უმაღლესი მათემატიკა

ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა

ი. სხირტლაძე, თ. ტულუში, ა. ოსიძე,
ა. ციბაძე, მ. ნადარეიშვილი

ლბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა

(თეორია, სავარჯიშოები და ამოცანები)

საქართველოს რესპუბლიკის სახალხო განათლების სამინისტრომ დაამტკიცა სახელმძღვანელოდ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლის სტუდენტებისათვის

პროფესორ ს. თოფურიას რედაქციით

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1990

უმაღლესი მათემატიკის წინამდებარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. იგი შედგენილია ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით და მოიცავს პროგრამით გათვალისწინებულ ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის საკითხებს.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის და უნივერსიტეტის ეკონომიკის, ბიოლოგიის, გეოგრაფიის და სხვა ფაკულტეტების სტუდენტებსაც.

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი თ. შ ე რ ვ ა შ ი ძ ე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი თ. ჭ ა ნ ტ უ რ ი ა

1602010000—481
M————————185—90.
M 602(08)—90
ISBN 5-505-01239—6

წინასიტყვაობა

წიგნი ერთ-ერთი ნაწილია სახელმძღვანელოთა იმ სერიისა, რომელმაც, ავტორთა აზრით, უნდა შეადგინოს უმაღლესი მათემატიკის სრული კურსი (თეორია და ამოცანათა კრებული) უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისათვის. იგი დაწერილია მოქმედი პროგრამის მიხედვით.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის და უნივერსიტეტის ეკონომიკური, ბიოლოგიური, გეოგრაფიული და სხვა ფაკულტეტების სტუდენტებს.

წიგნი შედგება ორი განყოფილებისაგან. პირველში გადმოცემულია ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის საკითხები. მეორე განყოფილება ამოცანათა კრებულია, რომელიც შეიცავს თეორიული მასალის შესაბამის მრავალ ამოცანასა და სავარჯიშოს. ისინი დალაგებულია თეორიული მასალის შესაბამისად, მათი ტიპებისა და სირთულის გათვალისწინებით.

შესავალი

ალბათობის თეორია, როგორც მეცნიერება, აღმოცენდა XVII საუკუნის შუა წლებში. თავდაპირველად იგი დაკავშირებული იყო აზარტული თამაშების ანალიზთან. ისტორიამ შემოგვინახა ერთ-ერთი მოთამაშის, შევალიე დე მერეს სახელი, რომელიც მეგობრობდა ცნობილ მეცნიერთან, ბლეზ პასკალთან. დე მერე არა მარტო თამაშობდა, არამედ აკვირდებოდა კანონზომიერებებს, რომლებიც იჩენდნენ თავს კამათლის გაგორებისას. ამ კანონზომიერებების ახსნა მას არ შეეძლო და შეკითხვებით მიმართავდა პასკალს. ერთ-ერთი ასეთი შეკითხვა იყო: რა უფრო მოსალოდნელია, ის, რომ ორი კამათლის 24-ჯერ გაგორებისას ერთხელ მაინც მოვა წყვილი ექვსიანი, თუ ის, რომ ოთხი კამათლის ერთხელ გაგორებისას ერთზე მაინც მოვა ექვსიანი?

ალბათობის თეორიის შექმნის ხანას განეკუთვნება აგრეთვე ამოცანაც, რომელიც, გადმოცემით, ჰიუგენსს დაუსვა ერთ-ერთმა ჯარისკაცმა: სამი კამათლის ერთდროულად გაგორებისას რა უფრო მოსალოდნელია, ის, რომ ქულათა ჯამი იყოს 11, თუ ის, რომ ჯამი იყოს 12?

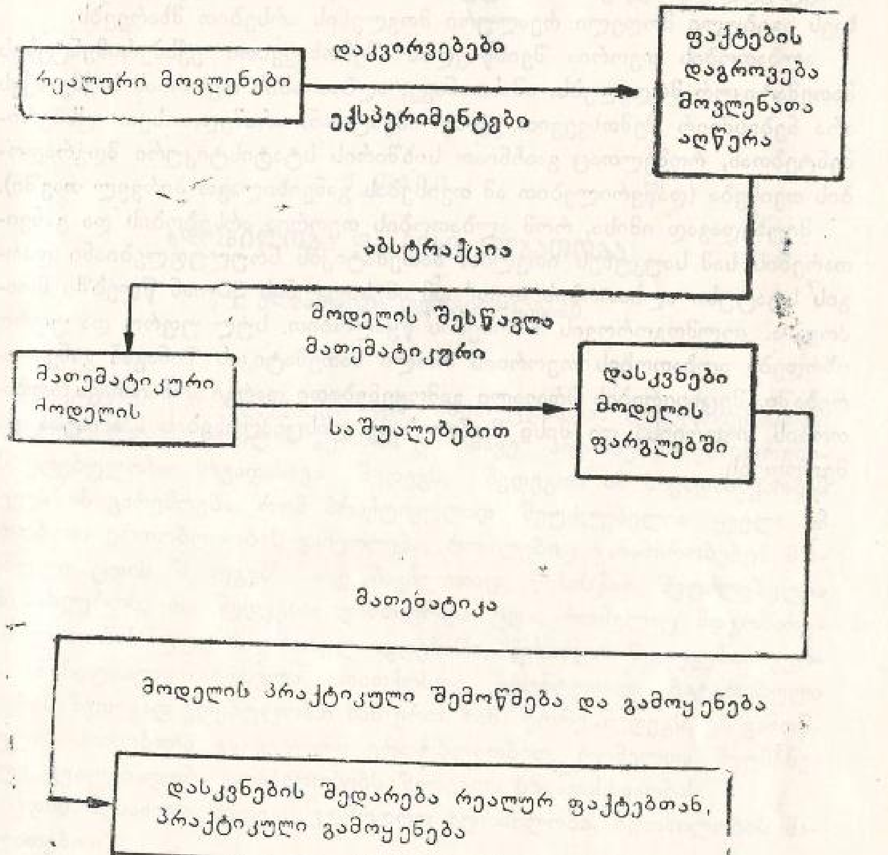
სწორედ ასეთ თამაშებთან დაკავშირებულმა საკითხებმა, რომლებიც ვერ იხსნებოდნენ მაშინ არსებული მათემატიკური მოდელების საშუალებით, მიიყვანა მეცნიერები ახალი იდეებისა და ცნებების წარმოქმნამდე. ასეთი იდეები და ცნებები გვხვდება ცნობილი მათემატიკოსების ფერმას, პასკალის, ჰიუგენსის, ბერნულის და სხვათა შრომებში.

ალბათობის თეორიის პირველ სახელმძღვანელოს წარმოადგენდა ჰიუგენსის ნაშრომი „აზარტულ თამაშში დაანგარიშების შესახებ", რომელიც 1657 წელს გამოვიდა. ეს ნაშრომი იმითაა ღირსშესანიშნავი, რომ მასში პირველად არის მოცემული მათემატიკური ლოდინის ცნება, რომელიც შემდგომში ი. ბერნულიმ შეიტანა თავის საქვეყნოდ ცნობილ წიგნში „ვარაუდთა ხელოვნება". ამ წიგნში მან პირველად ჩამოაყალიბა დამოუკიდებელ ცდათა სქემის ცნება და დაამტკიცა ალბათობის თეორიის პირველი ზღვარითი თეორემა.

ალბათობის თეორიის ანალიზური მეთოდების განვითარებაში განსაკუთრებული როლი შეასრულა ლაპლასის, გაუსისა და პუასონის შრომებმა, ხოლო შემდგომში რუსი მეცნიერების ჩებიშევის, მარკოვისა და ლიაპუნოვის გამოკვლევებმა.

ალბათობის თეორია თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი დარგია, რომელსაც უდიდესი პრაქტიკული გამოყენება

გააჩნია. საზოგადოდ, რეალური სამყაროს კანონზომიერებათა შესწავლისას მათემატიკას გამორჩეული ადგილი უკავია. სქემატურად ეს ასე შეიძლება გამოისახოს.



ამასთან აღსანიშნავია, რომ მათემატიკას საქმე აქვს არა რეალურ მოვლენებთან, არამედ მათ მათემატიკურ მოდელებთან. მათემატიკის კავშირი გარე სამყაროსთან ხორციელდება შემდეგ ეტაპებად. თავდაპირველად ხდება შესასწავლი მოვლენის მეორეხარისხოვანი მხარეებისაგან გათავისუფლება და ძირითად კანონზომიერებებზე დაყრდნობით მათემატიკური მოდელის აგება. ამ მოდელში ხდება მათემატიკური ცნებების, განსაზღვრებების და აქსიომების ჩამოყალიბება. შემდეგ, ამ აქსიომებზე დაყრდნობით მტკიცდება გარკვეული დებულე-

ბები, თეორემები და ბოლოს, მიღებული მათემატიკური შედეგების ინტერპრეტაცია ხდება ისევ საწყისი რეალური ცნებების საშუალებით. ამით საშუალება გვეძლევა პრაქტიკულად გამოვიყენოთ ის შედეგები, რომლებიც მიღებულია მათემატიკური მოდელის მეშვეობით. პრაქტიკული დასკვნები მით უფრო საიმედოა, რაც უფრო უკეთ ასახავს აგებული მოდელი რეალური მოვლენის არსებით მხარეებს.

ალბათობის თეორია შეისწავლის შემთხვევითი ექსპერიმენტების მათემატიკურ მოდელებს. ამასთანავე, ალბათობის თეორიას საქმე აქვს არა ნებისმიერ შემთხვევით ექსპერიმენტთან, არამედ, ისეთ ექსპერიმენტებთან, რომელთაც გააჩნიათ სიხშირის სტატისტიკური მდგრადობის თვისება (დაწვრილებით ამ თვისებას განვიხილავთ პირველ თავში).

მიუხედავად იმისა, რომ ალბათობის თეორია არსებობის და განვითარების სამ საუკუნეს ითვლის, მათემატიკის სრულუფლებიანი დარგის სტატუსი ალბათობის თეორიამ ამ საუკუნის 30-იან წლებში მოიპოვა ა. კოლმოგოროვის შრომების წყალობით. სულ უფრო და უფრო იზრდება ალბათობის თეორიის როლი მათემატიკის შინაგან განვითარებაში, მეცნიერების მრავალი გამოყენებითი დარგი მიმართავს ალბათობის თეორიისა და მისი მონათესავე დისციპლინების აპარატსა და მეთოდებს.

პირველი ნაწილი

ალბათობის თეორია

I თავი

ხდომილობა და მისი ალბათობა

§ 1. ალბათობის თეორიის საგანი

პრაქტიკაში ხშირად გვაქვს საქმე ისეთ ცდასთან (დაკვირვებასთან, ექსპერიმენტთან), რომლის „ერთსა და იმავე“ პირობებში გამეორებისას ვღებულობთ სხვადასხვა შედეგს. შედეგთა ამ სხვადასხვაობას იწვევს ის გარემოება, რომ პრაქტიკულად შეუძლებელია ყველა იმ პირობათა ერთობლიობის გამეორება, რომლებიც განაპირობებენ მოცემული ცდის შედეგებს. ასე მაგალითად, წინასწარ შეუძლებელია განისაზღვროს, რა შედეგით დამთავრდა ცდა, რომელიც მდგომარეობს ლითონის ფულის ერთხელ აგდებაში. შესაძლო შედეგებია გერბის ან საფასურის მოსვლა. თითქოსდა იდენტურად ჩატარებული ცდების შედეგად ვღებულობთ ხან ერთ, ხან მეორე შედეგს. ეს გამოწვეულია პირობათა გარკვეული ერთობლიობით, რომელთა შეუმჩნეველი ცვალებადობა განაპირობებს შედეგთა სხვადასხვაობას.

ცდის შესაძლო შედეგს ვუწოდოთ ხდომილობა. ხდომილობის მაგალითებია:

„მონეტის ერთხელ აგდების შედეგად მოვიდა გერბი“, „შემთხვევით არჩეული შემოწმებული დეტალი აღმოჩნდა სტანდარტული“, „გაზომილი მანძილის მნიშვნელობა აღმოჩნდა წინასწარ დასახელებული რიცხვითი ინტერვალიდან“ და ა. შ.

ვთქვათ, A ხდომილობა არის მოცემული ცდის ერთ-ერთი შედეგი. თუ ცდის n-ჯერ ჩატარების შედეგად A ხდომილობა მოხდა m-ჯერ, შეფარდებას

$$W(A) = \frac{m}{n} \tag{1.1}$$

ეწოდება A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე. ზოგიერთი ცდა თა-

ვისი ბუნებით ისეთია, რომ შეფარდება $\frac{m}{n}$ სხვადასხვა, საკმაოდ
დიდი n-ებისათვის მცირედ განსხვავდება ერთმანეთისაგან. ასეთ
ცდებს განეკუთვნება ფულის ასროლა, კამათლის გაგორება და ა. შ.
ცნობილმა მათემატიკოსმა პირსონმა ჩაატარა ფულის აგდებათა სერია.
მან ლითონის ფული აისროლა 24000-ჯერ და აქედან გერბი მოვიდა
12012-ჯერ. გერბის მოსვლის ფართობითი სიხშირე $\frac{12012}{24000}$ ძალიან
ახლოს არის 1/2-თან. ცნობილია სხვა ცდებიც, როცა 1000 ასროლის-
გან შემდგარ 10 სხვადასხვა სერიაში გერბი მოვიდა შესაბამისად
502-ჯერ, 518-ჯერ, 497-ჯერ, 529-ჯერ, 504-ჯერ, 476-ჯერ, 507-ჯერ,
528-ჯერ, 504-ჯერ, 529-ჯერ. ფარდობითი სიხშირეები ამ შემთხვევებ-
შიც ახლოსაა 1/2-თან. ზემონათქვამიდან დავასკვნით, რომ ფარდობი-
თი სიხშირე ამ შემთხვევაში იჩენს გარკვეული აზრით მდგრადობას,
რაც იმას ნიშნავს, რომ ცდათა სხვადასხვა სერიაში ფარდობითი სიხ-
შირე მცირედ განსხვავდება ერთი და იგივე რიცხვისაგან.

ალბათობის თეორია შეისწავლის მდგრადი სიხშირის მქონე ცდათა
მათემატიკურ მოდელებს.

§ 2. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე

განვიხილოთ რამდენიმე მარტივი მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ ვაგორებთ კამათელს. ცდის შესაძლო
შედეგებად შეიძლება მივიჩნიოთ ხდომილობები: „მოვიდა ერთიანი“,
„მოვიდა ორიანი“, „მოვიდა ლუწი რიცხვი“, „მოვიდა რიცხვი, რომე-
ლიც წარმოადგენს მთელი რიცხვის კვადრატს“ და ა. შ. ამ ხდომილო-
ბათა შორის შეიმჩნევა განსხვავება — პირველი ორი უფრო მარ-
ტივია იმ აზრით, რომ მათი განხორციელება შესაძლებელია ერთად-
ერთი გზით, ხოლო მომდევნო ხდომილობები შეიძლება განხორციელ-
დეს რამდენიმენაირად. ასე, მაგალითად, ხდომილობა „მოვიდა ლუწი
რიცხვი“ შესრულდება, თუ მოხდა ერთ-ერთი შემდეგი ხდომილობები-
დან: „მოვიდა ორიანი“, „მოვიდა ოთხიანი“, „მოვიდა ექვსიანი“. ხდო-
მილობა „მოვიდა რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს მთელი რიცხვის
კვადრატს“ შესრულდება, თუ მოხდა ერთ-ერთი შემდეგი ხდომილო-
ბებიდან: „მოვიდა ერთიანი“, „მოვიდა ოთხიანი“.

პირველ ორ ხდომილობას ეწოდება ელემენტარული ხდომილობე-
ბი, ხოლო მომდევნო ორი — შედგენილი ხდომილობები ან უბრა-
ლოდ, ხდომილობები.

შემოვიღოთ აღნიშვნები: ω_k იყოს ხდომილობა, რომელიც ნიშნავს
კამათელზე k რიცხვის მოსვლას. მაშინ მოცემულ ცდაში ელემენტა-
რული ხდომილობები იქნება $\omega_1, \omega_2, .., \omega_6$. ნებისმიერი სხვა ხდომილო-
ბა შეიძლება წარმოვადგინოთ მათი საშუალებით. ასე მაგალითად,
ხდომილობა „კამათელზე მოვიდა ლუწი რიცხვი“ შეიძლება წარმო-
ვადგინოთ $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$ ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავ-
ლის სამელემენტიანი ქვესიმრავლის $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ საშუალებით. ხდო-
მილობა „მოვიდა რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს მთელი რიცხვის
კვადრატს“, წარმოიდგინება Ω-ს ორელემენტიანი ქვესიმრავლით
$\{\omega_1, \omega_4\}$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.1. გარკვეულ ცდასთან დაკავშირებულ ყვე-
ლა ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლეს ეწოდება ელემენტარულ
ხდომილობათა სივრცე და აღინიშნება Ω სიმბოლოთი.

ელემენტარულ ხდომილობათა საშუალებით შეიძლება ავაგოთ
სხვადასხვა შედგენილი ხდომილობა.

ამრიგად, ნებისმიერი ხდომილობა წარმოადგენს ელემენტარულ
ხდომილობათა სივრცის ქვესიმრავლეს. ხდომილობის მოხდენა ნიშნავს
მისი შემადგენელი რომელიმე ელემენტარული ხდომილობის მოხ-
დენას.

ხდომილობებს, როგორც წესი, აღნიშნავენ ლათინური ანბანის დი-
დი ასოებით A. B. C,....

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.2. ისეთ ხდომილობას, რომელიც ცდის ყო-
ველი გამეორებისას ხდება, ეწოდება აუცილებელი ხდომილობა. იგი
შეიძლება გაიგივებული იქნას ელემენტარულ ხდომილობათა სივრ-
ცესთან და მასაც აღნიშნავენ Ω სიმბოლოთი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.3. ხდომილობას, რომელიც ცდის შედეგად
არ შეიძლება მოხდეს, ეწოდება შეუძლებელი ხდომილობა.

ბუნებრივია, იგი არ შეიცავს მოცემული ცდის შესაბამის ელემენ-
ტარულ ხდომილობათა სივრცის არც ერთ ელემენტს და ამიტომ მას
აღნიშნავენ $\varnothing$ სიმბოლოთი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ცდა მდგომარეობს ორი კამათლის ერთხელ გა-
გორებაში. ცდის შესაძლო შედეგები შეიძლება ჩავწეროთ მატრიცის
სახით. (ω_i, ω_k) ნიშნავდეს, რომ პირველ კამათელზე მოვიდა რიცხვი
i, მეორეზე — რიცხვი k. გასათვალისწინებელია, რომ ხდომილობები
(ω_i, ω_k) და (ω_k, ω_i) განსხვავებულ ხდომილობებს წარმოადგენენ

(თუმცა, კამათლით მოთამაშისათვის მათში არავითარი განსხვავება არ არის). Ω სივრცე იქნება:

$$\Omega = \begin{pmatrix} (\omega_1, \omega_1), (\omega_1, \omega_2), \ldots, (\omega_1, \omega_6) \\ (\omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_2), \ldots, (\omega_2, \omega_6) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (\omega_6, \omega_1), (\omega_6, \omega_2), \ldots, (\omega_6, \omega_6) \end{pmatrix}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები: A იყოს ხდომილობა „მოსულ რიცხვთა ჯამია 5“, B — „მოსულ რიცხვთა ჯამი ნაკლებია 13-ზე“, C — „მოსულ რიცხვთა ჯამია 15“. მაშინ:

$$A=\{(\omega_1, \omega_4), (\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_2), (\omega_4, \omega_1)\},$$
$$B=\Omega, \ C=\varnothing.$$

§ 3. მოქმედებები ხდომილობებზე

ხდომილობებზე მოქმედებების განსაზღვრისას ვიგულისხმებთ, რომ მოცემული გვაქვს რაიმე Ω ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე და ყოველი ხდომილობა წარმოადგენს ამ სივრცის ქვესიმრავლეს.

განსაზღვრება 3.1. თუ A ხდომილობის მოხდენისას ხდება B ხდომილობაც, მაშინ ამბობენ, რომ A იწვევს B-ს და ამას ასე ჩაწერენ: $A \subset B$ ან $B \supset A$.

განსაზღვრება 3.2. ორ A და B ხდომილობას ეწოდება ტოლი (ტოლძალოვანი), თუ $A \subset B$ და $B \subset A$. ეს ასე ჩაიწერება: $A=B$.

განსაზღვრება 3.3. ორი A და B ხდომილობის გაერთიანება ეწოდება ისეთ ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება ერთი მაინც A და B ხდომილობებიდან. აღინიშნება ასე: $A \cup B$.

განსაზღვრება 3.4. ორი A და B ხდომილობის ნამრავლი ეწოდება ისეთ ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება როგორც A, ისე B ხდომილობა. აღინიშნება ასე: $A \cap B$, ან ასე: AB.

განსაზღვრება 3.5. ორი A და B ხდომილობის სხვაობა ეწოდება ისეთ ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება A და არ ხდება B. აღინიშნება ასე: $A—B$.

განსაზღვრება 3.6. A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა ეწოდება $\Omega—A$ ხდომილობას და აღინიშნება $\overline{A}$ სიმბოლოთი: $\overline{A}=\Omega—A$.

განსაზღვრება 3.7. ორ A და B ხდომილობას ეწოდება უთავსებადი, თუ შეუძლებელია მათი ერთდროულად მოხდენა, ე. ი. თუ $A \cdot B=\varnothing$.

უთავსებად ხდომილობათა გაერთიანებას ჯამი ეწოდება და აღინიშნება $A+B$ სიმბოლოთი.

ხდომილობათა გაერთიანების (ჯამის) და გამრავლების ოპერაციები შეიძლება განისაზღვროს მაშინაც, როდესაც გვაქვს ხდომილობათა უსასრულო რაოდენობა. თუ მოცემულია $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ ხდომილობები, მაშინ გაერთიანება $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ წარმოადგენს ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება ერთი მაინც A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ხდომილობებიდან.

უსასრულო რაოდენობის ხდომილობათა ნამრავლი $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ წარმოადგენს ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება ყოველი A_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

განსაზღვრება 3.8. $A_1, A_2, \ldots A_n$ ხდომილობათა ერთობლიობას ეწოდება ხდომილობათა სრული ჯგუფი, თუ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

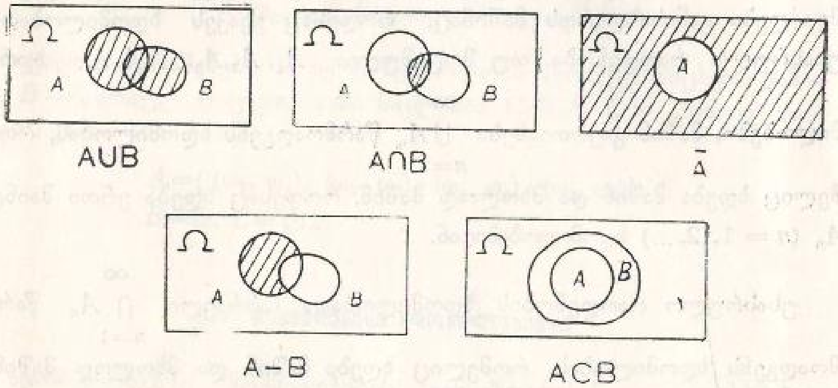
1. $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega;$

2. $A_i \cap A_j = \varnothing$, თუ $i \neq j$; $i, j=1, 2, \ldots, n$.

შემოღებული განსაზღვრებების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ, ყუთში აწყვია 10 თეთრი და 10 შავი ბურთულა, გადანომრილები 1-დან 10-მდე. ცდა მდგომარეობს ამ ყუთიდან ალალბედზე ერთი ბურთულის ამოღებაში. A იყოს ხდომილობა „ამოსული ბურთულა თეთრია“, B — „ამოსულ ბურთულაზე აწერია ოთხიანი“, C — „ამოსულ ბურთულაზე აწერია ლუწი რიცხვი“, მაშინ AB არის ხდომილობა „ამოსულია თეთრი ბურთულა მეოთხე ნომრით“, $A+B$— „ამოსულია ან თეთრი ბურთულა, ან რომელიმე ოთხიანი“, $\overline{A}$ — „ამოსული ბურთულა შავია“, $\overline{C}$ — „ამოსულ ბურთულაზე აწერია კენტი რიცხვი“; გარდა ამისა, $B \subset C$, $B\overline{C} = \varnothing$.

შევნიშნოთ, რომ საზოგადოდ ნებისმიერი A ხდომილობისათვის $A+\overline{A}=\Omega$, $A\cdot\overline{A}=\varnothing$, $A\Omega=A$.

რადგან ხდომილობა წარმოადგენს Ω-ს ქვესიმრავლეს, ამიტომ ხდომილობებზე მოქმედებებს შეიძლება მივცეთ გეომეტრიული ინტერპრეტაცია:



ნახ. 1

§ 4. ალბათობის აქსიომური განმარტება

ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე Ω განვმარტოთ, როგორც ცდის ყველა ურთიერთგამომრიცხავ შედეგთა სიმრავლე. თუ ცდა თავისი ბუნებით ისეთია, რომ ყველა შესაძლო შედეგთა სიმრავლე სასრულია, გვექნება:

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი: ვთქვათ, ყუთში აწყვია თეთრი, წითელი და მწვანე ფერის ერთნაირი ბურთულები. ცდა მდგომარეობს იმაში, რომ ალალბედზე ვიღებთ ამ ყუთიდან ერთ ბურთულას. შესაძლო შედეგებია (ელემენტარული ხდომილობები):

ω_1 — „ამოვიდა თეთრი ბურთულა";

ω_2 — „ამოვიდა წითელი ბურთულა";

ω_3 — „ამოვიდა მწვანე ბურთულა".

ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე ამ შემთხვევაში შედგება სამი ელემენტისაგან: $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

შეიძლება ცდის შედეგთა სიმრავლე იყოს უსასრულო, მაგრამ თვლადი (ე. ი. შესაძლებელია გადაინომროს ამ სიმრავლის ელემენტები).

მ ა გ ა ლ ი თ ი: ვთქვათ, ცდა მდგომარეობს იმაში, რომ ალალბედზე ვასახელებთ ნატურალურ რიცხვს. შესაძლო შედეგებია (ელემენტარული ხდომილობები):

ω_1 — „დასახელებულია რიცხვი 1";

ω_2 — „დასახელებულია რიცხვი 2";

. . . .

ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. პრაქტიკაში ხშირია შემთხვევა, როდესაც ცდის შედეგთა სიმრავლე არათვლადია (ე. ი. შეუძლებელია გადაინომროს ამ სიმრავლის ელემენტები).

მ ა გ ა ლ ი თ ა დ. ვთქვათ, ცდა მდგომარეობს ხარატის მიერ დამზადებული სტანდარტული დეტალის დიამეტრის შემოწმებაში. სამუშაო ნახაზზე ეს ზომა განსაზღვრულია ასე: $\varnothing$ 10±0,5 მმ. ცდის შედეგთა შესაძლო მნიშვნელობებია 9,5 მმ-დან 10,5 მმ-მდე. თუ ω_α არის დიამეტრის ერთ-ერთი შესაძლო მნიშვნელობა, გვექნება $\Omega=\{\omega_\alpha\}$, სადაც $\alpha\in[0,1]$.

განვიხილოთ ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე (იგი შეიძლება იყოს როგორც სასრული, ისე უსასრულო). როგორც ვიცით, შემთხვევითი ხდომილობა წარმოადგენს Ω-ს ქვესიმრავლეს. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ხდომილობათა $\mathbf{F}$ კლასი (Ω-ს ქვესიმრავლეთა რაიმე ერთობლიობა), $\mathbf{F}=\{A\}$, სადაც $A\subset\Omega$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4.1. ხდომილობათა $\mathbf{F}$ კლასს ეწოდება ხდომილობათა ალგებრა, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. $\varnothing$ და Ω ეკუთვნის $\mathbf{F}$ კლასს.

2. თუ A ეკუთვნის $\mathbf{F}$ კლასს, მაშინ $\overline{A}$ ეკუთვნის $\mathbf{F}$ კლასს, ე. ი. $A\in\mathbf{F}\Rightarrow\overline{A}=\Omega-A\in\mathbf{F}$.

3. თუ A და B ეკუთვნიან $\mathbf{F}$ კლასს, მაშინ $A\cup B$ ეკუთვნის $\mathbf{F}$ კლასს, ე. ი. $A, B\in\mathbf{F}\Rightarrow A\cup B\in\mathbf{F}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. თუ Ω ნებისმიერი სასრული სიმრავლეა, მაშინ მისი ყველა ქვესიმრავლის ერთობლიობა წარმოადგენს ალგებრას.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4.2. ხდომილობათა $\mathbf{F}$ კლასს ეწოდება ხდომილობათა σ — ალგებრა, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. $\varnothing$ და Ω ეკუთვნიან $\mathbf{F}$ კლასს;

2. თუ $A\in\mathbf{F}\Rightarrow A\in\mathbf{F}$;

3. თუ $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ეკუთვნიან $\mathbf{F}$ კლასს, მაშინ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ხდომილობებიც ეკუთვნიან $\mathbf{F}$ კლასს.

ე. ი. $\mathbf{F}$ კლასი ნებისმიერ ხდომილობებთან ერთად, შეიცავს მათ გაერთიანებასა და ნამრავლს.

ხდომილობის ალბათობის ქვემოთმოყვანილი განსაზღვრება, რომელიც მოცემულია სამი აქსიომის სახით, ეკუთვნის საბჭოთა მათემატიკოსს ა. ნ. კოლმოგოროვს.

განსაზღვრება 4.3. P რიცხვით ფუნქციას, განსაზღვრულს ხდომილობათა $\mathbf{F}$ σ-ალგებრაზე ეწოდება ალბათობა, თუ შესრულებულია შემდეგი 3 აქსიომა:

1. ნებისმიერი A ხდომილობისათვის $P(A) \geqslant 0$ (არაუარყოფითობის აქსიომა);

2. $P(\Omega)=1$ (ნორმირების აქსიომა);

3. თუ $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n, \ldots$ წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია, მაშინ $P\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

მე-3 აქსიომას ხშირად ალბათობის თვლად ადიციურობის, ანუ ადიციურობის თვისებას უწოდებენ.

4.3. განსაზღვრება შეიძლება მოკლედ ასე გამოვთქვათ: ალბათობა არის ხდომილობის არაუარყოფითი, ნორმირებული, σ-ადიციური ფუნქცია.

განსაზღვრება 4.5. თუ მოცემულია ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე, ხდომილობათა რაიმე σ-ალგებრა $\mathbf{F}$ და მასზე განსაზღვრული P ალბათობა, მაშინ სამეულს $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ ალბათური სივრცე ეწოდება.

ზემოთ მოყვანილი ალბათობის აქსიომური განმარტებიდან გამომდინარეობს ალბათობის შემდეგი ძირითადი თვისებები:

1. შეუძლებელი ხდომილობის ალბათობა ნულის ტოლია: $P(\varnothing)=0$.

დამტკიცება: შეუძლებელი ხდომილობა შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც გაერთიანება: $\varnothing=\varnothing+\varnothing+\ldots+\varnothing+\ldots$ მაშინ მე-3 აქსიომის თანახმად $P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\ldots+P(\varnothing)+\ldots$, რასაც შეიძლება ადგილი ჰქონდეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $P(\varnothing)=0$.

2. თუ $A_1, A_2, \ldots, A_n$, სასრული რაოდენობის წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია, მაშინ $P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

დამტკიცება: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ხდომილობათა გაერთიანება შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=A_1+A_2+\cdots A_n+\varnothing+\varnothing+\cdots+\varnothing+\cdots,$$

ამასთანავე ტოლობის მარჯვენა მხარეში წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია. მე-3 აქსიომის საფუძველზე

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(\varnothing)+\cdots=$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ალბათობის თვლადი ადიტიურობიდან გამომდინარეობს მისი სასრული ადიტიურობა.

3. თუ $A \subset B$, მაშინ $P(A) \leqslant P(B)$ და $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

დამტკიცება: თუ $A \subset B$, მაშინ $B=A+(B-A)$, ამასთანავე A და $B-A$ ხდომილობები უთავსებადი არიან, მაშინ მე-2 თვისების თანახმად $P(B)=P(A)+P(B-A)$. 1-ლი აქსიომის თანახმად $P(B-A) \geqslant 0$, საიდანაც დავასკვნით, რომ $P(B) \geqslant P(A)$ და $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

4. თუ A და B ნებისმიერი ხდომილობებია, მაშინ

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

დამტკიცება: ორი A და B ხდომილობის გაერთიანება შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$A \cup B=(A-AB)+(B-AB)+AB,$$

ამასთანავე ტოლობის მარჯვენა მხარეში უთავსებადი ხდომილობებია, მე-2 თვისებისა და მე-3 თვისების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$P(A \cup B)=P(A-AB)+P(B-AB)+P(AB)=$$
$$=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)+P(AB)=$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB).$$

მე-4 თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ $P(A \cup B) \leqslant P(A)+P(B)$ და ტოლობას მაშინ აქვს ადგილი, როცა A და B უთავსებადი ხდომილობებია.

5. საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობა ტოლია ერთს გამოკლებული მოცემული ხდომილობის ალბათობა, ე. ი. $P(\overline{A})=1-P(A)$.

დამტკიცება: თუ A მოცემული ხდომილობაა, ცხადია, რომ $A \subset \Omega$ და $\overline{A}=\Omega-A$, მაშინ მე-2 თვისების თანახმად $P(\overline{A})=P(\Omega)-P(A)=1-P(A)$.

§ 5. ᲐᲚᲑᲐᲗᲝᲑᲘᲡ ᲙᲚᲐᲡᲘᲙᲣᲠᲘ ᲒᲐᲜᲡᲐᲖᲦᲕᲠᲔᲑᲐ

განვიხილოთ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, რომელიც ელემენტთა სასრულ რაოდენობას შეიცავს. $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_n\}$ აღვნიშნავდეს Ω სივრცის ერთელემენტიან ქვესიმრავლეებს.

$\{\omega_i\}$ ხდომილობის ალბათობა აღვნიშნოთ $P(\omega_i)$ სიმბოლოთი. ვიგულისხმოთ, რომ ეს ხდომილობები ტოლშესაძლებელია, ე. ი. $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\dots=P(\omega_n)$. ნორმირების აქსიომის ძალით, $\sum\limits_{i=1}^{n} P(\omega_i)=1$, ამიტომ ყოველი i-სათვის $P(\omega_i)=\dfrac{1}{n}$.

განვიხილოთ $A\subset\Omega$ ხდომილობა, რომელიც შეიცავს m ელემენტარულ ხდომილობას. ალბათობის ადიტიურობის გამო

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A} P(\omega_i)=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}}_{m\text{-ჯერ}}=\frac{m}{n},$$

სადაც $\sum\limits_{\omega_i\in A} P(\omega_i)$ ნიშნავს, რომ იკრიბება იმ $\{\omega_i\}$ ხდომილობათა ალბათობები, რომლებიც ეკუთვნიან A-ს.

განსაზღვრება 5.1. (ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება) A ხდომილობის ალბათობა ეწოდება წილადს $P(A)=\dfrac{m}{n}$, სადაც n არის Ω სივრცის ელემენტთა რაოდენობა, ხოლო m არის იმ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა, რომლებიც ეკუთვნიან A-ს (იგულისხმება, რომ ყველა ელემენტარული ხდომილობა ტოლშესაძლებელია).

მაგალითი. ცდა მდგომარეობს ერთი კამათლის ერთხელ გაგორებაში. ვიპოვოთ ლუწი რიცხვის მოსვლის ალბათობა.

ამოხსნა. A იყოს ხდომილობა „კამათელზე მოვიდა ლუწი რიცხვი". სულ გვაქვს 6 ტოლშესაძლებელი ელემენტარული ხდომილობა, ე. ი. $n=6$. მათგან 3 იწვევს A-ს, ე. ი. $m=3$. ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების ძალით $P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

§ 6. ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრება

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება მოითხოვს, რომ ელემენტარულ ხდომილობითა სივრცე შედგებოდეს სასრული რაოდენობის ტოლშესაძლებელი ხდომილობებისაგან. პრაქტიკაში კი ხშირად ვხვდებით ცდებს, რომელთა ტოლშესაძლებელ შედეგთა სიმრავლე უსასრულოა. ასეთ შემთხვევაში სარგებლობენ ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრებით. მისი არსის გასარკვევად განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი:

ვთქვათ, სიბრტყეზე გვაქვს Ω არე, რომელიც შეიცავს უფრო მცირე ფართობის მქონე A არეს. საძიებელია იმისი ალბათობა, რომ Ω არიდან ალალბედზე აღებული წერტილი მოთავსებული იქნება A არეში. იგულისხმება, რომ Ω არის ყველა წერტილს არჩევის თანაბარი შესაძლებლობა გააჩნია და ამ წერტილის Ω არის რაიმე გარკვეულ ნაწილში მოხვედრის ალბათობა პროპორციულია ამ ნაწილის ზომის. მაშინ საძებნელი ალბათობა ტოლი იქნება წილადის

$$P(A)=\frac{A\ \text{არის ფართობი}}{\Omega\ \text{არის ფართობი}}.$$

განსაზღვრება 6.1. თუ Ω სივრცე წარმოადგენს სასრულ მონაკვეთს (ფიგურას, სხეულს) მაშინ A ხდომილობის გეომეტრიული ალბათობა ეწოდება ამ ხდომილობის შესაბამისი მონაკვეთის სიგრძის (ფიგურის ფართობის, სხეულის მოცულობის) შეფარდებას Ω სივრცის შესაბამისი მონაკვეთის სიგრძესთან (ფიგურის ფართობთან, სხეულის მოცულობასთან).

ნახ. 2

განვიხილოთ მაგალითები, რომელთა ამოხსნა მოხერხებულია ალბათობის გეომეტრიული განმარტების გამოყენებით.

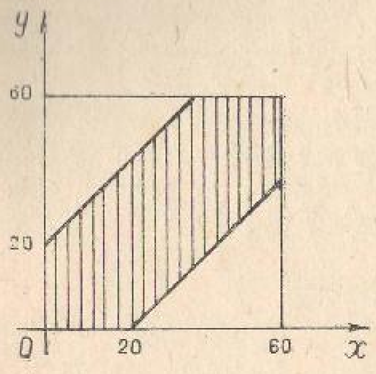
მაგალითი 1 (შეხვედრის ამოცანა). ორი მეგობარი შეთანხმდა, რომ ისინი შეხვდებოდნენ ერთმანეთს 10-დან 11 საათამდე, ამასთან, შეხვედრის ადგილზე თითოეული მოსული ელოდება მეორეს 20 წუთს. რას უდრის მათი შეხვედრის ალბათობა, თუ თითოეული მოდის ალალბედზე დათქმული საათის განმავლობაში და მათი მოსვლის მომენტები არ არის დამოკიდებული ერთმანეთზე?

ამოხსნა. პირველის მოსავლის დრო აღვნიშნოთ x-ით, მეორესი — y-ით. იმისათვის, რომ ისინი შეხვდნენ ერთმანეთს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $|x-y|\leqslant 20$.

(x, y) წყვილს შევუსაბამოთ წერტილი საკოორდინატო სიბრტყეზე. ყველა შესაძლო შემთხვევათა ერთობლიობა მოგვცემს კვადრატს, რომლის გვერდის სიგრძეა 60, ხოლო იმ (x, y) წერტილების სიმრავლე, რომლებიც გამოიწვევენ შეხვედრას, შეადგენს ნახაზზე გამოსა-

ხულ დაშტრიხულ არეს. საძიებელი ალბათობა იქნება დაშტრიხული არის ფარდობის შეფარდება კვადრატის ფართობთან:

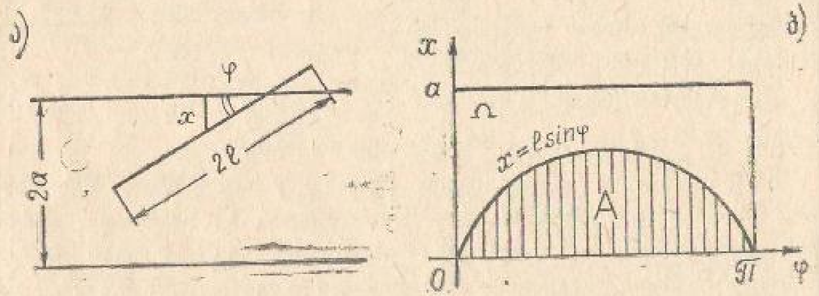
$$P = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$



ნახ. 3

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2 (ბიუფონის ამოცანა). სიბრტყეზე გავლებულია ერთმანეთისაგან $2a$ მანძილით დაშორებული პარალელური წრფეები. ამ სიბრტყეზე ალალბედზე აგდებენ $2l$ სიგრძის ნემსს, ($l < a$). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ნემსი გადაკვეთს რომელიმე წრფეს.

ა მ ო ხ ს ნ ა: შემოვიღოთ აღნიშვნები: x იყოს მანძილი ნემსის შუაწერტილიდან უახლოეს წრფემდე, φ — კუთხე, რომელსაც ადგენს ნემსი ამ წრფესთან (ნახ. 4, ა).



ნახ. 4

x და φ ცვლადების მნიშვნელობები ცალსახად განსაზღვრავენ, კვეთს თუ არა ნემსი წრფეს. x ღებულობს მნიშვნელობებს 0-დან a-მდე, φ კი 0-დან π-მდე. ნემსის შუაწერტილის კოორდინატებად მივიღოთ წყვილი (φ, x), რომელიც წარმოადგენს იმ Ω მართკუთხედის წერტილს, რომლის გვერდების სიგრძეებია a და π (ნახ. 4, ბ), ამიტომ მისი ფართობია $a\pi$.

4 ა ნახაზიდან ჩანს, რომ ნემსი გადაკვეთს უახლოეს წრფეს მაშინ, როდესაც $x \leqslant l \sin\varphi$, ანუ, როდესაც წერტილი (φ, x) მდებარეობს

4, ბ ნახაზზე დაშტრიხულ A არეში. ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრებით, საძიებელი ალბათობაა

$$P = \frac{A \text{ არის ფართობი}}{\Omega \text{ არის ფართობი}}.$$

A არის ფართობი S_A გამოვითვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალის საშუალებით:

$$S_A = \int_0^{\pi} l \sin\varphi d\varphi = -l \cos\varphi \Big|_0^{\pi} = 2l$$

და ამრიგად, საძიებელი ალბათობაა $P = \dfrac{2l}{\pi a}$.

§ 7. პირობითი ალბათობა, ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა

განვიხილოთ Ω ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ორი A და B ხდომილობა და დავსვათ კითხვა: რას უდრის A ხდომილობის ალბათობა, თუ ცნობილია, რომ B ხდომილობა უკვე მოხდა? ეს ალბათობა ალინიშნება $P_B(A)$ ან $P(A \mid B)$ სიმბოლოთი და იკითხება ასე: A ხდომილობის ალბათობა B პირობით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ ცნობილია, რომ კამათლის გაგორებისას მოვიდა ლუწი ციფრი და გვაინტერესებს ალბათობა იმისა, რომ ეს ციფრი არის ორიანი. ალნიშნული ალბათობის საპოვნელად ვისარგებლოთ ალბათობის კლასიკური განსაზღვრებით. ყველა შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობა იქნება 3, ხოლო ხელშემწყობ შემთხვევათა რაოდენობა 1, ასე რომ საძიებელი ალბათობა იქნება $\frac{1}{3}$ და არა $\frac{1}{6}$, როგორც იქნებოდა იმ შემთხვევაში, არავითარი წინაპირობა რომ არ ყოფილიყო ცნობილი. მაშასადამე, საზოგადოდ, $P_B(A) \neq P(A)$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 7.1. A ხდომილობის ალბათობა B პირობით ეწოდება სიდიდეს:

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad \text{თუ} \quad P(B) > 0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ პირობითი ალბათობა აკმაყოფილებს ალბათობის ზოგად თვისებებს. მოყვანილი განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A), \tag{7.1}$$

რადგან $AB=BA$, ამიტომ

$$P(AB)=P(BA)=P(A)\cdot P_A(B)$$

და მაშასადამე,

$$P(A)\cdot P_A(B)=P(B)P_B(A). \qquad (7.2)$$

(7.1) ფორმულა შეიძლება განზოგადდეს თანამამრავლთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P_{A_2}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\cdots P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}}(A_n).$$

მაგალითი 2. სტუდენტმა პროგრამით გათვალისწინებული 50 საკითხიდან მოამზადა 40. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტს შეხვდება ბილეთი, რომლის სამივე საკითხი მომზადებული აქვს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები: A_k იყოს ხდომილობა, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ სტუდენტს შეხვდა ბილეთი, რომლის k-ური საკითხი მას მომზადებული აქვს ($k=1$, 2, 3). ხდომილობა, რომლის ალბათობაც ჩვენ გვაინტერესებს, წარმოადგენს სამი ხდომილობის ნამრავლს; $A_1\cdot A_2\cdot A_3$ და $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)=$

$$=\frac{40}{50}\cdot\frac{39}{49}\cdot\frac{38}{48}=\frac{147}{490}.$$

იმავე ამოცანის ამოხსნა შეიძლებოდა პირობითი ალბათობის ცნების გამოუყენებლადაც. რადგან 50 საკითხიდან 3-საკითხიანი ბილეთების შედგენა შეიძლება C_{50}^3-ნაირად, ხოლო ნასწავლი 40 საკითხიდან 3-საკითხიანი ბილეთების რაოდენობა იქნება C_{40}^3, ამიტომ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე Ω შეიცავს $n=C_{50}^3$ ელემენტს, მათგან ხელშემწყობია $m=C_{40}^3$ და ალბათობის კლასიკური განმარტებით გვექნება:

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{C_{40}^3}{C_{50}^3}=\frac{40\cdot 39\cdot 38}{1\cdot 2\cdot 3}:\frac{50\cdot 49\cdot 48}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{147}{490}.$$

§ 8. ხდომილობათა დამოუკიდებლობა

ვთქვათ, ყუთში აწყვია 20 თეთრი და 30 შავი ერთნაირი ზომის ბურთულა. ვიპოვოთ იმის ალბათობა, რომ თუ ყუთიდან ალალბედზე ამოვიღებთ ორ ბურთულას, ორივე თეთრი აღმოჩნდება. ცდის განხორციელება შესაძლებელია ორი გზით: 1) ყუთიდან ვიღებთ ერთ

ბურთულას, ვინიშნავთ მის ფერს, ბურთულას ვაბრუნებთ ყუთში და ცდას ვიმეორებთ. 2) ყუთიდან ვიღებთ ერთ ბურთულას, ვინიშნავთ მის ფერს, მაგრამ უკან აღარ ვაბრუნებთ და ცდას ისევ ვიმეორებთ.

შემოვიღოთ აღნიშვნები: A იყოს ხდომილობა „პირველი ბურთულა თეთრია“ B — „მეორე ბურთულა თეთრია“.

პირველ შემთხვევაში

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}=\frac{4}{25},$$

მეორე შემთხვევაში

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}=\frac{38}{245}.$$

შედეგთა სხვადასხვაობა გამოიწვია იმან, რომ პირველ შემთხვევაში A ხდომილობის მოხდენამ არავითარი გავლენა არ იქონია B ხდომილობის ალბათობაზე. ბუნებრივია, პირველ შემთხვევაში B ხდომილობას ვუწოდოთ დამოუკიდებელი A ხდომილობისაგან, ხოლო მეორე შემთხვევაში — დამოკიდებული. საზოგადოდ, ამბობენ რომ B ხდომილობა არაა დამოკიდებული A ხდომილობაზე, თუ B-ს პირობითი ალბათობა A პირობით უდრის B-ს უპირობო (ჩვეულებრივ) ალბათობას:

$$P_A(B)=P(B).$$

(7.1) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ამ შემთხვევაში

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \qquad (8.1)$$

მეორე მხრივ,

$$P(AB)=P(BA)=P(B)\cdot P_B(A). \qquad (8.2)$$

(8.1) და (8.2) ტოლობებიდან ვღებულობთ, რომ

$$P(A)=P_B(A).$$

ამრიგად, თუ B ხდომილობა დამოუკიდებელია A-საგან, მაშინ A ხდომილობაც დამოუკიდებელია B-საგან, ამიტომ შეიძლება ვილაპარაკოთ A და B ხდომილობების ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლობაზე. (8.1) ტოლობა სამართლიანია მხოლოდ დამოუკიდებელი ხდომილობებისათვის, ამიტომ იგი მიღებულია ხდომილობათა დამოუკიდებლობის განმარტებად.

განსაზღვრება 8.1. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ხდომილობებს ეწოდება ერთობლივად დამოუკიდებელი, თუ ნებისმიერი k ხდომილობისათვის ($k\leqslant n$) სრულდება თანაფარდობა:

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}).$$

ცხადია, რომ ხდომილობათა $A_1, A_2, \dots A_n$ სისტემის ერთობლივად დამოუკიდებლობიდან გამომდინარეობს მისი ნებისმიერი ქვესისტემის ერთობლივად დამოუკიდებლობაც.

განსაზღვრება 8.2. $A_1, A_2, \dots, A_n$ ხდომილობებს ეწოდება წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი, თუ ნებისმიერი i და k-სათვის, $i \leqslant n$, $k \leqslant n$, $i \neq k$,

$$P(A_i A_k) = P(A_i) P(A_k).$$

შევნიშნოთ, რომ ხდომილობათა წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლობა არ ნიშნავს მათ ერთობლივად დამოუკიდებლობას. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითი (ბერნშტეინი):

ერთგვაროვანი მასალისაგან დამზადებული წესიერი ტეტრაედრის სამ წახნაგზე აწერია ციფრები 1, 2 და 3, ხოლო მეოთხე წახნაგზე კი ეს სამივე ციფრი ერთად. A_k იყოს ხდომილობა, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ ზემოთ აღწერილი ტეტრაედრი დაეცემა წახნაგზე, რომელსაც აწერია ციფრი k ($k=1, 2, 3$).

ჯერ გამოვიკვლიოთ, არიან თუ არა ეს ხდომილობები წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლები. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ $P(A_1)=P(A_2)=$ $=P(A_3)=\frac{1}{2}$, $P(A_1 A_2)=\frac{1}{4}$, $P(A_1 A_3)=\frac{1}{4}$, $P(A_2 A_3)=\frac{1}{4}$ და, რადგან სრულდება პირობა $P(A_1 A_2)=P(A_1) P(A_2)$, ამიტომ A_1 და A_2 ხდომილობები ყოფილან დამოუკიდებლები. ანალოგიურად, A_1 და A_3, ხდომილობებიც დამოუკიდებლები არიან.

ახლა გამოვიკვლიოთ ამ ხდომილობების ერთობლივად დამოუკიდებლობა. რადგან $P(A_1 A_2 A_3)=\frac{1}{4}$, ხოლო $P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{1}{8}$; ამიტომ $P(A_1 A_2 A_3) \neq P(A_1) P(A_2) P(A_3)$ და ეს ხდომილობები ყოფილან ერთობლივად დამოკიდებულები, მიუხედავად მათი წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლობისა.

§ 9. სრული ალბათობის ფორმულა. ბაიესის ფორმულა

ვთქვათ, მოცემულია

$$H_1, H_2, \dots, H_n \tag{9.1}$$

ხდომილობათა სრული ჯგუფი. მაშინ, ნებისმიერი $A \subset \Omega$ ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A) \tag{9.2}$$

მართლაც, რადგან $H_1, H_2, \dots, H_n$ ერთობლიობა წარმოადგენს ხდომილობათა სრულ ჯგუფს, ამიტომ

$$\Omega = H_1 + H_2 + \cdots + H_n.$$

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე A-ზე და გავითვალისწინოთ, რომ $A\Omega = A$. მივიღებთ $A = AH_1 + AH_2 + \cdots + AH_n$.

თუ გამოვიყენებთ ხდომილობათა ჯამისა და ნამრავლის ალბათობების გამოსათვლელ ფორმულებს, იმის გათვალისწინებით, რომ $H_1, H_2, \cdots, H_n$ ხდომილობათა წყვილ-წყვილად უთავსებადობიდან გამომდინარეობს $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$ ხდომილობათა წყვილ-წყვილად უთავსებადობა, მივიღებთ:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(AH_i)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A).$$

(9.2) ფორმულას სრული ალბათობის ფორმულა ეწოდება.

მაგალითი 1. ამწყობმა საამქრომ მიიღო სამ სხვადასხვა მექანიკურ საამქროში დამზადებული ერთი დასახელების 2000 დეტალი. მათ შორის 600 დამზადებულია № 1 საამქროში, 650—№ 2 საამქროში, ხოლო 750—№ 3 საამქროში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული დეტალი არასტანდარტული აღმოჩნდება, თუ ცნობილია, რომ № 1 საამქრო საშუალოდ 95% სტანდარტულ პროდუქციას უშვებს, № 2 საამქრო — 99%-ს, ხოლო № 3 საამქრო — 98%-ს?

ამოხსნა. A იყოს ხდომილობა, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ ალალბედზე აღებული დეტალი არასტანდარტული აღმოჩნდა. H_1 — ხდომილობა, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ ეს დეტალები დამზადებულია № 1 საამქროში, H_2 — დეტალი დამზადებულია № 2 საამქროში, H_3 — დეტალი დამზადებულია № 3 საამქროში. ცხადია, $A = AH_1 + AH_2 + AH_3$.

გამოვიყენოთ სრული ალბათობის ფორმულა:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3} P(H_i) P_{H_i}(A)$$

$P(H_1)$ $P(H_2)$ და $P(H_3)$ გამოითვლება ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების გამოყენებით:

$$P(H_1)=\frac{600}{2000}=0{,}3;\quad P(H_2)=\frac{650}{2000}=0{,}325;\quad P(H_3)=\frac{750}{2000}=0{,}375;$$

$$P_{H_1}(A)=1-0{,}95=0{,}05;\quad P_{H_2}(A)=1-0{,}99=0{,}01;$$

$$P_{H_3}(A)=1-0{,}98=0{,}02.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$P(A)=0{,}3\cdot 0{,}05+0{,}325\cdot 0{,}01+0{,}375\cdot 0{,}02=0{,}02575.$$

სრული ალბათობის ფორმულაში შემავალ $H_1, H_2, \dots, H_n$ ხდომილობებს ჰიპოთეზებს უწოდებენ. (10.2) ფორმულით ნებისმიერი A ხდომილობის ალბათობას ვითვლით ჰიპოთეზათა ცნობილი ალბათობებისა და ხდომილობის პირობითი ალბათობების საშუალებით. პრაქტიკაში ხშირად საჭირო ხდება შებრუნებული ამოცანის გადაწყვეტა. კერძოდ, ვთქვათ, მოცემულია ჰიპოთეზათა $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ ალბათობები და გვაინტერესებს, თუ როგორ შეიცვლებიან ისინი, თუ ცნობილია, რომ ხდომილობა მოხდა. ამ კითხვაზე პასუხობს ბაიესის ფორმულა, რომელსაც ხშირად ჰიპოთეზათა ალბათობის ფორმულას უწოდებენ.

(7.2) ტოლობაში B-ს ნაცვლად შევიტანოთ H_i, მივიღებთ:

$$P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)=P(A)\cdot P_A(H_i),$$

აქედან

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

თუ $P(A)$-ს ნაცვლად შევიტანთ (9.2) ტოლობით განსაზღვრულ სიდიდეს, მივიღებთ:

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(H_k)P_{H_k}(A)},\quad (i=1,2,\dots,n). \tag{9.3}$$

(9.3) ფორმულები წარმოადგენენ ბაიესის ფორმულებს.

ადვილი მისახვედრია, რომ $\sum\limits_{i=1}^{n}P_A(H_i)=1.$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ზემოთ მოყვანილი მაგალითის პირობებში დავუშვათ, რომ ალალბედზე აღებული დეტალი აღმოჩნდა არასტანდარ-

ტული და განვსაზღვროთ, თუ როგორი ალბათობით შეიძლება მივაკუთვნოთ ეს დეტალი თითოეულ საამქროს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. უნდა ვიპოვოთ $P_A(H_1)$, $P_A(H_2)$ და $P_A(H_3)$ ალბათობები. ვისარგებლოთ ბაიესის ფორმულებით:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}05}{0{,}02575}=\frac{60}{103},$$

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}325\cdot 0{,}01}{0{,}02575}=\frac{13}{103},$$

$$P_A(H_3)=\frac{P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}375\cdot 0{,}02}{0{,}02575}=\frac{30}{103}.$$

§ 10. ბერნულის სქემა

ვთქვათ, ვატარებთ ცდას და ვაკვირდებით რაიმე A ხდომილობის მოხდენის ფაქტს. შემდგომში ვიტყვით, რომ ადგილი აქვს წარმატებას, თუ A ხდომილობა მოხდა მოცემულ ცდაში, წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ადგილი აქვს წარუმატებლობას.

მრავალი მნიშვნელოვანი ამოცანის გადაწყვეტისას საჭირო ხდება ერთი და იგივე ცდის რამდენჯერმე გამეორება, ანუ, როგორც ამბობენ, ცდათა მიმდევრობის ჩატარება. ამასთან, ხშირად საინტერესოა არა რომელიმე კონკრეტული ცდის შედეგი, არამედ წარმატებათა საერთო რიცხვი ცდათა მოცემულ სერიაში. მაგალითად, თუ მონეტას ვაგდებთ 1000-ჯერ, შეიძლება მეტად გვაინტერესებდეს „გერბის" მოსვლათა საერთო რაოდენობა, ვიდრე, ვთქვათ, 203-ე ცდის შედეგი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 10.1. ცდათა ისეთ მიმდევრობას, რომლის ნებისმიერი ცდის შედეგი გავლენას არ ახდენს მომდევნო ცდების შესაძლო შედეგთა ალბათობებზე, დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობა ეწოდება.

დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობისათვის შედეგთა ნებისმიერი კონკრეტული კომბინაციის ალბათობა ტოლია ცალკეულ ცდებში შედეგთა ალბათობების ნამრავლის.

ცდას, რომელშიც ვაკვირდებით ჩვენთვის საინტერესო A ხდომილობის მოხდენის ან არმოხდენის ფაქტს, ორშედეგიანი, ან ბინარული ცდა ეწოდება. თუ ორშედეგიან ცდაში წარმატების ალბათობაა p, მაშინ წარუმატებლობის ალბათობა იქნება $1-p$, რომელსაც შემდგომში q-თი აღვნიშნავთ. ე. ი.

$$q=P(\overline{A})=1-P(A)=1-p.$$

განსაზღვრება 10.2. ორშედეგიან დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობას, წარმატების მუდმივი ალბათობით, ბერნულის სქემა ეწოდება.

მაგალითი. ლითონის ფულს ვაგდებთ 3-ჯერ. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ გერბი მოვა, ა) არცერთხელ, ბ) ერთხელ, გ) ორჯერ, დ) სამჯერ?

ცდის შედეგის ჩაწერის გასამარტივებლად გერბის მოსვლა აღვნიშნოთ ციფრით „1“, ხოლო არმოსვლა ციფრით „0“ ავაგოთ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე:

$\Omega=\{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 1, 1); (1, 0, 0); (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$.

თუ $P_3(k)$-თი აღვნიშნავთ 3 ცდაში გერბის k-ჯერ მოსვლის ალბათობას ($k=0, 1, 2, 3$), კლასიკური სქემის თანახმად, გვექნება:

$$P_3(0)=\frac{1}{8},\ P_3(1)=\frac{3}{8},\ P_3(2)=\frac{3}{8},\ P_3(3)=\frac{1}{8}.$$

თეორემა 10.1. ბერძნული სქემის n ცდაში k წარმატების $P_n(k)$ ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}, \tag{10.1}$$

სადაც $P>0$ არის წარმატების ალბათობა ერთ ცდაში, ხოლო $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ არის ჯუფთებათა რიცხვი n ელემენტიდან k ელემენტად.

დამტკიცება. ვთქვათ ჩატარდა n ურთიერთდამოუკიდებელი ცდა. ყოველი ცდის შედეგად შეიძლება მოხდეს A ან $\overline{A}$ ხდომილობა. A_i სიმბოლოთი აღვნიშნოთ „i-ურ ცდაში მოხდა A ხდომილობა“. $\overline{A}_i$ იქნება „i-ურ ცდაში A ხდომილობა არ მოხდა“. ცდის n-ჯერ გამეორების შედეგად A ხდომილობის k-ჯერ მოხდენა აღვნიშნოთ B-თი. იგი შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ:

$$B=A_1A_2\cdots A_k\,\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n+\cdots+\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-k}\,A_{n-k+1}\cdots A_n.$$

მარჯვენა მხარეში გვაქვს უთავსებად ხდომილობათა ჯამი, ხოლო შესაკრებთა რაოდენობა იქნება იმდენი, რამდენი ჯუფთებაც შეიძლება შევადგინოთ n ელემენტისაგან k ელემენტად, ე. ი. C_n^k.

ცდათა დამოუკიდებლობის გამო მარჯვენა მხარეში თითოეული ხდომილობის ალბათობაა $p^k q^{n-k}$, რადგან თითოეული შესაკრები თანამამრავლად შეიცავს k წარმატებას და $n-k$ წარუმატებლობას, p — წარმატების ალბათობაა, q — წარუმატებლობის.

უთავსებად ხდომილობათა ჯამის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$P_n(k)=P(B)=p^kq^{n-k}+\cdots+p^kq^{n-k}=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k},$$

ამით თეორემა 10.1 დამტკიცებულია. (10.1) ფორმულას ბერნულის ფორმულა ეწოდება.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $\sum\limits_{k=0}^{n}P_n(k)=1$. მართლაც $\sum\limits_{k=0}^{n}P_n(k)=$

$=C_n^0\,p^0q^n+C_n^1\,p^1q^{n-1}+\cdots+C_n^n\,p^nq^0=(p+q)^n=1$

მაგალითი 2. კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას რა უფრო მოსალოდნელია, ექვსიანის ერთხელ მაინც მოსვლა თუ არმოსვლა?

ამოხსნა. ბერნულის ფორმულით ვიპოვოთ ექვსიანის არმოსვლის ალბათობა; ჩვენს შემთხვევაში $n=4$, $k=0$, $p=\dfrac{1}{6}$, $q=\dfrac{5}{6}$, ამიტომ $P_4(0)=\dfrac{4!}{0!\,4!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^5=\dfrac{625}{1296}$, ექვსიანის ერთხელ მაინც მოსვლის ალბათობა კი ტოლია:

$$1-P_4(0)=1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}>P_4(0),$$

ე. ი. კამათლის 4-ჯერ გაგორებისას ექვსიანის ერთხელ მაინც მოსვლა უფრო მოსალოდნელია, ვიდრე არმოსვლა.

ბერნულის ფორმულის გამოყენებით ადვილად შეგვიძლია გამოვთვალოთ შემდეგი ალბათობები:

ა) ბერნულის სქემის n ცდაში ადგილი ექნება k_1 წარმატებას მაინც. აღვნიშნოთ ეს ალბათობა $P_n(k\geqslant k_1)$ სიმბოლოთი:

$$P_n(k\geqslant k_1)=\sum_{k=k_1}^{n}C_n^k\,p^k\,q^{n-k}, \tag{10.2}$$

ბ) ბერნულის სქემის n ცდაში ადგილი ექნება არაუმეტეს k_2 წარმატებას:

$$P_n(k\leqslant k_2)=\sum_{k=0}^{k_2}C_k^n\cdot p^k\cdot q^{n-k}, \tag{10.3}$$

გ) ბერნულის სქემის n ცდაში წარმატებათა რიცხვი არ აღემატება k_2-ს და არანაკლებია k_1-ზე:

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (10.4)$$

§ 11. პოლინარული სქემა. უალბათესი რიცხვი

ორშედეგიან ცდათა მიმდევრობის ანუ ბერნულის სქემის განზოგადებას წარმოადგენს m-შედეგიან ($m>2$) დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობა.

ვთქვათ რაიმე ცდის შედეგებია $A_1, A_2, \ldots, A_m$, ხოლო მათი შესაბამისი ალბათობებია $p_1, p_2, \ldots, p_m$ (სადაც $p_i = P(A_i)$, $i = \overline{1, m}$) მაშინ $p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$. დავუშვათ, ამ ცდის n-ჯერ განმეორებისას A_1-ს ადგილი ჰქონდა n_1-ჯერ, A_2-ს n_2-ჯერ და ა. შ., A_m-ს n_m-ჯერ, მაშინ $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m = n$. აღვნიშნოთ ამ ხდომილობის ალბათობა $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m)$-ით.

თ ე ო რ ე მ ა, 11.1. თუ $p_i \neq 0, p_i \neq 1$, $i = \overline{1, m}$, მაშინ მართებულია ფორმულა:

$$P_n(n_1, n_2, \cdots, n_m) = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}, \qquad (11.1)$$

სადაც

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_m!}$$

$P_n(n_1, n_2, \cdots, n_m)$-ს უწოდებენ პოლინარულ ალბათობას.

ფორმულა (11.1) წარმოადგენს (10.1) ფორმულის განზოგადებას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. 1000 დეტალისაგან შემდგარი პარტიიდან არჩევენ 5 დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მათგან 3 იქნება I ხარისხის, ერთი — II ხარისხის და ერთი — III ხარისხის, თუ მთელ პარტიაში არის 700 — I ხარისხის, 200 — II ხარისხის და 100 — III ხარისხის დეტალი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (იგულისხმება, რომ შერჩეულ დეტალს შერჩევის შემდეგ უკან აბრუნებენ). P_k-თი ($k=1, 2, 3$) აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ შერჩეული დეტალი იქნება k-ური ხარისხის. მაშინ ალბათობის კლასიკური განმარტების საფუძველზე გვექნება:

$$p_1 = 0{,}7, \quad p_2 = 0;2, \quad p_3 = 0{,}1.$$

თუ ვისარგებლებთ პოლინარული ალბათობის (11.1) ფორმულით, მივიღებთ:

$$P_5(3, 1, 1) = \frac{5!}{3!\,1!\,1!}\, 0{,}7^3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}1372.$$

k-ს იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც ბინომური $P_n(k)$ ალბათობა ყველაზე დიდ მნიშვნელობას იღებს, უალბათესი რიცხვი ეწოდება.

იმისათვის, რომ დავადგინოთ უალბათესი რიცხვის მნიშვნელობა, შევისწავლოთ ბინარული $P_n(k)$ ალბათობის, როგორც k-ს ფუნქციის თვისებები.

განვიხილოთ ფარდობა:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-(k+1)}}{C_k^n \cdot p^k \cdot q^{n-k}} = \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \cdot p}{\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot q} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} > 1, \quad \text{როცა} \quad k < np - q \quad \text{და}$$

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} < 1, \quad \text{როცა} \quad k > np - q,$$

ე. ი. $P_n(k)$ როგორც k-ს ფუნქცია ზრდადია, როცა $k<np-q$ და კლებადია, როცა $k>np-q$, ე. ი. მას მაქსიმუმი გააჩნია, როცა $k=[np-q]$*. აქედან უალბათესი რიცხვი k_0 გამოითვლება ფორმულით $k_0=[(n+1)p-1]$. თუ $(n+1)p-1$ მთელია, მაშინ $P_n(k)$-ს გააჩნია ორი მაქსიმუმი $(n+1)p-1$ და $(n+1)p$. ამ შემთხვევაში თითოეული შეიძლება მიღებულ იქნას უალბათეს რიცხვად.

§ 12. მუავრ-ლაპლასის ლოკალური და ინტეგრალური თეორემები

წინა პარაგრაფში განხილული ბერნულის ფორმულა პრაქტიკულად გამოუსადეგარი ხდება, როდესაც ცდათა რიცხვი n საკმარისად დიდია. მაგალითად, თუ $n=1000$, $p=0{,}43$, $k=257$:

$$P_{1000}(257) = C_{1000}^{257} (0{,}43)^{257} (0{,}57)^{743},$$

რაც საკმაოდ მოუხერხებელი გამოსათვლელია.

* [a] ნიშნავს a-ს მთელ ნაწილს.

ბუნებრივად ისმება კითხვა, ხომ არ შეიძლება გვერდი ავუაროთ წამოჭრილ სიძნელეს და $P_n(k)$ სიდიდე გამოვთვალოთ არა ბერნულის ფორმულით, არამედ, რაიმე უფრო მოხერხებული, თუნდაც მიახლოებითი ფორმულის გამოყენებით. ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა მუავრ-ლაპლასის ლოკალური თეორემა, რომელსაც მოვიყვანთ დაუმტკიცებლად.

თ ე ო რ ე მ ა 12.1. ბერნულის სქემის n ცდაში k წარმატების $P_n(k)$ ალბათობა მიახლოებით გამოითვლება ფორმულით:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x),$$

სადაც $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, ხოლო $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი არგუმენტის დადებითი მნიშვნელობებისათვის მოყვანილია სახელმძღვანელოს დანართში. x-ის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის $\varphi(x)$ მნიშვნელობის მოსაძებნად უნდა გავითვალისწინოთ ამ ფუნქციის ლუწობა: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ალბათობა იმისა, რომ ხარატის მიერ დამზადებული დეტალი სტანდარტული იქნება, 0,8-ის ტოლია, ვიპოვოთ იმისი ალბათობა, რომ 10000 დამზადებული დეტალიდან 8020 აღმოჩნდება სტანდარტული.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოღებულ აღნიშვნებში $n = 10000$, $p = 0{,}8$, $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $k = 8020$.

საძიებელი ალბათობა:

$$P_{10000}(8020) = \frac{1}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\,\varphi(x) = \frac{1}{40}\,\varphi(x),$$

სადაც

$$x = \frac{8020 - 0{,}8 \cdot 10000}{40} = 0{,}5.$$

ცხრილში (დანართი № 1) ვპოულობთ, რომ $\varphi(0{,}5) = 0{,}3521$, ამიტომ

$$P_{1000}(8020) = \frac{1}{40} \cdot 0{,}3521 = 0{,}0088.$$

მოყვანილ მაგალითებში დავაფიქსიროთ $k_1 < k_2$ რიცხვები და ვიპოვოთ (10.4) ტოლობით განსაზღვრული $P_n(k_1 < k < k_2)$ ალბათობა. როდესაც ცდათა რიცხვი დიდია, (10,4) ფორმულა ისევე მოუხერხებელია, როგორც ბერნულის ფორმულა, ამიტომ ამ შემთხვევაშიც სარგებლობენ მიახლოებითი ფორმულით, რომელიც მიიღება ლაპლასის ინტეგრალური თეორიების საფუძველზე (დამტკიცება იხ. თ. V, § 4).

თ ე ო რ ე მ 12.4. ბერნულის სქემის n ცდაში ალბათობა იმისა, რომ წარმატებათა რაოდენობა k მოთავსებული იქნება k_1 და k_2 რიცხვებს შორის მიახლოებით გამოითვლება ფორმულით:

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) \approx \Phi(b) - \Phi(a)^*,$$

სადაც

$$b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

$\Phi(x)$ ფუნქციას ალბათობის ინტეგრალი, ანუ ლაპლასის ფუნქცია ეწოდება. იგი არ გამოისახება ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით და მისი მნიშვნელობათა ცხრილი x-ის არაუარყოფითი მნიშვნელობებისათვის მოყვანილია სახელმძღვანელოს დანართში. x-ის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის $\Phi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა მოსაძებნად უნდა ვისარგებლოთ ამ ფუნქციის კენტობით:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ალბათობა იმისა, რომ ამწყობი საამქროს მიერ მიღებული დეტალი აღმოჩნდება არასტანდარტული, 0,1-ის ტოლია. ვიპოვოთ იმის ალბათობა, რომ 1600 მიღებულ დეტალში სტანდარტულ დეტალთა რაოდენობა იქნება არანაკლებ 1400-სა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულობის თანახმად, $n = 1600$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$, $k_1 = 1400$, $k_2 = 1600$ და 12.2 თეორემის საფუძველზე:

$$b = \frac{1600 - 1600 \cdot 0{,}9}{\sqrt{1600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = \frac{160}{12} = 13{,}3;$$

$$a = \frac{1400 - 1600 \cdot 0{,}9}{12} = \frac{-40}{12} = -3{,}3;$$

$$P_{1600}(1400 \leqslant k \leqslant 1600) = \Phi(13{,}3) - \Phi(-3{,}3) =$$
$$= \Phi(13{,}3) + \Phi(3{,}3) = 0{,}5 + 0{,}4996 = 0{,}9996.$$

---

* k_1 ან k_2 ბოლოების ჩართვა ან ჩაურთველობა არ ცვლის ამ მიახლოებითი ტოლობის მარჯვენა მხარეს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ცხრილში მოყვანილია $\Phi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები არგუმენტის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც არ აღემატებიან 5-ს. არგუმენტის 5-ზე მეტი მნიშვნელობისათვის თვლიან, რომ $\Phi(x)=0,5$.

§ 13. პუასონის ფორმულა

როგორც ვნახეთ, ბერნულის ფორმულა გამოუსადეგარია, როდესაც ცდათა რიცხვი საკმაოდ დიდია. ამ შემთხვევაში სარგებლობენ მუავრ-ლაპლასის მიახლოებითი ფორმულით. შევნიშნოთ, რომ ამ მიახლოებითი ფორმულით დაშვებული ცდომილება მით მეტია, რაც უფრო მცირეა წარმატებების ალბათობა. მცირე p-სათვის ($p<0,1$) მიმართავენ პუასონის მიახლოებით ფორმულას.

ამოცანა ასე ისმის: ვიპოვოთ იმის ალბათობა, რომ n დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობა მოხდება ზუსტად k-ჯერ, თუ ცდათა რიცხვი n ძალიან დიდია, ხოლო თითოეულ ცდაში წარმატების ალბათობა p ახლოსაა ნულთან (ასეთ ხდომილობებს იშვიათი ხდომილობები ეწოდება).

პუასონის ფორმულის გამოყვანისას უნდა გავაკეთოთ მეტად მნიშვნელოვანი დაშვება: ნამრავლი np ინარჩუნებს მუდმივ λ მნიშვნელობას, ანუ $p=\dfrac{\lambda}{n}$.

საძიებელი ალბათობის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ბერნულის ფორმულით:

$$P_n(k)=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!}p^k q^{n-k}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k};$$

რადგან n-ს ვგულისხმობთ ძალიან დიდს, ვიპოვოთ ამ გამოსახულების ზღვარი, როდესაც $n\to\infty$. აქვე შევნიშნოთ, რომ რადგანაც $n\to\infty$ და $np=\lambda$, ალბათობა $p\to 0$. მივიღებთ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!}\,\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\Big]=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

ამრიგად,

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad (13,1)$$

ამ ფორმულას პუასონის ფორმულა ეწოდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ტრანსპორტირებისას მზა პროდუქციის დაზიანების ალბათობა არის 0,0002. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გაგზავნილი 5000 ერთეულიდან ტრანსპორტირებისას დაზიანდება 3.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $n=5000$, $p=0,0002$, $k=3$, $\lambda=np=5000.\,0,0002=1$. პუასონის ფორმულის თანახმად:

$$P_{5000}(3)=\frac{e^{-1}}{3!}=\frac{1}{6e}\approx 0,06.$$

II თავი

შემთხვევითი სიდიდეები

§ 1. შემთხვევითი სიდიდე და მისი განაწილების კანონი

შემთხვევითი სიდიდის ცნება ალბათობის თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა. ვიდრე მის ფორმალურ განმარტებაზე გადავიდოდეთ, მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი. უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ ცდებს, რომლებსაც ჩვენ განვიხილავთ, ყოველთვის არ გააჩნია ისეთი შედეგები, რომლებიც რიცხვებით გამოისახებიან. თუ განვიხილავთ ლითონის ფულის აგდებას, ცდის შედეგი არის საფასურის ან ღერბის მოსვლა და იგი რიცხვით არ გამოისახება, მაგრამ შეიძლება განისაზღვროს X სიდიდე, რომელიც მიიღებს 1-ის ან 0-ის ტოლ მნიშვნელობას, იმისდა მიხედვით თუ რომელ შედეგს ექნება ადგილი — საფასურს თუ ღერბს. ასეთი X სიდიდის შემოტანის შემდეგ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ X-ის მიერ ცდის ჩატარებისას 1-იანის ან 0-ის მნიშვნელობის მიღებაზე და არა საფასურის ან ღერბის მოსვლაზე.

კამათლის გაგორებისას შედეგი არის ამა თუ იმ წახნაგის ზემოთ მოქცევა, მაგრამ, რადგან წახნაგები გადანომრილია, ცდის შედეგი რიცხვს წარმოადგენს. ამ შემთხვევაშიც შეგვიძლია შემოვიტანოთ X სიდიდე, რომელსაც შეუძლია მიიღოს 1, 2, 3, 4, 5 და 6-ის ტოლი მნიშვნელობები იმისდა მიხედვით, თუ რომელი წახნაგი აღმოჩნდება ზემოთ მოქცეული.

განვიხილოთ მაგალითი. ყუთში მოთავსებულია ლურჯი, წითელი, მწვანე და თეთრი ფერის ბურთულები. ალალბედზე ამოღებული ბურთულა შეიძლება აღმოჩნდეს ერთ-ერთი ზემოთ დასახელებული ფერებიდან. ცხადია ω ელემენტარული ხდომილობები ანუ ცდის შედეგები რიცხვებით არ გამოისახება, მაგრამ აქაც, ისევე როგორც წინა მაგალითებში, შეიძლება განვიხილოთ X სიდიდე, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს 1, 2, 3, 4, იმისდა მიხედვით, თუ რა ფერის ბურთულა იქნა ამოღებული ყუთიდან.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითები იმაზე მიგვითითებენ, რომ ნებისმიერი ცდა შეიძლება აღიწეროს რიცხვითი სიდიდით, რომლის ესა თუ ის მნიშვნელობა დამოკიდებული იქნება ცდის შედეგზე.

ცდის შედეგები კი, როგორც ვიცით, წარმოადგენენ Ω ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ელემენტებს $\Omega=\{\omega\}$. ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს X სიდიდე წარმოვიდგინოთ, როგორც Ω სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია. ω-ზე მისი მნიშვნელობა აღვნიშნოთ $X(\omega)$ სიმბოლოთი.

განვიხილოთ რაიმე $x\in R$ რიცხვი $[X<x]$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ ყველა იმ ω ელემენტარულ ხდომილობათა ერთობლიობა, რომლებისთვისაც $X(\omega)<x$. იგი წარმოადგენს Ω-ს ქვესიმრავლეს ანუ შემთხვევით ხდომილობას.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.1. შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება Ω-ზე განსაზღვრულ ფუნქციას, რომლისთვისაც $[X<x]$ სიმრავლე, ყოველი x რიცხვისათვის წარმოადგენს ხდომილობას, გარკვეული ალბათობით.

შევნიშნოთ, რომ $[X<x]$ სიმრავლესთან ერთად, ხდომილობებს წარმოადგენენ $[X>x]$ და $[X=x]$ სიმრავლეები და მათაც გარკვეული ალბათობები გააჩნია.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ორი ტიპის შემთხვევით სიდიდეს:

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.2. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება დისკრეტული ტიპის, თუ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრულია ან თვლადი.

ასეთი ტიპის შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები შეიძლება მოიცეს $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ მიმდევრობის სახით.

შემოვიღოთ აღნიშვნები $A_1=[X=x_1]$, $A_2=[X=x_2], \dots, A_n=[X=X_n], \dots$; რადგან X შემთხვევითი სიდიდეა, ყოველი A_n, $n=1, 2, \dots$ წარმოადგენს ხდომილობას ალბათობით, $P_n=P(A_n)=P[X=x_n]$, $n=1, 2, 3, \dots$;

შევადგინოთ ცხრილი:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ \hline & P_1 & P_2 & \cdots & P_n & \cdots \end{array}, \quad \text{ან} \quad \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n, & \dots \\ P_1, & P_2, & \dots, & P_n, & \dots \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

1.1. ცხრილის ზედა სტრიქონში მოცემულია შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები, ხოლო ქვედა სტრიქონში — შესაბამისი ალბათობები. ასეთ ცხრილს შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს უწოდებენ, შევნიშნოთ, რომ $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$ და $A_i\cap A_j=\varnothing$, როცა $i\neq j$ i, $j=1, 2, 3 \cdots n$, ამიტომ ალბათობის ერთ-ერთი თვისების თანახმად:

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(A_{n+1})+\cdots+\cdots=1,$$

ე. ი.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n=1.$$

განვიხილოთ X შემთხვევითი სიდიდე და $[X<x]$ ხდომილობა. ამ ხდომილობის $P[X<x]$ ალბათობა ცხადია დამოკიდებულია x-ზე და წარმოადგენს ნამდვილი ცვლადის ნამდვილ ფუნქციას. ამ ფუნქციას შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ეწოდება, მას F სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. მაშასადამე, X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ყოველი $x\in R$ რიცხვისათვის განმარტებულია ტოლობით:

$$F(x)=P[X<x].$$

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდის უნივერსალურ მახასიათებელს.

განვიხილოთ F განაწილების ფუნქციის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თვისება.

1. F ფუნქცია არაკლებადია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე. მართლაც, ავიღოთ ორი ნებისმიერი რიცხვი $x_1<x_2$. ცხადია, რომ $F(x_1)=P[X<x_1]$, $F(x_2)=P[X<x_2]$, ამასთანავე $[X<x_i]\subset[X<x_2]$, რაც იწვევს $P[X<x_i]\leqslant P[X\leqslant x_2]$ უტოლობას, საიდანაც $F(x_i)\leqslant F(x_2)$. რაც F-ის არაკლებადობას ნიშნავს.

2. $F(+\infty)=1$, $F(-\infty)=0$, როგორც ცნობილია $F(+\infty)$ და $F(-\infty)$ სიმბოლოების ქვეშ გულისხმობენ $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ და $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$, ადვილი მისახვედრია, რომ ეს ზღვრები წარმოადგენენ $[X<+\infty]$ და $[X<-\infty]$ ხდომილობათა ალბათობებს. ამასთანავე $[X<+\infty]$ და $[X<-\infty]$ ხდომილობათა ალბათობები უდრის 1-ს და 0-ს, როგორც აუცილებელ და შეუძლებელ ხდომილობათა ალბათობები, ანუ $F(+\infty)=1$ და $F(-\infty)=0$.

3. ნებისმიერი X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების F ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე. განაწილების ფუნქციის ეს თვისება მოგვყავს დაუმტკიცებლად.

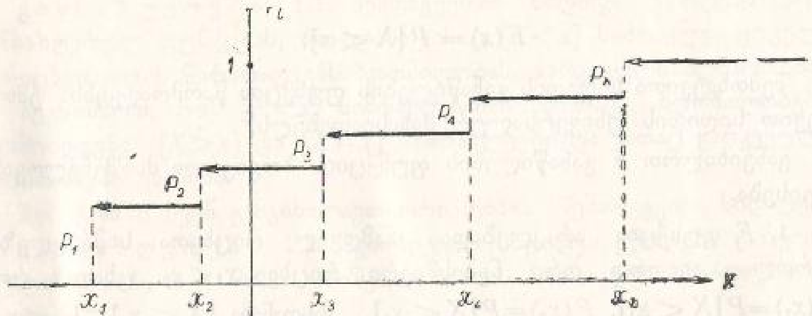
განვიხილოთ დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის აგების მაგალითი, ამასთანავე ვიგულისხმოთ, რომ X-ის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრულია და დალაგებულია ზრდადობის მიხედვით: $x_1<x_2<\cdots<x_n$. მისი განაწილების კანონი მოცემულია 1. 2 ცხრილის სახით:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, \ldots, & x_n \\ P_1, & P_2, & P_3, \ldots, & P_n \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

ცხადია,

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1,$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობები რიცხვთა ღერძზე წარმოვიდგინოთ შესაბამისი წერტილებით და ავაგოთ X-ის განაწილების ფუნქცია:



ნახ. 5

განაწილების ფუნქციის განმარტების თანახმად ყოველ x წერტილზე მისი მნიშვნელობა ტოლია იმ ალბათობების ჯამისა, რომლის სათანადო მნიშვნელობები ნაკლებია x-ის აღებულ მნიშვნელობაზე:

$$F(x) = \sum_{x_i<x} P_i, \qquad (1.3)$$

სადაც ჩანაწერი ჯამის სიმბოლოს ქვეშ მიგვითითებს, რომ აჯამვა უნდა განხორციელდეს ისეთი P_i რიცხვებისა, რომელთა i ინდექსი აკმაყოფილებს მითითებულ $x_i<x$ უტოლობას. ნახ. 5-ის მიხედვით:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x \leqslant x_1; \\ P_1, & \text{როცა } x_1 < x \leqslant x_2; \\ P_1 + P_2, & \text{როცა } x_2 < x \leqslant x_3; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1, & \text{როცა } x > x_n. \end{cases}$$

როგორც განაწილების ფუნქციის აღწერიდან ჩანს, X დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია წარმოადგენს საფეხურა ფუნქციას, განსაზღვრულს R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე; ყოველ წერტილზე მარცხნიდან უწყვეტია, გააჩნია 1-ლი გვარის წყვეტის წერტილები ანუ ნახტომები, ნახტომის წერტილი X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობაა, ხოლო თვით ნახტომის სიდიდე — აღებული მნიშვნელობის ალბათობა.

განაწილების ფუნქციის საშუალებით შეიძლება გამოვთვალოთ X შემთხვევითი სიდიდის რაიმე $[a, b]$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა:

$$P[a \leqslant X < b] = P[X<b] - P[X<a] = F(b) - F(a). \qquad (1{\cdot}4)$$

მართლაც, რადგან $[a\leqslant X<b]$ ხდომილობა შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ორი $[X<b]$ და $[X<a]$ ხდომილობათა სხვაობა, ჯამის ალბათობის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ (1.4) ტოლობას, რომლის მარცხენა მხარე წარმოადგენს განაწილების ფუნქციის ნაზრდს $[a, b)$ ინტერვალზე.

განსაზღვრება 1.3. X შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება უწყვეტი ტიპის, თუ მისი განაწილების ფუნქცია წარმოიდგინება $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ ინტეგრალის სახით, სადაც f არაუარყოფითი ფუნქციაა.

f ფუნქციას X უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე ეწოდება, მას განაწილების დიფერენციალურ კანონსაც უწოდებენ. ანალოგიურად განაწილების F ფუნქციას განაწილების ინტეგრალური კანონი ეწოდება.

ცხადია მათ შორის არსებობს თანაფარდობა $F'(x)=f(x)$. განაწილების სიმკვრივის საშუალებით X შემთხვევითი სიდიდის რაიმე ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა ტოლია:

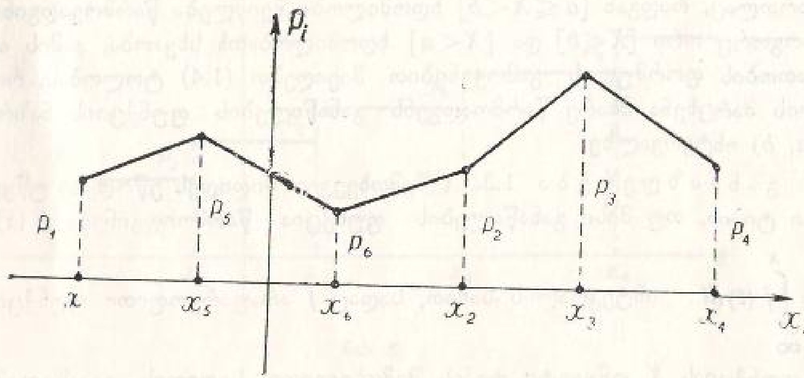
$$P[a \leqslant X < b] = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx. \quad (1.5)$$

უწყვეტი ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის მიერ რაიმე კონკრეტული რიცხვითი მნიშვნელობის მიღების ალბათობა ნულის ტოლია, რაც ჩაიწერება შემდეგნაირად $P[X=a]=0$ (საკმარისია წინა ტოლობაში დავუშვათ, რომ $a=b$). ამ შენიშვნის გათვალისწინებით შევნიშნოთ, რომ $[a, b)$ და (a, b) ინტერვალში მოხვედრის ალბათობები ტოლია. ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობას:

$$F(+\infty) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1. \quad (1.6)$$

(1.6) ტოლობა წარმოადგენს უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივის ნორმირების პირობას. $f(x)\,dx$ დიფერენციალს ალბათობის ელემენტს უწოდებენ, იგი წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის $(x, x+dx)$ მცირე ინტერვალში მოხვედრის ალბათობას.

განვიხილოთ (1, 1) ცხრილით მოცემული დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე. მისი განაწილების კანონი შეიძლება წარმოვიდგინოთ გრაფიკულად (ნახ. 6).



ნახ. 6

ნახაზზე გამოსახულ მრავალგვერდას (რომლის აგების წესი უშუალოდ ჩანს ნახაზიდან) დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების მრავალგვერდა ეწოდება. იგი სიმკვრივის ანალოგიურ მრუდს წარმოადგენს.

§ 2. შემთხვევითი ვექტორი ანუ მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, შემთხვევითი სიდიდე არსებითად დაკავშირებულია შემთხვევით ექსპერიმენტთან და იგი მოცემული ექსპერიმენტის აღწერას წარმოადგენს. თუ ზემოთ განხილული შემთხვევითი ექსპერიმენტები აღიწერა ერთი შემთხვევითი სიდიდით, პრაქტიკაში არსებობს ისეთი ექსპერიმენტებიც, რომელთა აღწერა-დახასიათება ერთი შემთხვევითი სიდიდით შეუძლებელია, მაგალითად დისტანციური ჭურვის აფეთქების წერტილი ხასიათდება სამი X, Y, Z კოორდინატით, სადაც თითოეული კორდინატი წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს.

ასეთი ცდების აღწერა და დახასიათება მოითხოვს განვიხილოთ შემთხვევით სიდიდეთა დალაგებული ერთობლიობა $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, რომელსაც შემთხვევითი ვექტორი ანუ მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება. ყოველი X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ ვექტორის მდგენელი ანუ კომპონენტია, ხოლო მათი რაოდენობა (n)—ვექტორის განზომილებაა. ვექტორის კონკრეტული მნიშვნელობა $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წარმოადგენს ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრცის—R_n-ის ელემენტს. როგორც მათემატიკური ანალიზიდან ცნობილია R_n-ში გვაქვს ინტერვალის, სეგმენტის, უსასრულო ინტერვალის ცნებები:

$I = [a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n]$ სიმრავლეს დახურული ინტერვალი ანუ სეგმენტი ეწოდება;

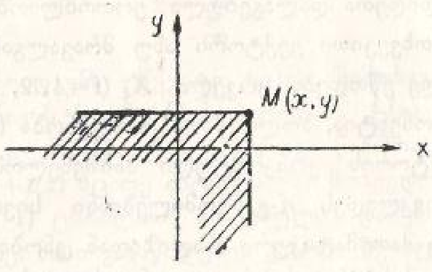
$I = [a_i < x_i < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2, \ldots, a_n < x_n < b_n]$ სიმრავლე ღია ინტერვალს წარმოადგენს;

$I = [x_1 < b_1,\ x_2 < b_2, \ldots, x_n < b_n]$ სიმრავლეს უსასრულო ინტერვალი ეწოდება.

ისევე, როგორც ერთგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდისათვის, მრავალგანზომილებიანი შემთხვევისთვისაც შემოვიყვანოთ განაწილების ფუნქციის ცნება.

განვიხილოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ რიცხვები და ჩანაწერით $[X_i<x_i, X_1<x_2, X_2 < x_3, \ldots, X_n]$ აღვნიშნოთ ხდომილობა, რომელიც $[X_1 < x_1]$, $[X_2 < x_2], \ldots, [X_n < x_n]$ ხდომილობათა ერთდროულად მოხდენას ნიშნავს, ე. ი. ადგილი აქვს $\bigcap_{i=1}^{n} [X_i < x_i]$ ხდომილობას. $P[X_1 < x_1,\ X_2 < x_2, X_3 < x_3, \ldots, X_n < x_n]$ დამოკიდებულია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ რიცხვებზე, ე. ი. წარმოადგენს n ცვლადის ფუნქციას, აღვნიშნოთ იგი $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სიმბოლოთი და ვუწოდოთ n განზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის ერთობლივი განაწილების ფუნქცია.

შემთხვევითი ვექტორი დისკრეტული ტიპისაა, თუ თითოეული მისი მდგენელი წარმოადგენს დისკრეტული ტიპის შემთხვევით სიდიდეს. ანალოგიურად განიმარტება უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი ვექტორი. შემდგომში სიმარტივისათვის ჩვენ განვიხილავთ ორგანზომილებიან (X, Y) ვექტორს, თუმცა ბოლოს მოვახდენთ სათანადო განზოგადებებს n-განზომილებიანი ვექტორისათვისაც. ცხადია (X, Y) ვექტორის კონკრეტული მნიშვნელობა (x, y) შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც R_2 სიბრტყის წერტილი. F ფუნქციის მნიშვნელობა მოცემულ (x, y) წერტილზე წარმოადგენს იმ უსასრულო მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობას, რომლის წვერო (x, y) წერტილში მდებარეობს (ნახ. 7-ზე დაშტრიხული უსასრულო მართკუთხედი).



ნახ. 7

განვიხილოთ დისკრეტული ტიპის (X, Y) ვექტორი, სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ მისი კომპონენტები ღებულობენ სასრული რაოდენობის სხვადასხვა მნიშვნელობებს, მისი შესაძლო მნიშვნელობები და ალბათობები წარმოვადგინოთ ცხრილის სახით, რომელიც იძლევა (X, Y) ვექტორის განაწილების კანონს:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	...	P_{1n}
y_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	...	P_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	...	...
y_m	P_{m1}	P_{m2}	P_{m3}	$\vdots$	P_{mn}

ნახ. 8

აქ მიღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$$P_{ik} = P\left[X=x_i,\ Y=y_k\right],\ i=1,2\cdots n;\ k=1,\ 2,\cdots,\ m.$$

რაც შეეხება ალბათობის ნორმირების პირობას, იგი ჩაიწერება ორმაგი ჯამის სახით:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} P_{ik}=1. \tag{2.2}$$

თუ გამოვიყენებთ სრული ალბათობის ფორმულას, ამ ცხრილის თითოეული სვეტის ან თითოეული სტრიქონის ჯამი გვაძლევს შესაბამისად X-ის და Y-ის კონკრეტული მნიშვნელობის ალბათობას:

$$p_i=P\left[X=x_i\right]=\sum_{k=1}^{m} P\left[X=x_i,\ Y=y_k\right]=\sum_{k=1}^{m} P_{ik},\ i=1,2,\cdots n;$$

$$q_k=P\left[Y=y_k\right]=\sum_{i=1}^{n} P\left[X=x_i,\ Y=y_k\right]=\sum_{i=1}^{n} P_{ik},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

p_i და q_k რიცხვების ერთობლიობა წარმოადგენენ შესაბამისად X და Y შემთხვევით სიდიდეთა კერძო განაწილებებს. შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა სამართლიანია იმ შემთხვევისათვისაც, როდესაც X და Y სიდიდეები ღებულობენ უსასრულო რაოდენობის სხვადასხვა მნიშვნელობებს.

ნახ. 8-ზე მოცემული ცხრილი წარმოადგენს (X, Y) ვექტორის განაწილების კანონს.

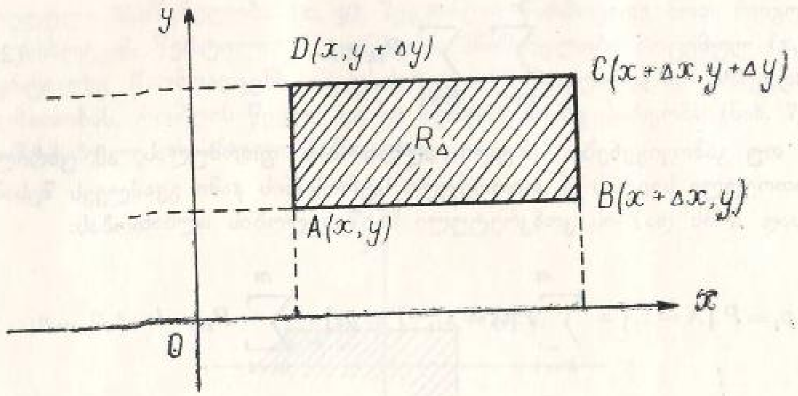
ერთობლივი განაწილების $F(x, y)$ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,\ y)=1;$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,\ y)=0.$

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორგანზომილებიანი (X, Y) ვექტორის განაწილების $F(x, y)$ ფუნქცია და გვაინტერესებს გამოვთვალოთ

ალბათობა იმისა, რომ (X, Y) ვექტორი მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც მიეკუთვნება რაიმე R_Δ მართკუთხედს, რომლის წვეროებია $A(x, y)$, $B(x+\Delta x, y)$, $C(x+\Delta x, y+\Delta y)$, $D(x, y+\Delta y)$, ხოლო Δx და Δy დამოუკიდებელი x, y ცვლადების შესაბამისი ნაზრდებია (ნახ: 9).



ნახ. 9

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: A იყოს ხდომილობა: „(X, Y) მიიღებს მნიშვნელობას, A წვეროს მქონე უსასრულო მართკუთხედიდან“, ანალოგიურად განვმარტოთ B, C და D ხდომილობები. რაც შეეხება R_Δ მართკუთხედში (X, Y) ვექტორის მოხვედრის ალბათობას, A, B, C და D ხდომილობების გეომეტრიული შინაარსიდან გამომდინარე, გვექნება:

$$P[(X, Y)\in R_\Delta] = P(C) - P(B) - P(D) + P(A).$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი ალბათობები, ერთობლივი განაწილების $F(x, y)$ ფუნქციის საშუალებით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$P(C)=F(x+\Delta x, y+\Delta y)$, $P(B)=F(x+\Delta x, y)$ $P(D)=F(x, y+\Delta y)$, $P(A)=F(x, y)$. ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ საძიებელი ალბათობის გამოსახულებაში. მივიღებთ, რომ:

$$P[(X,Y)\in R_\Delta] = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x, y). \quad (2.3)$$

(2.3) ტოლობა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ რაიმე მართკუთხედში

მოხვედრის ალბათობა, ერთობლივი განაწილების ფუნქციისა და ამ მართკუთხედის წვეროთა კოორდინატების საშუალებით.

(2. 3) ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ R_Δ მართკუთხედის ფართობზე ანუ $\Delta x \Delta y$ ნამრავლზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც Δx Δy ნულისაკენ მიისწრაფის.

ტოლობის მარცხენა მხარეში გვექნება ორი არაუარყოფითი სიდიდის (ალბათობისა და ფართობის) შეფარდების ზღვარი, რომელსაც ალბათობის სიმკვრივე ეწოდება (x, y) წერტილში და $f(x, y)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. განმარტების თანახმად:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P[(x, y)\in R_\Delta]}{\Delta x \Delta y},$$

ცხადია $f(x, y) \geqslant 0$. რაც შეეხება ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი შეფარდების ზღვარს:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta x) + F(x, y)}{\Delta x \cdot \Delta y},$$

როგორც მათემატიკური ანალიზიდანაა ცნობილი, იგი წარმოადგენს $F(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის შერეულ კერძო წარმოებულს — $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. ამრიგად, გვექნება ტოლობა:

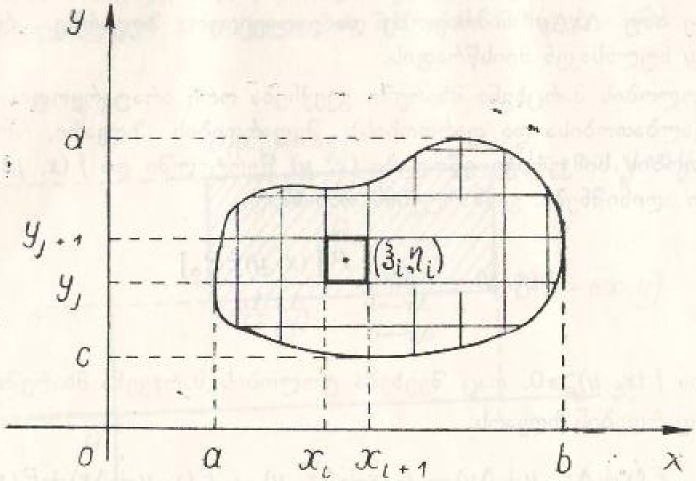
$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

$f(x, y)$ ფუნქციას ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე ეწოდება. $f(x, y)\,dxdy$ დიფერენციალს ალბათობის ელემენტი ეწოდება და წარმოადგენს იმ უსასრულოდ მცირე მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობას, რომლის წვერო (x, y) წერტილშია, გვერდები კი dx, dy სიდიდეებს წარმოადგენს. ხშირად $F(x, y)$ ერთობლივი განაწილების ფუნქციას განაწილების ინტეგრალურ კანონს უწოდებენ, ხოლო $f(x, y)$-ს კი — დიფერენციალურს.

დავუშვათ მოცემული გვაქვს (X, Y) ვექტორის $f(x, y)$ სიმკვრივე და გვაინტერესებს (X, Y) ვექტორის რაიმე $D \subset R_2$ არეზე მოხვედრის ალბათობა, რომელიც $P[(X, Y)\in D]$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ.

სიმარტივისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ D არე მარტივია, ე. ი. კო-

ორდინატთა ღერძების პარალელური წრფეები არეს საზღვარს გადაკვეთს არაუმეტეს ორ წერტილში. (იხ. ნახ. 10.).



ნახ. 10

კორდინატთა ღერძების პარალელური წრფეებით D არე დავყოთ მცირე მართკუთხედებად, რომლის გვერდებია $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ და $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, სადაც $i=1, 2,..., m$, $j=1, 2,..., n$. მაშინ მცირე მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობად $f(x, y)$ სიმკვრივის განმარტების თანახმად შეგვიძლია მივიღოთ $f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i \cdot \Delta y_i$, სიდიდე, სადაც (ξ_i, η_j) მცირე მართკუთხედიდან ნებისმიერად არჩეული წერტილია. თუ მოვახდენთ ასეთი ალბათობების აჯამვას მართკუთხედების მიხედვით, მივიღებთ გამოსათვლელი ალბათობის მიახლოებით მნიშვნელობას:

$$P[(X, Y)\in D] \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j. \tag{2.4}$$

მიახლოებითი ტოლობა გადავა ზუსტ ტოლობაში, თუ განვიხილავთ (2.4) გამოსახულების ზღვარს, როდესაც მართკუთხედებიდან უდიდესის ფართობი მიისწრაფის ნულისაკენ. ასეთი გამოსახულების ზღვარს, როდესაც იგი არ არის დამოკიდებული (ξ_i, η_j) წერტილის არჩევაზე, როგორც მათემატიკური ანალიზის კურსიდანაა ცნობილი, ეწოდე-

ბა ორჯერადი ინტეგრალი $f(x, y)$ ფუნქციიდან გავრცელებული D არეზე. საბოლოოდ გვექნება:

$$P[(X, Y)\in D] = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

თუ $D=R_2$, მაშინ მარცხენა მხარეში გვექნება აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა და ერთობლივი განაწილების სიმკვრივის ნორმირების პირობა ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1,$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც მოცემულია ერთობლივი განაწილების $f(x, y)$ სიმკვრივე და გვინდა ვიპოვოთ განაწილების $F(x, y)$ ფუნქცია, ცხადია განაწილების სიმკვრივე უნდა ვაინტეგროთ უსასრულო მართკუთხედზე, რომლის წვერო მდებარეობს $M(x, y)$ წერტილში, ასე რომ:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t, \tau)\,dt\,d\tau. \tag{2.5}$$

განვიხილოთ $F(x, y)$ ერთობლივი განაწილების ფუნქციის ზღვარი როდესაც $y\to\infty$, $\lim\limits_{y\to\infty} F(x, y) = F(x, \infty)$. ეს ზღვარი იმავე დროს წარმოადგენს $P[X<x, Y<y]$ ალბათობის ზღვარს, რაც თავის მხრივ $[X<x]$ ხდომილობის ალბათობაა, ხოლო ეს უკანასკნელი კი X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას წარმოადგენს. ავღნიშნოთ იგი $F_1(x)$ სიმბოლოთი, გვექნება:

$$F_1(x) = \lim_{y\to\infty} F(x, y) = F(x, \infty).$$

$F_1(x)$ ფუნქციას კერძო განაწილების ფუნქციას უწოდებენ. ანალოგიურად შეიძლება განვმარტოთ ნებისმიერი მდგენელის კერძო განაწილების ფუნქცია, როდესაც საქმე გვაქვს მრავალგანზომილებიან შემთხვევით სიდიდესთან: ვექტორის განაწილების ფუნქციის საშუალებით რომ ვიპოვოთ რომელიმე მდგენელის კერძო განაწილების ფუნქცია, საჭიროა ერთობლივი განაწილების ფუნქციაში დარჩენილი ცვლადების მიხედვით გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც ეს უკანასკნელნი

მიისწრაფვიან უსასრულობისაკენ. სახელდობრ, Y-ის კერძო განაწილების ფუნქციისათვის გვექნება:

$$F_2(y) = P[Y < y] = \lim_{x \to \infty} F(x, y) = F(\infty, y);$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ $F(x, y)$ ფუნქციის (2.5) ინტეგრალურ წარმოდგენას $f(x, y)$ სიმკვრივის საშუალებით და შესაბამისი ცვლადებით გადავალთ ზღვარზე, გვექნება შემდეგი ტოლობები:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau)\, dt\, d\tau; \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau)\, dt\, d\tau.$$

ეს ტოლობები საშუალებას გვაძლევს ერთობლივი განაწილების სიმკვრივის საშუალებით ვიპოვოთ $F_1(x)$ და $F_2(y)$ კერძო განაწილების ფუნქციები, მათი გაწარმოებით კი ვიპოვოთ კერძო სიმკვრივეები, რომლებიც $f_1(x)$ და $f_2(y)$ სიმბოლოებით აღინიშნება, ინტეგრალის ცვლადი ზედა საზღვრით გაწარმოების წესის გამოყენებით მივიღებთ:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \tau)\, d\tau \quad \text{და} \quad f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, y)\, dt;$$

ე. ი. ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის კერძო სიმკვრივის მისაღებად, ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე უნდა ვაინტეგროთ მეორე ცვლადით $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე.

§ 3. პირობითი განაწილების სიმკვრივე და შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა

როგორც წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ, შემთხვევითი ვექტორის ერთობლივი განაწილების ფუნქციის ან სიმკვრივის საშუალებით, შეგვიძლია ვიპოვოთ კერძო (ნებისმიერი მდგენელის) განაწილების ფუნქცია ან სიმკვრივე.

ალბათობის თეორიაში ხშირად გვხვდება შებრუნებული ამოცანა: კერძო განაწილებების საშუალებით ვიპოვოთ ერთობლივი განაწილება. საზოგადოდ ასეთი ამოცანის ამოხსნა შეუძლებელია. იმისათვის, რომ ამომწურავად დავახასიათოთ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემა, არ არის საკმარისი ვიცოდეთ თითოეული მათგანის განაწილების კანონი, საჭიროა ვიცოდეთ მათ შორის დამოკიდებულებაც. ეს დამოკიდებუ-

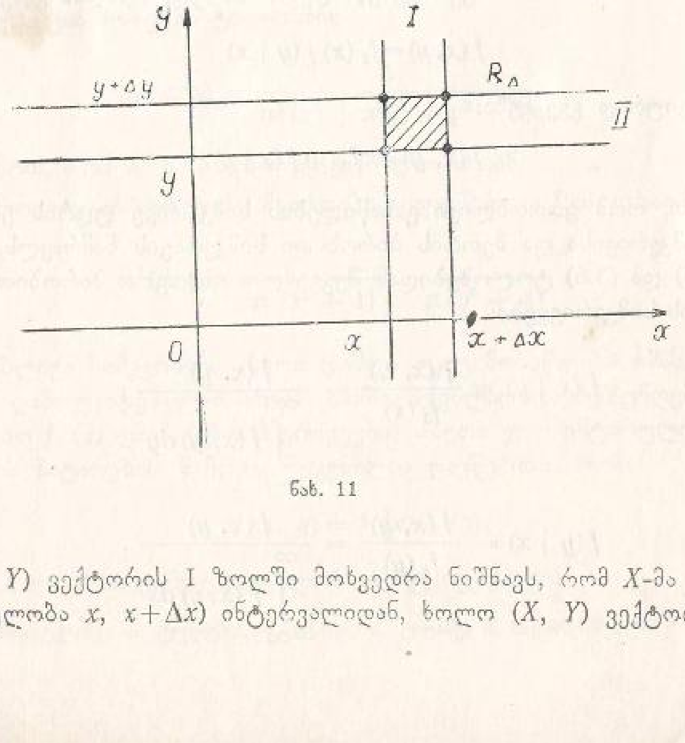
ლება შეიძლება დახასიათდეს ე. წ. პირობითი განაწილების კანონებით, რომლებსაც ქვემოთ განვიხილავთ.

თუ X შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს (X, Y) ვექტორის მდგენელს, მაშინ მისი პირობითი განაწილების კანონი წარმოადგენს მის განაწილების კანონს გამოთვლილს იმ პირობით, რომ მეორე შემთხვევითმა სიდიდემ მიიღო გარკვეული $Y=y$ მნიშვნელობა. შესაბამისად გვექნება პირობითი განაწილების $F(x|y)$ ფუნქცია და პირობითი განაწილების $f(x|y)$ სიმკვრივე.

თუ ვიცით ერთ-ერთი მდგენელის განაწილება და მეორის პირობითი განაწილება, შეგვიძლია შევადგინოთ ერთობლივი განაწილება (ფუნქციის ან სიმკვრივის სახით). გამოვიკვლიოთ მათ შორის თანაფარდობა. განვიხილოთ (X, Y) ვექტორი და ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული გვაქვს ერთობლივი განაწილების $f(x, y)$ სიმკვრივე.

აღვნიშნოთ მართკუთხედი, რომლის მარცხენა ქვედა წვერო (x, y) წერტილშია და გვერდები კი წარმოადგენს Δx და Δy ნაზრდებს. მაშინ R_Δ მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც I და II ვერტიკალურ და ჰორიზონტალურ ზოლებში ერთდროულად მოხვედრის ალბათობა (ნახ. 11) და გვექნება:

$$P[(X, Y) \in R_\Delta] = P[(X, Y) \in \mathrm{I};\ (X, Y) \in \mathrm{II}] \qquad (3\cdot1$$



ნახ. 11

(X, Y) ვექტორის I ზოლში მოხვედრა ნიშნავს, რომ X-მა მიიღო მნიშვნელობა $x, x+\Delta x)$ ინტერვალიდან, ხოლო (X, Y) ვექტორის II

ზოლში მოხვედრა ნიშნავს, რომ Y-მა მიიღო მნიშვნელობა $(y,\ y+\Delta y)$ ინტერვალიდან. ასე რომ შეიძლება დავწეროთ:

$$P[(X,Y)\in R_\Delta]=P[x<X<x+\Delta x,\ y<Y<y+\Delta y] \qquad (3.2)$$

(3.2) ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომი ალბათობა მოცემული $f(x,\ y)$ სიმკვრივის საშუალებით ცხადია ჩაიწერება შემდეგნაირად: $P[(X,Y)\in R_\Delta]=f(x,\ y)\,\Delta x\cdot\Delta y$, რაც შეეხება მარჯვენა მხარეში მდგომი ალბათობა წარმოადგენს ორი ხდომილობის ნამრავლის ალბათობას და ცნობილი ფორმულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$P[x<X<x+\Delta x,\ y<Y<y+\Delta y]=$$
$$=P[x<X<x+\Delta x]\,P[y<Y<y+\Delta y\mid x<X<x+\Delta x]. \qquad (3.3)$$

თუ (3.2) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე (3.3) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობას:

$$f(x,\ y)\,dx\,dy=f_1(x)\,dx\,f(y\mid x)\,dy, \qquad (3.4)$$

სადაც $f_1(x)$ წარმოადგენს X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს, ხოლო $f(y|x)$ წარმოადგენს Y — შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს იმ პირობით, რომ $X=x$, მას როგორც ალვნიშნეთ Y-ის პირობითი სიმკვრივე ეწოდება. 3.4 ტოლობიდან გვაქვს:

$$f(x,y)=f_1(x)\,f(y\mid x) \qquad (3.5)$$

ანალოგიურად გვექნება:

$$f(x,\ y)=f_2(y)\,f(x\mid y). \qquad (3.6)$$

მივიღეთ, რომ ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე უდრის ერთ-ერთის სიმკვრივისა და მეორის პირობითი სიმკვრივის ნამრავლს.

(3.5) და (3.6) ტოლობებიდან შეგვიძლია ვიპოვოთ პირობითი განაწილების სიმკვრივეები:

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,\ y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,\ y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dy};$$
$$f(y\mid x)=\frac{f(x,\ y)}{f_2(y)}=\frac{f(x,\ y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dx}. \qquad (3.7)$$

შევნიშნოთ რომ (3.5) და (3. 6) ტოლობები წარმოადგენს დიფერენციალური ფორმით ჩაწერილ, ნამრავლის ალბათობის $P(A\cdot B)=P(A)\,P_A(B)$ ცნობილ ტოლობას.

ყოველივე ზემოთ მოყვანილი საშუალებას გვაძლევს შემოვიტანოთ ალბათობის თეორიაში ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნება — შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობის ცნება.

განსაზღვრება. 3.1. Y შემთხვევით სიდიდეს დამოუკიდებელი ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდისაგან, თუ Y განაწილების კანონი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა მნიშვნელობა მიიღო X შემთხვევითმა სიდიდემ.

ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრება ზოგადი სახითაა წარმოდგენილი, იგი შეიძლება გამოითქვას როგორც $F(x,\ y)$ განაწილების ფუნქციის საშუალებით, ისე $f(x,\ y)$ სიმკვრივის გამოყენებით. X-ის დამოუკიდებლობა Y-ისაგან ჩაიწერება $F_1(x)=F(x|y)$ ტოლობით, რაც უწყვეტ შემთხვევაში იძლევა $f_1(x)=f(x|y)$ ტოლობას. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ Y დამოუკიდებელია X-ისაგან, მაშინ X-იც დამოუკიდებელი იქნება Y-ისაგან. მართლაც, თუ $f_2(y)=f(y|x)$, ტოლობიდან $f(x,\ y)=f_1(x)\,f(y|x)=f_2(y)\,f(x|y)$ გამომდინარეობს, რომ $f_1(x)=f(x|y)$, რაც ნიშნავს X-ის დამოუკიდებლობას Y-ისაგან.

დამოუკიდებელი X და Y შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლივი განაწილების სიმკვრივისათვის გვექნება ტოლობა $f(x,\ y)=f_1(x)\,f_2(y)$.

განვიხილოთ მაგალითი: $(X,\ Y)$ ვექტორის ერთობლივი განაწილების ფუნქცია მოიცემა ტოლობით:

$$f(x,\ y)=\frac{1}{\pi^2(x^2+x^2y^2+y^2+1)}.$$

ვაჩვენოთ, რომ X და Y დამოუკიდებელნი არიან.

მართლაც, ეს ტოლობა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$f(x,\ y)=\frac{1}{\pi(x^2+1)}\cdot\frac{1}{\pi(y^2+1)}.$$

ერთობლივი სიმკვრივის ასეთი დაშლა უკვე მოასწავებს იმას, რომ X და Y დამოუკიდებელნი არიან. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ვიპოვით $f_1(x)$ და $f_2(y)$ სიმკვრივეებს. ასეთი ელემენტარული გამოთვლების ჩატარების შემდეგ, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$f(x,\ y)=f_1(x)\,f_2(y).$$

ამით X და Y-ის დამოუკიდებლობა დამტკიცებულია.

X და Y შემთხვევითი სიდიდეთა დამოუკიდებლობა შედარებით მარტივ ფორმას ღებულობს, თუ X და Y დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდეები არიან. მათი ერთობლივი განაწილების კანონს, როგორც ადრე გვქონდა მოცემული ცხრილის საშუალებით (ნახ. 8), ჩვენ მოკლედ ასე ჩავწერთ:

$$\begin{pmatrix} x_m, \ y_m \\ P_{mn} \end{pmatrix} \quad m, n=1, 2, \ldots,$$

სადაც $P_{mn} = P[X = x_m, Y=y_n]$. მათი დამოუკიდებლობის შემთხვევაში $P_{mn} = P[X = x_m, \ Y = y_n] = P[X = x_m], P[Y = y_n] = p_m q_n$ სადაც $p_m = P[X = x_m]$, ხოლო $q_n = P[Y = y_n]$, $m, n = 1, 2, \ldots$.

ზემოთ მოყვანილი თეორია სიმარტივისათვის ორი X და Y შემთხვევით სიდიდეთა სისტემისათვის იქნა გადმოცემული. იგი შეიძლება განზოგადებული იქნას ნებისმიერი n-განზომილებიანი ვექტორისათვის. ქვემოთ მოკლედ მოვიყვანთ ზოგიერთ მნიშვნელოვან განმარტებას და თვისებას.

თუ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ არის n განზომილებიანი შემთხვევითი ვექტორი, მისი განაწილების $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია, როგორც ეს ადრეც იყო აღნიშნული წარმოადგენს მრავალი ცვლადის ფუნქციას განსაზღვრულს R_n სივრცეზე და ყოველ $x \in R_n$ წერტილზე განმარტებულია ტოლობით:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=P[X_1 < x_1, \ X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n].$$

რაც შეეხება ერთობლივი განაწილების სიმკვრივეს, ისიც ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივის ანალოგიურად ჩაიწერება ტოლობით:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)= \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1, \ \partial x_2, \ldots, \partial x_n}.$$

ვიცით რა ერთობლივი განაწილების $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია შეგვიძლია ვიპოვოთ ნებისმიერი X_i, $i=1, 2, \ldots, n$ მდგენელის კერძო განაწილების ფუნქცია $F_i(x_i)$ $i=1, 2, \ldots, n$. ამისათვის დანარჩენი ცვლადებით უნდა გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც ეს უკანასკნელნი მიისწრაფვიან უსასრულობისაკენ, რაც შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს:

$$F_i(x_i) = \lim_{\substack{x_k \to \infty \\ k \neq i}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(\infty, \ldots, \infty, x_i, \ \infty, \ldots, \infty),$$

სადაც $k \neq i$ და $i, k = 1, 2, \ldots, n$.

თუ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ რაიმე ქვესისტემაა $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სისტემისა, მაშინ აღნიშნული ქვესისტემის ერთობლივი განაწილების ფუნქცია იქნება:

$$F_{1, 2, \ldots, k}(x_1, \ x_2, \ldots, x_k)=F(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ \infty, \ \infty, \ldots, \infty).$$

ანალოგიურად შეიძლება დაისვას საკითხი კერძო სიმკვრივეებისა და პირობითი სიმკვრივეების პოვნის შესახებ. თუ ვექტორის ერთობლივი სიმკვრივეა $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, მაშინ კერძო სიმკვრივე, ვთქვათ X_1 მდგენელისა, მოინახება ტოლობით:

$$f_1(x_1)= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ x_2, \ldots, x_n) \, dx_2 \, dx_3, \ldots, dx_n,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ერთობლივი სიმკვრივე უნდა ვაინტეგროთ დანარჩენი ცვლადებით მთელ სივრცეზე; რაც შეეხება $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ქვესისტემის ერთობლივი განაწილების სიმკვრივეს, იგი მოინახება ფორმულით:

$$f_{1, 2, \ldots, k}(x_1, \ x_2, \ldots, x_k)= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ x_2, \ldots, x_n) \, dx_{k+1} \, dx_{k+2} \cdots d x_n,$$

ასევე შეიძლება განზოგადებული იქნას ერთობლივი განაწილების სიმკვრივის ფორმულა დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის:

$$f(x_1, \ x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \, f_2(x_2) \cdots f_n(x_n).$$

რაიმე $D \subset D_n$ არეში მოხვედრის ალბათობა, ერთობლივი სიმკვრივის საშუალებით, გამოითვლება n-ჯერადი ინტეგრალის საშუალებით:

$$P[(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D] = \int_{(D)} \cdots \int f(x_1, \ x_2, \ldots, x_n) \, dx_1 \, dx_2, \ldots, dx_n.$$

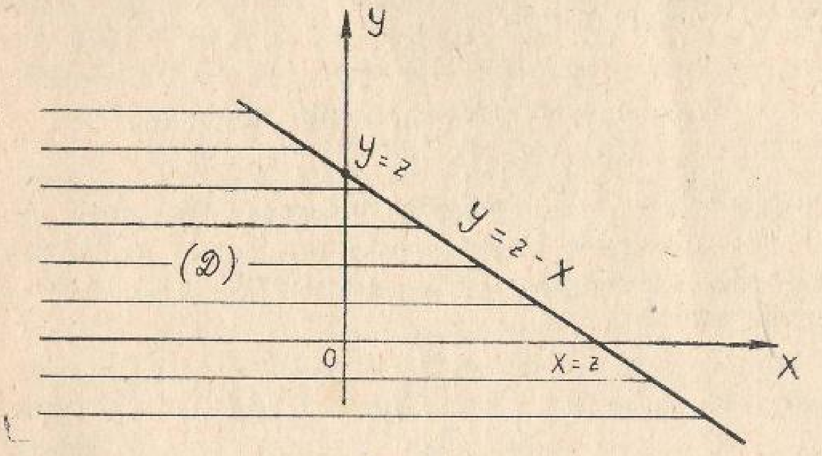
თუ გვაქვს რაიმე შემთხვევითი X სიდიდე, შეგვიძლია განვიხილოთ ახალი Y შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც მისი ფუნქცია იქნება: $Y=g(x)$. მაგალითად, $Y=aX+b$, სადაც a და b ნებისმიერი მუდმივებია, $Y=\sin X$, $Y=\cos X$ და ა. შ.

ანალოგიურად შეიძლება შემოვიღოთ რამდენიმე შემთხვევითი სიდიდის ფუნქცია, რომელიც ასევე შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს:

$$Z=g(X_1, \ X_2, \ldots, X_n).$$

განვიხილოთ ორი დამოუკიდებელი X და Y შემთხვევითი სიდიდე. ვიგულისხმოთ, რომ მათი განაწილების სიმკვრივეებია $f_1(x)$ და $f_2(y)$.

Z შემთხვევითი სიდიდე აღნიშნავდეს მათ ჯამს, ე. ი. $Z=X+Y$, ვიპოვოთ Z შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია და სიმკვრივე, რომლებსაც ჩვენ $F(z)$ და $f(z)$ სიმბოლოებით ავღნიშნავთ. განმარტების თანახმად $F(z)=P[Z<z]$. ნებისმიერი ფიქსირებული z-ისათვის განვიხილოთ წრფე $Y=Z-X$ (ნახ. 12).



ნახ. 12

ცხადია, რომ Z შემთხვევითი სიდიდე ნაკლები იქნება ფიქსირებულ z რიცხვზე, თუ (X, Y) ვექტორის მნიშვნელობა (x, y) აღნიშნული წრფის ქვემოთ მოხვდება $(X+Y<Z)$, ასე რომ $P[Z<z]=P[(X, Y)\in D]$, სადაც D არე $Y=Z-X$ წრფით განსაზღვრული ქვედა ნახევარსიბრტყეა. რადგან X და Y დამოუკიდებელნი არიან, მათი ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე არის შესაბამის სიმკვრივეთა ნამრავლი:

$$f(x, y)=f_1(x)\,f_2(y).$$

Z-ის განაწილების ფუნქციისათვის გვექნება შემდეგი თანაფარდობა:

$$F(z)=P[Z<z]=P[(X, Y)\in D]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_1(x)\,f_2(y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{z-x} f_2(y)\,f_1(x)\,dy.$$

გამოვთვალოთ შიგა ინტეგრალი, რისთვისაც შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი τ, შემდეგი ტოლობით $y=\tau-x$, მაშინ $dy=d\tau$, ხოლო შიგა ინტეგრალი გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\int_{-\infty}^{z-x} f_2(y)\,f_1(x)\,dy=\int_{-\infty}^{z} f_1(x)\,f_2(\tau-x)\,d\tau.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა $F(z)$-ის გამოსახულებაში და მოვახდინოთ ინტეგრალთა გადასმა (ეს გადასმა შესაძლებელია იმიტომ, რომ f_1 და f_2 არაუარყოფითი ფუნქციებია). მივიღებთ:

$$F(z)=\int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{z} f_1(x)\,f_2(\tau-x)\,d\tau=\int_{-\infty}^{z} d\tau\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2(\tau-x)\,dx.$$

ამრიგად, ვიპოვეთ ჯამის განაწილების ფუნქცია. რაც შეეხება მის სიმკვრივეს, მისთვის გვაქვს მარტივი ტოლობა $f(z)=F'(z)$, რომელიც მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2(z-x)\,dx\,.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომ ინტეგრალს ეწოდება f_1 და f_2 ფუნქციათა ნახვევი. მაშასადამე, გვაქვს შემდეგი მარტივი დებულება: რომ ვიპოვოთ X და Y შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების სიმკვრივე, უნდა ვიპოვოთ $f_1(x)$ და $f_2(y)$ სიმკვრივეთა ნახვევი (იგულისხმება, რომ X და Y დამოუკიდებელნი არიან).

f_1 და f_2 ფუნქციათა ნახვევს ხშირად $f_1 * f_2$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ამრიგად, $f=f_1 * f_2$. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $f_1 * f_2=f_2 * f_1$, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-x)\,f_2(x)\,dx.$$

§ 4. შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები

ჩვენ განვიხილეთ განაწილების ფუნქცია, განაწილების სიმკვრივე და მათი ძირითადი თვისებები, როგორც ერთი შემთხვევითი სიდიდისათვის, ასევე შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლიობისათვის. განაწილე-

ბის კანონი, როგორი ფორმითაც არ უნდა იყოს ის მოცემული, გვაძლევს ამომწურავ ინფორმაციას შემთხვევითი სიდიდის შესახებ, მაგრამ ხშირად შემთხვევითი სიდიდის განაწილების დასახასიათებლად საკმარისია რამდენიმე ისეთი რიცხვითი მაჩვენებლის ცოდნა, რომლებიც გამოხატავენ შემთხვევითი სიდიდის არსებით თვისებებს. ასეთი რიცხვითი მახასიათებლებია: შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ანუ საშუალო მნიშვნელობა, დისპერსია, სხვადასხვა რიგის საწყისი და ცენტრალური მომენტები, მედიანა, მოდა და სხვა.

რიცხვით მახასიათებლებს განვმარტავთ როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის, ხოლო თეორემებს მათ შესახებ დავამტკიცებთ მხოლოდ დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებისათვის.

ვთქვათ, მოცემულია დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო x_k მნიშვნელობის ნამრავლი შესაბამის p_k ალბათობაზე და შევადგინოთ მწკრივი:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_k p_k + \cdots \tag{4.1}$$

განსაზღვრება 4.1. თუ მწკრივი (4.1) აბსოლუტურად კრებადია, მის ჯამს ეწოდება დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და აღინიშნება $M(X)$ სიმბოლოთი:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k. \tag{4.2}$$

თუ X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები სასრული სიმრავლეა, მაშინ (4.2) ფორმულაში მწკრივი გადაიქცევა სასრულ ჯამად.

განვიხილოთ $f(x)$ განაწილების სიმკვრივის მქონე უწყვეტი ტიპის X შემთხვევითი სიდიდე.

განსაზღვრება 4.2. თუ ინტეგრალი $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ აბსოლუტურად

კრებადია, მაშინ უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება რიცხვს:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx. \tag{4.3}$$

მაგალითი 1. დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე იყოს კამათლის გაგორებისას მოსული რიცხვი. განაწილების კანონს ექნება შემდეგი სახე:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

მაშინ

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + \cdots + 6\cdot\frac{1}{6} = 3,5.$$

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ მათემატიკური ლოდინის მნიშვნელობა შეიძლება არ დაემთხვეს შემთხვევითი სიდიდის არც ერთ შესაძლო მნიშვნელობას.

მაგალითი 2. უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს მნიშვნელობებს (0;2) ინტერვალიდან და მისი განაწილების სიმკვრივე მოცემულია შემდეგნაირად:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x < 0, \\ \dfrac{x}{2}, & \text{თუ } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{თუ } x > 2. \end{cases}$$

4.2 განსაზღვრების თანახმად, X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx + \int_{0}^{2} x f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{2}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{0}^{2} x\cdot\frac{x}{2}dx = \frac{4}{3}.$$

მოვიყვანოთ მათემატიკური ლოდინის ძირითადი თვისებები.

თ ე ო რ ე მ ა 4.1. მუდმივის მათემატიკური ლოდინი თვით ამ მუდმივის ტოლია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: რაიმე C მუდმივი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც C მნიშვნელობას ღებულობს ერთის ტოლი ალბათობით, მისი განაწილების კანონი უმარტივესი ცხრილით წარმოდგება.

X	C
P	1

, ასე, რომ $M(C) = C \cdot 1 = C$.

თ ე ო რ ე მ ა 4.2. შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის მათემატიკური ლოდინი შესაკრებთა მათემატიკური ლოდინების ჯამის ტოლია:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: X-ის შესაძლო მნიშვნელობები და შესაბამისი ალბათობები აღვნიშნოთ სიმბოლოებით $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ხოლო Y-ის შესაძლო მნიშვნელობები და ალბათობები სიმბოლოებით $y_1, y_2, \dots, y_m, \dots, q_1, q_2, \dots, q_m, \dots$. ცხადია მათი ჯამი $X+Y$ მიიღებს მნიშვნელობებს: $x_1+y_1, x_1+y_2, \dots, x_1+y_m, \dots, x_2+y_1, x_2+y_2 \cdots x_n+y_1, \dots$; შესაბამისი ალბათობები აღვნიშნოთ P_{mn}-ით, ე. ი. $P_{nm}=P[X=x_n, Y=y_m]$, $n, m = 1, 2, \dots$; მაშინ მათემატიკური ლოდინის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$M(X+Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (x_n + y_m) p_{nm} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Big(\sum_{m=1}^{\infty} P_{nm} \Big) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m \Big(\sum_{n=1}^{\infty} p_{nm} \Big).$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ სრული ალბათობის ფორმულას, გვექნება:

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{nm} = p_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_{nm} = q_m,$$ რაც $M(X+Y)$-ის გამოსახულებაში შეტანის შემდეგ მოგვცემს:

$$M(X+Y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_m q_m = M(X) + M(Y).$$

ცხადია ანალოგიურ თეორემას ადგილი ექნება შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

თ ე ო რ ე მ ა 4.3. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი მათი მათემატიკური ლოდინების ნამრავლის ტოლია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თეორემა დავამტკიცოთ ორი თანამამრავლის შემთხვევაში და ვისარგებლოთ წინა თეორემაში გამოყენებული აღნიშვნებით. შევნიშნოთ რომ $X \cdot Y$ ნამრავლს შეუძლია მიიღო მნიშვნელობები $x_n y_m$ $n, m = 1, 2, 3, \dots$ ალბათობებით p_{nm}. მათემატიკური ლოდინის განმარტების თანახმად:

$$M(X \cdot Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_n y_m p_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_n y_m \cdot p_n \cdot q_m =$$

$$= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot p_n \Big) \Big(\sum_{m=1}^{\infty} y_m \cdot q_m \Big) = M(X) \cdot M(Y),$$

აქ მხედველობაში მიღებულია ის გარემოება, რომ X და Y შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობის გამო:

$$p_{nm} = P[X=x_n, Y=y_m] = P[X=x_n] \cdot P[Y=y_m] = p_n \cdot q_m, \ n, m = 1, 2, 3, \dots$$

შ ე დ ე გ ი 1. მუდმივი თანამამრავლი შეიძლება გამოვიტანოთ მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ.

მართლაც, $M(CX) = M(C) \cdot M(X) = CM(X)$.

შ ე დ ე გ ი 2. თუ $Z = aX + bY$, სადაც a და b მუდმივი რიცხვებია, მაშინ $M(Z) = aM(X) + bM(Y)$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4.3. $X - a$ სხვაობას ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის გადახრა a რიცხვისაგან. კერძოდ, თუ $a = M(X)$, მაშინ $X - M(X)$ სხვაობას უბრალოდ გადახრა ეწოდება.

ცხადია გადახრა თვითონაც წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს და მას ცენტრირებულ შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ.

თ ე ო რ ე მ ა 4.4. ცენტრირებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია:

$$M(X - M(X)) = 0.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით (შედეგი 2) გვექნება:

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მათემატიკური ლოდინი წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის ერთ-ერთ ძირითად რიცხვით მახასიათებელს, მაგრამ, როგორც ვნახავთ, მხოლოდ მათემატიკური ლოდინი არ კმარა შემთხვევითი სიდიდის დასახასიათებლად. კერძოდ, მათემატიკური ლოდინი არ იძლევა წარმოდგენას შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებზე და მათი გაფანტულობის შესახებ მათემატიკური ლოდინის ირგვლივ. მაგალითად, თუ განვიხილავთ ორ X და Y შემთხვევით სიდიდეს, მოცემულს განაწილების კანონებით:

X	-1	1
P	0,5	0,5

Y	-100	100
q	0,5	0,5

გვექნება $M(X)=M(Y)=0$. მიუხედავად იმისა, რომ მათი მათემატიკური ლოდინები ტოლია, შესაძლო მნიშვნელობები საგრძნობლად განსხვავდება ერთმანეთისაგან, ამასთან მათ გააჩნიათ განსხვავებული გადახრა მათემატიკური ლოდინიდან. შემთხვევითი სიდიდის თავისი მათემატიკური ლოდინის ირგვლივ გაფანტულობის დასახასიათებლად სარგებლობენ რიცხვითი მახასიათებლით, რომელსაც დისპერსია ეწოდება.

განსაზღვრება 4.4. შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ეწოდება გადახრის კვადრატის მათემატიკურ ლოდინს და აღინიშნება $D(X)$ სიმბოლოთი:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

თუ გავითვალისწინებთ მათემატიკური ლოდინის განმარტებებს დისკრეტული და უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებისათვის, გვექნება:

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-M(X)]^2\cdot p_k,$$

როდესაც X არის დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე, და

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)\,dx,$$

როდესაც X არის უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდე $f(x)$ სიმკვრივით.

პრაქტიკაში ხშირად მოსახერხებელია დისპერსიის გამოთვლა შემდეგი ფორმულით, რომელიც უშუალოდ გამომდინარეობს დისპერსიის განსაზღვრებიდან:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

მართლაც, $D(X)=M(X^2-2XM(X)+M^2(X))=$
$$=M(X^2)-M(2XM(X))+M^2(X)=M(X^2)-$$
$$-2M^2(X)+M^2(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

მაგალითი 3. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდე:

X	-1	1
p	0,5	0,5

Y	-100	100
q	0,5	0,5

ვიპოვოთ მათი დისპერსიები. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ორივე შემთხვევაში მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია, ამიტომ გადახრა დაემთხვევა თვით მოცემულ სიდიდეებს და გადახრის კვადრატი პირველ შემთხვევაში იქნება 1, მეორეში კი 10000, ე. ი. $D(X)=1$, $D(Y)=10000$. აქედან ჩანს, რომ X შემთხვევითი სიდიდე გაცილებით მეტად არის გაფანტული, ვიდრე Y.

მაგალითი 4. მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე:

X	-2	0	3
p	0,2	0,5	0,3

ვიპოვოთ მისი დისპერსია.

ამოხსნა.

$$M(X)=-2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}3=0{,}5,$$

X^2	4	0	9
p	0,2	0,5	0,3

$M(X^2)=4\cdot 0{,}2+9\cdot 0{,}3=3{,}5$, $D(X)=M(X^2)-M^2(X)=3{,}5-$
$-(0{,}5)^2=3{,}25.$

მაგალითი 5. მოცემულია უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდე განაწილების სიმკვრივით:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ} \quad x<0,\\ \dfrac{x}{2}, & \text{თუ} \quad 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{თუ} \quad x>2.\end{cases}$$

ვიპოვოთ მისი დისპერსია.

ამოხსნა $M(X)=\dfrac{4}{3}$ (იხ. მაგალითი 2). დისპერსიის განმარტების თანახმად:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\frac{x}{2}\,dx=$$

$$=\int_0^2\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)\frac{x}{2}\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{8}-\frac{4x^3}{9}+\frac{4x^2}{9}\right]_0^2=\frac{2}{9}.$$

თეორემა 4.5. მუდმივის დისპერსია ნულის ტოლია.

დამტკიცება. განსაზღვრის თანახმად, $D(X)=M[X-M(X)]^2$, რადგან $X=C$, ამიტომ $M(C)=C$ და $D(C)=M[C-C]^2=M(0)=0$.

თეორემა 4.6. თუ C მუდმივია, მაშინ $D(CX)=C^2D(X)$, ე. ი. მუდმივი თანამამრავლის გამოტანა შეიძლება დისპერსიის ნიშნის გარეთ, კვადრატში ახარისხებული.

დამტკიცება: $D(CX)=M[CX-M(CX)]^2=M[C(X-M(X))]^2=$
$$=C^2M[X-M(X)]^2=C^2D(X).$$

თეორემა 4.7. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის დისპერსია შესაკრებთა დისპერსიების ჯამის ტოლია.

დამტკიცება: დისპერსიის განმარტების თანახმად გვაქვს,

$$D(X+Y)=M[(X+Y)-M(X+Y)]^2=M[(X-M(X))+(Y-M(Y))]^2=$$
$$=M[X-M(X)]^2+2M[[X-M(X)][Y-M(Y)]]+M(Y-M(Y))^2=$$
$$=D(X)+2M[X-M(X)]\cdot M[Y-M(Y)]+D(Y).$$

თეორემა 4.4-ის თანახმად, მეორე შესაკრები ნულის ტოლია, ამიტომ გვექნება:

$$D(X+Y)=D(X)=D(Y).$$

თეორემა 4.8 დამოუკიდებელ X და Y შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის დისპერსია გამოითვლება ფორმულით:

$$D(X\cdot Y)=D(X)D(Y)+m_2^2D(X)+m_1^2D(Y),$$

სადაც $m_1=M(X)$, ხოლო $m_2=M(Y)$.

დამტკიცება: დისპრესიის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$D(X\cdot Y)=M(XY-m_1m_2)^2+M(X^2Y^2-2m_1m_2XY+m_1^2m_2^2).$$

შევნიშნოთ, რომ თუ X და Y დამოუკიდებელნი არიან, მაშინ X^2 და Y^2 შემთხვევითი სიდიდეებიც დამოუკიდებელნი არიან, ამიტომ $M(X^2Y^2)=$ $=M(X^2)M(Y^2)$ და $M(XY)=m_1m_2$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები წინა ტოლობაში, გვექნება: $D(XY)=M(X^2)M(Y^2)-m_1^2m_2^2$. დისპერსიის გამოსათვლელი ფორმულიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$M(X^2)=D(X)+m_1^2,\ D(Y^2)=D(Y)+m_2^2,$$

ამიტომ

$$D(XY)=(D(X)+m_1^2)(D(Y)+m_2^2)-m_1^2m_2^2=$$
$$=D(X)\cdot D(Y)+m_1^2D(Y)+m_2^2D(X).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. დამოუკიდებელ ცენტრირებულ შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის დისპერსია თანამამრავლთა დისპერსიების ნამრავლის ტოლია.

მართლაც, ამ შემთხვევაში $m_1=m_2=0$ და ვღებულობთ, რომ:

$$D(XY)=D(X)\cdot D(Y).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ დისპერსიას გააჩნია შემთხვევითი სიდიდის კვადრატის განზომილება. იმ შემთხვევაში, როდესაც სასურველია, რომ შემთხვევით სიდიდეს და მის გაფანტულობის მახასიათებელს ჰქონდეს ერთი და იგივე განზომილება, სარგებლობენ რიცხვითი მახასიათებლით, რომელსაც შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა ეწოდება და აღინიშნება $\sigma(X)$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება 4.5. შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა ეწოდება კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

შევნიშნოთ, რომ როგორც შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია, ასევე საშუალო კვადრატული გადახრა არაუარყოფითი სიდიდეებია.

საშუალო კვადრატულ გადახრას გააჩნია შემდეგი მარტივად დასამტკიცებელი თვისებები:

1. $\sigma(CX)=|C|\,\sigma(X)$, სადაც C მუდმივი რიცხვია.

2. თუ X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$.

განსაზღვრება 4.6. შემთხვევით სიდიდეს

$$\overset{\circ}{X}=\frac{X-M(X)}{\sigma(X)}$$

ეწოდება ნორმირებული შემთხვევითი სიდიდე.

როგორც ფორმულიდან ჩანს, ნორმირებული შემთხვევითი სიდიდის მისაღებად საჭიროა შესაბამისი ცენტრირებული შემთხვევითი სიდიდე გავყოთ საშუალო კვადრატულ გადახრაზე. ამ პროცესს შემთხვევითი სიდიდის ნორმირება ეწოდება. ნორმირების შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ კოორდინატთა სისტემის სათავე გადაგვაქვს მათემატიკური ლოდინის შესაბამის წერტილში (ცენტრირება) და ვცვლით მასშტაბს ისე, რომ მიღებული შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა იყოს ერთის ტოლი. მართლაც,

$$M(\overset{\circ}{X})=M\left[\frac{X-M(X)}{\sigma(X)}\right]=\frac{1}{\sigma(X)}M[X-M(X)]=0,$$

$$D(\overset{\circ}{X})=D\left[\frac{X-M(X)}{\sigma(X)}\right]=\frac{1}{\sigma^2(X)}D[X-M(X)]=$$

$$=\frac{D(X)-D(M(X)]}{\sigma^2(X)}=\frac{D(X)}{\sigma^2(X)}=1.$$

მაგალითი. X შემთხვევითი სიდიდე არის ორი კამათლის ერთდროულად გაგორებისას მოსულ ციფრთა ჯამი. მოვახდინოთ ამ შემთხვევითი სიდიდის ნორმირება.

ამოხსნა. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის შესადგენად ვისარგებლოთ ალბათობის კლასიკური განსაზღვრით. მივიღებთ:

$$\frac{X}{p}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{3x} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{array}\right)$$

$$MX=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+\dots+12\cdot\frac{1}{36}=7.$$

მოვახდინოთ X შემთხვევითი სიდიდის ცენტრირება;

$X-MX$	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ვიპოვოთ დისპერსია ფორმულით: $D(X)=M[X-M(X)]^2$, აქედან

$$D(X)=\left(25\cdot\frac{1}{36}+16\cdot\frac{2}{36}+9\cdot\frac{3}{36}+4\cdot\frac{4}{36}+1\cdot\frac{5}{36}\right)\cdot 3=\frac{35}{6}.$$

საშუალო კვადრატული გადახრა:

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{6}}\approx 2,4,$$

საბოლოოდ, $X-M(X)$ სიდიდის $\sigma(X)$-ზე გაყოფის შედეგად მივიღებთ:

$\overset{\circ}{X}$	—2,08	—2,7	—1,25	—0,8	—0,4	0	0,4	0,8	1,25	1,7	2,08
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{3x}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{6}{38}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

განვიხილოთ დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე შემდეგი განაწილების კანონით:

X	1	2	5	100
p	0,6	0,2	0,19	0,01

ვიპოვოთ მათემატიკური ლოდინი:

$$M(X)=1\cdot 0,6+3\cdot 0,2+5\cdot 0,19+100\cdot 0,01=2,95.$$

ჩავწეროთ X^2 შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

X^2	1	4	25	10000
p	0,6	0,2	0,19	0,010

ვიპოვოთ მისი მათემატიკური ლოდინი:

$$M(X^2)=1\cdot 0{,}6+4\cdot 0{,}2+25\cdot 0{,}19+10000\cdot 0{,}01=106{,}15.$$

როგორც ვხედავთ $M(X^2)$ გაცილებით მეტია $M(X)$-ზე, ეს იმით არის გამოწვეული, რომ შემთხვევითი სიდიდის კვადრატში აყვანის შედეგად $x=100$-ის შესაბამისი მნიშვნელობა გაიზარდა 10000-მდე, ალბათობა კი უცვლელი დარჩა; ასე რომ $M(X)$-დან $M(X^2)$-ზე გადასვლამ საშუალება მოგვცა გავითვალისწინოთ X-ის იმ დიდი შესაძლო მნიშვნელობების გავლენა მათემატიკურ ლოდინზე, რომელთაც მცირე ალბათობები აქვს. ცხადია, რომ ასეთ შესაძლო მნიშვნელობათა გავლენა მათემატიკურ ლოდინზე მით უფრო გაიზრდება, თუ გადავალთ X^3, X^4,... შემთხვევით სიდიდეებზე, ამიტომ მიზანშეწონილია განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდის (როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი) მთელი არაუარყოფითი ხარისხების მათემატიკური ლოდინი.

განსაზღვრება 4.6. შემთხვევითი სიდიდის K რიგის საწყისი მომენტი ეწოდება $M(X^k)$ სიდიდეს და აღინიშნება α_k სიმბოლოთი:

$$\alpha_k=M(X^k),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრების თანახმად:

$$\alpha_k=\sum_i x_i^k p_i,\ \text{თუ } X \text{ დისკრეტულია და}\quad \alpha_k=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx,\ \text{თუ}$$

X შემთხვევითი სიდიდე უწყვეტი ტიპისაა (იგულისხმება, რომ მოყვანილი მწკრივი და არასაკუთრივი ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადებია).

განსაზღვრება 4.7. X შემთხვევითი სიდიდის k რიგის ცენტრალური მომენტი ეწოდება $M(X-M(X))^k$ სიდიდეს და აღინიშნება μ_k სიმბოლოთი:

$$\mu_k=M(X-M(X))^k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

ცხადია $\mu_k=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-M(X))^k p_i$, თუ შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტულია და

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^k f(x)\,dx,$$

თუ შემთხვევითი სიდიდე უწყვეტია.

ადვილი დასამტკიცებელია ტოლობები:

$$\alpha_0=1,\quad \alpha_1=M(X),\quad \mu_0=1,\quad \mu_1=0,\quad \mu_2=D(X)=\alpha_2-\alpha_1^2,$$
$$\mu_3=\alpha_2-3\alpha_2\alpha_1+2\alpha_1^3,\quad \mu_4=\alpha_4-4\alpha_3\alpha_1+6\,\alpha_2\alpha_1^2-3\alpha_1^4,$$

რომელთა დამტკიცებასაც მკითხველს ვანდობთ.

განსაზღვრება 4.8. თუ $F(x)$ წარმოადგენს X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას მაშინ, მისი მედიანა ეწოდება ისეთ γ რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება პირობები: $F(\gamma)\leqslant\frac{1}{2}$ და $F(\gamma+0)\geqslant\frac{1}{2}$, სადაც $F(\gamma+0)$ არის F ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი γ წერტილზე.

განსაზღვრება 4.9. X შემთხვევითი სიდიდის ასიმეტრიის კოეფიციენტი ეწოდება $\frac{\mu_3}{\sigma^3}$ რიცხვს და აღინიშნება A_s სიმბოლოთი:

$$A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

განსაზღვრება 4.10. X შემთხვევითი სიდიდის ექსცესი ეწოდება $\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$ სიდიდეს და აღინიშნება E_x სიმბოლოთი:

$$E_x=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3.$$

ასიმეტრიისა და ექსცესის, როგორც შემთხვევითი სიდიდის რიცხვით მახასიათებელთა არსი ნაჩვენები იქნება შემდეგ თავში, როდესაც განვიხილავთ ნორმალური განაწილების კანონს.

განსაზღვრება 4.11. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის მოდა ეწოდება მის იმ შესაძლო მნიშვნელობას, რომლის შესაბამისი ალბათობა უდიდესია. უწყვეტი ტიპის X შემთხვევითი სიდიდისათვის მოდა ეწოდება განაწილების სიმკვრივის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილს.

შევნიშნოთ, რომ შემთხვევით სიდიდეს შეიძლება გააჩნდეს რამდენიმე მოდა. ასეთ შემთხვევაში განაწილებას ეწოდება პოლიმოდალური. თუ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია ერთადერთი მოდა, განაწილებას ეწოდება უნიმოდალური.

X შემთხვევითი სიდიდის რაიმე $Y=g(X)$ ფუნქცია ასევე შემთხვევითი სიდიდეა. მისი რიცხვითი მახასიათებლები გამოითვლება შემდეგი ტოლობებით:

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\, p_i;$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{\infty} (g(x_i)-M(Y))^2\, p_i,$$

თუ X შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტულია, და

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, dx,$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} (g(x)-M(Y))^2 f(x)\, dx,$$

თუ X შემთხვევითი სიდიდე უწყვეტია.

§ 5. შემთხვევითი ვექტორის რიცხვითი მახასიათებლები

წინა პარაგრაფში განხილული რიცხვითი მახასიათებლები, რომლებიც განმარტებულია ერთი შემთხვევითი სიდიდისათვის, შეიძლება განხილულ იქნეს შემთხვევითი ვექტორისათვისაც. ჯერჯერობით ჩვენ მათ განვიხილავთ ორი X და Y შემთხვევითი სიდიდეთა სისტემისათვის.

განსაზღვრება 5.1. (X, Y) ვექტორის (k, s) რიგის საწყისი მომენტი ეწოდება $X^k X^s$ ნამრავლის მათემატიკურ ლოდინს და აღინიშნება $\alpha_{k,s}$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრების თანახმად

$$\alpha_{k,s}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i^k y_j^s\, p_{ij}, \quad k, s=0, 1, 2, \ldots$$

განსაზღვრება 5.2. (X, Y) ვექტორის (k, s) რიგის ცენტრალური მომენტი ეწოდება $(X-m_1)^k (Y-m_2)^s$ ნამრავლის მათემატიკურ ლოდინს და აღინიშნება $\mu_{k,s}$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრების თანახმად,

$$\mu_{k,s}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (x_i-m_1)^k (y_j-m_2)^s\, p_{ij}, \quad k, s=0, 1, 2, \ldots.$$

ამ ტოლობაში m_1 და m_2, X და Y შემთხვევით სიდიდეთა მათემატიკური ლოდინებია. თუ X უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეა, გვექნება:

$$\alpha_{ks}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$\mu_{ks}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_1)^k (y-m_2)^s f(x, y)\, dx dy, \quad k, s=0, 1, \ldots.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ როგორც უწყვეტ ისე დისკრეტულ შემთხვევაში ადგილი აქვს ელემენტარულ თანაფარდობებს: $\alpha_{1,0}=m_1$, $\alpha_{0,1}=m_2$, $\mu_{2,0}=D(X)$, $\mu_{0,2}=D(Y)$, $\alpha_{0,0}=1$, $\mu_{0,0}=1$. როგორც თეორიაში, ისე პრაქტიკაში განსაკუთრებულ როლს თამაშობს μ_{11} სიდიდე — მეორე რიგის შერეული ცენტრალური მომენტი, რომელიც K_{xy} სიმბოლოთი აღინიშნება და X და Y შემთხვევით სიდიდეთა კორელაციური მომენტი ეწოდება.

თუ X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $K_{xy}=0$. მართლაც, უწყვეტ შემთხვევაში:

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_1)(y-m_2)\, f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy=$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_1)\, f_1(x)\, dx\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_2)\, f_2(y)\, dy\right]=0,$$

სადაც f_1 და f_2 შესაბამისად X და Y სიდიდეების განაწილების სიმკვრივეებია. დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდისათვის დამტკიცება ანალოგიურია. ადვილი შესამჩნევია, რომ $K_{xy}=K_{yx}$. კორელა-

ციურ მომენტთან ერთად განიხილება ე. წ. კორელაციის კოეფიციენტი, რომელიც შემდეგი ტოლობით არის განსაზღვრული:

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y},$$

ცხადია, რომ K_{xy} და r_{xy} ერთდროულად ხდებიან ნულის ტოლი. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $-1\leqslant r_{xy}\leqslant 1$. ამასთანავე თუ X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის წრფივი დამოკიდებულებაა, ($Y=aX+b$, სადაც a და b ნებისმიერი მუდმივებია) მაშინ $|r_{xy}|=1$, თუ $r_{xy}>0$, ამბობენ რომ X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის დადებითი კორელაცია არსებობს. თუ $r_{xy}<0$, მაშინ ლაპარაკია უარყოფით კორელაციაზე. თუ $r_{xy}>0$, მაშინ X-ის გაზრდას ახლავს, Y-ის ზრდის ტენდენცია, ხოლო თუ $r_{xy}<0$, მაშინ პირიქით X-ის ზრდას Y-ის კლების ტენდენცია. კორელაციის კოეფიციენტი ახასიათებს X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებას. თუ $r_{xy}=0$, შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდებათ არაკორელირებული. ეს ნიშნავს, რომ მათ შორის არ არსებობს წრფივი დამოკიდებულება, თუმცა, საზოგადოდ, რაიმე უფრო რთული დამოკიდებულების არსებობა გამორიცხული არ არის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, მოცემულია დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდე:

X	-2	-1	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

განვსაზღვროთ Y შემთხვევითი სიდიდე ტოლობით $Y=X^2$. მისი განაწილების კანონი იქნება:

Y	1	4
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(X, Y) ვექტორის ერთობლივი განაწილება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

Y \ X	-2	-1	1	2
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
4	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$

გამოვთვალოთ K_{xy}. რადგან $M(X)=0$, $M(Y)=\frac{5}{2}$, გვექნება

$$K_{xy}=(-2-0)\left(1-\frac{5}{2}\right)\cdot 0+(-1-0)\left(1-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{4}+$$
$$+(1-0)\left(1-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{4}+(2-0)\left(1-\frac{5}{2}\right)\times$$
$$\times 0+(-2-0)\left(4-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{4}+(-1-0)\left(4-\frac{5}{2}\right)0+$$
$$+(1-0)\left(4-\frac{5}{2}\right)0+(2-0)\left(4-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{4}=0.$$

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ კორელაციის კოეფიციენტი უდრის ნულს მიუხედავად იმისა, რომ X და Y სიდიდეებს შორის არსებობს ფუნქციური დამოკიდებულება.

თუ მოცემულია n-განზომილებიანი შემთხვევითი ვექტორი $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, მაშინ იგი შეიძლება დახასიათდეს n მათემატიკური ლოდინით $M(X_1), M(X_2), \ldots, M(X_n)$, n დისპერსიით $D(X_1), D(X_2), \ldots, D(X_n)$ და კორელაციური მომენტებით, რომელთა რაოდენობა $n(n-1)$-ის ტოლია, იგულისხმება, რომ $i, j=1, 2, \ldots, n$.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნები:

$$m_i=M(X_i),\ D_i=D(X_i),\ \mathring{X}_i=X_i-m_i,\ i=1, 2, \ldots, n.$$

თუ კორელაციური მომენტის გამოსახულებაში ვიგულისხმებთ, რომ $i=j$, მაშინ

$$K_{ii}=M(\mathring{X}_i\,\mathring{X}_i)=M(\mathring{X}_i^2)=D(X_i)=D_i,\quad i=1, 2, \ldots, n.$$

შემთხვევითი ვექტორის მდგენელთა შორის კორელაციური მომენტები შეიძლება ამოწერილი იქნას მატრიცის ფორმით

$$\begin{pmatrix} K_{11}, K_{12}, \ldots, K_{1n} \\ K_{21}, K_{22}, \ldots, K_{2n} \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ K_{n1}, K_{n2}, \ldots, K_{nn} \end{pmatrix}.$$

აღნიშნულ მატრიცას კორელაციური მატრიცა ეწოდება. ცხადია, რომ კორელაციური მატრიცის მთავარ დიაგონალზე განლაგებულია ვექტორის კომპონენტთა დისპერსიები. კორელაციური მატრიცა სი-

მეტრიულია მთავარი დიაგონალის მიმართ, ამიტომ ხშირად მხოლოდ ზედა ნახევარს ამოწერენ ხოლმე. თუ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ მატრიცა მიიღებს სახეს:

$$\begin{pmatrix} D_1, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ 0, & D_2, & 0, \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & D_n \end{pmatrix}$$

კორელაციური მატრიცის ნორმირებით მიიღება ე. წ. კორელაციის კოეფიციენტთა მატრიცა, რომლის ელემენტი $r_{ij} = \dfrac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$, სადაც $\sigma_i = \sqrt{D_i}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, წარმოადგენს X_i კომპონენტის საშუალო კვადრატულ გადახრას. ნორმირებულ მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

არაკორელირებულ შემთხვევით სიდიდეთა ნორმირებული მატრიცა ერთეულოვან მატრიცას წარმოადგენს.

III თავი

განაწილების კანონთა ძირითადი სახეები

§ 1. ბინომური განაწილება

განვიხილოთ ბერნულის სქემა (1.11). აღვნიშნოთ ცდათა სასრულ მიმდევრობაში წარმატებათა რიცხვი X-ით. ცხადია, იგი წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, განაწილების კანონით

X	0	1	$\cdots$	n
p	$p_n(0)$	$p_n(1)$	$\cdots$	$p_n(n)$

სადაც $p_n(k) = p[X = k] = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$, ხოლო p არის თითოეულ ცდაში წარმატების ალბათობა $(0 < p < 1)$.

განსაზღვრება 1.1. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება ბინომური კანონით განაწილებული, თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობებია 0, 1, 2,..., n; ხოლო შესაბამისი ალბათობები გამოითვლება ბერნულის ფორმულით.

ვიპოვოთ ბინომურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

გამოთვლების გამარტივების მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნები: X_1 იყოს შემთხვევითი სიდიდე, რომლის შესაძლო მნიშვნელობებია პირველ ცდაში წარმატებათა რიცხვი (0 ან 1), X_2 — მეორე ცდაში წარმატებათა რიცხვი და ა. შ., X_n — წარმატებათა რიცხვი n-ურ ცდაში. მაშინ $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

ადვილი მისახვედრია, რომ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ შემთხვევით სიდიდეებს ერთნაირი განაწილება აქვთ

X	1	0
p	p	$1-p$

, სადაც $(i = 1, 2, \ldots, n)$,

ასე, რომ $M(X_1) = M(X_2) = \cdots = M(X_n) = p$, $M(X_1^2) = M(X_2^2) = \cdots = M(X_n^2) = p$, $D(X_1) = D(X_2) = \cdots = D(X_n) = p - p^2 = p(1-p) = pq$. საბოლოოდ მივიღებთ:

$$M(X) = M(X_1) + \cdots + M(X_n) = np. \tag{1.1}$$

ცდათა ურთიერთდამოუკიდებლობის გამო, ურთიერთდამოუკიდებელი იქნება $X_1, X_2, \ldots, X_n$ შემთხვევითი სიდიდეებიც, ამიტომ

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n) = npq. \tag{1.2}$$

მაგალითი 1. მექანიკურ საამქროში დამონტაჟებულია 5 ერთი და იგივე ტიპის სახარატო ჩარხი. ცვლის განმავლობაში თითოეული ჩარხისათვის წყობიდან გამოსვლის ალბათობა 0,1-ის ტოლია. ვიპოვოთ ცვლის განმავლობაში წყობიდან გამოსულ ჩარხთა განაწილების კანონი, მისი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ X-ით წყობიდან გამოსულ ჩარხთა რაოდენობა. იგი წარმოადგენს ბინომურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს პარამეტრებით $n = 5$; $p = 0,1$.

ბერნულის ფორმულის თანახმად

$$P[X=0]=\frac{5!}{0!5!}(0,1)^0(0,9)^5=0,9^5=0,600396,$$

$$P[X=1]=\frac{5!}{1!4!}(0,1)^1(0,9)^4=0,1\cdot(0,9)^4=0,06571,$$

$$P[X=2]=\frac{5!}{2!3!}(0,1)^2(0,9)^3=0,0729,$$

$$P[X=3]=\frac{5!}{3!2!}(0,1)^3(0,9)^2=0,0081,$$

$$P[X=4]=\frac{5!}{4!1!}(0,1)^4(0,9)^1=0,00055,$$

$$P[X=5]=\frac{5!}{5!0!}(0,1)^5(0,9)^1=0,00001.$$

ამრიგად, X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს ექნება სახე:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,60039	0,06571	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

(1.1) ფორმულის ძალით მათემატიკური ლოდინი $M(X)=5\cdot 0,1=0,5$, დისპერსია $D(X)=5\cdot 0,9=0,45$.

§ 2. პუასონის განაწილება

როგორც ადრე აღვნიშნეთ (1.13), როცა n დიდია, ხოლო წარმატების ალბათობა P მცირე $(P<0,1)$, $P_n(k)$ ალბათობის გამოთვლა ხელსაყრელია პუასონის ფორმულით:

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{1.13.1}$$

სადაც $\lambda=np$.

განსაზღვრება 2.1. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება პუასონის კანონით განაწილებული, თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობებია 0, 1, 2,..., k ...., ხოლო შესაბამისი ალბათობები გამოითვლება ფორმულით: $P[X=k]=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, სადაც $\lambda>0$ ეწოდება პუასონის განაწილების პარამეტრი. განაწილების ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

X	0	1	2	...	k	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{k}$	...	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	...

გამოვითვალოთ პუასონის განაწილების მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. ამისათვის გავითვალისწინოთ, რომ e^x ფუნქციის მაკლორენის მწკრივად გაშლას აქვს შემდეგი სახე:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!},$$

ამიტომ

$$M(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda,$$

$$D(X)=\sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}(k^2-2k\lambda-\lambda^2-k+k)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+(1-2\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}+\lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=$$

$$=e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+(1-2\lambda)\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}+$$

$$+\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda^2+(1-2\lambda)\lambda+\lambda^2=\lambda.$$

როგორც ვნახეთ, პუასონის განაწილების მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია ერთმანეთის ტოლია და ემთხვევა განაწილების λ პარამეტრს:

$$M(X)=D(X)=\lambda.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ქარხანამ დამკვეთს გაუგზავნა 5000 ცალი სტანდარტული ნაკეთობა. ალბათობა იმისა, რომ ნაკეთობა ტრანსპორტირებისას დაზიანდება, არის 0,0002. ვიპოვოთ დაზიანებულ დეტალთა რაოდენობის განაწილების კანონი, მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამოცანის პირობის თანახმად, ნაკეთობათა რაოდენობა $n=5000$, ერთი ნაკეთობის დაზიანების ალბათობა $p=0.0002$. დაზიანებულ დეტალთა რაოდენობა აღვნიშნოთ X-ით. იგი წარმოადგენს ბინომურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს. ეს განაწილება პუასონის ფორმულის ძალით (თავი I, 13.1.) საკმაო სიზუსტით შეიძლება შეიცვალოს პუასონის განაწილებით. მართლაც, მას შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობები 0, 1, 2, ..., 5000. ალბათობებით:

$$P[X=k]\approx\lambda^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\dots,5000),$$

სადაც $\lambda=np=5000\cdot0,002=1$, ამიტომ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

X	0	1	2	...	5000
P	e^{-1}	$\frac{e^{-1}}{1!}$	$\frac{e^{-2}}{2!}$	...	$\frac{e^{-3}}{5000}$

მისი მათემატიკური ლოდინი

$$M(X)=\lambda=1.$$

დისპერსია $\mathbf{D}(X)=\lambda=1.$

§ გ. გეომეტრიული განაწილება

ვთქვათ ბერნულის სქემაში ცდებს ვატარებთ პირველ წარმატებამდე. თუ წარმატებას ექნება ადგილი k-ურ ცდაში, მაშინ წინა $k-1$ ცდაში წარუმატებლობას ჰქონია ადგილი.

აღვნიშნოთ X-ით იმ ცდათა რიცხვი, რომელიც საჭიროა პირველი წარმატების მისაღწევად. ცხადია X იქნება დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე $1,2,\dots,k,\dots$, შესაძლო მნიშვნელობებით. დამოუკიდებელ ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულის (1.9.1) გამოყენებით

$$P[X=k]=q^{k-1}p, \tag{3,1}$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3.1. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდეს ეწოდება გეომეტრიულად განაწილებული, თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობებია $1,\ 2,\dots,\ k,\ ,\dots$, ხოლო შესაბამისი ალბათობები გამოითვლება (3.1) ფორმულით. მის განაწილების კანონს ექნება შემდეგი სახე:

X	1	2	3	...	k	...
P	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$	...

ადვილი საჩვენებელია, რომ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}P[X=k]=1$, მართლაც $\sum\limits_{k=1}^{\infty}pq^{k-1}$ წარმოადგენს უსასრულო გეომეტრიულ პროგრესიას, მნიშვნელით $0<q<1$, ამიტომ:

$$\sum_{k=1}^{\infty}pq^{k-1}=p\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{p}{p}=1.$$

გეომეტრიული განაწილების მათემატიკური ლოდინის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ მათემატიკური ანალიზის ცნობილი დებულებით, რომლის თანახმად შესაძლებელია მწკრივის $\sum\limits_{k=0}^{\infty}q^k=\frac{1}{1-q}$ წევრ-წევრად გაწარმოება. გაწარმოების შედეგად მივიღებთ:

$$\sum_{k=0}^{\infty}kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2},$$

ამიტომ, მათემატიკური ლოდინის განმარტების თანახმად, გვექნება:

$$M(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}.$$

ამრიგად, გეომეტრიული განაწილების მათემატიკური ლოდინი წარმოადგენს ერთ ცდაში წარმატების ალბათობის შებრუნებულ სიდიდეს.

ანალოგიური გამოთვლებით ვღებულობთ, რომ დისპერსია:

$$D(K) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

§ 4. თანაბარი განაწილების კანონი

განსაზღვრება. 4.1. უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება თანაბრად განაწილებული $[a, b]$ ინტერვალზე, თუ მის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

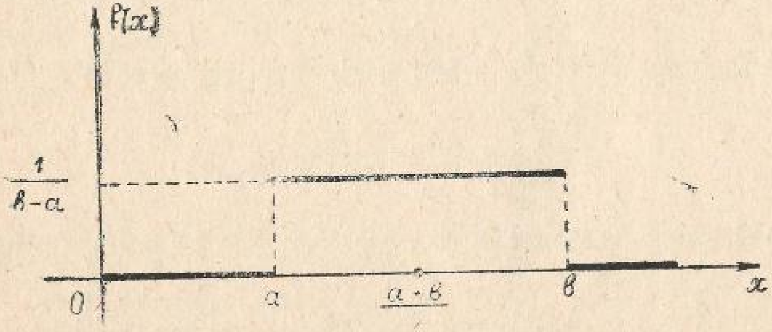
$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{როცა } x \in [a, b], \\ 0, & \text{როცა } x \bar{\in} [a, b], \end{cases}$$

სადაც C მუდმივი სიდიდეა. მის მოსაძებნად ვისარგებლოთ განაწილების სიმკვრივის თვისებით:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

ჩვენს შემთხვევაში $\int_a^b c\,dx = 1$, აქედან $c = \frac{1}{b-a}$ და ვღებულობთ, რომ $[a, b]$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებულ შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივეა:

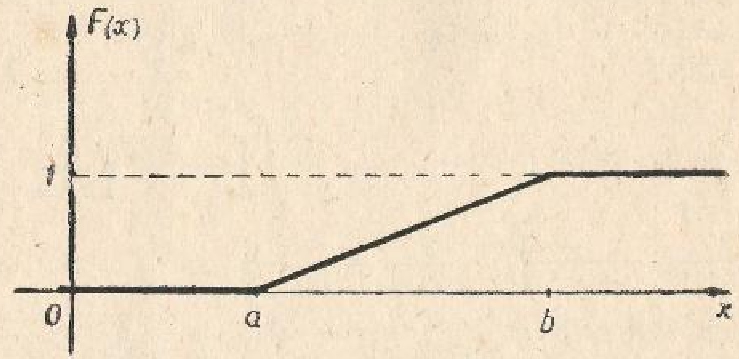
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{როცა } x \in [a, b], \\ 0, & \text{როცა } x \bar{\in} [a, b]. \end{cases}$$



ნახ. 13

ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{როცა } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{როცა } x > b. \end{cases}$$



ნახ. 14

ვიპოვოთ $[a, b]$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები.

1. მათემატიკური ლოდინი:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, მათემატიკური ლოდინი წარმოადგენს $[a, b]$ შუალედის ცენტრს.

2. დისპერსია:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)\,dx = \int_a^b \left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2 \frac{1}{b-a}\,dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \left.\frac{\left[x - \frac{a+b}{2}\right]^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{3(b-a)}\left[\frac{(b-a)^3}{2} - \frac{(a-b)^3}{2}\right] =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{6}$$

3. მედიანა, თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის $[a, b]$ინტერვალის ცენტრის მიმართ სიმეტრიულობის გამო დაემთხვევა მათემატიკურ ლოდინს:

$$Me = \frac{a+b}{2}.$$

4. მოდა, თანაბრად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს არ გააჩნია. ეს თვალნათლივ ჩანს თანაბარი განაწილების სიმკვრივის გრაფიკიდან (ნახ. 13).

5. ასიმეტრიის კოეფიციენტი ცხადია, ნულის ტოლია.

6. ექსცესი:

$$E_x = \frac{1}{\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^4\cdot f(x)\,dx - 3 = \frac{1}{\sigma^4}\int_a^b\left[x-\frac{a+b}{2}\right]^4\frac{dx}{b-a} - 3 =$$

$$= \frac{9}{(b-a)^4}\cdot\frac{1}{5(b-a)}\left[\frac{(b-a)^5}{2} - \frac{(a-b)^5}{2}\right] - 3 = \frac{9}{5} - 3 = -1,2.$$

ახლა ვთქვათ, $[c, d]\subset[a, b]$. ვიპოვოთ თანაბრად განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდის $[c, d]$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა:

$$P[X\in[c, d]] = \int_c^d f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot x\Big|_c^d = \frac{d-c}{b-a},$$

ე. ი. საძიებელი ალბათობა ტოლია მოცემულ ინტერვალთა სიგრძეების შეფარდების, რაც სავსებით ეთანხმება ალბათობის გეომეტრიულ განმარტებას (იხ. § 4).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.1. ღერძზე ჩამოცმული ერთგვაროვანი დისკო დავატრიალოთ და როდესაც ხახუნის ძალით იგი გაჩერდება, გავზომოთ კუთხე საწყის და მიღებულ მდგომარეობებს შორის. ეს კუთხე იქნება შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც თანაბრადაა განაწილებული $[0, 2\pi]$ შუალედში. მისი განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & \text{როცა } x\in[0, 2\pi],\\ 0, & \text{როცა } x\notin[0, 2\pi[.\end{cases}$$

მათემატიკური ლოდინი $M(X)=\pi$, დისპერსია $D(X)=\frac{\pi^2}{3}$, საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma(X)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 5.1. უწყვეტი ტიპის X შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება მაჩვენებლიანი (ექსპონენციალური) კანონით განაწილებული, თუ მის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{როცა } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{როცა } x<0,\end{cases}$$

სადაც λ დადებითი მუდმივი სიდიდეა.

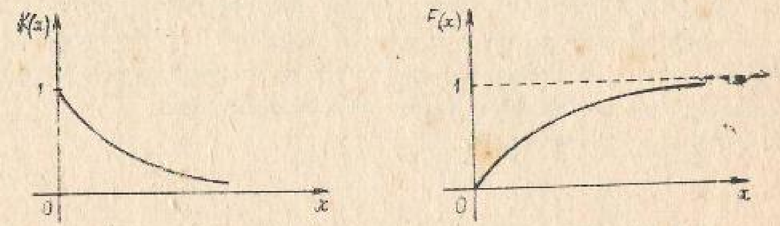
განაწილების სიმკვრივის საშუალებით ვიპოვოთ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \lambda\int_0^x e^{-\lambda x}\,dx = 1-e^{-\lambda x},$$

ასე, რომ

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{როცა } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{როცა } x<0.\end{cases}$$

მაჩვენებლიანი განაწილების სიმკვრივისა და განაწილების ფუნქციის გრაფიკები გამოსახულია 15-ე ნახაზზე.



ნახ. 15

ვიპოვოთ მაჩვენებლიანი განაწილების მათემატიკური ლოდინი.

$$M(X)=\int_0^\infty x f(x)\,dx = \lambda\int_0^\infty x\cdot e^{-\lambda x}\,dx.$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა,

$$M(X)=\lambda\left[-\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx\right] = \lambda\left[\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty\right)\right] = \frac{1}{\lambda}.$$

ამრიგად, მაჩვენებლიანი განაწილების მათემატიკური ლოდინი წარმოადგენს λ პარამეტრის შებრუნებული სიდიდეს.

ანალოგიური გამოთვლებით მივიღებთ, რომ დისპერსია

$$D(X)=\int_0^{\infty}x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2=\lambda\int_0^{\infty}x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2},$$

საიდანაც ჩანს, რომ საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma(X)$ ემთხვევა მათემატიკურ ლოდინს:

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

§ 6. ნორმალური განაწილების კანონი

განსაზღვრება 6.1. უწყვეტი ტიპის შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება ნორმალური კანონით განაწილებული, თუ მის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

სადაც a და σ^2 რიცხვებია ($\sigma>0$), რომლებსაც ნორმალური განაწილების პარამეტრები ეწოდება. ნორმალური განაწილების კანონი, რომლის პარამეტრებია a და σ^2, აღინიშნება $N(a,\sigma^2)$ სიმბოლოთი. პარამეტრების აზრის გამოსარკვევად ვიპოვოთ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები.

1. მათემატიკური ლოდინი:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $z=\dfrac{x-a}{\sigma}$, მაშინ $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma\,dz$ და მივიღებთ;

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z-a)\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz. \qquad (6.1)$$

ამ ჯამის პირველი შესაკრები ნულის ტოლია, როგორც ინტეგრალი კენტი ფუნქციიდან სიმეტრიულ საზღვრებში.

გამოვითვალოთ მეორე შესაკრები. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\cdot\int_0^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

ამ ინტეგრალს პუასონის ინტეგრალი ეწოდება. მის მოსაძებნად გავამრავლოთ I ინტეგრალი თავის თავზე:

$$I^2=2\int_0^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\cdot 2\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\frac{(z^2+t^2)}{2}}dz\,dt.$$

გადავიდეთ პოლარულ კოორდინატებზე: $z=r\cos\varphi$, $t=r\cdot\sin\varphi$. ამ გარდაქმნის იაკობიანია r, ამიტომ გვექნება:

$$I^2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr\,d\varphi=2\pi\int_0^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}rdr=$$

$$=2\pi\int_0^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}d\left(\frac{r^2}{2}\right)=-2\pi e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{\infty}=2\pi,$$

აქედან $I=\sqrt{2\pi}$.

I-ს მიღებული მნიშვნელობის (6.1) ტოლობაში შეტანით ვღებულობთ, რომ $M(X)=a$. ამრიგად, ნორმალური განაწილების a პარამეტრი წარმოადგენს ამ განაწილების მათემატიკურ ლოდინს.

2. დისპერსია:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $z=\frac{x-a}{\sigma}$, მაშინ $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma dz$ და მივიღებთ;

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z\cdot z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი. დავუშვათ, $u=z$, $dv=z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz$, მაშინ $du=dz$, $v=-e^{-\frac{z^2}{2}}$ და ვღებულობთ

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-z\,e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\right].$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულების პირველი შესაკრები ნულის ტოლია, მეორე კი წარმოადგენს პუასონის ინტეგრალს, რომელიც როგორც უკვე ვაჩვენეთ, $\sqrt{2\pi}$-ს ტოლია, ამიტომ ვღებულობთ, რომ $D(X)=\sigma^2$, საიდანაც ჩანს, რომ ნორმალური განაწილების σ^2 პარამეტრი არის ამ განაწილების დისპერსია.

3. ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივე სიმეტრიულია a პარამეტრის მიმართ, ამიტომ მისი მედიანა და მოდა დაემთხვევა a მათემატიკურ ლოდინს, ხოლო ასიმეტრია იქნება ნულის ტოლი.

4. ექსცესის გამოსათვლელად გამოვითვალოთ მეოთხე რიგის ცენტრალური მომენტი:

$$\mu_4=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^4 f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^4\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^3}{2\sigma^2}}\,dx.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $z=\frac{x-a}{\sigma}$, მივიღებთ:

$$\mu_4=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^4 z^4\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი: დავუშვათ, $u=z^3$, $dv=e^{-\frac{z^2}{2}}zdz$. მაშინ $du=3z^2dz, v=-e^{-\frac{z^2}{2}}$ და ვღებულობთ;

$$\mu_4=\frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\left[-z^3e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+3\int_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{3}}\,dz\right].$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულების პირველი შესაკრები ნულის ტოლია, ხოლო მეორე შესაკრები უკვე ნაპოვნი გვაქვს დისპერსიის გამოთვლისას. ამ შემთხვევაში იგი $3\sqrt{2\pi}$-ს ტოლია და გვაქვს:

$$\mu_4=3\sigma^4.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ ნორმალური განაწილების ექსცესი:

$$E_x=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=0.$$

ნორმალური განაწილების მრუდის ასაგებად გამოვიკვლიოთ ფუნქცია:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

ეს ფუნქცია განსაზღვრულია მთელ OX ღერძზე, ყოველი x-ისთვის ღებულობს დადებით მნიშვნელობებს. $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, ე. ი. Ox ღერძი წარმოადგენს ამ ფუნქციის ჰორიზონტალურ ასიმპტოტს.

ფუნქციის წარმოებული

$$f'(x)=-\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

$f'(x)=0$, როცა $x=a$, $f'(x)>0$, როცა $x<a$ და $f'(x)<0$, როცა $x>a$, მაშასადამე, $x=a$ წერტილზე ფუნქციას გააჩნია მაქსიმუმი, რომელიც ტოლია $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$-ს.

$f(x)$ შეიცავს $(x-a)$ გამოსახულებას კვადრატში, $x=a$ წრფე წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის სიმეტრიის ღერძს.

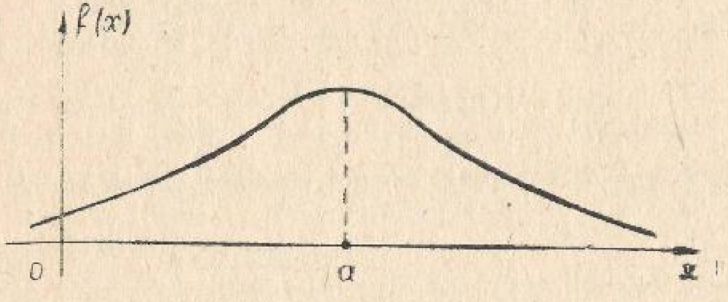
გადაღუნვის წერტილების საპოვნელად გამოვითვალოთ მეორე წარმოებული:

$$f''(x)=\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\left[1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right].$$

აქედან ჩანს, რომ როცა $x=a-\sigma$ და $x=a+\sigma$, მეორე წარმოებული ნულის ტოლია, ხოლო ამ წერტილებზე გადასვლისას იგი იცვლის ნიშანს, ამიტომ გადაღუნვის წერტილების კოორდინატებია

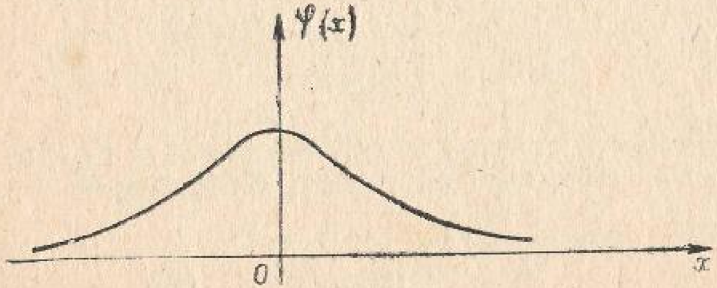
$$\left(a-\sigma,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)\ და\ \left(a+\sigma,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right).$$

ამ გამოკვლევის შედეგად ვაგებთ ნორმალური განაწილების წირს, რომელსაც გაუსის წირი ეწოდება:



ნახ. 16

პრაქტიკაში დიდი გამოყენება აქვს ნორმალურ განაწილებას პარამეტრებით 0 და 1. ეს განაწილება აღინიშნება N (0,1) სიმბოლოთი და მას სტანდარტული ნორმალური განაწილება ეწოდება. ამ განაწილების გრაფიკი მოყვანილია მე-17 ნახაზზე.



ნახ. 17

სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივეა

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

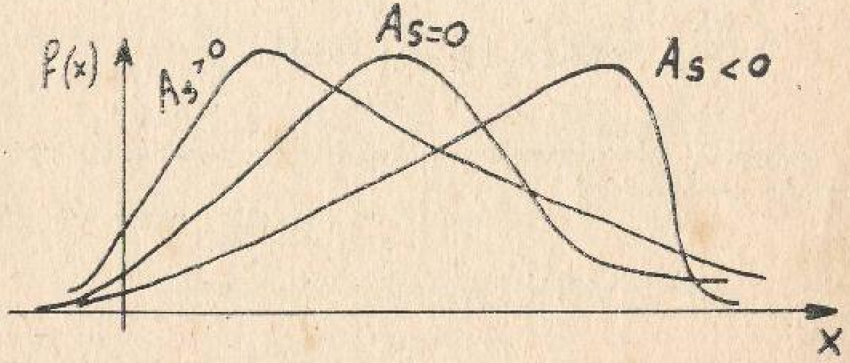
ხოლო განაწილების ფუნქციაა

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

$F(x)$ ფუნქცია დაკავშირებულია I თავის § 12-ში განხილულ ლაპლასის $\Phi(x)$ ფუნქციასთან ტოლობით:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi(x).$$

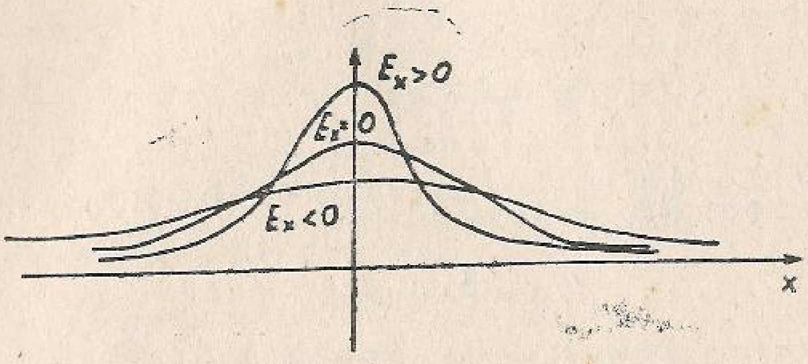
როგორც ვნახეთ, ნორმალური განაწილების ასიმეტრია და ექსცესი ნულის ტოლია. ამ მახასიათებლების საშუალებით შეიძლება ნორმალურისაგან განსხვავებული განაწილების გარკვეული აზრით დახასიათება. კერძოდ, ასიმეტრია გვიჩვენებს, განაწილება არის თუ არა სიმეტრიული მათემატიკური ლოდინის მიმართ. დადებითი ასიმეტრია მიუთითებს, რომ განაწილების წირის „გრძელი ნაწილი“ მდებარეობს ამ მრუდის ლოკალური მაქსიმუმის (მოდის) მარჯვნივ, (ნახ. 17), ხოლო უარყოფითი ასიმეტრია მიუთითებს, რომ წირის „გრძელი ნაწილი“ მდებარეობს მოდის მარცხნივ.



ნახ. 18

ექსცესის აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ მისი საშუალებით შეიძლება შემთხვევითი სიდიდის განაწილების წირი შევადაროთ სტან-

დარტული ნორმალური განაწილების წირს. თუ რაიმე განაწილების ექსცესი დადებითია, მის განაწილების წირს ექნება ნორმალურზე უფრო მაღალი და „მახვილი" წვერო (ნახ. 19). თუ ექსცესი უარყოფითია, შესაბამის განაწილების წირს აქვს ნორმალურზე უფრო დაბალი და „ბლაგვი" წვერო.



ნახ. 19

§ 7. სამი სიგმას წესი

როგორც ვიცით, თუ X შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია $f(x)$ განაწილების სიმკვრივე, მაშინ მისი რაიმე $]\alpha, \beta[$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით (თავი II, (1.5)):

$$P[\alpha<X<\beta]=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

ვთქვათ, X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია $N(a, \sigma_2)$ ნორმალური კანონით. მაშინ:

$$P[\alpha<X<\beta]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

ცვლადთა გარდაქმნით გამოსათვლელი ალბათობა შეიძლება გამოვსახოთ $\Phi(x)$ ფუნქციის საშუალებით. მართლაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $z=\dfrac{x-a}{\sigma}$, გვექნება $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma dz$, ამიტომ;

$$P[\alpha<X<\beta]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\sigma dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

მიღებული ინტეგრალები წარმოადგენენ $\Phi(x)$ ლაპლასის ფუნქციის მნიშვნელობებს $\dfrac{\beta-a}{\sigma}$ და $\dfrac{\alpha-a}{\sigma}$ წერტილებში, ამიტომ გვექნება:

$$P[\alpha<X<\beta]=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (7.1)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, X შემთხვევითი სიდიდე ნორმალურადაა განაწილებული. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გადახრის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლები იქნება 3-ზე, თუ მისი მათემატიკური ლოდინი 20-ის ტოლია, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა კი 10-ის ტოლი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ (7.1) ფორმულით:

$$P[|X-a|<\delta]=P[a-\delta<X<a+\delta]=\Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right)-$$

$$-\Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

ამოცანის პირობის თანახმად, $a=20$, $\delta=3$, $\sigma=10$, ამიტომ

$$P[|X-a|<3]=2\cdot\Phi\left(\frac{3}{10}\right);$$

$\Phi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილიდან (იხ. დანართი) ვიპოვით $\Phi(0{,}3)=0{,}1179$. საბოლოოდ გვექნება:

$$P(|X-10|<3)=2\cdot 0{,}1179=0{,}2358.$$

განვიხილოთ (7.1) ტოლობის კერძო შემთხვევა, როდესაც $\alpha=a-3\sigma$; $\beta=a+3\sigma$; გვექნება:

$$P[a-3\sigma<X<a+3\sigma]=\Phi\left(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi(3)-\Phi(-3)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973.$$

ამრიგად, ალბათობა იმისა, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის გადახრა თავისი მათემატიკური ლოდინიდან არ აღემატება 3σ-ს, ახლოს არის ერთთან. ე. ი. 0,9973-ის ტოლი ალბათობით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობებს $[a-3\sigma, a+3\sigma]$ შუალედიდან. ამ ფაქტს ემყარება როგორც თეორიულ, ისე პრაქტიკულ ამოცანებში გამოყენების მქონე ე. წ. სამი სიგმას წესი, რომლის თანახმადაც, ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინიდან 3σ-ზე მეტი გადახრა პრაქტიკულად შეუძლებელი ხდომილობაა.

თუ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი უცნობია, მაგრამ სრულდება სამი სიგმას წესი, მაშინ არსებობს გარკვეული საფუძველი ვივარაუდოთ, რომ X შემთხვევითი სიდიდე ნორმალურადაა განაწილებული.

§ 8. ლოგარითმულად ნორმალური განაწილება

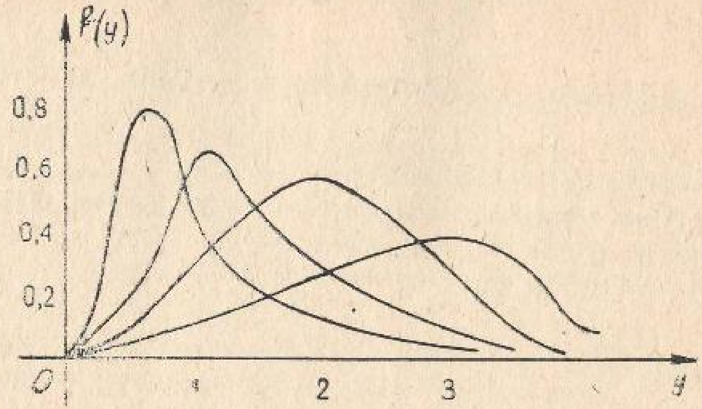
ვთქვათ Y შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს. განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე $X=\ln Y$.

განსაზღვრება 8.1. თუ X სიდიდე ნორმალურადაა განაწილებული პარამეტრებით (a, σ^2), მაშინ Y სიდიდეს ეწოდება ლოგარითმულად ნორმალურად განაწილებული იგივე პარამეტრებით და აღინიშნება სიმბოლოთი $\Lambda(a, \sigma^2)$.

ლოგარითმულად ნორმალური განაწილების მქონე $\Lambda(a, \sigma^2)$ შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივე მოიცემა ტოლობით:

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(\ln y-a)^2}{2\sigma^2}}, & \text{როცა } y>0,\\ 0, & \text{როცა } y\leqslant 0.\end{cases}$$

პარამეტრთა სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ლოგარითმულად ნორმალური განაწილების სიმკვრივის გრაფიკები მოცემულია მე-20 ნახაზზე.



ნახ. 20

როგორც ნახაზიდან ჩანს f ფუნქციის წირებს აქვს დადებითი ასიმეტრია, რომელიც მით უფრო მეტია, რაც მეტია a და σ^2 პარამეტრების მნიშვნელობა.

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ Y შემთხვევითი სიდიდის ძირითადი რიცხვითი მახასიათებლები:

1. მათემატიკური ლოდინი:

$$M(Y)=e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}.$$

2. დისპერსია:

$$D(Y)=e^{2a+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right).$$

3. ასიმეტრიის კოეფიციენტი:

$$A_s=\left(e^{\sigma^2}+2\right)\sqrt{e^{\sigma^2}-1}.$$

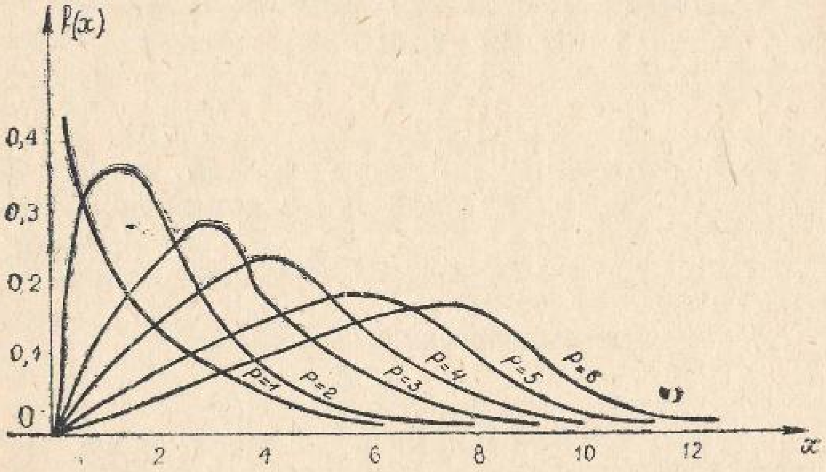
§ 9. გამა-განაწილება

განსაზღვრება 9.1. X შემთხვევითი სიდიდე გამა-კანონითაა განაწილებული, თუ იგი ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს და მისი სიმკვრივე მოიცემა ტოლობით:

$$
f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & \text{როცა} \quad x>0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x\leqslant 0,\end{cases} \tag{9.1}
$$

სადაც α და β განაწილების პარამეტრებია, ხოლო $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ — ეილერის მეორე გვარის ინტეგრალია.

პარამეტრთა სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის გამა განაწილების სიმკვრივის გრაფიკები მოცემულია 21-ე ნახაზზე. როგორც ნახაზიდან ჩანს გამა განაწილებას აქვს დადებითი ასიმეტრია.



ნახ. 21

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ გამა განაწილების ძირითადი რიცხვითი მახასიათებლები:

1. მათემატიკური ლოდინი:

$$
M(X)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty}x^{\alpha}e^{-\beta x}\,dx=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\,\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha\,\Gamma(\alpha)}{\beta\,\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\beta}.
$$

2. დისპერსია:

$$
D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\alpha}{\beta^2},
$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\alpha=1$, მაშინ (9.1) ფორმულის თანახმად $f(x)=\beta e^{-\beta x}$ როდესაც $x>0$, მაშასადამე, მაჩვენებლიანი განაწილება წარმოადგენს გამა-განაწილების კერძო შემთხვევას.

§ 10. ბეტა-განაწილება

განსაზღვრება 10.1. X შემთხვევითი სიდიდე ბეტა კანონითაა განაწილებული, თუ ის ღებულობს მნიშვნელობებს (0,1) ინტერვალიდან და მის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$
f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\,x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1},
$$

სადაც $\alpha>0$, $\beta>0$ წარმოადგენენ განაწილების პარამეტრებს.

უშუალოდ გამოთვლებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ:

$$
M(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad D(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(1+\alpha+\beta)}.
$$

§ 11. χ^2 განაწილება

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები $X_1, X_2, \ldots, X_n$ განაწილებებით $N(0,1)$. განვსაზღვროთ ახალი შემთხვევითი სიდიდე χ^2 ტოლობით:

$$
\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2. \tag{11.1}
$$

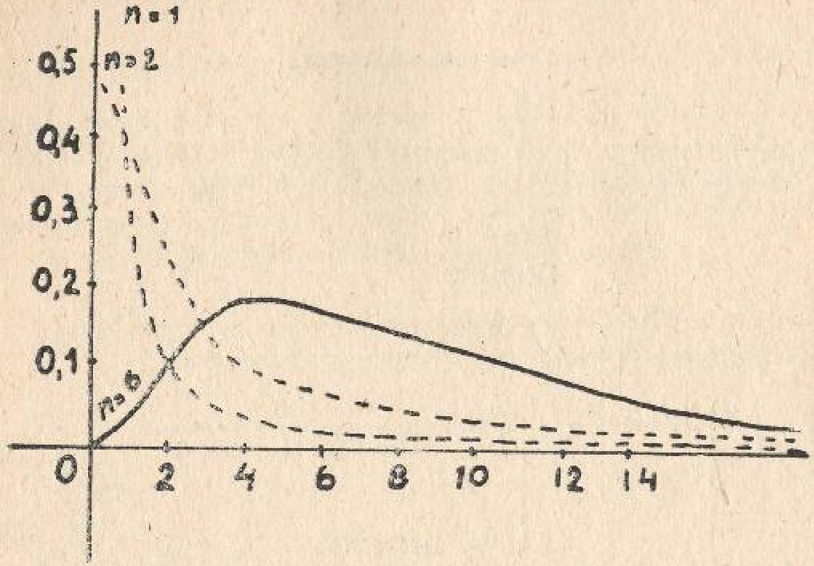
განსაზღვრება 11.1. შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც მოცემულია (11.1) ტოლობით ეწოდება χ^2 კანონით განაწილებული, n თავისუფლების ხარისხით.

n რიცხვი გვიჩვენებს, თუ რამდენი შესაკრებია (11.1) ტოლობის მარჯვენა მხარეში და იგი წარმოადგენს χ^2 განაწილების ერთადერთ პარამეტრს. ცხადია, იგი არ შეიძლება ერთზე ნაკლები იყოს: $n\geqslant 1$.

n თავისუფლების ხარისხის მქონე χ^2 შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$
f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\,x^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{x}{2}}, & \text{როცა} \quad x>0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x\leqslant 0\end{cases}
$$

22-ე ნახაზზე გამოსახულია χ^2 შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივის გრაფიკები სხვადასხვა n-ისათვის.



ნახ. 22

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ χ^2 განაწილების ძირითადი რიცხვითი მახასიათებლები.

1. მათემატიკური ლოდინი:

$$M(\chi^2) = n;$$

2. დისპერსია:

$$D(\chi^2) = 2n.$$

როგორც 22-ე ნახაზიდან ჩანს, χ^2 განაწილებას გააჩნია დადებითი ასიმეტრია, რომელიც მით უფრო მცირეა, რაც მეტია თავისუფლების ხარისხი n.

χ^2 განაწილება მეტად მნიშვნელოვან როლს ასრულებს მათემატიკურ სტატისტიკაში. ამ განაწილების ცხრილები მოყვანილია წიგნის დანართში.

§ 12. სტიუდენტის განაწილება

ვთქვათ, მოცემულია $n+1$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდე $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$, რომლებიც განაწილებულია $N(0, \sigma^2)$ კანონით. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევითი სიდიდეები:

$$Y = \sqrt{\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}},$$

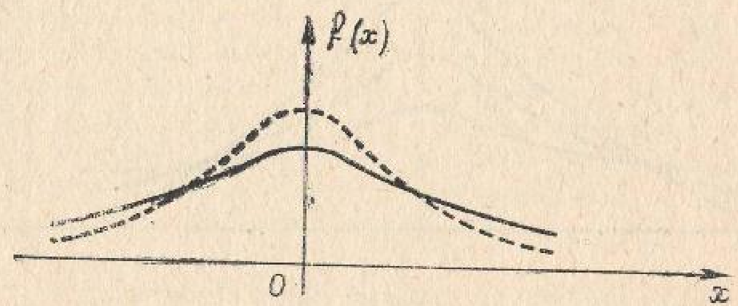
$$t = \frac{X}{Y}\,^{*}.$$

მტკიცდება, რომ t შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{X^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \qquad (12.1)$$

(12.1) ფორმულით განსაზღვრული $f(x)$ განაწილებას სიმკვრივის მქონე t შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება სტიუდენტის კანონით განაწილებული, მას აგრეთვე t-განაწილებას უწოდებენ. n არის ამ განაწილების პარამეტრი (თავისუფლების ხარისხი).

$f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 23) წარმოადგენს წირს, რომელიც წააგავს ნორმალური განაწილების წირს იმ განსხვავებით, რომ იგი ნაკლებადაა დახრილი.



ნახ. 23

---

* საზოგადოდ შემთხვევით სიდიდეს დიდი ასოთი აღნიშნავენ, მაგრამ $\frac{X}{Y}$ შემთხვევითი სიდიდის t სიმბოლოთი აღნიშვნა ტრადიციულადაა მიღებული.

23-ე ნახაზზე წყვეტილით გამოსახულია ნორმალური განაწილების წირი.

სტიუდენტის განაწილების წირი სიმეტრიულია 0-ის მიმართ. მოვიყვანოთ მისი რიცხვითი მახასიათებლები:

1. მათემატიკური ლოდინი:

$$M(t)=0, \text{ როცა } n>1.$$

2. დისპერსია:

$$D(t)=\frac{n}{n-2}, \quad \text{როცა } n>2.$$

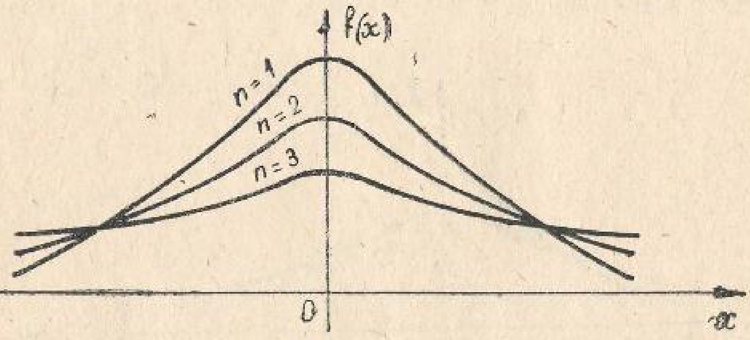
3. ასიმეტრიის კოეფიციენტი:

$$A_s=0, \quad \text{როცა } n>3.$$

4. საზოგადოდ, k-ური რიგის მომენტი ($k\leqslant n-1,\ n>2$)

$$\alpha_k=\begin{cases} n^{k/2}\cdot\dfrac{1\cdot 3\cdots(k-1)}{(n-2)(n-4)\cdots(n-k)}, & \text{როცა } k \text{ ლუწია,} \\ 0, & \text{როცა } k \text{ კენტია.}\end{cases}$$

სტიუდენტის განაწილების მედიანა და მოდა 0-ის ტოლია. 24-ე ნახაზზე მოყვანილია t-განაწილების წირები სხვადასხვა n-ისათვის.



ნახ. 24

სტიუდენტის განაწილების ცხრილები მოყვანილია წიგნის დანართში $n=1,2,\ldots,30$ მნიშვნელობებისათვის. n-ის ზრდასთან ერთად სტიუდენტის განაწილება უახლოვდება ნორმალურს და პრაქტიკულად, როცა $n>30$, სარგებლობენ ნორმალური განაწილების ცხრილით.

განვიხილოთ სტიუდენტის განაწილების კერძო შემთხვევა, როდესაც $n=1$. ამ განაწილებას კოშის განაწილება ეწოდება. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ და $\Gamma(1)=1$, (12.1) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ კოშის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}. \tag{12.2}$$

ეს განაწილება იმითაა საინტერესო, რომ მას არ გააჩნია მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და მაღალი რიგის მომენტები. ეს გამომდინარეობს როგორც სტიუდენტის განაწილების რიცხვითი მახასიათებლების თვისებებიდან, ასევე უშუალოდ, $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^k}{1+x^2}\,dx$ ინტეგრალის განშლადობიდან, როცა $k\geqslant 1$.

IV თავი

დიდ რიცხვთა კანონი

§ 1. მასობრივი მოვლენები და დიდ რიცხვთა კანონი

თანამედროვე ალბათობის თეორიის ერთ-ერთი ფუძემდებელი, დიდი საბჭოთა მათემატიკოსი ა. კოლმოგოროვი ამბობს — „ალბათობის თეორიის შემეცნებითი ღირებულება იმით არის გაპირობებული, რომ მასობრივი შემთხვევითი მოვლენები, ერთობლიობაში განხილული, ქმნიან მკაცრ კანონზომიერებებს. თვით მათემატიკური ალბათობის ცნება იქნებოდა უნაყოფო, იგი რომ არ ხორციელდებოდეს რაიმე ხდომილობის სიხშირის სახით, ერთგვაროვან პირობათა მრავალგზის განმეორებისას..., ალბათობის თეორიის ნამდვილი ისტორია იწყება ი. ბერნულის დიდ რიცხვთა კანონით".

პირველი თავის § 1-ში აღნიშნული იყო, რომ შემთხვევითი ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე W ცდათა მრავალგზის განმეორებისას იჩენს სტატისტიკურ მდგრადობას, ანუ W მცირედ განსხვავდება მუდმივი P რიცხვისაგან. P წარმოადგენს თეორიულ სიდიდეს, მაშინ, როდესაც W არის ემპირიული, ცდათა განმეორებით მიღებული რიცხვი. დიდ რიცხვთა კანონი ამყარებს კავშირს ამ ორ სიდიდეს შორის.

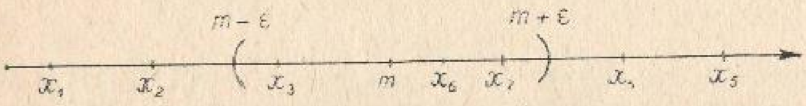
დიდ რიცხვთა კანონი გარკვეული ფორმით პირველად ჩამოაყალიბა ი. ბერნულიმ. შემდგომში, ეს კანონი სხვადასხვა ფორმით განაზოგადეს ჩებიშევმა, მარკოვმა, ბორელმა, ხინჩინმა და სხვ. აქ მოვიყვანთ დიდ რიცხვთა კანონის ერთ-ერთ სახეს — ჩებიშევის თეორემას. ამ თეორემის დასამტკიცებლად გამოვიყენებთ უტოლობას, რომელიც აგრეთვე ჩებიშევის სახელს ატარებს. ამ უტოლობის დამტკიცებას მოვიყვანთ დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებისათვის, თუმცა, იგი სამართლიანია ზოგად შემთხვევაშიც.

§ 2. ჩებიშევის უტოლობა

განვიხილოთ დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდე, რომელსაც გააჩნია სასრული დისპერსია $\mathbf{D}(X)$:

X	x_1	$x_2 \cdots$	x_n	$\cdots$
p	p_1	$p_2 \cdots$	p_n	$\cdots$

ამ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები გამოვსახოთ რიცხვით ღერძზე (ნახ. 25).



ნახ. 25

ε იყოს წინასწარ დასახელებული რაიმე დადებითი რიცხვი, m კი X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი: $M(X)=m$. შევაფასოთ იმის ალბათობა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც დაშორებულია m რიცხვიდან ε სიდიდეზე ნაკლებად.

ჩებიშევის უტოლობა. ალბათობა იმისა, რომ X შემთხვევითი სიდიდის თავისი მათემატიკური ლოდინიდან გადახრის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება ε-ს, არანაკლებია, ვიდრე $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P[|X-m|<\varepsilon] \geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (2.1)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ხდომილობა:

$$A=[|X-m|<\varepsilon],$$

მაშინ

$$\overline{A}=[|X-m|\geqslant\varepsilon]$$

და რადგან

$$P(A)+P(\overline{A})=1,$$

გვექნება:

$$P[|X-m|<\varepsilon]=1-P[|X-m|\geqslant\varepsilon], \qquad (2.2)$$

ამიტომ (2.1) უტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია $P[|X-m|\geqslant\varepsilon]$ ალბათობის შეფასება.

განმარტების თანახმად, X შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-m)^2\cdot p_i.$$

მარჯვენა მხარეში მწკრივის თითოეული შესაკრები არაუარყოფითია, ამიტომ თუ ავჯამავთ მხოლოდ მათ ნაწილს, კერძოდ, იმ წევრებს, რომლებისთვისაც $|x_i-m|\geqslant\varepsilon$, ჯამი შემცირდება.

ამრიგად, გვაქვს

$$D(X)\geqslant\sum_{|x_i-m|\geqslant\varepsilon}(x_i-m)^2\cdot p_i.$$

ჯამი კიდევ უფრო შემცირდება, თუ ყოველ $(x_i-m)^2$ სიდიდეს შევცვლით ε^2-ით:

$$D(X)\geqslant\sum_{|x_i-m|\geqslant\varepsilon}\varepsilon^2\cdot p_i=\varepsilon^2\cdot\sum_{|x_i-m|\geqslant\varepsilon}p_i=\varepsilon^2\cdot P[|X-m|\geqslant\varepsilon],$$

საიდანაც

$$P[|X-m|\geqslant\varepsilon]\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2};$$

და (2.2) ტოლობის ძალით,

$$P[|X-m|<\varepsilon]\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. თუ მოცემული გვაქვს წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, რომელთა დისპერსიების მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ერთი და იგივე მუდმივით, ე. ი. $D(X_n) \leqslant C$, $n=1, 2, 3\dots$, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right|<\varepsilon\right]=1.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შევნიშნოთ, რომ ჩებიშევის თეორემაში მონაწილე სიდიდე $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, წარმოადგენს $X_1, X_2, \dots, X_n$ შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკულს და ცხადია თვითონაც შემთხვევითი სიდიდეა, ხოლო $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)$ —ამ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი.

რადგან $D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k)$, ამიტომ თეორემის პირობის თანახმად, გვექნება:

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\leqslant\frac{C}{n}.$$

საშუალო არითმეტიკულისათვის გამოვიყენოთ ჩებიშევის უტოლობა:

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right|<\varepsilon\right]\geqslant 1-\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\varepsilon^2}\geqslant 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

ამ უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right|<\varepsilon\right]\geqslant 1.$$

რადგან ალბათობა ერთზე მეტი არ შეიძლება იყოს, ამიტომ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right|<\varepsilon\right]=1.$$

ჩებიშევის თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემის არსი შემდეგში მდგომარეობს: მიუხედავად იმისა, რომ ცალკეულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეებს შეუძლიათ მიიღონ თავისი მათემატიკური ლოდინისაგან საგრძნობლად განსხვავებული მნიშვნელობები, დიდი რაოდენობა შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკული (როგორც შემთხვევითი სიდიდე), გარკვეული აზრით კარგავს შემთხვევითი სიდიდის ხასიათს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ცალკეულ შემთხვევით სიდიდეს შეიძლება გააჩნდეს დიდი გადახრა, მაგრამ მათი საშუალო არითმეტიკულის გადახრა საკმარისად მცირეა, როცა შესაკრებთა რიცხვი დიდია.

ჩებიშევის თეორემის კერძო სახეს წარმოადგენს ი. ბერნულის თეორემა, რომელიც როგორც ავღნიშნეთ დიდ რიცხვთა კანონის უმარტივეს ფორმას წარმოადგენს.

ი. ბერნულის თ ე ო რ ე მ ა: ვთქვათ, m არის A ხდომილობის მოხდენის რიცხვი n დამოუკიდებელ ცდაში. ვიგულისხმოთ, რომ თითოეულ ცდაში ხდომილობის მოხდენის ალბათობა არის p, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right]=1. \tag{3.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ν_k აღნიშნავდეს k-ურ ცდაში A ხდომილების მოხდენის რიცხვს ($k=1, 2,\dots$). ცხადია, იგი წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის განაწილების კანონი შეიძლება შემდეგი ცხრილის სახით წარმოვიდგინოთ:

ν_k	1	0
p_k	p	q

($k=1, 2, \dots$),

$q=1-p$. ν_k ღებულობს 1-ის ტოლ მნიშვნელობას p ალბათობით, თუ k-ურ ცდაში ადგილი ჰქონდა წარმატებას, და 0-ის ტოლ მნიშვნელობას, თუ k-ურ ცდაში ადგილი ჰქონდა წარუმატებლობას, რისი ალბათობაც არის $q=1-p$. ამიტომ, ν_k-ს განაწილების კანონი მართლაც ზემოთ მოყვანილი ცხრილის საშუალებით შეიძლება მოიცეს. რაც შეეხება m-ს, იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ჯამი:

$$m=\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n$$

შევნიშნოთ, რომ

$$M(\nu_k)=1\cdot p+0\cdot q=p,\quad D(\nu_k)=1^2p+0^2\cdot q-p^2=p(1-p)=pq.$$

თეორემის პირობის თანახმად, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ არის წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა და რადგან $D(\nu_k)=pq\leqslant\frac{1}{4}$, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ჩებიშევის თეორემის პირობები შესრულებულია და ν_k მიმდევრობისათვის გვექნება:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\nu_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M(\nu_k)\right|<\varepsilon\right]=1.$$

რადგან $\sum\limits_{k=1}^{n}\nu_k=m$, ხოლო $M(\nu_k)=p$ მივიღებთ:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right]=1.$$

ბერნულის თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ $\frac{m}{n}$ სიდიდე A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირეა, ხოლო p არის A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა.

ბერნულის თეორემა აკავშირებს ამ ორ სიდიდეს: ფარდობით სიხშირესა და ალბათობას. ერთი ემპირიული სიდიდეა, მეორე კი თეორიული. ბერნულის თეორემა სწორედ იმაზე მიგვითითებს, რომ თუ ცდათა რიცხვი დიდია, მაშინ ფარდობითი სიხშირე ამავე ხდომილობის უცნობი თეორიული ალბათობის შეფასებად შეიძლება იქნეს ღებული. ეს თეორემა საშუალებას იძლევა ალბათობის თეორია, როგორც შემთხვევით ხდომილობათა კანონზომიერებების მათემატიკური მოდე-

ლი, დაუკავშირდეს პრაქტიკას, ე. ი. გვქონდეს ამა თუ იმ პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტის საშუალება.

უნდა აღინიშნოს, რომ ბერნულის თეორემიდან ხშირად აკეთებენ არასწორ დასკვნას, თითქოს ცდათა რიცხვის ზრდასთან ერთად ფარდობითი სიხშირე მიისწრაფის ხდომილობის ალბათობისაკენ. სინამდვილეში კი ბერნულის თეორემა ამტკიცებს, რომ $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ უტოლობის ალბათობა რაგინდ ახლოს არის ერთთან, როცა ცდათა რიცხვი საკმაოდ დიდია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ხდომილობის ფარდობის სიხშირესა და ალბათობას შორის დიდი გადახრები მით უფრო ნაკლებადაა მოსალოდნელი, რაც უფრო დიდია n.

განსაზღვრება 3.1. შემთხვევით სიდიდეთა $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ მიმდევრობას ეწოდება ალბათურად კრებადი რაიმე a რიცხვისაკენ, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|X_n-a|<\varepsilon\right]=1. \tag{3.2}$$

ამ განსაზღვრების გათვალისწინებით, ჩებიშევის თეორემა ნიშნავს, რომ შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკული ალბათურად კრებადია შესაბამის მათემატიკურ ლოდინთა საშუალო არითმეტიკულისაკენ, ხოლო ბერნულის თეორემა ნიშნავს, რომ ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე ალბათურად კრებადია ამ ხდომილობის ალბათობისაკენ.

V თავი

მახასიათებელი ფუნქციები და ცენტრალური ზღვარითი თეორემა

§ 1. კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდე

აქამდე ჩვენ განვიხილავდით შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც მხოლოდ ნამდვილ მნიშვნელობებს ღებულობდა. განვაზოგადოთ შემთხვევითი სიდიდის ცნება იმ შემთხვევისათვის, როდესაც იგი ღებულობს კომპლექსურ მნიშვნელობებს.

განსაზღვრება 1.1. Z შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება კომპლექსური, თუ იგი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$Z=X+iY,$$

სადაც X და Y ნამდვილი შემთხვევითი სიდიდეებია, i — წარმოსახვითი ერთეულია.

გეომეტრიულად კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდე შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც შემთხვევითი წერტილი Z კომპლექსურ რიცხვთა სიბრტყეზე.

კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები ისე განვსაზღვროთ, რომ მათგან, როგორც კერძო შემთხვევა, მიღებულ იქნას ნამდვილი შემთხვევითი სიდიდის შესაბამისი მახასიათებლების განსაზღვრებები.

განსაზღვრება 1.2. $Z=X+iY$ კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება კომპლექსურ რიცხვს:

$$M(Z)=M(X)+i\,M(Y).$$

განსაზღვრება 1.3. $Z=X+iY$ კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ეწოდება Z სიდიდის გადახრის მოდულის კვადრატის მათემატიკურ ლოდინს:

$$D(Z)=M\left[\,|Z-M(Z)|^2\right].$$

კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიას აქვს შემდეგი თვისება:

$$D(Z)=D(X)+D(Y).$$

მართლაც,

$$\begin{aligned} D(Z)&=M\left[\,|X+iY-(M(X)+i\,M(Y))\,|^2\right]=\\ &=M\left[\,|X-M(X)+i\,(Y-M(Y))\,|^2\right]=\\ &=M\left[(X-M(X))^2+(Y-M(Y))^2\right]=\\ &=M\left[(X-M(X))^2\right]+M\left[(Y-M(Y))^2\right]=D(X)+D(Y). \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ნამდვილი რიცხვია, მაშინ როდესაც მათემატიკური ლოდინი საზოგადოდ, კომპლექსური რიცხვია.

განსაზღვრება 1.4. $Z_1=X_1+iY_1$ და $Z_2=X_2+iY_2$ კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდეების კორელაციური მომენტი $k(Z_1, Z_2)$ განისაზღვრება ტოლობით:

$$k(Z_1, Z_2)=M\left[(Z_1-M(Z_1))\,\overline{(Z_2-M(Z_2))}\right],$$

სადაც $\overline{Z}$ არის Z კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის შეუღლებული: $\overline{Z}=X-iY$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობას:

$$\overline{k(Z_1, Z_2)}=k(Z_2, Z_1).$$

ალბათობის თეორიის რიგი ამოცანების გადაწყვეტისას გამოიყენება მათემატიკური ანალიზის მეთოდები, კერძოდ ე. წ. ფურიეს გარდაქმნათა მეთოდი, რომელიც ალბათობის თეორიაში ცნობილია მახასიათებელ ფუნქციათა მეთოდის სახელწოდებით. ფურიეს გარდაქმნა შესწავლილი იყო ანალიზის კურსში, ამიტომ ჩვენ შემოვიფარგლებით მისი იმ თვისებების განხილვით, რომელიც უშუალოდ დაგვეხმარება ალბათობის თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი თეორემის — ცენტრალური ზღვარითი თეორემის დამტკიცებაში.

X იყოს ნამდვილი შემთხვევითი სიდიდე. მისი საშუალებით ავაგოთ კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდე U, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად:

$$U=e^{itX}=\cos tX+i\sin tX,$$

სადაც t ნამდვილი პარამეტრია, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს $(-\infty,\ \infty)$ ინტერვალიდან.

განსაზღვრება 2.1. X შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია $g(t)$ ეწოდება $U=e^{itX}$ კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს, ე. ი.

$$g(t)=M\left[e^{itX}\right]. \tag{2.1}$$

კერძოდ, თუ X შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტული ტიპისაა, მაშინ:

$$g(t)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{itX_k}\cdot p_k, \tag{2.2}$$

ხოლო თუ X უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის განაწილების სიმკვრივეა $f(x)$, მაშინ:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx. \tag{2.3}$$

როგორც (2.3) ფორმულიდან ჩანს, $g(t)$ არის $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა. მათემატიკური ანალიზიდან ცნობილია, რომ თუ მოცემულია $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა $g(t)$, მაშინ გარკვეულ

პირობებში შეიძლება $f(x)$ ფუნქციის აღდგენა $g(t)$-ს საშუალებით, კერძოდ,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}g(t)dt. \tag{2.4}$$

(2.4) თანაფარდობას, როგორც ცნობილია, ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნა ეწოდება.

განვიხილოთ ზოგიერთი კონკრეტული განაწილების შესაბამისი მახასიათებელი ფუნქციის მაგალითი.

მაგალითი 1. X იყოს ბინომურად განაწილებული დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე. ვიპოვოთ მისი მახასიათებელი ფუნქცია.

ამოხსნა. რადგან

$$P[X=m]=C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{2.2}$$

სადაც $m=0,\ 1,\ldots,n,\ p+q=1$, ფორმულის თანახმად:

$$g(t)=\sum_{m=0}^{n} e^{itm}C_n^m p^m q^{n-m}=\sum_{m=0}^{n} C_n^m (pe^{it})^m q^{n-m}=[pe^{it}+q]^n .$$

მაგალითი 2. X იყოს პუასონის კანონით განაწილებული დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე. ვიპოვოთ მისი მახასიათებელი ფუნქცია.

ამოხსნა. რადგან $P[X=m]=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, სადაც $m=0,1,2,\ldots$, $\lambda>0$, (2.2) ფორმულის თანახმად:

$$g(t)=\sum_{m=0}^{\infty} e^{itm}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^m}{m!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}=e^{\lambda(e^{it}-1)} .$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ მახასიათებელი ფუნქცია X უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდისა, რომელიც თანაბრადაა განაწილებული $(-a,\ a)$ ინტერვალში.

ამოხსნა. როგორც ვიცით, ასეთი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & \text{თუ } x\in(-a,a),\\ 0, & \text{თუ } x\notin(-a,a),\end{cases}$$

ამიტომ (2.3) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$g(t)=\int_{-a}^{a} e^{itx}\frac{dx}{2a}=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{itx}dx=\frac{1}{2ait}e^{itx}\Big|_{-a}^{a}=$$

$$=\frac{1}{2ait}2i\sin at=\frac{\sin at}{at} .$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ მაჩვენებლიანი კანონით განაწილებული უწყვეტი ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{როცა } x>0,\\ 0, & \text{როცა } x<0,\end{cases}$$

ამიტომ (2.3) ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$g(x)=\int_{0}^{+\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_{0}^{+\infty} e^{-(\lambda-it)x}dx=-\frac{\lambda}{\lambda-it}e^{-(\lambda-it)x}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{\lambda}{\lambda-it} .$$

მაგალითი 5. უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდე X განაწილებულია ნორმალური კანონით, პარამეტრებით $(a,\ \sigma^2)$. ვიპოვოთ მისი მახასიათებელი ფუნქცია.

ამოხსნა. რადგან

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

ამიტომ (2.3) ფორმულის თანახმად;

$$g(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

მოვახდინოთ ჩასმა $z=\dfrac{x-a}{\sigma}-it\sigma$, მაშინ $\dfrac{x-a}{\sigma}=z+it\sigma$, $x=a+z\sigma+it\sigma^2$, $dx=\sigma dz$ და მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ;

$$g(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty-it\sigma}^{+\infty-it\sigma} e^{it(a+z\sigma+it\sigma^2)-\frac{(z+it\sigma)^2}{2}}\sigma dz=$$

$$=e^{iat-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty-it\sigma}^{+\infty-it\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ ნებისმიერი ნამდვილი a-სათვის

$$\int\limits_{-\infty-ia}^{+\infty-ia} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}.$$

ამიტომ, საბოლოოდ

$$g(t)=e^{iat-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: თუ ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე ნორმირებულია, ე. ი. $a=0$ და $\sigma^2=1$, მაშინ ცხადია, რომ მის მახასიათებელ ფუნქციას ექნება სახე:

$$g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

§ 3. მახასიათებელ ფუნქციათა თვისებები

მოვიყვანოთ მახასიათებელ ფუნქციათა ზოგიერთი ძირითადი თვისება.

1. $g(0)=1$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: რადგან

$$g(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)\,dx,$$

ამიტომ

$$g(0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1.$$

$f(x)$ სიმკვრივის ცნობილი თვისების თანახმად.

2. $|g(t)|\leqslant 1,\quad -\infty<t<\infty.$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა:

$$|g(t)|=\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)\,dx\right|\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|e^{itx}|f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1,$$

რადგან $|e^{itx}|=\sin^2 tx+\cos^2 tx=1$.

3. $g(-t)=\overline{g(t)},\ -\infty<t<\infty.$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა:

$$g(-t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{e^{itx}}f(x)\,dx=\overline{g(t)}.$$

4. მახასიათებელი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე. (ამ თვისების დამტკიცება იხილეთ მათემატიკური ანალიზის კურსში).

თ ე ო რ ე მ ა 3.1 (ერთადერთობის თეორემა). განაწილების ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება თავისი მახასიათებელი ფუნქციით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა მახასიათებელ ფუნქციათა სიმრავლესა და განაწილების ფუნქციათა სიმრავლეს შორის.

თ ე ო რ ე მ ა 3.2. თუ X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება, ე. ი. $Y=ax+b$, სადაც a და b მუდმივი რიცხვებია, მაშინ $g_Y(t)=g_X(at)\,e^{ibt}$, სადაც $g_X(t)$ და $g_Y(t)$ წარმოადგენენ შესაბამისად X და Y შემთხვევით სიდიდეთა მახასიათებელ ფუნქციებს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მართლაც,

$$g_Y(t)=M(e^{itY})=M(e^{it(aX+b)})=e^{itb}M(e^{itaX})=e^{itb}g_X(at).$$

თ ე ო რ ე მ ა 3.3. ორი დამოუკიდებელი X და Y შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის მახასიათებელი ფუნქცია უდრის შესაკრები სიდიდეების მახასიათებელი ფუნქციების ნამრავლს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $Z=X+Y$, სადაც X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ:

$$g_Z(t)=M(e^{itZ})=M(e^{it(X+Y)})=M(e^{itX}\cdot e^{itY})=$$
$$=M(e^{itX})\cdot M(e^{itY})=g_X(t)\cdot g_Y(t).$$

შ ე დ ე გ ი. თუ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ერთნაირად განაწილებული, დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ მათი ჯამის მახასიათებელი ფუნქცია $g_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = [g(t)]^n$, სადაც $g(t)$ არის თითოეული შესაკრების მახასიათებელი ფუნქცია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: თეორემა 3.3. სამართლიანია ნებისმიერი სასრული რაოდენობის შესაკრებთა შემთხვევაშიც.

როგორც ვიცით, (თავი II), ორი შემთხვევითი სიდიდის ჯამის სიმკვრივის პოვნა შესაკრებთა სიმკვრივეების საშუალებით დაკავშირებულია ნახვევის ტიპის ინტეგრალის გამოთვლასთან, რაც გარკვეულ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული; თეორემა 3.3. იძლევა საშუალებას, იგივე ამოცანა უფრო მარტივად გადავწყვიტოთ მახასიათებელი ფუნქციების გამოყენებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვთქვათ, მოცემულია ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდე X და Y, განაწილებული ბინომური კანონით, შესაბამისი პარამეტრით p_1, n_1 და p_2, n_2. მათი მახასიათებელი ფუნქციებია:

$$g_X(t) = [q_1 + p_1 e^{it}]^{n_1}, \quad (q_1 = 1 - p_1),$$

$$g_Y(t) = [q_2 + p_2 e^{it}]^{n_2}, \quad (q_2 = 1 - p_2).$$

ვიპოვოთ $Z=X+Y$ სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია. (3.3) თეორემის თანახმად,

$$g_Z(t) = g_X(t)\cdot g_Y(t) = [q_1 + p_1 e^{it}]^{n_1}\,[q_2 + p_2 e^{it}]^{n_2}.$$

ამ გამოსახულებიდან ჩანს, რომ z შემთხვევითი სიდიდე საზოგადოდ არ არის ბინომური კანონით განაწილებული. კერძო შემთხვევაში, როცა $p_1=p_2=p$, გვექნება $g_Z(t) = (q + p e^{it})^{n_1+n_2}$, ე. ი. ერთი და იგივე p პარამეტრის მქონე ორი ბინომურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამი კვლავ ბინომური კანონითაა განაწილებული.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვთქვათ, X და Y პუასონის კანონით განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო $g_X(t)$ და $g_Y(t)$ მათი შესაბამისი მახასიათებელი ფუნქციებია. მაშინ, როგორც ვიცით,

$$g_X(t)=e^{\lambda_1 (e^{it}-1)}, \quad g_Y(t)=e^{\lambda_2 (e^{it}-1)},$$

სადაც λ_1 და λ_2 შესაბამისად X და Y სიდიდეების განაწილების პარამეტრებია. ვიპოვოთ $g_Z(t)$, სადაც $Z = X + Y$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თეორემა 3.3-ის ძალით,

$$g_Z(t) = e^{\lambda_1 (e^{it}-1)}\, e^{\lambda_2 (e^{it}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)},$$

ე. ი. პუასონის კანონით განაწილებული ორი შემთხვევითი სიდიდის ჯამი კვლავ პუასონის კანონითაა განაწილებული, რომლის განაწილების პარამეტრი შესაკრებთა პარამეტრების ჯამის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. ვთქვათ X და Y მაჩვენებლიანი კანონით განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო $g_X(t)$ და $g_Y(t)$ მათი შესაბამისი მახასიათებელი ფუნქციებია. მაშინ, როგორც ვიცით:

$$g_X(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - it} \quad \text{და} \quad g_Y(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - it},$$

სადაც λ_1 და λ_2 შესაბამისად X და Y შემთხვევით სიდიდეთა პარამეტრებია. ვიპოვოთ $g_Z(t)$, სადაც $Z = X + Y$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თეორემა 3.3-ის ძალით,

$$g_Z(t) = g_X(t)\cdot g_Y(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - it)(\lambda_2 - it)}.$$

აქედან ჩანს, რომ მაჩვენებლიანი კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამი არ არის მაჩვენებლიანი კანონით განაწილებული.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 9. ვთქვათ X და Y ნორმალური კანონით განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, განაწილების პარამეტრებით, შესაბამისად (a_X, σ_X^2) და (a_Y, σ_Y^2), მაშინ, როგორც ვიცით:

$$g_X(t) = e^{ia_X t - \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}} \quad \text{და} \quad g_Y(t) = e^{ia_Y t - \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}}.$$

ვიპოვოთ $Z=X+Y$ შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თეორემა 3.3-ის ძალით,

$$g_Z(t) = e^{ia_X t - \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}}\, e^{ia_Y t - \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}} = e^{it(a_X + a_Y) - \frac{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)t^2}{2}}.$$

აქედან ჩანს, რომ ნორმალური კანონით განაწილებული ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდის ჯამი ასევე ნორმალური კანონითაა განაწილებული, პარამეტრებით $(a_X + a_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ რამდენიმე თეორემა მახასიათებელ ფუნქციათა შესახებ, რომლებიც დაგვჭირდება ალბათობის თეორიის

ერთ-ერთი ძირითადი დებულების — ცენტრალური ზღვარითი თეორემის დასამტკიცებლად.

თეორემა 3.4. თუ $|X|$ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია n-ური რიგის საწყისი მომენტი, მაშინ X შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია $g_X(t)$ წარმოებადია n-ჯერ და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$g^{(k)}(0) = i^k M(X^k), \tag{3.1}$$

სადაც $k \leqslant n$, ხოლო i წარმოსახვითი ერთეულია.

ამ თეორემის პრაქტიკული ღირებულება იმაში მდგომარეობს, რომ იგი ამყარებს კავშირს მახასიათებელ ფუნქციასა და შემთხვევითი სიდიდის მომენტებს შორის. ასე მაგალითად, როცა $k=1$, (3.1) ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$M(X) = i^{-1} \cdot g'(0).$$

მარტივი გამოთვლებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ:

$$D(X) = -[\ln g(0)]''.$$

განსაზღვრება 3.1. არაკლებად ფუნქციათა $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots, \ldots, F_n(x), \ldots$ მიმდევრობას ეწოდება სუსტად კრებადი არაკლებადი $F(x)$ ფუნქციისაკენ, თუ ეს მიმდევრობა კრიბება ამ ფუნქციისაკენ მისი უწყვეტობის ყოველ წერტილზე.

თეორემა 3.5. (პირდაპირი თეორემა) თუ განაწილების ფუნქციათა მიმდევრობა,

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x), \ldots, F_n(x), \ldots$$

სუსტად კრებადია განაწილების $F(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ შესაბამის მახასიათებელ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$g_1(t),\ g_2(t),\ g_3(t), \ldots, g_n(t), \ldots$$

კრებადია $F(x)$-ის მახასიათებელი $g(t)$ ფუნქციისაკენ. ამასთანავე, ეს კრებადობა თანაბარია ნებისმიერ სასრულ ინტერვალზე.

თეორემა 3.6. (შებრუნებული თეორემა) თუ მახასიათებელ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$g_1(t),\ g_2(t),\ g_3(t), \ldots, g_n(t), \ldots$$

კრებადია უწყვეტი $g(t)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ შესაბამის განაწილების ფუნქციათა მიმდევრობა

$$F_1(x),\ F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$$

სუსტად კრებადია $g(t)$ ფუნქციის შესაბამისი განაწილების $F(x)$ ფუნქციისაკენ.

ალბათობის თეორიაში დიდი მნიშვნელობა აქვს თეორემათა გარკვეულ ჯგუფს, ე. წ. ზღვარით თეორემებს, რომლებიც შეისწავლიან შემთხვევით სიდიდეთა მდგომარეობის საკითხს. ასე მაგალითად, ჩვენს მიერ განხილული დიდ რიცხვთა კანონი (ჩებიშევისა და ბერნულის თეორემები) გამოხატავს შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკულის მდგრადობას. ამრიგად, დიდ რიცხვთა კანონი წარმოადგენს კონკრეტულ ზღვარით თეორემას.

საკითხი შეიძლება დაისვას უფრო ზოგადად: მოცემულია შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ რომელიც წარმოადგენს მოცემული მიმდევრობის კერძო ჯამს. რა შეიძლება ითქვას შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის (Y_n შემთხვევითი სიდიდის) განაწილების კანონზე, თუ მოცემულია გარკვეული ინფორმაცია შესაკრებთა შესახებ? ასეთ კითხვაზეც პასუხს იძლევა თეორემები, რომლებიც ასევე მიეკუთვნება ზღვარით თეორემათა ჯგუფს.

შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების კანონის შესწავლა პრაქტიკული საჭიროებით არის განპირობებული. განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ვთქვათ, ვაწარმოებთ რაიმე სიდიდის გაზომვას. გაზომვის შედეგი დამოკიდებულია ისეთ ფაქტორებზე, როგორიცაა ატმოსფერული პირობები, გამზომი ხელსაწყოს მდგომარეობა, დამკვირვებლის დაღლილობა და სხვა. თითოეული ეს ფაქტორი იწვევს უმნიშვნელო შეცდომას, მაგრამ მათი ჯამი გარკვეული სიდიდისაა და საჭიროა მისი მხედველობაში მიღება. ეს კი მაშინაა შესაძლებელი, როდესაც ვიცით მისი, როგორც შემთხვევითი სიდიდის, განაწილების კანონი.

მაგალითი 2. ცნობილია, რომ ამა თუ იმ დეტალის დამზადებისას მოითხოვება გარკვეული სტანდარტის დაცვა. დეტალის დამზადება ოპერაციათა გარკვეული მიმდევრობის შესრულებას მოითხოვს. თითოეული ოპერაცია არ შეიძლება წარიმართოს აბსოლუტურად ზუსტად და თავის მხრივ იწვევს უმნიშვნელო ცდომილებებს, რომელთა ჯამი გასათვალისწინებელი სიდიდეა. ასე რომ, ჯამური ცდომილება აქაც წარმოადგენს მრავალი მცირე ცდომილობის ჯამს, რომლის მხედველობაში მიღება აუცილებელია.

ორივე მოყვანილი მაგალითი ფორმალურად ერთნაირია — შესაკრებ შემთხვევით სიდიდეთა საშუალებით უნდა ვიმსჯელოთ მათი ჯამის განაწილების კანონზე. აღმოჩნდა, რომ ადგილი აქვს მეტად საინტერე-

სო ფაქტს. თუ შესაკრები შემთხვევითი სიდიდეები გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებენ და მათი რიცხვი დიდია, თურმე ჯამის განაწილების კანონი საკმარისად ახლოსაა ნორმალური განაწილების კანონთან. თეორემები, რომლებიც ასახავენ ამ ფაქტს, ცნობილია ცენტრალური ზღვარითი თეორემების სახელწოდებით. მოვიყვანოთ ცენტრალური ზღვარითი თეორემის უმარტივესი სახე.

თ ე ო რ ე მ ა 4.1. (ლინდებერგ-ლევის თეორემა). თუ $X_1, X_2, \ldots, \ldots, X_n, \ldots$ ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია m მათემატიკური ლოდინით და σ^2 დისპერსიით, მაშინ

$Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონი მიისწრაფის ნორმალური განაწილების კანონისაკენ, როცა $n \to \infty$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. (დამტკიცებას მოვიყვანთ უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებისათვის. დისკრეტულ შემთხვევაში დამტკიცება ანალოგიურია).

ვთქვათ, $f(x)$ არის თითოეული X_k $(k=1, 2, \ldots)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე, მაშინ ყოველი X_k-ს მახასიათებელი ფუნქცია იქნება

$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx. \tag{4.1}$$

Y_n შემთხვევით სიდიდეთა მახასიათებელი ფუნქციები აღვნიშნოთ $g_n(t)$-თი. მაშინ, როგორც მახასიათებელ ფუნქციათა თვისებებიდან ვიცით (თეორემა 3.2-ის შედეგი),

$$g_n(t) = [g(t)]^n, \quad (n=1, 2, \ldots).$$

$g(t)$ მახასიათებელი ფუნქცია $t=0$ წერტილის მიდამოში წარმოვადგინოთ მაკლორენის ფორმულით, ამასთანავე, შემოვისაზღვროთ პირველი სამი წევრი:

$$g(t) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} t + \frac{g''(0)}{2!} t^2 + \alpha(t) \cdot t^2, \tag{4.2}$$

სადაც $\alpha(t) \to 0$, როცა $t \to 0$.

გამოვთვალოთ $g(0)$, $g'(0)$ და $g''(0)$ სიდიდეები ცხადია, $g(0)=1$.

(4.1) ტოლობის გაწარმოებით ვღებულობთ:

$$g'(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\, x\, e^{itx} f(x)\, dx, \tag{4.3}$$

აქედან

$$g'(0) = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = im,$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ თეორემის პირობაში მათემატიკური ლოდინი $m=0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილავდით მიმდევრობას $X_1 - m$, $X_2 - m$, ...).

(4.3) ტოლობის გაწარმოებით ვღებულობთ:

$$g''(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i^2 x^2 f(x) e^{itx}\, dx,$$

სიდანაც

$$g''(0) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = -\sigma^2.$$

ამიტომ (4.2) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$g(t) = 1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha(t) \right] t^2. \tag{4.4}$$

მოვახდინოთ Y_n შემთხვევით სიდიდეთა ნორმირება. ამისათვის გამოვითვალოთ მათი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია:

$$M(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} M(X_k) = 0,$$

$$D(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = n\sigma^2,$$

ამიტომ ნორმირებული $\mathring{Y}_n$ შემთხვევითი სიდიდე იქნება:

$$\mathring{Y}_n = \frac{Y_n}{\sigma \sqrt{n}}.$$

ამ სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ნულია, ხოლო დისპერსია — ერთი.

თუ ჩვენ თეორემას დავამტკიცებთ $\overset{\circ}{Y}_n$ შემთხვევითი სიდიდეებისათვის, იგი დამტკიცებული იქნება Y_n შემთხვევითი სიდიდეებისათვისაც, რადგან ყოველი Y_n არის $\overset{\circ}{Y}_n$-ის წრფივი ფუნქცია.

აღვნიშნოთ $\overset{\circ}{Y}_n$-ის მახასიათებელი ფუნქცია $\overset{\circ}{g}_n(t)$-თი, მაშინ მახასიათებელ ფუნქციათა ერთ-ერთი თვისების თანახმად (თეორემა 3.1):

$$\overset{\circ}{g}_n(t)=g_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

(4.4) ტოლობის თანახმად

$$\overset{\circ}{g}_n(t)=g_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\left[g\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n=$$

$$=\left\{1-\left[\frac{\sigma^2}{2}-\alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma^2}\right\}^n. \tag{4.5}$$

გავალოგარითმოთ (4.5) ტოლობა. გვექნება:

$$\ln\overset{\circ}{g}_n(t)=n\ln\left\{1-\left[\frac{\sigma^2}{2}-\alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma^2}\right\}. \tag{4.6}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\gamma_n=-\left[\frac{\sigma^2}{2}-\sigma\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma^2}, \tag{4.7}$$

ცხადია, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$.

(4.6) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\ln\overset{\circ}{g}_n(t)=n\cdot\ln(1+\gamma_n).$$

ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ $\ln(1+\gamma)\approx\gamma$, როცა $\gamma\to0$, ამიტომ თუ განვიხილავთ (4.6) ტოლობის ზღვარს, როცა $n\to\infty$, გვექნება:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\overset{\circ}{g}_n(t)=\lim_{n\to\infty}n\ln(1+\gamma_n)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\gamma_n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-n\left[\frac{\sigma^2}{2}-\alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma^2}\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{\sigma^2}-\frac{t^2}{2}\right)=-\frac{t^2}{2};$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty}\overset{\circ}{g}_n(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს $N(0,1)$ ნორმალური განაწილების მახასიათებელ ფუნქციას.

თეორემა (3.6)-ის თანახმად, $\overset{\circ}{Y}_n$ შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების ფუნქციათა მიმდევრობა მიისწრაფის $N(0,1)$ განაწილების ფუნქციისაკენ:

$$\lim_{n\to\infty}P(\overset{\circ}{Y}_n<x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

ამით ცენტრალური ზღვარითი თეორემა ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებისათვის მთლიანად დამტკიცებულია.

რუსი მათემატიკოსის ა. ლიაპუნოვის მიერ ეს თეორემა განზოგადებულ იქნა ნებისმიერად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობისათვის. თეორემა მოვიყვანოთ დაუმტკიცებლად.

თ ე ო რ ე მ ა 4.2. (ლიაპუნოვის თეორემა). თუ $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ნებისმიერად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, არსებობს $M(|\overset{\circ}{X}_k|^3)$ $k=1, 2, 3, \ldots$ და სრულდება პირობა

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}M(|\overset{\circ}{X}_k|^3)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}D(X_k)\right)^{3/2}}=0,$$

მაშინ $Y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონი მიისწრაფის ნორმალურისაკენ.

პირველი თავის § 12-ში ჩამოყალიბებულ იქნა მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური თეორემა, რომლის დამტკიცებაც შეიძლება მიღებულ იქნას ცენტრალური ზღვარითი თეორემიდან.

განვიხილოთ ბერნულის სქემა და თითოეულ ცდაში A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა აღვნიშნოთ p-თი, $0<p<1$. ბერნულის სქემის n ცდაში ν წარმატების $p_n(\nu)$ ალბათობის გამოსათვლელად, შემოვიტანოთ შემთხვევითი სიდიდე X_i, რომელიც ყოველ i-ურ ცდაში ღებულობს ორ მნიშვნელობას, 1 ან 0-ს, იმისდა მიხედვით, ხდომილობა მოხდა თუ არ მოხდა კონკრეტულ ცდაში:

X_i	1	0
p_i	p	q

$p+q=1, \quad i=1, 2, \ldots, n;$

მაშინ n ცდაში A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვი ν შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც წარმოადგენს X_i შემთხვევით სიდიდეთა ჯამს: $\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. რადგან $M(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, $D(X_i) = pq$, და გვაქვს დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობა, სადაც ყოველი X_i შემთხვევითი სიდიდე ერთნაირად არის განაწილებული, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ცენტრალური ზღვარითი თეორემა. ამ თეორემის თანახმად, ნორმირებული კერძო ჯამის $\mathring{\nu} = \dfrac{\nu - M(\nu)}{\sqrt{D(\nu)}}$ განაწილების კანონი მიისწრაფის ნორმალურისაკენ.

ცხადია, რომ $M(\nu) = M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = np$, ანალოგიურად $D(\nu) = npq$, ამიტომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის რაიმე (α, β) ინტერვალში მოხვედრის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულის თანახმად (იხ. თავი III, (7, 1))

$$P[\alpha < \mathring{\nu} < \beta] = P\left[\alpha < \frac{\nu - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right] \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

რაც ამტკიცებს მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალურ თეორემას.

მარკოვის ჯაჭვები

§ 1. საწყისი ცნებები

I თავის § 11-ში ჩვენ განვიხილეთ დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობა (პოლინარული სქემა), სადაც ყოველი ცდის შედეგის ალბათობა დამოუკიდებელია წინა ცდების შედეგებისაგან. პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ერთგვაროვან ცდათა ისეთი მიმდევრობაც, როცა თითოეული ცდის შედეგი გავლენას ახდენს მომავალი ცდების შესაძლო შედეგთა პირობით ალბათობებზე. ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ასეთი ტიპის ცდების ერთ მნიშვნელოვან კლასს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. 1. სპორტსმენი ვარჯიშობს სროლაში შემდეგი წესით: ყოველი გასროლის შემდეგ ცვლის მანძილს სამიზნემდე იმისდა მიხედვით, ტყვია მოხვდა სამიზნეს თუ არა. მოხვედრის შემთხვევაში იგი მანძილს ზრდის 1 მეტრით, აცდენის შემთხვევაში ამცირებს იგივე სიდიდით. სამიზნეში მოხვედრის ალბათობა დამოკიდებულია მანძილზე სამიზნესა და სპორტსმენს შორის, ეს მანძილი კი ყოველ კონკრეტულ ცდაში დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა შედეგით დამთავრდა წინა ცდა.

განვიხილოთ ცდათა მიმდევრობა. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი ცდის ჩატარებისას შეიძლება მოხდეს $A_1, A_2, \ldots, A_k$ უთავსებად ხდომილობებიდან ერთ-ერთი. $A_i^{(s)}$ ნიშნავდეს, რომ s-ურ ცდაში ადგილი ექნება A_i ხდომილობას, ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$; $s = 1, 2, 3, \ldots$).

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.1. სასრულშედეგიან ცდათა ისეთ მიმდევრობას, რომელშიც ყოველი ცდის შესაძლო შედეგთა პირობითი ალბათობები დამოკიდებულია მხოლოდ წინა ცდის შედეგზე და არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა შედეგით დამთავრდა უფრო ადრეული ცდები, მარკოვის ჯაჭვი ეწოდება. მარკოვის ჯაჭვისათვის

$$P(A_i^{(s+1)} \mid A_{i_1}^{(1)} \cdot A_{i_2}^{(2)} \cdots A_{i_s}^{(s)}) = P(A_i^{(s+1)} \mid A_{i_s}^{(s)}).$$

აღვნიშნოთ $P_{ij}^{(s)}$ სიმბოლოთი პირობითი ალბათობა იმისა, რომ S-ურ ცდაში ადგილი ექნება A_j ხდომილობას, თუ $(S-1)$-ე ცდაში ადგილი ჰქონდა A_i ხდომილობას, ე. ი.

$$P_{ij}^{(s)} = P(A_j^{(s)} \mid A_i^{(s-1)}); \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, k, \quad s = 1, 2, 3, \ldots.$$

ვინაიდან $A_1^{(s)} + A_2^{(s)} + \cdots + A_k^{(s)} = \Omega$, ამიტომ:

$$P_{i1}^{(s)}+P_{i2}^{(s)}+P_{i3}^{(s)}+\cdots+P_{ik}^{(s)}=P(A_1^{(s)}\mid A_i^{(s-1)})+P(A_2^{(s)}\mid A_i^{(s-1)})+\cdots+$$
$$+P(A_k^{(s)}\mid A_i^{(s-1)})=P(A_1^{(s)}+A_2^{(s)}+\cdots+A_k^{(s)}\mid A_i^{(s-1)})=$$
$$=P(\Omega\mid A_i^{(s-1)})=1,\quad i=1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{1.1}$$

განსაზღვრება 1.2. თუ P_{ij} პირობითი ალბათობა არ არის დამოკიდებული s ცდის ნომერზე, მარკოვის ჯაჭვს ეწოდება ერთგვაროვანი, ანუ სტაციონარული.

სტაციონარული ჯაჭვის განხილვისას აღნიშვნაში ცდის ნომერს გამოვტოვებთ და დავწერთ P_{ij} პირობით ალბათობას.

მარკოვის ჯაჭვების შესასწავლად მიმართავენ პირობით ალბათობებისაგან შედგენილ მატრიცს, რომელსაც ალბათური, ანუ სტოქასტური მატრიცი ეწოდება:

$$\mathbf{P}=\left\|\begin{matrix} P_{11}, & P_{12}, & \ldots, & P_{1k} \\ P_{21}, & P_{22}, & \ldots, & P_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{k1}, & P_{k2}, & \ldots, & P_{kk} \end{matrix}\right\|.$$

(1.1) ტოლობის გამო ამ მატრიცის თითოეულ სტრიქონში მდგომი ალბათობების ჯამი ერთის ტოლია.

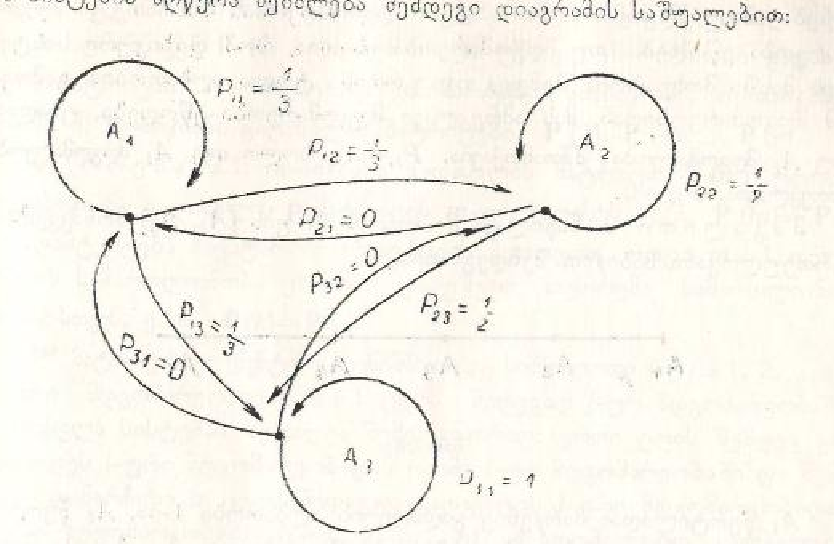
§ 2. მარკოვის ჯაჭვის ფიზიკური ინტერპრეტაცია. მარკოვის ტოლობა

მარკოვის ჯაჭვს შეიძლება მივცეთ შემდეგი ფიზიკური ინტერპრეტაცია: განვიხილოთ რაიმე ფიზიკური სისტემა, რომელსაც გააჩნია სხვადასხვა მდგომარეობები და შეუძლია ერთი მდგომარეობიდან მეორეში გადასვლა. აღვნიშნოთ ეს მდგომარეობები $A_1, A_2, \ldots, A_k$ სიმბოლოებით და ფიზიკური სისტემის ევოლუცია წარმოვიდგინოთ როგორც ცდათა მიმდევრობა, რომლის შესაძლო შედეგები წარმოადგენს ამ სისტემის კონკრეტულ მდგომარეობას. P_{ij} პირობითი ალბათობა ამ შემთხვევაში წარმოადგენს სისტემის A_i მდგომარეობიდან A_j მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობას. (მოკლედ რომ ვთქვათ, i-ური მდგომარეობიდან j-ურ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობას).

მაგალითი 2. განვიხილოთ ფიზიკური სისტემა, რომელსაც გააჩნია სამი სხვადასხვა მდგომარეობა A_1, A_2, A_3. მისი სტოქასტური მატრიცი იყოს:

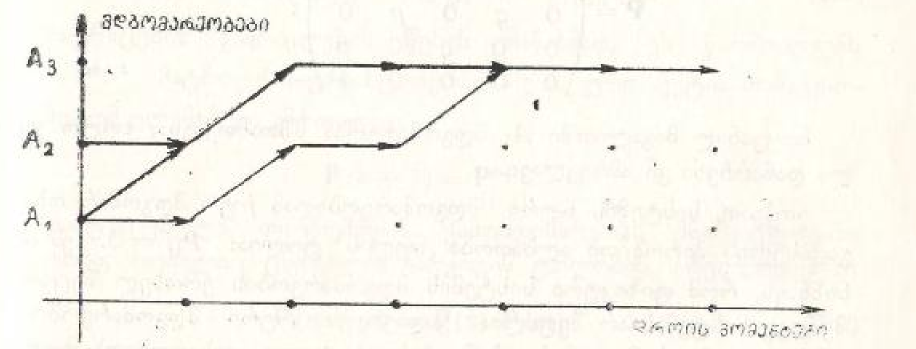
$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

ამ სისტემის აღწერა შეიძლება შემდეგი დიაგრამის საშუალებით:



ნახ. 26

იგივე ფიზიკური სისტემის მდგომარეობათა ცვლილება დროის მიხედვით შეიძლება წარმოვადგინოთ გრაფიკული სახითაც (ნახ. 27).



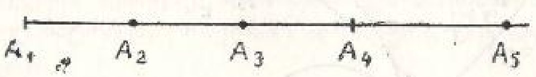
ნახ. 27

27-ე ნახაზზე გამოსახულია სისტემის მდგომარეობათა ცვლის ორი სხვადასხვა მიმდევრობა, რომლებსაც ხშირად ტრაექტორიებს, ან რეალიზაციებს უწოდებენ.

მოცემულ მაგალითში A_3 მდგომარეობა ხასიათდება იმით, რომ თუ სისტემა მოხვდა ამ მდგომარეობაში, იგი ერთის ტოლი ალბათობით

რჩება ამავე მდგომარეობაში. ასეთ მდგომარეობას მშთანთქავი მდგომარეობა ეწოდება. თუ მდგომარეობა ისეთია, რომ ფიზიკური სისტემის მასში მოხვედრის შემდეგ იგი ერთის ტოლი ალბათობით გამოვა ამ მდგომარეობიდან, მას ამრეკლავი მდგომარეობა ეწოდება. ცხადია, თუ A_i მდგომარეობა მშთანთქავია, $P_{ii}=1$, ხოლო თუ A_i მდგომარეობა ამრეკლავია, $P_{ii}=0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ნაწილაკი მოძრაობს წრფის $[A_1, A_5]$ მონაკვეთზე ერთეულოვანი ნაბიჯით შემდეგნაირად:



ნახ. 28

A_1 წერტილიდან მარჯვნივ გადასვლის ალბათობა 1-ია, A_5 წერტილიდან მარცხნივ გადასვლის ალბათობა 0-ია, ხოლო A_2, A_3, A_4 წერტილებიდან მარჯვნივ გადასვლის ალბათობაა p, მარცხნივ q. $(p+q=1)$. ამ სისტემის ალბათურ მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

მოყვანილ მაგალითში A_5 მდგომარეობა მშთანთქავია, ხოლო ყველა დანარჩენი კი ამრეკლავი.

ვთქვათ, სისტემის i-ური მდგომარეობიდან j-ურ მდგომარეობაში გადასვლის პირობითი ალბათობა ნულის ტოლია: $P_{ij}=0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფიზიკური სისტემის მდგომარეობის ერთხელ შეცვლის შემდეგ სისტემას არ შეუძლია გადავიდეს i-ური მდგომარეობიდან უშუალოდ j-ურ მდგომარეობაში (ერთის ტოლი ალბათობით). მაგრამ, ეს არ ნიშნავს, რომ თუ სისტემა იყო i-ურ მდგომარეობაში, ის ვერასოდეს მოხვდება j-ურ მდგომარეობაში. აღნიშნული გადასვლა შეიძლება განხორციელდეს 2,3 ან მეტჯერ მდგომარეობის შეცვლით.

გადასვლის P_{ij} ალბათობებს უწოდებენ ერთბიჯიანი გადასვლის ალბათობებს. ალბათობას იმისა, რომ ორი თანმიმდევრული ცდის შედეგად სისტემა გადავა i-ური მდგომარეობიდან j-ურ მდგომარეობაში აღნიშნავენ $P_{ij}(2)$ სიმბოლოთი და უწოდებენ ორბიჯიან გადასვლის

ალბათობებს. ორბიჯიანი გადასვლის ალბათობებისაგან შედგენილ მატრიცს აღნიშნავენ $\mathbf{P}(2)$ სიმბოლოთი და უწოდებენ ორბიჯიან გადასვლის მატრიცას. ანალოგიურად განიმარტება, სამბიჯიანი, ოთხბიჯიანი და ა. შ. m-ბიჯიანი გადასვლის მატრიცები $\mathbf{P}(3), \mathbf{P}(4), \ldots, \mathbf{P}(m)$.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. m-ბიჯიანი გადასვლის მატრიცა $P(m)$ უდრის ერთბიჯიანი გადასვლის $\mathbf{P}$ მატრიცის m-ურ ხარისხს, ე. ი. $\mathbf{P}(m)=\mathbf{P}^m$

დამტკიცება ჩავატაროთ ინდუქციის მეთოდით. როცა $m=1$ თეორემის სამართლიანობა ცხადია. დავუშვათ თეორემა სამართლიანია $m=k$-სთვის, ე. ი. $\mathbf{P}(k)=\mathbf{P}^k$.

$\mathbf{P}^k$ მატრიცის ელემენტები ავღნიშნოთ q_{ij} სიმბოლოთი $(i, j=1, 2, \ldots, n)$. i-ური მდგომარეობიდან $k+1$ ცდის შედეგად j-ურ მდგომარეობაში გადასვლა სისტემას შეუძლია შემდეგნაირად: ერთი ცდის შემდეგ გადავიდეს i-ური მდგომარეობიდან რაიმე l-ურ მდგომარეობაში და შემდეგ დანარჩენი k ცდის შედეგად გადავიდეს l-ური მდგომარეობიდან j-ურ მდგომარეობაში $(l=1, 2, 3, \ldots n)$. ამ ხდომილობის ალბათობა უდრის $p_{il}q_{lj}$-ს $(l=1, 2, \ldots, n)$, ამიტომ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად ალბათობა იმისა, რომ სისტემა $k+1$ ცდის შედეგად გადავა i-ური მდგომარეობიდან j-ურ მდგომარეობაში წარმოადგენს ჯამს:

$$P_{ij}(k+1)=p_{i1}q_{1j}+p_{i2}q_{2j}+\cdots+p_{in}q_{nj}. \tag{2.1}$$

მატრიცების გამრავლების წესის თანახმად, ეს წარმოადგენს $\mathbf{P}Q=\mathbf{P}^{k+1}$ მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის თანაკვეთზე მდგომ ელემენტს. ამრიგად:

$$\mathbf{P}(k+1)=\mathbf{P}^{k+1}.$$

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი ტოლობა, რომელიც ცნობილია მარკოვის ტოლობის სახელწოდებით:

$$\mathbf{P}(n+m)=\mathbf{P}(n)\cdot\mathbf{P}(m); \tag{2.2}$$

მართლაც,

$$\mathbf{P}(n+m)=\mathbf{P}^{n+m}=\mathbf{P}^n\cdot\mathbf{P}^m=\mathbf{P}(n)\cdot\mathbf{P}(m).$$

(2.2) მატრიცული ტოლობა მატრიცის ელემენტებისათვის ასე ჩაიწერება:

$$p_{ij}(n+m)=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(n)\,p_{kj}(m). \tag{2.3}$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ ორბიჯიანი გადასვლის მატრიცა მაგალით 3-ში მოყვანილი სისტემისათვის:

$$\mathbf{P}(2)=p^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} q & 0 & p & p & 0 \\ 0 & q(1+p) & 0 & p^2 & 0 \\ q^2 & 0 & 2pq & 0 & p^2 \\ 0 & q^2 & 0 & pq & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

მიღებული მატრიციდან ნათლად ჩანს, რომ თუ ერთბიჯიანი გადასვლის შემთხვევაში A_1 მდგომარეობიდან A_3-ში გადასვლის ალბათობა P_{13} ნულის ტოლი იყო, ორი ბიჯის შემდეგ ამ გადასვლის ალბათობა $P_{13}=p$ ნულისაგან განსხვავებული რიცხვია.

§ 3. მარკოვის თეორემა ზღვარითი ალბათობების შესახებ

გადასვლის მატრიცა იძლევა სისტემის ერთი მდგომარეობიდან მეორე მდგომარეობაში გადასვლის პირობით ალბათობას.

თუ ცნობილია, რომ დაკვირვების წინ სისტემა იმყოფება რომელიმე i-ურ მდგომარეობაში, მაშინ m-ბიჯიანი გადასვლის $P(m)$ მატრიცის საშუალებით შეგვიძლია ვიპოვოთ სისტემის ნებისმიერი j-ურ მდგომარეობაში m-ბიჯის შემდეგ მოხვედრის $p_{ij}(m)$ ალბათობა.

იმ შემთხვევაში, როდესაც სისტემის საწყისი მდგომარეობა არ არის ცნობილი, მაგრამ მოცემულია $p_i^{(0)}$ ალბათობები იმისა, რომ სისტემა საწყის მომენტში იმყოფება i-ურ მდგომარეობაში $(i=1, 2, \dots n)$, მაშინ სრული ალბათობა ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ m-ბიჯის შემდეგ სისტემის ნებისმიერი j-ურ მდგომარეობაში მოხვედრის $p_j(m)$ ალბათობა $(j=1, 2, 3 \dots n)$:

$$p_j^{(m)}=p_1^{(0)}\,p_{1j}(m)+p_2^{(0)}\,p_{2j}(m)+\dots+p_n^{(0)}\,p_{nj}(m),\quad j=1, 2, \dots, n; \tag{3.1}$$

$p_i^{(0)}$ ალბათობებს საწყის ალბათობებს უწოდებენ, ხოლო $p_i^{(m)}$ ალბათობებს m ბიჯის შემდეგ i-ური მდგომარეობის ალბათობებს $(i=1, 2, \dots, n)$.

(3.1) ფორმულის მატრიცული ფორმით ჩასაწერად შემოვიტანოთ:

განსაზღვრება 3.1. საწყისი ალბათობებისაგან შედგენილ n-განზომილებიან სტრიქონ ვექტორს $\mathbf{P}^{(0)}=(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)})$ ეწოდება მარკოვის ჯაჭვის საწყისი განაწილების ვექტორი.

განსაზღვრება 3.2. $p_i^{(m)}$, $i=1, 2, \dots, n$, ალბათობებისაგან შედგენილ სტრიქონ-ვექტორის $\mathbf{P}^{(m)}=(p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \dots, p_n^{(m)})$ ეწოდება მარკოვის ჯაჭვის განაწილების ვექტორი m ბიჯის შემდეგ.

ამრიგად (3.1) ფორმულა ჩაიწერება მატრიცული ფორმით:

$$\mathbf{P}^{(m)}=\mathbf{P}^{(0)}\,\mathbf{P}(m),$$

ე. ი. მარკოვის ჯაჭვის განაწილების ვექტორი m ბიჯის შემდეგ ტოლია საწყისი განაწილების ვექტორისა და m-ბიჯიანი გადასვლის ალბათობათა მატრიცის ნამრავლისა.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ მარკოვის თეორემა ზღვარითი ალბათობების შესახებ.

თეორემა 3.1. თუ $m>0$ რიცხვისათვის მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა $\mathbf{P}(m)$ მატრიცის ყოველი $p_{ij}(m)$ ელემენტი დადებითია, მაშინ არსებობს q_j, $j=1, 2, \dots, n$ მუდმივი რიცხვები ისეთი, რომ i ინდექსისაგან დამოუკიდებლად ადგილი აქვს თანაფარდობებს:

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}(m)=q_j,\quad j=1, 2, \dots, n,$$

ამ თეორემის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ სისტემის j-ურ მდგომარეობაში მოხვედრის ალბათობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა მდგომარეობაში იყო სისტემა შორეულ წარსულში.

თეორემა 3.1-დან გამომდინარეობს, რომ q_j რიცხვები შეგვიძლია მივიჩნიოთ სისტემის i-ურ მდგომარეობაში მოხვედრის ალბათობად, როცა m საკმარისად დიდია.

ეს თეორემა, წარმოადგენს ერთ-ერთ მნიშვნელოვან შედეგს ე. წ. ერგოდული თეორემებიდან, რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს თანამედროვე მეცნიერებაში.

VII თავი

შემთხვევით პროცესთა თეორიის ელემენტები

§ 1. ზოგადი ცნებები შემთხვევითი პროცესის შესახებ

რეალური ფიზიკური მოვლენა დროში მიმდინარე პროცესია, ამიტომ, ასეთი პროცესის ალბათური მოდელის შესაქმნელად საჭიროდება შემთხვევით სიდიდეს დავაკვირდეთ გარკვეული დროის განმავ-

ლობაში, ე. ი. განვიხილოთ შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლიობა, რომლებიც დაახასიათებენ პროცესის ევოლუციას. ამ გარემოებას მივყავართ შემთხვევითი პროცესის ცნებამდე, რომელიც წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის განზოგადებას.

განსაზღვრება. 1.1. შემთხვევითი პროცესი ანუ შემთხვევითი ფუნქცია ეწოდება t რიცხვითი არგუმენტის ფუნქციას, რომელიც t-ს ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს.

გავრცელებულია შემთხვევითი პროცესის სხვადასხვა აღნიშვნა: $X_t(\omega)$, $X(t, \omega)$, $X(t)$. როგორც განსაზღვრებიდან ჩანს, შემთხვევითი პროცესს უნდა შევხედოთ, როგორც შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლიობას, ამასთანავე, თუ ფიქსირებული t-სათვის $X_t(\omega)$ წარმოადგენს Ω-ზე განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეს, ფიქსირებული $\omega\in\Omega$ ელემენტარული ხდომილებისათვის იგი წარმოადგენს t ცვლადის ჩვეულებრივ ფუნქციას, რომელსაც $X_t(\omega)$ პროცესის რეალიზაცია ეწოდება. პროცესის რეალიზაციას პროცესის ტრაექტორიასაც უწოდებენ.

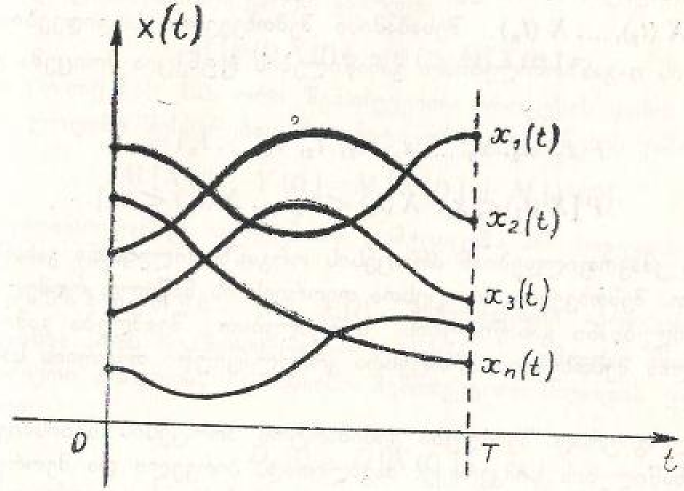
T იყოს t პარამეტრის ცვლილების არე. მას პროცესის განსაზღვრის არე ეწოდება. თუ T ერთელემენტიან სიმრავლეს წარმოადგენს, მაშინ $X_t(\omega)$ არის ჩვეულებრივი შემთხვევითი სიდიდე. თუ T სასრული რაოდენობის ელემენტებისაგან შესდგება, მაშინ $X(t, \omega)$ სასრულგანზომილებიანი შემთხვევითი ვექტორია.

თუ $T=\{0, 1, 2, \ldots\}$, მაშინ $X(t, \omega)$ წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას, რომელსაც დროით მწკრივს უწოდებენ. საზოგადოდ, T შეიძლება წარმოადგენდეს ღია, ნახევრადღია, დახურულ, სასრულ ან უსასრულო ინტერვალს.

თუ T სასრულია ან თვლადი, მაშინ $X(t)$ პროცესს ეწოდება შემთხვევითი პროცესი დისკრეტული დროით, ანუ დროითი მწკრივი. თუ T არის რაიმე ინტერვალი, სასრული ან უსასრულო, მაშინ $X(t)$-ს ეწოდება შემთხვევითი პროცესი უწყვეტი დროით. შემთხვევით პროცესს შეგვიძლია შევხედოთ ორნაირად: როგორც Ω-ზე განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლიობას ან როგორც T განსაზღვრის არეზე მოცემულ რეალიზაციათა ანუ ტრაექტორიათა სიმრავლეს.

ისევე როგორც შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვებისას, ჩვენ გვეძლევა შემთხვევითი სიდიდის რომელიმე კონკრეტული მნიშვნელობა, ასევე შემთხვევით პროცესზე დაკვირვებისას გვეძლევა მისი რომელიმე რეალიზაცია.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ თვითმფრინავი მიფრინავს გარკვეული სიჩქარით და ვაკვირდებით სიჩქარისმზომის ჩვენებას. თვითმფრინავზე მოქმედებს მრავალი შემთხვევითი ფაქტორი (ტემპერატურა, ქარი, წნევა, და სხვა) რის გამოც სიჩქარე წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს და თუ მას დავაკვირდებით გარკვეული T დროის განმავლობაში საქმე გვექნება შემთხვევით პროცესთან. ამასთანავე სიჩქარმზომის ჩვენება თითოეული გაფრენის დროს წარმოადგენს შემთხვევითი პროცესის რეალიზაციას, ასე რომ სხვადასხვა გაფრენის დროს გვექნება სხვადასხვა რეალიზაცია. რეალიზაციათა ერთობლიობა ნაჩვენებია 29-ე ნახაზზე.



ნახ. 29

შემთხვევით პროცესთა ფართო კლასს მივიღებთ, თუ მოვიქცევით შემდეგნაირად: განვიხილოთ Ω-ზე განსაზღვრული შემთხვევითი $X(\omega)$ სიდიდე, გავამრავლოთ იგი $\varphi(t)$ ფუნქციაზე, მივიღებთ შემთხვევითი პროცესის მაგალითს. $X(t)=X\cos t$, $Y(t)=X\sin t$, $X(t)=X^2t^2$, წარმოადგენენ შემთხვევითი პროცესის მაგალითებს. ამ მაგალითებში ω ელემენტარული ხდომილება მითითებული არ არის, რაც ცხადია, გაუგებრობას არ უნდა იწვევდეს.

რადგან $X(t)$ შემთხვევითი სიდიდეა (მოცემული t-სათვის) შეგვიძლია განვიხილოთ t მომენტში განაწილების ფუნქცია, რომელსაც ჩვენ $F(x, t)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ და რომელიც

$$F(x, t)=P[X(t)<x] \tag{1-1}$$

ტოლობით არის განსაზღვრული. $F(x, t)$-ს პროცესის ერთგანზომილებიანი განაწილების ფუნქცია ეწოდება. თუ t_1 და t_2, t-ს ორი სხვადა-

სხვა მნიშვნელობაა, ხოლო $X(t_1)$ და $X(t_2)$ შესაბამისი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $(X(t_1)\ X(t_2))$ ვექტორის ერთობლივი განაწილების

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P[X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2] \tag{1.2}$$

ფუნქციას, პროცესის ორგანზომილებიანი განაწილების ფუნქცია ეწოდება. პროცესის მოსაცემად (ალბათური დახასიათებისათვის) საჭიროა მისი ნებისმიერი $n=1, 2, 3, \ldots$ რიგის განაწილების ფუნქციის ცოდნა, რომელიც შემდეგნაირად განიმარტება; თუ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ დროის ნებისმიერი მომენტია T პროცესის განსაზღვრის არედან, ხოლო $X(t_1)$, $X(t_2)$, $X(t_3), \ldots, X(t_n)$ შესაბამისი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ პროცესის n-განზომილებიანი განაწილების ფუნქცია მოიცემა ტოლობით:

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n) =$$
$$P[X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \ldots, X(t_n) < x_n]. \tag{1.3}$$

ხშირად კმაყოფილდებიან პროცესის ორგანზომილებიანი განაწილების ცოდნით. შემთხვევით პროცესთა თეორიის ის ნაწილი, რომელიც ორგანზომილებიანი განაწილების საშუალებით შეიძლება გამოითქვას, ცნობილია შემთხვევით პროცესთა კორელაციური თეორიის სახელწოდებით.

ანალოგიურად შეიძლება განიმარტოს პროცესის ნებისმიერი რიგის განაწილების სიმკვრივე. მაგალითად, პირველი და მეორე რიგის განაწილების სიმკვრივეები მოიცემა ტოლობებით:

$$f(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \text{ და } f(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{1.4}$$

ქვემოთ განვიხილავთ შემთხვევითი პროცესის რიცხვით მახასიათებლებს — როგორიცაა მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, კორელაციური ფუნქცია და სხვა.

განსაზღვრება 1. 2. $X(t)$ შემთხვევითი პროცესის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება არაშემთხვევით $m_x(t)$ ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობაც ყოველ ფიქსირებულ t მომენტში განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ტოლია:

$$m_x(t) = M[X(t)].$$

თუ მოცემულია ერთგანზომილებიანი განაწილების $f(x, t)$ სიმკვრივე

მაშინ $m_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x, t)\, dx.$ უშუალოდ განმარტებიდან მიიღება შემდეგი თვისებები.

თეორემა 1.1. არაშემთხვევითი $\varphi(t)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი ტოლია თვით $\varphi(t)$ ფუნქციისა:

$$M[\varphi(t)] = \varphi(t).$$

თეორემა 1.2. არაშემთხვევითი $\varphi(t)$ თანამამრავლი მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ გამოდის:

$$M[\varphi(t) X(t)] = \varphi(t) \cdot M[X(t)].$$

თეორემა 1.3. ორი შემთხვევითი პროცესის ჯამის მათემატიკური ლოდინი შესაკრებთა მათემატიკური ლოდინების ჯამის ტოლია:

$$M[X(t) + Y(t)] = M[X(t)] + M[Y(t)].$$

ზემოთმოყვანილ თეორემათა დამტკიცება არ მოგვყავს მათი სიმარტივის გამო.

განსაზღვრება 1.3. $X(t)$ შემთხვევითი პროცესის $D_x(t)$ დისპერსია არის არაშემთხვევითი ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობა ნებისმიერი t-სათვის, შესაბამისი შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის ტოლია:

$$D_x(t) = D[X(t)].$$

თუ მოცემულია პროცესის ერთგანზომილებიანი სიმკვრივე $f(x, t)$, მაშინ:

$$D_x(t) = D[X(t)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x(t))^2 f(x, t)\, dx.$$

განსაზღვრება 1.4. $X(t)$ შემთხვევითი პროცესის საშუალო კვადრატული გადახრა ეწოდება კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

უშუალოდ განმარტებიდან გამომდინარეობს დისპერსიის შემდეგი თვისებები.

თეორემა 1.4. $\varphi(t)$ არაშემთხვევითი ფუნქციის დისპერსია ნულის ტოლია:

$$D[\varphi(t)] = 0.$$

თ ე ო რ ე მ ა 1.5. $X(t)$ შემთხვევითი და $\varphi(t)$ არაშემთხვევითი ფუნქციების ჯამის დისპერსია $X(t)$-ს დისპერსიის ტოლია:

$$D(X(t)+\varphi(t)]=D[X(t)].$$

თ ე ო რ ე მ ა 1.6. $X(t)$ შემთხვევითი და $\varphi(t)$ არაშემთხვევითი ფუნქციების ნამრავლის დისპერსია $\varphi(t)$ ფუნქციის კვადრატის და $X(t)$-ს დისპერსიის ნამრავლის ტოლია:

$$D[\varphi(t)X(t)]=\varphi^2(t)D[X(t)].$$

ამ თეორემების დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.4. $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციის $K_x(t_1, t_2)$ ფუნქცია ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობა t_1 და t_2 მომენტებისათვის, შესაბამისად $X(t_1)$ და $X(t_2)$ შემთხვევით სიდიდეებს შორის კორელაციური მომენტის ტოლია

$$K_x(t_1, t_2)=\mu_{11}[X(t_1)\cdot X(t_2)].$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.5. თუ მოცემულია $X(t)$ შემთხვევითი პროცესი მაშინ $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t)$ პროცესს ცენტრირებული შემთხვევითი პროცესი ეწოდება.

ამ განსაზღვრების გათვალისწინებით კორელაციის ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$K_x(t_1, t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-m_x(t_1))(x_2-m_x(t_1))f(x_1, x_2\ t_1, t_2)\,dx_1\,dx_2.$$

ხშირად განიხილება ნორმირებული კორელაციური ფუნქცია:

$$r_x(t_1; t_2)=\frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)\cdot D_x(t_2)}}=\frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\cdot\sigma_x(t_2)}.$$

განვიხილოთ კორელაციური ფუნქციის ზოგიერთი მარტივი თვისება.

თ ე ო რ ე მ ა 1.7. კორელაციური ფუნქცია სიმეტრიულია თავისი არგუმენტების მიმართ:

$$K_x(t_1, t_2)=K_x(t_2, t_1).$$

თ ე ო რ ე მ ა 1.8. $X(t)$ შემთხვევითი პროცესისათვის არაშემთხვევითი $\varphi(t)$ ფუნქციის დამატება არ ცვლის მის კორელაციის ფუნქციას:

$$K_{x+\varphi}(t_1, t_2)=K_x(t_1, t_2).$$

თ ე ო რ ე მ ა 1.9. $X(t)$ შემთხვევითი პროცესის $\varphi(t)$ არაშემთხვევით ფუნქციაზე გამრავლებით, მისი კორელაციის ფუნქცია მრავლდება $\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)$-ზე:

$$K_{x\cdot\varphi}(t_1, t_2)=K(t_1, t_2)\,\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2).$$

აღსანიშნავია, რომ თუ $t_1=t_2=t$, მაშინ:

$$K_x(t, t)=D_x(t).$$

პრაქტიკაში გავრცელებულია ისეთი პროცესები, რომლის $m_x(t)$ მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს, ხოლო კორელაციის $K_x(t_1, t_2)$ ფუნქცია დამოკიდებულია $t_2-t_1=\tau$ სხვაობაზე. ასეთ შემთხვევით პროცესებს სტაციონარული შემთხვევითი პროცესები ეწოდებათ. მაშასადამე, ასეთი პროცესის $m_x(t)=\text{const}$, ხოლო $K_x(t_1, t_2)=K_x(\tau)$.

ვთქვათ მოცემულია რაიმე სტაციონარული $X(t)$ პროცესი და $m_x(t)=c$, ამასთანავე ავიღოთ $X(t)$ პროცესის რაიმე რეალიზაცია და განვიხილოთ ზღვარი:

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T x(t)\,dt. \tag{1.5}$$

1.5. ტოლობით განსაზღვრული სიდიდე წარმოადგენს $x(t)$ რეალიზაციის მიხედვით გამოთვლილ საშუალოს, ხოლო $m_x(t)=c$ წარმოადგენს სხვადასხვა რეალიზაციების მიხედვით გამოთვლილ მათემატიკურ ლოდინს. საზოგადოდ, ნებისმიერი სტაციონარული პროცესისათვის ეს სიდიდეები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

სტაციონარულ პროცესთა კლასიდან გამოიყოფა ე. წ. ერგოდიული სტაციონარული პროცესები, რომლის რაიმე მახასიათებელი (ჩვენ შემთხვევაში საშუალო) რეალიზაციების მიხედვით, ტოლია შესაბამისი მახასიათებლისა, რომელიც გამოთვლილია ერთი რომელიმე რეალიზაციის მიხედვით დროის საკმარისად დიდ ინტერვალზე. მტკიცდება, რომ სტაციონარული პროცესის ერგოდიულობისათვის მათემატიკური ლოდინის მიმართ საჭიროა ადგილი ჰქონდეს ტოლობას:

$$\lim_{\tau\to\infty}K_x(\tau)=0.$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.6. $X(t)$ სტაციონარული პროცესის სპექტრული სიმკვრივე ეწოდება $S_x(\alpha)$ ფუნქციას, რომელიც მის კორე-

ლაციურ ფუნქციასთან დაკავშირებულია ურთიერთშებრუნებადი გარდაქმნით:

$$S_x(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)\, e^{-i\alpha\tau}\, d\tau,$$

$$K_x(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\alpha)\, e^{i\alpha\tau}\, d\alpha.$$

განსაზღვრება 1.7. თეთრი ხმაური ეწოდება $X(t)$ სტაციონარულ პროცესს, რომლის სპექტრული სიმკვრივე $S_x(\alpha)=\mathrm{const}$.

სტაციონარული თეთრი ხმაური მათემატიკური აბსტრაქციაა. თუ t_1 და t_2 არის t-ს ნებისმიერი მეზობელი მნიშვნელობები, მაშინ $X(t_1)$ და $X(t_2)$ შემთხვევითი სიდიდეები არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებია. მისი ფიზიკური რეალიზაცია შეუძლებელია, მას თეორიული მნიშვნელობა აქვს და გამოიყენება შემთხვევით პროცესთა თეორიაში.

§ 2. შემთხვევითი პროცესი დამოუკიდებელი ნაზრდებით. ცნება პუასონის და ვინერის პროცესების შესახებ

როგორც ვნახეთ შემთხვევითი ფუნქცია ანუ შემთხვევითი პროცესი წარმოადგენს $X(t)$ შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლიობას, რომელიც t პარამეტრზეა დამოკიდებული. t პარამეტრში ხშირად იგულისხმება დრო.

ვთქვათ შემთხვევითი პროცესი განსაზღვრულია $T=[a, b]$ სეგმენტზე. $X(t_1)$ და $X(t_2)$ ორ ნებისმიერ t_1 და t_2 მომენტებში განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდეებია.

განვიხილოთ $T=[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება წერტილებით:

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b.$$

ავიღოთ ამ ინტერვალებზე $X(t)$ პროცესის ნაზრდები ანუ შემთხვევითი სიდიდეები:

$$X(t_1)-X(t_0),\ X(t_2)-X(t_1),\ X(t_3)-X(t_2), \ldots, X(t_n)-X(t_{n-1}).$$

განსაზღვრება 2.1. თუ $X(t)$ პროცესი ისეთია, რომ დროის ნებისმიერ არადამფარავ ინტერვალებზე მისი ნაზრდები დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ მას ეწოდება პროცესი დამოუკიდებელი ნაზრდებით.

ასეთი პროცესის მაგალითებია: ტელეფონის სადგურში (t_1, t_2) ინტერვალში გამოძახებათა რიცხვი, რაიმე მასობრივი მომსახურების ობიექტზე მოთხოვნათა რიცხვი და სხვა.

განსაზღვრება 2.2. ვთქვათ $X(t)$ პროცესი აკმაყოფილებს შემდეგ 4 პირობას:

1. $X(t)$ პროცესი განსაზღვრულია $T=[0,\infty)$ ინტერვალზე;
2. $X(0)=0$;
3. ნებისმიერი $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n$ მომენტებისათვის ნაზრდები $X(t_1)-X(t_0),\ X(t_2)-X(t_0), \ldots, X(t_n)-X(t_{n-1})$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.
4. $X(t)-X(s)$ შემთხვევითი სიდიდე, სადაც $0\leqslant s\leqslant t$, განაწილებულია პუასონის კანონით $\lambda=t-s$ პარამეტრით. ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ:

$$P[X(t)-X(s)=n]=\frac{(t-s)^n e^{-(t-s)}}{n!}, \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

ასეთ პროცესს ეწოდება პუასონის პროცესი.

პუასონის პროცესის თითოეული რეალიზაცია არის საფეხუროვანი ფუნქცია.

თუ სითხეში ჩავუშვებთ რაიმე პატარა ნაწილაკს, სითხის მოლეკულათა დაჯახების გამო ნაწილაკი იმოძრავებს ტეხილზე, რომლის გვერდებს შემთხვევითი სიდიდე და მიმართულება ექნება. ეს ფაქტი აღმოჩენილი იქნა 1827 წელს ინგლისელი ბოტანიკოსის ნ. ბროუნის მიერ და ცნობილია ბროუნის მოძრაობის სახელწოდებით. ბროუნს ეს მოძრაობა არ აუხსნია, მხოლოდ 1905 წელს ა. აინშტაინმა აღწერა იგი მათემატიკურად. 1918 წელს ნ. ვინერმა ააგო მათემატიკური მოდელი, რომელიც უფრო ზუსტად ასახავს ბროუნის მოძრაობას. შემდგომში ბროუნის მოძრაობის მსგავს შემთხვევით პროცესებს ვინერის პროცესი უწოდეს.

განსაზღვრება 2.3. $X(t)$ პროცესს ეწოდება ვინერის პროცესი, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ 4 პირობას:

1. $X(t)$ პროცესი განსაზღვრულია $T=[0, \infty)$ ინტერვალზე;
2. $X(0)=0$;
3. ნებისმიერი $0\leqslant t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ მომენტებისათვის $X(t_1)-X(t_0),\ X(t_2)-X(t_1), \ldots, X(t_n)-X(t_{n-1})$ ნაზრდები დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.
4. $X(t)-X(s)$ შემთხვევითი სიდიდე, სადაც $0\leqslant s\leqslant t$ განაწილებულია ნორმალურად $(0, t)$ პარამეტრებით. ე. ი.

$$P[x<X(t)<x+dx]=\frac{1}{t\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2t^2}}.$$

მეორე ნაწილი

მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები

VIII თავი

შერჩევითი მეთოდი

§ 1. მათემატიკური სტატისტიკის საგანი და ძირითადი ამოცანები

მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანათა მოკლედ დახასიათება საკმაოდ ძნელია. მათემატიკური სტატისტიკა არსებითად იყენებს ალბათობის თეორიის მეთოდებს, სარგებლობს ანალოგიური ცნებებით, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, იგი გამოყოფილია, როგორც დამოუკიდებელი მათემატიკური დარგი. ამის მიზეზს წარმოადგენს მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანათა სპეციფიკური ხასიათი, რაც იმითაა გაპირობებული, რომ გარკვეული აზრით, მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანები ალბათობის თეორიის ამოცანების შებრუნებულია. კერძოდ, თუ ალბათობის თეორიაში მოცემულად ითვლება შემთხვევითი მოვლენის მოდელი და მის საფუძველზე კეთდება დასკვნა ამ მოვლენის რეალური მიმდინარეობის შესახებ, მათემატიკურ სტატისტიკაში განიხილება შემთხვევითი მოვლენის კონკრეტული რეალიზაციები და მათი საშუალებით იგება ამ მოვლენის შესაბამისი ალბათური მოდელი.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ცდათა მიმდევრობა, რომელშიც ვაკვირდებით რაიმე A ხდომილობის მოხდენა-არმოხდენას. ჩვენი მიზანია დაკვირვებათა საფუძველზე ვიპოვოთ A ხდომილობის უცნობი $p=P(A)$ ალბათობა. საქმე გვაქვს მათემატიკური სტატისტიკის ტიპურ ამოცანასთან. ბუნებრივია, რომ უცნობი $P(A)$ ალბათობის შეფასებად ავიღოთ $P^*=\frac{m}{n}$ სიდიდე, სადაც n არის ჩატარებულ ცდათა რიცხვი, ხოლო m არის წარმატებათა რიცხვი (იხ. თავი I. § 10*). P^* გარკვეული აზრით ახლოს უნდა იყოს შესაფასებელ $P(A)$ სიდიდესთან. ჩვენს შემთხვევაში ამის გარანტიას იძლევა დიდ რიცხვთა კანონი.

უცნობ პარამეტრთა სტატისტიკური შეფასება წარმოადგენს მათემატიკური სტატისტიკის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას. ჩვენ შემდგომში განვიხილავთ ე. წ. წერტილოვან შეფასებას და შეფასებას ნდობის ინტერვალების საშუალებით.

დაბოლოს, განვიხილავთ მათემატიკური სტატისტიკის კიდევ ერთ ძირითად ამოცანას — ჰიპოთეზათა სტატისტიკურ შემოწმებას.

საზოგადოდ, მათემატიკურ სტატისტიკას განმარტავენ, როგორც მათემატიკის დარგს, რომელიც მეცნიერული და პრაქტიკული დასკვნებისათვის შეისწავლის სტატისტიკურ მონაცემთა სისტემატიზაციის, ანალიზისა და გამოყენების მეთოდებს.

§ 2. შერჩევითი მეთოდი

მათემატიკური სტატისტიკის კვლევის ერთ-ერთ ძირითად მეთოდს წარმოადგენს ე. წ. შერჩევითი მეთოდი. მისი არსის უკეთ გასარკვევად მოვიყვანოთ მაგალითი.

ვთქვათ, გვაინტერესებს წუნდებულ დეტალთა რაოდენობის დადგენა ქარხნის მიერ გამოშვებული 1000 000 დეტალიდან. ცხადია, ყველა დეტალის შემოწმება ძალზე შრომატევადი სამუშაოა, ზოგჯერ შეუძლებელიც. გარდა ამისა, შეიძლება ქარხნის მიერ გამოშვებული პროდუქცია შემოწმების შედეგად ფუჭდებოდეს, ამიტომ, მოხერხებულია ქარხნის მიერ გამოშვებულ მთელ პროდუქციაზე დასკვნა გავაკეთოთ მის რაღაც ნაწილზე დაკვირვების შედეგად.

განსაზღვრება 2.1. ერთგვაროვან ობიექტთა ერთობლიობის ზოგადი თვისებების კვლევის სტატისტიკურ მეთოდს, რომლის საფუძველია ამ ობიექტთა მხოლოდ ნაწილის შერჩევა და შესწავლა, შერჩევითი მეთოდი ეწოდება.

განსაზღვრება 2.2. ყველა იმ ერთგვაროვან ობიექტთა ერთობლიობას, საიდანაც ხდება შერჩევა, გენერალური ერთობლიობა ეწოდება, ხოლო შემთხვევით შერჩეულ ელემენტთა ერთობლიობას,

---

* $P^*=\frac{m}{n}$ სიდიდეს A ხდომილობის სტატისტიკური ალბათობა ეწოდება.

რომელთა შესწავლის საფუძველზე კეთდება დასკვნა გენერალური ერთობლიობის შესახებ, შერჩევითი ერთობლიობა, ანუ შერჩევა (ამოკრეფა) ეწოდება.

შერჩევის ელემენტთა რაოდენობას შერჩევის მოცულობა ეწოდება.

ჩვენს მიერ მოყვანილ მაგალითში გენერალურ ერთობლიობას წარმოადგენდა ქარხნის მიერ დამზადებული ყველა დეტალი, შერჩევითი ერთობლიობა იყო გასინჯული დეტალები.

იმისათვის, რომ შერჩევის საფუძველზე შესაძლებელი იყოს სწორი დასკვნის გამოტანა გენერალური ერთობლიობის შესახებ, შერჩევის ელემენტები სწორედ უნდა წარმოადგენდეს გენერალურ ერთობლიობაში არსებულ პროპორციებს, ანუ შერჩევა უნდა იყოს წარმომადგენლობითი (რეპრეზენტატიული).

დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად, შერჩევა იქნება წარმომადგენლობითი, თუ იგი შემთხვევითია, ე. ი. გენერალური ერთობლიობის ყოველ ობიექტს შერჩევაში მოხვედრის ერთნაირი ალბათობა გააჩნია.

შერჩევა შეიძლება ორგვარად განხორციელდეს: შერჩევა დაუბრუნებლად, როდესაც ყოველ შემოწმებულ ობიექტს აღარ ვაბრუნებთ გენერალურ ერთობლიობაში, და შერჩევა დაბრუნებით, როდესაც ყოველ შემოწმებულ ობიექტს ვაბრუნებთ გენერალურ ერთობლიობაში. შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ შერჩევას დაბრუნებით. ამასთანავე, იგულისხმება, რომ შერჩევის პროცესი არ ცვლის გენერალური ერთობლიობის განაწილებას.

შერჩევით მეთოდს შეიძლება მიეცეს ისეთი ინტერპრეტაცია, რომელიც დაფუძნებული იქნება ელემენტარული ხდომილობისა და შემთხვევითი სიდიდის ცნებებზე. ამით საშუალება მოგვეცემა სტატისტიკური ამოცანა ჩამოვაყალიბოთ და ამოვხსნათ ალბათობის თეორიაში მიღებული მეთოდებით.

ვთქვათ, ვატარებთ რაიმე s ცდას, რომლის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა Ω. განვიხილოთ Ω სივრცეზე განსაზღვრული X შემთხვევითი სიდიდე $F(x)$ განაწილების ფუნქციით. s ცდის ჩატარების შედეგად X შემთხვევითი სიდიდის მიერ მიღებული მნიშვნელობა აღვნიშნოთ x_1-ით. გავიმეოროთ იგივე s ცდა პირველი ცდისაგან დამოუკიდებლად. X შემთხვევითი სიდიდის მიერ მიღებული მნიშვნელობა აღვნიშნოთ x_2-ით. s ცდის n-ჯერ დამოუკიდებლად განმეორების შედეგად X შემთხვევითი სიდიდის მიერ მიღებული მნიშვნელობები იყოს:

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \qquad (1)$$

(1) მიმდევრობა შეიძლება მივიღოთ შემდეგნაირადაც:

განვიხილოთ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \qquad (2)$$

რომლის ყოველი წევრი განაწილებულია X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონით. x_i იყოს X_i შემთხვევითი სიდიდის მიერ მიღებული რეალიზაცია ($i=1, 2, \dots, n$).

თუ იგივე s ცდას ხელახლა გავიმეორებთ n-ჯერ (ჩავატარებთ ცდათა ახალ სერიას), მიღებული მიმდევრობა საზოგადოდ, არ დაემთხვევა წინას. ამით აიხსნება ის, რომ $x_1, x_2, \dots, x_n$ სიდიდეები, რომლებიც ცდის ჩატარების შემდეგ წარმოადგენენ რიცხვებს, ცდამდე განიხილებიან, როგორც შემთხვევითი სიდიდეები. შემდგომში, ზოგადობის შეუზღუდავად, (1) და (2) მიმდევრობებს გავაიგივებთ.

განსაზღვრება 2.3. n მოცულობის შერჩევა $F(x)$ განაწილების ფუნქციის მქონე გენერალური ერთობლიობიდან ეწოდება დამოუკიდებელ, ერთნაირად განაწილებულ $X_1, X_2, \dots, X_n$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას, რომლის თითოეული წევრი განაწილებულია $F(x)$ განაწილების კანონით.

თუ (1) მიმდევრობას დავალაგებთ ზრდის მიხედვით, უმცირეს ელემენტს დავარქმევთ $x_{(1)}$-ს შემდგომს $x_{(i)}$-ს და ა. შ., მივიღებთ $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n}$)მიმდევრობას ($x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \dots \leqslant x_{(n)}$), რომელსაც ვარიაციული მწკრივი ეწოდება.

(1) მიმდევრობაში შესაძლებელია ელემენტთა გამეორება. ვთქვათ, სულ გვაქვს r განსხვავებული მნიშვნელობა $x_1, x_2, \dots, x_r$. ამასთან, x_i შერჩევაში გვხვდება n_i-ჯერ ($i=1, 2, 3, \dots, r$, $n_1+n_2+\dots+n_r=n$). n_i რიცხვს ეწოდება x_i ელემენტის სიხშირე, ხოლო შეფარდებას $W_i = \frac{n_i}{n}$ ეწოდება ფარდობითი სიხშირე. ცხადია $W_1+W_2+\dots+W_r=1$.

შერჩევის ჩაწერა მოსახერხებელია ცხრილის სახით, რომლის პირველ სტრიქონში ჩაწერილია შერჩევის განსხვავებული ელემენტები, ანუ ვარიანტები, ხოლო მეორე სტრიქონში — მათი შესაბამისი სიხშირეები. ამ ცხრილის სტატისტიკური ცხრილი, ანუ X შემთხვევითი სიდიდის სტატისტიკური განაწილების ცხრილი ეწოდება:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{r-1}	x_r
W	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	$\dots$	$\frac{n_{r-1}}{n}$	$\frac{n_r}{n}$

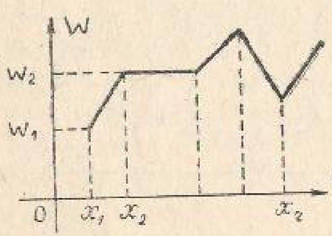
თუ X უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ პრაქტიკულად შეუძლებელია მან ორ სხვადასხვა ცდაში მიიღოს ერთი და იგივე მნიშვნელობა, ამიტომ ყველა n_i იქნება 1-ის ტოლი და ზემოთ მოყვანილი სახით ჩაწერილი სტატისტიკური განაწილების ცხრილი არავითარ ინფორმაციას არ მოგვცემს X შემთხვევითი სიდიდის შესახებ, ამიტომ ამ შემთხვევაში იქცევიან შემდეგნაირად: ყოფენ X შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა სიმრავლეს l ნაწილად წერტილებით $y_0, y_1, y_2, \dots, y_l$ (შეიძლება y_0 იყოს $-\infty$, ხოლო y_l კი $+\infty$), ამასთან სასურველია y_i რიცხვები შეირჩეს ისე, რომ არც ერთი W არ იყოს ნულის ტოლი, სადაც W_i-ით აღნიშნულია იმ დაკვირვებათა რაოდენობა (1) შერჩევიდან, რომლებიც მოთავსდნენ $]y_{i-1}, y_i]$ შუალედში და ადგენენ ცხრილს:

l	$[y_0, y_1]$	$]y_1, y_2]$	$\cdots$	$]y_{l-1}, y_l]$
W	W_1	W_2	$\cdots$	W_l

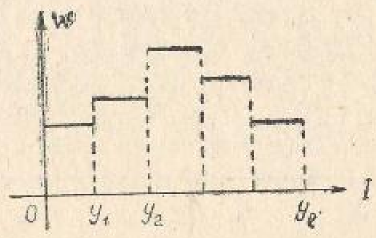
თვალსაჩინოებისათვის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას წარმოადგენენ ე. წ. განაწილების პოლიგონის სახით, რისთვისაც საკოორდინატო სიბრტყეზე იღებენ წერტილებს კოორდინატებით $(x_i; W_i)$, $(i=1,\dots,r)$ და აერთებენ მათ წრფის მონაკვეთებით (ნახ. 30). უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდისათვის კი აგებენ დიაგრამას, რომელსაც ჰისტოგრამა ეწოდება (ნახ. 31).

ჰისტოგრამის აგებისას უშვებენ, რომ $h=y_i-y_{i-1}$ $(i=1, 2, \dots, l)$ სხვაობა მუდმივია (h-ს ეწოდება ცხრილის ბიჯი) და აგებენ ფუნქციას

$y=\frac{W_i}{h}$, როცა $x\in\,]y_{i-1}, y_i[$, $i=1, 2, \dots, l$.



ნახ. 30



ნახ. 31

§ 3. განაწილების პარამეტრების სტატისტიკური შეფასება

განვიხილოთ რაიმე ობიექტთა გენერალური ერთობლიობა და ვთქვათ, გვაინტერესებს ამ ობიექტთა რომელიმე ნიშან-თვისების შესწავლა. დავუკავშიროთ მოცემულ გენერალურ ერთობლიობას შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც აღნიშნულ ნიშან-თვისებას შეესაბამება. ასეთი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი ამავე დროს წარმოადგენს გენერალური ერთობლიობის დასაკვირვებელი ნიშან-თვისების განაწილებას. ამ განაწილების რიცხვით მახასიათებლებს (მათემატიკურ ლოდინს, დისპერსიას და ა. შ.) ეწოდება გენერალური ერთობლიობის რიცხვითი პარამეტრები. მათ ჭეშმარიტი მნიშვნელობა უმეტეს შემთხვევაში უცნობია. ისმის უცნობი პარამეტრების შეფასების ამოცანა. შეფასება ხდება გენერალური ერთობლიობიდან გარკვეული შერჩევის შესწავლის საფუძველზე.

ვთქვათ, მოცემულია შერჩევა (ე. ი. X შემთხვევით სიდიდეზე n დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგი) $X_1, X_2, \dots, X_n$.

განსაზღვრება 3.1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ სიდიდეების ნებისმიერ $s=s(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ფუნქციას სტატისტიკა ეწოდება*.

სტატისტიკების მაგალითებია ფუნქციები:

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n},\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \text{ და ა. შ.}$$

X შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგად მიღებული სტატისტიკა X-ის უცნობი პარამეტრის შეფასებას წარმოადგენს, ამიტომ შემდგომში ჩვენ გავაიგივებთ სტატისტიკის და შეფასების ცნებებს.

ცხადია, შეფასების მოყვანილი განმარტება ძალიან ზოგადია და გამოხატავს მხოლოდ იმ მოსაზრებას, რომ ისინი უნდა ავაგოთ შერჩევის მონაცემების საშუალებით და არაფერს არ გვეუბნება, თუ რამდენად ზუსტად აფასებს იგი გენერალური ერთობლიობის შესაბამის რიცხვით მახასიათებელს.

მაგალითი 3.1. შესაფასებელია ფეხბურთში საქართველოს ჩემპიონატის მეთერთმეტე ტურზე თბილისის ეროვნულ სტადიონზე მოსულ მაყურებელთა რაოდენობა.

---

* ერთმანეთში არ უნდა ავურიოთ საგანი მათემატიკური სტატისტიკა და ფუნქცია S რომელსაც სტატისტიკას უწოდებენ.

როდესაც გადავხედავთ სტადიონს, ჩვენ დაახლოებით შეგვიძლია შევაფასოთ მოსულ მაყურებელთა რაოდენობა (თამაშის სანახავად მოსულია დაახლოებით 20000 კაცი), მაგრამ ეს არ არის სტატისტიკური შეფასება. ეს შეფასება სტატისტიკური იქნებოდა, მიღებული რომ ყოფილიყო ცდის შედეგად, კერძოდ, რომ გვცოდნოდა, რამდენი მაყურებელი დაესწრო წინა თამაშებს და ამ მონაცემების საფუძველზე გადაგვეკეთებინა დასკვნა.

მაგალითი 3.2. ვთქვათ $n=1000$ ჩატარებულ ცდაში A ხდომილობას ადგილი ჰქონდა $K=450$-ჯერ, ვიპოვოთ A ხდომილობის მოხდენის $P=P(A)$ ალბათობის შეფასება.

ამოხსნა. თუ $P=P(A)$ ალბათობის შეფასებად მივიღებთ რიცხვს $p^*=\frac{k}{n}=\frac{450}{1000}=0{,}45$, მაშინ დიდ რიცხვთა კანონის ძალით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ იგი საკმაოდ ახლოს იქნება P სიდიდესთან, იმ აზრით, რომ $P\,|\,(10{,}45-p|<\varepsilon)$ იქნება საკმაოდ მცირე, ნებისმიერი წინასწარ დასახელებული $\varepsilon>0$-სათვის. ამასთან, რაც უფრო დიდი იქნება n, მით უფრო მცირე იქნება აღნიშნული სხვაობა.

მაგალითი 3.3. ვთქვათ ჩავატარეთ ერთგვაროვან ცდათა ორი სერია. პირველ სერიის $n_1=1000$ ცდაში A ხდომილობას ადგილი ჰქონდა $k_1=450$-ჯერ, ხოლო მეორე სერიის $n_2=2000$ ცდაში A ხდომილობას ადგილი ჰქონდა $k_2=850$-ჯერ. ვიპოვოთ A ხდომილობის მოხდენის $p=P(A)$ ალბათობის სტატისტიკური შეფასება. ამისათვის წინა მაგალითის საფუძველზე გამოვთვალოთ p ალბათობის შეფასებები ცდათა თითოეული სერიაში $\hat{p}_1=\frac{k_1}{n_1}=0{,}45$, $\hat{p}_2=\frac{k_2}{n_2}=0{,}425$ და p ალბათობის შეფასებად ცდათა ორივე სერიის საფუძველზე მივიღოთ რიცხვი $\hat{p}=\frac{1}{2}(\hat{p}_1+\hat{p}_2)=\frac{0{,}45+0{,}425}{2}=0{,}4375.$

შეგვეძლო მოვქცეულიყავით შემდეგნაირადაც ცდათა ორივე სერია გაგვეხილა ერთ სერიად, როცა $n=n_1+n_2=3000$ ცდაში ხდომილობა მოხდა $k=k_1+k_2=450+850=1300$-ჯერ და ამის საფუძველზე გვეპოვნა p ალბათობის შეფასება $\tilde{p}=\frac{k}{n}=0{,}4(3)$, ე. ი. დაკვირვებების (ცდების) საფუძველზე შეიძლება მიღებულ იქნას უცნობი სიდიდის სხვადასხვა შეფასებები. უფრო მეტიც, ნებისმიერ რიცხვს, რომელიც მიიღება ცდის შედეგთა საფუძველზე უცნობი სიდიდის შეფასება ეწოდება (ასე მაგალითად p ალბათობის შეფასებად შეგვეძლო მიგვეღო რიცხვები $\frac{k_1}{n_1}+\frac{k_2-1}{n_2-1}$ ან $\sqrt{\frac{k_1\cdot k_2}{n_1\cdot n_2}}$ და ა. შ.), ხოლო თუ რომელი შეფასებაა ყველაზე უფრო „კარგი“, ამის დადგენა ხდება სტატისტიკური მეთოდების საშუალებით, რომელთაც ქვემოთ შევისწავლით. განვიხილოთ შემდეგი ზოგადი ამოცანა.

მოცემულია შემთხვევითი სიდიდე X, რომლის განაწილების ფუნქცია შეიცავს უცნობ პარამეტრ θ-ს.

n მოცულობის $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ შერჩევის საშუალებით ვიპოვოთ θ-ს გარკვეული აზრით „კარგი“ შეფასება $\hat{\theta}$, სადაც θ პარამეტრის შეფასება ეწოდება ნებისმიერ $\tilde{\theta}_n=\tilde{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ფუნქციას.

ცხადია, შერჩევითი მონაცემები $X_1, X_2, \dots, X_n$ თვითონაა შემთხვევითი სიდიდეები, განაწილებულნი ერთი და იგივე კანონით (X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონით), ამიტომ $\tilde{\theta}_n$ არის შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილების კანონი დამოკიდებულია X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონზე და შერჩევის მოცულობაზე. იმისათვის, რომ შეფასება $\tilde{\theta}$ — იყოს პრაქტიკულად ღირებული, იგი უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეულ პირობებს.

განსაზღვრება 3.2. სტატისტიკურ შეფასებას ეწოდება წერტილოვანი შეფასება, თუ იგი განისაზღვრება ერთი მნიშვნელობით (რიცხვით).

წერტილოვან შეფასებებს, გამოთვლილს შერჩევითი მნიშვნელობებით, მოეთხოვება ძალდებულობა, ჩაუნაცვლებლობა და ეფექტურობა.

განსაზღვრება 3.3. θ პარამეტრის $\theta_n=\tilde{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ შეფასებას ეწოდება ჩაუნაცვლებელი (გადაუადგილებელი), თუ მისი მათემატიკური ლოდინი შერჩევის ნებისმიერი მოცულობისათვის უდრის შესაფასებელ პარამეტრს:

$$M(\tilde{\theta}_n)=\theta, \tag{3.1}$$

როგორიც არ უნდა იყოს n.

ეს მოთხოვნა უზრუნველყოფს სისტემატური ცდომილების არარსებობას.

განსაზღვრება 3.4. θ პარამეტრის $\tilde{\theta}_n$ შეფასებას ეწოდება ძალდებული, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის სრულდება შემდეგი თანაფარდობა:

$$P[\,|\tilde{\theta}_n-\theta|<\varepsilon]\to 1, \quad \text{როცა} \quad n\to\infty. \tag{3.2}$$

თუ (3.2) ფორმულაში დავუშვებთ, რომ შეფასება $\widetilde{\theta}_n$ ჩაუნაცვლებელია და გამოვიყენებთ ჩებიშევის უტოლობას (თავი IV, (2.1)), მაშინ მივიღებთ, რომ ძალდებულობის პირობის შესასრულებლად საკმარისია შეფასების დისპერსია მისწრაფოდეს ნულისაკენ როცა $n \to \infty$, ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty} D[\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)] = 0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4. თუ ბერნულის სქემაში განვიხილავთ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{თუ } i\text{-ური ცდის შედეგად ადგილი ჰქონდა } A \text{ ხდომილობას;} \\ 0, & \text{თუ } i\text{-ური ცდის შედეგად ადგილი არ ჰქონდა ხდომილობას,} \end{cases}$$

მაშინ ბერნულის სქემის რეალიზაცია შეგვიძლია ჩავწეროთ, როგორც მიმდევრობა $X_1, X_2, \dots, X_n$, სადაც X_i უდრის 1-ს ან 0-ს იმის და მიხედვით, ადგილი ჰქონდა თუ არა A ხდომილობას i-ურ ცდაში.

ვთქვათ, ჩავატარეთ n ცდა. A ხდომილობის ალბათობის შეფასებად, როგორც აღვნიშნეთ, შეგვიძლია მივიღოთ სტატისტიკა:

$$\hat{P} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{A \text{ ხდომილობის მოხდენათა რიცხვი}}{\text{ცდათა საერთო რიცხვი}}.$$

ბერნულის თეორემის ძალით (თავი IV, (3.1)), $P[|\hat{P} - P| < \varepsilon] \to 1$, როცა $n \to \infty$, ე. ი. როდესაც ცდათა რიცხვი საკმაოდ დიდია, პრაქტიკულად არ შეგვხვდება ისეთი სერია, რომ $\hat{P}$ შეფასება დიდად განსხვავდებოდეს P ალბათობისაგან. მაშასადამე $\hat{P}$ წარმოადგენს P-ს ძალდებულ შეფასებას.

უცნობი პარამეტრის ძალდებული შეფასება ერთადერთი არ არის, ასე მაგალითად $\hat{P}$-ის გარდა P ალბათობის ძალდებული შეფასება იქნება $\hat{P}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n-1}$-იც, $\hat{P}_2 = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}}{n}$-იც და ა. შ. რომლებიც განსხვავდებიან $\hat{P}$-საგან.

$\hat{P}$ წარმოადგენს P ალბათობის გადაუადგილებელ შეფასებასაც. მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$M(X_i) = 1 \cdot P[X_i = 1] + 0 \cdot P[X = 0] = P,$$

მაშინ მათემატიკური ლოდინის თვისების ძალით გვექნება:

$$M(\hat{P}) = \frac{1}{n}(M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)) = \frac{1}{n} \cdot nP = P.$$

$\hat{P}_1$ და $\hat{P}_2$ არ არიან გადაუადგილებადი შეფასებები.

$$M(\hat{P}_1) = \frac{1}{n-1}(M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)) = \frac{np}{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)P,$$

$$M(\hat{P}_2) = \frac{1}{n}(M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)) = \frac{(n-1)p}{n} = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)P.$$

როგორც ვნახეთ, შეიძლება არსებობდეს ერთი და იგივე პარამეტრის რამდენიმე შეფასება, მაშინ მათ შორის „უკეთესი“ იქნება ის, რომელსაც აქვს ნაკლები გაფანტულობა პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისაგან, ე. ი. შეფასების დისპერსიის სიმცირე განსაზღვრავს ჭეშმარიტი მნიშვნელობის შეფასების სიზუსტეს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3.5. შეფასებას $\widetilde{\theta}_n^{(1)}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ეწოდება უფრო ეფექტური, ვიდრე შეფასებას $\widetilde{\theta}_n^{(2)}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, თუ

$$M(\widetilde{\theta}_n^{(1)} - \theta)^2 < M(\widetilde{\theta}_n^{(2)} - \theta)^2.$$

ეფექტურობის საზომად მიღებულია შეფარდება:

$$e = \frac{M(\widetilde{\theta}_n^{(1)} - \theta)^2}{M(\widetilde{\theta}_n^{(2)} - \theta)^2}.$$

თუ $e > 1$, მაშინ $\widetilde{\theta}_n^{(2)}$ შეფასება უფრო ეფექტურია, ვიდრე $\widetilde{\theta}_n^{(1)}$ თუ $\check{\theta}_n^{(1)}$ და $\widetilde{\theta}_n^{(2)}$ შეფასებები ჩაუნაცვლებელია, მაშინ:

$$e = \frac{\sigma^2_{\widetilde{\theta}(1)}}{\sigma^2_{\widetilde{\theta}(2)}}.$$

განვიხილოთ $\inf\limits_{\widetilde{\theta}_n} M(\widetilde{\theta}_n - \theta)^2$ ყველა შესაძლებელი $\widetilde{\theta}_n$-ის მიმართ. შეფასებას $\widetilde{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$, რომლისთვისაც ეს ქვედა საზღვარი მიიღწევა, ეწოდება ეფექტური შეფასება. რადგან რაიმე სიმრავ-

ლის ქვედა საზღვარი საზოგადოდ შეიძლება არც კი ეკუთვნოდეს ამ სიმრავლეს, ამიტომ ზოგჯერ ეფექტური შეფასება არ არსებობს.

განსაზღვრება 3.6. შეფასებას $\tilde{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ რომლისთვისაც სრულდება ზღვრული ტოლობა:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(\tilde{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)-\theta)^2}{\inf\limits_{\tilde{\theta}_n}(M(\tilde{\theta}_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)-\theta)^2)}=1,$$

ეწოდება ასიმპტოტურად ეფექტური შეფასება.

ამრიგად, როდესაც ვეძებთ უცნობი პარამეტრის შეფასებას, უნდა გავითვალისწინოთ შეფასების ზემოთ მოყვანილი მოთხოვნები: ძალდებულობა, გადაუადგილებლობა და ეფექტურობა.

მაგალითი 3.5. უცნობი მათემატიკური ლოდინის შესაფასებლად განვიხილოთ სტატისტიკა (შერჩევითი საშუალო) $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

ვთქვათ, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ არის შერჩევა გენერალური ერთობლიობიდან, რომელიც შეესაბამება X შემთხვევით სიდიდეს. შერჩევის განსაზღვრის თანახმად $X_1, X_2, \dots, X_n$ დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია. აღვნიშნოთ:

$$M(X_i)=a, \quad D(X_i)=\sigma^2,$$

მაშინ

$$M(\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)=\frac{na}{n}=a, \tag{3.3}$$

$$D(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}. \tag{3.4}$$

ფორმულა (3.4)-ისა და ჩებიშევის უტოლობის ძალით გვექნება:

$$P[|\overline{X}-a|>\varepsilon]\leqslant\frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}\to 0, \quad \text{როცა} \quad \nu\to\infty.$$

აქედან ცხადია, რომ:

$$P[|\overline{X}-a|<\varepsilon]\to 1, \quad \text{როცა} \quad n\to\infty. \tag{3.5}$$

(3.3) და (3.5) ტოლობები გვიჩვენებს, რომ შერჩევის საშუალო არითმეტიკული $\overline{X}$ არის შესაფასებელი პარამეტრის ძალდებული და ჩაუნაცვლებელი შეფასება.

მაგალითი 3.6. უცნობი σ_2 დისპერსიის შესაფასებლად განვიხილოთ სტატისტიკა

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-X)^2,$$

რომელსაც შერჩევითი დისპერსია ეწოდება.

ვნახოთ, არის თუ არა S სტატისტიკა σ_2 გენერალური დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება:

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a-\overline{X}+a)^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[(X_k-a)-(\overline{X}-a)]^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[(X_k-a)^2-2(X_k-a)(\overline{X}-a)+(\overline{X}-a)^2]=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)^2-2(\overline{X}-a)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\overline{X}-a)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)^2-2(\overline{X}-a)^2+(\overline{X}-a)^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)^2-(\overline{X}-a)^2. \tag{3.6}$$

რადგანაც X_k დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული შემთხვე-

ვითი სიდიდეებია, ამიტომ (3.3) და (3.4) ფორმულების გამოყენებით გვექნება:

$$M(X_k-a)^2=M(X-M(X))^2=\sigma^2,$$

$$M(\overline{X}-a)^2=D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},$$

მაშინ (3.6)-დან ვღებულობთ:

$$M(S^2)=\frac{n\sigma^2}{n}-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2. \tag{3.7}$$

როგორც (3.7)-დან ჩანს, S^2 არ არის ჩაუნაცვლებელი შეფასება, რადგან $M(s^2)$ არ უდრის σ^2-ს ნებისმიერი n-ისათვის. მართალია დიდი n-ებისათვის იგი ჩაუნაცვლებელია, მაგრამ მცირე n-ისთვის განსხვავება საგრძნობია. იმისათვის, რომ მივიღოთ დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება, განვიხილოთ არა S^2, არამედ მისი შესწორება $\frac{n}{n-1}$ თანამამრავლით. მაშინ (3.7)-ის თანახმად გვექნება:

$$\overline{S^2}=\frac{n}{n-1}S^2=\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2\right)=$$

$$=\frac{n}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}X_k^2-2\cdot\frac{1}{n}\cdot\overline{X}\sum_{k=1}^{n}X_k+\overline{X}^2\right)=$$

$$=\frac{n}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}X_k^2-2\cdot\overline{X}^2+\overline{X}^2\right)=$$

$$=\frac{n}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot X_k^2-\overline{X}^2\right),$$

რადგან $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}X_k^2\to M(X^2)$, ხოლო $\overline{X}^2\to[M(X)]^2$, როცა $n\to\infty$ ამიტომ:

$$\overline{S^2}\to M(X^2)-[M(X)]^2=\sigma^2,$$

ამრიგად, $\overline{S^2}$ არის σ^2-ის ჩაუნაცვლებელი შეფასება. შემდგომში ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ გვაქვს შეფასება $\overline{S^2}$ და არა S^2. ამ შეფასების ძალდებულება მტკიცდება $\overline{X}$ შეფასების ძალდებულობის ანალოგიურად.

§ 4. წერტილოვან შეფასებათა დადგენის ზოგიერთი მეთოდი

1. მომენტთა მეთოდი. ჩვენ უკვე განვიხილეთ წერტილოვანი შეფასების პოვნის ერთ-ერთი მეთოდი, როცა შეფასებული იყო გენერალური განაწილების მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია (ე. ი. პირველი და მეორე რიგის მომენტები). ახლა ვთქვათ, θ არის განაწილების რომელიმე უცნობი შესაფასებელი პარამეტრი. $f(x,\theta)$ იყოს განაწილების სიმკვრივე. მაშინ ცხადია, განაწილების მათემატიკური ლოდინი $M(x)$ იქნება θ-ს ფუნქცია:

$$M(X)=m_1(\theta).$$

ემპირიული საშუალო:

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k,$$

წარმოადგენს შერჩევითი მნიშვნელობების ფუნქციას.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ორი სახის მომენტს — თეორიულს და ემპირიულს. თეორიულს ვუწოდებთ გენერალური ერთობლიობის ჭეშმარიტ მომენტს, ხოლო ემპირიულს — შერჩევის საფუძველზე გამოთვლილ მომენტს.

მომენტთა მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში: ხდება განაწილების თეორიული და ემპირიული შესაბამისი მომენტების გატოლება, რის შედეგადაც მიიღება განტოლება θ პარამეტრის მიმართ:

$$m_1(\theta)=\overline{X},$$

მისი ამონახსენი $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$ წარმოადგენს უცნობი θ პარამეტრის სტატისტიკურ შეფასებას.

თუ შერჩევითი საშუალებით უნდა შეფასდეს არა ერთი, არამედ რამდენიმე, ვთქვათ, k უცნობი პარამეტრი $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k$, მაშინ უნ-

და ვიპოვოთ გენერალური განაწილების პირველი, მეორე, და ა. შ., k-ური რიგის თეორიული მომენტები:

$$m_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k),\ m_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k), \dots, m_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k),$$

შემდეგ ვიპოვოთ შესაბამისი ემპირიული მომენტები:

$$\mu_1(X_1, X_2, \dots, X_k),\ \mu_2(X_1, X_2, \dots, X_k), \dots, \mu_k(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

და გავუტოლოთ ისინი ერთმანეთს:

$$m_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \mu_j(X_1, X_2, \cdots, X_k) \quad (i=1, 2, \cdots, k). \qquad)4.1$$

(4.1) სისტემის ამონახსნი:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_k), \\ \theta_2 &= \theta_2(X_2, X_2, \dots, X_k), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \theta_k &= \theta_k(X_1, X_2, \dots, X_k) \end{aligned} \qquad (4.2)$$

წარმოადგენს უცნობ პარამეტრთა სტატისტიკურ შეფასებებს.

როგორც აღვნიშნეთ, შეფასებების მიღების ამ მეთოდს ეწოდება მომენტთა მეთოდი. მტკიცდება, რომ ამ მეთოდით მიღებული შეფასებები ძალდებულია, მაგრამ, საზოგადოდ, არ არის ეფექტური და არც ასიმპტოტურად ეფექტური. მიუხედავად ამისა, ამ მეთოდის სიმარტივე საშუალებას იძლევა გამოვიყენოთ ის მაშინ, როცა სხვა ცნობილი მეთოდებით ამა თუ იმ მიზეზის გამო ძნელდება შეფასებების პოვნა. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.1. განვიხილოთ შერჩევა შემთხვევითი სიდიდიდან, რომელიც ემორჩილება მაჩვენებლიანი განაწილების კანონს (თავი III, § 5). შესაფასებელია მისი ერთადერთი პარამეტრი λ.

როგორც ვიცით, ამ განაწილების პირველ თეორიულ მომენტს აქვს სახე:

$$m_1 = \lambda \int_0^\infty X e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}.$$

მეორე მხრივ, შერჩევის ანუ ემპირიული პირველი მომენტი არის $\overline{X}$ მათი გატოლებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

საიდანაც λ-ს შეფასება იქნება:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = \frac{1}{\overline{X}},$$

2. მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი. შერჩევის საშუალებით შეფასებების პოვნის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მეთოდია მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი, შემუშავებული ცნობილი სტატისტიკოსის ფ ი შ ე რ ი ს მიერ. მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს: ვთქვათ, გვაქვს n მოცულობის შერჩევა $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ X შემთხვევით სიდიდიდან. დავუშვათ, X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა $F(x, \theta)$, სადაც θ უცნობი პარამეტრია. $f(x, \theta)$ იყოს მისი სიმკვრივე. შევეცადოთ ვიპოვოთ θ-ს ისეთი შეფასება $\hat{\theta}$, რომლისთვისაც მოცემული შერჩევის განხორციელების ალბათობა იქნება მაქსიმალური.

დამოუკიდებელი ხდომილობების ალბათობების გამრავლების წესის თანახმად, ალბათობა იმისა, რომ X შემთხვევით სიდიდეზე n დაკვირვების შედეგად მივიღებთ ზუსტად მოცემულ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ შერჩევას, არის

$$f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdots f(x_n, \theta). \qquad (4.3)$$

აღვნიშნოთ ეს გამოსახულება $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ სიმბოლოთი:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1 \theta) \cdot f(x_2 \theta) \cdots f(x_n (\theta).$$

თუ შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტულია, მაშინ ცხადია

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = P_1(\theta) \cdot P_2(\theta) \cdots P_n(\theta), \qquad (4.4)$$

სადაც

$$P_i(\theta) = P(X = x_i), \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

(4.3) და (4.4) ფორმულებით მოცემულ ფუნქციებს მაქსიმალური დასაჯერობის ფუნქციები ეწოდება. მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდის არსიდან გამომდინარე, θ-ს შეფასებად უნდა ავიღოთ ისეთი $\hat{\theta}$, რომლისთვისაც $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს. θ-ს ეწოდება შეფასება, მიღებული მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით.

დიფერენციალური აღრიცხვის ცნობილი წესების თანახმად, იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება $\hat{\theta}$, უნდა ამოიხსნას განტოლება:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \qquad (4.5)$$

და შევარჩიოთ ის ამონახსნები, რომლებიც ანიჭებენ L ფუნქციას მაქსიმუმს.

როგორც მათემატიკური ანალიზიდან ცნობილია, $L(x_1, x_2 \dots, x_n, \theta)$ და $\ln L(x_1, \dots, x_n, \theta)$ ფუნქციების მაქსიმუმის წერტილები ემთხვევა ერთმანეთს, ამიტომ გამოთვლების გამარტივების მიზნით, (4.5) განტოლების ნაცვლად უკეთესია ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება:

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta}=\frac{1}{L}\cdot\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta}=0. \qquad (4.6)$$

თუ კი შესაფასებელია არა ერთი, არამედ რამოდენიმე, ვთქვათ k უცნობი $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ პარამეტრი, მაშინ მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებები მიიღება განტოლებათა სისტემიდან:

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_j}=0, \quad (j=1, 2, \dots, k). \qquad (4.7)$$

მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით მიღებულ შეფასებებს აქვს გარკვეული აზრით „კარგი“ თვისებები, რომლებსაც აქ დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ:

1. მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით მიღებული $\hat{\theta}$ შეფასება არის θ-ს ძალდებული შეფასება;

2. $\hat{\theta}$ შეფასება არის θ-ს ასიმპტოტურად ეფექტური შეფასება;

3. $\hat{\theta}$ შეფასება ასიმპტოტურად ნორმალურია, ე. ი. $\hat{\theta}$-ის, როგორც შემთხვევითი სიდიდის, განაწილება n-ის ზრდასთან ერთად მიისწრაფის ნორმალური განაწილების კანონისაკენ.

4. თუ θ-სთვის არსებობს ეფექტური შეფასება, მაშინ დასაჯერობის განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც ემთხვევა ამ შეფასებას.

მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით მიღებულ შეფასებებს აქვს უარყოფითი მხარეებიც, კერძოდ, ამ მეთოდით მიღებული შეფასებები

ყოველთვის არ არის ჩაუნაცვლებელი, გარდა ამისა, დასაჯერობის განტოლება ზოგჯერ რთული ამოსახსნელია. განვიხილოთ მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.2. ვთქვათ ბერნულის ცდათა სქემაში შესაფასებელია „წარმატების“ უცნობი p ალბათობა. მაშინ (4.4) ფორმულის თანახმად

$$L(x_1, x_1, \dots, x_n, p)=p^m(1-p)^{n-m}.$$

და (4.6) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p}=\frac{m}{p}-\frac{n-m}{1-p}=0.$$

აქედან ვპოულობთ ერთადერთ ამონახსნს:

$$\hat{P}(x_1, x_2, \dots, x_n)=\frac{m}{n}.$$

ამრიგად, ბერნულის სქემაში ხდომილობის უცნობი ალბათობის შეფასება მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით არის ამავე ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე ამ მიმდევრობაში. როგორც ვიცით (იხ. თავი III (3.1)), $M\left(\frac{m}{n}\right)=p$ და დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად $\frac{m}{n}$ სიდიდე ალბათურად კრებადია P-საკენ, როცა $n\to\infty$, ე. ი. ეს შეფასება არის ძალდებულიც და ჩაუნაცვლებელიც. გარდა ამისა შეიძლება აღინიშნოს, რომ მუავრ-ლაპლასის თეორემის ძალით სიხშირე არის ალბათობის ასიმპტოტურად ნორმალური შეფასებაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.3. განვიხილოთ ნორმალური განაწილების a და σ^2 პარამეტრების შეფასებების პოვნის ამოცანა მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით.

ამ შემთხვევაში (4.3) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, a, \sigma)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2},$$

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2.$$

შეფასებების საპოვნელად ვიპოვოთ $\dfrac{\partial \ln L}{\partial a}$, $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma}$ და ჩავწეროთ (4.7) განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)=0, \\ -\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=0. \end{cases}$$

აქედან ვპოულობთ:

$$\hat{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)=\overline{X},$$

$$\hat{\sigma}^2(x_1, x_2, \dots, x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2=S^2.$$

როგორც ვიცით (იხ. (3.5), (3.6)), ეს შეფასებები ძალდებულია, მაგრამ ჩაუნაცვლებელია მხოლოდ $\hat{a}$ შეფასება.

3. χ^2-ის მინიმუმის მეთოდი. ვთქვათ გვაქვს n მოცულობის $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ შერჩევა X შემთხვევითი სიდიდიდან, რომლის განაწილების ფუნქციაა $F(x, \overline{\theta})$, სადაც $\overline{\theta}=(\theta_1, \dots, \theta_s)$, უცნობი პარამეტრია. X შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა არე $(-\infty, \infty)$ დავყოთ e ინტერვალად. მათგან კიდურა ინტერვალები იქნება $(-\infty, z_1)$ და (z_{e-1}, ∞). დაყოფის წერტილები იყოს $z_1<z_2<\dots<z_{e-1}$. მივიღებთ ინტირვალებს: $(z_{i-1}, z_i]$, $i=1, 2, 3, \dots, e$. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

1. $P_i(\theta)=F(z_i, \overline{\theta})-F(z_{i-1}, \overline{\theta})=P(z_{i-1}<X\leqslant z_i)$ ე. ი. $P_i(\theta)$ არის ალბათობა იმისა, რომ X შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას i-ური ინტერვალიდან, სადაც $i=1, 2, \dots, e$.

2. m_i იყოს $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ შერჩევის იმ ელემენტების რაოდენობა, რომლებიც მოხვდებიან i-ურ ინტერვალში.

ცხადია, რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:

$$P_1+P_2+P_3+\dots+P_e=1,$$
$$m_1+m_2+m_3+\dots+m_e=n.$$

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე:*

$$\chi^2=\sum_{i=1}\frac{(m_i-nP_i(\overline{\theta}))^2}{nP_i(\overline{\theta})}. \tag{4.8}$$

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ პარამეტრების შეფასებები $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_s$ ვეძებოთ ისე, რომ (4.8) სიდიდე გახდეს რაც შეიძლება მცირე.

შეფასების ზემოთ მოყვანილ მეთოდს ეწოდება X^2-ის მინიმუმის მეთოდი.

ამ შეფასებების მისაღებად საჭიროა ამოიხსნას განტოლებათა სისტემა:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \chi^2}{\partial \theta_j}-\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{n_i-nP_i(\overline{\theta})}{P_i}+\frac{(m_i-nP_i(\overline{\theta}))^2}{np_i^2}\right)\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j}=0, \tag{6.4}$$

სადაც $(j=1, 2, \dots, s)$

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$;ის მიმართ. (4.9) სისტემა საკმაოდ რთული ამოსახსნელია, მაგრამ შეიძლება იმის ჩვენება, რომ როდესაც n დიდია, (4.9) სისტემა შეიძლება შეიცვალოს უფრო მარტივი სისტემით:

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{m_i-nP_i(\overline{\theta})}{P_i}\frac{\partial P_i(\overline{\theta})}{\partial \theta_j}=0, \quad (j=1, 2, \dots, s). \tag{4.10}$$

ამ სისტემიდან ნაპოვნ შეფასებებს ეწოდებათ, შეფასებები მიღებული χ^2-ის მინიმუმის სახეცვლილი მეთოდით. მტკიცდება, რომ შეფასებები, მიღებული ორივე განხილული მეთოდით, დიდი n-ისათვის ასიმპტოტურად ეკვივალენტურია და ემთხვევა მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით მიღებულ შეფასებებს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს შეფასებები ასიმპტოტურად ნორმალურია და ეფექტური.

§ 5. ემპირიული განაწილების ფუნქცია

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით განაწილების პარამეტრების შეფასების ამოცანას: ცნობილი იყო განაწილების სახე და უცნობი იყო მხოლოდ მისი ზოგიერთი პარამეტრი (მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და

* უფრო დაწვრილებით χ^2 (ხი კვადრატი) შემთხვევით სიდიდეზე ვილაპარაკებთ მე-7 პარაგრაფში, როცა შევისწავლით ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანას.

სხვა). შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვებათა საშუალებით ვაგებდით უცნობი პარამეტრების შეფასებებს.

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ამოცანები, როდესაც უცნობია არა მარტო განაწილების პარამეტრები, არამედ განაწილების ზოგადი სახეც და იგი უნდა დადგინდეს შერჩევის საფუძველზე. ამ ტიპის შეფასებებს არაპარამეტრული შეფასებები ეწოდებათ.

არაპარამეტრული შეფასების ერთ-ერთ მაგალითს წარმოადგენს ემპირიული განაწილების ფუნქცია, რომელსაც მოცემულ პარაგრაფში განვიხილავთ.

ვთქვათ, მოცემულია უცნობი $F(x)$ განაწილების ფუნქციის მქონე შემთხვევით სიდიდეზე n დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგი (n მოცულობის შერჩევა):

$$X_1, X_2, \dots, X_n. \tag{5.1}$$

შევეცადოთ (5.1) შერჩევის მნიშვნელობების საშუალებით ავაგოთ $F(x)$ განაწილების ფუნქციის შეფასება. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი ალბათური შინაარსი: $F(x) = P(X<x)$ წარმოადგენს იმის ალბათობას, რომ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგი მიიღებს $J_x =]-\infty, x[$ ინტერვალში მოთავსებულ მნიშვნელობას.

აღვნიშნოთ ν_x-ით (5.1) შერჩევის იმ მნიშვნელობათა რაოდენობა, რომლებიც ეკუთვნის I_x ინტერვალს. დიდ რიცხვთა კანონის ძალით (ბერნულის თეორემა), საკმაოდ დიდი n-ისათვის $P(X \in J_x) \approx \frac{\nu_x}{n}$.

განსაზღვრება 5.1. $\hat{F}_n(x)$ ფუნქციას, რომელიც ნებისმიერი ნამდვილი x-სათვის განსაზღვრულია ტოლობით:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\nu_x}{n} \tag{5.2}$$

ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის ემპირიული განაწილების ფუნქცია, მიღებული (5.1) შერჩევის საფუძველზე.

შევნიშნოთ, რომ (5.1) შერჩევის მნიშვნელობები შემთხვევითი სიდიდეებია, დამოკიდებულია ცდაზე, ამიტომ მათი საშუალებით განსაზღვრული $\hat{F}_n(x)$ ფუნქციაც შემთხვევითია.

დავადგინოთ $\hat{F}_n(x)$ ფუნქციის, როგორც $F(x)$-ის შეფასების, თვისებები.

თეორემა 5.1. ემპირიული განაწილების ფუნქცია $\hat{F}_n(x)$ წარმოადგენს განაწილების $F(x)$ ფუნქციის გადაუადგილებელ და ძალდებულ შეფასებას ყოველ ფიქსირებულ $x \in R$ წერტილში.

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია $I_x(X_i)$, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს 1-სა და 0-ს იმისდა მიხედვით, დაკვირვების შედეგი ნაკლებია x-ზე თუ არა, ე. ი.

$$I_x(X_i) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } X_i < x, \\ 0, & \text{როცა } X_i \geqslant x. \end{cases}$$

ჯამი $\sum_{i=1}^{n} I_x(X_i)$ ყოველი ფიქსირებული x-ისათვის წარმოადგენს $]-\infty, x[$ ინტერვალში მოხვედრილ დაკვირვებათა რაოდენობას (5.1) შერჩევიდან, ე. ი. $\nu_n = \sum_{i=1}^{n} I_x(X_i)$, ამიტომ (5.2) ფორმულით განსაზღვრული ემპირიული განაწილების $\hat{F}_n(x)$ ფუნქცია შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_x(X_i), \tag{5.3}$$

ცხადია, ყოველი ფიქსირებული x-ისათვის, $I_x(X_i)$ წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდეს განაწილების კანონით:

$$I_x(X_i) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ p & q \end{pmatrix},$$

სადაც

$$X_i \in J_x, \ p = P(X_i < x) = P(X < x) = F(x),$$

ხოლო

$$q = 1 - p = 1 - F(x).$$

$I_x(X_i)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი იქნება:

$$M(I_x(X_i)) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = F(x). \tag{5.4}$$

თუ გავიხსენებთ მათემატიკური ლოდინის (5.3) თვისებას, (5.4) ტოლობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$M(\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(I_x(X_i)) = \frac{1}{n}\cdot n\,F(x) = F(x),$$

ე. ი. $\hat{F}_n(x)$ წარმოადგენს $F(x)$-ის გადაუადგილებელ შეფასებას.

დავამტკიცოთ $\hat{F}_n(x)$ შეფასების ძალდებულება.

რადგან (5.1) შერჩევის $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ელემენტები წარმოადგენენ დამოუკიდებელ, ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეებს, ამიტომ ყოველი ფიქსირებული x-ისათვის $I_x(X_1), I_x(X_2), \dots, I_x(X_n)$ აგრეთვე იქნებიან დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეები, მათემატიკური ლოდინით $M(I_x(X_i)) = F(x)$, $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$.

დიდ რიცხვთა კანონის (ბერნულის თეორემა) ძალით ამ შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკული $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} I_x(X_i)$. ალბათურად კრებადია $F(x)$ ფუნქციისაკენ, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\hat{F}_n(x)$ წარმოადგენს $F(x)$-ის ძალდებულ შეფასებას.

ემპირიული განაწილების ფუნქციის ასაგებად უნდა მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ვიგულისხმოთ, რომ (5.1) შერჩევა წარმოადგენს ვარიაციულ მწკრივს, ე. ი. შერჩევის ელემენტები დალაგებულია ზრდის მიხედვით:

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant X_{(3)} \leqslant \dots \leqslant X_{(n)},$$

მაშინ $\hat{F}_n(x)$ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad x < X_1, \\ \dfrac{k_i}{n}, & \text{როცა} \quad X_{(i)} < x \leqslant X_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ 1, & \text{როცა} \quad x > X_{(n)}, \end{cases}$$

სადაც k_i წარმოადგენს იმ ვარიანტების სიხშირეთა ჯამს, რომლებიც ნაკლებია $X_{(i+1)}$-ზე.

განმარტებიდან ჩანს, რომ ემპირიული განაწილების ფუნქცია წარმოადგენს საფეხურა ფუნქციას.

შევნიშნოთ, რომ ემპირიულ განაწილების ფუნქციას აქვს განაწილების ფუნქციის ყველა თვისება:

1. $0 \leqslant \hat{F}_n(x) \leqslant 1$:
2. $\hat{F}_n(x)$ არაკლებადია;
3. $\hat{F}_n(x)$ მარცხნიდან უწყვეტია.

განაწილების ემპირიულ და თეორიულ ფუნქციებს შორის კავშირს ამყარებს გლივენკო-კანტელის თეორემა, რომელიც მოგვყავს დაუმტკიცებლად.

თ ე ო რ ე მ ა 5.2. როდესაც $n \to \infty$,

$$P\left(\sup_{-\infty < x < \infty} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \to 0\right) = 1.$$

ამ თეორემის აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ ემპირიული განაწილების ფუნქცია წარმოადგენს თეორიული განაწილების ფუნქციის ძალდებულ შეფასებას.

§ 6. ნდობის ინტერვალები

ვთქვათ, მოცემულია n მოცულობის შერჩევა X შემთხვევითი სიდიდიდან:

$$X_1, X_2, \dots, X_n. \tag{6.1}$$

მისი განაწილების ფუნქცია იყოს $F(x, \theta)$, სადაც θ უცნობი პარამეტრია.

აქამდე, θ-ს შეფასებას ჩვენ ვახდენდით ერთი გარკვეული $\hat{\theta}$ რიცხვით, რომელსაც წერტილოვან შეფასებას ვუწოდებთ (იხ. § 3). თუ ცდათა რიცხვი დიდია, ხოლო წერტილოვანი შეფასება ხასიათდება გადაუადგილებლობით და ძალდებულობით, მაშინ შეფასება $\hat{\theta}$ „კარგად ცვლის“ შესაფასებელ θ პარამეტრს.

როდესაც ცდათა რიცხვი არც თუ ისე დიდია, $\hat{\theta}$-ის შემთხვევითი ხასიათიდან გამომდინარე, შეიძლება მივიღოთ დიდი ცდომილობა

$\hat{\theta}$-სა და θ-ს შორის. ამ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია (6. 1) შერჩევის საფუძველზე ავაგოთ ისეთი $]\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2[$ ინტერვალი, რომ საკმაოდ დიდი α ალბათობით შეგვეძლოს ვთქვათ, რომ θ მოთავსებულია $]\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2[$ ინტერვალში ($\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$).

აღვნიშნოთ, რომ $\hat{\theta}_1$ და $\hat{\theta}_2$ შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო θ ფიქსირებული რიცხვია, ამიტომ შეიძლება ვილაპარაკოთ $[\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2]$ ხდომილობის ალბათობაზე $\alpha = P[\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2]$. α-ს ეწოდება ნდობის ალბათობა, ხოლო $]\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2[$-ს α ალბათობის შესაბამისი ნდობის ინტერვალი.

განაწილების უცნობი θ პარამეტრის ყველაზე უხეშ შეფასებას წარმოადგენს $]-\infty, \infty[$ ინტერვალი, ე. ი. $\alpha=1$-ის ტოლი ალბათობით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\theta \in]-\infty, \infty[$, მაგრამ ცხადია ასეთი შეფასება უვარგისია, რადგან იგი არავითარ ინფორმაციას არ იძლევა შესაფასებელი θ პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობაზე. სასურველია, ნდობის ინტერვალი ისე აიგოს, რომ მისი სიგრძე იყოს რაც შეიძლება მცირე, ხოლო ნდობის α ალბათობა — რაც შეიძლება დიდი (ახლოს 1-თან).

როგორც წესი, ორივე ამ ამოცანის გადაწყვეტა შეუძლებელია, ამიტომ იქცევიან შემდეგნაირად: წინასწარ ირჩევენ α ნდობის ალბათობას ისე, რომ იგი ახლოს იყოს ერთთან ($\alpha=0{,}96$ ან $\alpha=0{,}99$) და ეძებენ მის შესაბამის უმცირესი სიგრძის ნდობის ინტერვალს.

ნდობის ინტერვალის აგების პროცესს განვიხილავთ კონკრეტულ მაგალითზე, ამასთან, შემოვისაზღვრებით მხოლოდ იმ შემთხვევით, როდესაც X არის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე m და σ^2 პარამეტრებით.

ვთქვათ, ვატარებთ რაღაც ფიზიკური სიდიდის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელ გაზომვებს. ითვლება, რომ გაზომვის ცდომილებები განაწილებულია ნორმალურად, ამიტომ გაზომვის X შედეგიც (რომელიც წარმოადგენს გასაზომი სიდიდის m ჭეშმარიტი მნიშვნელობისა და გაზომვის ცდომილების ჯამს), განაწილებულია ნორმალურად. თუ ადგილი არა აქვს სისტემატურ ცდომილებებს, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $M(X)=m$.

აქედან გამომდინარე, გაზომვათა შედეგების დამუშავების ძირითადი ამოცანა — „გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობის დად-

გენა“ მათემატიკურად ჩამოყალიბდა, როგორც ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის შეფასების ამოცანა.

ამ ამოცანის ამოხსნას დიდი n-სათვის იძლევა ემპირიული საშუალო:

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

თუ გაზომვათა რიცხვი n არც თუ ისე დიდია, ცდომილება $\overline{X}$-სა და m-ს შორის შეიძლება საკმაოდ დიდი იყოს, ამიტომ საჭიროა აიგოს ისეთი $]\hat{m}_1, \hat{m}_2[$ ინტერვალი, რომელშიც მოცემული α ნდობის ალბათობით მოთავსებული იქნება m რიცხვი.

ნდობის ინტერვალის აგების ამოცანა განვიხილოთ ორ შემთხვევაში: ა) როცა σ ცნობილია, ბ) როცა σ უცნობია.

ა) ვთქვათ σ ცნობილია. ვიცით, რომ ნორმალურად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამი ასევე განაწილებულია ნორმალურად, რადგან X_i შემთხვევითი სიდიდეები განაწილებულია ნორმალურად პარამეტრებით m და σ^2, $X = \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n} X_i$ შემთხვევითი სიდიდეც განაწილებული იქნება ნორმალურად, პარამეტრებით m და $\sigma/\sqrt{n}$.

განვიხილოთ ნორმირებული შემთხვევითი სიდიდე

$$U = \frac{\overline{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}, \tag{6.2}$$

რომელიც განაწილებულია ნორმალურად პარამეტრებით 0 და 1. ამიტომ, მოცემული α-სთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი t_α, რომ შესრულდეს ტოლობა:

$$P[-t_\alpha < U < t_\alpha] = \alpha. \tag{6.3}$$

როგორც ვიცით, ალბათობა

$$P[-t_\alpha < U < t_\alpha] = \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) - 1,$$

სადაც $\Phi(x)$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

t_α-ს მოსაძებნად უნდა ამოვხსნათ განტოლება $2\Phi(t_\alpha)=\alpha+1$, ანუ $t_\alpha=\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, რომელიც საკმაო მიახლოებით იხსნება Φ ან Φ^{-1}-ის ფუნქციის ცხრილის საშუალებით.

გადავწეროთ (6.3) შემდეგი სახით:

$$P\left[-t_\alpha<\frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}<t_\alpha\right]=\alpha,$$

ანუ

$$P\left[X-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha<m<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha\right]=\alpha,$$

ეს ნიშნავს, რომ m მათემატიკური ლოდინის α ნდობის ალბათობის შესაბამისი ნდობის ინტერვალი არის:

$$\left]\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha,\quad \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha\right[. \tag{6.5}$$

შევნიშნოთ, რომ ნდობის ინტერვალის სიგრძე $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha$ დამოკიდებულია მხოლოდ შერჩევის მოცულობაზე, ამასთან ცდათა რიცხვის ზრდასთან ერთად იგი მცირდება. ინტერვალს ცენტრი მოთავსებულია შემთხვევით $\overline{X}$ წერტილში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ნორმალურად განაწილებულ X შემთხვევით სიდიდეზე 4 დამოუკიდებელი ცდის შედეგი მოყვანილია ცხრილში (ნახ. 32):

i	1	2	3	4
X_i	-20	12	-4	16

ნახ. 32

ვიპოვოთ უცნობი m მათემატიკური ლოდინის 90%-იანი ნდობის ინტერვალი (ე. ი. $\alpha=0,9$ ნდობის ალბათობის შესაბამისი ინტერვალი), თუ ცნობილია, რომ საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma=2$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულობის საშუალებით ვიპოვოთ ემპირიული საშუალო:

$$\overline{X}=\frac{1}{4}(-20+12-4+16)=1.$$

ცხრილი II-ის (იხ. დამატება გვ. 300) საშუალებით ამოვხსნათ განტოლება $2\Phi(t_\alpha)=0,9$ ანუ $\Phi(t_\alpha)=0,45$. გვაქვს $t_\alpha=1,65$, საიდანაც $t_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,65\cdot\frac{2}{\sqrt{4}}=1,65$. (6.4)-ის ძალით ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$]1-1,65,\ 1+1,65[\ =\ ]-0,65,\ 2,65[.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ზღვის სიღრმე იზომება ხელსაწყოთი, რომლის სისტემატური ცდომილება ნულის ტოლია, ხოლო შემთხვევითი ცდომილებები განაწილებულია ნორმალურად, საშუალო კვადრატული გადახრით $\sigma=15$ მ. რამდენი გაზომვა უნდა ჩავატაროთ, რომ განვსაზღვროთ სიღრმე არაუმეტეს 5 მ ცდომილებით, ნდობის ალბათობით 0,9?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ შემთხვევაშიც $\alpha=0,9$ და ამიტომ $t_\alpha=1,65$. პირობის ძალით $t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5$ მ, საიდანაც ვპოულობთ;

$$\sqrt{n}=\frac{t_\alpha\cdot\sigma}{5}=3\cdot1,65=4,95,$$

ე. ი. საჭიროა $n=25$ გაზომვა.

ბ) ახლა ვთქვათ σ პარამეტრი უცნობია. ამ შემთხვევაში u-ს გამოსახულებაში შედის ორი უცნობი m და σ, ამიტომ მის გამოსახულებაში შევიტანოთ σ-ს შეფასება და განვიხილოთ სიდიდე:

$$V=\frac{\overline{X}-m}{S/\sqrt{n}}, \tag{6.5}$$

სადაც

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_i)^2}.$$

მტკიცდება, რომ V შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია ე. წ. სტიუდენტის* განაწილება n თავისუფლების ხარისხით, რომლის განაწილების სიმკვრივე S_{n-1} მოცემულია მესამე თავის § 12-ში (12.1).

* ეს ფაქტი დამტკიცებული იყო (1908 წ.) ინგლისელი სტატისტიკოსის ვ. გოსეტის მიერ, რომელიც თავის ნაშრომებს აქვეყნებდა ფსევდონიმით სტიუდენტი.

იმისათვის, რომ ავაგოთ m-ის ნდობის ინტერვალი, უნდა ვიპოვოთ ისეთი t_α, რომ შესრულდეს ტოლობა:

$$P[-t_\alpha < V < t_\alpha] = \alpha,$$

ანუ, ამოვხსნათ განტოლება:

$$\int_{t_\alpha}^{t_\alpha} S_{n-1}(\tau)\, d\tau = \alpha.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $S_{n-1}(\tau)$ ლუწი ფუნქციაა, მივიღებთ:

$$2\int_{0}^{t_\alpha} S_{n-1}(\tau)\, d\tau = \alpha,$$

ამ ინტეგრალის, როგორც t_α-ს ფუნქციის ცხრილი მოყვანილია დანართში (იხ. გვ. 300.) ამ ცხრილის საშუალებით ვიპოვით t_α-ს. ნდობის ინტერვალი m-სათვის იქნება:

$$\left(\overline{X} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{\sigma}}\ ,\ \overline{X} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}\right). \tag{6.6}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ნათურის მუშაობის ხანგრძლივობა წარმოადგენს ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს, რომლის m და σ პარამეტრები უცნობია. მათ შესაფასებლად ჩაატარეს 16 საკონტროლო გამოცდა. ამ ცდებიდან გამომდინარე დაადგინეს, რომ $\overline{X} = 3000$ სთ. $S = 20$ სთ. ვიპოვოთ ნდობის ინტერვალი მათემატიკური ლოდინისათვის ნდობის ალბათობით 0,9.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სტიუდენტის განაწილების ცხრილის საშუალებით ვიპოვოთ t_α. ჩვენს შემთხვევაში $n-1=15$, $\alpha=0{,}9$; ცხრილიდან (იხ. დამატება) ვადგენთ $t_\alpha = 1{,}753$, საიდანაც $t_\alpha \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}} = 8{,}8$ სთ. საძიებელი ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$]3000 - 8{,}8;\ 3000 + 8{,}3\,[\,=\,]\,2991{,}2;\ 3008{,}8\,[.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (6.4) და (6.6) ნდობის ინტერვალების შეფასებათა შედარებისას ჩანს, რომ ისინი გვანან ერთმანეთს, მხოლოდ (6.6)-ში

σ-ს მნიშვნელობა შეცვლილია მისი წერტილოვანი შეფასებით. განსხვავება იმაში მდგომარეობს, რომ (6.6)-ში t_α განსაზღვრულია არა ნორმალური განაწილების ფუნქციის, არამედ სტიუდენტის განაწილების საშუალებით. მტკიცდება, რომ როცა $n \to \infty$, სტიუდენტის განაწილება გადადის სტანდარტულ ნორმალურ განაწილებაში; ამიტომ საკმაოდ დიდი n-ებისათვის (პრაქტიკულად, როცა $n \geqslant 20$) სტიუდენტის განაწილება შეიძლება შევცვალოთ ნორმალური განაწილებით.

§ 7. სტატისტიკური ჰიპოთეზები

ვთქვათ, მოცემულია ერთგვაროვან ობიექტთა გენერალური ერთობლიობა. X იყოს შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც გამოხატავს გენერალური ერთობლიობის ობიექტთა რაიმე ნიშან-თვისებას. გვაინტერესებს X შემთხვევითი სიდიდის უცნობი $F(x)$ განაწილების ფუნქციის სახის დადგენა. გენერალური ერთობლიობის ბუნებიდან გამომდინარე, შეიძლება გვქონდეს წინასწარი ვარაუდი (ჰიპოთეზა), რომ განაწილების ფუნქციას აქვს რაღაც $F(x)$ სახე. ანალოგიურად, თუკი უცნობია განაწილების რაიმე θ პარამეტრი, გარკვეული მოსაზრების გამო შეიძლება გამოვთქვათ ჰიპოთეზა, რომ $\theta = \theta_0$, სადაც θ_0 ცნობილი სიდიდეა.

ჰიპოთეზას ვუწოდოთ სტატისტიკური, თუ ის ეხება უცნობი განაწილების სახეს, ან განაწილების ფუნქციის უცნობ პარამეტრს.

ბუნებრივია, დაშვებულ ჰიპოთეზასთან ერთად განვიხილოთ მისი საწინააღმდეგო ჰიპოთეზაც. თუ შემოწმების შედეგად დაშვებული ჰიპოთეზა არ გამართლდა, მაშინ ადგილი ექნება საწინააღმდეგოს.

დაშვებულ (ძირითად) ჰიპოთეზას ეწოდება ნულოვანი და აღინიშნება H_0 სიმბოლოთი. მისგან განსხვავებულ ნებისმიერ ჰიპოთეზას ეწოდება ალტერნატული და აღინიშნება H_1 სიმბოლოთი.

მაგალითად, თუ ნულოვანი ჰიპოთეზა მდგომარეობს იმაში, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი $a=7$, მაშინ ერთ-ერთი ალტერნატული ჰიპოთეზა იქნება $a \neq 7$. ეს ფაქტი მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$H_0: a=7; \quad H_1: a \neq 7,$$

წესს, რომელიც განსაზღვრავს პირობებს, რომლის დროსაც შესამოწმებელ ჰიპოთეზას მივიღებთ ან უარვყოფთ, ეწოდება სტატისტიკური კრიტერიუმი. ცხადია, ჰიპოთეზის შემოწმება ხდება იმ მონაცემების საფუძველზე, რომელსაც ვღებულობთ შემთხვევითი შერჩევი-

დან. ამიტომ, სტატისტიკური კრიტერიუმი ადგენს წესს, თუ შემთხვევითი შერჩევის რა მონაცემების დროს მიიღება მოცემული ჰიპოთეზა და რა მონაცემების დროს არა.

სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმებისას შესაძლებელია დაშვებული იქნეს ორი ტიპის შეცდომა, ანუ როგორც მათ უწოდებენ, პირველი ან მეორე გვარის შეცდომა.

შეცდომა პირველი გვარისაა, როდესაც ჭეშმარიტი H_0 ჰიპოთეზა ჩაითვლება მცდარად, ხოლო მეორე გვარისაა, როდესაც მცდარი H_0 ჰიპოთეზა ჩაითვლება ჭეშმარიტად.

H_0 ჰიპოთეზის შესამოწმებლად ავაგოთ სტატისტიკური კრიტერიუმი შემდეგნაირად:

1. შემოვიღოთ სპეციალურად შერჩეული შემთხვევითი სიდიდე, რომლის ზუსტი ან ზღვრული განაწილება ცნობილია. ცხადია, ეს სიდიდე შერჩევის მონაცემების ფუნქციაა. აღვნიშნოთ იგი K სიმბოლოთი (მას ჩვენ შემდგომში გავაიგივებთ სტატისტიკურ კრიტერიუმთან). მისი საშუალებით ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ, მივიღებთ H_0 ჰიპოთეზას თუ უკუვაგდებთ მას.

2. დავაფიქსიროთ პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა α, რომელსაც მნიშვნელოვნების დონე ეწოდება. მნიშვნელოვნების დონე ფაქტიურად ის საზღვარია, რომლის გადალახვის შემდეგ განსხვავება შერჩევის მონაცემებსა და ნულოვან ჰიპოთეზას შორის არსებითია, ე. ი. მონაცემები ნულოვანი ჰიპოთეზის წინააღმდეგია.

3. შემოვიღოთ H_0-ის მიმართ ალტერნატიული ჰიპოთეზა H_1.

4. დავადგინოთ W კრიტიკული არე, ანუ სტატისტიკური კრიტერიუმის იმ ნამდვილ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთა მიღებისას H_0 ჰიპოთეზა უკუიგდება. კრიტერიუმის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომლებზეც H_0 ჰიპოთეზას მივიღებთ, ვუწოდოთ დასაშვებ მნიშვნელობათა არე. K წერტილს, რომელიც ყოფს კრიტიკულ და დასაშვებ მნიშვნელობათა არეებს, ეწოდება კრიტიკული წერტილი.

ზემოთ მოყვანილი ოთხი პუნქტი საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ სტატისტიკური კრიტერიუმი.

პრაქტიკულად, შეიძლება თავიდანვე დავაფიქსიროთ I გვარის შეცდომის ალბათობა α. (ჩვეულებრივად, $\alpha=0{,}1$; $0{,}05$; $0{,}02$; $0{,}01$). ყველა პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი კრიტერიუმისათვის შედგენილია ცხრილები და $P(K \in W)=\alpha$ ტოლობიდან შეიძლება K_0 კრიტიკული წერტილის დადგენა. ჩვენ ვაგებთ კრიტიკულ არეს იმ მოსაზრებიდან გამომდინარე, რომ ნულოვანი ჰიპოთეზის დროს კრიტერიუმის კრიტიკულ არეში მოხვედრის ალბათობაა α. სასურველია ვიცოდეთ, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კრიტერიუმი მოხვდება კრიტიკულ არე-

ში, როცა სამართლიანია ალტერნატული ჰიპოთეზა. ვუწოდოთ ამ ალბათობას კრიტერიუმის სიმძლავრე. სხვა სიტყვებით, კრიტერიუმის სიმძლავრე არის ალბათობა იმისა, რომ ნულოვან ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, თუ სამართლიანია ალტერნატული ჰიპოთეზა.

ვთქვათ, მეორე გვარის შეცდომის ალბათობაა β, მაშინ ცხადია, კრიტერიუმის სიმძლავრე იქნება $1-\beta$, აქედან ჩანს, რომ რაც უფრო მეტია კრიტერიუმის სიმძლავრე, მით უფრო მცირდება მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა β.

ამრიგად, ალბათობა იმისა, რომ კრიტერიუმი ჩავარდება კრიტიკულ არეში, როცა სამართლიანია H_0 ჰიპოთეზა, უდრის α-ს და ამავე დროს ალბათობა იმისა, რომ კრიტერიუმი ჩავარდება კრიტიკულ არეში, როცა სამართლიანია H_1 ჰიპოთეზა, უნდა იყოს მაქსიმალური. ამ ორ პირობას ეწოდება კრიტერიუმის სიმძლავრის მაქსიმიზაციის პოსტულატი, რაც ანალიზურად ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} &P(K \in W \mid H_0)=\alpha, \\ &P(K \in W \mid H_1)=\max. \end{aligned} \tag{7.1}$$

სტატისტიკურ კრიტერიუმს, რომელიც აკმაყოფილებს ამ პოსტულატს, ეწოდება უმძლავრესი კრიტერიუმი.

როგორც ვნახეთ, რაც უფრო მცირეა α და β, მით უფრო „კარგი" კრიტიკული არე გვაქვს, მაგრამ თუ შერჩევის n მოცულობა ფიქსირებულია, α-სა და β-ს ერთდროულად შემცირება არ შეიძლება, რადგან თუ α-ს შევამცირებთ, მაშინ β გაიზრდება. მაგალითად, $\alpha=0$ ნიშნავს, რომ ყველა ჰიპოთეზა მიიღება, მათ შორის მცდარიც, ე. ი. იზრდება მეორე გვარის შეცდომის β ალბათობა. α-სა და β-ს ერთდროულად შემცირების ერთადერთი გზაა შერჩევის მოცულობის გაზრდა, რომელიც თავის მხრივ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული.

უმძლავრესი კრიტერიუმის აგება სტატისტიკურ ჰიპოთეზათა შემოწმების ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა. უმძლავრესი კრიტერიუმების აგების არართული მეთოდები დადგენილია მხოლოდ მარტივი ჰიპოთეზებისათვის. ჰიპოთეზას ეწოდება მარტივი, თუ ის ცალსახად განსაზღვრავს შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჰიპოთეზას ეწოდება რთული. მაგალითად, ჰიპოთეზა, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის ნულს, ხოლო დისპერსია ერთს, მარტივი ჰიპოთეზაა, რადგან იგი ცალსახად განსაზღვრავს X შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას, ხოლო ჰიპოთეზა, „ნორმალურად განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის ნულს, ხოლო დისპერსია ნებისმიერი დადებითი რიცხვია", რთულია. პუასონის

კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის λ პარამეტრი იღებს მნიშვნელობებს ინტერვალში (1, 2), წარმოადგენს რთული ჰიპოთეზის მაგალითს.

იმ შემთხვევაში, როცა H_0 და H_1 ჰიპოთეზები მარტივია, ადგილი აქვს ნეიმან-პირსონის თეორემას, რომელიც მოგვყავს დაუმტკიცებლად.

თ ე ო რ ე მ ა 7.1. (ნეიმან-პირსონი). თუ ძირითადი ჰიპოთეზა H_0 და ალტერნატული H_1, მარტივებია, შესაბამისად $H_0: \theta=\theta_0$ და $H_1: \theta=\theta_1$ და თუ $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_0)$, $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_1)$ წარმოადგენენ დასაჯერობის ფუნქციებს, გამოთვლილს შესაბამისად H_0 და H_1 ჰიპოთეზებისათვის, ხოლო X შემთხვევითი სიდიდე, რომლიდანაც აღებულია შერჩევა, უწყვეტია, მაშინ არსებობს კრიტერიუმი, რომელიც არის უმძლავრესი H_0 ჰიპოთეზისთვის H_1 ჰიპოთეზის მიმართ. კრიტიკული არე და თვითონ კრიტერიუმი განისაზღვრება უტოლობით:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_1) \geqslant C \cdot L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_0), \tag{7.2}$$

სადაც C — დადებითი რიცხვია, რომლის მნიშვნელობა დამოკიდებულია მნიშვნელოვნების α დონეზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ უმძლავრესი კრიტერიუმი H_0 ჰიპოთეზისათვის, რომელიც გულისხმობს, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი m არის a_0. H_1 ალტერნატივა გვეუბნება, რომ $a_1 \neq a_0$. შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ცნობილია და უდრის σ_2, ხოლო ამოკრეფის მოცულობაა n.

ა მ ო ხ ს ნ ა: მაგალითი 4.3-ის მიხედვით შეიძლება დავწეროთ:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_1)^2}$$

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_0) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_0)^2}.$$

ჩავსვათ ეს სიდიდეები (7.2)-ში, მივიღებთ:

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_1)^2} \geqslant C \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-0_0)^2}.$$

ორივე მხარის გალოგარითმებით და გარკვეული გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$(a_1-a_0)\sum_{i=1}^{n} x_i - n(a_1^2-a_1^2) \geqslant \sigma^2 \ln C.$$

თუ გავიხსენებთ, რომ $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n\overline{X}$ და ამოვხსნით უკანასკნელ უტოლობას $\overline{X}$-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$\overline{X} \geqslant \frac{\sigma^2 \ln C + n(a_1^2-a_0^2)}{n(a_1-a_0)} = A, \text{ თუ } a_1-a_0>0$$

და

$$X \leqslant \frac{\sigma^2 \ln C + n(a_1^2-a_0^2)}{n(a_1-a_0)} = B, \text{ თუ } a_1-a_0<0.$$

ამგვარად, 7.1 თეორემის ძალით ვიპოვეთ კრიტერიუმი და განვსაზღვრეთ კრიტიკული არე: მართლაც, კრიტერიუმი უნდა ავიღოთ ამოკრებით საშუალო $\overline{X}$; თუ $a_1>a_0$ მაშინ კრიტიკულ არეში მოხვდება $\overline{X}$-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელიც გადააჭარბებს A რიცხვს. თუ $a_1<a_0$, მაშინ კრიტიკულ არეში ჩავარდება $\overline{X}$-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელიც ნაკლებია B რიცხვზე. A და B რიცხვები, რომლებიც დამოკიდებულნი არიან C-ზე და n-ზე (n ფიქსირებულია) ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ შესრულდეს (7.1) პირობის პირველი ტოლობა, ე. ი. ამ მაგალითში A უნდა ვიპოვოთ პირობიდან.

$$P[k \in W \mid H_0) = P(\overline{X} \geqslant A \mid a=a_0) = \alpha,$$

სადაც α წინდაწინ არჩეული მნიშვნელოვნების დონეა.

ისევე როგორც სტატისტიკური შეფასებების შემთხვევაში, აქაც შეიძლება შევადაროთ სხვადასხვა კრიტერიუმები (ერთი და იგივე ჰიპოთეზისათვის) მათი ეფექტურობის მიხედვით.

ვთქვათ T_n^* არის უმძლავრესი კრიტერიუმი H_0 ჰიპოთეზისა H_1 ალტერნატივის მიმართ. T_n იყოს სხვა კრიტერიუმი იგივე H_0 ჰიპოთეზისა H_1-ის წინააღმდეგ, ერთი და იგივე n მოცულობის შერჩევის დროს.

თუ T_n^* კრიტერიუმის სიმძლავრეს აღვნიშნავთ $1-\beta(T_n^*)$-ით, ხოლო T_n კრიტერიუმის სიმძლავრეს $1-\beta(T_n)$-ით, მაშინ

$$R_n = \frac{1-\beta(T_n^*)}{1-\beta(T_n)}$$

სიდიდეს **ვუწოდებთ** T_n კრიტერიუმის ეფექტურობას H_0 ჰიპოთეზისთვის, H_1 ალტერნატივით. ეფექტურობა არის n-ის ფუნქცია. თუ T_n **კრიტერიუმის** R_n ეფექტურობა მიისწრაფის ერთისაკენ, როცა $H \to \infty$, მაშინ **ასეთ** T_n კრიტერიუმს ეწოდება ასიმპტოტურად უძლიერესი კრიტერიუმი.

§ 8. პარამეტრულ ჰიპოთეზათა შემოწმება

ჩვენ აქ განვიხილავთ რამოდენიმე ძირითად სტატისტიკურ კრიტერიუმს, რომლებიც მიეკუთვნებიან ეგრეთ წოდებულ პარამეტრულ კრიტერიუმებს, ე. ი. ისეთ კრიტერიუმებს, რომლებიც განიხილავენ ჰიპოთეზებს განაწილების უცნობი პარამეტრების შესახებ, როცა განაწილების ფუნქციის სახე ცნობილია.

1. დავუშვათ n მოცულობის ამოკრეფა ხდება ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდიდან, რომლის მათემატიკური ლოდინი უცნობია, ხოლო დისპერსია σ^2 ცნობილია. მაშინ, როგორც ვიცით ამოკრეფითი საშუალოს $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ აგრეთვე აქვს ნორმალური განაწილება პარამეტრებით $(m, \sigma/\sqrt{n})$ იხ. § 3). ვთქვათ შესამოწმებელია ჰიპოთეზა H_0: $m=a_0$, H_1 ალტერნატიული ჰიპოთეზით H_1: $m=a_1$.

სტატისტიკურ კრიტერიუმად მივიღოთ შემთხვევითი სიდიდე (იხ. 6. 2):

$$U = \frac{\overline{X}-a_0}{\sigma}\sqrt{n}\,. \tag{8.1}$$

თუ მნიშვნელოვნების დონე არის α, მაშინ კრიტიკული არე, რომელიც მეორე გვარის შეცდომას მინიმალურს გახდის, მოიძებნება a_1 სიდიდის მნიშვნელობის მიხედვით.

თუ $a_1 > a_0$, მაშინ კრიტიკული არე იქნება მარჯვნივ. ე. ი. მას ეკუთ-

ვნის (8.1) კრიტერიუმის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელიც გადააჭარბებს U_α კრიტიკულ წერტილს. თავის მხრივ U_α ისეთია, რომ სრულდება

$$P(U > U_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{U_\alpha}^{+\infty} e^{-U^2/2}\,dU = \alpha. \tag{8.2}$$

აქედან U_α კრიტიკული არის დადგენა სიძნელეს არ წარმოადგენს თუ ვისარგებლებთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების (პარამეტრებით (0,1)) ცხრილებით.

თუ $a < a_0$, მაშინ კრიტიკული არე იქნება მარცხენა, ე. ი. მას ეკუთვნის (8.1) კრიტერიუმის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელიც ნაკლებია U_α კრიტიკულ წერტილზე, სადაც U_α მოიძებნება ანალოგიურად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ა) ვთქვათ, გენერალური ერთობლიობის განაწილება ნორმალურია, პარამეტრებით $N(a;\ 5)$. ვაკეთებთ შერჩევას $n=9$ მოცულობით. შევამოწმოთ ჰიპოთეზა H_0: $a=a_0=2$, H_1 ალტერნატივით H_1: $a=a_1=3$. პირველ რიგში დავაფიქსიროთ მნიშვნელოვნების დონე $\alpha=0{,}05$. გამოვთვალოთ ამოკრეფითი საშუალო. ვთქვათ $\overline{X}=1{,}3$. რადგან $a_1 > a_0$, ამიტომ ავაგოთ მარჯვენა კრიტიკული არე. (8.8) ტოლობის საფუძველზე და ნორმალური განაწილების ცხრილებით ვპოულობთ $U_\alpha = U_{0{,}05} = 1{,}65$, ამიტომ კრიტიკულ არეს ეკუთვნის კრიტერიუმის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლებიც გადააჭარბებს 1,65-ს.

ჩვენს შემთხვევაში კრიტერიუმის მნიშვნელობა

$$U = \frac{2-1{,}3}{5}\sqrt{9} = 0{,}42 < 1{,}65,$$

რადგანაც ეს მნიშვნელობა კრიტიკული არის გარეთაა, ამიტომ არა გვაქვს საფუძველი უარვყოთ H_0 ჰიპოთეზა.

ბ). განვიხილოთ იგივე ამოცანა, იმ განსხვავებით, რომ უცნობია აგრეთვე σ^2, ე. ი. ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის ორივე პარამეტრი უცნობია.

ამ შემთხვევაში კრიტერიუმად იღებენ შემთხვევით სიდიდეს (იხ. 6.5):

$$V = \frac{\overline{X}-a_0}{S}\sqrt{n-1}\,, \tag{8.3}$$

სადაც S არის σ-ს შეფასება: $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$. მტკიცდება,

რომ ამ სიდიდეს აქვს სტიუდენტის განაწილება $n-1$ თავისუფლების ხარისხით (იხ. თავი III, § 12); კრიტიკული არის არჩევის პრინციპი იგივეა რაც წინა მაგალითში, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ U_α კრიტიკული წერტილის დასაზუსტებლად ვიყენებთ არა ნორმალური განაწილების ცხრილს, არამედ სტიუდენტის განაწილების ცხრილს $n-1$ თავისუფლების ხარისხით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ა) მოცემულია $n=26$ მოცულობის შერჩევა ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან, რომლის პარამეტრები a და σ^2 უცნობია. შევამოწმოთ ჰიპოთეზა H_0: $a=5{,}5$, თუ საწინააღმდეგოა H_1; $a_1>5{,}5$.

დავაფიქსიროთ მნიშვნელოვნების α დონე; $\alpha=0{,}01$. გამოვთვალოთ ამოკრეფის მონაცემებით $\overline{X}$ და S. ვთქვათ $\overline{X}=5{,}2$ და $S=0{,}4$. რადგანაც $a_0<a_1$, ვაგებთ მარცხენა კრიტიკულ არეს. სტიუდენტის განაწილების ცხრილებით, როცა თავისუფლების ხარისხი $26-1=25$, ვპოულობთ:

$$P[V<-2{,}485]=0{,}01,$$

ამიტომ კრიტიკულ არეს ეკუთვნის კრიტერიუმის მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებიც ნაკლებია $-2{,}485$-ზე. ჩვენს შემთხვევაში:

$$V=\frac{5{,}2-5{,}5}{0{,}4}\sqrt{25}=-3{,}75<-2{,}435,$$

ე. ი. კრიტერიუმის მნიშვნელობა აღმოჩნდა კრიტიკულ არეში. ეს ნიშნავს, რომ უნდა უკუვაგდოთ H_0 ჰიპოთეზა და მივიღოთ ალტერნატიული ჰიპოთეზა.

ბ) მოცემულია n მოცულობის შერჩევა ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან. გვინდა შევამოწმოთ ჰიპოთეზა:

$$H_0:\sigma=\sigma_0^2.$$

კრიტერიუმად შემოვიღოთ შემთხვევითი სიდიდე:

$$Y=\frac{nS^2}{\sigma_0^2}\,. \tag{8.4}$$

თუ ჰიპოთეზა სწორია, მტკიცდება, რომ Y სიდიდეს აქვს x^2 განაწილება $n-1$ თავისუფლების ხარისხით. როგორც წინა შემთხვევებში კრიტიკული არე იქნება მარჯვენა ან მარცხენა იმის მიხედვით, თუ როგორია ალტერნატული ჰიპოთეზა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ა) მოცემულია ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან $n=10$ მოცულობის შერჩევა. უნდა შევამოწმოთ ჰიპოთეზა H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$; ალტერნატული ჰიპოთეზაა H_1: $\sigma^2=\sigma_1^2>\sigma_0^2$. მნიშვნელოვნების დონედ ავიღოთ $\alpha=0{,}02$. რადგან $\sigma^2>\sigma_2^2$, ვიღებთ მარჯვენა კრიტიკულ არეს. კრიტიკულ არეს მიეკუთვნება (8.4) კრიტერიუმის ყველა მნიშვნელობა, რომელიც გადააჭარბებს 19,68, იმიტომ რომ, x^2 განაწილების ცხრილით, როცა თავისუფლების ხარისხია 9,

$$P[Y>19{,}68]=0{,}02.$$

ამოვხსნათ $\dfrac{nS^2}{\sigma_0^2}>19{,}68$, S^2-ის მიმართ. მივიღებთ $S^2>19{,}68\,\sigma_0^2$, ამის შემდეგ გამოვთვალოთ S^2 და თუ მივიღებთ, რომ $S^2>19{,}68\,\sigma_0^2$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ.

ბ) ვთქვათ, გვაქვს ორი ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობა ერთი და იგივე საშუალო კვადრატული გადახრით $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$. პირველი გენერალური ერთობლიობიდან მოვახდინოთ n_1 მოცულობის შერჩევა. $\overline{X}_1$ და S_1 იყოს შესაბამისად საშუალო და საშუალო კვადრატული გადახრა. ანალოგიურად, მეორედან მოვახდინოთ n_2 მოცულობის შერჩევა, სათანადო საშუალო $\overline{X}_2$ და S_2 საშუალო კვადრატული გადახრით. გვაინტერესებს, ემთხვევა თუ არა პირველი გენერალური ერთობლიობების მათემატიკური ლოდინი a_1 მეორე გენერალური ერთობლიობის მათემატიკურ ლოდინს a_2-ს.

შევამოწმოთ ჰიპოთეზა H_0: $a_1=a_2$ ალტერნატიული ჰიპოთეზით H_1: $a_1\neq a_2$. მნიშვნელოვნების დონე იყო α. კრიტერიუმად მიღებულია შემთხვევითი სიდიდე:

$$V=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(a_1-a_2)}{\sqrt{\dfrac{n_1S_1^2+\sigma_2S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}\,, \tag{8.5}$$

მტკიცდება, რომ თუ H_0 ჰიპოთეზა სამართლიანია, მაშინ V-ს აქვს სტიუდენტის განაწილება n_1+n_2-2 თავისუფლების ხარისხით, იმის და მიხედვით, თუ როგორია H_1 ალტერნატივა, გვექნება სხვადასხვა კრიტიკული არეები.

ვთქვათ, გვაქვს მარჯვენა კრიტიკული არე, ე. ი. $n=a_2>a_1$, მაშინ მას მიეკუთვნება კრიტერიუმის ყველა ის წერტილი, რომელიც გადააჭარბებს V_α კრიტიკულ წერტილს,

$$P[V>V_\alpha]=\alpha,$$

სადაც V_α განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\int_{V_\alpha}^{+\infty} f(v)\,dv = \alpha,$$

აქ $f(v)$ არის იმ შემთხვევით სიდიდის განაწილების სიმკვრივე, რომელსაც აქვს სტიუდენტის განაწილება n_1+n_2-2 თავისუფლების ხარისხით. α უკვე ცნობილი მნიშვნელოვნების დონეა.

§ 9. არაპარამეტრული კრიტერიუმები

წინა პარაგრაფში ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ გენერალური ერთობლიობის განაწილების ფუნქცია ცნობილია.

თუ განაწილების ფუნქცია უცნობია, მაგრამ გვაქვს ვარაუდი, რომ მას ესა თუ ის სახე გააჩნია, შეიძლება შევამოწმოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა: გენერალური ერთობლიობის განაწილებას აქვს სახე $F(x)$. ამ ჰიპოთეზის შემოწმება ხდება იმავე წესებით, როგორც ვამოწმებდით პარამეტრულ ჰიპოთეზებს, ე. ი. კრიტიკული არის, კრიტერიუმის, ალტერნატული ჰიპოთეზის და მნიშვნელოვნების დონის დადგენით.

კრიტერიუმს, რომლითაც მოწმდება ჰიპოთეზა განაწილების უცნობი სახის შესახებ, ეწოდება თანადობის კრიტერიუმი. არსებობს თანადობის სხვადასხვა კრიტერიუმები, მაგალითად, x^2 კრიტერიუმი (პირსონის), კოლმოგოროვის, სმირნოვის, ω^2 — კრიტერიუმი (მიზესის) და ა. შ.

ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული თანადობის კრიტერიუმია x^2 კრიტერიუმი (პირსონის).

დავუშვათ, შესამოწმებელია H_0 ჰიპოთეზა: გენერალურ ერთობლიობას აქვს განაწილება $F(x)$.

შემოვიღოთ შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც განვიხილეთ § 4-ში (იხ. (4.8)):

$$X^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - n p_i)^2}{n p_i}. \tag{9.1}$$

განსხვავებით (4.8)-დან (9.1) ფორმულაში შემავალი p_i სიდიდეები არ არიან დამოკიდებული უცნობ θ პარამეტრზე.

x^2 არის შემთხვევითი სიდიდე და ჩვენ გვაინტერესებს მისი განაწილება, გამოთვლილი H_0 ჰიპოთეზის დროს.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1 (პირსონი). როგორიც არ უნდა იყოს შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია $F(x)$, (9.1) ფორმულით მოცემული შემთხვევითი სიდიდის განაწილება მიისწრაფის x^2 განაწილებისაკენ $l-1$ თავისუფლების ხარისხით, როდესაც $n \to \infty$, ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty} P(X^2 < x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{l-1}(t)\,dt,$$

ყოველი x-ისათვის. აქ $K_{l-1}(x)$ არის X^2 განაწილების სიმკვრივე $l-1$ თავისუფლების ხარისხით.

ამ თეორემის ძალით, ჩვენ შეგვიძლია, წინდაწინ ფიქსირებული α მნიშვნელოვნების დონით განვსაზღვროთ X^2_α კრიტიკული წერტილი, რომელიც ცხადია უნდა აკმაყოფილებდეს ტოლობას:

$$\int_{X^2_\alpha}^{\infty} K_{l-1}(t)\,dt = \alpha.$$

თუ (9.1) კრიტერიუმის მნიშვნელობები გადააჭარბებს კრიტიკულ წერტილებს, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ.

პრაქტიკულ ამოცანებში x^2 კრიტერიუმის გამოყენება იძლევა კარგ შედეგებს, როცა $np_i \geqslant 10$, $i=1, 2, \ldots, e$.

როგორც აღვნიშნეთ, $F(x)$ განაწილების ფუნქციის სახის დასადგენად არსებობს სხვა თანადობის კრიტერიუმებიც.

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე:

$$D_n = \sup_x \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right|,$$

სადაც $\hat{F}_n(x)$ არის ემპირიული განაწილების ფუნქცია. მტკიცდება თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 2.2. თუ $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ:

$$P[\sqrt{n} D_n < x] \to K(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2x^2}, & \text{როცა } x > 0, \\ 0, & \text{როცა } x \leqslant 0, \end{cases}$$

თუ $n \to \infty$.

$K(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილის საშუალებით. D_n კრიტერიუმს ეწოდება კოლმოგოროვის თანადობის კრიტერიუმი. თანადობის კრიტერიუმად იღებენ აგრეთვე შემდეგნაირად განსაზღვრულ ω^2 შემთხვევით სიდიდეს:

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{F}_n(x) - F(x)]^2 \, dF(x).$$

ამ სტატისტიკის ზღვრული განაწილება მიღებული იქნა სმირნოვის მიერ და იგი არ აღმოჩნდა დამოკიდებული $F(x)$-ის სახეზე. ω^2 კრიტერიუმს ეწოდება მიზესის თანადობის კრიტერიუმი.

IX თავი

რეგრესიული ანალიზის ელემენტები

§ 1. დამოკიდებულებანი შემთხვევით მოვლენათა შორის

ბუნებაში გვხვდება როგორც ერთმანეთზე დამოკიდებული, ისე ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი მოვლენები და პროცესები. ამასთან, დამოკიდებულებას სიდიდეთა შორის ხან მკვეთრად გამოსახული ხასიათი აქვს, ხან იმდენად სუსტი, რომ სპეციალური გამოკვლევაა საჭირო მის გამოსავლენად.

სიდიდეთა შორის დამოკიდებულება პირობით შეიძლება ორ კატეგორიად დავყოთ. პირველია ფუნქციური დამოკიდებულება, ანუ ისეთი დამოკიდებულება, როდესაც ერთი სიდიდის ცვლილება იწვევს მეორეს ზუსტ, დადგენილ ცვლილებას. ეს არის ხისტი დამოკიდებულება, ხშირად იგი შეიძლება მოცემულიც კი იყოს ფორმულის, ცხრილის ან გრაფიკის საშუალებით.

გარდა ფუნქციური დამოკიდებულებისა, არსებობს ე. წ. სტოქასტური, ანუ ალბათური დამოკიდებულება. ეს დამოკიდებულება ნაკლებად ხისტია, ერთი სიდიდის მნიშვნელობის ცოდნა, საზოგადოდ, არ გვაძლევს საშუალებას დავასახელოთ მეორე სიდიდის მნიშვნელობა, თუმცა, X და Y სიდიდეებს შორის სტოქასტური დამოკიდებულებაა, X სიდიდის ფიქსირებით პრინციპულად შეიძლება Y სიდიდის განაწილების კანონის მითითება. განვიხილოთ მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, X და Y სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება მოცემულია ფორმულით:

$$Y = 2X^2 - 1.$$

ეს არის ფუნქციური დამოკიდებულება. ყოველი ფიქსირებული X-სათვის შეიძლება შესაბამისი Y-ის დასახელება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. X იყოს ალალბედზე არჩეული ადამიანის სიმაღლე, Y მისივე წონა. ამ ორ სიდიდეს შორის უდაოდ არსებობს კავშირი: საზოგადოდ, რაც უფრო მაღალია ადამიანი, მით მეტი უნდა იყოს მისი წონაც. ეს დამოკიდებულება არ არის ფუნქციური, რადგან X სიდიდის ცოდნა არ გვაძლევს საშუალებას დავასახელოთ Y სიდიდე.

ვთქვათ ორ X და Y მოვლენას შორის არსებობს სტოქასტური დამოკიდებულება. ამასთან, X მოვლენა დროით წინ უსწრებს Y-ს. მაშინ ცხადია, არსებობს ცალმხრივი გავლენა X-ისა Y-ზე, რომელსაც რეგრესია ეწოდება. ამ გავლენის გამოსახატავად აგებენ ე. წ. რეგრესიის ფუნქციას.

თუ შემთხვევითი სიდიდეები იმყოფებიან მიზეზ-შედეგობრივ კავშირში და მათი კავშირი შეიძლება ალბათური აზრით, მაშინ ამბობენ, რომ ადგილი აქვს კორელაციურ კავშირს, ანუ კორელაციას.

§ 2. წრფივი რეგრესიის კოეფიციენტების განსაზღვრა უმცირეს კვადრატთა მეთოდით

მრავალი პრაქტიკული ამოცანის გადაჭრისას საჭირო ხდება გამოვიკვლიოთ, თუ რა გავლენას ახდენს ერთი რომელიმე X სიდიდე მეორე Y სიდიდეზე.

ვთქვათ გაირკვა, რომ ამ გავლენას სტოქასტური ხასიათი აქვს. ჩვენი ამოცანაა სტატისტიკური მეთოდების საშუალებით (დაკვირვებათა საშუალებით) მოვძებნოთ ისეთი წრფივი $Y = aX + b$ ფუნქცია, რომელიც შეძლებისდაგვარად კარგად წარმოადგენს ამ დამოკიდებულებას. აღვნიშნოთ, რომ წარმოდგენის „სიკარგე“ მრავალნაირად შეიძლება იქნეს გაგებული. ამ პარაგრაფში მოყვანილი იქნება საძიებელი წრფივი ფუნქციის (ე. წ. რეგრესიის წრფის) აგების ერთ-ერთი ხერხი, რომელიც საკმაოდ ხშირად გამოიყენება პრაქტიკაში.

ვთქვათ, ჩავატარეთ n დამოუკიდებელი დაკვირვება (X, Y) წყვილზე. (x_i, y_i) იყოს i-ური ცდის შედეგი $(i=1, 2, \ldots, n)$. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\hat{y}_i = ax_i + b \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.1}$$

u_i იყოს გადახრა თეორიულ $\hat{y}_i$ სიდიდესა და ემპირიულ y_i სიდიდეს შორის:

$$u_i = y_i - \hat{y}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

ამოცანა მდგომარეობს a და b პარამეტრების ისეთ შერჩევაში, რომ გადახრის კვადრატთა ჯამი აღმოჩნდეს მინიმალური, ე. ი.

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \to \min.$$

რეგრესიის წრფის აგების ამ მეთოდს ეწოდება უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. ამრიგად,

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \to \min. \tag{2.2}$$

თუ შევიტანთ y_i-ის მნიშვნელობას (2.2)-ის მარცხენა მხარეში, მივიღებთ რომ წრფივი რეგრესიის ამოცანა მიიყვანება ისეთ a_0 და b_0 რიცხვების მოძებნაზე, რომლებიც მინიმუმს მიანიჭებენ ფუნქციას:

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b)^2.$$

როგორც ცნობილია f ფუნქციის მინიმუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა პირველი რიგის კერძო წარმოებულების ნულთან ტოლობა:

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - a x_i - b) = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b) = 0. \tag{2.4}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ f ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial b^2} = 2n > 0, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a \, \partial b}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x})^2 > 0, \tag{2.7}$$

სადაც

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

(2.5)—(2.7) პირობები უზრუნველყოფენ იმას, რომ (2.3), (2.4) სისტემის ამონახსენი იქნება f ფუნქციის მინიმუმის წერტილი. გადავწეროთ (2.3), (2.4) შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{1} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^{n} x_i + b_n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{2.8}$$

(2.8) წარმოადგენს წრფივ განტოლებათა სისტემას a და b უცნობების მიმართ. ამოვხსნათ იგი კრამერის ფორმულების გამოყენებით:

$$\begin{cases} a = \dfrac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \\ b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \end{cases} \tag{2.9}$$

ემპირიული რეგრესიის წრფის კოეფიციენტები შეიძლება გამოთვლილი იქნას შემდეგნაირადაც:

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x - x_i)^2}, \\ b = \overline{y} = a\overline{x}, \end{cases} \tag{2.10}$$

სადაც $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, ამასთან მარტივი გარდაქმნებით (2.10)-ის პირველი ტოლობა მიიღება (2.9)-ის პირველი ტოლობიდან ხოლო (2.10)-ის მეორე ტოლობა მიიღება (2.8)-ის მეორე ტოლობიდან.

თუ x_i და y_i-ის შევხედავთ როგორც X და Y შემთხვევით სიდიდეებზე n დამოუკიდებელ დაკვირვებათა შედეგებს, მაშინ (2.10) სისტემის პირველი ტოლობის მრიცხველისა და მნიშვნელის $n-1$-ზე გაყოფით მივიღებთ მრიცხველში X და Y სიდიდეებს შორის ემპირიულ კოვარიაციას, ხოლო მნიშვნელში X სიდიდის ემპირიულ დისპერსიას. მაშასადამე, რეგრესიის კოეფიციენტი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც ფარდობა S_{XY} ემპირიული კოვარიაციისა S_X^2 ემპირიულ დისპერსიასთან.

ამრიგად, a კოეფიციენტი ეს არის ზომა, რომელიც საშუალოდ მიუთითებს განმსაზღვრელი X ფაქტორის ცვლილების გავლენას მასზე დამოკიდებულ Y სიდიდეზე. ხშირად ეკონომიკურ გამოკვლევებში მნიშვნელოვანია არა იმდენად რეგრესიის წრფის ცოდნა, რამდენადაც იმ გავლენის ცოდნა, რომელსაც ერთი ეკონომიკური ფაქტორი ახდენს მეორეზე.

განვიხილოთ მარტივი წრფივი რეგრესიის მაგალითი. ვთქვათ ვიკვლევთ მექანიზაციის დონეზე (აღვნიშნოთ იგი X-ით) შრომის ნაყოფიერების (აღვნიშნოთ Y-ით) დამოკიდებულებას 14 საწარმოს მონაცემების საფუძველზე (იხ. ცხრილი).

ცხრილი

საწარმოო №	შრომის ნაყოფიერება	სამუშაოების მექანიზაციის კოეფიციენტი %	გამოთვლებისათვის დამხმარე შედეგები		
i	y_i	x_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	20	32	640	1024	400
2	24	30	720	900	576
3	28	36	1008	1296	784
4	30	40	1200	1600	900
5	31	41	1271	1681	961
6	33	47	1551	2209	1089
7	34	56	1904	3136	1156
8	37	54	1998	2916	1369
9	38	60	2280	3600	1444
10	40	55	2200	3025	1600
11	41	61	2501	3721	1681
12	43	67	2881	4469	1849
13	45	69	3105	4761	2025
14	48	76	3648	5776	2304
ჯამი	492	724	26907	40134	18138

გაფანტვის დიაგრამაზე წერტილების განლაგება (იხ. ნახ. 33) საშუალებას გვაძლევს ცვლადებს შორის დამოკიდებულება ჩავთვალოთ წრფივად, ამიტომ შესაძლებელია დამოკიდებულება ვეძებოთ (2.1) ფუნქციის სახით. ამისათვის სტატისტიკურ მონაცემთა საშუალებით უნდა ვიპოვოთ a და b პარამეტრები. თავდაპირველად შევადგინოთ სამუშაო ცხრილი, სადაც მოცემულია საწყისი მონაცემები და გამოთვლებისათვის საჭირო ყველა დამხმარე შედეგები.

ცხრილში მოყვანილია y_i^2-ის მნიშვნელობები, რომლებიც უშუალოდ არ არიან საჭირო a-სა და b-ს გამოსათვლელად, მაგრამ ისინი დაგვჭირდებიან შემდეგში. ცხრილიდან ვპოულობთ ორივე ცვლადის საშუალო მნიშვნელობებს:

$$\overline{x} = \frac{724}{14} = 51{,}71,$$

$$\overline{y} = \frac{492}{14} = 35{,}14.$$

(2.9) და (2.10) ფორმულების საშუალებით გამოვთვალოთ a და b:

$$a = \frac{14 \cdot 26\,907 - 724 \cdot 492}{14 \cdot 40134 - 724 \cdot 724} = 0{,}5535,$$

$$b = 35{,}14 - 0{,}5435 \cdot 57{,}71 = 7{,}0356.$$

შესაფასებელი დამოკიდებულება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\hat{y} = 7{,}0856 + 0{,}5435 \cdot x.$$

თუ შევიტანთ x_i ცვლადის მნიშვნელობებს ცხრილიდან, მივიღებთ $\hat{y}_i$ რეგრესიის შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\hat{y}_1 = 7{,}0356 + 0{,}6435 \cdot 32 = 7{,}0356 + 17{,}392 = 24{,}4276;$$

$$\hat{y}_2 = 7{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 30 = 7{,}0356 + 16{,}305 = 23{,}3406;$$

$$\hat{y}_3 = 7{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 36 = 7{,}0356 + 19{,}566 = 26{,}6016;$$

$$\hat{y}_4 = 7{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 40 = 7{,}0356 + 21{,}740 = 28{,}7756;$$

$$\hat{y}_5 = 7{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 41 = 7{,}0356 + 22{,}283 = 29{,}3186;$$

$$\hat{y}_6 = 7{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 47 = 7{,}0356 + 25{,}545 = 32{,}5806;$$

$$\hat{y}_7 = 7{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 56 = 7{,}0356 + 30{,}436 = 37{,}4716;$$

$$\hat{y}_8 = 7{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 54 = 7{,}0356 + 29{,}349 = 36{,}3846;$$

$$\hat{y}_9 = 7{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 60 = 7{,}0356 + 32{,}610 = 39{,}6456;$$

$$\hat{y}_{10} = 7{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 55 = 7{,}0356 + 23{,}892 = 36{,}9276;$$

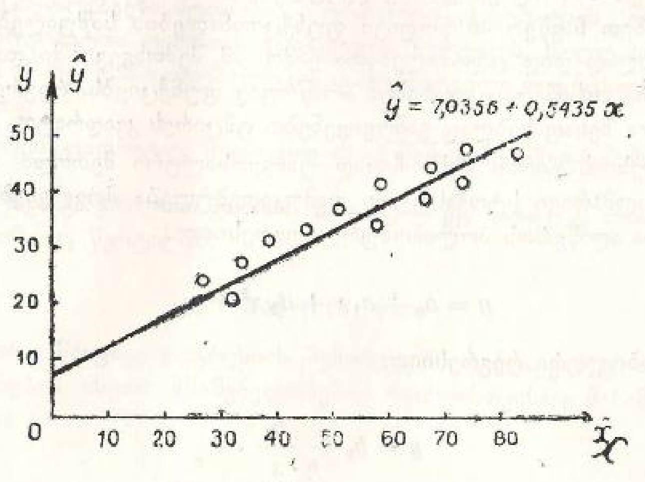
$$\hat{y}_{11} = 7{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 61 = 7{,}0356 + 33{,}154 = 40{,}1896;$$

$$\hat{y}_{12} = 7{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 67 = 7{,}0356 + 36{,}414 = 43{,}4496;$$

$$\hat{y}_{13} = 7{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 69 = 7{,}0356 + 37{,}502 = 44{,}5376;$$

$$\hat{y}_{14} = 6{,}0356 + 0{,}5435 \cdot 76 = 7{,}0356 + 41{,}306 = 48{,}3416.$$

გამოთვლილი მნიშვნელობების ერთობლიობა ქმნის რეგრესიის წრფეს (იხ. ნახ. 33), რომელიც გამოსახავს შრომის ნაყოფიერების დამოკიდებულებას მექანიზაციის დონეზე, იმ პირობით, რომ სხვა ფაქტორები და შემთხვევითობა არ ახდენენ გავლენას შრომის ნაყოფიერებაზე.



ნახ. 33

ჩვენს მაგალითში, რეგრესიის წრფის დახრის კუთხის ტანგენსი $a = 0{,}5435$, რაც იმას მიუთითებს, რომ თუ სამუშაოების მექანიზაციის კოეფიციენტი გაიზრდება 1%-ით, მაშინ შრომის ნაყოფიერება საშუალოდ გაიზრდება 0,5435 ერთეულით.

მას შემდეგ, რაც ვიპოვეთ a, b და $\hat{y}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 14$), გამოვთვალოთ u_i ნაშთები:

$u_1 = 20 - 24{,}4276 = -4{,}4276;$ $u_2 = 24 - 23{,}3406 = 0{,}6594;$

$u_3 = 28 - 26{,}6016 = 1{,}3984;$ $u_4 = 30 - 28{,}7756 = 1{,}2244;$

$u_5 = 31 - 29{,}3186 = 1{,}6815;$ $u_6 = 33 - 32{,}5806 = 0{,}4194;$

$u_7 = 34 - 37{,}4716 = -3{,}4716;$ $u_8 = 37 - 36{,}3846 = 0{,}6154;$

$u_9 = 38 - 39{,}6456 = -1{,}6456;$ $u_{10} = 40 - 36{,}9256 = 3{,}0724;$

$u_{11} = 41 - 40{,}1896 = 0{,}8104;$ $u_{12} = 43 - 43{,}4496 = -0{,}4496;$

$u_{13} = 45 - 44{,}5376 = 0{,}4624;$ $u_{14} = 48 - 48{,}3416 = -0{,}3416.$

ნაშთები გამოიყენება რეგრესიის შეფასების სიზუსტის დასახასიათებლად, ე. ი. რეგრესიის გამოთვლილი მნიშვნელობების შეთანხმებულობის დონის დასადგენად იმ მნიშვნელობებთან, რომლებიც დაკვირვების შედეგად არიან მიღებული.

§ 3. რეგრესიის არაწრფივი განტოლებების პარამეტრების გამოთვლა უმცირეს კვადრატთა მეთოდით

მოვლენათა შორის ყოველთვის არ არსებობს წრფივი დამოკიდებულება და ხშირად ეს დამოკიდებულებები არ შეიძლება გამარტივებული სახით ჩავწეროთ წრფივი ფუნქციონალების საშუალებით გაუმართლებლად დიდ ცდომილებათა გამო. ამ შემთხვევებში დამოკიდებულებათა აღსაწერად იყენებენ არაწრფივ ფუნქციებს. რეგრესიის პარამეტრთა შესაფასებლად გამოვიყენებთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდს.

რეგრესიის წირის შესარჩევად უნივერსალური მეთოდი არ არსებობს. ცალმხრივი სტოქასტური დამოკიდებულება მოვლენებს შორის შეიძლება აღიწეროს პოლინომური რეგრესიით:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

ან ჰიპერბოლური რეგრესიით:

$$y = b_0 + \frac{b_1}{x}.$$

გამოიყენება ასევე ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული და ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ან მათი კომბინაციები. რეგრესიის ფუნქციის სახის შერჩევა ხდება იმ კონკრეტული მეცნიერების თეორიის გამოყენებით, რომლის ბაზაზეც წარმოიშვება მოვლენებს შორის კავშირის გაზომვის ამოცანა. ზოგჯერ მოვლენათა შორის კავშირის სახეს ადგენენ რეგრესიის ემპირიული გრაფიკის საშუალებით.

ჩვენ განვასხვავებთ არაწრფივი რეგრესიის ორ კლასს. პირველ კლასს მიეკუთვნება რეგრესიები, რომლებიც არაწრფივები არიან განსაზღვრული ცვლადების მიმართ, მაგრამ წრფივი არიან შესაფასებელი a_k, b_k $(k=1,2,\ldots,p)$ პარამეტრების მიმართ. არაწრფივი რეგრესიის ამ კლასს კვაზიწრფივ რეგრესიას უწოდებენ. ამ კლასის უპირატესობა მდგომარეობს იმაში, რომ მათთვის შეიძლება უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენება.

რეგრესიის მეორე კლასს ახასიათებს არაწრფივობა შესაფასებელი პარამეტრების მიმართ. ეს კლასი ძალიან ხშირად გვხვდება ეკონომიკური მოვლენების შესწავლისას. მის არსებით ნაკლს წარმოადგენს ის, რომ მისთვის არ შეიძლება უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენება. თუმცა, ზოგჯერ ხერხდება ცვლათა გარდაქმნის გზით ამ კლასის რეგრესიის ფუნქციისათვის აღნიშნული მეთოდის გამოყენება. ამ საკითხს ჩვენ ქვემოთ შევეხებით.

თავდაპირველად განვიხილოთ კვაზიწრფივი რეგრესია. ვთქვათ X და Y მოვლენას შორის დამოკიდებულებას ვეძებთ პარაბოლის სახით:

$$Y = ax^2 + bx + c \tag{3.1}$$

აქ c შემასწორებელი მუდმივაა, რომელიც გამოხატავს რეგრესიის წირის ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილს, ხოლო a და b, Y სიდიდის X-ზე დამოკიდებულების გამომხატველი რეგრესიის კოეფიციენტებია.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდით (3.1) წირის პარამეტრების შესაფასებლად უნდა განვიხილოთ გადახრა $u_i = y_i - \hat{y}_i$, სადაც $\hat{y}_i$ არის (3.1)-ის მნიშვნელობა x_i წერტილში:

$$\hat{y}_i = a x_i^2 + b x_i + c.$$

როგორც წრფივი რეგრესიის შემთხვევაში, უნდა ვიპოვოთ a, b, c პარამეტრების ისეთი მნიშვნელობები, რომლისთვისაც მინიმუმს აღწევს ჯამი:

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i^2 - b x_i - c)^2.$$

$f(a, b, c)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულების ნულთან გატოლებით მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{3.4}$$

(3.2) ტოლობის ორივე მხარის n-ზე გაყოფით გვექნება:

$$c = \overline{y} - b\overline{x} - a\overline{x^2}, \tag{3.5}$$

ამ უკანასკნელის (3.1)-ში შეტანით მივიღებთ:

$$y = \overline{y} + b\,(x - \overline{x}) + a\,(x^2 - \overline{x^2})\,.$$

რეგრესიის a და b პარამეტრები მიიღება (3.2)=(3.4) წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით:

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta},\quad c = \frac{\Delta_3}{\Delta}\,, \tag{3.6}$$

სადაც

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{u} x_i^4 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}\,,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{vmatrix}\,,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}\,,$$

a, b და c-ს მიღებული მნიშვნელობების (3.1)-ში შეტანით მივიღებთ რეგრესიის წირის განტოლებას.

დაბოლოს, ვთქვათ X და Y სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებას ვეძებთ ჰიპერბოლას სახით:

$$Y = b_0 + \frac{k}{X}\,. \tag{3.7}$$

ზემოთ განხილულის ანალოგიურად, უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{u} y_i = b_0 n + k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\,.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} = b_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\,,$$

საიდანაც გვექნება:

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{y_i}{x_i} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}}{n \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}\right)^2}\,, \\[2ex] k = \dfrac{n \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{y_i}{x_i} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}\right)^2}\,. \end{cases} \tag{3.8}$$

b_0 და k-ს მნიშვნელობების (3.7)-ში შეტანით მივიღებთ რეგრესიის ჰიპერბოლურ განტოლებას.

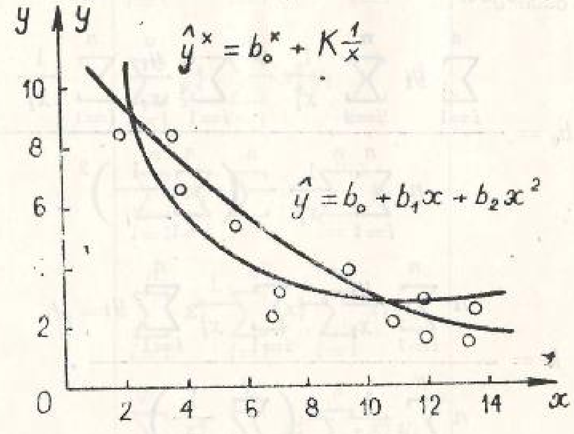
ანალოგიურად გამოიყენება უმცირეს კვადრატთა მეთოდი სხვა კვაზიწრფივი რეგრესიებისათვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ ვიკვლევთ ერთეული პროდუქციის ღირებულების დამოკიდებულებას შექმნილი პროდუქციის მოცულობაზე, 15 საწარმოს მაგალითზე (იხ. ცხრილი).

ცხრილი

საწარმო	გამოშვება (1000 ც)	ერთი ცალის თვითღირებულება (მან.)
1	2	8
2	3	10
3	4	7
4	4	6
5	5	5
6	6	5
7	6	4
8	6	3
9	7	4
10	8	5
11	6	3
12	10	2
13	12	1
14	13	1
15	14	2

34-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ თვითღირებულებასა და შექმნილი პროდუქციის მოცულობას შორის არსებობს არაწრფივი დამოკიდებულება. გამოვსახოთ ეს დამოკიდებულება თავდაპირველად პარაბოლის განტო-



ნახ. 34

ლების სახით, ხოლო შემდეგ ჰიპერბოლური განტოლებით. ამისათვის გამოვიყენოთ შემდეგი მნიშვნელობები: $\overline{x}=7,2667$; $\overline{x^2}=65,4$; $\overline{y}=4,4$;

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i=363;\quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2=981;\quad \sum_{i=1}^{n} x_i^3=10189;\quad \sum_{i=1}^{n} x_i^4=115893;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i=2551;\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=2,7455;\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}=15,6226;\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}=0,5862.$$

გამოვთვალოთ (3.1) პოლინომის კოეფიციენტები (3.6) ფორმულების საშუალებით:

$$a=0,0571;\quad b=-1,541;\quad c=1187.$$

რეგრესიის განტოლებას აქვს სახე:

$$\hat{y}=0,0571\,x^2-1,541x+11,57. \tag{3.9}$$

თუ ამ განტოლებაში შევიტანთ x-ის მნიშვნელობებს ცხრილიდან, მივიღებთ რეგრესიის იმ მნიშვნელობებს, რომლის საშუალებითაც იგება გრაფიკი (ნახ. 34).

$\hat{y}_1=0,02$; $\hat{y}_2=7,76$; $\hat{y}_{3,4}=6,62$; $\hat{y}_5=5,59$; $\hat{y}_{6,7,8}=4,68$; $\hat{y}_9=3,88$; $\hat{y}_{10}=3,18$; $\hat{y}_{11}=2,63$; $\hat{y}_{12}=2,17$; $\hat{y}_{13}=1,60$; $\hat{y}_{14}=1,49$.

რეგრესიის წირი კვეთავს ორდინატთა ღერძს წერტილში $y=11,87$. თუ ვისარგებლებთ მოცემული წირით პროგნოზირებისათვის, შეგვიძლია დავინახოთ, რომ როცა გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა იქნება 15000 ცალი, ერთეულ პროდუქციაზე დახარჯული თანხები გაიზრდება. ეკონომიური მოსაზრებებით ეს ისევე ძნელი ასახსნელია, როგორც ის, რომ თვითღირებულება უდრის 11,87 მანეთს მაშინ, როცა პროდუქცია არა გვაქვს, ამიტომ საჭიროა მოვძებნოთ რეგრესიული დამოკიდებულების სხვა, უფრო მოსახერხებელი ფორმა, ისეთი, რომელიც შეთანხმებულია ემპირიულ მონაცემებთან და ეკონომიკურადაც დასაბუთებულია. თუ დამოკიდებულების აღსაწერად ავირჩევთ ჰიპერბოლურ ფუნქციას

$$\hat{y}^*=b_0^*+\frac{k}{x}.$$

მაშინ (3.8) ფორმულების საშუალებით მივიღებთ:

$$b_0^*=0,8701,\; k=19286.$$

რეგრესიის განტოლებას ამ შემთხვევაში ექნება სახე:

$$\hat{y}^{*}=0,8701+19,286\cdot\frac{1}{x}.$$

თუ ამ ტოლობაში X-ის ემპირიულ მნიშვნელობებს შევიტანთ, მივიღებთ რეგრესიის თეორიულ მნიშვნელობებს:

$$\hat{y}_1^{*}=10,51;\quad \hat{y}_2^{*}=7,30;\quad \hat{y}_{3,4}^{*}=5,69;\quad \hat{y}_5^{*}=4,73;$$

$$\hat{y}_{6,7,8}^{*}=4,09;\quad \hat{y}_9^{*}=3,63;\quad \hat{y}_{10}^{*}=3,28;\quad \hat{y}_{11}^{*}=3,01;$$

$$\hat{y}_{12}^{*}=2,80;\quad \hat{y}_{13}^{*}=2,48;\quad \hat{y}_{14}^{*}=2,35;\quad \hat{y}_{15}^{*}=2,25;$$

შესაბამისი რეგრესიის წირი გამოსახულია 34-ე ნახაზზე. x-ის გაზრდით პროდუქციის თვითღირებულება მცირდება და უახლოვდება 0.87 მანეთს, x-ის შემცირებით პროდუქციის თვითღირებულება იზრდება. ერთეული პროდუქციის თვითღირებულების გამოშვებულ პროდუქციის მოცულობასთან დამოკიდებულების აღსაწერად ჰიპერბოლური ფუნქცია უფრო მოსახერხებელია, ვიდრე (3.9) რეგრესია. თუმცა, ზოგიერთ უბანზე (3.9) უფრო ახლოსაა ემპირიულ მონაცემებთან.

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი რეგრესიული დამოკიდებულებანი, რომლებიც წრფივად არ არიან დამოკიდებული შესაფასებელ პარამეტრებზე. იმისათვის, რომ ამ შემთხვევაშიც შესაძლებელი იყოს უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენება, საწყის მონაცემებს გარდაქმნიან ისე, რომ დამოკიდებულება შესაფასებელი პარამეტრების მიმართ გახდეს წრფივი. ასე მაგალითად, ლოგარითმული გარდაქმნის საშუალებით შეიძლება გადავიდეთ მაჩვენებლიანი ტიპის დამოკიდებულებიდან წრფივზე:

$$y=a\cdot b^{x}, \tag{3.7}$$

$$\lg y=\lg a+x\lg b. \tag{3.8}$$

თუ მოვახდენთ (3.8)-ში ცვლადთა გარდაქმნას $\lg y=z$, $\lg a=A$, $\lg b=B$, მივიღებთ:

$$z=A+Bx. \qquad (3.8)$$

(3.8) განტოლებისათვის კი უკვე შეგვიძლია გამოვიყენოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. ამისათვის გავალოგარითმოთ საწყისი y_i მონაცემები: $z_i=\lg y_i$ საწყისი რეგრესიის ფუნქციის პარამეტრები გამოითვლება შებრუნებული გარდაქმნის საშუალებით. კერძოდ, ჩვენს შემთხვევაში ისინი მიიღებიან პროცენტობით: $a=10^{A}$, $b=10^{B}$.

§ 4. მრავლობითი რეგრესია, ერთობლივი და კერძო კოეფიციენტები, მათი თვისებები

ჩვენ აქამდე ვიხილავდით შემთხვევას, როცა რაიმე მოვლენაზე გავლენას ახდენდა ერთი განმსაზღვრელი ფაქტორი. სინამდვილეში ყოველი მოვლენის მიმდინარეობაზე გავლენას ახდენს არა ერთი, არამედ უამრავი სხვადასხვა ფაქტორები.

ცხადია, მოვლენის მიმდინარეობაზე მოქმედი ყველა ფაქტორის გათვალისწინება შეუძლებელია, ამიტომ ჩვენ იძულებული ვართ განვიხილოთ მხოლოდ არსებითი ფაქტორები, ამასთან, გასათვალისწინებელია, რომ ფაქტორთა რაოდენობის გაზრდა ართულებს ამოცანის გადაწყვეტას.

შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევით, როცა დამოკიდებული Y ცვლადსა და მის განმსაზღვრელ $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ფაქტორებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. ამ შემთხვევაში მრავლობითი რეგრესიის ზოგადი სახის განტოლება იქნება:

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m. \tag{4.1}$$

მრავლობითი რეგრესიის აგების პროცედურა განვიხილოთ მაგალითზე, როდესაც გვაქვს ორი განმსაზღვრელი ფაქტორი X_1 და X_2. ვთქვათ, როდესაც განმსაზღვრელი ფაქტორები იღებენ მნიშვნელობებს (x_{1i}, x_{2i}), $(i=1, 2, \ldots, n)$ დამოკიდებული ცვლადი იღებს მნიშვნელობას y_i. გამოვთვალოთ რეგრესიის ფუნქციის მნიშვნელობა წერტილებში (x_{1i}, x_{2i}), $(i=1, 2, \ldots, n)$:

$$\hat{y}_i=a_0+a_1x_{1i}+a_2x_{2i},\quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{4.2}$$

და განვიხილოთ გადახრა:

$$\hat{u}_i=y_i-\hat{y}_i.$$

როგორც ერთფაქტორიანი წრფივი რეგრესიის შემთხვევაში, უმცირეს კვადრატთა მეთოდის არსი მდგომარეობს a_0, a_1, a_2 პარამეტრების იმ მნიშვნელობების მოძებნაში, რომელიც მინიმუმს მიანიჭებს გამოსახულებას:

$$f(a_0, a_1, a_2)=\sum_{i=1}^{n}u_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2.$$

თუ ამ გამოსახულებაში შევიტანთ y_i-ის (4.2) მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$f(a_0, a_1\ a_2) = \sum_{i=1}^{n} (y_1 - a_0 - a_1 x_{2i} - a_2 x_{2i})^2. \tag{4.3}$$

იმისათვის, რომ (4.3)-ით განსაზღვრულმა f ფუნქციამ მიაღწიოს მინიმუმს, აუცილებელია მისი კერძო წარმოებულები სამივე ცვლადის მიმართ იყოს ნული. f ფუნქციის გაწარმოებითა და ნულთან გატოლებით მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} x_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i} + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + a^2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i} y_i. \end{cases} \tag{4.4}$$

(4. 3) წარმოადგენს წრფივ განტოლებათა სისტემას a_0, a_1, a_2 ცვლადების მიმართ. მისი ამოხსნა მოგვცემს რეგრესიის ფუნქციის პარამეტრებს.

ადვილი შესამჩნევია, რომ მრავლობითი რეგრესიის a_k კოეფიციენტები გამოხატავენ X_k განმსაზღვრელი ფაქტორის გავლენას Y სიდიდეზე, როცა სხვა ფაქტორები უცვლელია, ამიტომ სტატისტიკური მეთოდოლოგიის თვალსაზრისით მრავლობით და კერძო რეგრესიებს შორის განსხვავება არ არსებობს.

როდესაც განიხილება რეგრესია სამ ურთიერთდამოკიდებულ Y, X_1 და X_2 სიდიდეებს შორის, წარმოიშვება კითხვა, რა გავლენას ახდენს X_1 სიდიდე Y-ზე, როდესაც X_2 უცვლელია და რა გავლენას ახდენს X_2 სიდიდე Y-ზე, როცა X_1 უცვლელია. ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა შეიძლება კერძო რეგრესიული ანალიზის საფუძველზე.

კერძოდ მტკიცდება, რომ a_k პარამეტრის გამოსათვლელად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ სხვა ფაქტორები არ მოქმედებენ და გამოვიყენოთ § 2,3-ში განხილული მეთოდი.

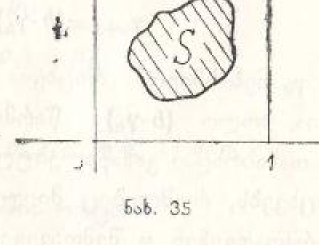
როგორც ყველა სტატისტიკურ შეფასებას, რეგრესიის ფუნქციის კოეფიციენტებს შეგვიძლია შევხედოთ როგორც შემთხვევით სიდიდეებს. მათ ახასიათებთ შემდეგი თვისებები. თუ η_i გადახრები ასეთია, რომ მათი საშუალო უდრის ნულს $Mu_i = 0$, ისინი განაწილებული არიან ნორმალურად და არაკორელირებულები არიან X_i-ებთან, მაშინ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მიღებული რეგრესიის ფუნქციის პარამეტრების შეფასებები არიან ძალდებულნი, გადაუადგილებადნი და ეფექტური. მათ გააჩნიათ უმცირესი დისპერსია წრფივ გადაუადგილებად პროცედურით მიღებულ ყველა შეფასებათა შორის. ამ აზრით ისინი წარმოადგენენ რეგრესიის პარამეტრების საუკეთესო შეფასებებს.

X თავი

მონტე-კარლოს მეთოდი

§ 1. მონტე-კარლოს მეთოდის არსი

რიცხვით მეთოდს, რომელიც დაფუძნებულია შემთხვევითი სიდიდის მოდელირებასა და საძიებელი სიდიდის სტატისტიკური შეფასების აგებაზე, მონტე-კარლოს მეთოდი ეწოდება. ამ მეთოდის საშუალებით შეიძლება ისეთი პროცესების მოდელირება, რომელთა მიმდინარეობაზე გავლენას ახდენენ შემთხვევითი ფაქტორები. გარდა ამისა, მონტე-კარლოს მეთოდით შეიძლება ბევრი ისეთი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნა ალბათური მოდელის აგების საშუალებით, რომლებიც არ არიან დაკავშირებული შემთხვევითობასთან. ამ აზრით, მონტე-კარლოს მეთოდი წარმოადგენს მათემატიკური ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის უნივერსალურ მეთოდს. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითი.



ნახ. 35

ვთქვათ, გამოსათვლელია რაიმე ბრტყელი S ფიგურის ფართობი (ნახ. 35). მოვათავსოთ იგი ერთეულოვან კვადრატში, შემდეგ ავიღოთ ამ კვადრატიდან N რაოდენობის შემთხვევითი წერტილი. ვთქვათ, მათ-

გან M რაოდენობის წერტილი მოხვდა S ფიგურაში. თუ აღებული წერტილები თანაბრადაა განაწილებული კვადრატში, S ფიგურის ფართობი მიახლოებით ტოლი იქნება M/N წილადის. ამასთან, რაც უფრო დიდია N, მით მეტია მიახლოების სიზუსტე. მონტე-კარლოს მეთოდის დამახასიათებელი თვისებაა გამოსათვლელი ალგორითმის მარტივი სტრუქტურა. როგორც წესი, ადგენენ პროგრამას ერთი შემთხვევითი ცდის განხორციელებისათვის (ზემოთ მოყვანილ მაგალითში უნდა შეირჩეს შემთხვევითი წერტილი კვადრატში და შემოწმდეს, ეკუთვნის თუ არა იგი S ფიგურას), შემდეგ ამ ცდას იმეორებენ N-ჯერ. იგულისხმება, რომ ყოველი ცდა დამოუკიდებელია დანარჩენებისაგან.

§ 2. შემთხვევით სიდიდეთა მოდელირება

სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნისას საჭიროა მოცემული F კანონით განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების მიღება, ანუ როგორც ამ პროცესს უწოდებენ — შემთხვევითი სიდიდის მოდელირება.

ნებისმიერი X შემთხვევითი სიდიდის მოდელირება შესაძლებელია რომელიმე შემთხვევითი სიდიდის ერთი ან რამდენიმე მნიშვნელობის გარდაქმნის გზით. ამ პროცესს X შემთხვევითი სიდიდის გათამაშება ეწოდება.

საწყის შემთხვევით სიდიდედ მოსახერხებელია ავიღოთ (0,1) ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული γ შემთხვევითი სიდიდე. მისი მოდელირება შეიძლება სხვადასხვა გზით. გავეცნოთ ერთ-ერთ მათგანს.

მტკიცდება, რომ რიცხვები, რომლებიც მიიღებიან რეკურენტული ფორმულით:

$$\gamma_{k+1}=\{b\cdot\gamma_k\},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

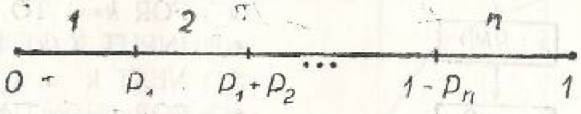
სადაც γ_0 ნებისმიერი რიცხვია (0,1) ინტერვალიდან, b რაიმე დიდი რიცხვია, ხოლო $\{b\cdot\gamma_k\}$ წარმოადგენს $b\cdot\gamma_k$ რიცხვის წილად ნაწილს, თანაბრადაა განაწილებული (0,1) ინტერვალზე.

რიცხვებს, რომლებიც მიიღებიან რაიმე ფორმულის საშუალებით და წარმოადგენენ γ შემთხვევითი სიდიდის იმიტაციას, ფსევდოშემთხვევითი რიცხვები ეწოდება. მათი მიღება, როგორც წესი, ხდება ე. გ. მ.-ის გამოყენებით.

ვთქვათ, X არის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილების ცხრილია:

$$X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\cdots x_n\\ p_1 & p_2\cdots p_n\end{pmatrix}.$$

ჩვენი მიზანია X შემთხვევითი სიდიდის გათამაშება. ამისათვის განვიხილოთ ინტერვალი (0,1) და ვთქვათ $y\in(0,1)$. დავყოთ ეს ინტერვალი ისეთ n ნაწილად, რომელთა სიგრძეებია $p_1,\ p_2, \dots, p_n$. დამყოფი წერტილების კოორდინატები, ცხადია, იქნება $y=p_1$, $y=p_1+p_2, \dots$, $y=p_1+p_2+\dots+p_{n-1}$. მიღებული ინტერვალები გადავნომროთ რიცხვებით 1, 2, …, n (ნახ. 36).



ნახ. 36

X შემთხვევითი სიდიდის გათამაშება მოვახდინოთ შემდეგნაირად: ავირჩიოთ γ-ს მნიშვნელობა და ავაგოთ წერტილი $y=\gamma$. თუ ეს წერტილი ჩავარდა i-ურ ინტერვალში, ჩავთვალოთ, რომ $X=x_i$ დავამტკიცოთ, რომ ამ პროცესით მართლაც შეიძლება X შემთხვევითი სიდიდის მოდელირება. რადგან γ თანაბრადაა განაწილებული (0,1)-ზე, ამიტომ ალბათობა იმისა, რომ γ ჩავარდება რომელიმე ინტერვალში ტოლია ამ ინტერვალის სიგრძისა, ე. ი.

$$P(0<\gamma<p_1)=p_1,$$

$$P(p_1<\varphi<p_1+p_2)=p_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

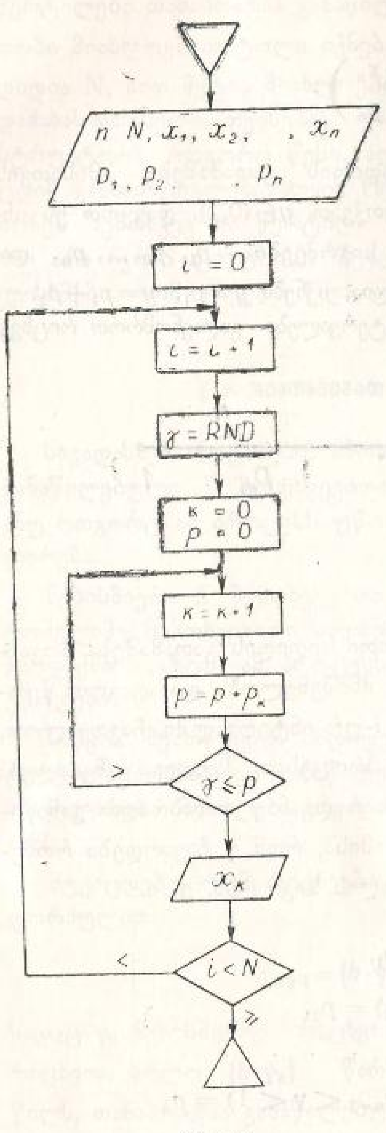
$$P(p_1+p_2+\dots+p_{n-1}<\gamma<1)=p_n$$

ჩვენი დაშვების თანახმად $X=x_i$, მაშინ როცა

$$p_1+p_2+\dots+p_{i-1}<\gamma<p_1+p_2+\dots+p_i,$$

ხოლო ამ ხდომილობის ალბათობაა $p_i:p(X=x_i=p_i$.

X შემთხვევითი სიდიდის გათამაშების ბლოკ-სქემას აქვს შემდეგი სახე:



ნახ. 37

ბლოკ-სქემაზე x_k ($k=1, 2, \dots, n$) აღნიშნავს გასათამაშებელი შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებს, ხოლო p_k—შესაბამის ალბათობებს. N არის შემთხვევითი რიცხვების რაოდენობა.

შესაბამის პროგრამას BASIC-ის ენაზე აქვს შემდეგი სახე:

```
1Ø REM RANDOM NUMBER
2Ø INPUT N
3Ø FOR k=1 TO N
4Ø INPUT X (k), P (k)
5Ø NEXT k
6Ø FOR i=Ø TO N
7Ø A=RND
8Ø k = 0\P=Ø
9Ø k = k+1\p=p +p (k)
1ØØ IF A<=P GOTO 9Ø
11Ø PRINT X(k)
12Ø NEXT i
13Ø END.
```

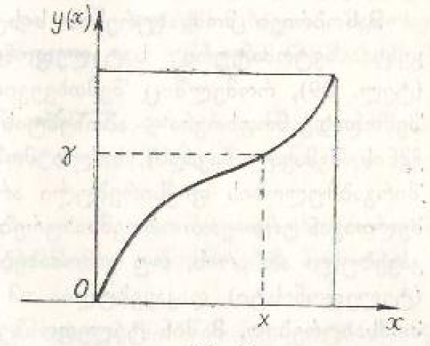
განვიხილოთ ახლა უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის გათამაშება. ვთქვათ, უნდა მივიღოთ (a, **b**) ინტერვალზე განსაზღვრული $f(x)$ განაწილების სიმკვრივის მქონე X შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები. დავამტკიცოთ, რომ X შემთხვევით სიდიდის მნიშვნელობები შეიძლება მივიღოთ განტოლებიდან:

$$\int_a^X f(x)\,dx = \gamma. \qquad (2.1)$$

განვიხილოთ ფუნქცია:

$$y(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

განაწილების სიმკვრივის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ $y(a) = 0$, $y(b) = 1$, $y'(x) = f(x) > 0$, როცა $x \in (a, b)$, ე. ი. $y(x)$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია 0-დან 1-მდე (ნახ. 37) და ნებისმიერი წრფე $y=\gamma$, $0<\gamma<1$ კვეთს მას ერთადერთ წერტილში. გადაკვეთის წერტილის აბსცისას მივიჩნევთ X-ის მნიშვნელობად



ნახ. 38

ამრიგად, (2.1)-ს აქვს ერთადერთი ამონახსენი.

განვიხილოთ ნებისმიერი ინტერვალი $(c, d) \subset (a, b)$. $y(x)$ ფუნქციის საშუალებით იგი აისახება Oy ღერძზე მდებარე $(y(c), y(d))$ ინტერვალში. თუ X ეკუთვნის (c, d) ინტერვალს, მაშინ $\gamma \in (y(c), y(d))$ და პირიქით, ე. ი.

$$P(c < X < d) = P(y(c) < \gamma < y(d)).$$

რადგანაც γ თანაბრადაა განაწილებული (0,1)-ზე, ამიტომ

$$P(y(c) < \gamma < y(d)) = y(d) - y(c) = \int_c^d f(x)\,dx,$$

ამრიგად,

$$P(c < X < d) = \int_c^d f(x)\,dx,$$

ეს კი ნიშნავს, რომ X შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც წარმოადგენს (2.1) განტოლების ამონახსენს, გააჩნია $f(x)$ განაწილების სიმკვრივე.

§ 3. მასობრივი მომსახურების სისტემის გაანგარიშება

მასობრივი მომსახურების თეორია წარმოადგენს ალბათობის თეორიის ნაწილს, რომელიც შეისწავლის სხვადასხვა ტიპის რეალური მასობრივი მომსახურების სისტემების მათემატიკურ მოდელებს.

მასობრივი მომსახურების სისტემებს ახასიათებთ „შემავალი ნაკადი“ (გამოძახებათა, კლიენტთა) და მომსახურების მექანიზმი (ალგორითმი).

მასობრივი მომსახურების სისტემის ტიპურ მაგალითს წარმოადგენს ავტომატური სატელეფონო სადგურის ცნობათა ბიურო (ტელ. 09), რომელშიც შემთხვევით (დროის შემთხვევით მომენტებში) შემოდის მოთხოვნა — აბონენტის გამოძახება (მათი ერთობლიობა ქმნის შემავალ ნაკადს), ხოლო მომსახურების მექანიზმი შედგება კავშირგაბმულობის ფიქსირებული არხისაგან (ტელეფონისტისაგან), რომელთაგან ერთ-ერთი მოემსახურება გამოძახებას, თუ ყველა არხი დაკავებული არ არის. თუ გამოძახების მოსვლის მომენტში ყველა არხი (ტელეფონისტი) დაკავებულია ამ მომენტამდე მოსულ გამოძახებათა მომსახურებით, მაშინ ტელეფონზე მივიღებთ სისტემის დაკავებულობის სიგნალს. მაშასადამე, გამოძახება მიიღებს უარს მომსახურეობაზე.

ასეთი ტიპის მასობრივი მომსახურების სისტემას ეწოდება n-არხიანი მასობრივი მომსახურების სისტემა რიგის გარეშე.

არსებობს აგრეთვე მასობრივი მომსახურეობის სისტემები რიგით. ამის მაგალითია საბილეთო სალაროები, როდესაც გამოძახება (ბილეთის ასაღებად მოსული ადამიანი) დგება რიგში, თუ სისტემა (სალარო) დაკავებულია, და ელოდება მის განთავისუფლებას.

მასობრივი მომსახურების სისტემებს ანსხვავებენ იმისდა მიხედვით, თუ როგორია მათში შემავალ მოთხოვნათა ნაკადი, რომლის დახასიათებაც შესაძლებელია ორ მომდევნო მოთხოვნას შორის დროის ინტერვალის (რომელიც შემთხვევითი სიდიდეა) განაწილებით. ყველაზე გავრცელებული პირობა, რომელსაც უყენებენ შემავალ ნაკადს, არის მისი სტაციონარულობა, ე. ი. დროისაგან გამოუკიდებლობა.

მასობრივი მომსახურების სისტემის დაგეგმვისას უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ყოველი დამატებითი არხის გახსნა დაკავშირებულია ხარჯებთან. გარდა ამისა, შემოსული მოთხოვნის რიგში დგომა იწვევს მოცდენას, ამიტომ უნდა შევეცადოთ, რომ არხების რიცხვი შევარჩიოთ ისე, რომ მინიმალური იყოს ერთ მხრივ გამოძახების რიგში დგომის და მეორეს მხრივ სისტემის არხის უქმად ყოფნის დრო. ერთდროულად ორივე სიდიდის მინიმიზირება შეუძლებელია, ამიტომ სისტემის ოპტიმიზაცია უნდა მოხდეს რაიმე ე. წ. მიზნის ფუნქციის გამოყენებით (მაგალითად, მაქსიმალური იყოს ფულად ერთეულებში გამოხატული მოგება).

ზოგად შემთხვევაში შეუძლებელია მასობრივი მომსახურების ამოცანის ანალიზური ამონახსნის მოძებნა, ზოგიერთი მარტივი შემთხვევების გარდა. ამ შემთხვევებში ამოცანის ამოხსნა შეიძლება მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენებით. მოვიყვანოთ ამის მაგალითი.

განვიხილოთ n-არხიანი მასობრივი მომსახურეობის სისტემა. მომსახურეობის განაცხადი მოდის პირველ არხზე. თუ იგი დაკავებულია, მყისიერად გადადის მეორეზე და ა. შ. თუ განაცხადის შემოსვლის მომენტში ყოველი არხი დაკავებულია, იგი უქმდება (მომსახურებაზე უარი ეთქმევა).

საჭიროა განისაზღვროს მუშაობის T_0 დროის განმავლობაში რამდენ განაცხადს მოემსახურება სისტემა და რამდენი განაცხადი გაუქმდება.

ამ ტიპის ამოცანები გვხვდება არა მარტო საყოფაცხოვრებო მომსახურების სფეროში, არამედ ნებისმიერი საწარმოების მუშაობის ორგანიზაციის გამოკვლევისას.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სისტემაში შემომავალი ნაკადი წარმოადგენს ე. წ. პუასონის ნაკადს, ე. ი. როდესაც ორი მეზობელი განაცხადის შემოსვლას შორის დროის შუალედი τ არის $(0, +\infty)$ შუალედში ექსპონენციალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე განაწილების სიმკვრივით $f(x)=a e^{-ax}$. როგორც ვიცით ამ განაწილების მათემატიკური ლოდინი $M(\tau)=\dfrac{1}{a}$. a-ს ეწოდება განაცხადთა ნაკადის სიმკვრივე.

τ შემთხვევითი სიდიდის მოდელირებისათვის გამოვიყენოთ (2.1) ფორმულა, რომელსაც ჩვენს შემთხვევაში ექნება სახე:

$$\int_0^{\tau} a e^{-ax}\, dx=\gamma.$$

ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომი ინტეგრალის გამოთვლა გვაძლევს:

$$1-e^{-a\tau}=\gamma,$$

საიდანაც

$$\tau=-\frac{1}{a}\ln(1-\gamma). \tag{3.1}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ შემთხვევითი სიდიდე $1-\gamma$, ისევე როგორც γ, განაწილებულია თანაბრად (0,1)-ზე, (3.1)-ის ნაცვლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფორმულა:

$$\tau = -\frac{1}{a}\ln\gamma. \tag{3.2}$$

აღვწეროთ მასობრივი მომსახურეობის ამ ამოცანის ამოხსნის ბლოკ-სქემა. აღვნიშნოთ i-ური არხის განთავისუფლების მომენტი t_i-ით, k-ური განახცადის შემოსვლის მომენტი τ_k-თი, ხოლო არხის მიერ განაცხადის მომსახურეობის დროს t_0-ით.

გაანგარიშების საწყის მომენტად შევარჩიოთ პირველი განაცხადის შემოსავლის მომენტი $T_1=0$.

პირველი განაცხადი შემოდის პირველ არხში. მაშასადამე, t_0 დროის განმავლობაში ეს არხი იქნება დაკავებული, ამიტომ t_1 ჩვენ უნდა შევცვალოთ ახალი მნიშვნელობით $t_1=T_1+t_0$. დავუმატოთ ერთიანი მომსახურებული განაცხადის მრიცხველს და გადავიდეთ მეორე განაცხადის განხილვაზე.

დავუშვათ k განაცხადი უკვე განხილულია. მაშინ უნდა გავათამაშოთ $k+1$-ე განაცხადის შემოსვლის მომენტი. ამისათვის ვირჩევთ γ-ს შემდეგ მნიშვნელობას და (3.2) ფორმულის საშუალებით ვითვლით $\tau=\tau_k$ სიდიდეს, ხოლო შემდეგ ვპოულობთ განაცხადის შემოსვლის მომენტს:

$$T_{k+1} = T_k + \tau_k.$$

იმისათვის, რომ გავიგოთ თავისუფალია, თუ არა ამ დროს პირველი არხი უნდა შევამოწმოთ პირობა:

$$t_1 \leqslant T_{k+1}, \tag{3.3}$$

თუ იგი შესრულებულია, ეს ნიშნავს, რომ განაცხადს მოემსახურება პირველი არხი. ჩვენ t_1 უნდა შევცვალოთ $T_{i+1}+t_0$-ით, დავუმატოთ ერთი შესრულებულ განაცხადთა მრიცხველს და გადავიდეთ შემდეგ განაცხადზე. თუ (3.3) პირობა არ არის შესრულებული, ეს ნიშნავს, რომ T_{k+1} მომენტში პირველი არხი დაკავებულია. ვამოწმებთ, თავისუფალია თუ არა მეორე არხი:

$$t_2 \leqslant T_{k+1}. \tag{3.4}$$

თუ ეს პირობა შესრულებულია, ჩვენ ვცვლით t_2-ს $T_{k+1}+t_0$-ით.

ვუმატებთ 1-ს მომსახურებულ განაცხადთა მრიცხველს და გადავდივართ შემდეგ განაცხადზე.

თუ (3.4) არ არის შესრულებული, გადავდივართ შემდეგი პირობის შემოწმებაზე:

$$t_3 \leqslant T_{k+1}.$$

და ა. შ.

თუ აღმოჩნდა, რომ $i=1,2,\ldots,n$ რიცხვებისათვის

$$t_3 > T_{k+1},$$

ე. ი. დროის T_{k+1} მომენტში ყველა არხი დაკავებულია, მაშინ უნდა დავუმატოთ 1 მოუმსახურებელი განაცხადების მრიცხველს და გადავიდეთ შემდეგი განაცხადის განხილვაზე.

ყოველი T_{k+1}-ის გამოსვლისას უნდა შევამოწმოთ ცდის დამთავრების პირობა:

$$T_{k+1} > T_0.$$

როდესაც ეს პირობა შესრულდება, ცდა მთავრდება. მომსახურებული და მოუმსახურებელი განაცხადების მრიცხველებში იქნებიან რიცხვები l და m.

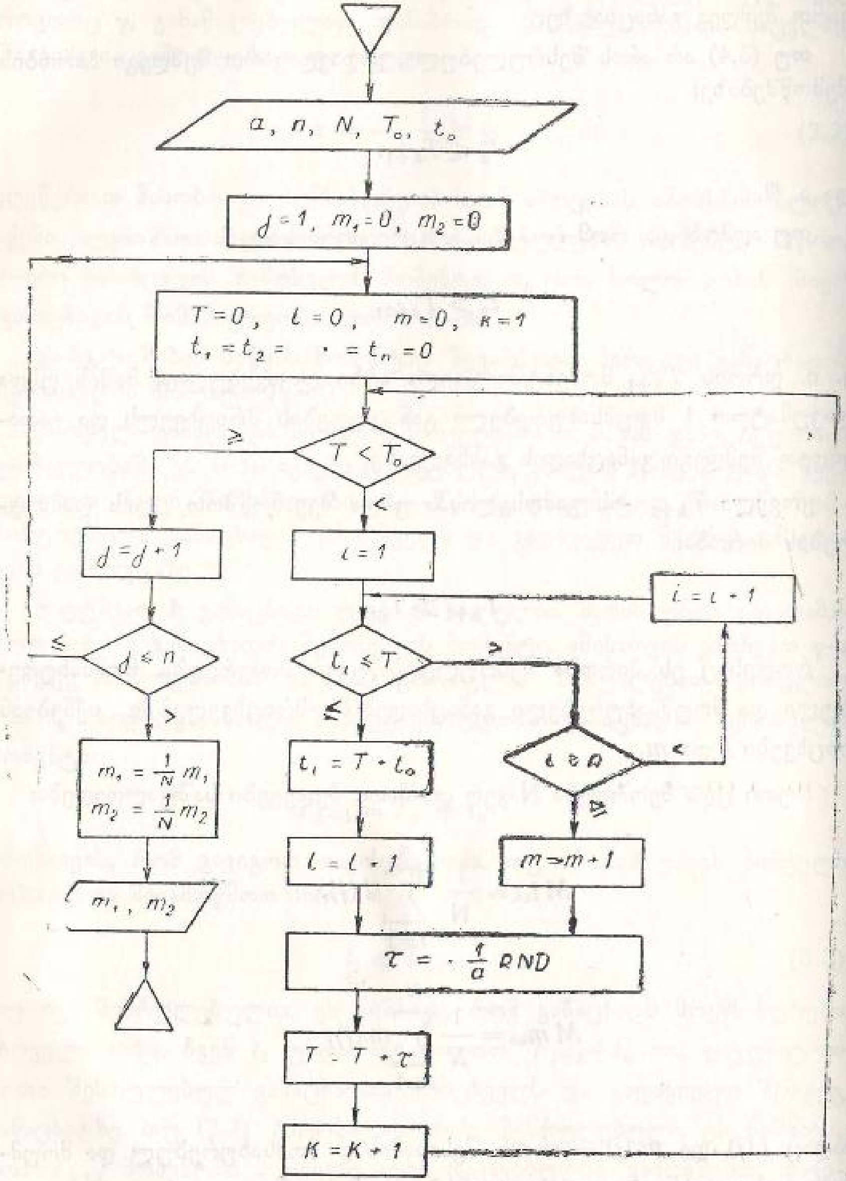
ასეთი ცდა მეორდება N-ჯერ და მათი შედეგები საშუალოვდება:

$$M\,l_{\text{სრ}} = \frac{1}{\mathbf{N}}\sum_{i=1}^{n} l(j),$$

$$M\,m_{\text{სრ}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m(j),$$

სადაც $l(j)$ და $m(j)$ — არიან შესაბამისად მომსახურებულ და მოუმსახურებელ განაცხადთა რაოდენობა i-ურ ცდაში.

ამ გამოთვლების ბლოკ სქემასა და პროგრამას ბეისიკის ენაზე ექნება სახე:



ბლოკ-სქემა № 2.

პროგრამა ბეისიკის ენაზე

```
10  REM --- РАСЧЕТ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУ-
    ЖИВАНИЯ
12  DIM T(100)
14  PRINT A, N1, N, T0, S'
20  INPUT A, N1, N, T0, S
30  J=0 \ M1=0 \ M2=0
40  T=0 \ L=0 \ M=0 \ K=1
50  FOR I=1 TO N1 \ T(I)=0 \ NEXT I
80  IF T<T0 GOTO 140
90  J=J+1
100 IF J=<N1 GOTO 120
110 GOTO 270
120 M1=MI+L \ M2=M2+M
130 GOTO 40
140 I=1
150 IF T(I)<=T GOTO 210
160 IF I>=N1 GOTO 190
170 I=I+1
180 GOTO 150
190 M=M+1
200 GOTO 230
210 T (I)=T+S
220 L=L+1
230 RANDOMIZE \ O=-1\A * LOG (RND)
240 T=T+O
250 K=K+1
260 GOTO 80
270 M1=M1\N\M2=M2\N
280 PRINT M1= :M1, M2= :M2
290 END
```

§ 4. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა

წინა პარაგრაფში განხილული ამოცანა იყო ალბათური თავისი ბუნებით და მის ამოსახსნელად მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენება ბუნებრივი ჩანდა. ახლა ჩვენ განვიხილავთ ამოცანას, რომელსაც

თითქოს არავითარი კავშირი არა აქვს შემთხვევითობასთან: განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებით ამოხსნას. განვიხილოთ ინტეგრალი:

$$I=\int_a^b g(x)\,dx.$$

შევარჩიოთ ნებისმიერი ისეთი ξ შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილების სიმკვრივე $p(x)$ ნული ხდება $(a,\ b)$ ინტერვალის გარეთ. ადვილი დასანახია, რომ $\eta=\frac{g(\xi)}{p(\xi)}$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ტოლია I-ს:

$$M_\eta=\int_a^b \frac{g(x)}{p(x)}\,p(x)\,dx=I.$$

განვიხილოთ ახლა N ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე $\eta_1,\ \eta_2,\dots,\eta_n$. სამი სიგმას წესს მათთვის ექნება სახე:

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}\eta_j-I\right|<3\sqrt{\frac{D\eta}{N}}\right\}\approx 0{,}997, \tag{4.1}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ ჩვენ ავარჩიეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის N მნიშვნელობა $\xi_1,\ \xi_2,\dots,\ \xi_C$; მაშინ როცა N საკმაოდ დიდია:

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}\frac{g(\xi_j)}{p(\xi_j)}\approx I.$$

(4.1)-დან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ მიახლოების ცდომილება არ აჭარბებს სიდიდეს $3\sqrt{\frac{D\eta}{N}}$.

შევნიშნოთ, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე უნდა შეირჩეს ისე, რომ მისი გათამაშება იყოს ადვილი და ამასთან $D\eta$ იყოს რაც შეიძლება მცირე, რაც განსაზღვრის ცდომილების სიმცირეს.

უნდა აღინიშნოს, რომ მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენება განსაკუთრებით ეფექტურია ჯერადი ინტეგრალების გამოთვლისას, როცა სხვა მიახლოებითი მეთოდებით გამოთვლა ძალზე რთულდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი:

```
5  OPEN 'LP:' FOR OUTPUT AS FILE # 1
10 INPUT N, A, B
20 DEF FNF (U)=U^2
30 S=0
40 FOR I=1 TO N
50 RANDOMIZE
60 Y=(B—A)*RND+A\S=S+FNF(Y)
70 NEXT I
80 PRINT # 1, 'S='; S*(B—A)\N
90 END
```

კომბინატორიკის ელემენტები

ხშირად საჭიროა სასრული სიმრავლის ელემენტებისაგან სხვადასხვა კომბინაციების შედგენა და რაიმე წესით შედგენილი ყველა შესაძლო კომბინაციის რაოდენობის გამოანგარიშება. ასეთ ამოცანებს კომბინატორულს უწოდებენ, ხოლო მათემატიკის ნაწილს, რომელიც დასახელებული ამოცანების ამოხსნას შეისწავლის — კომბინატორიკას.

ერთი და იგივე სასრული სიმრავლის ელემენტები შეიძლება დავალაგოთ სხვადასხვა რიგით იმისდა მიხედვით, თუ სიმრავლის რომელ ელემენტს ავირჩევთ პირველ ელემენტად, რომელს — მეორედ და ა. შ.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. სასრულ სიმრავლეში დადგენილ რიგს მისი ელემენტის გადანაცვლება ეწოდება.

n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი P_n-თი აღინიშნება. ცხადია იგი დამოკიდებულია მხოლოდ სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობაზე.

თუ სიმრავლე შედგება ერთი ელემენტისაგან, მაშინ შესაძლებელია ერთადერთი გადანაცვლება ე. ი. $P_1=1$. თუ სიმრავლე შედგება ორი ელემენტისაგან — $\{a, b\}$, მაშინ შესაძლებელია ორი გადანაცვლება (a, b) და (b, a), ე. ი. $P_2=2$. თუ სიმრავლე შედგება სამი ელემენტისაგან — $\{a, b, c\}$, მაშინ შესაძლებელია ექვსი გადანაცვლება: (a, b, c), (a, c, b), (c, b, a), (b, a, c), (c, a, b), (b, c, a), ე. ი. $P_3=6$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $P_1=1$, $P_2=1\cdot 2$, $P_3=1\cdot 2\cdot 3$. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით დავამტკიცოთ რომ:

$$P_n=1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n. \tag{1}$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, როდესაც $n=1$ ეს ფორმულა მართებულია. დავუშვათ, რომ ფორმულა მართებულია $n=k$-სათვის, ე. ი. $P_k=1, 2\cdot 3\cdot\dots\cdot k$ ახლა ვაჩვენოთ რომ ფორმულა სამართლიანი იქნება $n=k+1$-სათვის, ე. ი.

$$P_{k+1}=1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot k\,(k+1).$$

მართლაც, იმისათვის, რომ მივიღოთ $k+1$ ელემენტისაგან ყველა შესაძლებელი გადანაცვლება, საჭიროა თითოეულ k-ელემენტიან აღრინდელ გადანაცვლებას მივუერთოთ ახალი $(k+1)$-ე ელემენტი, რომელიც შეიძლება დავაყენოთ 1-ელ, მე-2 მე-3, …, k-ურ და $k+1$-ე ადგილზე. ამრიგად, ყოველი k ელემენტიანი გადანაცვლება წარმოქმნის $k+1$ — ახალ გადანაცვლებას, ამიტომ $k+1$ ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი იქნება $P_k\cdot(k+1)$, ე. ი.

$$P_{k+1}=P_k\cdot(k+1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot k\,(k+1).$$

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად, (1) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი n-ისათვის.

$1.2.3.\dots.n$ ნამრავლი $n!$ სიმბოლოთი აღინიშნება (იკითხება „n ფაქტორიალი“) მიღებულია, რომ $0!=1$ და $1!=1$, ამიტომ n-ელემენტიანი სიმრავლის გადანაცვლებათა რიცხვის გამოსათვლელი ფორმულა შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$P_n=n\,!$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა: n-ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m-ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს $(m\leqslant n)$ ეწოდება წყობა n ელემეხტისაგან m-ად.

n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო m-ელემენტიან წყობათა რიცხვი A_n^m სიმბოლოთი აღინიშნება. ცხადია, რომ $A_n^0=1$, რადგან არსებობს ერთადერთი ცარიელი ქვესიმრავლე. ადვილი მისახვედრია, რომ $A_n^1=n$ მართლაც, n-იდან ერთი ელემენტი n ხერხით შეიძლება ავირჩიოთ, ხოლო ამ ელემეტისაგან მიიღება ერთადერთი დალაგებული სიმრავლე.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ როცა $1\leqslant m\leqslant n$, $A_n^{m+1}=(n-m)A_n^m$. იმისათვის, რომ n ელემენტისაგან შევადგინოთ ყველა შესაძლო $(m+1)$-ელემენტიანი წყობა, შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ჯერ ავირჩიოთ რაიმე m რაოდენობის ელემენტი და მოვათავსოთ ისინი პირველ m ადგილზე, ამის შესრულება შეიძლება A_n^m ხერხით. $(m+1)$-ე ადგილზე შეიძლება მოვათავსოთ ნებისმიერი ელემენტი დარჩენილი $n-m$ ელემენტიდან. ამრიგად, ყოველი m-ელემენტიანი წყობა წარმოქმნის $n-m$ რაოდენობის $(m+1)$ ელემენტიან წყობას, მაშასადამე, სულ გვექნება $(n-m)\,A_n^m$ წყობა, ე. ი. $A_n^{m+1}=(n-m)\,A_n^m$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A_n^1=n$ და ვისარგებლებთ დამტკიცებული ფორმულით, გვექნება:

$$A_n^1=n,$$
$$A_n^2=(n-1)\,A_n^1=n\,(n-1),$$
$$A_n^3=(n-2)\,A_n^2=n\,(n-1)\,(n-2),$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$A_n^{m+1}=(n-m+1)A_n^m=n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-m+1).$$

მაგრამ n-იდან $(n-m+1)$-მდე ნატურალურ რიცხვთა ნამრავლი ფაქტორიალთა საშუალებით შეიძლება შემდეგნაირად გამოვსახოთ:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!},$$

ამიტომ საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

შევნიშნოთ, რომ $A_n^n=P_n=n!$

განსაზღვრება: n-ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m-ელემენტიან ქვესიმრავლეს $(m\leqslant n)$ ეწოდება ჯუფთება n ელემენტიდან m-ად.

ცხადია, რომ მოცემული სიმრავლის ორი m-ელემენტიანი ჯუფთება სხვადასხვაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი განსხვავდებიან ერთი ელემენტით მაინც, ხოლო m-ელემენტიანი წყობები რომ განსხვავდებოდნენ, საკმარისია ისინი განსხვავდებოდნენ დალაგებით.

n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო m-ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი C_n^m სიმბოლოთი აღინიშნება. დავამტკიცოთ, რომ:

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}.$$

იმისათვის, რომ მოცემული n ელემენტისაგან შევადგინოთ ყველა შესაძლებელი m-ელემენტიანი წყობა, შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ჯერ n ელემენტიდან გამოვყოთ რომელიმე m ელემენტი, რაც C_n^m ხერხით შეიძლება განხორციელდეს, გამოყოფილი m ელემენტი დავალაგოთ სხვადასხვანაირად, რაც P_m ხერხით შეიძლება შესრულდეს. ამგვარად, მივიღებთ $C_n^m\cdot P_m$ დალაგებულ სიმრავლეს. ე. ი.

$$A_n^m=C_n^m\cdot P_m,$$

საიდანაც $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{P_m}$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ და $P_m=m!$ მივიღებთ

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ ჯუფთებათა რიცხვის შემდეგი თვისებები:

1. $C_n^m=C_n^{n-m}$;
2. $C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$;
3. $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$.

მესამე ნაწილი

ამოცანათა კრებული

§ 1. ელემენტარული ხდომილობათა სივრცე. მოქმედებანი ხდომილობებზე

1.1. ლითონის ფულს აგდებენ სამჯერ, ექსპერიმენტის შედეგი ჩაიწერება (A_1, A_2, A_3) სქემით, სადაც თითოეული A_i $(i=1, 2, 3)$ აღნიშნავს ღერბის (ღ), საფასურის (ს) მოსვლას. ა) შეადგინეთ ექსპერიმენტის Ω სივრცე. ბ) იპოვეთ A ხდომილობა, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ მოვიდა არანაკლებ ორი ღერბისა.

1.2. ექსპერიმენტს წარმოადგენს ორი კამათლის ერთდროულად გაგორებისას მოსულ რიცხვებზე დაკვირვება. შეადგინეთ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე.

1.3. მოცემულია $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$. იპოვეთ $A\cdot B$, $A+B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $B-A$.

1.4. $B\subset A$, რას უდრის მათი ჯამი და ნამრავლი?

1.5. როდის არის $A\cdot B$ და A ეკვივალენტური ხდომილობანი? არის თუ არა A და $A\cup B$ თავსებადი?

1.6. A, B, C შემთხვევითი ხდომილობებია, რა აზრი აქვს ტოლობებს $A\cdot B\cdot C=A$, $A\cup B\cup C=A$?

1.7. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

ა) $A\cdot B=B\cdot A$;

ბ) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;

გ) $A\cdot(B+C)=AB+B\cdot C$;

დ) $A+B\cdot C=(A+C)(A+B)$;

ე) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$;

ვ) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$;

ზ) $(A+B)\cdot(A+C)\cdot(B+C)=AB+BC+AC$;

თ) $(A+B)(A+\overline{B})+(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\Omega$.

1.8. A არის ხდომილობა — სამიზნე დაზიანდა პირველი გასროლით. B არის ხდომილობა — სამიზნე დაზიანდა მეორე გასროლით. რას ნიშნავს ხდომილობა $A+B$?

1.9. A არის ხდომილობა — ლატარიაში მოგებულია 10 მან., B არის ხდომილობა — ლატარიაში მოგებულია 20 მან. C არის ხდომილობა — ლატარიაში მოგებულია 25 მან. რას ნიშნავს ხდომილობა — $A+B+C$?

1.10. A არის ხდომილობა — ორი ლითონის ფულის აგდების შედეგად ორივეზე ღერბი მოვიდა. B არის ხდომილობა — ორი ლითონის ფულის აგდების შედეგად ერთზე ღერბი მოვიდა, მეორეზე კი საფასური. რას ნიშნავს ხდომილობა $A+B$?

1.11. A არის ხდომილობა — კამათელზე მოვიდა კენტი რიცხვი, B არის ხდომილობა — კამათელზე მოვიდა 3-იანი, C არის ხდომილობა — კამათელზე მოვიდა 5-იანი; რას ნიშნავს ხდომილობები $A\overline{B}C$? ბ) AB? გ) $A\overline{C}$? დ) $\overline{B}\,\overline{C}$?

1.12. A_1 არის ხდომილობა — კამათელზე მოვიდა ლუწი რიცხვი. A_2 არის ხდომილობა — კამათელზე მოვიდა 2-იანი. A_3 არისხდომილობა — კამათელზე მოვიდა 4-იანი. A_4 არის ხდომილობა — კამათელზე მოვიდა 6-იანი. დაამტკიცეთ:

ა) $A_1\cdot A_4=A_2+A_3$,   დ) $A_1\overline{A}_3\cdot\overline{A}_4=A_2$,

ბ) $A_2\cdot A_3=\varnothing$,   ე) $A_1\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3=A_4$,

გ) $A_1\cdot A_2=A_3$,   ვ) $\overline{A}_1\cdot A_2\overline{A}_3A_4=\varnothing$.

1.13. ხარატის მიერ დამზადებული დეტალი შეიძლება იყოს I ხარისხის (ხდომილობა A), II ხარისხის (ხდომილობა B) ან III ხარისხის (ხდომილობა C). რაში მდგომარეობს ქვემოთ ჩამოთვლილი ხდომილობები:

ა) $A+B$,   გ) AC,

ბ) $\overline{A+C}$,   დ) $AB+C$?

1.14. რომელ შემთხვევაში არის მართებული ტოლობა:

ა) $A+B=A\cdot B$,   ბ) $A+\overline{A}=A$,   გ) $A\cdot\overline{A}=A$?

1.15 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ხდომილობათა გაერთიანება $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ წარმოადგინეთ უთავსებადი ხდომილობების ჯამის სახით.

1.16. აუცილებელია თუ არა, რომ A და B ხდომილობები ემთხვეოდნენ ერთმანეთს, თუ:

ა) $\overline{A}=\overline{B}$;   დ) $A(A\cup B)=B(A\cup B)$;

ბ) $A\cup C=B\cup C$;   ე) $A(A-B)=B(B-A)$.

გ) $AC=BC$;

1.17. განსაზღვრეთ A და B ხდომილობები, თუ:

ა) $A\cup B=\overline{A}$;   ბ) $AB=\overline{A}$.

1.18. იპოვეთ ყველა C ხდომილობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $AC=AB$.

1.19. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

ა) $(A\cup B)C=AC\cup BC$;

ბ) $A+\overline{A}B+\overline{A+B}=\Omega$,

გ) $(A+\overline{B})(A+B)=A$,

დ) $(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})(\overline{A}+B)=\varnothing$;

ე) $(A+\overline{A})(B+\overline{B})(C+\overline{C})=\Omega$;

ვ) $A(B_1+B_2+\cdots+B_n)=AB_1+AB_2+\cdots+AB_n$;

ზ) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=A+B$;

თ) $\overline{\overline{A}+\overline{B}}=A\cdot B$,

ი) $\overline{A+B+C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$,

კ) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{ABC}$.

1.20. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები (დე მორგანის ორადობის წესი):

ა) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ბ) $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$.

1.21. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ხდომილობებისათვის დაამტკიცეთ, რომ:

$$\bigcup_{n=1}^{N}\bigcap_{k=n}^{N} A_k=\bigcap_{n=1}^{N}\bigcup_{k=n}^{N} A_k=A_N.$$

1.22. [0, 1] ინტერვალზე ალალბედზე ვირჩევთ წერტილს. A_n არის ხდომილობა — ალალბედზე არჩეული წერტილი ეკუთვნის $\left[0, \frac{n}{n+1}\right[$ ინტერვალს, B_n არის ხდომილობა — ალალბედზე

არჩეული წერტილი ეკუთვნის $\left]0, \frac{1}{n}\right[$ ინტერვალს. რას ნიშნავს $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ და $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ ხდომილობები?

1.23. Ω ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ელემენტთა რაოდენობა n-ის ტოლია. მიუთითეთ ხდომილობათა უმცირესი და უდიდესი შესაძლო რაოდენობა.

1.24. შეიძლება თუ არა, რომ რომელიმე ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ყველა ხდომილობათა რაოდენობა იყოს 128, 129, 130?

1.25. შეიძლება თუ არა, რომ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა მკაცრად მეტი იყოს ყველა ხდომილობათა რიცხვზე?

1.26. შეიძლება თუ არა, რომ: ა) ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი იყოს სასრული, ხოლო ხდომილობათა რიცხვი უსასრულო? ბ) ხდომილობათა რიცხვი იყოს სასრული, ხოლო ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი უსასრულო?

§ 2. ხდომილობის ალბათობა

2.1. ყუთში, ერთმანეთისაგან მხოლოდ ფერით განსხვავებული, 5 თეთრი და 15 შავი ბურთულაა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებული ბურთულა თეთრი ფერისა იქნება?

2.2. ყუთში 1-დან 20-მდე გადანომრილი ერთნაირი ბურთულებია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ ყუთიდან ალალბედზე ამოღებული ბურთულის ნომერი გაიყოფა 5-ზე?

2.3. ალალბედზე ასახელებენ ნატურალურ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება 24-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს რიცხვი წარმოადგენს 24-ის გამყოფს?

2.4. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე დასახელებული ორნიშნა რიცხვი მარტივი იქნება?

2.5. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე დასახელებული ორნიშნა რიცხვი 5-ზე გაიყოფა?

2.6. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე დასახელებული ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამი 12 იქნება?

2.7. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთი კამათელის გაგორებისას ოთხზე მეტი რიცხვი მოვა?

2.8. სიტყვიდან „ალბათობა“ ალალბედზე ვირჩევთ ერთ ასოს, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ: ა) ის ასო „ქ“ იქნება? ბ) ეს ასო ხმოვანი იქნება?

2.9. მოცემულია 4 მონაკვეთი, რომელთა სიგრძეებია 2, 5, 6, 10 ერთეული. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათგან ალალბედზე აღებული 3 მონაკვეთისაგან შესაძლებელია სამკუთხედის აგება?

2.10. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას: ა) მოსულ ქულათა ჯამი იქნება 8, სხვაობა 4; ბ) მოსულ ქულათა ჯამი იქნება 8, თუ ცნობილია, რომ მათი სხვაობაა 4?

2.11. ლითონის ფული ააგდეს ორჯერ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთხელ მაინც მოვა ღერბი?

2.12. ყუთში აწყვია 15 დეტალი, მათგან 10 შეღებილია. ამწყობი ალალბედზე იღებს 3 დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სამივე აღმოჩნდება შეღებილი.

2.13. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამი კამათლის ერთდროულად გაგორებისას ერთ მათგანზე მოვა ექვსიანი, ხოლო ორ დანარჩენზე 6-ისაგან განსხვავებული რიცხვები.

2.14. ყუთში აწყვია 100 დეტალი, მათგან 10 არასტანდარტულია. ალალბედზე იღებენ 4 დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) არც ერთი მათგანი არ აღმოჩნდება არასტანდარტული, ბ) ყველა არასტანდარტულია.

2.15. 12 სტუდენტს შორის 8 ფრიადოსანია. ამ ჯგუფიდან ალალბედზე აარჩიეს 9 სტუდენტი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 5 მათგანი იქნება ფრიადოსანი.

2.16. ყუთში აწყვია 5 ერთნაირი დეტალი, რომელთაგან 3 შეღებილია. ალალბედზე იღებენ 2 დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ერთი მათგანი შეღებილი იქნება; ბ) ორივე შეღებილი იქნება; გ) ერთი მაინც იქნება შეღებილი.

2.17. ყუთში მოთავსებულია 3 თეთრი და 7 შავი ბურთულა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებული ორი ბურთულა ორივე შავი იქნება?

2.18. მუყაოს ნაჭრებზე დაწერილია 5 ასო: ა, ბ, გ, დ, ი. ალალბედზე ვირჩევთ თითო ასოს და ვალაგებთ მიმდევრობით ერთიმეორის მიყოლებით. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მიიღება სიტყვა „აბი“?

2.19. ლატარია შედგება n ბილეთისაგან, რომელთაგან m მომგებიანია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ k ნაყიდი ბილეთიდან ერთი მაინც მოიგებს?

2.20. ცნობილია, რომ მიღებულ 50 ხელსაწყოში 5 დეფექტიანია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული 6 ხელსაწყოდან 2 აღმოჩნდება დეფექტიანი?

2.21. k რაოდენობის სტუმარი ალალბედზე ნაწილდება სასტუმროს n რაოდენობის ნომერში. ყოველ ნომერში შეიძლება მოთავსდეს 1, 2, ..., k რაოდენობის სტუმარი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პირველ ნომერში მოთავსდება k_1 რაოდენობის სტუმარი, მეორეში k_2 — რაოდენობის და ა. შ. n-ურ ნომერში k_n სტუმარი $(k_1+k_2+\cdots+k_n=k)$?

2.22. შვიდსართულიანი სახლის ლიფტში, პირველ სართულზე, შევიდა სამი პიროვნება. თითოეულ მათგანს ერთნაირი ალბათობით შეუძლია გამოსვლა, მეორედან დაწყებულ ნებისმიერ სართულზე. იპოვეთ შემდეგ ხდომილობათა ალბათობები:

A={სამივე პიროვნება მეოთხე სართულზე გამოვა};

B={სამივე პიროვნება ერთსა და იმავე სართულზე გამოვა};

C={სამივე პიროვნება სხვადასხვა სართულზე გამოვა}.

2.23. საამქროში მიიღეს ავტომატის მიერ დამზადებული 3540 დეტალი. მათ შორის რამდენიმე დეტალი იქნება სტანდარტული, თუ არასტანდარტულ დეტალთა ფართობითი სიხშირე 0,1-ის ტოლია?

2.24. 1978 წლის სექტემბრის თვეში ქ. თბილისში 3 დღე იყო წვიმიანი, 2 დღე მშრალი, მაგრამ ღრუბლიანი, დანარჩენი კი მზიანი. იპოვეთ მზიან დღეთა ფარდობითი სიხშირე.

2.25. აგვისტოს თვეში ქ. თბილისში მზიან დღეთა ფარდობითი სიხშირე დაახლოებით 0,9-ის ტოლია. რამდენი მზიანი დღე იქნება აგვისტოში?

2.26. ხარატის მიერ დამზადებული სტანდარტულ დეტალთა ფარდობითი სიხშირე მდგრადია და ყოველთვის 0,9-ის ტოლია. რამდენი დეტალი დაამზადა ხარატმა ცვლის განმავლობაში, თუ არასტანდარტულ დეტალთა რაოდენობა 50-ის ტოლი აღმოჩნდა?

2.27. სროლის ჩატარების შემდეგ მიზანში მოხვედრის ფარდობითი სიხშირე 0,6-ის ტოლი აღმოჩნდა. რამდენ გასროლას ჰქონდა ადგილი, თუ ცნობილია, რომ მიზანს 12-ჯერ აცდა?

2.28. 20 სმ სიგრძის მონაკვეთზე მოთავსებულია 7 სმ სიგრძის მეორე მონაკვეთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დიდ მონაკვეთზე ალალბედზე დასმული წერტილი მცირე მონაკვეთზეც მოხვდება.

2.29. Ox ღერძის 50 სმ სიგრძის AB მონაკვეთზე ალალბედზე დასმულია წერტილი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ AC და CB მონაკვეთებს შორის უმცირესი სიგრძე არის 1/5-ზე მეტი. იგულისხმება, რომ წერტილის მონაკვეთზე მოხვედრის ალბათობა მონაკვეთის სიგრძის პროპორციულია და არ არის დამოკიდებული ამ მონაკვეთის ადგილზე Ox ღერძზე.

2.30. R-რადიუსიან წრეში მოთავსებულია r-რადიუსიანი მცირე წრე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დიდ წრეში ალალბედზე დასმული წერტილი მცირე წრეშიც მოხვდება.

2.31. 1 მ სიგანისა და 2 მ სიგრძის მაგიდაზე მოთავსებულია 10 სმ სიგრძისა და 20 სმ სიგრძის ფურცელი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მაგიდაზე ალალბედზე დასმული წერტილი ფურცელზე არ მოხვდება.

2.32. l სიგრძის AB მონაკვეთზე ალალბედზე აღებულია ორი წერტილი C და D. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მიღებული სამი მონაკვეთისაგან სამკუთხედი აიგება?

2.33. კვადრატში ჩახაზულია წრე. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ კვადრატში შემთხვევით დასმული წერტილი მოთავსდება წრეშიც, თუ კვადრატის გვერდის სიგრძე a-ს ტოლია.

2.34. R-რადიუსიან წრეში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით დასმული წერტილი მოხვდება სამკუთხედშიც.

2.35. ქარიშხალმა დააზიანა სატელეფონო ხაზი 160-ე და 290-ე კილომეტრებს შორის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დაზიანება მოხდა ხაზის მე-200-ედან მე-240-ე კმ-ს შორის?

2.36. კვადრატში, რომლის წვეროებია (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1;1) ალალბედზე ვარდება M წერტილი. დავუშვათ, რომ M წერტილის კოორდინატებია (p, q) და ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ $x^2+px+q=0$ განტოლების ფესვები ნამდვილი რიცხვები იქნება.

2.37. ორი მოჭადრაკე შეთანხმდა შეხვედრაზე საჭადრაკო კლუბში შემდეგი პირობით: უნდა გამოცხადებულიყვნენ კლუბში საღამოს 18 საათიდან 19 საათამდე და პირველად მოსული მეორეს დალოდებოდა მხოლოდ 10 წუთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის პარტია გაიმართება, თუ ცნობილია, რომ თითოეულ მოჭადრაკეს შეუძლია მოვიდეს ნებისმიერ დროს აღნიშნული ერთი საათის განმავლობაში.

2.38. R-რადიუსიანი წრის ცენტრიდან d მანძილზე $(d>R)$ აღებულია A წერტილი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) A წერტი-

ლიდან ალალბედზე გავლებული წრფე წრეს გადაჰკვეთს. ბ) A წერტილიდან ალალბედზე გავლებული სხივი წრეს გადაჰკვეთს.

2.39. სიბრტყეზე გავლებულია ერთმანეთისაგან $2a$-ს ტოლი მანძილით დაშორებული პარალელური წრფეები. ამ სიბრტყეზე ალალბედზე აგდებენ ამოზნექილ მრავალკუთხედს, რომლის დიამეტრი $2a$-ზე ნაკლებია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მრავალკუთხედი გადაკვეთავს რომელიმე პარალელურ წრფეს, თუ მრავალკუთხედის პერიმეტრი L-ის ტოლია?

2.40. R-რადიუსიან წრეზე ალალბედზე არჩეულია A, B და C წერტილები. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედი მახვილკუთხაა?

2.41. ერთი დღე-ღამის განმავლობაში ორი თბომავალი უნდა მიადგეს ერთსა და იმავე ნავსადგურს, რომელსაც მხოლოდ ერთი მისადგომი აქვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთ თბომავალს მოუწევს მეორეზე დალოდება, თუ მათი მოსვლა დროის ნებისმიერ მონაკვეთში თანაბარმოსალოდნელია, ხოლო დგომის დრო შესაბამისად არის ერთი და ორი საათი?

§ 3. პირობითი ალბათობა. ხდომილობათა დამოუკიდებლობა. ჯამისა და ნამრავლის ალბათობა

3.1. იპოვეთ ერთი კამათლის გაგორებისას 2-იანის მოსვლის ალბათობა, თუ ცნობილია, რომ ლუწი რიცხვი მოვიდა.

3.2. ყუთში 20 თეთრი და 15 შავი ბურთულაა. რიგრიგობით იღებენ თითო ბურთულას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მეორე ბურთულა თეთრი იქნება, თუ ცნობილია, რომ პირველი იყო შავი?

3.3. ყუთში 19 თეთრი და 5 შავი ბურთულაა. ერთიმეორის მიყოლებით ალალბედზე ამოიღეს ორი ბურთულა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა თეთრი იქნება?

3.4. კარგად არეული 36-კარტიანი კომპლექტიდან ალალბედზე ამოიღეს ორი კარტი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე კარტი ტუზი იქნება?

3.5. ამწყობმა საამქრომ მიიღო 100 დეტალი, რომელთაგან ორი არასტანდარტულია, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული ორი დეტალიდან ორივე არასტანდარტული იქნება?

3.6. 6 სახელმძღვანელოს შორის სამი ყდიანია, ალალბედზე იღებენ ორ წიგნს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე წიგნი ყდიანი იქნება?

3.7. ქ. თბილისში ივლისის თვეში წვიმიან დღეთა საშუალო რაოდენობა ორის ტოლია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 1995 წლის 15 და 16 ივლისს წვიმიანი ამინდი იქნება, თუ ცნობილია, რომ 15 ივლისამდე წვიმა არაა მოსალოდნელი?

3.8. 25-კაციან ჯგუფში 7 ოთხოსანი და 3 ხუთოსანი სტუდენტია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე გამოძახებული სამი სტუდენტიდან: ა) სამივე ოთხოსანი იქნება; ბ) სამივე ხუთოსანი იქნება; გ) არც ერთი არ იქნება ოთხოსანი ან ხუთოსანი?

3.9. ყუთში 6 თეთრი და 4 წითელი ბურთულაა, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებული ოთხი ბურთულიდან: ა) ოთხივე წითელი იქნება; ბ) პირველი ორი წითელი იქნება, დანარჩენი ორი კი თეთრი?

3.10. კონვერტში მოთავსებულია მუყაოს ნაჭრებზე დაწერილი ყველა ციფრი, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებული პირველი სამი ციფრით დაიწერება 123?

3.11. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ანბანიდან ალალბედზე მიმდევრობით ამორჩეული სამი ასოთი დაიწერება „გია“?

3.12. ალბათობა იმისა, რომ ხარატი დაამზადებს სტანდარტულ დეტალს, უდრის 0,8-ს, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ზეინკალი ააწყობს სტანდარტულ ხელსაწყოს, უდრის 0,9-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ხარატისა და ზეინკლის ერთად მუშაობით დამზადებული ხელსაწყო სტანდარტული იქნება?

3.13. ერთ ყუთში 6 თეთრი და 4 შავი ბურთულაა, მეორეში კი 7 თეთრი და 3 შავი. თითოეული ყუთიდან იღებენ თითო ბურთულას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა თეთრი იქნება?

3.14. აბიტურიენტმა პროგრამით გათვალისწინებული 60 საკითხიდან შეისწავლა 50. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ აბიტურიენტი ხუთიანს მიიღებს, თუ ცნობილია, რომ მას მხოლოდ 3 საკითხს ეკითხებიან?

3.15. ჩათვლა ტარდება შემდეგი წესით: მიღებული საკითხის არცოდნის შემთხვევაში სტუდენტს დამატებით აძლევენ კიდევ ერთ საკითხს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი ჩათვლას ვერ მიიღებს, თუ ჩათვლისათვის განკუთვნილი 10 საკითხიდან მან იცის მხოლოდ 7 საკითხი?

3.16. R-რადიუსიან წრეში ჩახაზულია კვადრატი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წრეში ალალბედზე აღებული ორი წერტილიდან ორივე კვადრატში მოხვდება?

3.17. აგორებენ ორ კამათელს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთზე მოვა ლუწი რიცხვი, ხოლო მეორეზე ხუთიანი?

3.18. 52-კვადრატიანი ორი კომპლექტიდან ალალბედზე იღებენ თითო კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე კარტი ჯვრის იქნება?

3.19. ერთ ყუთში 10 დეტალია, რომელთაგან 3 სტანდარტულია, მეორეში იმავე დასახელების 15 დეტალიდან 6-ია სტანდარტული. თითოეული ყუთიდან ალალბედზე იღებენ თითო დეტალს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე დეტალი სტანდარტული იქნება?

3.20. ვთქვათ ალბათობა იმისა, რომ ავტომობილი „ვოლგა“ შეკეთების გარეშე გაივლის 100000 კმ-ს ყოველთვის მუდმივია და უდრის 0,8-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამი მიღებული ავტომობილიდან სამივე შეკეთების გარეშე გაივლის 100 000 კმ-ს?

3.21. ხარატი საშუალოდ 90% სტანდარტულ დეტალს ამზადებს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ ხარატის მიერ დამზადებული სამი დეტალიდან სამივე სტანდარტული იქნება?

3.22. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი სამიზნეს მოახვედრებს 0,8-ის ტოლია, მეორე მსროლელისათვის იგივე ალბათობა უდრის 0,9-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე მსროლელის მიერ თითოჯერ გასროლის შემდეგ სამიზნე დაზიანდება, თუ ცნობილია, რომ სამიზნის დასაზიანებლად მიზანში ერთხელ მოხვედრაა საკმარისი?

3.23. ამწყობმა საამქრომ მიიღო ორი პარტია ერთიდაიგივე დეტალები: 200 დეტალი, რომელთაგან 4 არასტანდარტულია და 100 დეტალი, რომელთაგან 5 არასტანდარტულია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თითოეული პარტიიდან ალალბედზე აღებული თითო დეტალიდან ერთი მაინც მტანდარტული იქნება?

3.24. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ოთხი კამათელის ერთდროულად გაგორებისას ოთხივეზე ერთი და იგივე რიცხვი მოვა?

3.25. ერთ ყუთში 5 შავი და 10 თეთრი ბურთულაა. მეორეში კი 10 შავი და 5 თეთრი. თითოეული ყუთიდან ალალბედზე ვიღებთ თითო ბურთულას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ორი ბურთულიდან, ერთი მაინც, თეთრი იქნება?

3.26. რამდენჯერ უნდა გავაგოროთ 1 ცალი კამათელი, რომ არანაკლებ 0,9-ის ტოლი ალბათობით იყოს მოსალოდნელი ექვსიანის მოსვლა?

3.27. ერთი მსროლელისათვის მიზანში მოხვედრების ალბათობაა p, მეორისათვის q. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთდროულად გასროლისას ერთი მოახვედრებს მიზანში, მეორე კი ააცდენს?

3.28. ხდება $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ელემენტთა შემთხვევითი გადანაცვლება (ყველა ის გადანაცვლება თანაბარმოსალოდნელია). რას უდრის p_n ალბათობა იმისა, რომ ერთი მაინც ელემენტი თავის ადგილზე დარჩება? იპოვეთ $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

3.29. დაამტკიცეთ, რომ თუ A და B დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ დამოუკიდებელი იქნება $\overline{A}$ და B, A და $\overline{B}$, $\overline{A}$ და $\overline{B}$.

3.30. A და B_1 დამოუკიდებელი ხდომილობებია. დამოუკიდებელია აგრეთვე A და B_2. დავამტკიცოთ A და B_1+B_2 ხდომილობათა დამოუკიდებლობა, თუ ცნობილია რომ $B_1 \cdot B_2=\Phi$.

3.31. ერთდროულად ავაგდეთ ლითონის ფული და კამათელი. დამოკიდებულია თუ დამოუკიდებელი ხდომილობები:

$A=\{$მოვიდა „ფასი“$\}$, $B=\{$მოვიდა ლუწი რიცხვი$\}$?

3.32. ლითონის ფული მიმდევრობით ააგდეს სამჯერ. დაადგინეთ დამოკიდებულია თუ დამოუკიდებელი ხდომილობები:

$A=\{$პირველად აგდებისას მოვიდა ღერბი$\}$;
$B=\{$ფასის ერთხელ მაინც მოსვლა$\}$.

3.33. დაამტკიცეთ, რომ თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია ნულისაგან განსხვავებული ალბათობებით, მაშინ ისინი თავსებადი ხდომილობებია.

§ 4. სრული ალბათობის ფორმულა. ბაიესის ფორმულა

4.1. ერთ ყუთში მოთავსებულია პირველი ხარატის მიერ დამზადებული 100 დეტალი, მეორე ხარატის მიერ დამზადებული 80 დეტალი და მესამე ხარატის მიერ დამზადებული 120 დეტალი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ალალბედზე ამოღებული დეტალი სტანდარტული იქნება, თუ პირველი ხარატი საშუალოდ 95% სტანდარტულ დეტალს ამზადებს, მეორე ხარატი — 98%-ს, მესამე კი 90%-ს.

4.2. ორ ყუთში ერთნაირი დასახელების ოც-ოცი დეტალია, თითოეულში 18 სტანდარტული და 2 არასტანდარტული. პირველი

ყუთიდან ალალბედზე ამოიღეს ერთი დეტალი და ჩადეს მეორე ყუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან ამოღებული დეტალი სტანდარტული იქნება.

4.3. საწყობში მოიტანეს ერთი დასახელების 1000 დეტალი, მათ შორის 300 დამზადებული № 1 საამქროში, 200 — № 2 საამქროში, ხოლო 500 — № 3 საამქროში. ცნობილია, რომ № 1 საამქროში მზადდება საშუალოდ 95% სტანდარტული დეტალი, მეორეში — 90%, მესამეში კი — 85%. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული დეტალი სტანდარტული იქნება?

4.4. ამწყობი საამქროსათვის სამაგრს ამზადებს სამი ავტომატი. პირველი იძლევა საჭირო სამაგრების 25%-ს, მეორე — 35%-ს, მესამე კი — 40%-ს. პირველი ავტომატი საშუალოდ იძლევა 0,1% წუნს, მეორე — 0,3%-ს, მესამე კი — 0,2%-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამწყობი საამქრო მიიღებს წუნდებულ სამაგრს და ალბათობა იმისა, რომ თუ სამაგრი წუნდებული აღმოჩნდა, ის პირველი საამქროს მიერ იქნება დამზადებული.

4.5. პარტიიდან, რომელშიც იყო შესაბამისად 50, 100 და 150 სამი სხვადასხვა წარმოების მიერ დამზადებული რადიონათურა, ალალბედზე ამოიღეს ერთი ცალი და დაამონტაჟეს ტელევიზორში, ალბათობა იმისა, რომ პირველი წარმოების მიერ გამოშვებული რადიონათურა საჭირო რაოდენობის საათს იმუშავებს, ტოლია 0,9-ის, მეორე წარმოებისათვის ეს ალბათობა 0,8-ის ტოლია, ხოლო მესამესათვის — 0,7-ის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დამონტაჟებული ნათურა საჭირო რაოდენობის საათს იმუშავებს?

4.5. ყუთში, რომელშიც ორი დეტალი იყო, ჩაუმატეს იმავე დასახელების ერთი სტანდარტული დეტალი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ ალალბედზე ამოღებული დეტალი სტანდარტული იქნება, თუ ყუთში თავდაპირველად არსებულ დეტალებზე სტანდარტულობის შესახებ ყველა ჰიპოთეზა თანაბარმოსალოდნელია.

4.7. სამ ყუთში ერთნაირი დასახელების ოც-ოცი დეტალია, მათ შორის 15 სტანდარტული და 5 არასტანდარტული. პირველი ყუთიდან ალალბედზე ამოიღეს ერთი დეტალი და ჩადეს მეორე ყუთში. ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან ალალბედზე ამოიღეს ერთი დეტალი და ჩადეს მესამე ყუთში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მესამე ყუთიდან ალალბედზე ამოღებული დეტალი სტანდარტული იქნება?

4.8. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მიზანს დააზიანებს, არის 0,6, ხოლო მეორისათვის — 0,7. ორივე მსროლელმა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გაისროლა. რის შედეგადაც მიზანი დაზიანდა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მიზანი პირველმა მსროლელმა დააზიანა?

4.9. 8 შაშხანიდან, რომელიც სასროლად მოიტანეს, 2-ს ოპტიკური სამიზნე აქვს. ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება, ოპტიკურ სამიზნიანი შაშხანისათვის არის 0,9, ხოლო ჩვეულებრივი შაშხანისათვის — 0,7. სამიზნესთან მყოფმა მეთვალყურემ პირველი გასროლისთანავე აღრიცხა სამიზნის დაზიანება. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ გასროლა მოხდა ოპტიკურსამიზნიანი შაშხანიდან?

4.10. გზაზე, სადაც ბენზინის გასამართი სადგურია, გამოვლილ სატვირთო ავტომობილთა რიცხვის შეფარდება მსუბუქ ავტომობილთა რიცხვთან 2/3-ის ტოლია. ალბათობა იმისა, რომ გამვლელი ავტომობილი ბენზინით გაიმართება, სატვირთო ავტომობილისათვის 0,1-ის ტოლია, ხოლო მსუბუქისათვის 0,2-ის. გასამართ სადგურთან მივიდა ავტომანქანა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ავტომანქანა სატვირთოა?

4.11. გვაქვს ოც-ოცი დეტალისაგან შედგენილი სამი პარტია. სტანდარტულ დეტალთა რაოდენობა შესაბამისად პარტიებში არის 20, 15, 10. ალალბედზე არჩეული ყუთიდან ალალბედზე ამოიღეს დეტალი, რომელიც სტანდარტული აღმოჩნდა. ეს დეტალი დააბრუნეს პარტიაში და ამოიღეს იმავე წესით მეორე დეტალი, რომელიც ასევე სტანდარტული გამოდგა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დეტალები ამოღებული იყო მეორე პარტიიდან.

4.12. სამი ქვემეხისაგან შედგენილმა ბატარეამ ერთდროულად გაისროლა, რის შედეგადაც მიზანში ორი ყუმბარა მოხვდა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოხვდა პირველი ქვემეხის გასროლილი ყუმბარა, თუ ამ ქვემეხებისათვის მიზანში მოხვედრების ალბათობა შესაბამისად 0,2-ის, 0,4-ისა და 0,3-ის ტოლია.

4.13. სამმა ხარატმა დაამზადა თითო ერთნაირი დეტალი; გასინჯვისას ორი დეტალი სტანდარტული აღმოჩნდა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ არასტანდარტული დეტალი მეორე ხარატის მიერაა დამზადებული, თუ ამ ხარატების მიერ სტანდარტული დეტალის დამზადების ალბათობები შესაბამისად 0,7-ის, 0,9-ისა და 0,8-ის ტოლია.

4.14. ერთ ყუთში მოთავსებულია 10 თეთრი და 5 შავი მხოლოდ ფერით განსხვავებული ბურთი, მეორე ყუთში კი 20 თეთრი და 5 შავი. თითოეული ყუთიდან ალალბედზე იღებენ თითო ბურთს

და შემდეგ კი ამოღებული ორიდან ალალბედზე არჩევენ ერთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ: ა) ამოღებული ბურთი შავი ფერისაა; ბ) ეს შავი ფერის ბურთი ამოღებულია პირველი ყუთიდან?

4.15. ამწყობმა საამქრომ მიიღო სამი ერთნაირი დეტალებით სავსე ერთნაირი ყუთი. ტექნიკური კონტროლის განყოფილებისათვის ცნობილია, რომ პირველ ყუთში არსებული 200 დეტალიდან 90% არის სტანდარტული, მეორე ყუთში 220 დეტალიდან 80% არის სტანდარტული, მესამე ყუთში კი 180 დეტალიდან 95% არის სტანდარტული. ალალბედზე ამორჩეული ყუთიდან ალალბედზე ამოიღეს ერთი დეტალი. იგი არასტანდარტული აღმოჩნდა, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალი მეორე ყუთიდანაა.

4.16. ახალი პროდუქციის ათვისებაში სამმა ზეინკალმა ერთნაირი მონაწილეობა მიიღო. ამ პროდუქციის მაღალი ხარისხის მიღწევისათვის გამოიყო პრემია 560 მანეთი. გაანაწილეთ ეს პრემია ზეინკლებს შორის, თუ ალბათობა იმისა, რომ ეს ზეინკლები მაღალი ხარისხის პროდუქციას დაამზადებენ, შესაბამისად 0,9-ის, 0,94-ისა და 0,96-ის ტოლია.

4.17. სამი ხარატი ამზადებდა ერთი და იგივე დასახელების და ერთი და იგივე რაოდენობის დეტალებს. ამწყობ საამქროში გამოირკვა ამ დეტალთა დეფექტიანობა, რის გამოც ხარატებმა უნდა გადაიხადონ 105 მანეთი ჯარიმა. გაანაწილეთ ჯარიმა ხარატებს შორის, თუ ცნობილია, რომ ამ ხარატების მიერ დეფექტიანი დეტალების დამზადებას ალბათობები შესაბამისად 0,1-ის, 0,02-ისა და 0,3-ის ტოლია.

4.18. მოცურავეთა შეჯიბრების ფინალში გავიდა სამი გუნდი, ორი გუნდი პოლიტექნიკური ინსტიტუტიდან და ერთი უნივერსიტეტიდან. უნივერსიტეტის გუნდი შედგება 4 ოსტატისა და 4 პირველთანრიგოსანისაგან. პოლიტექნიკური ინსტიტუტისა კი 5 ოსტატისა და 3 პირველთანრიგოსანისაგან. მსაჯები კენჭისყრით ირჩევენ გუნდს და შემდეგ გუნდიდან ერთ-ერთ მონაწილეს. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა რომ არჩეული იქნება სპორტის ოსტატი? ბ) ცნობილია, რომ არჩეული მონაწილე სპორტის ოსტატია, რას უდრის ალბათობა იმისა რომ ის პოლიტექნიკური ინსტიტუტიდანაა?

4.19. ერთ ყუთში 10 ბურთულაა, რომელთაგან 8 თეთრია, მეორეში 20, რომელთაგან 4-ია თეთრი. თითოეული ყუთიდან ალალბედზე ამოიღეს თითო ბურთულა, შემდეგ კი ამ ორიდან ალალბედზე აირჩიეს ერთი. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ

ბურთულა თეთრი აღმოჩნდება? ბ) ცნობილია რომ ბურთულა არაა თეთრი, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბურთულა პირველი ყუთიდანაა?

4.20. პირველ კურსელთა 60% ვაჟია. ვაჟების 80%-ს და გოგონების 75%-ს აქვს ფეხბურთის აბონემენტი. დამლაგებელმა აუდიტორიაში იპოვა პირველკლასელის მიერ დაკარგული აბონემენტი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს აბონემენტი ვაჟისაა?

4.21. აგდებენ ლითონის ფულს. თუ ზემოდან აღმოჩნდა ღერბი, ბურთულას იღებენ პირველი ყუთიდან, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი მეორედან. პირველ ყუთში 3 წითელი და 1 თეთრი ბურთულაა, მეორეში კი 1 წითელი და 3 თეთრი. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულა წითელი ფერისაა? ბ) თუ წითელი ბურთულა იქნება ამოღებული, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ის პირველი ურნიდან ამოიღეს?

4.22. ჯგუფში 20 სტუდენტია, რომელთა შორის 4 ხუთოსანია, 10 ოთხოსანი და 6 სამოსანია. ალბათობა იმისა, რომ დაფასთან გამოძახებული სტუდენტი ამოცანას ამოხსნის ხუთოსნისთვის 0,9-ის ტოლია, ოთხოსანისთვის 0,7-ის, სამოსნისთვის კი 0,5-ის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) დაფასთან ალალბედზე გამოძახებული სტუდენტი მოცემულ ამოცანას ამოხსნის; ბ) დაფასთან ალალბედზე გამოძახებული ორივე სტუდენტი ამოცანას ამოხსნის.

4.23. ერთ ყუთში 2 თეთრი და 3 წითელი ბურთულაა, მეორეში 2 თეთრი და 2 წითელი, მესამეში კი 3 თეთრი და ერთი წითელი. პირველი ყუთიდან ალალბედზე ამოღებული ბურთულა გადადეს მეორე ყუთში, ამის შემდეგ მეორედან ასევე ალალბედზე ამოღებული ბურთულა გადადეს მეორეში, დაბოლოს მესამე ყუთიდან გადადეს პირველში. ა) ბურთულა როგორი შემადგენლობაა ყველაზე მეტად მოსალოდნელი პირველ ყუთში? ბ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთებში ბურთულათა შემადგენლობა (ფერები) არ შეცვლილა?

4.24. ხუთი მსროლელიდან ორისთვის მიზანში მოხვედრის ალბათობა 0,6-ის ტოლია, 3-ისთვის კი 0,4-ის. ა) რა უფრო მოსალოდნელია ალალბედზე არჩეული მსროლელისთვის მიზანში მოხვედრა თუ არა? ბ) ალალბედზე არჩეულმა მსროლელმა მიზანში მოახვედრა. რა უფრო მოსალოდნელია: ეს მსროლელი არჩეულია პირველ ორისაგან თუ ბოლო სამეულისაგან?

4.25. ცნობილია, რომ ქარხნის მიერ გამოშვებული პროდუქცია 96% შეესაბამება სტანდარტებს. ტექნიკური კონტროლის, ამ ქარხა-

ნაში მიღებული სქემა, ვარგისიანად თვლის 0,98-ის ტოლი ალბათობით სტანდარტულ ნაკეთობას, ხოლო 0,05-ის ტოლი ალბათობით არასტანდარტულ ნაკეთობას. ნაკეთობამ გაიარა მიღებული კონტროლი, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ნაკეთობა სტანდარტულია?

4.26. ერთ ყუთში 4 თეთრი და 3 წითელი ბურთულაა, მეორეში 3 თეთრი და 2 წითელი. პირველი ყუთიდან ალალბედზე იღებენ ორ ბურთულას და ათავსებენ მეორე ყუთში, ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან ასევე ალალბედზე იღებენ ერთ ბურთულას, რომელიც წითელი აღმოჩნდა. პირველად ამოღებული ორი ბურთულის როგორი შემადგენლობაა ყველაზე უფრო მოსალოდნელი?

4.27. გამოცდაზე მოსული 20 სტუდენტიდან 8 მომზადებულია ხუთიანზე, 6 — ოთხიანზე, 4 — სამიანზე და 2 — ორიანზე. საგამოცდო ბილეთებში შეტანილია 40 საკითხი, რომელთაგან ხუთიანზე მომზადებულმა იცის ყველა, ოთხიანზე მომზადებულმა — 35, სამიანზე მომზადებულმა — 25 და ორიანზე მომზადებულმა — 10 საკითხი. ერთ-ერთმა სტუდენტმა მიიღო ხუთიანი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს სტუდენტი მომზადებულია: ა) ოთხიანზე; ბ) ორიანზე,

4.28. 18 მსროლელიდან სამიზნეში 5 ახვედრებს 0,8-ის ტოლი ალბათობით, 7 — 0,7 ალბათობით, 4 — 0,6 ალბათობით, ხოლო 2 კი 0,5-ის ტოლი ალბათობით. ალალბედზე არჩეულმა მსროლელმა მიზანში ვერ მოახვედრა. რომელ ჯგუფიდანაა ყველაზე უფრო მოსალოდნელი ეს მსროლელი?

4.29. ავადმყოფი გრძნობს ძლიერ ტკივილებს გულის არეში, რაც სტატისტიკურად 50%-ის შემთხვევაში შეიძლება გამოიწვიოს K დაავადებამ, 30%-ის შემთხვევაში 4 დაავადებამ, ხოლო 20%-ის შემთხვევაში M დაავადებამ. უბნის ექიმთან მკურნალობის შემთხვევაში K დაავადების განკურნებას ალბათობათა 0,7-ის ტოლია, L-ისა 0,8-ის, ხოლო M-ისა კი 0,9-ის. ავადმყოფი უბნის ექიმმა განკურნა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ავადმყოფს ჰქონდა K დაავადება?

§ 5. დამოუკიდებელ ექსპერიმენტთა მიმდევრობა. ბერნულის სქემა, მუავრ-ლაპლასისა და პუასონის თეორემები

5.1. ოჯახში 5 ბავშვია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 2 ვაჟია, თუ ცნობილია, რომ ვაჟის დაბადების ალბათობა $p=0,51$.

5.2. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 5 ავტომობილიდან ზუსტად 4 იქნება სტანდარტული, თუ ცნობილია, რომ ამ მარკის ავტომობილთა სტანდარტულობის ალბათობა მუდმივია და ტოლია 0,9-ის.

5.3. ერთმანეთს ხვდება ორი ერთნაირი ძალით მოთამაშე მოჭადრაკე. რას უფრო მეტი ალბათობა აქვს, ორი პარტიის მოგებას ოთხიდან თუ სამის ექვსიდან?

5.4. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა, რომლის მოხდენის ალბათობა ყოველ ექსპერიმენტში 0,9-ის ტოლია, ხუთჯერ ჩატარებულ ექსპერიმენტებში მოხდება არანაკლებ ოთხისა.

5.5. ვთქვათ, ალბათობა იმისა, რომ ავტომანქანა „ჟიგული“ სტანდარტული იქნება, ტოლია 0,7-ის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ხუთი მიღებული ავტომანქანის გასინჯვისას არანაკლებ სამისა აღმოჩნდება სტანდარტული?

5.6. მიზანი დაზიანებულად ჩაითვლება, თუ სამიზნეს მოხვდება არანაკლებ ოთხი ჭურვისა, იპოვეთ სამიზნის დაზიანების ალბათობა ხუთი გასროლის შემდეგ, თუ ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა 0,8-ის ტოლია.

5.7. ყუთში 8 ბურთულაა, რომელთაგან 5 თეთრია და 3 წითელი. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ 4 ცდიდან 3-ჯერ იქნა ამოღებული თეთრი ბურთულა, თუ ყოველი ამოღების შემდეგ ბურთულა ისევ ყუთში იდება.

5.8. ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი ამოხსნის მოცემულ ამოცანას, არის 0,8. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ იგი მიიღებს ჩათვლას, თუ ცნობილია, რომ მან ხუთი მოცემული ამოცანიდან უნდა ამოხსნას არანაკლებ ოთხი ამოცანისა.

5.9. ალბათობა იმისა, რომ მექანიკურ საამქროში დამზადებული დეტალები სტანდარტული იქნება, მუდმივია და ტოლია 0,9-ის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ საამქროს მიერ დამზადებული 2500 დეტალიდან ზუსტად 2230 იქნება სტანდარტული?

5.10. ხდომილობის ალბათობა ყველა დამოუკიდებელ ექსპერიმენტში 0,7-ის ტოლია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 150-ჯერ ჩატარებულ ექსპერიმენტში ხდომილობას ზუსტად 120-ჯერ ექნება ადგილი?

5.11. სამიზნეში მოხვედრის ალბათობა ყოველი გასროლისას ტოლია 0,8-ისა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 100 გასროლის შედეგად სამიზნეში ზუსტად 75 ტყვია მოხვდება.

5.12. ხდომილობის ალბათობა ყოველ დამოუკიდებელ ექსპერიმენტში 0,7-ის ტოლია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 25-ჯერ

ჩატარებულ ექსპერიმენტში ხდომილობას უმეტეს შემთხვევაში ექნება ადგილი?

5.13. ვაჟის დაბადების ალბათობაა 0,51. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 100 ახლადშობილი ბავშვიდან 50 ვაჟია?

5.14. ვთქვათ, A ხდომილობის ალბათობა ყველა ურთიერთდამოუკიდებელ ექსპერიმენტში მუდმივია და ტოლია 0,0002-ის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 5000-ჯერ ჩატარებული ურთიერთდამოუკიდებელი ექსპერიმენტის დროს A ხდომილობას ზუსტად 3-ჯერ ექნება ადგილი?

5.15. ღვინის ქარხანას გამოუგზავნეს 5000 ცალი მუხის კასრი. ალბათობა იმისა, რომ ეს კასრები გზაში დაზიანდებოდა 0,0002-ის ტოლია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ქარხანაში მიღებული კარებიდან სამი კარი აღმოჩნდა დაზიანებული?

5.16. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი ადამიანი დაბადებულია პირველ იანვარს, თუ სოფელში ცხოვრობს 500 ადამიანი?

5.17. 1000 ადამიანში 8 ექიმია, გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული 100 ადამიანიდან არც ერთი ექიმი არ იქნება.

5.18. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამორჩეული 500 მოქალაქიდან: ა) 5 დაბადებულია 28 აპრილს, ბ) 3 დაბადებულია 3 ივნისს, გ) არც ერთი არ არის დაბადებული 27 მარტს.

5.19. ქალაქში 1900 მცხოვრებია, გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ წელიწადში არის 4 დღე, რომლებიც არც ერთი მცხოვრების დაბადების დღე არ არის.

5.20. ერთი საათის განმავლობაში სატელეფონო ავტომატური სადგური საშუალოდ იღებს 7200 გამოძახებას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერ დროს აღებული 1 წამის განმავლობაში სადგური მიიღებს ოთხ გამოძახებას?

5.21. ხარატის მიერ სტანდარტული ღერძის დამზადების ალბათობა ყოველთვის მუდმივია და ტოლია 0,8-ის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ ხარატის მიერ დამზადებული 100 ღერძიდან: ა) სტანდარტულ ღერძთა რაოდენობა მეტი იქნება 75-ზე და ნაკლები 90-ზე? ბ) სტანდარტულ ღერძთა რაოდენობა იქნება არანაკლებ 75-ისა?

5.22. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ 200 აგდების შემთხვევაში ლითონის მონეტაზე მოვა გერბი არანაკლებ 95-ჯერ და არაუმეტეს 105-ჯერ.

5.23. ალბათობა იმისა, რომ შეძენილი იქნება ლატარიის წამგებიანი ბილეთი უდრის 0,1-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 600

ნაყიდი ბილეთიდან წამგებიანი ბილეთების რაოდენობა იქნება არანაკლებ 48 და არა უმეტეს 55-ისა?

5.24. კამათლის გაგორება ხდება 12000-ჯერ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ „6“-იანის მოსვლის რიცხვი მოთავსებული იქნება (1900; 2100) შუალედში?

5.25. 9 ყუთში ალალბედზე აწყობენ 10000 ცალ რვეულს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პირველ ყუთში რვეულების რაოდენობა იქნება 11000-დან და 1200-მდე ჩათვლით?

5.26. მსროლელის მიერ მიზანში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლის შემთხვევაში უდრის 0,75-ს იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 100 გასროლიდან მსროლელი მიზანში მოახვედრებს არანაკლებ 70-ჯერ.

5.27. A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ყოველ დამოუკიდებელ ცდაში არის 0,7. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ჩატარებულ 21 ცდაში უმეტესად მოხდება A ხდომილება.

5.28. ალბათობა იმისა, რომ ხარატის მიერ დამზადებული დეტალი არასტანდარტულია, უდრის 0,1-ს. იპოვეთ არასტანდარტულ დეტალთა უალბათესი რიცხვი, თუ ხარატმა 30 დეტალი დაამზადა.

5.29. მექანიკურმა საამქრომ გამოუშვა 10000 დეტალი. ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალები სტანდარტული იქნება 0,77-ის ტოლია. იპოვეთ სტანდარტულ დეტალთა უალბათესი რიცხვი.

5.30. ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი ჩააბარებს გამოცდას, 0,6-ია. იპოვეთ უალბათესი რიცხვი იმ სტუდენტებისა, რომლებიც ჩააბარებენ გამოცდას, თუ ჯგუფში 24 სტუდენტია.

5.31. ხდომილობის ალბათობა ყოველ ცდაში 0,3-ია. რამდენი დამოუკიდებელი ცდა არის საჭირო, რომ ხდომილობის მოსვლის უალბათესი რიცხვი იყოს 60?

5.32. იპოვეთ ხდომილობის მოხდენის ალბათობა, თუ ცნობილია, რომ 39 დამოუკიდებელ ექსპერიმენტში ამ ხდომილობის მოხდენის უალბათესი რიცხვი 25-ის ტოლია.

5.33. ალბათობა იმისა, რომ გარკვეული მარკის ავტომანქანა სტანდარტული იქნება 0,95-ის ტოლია. რამდენი ავტომანქანა უნდა მივაწოდოთ მშენებლობას, თუ საჭიროა, რომ მშენებლობას 125 სტანდარტული ავტომანქანა ემსახურებოდეს?

5.34. რამდენი დეტალი უნდა დამზადდეს სულ, რომ სტანდარტულ დეტალთა უალბათესი რიცხვი მივიღოთ 100, თუ ცნობილია, რომ სტანდარტული დეტალების დამზადების ალბათობა ყოველთვის მუდმივია და ტოლია 0,9-ის?

§ 6. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია და სიმკვრივე

6.1. მიზანში ისვრიან ერთხელ; მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,3-ს. შემთხვევითი X სიდიდე არის მიზანში მოხვედრათა რიცხვი. დაწერეთ X სიდიდის განაწილების კანონი.

6.2. შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს: $x_1=2$; $x_2=5$, $x_3=8$. ცნობილია პირველი ორი შესაძლო მნიშვნელობის ალბათობები. $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}15$. დაწერეთ ამ სიდიდის განაწილების კანონი.

6.3. ლატარიაში გამოშვებულია 1000 ბილეთი. აქედან გათამაშდება ერთი მოგება 1000-მანეთიანი, ოთხი მოგება — თითო 500 მანეთიანი, ხუთი მოგება — თითო 400-მანეთიანი და 10 მოგება — თითო 100-მანეთიანი. იპოვეთ ერთი ბილეთის მოგების განაწილების კანონი.

6.4. მსროლელი მიზანში ისვრის 3-ჯერ; ყოველი გასროლის მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,4-ს. ყოველი მოხვედრისას მსროლელს ეთვლება 5 ქულა. დაწერეთ მიღებული ქულების განაწილების კანონი.

6.5. კამათელს აგორებენ 3-ჯერ. დაწერეთ 6-იანის მოსვლათა განაწილების კანონი.

6.6. ლითონის ფულს აგდებენ 4-ჯერ. დაწერეთ ღერბის მოსვლათა განაწილების კანონი.

6.7. მსროლელი, რომელსაც 3 ვაზნა აქვს, ესვრის მიზანში პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,8-ს. იპოვეთ დახარჯული ვაზნების განაწილების კანონი.

6.8. მსროლელი, რომელსაც 4 ვაზნა აქვს, მიზანში ისვრის პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,6-ს. იპოვეთ დაუხარჯავი ვაზნების განაწილების კანონი.

6.9. ორი მსროლელი ისვრის ერთ მიზანში. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მიზანში მოახვედრებს, არის 0,5, მეორე რომ მოახვედრებს — 0,4. შეადგინეთ მიზანში მოხვედრათა განაწილების კანონი.

6.10. მონადირე ესვრის ნადირს პირველ მოხვედრამდე და 4-ზე მეტ გასროლას ვერ ასწორებს. შეადგინეთ გასროლათა რიცხვის განაწილების კანონი, თუ მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას უდრის 0,7-ს.

6.11. ალბათობა იმისა, რომ ბიბლიოთეკაში სტუდენტისათვის საჭირო წიგნი თავისუფალია, უდრის 0,4-ს. შეადგინეთ იმ ბიბლიოთეკების განაწილების კანონი, რომლებიც უნდა ინახულოს სტუდენტმა, თუ ქალაქში 4 ბიბლიოთეკაა.

6.12. ოჯახში 4 ბავშვია. შეადგინეთ განაწილების კანონი შემთხვევითი X სიდიდისა, რომელიც გამოსახავს ვაჟთა რაოდენობას, თუ ვაჟიშვილებისა და ქალიშვილების დაბადება ტოლალბათია.

6.13. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

$$X\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{matrix}\right. \quad \text{და} \quad Y\left\{\begin{matrix}2 & 4\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{matrix}\right.$$

შეადგინეთ $X+Y$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

6.14. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

$$X\left\{\begin{matrix}4 & 6\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{matrix}\right. \quad \text{და} \quad Y\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0{,}8 & 0{,}2\end{matrix}\right.$$

შეადგინეთ $X-Y$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

6.15. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონი:

$$\left\{\begin{matrix}-2 & 0 & 1 & 3\\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1\end{matrix}\right.$$

შეადგინეთ X^2 და $3X$ შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები.

6.16. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

$$X\left\{\begin{matrix}-1 & 0 & 1\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5\end{matrix}\right. \quad \text{და} \quad Y\left\{\begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4\end{matrix}\right.$$

შეადგინეთ XY შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

6.17. მიზანში ისვრიან ერთხელ. მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,3-ს. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვის განაწილების ფუნქცია.

6.18. მიზანში ისვრიან 4-ჯერ; ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,3. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვის განაწილების ფუნქცია და განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოხვედრათა რიცხვი მოთავსებული იქნება $[1;\,4]$ შუალედში.

6.19. ურნაში 7 ბურთულაა, რომელთაგანაც 4 თეთრია, დანარჩენი შავი. შემთხვევითად აირჩევა 3 ბურთულა. X წარმოადგენს არჩეულ 3 ბურთულაში თეთრების რაოდენობას. ვიპოვოთ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი და ალბათობა $P\,[X\geqslant 2]$.

6.20. ქარხანამ ბაზაზე გააგზავნა 500 მაღალი ხარისხის ნაკეთობა. გზაში ნაკეთობის დაზიანების ალბათობა უდრის 0,002-ს. ვიპოვოთ, გზაში დაზიანებული ნაკეთობის X რაოდენობის განაწილების კანონი.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: რადგან p მცირეა და n დიდი რიცხვია, გამოიყენეთ პუასონის ფორმულა.

6.21. ვთქვათ გვაქვს ბერნულის სქემა „წარმატების“ p ალბათობით და „წარუმატებლობის“ $q=1-p$ ალბათობით. X იყოს n ცდაში „წარუმატებლობის“ ალბათობა. ვიპოვოთ X-ის განაწილების კანონი.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ამ ფორმულის მიხედვით შეადგინეთ ცხრილი.

6.22. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე: $F(x)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\pi}\right)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$, ვიპოვოთ ისეთი x_1, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას: $P[X>x_1]=\frac{1}{4}$.

6.23. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ} \quad x\leqslant 0,\\ x^2, & \text{თუ} \quad 0<x\leqslant 1,\\ 1, & \text{თუ} \quad x>1.\end{cases}$$

ვიპოვოთ (0,25; 0,75) ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა.

6.24. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$F(x)=\begin{cases}1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, & \text{თუ} \quad x>x_0,\\ 0 & \text{თუ} \quad x\leqslant x_0.\end{cases}$$

ვიპოვოთ X-ის განაწილების სიმკვრივე.

6.25. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე:

$$F(x)=\begin{cases}1, & \text{თუ} \quad x\geqslant a,\\ A+B\arcsin\frac{x}{a}, & \text{თუ} \quad -a<x\leqslant a,\\ 0 & \text{თუ} \quad x\leqslant -a\end{cases}$$

ა) ვიპოვოთ A და B, რომელთათვისაც $F(x)$ უწყვეტია;

ბ) $P\left[-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2}\right]$;

გ) განაწილების $f(x)$ სიმკვრივე.

6.26. X შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების ფუნქციით:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა} \quad x\leqslant -2,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}, & \text{როცა} \quad -2<x\leqslant 2,\\ 2, & \text{როცა} \quad x>2.\end{cases}$$

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ X შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვებისას იგი მიიღებს რაიმე მნიშვნელობას (—1,1) ინტერვალიდან.

6.27. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია $F(x)=\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{\pi}$, $x\in R$, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ X შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვებისას იგი მიიღებს რაიმე მნიშვნელობას (0,1) ინტერვალიდან.

6.28. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია მოცემულია შემდეგნაირად:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა} \quad x\leqslant -1,\\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & \text{როცა} \quad -1<x\leqslant\frac{1}{3},\\ 1, & \text{როცა} \quad x>\frac{1}{3}.\end{cases}$$

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ X შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვებისას იგი მიიღებს რაიმე მნიშვნელობას (0, 1/3) ინტერვალიდან.

6.29. X შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების ფუნქციით:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა} \quad x\leqslant 2,\\ 0{,}5x, & \text{როცა} \quad 2<x\leqslant 4,\\ 1, & \text{როცა} \quad x>4.\end{cases}$$

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ X მიიღებს მნიშვნელობას: ა) 0,2-ზე ნაკლებს, ბ) 3-ზე ნაკლებს, გ) არანაკლებ 5-ისა.

6.30. X შემთხვევით სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & \text{თუ } 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{4},\\ 8x^2, & \text{თუ } \frac{1}{4}< x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4},\\ 1, & \text{თუ } x>\frac{\sqrt{2}}{4},\end{cases}$$

ვიპოვოთ X-ის განაწილების სიმკვრივე.

6.31. F_1 და F არის შესაბამისად X_1 და X შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონები. თუ $a_1+a_2=1$, ვაჩვენოთ რომ $a_1F_1+aF_2$ წარმოადგენს რაიმე X სიდიდის განაწილების კანონს.

6.32. მოცემულია:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\leqslant 0\\ \sin x, & \text{თუ } 0< x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 1, & \text{თუ } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

არის თუ არა $F(x)$, რაიმე შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი. დადებითი პასუხის შემთხვევაში გამოთვალეთ $P\left[\frac{\pi}{6}\leqslant X<\frac{\pi}{3}\right]$.

6.33. X შემთხვევის სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია შემდეგი სახით (კოშის განაწილება): $F(x)=A+B\operatorname{arctg} x$, $(-\infty<x<\infty)$. ვიპოვოთ: ა) A და B მუდმივები. ბ) განაწილების $f(x)$ სიმკვრივე გ) $[-1,\ 1]$ სეგმენტში მოხვედრის ალბათობა.

6.34. X შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\leqslant a,\\ \frac{1}{b-a}, & \text{თუ } a<x\leqslant b,\\ 0, & \text{თუ } x>b.\end{cases}$$

ვიპოვოთ განაწილების ფუნქცია.

6.35. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & \text{თუ } 0<x\leqslant\pi,\\ 1, & \text{თუ } x>\pi.\end{cases}$$

ვიპოვოთ განაწილების სიმკვრივე.

6.36. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\leqslant 0,\\ x^4, & \text{თუ } 0<x\leqslant 1,\\ 1, & \text{თუ } x>1.\end{cases}$$

ვიპოვოთ განაწილების სიმკვრივე.

6.37. შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების სიმკვრივით:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}\sin x, & \text{თუ } 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \text{თუ } x>\pi.\end{cases}$$

იპოვეთ განაწილების ფუნქცია.

6.38. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე მოცემულია ფორმულით:

$$f(x)=\begin{cases}c\sin 2x, & \text{თუ } x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),\\ 0, & \text{თუ } x\overline{\in}\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

ვიპოვოთ C პარამეტრი.

6.39. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე მოცემულია შემდეგნაირად:

$$f(x)=\begin{cases}c\operatorname{arctg} x, & \text{თუ } x\in(0,1),\\ 0, & \text{თუ } x\overline{\in}(0,1).\end{cases}$$

ვიპოვოთ C პარამეტრი.

6.40. შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების სიმკვრივით:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{თუ } x\leqslant-\dfrac{\pi}{2}, \\ a\cos x, & \text{თუ } -\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{თუ } x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

ვიპოვოთ a კოეფიციენტი.

6.41. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$f(x)=\frac{A}{e^{x}+e^{-x}} \quad (-\infty<x<\infty)$$

(ჰიპერბოლური სეკანსის კანონი).

ვიპოვოთ: ა) A კოეფიციენტი. ბ) ორ დამოკიდებულ ცდაში X მიიღებს 1-ზე ნაკლებ მნიშვნელობებს.

6.42. X შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივეს აქვს სახე: $f(x)=Ax^{2}e^{-\lambda x}$, $(\lambda>0,\ 0\leqslant x<\infty)$. ვიპოვოთ: ა) A კოეფიციენტი. ბ) ავაგოთ განაწილების $F(x)$ ფუნქცია. გ) ვიპოვოთ $(0,1/\lambda)$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა.

6.43. A-ს როგორი მნიშვნელობისათვის არის $f(x)=\dfrac{A}{1+x^{2}}$ ფუნქცია განაწილების სიმკვრივე? ა) ვიპოვოთ განაწილების ფუნქცია. ბ) ვიპოვოთ $P[-1<X<1]$ ალბათობა.

6.44. X შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს გაზომვის ცდომილებას და განაწილებულია ნორმალური კანონით. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ X მიიღებს მნიშვნელობას -3σ და 3σ შორის, სადაც σ — საშუალო კვადრატული გადახრაა (იგულისხმება რომ სისტემატური ცდომილება არა გვაქვს).

6.45. X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად $m=0$, $\sigma=1$ პარამეტრებით. რომელი მეტია $P[-0{,}5\leqslant X\leqslant-0{,}1]$ თუ $P[1\leqslant X\leqslant 2]$?

6.46. დავამტკიცოთ, რომ თუ X განაწილებულია ნორმალური კანონით მაშინ $Y=aX+b$ $(a\neq 0)$ შემთხვევითი სიდიდეც განაწილებულია, ნორმალურად.

§ 7. შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები

7.1. ვიპოვოთ დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, რომლის განაწილების კანონი მოცემულია შემდეგი სახით:

ა)

X	-4	6	10
p	0,2	0,3	0,5

ბ)

X	0,21	0,54	0,61
p	0,1	0,5	0,4

7.2. ვიპოვოთ დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა, თუ მისი განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის სახით:

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

7.3. ვიპოვოთ დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა X შემთხვევითი სიდიდისა, თუ მისი განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის სახით:

ა)

X	4,3	5,1	10,6
p	0,2	0,3	0,5

ბ)

X	131	140	160	180
p	0,05	0,10	0,25	0,60

7.4. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის სახით:

X	1	2	3	4	...	k ...
p	p	qp	q^2p	q^3p		$q^{k-1}p$

ვიპოვოთ $M(X)$ და $D(X)$.

7.5. X შემთხვევითი სიდიდე არის 5 დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობის მოხდენის რიცხვი. ვიპოვოთ მისი დისპერსია, თუ თითოეულ ცდაში A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა უდრის 0,2-ს.

7.6. ვიპოვოთ X შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა, თუ მისი განაწილების კანონი მოცემულია შემდეგი ცხრილის სახით:

X	3	5	7	9
p	0,4	0,3	0,2	0,1

7.7. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემული ცხრილით:

X	x_1	x_2
p	0,6	0,4

ვიპოვოთ X^2-ის განაწილების კანონი და მათემატიკური ლოდინი.

7.8. დავამტკიცოთ, რომ ერთ ცდაში A ხდომილობის მოხდენის რიცხვის მათემატიკური ლოდინი ტოლია A ხდომილობის მოხდენის p ალბათობისა.

7.9. დავამტკიცოთ, რომ დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი მოთავსებულია მის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის.

7.10. ვიპოვოთ Z შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, თუ ცნობილია X და Y შემთხვევით სიდიდეთა მათემატიკური ლოდინები:

ა) $Z = X + 2Y,\quad M(X) = 5,\quad M(Y) = 3.$

ბ) $Z = 3X + 4Y,\ M(X) = 2,\quad M(Y) = 6.$

7.11. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევით სიდიდეს ორი თანაბრად ალბათური x_1 და x_2 მნიშვნელობა გააჩნია. დაამტკიცეთ, რომ:

$$D(X) = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2.$$

7.12. X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელნი არიან. ვიპოვოთ $Z=3X+2Y$ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია, თუ ცნობილია, რომ $D(X)=5,\ D(Y)=6$.

7.13. X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელნი არიან. ვიპოვოთ $Z=2X+3Y$ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია, თუ ცნობილია, რომ $D(X)=4,\ D(Y)=5$.

7.14. X შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებია: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$. ასევე ცნობილია $M(X)=2{,}3,\ M(X^2)=5{,}9$. ვიპოვოთ შესაბამისი ალბათობები.

7.15. მოცემულია შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები $x_1=-1$, $x_2=0,\ x_3=1$, ასევე ცნობილია $M(X)=0{,}1$ და $M(X^2)=0{,}9$. ვიპოვოთ P_1, P_2 და P_3 ალბათობები, რომლებიც x_1 x_2 და x_3 მნიშვნებობებს შეესაბამება.

7.16. დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის სამი სხვადასხვა $p_2=0{,}3$; x_3 ალბათობით p_3; ვიპოვოთ x_3 და p_3, თუ ცნობილია, რომ $M(X)=8$.

7.17. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილება მოცემულია ცხრილის სახით:

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ p, & q \end{pmatrix}, \text{ სადაც } p + q = 1.$$

ააგეთ განაწილების ფუნქცია. გამოთვალეთ $M(X)$ და $D(X)$.

7.18. ვისარგებლოთ მათემატიკური ლოდინის თვისებებით და დავამტკიცოთ: ა) $M(X-Y)=M(X)-M(Y)$; ბ) $X-M(X)$ სხვაობის მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია.

7.19. ვიპოვოთ $\Delta = \begin{vmatrix} X_{11}, & X_{12} \\ X_{21}, & X_{22} \end{vmatrix}$ დეტერმინანტის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, თუ მისი ელემენტები დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, ამასთანავე $M(X_{ij})=0$ და $D(X_{ij})= \sigma^2,\quad i, j = 1, 2.$

7.20. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის სახით:

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,4

ვიპოვოთ პირველი, მეორე და მესამე რიგის ცენტრალური მომენტები.

7.21. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია შემდეგი ცხრილის მიხედვით:

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

ვიპოვოთ პირველი რიგის საწყისი და ცენტრალური მომენტი.

7.22. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის სახით:

X	2	3	5
p	0,1	0,4	0,5

ვიპოვოთ პირველი, მეორე და მესამე რიგის საწყისი მომენტები.

7.23. მოცემულია X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

X	2	4	6	8
p	0,4	0,3	0,2	0,1

ვიპოვოთ: ა) პირველი 4 რიგის საწყისი და ცენტრალური მომენტები; ბ) ასიმეტრია და ექსცესი.

7.24. ვთქვათ $X=X_1+X_2$, სადაც X_1 და X_2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. დავამტკიცოთ რომ: $\mu_3=\mu_3'+\mu_3''$, სადაც μ_3, μ_3', μ_3'' არის X, X_1 და X_2 შემთხვევითი სიდიდეების მესამე რიგის ცენტრალური მომენტი.

7.25. X შემთხვევით სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები ამოწერილია ზრდის მიხედვით $x_1, x_2, \dots, x_k$ $(x_i>0,\ i=1, 2, \dots, k)$.$p_1, p_2, \dots, p_k$ შესაბამისი ალბათობებია. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \cdot \frac{M(X^{n+1})}{M(X^n)}=x_k.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა: მხედველობაში მიიღეთ, რომ $P[X^{n+1}=x_i^{n+1}]=P(X=x_i)=p_i$, $P(X^n=x_i^n)=p_i$ და რომ დალაგებულია ზრდის მიხედვით.

7.26. გამოთვალეთ (m, σ) პარამეტრებით ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

7.27. X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია თანაბრად $[a, b]$ ინტერვალზე. ვიპოვოთ $M(X)$ და $D(X)$ სიდიდეები.

7.28. შემთხვევითი X სიდიდე განაწილებულია ბინომური კანონით: $P[X=m]=C_n^m p^m q^{n-m}$, $m=0, 1, 2, \dots, n$. ვიპოვოთ $M(X)$ და $D(X)$.

7.29. X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონით:

X	0	1	2	3 ...	k
p	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}\dots$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

ვიპოვოთ მათემატიკური ლოდინი $M(X)$ და $D(X)$ დისპერსია.

7.30. X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პასკალის კანონით:

$P[X=k]=\dfrac{r^k}{(1+r)^{k+1}}$ $(r>0$ განაწილების პარამეტრია$)$ $k=0, 1, 2, \dots$ ვიპოვოთ მათემატიკური ლოდინი.

7.31. X შემთხვევითი სიდიდე ემორჩილება ლაპლასის კანონს, თუ:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\, e^{-\frac{|x-m|\sqrt{2}}{\sigma}}$$

(m და σ განაწილების პარამეტრებია). ვიპოვოთ $M(X)$ და $\sigma(X)$

7.32. შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ტოლფერდა სამკუთხედის კანონით $(-a, a)$ ინტერვალში, (სიმპსონის კანონი). თუ მისი განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი წარმოადგენს ტოლფერდა სამკუთხედს, რომლის ფუძეა $(-a, a)$ ინტერვალი. დაწერეთ $f(x)$ სიმკვრივის გამოსახულება, ვიპოვოთ მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია.

7.33. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\leqslant x_0,\\ 1-\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{a}, & \text{თუ } x>x_0,\ a>1,\end{cases}$$

(პარეტოს განაწილება), ვიპოვოთ $M(X)$ და $D(X)$.

7.34. X შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია სიმკვრივით:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & \text{თუ } |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{თუ } |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

ვიპოვოთ $M(X)$ და $D(X)$.

7.35. X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია x^2 კანონით. ვიპოვოთ: ა) მათემატიკური ლოდინი; ბ) დისპერსია.

7.36. X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია რელეის კანონით:

$F(x)=2-e^{-x^2/2\sigma^2}$, $(x\geqslant 0)$. ვიპოვოთ: ა) განაწილების სიმკვრივე; ბ) მოდა და მედიანა.

7.37. X შემთხვევითი სიდიდე ემორჩილება არკსინუსის კანონს, თუ:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } |x|\geqslant a,\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & \text{თუ } |x|<a.\end{cases}$$

ვიპოვოთ $F(x)$, $M(X)$ და $D(X)$.

7.38. იდეალური გაზის მოლეკულათა V სიჩქარე წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის განაწილების სიმკვრივე $f(x)$ მოცემულია ტოლობით:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{თუ } x\leqslant 0,\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\beta^{3/2}x^2 e^{-1/2\,\beta x^2}, & \text{თუ } x>0,\end{cases}$$

(მაქსველის განაწილება) სადაც $\beta>0$. ვიპოვოთ $M(V)$ და $D(V)$, როგორც β-ს ფუნქციები.

7.39. X შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{თუ } x\geqslant 0,\ \lambda>0.\end{cases}$$

ა) ავაგოთ F-ის გრაფიკი; ბ) ვიპოვოთ $M(X)$ და $D(X)$; გ) ვიპოვოთ $P[|X-M(X)|<3\sqrt{DX}]$ ალბათობა.

7.40. R-რადიუსიან წრეში, შემთხვევითად ნასროლი წერტილის ნებისმიერ არეში მოხვედრის ალბათობა პროპორციულია არის ფართობისა. ვიპოვოთ ცენტრამდე მანძილის (როგორც შემთხვევითი სიდიდის) განაწილების კანონი და დისპერსია.

7.41. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x<0,\\ \dfrac{x^m}{m!}e^{-x}, & \text{თუ } x\geqslant 0,\end{cases}$$

(ხარისხოვან-მაჩვენებლიანი განაწილება). ვიპოვოთ $M(X)$ და $D(X)$.

7.42. X არის გემის გვერდითი რხევის ამპლიტუდა რომლის, განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$f(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

ერთნაირი სიხშირით გვხვდებიან თუ არა საშუალოზე დიდი და მცირე ამპლიტუდები?

7.43. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}},\quad x\in[-a, a].$$ ვიპოვოთ $D(X)$.

7.44. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$f(x)=\begin{cases}Ax^{a-1}(1-x)^{b-1}, & \text{თუ } x\in[0, 1],\\ 0, & \text{თუ } x\notin[0, 1],\end{cases}$$

(ბეტა განაწილება). ვიპოვოთ A პარამეტრის მნიშვნელობა, $M(X)$ და $D(X)$.

7.45. X-ის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე:

$$F(x)=\begin{cases}1-x_0^3/x^3, & \text{თუ } x\geqslant x_0,\\ 0, & \text{თუ } x<x_0.\end{cases}$$

ვიპოვოთ $M(X)$ და $D(X)$.

7.46. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\begin{cases} Ax^{\alpha-\frac{x}{\beta}}, & \text{თუ } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{თუ } x<0,\end{cases}$$

(გამა განაწილება). ვიპოვოთ A-ს მნიშვნელობა, $M(X)$ და $D(X)$.

7.47. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2l}, & \text{თუ } |x-a|\leqslant l,\\ 0, & \text{თუ } |x-a|>l.\end{cases}$$

ვიპოვოთ $M(X)$ და $D(X)$.

7.48. X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ბეტა-განაწილებით, ანუ მის სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$f(x,p,q)=\frac{\mu(p+q)}{\mu(p)\,\mu(q)}\,x^{p-1}(1-x)^{q-1},\ (0<x<1,\ p>0,\ q>0).$$

ვიპოვოთ k-ური რიგის საწყისი მომენტი.

7.49. ჩაძირული გემის აღმოჩენის ალბათობა, თუ ძებნის დროს ხანგრძლივობა არის t, მოიცემა ფორმულით:

$$p(t)=1-e^{-\gamma t}\quad(\gamma>0).$$

ვიპოვოთ გემის აღმოსაჩენად საჭირო დროის T-ს საშუალო მნიშვნელობა.

7.50. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{n}{x_0}\,x^{n-1}e^{-\frac{x^n}{x_0}}, & \text{თუ } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{თუ } x<0,\end{cases}$$

(ვეიბულის განაწილება). ვიპოვოთ X შემთხვევითი სიდიდის მოდა.

§ 8. ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეები

8.1. მოცემულია დისკრეტული ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ცხრილი:

	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

ვიპოვოთ X და Y შემადგენელი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები.

8.2. მოცემულია უწყვეტი ტიპის ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F(x,y)=\begin{cases} \sin x\cdot\sin y, & \text{თუ } 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{თუ } x<0 \text{ ან } y<0.\end{cases}$$

ვიპოვოთ (X, Y) შემთხვევითი წერტილის, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{3}$ წრფეებით შემოსაზღვრულ მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობა.

8.3. მოცემულია ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F(x,y)=\begin{cases} 1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & \text{თუ } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ 0, & \text{თუ } x<0, \text{ ან } y=0.\end{cases}$$

ვიპოვოთ მისი განაწილების სიმკვრივე.

8.4. მოცემულია ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & \text{თუ } x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{თუ } x<0,\ y<0.\end{cases}$$

ვიპოვოთ მისი განაწილების სიმკვრივე.

8.5. მოცემულია (X, Y) შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x,y)=\frac{1}{(16+x^2)(25+y^2)}.$$

ვიპოვოთ სისტემის განაწილების ფუნქცია.

8.6. მოცემულია დისკრეტული ტიპის ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე:

Y	$X=3$	$X=6$
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

ვიპოვოთ: ა) X შემთხვევითი სიდიდის პირობითი განაწილების კანონი, როცა $Y=10$. ბ) Y შემთხვევით სიდიდის პირობითი განაწილების კანონი, როცა $X=6$.

8.7. მოცემულია უწყვეტი ტიპის ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x, y)=\frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}$$

ვიპოვოთ: ა) შემადგენელი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების სიმკვრივეები. ბ) შემადგენელი შემთხვევითი სიდიდეების პირობითი განაწილების სიმკვრივეები.

8.8. მოცემულია უწყვეტი ტიპის ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x, y)=e^{-x^2-2xy-4y^2}.$$

ვიპოვოთ: ა) შემადგენელი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების სიმკვრივეები. ბ) შემადგენელი შემთხვევითი სიდიდეების პირობითი განაწილების სიმკვრივეები.

8.9. მოცემულია უწყვეტი ტიპის ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x, y)=\begin{cases} 4xy\, e^{-x^2-y^2}, & \text{როცა } x>0, \quad y>0, \\ 0, & \text{როცა } x<0 \text{ ან } y<0, \end{cases}$$

ვიპოვოთ შემადგენელი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

8.10. მოცემულია ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x, y)=\begin{cases} 36xy\, e^{-(x^2+y^2)}, & \text{როცა } (x>0, \quad y>0), \\ 0, & \text{როცა } (x<0, \text{ ან } y<0). \end{cases}$$

ვიპოვოთ შემადგენელი შემთხვევითი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

8.11. მოცემულია ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x, y)=\begin{cases} 2\cos x\cos y, & \text{როცა } 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{ამ კვადრატის გარეთ} \end{cases}$$

ვიპოვოთ შემადგენელი სიდიდეები მათემატიკური ლოდინი.

8.12. მოცემულია ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x, y)=\begin{cases} \frac{1}{2}(\sin(x+y)), & \text{როცა } 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ამ კვადრატის გარეთ,} \end{cases}$$

ვიპოვოთ შემადგენელი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

8.13. მოცემულია ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x, y)=\begin{cases} \frac{1}{4}\sin x\sin y, & \text{როცა } 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\pi, \\ 0 & \text{ამ კვადრატის გარეთ.} \end{cases}$$

ვიპოვოთ: ა) შემადგენელი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია; ბ) კორელაციური მომენტი.

8.14. მოცემულია ორგანზომილებიანი შემთხვევით სიდიდის დამოუკიდებელი შემადგენელი სიდიდეების განაწილების სიმკვრივეები:

$$f_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{თუ } x<0, \\ 5e^{-5x}, & \text{თუ } x>0; \end{cases} \qquad f_2(y)=\begin{cases} 0, & \text{თუ } y<0, \\ 2e^{-2y}, & \text{თუ } y>0; \end{cases}$$

ვიპოვოთ: ა) სისტემის განაწილების სიმკვრივე; ბ) სისტემის განაწილების ფუნქცია.

§ 9. ჩებიშევის უტოლობა და დიდ რიცხვთა კანონი

9.1. დავამტკიცოთ ჩებიშევის უტოლობა შემდეგი ფორმით:

$$P[\,|X - M(X)| > \varepsilon] < D(X)/\varepsilon^2.$$

9.2. ვაჩვენოთ, რომ თუ რაიმე X შემთხვევითი სიდიდისათვის არსებობს $M[e^{\beta x}]$, სადაც $\beta > 0$, მაშინ $P[X \geqslant \varepsilon] \leqslant e^{-\beta\varepsilon} M[e^{\beta X}]$.

9.3. $\varphi(x)$ მონოტონურად ზრდადი ფუნქციაა. ამასთანავე არსებობს $M[\varphi(x)]$, სადაც X არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდეა. დავამტკიცოთ, რომ:

$$P[X \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{M[\varphi(X)]}{\varphi(\varepsilon)},$$

სადაც $\varepsilon>0$ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

9.4. დაამტკიცეთ ე. წ. ჩებიშევის ლემა: თუ $X>0$ შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის მათემატიკური ლოდინია $M(x)$, მაშინ ყოველი $\alpha>0$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$P[X \geqslant \alpha] \leqslant \frac{M[X]}{\alpha}.$$

9.5. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ $p_k = P[\,|X - M(X)| \leqslant k\sigma]$ $k=1, 2, 3$ ალბათობები, თუ X არის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე.

9.6. X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი $M(X)=1$, ხოლო დისპერსია $D(X)=0{,}04$. ჩებიშევის უტოლობის საშუალებით შევაფასოთ $0{,}5<X<1{,}5$ უტოლობის ალბათობა.

9.7. ვისარგებლოთ ჩებიშევის უტოლობით, შევაფასოთ ალბათობა, რომ $|X - M(X)| < 0{,}2$, თუ $D(X)=0{,}004$.

9.8. მოცემულია: $P[\,|X - M(X)| < \varepsilon] \geqslant 0{,}9$ და $D(X)=0{,}009$. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით ქვემოდან შევაფასოთ ε-ის მნიშვნელობა.

9.9. X შემთხვევით სიდიდეს აქვს შემდეგი მახასიათებლები: $M(X)=1$, $\sigma=0{,}2$. შევაფასოთ ქვემოდან შემდეგ ხდომილობათა ალბათობები:

$$A=\{0{,}5 \leqslant X < 1{,}5\},\ B=\{0{,}75 \leqslant X < 1{,}35\},\ C=\{X<2\}.$$

9.10. ვისარგებლოთ ჩებიშევის უტოლობით და შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე გადაიხრება თავისი მათემატიკური ლოდინისაგან არა ნაკლებ 2-ჯერ საშუალო კვადრატული გადახრისა.

9.11. შევაფასოთ იმის ალბათობა, რომ ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდის, თავის მათემატიკური ლოდინიდან გადახრის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება: ა) 2 საშუალო კვადრატულ გადახრას; ბ) 3 საშუალო კვადრატულ გადახრას; გ) 4 საშუალო კვადრატულ გადახრას.

9.12. დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების კანონით:

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ $|X - M(X)| < 0{,}2$ უტოლობის ალბათობა.

9.13. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების კანონით:

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ $|X - M(X)| < \sqrt{0{,}4}$.

9.14. A ხდომილობის თითოეულ ცდაში მოხდენის ალბათობა უდრის 0,8-ს. ცდათა რიცხვი 100-ის ტოლია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილების მოხდენის რიცხვის, თავისი მათემატიკური ლოდინისაგან გადახრის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება 50-ს, ე. ი. შევაფასოთ $P[\,|X - M(X)| < 50]$ ალბათობა.

9.15. X შემთხვევით სიდიდეს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ არაუარყოფითი მნიშვნელობები. მისი მათემატიკური ლოდინი ტოლია 100-ის. შევაფასოთ ქვემოდან იმის ალბათობა, რომ ცდის შედეგად X შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს 120-ზე ნაკლებ მნიშვნელობას.

9.16. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტის 200 ასროლაში, საფასურის მოსვლის სიხშირე გადაიხრება მისი მათემატიკური ლოდინისაგან არა უმეტეს 0,1-ისა.

9.17. ატარებენ n დამოუკიდებელ ცდას. თითოეულ ცდაში A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა $p=\frac{1}{3}$ ჩებიშევის უტოლობის საფუძველზე შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ სიხშირის ალბათობისაგან გადახრის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება 0,01-ს, როცა: ა) $n=9000$, ბ) $n=75000$.

9.18. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის 1200 დამოუკიდებელ ასროლაში, 1-იანის მოსვლის რიცხვი არ აღემატება 800-ს.

9.19. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის 3600 დამოუკიდებელ ასროლაში 6-იანის მოსვლის რიცხვი მეტია ან ტოლი 900-ის.

9.20. თითოეულ ცდაში A ხდომილების მოხდენის ალბათობაა 1/4. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობის მოხდენის X რიცხვი, 800 დამოუკიდებელ ცდაში მოთავსდება 150-დან 250-მდე.

9.21. თითოეულ ცდაში A ხდომილების მოხდენის ალბათობაა 1/2. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ. ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილების მოხდენის X რიცხვი 100 დამოუკიდებელ ცდაში მოთავსდება 40-დან 60-მდე.

9.22. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის 10000 დამოუკიდებელ ასროლაში ექვსიანის მოსვლის სიხშირის მისი ალბათობისაგან გადახრის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება 0,01-ს.

9.23. კონვეიერიდან უმაღლესი ხარისხის ნაკეთობის მიღების ალბათობაა 0,6. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ კონვეიერიდან მიღებული 600 ნაკეთობიდან უმაღლესი ხარისხის ნაკეთობათა რაოდენობა მოთავსდება (340; 380) ინტერვალში.

9.24. გოგოს დაბადების ალბათობა დაახლოებით 0,485-ის ტოლია. შევაფასოთ ქვემოდან ალბათობა იმისა, რომ 3000 ახლადდაბადებულ ბავშვს შორის, გოგონათა რიცხვის, თავის მათემატიკური ლოდინისაგან გადახრის აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება 55-ს.

9.25. მოცემულ ადგილას, წელიწადში მზიანი დღეების რაოდენობა წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის მათემატიკური ლოდინი ტოლია 75-ის. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ მომავალ წელს, იმავე ადგილას მზიანი დღეების რაოდენობა აღმოჩნდება 150-ზე ნაკლები.

9.26. ჭურვის საწყისი სიჩქარის მათემატიკური ლოდინი 500 მ/წმ-ის ტოლია. შევაფასოთ ზემოდან ალბათობა იმისა, რომ ცდის დროს ჭურვის საწყისი სიჩქარე აღმოჩნდება არა უმცირეს 800 მ/წმ.

9.27. დედამიწის მოცემულ ადგილას, ქარის სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობაა 20 მ/წმ. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ ადგილას დაკვირვების შედეგად ქარის სიჩქარე აღმოჩნდება 80 მ/წმ-ზე ნაკლები.

9.28. გარკვეული სახის ნაკეთობის წონის საშუალო მნიშვნელობაა 50 გრ. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითად არჩეული ნაკეთობა აღმოჩნდება 90 გრამზე ნაკლები წონის.

9.29. დამზადებული ნაკეთობის სიგრძე წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის საშუალო მნიშვნელობა 90 სმ-ია, ხოლო დისპერსიაა 0,0225. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ დამზადებული ნაკეთობის სიგრძის მათემატიკური ლოდინიდან გადახრის აბსოლუტური მნიშვნელობა: ა) არ გადააჭარბებს 0,4 სმ-ს; ბ) ნაკეთობის სიგრძე მოთავსდება]89,7; 90,3[ინტერვალში.

9.30. გათბობის პერიოდში ოთახის საშუალო ტემპერატურა 20°-ია, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა 2°C. ჩებიშევის უტოლობის საფუძველზე ქვემოდან შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ ოთახის ტემპერატურის თავის მათემატიკური ლოდინიდან გადახრის აბსოლუტური მნიშვნელობა ტოლი იქნება არა ნაკლებ 4°-ისა.

9.31. ერთი წუთის განმავლობაში სატელეფონო სადგურში გამოძახებათა X რიცხვის საშუალო მნიშვნელობა $\lambda=M(X)=20$. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ $[X>20]$ და $10<X<30$.

9.32. მოცემულია დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ მიმდევრობა. X_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის საშუალებით:

X_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
p	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

შეიძლება თუ არა ასეთი მიმდევრობის მიმართ გამოვიყენოთ ჩებიშევის თეორემა?

9.33. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის $X_1, X_2, \ldots, \ldots, X_n, \ldots$ წევრები განაწილებულნი არიან შემდეგი კანონით:

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

შეიძლება თუ არა, ჩებიშევის თეორემის გამოყენება?

9.34. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ მიმდევრობის წევრები განაწილებულია შემდეგი კანონი:

X_n	a	$-a$
p	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

შეიძლება თუ არა ამ მიმდევრობის მიმართ ჩებიშევის თეორემის გამოყენება?

9.35. მოცემულია $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, ამასთანავე X_n $n=1, 2, 3, \ldots$ თანაბრად არის განაწილებული ა) $[0, n]$; ბ) $[0, \sqrt{n}]$; გ) $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right]$; დ) $[0, 1]$ ინტერვალებზე. შეიძლება თუ არა დიდ რიცხვთა კანონის გამოყენება?

§ 10. მარკოვის ჯაჭვები

10.1. მოცემულია ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა მატრიცა:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

და საწყის ალბათობათა ვექტორი (0,2; 0,5; 0,3). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორი ბიჯის განმავლობაში სისტემა არ შეიცვლის მდგომარეობას.

10.2. ორ ყუთში მოთავსებულია 3 ბურთულა. ყოველ წამს შემთხვევით ირჩევენ ერთ ბურთულას და სდებენ ერთი ყუთიდან მეორეში. მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობად განვიხილოთ ბურთების რაოდენობა პირველ ყუთში. ამოვწეროთ ერთბიჯიანი გადასვლის ალბათობათა მატრიცა.

10.3. საბრძოლო სწავლებაში მონაწილეობას იღებს ორი ხომალდი, რომლებიც ერთდროულად ესვრიან ერთმანეთს მანამ, სანამ ერთ-ერთი მათგანი არ დააზიანებს მეორეს. თითოეულ გასროლაში ალბათობა იმისა, რომ A ხომალდი დააზიანებს B-ს, არის 1/2, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ B დააზიანებს A-ს 3/8. განიხილავენ გასროლათა სერიის შედეგებს. ვიპოვოთ გადასვლის ალბათობათა მატრიცი, თუ ჯაჭვის მდგომარეობებს წარმოადგენენ მწყობრში დარჩენილ ხომალდთა რაოდენობა: E_1 — ორივე ხომალდი მწყობრშია, E_2 — მწყობრშია A ხომალდი, E_3 — მწყობრშია B ხომალდი, E_4 — ორივე ხომალდი დაზიანებულია.

10.4. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვი ორი E_1, E_2 მდგომარეობებით და გადასვლის ალბათობათა მატრიცით:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

სპეციალური მოწყობილობის საშუალებით შემთხვევით ირჩევენ მდგომარეობას, საიდანაც იწყება პროცესი. ეს მოწყობილობა ირჩევს E_1 მდგომარეობას ალბათობით P_1 და E_2-ს ალბათობით P_2. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი ბიჯის შემდეგ ეს პროცესი გადავა E_1 მდგომარეობაში, თუ: ა) $P_1=P_2=\frac{1}{2}$, ბ) $P_1=\frac{1}{3}$, $P_2=\frac{2}{3}$.

10.5. დაამტკიცეთ, რომ მარკოვის ერთგვაროვანი X_n $(n=0, 1, \ldots)$ ჯაჭვისათვის და ნებისმიერი m-ისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\mathbf{P}(X_{n+m}=1 \mid X_m=i)=\mathbf{P}(X_n=j \mid X_0=i),\ i, j=1, 2, \ldots, r.$$

10.6. დაამტკიცეთ, რომ მარკოვის ერთგვაროვანი ჯაჭვის ერთბიჯიანი გადასვლის ალბათობათა $\mathbf{P}=(p_{ij})_{i,j=1}^{r}$ მატრიცისათვის სრულდება ტოლობები:

ა) $p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{k=1}^{r} p_{ik}^{(n-1)}\, p_{kj}^{(n-1)}$, $(n=2, 3, \ldots)$; ბ) $\mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{P}^{n}$, სადაც

$\mathbf{F}^{(n)}$ აღნიშნავს n-ბიჯიან გადასვლის ალბათობათა მატრიცას, ხოლო $p_{ij}^{(n)}$, $(i, j=1, 2, \dots, r)$ მის ელემენტებს,

10.7. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვის საწყის ალბათობათა ვექტორი (1/3, 1/2, 1/6) და გადასვლის ალბათობათა მატრიცა:

$$\mathbf{P}=\begin{array}{c}E_1\\E_2\\E_3\end{array}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \\ 3/8 & 1/2 & & 1/8\\ 1/4 & 1/5 & 1 & 1/20\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი ბიჯის შემდეგ სისტემა იქნება E_3 მდგომარეობაში.

10.8. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვის ალბათობათა გადასვლის მატრიცა:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3\end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორი ბიჯის შემდეგ სისტემა აღმოჩნდება E_2 მდგომარეობაში, თუ ცნობილია, რომ საწყის მომენტში იგი E_3 მდგომარეობაშია.

10.9. მოცემულია მარკოვის ჯაჭვის ალბათობათა გადასვლის მატრიცა:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 0\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7\end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ n-ბიჯიანი ($n=2{,}3$) გადასვლის მატრიცა.

10.10. მოცემულია ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვის საწყის ალბათობათა ვექტორი (0,3; 0,1; 0,6) და გადასვლის ალბათობათა მატრიცა:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0 & 0{,}9\\ 1 & 0 & 0\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7\end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სამი ბიჯის შემდეგ სისტემა იქნება იგივე მდგომარეობაში, რომელშიც იმყოფებოდა საწყის მომენტში.

§ 11. შემთხვევითი ფუნქციები

11.1. მოცემულია შემთხვევითი ფუნქცია $X(t)=(t^2+1)\,U$, სადაც U შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის მნიშვნელობებიც ეკუთვნის]0,10[ინტერვალს. ვიპოვოთ $X(t)$-ს რეალიზაცია ორ ცდაში, თუ ა) $U_1=2$; ბ) $U_2=3{,}5$.

11.2. მოცემულია შემთხვევითი ფუნქცია $X(t)=U\sin t$, სადაც U შემთხვევითი სიდიდეა. ვიპოვოთ $X(t)$ კვეთა, რომელიც არგუმენტის ფიქსირებულ მნიშვნელობებს შეესაბამება: ა) $t_1=\dfrac{\pi}{h}$; ბ) $t_2=\dfrac{\pi}{2}$.

11.3. დავამტკიცოთ, რომ არაშემთხვევითი მამრავლი გამოდის მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ $M[X(t)\cdot\varphi(t)]=\varphi(t)\times$ $+M[X(t)]$.

11.4. ვიპოვოთ $X(t)=U e^t$ შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი, სადაც U არის შემთხვევითი სიდიდე და $M(U)=5$.

11.5. დავამტკიცოთ, რომ ორი შემთხვევითი ფუნქციის ჯამის მათემატიკური ლოდინი, შესაკრებთა მათემატიკური ლოდინების ჯამის ტოლია.

11.6. ვიპოვოთ $X(t)=Ut^2+2t+1$ და $X(t)=U\sin 4t+V\cos 4t$ შემთხვევით ფუნქციათა მათემატიკური ლოდინი, თუ U და V შემთვევითი სიდიდეებია, $M(U)=M(V)=1$.

11.7. დავამტკიცოთ, რომ $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია ტოლია $X^0(t)=X(t)-m_x(t)$ ცენტრალური შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქციისა.

11.8. დავამტკიცოთ, რომ $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური $K_x(t_1, t_2)$ ფუნქციის მნიშვნელობა არგუმენტთა ერთი და იგივე მნიშვნელობისათვის ტოლია მისი დისპერსიის, ე. ი. $K_x(t, t)=D_x(t)$,

11.9. დავამტკიცოთ, რომ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციისათვის, არაშემთხვევითი $\varphi(t)$ ფუნქციის დამატებით, მისი კორელაციის ფუნქცია არ იცვლება, ე. ი. თუ $Y(t)=X(t)+\varphi(t)$, მაშინ $K_y(t_1, t_2)=K_x(t_1, t_2)$.

11.10. ვიპოვოთ $X(t)=U\cos t$ შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი, თუ U შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი $M(U)=2$.

11.11. ვიპოვოთ $X(t)=U\sin t$ შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსია, თუ U შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია $D(U)=6$.

11.12. მოცემულია $X(t)=Ut$ შემთხვევითი ფუნქცია, სადაც U შემთხვევითი სიდიდეა, ამასთანავე $D(U)=10$, $M(U)=4$. ვიპოვოთ მისი კორელაციური ფუნქცია და დისპერსია.

11.13. მოცემულია $X(t)=Ut$ და $Y(t)=t^2\,V$ შემთხვევითი ფუნქციები. U და V არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებია:

$M(U)=3$, $M(V)=6$, $D(U)=0{,}2$, $D(V)=5$. ვიპოვოთ $Z(t)=X(t)+Y(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი, კორელაციური ფუნქცია და დისპერსია.

11.14. ცნობილია $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციის ფუნქცია, ვიპოვოთ $Y(t)=X(t)+t^2$ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია.

11.15. დავამტკიცოთ, რომ შემთხვევითი ფუნქციის არაშემთხვევით $\varphi(t)$ ფუნქციაზე გამრავლებით მისი კორელაციის ფუნქცია მრავლდება $\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)$ ნამრავლზე.

11.16. ცნობილია $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციის ფუნქცია K_x, ვიპოვოთ $Y(t)=X(t)\cdot(t+1)$ და $Z(t)=C\cdot X(t)$ ფუნქციების კორელაციური ფუნქციები, თუ C მუდმივი სიდიდეა.

11.17. ვთქვათ $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციაა, $\varphi(t)$ არაშემთხვევითი ფუნქციაა. დავამტკიცოთ, რომ თუ $Y(t)=X(t)+\varphi(t)$, მაშინ $D_y(t)=D_x(t)$.

11.18. ცნობილია $Y(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსია $D_x(t)$. ვიპოვოთ $Y(t)=X(t)+2$ შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსია.

11.19. მოცემულია $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქცია და $\varphi(t)$ არაშემთხვევითი ფუნქცია. დავამტკიცოთ, რომ თუ $Y(t)=X(t)\cdot\varphi(t)$, მაშინ $D_y(t)=\varphi^2(t)D_x(t)$.

11.20. ცნობილია $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსია. ვიპოვოთ $Y(t)=(3+t)X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსია.

11.21. გამაძლიერებელი ხელსაწყოს შესასვლელზე მიეწოდება $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქცია, რომლის მათემატიკური ლოდინი და კორელაციური ფუნქციები ცნობილია: $m_x(t)=t$, $K_x(t_1, t_2)=e^{-\alpha(t_2-t_1)^2}$, $(\alpha>0)$. ვიპოვოთ გამოსასვლელი $Y(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი და კორელაციური ფუნქცია, თუ გაძლიერების კოეფიციენტი $k=5$.

11.22. დავამტკიცოთ, რომ ორი არაკორელირებულ ცენტრირებულ შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის კორელაციური ფუნქცია, თანამამრავლთა კორელაციურ ფუნქციათა ნამრავლის ტოლია.

11.23. ვიპოვოთ $X(t)=U\cos 2t$ შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი და კორელაციური ფუნქცია, თუ $M(U)=5$, $D(U)=6$.

11.24. ვიპოვოთ $X(t)=\sin 3t$ შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი, კორელაციური ფუნქცია და დისპერსია, თუ $M(U)=10$, $D(U)=0{,}2$.

11.25. მოცემულია $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის $K_x(t_1, t_2)=t_1t_2e^{-|t_2-t_1|}$ კორელაციური ფუნქცია

11.26. ვიპოვოთ $X(t)=U\sin t+V\cos t$ შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი და კორელაციური ფუნქცია, U და V არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებია და $M(U)=1$, $M(V)=2$, $D(U)=3$, $D(V)=4$.

11.27. მოცემულია $X(t)=\cos(t+\varphi)$ შემთხვევითი ფუნქცია, სადაც φ არის $(0,2\pi)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. დავამტკიცოთ, რომ $X(t)$ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციაა.

11.28. მოცემულია $X(t)=\sin(t+\varphi)$ შემთხვევითი ფუნქცია, სადაც φ არის $(0,2\pi)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. დავამტკიცოთ, რომ $X(t)$ სტაციონარული შემ-შემთხვევითი ფუნქციაა.

11.29. დავამტკიცოთ, რომ თუ $X(t)$ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციაა, ხოლო Y შემთხვევითი სიდიდეა (X-ისაგან დამოუკიდებელი), მაშინ $Z(t)+Y$ შემთხვევითი ფუნქცია სტაციონარულია.

11.30. სტაციონარულია თუ არა $X(t)=U\cos 2t$ შემთხვევითი ფუნქცია, თუ U შემთხვევითი სიდიდეა?

11.31. ვიპოვოთ $X(t)=a\sin(Ut+\varphi)$ შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსია, თუ a φ დადებითი რიცხვებია, φ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა სიმკვრივით $f(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\varphi^2}{2}}$.

11.32. დავამტკიცოთ, რომ სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის კორელაციური ფუნქცია ლუწია.

11.33. ცნობილია $X(t)$ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის $K_y(\tau)$ კორელაციური ფუნქცია. დავამტკიცოთ, რომ $Y(t)=aX(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქციაა $K_y(\tau)=a^2K_x(\tau)$.

11.34. $X(t)$ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია $k_x(\tau)=De^{-\alpha^2\tau^2}$, ვიპოვოთ $Y(t)=4X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია.

11.35. დავამტკიცოთ, რომ სტაციონარული შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის დისპერსია მუდმივია და ტოლია $K_x(0)$-ის, სადაც $K_x(\tau)$ $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქციაა.

11.36. დავამტკიცოთ, რომ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას $|K_x(\tau)|\leqslant K_x(0)$.

11.37. ცნობილია $X(t)$ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციის ფუნქცია $K_x(\tau)$. ვიპოვოთ ნორმირებული კორელაციური ფუნქცია, თუ: ა) $K_x(\tau)=3e^{-\tau^2}$. ბ) $K_x(\tau)=D_x e^{-|\tau|}(1+|\tau|)$.

11.38. დავამტკიცოთ, რომ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრალური სიმკვრივე ლუწი ფუნქციაა.

11.39. დავამტკიცოთ, რომ თუ ცნობილია $X(t)$ სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის სპექტრალური სიმკვრივე $S_x(\omega)$, მაშინ დისპერსია გამოითვლება ფორმულით $Dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\,d\omega$.

11.40. ვიპოვოთ $X(t)$ სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის დისპერსია, თუ ცნობილია მისი სპექტრალური სიმკვრივე $S_x(\omega)=\dfrac{10}{\pi(1+u^2)}$.

11.41. ვიპოვოთ $X(t)$ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრალური სიმკვრივე, თუ მისი კორელაციური ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად: $K_x(\tau)=1-(1/5)^{\tau}$, როცა $|\tau|\leqslant 5$; $K_x(\tau)=0$, როცა $|\tau|>5$.

11.42. ვიპოვოთ სპექტრალური სიმკვრივე, თუ ცნობილია, რომ $K_x(\tau)=e^{-|\tau|}$.

11.43. ვიპოვოთ სპექტრალური სიმკვრივე, თუ ცნობილია, რომ $K_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}$ $(\alpha>0)$.

11.44. ვიპოვოთ სპექტრალური სიმკვრივე, თუ ცნობილია, რომ $K_x(\tau)=e^{-|\tau|\cos\tau}$.

11.45. ვიპოვოთ სპექტრალური სიმკვრივე, თუ ცნობილია, რომ $K_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|\cos\beta\tau}$ $(\alpha>0)$.

11.46. ვიპოვოთ სპექტრალური სიმკვრივე, თუ ცნობილია, რომ $K_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}[\cos\beta\tau+(\alpha|\beta)\sin\beta|\tau|]$, $(\alpha>0)$.

11.47. ვიპოვოთ სპექტრალური სიმკვრივე, თუ ცნობილია, რომ $K_x(\tau)=De^{-\alpha^2\tau^2}$.

11.48. ვიპოვოთ სპექტრალური სიმკვრივე, თუ ცნობილია, რომ $K_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)$, $(\alpha>0)$.

11.49. ვიპოვოთ სპექტრალური სიმკვრივე, თუ ცნობილია, რომ: $K_x(\tau)=100e^{-0,1|\tau|}(1+0,1|\tau|)$.

11.50. ვიპოვოთ სპექტრალური სიმკვრივე, თუ ცნობილია, რომ: $K_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$, $(\alpha>0)$.

11.51. ვიპოვოთ $X(t)$ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია, თუ სპექტრალური სიმკვრივე განსაზღვრულია შემდეგნაირად: $S_x(\omega)=S_0$, თუ $\omega\in(-2\omega_0,-\omega_0)$ და $\omega\in(\omega_0,2\omega_0)$; ხოლო $S_x(\omega)=0$, თუ $\omega\notin(-2\omega_0,-\omega_0)$ და $\omega\notin(\omega_0,2\omega_0)$.

11.52. ვიპოვოთ $K_x(\tau)$ კორელაციის ფუნქცია, თუ ცნობილია, რომ:

$$S_x(\omega)=D\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}.$$

11.53. ვიპოვოთ სტაციონარული თეთრი ხმაურის (სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქცია, რომლის სპექტრალური სიმკვრივე: $S_x(\omega)=S_0$) კორელაციური ფუნქცია.

§ 12. მათემატიკური სტატისტიკა

12.1. X შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები მოცემულია შემდეგი ცხრილის სახით:

დაკვირვების №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	6	1	3	4	10	4	1	9	2	1	5	8	5	6	6	6	7	4	3	5

ავაგოთ სტატისტიკური განაწილება და განაწილების პოლიგონი.

12.2. დაკვირვების შედეგად მიიღეს X შემთხვევითი სიდიდის შემდეგი მნიშვნელობები:

დაკვირვების №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	,6	17	18	19	20
X	10	9	6	5	13	16	12	1	15	6	14	7	15	8	16	20	15	10	11	11

დავყოთ (0;20) შუალედი 4 ტოლ ნაწილად და შევადგინოთ სტატისტიკური განაწილების ცხრილი. ავაგოთ ფარდობითი სიხშირეების ჰისტოგრამა.

12.3. იპოვეთ იმ შერჩევის ჰისტოგრამა, რომელიც მოცემულია სიხშირეთა შემდეგი ცხრილის საშუალებით:

ინტერვალის ნომერი	ინტერვალის საზღვრები	ინტერვალში მოხვედრილ ელემენტთა რაოდენობა
1	10—12	2
2	12—14	4
3	14—16	8
4	16—18	12
5	18—20	16
6	20—22	10
7	22—24	3

12.4. სიხშირეთა ცხრილის საშუალებით ავაგოთ შერჩევითი ჰისტოგრამა:

ინტერვალის ნომერი	ინტერვალის საზღვრები	შერჩევის ინტერვალში მოხვედრილ ელემენტთა რაოდენობა
1	0—2	20
2	2—4	30
3	4—6	60

12.5. იპოვეთ შემდეგი სტატისტიკური მწკრივის საშუალებით მოცემული შერჩევის ემპირიული განაწილების ფუნქცია:

ა))

X_i	1	4	6
m_i	10	16	25

ბ)

X_i	2	5	7	8
m_i	1	3	2	4

გ)

X_i	4	7	8
m_i	5	2	3

12.6. შემთხვევით შერჩეული 100 სტუდენტის სიმაღლის გაზომვის შედეგები აღმოჩნდა შემდეგი:

სიმაღლე	154—158	158—162	162—166	166—170	170—174	174—178	178—182
სტუდენტების რაოდენობა	10	14	26	28	12	8	

იპოვეთ სტუდენტთა სიმაღლის შერჩევითი საშუალო და შერჩევითი დისპერსია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: იპოვეთ ინტერვალის ცენტრები და მიიჩნიეთ ისინი მნიშვნელობად.

12.7. სატელეფონო სადგურზე დააკვირდნენ წუთში არასწორ შეერთებათა რაოდენობას. ერთი საათის განმავლობაში დაკვირვებამ მოგვცა შემდეგი შედეგები:

3, 1, 3, 4, 2, 1, 1, 3, 2, 7, 2, 0,
2, 4, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 3, 3, 1, 2,
2, 0, 2, 1, 4, 3, 4, 2, 0, 2, 3, 1,
3, 1, 4, 2, 2, 1, 2, 5, 1, 1, 0, 1,
1, 2, 1, 0, 3, 4, 1, 2, 2, 1, 1, 5,

იპოვეთ განაწილების საშუალო და დისპერსია. შეადარეთ ალბათობათა განაწილება პუასონის განაწილებას.

12.8. ტრანზისტორის ერთ-ერთი პარამეტრის შემოწმებამ მოგვცა შემდეგი შედეგები:

ტრანზისტორის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
პარამეტრის მნიშვნელობა	4,40	4,31	4,40	4,40	4,65	4,65	4,71	4,54	4,34	4,56

ვიპოვოთ პარამეტრის შერჩევითი საშუალო მნიშვნელობა და შერჩევითი დისპერსია.

12.9. ცნობილია, რომ X შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია ბინომური განაწილება $P(X=m)=C_n^m\, p^m\,(1-p)^{n-m}$, სადაც p უცნობი პარამეტრია. ქვემოთ მითითებული მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ $(X_1, X_2, \ldots, X_8)$ შერჩევაზე დაფუძნებული უცნობი p პარამეტრის p^* შეფასება მომენტთა მეთოდით, თუ:

ა) $X_1=25$, $X_2=34$, $X_3=12$, $X_4=36$, $X_5=18$, $X_6=33$, $X_7=16$, $X_8=17$.

ბ) $X_1=18$, $X_2=37$, $X_3=45$, $X_4=33$, $X_5=27$, $X_6=36$, $X_7=19$. $X_8=40$.

12.10. ცნობილია, რომ X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონით $P(X=m)=\dfrac{\alpha^m}{m!}e^{-\alpha}$, სადაც α უცნობი პარამეტრია. მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ შერჩევაზე დაფუძნებული α უცნობი პარამეტრის α^* შეფასება, თუ შერჩევას აქვს სახე:

ა) 14, 13, 17, 15, 20, 25, 13, 22;

ბ) 12, 14, 9, 8, 15, 7, 11, 8.

12.11. მოცემულ ნივთიერებაში რკინის შემცველობაზე ხანგრძლივი დაკვირვების შედეგად დადგინდა სტანდარტული გადახრა 0,12%. იპოვეთ ნდობის 0,95 ალბათობით, ნივთიერებაში რკინის შემცველობის ნდობის ინტერვალი, თუ 6 ანალიზის შედეგად აღმოჩნდა, რომ საშუალო შემცველობაა 32,56%.

12.12. ნათურების დიდი პარტიიდან ალალბედზე შეარჩიეს 100 ნათურა. შერჩევიდან აღებული ნათურების ნათების საშუალო ხანგრძლივობა აღმოჩნდა 1000 სთ. იპოვეთ ნათურების მთელი პარტიის საშუალო ნათების დროის ნდობის ინტერვალი, ნდობის 0,95 ალბათობით, თუ ცნობილია, რომ ნათურის ნათების საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma=40$ სმ-ს.

12.13. მოცემულია X და Y შემთხვევით სიდიდეებზე დაკვირვებათა შედეგები:

X	2	4	6	8	10
Y	3,6	6,0	7,0	6,0	7,5

იპოვეთ შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი.

12.14. ρ_1-ით აღვნიშნოთ ფოლადის დენადობის ზღვარი, ρ_2-ით ფოლადის სიმტკიცის ზღვარი; Y-ით ფოლადში ნახშირბადის შემცველობის პროცენტი. 79 ცდის შედეგად მიღებულია $X=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ და Y სიდიდეების კორელაციური ცხრილი:

X \ Y	0,5	0,6	0,7	0,8
0,5	0	2	0	8
0.6	0	4	2	9
0,7	2	12	3	1
0,8	21	14	0	0
0,9	1	0	0	0

ცხრილში მოყვანილი მთელი რიცხვები აღნიშნავენ შესაბამისი შემთხვევითი წერტილების ჯერადობას. მაგალითად, რიცხვი 14 აღნიშნავს, რომ 14 ცდაში (X, Y) ვექტორი იღებდა მნიშვნელობას (0,8; 0,6). ვიპოვოთ შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი და Y-ის X-ზე რეგრესიის წირის განტოლება.

12.15. შახტიდან ქარხანაში შემოსული ნედლეული შეიცავს ორ სასარგებლო კომპონენტს A-სა და B-ს. სხვადასხვა დროს სხვადასხვა შახტიდან მიღებული ნედლეულის 10 ნიმუშის ანალიზის შედეგები მოყვანილია ცხრილში, სადაც X და Y არის შე-

საბამისად A და B კომპონენტის შემცველობის პროცენტი ნიმუშში:

ნიმუშის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	67	54	72	64	39	22	58	43	46	34
Y	24	15	23	19	16	11	20	16	17	13

ვიპოვოთ შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი და Y-ის X-ზე და X-ის Y-ზე რეგრესიის წრფის განტოლებები.

12.16. ცდის შედეგები მოცემულია ცხრილში:

X	2	4	6	8	10
Y	4,5	7	8	7,5	9

დავუშვათ, რომ X და Y შორის არსებობს წრფივი კავშირი $Y=aX+b$ და უმცირეს კვადრატთა მეთოდით ვიპოვოთ a და b კოეფიციენტები.

12.17. ცდის შედეგები მოცემულია ცხრილში:

X	0	2	4	6	8	10
Y	5	—1	0,5	1,5	4,5	8,5

დავუშვათ, რომ X-სა და Y-ს შორის არის პარაბოლური დამოკიდებულება $Y=aX^2+bX+c$. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით ვიპოვოთ a, b და c კოეფიციენტები.

12.18. შერჩევის X რიცხვითი მახასიათებლის განაწილება განისაზღვრება შემდეგი ცხრილის საშუალებით:

3,0—3,6	3,6—4,2	4,2—4,8	4,8—5,4	5,4—6,0	6,0—6,6	6,6—7,2
2	8	35	43	22	15	5

შევამოწმოთ ჰიპოთეზა X შემთხვევითი სიდიდის ნორმალურობის შესახებ მნიშვნელობის $\alpha=0{,}01$ დონით.

12.19. წარმოებს სასწავლო კონვეიერზე აწყობილი კვანძების შერჩევითი შემოწმება. აღებულია 200 კვანძი. კვანძების m_i რიცხვი, რომელთა აწყობის დროს გამოტოვებულია i ოპერაცია მოყვანილია ცხრილში:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	
m_i	41	62	45	22	16	8	4	2	სულ 200

მნიშვნელოანობის დონის მქონე χ^2 კრიტერიუმით შეამოწმეთ ეთანხმება თუ არა მიღებული შედეგები პუასონის განაწილებას: $P(X=i)=\frac{a^i}{i!}e^{-a}$, სადაც X გამოტოვებულ ოპერაციათა შემთხვევითი რიცხვია. ამოცანა ამოხსენით a პარამეტრის მოცემული მნიშვნელობისათვის ცალკე და იმ შემთხვევაშიც, როცა a პარამეტრის მნიშვნელობა ფასდება შერჩევით:

ა) $a = 1{,}73$, $\alpha = 0{,}05$;

ბ) $a = 1{,}85$, $\alpha = 0{,}01$.

დანართი

ცხრილი 1.

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3940	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ ფუნქციის მნიშვნელობები

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0639	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0909	0948	0987	1026	1103	1064	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1803	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2356	2389	2421	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2793	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3728	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3906	3925	3943	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4648	4656	4664	4671	4678	4686	4692	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4924	4927	4929	4930	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4958	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

3,0	0,4986	3,1	4990	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	4998	3,6	4998	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968								
4,5	499997								
5,0	49999997								

ცხრილი 3.

პუასონის განაწილება $P[X=k]=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

k \ λ	01	02	03	04	05
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01204
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5			0,00002	0,00006	0,00016
6					0,00001

k \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7		0,00001	0,00002	0,00004

k \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11		0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132
14				0,00006	0,00047
15				0,00002	0,00016
16					0,00005
17					0,00001

ცხრილი 4

n-ზე და p-ზე დამოკიდებული χ^2-ის მნიშვნელობანი

n \ p	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,84	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	55,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

ცხრილი 5.

χ^2 განაწილების კრიტიკული წერტილები

თავისუფლების ხარისხი n	მნიშვნელოვნობის დონე α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

ცხრილი 6.

t_β-ს მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ $2\int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t)\,dt=\beta$

β / $n-1$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963
2	142	289	445	617	0,816	1,061	1,336
3	137	277	424	584	765	0,978	1,250
4	134	271	414	569	741	941	1,190
5	132	267	408	559	727	920	1,156
6	131	265	404	553	718	906	1,134
7	130	263	402	549	711	896	1,119
8	130	262	399	546	706	889	1,108
9	129	261	398	543	703	883	1,100
10	129	260	397	542	700	879	1,093
11	129	260	396	540	697	876	1,088
12	128	259	395	539	695	873	1,083
13	128	259	394	538	694	870	1,079
14	128	258	393	537	692	868	1,076
15	128	258	393	536	691	866	1,074
16	128	258	392	535	690	865	1,071
17	128	257	392	534	689	863	1,069
18	127	257	392	534	688	862	1,067
19	127	257	391	533	688	861	1,066
20	127	257	391	533	687	860	1,064
21	127	257	391	532	686	859	1,063
22	127	256	390	532	686	858	1,061
23	127	256	390	532	685	858	1,058
24	127	256	390	531	685	857	1,059
25	127	256	390	531	684	856	1,058
26	127	256	390	531	684	856	1,058
27	127	256	389	531	684	855	1,057
28	127	256	389	530	683	854	1,055
29	127	256	389	530	683	854	1,055
30	127	256	389	530	683	854	1,055
40	126	255	388	529	681	851	1,050
60	126	254	387	527	679	848	1,046
120	126	254	386	526	677	845	1,041
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036
$n-1$ / β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7

ცხრილი 7.

ნატურალურ რიცხვთა ხარისხები (1—20)

n	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9
1	1	1	1	1	1	1
2	16	32	64	128	256	512
3	81	243	729	2 187	6 561	19 683
4	256	1 024	4 096	16 384	65 536	262 144
5	625	3 125	15 625	78 125	390 625	1 953 125
6	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616	10 077 696
7	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801	40 353 607
8	4 096	32 768	262 144	2 097 152	16 777 216	134 217 728
9	6 561	59 049	531 441	4 782 969	43 046 721	387 420 489
10	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	1 000 000 000
11	14 641	161 051	1 771 561	19 487 171	214 358 881	2 357 947 691
12	20 736	248 832	2 985 984	35 831 808	429 981 696	5 159 780 352
13	28 561	371 293	4 826 809	62 748 517	815 730 721	10 604 499 373
14	38 416	537 824	7 529 536	105 413 504	1 475 789 056	20 661 046 784
15	50 625	759 375	11 390 625	170 859 375	2 562 890 625	38 443 359 375
16	65 536	1 048 576	16 777 216	268 435 456	4 294 967 296	68 719 476 736
17	83 521	1 419 857	24 137 569	410 338 673	6 975 757 441	118 587 876 497
18	104 976	1 889 568	34 012 224	612 220 032	11 019 960 576	198 359 290 368
19	130 321	2 476 099	47 045 881	893 871 739	16 983 563 041	322 687 697 779
20	160 000	3 200 000	64 000 000	1 280 000 000	25 600 000 000	512 000 000 000

ცხრილი 8.

თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვები

10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53
80	95	90	91	17	39	29	27	49	45	66	06	57	47	17
20	63	61	04	02	00	82	29	16	65	31	06	01	08	05
15	95	33	47	64	35	08	03	36	06	85	26	97	76	02
88	67	67	43	97	04	43	62	76	59	63	57	33	21	35
98	95	11	68	77	12	17	17	68	33	73	79	64	57	53
34	07	27	68	50	36	69	73	61	70	65	81	33	98	85
45	57	18	24	06	35	30	34	26	14	86	79	90	74	39
02	05	16	56	92	68	66	57	48	18	73	05	38	52	47
05	32	54	70	48	90	55	35	75	48	28	46	82	87	09
06	52	96	47	78	35	80	83	42	82	60	93	52	03	44
11	19	92	91	70	98	52	01	77	67	14	90	56	86	07
23	40	30	97	32	11	80	50	54	31	39	80	82	77	32
18	62	38	85	79	83	45	29	96	34	06	28	89	80	83
83	49	12	56	24	88	68	54	02	00	86	50	75	84	01
35	27	38	84	35	99	59	46	73	48	87	51	76	49	69
22	10	94	05	58	60	97	09	34	33	50	50	07	39	98
50	72	56	82	48	29	40	52	42	01	52	77	56	78	51
13	74	67	00	78	18	47	54	06	10	68	71	17	78	17
36	76	66	79	51	90	36	47	64	93	29	60	91	10	62
91	82	60	89	28	93	78	56	13	68	23	47	83	41	13
65	48	11	76	74	17	46	85	09	50	58	04	77	69	74
80	12	43	56	35	17	72	70	80	15	45	31	82	23	74
74	35	09	98	17	77	40	27	72	14	43	23	60	02	10
69	91	62	68	03	66	25	22	91	48	36	93	68	72	03
09	89	32	05	05	14	22	56	85	14	46	42	75	67	88
73	03	95	71	86	40	21	81	65	44	91	49	91	45	23
21	11	57	82	53	14	38	55	37	63	80	33	69	45	98
45	52	16	42	37	96	28	60	26	55	44	10	48	19	49
76	62	11	39	90	94	40	05	64	18	12	55	07	37	42
96	29	77	88	22	54	38	21	45	98	63	60	64	93	29
68	47	92	76	86	46	16	28	35	54	94	75	08	99	23
26	94	03	68	58	70	29	73	41	35	53	14	03	33	40
85	15	74	79	54	32	97	92	65	75	57	60	04	08	81
11	10	00	20	40	12	86	07	46	97	56	64	48	94	39
16	50	53	44	84	40	21	95	25	63	43	65	17	70	82

ცხრილი 9.

ფაქტორიალები, მათი შებრუნებული სიდიდეები და ლოგარითმები

n	$n!$	$1:n!$	$\lg n!$	n	$n!$	$1:n!$	$\lg n!$
1	1	1,0000	0,0000	21	$5109\cdot10^{16}$	$1957\cdot10^{-23}$	19,7083
2	2	0,5000	0,3010	22	$1124\cdot10^{18}$	$8897\cdot10^{-25}$	21,0508
3	6	0,1667	0,7782	23	$2585\cdot10^{19}$	$3868\cdot10^{-26}$	22,4125
4	24	$4167\cdot10^{-5}$	1,3802	24	$6204\cdot10^{20}$	$1612\cdot10^{-27}$	23,7927
5	120	$8333\cdot10^{-6}$	2,0792	25	$1551\cdot10^{22}$	$6447\cdot10^{-29}$	25,1906
6	720	$1389\cdot10^{-6}$	2,8573	26	$4033\cdot10^{23}$	$2480\cdot10^{-30}$	26,6056
7	5040	$1984\cdot10^{-7}$	3,7024	27	$1089\cdot10^{25}$	$9184\cdot10^{-32}$	28,0370
8	$4032\cdot10$	$2480\cdot10^{-8}$	4,6055	28	$3049\cdot10^{26}$	$3280\cdot10^{-32}$	29,4841
9	$3629\cdot10^{2}$	$2756\cdot10^{-9}$	5,5598	29	$8842\cdot10^{27}$	$1131\cdot10^{-34}$	30,9466
10	$3629\cdot10^{3}$	$2756\cdot10^{-10}$	6,5598	30	$2653\cdot10^{29}$	$3770\cdot10^{-36}$	32,4237
11	$3992\cdot10^{4}$	$2505\cdot10^{-11}$	7,6012	31	$8223\cdot10^{30}$	$1216\cdot10^{-37}$	33,9150
12	$4790\cdot10^{5}$	$2088\cdot10^{-12}$	8,6803	32	$2631\cdot10^{32}$	$3800\cdot10^{-39}$	35,4201
13	$6227\cdot10^{6}$	$1606\cdot10^{-13}$	9,7943	33	$8683\cdot10^{33}$	$1152\cdot10^{-40}$	36,9387
14	$8718\cdot10^{7}$	$1147\cdot10^{-14}$	10,9404	34	$2952\cdot10^{35}$	$3387\cdot10^{-42}$	38,4701
15	$1308\cdot10^{9}$	$7647\cdot10^{-16}$	12,1165	35	$1033\cdot10^{37}$	$9678\cdot10^{-44}$	40,0141
16	$2092\cdot10^{10}$	$4779\cdot10^{-17}$	13,3206	36	$3720\cdot10^{39}$	$2688\cdot10^{-45}$	41,5705
17	$3557\cdot10^{11}$	$2811\cdot10^{-18}$	14,5511	37	$1376\cdot10^{40}$	$7265\cdot10^{-47}$	43,1386
18	$6402\cdot10^{12}$	$1562\cdot10^{-19}$	15,8063	38	$5230\cdot10^{41}$	$1912\cdot10^{-48}$	44,7185
19	$1216\cdot10^{14}$	$8221\cdot10^{-21}$	17,0851	39	$2040\cdot10^{43}$	$4902\cdot10^{-50}$	46,3096
20	$2433\cdot10^{15}$	$4110\cdot10^{-22}$	18,3861	40	$8159\cdot10^{44}$	$1226\cdot10^{-51}$	47,9116

ცხრილი 10.

ხარისხი, ფესვი, წრეწირის სიგრძე, წრის ფართობი, ბირთვის მოცულობა

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[4]{n}$	$\sqrt[5]{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{\pi n^3}{6}$
1	1	1	1,000	1,000	1,000	1,000	3,142	0,79	0,5
2	4	8	414	260	189	149	6,283	3,14	4,2
3	9	27	732	442	316	246	9,425	7,07	14,1
4	16	64	2,000	587	414	320	12,566	12,57	33,5
5	25	125	236	710	495	380	15,708	19,63	65,4
6	36	216	2,449	1,817	1,565	1,431	18,850	28,27	113,1
7	49	343	646	913	627	476	21,991	38,48	179,6
8	64	512	828	2,000	682	516	25,133	50,27	268,1
9	81	729	3,000	080	732	552	28,274	63,62	381,7
10	100	1 000	162	154	778	585	31,416	78,54	523,6
11	121	1 331	3,317	2,224	1,821	1,615	34,558	95,03	696,9
12	144	1 728	464	289	861	644	37,699	113,10	904,8
13	169	2 197	606	351	899	670	40,841	132,73	1150,3
14	196	2 744	742	410	934	695	43,982	153,94	14.368
15	225	3 375	873	466	968	719	47,124	176,71	1767,1
16	256	4 096	4,000	2,520	2,000	1,741	50,265	201,06	2144,7
17	289	4 913	123	571	031	762	53,407	226,98	2572,4
18	324	5 832	243	621	060	783	56,549	254,47	3053,6
19	361	6 859	359	668	088	802	59,690	283,53	3591,4
20	400	8 000	472	714	115	821	62,832	314,16	4188,8
21	441	9 261	4,583	2,759	2,141	1,838	65,973	346,36	4849,0
22	484	10 648	690	802	166	856	69,115	380,13	5575,3
23	529	12 167	796	844	190	872	72,257	415,48	6370,6
24	576	13 824	899	884	213	888	75,398	452,39	7238,2
25	625	15 625	5,000	924	236	904	78,540	490,87	8181,2
26	676	17 576	5,099	2,962	2,258	1,919	81,68	530,9	9202,8
27	729	19 683	196	3,000	280	933	84,82	572,6	10306,0
28	784	21 952	292	037	300	947	87,96	615,8	11494,0
29	841	24 389	385	072	321	961	91,11	660,5	12770,1
30	900	27 000	477	107	340	974	94,25	706,9	14137,2
31	961	29 791	5,568	3,141	2,360	1,987	97,39	754,8	15598,5
32	1024	32 768	675	175	378	2,000	100,53	804,2	17157,3
33	1089	35 937	745	208	397	012	103,67	855,3	18816,6
34	1156	39 304	831	240	415	024	106,81	907,9	20579,5
35	1225	42 875	916	271	432	036	109,96	962,1	22449,3
36	1296	46 656	6,000	3,302	2,449	2,048	113,10	1017,9	24429,0
37	1369	50 653	083	332	466	059	116,24	1075,2	26521,8
38	1444	54 872	164	362	483	070	119,38	1134,1	28730,9
39	1521	59 319	245	391	499	081	122,52	1194,6	31059,4
40	1600	64 000	325	420	515	091	125,66	1256,6	33510,3
41	1681	68 921	6,403	3,448	2,530	2,102	128,81	1320,3	36087,0
42	1764	74 088	481	476	546	112	131,95	1385,4	38792,4
43	1849	79 507	557	503	561	122	135,09	1452,2	14629,8
44	1936	85 184	633	530	576	132	138,23	1520,5	44602,2
45	2025	91 125	708	557	590	141	141,37	1590,4	47712,9
46	2116	97 336	6,782	3,583	2,604	2,145	144,51	1661,9	50965,0
47	2209	103 823	856	609	618	160	147,65	1734,9	54361,6
48	2304	110 592	928	634	632	169	150,80	1809,6	57905,8
49	2401	117 649	7,000	659	646	178	153,94	1885,7	61600,9
50	2500	125 000	071	684	659	187	157,08	1963,5	65449,9

ლიტერატურა

1. ს. თოფურია, გ. აბესაძე, ვ. ოზბეგაშვილი, ვ. ხოჭოლავა, ზ. მეტრეველი. მათემატიკა I და II ნაწილი. თბილისი. „განათლება" — 1987 წ.
2. გ. მანია. ალბათობის თეორიის კურსი. თბილისი — თსუ გამომცემლობა, 1962 წ.
3. გ. მანია. მათემატიკური სტატისტიკის ზოგიერთი მეთოდი. საქ. მეცნ. აკადემიის გამომცემლობა — თბილისი, 1963 წ.
4. ი. სხირტლაძე. ალბათობის თეორიის ელემენტები, სპი-ის გამომცემლობა, თბილისი — 1979 წ.
5. თ. შერვაშიძე. ალბათობის თეორია (ლექციების კურსი). თბილისი — თსუ გამომცემლობა, 1980 წ.
6. ა. ცივაძე. ალბათობის თეორიის და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები. სპი-ის გამომცემლობა, თბილისი — 1975 წ.
7. ა. ცივაძე, თ. ყიფიანი, გ. მირზიაშვილი, ნ. ბერდული, რ. ხიზანიშვილი.
   ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები სპი-ის გამომცემლობა, 1987 წ.
8. Х. М. Андружаев. Сборник задач по теории вероятностей, Москва, «Просвещение» — 1985 г.
9. А. А. Боровков. Теория вероятностей. Москва, «Наука», 1976 г.
10. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. Москва, «Наука», 1964 г.
11. В. Г. Володин, М. П. Ганин, И. Я. Динер, Л. Б. Комаров, А. А. Свешников, К. Б. Старобин. «Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей». Суупромгиз — Ленинград, 1962 г.
12. В. Е. Гмурман. «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике». Москва, «Высшая школа», 1979 г.
13. В. Е. Гмурман. «Теория вероятностей и математическая статистика Москва, «Высшая школа», 1977 г.
14. Б. В. Гнеденко. «Курс теорий вероятностей», Москва, «Наука», 1988 г.
15. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. «Теория вероятностей и математическая статистика», Москва, Гостехиздат, 1955 г.
16. Г. Крамер. «Математические методы статистики». ИИЛ; Москва, 1948 г.
17. М. Лоэв. «Теория вероятностей». ИИЛ; Москва, 1962 г.
18. Л. Д. Мещалькин. Сборник задач по теории вероятностей. Москва, МГУ, 1963 г.

19. В. С. Пугачев. «Теория случайных функций и её приминение к задачам автоматического управления». М., Физматгиз, 1961 г.
20. А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков. «Задачи по теории вероятностей». Москва, «Наука», 1986 г.
21. А. С. Солодовников. «Теория вероятностей». Москва, «Просвещение», 1983 г.
22. В. Феллер. «Введение в теорию вероятностей и ее приложения». Т. 1-2, Москва, «Мир», 1984.
23. Э. Фёрстер, Б. Рёнц. «Методы корелиационного и регресионного анализа». Москва, «Финансы и статистика», 1983 г.
24. В. П. Чистяков. «Курс теории вероятностей». Москва, «Наука», 1982 г.

პასუხები

§ 2.

1. $\frac{1}{4}$. 2. $\frac{1}{5}$. 3. $\frac{1}{1}$. 4. $\frac{24}{90}$. 5. $\frac{1}{5}$. 6. $\frac{7}{90}$. 7. $\frac{1}{3}$. 8. ა) 0; ბ) $\frac{1}{2}$. 9. $\frac{1}{2}$. 10. ა) $\frac{1}{18}$; ბ) $\frac{1}{2}$. 11. $\frac{3}{4}$. 12. $\frac{24}{91}$. 13. $\frac{1}{2}$. 14. ა) 0,05; ბ) $\approx 0{,}00005$. 15. $\frac{14}{55}$. 16. ა) 0,6; ბ) 0,3; გ) 0,9. 17. $\frac{7}{15}$. 18. $\frac{1}{60}$. 19. $1-\frac{C_{n-m}^{k}}{C_{n}^{k}}$. 20. $\approx 0{,}0938$. 21. $\frac{k!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!}$. 22. $\frac{1}{216}$; $\frac{1}{36}$; $\frac{5}{54}$. 23. 3186. 24. $\frac{5}{6}$. 25. ≈ 28. 26. 500. 27. 30. 28. $\frac{7}{20}$. 29. $\frac{125}{125}$. 30. $\frac{r}{R}\Big)^2$. 31. 0,99. 32. $\frac{1}{4}$. 33. $\frac{\pi}{4}$. 34. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. 35. $\frac{4}{13}$. 36. $\frac{1}{12}$. 37. $\frac{11}{36}$. 38. ა) $2\arcsin\frac{k}{a}$; ბ) $\frac{\arcsin k/a}{\pi}$. 39. $\frac{l}{\pi a}$.

§ 3.

1. $\frac{1}{3}$. 2. $\frac{10}{17}$. 3. $\frac{57}{92}$. 4. $\frac{1}{105}$. 5. $\frac{1}{4950}$. 6. $\frac{1}{5}$. 7. $\frac{1}{435}$. 8. ა) $\frac{7}{460}$; ბ) $\frac{1}{2300}$; გ) $\frac{273}{1380}$. 9. ა) $\frac{1}{210}$; ბ) $\frac{1}{14}$. 10. $\frac{1}{120}$. 11. $\frac{1}{5456}$. 12. 0,98. 13. 0,42. 14. 0,28. 15. $\frac{1}{30}$. 16. $\frac{4}{7}$. 17. $\frac{1}{12}$. 18. $\frac{1}{16}$. 19. $\frac{3}{25}$. 20. 0,512. 21. 0,729. 22. 0,98. 23. 0,99. 24. $\frac{1}{216}$. 25. $\frac{7}{9}$. 26. 13. 27. $p+q-2pq$. 28. $1-\frac{1}{e}$. 31. დამოუკიდებელია. 32. დამოკიდებულია.

§ 4.

1. $\frac{469}{500}$. 2. $\frac{63}{70}$. 3. $\frac{89}{100}$. 4. ა) $\frac{21}{10\,000}$; ბ) $\frac{5}{42}$. 5. $\frac{23}{30}$. 6. $\frac{2}{3}$. 7. $\frac{4}{7}$. 8. $\frac{6}{13}$. 9 $\frac{3}{10}$. 10. $\frac{1}{4}$. 11. $\frac{9}{29}$. 12. $\frac{23}{47}$. 13. $\frac{28}{199}$. 14. ა) $\frac{4}{15}$; ბ) $\frac{5}{8}$. 15. $\frac{16}{53}$. 16. 180, 188; 192. 17. 25; 5; 75. 18. ა) $\frac{7}{12}$; ბ) $\frac{5}{7}$. 19. 0,84. 20. $\frac{8}{13}$; $\frac{5}{13}$. 21. ა) 0,5; ბ) 0,75. 22. ა) 0,68; ბ) $\approx 0{,}3$. 23. ა) 2 თეთრი და 3 შავი ბურთულა; ბ) 0,336. 24. ა) არ მოხვდება; ბ) თანაბარმოსალოდნელია. 25) 0,9989 26. თეთრი და შავი 27. ა) 0,307; ბ) 0,002. 28. მეორე ჯგუფიდან 4. 29. $\frac{5}{\pi}$.

§ 5.

1. 0,3068. 2. 0,3284. 3. $P_4(2) > P_6(3)$. 4. 0,3875. 5. 0,9913. 6. 0,5325. 7. 0,366. 8. 0,74. 9. 0,0114. 10. 0,002. 11. 0,0457. 12. 0,7245. 14. 0,7782. 15. 0,06. 16. 0,99. 17. 0,2385. 18. 0,4493. 19. ა) 0,0101; ბ) 0,1089; გ) 0,2541. 20. 0,09. 21. $2/3e^2$. 22. ა) 0,8882; ბ) 0,8944. 23. 0,5224. 24. 0,3913. 25. 0,985. 26. 0,7498. 27. 0,9595. 28. 3. 29. 7700. 30. 14, 15. 31. 200. 32. 0,6. 33. 110. 34. 112.

§ 6.

1.

X	0	1
p	0,7	0,3

2.

X	2	5	8
p	0,4	0,5	0,45

3.

X	1000	500	400	100	0
p	0,001	0,004	0,0025	0,01	0,98

4.

X	0	5	10	15
p	0,216	0,432	0,288	0,064

5.

X	3	2	1	0
p	$\frac{1}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{125}{216}$

6.

X	4	3	2	1	0
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

7.

X	1	2	3
p	0,8	0,16	0,04

8.

X	3	2	1	0
p	0,6	0,24	0,096	0,064

9.

X	0	1	2
p	0,3	0,5	0,2

10.

X	1	2	3	4
p	0,7	0,21	0,063	0,027

11.

X	1	2	3	4
p	0,4	0,24	0,144	0,216

12.

X	0	1	2	2	4
p	0,0625	0,25	0,0375	0,25	0,0625

13.

$X+Y$	3	5	7
p	0,08	0,44	0,48

14.

$X-Y$	2	3	4	5
p	0,06	0,24	0,14	0,56

15.

X^2	0	1	4	9
p	0,5	0,3	0,1	0,1

X^2	—6	0	3	9
p	0,1	0,5	0,3	0,1

16.

XY	—3	—2	—1	0	1	2	3
p	0,08	0,06	0,04	0,37	0,10	0,15	0,20

17. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\leqslant 0,\\ 0{,}7, & \text{თუ } 0<x\leqslant 1,\\ 1, & \text{თუ } x>1.\end{cases}$

18. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ თუ } x\leqslant 0;\ 0{,}2401, \text{ თუ } 0<x\leqslant 1;\ 0{,}6517, \text{ თუ } 1<x\leqslant 2,\\ 0{,}9163, \text{ თუ } 2<x\leqslant 3;\ 0{,}9919, \text{ თუ } 3<x\leqslant 4;\ 1, \text{ თუ } x>4.\end{cases}$

19. $P[X\geqslant]=\frac{22}{35}$. **20.** მ ი თ ი თ ე ბ ა: რადგან n დიდი რიცხვია, ხოლო p მცირეა, გამოვიყენოთ პუასონის ფორმულა $P[X=k]\approx\frac{1}{k!e}$. $k=0, 1, 2, \cdots, 500$. **21.** $P[X=k]=C_n^k(1-p)^{n-k}\cdot p^k$ (ამ ფორმულის მიხედვით შევადგინოთ ცხრილი). **22.** $x_1=2$. **23.** $P[0{,}25<X<0{,}75]=0{,}5$.

24. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\leqslant x_0,\\ \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}, & \text{თუ } x>x_0.\end{cases}$ **25.** $A=1/2$, $B=1/\pi$, $P\left[-\frac{a}{2}\leqslant X<\frac{a}{2}\right]=\frac{1}{3}$, $f(x)=1/\pi\cdot\sqrt{a^2-x^2}$. **26.** $P[-1<X<1]=\frac{1}{3}$. **27.** $P[0<X<1]=\frac{1}{4}$. **28.** $P\left[0<X<\frac{1}{3}\right]=1/4$,

30. $f(x)=\begin{cases}0, \text{ თუ } x<0;\ 1/2\sqrt{x}, \text{ თუ } 0<x<1/4;\ 16x, \text{ თუ } \frac{1}{4}<x<\frac{\sqrt{2}}{4},\\ 0, \text{ თუ } x>\frac{\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$

32. $P\left[\frac{\pi}{6}\leqslant X<\frac{\pi}{3}\right]=\frac{\sqrt{3}-1}{6}$. **33.** ა) $A=1/2$, $B=1/\pi$; ბ) $f(x)=\frac{1}{\pi(x^2+1)}$; გ) $1/2$. **34.** $F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\leqslant a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{თუ } a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & \text{თუ } x>b.\end{cases}$

35. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, \sin x, & \text{თუ } x\in(0,\pi),\\ 0, & \text{თუ } x\bar{\in}(0,\pi).\end{cases}$ **36.** $F(x)=\begin{cases}1, & \text{თუ } x\in(0,1),\\ 0, & \text{თუ } x\bar{\in}(0,1).\end{cases}$

37. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & \text{თუ } 0<x\leqslant\pi,\\ 1, & \text{თუ } x>\pi.\end{cases}$ **38.** $C=1$. **39.** $C=4/\pi-\ln 4$. **40.** $a=1/2$. **41.** ა) $A=\frac{2}{\pi}$, $f(x)=\frac{2}{\pi(e^x+e^{-x})}$; ბ) $F^2(1)=\frac{4}{\pi^2}\operatorname{arctg}^2 e\approx 0{,}6015$. **42.** ა) $A=\frac{\lambda^3}{2}$; ბ) $F(x)=1-\frac{\lambda^2x^2+2\lambda x+2}{2}e^{-\lambda x}$; გ) $P\left[0<X<\frac{1}{\lambda}\right]=F(1/\lambda)-F(0)\approx 0{,}08$. **43.** ა) $A=1/\sqrt{\pi}$, $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; ბ) $P[-1<X<1]=\frac{1}{2}$. **44.** $P[|X|<36]\approx 0{,}997$. **45.** $P[1\leqslant X\leqslant 2]\approx 0{,}1359$.

§ 7.

1. ა) $M(X)=6$; ბ) $M(X)=0{,}53$. **2.** $D(X)=15{,}21$, $\sigma(X)=3{,}9$. **3.** ა) $D(X)=8{,}41$, $\sigma(X)=2{,}9$; ბ) $D(X)=248{,}9$, $\sigma(X)=15{,}7$. **4.** $M(X)=1/p$, $D(X)=(1-p)/p^2$. **5.** $D(X)=0{,}8$. **6.** $\sigma(X)=2$. **7.**

X^2	x_1^2	x_2^2
p	0,6	0,4

10. ა) $M(Z)=11$; ბ) $M(Z)=30$. **12.** $D(Z)=69$. **13.** $D(Z)=61$. **14.** $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}5$, **15.** $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}5$. **16.** $x_3=21$, $p_3=0{,}2$. **17.** $M(X)=p$, $D(X)=pq$. **19.** $M(\Delta)=0$,

$D(\Delta)=26^4$. **20.** $\mu_1=0$, $\mu_2=0{,}64$, $\mu_3=-0{,}77$. **21.** $\tilde{\alpha}_1=3{,}1$, $\mu_1=0$. **22.** $\nu_1=3{,}9$, $\nu_2=16{,}5$. $\nu_3=74{,}1$. **23.** ა) $\nu_1=4$, $\nu_2=20$, $\nu_3=116{,}8$; $\nu_4=752$, $\mu_1=0$, $\mu_2=4$, $\mu_3=4{,}8$, $\mu_4=35{,}2$; ბ) $A_s=0$, $E_x=-0{,}8$. **26.** $M(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$. **27.** $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$. **28.** $M(X)=np$, $D(X)=npq$, $0<p<1$, $q=1-p$. **29.** $M(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$. **30.** $M(X)=r$. **31.** $M(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$. **32.** $f(x)=\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right)$, როცა $|x|\leqslant a$; $f(x)=0$, როცა $|x|>a$; $M(X)=0$, $D(X)=a^2/6$. **33.** $M(X)=\dfrac{ax_0}{a-1}$, $D(X)=\dfrac{a x_0^2}{(a-1)^2(a-2)}$. **34.** $M(X)=0$, $D(X)=\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{1}{2}\approx 0{,}32$. **35.** $M(X)=n$, $D(X)=2n$. **36.** ა) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2}$; ბ) σ და $\sigma\sqrt{2\ln 2}$. **37.** $F(x)=0$, თუ $x\leqslant -a$, $F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}$, როცა $|x|<a$ და $F(x)=1$, თუ $x>a$; $M(X)=0$, $D(X)=a^2\dfrac{\pi}{2}$. **38.** $M(V)=2\sqrt{2/\beta\pi}$, $D(V)=1/\beta(3-8/\pi)$. **39.** ა) $F(x)=0$, როცა $x<0$; $1-e^{-\lambda x}$, $x>0$; ბ) $M(X)=1/\chi$, $D(X)=1/\lambda^2$. **40.** $F(x)=0$, როცა $x\leqslant 0$; $F(x)=x^2/k^2$, როცა $0<x<R$; $F(x)=1$, როცა $x>R$; $D(X)=R^2/18$. **41.** $M(X)=m+1$, $D(X)=m+1$. **42.** $P[X<m]=1-e^{-\pi/4}$, $P[X>m]=e^{-\pi/4}$, $P[X<m]/P(X>m)=\dfrac{0{,}54}{0{,}45}=1{,}1$. **43.** $D(X)=a^2/2$. **44.** $A=\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$, $M(X)=\dfrac{a}{a+b}$, $D(X)=\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$. **45.** $M(X)=\dfrac{3}{2}x_0$, $D(X)=\dfrac{3}{4}x_0^2$. **46.** $A=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}}$, $M(X)=(\alpha+1)\beta$; $D(X)=\beta^2(\alpha+1)$. **47.** $M(X)=a$, $D(X)=l^3/3$. **48.** $\alpha_k=\dfrac{\Gamma(p+k)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+k)}$. **49.** $M(T)=1/\gamma$. მითითება: $p(t)$ წარმოადგენს T-ს განაწილების ფუნქციას. **50.** $\left[\dfrac{(n-1)x_0}{n}\right]^{1/n}$.

§ 8.

1. $X\begin{cases}3 & 10 & 12\\ 0{,}27 & 0{,}43 & 0{,}30;\end{cases}$ $Y\begin{cases}4 & 5\\ 0{,}55, & 0{,}45\end{cases}$. **2.** 0,26. **3.** $f(x,y)=$

$=\begin{cases}\varphi_n^2\, 3\cdot 3^{-x-y}, & \text{თუ } x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\\ 0, & \text{თუ } x<0 \text{ ან } y=0,\end{cases}$ **4.** $f(x,y)=\begin{cases}8e^{-4x-2y}, & \text{თუ } x>0\ y>0\\ 0, & \text{თუ } x<0,\ y<0.\end{cases}$

5. $F(x,y)=\left(\dfrac{1}{4\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{8}\right)\left(\dfrac{1}{5\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{5}+\dfrac{1}{10}\right)$. **6.** ა) X 3, 6; ბ) Y 10 14 18; $P(X|10)$ $\dfrac{5}{7}$, $\dfrac{2}{7}$; $P(Y|6)$ $\dfrac{5}{14}$, $\dfrac{5}{28}$, $\dfrac{18}{28}$. **7.** ა) $f_1(x)=\sqrt{\dfrac{2}{5\pi}}e^{-0{,}4x^2}$, $f_2(y)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-2y^2}$; ბ) $\varphi(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_2(y)}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0{,}5(x+y)^2}$, $\psi(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}=\dfrac{5}{\sqrt{2\pi}}e^{-0{,}1(x+5y)^2}$. **8.** ა) $f_1(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}e^{-0{,}75x^2}$, $f_2(y)=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}e^{-3y^2}$ ბ) $\varphi(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_2(y)}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+y)^2}$, $\psi(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-0{,}25(x+4y)^2}$. **9.** $M(X)=M(Y)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, $D(X)=D(Y)=1-\dfrac{\pi}{4}$. **10.** $M(X)=M(Y)=\dfrac{\sqrt{3\pi}}{6}$, $D(X)=D(Y)=\dfrac{4-\pi}{12}$. **11.** $M(X)=M(Y)=\dfrac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4}$. **12.** $M(X)=M(Y)=\dfrac{\pi}{4}$, $D(X)=D(Y)=\dfrac{\pi^2+8\pi-32}{16}$. **13.** ა) $M(X)=M(Y)=\dfrac{\pi}{2}$, $D(X)=D(Y)=\pi^2-4$. ბ) $\mu_{xy}=0$. **14.** ა) $f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x<0 \text{ ან } y<0,\\ 10e^{-(5x+2y)}, & x>0\quad y>0.\end{cases}$ ბ) $F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x<0,\quad y<0,\\ (1-e^{-5x})(1-e^{-2y}), & \text{როცა } x>0 \text{ ან } y>0.\end{cases}$

§ 9.

4. მითითება: ისარგებლეთ მათემატიკური ლოდინის განმარტებით. **5.** $p_1\geqslant 0$, $p_2\geqslant 0{,}75$, $p_3\geqslant 0{,}88$. **6.** $P[|X-1|<0{,}5]\geqslant 0{,}84$. **7.** $P[|X-M(X)|<0{,}2]\geqslant 0{,}9$. **8.** $\varepsilon\geqslant 0{,}3$. **9.** $P(A)\geqslant 0{,}84$, $P(B)\geqslant 0{,}36$. $P(C)\geqslant 0{,}74$. **10.** $P[|X-M(X)|\geqslant 25]\leqslant\dfrac{1}{4}$. **11.** ა) $P[|X-m|<2\sigma]\geqslant 0{,}75$; ბ) $P[|X-m|<3\sigma]\geqslant 0{,}889$; გ) $P[|X-m|<4\sigma]\geqslant 0{,}9375$. **12.** $P[|X-0{,}54|<0{,}2]\geqslant 0{,}64$. **13.** $P[|X-0{,}44|<\sqrt{0{,}4}]\geqslant 0{,}9$. **14.** $P[|X-800|<50]\geqslant$

$\geqslant 0{,}936$. **15.** $P[X < 120] \geqslant \frac{1}{6}$. **16.** $P\left[\left|\frac{\nu}{200} - 0{,}5\right| \leqslant 0{,}1\right] \geqslant 0{,}875$. **17.** ა) $P\left[\left|\frac{\nu}{9000} - \frac{1}{3}\right| \leqslant 0{,}01\right] \geqslant 0{,}75$; ბ) $P\left[\left|\frac{\nu}{75000} - \frac{1}{3}\right| \leqslant 0{,}01\right] \geqslant 0{,}97$. **18.** $P[X \leqslant 800] \geqslant 0{,}75$. **19.** $P[X \geqslant 900] \leqslant 2/3$. **20.** $P[|X - 200| < 50] \geqslant 0{,}94$. **21.** $P[|X - 50| < 10] \geqslant 0.75$. **22.** $P\left[\left|\frac{\nu}{1000} - P\right| < 0{,}01\right] \geqslant 0{,}86$. **23.** $P[340 < X < 380] \geqslant 0{,}64$. **24.** $P[|X - 1455| < 55] \geqslant 0{,}75$. **25.** $P[X < 150] \geqslant 0{,}5$. **26.** $P[V \geqslant 800] \leqslant 0{,}625$. **27.** $P[V < 80] \geqslant 0{,}75$. **29.** $P[X < 90] \geqslant 4/9$. **29.** ა) $P[|X - 90| \leqslant 0{,}4] \geqslant 0{,}85$, ბ) $P[89{,}7 < X < 90{,}3] \geqslant 0{,}7$. **30.** $P[|T - 20| < 4] \geqslant 0{,}75$. **31.** ა) $P[X > 20] = 0{,}5$; ბ) $P[10 \leqslant X < 30] = 0{,}9$. **32.** შეიძლება. **33.** შეიძლება. **34.** შეიძლება. **35.** ა) არ შეიძლება, ბ) არ შეიძლება, გ) შეიძლება, დ) შეიძლება.

§ 10.

1. ა) $x_1(t) = 2(t^2 + 1)$, ბ) $x_2(t) = 3{,}5(t^2 + 1)$. **2.** ა) $X_1 = 1/2\,U$, ბ) $X_2 = U$. **4.** $m_x(t) = 5e^t$. **5.** ა) $m_x(t) = (t + 1)^2$, ბ) $m_x(t) = \sin 4t + \cos 4t$. **10.** $M[X(t)] = 2\cos t$. **11.** $D[X(t)] = 6\sin^2 t$. **12.** $K_x = 26\,t_1 t_2 - 16(t_1 + t_2) + 16$, $D_x(t) = 26\,t^2 - 32\,t + 16$. **14.** $K_x = K_y$. **16.** ა) $K_y = (t_1 + 1)(t_2 + 1)K_x$, ბ) $K_h = C^2 K_x$. **18.** $D_y(t) = D_x(t)$. **20.** $D_y(t) = (t + 3)^2 D_x(t)$. **21.** $m_y(t) = 5t$, $K_y = 25\,e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}$. **23.** $M[X(t)] = 5\cos 2t$, $D_x(t) = 6\cos^2 2t$. **24.** $m_x(t) = 10\sin 3t$, $K_x = 0{,}2\sin 3t_1 \sin 3t_2$, $D_x(t) = 0{,}2\sin^2 3t$. **25.** $\rho_x = e^{-(t_1 - t_2)}$, თუ არგუმენტებს ერთნაირი ნიშანი აქვთ, ხოლო $\rho_x = -e^{-|t_1 - t_2|}$, თუ არგუმენტებს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ. **26.** $m_x(t) = \cos 2t + 2\sin t + t$, $K_x = 3\cos 2t_1 \cos 2t_2 + 4\sin t_1 \sin t_2$. **27.** $m_x(t) = ?$. ამიტომ $X(t)$ — სტაციონარულია. **30.** არასტაციონარულია, $m_x(t) = m_a \cos 2t \neq \text{const}$. **32.** $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$. **34.** $K_y(\tau) = 16\,D\,e^{-\alpha^2\tau^2}$. **37.** ა) $\rho_x(\tau) = e^{-\tau^2}$, ბ) $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|}$. **40.** $D_x = 10$. **41.** $S_x(\omega) = 2\sin^2(5\omega/2) / 5\pi\omega^2$. **42.** $S_x(\omega) = 1/\pi(1 + \omega^2)$. **43.** $S_x(\omega) = D\alpha/\pi(\alpha^2 + \omega^2)$. **44.** $S_x(\omega) = (2 + \omega^2)/\pi[1 + (1 - \omega)^2][1 + (1 + \omega)^2]$. **45.** $S_x(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi} \cdot \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{[(\omega - \beta)^2 + \alpha^2][(\omega + \beta)^2 + \alpha^2]}$. **46.** $S_x(\omega) = (2D\alpha)/\pi \cdot \frac{\alpha + \beta^2}{(\omega^2\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2\omega^2}$. **47.** $S_x(\omega) = D e^{-(\omega^2/4\alpha^2)} / \alpha \cdot \sqrt{2\pi}$.

48. $S_x(\omega) = 2D\,\alpha^3/\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2$. **49.** $S_x(\omega) = (1/5)/(\omega^2 + 0{,}01)^2\,\pi$. **50.** $S_x(\omega) = 8D\,\alpha^5 / 3\pi(\alpha^2 + \omega^2)^3$. **51.** $K_x(\tau) = (2\,S_0 \sin\omega_0\tau)(2\cos\omega_0\tau - 1)/\tau$. **52.** $K_x(\tau) = D\,e^{-\alpha|\tau|}$. **53.** $K_x(\tau) = 2\pi\delta(\tau)$. მითითება: მხედველობაში მივიღოთ, რომ $\frac{1}{2}\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\,d\omega = \delta(\tau)$, სადაც $\delta(\tau)$ — დირაკის ფუნქციაა.

სარჩევი

რედაქტორი რ. დანელია
სამხატვრო რედაქტორი გ. ზაქალაშვილი
ტექნიკური რედაქტორი ე. მუხაშვილი
უფროსი კორექტორი ლ. გაგნიძე
კორექტორი ი. მანჯავიძე
გამომშვები ლ. დავითური

ასოთამწყობი მ. მამულაშვილი
ლინოტიპისტი ნ. ნებიერიძე

ИБ № 4499

Учебное издание.

გადაეცა ასაწყობად 29.12.89 წ. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 30.09.90. საბეჭდი ქაღალდი № 2. ქაღალდის ზომა 60×90 1/16. გარნიტურა ვენა. ბეჭდვა მაღალი. ნაბეჭდი თაბახი 17,75. საღებავგატარება 18. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 13,99. ტირაჟი 10.000. შეკვეთა № 2402.

ფასი 65 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, გ. ჩუბინაშვილის ქ. № 50.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Г. Чубинашвили № 50.

1990

საქართველოს რესპუბლიკის ბეჭდვითი სიტყვის სახელმწიფო კომიტეტის თბილისის ი. ჭავჭავაძის სახ. წიგნის ფაბრიკა, გრ. რობაქიძის გამზ. № 7.

Тбилисская книжная фабрика им. И. Чавчавадзе Государственного комитета по печати Грузинской Республики, пр. Гр. Робакидзе № 7