რაოდენობრივი წიგნიერება

სტუდენტის სახელმძღვანელო

სარჩევი

წინასიტყვაობა 5

თავი I *რიცხვები და მოქმედებები, კანონზომიერებები*

1.1. სიმრავლე. სიმრავლის მოცემის ხერხები. ქვესიმრავლე.....6

1.2. მოქმედებები სიმრავლეებზე. ექვივალენტური სიმრავლეები.....8

1.3. თვლის პოზიციური სისტემები.....11

1.4. ჩვეულებრივი წილადები, რაციონალური და ირაციონალური რიცხვები 13

1.5. პროპორციული დამოკიდებულება. პირდაპირპროპორცია. უკუპროპორცია. პროცენტი.....16

1.6. რიცხვითი გამოსახულებანი. ცვლადის შემცველი გამოსახულებანი.....19

1.7. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები.....21

1.8. ზომის ერთეულები.....22

1.9. მასშტაბი.....24

კითხვები თვითშემოწმებისთვის.....25

თავი II *გეომეტრია და სივრცის აღქმა*

2.1 წერტილი, წრფე, სიბრტყე.....26

2.2 მრავალკუთხედები.....27

2.3 წრეწირი.წრეწირის სიგრძე, წრის ფართობი. სექტორის ფართობი 30

2.4 მრავალწახნაგები.....32

2.5 ბრუნვითი ფიგურები, ცილინდრი, კონუსი, ბირთვი, სფერო.....33

კითხვები თვითშემოწმებისთვის.....36

თავი III მონაცემთა ანალიზი, ალბათობის და სტატისტიკის ელემენტები

3.1. მონაცემთა წყაროები და მონაცემთა მოპოვების ხერხები.....37

*3.2. მონაცემთა წარმოდგენის საშუალება - **ცხრილი** 38*

*3.3. მონაცემთა წარმოდგენის საშუალება -**დიაგრამა** 39*

3.4. მონაცემთა რიცხვითი მახასიათებლები 41

3.5. ხდომილობის ალბათობა, ფარდობით სიხშირე 43

კითხვები თვითშემოწმებისთვის.....46

დამატებითი სავარჯიშოები.....47

გამოყენებული ლიტერატურა.....49

წ ი ნ ა ს ი ტ ყ ვ ა ო ბ ა

თეორია პრაქტიკის გარეშე ფანტაზიაა,

პრაქტიკა თეორიის გარეშე – ქაოსი.

მ. ავრელიუსი

გაერთიანებული ერების განათლების, მეცნიერებისა და კულტურის ორგანიზაცია (UNESCO) წიგნიერებას განმარტავს, როგორც განსაზღვრის, გაგების, ინტერპრეტაციის, შექმნის, კომუნიკაციის, გამოთვლის, ამა თუ იმ კონტექსტთან დაკავშირებული ნაბეჭდი და წერილობითი მასალის გამოყენების უნარ-ჩვევების ერთობლიობას. წიგნიერების ცნება გულისხმობს სწავლის პროცესის უწყვეტობასა და ინდივიდის შესაძლებლობას, მიაღწიოს მიზნებს, გაიღრმავოს ცოდნა, აიმაღლოს პოტენციალი და სრულად მოახდინოს საზოგადოებაში ინტეგრირება. ამდენად, თანამედროვე გაგებით, მათემატიკური წიგნიერება უშუალოდ არის დაკავშირებული ისეთ უნარებთან, როგორებიცაა მონაცემთა ანალიზი, პრობლემის განხილვა და დისკუსია, კრიტიკული აზროვნება, წარმოსახვა და სხვ.

სტუდენტის სახელმძღვანელო „რაოდენობრივი წიგნიერება“, შემუშავდა საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროს, განთლების ხარისხის ეროვნული ცენტრის პროფესიულ კვალიფიკაციათა სისტემის ხელშეწყობის პროგრამის ფარგლებში, პროფესიული საგანმანათლებლო დაწესებულების სტუდენტებისთვის, რომლებიც გაივლიან სავალდებულო ზოგად მოდულს “რაოდენობრივი წიგნიერება“. სახელმძღვანელო ასევე დაეხმარება იმ პედაგოგებს, რომლებიც გაუძღვებიან აღნიშნულ მოდულს.

სასწავლო მოდული შემუშავებულ იქნა პროფესიული საგანმანათლებლო დაწესებულებების მასწავლებლებთან, დარგის ექსპერტებთან თანამშრომლობით, რომლის შესაბამისად სახელმძღვანელო შეიქმნა ეროვნული სასწავლო გეგმის (2011-2016 წ) მათემატიკის საგნობრივი სტანდარტის გათვალისწინებით.

რაოდენობრივი წიგნიერება არის იმ უნარ-ჩვევების ერთობლიობა, რომელთა დაუფლება სტუდენტს უადვილებს რიცხვის არსის გააზრებას, რაოდენობის სხვადასხვა ხერხით გამოსახვას, რიცხვებს შორის მიმართებების გაგებას, რაოდენობათა შედარებას.

წინამდებარე სახელმძღვანელო ეფუძნება შესაბამისი სახელწოდების სასწავლო მოდულს და მისი მიზანია სტუდენტმა შეიძინოს ცოდნა რაოდენობრივი და მათემატიკური კომპეტენციების განვითარების მიზნით, ამავე დროს კონკრეტული პროფესიის დაუფლებისთვის გამოიმუშავოს პრაქტიკული უნარ-ჩვევები, რომლებიც გამოთვლებთან, გაზომვებთან, ალბათობასა და მონაცემთა ანალიზთან არის დაკავშირებული. ასევე სახელმძღვანელოში მოცემულია ინფორმაცია სათაურით „ეს საინტერესოა“, რომელიც ინტერესს აღუძრავს სტუდენტს მეცნიერების დარგების მიმართ, მომავალი პროფესული განვითარების მიზნით.

სასწავლო პროცესი მოიცავს თეორიულ და პრაქტიკულ მეცადინეობებს, შესაბამისად სახელმძღვანელოში სტუდენტისთვის კომპაქტურად, გასაგებ ენაზეა ახსნილი თეორიული მასალა, პრაქტიკული მაგალითების განხილვით, ხოლო ყოველი თავის ბოლოს მოცემულია პრაქტიკული სავარჯიშოები, ამოცანები, თეორიული მასალის უკეთ გააზრების და პრაქტიკული უნარების გამომუშავების მიზნით. სახელმძღვანელოში ასევე ნიმუშების სახით მოცემულია ამოხსნილი ამოცანები. მოდულში, თითოეული სწავლის შედეგის მიხედვით გათვალისწინებული თემატიკის გავლის შემდეგ სარეკომენდაციოდ მითითებულია შემაჯამებელი მეცადინეობის ჩატარება. სახელმძღვანელო კი დაეხარება სტუდენტს წარმატებით გაიაროს ეს ეტაპი, თუ დაკვირვებით წაიკითხვს და გაიაზრებს თავის ბოლოს მოცემულ მასალას „**კითხვები თვითშემოწმებისთვის**“

ავტორი

ნატო გაბოშვილი

ამ თავში წარმოდგენილი მასალით თქვენ გაიღრმავებთ ცოდნას რიცხვებისა და მათზე მოქმედებების, ალგებრისა და კანონზომიერებების შესახებ, გაეცნობით სიმრავლეებს. ძირითადი საკითხებია:

- სიმრავლე. სიმრავლეებზე მოქმედებები
- თვლის პოზიციური სისტემები
- წილადები და ათწილადები, მათზე მოქმედებები
- პროპორცია, პროცენტი, მასშტაბი

§1.1. სიმრავლე. რიცხვითი სიმრავლეები

1) სიმრავლის ცნება პირველადი ცნებაა და ამიტომ იგი არ განისაზღვრება. სიმრავლეზე წარმოდგენას გვაძლევს რაიმე ნიშნის მიხედვით გაერთიანებულ ობიექტთა ერთობლიობა. აუცილებელია რამდენადმე დავაზუსტოთ მისი შინაარსი:

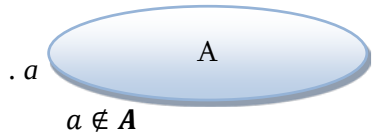
მაგალითად, შეიძლება ვილაპარაკოთ საქართველოს უმაღლეს სასწავლებელთა სიმრავლეზე, მზის სისტემის პლანეტათა სიმრავლეზე, ქართული ანბანის ასოების სიმრავლეზე და ა. შ. ამ ობიექტებს A სიმრავლის **ელემენტები** ეწოდება; სიმრავლე შეიძლება ერთმა ელემენტმაც შეადგინოს.

ვთქვათ, ზარი დაირეკა და აუდიტორიაში არავინ დარჩა; მაშინ ვიტყვით, რომ აუდიტორიაში მოსწავლეთა სიმრავლე ცარიელი სიმრავლეა. ცარიელი სიმრავლე არის სიმრავლე, რომელსაც არც ერთი ელემენტი არ ეკუთვნის. ცარიელ სიმრავლეს ასე აღვნიშნავთ: $\emptyset$

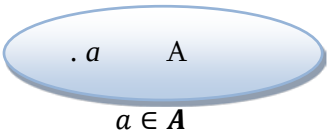
მათემატიკაში სიმრავლე განისაზღვრება რაიმე თვისებით, რომელიც აქვს, ან არ აქვს ყოველ განსახილველ ობიექტს; ის ობიექტები, რომლებსაც აღნიშნული თვისება აქვს, ქმნის ამ თვისებით განსაზღვრულ სიმრავლეს.

სიმრავლეებს ლათინური მთავრული ასოებით აღვნიშნავთ: A, B,C, D, ... ზოგჯერ ამ ასოებს ინდექსებსაც მივუწერთ ხოლმე – A_1, A_2,... სიმრავლის ელემენტებს მეტწილად პატარა ასოებით აღვნიშნავთ: $a, b, c, x, y, z, \ldots$

წინადადება: „a არის A სიმრავლის ელემენტი“, ასე ჩაიწერება: $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$ ($\boldsymbol{a}$ ეკუთვნის **A**-ს); თუ a არ არის A სიმრავლის ელემენტი, მაშინ ვწერთ: $a \notin \boldsymbol{A}$. ($\boldsymbol{a}$ არ ეკუთვნის **A**-ს);



$a \notin \boldsymbol{A}$



$a \in \boldsymbol{A}$

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს **N**-ით აღვნიშნავთ. ცხადია, $5 \in \mathbf{N}$, $0 \notin \mathbf{N}$, $3 \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{3} \notin \mathbf{N}$

2) არსებობს სიმრავლის მოცემის ორი ხერხი:

1) სიმრავლე მოიცემა მისი ყველა ელემენტის ჩამოთვლით. ასე შეიძლება სასრული სიმრავლის მოცემა.

მაგალითად, ციფრების სიმრავლე: {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;} რამდენიმე კონტინენტის სიმრავლე: {ავსტრალია, ანტარქტიდა, ევრაზია, ამერიკა}.

2) მეორე ხერხი გამოიყენება, როგორც სასრული სიმრავლის (როცა ელემენტების ოდენობა დიდია), ასევე უსასრული სიმრავლის შემთხვევაში – მივუთითებთ იმ თვისებას, რომელიც აქვს მოცემული სიმრავლის ყველა ელემენტს და არა აქვს არც ერთ სხვა ობიექტს. ასეთ თვისებას სიმრავლის მახასიათებელი თვისება ეწოდება.

მაგალითი 1. ვთქვათ A სიმრავლე x ნატურალური რიცხვებისგან შედგება, რომლებიც $1 \le x \le 13$ პირობებს აკმაყოფილებს, მაშინ ამ სიმრავლეს ასე ჩავწერთ:

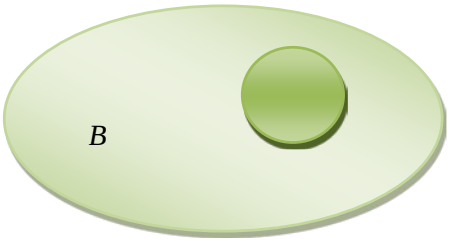
$A=\{x \mid x \in \mathbf{N}\ 1 \le x \le 13\}$.

მაგალითი 2. იმ ***x*** *რიცხვების სიმრავლე, რომლისთვისაც* $(x+1)(x-12)=0$, ანუ ამ განტოლების ფესვების სიმრავლე ასე შეიძლება ჩავწეროთ: $B=\{x \mid (x+1)(x-12)=0\}$

- ჩაწერეთ B სიმრავლე ელემენტების ჩამოთვლით.

ზოგიერთი სიმრავლე რაიმე სხვა სიმრავლის ნაწილია. მაგალითად, ლუწი ნატურალური რიცხვების სიმრავლე არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ნაწილი. ფრინველების სიმრავლე ხერხემლიანების სიმრავლის ნაწილია. ამ უკანასკნელის ნაწილებია თევზების სიმრავლე, ძუძუმწოვრების სიმრავლე. ვიყენებთ ტერმინს – ქვესიმრავლე; ***B*** სიმრავლეს ეწოდება **A** სიმრავლის ქვესიმრავლე, თუ **B**-ს ყოველი ***x*** ელემენტი **A**-ს ელემენტიცაა, მაშინ ვწერთ: $B \subset A$, B შედის A-ში. ყოველი სიმრავლე თავისი თავის ქვესიმრავლეა – ნებისმიერი A სიმრავლისთვის გვაქვს $A \subset A$. ყველა სიმრავლეს აუცილებლად აქვს ქვესიმრავლე – ცარიელი სიმრავლე. ყოველ A სიმრავლისთვის $\varnothing \subset A$.

$A \subset B$



მაგალითად, თუ A წარმოადგენს პარალელოგრამთა სიმრავლეს, ხოლო B-ოთხკუთხედების სიმრავლეს, მაშინ $A \subset B$.

თუ A სიმრავლე B სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ხოლო B-ში არსებობს ერთი ელემენტი მაინც, რომელიც A-ს არ ეკუთვნის, მაშინ A-ს ეწოდება B-ს საკუთრივი ქვესიმრავლე.

მაგალითად, თუ $A=\{1,2,3\}$, ხოლო $B=\{1,2,3,5\}$, მაშინ A არის B-ს საკუთრივი ქვესიმრავლე.

მაგალითი 1.
ვთქვათ,
A – ყველა ოთხკუთხედის სიმრავლეა,
B – პარალელოგრამების სიმრავლე,
C – მართკუთხედების სიმრავლე,
D – კვადრატების სიმრავლე.
ცხადია, $D \subset C$, $C \subset B$ და $B \subset A$. შეიძლება ასეთი ჩანაწერიც გამოვიყენოთ: $D \subset C \subset B \subset A$.

მაგალითი 2.
ვთქვათ, $A=\{1; 2; 3\}$.
ჩამოვთვალოთ ამ სიმრავლის ქვესიმრავლეები.
ერთელემენტიანი ქვესიმრავლეებია: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$;
ორელემენტიანი ქვესიმრავლეებია: $\{1; 2\}$; $\{1; 3\}$; $\{2; 3\}$;
სამელემენტიანი ქვესიმრავლეა: $\{1; 2; 3\}$.
არ დაგვავიწყდეს ცარიელი სიმრავლე.
სულ გვაქვს: $1+3+3+1=8$ ქვესიმრავლე.

თუ $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ და $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, მაშინ A და B სიმრავლეები ერთი და იმავე ელემენტებისგან შედგება – A და B ტოლი სიმრავლეებია და ვწერთ: $\boldsymbol{A=B}$.

შევაჯამოთ: თავდაპირველად სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები განვსაზღვრეთ, წარმოდგენილია სიმრავლეთა მოცემის ხერხები – სიმრავლე შეიძლება მოცემული იყოს მისი ყველა ელემენტის ჩამოთვლით, ან იმ თვისების (მახასიათებელი თვისების) მითითებით, რომელიც აქვს მოცემული სიმრავლის ყოველ ელემენტს და არა აქვს სხვა ობიექტს, რომელიც მოცემულ სიმრავლეს არ ეკუთვნის.
ცარიელი სიმრავლე ყოველი სიმრავლის ქვესიმრავლეა. სიმრავლეს შეიძლება ჰქონდეს ცარიელი სიმრავლისგან განსხვავებული ქვესიმრავლეც.

§1.2. მოქმედებები სიმრავლეებზე

ორი A და B სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც მოცემული სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნის, A და B **სიმრავლეების გაერთიანება** ეწოდება და $A \cup B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ორი A და B სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ორივე მოცემულ სიმრავლეს ეკუთვნიან, A და B **სიმრავლეების თანაკვეთა** ეწოდება და $A \cap B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ორ A და B სიმრავლეს **ურთიერთარაგადამკვეთი** (თანაუკვეთი) ეწოდება, თუ მათი თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

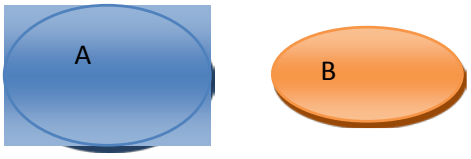
A და B **სიმრავლეთა სხვაობა** ეწოდება A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნიან და $A \setminus B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

მაგალითად, თუ $A=\{1,2,3,4,5\}$, ხოლო $B=\{1,3,5,7\}$, მაშინ $A \cup B=\{1,2,3,4,5,7\}$, $A \cap B=\{1,3,5\}$, $A \setminus B = \{2,4\}$ და $B \setminus A=\{7\}$.

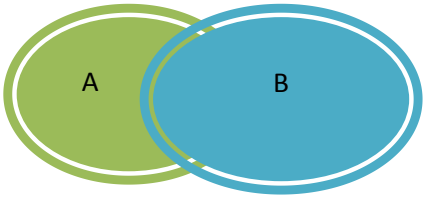
ადვილია ჩვენება, რომ მოქმედებებს სიმრავლეებზე გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ ***(გადანაცვლებადობა)***,
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ***(ჯუფდებადობა),***
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ***(დისტრიბუციულობა).***

A სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა $n(A)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მაგალითად $A=\{1;3;5;7\}$ სიმრავლისათვის $n(A)=4$. სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულების თვალსაჩინოდ წარმოდგენის მიზნით გამოიყენება ე. წ. **ვენის დიაგრამები** -სიმრავლეებს რაიმე წრის საშუალებით გამოვსახავთ. ვთქვათ A და B არაცარიელი სიმრავლეებია და მათ საერთო ელემენტი არ გააჩნიათ, მაშინ სიმრავლეთა შორის დამოკიდებულება გამოისახება ნახაზზე მოცემული სქემის სახით.



ვთქვათ A და B არაცარიელი სიმრავლეებია თუ $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ და $A \cap B \neq \emptyset$, მაშინ წრეებით გამოსახული A და B სიმრავლეების თანაკვეთა ამ წრეების საერთო ნაწილია, რომელიც ნახაზზე დაშტრიხულია. ამ სიმრავლეთა გაერთიანებაა დაშტრიხული (კონტურის შიგა არე) სიმრავლე.



ამოცანა: კლასში 20 მოსწავლე ფეხბურთითაა გატაცებული, 15 მოსწავლე – ჩოგბურთით და 8 მოსწავლე - ერთდროულად ორივეთი. რამდენი მოსწავლეა კლასში, თუ ყოველი მოსწავლე სპორტის ამ სახეობებიდან ერთით მაინც არის გატაცებული?
ამოხსნა: ვთქვათ A არის სიმრავლე იმ მოსწავლეებისა, რომლებიც ფეხბურთით არიან გატაცებული, ხოლო B – რომლებიც ჩოგბურთით არიან გატაცებული. პირობით $n(A \cap B) = 8$. ზემოთმოყვანილი ფორმულის ძალით $n(A \cup B)=20+15-8=27$. ამრიგად, კლასში არის 27 მოსწავლე.

შესაბამისობა, ექვივალენტური სიმრავლეები.

ვთქვათ, მოცემულია A და B სიმრავლეები და წესი, რომლის საშუალებითაც A სიმრავლის ყოველ *a* ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლის ერთადერთი *b* ელემენტი. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოცემულია შესაბამისობა A სიმრავლისა B სიმრავლეში. *b*–ს უწოდებენ *a* ელემენტის შესაბამისს.

A და B სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას ეწოდება ურთიერთცალსახა, თუ A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ელემენტი B სიმრავლიდან და B სიმრავლის ყოველი ელემენტი შეესაბამება A სიმრავლის ერთადერთ ელემენტს.

ე. ი. ასეთი შესაბამისობა შექცევადია.

A და B სიმრავლეებს ეწოდება ეკვივალენტური, თუ მათ შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა და წერენ: A~B.

მაგალითად: ნატურალურ რიცხვთა {1,2,3,...} და ლუწ ნატურალურ რიცხვთა {2,4,6,...} სიმრავლეები ეკვივალენტურია, რადგან მათ შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შემდეგნაირად: ყოველ *n* ნატურალურ რიცხვს შევუსაბამოთ 2*n* ლუწი რიცხვი.

სავარჯიშოები

(1-10) შეარჩიე სწორი პასუხი :

1. თუ $A=\{0; 4\}$ და $B=\{1; 5\}$. მაშინ $A\cap B=$

1) {0; 1; 4} **2)** {0; 4} **3)** {1; 9} **4)** $\varnothing$.

2. ვთაქვათ N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა, *A* - 3-ის ჯერადი ნატურალური რიცხვების სიმრავლე. მაშინ $N\cap A=$

1) N **2)** *A* **3)** $\varnothing$ **4)** $A\cup N$

3. სიმრავლეთა ნებისმიერი *A, B* წყვილისთვის, თუ $A\subset B$, მაშინ $A\cap B=$

1) *A* **2)** *B* **3)** $A\cup B$.

4. თუ რაიმე A და B სიმრავლეებს საერთო ელემენტი არა აქვს, მაშინ $A\cap B=$

1) $\varnothing$ **2)** *A* **3)** *B* **4)** $A\cup B$.

5. ვთქვათ, A კენტი ნატურალური რიცხვების სიმრავლეა, B -ლუწი ნატურალური რიცხვების, N - ნატურალური რიცხვების. მოცემულია ტოლობები:

I. $A\cap B=\varnothing$ II. $A\cup B=N$ III. $A\cup B=\varnothing$ IV. $A\cap B=N$.

მათგან ჭეშმარიტია.

1) IV **2)** მხოლოდ II **3)** I და II **4)** III.

6. ვთქვათ, ნატურალური რიცხვებით შედგენილია 3-ის ჯერადთა (*S*), 5-ის ჯერადთა (*T*) და 15-ის ჯერადთა (*P*) სიმრავლეები და მოცემულია ტოლობები:

ა) $S\cup T=P$, ბ) $S\cap T=P$, გ) $N\cap S=S$ დ) $P\cap T=T\cap P=T$.

მათგან სწორია:

1) ოთხივე ტოლობა **2)** მხოლოდ ბ), გ) **3)** ა), ბ), გ) **4)** ბ), გ), დ).

7. ვთქვათ, *A* არის $x^2-9x+20=0$ განტოლების ფესვების სიმრავლე. მოცემულია:

I. $4\in A$ II. $-5\in A$ III. $10\in A$ IV. $5\notin A$.

მათგან ჭეშმარიტია:

1) IV **2)** II **3)** III **4)** I.

8. ვთქვათ, A არის 60-ის გამყოფების სიმრავლე.

მოცემულია:

I. $7 \in A$, II. $10 \in A$, III. $20 \notin A$.

მათგან ჭეშმარიტია

1) I **2)** მხოლოდ II **3)** II და III **4)** III.

9. რა არის სიბრტყის ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომლებიც ამ სიბრტყეზე მდებარე მონაკვეთის ბოლოებიდან ერთი და იმავე მანძილითაა დაშორებული?

1) მონაკვეთის შუამართობი

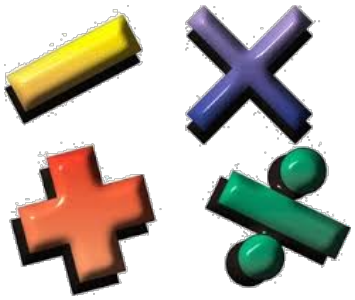
2) მონაკვეთის ერთ-ერთ ბოლოზე გავლებული წრფე

3) მონაკვეთის მართობული სხივი, რომელიც ამ მონაკვეთის შუა წერტილზე გადის

4) ნებისმიერი წრფე, რომელიც მონაკვეთის შუა წერტილზე გადის.

10. ფირმაში მომუშავე 30 ქალის საშუალო ასაკია 40 წელი, ხოლო დანარჩენი მომუშავე 20 მამაკაცის საშუალო ასაკი კი – 50 წელი. რისი ტოლია ამ ფირმის მუშაკთა საშუალო ასაკი?

.



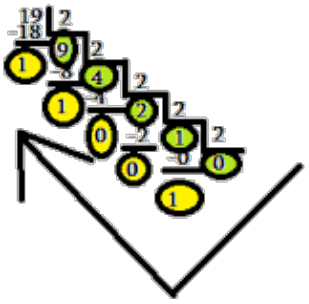
კარლ ფრიდრიხ გაუსი (Johann Carl Friedrich Gauß; 1777-1855) — გერმანელი მათემატიკოსი, ასტრონომი, გეოდეზისტი და ფიზიკოსი. ჯერ კიდევ სიცოცხლის პერიოდში **გაუსი "მათემატიკოსთა პრინცის"** ტიტულით იყო დაჯილდოებული. გადმოცემის თანახმად, სკოლაში მათემატიკის ერთ–ერთ გაკვეთილზე, მასწავლებელმა ბავშვებს დაავალა გამოეთვალათ ყველა რიცხვთა ჯამი 1–დან 100–მდე.

$$1+2+3+.....+98+99+100$$

პატარა გაუსმა შეამჩნია, რომ სხვადასხვა ბოლოდან აღებული ყველა წყვილის ჯამი ერთნაირია: 1+100=101, 2+99=101 და ა.შ. და მომენტალურად მიიღო საბოლოო შედეგი – 50×101=5050, რითაც მასწავლებლის გაოცება გამოიწვია.

1796 წელი გაუსისთვისაც და რიცხვთა თეორიისთვის ყველაზე პროდუქტიული წელიწადი იყო. ამ პერიოდში აღმოაჩინა მან ჰეპტადეკაგონის აგების წესი (30 მარტს). ხოლო მისი განთქმული კვადრატული ურთიერთდამოკიდებულების კანონი აღმოაჩინა 8 აპრილს. ეს მარტივი კანონი მათემატიკოსებს საშუალებას აძლევს განსაზღვრონ ნებისმიერი კვადრატული განტოლების ამოხსნადობა მოდულურ არითმეტიკაში. მარტივ რიცხვთა თეორემა, ამოხსნილი 31 მაისს, საშუალებას იძლევა განისაზღვროს, თუ როგორ არის მარტივი რიცხვები განაწილებული რიცხვთა წრფეზე

§ 1.3. თვლის პოზიციური სისტემები.



10011

პირველი პოზიციური სისტემა შეიქმნა ბაბილონში დაახლოებით 2500-2000 წლებში ჩვენს წელთაღრიცხვამდე. ამ სისტემის ფუძე იყო 60, ანუ მასში 60 ციფრი იყო, სამოცობითი სისტემა ასევე გამოიყენება საათის მექანიზმში. ჩვენში გავრცელებული ათობითი სისტემა ევროპაში ინდოეთიდან შემოვიდა, სადაც ის VI საუკუნემდე შეიქმნა. მასში 10 ციფრი გამოიყენება 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. ამასთან რიცხვი იწერებოდა მარჯვნიდან მარცხნივ. ამ სისტემაში ინფორმაციას შეიცავს არა მხოლოდ ციფრი არამედ მისი პოზიციაც რიცხვის ჩანაწერში. უკიდურესი მარჯვენა ციფრი აღნიშნავს ერთეულების რაოდენობას, შემდეგი - ათეულების და ა.შ. ციფრის პოზიციას მისი თანრიგი ეწოდება და ყოველ მომდევნო თანრიგის წონა წინაზე 10-ჯერ მეტია.

როგორც იცით, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა, ამიტომ შეუძლებელია ყოველი მათგანისათვის განსხვავებული სიმბოლოს შერჩევა. პრაქტიკულად უფრო მოსახერხებელია ნატურალურ რიცხვთა ჩაწერის ეგრეთ წოდებული პოზიციური სისტემები. ეს გულისხმობენ სასრული რაოდენობის სიმბოლოთა მეშვეობით ჩაიწეროს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი, სიმბოლოთა ურთიერთმდებარეობის (პოზიციის) გათვალისწინებით. იმისდა მიხედვით, თუ რამდენ ძირითად სიმბოლოს ავირჩევთ, გვექნება რიცხვის ჩაწერის „ორობითი“; „რვაობითი“; „ათობითი“ და ა.შ. სისტემები ყველაზე უფრო გავრცელებულია **ათობითი სისტემა**, სადაც გამოიყენება Z_0 სიმრავლის ათი ელემენტი: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, რომელთაც **ციფრები** ეწოდება.

მაგალითად, რიცხვი 7256 შედგება ოთხი ციფრისაგან, რომლებიც თავისი მდებარეობის (პოზიციის) მიხედვით მიუთითებენ, რომ რიცხვი შედგება 6 ერთეულის, 5 ათეულის, 2 ასეულის და 7 ათასეულისაგან, ე.ი. რიცხვი 7256 გაშლილი ფორმით ასე წარმოიდგინება:

$7256 = 7\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 5\cdot10 + 6$

ათობითი სისტემის გარდა ხშირად გამოიყენება აგრეთვე აგრეთვე „ორობითი“ და „რვაობითი“ სისტემები.

ათობით სისტემაში მოცემული რიცხვის ჩაწერა სტანდარტული ფორმით; სტანდარტული ფორმით მოცემული რიცხვის ჩაწერა ათობით პოზიციურ სისტემაში.

ორობითი სისტემის შემოღება დაკავშირებულია ელექტრონულ-გამომთვლელი მანქანის ელემენტების ორ მდგრად მდგომარეობასთან – სადენი ან ატარებს დენს, ან არ ატარებს, რაც მხოლოდ ორი ძირითადი სიმბოლოს გამოყენების საშუალებას იძლევა. ამ სისტემაში ნებისმიერი რიცხვის ჩასაწერად გამოიყენება Z_0 სიმრავლის ორი ელემენტი:
0 და 1. მაგალითად, სისტემის ფუძე „ორი“ გამოისახება როგორც „10“. ამ რიცხვისათვის ერთის მიმატებით მიიღება 11. ე.ი. რიცხვი 3-ის ორობითი ჩანაწერი; კიდევ ერთი ერთეულის დამატებით მივიღებთ რიცხვს, რომლის ორობით სისტემაში ჩასაწერად საჭიროა ახალი თანრიგის დამატება, რის შედეგადაც მივიღებთ 100-ს, რიცხვი 4-ის ორობით ჩანაწერს და ა.შ. ნატურალურ რიცხვთა პირველი 15 ელემენტის ორობითი ჩანაწერი მოყვანილია შემდეგ ცხრილში*:

$1_{10} = 1_2$	$5_{10} = 101_2$	$9_{10} = 1001_2$	$13_{10} = 1101_2$
$2_{10} = 10_2$	$6_{10} = 110_2$	$10_{10} = 1010_2$	$14_{10} = 1110_2$
$3_{10} = 11_2$	$7_{10} = 111_2$	$11_{10} = 1011_2$	$15_{10} = 1111_2$
$4_{10} = 100_2$	$8_{10} = 1000_2$	$12_{10} = 1100_2$	

რიცხვის ათობითი სისტემიდან ორობითში გადაყვანის ალგორითმი სრულდება ფუძეზე – 2-ზე, მიმდევრობით გაყოფის გზით. მაგალითად 962-სთვის გვაქვს
962:2=481(0):2=240(1):2=120(0):2=60(0):2=30(0):2=15(0):2=7(1):2=3(1):2=1(1)
გაყოფის შედეგად მიღებული 0,1,0,0,0,0,1,1,1,1 ნაშთების მიმედვრობა, აღებული შებრუნებული რიგით, გვაძლევს ორობით სისტემაში რიცხვ 962-ის გამოსახულებას,

ე.ი. $962_{10} = 1111000010_2$.

აღნიშნული რიცხვი გაშლილი ფორმით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$1\cdot2^9+1\cdot2^8+1\cdot2^7+1\cdot2^6+0\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0$.

როგორც აქედან ჩანს **რიცხვის ორობითი ჩანაწერი შეიცავს ციფრთა გაცილებით მეტ რაოდენობას, ვიდრე ათობითი, რაც რიცხვის ზრდასთან ერთად უფრო შესამჩნევი ხდება.** მაგალითად, ადვილია შემოწმება, რომ $3851_{10} = 111100001011_2$.

სავსებით ანალოგიურად, რიცხვის ათობით სისტემიდან რვაობითში გადასაყვანად, სადაც გამოიყენება Z_0 სიმრავლის 8 ელემენტი: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, მივმართავთ ახალ ფუძეზე – 8-ზე მიმდევრობით გაყოფას: 962 :8=120(2):8=15(0):8=1(7)

ფრჩხილებში მითითებულია ნაშთი. ე.ი. $962_{10} = 1702_8$.

როგორც უკვე აღინიშნა, ელექტრონულ-გამომთვლელ მანქანაში რიცხვები ჩაიწერება ორობითი სისტემით, თუმცა მანქანაში ჩასაშვებად გამზადებული საწყისი მონაცემები ყოველთვის ათობით სისტემაშია მოცემული. მათი ორობით სისტემაში გადასაყვანად უფრო მოსახერხებელია ისინი ჯერ რვაობით სისტემაში ჩავწეროთ, შემდეგ კი თითოეული ციფრი შევცვალოთ ზემოთ მოყვანილი ცხრილის მეშვეობით ორობითი ჩანაწერით, ამასთან უნდა ვიგულისხმოთ, რომ თითოეულ ციფრს სამი თანრიგი (ტრიადა) შეესაბამება, გარდა შესაძლებელია უკიდურესი მარცხენა ციფრისა, თუ იგი ოთხზე ნაკლებია.

მაგალითად: რადგან 210=0102; 010=0002; 710=1112; 110=12, ამიტომ: $962_{10} = 1702_8 = 1.111.000.010_2$.

ძველი ფუძიდან ახალ ფუძეზე გადასვლის ოპერაციას „კოდირება“ ეწოდება, ხოლო შებრუნებულ ოპერაციას – „დეკოდირება“. დეკოდირების ოპერაცია სრულდება შემდეგნაირად:

$$1111000010_2 = 1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 +$$

$$+1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 512+256+128+64+0+0+0+0+2+0=962_{10}.$$

ან რვაობითი სისტემის გამოყენებით შეიძლება მისი შესრულება უფრო სწრაფად: $1\cdot 111\cdot 000\cdot 0102 = 1702_8 = 1\cdot 8^3 + 7\cdot 8^2 + 0\cdot 8^1 + 2\cdot 8^0 = 512+448+2=962_{10}$

ძირითადად სარგებლობენ ათობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვებით.

სავარჯიშოები

1. ჩაწერეთ გაშლილი ფორმით მოცემული რიცხვი

1) 327; **2)** 4029; **3)** 5203; **4)** 71002

2. ჩაწერეთ გაშლილი ფორმით ორობით სისტემაში მოცემული რიცხვი

1) 1101_2 **2)** 11111_2 **3)** 10101_2 **4)** 110010_2

3. ჩაწერეთ ორობით სისტემაში

1) 7; **2)** 9; **3)** 16; **4)** 60; **5)** 110; **6)** 129; **7)** 502; **8)** 813.

4. ჩაწერეთ ათობით სისტემაში რიცხვი

1) 1011_2 **2)** 11010_2 **3)** 100111_2 **4)** 11000110_2

5 . რომელია მეტი

1) 10001_2 თუ 19 **2)** 110101_2 თუ 51 **3)** 1001010_2 თუ 75 **4)** 111111_2 თუ 111

5) 10000000_2 თუ 100 **6)** 101010_2 თუ 43

6. რამდენ ციფრს შეიცავს მოცემული რიცხვის ჩანაწერი ორობით სისტემაში?

1) 18; **2)** 82; **3)** 128; **4)** 1023.

§ 1.4. ჩვეულებრივი წილადები. რაციონალური და ირაციონალური რიცხვები.

განსაზღვრება: $\frac{m}{n}$ სახის რიცხვებს, სადაც $m \in Z$ და $n \in N$, **რაციონალური რიცხვები** ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე Q ასოთი აღინიშნება. ცხადია, რომ $Z \subset Q$. თუ $m < n$, წილადს **წესიერი** ეწოდება, ხოლო თუ $m \geq n$ – არაწესიერი.

ათწილადები: წილადს, რომლის მნიშვნელია 10^n, სადაც $n \in N$, **ათწილადი** ეწოდება.

მაგალითად, $\frac{252}{100}$, $\frac{23}{100}$, $\frac{7}{10}$ ათწილადებია, რადგან $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ და $10 = 10^1$.

განსაზღვრება: უსასრულო ათწილადს, რომლის ერთი ან რამდენიმე ციფრი დაწყებული გარკვეული ადგილიდან, უცვლელად მეორდება ერთი და იმავე მიმდევრობით, **პერიოდული ათწილადი** ეწოდება, ხოლო ციფრს ან ციფრთა ერთობლიობას, რომელიც მეორდება **პერიოდი.**

უსასრულო პერიოდული ათწილადის ჩაწერისას, ხშირად პერიოდს ფრჩხილებში სვამენ. მაგალითად, 0,777... =0,(7); 3,545454...=3,(54); 4,41777...=4,41(7).

ირაციონალური რიცხვები

ზოგიერთი სიდიდეების გასაზომად საკმარისი არ არის რაციონალური რიცხვები. კერძოდ, არსებობენ მონაკვეთები, რომელთა სიგრძე რაციონალური რიცხვით არ გამოისახება.

ასეთია მაგალითად, იმ კვადრატის დიაგონალი, რომლის გვერდის სიგრძე ერთეულის ტოლია. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ ამ კვადრატის დიაგონალის სიგრძე რაციონალური რიცხვით გამოისახება, მაშინ იგი წარმოიდგინება $\frac{p}{q}$ უკვეცი წილადის სახით და მართებულია ტოლობა: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$

აქედან, $p^2 = 2q^2$, ამიტომ p^2 ლუწი რიცხვია და მაშასადამე, ლუწი იქნება p-ც (რადგან კენტი რიცხვის კვადრატი ყოველთვის კენტია). ე. ი. $p=2k$, სადაც $k \in N$ და $p = 2q^2$

ტოლობიდან მივიღებთ

$4k^2 = 2q \Rightarrow q = 2k^2$,

ე.ი. p ლუწი რიცხვია და ლუწი იქნება q-ც. მივიღეთ, რომ p და q ლუწი რიცხვებია, ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ $\frac{p}{q}$ უკვეცი წილადია.

ამრიგად, ზემოთ აღნიშნული კვადრატის დიაგონალის სიგრძის გამოსახვა რაციონალური რიცხვით შეუძლებელია. როგორც ვნახეთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. აანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ არ არსებობს რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატებია 3, 5, 6, 7 და ა. შ. ასეთი რიცხვები ეკუთვნიან ე. წ. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს. რადგან ასეთი რიცხვები არ არიან რაციონალური, ამიტომ მათი წარმოდგენა უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით შეუძლებელია. მაგალითად ირაციონალური რიცხვებია $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, და ა.შ.

განსაზღვრება: უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს ირაციონალური რიცხვი ეწოდება. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე I ასოთი აღინიშნება.

მაგალითად, ირაციონალურია უსასრულო ათწილადი 0,101001000100001..., რომლის ჩანაწერში პირველი 1-იანის შემდეგ არის ერთი ნული, მეორე 1-იანის შემდეგ–ორი ნული და ა. შ.

განსაზღვრება: რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანებას **ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე** ეწოდება და R ასოთი აღინიშნება. ცხადია, რომ ზემოთ განხილულ N, Z_0, Z, Q და R რიცხვთა სიმრავლეებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება: $N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R$.

სავარჯიშოები

1. გამოთვალე:

1) $(3570 \cdot 100 - 25000) : 1000$,
2) $(550 \cdot 10 + 27 \cdot 100) : 410$,
3) $200 : (100 - 50) + 800 : (500 - 400)$,
4) $30 \cdot (200 - 100) + 20 \cdot (350 - 150)$.
5) $(9+1)^2 - (9-1)^2$,
5) $(15-5)^2 + (15+5)^2$,
7) $(13-17)^2 + (27-17)^2$,
8) $(29-17)^2 - (10+2)^2$.

2. გამოიანგარიშე

ა) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$ ბ) $1\frac{3}{5} - \frac{4}{7}$ გ) $2\frac{8}{15} + 6\frac{1}{3}$

დ) $\frac{(-4)^4}{(-4)^3}$; ე) $\frac{64^5}{16^3 \cdot 32^2}$;

ვ) $0{,}75 + \left(1\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{14} - 0{,}2\right) : \frac{2}{5}$;

ზ) $[5{,}44 + (-8{,}16 : 4) - (-1{,}48 - 1{,}12)] : (-15)$

თ) $\left(25\frac{7}{8} + 14\frac{1}{3} : 9\frac{5}{9} - 6\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{10}\right) : 5\frac{7}{16} + 2\frac{1}{5} \cdot 2\frac{3}{11}$

3. ა) რას უდრის სხვაობა უმცირეს შვიდნიშნა და უდიდეს ექვსნიშნა რიცხვებს შორის?
ბ) რამდენჯერაა მეტი უმცირესი ხუთნიშნა რიცხვი უმცირეს ორნიშნა რიცხვზე?
გ) რამდენჯერაა ნაკლები უდიდესი სამნიშნა რიცხვი უდიდეს ექვსნიშნა რიცხვზე?

დ) რამდენჯერაა ნაკლები უმცირესი სამნიშნა რიცხვი უმცირეს ხუთნიშნა რიცხვზე?

4. მოცემული ათწილადი ჩაწერეთ წილადის სახით

1) 0,7;	2) 0,8;	3) 0,05;	4) 0,16;	5) 0,125;	6) 0,375;
7) 1,5;	8) 3,8;	9) 5,16;	10) 11,25;	11) 15,16;	12) 50,15

5. ჩამოთვლილი რიცხვებიდან 202, 312, 425, 672, 1059 რომელი იყოფა
ა)3-ზე ბ) 5-ზე, გ) 6-ზე

§1.5. *პროპორციული დამოკიდებულება. პირდაპირპროპორცია. უკუპროპორცია.* პროცენტი

განსაზღვრება: ორი ფარდობის ტოლობას $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b\neq 0, d\neq 0)$, **პროპორცია** ეწოდება. *a*-სა და *d*-ს პროპორციის კიდურა წევრები, ხოლო *b*-სა და *c*-ს შუა წევრები ეწოდება.

თუ პროპორციის ორივე მხარეს გავამრავლებთ *bd* –ზე, მივიღებთ *ad=bc*. ეს ტოლობა გამოსახავს **პროპორციის ძირითად თვისებას: პროპორციის კიდურა წევრების ნამრავლი უდრის შუა წევრების ნამრავლს.**

პროპორციის ძირითადი თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ პროპორციის შუა წევრი უდრის კიდურა წევრების ნამრავლს გაყოფილს მეორე შუა წევრზე, ხოლო კიდურა წევრი კი–შუა წევრების ნამრავლს გაყოფილს მეორე კიდურა წევრზე. იგივე თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ პროპორციაში შესაძლებელია გადავანაცვლოთ მისი შუა ან კიდურა წევრები. მაგალითად, პროპორციიდან $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ მიიღება შემდეგი პროპორციები: $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

პროპორციული დაყოფა: დავყოთ რაიმე *a* რიცხვი $m_1, m_2, \ldots, m_k$ დადებითი რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად, ნიშნავს, ვიპოვოთ ისეთი $a_1, a_2, \ldots, a_k$ რიცხვები, რომელთა ჯამი *a*–ს ტოლია და შესრულებულია პირობა:

$$\frac{a_1}{m_1}=\frac{a_2}{m_2}=\ldots\frac{a_k}{m_k}$$

რაიმე რიცხვი რომ დავყოთ მოცემული რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად, საჭიროა იგი გავყოთ მოცემული რიცხვების ჯამზე და განაყოფი გავამრავლოთ თითოეულზე ამ რიცხვებიდან.

განასხვავებენ პირდაპირპროპორციულ და უკუპროპორციულ სიდიდეებს. თუ ერთი სიდიდის რამოდენიმეჯერ ზრდა იწვევს მეორე სიდიდის იმდენჯერვე გაზრდას მაშინ ეს სიდიდეები **პირდაპირპროპორციულია**. მაგალითად გავლილი მანძილი და დრო პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია.

ხოლო თუ ერთი სიდიდის რამოდენიმეჯერ ზრდა იწვევს მეორე სიდიდის იმდენჯერვე შემცირებას მაშინ ეს სიდიდეები **უკუპროპორციულია.** მაგალითად სიჩქარე და დრო უკუპროპორციული სიდიდეებია.

მაგალითი: რიცხვი 72 დავყოთ 2-ის, 3-ისა და 7-ის პროპორციულ ნაწილებად.

ამოხსნა: ვთქვათ, საძიებელი რიცხვებია a_1, a_2 და a_3 , მაშინ

$a_1=\frac{72\cdot 2}{2+3+7}=12$ $a_2=\frac{72\cdot 3}{12}=18$ $a_3=\frac{72\cdot 7}{12}=42$

პროცენტები: რიცხვის მეასედ ნაწილს მისი პროცენტი ეწოდება. რიცხვის ერთი პროცენტი 1% სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო *k* პროცენტი– *k* % სიმბოლოთი.

პროცენტებზე განიხილება შემდეგი სამი ტიპის ამოცანა:

1. რიცხვის რაიმე პროცენტის პოვნა: იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რიცხვის *k* %, საჭიროა ეს რიცხვი გავამრავლოთ $\frac{k}{100}$– ზე.

მაგალითად, 150-ის 12% უდრის 18-ს, რადგანაც $150\cdot\frac{12}{100}=18$.

2. რიცხვის პოვნა პროცენტის საშუალებით: იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რომელი რიცხვის *k* %-ს წარმოადგენს მოცემული რიცხვი, საჭიროა იგი გავამრავლოთ $\frac{100}{k}$ – ზე .

მაგალითად, რიცხვი, რომლის 12% არის 18, უდრის 150-ს, რადგან $18 \cdot \frac{100}{12} = 150$

3.ორი რიცხვის პროცენტული ფარდობის პოვნა: იმისათვის, რომ დავადგინოთ ერთი რიცხვი მეორის რამდენ პროცენტს შეადგენს, საჭიროა მათი ფარდობა გავამრავლოთ 100-ზე. მაგალითად: 18 წარმოადგენს 150-ის 12%-ს, რადგან $\frac{18}{150} \cdot 100 = 12$

ხშირად გვხვდება ამოცანები პროცენტული ცვლილების გამოთვლაზე,

მაგალითად: ტელევიზორის ფასი იყო 400 ლარი და ფასდაკლების შემ[illegible] 240 [illegible] რამდენი პროცენტით გაიაფდა ტელევიზორი?

ამოხსნა: 400-240=160 ლარით გაიაფდა, $\frac{160}{400} 100 = 40\%$, გაიაფდა 40%-ით.

სავარჯიშოები:

1. რიცხვი 60 დაყავი 2-ის, 3-ის და 7-ის პროპორციულ ნაწილებად.
2. გამოიანგარიშე რიცხვი, რომლის 12%-ია **36.**
3. 1) იპოვეთ 60-ის 15%; 2) იპოვეთ 110-ის 40%;
   3) იპოვეთ 82-ის 20%;4) იპოვეთ 17,6-ის 5%.
4. **1)** იპოვეთ რიცხვი, რომლის 0,02 ნაწილი არის 62,4;
   2) იპოვეთ რიცხვი, რომლის 0,3 ნაწილი არის 27,69.
5. 1) იპოვეთ რიცხვი, რომლის 15% არის 135;
   2) იპოვეთ რიცხვი, რომლის 20% არის 62;
   3) იპოვეთ რიცხვი, რომლის 4,5% არის 22,5;
6. 150 დაყავით 7-ისა და 8-ის პროპორციულ ნაწილებად და იპოვეთ ამ ნაწილებიდან უმცირესი.
7. 260 დაყავით 11-ისა და 15-ის პროპორციულ ნაწილებად და იპოვეთ ამ ნაწილებიდან უდიდესი.
8. 140 დაყავით 0.3-ისა და 0,4-ის პროპორციულ ნაწილებად და იპოვეთ ამ ნაწილებიდან უდიდესი.
9. 150 დაყავით 13; 11 და 6-ის პროპორციულ ნაწილებად და იპოვეთ ამ ნაწილებიდან უმცირესი.
10. 60 დაყავით 0,4; 0,6 და 2-ის პროპორციულ ნაწილებად და იპოვეთ ამ ნაწილებიდან უმცირესი.
11. 4 მუშა სამუშაოს ასრულებს 12 დღეში; რამდენი დღე დასჭირდება 8 მუშას იგივე სამუშაოს ნახევრის შესასრულებლად?
12. სოფელში თითოეულ ოჯახს ჰყავს ძროხა ან ცხენი. ძროხა ჰყავს ოჯახების 80%-ს, ხოლო ცხენი – 45%-ს; აგრეთვე ცნობილია, რომ სოფელში მცხოვრებ 40 ოჯახს ერთდროულად ჰყავს ძროხაც და ცხენიც. სულ რამდენი ოჯახია სოფელში? რამდენ ოჯახს ჰყავს ცხენი და რამდენს ძროხა? რამდენს ჰყავს მხოლოდ ცხენი და მხოლოდ ძროხა?
13. სტუდენტმა იყიდა ორი სხვადასხვა წიგნი, სულ გადაიხადა 6 ლარი; თუ პირველი წიგნი იქნება 25%-ით უფრო ძვირი, ხოლო მეორე – 50%-ით უფრო ძვირი, მაშინ პირველი წიგნის ფასი 2 ლარით უფრო მეტი იქნება მეორე წიგნის ფასზე. რა ღირს წიგნები?
14. ორმა მუშამ გარკვეული სამუშაო შეასრულა. პირველმა იმუშავა 8 საათი, მეორემ 6 საათი. ამ სამუშაოსათვის მათ მთლიანად 560 ლარი მიიღეს. რამდენი ლარი მიიღო პირველმა მუშამ?
   ა) 240 ბ) 320 გ) 360 დ) 400
15. ავტომობილს 80 კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობისას, 100 კმ მანძილის გასავლელად სჭირდება 7 ლ ბენზინი. რამდენ ლიტრ ბენზინს წვავს ეს ავტომობილი 2 საათში იგივე სიჩქარით მოძრაობისას?
   ა) 13 ბ) 5,6 გ) 11,2 დ) 12,4
16. საერთო წიგნის გამოსაცემად გელამ 2000 ლარი დახარჯა, გივიმ კი - 1500 ლარი. წიგნის რეალიზაციიდან შემოსულ თანხას ისინი ამ დანახარჯებს პროპორციულად ინაწილებენ. რამდენ ლარს მიიღებს გივი სექტემბერში, თუ წიგნის გაყიდვიდან

შემოსული თანხა ამ თვეში 700 ლარია?

ა) 200 ბ) 300 გ) 350 დ) 400

17. პირველ დღეს გაიყიდა მაღაზიაში არსებული პროდუქციის 40%, მეორე დღეს კი დარჩენილის $^{1}/_{3}$ ნაწილი. მაღაზიაში არსებული პროდუქციის რამდენი პროცენტი გაიყიდა ამ ორი დღის განმავლობაში?

§1.6. რიცხვითი გამოსახულებანი. ცვლადის შემცველი გამოსახულებანი

ბუნებაში ვხვდებით სხვადასხვა ტიპის სიდიდეებს, ზოგი მათგანი მოცემულ პირობებში ინარჩუნებს ერთი და იგივე რიცხვით მნიშვნელობას, ზოგი კი იცვლება. სიდიდეს ეწოდება მუდმივი, თუ იგი მოცემულ პირობებში მხოლოდ ერთ მნიშვნელობას ღებულობს. **მაგალითად,** თანამედროვე კალენდარით კვირაში დღეების რიცხვი მუდმივია და უდრის 7-ს, მუდმივია აგრეთვე სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი და ა.შ. სიდიდეს ეწოდება ცვლადი, თუ იგი მოცემულ პირობებში სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობებს ღებულობს. მაგალითად ჰაერის ტემპერატურა, უჰაერო სივრცეში თავისუფალი ვარდნის სიჩქარე, და ა.შ. ცვლადი სიდიდეებია.
განსაზღვრება: რიცხვთა და იმ ნიშანთა ერთობლიობას, რომლებიც გვიჩვენებენ, თუ რა მოქმედებები და რა მიმდევრობით უნდა იქნას შესრულებული ამ რიცხვებზე, **რიცხვითი გამოსახულება** ეწოდება.
მაგალითად, რიცხვითი გამოსახულებებია:(23,4•3)+21,9; 2•1,2-(45-2•3,1):(8-2•4)
მითითებული მოქმედებების შესრულებით მივიღებთ რიცხვს, რომელსაც **რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა** ეწოდება. მოყვანილი რიცხვითი გამოსახულებებიდან მეორეს აზრი არა აქვს, რადგან მოქმედებათა შესრულების პროცესში გვხვდება ნულზე გაყოფა. საზოგადოდ, ყოველ რიცხვით გამოსახულებას აქვს ერთადერთი რიცხვითი მნიშვნელობა ან არა აქვს აზრი.
განსაზღვრება: გამოსახულებას, რომელიც ცვლადს შეიცავს, **ცვლადის შემცველი გამოსახულება** ეწოდება. ცვლადის შემცველი გამოსახულების მნიშვნელობა დამოკიდებულია მასში შემავალი ცვლადების რიცხვით მნიშვნელობებზე. მაგალითად: $\frac{x+3y}{x-2y}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა $x=3$ და $y=1$, არის 6, ხოლო როცა $x=4$ და $y=2$, გამოსახულებას აზრი არა აქვს. იმისდა მიხედვით, თუ რამდენ ცვლადს შეიცავს გამოსახულება, მას შეიძლება აზრი ჰქონდეს (განსაზღვრული იყოს) რიცხვთა რაიმე სიმრავლეზე, რიცხვთა წყვილების, სამეულების და ა.შ. სიმრავლეზე. ზემოთ განხილული გამოსახულება განსაზღვრულია ყველა იმ (x,y) წყვილთა სიმრავლეზე, სადაც $x\neq 2y$.
ერთიდაიმავე ცვლადების შემცველი გამოსახულებების მნიშვნელობებს, გამოთვლილს ამ ცვლადების ერთი და იგივე რიცხვითი მნიშვნელობებისათვის, **შესაბამისი მნიშვნელობები** ეწოდება. მაგალითად, xy და $x-y$ გამოსახულებათა შესაბამისი მნიშვნელობები როცა $x=3$ $y=2$ არის 6 და 1.
განსაზღვრება: ორ გამოსახულებას იგივურად ტოლი ეწოდება რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლეზე ორივეს აზრი აქვს და მათი შესაბამისი მნიშვნელობები ტოლია.
მაგალითად, a^2-b^2 და $(a-b)(a+b)$ იგივურად ტოლი გამოსახულებებია, რადგან მათი შესაბამისი მნიშვნელობები ტოლია. ორ იგივურად ტოლ გამოსახულებას, შეერთებულს ტოლობის ნიშნით, იგივეობა ეწოდება. ამრიგად, $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ იგივეობას წარმოადგენს. იგივეობას წარმოადგენს აგრეთვე ყოველი ჭეშმარიტი რიცხვითი ტოლობა. მაგალითად: 2(5+6)=10+12. გამოსახულების შეცვლას მისი იგივურად ტოლი გამოსახულებით იგივური გარდაქმნა ეწოდება.

სავარჯიშოები:

1. იპოვე რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა:

   ა) 215, 5:0,5+ (12,8-1,25)

   ბ) $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right)$

2. შეკვეცე წილადი და იპოვე ცვლადიანი გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$; თუ $a=1,5$, $b=2$ ბ) $(a^2-2a+1):\frac{2a^2-2}{4a^2+4a}$ თუ $a=3,5$;

გ) $\frac{x^2-y^2}{(y-x)^2}$ თუ x=4, y=1,2

3. გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{b^2-ab}\right).\frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}$; ბ) $\frac{ab+ac+b^2+bc}{ax+ay+bx+by}$; გ) $(a^2-2a+1):\frac{2a^2-2}{4a^2+4a}$

4. მას შემდეგ, რაც გაჩერებაზე ავტობუსიდან 5 მგზავრი ჩავიდა და 7 მგზავრი ამოვიდა, ავტობუსში 37 მგზავრი აღმოჩნდა. რამდენი მგზავრი იყო ავტობუსში ამ გაჩერებამდე?

ა) 32 ბ) 33 გ) 34 დ) 35

5. მას შემდეგ, რაც აუდიტორიიდან 9 სტუდენტი გავიდა და 5 შემოვიდა, აუდიტორიაში 67 სტუდენტი აღმოჩნდა. რამდენი სტუდენტი იყო აუდიტორიაში თავდაპირველად?

ა) 53 ბ) 69 გ) 71 დ) 81

6. ტურისტებმა მარშრუტი ხუთ დღეში გაიარეს. პირველ დღეს მათ გაიარეს 12კმ, ხოლო ყოველ მომდევნო დღეს ისინი წინა დღესთან შედარებით 3კმ-ით მეტ მანძილს გადიოდნენ. იპოვეთ მარშრუტის სიგრძე.

ა) 88 კმ ბ) 90 კმ გ) 92 კმ დ) 100 კმ

7. სალარო ხელფასებს ხუთი დღის განმავლობაში არიგებდა. ყოველ მომდევნო დღეს ხელფასის ამღებთა რაოდენობა წინა დღესთან შედარებით 180-ით მცირდებოდა. ბოლო დღეს ხელფასი აიღო 220-მა ადამიანმა სულ რამდენმა ადამიანმა აიღო ხელფასი ამ ხუთი დღის განმავლობაში?

ა) 2600 ბ) 2900 გ) 3000 დ) 3200

8. მაღაზიაში შარვლები რამდენიმე დღის განმავლობაში იყიდებოდა. პირველ დღეს გაიყიდა 90 შარვალი. ყოველ მომდევნო დღეს იყიდებოდა 10 შარვლით ნაკლები, ვიდრე წინა დღეს. ბოლო დღეს უკანასკნელი 10 შარვალი გაიყიდა. სულ რამდენი შარვალი გაყიდულა მაღაზიაში ამ დღეების განმავლობაში?

ა) 420 ბ) 440 გ) 450 დ) 460

9. საჭადრაკო ტურნირში მონაწილეთა რაოდენობა ყოველი ტურის შემდეგ ნახევრდებოდა. რამდენი მონაწილე იყო თავიდან ტურნირში, თუ მეხუთე ტურში მონაწილეობდა 8 სპორტსმენი?

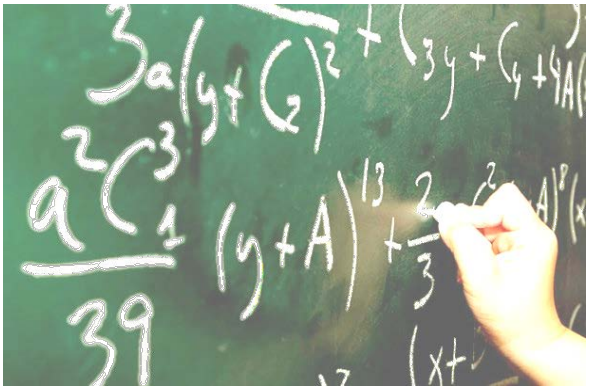
ა) 48 ბ) 64 გ) 96 დ) 128

10. მოლარემ პირველ დღეს გაყიდა სპექტაკლის 8 ბილეთი, ხოლო ყოველ მომდევნო დღეს ყიდდა ბილეთების იმაზე ორჯერ მეტ რაოდენობას, რამდენსაც წინა დღეს. რამდენი ბილეთი გაყიდა მოლარემ ოთხი დღის განმავლობაში?

ა) 140 ბ) 248 გ) 56 დ) 120

11. სახლის შესაღებად ხუთი ფერის საღებავი შეიძინეს წითელი, მწვანე, ლურჯი, ყვითელი და თეთრი, თითოეული 10 ლიტრი. წითელი საღებავი შეიძინეს 5ლ ტევადობის ქილებით, მწვანე – 2,5ლ ტევადობის ქილებით, ლურჯი–2ლ ტევადობის ქილებით, ყვითელი – 1ლ ტევადობის ქილებით, ხოლო თეთრი 0,5ლ ტევადობის ქილებით. სულ რამდენი ქილა საღებავი შეუძენიათ

ა) 42 ბ) 41 გ) 34 დ) 36



§1.7. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები

დავამტკიცოთ ზოგიერთი მათგანი, რომელთაც შემოკლებული გამრავლების ფორმულები ეწოდება.

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ე.ი. $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$.

ამრიგად, ორი გამოსახულების ჯამის კვადრატი უდრის პირველის კვადრატს, პლიუს გაორკეცებული ნამრავლი პირველისა მეორეზე, პლიუს მეორე გამოსახულების კვადრატი.

2. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

ე.ი. $\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$.

ამრიგად, ორი გამოსახულების სხვაობის კვადრატი უდრის პირველის კვადრატს, მინუს გაორკეცებული ნამრავლი პირველისა მეორეზე, პლიუს მეორე გამოსახულების კვადრატი.

3. $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 =$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

ე.ი. $\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$.

ამრიგად, ორი გამოსახულების ჯამის კუბი უდრის პირველის კუბს, პლიუს გასამკეცებული ნამრავლი პირველის კვადრატისა მეორეზე, პლიუს გასამკეცებული ნამრავლი პირველისა მეორის კვადრატზე, პლიუს მეორე გამოსახულების კუბი.

4. $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 =$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,

ე.ი. $\mathbf{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$.

ამრიგად, ორი გამოსახულების სხვაობის კუბი უდრის პირველის კუბს, მინუს გასამკეცებული ნამრავლი პირველის კვადრატისა მეორეზე, პლიუს გასამკეცებული ნამრავლი პირველისა მეორის კვადრატზე, მინუს მეორე გამოსახულების კუბი.

5. $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

ე.ი. $\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$.

ამრიგად, ორი გამოსახულების კვადრატების სხვაობა უდრის ამავე გამოსახულებების ჯამის ნამრავლს მათსავე სხვაობაზე.

6. $(a + b)(a2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$

ე.ი. $\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$.

ამრიგად, ორი გამოსახულების კუბების ჯამი უდრის მათ ჯამს, გამრავლებულს მათი სხვაობის არასრულ კვადრატზე.

7. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

ე.ი. $\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$.

ამრიგად, ორი გამოსახულების კუბების სხვაობა უდრის მათ სხვაობას, გამრავლებულს მათი ჯამის არასრულ კვადრატზე.

სავარჯიშოები:

1. გაამარტივე:

ა) $\frac{a-b}{4(b-a)^2}$; ბ) $\frac{(a+b)^2}{a^2+2ab+b^2}$; გ) $\frac{3(a-3b)^3}{4a-12b}$

2. გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{b^2-ab}\right).\frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}$; ბ) $\frac{ab+ac+b^2+bc}{ax+ay+bx+by}$; გ) $(a^2-2a+1):\frac{2a^2-2}{4a^2+4a}$

§1.8. ზომის ერთეულები

ადამიანს ხშირად ჭირდება რაიმეს გაზომვა. გაზომვის გარეშე იგი ვერ შეძლებს სახლის აშენებას, ტანსაცმლის შეკერვას, მანქანის გაკეთებას. ჩვენ ვზომავთ ისეთ სიდიდეებს, როგორიცაა დრო, ტემპერატურა, სიგრძე, მოცულობა. სიდიდე, რომ გაზომონ, ამისათვის მას ადარებენ ზომის რაიმე ერთეულს. მაგალითად, თუ რაიმე მილის სიგრძის გაზომვა გინდათ, უნდა აიღოთ ცნობილი სიგრძის მქონე ჯოხი, ან ძაფი და დააკვირდით, რამდენჯერ მოთავსდება ჯოხი ან ძაფი მილის სიგრძის შესაბამის მონაკვეთში. თუ გინდათ, რომ თქვენს მიერ გაზომილი სიდიდის შესახებ ყველას ერთგვაროვანი წარმოდგენა შეექმნას, საჭიროა ისარგებლოთ ზომის საყოველთაოდ აღიარებული ერთეულებით.

საზომთა მეტრულ სისტემაში სიგრძის ძირითად ერთეულად მიღებულია მეტრი. დანარჩენი ერთეულები მიიღება ძირითადი ერთეულისგან 10-ჯერ, 100-ჯერ, 1000-ჯერ და ა.შ. გადიდებით ან შემცირებით. ამ ერთეულების სახელწოდებები იქმნება თავსართების გამოყენებით. ერთეულის 10-ჯერ შემცირებისას იყენებენ თავსართს „დეცი“, 100-ჯერ შემცირებისას - „სანტი“, 1000-ჯერ შემცირებისას - „მილი“. ერთეულის 10-ჯერ გადიდებისას იყენებენ თავსართს „დეკა“, 100-ჯერ გადიდებისას - „ჰექტო“, 1000-ჯერ გადიდებისას - „კილო“. მაგალითად, მეტრის მეათედ ნაწილს ეწოდება „დეციმეტრი“, მეასედ ნაწილს კი - „სანტიმეტრი“. მეტრზე 1000-ჯერ დიდ სიდიდეს ეწოდება „კილომეტრი“.

თითქმის იგივე წესები მოქმედებს მასის ერთეულების სახელწარმოქმნაშიც. ყველაზე გავრცელებული ერთეულია კილოგრამი. მის მეათასედ ნაწილს ეწოდება გრამი, ხოლო გრამზე 1000-ჯერ ნაკლებ ერთეულს მილიგრამი. დიდი მასების გასაზომად იყენებენ ერთეულებს - ტონა (1000 კილოგრამი) და ცენტნერი (100 კილოგრამი).

ზომის ერთეულებს შორის არსებობს შემდეგი სახის თანაფარდობები:

1 მ = 10დმ = 100 სმ;	1 კმ = 1000მ;
1 $მ^2$ = 100 $დმ^2$ = 10000 $სმ^2$;	1 $კმ^2$ = 1000000 $მ^2$; 1 ჰა = 10000 $მ^2$.
1 $მ^3$ = 1000 $დმ^3$ = 1000000 $სმ^3$;	1 ლიტრი = 1 $დმ^3$ = 1000 $სმ^3$.
1 ტ = 1000 კგ,	1 კგ = 1000 გ.
1 კვირა = 7 დღე,	1 დღე-ღამე = 24 სთ,
1 სთ = 60 წთ.	1 წთ = 60 წმ,
1 წელიწადი = 365 დღე-ღამე,	1 საუკუნე = 100 წელიწადი.
1 კმ/სთ = $\frac{5}{18}$ მ/წმ	1 მ/წმ = $\frac{18}{5}$ კმ/სთ

სავარჯიშოები:

გამოსახე

1. 1) 0,6 მ სმ-ში; 2) 25 დმ მ-ში; 3) 0,25 კმ დმ-ში; 4) 15 დმ სმ-ში.
2. 1) 17 სმ მ-ში; 2) 150 სმ მ-ში; 3) 25 მ კმ-ში; 4) 30 დმ კმ-ში
3. 1) 4 $მ^2$ $სმ^2$-ში; 2) 2,5 $კმ^2$ $მ^2$-ში; 3) 0,2 ჰა $დმ^2$-ში; 4) 2000 $მ^2$ ჰა-ში.
4. 1) 0,02 $მ^3$ $დმ^3$-ში; 2) 3,2 $მ^3$ ლიტრებში; 3) 0,005 $მ^3$ ლიტრებში; 4) 0,003 $მ^3$ $სმ^3$.
5. 1) 0,04 კგ გრამებში; 2) 120 კგ ტონებში; 3) 150 გრ- კგ-ში; 4) 2500 გრ ტონებში.
6. 1) 25 წთ-წამებში; 2) $\frac{3}{7}$ კვირა-საათებში; 3) 2 დღე-ღამე -წუთებში;

4) 3 კვირა წუთებში.

7. 1) 36 კმ/სთ მ/წმ-ში; 2) 0,18 კმ/სთ მ/წმ-ში; 3) 15 მ/წმ კმ/სთ-ში;

4) 0,5 მ/წმ კმ/სთ-ში

8. რამდენი გრამია:

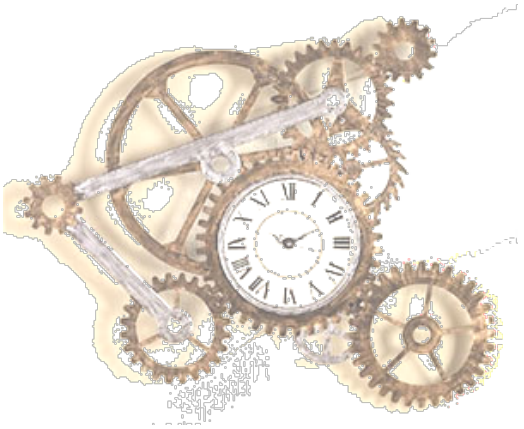
2 კილოგრამი? 12 კილოგრამი? 3 კილოგრამი 400 გრამი?

9. კილოგრამის მერამდენედი ნაწილია:

1 გრამი? 10 გრამი? 200 გრამი?

10. იყიდეს სამი 250- გრამიანი და რამდენიმე 500-გრამიანი ქილა მაწონი. რამდენი 500-გრამიანი ქილა უყიდიათ, თუ სულ შეიძინეს 2 კილოგრამი და 250 გრამი მაწონი?

11. 1 კილოგრამი შაქარი ღირს 2 ლარი. რა ეღირება 400 გრამი შაქარი?



§1.9.მასშტაბი

ყოველ თქვენგანს უნახავს, რუკა. ისიც იცით რომ ის დედამიწის ცალკეული ადგილების ერთგვარ „მოდელს“ წარმოადგენს. დედამიწის ზედაპირის გარკვეული ნაწილების რეალურ ზომებს ქაღალდზე, ცხადია, შემცირებულად გამოსახავენ. მაგალითად, 1000 მეტრი სიგრძის მონაკვეთი ზოგიერთ რუკაზე 1 სანტიმეტრი სიგრძის მონაკვეთით არის გამოსახული. 1000 მეტრი=100 000 სანტიმეტრს. მაშასადამე, რეალური 100 000-ჯერ არის შემცირებული. რიცხვ 1/100 000 - ს რუკის მასშტაბს უწოდებენ. ყოველ რუკაზეა მითითებული მასშტაბი. ის დამოკიდებულია რუკის სასურველ ზომაზე და გამოსასახავი ტერიტორიის ზომებზე. ასევე შესაძლებელია მანძილის შემცირება კი არა გადიდება იყოს საჭირო რეალური ზომების ქაღალდზე გადასატანად. მაგალითად: 1000:1 ნიშნავს რეალური ზომები 1000-ჯერაა გადიდებული.

ვთქვათ, რუკაზე A და B პუნქტებს შორის მანძილი 8 სანტიმეტრია. ვიპოვოთ მანძილი ამ პუნქტს შორის, თუ რუკის მასშტაბია 1/100000.

მასშტაბის მნიშვნელობა მიგვითითებს, რომ რუკაზე 1 სანტიმეტრიან მონაკვეთს რეალურ ვითარებაში შეესაბამება 100 000 სანტიმეტრი, ანუ 1 კილომეტრი. პროპორციით ადვილად დაადგენთ, რომ 8 სანტიმეტრს შეესაბამება 8 კილომეტრი. მაშასადამე, ორ პუნქტს შორის მანძილი 8 კილომეტრი ყოფილა.

სავარჯიშოები:

1. რამდენი სანტიმეტრია: 2 მეტრი, 3 მეტრი და 20 სანტიმეტრი, 5 დეციმეტრი.
2. რამდენი სანტიმეტრია: 20 მილიმეტრი, 50 მილიმეტრი, 125 მილიმეტრი.
3. რამდენი მეტრია: 2 კილომეტრი, 8 კილომეტრი, 5 კილომეტრი და 50 მეტრი.
4. მეტრის მერამდენედი ნაწილია სანტიმეტრი? მილიმეტრი?
5. კილომეტრის მერამდენედი ნაწილია მეტრი? 100 მეტრი? 2 დეციმეტრი?
6. რეალურ ვითარებაში 100000 სანტიმეტრიანი მონაკვეთი რუკაზე 2 სანტიმეტრს იკავებს. იპოვეთ რუკის მასშტაბი
7. რამდენი სანტიმეტრია: 2 მეტრი, 3 მეტრი და 20 სანტიმეტრი, 5 დეციმეტრი.
8. რამდენი სანტიმეტრია: 20 მილიმეტრი, 50 მილიმეტრი, 125 მილიმეტრი.
9. რამდენი მეტრია: 2 კილომეტრი, 8 კილომეტრი, 5 კილომეტრი და 50 მეტრი.
10. მეტრის მერამდენედი ნაწილია სანტიმეტრი? მილიმეტრი?

11. კილომეტრის მერამდენედი ნაწილია მეტრი? 100 მეტრი? 2 დეციმეტრი?
12. რეალურ ვითარებაში 100000 სანტიმეტრიანი მონაკვეთი რუკაზე 2 სანტიმეტრს იკავებს. იპოვეთ რუკის მასშტაბი
13. თბილისსა და საგარეჯოს შორის 36 კილომეტრია, რუკაზე კი ეს მანძილი 2 სანტიმეტრიანი მონაკვეთითაა გამოსახული. იპოვეთ რუკის მასშტაბი
14. ორ ქალაქს შორის მანძილი 650 კილომეტრია. რა სიგრძის იქნება რუკაზე ამ ქალაქებს შორის სარკინიგზო ხაზის აღმნიშვნელი მონაკვეთი, თუ რუკის მასშტაბად ავირჩევთ 1:10000000-ს?
15. რუკაზე ორ ქალაქს შორის მანძილი 5 სანტიმეტრია. რა მანძილია ამ ქალაქებს შორის სინამდვილეში, თუ რუკის მასშტაბია 1/10000000?
16. გაზომეთ საკლასო აუდიტორიის სიგრძე და სიგანე. დახაზეთ რვეულში ამ ოთახის გეგმა (ოთახი გამოსახეთ მართკუთხედის სახით, რომლის ზომები 100-ჯერაა შემცირებული).
17. რუკაზე ქალაქებს შორის მანძილი 18 სმ-ია; რა მანძილია სინამდვილეში ამ ქალაქებს შორის, თუ მოცემული რუკის მასშტაბია 1 : 500 000

კითხვები თვითშემოწმებისთვის

1. როგორ განისაზღვრება სიმრავლე?
2. დაასახელე სიმრავლის მოცემის ხერხები.
3. რას ეწოდება სიმრავლეთა თანაკვეთა?
4. რას ეწოდება სიმრავლეთა გაერთიანება?
5. რამდენ ელემენტიანია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე?
6. რამდენი ელემენტისგან უნდა შედგებოდეს სიმრავლე, რომ მას მხოლოდ ორი ქვესიმრავლე ჰქონდეს?
7. რომელ სიმრავლეს აქვს მხოლოდ ერთი ქვესიმრავლე?
8. როგორ მოიცემა რაციონალური რიცხვი? ირაციონალური რიცხვი?
9. როგორ უნდა დაადგინო რუკის მიხედვით რეალური მანძილი ორ პუნქტს შორის? პასუხი ახსენი.
10. რაში მდგომარეობს პროპორციის ძირითადი თვისება?
11. ჩამოთვალე სიგრძის საზომი ერთეულები.
12. როგორ იცვლება რეალური ზომები თუ რუქის მასშტაბია: 300:1; 1:1000; 50000:1
13. რა ურთიერთკავშირია რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს და მთელ რიცხვთა სიმრავლეს შორის?
14. როგორ ჩაიწერება ირაციონალური რიცხვი?
15. ახსენი, როგორ უნდა გადაიყვანოთ რიცხვი 12 ათობითი სისტემიდან 2-ობით პოზიციურ სისტემაში.

ამ თავში წარმოდგენილი მასალით თქვენ გაეცნობით ბრტყელ გეომეტრიულ ფიგურებს, მათ თვისებებს, ასევე სივრცით ფიგურებს, მათ ძირითად თვისებებს.
ძირითადი საკითხებია:

- წერტილი, წრფე, სიბრტყე
- მრავალკუთხედები, წრეწირი, წრე
- სივრცითი ფიგურები

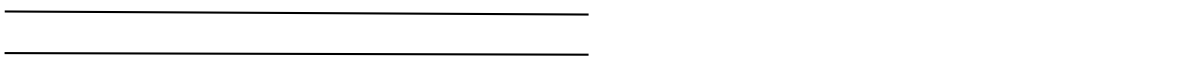
§ 2.1. წერტილი, წრფე, სიბრტყე

გეომეტრია-ბერძნული სიტყვაა და ქართულ ენაზე ასე ითარგმნება გეო-მიწა, მეტრია-გაზომვა, ანუ მიწის მზომელობას ნიშნავს. გეომეტრია ერთ-ერთი უძველესი მეცნიერებაა, მისი მეშვეობით შესაძლებელია ჩვენს ირგვლივ არსებული სხეულების ფორმების შეცნობა, მათი გაზომვა და სხვადასხვა მონაცემების დადგენა. **წერტილი, წრფე და სიბრტყე** საწყისი გეომეტრიული ცნებებია. გეომეტრიული ფიგურები წერტილებისგან შედგება.

A

წრფე — გეომეტრიის საწყისი ცნება, სწორი ხაზი, რომელიც დაუსრულებლად გრძელდება ორივე მხარეს და შეიცავს წერტილთა უსასრულო რაოდენობას. წრფის აღსანიშნავად საკმარისია მისი ორი წერტილის დასახელება, ანუ ორი დიდი ლათინური ასო. თუმცა, წრფის დასასახელებლად გამოიყენება ერთი პატარა ლათინური ასოც. ყოველ ორ წერტილზე შეიძლება გაივლოს ერთადერთი წრფე. სიბრტყეზე ორი წრფე ან თანამკვეთია, ან პარალელური. თანამკვეთ წრფეებს გააჩნიათ ერთი, და მხოლოდ ერთი, საერთო

წერტილი. პარალელურ წრფეებს საერთო წერტილი არ გააჩნიათ. სივრცეში წრფეების ურთიერთგანლაგების სამი შემთხვევა გვაქვს:

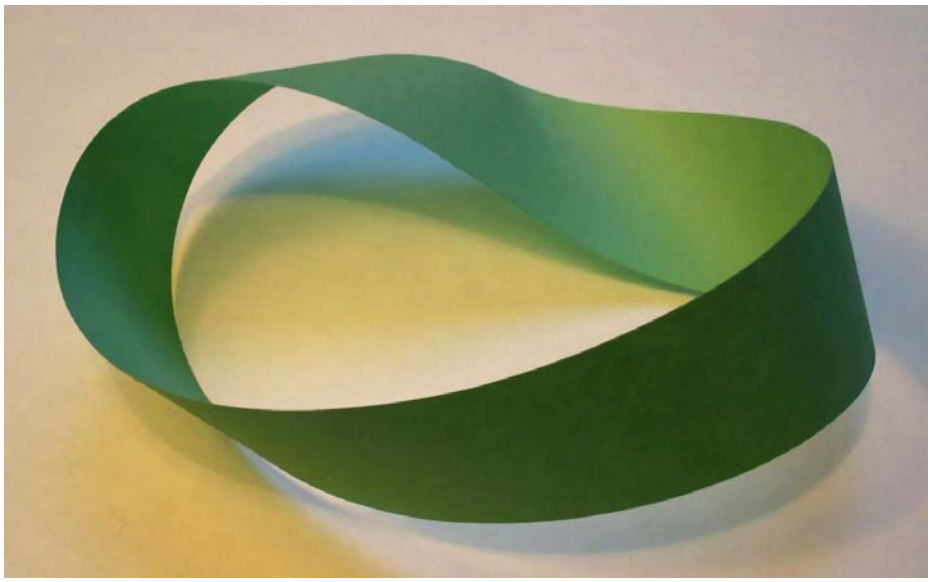


1. პარალელური: წრფეებს არ გააჩნიათ საერთო წერტილი და მათზე შეიძლება ერთი სიბრტყის გავლება;
2. გადამკვეთი: წრფეებს გააჩნიათ საერთო წერტილი;
3. აცდენილი: წრფეებს არ გააჩნიათ საერთო წერტილი და არ არსებობს სიბრტყე, რომელიც ორივე მათგანზე გადის.

ეს საინტერესოა

მობიუსის ლენტა - ზედაპირი მხოლოდ ერთი მხრითა და ერთი კუთხით.

ამგვარი ფორმები წარმოადგენს **ტოპოლოგიის** შესწავლის საგანს.

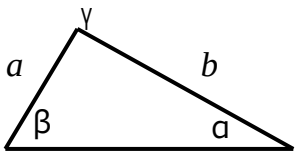


§ 2.2. მრავალკუთხედები (სამკუთხედი,პარალელოგრამი, მართკუთხედი, კვადრატი, რომბი, ტრაპეცია)

სამკუთხედი

- სამკუთხედის პერიმეტრი მისი გვერდების სიგრძეთა ჯამია.

  სამკუთხედის ნებისმიერი ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამი მეტია მესამე გვერდის სიგრძეზე (სამკუთხედის უტოლობა):

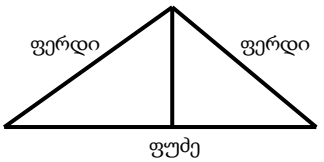


$$a + b > c,\ a + c > b,\qquad b + c > a.$$

c

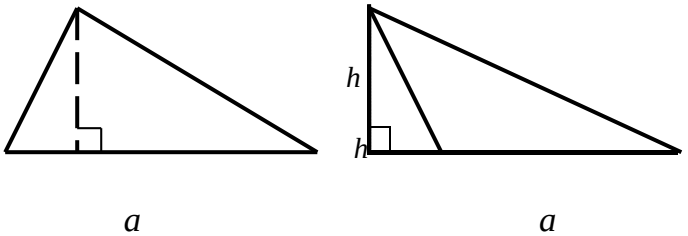
- სამკუთხედის კუთხეების სიდიდეთა ჯამი 180°-ია: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

- სამკუთხედის უდიდესი კუთხე უდიდესი გვერდის პირდაპირ მდებარეობს, ხოლო უმცირესი კუთხე – უმცირესი გვერდის პირდაპირ.
- სამკუთხედი ტოლფერდაა, თუ მას ორი ტოლი გვერდი აქვს.
- ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია. ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე მას შუაზე ყოფს.

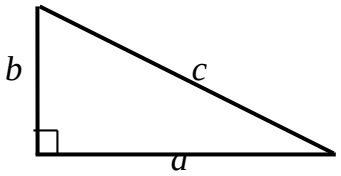


- სამკუთხედის ფართობი სამკუთხედის გვერდისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია:

$$S = \frac{a \cdot h}{2}.$$



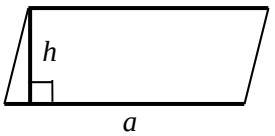
- მართკუთხა სამკუთხედს ერთი მართი კუთხე აქვს;
- ჰიპოტენუზის სიგრძე მეტია კათეტის სიგრძეზე;
- პითაგორას თეორემა. კათეტების სიგრძეთა კვადრატების ჯამი ჰიპოტენუზის სიგრძის კვადრატის ტოლია: $a^2 + b^2 = c^2$.



- მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი კათეტების სიგრძეთა ნამრავლის ნახევრის ტოლია, ფართობი $S = \frac{ab}{2}$

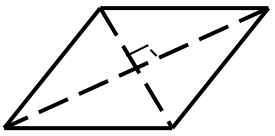
მრავალკუთხედები.

- მრავალკუთხედის პერიმეტრი მრავალკუთხედის გვერდების სიგრძეთა ჯამია;
- მრავალკუთხედის არამეზობელი წვეროების შემაერთებელ მონაკვეთს დიაგონალი ეწოდება.
- მრავალკუთხედს რომლის გვერდები და კუთხეები ტოლია წესიერი მრავალკუთხედი ეწოდება.
- პარალელოგრამი ეწოდება ოთხკუთხედს, რომლის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია.
- პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია;



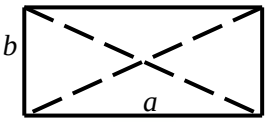
- პარალელოგრამის დიაგონალები გადაკვეთისას ერთმანეთს შუაზე ყოფენ;
- პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მდებარე ორი კუთხის ჯამი 180°-ია;
- პარალელოგრამის ფართობი გვერდისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია: $S = ah.$

- რომბი ეწოდება პარალელოგრამს რომლის ოთხივე



გვერდი ერთმანეთის ტოლია;

- რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობულია;
- რომბის ფართობი დიაგონალების სიგრძეების ნამრავლის ნახევრის ტოლია.
- მართკუთხედი ეწოდება პარალელოგრამს, რომლის კუთხეები მართია;
- მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია;
- მართკუთხედის ფართობი მისი სიგრძისა და სიგანის ნამრავლის ტო $S = a \cdot b$



- კვადრატი არის ისეთი მართკუთხედი, რომლის გვერდები ერთმანეთის ტოლია, ანუ კვადრატი არის ისეთი რომბი, რომლის კუთხეები მართია.
- კვადრატის ფართობი მისი გვერდის კვადრატის ტოლია

სავარჯიშოები:

1. პარალელოგრამის ორი კუთხის ჯამია 300°. იპოვეთ პარალელოგრამის მახვილი კუთხე.
   ა) 40° ბ) 32° გ) 30° დ) 20°
2. თუ პარალელოგრამის ორი კუთხის სხვაობაა 110° , მაშინ პარალელოგრამის მახვილი კუთხეა
   ა) 25° ბ) 35° გ) 55° დ) 60°
3. მართკუთხედის დიაგონალითა და გვერდით შედგენილი კუთხეა 40° . იპოვეთ მახვილი კუთხე დიაგონალებს შორის.
   ა) 80° ბ) 100° გ) 70° დ) 60°
4. მართკუთხედი დაყოფილია 3 კვადრატად. თითოეული კვადრატის პერიმეტრია 12მ. რამდენი მეტრია ამ მართკუთხედის პერიმეტრი?
   ა) 24 ბ) 28 გ) 18 დ) 16
5. თუ მართკუთხედის გვერდებია 5მ და 12მ, მაშინ მისი დიაგონალის სიგრძეა
   ა) 12,5 მ ბ) 12 მ გ) 15 მ დ) 13 მ
6. თუ მართკუთხედის დიაგონალია 15მ, ხოლო ერთ-ერთი გვერდია 9მ, მაშინ მეორე გვერდის სიგრძეა
   ა) 12 მ ბ) 13 მ გ) 14 მ დ) 10 მ
7. თუ მართკუთხედის ერთი გვერდია 5სმ, ხოლო დიაგონალია 13სმ, მაშინ მართკუთხედის პერიმეტრია
   ა) 30 სმ ბ) 34 სმ გ) 36 სმ დ) 28 სმ
8. მართკუთხედის გვერდების შეფარდებაა 7:24, ხოლო დიაგონალია 25მ. იპოვეთ მართკუთხედის მცირე გვერდი.
   ა) 14 მ ბ) 7 მ გ) 3,5 მ დ) 201 მ
9. რამდენჯერ გაიზრდება კვადრატის ფართობი, თუ მის გვერდს გავზრდით 3-ჯერ?
   ა) 6-ჯერ ბ) 9-ჯერ გ) 3-ჯერ დ) 18-ჯერ
10. რამდენჯერ უნდა გავზარდოთ კვადრატის გვერდი, რომ მისი ფართობი გაიზარდოს 81-ჯერ?
    ა) 40,5-ჯერ ბ) 81-ჯერ გ) 9-ჯერ დ) 3-ჯერ
11. რამდენი პროცენტით შემცირდება კვადრატის ფართობი, თუ მის გვერდს შევამცირებთ 10%-ით?

ა) 19 ბ) 21 გ) 10 დ) 20

12. თუ მართკუთხედის ფართობია 42მ^2 და ერთი გვერდის სიგრძეა 6მ, მაშინ მეორე გვერდის სიგრძეა

ა) 7 მ ბ) 6 მ გ) 21 მ დ) 2 მ

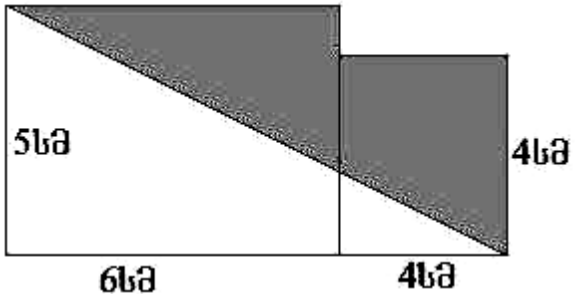
13. რომბი დიაგონალით იყოფა ორ ტოლგვერდა სამკუთხედად. რისი ტოლია ამ სამკუთხედის პერიმეტრის შეფარდება რომბის პერიმეტრთან?

ა) 1:4 ბ) 1:3 გ) 4:3 დ) 3:4

14. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში ჩახაზულია კვადრატი ისე, რომ მათ მართი კუთხე საერთო აქვთ და ერთი წვერო ჰიპოტენუზაზე მდებარეობს. იპოვეთ კვადრატის პერიმეტრი, თუ სამკუთხედის კათეტის სიგრძეა 6მ.

ა) 6 მ ბ) 12 მ გ) 9 მ დ) 24 მ

15. ნახაზის მიხედვით იპოვეთ გამუქებული ფიგურის ფართობი.



ა) 20 სმ^2 ბ) 21 სმ^2 გ) 24 სმ^2 დ) 25 სმ^2

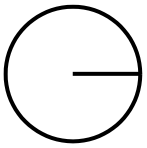
16. თუ ოთხკუთხედის სამი გვერდია 2მ, 3მ და 4მ, მაშინ მეოთხე გვერდი რა შეიძლება იყოს?

ა) 8 მ ბ) 9 მ გ) 7 მ დ) 6 მ

17. თუ ოთხკუთხედის სამი გვერდია 2დმ, 4დმ და 10დმ, მაშინ მეოთხე გვერდი რა შეიძლება იყოს?

ა) 9 დმ ბ) 10 დმ გ) 17 დმ დ) 5 დმ

§ 2.3. წრეწირი. წრეწირის სიგრძე, წრის ფართობი, სექტორის ფართობი



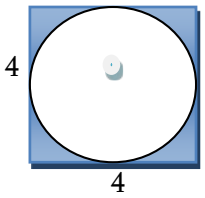
წრეწირი ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილების სიმრავლეს, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული სიბრტყის მოცემული

წერტილიდან. ამ წერტილს წრეწირის ცენტრი ეწოდება.
მანძილს წრეწირის ცენტრიდან მის წერტილამდე წრეწირის რადიუსი ეწოდება.

- წრეწირის სიგრძე L მისი r რადიუსის საშუალებით შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულით: $L = 2\pi r$, $\pi \approx 3{,}14$.
- r რადიუსიანი წრის ფართობი გამოითვლება ფორმულით: $S = \pi r^2$ $\pi \approx 3{,}14$.
- r რადიუსიანი წრის α ცენტრალური კუთხის შესაბამისი სექტორის ფართობი გამოითვლება ფორმულით: $S_{სექ} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^0}$

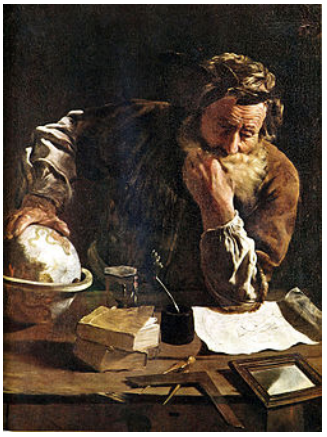
სავარჯიშოები:

1. მოცემულია სამი წრე, რომელთა რადიუსებია შესაბამისად 2მ, 4მ და 6მ. მაქსიმალური დაშორება პირველი და მეორე წრის წერტილებს შორის 60მ-ია, მეორე და მესამე წრის წერტილებს შორის – 22 მ. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომლის ტოლი შეიძლება იყოს მაქსიმალური დაშორება პირველი და მესამე წრის წერტილებს შორის?
   ა) 74 მ ბ) 76 მ გ) 48 მ დ) 45 მ
2. რამდენი მეტრია იმ წრეწირის სიგრძე, რომლის დიამეტრია 6 მეტრი.
   ა) 3π ბ) 6π გ) 12π დ) 18π
3. იპოვეთ იმ წრის ფართობი, რომლის დიამეტრის სიგრძეა 8 მეტრი.
   ა) 4π $მ^2$ ბ) 9π $მ^2$ გ) 16π $მ^2$ დ) 64π $მ^2$
4. იპოვეთ იმ წრის ფართობი, რომლის შესაბამისი წრეწირის სიგრძეა 10π მ.
   ა) 25π $მ^2$ ბ) 79 $მ^2$ გ) 81π $მ^2$ დ) 76 $მ^2$
5. ნახაზზე მოცემული გაფერადებული ფიგურის ფართობია
   ა) 4π მ2 ბ) $(16-4\pi)$ $მ^2$ გ) $(16-2\pi)$ $მ^2$ დ)16 $მ^2$



6. რამდენი სანტიმეტრით შემცირდება წრეწირის სიგრძე, თუ მის რადიუსს 6 სმ-ით შევამცირებთ?
   ა) 3π ბ) 6π გ) 12π დ) 24π
7. პირველი წრეწირის სიგრძე 5-ჯერ ნაკლებია მეორე წრეწირის სიგრძეზე. რამდენჯერ ნაკლებია პირველი წრეწირით შემოსაზღვრული წრის ფართობი მეორე წრეწირით შემოსაზღვრულ წრის ფართობზე?
   ა) 2,5-ჯერ ბ) 10-ჯერ გ) 5-ჯერ დ) 25-ჯერ
8. გამოთვალეთ წრის იმ სექტორის ფართობი, რომლის რადიუსი 8სმ-ია, ხოლო სექტორის შესაბამისი ცენტრალური კუთხე 120^0-ის ტოლია.

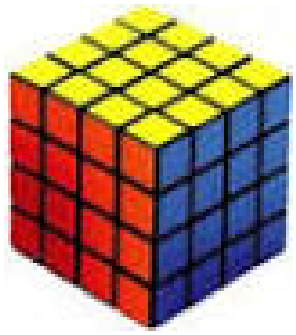
ეს საინტერესოა



არქიმედე — ძვ. ბერძენი მეცნიერი, მათემატიკოსი და მექანიკოსი, დაიბადა და ცხოვრების მეტი ნაწილი გაატარა კუნძულ სიცილიაზე მდებარე ქალაქ სირაკუზაში, სადაც რომაელთა მიერ ქალაქის აღების დროს დაიღუპა. ვარაუდობენ, რომ არქიმედეს მამა, ფიდია, ასტრონომი იყო. ის ხელმძღვანელობ-და შვილის პირველ სამეცნიერო ნაბიჯებს, შემდეგ კი არქიმედემ სწავლა–განათლება განაგრძო იმ დროის უდიდეს კულტურულ ცენტრში – ალექსანდრიაში. აქ იგი დაუახლოვდა ევკლიდეს მოწაფეებს ერატოსთენეს და კონონს. არქიმედეს შრომების ნაწილმა ჩვენამდე ამ მეცნიერებთან მიმოწერის სახით მოაღწია. არქიმედეს ცხოვრების ადრინდელ პერიოდს განეკუთვნება მისი ასტრონომიული შრომები, ცის სფეროს მოდელი –გლობუსი, მზის დიამეტრის გამზომი ხელსაწყო და აგრეთვე პირველი თხზულებანი მექანიკაში, რომელთაც ჩვენამდე არ მოუღწევია. შემორჩენილიაფიზიკისათვის მეტად მნიშვნელოვანი შრომა: "სიბრტყეთა წონასწორობის შესახებ", რომელიც აგებულია ევკლიდეს "საწყისების" მსგავსად. პოსტულატების ჩამოყალიბებას მოსდევს ბერკეტის კანონის მათემატიკური გამოყვანა და სწავლება სიმძიმის ცენტრის შესახებ. არქიმედეს პირველი მათემატიკური თხზულება იყო "პარაბოლას კვადრატურის შესახებ", სადაც გამოყენებულია ფართობის გამოთვლის "მექანიკური" მეთოდი. უფრო გვიანდელ შრომაში "სფეროსა და ცილინდრის შესახებ" გადმოცემულია სფეროს, სფერული სეგმენტის, ცილინდრის ზედაპირისა და მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულები. აქვეა მოცემული კუბური განტოლების გეომეტრიული ამოხსნა. საკუთარი მეთოდის საშუალებით, რომელიც ორი ათასი წლის შემდეგ ინტეგრალურ აღრიცხვაში განვითარდა, არქიმედემ განსაზღვრა სხვადასხვა სხეულის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა. სტატიკურ და ჰიდროსტატიკურ შრომებში ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკური ამოცანების გადასაწყვეტად მან პირველმა გამოიყენა ფიზიკური და მათემატიკური მეთოდები. შემოქმედების გვიანდელ პერიოდში არქიმედე დაინტერესდა ზუსტი გამოთვლებით, რაც უცხოა ანტიკური მათემატიკისათვის. არქიმედეს ბოლო გამოკვლევებიდან განსაკუთრებით აღსანიშნავია შრომა "მოტივტივე სხეულების შესახებ", რომელშიც გადმოცემულიაარქიმედეს კანონი.

არქიმედეს მრავალრიცხოვანმა აღმოჩენებმა განაპირობა მრავალი ლეგენდის შეთხზვა. ლეგენდარული წარმოშობა აქვს ამაყ ფრაზასაც: "მომეცით საყრდენი წერტილი და მე დავძრავ დედამიწას!" და შეძახილსაც "ევრიკა!". არქიმედე იზიარებდა დემოკრიტეს და არისტარქეს მატერიალისტურ შეხედულებებს. გენიალურ თეორიულ აღმოჩენებთან ერთად არქიმედეს ეკუთვნის მნიშვნელოვანი საინჟინრო გამოგონებებიც, როგორიცაა არქიმედეს ხრახნი.

§ 2.4. მრავალწახნაგები: კუბი, მართკუთხა პარალელეპიპედი, პირამიდა,



მართკუთხა პარალელეპიპედი ეწოდება სხეულს, რომლის მოპირდაპირე წახნაგები პარალელურ სიბრტყეებში მდებარე მართკუთხედებია. ამ მართკუთხედებს წახნაგები ეწოდებათ. მართკუთხედების გვერდებსა და წვეროებს, შესაბამისად პარალელეპიპედის წიბოები და წვეროები ეწოდებათ.

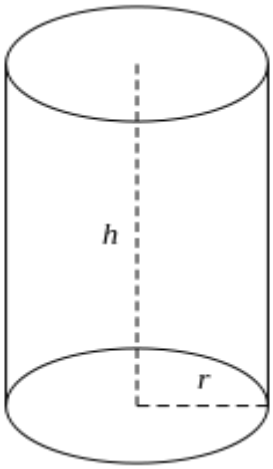
- პარალელეპიპედის სიგრძეს, სიგანესა და სიმაღლეს პარალელეპიპედის განზომილებებს უწოდებენ.
- მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა პარალელეპიპედის სიგრძის, სიგანისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია: $V = abc$.

მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის განზომილებები ერთმანეთის ტოლია კუბი ეწოდება.

- კუბის მოცულობა მისი წიბოს სიგრძის კუბის ტოლია: $V = a^3$.
- n კუთხა პირამიდა ეწოდება სხეულს, რომლის ფუძეში რაიმე n კუთხედია, ხოლო გვერდითი წახნაგები საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედებია. პირამიდის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით: $V=\frac{1}{3} S_{ფუძ}\, h$

§ 2.5. ბრუნვითი სხეულები სფერო, ბირთვი, ცილინდრი, კონუსი

ცილინდრი (- გრაგნილი) — ფიგურა. ცილინდრი წარმოადგენს ორი ტოლ წრეს და მათ შორის სივრცეს რომლებიც განლაგებულია პარალელურ სიბრტყეებზე და მათი ცენტრების შემაერთებელი მონაკვეთი ამ სიბრტყეების მართობულია.



ცილინდრი მიიღება მართკუთხედის ბრუნვით მისი ერთ-ერთი გვერდის გარშემო.კონუსი მიიღება მართკუთხა სამკუთხედის ბრუნვით კათეტის გარშემო. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი იქნება იმ ფიგურის ფართობი რომელიც მიიღება მისი შლილიდან ფუძეების მოცილებით.ეს კი მართკუთხედია, რომლის ერთი გვერდი ცილინდრის სიმაღლეა მეორე გვერდი ფუძის რკალია,ამიტომ მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$S_{გვ} = 2\pi rh$

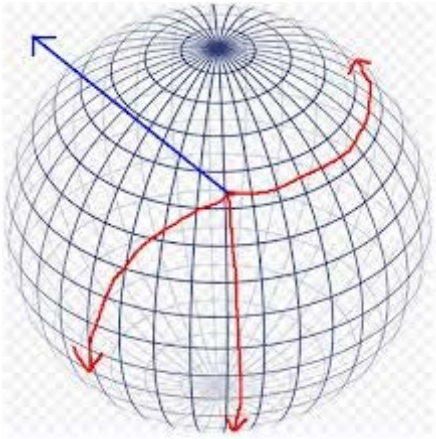
თუ ფუძეების(წრის) ფართობებსაც დავუმატებთ მივიღებთ სრული ზედაპირის ფართობს

$S_{სრ} = S_{გვ} + 2\, S_{ფუძ} = 2\pi rh + 2\,\pi r^2$, *მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:* $V = S_{ფუძ}\, h$

კონუსი

კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობიც მისი შლილის ფართობია ფუძის გარეშე $S_{\text{გვ}}=\pi r l$, სადაც l - მსახველია თუ ფუძის(წრის) ფართობებსაც დავუმატებთ მივიღებთ სრული ზედაპირის ფართობს

$S_{\text{სრ}}= S_{\text{გვ}}+ S_{\text{ფუძ}}= \pi r l + \pi r^2$, $V=\frac{1}{3} S_{\text{ფუძ}}\, h$



ბირთვის მოცულობა

ბირთვი მიიღება ნახევარწრის ბრუნვით, დიამეტრზე გამავალი წრფის გარშემო.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

სფერო მიიღება ნახევარწრეწირის ბრუნვით, დიამეტრზე გამავალი წრფის გარშემო. r რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართობია: $S = 4\,\pi r^2$

სავარჯიშოები:

1. რამდენი წახნაგი აქვს კუბს?
ა) 5 ბ) 4 გ) 6 დ) 8
2. რამდენი წვერო აქვს კუბს?
ა) 4 ბ) 10 გ) 6 დ) 8
3. რამდენი წიბო აქვს კუბს?
ა) 12 ბ) 16 გ) 8 დ) 4
4. რამდენი წახნაგი აქვს მართკუთხა პარალელეპიპედს?
ა) 8 ბ) 6 გ) 4 დ) 2
5. რამდენი წახნაგი აქვს სამკუთხა პირამიდას?
ა) 3 ბ) 4 გ) 5 დ) 6
6. რამდენი წვერო აქვს სამკუთხა პირამიდას?
ა) 4 ბ) 3 გ) 5 დ) 2
7. რამდენი წიბო აქვს სამკუთხა პირამიდას?
ა) 3 ბ) 4 გ) 6 დ) 8
8. რამდენი წახნაგი აქვს ხუთკუთხა პირამიდას?
ა) 5 ბ) 7 გ) 8 დ) 6
9. რამდენი წიბო აქვს ექვსკუთხა პირამიდას?
ა) 12 ბ) 15 გ) 16 დ) 7
10. რამდენი წვერო აქვს შვიდკუთხა პირამიდას?
ა) 6 ბ) 7 გ) 8 დ) 9
11. რას უდრის კუბის წიბოების, წახნაგების და წვეროების რაოდენობათა ჯამი?

ა) 30 ბ) 24 გ) 28 დ) 26

12. რას უდრის ხუთკუთხა პირამიდის წიბოების, წახნაგების და წვეროების რაოდენობათა ჯამი?

ა) 21 ბ) 20 გ) 22 დ) 24

13. მრავალწახნაგას წახნაგების რაოდენობა არის 6, წვეროების რაოდენობა – 8. იპოვეთ ამ მრავალწახნაგას წიბოების რაოდენობა.

ა) 14 ბ) 12 გ) 10 დ) 8

14. თუ კუბის მოცულობაა 125 მ3, მაშინ მისი წობოს სიგრძეა

ა)2,5მ ბ)5მ გ)10მ დ)25მ

15. ამოცანა ჯგუფური მუშობისთვის:
მართკუთხა სამკუთხედი რომლის კათეტებია 4სმ, 3სმ დააბრუნეთ ჰიპოტენუზის გარშემო. გამოიკვლიეთ მიღებული ფიგურა და გამოთვალეთ მისი ზედაპირის ფართობი.

16. გამოთვალეთ კონუსის გვერდითი და სრული ზედაპირის ფართობები თუ მისი სიმაღლეა 6სმ და მსახველი კი სიმაღლესთან 45–იან კუთხეს ადგენს.

17. იპოვე მანძილი ცილინდრის ფუძის მკვეთ სიბრტყემდე რომელიც ფუძეების მართობულია და მისი დიაგონალი 20სმ უდრის.ცილინდრის სიმაღლე 12სმ უდრის, ხოლო ფუძის რადიუსი 8სმ–ია.

18. მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია 3სმ, 4სმ და 5სმ. რამდენი სმ^3-ით გაიზრდება პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მისი თითოეული წიბოს სიგრძეს 1 სმ-ით გავზრდით?

ა) 80 ბ) 60 გ) 20 დ) 40

19. მართკუთხა პარალელეპიპედის სიგრძე გაზარდეს 20%-ით, სიგანე – 25%-ით, სიმაღლე კი – 30%-ით. რამდენი პროცენტით გაიზარდა პარალელეპიპედის მოცულობა?

ა) 75 ბ) 85 გ) 105 დ) 95

20. რამდენი ლიტრი წყალი ჩაეტევა მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ავზში,თუ მისი განსხვავებული წიბოებია 0,5 მ; 0,8 მ და 1,2 მ?

ა) 240 ბ) 960 გ) 360 დ) 480

21. რამდენი ლიტრი წყალი ჩაეტევა კუბის ფორმის ავზში, თუ მისი წიბოა 0,4 მ?

ა) 64 ბ) 640 გ) 800 დ) 700

22. რამდენი ლიტრი წყალი შეგვიძლია ჩავასხათ მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის აკვარიუმში, რომლის სიგრძეა 85 სმ, სიგანე 24 სმ, ხოლო სიმაღლეა 50 სმ?

ა) 104,2 ბ) 102 გ) 10,2 დ) 124

23. აკვარიუმის სიგრძეა 50 სმ, სიგანე – 36 სმ, ხოლო სიმაღლე – 48 სმ. რამდენი ლიტრი წყალია აკვარიუმში, თუ წყლის ზედაპირი მისი ზედა კიდიდან 3 სმ-ით დაბლა დგას?

ა) 80 ბ) 81 გ) 90 დ) 92

24. ცილინდრის ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით: $S = 2\pi R(R + H)$ სადაც R ცილინდრის ფუძის რადიუსია, ხოლო H – ცილინდრის სიმაღლე. რამდენი კილოგრამი საღებავი იქნება საჭირო ისეთი ცილინდრული ავზის გარედან შესაღებად, რომლის ფუძის დიამეტრია 4მ, ხოლო სიმაღლე – 3მ. ამასთან 2მ^2 ზედაპირის შეღებვას ესაჭიროება 0,4 კგ საღებავი ($\pi = 3{,}14$)?

ა) 6,3 ბ) 14,4 გ) 6,28 დ) 12,56

25. ცნობილია, რომ ცილინდრის ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S=2\pi R(H+R)$, სადაც R ფუძის რადიუსია, ხოლო H სიმაღლე. იპოვეთ მოცემული ცილინდრის ზედაპირის ფართობი, თუ AD=8 სმ, BD =10 სმ.

ა) 160π ბ) 120π გ) 80π დ) 40π

26. ბირთვის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, სადაც R ბირთვის რადიუსია. ცილინდრის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $V_1 = \pi r^2 H$, სადაც r ფუძის რადიუსია, ხოლო H სიმაღლე. რამდენი ვედრო წყალი ჩაეტევა $R = 3$მ სფეროს ფორმის ავზში, თუ

ვედრო ცილინდრული ფორმისაა, რომლის ფუძის რადიუსია 10სმ, ხოლო სიმაღლე 40 სმ?
ა) 90000 ბ) 9000 გ) 900 დ) 1800

კითხვები თვითშემოწმებისთვის

1. რას უდრის სამკუთხედის პერიმეტრი?
2. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთი კუთხეა 50^0, რის ტოლი იქნება დანარჩენი კუთხეები? პასუხი დაასაბუთეთ.
3. რას უდრის მართკუთხედის ფართობი?, პერიმეტრი?
4. რას უდრის კვადრატის ფართობი? პერიმეტრი?
5. რამდენ გრადუსიან კუთხეს ქმნიან რომბის დიაგონალები გადაკვეთისას?
6. რა უდრის 5 სმ-იანი დიამეტრის მქონე წრის ფართობი, წრეწირის სიგრძე?

თავი III სტატისტიკა

ამ თავში წარმოდგენილი მასალით თქვენ გაეცნობით სტატისტიკური მონაცემების წარმოდგენის ფორმებს, მონაცემთა მახასიათებლებს, მონაცემთა ანლიზის შემცველ საკითხებს.

ძირითადი საკითხებია:

- მონაცემთა მოპოვების და მოცემის ხერხები
- მონაცემთა თვისობრივი და რაოდენობრივი მახასიათებლები
- ალბათობის ელემენტები

§*3.1. მონაცემთა წყაროები და მონაცემთა მოპოვების ხერხები*

სხვადასხვა სახის დაკვირვებების შედეგად მიღებულ მონაცემებს, რომლებიც რიცხვებით არის წარმოდგენილი, სტატისტიკური მონაცემები ეწოდება.

ეს მონაცემები შეიძლება ეხებოდეს თითქმის ყველაფერს,რაც დაკვირვების საგანი შეიძლება იყოს. მაგალითად სპორტს, ხელოვნებას, ბიზნესს, კლიმატს ქვეყნისა და ხალხის ცხოვრებას, სტუდენტის სწავლას, ...

ე.ი. მონაცემები არის ცნობები, ან მახასიათებელი თვისებები, რომლებიც აუცილებელია რაიმე დასკვნის გამოსატანად. სწორედ, ასეთი მონაცემების შეგროვებას, დამუშავებას (განხილვას), ხელსაყრელი ფორმით წარმოდგენას და გამოყენებას შეისწავლის სტატისტიკა,

ე.ი. სტატისტიკის საგანია რაიმე მოვლენის (პროცესის) შესახებ ინფორმაციის შეგროვება, დამუშავება და გამოყენება.

მაგალითად, სამედიცინო დასკვნა: „მოწევა საშიშია ჯანმრთელობისათვის“- თამბაქოს მწეველი ადამიანების ჯანმრთელობის შესახებ სათანადო მონაცემების შეგროვებისა და დამუშავების შედეგია, ე.ი. სტატისტიკური გამოკვლევების ჩატარების შედეგია.

სტატისტიკის გამოყენების თვალსაჩინო მაგალითია სასუქების გამოყენების საკითხის შესწავლა სოფლის მეურნეობაში. ამ შემთხვევაში გროვდება მონაცემები გამოყენებული სასუქის ოდენობისა და მოსავლიანობის ზრდას შორის დამოკიდებულების შესახებ. აქ შეისწავლება აგრეთვე საკითხი, თუ როგორ აისახება მოსავლიანობის ამ გზით გაზრდა პროდუქციის ხარისხზე. ამ მონაცემების ანალიზი ხელს უწყობს სასუქის ოპტიმალური ოდენობის დადგენას.

ინფორმაციის შეგროვება ხშირად შერჩევის წესით შეიძლება მოხდეს. მაგალითად, არჩევნების შედეგების პროგნოზირება ხშირად ამომრჩეველთა ნაწილის გამოკითხვით ხდება.

ეს წესი გამოიყენება აგრეთვე გამოშვებულ პროდუქციაზე მოთხოვნის განსაზღვრის მიზნით. შერჩევითი გამოკითხვით მონაცემების შეგროვება გარკვეულ წესებს უნდა ექვემდებარებოდეს.

სტატისტიკური მონაცემების თვალსაჩინოდ (ხელსაყრელი ფორმით) წარმოდგენისათვის გამოიყენება სხვადასხვა ხერხი – ცხრილური, წერტილოვანი, ხაზოვანი (პოლიგონი), სვეტოვანი (ჰორიზონტალური ან ვერტიკალური) და წრიული დიაგრამები.

განვიხილოთ რამოდენიმე მათგანი:

§*3.2. მონაცემთა წარმოდგენის საშუალება - ცხრილი*

ინფორმაციის წარმოდგენის ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული ფორმაა ცხრილი. ცხრილი იძლევა მონაცემების დასტრუქტურების საშუალებას. კარგად დასტრუქტურებულ მონაცემებში კი ძნელი არ არის კანონზომიერებების შემჩნევა და მათ საფუძველზე დასკვნების გაკეთება.
მოდით, განვიხილოთ ცხრილის ერთი ნიმუში.

ცხრილში მოცემულია 2010-2014 წლების აგვისტოს თვეში თბილისის მოსახლეობის რამდენი პროცენტი დარჩა ქალაქში და რამდენი პროცენტი ისვენებდა ქალაქგარეთ.

	ქალაქში დამრჩენები	დამსვენებლები				
		ზღვაზე	მთაში	რაიონებში	საზღვარგარეთ	ქალაქის გარეუბნებში
2010	40	15	5	20	8	12
2011	35	15	6	14	12	18
2012	32	18	7	12	12	19
2013	30	20	7	18	10	15
2014	28	30	8	8	12	14

ცხრილის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ 4 შეკითხვას:

1) ქალაქის მცხოვრებთა რამდენი პროცენტი იყო საზღვარგარეთ 2011 წლის აგვისტოში?
ა) 20 ბ) 18 გ) 15 დ) 12
2) დამსვენებლების რა ნაწილი იყო ზღვაზე 2013 წლის აგვისტოში?
ა) 3/5 ბ) 5/7 გ) 2/7 დ) 1/3
3) რამდენჯერ მეტია 2011 წლის აგვისტოში ქალაქში დამრჩენთა რაოდენობა მთაში ან ზღვაზე დამსვენებელთა რაოდენობაზე?
ა) 2-ჯერ ბ) $1\frac{2}{3}$-ჯერ გ) 2,5-ჯერ დ) $1\frac{1}{7}$-ჯერ
4) ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი დასკვნა არაა მართებული?
ა) დამსვენებელთა რაოდენობა ქალაქის მოსახლეობის ნახევარზე მეტია.
ბ) ყოველწლიურად, აგვისტოს თვეში, ქალაქში უფრო მეტი ადამიანი რჩება ვიდრე ზღვაზე ისვენებს.
გ) 2012 წლის აგვისტოში ქალაქში უფრო მეტი ადამიანი დარჩა, ვიდრე ისვენებდა ზღვაზე ან მთაში.
დ) 2011 წლის აგვისტო ქალაქის გარეუბნებში მოსახლეობის იმდენივე პროცენტმა გაატარა რამდენმაც 2012 წლის აგვისტო ზღვაზე.

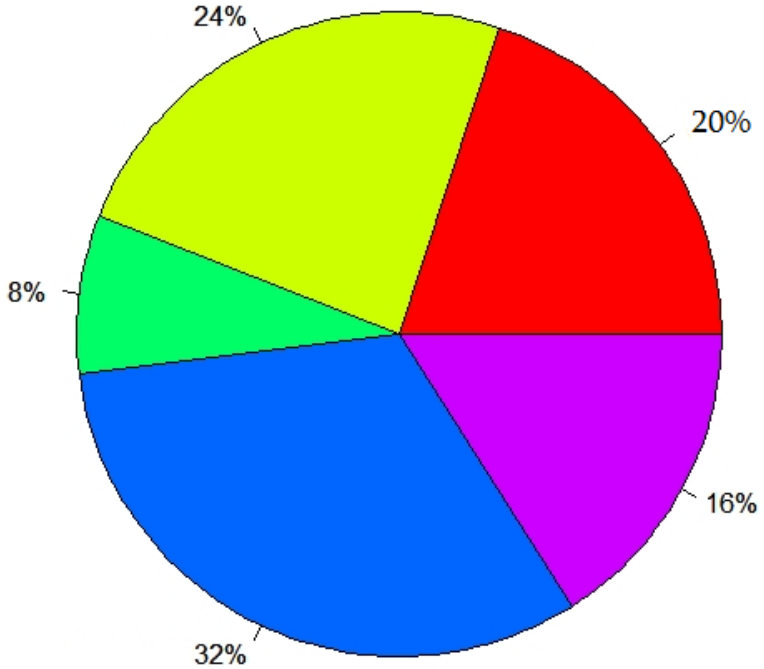
ამოხსნა: პირველ კითხვაზე პასუხის გასაცემად

- დავადგინოთ 2011 წელს საზღვარგარეთ დამსვენებელთა პროცენტული მაჩვენებელი- ცხრილში ნათლად ჩანს, რომ 2011 წელს ჰორიზონტალურ სტრიქონსა - ვერტილალური სვეტის გადაკვეთაზე საზღვარგარეთ დამსვენებელთა რაოდენობა 12%-ია
- შევნიშნოთ, რომ თითოეულ სტრიქონში მონაცემთა ჯამი 100-ის ტოლია(40+15+5+20+8+12)

ანალოგიური მსჯელობით უნდა გაეცეს პასუხი დანარჩენ კითხვებს. შეეცადე შეასრულო დამოუკიდებლად.

§3.3. *მონაცემთა წარმოდგენის საშუალება* - დიაგრამა

მონაცემები შეიძლება წარმოდგენილი იყოს როგორ სვეტოვანი ასევე წრიული დიაგრამის სახით. უნდა ითქვას, რომ ცხრილში მონაცემები უფრო ძნელი აღსაქმელია, ვიდრე დიაგრამებზე. **წრიული და სვეტოვანი დიაგრამები** ყველაზე მარტივ სახეობებად არის მიჩნეული როგორც ასაგებად, ასევე გასაანალიზებლადაც.



საინტერესოა, რომ ზოგადი ინფორმაციის მიღება ერთი შეხედვითაც კი შეგვიძლია, როდესაც ჯერ კიდევ არ ვიცით, რას ეხება დიაგრამა. ნახაზზე ვხედავთ, რომ წრიული დიაგრამა 5 სეგმენტისგან შედგება. აქედან ყველაზე დიდია ლურჯი. მას მოსდევს ყვითელი, ყვითელს - წითელი, იისფერი და ბოლოს - მწვანე. ლურჯ სეგმენტს საშუალოდ წრის მესამედი უჭირავს. წარწერებს რომც ვერ ვხედავდეთ, გარკვეული ინფორმაციის მიღება მაინც შეიძლება. ამ ერთიანი სურათის გარკვევის შემდეგ უნდა ვცადოთ, ჩავწვდეთ დეტალებს.
წრიული დიაგრამიდან ინფორმაციის მისაღებად საჭიროა გავეცნოთ მის წარწერებს - სათაურსა და ფერების ახსნას. ეს ყველაფერი პირობაში, ან დიაგრამის გასაღებშია მოცემული. აქვე უნდა იხსნებოდეს, რას აღნიშნავს თითოეული ფერი. ამის შედეგად ირკვევა თემა, რომელსაც ასახავს წრიული დიაგრამა. სწორედ ეს წარწერები გვიბიძგებს არა მხოლოდ აღწერისკენ, არამედ ანალიზის გავრცობისკენაც.

მონაცემები პირობის ნაცვლად შეიძლება თითოეული სეგმენტის გასწვრივ, ან თვით სეგმენტზე იყოს წარწერილი.

ზემოთ მოცემული წრიული დიაგრამა გვიჩვენებს, რომელი ფაქტორებია გადამწყვეტი ბრიტანეთში ოჯახების შექმნისას. მათგან ყველაზე დიდი, ლურჯი სეგმენტი სიყვარულს გამოხატავს და შეადგენს 32%-ს; ყვითელი ოჯახისა და შვილების ყოლის სურვილია - 24%; წითელი - ცხოვრების თანამგზავრის შეძენა, 20%; იისფერი - ფინანსური უზრუნველყოფა, 16%; მწვანე - სახლში დამხმარის ყოლა - 8%.
ჩვენი წრიული დიაგრამის სათაურია "რატომ ქმნიან ბრიტანელები ოჯახს", ხოლო კითხვა: "დაასახელე ფაქტორები და შეადარე ისინი ერთმანეთს". ამ შემთხვევაში სათაურის მეშვეობით ვადგენთ, რომ მოცემულია ფაქტორები, რომელთა გამოც იქმნება ოჯახები, ხოლო კითხვაში საკვანძო სიტყვაა "შეადარე", რაც გვეუბნება, რომ თითოეული ფაქტორზე

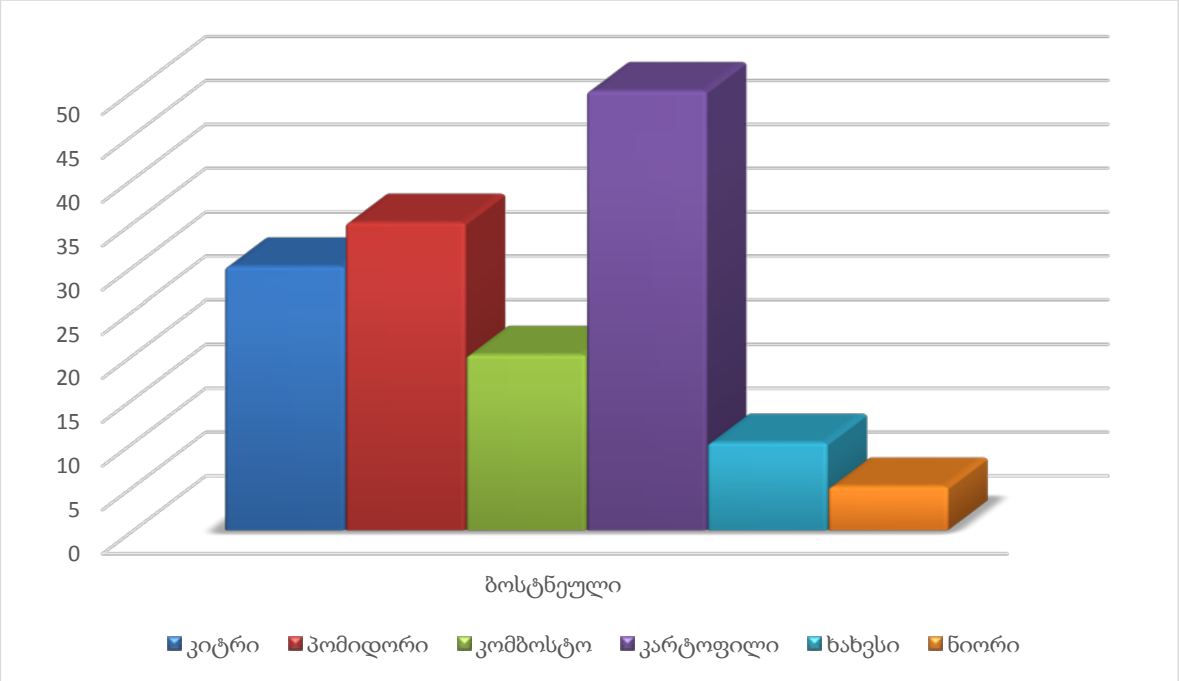
უნდა ვიმსჯელოთ და შევადაროთ ერთმანეთს, დავადგინოთ, რომელია მაქსიმალური, რომელი - მინიმალური, რამდენი პროცენტით აღემატება ან ჩამორჩება თითოეული მომდევნოს, ყველაზე მაღალი მაჩვენებლის მქონე - ყველაზე დაბალი მაჩვენებლის მქონეს.

დამოუკიდებელი სამუშაო:

- შესაძლოა, ამ დიაგრამის მსგავსად, თავადაც ჩაატაროთ ანალოგიური კვლევა და შეადაროთ თქვენ მიერ მიღებული მონაცემები ამ დიაგრამაზე ასახულს. გაითვალისწინეთ რესპონდენტების მხრივ პასუხისთვის თავის არიდების შესაძლებლობა და არაგულწრფელი პასუხების ალბათობაც, რაც ასევე საბოლოო შედეგში შედარებისას შეიძლება განზოგადდეს.

- გააანალიზე სვეტოვანი დიაგრამით მოცემული მონაცემები და უპასუხე კითხვებს:

ბოსტნეულის მაღაზიაში მხოლოდ კიტრი, პომიდორი, კომბოსტო, ხახვი და ნიორი იყიდება. სვეტოვან დიაგრამაზე წარმოდგენილია ამ მაღაზიაში ერთი დღის განმავლობაში გაყიდული ბოსტნეულის რაოდენობები კილოგრამებში



მოცემული დიაგრამის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ 4 შეკითხვას:

1) რამდენჯერ ნაკლებია გაყიდული ნიორის წონა გაყიდული კარტოფილის წონაზე?
   ა) 5-ჯერ ბ) 10-ჯერ გ) 7-ჯერ დ) 2-ჯერ
2) გაყიდული ბოსტნეულის საერთო რაოდენობის რამდენი პროცენტია გაყიდული კიტრის რაოდენობა?
   ა) 50 ბ) 30 გ) 20 დ) 10
3) გაყიდულ ბოსტნეულთაგან, რომლის პროცენტული რაოდენობაა მოთავსებული 12%-სა და 15%-ს შორის?
   ა) ხახვი ბ) ნიორი გ) კომბოსტო დ) პომიდორი
4) რისი ტოლია გაყიდული ბოსტნეულის საერთო რაოდენობის მეათედი?
   ა) ხახვისა და კომბოსტოს წონების ჯამის.

ბ) კარტოფილისა და ნივრის წონების ჯამის.
გ) კომბოსტოსა და ნივრის წონების ჯამის.
დ) ხახვისა და ნივრის წონების ჯამის.

§3.4.მონაცემთა რიცხვითი მახასიათებლები

რიცხვით მონაცემთა რაიმე ერთობლიობის დასახასიათებლად, მონაცემთა ერთობლიობის შესადარებლად, გამოიყენება შემდეგი რიცხვითი მახასიათებლები:

1) **სიხშირე** – ცდათა მოცემულ სერიალში რაღაც მოვლენის მოხდენათა რაოდენობა.
2) **ფარდობითი სიხშირე** – მოვლენის სიხშირის შეფარდება ცდათა რაოდენობასთან.
3) **დიაპაზონი** (**გაბნევის დიაპაზონი, განი**) – რიცხვით მონაცემთა ერთობლიობაში უდიდეს და უმცირეს რიცხვებს შორის სხვაობა. ე. ი. მონაცემთა გაბნევის დიაპაზონი მონაცემთა გაფანტულობის საზომია.
4) **მონაცემთა საშუალო** – ყველა დასახელებული რიცხვის ჯამისა და მათი რაოდენობის შეფარდება.
5) **მოდა** – რიცხვი (რიცხვები), რომელიც ამ მონაცემებში ყველაზე ხშირად გვხვდება. თუ ყველა მონაცემი განსხვავებულია, მაშინ ამ ერთობლიობას მოდა არა აქვს.
6) **მედიანა** – რიცხვით მონაცემთა მედიანა არის ზრდის მიხედვით დალაგებული (რომელსაც ვარიაციული მწკრივი ეწოდება) ამ მონაცემების შუა რიცხვი, თუ ერთობლიობაში რიცხვების რაოდენობა კენტია; ხოლო თუ ერთობლიობაში რიცხვების რაოდენობა ლუწია, მაშინ მედიანა ორი შუა რიცხვის არითმეტიკული საშუალოა.
7) **რიცხვით მონაცემთა სტანდარტული გადახრა, ანუ საშუალო კვადრატული გადახრა** – მონაცემთა თითოეული რიცხვისა და ამ მონაცემთა საშუალოს სხვაობის კვადრატების საშუალოდან კვადრატული ფესვი. სტანდარტული გადახრა საშუალოს მიმართ მონაცემთა გაფანტულობის საზომია და საშუალოსთან მონაცემების „თავმოყრას“ ახასიათებს (ე.ი. მონაცემთა საშუალოდან ამ მონაცემების გადახრას „ზომავს“).

ვთქვათ რაიმე ორი ექსპერიმენტის რიცხვითი მონაცემებია (რომელიც დალაგებულია ზრდის მიხედვით):

I. 5; 5; 5; 6; 8; 8; 12; **II**. 6; 8; 8; 10; 11; 11.

ამ მონაცემთა სიხშირეთა და ფარდობითი სიხშირეთა ცხრილია:

I

მონაცემი	5	6	8	12
სიხშირე	3	1	2	1
ფარდობითი სიხშირე	3/7	1/7	2/7	1/7

II

მონაცემი	6	8	10	11
სიხშირე	1	2	1	2
ფარდობითი სიხშირე	1/6	1/3	1/6	1/3

პირველის დიაპაზონია 7; მეორის – 5. ადვილია შემოწმება, რომ ამ მონაცემთა საშუალოებია: I –7; II – 9.
მოდაა: I – 5; II – 8 და 11.
მედიანა: I – 6; II – 9.
ახლა ვიპოვოთ ამ მონაცემთა სტანდარტული გადახრა. მონაცემთა თითოეული რიცხვისა და საშუალოს სხვაობების სიხშირეთა ცხრილია

I

სხვაობები	-2	-1	1	5
სიხშირეები	3	1	2	1

II

სხვაობები	-3	-1	1	2
სიხშირეები	1	2	2	2

სხვაობების კვადრატების სიხშირეთა ცხრილია

I

სხვაობების კვადრატები	4	1	1	25
სიხშირეები	3	1	2	1

II

სხვაობების კვადრატები	9	1	1	4
სიხშირეები	1	2	2	2

კვადრატების საშუალოა I – $\frac{40}{7}$; II- $\frac{10}{3}$

ამდენად სტანდარტული გადახრებია: I – $\sqrt{\frac{40}{7}} \approx 2{,}4$, II – $\sqrt{\frac{10}{3}} \approx 1.8$

§ 3.5. ხდომილობის ალბათობა, ფარდობითი სიხშირე

ალბათობის თეორია არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის მასობრივ შემთხვევით მოვლენათა რაოდენობრივი ხასიათის კანონზომიერებებს. ალბათობის თეორიის პირველად ცნებას ხდომილობა წარმოადგენს.

მაგალითად, მონეტის აგდებისას შესაძლო შედეგი ორია: გერბი და საფასური. საფასური შეიძლება მოვიდეს ან შეიძლება არც მოვიდეს. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ საფასურის მოსვლა შემთხვევითი ხდომილობაა.

ასევე, ერთი კამათლის გაგორებისას შესაძლო შედეგების რაოდენობა ექვსია. მაგრამ ბეში (5) შეიძლება მოვიდეს, შეიძლება არც მოვიდეს, ე.ი. ბეშის მოსვლა შემთხვევითი ხდომილობაა. შემთხვევითი ხდომილობაა აგრეთვე კამათელზე კენტი რიცხვის მოსვლა. მისი ხელშემწყობია მხოლოდ სამი შესაძლო შედეგი: 1-ის, 3-ისა და 5-ის მოსვლა.

ამრიგად, **ხდომილობა შემთხვევითია** თუ მას ერთსა და იმავე პირობებში შეიძლება ჰქონდეს ან არ ჰქონდეს ადგილი. ზოგი ხდომილობა ისეთია, რომ მას აუცილებლად ექნება ადგილი, თუ ცდას ჩავატარებთ. ასეთ ხდომილობას **აუცილებელ ხდომილობას** უწოდებენ.

მაგალითად, თუ ყუთში მოთავსებულია მხოლოდ წითელი ფერის ბირთვები, მაშინ ცხადია, ხდომილობა – „ყუთიდან ამოღებული ბირთვი წითელი ფერისაა“ - იქნება აუცილებელი ხდომილობა.

ხდომილობას, რომელსაც არ შეიძლება ჰქონდეს ადგილი რაიმე ცდის ჩატარების დროს, **შეუძლებელი ხდომილობა** ეწოდება.

ყუთიდან ლურჯი ფერის ბირთვის ამოღება შეუძლებელი ხდომილობაა, თუ ყუთში მხოლოდ შავი ფერის ბირთვებია. ერთი კამათლის გაგორებისას წინასწარ შეუძლებელია თქმა, რა რიცხვი მოვა, მაგრამ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ თითოეული რიცხვის მოსვლა თანაბრადაა მოსალოდნელი (სავარაუდო). ასეთ შესაძლო შედეგებს **თანაბრად მოსალოდნელი** (ტოლშესაძლებელი, ტოლალბათური) ეწოდება.

მონეტის აგდებისას გერბის მოსვლა, საფასურის მოსვლა ტოლალბათური შესაძლო შედეგებია. ვთქვათ ყუთში 30 წითელი და 3 ლურჯი ბურთია. თუ ყუთიდან შემთხვევით ამოვიღებთ ერთ ბურთს, მაშინ უფრო სავარაუდოა, უფრო მოსალოდნელია, რომ ამოღებული ბურთი წითელი იქნება. ამიტომ ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ წითელი ბურთის ამოღება **მეტალბათური ხდომილობაა**, ლურჯი ბურთის ამოღება კი – **ნაკლებალბათურია**.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მონეტის აგდებისას შესაძლო შედეგი ორია: გერბი ან საფასური. ერთ-ერთი აუცილებლად მოვა, მაგრამ ერთდროულად ორივეს მოსვლა შეუძლებელია. ასევე, ერთი კამათლის გაგორებისას შესაძლო შედეგების რაოდენობა ექვსია. ყოველი გაგორებისას ამ რიცხვებიდან მოვა მხოლოდ ერთი და მისი მოსვლა გამორიცხავს დანარჩენის მოსვლას. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ეს შესაძლო შედეგები **წყვილ-წყვილად არათავსებადია** (ურთიერთგამომრიცხავია).

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ ცდებს, რომელთა შესაძლო შედეგები ტოლშესაძლებელი (ტოლალბათური) და წყვილ-წყვილად არათავსებადია.

როგორც აღვნიშნეთ ხდომილობა ცდის რაიმე სავარაუდო შედეგია. ერთი კამათლის გაგორებისას ექვსი შესაძლო შედეგია, მაგრამ ამ ექვსი შესაძლო შედეგის მიხედვით სხვადასხვა ხდომილობის დასახელება შეიძლება.

მაგალითად: „ერთისა და ოთხის არ მოსვლა“ ხდომილობაა, რომლის ხელშემწყობია ოთხი შესაძლო შედეგი. სახელდობრ: 2-ის, 3-ის, 5-ისა და 6-ის მოსვლა.

ამრიგად, რაიმე ხდომილობის ხელშემწყობი შესაძლო შედეგია ისეთი შედეგი, რომლითაც მოცემული ხდომილობა ხორციელდება. რაიმე ხდომილობის განხორციელების შესაძლებლობა რიცხვით გამოისახება. ამ რიცხვს ხდომილობის ალბათობა ეწოდება.

ვთქვათ, რაიმე ექსპერიმენტის (ცდის) შესაძლო შედეგების რაოდენობაა n, ხოლო რაიმე A ხდომილობის ხელშემწყობი შესაძლო შედეგების რაოდენობაა m, მაშინ A ხდომილობის ალბათობა, რომელიც აღინიშნება $p(A)$ სიმბოლოთი, გამოითვლება ფორმულით $P(A) = \frac{m}{n}$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $m=0$, მაშინ A შეუძლებელი ხდომილობაა და $P(A)=0$; ხოლო თუ $m=n$, მაშინ A აუცილებელი ხდომილობაა და $P(A)=1$. (P არის პირველი ასო სიტყვისა Probabilite, რომელიც ფრანგულად ალბათობას ნიშნავს). მონეტის აგდებისას გერბის მოსვლის ალბათობაა 1/2 (შესაძლო შედეგია ორი, მათგან ხელშემწყობია ერთი). კამათლის გაგორებისას სამისა და ხუთის არ მოსვლის ალბათობაა $\frac{2}{3}$ (შესაძლო შედეგია ექვსი, მათგან ხელშემწყობია ოთხი), ცხადია, ნებისმიერი A ხდომილობისათვის $0 \leq m \leq n$, ამიტომ $0 \leq P(A) \leq 1$.

ამრიგად, თუ რაიმე ცდის შესაძლო შედეგების სიმრავლე სასრულია და ისინი ტოლშესაძლებელია (ტოლალბათურია), მაშინ ცდის ჩაუტარებლადაც შეიძლება ვიპოვოთ, ამ შედეგების მიხედვით, დასახელებული რაიმე ხდომილობის ალბათობა. ე.ი. ალბათობა არის რიცხვი, რომლითაც ცდის რაიმე შედეგის განხორციელების შანსი წარმოიდგინება. ცდათა მოცემულ სერიალში A ხდომილობის მოხდენათა რაოდენობას A ხდომილობის სიხშირე ეწოდება.

A ხდომილობის სიხშირის შეფარდებას ცდათა რაოდენობასთან A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე ეწოდება.

თუ ცდათა რაოდენობაა n, ხოლო მოხდენათა სიხშირეა m, მაშინ ფარდობითი სიხშირე $P_n(A)$ სიმბოლოთი აღინიშნა, ე.ი. $P_n(A) = \frac{m}{n}$ ხდომილობის ალბათობის განმსაზღვრელი ფორმულა არ მოითხოვს ცდების რეალურ ჩატარებას. თუმცა, ცდების ჩატარებით შეიძლება შევამოწმოთ თეორიულად მიღებული რიცხვების კანონზომიერება. ფარდობითი სიხშირით შეიძლება შეფასდეს ხდომილობის ალბათობა. მას სტატისტიკურ ალბათობას უწოდებენ. ეს მეთოდი გამოიყენება მაშინ, როცა შეუძლებელია მოცემული ხდომილობის სასურველი (ხელშემწყობი) შედეგების რაოდენობის მითითება.

მოვიყვანოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. მონეტის აგდების ცდის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სრული სისტემაა სიმრავლე {გ; ს}, სადაც „გ“ აღნიშნავს გერბს, ხოლო „ს“- საფასურს.

მაგალითი 2. კამათლის გაგორებისას ცდის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სრული სისტემაა სიმრავლე {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

მაგალითი 3. ორი მონეტის აგდებისას ელემენტარულ ხდომილობათა სრული სისტემაა: {გგ, გს, სგ, სს}, აქ ყოველ წყვილში პირველი ასო ერთ-ერთი მონეტის აგდების შესაძლო შედეგია, მეორე ასო კი მეორე მონეტისა.

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის გაგორების შემდეგ მასზე მოვა 5-იანი.

ა) 1/2
ბ) 1/5
გ) 1/6
დ) 1/3

2. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის გაგორების შემდეგ მასზე მოვა კენტი რიცხვი.

ა) 1/6
ბ) 1/2
გ) 1/3
დ) 1/4

3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის გაგორების შემდეგ მასზე მოვა 5-ზე ნაკლები რიცხვი.

ა)1/3
ბ) 1/6
გ)1/2
დ)1/4

4. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის გაგორების შემდეგ მასზე არ მოვა რიცხვი 4.

ა) 1/4
ბ) 1/2
გ) 1/3
დ) 5/6

5. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 52-კარტიანი დასტიდან დარიგებისას პირველი კარტი იქნება შავი ფერის?

ა) 1/4
ბ) 1/2
გ) 1/13
დ) 1/3

6. გამწვანების ბიურომ დარგო 60 ცაცხვის, 130 ნაძვის და 110 ჭადრის ნერგი. ამ ნერგებიდან შემთხვევით აღებული ერთი გახმა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ გამხმარი ნერგი არ იქნება ჭადრის?

ა) 11/15
ბ) 1/5
გ) 13/30
დ) 19/30

7. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მონეტის ორჯერ აგდებისას, ორივეჯერ მოვა გერბი?

ა) 1/4
ბ) 1/2
გ) 3/4
დ) 1/3

8. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მონეტის ორჯერ აგდებისას, ერთხელ მოვა საფასური და ერთხელ გერბი?

ა) 1/4
ბ) 1/2

გ) 3/4

დ) 1/3

9. მოცემულია ციფრები 0; 1; 2; 5. ამ ციფრებისაგან ადგენენ ორნიშნა რიცხვებს ისე, რომ მასში ციფრები არ მეორდება. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ ორნიშნა რიცხვებიდან შემთხვევით შერჩეული რიცხვი იქნება 5-ის ჯერადი?

ა)1/3 ბ)5/9 გ)7/9 დ)1/9

10. იპოვეთ x, თუ:

1) 3; 0; –0,9; 4; 5; x; 7; –1,2 მონაცემების მედიანაა 2,5.

2) 0; 311 ; 2−1 1 ; 0,8; x –2,5 მონაცემების მედიანაა 31

11. იპოვეთ შემდეგი მონაცემების გაბნევის დიაპაზონი:

1) 1; –2; 3; –6; –5; 4; 6

2) –2; 7; 0; –3,7; 2,5; 9,3; 7

3) 2,5; –2; 0; 32 2 ; –3; –3,2; 5

4) 5 2 ; 2 19 ; 4 5 ; − 2 5 ; − 3 2 ; 2 13

12. შეადგინეთ შემდეგი მონაცემების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი:

1) 3; 5; 4; 4; 3; 5; 6; 0; 5; 6; 0; 3

2) –2; 3; 0; 1; 4; 3; 4; 0; –2; 1; 4; 4; 3; 3

13. იპოვეთ შემდეგი მონაცემების მოდა:

1) 2; –1; –2; –2; 3; 4; –2; 4; 1; 2; –2

2) 3; 5; 0; 1; –2; 5; 2; 5; 2; 3; 2

3) 2; 0; –3; 1; 5; –2; 4; 7; 8

4) 4; 2; 0; –1; 4; 2; 1; 3; –2

14. იპოვეთ შემდეგი მონაცემების საშუალო კვადრატული (სტანდარტული) გადახრა:

1) –2; 3; 0; 5 2) –2; –1; 0: 5: 8

3) 3; –2; 2; 1; 3; 5 4) –7; –1; 2; 3; –1; 8; –11

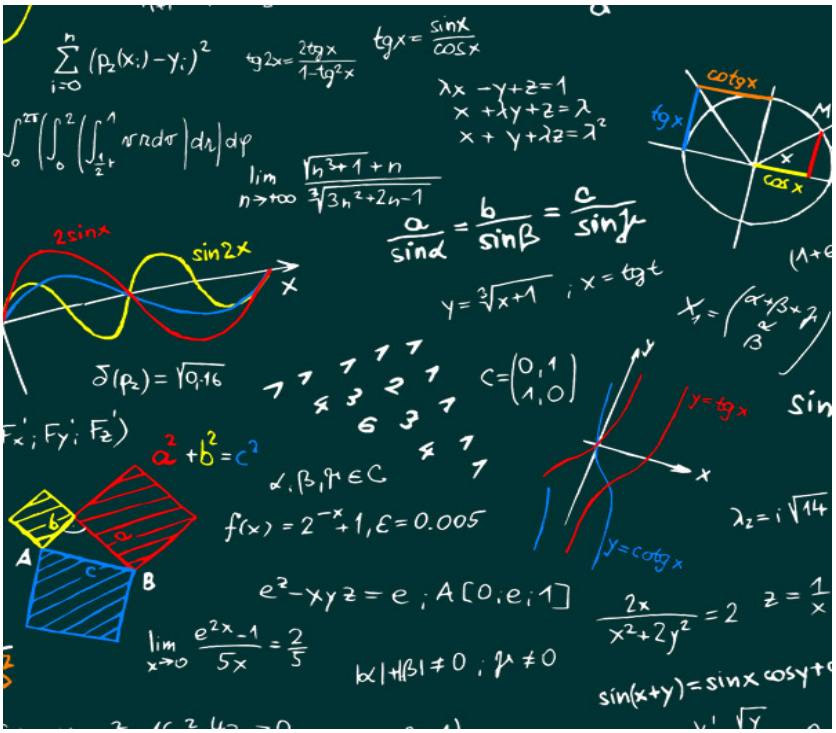
კითხვები თვითშემოწმებისთვის

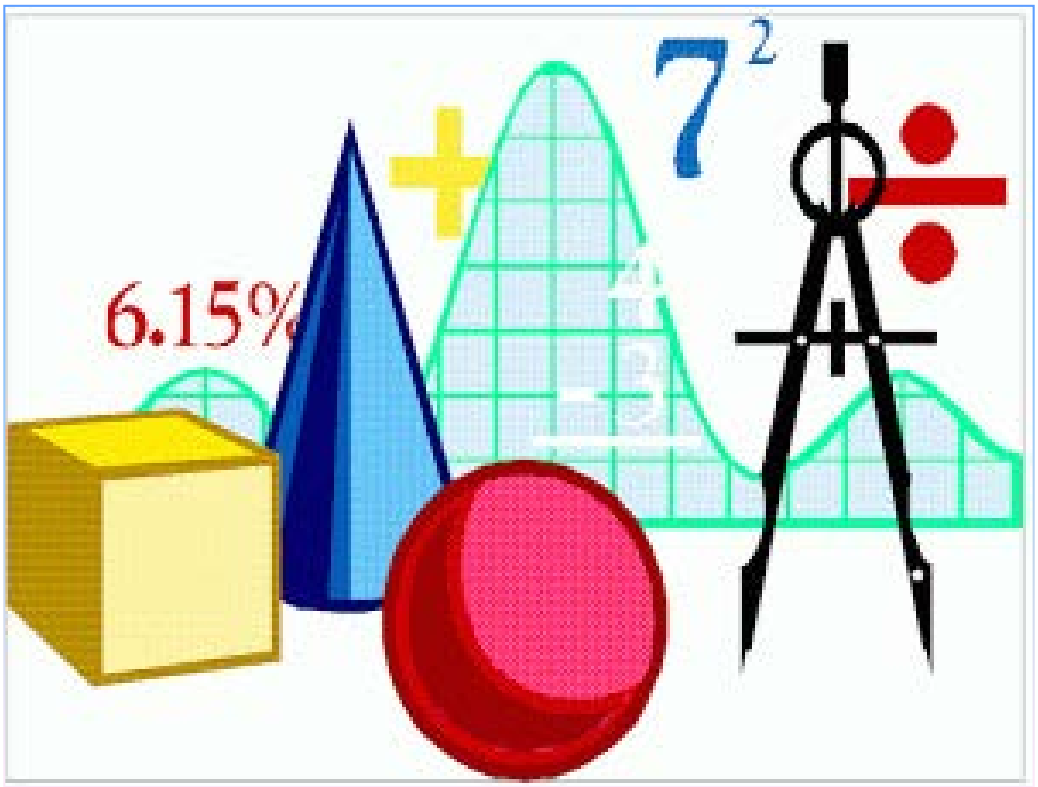
1. რას ეწოდება სიმრავლე?
2. დაასახელე სიმრავლის მოცემის ხერხები.
3. რას ეწოდება სიმრავლეთა თანაკვეთა?
4. რას ეწოდება სიმრავლეთა გაერთიანება?
5. რამდენ ელემენტიანია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე?
6. რომელი რიცხვები იყოფა 6-ზე? პასუხი ახსენით.
7. რაში მდგომარეობს პროპორციის ძირითადი თვისება?
8. რას ეწოდება პროცენტი?
9. როგორ უნდა გამოთვალოთ რიცხვი 250 -ს რამდენი პროცენტია 10?
10. რას უდრის სამკუთხედის პერიმეტრი?
11. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთი კუთხეა 50^0 , რის ტოლი იქნება დანარჩენი კუთხეები? პასუხი დაასაბუთეთ.
12. რას უდრის მართკუთხედის ფართობი?, პერიმეტრი?
13. რას უდრის კვადრატის ფართობი? პერიმეტრი?
14. რამდენ გრადუსიან კუთხეს ქმნიან რომბის დიაგონალები გადაკვეთისას?
15. რა უდრის 5 სმ-იანი დიამეტრის მქონე წრის ფართობი, წრეწირის სიგრძე?

დამატებითი სავარჯიშოები

1. განსაზღვრეთ პროპორციის უცნობი წევრი:
   1) x :12 =10 : 5 ; 2) 15 :8 = 45 : x ; 3) $\frac{2,7}{1,8,} = \frac{x}{0.4}$
2. 2000-ის რა ნაწილს შეადგენს 225?
3. 510,3-ის რა ნაწილს შეადგენს 17,01?
4. 340-ის რამდენი პროცენტია 68?
5. 960 დაყავით 11-ისა და 13-ის პროპორციულ ნაწილებად
6. ფერმერმა ნაკვეთის $\frac{8}{9}$ ნაწილი მოხნა 16 საათში. რამდენ საათში მოხნავს ის მთელ ფართობს?
7. ავტომობილმა მთელი გზის 60% გაიარა 9 საათში. რამდენ საათში გაივლის ის გზის დარჩენილ ნაწილს?
8. ერთი რიცხვი შეადგენს მეორის 30%-ს. მეორე რიცხვის რა ნაწილს შეადგენს პირველი რიცხვი?
9. საჭიდაო დარბაზში მყოფი სპორტსმენებიდან 45 ვარჯიშობს ძიუდოში, 24 სამბოში, 12 – როგორც სამბოში ასევე ძიუდოში, ხოლო 8 – ამ სახეობებიდან არც ერთში. რამდენი სპორტსმენია დარბაზში?
10. ქალაქის ყოველმა მცხოვრებმა იცის ქართული და რუსული ენებიდან ერთი მაინც. ქართული იცის მოსახლეობის 85%-მა, ხოლო რუსული – 65%-მა. ქალაქის მოსახლეობის რამდენმა პროცენტმა იცის ორივე ეს ენა?
11. გაამარტივე და გამოთვალე:
    $\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} - \frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}} + \sqrt[4]{ax}, \quad$ *თუ* $a = 2, x = 8$
12. ტრაქტორისტთა სამმა ბრიგადამ ერთად 720 ჰექტარი მოხნა. პირველმა ბრიგადამ 60 ჰექტარით მეტი მოხნა, ვიდრე მეორემ, და 60 ჰექტარით ნაკლები, ვიდრე მესამე ბრიგადამ. რამდენი ჰექტარი მოხნა თითოეულმა ბრიგადამ?
13. ორი მომდევნო მთელი რიცხვის ნამრავლი 38-ით ნაკლებია შემდეგი ორი მომდევნო მთელი რიცხვის ნამრავლზე. იპოვეთ ამ რიცხვებს შორის უმცირესი
14. თუ მართკუთხედის სიგრძეს შევამცირებთ 4სმ-ით, ხოლო მის სიგანეს გავადიდებთ 7 სმ-ით, მაშინ მივიღებთ კვადრატს, რომლის ფართობი 100 კვ. სმ-ით მეტი იქნება მართკუთხედის ფართობზე. იპოვეთ კვადრატის გვერდი.
15. მართკუთხედის სიგრძე 3-ჯერ მეტია მის სიგანეზე. თუ მართკუთხედის სიგანეს გავადიდებთ 4მ-ით, ხოლო მის სიგრძეს შევამცირებთ 5 მ-ით, მაშინ მართკუთხედის ფართობი 15 კვ. მ-ით გადიდდება. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები
16. ფერმერს ბოსტნეულის დასარგავად აქვს ორი მოსაზღვრე ნაკვეთი: პირველი ნაკვეთის ფართობი 4-ჯერ მეტია მეორის ფართობზე. თუ პირველი ნაკვეთიდან ჩამოვჭრით 10 ჰექტარს და შევუერთებთ მეორე ნაკვეთს, მაშინ მეორე ნაკვეთი შეადგენს პირველი ნაკვეთის დარჩენილი ნაწილის 2/3-ს. იპოვეთ თითოეული ნაკვეთის ფართობი.
17. სამი ყანის საერთო ფართობია 16 ჰექტარი. მესამე ყანის ფართობი უდრის პირველი ორი ყანის ფართობთა ჯამს. იპოვეთ თითოეული ყანის ფართობი, თუ მეორე ყანის ფართობი ისე შეეფარდება პირველი ყანის ფართობს, როგორც 1:3.

18. წილადის მნიშვნელი 4-ით მეტია მის მრიცხველზე. თუ ამ წილადის მრიცხველს მივუმატებთ 11-ს, მნიშვნელს კი გამოვაკლებთ 1-ს, მაშინ მივიღებთ მოცემული წილადის შებრუნებულ წილადს. იპოვეთ წილადი.
19. ქსოვილის ფასმა დაიკლო 30%-ით, რის შემდეგ ქსოვილის ფასი გახდა 42 ლარი. რამდენი ლარი ღირდა ქსოვილი თავდაპირველად?
20. რამდენი ლარი შეიტანა მეანაბრემ ბანკში ერთი წლის წინ, თუ მას ბანკში ახლა აქვს 327 ლარი და წლიური დანარიცხი შეადგენს 9%-ს.
21. *A* პუნქტიდან *B* პუნქტში, რომელთა შორის მანძილი 160 კილომეტრია, გაემგზავრა ავტობუსი; ორი საათის შემდეგ მის კვალდაკვალ გავიდა მსუბუქი ავტომობილი, რომლის სიჩქარე ისე შეეფარდებოდა ავტობუსის სიჩქარეს, როგორც 3:1. იპოვეთ ავტობუსისა და ავტომობილის სიჩქარე, თუ ავტომობილი *B* პუნქტში 40 წუთით ადრე ჩავიდა, ვიდრე ავტობუსი.
22. შვიდი მეგობრის საშუალო ასაკი 16 წელია. რამდენი წელი იქნებოდა მათი საშუალო ასაკი 5 წლის წინ?
    ა) 10 ბ) 11 გ) 12 დ) 16
23. რა ციფრით ბოლოვდება $a = 9^{16}+5^{16}$ რიცხვის ციფრული ჩანაწერი?
    ა) 4 ბ) 5 გ) 6 დ) 9
24. რა ციფრით ბოლოვდება $a = 4^{8}+6^{8}$ რიცხვის ციფრული ჩანაწერი?
    ა) 2 ბ) 4 გ) 6 დ) 8
25. ანსამბლი შედგება მოცეკვავეების, მომღერლების და მუსიკოსებისაგან. მუსიკოსების რაოდენობა 3-ჯერ ნაკლებია მოცეკვავეების რაოდენობაზე და 5-ით ნაკლებია მომღერლების რაოდენობაზე. თუ ამ ანსამბლში $n-2$ მუსიკოსია, მაშინ ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი გამოსახულებით ჩაიწერება ანსამბლის წევრთა რაოდენობა?
    ა) $5n-2$ ბ) $5n-5$ გ) $5n$ დ) $5n+1$



გამოყენებული ლიტერატურა :

- ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა, ნ. მაჭარაშვილი, ვ.აბესაძე, ზ. მეტრეველი **მათემატიკა**, თბილისი, 2009წელი
- ნ. მაჭარაშვილი - მათემატიკა, მეოთხე გადამუშავებული გამოცემა, 2012 წელი, თბილისი
- გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი **მათემატიკა X კლასი,** გამომცემლობა ინტელექტი, თბილისი 2012 წელი
- ნ. ჯაფარიძე, მ. წილოსანი, ნ. წულაია **მათემატიკა X კლასი,** ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა, 2011 წელი
- პაატა პაპავა, ეკატერინე კორძაძე, მაია ბაქრაძე - „წიგნიერების, მათემატკური წიგნიერების და სასიცოცხლო უნარების გზამკვლევი მასწავლებლებისთვის. 2011 წელი, სამოქალაქო განვითარების ინსტიტუტი
- ჰ. აიზენკი „შეამოწმეთ თქვენი გონებრივი შესაძლებლობები“ ტესტები, 2005 წელი, თბილისი
- ეროვნული სასწავლო გეგმა 2011-2016 წ.
- შეფასებისა და გამოცდების ცენტრი „როგორ მოვემზადოთ 2014 წლის ერთიანი ეროვნული გამოცდებისათვის მ ა თ ე მ ა ტ ი კ ა, თბილისი2014 წელი
- ინტერნეტ გაზეთი „მასწავლებელი“, 2014 წელი
- Devine, Thomas G. Teaching studies skills.Boston.1997