლამაზე დახარჯული თანხაა.

(ა) ცნობილია, რომ $P = 10$, $Y = 40$ და $A = 6$. გამოთვალეთ შესაბამისი მოთხოვნა;

(ბ) ფასი და შემოსავალი იგივეა, რაც (ა) შემთხვევაში. გამოთვალეთ რეკლამაზე დასახარჯი ის თანხა, რომელიც მოთხოვნას გაზრდის 179

ერთეულამდე;

(გ) ყველა სხვა ფიქსირებულ პირობებში, იწვევს თუ არა Y შემოსავლის ზრდა მოთხოვნის ზრდას?

29. მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები, შესაბამისად, განსაზღვრულია ტოლობებით:

$$P = -5Q + 80,$$

$$P = 2Q + 10.$$

(ა) იპოვეთ წონასწორობის ფასი (გრაფიკულად და ალგებრულად);

(ბ) იპოვეთ ახალი წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე, თუ პროდუქტის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე დააწესეს გადასახადი (ბეგარა) ფასის 15 %-ის ოდენობით.

30. იპოვეთ ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების წონასწორობითი დონე, თუ მოხმარების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$C = 0.8Y + 25,$$

ხოლო დაგეგმილი ინვესტიციაა $I = 17$.

როგორ ცვლილებას განიცდის ეროვნული შემოსავლის წონასწორობითი დონე, თუ დაგეგმილი ინვესტიცია გაიზრდება ერთი ერთეულით?

31. მოცემულია

$G = 40$ (სახელმწიფო დანახარჯები),

$I = 55$ (ინვესტიცია),

$C = 0.8\ Y_d + 25$ (მოხმარების ფუნქცია),

$T = 0.1\ Y + 10$ (საგადასახადო მოსაკრებლების ფუნქცია).

იპოვეთ ამ მოდელით მოცემული ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის მდგომარეობის შესაბამისი:

(ა) ეროვნული შემოსავალი;

(ბ) საგადასახადო მოსაკრებლები;

(გ) მოხმარების დონე;

(დ) დანაზოგების დონე.

32. მოხმარების ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$C = 0.6Y + 30,$$

ხოლო დაგეგმილი საინვესტიციო თანხაა $I = 100$.

იპოვეთ ეროვნული შემოსავლის, მოხმარებისა და დანაზოგების წონასწორობითი დონე.

როგორ მოქმედებს ინვესტიციის გაორმაგება წონასწორობაზე?

33. განსაზღვრეთ წონასწორობითი Y შემოსავალი და ინვესტიციის სარგებლის r განაკვეთი, თუ მოცემულია შემდეგი ინფორმაცია სასაქონლო ბაზრის შესახებ:

$$C = 0.7Y + 85, \quad I = -50r + 1200,$$

და ფულის ბაზრის შესახებ:

$$M_S = 500, \; L_1 = 0.2Y, \; L_2 = -40r + 230.$$

ააგეთ Y-ის და r-ის დამაკავშირებელი განტოლებების შესაბამისი წრფეები ერთი და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეზე (იხ. სისტემა (1.55)). რა გავლენას ახდენს ავტონომიური ინვესტიციის (ანუ d-ს, იხ. (1.49)) ზრდა წონასწორობის Y ეროვნულ შემოსავალზე და სარგებლის r განაკვეთზე?

34. ღია ეკონომიკა წონასწორობაშია, როდესაც

$$Y = C + I + G + X - M,$$

სადაც ცვლადები აღნიშნავენ თანხებს, რომლებიც შეესაბამება ეროვნულ შემოსავალს (Y), მოხმარებას (C), ინვესტიციას (I), სახელმწიფო ხარჯებს (G), ექსპორტს (X), იმპორტს (M).

განსაზღვრეთ წონასწორობითი ეროვნული შემოსავალი, თუ მოცემულია

$$C = 0.8\,Y + 80, \quad I = 70, \quad G = 130, \quad X = 100, \quad M = 0.2\,Y + 30.$$

35. მოცემულია:

მოხმარების ფუნქცია $C = 0.8Y + 60$,

ინვესტიცია $I = -30r + 740$,

ფულის მიწოდება $M_S = 4000$,

ფულზე მოთხოვნა გარიგებისა და გაუთვალისწინებელი მიზნებისათვის $L_1 = 0.15\,Y$,

ფულზე მოთხოვნა სპეკულაციური მიზნებისათვის $L_2 = -20r + 3825$.

განსაზღვრეთ ეროვნული Y შემოსავალი და სარგებლის r განაკვეთი,

თუ სასაქონლო და ფულადი ბაზრები წონასწორობაშია.

36. ვთქვათ, ღვინის ქარხანა აწარმოებს შვიდი სახის ღვინოს და დამზადებულ პროდუქციას ყოველთვიურად აწვდის მაღაზიას. რამდენი წესით შეიძლება მიეწოდოს ღვინო სავაჭრო ობიექტს, თუ მაღაზია იღებს მხოლოდ სამი სახის პროდუქციას?

37. კაზინოში აზარტული თამაშების მაგიდასთან 8 ადგილია. რამდენ სხვადასხვა ვარიანტად შეიძლება დავსვათ რვა მოთამაშისაგან შემდგარი ჯგუფი ამ მაგიდასთან?

38. ბანკს შეუძლია 3 ერთმანეთისაგან განსხვავებული კრედიტის გაცემა. კრედიტის აღების მსურველთა რიცხვია 10. კრედიტის გაცემის რამდენი ვარიანტი არსებობს?

თავი 2. მატრიცები და დეტერმინანტები

ამ თავში ჩვენ გავეცნობით მატრიცთა თეორიის ელემენტებს. მატრიცები ფრიად მოსახერხებელია ინფორმაციის კომპაქტური ფორმით წარმოდგენისათვის. ამით აიხსნება მათი დიდი გამოყენება ეკონომიკური საკითხების სხვადასხვა ასპექტით შესწავლისას.

მატრიცების შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციების განმარტებისას დავინახავთ მრავალ მსგავსებას ნამდვილ რიცხვებზე ჩვენთვის კარგად ნაცნობ მოქმედებებთან მიმართებაში. თუმცა, უნდა აღვნიშნოთ, რომ შევხვდებით აგრეთვე პრინციპულ განსხვავებებსაც. მაგალითად, გამრავლების ოპერაცია მატრიცთა სიმრავლეში არაკომუტაციურია, ე. ი. თანამამრავლთა რიგის შეცვლა მატრიცთა ნამრავლში, ზოგადად, არ შეიძლება.

ამავე თავში შემოვიტანთ დეტერმინანტის ცნებას და გავეცნობით დეტერმინანტის ძირითად თვისებებს.

ეს მასალა ამზადებს საფუძველს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების შესწავლისათვის.

2.1. მატრიცის ცნება

● რიცხვთა ერთობლიობას, ჩაწერილს m სტრიქონისა და n სვეტის მართკუთხა ცხრილის სახით, **მატრიცა** ეწოდება. ■

ამ რიცხვებს მატრიცის ელემენტები ეწოდება. მატრიცის ელემენტებს მივუწერთ ორ ინდექსს. პირველი ინდექსი აღნიშნავს იმ სტრიქონის ნომერს, რომელსაც ეკუთვნის ელემენტი, ხოლო მეორე — სათანადო სვეტის ნომერს.

თუ მატრიცაში m სტრიქონი და n სვეტია, მაშინ მას $m \times n$ რიგის

მატრიცა ეწოდება. ამ მატრიცაში ელემენტთა რიცხვი $m \cdot n$ ნამრავლის ტოლია. ამრიგად,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

არის $m \times n$ რიგის მატრიცა. ხშირად გამოიყენება შემდეგი შემოკლებული აღნიშვნაც $A = [a_{ik}]_{m \times n}$. აქ a_{ik} აღნიშნავს A მატრიცის იმ ელემენტს, რომელიც ეკუთვნის i-ურ სტრიქონსა და k-ურ სვეტს.

● თუ A მატრიცის სტრიქონებს ჩავწერთ სვეტებად (პირველ სვეტს ჩავწერთ პირველ სტრიქონად, მეორე სვეტს მეორე სტრიქონად და ა.შ.), მივიღებთ A მატრიცის **ტრანსპონირებულ** მატრიცას. ■

მას აღნიშნავენ A^T სიმბოლოთი

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

თუ A მატრიცის რიგია $m \times n$, მაშინ ტრანსპონირებული მატრიცის რიგი იქნება $n \times m$. მაგალითად, თუ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 9 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

მაშინ

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \\ 0 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

● თუ $m = n$, მაშინ მატრიცას n რიგის **კვადრატული მატრიცა** ეწო-

დება და მას აქვს სახე

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \blacksquare \tag{2.3}$$

მაგალითად,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

არის მეორე რიგის კვადრატული მატრიცა, ხოლო

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

— მესამე რიგის კვადრატული მატრიცა.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი ინფორმაციის მატრიცული სახით წარმოდგენაზე.

ამოცანა 2.1. ვთქვათ, წარმოება იყენებს ოთხი N_1, N_2, N_3 და N_4 სახის ნედლეულს და ამზადებს სამი ტიპის P_1, P_2 და P_3 პროდუქტს. ჩავწეროთ მატრიცული სახით აღნიშნული პროდუქტების წარმოებისათვის საჭირო ნედლეულის დანახარჯების ნორმები და გავაანალიზოთ მიღებული ცხრილი.

▼ აღვნიშნოთ a_{11}-ით N_1 სახის ნედლეულის დანახარჯის ნორმა (დოლარობით) P_1 პროდუქტის ერთეულის წარმოებისას, a_{12}-ით — P_2 პროდუქტის ერთეულის წარმოებისას, ხოლო a_{13}-ით — P_3 პროდუქტის ერთეულის წარმოებისას. ანალოგიურად, a_{21}-ით აღვნიშნოთ N_2 სახის ნედლეულის დანახარჯის ნორმა P_1 პროდუქტის ერთეულის წარმოებისას, a_{22}-ით — P_2 პროდუქტის ერთეულის წარმოებისას, ხოლო a_{23}-ით — P_3 პროდუქტის ერთეულის წარმოებისას. ასეთივე აღნიშვნები შემოვიღოთ N_3 და N_4 სახის ნედლეულისთვისაც. ზოგადად, a_{ij}-თი აღვნიშნოთ N_i სახის

ნედლეულის დანახარჯის ნორმა P_j სახის პროდუქტის ერთეულის წარმოებისას. ცხადია, აქ $i=1, 2, 3, 4$, ხოლო $j=1, 2, 3$. თუ ჩავწერთ აღნიშნულ ინფორმაციას ცხრილის სახით, მივიღებთ 4×3 რიგის მატრიცას

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ i-ურ სტრიქონში მდგომი a_{i1}, a_{i2} და a_{i3} ელემენტების ჯამი გვიჩვენებს N_i სახის ნედლეულის მთლიან დანახარჯს სამივე სახის პროდუქტის თითო ერთეულის საწარმოებლად, ხოლო j-ურ სვეტში მდგომი a_{1j}, a_{2j}, a_{3j} და a_{4j} ელემენტების ჯამი გვიჩვენებს P_j-ური პროდუქტის ერთი ერთეულის წარმოებისათვის საჭირო ოთხივე ნედლეულის დანახარჯებს. ცხადია, ზოგიერთი ელემენტი ამ მატრიცაში ნულის ტოლიც შეიძლება იყოს. მაგალითად, თუ $a_{12}=0$, ეს იმას ნიშნავს, რომ N_1 სახის ნედეული P_2 სახის პროდუქტის საწარმოებლად არ გამოიყენება. ■

ამოცანა 2.2. ორი ქარხნის მიერ წარმოებული პროდუქცია იგზავნება სამ საწყობში. ვთქვათ, თითოეულ საწყობში პირველი ქარხნიდან პროდუქტის ერთეულის გადაზიდვაზე იხარჯება, შესაბამისად, 2 დოლარი, 3 დოლარი და 4 დოლარი, ხოლო მეორე ქარხნიდან – 1 დოლარი, 5 დოლარი და 2 დოლარი. ჩავწეროთ ორივე ქარხნის სატრანსპორტო ხარჯები მატრიცული სახით.

▼ რადგან ცნობილია თითოეული ქარხნის მიერ წარმოებული პროდუქტის ერთეულის გადაზიდვის ხარჯები, ამიტომ სატრანსპორტო ხარჯები შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი მატრიცის სახით

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

აქ პირველი სტრიქონი მიუთითებს პირველი ქარხნის მიერ წარმოებული პროდუქტის ერთეულის გადაზიდვის ხარჯებს სამივე საწყობში, ხოლო მეორე სტრიქონი – მეორე ქარხნის მიერ წარმოებული პროდუქტის

ერთეულის გადაზიდვის ხარჯებს. ■

მატრიცა შეიძლება იყოს ერთსტრიქონიანი

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

ან ერთსვეტიანი

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \end{bmatrix}^T. \tag{2.7}$$

● მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, **ნულოვანი მატრიცა** ეწოდება. ■

მაგალითად, ნულოვანი მეორე რიგის მატრიცა ასე ჩაიწერება

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

ასევე ნულოვანი მატრიცებია

$$[0], \quad [0 \quad 0], \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

● კვადრატულ მატრიცაში ერთნაირინდექსებიან ელემენტებს მატრიცის **მთავარ დიაგონალზე** მდგომი ელემენტები ეწოდება. თუ ელემენტები, რომლებიც არ მდებარეობენ მთავარ დიაგონალზე, ნულის ტოლია, მაშინ კვადრატულ მატრიცას **დიაგონალური** ეწოდება. ამრიგად, დიაგონალურ $[a_{ik}]_{n\times n}$ მატრიცაში $a_{ik}=0$, როცა $i\neq k$. ■

● დიაგონალურ $n\times n$ რიგის მატრიცას, რომელშიც მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი ერთის ტოლია, n **რიგის ერთეულოვანი** მატრიცა ეწოდება და აღინიშნება I სიმბოლოთი

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \quad ■ \tag{2.9}$$

ზოგჯერ, თუ საჭიროა რიგის მითითება, $n\times n$ რიგის ერთეულოვან მატრიცას I_n სიმბოლოთი ავღნიშნავთ.

● ერთი და იმავე რიგის ორი $A=[a_{ik}]_{m\times n}$ და $B=[b_{ik}]_{m\times n}$ **მატრიცა ტოლია**, თუ მათი შესაბამისი ელემენტები ტოლია, ე. ი. $a_{ik}=b_{ik}$, $i=1,\ 2,\ \dots,\ m,$ $k=1,\ 2,\ \dots,\ n.$ ■

2.2. მოქმედებანი მატრიცებზე

ამ პარაგრაფში შემოვიღებთ მატრიცების შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციებს.

● $A=[a_{ik}]_{m\times n}$ და $B=[b_{ik}]_{m\times n}$ **მატრიცების ჯამი** ეწოდება ისეთ $C=A+B=[c_{ik}]_{m\times n}$ მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი მოცემული მატრიცების შესაბამისი ელემეტების ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$\boxed{c_{ik}=a_{ik}+b_{ik},\quad i=1,\ 2,\ \dots,\ m,\ \ k=1,\ 2,\ \dots,\ n} \quad ■$$

ამრიგად,

$$A+B=\left[a_{ik}+b_{ik}\right]_{m\times n}. \tag{2.10}$$

ცხადია, რომ $A+B=B+A$. მაგალითად, გამოვთვალოთ A და B მატრიცების ჯამი, თუ

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & -2\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$$

განმარტების თანახმად გვაქვს

$$A+B=\begin{bmatrix}3+1 & 2-2\\ 4+0 & -2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ შეგვიძლია შევკრიბოთ მხოლოდ ერთი და იმავე რიგის მატრიცები.

● $A=[a_{ik}]_{m\times n}$ **მატრიცის ნამრავლი λ რიცხვზე** ეწოდება ისეთ $C=\lambda A=[c_{ik}]_{m\times n}$ მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი არის მოცემული

A მატრიცის სათანადო ელემენტის ნამრავლი მოცემულ რიცხვზე, ე. ი.

$$\boxed{c_{ik} = \lambda\, a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n} \;\blacksquare \tag{2.11}$$

მაგალითად, გამოვთვალოთ A მატრიცისა და λ რიცხვის ნამრავლი, თუ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ და } \lambda = 3;$$

განმარტების თანახმად, მივიღებთ

$$3A = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

● $A = [a_{ik}]_{m\times n}$ და $B = [b_{ik}]_{n\times p}$ **მატრიცების ნამრავლი** ეწოდება ისეთ $m \times p$ რიგის $C = AB = [c_{ik}]_{m\times p}$ მატრიცას, სადაც c_{ik} ელემენტი არის A მატრიცის i-ური სტრიქონის ელემენტების B მატრიცის k-ური სვეტის შესაბამის ელემენტებზე ნამრავლთა ჯამი

$$\boxed{\begin{gathered} c_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + \cdots + a_{in}\, b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\,, \\ i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, p \end{gathered}} \;\blacksquare \tag{2.12}$$

შევნიშნოთ, რომ მატრიცების ნამრავლი განიმარტება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა პირველი მატრიცის სვეტების რიცხვი მეორე მატრიცის სტრიქონების რიცხვის ტოლია.

მაგალითად, გადავამრავლოთ A და B მატრიცები, თუ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{და} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

განმარტების ძალით გვაქვს

$$AB = \begin{bmatrix} 3\cdot 5 + 0\cdot 0 & 3\cdot 1 + 0\cdot 7 \\ 1\cdot 5 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 7 \\ 5\cdot 5 + 2\cdot 0 & 5\cdot 1 + 2\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 5 & 8 \\ 25 & 19 \end{bmatrix}.$$

ცხადია, ამ კონკრეტულ შემთხვევაში B მატრიცის გამრავლება A მატრიცაზე არ შეიძლება.

გამრავლების ოპერაცია მატრიცთა სიმრავლეში არაკომუტაციურია, ე.ი., ზოგადად, $AB \neq BA$; მართლაც, ვთქვათ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

მაშინ

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix},$$

საიდანაც, ცხადია, რომ $AB \neq BA$

მარტივად შევამოწმებთ, რომ, თუ $A = [a_{ik}]_{m\times n}$, ხოლო I_m და I_n, შესაბამისად, $m\times m$ და $n\times n$ რიგის ერთეულოვანი მატრიცებია, მაშინ

$$A\,I_n = A, \qquad I_m\,A = A.$$

მართლაც, შევამოწმოთ პირველი ტოლობა. AI_n ნამრავლში, რომელიც წარმოადგენს $m\times n$ რიგის მატრიცას, i-ური სტრიქონისა და k-ური სვეტის გადაკვეთაზე დგას A მატრიცის i-ური სტრიქონისა და I_n მატრიცის k-ური სვეტის შესაბამის ელემენტთა ნამრავლების ჯამი. ამოვწეროთ ერთმანეთის ქვეშ ეს ელემენტები:

A-ს i-ური სტრიქონი: $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\,k-1}, a_{ik}, a_{i\,k+1}, \ldots, a_{in}$,

I_n-ის k-ური სვეტი: $\quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0.$

ცხადია, შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამისათვის გვაქვს

$$a_{i1}\cdot 0 + a_{i2}\cdot 0 + \cdots + a_{i\,k-1}\cdot 0 + a_{ik}\cdot 1 + a_{i\,k+1}\cdot 0 + \cdots + a_{in}\cdot 0 = a_{ik},$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

ახლა განვიხილოთ ერთი კონკრეტული ამოცანა.

ამოცანა 2.3. ორმა მომხმარებელმა მაღაზიაში შეიძინა სამი დასახელების პროდუქტი: შაქარი, ყველი და კარაქი. პირველმა შეიძინა 1კგ შაქარი, 2კგ ყველი და 1კგ კარაქი, მეორემ კი — 2კგ შაქარი, 3კგ ყველი და 2კგ კარაქი. განვსაზღვროთ თითოეული მომხმარებლის დანახარჯი, თუ 1კგ შაქარი ღირს 1 დოლარი, 1კგ ყველი — 3 დოლარი, ხოლო 1კგ კარაქი — 5 დოლარი.

▼ ორივე მომხმარებლის მიერ შეძენილი პროდუქტების რაოდენობა

(კილოგრამობით) ხასიათდება მატრიცით

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

სადაც პირველი სტრიქონი შეესაბამება პირველი მოხმარებლის ნავაჭრს, ხოლო მეორე სტრიქონი — მეორე მომხმარებლის ნავაჭრს.

პროდუქტების ღირებულება (დოლარობით) ხასიათდება შემდეგი მატრიცით

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

მარტივი დასანახია, რომ ამ მატრიცების გადამრავლებით მივიღებთ ორივე მომხმარებლის დანახარჯების ცხრილს

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3+1\cdot 5 \\ 2\cdot 1+3\cdot 3+2\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

აქედან ჩანს, რომ პირველმა მომხმარებელმა დახარჯა 12 დოლარი, ხოლო მეორემ — 21 დოლარი. ■

მარტივად მოწმდება, რომ გამრავლებისა და შეკრების ოპერაციები მატრიცთა სიმრავლეში ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

$A+B=B+A$	$\lambda(\delta A)=(\lambda\delta)A$
$A-A=O$	$A(B+C)=AB+AC$
$A+O=A$	$(A+B)C=AC+BC$
$(\lambda+\delta)A=\lambda A+\delta A$	$A(BC)=(AB)C$
$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$	

ცხადია, აქ A, B და C მატრიცების რიგები ისეთია, რომ მითითებული ოპერაციების ჩატარება შესაძლებელია, O შესაბამისი რიგის ნულოვანი მატრიცაა, ხოლო λ და δ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

ამოცანა 2.4. ფირმა უშვებს სამი P_1, P_2 და P_3 სახის პროდუქტს, რო-

მლებსაც ყიდის ორ c_1 და c_2 მომხმარებელზე. ამ მომხმარებლების მიერ ნაყიდი პროდუქტების რაოდენობები გამოსახულია შემდეგი მატრიცით

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} (P_1) & (P_2) & (P_3) \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (c_1) \\ (c_2) \end{array} \end{array}$$

თითოეული სახის პროდუქტის ერთეულის ფასი მოცემულია მატრიცით

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} (P_1) & (P_2) & (P_3) \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 100 & 500 & 200 \end{bmatrix}^T \end{array}$$

სამივე სახის პროდუქტის გამოსაშვებად ფირმა იყენებს ოთხი N_1, N_2, N_3 და N_4 სახის ნედლეულს. ამ ნედლეულის დანახარჯის ნორმები (მაგალითად, ტონობით) თითოეული სახის პროდუქტის ერთეულის საწარმოებლად გამოსახულია მატრიცით

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} (N_1) & (N_2) & (N_3) & (N_4) \end{array} \\ C = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (P_1) \\ (P_2) \\ (P_3) \end{array} \end{array}$$

ოთხივე ნედლეულის თითოეული ტონის ღირებულება (დოლარობით) აღწერილია მატრიცით

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} (N_1) & (N_2) & (N_3) & (N_4) \end{array} \\ D = & \begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 & 15 \end{bmatrix}^T. \end{array}$$

დამატებით შემოვიღოთ ერთსტრიქონიანი მატრიცა

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ვიპოვოთ ქვემოთ მითითებული ყველა მატრიცა და აღვწეროთ მათი ეკონომიკური შინაარსი:

(ა) AB, (ბ) AC, (გ) CD, (დ) ACD,

(ე) EAB, (ვ) $EACD$,   (ზ) $EAB-EACD$.

▼ ამოცანის პირობების გამოყენებით, მარტივად დავასკვნით, რომ აღნიშნულ მატრიცებს გააჩნიათ შემდეგი ეკონომიკური შინაარსი:

(ა) $AB=\begin{bmatrix}6\cdot100+7\cdot500+9\cdot200\\2\cdot100+1\cdot500+2\cdot200\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5900\\1100\end{bmatrix}$.

მიღებული მატრიცა გამოსახავს თითოეული მომხმარებლის მიერ ნაყიდი საქონლის მთლიან ფასს;

(ბ) $AC=\begin{bmatrix}6\cdot1+7\cdot1+9\cdot0 & 6\cdot0+7\cdot1+9\cdot0 & 6\cdot0+7\cdot2+9\cdot1 & 6\cdot1+7\cdot1+9\cdot1\\2\cdot1+1\cdot1+2\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot1+2\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot2+2\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot1+2\cdot1\end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix}13 & 7 & 23 & 22\\3 & 1 & 4 & 5\end{bmatrix}.$$

მიღებული მატრიცით გამოისახება ნედლეულის რაოდენობა (ტონობით), რომელიც იხარჯება თითოეული მომხმარებლის მიერ ნაყიდი პროდუქტის წარმოებისათვის;

(გ) $CD=\begin{bmatrix}1\cdot20+0\cdot10+0\cdot15+1\cdot15\\1\cdot20+1\cdot10+2\cdot15+1\cdot15\\0\cdot20+0\cdot10+1\cdot15+1\cdot15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}35\\75\\30\end{bmatrix}$.

მიღებული მატრიცა გვაძლევს ნედლეულის მთლიან ღირებულებას (დოლარობით), რომელიც იხარჯება სამივე სახის პროდუქტის ერთი ერთეულის წარმოებისათვის;

(დ) $ACD=(AC)D=\begin{bmatrix}13 & 7 & 23 & 22\\3 & 1 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20 & 10 & 15 & 15\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1005\\205\end{bmatrix}$.

მიღებული მატრიცით განისაზღვრება დახარჯული ნედლეულის მთლიანი ფასი, რომელიც შეესაბამება თითოეული მომხმარებლის მიერ ნაყიდ პროდუქტს;

(ე) $EAB=E(AB)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5900 & 1100\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}7000\end{bmatrix}$.

მიღებული მატრიცით გამოისახება მთლიანი ამონაგები, რომელსაც ფირმა

მომხმარებლისაგან ღებულობს;

(ვ) $EACD = [1 \ \ 1]\,[1005 \ \ 205]^T = [1210]$.

მიღებული მატრიცა გვაძლევს დახარჯული ნედლეულის მთლიან ფასს;

(ზ) $EAB - EACD = [7000] - [1210] = [5790]$.

მიღებული მატრიცა გამოსახავს მოგებას გადასახადებისა და ხელფასის გადახდამდე. ■

2.3. დეტერმინანტი, მინორი და ალგებრული დამატება

განვიხილოთ n-ური რიგის კვადრატული A მატრიცა (2.3). ამ მატრიცის **დეტერმინანტი** წარმოადგენს რიცხვს, რომელიც მიიღება გარკვეული წესით A მატრიცის ელემენტებისაგან და აღინიშნება $|A|$ სიმბოლოთი

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

n-ს დეტერმინანტის რიგს უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ "დეტერმინანტის სვეტი (სტრიქონი)" ეწოდება შესაბამისი მატრიცის სვეტს (სტრიქონს).

ჩამოვაყალიბოთ დეტერმინანტის გამოთვლის წესები.

თუ $n = 1$, მაშინ $A = [a_{ik}]_{1\times 1}$ მატრიცა შედგება ერთი a_{11} ელემენტისაგან და მისი შესაბამისი პირველი რიგის დეტერმინანტი თვით ამ რიცხვს ეწოდება:

$$|A| = a_{11}.$$

თუ $n = 2$, მაშინ $A = [a_{ik}]_{2\times 2}$ მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტი გამოითვლება შემდეგნაირად

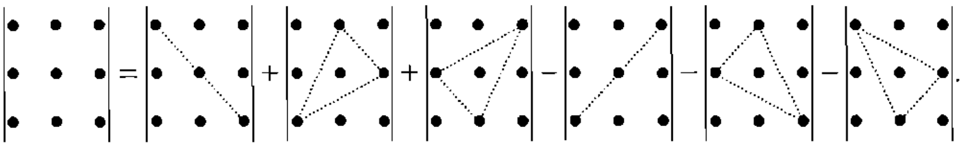
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}. \tag{2.14}$$

თუ $n = 3$, მაშინ $A = [a_{ik}]_{3\times 3}$ მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტი გა-

მოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \end{aligned} \qquad (2.15)$$

ამ უკანასკნელი ფორმულის დამახსოვრება მარტივად შეიძლება შემდეგი სქემის მიხედვით



უფრო მაღალი რიგის დეტერმინანტის გამოსათვლელად შემოვიღოთ მინორისა და ალგებრული დამატების ცნებები.

● n რიგის დეტერმინანტის a_{ij} ელემენტის **მინორი** აღინიშნება M_{ij} სიმბოლოთი და ეწოდება ისეთ $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება მოცემული დეტერმინანტისაგან i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ამოშლით. ■

მაგალითად, მესამე რიგის დეტერმინანტის შემთხვევაში (იხ.(2.15)), გვექნება

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

● n რიგის დეტერმინანტის a_{ij} ელემენტის **ალგებრული დამატება** აღინიშნება A_{ij} სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}} \ ■ \qquad (2.16)$$

მაგალითად, (2.15) დეტერმინანტისათვის

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}.$$

● n რიგის დეტერმინანტი ტოლია მისი პირველი სტრიქონის ელემენტების შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამისა

$$\boxed{|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}} \quad \blacksquare \tag{2.17}$$

მესამე რიგის დეტერმინანტისათვის ამ ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

მარტივად შემოწმდება, რომ ეს გამოსახულება ემთხვევა (2.15) სიდიდეს. მაგალითად, გამოვთვალოთ შემდეგი დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 9 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-21+5) + 2(-12-45) + 3(-4-63) = -16 - 114 - 201 = -331.$$

დეტერმინანტს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

(1) მატრიცისა და მისი ტრანსპონირებული მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტები ტოლია;

(2) დეტერმინანტის ნებისმიერი ორი სტრიქონის (სვეტის) ადგილების ურთიერთშეცვლით დეტერმინანტი ნიშანს იცვლის;

(3) თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია;

(4) თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტები შეიცავენ საერთო თანამამრავლს, ის შეიძლება დეტერმინანტის სიმბოლოს გარეთ გავიტანოთ;

(5) დეტერმინანტი, რომლის ორი სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტები ერთმანეთის ტოლია, უდრის ნულს;

(6) დეტერმინანტი, რომელიც შეიცავს ორ პროპორციულ სტრიქონს (სვეტს), ნულის ტოლია;

(7) თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენ-

ტი წარმოადგენს ორი შესაკრების ჯამს, მაშინ ეს დეტერმინანტი შეგვიძლია ორი დეტერმინანტის ჯამის სახით წარმოვადგინოთ. მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

(8) დეტერმინანტი მისი რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამის ტოლია;

(9) დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების სხვა რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) შესაბამის ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია;

(10) დეტერმინანტი არ შეიცვლება, თუ მის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტებს მივუმატებთ სხვა სვეტის (სტრიქონის) შესაბამის ელემენტებს, გამრავლებულს ერთი და იმავე რიცხვზე;

(11) ერთი და იმავე რიგის კვადრატული მატრიცების ნამრავლის დეტერმინანტი მათი დეტერმინანტების ნამრავლის ტოლია.

2.4. შებრუნებული მატრიცა

განვიხილოთ n-ური რიგის კვადრატული A მატრიცა (2.3).

● A **მატრიცის შებრუნებული** ეწოდება ისეთ A^{-1} მატრიცას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\boxed{A\,A^{-1} = A^{-1}A = I} \tag{2.18}$$

სადაც I წარმოადგენს ერთეულოვან მატრიცას. ■

შებრუნებული A^{-1} მატრიცა ნამდვილი a რიცხვის შებრუნებულის ანალოგია.

გავიხსენოთ, რომ ყოველ არანულოვან ნამდვილ a რიცხვს გააჩნია შებრუნებული და იგი $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ რიცხვის ტოლია. ამასთან, $a\cdot a^{-1}=1$. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ყოველი არანულოვანი A მატრიცისათვის, ზოგა-

დად, არ არსებობს შებრუნებული A^{-1} მატრიცა. თუ A მატრიცას გააჩნია შებრუნებული, მაშინ A^{-1} მატრიცის აგება ხდება გარკვეული ალგორითმით.

ახლა გავეცნოთ, თუ როდის არსებობს მოცემული A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა და დავწეროთ A^{-1} მატრიცის გამოსათვლელი ფორმულა. ამ მიზნით შემოვიღოთ შემდეგი ცნებები.

● კვადრატულ მატრიცას ეწოდება **არაგადაგვარებული**, თუ მისი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, და ეწოდება **გადაგვარებული**, თუ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია. ■

A მატრიცის შებრუნებული მატრიცის არსებობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ A მატრიცა იყოს არაგადაგვარებული. A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა გამოითვლება ფორმულით

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{*}} \tag{2.19}$$

სადაც $|A|$ არის A მატრიცის დეტერმინანტი, ხოლო A^{*} წარმოადგენს ალგებრული დამატებებისაგან შედგენილ შემდეგ მატრიცას

$$A^{*} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

A^{*}-ს ეწოდება A მატრიცის **მიკავშირებული** მატრიცა. შევნიშნოთ, რომ მიკავშირებული მატრიცის A^{*}_{ij} ელემენტი (ე. ი. i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტი) არის A მატრიცის a_{ji} ელემენტის (ანუ j-ური სტრიქონისა და i-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტის) ალგებრული A_{ji} დამატება: $A^{*}_{ij} = A_{ji}$.

ამოცანა 2.5. იპოვეთ A^{-1}, თუ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

▼ ჯერ ვიპოვოთ A მატრიცის დეტერმინანტი

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

რადგან A არაგადაგვარებულია, ამიტომ არსებობს A^{-1}. მის ასაგებად საჭიროა გამოვთვალოთ შესაბამისი მიკავშირებული A^* მატრიცა. ამისათვის გამოვთვალოთ A მატრიცის ელემენტების შესაბამისი ალგებრული დამატებები:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(2.20) ფორმულის თანახმად მიკავშირებულ მატრიცას ექნება შემდეგი სახე

$$A^* = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ (2.19) ფორმულას, მივიღებთ

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

2.5. მატრიცის რანგი

ამ პარაგრაფში ჩვენ შემოვიღებთ მატრიცის რანგის ცნებას, რომელსაც გამოვიყენებთ სპეციალური ტიპის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის დროს.

განვიხილოთ $m \times n$ რიგის (2.1) მატრიცა. შევარჩიოთ ამ მატრიცაში

ნებისმიერი r სტრიქონი და r სვეტი, სადაც $r \le \min\{m, n\}$, არჩეული სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს მატრიცის r **რიგის მინორი** ეწოდება.

● r რიცხვს ეწოდება **მატრიცის რანგი**, თუ მისი r რიგის მინორთა შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყველა r-ზე მაღალი რიგის მინორი, თუ ასეთი არსებობს, ნულის ტოლია. ■

A მატრიცის რანგი აღინიშნება სიმბოლოთი $rang\,A$. ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ r რიგის მინორთა შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყველა $(r+1)$ რიგის მინორი, თუ ასეთი არსებობს, ნულის ტოლია, მაშინ A მატრიცის რანგი r რიცხვის ტოლია.

შევთანხმდეთ, რომ ნულოვანი მატრიცის რანგი ნულის ტოლია.

ამოცანა 2.6. გამოთვალეთ A მატრიცის რანგი, თუ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

▼ იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $rang\,A$, საჭიროა ჯერ გამოვთვალოთ A მატრიცის დეტერმინანტი

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

რადგან $|A| = 0$, ამიტომ $rang\,A < 3$.

გადავიდეთ მეორე რიგის მინორების გამოთვლაზე:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \ne 0.$$

რადგან მეორე რიგის მინორებს შორის აღმოჩნდა ნულისაგან განსხვავებული მინორი, ამიტომ $rang\,A = 2$. დანარჩენი მეორე რიგის მინორების გამოთვლა აღარ არის საჭირო. ■

2.6 სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $A+B$ და $A-B$, თუ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$.

2. იპოვეთ $A\,B$, თუ

(ა) $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{bmatrix}$; (ბ) $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

3. გამოთვალეთ $A\,B-B\,A$, თუ $A=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 6 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$.

4. იპოვეთ შებრუნებული A^{-1} მატრიცა, თუ $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$.

5. გამოთვალეთ A მატრიცის რანგი, თუ

(ა) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -4\\ -1 & 1 & -5\\ -2 & -1 & -1\end{bmatrix}$; (ბ) $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 4\\ -1 & 2 & -3\end{bmatrix}$.

6. ამოხსენით განტოლება $\begin{vmatrix}x & -2 & x\\ 3 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=14.$

7. ამოხსენით განტოლება $\begin{vmatrix}x^2 & 3 & -1\\ x & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=2\,.$

8. ამოხსენით უტოლობა $\begin{vmatrix}2 & x+2 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 5 & -x & 3\end{vmatrix}>0\,.$

9. აჩვენეთ, რომ

(ა) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(ბ) $(AB)^T = B^T A^T$;

(გ) $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$, თუ A კვადრატული არაგადაგვარებული მატრიცაა;

(დ) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, თუ A და B კვადრატული არაგადაგვარებული მატრიცებია.

10. ვთქვათ, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ არის სამკუთხა მატრიცა, ე.ი. $a_{ij} = 0$, როცა $i > j$ (ან $i < j$). აჩვენეთ, რომ $|A| = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$.

11. აჩვენეთ, რომ არაგადაგვარებული A მატრიცისათვის მართებულია ტოლობა $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

12. ფირმა აწარმოებს P_1, P_2, P_3 და P_4 სახის პროდუქტს და თვითონვე ეწევა მის რეალიზაციას სამ M_1, M_2 და M_3 ბაზარზე. სამივე ბაზარზე მოთხოვნები აღნიშნული პროდუქტების რაოდენობაზე მოცემულია შემდეგი ცხრილით

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	200	300	200	250
M_2	400	300	350	450
M_3	0	200	400	200 .

სამივე ბაზარზე თითოეული პროდუქტის სარეალიზაციო ფასია

ერთეული	P_1	P_2	P_3	P_4
(\$)	40	25	20	30 .

ოთხივე პოდუქტის წარმოებაზე გამოიყენება სამი N_1, N_2, N_3 სახის ნედლეული შემდეგი მოცულობებით

ერთეული	N_1	N_2	N_3
P_1	2	1	1

P_2	1	3	2
P_3	2	2	3
P_4	1	4	1 .

ასევე, ცნობილია გამოყენებული ნედლეულის ფასები

ერთეული	N_1	N_2	N_3
($)	2	1	3

და თითოეული პროდუქტის წარმოებასა და რეალიზაციაზე გაწეული დანახარჯები

ერთეული	P_1	P_2	P_3	P_4
($)	2	1	2	3 .

შემოიღეთ შესაბამისი მატრიცები და მათი საშუალებით იპოვეთ:

(ა) რეალიზაციის შედეგად მიღებული ამონაგები თითოეულ ბაზარზე;

(ბ) წარმოებაზე დახარჯული ნედლეულის მოცულობები;

(გ) საწარმოს მოგება.

თავი 3. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები

ამ თავში შევისწავლით წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის სხვადასხვა ხერხს. კერძოდ, გავეცნობით კრამერის წესს, მატრიცულ მეთოდს და გაუსის ალგორითმს.

შევნიშნოთ, რომ ძალიან ხშირად ეკონომიკური მოდელი შეიცავს მრავალ პარამეტრს და, კონკრეტული პრობლემებიდან გამომდინარე, საჭირო ხდება მოიძებნოს პარამეტრების ის მნიშვნელობები, რომლებიც გარკვეულ თანაფარდობებს (განტოლებებს) აკმაყოფილებს. თუ ეს თანაფარდობები წრფივი განტოლებებია, მაშინ ჩვენ საქმე გვექნება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემასთან.

პირველ თავში უკვე შეგვხვდა ეკონომიკური ამოცანები, რომლებიც ამოიხსნა ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის გამოყენებით. ამ თავში კი საქმე გვექნება უფრო რთულ, მრავალპარამეტრიან ეკონომიკურ ამოცანებთან. თავის მხრივ, უცნობთა რაოდენობის ზრდა ბუნებრივად იწვევს განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პროცესის შედარებით გართულებას. თუმცა უნდა აღვნიშნოთ, რომ ეს სირთულეები ძირითადად დაკავშირებულია გრძელი გამოთვლების ჩატარებასთან და ტექნიკური ხასიათისაა.

აქვე შევნიშნოთ, რომ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პროგრამული უზრუნველყოფა შესულია თითქმის ყველა თანამედროვე კომპიუტერის მონაცემთა ბაზაში. თუ სისტემაში უცნობთა რაოდენობა საკმაოდ დიდია, მაშინ მიზანშეწონილია, იგი ამოვხსნათ კომპიუტერის გამოყენებით.

3.1. ძირითადი ცნებები

განვიხილოთ n უცნობიანი m წრფივი ალგებრული განტოლებისაგან შედგენილი სისტემა

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dotfill \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობებია, ხოლო a_{ij} და b_i $(i = 1, 2, \ldots, m,$ $j = 1, 2, \ldots, n)$ მოცემული რიცხვებია. a_{ij} რიცხვებს ეწოდებათ სისტემის კოეფიციენტები, ხოლო b_i რიცხვებს — თავისუფალი წევრები. თუ $m \neq n$, მაშინ სისტემას **მართკუთხოვანი სისტემა** ეწოდება. თუ ყველა $b_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, მაშინ სისტემას **ერთგვაროვანი** ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — **არაერთგვაროვანი.**

● $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ რიცხვთა დალაგებულ ერთობლიობას ეწოდება (3.1) **სისტემის ამონახსნი,** თუ სისტემაში $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობების ნაცვლად, შესაბამისად, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ რიცხვების ჩასმით სისტემის ყოველი განტოლება ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად გადაიქცევა. ■

● თუ სისტემას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი, მაშინ მას **თავსებადი სისტემა** ეწოდება, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში — **არათავსებადი**. ■

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემასთან დაკავშირებით ისმება ორი ძირითადი საკითხი:

(1) სისტემის თავსებადობის გამოკვლევა და

(2) თავსებადი სისტემის ყველა ამონახსნის პოვნა.

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომელშიც უცნობთა რიცხვი განტოლებათა რიცხვის ტოლია, ე. ი.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dotfill \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

ასეთ სისტემას წრფივ ალგებრულ განტოლებათა **კვადრატული სი-**

სტემა ეწოდება. ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით (3.1) და (3.2) ტიპის სისტემების ამოხსნადობის საკითხს.

3.2. კვადრატული სისტემები. კრამერის წესი

განვიხილოთ (3.2) სისტემა და ამ სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი ავღნიშნოთ Δ-თი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

განვიხილოთ აგრეთვე n რიგის დამხმარე დეტერმინანტები: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, სადაც $\Delta_j \ \ (j = 1, 2, \ldots, n)$ მიიღება სისტემის Δ დეტერმინანტისაგან მისი j-ური სვეტის შეცვლით თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი სვეტით

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

მტკიცდება, რომ თუ სისტემის Δ დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ (3.2) სისტემა თავსებადია და მას ერთადერთი ამონახსნი აქვს, რომელიც მოიცემა ფორმულებით:

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.} \tag{3.5}$$

(3.5) ფორმულებს **კრამერის ფორმულები** ეწოდება.

ამოცანა 3.1. განვსაზღვროთ ბაზარზე შეტანილი სამი ურთიერთდამოკიდებული საქონლის წონასწორობის P_1, P_2 და P_3 ფასები (დოლარობით), თუ ისინი აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

$$\begin{cases} 2P_1 + 4P_2 + P_3 = 77 \\ 4P_1 + 3P_2 + 7P_3 = 114 \\ 2P_1 + P_2 + 3P_3 = 48. \end{cases}$$

▼ ამოვხსნათ ეს სისტემა კრამერის წესით P_1, P_2 და P_3 უცნობების მიმართ. ჯერ გამოვთვალოთ სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

რადგან სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, ამიტომ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ამ ამონახსნის საპოვნელად გამოვთვალოთ დამხმარე დეტმინანტები Δ_1, Δ_2 და Δ_3. Δ_1-ის გამოსათვლელად სისტემის Δ დეტერმინანტში პირველი სვეტი უნდა შევცვალოთ თავისუფალ წევრთა სვეტით

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 77 & 4 & 1 \\ 114 & 3 & 7 \\ 48 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 77 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 114 & 7 \\ 48 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 114 & 3 \\ 48 & 1 \end{vmatrix} = 100.$$

სრულიად ანალოგიურად მივიღებთ

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 77 & 1 \\ 4 & 114 & 7 \\ 2 & 48 & 3 \end{vmatrix} = 130, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 77 \\ 4 & 3 & 114 \\ 2 & 1 & 48 \end{vmatrix} = 50.$$

კრამერის ფორმულების გამოყენებით დავადგენთ

$$P_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 10, \quad P_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 13, \quad P_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5.$$

ამრიგად, საძიებელი წონასწორობის ფასებია: $P_1 = 10$, $P_2 = 13$ და $P_3 = 5$. ■

3.3. სისტემის ამოხსნა მატრიცული ხერხით

გადავწეროთ (3.2) სისტემა მატრიცული სახით, რისთვისაც შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

A-ს ეწოდება სისტემის მატრიცა, B-ს — თავისუფალ წევრთა ერთსვეტიანი მატრიცა, ხოლო X-ს — უცნობი ერთსვეტიანი მატრიცა.

მატრიცთა გამრავლებისა და მატრიცთა ტოლობის განსაზღვრების თანახმად, წრფივ განტოლებათა (3.2) სისტემა მატრიცულად ასე ჩაიწერება

$$A\,X = B. \tag{3.8}$$

დავუშვათ, რომ A მატრიცა არაგადაგვარებულია, ე. ი. A მატრიცის დეტერმინანტი $\Delta = |A| \neq 0$. მაშინ, როგორც ვიცით, არსებობს A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა A^{-1}. გავამრავლოთ (3.8) მატრიცული განტოლების ორივე მხარე მარცხნიდან A^{-1} მატრიცაზე

$$A^{-1}\left(A\,X\right) = A^{-1}\,B.$$

რადგან

$$A^{-1}\left(A\,X\right) = \left(A^{-1}A\right)X = I_n\,X = X,$$

ამიტომ მივიღებთ

$$\boxed{\mathbf{X} = A^{-1}\,B,} \tag{3.9}$$

რაც (3.8) განტოლების მატრიცული ამონახსნია.

(3.9) ტოლობიდან განისაზღვრება $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა მნიშვნელობები, რომლებიც წარმოადგენენ (3.2) სისტემის ერთადერთ ამონახსნს.

ამოცანა 3.2. ამოვხსნათ მატრიცული ხერხით შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

▼ შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

მოცემული სისტემა, მატრიცული სახით ასე გადაიწერება

$$AX = B.$$

რადგან

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

ამიტომ

$$\mathrm{X} = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix},$$

სადაც

$$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

შევნიშნოთ, რომ კრამერის წესითა და მატრიცული ხერხით, შეიძლება ამოიხსნას მხოლოდ ისეთ წრფივ განტოლებათა სისტემები, რომლებშიც უცნობთა რიცხვი განტოლებათა რიცხვის ტოლია (ე. ი. კვადრატული სისტემები) და სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან.

3.4. მართკუთხოვანი სისტემები. გაუსის მეთოდი

ვთქვათ, გვაქვს (3.1) სახის განტოლებათა სისტემა და $m \neq n$. ამ სისტემის ამონახსნის არსებობა მჭიდროდაა დაკავშირებული შემდეგ ორ მატრიცასთან:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

$\overline{A}$ მატრიცას ეწოდება სისტემის **გაფართოებული მატრიცა**. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა (კრონეკერ-კაპელი). წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის თავსებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემის მატრიცის რანგი უდრიდეს გაფართოებული მატრიცის რანგს, ე. ი. $rang\, A = rang\, \overline{A}$; ამასთან,

(1) თუ $rang\, A = rang\, \overline{A} = n$, მაშინ სისტემას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი;

(2) თუ $rang\, A = rang\, \overline{A} < n$, მაშინ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე;

(3) თუ $rang\, A \neq rang\, \overline{A}$, მაშინ სისტემა არათავსებადია. ■

შევნიშნოთ, რომ თუ (3.2) კვადრატული სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ თავსებადობის საკითხი გადაწყდება კრონეკერ-კაპელის თეორემის მეშვეობით. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

ამოცანა 3.3. გამოვიკვლიოთ სისტემა

$$\begin{cases} x + 4y + 5z = 10 \\ 2x + 8y + 10z = 20 \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

▼ პირველ რიგში, ამოვწეროთ სისტემის მატრიცა და გაფართოებული მატრიცა:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & 8 & 10\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad \overline{A}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & 10\\ 2 & 8 & 10 & 20\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

უშუალო გამოთვლებით დავრწმუნდებით, რომ A მატრიცა გადაგვარებულია, ე. ი. $\Delta=|A|=0$. ამიტომ კრამერის ხერხს ვერ გამოვიყენებთ. მარტივად შევამოწმებთ, რომ $rang\,A=2$, რადგან მისი მეორე რიგის მინორი

$$M_{13}=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-10$$

განსხვავებულია ნულისაგან. ასევე მარტივად ვაჩვენებთ, რომ გაფართოებული $\overline{A}$ მატრიცის ყველა მესამე რიგის მინორი ნულის ტოლია და $rang\,\overline{A}=2$. ამიტომ კრონეკერ-კაპელის თეორემის თანახმად მოცემულ სისტემას გააჩნია ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე. ვიპოვოთ ეს ამონახსნები. ამისათვის მოცემული სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} x+4y=10-5z\\ x-y=1-z\\ 2x+8y+10z=20.\end{cases}$$

პირველი ორი განტოლებიდან მივიღებთ

$$x=\frac{14-9z}{5},\qquad y=\frac{9-4z}{5}.$$

უშუალო შემოწმებით მარტივად ვაჩვენებთ, რომ სისტემის მესამე განტოლება ავტომატურად კმაყოფილდება z-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ამიტომ შემდეგი სამეული

$$\left(\frac{14-9z}{5},\ \frac{9-4z}{5},\ z\right)$$

წარმოადგენს მოცემული სისტემის ამონახსნს z-ის ნებსმიერი მნიშვნელობისათვის. ■

ახლა გავეცნოთ ალგებრულ განტოლებათა წრფივი სისტემის ამოხსნის ერთ უნივერსალურ ხერხს, რომელსაც **გაუსის მეთოდი** ეწოდება. წინასწარ შემოვიღოთ რამდენიმე საჭირო განმარტება.

● ორ სისტემას ტოლფასი (ანუ ეკვივალენტური) ეწოდება, თუ მათი ამონახსნების სიმრავლეები ტოლია. ■

შევნიშნოთ, რომ ამ განმარტების თანახმად, ნებისმიერი ორი არათავსებადი სისტემა ეკვივალენტურია.

● წრფივ განტოლებათა სისტემის ელემენტარული გარდაქმნები ვუწოდოთ შემდეგი სამი სახის გარდაქმნას:

(1) ნებისმიერი ორი განტოლების ადგილების შეცვლას;

(2) განტოლების ორივე მხარის გამრავლებას ერთი და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე;

(3) ნებისმიერი ორი განტოლების შეკრებას. ■

აღვნიშნოთ, რომ ელემენტარულ გარდაქმნებს მოცემული სისტემა მის ტოლფას სისტემაზე დაყავს. სწორედ ამ თვისებას ეყრდნობა სისტემის ამოხსნის გაუსის მეთოდი, რომელსაც უცნობთა თანმიმდევრობით გამორიცხვის მეთოდსაც უწოდებენ.

ამ მეთოდის გაცნობა დავიწყოთ კონკრეტული მაგალითების განხილვით.

ამოცანა 3.4. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 18 \\ -2x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 12 \\ 2x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 24. \end{cases} \qquad (3.10)$$

▼ გამოვრიცხოთ x_1 უცნობი მეორე და მესამე განტოლებებიდან. ამისთვის, პირველი განტოლების ორივე მხარე გავყოთ 3-ზე. მიღებული განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ ჯერ 2-ზე, შემდეგ -2-ზე და მივუმატოთ შესაბამისად მეორე და მესამე განტოლებებს. მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \quad 4x_2 + 16x_3 = 24 \\ \quad -3x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \quad x_2 + 4x_3 = 6 \\ \quad -x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

გამოვრიცხოთ x_2 მესამე განტოლებიდან. ამისათვის მეორე განტოლება

მივუმატოთ მესამე განტოლებას

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \quad\quad x_2 + 4x_3 = 6 \\ \quad\quad\quad 5x_3 = 10 \end{cases}, \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \quad\quad x_2 + 4x_3 = 6 \\ \quad\quad\quad x_3 = 2. \end{cases} \tag{3.11}$$

აქედან, მიმდევრობითი ჩასმით, ვღებულობთ: $x_3 = 2,\ x_2 = -2,\ x_1 = -4$. ამრიგად, (3.10) სისტემის ერთადერთი ამონახსნია რიცხვთა სამეული $(-4, -2, 2)$.

(3.11) ტიპის სისტემას უწოდებენ **სამკუთხა სისტემას.**

შევნიშნოთ, რომ (3.10) სისტემის ზემოთ განხილული გარდაქმნები შეიძლება ჩაიწეროს მატრიცული სახითაც. ამისათვის, ამოვწეროთ მოცემული სისტემის გაფართოებული მატრიცა $\overline{A}$ და თანმიმდევრობით ჩავატაროთ ზემოთ განხორციელებული ტოლფასი გარდაქმნები მატრიცის სტრიქონებზე

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 18 \\ -2 & 8 & 10 & 12 \\ 2 & -7 & 9 & 24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ -2 & 8 & 10 & 12 \\ 2 & -7 & 9 & 24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 16 & 24 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

ბოლოს მიღებული მატრიცა წარმოადგენს (3.11) სისტემის გაფართოებულ მატრიცას. ამ მატრიცას **დაყვანილი სახის მატრიცა** ეწოდება. ■

ამოცანა 3.5. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases} \tag{3.12}$$

▼ (3.12) სისტემა გადავწეროთ მისი ტოლფასი სისტემის სახით (შევუცვალოთ ადგილები პირველ და მეორე განტოლებებს)

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5.
\end{cases}
\tag{3.13}
$$

გარდავქმნათ ამ სისტემის გაფართოებული მატრიცა დაყვანილ სახემდე

$$
\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{7} \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{7} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

ამრიგად, (3.13) სისტემა დაიყვანება შემდეგ სისტემაზე

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\
x_2 - x_3 = \dfrac{1}{7} \\
0 \cdot x_3 = 0
\end{cases}
\quad \text{ანუ} \quad
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\
x_2 - x_3 = \dfrac{1}{7}.
\end{cases}
$$

ამ სისტემიდან x_1 და x_2 ცვლადები გამოვსახოთ x_3 ცვლადის საშუალებით

$$
x_1 = \frac{11 - 7x_3}{7}, \quad x_2 = \frac{1 + 7x_3}{7}.
$$

აქედან მივიღებთ, რომ (3.12) განტოლებათა სისტემა თავსებადია და მას გააჩნია ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე

$$
\left(\frac{11 - 7x_3}{7}, \frac{1 + 7x_3}{7}, x_3 \right), \quad x_3 \in \mathbb{R}. \quad ■
$$

ამოცანა 3.6. გამოვიკვლიოთ სისტემა

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\
3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\
2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 6.
\end{cases}
\tag{3.14}
$$

▼ გარდავქმნათ ამ სისტემის გაფართოებული მატრიცა დაყვანილ სახემდე

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 3 & -5 & 3 & 1\\ 2 & -7 & 2 & 6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -11 & 0 & -11\\ 0 & -11 & 0 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 9\end{bmatrix}.$$

ამრიგად, მოცემული სისტემა დაიყვანება შემდეგ სისტემაზე

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4\\ \qquad x_2 \qquad =1\\ \qquad\quad 0\cdot x_3=9\,. \end{cases}$$

ვინაიდან, $0\cdot x_3=9$ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს, ამიტომ (3.14) სისტემა არათავსებადია. ■

განვიხილოთ n უცნობიანი m წრფივი ალგებრული განტოლებისაგან შედგენილი ზოგადი სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{3.15}$$

სადაც $m\le n$ (ე.ი. განტოლებათა რაოდენობა არ აღემატება უცნობების რაოდენობას).

ისევე, როგორც ზემოთ განხილული კონკრეტული ამოცანების შემთხვევაში, (3.15) სისტემა, ელემენტარული გარდაქმნებითა და საჭიროების შემთხვევაში უცნობთა ახალი გადანომრით, ყოველთვის შეგვიძლია დავიყვანოთ მის ტოლფას შემდეგ სისტემაზე

$$\begin{cases} x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1k}x_k+c_{1\,k+1}x_{k+1}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1\\ \qquad x_2+\cdots+c_{2k}x_k+c_{2\,k+1}x_{k+1}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2\\ \qquad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \qquad\qquad x_k+c_{k\,k-1}x_{k+1}+\cdots+c_{kn}x_n=d_k\\ \qquad\qquad\qquad 0\cdot x_{k+1}+\cdots+0\cdot x_n=d_{k+1}\\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \qquad\qquad\qquad 0\cdot x_m+\cdots+0\cdot x_n=d_m, \end{cases} \tag{3.16}$$

სადაც c_{ij} და d_j რიცხვები გამოისახებიან (3.15) სისტემის კოეფიციენტე-ბისა და მარჯვენა მხარის საშუალებით. ცხადია, რომ (3.16) სისტემის თავ-სებადობის დადგენა ტრივიალურია. კერძოდ, თუ $k \le m < n$ და $d_{k+1}, \dots, d_m$ რიცხვები ნულის ტოლია, მაშინ (3.16) სისტემა თავსებადია და პირველი k განტოლებიდან $x_1, x_2, \dots, x_k$ უცნობები გამოისახება $x_{k+1}, \dots, x_n$ უცნობებით. ამ შემთხვევაში (3.16) სისტემას გააჩნია ამონახსნების უსასრულო რაოდენობა, რადგან $x_{k+1}, \dots, x_n$ უცნობებს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობები. აშკარაა, რომ თუ რომელიმე $d_j \ne 0$, $k+1 \le j \le m$, მაშინ (3.16) სისტემა არათავსებადია.

თუ $k = m = n$, მივიღებთ სამკუთხა სისტემას

$$\begin{cases} x_1 + c_{12} x_2 + \cdots + c_{1n} x_n = d_1 \\ \qquad\quad x_2 + \cdots + c_{2n} x_n = d_2 \\ \qquad\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\quad x_{n-1} + c_{n-1\,n} x_n = d_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad x_n = d_n , \end{cases} \tag{3.17}$$

რომელიც ცალსახად ამოხსნადია: $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ უცნობები განისაზღვრე-ბიან თანმიმდევრობით (3.17) სისტემის განტოლებებიდან.

შემდგომი პარაგრაფები ეძღვნება ზემოთ მოყვანილი თეორიული მასალის გამოყენებას კონკრეტული ეკონომიკური ამოცანების ამოხსნაში.

3.5. წარმოების დარგთაშორისი ბალანსი. ლეონტიევის მოდელი

ვთქვათ, წარმოება შედგება n დარგისაგან. დროის ერთეულში (მაგა-ლითად, 1 წელიწადში) ამ დარგების წარმოების მოცულობები იყოს $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, ფულად თანხაში გამოსახული (მაგალითად, დოლარობით). ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი დარგის პროდუქცია გარკვეული მოცულობით

გამოიყენება როგორც სხვა დარგებში, ასევე მოცემული დარგის შიგნით. აღვნიშნოთ q_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ სიმბოლოთი i-ური დარგის პროდუქციის მოცულობა, რომელიც გამოიყენება j-ური დარგის პროდუქციის წარმოებაში. ცხადია, q_{ii} არის i-ური დარგის პროდუქციის მოცულობა, რომელიც გამოიყენება i-ური დარგის შიგნით $(i = 1, 2, \ldots, n)$. ამ q_{ij} სიდიდეებს ეწოდებათ დარგთაშორისი ნაკადები. როგორც წესი, i-ური დარგის წარმოების გარკვეული პროდუქციის მოცულობა გამოიყენება ისეთი მიმართულებითაც, რომელსაც არაფერი აქვს საერთო ზემოთ ხსენებულ n-დარგოვან წარმოებასთან. ისინი, როგორც „მზა პროდუქცია" მოიხმარება განსხვავებული მიზნებით (ბაზრის მოთხოვნის დაკმაყოფილებისთვის, მიმდინარე საწარმოო ხარჯების დასაფარავად, ექსპორტისათვის, კაპიტალური დაბანდებისათვის, მარაგის გაზრდისათვის და ა. შ.). i-ური დარგის პროდუქციის ის მოცულობა, რომელიც არ გამოიყენება აღნიშნულ n-დარგოვან წარმოებაში, აღვნიშნოთ q_i სიმბოლოთი $(i = 1, 2, \ldots, n)$ და ვუწოდოთ i-ური **დარგის პროდუქციაზე მოთხოვნის მოცულობა**. შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი, რომელსაც ეწოდება **დარგთაშორისი კავშირების ცხრილი**.

წარმოების დარგი	წარმოებული პროდუქციის მოცულობა	დარგთაშორისი ნაკადები წარმოებაში				დარგის პროდუქციაზე მოთხოვნის მოცულობა
		1	2	…	n	
1	Q_1	q_{11}	q_{12}	…	q_{1n}	q_1
2	Q_2	q_{21}	q_{22}	…	q_{2n}	q_2
…	…	…	…	…	…	…
n	Q_n	q_{n1}	q_{n2}	…	q_{nn}	q_n

აშკარაა, რომ ამ ცხრილის ყოველ სტრიქონში დარგთაშორისი ნაკადებისა და დარგის პროდუქციაზე მოთხოვნის მოცულობის ჯამი მოცემული სტრიქონის შესაბამისი დარგის პროდუქციის მოცულობის ტოლია. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი განტოლებები

$$
\begin{cases}
Q_1 = q_{11} + q_{12} + \cdots + q_{1n} + q_1 \\
Q_2 = q_{21} + q_{22} + \cdots + q_{2n} + q_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Q_n = q_{n1} + q_{n2} + \cdots + q_{nn} + q_n .
\end{cases}
\tag{3.18}
$$

განტოლებათა ამ სისტემას **წარმოების საბალანსო განტოლებები** ეწოდება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$
a_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \tag{3.19}
$$

ცხადად ჩანს, რომ a_{ij} აღნიშნავს i-ური დარგის პროდუქციის იმ მოცულობას (დოლარობით), რომელიც საჭიროა j-ური დარგის ერთი დოლარი ღირებულების პროდუქციის წარმოებისათვის. (3.19) რიცხვებს ეწოდება **წარმოების ტექნოლოგიური კოეფიციენტები.** ამ კოეფიციენტების საშუალებით შევადგინოთ n რიგის კვადრატული მატრიცა

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}. \tag{3.20}
$$

ეს მატრიცა ახასიათებს წარმოების ტექნოლოგიურ პირობებს, ამიტომ მას **წარმოების ტექნოლოგიურ მატრიცას** უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ i-ურ სვეტში მოთავსებული $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ ელემენტები აღნიშნავენ, შესაბამისად, პირველი, მეორე და ა.შ. n-ური დარგის პროდუქციის მოცულობებს, რომლებიც საჭიროა i-ური დარგის 1 დოლარი ღირებულების პროდუქციის წარმოებისათვის. ამიტომ ბუნებრივია მოვითხოვოთ შემდეგი პირობის დაკმაყოფილება

$$
\sum_{k=1}^{n} a_{ki} = a_{1i} + a_{2i} + \cdots + a_{ni} < 1, \qquad i = 1, 2, \dots, n.
$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ წაარმოება (წარმოების ეკონომიკა) რენტაბელურია. (ეს სრულ თანხმობაშია ძირითად ეკონომიკურ პრინციპთან: ერთი დოლარი ღირებულების პროდუქციის წარმოებაზე უნდა დაიხარჯოს

ერთ დოლარზე ნაკლები!).

ანალოგიურად, k-ურ სტრიქონში მოთავსებული ელემენტები $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$ აღნიშნავენ k-ური დარგის პროდუქციის მოცულობებს, რომლებიც საჭიროა, შესაბამისად, პირველი, მეორე და ა.შ. n-ური დარგის 1 დოლარი ღირებულების პროდუქციის წარმოებისათვის.

ვთქვათ, დროის განსახილველ პერიოდში ცნობილია წარმოების ტექნოლოგიური (3.20) მატრიცა, ანუ ცნობილია a_{ij} სიდიდეები. (3.19) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$q_{ij} = a_{ij} \cdot Q_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით (3.18) სისტემა ასე გადაიწერება

$$\begin{cases} Q_1 = a_{11} Q_1 + a_{12} Q_2 + \cdots + a_{1n} Q_n + q_1 \\ Q_2 = a_{21} Q_1 + a_{22} Q_2 + \cdots + a_{2n} Q_n + q_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_n = a_{n1} Q_1 + a_{n2} Q_2 + \cdots + a_{nn} Q_n + q_n. \end{cases} \tag{3.21}$$

აქ იგულისხმება, რომ a_{ij} და q_i სიდიდეები ცნობილია, ხოლო Q_i სიდიდეები – უცნობი. ჩავწეროთ (3.21) სისტემა მატრიცული სახით. ამისათვის შემოვიღოთ შემდეგი ერთსვეტიანი მატრიცები:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

(3.20) და (3.22) ტოლობების გათვალისწინებით (3.21) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$Q = A\,Q + q$$

ანუ

$$(I_n - A)\,Q = q, \tag{3.23}$$

სადაც I_n არის n რიგის ერთეულოვანი მატრიცა. აქ Q საძიებელი ერთსვეტიანი მატრიცაა, ხოლო A და q ცნობილი მატრიცებია.

დავუშვათ, რომ მატრიცა

$$
(I_n - A) = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.24}
$$

არაგადაგვარებულია, ანუ $\left| I_n - A \right| \neq 0$.

თუ გავითვალისწინებთ მატრიცული ფორმის განტოლების ამონახსენის ფორმულას (იხ. (3.9)), მაშინ (3.23) განტოლების ამონახსნისათვის მივიღებთ

$$
Q = (I_n - A)^{-1} \; q, \tag{3.25}
$$

სადაც $(I_n - A)^{-1}$ არის (3.24) მატრიცის შებრუნებული მატრიცა. (3.25) ფორმულა საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ წარმოების დარგების მოცულობები (Q_j სიდიდეები), თუ ცნობილია წარმოების ტექნოლოგიური A მატრიცა და დარგის პროდუქციებზე მოთხოვნის მოცულობები (q_j სიდიდეები). Q_j სიდიდეების მოძებნას უწოდებენ **წარმოების გეგმის შედგენას.**

ზემოთ შემოტანილი წარმოების ტექნოლოგიურ $A = [a_{ki}]$ მატრიცას, სადაც $a_{ki} \geq 0$, ლიტერატურაში უწოდებენ აგრეთვე **მინკოვსკ-ლეონტიევის** მატრიცას.

დავუშვათ, რომ წარმოების ეკონომიკა რენტაბელურია, ე.ი. A მატრიცის ყოველი სვეტის ელემენტების ჯამი ერთზე ნაკლებია. მკაცრი მათემატიკური მეთოდებით მტკიცდება, რომ ამ პირობებში $(I_n - A)$ მატრიცა არაგადაგვარებულია, ე. ი. არსებობს შებრუნებული მატრიცა $(I_n - A)^{-1}$, რომლის ელემენტებიც არაუარყოფითია. (3.25) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ (3.23) სისტემის ამონახსნის, Q სვეტი მატრიცის ელემენტები არაუაყოფითია, თუ მარჯვენა მხარის q სვეტი მატრიცის ელემენტები არაუარყოფითია. ვთქვათ,

$$\left(I_n - A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}, \tag{3.26}$$

სადაც b_{ij} ელემენტები გამოითვლება (3.24) მატრიცის ელემეტების საშუალებით (იხ. (2.19) და (2.20) ფორმულები).

მაშინ (3.25) ტოლობა გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} Q_1 = b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + \cdots + b_{1n}q_n = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{1j}q_j \\ Q_2 = b_{21}q_1 + b_{22}q_2 + \cdots + b_{2n}q_n = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{2j}q_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_n = b_{n1}q_1 + b_{n2}q_2 + \cdots + b_{nn}q_n = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{nj}q_j. \end{cases} \tag{3.27}$$

ამ ფორმულებიდან ჩანს, რომ დარგების წარმოების მოცულობები წრფივადაა დამოკიდებული დარგების პროდუქციებზე მოთხოვნის მოცულობებზე.

განვიხილოთ დარგების პროდუქციებზე მოთხოვნის მოცულობების ორი ვარიანტი $q_1', q_2', \ldots, q_n'$ და $q_1'', q_2'', \ldots, q_n''$, რომლებიც განსხვავდებიან მხოლოდ პირველი დარგის პროდუქციებზე მოთხოვნის მოცულობებით, ე. ი. $q_1' \neq q_1''$, $q_2' = q_2''$, ..., $q_n' = q_n''$. წარმოების შესაბამისი მოცულობები, რომლებიც გამოთვლილია (3.27) ფორმულებით, იყოს $Q_1', Q_2', \ldots, Q_n'$ და $Q_1'', Q_2'', \ldots, Q_n''$. მარტივად მივიღებთ, რომ

$$\begin{cases} Q_1' - Q_1'' = b_{11}\left(q_1' - q_1''\right) \\ Q_2' - Q_2'' = b_{21}\left(q_1' - q_1''\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_n' - Q_n'' = b_{n1}\left(q_1' - q_1''\right) \end{cases}$$

ანუ

$$\frac{Q_i'' - Q_i'}{q_1'' - q_1'} = \frac{Q_i' - Q_i''}{q_1' - q_1''} = b_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.28}$$

ამ ფორმულებიდან ჩანს, რომ b_{i1} კოეფიციენტი განსაზღვრავს i-ური დარგის წარმოების იმ მოცულობას, რომელიც საჭიროა პირველი დარგის პროდუქციაზე მოთხოვნის მოცულობის ერთი დოლარით გაზრდისათვის.

სრულიად ანალოგიურად მივიღებთ, რომ b_{ik} კოეფიციენტი განსაზღვრავს i-ური დარგის წარმოების იმ მოცულობას, რომელიც საჭიროა k-ური დარგის პროდუქციაზე მოთხოვნის მოცულობის ერთი დოლარით გაზრდისათვის. ამ კოეფიციენტებს **ერთობლივი მოხმარების კოეფიციენტები** ეწოდებათ, ხოლო (3.26) მატრიცას – **ერთობლივი მოხმარების კოეფიციენტების მატრიცა.**

ამოცანა 3.7. ვთქვათ, წარმოება შედგება სამი დარგისაგან და ცნობილია წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

წარმოების გეგმის შედგენისას წინასწარ განიხილავენ წარმოების დარგების პროდუქციებზე მოთხოვნის მოცულობების ორ ვარიანტს:

(1) $q_1^{(1)} = 20000, \quad q_2^{(1)} = 10000, \quad q_3^{(1)} = 30000;$

(2) $q_1^{(2)} = 30000, \quad q_2^{(2)} = 10000, \quad q_3^{(2)} = 20000.$

საჭიროა განისაზღვროს წარმოების გეგმის შესაბამისი ვარიანტები.

▼ შევადგინოთ $(I_3 - A)$ მატრიცა

$$I_3 - A = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.1 & 0 \\ -0.3 & 0.8 & -0.3 \\ -0.1 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

მარტივი გამოთვლებით დავრწმუნდებით, რომ $(I_3 - A)$ არაგადაგვარებულია და $\left| I_3 - A \right| = 0.485$. შებრუნებულ $(I_3 - A)^{-1}$ მატრიცას აქვს შემდეგი

სახე

$$\left(I_3 - A\right)^{-1} = \frac{1}{0.485}\begin{bmatrix} 0.64 & 0.08 & 0.03 \\ 0.27 & 0.64 & 0.24 \\ 0.08 & 0.01 & 0.61 \end{bmatrix} = \frac{10}{485}\begin{bmatrix} 64 & 8 & 3 \\ 27 & 64 & 24 \\ 8 & 1 & 61 \end{bmatrix}.$$

დარგების შესაბამისი პროდუქციის მოცულობების მოსაძებნად გამოვიყენოთ (3.25) ანუ (3.27) ფორმულები.

პირველი ვარიანტის შემთხვევაში მივიღებთ

$$\begin{bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ Q_3^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{10^5}{485}\begin{bmatrix} 64 & 8 & 3 \\ 27 & 64 & 24 \\ 8 & 1 & 61 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{10^5}{485}\begin{bmatrix} 145 \\ 190 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29896.9 \\ 39175.25 \\ 41237.11 \end{bmatrix}.$$

ანალოგიურად, მეორე ვარიანტისათვის გვექნება

$$\begin{bmatrix} Q_1^{(2)} \\ Q_2^{(2)} \\ Q_3^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{10^5}{485}\begin{bmatrix} 64 & 8 & 3 \\ 27 & 64 & 24 \\ 8 & 1 & 61 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{10^5}{485}\begin{bmatrix} 206 \\ 193 \\ 147 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42474.22 \\ 39793.81 \\ 30309.27 \end{bmatrix}.$$

მიღებული სიდიდეები განსაზღვრავენ წარმოების გეგმის შესაბამის ვარიანტებს. ■

3.6. წარმოებაში დასაქმების განსაზღვრა

გარკვეული პროდუქციის წარმოება ტექნიკის მოცემულ დონეზე მოითხოვს არა მარტო სხვადასხვა მასალისა და წარმოების საგნების (შრომის იარაღების) დანახარჯებს, არამედ ცოცხალი შრომის სხვადასხვა დანახარჯებსაც.

დავუშვათ, რომ:

(1) წარმოება იყოფა n დარგად და წარმოების ტექნოლოგიური კოეფიციენტების მატრიცა არის $A=[a_{ik}]_{n\times n}$;

(2) ცოცხალი შრომის დანახარჯები (რომელიც იზომება, მაგალითად წუთობით, საათობით ან მომუშავეთა რაოდენობით) i-ური დარგის პრო-

დუქციის მოცულობის ერთეულზე არის z_i $(i=1, 2, \dots, n)$;

(3) საგეგმო პერიოდში i-ური დარგის პროდუქციაზე მოთხოვნის მოცულობა არის q_i $(i=1, 2, \dots, n)$.

ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა, წარმოების გეგმის შედგენასთან ერთად, არის ცოცხალი ძალის აუცილებელი დანახარჯების განსაზღვრა საგეგმო პერიოდში.

ზემოთ მოყვანილი მეორე პუნქტიდან ცხადია, რომ ცოცხალი შრომის აუცილებელი სრული დანახარჯები საგეგმო პერიოდში განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$Z = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots + Q_n z_n, \tag{3.29}$$

სადაც Q_j $(j=1, 2, \dots, n)$ სიდიდეები წარმოადგენენ j-ური დარგის მიერ გეგმით გამოსაშვები პროდუქციის მოცულობებს (იხ. პარაგრაფი 3.5). ისინი გამოითვლება (3.25) (ანუ (3.27)) ფორმულით, სადაც q წარმოადგენს ერთსვეტიან მატრიცას q_j ელემენტებით, $j=1, 2, \dots, n$ (იხ. (3.22)). გავიხსენოთ, რომ q_j აღნიშნავს j-ური დარგის პროდუქციაზე მოთხოვნის მოცულობას. (3.27) ფორმულების გათვალისწინებით (3.29)-დან მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\begin{aligned} Z &= z_1 \sum_{j=1}^{n} b_{1j} q_j + z_2 \sum_{j=1}^{n} b_{2j} q_j + \cdots + z_n \sum_{j=1}^{n} b_{nj} q_j = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} z_i \, b_{ij} \, q_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \, z_i \, q_j . \end{aligned} \tag{3.30}$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ პროდუქციებზე მოთხოვნის მოცულობების ყოველ ვარიანტს მოცემული წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცისა და პროდუქციის ერთეულზე ცოცხალი შრომის ცნობილი დანახარჯების პირობებში, ცოცხალი შრომის აუცილებელი დანახარჯების სრულიად გარკვეული გეგმა შეესაბამება. Z სიდიდის მოძებნას ეკონომიკაში **შრომის გეგმის შედგენას** უწოდებენ.

ამოცანა 3.8. წარმოება დაყოფილია 3 დარგად და ცნობილია მისი ტექნოლოგიური კოეფიციენტების მატრიცა

$$A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1 & 0\\ 0.3 & 0.2 & 0.3\\ 0.1 & 0 & 0.2\end{bmatrix}.$$

ცოცხალი შრომის დანახარჯები პროდუქციის მოცულობის ერთეულზე დარგების მიხედვით ასეთია: $z_1=5$, $z_2=10$, $z_3=15$,

გეგმის შემუშავების წინასწარ ეტაპზე მიღებულია პროდუქციებზე მოთხოვნის მოცულობების შემდეგი ორი ვარიანტი:

(1) $q_1^{(1)}=20000$, $q_2^{(1)}=10000$, $q_3^{(1)}=30000$;

(2) $q_1^{(2)}=30000$, $q_2^{(2)}=10000$, $q_3^{(2)}=20000$.

ვიპოვოთ შრომის გეგმის შესაბამისი ვარიანტები.

▼ შევნიშნოთ, რომ ამოცანის მონაცემები ემთხვევა ამოცანა 3.7-ში მოყვანილ პირობებს. ამიტომ აქაც წარმოების გეგმისათვის გვექნება შემდეგი სიდიდეები:

(1) $Q_1^{(1)}=29898$, $Q_2^{(1)}=39174$, $Q_3^{(1)}=41235$;

(2) $Q_1^{(2)}=42475$, $Q_2^{(2)}=39793$, $Q_3^{(2)}=30307$.

შრომის დანახარჯები, რომლებიც აუცილებელია პროდუქციებზე მოთხოვნის დაგეგმილი მოცულობის საწარმოებლად, პირველი ვარიანტის მიხედვით არის

$$Z^{(1)}=29898\cdot 5+39174\cdot 10+41235\cdot 15=1002025,$$

მეორე ვარიანტის მიხედვით კი –

$$Z^{(2)}=42475\cdot 5+39793\cdot 10+30307\cdot 15=1064910.$$

$Z^{(1)}$ და $Z^{(2)}$ წარმოადგენს შრომის გეგმის საძიებელ ვარიანტებს. ■

3.7. ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

გადავწეროთ პირველი თავის 1.13 პარაგრაფის (1.44) სისტემა (ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის განტოლებათა სისტემა) შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} Y - T - Y_d = 0 \\ Y - C = I^* + G^* \\ Y - T - C - S = 0 \\ -aY_d + C = b \\ -kY + T = T^* \end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases} Y - T - Y_d + 0 \cdot C + 0 \cdot S = 0 \\ Y - 0 \cdot T + 0 \cdot Y_d - C + 0 \cdot S = I^* + G^* \\ Y - T + 0 \cdot Y_d - C - S = 0 \\ 0 \cdot Y + 0 \cdot T - aY_d + C + 0 \cdot S = b \\ -kY + T + 0 \cdot Y_d + 0 \cdot C + 0 \cdot S = T^*. \end{cases} \tag{3.31}$$

აქ I^*, G^*, a, b, k, T^* დადებითი ცნობილი მუდმივებია. გარდა ამისა, $0 < a < 1$ და $0 \le k < 1$. ჩავწეროთ ეს სისტემა მატრიცული სახით. ამისთვის შემოვიღოთ შემდეგი მატრიცები:

$$X = \begin{bmatrix} Y \\ T \\ Y_d \\ C \\ S \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I^* + G^* \\ 0 \\ b \\ T^* \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -a & 1 & 0 \\ -k & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ცხადია, X არის საძიებელი ერთსვეტიანი მატრიცა, ხოლო A და B მოცემული მატრიცებია. ამ აღნიშვნების გამოყენებით (3.23) სისტემა ასე გადაიწერება

$$A\,X = B.$$

ვაჩვენოთ, რომ, თუ $0 < a < 1$ და $k \ge 0$, მაშინ მატრიცა არაგადაგვარებულია, ე. ი. $|A| \ne 0$. მართლაც, თუ დავშლით $|A|$ დეტერმინანტს მეხუთე სვეტის ელემენტების მიხედვით და გავითვალისწინებთ, რომ ამ სვეტის მხოლოდ ერთი ელემენტია განსხვავებული ნულისაგან (კერძოდ, $a_{35} = -1$), მივიღებთ

$|A| = a_{35}\, A_{35} =$ (A_{35} არის a_{35} ელემენტის ალგებრული დამატება)

$= (-1)\cdot(-1)^{3+5} M_{35} =$ (M_{35} არის a_{35} ელემენტის შესაბამისი მინორი)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ -k & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$ (მეორე და მესამე სვეტს მივუმატოთ პირველი სვეტი)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ -k & 1-k & -k & 0 \end{vmatrix} =$$ (გავშალოთ პირველი სტრიქონის ელემენტების მიხედვით)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -a & 1 \\ 1-k & -k & 0 \end{vmatrix} =$$ (გავშალოთ პირველი სვეტის ელემენტების მიხედვით)

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -a & 1 \\ -k & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -k & 0 \end{vmatrix} - (1-k) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -a & 1 \end{vmatrix} = -\left[k + (1-k)\ (1-a)\right] =$$

$$= -(k + 1 - k - a + k\,a) = -(1 - a + k\,a) < 0,$$

რადგან $1 - a > 0$ და $k\,a \geq 0$.

ამრიგად, თუ $0 < a < 1$ და $k \geq 0$, მაშინ (3.31) სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. ეს ამონახსნი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ კრამერის ფორმულებით ან მატრიცული სახით

$$X = A^{-1} B.$$

შევნიშნოთ, რომ მარტივი სტრუქტურის გამო (3.31) სისტემა შეგვიძლია უფრო ადვილად ამოვხსნათ და თავი ავარიდოთ გრძელ გამოთვლებს. მართლაც, (3.31) სისტემის მეხუთე განტოლებიდან T-ს გამოსახულება ჩავსვათ (3.31)-ის პირველ განტოლებაში

$$Y_d = Y - T = Y - \left(k\, Y + T^*\right) = (1-k)\ Y - T^*. \qquad (3.32)$$

მაშინ (3.31)-ის მეოთხე განტოლებიდან მივიღებთ

$$C = aY_d + b = a(1-k)\ Y - aT^* + b. \tag{3.33}$$

(3.31) სისტემის მესამე და მეხუთე განტოლებებიდან (3.33)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} S &= Y - T - C = Y - kY - T^* - a(1-k)\ Y + aT^* - b = \\ &= (1-k)\ (1-a)\ Y - (1-a)\ T^* - b. \end{aligned} \tag{3.34}$$

(3.31) სისტემის მეხუთე განტოლება შემდეგი ტოლობის ეკვივალენტურია

$$T = kY + T^*. \tag{3.35}$$

ამრიგად, ყველა ცვლადი სიდიდე გამოვსახეთ Y ცვლადის საშუალებით. ახლა (3.31) სისტემის მეორე ტოლობიდან განვსაზღვროთ C

$$C = Y - I^* - G^*. \tag{3.36}$$

(3.33) და (3.35) ტოლობების შედარება გვაძლევს მათი მარჯვენა მხარეების ტოლობას

$$a(1-k)\ Y - aT^* + b = Y - I^* - G^*$$

ანუ

$$(1-a+ak)\ Y = I^* + G^* - aT^* + b.$$

აქედან კი, რადგან $1-a+ak > 0$, მივიღებთ

$$Y = \frac{I^* + G^* - aT^* + b}{1-a+ak}.$$

ამ მნიშვნელობის ჩასმით (3.32), (3.33), (3.34) და (3.35) ტოლობებში მივიღებთ Y_d, C, S და T უცნობების მნიშვნელობებს. ამრიგად, (3.31) სისტემის ამონახსენია

$Y = Y_0 = \dfrac{I^* + G^* - aT^* + b}{1-a+ak}$ (ეროვნული შემოსავლის დონე),

$T = kY_0 + T^*$ (საგადასახადო მოსაკრებლების სიდიდე),

$Y_d = (1-k)Y_0 - T^*$ (წმინდა შემოსავლის დონე),

$C = Y_0 - I^* - G^*$ (მოხმარების დონე),

$S=(1-k)\ (1-a)\ Y_0-(1-a)\ T^*-b$ (დანაზოგის სიდიდე).

ეს სიდიდეები განსაზღვრავენ ეროვნული ეკონომიკის მახასიათებლების დონეებს წონასწორობის შემთხვევაში.

3.8. სავარჯიშოები

1. ამოხსენით სისტემა კრამერის ხერხით

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3x+y+2z=0 \\ x+4y+3z=2. \end{cases}$$

2. ამოხსენით სისტემა მატრიცული ხერხით

$$\begin{cases} x+2y-3z=10 \\ 2x+y-2z=20 \\ 2x-y=40. \end{cases}$$

3. ამოხსენით სისტემა კრონეკერ-კაპელის თეორემის გამოყენებით

$$\begin{cases} x+2y+2z=1 \\ -x+3y-z=1 \\ 2x-y+3z=0. \end{cases}$$

4. ამოხსენით სისტემა გაუსის მეთოდით

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+3x_4=1 \\ 4x_1-2x_2-x_3+x_4=5 \\ 6x_1-3x_2-x_3-x_4=9 \\ 2x_1-x_2+2x_3-12x_4=10. \end{cases}$$

5. სამსაქონლიანი ბაზრის მოთხოვნის ფუნქციებია, შესაბამისად,

$$Q_1=15-P_1+2P_2+P_3,$$
$$Q_2=9+P_1-P_2-P_3,$$
$$Q_3=8+2P_1-P_2-4P_3,$$

მიწოდების ფუნქციები კი –

$$Q_1 = -7 + P_1,$$
$$Q_2 = -4 + P_2,$$
$$Q_3 = -5 + 2P_3,$$

სადაც P_1, P_2 და P_3 შესაბამისი პროდუქციის ერთეულის ფასებია. იპოვეთ:

(ა) წონასწორობის ფასები;

(ბ) წონასწორობის სიდიდეები სამივე სახის საქონლისათვის.

6. ტექნოლოგიურ კოეფიციენტთა მატრიცა სამი ურთიერთშეუღლებული დარგისათვის არის

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

დარგების პროდუქციაზე მოთხოვნის მოცულობებია: $q_1 = 300,\ q_2 = 300,\ q_3 = 200.$ განსაზღვრეთ წარმოების გეგმის შესაბამისი ვარიანტი.

7. წარმოება დაყოფილია სამ დარგად, რომლის ტექნოლოგიურ კოეფიციენტთა მატრიცაა

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

პროდუქციის ერთეულ მოცულობაზე ცოცხალი შრომის დანახარჯები დარგების მიხედვით ასეთია: $z_1 = 3,\quad z_2 = 5,\quad z_3 = 10.$ დარგების პროდუქციაზე მოთხოვნის მოცულობებია: $q_1 = 3000,\quad q_2 = 1000,\quad q_3 = 3000.$ განსაზღვრეთ შრომის აუცილებელი მთლიანი დანახარჯი.

თავი 4. ფინანსური მათემატიკის ელემენტები

ამ თავში ჩვენ გავეცნობით და შევისწავლით იმ ელემენტარულ მათემატიკურ მეთოდებს, რომლებიც გამოიყენება ფინანსების თეორიაში. ეს მეთოდები ძირითადად აღიწერება არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიების საშუალებით. ამასთანავე, არსებითად გამოიყენება მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები.

ჩვენ დაწვრილებით გავაანალიზებთ კრედიტების გაცემასა და თანხის დაბანდებას სხვადასხვა ფორმით — სარგებლის მარტივი და რთული განაკვეთების მიხედვით. გამოვიყვანთ საწყისი და საბოლოო თანხების დამაკავშირებელ განტოლებებს სარგებლის განაკვეთისა და კრედიტის ვადიანობის გათვალისწინებით.

ეს თანაფარდობები დაგვეხმარებიან გამოვთვალოთ საბოლოო თანხა დროის გარკვეული პერიოდის შემდეგ, თუ ვიცით სარგებლის განაკვეთი და საწყისი თანხა. ამ ოპერაციის შექცეულ მოქმედებას ეწოდება დისკონტირება. იგი საშუალებას მოგვცემს გამოვთვალოთ ის საწყისი თანხა, რაც უნდა დაბანდდეს მიმდინარე მომენტში, რომ გარკვეული დროის შემდეგ მივიღოთ წინასწარ გამიზნული თანხა. დისკონტირება არსებითად გამოიყენება საინვესტიციო პროექტების შეფასებისას და ორი ან მეტი საინვესტიციო პროექტიდან ოპტიმალური პროექტის შერჩევისას.

ამავე თავში ჩვენ გავეცნობით, თუ როგორ ხდება გრძელვადიანი კრედიტების დაფარვა სარგებლის განაკვეთის მარტივი და რთული პროცენტით გაანგარიშების შემთხვევაში. ასე რომ, ყველა სტუდენტმა — განსაკუთრებით კი მან, ვინც მომავალში დასაქმდება ბიზნესის სფეროში ან საქმე ექნება საინვესტიციო ინსტიტუტებთან, დიდი ყურადღებით უნდა შეისწავლოს ამ თავში გადმოცემული მასალა.

4.1. არითმეტიკული პროგრესია და სარგებლის მარტივი განაკვეთი

თავდაპირველად განვიხილოთ შემდეგი კონკრეტული მაგალითი, რომელსაც არითმეტიკული პროგრესიის ცნებამდე მივყავართ და რომლითაც აღიწერება გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა მუდმივი ნამატის შემთხვევაში.

ამოცანა 4.1. ქარხანა უშვებს გარკვეული სახის პროდუქციას. ამოვწეროთ ქარხნის მიერ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობები წლების მიხედვით, თუ გამოშვებული პროდუქციის ყოველწლიური ნამატი მუდმივია.

▼ ვთქვათ, ქარხანა პირველ წელს უშვებს p_1 რაოდენობის პროდუქციას. თუ მეორე წელს გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობაა p_2, მაშინ $p_2 - p_1 = d$ იქნება პროდუქციის ნამატი. ცხადია, $p_2 = p_1 + d$. იმავე ნამატით მესამე წელს გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა იქნება $p_3 = p_2 + d$ და ა. შ. n-ურ წელს გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა განსაზღვრული იქნება ტოლობით $p_n = p_{n-1} + d$, $n \geq 2$. მაშასადამე, მივიღეთ მუდმივი d ნამატით წლების მიხედვით გამოშვებულ პროდუქციათა რაოდენობები:

$$p_1,\ p_1 + d,\ p_1 + 2d,\ \ldots\ ,\ p_1 + (n-1)d. \ ■$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი, რომელიც გვხვდება საქონლის ცვლადი ფასის დადგენისას.

ამოცანა 4.2. კომერციული ცენტრი სარეალიზაციოდ იღებს გარკვეული სახის ტექნოლოგიურ პროდუქციას, რომელსაც აქვს ფიქსირებული N წლის საექსპლუატაციო ვადა. პროდუქციის ერთეულის ფასია K დოლარი. ამასთან, სარეალიზაციოდ მიღებული საქონელი ყოველწლიურად უნდა ჩამოფასდეს $\frac{K}{N}$ დოლარით. ამოვწეროთ საქონლის ფასთა მიმდევრობა წლების მიხედვით.

▼ რადგან საქონლის თავდაპირველი ფასია K დოლარი და საექსპლუატაციო პერიოდია N წელიწადი, ამიტომ ერთი წლის შემდეგ საქონლის ფასი შემცირდება $\frac{K}{N}$ დოლარით და გახდება

$$K_1 = K - \frac{K}{N} \ \text{(დოლარი)}.$$

ორი წლის შემდეგ ფასი გახდება

$$K_2 = K_1 - \frac{K}{N} = K - 2 \cdot \frac{K}{N} \ \text{(დოლარი)}$$

და ა. შ. n წლის შემდეგ საქონლის ფასი გახდება

$$K_n = K_{n-1} - \frac{K}{N} = K - n \cdot \frac{K}{N} \quad (\text{დოლარი}),$$

სადაც $n \leq N$. მაშასადამე, მივიღეთ წლების მიხედვით ფასების შემდეგი მიმდევრობა

$$K - \frac{K}{N}, \quad K - \frac{2K}{N}, \dots, \quad K - \frac{nK}{N}. \ \blacksquare$$

ზემოთ მოტანილ მაგალითებში მიღებულ მიმდევრობებს აქვთ ერთი საერთო თვისება, კერძოდ, მეზობელ წევრთა სხვაობა მუდმივი სიდიდეა. ეს უდევს საფუძვლად არითმეტიკული პროგრესიის ცნებას.

● რიცხვთა $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ მიმდევრობას, რომელშიც მეზობელი წევრების სხვაობა ერთი და იგივე მუდმივი სიდიდეა, ე. ი. $a_{k+1} - a_k = d$ ყოველი k-თვის, **არითმეტიკული პროგრესია** ეწოდება. ■

ამრიგად, არითმეტიკული პროგრესიის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება მისი წინა წევრისაგან ერთი და იმავე d რიცხვის დამატებით. ამ d რიცხვს ეწოდება პროგრესიის სხვაობა, a_1-ს ეწოდება პროგრესიის პირველი წევრი, a_2-ს პროგრესიის მეორე წევრი და ა. შ. a_n-ს ეწოდება პროგრესიის ბოლო წევრი, ხოლო n-ს — პროგრესიის წევრთა რიცხვი.

არითმეტიკული პროგრესის k-ური წევრი გამოითვლება ფორმულით

$$\boxed{a_k = a_1 + (k-1)\, d}$$

ახლა ვნახოთ, ამოცანა 4.1-ში როგორ შეიძლება გამოვთვალოთ მუდმივი ნამატით n წელიწადში წარმოებული პროდუქციის მთლიანი რაოდენობა ანუ ჯამი $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$.

ამისათვის საჭიროა გამოვიყვანოთ არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა.

განვიხილოთ არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

არითმეტიკული პროგრესიის განმარტების თანახმად, მივიღებთ .

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \cdots + a_1 + (n-1)\ d =$$
$$= n\ a_1 + d\left[\ 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\ \right].$$

ვთქვათ, $c = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$. ცხადია

$$\begin{aligned} 2c = &\quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \cdots + (n-1) + \\ &+ (n-1) + (n-2) + (n-3) \quad + \cdots + \quad 1 = \\ &= \quad n \quad + \quad n \quad + \quad n \quad + \cdots + \quad n \ = \ n\ (n-1)\ . \end{aligned}$$

აქედან

$$c = \frac{n\ (n-1)}{2}.$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით, მივიღებთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის გამოსათვლელ ფორმულებს:

$$\boxed{\begin{aligned} S_n &= n a_1 + \frac{1}{2}\ n\ (n-1)\ d = \frac{2\ a_1 + (n-1)\ d}{2}\ n = \\ &= \frac{a_1 + \left[a_1 + (n-1)\ d\right]}{2}\ n = \frac{a_1 + a_n}{2}\ n \end{aligned}} \tag{4.1}$$

მიღებული ფორმულა საშუალებას გვაძლევს, გამოვთვალოთ მუდმივი ნამატით n წელიწადში წარმოებული პროდუქციის მთლიანი რაოდენობა.

ამოცანა 4.3. ფირმამ პირველ წელს დაამზადა 2000 ტელევიზორი. ყოველ შემდგომ წელს ფირმა წარმოების მოცულობას ზრდის 50 ერთეულით. რამდენ ტელევიზორს დაამზადებს ფირმა 20 წლის განმავლობაში?

▼ ფირმის მიერ ყოველწლიურად წარმოებული ტელევიზორების რაოდენობები შეადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას, რომელშიც პირველი წევრია $a_1 = 2000$, სხვაობაა $d = 50$, ხოლო წევრთა რიცხვია $n = 20$. ცხადია, რომ 20 წლის განმავლობაში დამზადებული ტელევიზორების რიცხვი S_{20} აღნიშნული პროგრესიის წევრთა ჯამის ტოლია. ეს უკანასკნელი კი გამოითვლება (4.1) ფორმულით

$$S_{20} = \frac{2a_1 + (20-1)\,d}{2} \cdot 20 = 10\,(2 \cdot 2000 + 19 \cdot 50) = 49500.$$

ამრიგად, 20 წლის განმავლობაში ფირმა დაამზადებს 49500 ტელევიზორს. ■

პრაქტიკაში ხშირია შემთხვევები, როდესაც ერთი მხარე (პიროვნება, ბანკი, ორგანიზაცია, სახელმწიფო და ა. შ.) სარგებლის მიღების მიზნით მეორე მხარეს აძლევს სესხს (კრედიტს). იმ მხარეს, ვინც ფული გაასესხა (კრედიტი გასცა), **კრედიტორი** ანუ **მევალე** ეწოდება, ხოლო იმ მხარეს, ვინც ფული ისესხა (კრედიტი აიღო) — **დებიტორი** ანუ **მოვალე**.

არსებობს სესხის გაცემის მრავალი ფორმა. მაგალითად, სესხები ერთჯერადი ან მრავალჯერადი გადახდით, ფულის მოთავსება საბანკო ანგარიშზე, ინვესტიციები ფასიან ქაღალდებში და ა. შ.

ხელშეკრულების დადებისას მხარეები (კრედიტორი და დებიტორი) ადგენენ **სარგებლის განაკვეთს**.

ვთქვათ, გარკვეული ვადით აღებულია S სესხი ერთჯერადი გადახდით და სარგებლის r განაკვეთით. ეს ნიშნავს, რომ მოვალემ (დებიტორმა) დადგენილი ვადის გასვლის შემდეგ მევალეს (კრედიტორს) უნდა დაუბრუნოს $r\,\%$-ით გაზრდილი თანხა

$$S^* = S + \frac{r}{100} S > S.$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ზოგჯერ აწარმოებენ სარგებლის მრავალჯერად დარიცხვას. დარიცხვები ხდება დროის გარკვეული ინტერვალების გასვლის შემდეგ. როგორც წესი, ეს ინტერვალები კონკრეტული სესხისათვის ერთი და იგივეა და მათ **დარიცხვის პერიოდს** უწოდებენ. დარიცხვის პერიოდად შეიძლება აიღონ წელი, ნახევარი წელი, კვარტალი, თვე და ა. შ. ხანდახან აწარმოებენ ყოველდღიურ დარიცხვას, ხოლო ზოგჯერ იყენებენ სარგებლის უწყვეტ დარიცხვას.

დადებული ხელშეკრულების შესაბამისად, სარგებლის განაკვეთით გათვალისწინებულ თანხას უხდიან კრედიტორს, ან უმატებენ ვალს. ცხადია, რომ ორივე შემთხვევაში ხდება საკრედიტო ფულადი თანხის გაზრდა. ამ

პროცესს საწყისი **თანხის ზრდა ანუ დაგროვება** ეწოდება.

თუ ცნობილია სარგებლის დარიცხვის წესი, მაშინ დროის ნებისმიერი t პერიოდისათვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ შესაბამისი თანხის რაოდენობა. ამ თანხას **მიმდინარე თანხას** უწოდებენ. იმ თანხას კი, რომელიც შეესაბამება საკრედიტო ვადის ბოლოს, **დაგროვილი ანუ საბოლოო თანხა** ეწოდება.

არსებობს სარგებლის დარიცხვის რამდენიმე განსხვავებული წესი. ეს წესები განისაზღვრება კონტრაქტის პირობებით და დამოკიდებულია სესხის სახეობაზე, ვადებზე, რისკის ხარისხზე და ა. შ.

დარიცხვის ფორმებს შორის ძირითადი განსხვავება განპირობებულია იმით, თუ რომელი თანხიდან იანგარიშება სარგებლის განაკვეთი. თუ სესხის მთელი ვადის განმავლობაში დასარიცხი r %-იანი სარგებელი იანგარიშება კრედიტის საწყისი თანხიდან, მაშინ ვამბობთ, რომ საქმე გვაქვს სარგებლის **მარტივ განაკვეთთან**. ამ შემთხვევაში აგრეთვე ვიტყვით, რომ სესხი აღებულია ან კრედიტი გაცემულია სარგებლის მარტივი r %-იანი განაკვეთით.

თუ დარიცხვის ყოველ პერიოდში დასარიცხი r %-იანი სარგებელი მიმდინარე თანხიდან იანგარიშება, მაშინ საქმე გვაქვს სარგებლის **რთულ განაკვეთთან**. ამ შემთხვევაში კი ვიტყვით, რომ სესხი აღებულია ან კრედიტი გაცემულია სარგებლის რთული r %-იანი განაკვეთით.

გამოვიყვანოთ ფორმულა, რომლითაც გამოითვლება სარგებლის მარტივი განაკვეთით დაბანდებული თანხის რაოდენობა საკრედიტო ვადის ბოლოს.

ვთქვათ, გაცემულია K დოლარის რაოდენობის კრედიტი n პერიოდის ხანგრძლივობით. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველ პერიოდში დარიცხვა ხდება სარგებლის მარტივი r %-იანი განაკვეთით. მაშინ ყოველი პერიოდის გასვლის შემდეგ დაბანდებული თანხა იზრდება ერთი და იმავე $\frac{r}{100}\cdot K$ თანხით. ამიტომ პირველი პერიოდის ბოლოს გვექნება თანხა

$$K_1 = K + K \cdot \frac{r}{100},$$

მეორე პერიოდის ბოლოს — $K_2 = K_1 + K \cdot \frac{r}{100} = K + 2K \cdot \frac{r}{100}$,

მესამე პერიოდის ბოლოს — $K_3 = K_2 + K \cdot \frac{r}{100} = K + 3K \cdot \frac{r}{100}$

და ა. შ. n პერიოდის ბოლოს გვექნება

$$K_n = K_{n-1} + K \cdot \frac{r}{100} = K + K \cdot n \cdot \frac{r}{100}.$$

ამრიგად, მივიღეთ ფორმულა, რომელიც აღწერს თანხის დაგროვებას სარგებლის მარტივი განაკვეთით დაბანდების შემთხვევაში

$$\boxed{K_n = K\left(1 + n \cdot \frac{r}{100}\right)} \qquad (4.2)$$

ამოცანა 4.4. 5000 დოლარი გაცემულია სესხად 4 თვით, სარგებლის მარტივი 2 %—იანი განაკვეთით. დარიცხვის პერიოდია 1 თვე. იპოვეთ:

(ა) დაგროვილი თანხა;

(ბ) რამდენი პროცენტით გაიზარდა საწყისი თანხა?

▼ (ა) ამოცანის პირობის თანახმად, საწყისი თანხაა $K = 5000$ (დოლარი), თვეების (პერიოდების) რაოდენობაა $n = 4$, ხოლო სარგებლის მარტივი განაკვეთია $r = 2$ %. გავითვალისწინოთ ეს მონაცემები და გამოვიყენოთ (4.2) ფორმულა დაგროვილი თანხის გამოსათვლელად

$$K_4 = 5000\left(1 + 4 \cdot \frac{2}{100}\right) = 5000 \cdot 1.08 = 5400 \quad (\text{დოლარი});$$

(ბ) ჯერ გამოვთვალოთ მოგება. ამისათვის დაგროვილ თანხას უნდა გამოვაკლოთ საწყისი თანხა. მივიღებთ: $5400 - 5000 = 400$.

ახლა ვიპოვოთ 400-ის და 5000-ის პროცენტული შეფარდება ანუ გამოვთვალოთ 5000-ის რამდენი პროცენტია 400

$$\frac{400}{5000} \cdot 100 = 8\ (\%).$$

ამრიგად, საწყისი თანხა 4 თვის შემდეგ გაიზარდა 8 %-ით. ■

პრაქტიკაში, როგორც წესი, სარგებლის მარტივ განაკვეთებს იყენებენ

მოკლევადიანი სესხების გაცემის დროს, როდესაც სესხის ვადა არ აღემატება 1 წელს. ამ შემთხვევაში იყენებენ სარგებლის წლიურ განაკვეთს და თვლიან, რომ (4.2) ფორმულაში $n = \frac{M}{N}$, სადაც M არის კრედიტის ვადა (დღეებში), ხოლო N – წელიწადში დღეების რაოდენობა (365 ან 366 დღე).

საფინანსო პრაქტიკაში ხშირად საჭიროა დაგროვილი თანხის განსაზღვრის საწინააღმდეგო ოპერაციის ჩატარება, ე. ი. საბოლოო K_n თანხის მიხედვით უნდა განისაზღვროს საწყისი K თანხის რაოდენობა. ასეთ სიტუაციას ვხვდებით, მაგალითად, კონტრაქტის პირობების შემუშავებისას ან მაშინ, როდესაც K თანხიდან სარგებლის დაკავება ხდება უშუალოდ სესხის გაცემის მომენტში.

საწყისი K თანხის გამოთვლას საბოლოო K_n თანხის საშუალებით **დისკონტირება** ეწოდება, $D = K_n - K$ სხვაობას კი – **დისკონტი** ეწოდება. (4.2) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\boxed{K = K_n \frac{1}{1 + n\,\frac{r}{100}}} \tag{4.3}$$

ამოცანა 4.5. გაცემულია კრედიტი სარგებლის წლიური მარტივი 5 %-იანი განაკვეთით. კონტრაქტის ხელმოწერიდან 150 დღის გასვლის შემდეგ მოვალემ გადაიხადა 2500 დოლარი. ვიპოვოთ რა რაოდენობის კრედიტი აიღო მოვალემ, თუ დარიცხვა ხდება ყოველდღიურად?

▼ გამოვიყენოთ (4.3) ფორმულა. ამოცანის პირობის თანახმად $K_n = 2500$, $r = 5$ %, $n = \frac{150}{365}$. ამიტომ

$$K = 2500 \cdot \frac{1}{1 + \frac{150}{365} \cdot 0.05} = 2449.66.$$

მაშასადამე, მოვალეს სესხად აუღია 2449.66 დოლარი. ■

ამოცანა 4.6. ვთქვათ, ბანკიდან სესხად აღებულია K დოლარი N წლის ვადით. შევადგინოთ ვალის გადახდის გეგმა, თუ მოვალე ბანკს ყო-

ველწლიურად უბრუნებს $\frac{K}{N}$ დოლარს და მიმდინარე წლის ვალის r პრო-ცენტს. გამოვთვალოთ ბანკის მოგება.

▼ ამოვწეროთ ცხრილის სახით წლების მიხედვით ვალებისა და შესაბამისი სარგებლის გადასახადების მონაცემები

წლების რაოდენობა	ვალი	წლიური სარგებელი
წლის დასაწყისი	K	—
1 წლის შემდეგ	$K-\frac{K}{N}$	$\frac{Kr}{100}$
2 წლის შემდეგ	$K-2\,\frac{K}{N}$	$\left(K-\frac{K}{N}\right)\frac{r}{100}$
...	...	...
N წლის შემდეგ	$K-N\,\frac{K}{N}=0$	$\left[K-(N-1)\,\frac{K}{N}\right]\frac{r}{100}$

ცხრილი 4.1

ამ ცხრილიდან ჩანს, თუ რა თანხა უნდა გადაიხადოს ყოველწლიურად დებიტორმა. ცხრილის მეორე სვეტში ამოწერილი ვალები შეადგენს $N+1$ წევრიან არითმეტიკულ პროგრესიას

$$K,\quad K-\frac{K}{N}=\frac{K\,(N-1)}{N},\quad K-\frac{2K}{N}=\frac{K\,(N-2)}{N},\ \ldots,\quad K-\frac{(N-1)\,K}{N}=\frac{K}{N},\quad 0.$$

შევნიშნოთ, რომ ბანკის მოგებას წარმოადგენს ყოველწლიურად დარჩენილი ვალების შესაბამისი r პროცენტიანი სარგებლის გადასახადები.

გამოვთვალოთ ბანკის მოგება N წლის შემდეგ. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ გადასახდელი სარგებლის მიმდევრობა (მესამე სვეტი) წარმოადგენს აგრეთვე არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია $a_1=\frac{Kr}{100}$,

ბოლო წევრია $\left[K-(N-1)\ \frac{K}{N}\right]\frac{r}{100}$, სხვაობაა $d=-\frac{K\,r}{100\,N}$, ხოლო წევრთა რიცხვია N. ვისარგებლოთ არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულით და შევაჯამოთ ცხრილის მესამე სვეტში ამოწერილი სიდიდეები

$$S_N=\frac{1}{2}\ \left\{\frac{K\,r}{100}+\left[K-(N-1)\ \frac{K}{N}\right]\frac{r}{100}\right\}N.$$

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$\boxed{S_N=\frac{r\,K\ (N+1)}{200}} \tag{4.4}$$

ამ S_N თანხას უწოდებენ **ჯამურ (დაგროვილ) სარგებელს** N წლის შემდეგ. ეს არის თანხა, რომელსაც მოგების სახით მიიღებს ბანკი N წლის განმავლობაში გასესხებულ K თანხასთან ერთად. ■

ამოცანა 4.7. 1000 დოლარი აღებულია სესხად 10 წლის ვადით. ვიპოვოთ ჯამური (დაგროვილი) სარგებელი 10 წლის შემდეგ, თუ ვალის დაფარვა ხდება ამოცანა 4.6-ში მოცემული პირობით და $r=5$.

▼ გამოვიყენოთ (4.4) ფორმულა. ჩვენი ამოცანის პირობის თანახმად $K=1000,\quad N=10,\quad r=5$. ამიტომ

$$S_{10}=\frac{1000\cdot 5\cdot 11}{200}=275\ \ (\text{დოლარი}).$$

მაშასადამე, ჯამური სარგებელი 10 წლის შემდეგ შეადგენს 275 დოლარს. ■

მარტივი სარგებლის (4.2) ფორმულა საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ კრედიტის (სესხის) ხანგრძლივობა, თუ ცნობილია სარგებლის განაკვეთი, გაცემული კრედიტი და საბოლოო (დაგროვილი) თანხა. (4.2) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\boxed{n=\left(\frac{K_n}{K}-1\right)\ \frac{100}{r}} \tag{4.5}$$

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

ამოცანა 4.8. 2000 დოლარი გაცემულია სესხად სარგებლის მარტივი 5 %-იანი განაკვეთით. საბოლოო თანხაა 3000 დოლარი. განსაზღვრეთ სესხის ხანგრძლივობა.

▼ თუ გამოვიყენებთ სესხის ხანგრძლივობის განმსაზღვრელ (4.5) ფორმულას და გავითვალისწინებთ, რომ ამოცანის პირობის თანახმად $K = 2000$, $r = 5\ \%$, $K_n = 3000$, მივიღებთ

$$n = \left(\frac{3000}{2000} - 1 \right) \cdot \frac{100}{5} = (1.5 - 1) \cdot 20 = 10.$$

მაშასადამე, სესხის ხანგრძლივობაა 10 წელი. ■

4.2. გეომეტრიული პროგრესია და სარგებლის რთული განაკვეთი

ისევე, როგორც წინა პარაგრაფში, აქაც განვიხილოთ კონკრეტული ფინანსური ამოცანა, რომელსაც მივყავართ გეომეტრიული პროგრესის ცნებამდე.

ამოცანა 4.9. მეანაბრემ ბანკში შეიტანა K დოლარი სარგებლის წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით. გამოვთვალოთ, რა თანხა დაგროვდება n წლის შემდეგ? (გავიხსენოთ, რომ თანხის შეტანა ბანკში სარგებლის რთული r %-იანი განაკვეთით ნიშნავს შემდეგს: ყოველი მომდევნო წლის დასაწყისში წინა წლის მიმდინარე თანხას ემატება მისივე r %).

▼ ამოცანის პირობის თანახმად, 1 წლის შემდეგ მეანაბრეს ანგარიშზე ექნება შემდეგი თანხა

$$K_1 = K + K \frac{r}{100} = K \left(1 + \frac{r}{100} \right) \text{ (დოლარი)},$$

2 წლის შემდეგ კი –

$$K_2 = K_1 + K_1 \frac{r}{100} = K_1 \left(1 + \frac{r}{100} \right) = K \left(1 + \frac{r}{100} \right)^2 \text{ (დოლარი)}.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მარტივად ვაჩვენებთ, რომ n წლის შემდეგ მეანაბრეს ანგარიშზე ექნება შემდეგი თანხა

$$\boxed{K_n = K\left(1+\frac{r}{100}\right)^n} \qquad (4.6)$$

ამ ფორმულას ეწოდება **დაგროვილი (საბოლოო) თანხის გამოსათვლელი ფორმულა სარგებლის რთული განაკვეთის შემთხვევაში.** K თანხას ეწოდება საწყისი თანხა, ხოლო K_n-ს – საბოლოო (დაგროვილი) თანხა (n წლის შემდეგ).

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$q = 1+\frac{r}{100},$$

მაშინ საბოლოო თანხა შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$K_n = K\,q^n. \blacksquare$$

განხილულ ამოცანაში ჩვენ მივიღეთ მიმდევრობა

$$K,\ \ Kq,\ \ Kq^2,\ \ldots,\ \ Kq^n,$$

რომლის მეზობელ წევრთა შეფარდება მუდმივი q სიდიდის ტოლია. ეს თვისება საფუძვლად უდევს გეომეტრიული პროგრესიის ცნებას.

● რიცხვთა $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ მიმდევრობას ეწოდება **გეომეტრიული პროგრესია**, თუ $b_1 \neq 0$ და მეზობელ წევრთა შეფარდება ერთი და იგივე ნულისაგან განსხვავებული მუდმივი სიდიდეა, ე. ი. ნებისმიერი k-თვის

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = q \neq 0.$$

შევნიშნოთ, რომ b_1-ს ეწოდება გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი, b_2-ს ეწოდება გეომეტრიული პროგრესიის მეორე წევრი და ა. შ. b_n-ს ეწოდება ბოლო წევრი; q-ს ეწოდება პროგრესიის მნიშვნელი, ხოლო n-ს – წევრთა რიცხვი. ■

პროგრესიის $q=1$ მნიშვნელს შეესაბამება სტაციონარული (მუდმივი) მიმდევრობა, რომლის ყველა წევრი ერთმანეთის ტოლია. ასეთი მიმდე-

ვრობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც არითმეტიკული პროგრესია ნულის ტოლი სხვაობით. ამიტომ ქვემოთ, დამატებით, ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $q \neq 1$. ამრიგად, გეომეტრიულ პროგრესიაში გვაქვს

$$b_2 = b_1 \cdot q, \quad b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2, \quad b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3, \ \ldots \ .$$

აქედან ჩანს, რომ გეომეტრიული პროგრესიის k-ური წევრი გამოითვლება ფორმულით

$$\boxed{b_k = b_1 \, q^{k-1}}$$

როგორც ზემოთ განხილული ამოცანა 4.9-დან ჩანს, სარგებლის რთულ განაკვეთიანი სესხები (დაბანდებები) აღიწერებიან გეომეტრიული პროგრესიით. რთული სარგებლის (4.6) ფორმულით სარგებლობენ გრძელვადიან საფინანსო-საკრედიტო ოპერაციებში, თუ სარგებლის გადახდა არ ხდება მათი დარიცხვისთანავე და ისინი ემატება ვალს. ასეთ შემთხვევაში, საწყისი თანხა უფრო მეტად იზრდება, ვიდრე მარტივი განაკვეთის შემთხვევაში, რადგანაც სარგებლის დარიცხვა ყოველ მომდევნო პერიოდში ხდება უფრო მეტი თანხიდან (მიმდინარე თანხიდან).

ამოცანა 4.10. 10 000 დოლარი გაცემულია სესხად სარგებლის წლიური რთული 5 %-იანი განაკვეთით. იპოვეთ საბოლოო თანხა 3 წლის შემდეგ.

▼ (4.6) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$K_3 = 10000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 = 10000 \cdot 1.05^3 = 11576.25 \ \ (\text{დოლარი}).$$

ამრიგად, 3 წლის შემდეგ დაგროვილი თანხაა 11576.25 დოლარი. ■

საინტერესოა, შევადაროთ ერთმანეთს თანხის დაგროვების პროცესები სარგებლის მარტივი და რთული განაკვეთებით სარგებლობისას, ე. ი. (4.3) და (4.6) ფორმულებით გამოსახული სიდიდეები. დავუშვათ, რომ ამ ფორმულებში ტოლია საწყისი თანხაც, სარგებლის განაკვეთიც და დარიცხვის პერიოდების n რაოდენობაც.

როცა $n = 1$, მაშინ ორივე ფორმულა იძლევა ერთსა და იმავე სიდიდეს. ეს ნიშნავს, რომ დაგროვილი თანხები ორივე შემთხვევაში ტოლია:

$$K\left(1 + 1 \cdot \frac{r}{100}\right) = K\left(1 + \frac{r}{100}\right)^1.$$

როცა $0<n<1$ და $r>0$, მაშინ მტკიცდება, რომ (იხ. ამოცანა 1.23)

$$1+n\cdot\frac{r}{100}>\left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

ეს ნიშნავს, რომ სარგებლის მარტივი განაკვეთი უფრო მეტ მოგებას გვაძლევს

$$K\left(1+n\cdot\frac{r}{100}\right)>K\left(1+\frac{r}{100}\right)^n,\quad r>0,\quad 0<n<1.$$

როცა $n>1$ და $r>0$, მაშინ (იხ. ამოცანა 1.23)

$$1+n\cdot\frac{r}{100}<\left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ სარგებლის რთული განაკვეთით უფრო დიდი თანხა დაგროვდება

$$K\left(1+n\cdot\frac{r}{100}\right)<K\left(1+\frac{r}{100}\right)^n,\quad r>0,\quad n>1.$$

შევნიშნოთ, რომ n-ის ზრდასთან ერთად განსხვავება დაგროვილ თანხებს შორის არსებითად იზრდება (იხ. ნახ. 1.40).

ამოცანა 4.11. ერთი ბანკი სთავაზობს მეანაბრეებს ერთი წლის განმავლობაში სარგებლის რთულ თვიურ 2 %-იან დარიცხვას, ხოლო მეორე ბანკი — სარგებლის მარტივ თვიურ 2.2 %-იან დარიცხვას. რომელ ბანკში უფრო ხელსაყრელია მეანაბრისათვის ფულის შეტანა?

▼ 12 თვის შემდეგ პირველ ბანკში შეტანილი K დოლარი გახდება

$$K\,(1+0.02)^{12}\approx 1.268\ K\quad (\text{დოლარი}),$$

მეორე ბანკში შეტანილი K დოლარი კი —

$$K\left(1+\frac{2.2}{100}\cdot 12\right)\approx 1.264\,K\quad (\text{დოლარი}).$$

რადგან $1.268\,K>1.264\,K$, ამიტომ მეანაბრისათვის ფულის შეტანა ხელსაყრელია პირველ ბანკში (ე. ი. იმ ბანკში, რომელიც მეანაბრეს სთავაზობს სარგებლის რთულ განაკვეთს). ■

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვინდა გამოვთვალოთ საწყისი K თანხა

დაგროვილი K_n თანხის საშუალებით სარგებლის რთული განაკვეთის შემთხვევაში, ე. ი. მოვახდინოთ K_n თანხის დისკონტირება, ვიყენებთ ფორმულას

$$\boxed{K = K_n \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{-n}} \tag{4.7}$$

რომელიც მიიღება (4.6) ფორმულიდან.

ამოცანა 4.12. ხუთი წლის შემდეგ სარგებლის წლიური რთული 7%-იანი განაკვეთით დაგროვილი თანხაა 10 000 დოლარი. რამდენი დოლარი იყო თავდაპირველი (საწყისი) თანხა? გამოვთვალოთ დისკონტი.

▼ ამოცანის პირობის თანახმად, $K_5 = 10000$, $r = 7$, $n = 5$. თუ გამოვიყენებთ (4.7) ფორმულას, მივიღებთ

$$K = 10000 \cdot (1 + 0.07)^{-5} = 7129.86 \quad (\text{დოლარი}).$$

დისკონტი კი გამოითვლება ტოლობით

$$K_n - K = 10000 - 7129.86 = 2870.14 \quad (\text{დოლარი}). \ \blacksquare$$

თუ ცნობილია საწყისი და დაგროვილი (საბოლოო) თანხა, აგრეთვე წლების რაოდენობა, შესაძლებელია გამოვთვალოთ სარგებლის განაკვეთი. მართლაც, (4.6) ფორმულიდან მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$\boxed{r = \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K}} - 1\right) 100} \tag{4.8}$$

ამოცანა 4.13 საწყისი კაპიტალი 6000 დოლარის ოდენობით ექვსი წლის შემდეგ გახდა 9000 დოლარი. ვიპოვოთ სარგებლის რთული განაკვეთი.

▼ (4.8) ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ სარგებლის რთული განაკვეთის საძიებელ სიდიდეს

$$r = \left(\sqrt[6]{\frac{9000}{6000}} - 1\right) 100 = \left(\sqrt[6]{1.5} - 1\right) 100 \approx 7. \ \blacksquare$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც ცნობილია საწყისი თანხა K, დაგროვილი თანხა K_n და სარგებლის რთული r%-იანი განაკვეთი, შეიძლება განვსა-

ზღვროთ შესაბამისი წლების რაოდენობა n.

მართლაც, თუ (4.6) ტოლობის ორივე მხარეს გავალოგარითმებთ 10-ის ტოლი ფუძით, მივიღებთ

$$\lg K_n = \lg K + n \lg \left(1+\frac{r}{100}\right),$$

ანუ

$$\boxed{n = \frac{\lg K_n - \lg K}{\lg\left(1+\dfrac{r}{100}\right)}} \qquad (4.9)$$

ამოცანა 4.14. მეანაბრეს სურს 6000 დოლარი დააბანდოს ბანკში, რომელიც იძლევა წლიურ რთულ 7 %-იან სარგებელს. რამდენი წლის შემდეგ გახდება ეს თანხა 9000 დოლარი?

▼ (4.9) ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ

$$n = \frac{\lg 9000 - \lg 6000}{\lg(1+0.07)} = \frac{\lg 1.5}{\lg 1.07} \approx 6.$$

მაშასადამე, საწყისი თანხა — 6000 დოლარი 6 წლის შემდეგ გახდება 9000 დოლარი. ■

შენიშვნა 1. ვთქვათ, თანხა (K დოლარი) დაბანდებულია სარგებლის თვიური რთული r^* %-იანი განაკვეთით. მაშინ n წლის (ანუ $12\,n$ თვის) შემდეგ საბოლოო დაგროვილი თანხა K_m^* (სადაც $m = 12\,n$) გამოითვლება ფორმულით

$$K_m^* = K\left(1+\frac{r^*}{100}\right)^m. \qquad (4.10)$$

დავსვათ შემდეგი ამოცანა: სარგებლის როგორი წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით უნდა დავაბანდოთ საწყისი თანხა (K დოლარი), რომ n წლის შემდეგ საბოლოო თანხა (K_n დოლარი) (4.10) ფორმულით მოცემული სიდიდის ტოლი იყოს? სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, როგორია კავშირი სარგებლის წლიურ r %-იან და თვიურ r^* %-იან რთულ განაკვე-

თებს შორის ერთი და იმავე საწყისი და საბოლოო თანხების შემთხვევაში?

პირობის თანახმად, რადგან n წლის შემდეგ საბოლოო თანხები ერთი და იგივეა, ამიტომ $K_m^* = K_n$, სადაც $m = 12\,n$, ე.ი.

$$K\left(1+\frac{r^*}{100}\right)^{12\,n} = K\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$$

ანუ

$$\left(1+\frac{r^*}{100}\right)^{12} = 1+\frac{r}{100}.$$

აქედან მივიღებთ შემდეგ ორ ტოლობას

$$r = \left[\left(1+\frac{r^*}{100}\right)^{12} - 1\right]\cdot 100, \qquad (4.11)$$

და

$$r^* = \left(\sqrt[12]{1+\frac{r}{100}} - 1\right)100. \qquad (4.12)$$

ამრიგად, თანხის დაბანდება სარგებლის წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით ეკვივალენტურია თანხის დაბანდებისა სარგებლის თვიური რთული r^* %-იანი განაკვეთით, სადაც r და r^* დაკავშირებულია ერთმანეთთან (4.11) ანუ (4.12) ფორმულით. ცხადია, რომ $r^* \neq \frac{r}{12}$. უფრო მეტიც, (4.12) ტოლობის გამოყენებით მარტივად ვაჩვენებთ, რომ

$$r^* < \frac{r}{12}.$$

მართლაც, რადგან $(1+a)^x < 1 + a\,x$, თუ $0 < x < 1$ და $a > 0$ (იხ. ამოცანა 1.23) ამიტომ (4.12) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$r^* = \left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^{1/12} - 1\right]\cdot 100 < \left(1+\frac{1}{12}\cdot\frac{r}{100} - 1\right)\cdot 100 = \frac{r}{12}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია r %, მაშინ თანხის მოთავსება ბანკში სარგებლის რთული თვიური

$\frac{r}{12}$ %-ანი განაკვეთით მომგებიანია მეანაბრისათვის და წამგებიანია ბანკისათვის.

შენიშვნა 2. ახლა დავამყაროთ კავშირი სარგებლის კვარტალურ r^{**} %-იან და წლიურ r %-იან რთულ განაკვეთებს შორის, თუ საწყისი და საბოლოო თანხები n წლის (ანუ $4n$ კვარტალის) შემდეგ ერთი და იგივეა.

n წლის ანუ $l = 4n$ კვარტალის შემდეგ საბოლოო თანხა გამოითვლება ფორმულით

$$K_l^{**} = K \left(1 + \frac{r^{**}}{100} \right)^l . \tag{4.13}$$

რადგან K_l^{**} და K_n თანხები ტოლია, მივიღებთ

$$K \left(1 + \frac{r^{**}}{100} \right)^{4n} = K \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n .$$

აქედან კი მარტივად დავასკვნით, რომ

$$r = \left[\left(1 + \frac{r^{**}}{100} \right)^4 - 1 \right] \cdot 100 \tag{4.14}$$

და

$$r^{**} = \left(\sqrt[4]{1 + \frac{r}{100}} - 1 \right) 100. \tag{4.15}$$

ამრიგად, თანხის დაბანდება სარგებლის წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით ეკვივალენტურია თანხის დაბანდებისა სარგებლის კვარტალური r^{**} %-იანი რთული განაკვეთით, სადაც r და r^{**} დაკავშირებულია ერთმანეთთან (4.14) ანუ (4.15) ფორმულით. აქაც მარტივად ვაჩვენებთ, რომ

$$r^{**} < \frac{r}{4} .$$

ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში, აქაც შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თუ სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია r %, მაშინ თანხის მოთა-

ვსდება ანაბარზე სარგებლის კვარტალური $\frac{r}{4}$ %-იანი განაკვეთით მომგებიანია მეანაბრისათვის და წამგებიანია ბანკისათვის.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, სარგებლის რთული განაკვეთით დარიცხვა წელიწადში შეიძლება ხდებოდეს არა ერთხელ, არამედ მრავალჯერ. ასეთ შემთხვევაშიც ფორმალურად იყენებენ სარგებლის წლიურ რთულ განაკვეთს. ამ დროს კონტრაქტის პირობებში მიუთითებენ ე. წ. **სარგებლის ნომინალურ (წლიურ) განაკვეთს.**

მაგალითად, თუ კონტრაქტში წერია, რომ „K თანხა დაბანდებულია სარგებლის (ნომინალური) წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით ყოველკვარტალური დარიცხვით", ეს ნიშნავს შემდეგს: რადგანაც წელიწადში 4 კვარტალია, r % იყოფა 4-ზე და ყოველ კვარტალში ხდება მიმდინარე ანგარიშზე არსებული თანხის $\frac{r}{4}$ %-ის დარიცხვა. ცხადია, ეს ტოლფასია იმისა, რომ კონტრაქტში ჩაწერილიყო: „K თანხა დაბანდებულია სარგებლის რთული კვარტალური $\frac{r}{4}$ %-იანი განაკვეთით". ამ შემთხვევაში, n წლის (ანუ $4n$ კვარტალის) შემდეგ თანხა იქნება

$$K_{4n} = K\left(1+\frac{r}{4\cdot 100}\right)^{4n}. \tag{4.16}$$

თუ ამ ფორმულას შევადარებთ (4.13) ტოლობას, დავასკვნით, რომ ისინი დაემთხვევა ერთმანეთს, თუ ავიღებთ $r^{**}=\frac{r}{4}$.

სრულიად ანალოგიური შინაარსი აქვს ფრაზას: „K თანხა დაბანდებულია სარგებლის (ნომინალური) წლიური რთული r%-იანი განაკვეთით ყოველთვიური დარიცხვით". ეს ნიშნავს შემდეგს: რადგან წელიწადში 12 თვეა, ამიტომ r იყოფა 12-ზე და ყოველ თვეში ხდება მიმდინარე ანგარიშზე რიცხული თანხის $\frac{r}{12}$ %-ის დარიცხვა. ესეც იმის ტოლფასია, რომ კონტრაქტში ჩაწერილიყო: „K თანხა დაბანდებულია სარგებლის რთული

თვიური $\frac{r}{12}$ %-იანი განაკვეთით“. ამ შემთხვევაში n წლის (ანუ $12n$ თვის) შემდეგ თანხა იქნება

$$K_{12n} = K\left(1 + \frac{r}{12 \cdot 100}\right)^{12n}. \tag{4.17}$$

მსგავსი შინაარსი აქვს შემდეგ ფრაზასაც: „K თანხა დაბანდებულია სარგებლის (ნომინალური) წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით ყოველდღიური დარიცხვით“. ამ შემთხვევაში r იყოფა 365-ზე და ყოველდღიურად ხდება მიმდინარე ანგარიშზე არსებული თანხის $\frac{r}{365}$ %-ის დარიცხვა. ამიტომ n წლის (ანუ $365n$ დღის) შემდეგ თანხა იქნება

$$K_{365n} = K\left(1 + \frac{r}{365 \cdot 100}\right)^{365n}. \tag{4.18}$$

ახლა განვიხილოთ ზოგადად: თუ მითითებულია სარგებლის ნომინალური წლიური განაკვეთი r % და ერთ წელიწადში დარიცხვის პერიოდების t რაოდენობა, მაშინ სარგებლის რთული $\frac{r}{t}$ %-იანი განაკვეთით დარიცხვა ხდება ყოველ $\frac{1}{t}$ წელიწადში (შევნიშნოთ, რომ ზემოთ განხილული კვარტალური დარიცხვის დროს $t=4$, თვიური დარიცხვის დროს – $t=12$, ხოლო დღიური დარიცხვის დროს – $t=365$). ამიტომ n წლის შემდეგ (ანუ nt პერიოდის) შემდეგ თანხა იქნება

$$K_{nt} = K\left(1 + \frac{r}{t\,100}\right)^{nt}. \tag{4.19}$$

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები.

ამოცანა 4.15. განვსაზღვროთ სარგებლის თვიური რთული 2 %-იანი განაკვეთის ეკვივალენტური წლიური რთული განაკვეთი.

▼ შევნიშნოთ, რომ $r^* = 2$ და საძიებელია r. თუ გამოვიყენებთ (4.11) ფორმულას, მივიღებთ

$$r=\left[\ (1.02)^{12}\ -1\ \right]\cdot 100 \approx 26.8\,.$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია $r = 26.8 > 12 \cdot 2 = 24$. ■

ამოცანა 4.16. ვიპოვოთ სარგებლის წლიური რთული 9%-იანი განაკვეთის ეკვივალენტური კვარტალური რთული განაკვეთი.

▼ ჩვენს შემთხვევაში $r = 9$ და საძიებელია r^{**}. თუ გამოვიყენებთ (4.15) ფორმულას, მივიღებთ

$$r^{**} = \left(\sqrt[4]{1.09}\ -1\right)\cdot 100 = 0.021 \cdot 100 = 2.1\,.$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ სარგებლის კვარტალური რთული განაკვეთია $r^{**} = 2.1 < \dfrac{9}{4} = 2.25$. ■

ამოცანა 4.17. ვთქვათ, 2000 დოლარი გაცემულია სესხად 2 წლის ვადით. სარგებლის დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტალის ბოლოს. სარგებლის ნომინალური წლიური განაკვეთია 5%. ვიპოვოთ დაგროვილი თანხა.

▼ ვისარგებლოთ (4.19) ფორმულით. ამოცანის პირობის თანახმად $K = 2000$, $n = 2$, $t = 4$ და $r = 5$. ამიტომ დაგროვილი თანხისათვის მივიღებთ

$$K_{2\cdot 4} = K_8 = 2000\left(1+\frac{5}{4\cdot 100}\right)^8 = 2000\cdot 1.0125^8 = 2208.97 \ \text{(დოლარი)}. \ ■$$

შევნიშნოთ, რომ სარგებლის ნომინალური r განაკვეთის გამოყენებით მრავალჯერადი დარიცხვით უფრო დიდი თანხა დაგროვდება ვიდრე წელიწადში ერთჯერადი დარიცხვით იმავე r სარგებლის განაკვეთის შემთხვევაში.

ჩვენ შეგვიძლია ჩავატაროთ დისკონტირება წელიწადში t-ჯერადი დარიცხვის შემთხვევაშიც. ასეთ დროს იყენებენ ფორმულას

$$K = K_{nt}\left(1+\frac{r}{t\,100}\right)^{-nt} = \frac{K_{nt}}{\left(1+\dfrac{r}{100\,t}\right)^{nt}}, \qquad (4.20)$$

რომელიც მარტივად მიიღება (4.19) ტოლობიდან. ცხადია, აქ r კვლავ სარგებლის ნომინალური წლიური განაკვეთია.

მოვიყვანოთ დისკონტირების ოპერაციის ზოგიერთი თვისება:

(1) რაც უფრო მაღალია სარგებლის განაკვეთი, მით უფრო ძლიერია დისკონტირება, ე. ი. მით უფრო მცირეა დისკონტირებული თანხა K და მით უფრო მეტია დისკონტის სიდიდე $D = K_{nt} - K$;

(2) რაც უფრო დიდია საანაბრო დროის ინტერვალი (წლების n რაოდენობა), მით უფრო ძლიერია დისკონტირება;

(3) რაც უფრო მცირეა დარიცხვის პერიოდი $\frac{1}{t}$ ე. ი. რაც უფრო დიდია 1 წელიწადში დარიცხვების რაოდენობა t, მით უფრო ძლიერია დისკონტირება.

შენიშვნა 3. პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როდესაც საქონლის ჩამოფასება ხდება რთული პროცენტული r განაკვეთით. ამ შემთხვევაში თავდაპირველი ფასი K დოლარი ერთი წლის შემდეგ შემცირდება და გახდება

$$K_1 = K - K \cdot \frac{r}{100} = K\left(1 - \frac{r}{100}\right).$$

ორი წლის შემდეგ ფასი გახდება

$$K_2 = K_1 - K_1 \cdot \frac{r}{100} = K_1\left(1 - \frac{r}{100}\right) = K\left(1 - \frac{r}{100}\right)^2$$

და ა. შ. n წლის შემდეგ საქონლის ფასი გახდება

$$\boxed{K_n = K\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n} \tag{4.21}$$

ცხადია, აქ $0 < r < 100$. ამიტომ $K, K_1, K_2, \ldots, K_n$ რიცხვები ქმნიან კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელია

$$q = 1 - \frac{r}{100}, \quad (0 < q < 1).$$

ამოცანა 4.18. ვთქვათ, რაიმე საქონლის თავდაპირველი გასაყიდი ფასია 18 000 დოლარი. სამი წლის შემდეგ მისი ფასი გახდა 9600 დოლარი. როგორი წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით ხდება ჩამოფასება?

▼ ზემოთ შემოღებული აღნიშვნების თანახმად გვაქვს $K = 18000$ და $K_3 = 9600$. ვიპოვოთ ჩამოფასების წლიური რთული საპროცენტო r განაკვეთი. (4.21) ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ

$$9600 = 18000 \left(1 - \frac{r}{100}\right)^3.$$

აქედან $r = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{9600}{18000}}\right) \cdot 100 \approx 18.9$. ამრიგად, ჩამოფასება ხდება წლიური რთული $18.9\,\%$-ით. ■

ახლა გამოვიყვანოთ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა.

ვთქვათ, მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია

$$b_1, \;\; b_1 q, \;\; b_1 q^2, \ldots, \;\; b_1 q^{n-1},$$

რომლის მნიშვნელია $q \neq 0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{n-1}.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ q-ზე. მივიღებთ

$$S_n q = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \cdots + b_1 q^n.$$

უკანასკნელი ტოლობებიდან მარტივად დავასკვნით, რომ

$$S_n q - S_n = b_1 q^n - b_1,$$

ანუ

$$\boxed{S_n = \frac{b_1 \left(q^n - 1\right)}{q - 1} = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}} \tag{4.22}$$

მივიღეთ ფორმულა, რომლითაც გამოითვლება გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი.

ამოცანა 4.19. საწარმო პირველ წელს უშვებს E ღირებულების საქონელს. ყოველ მომდევნო წელს საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის

ღირებულება r %-ით აღემატება წინა წელს გამოშვებული პროდუქციის ღირებულებას. გამოვთვალოთ n წლის განმავლობაში გამოშვებული პროდუქციის მთლიანი ღირებულება.

▼ საწარმოს მიერ ყოველწლიურად გამოშვებული საქონლის ღირებულებები შეადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას:

$$b_1 = E, \quad b_2 = b_1 + b_1 \cdot \frac{r}{100} = E + E \cdot \frac{r}{100} = E\left(1 + \frac{r}{100}\right),$$

$$b_3 = b_2 + b_2 \cdot \frac{r}{100} = b_2\left(1 + \frac{r}{100}\right) = E\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2, \ldots, \quad b_n = E\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1}.$$

ამ პროგრესიის მნიშვნელია $q = 1 + \frac{r}{100}$, ხოლო პირველი წევრია $b_1 = E$.

n წელიწადში გამოშვებული საქონლის მთლიანი ღირებულება, (4.22) ფორმულის თანახმად, იქნება

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = E\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = E\,\frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1}{\frac{r}{100}} = \frac{100E}{r}\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1\right]. \ ■$$

ამოცანა 4.20. იურიდიულ პირს ყოველი წლის დასაწყისში ბანკში შეაქვს K დოლარი სარგებლის წლიური რთული r %–იანი განაკვეთით. გამოვიანგარიშოთ რა რაოდენობის თანხა დაგროვდება მის ანგარიშზე n წლის შემდეგ?

▼ პირველი წლის დასაწყისში შეტანილი K დოლარი ბანკში იქნება n წლის განმავლობაში და დაგროვილი თანხა n წლის შემდეგ იქნება

$$b_n = K q^n \text{ (დოლარი)},$$

სადაც $q = 1 + \frac{r}{100}$.

მეორე წლის დასაწყისში შეტანილი K დოლარი ბანკში იქნება უკვე $(n-1)$ წლის განმავლობაში და მისი შესაბამისი დაგროვილი თანხა იქნება

$$b_{n-1} = K\, q^{n-1} \text{ (დოლარი)}.$$

ანალოგიურად, მესამე წლის დასაწყისში შეტანილი K დოლარი ბანკში

იქნება უკვე $(n-2)$ წლის განმავლობაში და მისი შესაბამისი დაგროვილი თანხა იქნება

$$b_{n-2} = K\, q^{n-2} \ \text{(დოლარი)}$$

და ა. შ. n-ური წლის დასაწყისში შეტანილი K დოლარი ბანკში იქნება მხოლოდ ერთი წლის ვადით და ამიტომ მისი შესაბამისი დაგროვილი თანხა იქნება: $b_1 = K\,q$.

ცხადია, რომ n წლის შემდეგ მეანაბრის ანგარიშზე იქნება თანხა, რომელიც უტოლდება ჩამოთვლილ საბოლოო თანხების ჯამს, ანუ

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = K\,q + K\,q^2 + \cdots + K\,q^n.$$

რადგან $b_1, b_2, \dots, b_n$ რიცხვები ქმნიან q მნიშვნელიან გეომეტრიულ პროგრესიას, რომელშიც $b_1 = K\,q$ და $b_n = K\,q^n$, ამიტომ, (4.22) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$S_n = \frac{b_n\,q - b_1}{q-1} = K\,q\,\frac{q^n - 1}{q-1},$$

სადაც $q = 1 + \frac{r}{100}$. ■

4.3. გრძელვადიანი დავალიანების დაფარვის გეგმის შემუშავება. ანუიტეტი

არსებობს დავალიანების (სესხის) დაფარვის სხვადასხვა მეთოდი. ერთ უმარტივეს მეთოდს ჩვენ გავეცანით 4.1 პარაგრაფში. ვალის დაფარვის გეგმაში განისაზღვრება დროის გარკვეულ მომენტში გადასახდელი თანხები. როგორც წესი, სარგებლის გადახდა ხდება სესხის მთელი ვადის განმავლობაში, თუმცა ზოგჯერ ხდება მხოლოდ მათი დარიცხვა (და არა გადახდა), რის შედეგადაც სარგებელი გროვდება და უერთდება ძირითად ვალს. ძირითადი ვალი მეტწილად თანდათანობით იფარება.

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანები.

ამოცანა 4.21. ვთქვათ, გვაქვს K დოლარი სესხი სარგებლის წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით და მუდმივი A დოლარი დასაფარავი წლიური ნორმით. შევადგინოთ n წელიწადში ვალის დაფარვის გეგმა.

▼ ამოცანის პირობის თანახმად, პირველი წლის ბოლოს ვალს დაემატება საწყისი K თანხის r % და მოხდება A რაოდენობის თანხის დაბრუნება მევალისათვის. ამიტომ პირველი წლის ბოლოს ვალი განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით

$$R_1 = K + \frac{Kr}{100} - A = Kq - A,$$

სადაც $q = 1 + \dfrac{r}{100}$. ამ R_1 თანხას ვუწოდოთ ნაშთითი ვალი 1 წლის შემდეგ.

ნაშთითი ვალი მეორე წლის ბოლოს იქნება

$$R_2 = R_1 + \frac{R_1 r}{100} - A = R_1 q - A = (Kq - A)\, q - A = K q^2 - A(1+q).$$

ნაშთითი ვალი მესამე წლის ბოლოს იქნება

$$R_3 = R_2 + \frac{R_2 r}{100} - A = R_2 q - A = \left[K q^2 - A(1+q)\right] q - A = K q^3 - A\left(1 + q + q^2\right).$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ n წლის შემდეგ ნაშთითი ვალი ტოლი იქნება შემდეგი სიდიდის

$$R_n = R_{n-1} + \frac{R_{n-1}\, r}{100} - A = K q^n - A\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right).$$

გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის თანახმად

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

ამიტომ R_n-თვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას

$$R_n = K q^n - A\, \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

თუ გვინდა, რომ ვალი დაიფაროს n წელიწადში, ამისათვის R_n ნაშთითი ვალი უნდა გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ განტოლებას

$$K q^n - A\, \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0. \tag{4.23}$$

აქედან შეიძლება ვიპოვოთ წლიური დასაფარავი A ნორმა, თუ ცნობილია K ვალი, სარგებლის წლიური r%-იანი განაკვეთი და წელთა რიცხვი n. მართლაც, (4.23) ტოლობიდან მივიღებთ

$$A = K q^n \frac{q-1}{q^n - 1}. \tag{4.24}$$

(4.23) განტოლებიდან შეგვიძლია ვიპოვოთ აგრეთვე ვალის დაფარვის ვადა n, თუ ცნობილია დანარჩენი სიდიდეები. მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ შემდეგ მაჩვენებლიან განტოლებას

$$q^n = \frac{A}{A - K(q-1)}.$$

ორივე მხარის გალოგარითმებით, დავასკვნით

$$n = \frac{\lg A - \lg[A - K(q-1)]}{\lg q}. \tag{4.25}$$

მიღებული შედეგების საფუძველზე შეგვიძლია შევადგინოთ ვალის დაფარვის შემდეგი ცხრილი:

წელიწადი	ნაშთითი ვალის r%	წლიური გადასახადი	ნაშთითი ვალი
1	$\frac{K r}{100}$	A	$R_1 = K q - A$
2	$\frac{R_1 r}{100}$	A	$R_2 = K q^2 - (1+q) A$
3	$\frac{R_2 r}{100}$	A	$R_3 = K q^3 - (1+q+q^2) A$
.....	.....	.....	.....
n	$\frac{R_{n-1} r}{100}$	A	$R_n = K q^n - (1+q+\cdots+q^{n-1}) A = K q^n - A \frac{q^n - 1}{q-1}$

ცხრილი 4.2

თუ აქ $R_n = 0$, მაშინ ეს ცხრილი წარმოადგენს n წელიწადში ვალის დაფარვის ცხრილს. ეს უკანასკნელი ტოლობა $\left(R_n = 0\right)$ კი, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მიიღწევა R_n-ში შემავალი პარამეტრების შესაბამისი შერჩევით.■

ამოცანა 4.22. განვსაზღვროთ ყოველთვიური გადასახადი, თუ 100 000 დოლარი აღებულია ვალად სარგებლის წლიური რთული 8 %-იანი განაკვეთით 25 წლის ვადით. სულ რამდენი თანხის გადახდა უხდება მოვალეს?

▼ ამოცანის პირობის თანახმად, მოვალე იხდის ფიქსირებულ გადასახადს ყოველთვიურად, მაშინ როდესაც 8 %-იანი დარიცხვა ვალზე ხდება ყოველწლიურად. ვთქვათ, საძიებელი ფიქსირებული ყოველთვიური გადასახადია x დოლარი. პირველი წლის განმავლობაში ვალს 100 000 დოლარს ემატება მისი 8 % ანუ

$$\frac{8}{100} \cdot 100000 = 8000 \quad (\text{დოლარი}),$$

მაგრამ, ამავე დროს, იფარება ვალის ნაწილი x თანხის 12-ჯერ ყოველთვიური გადახდით. ასე რომ, პირველი წლის ბოლოს დარჩენილი ვალი გამოითვლება შემდეგი ტოლობით:

$$K_1 = 100\ 000 + 100\ 000 \cdot \frac{8}{100} - 12x = 100\ 000 \cdot 1.08 - 12x. \tag{4.26}$$

ანალოგიურად, მეორე წლის განმავლობაში K_1 ვალს კიდევ ემატება ვალად მისი 8% და კვლავ ხდება $12x$-ის გადახდა. ამიტომ მეორე წლის ბოლოს ვალი იქნება

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{8}{100} - 12x = K_1 \cdot 1.08 - 12x = 100\ 000\ (1.08)^2 - 12x\ \left[1.08 + 1\right].$$

ეს პროცესი მეორდება მესამე წელსაც. მესამე წლის ვალი გამოითვლება ასე

$$K_3 = K_2 + K_2 \frac{8}{100} - 12x = 1.08 K_2 - 12x =$$
$$= 100\ 000\ (1.08)^3 - 12x\,[(1.08)^2 + (1.08) + 1]$$

და ა. შ. 25 წლის ბოლოს ვალის გამოსათვლელად მივიღებთ:

$$K_{25} = 100\ 000\ (1.08)^{25} - 12x\left[(1.08)^{24} + (1.08)^{23} + \cdots + 1\right].$$

ამოცანის პირობის თანახმად, ეს ვალი უნდა გახდეს ნულის ტოლი. ამიტომ x-ის გამოსათვლელად მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$12x\left[(1.08)^{24} + (1.08)^{23} + \cdots + 1\right] = 100\ 000\ (1.08)^{25}.$$

შევნიშნოთ, რომ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება წარმოადგენს გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამს (მნიშვნელით $q = 1.08$). გამოვიყენოთ S_n-ის გამოსათვლელი (4.22) ფორმულა და გადავწეროთ მიღებული განტოლება შემდეგი სახით

$$12 \cdot \frac{(1.08)^{25} - 1}{1.08 - 1}\, x = 100\ 000 \cdot (1.08)^{25}.$$

აქედან

$$x = \frac{100000 \cdot (1.08)^{25} \cdot 0.08}{12\,[(1.08)^{25} - 1]} \approx 780.66.$$

ამრიგად, საძიებელი ყოველთვიური გადასახადი თანხაა 780.66 დოლარი. ცხადია, წლიურად მევალე იხდის შემდეგ თანხას $12 \cdot 780.66 = 9367.92$ (დოლარი). გამოვთვალოთ ვალი პირველი წლის შემდეგ (იხ. (4.26)):

$$K_1 = 98632.08 \quad (\text{დოლარი}).$$

ყურადსაღებია შემდეგი ფაქტი: მიუხედავად იმისა, რომ გადახდილია 9367.92 დოლარი, პირველი წლის შემდეგ ვალმა დაიკლო მხოლოდ დაახლოებით 1368 დოლარით (!).

ახლა გამოვთვალოთ სულ რამდენი თანხის გადახდა უხდება მოვალეს. რადგან იგი ყოველწლიურად იხდის $12x = 9367.92$ დოლარს, ამიტომ 25 წლის განმავლობაში გადახდილი თანხა იქნება:

$$9367.92 \cdot 25 = 234198 \quad (\text{დოლარი}). \ ■$$

ზემოთ ჩვენ მივიღეთ (4.7) ფორმულა ერთი საბოლოო K_n თანხის დისკონტირებისათვის. ახლა გავეცნოთ, როგორ ხდება სასრული რაოდენობის საბოლოო თანხების დისკონტირება სხვადასხვა დროის პერიოდის მიხედვით. ამ ტიპის ამოცანებთან გვაქვს საქმე, როდესაც ხდება რაიმე თანხის დაბანდება იმ პირობით, რომ დროის ყოველი ფიქსირებული პერიოდის (მაგალითად, ყოველი წლის) შემდეგ ხდება ერთი და იმავე ფიქსირებული თანხის მოხსნა ამ ანაბრიდან. ასეთ პროცესს ეკონომიკაში **ანუიტეტი** ეწოდება. დროის რაიმე ინტერვალის, მაგალითად, n წლის შესაბამისი ანუიტეტის საწყისი თანხა ეწოდება იმ თანხას, რომელიც უზრუნველყოფს ყოველწლიურ ფიქსირებულ K_0 თანხის ნაკადს (რომელიც იხსნება ანგარიშიდან); ამასთან, n წლის შემდეგ საანაბრო ანგარიში იხურება (ე. ი. საანაბრო ანგარიშზე დარჩენილი თანხა ნულის ტოლია).

ამოცანა 4.23. გამოვიყვანოთ n პერიოდიანი ანუიტეტის საწყისი $S^{(n)}$ თანხის გამოსათვლელი ფორმულა, თუ ანუიტეტის ნაკადია A, ხოლო სარგებლის რთული წლიური განაკვეთი კი – r %.

▼ ერთი პერიოდის შემდეგ რომ მივიღოთ A დოლარი, პერიოდის დასაწყისში ანგარიშზე უნდა იყოს 1 პერიოდის შესაბამისი დისკონტირებული თანხა (იხ. (4.7))

$$a_1 = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-1} = A\,q^{-1}, \qquad q = 1+\frac{r}{100} \quad (\text{დოლარი}).$$

მეორე პერიოდის ბოლოს ისევ A დოლარი რომ მივიღოთ, ახლა ანგარიშზე უნდა იყოს 2 პერიოდის შესაბამისი დისკონტირებული თანხა

$$a_2 = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-2} = A\,q^{-2}.$$

ზოგადად, n პერიოდის ბოლოს A დოლარი რომ ავიღოთ, ახლა ანგარიშზე უნდა იყოს შესაბამისი დისკონტირებული თანხა

$$a_n = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n} = A\,q^{-n}.$$

ამიტომ მთლიანი საწყისი თანხა, რომელიც უზრუნველყოფს ყოველი პერი-

ოდის ბოლოს ფიქსირებული A დოლარის ტოლ შემოსავალს n პერიოდის განმავლობაში, გამოითვლება შემდეგი ჯამით

$$S^{(n)} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A\,q^{-1} + A\,q^{-2} + \cdots + A\,q^{-n} =$$
$$= A\,q^{-1}\left[1 + q^{-1} + \cdots + q^{-n+1}\right].$$

კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება წარმოადგენს გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამს, რომელშიც პირველი წევრია $b_1 = 1$, ბოლო წევრია $b_n = q^{-n+1}$, ხოლო პროგრესიის მნიშვნელია q^{-1}. ამიტომ (4.22) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ $S^{(n)}$ სიდიდის გამოსათვლელ ფორმულას

$$S^{(n)} = A\,q^{-1}\,\frac{q^{-n} - 1}{q^{-1} - 1} = \frac{A}{q^n}\,\frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad q = 1 + \frac{r}{100}. \quad \blacksquare$$

4.4. ინვესტიციების შეფასება და შედარება

ამ პარაგრაფში ჩვენ გავეცნობით საინვესტიციო პროექტების ეკონომიკური შეფასების მათემატიკურ საფუძვლებს, რაც საშუალებას მოგვცემს შევადაროთ ერთმანეთს განსხვავებულ პარამეტრებიანი საინვესტიციო პროექტები ფინანსური მომგებიანობის თვალსაზრისით.

საილუსტრაციოდ ამოვხსნათ შემდეგი კონკრეტული ამოცანა.

ამოცანა 4.24. ვთქვათ, საინვესტიციო პროექტი ითხოვს 15 000 დოლარის ინვესტირებას და გარანტიას იძლევა, რომ სამ წელიწადში იგი დაუბრუნებს ინვესტორს 20 000 დოლარს. ამასთან ცნობილია, რომ საფინანსო ბაზარზე სარგებლის დომინანტური წლიური რთული განაკვეთი 5 %-ია.

ვიპოვოთ:

(ა) 15 000 დოლარის შესაბამისი საბოლოო თანხა 3 წლის შემდეგ სარგებლის ზემოთ მითითებული დომინანტური განაკვეთით;

(ბ) 20 000 დოლარის შესაბამისი დისკონტირებული თანხა სარგებლის იმავე დომინანტური განაკვეთით, თუ დროის ინტერვალი 3 წელიწადია;

(გ) სარგებლის რა წლიური რთული განაკვეთი შეესაბამება თანხის

ზრდას 3 წლის ინტერვალში 15 000-დან 20 000 დოლარამდე?

(დ) სასურველია თუ არა საფინანსო თვალსაზრისით ამ ინვესტიციის განხორციელება?

(ე) შეიცვლებოდა თუ არა (დ) პუნქტის რეკომენდაცია, სარგებლის დომინანტური წლიური რთული განაკვეთი რომ 12% ყოფილიყო?

▼ (ა) სამი წლის შემდეგ 15 000 დოლარის შესაბამისი თანხა სარგებლის წლიური რთული 5 %-იანი განაკვეთით გამოითვლება (4.6) ფორმულის გამოყენებით

$$K_3 = 15000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 = 15000 \cdot 1.157625 = 17364.38 \quad (\text{დოლარი}).$$

(ბ) გამოვიყენოთ (4.7) ფორმულა და გამოვთვალოთ 20 000 დოლარის შესაბამისი დისკონტირებული თანხა, როდესაც სარგებლის განაკვეთია 5 % და დროის ინტერვალია 3 წელიწადი. შესაბამისი საწყისი დისკონტირებული თანხისათვის მივიღებთ

$$K = 20000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{-3} = 20000 \cdot (1.05)^{-3} = 17276.75 \quad (\text{დოლარი}).$$

(გ) სამი წლის განმავლობაში 15 000-დან 20 000 დოლარამდე ზრდის შესაბამისი სარგებლის წლიური განაკვეთი ვიპოვოთ (4.6) ფორმულის გამოყენებით

$$20000 = 15000\left(1+\frac{x}{100}\right)^3.$$

აქედან

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^3 = \frac{4}{3} \quad \text{ანუ} \quad x = \left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}} - 1\right) \cdot 100 \approx 10.$$

ამრიგად, საძიებელი სარგებლის განაკვეთია 10 %. ეს იმას ნიშნავს, რომ რთულ წლიურ 10%-ად დაბანდებული 15 000 დოლარი 3 წლის შემდეგ მოგვცემს 20 000 დოლარს.

(დ) ახლა გავაანალიზოთ, სასურველია თუ არა ამოცანაში აღწერილი ინვესტიციის განხორციელება. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ საინვესტიციო

პროექტი ითხოვს 15 000 დოლარს და აბრუნებს სამი წლის შემდეგ 20 000 დოლარს. საფინანსო ბაზარზე კი 15 000 დოლარის დაბანდება (5%-ად) 3 წლის შემდეგ იძლევა 17364.38 დოლარს. აქედან ცხადია, რომ საინვესტიციო პროექტში თანხის დაბანდება ფინანსურად მომგებიანია.

ეს გამომდინარეობს აგრეთვე განხილული (ბ) პუნქტის პასუხიდან: იმისათვის, რომ საფინანსო ბაზარზე სამი წლის შემდეგ მივიღოთ საინვესტიციო პროექტით შემოთავაზებული 20 000 დოლარი, ამისათვის ბაზარზე დღეს უნდა დაბანდდეს საწყისი თანხა 17276.75 დოლარი, რაც 2276.75 დოლარით აღემატება საინვესტიციო პროექტით მოთხოვნილ საწყის თანხას.

საინვესტიციო პროექტით გათვალისწინებულ საბოლოო თანხის შესაბამის დისკონტირებულ სიდიდესა და საინვესტიციო პროექტით მოთხოვნილ საწყისი თანხის სიდიდეს შორის სხვაობას **წმინდა საწყისი სიდიდე** ეწოდება.

ჩვენს შემთხვევაში წმინდა საწყისი სიდიდე იქნება

$$17276.75 - 15000 = 2276.75 \quad (\text{დოლარი}).$$

ცხადია, თუ წმინდა საწყისი სიდიდე დადებითია, მაშინ საინვესტიციო პროექტში მონაწილეობა ფინანსურად მომგებიანია. ეს არის ერთ-ერთი კრიტერიუმი საინვესტიციო პროექტის მომგებიანობის შესაფასებლად.

მეორე მხრივ, (გ) პუნქტში, ფაქტობრივად, ვაჩვენეთ, რომ საინვესტიციო პროექტში მონაწილეობა ტოლფასია თანხის დაბანდებისა 3 წლის მანძილზე სარგებლის წლიური რთული 10 %-იანი განაკვეთით, რაც აღემატება საბაზრო განაკვეთს (იგი ჩვენს კონკრეტულ შემთხვევაში 5 %-ის ტოლია). აქედანაც ჩანს, რომ მონაწილეობა საინვესტიციო პროექტში ფინანსურად მომგებიანია.

სარგებლის იმ წლიურ რთულ განაკვეთს, რომელიც საინვესტიციო დროის პერიოდში უზრუნველყოფს საწყისი საინვესტიციო თანხის ზრდას საინვესტიციო პროექტით განსაზღვრულ საბოლოო თანხამდე, ეწოდება **სარგებლის შიგა განაკვეთი.**

ჩვენს შემთხვევაში სარგებლის შიგა განაკვეთია 10 %. ცხადია, თუ სარგებლის შიგა განაკვეთი მეტია საფინანსო ბაზრის სარგებლის დომინან-

ტურ განაკვეთზე, მაშინ საინვესტიციო პროექტი მომგებიანია. ეს წარმოადგენს კიდევ ერთ კრიტერიუმს საინვესტიციო პროექტების ფინანსური მომგებიანობის შესაფასებლად. ცხადია, იგი სრულ თანხმობაშია ზემოთ ჩამოყალიბებულ კრიტერიუმთან, რომელიც პროექტის მომგებიანობას აფასებს წმინდა საწყისი სიდიდის საშუალებით.

(ე) ახლა გავცეთ პასუხი ამოცანის ბოლო კითხვას.

თუ საფინანსო ბაზრის სარგებლის განაკვეთი გახდება 12 %, მაშინ იგი გადააჭარბებს საინვესტიციო პროექტის სარგებლის შიგა განაკვეთს. ამიტომ ამ შემთხვევაში პროექტში მონაწილეობა არასასურველია ფინანსურად, რადგან საფინანსო ბაზარზე დაბანდება უფრო მეტ მოგებას მოუტანს ინვესტორს, ვიდრე საინვესტიციო პროექტში მონაწილეობა. კერძოდ, 15 000 დოლარი დაბანდებული 12 %-ად სამი წლის ბოლოს გახდება

$$15000\left(1+\frac{12}{100}\right)^3 = 15000\cdot(1.12)^3 = 21073.92 \quad (\text{დოლარი}),$$

რაც 1073.92 დოლარით მეტია საინვესტიციო პროექტით გათვალისწინებულ საბოლოო თანხაზე. ■

ამოვწეროთ ზოგადად წმინდა საწყისი სიდიდის (რომელსაც აღვნიშნავთ (NPV) სიმბოლოთი) და სარგებლის შიგა განაკვეთის (რომელსაც აღვნიშნავთ (IRR) სიმბოლოთი) გამოსათვლელი ფორმულები (იხ. დანართი).

ამისათვის შემოვიღოთ შემდეგი სიდიდეები:

P_1 – პროექტით გათვალისწინებული საწყისი საინვესტიციო თანხა,

P_2 – პროექტით გათვალისწინებული საბოლოო თანხა, რომელიც უბრუნდება ინვესტორს $\left(P_1 < P_2\right)$,

r_m – საფინანსო ბაზრის (დომინანტური) სარგებლის წლიური რთული განაკვეთი,

n – საინვესტიციო პერიოდის ხანგრძლივობა.

განმარტების თანახმად პროექტის წმინდა საწყისი სიდიდე (NPV) წარმოადგენს P_2 თანხის შესაბამისი დისკონტირებული თანხისა და საწყისი P_1 თანხის სხვაობას და გამოითვლება ფორმულით

$$(NPV) = P_2 \left(1 + \frac{r_m}{100}\right)^{-n} - P_1 . \quad (4.27)$$

გამოვთვალოთ, სარგებლის რა რთული განაკვეთი შეესაბამება საწყისი P_1 თანხის ზრდას საბოლოო P_2 თანხამდე n წლის განმავლობაში. თუ x-ით აღვნიშნავთ სარგებლის საძიებელ განაკვეთს, მაშინ რთული სარგებლის გამოსათვლელი (4.6) ფორმულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$P_2 = P_1 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^n .$$

აქედან

$$x = (IRR) = \left[\sqrt[n]{\frac{P_2}{P_1}} - 1\right] 100 . \quad (4.28)$$

როდესაც საქმე ეხება სხვადასხვა საინვესტიციო პროექტების შედარებას, საჭიროა გამოვიყენოთ ორივე კრიტერიუმი უფრო მომგებიანი პროექტის შესარჩევად. როდესაც საქმე ეხება სხვადასხვა თანხებს, მაშინ (IRR) კრიტერიუმი ყოველთვის ვერ იძლევა ფინანსური მოგების თვალსაზრისით საუკეთესო პროექტის არჩევის საშუალებას. ასეთ შემთხვევაში უფრო მიზანშეწონილია (NPV) კრიტერიუმის გამოყენება.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

ამოცანა 4.25. ვთქვათ, იურიდიულ პირს აქვს 30 000 დოლარი და თანხის ინვესტირება შესაძლებელია ორი A და B პროექტიდან მხოლოდ ერთში. პროექტი A ითხოვს საწყის საინვესტიციო თანხას $P_1^{(A)} = 1000$ დოლარს და 4 წლის შემდეგ აბრუნებს $P_2^{(A)} = 1200$ დოლარს. პროექტი B ითხოვს საწყის საინვესტიციო თანხას $P_1^{(B)} = 30000$ დოლარს და 4 წლის შემდეგ აბრუნებს $P_2^{(B)} = 35000$ დოლარს. ცნობილია, რომ საფინანსო ბაზრის სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია $3\,\%$. რომელ პროექტში უფრო მომგებიანია ფულის დაბანდება?

▼ ჯერ ამოვხსნათ ამოცანა წმინდა საწყისი სიდიდის მეთოდით.

$(NPV)_A$ და $(NPV)_B$ სიდიდეები გამოვთვალოთ (4.27) ფორმულის გამოყენებით:

$$(NPV)_A = P_2^{(A)}\left(1+\frac{r_m}{100}\right)^{-n} - P_1^{(A)} = 1200\left(1+\frac{3}{100}\right)^{-4} - 1000 \approx 66.18\,,$$

$$(NPV)_B = P_2^{(B)}\left(1+\frac{r_m}{100}\right)^{-n} - P_1^{(B)} = 35000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{-4} - 30000 \approx 1097.05\,.$$

რადგან ორივე შემთხვევაში (NPV) დადებითია, ამიტომ ბაზართან შედარებით ორივე პროექტი მომგებიანია. ახლა ამოვარჩიოთ უფრო ოპტიმალური პროექტი.

თუ ინვესტორი 1000 დოლარს დააბანდებს A პროექტში, მაშინ დარჩენილ 29 000 დოლარს იგი დააბანდებს ბაზარზე 3%-ად, რომელიც 4 წლის შემდეგ გახდება

$$29000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{4} = 32639.76 \quad \text{(დოლარი)}.$$

მაშინ მთლიანი საბოლოო თანხა, რომელსაც ინვესტორი მიიღებს, იქნება

$$1200 + 32639.76 = 33839.76 \quad \text{(დოლარი)}.$$

მეორე მხრივ, თუ ინვესტორი 30 000 დოლარს დააბანდებს B პროექტში, მაშინ 4 წლის შემდეგ იგი მიიღებს 35 000 დოლარს. აქედან კი დავასკვნით, რომ B პროექტში მონაწილეობა უკეთესია, რადგან იგი $35000 - 33839.76 = 1160.24$ დოლარით მეტ შემოსავალს იძლევა.

ახლა გამოვთვალოთ სარგებლის შიგა განაკვეთი ორივე პროექტისათვის

$$(IRR)_A = \left[\sqrt[4]{\frac{1200}{1000}} - 1\right]100 \approx [1.047-1]\,100 = 4.7\,,$$

$$(IRR)_B = \left[\sqrt[4]{\frac{35000}{30000}} - 1\right]100 \approx [1.039-1]\,100 = 3.9\,.$$

აქედან ჩანს, რომ უფრო მაღალი სარგებლის შიგა განაკვეთი აქვს A პროექტს: $(IRR)_A > (IRR)_B$, თუმცა, როგორც ვნახეთ, B პროექტში მონაწი-

ლეობა უფრო მომგებიანია, ვიდრე A პროექტში. ამრიგად, (IRR) კრიტერიუმი განსხვავებული თანხების შემთხვევაში არაა სანდო, რადგანაც პატარა თანხის დიდი პროცენტი შეიძლება უფრო მცირე აღმოჩნდეს, ვიდრე დიდი თანხის პატარა პროცენტი (როგორც ეს აღმოჩნდა განხილულ ამოცანაში). ■

ახლა განვიხილოთ შემდეგი ტიპის ამოცანა, რომელიც კვლავ ეძღვნება საინვესტიციო პროექტების შედარებას, როდესაც ინვესტორი იღებს მრავალჯერად შემოსავალს გარკვეული პერიოდების შემდეგ.

ამოცანა 4.26. ვთქვათ, ინვესტორს აქვს 20 000 დოლარი, რომელიც შეიძლება დაბანდდეს ორი A და B საინვესტიციო პროექტიდან მხოლოდ ერთში. დაბანდებული 20 000 დოლარის შემთხვევაში თითოეული პროექტი იღებს გარანტიას, რომ 4 წლის განმავლობაში ყოველწლიურად დაუბრუნებს ინვესტორს გარკვეულ თანხებს, რომლებიც მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

წელიწადი	ინვესტორის შემოსავალი	
	A პროექტი	B პროექტი
1	$a_1 = 6000$	$b_1 = 10000$
2	$a_2 = 3000$	$b_2 = 6000$
3	$a_3 = 10000$	$b_3 = 9000$
4	$a_4 = 8000$	$b_4 = 1000$
სულ	27000	26000

ცხრილი 4.3

შევარჩიოთ, რომელ პროექტში არის უფრო მომგებიანი თანხის დაბანდება, თუ ბაზარზე სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია $11\,\%$.

▼ იმისათვის, რომ შევარჩიოთ უფრო მომგებიანი პროექტი, საჭიროა ჩავატაროთ ცხრილი 4.3-ის ანალიზი.

ერთი შეხედვით A პროექტი უფრო მომგებიანი ჩანს, რადგან 4 წელიწადში იგი იძლევა 1000 დოლარით მეტს, ვიდრე B პროექტი.

გამოვიკვლიოთ, მართლაც ასეა თუ არა.

შევნიშნოთ, რომ ორივე პროექტის თითო გადასახადი შეადგენს 10 000 დოლარს: A პროექტი ამ თანხას უხდის ინვესტორს მესამე წლის ბოლოს, ხოლო B პროექტი – პირველი წლის ბოლოს. რადგან ეს მიღებული 10 000 დოლარი ინვესტორს შეუძლია კვლავ დააბანდოს ბაზარზე, ამიტომ A და B პროექტების აღნიშნული გადასახადი არ არის ერთმანეთის ეკვივალენტური. აშკარად ჩანს, რომ B პროექტის მიერ პირველი წლის ბოლოს გადახდილ 10 000 დოლარს უფრო მეტი „ფასი" აქვს, ვიდრე A პროექტის მიერ გადახდილ იმავე რაოდენობის თანხას მესამე წლის ბოლოს.

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ რომელი პროექტი სჯობია, დავითვალოთ პროექტებით გათვალისწინებული გადასახადების შესაბამისი დისკონტირებული (საწყისი) თანხების ჯამი.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ბაზრის სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 11%, დისკონტირებული a_k^* და b_k^* თანხებისათვის მივიღებთ

წელიწადი	დისკონტირებული თანხები	
	A პროექტი	B პროექტი
1	$a_1^* = 5405.41$	$b_1^* = 9009.01$
2	$a_2^* = 2434.87$	$b_2^* = 4869.73$
3	$a_3^* = 7311.91$	$b_3^* = 6580.72$
4	$a_4^* = 5269.85$	$b_4^* = 658.73$
სულ	20422.04	21118.19

ცხრილი 4.4

ამ ცხრილიდან აშკარად ჩანს, რომ A პროექტში მონაწილეობა ტოლფასია მიმდინარე მომენტში ბაზარზე 20422.04 დოლარის დაბანდებისა, ხოლო B პროექტში მონაწილეობა – 21118.19 დოლარის დაბანდებისა. ამიტომ B პროექტში მონაწილეობა უფრო მომგებიანია. ■

ამ პარაგრაფს დავასრულებთ იმ დამოკიდებულების გაანალიზებით, რომელიც არსებობს სარგებლის განაკვეთსა და ფულზე სპეკულაციური მიზნებით მოთხოვნას შორის (იხ. პარაგრაფი 1.13).

როგორც ადრე აღვნიშნეთ, სპეკულაციური მიზნით ფულზე მოთხოვნა შედგება იმ ფულისაგან, რომელიც წარმოადგენს სარეზერვო თანხას მთავ-

რობის ფასიანი ქაღალდების (ობლიგაციების) შესაძენად. მიღებული ფულის სანაცვლოდ მთავრობა იძლევა ობლიგაციას, რაც მის მფლობელს საშუალებას აძლევს ყოველწლიურად მთავრობისაგან მიიღოს გარკვეული თანხა. ამასთან, გათვალისწინებული ვადის გასვლის შემდეგ მთავრობა გამოისყიდის ობლიგაციას და მის მფლობელს სრულად უბრუნებს ობლიგაციის შესაძენად გადახდილ საწყის თანხას.

ვთქვათ, მთავრობამ გამოუშვა ათწლიანი ობლიგაცია, რომლის ღირებულებაა 5000 დოლარი. მყიდველს მთავრობა სთავაზობს მარტივ 9 %-იან წლიურ სარგებელს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ობლიგაციის მფლობელი ყოველწლიურად მიიღებს $5000 \cdot \frac{9}{100} = 450$ დოლარს 10 წლის განმავლობაში, ხოლო 10 წლის გასვლის შემდეგ მთავრობა გამოისყიდის ობლიგაციას და მფლობელს დაუბრუნებს გადახდილ საწყის თანხას — 5000 დოლარს. ეს ობლიგაცია შეიძლება გაიყიდოს ნებისმიერ დროს. ახალი მფლობელი აღჭურვილია ყველა იმ უფლებით, რაც ჰქონდა ობლიგაციის ძველ მფლობელს. ცხადია, რომ ობლიგაციის ღირებულება დამოკიდებულია გამოსყიდვამდე დარჩენილი წლების რაოდენობასა და საფინანსო ბაზრის სარგებლის დომინანტურ განაკვეთზე, რომელიც შეიძლება არ იყოს 9 %-ის ტოლი.

მაგალითად, განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც ობლიგაციის გამოსყიდვამდე დარჩენილია 4 წელი. შევადგინოთ ცხრილი, რომელიც ასახავს ობლიგაციისგან მიღებულ შემოსავალს (გამოსასყიდი თანხის ჩათვლით მეოთხე წლის ბოლოს) და შესაბამისი თანხების დისკონტირებულ საწყის თანხებს ბაზრის სარგებლის სხვადასხვა წლიური რთული განაკვეთების მიხედვით (იხ. ცხრილი 4.5).

წელიწადი	შემოსავალი	დისკონტირებული თანხა				
		5%	7%	9%	11%	13%
1	450	429	421	413	405	398
2	450	408	393	379	365	352
3	450	389	367	347	329	312
4	5450	4484	4158	3861	3590	3343
სულ	6800	5710	5339	5000	4689	4405

ცხრილი 4.5

გავაანალიზოთ ცხრილი 4.5-ის შინაარსი. პირველ სტრიქონში წერია შემოსავალი პირველი წლის ბოლოს (450 დოლარი) და მისი შესაბამისი დისკონტირებული (საწყისი) თანხები გამოთვლილი 5 %, 7 %, 9 %, 11 % და 13 % განაკვეთების შემთხვევებში. ანალოგიური შინაარსი აქვს დანარჩენ სამ სტრიქონსაც. სულ ბოლო სტრიქონში კი მითითებულია სრული შემოსავლის შესაბამისი მთლიანი საწყისი თანხები. ობლიგაციის მფლობელის მიერ მეოთხე წლის ბოლოსათვის მიღებული ყველა თანხის ჯამია 6800 დოლარი, ხოლო ობლიგაციის საწყისი ღირებულებაა 5710 დოლარი 5 %-იანი განაკვეთის შემთხვევაში, 5339 დოლარი 7 %-იანი განაკვეთის შემთხვევაში, 5000 დოლარი 9 %-იანი განაკვეთის შემთხვევაში, 4689 დოლარი 11 %-იანი განაკვეთის შემთხვევაში და 4405 დოლარი 13 %-იანი განაკვეთის შემთხვევაში.

აშკარად ჩანს, რომ სარგებლის საბაზრო განაკვეთის ზრდას მოსდევს ობლიგაციის საწყისი ღირებულების შემცირება.

აღნიშნული ფაქტი სრულ თანხმობაშია S საბოლოო თანხის შესაბამისი P დისკონტირებული თანხის გამოსათვლელ ფორმულასთან (იხ. ფორმულა (4.7))

$$P = \frac{S}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n},$$

სადაც r არის სარგებლის განაკვეთი, n კი — შესაბამისი წლების რაოდენობა. ამ თანაფარდობიდან ცხადია, რომ ერთი და იმავე S-ისა და n-ის შემთხვევაში, r-ის ზრდას მოსდევს P-ს შემცირება (რადგან მნიშვნელი იზრდება და მრიცხველი უცვლელი რჩება), r-ის შემცირებას კი — P-ს ზრდა (რადგან მნიშვნელი მცირდება და მრიცხველი კვლავ უცვლელი რჩება).

ახლა განვიხილოთ აღნიშნული დამოკიდებულების გავლენა ფინანსურ ბაზარზე.

ვთქვათ, სარგებლის საბაზრო განაკვეთი საკმარისად მაღალია (მაგალითად, 13 %). მაშინ, როგორც ცხრილი 4.5-დან ჩანს, ობლიგაციის ღირებუ-

ლება საკმარისად დაბალია (4405 დოლარი). თუ სავარაუდოა, რომ სარგებლის ასეთ მაღალ საბაზრო განაკვეთს მოჰყვება განაკვეთის შემცირება, მაშინ ობლიგაციების ფასი უახლოეს მომავალში აიწევს. ამ სიტუაციაში ინვესტორი თამამად ყიდულობს ობლიგაციას არა მარტო იმ ვარაუდით, რომ იგი მიიღებს ობლიგაციასთან ფიქსირებულად დაკავშირებულ შემოსავალს, არამედ იმიტომ, რომ თვით ობლიგაციის საწყისი ფასი იზრდება (რაც კიდევ უფრო ზრდის ინვესტორის ინტერესს).

ცხადია, ამ შემთხვევაში ხდება ფულის დაბანდება ფასიან ქაღალდებში. ეს კი იწვევს სპეკულაციური მიზნით ფულზე მოთხოვნის შემცირებას.

საპირისპირო სიტუაციასთან გვაქვს საქმე, როდესაც სარგებლის საბაზრო განაკვეთი მცირეა (მაგალითად, 5 %). თუ მოსალოდნელია სარგებლის საბაზრო განაკვეთის გაზრდა, მაშინ ეს ავტომატურად გამოიწვევს ობლიგაციების საწყისი ფასის შემცირებას. ამიტომ ინვესტორები თავს არიდებენ თანხის დაბანდებას ფასიან ქაღალდებში, რაც იწვევს ფულზე სპეკულაციური მოთხოვნის ზრდას.

ამრიგად, ვაჩვენეთ, რომ სარგებლის განაკვეთის ზრდა იწვევს სპეკულაციური მიზნით ფულზე მოთხოვნის შემცირებას, ხოლო განაკვეთის შემცირება – სპეკულაციური მიზნით ფულზე მოთხოვნის ზრდას. ეს ფაქტი ჩვენ უკვე გამოვიყენეთ 1.13 პარაგრაფში.

4.5. სავარჯიშოები

1. 2000 დოლარი გაცემულია სესხად სამი წლის ვადით სარგებლის წლიური მარტივი 5 %-იანი განაკვეთით. განსაზღვრეთ 3 წლის განმავლობაში დაგროვილი თანხა.

2. ბანკში 5 წლის ვადით შეტანილია 3000 დოლარი სარგებლის წლიური მარტივი 3 %-იანი განაკვეთით. რა თანხას გადაუხდის ბანკი მეანაბრეს 5 წლის შემდეგ?

3. ბანკში დაბანდებულია 5000 დოლარი 4 წლის ვადით სარგებლის

წლიური რთული 7 %-იანი განაკვეთით. გამოთვალეთ დაგროვილი თანხა.

4. ფირმამ ბანკიდან 5 წლის ვადით სარგებლის წლიური რთული 10 %-იანი განაკვეთით აიღო სესხი 2000 დოლარის რაოდენობით. გამოთვალეთ რა თანხას დაუბრუნებს ფირმა ბანკს ხუთი წლის შემდეგ.

5. საწყისი თანხა — 2000 დოლარი სამი წლის შემდეგ გახდა 3500 დოლარი. იპოვეთ სარგებლის რთული განაკვეთი.

6. რამდენი წლით უნდა შეიტანოთ ბანკში 1000 დოლარი სარგებლის წლიური რთული 5 %-იანი განაკვეთით, რომ დაგროვდეს 13200 დოლარი?

7. გამოთვალეთ რა თანხა უნდა შეიტანოთ ბანკში სარგებლის წლიური რთული 6 %-იანი განაკვეთით, რომ 5 წლის შემდეგ მიიღოთ 3000 დოლარი?

8. 1800 დოლარი აღებულია სესხად 3 წლის ვადით სარგებლის წლიური რთული 5 %-იანი განაკვეთით. გამოთვალეთ ბანკის მოგება 3 წლის შემდეგ, თუ მოვალე ბანკს ყოველწლიურად უბრუნებს 600 დოლარს და დარჩენილი ვალის 2 %-ს.

9. საწარმო პირველ წელს უშვებს 100 000 დოლარის ღირებულების საქონელს. ყოველ მომდევნო წელს საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის ღირებულება 15 %-ით აღემატება წინა წელს გამოშვებული პროდუქციის ღირებულებას. გამოთვალეთ საწარმოს მიერ 5 წლის განმავლობაში გამოშვებული პროდუქციის ღირებულება.

10. მოქალაქის მიერ სამი წლის შემდეგ დაბრუნებული სესხი, რომელიც აღებული იყო სარგებლის რთული 7 %-იანი განაკვეთით, 10 000 დოლარის ტოლია. იპოვეთ რამდენი დოლარი აიღო სესხად მოქალაქემ?

11. ვთქვათ, ბანკიდან აღებულია სესხად 8 000 დოლარი 4 წლის ვადით სარგებლის წლიური რთული 12 %-იანი განაკვეთით. მოვალე ბანკს ყოველწლიურად უბრუნებს 2000 დოლარს და დარჩენილი ვალის 10 %-ს. გამოთვალეთ ბანკის მოგება 4 წლის შემდეგ.

12. ფერმერმა ბანკიდან 60 დღით ისესხა 1500 დოლარი სარგებლის

წლიური ნომინალური 9 %-იანი განაკვეთით.

(ა) რა რაოდენობის თანხას გადაუხდის ბანკს ფერმერი საკრედიტო ვადის გასვლის შემდეგ?

(ბ) რა რაოდენობის სარგებელს გადაიხდის მეანაბრე?

13. კერძო პირმა ბანკიდან ისესხა 1500 დოლარი ექვსი თვის ვადით სარგებლის წლიური ნომინალური 24 %-იანი განაკვეთით.

(ა) რა რაოდენობის თანხას გადაუხდის ბანკს მოვალე ექვსი თვის შემდეგ?

(ბ) რა რაოდენობის სარგებელს გადაიხდის მოვალე?

14. საწყისი თანხა 25000 დოლარის ოდენობით ინვესტირებულია სარგებლის წლიური რთული 12 %-იანი განაკვეთით. რა პერიოდის შემდეგ გადააჭარბებს დაგროვილი თანხა 250 000 დოლარს?

15. ფირმამ გამოთვალა, რომ მისი ამონაგები ყოველწლიურად გაიზრდება რთული 3 %-ით. გარდა ამისა, მან უნდა გაყიდოს 10 000 ერთეულზე მეტი საქონელი, რომ მას მოგება დარჩეს. ფირმა აღებულ მომენტში ყიდის 9000 ერთეულს. რამდენი წელი დასჭირდება ფირმას, რომ მისი წარმოება გავიდეს არაწამგებიან დონეზე?

16. იურიდიული პირი სესხად ითხოვს ბანკიდან 2000 დოლარს. ბანკი დაეთანხმა შემდეგი ორი პირობით: 1) თანხა უნდა დაბრუნდეს 4 თვეში; 2) ბანკის სარგებელის განაკვეთია თვიური 1 % (ე. ი. ყოველ თვეში დარჩენილ გადაუხდელ ვალს ემატება მისი 1 %). შეადგინეთ ვალის დაფარვის გეგმა.

17. მეანაბრეს ყოველი წლის დასაწყისში შეაქვს საანაბრო ანგარიშზე 500 დოლარი 10 წლის განმავლობაში. იპოვეთ, რა თანხა დაუგროვდება მეანაბრეს, თუ ბანკის სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 11 %.

18. ბანკს აქვს სარგებლის განსხვავებული განაკვეთები შესატან თანხაზე დამოკიდებულებით. თუ ანაბარზე შესატანი თანხა არ აღემატება 5000 დოლარს, მაშინ სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 6 %. თუ შესატანი თანხა მეტია 5000 დოლარზე, მაგრამ არ აღემატება 20 000 დოლარს, მაშინ მოქმედებს რთული 7 %-იანი წლიური განაკვეთი. თუ შესა-

ტანი თანხა აღემატება 20 000 დოლარს, მაშინ წლიური რთული განაკვეთია 8 %. მეანაბრეს ბანკში შეაქვს 4 000 დოლარი. გამოთვალეთ დაგროვილი თანხა 30 წლის შემდეგ, თუ ანაბარი ავტომატურად გადადის სარგებლის უფრო მაღალი განაკვეთის სფეროში, როგორც კი ანაბრის თანხა გადააჭარბებს შესაბამის ზღვრულ დონეებს.

19. განსაზღვრეთ ყოველთვიური გადასახადის სიდიდე 50 000 დოლარი ვალისათვის, რომელიც აღებულია 25 წლით 9 %-იანი წლიური რთული განაკვეთით. როგორ შეიცვლება ყოველთვიური გადასახადი, თუ იმავე პირობებში:

(ა) სარგებლის განაკვეთი გახდება 10 %?

(ბ) ვალის დაბრუნების პერიოდი შემცირდება 20 წლამდე?

შეადარეთ მიღებული შედეგები.

20. იპოვეთ 1000 დოლარის შესაბამისი დისკონტირებული თანხა, თუ დროის ინტერვალია 4 წელი, ხოლო სარგებლის ნომინალური წლიური რთული განაკვეთია 10 % ნახევარწლიური დარიცხვით.

21. იპოვეთ 100 000 დოლარის შესაბამისი დისკონტირებული თანხა, თუ დროის ინტერვალია 10 წელი, ხოლო სარგებლის ნომინალური წლიური რთული განაკვეთია 8 % კვარტალური დარიცხვით.

22. საინვესტიციო პროექტი მოითხოვს 8000 დოლარის ინვესტიციას და იძლევა გარანტიას, რომ 5 წლის შემდეგ დაუბრუნებს ინვესტორს 17 000 დოლარს. ცნობილია, რომ თანხის დაბანდება საფინანსო ბაზარზე შესაძლებელია სარგებლის წლიური რთული 15 %-იანი განაკვეთით.

გამოთვალეთ:

(ა) წმინდა საწყისი სიდიდე;

(ბ) სარგებლის შიგა განაკვეთი.

გაანალიზეთ, სასურველია თუ არა პროექტში მონაწილეობა.

23. იპოვეთ საწყისი თანხა იმ ანუიტეტისა, რომელიც ყოველ ნახევარ წელიწადში იძლევა 2000 დოლარ შემოსავალს 10 წლის მანძილზე, თუ სარგებლის ნომინალური წლიური რთული განაკვეთია 6 %.

24. განსაზღვრეთ იმ ანუიტეტის საწყისი თანხა, რომელიც იძლევა ყო-

ველკვარტალურ 1200 დოლარ შემოსავალს ხუთი წლის განმავლობაში, თუ სარგებლის წლიური რთული ნომინალური განაკვეთია 8 %.

25. იპოვეთ საწყისი თანხა იმ ანუიტეტისა, რომელიც ყოველი წლის ბოლოს იძლევა 10 000 დოლარ შემოსავალს ათი წლის განმავლობაში, თუ სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 7 %.

26. ფირმას აქვს არჩევანი დააბანდოს 8 000 დოლარი ორი A და B პროექტიდან ერთში. ამ პროექტებიდან შემოსავალი წლების მიხედვით მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

წელიწადი	ფირმის შემოსავალი	
	A პროექტი	B პროექტი
1	$a_1 = 2000$	$b_1 = 1000$
2	$a_2 = 2000$	$b_2 = 1000$
3	$a_3 = 3000$	$b_3 = 2000$
4	$a_4 = 3000$	$b_4 = 6000$
5	$a_5 = 3000$	$b_5 = 4000$
სულ	13000	14000

ცნობილია, რომ სარგებლის საბაზრო წლიური რთული განაკვეთია 15 %. რომელ პროექტში მონაწილეობაა უფრო მომგებიანი?

27. მთავრობის მიერ გამოშვებული ათწლიანი ობლიგაციის თავდაპირველი ღირებულება იყო 1000 დოლარი, მარტივი 7 %-იანი ყოველწლიური სარგებლით. განსაზღვრეთ ობლიგაციის საწყისი ღირებულება, თუ გამოსყიდვამდე დარჩენილია 3 წელი და სარგებლის საბაზრო წლიური რთული განაკვეთია 8 %.

28. განსაზღვრეთ 7000 დოლარის შესაბამისი საწყისი თანხა, თუ დროის ინტერვალია 2 წელი, ხოლო სარგებლის ნომინალური წლიური რთული განაკვეთია 8 %:

(ა) ყოველკვარტალური დარიცხვით;

(ბ) ყოველთვიური დარიცხვით.

29. საინვესტიციო პროექტი 20 000 დოლარის ინვესტორს ჰპირდება 8000 დოლარის მოგებას ხუთ წელიწადში.

(ა) გამოთვალეთ სარგებლის შიგა განაკვეთი (IRR);

(ბ) მომგებიანია თუ არა ეს პროექტი, თუ სარგებლის საბაზრო წლიური რთული განაკვეთია 6 %.

30. ვთქვათ, ინვესტორს აქვს 100 000 დოლარი. მას შეუძლია, მიიღოს მონაწილეობა სამი – A, B და C საინვესტიციო სამწლიანი პროექტიდან მხოლოდ ერთში. A პროექტი მოითხოვს საწყის 20 000 დოლარ თანხას, B პროექტი – 30 000 დოლარს, ხოლო C პროექტი – 100 000 დოლარს. ამასთან A პროექტი გარანტიას იძლევა, რომ ინვესტორს დაუბრუნებს 25 000 დოლარს, B პროექტი – 37 000 დოლარს, ხოლო C პროექტი – 117 000 დოლარს (3 წლის შემდეგ). რომელი პროექტი უფრო მომგებიანია ფინანსურად, თუ სარგებლის საბაზრო წლიური რთული განაკვეთია 5 %?

თავი 5. რიცხვითი მიმდევრობები. უწყვეტი დარიცხვა. დისკონტირება უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში. რიცხვითი მწკრივები

ამ თავში, ფაქტობრივად, ვიწყებთ მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ნაწილის — მათემატიკური ანალიზის ელემენტების შესწავლას.

ეკონომიკური საკითხების გამოკვლევისას ძალიან ხშირად ისეთ ამოცანებს ვიხილავთ, რომლებიც დაკავშირებულია ზღვრულ პროცესებთან. ამის საილუსტრაციოდ შეგვიძლია განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. წინა თავის მასალიდან უკვე ვიცით, რომ თუ სარგებლის ნომინალური წლიური რთული განაკვეთია r %, მრავალჯერადი დარიცხვით 1 წელიწადში, მაგალითად:

(ა) ყოველწლიური $(m=1)$,

(ბ) ყოველკვარტალური $(m=4)$,

(გ) ყოველთვიური $(m=12)$,

(დ) ყოველდღიური $(m=365)$,

(ე) ყოველსაათობრივი $(m=365\cdot 24=8760)$,

დარიცხვით, მაშინ საწყისი K თანხის შესაბამისი საბოლოო K_{mn} თანხა n წლის შემდეგ გამოითვლება, შესაბამისად, შემდეგი ფორმულებით:

(ა) $K_n = K\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n$,

(ბ) $K_{4n} = K\left(1+\dfrac{r}{4\cdot 100}\right)^{4n}$,

(გ) $K_{12n} = K\left(1+\dfrac{r}{12\cdot 100}\right)^{12n}$,

(დ) $K_{365n} = K\left(1+\dfrac{r}{365\cdot 100}\right)^{365n}$,

(ე) $K_{8760n} = K\left(1 + \frac{r}{8760 \cdot 100}\right)^{8760n}$.

ამ ფორმულებში m აღნიშნავს დარიცხვების რაოდენობას 1 წელიწადში. ამიტომ $\frac{1}{m}$ წარმოადგენს დარიცხვის პერიოდის ხანგრძლივობას. ყველა ეს თანაფარდობა შეგვიძლია ჩავწეროთ ერთი საერთო ფორმულით

$$K_{mn} = K\left(1 + \frac{r}{m \cdot 100}\right)^{mn}, \quad m = 1, 4, 12, 365, 8760.$$

ზემოთ განხილული ვარიანტების შედარება გვიჩვენებს, რომ რაც უფრო იზრდება წელიწადში დარიცხვების რაოდენობა m ($m = 1$, 4, 12, 365, 8760), მით უფრო მცირდება დარიცხვის პერიოდის ხანგრძლივობა $\left(\frac{1}{m} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{365}, \frac{1}{8760}\right)$.

დავსვათ შემდეგი კითხვა: რა ხდება, როდესაც წელიწადში დარიცხვების რაოდენობა m შემოუსაზღვრელად იზრდება, ე. ი. $m \to \infty$ („m მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ")?

ცხადია, რომ m-ის უსასრულოდ ზრდასთან ერთად დარიცხვის პერიოდის ხანგრძლივობა $\frac{1}{m}$ ძალიან მცირე ხდება. როგორ იცვლება ამ დროს K_{mn} საბოლოო თანხა რომლის გამოსათვლელ ფორმულაშიც ფუძე $\left(1 + \frac{r}{m \cdot 100}\right)$ უახლოვდება 1-ს, ხოლო ხარისხის მაჩვენებელი mn უსასრულოდ იზრდება?

ამ და მის მსგავს კითხვებზე ჩვენ ჯერჯერობით პასუხის გაცემა არ შეგვიძლია. ასეთი პრობლემების შესწავლა მოითხოვს მათემატიკის ერთ-ერთი საბაზისო საკითხის — ზღვართა თეორიის ცოდნას.

ქვემოთ ჩვენ შემოვიღებთ მიმდევრობების ზღვრის ცნებას და მას გამოვიყენებთ თანხის ნამატის გამოსათვლელად ე. წ. უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში. გამოვიყვანთ აგრეთვე უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში დი-

სკონტირებული თანხის გამოსათვლელ ფორმულას.

იმდენად, რამდენადაც ზღვრის ცნება ამ სახელმძღვანელოს მთელი შემდგომი ნაწილის საფუძველს წარმოადგენს, ჩვენ შედარებით დეტალურად შევისწავლით მიმდევრობის ზღვრის თვისებებს და განვიხილავთ საილუსტრაციო მათემატიკურ მაგალითებს. ეს შემდგომში მკითხველს გაუადვილებს ზღვრული პროცესებით აღწერილი ამოცანების გაგებასა და ზღვრების გამოთვლის ტექნიკის დაუფლებას.

5.1. რიცხვითი მიმდევრობის მოცემის წესები

წინა თავში შევისწავლეთ არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიები, რომლებიც წარმოადგენს რიცხვთა მიმდევრობების კონკრეტულ შემთხვევებს. ამ პარაგრაფში კი განვიხილავთ ნამდვილ რიცხვთა ზოგად მიმდევრობებს და შემოვიღებთ მათემატიკის ერთ-ერთ ფუნდამენტურ ცნებას — ზღვრის ცნებას, რომელიც, როგორც ეს ამ თავის შესავალში აღვნიშნეთ, არსებითად გამოიყენება მრავალი ეკონომიკური ამოცანის გადაწყვეტის დროს.

მოვიტანოთ რიცხვითი მიმდევრობის განმარტება.

● თუ მოცემულია წესი, რომლის მიხედვითაც ყოველ ნატურალურ n რიცხვს შეესაბამება გარკვეული ნამდვილი a_n რიცხვი, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია **რიცხვითი მიმდევრობა**

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

რიცხვით მიმდევრობას აღნიშნავენ აგრეთვე $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ან $\{a_n\}$ სიმბოლოებით. ფაქტობრივად, უსასრულო რიცხვითი მიმდევრობა არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ასახვა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში. ■

a_1-ს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი, a_2-ს — მეორე წევრი და ა. შ. a_n-ს ეწოდება n-ური ანუ ზოგადი წევრი. ზოგადი წევრის მოცემით ნათელი წარმოდგენა გვექმნება მიმდევრობის ყოველ წევრზე და, მაშასადამე, მთელ მიმდევრობაზე.

განვიხილოთ შემდეგი კონკრეტული მიმდევრობები:

(1) $a_n = \frac{1}{n}$, ე.ი. გვაქვს მიმდევრობა $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$;

(2) $b_n = \frac{n}{n+1}$, ე.ი. გვაქვს მიმდევრობა $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$;

(3) $c_n = \frac{n+1}{n}$, ე.ი. გვაქვს მიმდევრობა $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$;

(4) $d_n = (-1)^n$, ე.ი. გვაქვს მიმდევრობა $-1, 1, -1, 1, \dots$;

(5) $e_n = 5n+7$, ე.ი. გვაქვს მიმდევრობა $12, 17, \dots, 5n+7, \dots$.

მიმდევრობა ძირითადად მოიცემა ანალიზური ან რეკურენტული წესით.

● ვიტყვით, რომ მიმდევრობა მოცემულია **ანალიზური წესით,** თუ მოცემულია ფორმულა, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რა მოქმედებანი უნდა შევასრულოთ n-ზე, რომ მივიღოთ მიმდევრობის ნებისმიერი n-ური წევრი. ■

მაგალითად, თუ მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით $a_n = 3n+1$, მაშინ შეგვიძლია გამოვთვალოთ ნებისმიერი წევრი. კერძოდ, $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 10$, $a_{20} = 61$, $a_{100} = 301$ და ა. შ.

● ვიტყვით, რომ მიმდევრობა მოცემულია **რეკურენტული წესით,** თუ მოცემულია მიმდევრობის პირველი ან რამდენიმე საწყისი წევრი და ფორმულა, რომლის საშუალებითაც გამოითვლება მიმდევრობის დანარჩენი წევრები. ■

რეკურენტული წესით მოცემული მიმდევრობის მაგალითებია:

(ა) $a_1 = 2$ და $a_{n+1} = a_n^2$, $n \ge 1$. ცხადია, რომ $a_2 = a_1^2 = 2^2$; $a_3 = a_2^2 = 2^4$ და ა.შ.

(ბ) $a_1 = a$ და $a_{n+1} = q\,a_n$, $n \ge 1$ (რეკურენტულად მოცემული უსასრულო გეომეტრიული პროგრესია: $a_1 = a$; $a_2 = q\,a_1 = q\,a$, $a_3 = q\,a_2 = q^2 a$, ...);

(გ) $a_1 = a$ და $a_{n+1} = a_n + d$, $n \ge 1$

(რეკურენტულად მოცემული უსასრულო არითმეტიკული პროგრესია: $a_1 = a$, $a_2 = a_1 + d = a + d$, $a_3 = a_2 + d = a + 2d$, ...).

5.2. ზრდადი და კლებადი მიმდევრობები. შემოსაზღვრული მიმდევრობა

შემოვიღოთ შემდეგი განმარტებები.

● $\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **ზრდადი**, თუ

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

და ეწოდება **კლებადი**, თუ

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots .$$

$\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **არაკლებადი**, თუ

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le a_{n+1} \le \cdots$$

და ეწოდება **არაზრდადი**, თუ

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \cdots$$ ■

● ზრდად, კლებად, არაკლებად და არაზრდად მიმდევრობებს **მონოტონური** მიმდევრობები ეწოდება. ■

შევნიშნოთ, რომ პარაგრაფ 5.1-ში ამოწერილი მიმდევრობებიდან

(1) მიმდევრობა კლებადია, რადგან $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots$,

(2) მიმდევრობა ზრდადია, რადგან $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \cdots$,

(3) მიმდევრობა კლებადია, რადგან $2 > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \cdots$,

(4) მიმდევრობა არც კლებადია და არც ზრდადი, ე. ი. არამონოტონურია,

(5) მიმდევრობა ზრდადია, რადგან $12 < 17 < \cdots$.

● $\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **ზემოდან შემოსაზღვრული**, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომელიც მეტია ან ტოლი მიმდევრობის ყოველ წევრზე, ე. ი. $a_n \le M$. ■

● $\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **ქვემოდან შემოსაზღვრული**, თუ არსებობს ისეთი m რიცხვი, რომელიც ნაკლებია ან ტოლი მიმდევრობის ყოველ წევრზე, ე. ი. $a_n \ge m$. ■

● $\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **შემოსაზღვრული**, თუ ის ერთდროულად შემოსაზღვრულია ქვემოდანაც და ზემოდანაც, ე. ი. არსებობს ისეთი M და m რიცხვები, რომ ნებისმიერი n-თვის ადგილი აქვს $m \le a_n \le M$ უტოლობას. სხვა სიტყვებით, ეს იმას ნიშნავს, რომ მიმდევრობის ყველა წევრი მოთავსებულია m და M რიცხვებს შორის. ■

მარტივად ჩანს, რომ პარაგრაფ 5.1-ში ამოწერილი $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ მიმდევრობები შემოსაზღვრულია, ხოლო $\{e_n\}$ შემოსაზღვრულია ქვემოდან, მაგრამ არაა შემოსაზღვრული ზემოდან. მართლაც,

(1) თუ $a_n = \dfrac{1}{n}$, მაშინ $0 < a_n = \dfrac{1}{n} \le 1$,

(2) თუ $b_n = \dfrac{n}{n+1}$, მაშინ $0 < b_n = \dfrac{n}{n+1} < 1$,

(3) თუ $c_n = \dfrac{n+1}{n}$, მაშინ $0 < c_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \le 2$,

(4) თუ $d_n = (-1)^n$, მაშინ $-1 \le d_n \le 1$,

(5) თუ $e_n = 5n+7$, მაშინ $e_n > 0$ და n-ის ზრდასთან ერთად e_n უსასრულოდ იზრდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული $M > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $k \in \mathbb{N}$, რომ e_k გადააჭარბებს M რიცხვს: $e_k > M$.

5.3. მიმდევრობის ზღვარი და მისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

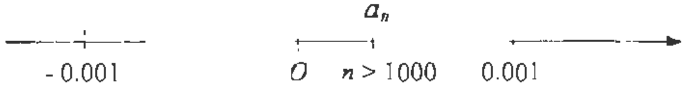
განვიხილოთ კონკრეტული მიმდევრობა $\{a_n\}$, სადაც $a_n = \dfrac{1}{n}$, და დავადგინოთ, რა ხდება, როდესაც n უსასრულოდ იზრდება (ანუ $n \to \infty$). როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ეს მიმდევრობა კლებადია

$$a_1 = 1 > a_2 = \frac{1}{2} > a_3 = \frac{1}{3} > \cdots > a_n = \frac{1}{n} > a_{n+1} = \frac{1}{n+1} > \cdots.$$

ცხადია, რომ როდესაც n ძალიან დიდი ნატურალური რიცხვია, მაშინ $a_n = \frac{1}{n}$ ძალიან მცირე დადებითი რიცხვია. თუ $a_n = \frac{1}{n}$, რიცხვებს გამოვსახავთ რიცხვით ღერძზე, დავინახავთ, რომ რაც უფრო დიდია n, მით უფრო ახლოსაა $a_n = \frac{1}{n}$ წერტილი O სათავესთან, ე. ი. მანძილი სათავესა და a_n წერტილს შორის ძალიან მცირდება (იხ. ნახ. 5.1).

ნახ. 5.1

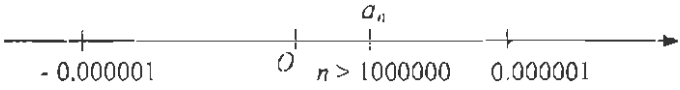
თუ ჩვენ ავიღებთ ინტერვალს $(-0.001,\ 0.001)$, მაშინ ადვილად დავინახავთ, რომ ეს ინტერვალი შეიცავს $\{a_n\}$ მიმდევრობის ყველა იმ წევრს, რომლის ინდექსი $n > 1000$, რადგან ასეთი n-თვის $0 < a_n = \frac{1}{n} < 0.001$ (იხ. ნახ. 5.2).



ნახ. 5.2

აღნიშნული ინტერვალის გარეთ დარჩება მიმდევრობის წევრების მხოლოდ სასრული რაოდენობა, კერძოდ, $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$.

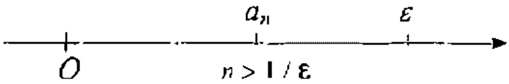
თუ ავიღებთ ინტერვალს $(-0.000001,\ 0.000001)$, მაშინ ყველა a_n წევრი მოხვდება ამ ინტერვალში, თუ $n > 1000000$, რადგან ასეთი n-თვის $0 < a_n < 0.000001$ (იხ. ნახ. 5.3).



ნახ. 5.3

ამ ინტერვალის გარეთ კვლავ დარჩება მიმდევრობის წევრების სასრული რაოდენობა, კერძოდ, $a_1, a_2, \dots, a_{1000000}$.

სრულიად ანალოგიური მსჯელობით მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ თუ ავიღებთ $(-\varepsilon,\varepsilon)$ ინტერვალს, სადაც ε ნებისმიერი (მცირე) დადებითი რიცხვია, მაშინ ამ ინტერვალში მოხვდება $\{a_n\}$ მიმდევრობის ყველა ის წევრი, რომლისთვისაც $\frac{1}{n}<\varepsilon$, ანუ $n>\frac{1}{\varepsilon}$, ხოლო დანარჩენი (სასრული რაოდენობა) წევრები დარჩება ინტერვალის გარეთ (იხ. ნახ. 5.4).



ნახ. 5.4

ამრიგად, როცა n მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, მაშინ $a_n=\frac{1}{n}$ რიცხვები უახლოვდება ნულს. თანაც, ნული ერთადერთი წერტილია, რომლის მახლობლობაშიც თავს იყრის ამ მიმდევრობის წევრების უსასრულო რაოდენობა.

ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $a_n=\frac{1}{n}$ მიმდევრობა მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა n მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ. ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \quad \text{ან} \quad \frac{1}{n}\to 0, \quad \text{როდესაც} \quad n\to\infty.$$

ახლა შემოვიღოთ მიმდევრობის ზღვრის ზუსტი მათემატიკური განმარტება.

● a რიცხვს ეწოდება $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $n_0=n_0(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა $n>n_0(\varepsilon)$, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|a_n-a|<\varepsilon. \blacksquare$$

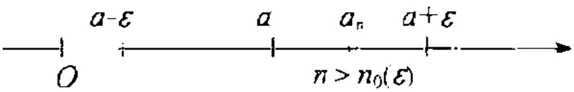
ის ფაქტი, რომ a არის $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, ჩაიწერება ასე

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = a.$$

იხმარება ასეთი აღნიშვნაც: $a_n \to a$, როცა $n \to \infty$.

მიმდევრობის ზღვარს ზოგად შემთხვევაშიც შეიძლება მივცეთ შემდეგი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. ვთქვათ, $\{a_n\}$ მიმდევრობის წევრები რიცხვით ღერძზე გამოსახულია წერტილებით. თუ a რიცხვი არის $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, მაშინ მიმდევრობის ყველა წევრი, გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობისა, მოთავსდება $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ ინტერვალის შიგნით.

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ინტერვალს ეწოდება a **წერტილის** ε **მიდამო** ან a **წერტილის სიმეტრიული მიდამო** (იხ. ნახ. 5.5).



ნახ. 5.5

● თუ $\{a_n\}$ რიცხვით მიმდევრობას გააჩნია ზღვარი, მაშინ მას **კრებადი** მიმდევრობა ეწოდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში მიმდევრობას **განშლადი ეწოდება**. ■

როგორც ზემოთ განხილული გეომეტრიული ინტერპრეტაცია გვიჩვენებს, თუ მიმდევრობის უსასრულო რაოდენობის წევრების თავმოყრა ხდება მხოლოდ ერთი წერტილის ნებისმიერ მიდამოში, მაშინ მიმდევრობა კრებადია ამ წერტილისაკენ. თუ რაიმე მიმდევრობის უსასრულო რაოდენობის წევრების თავმოყრა ხდება ორი ან მეტი წერტილის მიდამოში, ან მიმდევრობა არაა შემოსაზღვრული, მაშინ ეს მიმდევრობა განშლადია.

ვაჩვენოთ, რომ $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ მიმდევრობის ზღვარი ერთის ტოლია ანუ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი ε დადებითი რიცხვი და შევადგინოთ უტოლობა

$$\left|a_n - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

ეს უტოლობა მართებულია, თუ $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

მაგალითად,

თუ $\varepsilon = 0.1$, ე. ი. $\dfrac{1}{\varepsilon} = 10$, მაშინ ავირჩევთ $n_0 = 10$;

თუ $\varepsilon = 0.01$, ე. ი. $\dfrac{1}{\varepsilon} = 100$, მაშინ ავირჩევთ $n_0 = 100$;

თუ $\varepsilon = 0.001$, ე. ი. $\dfrac{1}{\varepsilon} = 1000$, მაშინ ავირჩევთ $n_0 = 1000$.

ამრიგად, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $n_0(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$ რიცხვი, რომ როცა $n > n_0(\varepsilon)$, მაშინ $\left|a_n - 1\right| < \varepsilon$, ე. ი.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1 .$$

მარტივი საჩვენებელია, რომ $a_n = a$ მუდმივი ანუ **სტაციონარული მიმდევრობის** ზღვარია a, ე. ი. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} a = a$, რადგანაც $\left|a_n - a\right| = 0 < \varepsilon$ ნებისმიერი დადებითი ε-თვის და ნებისმიერი n-თვის.

მართებულია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 5.1. თუ $a_n = a\,q^{n-1}$, სადაც $|q| < 1$ და $a \neq 0$, მაშინ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

▼ თუ $q = 0$, მაშინ თეორემის მართებულობა ცხადია. ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ $0 < |q| < 1$. ავიღოთ ε დადებითი რიცხვი და შევეცადოთ, მოვძებნოთ მისი შესაბამისი $n_0(\varepsilon)$. ამ მიზნით შევადგინოთ უტოლობა

$$\left|a_n - 0\right| < \varepsilon \quad \text{ანუ} \quad \left|a\,q^{n-1}\right| < \varepsilon.$$

აქედან

$$|q|^{n-1} < \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

გალოგარითმებით მივიღებთ

$$(n-1)\lg|q| < \lg\varepsilon - \lg|a|.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $0<|q|<1$ და ამიტომ $\lg|q|<0$, მაშინ უკანასკნელი უტოლობიდან დავასკვნით

$$n > \frac{\lg\varepsilon - \lg|a|}{\lg|q|} + 1.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ თუ $n_0(\varepsilon) = \dfrac{\lg\varepsilon - \lg|a|}{\lg|q|} + 1$, მაშინ $|a_n| < \varepsilon$, როცა $n > n_0(\varepsilon)$, ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \ ■$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $q=1$, მაშინ $a_n = a$. ასე რომ, $\{a_n\}$ მიმდევრობა კრებადია a-სკენ. აგრეთვე ცხადია, რომ თუ $|q|>1$ ან $q=-1$, მაშინ გეომეტრიული $a_n = a\,q^{n-1}$ $(a\neq 0)$ პროგრესია არ არის კრებადი. პირველ შემთხვევაში იგი არ არის შემოსაზღვრული, ხოლო მეორე შემთხვევაში ემთხვევა განშლად $(-1)^{n-1}a$ მიმდევრობას.

მართლაც, ვაჩვენოთ, რომ მიმდევრობა $a_n = (-1)^{n-1}a$, $a \neq 0$, განშლადია. ამ შემთხვევაში გვაქვს მიმდევრობა

$$a_1 = a,\ \ a_2 = -a,\ \ a_3 = a,\ \ a_4 = -a,\ \ldots .$$

აქედან კი ცხადია, რომ როგორც a წერტილის, ისე $-a$ წერტილის მიდამოები შეიცავს ამ მიმდევრობის წევრების უსასრულო რაოდენობას, რაც ამტკიცებს აღნიშნული მიმდევრობის განშლადობას.

თეორემა 5.2. არითმეტიკული პროგრესია განშლადია, თუ $d \neq 0$.

▼ ვინაიდან $a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 - d + dn$ მიმდევრობა შემოუსაზღვრელია, როცა $n\to\infty$, ამიტომ იგი განშლადია. ■

ვთქვათ, $\{a_n\}$ განშლადი მიმდევრობა არაა შემოსაზღვრული და მის

წევრებს გააჩნია შემდეგი თვისება: ნებისმიერი $M > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $n_0 = n_0(M)$ რიცხვი, რომ

$$a_n > M, \text{ როცა } n > n_0(M),$$

ან

$$a_n < -M, \text{ როცა } n > n_0(M),$$

მაშინ ვიტყვით, რომ $\{a_n\}$ მიმდევრობა მიისწრაფვის, შესაბამისად, $+\infty$-კენ ან $-\infty$-კენ $(a_n \to +\infty$ ან $a_n \to -\infty)$ და ფორმალურად ჩავწერთ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{ან} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, პირველ შემთხვევაში n-ის უსასრულოდ ზრდას მოსდევს ის, რომ შესაბამისი a_n რიცხვები შემოუსაზღვრელად იზრდება და გადააჭარბებს ნებისმიერ დიდ დადებით რიცხვს, ხოლო მეორე შემთხვევაში a_n რიცხვები შემოუსაზღვრელად მცირდება და ნაკლები გახდება ნებისმიერად დიდი მოდულის მქონე უარყოფით რიცხვზე. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ a_n განშლადი მიმდევრობა კრებადია შესაბამისად $+\infty$-კენ ან $-\infty$-კენ.

ამ შენიშვნის შემდეგ ცხადია, რომ არითმეტიკული $a_n = a_1 + d(n-1)$ პროგრესიისათვის გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \text{ თუ } d > 0,$$

ან

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \text{ თუ } d < 0.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $a_n \neq 0$ და $a_n \to +\infty$, ან $a_n \to -\infty$, მაშინ ორივე შემთხვევაში $\frac{1}{a_n} \to 0$, როდესაც $n \to \infty$.

ცხადია, არსებობს განშლადი შემოუსაზღვრელი მიმდევრობები, რომლებიც არაა კრებადი არც $+\infty$-კენ და არც $-\infty$-კენ. მაგალითად, $a_n = (-1)^n n^2$ არაა კრებადი არც $+\infty$-კენ და არც $-\infty$-კენ, რადგან ამ

მიმდევრობაში ნებისმიერი ნომრის შემდეგ გვხვდება, როგორც ძალიან დიდი დადებითი რიცხვი (კერძოდ, ლუწი n-თვის), ისე მოდულით ძალიან დიდი უარყოფითი რიცხვი (კერძოდ, კენტი n-თვის).

5.4. კრებადი მიმდევრობის ზოგიერთი თვისება

ამ პარაგრაფში დავამტკიცებთ კრებადი მიმდევრობების ზოგიერთ თვისებას. მრავალი მათგანი ინტუიციურად ცხადია, მაგრამ მიუხედავად ამისა, აქ ჩვენ საილუსტრაციოდ მოვიტანთ მათ მკაცრ მათემატიკურ დამტკიცებებს, რადგან მსგავსი მსჯელობები გვხვდება ყველგან, სადაც ზღვართან გვაქვს საქმე. ზოგიერთი თეორემის მტკიცება სცილდება ჩვენი კურსის ფარგლებს და ამიტომ ისინი ტექსტში ჩამოყალიბებულია დამტკიცების გარეშე.

თეორემა 5.3. კრებად მიმდევრობას მხოლოდ ერთი ზღვარი აქვს.

▼ დამტკიცება ჩავატაროთ წინააღმდეგობის დაშვების მეთოდით. ვთქვათ, $\{a_n\}$ მიმდევრობას ორი a და b $(a \neq b)$ ზღვარი აქვს. ვიგულისხმოთ, რომ $a<b$, მაშინ ε-ის შერჩევით ყოველთვის შეიძლება a და b წერტილების ისეთი $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ და $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ მიდამოების აგება, რომელთაც არ ექნებათ საერთო წერტილი. შევარჩიოთ ერთი რომელიმე ასეთი ε_0 და დავაფიქსიროთ იგი. რადგან a არის $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $n_0'(\varepsilon_0)$ რიცხვი, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$a-\varepsilon_0 < a_n < a+\varepsilon_0, \text{ როცა } n > n_0'(\varepsilon_0).$$

ასევე, რადგან b არის $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $n_0''(\varepsilon_0)$ რიცხვი, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$b-\varepsilon_0 < a_n < b+\varepsilon_0, \text{ როცა } n > n_0''(\varepsilon_0).$$

თუ $n_0(\varepsilon_0) = \max\{n_0'(\varepsilon_0),\ n_0''(\varepsilon_0)\}$, მაშინ, აღნიშნული უტოლობების თანახმად, ადგილი ექნება შემდეგ თანაფარდობებს:

$$a-\varepsilon_0 < a_n < a+\varepsilon_0, \text{ და } b-\varepsilon_0 < a_n < b+\varepsilon_0, \text{ როცა } n > n_0(\varepsilon_0).$$

ეს კი შეუძლებელია, რადგან აღნიშნულ ინტერვალებს არ გააჩნიათ საერთო წერტილები. ამრიგად, კრებად მიმდევრობას არ შეიძლება ჰქონდეს ორი ზღვარი. ■

თეორემა 5.4. კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

▼ ვთქვათ, $\{a_n\}$ მიმდევრობა კრებადია. ეს ნიშნავს, რომ მიმდევრობის ყველა წევრი, გარდა შესაძლებელია მათი სასრული რაოდენობისა, აღმოჩნდება $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ინტერვალის შიგნით, ე. ი.

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon, \text{ როცა } n > n_0(\varepsilon).$$

რადგან ინტერვალის გარეთ აღმოჩნდება მიმდევრობის წევრთა სასრული რაოდენობა, ამიტომ მათ შორის იარსებებს უდიდესი წევრი a' და უმცირესი წევრი a''. აღვნიშნოთ $c_1 = \min\{a'', a-\varepsilon\}$ და $c_2 = \max\{a', a+\varepsilon\}$. მაშინ ყოველი n-თვის გვექნება $c_1 \le a_n \le c_2$. ეს კი მიმდევრობის შემოსაზღვრულობას ნიშნავს. ■

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება: მიმდევრობას რომ ზღვარი ჰქონდეს, იგი აუცილებლად შემოსაზღვრული უნდა იყოს.

შევნიშნოთ, რომ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობიდან, ზოგადად, არ გამომდინარეობს მისი კრებადობა.

მაგალითად, მიმდევრობა $a_n = (-1)^n$ შემოსაზღვრულია, რადგან $-1 \le a_n \le 1$, მაგრამ, როგორც ზემოთ ვნახეთ, მას ზღვარი არ გააჩნია.

ზღვრების გამოთვლის დროს არსებითად გამოიყენება შემდეგი თეორემები.

თეორემა 5.5. თუ $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ მიმდევრობები კრებადია, მაშინ კრებადია $\{a_n + b_n\}$ მიმდევრობაც და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n}$$

▼ ვთქვათ,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad და \quad \lim_{n \to \infty} b_n = b.$$

ზღვრის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $n_0'(\varepsilon)$ და $n_0''(\varepsilon)$ რიცხვები, რომ

$$\left| a_n - a \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } n > n_0'(\varepsilon),$$

და

$$\left| b_n - b \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } n > n_0''(\varepsilon).$$

თუ $n > n_0(\varepsilon)$, სადაც $n_0(\varepsilon) = \max\{n_0'(\varepsilon),\ n_0''(\varepsilon)\}$, მაშინ ერთდროულად სრულდება უტოლობები:

$$\left| a_n - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad და \quad \left| b_n - b \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამიტომ, თუ $n > n_0(\varepsilon)$, მაშინ

$$\left| (a_n + b_n) - (a + b) \right| = \left| (a_n - a) + (b_n - b) \right| \le \left| a_n - a \right| + \left| b_n - b \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n. \ \blacksquare$$

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემები.

თეორემა 5.6. თუ $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ მიმდევრობები კრებადია, მაშინ კრებადია $\{a_n \cdot b_n\}$ მიმდევრობაც და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n}$$

კერძოდ, თუ $a_n = a$ სტაციონარული მიმდევრობაა, მაშინ

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} (a\, b_n) = a \lim_{n \to \infty} b_n}$$

ე. ი. მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ ზღვრის ნიშნის გარეთ. $\blacksquare$

თეორემა 5.7. თუ $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ მიმდევრობები კრებადია, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n \ne 0$ და ყოველი n-თვის $b_n \ne 0$, მაშინ $\left\{ \dfrac{a_n}{b_n} \right\}$ მიმდევრობა კრებადია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}}\quad\blacksquare$$

ამოცანა 5.1. გამოვთვალოთ $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ

$$a_n=\frac{5n+8n^2}{4-2n^2}.$$

▼ მნიშვნელისა და მრიცხველის გაყოფით n^2-ზე მივიღებთ

$$a_n=\frac{5n+8n^2}{4-2n^2}=\frac{\frac{5}{n}+8}{\frac{4}{n^2}-2}.$$

ზემოთ მოტანილი თეორემების ძალით გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+8}{\frac{4}{n^2}-2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}8}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}2}=\frac{0+8}{0-2}=-4.\ \blacksquare$$

ზღვართა თეორიაში უდიდესი გამოყენება აქვს შემდეგ თეორემას მონოტონური მიმდევრობის ზღვრის არსებობის შესახებ.

თეორემა 5.8. თუ მონოტონური მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ იგი კრებადია. ■

ძალიან ხშირად საჭიროა უტოლობაში ზღვარზე გადასვლა. ამ პრობლემას ეხება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.9. (ა) თუ $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ კრებადი მიმდევრობებია და ყოველი n-თვის $a_n<b_n$ ან $a_n\le b_n$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n;$$

(ბ) თუ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$ და ყოველი n-თვის

$$a_n\le c_n\le b_n,$$

მაშინ $\{c_n\}$ მიმდევრობა კრებადია და

$$\lim_{n\to\infty}c_n=c.$$

პრაქტიკული გამოთვლების დროს ხშირად გამოვიყენებთ აგრეთვე შემდეგ თეორემას.

თეორემა 5.10. თუ $\{a_n\}$ კრებადი მიმდევრობაა და k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}a_n}.$$

ამოცანა 5.2. გამოვთვალოთ $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ

$$a_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2n}.$$

▼ გარდავქმნათ მიმდევრობის ზოგადი წევრი

$$a_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2n}=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}}=$$

$$=\frac{n^2+n-n^2-2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}}=-\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}}=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}.$$

თეორემა 5.10-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty}a_n=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=-\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=-\frac{1}{2}.\ ■$$

ამოცანა 5.3. განვიხილოთ უსასრულო გეომეტრიული პროგრესია

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \ldots\ ,\ a_1q^{n-1},\ \ldots\ ,$$

სადაც $|q|<1$. გამოვთვალოთ მისი პირველი n წევრის ჯამის ზღვარი, როცა $n\to\infty$.

▼ როგორც ვიცით, გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი გამოითვლება ფორმულით

$$S_n=a_1\,\frac{q^n-1}{q-1}.$$

რადგან $|q|<1$, ამიტომ, თეორემა 5.1-ის თანახმად, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$. ამ ტოლობის გამოყენებით მარტივად მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}=\frac{a_1}{q-1}\lim_{n\to\infty}\left(q^n-1\right)=\frac{a_1}{q-1}(-1)=\frac{a_1}{1-q}.\ ■$$

ამოცანა 5.4. გამოვთვალოთ საწყისი $S^{(n)}$ თანხა იმ ანუიტეტისა, რომელიც ყოველწლიურად იძლევა 10000 დოლარ შემოსავალს n წლის განმავლობაში, თუ სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 7 %. როგორ იცვლება ეს საწყისი $S^{(n)}$ თანხა, როდესაც წლების რიცხვი n ძალიან იზრდება? რჩება თუ არა შემოსაზღვრული $S^{(n)}$ მიმდევრობა? რას უდრის $S^{(n)}$ მიმდევრობის ზღვარი? რა ფინანსური დასკვნა შეგვიძლია გავაკეთოთ მიღებული შედეგების საფუძველზე?

▼ მსგავსი ამოცანა ჩვენ ამოვხსენით პარაგრაფ 4.3-ში (იხ. ამოცანა 4.23). იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ n წლიანი ანუიტეტის საწყისი თანხა, უნდა ამოვწეროთ 10000 დოლარის შესაბამისი დისკონტირებული თანხები სარგებლის წლიური რთული 7 %-იანი განაკვეთის შემთხვევაში (1-დან n წლამდე ჩათვლით). k-ური წლის შესაბამისი თანხა ავღნიშნოთ P_k-თი. მაშინ მივიღებთ:

$$P_1 = 10000\left(1+\frac{7}{100}\right)^{-1} = 10000\cdot(1.07)^{-1},$$

$$P_2 = 10000\left(1+\frac{7}{100}\right)^{-2} = 10000\cdot(1.07)^{-2},$$

....

$$P_n = 10000\left(1+\frac{7}{100}\right)^{-n} = 10000\cdot(1.07)^{-n}.$$

ცხადია, რომ n წლიანი ანუიტეტის საწყისი თანხა გამოითვლება შემდეგი ტოლობით

$$S^{(n)} = P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 10000\cdot(1.07)^{-1}\left[1+(1.07)^{-1}+\cdots+(1.07)^{-(n-1)}\right].$$

გამოვიყენოთ გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულა

$$S^{(n)} = 10000\cdot(1.07)^{-1}\,\frac{(1.07)^{-n}-1}{(1.07)^{-1}-1} = \frac{10^6}{107}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{100}{107}\right)^n}{1-\dfrac{100}{107}} =$$

$$= \frac{10^6}{7}\left[1-\left(\frac{100}{107}\right)^n\right] = 142857.14\left[1-\left(\frac{100}{107}\right)^n\right].$$

ამრიგად, მივიღებთ

$$S^{(n)} = 142857.14\left[1-\left(\frac{100}{107}\right)^n\right].$$

ამ ფორმულიდან ცხადია, რომ $S^{(n)}$ მიმდევრობა ზრდადია და შემოსაზ-ღვრულია. მართლაც,

$$S^{(n)} < 142857.14$$

ნებისმიერი n-თვის, რადგან $1-\left(\frac{100}{107}\right)^n < 1$.

მეორე მხრივ,

$$S^{(n+1)} = 142857.14\left[1-\left(\frac{100}{107}\right)^{n+1}\right] =$$

$$= 142857.14\left[1-\left(\frac{100}{107}\right)^n\left(\frac{100}{107}\right)\right] > 142857.14\left[1-\left(\frac{100}{107}\right)^n\right] = S^{(n)}.$$

როდესაც n ძალიან იზრდება ($n\to\infty$), მაშინ, როგორც უკვე ვიცით (იხ. თეორემა 5.1),

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{100}{107}\right)^n = 0, \text{ რადგან } 0<\frac{100}{107}<1.$$

ამიტომ n-ის ზრდასთან ერთად $S^{(n)}$ იზრდება და უახლოვდება რიცხვს 142857.14-ს, ე. ი.

$$S^{(n)} \to 142857.14, \text{ როდესაც } n\to\infty,$$

ანუ

$$\lim_{n\to\infty} S^{(n)} = 142857.14.$$

ამ შედეგებიდან გამომდინარეობს საოცარი დასკვნა: თუ დაბანდებულია 142857.14 დოლარი, მაშინ უსასრულო დროის განმავლობაში ანუიტეტი ყოველწლიურად იძლევა 10000 დოლარ შემოსავალს (რადგან ყოველი ადამიანის ცხოვრების პერიოდი შემოსაზღვრულია, გარკვეული დროის შემდეგ აღნიშნულ შემოსავალს მიიღებენ მეანაბრის მემკვიდრეები, შემდეგ მემკვიდრეების მემკვიდრეები და ასე შემდეგ უსასრულოდ!). ■

5.5. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი

ხშირად საჭიროა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული წინადადების (ფორმულის) მართებულობის დამტკიცება ნებისმიერი ნატურალური n-თვის. ზოგჯერ ეს ხერხდება ე. წ. **მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით.**

აღნიშნული პრინციპი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასე.

წინადადება A_n ჭეშმარიტია ნებისმიერი ნატურალური $n \geq k \geq 1$ რიცხვისათვის, თუ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

(1) წინადადება A_n ჭეშმარიტია, როცა $n = k$;

(2) იმ დაშვებიდან, რომ A_n ჭეშმარიტია, როდესაც $n = n_0 \geq k$ გამომდინარეობს მისი ჭეშმარიტება, როდესაც $n = n_0 + 1$. თუ $k = 1$, მაშინ ზემოთ ჩამოყალიბებულ პრინციპს ეწოდება **სრული ინდუქციის პრინციპი,** ხოლო თუ $k > 1$, მაშინ – **არასრული ინდუქციის პრინციპი.**

ამოცანა 5.5. დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობის

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

მართებულობა ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის.

▼ ვუწოდოთ დასამტკიცებელ ტოლობას A_n წინადადება. გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი.

(1) ვაჩვენოთ, რომ A_n წინადადება ჭეშმარიტია, როცა $n = 1$.

A_1 ჭეშმარიტია, რადგან

$$\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{1+1}.$$

(2) დავუშვათ, რომ A_{n_0} ჭეშმარიტია, ე. ი. მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\sum_{j=1}^{n_0} \frac{1}{j(j+1)} = 1 - \frac{1}{n_0+1}.$$

ვაჩვენოთ, რომ მაშინ ჭეშმარიტია A_{n_0+1} წინადადება. მართლაც,

$$\sum_{j=1}^{n_0+1}\frac{1}{j(j+1)}=\sum_{j=1}^{n_0}\frac{1}{j(j+1)}+\frac{1}{(n_0+1)(n_0+2)}=1-\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{(n_0+1)(n_0+2)}=$$

$$=1-\frac{n_0+2-1}{(n_0+1)(n_0+2)}=1-\frac{1}{(n_0+1)+1}.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ A_{n_0+1} ჭეშმარიტია. ■

ამოცანა 5.6. დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობის ჭეშმარიტება

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის.

▼ აქაც გამოვიყენოთ სრული ინდუქციის პრინციპი. კვლავ ვუწოდოთ დასამტკიცებელ ტოლობას A_n წინადადება. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ A_1 ჭეშმარიტია. მართლაც, თუ $n=1$, მაშინ ტოლობა

$$1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$$

მართებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ A_{n_0} ჭეშმარიტია, ე. ი.

$$1^2+2^2+\cdots+n_0^2=\frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6}$$

და დავამტკიცოთ A_{n_0+1}-ის ჭეშმარიტება.

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$1^2+2^2+\cdots+n_0^2+(n_0+1)^2=\frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6}+(n_0+1)^2=$$

$$=\frac{n_0+1}{6}(2n_0^2+n_0+6n_0+6)=\frac{n_0+1}{6}(2n_0^2+7n_0+6)=$$

$$=\frac{(n_0+1)(n_0+2)(2n_0+3)}{6},$$

ე. ი.

$$1^2+2^2+\cdots+(n_0+1)^2=\frac{(n_0+1)\,[(n_0+1)+1]\,[2(n_0+1)+1]}{6}.$$

ეს ნიშნავს, რომ A_{n_0+1} ჭეშმარიტია. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ დასამტკიცებელი ტოლობა მართებულია. ■

ამოცანა 5.7. განვიხილოთ რეკურენტული წესით მოცემული მიმდევრობა

$$a_1=1,\ \ a_{n+1}=\sqrt{2a_n+6}-1,\quad n=1,2,3,\ \ldots$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს მიმდევრობა კრებადია და ვიპოვოთ მისი ზღვარი.

▼ სრული ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს მიმდევრობა ზრდადია, ე. ი. $a_{n+1}>a_n$.

მართლაც, ეს უტოლობა მართებულია $n=1$-თვის. ცხადია, რომ $a_2>a_1$, რადგან $a_2=\sqrt{2\cdot 1+6}-1=\sqrt{8}-1>1=a_1$.

ახლა დავუშვათ, რომ მართებულია უტოლობა $a_{n_0+1}>a_{n_0}$ $(n=n_0)$ და ვაჩვენოთ, რომ $a_{n_0+2}>a_{n_0+1}$ $(n=n_0+1)$. გვაქვს

$$a_{n_0+2}=\sqrt{2a_{n_0+1}+6}-1>\sqrt{2a_{n_0}+6}-1=a_{n_0+1},$$

ე. ი. უტოლობა $a_{n_0+2}>a_{n_0+1}$ ჭეშმარიტია.

ამრიგად, მივიღებთ, რომ მოცემული მიმდევრობა ზრდადია

$$a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}<\cdots.$$

სრული ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით ვაჩვენებთ აგრეთვე, რომ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია 3-ით, ე. ი. $a_n\le 3$.

მართლაც,

(1) უტოლობა მართებულია, როცა $n=1$: $a_1=1<3$;

(2) დავუშვათ დასამტკიცებელი უტოლობის მართებულობა $n=n_0$-თვის, ე. ი. $a_{n_0}<3$, და დავამტკიცოთ მისი მართებულობა $n=n_0+1$-თვის.

მარტივად მივიღებთ

$$a_{n_0-1} = \sqrt{2a_{n_0}+6} - 1 < \sqrt{2\cdot 3+6} - 1 = \sqrt{12} - 1 < 3 .$$

მაშასადამე, მივიღეთ, რომ a_n მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზემოდან 3-ით. რადგან მიმდევრობა ზრდადი და შემოსაზღვრულია, ამიტომ იგი კრებადია თეორემა 5.8-ის თანახმად. აღვნიშნოთ მისი ზღვარი a-თი: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. ვიპოვოთ a-ს რიცხვითი მნიშვნელობა. ამისთვის, გადავიდეთ ზღვარზე რეკურენტულ ტოლობაში $a_{n+1} = \sqrt{2a_n+6} - 1$. მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2a_n+6} - 1 \right).$$

აქედან $a = \sqrt{2a+6} - 1$ ანუ $a+1 = \sqrt{2a+6}$. კვადრატში აყვანით დავადგენთ, $a^2 = 5$. რადგან მიმდევრობის წევრები დადებითია, ამიტომ დავასკვნით, რომ $a = \sqrt{5}$. ■

5.6. ეილერის რიცხვი

ამ პარაგრაფში შემოვიღებთ მათემატიკაში ძალიან პოპულარული **e** რიცხვის განმარტებას. ეს რიცხვი ხშირად გამოიყენება სხვადასხვა ტიპის მათემატიკური ამოცანის გადაწყვეტის დროს. ქვემოთ ჩვენ შევხვდებით მის გამოყენებას ეკონომიკური საკითხების გამოკვლევისას.

განვიხილოთ რიცხვთა მიმდევრობა

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ მიმდევრობას გააჩნია სასრული ზღვარი. ამისათვის საკმარისია, ვაჩვენოთ, რომ ეს მიმდევრობა არის ზრდადი და ზემოდან შემოსაზღვრული. წინასწარ დავამტკიცოთ

ლემა 5.11. თუ $0 \le a < b$, მაშინ

$$b^n \left[(n+1)\, a - n\, b \right] < a^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

▼ გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის თანახმად,

გვაქვს

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

თუ ამ ტოლობაში შევიტანთ $q=\frac{a}{b}<1$, მივიღებთ

$$\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{a}{b}} < \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1-\text{ჯერ}} = n+1.$$

აქედან

$$b^{n+1}-a^{n+1} < (n+1)\,(b-a)\,b^n,$$

საიდანაც ვღებულობთ დასამტკიცებელ უტოლობას

$$b^n\left[(n+1)\,a-n\,b\right] < a^{n+1}. \blacksquare$$

თუ (5.1) უტოლობაში $a=1+\frac{1}{n+1}$ და $b=1+\frac{1}{n}$, მაშინ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

აქედან

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

ე. ი.

$$a_n < a_{n+1}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

ამრიგად, $\{a_n\}$ მიმდევრობა ზრდადია.

ვთქვათ, $a=1$ და $b=1+\frac{1}{2n}$, მაშინ (5.1) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\cdot\frac{1}{2} < 1,$$

ე. ი.

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$$

ანუ

$$a_{2n} < 4, \quad n \geq 1.$$

ვინაიდან $\{a_n\}$ მიმდევრობა ზრდადია, ამიტომ

$$a_{2n-1} = \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4.$$

ამრიგად, $a_n < 4$ ყოველი n-თვის, რაც ამტკიცებს $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზემოდან შემოსაზღვრულობას.

მაშასადამე, $\{a_n\}$ მიმდევრობა ზრდადი და ზემოდან შემოსაზღვრულია, ამიტომ (იხ. თეორემა 5.8) არსებობს ამ მიმდევრობის ზღვარი. ამ ზღვარს აღნიშნავენ e ასოთი და მას **ეილერის რიცხვს** უწოდებენ

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}. \tag{5.2}$$

მტკიცდება, რომ e ირაციონალური რიცხვია და მისი მიახლოებითი მნიშვნელობაა $\mathrm{e} \approx 2.718281828459045 23536...$

(5.2) ტოლობა ხშირად გამოიყენება კონკრეტული ტიპის ზღვრების გამოთვლის დროს.

კერძოდ, (5.2) ტოლობის საფუძველზე მტკიცდება, რომ მიმდევრობას

$$\left\{\left(1 + \frac{a}{m}\right)^{mb}\right\}_{m=1}^{\infty}$$

ზღვარი გააჩნია და

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{a}{m}\right)^{mb} = \mathrm{e}^{ab}, \tag{5.3}$$

სადაც a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია (იხ. სავარჯიშო 15).

როგორც უკვე შევნიშნეთ პარაგრაფ 1.17-ში, თუ ლოგარითმის ფუძე e რიცხვია, მაშინ მას ეწოდება **ნატურალური ლოგარითმი** და აღინიშნება შემდეგნაირად: $\log_{\mathrm{e}} b = \ln b$.

5.7. სარგებლის ნომინალური წლიური რთული განაკვეთი უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში

ახლა პასუხი გავცეთ ამ თავის შესავალში დასმულ პრობლემებს. კერძოდ, როგორ გამოვთვალოთ საბოლოო თანხა, როდესაც საწყისი თანხა და სარგებლის ნომინალური წლიური რთული განაკვეთი ფიქსირებულია, ხოლო დარიცხვის პერიოდის ხანგრძლივობა ძალიან მცირდება (მიისწრაფვის ნულისაკენ), ანუ დარიცხვების რაოდენობა 1 წელიწადში ძალიან იზრდება (მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ). თუ m-ით აღვნიშნავთ დარიცხვების რაოდენობას 1 წელიწადში, K-თი — საწყის თანხას, ხოლო r %-ით — სარგებლის ნომინალურ წლიურ რთულ განაკვეთს, მაშინ t წლის შემდეგ საბოლოო თანხა გამოითვლება ფორმულით

$$K_{mt} = K\left(1+\frac{r}{m\cdot 100}\right)^{mt}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{5.4}$$

ცხადია, რომ (5.4) ტოლობა განსაზღვრავს $\left\{K_{mt}\right\}_{m=1}^{\infty}$ მიმდევრობას, რომელშიც K, r და t ფიქსირებული რიცხვებია, ხოლო m გაირბენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს.

დავსვათ კითხვა: არსებობს თუ არა ამ K_{mt} მიმდევრობის ზღვარი, როდესაც $m \to \infty$?

მარტივი მსჯელობა გვიჩვენებს, რომ პასუხი ამ კითხვაზე დადებითია. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ (5.3) ტოლობას და ვიგულისხმებთ, რომ $a = \frac{r}{100}$ და $b = t$, ადვილად დავადგენთ, რომ

$$\lim_{m\to\infty} K_{mt} = \lim_{m\to\infty} K\left(1+\frac{r}{m\cdot 100}\right)^{mt} = K \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m\cdot 100}\right)^{mt} = K\,e^{\frac{rt}{100}}.$$

აღვნიშნოთ ეს ზღვარი K_t სიმბოლოთი. მაშინ

$$K_t = K\,e^{\frac{rt}{100}}. \tag{5.5}$$

ამ თანაფარდობას ეწოდება საბოლოო K_t თანხის გამოსათვლელი ფო-

რმულა t ვადის, საწყისი K თანხისა და სარგებლის ნომინალური წლიური რთული r % განაკვეთის საშუალებით **უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში.**

ეს სახელწოდება გამართლებულია იმით, რომ დარიცხვების m რაოდენობის უსასრულოდ ზრდისას დარიცხვის პერიოდის $\frac{1}{m}$ ხანგრძლივობა მიისწრაფვის ნულისაკენ და ამიტომ მიმდინარე თანხაზე დარიცხვა ფაქტობრივად უწყვეტად ხდება.

თუ $r > 0$, მაშინ (5.5) ფორმულა აღწერს თანხის უწყვეტი ზრდის კანონს, ხოლო თუ $r < 0$, მაშინ — თანხის უწყვეტი კლების კანონს.

ყველაზე არსებითი და თითქმის მოულოდნელი მომენტი, რაც დიდ ყურადღებას იმსახურებს უწყვეტი დარიცხვების დროს, არის შემდეგი: მიუხედავად იმისა, რომ დარიცხვების m რაოდენობა უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, რაც იწვევს შესაბამისი საბოლოო თანხების მიმდევრობის ზრდას, ზღვრული საბოლოო თანხა რჩება შემოსაზღვრული და გამოითვლება (5.5) ფორმულით.

ამრიგად, ახლა ჩვენ უკვე შეგვიძლია გამოვთვალოთ საბოლოო თანხები როგორც m-ჯერადი, ასევე უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები.

ამოცანა 5.8. 5000 დოლარი დაბანდებულია სარგებლის ნომინალური წლიური რთული 12 %-იანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რა თანხა დაუგროვდება მეანაბრეს 5 წლის შემდეგ?

▼ გამოვიყენოთ (5.5) ფორმულა და გამოვთვალოთ საბოლოო თანხა 5 წლის შემდეგ. შევნიშნოთ, რომ ჩვენს შემთხვევაში $K = 5000$, $r = 12$, $t = 5$. ამიტომ მივიღებთ

$$K_5 = 5000\, e^{\frac{12 \cdot 5}{100}} = 5000\, e^{0.6}. \ \blacksquare$$

ამოცანა 5.9. რა დრო არის საჭირო, რომ უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში სარგებლის ნომინალური წლიური რთული 10 %-იანი განაკვეთით დაბანდებული თანხა გაორმაგდეს?

▼ ამოცანის პირობის თანახმად, საძიებელია დროის ისეთი t პერიოდი,

რომ აღნიშნული წესით დაბანდებული K საწყისი თანხის შესაბამისი K_t თანხა გახდეს $2K$-ს ტოლი. გამოვიყენოთ (5.5) ფორმულა. მივიღებთ

$$K_t = K\, e^{\frac{10t}{100}} = 2K$$

ანუ

$$e^{0.1t} = 2.$$

აქედან გალოგარითმებით დავადგენთ, რომ $0.1t = \ln 2$, ე. ი. $t = 10\ln 2$. ამრიგად, თანხა გაორმაგდება $t = 10\ln 2 \approx 6.93$ წლის შემდეგ. ■

ამოცანა 5.10. სარგებლის როგორი წლიური რთული r^*%-იანი განაკვეთი შეესაბამება სარგებლის ნომინალურ წლიურ რთულ r%-იან განაკვეთს უწყვეტი დარიცხვების შემთხვევაში? იგულისხმება, რომ საწყისი და საბოლოო თანხები ერთი და იგივეა. შევადაროთ ერთმანეთს სარგებლის r^* და r განაკვეთები.

▼ ვთქვათ, K არის საწყისი თანხა, ხოლო K_t – საბოლოო თანხა, რომელიც დაგროვდა t წლის შემდეგ.

თუ სარგებლის დარიცხვა ხდება წელიწადში ერთხელ წლიური რთული r^*%-იანი განაკვეთით, მაშინ

$$K_t = K\left(1 + \frac{r^*}{100}\right)^t,$$

ხოლო სარგებლის ნომინალური წლიური რთული r%-იანი განაკვეთი უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში იმავე t წლის შემდეგ მოგვცემს

$$K_t = K\, e^{\frac{rt}{100}}.$$

რადგან საბოლოო თანხა (K_t), საწყისი თანხა (K) და დროის ხანგრძლივობა (t) ორივე შემთხვევაში ერთმანეთის ტოლია, ამიტომ მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობას

$$K\left(1 + \frac{r^*}{100}\right)^t = K\, e^{\frac{rt}{100}}$$

ანუ

$$1+\frac{r^*}{100}=e^{\frac{r}{100}}.$$

აქედან კი ვიპოვით

$$r^*=100\left[e^{\frac{r}{100}}-1\right].$$

მტკიცდება, რომ (იხ. ამოცანა 7.21 ბ)

$$e^{a}-1>a, \text{ როდესაც } a>0.$$

ამ უტოლობის გამოყენებით მარტივად დავასკვნით

$$r^*>100\cdot\frac{r}{100}=r.$$

ჩატარებული ანალიზიდან გამომდინარეობს, რომ სარგებლის ნომინალური წლიური რთული r %-იანი განაკვეთი უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში წლიური რთული r^*%-იანი განაკვეთის ტოლფასია. ამასთან, $r^*>r$. ამრიგად, ნომინალური წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით დაბანდება უწყვეტი დარიცხვის პირობით უფრო მომგებიანია მეანაბრისათვის, ვიდრე წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით დაბანდება წლიური (ერთჯერადი) დარიცხვით. ■

5.8. უწყვეტი დარიცხვის შესაბამისი დისკონტირება

ისე როგორც სარგებლის m-ჯერადი დარიცხვების დროს, უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაშიც შესაძლებელია მოიძებნოს ის საწყისი თანხა, რომელიც უზრუნველყოფს დასახელებული საბოლოო თანხის მიღებას დროის გარკვეული შუალედის გასვლის შემდეგ, თუ მოცემულია სარგებლის ნომინალური წლიური რთული განაკვეთი.

ამ ოპერაციას, როგორც ადრე აღვნიშნეთ, დისკონტირება ეწოდება. იმისათვის, რომ მოვძებნოთ K_t საბოლოო თანხის შესაბამისი K საწყისი (დისკონტირებული) თანხა დროის t შუალედში უწყვეტი დარიცხვების რეჟიმის შემთხვევაში, საჭიროა (5.5) ფორმულიდან განვსაზღვროთ K პარამეტრი. მივიღებთ

$$K = K_t \, e^{-\frac{r \cdot t}{100}}. \qquad (5.6)$$

ამ თანაფარდობას დროის t შუალედში უწყვეტი დარიცხვების შემთხვევაში **დისკონტირებული თანხის გამოსათვლელი ფორმულა** ეწოდება. $K_t - K$ სიდიდეს კვლავ **დისკონტი** ეწოდება.

ამოცანა 5.11. ვიპოვოთ 1000 დოლარის შესაბამისი დისკონტირებული თანხა უწყვეტი დარიცხვების შემთხვევაში, თუ დროის შუალედია 4 წელიწადი და სარგებლის ნომინალური წლიური რთული განაკვეთია 10 %.

▼ გამოვიყენოთ (5.6) ფორმულა. ჩვენს შემთხვევაში $K_t = 100$, $r = 10$, $t = 4$. ამიტომ მივიღებთ

$$K = 1000 \, e^{-\frac{10 \cdot 4}{100}} = 1000 \, e^{-0.4} \approx 670.32 \quad (\text{დოლარი}).$$

ამრიგად, ამოცანის პირობებში 1000 დოლარის დისკონტირებული თანხა 670.32 დოლარია. ■

5.9. რიცხვითი მწკრივის ცნება. მწკრივის ჯამი

რიცხვითი მიმდევრობის ცნებასთან მჭიდროდაა დაკავშირებული რიცხვითი მწკრივისა და მწკრივის ჯამის ცნებები.

განვიხილოთ რაიმე $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ რიცხვითი მიმდევრობა და შევადგინოთ შემდეგი გამოსახულება

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (5.7)$$

ცხადია, რომ ეს გამოსახულება არის ფორმალური ჯამი, რადგან მასში შესაკრებების რიცხვი უსასრულოა და შეკრების განხორციელება ელემენტარულ მათემატიკაში ცნობილი ალგორითმებით შეუძლებელია. (5.7) ტიპის უსასრულო რაოდენობის შესაკრებთა ფორმალურ ჯამს **რიცხვითი მწკრივი** ეწოდება, ხოლო a_n რიცხვებს – **მწკრივის წევრები**. a_n-ს უწოდებენ აგრეთვე მწკრივის **ზოგად წევრს**.

ისმება კითხვა: შეიძლება თუ არა (5.7) გამოსახულებას მივანიჭოთ რაიმე აზრი?

ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად შევადგინოთ შემდეგი რიცხვების მიმდევრობა

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

....

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

....

ამ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობას (5.7) **მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობა** ეწოდება, ხოლო S_n რიცხვს — n-**ური კერძო ჯამი.**

აშკარაა, რომ რაც უფრო დიდია n ნატურალური რიცხვი, შესაკრებთა მით უფრო მეტ რაოდენობას შეიცავს S_n კერძო ჯამი. ამასთან, ინტუიცია გვკარნახობს, რომ როდესაც $n \to \infty$, კერძო S_n ჯამში შესაკრებად შევა (5.7) გამოსახულების „თითქმის ყველა წევრი". ამ მოსაზრებიდან, გამომდინარე შემოვიღოთ შემდეგი განმარტება.

● თუ (5.7) მწკრივის კერძო ჯამების $\{S_n\}$ მიმდევრობას გააჩნია სასრული S ზღვარი, როდესაც $n \to \infty$, მაშინ (5.7) მწკრივს ეწოდება **კრებადი,** ხოლო

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

ზღვარს — (5.7) **მწკრივის ჯამი.** ამ შემთხვევაში ვწერთ

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S. \quad \blacksquare$$

თუ $\{S_n\}$ მიმდევრობა განშლადია, მაშინ (5.7) მწკრივს ეწოდება **განშლადი.**

შევნიშნოთ, რომ კრებადი მწკრივი კვლავ კრებადი დარჩება, თუ მას ჩამოვაცილებთ სასრულ რაოდენობა წევრებს (იხ. სავარჯიშო 5.10, ამოცანა 14).

ცხადია, თუ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, მაშინ $\lim\limits_{n \to \infty} S_{n-1} = S$. ამიტომ

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

ამრიგად, თუ მწკრივი კრებადია, მაშინ $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი ნულის ტოლია, ანუ ზოგადი a_n წევრი მისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n \to \infty$. ამ თვისებას უწოდებენ მწკრივის კრებადობის **აუცილებელ პირობას**. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ a_n ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n \to \infty$, მაშინ მწკრივი განშლადია. შევნიშნოთ, რომ ეს პირობა არ არის საკმარისი მწკრივის კრებადობისათვის.

მაგალითად, მტკიცდება, რომ ე. წ. **ჰარმონიული მწკრივი**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

განშლადია, მიუხედავად იმისა, რომ მისი ზოგადი წევრი $a_n=\frac{1}{n}$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n \to \infty$.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ მწკრივის კრებადობის რამდენიმე საკმარისი პირობა.

შედარების ნიშანი:

ვთქვათ, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ და $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ არაუარყოფითწევრებიანი მწკრივებია (ე. ი. $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$).

(ა) თუ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ მწკრივი კრებადია და ყოველი n-თვის

$$a_n \leq b_n,$$

მაშინ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი აგრეთვე კრებადია;

(ბ) თუ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ მწკრივი განშლადია და ყოველი n-თვის

$$a_n \geq b_n,$$

მაშინ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივიც განშლადია.

დალამბერის ნიშანი:

ვთქვათ, მოცემულია $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი და $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$.

(ა) თუ $q < 1$, მაშინ მოცემული მწკრივი კრებადია;

(ბ) თუ $q > 1$, მაშინ მოცემული მწკრივი განშლადია.

კოშის ნიშანი:

ვთქვათ, მოცემულია $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი და $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$.

(ა) თუ $q < 1$, მაშინ მოცემული მწკრივი კრებადია;

(ბ) თუ $q > 1$, მაშინ მოცემული მწკრივი განშლადია.

შევნიშნოთ, რომ დალამბერისა და კოშის ზემოთ ჩამოყალიბებული თეორემები $q = 1$ შემთხვევაში ვერ იძლევა პასუხს მწკრივის კრებადობის ან განშლადობის შესახებ. ასეთ შემთხვევაში მწკრივის კრებადობის დასადგენად საჭიროა დამატებითი გამოკვლევა.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

ამოცანა 5.12. გამოვიკვლიოთ

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots$$

მწკრივის კრებადობა. კრებადობის შემთხვევაში ვიპოვოთ მისი ჯამი.

▼ ცხადია, რომ ამ კონკრეტულ შემთხვევაში $a_n = q^{n-1}$, ხოლო $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა წარმოადგენს უსასრულო გეომეტრიულ პროგრესიას. მწკრივის კრებადობის დასადგენად გამოვიყენოთ დალამბერის ნიშანი. ამისათვის გამოვითვალოთ შემდეგი ზღვარი

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{q^n}{q^{n-1}} \right| = \lim_{n \to \infty} |q| = |q|.$$

ამიტომ, თუ $|q| < 1$, მაშინ მოცემული მწკრივი კრებადია, ხოლო თუ $|q| > 1$, მაშინ იგი განშლადია.

თუ $q=\pm 1$, მაშინ $a_n=(\pm 1)^{n-1}$ და, ცხადია, რომ a_n არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n\to\infty$, ე. ი. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა არ სრულდება. ამიტომ მწკრივი განშლადია.

ვთქვათ, $|q|<1$. როგორც უკვე დავადგინეთ, ამ შემთხვევაში მწკრივი კრებადია. ვიპოვოთ მისი ჯამი. ამისათვის გამოვთვალოთ n-ური კერძო ჯამი. გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის თანახმად (იხ. ფორმულა (4.22)), შეგვიძლია დავწეროთ

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

გავიხსენოთ, რომ თუ $|q|<1$, მაშინ თეორემა 5.1-ის ძალით,

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0.$$

ამიტომ მარტივად მივიღებთ (იხ. ამოცანა 5.3)

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-q}.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მოცემული მწკრივის ჯამია $\dfrac{1}{1-q}$ ანუ

$$1+q+\cdots+q^n+\cdots=\frac{1}{1-q}.$$

ამ ჯამს უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამს უწოდებენ. ■

5.10. სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ ზღვრები

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+13n-17}{n^2+25}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+3}-\dfrac{n}{2}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n}\right)^{n+1}$;

5) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$; 6) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$;

7) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{5n}\right)^{4n}$; 8) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2+9n} - \sqrt{n^2-n+1}\right)$.

2. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}.$$

3. 1000 დოლარი დაბანდებულია სარგებლის ნომინალური წლიური რთული 15 %-იანი განაკვეთით. იპოვეთ, რა თანხა დაგროვდება 4 წლის შემდეგ, თუ დარიცხვა წარმოებს უწყვეტად?

4. რა დროა საჭირო, რომ უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში სარგებლის ნომინალური წლიური რთული 10%-იანი განაკვეთით დაბანდებული თანხა გასამმაგდეს?

5. მოქალაქემ სესხად აიღო 3000 დოლარი სარგებლის ნომინალური წლიური რთული 9 %-იანი განაკვეთით. იპოვეთ, რა თანხა უნდა გადაიხადოს მოქალაქემ 5 წლის შემდეგ, თუ დარიცხვა ხდება:

(ა) ყოველწლიურად; (ბ) ყოველ ნახევარ წელიწადში;

(გ) ყოველთვიურად; (დ) ყოველდღიურად; (ე) უწყვეტად.

შეადარეთ ეს თანხები ერთმანეთს.

6. 500 დოლარი დაბანდებულია სარგებლის ნომინალური წლიური რთული 14 %–იანი განაკვეთით. იპოვეთ, რა თანხა დაგროვდება 2 წლის შემდეგ, თუ დარიცხვა ხდება:

(ა) ყოველწლიურად; (ბ) ყოველკვარტალურად; (გ) ყოველთვიურად;

(დ) ყოველდღიურად; (ე) ყოველსაათობრივად; (ვ) უწყვეტად.

შეადარეთ ეს თანხები ერთმანეთს.

7. განსაზღვრეთ საწყისი $S^{(n)}$ თანხა იმ ანუიტეტისა, რომელიც n წლის განმავლობაში ყოველწლიურად იძლევა 15000 დოლარ შემოსავალს, თუ სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 10 %. დაადგინეთ საწყისი

$S^{(n)}$ თანხების მიმდევრობის თვისებები. გამოთვალეთ $S^{(n)}$ მიმდევრობის ზღვარი, როდესაც $n \to \infty$. რა ფინანსური დასკვნის გაკეთების საშუალებას იძლევა მიღებული შედეგები?

8. როგორი უნდა იყოს სარგებლის ნომინალური წლიური რთული განაკვეთი, რომ უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში დაბანდებული 1000 დოლარი 10 წლის შემდეგ გახდეს 4000 დოლარი?

9. განსაზღვრეთ 7000 დოლარის შესაბამისი დისკონტირებული თანხა უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში, თუ დროის შუალედია ორი წელიწადი და სარგებლის ნომინალური წლიური რთული განაკვეთია 8 %.

10. გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7n+19}{(n+1)!}$.

11. იპოვეთ მწკრივის ჯამი:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n-2}}{8^{n+1}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n/4}}{7^{n/2}}$.

12. (ა) დაამტკიცეთ, რომ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$, $a>1$, $k \in \mathbb{R}$, კრებადი მწკრივია.

(ბ) მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $a>1$, $k \in \mathbb{R}$.

13. აჩვენეთ, რომ თუ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ, მაშინ მისი ყოველი უსასრულო ქვემიმდევრობა კრებადია იმავე a რიცხვისაკენ ($\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა ეწოდება $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობას, სადაც $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$).

14. აჩვენეთ, რომ თუ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ კრებადი მწკრივია, მაშინ $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ აგრეთვე კრებადია.

15. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{x_n \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

(მითითება: აჩვენეთ, რომ $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n} \le \left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, როცა $n \le x_n \le n+1$ და გამოიყენეთ თეორმა 5.9).

თავი 6. ამონაგების, დანახარჯისა და მოგების ფუნქციები. ფუნქციის ზღვარი. ფუნქციის უწყვეტობა

ამ თავში გავაგრძელებთ ზღვართა თეორიის შესწავლას ზოგადი ფუნქციების შემთხვევაში.

ფუნქციის ცნების შემოტანის შემდეგ, უპირველესად გამოვყოფთ და დავახასიათებთ იმ რიცხვით ფუნქციებს, რომლებითაც აღიწერება ბაზრის ეკონომიკურ მახასიათებლებს შორის კავშირი. ზოგიერთ მათგანს ჩვენ უკვე შევხვდით წინა თავში. ამ თავში კი დამატებით გავეცნობით პირდაპირპროპორციულობისა და უკუპროპორციულობის აღმწერ ფუნქციებს, კვადრატულ ფუნქციებსა და მათ ზოგიერთ გამოყენებას ეკონომიკაში. კერძოდ, შემოვიტანთ და შევისწავლით ამონაგების, დანახარჯისა და მოგების ფუნქციებს.

ფუნქციის ზღვრის განმარტების შემდეგ შემოვიღებთ ერთ-ერთ ფუნდამენტურ ცნებას — ფუნქციის უწყვეტობას. გავეცნობით ფუნქციის წყვეტის წერტილების კლასიფიკაციას და ეკონომიკაში ერთ-ერთ პოპულარულ წყვეტილ ფუნქციას — საფეხურა ფუნქციას.

ისევე, როგორც წინა თავებში, ამ თავშიც მკითხველი შეხვდება ეკონომიკურ ფუნქციებსა და ეკონომიკური ამოცანების ამოხსნის მათემატიკურ მეთოდებს.

6.1. ერთი ცვლადის ფუნქცია. შექცეული ფუნქცია. ფუნქციის გრაფიკი

დავიწყოთ ფუნქციის ზოგადი განმარტებით. ვთქვათ, X და Y ნებისმიერი (არა აუცილებლად რიცხვითი) სიმრავლეებია.

● თუ მოცემულია წესი f, რომლის მიხედვითაც X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის ერთადერთი y ელემენტი, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია ფუნქცია და ვწერთ:

$X \xrightarrow{f} Y$ ან $f: X \to Y$, ან $y = f(x)$. ■

x-ს უწოდებენ **დამოუკიდებელ ცვლადს** ანუ **არგუმენტს**, ხოლო y-ს – **დამოკიდებულ ცვლადს** ანუ **ფუნქციას**. $f(x)$-ს უწოდებენ ფუნქციის მნიშვნელობას, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის x მნიშვნელობას. შევნიშნოთ, რომ $f(x)$-ს აგრეთვე უწოდებენ **სახეს**, ხოლო x-ს – **წინასახეს**. ზოგჯერ სიტყვა „ფუნქციის“ ნაცვლად იხმარება ტერმინი **„ასახვა“**.

X სიმრავლეს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **განსაზღვრის არე** და მას აღნიშნავენ $D(f)$ სიმბოლოთი, ხოლო Y სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა ქვესიმრავლეს, რომლებიც X სიმრავლის ერთ ელემენტს მაინც შეესაბამება, ფუნქციის **მნიშვნელობათა სიმრავლე** ეწოდება და აღინიშნება $E(f)$ სიმბოლოთი.

f ფუნქციას, რომლისთვისაც $D(f)=X$, ხოლო $E(f)\subset Y$, უწოდებენ X **სიმრავლის ასახვას** Y **სიმრავლეში**, ხოლო თუ $E(f)=Y$, მაშინ ამბობენ, რომ f არის X **სიმრავლის ასახვა** Y **სიმრავლეზე**.

X სიმრავლის ასახვას Y სიმრავლეზე ეწოდება ურთიერთცალსახა, თუ ყოველ სახეს შეესაბამება ერთადერთი წინასახე. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ყოველ y ელემენტს Y-დან ცალსახად შეესაბამება მისი x წინასახე X-დან. ამ შესაბამისობას, რომელიც Y სიმრავლეს X სიმრავლეზე ასახავს, f ფუნქციის **შექცეული ფუნქცია** ეწოდება და აღინიშნება f^{-1} სიმბოლოთი:

$$f^{-1}: Y \to X \quad \text{ანუ} \quad x = f^{-1}(y).$$

f^{-1} ფუნქციის განსაზღვრის არეა $E(f)$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $D(f)$, ე. ი. $D(f^{-1})=E(f)$ და $E(f^{-1})=D(f)$.

f და f^{-1} ასახვებს **ურთიერთშექცეულ** ფუნქციებს უწოდებენ. შექცევადია მხოლოდ ის ფუნქცია, რომელიც თავის ყოველ მნიშვნელობას ღებულობს არგუმენტის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობისათვის.

ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე რიცხვითი სიმრავლეებია, **რიცხვითი ფუნქცია** ეწოდება. ჩვენ ძირითადად

განვიხილავთ და შევისწავლით რიცხვით ფუნქციებს. რიცხვითი ფუნქციების შემთხვევაში ხშირად გამოიყენება მათი გრაფიკული წარმოდგენა.

● რიცხვითი **ფუნქციის გრაფიკი** ეწოდება საკოორდინატო სიბრტყის ყველა იმ (x, y) წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვისაც $y = f(x)$. ■

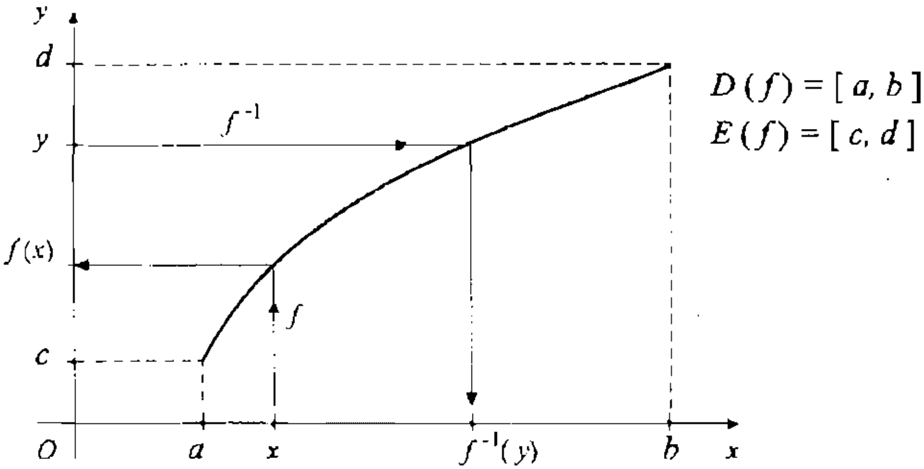
ზოგადად, ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს წირს Oxy სიბრტყეში და $y = f(x)$ თანაფარდობას უწოდებენ ამ წირის განტოლებას. მარტივად დავასკვნით, რომ $y = f(x)$ რიცხვითი ფუნქციის შექცევადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $y = f(x)$ განტოლებას x-ის მიმართ ჰქონდეს მხოლოდ ერთი ამონახსნი ნებისმიერი y-თვის $E(f)$ სიმრავლიდან. პირდაპირი

$$f : D(f) \to E(f)$$

და შექცეული

$$f^{-1} : E(f) \to D(f)$$

ფუნქციები გრაფიკულად შეგვიძლია ასე აღვწეროთ (იხ. ნახ. 6.1)



ნახ. 6.1

შექცეული ფუნქციის ასაგებად საჭიროა, ჯერ ამოვხსნათ $f(x) = y$ განტოლება x-ის მიმართ

$$x = f^{-1}(y),$$

ხოლო შემდეგ შევუცვალოთ ადგილები x და y ცვლადებს

$$y = f^{-1}(x)$$

(რადგან ტრადიციულად x-ით აღინიშნება დამოუკიდებელი ცვლადი ანუ არგუმენტი, ხოლო y-ით — ფუნქცია).

მაგალითად, ვთქვათ $y = f(x) = 3x - 17$. აქედან

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y + \frac{17}{3}.$$

ამიტომ შექცეული ფუნქცია იქნება

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{17}{3}.$$

მტკიცდება, რომ ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულია პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის მიმართ (ე.ი. $y = x$ წრფის მიმართ).

6.2. რიცხვითი ფუნქციის მონოტონურობა, ლუწობა, კენტობა და შემოსაზღვრულობა

რიცხვითი ფუნქციის გამოკვლევის დროს ძალიან ამარტივებს საქმეს ისეთი თვისებების წინასწარი დადგენა, როგორიცაა ფუნქციის მონოტონურობა, ლუწობა და კენტობა, შემოსაზღვრულობა და სხვა. მოვიტანოთ აღნიშნული თვისებების განმარტებები.

● რაიმე შუალედში განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება **ზრდადი**, თუ ამ შუალედის ნებისმიერი x_1 და x_2 მნიშვნელობებისათვის $x_2 > x_1$ უტოლობიდან გამომდინარეობს უტოლობა $f(x_2) > f(x_1)$.

f ფუნქციას ეწოდება **არაკლებადი** მოცემულ შუალედში, თუ $f(x_2) \geq f(x_1)$, როცა $x_2 > x_1$. ■

ზრდადი $y = f(x)$ ფუნქციის შემთხვევაში, როცა x არგუმენტი განსაზღვრის არეში მოძრაობს მარცხნიდან მარჯვნივ, მაშინ $(x, f(x))$ წერტილი შესაბამის გრაფიკზე მოძრაობს „ქვემოდან ზემოთ".

● რაიმე შუალედში განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება **კლებადი ფუნქცია**, თუ ამ შუალედის ნებისმიერი x_1 და x_2 მნიშვნელობებისათვის $x_2 > x_1$ უტოლობიდან გამომდინარეობს უტოლობა $f(x_2) < f(x_1)$.

f ფუქციას ეწოდება **არაზრდადი** მოცემულ შუალედში, თუ $f(x_2) \leq f(x_1)$, როცა $x_2 > x_1$. ■

კლებადი $y = f(x)$ ფუნქციის შემთხვევაში, როდესაც x არგუმენტი განსაზღვრის არეში მოძრაობს კვლავ მარცხნიდან მარჯვნივ, მაშინ $(x, f(x))$ წერტილი შესაბამის გრაფიკზე მოძრაობს „ზემოდან ქვემოთ". რაიმე შუალედში ზრდად, კლებად, არაკლებად და არაზრდად ფუნქციებს ეწოდება **მონოტონური ფუნქციები** შესაბამის შუალედში.

● f ფუნქციას ეწოდება **ლუწი**, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია სათავის მიმართ (ე. ი. თუ $x \in D(f)$, მაშინ $-x \in D(f)$) და ყოველი x-თვის განსაზღვრის $D(f)$ სიმრავლიდან $f(-x) = f(x)$. ■

ცხადია, რომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ.

● f ფუნქციას ეწოდება **კენტი**, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია სათავის მიმართ და ნებისმიერი x-თვის განსაზღვრის $D(f)$ სიმრავლიდან $f(-x) = -f(x)$. ■

ასევე ცხადია, რომ კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

● რაიმე შუალედში განსაზღვრულ $y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **შემოსაზღვრული ზემოდან (ქვემოდან)**, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი M რიცხვი (m რიცხვი), რომ ამ შუალედის ნებისმიერი x წერტილისათვის სრულდება უტოლობა

$$f(x) \leq M \qquad (f(x) \geq m).$$

$y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **შემოსაზღვრული**, თუ არსებობს ისეთი m და M რიცხვები, რომ არგუმენტის ნებისმიერი $x \in D(f)$ მნიშვნელობისათვის სრულდება უტოლობა

თუ ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული, მაშინ მას **შემოუსაზღვრელი** ეწოდება. ■

ადვილია იმის შემჩნევა, რომ ზემოდან შემოსაზღვრული ფუნქციის გრაფიკი ძევს $y = M$ წრფის ქვემოთ, ქვემოდან შემოსაზღვრული ფუნქციის გრაფიკი ძევს $y = m$ წრფის ზემოთ, ხოლო შემოსაზღვრული ფუნქციის გრაფიკი ძევს $y = m$ და $y = M$ წრფეებს შორის.

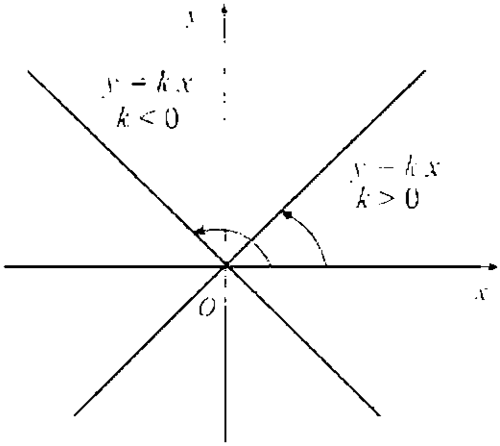
განვიხილოთ კონკრეტული ფუნქციები, რომლებიც ხშირად გამოიყენება ეკონომიკური ამოცანების მათემატიკური მოდელირების დროს.

6.3. $y = kx$ ფუნქცია (პირდაპირპროპორციულობა)

$y = kx$ ფუნქცია განსაზღვრავს **პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას** x და y ცვლადებს შორის. k პარამეტრს ეწოდება პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი. ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty, +\infty)$ შუალედი. $y = kx$ ფუნქცია კენტია. მოცემული ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს წრფეს, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე. Ox ღერძთან წრფის დახრის კუთხეს განსაზღვრავს k კოეფიციენტი: $k = \operatorname{tg}\alpha$, სადაც α არის საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით ათვლილი კუთხე, რომელსაც მოცემული წრფე ადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან. თუ $k > 0$, მაშინ $y = kx$ ფუნქცია ზრდადია, მისი გრაფიკი მოთავსებულია I და III საკოორდინატო მეოთხედებში და ადგენს მახვილ კუთხეს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან. თუ $k < 0$, მაშინ $y = kx$ ფუნქცია კლებადია. მისი გრაფიკი მოთავსებულია II და IV საკოორდინატო მეოთხედებში და ადგენს ბლაგვ კუთხეს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან (იხ. ნახ. 6.2).

ცხადია, რომ თუ $k \neq 0$, მაშინ $y = kx$ ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული. შევნიშნოთ, რომ ძალიან ხშირად წარმოებული პროდუქციის

რაოდენობა და ამ პროდუქციის წარმოებისათვის დახარჯული ნედლეულის რაოდენობა პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებაშია ერთმანეთთან.



ნახ. 6.2

ამოცანა 6.1. ფაბრიკას 10 მ ქსოვილის დასამზადებლად სჭირდება 3 კგ ბამბა. დავადგინოთ, როგორი ფორმულით გამოისახება დამოკიდებულება გამოშვებული ქსოვილის რაოდენობასა (მეტრობით) და დახარჯული ბამბის რაოდენობას (კილოგრამობით) შორის?

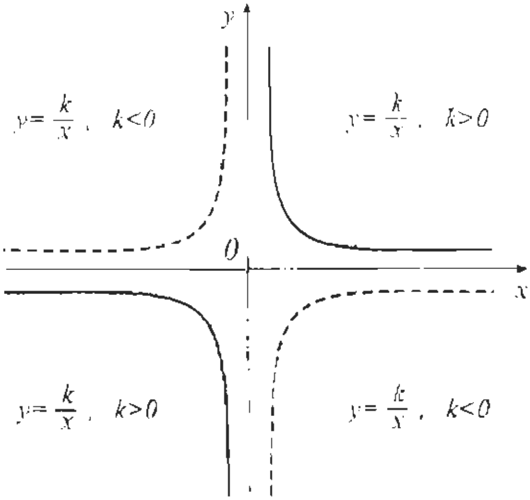
▼ ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ 1მ ქსოვილზე იხარჯება 0.3 კგ ბამბა. ამიტომ x(მ) ქსოვილზე დახარჯული ბამბის რაოდენობა y (კგ) გამოისახება ფორმულით $y=0.3x$, რაც გვიჩვენებს x და y სიდიდეების პირდაპირპროპორციულობას. ■

6.4. $y=\frac{k}{x}$ ფუნქცია (უკუპროპორციულობა)

$y=\frac{k}{x}$ ფუნქცია განსაზღვრავს x და y ცვლადებს შორის **უკუპროპორციულ დამოკიდებულებას**. k პარამეტრს ეწოდება უკუპროპორციულობის კოეფიციენტი. ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty, 0)$ და $(0, +\infty)$ შუალედების გაერთიანება. ფუნქცია არ არის განსაზღვრული $x=0$ წერტი-

ლზე. $(-\infty, 0)$ და $(0, +\infty)$ შუალედებში $y=\frac{k}{x}$ ფუნქცია კლებადია, როცა $k>0$, ხოლო ზრდადია, როცა $k<0$.

$y=\frac{k}{x}$ ფუნქცია კენტია და არაა შემოსაზღვრული. ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს **ჰიპერბოლას**, რომელიც სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ. $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი შედგება ორი შტოსაგან, რომლებიც მოთავსებულია I და III საკოორდინატო მეოთხედებში, თუ $k>0$, და II და IV საკოორდინატო მეოთხედებში, თუ $k<0$ (იხ. ნახ. 6.3).



ნახ. 6.3

ამოცანა 6.2. ფირმამ უნდა იყიდოს 2000 დოლარის საქონელი. შევადგინოთ ფორმულა, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს პროდუქციის ერთეულის ფასსა და შესაძენი პროდუქციის რაოდენობას.

▼ ვთქვათ, ფირმის მიერ ნაყიდი პროდუქციის რაოდენობაა x, ხოლო პროდუქციის ერთეულის ფასია y დოლარი. რადგან შეძენილი პროდუქციის ღირებულებაა 2000 დოლარი, ამიტომ გვექნება $xy=2000$. აქედან $y=\frac{2000}{x}$. მიღებული დამოკიდებულება გვიჩვენებს x და y სიდიდეების უკუპროპორციულობას. ■

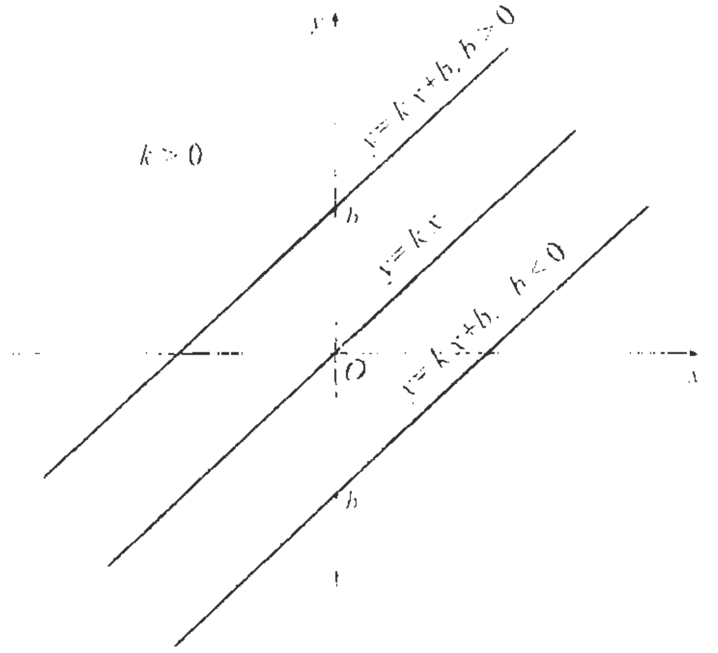
ამოცანა 6.3. გამოვსახოთ ანალიზურად (ფორმულით) მუშის მატერი-

ალური (ფინანსური) კეთილდღეობის ყოველთვიური მახასიათებელი სიდიდე, თუ მას კმაყოფაზე ჰყავს პირთა გარკვეული ჯგუფი (მაგალითად, ოჯახი). ვიგულისხმოთ, რომ მუშის შემოსავალი თანაბრად ნაწილდება ჯგუფის თითოეულ წევრზე.

▼ მუშის ხელფასის დონე განისაზღვრება მოცემულ სახელმწიფოში ერთი მუშის მიერ გამომუშავებული საშუალო ხელფასის სიდიდით. ვთქვათ, ეს სიდიდეა A. მუშის კმაყოფაზე მყოფ პირთა რიცხვი აღვნიშნოთ x-ით. ასე რომ, თვით მუშის ჩათვლით ეს ჯგუფი შედგება $x+1$ წევრისაგან. მათზე თანაბრად ნაწილდება A სიდიდის ხელფასი. ვთქვათ, თითოეული წევრი ამ ჯგუფიდან, მათ შორის თვით მუშა, ყოველთვიურად A სიდიდის ხელფასიდან იღებს y თანხას. მაშინ ცხადია, რომ $y(x+1)=A$ ანუ $y=\dfrac{A}{x+1}$. ამრიგად, ფინანსური კეთილდღეობის მახასიათებელი სიდიდე y და ჯგუფის პირთა რიცხვი $(x+1)$ უკუპროპორციულ დამოკიდებულებაშია ერთმანეთთან, უკუპროპორციულობის A კოეფიციენტით. ■

6.5. $y=kx+b$ ფუნქცია

უკვე ვიცით, რომ $y=kx+b$ ფუნქციას, სადაც k და b მოცემული რიცხვებია, წრფივი ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty, +\infty)$ შუალედი. $y=kx+b$ ფუნქცია ზრდადია, როცა $k>0$, და კლებადია, როცა $k<0$. ასევე, ვიცით, რომ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს წრფეს (იხ. ნახ. 1.9). $y=kx+b$ ფუნქციის გრაფიკი შეიძლება მივიღოთ $y=kx$ ფუნქციის გრაფიკიდან მისი $|b|$ მანძილზე პარალელური გადატანით Oy ღერძის დადებითი მიმართულებით, თუ $b>0$, და საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ $b<0$ (იხ. ნახ. 6.4).



ნახ. 6.4

ამოცანა 6.4. ვთქვათ, ქარხანა უშვებს გარკვეული სახის პროდუქციას. გამოვთვალოთ, რამდენი კვტ ელექტროენერგია იხარჯება ამ პროდუქციის წარმოებაზე, თუ ცნობილია, რომ დამოკიდებულება გამოშვებულ პროდუქციასა და დახარჯულ ელექტროენერგიას შორის წრფივია.

▼ ცხადია, რომ ელექტროენერგიის მთლიანი დანახარჯი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა რაოდენობის პროდუქციას უშვებს ქარხანა. ვთქვათ, ქარხანა უშვებს x რაოდენობის პროდუქციას. ამასთან, პროდუქციის ერთეულზე დახარჯული ელექტროენერგია არის a კვტ. აღვნიშნოთ b-თი დახარჯული კვტ-ების ის რაოდენობა, რომელიც არ არის დამოკიდებული გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობაზე (მაგალითად, შენობის განათება, გათბობა, ვენტილაცია და სხვა). მაშინ ელექტროენერგიის სრული დანახარჯისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$y = ax + b.$$

აქ a მუდმივი წარმოადგენს ე. წ. „ცვლად დანახარჯს“, რომელიც იხარჯება პროდუქციის ერთეულის დამზადებაზე, ხოლო b — ე. წ. „ფიქსირებულ დანახარჯს“. ამ ტიპის დანახარჯებს ჩვენ ქვემოთ დაწვრილებით შევეხებით. ■

ამოცანა 6.5. წარმოების დანახარჯი საქონლის 100 ერთეულის წარმოებისათვის შეადგენს 300 დოლარს, ხოლო 500 ერთეულის წარმოებისათვის — 600 დოლარს. განვსაზღვროთ კავშირი წარმოების დანახარჯსა და წარმოებული საქონლის რაოდენობას შორის, თუ ცნობილია, რომ ეს დამოკიდებულება წრფივია.

▼ თუ წარმოების დანახარჯს აღვნიშნავთ y-ით, ხოლო პროდუქციის რაოდენობას x—ით, მაშინ, ამოცანის პირობის თანახმად, მათ შორის დამოკიდებულება აღიწერება $y = kx + b$ ფუნქციით. ჩვენი მიზანია, ვიპოვოთ k და b სიდიდეები. რადგან ეს წრფე გადის $(100, 300)$ და $(500, 600)$ წერტილებზე, ამიტომ $300 = k \cdot 100 + b$ და $600 = k \cdot 500 + b$. აქედან, ამ ტოლობების წევრ-წევრა გამოკლებით, მივიღებთ: $400k = 300$, ანუ $k = \frac{3}{4}$. მაშინ $b = 300 - \frac{3}{4} \cdot 100 = 225$. ამრიგად, მივიღეთ $y = 0.75x + 225$.

მაგალითად, საქონლის 400 ერთეულის წარმოებისას დანახარჯი იქნება

$$y = 0.75 \cdot 400 + 225 = 525 \text{ (დოლარი)}. \blacksquare$$

ამოცანა 6.6. გამოვთვალოთ წარმოებული პროდუქციის ერთეულის თვითღირებულება, თუ წარმოებულ პროდუქციასა და შესაბამის ხარჯებს შორის დამოკიდებულება წრფივია.

▼ ვთქვათ, წლიურად იწარმოება x რაოდენობის პროდუქცია. ამასთან, პროდუქციის ერთეულის გამოშვებაზე იხარჯება a თანხა. აღვნიშნოთ b-თი წლიური დანახარჯი, რომელიც არაა დამოკიდებული გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობაზე (ე. წ. ფიქსირებული დანახარჯი). მაშინ მთლიანი დანახარჯი წლის განმავლობაში x ერთეულის საწარმოებლად იქნება $ax + b$. წარმოებული პროდუქციის ერთეულის თვითღირებულება აღვნიშნოთ y-ით. იგი ტოლია მთელი წლიური დანახარჯის შეფარდებისა წარმოებული პროდუქციის x რაოდენობასთან

$$y = \frac{ax + b}{x} = \frac{b}{x} + a \text{ (დოლარი)}.$$

თუ პროდუქციის x რაოდენობის გამოშვებისათვის, წახალისების მიზ-

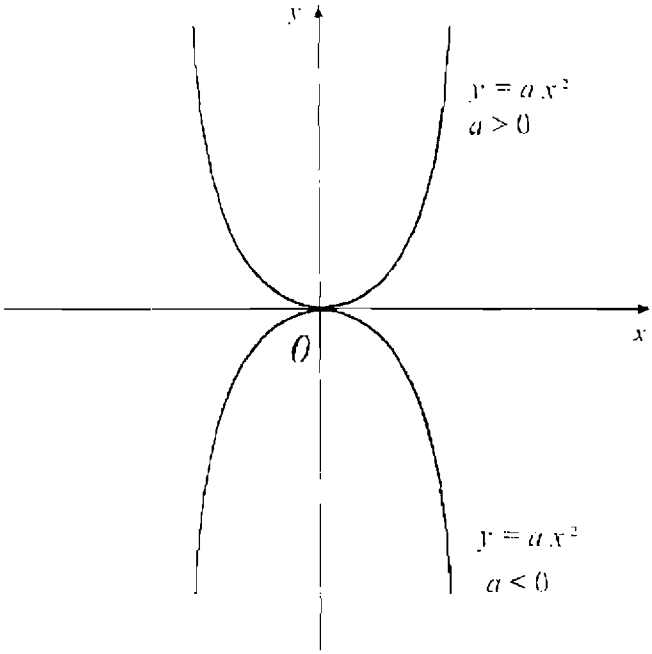
ნით, დამატებით იხარჯება cx^2 დოლარი (c მუდმივია), მაშინ გამოშვებული პროდუქციის ერთეულის თვითღირებულება იქნება

$$y=\frac{b}{x}+cx+a \quad \text{(დოლარი)}. \blacksquare$$

6.6. კვადრატული ფუნქცია

სასკოლო კურსიდან ჩვენთვის ცნობილია, რომ $y=ax^2+bx+c$ სახის ფუნქციას კვადრატული ფუნქცია ეწოდება. აქ a, b და c მოცემული ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან, $a\neq 0$. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty,+\infty)$ შუალედი. როცა $b=c=0$, მაშინ გვექნება $y=ax^2$ სახის ფუნქცია.

$y=ax^2$ ფუნქცია ლუწია. მისი გრაფიკი წარმოადგენს პარაბოლას, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. თუ $a>0$, მაშინ პარაბოლის შტოები მიმართულია ზემოთ, ხოლო თუ $a<0$, მაშინ პარაბოლის შტოები მიმართულია ქვემოთ (იხ. ნახ. 6.5).



ნახ. 6.5

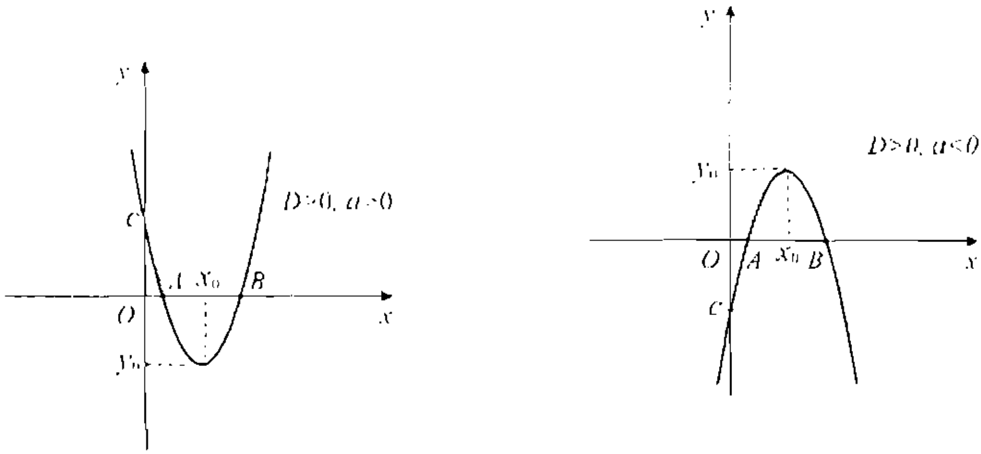
თუ $a>0$, მაშინ $y=ax^2$ ფუნქცია კლებადია $(-\infty, 0)$ შუალედში და ზრდადია $(0, +\infty)$ შუალედში. თუ $a<0$, მაშინ $y=ax^2$ ფუნქცია ზრდადია $(-\infty, 0)$ შუალედში და კლებადია $(0, +\infty)$ შუალედში.

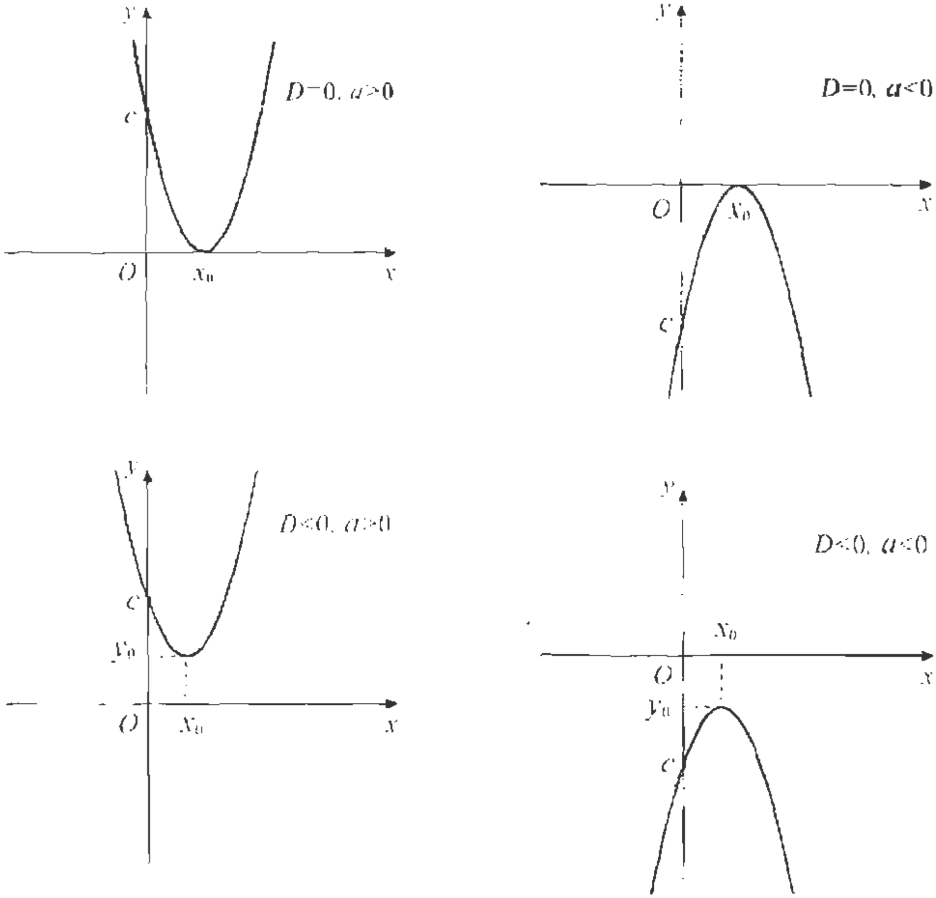
ზოგადად, $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკის შტოების მიმართულება a-ზე ისევეა დამოკიდებული, როგორც $y=ax^2$ ფუნქციის გრაფიკის შემთხვევაში, ხოლო მისი წვერო მოთავსებულია

$$(x_0, y_0)=\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

წერტილში, რომელსაც **პარაბოლის წვერო** ენოდება.

ზოგად შემთხვევაში, $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკის სახე დამოკიდებულია a კოეფიციენტისა და $D=b^2-4ac$ დისკრიმინანტის ნიშანზე (იხ. ნახ. 6.6)





ნახ. 6.6

ამ ნახაზებზე ყველგან წვეროს კოორდინატები გამოითვლება შემდეგი ტოლობებით:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = -\frac{D}{4a}, \qquad D = b^2 - 4ac.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $a > 0$, მაშინ y_0 რიცხვი წარმოადგენს კვადრატული ფუნქციის ყველაზე მცირე მნიშვნელობას, ხოლო როდესაც $a < 0$, მაშინ y_0 წარმოადგენს ყველაზე დიდ მნიშვნელობას (იხ. ნახ. 6.6). ყველა შემთხვევაში, ეს y_0 მნიშვნელობა მიიღწევა, როცა $x = x_0$. Oy ღერძთან გადაკვეთის M წერტილის კოორდინატებია $M = (0, c)$, ხოლო Ox ღერძთან გადაკვეთის A და B წერტილების კოორდინატებია $A(x_1, 0)$ და $B(x_2, 0)$,

სადაც x_1 და x_2 რიცხვები $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების ამონახსნებია

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

ამოცანა 6.7. საქონლის ფასი გაიზარდა 10 დოლარიდან 15 დოლარამდე. ამან გამოიწვია ის, რომ 300 ცალის ნაცვლად კვირაში გაიყიდა 200 ცალი საქონელი. ცნობილია, რომ დამოკიდებულება ფასსა და გაყიდული საქონლის რაოდენობას შორის წრფივია. ვიპოვოთ ეს დამოკიდებულება. რა შემთხვევაში გვექნება მაქსიმალური ამონაგები?

▼ გაყიდული საქონლის რაოდენობა აღვნიშნოთ y-ით, ხოლო x-ით — საქონლის ერთეულის ფასი დოლარობით. რადგან ეს ორი სიდიდე წრფივადაა ერთმანეთზე დამოკიდებული, ამიტომ

$$y=kx+b,$$

სადაც k და b საძიებელი მუდმივებია.

ამოცანის პირობის თანახმად, როცა $x=10$, მაშინ $y=300$, ხოლო როდესაც $x=15$, მაშინ $y=200$. ამიტომ მივიღებთ შემდეგ სისტემას k და b სიდიდეების მოსაძებნად

$$\begin{cases}300=10k+b\\200=15k+b.\end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით დავადგენთ: $k=-20$ და $b=500$. ამრიგად, მივიღეთ დამოკიდებულება

$$y=-20x+500.$$

ეს თანაფარდობა მიუთითებს იმაზე, რომ თუ საქონლის ერთეულის ფასია x, მაშინ გაიყიდება $-20x+500$ ერთეული.

აქედან გამომდინარეობს, რომ სრული შემოსავალი R გამოისახება $y\cdot x$ ნამრავლით, ანუ შემდეგი კვადრატული ფუნქციით

$$R=f(x)=y\cdot x=(-20x+500)\,x=-20x^2+500x \quad \text{(დოლარი)}.$$

რადგან პირველი კოეფიციენტი უარყოფითია, ამიტომ ამ ფუნქციის შესაბამისი პარაბოლის შტოები ქვემოთაა მიმართული და R ფუნქციას გა-

აჩნია უდიდესი მნიშვნელობა, რომელიც მიიღწევა, როცა

$$x_0 = -\frac{500}{2\,(-20)} = \frac{25}{2} = 12.5\,.$$

ეს უდიდესი მნიშვნელობა ტოლია

$$R_0 = f\left(12.5\right) = -20\ \left(12.5\right)^2 + 500\cdot 12.5 = 3125\,.$$

ამრიგად, თუ ფასია $x_0 = 12.5$ დოლარი, მაშინ გაიყიდება $y_0 = -20\cdot 12.5 + 500 = 250$ ცალი საქონელი და სრული ამონაგები იქნება მაქსიმალური: $R_0 = R_{\max} = 3125$ დოლარი. ■

ამოცანა 6.8. როცა მაცივრის ფასი 300 დოლარია, მაშინ ყოველთვიურად იყიდება 50 მაცივარი. ფასის 10 დოლარით მომატება იწვევს ყოველთვიურად გაყიდული მაცივრების რაოდენობის 1 ერთეულით შემცირებას. ვიპოვოთ დამოკიდებულება ფასსა და გაყიდული მაცივრების რაოდენობას შორის, თუ მათ შორის დამოკიდებულება წრფივია. რა შემთხვევაში გვექნება მაქსიმალური ამონაგები?

▼ ვთქვათ, ერთი მაცივრის ფასია x დოლარი და ყოველთვიურად იყიდება y მაცივარი. დავუშვათ, რომ წრფივი დამოკიდებულება y რაოდენობასა და x ფასს შორის აღიწერება ტოლობით: $y = k\,x + b$. ამოცანის პირობის თანახმად, როდესაც $x = 300$, მაშინ $y = 50$. ამასთან, თუ ფასი 10 დოლარით მოიმატებს ანუ $x = 300 + 10 = 310$, მაშინ გაყიდული მაცივრების რაოდენობა 1-ით იკლებს, ე. ი. $y = 50 - 1 = 49$. ამიტომ k და b სიდიდეები მოიძებნება შემდეგი სისტემიდან

$$\begin{cases} 50 = 300\,k + b \\ 49 = 310\,k + b. \end{cases}$$

აქედან მივიღებთ $k = -\,0.1$ და $b = 80$. მაშასადამე,

$$y = -\,0.1\,x + 80\,.$$

ცხადია, რომ მთლიანი ამონაგები გამოითვლება ფორმულით

$$R = f\left(x\right) = y\ x = -\,0.1\,x^2 + 80\,x.$$

რადგან x^2-თან მდგომი კოეფიციენტი უარყოფითია, ამიტომ $f(x)$ ფუ-

ნქციის გრაფიკი იქნება პარაბოლა ქვემოთ მიმართული შტოებით. მაშასადამე, კვადრატულ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია უდიდესი R_0 მნიშვნელობა წვეროს შესაბამის წერტილში და იგი მიიღწევა, როდესაც

$$x_0 = -\frac{80}{2\,(-0.1)} = 400.$$

უდიდესი R_0 მნიშვნელობა გამოითვლება $f(x)$-ის შესაბამისი ფორმულიდან

$$f(400) = -0.1 \cdot (400)^2 + 80 \cdot 400 = 16000 \quad (\text{დოლარი}).$$

გაყიდული მაცივრების შესაბამისი რაოდენობა იქნება

$$y_0 = \quad 0.1 \cdot 400 + 80 = 80 - 40 = 40 \quad (\text{ცალი}).$$

მაშასადამე, მაქსიმალურ ამონაგებს – 16000 დოლარს მივიღებთ, თუ მაცივრის ფასი იქნება 400 დოლარი და გაიყიდება 40 ცალი. ■

6.7. ამონაგების, დანახარჯისა და მოგების ფუნქციები

ამ პუნქტში გავეცნობით ზოგიერთ ფუნქციას, რომელთაც დიდი გამოყენება აქვთ წარმოების სფეროს მათემატიკურ მოდელებში.

შემოვიღოთ რამდენიმე ცნება და აღნიშვნა (იხ. დანართი).

● ვთქვათ, საქონლის ერთეულის ფასია P. **მთლიანი ამონაგები** (TR) არის საწარმოს (ფირმის) მიერ Q რაოდენობის საქონლის რეალიზაციით მიღებული თანხა. ამიტომ სრული ამონაგების ფუნქციას აქვს სახე

$$\boxed{(TR) = Q \cdot P = Q \cdot f_D(Q),} \qquad (6.1)$$

სადაც $f_D(Q)$ მოთხოვნის ფუნქციაა. ■

● **მთლიანი დანახარჯი** (TC) არის თანხა, რომელიც დაიხარჯა საწარმოს (ფირმის) მიერ Q რაოდენობის პროდუქციის წარმოებისათვის. ■

ცხადია, სრული დანახარჯი (TC) გაიზრდება, თუ წარმოებული პროდუქციის Q რაოდენობა გაიზრდება. ამიტომ სრული დანახარჯის (TC) ფუნქცია ზრდადია Q არგუმენტის მიმართ. წარმოების მთლიანი დანახა-

რჯები დროის მოკლე პერიოდში იყოფა ე. წ. **ფიქსირებულ (მუდმივ) და ცვლად დანახარჯებად**.

● წარმოების **ფიქსირებული დანახარჯი** (FC) არაა დამოკიდებული წარმოებული პროდუქციის რაოდენობაზე და იგი დაკავშირებულია მიწის გადასახადთან, აღჭურვილობასთან, რენტასთან და შესაძლოა, აგრეთვე, მაღალპროფესიონალური შრომის ანაზღაურებასთან. ცხადია, ამ ტიპის დანახარჯების მუდმივობა პირობითია, რადგან ხანგრძლივი პერიოდის განმავლობაში მათ შეიძლება ცვლილება განიცადონ. ■

● **წარმოების ცვლადი დანახარჯი** (VC) არის პროდუქციის ერთეულის წარმოებისათვის დახარჯული თანხა. ■

მთლიანი ცვლადი დანახარჯი (TVC), რომელიც შეესაბამება პროდუქციის Q რაოდენობის წარმოებას, გამოითვლება ფორმულით

$$\boxed{(TVC)=(VC)\cdot Q} \qquad (6.2)$$

ცხადია, წარმოების მთლიანი დანახარჯი (TC) ტოლია ფიქსირებული (FC) დანახარჯისა და მთლიანი ცვლადი (TVC) დანახარჯის ჯამისა

$$\boxed{(TC)=(FC)+(VC)\cdot Q} \qquad (6.3)$$

● **მოგების ფუნქცია** Π განისაზღვრება, როგორც სხვაობა მთლიან (TR) ამონაგებსა და მთლიან (TC) დანახარჯებს შორის

$$\boxed{\Pi=(TR)-(TC)} \ ■ \qquad (6.4)$$

იმის მიხედვით, თუ როგორი მათემატიკური მოდელია არჩეული, ზემოთ განსაზღვრული ეკონომიკური ფუნქციები წარმოდგება სხვადასხვა ანალიზური ფორმით. განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები.

ამოცანა 6.9. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P=100-2Q.$$

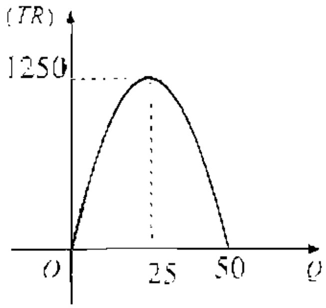
გამოვსახოთ მთლიანი ამონაგების (TR) ფუნქციის Q რაოდენობაზე დამოკიდებულება და ავაგოთ გრაფიკი. ჩავატაროთ ანალიზი გრაფიკის მიხედვით.

▼ გამოვიყენოთ (6.1) ფორმულა. მივიღებთ

$$(TR) = Q \cdot P = Q\,(100 - 2Q) = -2Q^2 + 100Q.$$

ამრიგად, მთლიანი ამონაგების ფუნქცია აღმოჩნდა კვადრატული ფუნქცია Q რაოდენობის მიმართ. ავილოთ საკოორდინატო სისტემა სიბრტყეზე. აბსცისათა ღერძზე გადავზომოთ Q რაოდენობა, ხოლო ორდინატთა ღერძზე – მთლიანი ამონაგები (TR).

წინა პარაგრაფში ფორმულირებული შედეგების ძალით შესაბამისი პარაბოლის შტოები მიმართულია ქვემოთ. აბსცისათა ღერძს იგი გადაკვეთს $Q = 0$ და $Q = 50$ წერტილებში. პარაბოლის წვეროს კოორდინატები კი იქნება $(25,\ 1250)$. საძიებელი პარაბოლა გამოსახულია ნახ. 6.7-ზე.



ნახ. 6.7

ამ გრაფიკიდან ჩანს, რომ მთლიანი ამონაგები (TR) მაქსიმალური გახდება, როდესაც გაიყიდება პროდუქციის 25 ერთეული და ეს მაქსიმალური თანხა 1250 დოლარის ტოლი იქნება. ამ შემთხვევაში პროდუქციის ერთეულის ფასი იქნება $P = 100 - 2 \cdot 25 = 50$ (დოლარი). ■

ზოგადად, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია წრფივი ფუნქციის სახით

$$P = aQ + b,\quad a < 0,\quad b > 0,$$

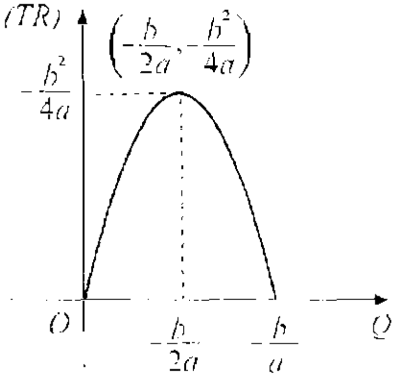
მაშინ (TR) მთლიანი ამონაგების ფუნქცია წარმოდგება კვადრატული ფუნქციის ფორმით

$$(TR) = Q \cdot P = Q \cdot (aQ + b) = aQ^2 + bQ\,. \tag{6.5}$$

რადგან $a < 0$, ამიტომ შესაბამისი პარაბოლის შტოები მიმართული იქნება ქვემოთ და (TR) ფუნქცია მაქსიმუმს მიაღწევს როდესაც $Q = -\dfrac{b}{2a}$ (იხ. ნახ.

6.8). ამასთან, ეს მაქსიმალური მნიშვნელობა იქნება

$$(TR) = -\frac{b^2}{4a}. \qquad (6.6)$$



ნახ. 6.8

იმ ფაქტს, რომ პარაბოლა კვეთს OQ ღერძს $Q = 0$ და $Q = -\frac{b}{a}$ ორ წერტილში და ამ წერტილებში მთლიანი ამონაგები ნულის ტოლია, შეიძლება მიეცეს ეკონომიკური ინტერპრეტაცია.

მართლაც, $Q = 0$ ნიშნავს, რომ საქონელი არ გაყიდულა და, ცხადია, რომ მთლიანი ამონაგები ნულის ტოლია. მეორე მხრივ, თუ $Q = -\frac{b}{a} > 0$, მაშინაც მთლიანი ამონაგები ნულის ტოლია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში ფასი „ნულდება" (იხ. ფორმულა (6.1)), ე. ი. საქონელს „ჩუქნიან" მომხმარებელს, ამიტომ ამონაგები ამ შემთხვევაშიც ნულია.

შევნიშნოთ, რომ მთლიანი დანახარჯი (TC) ყოველთვის ვერ ასახავს საწარმოს ეფექტურობას. ამიტომ ფრთხილად უნდა ვიყოთ, როცა ორი ან მეტი საწარმოს შედარება ხდება ეფექტურობის თვალსაზრისით. განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

ამოცანა 6.10. საერთაშორისო საავტომობილო კომპანია ამუშავებს ორ ქარხანას: ერთს A ქვეყანაში და მეორეს B ქვეყანაში. A ქვეყანაში მთლიანი წლიური დანახარჯია 200 მილიონი დოლარი, ხოლო B ქვეყანაში — 45 მილიონი დოლარი. ამასთან A ქვეყნის ქარხანა აწარმოებს 80000 ავტომანქანას, ხოლო B ქვეყნისა — 15000 ავტომანქანას. რომელი

ქარხანა უფრო რენტაბელურია (მომგებიანია)?

▼ მთლიანი დანახარჯები $(TC)_A = 200000000$ დოლარი და $(TC)_B = 45000000$ დოლარი მომგებიანობის თვალსაზრისით არავითარ ინფორმაციას არ გვაძლევს. ქარხნის რენტაბელურობა გამოჩნდება ერთი ავტომანქანის წარმოებაზე საშუალოდ დახარჯული თანხების შედარებით.

A ქვეყრის ქარხნისათვის ეს საშუალო თანხა იქნება

$$a = \frac{(TC)_A}{80000} = \frac{200000000}{80000} = 2500 \quad (\text{დოლარი}),$$

ხოლო B ქვეყნის ქარხნისათვის –

$$b = \frac{(TC)_B}{15000} = \frac{45000000}{15000} = 3000 \quad (\text{დოლარი}).$$

ცხადია, რომ A ქვეყნის ქარხანა უფრო მომგებიანია (ეფექტურია), ვიდრე B ქვეყნისა. ■

როგორც ამ ამოცანიდან ჩანს, ზემოთ განხილულ ეკონომიკურ ფუნქციებთან ერთად მნიშვნელოვანი როლი ენიჭება **საშუალო დანახარჯის** (AC) **ფუნქციას**, რომელიც გამოითვლება (TC) მთლიანი დანახარჯის გაყოფით გამოშვებული პროდუქციის Q რაოდენობაზე

$$\boxed{(AC) = \frac{(TC)}{Q} = \frac{(FC)+(VC)\cdot Q}{Q} = \frac{(FC)}{Q} + (VC)} \tag{6.7}$$

ამოცანა 6.11. მოცემული საწარმოს მუდმივი დანახარჯია 1000 დოლარი, ხოლო ცვლადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე – 4 დოლარი. გამოვსახოთ (TC) მთლიანი დანახარჯი და (AC) საშუალო დანახარჯი პროდუქციის Q რაოდენობის მიხედვით. ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკები.

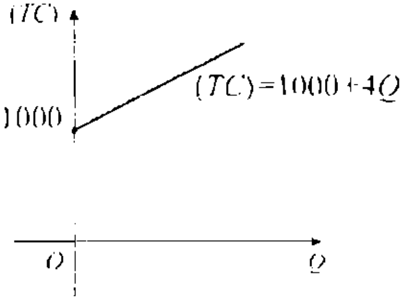
▼ ამოცანის პირობის თანახმად, $(FC) = 1000$ და $(VC) = 4$. ამიტომ, (6.3) ფორმულის თანახმად, მთლიანი დანახარჯისათვის მივიღებთ

$$(TC) = 1000 + 4Q.$$

(AC) საშუალო დანახარჯისათვის, (6.7) ფორმულის ძალით, გვექნება

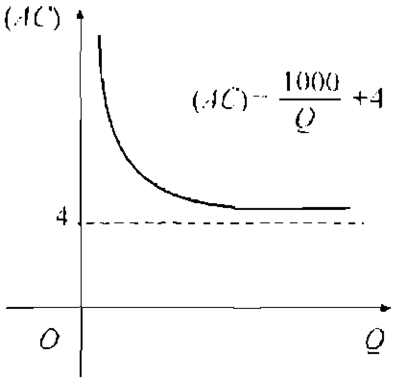
$$(AC) = \frac{1000}{Q} + 4.$$

მთლიანი დანახარჯის (TC) ფუნქცია წრფივია Q-ს მიმართ და მისი გრაფიკი გამოსახულია ნახ. 6.9-ზე.



ნახ. 6.9

საშუალო დანახარჯის (AC) ფუნქციის გრაფიკი კი მიიღება უკუპროპორციულობის $\dfrac{1000}{Q}$ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკის (ჰიპერბოლა) 4 ერთეულის ტოლი გადაადგილებით ორდინატთა ღერძის დადებითი მიმართულებით (იხ. ნახ. 6.10).



ნახ. 6.10

შევნიშნოთ, რომ როდესაც Q ძალიან მცირდება, მაშინ (AC) ძალიან იზრდება. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (AC) ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული $Q=0$-ის მიდამოში. მეორე მხრივ, როდესაც Q ძალიან დიდია, მაშინ $\dfrac{1000}{Q}$ წილადი უახლოვდება ნულს, ხოლო (AC) სიდიდე — 4-ს (იხ. ნახ. 6.10). ■

დავუშვათ, რომ მთლიანი დანახარჯის (TC) ფუნქციაა (შეადარე (6.3)

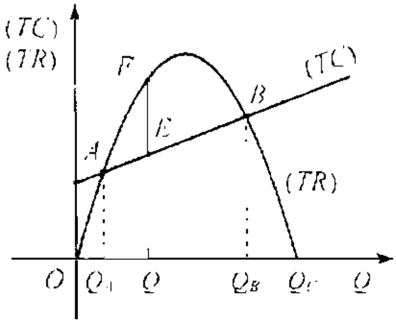
ფორმულას)

$$(TC) = cQ + d,\ \ c > 0,\ \ d > 0,$$

ხოლო მთლიანი ამონაგების (TR) ფუნქციაა (შეადარე (6.5) ფორმულას)

$$(TR) = aQ^2 + bQ,\ \ \ a < 0,\ \ b > 0.$$

ავაგოთ ამ ფუნქციების გრაფიკები ერთსა და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეზე (იხ. ნახ. 6.11).



ნახ. 6.11

ვიცით, რომ მოგების Π ფუნქციას აქვს სახე

$$\Pi = (TR) - (TC) = \left(aQ^2 + bQ\right) - (cQ + d). \tag{6.8}$$

ვნახოთ, როგორი თვისებები აღმოაჩნდება ამ ფუნქციას. ნახ. 6.11-დან ჩანს, რომ $(0, Q_A)$ და (Q_B, Q_C) შუალედებში მთლიანი დანახარჯის გრაფიკი უფრო ზემოთაა, ვიდრე მთლიანი ამონაგების გრაფიკი; ამიტომ აქ დანახარჯი სჭარბობს შემოსავალს. Q_A და Q_B წერტილებში მთლიანი დანახარჯი და მთლიანი ამონაგები ერთმანეთის ტოლია. ამ რეჟიმს **ნულოვან ზღვარზე მუშაობა** ეწოდება. რაც შეეხება (Q_A, Q_B) შუალედს, აქ მთლიანი ამონაგების მრუდი უფრო ზემოთაა, ვიდრე მთლიანი დანახარჯისა, ე. ი. თუ $Q_A < Q < Q_B$, მაშინ ამონაგები სჭარბობს დანახარჯს და გვაქვს მოგება. ამასთან, რაც უფრო მეტია EF მონაკვეთის სიგრძე, მით მეტია მოგება. EF-ის მაქსიმალურ სიგრძეს შეესაბამება მაქსიმალური მოგება. ასეთი სიტუაცია მიიღწევა რომელიღაც Q-სთვის (Q_A, Q_B) შუალედიდან. ამ მაქსიმალური მოგების მოსაძებნად უმჯობესია გამოვიყენოთ უშუალოდ (6.8) ფორმულა, რომელიც გამოსახავს მოგების Π ფუნქციას კვადრატული სა-

მწევრის სახით, რომლის შესაბამისი გრაფიკის შტოებიც ქვემოთაა მიმართული. ამის გამო, მას აუცილებლად გააჩნია უდიდესი მნიშვნელობა, რაც შეესაბამება მაქსიმალურ მოგებას.

ამოცანა 6.12. წარმოების მუდმივი დანახარჯია 4 დოლარი, ცვლადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე კი შეადგენს 1 დოლარს. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = 10 - 2Q.$$

გამოვსახოთ მოგების Π ფუნქცია Q-ს საშუალებით და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

გავარკვიოთ:

(ა) საქონლის რა რაოდენობა შეესაბამება ნულოვან ზღვარზე მუშაობას?

(ბ) რას უდრის მოგების მაქსიმალური სიდიდე?

▼ როგორც ვიცით, მოგების ფუნქცია გამოითვლება ფორმულით

$$\Pi = (TR) - (TC).$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$(TR) = Q \cdot P = Q\,(10 - 2Q) = -2Q^2 + 10Q,$$

ხოლო რადგან, ამოცანის პირობის თანახმად, $(FC) = 4$ და $(VC) = 1$, ამიტომ

$$(TC) = (FC) + (VC)\,Q = 4 + Q.$$

მაშინ მოგების ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$\Pi = \left(-2Q^2 + 10Q\right) - (4 + Q) = -2Q^2 + 9Q - 4.$$

ახლა განვიხილოთ განტოლება

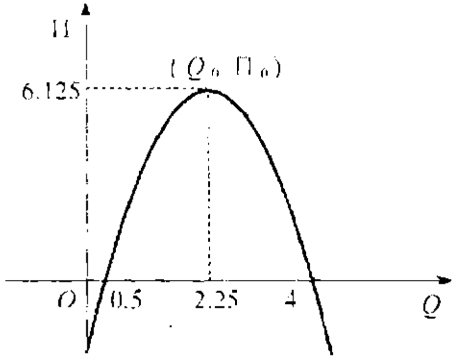
$$-2Q^2 + 9Q - 4 = 0.$$

აქედან

$$Q_1 = \frac{1}{2} \quad \text{და} \quad Q_2 = 4.$$

სწორედ ამ წერტილებში გადაკვეთს Π ფუნქციის გრაფიკი OQ ღერძს. ამ

ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია ნახ. 6.12-ზე.



ნახ. 6.12

მოგება 0-ის ტოლია, როცა $Q=\frac{1}{2}$ ან $Q=4$. ესაა სწორედ ის რაოდენობები, რომელთაც შეესაბამება ნულოვან ზღვარზე მუშაობა (პასუხი (ა) კითხვაზე).

Π-ს მაქსიმალური მნიშვნელობის მოსაძებნად ვიპოვოთ პარაბოლის წვეროს კოორდინატები:

$$Q_0 = -\frac{9}{2\cdot(-2)} = \frac{9}{4}, \quad \Pi_0 = -\frac{9^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-4)}{4\cdot(-2)} = 6.125.$$

ამრიგად, მოგების Π ფუნქციის მაქსიმალური სიდიდეა $\Pi_0 = 6.125$, რომელიც შეესაბამება $Q_0 = \frac{9}{4}$ რაოდენობის პროდუქციას. ესაა პასუხი (ბ) კითხვაზე. ■

როგორც ზემოთ მოტანილი ამოცანები გვიჩვენებს, ეკონომიკური პრობლემების განხილვის დროს შეიძლება საქმე გვქონდეს სხვადასხვა ტიპის ფუნქციებთან. თანაც, ამოცანის გადაწყვეტა მოითხოვს ამ ფუნქციების გამოკვლევას, მათი თვისებების დადგენას, უდიდესი (ან უმცირესი) მნიშვნელობების მოძებნას, გრაფიკის აგებას და სხვა. ამ საკითხებზე პასუხის გაცემა ზოგადი ტიპის ფუნქციების შემთხვევაში საკმარისად რთულია და მოითხოვს გარკვეული მოსამზადებელი სამუშაოს ჩატარებას.

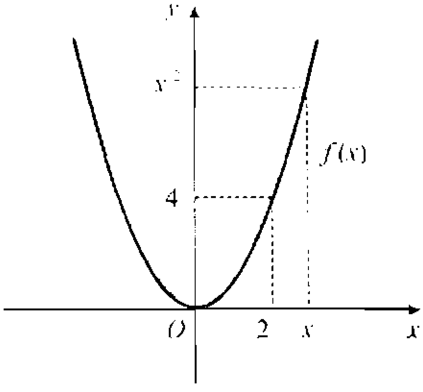
ამ მიზნით შემდგომ პარაგრაფებში ჩვენ გავეცნობით ფუნქციის ზღვრის ცნებას, ცალმხრივ ზღვრებს, ფუნქციის უწყვეტობას, წყვეტილ

ფუნქციებსა და წყვეტის წერტილების კლასიფიკაციას. ამით მოვამზადებთ საფუძველს დიფერენციალური აღრიცხვის შესასწავლად, რომელსაც ეფუძნება ფუნქციების სრული გამოკვლევის თეორია.

6.8. ფუნქციის ზღვარი წერტილში. ცალმხრივი ზღვრები

განვიხილოთ კონკრეტული ფუნქცია $y = f(x) = x^2$ და დავსვათ შემდეგი კითხვა. ვთქვათ, x ცვლადი უახლოვდება 2-ს (x მიისწრაფვის 2-კენ). რა რიცხვს უახლოვდება მაშინ $f(x)$?

ჩვენთვის უკვე ცნობილი $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკიდან (იხ. ნახ.6.5) ინტუიციურად დავასკვნით, რომ როდესაც x მიისწრაფვის 2-კენ $(x \to 2)$ მაშინ $y = f(x) = x^2$ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები მიისწრაფვიან 4-კენ, ანუ $f(x) \to 4$ (იხ. ნახ. 6.13).



ნახ. 6.13

ამაში შეგვიძლია დავრწმუნდეთ შემდეგი ტოლობიდანაც

$$f(x) - 4 = x^2 - 4 = (x+2)(x-2);$$

თუ $x \to 2$, ე. ი. $(x-2) \to 0$, მაშინ ამ უკანასკნელი ტოლობიდან ჩანს, რომ $f(x) - 4 \to 0$. შევნიშნოთ, რომ ეს შედეგი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ x როგორ უახლოვდება 2-ს (მარჯვენიდან, მარცხნიდან, თუ ნებისმიერი სხვა წესით). ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $f(x)$ ფურქციას გა-

აჩნია ზღვარი, როდესაც x მიისწრაფვის 2-კენ, და ეს ზღვარია 4. ამ ფაქტს ფორმალურად ასე ჩავწერთ

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია $y = g(x) = 3x + 19 + \frac{6}{x}$.

ვთქვათ, x მიისწრაფვის 3-კენ $(x \to 3)$. უახლოვდება თუ არა $g(x)$ რაიმე ფიქსირებულ რიცხვს ამ შემთხვევაში? დავამტკიცოთ, რომ როდესაც $x \to 3$, მაშინ $g(x) \to 30$. მართლაც, მარტივი გარდაქმნებით ვაჩვენებთ, რომ

$$g(x) - 30 = 3x + 19 + \frac{6}{x} - 30 = 3x + \frac{6}{x} - 11 = (3x - 9) + \left(\frac{6}{x} - 2\right) =$$

$$= 3\,(x-3) + \frac{6-2x}{x} = 3\,(x-3) - \frac{2(x-3)}{x} = (x-3)\,\left(3 - \frac{2}{x}\right).$$

ამ ტოლობიდან კი ცხადია, როდესაც x მიისწრაფვის 3-კენ ნებისმიერი წესით, ანუ $(x-3) \to 0$, მაშინ $g(x) - 30 \to 0$. ამრიგად, მივიღეთ, რომ $g(x)$ ფუნქციას გააჩნია ზღვარი, როდესაც x მიისწრაფვის 3-კენ, და ეს ზღვარია 30, ე. ი.

$$\lim_{x \to 3} g(x) = \lim_{x \to 3} \left(3x + 19 + \frac{6}{x}\right) = 30.$$

ზემოთ მოტანილი ორივე მაგალითის შემთხვევაში ზღვარი აღმოჩნდა თვით ამ ფუნქციის მნიშვნელობა განსახილველ წერტილზე: პირველ შემთხვევაში ზღვარი იყო რიცხვი $4 = f(2)$, ხოლო მეორე შემთხვევაში — რიცხვი $30 = g(3)$.

განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია

$$h(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}.$$

ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$. ცხადია, რიცხვი 4 არ ეკუთვნის h ფუნქციის განსაზღვრის არეს, მაგრამ შევნიშნოთ, რომ h ფუნქცია განსაზღვრულია $x_0 = 4$ წერტილის ნებისმიერ მიდამოში, გარდა თვით ამ წერტილისა. ვთქვათ, x წერტილი უახლოვდება 4-ს

$(x \to 4)$. რა შეგვიძლია ვთქვათ $h(x)$ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებზე? უახლოვდებიან თუ არა ისინი რაიმე ფიქსირებულ რიცხვს, როგორც ეს იყო წინა ორი მაგალითის შემთხვევაში? ცხადია, ახლა უკვე არ შეგვიძლია გამოვთვალოთ $h(4)$, რადგან $4 \notin D(h)$. დავუშვათ, x ისე უახლოვდება 4-ს, რომ x ყოველთვის განსხვავებულია 4-გან. მაშინ ასეთი x-თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$h(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} = x + 4, \quad x \neq 4.$$

აქედან კი ცხადია, თუ $x \to 4$ $(x \neq 4)$, მაშინ $h(x) \to 8$. მართლაც,

$$h(x) - 8 = \frac{x^2 - 16}{x - 4} - 8 = x + 4 - 8 = x - 4 \to 0,$$

როდესაც $(x - 4) \to 0$ $(x \neq 4)$.

ამრიგად, აღმოჩნდა, რომ $h(x)$ ფუნქცია უახლოვდება 8-ს, როდესაც $x \to 4$ $(x \neq 4)$. ამ შემთხვევაშიც ვწერთ

$$\lim_{x \to 4} h(x) = 8.$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ დავსვათ რაიმე ფუნქციის ზღვრის არსებობის საკითხი რომელიმე x_0 წერტილში, არაა აუცილებელი ეს ფუნქცია განსაზღვრული იყოს ამ x_0 წერტილში. მთავარია, იგი განსაზღვრული იყოს ამ წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია, თვით x_0 წერტილისა.

ახლა გავეცნოთ ფუქციის ზღვრის ზუსტ მათემატიკურ განმარტებას.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით x_0 წერტილისა.

● A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ **ფუნქციის ზღვარი** x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

ან

$$f(x) \to A, \text{ როცა } x \to x_0. \blacksquare$$

ფაქტობრივად, ეს განმარტება გვეუბნება, რომ როდესაც x მიისწრაფვის x_0-კენ ნებისმიერად ისე, რომ x არ ემთხვევა x_0-ს (ანუ x ძალიან ახლოა x_0-თან და $x \neq x_0$), მაშინ ფუნქციის შესაბამისი $f(x)$ მნიშვნელობები მიისწრაფვის A რიცხვისაკენ (ანუ $f(x)$ ძალიან ახლოა A-თან).

ზოგჯერ საჭიროა ისეთი შემთხვევის განხილვა, როცა x მიისწრაფვის x_0-კენ ისე, რომ $x > x_0$ ან $x < x_0$ ე. ი. x მიისწრაფვის x_0-კენ მარჯვნიდან ან მარცხნიდან. ამ შემთხვევაში შემოდის ფუნქციის ე. წ. **ცალმხრივი ზღვრის ცნება**.

● A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **ზღვარი მარჯვნიდან** x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$, რომ

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = A, \text{ როცა } x_0 < x < x_0 + \delta.$$

ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = A \text{ ან } f(x_0+) = A. \blacksquare$$

● A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **ზღვარი მარცხნიდან** x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როცა } x_0 - \delta < x < x_0.$$

ამ შემთხვევაში წერენ

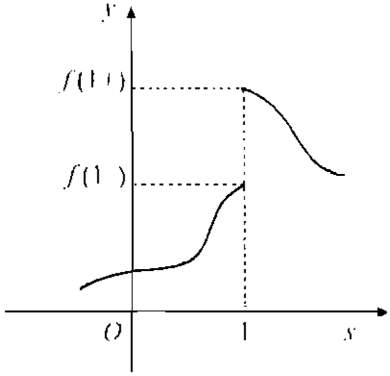
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = A \text{ ან } f(x_0-) = A. \blacksquare$$

ზღვრის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ზღვარი x_0 წერტილში, მაშინ არსებობს $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარჯვნიდან და მარცხნიდან x_0 წერტილში და ეს ზღვრები ერთმანეთის ტოლია

პირიქით, თუ x_0 წერტილში არსებობს ერთმანეთის ტოლი მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები, მაშინ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია ზღვარი, რომელიც მარცხენა და მარჯვენა ზღვრების საერთო მნიშვნელობის ტოლია.

ცხადია, რომ თუ რაიმე x_0 წერტილში არსებობს სასრული მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები, მაგრამ ისინი ერთმანეთის ტოლი არაა, მაშინ ფუნქციას ამ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

მაგალითად, ნახ. 6.14-ზე გამოსახული გრაფიკის შესაბამის ფუნქციას აქვს სასრული მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $x_0 = 1$ წერტილში, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციას არა აქვს ზღვარი, რადგან ხსენებული მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები არ არის ერთმანეთის ტოლი.



ნახ. 6.14

ზემოთ ჩამოყალიბებულ განსაზღვრებას ეწოდება **ზღვრის განმარტება კოშის აზრით.** $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში შეიძლება განვსაზღვროთ აგრეთვე მიმდევრობების საშუალებით.

● A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არედან აღებული ყოველი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის $(x_n \neq x_0)$, რომელიც კრებადია x_0-კენ, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A. \blacksquare$$

ეს განმარტება საშუალებას იძლევა ადვილად გამოვთვალოთ ზღვრები

პრაქტიკულ მაგალითებში. ფუნქციის ზღვრის ასეთ განმარტებას უწოდებენ ფუნქციის ზღვარს x_0 წერტილში **ჰაინეს აზრით.** ანალოგიურად განისაზღვრება მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები ჰაინეს აზრით. მტკიცდება, რომ ფუნქციის ზღვრის განმარტებები კოშისა და ჰაინეს აზრით ეკვივალენტურია.

თუ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე $(a, +\infty)$ ან $(-\infty, a)$ შუალედში, მაშინ შეიძლება დაისვას ზღვრის არსებობის საკითხი, როცა x არგუმენტი მიისწრაფვის $\pm\infty$-კენ.

● ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(a, +\infty)$ შუალედში. ვიტყვით, რომ A რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x \to +\infty$, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $M > a$ რიცხვი, რომ

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon, \text{ როცა } x > M. \blacksquare$$

● ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty, a)$ შუალედში. ვიტყვით, რომ A რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x \to -\infty$, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $M < a$ რიცხვი, რომ

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon, \text{ როცა } x < M. \blacksquare$$

ამ შემთხვევებში, შესაბამისად, ვწერთ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \text{ და } \lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

ჰაინეს აზრით, ეს ტოლობები ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია $+\infty$-კენ ან $-\infty$-კენ, ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობებისაგან შედგენილი $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობა კრებადია A რიცხვისაკენ.

მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \frac{x^2 + 13x - 25}{x^2 + 9}$$

და გამოვთვალოთ მისი ზღვარი, როდესაც $x \to +\infty$. ამისათვის ავიღოთ ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია $+\infty$-კენ და განვიხილოთ შესაბამისი $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობის ზღვარი

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2+13x_n-25}{x_n^2+9} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{13}{x_n}-\frac{25}{x_n^2}}{1+\frac{9}{x_n^2}} = 1,$$

რადგან $\frac{1}{x_n} \to 0$, როცა $n\to+\infty$ ანუ $x_n\to+\infty$. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+13x-25}{x^2+9} = 1 .$$

ფუნქციის ზღვრებისათვის მართებულია იმავე ტიპის თეორემები, რაც გვქონდა მიმდევრობის ზღვრების შემთხვევაში.

I. თუ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია ზღვარი x_0 წერტილში, მაშინ ეს ზღვარი ერთადერთია და ფუნქცია შემოსაზღვრულია x_0 წერტილის მცირე მიდამოში

II. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს გააჩნია ზღვარი x_0 წერტილში, მაშინ:

(ა) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

(ბ) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

(გ) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, თუ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

(დ) $f(x)\le g(x)$ უტოლობაში შეგვიძლია გადავიდეთ ზღვარზე

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

ამოცანა 6.13. მოცემულია ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & \text{როცა } x>0, \\ 0, & \text{როცა } x=0, \\ -x+3, & \text{როცა } x<0. \end{cases}$$

ვიპოვოთ ცალმხრივი ზღვრები $f(0+)$ და $f(0-)$. აქვს თუ არა ზღვარი ამ ფუნქციას $x=0$ წერტილში? ემთხვევა თუ არა რომელიმე ცალმხრივი ზღვარი ფუნქციის მნიშვნელობას 0 წერტილში?

▼ ჯერ გამოვთვალოთ მარჯვენა ზღვარი. შევნიშნოთ, რომ როცა $x>0$, მაშინ $f(x)=2x-1$. ამიტომ გვექნება

$$f(0+)=\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(2x-1)=-1.$$

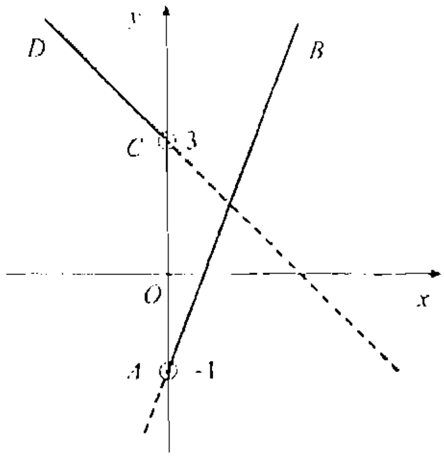
ახლა გამოვთვალოთ მარცხენა ზღვარი იმის გათვალისწინებით, რომ $f(x)=-x+3$, როცა $x<0$:

$$f(0-)=\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x+3)=3.$$

რადგან $f(0-)\neq f(0+)$, ამიტომ f ფუნქციას $x=0$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

ფუნქციის მნიშვნელობა $x=0$ წერტილში არის $f(0)=0$ და იგი არ ემთხვევა არც ერთ ცალმხრივ ზღვარს, რადგანაც $f(0-)=3$ და $f(0+)=1$.

ავაგოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც წარმოადგენს AB ღია სხივის, CD ღია სხივისა და 0 წერტილის გაერთიანებას. ცხადია, A და C წერტილები არ ეკუთვნის ამ გრაფიკს (იხ. ნახ. 6.15).



ნახ. 6.15

ყველა ის დასკვნა, რაც გავაკეთეთ ზემოთ ანალიზურად (გამოთვლებით), აშკარად ჩანს აგებული გრაფიკიდანაც. ■

6.9. განუსაზღვრელობები. უსასრულოდ მცირე ფუნქცია. უსასრულოდ დიდი ფუნქცია

დავუშვათ, საძიებელია $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ შეფარდების ზღვარი რაიმე x_0 წერტილში და ორივე ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში ნულის ტოლია, ე. ი.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 .$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გვაქვს $\dfrac{0}{0}$ სახის **განუსაზღვრელობა**. აღნიშნული შეფარდების ზღვრის გამოთვლას უწოდებენ **განუსაზღვრელობის გახსნას**.

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ვერ გამოვიყენებთ წინა პარაგრაფის **II** (გ) დებულებას შეფარდების ზღვრის შესახებ და უნდა მივმართოთ სხვა ხელოვნურ ხერხებს.

თუ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი რაიმე x_0 წერტილში ნულის ტოლია, მაშინ მას ეწოდება **უსასრულოდ მცირე ფუნქცია** x_0 წერტილის მიდამოში.

ორი უსასრულოდ მცირე ფუნქციის შეფარდების ზღვრის გამოთვლას ყოველთვის მივყავართ განუსაზღვრელობის გახსნის საკითხთან. როდესაც გვაქვს $\dfrac{0}{0}$ ტიპის განუსაზღვრელობა, ზოგადად, მოსალოდნელია ორივე შემთხვევა: შეიძლება ზღვარი არ არსებობდეს ან არსებობდეს.

განვიხილოთ ერთი კონკრეტული ამოცანა განუსაზღვრელობის გახსნაზე.

ამოცანა 6.14. გამოვთვალოთ შემდეგი ზღვარი

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} .$$

▼ რადგან მრიცხველიც და მნიშვნელიც ნული ხდება, როცა $x = -1$, ამიტომ საქმე გვაქვს $\dfrac{0}{0}$ ტიპის განუსაზღვრელობასთან. შევეცადოთ, მამრავლებად დაშლის გზით, ორივე ფუნქციაში ცხადად გამოვყოთ მამრავლი $(x+1)$. მარტივად ვაჩვენებთ, რომ

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3), \qquad x^2 - 1 = (x+1)(x-1) .$$

ამიტომ გვექნება

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\ (x-3)}{(x+1)\ (x-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-4}{-2} = 2\,.$$

როგორც ვხედავთ, $(x+1)$ მამრავლზე შეკვეცის შემდეგ საშუალება მოგვეცა გამოგვეყენებინა დებულება შეფარდების ზღვრის შესახებ (რადგან მნიშვნელის ზღვარი უკვე აღარ არის ნულის ტოლი, როცა $x \to -1$). ■

ზემოთ აღწერილი მეთოდი, რომელიც ეყრდნობა მამრავლებად დაშლას და ნულისაკენ კრებადი მამრავლების შეკვეცას, ხშირად გამოიყენება $\frac{0}{0}$ ტიპის განუსაზღვრელობის გახსნის დროს.

შევნიშნოთ, რომ ეკონომიკურ მოდელებში ფრიად პოპულარული მარგინალური ფუნქციები ფაქტობრივად მიიღება $\frac{0}{0}$ ტიპის განუსაზღვრელობის გახსნის შედეგად (იხ. თავი 7).

ამოცანა 6.15. გამოვთვალოთ

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

ფუნქციის ზღვარი $x=0$ წერტილში.

▼ აქ საქმე გვაქვს $\frac{0}{0}$ ტიპის განუსაზღვრელობასთან. გავითვალისწინოთ, რომ $|x| = x$, როცა $x>0$, და გამოვთვალოთ მარჯვენა ზღვარი

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0+} 1 = 1.$$

ახლა გამოვთვალოთ მარცხენა ზღვარი, იმის გათვალისწინებით, რომ $|x| = -x$, როცა $x<0$. მივიღებთ

$$\lim_{x \to 0-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to 0-} (-1) = -1\,.$$

ამრიგად, არსებობს მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები, მაგრამ ისინი ერთმანეთის ტოლი არ არის. ამიტომ $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ფუნქციას $x=0$ წერტი-

ლში ზღვარი არ გააჩნია. ეს ის შემთხვევაა, როდესაც ორი უსასრულოდ მცირე ფუნქციის შეფარდებას ზღვარი არ გააჩნია. ■

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(a,\ b)$ შუალედში.

● ვიტყვით, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია არის **დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდი** a **წერტილში მარჯვნიდან,** თუ ნებისმიერი x_n მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია a რიცხვისაკენ მარჯვნიდან, ე. ი. $x_n \to a,\ \ a<x_n<b,$ ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n)=+\infty \qquad \left(\lim_{n \to +\infty} f(x_n)=-\infty\right).$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ, რომ

$$\lim_{x \to a+} f(x)=+\infty \qquad \left(\lim_{x \to a+} f(x)=-\infty\right). \ ■$$

სრულიად ანალოგიური აზრი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს

$$\lim_{x \to b-} f(x)=+\infty \qquad \left(\lim_{x \to b-} f(x)=-\infty\right),$$

რაც იმას მიუთითებს, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია არის დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდი b წერტილში მარცხნიდან.

ახლა ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(a,\ +\infty)$ შუალედში.

● ვიტყვით, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია არის დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდი, როცა $x \to +\infty$, თუ ნებისმიერი x_n მიმდევრობისათვის, სადაც $x_n>a$ და $x_n \to +\infty$, ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n)=+\infty \qquad \left(\lim_{n \to +\infty} f(x_n)=-\infty\right).$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty \qquad \left(\lim_{x \to +\infty} f(x)=-\infty\right). \ ■$$

ანალოგიური შინაარსი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=+\infty \qquad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty\right),$$

რაც იმას მიუთითებს, რომ $(-\infty, a)$ შუალედში განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქცია არის დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდი, როცა $x \to -\infty$.

ზემოთ მოცემული განმარტებების საფუძველზე შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ:

(ა) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^{2k} = +\infty, \quad k \in \mathbb{N}$;

(ბ) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2k-1} = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^{2k-1} = -\infty, \; k \in \mathbb{N}$;

(გ) $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{1}{x-a} = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to a-} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$;

(დ) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k a^x = +\infty \quad (a>1, \; k \in \mathbb{N})$;

(ე) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^k}{a^x} = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad a>1.$

უკანასკნელი ტოლობა მტკიცდება თეორემა 5.9-ისა და მეხუთე თავის მეთორმეტე (ბ) სავარჯიშოში მოტანილი ტოლობის გამოყენებით.

6.10. ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში. ინტერვალში და სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციები

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში თვით x_0 წერტილის ჩათვლით. შემოვიღოთ შემდეგი მეტად მნიშვნელოვანი სამი განმარტება.

● $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ მას x_0 წერტილში გააჩნია ზღვარი და ეს ზღვარი $f(x_0)$ რიცხვის ტოლია, ე. ი. თუ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \; \blacksquare$$

● $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში მარჯვნიდან, თუ არსებობს მისი მარჯვენა ზღვარი x_0 წერტილში და ეს ზღვარი $f(x_0)$

რიცხვის ტოლია, ე. ი. თუ

$$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)\,. \ ■$$

● $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში მარცხნიდან, თუ არსებობს მისი მარცხენა ზღვარი x_0 წერტილში და ეს ზღვარი $f(x_0)$ რიცხვის ტოლია, ე. ი. თუ

$$f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)\,. \ ■$$

ფუნქციის ზღვრის ცნებიდან და ზემოთ ჩამოყალიბებული განმარტებებიდან გამომდინარეობს, რომ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, სრულდებოდეს შემდეგი ტოლობები

$$f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0).$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, მაშინ, ცხადია, $f(x) - f(x_0) \to 0$, როცა $x \to x_0$.

$f(x) - f(x_0)$ სიდიდეს ეწოდება f **ფუნქციის ნაზრდი** x_0 წერტილში, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის $x - x_0$ ნაზრდს.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები არგუმენტისა და ფუნქციის ნაზრდებისათვის: $x - x_0 = \Delta x$ ანუ $x = x_0 + \Delta x$ და

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y\,.$$

ფუნქციის ნაზრდის საშუალებით ფუნქციის უწყვეტობა ასე შეგვიძლია განვმარტოთ:

> $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის x_0 წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ ფუნქციის $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ ნაზრდი მიისწრაფვოდეს ნულისაკენ, როცა არგუმენტის Δx ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ, ანუ
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0$$

ფუნქციის ზღვრის თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

რაიმე წერტილში უწყვეტი ფუნქციების ჯამი, ნამრავლი და შეფარდება (თუ ამ წერტილში მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან) აგრეთვე უწყვეტია ამ წერტილში

● $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი (a,b) ინტერვალში, თუ ის უწყვეტია ამ ინტერვალის ყველა წერტილში.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ იგი უწყვეტია (a,b) ინტერვალში და, გარდა ამისა, a წერტილში იგი უწყვეტია მარჯვნიდან, ხოლო b წერტილში — მარცხნიდან. ■

ამოცანა 6.16. ვაჩვენოთ, რომ $f(x)=x$ ფუნქცია უწყვეტია მთელ რიცხვით ღერძზე.

▼ მართლაც, ყოველი $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ წერტილისათვის

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0). \ ■$$

ამოცანა 6.17. ვაჩვენოთ, რომ ხარისხოვანი ფუნქცია $f(x)=x^n$, $n \in \mathbb{N}$ უწყვეტია მთელ რიცხვით ღერძზე.

▼ მართლაც, რადგან ნამრავლის ზღვარი ზღვრების ნამრავლის ტოლია, გვექნება

$$\lim_{x \to x_0} x^n = \left(\lim_{x \to x_0} x \right)^n = x_0^n.$$

ამიტომ $f(x)=x^n$ ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში. ■

ამოცანა 6.18. ვაჩვენოთ, რომ წრფივი ფუნქცია $f(x)=ax+b$, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში.

▼ თუ გამოვიყენებთ ჯამისა და ნამრავლის ზღვრების თვისებებს, მივიღებთ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (ax+b) = a \lim_{x \to x_0} x + b = ax_0 + b = f(x_0),$$

რაც ამტკიცებს $f(x)=ax+b$ ფუნქციის უწყვეტობას. ■

ამოცანა 6.19. ვაჩვენოთ, რომ ყოველი პოლინომური ფუნქცია

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

სადაც $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ნამდვილი რიცხვებია, უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში.

▼ მართლაც, ფუნქციათა ჯამისა და ნამრავლის ზღვრების თვისებების გამოყენებით მივიღებთ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(a_n x^n\right) + \lim_{x \to x_0} \left(a_{n-1} x^{n-1}\right) + \cdots + \lim_{x \to x_0} \left(a_1 x\right) + \lim_{x \to x_0} a_0 =$$

$$= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0). \ \blacksquare$$

ორი პოლინომის შეფარდებას **რაციონალური ფუნქცია** ენოდება

$$F(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

სადაც $P_n(x)$ და $Q_m(x)$ აღნიშნავს, შესაბამისად, მრიცხველში და მნიშვნელში მდგომ პოლინომებს. ცხადია, $F(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის სიმრავლეა

$$D(F) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid Q_m(x) \neq 0\right\}.$$

ამოცანა 6.20. რაციონალური $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია განსაზღვრის $D(F)$ არეში.

▼ ეს გამომდინარეობს შემდეგი მსჯელობიდან. ვთქვათ, $x_0 \in D(F)$, მაშინ $Q_m(x_0) \neq 0$ და ამიტომ

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P_n(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)} = F(x_0). \ \blacksquare$$

6.11. ფუნქციის წყვეტა და წყვეტის წერტილების კლასიფიკაცია

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე (a, b) შუალედში და x_0 ამ შუალედის რომელიმე შიგა წერტილია. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის x_0 წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$f(x_0+) = f(x_0-) = f(x_0).$$

თუ ამ ტოლობებიდან რომელიმე დარღვეულია ან f არ არის განსაზღვრული x_0 წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას x_0 წერტილში. ამ შემთხვევაში ფუნქციის გრაფიკი აღარ წარმოადგენს „უწყვეტ" წირს (იხ. ნახ. 6.16, 6.17 და 6.18).

განვიხილოთ ფუნქციის წყვეტის შემდეგი სახეები.

(ა) არსებობს სასრული ზღვრები $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$. ეს ზღვრები ერთმანეთის ტოლია $f(x_0+)=f(x_0-)$, მაგრამ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული არ არის.

მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია

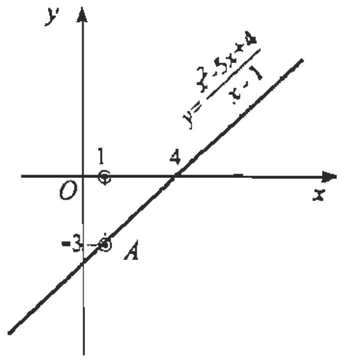
$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-1}.$$

ცხადია, $D(f)=(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$. მარტივად ვაჩვენებთ, რომ ამ ფუნქციას გააჩნია მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $x=1$ წერტილში:

$$f(1+)=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)\ (x-4)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(x-4)=-3,$$

$$f(1-)=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\ (x-4)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}(x-4)=-3.$$

ამრიგად, არსებობს $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა სასრული ზღვრები და ისინი ერთმანეთის ტოლია, მაგრამ $f(x)$ ფუნქცია $x=1$ წერტილში განსაზღვრული არ არის. ამ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი (იხ. ნახ. 6.16) არ შეიცავს A წერტილს (შესაბამისი წრფიდან ამოვარდნილია ერთადერთი A წერტილი).



ნახ. 6.16

(ბ) არსებობს სასრული ზღვრები $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$. ეს ზღვრები ერთმანეთის ტოლია, მაგრამ მათი საერთო მნიშვნელობა არ უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას x_0 წერტილში, ე. ი.

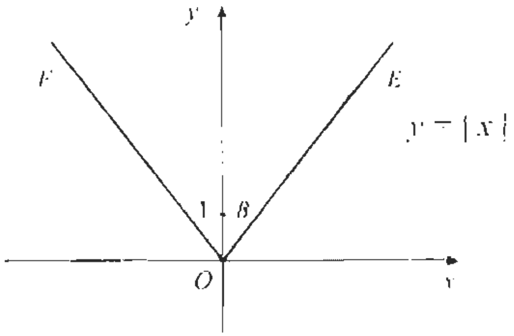
$$f(x_0+) = f(x_0-) \neq f(x_0).$$

მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} |x|, & \text{როცა } x \neq 0, \\ 1, & \text{როცა } x = 0. \end{cases}$$

$f(x)$ ფუნქციისათვის $x=0$ წერტილი არის წყვეტის წერტილი, რადგან $f(0+)=f(0-)=0$ და $f(0)=1$.

ფუნქციის გრაფიკი შედგება ღია OE და OF სხივებისაგან და B წერტილისაგან (იხ. ნახ. 6.17).



ნახ. 6.17

ზემოთ განხილულ ორივე შემთხვევაში x_0 წერტილს **ასაცილებელი წყვეტის წერტილი** ეწოდება. ეს სახელწოდება სავსებით გამართლებულია იმით, რომ თუ ფუნქციის მნიშვნელობად x_0 წერტილში ავიღებთ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარს ამავე x_0 წერტილში, მაშინ ასეთი ფუნქცია გახდება უწყვეტი მოცემულ წერტილში.

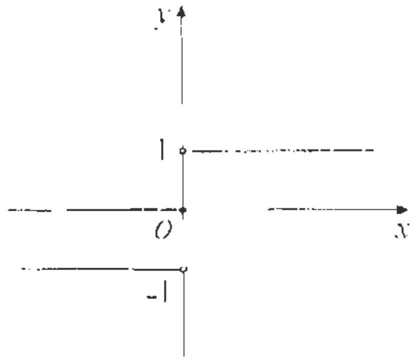
ამ ფუნქციების გრაფიკებზე ეს ფაქტი აისახება იმით, რომ ნახ. 6.16-ზე წრფე „გამთლიანდება" A წერტილის დამატებით შესაბამისი წრფისადმი, ხოლო ნახ. 6.17-ზე B წერტილი ჩამოიწევს სათავეში და „გაამთლიანებს" FOE ტეხილს.

(გ) არსებობს სასრული ზღვრები $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$ მაგრამ $f(x_0+) \neq f(x_0-)$. ამ შემთხვევაში x_0 წერტილს **ნახტომის წყვეტის წერტილი** ეწოდება, ხოლო $f(x_0+)-f(x_0-)$ სხვაობას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნახტომი x_0 წერტილში.

მაგალითად, ვთქვათ

$$f(x)=\begin{cases} -1, & \text{როცა } x<0, \\ 0, & \text{როცა } x=0, \\ 1, & \text{როცა } x>0. \end{cases}$$

$x=0$ არის მოცემული ფუნქციის ნახტომის წყვეტის წერტილი, რადგან $f(0-)=-1 \neq f(0+)=1$. ამ წერტილში ფუნქციის ნახტომია $f(0+)-f(0-)=$ $=1+1=2$ (იხ. ნახ. 6.18).



ნახ. 6.18

ამოცანა 6.21. ვთქვათ, ცნობილია საფოსტო გადასახადის ცხრილი გზავნილის წონის გათვალისწინებით

წონა (გრ)	$0<x\leq 20$	$20<x\leq 50$	$50<x\leq 100$	$100<x\leq 200$
ფასი (დოლარი)	1	2	3	4

შევისწავლოთ ასეთი სახით მოცემული ფუნქციის უწყვეტობა.

▼ თუ $f(x)$-ით აღვნიშნავთ საფოსტო გადასახადების ფუნქციას, მაშინ გვექნება

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{როცა } 0<x\le 20, \\ 2, & \text{როცა } 20<x\le 50, \\ 3, & \text{როცა } 50<x\le 100, \\ 4, & \text{როცა } 100<x\le 200. \end{cases}$$

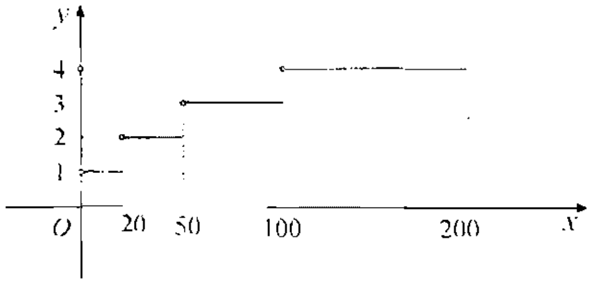
წყვეტის შესაძლო წერტილებია $x=20$, $x=50$, $x=100$. გამოვთვალოთ ცალმხრივი ზღვრები ამ წერტილებში. მივიღებთ:

$$\lim_{x\to 20-} f(x)=1=f(20),$$

$$\lim_{x\to 20+} f(x)=2\neq f(20),$$

ე. ი. $f(x)$ ფუნქციისათვის $x_0=20$ წერტილი წარმოადგენს ნახტომის წყვეტის წერტილს. ამასთან, $f(x)$ ფუნქცია ამ წერტილში უწყვეტია მარცხნიდან. $f(x)$ ფუნქციას ანალოგიური თვისებები გააჩნია $x_0=50$ და $x_0=100$ წერტილებში.

$f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ნახ. 6.19-ზე ნაჩვენები სახე. ასეთი ტიპის ფუნქციებს ეწოდება **საფეხურა ფუნქციები**. ისინი გარკვეულ შუალედებში ინარჩუნებენ მუდმივ მნიშვნელობებს და იცვლებიან ნახტომისებურად მომიჯნავე ინტერვალების საერთო საზღვრით წერტილებზე. ■



ნახ. 6.19

ამოცანა 6.22. მოცემულია ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{როცა } 0\le x\le 2, \\ x+3, & \text{როცა } 2<x\le 5. \end{cases}$$

შევისწავლოთ ამ ფუნქციის უწყვეტობის საკითხი.

▼ რადგან ყველა პოლინომური ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ საკმარისია, შევისწავლოთ f ფუნქციის უწყვეტობა მხოლოდ $x=2$ წერტილში.

გამოვთვალოთ ცალმხრივი ზღვრები:

$$f(2+) = \lim_{x \to 2+} (x+3) = 5,$$

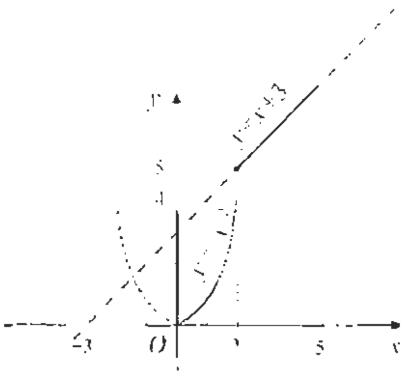
$$f(2-) = \lim_{x \to 2-} x^2 = 4 = f(2).$$

ამრიგად,

$$f(2+) \neq f(2-) = f(2).$$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქცია $[0, 5]$ სეგმენტის $x = 2$ წერტილში განიცდის წყვეტას, ხოლო ამ სეგმენტის ყველა დანარჩენ წერტილში უწყვეტია. წყვეტა არის ნახტომის სახის. ფუნქციის ნახტომია (იხ. ნახ. 6.20)

$$f(2+) - f(2-) = 5 - 4 = 1. \blacksquare$$



ნახ. 6.20

ზემოთ აღწერილი (ა), (ბ) და (გ) ტიპის წყვეტებს უწოდებენ აგრეთვე **პირველი გვარის წყვეტებს**.

თუ x_0 წერტილში რომელიმე ცალმხრივი ზღვარი არ არსებობს, მაშინ მას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **მეორე გვარის წყვეტის წერტილი**.

მაგალითად, უკუპროპორციულობის $y = f(x) = \dfrac{k}{x}$ ფუნქციისათვის $x = 0$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, რადგან, როდესაც $x \to 0$, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია **არ არის** შემოსაზღვრული (იხ. ნახ. 6.3).

შევნიშნოთ, რომ რაციონალური $F(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ფუნქციისათვის

ყველა ის x_0 წერტილი, რომელზეც მნიშვნელი ხდება ნულის ტოლი, ხოლო მრიცხველი განსხვავებულია ნულისაგან, იქნება მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, რადგანაც $F(x)$ ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული x_0 წერტილის მიდამოში.

6.12. სავარჯიშოები

1. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

1) $y=\lg(x+3)$; 4) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$;

2) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$; 5) $y=\dfrac{1}{x^2-x}$;

3) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$; 6) $y=\dfrac{x-1}{x^2-9x+20}$.

2. დაადგინეთ ფუნქციის ლუწობა და კენტობა:

1) $y=x^4-3x^2$; 2) $y=3x-2x^3$; 3) $y=x^2+5x-3$.

3. ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი:

1) $y=3x+5$; 2) $y=2x^2+3$; 3) $y=-x^2+x$;

4) $y=x^2-x+4$; 5) $y=-3x^2+6x+1$.

4. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქცია:

1) $y=1-3x$; 2) $y=\dfrac{1}{1-x}$.

5. ვთქვათ, პროდუქციაზე მოთხოვნა განისაზღვრება კანონზომიერებით $(Q+1)P=100$, სადაც P პროდუქციის ერთეულის ფასია, ხოლო Q — მოთხოვნილი პროდუქციის რაოდენობა. იპოვეთ, რა რაოდენობის პროდუქცია გაიყიდება, თუ $P=2$ დოლარს?

6. ვთქვათ, პროდუქციაზე მოთხოვნასა და ფასს შორის კავშირი განისაზღვრება კანონზომიერებით $P(Q+1)=500$, სადაც P პროდუქციის ერთე-

ულის ფასია, ხოლო Q – მოთხოვნილი პროდუქციის რაოდენობა. იპოვეთ P ფასი, თუ მოთხოვნაა $Q=1000$.

7. პროდუქციის ერთეულის წარმოების ცვლადი დანახარჯია 20 დოლარი. ფიქსირებული დანახარჯი შეადგენს 50 დოლარს. პროდუქციის ერთეული იყიდება 25 დოლარად. რა რაოდენობის პროდუქცია უნდა დამზადდეს, რომ ფირმამ იმუშაოს ნულოვან ზღვარზე (ე. ი. არც მოგება ჰქონდეს და არც წაგება).

8. იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა:

1) $y=-2x^2+x+1$; 2) $y=-x^2-3x+4$.

9. იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა:

1) $y=x^2+2x-3$; 2) $y=6x^2-3x-1$.

10. ვთქვათ, პროდუქციის ერთეულის ფასია 150 დოლარი და კვირაში იყიდება 60 ერთეული. ფასის 20 დოლარით გაზრდა იწვევს გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის 5 ერთეულით შემცირებას. იპოვეთ დამოკიდებულება ფასსა და პროდუქციის გაყიდულ რაოდენობას შორის. ცნობილია, რომ მოთხოვნის ფუნქცია წრფივია. რა შემთხვევაში მიიღება მაქსიმალური ამონაგები?

11. გამოთვალეთ ფუნქციის ზღვარი:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0.5}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

12. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $P=1000-Q$. წარმოადგინეთ (TR) მთლიანი ამონაგები Q რაოდენობის ფუნქციის სახით და ააგეთ მისი

გრაფიკი. იპოვეთ Q რაოდენობის სიდიდე, რომელიც მაქსიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს (TR) ფუნქციას. რას უდრის პროდუქციის ერთეულის შესაბამისი ფასი ამ შემთხვევაში?

13. წარმოების ფიქსირებული დანახარჯია 100 დოლარი, ხოლო ცვლადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე 2 დოლარის ტოლია. გამოსახეთ (TC) მთლიანი დანახარჯი და (AC) საშუალო დანახარჯი პროდუქციის Q რაოდენობის მიხედვით. ააგეთ შესაბამისი გრაფიკები.

14. წარმოების მუდმივი დანახარჯია 25 დოლარი, ხოლო ცვლადი დანახარჯი — 2 დოლარი. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = 20 - Q$. გამოსახეთ მოგების Π ფუნქცია Q-ს საშუალებით და ააგეთ მისი გრაფიკი.

(ა) იპოვეთ საქონლის რა რაოდენობა იძლევა 31 დოლარის ტოლ მოგებას; (ბ) პროდუქციის რა რაოდენობა უზრუნველყოფს მოგების მაქსიმალურ სიდიდეს?

15. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

(ა) $P = 4 - Q$; (ბ) $P = \dfrac{7}{Q+1}$; (გ) $P = 10 - 4Q$.

იპოვეთ შესაბამისი მთლიანი ამონაგების (TR) ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი.

16. საწარმოს მუდმივი დანახარჯია 500 დოლარი, ხოლო ცვლადი დანახარჯი — 10 დოლარი. გამოსახეთ სრული (TC) დანახარჯი და საშუალო (AC) დანახარჯი პროდუქციის Q რაოდენობის საშუალებით. ააგეთ მათი გრაფიკები.

17. წარმოების მუდმივი დანახარჯია 1 დოლარი, ხოლო ცვლადი დანახარჯი — $\left(1 + \dfrac{1}{Q}\right)$ დოლარი. გამოსახეთ (TC) მთლიანი დანახარჯი და (AC) საშუალო დანახარჯი პროდუქციის Q რაოდენობის საშუალებით. ააგეთ მათი გრაფიკები.

18. იპოვეთ მოგების Π ფუნქცია, თუ მოთხოვნის ფუნქციაა $2Q+P=25$, ხოლო საშუალო დანახარჯის ფუნქციაა $(AC)=\frac{32}{Q}+5$.

იპოვეთ პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც

(ა) უზრუნველყოფს ნულოვან ზღვარზე მუშაობას;

(ბ) შეესაბამება 432 დოლარის ტოლ ნაგებას;

(გ) უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას.

19. მოცემულია (TR) მთლიანი ამონაგებისა და (TC) მთლიანი დანახარჯის ფუნქციები: $(TR)=-2Q^2+14Q$, $(TC)=2Q+10$. იპოვეთ:

(ა) ნულოვან ზღვარზე მუშაობის რეჟიმი;

(ბ) მოგების ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

20. გამოთვალეთ არგუმენტის Δx ნაზრდის შესაბამისი ფუნქციის ნაზრდი მითითებულ წერტილებში:

1) $y=4x-3, \quad x_0=3;$ 3) $y=x^2+2, \quad x_0=0;$

2) $y=-x^2-1, \quad x_0=1;$ 4) $y=x-3x^2, \quad x_0=5.$

21. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წყვეტის წერტილები:

1) $y=\dfrac{x+3}{x\left(x^2-4\right)}$; 2) $y=\dfrac{1}{x-5}$.

22. აჩვენეთ, რომ $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{როცა } x\le 3, \\ 2x+1, & \text{როცა } x>3, \end{cases}$

ფუნქცია განიცდის ნახტომის ტიპის წყვეტას $x=3$ წერტილში. გამოთვალეთ ფუნქციის ნახტომი წყვეტის წერტილში.

23. აჩვენეთ, რომ

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2, & \text{როცა } x\le 2, \\ x, & \text{როცა } x>2, \end{cases}$$

ფუნქცია განიცდის წყვეტას $x=2$ წერტილში. გამოთვალეთ ფუნქციის ნახტომი წყვეტის წერტილში.

24. a-ს როგორი მნიშვნელობისათვის იქნება

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{როცა } x\le 1, \\ 3-ax^2, & \text{როცა } x>1, \end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტი $x=1$ წერტილში?

25. იპოვეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები და გამოთვალეთ ფუნქციის ნახტომი წყვეტის წერტილში:

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{როცა } x\le -1, \\ x^2+1, & \text{როცა } -1<x\le 1, \\ -x+3, & \text{როცა } x>1, \end{cases}$$

26. იპოვეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები და გამოთვალეთ ფუნქციის ნახტომი წყვეტის წერტილში:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2, & \text{როცა } 0\le x\le 1, \\ 4-2x, & \text{როცა } 1<x<2.5, \\ 2x-7, & \text{როცა } x\ge 2.5, \end{cases}$$

27. საწვავი აირის გადასახადის გაანგარიშება ხდება შემდეგი ცხრილით მოცემული ტარიფების საფუძველზე (ერთეულად აღებულია 1000 $მ^3$)

კვარტალური მოხმარება	ფიქსირებული გადასახადი (დოლარი)	ცვალებადი გადასახადი ერთეულის მოხმარებისათვის (დოლარი)
$0\le u<20$	200	60
$20\le u<50$	400	50
$50\le u<100$	600	46
$u\ge 100$	800	44

ჩაწერეთ ცხადი ანალიზური სახით f ფუნქცია, რომელიც ამ ტარიფების მიხედვით აკავშირებს დახარჯული აირის u რაოდენობასა და შესაბამისი $f(u)$ გადასახადის თანხას.

თავი 7. მარგინალური ფუნქციები. ფუნქციის წარმოებული. დიფერენციალი. ფუნქციის სრული გამოკვლევა

ეკონომიკური ამოცანების გადაწყვეტისას ხშირად გვიხდება გარკვეული ფუნქციების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნა. ასეთი ტიპის პრობლემებს ჩვენ შევხვდით წინა თავში და მათ მარტივად გავართვით თავი, რადგანაც იქ საქმე გვქონდა მხოლოდ წრფივ და კვადრატულ ფუნქციებთან.

ზოგადად, როდესაც გამოსაკვლევია უფრო რთული ფუნქციები, მაშინ ელემენტარული, ჩვენთვის აქამდე ცნობილი მეთოდებით ველარ მივაღწევთ მიზანს. საჭირო ხდება უფრო ღრმა ანალიზის ჩატარება, რაც მოითხოვს ახალი, უნივერსალური მეთოდების ცოდნას.

ამ თავში ჩვენი მთავარი მიზანია სწორედ ასეთი მეთოდების შესწავლა. ეს მეთოდები ეფუძნება წარმოებულის ცნებას.

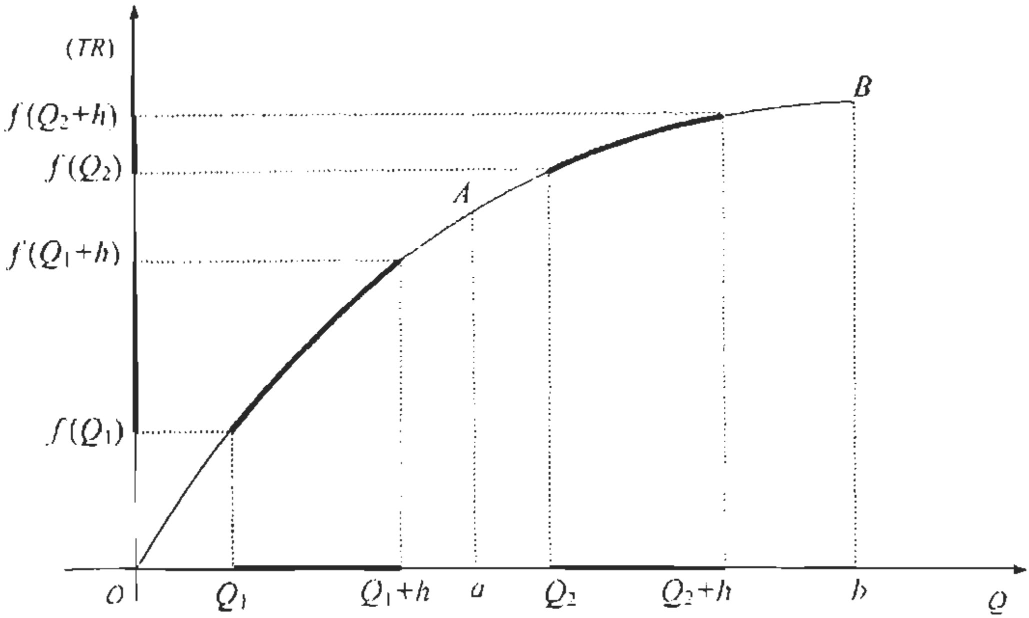
წარმოებულის განმარტება და წარმოებულის გამოყენება ფუნქციების სრული გამოკვლევის ჩასატარებლად წარმოადგენს ამ თავის არსებით ნაწილს.

ამავე თავში გავეცნობით ეკონომიკური ფუნქციების მნიშვნელოვან კლასს — მარგინალურ ფუნქციებს და მათ გამოყენებას პრაქტიკულ ამოცანებში. კერძოდ, გავეცნობით ეკონომიკური ოპტიმიზაციის ამოცანებს, რომელთაც მივყავართ გარკვეული ფუნქციების ექსტრემუმის (მინიმუმის ან მაქსიმუმის) მოძებნამდე.

7.1. მთლიანი ამონაგების საშუალო ცვლილება პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით. მარგინალური ამონაგების ცნება

ვიდრე უშუალოდ წარმოებულის განმარტებაზე გადავიდოდეთ, განვიხილოთ შემდეგი ეკონომიკური ამოცანა.

ვთქვათ, მთლიანი ამონაგების $(TR)=f(Q)$ ფუნქციის გრაფიკია წირი, რომელიც გამოსახულია ნახ. 7.1-ზე.



ნახ. 7.1

ნახაზიდან აშკარად ჩანს, რომ $f(Q)$ ზრდადი ფუნქციაა $(0, b)$ შუალედში, ამასთან, იგი უფრო სწრაფად იზრდება $(0, a)$ შუალედში (OA წირი), ვიდრე (a, b) შუალედში (AB წირი). თუ შევადარებთ ერთმანეთს გაყიდული საქონლის ერთი და იმავე რაოდენობით ზრდას Q_1 რაოდენობიდან $(Q_1 + h)$-მდე $(0, a)$ შუალედში და Q_2-დან $(Q_2 + h)$-მდე (a, b) შუალედში, დავრწმუნდებით, რომ პირველ შემთხვევაში ამონაგების ცვლილება (ნამატი) საქონლის ერთეულზე გაანგარიშებით არის

$$\frac{f(Q_1+h)-f(Q_1)}{h},$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში –

$$\frac{f(Q_2+h)-f(Q_2)}{h}.$$

ნახაზიდან ისიც ჩანს, რომ

$$f(Q_1+h)-f(Q_1)>f(Q_2+h)-f(Q_2).$$

ამიტომ

$$\frac{f(Q_1+h)-f(Q_1)}{h} > \frac{f(Q_2+h)-f(Q_2)}{h}.$$

აქედან კი დავასკვნით, რომ გაყიდული პროდუქციის h რაოდენობით გაზრდისას მთლიანი ამონაგების საშუალო ცვლილება (ნამატი) პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით უფრო მეტია $(0,a)$ ინტერვალის Q_1 წერტილისათვის, ვიდრე (a,b) ინტერვალის Q_2 წერტილისათვის.

ამრიგად, შეფარდება

$$\frac{f(Q+h)-f(Q)}{h} \tag{7.1}$$

აღწერს მთლიანი ამონაგების „ცვლილების სიჩქარეს" პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით, როდესაც გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა იზრდება Q-დან $(Q+h)$-მდე. რაც უფრო მცირეა h რიცხვი, მით უფრო ზუსტად ახასიათებს აღნიშნული შეფარდება $f(Q)$ ფუნქციის „ცვლილების სიჩქარეს" Q-ს მახლობლობაში. იდეალურად ზუსტი მახასიათებელი კი იქნება (7.1) გამოსახულების ზღვარი, როდესაც $h \to 0$. თუ ეს ზღვარი არსებობს, მაშინ მას **მარგინალური ანუ ზღვრული ამონაგები** ეწოდება და აღინიშნება (MR) სიმბოლოთი

$$\boxed{(MR) = \lim_{h \to 0} \frac{f(Q+h)-f(Q)}{h}} \tag{7.2}$$

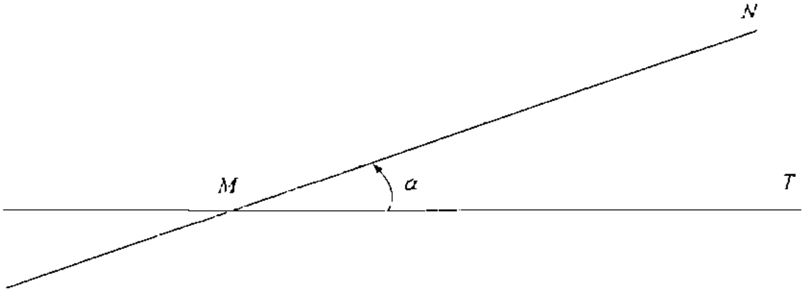
სწორედ აღნიშნული ტიპის ზღვრებს მივყავართ წარმოებულის ცნებამდე.

გავეცნოთ (7.1) და (7.2) სახის გამოსახულებების გეომეტრიულ შინაარსს.

წინასწარ შემოვიღოთ რამდენიმე ცნება.

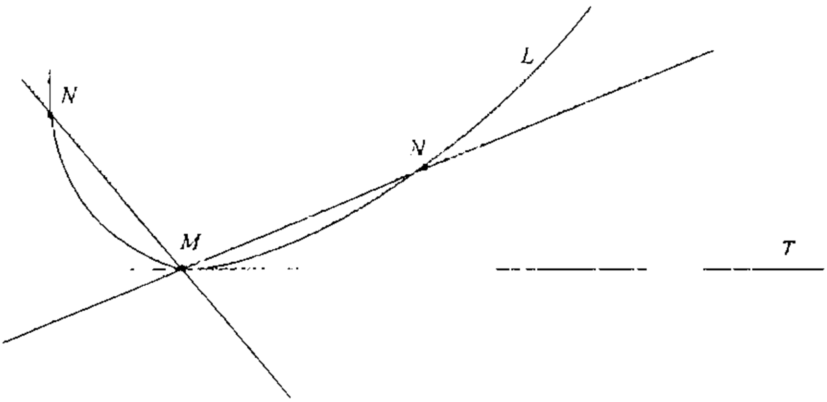
ვთქვათ, მოცემულია ორი წრფე, რომელთაც ერთი საერთო M წერტილი აქვთ. ვიგულისხმოთ, რომ MT არის უძრავი წრფე, ხოლო MN – მოძრავი წრფე, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა M წერტილის გარშემო. უძრავ MT წრფეს უწოდებენ მოძრავი MN წრფის ზღვრულ მდებარეობას, თუ MN ისე ბრუნავს M წერტილის გარშემო, რომ ამ წრფეებით

შექმნილი $\alpha = \angle NMT$ მახვილი კუთხე მიისწრაფვის ნულისაკენ (იხ. ნახ. 7.2).



ნახ. 7.2

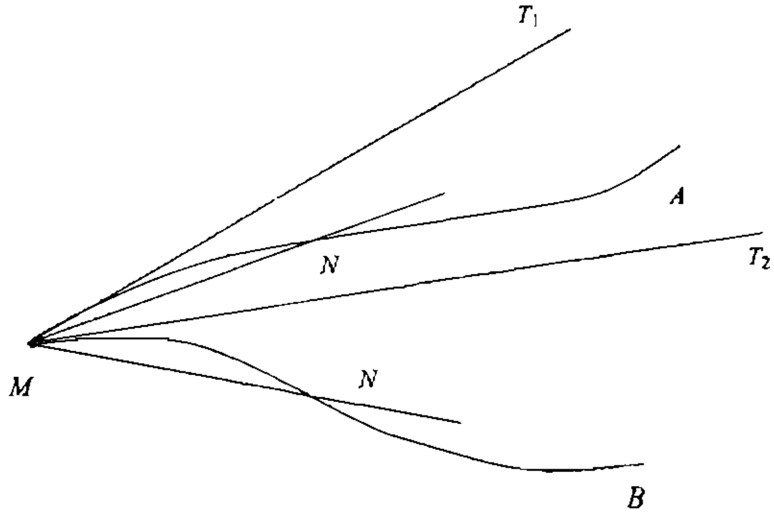
შემოვილოთ მხების ცნება ნებისმიერი წირის შემთხვევაში. მხები წრფე L წირის M წერტილში შემდეგნაირად განიმარტება. ავილოთ ამ L წირზე M წერტილისაგან განსხვავებული N წერტილი და გავატაროთ MN მკვეთი წრფე (იხ. ნახ. 7.3).



ნახ. 7.3

ვთქვათ, L წირზე მდებარე ნებისმიერი N წერტილი აღებულ L წირზე ისე მოძრაობს, რომ იგი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ, ხოლო შესაბამისი მკვეთი MN წრფე ისე ბრუნავს M წერტილის გარშემო, რომ იგი მიისწრაფვის ერთი და იმავე ზღვრული MT წრფისაკენ (იხ. ნახ. 7.3). ასეთ MT წრფეს, თუ იგი არსებობს, ეწოდება მოცემული L **წირის მხები** M წერტილში. ზოგიერთ წერტილში წირს შეიძლება არ ჰქონდეს მხები. მაგალითად, ნახ. 7.4-ზე გამოსახულ AMB წირს M წერტილში მხები არ გააჩნია, რადგან MN მკვეთი მიისწრაფვის MT_1 წრფისაკენ, როცა N მი-

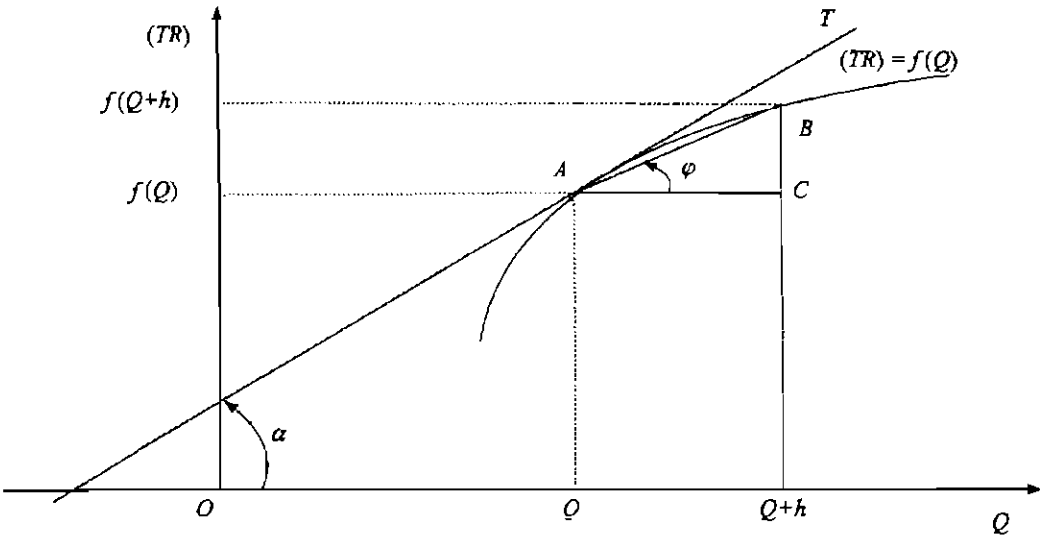
ისწრაფვის M წერტილისაკენ AM რკალის გასწვრივ, ხოლო მიისწრაფვის MT_2 წრფისაკენ, როდესაც N მიისწრაფვის M წერტილისაკენ BM რკალის გასწვრივ.



ნახ. 7.4

რადგან MT_2 და MT_1 სხვადასხვა წრფეა, ამიტომ M წერტილში წირს მხები წრფე არ გააჩნია.

ვთქვათ, მთლიანი შემოსავლის $(TR) = f(Q)$ ფუნქციის გრაფიკი ნახ. 7.5-ზე გამოსახული წირია.



ნახ. 7.5

მაშინ, ცხადია, რომ ΔABC-დან

$$\frac{f(Q+h)-f(Q)}{h}=\frac{|BC|}{|AC|}=\operatorname{tg}\varphi. \tag{7.3}$$

ამრიგად, (7.1) გამოსახულება წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკის $A(Q,f(Q))$ და $B(Q+h,f(Q+h))$ წერტილებზე გავლებული მკვეთის მიერ OQ ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხის ტანგენსს (ანუ AB წრფის კუთხურ კოეფიციენტს).

როდესაც $h\to 0$, მაშინ, ცხადია, რომ B წერტილი მიისწრაფვის A წერტილისაკენ, ხოლო AB მკვეთი წრფე — AT წრფისაკენ, რომელიც წარმოადგენს გრაფიკის მხებს A წერტილში.

ასევე, ცხადია, ამ შემთხვევაში $\varphi=\angle BAC$ მიისწრაფვის $\alpha=\angle TAC$ კუთხისაკენ. ამიტომ $\operatorname{tg}\varphi\to\operatorname{tg}\alpha$.

შევნიშნოთ, რომ $\operatorname{tg}\alpha$ წარმოადგენს AT წრფის კუთხურ კოეფიციენტს.

ამრიგად, თუ არსებობს (7.2) ზღვარი, მაშინ (MR) მარგინალური ამონაგები არგუმენტის Q მნიშვნელობისათვის რიცხობრივად მთლიანი ამონაგების ფუნქციის გრაფიკის $(Q,f(Q))$ წერტილზე გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტის ტოლია.

ამოცანა 7.1. მთლიანი ამონაგების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ტოლობით

$$(TR)=f(Q)=-2Q^2+10Q.$$

(ა) გამოვთვალოთ მარგინალური ამონაგები Q ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის;

(ბ) შევადაროთ მარგინალური ამონაგებები $Q=1$ და $Q=2$ მნიშვნელობებისათვის. რა ეკონომიკური დასკვნის გამოტანა შეიძლება ამ შედარებიდან?

▼ (ა) იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ მარგინალური ამონაგები, ჯერ შევადგინოთ (7.1) გამოსახულება. ჩვენს კონკრეტულ შემთხვევაში

$$\frac{f(Q+h)-f(Q)}{h}=\frac{-2(Q+h)^2+10(Q+h)-\left[-2Q^2+10Q\right]}{h}=$$

$$=\frac{-4Qh+10h-2h^2}{h}=-4Q+10-2h.$$

ახლა გამოვთვალოთ ამ გამოსახულების ზღვარი, როცა $h \to 0$:

$$(MR)=\lim_{h\to 0}\frac{f(Q+h)-f(Q)}{h}=\lim_{h\to 0}(-4Q+10-2h)=-4Q+10.$$

ამრიგად, მარგინალური ამონაგებისათვის მივიღებთ

$$(MR)=-4Q+10.$$

(ბ) მიღებული ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

1) თუ $Q=1$, მაშინ მარგინალური ამონაგებია

$$(MR)=-4\cdot 1+10=6;$$

2) თუ $Q=2$, მაშინ მარგინალური ამონაგებია

$$(MR)=-4\cdot 2+10=2.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $Q=Q_1=1$ წერტილში ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე უფრო დიდია, ვიდრე $Q=Q_2=2$ წერტილში.

ამიტომ, თუ პროდუქციის გაყიდვის დონე Q_1 და Q_2 მნიშვნელობებიდან გაიზრდება ერთი და იმავე რაოდენობით, მაგალითად, h-ით, მაშინ გაყიდვის დონის გაზრდა Q_1-დან (Q_1+h)-მდე უფრო მეტ ამონაგებს მოგვიტანს, ვიდრე გაყიდვის დონის გაზრდა Q_2-დან (Q_2+h)-მდე. ■

7.2. ფუნქციის წარმოებული

წინა პარაგრაფში ჩატარებული მსჯელობებიდან ნათლად ჩანს, რომ ფუნქციის გამოკვლევის დროს ერთ-ერთი ცენტრალური საკითხია იმის გაანალიზება, თუ როგორია ფუნქციის „ცვლილების სიჩქარე“ არგუმენტის ცვლილებისას. შევუდგეთ ამ საკითხის შესწავლას მათემატიკური თვალსაზრისით.

ვთქვათ, რაიმე შუალედში მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქცია. ამ შუალედში ავიღოთ რომელიმე x_0 წერტილი და მივანიჭოთ მას მცირე Δx ნაზრდი, რომელსაც ვუწოდოთ **არგუმენტის ნაზრდი.** ვიგულისხმოთ, რომ $\Delta x \neq 0$ და $x_0+\Delta x$ წერტილი არ გამოდის ფუნქციის განსაზღვრის არედან. ცხადია, თუ $\Delta x>0$, მაშინ $x_0+\Delta x$ წერტილი ძევს x_0 წერტილის მარჯვნივ, და თუ $\Delta x<0$, მაშინ — მარცხნივ. არგუმენტის Δx ნაზრდით შეცვლისას ფუნქციაც მიიღებს შესაბამის ნაზრდს, რომელიც აღინიშნება Δy სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right).$$

ფუნქციის საშუალო ნაზრდი, მასშტაბის ერთეულზე გაანგარიშებით, იქნება

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}, \tag{7.4}$$

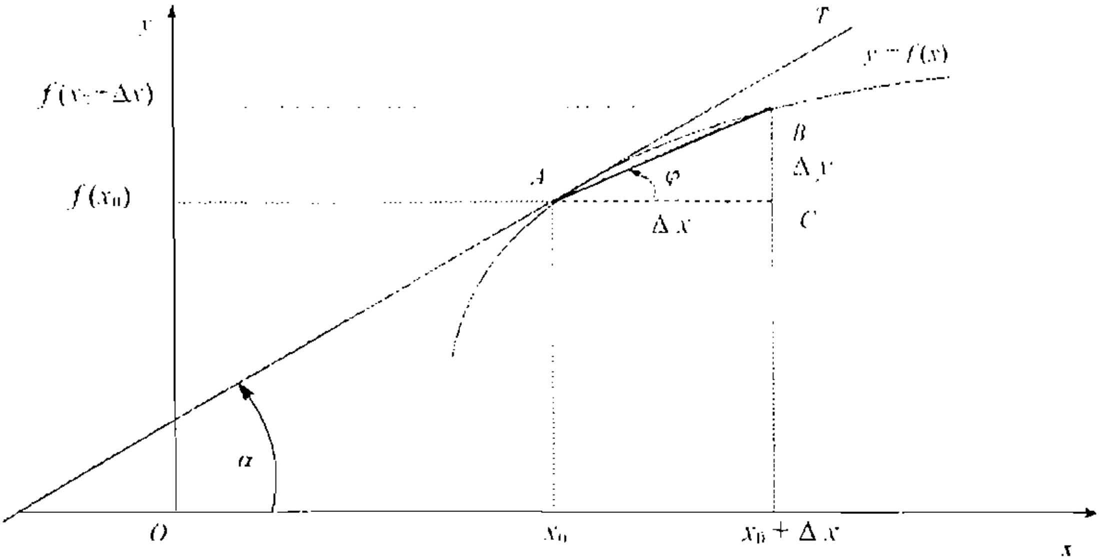
რაც ახასიათებს ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს, როდესაც არგუმენტი იცვლება x_0-დან $\left(x_0+\Delta x\right)$-მდე. რაც უფრო მცირეა Δx (ანუ რაც უფრო ახლოსაა Δx ნულთან), მით უფრო ზუსტად აღწერს ეს შეფარდება ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს x_0 წერტილის უშუალო მახლობლობაში. ამ პროცესს ბუნებრივად მივყავართ წარმოებულის ცნებასთან, ანუ (7.4) შეფარდების ზღვრის გამოთვლასთან, როდესაც $\Delta x \to 0$.

● $f(x)$ **ფუნქციის წარმოებული** x_0 წერტილში ეწოდება ამ წერტილში ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ. ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში აღინიშნება $f'(x_0)$ სიმბოლოთი. ■

მაშასადამე, განმარტების თანახმად გვაქვს

$$\boxed{f'\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}} \tag{7.5}$$

გავეცნოთ წარმოებულის გეომეტრიულ შინაარსს. ვთქვათ, $y = f(x)$ ფუნქციის შესაბამის წირს $A = \left(x_0, f(x_0)\right)$ წერტილში გააჩნია მხები (იხ. ნახ. 7.6).



ნახ. 7.6

გამოვთვალოთ $A = \left(x_0, f(x_0)\right)$ და $B = \left(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)\right)$ წერტილებზე გამავალი AB მკვეთის Ox ღერძთან დახრის φ კუთხის ტანგენსი, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ და მივასწრაფოთ Δx ნაზრდი ნულისაკენ (იხ. ნახ. 7.6). მაშინ AB წრფე დაიკავებს ზღვრულ მდებარეობას და დაემთხვევა AT მხებს. ცხადია, ამ შემთხვევაში $\varphi = \angle BAC$ მიისწრაფვის $\alpha = \angle TAC$-კენ ანუ $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$. მაშინ, წარმოებულის განმარტების თანახმად, მივიღებთ

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

ე. ი. ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში რიცხობრივად ტოლია იმ კუთხის ტანგენსისა, რომელსაც $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $A = \left(x_0, f(x_0)\right)$ წერტილში გავლებული მხები შეადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

თუ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია $f'(x)$ წარმოებული მისი განსაზღვრის

არის ყოველ x წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ ფუნქცია წარმოებადია მოცემულ არეში. ფუნქციის წარმოებულის მოძებნის ოპერაციას ფუნქციის განარმოება ეწოდება.

წარმოებულის განმარტების გამოყენებით გამოვთვალოთ ზოგიერთი ფუნქციის წარმოებული.

ამოცანა 7.2. ვიპოვოთ $f(x)=x$ ფუნქციის წარმოებული.

▼ წარმოებულის განმარტების თანახმად გვექნება

$$f'(x)=(x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1.$$

ამრიგად, $(x)'=1$. ■

ამოცანა 7.3. ვიპოვოთ $f(x)=ax+c$ ფუნქციის წარმოებული, თუ a და c ნებისმიერი მუდმივებია.

▼ წარმოებულის განმარტების თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$f'(x)=(ax+c)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[a(x+\Delta x)+c\right]-\left[ax+c\right]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a=a.$$

ამრიგად, $(ax+c)'=a$. როგორც კერძო შემთხვევას, აქედან მივიღებთ, რომ მუდმივის წარმოებული ნულის ტოლია. მართლაც, თუ $a=0$, გვექნება $(c)'=0$. ■

ამოცანა 7.4. ვიპოვოთ $f(x)=\sqrt{x}$ $(x>0)$ ფუნქციის წარმოებული.

▼ კვლავ გამოვიყენოთ წარმოებულის განმარტება:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot$$

ამრიგად, $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot$ ■

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.1. თუ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს სასრული წარმოებული, მაშინ ის უწყვეტია ამ წერტილში.

▼ როგორც ვიცით, თუ რაიმე წერტილში არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი, მაშინ ფუნქცია უწყვეტია ამ წერტილში (იხ. პარაგრაფი 6.10). ამიტომ ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

მართლაც,

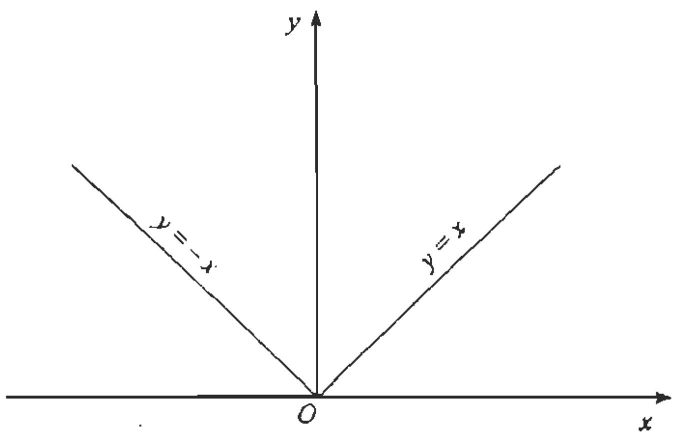
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

ეს კი ამტკიცებს, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში. ■

ამრიგად, თუ ფუნქცია წარმოებადია რაიმე წერტილში, მაშინ იგი ამ წერტილში უწყვეტიცაა. შევნიშნოთ, რომ შებრუნებული დებულება არ არის მართებული, ე. ი. ფუნქცია შეიძლება მოცემულ წერტილში უწყვეტი იყოს, მაგრამ არ იყოს წარმოებადი ამ წერტილში.

მაგალითად, $f(x)=|x|$ ფუნქცია (იხ. ნახ. 7.7) უწყვეტია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, მაგრამ $x=0$ წერტილში წარმოებული არ გააჩნია, რადგან

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \qquad \text{და} \qquad \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$



ნახ. 7.7

აქვე შევნიშნოთ, რომ ნახ. 7.7-ზე გამოსახული $f(x)=|x|$ ფუნქციის გრაფიკის (0,0) წერტილში მხები წრფე არ არსებობს.

7.3. წარმოებულის გამოთვლის წესები

ამ პარაგრაფში გავეცნობით გაწარმოების ძირითად წესებს.

თეორემა 7.2. თუ $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია რაიმე ინტერვალში, მაშინ ამავე ინტერვალში წარმოებადია აგრეთვე $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ ფუნქციები და მართებულია ტოლობები:

$$\boxed{\begin{aligned}
&(\text{ა})\ \left[f(x)\pm g(x)\right]' = f'(x)\pm g'(x)\\
&(\text{ბ})\ \left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\\
&(\text{გ})\ \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x)-g'(x)\,f(x)}{g^2(x)},\quad g(x)\neq 0
\end{aligned}}$$

კერძოდ, თუ c მუდმივია, მაშინ

$$\left[c\,f(x)\right]' = c\,f'(x).$$

▼ დავამტკიცოთ, მაგალითად, (ა) ფორმულის მართებულობა:

$$\left[f(x)+g(x)\right]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = f'(x)+g'(x).$$

ანალოგიურად მტკიცდება დანარჩენი ტოლობებიც. ■

ამოცანა 7.5. ვთქვათ, $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$. დავამტკიცოთ, რომ

$$\boxed{\left(x^n\right)' = n\,x^{n-1}}$$

▼ გამოვიყენოთ სრული ინდუქციის პრინციპი:

(ა) ვაჩვენოთ ფორმულის მართებულობა $n=1$-თვის. ამ შემთხვევაში დასამტკიცებელი ფორმულა მართებულია, რადგან

$$f'(x) = (x)' = 1 = 1 \cdot x^{1-1}.$$

(აქ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ თუ $x = 0$, მაშინ $0^{1-1} = 0^0 = 1$).

(ბ) დავუშვათ, რომ ფორმულა მართებულია $n = n_0$-თვის, ე. ი.

$\left(x^{n_0}\right)' = n_0\, x^{n_0 - 1}$ და დავამტკიცოთ ფორმულის მართებულობა $n = n_0 + 1$-თვის. მართლაც,

$$\left(x^{n_0+1}\right)' = \left(x^{n_0} \cdot x\right)' = \left(x^{n_0}\right)' \cdot x + x^{n_0} \cdot x' = n_0\, x^{n_0 - 1} \cdot x + x^{n_0} =$$

$$= n_0\, x^{n_0} + x^{n_0} = x^{n_0}\left(n_0 + 1\right).$$

მაშასადამე,

$$\left(x^{n_0+1}\right)' = \left(n_0 + 1\right) x^{n_0}.$$

ამით დამტკიცდა, რომ $\left(x^n\right)' = n\, x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. ■

ამოცანა 7.6. ვიპოვოთ $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, ფუნქციის წარმოებული.

▼ გამოვიყენოთ შეფარდების გაწარმოების ფორმულა

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot \left(x^n\right)'}{\left(x^n\right)^2} = -\frac{n\, x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\, x^{-(n+1)},$$

მაშასადამე,

$$\left(x^{-n}\right)' = -n\, x^{-n-1}. \ ■$$

ზოგადად, მტკიცდება, რომ ნებისმიერი ნამდვილი α რიცხვისათვის

$$\boxed{\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha - 1}}$$

ამოცანა 7.7. ვაჩვენოთ, რომ $y = a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული გამოითვლება ფორმულით

$$\boxed{\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1}$$

▼ ჯერ გამოვთვალოთ ფუნქციის ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის Δx ნაზრდს

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right).$$

მტკიცდება, რომ

$$\lim_{t \to 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a.$$

ამ ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

ამრიგად, $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$. ■

7.4. რთული ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, მოცემულია $g(u)$ ფუნქცია, სადაც u თავის მხრივ არის x-ის ფუნქცია, $u = h(x)$. მაშინ $g(h(x))$ ფუნქციას ეწოდება x არგუმენტის **რთული ფუნქცია**. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(x) = g(h(x)).$$

თუ არგუმენტის რაიმე x მნიშვნელობისათვის $u = h(x)$ ფუნქცია წარმოებადია, ხოლო u-ს შესაბამისი მნიშვნელობისათვის წარმოებადია $g(u)$ ფუნქციაც, მაშინ არსებობს $f(x) = g(h(x))$ რთული ფუნქციის წარმოებული და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\boxed{f'(x) = \left[g(h(x))\right]' = g'(u)\,\Big|_{u=h(x)} h'(x) = g'(h(x))\; h'(x)} \qquad (7.6)$$

ამოცანა 7.8. ვიპოვოთ $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ ფუნქციის წარმოებული.

▼ შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$g(u) = \sqrt{u}, \qquad u = h(x) = x^3 + 1.$$

მაშინ (7.6) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$f'(x) = g'(u)\Big|_{u=h(x)}\, h'(x) = \left(\sqrt{u}\right)'\Big|_{u=(x^3+1)}\left(x^3+1\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\Big|_{u=x^3+1} 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}. \ \blacksquare$$

ამოცანა 7.9. ვიპოვოთ $f(x)=\left(x^2-5\sqrt{x}\right)^6$ ფუნქციის წარმოებული.

▼ შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$g(u)=u^6, \quad u=h(x)=x^2-5\sqrt{x}.$$

კვლავ (7.6) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$f'(x)=g'(u)\Big|_{u=h(x)}\cdot h'(x) = 6u^5\Big|_{u=x^2-5\sqrt{x}}\left(x^2-5\sqrt{x}\right)' =$$

$$=6\left(x^2-5\sqrt{x}\right)^5\left(2x-\frac{5}{2\sqrt{x}}\right). \ \blacksquare$$

ამოცანა 7.10. ვაჩვენოთ, რომ $y=\log_a x$ ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებული გამოითვლება ფორმულით

$$\boxed{\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}, \quad a>0, \quad a\neq 1}$$

▼ შევნიშნოთ, რომ $y=\log_a x$ ტოლობა $x=a^y$ ტოლობის ეკვივალენტურია. გავაწარმოოთ ეს უკანასკნელი ტოლობა იმის გათვალისწინებით, რომ მისი მარჯვენა მხარე არის x-ის რთული ფუნქცია. რთული ფუნქციის გაწარმოების ფორმულის გამოყენება გვაძლევს

$x'=a^y(\ln a)\ y'$, ანუ $1=a^y(\ln a)\ y'$.

რადგან $a^y=x$, ამიტომ მივიღებთ

$$y'=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}. \ \blacksquare$$

7.5. წარმოებულების ცხრილი

ამოვწეროთ ცალკე ცხრილის სახით ძირითად ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულები:

$c' = 0$, $c = const$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(x^a)' = a\, x^{a-1}$, $a \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

7.6. მაღალი რიგის წარმოებულები

ცხადია, $y = f(x)$ ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებული ისევ x ცვლადის ფუნქციაა. თუ $f'(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული, მაშინ ამ წარმოებულს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და აღინიშნება $f''(x)$ ან y'' სიმბოლოთი.

თუ მეორე რიგის წარმოებულს გააჩნია წარმოებული, მაშინ მას უწოდებენ მესამე რიგის წარმოებულს და აღნიშნავენ $f'''(x)$ ან y''' სიმბოლოთი. ზოგადად, $(n-1)$ რიგის წარმოებულის წარმოებულს ეწოდება n-ური რიგის წარმოებული და აღინიშნება $f^{(n)}(x)$ ან $y^{(n)}$ სიმბოლოთი.

მაგალითად, ვიპოვოთ $f(x)=3x^3+2x^2-3x+1$ ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული. თანმიმდევრობითი გაწარმოებით მივიღებთ:

$$f'(x)=9x^2+4x-3,\quad f''(x)=18x+4,\quad f'''(x)=18.$$

7.7. ფუნქციის დიფერენციალი

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x წერტილის რაიმე მიდამოში.

● $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **დიფერენცირებადი** x წერტილში, თუ ამ წერტილში ფუნქციის ნაზრდი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=A\,\Delta x+\alpha\,\Delta x, \tag{7.7}$$

სადაც A სასრული რიცხვია და არ არის დამოკიდებული Δx-ზე, ხოლო $\alpha=\alpha(\Delta x)\to 0$, როცა $\Delta x\to 0$.

ფუნქციის ნაზრდის $A\,\Delta x$ შესაკრებს, რომელიც წრფივია არგუმენტის Δx ნაზრდის მიმართ, **ფუნქციის დიფერენციალი** ეწოდება. იგი აღინიშნება dy სიმბოლოთი. მაშასადამე,

$$dy=A\,\Delta x. \;\blacksquare$$

მაგალითად, თუ $y=f(x)=x^2$, მაშინ ფუნქციის ნაზრდისათვის მივიღებთ

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\,\Delta x+(\Delta x)^2.$$

ამ შემთხვევაში $\alpha=\Delta x$, ხოლო ნაზრდის მთავარი ნაწილია

$$dy=2x\,\Delta x.$$

მტკიცდება, რომ თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია x წერტილში, მაშინ ფუნქციას x წერტილში აქვს სასრული წარმოებული.

მართლაც, ვთქვათ, $\Delta y=A\,\Delta x+\alpha\,\Delta x$. აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha .$$

ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [A + \alpha] = A .$$

მაშასადამე, $A = f'(x)$.

უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x .$$

ცხადია, აგრეთვე, რომ

$$\boxed{dy = f'(x)\,\Delta x} \qquad (7.8)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $y = f(x) = x$, მაშინ $f'(x) = 1$ და ამიტომ (7.8)-ის თანახმად $dx = \Delta x$, ე. ი. არგუმენტის დიფერენციალი არგუმენტის ნაზრდის ტოლია. ფუნქციის დიფერენციალი შეიძლება ასეც ჩავწეროთ:

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx} \qquad (7.9)$$

ამრიგად, ფუნქციის დიფერენციალი უდრის ამ ფუნქციის წარმოებულისა და არგუმენტის დიფერენციალის ნამრავლს. ეს საშუალებას გვაძლევს ფუნქციის წარმოებული წარმოვადგინოთ შემდეგნაირადაც

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}} \qquad (7.10)$$

ე. ი. ფუნქციის წარმოებული შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფუნქციის დიფერენციალის შეფარდება არგუმენტის დიფერენციალთან.

შევნიშნოთ, რომ რადგან $\alpha \to 0$, როდესაც $\Delta x \to 0$, გარკვეული სიზუსტით (7.7) ფორმულიდან ფუნქციის ნაზრდისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx A\,\Delta x = f'(x)\,\Delta x = d f(x)} \qquad (7.11)$$

ე. ი. ფუნქციის ნაზრდი მიახლოებით ამ ფუნქციის დიფერენციალის ტოლია.

7.8. ტეილორის ფორმულა

წინა პარაგრაფში ჩვენ უკვე ვაჩვენეთ, რომ თუ $y = f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში გააჩნია წარმოებული, მაშინ მისი Δy ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის $\Delta x = x - x_0$ ნაზრდს, წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)\alpha,$$

სადაც $x = x_0 + \Delta x$ და $\alpha \to 0$, როცა $\Delta x \to 0$.

ამ ფორმულიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\alpha \cdot \tag{7.12}$$

თუ x_0 დავაფიქსირეთ და x იცვლება $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ მიდამოში, მაშინ უკანასკნელი ფორმულის მარჯვენა მხარეში პირველი ორი შესაკრების ჯამი წარმოადგენს x ცვლადის მიმართ პირველი ხარისხის მრავალწევრს, ხოლო ბოლო მესამე შესაკრები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც „დამატებითი წევრი", რომელიც „ძალიან მცირეა", როდესაც x ძალიან ახლოსაა x_0-თან. მაშასადამე, გარკვეული სიზუსტით, $f(x)$ ფუნქციას შეგვიძლია მივუახლოვდეთ პირველი რიგის მრავალწევრით, თუ უგულებელვყოფთ „დამატებით წევრს". ცხადია, რომ

$$R_1 = (x - x_0)\alpha$$

გამოსახულება ამ შემთხვევაში წარმოადგენს აღნიშნული მიახლოების აბსოლუტურ ცდომილებას.

თუ f ფუნქციას x_0 წერტილის მიდამოში გააჩნია $(n+1)$ რიგამდე უწყვეტი წარმოებულები, ე. ი. $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... , $f^{(n+1)}(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია აღნიშნულ მიდამოში, მაშინ შეგვიძლია $f(x)$ ფუნქციას მაღალი ხარისხის მრავალწევრით უფრო მეტი სიზუსტით მივუახლოვდეთ. კერძოდ, მტკიცდება შემდეგი ტოლობა

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+ \\ +\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+R_n(x), \tag{7.13}$$

რომელსაც **ტეილორის ფორმულა** ეწოდება. ამ ფორმულაში R_n არის დამატებითი (ნაშთითი) წევრი

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\tilde{x}), \tag{7.14}$$

სადაც $\tilde{x}$ არის რომელიღაც წერტილი x და x_0 წერტილებს შორის, რომელიც, ზოგადად, ცხადად ვერ იწერება. მას ხშირად ასე წერენ: $\tilde{x}=x_0+\Theta(x-x_0)$, სადაც $0<\Theta<1$.

(7.13) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციას შეგვიძლია მივუახლოვდეთ n-ური რიგის $P_n(x)$ პოლინომით, სადაც

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0).$$

ცხადია, რომ ამ მიახლოების აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება $|R_n(x)|$ სიდიდეს:

$$|f(x)-P_n(x)|=|R_n(x)|.$$

თუ f ფუნქციის $(n+1)$ რიგის წარმოებულის მოდული შემოსაზღვრულია $M>0$ რიცხვით, მაშინ (7.14) ტოლობიდან მივიღებთ

$$|R_n(x)|\leq\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}. \tag{7.15}$$

ეს უტოლობა გვიჩვენებს, რომ R_n საკმარისად მცირეა, როდესაც $x-x_0$ საკმარისად მცირეა ან n არის ძალიან დიდი.

კერძოდ, თუ $n=1$ და $|f''(x)|$ შემოსაზღვრულია $M>0$ რიცხვით,

მაშინ

$$\left|f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)\right|=\left|\Delta f(x_0)-\Delta x\, f'(x_0)\right|\le$$
$$\le \frac{M}{2}\,(x-x_0)^2=\frac{M}{2}\,(\Delta x)^2. \tag{7.16}$$

ეს უტოლობა გვიჩვენებს, რომ (7.11) მიახლოებით ტოლობაში აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება $\frac{M}{2}(\Delta x)^2$ სიდიდეს, რაც ძალიან მცირეა, თუ Δx მცირე სიდიდეა.

თუ ტეილორის (7.13) ფორმულაში დავუშვებთ, რომ $x_0=0$, მაშინ მივიღებთ **მაკლორენის ფორმულას**

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\tilde{R}_n(x),$$
$$\tilde{R}_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\tilde{x}), \tag{7.17}$$

სადაც $\tilde{x}$ რაიმე წერტილია 0 და x წერტილებს შორის

$$\tilde{x}=\Theta x,\quad 0<\Theta<1.$$

ცხადია, თუ f ფუნქციის $(n+1)$ რიგის წარმოებულის მოდული შემოსაზღვრულია M რიცხვით, მაშინ ნაშთითი წევრისათვის კვლავ მართებულია (7.15) ტიპის შეფასება

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\,|x|^{n+1}.$$

წარმოვადგინოთ ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქცია მაკლორენის ფორმულით.

ვთქვათ, $f(x)=e^x$. რადგან

$$f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n+1)}(x)=e^x,$$

ამიტომ

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (7.17) ფორმულაში, მივიღებთ მაკლო-

რენის ფორმულას e^x ფუნქციისათვის

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \tilde{R}_n(x),$$

სადაც

$$\tilde{R}_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

ცხადია, ნებისმიერი x-თვის

$$\left| \tilde{R}_n(x) \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

ამიტომ

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{R}_n(x) = 0.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n-1}}{(1+\Theta_1 x)^{n-1}}, \quad 0 < \Theta_1 < 1;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)]}{n!} x^n +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\Theta_2 x)^{\alpha-n+1}, \quad 0 < \Theta_2 < 1.$$

აქ $x \in (-1, \ 1)$. თუ მეორე ფორმულაში $\alpha = m$ არის ნატურალური რიცხვი, მაშინ, ცხადია $(1+x)^m$ არის მრავალწევრი და თუ $n = m$, მაშინ ნაშთითი R_n წევრი გახდება ნულის ტოლი, რადგან იგი მამრავლად შეიცავს $(\alpha - n)$ რიცხვს.

ტეილორისა და მაკლორენის ფორმულებს უდიდესი გამოყენება აქვს მრავალი თეორიული და პრაქტიკული ამოცანის შესწავლისას.

7.9. მარგინალური (ზღვრული) ამონაგები

გავიხსენოთ, რომ 7.1 პარაგრაფში მარგინალური ამონაგები (MR) განსაზღვრული იყო შემდეგი ტოლობით

$$(MR) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{f(Q+\Delta Q)-f(Q)}{\Delta Q},$$

სადაც $(TR)=f(Q)$ არის მთლიანი ამონაგების ფუნქცია. აქ Q არის მოთხოვნა ანუ გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა. თუ ეს ზღვარი არსებობს, ცხადია, ის არის $f(Q)$ ფუნქციის წარმოებული. ამრიგად, მივიღეთ

$$\boxed{(MR)=\frac{d(TR)}{dQ}=(TR)'} \tag{7.18}$$

ე. ი.

მარგინალური ამონაგები არის მთლიანი ამონაგების ფუნქციის წარმოებული მოთხოვნის Q ცვლადით

ელემენტარული ეკონომიკის სახელმძღვანელოებში ხშირად მარგინალურ ამონაგებს განსაზღვრავენ, როგორც მთლიანი ამონაგების ცვლილებას, როდესაც მოთხოვნა Q იზრდება 1 ერთეულით. ასეთ მიდგომას ვუწოდოთ **მარგინალური ფუნქციის მიახლოებითი გამოთვლა არგუმენტის (მოთხოვნის) ერთი ერთეულით გაზრდის მეთოდით და აღვნიშნოთ იგი $(MR)^*$ სიმბოლოთი.**

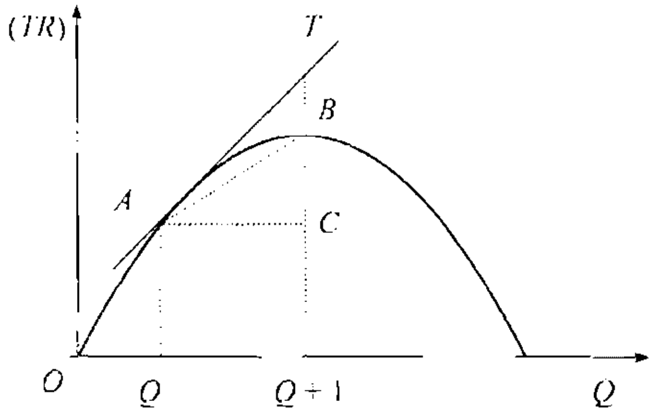
ეს განმარტება გარკვეული სიზუსტით ახლოსაა ძირითად განმარტებასთან. მართლაც, ვთქვათ, $(TR)=f(Q)$ არის მთლიანი ამონაგების ფუნქცია. მაშინ ამ ფუნქციის ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის $\Delta Q = h = 1$ ნაზრდს, გამოითვლება ფორმულით (იხ. (7.11))

$$(MR)^* = \Delta(TR) = \Delta f(Q) = f(Q+1)-f(Q) \approx f'(Q)\cdot 1. \tag{7.19}$$

ცხადია, ამ მიახლოებით ტოლობაში მარცხენა მხარე წარმოადგენს ამონაგების ცვლილებას Q მოთხოვნის 1 ერთეულით გაზრდისას, ხოლო მა-

რჯვენა მხარე მარგინალურ ამონაგებს. უნდა აღვნიშნოთ, რომ ეს ტოლობა არაა ზუსტი და იგი აღნიშნული ორი სიდიდის მხოლოდ გარკვეულ სიახლოვეზე მიუთითებს.

ეს კარგად ჩანს შემდეგი გეომეტრიული ინტერპრეტაციიდან. განვიხილოთ მთლიანი ამონაგების $(TR)=f(Q)$ ფუნქციის გრაფიკი (იხ. ნახ. 7.8).



ნახ. 7.8

მაშინ, როგორც უკვე ვიცით,

$$(MR)=f'(Q)=\text{tg}\angle TAC=\left|TC\right|,$$

ხოლო

$$(MR)^{*}=f(Q+1)-f(Q)=\left|BC\right|=tg\,\angle BAC\,.$$

აქედან ჩანს, რომ (MR) და $(MR)^{*}$ სიდიდეებს შორის სხვაობა TB მონაკვეთის სიგრძის ტოლია. TB მონაკვეთის სიგრძე კი გარკვეულ შემთხვევებში შეიძლება არ იყოს ძალიან მცირე. ამიტომ, სიზუსტის თვალსაზრისით, უმჯობესია ვისარგებლოთ მარგინალური ამონაგების ზუსტი (7.18) განმარტებით.

ამოცანა 7.11. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P=60-Q\,.$$

(ა) ვიპოვოთ მთლიანი ამონაგების $(TR)=f(Q)$ ფუნქციის გამოსახულება და მისი შესაბამისი მარგინალური ფუნქცია;

(ბ) გამოვთვალოთ მარგინალური ამონაგების ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა $Q=50$;

(გ) გამოვთვალოთ მთლიანი ამონაგების ფუნქცია არგუმენტის $Q=50$ და $Q=51$ მნიშვნელობებისათვის. შევადაროთ $(MR)^{*}=f(51)-f(50)$ და (MR) მარგინალური ამონაგები $Q=50$ მნიშვნელობისათვის.

▼ (ა) გამოვიყენოთ მთლიანი ამონაგების (6.1) ფორმულა. მივიღებთ

$$(TR)=PQ=(60-Q)\,Q=60Q-Q^2.$$

ამრიგად,

$$(TR)=f(Q)=60Q-Q^2.$$

ამ ფუნქციის შესაბამისი მარგინალური ფუნქცია იქნება

$$(MR)=\frac{d(TR)}{dQ}=f'(Q)=60-2Q.$$

(ბ) მარგინალური ფუნქციის მნიშვნელობა, როდესაც $Q=50$, გამოითვლება შემდეგი ტოლობით

$$(MR)=f'(50)=-40.$$

(გ) როდესაც $Q=50$ და $Q=51$, მაშინ მთლიანი ამონაგებისათვის შესაბამისად მივიღებთ

$$f(50)=500 \quad \text{და} \quad f(51)=459.$$

ამიტომ მთლიანი ამონაგების ცვლილება, რაც მოსდევს Q რაოდენობის ერთი ერთეულით გაზრდას, გამოითვლება სხვაობით

$$(MR)^{*}=f(51)-f(50)=-41.$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ მოთხოვნის ცვლადის $Q=50$ მნიშვნელობისათვის მარგინალური ფუნქციის ზუსტი სიდიდე (-40) და მარგინალური ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა (-41), რომელიც გამოთვლილია არგუმენტის ერთი ერთეულით გაზრდის მეთოდით, არ ემთხვევა ერთმანეთს (მაგრამ მათ შორის სხვაობა არც თუ ისე დიდია). ■

გამოვიყენოთ (7.11) ფორმულა მთლიანი ამონაგების $(TR)=f(Q)$ ფუნქციის ნაზრდის გამოსათვლელად

$$\Delta(TR)=\Delta f(Q)\approx f'(Q)\ \Delta Q=(MR)\ \Delta Q, \qquad (7.20)$$

რაც გვიჩვენებს, რომ არგუმენტის Q მნიშვნელობიდან $Q+\Delta Q$-ზე გადასვლისას მთლიანი ამონაგების ცვლილება მიახლოებით მარგინალური ამონაგებისა და Q არგუმენტის ცვლილების ნამრავლის ტოლია. სქემატურად იგი შეიძლება ასე გამოვსახოთ

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{მთლიანი}\\ \text{ამონაგების}\\ \text{ცვლილება}\end{array}} \approx \boxed{\begin{array}{c}\text{მარგინალური}\\ \text{ამონაგები}\end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c}\text{მოთხოვნის}\\ \text{ცვლილება}\end{array}} \qquad (7.21)$$

ამოცანა 7.12. მოცემულია მთლიანი ამონაგების ფუნქცია

$$(TR)=100Q-Q^2.$$

(ა) ვიპოვოთ მარგინალური ამონაგების ფუნქცია;

(ბ) ვთქვათ, აღებულ მომენტში პროდუქციაზე მოთხოვნაა $Q=60$. რა ცვლილებას განიცდის (TR) მთლიანი ამონაგები, თუ მოთხოვნა გაიზრდება 2 ერთეულით?

▼ (ა) თუ გავითვალისწინებთ ამოცანაში მოცემული მთლიანი ამონაგების ფორმულას, მაშინ მარგინალური ფუნქციისათვის მივიღებთ:

$$(MR)=\frac{d(TR)}{dQ}=\left(100Q-Q^2\right)'=100-2Q.$$

(ბ) როდესაც $Q=60$, მაშინ

$$(MR)=100-2\cdot 60=-20.$$

მთლიანი ამონაგების $\Delta(TR)$ ცვლილება, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის $\Delta Q=2$ ნაზრდს, გამოითვლება (7.20) ფორმულით:

$$\Delta(TR)\approx(MR)\cdot\Delta Q=-20\cdot 2=-40.$$

ამრიგად, როდესაც მოთხოვნის დონეა $Q=60$, მაშინ 2 ერთეულით მოთხოვნის გაზრდა გამოიწვევს (დაახლოებით) მთლიანი შემოსავლის შემცირებას 40 ერთეულით (დოლარით). ■

საშუალო (AR) **ამონაგები** მოთხოვნის Q დონეზე, ანუ გაყიდული

საქონლის Q რაოდენობისათვის განისაზღვრება ტოლობით

$$\boxed{(AR)=\frac{(TR)}{Q}} \tag{7.22}$$

გავიხსენოთ, რომ

$$(TR)=P\cdot Q,$$

სადაც $P=g_D(Q)$ არის მოთხოვნის ფუნქცია. მივიღებთ

$$(AR)=\frac{P\cdot Q}{Q}=P=g_D(Q), \tag{7.23}$$

ე. ი. საშუალო ამონაგები ემთხვევა მოთხოვნის ფუნქციას.

ამოცანა 7.13. ვიპოვოთ მოთხოვნის, მთლიანი ამონაგების, მარგინალური ამონაგებისა და საშუალო ამონაგების ფუნქციები სრულყოფილი კონკურენციის პირობებში.

▼ **სრულყოფილი კონკურენცია** წარმოადგენს მონოპოლიზმის საპირისპირო ცნებას და აღწერს ისეთ მოდელს, როდესაც საკმარისად დიდი რაოდენობის ტოლძალოვანი ფირმები აწარმოებენ და ყიდიან ერთსა და იმავე პროდუქციას. ამავე დროს, წარმოებაში ახალი ფირმის შესვლა შესაძლებელია ყოველგვარი დაბრკოლების გარეშე. ამიტომ არც ერთ ფირმას ინდივიდუალურად არ შეუძლია შეცვალოს პროდუქციის ერთეულის ფასი. ეს ფასი არაა დამოკიდებული კონკრეტული ფირმის მიერ წარმოებული და ბაზარზე გატანილი საქონლის რაოდენობაზე. ამიტომ, ბუნებრივია, ასეთ შემთხვევაში, პროდუქციის ერთეულის P ფასს განსაზღვრავს ბაზარი და დროის გარკვეულ შუალედში იგი მუდმივია. ამის გამო, მოთხოვნის ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$P=b,$$

სადაც b მუდმივია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ამონაგების ფუნქცია იქნება წრფივი ფუნქცია

$$(TR)=b\cdot Q\,.$$

ცხადია, შესაბამისი მარგინალური ამონაგების ფუნქციაა

$$(MR)=\frac{d(TR)}{dQ}=b.$$

საშუალო ამონაგები (7.22) ანუ (7.23) ტოლობის თანახმად გამოითვლება ფორმულით

$$(AR)=\frac{(TR)}{Q}=\frac{b\cdot Q}{Q}=b\,.$$

ამრიგად, სრულყოფილი კონკურენციის ბაზარი არის უმარტივესი მოდელი, რომელშიც მოთხოვნის, მარგინალური ამონაგებისა და საშუალო ამონაგების ფუნქციები ერთი და იგივე b მუდმივია, ხოლო მთლიანი ამონაგები პირდაპირპროპორციულია Q მოთხოვნისა იმავე b პროპორციულობის კოეფიციენტით. ■

7.10 მარგინალური (ზღვრული) დანახარჯი

წინა თავში ჩვენ შემოვიღეთ მთლიანი დანახარჯის (TC) ფუნქცია, რომელიც წარმოიდგინება ფიქსირებული (მუდმივი) (FC) დანახარჯისა და მთლიანი ცვლადი დანახარჯის ჯამის სახით (იხ. პარაგრაფი 6.7). აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $K(Q)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$(TC)=K(Q)=(FC)\;+\;(VC)\;Q,$$

სადაც (VC) არის პროდუქციის ერთეულის წარმოებისთვის საჭირო ცვლადი დანახარჯი, ხოლო Q — წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა. ჩვენი მიზანია, დავახასიათოთ დანახარჯის K ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე წარმოებული პროდუქციის Q რაოდენობის ცვლილებასთან დაკავშირებით. ამისათვის გამოვიყენოთ იმავე ტიპის მსჯელობები, რაც ჩატარებული იყო 7.1 და 7.9 პარაგრაფებში.

ვთქვათ, წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა გაიზარდა ΔQ რაოდენობით. მაშინ შესაბამისი დანახარჯი იქნება $K(Q+\Delta Q)$. მაშასადამე, წარმოებული პროდუქციის ΔQ ნაზრდს შეესაბამება წარმოების დანახარჯის

$\Delta K(Q)=K(Q+\Delta Q)-K(Q)$ ნაზრდი.

ამიტომ **წარმოების დანახარჯის საშუალო ნაზრდი** წარმოებული პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით გამოითვლება შეფარდებით

$$\frac{\Delta K(Q)}{\Delta Q}.$$

ამ შეფარდების ზღვარს, როდესაც $\Delta Q\to 0$, ეწოდება **წარმოების მარგინალური** ანუ **ზღვრული** (MC) **დანახარჯი**.

ცხადია, რომ ეს მარგინალური დანახარჯი გამოითვლება ფორმულით

$$\boxed{(MC) = \lim_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta K}{\Delta Q} = K'(Q) = \frac{d(TC)}{dQ}} \qquad (7.24)$$

ამრიგად, წარმოების მარგინალური დანახარჯი $K'(Q)$, რომელიც გამოთვლილია Q რაოდენობის პროდუქციისათვის, გამოსახავს წარმოების დანახარჯის ცვლილებას საწარმოებელი პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით. (7.24) და (7.11) ფორმულებიდან მარტივად დავასკვნით, რომ მართებულია შემდეგი მიახლოებითი ტოლობა

$$\Delta K \approx K'(Q)\,\Delta Q = dK(Q). \qquad (7.25)$$

ეს ტოლობა სქემატურად ასე ჩაიწერება

მთლიანი დანახარჯის ცვლილება	≈	მარგინალური დანახარჯი	×	წარმოებული პროდუქციის რაოდენობის ცვლილება	(7.26)

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ წარმოების ხარჯების ნაზრდი მიახლოებით უდრის წარმოების მარგინალური დანახარჯისა და პროდუქციის ნაზრდის ნამრავლს, ანუ დანახარჯის K ფუნქციის დიფერენციალს.

შევნიშნოთ, რომ ზოგჯერ დანახარჯების $K(Q)$ ფუნქცია განსაზღვრული არის მხოლოდ არგუმენტის მთელი (ნატურალური) მნიშვნელობებისათვის, რის გამოც საუბარი მის წარმოებულზე აბსოლუტურად შეუძლებელია.

მაგალითად, ასეთი შემთხვევა მაშინ იქნება, როცა წარმოება უშვებს პროდუქციას, რომლის მოცულობა იზომება მხოლოდ ნატურალური რიცხვებით (ავტომობილები, კალმები, ფეხსაცმელი, ფასიანი ქაღალდები და ა. შ.).

ასეთ შემთხვევაში უნდა მოხდეს მოდიფიცირება დანახარჯების K ფუნქციისა, რომელიც თავიდან განსაზღვრულია არგუმენტის დისკრეტული მნიშვნელობებისათვის $(Q=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n)$. კერძოდ, იგი უნდა შეიცვალოს უწყვეტი არგუმენტის $\widetilde{K}$ ფუნქციით, რომელიც განსაზღვრული იქნება, როგორც უწყვეტი $Q\in[1,n]$ არგუმენტის წარმოებადი ფუნქცია და რომელიც $Q=m$ $(m=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n)$ წერტილებში დაემთხვევა თავდაპირველად მოცემულ დანახარჯების ფუნქციას, ე. ი. $\widetilde{K}(m)=K(m)$. ამის შემდეგ შეგვიძლია დავსვათ საკითხი მოდიფიცირებული $\widetilde{K}(Q)$ ფუნქციის ცვლილების საშუალო და მყისი სიჩქარის მოძებნის შესახებ, რაც უკავშირდება $\widetilde{K}(Q)$ ფუნქციის წარმოებულს, რომელსაც უკვე გააჩნია აზრი.

იქ, სადაც ეს გაუგებრობას არ გამოიწვევს, იმავე K სიმბოლოს შევინარჩუნებთ დისკრეტულად განსაზღვრული და მისი შესაბამისი მოდიფიცირებული უწყვეტი არგუმენტის ფუნქციისათვის (ე. ი. $\widetilde{K}$ სიმბოლოს აღარ შემოვიტანთ).

ისევე, როგორც წინა პარაგრაფში, აქაც შეგვიძლია შემოვიღოთ მარგინალური ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელი ფორმულა, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის (წარმოებული პროდუქციის რაოდენობის) ერთი ერთეულით გაზრდისას მიღებული ცვლილების დადგენას. შემოვიღოთ აღნიშვნა $(MC)^{*}=K(Q+1)-K(Q)$. მაშინ, ცხადია,

$$(MC)^{*}=\Delta(TC)=\Delta K(Q)=K(Q+1)-K(Q)\approx K'(Q)\cdot 1. \qquad (7.27)$$

ეს თანაფარდობა მიიღება (7.25) ტოლობიდან, თუ ამ უკანასკნელში დავუშვებთ, რომ $\Delta Q=1$.

ეკონომიკაში $(MC)^{*}$ სიდიდეს უწოდებენ დანახარჯს, რომელიც საჭიროა პროდუქციის $(Q+1)$-ე ერთეულის წარმოებისათვის. როგორც ვხე-

დავთ, ეს სიდიდე, გარკვეული მიახლოებით, უდრის მარგინალურ $(MC) = K'(Q)$ დანახარჯს.

ხშირად ეკონომიკაში მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია წარმოიდგინება მრავალწევრის სახით

$$K(Q) = a_1 + a_2 Q + a_3 Q^2 + a_4 Q^3, \tag{7.28}$$

სადაც a_1 **მუდმივი (ფიქსირებული) დანახარჯია** (რომელიც არაა დამოკიდებული წარმოებული პროდუქციის რაოდენობაზე, მაგალითად, რენტა, შენობის გათბობა, შენობის განათება, სათავსოებისა და შენობების მიმდინარე გეგმიური შეკეთება და სხვა). დანარჩენი წევრები გამოსახავს ნედლეულის დანახარჯებს, შრომის დანახარჯებსა და ა. შ.

საკმარისად დიდი სიზუსტით შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ნედლეულის დანახარჯი და შრომის დანახარჯის გარკვეული ნაწილი წარმოებული პროდუქციის რაოდენობის პროპორციულია ((7.28) ტოლობაში მათ შეესაბამება a_2Q შესაკრები). შრომის დანახარჯების ნაწილი კი მოსალოდნელია, რომ წარმოებული პროდუქციის Q რაოდენობაზე უფრო რთულად იყოს დამოკიდებული, მაგალითად, კვადრატული და კუბური წესით (იხ. (7.28) ტოლობის მესამე და მეოთხე შესაკრები). ეს ხდება იმის გამო, რომ შეიძლება გამოყენებული იყოს დროში ზენორმატიული შრომა, მძიმე პირობებში შრომა, არაეფექტურ პირობებში შრომა მრავალსაფეხურიან კომპლექსურ წარმოებაში ან მაღალპროფესიული შრომა, რომელთა ანაზღაურება წარმოებს სპეციალური მაღალტარიფიანი წესით.

ამოცანა 7.14. ვთქვათ, წარმოების საშუალო დანახარჯის (AC) ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ტოლობით

$$(AC) = 2Q + 6 + \frac{13}{Q}.$$

(ა) ვიპოვოთ მარგინალური დანახარჯის (MC) ფუნქცია;

(ბ) როგორი იქნება მარგინალური დანახარჯის საშუალებით გამოთვლილი სრული დანახარჯის ცვლილება, თუ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა 15-დან 12 ერთეულამდე მცირდება? როგორია აღნიშნულ სიტუაციაში მთლიანი დანახარჯის ზუსტი ცვლილება?

▼ (ა) პირველ რიგში უნდა ვიპოვოთ მთლიანი დანახარჯის (TC) ფუნქცია. გავიხსენოთ, რომ (იხ. პარაგრაფი 6.7)

$$(AC)=\frac{(TC)}{Q}.$$

ამიტომ

$$(TC)=(AC)\cdot Q.$$

ამოცანის პირობის გათვალისწინებით მარტივად დავასკვნით

$$(TC)=K(Q)=2Q^2+6Q+13\cdot$$

აქედან კი, (7.24) ტოლობის თანახმად, მარგინალური დანახარჯის ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$(MC)=\frac{d(TC)}{dQ}=K'(Q)=4Q+6.$$

(ბ) რადგან წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა $Q=15$ ერთეულიდან კლებულობს $Q+\Delta Q=12$ ერთეულამდე, ამიტომ $\Delta Q=12-15=-3$.

არგუმენტის ამ ცვლილების შესაბამისი წარმოების მთლიანი დანახარჯის ცვლილების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (7.25) ფორმულა (ანუ (7.26) სქემა). მივიღებთ

$$\Delta(TC)\approx K'(15)\cdot(-3)=(4\cdot 15+6)\cdot(-3)=-198.$$

ამრიგად, აღნიშნული მეთოდით მივიღეთ, რომ დანახარჯი დაიკლებს დაახლოებით 198 ერთეულით.

გამოვთვალოთ ახლა მთლიანი დანახარჯის ზუსტი ცვლილება იმავე პირობებში

$$\Delta(TC)=K(12)-K(15)=2\cdot 12^2+6\cdot 12+13-\left(2\cdot 15^2+6\cdot 15+13\right)=$$
$$=2\left(12^2-15^2\right)+6\left(12-15\right)=2\left(-81\right)-6\left(-3\right)=-162-18=-180.$$

მიღებული შედეგების შედარება გვიჩვენებს, რომ მთლიანი დანახარჯის ზუსტ და მიახლოებით მნიშვნელობებს შორის სხვაობა 18 ერთეულია. ■

ამოცანა 7.15. წარმოების ყოველდღიური დანახარჯი, რომელიც დამოკიდებულია წარმოებული პროდუქციის მოცულობაზე, განისაზღვრება ფორმულით

$$K(Q) = 100Q + 0.1\,Q^2, \qquad 0 \le Q \le 1000.$$

ვიპოვოთ წარმოების ზღვრული, (მარგინალური) დანახარჯი, თუ წარმოების მოცულობა ტოლია:

(ა) 3 ერთეულის;

(ბ) 5.5 ერთეულის.

მიახლოებით რამდენით გაიზრდება წარმოების ხარჯები, როდესაც პროდუქცია იზრდება:

(გ) 200 ერთეულიდან 200.5 ერთეულამდე?

(დ) 800 ერთეულიდან 800.5 ერთეულამდე?

შევადაროთ (გ) და (დ) პუნქტების პასუხები წარმოების ხარჯების ზუსტ ნაზრდებს და გამოვთვალოთ აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებები.

▼ წარმოების ზღვრული დანახარჯი გამოითვლება (7.24) ფორმულით. განსახილველ შემთხვევაში გვექნება

$$K'(Q) = 100 + 0.2\,Q.$$

ამიტომ წარმოების მარგინალური დანახარჯი (ა) და (ბ) პუნქტებში მითითებული წარმოების მოცულობებისათვის, შესაბამისად, იქნება

$$K'(3) = 100 + 02 \cdot 3 = 100.6, \qquad K'(5{,}5) = 100 + 0.2 \cdot 5.5 = 101.1.$$

წარმოების დანახარჯის ნაზრდი პროდუქციის Q ერთეულიდან $Q + \Delta Q$ ერთეულამდე გაზრდის შემთხვევაში, (7.25) ფორმულის თანახმად, ტოლი იქნება შემდეგი გამოსახულების

$$\Delta K(Q) = K(Q + \Delta Q) - K(Q) \approx K'(Q)\ \Delta Q = (100 + 0.2\,Q)\ \Delta Q.$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ წარმოების დანახარჯის ნაზრდი პროდუქციის მოცულობის 200 ერთეულიდან 200.5 ერთეულამდე გაზრდის შემთხვევაში ტოლი იქნება

$$\Delta K(200) \approx [100 + 0.2 \cdot 200] \cdot 0.5 = 50 + 20 = 70,$$

ხოლო 800 ერთეულიდან 800.5 ერთეულამდე გაზრდის შემთხვევაში –

$$\Delta K(800) \approx [100 + 0.2 \cdot 800] \cdot 0.5 = 50 + 80 = 130.$$

ამ ორი სიდიდის შედარება გვიჩვენებს, რომ პროდუქციის წარმოების

0.5 ერთეულით გაზრდა იწვევს წარმოების დანახარჯების არათანაბარ ზრდას წარმოების მოცულობის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

ახლა შევადაროთ წარმოების ხარჯების ნაზრდების ზუსტი და ზემოთ მიღებული მიახლოებითი მნიშვნელობები. ამისათვის გამოვთვალოთ ზუსტი ნაზრდები:

$$\Delta K(200) = K(200.5) - K(200) = 100 \cdot 200.5 + 0.1 \cdot 200.5^2 - 100 \cdot 200 - 0.1 \cdot 200^2 = = 70.025,$$

$$\Delta K(800) = K(800.5) - K(800) = 100 \cdot 800.5 + 0.1 \cdot 800.5^2 - 100 \cdot 800 - 0.1 \cdot 800^2 = = 130.025.$$

მიღებული შედეგები გვიჩვენებს, რომ ორივე შემთხვევაში წარმოების ხარჯების ნაზრდის მიახლოებითი გამოთვლისას დაშვებული აბსოლუტური ცდომილება (0.025) საკმარისად მცირეა და იგი, მართლაც, შეიძლება უგულებელვყოთ.

შესაბამისი ფარდობითი ცდომილებებისათვის გვაქვს

(გ) შემთხვევაში: $\dfrac{0.025}{70} \approx 0.000357$,

(დ) შემთხვევაში: $\dfrac{0.025}{130} \approx 0.000192$.

ცხადია, ფარდობითი ცდომილებებიც ძალიან მცირეა. ■

ზღვრული დანახარჯის ცნება გამოიყენება იმ ტიპის ეკონომიკურ ამოცანებშიც, რომლებშიც კვლავ საქმე გვაქვს სხვადასხვა სახის დანახარჯებთან. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე კონკრეტული ამოცანა.

ამოცანა 7.16. ავტომანქანის მიერ 100 კმ მანძილის გავლაზე დახარჯული საწვავის რაოდენობა დამოკიდებულია მოძრაობის სიჩქარეზე. ეს დამოკიდებულება, გარკვეულ პირობებში მოძრაობისას, აღიწერება კვადრატული ფუნქციით

$$y = f(x) = 0.005\, x^2 - 0.4\, x + 20, \qquad 0 < x \le 200,$$

სადაც x (კმ/სთ) მოძრაობის სიჩქარეა, ხოლო $f(x)$ განსაზღვრავს 100 კმ-ის გავლისათვის საჭირო საწვავის დანახარჯს (ლიტრობით). ვიპოვოთ:

(ა) როგორია საწვავის ზღვრული დანახარჯი x კმ/სთ სიჩქარით მოძ-

რაობის დროს? შევადაროთ ზღვრული დანახარჯები 30 კმ/სთ, 40 კმ/სთ და 160 კმ/სთ სიჩქარეებით მოძრაობის დროს;

(ბ) განსახილველ შემთხვევაში ყოველთვის იწვევს თუ არა სიჩქარის გაზრდა საწვავის დანახარჯის ზრდას?

▼ ვთქვათ, ავტომანქანის მოძრაობის სიჩქარე x კმ/სთ-დან გაიზარდა $(x+\Delta x)$ კმ/სთ-მდე. მაშინ, ამოცანის პირობის თანახმად, საწვავის დანახარჯის სრული ნაზრდი Δy გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta y(x) = f(x+\Delta x) - f(x).$$

ამიტომ საწვავის დანახარჯის საშუალო ნაზრდი, სიჩქარის ერთ ერთეულზე გაანგარიშებით, გამოითვლება შეფარდებით $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. ამ შეფარდების ზღვარი, როდესაც $\Delta x \to 0$, იძლევა **საწვავის დანახარჯის ზღვრულ $D(x)$ ნაზრდს** x კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობისას. ცხადია, მოცემულ შემთხვევაში იგი გამოითვლება ფორმულით

$$D(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) = \left(0.005x^2 - 0.4x + 20\right)' = 0.01x - 0.4,$$

რომელიც აღწერს საწვავის დანახარჯის „ცვლილების სიჩქარეს“.

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ სიჩქარის საკმარისად მცირე Δx ნაზრდისათვის საწვავის დანახარჯის მთლიანი Δy ნაზრდი მიახლოებით გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta y(x) \approx y'(x)\,\Delta x = d\,y(x) = (0.01x - 0.4)\,\Delta x. \qquad (7.29)$$

ამოვწეროთ საწვავის ზღვრული დანახარჯები ამოცანის (ა) პუნქტში მითითებული სიჩქარეებისათვის

$$\begin{aligned} D(30) &= y'(30) = -0.1, \\ D(40) &= y'(40) = 0, \\ D(160) &= y'(160) = 1.2. \end{aligned} \qquad (7.30)$$

(ბ) ახლა გამოვიკვლიოთ, ყოველთვის იწვევს თუ არა სიჩქარის გაზრდა საწვავის დანახარჯის ზრდას? ეს კითხვა მათემატიკურად ასე ჩამოყალიბდება: თუ $\Delta x > 0$, არის თუ არა ყოველთვის Δy ნაზრდი დადებითი?

პირდაპირი გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ

$$\Delta y(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = (0.01x - 0.4)\,\Delta x + 0.005\,(\Delta x)^2 =$$
$$= \left[(0.01\,x - 0.4) + 0.005\,\Delta x\right]\Delta x = \left[f'(x) + 0.005\,\Delta x\right]\Delta x.$$

ცხადია, რომ თუ $\Delta x > 0$, მაშინ Δy-ის ნიშანი იგივეა, რაც ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულების ნიშანი. მარტივად ჩანს, რომ საკმარისად მცირე Δx-თვის ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულების ნიშანი იგივეა, რაც $f'(x)$-ის ნიშანი, თუ $f'(x) \neq 0$. რადგან $f'(x) = 0.01\,x - 0.4$, ამიტომ

$$f'(x) < 0,\ \text{როდესაც}\ 0 < x < 40$$

და

$$f'(x) > 0,\ \text{როდესაც}\ 40 < x < 200.$$

აქედან კი დავასკვნით, რომ სიჩქარის საკმარისად მცირე Δx ნაზრდისათვის საწვავის ხარჯის ცვლილებაა

$$\Delta y(x) < 0,\ \text{თუ}\ 0 < x < 40\ \text{და}\ \Delta y(x) > 0,\ \text{თუ}\ 40 < x < 200.$$

ამრიგად, სიჩქარის გაზრდა 40 კმ/სთ-მდე იწვევს საწვავის ხარჯის შემცირებას, ხოლო 40 კმ/სთ-დან 200 კმ/სთ-მდე კი – საწვავის ხარჯის ზრდას.

საწვავის დანახარჯისათვის ზემოთ მიღებული შედეგები (იხ. (7.29) და (7.30)) გვიჩვენებს, რომ 30 კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობისას სიჩქარის შემდგომი გაზრდა Δx კმ/სთ-ით იწვევს საწვავის ხარჯის ცვლილებას დაახლოებით $y'(30)\,\Delta x = -\,0.1\,\Delta x$ ლიტრით, ე. ი. დანახარჯი მცირდება $0.1\,\Delta x$ ლიტრით, 160 კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობისას კი – საწვავის ცვლილებას დაახლოებით $y'(160)\,\Delta x = 1.2\,\Delta x$ ლიტრით, ე. ი. დანახარჯი იზრდება $1.2\,\Delta x$ ლიტრით.

40 კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობისას სიჩქარის შემდგომი გაზრდა Δx კმ/სთ-ით, ფაქტობრივად არ იწვევს საწვავის დანახარჯის ცვლილებას. ◘

ამოცანა 7.17. ვთქვათ, საჭიროა აშენდეს გარკვეული სიმძლავრის ელექტროსადგური. კაპიტალური დაბანდების მოცულობა დამოკიდებულია მშენებარე ელექტროსადგურის სიმძლავრეზე. დავუშვათ, რომ ეს დამოკიდე-

ბულება აღიწერება ფუნქციით

$$y=f(x)=0.01\,x^3+0.5\,x^2+20\,x+100,$$

სადაც x არის ელექტროსადგურის სიმძლავრე , $y(x)$ კი – კაპიტალურ დაბანდებათა მოცულობა. გამოვთვალოთ, როგორ იცვლება კაპიტალურ დაბანდებათა სიდიდე ელექტროსადგურის სიმძლავრის გაზრდის ან შემცირების შემთხვევაში.

▼ ვთქვათ, ელექტროსადგურის x სიმძლავრე იცვლება Δx სიდიდით, მაშინ კაპიტალურ დაბანდებათა სრული ცვლილება (ნაზრდი) გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta y(x)=f(x+\Delta x)-f(x).$$

კაპიტალური დაბანდებების საშუალო ცვლილება (საშუალო ნაზრდი), რომელიც შეესაბამება სიმძლავრის ერთეულს, გამოითვლება შეფარდებით

$$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}.$$

ამ შეფარდების ზღვარი, როდესაც $\Delta x\to 0$, გვაძლევს კაპიტალურ დაბანდებათა ზღვრულ ნაზრდს. ცხადია,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}=y'(x)=0.03x^2+x+20.$$

ამიტომ გვექნება

$$\Delta y(x)\approx y'(x)\,\Delta x=dy(x)=\left(0.03x^2+x+20\right)\Delta x.$$

შევნიშნოთ, რომ ფრჩხილებში მოთავსებული სამწევრის დისკრიმინანტი უარყოფითია. ამის გამო, ხსენებული სამწევრი x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის დადებითია. ამიტომ, თუ $\Delta x>0$, მაშინ $\Delta y>0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი სიმძლავრის შემთხვევაში სიმძლავრის გაზრდა Δx სიდიდით იწვევს კაპიტალური დაბანდების ზრდას. ■

ამოცანა 7.18. ვთქვათ, საწარმოში დღე-ღამის განმავლობაში ელექტროენერგია იხარჯება შემდეგი წესით

$$y=f(x)=-\frac{1}{36}x^2+\frac{2}{3}x+2,\qquad 0\le x\le 24,$$

სადაც x არის დრო (საათობით), ხოლო $y=f(x)$ – მოხმარებული ელექტრული ენერგია (კვტ-ობით). ვიპოვოთ:

(ა) ელექტროენერგიის დანახარჯის საშუალო ნამატი 6 სთ-დან 12 სთ-მდე;

(ბ) ელექტროენერგიის ხარჯვის ცვლილების სიჩქარე 6 სთ-ზე და 12 სთ-ზე.

▼ ამოცანის (ა) კითხვაზე პასუხის გასაცემად გამოვთვალოთ ელექტროენერგიის Δy ცვლილება (ნაზრდი) 6 სთ-დან 12 სთ-მდე და შემდეგ გავყოთ $\Delta x=12-6=6$-ზე:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{6}\left[f(12)-f(6)\right]=\frac{1}{6}\left[\left(-\frac{1}{36}\cdot 12^2+\frac{2}{3}\cdot 12+2\right)-\left(-\frac{1}{36}\cdot 6^2+\frac{2}{3}\cdot 6+2\right)\right]=\frac{1}{6}.$$

ამრიგად, ელექტროენერგიის საშუალო ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება დროის ერთ ერთეულს, $\frac{1}{6}$ კვტ-ის ტოლია.

(ბ) იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ ელექტროენერგიის ცვლილების სიჩქარე, ანუ ელექტროენერგიის ზღვრული დანახარჯის ნაზრდი დროის x მომენტისათვის, უნდა გამოვთვალოთ ელექტროენერგიის დანახარჯის საშუალო ნაზრდი x სთ-დან $(x+\Delta x)$ სთ-მდე, ანუ

$$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

და შემდეგ გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta x\to 0$. მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)=-\frac{1}{18}x+\frac{2}{3}.$$

ეს სიდიდე აღწერს ელექტროენერგიის ხარჯვის ცვლილების სიჩქარეს დროის x მომენტისათვის. მიღებული ტოლობიდან დავასკვნით, რომ დროის საკმარისად მცირე Δx ნაზრდისათვის ელექტროენერგიის დანახარჯის სრული ნაზრდი მიახლოებით გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\Delta y(x)\approx y'(x)\,\Delta x=d\,y(x)=\left(-\frac{1}{18}x+\frac{2}{3}\right)\Delta x.$$

ახლა გამოვთვალოთ ელექტროენერგიის ხარჯვის ცვლილების სიჩქარე

$x=6$ სთ-ზე და $x=12$ სთ-ზე:

$$y'(6)=\frac{1}{3}, \qquad y'(12)=0.$$

ეს ტოლობები გვიჩვენებს, რომ ელექტროენერგიის დანახარჯი იზრდება 6 სთ-ის მახლობლობაში, ხოლო 12 სთ-ის მახლობლობაში ელექტროენერგიის დანახარჯი ფაქტობრივად არ იცვლება. ■

7.11 მარგინალური (ზღვრული) მოგება

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ მოგების Π ფუნქცია გამოითვლება შემდეგი ფორმულით (იხ. პარაგრაფი 6.7)

$$\Pi(Q)=(TR)-(TC),$$

სადაც (TR) არის მთლიანი ამონაგები, ხოლო (TC) — მთლიანი დანახარჯი. აქ Q არის რეალიზებული (გაყიდული) პროდუქციის რაოდენობა.

პროდუქციის რეალიზაციის ΔQ რაოდენობით გაზრდას შეესაბამება მოგების ნაზრდი $\Delta\Pi(Q)=\Pi(Q+\Delta Q)-\Pi(Q)$.

ამიტომ **მოგების საშუალო ნაზრდი** სარეალიზაციო პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით გამოითვლება შეფარდებით

$$\frac{\Delta\Pi(Q)}{\Delta Q}.$$

ამ შეფარდების ზღვარს, როდესაც $\Delta Q\to 0$, ეწოდება **ზღვრული** ანუ **მარგინალური მოგება.** თუ Π ფუნქცია წარმოებადია, მაშინ

$$\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta\Pi(Q)}{\Delta Q}=\Pi'(Q). \qquad (7.31)$$

ამრიგად, მარგინალური მოგება, რომელიც გამოთვლილია Q რაოდენობის სარეალიზაციო პროდუქციისათვის, გამოსახავს მოგების მყისიერ ცვლილებას (ნაზრდს) სარეალიზაციო პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით.

(7.31) და (7.11) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ მოგების ნაზ-

რდი მიახლოებით გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta\Pi(Q) \approx \Pi'(Q)\,\Delta Q = d\Pi(Q), \qquad (7.32)$$

ე. ი. მოგების ნაზრდი მიახლოებით უდრის მარგინალური მოგებისა და სარეალიზაციო პროდუქციის ნაზრდის ნამრავლს ანუ მოგების Π ფუნქციის დიფერენციალს. სქემატურად ეს შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

მოგების ცვლილება	≈	მარგინალური მოგება	×	პროდუქციის რეალიზაციის ცვლილება

თუ $\Delta Q = 1$, მაშინ

$$\Delta\Pi = \Pi(Q+1) - \Pi(Q) \approx \Pi'(Q)\cdot 1,$$

ე. ი. მოგების ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება რეალიზებული პროდუქციის ერთი ერთეულით გაზრდას, გარკვეული მიახლოებით, შეგვიძლია ჩავთვალოთ მარგინალური მოგების ტოლად.

ამოცანა 7.19. პროდუქციის წარმოების ფიქსირებული (მუდმივი) დანახარჯია $(FC) = 100$ დოლარი, ხოლო ცვლადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე შეადგენს $(VC) = 3$ დოლარს. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = 200 - Q.$$

(ა) ვიპოვოთ მარგინალური მოგების ფუნქცია;

(ბ) დაახლოებით როგორ შეიცვლება მოგება რეალიზებული პროდუქციის ერთი ერთეულით გაზრდისას, თუ აღებულ მომენტში პროდუქციის რეალიზაციის დონეა 80 ერთეული. გამოვთვალოთ მოგების ზუსტი ცვლილება და შევადაროთ მიღებულ მიახლოებით მნიშვნელობას.

▼ (ა) რადგან ცნობილია მუდმივი დანახარჯი და ერთეული პროდუქციის წარმოების ცვლადი დანახარჯი, მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია იქნება (იხ. პარაგრაფი 6.7)

$$(TC) = (FC) + (VC)\,Q = 100 + 3Q.$$

ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ მთლიანი ამონაგები გამოითვლება ფორმულით

$$(TR) = P \cdot Q = (200 - Q)\ Q = 200\ Q - Q^2.$$

ამიტომ მოგების ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$\Pi(Q) = (TR) - (TC) = 200Q - Q^2 - (100 + 3Q) = -Q^2 + 197Q - 100.$$

ვიცით, რომ მარგინალური მოგება არის მოგების ფუნქციის წარმოებული. ამიტომ მარგინალური მოგება იქნება

$$\Pi'(Q) = -2Q + 197.$$

(ბ) ამოცანის მეორე კითხვაზე პასუხის გასაცემად, შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში $Q = 80$ და $\Delta Q = 1$. მოგების მიახლოებითი ცვლილების მოსაძებნად გამოვიყენოთ (7.32) ტოლობა:

$$\Delta\Pi(80) \approx \Pi'(80) \cdot 1 = -2 \cdot 80 + 197 = 37.$$

ამრიგად, თუ აღებულ მომენტში იყიდება 80 ერთეული, მაშინ 1 ერთეულით მეტის გაყიდვა მოგებას ზრდის დაახლოებით 37 ერთეულით (დოლარით). გამოვთვალოთ მოგების ზუსტი ნაზრდი, თუ $\Delta Q = 1$:

$$\Delta\Pi(80) = \Pi(81) - \Pi(80) = -81^2 + 197 \cdot 81 - 100 - \left(-80^2 + 197 \cdot 80 - 100\right) = 36.$$

ვხედავთ, რომ მოგების ცვლილების მიახლოებით და ზუსტ მნიშვნელობებს შორის სხვაობაა 1 ერთეული (დოლარი). ■

7.12. მარგინალური მიდრეკილება დანაზოგისა და მოხმარებისადმი

პირველი თავის 1.13 პარაგრაფში ჩვენ შემოვიღეთ მოხმარების $C(Y)$ და დანაზოგის $S(Y)$ ფუნქციები. ვიგულისხმოთ, რომ ვიხილავთ მარტივ მოდელს და Y ეროვნული შემოსავალი გამოიყენება მხოლოდ მოხმარებისა და დანაზოგისათვის, ე. ი.

$$Y = C(Y) + S(Y). \tag{7.33}$$

გამოვიკვლიოთ, როგორია მოხმარებისა და დანაზოგის ცვლილებათა ტენდენცია ეროვნული შემოსავლის ცვლილებასთან დაკავშირებით?

ამ ცვლილებათა გაანალიზებისათვის კვლავ წარმოებულის ცნებას გამოვიყენებთ.

ცხადია, ეროვნული შემოსავლის ΔY ცვლილებას მოსდევს მოხმარების ფუნქციისა და დანაზოგის ფუნქციის ცვლილებები, რომლებიც ეროვნული შემოსავლის ერთ ერთეულზე გაანგარიშებით გამოითვლება შეფარდებებით:

$$\frac{\Delta C(Y)}{\Delta Y} \quad \text{და} \quad \frac{\Delta S(Y)}{\Delta Y}.$$

ეს შეფარდებები გვიჩვენებენ C და S ფუნქციების „ცვლილების საშუალო სიჩქარეს" $(Y, Y+\Delta Y)$ ინტერვალში, ანუ მათი ცვლილების ტენდენციებს. ამ შეფარდებათა ზღვრებს, როდესაც ΔY ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისკენ, ეწოდება, შესაბამისად, **მარგინალური ანუ ზღვრული მიდრეკილება (მისწრაფება) მოხმარებისადმი** (MPC) და **მარგინალური ანუ ზღვრული მიდრეკილება (მისწრაფება) დანაზოგისადმი** (MPS) (იხ. დანართი):

$$\boxed{\begin{aligned}(MPC) &= \lim_{\Delta Y\to 0}\frac{\Delta C(Y)}{\Delta Y} = C'(Y)\\ (MPS) &= \lim_{\Delta Y\to 0}\frac{\Delta S(Y)}{\Delta Y} = S'(Y)\end{aligned}} \qquad (7.34)$$

ცხადია, აქ იგულისხმება, რომ $C(Y)$ და $S(Y)$ ფუნქციები წარმოებადია. თუ გავაწარმოებთ (7.33) ტოლობის ორივე მხარეს Y ცვლადით და გამოვიყენებთ (7.34) ტოლობებს, მარტივად მივიღებთ

$$\boxed{(MPC)+(MPS) = C'(Y)+S'(Y) = 1} \qquad (7.35)$$

ამოცანა 7.20. მოხმარების ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$C(Y) = 0.01\,Y^2 + 0.2\,Y + 50.$$

ვიპოვოთ (MPC) და (MPS), როდესაც $Y = 30$. გავაანალიზოთ მიღებული შედეგი.

▼ მოხმარების ფუნქციის წარმოებული გვაძლევს (MPC) მარგინალურ მიდრეკილებას მოხმარებისადმი

$$(MPC) = C'(Y) = 0.02\,Y + 0.2.$$

თუ $Y = 30$, მაშინ

$$(MPC) = 0.02 \cdot 30 + 0.2 = 0.8.$$

მარგინალური მიდრეკილება დანაზოგისადმი (MPS) გამოვთვალოთ (7.35) ფორმულის გამოყენებით

$$(MPS) = 1 - (MPC) = 0.2 .$$

მიღებული შედეგები გვიჩვენებს, რომ თუ ეროვნული შემოსავლის დონე 30 ერთეულია, მაშინ მისი გაზრდა 1 ერთეულით გამოიწვევს მოხმარების გაზრდას დაახლოებით 0.8 ერთეულით, ხოლო დანაზოგის გაზრდას – დაახლოებით 0.2 ერთეულით.

ამრიგად, აღნიშნულ დონეზე ეროვნული შემოსავლის მიდრეკილება მოხმარებისადმი უფრო დიდია, ვიდრე დაზოგვისადმი. ■

7.13. ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების დადგენა წარმოებულის გამოყენებით

ახლა გავეცნოთ წარმოებულის გამოყენებით ფუნქციის გამოკვლევის ზოგად სქემას. პირველ რიგში შევისწავლოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების დადგენა, რაც ფუნქციის ზოგადი გამოკვლევის ერთ-ერთ ძირითად საკითხს წარმოადგენს. მართებულია შემდეგი თეორემები.

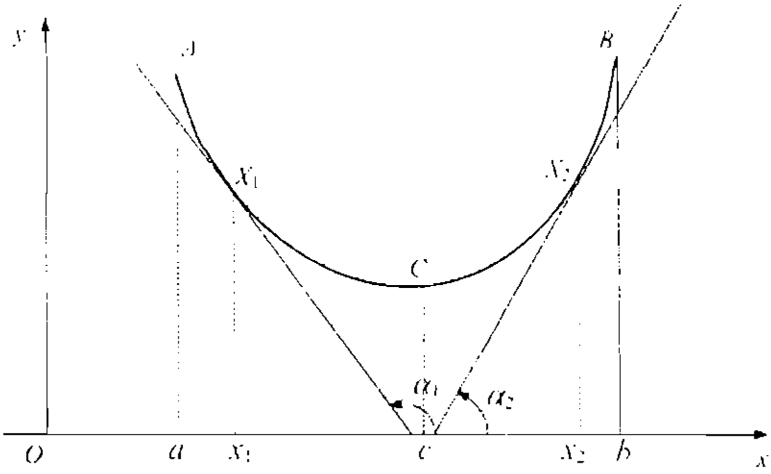
თეორემა 7.3. (ა) თუ (a,b) ინტერვალში წარმოებადი $f(x)$ ფუნქცია არაკლებადია ამავე ინტერვალში, მაშინ ამ ინტერვალის ყოველი x წერტილისათვის $f'(x) \geq 0$;

(ბ) თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და წარმოებადია (a,b) ინტერვალში, ამასთან $f'(x) > 0$, როცა $a < x < b$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია $[a,b]$ სეგმენტზე. ■

თეორემა 7.4. (ა) თუ (a,b) ინტერვალზე წარმოებადი $f(x)$ ფუნქცია არაზრდადია ამავე ინტერვალში, მაშინ ამ ინტერვალის ყოველი x წერტილისათვის $f'(x) \leq 0$;

(ბ) თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და წარმოებადია (a,b) ინტერვალში, ამასთან $f'(x)<0$, როცა $a<x<b$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია კლებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. ■

ამ თეორემების ჭეშმარიტების საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ შემდეგი გეომეტრიული არგუმენტაცია. ავიღოთ $y=f(x)$ ფუნქცია, რომლის შესაბამისი გრაფიკია ნახ. 7.9-ზე გამოსახული AB მრუდი.



ნახ. 7.9

ამ წირის AC რკალი, რომელიც ქვემოთ ეშვება, გამოსახავს ფუნქციის კლებადობას (a,c) ინტერვალში, ხოლო CB რკალი, რომელიც ზემოთ მიემართება, გამოსახავს ფუნქციის ზრდადობას (c,b) ინტერვალში. ნახაზიდან აშკარად ჩანს, რომ თუ $x_1 \in (a,c)$, მაშინ გრაფიკის შესაბამის X_1 წერტილზე გავლებული მხები შეადგენს ბლაგვ კუთხეს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან და ამიტომ $\operatorname{tg}\alpha_1 = f'(x_1) < 0$, ხოლო თუ $x_2 \in (c,b)$, მაშინ შესაბამის X_2 წერტილზე გავლებული მხები Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შეადგენს მახვილ კუთხეს, და ამიტომ $\operatorname{tg}\alpha_2 = f'(x_2) > 0$.

ამოცანა 7.21. ა) ვიპოვოთ $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები.

ბ) ვაჩვენოთ, რომ $e^x-1-x>0$, როცა $x>0$.

▼ ა) გამოვთვალოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}, \quad x\in(-\infty, 0)\cup(0, +\infty).$$

როგორც ვხედავთ, $f'(x)$ განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $x=0$ წერტილისა. თეორემა 7.3-ის თანახმად, $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია, თუ $f'(x)>0$. ეს უტოლობა ტოლფასია $x^2>1$ უტოლობისა, საიდანაც მივიღებთ $|x|>1$.

ამრიგად, ფუნქცია ზრდადია $(-\infty, -1)$ და $(1, +\infty)$ შუალედებში. $f(x)$ ფუნქცია კლებადია, თუ $f'(x)<0$, ანუ თუ $|x|<1$, $x\neq 0$. მაშასადამე, ფუნქცია კლებადია $(-1, 0)$ და $(0, 1)$ შუალედებში.

ბ) აღვნიშნოთ $g(x)=e^x-1-x$. ცხადია, $g'(x)=e^x-1>0$, როცა $x>0$. ამრიგად, $g(x)$ ფუნქცია ზრდადია $(0, +\infty)$ შუალედში, ე. ი. $g(x)>g(0)$, თუ $x>0$. რადგან, $g(0)=0$, ამიტომ $g(x)>0$, როცა $x>0$. ■

7.14. ფუნქციის საშუალო ელასტიკურობა და ზღვრული ელასტიკურობა არგუმენტის მიმართ

ვთქვათ, $0\le a<b$ და (a,b) ინტერვალში მოცემულია $y=f(x)$ წარმოებადი ფუნქცია, რომელიც ღებულობს დადებით მნიშვნელობებს, ე. ი.

$$f(x)>0, \quad x\in(a,b).$$

აღვნიშნოთ არგუმენტის Δx ნაზრდის შესაბამისი ფუნქციის ნაზრდი $\Delta f(x)$-ით:

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x).$$

ვუწოდოთ $\left|\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\right|$ სიდიდეს **არგუმენტის პროცენტული ფარდობითი ნაზრდი**, ხოლო $\left|\frac{\Delta f(x)}{f(x)}\cdot 100\right|$ სიდიდეს – **ფუნქციის პროცენტული ფარდობითი ნაზრდი**.

შევნიშნოთ, რომ არგუმენტის პროცენტული ფარდობითი ნაზრდი გვიჩვენებს, თუ x-ის რამდენი პროცენტია Δx, ანუ იგი გვიჩვენებს, თუ რამდენი პროცენტით შეიცვალა x, როცა მან მიიღო Δx ნაზრდი. ანალოგიურად, ფუნქციის პროცენტული ფარდობითი ნაზრდი გვიჩვენებს, თუ $f(x)$-ის რამდენი პროცენტია $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ ნაზრდი, ანუ იგი გვიჩვენებს, თუ რამდენი პროცენტით იცვლება $f(x)$ ფუნქცია, როცა იგი იღებს $\Delta f(x)$ ნაზრდს.

ძალიან ხშირად, პრაქტიკაში მნიშვნელოვანია იმის დადგენა, თუ როგორ დამოკიდებულებაშია ერთმანეთთან არგუმენტისა და შესაბამისი ფუნქციის პროცენტული ფარდობითი ნაზრდები. ამ საკითხის გამოსაკვლევად შემოვიტანოთ შემდეგი განმარტება.

● $y = f(x)$ **ფუნქციის** $E(f;x;\Delta x)$ **საშუალო ელასტიკურობა არგუმენტის** Δx **ნაზრდის მიმართ** (a,b) შუალედის x წერტილში ეწოდება ამ ფუნქციის პროცენტული ფარდობითი ნაზრდის არგუმენტის პროცენტულ ფარდობით ნაზრდთან შეფარდებას. ■

ამრიგად,

$$\boxed{\begin{aligned} E(f;x;\Delta x) &= \frac{(f-\text{ის პროცენტული ცვლილება})}{(x-\text{ის პროცენტული ცვლილება})} = \\ &= \left|\frac{\Delta f(x)}{f(x)}\cdot 100\right| : \left|\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\right| = \left|\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right| \end{aligned}} \qquad (7.36)$$

● (7.36) **გამოსახულების ზღვარს, როდესაც $\Delta x \to 0$, ეწოდება** $y = f(x)$ **ფუნქციის (ზღვრული) ელასტიკურობა არგუმენტის მიმართ** x წერტილში. აღვნიშნოთ იგი $E(f;x)$ სიმბოლოთი. ■

ცხადია, რომ

$$\boxed{E(f;x) = \lim_{\Delta x\to 0} E(f;x;\Delta x) = \left|\frac{x}{f(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right| = \left|\frac{x}{f(x)}\cdot f'(x)\right|} \qquad (7.37)$$

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის საშუალო ელასტიკურობა გვიჩვენებს, თუ რამდენი პროცენტით იცვლება ფუნქცია, როცა

არგუმენტი იცვლება 1 %-ით (იხ. (7.36) ფორმულა).

მიახლოებით იგივეს გამოსახავს ფუნქციის ზღვრული ელასტიკურობა. მართლაც, თუ არგუმენტი შეიცვალა 1 %-ით, ე. ი. $\Delta x = \frac{x}{100}$, მაშინ შესაბამისი ნაზრდი გამოითვლება შემდეგი ტოლობით

$$\Delta f(x) = f\left(x + \frac{x}{100}\right) - f(x) \approx f'(x) \cdot \frac{x}{100}.$$

რადგან

$$f(x + \frac{x}{100}) \approx f(x) + \frac{x}{100} f'(x) = f(x) + \frac{E(f;x)}{100} f(x) = f(x)\left[1 + \frac{E(f;x)}{100}\right],$$

ამიტომ $E(f;x)$ გვიჩვენებს რამდენი პროცენტით იცვლება $f(x)$, როცა x იცვლება 1 %-ით. ამ ტოლობის გამოყენებით მარტივად მივიღებთ

$$E\left(f; x; \frac{x}{100}\right) = \left|\frac{\Delta f(x)}{f(x)} \cdot 100\right| \approx \left|\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{x}{100} \cdot 100\right| = \left|\frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)\right| = E(f; x).$$

ქვემოთ ვნახავთ, რომ ფუნქციის ელასტიკურობის ცნებას დიდი გამოყენება აქვს ეკონომიკის მრავალ სფეროში.

აქ კი განვიხილოთ ერთი კონკრეტული ამოცანა.

ამოცანა 7.22. ვთქვათ, წარმოება უშვებს Q რაოდენობის პროდუქციას. ვაჩვენოთ, რამდენი პროცენტით იცვლება (იზრდება ან კლებულობს) მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია $(TC) = K(Q)$, როცა წარმოებული პროდუქციის Q რაოდენობა იცვლება 1 %-ით.

▼ ვისარგებლოთ (7.11) მიახლოებითი ტოლობით და გამოვთვალოთ $K(Q)$ ფუნქციის ნაზრდი

$$\Delta K(Q) = K(Q + \Delta Q) - K(Q) \approx K'(Q)\ \Delta Q.$$

თუ განვიხილავთ ამ გამოსახულების შეფარდებას პროდუქციის ΔQ ნაზრდთან, მაშინ მივიღებთ დანახარჯის ფუნქციის ცვლილების სიჩქარის მიახლოებით მნიშვნელობას

$$K'(Q) \approx \frac{\Delta K(Q)}{\Delta Q}.$$

დანახარჯის $K(Q)$ ფუნქციის ფარდობითი ცვლილება კი გამოითვლება ტოლობით

$$\frac{\Delta K(Q)}{K(Q)} \approx \frac{K'(Q)}{K(Q)}\ \Delta Q.$$

ეკონომიკაში ხშირად გამოიყენება დანახარჯის ფუნქციის ფარდობითი ცვლილების შეფარდება პროდუქციის რაოდენობის ფარდობით ცვლილებასთან

$$\frac{\Delta K(Q)}{K(Q)} : \frac{\Delta Q}{Q} \approx \frac{K'(Q)}{K(Q)} \cdot Q = \frac{Q}{K(Q)} \cdot \frac{dK(Q)}{dQ}.$$

განხილული შეფარდება გვიჩვენებს, რამდენჯერ მეტია დანახარჯის ფუნქციის ფარდობითი ცვლილება (ფარდობითი ნაზრდი) პროდუქციის რაოდენობის ფარდობით ცვლილებაზე (პროდუქციის რაოდენობის ფარდობით ნაზრდზე). უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარეს **დანახარჯის ფუნქციის ელასტიკურობას** უწოდებენ Q ცვლადის მიმართ და აღნიშნავენ $E(K;Q)$ სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$E(K;Q) = \frac{Q}{K(Q)}\, K'(Q).$$

ეს ტოლობა სრულ თანხმობაშია ფუნქციის ელასტიკურობის ზემოთ შემოღებულ ცნებასთან. შევნიშნოთ, რომ დანახარჯის ფუნქცია ზრდადია Q არგუმენტის მიმართ და ამიტომ მისი წარმოებული დადებითია, ე.ი. $K'(Q) > 0$. დანახარჯის ფუნქციის ელასტიკურობა მიახლოებით გვიჩვენებს, თუ რამდენი პროცენტით იცვლება (იზრდება ან კლებულობს) დანახარჯის ფუნქცია $K(Q)$, როცა პროდუქციის Q რაოდენობა იცვლება 1%-ით. მართლაც, $\Delta K(Q)$ ნაზრდის გამოსახულებაში ვიგულისხმოთ, რომ $\Delta Q = \frac{Q}{100}$:

$$K\left(Q + \frac{Q}{100}\right) - K(Q) \approx \frac{Q}{100} \cdot K'(Q).$$

მეორე მხრივ, $Q\,K'(Q)=K(Q)\;E(K;Q)$. თუ ამ ტოლობას გავითვალისწინებთ წინა ტოლობაში, მივიღებთ

$$K\left(Q+\frac{Q}{100}\right)\approx K(Q)\left[1+\frac{E(K;Q)}{100}\right],$$

ე. ი. Q-ს ცვლილება $1\,\%$-ით იწვევს $K(Q)$ ფუნქციის ცვლილებას $E(K;Q)$ პროცენტით. ■

7.15. მოთხოვნისა და მიწოდების ელასტიკურობა ფასის მიმართ

ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი პრობლემა, რომელიც გვხვდება ბიზნესში, არის (TR) მთლიანი ამონაგების ცვლილების განსაზღვრა პროდუქციის ერთეულის P ფასის ცვლილებასთან დაკავშირებით. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, P ფასის დაკლებას მოსდევს Q მოთხოვნის (გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის) ზრდა. ეს მათემატიკურად ნიშნავს იმას, რომ მოთხოვნის

$$Q=g_D(P) \tag{7.38}$$

ფუნქცია არის კლებადი. მეორე მხრივ, როგორც უკვე ვიცით, მთლიანი ამონაგების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$(TR)=PQ.$$

რადგან P-ს კლებას მოსდევს Q-ს ზრდა, ამიტომ, ზოგადად, ძნელია დავასკვნათ, რა დაემართება (TR) მთლიან ამონაგებს: იგი შეიძლება შემცირდეს, დარჩეს უცვლელი, ან გაიზარდოს.

ამ პარაგრაფში ჩვენი მიზანია აღნიშნული პრობლემის გამოკვლევა და შესაბამისი მათემატიკური მეთოდის შესწავლა.

ეკონომიკაში P ფასისა და Q მოთხოვნის ცვლილებები ΔP და ΔQ გამოისახება პროცენტებში. კერძოდ, თუ P ფასი შეიცვალა ΔP სიდიდით,

მაშინ, ცხადია, რომ ფასის ცვლილება პროცენტობით გამოითვლება შემდეგნაირად

$$\frac{\Delta P}{P} \cdot 100\,(\%)\,.$$

ანალოგიურად, თუ მოთხოვნა Q შეიცვალა ΔQ სიდიდით, მაშინ მოთხოვნის ცვლილება პროცენტობით იქნება

$$\frac{\Delta Q}{Q} \cdot 100\,(\%)\,.$$

მაგალითად, ვთქვათ, პროდუქციის ერთეულის ფასი შემცირდა 25 დოლარიდან 21 დოლარამდე, ამ დროს კი მოთხოვნა გაიზარდა 25 ერთეულიდან 30 ერთეულამდე, ე. ი. $\Delta P = 21 - 25 = -4$ და $\Delta Q = 30 - 25 = 5$. ამიტომ

$$\frac{\Delta P}{P} \cdot 100 = \frac{-4}{25} \cdot 100 = -16, \qquad \frac{\Delta Q}{Q} \cdot 100 = \frac{5}{25} \cdot 100 = 20.$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ფასის ცვლილება (კლება) შეადგენს 16%-ს, ხოლო მოთხოვნის ცვლილება (ზრდა) – 20%-ს.

რეალურად ბაზრის მოთხოვნა ძალიან მგრძნობიარეა ფასის ცვლილების მიმართ, რასაც ბუნებრივად მოსდევს მთლიანი ამონაგების ცვლილება. ამ სიტუაციაში, თუ მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება რიცხობრივად აღემატება ფასის პროცენტულ ცვლილებას, ე.ი. $\left|\frac{\Delta Q}{Q} 100\right| > \left|\frac{\Delta P}{P} 100\right|$, ამბობენ, რომ მოთხოვნა **ელასტიკურია**.

თუ მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება რიცხობრივად ნაკლებია ფასის პროცენტულ ცვლილებაზე, ე.ი. $\left|\frac{\Delta Q}{Q} 100\right| < \left|\frac{\Delta P}{P} 100\right|$, მაშინ ამბობენ, რომ მოთხოვნა **არაელასტიკურია**.

როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ორივე შემთხვევაში მთლიანი ამონაგები საგრძნობლად იცვლება.

თუ მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება რიცხობრივად უდრის ფასის პროცენტულ ცვლილებას, ე.ი. $\left|\frac{\Delta Q}{Q}100\right|=\left|\frac{\Delta P}{P}100\right|$, მაშინ იტყვიან, რომ მოთხოვნისათვის გვაქვს **ერთეულოვანი ელასტიკურობა.**

● შემდეგ სიდიდეს

$$E(Q;\,P;\,\Delta P)=\frac{(\text{მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება})}{(\text{ფასის პროცენტული ცვლილება})}=$$
$$=\frac{\left|\frac{\Delta Q}{Q}\cdot 100\right|}{\left|\frac{\Delta P}{P}\cdot 100\right|}=\left|\frac{P}{Q}\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta P}\right| \tag{7.39}$$

ეწოდება **მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობა ფასის** ΔP **ნაზრდის მიმართ.** ■

შემოღებული E სიდიდის საშუალებით შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ მოთხოვნისათვის გვაქვს:

(ა) ელასტიკურობა, თუ $E>1$,

(ბ) არაელასტიკურობა, თუ $E<1$,

(გ) ერთეულოვანი ელასტიკურობა, თუ $E=1$.

რადგან ფასის ზრდას $(\Delta P>0)$ მოსდევს მოთხოვნის შემცირება $(\Delta Q<0)$ და პირიქით, ფასის შემცირებას $(\Delta P<0)$ მოსდევს მოთხოვნის ზრდა $(\Delta Q>0)$, ამიტომ

$$\frac{\Delta Q}{\Delta P}<0.$$

ამასთან, ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარეობს, რომ $P>0$ და $Q>0$. ამიტომ (7.39) ფორმულაში მოდულის ნიშნებში მოთავსებული გამოსახულება ყოველთვის უარყოფითია. ეს კი საშუალებას გვაძლევს, E სიდიდე წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$E = E(Q;\ P;\ \Delta P) = -\frac{\dfrac{\Delta Q}{Q}\cdot 100}{\dfrac{\Delta P}{P}\cdot 100} = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta P}. \tag{7.40}$$

(7.40) ფორმულაში იგულისხმება, რომ Q და P სიდიდეები ერთმანეთთან დაკავშირებულია (7.38) დამოკიდებულებით. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია P განვიხილოთ დამოუკიდებელ ცვლადად და გადავიდეთ ზღვარზე (7.40) ტოლობაში, როდესაც $\Delta P \to 0$. ამის შედეგად მივიღებთ $E(Q;P)$ სიდიდეს, რომელსაც ეწოდება **მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ**:

$$\boxed{\begin{aligned} E(Q;\ P) &= \lim_{\Delta P \to 0} E(Q;\ P;\ \Delta P) = \lim_{\Delta P \to 0}\left[-\frac{P}{Q}\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta P}\right] = \\ &= -\frac{P}{Q}\lim_{\Delta P \to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta P} = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP} = -\frac{P}{Q}\cdot g_D'(P) \end{aligned}} \tag{7.41}$$

შევნიშნოთ, რომ მოთხოვნის $E(Q;P)$ ელასტიკურობა მიახლოებით გვიჩვენებს, თუ როგორ იცვლება პროცენტულად Q მოთხოვნა P ფასის 1%-ით შეცვლისას (იხ. პარაგრაფი 7.14).

გავაკეთოთ ერთი მნიშვნელოვანი შენიშვნა. თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია $P = f_D(Q)$ ფორმით და ამ ტოლობიდან f_D ფუნქციის სირთულის გამო ძნელია Q ცვლადის გამოსახვა P-ს საშუალებით, მაშინ (7.41) ფორმულის ნაცვლად უნდა გამოვიყენოთ განსხვავებული ალტერნატიული ფორმულა, რომელიც კვლავ (7.40) ტოლობიდან მიიღება. მართლაც, (7.40) ტოლობა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგ სახით

$$E(Q;\ P;\ \Delta P) = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{1}{\dfrac{\Delta P}{\Delta Q}} \tag{7.42}$$

და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta Q \to 0$. ამის შედეგად მივიღებთ

$$E(Q;P) = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{1}{P'} = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{1}{f_D'(Q)}. \tag{7.43}$$

ახლა ვნახოთ, რა დამოკიდებულებაა ფასის მიმართ მოთხოვნის ელას-

ტიკურობასა და ფასის გაზრდით ან შემცირებით გამოწვეულ მთლიანი ამონაგების ცვლილებას შორის.

ვთქვათ, მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ფორმით

$$Q = g_D(P),$$

სადაც $g_D(P)$ კლებადი ფუნქციაა.

მაშინ მთლიანი ამონაგები გამოითვლება შემდეგი ტოლობით

$$(TR) = P\,Q = P\;g_D(P). \tag{7.44}$$

გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის წარმოებული P არგუმენტით

$$\frac{d(TR)}{dP} = \left[P\,g_D(P)\right]' = P'g_D(P) + P\,g'_D(P) = g_D(P) + P\,g'_D(P) =$$

$$= g_D(P)\left[1 + \frac{P}{g_D(P)}\,g'_D(P)\right] = Q\left[1 + \frac{P}{Q}\,g'_D(P)\right].$$

(7.41) ტოლობის გათვალისწინებით, ეს უკანასკნელი გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\boxed{\frac{d(TR)}{dP} = Q\left[1 - E(Q;P)\right]}$$

აქედან, ცხადია, რომ

(ა) $\dfrac{d(TR)}{dP} < 0$, როცა $E(Q;P) > 1$, ე. ი. ამ შემთხვევაში (TR) ფუნქცია P ფასის კლებადი ფუნქციაა;

(ბ) $\dfrac{d(TR)}{dP} > 0$, როცა $E(Q;P) < 1$, ე. ი. ამ შემთხვევაში (TR) ფუნქცია P ფასის ზრდადი ფუნქციაა;

(გ) $\dfrac{d(TR)}{dP} = 0$, როცა $E(Q;P) = 1$, ე. ი. ამ შემთხვევაში P ფასის მცირე ცვლილება თითქმის არ ცვლის (TR) ფუნქციას.

ამრიგად, თუ:

(ა) $E(Q;P) > 1$, მაშინ P-ს გაზრდას ანუ Q-ს შემცირებას მოსდევს

(TR) ამონაგების კლება, ხოლო P-ს შემცირებას ანუ Q-ს გაზრდას მოსდევს (TR) ამონაგების ზრდა;

(ბ) $E(Q;P)<1$, მაშინ P-ს გაზრდას ანუ Q-ს შემცირებას მოსდევს (TR) ამონაგების ზრდა, ხოლო P-ს შემცირებას ანუ Q-ს გაზრდას მოსდევს (TR) ამონაგების შემცირება;

(გ) $E(Q;P)=1$, მაშინ P-ს და Q-ს მცირე ცვლილება, ფაქტობრივად, არ იწვევს (TR) ამონაგების ცვლილებას.

ამოცანა 7.23. ვიპოვოთ მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობა ფასის ნაზრდის მიმართ, თუ მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P=f_D(Q)=200-Q^2$$

და პროდუქციის ერთეულის ფასი კლებულობს 136 დოლარიდან 133 დოლარამდე. გამოვთვალოთ ზღვრული ელასტიკურობა, როდესაც ფასია 136 დოლარი. გავაანალიზოთ მიღებული შედეგები.

▼ ამოცანის პირობის გამოყენებით, გამოვსახოთ Q მოთხოვნა P ფასის საშუალებით

$$Q^2=200-P.$$

რადგან, ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარე, Q დადებითი სიდიდეა, ამიტომ გვექნება

$$Q=g_D(P)=\sqrt{200-P}.$$

ცხადია, როცა $P=136$, მაშინ $Q=\sqrt{200-136}=\sqrt{64}=8.$

ჩვენს შემთხვევაში $\Delta P=133-136=-3$. $g_D(P)$ ფუნქციის შესაბამისი ნაზრდი იქნება

$$\Delta Q=\Delta g_D(136)=g_D(133)-g_D(136)=\sqrt{200-133}-\sqrt{200-136}=$$
$$=\sqrt{67}-\sqrt{64}=8.1854-8=0.1854.$$

ახლა გამოვიყენოთ (7.40) ფორმულა და გამოვთვალოთ მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობა

$$E(Q;P;\Delta P)=E(8;\ 136;\ -3)=-\frac{136}{8}\cdot\frac{0.1854}{-3}=\frac{25.2144}{24}=1.0506.$$

ზღვრული ელასტიკურობა გამოვთვალოთ (7.41) ფორმულით

$$E(Q;P)=-\frac{P}{Q}\,g_D'(P)=-\,\frac{P}{Q}\left(\sqrt{200-P}\right)'=\frac{P}{2Q\sqrt{200-P}}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ, როცა $P=136$, მაშინ $Q=8$, მივიღებთ

$$E(8;\ 136)=\frac{136}{2\cdot 8\cdot 8}=\frac{136}{128}=1.0625\,.$$

რადგან ელასტიკურობა ფასის მიმართ 1-ზე მეტია, ამიტომ მთლიანი ამონაგები კლებადია P-ს მიმართ. ამრიგად, ფასის შემცირებას 136 დოლარიდან 133 დოლარამდე ბუნებრივად მოსდევს მოთხოვნის ზრდა. თავის მხრივ, ეს იწვევს მთლიანი ამონაგების ზრდას. ■

სრულიად ანალოგიურად განიმარტება **მიწოდების საშუალო ელასტიკურობა ფასის** ΔP **ნაზრდის მიმართ**:

$$\boxed{E(Q;P;\Delta P)=\frac{(\text{მიწოდების პროცენტული ცვლილება})}{(\text{ფასის პროცენტული ცვლილება})}=\frac{\left|\frac{\Delta Q}{Q}\cdot 100\right|}{\left|\frac{\Delta P}{P}\cdot 100\right|}=\left|\frac{P}{Q}\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta P}\right|} \qquad (7.45)$$

რადგან მიწოდების $Q=g_S(P)$ ფუნქცია ზრდადია P არგუმენტის მიმართ (იხ. პარაგრაფი 1.12), ამიტომ

$$\frac{\Delta Q}{\Delta P}=\frac{g_S(P+\Delta P)-g_S(P)}{\Delta P}>0.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (7.45) ფორმულა ასე გადაიწერება

$$\boxed{E(Q;P;\Delta P)=\frac{P}{Q}\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta P}} \qquad (7.46)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $Q=g_S(P)$ მიწოდების ფუნქცია წარმოებადია და (7.46) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta P\to 0$, მივიღებთ ფორმულას, რომელსაც ეწოდება **მიწოდების (ზღვრული) ელასტიკურობა**

ფასის მიმართ:

$$E(Q;P)=\lim_{\Delta P\to 0}E(Q;P;\Delta P)=\frac{P}{Q}\,\frac{dQ}{dP}=\frac{P}{Q}\,g_S'(P) \tag{7.47}$$

აქაც შევნიშნოთ, რომ თუ მიწოდების ფუნქცია მოცემულია $P=f_S(Q)$ ფორმით, მაშინ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ალტერნატიული ფორმულა ფასის მიმართ მიწოდების (ზღვრული) ელასტიკურობის გამოსათვლელად:

$$E(Q;P)=\lim_{\Delta P\to 0}E(Q;P;\Delta P)=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{P}{Q}\cdot\frac{1}{\dfrac{\Delta P}{\Delta Q}}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{1}{f_S'(Q)} \tag{7.48}$$

7.16 ფუნქციის ექსტრემუმი

ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია წარმოებული ამ სეგმენტის ყოველ შიგა წერტილში.

მათემატიკური ანალიზის სრულყოფილ კურსში მტკიცდება, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრულია და იგი ამ სეგმენტზე თავის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს იღებს.

ფუნქციის გამოკვლევისას უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებთან ერთად არსებითია ფუნქციის ლოკალური მინიმუმისა და ლოკალური მაქსიმუმის წერტილების მოძებნა.

● $f(x)$ ფუნქცია (a,b) ინტერვალის x_0 წერტილში ღებულობს **ლოკალურ მინიმუმს**, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ამ მიდამოდან ადგილი აქვს უტოლობას

$$f(x)\ge f(x_0).\ \blacksquare$$

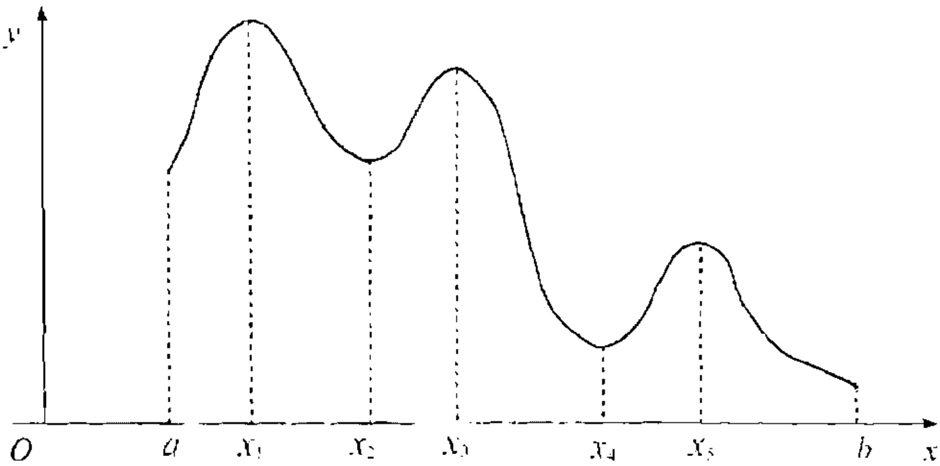
● $f(x)$ ფუნქცია (a,b) ინტერვალის x_0 წერტილში ღებულობს **ლოკალურ მაქსიმუმს**, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ამ მიდამოდან ადგილი აქვს უტოლობას

$$f(x)\le f(x_0).\ \blacksquare$$

● წერტილებს, სადაც მიიღწევა ლოკალური მინიმუმი ან ლოკალური

მაქსიმუმი, ეწოდება **ექსტრემუმის წერტილები**, ხოლო თვით ფუნქციის მნიშვნელობებს ამ წერტილებში ეწოდება **ფუნქციის ექსტრემუმები**. ■

$[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს რამდენიმე ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი. ამასთან, ზოგიერთი ლოკალური მაქსიმუმი შეიძლება ზოგიერთ ლოკალურ მინიმუმზე ნაკლებიც კი იყოს. ამიტომ უნდა გავარჩიოთ ერთმანეთისაგან ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობებისაგან.



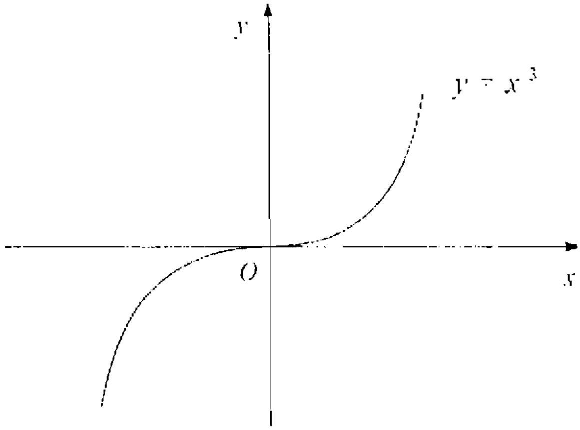
ნახ. 7.10

მაგალითად, ნახ. 7.10-ზე გამოსახულია ისეთი ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც $[a,b]$ სეგმენტზე უდიდეს მნიშვნელობას აღწევს x_1 წერტილში, უმცირეს მნიშვნელობას კი — b წერტილში. გარდა ამისა, x_1, x_3 და x_5 ლოკალური მაქსიმუმის წერტილებია, ხოლო x_2 და x_4 კი ლოკალური მინიმუმის წერტილებია. ამასთან შევნიშნოთ, რომ ლოკალური მინიმუმი $f(x_2)$ მეტია $f(x_5)$ ლოკალურ მაქსიმუმზე.

ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილების მოსაძებნად უდიდესი მნიშვნელობა აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 7.5 (ფერმას თეორემა). თუ რაიმე შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია შუალედის შიგა x_0 წერტილში და ამ წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს ლოკალური ექსტრემუმი, მაშინ $f'(x_0)=0$. ■

შევნიშნოთ, რომ წარმოებადი ფუნქციისათვის რაიმე წერტილში წარმოებულის ნულთან ტოლობა არის ამ წერტილში ექსტრემუმის არსებობის მხოლოდ აუცილებელი პირობა და არა საკმარისი, ე.ი. შეიძლება ფუნქციის წარმოებული რაიმე წერტილში იყოს ნულის ტოლი, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციას არ ჰქონდეს ექსტრემუმი. მაგალითად, $y = x^3$ ფუნქციის წარმოებული $y' = 3x^2$ ნულია $x = 0$ წერტილში, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციას არ გააჩნია ექსტრემუმი (იხ. ნახ. 7.11).



ნახ. 7.11

მეორე მხრივ, ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ლოკალური ექსტრემუმი იმ წერტილშიც, სადაც ფუნქციას წარმოებული არა აქვს.

მაგალითად, $f(x) = |x|$ ფუნქციას $x = 0$ წერტილში წარმოებული არ გააჩნია, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი (იხ. ნახ. 7.7).

წერტილებს, რომლებშიც უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული ნულია ან არ არსებობს, **კრიტიკული წერტილები** ეწოდება, ხოლო იმ წერტილებს, სადაც $f'(x) = 0$, **სტაციონარული წერტილები** ეწოდება.

როგორც ზემოთ შევნიშნეთ, კრიტიკული წერტილი ყოველთვის არ წარმოადგენს ექსტრემუმის წერტილს, მაგრამ თუ რაიმე წერტილში ფუნქცია აღწევს ექსტრემუმს, მაშინ იგი აუცილებლად იქნება კრიტიკული წერტილი.

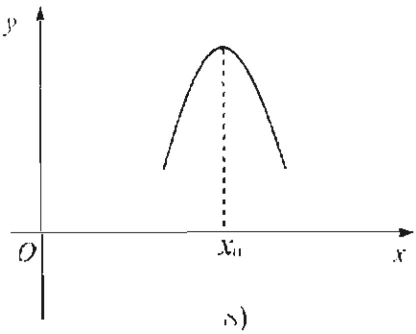
ახლა შევისწავლოთ და დავადგინოთ ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები. ვთქვათ, x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი.

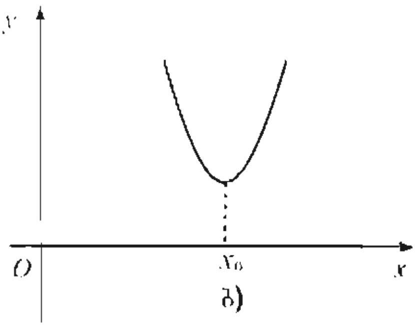
ფუნქციის მონოტონურობის საკმარისი პირობის გათვალისწინებით მარტივად დავასკვნით:

(ა) თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში და $f'(x)>0$, როცა $x<x_0$, და $f'(x)<0$, როცა $x>x_0$, მაშინ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი;

(ბ) თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში და $f'(x)<0$, როცა $x<x_0$, და $f'(x)>0$, როცა $x>x_0$, მაშინ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი.

ზემოთ ჩამოყალიბებული (ა) და (ბ) დებულებებს გააჩნიათ მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. მართლაც, (ა) დებულების პირობები ნიშნავს, რომ ფუნქცია ზრდადია x_0 წერტილის მარცხნივ, ხოლო კლებადია x_0 წერტილის მარჯვნივ. ამიტომ უწყვეტობის ძალით მას x_0 წერტილში ექნება ლოკალური მაქსიმუმი (იხ. ნახ. 7.12.ა). ანალოგიურად, (ბ) დებულების პირობებში, ფუნქცია კლებადია x_0 წერტილის მარცხნივ, ხოლო ზრდადია x_0 წერტილის მარჯვნივ; ამიტომ, კვლავ უწყვეტობის ძალით, მას x_0 წერტილში ექნება ლოკალური მინიმუმი (იხ. ნახ. 7.12.ბ).





ნახ. 7.12

ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნის ამოცანები შეიძლება შევისწავლოთ მეორე რიგის წარმოებულების გამოყენებითაც. მტკიცდება შემდეგი დებულება.

თეორემა 7.6. ვთქვათ, x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის სტაციონარული წერ-

ტილი და $f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$, მაშინ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი (მინიმუმი). ■

უფრო მაღალი რიგის წარმოებულების გამოყენებით ექსტრემუმის არსებობის პირობები ასე ყალიბდება.

თეორემა 7.7. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში გააჩნია წარმოებულები n რიგამდე ჩათვლით და შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0,\quad (n\geq 2).$$

მაშინ

ა) x_0 წერტილში ფუნქციას გააჩნია მაქსიმუმი, თუ n ლუწია და $f^{(n)}(x_0)<0$;

ბ) x_0 წერტილში ფუნქციას გააჩნია მინიმუმი, თუ n ლუწია და $f^{(n)}(x_0)>0$;

გ) x_0 წერტილში ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია, თუ n კენტია. ■

განვიხილოთ რამდენიმე პრაქტიკული ამოცანა.

ამოცანა 7.24. ვთქვათ, საჭიროა აშენდეს ერთსართულიანი შენობა, რომლის იატაკიც წარმოადგენს S ფართობის მქონე მართკუთხედს. როგორი უნდა იყოს მართკუთხედის ზომები, რომ გარე კედლებისათვის დაიხარჯოს საამშენებლო მასალის მინიმალური რაოდენობა?

▼ ცხადია, რომ მოცემულ პირობებში დახარჯული მასალის რაოდენობა შენობის პერიმეტრის პროპორციულია. ამიტომ რაც უფრო მცირეა პერიმეტრი, მით უფრო ნაკლები მასალა დაიხარჯება შენობის ასაშენებლად.

ამრიგად, მოცემული ამოცანა დაიყვანება ფიქსირებული S ფართობის მქონე მართკუთხედებს შორის უმცირესი პერიმეტრის მქონე მართკუთხედის მოძებნის ამოცანაზე.

ახლა ვნახოთ, როგორ ამოიხსნება ეს ამოცანა წარმოებულის გამოყენებით. აღვნიშნოთ მართკუთხედის სიგრძე x-ით. მაშინ მისი სიგანე იქნება

$\frac{S}{x}$. მართკუთხედის პერიმეტრი კი გამოითვლება ფორმულით

$$p(x) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right), \quad x > 0.$$

ვიპოვოთ $p(x)$ ფუნქციის მინიმუმი. ამისათვის ვიპოვოთ მისი სტაციონარული წერტილები. გამოვთვალოთ $p'(x)$ და გავუტოლოთ იგი ნულს

$$p'(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right) = 0.$$

აქედან მივიღებთ $x = \pm\sqrt{S}$. ჩვენთვის საინტერესო შუალედში $(x > 0)$ მოხვდება ერთი სტაციონარული წერტილი $x = \sqrt{S}$.

გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული და გამოვიყენოთ თეორემა 7.6:

$$p''(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right)' = -2\left(x^{-2}\right)' S = 4x^{-3}S = \frac{4S}{x^3}.$$

რადგან $p''\left(\sqrt{S}\right) = \frac{4}{\sqrt{S}} > 0$, ამიტომ $x = \sqrt{S}$ არის $p(x)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი. ამრიგად, მართკუთხედის პერიმეტრი მინიმალური იქნება მაშინ, როდესაც მართკუთხედის გვერდებია $\sqrt{S}$ და $\frac{S}{\sqrt{S}} = \sqrt{S}$, ე.ი. როდესაც მართკუთხედი იქნება კვადრატი. ■

ამოცანა 7.25. ვთქვათ, მასალის მინიმალური დანახარჯებით გვინდა დავამზადოთ V მოცულობის მქონე წრიული ცილინდრული ფორმის დახურული კასრი. როგორი უნდა იყოს კასრის ზომები?

▼ მათემატიკურად ეს ნიშნავს შემდეგს: ვიპოვოთ მოცემული V მოცულობის მქონე ისეთი ცილინდრის რადიუსი და სიმაღლე, რომლისათვისაც მისი სრული ზედაპირის ფართობი მინიმალური იქნება.

ვთქვათ, ცილინდრის ფუძის რადიუსია r, ხოლო სიმაღლე – H. როგორც ვიცით, ცილინდრის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$V = \pi r^2 H.$$

აქედან

$$H = \frac{V}{\pi r^2}.$$

ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობისათვის გვაქვს ფორმულა

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r H = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r},$$

სადაც V მუდმივი სიდიდეა. ვიპოვოთ, r-ის როგორი მნიშვნელობისათვის ღებულობს S ფუნქცია მინიმალურ მნიშვნელობას. ცხადია, მოცემულ ამოცანაში $r > 0$.

გამოვთვალოთ S ფუნქციის წარმოებული r-ით და გავუტოლოთ ნულს

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right) = 0.$$

კრიტიკული წერტილისათვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$2\pi r^3 - V = 0,$$

რომლის ამონახსნია

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

თუ $r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, მაშინ $S'(r) = \frac{2\pi r^3 - V}{r^2} < 0$, ხოლო თუ $r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, მაშინ $S'(r) > 0$.

ამრიგად, r_0 წერტილის მარცხნივ წარმოებული უარყოფითია, ხოლო მარჯვნივ — დადებითი. ეს იმას ნიშნავს, რომ r_0 წერტილში ფუნქცია აღწევს მინიმუმს. მაშასადამე, თუ ცილინდრის რადიუსია $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, მაშინ სრული ზედაპირის ფართობი იქნება მინიმალური. ამ რადიუსის შესაბამისი სიმაღლე იქნება

$$H = \frac{V}{\pi r_0^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r_0.$$

მაშასადამე, მინიმალური დანახარჯები იქნება მაშინ, როცა ცილინდრის სიმაღლე ფუძის დიამეტრის ტოლია. ■

ამოცანა 7.26. პროდუქციის ერთეულის ფასი 10 დოლარიდან გაიზარდა 12 დოლარამდე, რის გამოც 100 ერთეულის ნაცვლად გაიყიდა პროდუქციის 90 ერთეული. ვიპოვოთ დამოკიდებულება პროდუქციის ერთე-

ულის ფასსა და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობას შორის. პროდუქციის ერთეულის რა ფასი უზრუნველყოფს მაქსიმალურ ამონაგებს? (იგულისხმება, რომ დამოკიდებულება პროდუქციის ერთეულის ფასსა და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობას შორის წრფივია).

▼ რადგან გაყიდული პროდუქციის Q რაოდენობასა და საცალო P ფასს შორის დამოკიდებულება წრფივია, ამიტომ $P = kQ + b$, სადაც k და b მუდმივებია. ამოცანის პირობის თანახმად, როცა $Q = 100$, მაშინ $P = 10$, ხოლო როცა $Q = 90$, მაშინ $P = 12$. ამიტომ k და b საძიებელი სიდიდეების საპოვნელად მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 10 = 100k + b \\ 12 = 90k + b. \end{cases}$$

აქედან მარტივად მივიღებთ, რომ $k = -\frac{1}{5}$ და $b = 30$. ამრიგად, $P = -\frac{1}{5}Q + 30.$

მთლიანი ამონაგები იქნება

$$(TR) = f(Q) = -\frac{1}{5}Q^2 + 30Q.$$

ვნახოთ, Q-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება მთლიანი ამონაგები მაქსიმალური. ამისათვის, გავაწარმოოთ $f(Q)$ ფუნქცია და გავუტოლოთ ნულს

$$f'(Q) = -\frac{2}{5}Q + 30 = 0.$$

აქედან ჩანს, რომ სტაციონარული წერტილია $Q_0 = 75$. ვიპოვოთ ამ მნიშვნელობისათვის მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანი

$$f''(Q_0) = -\frac{2}{5} < 0.$$

ეს ნიშნავს, რომ $Q_0 = 75$ არის $f(Q)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი. ამ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობაა

$$f(75) = -\frac{1}{5} \cdot 75^2 + 30 \cdot 75 = 1125 \text{ (დოლარი)}.$$

პროდუქციის საცალო ფასი ამ შემთხვევაში იქნება

$$P_0 = -\frac{1}{5}\cdot 75 + 30 = 15 \quad (\text{დოლარი}).$$

მაშასადამე, თუ პროდუქციის ერთეულის ფასია 15 დოლარი, მაშინ გაიყიდება 75 ერთეული და შესაბამისი მაქსიმალური მთლიანი ამონაგები იქნება 1125 დოლარი. ■

ვთქვათ, $(TC) = K(Q)$ არის მთლიანი დანახარჯების ფუნქცია (რომელიც აღწერს წარმოების დანახარჯებს Q მოცულობის პროდუქციის დასამზადებლად).

მაშინ, როგორც ვიცით (იხ. პარაგრაფი 6.7), სიდიდე

$$(AC) = k(Q) = \frac{K(Q)}{Q} \tag{7.49}$$

გამოსახავს საშუალო დანახარჯს, რომელიც საჭიროა პროდუქციის ერთეულის წარმოებისათვის.

გამოვიკვლიოთ საშუალო დანახარჯის ფუნქცია. პრაქტიკაში დიდი მნიშვნელობა აქვს პროდუქციის იმ მოცულობის განსაზღვრას, რომლის დროსაც საშუალო დანახარჯი მინიმალურია. იმისათვის, რომ შევისწავლოთ საშუალო დანახარჯის ფუნქციისათვის ექსტრემუმის ამოცანა, გავაწარმოოთ (7.49) ფუნქცია

$$k'(Q) = \frac{K'(Q)\cdot Q - K(Q)}{Q^2}. \tag{7.50}$$

გავუტოლოთ ეს წარმოებული ნულს და ვიპოვოთ $k(Q)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები. მივიღებთ განტოლებას

$$Q\cdot K'(Q) - K(Q) = 0,$$

ანუ

$$K'(Q) = \frac{K(Q)}{Q}. \tag{7.51}$$

ვთქვათ, Q_0 წარმოადგენს (7.51) განტოლების ამონახსნს (ანუ $k(Q)$ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილს) და დავუშვათ, რომ

$$Q\cdot K'(Q) - K(Q) < 0, \text{ როცა } Q < Q_0,$$

$$Q\cdot K'(Q) - K(Q) > 0, \text{ როცა } Q > Q_0,$$

ან

$$K''(Q_0) > 0.$$

მაშინ, ცხადია, Q_0 წერტილი წარმოადგენს $k(Q)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილს. მეორე მხრივ, (7.51) ტოლობიდან დავასკვნით, რომ თუ Q_0 არის $k(Q)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი, მაშინ

$$K'(Q_0) = \frac{K(Q_0)}{Q_0}. \tag{7.52}$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $K'(Q)$ წარმოადგენს მარგინალურ დანახარჯს, მივიღებთ შემდეგ დებულებას:

> თუ Q_0 მოცულობის პროდუქციის წარმოების დროს საშუალო დანახარჯების ფუნქცია იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, მაშინ ამავე მოცულობისათვის მარგინალური დანახარჯი საშუალო დანახარჯის ტოლია

ამოცანა 7.27. პროდუქციის Q მოცულობის წარმოებისათვის ფირმა გეგმავს დანახარჯს, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$K(Q) = 2600 + 2Q + 0.001Q^2.$$

(ა) ვიპოვოთ დანახარჯი, საშუალო დანახარჯი და მარგინალური დანახარჯი პროდუქციის 1000, 2000 და 3000 ერთეულის წარმოებისას;

(ბ) პროდუქციის წარმოების რა მოცულობისათვის იქნება საშუალო დანახარჯი ყველაზე მცირე? იპოვეთ ამ უმცირესი საშუალო დანახარჯის რიცხვითი მნიშვნელობა.

▼ (ა) ამოცანის პირობის თანახმად, საშუალო დანახარჯის ფუნქციას აქვს სახე

$$k(Q) = \frac{2600}{Q} + 2 + 0.001\,Q,$$

ხოლო მარგინალური დანახარჯის ფუნქციას –

$$K'(Q) = 2 + 0.002\,Q.$$

შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი, რომელიც პასუხობს ამოცანის (ა) პუნქტში დასმულ კითხვებს:

Q	$K(Q)$	$k(Q)$	$K'(Q)$
1000	5600	5.6	4
2000	10600	5.3	6
3000	17600	5.87	8

ბ) იმისათვის, რომ ვიპოვოთ საშუალო დანახარჯის მინიმუმი, უნდა მოვძებნოთ $k(Q)$ ფუნეციის კრიტიკული წერტილები

$$k'(Q) = -\frac{2600}{Q^2} + 0.001 = 0.$$

აქედან, მივიღებთ

$$Q^2 = 2600000 \quad \text{ანუ} \quad Q = \pm\sqrt{2600000}.$$

ჩვენთვის საინტერესო კრიტიკული წერტილი იქნება

$$Q_0 = \sqrt{2600000} \approx 1612.$$

ცხადია, რომ

$$k''(Q_0) = \frac{5200}{Q_0^3} > 0.$$

ამიტომ მოძებნილი Q_0 მნიშვნელობა არის $k(Q)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი.

ამრიგად, მივიღეთ, რომ საშუალო დანახარჯის ფუნქცია უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს მაშინ, როდესაც პროდუქციის წარმოების მოცულობა გაუტოლდება $Q_0 \approx 1612$ ერთეულს; ეს უმცირესი მნიშვნელობაა

$$k(Q_0) = \frac{K(Q_0)}{Q_0} \approx \frac{2600}{1612} + 2 + 0.001 \cdot 1612 \approx 5.22.$$

ეს რიცხვი, ამავე დროს, უდრის მარგინალურ დანახარჯს პროდუქციის $Q_0 = 1612$ ერთეულის წარმოებისას. ■

ახლა განვიხილოთ წარმოებულის გამოყენება მარკეტინგში. პრაქტიკაში მეტად მნიშვნელოვანია გასაყიდი პროდუქციის იმ რაოდენობის მოძებნა,

რომლისათვისაც მოგების Π ფუნქცია მაქსიმალურია. ამ ამოცანის ამოხსნისათვის უნდა მოვძებნოთ მოგების Π ფუნქციის ექსტრემუმი. ამისათვის კი, პირველ რიგში, უნდა მოვძებნოთ Π ფუნქციის კრიტიკული წერტილები.

როგორც ვიცით, $\Pi = (TR) - (TC)$, სადაც $(TR) = f(Q)$ არის მთლიანი ამონაგების ფუნქცია, ხოლო $(TC) = K(Q)$ — მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია. ამიტომ Π ფუნქციის კრიტიკული წერტილები მოიძებნება

$$\Pi'(Q) = \frac{d(TR)}{dQ} - \frac{d(TC)}{dQ} = f'(Q) - K'(Q) = 0 \qquad (7.53)$$

განტოლებიდან. ვთქვათ, Q_0 არის ისეთი კრიტიკული წერტილი, რომ

$\Pi'(Q) > 0$, როდესაც $Q < Q_0$ და $\Pi'(Q) < 0$, როდესაც $Q > Q_0$,

ან $\Pi''(Q_0) = f''(Q_0) - K''(Q_0) < 0$.

მაშინ, ცხადია, რომ Q_0 წერტილი არის $\Pi(Q)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი, ხოლო $\Pi(Q_0)$ წარმოადგენს მოგების ფუნქციის მაქსიმალურ მნიშვნელობას. გარდა ამისა, (7.53) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$f'(Q_0) = K'(Q_0),$$

ე.ი. თუ Q_0 წარმოადგენს მოგების ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილს, მაშინ ამ Q_0 მნიშვნელობისათვის მარგინალური ამონაგების ფუნქცია უდრის მარგინალური დანახარჯის ფუნქციას. ამრიგად,

მოგების Π ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს ისეთ Q_0 წერტილზე, რომლისათვისაც მარგინალური ამონაგებისა და მარგინალური დანახარჯის ფუნქციები ტოლია

$$f'(Q_0) = K'(Q_0)$$

და, ამავე დროს,

$$f''(Q_0) < K''(Q_0) \qquad (7.54)$$

ამოცანა 7.28. პროდუქციის რა რაოდენობა უნდა გაიყიდოს, რომ ფირმის მოგება იყოს მაქსიმალური, თუ ცნობილია წარმოების დანახარჯების ფუნქცია

$$K(Q) = 3800 + 5Q - \frac{Q^2}{1000}$$

და მოთხოვნის ფუნქცია

$$P(Q) = 50 - \frac{Q}{100}.$$

ვიპოვოთ მაქსიმალური მოგების სიდიდე.

▼ ამ შემთხვევაში ამონაგების ფუნქციას აქვს სახე

$$(TR) = f(Q) = Q \cdot P(Q) = 50Q - \frac{Q^2}{100}.$$

იმ Q_0 წერტილის მოსაძებნად, სადაც მოგების ფუნქცია $\Pi(Q) = f(Q) - K(Q)$ მიაღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, გამოვიყენოთ (7.54) დებულება. ამისათვის ჯერ გამოვთვალოთ მარგინალური ამონაგების და მარგინალური დანახარჯის ფუნქციები

$$f'(Q) = 50 - \frac{Q}{50}, \qquad K'(Q) = 5 - \frac{Q}{500}.$$

აქედან მივიღებთ $50 - \frac{Q}{50} = 5 - \frac{Q}{500}$, საიდანაც $9Q = 45 \cdot 500$, ანუ $Q = 2500$.

ამრიგად, ჩვენ მოვძებნეთ $Q = 2500$ წერტილი, რომელზეც მარგინალური ამონაგებისა და მარგინალური დანახარჯის ფუნქციები ტოლია.

ახლა შევამოწმოთ (7.54) პირობის უტოლობა. ამისათვის გამოვთვალოთ მთლიანი ამონაგებისა და მთლიანი დანახარჯის ფუნქციების მეორე რიგის წარმოებულები:

$$f''(Q) = -\frac{1}{50}, \quad K''(Q) = -\frac{1}{500}.$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი Q-თვის

$$f''(Q) < K''(Q).$$

ამიტომ $Q_0 = 2500$ არის $\Pi(Q) = f(Q) - K(Q)$ მოგების ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი.

აქედან კი დავასკვნით, რომ თუ გაიყიდება პროდუქციის 2500 ერთეული, მაშინ ფირმის მოგება იქნება მაქსიმალური და იგი რიცხობრივად შემდეგი სიდიდის ტოლი იქნება

$$\Pi(2500) = f(2500) - K(2500) = 50 \cdot 2500 - \frac{2500^2}{100} -$$

$$-3800 - 5 \cdot 2500 + \frac{2500^2}{1000} = 52450 \quad (\text{დოლარი}). \ \blacksquare$$

ზოგჯერ საჭიროა, მოიძებნოს ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა რაიმე სეგმენტზე. კერძოდ, ვთქვათ, $y = f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე და საძიებელია მისი უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები ამ სეგმენტზე. ისინი აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოებით

$$\min_{[a,b]} f(x) \quad \text{და} \quad \max_{[a,b]} f(x).$$

მტკიცდება, რომ

> თუ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ
>
> ა) იგი მიაღწევს თავის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს, ე.ი. არსებობს ისეთი $x_1, x_2 \in [a, b]$ წერტილები, რომ
>
> $$f(x_1) = \min_{[a,b]} f(x) \quad \text{და} \quad f(x_2) = \max_{[a,b]} f(x);$$
>
> ბ) $[a, b]$ სეგმენტზე იგი მიიღებს მის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს შორის მოთავსებულ ყველა რიცხვით მნიშვნელობას.

$[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $y = f(x)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები მოიძებნება შემდეგი წესით:

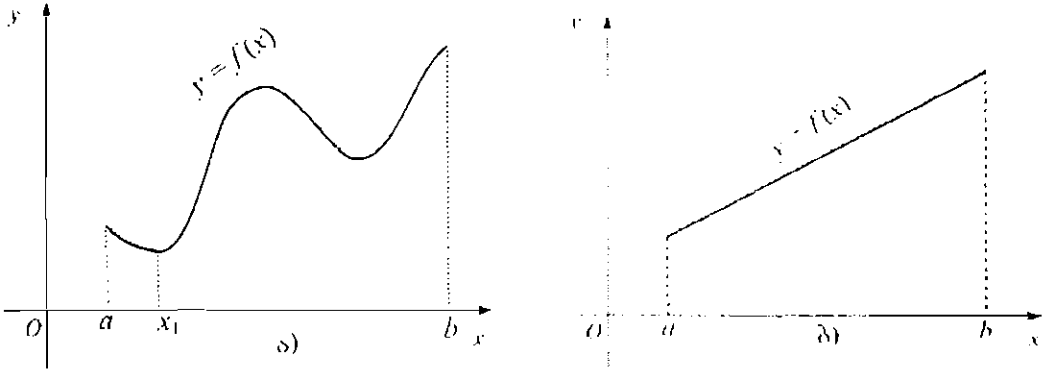
(ა) უნდა ვიპოვოთ $y = f(x)$ ფუნქციის ყველა ის კრიტიკული წერტილი, რომელიც ეკუთვნის $[a,b]$ სეგმენტს;

(ბ) გამოვთვალოთ $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები ზემოთ აღნიშნულ კრიტიკულ წერტილებში და სეგმენტის a და b ბოლოებში. მიღებული რიცხვებიდან ყველაზე მცირე იქნება $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი

მნიშვნელობა $[a,b]$ სეგმენტზე, ყველაზე დიდი კი – უდიდესი მნიშვნელობა ამავე სეგმენტზე.

როგორც მითითებული ალგორითმიდან ჩანს, ზოგადად, ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $[a,b]$ სეგმენტზე შეიძლება არ დაემთხვეს ფუნქციის ლოკალურ ექსტრემუმებს. მაგალითად, ნახ. 7.13.ა-ზე გამოსახული ფუნქცია უმცირეს მნიშვნელობას აღწევს x_1 წერტილში, რომელიც, ამავე დროს, არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი, ხოლო უდიდეს მნიშვნელობას აღწევს სეგმენტის ბოლო b წერტილში, რომელიც არ არის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი.

ფუნქციას, რომელიც გამოსახულია ნახ. 7.13.ბ-ზე, არ გააჩნია ლოკალური ექსტრემუმები, თუმცა იგი თავის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს აღწევს სეგმენტის ბოლოებზე, შესაბამისად, a და b წერტილებში.

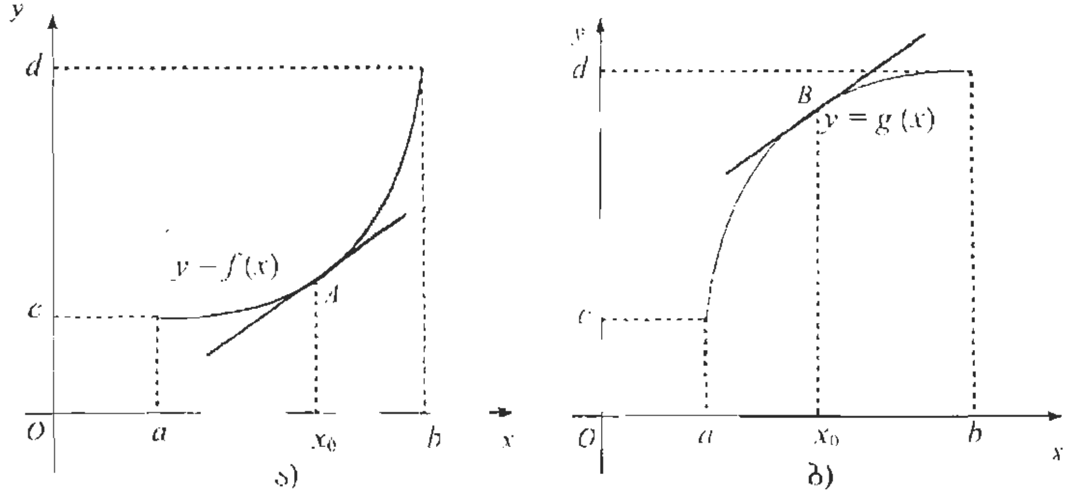


ნახ. 7.13

7.17. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა და გადაღუნვის წერტილი

ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად აუცილებელია სრული ინფორმაციის მოძიება შესაბამისი წირის ფორმის შესახებ.

მაგალითად, განვიხილოთ ორი კონკრეტული ფუნქცია $y=f(x)$ და $y=g(x)$, რომელთა გრაფიკები გამოსახულია ნახ. 7.14-ზე.



ნახ. 7.14

ორივე ფუნქცია განსაზღვრულია (a,b) შუალედში, ორივე ფუნქცია ზრდადია ამ შუალედში, ორივე ფუნქცია იღებს c და d რიცხვებს შორის მოთავსებულ ყველა მნიშვნელობას, მაგრამ მათი გრაფიკები მაინც თვისობრივად განსხვავებულ წირებს წარმოადგენენ: $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი „ამოზნექილია ქვემოთ", ხოლო $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკი – „ამოზნექილია ზემოთ". ფუნქციათა გრაფიკების მსგავსი ყოფაქცევა შეიძლება დადგინდეს წარმოებულების გამოყენებით. წინასწარ შემოვიღოთ რამდენიმე განმარტება.

ვთქვათ, (a,b) შუალედში მოცემულია წარმოებადი $f(x)$ ფუნქცია. ავიღოთ რაიმე $x_0 \in (a,b)$ წერტილი. შევნიშნოთ, რომ რადგან არსებობს სასრული $f'(x_0)$ წარმოებული, ამიტომ $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკის $(x_0, f(x_0))$ წერტილში გატარებული მხები არ იქნება Oy ღერძის პარალელური.

● თუ $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ წერტილის მახლობლობაში $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია ამ წერტილზე გატარებული მხების ზემოთ, მაშინ ამბობენ, რომ გრაფიკი (წირი) ამ წერტილში **ამოზნექილია ქვემოთ** (იხ. ნახ. 7.14.ა). ■

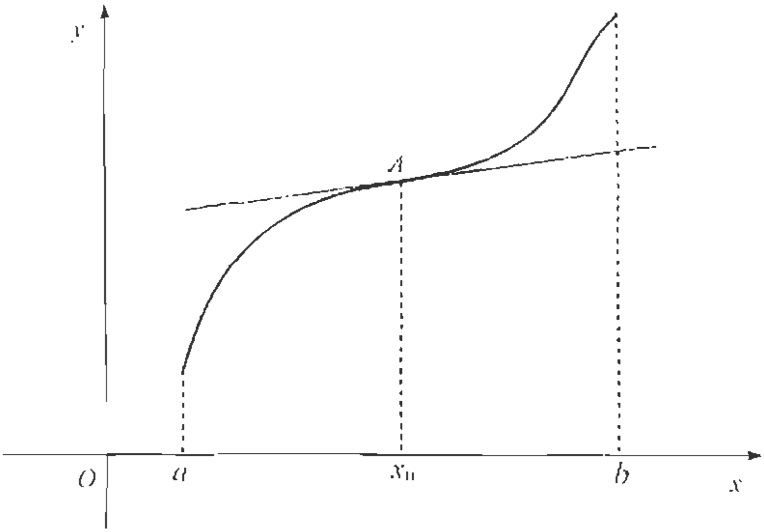
● თუ $\left(x_0, g\left(x_0\right)\right)$ წერტილის მახლობლობაში $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია ამ წერტილზე გატარებული მხების ქვემოთ, მაშინ ამბობენ,

რომ გრაფიკი (წირი) ამ წერტილში **ამოზნექილია ზემოთ** (იხ. ნახ. 7.14 ბ). ■

მართებულია დებულება.

თეორემა 7.8. თუ არსებობს სასრული მეორე რიგის წარმოებული $f''(x_0)$ და $f''(x_0)>0$, მაშინ წირი ამ წერტილში ამოზნექილია ქვემოთ, ხოლო თუ $f''(x_0)<0$, მაშინ წირი ამ წერტილში ამოზნექილია ზემოთ. ■

● წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკის იმ წერტილს, რომელიც გრაფიკის ზემოთ ამოზნექილ ნაწილს ყოფს ქვემოთ ამოზნექილი ნაწილისგან, **გადაღუნვის წერტილი** ეწოდება (იხ. ნახ. 7.15). ■



ნახ. 7.15

საკმარისი პირობა იმისა, რომ მოცემული წერტილი იყოს წირის გადაღუნვის წერტილი არის შემდეგი:

ვთქვათ, წირის განტოლება არის $y=f(x)$, სადაც $f(x)$ წარმოებადი ფუნქციაა. თუ $f''(x_0)=0$ ან $f''(x_0)$ არ არსებობს, ამასთან, $f''(x)$ წარმოებულს $x=x_0$ წერტილის მარცხნივ და მარჯვნივ სხვადასხვა ნიშანი გააჩნია, მაშინ წირის $(x_0, f(x_0))$ წერტილი წარმოადგენს გადაღუნვის წერტილს

ამრიგად, თუ ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის წარმოებული (a,b) შუალედის ყოველ წერტილში, მაშინ გადაღუნვის წერტილის აბსცისა უნდა ვეძებოთ $f''(x_0)=0$ განტოლების ამონახსნებს შორის.

ამოცანა 7.29. ვიპოვოთ $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}$ ფუნქციის ზემოთ და ქვემოთ ამოზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები.

▼ ფუნქცია $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}$ განსაზღვრულია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. გამოვთვალოთ მისი წარმოებულები:

$$f'(x)=(1-x)\,\mathrm{e}^{-x},\quad f''(x)=\mathrm{e}^{-x}(x-2).$$

მეორე რიგის წარმოებული არსებობს x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ვიპოვოთ მისი ნულები:

$$(x-2)\,\mathrm{e}^{-x}=0.$$

ამ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი $x_0=2$. მარტივად დავადგენთ, რომ თუ $x<2$, მაშინ $f''(x)<0$, ხოლო, თუ $x>2$, მაშინ $f''(x)>0$. ამრიგად, ფუნქციის გრაფიკი ზემოთ ამოზნექილია $(-\infty,\ 2)$ შუალედში და ქვემოთ ამოზნექილია $(2,\ +\infty)$ შუალედში. ამიტომ $(2,\ f(2))=(2,\ 2\,\mathrm{e}^{-2})$ წერტილი არის წირის გადაღუნვის წერტილი. ■

7.18. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

ვთქვათ, ფუნქციის გრაფიკი შემოუსაზღვრელი წირია (ე.ი. ან ფუნქცია ან მისი განსაზღვრის არე არ არის შემოსაზღვრული). რადგან ნახაზის ზომა შეზღუდულია, ამიტომ წარმოდგენა რომ ვიქონიოთ წირის ყოფაქცევაზე ნახაზის საზღვრებს გარეთაც, საჭიროა, შევისწავლოთ წირის თვისებები უსასრულობაში.

ვთქვათ, $M(x,y)$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ნებისმიერი წერტილი. თუ M წერტილი ისე მოძრაობს გრაფიკზე, რომ მანძილი ამ წერ-

ტილიდან კოორდინატთა სათავემდე შემოუსაზღვრელად იზრდება, მაშინ ამბობენ, რომ ეს წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.

● წრფეს ეწოდება წირის ასიმპტოტი, თუ ამ წირის წერტილიდან აღნიშნულ წრფემდე მანძილი მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც წირის წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ. ■

წრფე $y=ax+b$ წარმოადგენს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტს, თუ

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}}\left|f(x)-ax-b\right|=0.$$

არსებობს ორი სახის ასიმპტოტი: ვერტიკალური და დახრილი. ასიმპტოტს, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია, ვერტიკალური ასიმპტოტი ეწოდება, ხოლო ასიმპტოტს, რომელიც Oy ღერძის პარალელური არ არის, დახრილი ასიმპტოტი ეწოდება.

ცხადია, რომ თუ $x=a$ წრფე არის $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული $x=a$ წერტილის მიდამოში.

პირიქით, თუ $f(x)$ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული $x=a$ წერტილის მიდამოში და შესრულებულია შემდეგი პირობებიდან ერთი მაინც

1) $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=+\infty \qquad \left(\lim\limits_{x\to a+}f(x)=-\infty\right),$

2) $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=+\infty \qquad \left(\lim\limits_{x\to a-}f(x)=-\infty\right),$

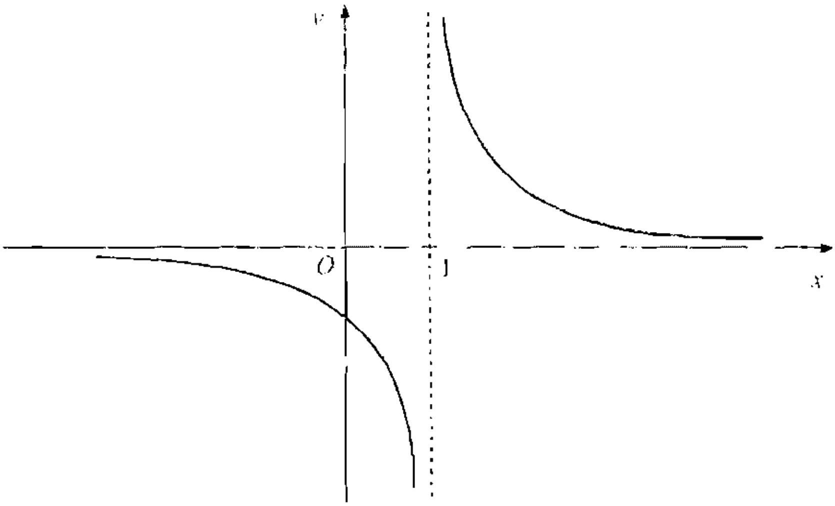
მაშინ $x=a$ წრფე არის $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

ამოცანა 7.30. ვიპოვოთ $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

▼ ცხადია, $f(x)$ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული $x=1$ წერტილის მიდამოში და

$$\lim_{x\to1+}\frac{1}{x-1}=+\infty,\qquad \lim_{x\to1-}\frac{1}{x-1}=-\infty,$$

ამიტომ $x=1$ წრფე არის მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი (იხ. ნახ. 7.16). ■



ნახ. 7.16

თუ ასიმპტოტი დახრილია, მაშინ მის განტოლებას აქვს სახე $y=ax+b$ და a და b კოეფიციენტები გამოითვლება ფორმულებით

$$a=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}}\left[f(x)-ax\right]. \tag{7.55}$$

თუ ამ ზღვრებიდან ერთი რომელიმე არ არსებობს, მაშინ წირს დახრილი ასიმპტოტი არა აქვს.

ამოცანა 7.31. ვიპოვოთ

$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტები.

▼ დახრილი $y=ax+b$ ასიმპტოტის მოსაძებნად საჭიროა გამოვთვალოთ (7.55) სახის ზღვრები, რომლებიც განსაზღვრავს საძიებელ a და b კოეფიციენტებს. მივიღებთ

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(x-1)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-0\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0.$$

ამრიგად, მოცემული ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტია $y=0$ წრფე (იხ. ნახ. 7.16). ■

7.19. ფუნქციის გამოკვლევა. გრაფიკის აგება

ზემოთ გადმოცემული მასალა საშუალებას გვაძლევს სრულყოფილად გამოვიკვლიოთ ფუნქცია და ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ ცალკეული პუნქტების სახით იმ საკითხების სია, რომლებიც უნდა შევისწავლოთ ფუნქციის სრული გამოკვლევის ჩასატარებლად:

1. ვიპოვოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე;

2. გამოვიკვლიოთ ფუნქციის ლუწობა და კენტობა, რათა დავადგინოთ, როგორი სახის სიმეტრიულობასთან გვაქვს საქმე.

კერძოდ, თუ $f(x)$ ფუნქცია ლუწია, მაშინ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა Oy ღერძის მიმართ, ხოლო, თუ $f(x)$ ფუნქცია კენტია, მაშინ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ;

3. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები, ე.ი. მოვძებნოთ Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილი $(0, f(0))$ (თუ $0 \in D(f)$) და ამოვხსნათ განტოლება $f(x)=0$, რომლის ამონახსნებიც განსაზღვრავს Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებს;

4. ვიპოვოთ ფუნქციის წარმოებული და დავადგინოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები;

5. ვიპოვოთ ფუნქციის ექსტრემუმები;

6. ვიპოვოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული, დავადგინოთ გრაფიკის ზემოთ და ქვემოთ ამოზნექილობის შუალედები, გადაღუნვის წერტილები;

7. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები;

8. ჩატარებული გამოკვლევის საფუძველზე ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოცანა 7.32. გამოვიკვლიოთ

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$$

ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

▼ ჩავატაროთ გამოკვლევა ზემოთ მოტანილი სქემის მიხედვით.

1. მოცემული ფუნქცია, როგორც ორი უწყვეტი ფუნქციის ფარდობა განსაზღრულია და უწყვეტია მთელ რიცხვით ღერძზე, გარდა $x = 2$ და $x = -2$ წერტილებისა:

$$D(f) = (-\infty,\ -2) \cup (-2,\ 2) \cup (2, +\infty).$$

2. რადგან განსაზღვრის არე სიმეტრიულია სათავის მიმართ და

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x),$$

ამიტომ ფუნქცია არის ლუწი. მისი გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ.

3. Oy ღერძს გრაფიკი გადაკვეთს $(0, f(0)) = (0, 0)$ წერტილში, ე.ი. კოორდინატთა სათავეში. ახლა ვიპოვოთ Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები. ამისათვის, ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{x^2}{x^2 - 4} = 0.$$

მისი ამონახსენია $x = 0$, ე.ი. გრაფიკი კოორდინატთა ღერძებს კვეთს მხოლოდ სათავეში.

4. ვიპოვოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები. ჯერ ვიპოვოთ პირველი რიგის წარმოებული

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2 - 4\right) - 2x \cdot x^2}{\left(x^2 - 4\right)^2} = -\frac{8x}{\left(x^2 - 4\right)^2}.$$

სტაციონარული წერტილის მოსაძებნად, საჭიროა წარმოებული გავუტოლოთ ნულს და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება. მივიღებთ $x = 0$, ე.ი. გვაქვს ერთადერთი სტაციონარული წერტილი. თუ $x < 0$, მაშინ $f'(x) > 0$, ხოლო, თუ $x > 0$, მაშინ $f'(x) < 0$. ამიტომ ფუნქცია ზრდადია $(-\infty, -2)$ და $(-2,\ 0)$ შუალედებში, ხოლო კლებადია $(0,\ 2)$ და $(2, +\infty)$ შუალედებში.

5. ვიპოვოთ ფუნქციის ექსტრემუმი. გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული

$$f''(x)=\left(-\frac{8x}{\left(x^2-4\right)^2}\right)'=\frac{8\left(3x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

ცხადია,

$$f''(0)=\frac{32}{(-4)^3}=-\frac{32}{64}=-\frac{1}{2}<0.$$

ამიტომ $f(x)$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში გააჩნია ლოკალური მაქსიმუმი, ამასთან $f(0)=0$.

6. ვიპოვოთ ზემოთ და ქვემოთ ამოზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები. მეორე რიგის წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ გრაფიკს გადაღუნვის წერტილი არ გააჩნია, რადგანაც ნებისმიერი x-თვის განსაზღვრის არედან $f''(x)\neq 0$. გარდა ამისა, $f''(x)$-ის ნიშანი ემთხვევა $\left(x^2-4\right)$ გამოსახულების ნიშანს. ცხადია, $x^2-4>0$, როდესაც $|x|>2$ (ე.ი. $-\infty<x<-2$ და $2<x<+\infty$) და $x^2-4<0$, როდესაც $-2<x<2$. ამიტომ გრაფიკი ქვემოთ ამოზნექილი იქნება $(-\infty,-2)$ და $(2,+\infty)$ შუალედებში, ხოლო ზემოთ ამოზნექილი იქნება $(-2,\,2)$ შუალედში.

7. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები. რადგან

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x^2}{x^2-4}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 2+}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to(-2)-}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty,\qquad \lim_{x\to(-2)+}\frac{x^2}{x^2-4}=-\infty,$$

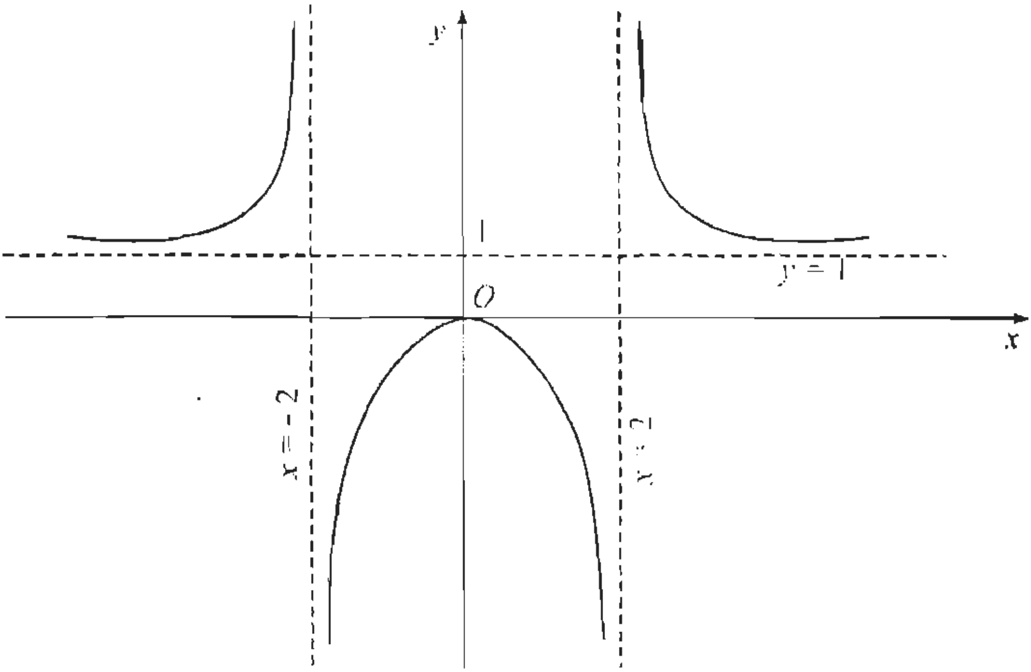
ამიტომ $x=2$ და $x=-2$ წრფეები ვერტიკალური ასიმპტოტებია. გამოვიკვლიოთ $y=ax+b$ ტიპის დახრილი ასიმპტოტების არსებობის საკითხი. ამისათვის გამოვთვალოთ შემდეგი ზღვრები (იხ. (7.55)):

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - a\,x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $y = 1$ არის დახრილი ასიმპტოტი.

ჩატარებული გამოკვლევის გათვალისწინებით შეგვიძლია ავაგოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი (იხ. ნახ. 7.17). ■



ნახ. 7.17

7.20. სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ წარმოებული:

1) $y = x + 3x^2 - \dfrac{x^3}{3}$; 2) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + 2^x$;

3) $y = 3\sqrt[3]{x} - 2\cos x + 4$; 4) $y = (3x^2 + 1)\sin x$;

5) $y = 5^x \log_3 x$; 6) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$;

7) $y = \dfrac{x}{1-\cos x}$; 8) $y = 3\cos\dfrac{x}{3}$;

9) $y = \ln(9x+10)$; 10) $y = \ln\left(x^2-4x\right)$;

11) $y = 3x e^{-2x}$; 12) $y = x^2 e^{5x}$;

13) იპოვეთ $f'(1)$, თუ $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$;

14) იპოვეთ $f'(3)$, თუ $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$;

15) იპოვეთ $f'(0)$, თუ $f(x) = \ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}$;

16) იპოვეთ $f'(4)$, თუ $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$;

17) იპოვეთ $f'(-1)$, თუ $f(x) = \dfrac{x^2-5x-1}{x^2}$;

18) იპოვეთ $f'(-1)$, თუ $f(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{3}{x^2+1}$;

19) იპოვეთ $f'(0)$, თუ $f(x) = \left(\sqrt{x^3}+1\right)x$;

20) იპოვეთ $f'(2)$, თუ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

2. იპოვეთ მეორე რიგის წარმოებული:

1) $y = 1 - x^2 - x^4$; 6) $y = x^3 \ln x$;

2) $y = (x+10)^4$; 7) $y = \sqrt{9-x^2}$;

3) $y = \left(x^2+1\right)^2$; 8) $y = x^2 e^x$;

4) $y = 7x^3 - 9x^2 + 10x + 170$; 9) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

5) $y = e^{2x-1}$; 10) $y = x \ln x$.

3. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის დიფერენციალი:

1) $y = x^2 - 5x + 17$; 6) $y = x^2 \log_2 x$;

2) $y = e^{-x}\left(2-2x-x^2\right)$; 7) $y = \ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$;

3) $y = x\ln x - x$; 8) $y = \left(1+x-x^2\right)^3$;

4) $y = x\,e^{2x}$; 9) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$;

5) $y = \log_3(4x-2)$; 10) $y = \dfrac{x^2+4}{1-x}$.

4. ფირმის მთლიანი ამონაგები Q რაოდენობის პროდუქციის გაყიდვის შემდეგ არის

$$(TR) = \ln\left(1+1000Q^2\right).$$

იპოვეთ მარგინალური ამონაგები, როდესაც $Q=10$.

5. გამოთვალეთ მარგინალური ამონაგები, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ტოლობებით:

(ა) $P=\sqrt{100-2Q}$; (ბ) $P=\dfrac{1000}{\sqrt{2+Q}}$.

6. იპოვეთ სხვაობა არგუმენტის ერთი ერთეულის გაზრდის მეთოდით გამოთვლილ $(MR)^*$ მარგინალური ამონაგების ფუნქციის მნიშვნელობასა და მარგინალური ამონაგების (MR) ფუნქციის მნიშვნელობას შორის, თუ მოთხოვნის ფუნქციაა

$P=aQ+b$ (a და b ფიქსირებული რიცხვებია).

7. იპოვეთ მარგინალური ამონაგები, თუ მთლიანი ამონაგების ფუნქციაა

$$(TR) = f(Q) = 1000\,Q - 4\,Q^2.$$

მოძებნეთ ამონაგების ფუნქციის ცვლილება:

(ა) მოთხოვნის $\Delta Q = 2$ ერთეულით გაზრდისას,

(ბ) მოთხოვნის $\Delta Q = 3$ ერთეულით გაზრდისას,

თუ ალებულ მომენტში მოთხოვნაა $Q = 60$ ერთეული.

8. მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$P = 100 - Q.$$

გამოთვალეთ მთლიანი (TR) ამონაგები და მარგინალური ამონაგები (MR). მოძებნეთ Q-ს ის მნიშვნელობა, რომელზეც მარგინალური ამონაგები ნულის ტოლია და გაანალიზეთ ამ სიდიდის არსი.

9. პროდუქციის წარმოების მუდმივი დანახარჯია 100 დოლარი, ხოლო პროდუქციის ერთეულის წარმოებისათვის ცვალებადი დანახარჯია $(2 + Q^{-1})$ დოლარი.

(ა) იპოვეთ მთლიანი (TC) და მარგინალური (MC) დანახარჯები;

(ბ) რას უდრის (MC) მარგინალური დანახარჯი, თუ $Q = 30$?

როგორ შეიცვლება (TC) მთლიანი დანახარჯი წარმოების დონის $Q = 30$ სიდიდის 2 ერთეულით გაზრდისას?

10. ვთქვათ, წარმოების საშუალო დანახარჯის (AC) ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ტოლობით

$$(AC) = Q + 5 + \frac{17}{Q}.$$

(ა) იპოვეთ მარგინალური დანახარჯის (MC) ფუნქცია;

(ბ) მარგინალური დანახარჯის საშუალებით მიახლოებით გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯის ცვლილება, რომელიც შეესაბამება წარმოებული პროდუქციის რაოდენობის ცვლილებას:

(1) 25 ერთეულიდან 23 ერთეულამდე;

(2) 25 ერთეულიდან 28 ერთეულამდე.

ორივე შემთხვევაში გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯის ცვლილების ზუსტი მნიშვნელობები და შეადარეთ მიღებულ მიახლოებით მნიშვნელობებს.

11. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$Q = 1000\ e^{-0.2P}.$$

ფიქსირებული დანახარჯია $(FC) = 100$, ხოლო პროდუქციის ერთეულზე ცვლადი დანახარჯია $(VC) = 2$.

(ა) იპოვეთ მოგების ფუნქცია;

(ბ) იპოვეთ მოგების ფუნქციის მაქსიმუმი.

12. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = 30 - Q,$$

ხოლო მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია –

$$(TC) = K(Q) = \frac{1}{2}Q^2 + 6Q + 7.$$

(ა) წარმოების რა დონე უზრუნველყოფს მთლიანი ამონაგების მაქსიმუმს?

(ბ) წარმოების რა Q_0 დონე უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას?

გამოთვალეთ მარგინალური ამონაგებისა და მარგინალური დანახარჯის მნიშვნელობა პროდუქციის Q_0 რაოდენობისათვის. გაანალიზეთ მიღებული შედეგები.

13. იპოვეთ მოგების მაქსიმალური მნიშვნელობა, თუ მთლიანი დანახარჯია $(TC) = 2Q$, ხოლო მთლიანი ამონაგები –

$$(TR) = 100\ \ln(Q+1).$$

14. დანაზოგის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$S(Y) = 0.02\ Y^2 - Y + 100,$$

სადაც Y ეროვნული შემოსავალია.

იპოვეთ მარგინალური მიდრეკილებები დაზოგვისა (MPS) და მოხმარებისადმი (MPC).

15. მოხმარების ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$C(Y) = 50 + 2\sqrt{Y},$$

სადაც Y ეროვნული შემოსავალია.

გამოთვალეთ მარგინალური მიდრეკილებები მოხმარებისა (MPC) და დაზოგვისადმი (MPS), როდესაც $Y = 36$. გაანალიზეთ მიღებული შედეგები.

16. იპოვეთ (MPC) (მარგინალური მიდრეკილება მოხმარებისადმი) და (MPS) (მარგინალური მიდრეკილება დაზოგვისადმი) ეროვნული შემოსავლის $Y = 36$ დონისათვის, თუ მოხმარების $C(Y)$ ფუნქციაა

$$C(Y)=\frac{300+2Y^2}{1+Y}\quad .$$

17. განსაზღვრეთ ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები:

1) $y=x^3+2x^2+3x$;

2) $y=x^3-3x+5$;

3) $y=x-\frac{1}{2}x^2$;

4) $y=\frac{1}{x+2}$;

5) $y=2x^2-\ln x$;

6) $y=x^2(x-3)$.

18. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

$$P=1000-2Q.$$

(ა) გამოთვალეთ მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობა ფასის ცვლილების მიმართ, თუ ერთეული პროდუქციის P ფასი კლებულობს 210 დოლარიდან 200 დოლარამდე;

(ბ) გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა, როდესაც $P=210$.

გაანალიზეთ მიღებული შედეგები. როგორ აისახება ფასის ცვლილება მთლიანი ამონაგების ცვლილებაზე?

19. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

$$P=50-2Q.$$

გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა, როცა $P=30$.

20. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P=100-Q.$$

გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა, როდესაც

(ა) $P=10$; (ბ) $P=50$; (გ) $P=90$.

გაანალიზეთ მიღებული შედეგები.

21. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $P=-Q^2-4Q+96$.

(ა) გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ, როცა $P=51$;

(ბ) როგორია მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება, თუ ფასის პროცენტული ცვლილებაა 2%?

22. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

$$P = -Q^2 - 10Q + 150.$$

(ა) იპოვეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ, თუ მოთხოვნაა $Q = 4$;

(ბ) ფასის როგორი პროცენტული ცვლილება გამოიწვევს მოთხოვნის 10%-იან ცვლილებას?

23. გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ, როცა $P = 6$ და მოთხოვნის ფუნქციაა:

(ა) $P = 30 - 2Q$; (ბ) $P = 30 - 12Q$; (გ) $P = \sqrt{100 - 2Q}$.

24. აჩვენეთ, რომ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ მუდმივია, თუ მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = \frac{A}{Q^n},$$

სადაც A და n მუდმივი დადებითი რიცხვებია.

25. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = 200 - 40\ln(Q+1).$$

გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ, როცა $Q = 20$.

26. მიწოდების ფუნქციაა

$$Q = 150 + 5P + 0.1\,P^2.$$

(ა) გამოთვალეთ მიწოდების (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ, როცა $P = 10$.

(ბ) გამოთვალეთ მიწოდების საშუალო ელასტიკურობა ფასის ნაზრდის მიმართ, თუ ფასი მატულობს 9 დოლარიდან 11 დოლარამდე. შეადარეთ მიღებული შედეგები.

27. მიწოდების ფუნქციაა

$$Q = 7 + 0.1\,P + 0.004\,P^2.$$

(ა) გამოთვალეთ მიწოდების ზღვრული ელასტიკურობა ფასის მიმართ, თუ აღებულ მომენტში პროდუქციის ერთეულის ფასია $P = 80$ დოლარი;

(ბ) როგორია მიწოდების პროცენტული ცვლილება, თუ ფასის პროცენტული ცვლილებაა 5%.

28. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმები

1) $y = 2x^3 - 3x^2$; 4) $y = x - \ln(1+x)$;

2) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$; 5) $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$;

3) $y = 2x - \sqrt{x}$; 6) $y = x\sqrt{1-x}$.

29. ფეხბურთის გუნდს აქვს სტადიონი, რომელიც იტევს 55000 მაყურებელს. თუ ბილეთის ფასი არის 10 დოლარი, მაშინ იყიდება 27000 ბილეთი, ხოლო, თუ ბილეთის ფასია 8 დოლარი, მაშინ – 33000 ბილეთი.

(ა) იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია, თუ დამოკიდებულება გაყიდული ბილეთების რაოდენობასა და ბილეთის ფასს შორის წრფივია.

(ბ) როგორი უნდა იყოს ბილეთის ფასი, რომ მთლიანი ამონაგები იყოს მაქსიმალური? რის ტოლია ეს მაქსიმალური ამონაგები?

30. ზაფხულის თვეებში არდადეგების დროს სტუდენტთა ჯგუფი ამზადებს და ზღვის სანაპიროზე ყიდის ყელსაბამებს. სეზონის დასაწყისში ისინი დღეში ყიდდნენ 20 ყელსაბამს, თითოეულს 10 დოლარად. სეზონის მეორე ნახევარში მათ ყელსაბამის ფასი გაზარდეს 1 დოლარით, რამაც გამოიწვია მყიდველთა ყოველდღიური რაოდენობის 2-ით შემცირება.

(ა) იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია, თუ ის წრფივადაა დამოკიდებული გაყიდული ყელსაბამების რაოდენობაზე.

(ბ) ცნობილია, რომ ერთი ყელსაბამის დასამზადებლად იხარჯება 6 დოლარი. რა უნდა იყოს ერთი ყელსაბამის ფასი, რომ მოგება იყოს მაქსიმალური?

31. ფირმა ყოველ კვირა ყიდის 1000 ტელევიზორს, თითოეულს 450 დოლარად. ვაჭრობის ანალიზი აჩვენებს, რომ 10 დოლარით ფასდაკლება იწვევს გაყიდული ტელევიზორების რაოდენობის 100-ით ზრდას.

(ა) იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია, თუ ის წრფივია;

(ბ) როგორი ფასისათვის იქნება მთლიანი ამონაგები მაქსიმალური?

(გ) ფირმის ყოველკვირეული დანახარჯების ფუნქციაა

$$K(Q) = 68000 + 150Q.$$

როგორი უნდა იყოს ფასი, რომ მოგება იყოს მაქსიმალური?

32. ფირმას აქვს შენობა, რომელშიც განლაგებულია 100 ოფისი. თუ ყოველთვიური გადასახადი თითოეულ ოფისზე იქნება 400 დოლარი, მაშინ ყველა ოფისი ქირავდება. მარკეტინგული ანალიზი აჩვენებს, რომ 5 დოლარით გადასახადის გაძვირება იწვევს გაქირავებული ოფისების ერთით შემცირებას.

რა გადასახადი უნდა დააწესოს ფირმამ, რომ მთლიანი ამონაგები იყოს მაქსიმალური? (იგულისხმება, რომ გადასახადი არის გაქირავებული ოფისების რაოდენობის წრფივი ფუნქცია).

33. ჰოკეის გუნდს აქვს დარბაზი, რომელიც იტევს 15000 მაყურებელს. თუ ბილეთის ფასი იქნება 12 დოლარი, მაშინ იყიდება 11000 ბილეთი. ბილეთის ფასის გაიაფება 1 დოლარით იწვევს გაყიდული ბილეთების რაოდენობის 1000-ით გადიდებას. რა ფასი უნდა დაედოს ბილეთს, რომ მთლიანი ამონაგები იყოს მაქსიმალური? (დამოკიდებულება გაყიდული ბილეთების რაოდენობასა და ბილეთის ფასს შორის წრფივია).

34. წიგნის ფასი გაიზარდა 2 დოლარიდან 3 დოლარამდე. ამან გამოიწვია ის, რომ თვეში იყიდება 2500 ცალი წიგნი, ნაცვლად 3000-ისა. ცნობილია, რომ დამოკიდებულება ფასსა და გაყიდული წიგნების რაოდენობას შორის წრფივია. იპოვეთ:

(ა) მოთხოვნის ფუნქცია;

(ბ) რა უნდა იყოს წიგნის ფასი, რომ მთლიანი ამონაგები იყოს მაქსიმალური?

35. მთლიანი დანახარჯების ფუნქციას აქვს სახე

$$(TC) = K(Q) = Q^3 - 9Q^2 + 15Q + 50,$$

სადაც Q – პროდუქციის მოცულობაა.

გამოთვალეთ, წარმოების რა მოცულობის დროს იქნება დანახარჯები მინიმალური.

36. იპოვეთ ქვემოთ და ზემოთ ამოზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები:

1) $y=1-x^2$;

2) $y=x^3-5x^2+3x-5$;

3) $y=x+36x^2-2x^3-x^4$;

4) $y=\dfrac{1}{x+3}$.

37. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკების ასიმპტოტები:

1) $y=\dfrac{1}{2+x}$;

2) $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$;

3) $y=x+\dfrac{1}{x-1}$;

4) $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$.

38. გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები და ააგეთ მათი გრაფიკები:

1) $y=0.2\left(4x^3-x^4\right)$;

2) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

თავი 8. მრავალი ცვლადის ფუნქციები

ამ თავში განვიხილავთ ისეთ ფუნქციებს, რომლებიც დამოკიდებულია ორ ან მეტ ცვლადზე. მრავალი ცვლადის ფუნქციების გამოკვლევა გაცილებით რთულია, ვიდრე ერთ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციებისა. თუმცა, უნდა აღინიშნოს, რომ მათი გამოკვლევის მეთოდებს შორის არსებობს გარკვეული იდეური მსგავსებაც. ეს მსგავსება ემყარება წარმოებულის გამოყენების კონცეფციას. ასეთი ფუნქციების შესწავლის აუცილებლობა განპირობებულია იმით, რომ ეკონომიკური მოდელების მახასიათებლები ძირითადად გამოისახება მრავალი ცვლადის ფუნქციების საშუალებით.

ამავე თავში შევხვდებით ეკონომიკურ ამოცანებს, რომელთა გაანალიზება და გამოკვლევა შესაძლებელია მხოლოდ მრავალი ცვლადის ფუნქციების თეორიის გამოყენებით.

შევნიშნოთ, რომ ძირითადი საბაზისო ცნებები სიმარტივისათვის შემოტანილი იქნება ორი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში. მათი განზოგადება სამი და უფრო მეტი დამოუკიდებელი ცვლადისათვის ხდება სრულიად ბუნებრივად და არ არის დაკავშირებული არსებით სიძნელეებთან.

8.1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ცნება. განსაზღვრის არე

რეალურ ცხოვრებაში ხშირად ვხვდებით ისეთ ამოცანებს, რომელთა გადაწყვეტა შესაძლებელია მხოლოდ მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის დახმარებით. მაგალითად, მართკუთხედის S ფართობი დამოკიდებულია მისი x და y გვერდების ზომებზე. სახელდობრ, $S = xy$. მართკუთხა პარალელეპიპედის V მოცულობა დამოკიდებულია მის სამ x, y და z განზომილებაზე, $V = xyz$.

მრავალსაქონლიანი ბაზრის ეკონომიკური მახასიათებლები დამოკიდებუ-

ლია თითოეული საქონლის მოთხოვნასა და ფასზე, რასაც ბუნებრივად მივყავართ ერთზე მეტი ცვლადის ფუნქციებამდე.

ასეთ დამოკიდებულებათა შესასწავლად უნდა შემოვიღოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ცნება. ჯერ შევისწავლოთ უმარტივესი შემთხვევა, როცა ასეთი ცვლადების რაოდენობა ორის ტოლია.

● ვთქვათ, E არის Oxy საკოორდინატო სიბრტყის წერტილთა რაიმე სიმრავლე. თუ მოცემულია წესი, რომლის მიხედვითაც E სიმრავლის ყოველ (x,y) წერტილს შეესაბამება ერთადერთი z რიცხვი, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია ორი ცვლადის ფუნქცია და ასე ჩაწერენ

$$z=f(x,y).$$

x და y სიდიდეებს უწოდებენ არგუმენტებს, ანუ დამოუკიდებელ ცვლადებს, ხოლო z-ს – დამოკიდებულ ცვლადს, ანუ ფუნქციას.
E სიმრავლეს ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრის არე და აღინიშნება სიმბოლოთი $D(f)$. f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე აღინიშნება სიმბოლოთი $E(f)=\{f(x,y)\in\mathbb{R} \mid (x,y)\in E\}$. ■

მაგალითად, თუ $z=f(x,y)$ წარმოადგენს მრავალწევრს x და y ცვლადების მიმართ

$$z=f(x,y)=1+x+y+xy+x^2y-x^3y^4,$$

მაშინ იგი განსაზღვრულია მთელ სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში ამოწერილი ფუნქციის მნიშვნელობა შეგვიძლია გამოვთვალოთ x და y ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის. მაგალითად, თუ $x=1$ და $y=2$, მაშინ

$$z=f(1,\ 2)=1+1+2+1\cdot 2+1^2\cdot 2-1^3\cdot 2^4=-8.$$

ფუნქცია

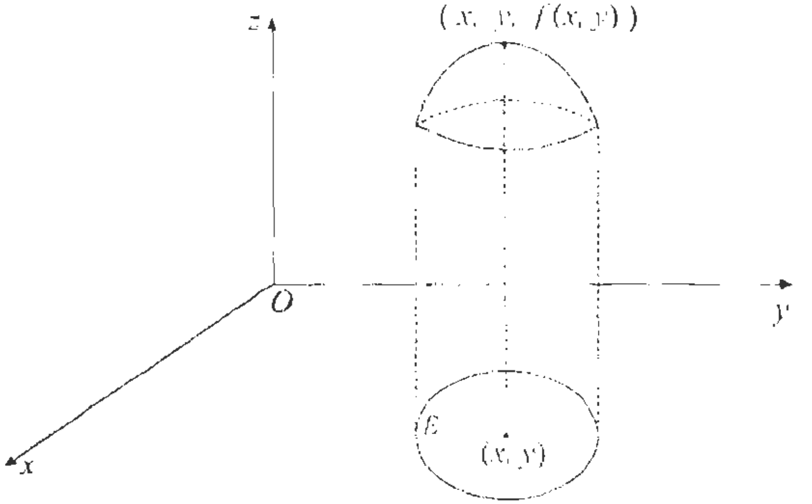
$$z=g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

განსაზღვრულია x და y ცვლადების ყველა იმ მნიშვნელობისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $1-x^2-y^2\geq 0$ ანუ $x^2+y^2\leq 1$, ე.ი. $D(z)$ წარმოადგენს ერთეულრადიუსიან წრეს (საზღვრის ჩათვლით) ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

ამრიგად, ამ შემთხვევაში g ფუნქციის მნიშვნელობა შეგვიძლია გამოვთვალოთ x და y ცვლადების ყველა იმ მნიშვნელობისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ ზემოთ ამოწერილ უტოლობას. მაგალითად, თუ $x = 0.3$ და $y = 0.4$, მაშინ $x^2 + y^2 = 0.09 + 0.16 = 0.25 < 1$ და

$$z = g(0.3, 0.4) = \sqrt{1-(0.3)^2-(0.4)^2} = \sqrt{0.75} = 0.5\sqrt{3}.$$

ახლა ვნახოთ, რას წარმოადგენს გეომეტრიულად ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი. ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $z = f(x, y)$. ავიღოთ სივრცეში კოორდინატთა მართკუთხა $Oxyz$ სისტემა და განვიხილოთ (x, y, z) სამეული, რომელშიც $(x, y) \in D(f)$, ხოლო $z = f(x, y)$. ყველა ასეთი $(x, y, f(x, y))$ წერტილების ერთობლიობა წარმოადგენს გარკვეულ ზედაპირს სივრცეში, ხოლო $z = f(x, y)$ თანაფარდობა წარმოადგენს ამ ზედაპირის განტოლებას (იხ. ნახ. 8.1).



ნახ. 8.1

თუ z სიდიდე დამოკიდებულია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ დამოუკიდებელ ცვლადებზე, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია n ცვლადის ფუნქცია და წერენ

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

აქ, ცხადია, იგულისხმება, რომ ყოველ დასაშვებ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობას შეესაბამება ერთადერთი z რიცხვი. დამოუკიდებელ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებს ეწოდება არგუმენტები, ხოლო z-ს — ფუნქცია.

8.2. საწარმოო ფუნქცია

წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა (Q), როგორც წესი, დამოკიდებულია წარმოების სხვადასხვა ფაქტორებზე. განვიხილოთ ისეთი კონკრეტული შემთხვევა, როდესაც იგი დამოკიდებულია მხოლოდ კაპიტალზე (K) და შრომაზე (L). წარმოების დახასიათებისათვის დროის მცირე პერიოდში ეს არაა დიდი შეზღუდვა, რადგანაც წარმოების სხვა ფაქტორები დროის ამ პერიოდში შეგვიძლია ჩავთვალოთ მუდმივ პარამეტრებად. ფუნქციას

$$Q = f(K, L),$$

რომელიც აღწერს წარმოებული პროდუქციის Q რაოდენობის დამოკიდებულებას წარმოების ფაქტორების რაოდენობრივ მახასიათებლებზე (ჩვენს შემთხვევაში K კაპიტალზე და L შრომაზე) ეწოდება **საწარმოო ფუნქცია**.

ეკონომიკაში ძალიან პოპულარულია **ვიქსელ-ქობ-დაგლასის საწარმოო ფუნქცია**, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე (იხ. დანართი)

$$Q = f(K, L) = C\, K^{\alpha} L^{\beta}, \quad C > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \tag{8.1}$$

სადაც C, α და β მუდმივებია.

ვიქსელ-ქობ-დაგლასის ფუნქციას ერთი მეტად მნიშვნელოვანი თვისება გააჩნია. კერძოდ, თუ $\lambda > 0$, მაშინ

$$\begin{aligned} f(\lambda K, \lambda L) &= C\,(\lambda K)^{\alpha}\,(\lambda L)^{\beta} = C\lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{\beta} L^{\beta} = \\ &= \lambda^{\alpha+\beta}\, C K^{\alpha} L^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} f(K, L). \end{aligned} \tag{8.2}$$

ეს თვისება ეკონომიკურად აღწერს იმ ფაქტს, რომ თუ წარმოების K და L ფაქტორებს პროპორციულად გავზრდით (ან შევამცირებთ) ერთი და იმავე λ კოეფიციენტით, მაშინ პროდუქციის Q რაოდენობა პროპორციულად შეიცვლება $\lambda^{\alpha+\beta}$ პროპორციულობის კოეფიციენტით.

ზოგადად, თუ ფუნქცია $z = h(x, y)$ აკმაყოფილებს პირობას

$$h(t\,x, t\,y) = t^{m}\, h(x, y),$$

სადაც $t > 0$ და m ნამდვილი რიცხვია, მაშინ მას ეწოდება m **რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია**.

ამრიგად, ვიქსელ-ქობ-დაგლასის საწარმოო ფუნქცია წარმოადგენს $\alpha+\beta$ რიგის ერთგვაროვან ფუნქციას.

პროპორციულობის λ კოეფიციენტს (8.2) ტოლობაში, რომელიც ახასიათებს წარმოების ფაქტორების პროპორციულ ცვლილებას, ეწოდება **წარმოების მასშტაბი**.

ვთქვათ, $\lambda > 1$. მაშინ $\lambda^k > \lambda$, როცა $k > 1$, ხოლო $\lambda^k < \lambda$, როდესაც $0 < k < 1$. ამიტომ (8.2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ:

1) თუ $\alpha+\beta > 1$, მაშინ

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta} f(K, L) > \lambda f(K, L),$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში წარმოების ფაქტორების λ-ჯერ გაზრდა იწვევს წარმოებული პროდუქციის გაზრდას λ-ზე მეტჯერ, კერძოდ, $\lambda^{\alpha+\beta}$-ჯერ. ამიტომ ამბობენ, რომ გვაქვს **მასშტაბის ზრდადი ეფექტი**;

2) თუ $\alpha+\beta < 1$, მაშინ

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta} f(K, L) < \lambda f(K, L),$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში წარმოების ფაქტორების λ-ჯერ გაზრდა იწვევს წარმოებული პროდუქციის გაზრდას λ-ზე ნაკლებჯერ, კერძოდ, $\lambda^{\alpha+\beta}$-ჯერ. ამიტომ ამბობენ, რომ გვაქვს **მასშტაბის კლებადი ეფექტი**;

3) თუ $\alpha+\beta = 1$, მაშინ

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta} f(K, L) = \lambda f(K, L),$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში წარმოების ფაქტორების λ-ჯერ გაზრდა იწვევს წარმოებული პროდუქციის გაზრდას ზუსტად λ-ჯერ. ამიტომ ამბობენ, რომ გვაქვს **მასშტაბის მუდმივი ეფექტი**.

ვიქსელ-ქობ-დაგლასის ფუნქციას სხვადასხვა ეკონომიკურ ასპექტში ქვემოთ ჩვენ მრავალჯერ შევხვდებით.

8.3. ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი წერტილში

ვთქვათ, $z=f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M(x_0,y_0)$ წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით M წერტილისა (წერტილის მიდამოს ქვეშ იგულისხმება საკმაოდ მცირერადიუსიანი წრე, ცენტრით ამ წერტილში).

● A რიცხვს ეწოდება $z=f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი $M(x_0,y_0)$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

როცა $0<|x-x_0|+|y-y_0|<\delta$.

ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A. \ \blacksquare$$

ეს არის ფუნქციის ზღვრის განმარტება კოშის აზრით. არსებობს აგრეთვე ფუნქციის ზღვრის განმარტება ჰაინეს აზრით.

● A რიცხვი წარმოადგენს $z=f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარს $M(x_0,y_0)$ წერტილში, თუ $f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია M წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით M წერტილისა, და ამ წერტილის მიდამოში წერტილთა ყოველი

$$M_1(x_1,y_1),\ \ M_2(x_2,y_2),\ \ldots,\ M_n(x_n,y_n),\ldots$$

მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია $M(x_0,y_0)$ წერტილისაკენ, ე. ი. $x_n\to x_0$ და $y_n\to y_0$, როცა $n\to\infty$, ფუნქციათა შესაბამისი მიმდევრობა $f(x_1,y_1),\ f(x_2,y_2),\ldots,\ f(x_n,y_n),\ \ldots$ კრებადია A რიცხვისაკენ. ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=A. \ \blacksquare$$

მაგალითად, განვიხილოთ $f(x,y)=x^2+y^2$ ფუნქცია. იგი განსაზღვრულია

მთელ Oxy სიბრტყეზე. განვიხილოთ წერტილი $M(1,2)$. წერტილთა ყოველი $\{(x_n, y_n)\}$ მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია $M(1,2)$ წერტილისაკენ, გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(x_n^2 + y_n^2\right) = 1^2 + 2^2 = 5.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\left(x^2 + y^2\right) = 5.$$

თეორემები ზღვრის შესახებ, რომლებიც ჩამოყალიბებული იყო ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის (მუდმივის, ალგებრული ჯამის, ნამრავლის, ფარდობის შესახებ) მართებულია ორი ცვლადის ფუნქციებისათვისაც. ამის გამო მათ აქ აღარ გავიმეორებთ.

8.4. ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა

განვიხილოთ $z = f(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $M(x_0, y_0)$ წერტილის რაიმე მიდამოში თვით ამ წერტილის ჩათვლით.

● ვიტყვით, რომ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია $M(x_0, y_0)$ წერტილში, თუ

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0). \ \blacksquare$$

თუ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე D არის ყოველ წერტილზე, მაშინ ამბობენ, რომ იგი უწყვეტია D არეში.

თუ გამოვიყენებთ უწყვეტობის განსაზღვრას და თეორემებს ზღვრის შესახებ, შეიძლება ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაშიც დამტკიცდეს თეორემები უწყვეტი ფუნქციების ჯამის, ნამრავლისა და ფარდობის (თუ მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან) უწყვეტობის შესახებ.

თუ $z = f(x,y)$ ფუნქცია არ არის უწყვეტი $M(x_0, y_0)$ წერტილში, მა-

შინ ამბობენ, რომ ამ წერტილში ის განიცდის წყვეტას.

ამოცანა 8.1. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{როცა } (x,y)\neq(1,2), \\ 7, & \text{როცა } (x,y)=(1,2). \end{cases}$$

შევისწავლოთ ამ ფუნქციის უწყვეტობის საკითხი $(1,2)$ წერტილში.

▼ მოცემული ფუნქცია $(1,2)$ წერტილში განიცდის წყვეტას, რადგან

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y)=5\neq f(1,2)=7. \ \blacksquare$$

ამოცანა 8.2. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{როცა } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{როცა } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

შევისწავლოთ ამ ფუნქციის უწყვეტობის საკითხი.

▼ მოცემული ფუნქცია უწყვეტია, თუ $(x,y)\neq(0,0)$ (რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით ჰაინეს აზრით ზღვრის განმარტების გამოყენებით). ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული $(0,0)$ წერტილის მიდამოში, რადგან $\dfrac{1}{x^2+y^2}\to+\infty$, როცა $x\to 0$ და $y\to 0$. ამიტომ $(0,0)$ წერტილში მას ზღვარი არ გააჩნია, ე. ი. $(0,0)$ წერტილი არის ფუნქციის წყვეტის წერტილი. ■

8.5. მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები. სრული დიფერენციალი

ჯერ განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქციები. ვთქვათ, Oxy სიბრტყის რაიმე D არეში მოცემულია ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქცია და $M(x_0,\ y_0)\in D$. დავაფიქსიროთ y_0 სიდიდე და x_0 სიდიდეს მივცეთ ისეთი Δx ნაზრდი, რომ წერტილი $(x_0+\Delta x,\ y_0)$ არ გამოვიდეს განსაზღვრის

არიდან. ასეთ შემთხვევაში z ფუნქცია მიიღებს შესაბამის ნაზრდს, რომელსაც აღვნიშნავთ $\Delta_x z$ სიმბოლოთი და ვუწოდებთ $f(x,y)$ ფუნქციის კერძო ნაზრდს x ცვლადის მიმართ

$$\Delta_x z(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე Δx-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta x\to 0$. თუ არსებობს ამ ფარდობის სასრული ზღვარი, მაშინ მას უწოდებენ $f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულს x ცვლადით (x_0,y_0) წერტილში და აღნიშნავენ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ან $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, ან $f'_x(x_0,y_0)$ სიმბოლოებით. მაშასადამე,

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

● $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული x ცვლადით (x_0,y_0) წერტილში ეწოდება ფუნქციის $\Delta_x z(x_0,y_0)$ კერძო ნაზრდის არგუმენტის Δx ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ. ■

სრულიად ანალოგიურად, დავაფიქსიროთ x ცვლადი $(x=x_0)$ და y_0-ს მივცეთ ისეთი ნაზრდი Δy, რომ წერტილი $(x_0,y_0+\Delta y)$ არ გამოვიდეს განსაზღვრის არიდან. მაშინ z ფუნქციაც მიიღებს შესაბამის ნაზრდს, რომელსაც აღვნიშნავთ $\Delta_y z$ სიმბოლოთი და ვუწოდებთ ფუნქციის კერძო ნაზრდს y ცვლადით

$$\Delta_y z(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ Δy-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta y\to 0$. თუ ეს ზღვარი არსებობს, მაშინ მას ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული y ცვლადით (x_0,y_0) წერტილში და აღვნიშნავთ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ან $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ან $f'_y(x_0,y_0)$ სიმბოლოებით. მაშასადამე,

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

● $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული y ცვლადით (x_0,y_0) წერტილში ეწოდება ფუნქციის $\Delta_y z$ კერძო ნაზრდის არგუმენტის Δy ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ. ■

ამრიგად, $z=f(x,\ y)$ ფუნქციის $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ კერძო წარმოებულის მოსაძებნად უნდა ჩავთვალოთ, რომ y ფიქსირებული პარამეტრია და გავაწარმოოთ მოცემული ფუნქცია როგორც ერთი x ცვლადის ფუნქცია. ასევე, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$-ის მოსაძებნად საჭიროა x ჩავთვალოთ ფიქსირებულ პარამეტრად და გავაწარმოოთ მოცემული ფუნქცია როგორც ერთი y ცვლადის ფუნქცია. ამიტომ კერძო წარმოებულების გამოთვლა ხდება გაწარმოების იმავე წესების გამოყენებით, რაც გვქონდა ერთი ცვლადის შემთხვევაში.

ამოცანა 8.3. ვიპოვოთ $z=y\ln x+xy^3$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $(2,\ 3)$ წერტილში.

▼ ჯერ გამოვთვალოთ z ფუნქციის კერძო წარმოებული x-ით

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}+y^3.$$

სრულიად ანალოგიურად, z ფუნქციის კერძო წარმოებული y-ით იქნება

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\ln x+3xy^2.$$

ამიტომ

$$\frac{\partial z(2,\ 3)}{\partial x}=\frac{3}{2}+3^3=28.5\,,\quad \frac{\partial z(2,\ 3)}{\partial y}=\ln 2+3\cdot 2\cdot 3^2=\ln 2+54.\ ■$$

ვთქვათ, მოცემულია $z=f(x,y)$ ფუნქცია. გამოსახულებას

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

ეწოდება **ფუნქციის სრული ნაზრდი**, რომელიც შეესაბამება არგუმენტების Δx და Δy ნაზრდებს.

მტკიცდება, რომ თუ f ფუნქციას გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებულები, მაშინ ფუნქციის სრული ნაზრდი შეგვიძლია მიახლოებით წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Delta z \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy, \tag{8.3}$$

სადაც $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. ამ ტოლობას ეწოდება **სასრული (მცირე) ნაზრდების ფორმულა**. (8.3) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მოთავსებულ გამოსახულებას ეწოდება f ფუნქციის **სრული დიფერენციალი**. იგი აღინიშნება dz სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$\boxed{\Delta z \approx d\,z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy} \tag{8.4}$$

ე. ი. ფუნქციის სრული დიფერენციალი ამ ფუნქციის სრული ნაზრდის მთავარი ნაწილია, როდესაც არგუმენტების ნაზრდები $dx = \Delta x$ და $dy = \Delta y$ საკმარისად მცირეა.

მაგალითად, ამოცანა 8.3-ში განხილული ფუნქციის სრული დიფერენციალი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$d\,z(x,y) = d\left(y\ \ln x + x\,y^3\right) = \left(\frac{y}{x} + y^3\right)dx + \left(\ln x + 3\,x\,y^2\right)dy.$$

როცა $x=1$ და $y=2$, ამ დიფერენციალის მნიშვნელობა იქნება

$$d\,z(1,2) = \left(\frac{2}{1} + 2^3\right)dx + \left(\ln 1 + 3\cdot 1\cdot 2^2\right)dy = 10\,dx + 12\,dy.$$

მრავალი ცვლადის $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციისათვის კერძო წარმოებულები განიმარტება სრულიად ანალოგიურად.

მაგალითად, $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ კერძო წარმოებული არის i-ური ცვლადის მიმართ ფუნქციის კერძო ნაზრდის

$$\Delta_i z = f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) - f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\right)$$

i-ური არგუმენტის Δx_i ნაზრდთან შეფარდების ზღვარი, როცა $\Delta x_i \to 0$, ე. ი.

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i z}{\Delta x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

ამ წარმოებულის აღსანიშნავად ხშირად იხმარება აგრეთვე სიმბოლოები

$$z'_{x_i} \text{ ან } \frac{\partial f\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\partial x_i}, \text{ ან } f'_{x_i}\left(x_1, \ldots, x_n\right).$$

იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$, ყველა სხვა არგუმენტი, გარდა x_i არგუმენტისა, უნდა ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ z ფუნქცია როგორც ერთი x_i ცვლადის ფუნქცია. n ცვლადის შემთხვევაშიც ფუნქციის სრული ნაზრდი შეგვიძლია მიახლოებით ვიპოვოთ მისი დიფერენციალის საშუალებით

$$\Delta z = f\left(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n\right) - f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \approx dz, \tag{8.5}$$

სადაც

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n} \tag{8.6}$$

წარმოადგენს z ფუნქციის სრულ დიფერენციალს.

ამოცანა 8.4. ვიპოვოთ

$$z = 3xu^2 - v \ln y + 7x\,e^{2u}$$

ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები x, y, u და v ცვლადებით. მოვძებნოთ dz სრული დიფერენციალი.

▼ ცხადია, რომ z არის ოთხი ცვლადის ფუნქცია. გამოვთვალოთ კერძო წარმოებულები:

$$z'_x = 3u^2 + 7e^{2u}, \quad z'_y = -\frac{v}{y}, \quad z'_u = 6xu + 14xe^{2u}, \quad z'_v = -\ln y.$$

სრული დიფერენციალისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy + \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv =$$

$$= \left(3u^2 + 7e^{2u}\right) dx - \frac{v}{y}\,dy + \left(6xu + 14xe^{2u}\right) du - \ln y\,dv. \quad \blacksquare$$

8.6. მრავალი ცვლადის ფუნქციის საშუალო კერძო ელასტიკურობა და ზღვრული კერძო ელასტიკურობა

ეს პარაგრაფი იდეურად 7.14 პარაგრაფის მსგავსია და ანზოგადებს იქ გადმოცემულ საკითხებს მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვის.

დავუშვათ, მოცემულია

$$z = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებულები.

x_i **არგუმენტის პროცენტული ფარდობითი ნაზრდი** ვუწოდოთ

$$k_i = \left| \frac{\Delta x_i}{x_i} \cdot 100 \right| \tag{8.7}$$

სიდიდეს, სადაც Δx_i არის x_i ცვლადის ნაზრდი, ე. ი. k_i სიდიდე გვიჩვენებს, თუ x_i-ის რამდენი პროცენტია Δx_i ნაზრდი. არგუმენტის Δx_i ნაზრდის შესაბამისი **ფუნქციის პროცენტული კერძო ფარდობითი ნაზრდი** კი ვუწოდოთ

$$l_i = \left| \frac{\Delta_i z}{z} \cdot 100 \right| \tag{8.8}$$

სიდიდეს, სადაც

$$\Delta_i z = f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) - f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\right)$$

არის z ფუნქციის კერძო ნაზრდი, ე. ი. l_i გვიჩვენებს, $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ სიდიდის რამდენი პროცენტია ფუნქციის $\Delta_i z$ კერძო ნაზრდი.

● მრავალი ცვლადის $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ ფუნქციის **საშუალო კერძო ელასტიკურობა** x_i **ცვლადის** Δx_i **ნაზრდის მიმართ** ეწოდება ფუნქციის l_i პროცენტული კერძო ფარდობითი ნაზრდის შეფარდებას არგუმენტის k_i პროცენტულ ფარდობით ნაზრდთან. აღვნიშნოთ იგი $E_{x_i}(f,x_1,\ldots,x_n,\Delta x_i)$ სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$E_{x_i}(z,x_1,\ldots,x_n,\Delta x_i)=\frac{\left|\dfrac{\Delta_i z}{z}\cdot 100\right|}{\left|\dfrac{\Delta x_i}{x_i}\cdot 100\right|}=\left|\frac{x_i}{z}\cdot\frac{\Delta_i z}{\Delta x_i}\right|,\quad i=1,2,\ldots,n.\ \blacksquare \qquad (8.9)$$

შევნიშნოთ, რომ გვაქვს შემდეგი სქემატური ტოლობა

$$\boxed{E_{x_i}(z,x_1,\ldots,x_n,\Delta x_i)=\frac{(z \text{ ფუნქციის პროცენტული ცვლილება})}{(x_i \text{ არგუმენტის პროცენტული ცვლილება})}}$$

● (8.9) გამოსახულების ზღვარს, როცა $\Delta x_i \to 0$, ეწოდება z **ფუნქციის ზღვრული კერძო ელასტიკურობა** x_i **ცვლადის მიმართ.** აღვნიშნოთ იგი $E_{x_i}(z,x_1,\ldots,x_n)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$E_{x_i}(z,x_1,\ldots,x_n)=\lim_{\Delta x_i\to 0}\left|\frac{x_i}{z}\cdot\frac{\Delta_i z}{\Delta x_i}\right|=\left|\frac{x_i}{z}\cdot z'_{x_i}\right|$$

ანუ

$$E_{x_i}(z,x_1,\ldots,x_n)=\left|\frac{x_i}{z}\cdot z'_{x_i}\right|.\ \blacksquare \qquad (8.10)$$

ცხადია, რომ საკმარისად მცირე Δx_i-თვის საშუალო კერძო ელასტიკუ-

რობა გარკვეული მიახლოებით შეგვიძლია შევცვალოთ ზღვრული კერძო ელასტიკურობით

$$E_{x_i}\left(z,\, x_1,\dots,\, x_n,\, \Delta x_i\right) \approx E_{x_i}\left(z,\, x_1,\dots,\, x_n\right). \qquad (8.11)$$

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის კერძო ელასტიკურობა x_i არგუმენტის მიმართ გვიჩვენებს, თუ რამდენი პროცენტით იცვლება ფუნქცია, როდესაც x_i არგუმენტი იცვლება 1%-ით.

ზემოთ შემოღებულ ცნებებს დიდი გამოყენება აქვთ ეკონომიკაში. ისინი საშუალებას გვაძლევენ დავადგინოთ ეკონომიკური მახასიათებლების ელასტიკურობა სხვადასხვა ეკონომიკური პარამეტრების ცვლილებისას. საილუსტრაციოდ, ქვემოთ განვიხილავთ რამდენიმე მათგანს.

8.7. მოთხოვნის ფუნქციის ელასტიკურობა მრავალსაქონლიანი ბაზრის შემთხვევაში

მოთხოვნის ფუნქციის ელასტიკურობა მარტივი (ერთსაქონლიანი) ბაზრის შემთხვევაში დაიყვანება ერთი ცვლადის ფუნქციის ელასტიკურობის მოძებნაზე, რაც ჩვენ უკვე განვიხილეთ 7.15 პარაგრაფში. აქ კი გამოვიკვლევთ მრავალსაქონლიანი კომპლექსური ბაზრის შემთხვევას, როდესაც მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია მრავალი ცვლადის ფუნქციის სახით.

კერძოდ, ვთქვათ, რაიმე პროდუქციაზე Q მოთხოვნა დამოკიდებულია პროდუქციის P ფასზე, ალტერნატიული საქონლის P_A ფასზე და მომხმარებლის Y შემოსავალზე, ე. ი. მოთხოვნა

$$Q = f_D(P,\; P_A,\; Y)$$

არის სამი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქცია.

მოთხოვნის საშუალო კერძო ელასტიკურობა P ფასის მიმართ გამოითვლება ფორმულით

$$E_P(Q,\ P,\ P_A,\ Y,\ \Delta P)=\frac{(Q\ \text{მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება})}{(P\ \text{ფასის პროცენტული ცვლილება})}=$$

$$=\left|\frac{\dfrac{\Delta_P Q}{Q}\cdot 100}{\dfrac{\Delta P}{P}\cdot 100}\right|=\left|\frac{P}{Q}\cdot\frac{\Delta_P Q}{\Delta P}\right|. \tag{8.12}$$

(8.12)-დან ზღვარზე გადასვლით, როცა $\Delta P \to 0$, მივიღებთ მოთხოვნის ზღვრულ კერძო ელასტიკურობას P ფასის მიმართ

$$E_P(Q,\ P,\ P_A,\ Y)=\left|\frac{P}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial P}\right|. \tag{8.13}$$

იმავე მსჯელობით, რაც გვქონდა 7.15 პარაგრაფში, მარტივად დავადგენთ, რომ რადგან $P>0$, $Q>0$, ხოლო Q ფუნქცია ფიქსირებული P_A და Y პარამეტრებისათვის არის P ცვლადის კლებადი ფუნქცია, ამიტომ $\dfrac{\partial Q}{\partial P}<0$ და (8.13) ტოლობა ასე გადაიწერება

$$E_P(Q,\ P,\ P_A,\ Y)=-\frac{P}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial P}. \tag{8.14}$$

ცხადია, რომ საკმარისად მცირე ΔP-თვის მოთხოვნის საშუალო კერძო ელასტიკურობა P ფასის მიმართ, გარკვეული მიახლოებით, ტოლია მოთხოვნის ზღვრული კერძო ელასტიკურობისა P ფასის მიმართ

$$E_P(Q,\ P,\ P_A,\ Y,\ \Delta P)\approx-\frac{P}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial P}. \tag{8.15}$$

ანალოგიურად განიმარტება **მოთხოვნის საშუალო და ზღვრული კერძო ელასტიკურობა ალტერნატიული საქონლის P_A ფასის მიმართ.** მას აგრეთვე უწოდებენ **ჯვარედინ ელასტიკურობას**. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ალტერნატიული ჩანაცვლებადი საქონლის P_A ფასის ზრდას მოსდევს მოთხოვნის ზრდა ძირითად (P ფასის მქონე) საქონელზე, მარტივად დავასკვნით, რომ $\dfrac{\partial Q}{\partial P_A}>0$ (ფიქსირებული P და Y პარამეტრებისათვის). ამი-

ტომ მივიღებთ

$$E_{P_A}(Q,\ P,\ P_A,\ Y,\ \Delta P_A)=\frac{(Q \text{ მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება})}{(P_A \text{ ფასის პროცენტული ცვლილება})}= \\ =\frac{P_A}{Q}\cdot\frac{\Delta_{P_A}Q}{\Delta P_A}, \tag{8.16}$$

$$E_{P_A}(Q,\ P,\ P_A,\ Y)=\frac{P_A}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial P_A}. \tag{8.17}$$

ამასთან, გარკვეული მიახლოებით

$$E_{P_A}(Q,\ P,\ P_A,\ Y,\ \Delta P_A)\approx\frac{P_A}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial P_A}. \tag{8.18}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ ალტერნატიული საქონელი დამატებითი საქონელია ძირითადის მიმართ, მაშინ მისი P_A ფასის ზრდას მოსდევს Q მოთხოვნის შემცირება, ე. ი. ამ შემთხვევაში $\dfrac{\partial Q}{\partial P_A}<0$, და ამიტომ (8.16), (8.17) და (8.18) ფორმულების მარჯვენა მხარეში უნდა დავწეროთ „–" ნიშანი.

ბოლოს, ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ **მოთხოვნის საშუალო და ზღვრული კერძო ელასტიკურობა** Y **შემოსავლის მიმართ**:

$$E_Y(Q,\ P,\ P_A,\ Y,\ \Delta Y)=\frac{(Q \text{ მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება})}{(Y \text{ შემოსავლის პროცენტული ცვლილება})}= \\ =\left|\frac{Y}{Q}\cdot\frac{\Delta_Y Q}{\Delta Y}\right|, \tag{8.19}$$

$$E_Y(Q,\ P,\ P_A,\ Y)=\left|\frac{Y}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial Y}\right|, \tag{8.20}$$

$$E_Y(Q,\ P,\ P_A,\ Y,\ \Delta Y)\approx\left|\frac{Y}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial Y}\right|. \tag{8.21}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ განსახილველი ძირითადი პროდუქცია არის **მოდური** და მაღალი ხარისხისა, მაშინ მომხმარებლის Y შემოსავლის **ზრდას** მოსდევს Q მოთხოვნის ზრდა, ხოლო თუ პროდუქცია ძველმოდური და

დაბალი ხარისხისაა, მაშინ Y შემოსავლის ზრდას მოსდევს Q მოთხოვნის კლება. პირველ შემთხვევაში $\dfrac{\partial Q}{\partial Y} > 0$, ხოლო მეორე შემთხვევაში $\dfrac{\partial Q}{\partial Y} < 0$. ამიტომ მოდულის ნიშანი (8.19) — (8.21) ტოლობებში შეგვიძლია მოვხსნათ მხოლოდ პროდუქციის კონკრეტული სახეობის გათვალისწინებით.

ამოცანა 8.5. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

$$Q = f_D(P,\ P_A,\ Y) = 100 - 2P + P_A + 0.1Y.$$

ვიპოვოთ მოთხოვნის:

(ა) ელასტიკურობა P ფასის მიმართ;

(ბ) ჯვარედინი ელასტიკურობა P_A ფასის მიმართ;

(გ) ელასტიკურობა Y შემოსავლის მიმართ,

როდესაც $P = 10$, $P_A = 12$ და $Y = 1000$.

▼ ჯერ გამოვთვალოთ Q-ს მნიშვნელობა ამოცანაში მითითებული ფასებისა და მომხმარებელთა შემოსავლისათვის:

$$Q = f(10,\ 12,\ 1000) = 100 - 2\cdot 10 + 12 + 0.1\cdot 1000 = 192.$$

(ა) იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ელასტიკურობა P ფასის მიმართ, (8.14) ფორმულის თანახმად, უნდა ვიპოვოთ Q-ს კერძო წარმოებული P ცვლადით:

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{\partial f_D}{\partial P} = -2.$$

ამიტომ (8.14) ფორმულის ძალით,

$$E_P = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial P} = -\frac{10}{192}\cdot(-2) = \frac{20}{192} = 0.1042.$$

(ბ) გამოვთვალოთ Q ფუნქციის კერძო წარმოებული P_A ცვლადით

$$\frac{\partial Q}{\partial P_A} = 1.$$

ამიტომ (8.17) ფორმულის თანახმად, მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიკურობისათვის მივიღებთ

$$E_{P_A} = \frac{P_A}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P_A} = \frac{12}{192} = 0.0625 .$$

(გ) რადგან $\dfrac{\partial Q}{\partial Y} = 0.1 > 0$, ამიტომ მოთხოვნის ელასტიკურობა Y შემოსავლის მიმართ გამოითვლება შემდეგი ფორმულით (იხ. (8.20))

$$E_Y = \frac{Y}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{1000}{192} \cdot 0.1 = 0.5208. \ \blacksquare$$

8.8. რთული ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, მოცემულია $z = f(x, y)$ ფუნქცია, სადაც x და y თავის მხრივ t ცვლადის ფუნქციებია: $x = x(t)$ და $y = y(t)$. მაშინ z იქნება t არგუმენტის რთული ფუნქცია: $z = f\left(x(t), y(t)\right)$.

ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ და $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ უწყვეტი კერძო წარმოებულები და აგრეთვე $\dfrac{dx}{dt}$ და $\dfrac{dy}{dt}$ ჩვეულებრივი წარმოებულები. ამ პირობებში მტკიცდება, რომ რთული ფუნქციის წარმოებული გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{8.22}$$

ამოცანა 8.6. ვთქვათ, გვაქვს ფუნქცია $z = \dfrac{x}{y}$, სადაც $x = e^t$, $y = \ln t$. ვიპოვოთ $\dfrac{dz}{dt}$.

▼ ჯერ გამოვთვალოთ წარმოებულები (იხ. (8.22)):

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}.$$

მარტივად ვაჩვენებთ, რომ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}\right)'_y=-\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{dx}{dt}=\left(e^t\right)'=e^t, \quad \frac{dy}{dt}=\left(\ln t\right)'=\frac{1}{t}.$$

ახლა, თუ ვისარგებლებთ (8.22) ფორმულით, მივიღებთ

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{\ln t}\cdot e^t-\frac{e^t}{\ln^2 t}\cdot\frac{1}{t} \quad ■$$

8.9. არაცხადი ფუნქციის წარმოებული

ჩვენ უკვე ვიცით „ცხადი" $z=f(x)$ სახით მოცემული ფუნქციის გაწარმოების წესი. ეს ის შემთხვევაა, როდესაც y ცვლადი ანალიზურადაა გამოსახული დამოუკიდებელი x ცვლადის საშუალებით. ზოგიერთ ამოცანაში ხერხდება მხოლოდ გარკვეული ფუნქციონალური დამოკიდებულების მოძებნა, რომელიც დამოკიდებელ y ცვლადს „არაცხადად" აკავშირებს დამოუკიდებელ x ცვლადთან. მაგალითად, ვთქვათ, ცნობილია, რომ y არის x-ის ფუნქცია და ეს ფუნქციონალური დამოკიდებულება მოცემულია ტოლობით

$$y^5+2xy^2-x=5x^4y^3+3yx^2+19y-e^{xy}-2.$$

აქედან, ფაქტობრივად, შეუძლებელია ვიპოვოთ „ცხადი" სახით $y=f(x)$ ფუნქცია. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ y არის x არგუმენტის არაცხადი სახით მოცემული ფუნქცია. მიუხედავად „არაცხადობისა", თურმე შეიძლება მოვძებნოთ y ფუნქციის წარმოებული x არგუმენტით.

გადავწეროთ ზემოთ მოცემული ტოლობა შემდეგი სახით

$$F(x,y)=y^5+2xy^2-x-5x^4y^3-3yx^2-19y+e^{xy}+2=0. \qquad (8.23)$$

რადგან აქ უნდა ვიგულისხმოთ, რომ y არის x-ის ფუნქცია (ე. ი. $y=f(x)$), ამიტომ (8.23) შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$\boxed{F(x, y(x)) = 0} \tag{8.24}$$

სწორედ ასეთი სახის განტოლებით მოიცემა, ზოგადად, x-ის არაცხადი y ფუნქცია.

გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების (8.22) წესი და ეს უკანასკნელი ტოლობა გავაწარმოოთ x-ით

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

ანუ $F'_x(x,y) + F'_y(x,y)\ y'(x) = 0$. აქედან, თუ $F'_y(x,y) \neq 0$, მივიღებთ

$$y'(x) = \frac{d\,y(x)}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{8.25}$$

ამ ტოლობას ეწოდება **არაცხადი ფუნქციის წარმოებულის ფორმულა.** (8.23) ფორმულით მოცემული არაცხადი ფუნქციის შემთხვევაში გვექნება

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{2y^2 - 1 - 20x^3y^3 - 6xy + ye^{xy}}{5y^4 + 4xy - 15x^4y^2 - 3x^2 - 19 + xe^{xy}}.$$

ამ ფორმულის გამოყენების დროს, ყოველთვის უნდა გავითვალისწინოთ, რომ x და y უნდა აკმაყოფილებდნენ (8.23) თანაფარდობას.

8.10. კაპიტალისა და შრომის ზღვრული პროდუქტები. ეილერის თეორემა

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, საწარმოო ფუნქცია გამოსახავს წარმოებული პროდუქციის Q რაოდენობის კავშირს დახარჯული კაპიტალისა და შრომის რაოდენობრივ K და L მახასიათებლებთან

$$Q = f(K, L).$$

ცხადია, რომ კერძო წარმოებული

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial f(K,L)}{\partial K}$$

გამოსახავს Q პროდუქციის რაოდენობრივი ცვლილებების სიჩქარეს K კა-

პიტალის ცვლილებასთან მიმართებაში. ამ კერძო წარმოებულს ეწოდება **კაპიტალის ზღვრული (მარგინალური) პროდუქტი** და აღინიშნება (MP_K) სიმბოლოთი.

სრულიად ანალოგიურად, **შრომის ზღვრული (მარგინალური) პროდუქტი** ეწოდება

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=\frac{\partial f(K,L)}{\partial L}$$

კერძო წარმოებულს, რომელიც აღწერს Q პროდუქციის რაოდენობრივ ცვლილებას L შრომის ცვლილებასთან მიმართებაში. იგი აღინიშნება (MP_L) სიმბოლოთი.

ამ განმარტებების თანახმად გვექნება, რომ თუ კაპიტალი შეიცვალა ΔK სიდიდით, მაშინ პროდუქციის რაოდენობის ცვლილება გამოითვლება

$$\Delta_K Q=f(K+\Delta K,L)-f(K,L)\approx\frac{\partial Q}{\partial K}\,\Delta K$$

ფორმულით.

ანალოგიურად, თუ შრომის მახასიათებელი ცვლადი L შეიცვალა ΔL სიდიდით, მაშინ

$$\Delta_L Q=f(K,L+\Delta L)-f(K,L)\approx\frac{\partial Q}{\partial L}\,\Delta L$$

გამოსახავს პროდუქციის შესაბამის ცვლილებას.

ცხადია, რომ თუ K კაპიტალი და L შრომა ერთდროულად იცვლება, შესაბამისად, ΔK და ΔL სიდიდეებით, მაშინ პროდუქციის ცვლილების დასადგენად შეგვიძლია გამოვიყენოთ მცირე ნაზრდების (8.3) ფორმულა

$$\Delta Q=f(K+\Delta K,L+\Delta L)-f(K,L)\approx\frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K+\frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L.$$

ამოცანა 8.7. გამოვთვალოთ კაპიტალის ზღვრული პროდუქტი (MP_K) და შრომის ზღვრული პროდუქტი (MP_L) ვიქსელ-ქობ-დაგლასის საწარმოო ფუნქციისათვის

$$Q=CK^{\alpha}L^{\beta},$$

სადაც C, α და β დადებითი მუდმივებია.

დავამტკიცოთ, რომ $(MP_K)\cdot K+(MP_L)\cdot L=(\alpha+\beta)\,Q$.

▼ კაპიტალის ზღვრული პროდუქტისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას

$$(MP_K)=\frac{\partial Q}{\partial K}=C\ \alpha\ K^{\alpha-1}\ L^{\beta},$$

შრომის ზღვრული პროდუქტისათვის კი —

$$(MP_L)=\frac{\partial Q}{\partial L}=C\ \beta\ K^{\alpha}L^{\beta-1}.$$

ახლა ვაჩვენოთ ამოცანაში მითითებული ტოლობის მართებულობა. უშუალო ჩასმით მივიღებთ:

$$(MP_K)\ K+(MP_L)\ L=C\alpha\ K^{\alpha-1}\ L^{\beta}\ K+C\beta\ K^{\alpha}\ L^{\beta-1}L=$$

$$=C\alpha K^{\alpha}L^{\beta}+C\beta K^{\alpha}L^{\beta}=(\alpha+\beta)\ C\,K^{\alpha}L^{\beta}=(\alpha+\beta)\ Q.\ \blacksquare$$

განხილულ ამოცანაში ვიქსელ-კობ-დაგლასის საწარმოო ფუნქციისათვის, ფაქტობრივად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ

$$K\ \frac{\partial Q}{\partial K}+L\ \frac{\partial Q}{\partial L}=(\alpha+\beta)\,Q,$$

სადაც $\alpha+\beta$ არის $Q=C\,K^{\alpha}L^{\beta}$ ერთგვაროვანი ფუნქციის რიგი.

მტკიცდება, რომ ანალოგიური ტოლობა მართებულია ნებისმიერი ერთგვაროვანი ფუნქციისათვის. კერძოდ, თუ $z=f(x_1,\ \dots,\ x_n)$ არის m რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, ე.ი.

$$f(t\,x_1,\ \dots,\ t\,x_n)=t^{m}\ f(x_1,\ \dots,\ x_n),\quad t>0,\quad m\in\mathbb{R}, \tag{8.26}$$

რომელსაც გააჩნია უწყვეტი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები, მაშინ

$$x_1\ \frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\ \frac{\partial z}{\partial x_2}+\ \cdots\ +x_n\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\ =\ mz\,. \tag{8.27}$$

ამ დებულებას ეწოდება ეილერის თეორემა ერთგვაროვანი ფუნქციებისათვის.

8.11. წარმოების ფუნქციის დონის წირები (იზოკვანტები). შრომისა და კაპიტალის შენაცვლების ზღვრული ნორმა

ვთქვათ, მოცემულია საწარმოო ფუნქცია

$$Q = f(K, L). \tag{8.28}$$

დავაფიქსიროთ პროდუქციის რაოდენობა, კერძოდ, $Q = Q_0$ და განვიხილოთ ტოლობა

$$f(K, L) = Q_0. \tag{8.29}$$

ეს ტოლობა ამყარებს გარკვეულ ფუნქციონალურ კავშირს K კაპიტალსა და L შრომას შორის. ჩავწეროთ ეს კავშირი ტოლობით

$$K = K(L). \tag{8.30}$$

თუ ავიღებთ ორ განსხვავებულ (K_1, L_1) და (K_2, L_2) წყვილს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (8.29) ტოლობას, მაშინ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ კაპიტალისა და შრომის განსხვავებული რაოდენობების მიუხედავად, ამ ორივე წყვილს შეესაბამება წარმოებული პროდუქციის ერთი და იგივე Q_0 რაოდენობა. ამრიგად, მოხდა (K_1, L_1) კაპიტალ-შრომის წყვილის შენაცვლება (K_2, L_2) წყვილით ისე, რომ წარმოებული პროდუქციის Q_0 რაოდენობა უცვლელი დარჩა.

აშკარაა, რომ (8.29) ტოლობა ფიქსირებული Q_0-ის შემთხვევაში განსაზღვრავს K-ს, როგორც L-ის არაცხად ფუნქციას (ან პირიქით). ზოგჯერ შესაძლებელია (8.29) ტოლობიდან ცხადი (8.30) სახით ცალსახად განისაზღვროს ეს ფუნქცია.

ცხადია, რომ L შრომასა და $K = K(L)$ კაპიტალს შეესაბამება პროდუქციის ერთი და იგივე Q_0 რაოდენობა. თუ საკოორდინატო სიბრტყის აბსცისათა ღერძზე გადავზომავთ L შრომას, ხოლო ორდინატთა ღერძზე K კაპიტალს, მაშინ $(L, K(L))$ წყვილებით განსაზღვრულ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს **იზოკვანტები** ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ ყოველ Q_0-ს შეესაბამება თავისი იზოკვანტი. ფაქტობრივად, ეს იზოკვანტი წარმოადგენს არაცხადი $K = K(L)$ ფუნქციის

გრაფიკს მოცემული ფიქსირებული Q_0-სათვის. იზოკვანტი OLK სიბრტყეზე აღწერს იმ წირს, რომლის გასწვრივაც Q საწარმოო ფუნქცია ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას.

მაგალითად, განვიხილოთ ვიქსელ-კობ-დაგლასის საწარმოო ფუნქციის კონკრეტული სახე

$$Q = 2\, K^{1/2}\, L^{1/2} \tag{8.31}$$

და ვიპოვოთ შესაბამისი იზოკვანტები.

დავაფიქსიროთ პროდუქციის რაოდენობა $Q = Q_0$. მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებას

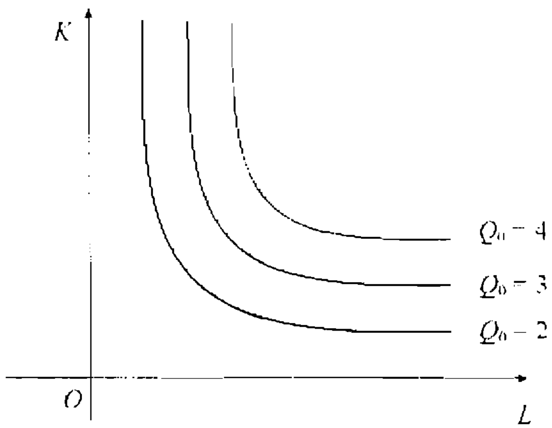
$$2\, K^{1/2}\, L^{1/2} = Q_0 \tag{8.32}$$

ანუ

$$K = \frac{Q_0^2}{4} \cdot \frac{1}{L}. \tag{8.33}$$

ამრიგად, L შრომასა და $K = \dfrac{Q_0^2}{4} \cdot \dfrac{1}{L}$ კაპიტალს L-ის ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობისათვის შეესაბამება ერთი და იგივე Q_0 პროდუქცია. ასეთი (L, K) წერტილების ერთობლიობას, როგორც აღვნიშნეთ, ეწოდება იზოკვანტი. ჩვენს შემთხვევაში, ეს იზოკვანტი დაემთხვევა (8.33) ფუნქციის გრაფიკს. ცხადია, სხვადასხვა Q_0-სთვის მიიღება სხვადასხვა გრაფიკი.

ეს გრაფიკები გამოსახულია ნახ. 8.2-ზე. რაც უფრო „დაშორებულია" გრაფიკი სათავიდან, მით უფრო მაღალ Q_0 დონეს შეესაბამება იგი.



ნახ. 8.2

ამ იზოკვანტებიდან და (8.33) თანაფარდობიდან ჩანს, რომ თუ გვსურს წარმოებული პროდუქციისათვის დავიცვათ მუდმივი Q_0 დონე, მაშინ შრომის L პარამეტრის გაზრდისას იმდენჯერვე უნდა შემცირდეს კაპიტალის K პარამეტრი და, პირიქით (K და L უკუპროპორციული სიდიდეებია).

ამასთან, შრომის შეცვლას ΔL სიდიდით მოსდევს კაპიტალის შესაბამისი შეცვლა ΔK სიდიდით. შრომის ერთეულზე გაანგარიშებით ეს ცვლილება ტოლია $\dfrac{\Delta K}{\Delta L}$ შეფარდებისა. რადგან ეს შეფარდება უარყოფითია, ამიტომ ეკონომიკაში იხილავენ ამ შეფარდების მოდულს

$$\left|\frac{\Delta K}{\Delta L}\right| = -\frac{\Delta K}{\Delta L},$$

რომელსაც უწოდებენ **შრომის ფაქტორისა და კაპიტალის ფაქტორის შენაცვლების ზომას**.

იგი გვიჩვენებს, თუ საშუალოდ რა სიდიდით იცვლება კაპიტალის ფაქტორი შრომის ფაქტორის ცვლილებისას შრომის ერთეულზე გაანგარიშებით.

ამ გამოსახულების ზღვარს, როდესაც $\Delta L \to 0$, ეწოდება **შრომისა და კაპიტალის ტექნიკური შენაცვლების ზღვრული ნორმა**. შემოკლებით — **შენაცვლების ზღვრული ნორმა** და აღინიშნება $(MRTS)$ სიმბოლოთი. ამრიგად (იხ. დანართი),

$$\boxed{(MRTS) = -\lim_{\Delta L \to 0}\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{dK}{dL} = -K'(L)} \tag{8.34}$$

ზემოთ განხილული წარმოების (8.31) ფუნქციის შემთხვევაში გვექნება

$$(MRTS) = -\frac{dK}{dL} = \frac{Q_0^2}{4}\cdot\frac{1}{L^2}.$$

ზოგადად, (8.29) ტოლობიდან შეიძლება ვერ მოხერხდეს ცხადი (8.30) ტიპის დამოკიდებულების ამოწერა. ამიტომ, ამ შემთხვევაში, შესაბამისი

$(MRTS)$-ის საპოვნელად უნდა გამოვიყენოთ არაცხადი ფუნქციის წარმოებულის ფორმულა (იხ. (8.25)).

აღნიშნული ფორმულისა და (8.34) ტოლობის გამოყენებით, მივიღებთ

$$\boxed{(MRTS) = -\frac{dK}{dL} = \frac{f_L'(K,L)}{f_K'(K,L)} = \frac{Q_L'}{Q_K'}} \tag{8.35}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ამ უკანასკნელი ტოლობის ბოლო შეფარდებაში მრიცხველში მდგომი გამოსახულება წარმოადგენს (MP_L) შრომის ზღვრულ პროდუქტს, ხოლო მნიშვნელში მდგომი გამოსახულება — (MP_K) კაპიტალის ზღვრულ პროდუქტს, მივიღებთ

$$\boxed{(MRTS) = \frac{(MP_L)}{(MP_K)}} \tag{8.36}$$

ამოცანა 8.8. ვიპოვოთ შენაცვლების ზღვრული ნორმა ვიქსელ-ქობ-დაგლასის საწარმოო ფუნქციის შემთხვევაში

$$Q = C\,K^{\alpha}L^{\beta}, \quad C>0, \quad \alpha>0, \quad \beta>0.$$

▼ გამოვიყენოთ (8.35) ფორმულა. მივიღებთ

$$(MRTS) = \frac{Q_L'}{Q_K'} = \frac{C\,\beta\,K^{\alpha}L^{\beta-1}}{C\,\alpha\,K^{\alpha-1}L^{\beta}} = \frac{\beta\,K}{\alpha\,L}. \quad \blacksquare$$

შევნიშნოთ, რომ (8.29) ტიპის განტოლებით განსაზღვრულ წირებს ეწოდებათ Q ფუნქციის **დონის წირები**.

დონის წირები ფართოდ გამოიყენება მეცნიერების სხვადასხვა სფეროში. ფუნქციაში შემავალი სიდიდეების კონკრეტული შინაარსიდან გამომდინარე, დონის წირებს ხშირად სპეციფიკურ სახელწოდებებს უწოდებენ. ერთ-ერთ მათგანს — იზოკვანტს ჩვენ ამ პუნქტში უკვე შევხვდით. იგი აღწერს წირს, რომლის გასწვრივაც წარმოების მოცულობა მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს. დონის წირები ხშირად გამოიყენება, მაგალითად, გეოგრაფიაში სხვადასხვა რელიეფური და ფიზიკური თვისებების მუდმივობის ზონების (წირების) მისათითებლად და შესაბამისი რუკების შესაქმნელად (ასეთებია: იზოთერმები, იზობარები, იზოკლინები და სხვა).

8.12. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები

განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქცია $z=f(x, y)$, რომელსაც რაიმე D არეში აქვს კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$. ეს კერძო წარმოებულები, ზოგადად, წარმოადგენენ x და y ცვლადების ფუნქციებს. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია კვლავ გამოვთვალოთ მათი კერძო წარმოებულები.

ამ წარმოებულებს ეწოდება f ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები და ასე აღინიშნება

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_x' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y' = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f''_{xy},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x' = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f''_{yx}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_y' = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

ანალოგიურად განიმარტება $f(x, y)$ ფუნქციის მესამე, მეოთხე და უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები.

$f''_{xy}(x,y)$ და $f''_{yx}(x,y)$ წარმოებულებს უწოდებენ მეორე რიგის შერეულ კერძო წარმოებულებს. შერეულ კერძო წარმოებულებს აქვთ მეტად მნიშვნელოვანი თვისება, რომელიც **შვარცის თეორემის** სახელწოდებით არის ცნობილი.

თეორემა 8.1. (შვარცის თეორემა) თუ $z=f(x,y)$ ფუნქცია და მისი პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულები უწყვეტია გარკვეულ არეში, მაშინ ამ არის ყოველ წერტილში ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}. \quad \blacksquare$$

ამრიგად, შერეული კერძო წარმოებულების მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული გაწარმოების რიგზე.

ამოცანა 8.9. მოცემულია ფუნქცია

$$f(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}, \quad x>0, \; y>0,$$

სადაც α და β ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

▼ ამისათვის საჭიროა, ჯერ ვიპოვოთ ამ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები:

$$f_x'(x, y) = \alpha\, x^{\alpha-1} y^{\beta},$$
$$f_y'(x, y) = \beta\, x^{\alpha} y^{\beta-1}.$$

თუ მიღებულ გამოსახულებებს გავაწარმოებთ x-ით და y-ით მივიღებთ:

$$f_{xx}'' = \alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2} y^{\beta}, \qquad f_{yy}'' = \beta(\beta-1)\, x^{\alpha} y^{\beta-2},$$
$$f_{xy}'' = \alpha\,\beta\, x^{\alpha-1} y^{\beta-1}, \qquad f_{yx}'' = \alpha\,\beta\, x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}.$$

ბოლო ორი ტოლობის შედარება გვიჩვენებს, რომ $f_{xy}'' = f_{yx}''$, რაც სრულ თანხმობაშია შვარცის თეორემასთან. ■

ამოცანა 8.10. ვიპოვოთ $f(x, y) = \sqrt{1-x^2+2y^2}$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

▼ იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $f(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები, საჭიროა ჯერ ვიპოვოთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები:

$$f_x'(x, y) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2+2y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2+2y^2}},$$
$$f_y'(x, y) = \frac{4y}{2\sqrt{1-x^2+2y^2}} = \frac{2y}{\sqrt{1-x^2+2y^2}}.$$

თუ მიღებულ გამოსახულებებს გავაწარმოებთ x-ით და y-ით, მივიღებთ:

$$f_{xx}''(x, y) = \frac{-\sqrt{1-x^2+2y^2} - x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2+2y^2}}}{1-x^2+2y^2} = -\frac{1+2y^2}{\sqrt{\left(1-x^2+2y^2\right)^3}},$$

$$f_{yy}''(x, y) = \frac{2\sqrt{1-x^2+2y^2} - 2y\cdot\dfrac{2y}{\sqrt{1-x^2+2y^2}}}{1-x^2+2y^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2+2y^2\right)^3}},$$

$$f''_{xy}(x, y) = 2xy\left(1 - x^2 + 2y^2\right)^{-3/2},$$

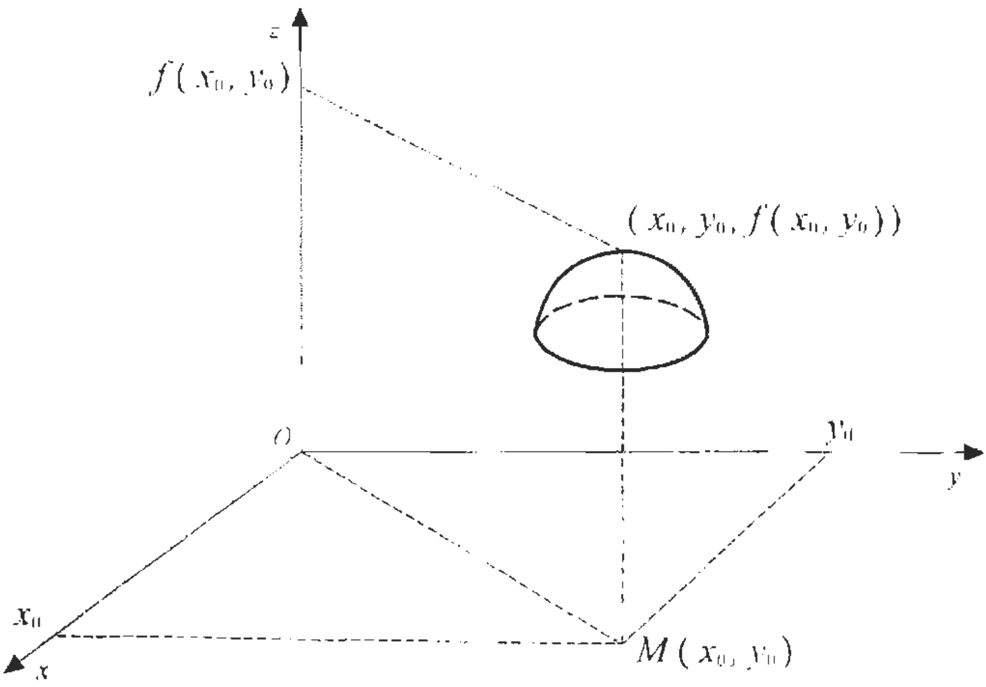
$$f''_{yx}(x, y) = 2xy\left(1 - x^2 + 2y^2\right)^{-3/2}.$$

ისევე, როგორც წინა ამოცანაში, აქაც $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$, ე. ი. გაწარმოების შედეგი არ არის დამოკიდებული გაწარმოების რიგზე. ■

8.13. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

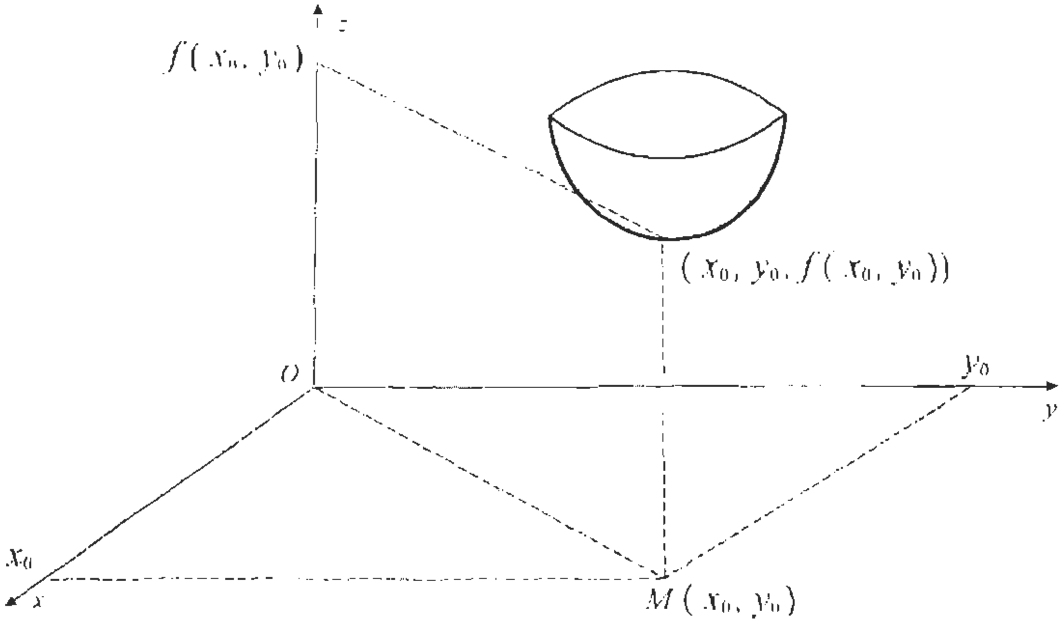
ვთქვათ, მოცემულია ორი ცვლადის ფუნქცია $z = f(x, y)$, რომელიც განსაზღვრულია Oxy სიბრტყის რაიმე D არეში. დავუშვათ, $M(x_0, y_0) \in D$.

● ამბობენ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია $M(x_0, y_0)$ წერტილში აღწევს **ლოკალურ მაქსიმუმს**, თუ არსებობს D არეში $M(x_0, y_0)$ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი $N(x, y)$ წერტილისათვის მართებულია უტოლობა $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (იხ. ნახ. 8.3). ■



ნახ. **8.3**

● ამბობენ, რომ $f(x,y)$ ფუნქცია $M(x_0,y_0)$ წერტილში აღწევს **ლოკალურ მინიმუმს**, თუ არსებობს D არეში $M(x_0,y_0)$ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი $N(x,y)$ წერტილისათვის მართებულია უტოლობა $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ (იხ. ნახ. 8.4). ■



ნახ. 8.4

ლოკალური მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს **ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები** ეწოდება, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობებს ამ წერტილებში – **ფუნქციის ექსტრემუმები**.

მრავალი ცვლადის ფუნქციების ექსტრემუმების მოძებნის ამოცანაში არსებით როლს თამაშობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 8.2. თუ $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი $M(x_0,y_0)$ წერტილში და ამ წერტილში არსებობს $f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $f'_x(x_0,y_0)$ და $f'_y(x_0,y_0)$, მაშინ მართებულია ტოლობები

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad ■ \tag{8.37}$$

$M(x_0,y_0)$ წერტილს, რომლის კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ ამ სის-

ტემას, ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილი.

უწყვეტ ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება ჰქონდეს აგრეთვე იმ წერტილში, რომელშიც კერძო წარმოებულები არ არსებობენ.

● ყველა იმ წერტილების ერთობლიობას, რომელშიც $f(x,y)$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები ნულის ტოლია ან არ არსებობს, **კრიტიკული წერტილები** ეწოდება. ■

თეორემა 8.2 გვიჩვენებს, რომ ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ კრიტიკულ წერტილებს შორის. შევნიშნოთ, რომ ისევე, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციებისათვის, აქაც პირველი რიგის კერძო წარმოებულების ნულთან ტოლობა წარმოადგენს ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას.

ჩამოვაყალიბოთ **ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.**

ვთქვათ, $f(x,y)$ ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები და $M(x_0,y_0)$ არის $f(x,y)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი. ვიპოვოთ $f(x,y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები $M(x_0,y_0)$ წერტილში და გამოვთვალოთ რიცხვები:

$$A = f''_{xx}(x_0,y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0,y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0,y_0).$$

ექსტრემუმის არსებობა დგინდება შემდეგი კრიტერიუმით:

(ა) თუ $AC - B^2 > 0$, მაშინ $M(x_0,y_0)$ მინიმუმის წერტილია, როცა $A>0$ (ან $C>0$), ხოლო $M(x_0,y_0)$ მაქსიმუმის წერტილია, როცა $A<0$ (ან $C<0$);

(ბ) თუ $AC - B^2 < 0$, მაშინ $M(x_0,y_0)$ არ არის ექსტრემუმის წერტილი;

(გ) თუ $AC - B^2 = 0$, მაშინ გვაქვს საეჭვო შემთხვევა და საჭიროა დამატებითი გამოკვლევა იმის დასადგენად, გვაქვს თუ არა ექსტრემუმი $M(x_0,y_0)$ წერტილში.

ამოცანა 8.11. ვიპოვოთ $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 5x + 8y$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

▼ ჯერ ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილები. ამისათვის პირველი რი-

გის კერძო წარმოებულები გავუტოლოთ ნულს:

$$\begin{cases} f_x'(x,y) = 2x+5=0 \\ f_y'(x,y) = 4y+8=0. \end{cases}$$

აქედან $x = -2.5,\ \ y = -2$.

შევამოწმოთ, არის თუ არა $(-2.5,\ -2)$ ექსტრემუმის წერტილი. გამოვთვალოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები ამ წერტილში:

$A = f_{xx}''(-2.5,\ -2) = 2,\ \ C = f_{yy}''(-2.5,\ -2) = 4,\ \ B = f_{xy}''(-2.5,\ -2) = 0.$

ცხადია, რომ $AC - B^2 = 8 > 0$. რადგან $A > 0$, ამიტომ $(-2.5,\ -2)$ არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი და ეს ლოკალური მინიმუმია

$$f(-2.5,\ -2) = 6.25 + 8 - 12.5 - 16 = -14.25 . \ ■$$

ამოცანა 8.12. როგორი უნდა იყოს V მოცულობის მქონე მართკუთხა აუზის განზომილებები, რომ მის მოსაპირკეთებლად დაიხარჯოს უმცირესი რაოდენობის მასალა?

▼ აღვნიშნოთ აუზის ფსკერის სიგრძე x-ით, სიგანე — y-ით, ხოლო სიღრმე — z-ით. მაშინ ცხადია, $V = xyz$. აქედან

$$z = \frac{V}{xy}.$$

ცვლადების გეომეტრიული შინაარსიდან გამომდინარეობს, რომ $x > 0$, $y > 0,\ z > 0$. ცხადია, რომ მოსაპირკეთებელია აუზის ფსკერი და ყველა გვერდითი (შიგა) წახნაგი. მათი ფართობების ჯამი იქნება

$$S = xy + 2xz + 2yz,$$

ანუ

$$S(x,\ y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}.$$

მაშასადამე, უნდა ვიპოვოთ $S(x,y)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი. ამისათვის ვიპოვოთ მისი პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებუ-

ლები. გვექნება:

$$S'_x = y - \frac{2V}{x^2}, \quad S'_y = x - \frac{2V}{y^2}, \quad S''_{xx} = \frac{4V}{x^3}, \quad S''_{xy} = 1, \quad S''_{yy} = \frac{4V}{y^3}.$$

კრიტიკული წერტილის კოორდინატების საპოვნელად განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} S'_x = y - \dfrac{2V}{x^2} = 0 \\ S'_y = x - \dfrac{2V}{y^2} = 0. \end{cases}$$

აქედან მივიღებთ $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V}$.

მაშასადამე, S ფუნქციის კრიტიკული წერტილია $M\left(\sqrt[3]{2V},\ \sqrt[3]{2V}\right)$.

მარტივად გამოვთვლით, რომ

$$A = S''_{xx}(x_0,\ y_0) = 2,\ \ B = S''_{xy}(x_0,\ y_0) = 1,\ \ C = S''_{yy}(x_0,\ y_0) = 2.$$

ამიტომ $AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$.

ვინაიდან $A > 0$, ამიტომ $M(x_0, y_0)$ წერტილში S ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი. ლოკალური მინიმუმის ამ წერტილს შეესაბამება აუზის შემდეგი განზომილებები:

$$x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V},\ z_0 = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}.$$

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ ვეძებთ $S(x,y)$ ფუნქციის უმცირეს მნიშვნელობას პირველ მეოთხედში ($x > 0$, $y > 0$). ამიტომ, კრიტიკული წერტილების გარდა, $S(x,y)$ ფუნქციის ყოფაქცევა უნდა გამოვიკვლიოთ არის საზღვართან ($x \to 0$ ან $y \to 0$) და უსასრულობის მიდამოში ($x \to +\infty$ ან $y \to +\infty$). მარტივად შევამოწმებთ, რომ $S(x,y) \to +\infty$, როცა (x,y) წერტილი უახლოვდება პირველ მეოთხედის საზღვარს ან მიისწრაფვის უსასრულობისკენ. მაშასადამე, $S(x,y)$ ფუნქცია უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს კრიტიკულ წერტილში. რადგან $S(x,y)$ ფუნქციას გააჩნია მხოლოდ ერთი კრიტიკული წერტილი – ზემოთ მოძებნილი ლოკალური მინიმუმის $M(x_0, y_0)$ წერტილი, ამიტომ

$$\min S(x, y) = S(x_0, y_0) = 3\sqrt[3]{4V^2}. \ ■$$

ამოცანა 8.13. ფირმა აწარმოებს და ყიდის ორი G_1 და G_2 ტიპის საქონელს. საქონლის ერთეულის ფასი, შესაბამისად, $P_1 = 1000$ დოლარი და $P_2 = 800$ დოლარია. მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა

$$(TC) = 2Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 + Q_2^2,$$

სადაც Q_1 და Q_2 აღნიშნავენ წარმოებული G_1 და G_2 სახის პროდუქციების რაოდენობებს.

ვიპოვოთ წარმოების დონე, რომელსაც შეესაბამება მოგების ფუნქციის მაქსიმუმი და გამოვთვალოთ მაქსიმალური მოგება.

▼ რადგან G_1 საქონლის ერთეულის ფასია 1000 დოლარი, ამიტომ ამ საქონლიდან მთლიანი ამონაგები იქნება

$$(TR)_1 = 1000\, Q_1.$$

ანალოგიურად, G_2 საქონლიდან მთლიანი ამონაგები იქნება

$$(TR)_2 = 800\, Q_2.$$

ფირმის მთლიანი ამონაგები ორივე სახის პროდუქციიდან იქნება

$$(TR) = (TR)_1 + (TR)_2 = 1000\, Q_1 + 800\, Q_2.$$

რადგან ჩვენ გვაქვს (TR) მთლიანი ამონაგების და (TC) მთლიანი დანახარჯის ფუნქციები, შეგვიძლია დავწეროთ მოგების ფუნქცია

$$\Pi = (TR) - (TC) = 1000\, Q_1 + 800\, Q_2 - 2\, Q_1^2 - 2\, Q_1 Q_2 - Q_2^2.$$

ამრიგად, მივიღეთ ორი ცვლადის Π ფუნქცია და საძიებელია მისი ექსტრემუმი. ვიპოვოთ მისი კრიტიკული წერტილები:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial Q_1} = 1000 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \Pi}{\partial Q_2} = 800 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ ერთადერთ კრიტიკულ წერტილს

$$Q_1 = 100, \qquad Q_2 = 300.$$

ახლა გამოვიყენოთ ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა. ამისათვის დავითვალოთ Π ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

$$A = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2} = -4, \quad B = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -2, \quad C = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^2} = -2.$$

აქედან აშკარად ჩანს, რომ $AC - B^2 = 8 - 4 = 4 > 0$. ამასთან, $A < 0$. ამიტომ ზემოთ ნაპოვნი კრიტიკული წერტილი არის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი მოგების Π ფუნქციისათვის. შესაბამისი მაქსიმალური მნიშვნელობისათვის მივიღებთ

$$\Pi(100, 300) = 1000 \cdot 100 + 800 \cdot 300 - 2(100)^2 -$$
$$- 2 \cdot 100 \cdot 300 - (300)^2 = 170000 \,(\text{დოლარი}).$$

რადგან Π ფუნქციას სხვა კრიტიკული წერტილი არ გააჩნია, ისევე როგორც წინა ამოცანაში, აქაც მარტივად დავასკვნით, რომ ზემოთ მოძებნილ ლოკალური მაქსიმუმის წერტილში Π ფუნქცია აღწევს უდიდეს მნიშვნელობას.

ამრიგად, თუ ფირმა აწარმოებს 100 ერთეულ G_1 ტიპის და 300 ერთეულ G_2 ტიპის საქონელს, მაშინ მისი მოგება იქნება მაქსიმალური, რაც შეადგენს 170000 დოლარს. ■

8.14. პირობითი ექსტრემუმი. ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ამოცანები, რომლებშიც საჭიროა მოიძებნოს მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი ისეთ სიტუაციაში, როდესაც არგუმენტები აკმაყოფილებენ რაიმე დამატებით პირობებს. ასეთ ამოცანებს ეწოდება **პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები.**

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

ვთქვათ, მოცემულია ფირმის საწარმოო ფუნქცია

$$Q=2KL, \qquad (8.38)$$

სადაც Q არის წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა, ხოლო K და L აღნიშნავენ მოხმარებული კაპიტალისა და შრომის რაოდენობებს.

დავუშვათ, რომ კაპიტალის 1 ერთეულის მოხმარება ფირმას უჯდება a დოლარი, შრომის 1 ერთეულისა კი — b დოლარი. მაშინ ფირმის დანახარჯი Q რაოდენობის პროდუქციის საწარმოებლად, რომელიც მოითხოვს K ერთეულ კაპიტალს და L ერთეულ შრომას, ტოლი იქნება შემდეგი გამოსახულებისა

$$aK+bL.$$

ვთქვათ, ფირმას გამოყოფილი აქვს ფიქსირებული C_0 თანხა წარმოების K და L ფაქტორების დანახარჯების ანაზღაურებისათვის, ე. ი. K და L სიდიდეები შეიძლება იცვლებოდეს, მაგრამ მათზე დანახარჯი უნდა იყოს C_0 სიდიდის ტოლი, ანუ

$$aK+bL=C_0. \qquad (8.39)$$

ცხადია, ფირმის მიზანია აწარმოოს რაც შეიძლება მეტი პროდუქცია დანახარჯებისათვის გამოყოფილი ფიქსირებული თანხით. ამ ეკონომიკურ ამოცანას ბუნებრივად მივყავართ შემდეგ მათემატიკურ ამოცანამდე: ვიპოვოთ (8.38) ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა, როდესაც დამოუკიდებელი K და L ცვლადები აკმაყოფილებენ (8.39) პირობას.

როგორც ავღნიშნეთ, ასეთი ტიპის ამოცანას ეწოდება პირობითი ექსტრემუმების პოვნის ამოცანა.

შევისწავლოთ ორი ცვლადის ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის მოძებნის **ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი**.

ვთქვათ, მოსაძებნია $z=f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი, როდესაც დამოუკიდებელი ცვლადები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი პირობით

$$g(x,y)=0.$$

ამ უკანასკნელ ტოლობას ხშირად **ბმის განტოლებას** უწოდებენ. შემოვიღოთ ახალი დამხმარე ფუნქცია $F(x,y,\lambda)$, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y).$$

$F(x, y, \lambda)$-ს უწოდებენ **ლაგრანჟის ფუნქციას**, ხოლო λ-ს — **ლაგრანჟის მამრავლს**. შევნიშნოთ, რომ თუ $g(x, y) = 0$, მაშინ $F(x, y, \lambda) = f(x, y)$ და, კერძოდ, F და f ფუნქციების ექსტრემუმის წერტილები და ექსტრემუმები ერთმანეთს ემთხვევა. აქედან გამომდინარე, იმისათვის, რომ ვიპოვოთ იმ M წერტილის x და y კოორდინატები, რომლებიც აკმაყოფილებენ $g(x, y) = 0$ განტოლებას და რომლისათვისაც $z = f(x, y)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს პირობითი მაქსიმუმი ან მინიმუმი, საჭიროა გამოვთვალოთ $F(x, y, \lambda)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები x, y და λ ცვლადებით, გავუტოლოთ ისინი ნულს და მიღებული სისტემიდან განვსაზღვროთ საძიებელი x, y და λ სიდიდეები, ე. ი. უნდა ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda\, g'_x(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda\, g'_y(x, y) = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (8.40)$$

მიღებული სისტემა წარმოადგენს **პირობითი ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას**. თუ (x_0, y_0, λ_0) არის (8.40) სისტემის ამონახსნი, მაშინ $N(x_0, y_0, \lambda_0)$ წერტილი წარმოადგენს ლაგრანჟის $F(x, y, \lambda)$ ფუნქციის სტაციონარულ წერტილს. შევნიშნოთ, რომ $M(x_0, y_0)$ წერტილს უწოდებენ **პირობითი ექსტრემუმის სტაციონარულ წერტილს ბმის** $g(x, y) = 0$ **განტოლების მიმართ**.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ პირობითი ექსტრემუმის არსებობის **საკმარისი პირობები**. ვთქვათ, (x_0, y_0, λ_0) არის (8.40) სისტემის ამონახსნი. ამასთან, ვიგულისხმოთ, რომ $f(x, y)$ და $g(x, y)$ ფუნქციებს $M(x_0, y_0)$ წერტილში აქვთ მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები. შევადგინოთ შემდეგი დეტერმინანტი

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g'_x(x_0,y_0) & g'_y(x_0,y_0) \\ g'_x(x_0,y_0) & F''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0) & F''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ g'_y(x_0,y_0) & F''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) & F''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0) \end{vmatrix}. \tag{8.41}$$

მტკიცდება, რომ თუ $\Delta > 0$, მაშინ $z = f(x,y)$ ფუნქციას $M(x_0,y_0)$ წერტილში აქვს პირობითი მინიმუმი, ხოლო თუ $\Delta < 0$, მაშინ $z = f(x,y)$ ფუნქციას $M(x_0,y_0)$ წერტილში აქვს პირობითი მაქსიმუმი

ამოცანა 8.14. ვიპოვოთ $z = 6 - 4x - 3y$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი, თუ ბმის განტოლებაა $x^2 + y^2 = 1$.

▼ ამოცანის პირობის თანახმად, ბმის განტოლებას აქვს სახე: $g(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$. შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$F(x,y,\lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

მოვძებნოთ F ფუნქციის სტაციონარული წერტილები

$$\begin{cases} F'_x(x,\ y,\ z,) = -4 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y(x,\ y,\ z,) = -3 + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda(x,\ y,\ z,) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

გადავწეროთ ეს სისტემა შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\lambda} \\ y = \dfrac{3}{2\lambda} \\ \dfrac{4}{\lambda^2} + \dfrac{9}{4\lambda^2} = 1. \end{cases}$$

მესამე განტოლებიდან მივიღებთ $\lambda^2 = \dfrac{25}{4}$, ანუ $\lambda = \pm\dfrac{5}{2}$. მაშინ სისტემის პირველი და მეორე განტოლებებიდან გვექნება

$$x = \pm\frac{4}{5},\quad y = \pm\frac{3}{5}.$$

მაშასადამე, $F(x,y,\lambda)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილებია

$$M_1\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{2}\right) \text{ და } M_2\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5},\ -\frac{5}{2}\right).$$

დავადგინოთ (8.41) დეტერმინანტის ნიშანი მიღებულ სტაციონარულ წერტილებში. გამოვთვალოთ დეტერმინანტში შემავალი ყველა ელემენტი. რადგან $g(x,y)=x^2+y^2-1$, ამიტომ

$$g'_x\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)=2x\bigg|_{x=\frac{4}{5}}=\frac{8}{5}, \qquad g'_y\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)=2y\bigg|_{y=\frac{3}{5}}=\frac{6}{5}\,.$$

გამოვთვალოთ $F(x,y,\lambda)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულების მნიშვნელობები M_1 წერტილში. მივიღებთ:

$$F''_{xx}\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{2}\right)=2\lambda\bigg|_{\lambda=\frac{5}{2}}=5,\ \ F''_{yy}\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{2}\right)=2\lambda\bigg|_{\lambda=\frac{5}{2}}=5,\ \ F''_{xy}\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{2}\right)=0.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები Δ დეტერმინანტის (8.41) გამოსახულებაში

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} & 5 & 0 \\ \frac{6}{5} & 0 & 5 \end{vmatrix}=20>0\,.$$

მაშასადამე, წერტილი $\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ არის პირობითი მინიმუმის წერტილი და ეს მინიმალური მნიშვნელობაა $f\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)=6-\frac{16}{5}-\frac{9}{5}=1.$

ანალოგიურად, M_2 წერტილში გვექნება:

$$g'_x\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)=-\frac{8}{5}, \qquad g'_y\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)=-\frac{6}{5},$$

$$F''_{xx}\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5},\ -\frac{5}{2}\right)=-5, \qquad F''_{yy}\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5},\ -\frac{5}{2}\right)=-5,$$

$$F''_{xy}\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5},\ -\frac{5}{2}\right)=0.$$

ამ შემთხვევაში

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{8}{5} & -5 & 0 \\ -\frac{6}{5} & 0 & -5 \end{vmatrix} = -20 < 0 .$$

მაშასადამე, $M_2\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$ არის პირობითი მაქსიმუმის წერტილი და ეს მაქსიმალური მნიშვნელობაა

$$f\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)=6+\frac{16}{5}+\frac{9}{5}=11.\ ■$$

ამოცანა 8.15. მონოპოლისტური ფირმა უშვებს G_1 და G_2 სახის Q_1 და Q_2 რაოდენობის საქონელს, რომელთა ერთეულების ფასებია (დოლარობით), შესაბამისად, P_1 და P_2. მთლიანი დანახარჯი გამოითვლება ფორმულით

$$(TC)=10Q_1+10Q_2+Q_1Q_2.$$

მოთხოვნის ფუნქციებს, შესაბამისად, აქვს სახე:

$$P_1=50-Q_1+Q_2, \quad P_2=30+2Q_1-Q_2.$$

ფირმამ ერთობლივად უნდა აწარმოოს G_1 და G_2 საქონლის ფიქსირებული რაოდენობა — 15 ერთეული (ანუ $Q_1+Q_2=15$). გამოვიკვლიოთ, წარმოების რა რეჟიმს მივყავართ მაქსიმალურ მოგებამდე?

▼ გავიხსენოთ, რომ მოგების ფუნქცია გამოისახება შემდეგნაირად

$$\Pi=(TR)-(TC),$$

სადაც (TR) მთლიანი ამონაგებია, ხოლო (TC) — მთლიანი დანახარჯი. ამოცანის პირობის თანახმად

$$(TC)=10Q_1+10Q_2+Q_1Q_2.$$

რაც შეეხება მთლიან ამონაგებს, ამოცანის პირობების თანახმად, იგი გამოითვლება ტოლობით

$$(TR) = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = (50 - Q_1 + Q_2)\ Q_1 + (30 + 2Q_1 - Q_2)\ Q_2 =$$
$$= 50 Q_1 + 30 Q_2 - Q_1^2 + 3 Q_1 Q_2 - Q_2^2.$$

ამიტომ მოგების ფუნქციისათვის მივიღებთ გამოსახულებას

$$\Pi = 40 Q_1 + 20 Q_2 - Q_1^2 + 2 Q_1 Q_2 - Q_2^2.$$

ამრიგად, საჭიროა Π ფუნქციის მაქსიმუმის მოძებნა, როდესაც ბმის განტოლებაა

$$Q_1 + Q_2 = 15$$

ანუ

$$g(Q_1, Q_2) = Q_1 + Q_2 - 15 = 0.$$

შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$F(Q_1, Q_2, \lambda) = 40 Q_1 + 20 Q_2 - Q_1^2 + 2 Q_1 Q_2 - Q_2^2 + \lambda\ (Q_1 + Q_2 - 15).$$

თეორიული სქემის თანახმად, კრიტიკული წერტილის მოსაძებნად ამ F ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები უნდა გავუტოლოთ ნულს:

$$\begin{cases} F'_{Q_1}(Q_1, Q_2, \lambda) = 40 - 2 Q_1 + 2 Q_2 + \lambda = 0 \\ F'_{Q_2}(Q_1, Q_2, \lambda) = 20 + 2 Q_1 - 2 Q_2 + \lambda = 0 \\ F'_{\lambda}(Q_1, Q_2, \lambda) = Q_1 + Q_2 - 15 = 0, \end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases} 2 Q_1 - 2 Q_2 - \lambda = 40 \\ -2 Q_1 + 2 Q_2 - \lambda = 20 \\ Q_1 + Q_2 = 15. \end{cases}$$

პირველი ორი განტოლების შეკრებით მივიღებთ: $\lambda = -30$. მაშინ სისტემის პირველი განტოლებიდან გვაქვს $2 Q_1 - 2 Q_2 + 30 = 40$ ანუ $Q_1 - Q_2 = 5$. ამ განტოლების დაჯგუფება სისტემის მესამე განტოლებასთან გვაძლევს:

$$\begin{cases} Q_1 - Q_2 = 5 \\ Q_1 + Q_2 = 15. \end{cases}$$

აქედან კი დავადგენთ, რომ $Q_1 = 10$, $Q_2 = 5$. ამრიგად, ზემოთ მიღებულ სამ-

უცნობიან განტოლებათა სისტემის საძიებელი ამონახსენია

$$Q_1 = 10, \quad Q_2 = 5, \quad \lambda = -30.$$

საბოლოო დასკვნის გამოსატანად გამოვიკვლიოთ (8.41) დეტერმინანტის ნიშანი $M_0 = (10,\ 5,\ -30)$ წერტილში. ჩვენს შემთხვევაში:

$$g'_{Q_1}(M_0) = 1,\quad g'_{Q_2}(M_0) = 1,\quad F''_{Q_1Q_1}(M_0) = -2,\quad F''_{Q_2Q_2}(M_0) = -2,\quad F''_{Q_1Q_2}(M_0) = 2.$$

ამიტომ (8.41) ტოლობის ძალით გვექნება

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $(Q_1,\ Q_2) = (10,\ 5)$ წერტილში მოგების Π ფუნქციას გააჩნია პირობითი მაქსიმუმი და ეს მაქსიმალური მნიშვნელობაა

$$\Pi(10, 5) = 40 \cdot 10 + 20 \cdot 5 - 10^2 - 5^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5 = 475 \quad \text{(დოლარი)}.$$

ამრიგად, ფირმის მოგება მიაღწევს მაქსიმუმს, როცა ის აწარმოებს $Q_1 = 10$ ერთეულ G_1 სახის პროდუქციას და $Q_2 = 5$ ერთეულ G_2 სახის პროდუქციას. ამ დროს მოგება მაქსიმალურია და შეადგენს 475 (დოლარს). ■

შევნიშნოთ, რომ ლაგრანჟის მეთოდი შეიძლება განზოგადდეს იმ შემთხვევაშიც, როდესაც გვაქვს ორზე მეტი დამოუკიდებელი ცვლადი და მოცემულია ორი ან მეტი ბმის განტოლება.

გავაკეთოთ ერთი მეტად მნიშვნელოვანი შენიშვნა. ზემოთ აღწერილი ლაგრანჟის მეთოდი უნივერსალურია და იგი ყოველთვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ პირობითი ექსტრემუმის მოსაძებნად, თუმცა, ზოგიერთ შემთხვევაში, პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა შეიძლება უფრო მარტივად გადავწყვიტოთ. კერძოდ, ვთქვათ, ბმის $g(x, y) = 0$ განტოლება ისეთია, რომ ამ განტოლებიდან შესაძლებელია ერთ-ერთი ცვლადის, მაგალითად, y-ის განსაზღვრა: $y = \varphi(x)$.

თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობას განსახილველ $z = f(x, y)$ ფუნქციაში, მივიღებთ ერთი ცვლადის $z = f\left(x, \varphi(x)\right)$ ფუნქციას. ამრიგად, ასეთ შემთხვევაში, პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა დაიყვანება ჩვეულებრივი ექს-

ტრემუმის ამოცანაზე ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის. სწორედ ასეთი ტიპის ამოცანას წარმოადგენს ამ პუნქტის დასაწყისში ჩამოყალიბებული ამოცანა საწარმოო ფუნქციისათვის პირობითი მაქსიმუმის მოძებნის შესახებ. ასეთივე ტიპისაა ამოცანა 8.15. განვიხილოთ კიდევ ერთი კონკრეტული ამოცანა.

ამოცანა 8.16. ვიპოვოთ $z = xy$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი, თუ სრულდება ბმის შემდეგი განტოლება $x - 2y = 3$.

▼ ბმის განტოლებიდან მივიღებთ

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

მაშინ გამოსაკვლევი ფუნქცია მიიღებს სახეს

$$z = xy = x\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x.$$

ამრიგად, პირობითი ექსტრემუმის მოძებნის საკითხი დავიყვანეთ ერთი ცვლადის $z = z(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$ ფუნქციის ჩვეულებრივი ექსტრემუმის მოძებნაზე. რადგან $z' = x - \frac{3}{2}$, ამიტომ კრიტიკული წერტილია $x_0 = \frac{3}{2}$.

მეორე მხრივ, ცხადია, რომ $z'' = 1 > 0$, ამიტომ აღნიშნული კრიტიკული წერტილი მინიმუმის წერტილია და ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობაა $z\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{8}$, რაც საძიებელ პირობით ექსტრემუმს წარმოადგენს. ■

8.15. სავარჯიშოები

1. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

1) $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$;

4) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$;

2) $z = \ln\left[x^2(y-9)\right]$;

5) $z = \dfrac{1}{x^2 + 4y^2}$;

3) $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$; 6) $z=\dfrac{\sqrt{xy}}{x^2+4y^2+1}$.

2. გამოთვალეთ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და სრული დიფერენციალები მითითებულ წერტილებში:

1) $z=x^3y+4xy+4x-3y+7,\quad M(1,\ -3)$;

2) $z=\dfrac{xy}{x+y},\quad M(9,\ -2)$;

3) $z=(2y-x)^2+(y+x)^2,\quad M(0,\ 10)$;

4) $z=\ln(10-xy)+x^2e^{8y},\quad M(1,\ 2)$;

5) $z=3x^{1/7}\ y^{8/9}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}},\quad M(1,\ 1)$.

3. იპოვეთ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

1) $z=x^4+6x^2y^2+7xy+9$; 2) $z=x^2y^2-3xy^3-xy$;

3) $z=\dfrac{x^2}{1-2y}$; 4) $z=\dfrac{y^2}{2x+y}+e^{xy}$;

5) $z=\ln\left(x^2+y\right)$.

4. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $Q=400-3P-2P_A+0.01Y$.

იპოვეთ მოთხოვნის

(ა) კერძო ელასტიკურობა ფასის მიმართ;

(ბ) ჯვარედინი ელასტიკურობა;

(გ) კერძო ელასტიკურობა Y შემოსავლის მიმართ, როცა

$$P=20,\qquad P_A=30\qquad \text{და}\qquad Y=5000;$$

(დ) ზემოთ მითითებულ პირობებში როგორი იქნება მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება, თუ Y შემოსავალი გაიზრდება 5%-ით.

5. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $Q=200-2P-P_A+0.01Y^2$.

იპოვეთ მოთხოვნის

(ა) კერძო ელასტიკურობა ფასის მიმართ;

(ბ) ჯვარედინი ელასტიკურობა;

(გ) კერძო ელასტიკურობა შემოსავლის მიმართ, თუ $P=10$, $P_A=15$ და $Y=100$;

(დ) გამოთვალეთ მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება იმავე პირობებში, თუ P_A ალტერნატიული პროდუქციის ფასი იზრდება 20 %-ით.

6. იპოვეთ რთული ფუნქციის წარმოებული:

1) $z=\dfrac{x}{y}$, $x=2^t$, $y=\ln t$;

2) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$, $x=e^t$, $y=t^2$;

3) $z=\ln(1+xy)$, $x=\ln t$, $y=\sqrt[3]{t}$;

4) $z=e^{x^2+2y}$, $x=t^2$, $y=\ln t$;

5) $z=\left(xy+\dfrac{y}{x}\right)^{1/2}$, $x=e^t$, $y=t^3$.

7. საწარმოო ფუნქციაა $Q=K^2+2L^2$. იპოვეთ:

(ა) კაპიტალის ზღვრული პროდუქტი (MP_K);

(ბ) შრომის ზღვრული პროდუქტი (MP_L);

(გ) ზღვრული შენაცვლების ნორმა $(MRTS)$.

8. საწარმოო ფუნქციაა $Q=2LK+\sqrt{L}$. იპოვეთ:

(ა) კაპიტალის ზღვრული პროდუქტი (MP_K),

(ბ) შრომის ზღვრული პროდუქტი (MP_L),

(გ) ზღვრული შენაცვლების ნორმა $(MRTS)$,

თუ $K=7$ და $L=4$.

დაწერეთ იზოკვანტების შესაბამისი განტოლება. გამოთვალეთ, რა სიდიდით უნდა გაიზარდოს K კაპიტალი, თუ L შრომის ფაქტორი მცირდება 1 ერთეულით (იგულისხმება, რომ ამ ცვლილებას არ უნდა მოჰყვეს წარმოებული პროდუქციის დონის ცვლილება, ე. ი. (L, K) წერტილი იცვლება მხოლოდ ფიქსირებულ იზოკვანტზე).

9. ფირმას კაპიტალის 1 ერთეულზე ეხარჯება 1 დოლარი, ხოლო შრომის 1 ერთეულზე – 2 დოლარი. ფირმის საწარმოო ფუნქციაა

$$Q = 4LK + L^2.$$

წარმოების K და L ფაქტორებზე ხარჯისათვის ფირმას გამოყოფილი აქვს ფიქსირებული თანხა — 105 დოლარი. მოძებნეთ წარმოების ოპტიმალური რეჟიმი (ანუ როგორ უნდა შეარჩიოს ფირმამ K კაპიტალის და L შრომის რაოდენობები, რომ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა Q იყოს მაქსიმალური).

10. ფირმის საწარმოო ფუნქციაა

$$Q = 2\,K^{1/2}L^{1/2}.$$

K კაპიტალის 1 ერთეული ღირს 4 დოლარი, ხოლო L შრომის 1 ერთეული — 3 დოლარი. მოძებნეთ წარმოების ოპტიმალური რეჟიმი (ე. ი. ისეთი რეჟიმი, როდესაც წარმოებული პროდუქცია იქნება მაქსიმალური), თუ აღნიშნული K და L წარმოების ფაქტორების მოხმარებისათვის დადგენილი დანახარჯები ფიქსირებულია და შეადგენს 210 დოლარს.

11. ფირმის საწარმოო ფუნქციაა

$$Q = 10\,K^{1/2}L^{1/4}.$$

K კაპიტალის 1 ერთეული ღირს 4 დოლარი, ხოლო L შრომის 1 ერთეული — 5 დოლარი. ფირმის ხარჯები წარმოების K და L ფაქტორებზე ფიქსირებულია და შეადგენს 60 დოლარს. იპოვეთ წარმოების ოპტიმალური რეჟიმი.

12. ფირმის საწარმოო ფუნქციაა

$$Q = 2\sqrt{L} + 3\sqrt{K}.$$

K კაპიტალის 1 ერთეულზე ფირმის დანახარჯია 1 დოლარი, ხოლო L შრომის 1 ერთეულზე — 2 დოლარი. წარმოებული პროდუქციის ერთი ერთეული იყიდება 8 დოლარად. იპოვეთ მოგების ფუნქციის მაქსიმუმი, თუ ცნობილია, რომ ფირმის ხარჯები K და L წარმოების ფაქტორებზე ფიქსირებულია და შეადგენს 99 დოლარს.

K და L სიდიდეების რა მნიშვნელობებისათვის მიიღწევა ეს მაქსიმალური მოგება. იქნება თუ არა ამავე K და L სიდიდეებისათვის წარმოების რეჟიმი ოპტიმალური (ე. ი. მიაღწევს თუ არა K და L პარამეტრების ამავე მნიშვნელობებისათვის Q სიდიდე მაქსიმუმს)?

13. მონოპოლისტური ფირმა აწარმოებს G_1 და G_2 სახის Q_1 და Q_2 რაოდენობის პროდუქციას, რომელთა ერთეულის ფასებია, შესაბამისად, P_1 და P_2. მთლიანი დანახარჯი გამოითვლება ტოლობით

$$(TC) = 5Q_1 + 10Q_2.$$

შესაბამისი მოთხოვნის ფუნქციებია

$$P_1 = 50 - Q_1 - Q_2 \quad \text{და} \quad P_2 = 100 - Q_1 - 4Q_2.$$

ფირმის მთლიანი დანახარჯი ფიქსირებულია და ტოლია 100 დოლარის. იპოვეთ ფირმის წარმოების რეჟიმი, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას.

14. ფირმა არის G_1 და G_2 საქონლის მონოპოლისტური მწარმოებელი. G_1 საქონლის რაოდენობაა Q_1 და მისი შესაბამისი მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P_1 = 50 - Q_1.$$

ანალოგიურად, G_2 საქონლის რაოდენობაა Q_2 და მისი შესაბამისი მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P_2 = 95 - 3Q_2.$$

წარმოების მთლიანი დანახარჯი მოცემულია შემდეგი ტოლობით

$$(TC) = Q_1^2 + 3\,Q_1 Q_2 + Q_2^2.$$

იპოვეთ, წარმოების რა დონე უზრუნველყოფს ფირმის მაქსიმალურ მოგებას და იპოვეთ ამ მაქსიმალური მოგების სიდიდე.

15. ფირმა ყიდის ერთი და იმავე ტიპის საქონელს ორ ბაზარზე სხვადასხვა ფასად. პირველ ბაზარზე მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P_1 + Q_1 = 500,$$

ხოლო მეორე ბაზარზე –

$$2P_2 + 3Q_2 = 700.$$

აქ P_i და Q_i $(i = 1, 2)$ აღნიშნავს ფასს და მოთხოვნას i-ურ ბაზარზე. ფირმის მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $(TC) = 50000 + 20\,(Q_1 + Q_2)$.

განსაზღვრეთ ფირმის ის საფასო პოლიტიკა, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას და იპოვეთ ამ მაქსიმალური მოგების სიდიდე.

16. ფირმა ერთსა და იმავე საქონელს საშინაო და საგარეო ბაზარზე ყიდის სხვადასხვა ფასად. თითოეული ბაზრის შესაბამისი მოთხოვნა $\left(Q_i\right)$ და ფასი $\left(P_i\right)$ დაკავშირებულია ერთმანეთთან შემდეგი მოთხოვნის ფუნქციებით:

(ა) $\begin{cases} Q_1 = 300 - P_1 \\ Q_2 = 400 - P_2; \end{cases}$ (ბ) $\begin{cases} P_1 = 50 - 5Q_1 \\ P_2 = 30 - 4Q_2. \end{cases}$

ფირმის მთლიანი დანახარჯი გამოითვლება ფორმულით:

(ა) $(TC) = 5000 + 100\left(Q_1 + Q_2\right)$; (ბ) $(TC) = 10 + 10\left(Q_1 + Q_2\right)$.

განსაზღვრეთ ფირმის ისეთი საფასო პოლიტიკა, რომელიც უზრუნველყოფს ფირმის მაქსიმალურ მოგებას და იპოვეთ ამ მაქსიმალური მოგების სიდიდე.

17. ფირმა აწარმოებს და ყიდის G_1 და G_2 ტიპის პროდუქციის Q_1 და Q_2 რაოდენობას, შესაბამისად, 70 და 50 დოლარად. ფირმის სრული დანახარჯი გამოითვლება ფორმულით

$$(TC) = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2.$$

იპოვეთ ფირმის მაქსიმალური მოგება და შესაბამისი წარმოების დონე.

18. ფირმის საწარმოო ფუნქციაა

$$Q = 2\sqrt{L} + 3\sqrt{K},$$

სადაც Q არის წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა, L და K კი – შრომისა და კაპიტალის პარამეტრები. შრომის 1 ერთეულზე დანახარჯია 2 დოლარი, ხოლო კაპიტალის 1 ერთეულზე – 1 დოლარი. პროდუქციის ერთეულის გასაყიდი ფასია 8 დოლარი. L და K ცვლადების რა მნიშვნელობებისათვის მიიღწევა მაქსიმალური მოგება?

თავი 9. ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტები

ეკონომიკური თეორიის მათემატიკურ მოდელებში გვხვდება ისეთი ამოცანები, რომლებშიც საჭიროა მოიძებნოს ფუნქცია, თუ ცნობილია მისი წარმოებული. ფაქტობრივად, ასეთი ტიპის ამოცანებში საქმე გვაქვს გაწარმოების შექცეულ ოპერაციასთან, რომელსაც ინტეგრების ოპერაცია ეწოდება.

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით განუსაზღვრელი და განსაზღვრული ინტეგრალების ძირითად თვისებებს და გავეცნობით მათ გამოყენებას ეკონომიკურ ამოცანებში.

9.1. პირველადი ფუნქცია. განუსაზღვრელი ინტეგრალი

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა, რომლის ამოხსნაც მოითხოვს გაწარმოების შექცეული ოპერაციის ჩატარებას.

ვთქვათ, მოცემულია მარგინალური დანახარჯის ფუნქცია

$$(MC) = g(Q) = Q^2 + 2Q + 4$$

და გვსურს, ვიპოვოთ მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია, თუ ცნობილია, რომ ფიქსირებული დანახარჯი 100 ერთეულის ტოლია.

როგორც ვიცით, მარგინალური დანახარჯი არის $(TC) = G(Q)$ მთლიანი დანახარჯის ფუნქციის წარმოებული Q ცვლადით. ამრიგად, დასმული ეკონომიკური ამოცანა მათემატიკურად შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება: ვიპოვოთ $G(Q)$ ფუნქცია, თუ ცნობილია, რომ

$$G'(Q) = g(Q) = Q^2 + 2Q + 4. \qquad (9.1)$$

ამასთან, $G(0) = 100$ (რადგან ფიქსირებული დანახარჯი 100-ის ტოლია). უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ ფუნქცია

$$G(Q) = \frac{1}{3}Q^3 + Q^2 + 4Q + C, \qquad (9.2)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, აკმაყოფილებს (9.1) ტოლობას, ე.ი. (9.2)

ფუნქციის წარმოებული $g(Q)$ ფუნქციის ტოლია. დამატებითი პირობა $G(0)=100$ საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ნებისმიერი მუდმივი C. მართლაც, (9.2)-დან გვაქვს $G(0)=C=100$, ე.ი. $C=100$.

მაშასადამე, დავადგინეთ, რომ მთლიანი დანახარჯის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$(TC)=G(Q)=\frac{1}{3}Q^3+Q^2+4Q+100.$$

ამრიგად, ამ კონკრეტულ შემთხვევაში მარტივად მოხერხდა $g(Q)$ ფუნქციის მეშვეობით ისეთი $G(Q)$ ფუნქციის აღდგენა, რომლის წარმოებულიც არის $g(Q)$,

$$G'(Q)=g(Q).$$

ამ ოპერაციას ეწოდება $g(Q)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციის მოძებნა, $G(Q)$-ს კი ეწოდება $g(Q)$ **ფუნქციის პირველადი ფუნქცია**.

შემოვიღოთ ახლა რამდენიმე განმარტება და გავეცნოთ პირველადი ფუნქციის მოძებნის ძირითად წესებს.

● $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია რაიმე შუალედში, თუ ამ შუალედის ყოველ წერტილში

$$F'(x)=f(x). \quad \blacksquare \tag{9.3}$$

მაგალითად, $F(x)=x^3$ ფუნქცია არის $f(x)=3x^2$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში, რადგან ამ შუალედის ყოველ წერტილში

$$\left(x^3\right)'=3x^2.$$

მოცემული $f(x)$ ფუნქციით მისი პირველადის მოძებნა ინტეგრალური აღრიცხვის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს.

ბუნებრივად ისმება შემდეგი კითხვები: ყოველი ფუნქციისათვის არსებობს თუ არა პირველადი ფუნქცია? თუ არსებობს, როგორ მოვძებნოთ პირველადი ფუნქცია და ერთადერთია თუ არა იგი?

პირველ კითხვაზე პასუხობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 9.1. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე შუალედში, მაშინ ამ შუალედში არსებობს $f(x)$-ის პირველადი ფუნქცია. ■

მეორე კითხვაზე კი პასუხს იძლევა შემდეგი ორი თეორემა.

თეორემა 9.2. თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია, მაშინ $F(x)+C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე არის $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია. ■

თეორემა 9.3. თუ $F(x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქციები $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციებია რაიმე შუალედში, მაშინ მოიძებნება ისეთი C მუდმივი, რომ ამ შუალედში ადგილი ექნება ტოლობას

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

ე.ი. $f(x)$ ფუნქციის ორი პირველადი ფუნქცია ერთმანეთისაგან მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით განსხვავდება. ■

● $f(x)$ ფუნქციის ყველა $F(x)+C$ პირველადთა სიმრავლეს ეწოდება **განუსაზღვრელი ინტეგრალი** $f(x)$ ფუნქციიდან და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C. \blacksquare \tag{9.4}$$

(9.4) ტოლობაში $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **ინტეგრალქვეშა ფუნქცია**, ხოლო $f(x)dx$ გამოსახულებას ეწოდება **ინტეგრალქვეშა გამოსახულება**, x-ს ეწოდება საინტეგრაციო (ანუ ინტეგრების) ცვლადი, ხოლო $\int$ სიმბოლო წარმოადგენს ინტეგრალის ნიშანს.

მოცემული ფუნქციიდან განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნას **ფუნქციის ინტეგრება** ეწოდება.

9.2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები. ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი

განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თვისებები:

1) განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებული ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ტოლია

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x);$$

2) განუსაზღვრელი ინტეგრალის დიფერენციალი ინტეგრალქვეშა გამო-

სახულების ტოლია

$$d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx;$$

3) განუსაზღვრელი ინტეგრალი რაიმე ფუნქციის წარმოებულიდან უდრის ამ ფუნქციისა და ნებისმიერი მუდმივის ჯამს

$$\int F'(x)\,dx=F(x)+C,$$

ანუ

$$\int dF(x)=F(x)+C;$$

4) მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ

$$\int A\,f(x)\,dx=A\int f(x)\,dx,\quad A=const;$$

5) განუსაზღვრელი ინტეგრალი ორი ფუნქციის ალგებრული ჯამიდან უდრის მოცემული ფუნქციებიდან ინტეგრალების ალგებრულ ჯამს

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$$

ეს უკანასკნელი თვისება მართებულია აგრეთვე შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულთა ცხრილის გამოყენებით მარტივად მივიღებთ ძირითადი ინტეგრალების შემდეგ ცხრილს:

1) $\int dx=x+C,$

2) $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \alpha\neq-1,$

3) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C,$

4) $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C,\quad a>0,\quad a\neq1,$

5) $\int e^{x}dx=e^{x}+C,$

6) $\int\dfrac{dx}{x^{2}-a^{2}}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C,\quad a\neq0,$

7) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C,$

8) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$,

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,

11) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$,

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0$.

აღნიშნული ფორმულების მართებულობის შესამოწმებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ მარჯვენა მხარეში მდგომი ფუნქციების წარმოებულები მარცხენა მხარის ინტეგრალქვეშა ფუნქციების ტოლია, ეს კი უშუალოდ ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულების ცხრილიდან გამომდინარეობს.

9.3. განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის წესები

შევისწავლოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის მეთოდები.

1) უშუალო ინტეგრების წესი. ამ წესით სარგებლობენ იმ შემთხვევაში, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს. განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებებისა და ძირითადი ინტეგრალების ცხრილის გამოყენებით შეგვიძლია მოვახდინოთ უშუალო ინტეგრება.

ამოცანა 9.1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \left(3x^2 + \frac{2}{x} - 2^x \right) dx$$

▼

$$\int \left(3x^2 + \frac{2}{x} - 2^x \right) dx = \int 3x^2 dx + \int \frac{2}{x} dx - \int 2^x dx = 3 \int x^2 dx + 2 \int \frac{dx}{x} - \int 2^x dx =$$

$$= x^3 + 2\ln|x| - \frac{1}{\ln 2}2^x + C. \ \blacksquare$$

ამოცანა 9.2. ფირმამ დაადგინა, რომ მარგინალური დანახარჯი პროდუქციის Q ერთეულის საწარმოებლად უნდა იყოს $1.92 - 0.002Q$ (დოლარი). გავიგოთ, რამდენი დაიხარჯება პირველი 100 ერთეულის საწარმოებლად, თუ პროდუქციის პირველი ერთეულის საწარმოებლად იხარჯება 562 დოლარი?

▼ ვთქვათ, მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $(TC) = K(Q)$, მაშინ მარგინალური დანახარჯი იქნება $(MC) = K'(Q)$.

ამოცანის პირობის თანახმად, Q ერთეულის საწარმოებლად მარგინალური დანახარჯი გამოითვლება ფორმულით

$$(MC) = 1.92 - 0.002\ Q.$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ ტოლობა

$$K'(Q) = 1.92 - 0.002\ Q.$$

თუ ვაინტეგრებთ ტოლობის ორივე მხარეს, მივიღებთ

$$K(Q) = \int (1.92 - 0.002\ Q)\ dQ\,,$$

ანუ

$$K(Q) = 1.92Q - 0.001\ Q^2 + C.$$

ნებისმიერი C მუდმივის განსაზღვრა შესაძლებელია ამოცანის იმ პირობით, რომ პროდუქციის პირველი ერთეულის წარმოებაზე იხარჯება 562 დოლარი. თუ გავითვალისწინებთ ამ პირობას წინა ტოლობაში, მივიღებთ

$$K(1) = 562 = 1.92 - 0.001 + C.$$

აქედან $C = 560.081$. მაშასადამე, დანახარჯის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$K(Q) = 1.92Q - 0.001\ Q^2 + 560.081.$$

პროდუქციის 100 ერთეულის საწარმოებლად დანახარჯი იქნება

$$K(100) = 1.92 \cdot 100 - 0.001 \cdot 100^2 + 560.081 = 742.081. \ \blacksquare$$

2) ჩასმის წესი. ზოგიერთ შემთხვევაში განუსაზღვრელი ინტეგრალი შესაძლებელია გავამარტივოთ ინტეგრების ახალი ცვლადის შემოღებით.

თუ $\int f(x)\,dx$ ინტეგრალში დავუშვებთ, რომ $x=\varphi(t)$, სადაც t არის ახალი ცვლადი, ხოლო $\varphi(t)$ – უწყვეტად წარმოებადი შექცევადი ფუნქცია, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,\Big|_{t=\psi(x)}. \tag{9.5}$$

აქ $t=\psi(x)$ არის ფუნქცია, რომელიც მიიღება $x=\varphi(t)$ განტოლების ამოხსნით t ცვლადის მიმართ (ანუ ψ არის φ-ს შექცეული ფუნქცია).

ამოცანა 9.3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}.$$

▼ შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $x^2+1=t$. ორივე მხარის დიფერენცირებით მივიღებთ: $d(x^2+1)=dt$ ანუ $2x\,dx=dt$.

მოცემული ინტეგრალი ამ ტოლობების გათვალისწინებით შემდეგნაირად გარდაიქმნება

$$\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\int\frac{dt}{t}\,\Big|_{t=x^2+1}=\left[\ln|t|+C\right]\Big|_{t=x^2+1}=\ln\left(x^2+1\right)+C. \ ■$$

3) ნაწილობითი ინტეგრების წესი. ვთქვათ, $u=u(x)$ და $v=v(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია. ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად გვაქვს $(uv)'=u'v+uv'$ ანუ $uv'=(uv)'-u'v$.

ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int uv'\,dx=\int(uv)'\,dx-\int u'v\,dx.$$

აქედან

$$\boxed{\int uv'\,dx=uv-\int u'v\,dx} \tag{9.6}$$

ანუ

$$\boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du}$$

ამ ტოლობას ეწოდება **ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა.** მისი გამოყენებით ერთი განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება მეორე განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლაზე, რომელიც შეიძლება უფრო

მარტივი აღმოჩნდეს, ვიდრე პირველი.

ამოცანა 9.4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int x e^{x}\, dx.$$

▼ შემოვიღოთ აღნიშვნები: $u(x)=x$, $v'(x)=e^{x}$. მაშინ ცხადია, $u'(x)=1$ და $v(x)=e^{x}$. თუ გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების (9.6) ფორმულას, მივიღებთ

$$\int x e^{x}\, dx = \int x \left(e^{x}\right)' dx = x e^{x} - \int (x)' e^{x}\, dx = x e^{x} - \int e^{x}\, dx = x e^{x} - e^{x} + C. \blacksquare$$

განვიხილოთ რამდენიმე ტიპობრივი ეკონომიკური ამოცანა განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოყენებაზე.

ამოცანა 9.5. მონოპოლისტური ფირმის მარგინალური ამონაგების ფუნქციაა

$$(MR) = f(Q) = 10 - 4Q,$$

სადაც Q არის რეალიზებული საქონლის რაოდენობა ანუ მოთხოვნა. ვიპოვოთ ფირმის მთლიანი ამონაგების ფუნქცია და დავადგინოთ შესაბამისი მოთხოვნის ფუნქციის სახე.

▼ როგორც ვიცით, თუ მთლიანი ამონაგების ფუნქციაა

$$(TR) = F(Q),$$

მაშინ მარგინალური ამონაგების ფუნქცია გამოითვლება ტოლობით

$$(MR) = \frac{d(TR)}{dQ} = F'(Q).$$

ამოცანის პირობის თანახმად, გვექნება

$$F'(Q) = f(Q) = 10 - 4Q.$$

ამიტომ

$$(TR) = F(Q) = \int f(Q)\, dQ = \int (10 - 4Q)\, dQ = 10Q - 2Q^2 + C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა.

მართალია, ამოცანაში არ არის მოცემული რაიმე დამატებითი პირობა C-ს საპოვნელად, მაგრამ მთლიანი ამონაგების ფუნქციის ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(TR)\Big|_{Q=0}=F(0)=0$$

(რადგან, თუ ფირმა არ გაყიდის საქონელს, მაშინ მას ამონაგები არ ექნება). ამ ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$F(0)=10\cdot 0-2\cdot 0^2+C=0,$$

ე. ი. $C=0$. მაშინ

$$(TR)=10Q-2Q^2=(10-2Q)\ Q.$$

მეორე მხრივ, ჩვენთვის ცნობილია, რომ (იხ. პარაგრაფი 6.7)

$$(TR)=PQ,$$

სადაც P არის პროდუქციის ერთეულის ფასი. უკანასკნელი ორი ტოლობის შედარებით მივიღებთ

$$P=10-2Q,$$

რაც მოთხოვნის ფუნქციას წარმოადგენს. ■

ამოცანა 9.6. ვიპოვოთ მოხმარების $H(Y)$ ფუნქცია, თუ ცნობილია, რომ მარგინალური მიდრეკილება მოხმარებისადმი გამოისახება ტოლობით

$$(MPC)=h(Y)=0.5+\frac{0.1}{\sqrt{Y}},$$

სადაც Y არის ეროვნული შემოსავალი.

ამასთან, ცნობილია, რომ თუ ეროვნული შემოსავალი 100 ერთეულის ტოლია, მაშინ მოხმარება უტოლდება 85 ერთეულს.

▼ როგორც ვიცით, მარგინალური მიდრეკილება მოხმარებისადმი არის $H(Y)$ მოხმარების ფუნქციის წარმოებული

$$(MPC)=H'(Y).$$

ამიტომ ამოცანის პირობის თანახმად გვექნება

$$H'(Y)=h(Y)=0.5+\frac{0.1}{\sqrt{Y}}=0.5+0.1\ Y^{-0.5}.$$

აქედან მივიღებთ

$$H(Y)=\int h(Y)\ dY=\int\left(0.5+0.1\,Y^{-0.5}\right)dY=0.5\ Y+\frac{0.1}{-0.5+1}\ Y^{-0.5+1}+C=$$

$$= 0.5\, Y + 0.2\, \sqrt{Y} + C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

ამოცანის პირობის თანახმად, როცა $Y = 100$, მოთხოვნა 85-ის ტოლია, ე. ი. $H(100) = 85$. გავითვალისწინოთ ეს პირობა და ვიპოვოთ C

$$H(100) = 0.5 \cdot 100 + 0.2\, \sqrt{100} + C = 85$$

ანუ $C = 33$. ამრიგად, მოხმარების ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას

$$H(Y) = 0.5\, Y + 0.2\, \sqrt{Y} + 33. \quad \blacksquare$$

9.4. განსაზღვრული ინტეგრალი

განსაზღვრული ინტეგრალის თეორია მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ნაწილს წარმოადგენს.

ქვემოთ დავრწმუნდებით, რომ განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტება საკმარისად რთულია. ამავე დროს, აღნიშნულ განმარტებას თითქოს არაფერი უნდა ჰქონდეს საერთო განუსაზღვრელ ინტეგრალთან (ანუ ფუნქციის პირველადთან), მაგრამ დავინახავთ, რომ მათ შორის მჭიდრო კავშირი არსებობს. ჩვენ ამ ურთიერთკავშირს მომდევნო პარაგრაფებში დაწვრილებით განვიხილავთ.

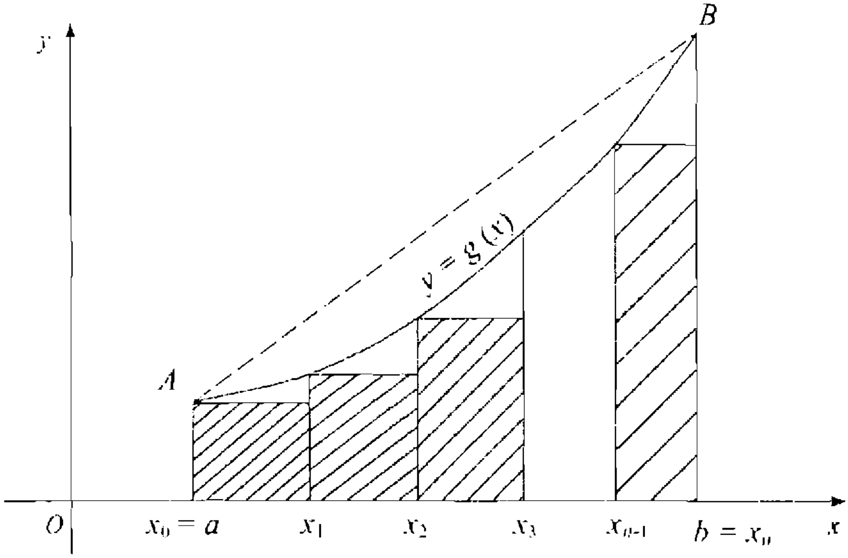
შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრული ინტეგრალის თეორია ფართოდ გამოიყენება მეცნიერების სხვადასხვა სფეროში. ქვემოთ არაერთხელ შევხვდებით ეკონომიკურ პრობლემებს, რომელთა ამოხსნის მეთოდები მოითხოვს განსაზღვრული ინტეგრალის თეორიის ცოდნას.

ახლა კი განვიხილოთ ამოცანა, რომელიც მიგვიყვანს განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებასთან. ეს კონკრეტული მაგალითი გეომეტრიული შინაარსისაა და ეხება ფართობის გამოთვლას, თუმცა შეიძლება მისი ეკონომიკური ინტერპრეტაციაც (იხ. 9.10 და 9.11 პარაგრაფები).

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია არაუარყოფითი $y = g(x)$ ფუნ-

ქცია, რომლის გრაფიკი წარმოადგენს ნახ. 9.1-ზე გამოსახულ AB წირს.

გეომეტრიულ $aABb$ ფიგურას, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=a$, $x=b$, $y=0$ წრფეებითა და AB წირით, **მრუდწირული ტრაპეცია** ეწოდება. დავუშვათ, გვსურს აღნიშნული ფიგურის S_{aABb} ფართობის გამოთვლა. ცხადია, ზოგადი სახის AB წირის შემთხვევაში ელემენტარული მათემატიკის (გეომეტრიის) მეთოდებით ამ ფართობის ზუსტი მნიშვნელობის გამოთვლა შეუძლებელია.



ნახ. 9.1

გამოვთვალოთ აღნიშნული ფართობი მიახლოებით. ამისათვის, $[a, b]$ სეგმენტი x_k $(k=0, 1, \dots, n)$ წერტილებით დავყოთ n ნაწილად (იხ. ნახ. 9.1), სადაც $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$. მივიღებთ ქვესეგმენტებს

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \dots,\ [x_k, x_{k+1}],\ \dots,\ [x_{n-1}, x_n].$$

განვიხილოთ მართკუთხედები, რომელთა ფუძეებია აღნიშნული სეგმენტები, ხოლო სიმაღლეები — შესაბამისად $g(x_0)$, $g(x_1)$, $g(x_2)$, …, $g(x_{n-1})$ სიდიდეები. ამ მართკუთხედების ფართობთა ჯამია

$$(x_1-x_0)\,g(x_0)+(x_2-x_1)\,g(x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})\,g(x_{n-1})=\sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\,\Delta x_k, \quad (9.7)$$

სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

ცხადია, რაც უფრო დიდია დანაწილების რიცხვი, მით უფრო ახლოსაა მართკუთხედების ფართობთა (9.7) ჯამი S_{aABb} ზუსტ ფართობთან. ამიტომ

$$S_{aABb} \approx \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\ \Delta x_k. \tag{9.8}$$

ახლა განვიხილოთ (9.7) გამოსახულების ზღვარი, როდესაც ქვესეგმენტების რიცხვი n მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ ისე, რომ თითოეული ქვესეგმენტის Δx_k სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ. თუ ეს ზღვარი არსებობს, ბუნებრივია, რომ მას ვუწოდოთ მრუდწირული $aABb$ ტრაპეციის ფართობი

$$S_{aABb} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\, \Delta x_k. \tag{9.9}$$

(9.7) ტიპის ჯამს ეწოდება $g(x)$ ფუნქციის **ინტეგრალური ჯამი**. (9.9) ტიპის ზღვარს კი მივყავართ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებამდე.

განსაზღვრული ინტეგრალი ნებისმიერი ფუნქციის შემთხვევაში ასე განიმარტება.

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $y = f(x)$ ფუნქცია. დავყოთ ეს სეგმენტი n ნაწილად ნებისმიერად შერჩეული x_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ წერტილებით, სადაც

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

მივიღებთ $[a, b]$ სეგმენტის ქვესეგმენტებს:

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \dots,\ [x_k, x_{k+1}],\ \dots,\ [x_{n-1}, x_n].$$

მიღებული ქვესეგმენტების სიგრძეები აღვნიშნოთ, შესაბამისად,

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k, \dots, \Delta x_n$$

სიმბოლოებით, სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

აღვნიშნოთ $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ რიცხვებს შორის უდიდესი λ სიმბოლოთი, ე. ი. $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$. ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \Delta x_k. \tag{9.10}$$

ამ ჯამს ეწოდება f **ფუნქციის ინტეგრალური ჯამი**. ამ ჯამის მნიშვნელობა დამოკიდებულია როგორც $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებაზე, ასევე ξ_k წერტილების შერჩევაზე. თუ არსებობს (9.10) ინტეგრალური ჯამის სასრული ზღვარი, როცა $\lambda \to 0$, და იგი არაა დამოკიდებული $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებაზე და ξ_k წერტილების შერჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს უწოდებენ $f(x)$ ფუნქციის **განსაზღვრულ ინტეგრალს** $[a, b]$ სეგმენტზე და ასე ჩაწერენ

$$\boxed{\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \Delta x_k = \int_a^b f(x)\, dx} \tag{9.11}$$

ამ შემთხვევაში f ფუნქციას ეწოდება **ინტეგრებადი** $[a, b]$ შუალედში. a და b რიცხვებს ეწოდება, შესაბამისად, ინტეგრალის ქვედა და ზედა საზღვარი, $[a, b]$ სეგმენტს კი — **ინტეგრების შუალედი**, x ცვლადს ინტეგრების ცვლადი ეწოდება. ცხადია, განსაზღვრული ინტეგრალი წარმოადგენს რიცხვს და იგი არაა დამოკიდებული იმაზე, თუ რა ასოთი აღვნიშნავთ ინტეგრების ცვლადს. ზემოთ ჩვენ ვიგულისხმეთ, რომ $a < b$. თუ $a > b$, ხოლო $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[b, a]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx. \tag{9.12}$$

თუ $a = b$, მაშინ

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0. \tag{9.13}$$

ამ პარაგრაფის დასაწყისში განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, რომ თუ $g(x) \geq 0$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ შუალედში, მაშინ $aABb$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S_{aABb} = \int_a^b g(x)\, dx. \tag{9.14}$$

ჩამოვაყალიბოთ განსაზღვრული ინტეგრალის არსებობის საკმარისი პირობები.

თეორემა 9.4. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია ამავე სეგმენტზე. ■

თეორემა 9.5. თუ $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან უწყვეტი შემოსაზღვრული ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე. ■

შევნიშნოთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას უწოდებენ უბან-უბან უწყვეტ ფუნქციას, თუ მას აღნიშნულ სეგმენტზე აქვს წყვეტის წერტილთა სასრული რაოდენობა.

ინტეგრალური აღრიცხვის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანა არის განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის ალგორითმების დადგენა.

9.5. განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები

განსაზღვრულ ინტეგრალს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული ინტეგრების ცვლადზე, ე. ი.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt\,;$$

2) თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და A ნებისმიერი მუდმივია, მაშინ $A\,f(x)$ ფუნქციაც ინტეგრებადია ამავე სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b A\ f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx\,;$$

3) თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მათი ჯამი აგრეთვე ინტეგრებადია ამავე სეგმენტზე და

$$\int_a^b \left[\, f(x)+g(x)\,\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,;$$

4) თუ $f(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე და $a<c<b$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,;$$

5) თუ $f(x)$ არის არაუარყოფითი ინტეგრებადი ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,;$$

6) თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტის ყოველ x წერტილზე სრულდება $f(x) \leq g(x)$ უტოლობა, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,;$$

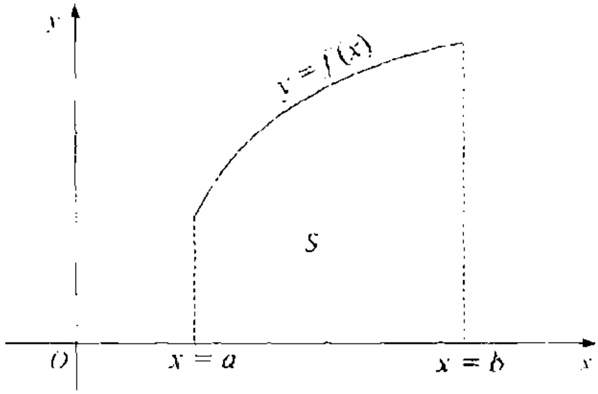
7) თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ არსებობს ისეთი $\xi \in [a, b]$ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a).$$

ამ ტოლობას **საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა** ენოდება.

9.6. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობა

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული არაუარყოფითი უწყვეტი $y = f(x)$ ფუნქცია. როგორც ვიცით, ასეთი ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. ამ $f(x)$ ფუნქციისათვის განსაზღვრული ინტეგრალი გეომეტრიულად წარმოადგენს იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, Ox ღერძით, $x = a$ და $x = b$ წრფეებით (იხ. ნახ. 9.2).



ნახ. 9.2

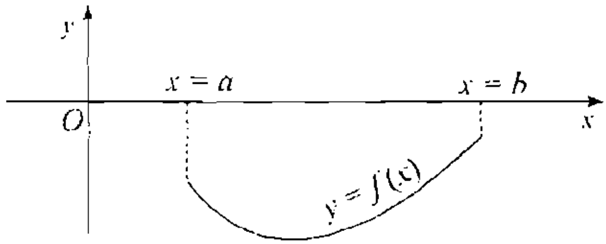
თუ ამ ფართობს S-ით აღვნიშნავთ, მაშინ გვექნება

$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და არადადებითია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx \le 0.$$

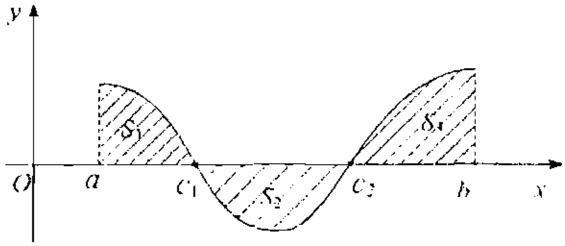
ამ ინტეგრალის აბსოლუტური მნიშვნელობა იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის ტოლია, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით, Ox ღერძით, $x=a$ და $y=b$ წრფეებით (იხ. ნახ. 9.3).



ნახ. 9.3

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტი და ნიშანცვლადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$ რიცხობრივად უდრის Ox ღერძის ზემოთ და ქვემოთ მოთავსებული მრუდწირული ტრაპეციების ფართობების „ალგებრულ ჯამს" (იხ. ნახ. 9.4)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3.$$



ნახ. 9.4

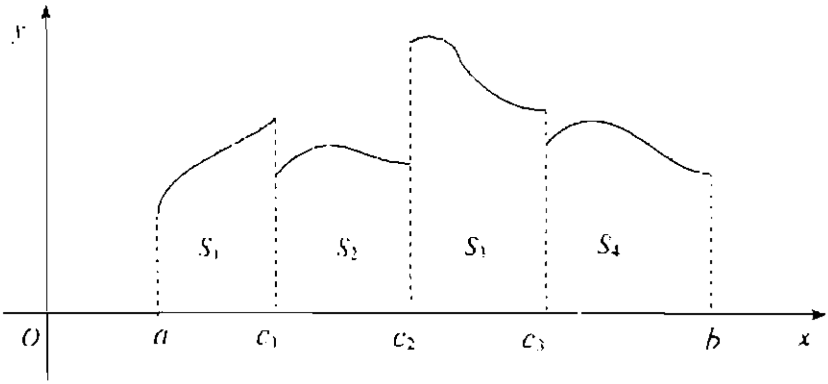
ახლა დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე და გააჩნია წყვეტის წერტილების სასრული რაოდენობა, მაგალითად, c_1, c_2, c_3. მაშინ (a, c_1), (c_1, c_2), (c_2, c_3) და (c_3, b) ინტერვალებზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტი და შემოსაზღვრული იქნება.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{როცა } x \in (a, c_1), \\ f_2(x), & \text{როცა } x \in (c_1, c_2), \\ f_3(x), & \text{როცა } x \in (c_2, c_3), \\ f_4(x), & \text{როცა } x \in (c_3, b). \end{cases}$$

მაშინ (იხ. ნახ. 9.5)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f_1(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f_2(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f_3(x)\,dx + \int_{c_3}^{b} f_4(x)\,dx = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$$



ნახ. 9.5

9.7. განსაზღვრული ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. მაშინ ის უწყვეტი და ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a, x]$ სეგმენტზე, სადაც $a \leq x \leq b$. განვიხილოთ ინტეგრალი $[a, x]$ სეგმენტზე, სადაც x ნებისმიერად იცვლება $[a, b]$ შუალედზე. ამიტომ ინტეგრალი

$$\int_a^x f(t)\, dt$$

არის x-ის ფუნქცია, რომელსაც აღვნიშნავთ $\Phi(x)$ სიმბოლოთი

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt. \tag{9.15}$$

ვაჩვენოთ, რომ $\Phi(x)$ ფუნქციას (a, b) ინტერვალზე გააჩნია წარმოებული. ამისათვის x-ს მივცეთ Δx ნაზრდი, მაშინ $\Phi(x)$ ფუნქციაც მიიღებს $\Delta\Phi(x)$ ნაზრდს

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt =$$

$$= \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt.$$

საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\Delta\Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt = f(\xi)\, \Delta x, \quad x < \xi < x + \Delta x,$$

ანუ

$$\Delta\Phi(x) = f(\xi)\, \Delta x. \tag{9.16}$$

გავყოთ ორივე მხარე Δx-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$. ცხადია, როცა $\Delta x \to 0$, მაშინ $\xi \to x$. რადგან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

მაშასადამე, x წერტილში არსებობს წარმოებული $\Phi'(x)$ და მართებულია ტოლობა

$$\Phi'(x) = f(x). \tag{9.17}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციაა $\Phi(x)$.

თუ გავიხსენებთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტებას, მივიღებთ ფორმულას, რომელიც აკავშირებს ერთმანეთთან განუსაზღვრელ და განსაზღვრულ ინტეგრალებს

$$\int f(x)\, dx = \int_a^x f(t)\, dt + C, \tag{9.18}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

9.8. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია. აღვნიშნოთ $F(x)$-ით მისი რომელიმე პირველადი ფუნქცია. ვინაიდან (9.15) ფორმულით განსაზღვრული $\Phi(x)$ ფუნქციაც $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციაა, ამიტომ გვექნება

$$\Phi(x) = F(x) + C, \tag{9.19}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ე.ი.

$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) + C. \tag{9.20}$$

(9.20) ტოლობაში დავუშვათ, რომ $x = a$. მივიღებთ $C = -F(a)$. ამ მნიშვნელობის გათვალისწინებით (9.20) ტოლობა ასე გადაიწერება

$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a).$$

კერძოდ, თუ $x=b$, მაშინ

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b} \tag{9.21}$$

ამ ტოლობას **ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა** ეწოდება. $F(x)\Big|_a^b$ სიმბოლო ასე იკითხება: „ჩასმა $F(x)$-ში a-დან b-მდე".

9.9. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის წესები

შევისწავლოთ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის მეთოდები.

1) **ჩასმის წესი.** ვთქვათ, გვინდა გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_b^a f(x)\,dx$, სადაც $f(x)$ წარმოადგენს $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას. დავუშვათ, რომ $x=\varphi(t)$, სადაც $\varphi(t)$ წარმოადგენს t ცვლადის რაიმე უწყვეტ და ზრდად (ან კლებად) ფუნქციას $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, რომლის წარმოებული $\varphi'(t)$ უწყვეტია ამავე შუალედში. გარდა ამისა, $\varphi(\alpha)=a$ და $\varphi(\beta)=b$. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\,\varphi'(t)\,dt} \tag{9.22}$$

ინტეგრალის გამოთვლის ამ მეთოდს ეწოდება **ჩასმის** წესი.

ამოცანა 9.7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$$

▼ გამოვიყენოთ ჩასმა $x=e^t$ ანუ $t=\ln x$. მაშინ $\frac{dx}{x}=dt$. დავადგინოთ ახალი საზღვრები t ცვლადისათვის: როცა $x=e$, მაშინ $t=\ln e=1$, ხოლო როცა $x=e^2$, მაშინ $t=\ln e^2=2$. ამიტომ

$$\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. \ \blacksquare$$

2) **ნაწილობითი ინტეგრების წესი.** ვთქვათ, u და v ფუნქციები უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და უწყვეტად წარმოებადია (a,b) ინტერვალში. როგორც ვიცით

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

ვაინტეგროთ ორივე მხარე a-დან b-მდე და გამოვიყენოთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

$$\boxed{\int_a^b uv'\,dx = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dx} \text{ ანუ } \boxed{\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du} \qquad (9.23)$$

მიღებულ ფორმულას ეწოდება **ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა.**

ამოცანა 9.8. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^2 x\,2^x dx.$$

▼ ავღნიშნოთ $x = u$ და $2^x dx = dv$. აქედან მივიღებთ $v = \dfrac{1}{\ln 2}\,2^x$. ამიტომ (9.23) ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$\int_0^2 x\,2^x dx = \frac{x\,2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^2 - \int_0^2 \frac{2^x}{\ln 2}\,dx = \frac{8}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{\ln 2} - \frac{4}{\ln^2 2} + \frac{1}{\ln^2 2} = \frac{8}{\ln 2} - \frac{3}{\ln^2 2}. \ \blacksquare$$

ამოცანა 9.9. კომპანიამ დაიწყო ახალი თაობის კალკულატორების გამოშვება. კალკულატორების გამოშვების სიჩქარე t მომენტისათვის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = 5000\left(1 - \frac{100}{(10+t)^2}\right) \ (\text{კალკულატორი/საათში}).$$

შევნიშნოთ, რომ დროის ზრდასთან ერთად ეს სიჩქარე რაოდენობრივად უახლოვდება 5000-ს, მაგრამ დასაწყისში იგი ნაკლებია მასზე, რადგან ეს დაკავშირებულია მუშათა გამოცდილების ნაკლებობასთან და წარმოების ახალი ტექნოლოგიისადმი მიუჩვევლობასთან. ვიპოვოთ მეოთხე და მეხუთე საათში გამოშვებული კალკულატორების რაოდენობა.

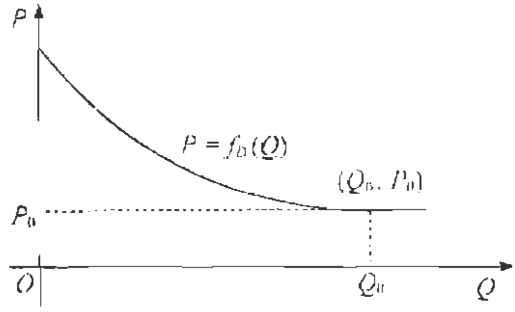
▼ მარტივი ანალიზი გვიჩვენებს, რომ მეოთხე და მეხუთე საათში გამოშვებული კალკულატორების რაოდენობის დასადგენად უნდა გამოვთვალოთ შემდეგი ინტეგრალი

$$\int_3^5 x'(t)\, dt = \int_3^5 5000 \left(1 - \frac{100}{(10+t)^2}\right) dt = 5000 \left[\int_3^5 dt - 100 \int_3^5 \frac{dt}{(10+t)^2}\right] =$$

$$= 5000 \left[t\Big|_3^5 + 100 \frac{1}{10+t}\Big|_3^5 \right] = 5000 \left[2 + 100\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{13}\right)\right] = 5000 \cdot \frac{38}{39} \approx 4872. \ \blacksquare$$

9.10. მომხმარებლის დანაზოგი მოცემულ დონეზე ვაჭრობისას

გავიხსენოთ, რომ მოთხოვნის ფუნქცია $P = f_D(Q)$, რომელიც შემოღებული იყო 1.12 პარაგრაფში, წარმოადგენს პროდუქციის ერთეულის ფასს, როდესაც იყიდება Q რაოდენობის მოხმარების პროდუქცია (ანუ როდესაც მოთხოვნა პროდუქციაზე შეადგენს Q ერთეულს). იგი, როგორც აღვნიშნეთ, თითქმის ყოველთვის Q ცვლადის კლებადი ფუნქციაა. ვიცით აგრეთვე, რომ $f_D(Q)$ ფუნქციის შესაბამის გრაფიკს ეწოდება მოთხოვნის წირი (იხ. ნახ. 9.6).



ნახ. 9.6

ვთქვათ, Q_0 რაოდენობის მოთხოვნის დროს ერთეულის ფასი არის P_0, ე. ი. $P_0 = f_D(Q_0)$.

დავყოთ $[0, Q_0]$ შუალედი n ტოლ ნაწილად Q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ წე-

რტილებით (იხ. ნახ. 9.7)

$$0 < Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_n = Q_0 .$$

აღვნიშნოთ თითოეული სეგმენტის სიგრძე ΔQ სიმბოლოთი

$$\Delta Q = Q_1 = Q_2 - Q_1 = \cdots = Q_i - Q_{i-1} = \cdots = Q_n - Q_{n-1} = \frac{Q_0}{n} .$$

ვთქვათ, მოთხოვნა პროდუქციაზე Q_1 ერთეულის ტოლია, ე. ი. ერთეულის ფასია $f_D\left(Q_1\right)$, და იყიდება $\Delta Q = \dfrac{Q_0}{n} = Q_1$ რაოდენობის პროდუქცია. მაშინ მთლიანი გადასახდელი თანხა ΔQ რაოდენობის პროდუქციის შესაძენად $f_D\left(Q_1\right) \Delta Q$ სიდიდის ტოლია. ცხადია, რომ საქონელზე Q_0 მოთხოვნის დროს, როდესაც ერთეულის ფასია $P_0 = f_D\left(Q_0\right)$, იმავე ΔQ რაოდენობის საქონლის ყიდვა შეიძლება $P_0 \Delta Q$ თანხით. მყიდველის დანაზოგი მეორე შემთხვევაში პირველთან შედარებით შემდეგი სხვაობის ტოლია

$$f_D\left(Q_1\right) \Delta Q - P_0 \Delta Q = \left[f_D\left(Q_1\right) - P_0\right] \Delta Q .$$

შევნიშნოთ, რომ ეს დანაზოგი რიცხობრივად ნახ. 9.7-ზე $[0, Q_1]$ შუალედის შესაბამისი დაშტრიხული მართკუთხედის ფართობის ტოლია.

ახლა ვთქვათ, პროდუქციაზე მოთხოვნა არის Q_2, ე.ი. ერთეულის ფასია $f_D(Q_2)$ და იყიდება $\Delta Q = \dfrac{Q_0}{n} = Q_2 - Q_1$ რაოდენობის პროდუქცია. მაშინ ΔQ რაოდენობის პროდუქციის ყიდვა შესაძლებელია $f_D\left(Q_2\right) \Delta Q$ თანხით. ცხადია, რომ საქონელზე Q_0 მოთხოვნის დროს, როდესაც ერთეულის ფასია $P_0 = f_D(Q_0)$, იმავე ΔQ რაოდენობის საქონლის ყიდვა შეიძლება კვლავ $P_0 \Delta Q$ თანხით. ამიტომ, ამ შემთხვევაში, მყიდველის დანაზოგი შემდეგი სხვაობით გამოისახება

$$f_D\left(Q_2\right) \Delta Q - P_0 \Delta Q = \left[f_D\left(Q_2\right) - P_0\right] \Delta Q ,$$

რაც ნახ. 9.7-ზე $[Q_1, Q_2]$ შუალედის შესაბამისი დაშტრიხული მართკუთხედის ფართობის ტოლია.

სრულიად ანალოგიურად, თუ შევადარებთ Q_{i+1} და Q_0 მოთხოვნის დონეებს, მივიღებთ, რომ Q_{i+1} მოთხოვნის დროს ΔQ რაოდენობის საქონლის ყიდვისას, დანაზოგი არის

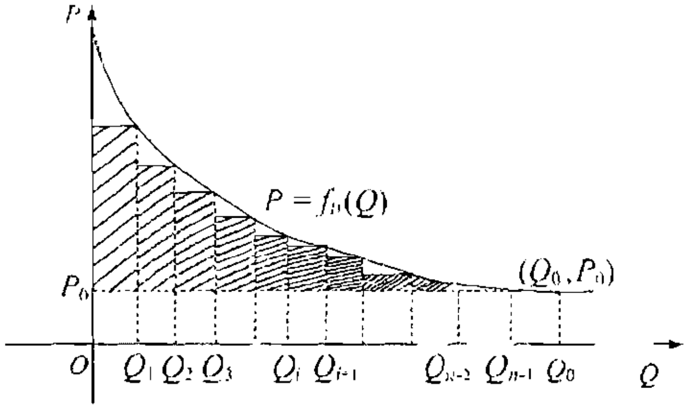
$$\left[f_D\left(Q_{i+1}\right)-P_0\right]\Delta Q, \quad i=0,1,2,\ldots,n-1,,$$

რაც ნახ. 9.7-ზე $[Q_i, Q_{i+1}]$ შუალედის შესაბამისი დაშტრიხული მართკუთხედის ფართობის ტოლია.

თუ შევკრებთ ამ დანაზოგებს, მივიღებთ ჯამურ დანაზოგს $[0, Q_0]$ შუალედში

$$\sum_{j=1}^{n}\left[f_D\left(Q_j\right)-P_0\right]\Delta Q, \qquad (9.24)$$

რომელიც გეომეტრიულად გამოსახავს ნახ. 9.7-ზე დაშტრიხული მართკუთხედების ფართობთა ჯამს.



ნახ. 9.7

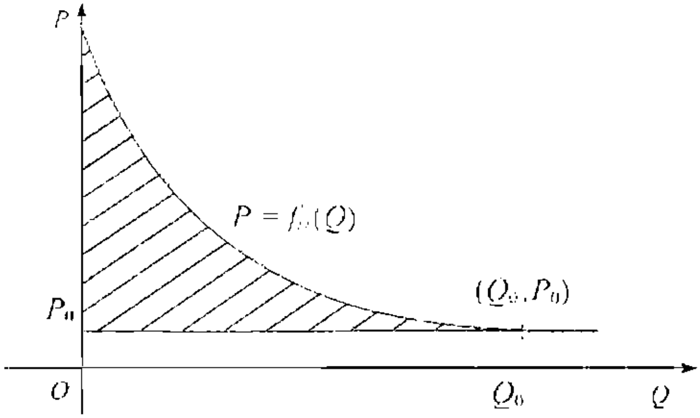
ახლა, თუ განვიხილავთ ამ გამოსახულების ზღვარს, როცა $n\to\infty$, და გავიხსენებთ განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტებას, ცხადი გახდება, რომ (9.24) ჯამი უახლოვდება შემდეგ ინტეგრალს

$$(CS)=D\left(Q_0,P_0\right)=\int_0^{Q_0}\left[f_D(Q)-P_0\right]dQ, \qquad (9.25)$$

რომელსაც ეკონომისტები უწოდებენ **მომხმარებლის დანაზოგს** Q_0 დონეზე ვაჭრობისას.

გეომეტრიულად ეს ინტეგრალი შეესაბამება იმ ფიგურის ფართობს,

რომელიც შემოსაზღვრულია P ღერძით, მოთხოვნის წირითა და $P=P_0$ წრფით (იხ. ნახ. 9.8).



ნახ. 9.8

ეკონომიკურად $(CS)=D(Q_0, P_0)$ სიდიდე გამოსახავს მომხმარებლის მიერ თანხის დანაზოგს პროდუქციის Q_0 რაოდენობის შეძენისას, როდესაც ერთეულის ფასია P_0. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მომხმარებელს Q_0 რაოდენობის პროდუქცია შეეძლო ეყიდა არა ერთბაშად P_0 ფასად, არამედ ნაწილ-ნაწილ, ჯერ $\Delta Q=\frac{Q_0}{n}$ რაოდენობა – $f_D(Q_1)$ ფასად, მერე კიდევ ΔQ რაოდენობა – $f_D(Q_2)$ ფასად და ა. შ. n-ჯერ. ასეთი შესყიდვის დროს მომხმარებელი კვლავ ყიდულობს Q_0 რაოდენობის პროდუქციას, მაგრამ მას ეხარჯება უფრო მეტი, ვიდრე $Q_0 \cdot P_0$ თანხა. სწორედ ამ განსხვავებას აღწერს $(CS)=D(Q_0, P_0)$ მომხმარებლის დანაზოგი.

ამოცანა 9.10. მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$P=f_D(Q)=1200-0.2\,Q-0.0001\,Q^2.$$

ვიპოვოთ (CS) მომხმარებლის დანაზოგი, თუ მოთხოვნის დონე 500-ის ტოლია.

▼ თუ მოთხოვნის დონეა 500, მაშინ ერთი ერთეულის ფასი იქნება

$$P_0=f_D(500)=1200-0.2\cdot 500-0.0001\cdot(500)^2=1075.$$

ამიტომ (9.25) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ მომხმა-

რებლის დანაზოგი ამოცანაში აღნიშნულ ვაჭრობის დონეზე

$$(CS) = D(500, 1075) =$$

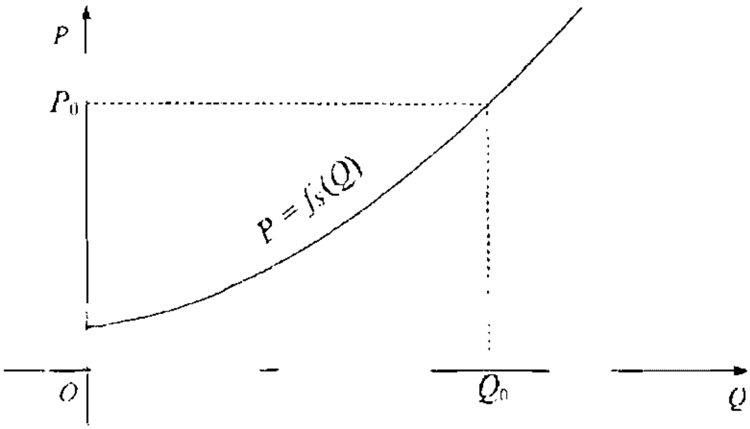
$$= \int_0^{500} \left[f_D(Q) - P_0 \right] dQ = \int_0^{500} \left[1200 - 0.2Q - 0.0001Q^2 - 1075 \right] dQ =$$

$$= \left[125Q - 0.1Q^2 - 0.0001\ \frac{Q^3}{3} \right] \Bigg|_0^{500} = 125 \cdot 500 - 0.1 \cdot (500)^2 - \frac{0.0001 \cdot (500)^3}{3} \approx$$

≈ 33333.33 (დოლარი). ■

9.11. მწარმოებლის ამონაგების ნამატი გარკვეულ დონეზე ვაჭრობისას

როგორც უკვე ვიცით, მიწოდების ფუნქცია $P = f_S(Q)$ აღწერს კავშირს მწარმოებლის მიერ ბაზარზე გატანილი საქონლის Q რაოდენობასა და ბაზრის P ფასს შორის. ჩვენ აგრეთვე ვიცით, რომ მიწოდების ფუნქცია ზრდადი ფუნქციაა და მის გრაფიკს ეწოდება მიწოდების წირი (იხ. ნახ. 9.9).



ნახ. 9.9

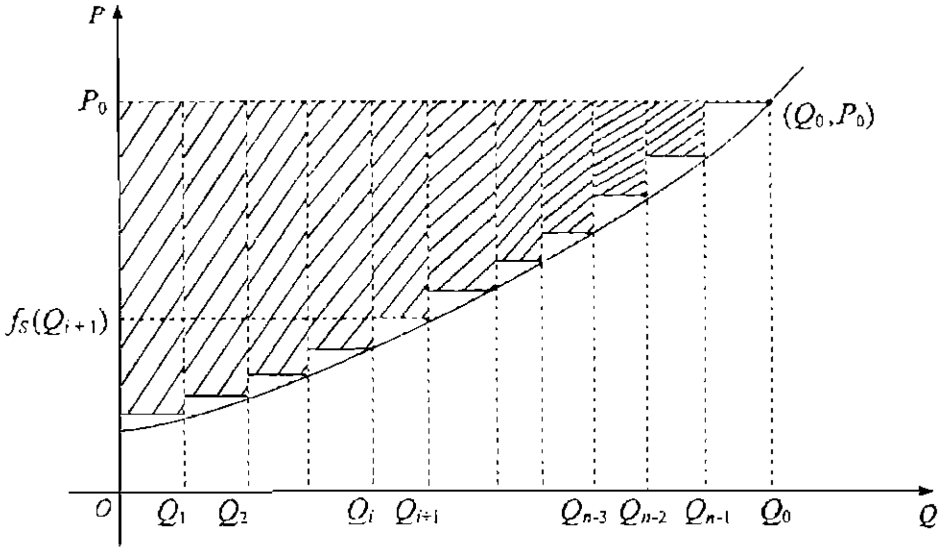
ვთქვათ, პროდუქციის ერთეულის ფასია P_0 და მწარმოებელი ყიდის Q_0 რაოდენობის პროდუქციას. ცხადია, $P_0 = f_S(Q_0)$. მაშინ მწარმოებლის სრული ამონაგები იქნება $Q_0 P_0$. ჩავატაროთ სტრუქტურულად იმავე შინა-

არსის მსჯელობა, რაც წინა პარაგრაფში გვქონდა.

დავყოთ $[0, Q_0]$ სეგმენტი n ტოლ ნაწილად Q_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ წერტილებით (იხ. ნახ. 9.10)

$$0 < Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_{n-2} < Q_{n-1} < Q_n = Q_0.$$

ცხადია, რომ თითოეული ქვესეგმენტის სიგრძეა $\Delta Q = \frac{Q_0}{n}$.



ნახ. 9.10

Q_1 დონეზე ვაჭრობისას (ე.ი. როცა მოთხოვნა Q_1-ის ტოლია) გაყიდული ΔQ რაოდენობის პროდუქცია იძლევა $f_S(Q_1)\,\Delta Q$ ამონაგებს. იმავე ΔQ რაოდენობის გაყიდული პროდუქცია Q_0 დონეზე ვაჭრობისას იძლევა $f_S(Q_0)\,\Delta Q = P_0\,\Delta Q$ ამონაგებს, რაც აღემატება $f_S(Q_1)\,\Delta Q$ სიდიდეს. ცხადია, რომ სხვაობა $P_0\,\Delta Q - f_S(Q_1)\,\Delta Q$ წარმოადგენს მწარმოებლის ამონაგების ნამატს, რაც განპირობებულია მოთხოვნის Q_1 და Q_0 დონეების განსხვავებით. ეს სხვაობა ნახ. 9.10-ზე $[0, Q_1]$ შუალედის შესაბამისი დაშტრიხული მართკუთხედის ფართობის ტოლია.

სრულიად ანალოგიურად, თუ განვიხილავთ Q_{i+1} $(1 \le i \le n-1)$ დონეზე ვაჭრობას, როცა იყიდება ΔQ რაოდენობის პროდუქცია, და მას შევადარებთ Q_0 მოთხოვნის დონეზე ვაჭრობას იმავე ΔQ რაოდენობის გაყიდუ-

ლი პროდუქციით, დავინახავთ, რომ მწარმოებლის ამონაგების ნამატი გამოისახება სხვაობით

$$\left[P_0 - f_D\left(Q_{i+1}\right)\right] \Delta Q, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

ეს სხვაობა ნახ. 9.10-ზე $[Q_i, Q_{i+1}]$ შუალედის შესაბამისი დაშტრიხული მართკუთხედის ფართობის ტოლია.

თუ ამოვწერთ ყველა $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n = Q_0$ სიდიდეების შესაბამის „ნამატებს" და შევკრებთ, მივიღებთ მწარმოებლის ამონაგების ჯამურ ნამატს:

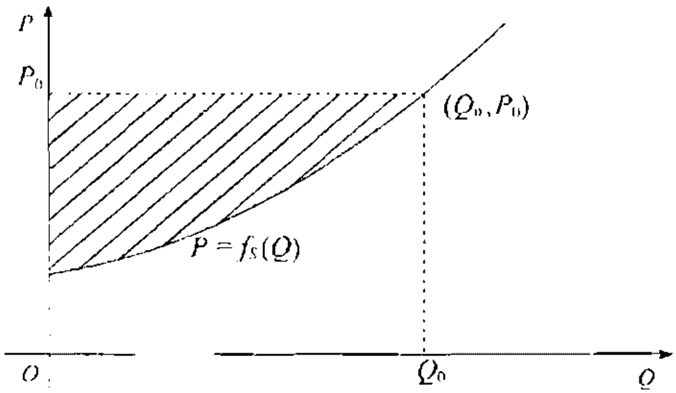
$$\left[P_0 - f_S\left(Q_1\right)\right] \Delta Q + \left[P_0 - f_S\left(Q_2\right)\right] \Delta Q + \cdots + \left[P_0 - f_S\left(Q_{n-1}\right)\right] \Delta Q + \\ + \left[P_0 - f_S\left(Q_n\right)\right] \Delta Q = \sum_{k=1}^{n} \left[P_0 - f_S\left(Q_k\right)\right] \Delta Q. \tag{9.26}$$

თუ განვიხილავთ ამ გამოსახულების ზღვარს, როდესაც $n \to \infty$, და გავიხსენებთ განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტებას, მარტივად დავასკვნით, რომ აღნიშნული ჯამი უახლოვდება ინტეგრალს

$$(PS) = S\left(Q_0, P_0\right) = \int_0^{Q_0} \left[P_0 - f_S(Q)\right] dQ, \tag{9.27}$$

რომელსაც ეწოდება **მწარმოებლის ამონაგების ნამატი** Q_0 დონეზე ვაჭრობისას.

გეომეტრიულად იგი გამოსახავს იმ ფიგურის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია P ღერძით, მიწოდების წირითა და $P = P_0$ წრფით (იხ. დაშტრიხული არე ნახ. 9.11-ზე).



ნახ. 9.11

ეკონომიკურად $S\left(Q_0,P_0\right)$ სიდიდე გამოსახავს მწარმოებლის ამონაგების „ჯამურ" ნამატს, როდესაც პროდუქციის ერთეულის ფასია P_0 და იყიდება Q_0 რაოდენობის საქონელი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მწარმოებელს შეეძლო P_0 ფასად გაეყიდა Q_0 რაოდენობის პროდუქცია არა ერთბაშად, არამედ ნაწილ-ნაწილ, ჯერ $\Delta Q=\dfrac{Q_0}{n}$ რაოდენობა $f_S\left(Q_1\right)$ ფასად, მერე კიდევ ΔQ რაოდენობა – $f_S\left(Q_2\right)$ ფასად და ა. შ. n-ჯერ. ასეთი არაერთჯერადი რეალიზაციის შედეგად კვლავ Q_0 რაოდენობის პროდუქცია გაიყიდებოდა, მაგრამ შემოსავალი იქნებოდა უფრო ნაკლები, ვიდრე $P_0\cdot Q_0$ თანხა. სწორედ ამ განსხვავებას აღწერს $(PS)=S\left(Q_0,P_0\right)$ მწარმოებლის ამონაგების ნამატი.

ამოცანა 9.11. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

$$P=f_D(Q)=35-Q^2$$

და მიწოდების ფუნქცია

$$P=f_S(Q)=3+Q^2.$$

ვიპოვოთ (PS) მწარმოებლის ამონაგების ნამატი, თუ გვაქვს სრულყოფილი კონკურენცია.

▼ როგორც ცნობილია, სრულყოფილი კონკურენციის პირობებში, პროდუქციის ფასი განისაზღვრება ბაზრის მიერ და არა მწარმოებლის მიერ (როგორც ეს გვაქვს, მაგალითად, მონოპოლისტური წარმოების დროს). იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ (PS) მწარმოებლის ამონაგების ნამეტი, ჯერ უნდა განვსაზღვროთ, რა რაოდენობის $\left(Q_0\right)$ საქონელი გაიყიდება და რა ფასად $\left(P_0\right)$. ეს მონაცემები კი უნდა ვიპოვოთ ბაზრის წონასწორობის განტოლებათა სისტემიდან

$$\begin{cases} P=35-Q^2 \\ P=3+Q^2. \end{cases}$$

აქედან მივიღებთ $35 - Q^2 = 3 + Q^2$ ანუ $Q^2 = 16$. რადგან ჩვენ გვაინტერესებს Q-ს დადებითი მნიშვნელობა, ამიტომ $Q_0 = 4$. მაშინ $P_0 = 3 + Q_0^2 = 19$.

ამრიგად, ბაზრის წონასწორობის სისტემიდან მივიღეთ, რომ პროდუქციის ერთეულის ფასია $P_0 = 19$ და გაიყიდება $Q_0 = 4$ რაოდენობის საქონელი.

ახლა უკვე შეგვიძლია ვისარგებლოთ (9.27) ფორმულით და გამოვთვალოთ საძიებელი (PS) მწარმოებლის ამონაგების ნამატი $Q_0 = 4$ დონეზე ვაჭრობის შემთხვევაში

$$(PS) = S(4, 19) = \int_0^4 \left[19 - 3 - Q^2\right] dQ = \int_0^4 16\, dQ - \int_0^4 Q^2\, dQ = 16Q\Big|_0^4 - \frac{1}{3} Q^3\Big|_0^4 =$$

$$= 64 - \frac{1}{3} \cdot 64 = 42\frac{2}{3}. \blacksquare$$

9.12. შემოსავლის ნაკადის მიმდინარე ღირებულება

ჩვენ ზემოთ (იხ. პარაგრაფი 5.7) ვნახეთ, რომ სარგებლის ნომინალური წლიური რთული $r\,\%$-იანი განაკვეთით დაბანდებისას უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში A დოლარის ტოლი საწყისი თანხა t წლის შემდეგ იძლევა $A\,e^{\frac{r}{100}t}$ დოლარს.

ვთქვათ, A_1 არის ის თანხა, რომელიც უნდა დავაბანდოთ სარგებლის წლიური რთული $r\,\%$-იანი განაკვეთით, რომ უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში t წლის შემდეგ მივიღოთ 1 დოლარი. მაშინ ზემოთ აღნიშნულის თანახმად გვექნება

$$A_1\, e^{\frac{r}{100}t} = 1.$$

აქედან

$$A_1 = e^{-\frac{r}{100}t}.$$

ამ თანხას ეწოდება 1 დოლარის **დისკონტირებული (მიმდინარე) ღირებულება**. იმავე პირობებში, B დოლარის დისკონტირებული (მიმდინარე) ღირებულება გამოითვლება გამოსახულებით

$$B\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{100}t}.$$

მაგალითად, თუ $r=9$, მაშინ 1 დოლარის მიმდინარე ღირებულება 5 წლით დაბანდების შემთხვევაში იქნება

$$\mathrm{e}^{-\frac{9}{100}\cdot 5}=\mathrm{e}^{-0.45}\approx 0.64 \text{ დოლარი},$$

ხოლო 1000 დოლარის მიმდინარე ღირებულება იქნება

$$1000\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{100}\cdot 5}\approx 640 \text{ დოლარი}.$$

ახლა დავუშვათ, რომ შესაბამისი სარგებელი დაბანდებულ თანხას ერიცხება არა ერთბაშად — საბოლოო თანხის სახით, არამედ დროის რაღაც $t=a$ მომენტიდან დროის $t=b$ მომენტამდე, უწყვეტად $f(t)$ ინტენსივობით. თუ დროის t მომენტში მთლიანი დარიცხული თანხაა $F(t)$ სიდიდე, მაშინ იმავე t მომენტისთვის დარიცხვის $f(t)$ ინტენსივობა გამოითვლება ფორმულით $f(t)=F'(t)$. ამ $f(t)$ სიდიდეს ეწოდება **შემოსავლის ნაკადი დროის** $[a,b]$ **შუალედში**, ხოლო $F(t)$-ს ეწოდება **მიმდინარე თანხა**. შევნიშნოთ, რომ თუ დარიცხვა იწყება $t=a$ მომენტიდან, მაშინ $F(a)=0$.

ცხადია, $f(t)$ ინტენსივობის შესაბამისი მიმდინარე $F(t)$ თანხა დროის $t\in[a,b]$ მომენტისათვის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$F(t)=\int_a^t f(x)\,dx.$$

იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $[a,b]$ შუალედში შემოსავლის ნაკადის დისკონტირებული (მიმდინარე) ღირებულება, დავყოთ დროის $[a,b]$ შუალედი t_i $(i=0,1,\ldots,n)$ წერტილებით n ტოლ ნაწილად

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b.$$

ცხადია, თითოეული ნაწილის სიგრძეა

$$\Delta t = t_j - t_{j-1} = \frac{b-a}{n}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

$t = t_{j-1}$ მომენტიდან $t = t_j$ მომენტამდე $(j = 1, 2, \ldots, n)$ შემოსავალი (დარიცხული თანხა) დაახლოებით იქნება $f(t_j)\,\Delta t$, რომლის მიმდინარე (დისკონტირებული) ღირებულება უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში უტოლდება შემდეგ სიდიდეს

$$e^{-\frac{r}{100}t_j} f(t_j)\,\Delta t.$$

ეს არის ის საწყისი თანხა, რომელიც საწყის $t = 0$ მომენტში უნდა დაბანდდეს სარგებლის წლიური რთული $r\,\%$-იანი განაკვეთით (უწყვეტი დარიცხვით), რომ t_j დროის შემდეგ მივიღოთ $f(t_j)\,\Delta t$ თანხა.

ამრიგად, შემოსავლის ნაკადის დისკონტირებული (მიმდინარე) ღირებულება დროის $[a, b]$ შუალედში მიახლოებით გამოითვლება შემდეგი ჯამით

$$\sum_{j=1}^{n} e^{-\frac{r}{100}t_j} f(t_j)\,\Delta t.$$

ამ ჯამის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, გვაძლევს

$$\int_a^b e^{-\frac{r}{100}t} f(t)\,dt \tag{9.28}$$

ინტეგრალს, რომელსაც ეწოდება **შემოსავლის $f(t)$ ნაკადის დისკონტირებული (მიმდინარე) ღირებულება**, რომელიც შეესაბამება სარგებლის წლიურ რთულ $r\,\%$-იან განაკვეთს უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში $t = a$ მომენტიდან $t = b$ მომენტამდე.

ამრიგად, (9.28) ფორმულით მოცემული სიდიდე გამოსახავს იმ თანხას, რომელიც საწყის $t = 0$ მომენტიდან დაწყებული უნდა გაიზარდოს სარგებლის წლიური რთული $r\,\%$-იანი განაკვეთით (უწყვეტი დარიცხვის წესით), რომ მან უზრუნველყოს $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$-ის ტოლი მიმდინარე თანხა $t \in [a, b]$ მომენტისათვის. კერძოდ, $f(t)$ ნაკადი მუდმივია, ნიშნავს, რომ $f(t) = c = const$ და ამიტომ ყოველ Δt შუალედში დარიცხული თანხა

იქნება $c \cdot \Delta t$. ცხადია, ამ შემთხვევაში, მიმდინარე თანხა გამოითვლება $F(t) = ct$ ფორმულით.

ამ ტიპის გამოთვლებს უდიდესი მნიშვნელობა აქვს, მაგალითად, სატრასტო ფონდებისა და კომპანიების ფინანსური მოღვაწეობის შესწავლასა და შეფასებაში.

ამოცანა 9.12. სატრასტო ფონდი ათი წლის განმავლობაში ყოველწლიურად ფონდის ინვესტორებს უხდის 8000 დოლარს. სარგებლის წლიური რთული დომინანტური განაკვეთია 10 % (უწყვეტი დარიცხვის წესით). გადახდა იწყება 5 წლის შემდეგ.

(ა) ვიპოვოთ სატრასტო ფონდის დისკონტირებული ღირებულება;

(ბ) სატრასტო ფონდმა 3 წლის შემდეგ დააგროვა 50000 დოლარი. შევაფასოთ ფონდის მოღვაწეობა ამ პერიოდში.

▼ (ა) აქ შემოსავლის ნაკადი მუდმივია $f(t) = 8000$. სატრასტო ფონდის დისკონტირებული ღირებულების დასადგენად გამოვიყენოთ (9.28) ფორმულა, რომელშიც ჩვენი ამოცანის პირობების შესაბამისად: $a = 5$ (რადგან გადახდა იწყება 5 წლის შემდეგ), $b = 15$ (რადგან ფონდი იხდის თანხას 10 წლის განმავლობაში) და $r = 10$ (რადგან სარგებლის განაკვეთია 10 %). მივიღებთ დისკონტირებული (მიმდინარე) ღირებულების შემდეგ მნიშვნელობას

$$\int_5^{15} e^{-0.1t}\, 8000\, dt = 8000\left[\frac{e^{-0.1t}}{-0.1}\right]_5^{15} = 80000\left[\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right] \approx 30672.04.$$

ეს არის ის თანხა, რაც უნდა ჰქონდეს სატრასტო ფონდს საწყის $t = 0$ მომენტში, რომ მან 5 წლის შემდეგ შეძლოს ყოველწლიურად 8000 დოლარის გადახდა მომდევნო 10 წლის განმავლობაში, თუ ეს თანხა გაიზრდება 10 %-იანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის წესით. სინამდვილეში, სატრასტო ფონდმა, ცხადია, უნდა განახორციელოს ბიზნეს გეგმა, რომელიც უზრუნველყოფს ფონდის თანხების ზრდას საფინანსო ბაზრის დომინანტურ განაკვეთზე (ანუ 10 %-ზე) უფრო მეტი სიდიდით. უნდა გავითვალისწინოთ აგრეთვე, რომ (გარკვეული რისკ-ფაქტორების გამო) სატრასტო ფონდის

თავდაპირველი თანხა უფრო მცირე იქნება ვიდრე 30672.04 დოლარი (წინააღმდეგ შემთხვევაში, ფონდის ინვესტორები თანხებს განათავსებდნენ 10 %-იან საბანკო ანაბრებზე, რაც ნაკლებ რისკ-ფაქტორებთან იქნებოდა დაკავშირებული).

(ბ) ფონდის თავდაპირველი თანხა 30672.04 დოლარი რომ ყოფილიყო, (5.5) ფორმულის თანახმად 10 %-იანი განაკვეთით სამი წლის შემდეგ იგი გახდებოდა

$$30672.04\ e^{\frac{10}{100}\cdot 3} \approx 41402.92 \text{ დოლარი,}$$

რადგან ამ შემთხვევაში $t = 3$ (წელს) და $r = 10$.

რეალურად, ფონდმა 3 წლის განმავლობაში თავდაპირველი თანხა, რომელიც არ აღემატებოდა 30672.04 დოლარს, გაზარდა 50000 დოლარამდე და ამით უზრუნველყო 10 %-იან განაკვეთზე მეტი ზრდა. ამიტომ ფონდის მოღვაწეობა ამ პერიოდში უნდა შეფასდეს დადებითად. ■

9.13. ინვესტიციის ნაკადი და თანხის დაგროვება

ვთქვათ, დროის t მომენტისათვის ინვესტირებული თანხა გამოითვლება

$$K = K(t)$$

ფუნქციით. მაშინ

$$I = \frac{dK}{dt} = K'(t)$$

წარმოებულს ეწოდება **ინვესტიციის ნაკადი**.

$I = I(t)$ ფუნქცია აღწერს თანხის ნაკადს, რომელიც იზომება ერთეულით – თანხის ერთეული/დროის ერთეული (მაგალითად, დოლარი/წელიწადი), ხოლო $K = K(t)$ აღნიშნავს ინვესტირებულ თანხას, რომელიც გროვდება აღნიშნული ინვესტიციის ნაკადის შედეგად დროის t მომენტისათვის.

ცხადია, თუ მოცემულია ინვესტირებული თანხის გამოსათვლელი ფორმულა $K = K(t)$, მაშინ $I(t)$ ინვესტიციის ნაკადის მოსაძებნად უნდა გავა-

წარმოოთ $K(t)$ ფუნქცია. პირიქით, თუ მოცემულია $I(t)$ ინვესტიციის ნაკადი და საძიებელია ინვესტირებული თანხის ზრდა $t=t_1$ მომენტიდან $t=t_2$ მომენტამდე, მაშინ საჭიროა გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი

$$\int_{t_1}^{t_2} I(t)\ dt = \int_{t_1}^{t_2} K'(t)\ dt = K(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = K(t_2) - K(t_1)\,. \qquad (9.29)$$

ამოცანა 9.13. ინვესტიციის ნაკადი მოცემულია ტოლობით

$$I(t) = 9000\sqrt{t}\,.$$

გამოვთვალოთ:

(ა) ინვესტირებული თანხა პირველი წლის ბოლოდან მეოთხე წლის ბოლომდე;

(ბ) რამდენი წელია საჭირო, რომ ინვესტირებულმა თანხამ გადააჭარბოს 100000 დოლარს?

▼ (ა) კითხვაზე პასუხის გასაცემად უნდა გამოვიყენოთ (9.29) ფორმულა და გამოვთვალოთ შემდეგი განსაზღვრული ინტეგრალი

$$\int_1^4 9000\sqrt{t}\ dt = 9000\cdot\frac{2}{3}\,t^{3/2}\Big|_1^4 = 6000\left[4^{3/2}-1\right] = 6000\cdot 7 = 42000 \quad (\text{დოლარი}).$$

(ბ) T წლის განმავლობაში ინვესტირებული თანხა გამოითვლება ტოლობით

$$\int_0^T 9000\sqrt{t}\ dt = 9000\cdot\frac{2}{3}\,t^{3/2}\Big|_0^T = 6000\,T^{3/2}\,.$$

იმისათვის, რომ დავადგინოთ, რამდენი წლის შემდეგ გადააჭარბებს ეს თანხა 100000 დოლარს, უნდა ამოვხსნათ უტოლობა

$$6000\,T^{3/2} \ge 100000 \qquad \text{ანუ} \qquad T^{3/2} \ge \frac{50}{3}\,.$$

აქედან მივიღებთ

$$T \ge \left(\frac{50}{3}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{2500}{9}} \approx 6.52\,.$$

ამრიგად, მეშვიდე წლის შუა პერიოდში კაპიტალი მიაღწევს და გადააჭარბებს 100000 დოლარს. ■

9.14. არასაკუთრივი ინტეგრალები უსასრულო საზღვრებით

ძალიან ხშირად გამოყენებით ამოცანებში საჭიროა ისეთი განსაზღვრული ინტეგრალის განხილვა, რომელშიც ინტეგრების შუალედი არაა შემოსაზღვრული. ასეთ ინტეგრალს **არასაკუთრივი ინტეგრალი** ეწოდება.

მაგალითად, თუ (9.28) ფორმულაში $b \to \infty$, მაშინ მივიღებთ არასაკუთრივ ინტეგრალს

$$\int_a^{\infty} e^{-\frac{r}{100}t} f(t)\, dt, \tag{9.30}$$

რომელიც ეკონომიკურად წარმოადგენს უსასრულო ვადიანი შემოსავლის $f(t)$ ნაკადის დისკონტირებულ (მიმდინარე) ღირებულებას.

სხვა სიტყვებით, (9.30) ფორმულით მოცემული სიდიდე გამოსახავს იმ საწყის თანხას, რაც უნდა გაიზარდოს სარგებლის წლიური რთული $r\%$-იანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის წესით, რომ დროის ყოველი $t \geq a$ მომენტისათვის გვქონდეს შემოსავლის $f(t)$ ნაკადი. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ k-ური $(k > a)$ წლისათვის გვექნება შემოსავალი

$$T_k = \int_a^k f(t)\, dt.$$

ახლა შემოვიღოთ არასაკუთრივი ინტეგრალების ზუსტი განმარტება და გავეცნოთ მათი გამოთვლის წესებს.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, +\infty)$ შუალედში და ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a, b]$ სეგმენტზე $(b > a)$.

● თუ არსებობს

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

ინტეგრალის სასრული ზღვარი, როცა $b \to +\infty$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a, +\infty)$ შუალედში და აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოთი

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.} \quad \blacksquare \tag{9.31}$$

ანალოგიურად, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty,\ b]$ შუალედში და ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a, b]$ სეგმენტზე $(a < b)$.

● თუ არსებობს

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ინტეგრალის სასრული ზღვარი, როცა $a \to -\infty$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $(-\infty,\ b]$ შუალედში და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx} \quad \blacksquare \tag{9.32}$$

● თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty,\ +\infty)$ შუალედში და არსებობს არასაკუთრივი ინტეგრალები

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{და} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

სადაც a ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვია, მაშინ მათ ჯამს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, ე. ი.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx} \quad \blacksquare \tag{9.33}$$

ცხადია,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{9.34}$$

სასრული ზღვრის არსებობის შემთხვევაში (9.31), (9.32) და (9.34) ინტეგრალებს **კრებად არასაკუთრივ ინტეგრალებს** უწოდებენ. თუ ეს ზღვრები არ არსებობს ან უსასრულოა, მაშინ ზემოთ განხილულ ინტეგრალებს **განშლადი არასაკუთრივი ინტეგრალები** ეწოდება.

ამოცანა 9.14. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

▼ არასაკუთრივი ინტეგრალის განმარტების თანახმად, გვაქვს:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left[-x^{-1} \right] \Big|_{1}^{b} = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1. \quad \blacksquare$$

ამოცანა 9.15. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{-\infty}^{0} e^{0.1x}\, dx$.

▼ არასაკუთრივი ინტეგრალის განმარტების თანახმად, გვაქვს

$$\int_{-\infty}^{0} e^{0.1x}\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} e^{0.1x}\, dx = \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{e^{0.1x}}{0.1} \right] \Bigg|_{a}^{0} =$$

$$= 10 \lim_{a \to -\infty} \left(1 - e^{0.1a} \right) = 10. \quad \blacksquare$$

ამოცანა 9.16. ინვესტორი შემოუსაზღვრელი ვადით ყოველწლიურად იღებს თანხას 5000 დოლარის ინტენსივობით. გამოვთვალოთ ამ შემოსავლის ნაკადის საწყისი ღირებულება, თუ დისკონტირება ხდება სარგებლის წლიური რთული 6 %-იანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის წესის საფუძველზე.

▼ აღნიშნული უსასრულო ვადიანი შემოსავლის ნაკადის საწყისი ღირებულება უნდა გამოვთვალოთ (9.30) გამოსახულებით, რომელშიც $a = 0$, $r = 6$ და $f(t) = 5000$. მივიღებთ

$$K = \int_{0}^{+\infty} e^{-0.06t}\, 5000\, dt = 5000 \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^{-0.06t} dt = 5000 \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{0.06} e^{-0.06t} \right]_{0}^{b}$$

$$= 5000 \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{100}{6} - \frac{100}{6} e^{-0.06b} \right] = 5000 \cdot \frac{100}{6} \approx 83333.33.$$

ამრიგად, ამოცანაში მოცემული შემოსავლების ნაკადის საწყისი ღირებულებაა მიახლოებით 83333 დოლარი. სწორედ ამ მონაცემით დაადგენდა ინვესტორი პროექტში მონაწილეობის სარგებლიანობას. (ცხადია, პროექტში მან დააბანდა 83333 დოლარზე ნაკლები. წინააღმდეგ შემთხვევაში, იგი თანხას განათავსებდა 6 %-იან საბანკო ანაბარზე, რაც ნაკლებ რისკ-ფაქტორებთან იქნებოდა დაკავშირებული.) $\blacksquare$

9.15. არასაკუთრივი ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან

პრაქტიკულ ამოცანებში ხშირად საჭიროა განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან. ასეთ ინტეგრალებს უწოდებენ **არასაკუთრივ ინტეგრალებს შემოუსაზღვრელი ფუნქციებიდან**. შემოვიღოთ ამ ინტეგრალების ზუსტი მათემატიკური განმარტება და გავეცნოთ მათი გამოთვლის წესებს.

● ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b)$ შუალედში და უწყვეტია ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე, სადაც $a \le t < b$. ამასთან, b წერტილის მიდამოში ფუნქცია შემოუსაზღვრელია. ცხადია, ყოველი t-თვის არსებობს ინტეგრალი $\int_a^t f(x)\,dx$, რომელიც t ცვლადის უწყვეტ ფუნქციას წარმოადგენს $[a, b)$ შუალედში,

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx, \qquad a \le t < b. \tag{9.35}$$

თუ არსებობს ამ ფუნქციის სასრული ზღვარი, როცა $t \to b-$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a, b)$ შუალედში და აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოთი

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)\,dx.} \quad \blacksquare \tag{9.36}$$

ამ შემთხვევაში არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება კრებადი ინტეგრალი. თუ (9.36) ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოა, მაშინ შესაბამის არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება განშლადი.

● ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(a, b]$ შუალედში და უწყვეტია ყოველ $[t, b]$ სეგმენტზე, სადაც $a < t \le b$, ხოლო a წერტილის მიდამოში არაა შემოსაზღვრული. თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{t \to a+} \int_t^b f(x)\,dx,$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $(a, b]$ შუალედში და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)\,dx.} \quad \blacksquare \qquad (9.37)$$

ამ შემთხვევაში არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება კრებადი ინტეგრალი. თუ (9.37) ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოა, მაშინ არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება განშლადი.

● ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, c)$ და $(c, b]$ შუალედებში და c წერტილის მიდამოში შემოუსაზღვრელია. თუ არსებობს არასაკუთრივი ინტეგრალები

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{და} \quad \int_c^b f(x)\,dx,$$

მაშინ მათ ჯამს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a, b]$ შუალედში და ვწერთ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

ამრიგად,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0+\\ \varepsilon_2\to 0+}}\left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx\right]} \quad \blacksquare$$

თუ $\int_a^c f(x)\,dx$ და $\int_c^b f(x)\,dx$ ინტეგრალებიდან ერთი მაინც განშლადია, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$ განშლადია.

ამოცანა 9.17. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

▼ განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \text{ სადაც } 0 < \varepsilon \le 1.$$

თუ $\alpha \neq 1$, მაშინ

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} \left[x^{1-\alpha} \right]_{\varepsilon}^{1} = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \varepsilon^{1-\alpha} \right).$$

თუ $\alpha = 1$, მაშინ

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \left[\ln|x| \right]_{\varepsilon}^{1} = -\ln \varepsilon .$$

ამ ტოლობებში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \to 0+$. მივიღებთ

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} +\infty, & \text{როცა} \quad \alpha \geq 1, \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{როცა} \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

მაშასადამე, არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$ კრებადია, როცა $0 < \alpha < 1$, და განშლადია, როცა $\alpha \geq 1$. ■

9.16. სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ ინტეგრალები:

1) $\int \left(6x^2 + 8x + \frac{1}{x} \right) dx$;

2) $\int \left(5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1 \right) dx$;

3) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$;

4) $\int \frac{\left(1 + \sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$;

5) $\int \frac{x\, dx}{x^2 + 3}$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$;

7) $\int x\, e^{-2x} dx$;

8) $\int \ln x\, dx$;

9) $\int x e^{-x} dx$;

10) $\int x^2 e^{0.1x} dx$.

2. საწარმოს მარგინალური დანახარჯი Q ერთეულის წარმოების დროს არის $2.25 + 0.1Q + Q^2$ (დოლარი). გაიგეთ დანახარჯი პირველი 10

ერთეულის საწარმოებლად, თუ პროდუქციის პირველი ერთეულის საწარმოებლად იხარჯება 125 დოლარი?

3. მარგინალური დანახარჯის ფუნქციას აქვს სახე

$$(MC) = K'(Q) = 0.006\ Q^2 - 1.5\ Q + 8\ ,$$

სადაც $K(Q)$ არის მთლიანი დანახარჯების ფუნქცია, ხოლო Q — წარმოებული პროდუქციის მოცულობა. ფიქსირებული დანახარჯია 20000 (დოლარი). გამოთვალეთ დანახარჯი, რომელიც შეესაბამება პროდუქციის პირველი 100 ერთეულის წარმოებას.

4. მარგინალური ამონაგების ფუნქციაა

$$(MR) = f(Q) = 90 - 0.02\ Q\ .$$

პროდუქციის პირველი 100 ერთეულის გაყიდვით მიღებული ამონაგებია 10000 დოლარი. როგორი იქნება ამონაგები პირველი 200 ერთეულის გაყიდვის შემდეგ?

5. მარგინალური დანახარჯის ფუნქციაა

$$(MC) = K'(Q) = 140 - 0.5\ Q + 0.012\ Q^2\ .$$

იპოვეთ დანახარჯის ფუნქციის ნაზრდი პროდუქციის მოცულობის 300 ერთეულიდან 500 ერთეულამდე გაზრდის შემთხვევაში.

6. იპოვეთ მოხმარების ფუნქცია, თუ ცნობილია, რომ მარგინალური მიდრეკილება დაზოგვისადმი გამოითვლება ტოლობით

$$(MPS) = 0.4 - 0.1\ \sqrt{Y}\ ,$$

სადაც Y არის ეროვნული შემოსავალი. ამასთან, ცნობილია, რომ როდესაც ეროვნული შემოსავალი ტოლია 100 ერთეულის, მაშინ მოხმარების ფუნქცია ნულის ტოლია.

7. იპოვეთ (TC) მთლიანი დანახარჯი, თუ მარგინალური დანახარჯია

$$(MC) = 3\ \mathrm{e}^{0.5\,Q}\ ,$$

ხოლო ფიქსირებული დანახარჯი 10-ის ტოლია.

8. მონოპოლისტური ფირმის მარგინალური ამონაგები მოიცემა ტოლობით

(ა) $(MR)=100-6Q$;   (ბ) $(MR)=20-2Q$;   (გ) $(MR)=\dfrac{6}{\sqrt{Q+1}}$.

აქ Q არის რეალიზებული პროდუქციის რაოდენობა (ანუ მოთხოვნა). იპოვეთ (TR) მთლიანი ამონაგების ფუნქცია და დაადგინეთ შესაბამისი მოთხოვნის ფუნქციის სახე.

9. იპოვეთ მოხმარების ფუნქცია, თუ მარგინალური მიდრეკილება მოხმარებისადმი განისაზღვრება ტოლობით

$$(MPC)=0.3+\frac{0.4}{\sqrt[3]{Y^2}},$$

სადაც Y ეროვნული შემოსავალია. ამასთან ცნობილია, რომ მოხმარება 6 ერთეულის ტოლია, როდესაც ეროვნული შემოსავალია 8 ერთეული.

10. გამოთვალეთ ინტეგრალები:

1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{4\left(1+\sqrt{x}\right)}{x^2}\,dx$;

5) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\ln x}$;

2) $\displaystyle\int_0^3 \frac{3}{2}\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

6) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} x e^x\,dx$;

3) $\displaystyle\int_{-8}^{8} \left(5+\frac{x}{2}\right)^{-1/2} dx$;

7) $\displaystyle\int_0^3 x e^x\,dx$;

4) $\displaystyle\int_0^3 4\left(1+2x\right)^3 dx$;

8) $\displaystyle\int_0^{10} x^2 e^{0.1x}\,dx$.

11. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით:

1) $y=x^3$, $y=0$, $x=1$, $x=3$;

2) $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=3$, $x=27$;

3) $y=e^x$, $y=0$, $x=\ln 7$, $x=\ln 12$;

4) $y=7^x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$;

5) $y=x^3$, $y=0$, $x=1$, $x=3$.

12. ვთქვათ, მოთხოვნის ფუნქციაა $P = f_D(Q) = 5 - \frac{Q}{10}$. ვიპოვოთ (CS) მომხმარებლის დანაზოგი, როდესაც ვაჭრობის დონეა $Q_0 = 30$. ააგეთ მოთხოვნის წირი და გამოსახეთ მომხმარებლის დანაზოგი ფართობის სახით.

13. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = f_D(Q) = \frac{1000}{Q+2}$. იპოვეთ (CS) მომხმარებლის დანაზოგი, თუ პროდუქციის ერთი ერთეული იყიდება 20 დოლარად.

14. გამოთვალეთ (PS) მწარმოებლის ამონაგების ნამატი, თუ მიწოდების ფუქციაა $P = f_S(Q) = 3 + 0.01\,Q^2$, ხოლო ვაჭრობა ხდება $Q_0 = 30$ დონეზე. ააგეთ შესაბამისი ნახაზი და გამოსახეთ მწარმოებლის ამონაგების ნამატი ფართობის სახით.

15. მიწოდების ფუნქცია მოცემულია $P = f_S(Q) = 5 + \frac{1}{10}\sqrt{Q}$ ფორმულით. იპოვეთ (PS) მწარმოებლის ამონაგების ნამატი, თუ პროდუქციის ერთეულის ფასია 10 დოლარი.

16. მწარმოებელი კვირაში ყიდის 1000 ტელევიზორს – თითოეულს 450 დოლარად. მარკეტინგი აჩვენებს, რომ 10 დოლარით ფასის შემცირება იწვევს გაყიდული ტელევიზორების რაოდენობის ზრდას კვირაში 100 ერთეულით. იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია და გამოთვალეთ (CS) მომხმარებლის დანაზოგი, თუ ვაჭრობის დონეა $Q_0 = 400$. იგულისხმება, რომ მოთხოვნის ფუნქცია წრფივია.

17. გარკვეული პროდუქციისათვის მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = f_D(Q) = 2000 - 0.1\,Q - 0.03\,Q^2.$$

იპოვეთ მომხმარებლის დანაზოგი, თუ ვაჭრობის დონეა $Q_0 = 100$.

18. იპოვეთ მომხმარებლის (CS) დანაზოგი, თუ მოთხოვნის $f_D(Q)$ ფუნქცია და მოთხოვნის Q_0 დონე მოცემულია შემდეგნაირად:

(ა) $P = f_D(Q) = 30 - 4Q$, $Q_0 = 5$; (ბ) $P = f_D(Q) = 100 - Q^2$, $Q_0 = 8$.

19. იპოვეთ მომხმარებლის (CS) დანაზოგი, როდესაც ერთეულის ფასია

$P_0 = 5$ და მოთხოვნის ფუნქციაა:

$$(\text{ა})\quad P = 25 - 2Q\,; \qquad\qquad (\text{ბ})\quad P = \frac{10}{\sqrt{Q+1}}\,.$$

20. თავისუფალი კონკურენციის პირობებში ბაზრის მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = f_D(Q) = 50 - 2Q\,,$$

ხოლო მიწოდების ფუნქციაა $P = f_S(Q) = 10 + 4Q$.

გამოთვალეთ (Q_0 დონეზე ვაჭრობისას):

(ა) მომხმარებლის (CS) დანაზოგი;

(ბ) მწარმოებლის (PS) ამონაგების ნამატი.

21. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

$$P = f_D(Q) = -Q^2 - 4\,Q + 68$$

და მიწოდების ფუნქცია

$$P = f_S(Q) = Q^2 + 2Q + 12\,.$$

ცნობილია, რომ გვაქვს სრულყოფილი კონკურენცია.

იპოვეთ (Q_0 დონეზე ვაჭრობისას):

(ა) მომხმარებლის (CS) დანაზოგი;

(ბ) მწარმოებლის (PS) ამონაგების ნამატი.

22. სატრასტო ფონდი 5 წლის განმავლობაში ყოველწლიურად ინვესტორებს უხდის 2000 დოლარს. სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 12 % (უწყვეტი დარიცხვის წესით). გადახდა იწყება პირველივე წლიდან. იპოვეთ სატრასტო ფონდის დისკონტირებული (მიმდინარე) ღირებულება.

23. სატრასტო ფონდმა უნდა იმოქმედოს 10 წლის განმავლობაში და შემდგომი 15 წლის განმავლობაში ყოველწლიურად ინვესტორებს უნდა უხადოს 12000 დოლარი. სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 11 % (უწყვეტი დარიცხვის წესით).

ა) იპოვეთ სატრასტო ფონდის დისკონტირებული ღირებულება.

ბ) რა თანხა უნდა დააგროვოს ფონდმა პირველი 5 წლის შემდეგ, რომ მისი მუშაობა ჩაითვალოს დადებითად?

24. ფეხბურთელი აფორმებს სახელფასო კონტრაქტს. ამ კონტრაქტის პირობების თანახმად იგი მიიღებს თანხას, რომელიც იზრდება თანაბრად, უწყვეტად და წრფივად წლიური 1000000 დოლარიდან და აღწევს წლიურ 3000000 დოლარს 4 წლის შემდეგ. იპოვეთ კონტრაქტის დისკონტირებული ღირებულება, რომელიც შეესაბამება სარგებლის წლიური რთული 8 %-იანი განაკვეთით უწყვეტ დარიცხვას. (მითითება: აჩვენეთ, რომ ფეხბურთელის ხელფასი დროის t მომენტისთვის გამოითვლება ფორმულით $F(t)=1+0.5\,t$ (მილიონი დოლარი) და ისარგებლეთ იმით, რომ ხელფასის ზრდის ინტენსივობა ანუ შემოსავლის ნაკადია $F'(t)=f(t)=0.5$).

25. (ა) გამოიყენეთ (9.30) ფორმულა და აჩვენეთ, რომ დისკონტირებული ღირებულება უსასრულო ვადიანი მუდმივი A ნაკადისა ($t=0$ მომენტიდან $t=\infty$ მომენტამდე) $\dfrac{100A}{r}$ სიდიდის ტოლია, სადაც r არის სარგებლის წლიური რთული განაკვეთი უწყვეტი დარიცხვით.

(ბ) ვთქვათ, სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 10 % უწყვეტი დარიცხვით. რას უდრის უსასრულო ვადიანი მუდმივი 5000 დოლარის ნაკადის დისკონტირებული ღირებულება?

26. ინვესტიციის ნაკადი მოცემულია $I(t)=800\,t^{1/3}$ ტოლობით. იპოვეთ:

(ა) ინვესტირებული თანხის დაგროვება პირველი წლის ბოლოდან მერვე წლის ბოლომდე;

(ბ) რამდენი წლის შემდეგ გადააჭარბებს ინვესტირებული თანხა 48600 დოლარს?

27. იპოვეთ ინვესტირებული თანხის დაგროვება $t=0$ მომენტიდან $t=T$ მომენტამდე, თუ ინვესტიციის ნაკადი მოცემულია ტოლობებით:

(ა) $I(t)=A\,t^{\alpha}$; (ბ) $I(t)=A\,e^{\alpha t}$.

აქ A და α დადებითი მუდმივებია.

28. სატრასტო ფონდი მოქმედებს შექმნიდან 8 წლის განმავლობაში და იხდის თანხას 10000 დოლარის ინტენსივობით შემდგომი 7 წლის განმავლობაში. სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 12 % (უწყვეტი დარიცხვით).

(ა) იპოვეთ სატრასტო ფონდის დისკონტირებული ღირებულება;

(ბ) რა თანხა უნდა დააგროვოს სატრასტო ფონდმა პირველი 5 წლის შემდეგ, რომ მისი მუშაობა ჩაითვალოს დადებითად?

(გ) იპოვეთ სატრასტო ფონდის დისკონტირებული ღირებულება, თუ ნაცვლად 7 წლისა იგი იმოქმედებს მუდმივად (შემოუსაზღვრელი დროის განმავლობაში).

29. გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალები:

1) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^3}}$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(2x-3)^2}$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2}$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx$;

5) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$;

6) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

7) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

8) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

30. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\Phi(n) = \int\limits_{0}^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx, \text{ როცა } n = 0, 1, 2.$$

(გამოიყენეთ $\lim\limits_{t \to +\infty} t^k e^{-at} = 0$ ტოლობა, სადაც k ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია და $a > 0$).

თავი 10. დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის ელემენტები

მრავალი პრობლემის შესწავლას მივყავართ ისეთ თანაფარდობებამდე, რომლებიც აკავშირებს საძიებელ სიდიდეებსა და მათ წარმოებულებს. ასეთ თანაფარდობებს დიფერენციალურ განტოლებებს უწოდებენ.

მათი გამოკვლევა პრინციპულად განსხვავდება ჩვენთვის კარგად ცნობილი ალგებრული განტოლებების ამოხსნის პროცესისაგან.

ამ თავში გავეცნობით დიფერენციალური განტოლებების თეორიის ძირითად ცნებებსა და ელემენტარული დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის მეთოდებს. ეს მეთოდები ეფუძნება დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის თეორიას.

10.1. ამოცანები, რომლებსაც მივყავართ დიფერენციალური განტოლების ცნებამდე

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე კონკრეტული ამოცანა სოციალური და ეკონომიკური სფეროდან. ჯერ განვიხილოთ მოსახლეობის გამრავლების მოდელი შეუზღუდავი საარსებო პირობების შემთხვევაში.

ამოცანა 10.1. ვთქვათ, დროის t მომენტისათვის ქვეყნის მოსახლეობის რაოდენობა არის $P = P(t)$. დავუშვათ, რომ შობადობა და სიკვდილიანობა დროის ერთეულში (მაგალითად, 1 წელიწადში) პროპორციულია მოსახლეობის რაოდენობის და პროპორციულობის კოეფიციენტებია, შესაბამისად, α და β; ამასთან, $\alpha > \beta$. გარდა ამისა, ვიგულისხმოთ, რომ აღნიშნულ ქვეყანაში გვაქვს ემიგრაციის (ქვეყნიდან მოსახლეობის გადინების) პროცესი m ნაკადით (ე.ი. დროის ერთეულში ქვეყნიდან გასული მოსახლეობის რაოდენობაა m).

განვსაზღვროთ მოსახლეობის რაოდენობა დროის ნებისმიერი t მომენ-

ტისათვის, თუ ცნობილია α, β და m მუდმივები. ამასთან მოსახლეობის რაოდენობა დროის საწყისი $t=0$ მომენტისათვის P_0-ის ტოლია.

▼ გამოვთვალოთ მოსახლეობის ცვლილება t მომენტიდან $t+\Delta t$ მომენტამდე. ერთი მხრივ, მოსახლეობის ნაზრდი გამოისახება შემდეგი სხვაობით

$$\Delta P(t)=P(t+\Delta t)-P(t).$$

მეორე მხრივ, ამოცანის პირობის თანახმად, Δt დროის განმავლობაში იბადება $\alpha P(t)\,\Delta t$ ბავშვი, ხოლო დროის იმავე შუალედში კვდება $\beta P(t)\,\Delta t$ ადამიანი. ამასთან, დროის იმავე შუალედში ემიგრაციაში მიდის $m\,\Delta t$ მოქალაქე.

ამრიგად, მოსახლეობის რაოდენობა დროის Δt შუალედში შეიცვლება შემდეგი სიდიდით

$$\alpha\ P(t)\,\Delta t-\beta\ P(t)\,\Delta t-m\,\Delta t.$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta P(t)=(\alpha-\beta)\ P(t)\ \Delta t-m\ \Delta t.$$

აქედან

$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t}=(\alpha-\beta)\ P(t)-m.$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta t\to 0$,

$$P'(t)=(\alpha-\beta)\ P(t)-m. \qquad (10.1)$$

მივიღეთ განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს $P(t)$ ფუნქცია. ასეთ განტოლებას, როგორც აღვნიშნეთ, ეწოდება დიფერენციალური განტოლება.

ამოცანის კითხვაზე პასუხის გასაცემად საჭიროა ამოიხსნას (10.1) დიფერენციალური განტოლება, ანუ მოიძებნოს ისეთი $P(t)$ ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს (10.1) თანაფარდობას და, ამასთან, შესრულდება პირობა

$$P(0)=P_0. \qquad (10.2)$$

პირდაპირი შემოწმებით მარტივად ვაჩვენებთ, რომ ასეთი ფუნქციაა (ამოხსნის მეთოდი მოცემულია პარაგრაფ 10.7-ში; იხ. ამოცანა 10.10)

$$P(t)=\left(P_0-\frac{m}{\alpha-\beta}\right)e^{(\alpha-\beta)t}+\frac{m}{\alpha-\beta}. \tag{10.3}$$

ამ ფუნქციის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ:

(ა) თუ $P_0-\dfrac{m}{\alpha-\beta}>0$ ანუ $m<P_0\left(\alpha-\beta\right)$, მაშინ მოსახლეობის რაოდენობა ექსპონენციალურად იზრდება;

(ბ) თუ $P_0-\dfrac{m}{\alpha-\beta}=0$ ანუ $m=P_0\left(\alpha-\beta\right)$, მაშინ მოსახლეობის რაოდენობა მუდმივია;

(გ) თუ $P_0-\dfrac{m}{\alpha-\beta}<0$ ანუ $m>P_0\left(\alpha-\beta\right)$, მაშინ მოსახლეობის რაოდენობა ექსპონენციალურად იკლებს.

შემდგომ პარაგრაფებში გადმოცემული მასალიდან (იხ. პარაგრაფი 10.3) გამომდინარეობს, რომ (10.3) ფუნქცია სრულიად ცალსახად განისაზღვრება (10.1) განტოლებით და (10.2) „საწყისი პირობით“. ამიტომ (10.3) არის დასმული ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი. ■

ახლა განვიხილოთ მოსახლეობის ზრდის პრობლემა შეზღუდული საარსებო პირობების შემთხვევაში. კერძოდ, შეზღუდული გარემოსა და საკვების შეზღუდული რესურსების შემთხვევაში.

ამოცანა 10.2. ვთქვათ, საცხოვრებელი გარემოსა და საკვები რესურსების შეზღუდულობის გამო მოსახლეობის მაქსიმალური რაოდენობა, რომელიც იარსებებს და გამოიკვებება არსებული რეზერვებით, ტოლია M რიცხვისა. ცნობილია, რომ მოსახლეობის ზრდის სიჩქარე პროპორციულია აღებულ t მომენტში მოსახლეობის $P(t)$ რაოდენობის ნამრავლისა იმ სიდიდეზე, რომლითაც მოსახლეობის არსებული რაოდენობა ჩამორჩება შესაძლო მაქსიმალურ რაოდენობას. პროპორციულობის კოეფიციენტია $k>0$ მუდმივი რიცხვი.

განვსაზღვროთ მოსახლეობის რაოდენობა t მომენტისათვის, თუ საწყის $t=0$ მომენტში მოსახლეობის რაოდენობაა $P(0)=P_0<M$.

▼ ამოცანის პირობის თანახმად, მოსახლეობის ზრდის სიჩქარე $P'(t)$

პროპორციულია $P(t)$ და $M-P(t)$ სიდიდეების ნამრავლისა. ამასთან, პროპორციულობის კოეფიციენტია k. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$P'(t)=k\,P(t)\left[M-P(t)\right]. \tag{10.4}$$

კვლავ მივიღეთ დიფერენციალური განტოლება.

ამრიგად, საძიებელია ისეთი $P(t)$ ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს (10.4) ტოლობასა და შემდეგ „საწყის პირობას" ($t=0$ მომენტისათვის)

$$P(0)=P_0. \tag{10.5}$$

უშუალო შემოწმებით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ ასეთი ფუნქციაა (ამოხსნის მეთოდი მოცემულია პარაგრაფ 10.5-ში; იხ. ამოცანა 10.6)

$$P(t)=\frac{P_0\,M}{\left(M-P_0\right)\,e^{-Mkt}+P_0}. \tag{10.6}$$

მიღებული $P(t)$ ფუნქცია ზრდადია და შემოსაზღვრული, რადგან (10.4) თანაფარდობების ძალით

$$P'(t)>0,\ \ \text{როცა}\ \ t>0.$$

ამასთან, როდესაც $t>0$, მაშინ

$$P(t)<\frac{P_0M}{P_0}=M \quad \text{და} \quad \lim_{t\to+\infty}P(t)=M.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მოსახლეობის რაოდენობა იზრდება, მაგრამ არასოდეს გადააჭარბებს ამოცანაში მითითებულ M რიცხვს. ცხადია, ეს მოდელი უფრო რეალურია, ვიდრე წინა ამოცანაში განხილული მოსახლეობის თავისუფალი გამრავლების მოდელი (სხვადასხვა მოდელები განხილულია ამ პარაგრაფის ბოლოში მოცემულ სავარჯიშოებშიც). ■

ამოცანა 10.3. ქვეყანას ბრუნვაში აქვს ეროვნული ვალუტის 2 მილიარდი ერთეული. მთავრობამ გადაწყვიტა ბრუნვაში შემოიღოს ფულის ახალი ნიშნები. ყოველდღიურად ბანკებში შედის 10 მილიონი ერთეულის შესაბამისი ძველი კუპიურა. ბანკებში შესული ძველი კუპიურების ნაცვლად ბრუნვაში გადის შესაბამისი რაოდენობის ახალი ფულადი ნიშნები.

(ა) შევადგინოთ მათემატიკური მოდელი დიფერენციალური განტოლების სახით, რომელიც აღწერს ახალი ვალუტის ბრუნვაში შესვლას;

(ბ) ვიპოვოთ, რა დრო დასჭირდება ძველი ვალუტის 70 %-ის შეცვლას ახლით.

▼ ვთქვათ, $x = x(t)$ აღნიშნავს ბრუნვაში ჩართული ახალი ვალუტის რაოდენობას დროის t მომენტისათვის. ცხადია, $x(0) = 0$.

(ა) დროის t მომენტიდან $t + \Delta t$ მომენტამდე ბრუნვაში არსებული ახალი ვალუტის რაოდენობა შეიცვლება

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta x$$

სიდიდით. მეორე მხრივ, რადგან დროის ერთეულში (ე. ი. ერთ დღეში) ბანკში შედის 10 მილიონი ძველი ვალუტა, ამიტომ Δt დროში ბანკში შევა $10^7 \Delta t$ რაოდენობის ძველი ვალუტა. სწორედ ეს რაოდენობა შეიცვლება ახალი ვალუტით დროის განსახილველ Δt შუალედში. ამრიგად,

$$\Delta x = 10^7 \Delta t$$

ანუ

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 10^7.$$

ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $\Delta t \to 0$, მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{dx}{dt} = 10^7.$$

მარტივად ვაჩვენებთ, რომ ამ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია

$$x(t) = 10^7 t + C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

თუ გავითვალისწინებთ ამოცანის საწყის პირობას $x(0) = 0$, მაშინ მივიღებთ $C = 0$. ამრიგად, ახალი ვალუტის ბრუნვაში შესვლის პროცესი აღიწერება

$$x(t) = 10^7 t$$

ფუნქციით.

(ბ) იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ძველი ვალუტის 70 %-ის შეცვლისათვის საჭირო დრო, ჯერ გამოვთვალოთ ბრუნვაში არსებული 2 მილიარდის 70 %

$$\frac{2\cdot 10^9\cdot 70}{100}=14\cdot 10^8.$$

გავუტოლოთ ეს რიცხვი $x(t)$ ფუნქციას და ვიპოვოთ t:

$$x(t)=10^7\cdot t=14\cdot 10^8.$$

აქედან

$$t=14\cdot 10=140.$$

ამრიგად, ძველი ვალუტის 70%-ის ახლით შეცვლას დასჭირდება 140 დღე. ■

როგორც განხილული ამოცანებიდან ჩანს, დიფერენციალური განტოლებები გამოიყენება მრავალი ცხოვრებისეული პრობლემის შემაბამისი მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად. ამიტომ მათი ამოხსნების მეთოდების შესწავლა საშუალებას მოგვცემს გამოვიკვლიოთ და გავაანალიზოთ აღნიშნული ტიპის მოდელები. სწორედ ამ მიზანს ემსახურება ამ თავის შემდგომი პარაგრაფები.

10.2. ძირითადი ცნებები

შემოვიღოთ ძირითადი განმარტებები და ტერმინები, რომლებსაც ქვემოთ სისტემატურად გამოვიყენებთ.

● განტოლებას, რომელშიც შედის უცნობი ფუნქცია და ამ ფუნქციის წარმოებულები, დიფერენციალური განტოლება ეწოდება. როცა განტოლებაში შემავალი უცნობი ფუნქცია ერთი ცვლადის ფუნქციაა, მაშინ განტოლებას **ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება** ეწოდება. ■

მაგალითად, განტოლება

$$F\left(x,\, y,\, y',\, y'',\; \ldots\;,\, y^{(n)}\right)=0, \tag{10.7}$$

სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, $y=y(x)$ უცნობი ფუნქციაა, $y', y'',\; \ldots\;, y^{(n)}$ კი მისი წარმოებულებია, წარმოადგენს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას.

ჩვენ შევისწავლით მხოლოდ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს, ამიტომ სიტყვას — „ჩვეულებრივი" შემდგომში გამოვტოვებთ.

● დიფერენციალურ განტოლებაში შემავალი წარმოებულის უმაღლეს რიგს ეწოდება **დიფერენციალური განტოლების რიგი**. ■

მაგალითად,

$$F(x, y, y') = 0$$

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებაა, ხოლო

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება.

● **დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი** ეწოდება ისეთ $y - y(x)$ ფუნქციას, რომელიც მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში ჩასმით მას იგივეობად აქცევს. ■

ქვემოთ შევისწავლით დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მოძებნის ხერხებს. დავიწყოთ უმარტივესი შემთხვევით – პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების განხილვით.

10.3. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$F(x, y, y') = 0. \tag{10.8}$$

იმ შემთხვევაში, როცა (10.8) განტოლება ამოიხსნება y' წარმოებულის მიმართ, მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{10.9}$$

სადაც $f(x, y)$ წარმოადგენს Oxy სიბრტყეში ან მის რაიმე არეში განსაზღვრულ ფუნქციას.

ზოგადად, (10.9) ტიპის განტოლებას გააჩნია უამრავი ამონახსნი. მართლაც, განვიხილოთ შემდეგი განტოლება

$$y' - y = 0. \tag{10.10}$$

მარტივად შევამოწმებთ, რომ

$$y = C\,e^{x},$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, წარმოადგენს (10.10) განტოლების ამონახსნს.

აქედან ჩანს, რომ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას გააჩნია ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა. ამ ამონახსნებიდან ცალსახად შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი ამონახსნი, რომლის შესაბამისი გრაფიკი გაივლის წინასწარ მოცემულ (x_0, y_0) წერტილზე. მართლაც, ამ შემთხვევაში გვაქვს შემდეგი ტოლობა

$$y_0 - C\,e^{x_0},$$

საიდანაც C მუდმივი განისაზღვრება ცალსახად

$$C = y_0\,e^{-x_0}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ y ფუნქციის გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$y = y_0\,e^{x - x_0}.$$

ესაა სწორედ (10.10) განტოლების ის ერთადერთი ამონახსნი, რომლის გრაფიკიც გაივლის (x_0, y_0) წერტილზე.

ზოგადად, (10.9) დიფერენციალური განტოლებისათვის მართებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შემდეგი თეორემა.

თეორემა 10.1. (კოშის თეორემა) თუ $f(x,y)$ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებული y ცვლადით უწყვეტია Oxy სიბრტყის რაიმე D არეში, რომელიც შეიცავს (x_0, y_0) წერტილს, მაშინ არსებობს (10.9) დიფერენციალური განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $y = \varphi(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\varphi(x_0) = y_0. \ \blacksquare \tag{10.11}$$

ამ უკანასკნელ პირობას უწოდებენ **კოშის პირობას** ანუ **საწყის პირობას.**

(10.9) განტოლებას (10.11) საწყისი პირობით **კოშის ამოცანა** ეწოდება.

● პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების **ზოგადი ამონახსნი** ეწოდება ისეთ $y = \varphi(x, C)$ ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია ერთ ნებისმიერ C მუდმივზე და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(ა) იგი ამონახსნია დიფერენციალური განტოლებისა C-ს ნებისმიერი

მნიშვნელობისათვის;

(ბ) ნებისმიერი საწყისი პირობისათვის (მაგალითად, $y = y_0$, როცა $x = x_0$) შეგვიძლია ვიპოვოთ C მუდმივის ისეთი მნიშვნელობა $C = C_0$, რომ ფუნქცია $y = \varphi(x, C_0)$ დააკმაყოფილებს ამ საწყის პირობას, $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

იგულისხმება, რომ (x_0, y_0) წერტილი ეკუთვნის იმ არეს, რომელშიც სრულდება კოშის თეორემის პირობები. ■

● დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან მასში C მუდმივის რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობის ჩასმით, მოცემული განტოლების **კერძო ამონახსნი** ეწოდება. ■

განვიხილოთ მაგალითი.

ამოცანა 10.4. ამოვხსნათ განტოლება

$$y' = \frac{y}{x}$$

და ვიპოვოთ ამ განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას, $y(1) = 2$.

▼ მოცემული განტოლება გადავწეროთ ასე

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

ვაინტეგროთ ტოლობის ორივე მხარე. მივიღებთ

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|, \qquad \text{ე. ი.} \qquad |y| = |Cx|.$$

მაშასადამე,

$$y = Cx,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია (მოდულის ნიშანი მოხსნილია C-ს ნებისმიერობის გამო).

ამოცანის პირობის თანახმად $y(1) = 2$. ამიტომ $2 = C \cdot 1$ ანუ $C = 2$. ამრიგად, საძიებელი ამონახსნია $y = 2x$. ■

თუ $y=\varphi(x)$ ფუნქცია არის (10.8) განტოლების რომელიმე ამონახსნი, მაშინ ამ ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება (10.8) დიფერენციალური განტოლების **ინტეგრალური წირი**. თუ (10.8) განტოლების ზოგად ამონახსნში C მუდმივს მივანიჭებთ სხვადასხვა მნიშვნელობას და განვიხილავთ შესაბამის გრაფიკებს, მაშინ მივიღებთ (10.8) განტოლების კერძო ინტეგრალების წირთა სიმრავლეს. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ (10.8) განტოლების ის ინტეგრალური წირი, რომელიც (x_0,y_0) წერტილზე გაივლის, საჭიროა ამ განტოლების ზოგად $y=\varphi(x,C)$ ამონახსნში შევარჩიოთ C მუდმივი ისე, რომ შესრულდეს ტოლობა: $y_0=\varphi(x_0,C)$. თუ ამ ტოლობიდან განსაზღვრულ $C=C_0$ მნიშვნელობას შევიტანთ $y=\varphi(x,C)$ გამოსახულებაში, მივიღებთ $y=\varphi(x,C_0)$ სახის იმ კერძო ამონახსნს, რომლის შესაბამისი ინტეგრალური წირიც გადის (x_0,y_0) წერტილზე.

კოშის თეორემის გეომეტრიული აზრი ის არის, რომ იმ არეში, სადაც სრულდება კოშის თეორემის პირობები, მდებარეობს (10.9) დიფერენციალური განტოლების ერთადერთი ინტეგრალური წირი, რომელიც გაივლის ამ არის (x_0,y_0) წერტილზე.

ქვემოთ შევისწავლით ზოგიერთი სახის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებას.

10.4. $y'=f(x)$ სახის დიფერენციალური განტოლება

განვიხილოთ შემდეგი სახის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$y'=f(x)$$

ანუ

$$dy=f(x)dx,$$

სადაც $f(x)$ განსაზღვრულია და უწყვეტია რაიმე (a,b) ინტერვალში.

თუ ვაინტეგრებთ დიფერენციალური განტოლების ორივე მხარეს, მივიღებთ

$$\int dy = \int f(x)\, dx.$$

აქედან

$$y = \int f(x)\, dx + C.$$

ცხადია, y შეიცავს ერთ ნებისმიერ მუდმივ შესაკრებს, რაც ყოველთვის ახლავს განუსაზღვრელ ინტეგრალს.

ამოცანა 10.5. ვიპოვოთ

$$y' = 3x^2$$

დიფერენციალური განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $y(1) = 3$.

▼ ამ განტოლების ზოგად ამონახსნს მარტივად მივიღებთ განტოლების ინტეგრებით

$$y = x^3 + C, \tag{10.12}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. თუ (10.12) ტოლობაში გავითვალისწინებთ საწყის პირობას, მივიღებთ $y(1) = 1 + C = 3$ ანუ $C = 2$. ამრიგად, $y = x^3 + 2$ არის საძიებელი კოშის ამოცანის ამონახსნი. ■

10.5. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით

● პირველი რიგის (10.9) დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება **განტოლება განცალებადი ცვლადებით,** თუ ის შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y). \quad \blacksquare \tag{10.13}$$

დავუშვათ, რომ $f(x)$ და $g(y)$ ფუნქციები უწყვეტია შესაბამისად

(a,b) და (c,d) შუალედებში და $g(y)\neq 0$. თუ (10.13) განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ dx-ზე და გავყოფთ $g(y)$-ზე, მივიღებთ

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx. \tag{10.14}$$

ასეთ განტოლებას **განცალებულცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება** ენოდება. ვთქვათ,

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} \quad \text{და} \quad F(x) = \int f(x)\,dx.$$

მაშინ, ცხადია, (10.13) ანუ (10.14) შემდეგი ტოლობის ეკვივალენტურია

$$dG(y) = dF(x). \tag{10.15}$$

აქედან კი მივიღებთ

$$G(y) = F(x) + C, \tag{10.16}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. პირიქით, თუ სრულდება (10.16), მაშინ ადგილი ექნება (10.15) ტოლობას. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ y წარმოადგენს (10.13) განტოლების ამონახსნს.

მაშასადამე, (10.16), თანაფარდობა ანუ

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, მოიცავს (10.13) განტოლების ყველა ამონახსნს $\{a<x<b,\ c<y<d\}$ არეში. უკანასკნელი ტოლობა წარმოადგენს იმ თანაფარდობას, საიდანაც უნდა განისაზღვროს (10.13) განტოლების $y=\varphi(x,C)$ ზოგადი ამონახსნი აღნიშნულ შუალედში.

ამოცანა 10.6. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$y' = k\,y\,(M-y)$$

და შევარჩიოთ ისეთი ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობას $y(0)=P_0$. ვიგულისხმოთ, რომ $y>0$ და $M-y>0$ (იხ. ამოცანა 10.2).

▼ ამ განტოლებაში ცვლადთა განცალებით მივიღებთ

$$\frac{dy}{y\left(M-y\right)}=k\,dx.$$

თუ ვაინტეგრებთ ტოლობის ორივე მხარეს, მივიღებთ

$$\int\frac{dy}{y\left(M-y\right)}=\int k\,dx. \tag{10.17}$$

რადგან

$$\frac{1}{y\left(M-y\right)}=\frac{1}{M}\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{M-y}\right],$$

ამიტომ

$$\int\frac{dy}{y\left(M-y\right)}=\frac{1}{M}\left[\ln y-\ln\left(M-y\right)+\ln C\right].$$

აქ $C>0$ ნებისმიერი მუდმივია. ამ ტოლობების გათვალისწინებით, (10.17)-დან დავასკვნით, რომ

$$\frac{1}{M}\ \ln\frac{Cy}{M-y}=k\,x$$

ანუ

$$\frac{C\,y}{M-y}=\mathrm{e}^{\,k\,M\,x}.$$

აქედან კი განისაზღვრება შემდეგი ზოგადი ამონახსნი

$$y=\frac{M\,\mathrm{e}^{k\,M\,x}}{C+\mathrm{e}^{k\,M\,x}}. \tag{10.18}$$

ამოცანაში მოცემული საწყისი პირობის გამოყენებით შევარჩიოთ ნებისმიერი C მუდმივი

$$y(0)=\frac{M}{C+1}=P_0,$$

საიდანაც

$$C=\frac{M}{P_0}-1=\frac{M-P_0}{P_0}.$$

ამ სიდიდის ჩასმით (10.18) ტოლობით განსაზღვრულ ზოგად ამონახსნში მი-

ვიღებთ

$$y = \frac{P_0\ M\ \mathrm{e}^{k\,M\,x}}{(M - P_0) + P_0\,\mathrm{e}^{k\,M\,x}} = \frac{P_0\,M}{(M - P_0)\ \mathrm{e}^{-k\,M\,x} + P_0}.$$

ეს ამონახსნი ემთხვევა ამოცანა 10.2-ში ამოწერილ ამონახსნს. ■

ამოცანა 10.7. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$x\,y\,dx + \left(1 + x^2\right)\,dy = 0.$$

▼ გავყოთ განტოლების ორივე მხარე $y\left(1 + x^2\right)$-ზე. მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას განცალებულ ცვლადებში

$$\frac{x\,dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{y} = 0.$$

ვაინტეგროთ ორივე მხარე

$$\int \frac{x}{1 + x^2}\ dx + \int \frac{dy}{y} = \ln|\,C\,|.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\frac{1}{2}\ \ln\left(1 + x^2\right) + \ln|\,y\,| = \ln|\,C\,|$$

ანუ

$$|\,y\,|\,\sqrt{1 + x^2} = |\,C\,|.$$

ამრიგად,

$$y = \frac{C}{\sqrt{1 + x^2}},$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა, წარმოადგენს საძიებელ ამონახსნს. ■

10.6. ერთგვაროვანი განტოლება

გავიხსენოთ, რომ $f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება n რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y არგუმენტების მიმართ, თუ t-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის ადგილი აქვს იგივეობას

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

მაგალითად, ფუნქცია

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$$

არის x და y ცვლადების მიმართ მესამე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, რადგან

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 \left(x^3 + 3x^2 y\right) = t^3 f(x, y).$$

● დიფერენციალურ

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

განტოლებას ეწოდება **ერთგვაროვანი,** თუ $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ერთი და იმავე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია. ■

ვთქვათ, $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ერთი და იმავე n რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია. შემოვიღოთ ახალი უცნობი u ფუნქცია შემდეგი ტოლობით:

$$y = ux.$$

ცხადია,

$$M(x, y) = M(x, ux) = x^n M(1, u),$$

$$N(x, y) = N(x, ux) = x^n N(1, u),$$

$$dy = u\, dx + x\, du.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ მოცემულ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაში და ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ x^n-ზე, მივიღებთ

$$\left[M(1, u) + u N(1, u)\right] dx + x N(1, u)\, du = 0$$

ანუ

$$\frac{dx}{x} = -\frac{N(1, u)\, du}{M(1, u) + u N(1, u)}.$$

მიღებული განტოლება კი წარმოადგენს განტოლებას განცალებული ცვლადებით, რომელიც წინა პარაგრაფში განვიხილეთ.

ამოცანა 10.8. ამოვხსნათ განტოლება

$$\left(x^2 + y^2\right) dx + xy\, dy = 0.$$

▼ მოცემული განტოლება არის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. შემოვიღოთ ახალი საძიებელი u ფუნქცია: $y = ux$. მაშინ $dy = u\,dx + x\,du$ და მოცემული დიფერენციალური განტოლება ასე ჩაიწერება

$$\left(x^2 + u^2x^2\right) dx + x^2 u \left(u\,dx + x\,du \right) = 0.$$

თუ ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ x^2-ზე, მივიღებთ

$$\left(1 + 2u^2\right) dx + xu\,du = 0.$$

ეს ტოლობა გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\frac{dx}{x} = -\frac{u\,du}{1 + 2u^2}.$$

ვაინტეგროთ ტოლობის ორივე მხარე

$$\ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left(1 + 2u^2\right) + \ln|C|.$$

აქედან მარტივად დავასკვნით

$$|x|\sqrt[4]{1 + 2u^2} = |C|,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. თუ ამ ტოლობაში u-ს ნაცვლად ჩავწერთ $\frac{y}{x}$-ს და ჩავატარებთ მარტივ გარდაქმნებს, მივიღებთ ზოგად ამონახსნს

$$y = \pm\sqrt{\frac{C^4}{2x^2} - \frac{x^2}{2}}. \ ■$$

10.7. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

● დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება წრფივი, თუ იგი წრფივია უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მიმართ. ■

პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$y' + P(x)\,y = Q(x), \tag{10.19}$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია. თუ მარჯვენა მხარე $Q(x)$ იგივურად ნულის ტოლი არ არის, მაშინ განტოლებას უწოდებენ **პირველი რიგის წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტო-**

ლების, ხოლო თუ $Q(x)\equiv 0$, მაშინ განტოლებას ეწოდება **პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება**.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ (10.19) განტოლების ამონახსნი, ჯერ განვიხილოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\ y=0. \tag{10.20}$$

ეს არის განცალებადცვლადებიანი განტოლება. ამიტომ გვექნება

$$\frac{dy}{y}=-P(x)\ dx.$$

ვაინტეგროთ ტოლობის ორივე მხარე

$$\ln|y|=-\int P(x)\ dx+\ln|C|.$$

ამ ტოლობიდან მივიღებთ (10.20) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$y=C\ e^{-\int P(x)\,dx}, \tag{10.21}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

განვიხილოთ ახლა არაერთგვაროვანი (10.19) განტოლება. ვეძებოთ ამ განტოლების ამონახსნი შემდეგი სახით

$$y=u(x)\ v(x). \tag{10.22}$$

შევეცადოთ, u და v ისე შევარჩიოთ, რომ ამ ფუნქციების ნამრავლმა დააკმაყოფილოს მოცემული განტოლება. ჩავსვათ y და მისი წარმოებული (10.19) განტოლებაში. მივიღებთ

$$u\ \frac{dv}{dx}+v\left[\frac{du}{dx}+P(x)\ u\right]=Q(x). \tag{10.23}$$

u ფუნქცია ისე შევარჩიოთ, რომ შესრულდეს შემდეგი ტოლობა

$$\frac{du}{dx}+P(x)u=0. \tag{10.24}$$

მაშინ (10.23)-დან გვაქვს

$$u\ \frac{dv}{dx}=Q(x). \tag{10.25}$$

(10.24) განტოლების ამონახსნს ექნება (10.21) სახე. თუ მასში ვიგულისხმებთ, რომ $C=1$, მივიღებთ

$$u(x) = \mathrm{e}^{-\int P(x)\,dx}. \tag{10.26}$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით (10.25) განტოლება შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$\frac{dv}{dx} = Q(x)\ \mathrm{e}^{\int P(x)\,dx}.$$

აქედან

$$v(x) = C + \int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,dx}\,dx, \tag{10.27}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

თუ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციების მიღებულ მნიშვნელობებს შევიტანთ (10.22)-ში, მივიღებთ (10.19) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\,dx}\left[C + \int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,dx}\,dx\right]. \tag{10.28}$$

ამოცანა 10.9. ამოვხსნათ განტოლება

$$y' - \frac{x}{1+x^2}\,y = x.$$

▼ აქ

$$P(x) = -\frac{x}{1+x^2}, \qquad Q(x) = x.$$

(10.28) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$y = \mathrm{e}^{\int \frac{x\,dx}{1+x^2}}\left[C + \int x\,\mathrm{e}^{-\int \frac{x\,dx}{1+x^2}}\,dx\right] = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)}\left[C + \int x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)}dx\right] =$$

$$= \sqrt{1+x^2}\left[C + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\right] = \sqrt{1+x^2}\left(C + \sqrt{1+x^2}\right),$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. ■

ამოცანა 10.10. ამოვხსნათ განტოლება

$$y' = k\,y - m, \qquad k > 0,$$

და ვიპოვოთ ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$y(0)=P_0$$

საწყის პირობას (იხ. ამოცანა (10.1)).

▼ თუ დავუშვებთ, რომ $k=\alpha-\beta>0$, მაშინ მივიღებთ ამოცანა 10.1-ში განხილულ დიფერენციალურ განტოლებას. გადავწეროთ მოცემული დიფერენციალური განტოლება შემდეგი სახით

$$\frac{dy}{dx}-k\,y(x)=-m.$$

ზოგადი ამონახსნის ასაგებად გამოვიყენოთ (10.28) ფორმულა

$$y(x)=\mathrm{e}^{k\int dx}\left[C-m\int \mathrm{e}^{-k\int dx}dx\right]=\mathrm{e}^{kx}\left[C-m\int \mathrm{e}^{-kx}dx\right]=$$

$$=\mathrm{e}^{kx}\left(C+\frac{m}{k}\,\mathrm{e}^{-kx}\right)=C\,\mathrm{e}^{kx}+\frac{m}{k}.$$

საწყისი პირობის გათვალისწინებით შეგვიძლია ვიპოვოთ C

$$y(0)=C+\frac{m}{k}=P_0 \quad \text{ანუ} \quad C=P_0-\frac{m}{k}.$$

ამიტომ საძიებელ ამონახსნს ექნება სახე

$$y(x)=\left(P_0-\frac{m}{k}\right)\mathrm{e}^{kx}+\frac{m}{k}. \ ■$$

10.8. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

ჯერ შემოვიღოთ რამდენიმე ცნება მეორე რიგის ზოგადი დიფერენციალური განტოლებისთვის. განვიხილოთ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$y''=f(x,y,y'), \qquad a<x<b.$$

დავსვათ შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ მოცემული განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობებს

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_1,$$

სადაც $x_0\in(a,b)$ და y_0, y_1 წინასწარ მოცემული მუდმივებია. ამ ამოცანას უწოდებენ **კოშის ამოცანას** მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის.

● მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების **ზოგადი ამონახსნი** ეწოდება ფუნქციას

$$y=\varphi\left(x,C_1,C_2\right), \quad a<x<b,$$

რომელიც დამოკიდებულია ორ ნებისმიერ C_1,C_2 მუდმივზე, და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) იგი მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია ნებისმიერი C_1 და C_2 მუდმივებისათვის;

ბ) C_1 და C_2 მუდმივები შეიძლება ისე შეირჩეს, რომ შესრულდეს პირობები

$$y\left(x_0\right)=y_0, \quad y'\left(x_0\right)=y_1,$$

სადაც $x_0\in(a,b)$, ხოლო y_0 და y_1 მოცემული მუდმივებია. ■

● ფუნქციას $y=\varphi\left(x,C_1^0,C_2^0\right)$, სადაც C_1^0 და C_2^0 არის C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივების კონკრეტული მნიშვნელობები, მოცემული განტოლების **კერძო ამონახსნი** ეწოდება. ■

მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$a\,y''+b\,y'+c\,y=f\left(x\right), \quad a\neq 0, \tag{10.29}$$

სადაც a,b,c მუდმივი რიცხვებია, ხოლო f უწყვეტი ფუნქციაა.

თუ $f(x)\equiv 0$, მაშინ დიფერენციალურ განტოლებას

$$a\,y''+b\,y'+c\,y=0 \tag{10.30}$$

ეწოდება **ერთგვაროვანი**, ხოლო თუ $f(x)$ არაა იგივურად ნულის ტოლი, მაშინ (10.29) განტოლებას **არაერთგვაროვანი** ეწოდება.

თეორემა 10.1. თუ $y_1(x)$ და $y_2(x)$ ფუნქციები (10.30) განტოლების ამონახსნებია, მაშინ ფუნქცია

$$y(x)=C_1\ y_1(x)+C_2\ y_2(x)$$

არის ამავე განტოლების ამონახსნი, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

▼ ვინაიდან y_1 და y_2 ფუნქციები (10.30) განტოლების ამონახსნებია, ამიტომ

$$a\,y_1''+b\,y_1'+c\,y_1=0, \quad a\,y_2''+b\,y_2'+c\,y_2=0.$$

თუ გამოვიყენებთ გაწარმოების წესებსა და ამ უკანასკნელ ტოლობებს, მივიღებთ

$$a\,y''+b\,y'+c\,y=a\,(C_1\,y_1+C_2\,y_2)''+b\,(C_1\,y_1+C_2\,y_2)'+c\,(C_1y_1+C_2y_2)=$$
$$=C_1\left(a\,y_1''+b\,y_1'+c\,y_1\right)+C_2\left(a\,y_2''+b\,y_2'+c\,y_2\right)=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0=0.$$

ე. ი. $y=C_1\,y_1+C_2\,y_2$ ფუნქცია არის (10.30) განტოლების ამონახსნი. ■

● (10.30) განტოლების ორ y_1 და y_2 ამონახსნს ვუწოდოთ **წრფივად დამოუკიდებელი** $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ მათი შეფარდება ამ შუალედში არ არის მუდმივი, ე. ი. თუ

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const.$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში ამ ამონახსნებს ვუწოდოთ **წრფივად დამოკიდებული.** ■

მართებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 10.2. თუ y_1 და y_2 ფუნქციები (10.30) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, მაშინ ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$y(x)=C_1\ y_1(x)+C_2\ y_2(x),$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ■

თეორემა 10.2-ის თანახმად, (10.30) განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად საჭიროა ვიპოვოთ ამ განტოლების ორი წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნი.

ვეძებოთ (10.30) განტოლების კერძო ამონახსნები შემდეგი სახით

$$y = e^{kx}, \tag{10.31}$$

სადაც k მუდმივია. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები:

$$y' = k\,e^{kx}, \qquad y'' = k^2\,e^{kx}.$$

თუ y, y' და y''-ის მნიშვნელობებს შევიტანთ (10.30)-ში, მივიღებთ

$$e^{kx}\left(a k^2 + b k + c\right) = 0.$$

აქედან დავასკვნით, რომ

$$a k^2 + b k + c = 0. \tag{10.32}$$

ამ განტოლებას ეწოდება (10.30) განტოლების შესაბამისი **მახასიათებელი განტოლება.** განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევა.

I შემთხვევა. მახასიათებელი განტოლების დისკრიმინანტი დადებითია, $D = b^2 - 4ac > 0$. მაშინ (10.32) განტოლებას გააჩნია ორი ნამდვილი და განსხვავებული ფესვი $k_1 \neq k_2$.

კერძო ამონახსნებს ექნებათ სახე $y_1 = e^{k_1 x}$ და $y_2 = e^{k_2 x}$.

ეს ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია, რადგან

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const.$$

ამიტომ (10.30) განტოლების ზოგად ამონახსნს ამ შემთხვევაში ექნება სახე

$$y = C_1\,e^{k_1 x} + C_2\,e^{k_2 x},$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

ამოცანა 10.11. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' - 4\,y = 0.$$

▼ ამ განტოლების შესაბამის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე

$$k^2 - 4 = 0,$$

რომლის ამონახსნებია $k_1 = -2$, $k_2 = 2$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$y = C_1\,e^{-2x} + C_2\,e^{2x},$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ■

ამოცანა 10.12. ამოვხსნათ განტოლება

$$y''-3y'+2y=0.$$

▼ შესაბამისი მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2-3k+2=0.$$

რადგან მისი ფესვებია $k=1$ და $k=2$, ამიტომ ზოგადი ამონახსნია

$$y=C_1\,e^{x}+C_2\,e^{2x},$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ■

II შემთხვევა. მახასიათებელი განტოლების დისკრიმინანტი ნულია, $D=0$. მაშინ მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ორჯერადი ($k_1=k_2$) ფესვი. ამიტომ კერძო ამონახსნია $y_1=e^{k_1x}$. უშუალო შემოწმებით მარტივად ვაჩვენებთ, რომ $y_2=x\,e^{k_1x}$ ფუნქცია ასევე არის (10.30) განტოლების ამონახსნი. ეს კერძო ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია, რადგან

$$\frac{y_1}{y_2}=x\neq const.$$

ამიტომ (10.30) განტოლების ზოგად ამონახსნს ამ შემთხვევაში ექნება სახე

$$y=C_1\,e^{k_1x}+C_2\,x\,e^{k_1x}=(C_1+C_2x)\,e^{k_1x},$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

ამოცანა 10.13. ამოვხსნათ განტოლება

$$y''-4y'+4y=0.$$

▼ შესაბამისი მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2-4k+4=0,$$

რომლის ამონახსენია $k_1=k_2=2$. ამიტომ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$y=(C_1+C_2x)\,e^{2x},$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ■

ამოცანა 10.14. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

▼ შესაბამისი მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2 + 6k + 9 = 0,$$

რომლის ამონახსენია $k_1 = k_2 = -3$. ამიტომ დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-3x},$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ■

III შემთხვევა. მახასიათებელი განტოლების დისკრიმინანტი უარყოფითია, $D < 0$. ამ შემთხვევაში მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ორი ერთმანეთის შეუღლებული კომპლექსური ფესვი $k_1 = \alpha - i\beta$ და $k_2 = \alpha + i\beta$, სადაც α და β ნამდვილი რიცხვებია.

უშუალო შემოწმებით მარტივად ვაჩვენებთ, რომ ფუნქციები

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

წარმოადგენს (10.30) განტოლების ორ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნს.

ამიტომ (10.30) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

ამოცანა 10.15. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' + 4y = 0.$$

▼ მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2 + 4 = 0.$$

მისი ფესვებია $k_1 = 2i$ და $k_2 = -2i$. ცხადია, რომ აქ $\alpha = 0$ და $\beta = 2$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი ასე წარმოიდგინება

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ■

ამოცანა 10.16. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

▼ მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2+4k+13=0,$$

რომლის ამონახსნებია $k_1 = \ 2-3i$ და $k_2=-2+3i$. რადგან ამ შემთხვევაში $\alpha=-2$ და $\beta=3$, ამიტომ ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y=e^{-2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right),$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ■

ამოცანა 10.17. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა

$$y''+y'-6y=0,$$
$$y(0)=1, \quad y'(0)=0.$$

▼ მოცემული დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე

$$k^2+k-6=0,$$

რომლის ამონახსნებია $k_1=-3$, $k_2=2$. ამიტომ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$y(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}.$$

ვიპოვოთ C_1 და C_2 მუდმივები საწყისი პირობების გათვალისწინებით. გავაწარმოოთ ტოლობის ორივე მხარე

$$y'(x)=-3C_1e^{-3x}+2C_2e^{2x}.$$

თუ გამოვიყენებთ ამოცანაში მოცემულ საწყის (კოშის) პირობებს, მივიღებთ:

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2=1 \\ y'(0)=-3C_1+2C_2=0. \end{cases}$$

ამ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ

$$C_1=\frac{2}{5}, \quad C_2=\frac{3}{5}.$$

ამრიგად, საძიებელი ამონახსნი წარმოიდგინება ასე

$$y(x)=\frac{2}{5}e^{-3x}+\frac{3}{5}e^{2x}. \ \blacksquare$$

განვიხილოთ ახლა მეორე რიგის არაერთგვაროვანი მუდმივკოეფიცი-

ენტებიანი (10.29) დიფერენციალური განტოლება.

მტკიცდება, რომ არაერთგვაროვანი (10.29) განტოლების ზოგადი y ამონახსნი წარმოიდგინება შესაბამისი ერთგვაროვანი (10.30) გატოლების ზოგადი $\tilde{y}$ ამონახსნისა და (10.29) განტოლების რომელიმე (ერთი) კერძო y_* ამონახსენის ჯამის სახით: $y = \tilde{y} + y_*$. ამიტომ არსებითი მნიშვნელობა აქვს (10.29) არაერთგვროვანი განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნის მიძებნას. გარკვეული კლასის არაერთგვაროვანი განტოლებებისთვის არსებობს ეფექტური ალგორითმები კერძო ამონახსნის ცხადი სახით ასაგებად.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას აქვს შემდეგი კონკრეტული სახე

$$f(x) = P_n(x)\ e^{\alpha x},$$

სადაც α მუდმივია, ხოლო $P_n(x)$ არის n-ური ხარისხის მრავალწევრი.

მოცემული განტოლების ამონახსნი მოვძებნოთ ე. წ. **განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით.**

განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევა.

(ა) ვთქვათ, α არ წარმოადგენს

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

ერთგვაროვანი განტოლების შესაბამისი

$$a\,k^2 + b\,k + c = 0$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვს. ასეთ შემთხვევაში არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$y = Q_n(x)\ e^{\alpha x},$$

სადაც $Q_n(x)$ არის განუსაზღვრელკოეფიციენტებიანი n-ური ხარისხის მრავალწევრი.

(ბ) ვთქვათ, α წარმოადგენს (10.32) განტოლების ℓ-ჯერად ფესვს $(\ell = 1,\ 2)$. ამ შემთხვევაში არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$y = x^{\ell}\, Q_n(x)\ e^{\alpha x}.$$

მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი კონკრეტული ამოცანები.

ამოცანა 10.18. ვიპოვოთ

$$y'' + y' = x\,\mathrm{e}^{x} \tag{10.33}$$

არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

▼ აქ $\alpha = 1$, $P_n(x) = x$. ერთგვაროვანი განტოლების მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე

$$k^2 + k = 0,$$

რომლის ამონახსნებია $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. რადგან $\alpha = 1$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, ამიტომ კერძო ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$y_* = (c_0\,x + c_1)\ \mathrm{e}^{x},$$

სადაც c_0 და c_1 საძიებელი მუდმივებია. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები

$$y_*' = (c_0\,x + c_0 + c_1)\ \mathrm{e}^{x}, \quad y_*'' = (c_0\,x + 2\,c_0 + c_1)\ \mathrm{e}^{x}.$$

თუ y_*' და y_*''-ის მნიშვნელობებს შევიტანთ (10.33)-ში, მივიღებთ

$$3\,c_0 + 2\,c_0\,x + 2\,c_1 = x.$$

აქედან მარტივად დავასკვნით, რომ

$$\begin{cases} 2\,c_0 = 1 \\ 3c_0 + 2c_1 = 0. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $c_0 = \dfrac{1}{2}$, $c_1 = -\dfrac{3}{4}$. ამიტომ, დიფერენციალური განტოლების საძიებელი კერძო ამონახსნია

$$y_* = \left(\frac{1}{2}\,x - \frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{x}. \quad \blacksquare$$

ამოცანა 10.19. ვიპოვოთ

$$y'' - 4\,y = x\,\mathrm{e}^{2x} \tag{10.34}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

▼ ამ კონკრეტულ შემთხვევაში

$$\alpha = 2, \quad P_n(x) = x\,.$$

შესაბამისი მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2-4=0,$$

რომლის ამონახსნებია $k_1=2$ და $k_2=-2$. ამიტომ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\tilde{y}=C_1\,e^{2x}+C_2\,e^{-2x},$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

ახლა ავაგოთ არაერთგვაროვანი განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი. რადგან $\alpha=2$ ემთხვევა მახასიათებელი განტოლების ფესვს, ამიტომ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y_*=x\left(c_0x+c_1\right)\,e^{2x}=\left(c_0\,x^2+c_1\,x\right)\,e^{2x},$$

სადაც c_0 და c_1 საძიებელი მუდმივებია. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები:

$$y_*'=\left[2c_0\,x^2+2\left(c_0+c_1\right)\,x+c_1\right]\,e^{2x},$$

$$y_*''=\left[4c_0\,x^2+4\left(c_1+2c_0\right)\,x+4c_1+2c_0\right]\,e^{2x}.$$

შევიტანოთ y_* და y_*''-ის გამოსახულებები (10.34)-ში. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$8\,c_0\,x+4c_1+2c_0=x$$

ანუ

$$\begin{cases}8\,c_0=1\\4\,c_1+2\,c_0=0.\end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $c_0=\dfrac{1}{8},\quad c_1=-\dfrac{1}{16}$. მაშასადამე, საძიებელი კერძო ამონახსნია

$$y_*=\frac{1}{16}\,x\,\left(2x-1\right)\,e^{2x}.$$

ცხადია, მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=\tilde{y}+y_*=C_1\,e^{2x}+C_2\,e^{-2x}+\frac{1}{16}\,x\,\left(2x-1\right)\,e^{2x}.\ \blacksquare$$

10.9. სავარჯიშოები

1. იპოვეთ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

1) $y\,y' = y^2 + 1$; 3) $y' - 2xy = 2x\,e^{x^2}$;

2) $x\,y\,y' = x^2 + y^2$; 4) $y' - \dfrac{y}{x+1} = x$.

2. იპოვეთ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

1) $y'' + 7y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

2) $y'' + 4y' + 3y = 0$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 4$;

3) $y'' + 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 9$, $y'(0) = -1$;

4) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

3. იპოვეთ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

1) $y'' + 2y' - 24y = 12x + 7$; 4) $y'' - y = x\,e^{3x}$;

2) $y'' - 4y' + 3y = 3x^2 + x + 2$; 5) $y'' - 16y = e^{4x}$;

3) $y'' + 4y = e^{3x}$; 6) $y'' - 5y' + 6y = x\,e^{2x}$.

4. ქვეყანას ბრუნვაში აქვს 10 მილიარდი ერთეული ვალუტა. მთავრობამ გადაწყვიტა ძველის ნაცვლად ბრუნვაში შემოიღოს ახალი ვალუტის ფულადი ნიშნები. ყოველდღიურად ბანკებში შედის 50 მილიონი ძველი ვალუტა. ბანკებში შესული ძველი ვალუტის კუპიურების მაგიერ ბრუნვაში გადის შესაბამისი რაოდენობის ახალი ვალუტის კუპიურები.

(ა) შეადგინეთ მათემატიკური მოდელი დიფერენციალური განტოლების სახით, რომელიც აღწერს ახალი ვალუტის ბრუნვაში შესვლას;

(ბ) იპოვეთ, რა დრო დასჭირდება ძველი ვალუტის 90 %-ის შეცვლას;

(გ) რამდენ ხანში შეიცვლება მთლიანად ძველი ვალუტა ახლით?

5. 1986 წელს დედამიწის მოსახლეობა იყო დაახლოებით 5 მილიარდი. გამოიყენეთ მოსახლეობის თავისუფალი გამრავლების მოდელი $\left(\dfrac{dP}{dt} = k\,P(t)\right)$ და გამოთვალეთ მოსახლეობის რაოდენობა, თუ პროპორციულობის კოეფიციენტია $k = 0.02$. გამოთვალეთ მოსახლეობის რაოდენობა:

(ა) 2000 წელს; (ბ) 2100 წელს; (გ) 2500 წელს.

[დედამიწის ხმელეთის ფართობი დაახლოებით $1.67 \cdot 10^{14}$ კვადრატული მეტრის ტოლია, რამდენი კვადრატული მეტრი ფართობი მოვა თითოეულ მოსახლეზე ზემოთ მითითებულ წლებში?]

6. განიხილეთ შეზღუდულ პირობებში მოსახლეობის გამრავლების მოდელი, რომელიც აღიწერება $P'(t) = k\ P(t)\ \lfloor M - P(t) \rfloor$ დიფერენციალური განტოლებით. მოსახლეობის რაოდენობა საწყის 1986 წელს იყო დაახლოებით 5 მილიარდი. მოსახლეობის მაქსიმალური რაოდენობა შეზღუდული რესურსების პირობებში იყოს 100 მილიარდი. გამოიყენეთ მითითებული მოდელი და გამოთვალეთ მოსახლეობის რაოდენობა t წლის შემდეგ, თუ პროპორციულობის კოეფიციენტია $k = 0.02$.

7. არსებობს მოსახლეობის გამრავლების მოდელი შეზღუდული რესურსების პირობებში, რომელიც აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით

$$P'(t) = c\,P(t)\ln\left(\frac{M}{P(t)}\right),$$

სადაც c დადებითი მუდმივია, ხოლო $M > 0$ არის არსებული რეალური რესურსების შესაბამისი მოსახლეობის შესაძლო მაქსიმალური რაოდენობა. ამოხსენით ეს დიფერენციალური განტოლება და გამოთვალეთ $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t)$.

თავი II. წრფივი დაპროგრამების ელემენტები

ჩვენ უკვე გავეცანით მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის პოვნის წესებს, როდესაც დამატებითი შეზღუდვები მოცემული იყო განტოლებების სახით. ძალიან ხშირად პრაქტიკულ ამოცანებში დამატებითი შეზღუდვები ეკონომიკურ მახასიათებლებს შორის გამოსახულია უტოლობების სახით.

იმ ამოცანებს, რომლებშიც მოსაძებნია **წრფივი ფუნქციის** უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა და რომლებშიც ცვლადები აკმაყოფილებენ **წრფივი უტოლობების** სახით მოცემულ შეზღუდვებს, ეწოდება **წრფივი დაპროგრამების ამოცანები.**

ამ თავში შევისწავლით წრფივი დაპროგრამების თეორიის ძირითად ელემენტებს და გავეცნობით მათ გამოყენებას ეკონომიკურ ამოცანებში.

წრფივი დაპროგრამების მათემატიკური ამოცანის ამოხსნა პირობითად შეიძლება ორ ეტაპად დაიყოს.

პირველ ეტაპზე ხდება წრფივ უტოლობათა სისტემის ამოხსნა ანუ წერტილთა იმ სიმრავლის მოძებნა, რომელთა კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ მოცემული სისტემის ყველა უტოლობას. ამ სიმრავლეს უწოდებენ **დასაშვებ სიმრავლეს.**

მეორე ეტაპზე კი ვპოულობთ მოცემული წრფივი ფუნქციის (ე.წ. მიზნის ფუნქციის) უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას დასაშვებ სიმრავლეზე.

ეკონომიკური ამოცანების ამოხსნისას ზემოთ ხსენებულ ორივე ეტაპს წინ უძღვის სიტყვებით აღწერილი პირობების მათემატიკური ჩაწერა უტოლობების სახით და მიზნის ფუნქციის ცხადად ამოწერა, რაც უნდა განხორციელდეს შესაბამისი ეკონომიკური მახასიათებლებისათვის შემოღებული ცვლადების ტერმინებში.

თუ წრფივი დაპროგრამების ამოცანაში მონაწილეობს მრავალი ცვლადი, მაშინ ასეთი ამოცანის გამოკვლევა და ამოხსნა ტექნიკურად საკმარი-

სად რთულდება. ამიტომ მათ ამოსახსნელად იყენებენ კომპიუტერებსა და სპეციალურ ალგორითმულ პროგრამებს (მაგალითად, სიმპლექს მეთოდს).

გადმოცემის სიმარტივისათვის და მეთოდის არსის საილუსტრაციოდ ჩვენ ქვემოთ მხოლოდ ორი ცვლადის შემთხვევას განვიხილავთ. შევნიშნოთ, რომ კონკრეტული ორცვლადიანი უტოლობების ამოხსნა და მათი გამოყენების ელემენტარული შემთხვევა ჩვენ უკვე განვიხილეთ პირველ თავში (იხ. ამოცანა 1.11).

11.1. დასაშვები სიმრავლის მოძებნა. მიზნის ფუნქციის ოპტიმიზაცია

თავდაპირველად განვიხილოთ ორცვლადიანი უტოლობა. ზოგადად, მას ექნება ერთ-ერთი შემდეგი სახე

$$a\,x+b\,y>c, \tag{11.1}$$

$$a\,x+b\,y\geq c, \tag{11.2}$$

$$a\,x+b\,y<c, \tag{11.3}$$

$$a\,x+b\,y\leq c, \tag{11.4}$$

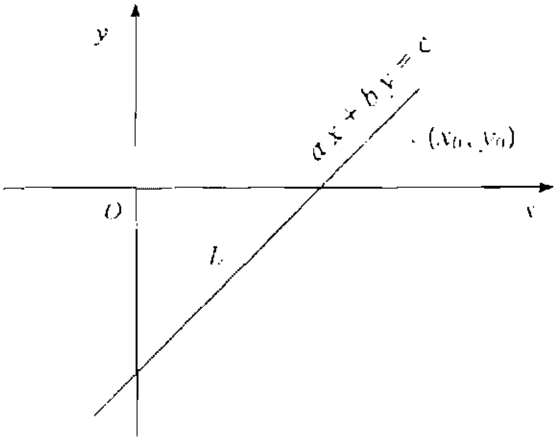
სადაც a, b და c რაიმე მუდმივებია.

ამ უტოლობის ამოხსნა ნიშნავს სიბრტყის ყველა იმ წერტილის მოძებნას, რომელთა კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ განსახილველ უტოლობას.

იმისათვის, რომ გეომეტრიულად ამოვხსნათ ასეთი ტიპის უტოლობა, პირველ რიგში განვიხილოთ Oxy საკოორდინატო სიბრტყე და ავაგოთ L წრფე, რომლის განტოლებაა

$$a\,x+b\,y=c. \tag{11.5}$$

ამ წრფით მთელი სიბრტყე გაიყოფა ორ ნახევარსიბრტყედ (იხ. ნახ. 11.1).



ნახ. 11.1

შევნიშნოთ, რომ თუ (x_0, y_0) წერტილი არ ეკუთვნის L წრფეს, მაშინ $a x_0 + b y_0 \neq c$, რადგან $a x + b y - c$ ფუნქცია ნული ხდება მხოლოდ L წრფის წერტილებზე. ამაზე დაყრდნობით, მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $a x + b y - c$ ფუნქციას L წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარე ნახევარსიბრტყეებში სხვადასხვა ნიშანი აქვს. მისი ნიშნის დასადგენად ფიქსირებულ ნახევარსიბრტყეში საკმარისია ავიღოთ რაიმე „საცდელი წერტილი" (x_0, y_0) და გამოვთვალოთ $a x_0 + b y_0 - c$ სიდიდე. ამ რიცხვის ნიშანი განსაზღვრავს $a x + b y - c$ ფუნქციის ნიშანს განსახილველ ნახევარსიბრტყეში. ამ მეთოდის გამოყენებით მარტივად დავასკვნით, რომ მოცემულ ნახევარსიბრტყეში $a x + b y > c$ ან $a x + b y < c$.

ამრიგად, (11.1)-(11.4) ტიპის უტოლობის ამონახსნს წარმოადგენს (11.5) წრფის ერთ-ერთ მხარეს მდებარე ნახევარსიბრტყე, კერძოდ, ის ნახევარსიბრტყე, რომლის ერთი „საცდელი წერტილი" აკმაყოფილებს მოცემულ უტოლობას. ამასთან, L წრფე ეკუთვნის ამონახსნთა ნახევარსიბრტყეს, როდესაც გვაქვს არამკაცრი უტოლობა (11.2) ან (11.4), ხოლო L წრფე არ ეკუთვნის ამონახსენთა ნახევარსიბრტყეს, თუ გვაქვს მკაცრი უტოლობა (11.1) ან (11.3).

ამოცანა 11.1. ამოვხსნათ უტოლობა

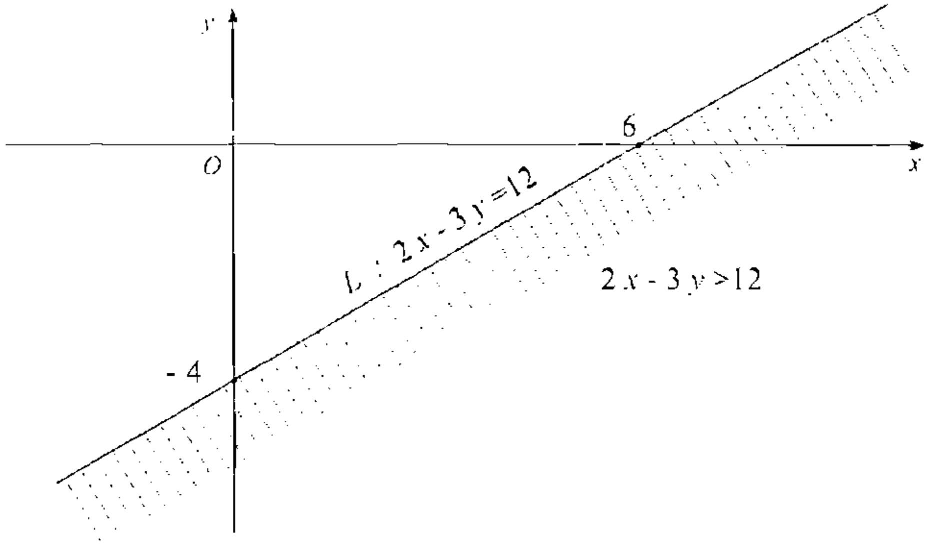
$$2x - 3y \geq 12.$$

▼ ჯერ ავაგოთ L წრფე, რომლის განტოლებაა

$$2x-3y=12.$$

ეს წრფე ნაჩვენებია ნახ. 11.2-ზე.

ავიღოთ საცდელი $(0,0)$ წერტილი და შევამოწმოთ, კმაყოფილდება თუ არა მოცემული უტოლობა. ამ შემთხვევაში $2\cdot 0-3\cdot 0<12$. ვხედავთ, რომ აღებული საცდელი წერტილის კოორდინატები მოცემულ უტოლობას არ აკმაყოფილებს. ამიტომ უტოლობის ამონახსნი არ შეიძლება იყოს ის ნახევარსიბრტყე, რომელსაც ეკუთვნის $(0,0)$ წერტილი. მაშინ ამონახსნი იქნება მეორე ნახევარსიბრტყე, ე. ი. L წრფის ქვემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე.



ნახ. 11.2

მართლაც, მარტივად შევამოწმებთ, რომ „საცდელი" $(8,0)$ წერტილი, რომელიც ძევს L წრფის ქვემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყეში, აკმაყოფილებს მოცემულ უტოლობას. შევნიშნოთ, რომ თვით L წრფე ეკუთვნის ამონახსნთა ნახევარსიბრტყეს. ■

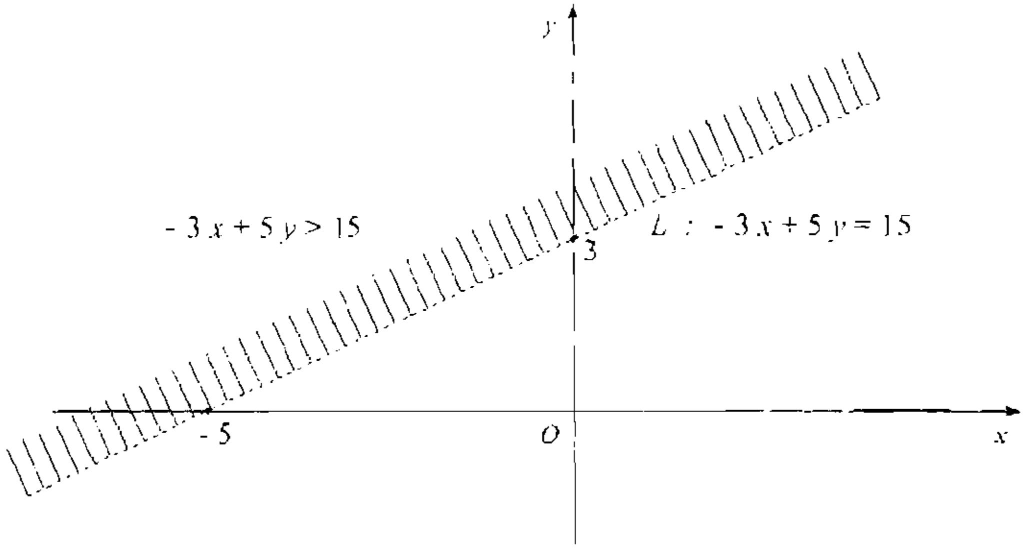
ამოცანა 11.2. ამოვხსნათ უტოლობა

$$-3x+5y>15.$$

▼ ავაგოთ L წრფე, რომლის განტოლებაა

$$-3x+5y=15.$$

იგი გამოსახულია ნახ. 11.3-ზე.



ნახ. 11.3

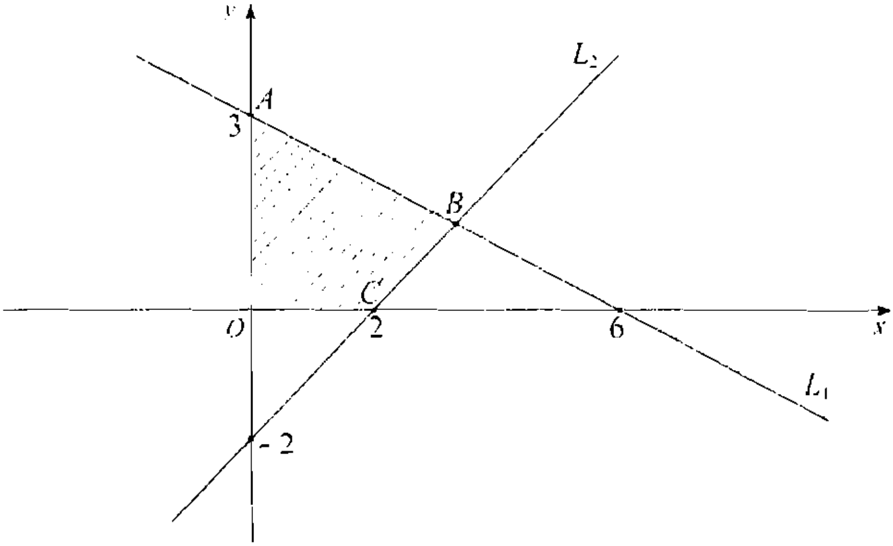
ავიღოთ საცდელი წერტილი $(0, 4)$, რომელიც ძევს L წრფის ზემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყეში. რადგან იგი აკმაყოფილებს მოცემულ უტოლობას: $-3\cdot 0+5\cdot 4>15$, ამიტომ უტოლობის ამონახსნია L წრფის მიმართ ზედა ნახევარსიბრტყე. ამასთან, თვით L წრფე არ ეკუთვნის ამონახსნთა ნახევარსიბრტყეს. ■

თუ მოცემულია რამდენიმე ორუცნობიანი წრფივი უტოლობისაგან შედგენილი სისტემა, მაშინ მისი ამოხსნა ნიშნავს სიბრტყის ყველა იმ წერტილის მოძებნას, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ სისტემაში შემავალ ყველა უტოლობას. რადგან თითოეული უტოლობის ამონახსნია ნახევარსიბრტყე, ამიტომ უტოლობათა სისტემის ამოხსნა დაიყვანება შესაბამისი უტოლობებით განსაზღვრული ნახევარსიბრტყეების თანაკვეთის პოვნაზე. ამ თანაკვეთით განსაზღვრულ სიმრავლეს ეწოდება **დასაშვები სიმრავლე (დასაშვები არე)**.

ამოცანა 11.3. ავაგოთ დასაშვები სიმრავლე, რომელიც მოცემულია შემდეგი უტოლობებით:

$$\begin{cases} x+2y \le 6 \\ -x+y \ge -2 \\ y \ge 0 \\ x \ge 0. \end{cases}$$

▼ პირველი უტოლობის ამონახსნია L_1 წრფის $(x+2y=6)$ ქვემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე (საცდელი წერტილია, მაგალითად, $(0,0)$). მეორე უტოლობის ამონახსენია L_2 წრფის $(-x+y=-2)$ ზემოთ მდებარე ნახევა-რსიბრტყე (საცდელი წერტილია, მაგალითად, $(0,0)$). მესამე უტოლობის ამონახსნია x ღერძის ზემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე, ხოლო მეოთხე უტოლობისა — y ღერძის მარჯვნივ მდებარე ნახევარსიბრტყე. ამიტომ ამ უტოლობათა სისტემის ამონახსნს (დასაშვებ სიმრავლეს) წარმოადგენს ნახ. 11.4-ზე დაშტრიხული $OABC$ ოთხკუთხედი.



ნახ. 11.4

A წერტილის კოორდინატებია $(0,3)$, C წერტილისა — $(2,0)$. B წე-რტილი წარმოადგენს L_1 და L_2 წრფეების გადაკვეთის წერტილს და ამი-ტომ მისი კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი სისტემის ამოხსნით

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ -x+y=-2. \end{cases}$$

აქედან მივიღებთ: $x=\dfrac{10}{3}$, $y=\dfrac{4}{3}$. ამრიგად, $B=\left(\dfrac{10}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$. ■

ახლა ჩვენ შეგვიძლია გადავიდეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის მეორე ძირითადი ნაწილის შესწავლაზე.

ვთქვათ, მოცემულია ორი x და y ცვლადის რაიმე წრფივი ფუნქცია

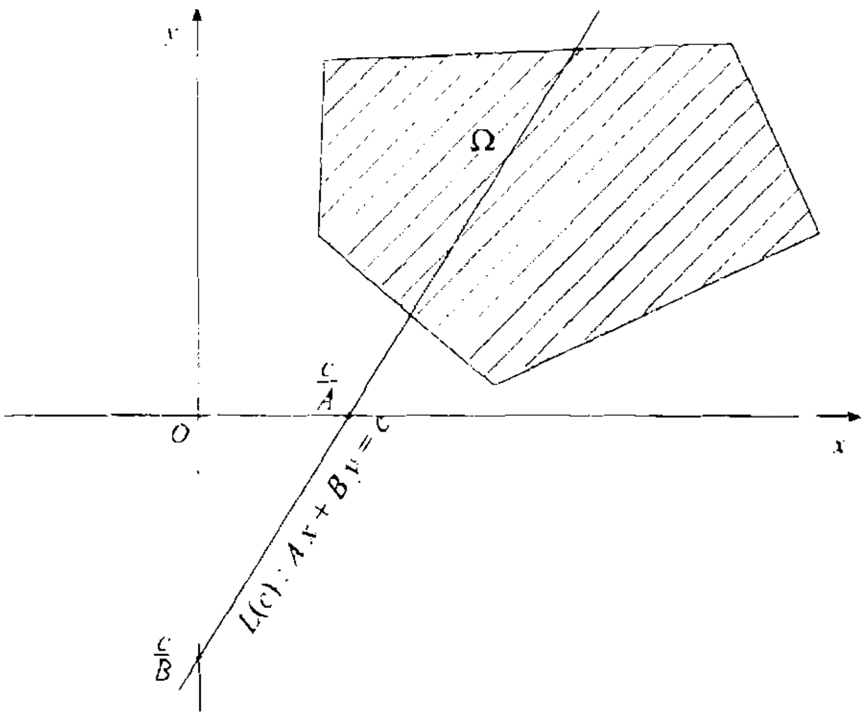
$$f(x,y)=Ax+By, \tag{11.6}$$

სადაც A და B მოცემული არანულოვანი მუდმივი რიცხვებია.

დავუშვათ, რომ x და y ცვლადები შეზღუდულია რაიმე პირობებით, რომლებიც გამოისახება წრფივი უტოლობების სისტემის სახით. ეს იმას ნიშნავს, რომ (x,y) წერტილი იცვლება რაიმე დასაშვებ Ω სიმრავლეზე, რომელიც განისაზღვრება ხსენებულ უტოლობათა სისტემის ამოხსნით. ასეთ $f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება **მიზნის ფუნქცია.**

დავსვათ ამოცანა: ვიპოვოთ (11.6) ტოლობით მოცემული $f(x,y)$ მიზნის ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა დასაშვებ Ω სიმრავლეზე.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ Ω რაიმე მრავალკუთხედია (იხ. ნახ. 11.5).



ნახ. 11.5

ვთქვათ, c არის ცვლადი პარამეტრი და განვიხილოთ $L(c)$ წრფეთა სიმრავლე

$$Ax+By=c \quad \text{ანუ} \quad y=-\frac{A}{B}x+\frac{c}{B}. \tag{11.7}$$

ცხადია, რომ $\left(\frac{c}{A}, 0\right)$ და $\left(0, \frac{c}{B}\right)$, შესაბამისად, (11.7) წრფის x და y ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებია. c პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ეს წრფეები ერთმანეთის პარალელურია, რადგან მათ აქვთ ერთი და იგივე კუთხური კოეფიციენტი $-\frac{A}{B}$.

მეორე მხრივ, ცხადია, თუ $B>0$, მაშინ c პარამეტრის ზრდა იწვევს $L(c)$ წრფის გადაადგილებას ზემოთ, ხოლო თუ $B<0$, მაშინ c პარამეტრის ზრდა იწვევს $L(c)$ წრფის გადაადგილებას ქვემოთ.

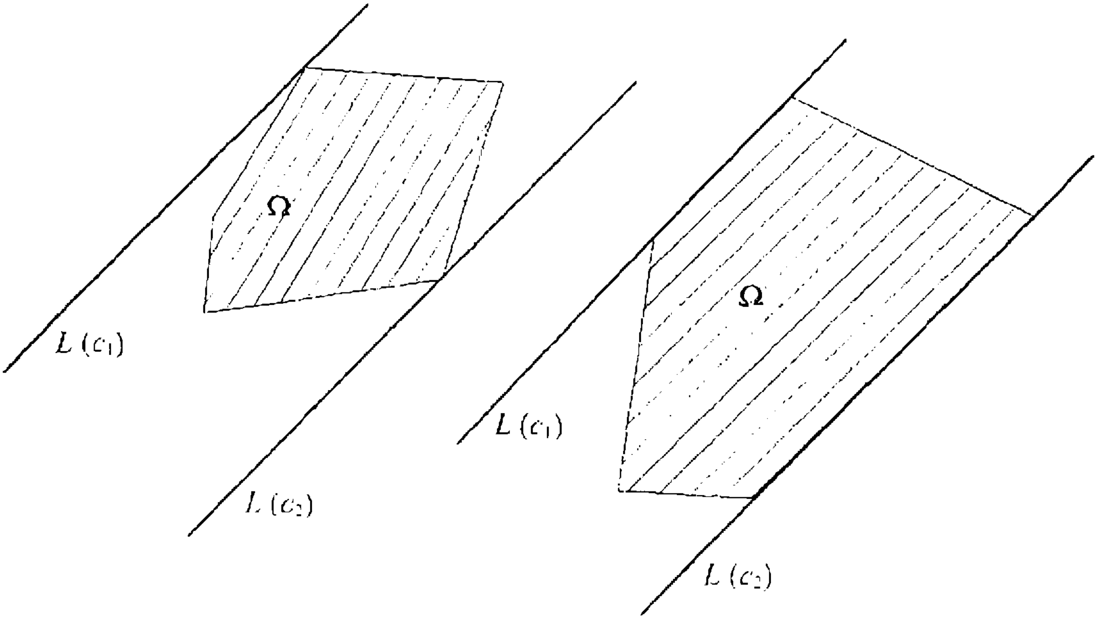
ამიტომ, მოცემული Ω მრავალკუთხედისათვის არსებობს c პარამეტრის ისეთი ორი c_1 და c_2 მნიშვნელობა $(c_1<c_2)$, რომ

(ა) როდესაც $c=c_1$, მაშინ Ω მდებარეობს $L(c_1)$ წრფის ერთ მხარეს; ამასთან, Ω-ს და $L(c_1)$ წრფეს აქვს ან ერთი საერთო წერტილი (Ω-ს რომელიმე წვერო) ან $L(c_1)$ შეიცავს Ω-ს რომელიმე გვერდს (იხ. ნახ. 11.6). თუ $c<c_1$, მაშინ $L(c)$ წრფეს და Ω სიმრავლეს არა აქვთ საერთო წერტილი;

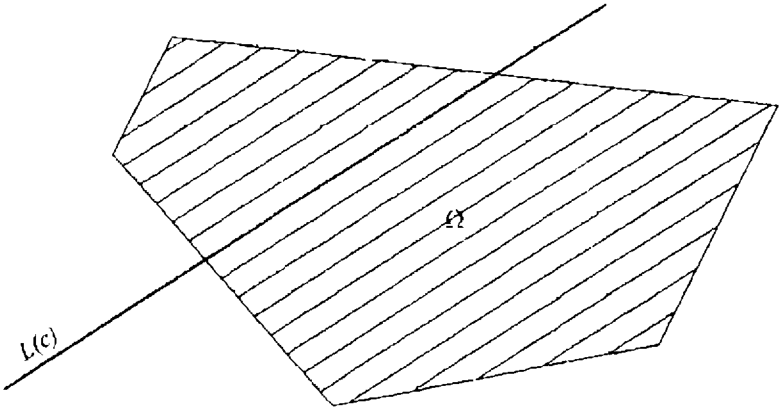
(ბ) როდესაც $c_1<c<c_2$, მაშინ შესაბამისი $L(c)$ წრფე გადის Ω მრავალკუთხედის შიგა წერტილებზე (იხ. ნახ. 11.7);

(გ) როდესაც $c=c_2$, მაშინ Ω მდებარეობს $L(c_2)$ წრფის ერთ მხარეს, ისე რომ Ω-ს $L(c_2)$ წრფესთან კვლავ აქვს ან ერთი წერტილი (Ω-ს რომელიმე წვერო) ან $L(c_2)$ შეიცავს Ω-ს რომელიმე გვერდს; თუ $c>c_2$, მაშინ $L(c)$ წრფეს და Ω სიმრავლეს არა აქვთ საერთო წერტილი.

ამრიგად, Ω მოთავსებულია $L(c_1)$ და $L(c_2)$ წრფეებს შორის (იხ. ნახ. 11.6).



ნახ. 11.6



ნახ. 11.7

შევნიშნოთ, რომ (11.6) ტოლობით განსაზღვრული $f(x,y)$ ფუნქცია $L(c)$ წირის გასწვრივ ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას, რომელიც c-ს ტოლია (იხ. ტოლობა (11.7)). ამიტომ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ c_1 იქნება $f(x,y)$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა, c_2 კი – უდიდესი მნიშვნელობა Ω სიმრავლეზე (ე. ი. როცა $(x,y)\in\Omega$). გარდა ამისა, ეს უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები მიიღწევა ან ერთ წერტილში (Ω-ს რომელიმე წვეროში) ან უამრავ წერტილ-

ში (Ω-ს რომელიმე გვერდის ყველა წერტილში). ეს დამოკიდებულია იმაზე, თუ რამდენი საერთო წერტილი აქვთ შესაბამის $L(c_j)$ $(j=1,2)$ წრფეს და Ω მრავალკუთხედს. ყველაზე არსებითი შედეგი, რაც გამომდინარეობს ზემოაღნიშნულიდან, ის არის, რომ უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს $f(x,y)$ ფუნქცია ყველა შემთხვევაში იღებს Ω მრავალკუთხედის წვეროებში. რადგან წვეროთა რიცხვი სასრულია, ეს საშუალებას გვაძლევს უმარტივესი ალგორითმით (უშუალო შედარებით) მოვძებნოთ ეს უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

ამრიგად, წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოსახსნელად (მიზნის ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოსაძებნად Ω მრავალკუთხედზე) მივიღეთ შემდეგი ალგორითმი:

(ა) პირველი საფეხური: ავაგოთ Ω მრავალკუთხედი და მოვძებნოთ მისი წვეროების კოორდინატები.

(ბ) მეორე საფეხური: გამოვთვალოთ $f(x,y)=Ax+By$ ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წვეროებში.

(გ) მესამე საფეხური: შევარჩიოთ მიღებულ მნიშვნელობებს შორის უდიდესი და უმცირესი რიცხვები. სწორედ ისინი იქნებიან $f(x,y)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები Ω სიმრავლეზე. თუ უმცირეს (უდიდეს) მნიშვნელობას $f(x,y)$ ფუნქცია იღებს ორ წვეროში, მაშინ ეს წვეროები აუცილებლად მდებარეობენ Ω მრავალკუთხედის ერთ გვერდზე და ამ გვერდის ყველა წერტილში $f(x,y)$ ფუნქცია იღებს იმავე უმცირეს (უდიდეს) მნიშვნელობას.

ამოცანა 11.4 ვიპოვოთ მიზნის

$$f(x,y)=9x+6y$$

ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები დასაშვებ Ω სიმრავლეზე, თუ Ω განსაზღვრულია ამოცანა 11.3-ში მოცემული უტოლობებით.

▼ ზემოთ ჩამოყალიბებული ალგორითმის თანახმად, ჯერ უნდა მოვძებნოთ Ω მრავალკუთხედის წვეროები. ამოცანა 11.3-ში დავადგინეთ, რომ Ω

არის $OABC$ ოთხკუთხედი და $O=(0,0)$, $A=(0,3)$, $B=\left(\frac{10}{3},\frac{4}{3}\right)$ და $C=(2,0)$. გამოვთვალოთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წვეროებში:

$f(0,0)=0$, $f(0,3)=18$, $f\left(\frac{10}{3},\frac{4}{3}\right)=38$, $f(2,0)=18$.

ამრიგად, მიზნის ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა 0, რომელსაც ფუნქცია აღწევს $O=(0,0)$ წერტილში, ხოლო უდიდესი მნიშვნელობაა 38, რომელსაც ფუნქცია აღწევს $B=\left(\frac{10}{3},\frac{4}{3}\right)$ წერტილში. ■

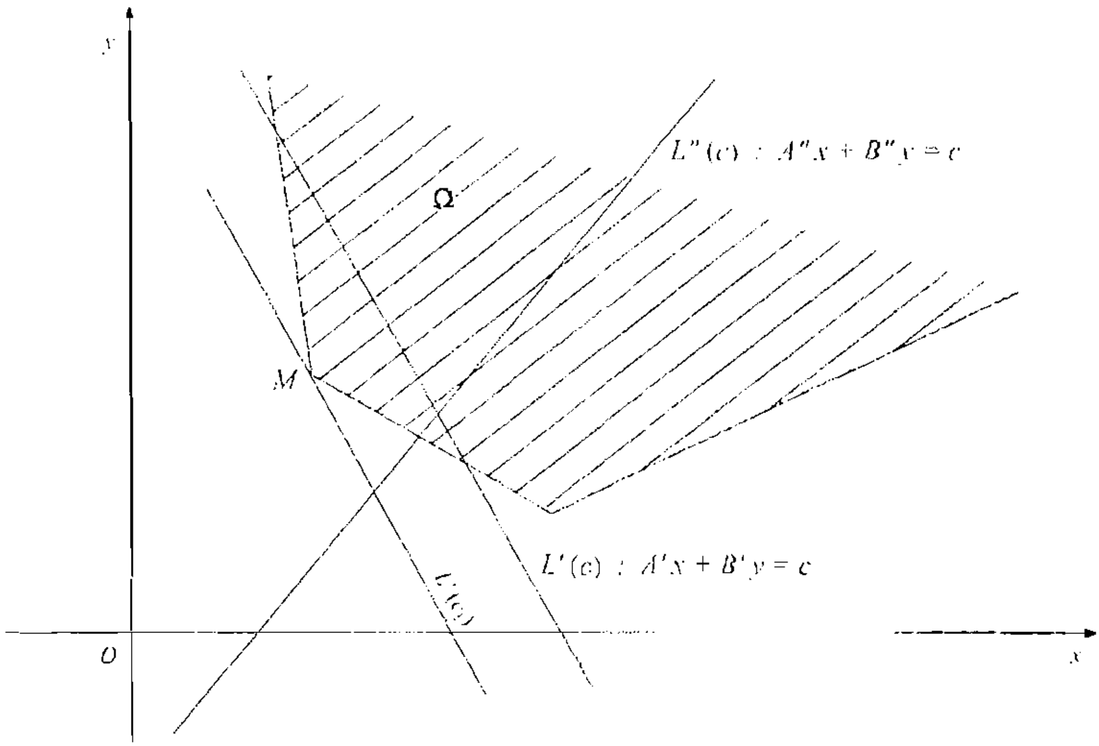
ცხადია, თუ Ω არ წარმოადგენს შემოსაზღვრულ სიმრავლეს, მაშინ მიზნის ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობების მოძებნა Ω-ზე რთულდება და შეიძლება ისინი არც კი არსებობდნენ. ამიტომ ასეთი ამოცანები სპეციალურ შესწავლას მოითხოვენ. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი კონკრეტული შემთხვევა.

კერძოდ, ვთქვათ, უსასრულო დასაშვებ Ω სიმრავლეს აქვს ნახ. 11.8-ზე გამოსახული ფორმა, ხოლო მიზნის ფუნქცია ერთ შემთხვევაში არის $f(x,y)=A'x+B'y$, მეორე შემთხვევაში კი – $g(x,y)=A''x+B''y$.

შესაბამისი წრფეთა ოჯახები $L'(c)$ და $L''(c)$ განისაზღვრება შემდეგი განტოლებებით: $A'x+B'y=c$ და $A''x+B''y=c$, სადაც c პარამეტრია.

ნახ. 11.8-დან უშუალოდ ჩანს, რომ მიზნის $f(x,y)$ ფუნქციას ექნება ან უმცირესი ან უდიდესი მნიშვნელობა (რადგან არსებობს c პარამეტრის ისეთი c_1 მნიშვნელობა, რომ Ω სიმრავლე მოთავსებული იქნება $L'(c_1)$ წრფის ერთ მხარეს და Ω-ს $L'(c_1)$ წრფესთან ექნება მხოლოდ ერთი საერთო M წერტილი). თუ c-ს ზრდა იწვევს $L'(c)$ წრფის ზემოთ გადაადგილებას, მაშინ მიზნის ფუნქცია M წერტილში მიიღებს უმცირეს მნიშვნელობას და მას ამ შემთხვევაში არ ექნება უდიდესი მნიშვნელობა Ω-ზე, რადგან c-ს უსასრულო გაზრდისას $L'(c)$ წირს ყოველთვის ექნება საერთო შიგა წერტილები Ω სიმრავლესთან. მაშასადამე, $f(x,y)$ ფუნქცია

Ω-ზე არ იქნება შემოსაზღვრული ზემოდან. თუ c-ს ზრდა იწვევს $L'(c)$ წრფის ქვემოთ გადაადგილებას, მაშინ M წერტილში $f(x,y)$ ფუნქცია მიიღებს უდიდეს მნიშვნელობას და, შესაბამისად, მას არ ექნება უმცირესი მნიშვნელობა Ω-ზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ $f(x,y)$ არ იქნება შემოსაზღვრული Ω-ზე ქვემოდან.



ნახ. 11.8

თუ მიზნის ფუნქციაა $g(x,y)$, მაშინ ნახ. 11.8-დან გამომდინარეობს, რომ შესაბამის $L''(c)$ წრფეს c-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის ყოველთვის გააჩნია Ω დასაშვებ სიმრავლესთან საერთო შიგა წერტილები. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $g(x,y)$ არ არის შემოსაზღვრული Ω-ზე არც ზემოდან და არც ქვემოდან. ამიტომ მას, ცხადია, არ გააჩნია არც უმცირესი და არც უდიდესი მნიშვნელობა.

ერთი შეხედვით წრფივი დაპროგრამების საკითხები საკმარისად აბსტრაქტულ მათემატიკურ ამოცანად შეიძლება მოგვეჩვენოს, მაგრამ, რო-

გორც მომდევნო პარაგრაფში დავრწმუნდებით, მათ უდიდესი გამოყენება აქვთ ეკონომიკაში. კერძოდ, მოგების მაქსიმიზაციისა და დანახარჯების მინიმიზაციის პრობლემები ძალიან ხშირად სწორედ წრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე დაიყვანება, რომლებშიც მიზნის ფუნქციებია, შესაბამისად, მოგებისა და დანახარჯის ფუნქციები, ხოლო დასაშვები სიმრავლე განისაზღვრება კონკრეტული ამოცანის ეკონომიკურ და ფინანსურ მახასიათებლებზე დადებული შეზღუდვებით.

11.2. წრფივი დაპროგრამების გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

გამოყენებით ამოცანებში ერთ-ერთ ყველაზე რთულ მომენტად ითვლება სიტყვიერად მოცემული ეკონომიკური პირობების ჩაწერა ზუსტი მათემატიკური თანაფარდობების სახით, რომელთაც წინ უნდა უსწრებდეს ცვლადი სიდიდეების მოხერხებულად შემოღება.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე ეკონომიკური ამოცანა.

ამოცანა 11.5. შეზღუდული პასუხისმგებლობის საწარმო უშვებს ორი A და B ტიპის პროდუქციას, რომლებზე მოთხოვნაც აღემატება საწარმოს სიმძლავრეს. A ტიპის პროდუქციის ერთეულზე დანახარჯია 6 დოლარი, ხოლო B ტიპის ერთეულზე – 3 დოლარი. ამასთან, A ტიპის პროდუქციის ერთეული იყიდება 7 დოლარად, B ტიპისა – 4 დოლარად. ტრანსპორტირების ხარჯები A ტიპის პროდუქციის ერთეულისათვის არის 0.2 დოლარი, B ტიპის ერთეულისათვის კი – 0.3 დოლარი. საწარმოს ფინანსური შესაძლებლობის შეზღუდულობის გამო მისი ყოველთვიური დანახარჯების მაქსიმუმი ორივე ტიპის პროდუქციის საწარმოებლად არ უნდა აღემატებოდეს 2700 დოლარს, ხოლო ყოველთვიური სატრანსპორტო ხარჯები კი 120 დოლარს. როგორ უნდა ააწყოს საწარმომ საქმიანობა, რომ მოგება იყოს მაქსიმალური?

▼ საწარმომ უნდა გადაწყვიტოს რა რაოდენობის A და B ტიპის საქონელი აწარმოოს ყოველთვიურად. ეს რაოდენობები უცნობია. აღვნიშნოთ

x-ით A ტიპის პროდუქციის რაოდენობა, ხოლო y-ით კი — B ტიპის პროდუქციის რაოდენობა, რომელიც უნდა აწარმოოს საწარმომ ყოველთვიურად.

ამოცანა მოითხოვს წარმოების იმ რეჟიმის მოძებნას (ანუ x და y სიდიდეების ისე შერჩევას), რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას. ამიტომ საჭიროა ვიპოვოთ მოგების ფუნქციის გამოსათვლელი ფორმულა x და y ცვლადების საშუალებით. ცხადია, რომ ყოველთვიური მოგების ფუნქცია გამოითვლება შემდეგნაირად

$$\Pi = f(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y) - f_3(x,y),$$

სადაც

$f_1(x,y)$ არის პროდუქციის გაყიდვით მიღებული მთლიანი ამონაგები ერთ თვეში,

$f_2(x,y)$ არის დანახარჯი ერთ თვეში x და y რაოდენობის პროდუქციის საწარმოებლად,

$f_3(x,y)$ არის A და B ტიპის პროდუქციის ტრანსპორტირებაზე გაღებული დანახარჯები ერთ თვეში.

შევნიშნოთ, რომ, რადგან მოთხოვნა წარმოებულ პროდუქციაზე აღემატება საწარმოს სიმძლავრეს, ამიტომ მოთხოვნა აღემატება პროდუქციის მიწოდებას ბაზარზე. ამის გამო საწარმოს მიერ დამზადებული პროდუქცია იყიდება მთლიანად. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ყოველთვიურად პროდუქციის გაყიდვით მიღებული მთლიანი ამონაგებია $f_1(x,y) = 7x + 4y$. ამოცანის პირობის თანახმად, ორივე სახის პროდუქციის საწარმოებლად ყოველთვიური დანახარჯი გამოითვლება ტოლობით $f_2(x,y) = 6x + 3y$, ხოლო ყოველთვიური სატრანსპორტო დანახარჯია $f_3(x,y) = 0.2x + 0.3y$. ამიტომ მივიღებთ

$$\Pi = f(x,y) = 7x + 4y - (6x + 3y) - (0.2x + 0.3y) = 0.8x + 0.7y.$$

ამრიგად,

$$\Pi = f(x,y) = 0.8x + 0.7y$$

წარმოადგენს მიზნის ფუნქციას და საძიებელია მისი უდიდესი მნიშვნელობა დასაშვებ სიმრავლეზე.

ახლა დავადგინოთ ყველა ის შეზღუდვა, რასაც უნდა აკმაყოფილებდეს x და y ცვლადები. ამოცანის პირობის თანახმად ყოველთვიური წარმოების დანახარჯი არ უნდა აღემატებოდეს 2700 დოლარს, ე. ი.

$$6x+3y\le 2700.$$

ასევე ყოველთვიური სატრანსპორტო დანახარჯები არ უნდა აღემატებოდეს 120 დოლარს, ე. ი.

$$0.2x+0.3y\le 120.$$

გარდა ამისა, x და y ცვლადების ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარეობს, რომ

$$x\ge 0 \quad \text{და} \quad y\ge 0.$$

ამ პირობებს ეკონომიკაში **არაუარყოფითობის შეზღუდვა** ეწოდება.

ამრიგად, მათემატიკურად ჩვენი ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება: ვიპოვოთ მიზნის

$$\Pi=f(x,y)=0.8x+0.7y$$

ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, თუ x და y ცვლადები შეზღუდულია შემდეგი უტოლობებით:

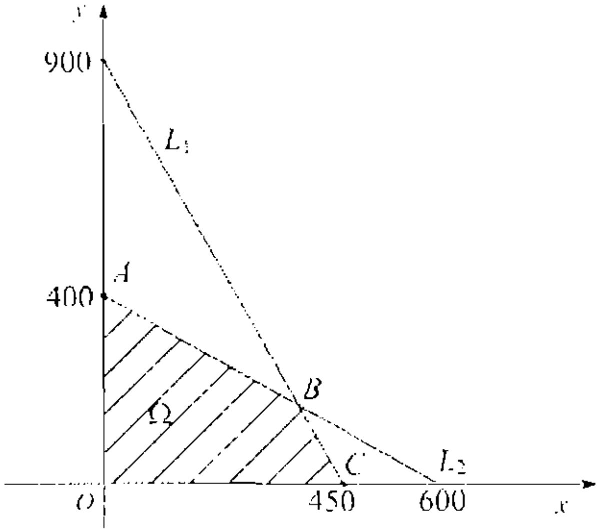
$$\begin{cases} 6x+3y\le 2700 \\ 0.2x+0.3y\le 120 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0. \end{cases}$$

ეს კი წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების ამოცანას. წინა პარაგრაფში აღწერილი ალგორითმის თანახმად ჯერ უნდა ამოვხსნათ მიღებულ უტოლობათა სისტემა ანუ ვიპოვოთ დასაშვები Ω სიმრავლე (მრავალკუთხედი) და შემდეგ მოვძებნოთ მისი წვეროების კოორდინატები (პირველი საფეხური).

პირველი უტოლობის ამონახსნი არის

$$6x+3y=2700 \quad \text{ანუ} \quad y=-2x+900$$

განტოლებით განსაზღვრული L_1 წრფის ქვემოთ მოთავსებული ნახევარსიბრტყე (რომელსაც ეკუთვნის საცდელი წერტილი $(0,0)$; იხ. ნახ. 11.9)



ნახ. 11.9

შევნიშნოთ, რომ L_1 წრფე გადის $(450, 0)$ და $(0, 900)$ წერტილებზე. მეორე უტოლობის ამონახსნი არის

$$0.2\,x + 0.3\,y = 120 \quad \text{ანუ} \quad y = -\frac{2}{3}\,x + 400$$

განტოლებით განსაზღვრული L_2 წრფის ქვემოთ მოთავსებული ნახევარსიბრტყე (რომელსაც ეკუთვნის საცდელი წერტილი $(0, 0)$).

შევნიშნოთ, რომ L_2 წრფე გადის $(600, 0)$ და $(0, 400)$ წერტილებზე. ამიტომ დასაშვები Ω სიმრავლეა $OABC$ მრავალკუთხედი (იხ. ნახ. 11.9).

ცხადია, რომ O, A და C წერტილის კოორდინატები ჩვენ, ფაქტობრივად, უკვე ვიცით

$$O = (0, 0), \quad A = (0, 400), \quad C = (450, 0).$$

ვიპოვოთ B წერტილის კოორდინატები. რადგან იგი წარმოადგენს L_1 და L_2 წრფეების საერთო წერტილს, ამიტომ უნდა ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} y = -2\,x + 900 \\ y = -\dfrac{2}{3}\,x + 400. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $x = 375$, $y = 150$. ამიტომ $B = (375, 150)$.

ახლა შევასრულოთ ზემოთ ხსენებული ალგორითმის „მეორე საფეხუ-

რში" მითითებული ოპერაციები, ე. ი. გამოვთვალოთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები Ω მრავალკუთხედის წვეროებში:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, 400) = 280, \quad f(450, 0) = 360, \quad f(375, 150) = 405.$$

და ბოლოს, ალგორითმის „მესამე საფეხურის" შესაბამისად, მიღებული რიცხვებიდან უნდა ამოვარჩიოთ უდიდესი რიცხვი, რომელიც იქნება მიზნის ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა Ω სიმრავლეზე. ჩვენს შემთხვევაში, უდიდესი რიცხვია $f(375, 150) = 405$, რომელიც მიიღწევა მხოლოდ ერთ წვეროზე (კერძოდ, B წვეროზე).

ამიტომ საწარმოს უდიდესი ყოველთვიური მოგება იქნება 405 დოლარი, რომელიც მიიღწევა იმ შემთხვევაში, თუ ყოველთვიურად იგი აწარმოებს 375 ერთეულ A ტიპის და 150 ერთეულ B ტიპის პროდუქციას.■

განხილული ამოცანა გვიჩვენებს, რომ ეკონომიკური ამოცანის დასაყვანად წრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე საჭიროა:

(1) შემოვიღოთ x და y ცვლადები;

(2) დავწეროთ მიზნის ფუნქციის გამოსახულება x და y ცვლადების საშუალებით და დავადგინოთ, მინიმიზაციის პრობლემასთან გვაქვს საქმე თუ მაქსიმიზაციის პრობლემასთან;

(3) ამოვწეროთ ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ყველა შეზღუდვა x და y ცვლადების მიმართ (არაუარყოფითობის შეზღუდვის ჩათვლით, თუ ეს აუცილებელია).

განვიხილოთ კიდევ ერთი ამოცანა.

ამოცანა 11.6. ლუდის მწარმოებელ ფირმას აქვს ორი D_1 და D_2 ჩამოსასხმელი დანადგარი. ფირმა აწარმოებს სამი ხარისხის ლუდს: პირველი ხარისხის ლუდი მიეწოდება ელიტარულ მაღაზიებს, მეორე ხარისხის ლუდი მიეწოდება სუპერმარკეტებს, მესამე ხარისხის ლუდი კი — დაბალი შემოსავლის მქონე მოსახლეობისათვის განკუთვნილ სპეციალურ მაღაზიებს. კონტრაქტის თანახმად ფირმამ ელიტარულ მაღაზიებს ყოველკვირა უნდა მიაწოდოს არანაკლებ 120 დეკალიტრი ლუდი, სუპერმარკეტებს — არანაკლებ 80 დეკალიტრი და სპეციალურ მაღაზიებს — არანაკლებ 240 დეკალიტრი.

D_1 დანადგარის ექსპლუატაცია 1 სამუშაო დღის განმავლობაში ფირმას უჯდება 400 დოლარი, ხოლო D_2 დანადგარისა — 320 დოლარი. ამასთან, D_1 დანადგარზე 1 სამუშაო დღის განმავლობაში შეიძლება ჩამოისხას 60 დეკალიტრი პირველი ხარისხის, 20 დეკალიტრი მეორე ხარისხისა და 40 დეკალიტრი მესამე ხარისხის ლუდი. შესაბამისი მაჩვენებლები D_2 დანადგარისათვის არის 20 დეკალიტრი (პირველი ხარისხის), 20 დეკალიტრი (მეორე ხარისხის) და 120 დეკალიტრი (მესამე ხარისხის). რამდენი დღე უნდა იმუშაოს კვირაში თითოეულმა დანადგარმა, რომ ფირმამ დაიცვას კონტრაქტის პირობები ყველაზე ეკონომიკური რეჟიმით?

▼ აღვნიშნოთ x-ით დღეების ის რაოდენობა ერთ კვირაში, როცა მუშაობს D_1 დანადგარი, ხოლო y-ით — დღეების ის რაოდენობა ერთ კვირაში, როცა მუშაობს D_2 დანადგარი.

რადგან D_1 დანადგარის ექსპლუატაცია 1 სამუშაო დღის განმავლობაში ფირმას უჯდება 400 დოლარი, D_2 დანადგარისა კი — 320 დოლარი, ამიტომ D_1 დანადგარის მუშაობა x დღის განმავლობაში და D_2 დანადგარის მუშაობა y დღის განმავლობაში ფირმას დაუჯდება

$$f(x, y) = 400x + 320y \quad (\text{დოლარი}),$$

რაც შეადგენს ფირმის ყოველკვირეულ დანახარჯს დანადგარების ექსპლუატაციისათვის.

ცხადია, ფირმას აინტერესებს, რომ დანახარჯი რაც შეიძლება მცირე იყოს. ამრიგად, $f(x, y)$ არის მიზნის ფუნქცია და ჩვენ საქმე გვაქვს მინიმიზაციის პრობლემასთან.

ახლა ვიპოვოთ დასაშვები Ω სიმრავლე. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ x და y აღნიშნავენ დღეების რაოდენობას ერთ კვირაში და ამიტომ

$$0 \le x \le 7, \quad 0 \le y \le 7.$$

ცხადია, თუ D_1 დანადგარი კვირაში მხოლოდ x დღეს იმუშავებს, მაშინ მასზე ჩამოისხმება:

$60x$ დეკალიტრი პირველი ხარისხის ლუდი,

$20x$ დეკალიტრი მეორე ხარისხის ლუდი,

$40x$ დეკალიტრი მესამე ხარისხის ლუდი.

ანალოგიურად, ერთ კვირაში y სამუშაო დღის რეჟიმით D_2 დანადგარზე ჩამოისხმება:

$20y$ დეკალიტრი პირველი ხარისხის ლუდი,

$20y$ დეკალიტრი მეორე ხარისხის ლუდი,

$120y$ დეკალიტრი მესამე ხარისხის ლუდი.

ამიტომ ერთ კვირაში ორივე დანადგარზე ჩამოისხმება:

$60x+20y$ დეკალიტრი პირველი ხარისხის ლუდი,

$20x+20y$ დეკალიტრი მეორე ხარისხის ლუდი,

$40x+120y$ დეკალიტრი მესამე ხარისხის ლუდი.

კონტრაქტის თანახმად, უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$60x+20y \geq 120,$$
$$20x+20y \geq 80,$$
$$40x+120y \geq 240.$$

ამოცანის პირობებით გათვალისწინებული ყველა შეზღუდვის ამოწერა დასრულებულია.

ჩამოვაყალიბოთ საბოლოო სახით მიღებული წრფივი დაპროგრამების ამოცანა: ვიპოვოთ

$$f(x,y)=400x+320y$$

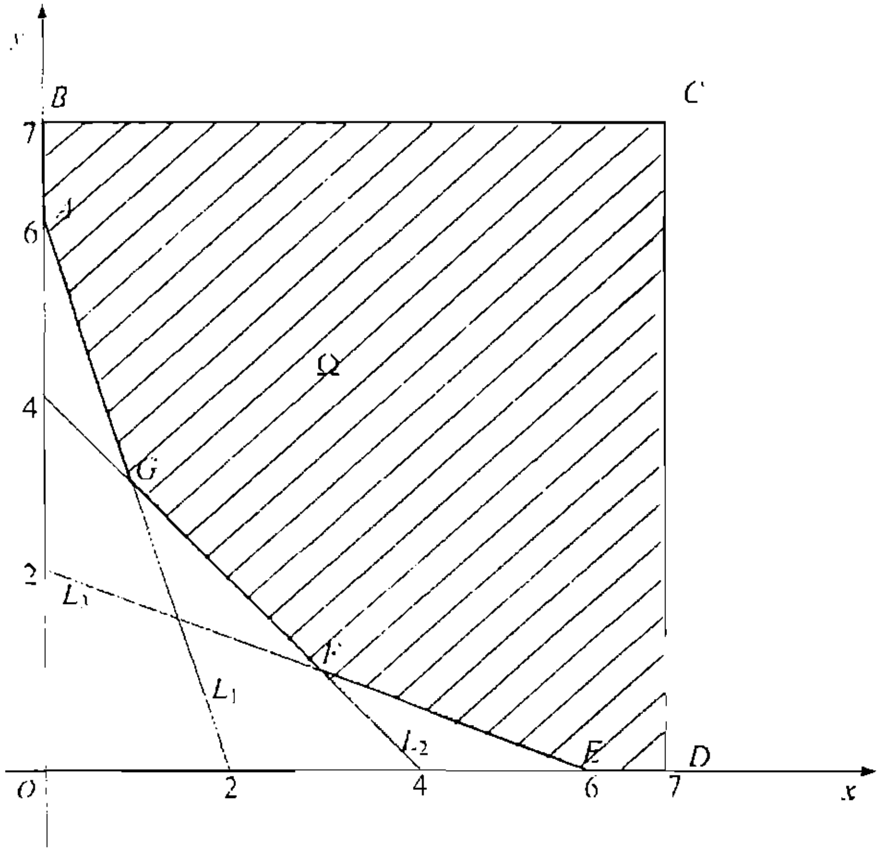
მიზნის ფუნქციის მინიმუმი, თუ x და y ცვლადები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\begin{cases} 60x+20y \geq 120 \\ 20x+20y \geq 80 \\ 40x+120y \geq 240 \\ 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 7. \end{cases}$$

ეს ამოცანა ამოვხსნათ წინა პარაგრაფში მითითებული ალგორითმის შესაბამისად.

პირველი საფეხური: ავაგოთ დასაშვები სიმრავლე Ω და მოვძებნოთ მიღებული მრავალკუთხედის წვეროების კოორდინატები. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ $60x+20y=120$ განტოლებით განსაზღვრული L_1 წრფე გადის $(2,0)$ და $(0,6)$ წერტილებზე, $20x+20y=80$ განტოლებით განსაზღვრული L_2 წრფე გადის $(4,0)$ და $(0,4)$ წერტილებზე, $40x+120y=240$ განტოლებით განსაზღვრული L_3 წრფე გადის $(6,0)$ და $(0,2)$ წერტილებზე.

ამასთან, თუ საცდელ წერტილად ავიღებთ $O=(0,0)$ სათავეს, მარტივად დავრწმუნდებით, რომ პირველი სამი უტოლობის ამონახსნებია ის ნახევარსიბრტყეები, რომლებიც არ შეიცავენ O სათავეს. რაც შეეხება ბოლო ორ უტოლობას, მათი ამონახსნების აგება ტრივიალურია. ამიტომ Ω მრავალკუთხედს ექნება ნახ. 11.10-ზე მითითებული $ABCDEFG$ მრავალკუთხედის (შვიდკუთხედის) ფორმა.



ამ მრავალკუთხედის წვეროების კოორდინატებია $A=(0, 6)$, $B=(0, 7)$, $C=(7, 7)$, $D=(7, 0)$, $E=(6, 0)$. ცხადია, F წარმოადგენს L_2 და L_3 წრფეების გადაკვეთის წერტილს და ამიტომ მისი კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი სისტემიდან

$$\begin{cases} 20x+20y=80 \\ 40x+120y=240. \end{cases}$$

ანალოგიურად, G წარმოადგენს L_1 და L_2 წრფეების გადაკვეთის წერტილს და ამიტომ მისი კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი სისტემიდან

$$\begin{cases} 60x+20y=120 \\ 20x+20y=80. \end{cases}$$

მარტივად დავადგენთ, რომ

$$F=(3, 1), \qquad G=(1, 3).$$

ამრიგად, ვიპოვეთ ყველა წვეროს კოორდინატები.

მეორე საფეხური: გამოვთვალოთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები Ω მრავალკუთხედის წვეროებზე. მივიღებთ:

$$f(0, 6)=1920, \quad f(0, 7)=2240, \quad f(7, 7)=5040, \quad f(7, 0)=2800,$$

$$f(6, 0)=2400, \quad f(3, 1)=1520, \quad f(1, 3)=1360.$$

მესამე საფეხური: შევარჩიოთ მიღებულ მნიშვნელობებს შორის უმცირესი რიცხვი. ეს რიცხვია $f(1, 3)=1360$. ესაა მიზნის $f(x, y)$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა Ω დასაშვებ სიმრავლეზე.

ამრიგად, მუშაობის ყველაზე ეკონომიკური რეჟიმი ფირმისათვის იქნება, თუ D_1 დანადგარი იმუშავებს კვირაში 1 დღეს, ხოლო D_2 დანადგარი – 3 დღეს. ამ რეჟიმით ფირმის ყოველკვირეული დანახარჯი იქნება მინიმალური (1360 დოლარი). ■

ზოგჯერ x და y ცვლადები თავისი შინაარსით მთელი რიცხვებია. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა მიზნის ფუნქციის მინიმიზაცია ან მაქსიმიზაცია Ω დასაშვები არის ისეთ წერტილებზე, რომელთა კოორდინატები მთელი

რიცხვებია. ამის განხორციელება კი ხშირად არაა მარტივი. განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც Ω მრავალკუთხედის იმ წვეროების კოორდინატები, სადაც მიზნის ფუნქცია აღწევს უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას, მთელი რიცხვები არაა ან როდესაც დასაშვები Ω სიმრავლე უსასრულოა (იხ. წინა პარაგრაფის ბოლო ნაწილი). ამ შემთხვევებში ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა დამატებითი გამოკვლევა. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

ამოცანა 11.7. სადაზღვევო კომპანიას ჰყავს მუდმივი და დროებითი შტატის თანამშრომლები. მუდმივი შტატის თანამშრომლები მუშაობენ კვირაში 40 საათს და იღებენ 800 დოლარ ხელფასს (ყოველკვირეულად), ხოლო დროებითი შტატის თანამშრომლები მუშაობენ კვირაში 20 საათს და იღებენ 320 დოლარ ხელფასს (ყოველკვირეულად).

კომპანიის საშტატო წესდების თანახმად, დროებითი შტატების რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს მუდმივი შტატების რაოდენობის მესამედს. კომპანიის საქმეების შესასრულებლად საჭიროა არანაკლებ 900 სამუშაო საათის დახარჯვა კვირაში.

როგორ უნდა დაადგინოს კომპანიამ თავისი საქმეების შესასრულებლად მუდმივი და დროებითი შტატების რაოდენობა, რომ მისი დანახარჯები იყოს მინიმალური?

▼ ვთქვათ, კომპანიამ მუდმივ შტატში აიყვანა x თანამშრომელი, დროებით შტატში კი – y თანამშრომელი. მაშინ, ამოცანის პირობის თანახმად, კომპანიის ყოველკვირეული დანახარჯი იქნება

$$f(x,y)=800x+320y \quad (\text{დოლარი}).$$

რადგან კომპანიის მიზანია x-ისა და y-ის ისე შერჩევა, რომ ყოველკვირეული დანახარჯი იყოს უმცირესი, ამიტომ $f(x,y)$ წარმოადგენს მიზნის ფუნქციას და საქმე გვაქვს მინიმიზაციის პრობლემასთან.

ამოვწეროთ ახლა ის შეზღუდვები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს x და y ცვლადები.

რადგან მუდმივი შტატის თანამშრომელი მუშაობს 40 საათს, დროებითი შტატის თანამშრომელი კი 20 საათს და ფირმის საქმეების შესასრუ-

ლებლად კვირაში საჭიროა არანაკლებ 900 სამუშაო საათი, ამიტომ უნდა შესრულდეს შემდეგი უტოლობა

$$40x + 20y \geq 900.$$

გარდა ამისა, დროებითი შტატების რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს მუდმივი შტატების მესამედს, ე. ი.

$$y \leq \frac{x}{3}.$$

შევნიშნოთ, რომ x და y, თავისი შინაარსიდან გამომდინარე, მთელი რიცხვებია და აკმაყოფილებენ არაუარყოფითობის შეზღუდვას, ე. ი. $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ და

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

(გავიხსენოთ, რომ $\mathbb{Z}$ აღნიშნავს მთელ რიცხვთა სიმრავლეს).

ამრიგად, მოცემული ეკონომიკური ამოცანა დავიყვანეთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგ ამოცანაზე:

ვიპოვოთ მიზნის

$$f(x, y) = 800x + 320y$$

ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა, თუ x და y ცვლადები აკმაყოფილებენ შემდეგ შეზღუდვებს:

$$\begin{cases} 40x + 20y \geq 900 \\ y \leq \dfrac{x}{3} \\ x \geq 0, \;\; x \in \mathbb{Z} \\ y \geq 0, \;\; y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ამ ამოცანის ამოსახსნელად ჯერ ავაგოთ დასაშვები სიმრავლე. შევნიშნოთ, რომ პირველი უტოლობის ამონახსნია

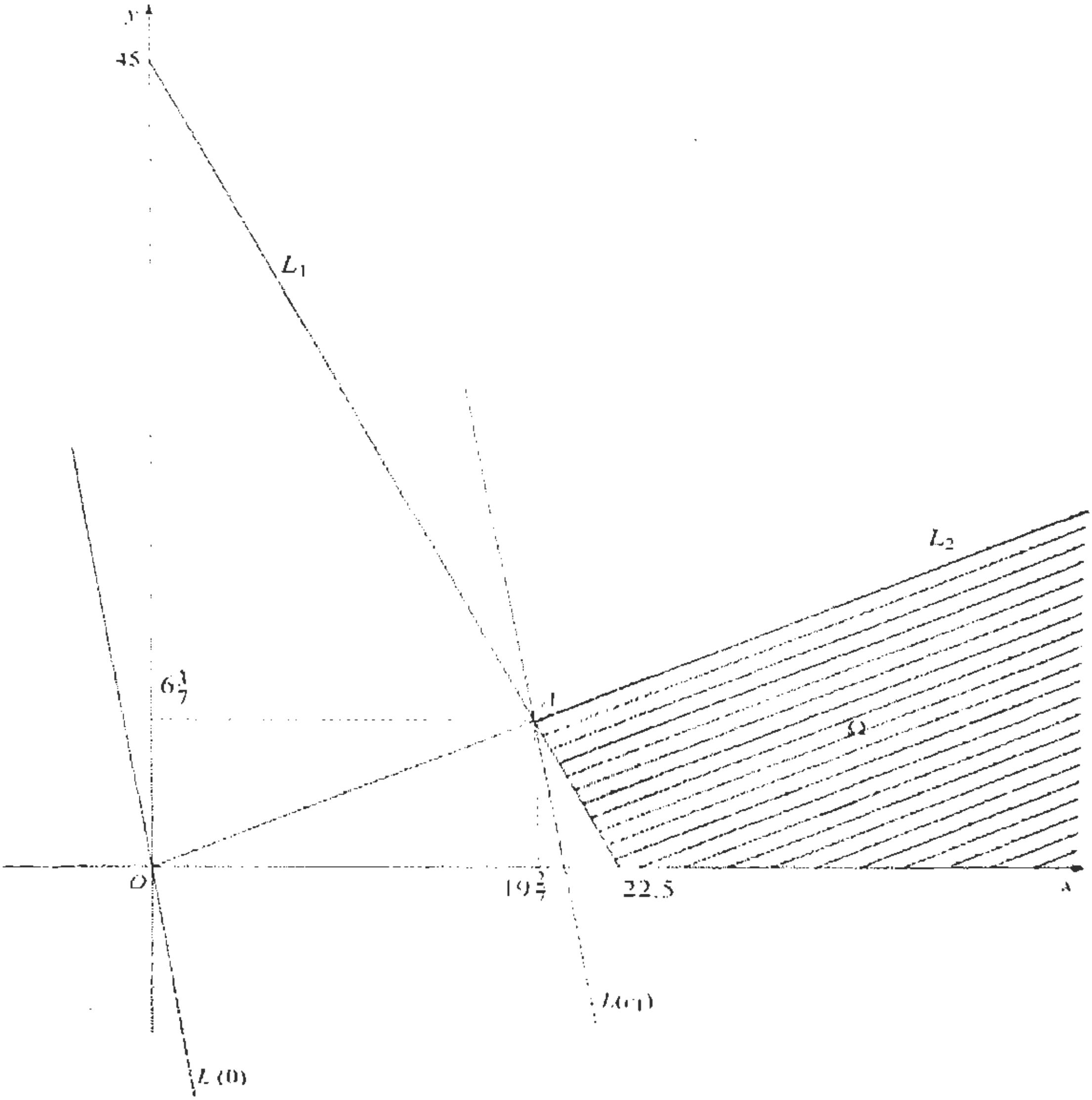
$$40x + 20y = 900, \quad \text{ანუ} \quad y = -2x + 45$$

განტოლებით განსაზღვრული L_1 წრფის ზემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე (L_1 წრფე გადის $(0, 45)$ და $(22.5, 0)$ წერტილებზე). მეორე უტოლობის ამონახსნია

$$y = \frac{1}{3}x$$

განტოლებით განსაზღვრული L_2 წრფის ქვემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე, რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით, თუ საცდელ წერტილად ავიღებთ $(1, 0)$ წერტილს.

ამ ფაქტების გათვალისწინებით შეგვიძლია ავაგოთ დასაშვები სიმრავლე. იგი წარმოადგენს ნახ. 11.11-ზე დაშტრიხული უსასრულო ფიგურის მთელკოორდინატებიან წერტილთა სიმრავლეს.



ნახ. 11.11

ცხადია, რომ Ω სიმრავლე არ წარმოადგენს სასრულ მრავალკუთხედს და ამიტომ მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანა მოითხოვს წინა ამოცანებისაგან განსხვავებულ მსჯელობებს.

მოვიქცეთ შემდეგნაირად.

შევნიშნოთ, რომ L_1 და L_2 წრფეების გადაკვეთის A წერტილის კოორდინატები განისაზღვრება განტოლებათა შემდეგი სისტემით:

$$\begin{cases} y = -2x + 45 \\ y = \dfrac{1}{3}x. \end{cases}$$

აქედან $x = 19\dfrac{2}{7}$ და $y = 6\dfrac{3}{7}$. ამიტომ $A = \left(19\dfrac{2}{7},\ 6\dfrac{3}{7}\right)$.

ავაგოთ $L(c)$ წრფე, რომლის განტოლებაა

$$800x + 320y = c \qquad \text{ანუ} \qquad y = -\frac{5}{2}x + \frac{c}{320}.$$

ცხადია, რომ $L(c)$ წრფეზე მდებარე (x, y) წერტილებისათვის მიზნის $f(x, y) = 800x + 320y$ ფუნქცია ღებულობს ერთსა და იმავე მნიშვნელობას, რომელიც c რიცხვის ტოლია. თუ $c = 0$, მაშინ $L(0)$ წრფეს არა აქვს საერთო წერტილი Ω სიმრავლესთან. თუ თანდათანობით გავზრდით c პარამეტრის მნიშვნელობას, მაშინ $L(c)$ წრფე გადაადგილდება ზემოთ $L(0)$ წრფის პარალელურად. ამიტომ არსებობს c პარამეტრის ისეთი $c = c_1$ მნიშვნელობა, რომ შესაბამისი $L(c_1)$ წრფე გაივლის A წერტილზე. რადგან L_1 წრფის კუთხური კოეფიციენტია -2, ხოლო $L(c_1)$ წრფისა -2.5, ამიტომ L_1 წრფე უფრო დიდ ბლაგვ კუთხეს შეადგენს Ox ღერძთან, ვიდრე $L(c_1)$ წრფე. ამის გამო $L(c_1)$ წრფეს Ω-თან ექნება მხოლოდ ერთი საერთო A წერტილი. ეს c_1 იქნება $f(x, y)$ მიზნის ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა და იგი ტოლი იქნება:

$$c = f\left(19\frac{2}{7},\ 6\frac{3}{7}\right) = 800 \cdot 19\frac{2}{7} + 320 \cdot 6\frac{3}{7} = 17485\frac{5}{7}.$$

სამწუხაროდ, ეს ვერ ჩაითვლება ჩვენი საწყისი ამოცანის ამონახსნად,

რადგან დასაშვები სიმრავლე არის არა Ω, არამედ Ω-ში მოთავსებული ყველა მთელკოორდინატებიანი წერტილები. ამიტომ ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა დამატებითი გამოკვლევა.

ჯერ ვიპოვოთ Ω სიმრავლის ის წერტილი, რომლის კოორდინატები მთელი რიცხვებია და რომელსაც პირველად შეხვდება $L(c)$ წრფე, როდესაც c გადააჭარბებს c_1-ს. მაშინ, როგორც აღვნიშნეთ, $L(c)$ წრფე მოძრაობს ზემოთ თავისი თავის პარალელურად. რადგან A წერტილის აბსცისაა $19\frac{2}{7}$, ამიტომ შემდეგი მთელაბსცისიანი წერტილები განლაგებული არიან x ღერძის ვერტიკალურ წრფეზე, რომლის განტოლებაა $x=20$ და რომელიც L_1 წრფეს კვეთს $(20, 5)$ წერტილში, ხოლო L_2 წრფეს $\left(20, 6\frac{2}{3}\right)$ წერტილში. ამიტომ ამ ორ წერტილს შორის არის კიდევ ერთი მთელკოორდინატებიანი $(20, 6)$ წერტილი. ფრაგმენტი, რომელიც ასახავს სურათს A წერტილის მახლობლობაში, ნაჩვენებია ნახ. 11.12-ზე.

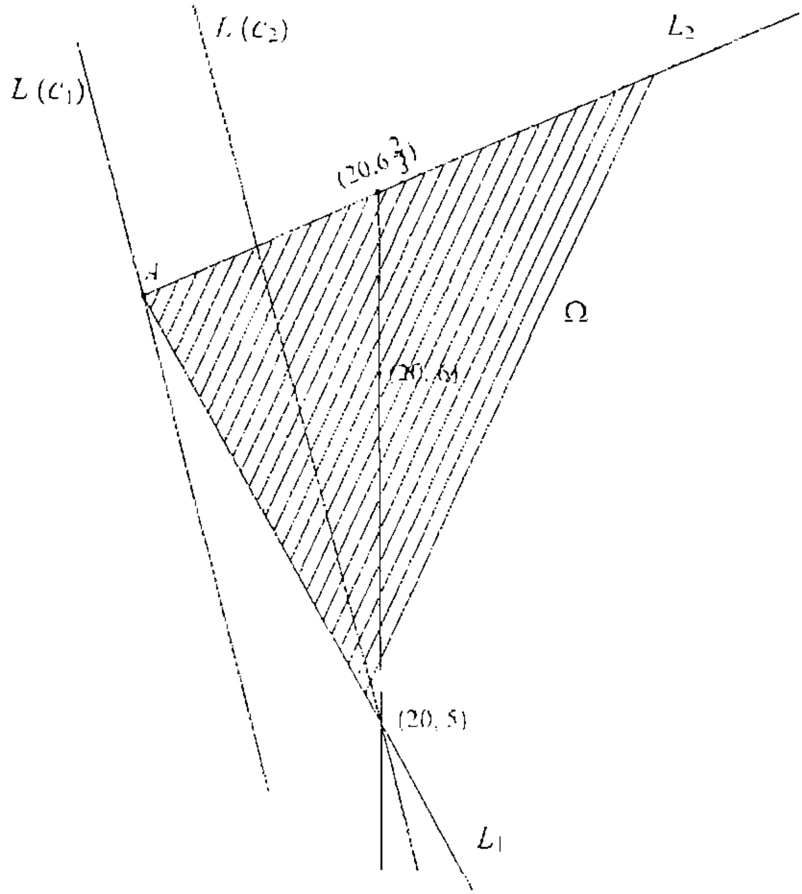
ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ ზემოთ პარალელური გადატანისას $L(c)$ წრფე პირველად შეხვდება მთელკოორდინატებიან $(20, 5)$ წერტილს. ეს მოხდება, $c=c_2>c_1$ მნიშვნელობისათვის. კერძოდ, $c_2=800\cdot 20+320\cdot 5=16000+1600=$ $=17600$.

ნახაზიდან ისიც ცხადად ჩანს, რომ ყველა სხვა მთელკოორდინატებიან წერტილებს $L(c)$ წრფე ზემოთ პარალელური გადატანისას შეხვდება c პარამეტრის უფრო მეტი მნიშვნელობისათვის.

მართლაც, შევამოწმოთ რას უდრის c პარამეტრის მნიშვნელობა, როცა $L(c)$ წრფე გაივლის $(20, 6)$ წერტილზე:

$$c=f(20, 6)=800\cdot 20+320\cdot 6=16000+1920=17920>c_2.$$

ამრიგად, დავადგინეთ, რომ დასაშვებ სიმრავლეზე ჩვენი მიზნის ფუნქცია უმცირეს მნიშვნელობას იღებს, როცა $x=20$ და $y=5$. ამასთან, ეს უმცირესი მნიშვნელობაა $f(20, 5)=17600$.



ნახ. 11.12

მაშასადამე, სადაზღვევო კომპანიამ უნდა აიყვანოს მუდმივი შტატის 20 თანამშრომელი და დროებითი შტატის 5 თანამშრომელი. ამ შემთხვევაში კომპანიის კვირეული სახელფასო დანახარჯი იქნება უმცირესი (17 600 დოლარი). ■

შევნიშნოთ, რომ თუ წრფივი დაპროგრამების ამოცანაში მიზნის ფუნქციაა

$$g(x, y) = ax + by + k,$$

სადაც a, b და k მუდმივი რიცხვებია, მაშინ კვლავ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ზემოთ აღწერილი ალგორითმები.

ეს გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ თუ რაიმე დასაშვებ Ω სიმ-

რავლის (x_0, y_0) წერტილში

$$f(x,y) = ax + by$$

მიზნის ფუნქცია აღწევს უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას, მაშინ

$$f(x,y) + k = ax + by + k = g(x,y)$$

ფუნქციაც Ω სიმრავლის იმავე (x_0, y_0) წერტილში მიაღწევს თავის უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას.

11.3. სავარჯიშოები

1. ამოხსენით უტოლობა და დაშტრიხეთ სიბრტყეზე შესაბამისი არე

1) $4x + 3y \geq 17$;
2) $-x + 30y \leq 120$;
3) $4x - 0.1y \leq -10$;
4) $-10x - 5y \geq 20$.

2. ამოხსენით უტოლობათა სისტემა და დაშტრიხეთ სიბრტყეზე შესაბამისი არე

1) $\begin{cases} 5x + 3y \leq 30 \\ 7x + 2y \leq 28 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y \leq 3 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ 3x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 3x + y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + y \leq 16 \\ x + y \geq 8 \\ x \geq 1 \\ y \geq 1. \end{cases}$

3. იპოვეთ $f(x,y)=-x+y$ მიზნის ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, თუ x და y აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $\begin{cases} 3x+4y\le 12 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y\le 8 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0. \end{cases}$

4. იპოვეთ $f(x,y)=5x+3y$ მიზნის ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები დასაშვებ სიმრავლეზე, რომელიც მოცემულია შემდეგი სისტემით:

1) $\begin{cases} 2x+4y\le 8 \\ x+y\ge 1 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y\le 10 \\ -x+y\le 2 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0. \end{cases}$

5. იპოვეთ $f(x,y)=3x+2y$ მიზნის ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა დასაშვებ სიმრავლეზე, რომელიც მოცემულია შემდეგი სისტემით:

$$\begin{cases} x+4y\ge 8 \\ x+y\ge 5 \\ 2x+y\ge 6 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0\,. \end{cases}$$

რა შეიძლება ითქვას მოცემული მიზნის ფუნქციის უდიდეს მნიშვნელობაზე?

6. იპოვეთ $f(x,y)=-12x+5y$ მიზნის ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა დასაშვებ სიმრავლეზე, რომელიც მოცემულია შემდეგი სისტემით:

$$\begin{cases} -x+y\le 2 \\ 2x+y\ge 2 \\ x\ge 0 \\ y\ge 1\,. \end{cases}$$

რა შეიძლება ითქვას მოცემული მიზნის ფუნქციის უმცირეს მნიშვნელობაზე?

7. ფირმამ გადაწყვიტა გამოუშვას ორი ახალი A_1 და A_2 ტიპის კომპიუტერი. A_1 ტიპის ერთი კომპიუტერის დამზადება ფირმას უჯდება 1200 დოლარი, ხოლო A_2 ტიპისა – 1600 დოლარი. რისკის ფაქტორის გათვალისწინებით ფირმამ შეზღუდა ყოველკვირეული წარმოების დანახარჯი 40 000 დოლარამდე. გარდა ამისა, კვალიფიციური სპეციალისტების დეფიციტის გამო, ერთ კვირაში ფირმას არ შეუძლია დაამზადოს 30-ზე მეტი კომპიუტერი.

A_1 ტიპის თითოეული კომპიუტერიდან ფირმას აქვს 600 დოლარი მოგება, ხოლო A_2 ტიპის კომპიუტერიდან – 700 დოლარი. როგორ უნდა ააწყოს ფირმამ წარმოება, რომ მისი მოგება მაქსიმალური იყოს?

8. მცირე საწარმო ამზადებს ორი A და B ტიპის წვენს და ასხავს მას ერთ ლიტრიან ქილებში. 1 ლიტრი A ტიპის წვენის ფასია 1 დოლარი, ხოლო B ტიპისა – 1.25 დოლარი. თითოეული ტიპის წვენი მზადდება ვაშლის, ფორთოხლისა და ატმის ნატურალური წვენების შერევით. A ტიპის წვენში არის 1 ნაწილი ვაშლის წვენი, 6 ნაწილი ფორთოხლის წვენი და 1 ნაწილი ატმის წვენი. B ტიპის წვენში კი არის 2 ნაწილი ვაშლის წვენი, 3 ნაწილი ფორთოხლის წვენი და 1 ნაწილი ატმის წვენი. საწარმოს შეუძლია, ყოველ კვირა იყიდოს მაქსიმუმ 300 ლიტრი ვაშლის წვენი, 1125 ლიტრი ფორთოხლის წვენი და 195 ლიტრი ატმის წვენი. მათი ფასები 1 ლიტრზე გაანგარიშებით არის შესაბამისად 0.72 დოლარი, 0.64 დოლარი და 0.48 დოლარი. რა რაოდენობის A და B ტიპის წვენი უნდა ჩამოასხას საწარმომ, რომ მისი მოგება მაქსიმალური იყოს? (ვიგულისხმოთ, რომ დიდი მოთხოვნილების გამო ჩამოსხმული წვენები მთლიანად იყიდება).

9. ღვინის ქარხანა ბოთლებში ასხამს და საფირმო მაღაზიებს აწვდის თეთრ და წითელ ღვინოებს. 1 ბოთლი წითელი ღვინის სარეალიზაციო ფასია 8 დოლარი, 1 ბოთლი თეთრი ღვინის ფასი კი – 6 დოლარი. 1 ბოთლი წითელი ღვინის წარმოება ქარხანას უჯდება 4 დოლარი, ხოლო 1 ბოთლი თეთრი ღვინისა – 1.5 დოლარი. კონტრაქტის პირობების თანა-

ხმად მიწოდებული თეთრი ღვინის რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს წითელი ღვინის რაოდენობის მეოთხედს. ღვინის ტრანსპორტირება ქარხანას ყოველთვიურად უჯდება გადასატანი ტვირთის სარეალიზაციო ღირებულების 10%. მაღაზიებისათვის გადასახდელი ყოველთვიური ხარჯები შეადგენს 3000 დოლარს. ყოველთვიურად მაღაზიებს შეუძლიათ მიიღონ და გაყიდონ არა უმეტეს 2000 ბოთლი ღვინო. როგორ უნდა დაგეგმოს ქარხანამ ღვინის მიწოდება, რომ მისი ყოველთვიური მოგება მაქსიმალური იყოს?

10. შეზღუდული პასუხისმგებლობის საწარმო უშვებს ორი A და B ტიპის ტურისტულ ბუკლეტებს — მცირე ფორმატიანს (A) და ფართო ფორმატიანს (B). ერთი ცალი A ტიპის ბუკლეტის დაბეჭდვა საწარმოს უჯდება 0.8 დოლარი და ჰყიდის მას 1.2 დოლარად, ხოლო B ტიპისა — უჯდება 1.4 დოლარი და ჰყიდის 2 დოლარად. საწარმოს შესაძლებლობების შეზღუდულობის გამო მას შეუძლია კვირაში დაამზადოს A ტიპის არაუმეტეს 100 ბუკლეტი და B ტიპისა არაუმეტეს 70 ბუკლეტი. ყოველკვირეული მოთხოვნილება ორივე ტიპის ბუკლეტზე არ აღემატება 120 ცალს. რამდენი A ტიპისა და B ტიპის ბუკლეტი უნდა დაამზადოს საწარმომ, რომ მისი მოგება მაქსიმალური იყოს?

11. ფაბრიკა ამზადებს ორი A და B სახის სკამებს. A ტიპის ერთი სკამის დეტალების დამზადებას სჭირდება 4 საათი, ხოლო აწყობას — კვლავ ოთხი საათი. B ტიპის ერთი სკამის დეტალების დამზადებას სჭირდება 8 საათი, აწყობას კი — 12 საათი. ფაბრიკის საწარმოო სიმძლავრე ისეთია, რომ ერთ დღეში სკამების დეტალების დამზადებისათვის იგეგმება არაუმეტეს 160 სამუშაო საათი, ხოლო აწყობისათვის — არაუმეტეს 180 სამუშაო საათი. A ტიპის ერთი სკამის რეალიზაცია იძლევა 8 დოლარ მოგებას, ხოლო B ტიპის ერთი სკამისა — 18 დოლარს. როგორ უნდა წარმართოს ფაბრიკამ წარმოება, რომ მისი დღიური მოგება მაქსიმალური იყოს?

12. მხატვარი სუვენირების სახით გასაყიდად ამზადებს სურათებსა და ფაიფურის ნივთებს. ერთი სურათის შექმნაზე მხატვარს ეხარჯება 2 დო-

ლარი, ხოლო ფაიფურის ნივთზე — 2.25 დოლარი. მას შეუძლია კვირაში დაამზადოს არაუმეტეს 15 სუვენირი. ამასთან, მხატვარს სურს, რომ კვირაში დაამზადოს ორი სურათი და ორი ფაიფურის ნივთი მაინც. მასალის სიმცირის გამო მას არ შეუძლია დაამზადოს ხუთზე მეტი ფაიფურის ნივთი. სურათი იყიდება 6 დოლარად, ხოლო ფაიფურის ნივთი — 7.5 დოლარად (იგულისხმება, რომ სუვენირებზე მოთხოვნა საკმარისად დიდია). რამდენი სურათი და ფაიფურის ნივთი უნდა დაამზადოს მხატვარმა კვირაში, რომ მისი მოგება მაქსიმალური იყოს?

დანართი

ეკონომიკური ფუნქციები, რომლებიც გვხვდება სახელმძღვანელოში

1. მოთხოვნის ფუნქცია (Demand function)

$$P = g_D(Q) \quad \text{ან} \quad Q = f_D(P)$$

Q — მოთხოვნილი პროდუქციის რაოდენობა

P — პროდუქციის ერთეულის ფასი

2. მიწოდების ფუნქცია (Supply function)

$$P = g_S(Q) \quad \text{ან} \quad Q = f_S(P)$$

Q — მიწოდებული პროდუქციის რაოდენობა

P — პროდუქციის ერთეულის ფასი

3. $C(Y)$ — მოხმარების ფუნქცია (Consumption function)

$S(Y)$ — დანაზოგის ფუნქცია (Saving function)

Y — ეროვნული შემოსავალი

$$C(Y) + S(Y) = Y$$

4. (ა) IS თანაფარდობა

[IS schedule (Investment - Saving schedule)]

$$(1-a)\,Y = c\,r + b + d$$

$C = a\,Y + b$ — მოხმარების ფუნქცია $(0 < a < 1,\ b > 0)$

$I = c\,r + d$ — ინვესტიცია $(c < 0,\ d > 0)$

Y — ეროვნული შემოსავალი

r — ინვესტირების სარგებლის განაკვეთი

(ბ) LM — თანაფარდობა

[LM schedule (Liquidity – Money schedule)]

$$k_1 Y + k_2 r + k_3 = M_S^*$$

$L_1 = k_1 Y$ – გარიგებისათვის და გაუთვალისწინებელი მიზნებისათვის ფულზე მოთხოვნათა ჯამი $(k_1 > 0)$

$L_2 = k_2 r + k_3$ – ფულზე მოთხოვნა სპეკულაციური მიზნებისათვის $(k_2 < 0,\ k_3 > 0)$

Y – ეროვნული შემოსავალი

r – ინვესტირების სარგებლის განაკვეთი

M_S – ფულის ფიქსირებული რაოდენობა

5. მთლიანი ამონაგების ფუნქცია (Total revenue function)

$$(TR) = P \cdot Q$$

P – პროდუქციის ერთეულის ფასი,

Q – გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა

6. მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია (Total cost function)

$$(TC) = (FC) + (VC) \cdot Q$$

(FC) – ფიქსირებული დანახარჯი (Fixed costs) [რომელიც არაა დამოკიდებული წარმოებული პროდუქციის რაოდენობაზე]

(VC) – ცვლადი დანახარჯი (Variable costs) [რომელიც საჭიროა პროდუქციის ერთი ერთეულის საწარმოებლად]

Q – წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა

7. საშუალო დანახარჯის ფუნქცია (Average cost function)

$$(AC) = \frac{(TC)}{Q} - \frac{(FC)}{Q} + (VC)$$

8. მოგების ფუნქცია (Profit function)

$$\Pi = (TR) - (TC)$$

9. წმინდა საწყისი სიდიდე (Net present value)

$$(NPV) = P_2 \left(1 + \frac{r_m}{100}\right)^{-n} - P_1$$

სარგებლის შიგა განაკვეთი (Internal rate of return)

$$(IRR) = \left[\sqrt[n]{\frac{P_2}{P_1}} - 1 \right] 100 \ \%$$

P_1 — პროექტით გათვალისწინებული საწყისი საინვესტიციო თანხა

P_2 — პროექტით გათვალისწინებული საბოლოო თანხა, რომელიც უბრუნდება ინვესტორს $(P_1 < P_2)$

r_m — სარგებლის დომინანტური წლიური რთული განაკვეთი საფინანსო ბაზარზე

n — საინვესტიციო პერიოდის ხანგრძლივობა

10. მარგინალური (ზღვრული) ამონაგები (Marginal revenue)

$$(MR) = \frac{d(TR)}{dQ} = f'(Q)$$

$(TR) = f(Q)$ — მთლიანი ამონაგების ფუნქცია

$(MR)^{*} = f(Q+1) - f(Q)$ — მარგინალური ამონაგების მიახლოებითი გამოთვლა არგუმენტის (მოთხოვნის) ერთი ერთეულით გაზრდის მეთოდით

11. მარგინალური (ზღვრული) დანახარჯი (Marginal cost)

$$(MC) = \frac{d(TC)}{dQ} = K'(Q)$$

$(TC) = K(Q)$ — მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია

$(MC)^* = K(Q+1) - K(Q)$ — მარგინალური დანახარჯის მიახლოებითი გამოთვლა არგუმენტის (წარმოებული პროდუქციის) ერთი ერთეულით გაზრდის მეთოდით (დანახარჯი, რომელიც საჭიროა $(Q+1)$-ე ერთეულის საწარმოებლად)

12. მარგინალური (ზღვრული) მოგება (Marginal profit)

$$\Pi'(Q) = (MR) - (MC)$$

13. (ა) მარგინალური (ზღვრული) მიდრეკილება დაზოგვისადმი (Marginal propensity to save)

$$(MPS) = S'(Y)$$

(ბ) მარგინალური (ზღვრული) მიდრეკილება მოხმარებისადმი (Marginal propensity to consume)

$$(MPC) = C'(Y)$$

(გ) $(MPS) + (MPC) = S'(Y) + C'(Y) = 1$

14. (ა) დანახარჯის ზღვრული ელასტიკურობა წარმოებული პროდუქციის მიმართ

$$E(K;Q) = \frac{Q}{K(Q)} \cdot \frac{dK(Q)}{dQ}$$

$(TC) = K(Q)$ — მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია

(ბ) დანახარჯის საშუალო ელასტიკურობა პროდუქციის ΔQ ნაზრდის მიმართ

$$E(K;Q;\Delta Q) = \frac{(\text{დანახარჯის პროცენტული ცვლილება})}{(\text{პროდუქციის პროცენტული ცვლილება})} = \left| \frac{Q}{K(Q)} \cdot \frac{\Delta K(Q)}{\Delta Q} \right|$$

15. (ა) მოთხოვნის ზღვრული ელასტიკურობა ფასის მიმართ

$$E(Q;P) = -\frac{P}{Q}\, g'_D(P) = -\frac{P}{Q}\,\frac{dQ}{dP}$$

$$Q = g_D(P) \text{ — მოთხოვნის ფუნქცია}$$

(ბ) მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობა ფასის ΔP ნაზრდის მიმართ

$$E(Q;P;\Delta P) = -\frac{(\text{მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება})}{(\text{ფასის პროცენტული ცვლილება})} =$$

$$= -\frac{P}{Q}\,\frac{\Delta Q}{\Delta P} = -\frac{P}{g_D(Q)}\,\frac{\Delta g_D(P)}{\Delta P}$$

16. (ა) მიწოდების ზღვრული ელასტიკურობა ფასის მიმართ

$$E(Q;P) = \frac{P}{Q}\, g'_S(P) = \frac{P}{Q}\,\frac{dQ}{dP}$$

$$Q = g_S(P) \text{ — მიწოდების ფუნქცია}$$

(ბ) მიწოდების საშუალო ელასტიკურობა ფასის ΔP ნაზრდის მიმართ

$$E(Q;P;\Delta P) = \frac{(\text{მიწოდების პროცენტული ცვლილება})}{(\text{ფასის პროცენტული ცვლილება})} =$$

$$= \frac{P}{Q}\,\frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{P}{g_S(P)}\,\frac{\Delta g_S(P)}{\Delta P}$$

17. ვიქსელ-ქობ-დაგლასის (Wicksell-Cobb-Douglas) საწარმოო ფუნქცია (K — კაპიტალი, L — შრომა)

$$Q = C\,K^{\alpha} L^{\beta}, \quad C > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$$

(ა) $\alpha + \beta > 1$ — მასშტაბის ზრდადი ეფექტი

(ბ) $\alpha + \beta < 1$ — მასშტაბის კლებადი ეფექტი

(გ) $\alpha + \beta = 1$ — მასშტაბის მუდმივი ეფექტი

18. საწარმოო ფუნქცია

$$Q = f(K, L)$$

K – კაპიტალი, L – შრომა

(ა) კაპიტალის მარგინალური (ზღვრული) პროდუქტი
(Marginal product of capital)

$$(MP_K) = \frac{\partial Q}{\partial K} = f'_K(K, L)$$

(ბ) შრომის მარგინალური (ზღვრული) პროდუქტი
(Marginal product of labour)

$$(MP_L) = \frac{\partial Q}{\partial L} = f'_L(K, L)$$

(გ) იზოკვანტები

$$f(K, L) = Q_0 = const$$

(დ) შრომისა და კაპიტალის ტექნიკური შენაცვლების მარგინალური (ზღვრული) ნორმა
(Marginal rate of technical substitution)

$$(MRTS) = -\frac{dK}{dL} = \frac{f'_L(K, L)}{f'_K(K, L)} = \frac{(MP_L)}{(MP_K)}$$

(აქ K და L დაკავშირებულია ერთმანეთთან იზოკვანტის $f(K, L) = Q_0$ განტოლებით)

19. მომხმარებლის დანაზოგი (Consumer's surplus)

$$(CS) = \int_0^{Q_0} \{f_D(Q) - P_0\}\, dQ$$

$P = f_D(Q)$ – მოთხოვნის ფუნქციაა, $P_0 = f_D(Q_0)$

20. მწარმოებლის ამონაგების ნამატი (Producer's surplus)

$$(PS) = \int_0^{Q_0} \{P_0 - f_S(Q)\}\, dQ$$

$P = f_S(Q)$ – მიწოდების ფუნქცია, $P_0 = f_S(Q_0)$

21. (ა) საწყისი K თანხის შესაბამისი საბოლოო K_{mn} თანხის გამოსათვლელი ფორმულა სარგებლის რთული განაკვეთის შემთხვევაში

$$K_{mn} = K\left(1+\frac{r}{100\, m}\right)^{mn}$$

m — დარიცხვების რაოდენობა 1 წელიწადში

n — წლების რაოდენობა

r — სარგებლის ნომინალური წლიური რთული განაკვეთი

(ბ) საბოლოო K_{mn} თანხის შესაბამისი დისკონტირებული თანხა (საწყისი თანხა)

$$K = K_{mn}\left(1+\frac{r}{100\, m}\right)^{-mn}$$

22. (ა) საბოლოო K_t თანხის გამოსათვლელი ფორმულა t ვადის, საწყისი K თანხისა და სარგებლის ნომინალური წლიური რთული r განაკვეთის საშუალებით უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში

$$K_t = K\, \mathrm{e}^{\frac{rt}{100}}$$

და მისი შესაბამისი დისკონტირების ფორმულა

$$K = K_t\, \mathrm{e}^{-\frac{rt}{100}}$$

t — წლების რაოდენობა

(ბ) $t=a$ მომენტიდან $t=b$ მომენტამდე შემოსავლის $f(t)$ ნაკადის საწყისი ღირებულების გამოსათვლელი ფორმულა სარგებლის წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{-\frac{rt}{100}}\, dt\, .$$

სავარჯიშოების პასუხები

თავი 1

1. $A\cup B=\{1;\,2;\,3;\,4;\,5;\,6;\,7;\,9;\,11\}$; $A\cap B=\{1;\,3;\,5\}$; $A\setminus B=\{7;\,9;\,11\}$.
2. (ა) 57; (ბ) 17; (გ) 53.
3. (ა) 125; (ბ) 25; (გ) 260; (დ) 430; (ე) 70.
4. 4 ტ.
5. 18 კომპიუტერი.
6. $80\,\%$.
7. $32\,\%$.
8. A – \$19740; B – \$36660.
9. \$ 1724.13.
10. \$ 147.
11. \$ 270000.
12. (ა) \$ 150; (ბ) \$ 1150.
13. $10\,\%$.
15. $y=-x+7$.
16. (ა) $y=-\dfrac{4}{5}x-\dfrac{8}{5}$; (ბ) $y=\dfrac{5}{8}x-\dfrac{1}{8}$.
17. $\dfrac{x}{-5.5}+\dfrac{y}{2.75}=1$.
18. \$ 525.
19. 15 დღე.
20. 1000 კმ.
21. 4 კმ-ზე მეტი მანძილის შემთხვევაში.
22. \$ 6.
23. (ა) $A-66$; $B-11$; (ბ) \$ 353.
24. \$ 5800-ზე მეტი.
25. (ა) 32; (ბ) 20; (გ) მცირდება 2 ერთეულით.

26. (ა) $Q_0 = 21$, $P_0 = 36$; (ბ) $Q_0 = 18$; $P_0 = 48$.

$1-ს იხდის ფირმა, ხოლო $ 12-ს — მომხმარებელი.

27. (ა) $Q_{01} = 13$, $Q_{02} = 14$; $P_{01} = 4$, $P_{02} = 7$;

(ბ) $Q_{01} = 30$, $Q_{02} = 55$, $P_{01} = 40$, $P_{02} = 10$.

28. (ა) $Q = 173$; (ბ) $A = 18$; (გ) იწვევს.

29. (ა) $Q_0 = 10$, $P_0 = 30$; (ბ) $Q_0 = 9.28$, $P_0 = 33.6$.

30. $C = 193$, $Y = 210$; ეროვნული შემოსავლის წონასწორობის დონე გაიზრდება 5 ერთეულით $(Y = 215)$.

31. (ა) 400; (ბ) 50; (გ) 305; (დ) 45.

32. $Y = 325$, $C = 225$, $S = 100$. ინვესტიციის გაორმაგებისას გვაქვს $Y = 575$, $C = 375$, $S = 200$.

33. Y და r განისაზღვრება შემდეგი სისტემიდან

$$\begin{cases} 0.3Y + 50r = 1285 \\ 0.2Y - 40r = 270. \end{cases}$$

ავტონომიური d ინვესტიციის გაზრდა იწვევს Y ეროვნული შემოსავლისა და r განაკვეთის გაზრდას.

34. $Y = 875$.

35. $Y = 2500$, $r = 10\,\%$.

36. $C_7^3 = 35$.

37. $P_8 = 40320$.

38. $A_{10}^3 = 720$.

თავი 2

1. $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; $A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. (ა) $\begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 11 & 7 \\ 26 & 15 \end{bmatrix}$; (ბ) $\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} -30 & 4 \\ 12 & 30 \end{bmatrix}$.

4. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

5. (ა) $rang\, A = 2$; (ბ) $rang\, A = 2$.

6. 1.

7. $x_1 - 9$; $x_2 = 2$.

8. $\left(-\infty,\ -\dfrac{15}{16}\right)$.

თავი 3

1. $\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{13}{30},\ \dfrac{1}{30}\right)$.

2. $(0,\ -40,\ -30)$.

3. $\left(\dfrac{1-8z}{5},\ \dfrac{2-z}{5},\ z\right)$.

4. $\left(\dfrac{1}{2}x_2 + x_4,\ x_2,\ 5x_4 + 3,\ x_4\right)$, $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

5. (ა) $\left(35,\ 18\dfrac{7}{11},\ 10\dfrac{8}{11}\right)$; (ბ) $\left(28,\ 14\dfrac{7}{11},\ 16\dfrac{5}{11}\right)$.

6. $Q_1 = 1000$; $Q_2 = 1000$; $Q_3 = 1000$.

7. 78502.67.

თავი 4

1. $ 2300.

2. $ 3450.

3. $ 6553.98.

4. S 3221.02.

5. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{7}{4}}-1\right)100\,\%$.

6. $\dfrac{\ln 13.2}{\ln 21-\ln 20}$ წელიწადი $(\approx 53$ წელიწადი).

7. $300\cdot(1.06)^{-5}\approx 2242$ (\$).

8. ბანკის მოგება 3 წლის შემდეგ იქნება S 188.36.

9. $\dfrac{23}{3}\left(1.15^{5}-1\right)10^{5}\approx 775373.76$ (\$).

10. $10000(1.07)^{-3}\approx 8162.9788$ (\$).

11. ბანკის მოგება 4 წლის შემდეგ იქნება $ 2403.38.

12. (ა) $1500\left(1+\dfrac{9}{36500}\right)^{60}$; (ბ) $1500\left[\left(1+\dfrac{9}{36500}\right)^{60}-1\right]$.

13. (ა) $1500\,(1.02)^{6}$; (ბ) $1500\left[(1.02)^{6}-1\right]$.

14. $\dfrac{\ln 10}{\ln 1.12}\approx 20.32$ წლის შემდეგ.

15. $\dfrac{\ln 10-\ln 9}{\ln 1.03}\approx 3.56$ წლის შემდეგ.

16. ფირმამ ყოველთვიურად უნდა გადაიხადოს

$$2000\,(1.01)^{4}\,\frac{0.01}{(1.01)^{4}-1}\approx 520.302\ (\$).$$

17. $\dfrac{55500}{11}\left(1.11^{10}-1\right)\approx 9280.7$ (\$).

18. პირველი ოთხი წლის განმავლობაში მოქმედებს 5 %-იანი განაკვეთი. შემდგომი 21 წლის მანძილზე მოქმედებს 7 %-იანი განაკვეთი, ხოლო ბოლო 5 წლის მანძილზე მოქმედებს 8 %-იანი განაკვეთი. 30 წლის შემდეგ დაგროვილი თანხაა $ 30722.8.

19. $ 5090.31; (ა) $ 5508.40; (ბ) $ 5477.32.

20. $ 676.84.

21. $ 45289.04.

22. (ა) $ 452; (ბ) 16.27 %.

23. $ 29754.956.

24. $ 19621.723.

25. $ 70236.12

26. A პროექტში მონაწილეობა უფრო მომგებიანია.

27. $ 974.22.

28. (ა) $ 5974.43; (ბ) $ 8210.21.

29. (ა) $(IRR) = 6.96\ \%$; (ბ) მომგებიანია.

30. ყველაზე მომგებიანია B პროექტში მონაწილეობა.

თავი 5

1. 1) 1; 2) -1; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $e^{1.5}$; 5) 3; 6) 0; 7) $e^{2.4}$; 8) 5.

3. $1000\,e^{0.6}$.

4. $10\ln 3$ წელიწადი.

5. (ა) $3000\,(1.09)^5$; (ბ) $3000\,(1.045)^{10}$; (გ) $3000\,(1.0075)^{60}$;

(დ) $3000\left(1+\frac{9}{36500}\right)^{1825}$; (ე) $3000\,e^{0.45}$.

6. (ა) $500\,(1.14)^2$; (ბ) $500\,(1.035)^8$; (გ) $500\left(1+\frac{7}{600}\right)^{24}$;

(დ) $500\left(1+\dfrac{7}{18250}\right)^{730}$; (ე) $500\,e^{0.28}$.

7. $S^{(n)} = 15 \cdot 10^4 \left[1-(1.1)^{-n}\right]$; $15 \cdot 10^4$.

8. $10 \ln 4$ %.

9. $7000\,e^{-0.16}$.

10. 1) კრებადია; 2) კრებადია.

11. 1) 1; 2) $\dfrac{2}{3}$; 3) $\dfrac{1}{56}$; 4) $\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{7-\sqrt[4]{5}}}$.

თავი 6

1. 1) $(-3, +\infty)$; 2) $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$; 3) $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$;

   4) $(-\infty, +\infty)$; 5) $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$;

   6) $(-\infty, 4) \cup (4, 5) \cup (5, +\infty)$.

2. 1) ლუწი; 2) კენტი; 3) არც ლუწი, არც კენტი.

4. 1) $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$; 2) $y = \dfrac{x-1}{x}$.

5. 49.

6. $\dfrac{500}{1001}$.

7. 10.

8. 1) 1.125; 2) 6.25.

9. 1) -4; 2) -1.375.

10. თუ გაიყიდება 48.75 რაოდენობის პროდუქცია, მაშინ მაქსიმალური ამონაგები იქნება \$ 9506.25.

11. 1) 7; 2) 0.5; 3) 6; 4) $\dfrac{2}{3}$; 5) 0.5; 6) 6; 7) 1.5; 8) -1.

12. მაქსიმალური ამონაგები მიიღება, როდესაც გაიყიდება 500 ერთეული პროდუქცია. შესაბამისი ფასია \$ 500.

13. $(TC)=2Q+100$, $(AC)=2+\dfrac{100}{Q}$.

14. $\Pi=-Q^2+18Q-25$,

(ა) 31 დოლარი მოგება მიიღება, როდესაც $Q=4$ ან $Q=14$;

(ბ) მაქსიმალური მოგება მიიღება, როდესაც $Q=9$.

15. (ა) $4Q-Q^2$; (ბ) $\dfrac{7Q}{Q+1}$; (გ) $10Q-4Q^2$.

16. $(TC)=500+10Q$, $(AC)=\dfrac{500}{Q}+10$.

17. $(TC)=Q+2$, $(AC)=1+\dfrac{2}{Q}$.

18. $\Pi=-2Q^2+20Q-32$,

(ა) $Q=2$ და $Q=8$; (ბ) $Q=20$; გ) $Q=5$.

19. (ა) $Q=1$ და $Q=5$; (ბ) 8.

20. 1) $4\,\Delta x$; 2) $-2\,\Delta x-(\Delta x)^2$; 3) Δx^2; 4) $-29\,\Delta x-3\,(\Delta x)^2$.

21. 1) $x=0$, $x=\pm 2$; 2) $x=5$.

23. ფუნქციის ნაზრდი $x=2$ წერტილში არის 4.

24. $a=1$.

25. $x=-1$.

26. $x=2.5$.

27. $$f(u)=\begin{cases}200+60\,u, & \text{როცა } 0\le u<20,\\ 400+50\,u, & \text{როცა } 20\le u<50,\\ 600+46\,u, & \text{როცა } 50\le u<100,\\ 800+44\,u, & \text{როცა } u\ge 100.\end{cases}$$

თავი 7

1. 1) $1+6x-x^2$; 10) $\dfrac{2\,(x-2)}{x^2-4x}$;

2) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}+2^x \ln 2$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+2\sin x$;

4) $6x\sin x+\left(3x^2+1\right)\cos x$;

5) $5^x \ln 5 \log_3 x+\dfrac{5^x}{x\ln 3}$;

6) $\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$;

7) $\dfrac{1-\cos x-x\sin x}{\left(1-\cos x\right)^2}$;

8) $-\sin\dfrac{x}{3}$;

9) $\dfrac{9}{9x+10}$;

11) $3e^{-2x}(1-2x)$;

12) $xe^{5x}(2+5x)$;

13) 3;

14) -0.125;

15) 0.5;

16) 2.5;

17) 3;

18) 0.5;

19) 1;

20) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2. 1) $-2\left(1+6x^2\right)$;

2) $12(x+10)^2$;

3) $4\left(3x^2+1\right)$;

4) $6(7x-3)$;

5) $4e^{2x+1}$;

6) $x(6\ln x+5)$;

7) $-\dfrac{9}{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}$;

8) $e^x\left(2+4x+x^2\right)$;

9) $-\dfrac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$;

10) $\dfrac{1}{x}$.

3. 1) $(2x-5)\,dx$;

2) $e^{-x}\left(x^2-4\right)dx$;

3) $\ln x\,dx$;

4) $e^{2x}(1+2x)\,dx$;

7) $\dfrac{dx}{1+e^x}$;

8) $3\left(1+x-x^2\right)^2(1-2x)\,dx$;

9) $\dfrac{2x\,dx}{\left(1-x^2\right)^2}$;

5) $\frac{2}{(2x-1)\ln 3}\,dx$;   10) $\frac{x^2-2x-4}{(1-x)^2}\,dx$.

6) $x\left(2\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)dx$;

4. 0.199998.

5. (ა) $\frac{100-3Q}{\sqrt{100-2Q}}$;   (ბ) $\frac{500\,(4+Q)}{\sqrt{(2+Q)^3}}$.

6. a.

7. (ა) 1024;   (ბ) 1524.

8. $(TR)=100Q-Q^2$; $(MR)=-2Q+100$; $(MR)=0$, როცა $Q=50$.

9. $(MR)=1000-8Q$;   (ა) $(TC)=2Q+101$; $(MC)=2$;

   (ბ) $(MC)=2$; (TC) შეიცვლება 4 ერთეულით.

10. (ა) $2Q+5$;

    (ბ) 1) ≈ -110. ზუსტი ცვლილებაა -106;

    2) ≈ 165. ზუსტი ცვლილებაა 174.

11. (ა) $\Pi = 1000P\,e^{-0.2P}-2000\,e^{-0.2P}-100$;   (ბ) 1132.98.

12. (ა) $Q=15$;   (ბ) $Q_0=8$; $(MR)=(MC)=14$.

13. $100\ln 50-98 \approx 293.2$.

14. $(MPS)=0.04Y-1$; $(MPC)=-0.04Y+2$.

15. $(MPC)=\frac{1}{6}$; $(MPS)=\frac{5}{6}$.

16. $(MPC)\approx 1.88$; $(MPS)\approx -0.78$.

17. 1) ზრდადია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში;

    2) ზრდადია $(-\infty,-1)$ და $(1,+\infty)$ შუალედებში,

    კლებადია $(-1,1)$ შუალედში;

    3) ზრდადია $(-\infty,1)$ შუალედში, კლებადია $(1,+\infty)$ შუალედში;

    4) კლებადია $(-\infty,-2)$ და $(-2,+\infty)$ შუალედებში;

5) ზრდადია $(0.5, +\infty)$ შუალედში, კლებადია $(0, 0.5)$ შუალედში;

6) ზრდადია $(-\infty, 0)$ და $(2, +\infty)$ შუალედებში,

კლებადია $(0, 2)$ შუალედში.

18. (ა) ≈ 0.2658; (ბ) ≈ 0.2658.

19. $1{,}5$.

20. (ა) $\frac{1}{9}$; (ბ) 1; (გ) 9.

21. (ა) $\frac{51}{70}$; (ბ) $\frac{51}{35}\,\%$.

22. (ა) $\frac{47}{36}$; (ბ) $\frac{360}{47}\,\%$.

23. (ა) 0.25; (ბ) 0.25; (გ) 1.125.

25. $\frac{21}{20}(5-\ln 21)$.

26. (ა) $\frac{1}{3}$; (ბ) $\frac{210}{677}$.

27. (ა) $\frac{296}{203}$; (ბ) $\frac{1480}{203}\,\%$.

28. 1) $x=0$ არის მაქსიმუმის წერტილი, $y(0)=0$,

$x=1$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(1)=-1$;

2) $x=-1$ არის მაქსიმუმის წერტილი, $y(-1)=17$,

$x=3$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(3)=-47$;

3) $x=\frac{1}{16}$ არის მინიმუმის წერტილი, $y\left(\frac{1}{16}\right)=-\frac{1}{8}$;

4) $x=0$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(0)=0$;

5) $x=-2$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(-2)=-1$,

$x=2$ არის მაქსიმუმის წერტილი, $y(2)=1$;

6) $x=\frac{2}{3}$ არის მაქსიმუმის წერტილი, $y\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

29. (ა) $P = 19 - \frac{Q}{3000}$; (ბ) $P = 9.5$, $(TR) = 270750$.

30. (ა) $P = 20 - 0.5\,Q$; (ბ) $P = 13$.

31. (ა) $P = 550 - 0.1\,Q$; (ბ) $P = 275$; (გ) $P = 350$.

32. $P = 450$.

33. $P = 11.5$.

34. (ა) $P = 8 - 0.002\,Q$; (ბ) $P = 4$.

35. $Q = 5$.

36. 1) წირი ამოზნექილია ზემოთ $(-\infty, +\infty)$ შუალედში;

2) წირი ამოზნექილია ზემოთ $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ შუალედში და ამოზნექილია ქვემოთ $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $\left(\frac{5}{3}, -\frac{250}{27}\right)$;

3) წირი ამოზნექილია ზემოთ $(-\infty, -3)$ და $(2, +\infty)$ შუალედებში, ხოლო ამოზნექილია ქვემოთ $(-3, 2)$ შუალედში; გადაღუნვის წერტილებია $(2, 114)$ და $(-3, 294)$;

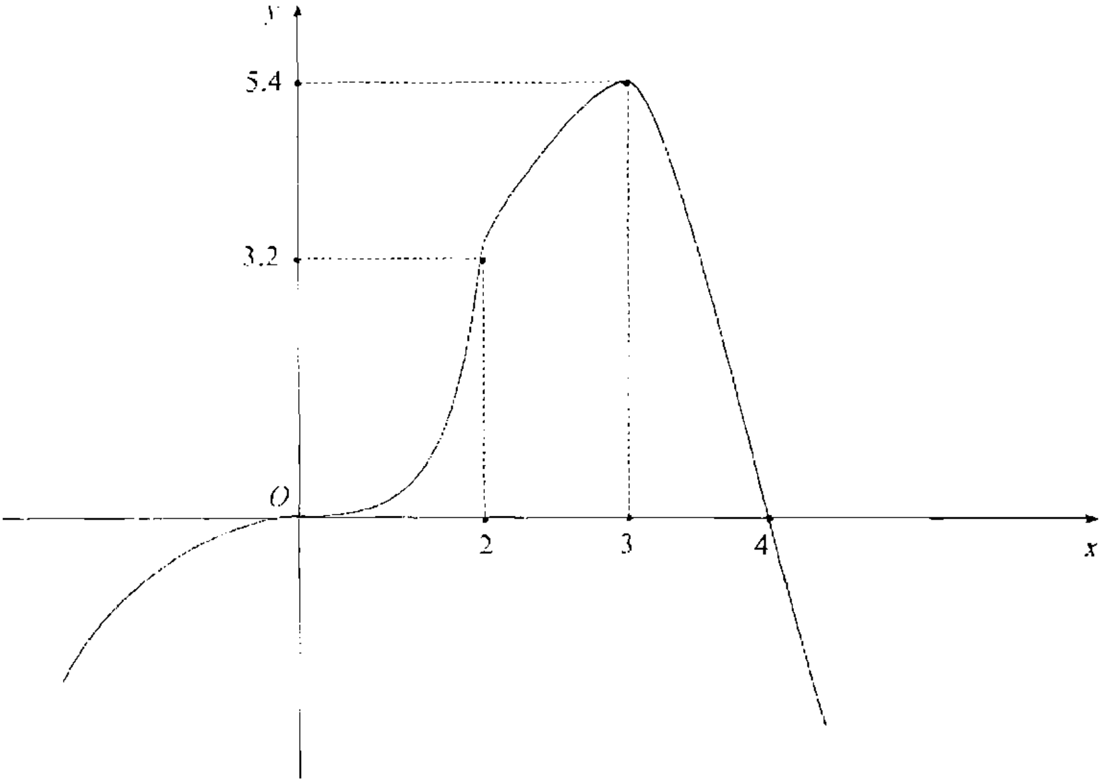
4) წირი ამოზნექილია ზემოთ $(-\infty, -3)$ შუალედში და ამოზნექილია ქვემოთ $(-3, +\infty)$ შუალედში.

37. 1) $x = -2$; $y = 0$;　　3) $x = 1$, $y = x$;

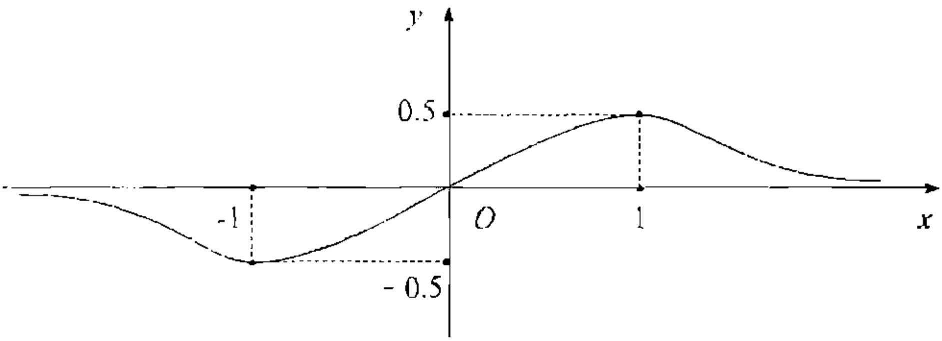
2) $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$;　　4) $x = 3$, $y = x - 3$.

38.

1)



2)



თავი 8

1. 1) $x^2 + y^2 \leq 100$: წრე ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით 10 (საზღვრის ჩათვლით);

2) $x \neq 0,\ y > 9$: $y = 9$ წრფის ზემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე, რომლიდანაც ამოგდებულია y ღერძზე მდებარე წერტილები;

3) $y \neq \pm x$: მთელი სიბრტყე, გარდა $y = x$ და $y = -x$ წრფეებისა;

4) $x^2 + y^2 \neq 1$: მთელი სიბრტყე, გარდა ერთეულრადიუსიანი წრეწირისა, რომლის ცენტრია კოორდინატთა სათავე;

5) $x^2 + y^2 \neq 0$: მთელი სიბრტყე, გარდა კოორდინატთა სათავისა.

6) პირველი და მესამე საკოორდინატო მეოთხედები საზღვრის ჩათვლით $xy \geq 0$.

2. 1) $z'_x(1,-3) = -17$, $z'_y(1,-3) = 2$, $dz(1,-3) = -17\,dx + 2\,dy$;

2) $z'_x(9,-2) = \dfrac{4}{49}$, $z'_y(9,-2) = \dfrac{81}{49}$, $dz(9,-2) = \dfrac{1}{49}\,(4\,dx + 81\,dy)$;

3) $z'_x(0,10) = -20$, $z'_y(0,10) = 100$, $dz(0,10) = 20\,(-dx + 5\,dy)$;

4) $z'_x(1,2) = -\dfrac{1}{4} + 2e^{16}$, $z'_y(1,2) = -\dfrac{1}{8} + 8e^{16}$,

$$dz(1,2) = \left(-\frac{1}{4} + 2e^{16}\right) dx + \left(-\frac{1}{8} + 8e^{16}\right) dy;$$

5) $z'_x(1,1) = \dfrac{27 + 14\sqrt{3}}{63}$, $z'_y(1,1) = \dfrac{24 - \sqrt{3}}{9}$,

$$dz(1,1) = \frac{27 + 14\sqrt{3}}{63}\,dx + \frac{24 - \sqrt{3}}{9}\,dy.$$

3. 1) $z''_{xx} = 12\left(x^2 + y^2\right)$, $z''_{xy} = 24xy + 7$, $z''_{yy} = 12x^2$;

2) $z''_{xx} = 2y^2$, $z''_{xy} = 4xy - 9y^2 - 1$, $z''_{yy} = 2x^2 - 18xy$;

3) $z''_{xx} = \dfrac{2}{1 - 2y}$, $z''_{xy} = \dfrac{4x}{(1 - 2y)^2}$, $z''_{yy} = \dfrac{8x^2}{(1 - 2y)^3}$;

4) $z''_{xx} = \dfrac{8y^2}{(2x + y)^3} + y^2 e^{xy}$, $z''_{xy} = -\dfrac{8xy}{(2x + y)^3} + e^{xy}(1 + xy)$,

$$z''_{yy} = \frac{8x^2}{(2x + y)^3} + x^2 e^{xy};$$

5) $z''_{xx} = \dfrac{2\left(y - x^2\right)}{\left(x^2 + y\right)^2}$, $z''_{xy} = -\dfrac{2x}{\left(x^2 + y\right)^2}$, $z''_{yy} = -\dfrac{1}{\left(x^2 + y\right)^2}$.

4. (ა) $\dfrac{2}{11}$; (ბ) $\dfrac{2}{11}$; (გ) $\dfrac{5}{33}$; (დ) $\dfrac{25}{33}$ %.

5. (ა) $\dfrac{4}{53}$; (ბ) $\dfrac{3}{53}$; (გ) $\dfrac{40}{53}$; (დ) $\dfrac{60}{53}$ %.

6. 1) $\dfrac{2^t \ln 2}{\ln t} - \dfrac{2^t}{t \ln^2 t}$;

2) $\dfrac{2\left(e^{2t} + 2t^3\right)}{e^{2t} + t^4}$;

3) $\dfrac{3 + \ln t}{3\sqrt[3]{t^2}\left(1 + \sqrt[3]{t}\ln t\right)}$;

4) $2t\left(2t^4 + 1\right)e^{t^4}$;

5) $\dfrac{\sqrt{t}\left[(t+3)\,e^t + (3-t)\,e^{-t}\right]}{2\sqrt{e^t + e^{-t}}}$.

7. (ა) $2K$; (ბ) $4L$; (გ) $\dfrac{2L}{K}$.

8. (ა) 8; (ბ) 14.25; (გ) 1.78125;

შესაბამისი იზოკვანტის განტოლებაა: $2LK + \sqrt{L} = 58$;

შრომის ფაქტორის ერთი ერთეულით შემცირება იწვევს კაპიტალის გაზრდას 2.378-ით.

9. $L = 30$; $K = 45$.

10. $L = 35$; $K = 26.25$.

11. $L = 5$; $K = 40$.

12. თუ $L = 9$ და $K = 81$, მაშინ მოგების ფუნქცია იღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, $\Pi = 165$. K და L სიდიდეების ამავე მნიშვნელობებისათვის წარმოების რეჟიმი იქნება ოპტიმალური.

13. წარმოების ოპტიმალური რეჟიმი, რომელიც უზრუნველყოფს ფირმის მაქსიმალურ მოგებას, მოიცემა შემდეგი პარამეტრებით $Q_1 = 10$, $Q_2 = 5$, $P_1 = 35$, $P_2 = 70$. ამ შემთხვევაში მაქსიმალური მოგებაა \$600.

14. წარმოების ოპტიმალური რეჟიმი, რომელიც უზრუნველყოფს ფირმის მაქსიმალურ მოგებას, განისაზღვრება შემდეგი პარამეტრებით $Q_1 = 5$, $Q_2 = 10$, $P_1 = 45$, $P_2 = 65$. ამ შემთხვევაში მაქსიმალური მოგებაა $\$600$.

15. ფირმა მიიღებს მაქსიმალურ მოგებას ($\Pi = \$\,25750$), თუ პირველ ბაზარზე ერთეული საქონლის ფასი იქნება $\$\,260$, მეორე ბაზარზე კი — $\$\,185$.

16. (ა) ფირმა მიიღებს მაქსიმალურ მოგებას ($\Pi = \$\,27500$), თუ საშინაო ბაზარზე ერთეული საქონლის ფასი იქნება $\$\,200$, საგარეო ბაზარზე კი — $\$\,250$.

    (ბ) ფირმა მიიღებს მაქსიმალურ მოგებას ($\Pi = \$\,95$), თუ საშინაო ბაზარზე ერთეული საქონლის ფასი იქნება $\$\,30$, საგარეო ბაზარზე კი — $\$\,20$.

17. ფირმა მიიღებს მაქსიმალურ მოგებას ($\Pi = \$\,1300$), თუ აწარმოებს და გაყიდის G_1 ტიპის პროდუქციის 30 ერთეულს და G_2 ტიპის პროდუქციის 10 ერთეულს.

18. ფირმა მიიღებს მაქსიმალურ მოგებას ($\Pi = \$\,176$), თუ იგი გამოიყენებს კაპიტალის ფაქტორის 144 ერთეულს და შრომის ფაქტორის 16 ერთეულს.

თავი 9

1. 1) $2x^3 + 4x^2 + \ln|x| + C$;

   2) $x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x + C$;

   3) $6\sqrt{x} - 0.1x^2\sqrt{x} + C$;

   4) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$;

5) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)+C$;

6) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$;

7) $-\frac{x}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$;

8) $x(\ln x-1)+C$;

9) $-(x+1)\,e^{-x}+C$;

10) $10\,e^{0.1x}\left(x^2-20x+200\right)+C$.

2. $\$\ 483.2$.

3. $\$\ 15300$.

4. $\$\ 18700$.

5. $\$\ 380000$.

6. $0.6Y+\frac{1}{15}\sqrt{Y^3}-126\frac{2}{3}$.

7. $6e^{0.5Q}+4$.

8. (ა) $(TR)=100Q-3Q^2$, $P=100-3Q$;

(ბ) $(TR)=20Q-Q^2$, $P=20-Q$;

(გ) $(TR)=12\left(\sqrt{Q+1}-1\right)$, $P=\frac{12}{\sqrt{Q+1}+1}$.

9. $C(Y)=0.3Y+1.2\sqrt[3]{Y}+1.2$.

10. 1) 4; 2) $3\sqrt{6}+\frac{27}{8}\sqrt[3]{3}$; 3) 8; 4) 1200; 5) $2\ln 2$;

6) $5\ln 5-4$; 7) $2e^3+1$; 8) $1000(e-2)$.

11. 1) 20; 2) $\frac{8}{27}$; 3) 5; 4) $\frac{42}{\ln 7}$; 5) $\frac{5}{3}$.

12. $(CS)=45$ ($).

13. $1000\ln 25-960$ ($).

14. $(PS) = 180 \quad (\$)$.

15. $\$\ 4166\frac{2}{3}$.

16. $\$\ 8000$.

17. $\$\ 20500$.

18. (ა) $\$\ 50$; (ბ) $\$\ 341\frac{1}{3}$.

19. (ა) $\$\ 100$; (ბ) $\$\ 5$.

20. (ა) Q_0^3; (ბ) $2Q_0^2$.

21. (ა) $\frac{2}{3}Q_0^3 + 2Q_0^2$; (ბ) $\frac{2}{3}Q_0^3 + Q_0^2$.

22. $\$\ \frac{1}{6}\left(1 - e^{-0.6}\right) 10^5$.

23. (ა) $\$\ \frac{12}{11}\left(e^{-1.1} - e^{-2.75}\right)\ 10^5$;

(ბ) $\$\ \frac{12}{11}\left(e^{1.65} - 1\right) e^{-2.2}\ 10^5$-ზე მეტი თანხა.

24. $6.25\left(1 - e^{-0.32}\right)$ (მლნ. დოლარი).

25. (ბ) $\$\ 50000$.

26. (ა) $\$\ 9000$; (ბ) 27.

27. (ა) $\frac{A}{1+\alpha} T^{\alpha+1}$; (ბ) $\frac{A}{\alpha}\left(e^{\alpha T} - 1\right)$.

28. (ა) $\$\ \frac{10^6}{12}\left(e^{-0.96} - e^{-1.8}\right)$;

(ბ) $\$\ \frac{10^6}{12}\left(e^{-0.36} - e^{-1.2}\right)$-ზე მეტი თანხა;

(გ) $\$\ \frac{10^6}{12} e^{-0.96}$.

29. 1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 1; 6) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$;

7) 2; 8) 6.

30. $\Phi(0)=1$, $\Phi(1)=1$, $\Phi(2)=2$.

თავი 10

1. 1) $y=\pm\sqrt{C\,\mathrm{e}^{2x}-1}$; 2) $y=\pm x\sqrt{C+\ln x^2}$;

3) $(C+x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}$; 4) $y=(x+1)\,(C+x-\ln|x+1|)$.

2. 1) $y=3\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-6x}$; 2) $y=6.5\,\mathrm{e}^{1-x}-3.5\,\mathrm{e}^{3(1-x)}$;

3) $y=\mathrm{e}^{-2x}\left(9\cos 3x+\frac{17}{3}\sin 3x\right)$; 4) $y=(1+7x)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

3. 1) $y=C_1\,\mathrm{e}^{4x}+C_2\,\mathrm{e}^{-6x}-\frac{x}{2}-\frac{1}{3}$;

2) $y=C_1\,\mathrm{e}^{x}+C_2\,\mathrm{e}^{3x}+x^2+3x+4$;

3) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{13}\,\mathrm{e}^{3x}$;

4) $y=C_1\,\mathrm{e}^{-x}+C_2\,\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{32}(4x-3)\,\mathrm{e}^{3x}$;

5) $y=C_1\mathrm{e}^{-4x}+C_2\mathrm{e}^{4x}+\frac{1}{8}\,x\,\mathrm{e}^{4x}$;

6) $y=C_1\,\mathrm{e}^{2x}+C_2\,\mathrm{e}^{3x}-\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\mathrm{e}^{2x}$;

4. (ა) $\frac{dx}{dt}=5\cdot 10^{7}$; (ბ) 180 დღე; (გ) 200 დღე.

5. $P(t)=5\cdot 10^{9}\,\mathrm{e}^{0.02\,(t-1986)}$.

(ა) $5\cdot 10^{9}\,\mathrm{e}^{0.28}$; (ბ) $5\cdot 10^{9}\,\mathrm{e}^{2.28}$; (გ) $5\cdot 10^{9}\,\mathrm{e}^{10.28}$.

[(ა) $0.334\cdot 10^{5}\,\mathrm{e}^{-0.28}$ მ^2 $\approx 0.252\cdot 10^{5}$ მ^2;

(ბ) $0.334 \cdot 10^{5}\, e^{-2.28}$ მ$^2 \approx 0.342 \cdot 10^{4}$ მ^2;

(გ) $0.334 \cdot 10^{5}\, e^{-10.28}$ მ$^2 \approx 3.43$ მ^2].

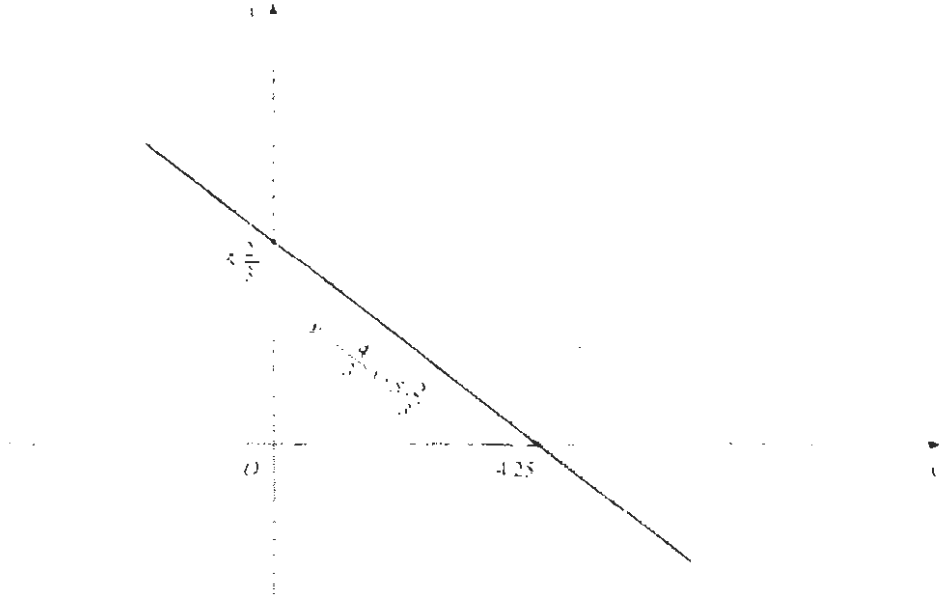
6. $$P(t)=\frac{10^{11}\, e^{2(t-1986)10^{9}}}{19+e^{2(t-1986)10^{9}}},$$

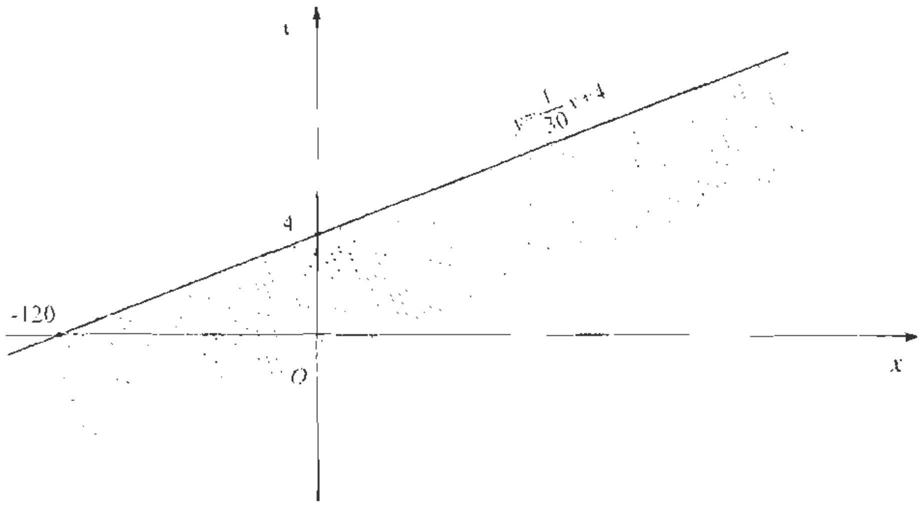
7. (ა) $P(t)=e^{\ln M - A e^{-ct}}$, A ნებისმიერი მუდმივია.

(ბ) $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=M$.

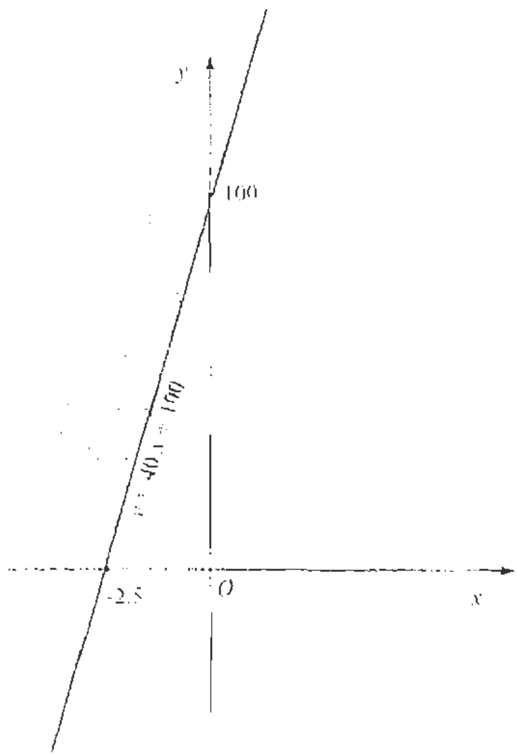
თავი 11

1. 1)



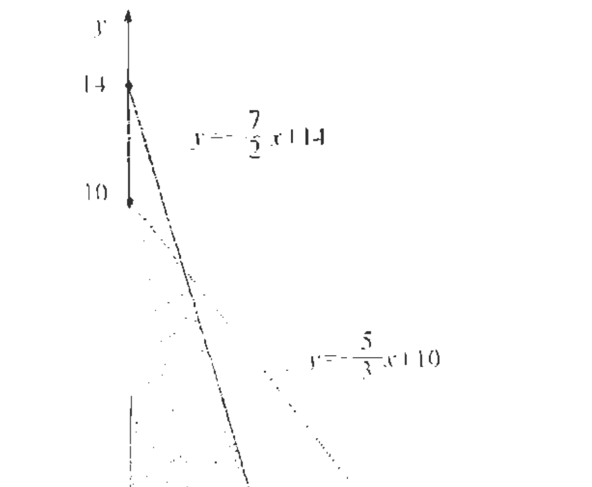


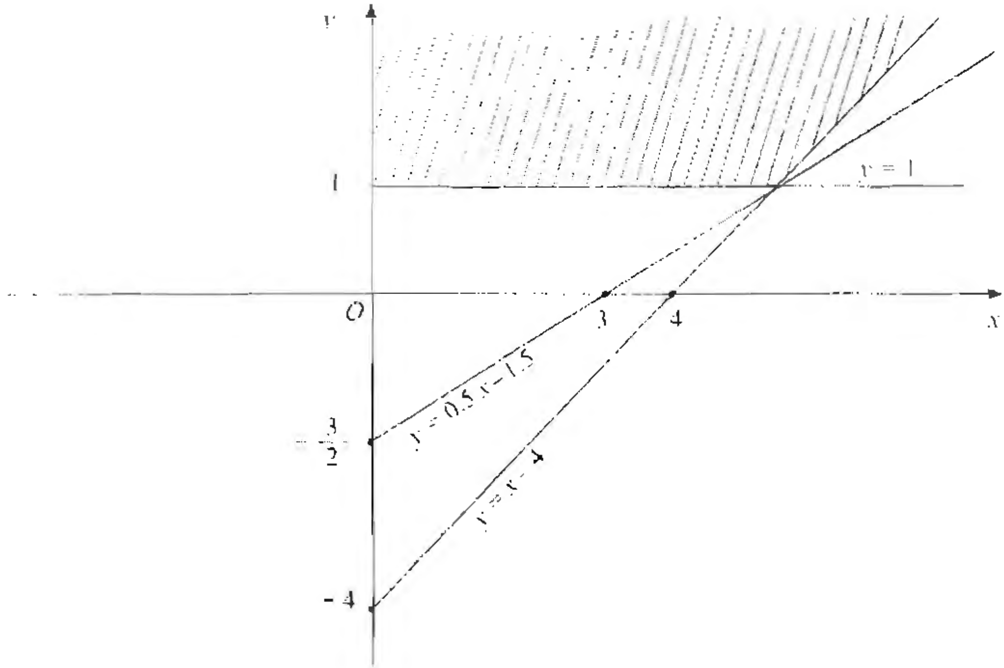
3)



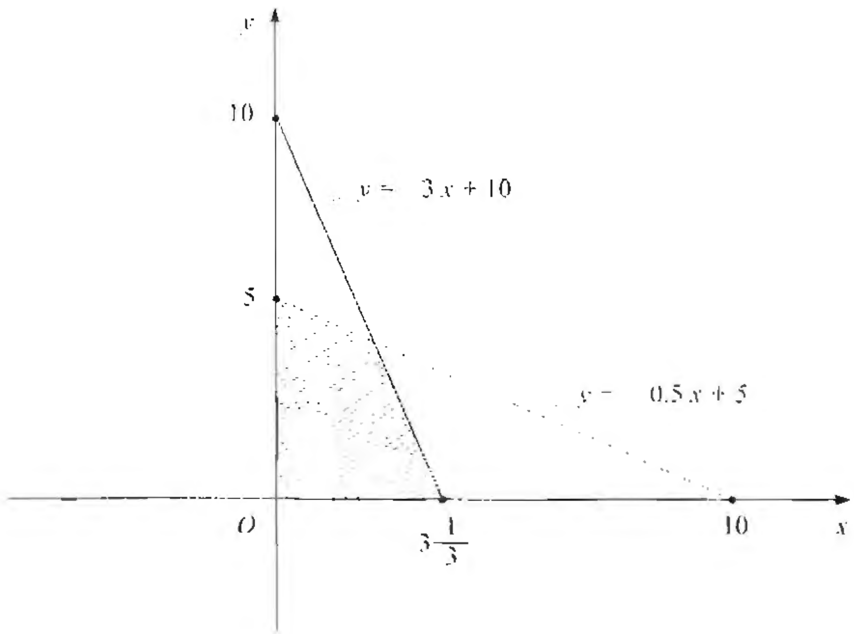
)

2. 1)

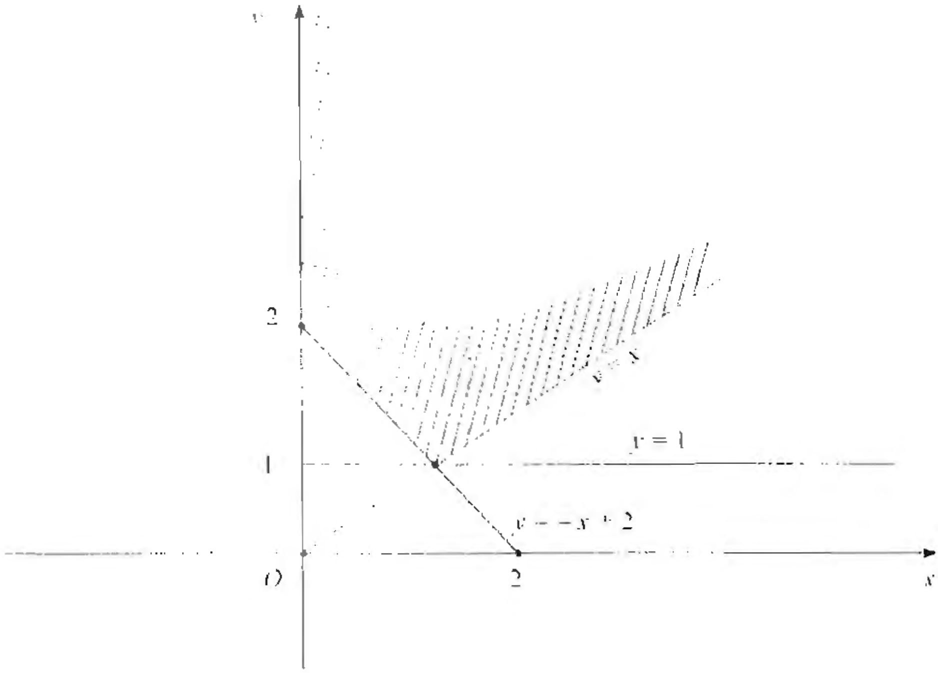




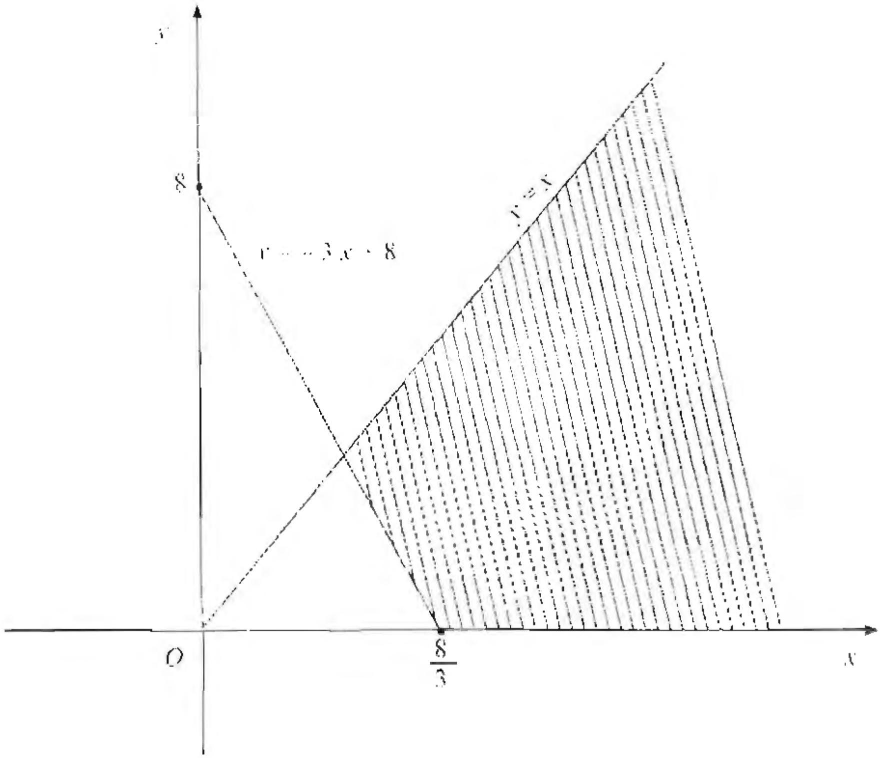
3)

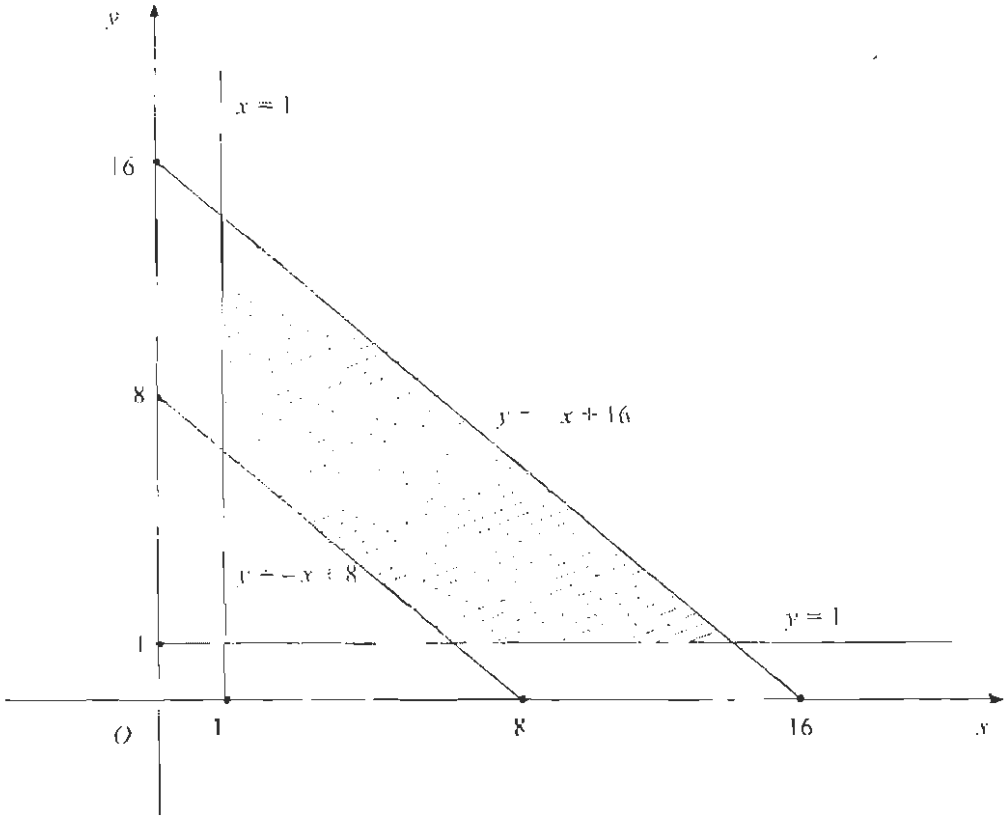


4)



5)





3. 1) უდიდესი მნიშვნელობაა $f(0,3)=3$, უმცირესი მნიშვნელობაა $f(4,0)=-4$;

2) უდიდესი მნიშვნელობაა $f(0,4)=4$, უმცირესი მნიშვნელობაა $f(8,0)=-8$.

4. 1) უდიდესი მნიშვნელობაა $f(4,0)=20$, უმცირესი მნიშვნელობაა $f(0,1)=3$;

2) უდიდესი მნიშვნელობაა $f(10,0)=50$, უმცირესი მნიშვნელობაა $f(0,0)=0$.

5. უმცირესი მნიშვნელობაა $f(1,4)=11$; უდიდესი მნიშვნელობა არ გააჩნია.

6. უდიდესი მნიშვნელობაა $f(0,2)=10$; უმცირესი მნიშვნელობა არ გააჩნია.

7. თუ ფირმა გამოუშვებს A_1 ტიპის 20 კომპიუტერს და A_2 ტიპის 10 კომპიუტერს, მაშინ იგი მიიღებს მაქსიმალურ \$ 19000 მოგებას.

8. საწარმომ უნდა გამოუშვას 720 ლიტრი A ტიპის წვენი და 630 ლიტრი B ტიპის წვენი, რომ მიიღოს მაქსიმალური \$ 650.7 მოგება.

9. ქარხანამ უნდა ჩამოასხას 400 ბოთლი თეთრი ღვინო და 1600 ბოთლი წითელი ღვინო, რომ მიიღოს მაქსიმალური \$ 3680 მოგება.

10. საწარმომ უნდა გამოუშვას A ტიპის 50 და B ტიპის 70 ცალი ბუკლეტი, რომ მიიღოს მაქსიმალური \$ 62 მოგება.

11. ფაბრიკამ უნდა გამოუშვას A ტიპის 30 და B ტიპის 5 სკამი, რომ მიიღოს მაქსიმალური \$ 330 მოგება.

12. მხატვარმა უნდა დაამზადოს 10 სურათი და ფაიფურის 5 ნივთი, რომ მიიღოს მაქსიმალური \$ 66.25 მოგება.

საგნობრივი საძიებელი

დ. ნატროშვილი, ლ. გიორგაშვილი, გ. ჯაშიაშვილი.

მათემატიკა ეკონომისტებისათვის

მეორე გადამუშავებული გამოცემა. თბილისი.

გამომცემლობა „ახალი ივირონი“ 2008. – 580 გვ.

ISBN – 978-99940-900-0-6

გამომცემლობა „ახალი ივირონი“

თბილისი, წერეთლის გამზირი № 1

ტელეფონი 895 92 50 50

„სტამბა გრიფონი“, თბილისი, წერეთლის გამზირი № 72

ტელეფონი 899 77 28 41