მურმან კუბლაშვილი, ზურაბ კაპანაძე

რიცხვითი მეთოდები

„ტექნიკური უნივერსიტეტი"

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

მ. კუბლაშვილი, ზ. კაპანაძე

რიცხვითი მეთოდები

რეგისტრირებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო
საბჭოს მიერ

თბილისი
2009

დამხმარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლის სტუ-დენტებისათვის. იგი მოიცავს წრფივი ალგებრის ამოცანების, დიფერენციალური განტოლებების შემცველი სასაზღვრო ამოცანების, არაწრფივ განტოლებათა სისტემების, კოშის ამოცანის რიცხვით ამოხსნებსა და ფუნქციათა მიახლოებითი ინტეგრების თეორიას.

რეცეზენტი საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის
ნ. მუსხელიშვილის გამოთვლითი მათემატიკის
ინსტიტუტის ანალიზის განყოფილების გამგე
ფიზ.-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
პროფესორი **ჯემალ სანიკიძე**

ISBN 978-9941-14-362-5
http://www.gtu.ge/publishinghouse/

Verba volant,
scripta manent

ს ა რ ჩ ე ვ ი

თ ა ვ ი I

წრფივი ალგებრის ამოცანების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

თ ა ვ ი I I

დიფერენციალური განტოლების შემცველი სასაზღვრო ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები

თ ა ვ ი I I I

არაწრფივ განტოლებათა სისტემების მიახლოებითი ამოხსნები

თ ა ვ ი I V

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

თ ა ვ ი V

ფუნქციათა მიახლოებითი ინტეგრება

თავი I

წრფივი ალგებრის ამოცანების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

წრფივი ალგებრის ძირითადი ამოცანები და მათი ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები, წარმოადგენენ მთელი გამოთვლითი მათემატიკის ფუნდამენტს. მასზედ მიიყვანება როგორც ჩვეულებრივი, ასევე კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები, ინტერპოლაციისა და აპროქსიმაციის ამოცანები.

არაწრფივი ამოცანების ამოხსნისას რიცხვითი მეთოდებით შესაძლებელია ისეთი ალგორითმების შედგენა, რომლებითაც ისინი დაიყვანებიან წრფივი ალგებრის ამოცანებზე.

სხვადასხვა ინჟინრული გაანგარიშების დროს მივდივართ წრფივი ალგებრის ამოცანების ამოხსნის რიცხვით მეთოდებზე. მაგალითად, ჩარჩოს ან ფერმის ანგარიშის დროს სტატისტიკის ძირითადი განტოლებების ჩაწერით ძალების ან მომენტების მიმართ, შემდეგ მათი დაგეგმილებით კოორდინატთა ღერძებზე, ვღებულობთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას ძალების პროექციების მიმართ.

§1. 1 წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის სასრული მეთოდები

ვთქვათ მოცემული გვაქვს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.1)$$

თავდაპირველად გავარკვიოთ ამ სისტემის თავსებადობის (ამონახსნის არსებობის) საკითხი. ამისათვის განვიხილოთ უცნობების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი $A = (a_{ij})_{i=1,2,\ldots,n}^{j=1,2,\ldots,m}$ მატრიცა და ე. წ. გაფართოებული მატრიცა $\overline{A}$ მატრიცა, რომელიც მიიღება A მატრიცისაგან თავისუფალი წევრების სვეტის მიერთებით.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \; B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

მაშინ (1.1) განტოლებათა სისტემა შეიძლება ძავწეროთ მატრიცულ-ვექტორული სახით

$$AX = B.$$

ამოვირჩიოთ A მატრიცისაგან k სტრიქონი და k სვეტი ($k \le min(n,m)$). ამ სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთაზე მოთავსებული ელემენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს ეწოდება k-ური რიგის მინორი.

ვიტყვით, რომ A მატრიცის რანგი არის k, თუ არსებობს ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებული k-ური რიგის მინორი, ხოლო ნებისმიერი $k+1$ რიგის მინორი ნულის ტოლია.

(1.1) სისტემის თავსებადობის შესახებ ამომწურავ პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა (იხ. [ ]).

თ ე ო რ ე მ ა: წრფივ ალგებრულ განტოლებათა (1.1) სისტემა თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა გაფართოებული $\overline{A}$ მატრიცის რანგი ტოლია A მატრიცის რანგისა.

შევნიშნოთ, რომ (1.1) სისტემა შეიძლება თავსებადი იყოს, მაგრამ საზოგადოდ მას არ გააჩნდეს ერთადერთი ამონახსნი. სისტემის ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ სამართლიანია

თ ე ო რ ე მ ა: თავსებად (1.1) სისტემასგააჩნია ერთადერთი ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცის რანგი ტოლია უცნობების რაოდენობისა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ (1.1) სისტემაში $m = n$, მაშინ მას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $det\, A \neq 0$.

წრფივი ალგებრულ განტოლებათა სისტემების ამოხსნის მეთოდები ძირითადად იყოფა ორ ჯგუფად: 1) ზუსტი მეთოდები, რომლებიც წარმოადგენენ სისტემის ამოხსნის გამოთვლის სასრულ ალგორითმებს და 2) მიახლოებითი (იტერაციული) მეთოდები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან ვიპოვოთ ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა წინასწარ დასახელებული სიზუსტით კრებადი უსასრულო მიმდევრობების საშუალებით.

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნის ზუსტ მეთოდებს მიეკუთვნება: კრამერის წესი, გაუსის მეთოდი, მთავარი ელემენტების მეთოდი და სხვა. ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი მეთოდი განტოლებათა სისტემის ამოხსნის საშუალებას იძლევა მაშინ, როცა $m = n$. (იხ. [1]).

შევნიშნოთ, რომ კომპიუტერზე გამოთვლების დროს ადგილი აქვს დამრგვალების ცდომილებას, ამიტომ სისტემის ამოხსნის ზუსტი მეთოდით შეიძლება ფაქტიურად მიღებული იქნას მიახლოებითი ამონახსნი. კრამერის წესით წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის საჭიროა n-ური რიგის$n+1$ დეტერმინანტის გამოთვლა.

აღვნიშნოთ $det\, A = \Delta$, ხოლო Δ_i-ით იმ მატრიცის დეტერმინანტი, რომელიც A მატრიცისაგან მიიღება მისი i-ური სვეტის ელემენტების თავისუფალი წევრებით შეცვლით, ე.ი.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1,i-1}\ b_1\ a_{1,i+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2,i-1}\ b_2\ a_{2,i+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{n,i-1}\ b_n\ a_{n,i+1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

მაშინ შისტემის ამონახსნი გამოითვლება კრამერის ფორმულებით (იხ. [1])

$$x_i = {\Delta_i}/{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.2)$$

მაშასადამე, თუ A მატრიცა არაგადაგვარებულია, ე.ი. $\Delta \neq 0$, მაშინ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც გამოითვლება (1.2) ფორმულით.

მთავარი ელემენტების მეთოდის გამოყენებაშეიძლება მაშინ, როდესაც სისტემა არაგადაგვარებულია. მთავარი ელემენტების მეთოდით (1.1) სისტემის ამოხსნისას გაფართოებული მატრიცის a_{ij} ელემენტებს შორის ამოირჩევა მოდულით უდიდესი (a_{pq}) ელემენტი, რომელსაც მთავარი ელემენტიმ ეწოდება, ხოლო სტრიქონს, რომელიც ამ ელემენტს შეიცავს, მთავარი სტრიქონი.

გაფართოებული მატრიცის მთავარი სტრიქონის ელემენტები მრავლდება $m_i = {a_{iq}}/{a_{pq}}$ თანამამრავლზე და აკლდება i-ური სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს ($i \neq p$). მიიღება ახალი მატრიცა, რომლის q სვეტში ყველა

ელემენტი ნულია, გარდა p სტრიქონის ელემენტისა. თუ მიღებული მატრიციდან ამოვშლით q-სვეტს და p-სტრიქონს, მიიღება ახალი $M^{(1)}$ მატრიცა, რომელსაც გააჩნია ერთით ნაკლები სტრიქონი და სვეტი.

$M^{(1)}$ მატრიცისათვის იგივე ოპერაციების განმეორებით მიიღება $M^{(2)}$ მატრიცა და ა.ს. საბოლოოდ მიიღება მიმდევრობა

$$M^{(0)},\ M^{(1)},\ M^{(2)},\dots,M^{(n-1)},$$

რომლის ბოლო წევრი შეიცავს მხოლოდ ორი ელემენტისაგან შედგენილ სტრიქონს. ამ მატრიცისთვის იგი მიიღება მთავარ სტრიქონად. (1.1) სისტემის x_i უცნობების გამოანგარიშებისათვის საჭიროა მიღებული მატრიცების მთავარი სტრქონების შესაბამისი განტოლებების ერთ სისტემაში გაერთიანება დაწყებული $M^{(0)}$ მატრიცის მთავარი სტრიქონიდან. შემდეგ უცნობების რიგის გარკვეული შეცვლით მიიღება განტოლებაა სისტემა სამკუთხა მატრიცით. აღვნიშნოთ $x_1^*, x_2^*,\dots, x_n^*$ -ით შეცვლილი რიგით დალაგებული უცნობები. მაშინ მიღებული სისტემის ბოლო განტოლებიდან ადვილად გამოვიანგარიშებთ x_n^* უცნობს, ბოლოსწინა განტოლებიდან x_{n-1}^* უცნობს და ა.შ. პირველი განტოლებიდან x_1^* უცნობს.

§1. 2 წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გაუსის მეთოდი

განვიხილოთ შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{cases} \qquad (2.1)$$

დაუშვათ (2.1) სისტემის უცნობების კოეფიციენტების მატრიცა არაგადაგვარებულია. ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11} \neq 0$ და (2.1) სისტემის პირველი სტრიქონის ყველა კოეფიციენტი გავყოთ a_{11}-ზე. მივიღებთ

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)} \qquad (2.2)$$

სადაც $a_{1j}^{(1)} = {a_{1j}}/{a_{11}},\quad j = 1,2,\dots,n+1$.

პირველ ეტაპზე (2.1) განტოლებათა სისტემის დანარჩენი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ x_1 უცნობი. ამისათვის (2.2) განტოლება გავამრავლოთ a_{21}-ზე და გამოვაკლოთ (2.1) სისტემის მეორე განტოლებას. ანალოგიურად (2.2) გავამრავლოთ a_{31}-ზე და გამოვაკლოთ (2.1) სისტემის მესამე განტოლებას და ა. შ.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}\cdot\frac{a_{1j}}{a_{11}},\quad i = 2,3,\dots,n;\quad j = 1,2,\dots,n+1,$$

მაშინ მივიღებთ შემდეგ სისტემას.

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1,n+1}^{(1)} \\ \quad a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = a_{2,n+1}^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{n2}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)} x_n = a_{n,n+1}^{(1)} \end{cases} \qquad (2.3)$$

ანალოგიურად i-ურ ეტაპზე $(1 < i < n-1)$, $i+1$-ე განტოლებიდან დაწყებული x_i უცნობის გამორიცხვისათვის თუ ვისარგებლებთ ფორმულებით

$$a_{ij}^{(i)} = \frac{a_{ij}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}, \qquad j = i, i+1, \ldots, n+1$$

$$a_{kj}^{(i)} = a_{kj}^{(i-1)} - a_{ki}^{(i-1)} \frac{a_{ij}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}, \qquad (2.4)$$

$$k = i+1, \ldots, n+1; \quad j = i, \ldots, n+1$$

მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1i}^{(1)} x_i + a_{1,i+1}^{(1)} x_{i+1} + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1,n+1}^{(1)} \\ \quad a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2i}^{(2)} x_i + a_{2,i+1}^{(2)} x_{i+1} + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = a_{2,n+1}^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_i + a_{i,i+1}^{(i)} x_{i+1} + \ldots + a_{in}^{(i)} x_n = a_{n,n+1}^{(i)} \\ \qquad a_{i+1,i+1}^{(i)} x_{i+1} + \ldots + a_{i+1,n}^{(i)} x_n = a_{i+1,n+1}^{(i)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n,i+1}^{(i)} x_{i+1} + \ldots + a_{n,n}^{(i)} x_n = a_{n,n+1}^{(i)} \end{cases}$$

პროცესის $n-1$-ჯერ განმეორებით საბოლოოდ გვექნება

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1,n+1}^{(1)} \\ \quad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = a_{2,n+1}^{(2)} \\ \qquad x_3 + a_{34}^{(3)} x_4 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = a_{2,n+1}^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n,n}^{(n-1)} x_n = a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{cases} \qquad (2.5)$$

ამგვარად გაუსის მეთოდით (2.1) სისტემა მიიყვანება ექვივალენტურ (2.5) სისტემამდე. (2.5) სისტემის კოეფიციენტების გამოთვლას ეწოდება გაუსის მეთოდის პირდაპირი სვლა, ხოლო სამკუთხა სისტემიდან შემდეგ უცნობების მნიშვნელობების გამოანგარიშებას კი უკუსვლა.

გაუსის მეთოდის უკუსვლით (2.5) სისტემის ბოლო განტოლებიდან თავდაპირველად მიიღება x_n უცნობის მნიშვნელობა.

$$x_n = a_{n,n+1}^{(n-1)} \Big/ a_{n,n}^{(n-1)} \qquad (2.6)$$

შემდეგ კი მიმდევრობით გამოიანგარიშება $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$ უცნობთა მნიშვნელობები შემდეგი ფორმულების საშუალებით

$$x_k = a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j, \qquad k = n-1, n-2, \ldots, n \qquad (2.7)$$

პირდაპირი სვლის აღწერისას ჩვენ დავუშვით, რომ $a_{11} \neq 0$. იმ შემთხვევაში, როცა $a_{11} = 0$, შეიძლება მოვძებნოთ i-ური განტოლება, რომლისთვისაც $a_{i1} \neq 0$ (ეს

შესაძლებელია, ვინაიდან კოეფიციენტების მატრიცა არაგადაგვარებულია) და შეუცვალოთ ადგილი პირველ და i-ურ განტოლებას. ანალოგიურად შეიძლება მოვიქცეთ მაშინ, როცა რომელიმე წამყვანი ელემენტი ნულის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ არსებობს გაუსის მეთოდის სხვადასხვა მოდიფიკაცია სპეციალური სახის მატრიცებისათვის (სიმეტრიული მატრიცა, დედისებრი მატრიცა და ა.შ.) (იხ. [2]) ასეთ შემთხვევას ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ თავში.

საილუსტრაციოდ განვიხილოდ შემდეგი მ ა გ ა ლ ი თ ი:
ამოვხსნათ გაუსის მეთოდით შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 10x_4 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 9 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 12 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases} \qquad (2.8)$$

<u>გაუსის მეთოდის პირდაპირი სვლა.</u>
ავირჩიოთ წამყვანი განტოლება, ვთქვათ (2.8) სისტემის პირველი განტოლება და მისი ყველა კოეფიციენტი გავყოთ 2-ზე, მივიღებთ:

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2 \qquad (2.9)$$

(2.9) განტოლების საშუალებით გამოვრიცხოთ x_1 უცნობი სისტემის ყველა განტოლებიდან გარდა წამყვანისა. ამისათვის (2.9) განტოლება ჯერ გავამრავლოთ 5-ზე და გამოვაკლოთ (2.8) სისტემის მეორე განტოლებას, შემდეგ -3-ზე და გამოვაკლოთ (2.8) სისტემის მესამე განტოლებას და ბოლოს 4-ზე და გამოვაკლოთ (2.8) სისტემის ბოლო განტოლებას, მივიღებთ:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 10x_4 = 4 \\ \quad 23x_2 - 9x_3 + 31x_4 = -1 \\ \quad 16x_2 + 12x_3 - 10x_4 = 18 \\ \quad \text{-}19x_2 - 6x_3 + 25x_4 = 0 \end{cases} \qquad (2.10)$$

ამით გაუსის მეთოდის პირდაპირი სვლის პირველი ეტაპი დამთავრდა. მეორე ეტაპზე გამოვრიცხოთ x_2 უცნობი (2.10) სისტემის ყველა განტოლებიდან გარდა პირველი და წამყვანი განტოლებისა. ამისათვის წინა მსჯელობის ანალოგიურად კვლავ ავირჩიოთ წამყვანი განტოლება, ვთქვათ (2.10) სისტემის მეორე განტოლება და მისი ყველა წევრი გავყოთ -23-ზე, მივიღებთ:

$$x_2 + \frac{9}{23}x_3 - \frac{31}{23}x_4 = \frac{1}{23} \qquad (2.11)$$

ამ განტოლების საშუალებით გამოვრიცხოთ x_2 უცნობი (2.10) სისტემის მესამე და მეოთხე განტოლებიდან. ამისათვის (2.11) ჯერ გავამრავლოთ 16-ზე, შემდეგ (-19)-ზე და გამოვაკლოთ შესაბამისად (2.10) სისტემის მესამე და მეოთხე განტოლებას, მივიღებთ:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 10x_4 = 4 \\ \quad \text{-}23x_2 - 9x_3 + 31x_4 = -1 \\ \qquad \dfrac{132}{23}x_3 + \dfrac{266}{23}x_4 = \dfrac{398}{23} \\ \qquad \dfrac{33}{23}x_3 + \dfrac{14}{23}x_4 = \dfrac{19}{23} \end{cases} \qquad (2.12)$$

პირდაპირი სვლის მესამე ეტაპზე უნდა გამოირიცხოს x_3 უცნობი. წინა მსჯელობის ანალოგიურად (2.12)-დან ავირჩიოთ წამყვანი განტოლება, ვთქვათ მეოთხე და მისი ყველა კოეფიციენტი გავყოთ $\frac{33}{23}$, გვექნება:

$$x_3 - \frac{14}{33}x_4 = \frac{19}{33} \qquad (2.13)$$

ეს განტოლება გავამრავლოთ $\frac{132}{23}$-ზე და გამოვაკლოთ (2.13) სისტემის მესამე განტოლებას, მივიღებთ:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 10x_4 = 4 \\ \quad\text{-}23x_2 - 9x_3 + 31x_4 = -1 \\ \qquad \frac{33}{23}x_3 + \frac{14}{23}x_4 = \frac{19}{23} \\ \quad \frac{10626}{759}x_4 = \frac{10626}{759} \end{cases} \qquad (2.14)$$

ამით გაუსის მეთოდის პირდაპირი სვლა დამთავრდა. ახლა იწყება უკუსვლა ანუ უცნობების თანდათანობით პოვნა. (2.14) სისტემის ბოლო განტოლებიდან ვპოულობთ $x_4 = 1$, შემდეგ მას ვსვამთ (2.14) სისტემის ბოლოსწინა განტოლებაში, საიდანაც ადვილად მიიღება $x_3 = 1$ და ა.შ. საბოლოოდ ვღებულობთ, რომ $x_2 = 1;$ $x_1 = 1$.

§1. 3 დეტერმინანტის გამოანგარიშება გაუსის მეთოდი

ჩამოვაყალიბოთ დეტერმინანტის რამოდენიმე თვისება (დაუმტკიცებლად), რომლებსაც უშუალოდ უკავშირდება ქვემოთ განსაზღვრული საკითხი

თ ე ო რ ე მ ა 1. თუ რომელიმე სტრიქონს (სვეტს) გავამრავლებთ (გავყოფთ) რაიმე რიცხვზე, მაშინ თვით დეტერმინანტი გაიყოფა (გამრავლდება) იგივე რიცხვზე.

თ ე ო რ ე მ ა 2. დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება თუ მისი რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს დაუმატებთ (გამოვაკლებთ) სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამის ელემენტებს გამრავლებულს (გაყოფილს) ერთსა და იმავე რიცხვზე.

თ ე ო რ ე მ ა 3. სამკუთხოვანი მატრიცის დეტერმინანტი დიაგონალზე მოთავსებული ელემენტების ნამრავლის ტოლია.

ვთქვათ მოცემულია მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

აღვნიშნოთ მისი დეტერმინანტი $\Delta \equiv det A$.

დეტერმინანტის გამოანგარიშება გაუსის მეთოდით (2.4) ფორმულებით დაიყვანება ისეთი დეტერმინანტის გამოანგარიშებაზე, რომლის დიაგონალს ქვემოთ მოთავსებული ელემენტები ნულის ტოლია.

თუ ვისარგებლებთ §2-ში შემოღებული აღნიშვნებით და დეტერმინანტის 1-2 თვისებით, მივიღებთ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 \quad a_{12}^{(1)} \ldots a_{1n}^{(1)} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 \quad a_{12}^{(1)} \ldots a_{1n}^{(1)} \\ 0 \quad a_{22}^{(1)} \ldots a_{2n}^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad a_{n2}^{(1)} \ldots a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}$$

ამ პროცესის i-ჯერ განმეორების შემდეგ გვექნება

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \ldots a_{ii}^{(i-1)} \begin{vmatrix} 1 \quad a_{12}^{(1)} \ a_{13}^{(1)} \ldots a_{1i}^{(1)} \ a_{1i+1}^{(1)} \ldots a_{1n}^{(1)} \\ 0 \quad 1 \quad a_{13}^{(2)} \ldots a_{2i}^{(2)} \ a_{2i+1}^{(2)} \ldots a_{2n}^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \ldots \ 1 \quad a_{ii+1}^{(i)} \ldots a_{in}^{(i)} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \ldots \ 0 \quad a_{i+1,i+1}^{(i)} \ldots a_{i+1,n}^{(i)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \ldots \ 0 \quad a_{n,i+1}^{(i)} \ldots a_{n,n}^{(i)} \end{vmatrix}$$

საბოლოოდ, პროცესის n-ჯერ განმეორებით მივიღებთ

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \ldots a_{nn}^{(i-1)} \begin{vmatrix} 1 \quad a_{12}^{(1)} \ a_{13}^{(1)} \ldots a_{1n}^{(1)} \\ 0 \quad 1 \quad a_{13}^{(2)} \ldots a_{2n}^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \ldots \ 1 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტის მე-3-ე თვისების თანახმად

$$det\, A = \Delta = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \ldots a_{nn}^{(n-1)} \qquad (3.1)$$

მაშასადამე, A მატრიცის დეტერმინანტი ტოლია შესაბამისი გაუსის სქემის მთავარი ელემენტების ნამრავლისა.

(3.1) ტოლობა §2-ის (2.4) ფორმულებთან ერთად წარმოადგენს დეტერმინანტის გამოანგარიშებისათვის საჭირო სამუშაო ფორმულას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი: გამოვთვალოთ გაუსის მეთოდით A მატრიცის დეტერმინანტი

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 3 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე გვექნება

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 3 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 3 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 3-3 & 7+3\cdot\frac{2}{3} & 5-3\cdot\frac{7}{3} \\ 2-2 & 1+2\cdot\frac{2}{3} & 6-2\cdot\frac{7}{3} \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= 27 \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 27 \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} \\ 0 & \frac{7}{3}-\frac{7}{3} & \frac{4}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{9} \end{vmatrix} = 27 \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{50}{27} \end{vmatrix} = 27 \cdot \frac{50}{27} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 50$$

ამგვარად მივიღეთ, რომ $\Delta = det\, A = 50$.

§1.4 გაუსის მეთოდით შებრუნებული მატრიცის გამოანგარიშება

განვიხილოთ არაგადაგვარებული A მატრიცა.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

მისი შებრუნებული მატრიცის ელემენტები აღვნიშნოთ x_{ij}-ით

$$A^{-1}=(x_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

განსაზღვრის თანახმად

$$A\cdot A^{-1}=E,$$

სადაც E არის ერთეულოვანი მატრიცი.

თუ A და A^{-1} მატრიცებს ჩავწერთ გაშლილი სახით და ვისარგებლებთ მატრიცების გამრავლების წესით, მივიღებთ n-ცალ განტოლბათა სისტემას n^2 რაოდენობის x_{ij} $i,j=1,2,\ldots,n$ უცნობების მიმართ,

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{kj}=\delta_{ij}\ (i,j=1,2,\ldots,n), \qquad (4.1)$$

სადაც

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{როცა } i=j\\ 0, & \text{როცა } i\neq j\end{cases}$$

ფიქსირებული j-თვის (4.1)-დან მიიღება წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომელშიაც უცნობები იქნება A^{-1} საძიებელი მატრიცის j-ური სვეტის $x_{1j},x_{2j},\ldots,x_{nj}$ ელემენტები.

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j}+a_{12}x_{1j}+\ldots+a_{1n}x_{nj}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{j1}x_{1j}+a_{j2}x_{1j}+\ldots+a_{jn}x_{nj}=1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_{1j}+a_{n2}x_{1j}+\ldots+a_{nn}x_{nj}=0 \end{cases} \qquad (4.2)$$

მაშასადამე სხვადასხვა j-ებისათვის (4.2) სისტემების უცნობების კოეფიციენტების ერთი და იგივეა, ხოლო მარჯვენა მხარეები კი განსხვავებულია ერთმანეთისაგან, კერძოდ, j-ურ სტრიქონში სტრიქონში მოთავსებული წევრი 1-ის ტოლია, დანარჩენი წევრები კი ნულია.

თუ ფიქსირებული j-სათვის თითეულ (4.2) სისტემას ამოვხსნით გაუსის მეთოდით, მივიღებთ შ ბრუნებული მატრიცის j-ური სვეტის ელემენტებს.

მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ გაუსის მეთოდით შემდეგი მატრიცის შებრუნებული მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4\\ 3 & 0 & 5\\ 4 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

აღვნიშნოთ შებრუნებული მატრიცა

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

ვისარგებლოთ ტოლობით $A \cdot A^{-1} = E$ და გამოვიყენოთ მატრიცების გამრავლების (4.1) ფორმულა, მივიღებთ შემდეგ სამ სისტემას

$$\begin{cases} 2x_{11} - 3x_{21} + 4x_{31} = 1 \\ 3x_{11} + 0x_{21} + 5x_{31} = 0 \\ 4x_{11} - 2x_{21} + 6x_{31} = 0 \end{cases} \quad (4.3) \qquad \begin{cases} 2x_{12} - 3x_{22} + 4x_{32} = 0 \\ 3x_{12} + 0x_{22} + 5x_{32} = 1 \\ 4x_{12} - 2x_{22} + 6x_{32} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} 2x_{13} - 3x_{23} + 4x_{33} = 0 \\ 3x_{13} + 0x_{23} + 5x_{33} = 0 \\ 4x_{13} - 2x_{23} + 6x_{33} = 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

ამ სისტემებიდან (4.3)–ის ამოხსნა მოგვცემს საძიებელი მატრიცის პირველ სვეტს. (4.4)-ის ამოხსნა მეორე სვეტს, ხოლო (4.5)-ის ამოხსნა კი მესამე სვეტს.

ამოვხსნათ (4.3) სისტემა გაუსის მეთოდით (იხ. §1.2). ავირჩიოთ წამყვანი განტოლება, ვთქვათ (4.3)-ის პირველი განტოლება და გავყოთ მისი ყველა წევრი 2-ზე, მივიღებთ:

$$x_{11} - \frac{3}{2}x_{21} + 2x_{31} = \frac{1}{2} \qquad (4.6)$$

(4.6) განტოლების საშუალებით გამოვრიცხოთ x_{11} უცნობი (4.3) სისტემის მეორე და მესამე განტოლებებიდან, მივიღებთ

$$\begin{cases} 2x_{11} - 3x_{21} + 4x_{31} = 1 \\ \qquad \frac{9}{2}x_{21} - x_{31} = -\frac{3}{2} \\ \qquad 4x_{21} - 2x_{31} = -2 \end{cases} \qquad (4.7)$$

ახლა ავირჩიოთ წამყვანი განტოლება (4.7) სისტემის მეორე და მესამე განტოლებებიდან. ვთქვათ ეს არის მესამე განტოლება და მისი ყველა წევრი გავყოთ 4-ზე, მივიღებთ

$$x_{21} - \frac{1}{2}x_{31} = -\frac{1}{2} \qquad (4.8)$$

გამოვრიცხოთ (4.7) სისტემის მეორე განტოლებიდან x_{21} უცნობი. წინა მსჯელობის ანალოგიურად ადვილად მიიღება შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} 2x_{11} - 3x_{21} + 4x_{31} = 1 \\ \qquad 4x_{21} - 2x_{31} = -2 \\ \qquad\qquad \frac{5}{4}x_{31} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

ამ უკანასკნელიდან გაუსის მეთოდის უკუსვლით ვღებულობთ: $x_{31} = \frac{3}{5}$, $x_{21} = -\frac{1}{5}$, $x_{11} = -1$.

ამგვარად, საძიებელი მატრიცის პირველი სვეტი ვიპოვეთ. ანალოგიურად თუ ამოვხსნით (4.4) და (4.5) სისტემებს გაუსის მეთოდით, მივიღებთ შესაბამისად A^{-1} მატრიცის მეორე და მესამე სვეტს:

$$x_{12}=-1,\quad x_{22}=\frac{2}{5},\quad x_{32}=-\frac{8}{5}.$$
$$x_{13}=\frac{3}{2},\quad x_{23}=-\frac{1}{5},\quad x_{11}=-\frac{9}{5}.$$
ამგვარად, საძიებელ A^{-1} მატრიცას ექნება შემდეგი სახე
$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

§1.5 მატრიცის განპირობებულობა. ცუდად განპირობებული სისტემები

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა ჩაწერილი მატრიცულ-ვექტორული სახით
$$AX=B \qquad (5.1)$$
ისმის კითხვა: $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ მატრიცის და $B=(b_j)_{i=1}^{n}$ ვექტორის ელემენტების მცირე ცვლილება როგორ გავლენას ახდენს (5.1) სისტემის ამოხსნაზე. ეს საკითხი მეტად მნიშვნელოვანია, ვინაიდან პრაქტიკაში ხშირად $a_{i,j}$ და b_i კოეფიციენტების მნიშვნელობები მიიღება მიახლოებით, გარკვეული გაზომვების შედეგად.

დაუშვათ $A^*=(a^*_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ არის A მატრიცის ელემენტების მიახლოებითი მნიშვნელობებისაგან შედგენილი მატრიცა. $B^*=(b^*_j)_{i=1}^{n}$ B ვექტორის ელემენტების მცირედ განსხვავებული მნიშვნელობებისაგან შედგენილი ვექტორი, ხოლო $X^*=(x^*_i)_{i=1}^{n}$ კი $A^*X^*=B^*$ სისტემის ამონახსნი.

აღვნიშნოთ
$$\varepsilon_A=\max_{i\le i,j\le n}\left|a_{ij}-a^*_{ij}\right|,$$
$$\varepsilon_B=\max_{i\le i\le n}\left|b_i-b^*_i\right|,$$
$$\varepsilon_X=\max_{i\le i\le n}\left|x_i-x^*_i\right|.$$

შევნიშნოთ, რომ
$$\varepsilon_X\le C(A)\varepsilon_A,\quad \varepsilon_X\le C(B)\varepsilon_B,$$
სადაც $C(A)$ არის მუდმივი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ A მატრიცაზე. მუდმივის საშუალებით ხდება წრფივ განტოლებათა სისტემების პირობითი კლასიფიკაცია:

$1\le C(A)<10$-კარგად განპირობებული სისტემები;

$10\le C(A)<10^3$-დამაკმაყოფილებლად განპირობებული სისტემები;

$10^3\le C(A)<10^5$-ცუდად განპირობებული სისტემები;

$C(A)>10^5$-თითქმის გადაგვარებული სისტემები.

კარგად განპირობებული სისტემების შემთხვევაში a_{ij} და b_i ელემენტების მცირე ცვლილებები უმნიშვნელო გავლენას ახდენს ამონახსნზე. ცუდად

განპირობებული სისტემების შემთხვევაში კი პირიქით, სისტემის მარჯვენა მხარის და კოეფიციენტების მცირე ცვლილებებმა შესაძლებელია დიდი გავლენა მოახდინოს სისტემის ამონახსნზე.

$C(A)$ მუდმივის განსაზღვრა ზოგადად ნებისმიერი მატრიცის შემთხვევაში რთული ამოცანაა. სიმეტრიული მატრიცის შემთხვევაში კი იგი განისაზღვრება ტოლობით

$$C(A)=\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|},$$

სადაც λ_1 არის სიმეტრიული მატრიცის მოდულით უდიდესი საკუთრივი რიცხვი, ხოლო λ_2-მოდულით უმცირესი საკუთრივი რიცხვი.

განვიხილოთ ცუდათ განპირობებული სისტემის მაგალითი

$$\begin{cases} x_1+1.01x_2=2.01 \\ 1.01x_1+1.02x_2=2.03 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $x_1=x_2=1$. $C(A)$ მუდმივის განსაზღვრისათვის ვიპოვოთ λ_1 და λ_2 საკუთრივი რიცხვები.

განვიხილოთ განტოლება

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1.01 \\ 10.1 & 1.02-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(1.02-\lambda)-1.01^2=0$$

უკანასკნელი განტოლების ამოხსნით მივიღებთ

$\lambda_1\approx 2.02005,\quad \lambda_2\approx 0.00005,\quad C(A)\approx 40401$.

მაშასადამე, (5.2) სისტემა არის ცუდათ განპირობებული. განვიხილოთ სისტემა, რომელიც მიიღება (5.2) სისტემისაგან მარჯვენა მხარის მცირეოდენი ცვლილებით

$$\begin{cases} x_1+1.01x_2=2.0101 \\ 1.01x_1+1.02x_2=2.030298 \end{cases} \qquad (5.3)$$

(5.2) და (5.3) განტოლებათა სისტემის მარჯვენა მხარეების სხვაობა არ აღემატება $\varepsilon_B=0.0002$ რიცხვს. თუ ამოვხსნით (5.3) სისტემას, მივიღებთ $x_1=3$, $x_2=-0.9801$. ეს კი მნიშვნელოვნად განსხვავდება (5.2) სისტემის ამონახსნისაგან.

ამ მაგალითს შეიძლება მიეცეს შემდეგი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია: თითქმის პარალელური წრფეების გადაკვეთის წერტილი მნიშვნელოვნად იცვლება თავისუფალი წევრების მცირეოდენი ცვლილებით.

ამგვარად, როცა სისტემა ცუდად განპირობებულია, ცდომილებების გამო ჩვენ არ გვაქვს გარანტია ასეთი სისტემის ამოხსნა რეალურად ასახავდეს ამა თუ იმ პროცესს.

§1.6 წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის იტერაციული მეთოდები

წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ზუსტ მეთოდებს შორის გაუსის მეთოდი ერთ-ერთი ეკონომიური მეთოდია ჩასატარებელი ოპერაციების თვალსაზრისით. შეიძლება გამოვთავლოთ, რომ n-ური რიგის სისტემის ამოხსნისათვის ჩასატარებელი ოპერაციების რიცხვი n^3-ის პროპრციულია. საკმაოდ დიდი n-ის შემთხვევაში გამოთვლის პროცესში დამრგვალებით გამოწვეული ცდომილება გარკვეულ გავლენას ახდენს ამონახსნის სიზუსტეზე. მტკიცდება, რომ კარგად განპირობებული სისტემების შემთხვევაში, დამრგვალებით გამოწვეული ცდომილებები მცირე გავლენას ახდენენ ამონახსნზე, ხოლო ცუდად განპირობებული სისტემების შემთხვევაში ეს გავლენა შეიძლება დიდი იყოს (იხ. §1.5).

ზუსტი მეთოდებისაგან განსხვავებით, მიახლოებითი მეთოდები ამონახსნის პოვნის საშუალებას იძლევიან მხოლოდ მიახლოებით. ამასთან ამონახსნის გამოანგარიშება ხდება წინასწარ დასახელებული სიზუსტით, ოპერაციების გარკვეული მიმდევრობის რამდენჯერმე განმეორებით. ოპერაციათა ეს მიმდევრობა განსაზღვრავს ერთ იტერაციას. იტერაციის რამდენჯერმე განმეორებით საწყისი მიახლოებიდან მიიღება უფრო ზუსტი მიახლოება, იმ პირობით, თუ იტერაციული მეთოდი კრებადია ამონახსნისაკენ.

იტერაციულ მეთოდს ზოგიერთ შემთხვევაში გააჩნია გარკვეული უპირატესობანი ზუსტ მეთოდებთან შედარებით:

1. თუ იტერაციული პროცესი საკმაოდ სწრაფად კრებადია, მაშინ ამონახსნის მისაღებად საჭირო დრო მცირდება. მაგალითად გაუსის ალგორითმისათვის საჭირო არითმეტიკული ოპერაციების რაოდენობა არის n^3-ის რიგის, ხოლო თითეული იტერაციის მოქმედების რიცხვი ზეიდელის მეთოდის შემთხვევაში n^2-ის პროპორციულია.;
2. იტერაციული მეთოდის დროს დამრგვალებით გამოწვეული ცდომილებანი გაცილებით ნაკლებ გავლენას ახდენს ამონახსნზე. გარდა ამისა შემთხვევითი შეცდომები იტერაციის შემდეგ ბიჯზე სწორდება.
3. განსაკუთრებით ხელსაყრელია იტერაციის მეთოდი მაშინ, როცა კოეფიციენტების დიდი ნაწილი ნულის ტოლია. ასეთი სისტემები მიიღება მაგალითად სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისას სასრული სხვაობათა მეთოდით.

განტოლებათა სისტემის იტერაციის მეთოდით ამოხსნისათვის აუცილებელია შემდეგი: 1) მოცემული იქნას ამონახსნის საწყისი მიახლოება; 2) სისტემა მივიყვანოთ იტერაციისათვის ხელსაყრელ სახეზე; 3) მიუთითოდ ერთი იტერაციისათვის საჭირო მოქმედებათა ერთობლიობა, რომლის საშუალებით მოცემული მიახლოებიდან მიიღება უფრო ზუსტი მიახლოება; 4) გავარკვიოთ, იკრიბება თუ არა იტერაციული პროცესი სისტემის ამონახსნისაკენ; 5) მიუთითოდ იტერაციული პროცესის დამთავრების პირობა.

პირველ პუნქტში არსებითი მნიშვნელობა არააქვს თუ რომელ ვექტორს ავიღებთ საწყის მიახლოებად, ვინაიდან თუ იტერაციული პროცესი კრებადია, მაშინ იგი კრებადი იქნება ნებისმიერი საწყისი მიახლოებისათვის. ამიტომ საწყის მიახლოებად იღებენ ან ნულოვან ვექტორს, ან სისტემის მარჯვენა მხარეს. ე.ი. $X(0)=(0,0,...,0)$ ან $X(0)=(b_1,b_2,...,b_n)$.

თუ ცნობილია ამონახსნის უფრო ზუსტი მიახლოება, მაშინ იგი შეიძლება ავიღოთ საწყის მიახლოებად იტერაციების რაოდენობის შემცირების მიზნით.

იტერაციის ხელსაყრელ სახემდე მიყვანისათვის საჭიროა $AX=B$ სახის სისტემა მივიყვანოთ შემდეგ სახემდე

$$X=\alpha X+\beta, \qquad (6.1)$$

სადაც $\alpha=(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ არის კოეფიციენტების მატრიცა, ხოლო β არის n-განზომილებიანი ვექტორი: $\beta=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$, $X=(x_1,x_2,...,x_n)$.

§1.7 მარტივი იტერაციის მეთოდი

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა, რომლის უცნობების კოეფიციენტების მატრიცა არაგადაგვარებულია

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

ამ სისტემის პირველი განტოლებიდა განვსაზღვროთ x_1-უცნობი დანარჩენი უცნობების საშუალებით, მეორე განოლებიდან x_2-უცნობი, მესამედან x_3 და ა.შ. მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3-...-a_{1n}x_n) \\ x_2=\dfrac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1-a_{23}x_3-...-a_{2n}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n=\dfrac{1}{a_{nn}}(b_1-a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-...-a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

რადგან A მატრიცა არაგადაგვარებულია, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11}\neq 0,\ i=1,2,...,n.$ ზოგადად (7.1) ტოლობები შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$x_i=\frac{1}{a_{ii}}(b_1-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j) \quad \text{i=1,2,...,n} \qquad (7.2)$$

მარტივი იტერაციის მეთოდი (7.2) ფორმულების გამოყენებით წარმოიდგინება შემდეგნაირად

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_1-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}), \quad \text{i=1,2,...,n}$$

სადაც k იტერაციის ბიჯის ნომერია.

იტერაციული პროცესის დამთავრების პირობად ამ შემთხვევაში შეიძლება ავიღოთ, მაგ.,

$$\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|<\varepsilon,\ \ k=0,1,2,..., \qquad (7.3)$$

პრაქტიკაში (7.3) პირობის ნაცვლად აგრეთვე გვხვდება სხვა პირობებიც.

მარტივი იტერაციის მეთოდის კომპიუტერზე რეალიზაციის დროს საჭროა ყოველ ეტაპზე კომპიუტერის მეხსიერებაში ორი n-ური რიგის მასივის შენახვა k და $k+1$ იტერაციებისათვის, რაც იწვევს გარკვეულ მოუხერხებლობას. ამ მეთოდის ეს უარყოფითი მხარე მოხსნილია ზეიდელის მეთოდში..

განვიხილოთ შემდეგი მ ა გ ა ლ ი თ ი:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases} \qquad (7.4)$$

სისტემის პირველი განტოლებიდან განვსაზღვროთ x_1 უცნობი, მეორე განტოლებიდან x_2, ხოლო მესამე განტოლებიდან x_3 უცნობი, მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(3 + 3x_2 - 4x_3) \\ x_2 = \frac{1}{5}(8 - 4x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{5}(6 + 3x_1 - 2x_2) \end{cases} \qquad (7.5)$$

ავიღოთ რაიმე საწყისი მიახლოვება $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0,0,0)$ და ჩავსვათ იგი (7.5) სისტემის მარჯვენა მხარეშიმივიღებთპირველ მიახლოებას

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(3 + 3\cdot 0 - 4\cdot 0) = \frac{3}{2} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(8 - 4\cdot 0 + 0) = \frac{8}{5} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(6 + 3\cdot 0 - 2\cdot 0) = \frac{6}{5} \end{cases} \qquad (7.6)$$

შევამოწმოთ პირობა

$$\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon \qquad (7.7)$$

$$k = 0,1,2,...,$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = \left|\frac{3}{2} - 0\right| > \varepsilon = 0.1$$

დარღვეულია (7.7) პირობა. ამიტომ პროცესი უნდა გავაგრძელოთ. პირველი მიახლოება $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = (\frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{6}{5})$

ჩავსვათ (7.5) სისტემის მარჯვენა მხარეში. მივიღებთ მეორე მიახლოებას.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(3 + 3\cdot\frac{8}{5} - 4\cdot\frac{6}{5}) = \frac{3}{2} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(8 - 4\cdot\frac{3}{2} + \frac{6}{5}) = \frac{16}{25} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(6 + 3\cdot\frac{3}{2} - 2\cdot\frac{8}{5}) = \frac{73}{50} \end{cases} \qquad (7.8)$$

შევამოწმოთ იტერაციის შეწყვეტის (7.7) პირობა

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right| = 0 < 0.1$$

$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = \left|\frac{16}{25} - \frac{8}{5}\right| = \frac{24}{25} > 0.1$$

მესამე x_3 უცნობისათვის პირობას აღარ ვამოწმებთ, რადგანაც უკვე დარღვეულია (7.7) პირობა. ამიტომ იტერაციული პროცესი უნდა გავაგრძელოთ. მიღებული მეორე მიახლოება (7.8) ჩავსვათ (7.5) სისტემის მარჯვენა მხარეში. მივიღებთ მესამე მიახლოებას:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(3+3\cdot\frac{16}{25}-4\cdot\frac{73}{50}) = -\frac{23}{50} \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{5}(8-4\cdot\frac{3}{2}+\frac{73}{50}) = \frac{173}{250} \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{5}(6+3\cdot\frac{3}{2}-2\cdot\frac{16}{25}) = \frac{461}{250} \end{cases}$$

ჩვენ პრაქტიკულად შევჩერდეთ აქ. სინამდვილეში პროცესი უნდა შეგვეწყვიტა მაშინ, როცა შესრულებული იქნებოდა (7.7) პირობა.

§1..8 ზეიდელის მეთოდი

ზეიდელის მეთოდი წარმოადგენს მარტივი იტერაციის მეთოდის მოდიფიკაციას. მისი მთავარი იდეა ისაა, რომ x_i, $i=1,2,...,n$ უცნობების $k+1$ მიახლოების გამოთვლის დროს გამოიყენება $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$ უცნობებისათვის უკვე გამოთვლილი $k+1$ მიახლოებები. მაშასადამე

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - ... - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - ... - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_1 - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{cases}$$

ზოგადათ ეს ტოლობები თითეული უცნობისათვის შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვიდგინო:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_1 - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}), \quad i=1,2,...,n, \quad k=0,1,2,... \qquad (8.1)$$

საზოგადოთ, თუ მარტივი და ზეიდელის იტერაციული პროცესები კრებადია, მაშინ ზეიდელის მეთოდი არის არანაკლებ სწრაფად კრებადი, ვიდრე მარტივი იტერაციის მეთოდი.

შესაძლებელია ისეთი შემთხვევები, როდესაც მარტივი იტერაციის მეთოდი კრებადია, მაგრამ ზეიდელის მეთოდი არ არის კრებადი და პირიქით.

განვიხილოთ მ ა გ ა ლ ი თ ი: ზეიდელის მეთოდით ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა მიახლოებით $\varepsilon = 0.001$ სიზუსტით.

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ეს სისტემა მივიყვანოთ იტერაციისთვის ხელსაყრელ სახეზე:

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3 \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3 \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2 \end{cases}$$

ფესვის საწყის მიახლოებად ავიღოთ $x_1^{(0)} = 1.2,\ x_2^{(0)} = 0,\ x_3^{(0)} = 0,$
გამოვიყენოთ ზეიდელის მეთოდი თანმიმდევრობით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.2 - 0.1 \cdot 0 - 0.1 \cdot 0 = 1.2 \\ x_2^{(1)} = 1.3 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.1 \cdot 0 = 1.06 \\ x_3^{(1)} = 1.4 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.2 \cdot 1.06 = 0.948 \end{cases}$$

შევამოწმოთ პროცესის შეწყვეტის პირობა

$$\left| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \right| = |1.2 - 1.2| = 0 < 0.001$$

$$\left| x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \right| = |1.06 - 0| = 1.06 > 0.001$$

როგორც ვხედავთ დაირღვა პროცესის შეწყვეტის პირობა. ამიტომ მესამე კოორდინატზე აღარ ვამოწმებთ და ვაგრძელებთ თვლას.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1.2 - 0.1 \cdot 1.06 - 0.1 \cdot 0.948 = 0.9992 \\ x_2^{(1)} = 1.3 - 0.2 \cdot 0.9992 - 0.1 \cdot 0.948 = 1.00536 \\ x_3^{(1)} = 1.4 - 0.2 \cdot 0.9992 - 0.2 \cdot 1.00536 = 0.999 \end{cases}$$

კვლავ შევამოწმოთ იტერაციული პროცესის შეწყვეტის პირობა

$$\left| x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \right| = |1.2 - 0.9992| = 0.2 > 0.001$$

ისევ არ შესრულდა იტერაციის შეწყვეტის პირობა. კვლავ უნდა გავაგრძელოთ თვლა.

გამოთვლების შ ედეგად ადვილად მივიღებთ

$$x_1^{(3)} = 0.996, \quad x_2^{(3)} = 1.0001, \quad x_3^{(3)} = 1.0001$$

$$x_1^{(4)} = 1.0000, \quad x_2^{(4)} = 1.0000, \quad x_3^{(4)} = 1.0000$$

$$x_1^{(5)} = 1.0000, \quad x_2^{(5)} = 1.0000, \quad x_3^{(5)} = 1.0000$$

ზუსტი ამონახსნია $x_1 = 1, \ x_2 = 1, x_3 = 1$. როგორც ვხედავთ იტერაციის მესამე და მეოთხე ბიჯზე კვლავ არ სრულდება იტერაციის შეწყვეტის პირობა.

$$\left| x_1^{(3)} - x_1^{(2)} \right| = |0.9992 - 0.996| = 0.0032 > 0.001$$

$$\left| x_1^{(4)} - x_1^{(3)} \right| = |0.9992 - 1.0000| = 0.004 > 0.001$$

მეოთხე და მეხუთე ბიჯზე მიახლოებითი ამონახსნები ზუსტად ემთხვევიან ერთმანეთს და ზუსტ ამონახსნებს. ამიტომ მეხუთე ბიჯზე ბუნებრივია შესრულებულია იტერაციის შეწყვეტის პირობაც.

§ 1.9 იტერაციული პროცესების კრებადობის პირობები და ცდომილების შეფასება

ვთქვათ განტოლებათა სისტემა ჩაწერილია შემდეგი სახით

$$X=\alpha X+\beta \qquad (9.1)$$

სამართლიანია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა: ნებისმიერი (9.1) სისტემისათვის იტერაციული პროცესი განსაზღვრული ფორმულით

$$X^{(k)}=\alpha X^{(k-1)}+\beta,\ \ k=1,2,3,..., \qquad (9.2)$$

კრებადია სისტემის ერთადერთი ამონახსნისაკენ ნებისმიერი საწყისი მიახლოებისათვის, თუ α მატრიცის რომელიმე კანონიკური ნორმა ნაკლებია ერთზე. (ე.ი. $\|\alpha\|<1$) იხ. [1]

შ ე დ ე გ ი 1. იტერაციული პროცესი (9.1) სისტემისათვის კრებადია, თუ შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი სამი პირობიდან.

$$\|\alpha\|_m=\max_i\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|<1 \qquad (9.3)$$

$$\|\alpha\|_l=\max_j\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|<1 \qquad (9.4)$$

$$\|\alpha\|_k=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|^2}<1 \qquad (9.5)$$

თუ სისტემა ჩაწერილია $AX=B$ სახით, მაშინ ზემოთ მოყვენილი თეორემიდან გამომდინარეობს

შ ე დ ე გ ი 2. იტერაციული პროცესი $AX=B$ განტოლებათა სისტემისათვის კრებადია თუ შესრულებულია ერთ–ერთი პირობა

$$\left|a_{ii}\right|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right|, \qquad i=1,2,...,n, \qquad (9.6)$$

$$\left|a_{jj}\right|>\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left|a_{ij}\right|, \qquad j=1,2,...,n, \qquad (9.7)$$

მაშასადამე იტერაციული პროცესი კრებადია, როცა $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ მატრიცის დიაგონალზე მოთავსებული წევრების აბსოლიტური სიდიდეები მეტია შესაბამისი სტრიქონის (სვეტის) დარჩენილი წევრების აბსოლიტურ სიდიდეების ჯამზე.

მართლაც, თუ შევნიშნავთ, რომ $a_{ij}=-\dfrac{a_{ij}}{aii}\left(i\neq j\right)$ და $a_{ii}\neq 0$, მაშინ (9.6) პირობიდან გამომდინარეობს (9.3) პირობის სამართლიანობა, ხოლო (9.7) პირობიდან კი (9.4) პირობა.

ანალოგიური თეორემა სამართლიანია ზეიდელის მეთოდისათვის იხ.[ ].

თ ე ო რ ე მ ა: თუ (9.1) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემისათვის სამართლიანია ერთ–ერთი (9.3), (9.4), და (9.5) პირობათაგან, მაშინ მაშინ ზეიდელის მეთოდით აგებული ვექტორთა $X^{(k)}$ მიმდევრობა კრებადია სისტემის ერთადერთი ამონახსნისაკენ ნებისმიერი $X^{(0)}$ მიახლოებისათვის.

ეხლა გადავიდეთ მარტივი იტერაციისა და ზეიდელის მეთოდის მიახლოების ცდომილების შეფასებაზე.

ვთქვათ $X^{(k)}$ არის $X=\alpha X+\beta$ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის k-ური მიახლოება აგებული (9.2) ფორმულით. მტკიცდება, რომ მარტივი იტერაციის

დროს (ცხადია იგულისხმება, რომ პროცესი კრებადია) (9.1) სისტემის ზუსტ X ამონახსნს და $X^{(k)}$ მიახლოების გადახრას შორის ადგილი აქვს შეფასებას

$$\left\| X - X^{(n)} \right\| \le \frac{\|\alpha\|^{n+1}}{1-\|\alpha\|}\|\beta\| \qquad (9.8)$$

ზეიდელის მეთოდის შემთხვევაში ადგილი აქვს შეფასებას

$$\left\| X - X^{(k)} \right\|_m \le \frac{\mu^k}{1-\mu}\left\| X^{(1)} - X^{(0)} \right\|_m \qquad (9.9)$$

სადაც

$$\mu = \max_i \frac{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|}{1-\sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}|}$$

(9.8) და (9.9) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ რაც უფრო მცირეა $\|\alpha\|$ და μ სიდიდეები, მით უფრო სწრაფია კრებადობა, ე.ი. ნაკლები იტერაციების საშუალებით მიიღწევა სასურველი სიზუსტე.

§ 1.10 მატრიცის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი რიცხვები

ვთქვათ მოცემულია კვადრატული მატრიცა $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$. განვიხილოთ წრფივი გარდაქმნა

$$y = Ax \qquad (10.1)$$

სადაც x და y რაიმე $n-$განზომილებიანი ვექტორებია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. $x \ne 0$ ვექტორს ეწოდება A მატრიცის საკუთარი ვექტორი თუ ამ მატრიცეს x ვექტორი გადაჰყავს ვექტორში

$$Ax = \lambda x \qquad (10.2)$$

λ რიცხვს (10.2) ტოლობაში ეწოდება A მატრიცის საკუთრივი ანუ მახასიათებელი რიცხვი, რომელიც შეესაბამება x ვექტორს.

მტკიცდება შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა. ყოველ წრფივ გარდაქმნას კომპლექსურ ვექტორულ სივრცეში აქვს არანაკლებ ერთი მაინც ნამდვილი ან კომპლექსური ვექტორი.

(10.2) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$(A - \lambda E)x = 0 \qquad (10.3)$$

სადაც $A-\lambda E$ მატრიცეს ეწოდება მახასიათებელი მატრიცა, ხოლო დეტერმინანტს $det(A-\lambda E)$ მახასიათებელი დეტერმინანტი, განტოლებას

$$det(A - \lambda E) = 0 \qquad (10.4)$$

კი მახასიათებელი განტოლება. გაშლილი სახით (10.4) განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda \; a_{12} \; \dots \; a_{1n} \\ a_{21} \;\; a_{22}\; -\lambda \; \dots \; a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}-\lambda \; a_{n2} \; \dots \; a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (10.4)$$

ანუ

$$\lambda^n - \delta_1\lambda^{n-1} + \delta_2\lambda^{n-2} - ... + (-1)^{n-1}\delta_{n-1}\lambda + (-1)^n\delta_n = 0 \qquad (10.5)$$

პოლინომს, რომელიც დგას (10.5) განტოლების მარცხენა მხარეში ეწოდება A მატრიცის მახასიათებელი პოლინომი. მისი კოეფიციენტები $\delta_i\left(i = 1,2,...,n\right)$ განისაზღვრება შემდეგი წესით: $\delta_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. ამ რიცხვს ეწოდება A მატრიცის კვალი და აღინიშნება $\delta_1 = SpA$. δ_2 კოეფიციენტი ტოლია A მატრიცის ყველა დიაგონალური მეორე რიგის მინორების ჯამის. ზოგადად δ_k კოეფიციენტი ტოლია A მატრიცის ყველა დიაგონალური k –ური რიგის მინორების ჯამის. ბოლოს, თავისუფალი წევრი δ_n უდრის A მატრიცის დეტერმინანტს

$$\delta = det\,A$$

(10.5) მახასიათებელი განტოლება არის n–ური ხარისხის განტოლება λ–ის მიმართ და შესაბამისად, როგორც ცნობილია ალგებრიდან აქვს არანაკლებ ერთი ნამდვილი ან კომპლექსური ფესვი. ვთქვათ $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m\left(m \le n\right)$ (10.5) განტოლების განსხვავებული ფესვებია. ამ ფესვებს ეწოდებათ A მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობები ანუ მახასიათებელი რიცხვები, ხოლო ყველა საკუთრივი რიცხვების ერთობლიობას უწოდებენ A მატრიცის სპექტრს.

მტკიცდება, რომ თუ (10.5) მახასიათებელი განტოლების ფესვები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, მაშინ ყოველ საკუთრივ რიცხვს შეესაბამება პროპორციულობის მუდმივი მამრავლის სიზუსტით მხოლოდ ერთი საკუთრივი ვექტორი.

§1.11. მატრიცის მოდულით უდიდესი საკუთრივი რიცხვის გამოანგარიშების იტერაციული მეთოდი

დაუშვათ მოცემულია n–ური რიგის კვადრატული მატრიცა A. ვთქვათ მისი საკუთრივი რიცხვებია $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ და შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები $u_1, u_2, ...u_n$. დაუშვათ საკუთრივი რიცხვები განლაგებულია მოდულით კლების მიხედვით და λ_1 მოდულით უდიდესი საკუთრივი რიცხვი მკაცრად მეტია დანარჩენ საკუთრივი რიცხვების მოდულებზე

$$|\lambda|_n \le |\lambda|_{n-1} \cdots |\lambda_3| \le |\lambda_2| < |\lambda_1|.$$

ცხადია, რომ ასეთ პირობებში λ_1 საკუთრივი რიცხვი იქნება ნამდვილი. (კომპლექსური რომ ყოფილიყო, მაშინ მოდულით თავისი შეუღლებულის ტოლ იქნებოდა). წრფივი ალგებრას კურსიდან ცნობილია, რომ ნებისმიერი n–განზომილებიანი $y^{(0)}$ ვექტორი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც $u_1, u_2, ...u_n$ საკუთრივი ვექტორების წრფივი კომბინაცია [ ]

$$y^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \qquad (11.1)$$

გავამრთლოთ A მატრიცი $y^{(0)}$ ვექტორზე და შედეგი აღვნიშნოთ $y^{(1)}$–ით

$$y^{(1)} = A y^{(0)}.$$

ამ ტოლობაში შევიტანოთ $y^{(0)}$–ის მნიშვნელობა (11.1)–დან და გავითვალისწინოთ, რომ $Au_i = \lambda_i u_i$ მივიღებთ

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} = A\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i A u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i u_i$$

თუ ამ პროცესს $k-$ჯერ გავიმეორებთ და ავღნიშნავთ $y^{(k)} = Ay^{(k-1)}$, მივიღებთ

$$y^{(k)} = Ay^{(k-1)} = A^k y^{(0)} \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k u_i \qquad (11.2)$$

ამ ტოლობაში ფრჩხილებს გარეთ გავიტანოთ λ_i^k, გვექნება

$$y^{(k)} = \lambda_i^k \left(c_1 u_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k u_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k u_n \right) \qquad (11.3)$$

რადგან λ_1 მოდულით უდიდესი საკუთრივი რიცხვია, ამიტომ

$$\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} < 1, \frac{|\lambda_3|}{|\lambda_1|} < 1, \cdots \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|} < 1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\left(\frac{|\lambda_i|}{|\lambda_1|} \right)^k \to 0$, როცა $k \to \infty, i = 2,3,\cdots,n$

მაშასადამე, (11.3) ტოლობაში საკმარისად დიდი $k-$სთვის $u_2, u_3, \cdots u_n$ ვექტორების კოეფიციენტები სიდიდით მცირე რიცხვებია და შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მიახლოებით

$$y^{(k)} = c_1 \lambda_1^k u_1 \qquad (11.4)$$

დაუშვათ

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ . \\ . \\ . \\ u_{1n} \end{pmatrix}, y^{(k)} = \begin{pmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ . \\ . \\ . \\ y_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

(11.4)–დან გამომდინარეობს, რომ

$$y^{(k-1)} \approx c_1 \lambda_1^{(k-1)} u_1$$

ამ უკანასკნელი თანაფარდობიდან მივიღებთ

$$\frac{y_i^{(k)}}{y_i^{(k-1)}} \approx \frac{c_1 \lambda_1^{(k)} u_1 i}{c_1 \lambda_1^{(k-1)} u_1 i} = \lambda, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (11.5)$$

მაშასადამე λ_1-ის მიახლოებით მნიშვნელობად შეიძლება ავიღოთ $y^{(k)}$ და $y^{(k-1)}$ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატების შეფარდება. (11.5) ტოლობა მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო დიდია k. ხშირ შემთხვევაში λ_1-ის მიახლოებით მნიშვნელობად ღებულობენ (11.5) ტოლობების საშუალო არითმეტიკულს.

(11.5) მიახლოებითი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ საკმარისად დიდი $k-$სთვის λ_1 საკუთრივი რიცხვის შესაბამის საკუთრივ ვექტორად შეიძლება ავიღოთ $y^{(k)}$ ვექტორი.

$$Ay^{(k)} \approx c_1\lambda_1^k\lambda_1 u_1 \approx \lambda_1 y^{(k)}.$$

მაშასადამე, მოდულით უდიდესი საკუთრივი რიცხვი მიახლოებით შეიძლება გავიგოთ (11.5) ტოლობიდან, სადაც $y^{(k)}$ განისაზღვრება (15.2)–დან, ხოლო შესაბამის საკუთრივ ვექტორად შეიძლება ავიღოთ $y^{(k)}$ ვექტორი.

განვიხილოთ ახალი შემთხვევა, როცა მოდულით უდიდესი საკუთრივი რიცხვი არის ჯერად.

დაუშვათ

$$\lambda_1 = \lambda_2 \cdots \lambda_r, \qquad r < n$$

და

თუ ჩავატარებთ ანალოგიურ მსჯელობას და გამოვიყენებთ (15.2) ტოლობას, მივიღებთ

$$\frac{y_1^{(k)}}{y_1^{(k-1)}} = \frac{c_1\lambda_1^k u_{1i} + \ldots + c_r\lambda_r^k u_{ri} + \ldots + c_n\lambda_n^k u_{ni}}{c_1\lambda_1^{k-1} u_{1i} + \ldots + c_r\lambda_r^{k-1} u_{ri} + \ldots + c_n\lambda_n^{k-1} u_{ni}} =$$

$$= \frac{\lambda_1\left[c_1u_{1i} + c_2u_{2i} + \ldots + c_ru_{ri} + \left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}\right)^k c_{r+1}u_{r+1,i} + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k c_nu_{ni}\right]}{c_1u_{1i} + c_2u_{2i} + \ldots + c_ru_{ri} + \left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}\right)^{k-1} c_{r+1}u_{r+1,i} + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k c_nu_{ni}}$$

აქედან, თუ $c_1u_{1i} + \ldots + c_ru_{ri} \neq 0$ და გავითვალისწინებთ, რომ $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to \infty, i > r$

მივიღებთ

$$\lim_{k\to\infty}\frac{y_i^{(k)}}{y_i^{(k-1)}} = \lambda_1 \qquad (11.6)$$

მაშასადამე, საკმარისად დიდი k-სათვის

$$\lambda_1 \approx \frac{y_i^{(k)}}{y_i^{(k-1)}}$$

ხოლო შესაბამის საკუთრივ ვექტორად, ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, შეიძლება მივიღოთ $y^{(k)} = A^k y^{(0)}$ ვექტორი.

შევნიშნოთ, რომ შესაძლებელია არ არსებობდეს $\frac{y_i^{(k)}}{y_i^{(k-1)}}$ შეფარდების ზღვარი, როცა $k \to \infty i = 1,2,\ldots,n$ ე.ი. აზრი არ ჰქონდეს (11.6) ტოლობას. ამ შემთხვევაში საჭიროა საწყისი $y^{(0)}$ ვექტორის შეცვლა და პროცესის განმეორება თავიდან.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ თუ თავიდან მოცემული A მატრიცა სიმეტრიულია მაშინ მისი ყველა საკუთრივი რიცხვი $\lambda_i, i = 1,2,\ldots,n$ და შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი u_1 არის ნამდვილი.

შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები იქნება

$$y^{(10)} = \begin{pmatrix} 4038939 \\ 1862460 \\ 539235 \end{pmatrix}$$

ნორმირების შემდეგ საბოლოოდ მივიღებთ

$$x = \begin{pmatrix} 0,90 \\ 0,42 \\ 0,12 \end{pmatrix}$$

§ 1.12 სიმეტრიული მატრიცის საკუთრივი რიცხვების და საკუთრივი ვექტორების გამოანგარიშება

ვთქვათ მოცემული გვაქვს დადებითად განსაზღვრული სიმეტრიული მატრიცა

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$$

როგორც ცნობილია იხ.[ ]:

1) მატრიცის მახასიათებელი პოლინომის $D(\lambda) = det(A - \lambda E)$ ფესვები $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ დადებითი ნამდვილი რიცხვებია;
2) მახასიათებელი ვექტორები $X^{(1)}, X^{(2)}, ..., X^{(n)}$ შეიძლება ავიღოთ ნამდვილი (ვექტორები განსაზღვრულია მიდმივი მამრავლის სიზუსტით) და ისინი აკმაყოფილებენ ორთოგონალობის პირობას, ე.ი. თუ

$$X^i = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ . \\ . \\ . \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix}, \qquad i = 1,2,...,n,$$

მაშინ

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^{(i)} x_j^{(k)} = 0, \quad i \neq k$$

განსაზღვრის თანახმად

$$AX^{(1)} = \lambda_1 X^{(1)}$$

თუ უკანასკნელ ტოლობას ჩავწერთ კოორდინატებში, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას $X^{(1)}$ ვექტორის კოორდინატების მიმართ

$$\begin{cases} \left(a_{11} - \lambda_1\right) x_1^{(1)} + a_{12} x_2^{(1)} + ... + a_{1n} x_n^{(1)} = 0 \\ a_{21} x_1^{(1)} + \left(a_{22} - \lambda_1\right) x_2^{(1)} + ... + a_{2n} x_n^{(1)} = 0 \\ .... \\ a_{n1} x_1^{(1)} + a_{n2} x_2^{(1)} + ... + \left(a_{nn} - \lambda_1\right) x_n^{(1)} = 0 \end{cases}$$

ამ სისტემიდან მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{\lambda_1}\left(a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + a_{13}x_3^{(1)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(1)}\right) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{\lambda_1}\left(a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} + a_{23}x_3^{(1)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(1)}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}^{(1)} = \dfrac{1}{\lambda_1}\left(a_{n-1,\,1}x_1^{(1)} + a_{n-1,\,2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{n-1,\,n}x_n^{(1)}\right) \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{x_n^{(1)}}\left(a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + a_{n3}x_3^{(1)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(1)}\right) \end{cases} \qquad (12.1)$$

საკუთრივი ვექტორების კოორდინატები განსაზღვრულია მუდმივი მამრავლის სიზუსტით, ამიტომ ვექტორის ერთ–ერთი არანულოვანი კოორდინატი შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერად. დაუშვათ $x_n^{(1)} = 1$.

(12.1) სისტემა შეიძლება ამოიხსნას იტერაციის მეთოდით. ამისათვის საჭიროა დავასახელოთ $x_i^{(1)}, i = 1,\ldots n-1$ და λ_1 რიცხვთა საწყისი მნიშვნელობები $x_i^{(1,0)}$ და $\lambda_1^{(0)}$ და შევადგინოთ იტერაციის ფორმულა შემდეგი სახით

$$x_i^{(1,k+1)}\ \frac{1}{\lambda_1^{(k)}}\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j^{(1,k)} + a_{in}\right), \quad i = 1,2,\ldots n-1,$$

$$\lambda_1^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(1,k+1)} + a_{nn}, \qquad k = 0,1,2\ldots$$

თუ იტერაციული პროცესი კრებადია, საკმარისად დიდი k–ს შემთხვევაში შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k)}$ და

$$\lambda^{(1)} \approx \begin{pmatrix} x_1^{(1,k)} \\ x_2^{(1,k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{(1,k)} \end{pmatrix}$$

მეორე საკუთრივი λ_2 რიცხვის და შესაბამისი საკუთრივი $X^{(2)}$ ვექტორის მოსაძებნად შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა

$$a_{i1}x_1^{(2)} + a_{i2}x_2^{(2)} + \ldots + a_{in}x^{(2)} = \lambda_2 x_i^{(2)} \qquad (12.2)$$

$$i = 1,2,\ldots n.$$

ორთოგონალობის პირობიდან

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^{(1)}x_j^{(2)} = 0$$

გამოვსახოთ $x_n^{(2)}$ კოორდინატი დანარჩენი $x_i^{(2)}$ კოორდინატების საშუალებით და შევიტანოთ (12.2) განტოლებათა სისტემაში. მაშინ (12.2) განტოლებათა სისტემიდან მივიღებთ

$$x_i^{(2)} = \frac{1}{\lambda_2}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^{(2)} x_j^{(2)}, i = 1,2,...n-1,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{x_{n-1}^{(2)}}\sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j}^{(2)} x_j^{(2)} \qquad (12.3)$$

ამ შემთხვევაში ჩავთვალოთ, რომ $x_{n-1}^{(2)} = 1$, ვინაიდან $X^{(2)}$ ვექტორი განსაზღვრულია მუდმივი მამრავლის სიზუსტით, და (12.3) სისტემა ამოვხსნათ იტერაციული მეთოდით.

გავიგებთ λ_2 საკუთრივი რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობას და შესაბამის $X^{(2)}$ ვექტორის კოორდინატებს. ანალოგიურად შეიძლება ვიპოვოთ დანარჩენი λ_i $i = 3,4,...,n$, საკუთრივი რიცხვები და შესაბამისი $X^{(i)}$ ვექტორების კოორდინატები.

თ ა ვ ი 2

დიფერენციალური განტოლების შემცვლელი სასაზღვრო ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები

მრავალი საინჟინრო და ფიზიკური ამოცანა მიიყვანება ჩვეულებრივ და კერძო წარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებების შემცველ სასაზღვრო ამოცანებზე. ამიტომ უდიდესი მნიშვნელობა ენიჭება ასეთი ამოცანების მიახლოებით ამოხსნას. არსებობს ასეთი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდები (ვარიაციული, ინტეგრალურ განტოლებათა, სასრულ ელემენტთა, სასრულ–სხვაობათა და ა.შ.) ჩვენ არსებითად განვიხილავთ სასრულ–სხვაობათა მეთოდს. ამ მეთოდის განხილვისათვის აუცილებელია ჯერ შევისწავლოთ ჩვეულებრივი და კერძო წარმოებულების აპროქსიმაცია სასრული სხვაობებით.

§2.1 ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულის აპროქსიმაცია სასრული სხვაობებით.

სასაზღვრო ამოცანების მიახლოებით ამოხსნისათვის საჭიროა მასში შემავალი ფუნქციების წარმოებულების შეცვლა გარკვეული მიახლოებითი გამოსახულებებით.

განვიხილოთ $(0,l)$ ინტერვალზე წარმოებადი y ფუნქცია.

$$y:(0,l)\to R^1$$

ვთქვათ x რაიმე წერტილია ამ ინტერვალიდან. წარმოებულის განსაზღვრიდან გვაქვს

$$y'(x^*)=\lim_{h\to 0}\frac{y(x^*+h)-y(x^*)}{h}$$

ცხადია, რომ საკმარისად მცირე h – სთვის $\dfrac{y(x^*+h)-y(x^*)}{h}$ გამოსახულება მცირედ განსხვავდება $y'(x^*)$–გან.

ადვილი შესამჩნევია რომ

$$\frac{y(x^*+h)-y(x^*)}{h}=tg\alpha,\qquad y'(x^*)=tg\beta$$

სადაც β არის x^* წერტილში მხების დახრის კუთხე აბსისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან. ადვილი შესამჩნევია, რომ მცირე h – სთვის α და β კუთხეები და მაშასადამე, მათი ტანგესებიც მცირედ მცირედ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. ე.ი. შეგვიძლია დავწეროთ

$$y'(x^*)\approx\frac{y(x^*+h)-y(x^*)}{h}\qquad(1.1)$$

მიახლოების რიგის, ანუ როგორც ამბობენ აპროქსიმაციის რიგის დადგენისათვის დაგვჭირდება ტეილორის ფორმულა. ამ ფორმულის თანახმად

$$y(x^*+h) = y'(x^*) + hy'(x^*) + \frac{h^2}{2} y''(\zeta),$$

სადაც $\zeta \in [x^*, x^*+h]$, მაშასადამე

$$\frac{y(x^*+h) - y(x^*)}{h} = y(x^*) + \frac{h}{2} y''(\zeta) \qquad (1.2)$$

შემდგომში დაგვჭირდება შემდეგი

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. ვიტყვით, რომ $\eta(h)$ ფუნქცია არის $O(h)$ როცა $h \to 0$ და დავწერთ $\eta(h) = O(h)$, თუ საკმარისად მცირე h–სთვის სრულდება უტოლობა

$$|\eta(h)| \le ch,$$

სადაც c – რაიმე მუდმივია.

(1.1)–ის ანალოგიური ფორმულის მიღება შეიძლება $y''(x^*)$–თვისაც. მართლაც, მეორე რიგის წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად

$$y''(x^*) = \lim_{h \to 0} \frac{y'(x^*) - y'(x-h)}{h}$$

და მაშასადამე,

$$y''(x^*) = \frac{y'(x^*) - y'(x-h)}{h}$$

თუ გამოვიყენებთ (1.1) ფორმულას x^* და x^*+h წერტილებისათვის ბოლო ფორმულის გათვალისწიბებით მივიღებთ

$$y''(x^*) = \frac{y'(x^*) - 2y(x^*) + y(x^*-h)}{h^2} \qquad (1.3)$$

ტეილორის მწკრივის საშუალებით გამოვთვალოთ (1.3)–ის აპროქსიმაციის რიგი. შეგვიძლია დავწეროთ

$$y(x^*+h) = y(x^*) + hy'(x^*) + \frac{h^2}{2!} y''(x^*) + \frac{h^3}{3!} y'''(x^*) + \frac{h^4}{4!} y^{IV}(\zeta_1),$$

$$y(x^*-h) = y(x^*) - hy'(x^*) + \frac{h^2}{2!} y''(x^*) - \frac{h^3}{3!} y'''(x^*) + \frac{h^4}{4!} y^{IV}(\zeta_2),$$

სადაც

$$\zeta_1 \in [x^*, x^*+h], \qquad \zeta_2 \in [x^*-h, x^*]$$

თუ მიღებულ ტოლობებს ჩავსვამთ (1.3)–ში მივიღებთ

$$y''(x^*) - \frac{y'(x^*) - 2y(x^*) + y(x^*-h)}{h^2} = \frac{h^2}{24}\left(y^{IV}(\zeta_1) + y^{IV}(\zeta_2)\right) + O(h^2);$$

როცა $h \to 0$. მაშასადამე (1.3)–ის აპროქსიმაციის რიგია h^2.

ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ $y^{IV}(x^*)$–ის აპროქსიმაცია შეიძლება ფორმულით

$$y^{IV}(x^*) \approx \frac{y(x^*+2h) - 4y(x^*+h) + 6y(x^*-h) + y(x^*-2h)}{h^4}$$

ამასთან აპროქსიმაციის რიგია h^4.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $y'(x^*)$ შეიძლება აპროქსიმირებული იქნას აგრეთვე შემდეგი სასრული სხვაობებით:

$$\frac{y(x^*+h)-y(x^*-h)}{2h},\quad \frac{y(x^*)-y(x^*-h)}{h},\quad \frac{y(x^*+h/2)-y(x^*-h)}{3/2h}$$

ხოლო $y''(x^*)$ კი შემდეგი სხვაობებით:

$$\frac{y(x^*+2h)-2y(x^*)+y(x^*-2h)}{4h^2},\frac{y(x^*+2h)-2y(x^*)-y(x^*+h)+y(x^*-h)}{2h^2}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$y'(x^*)=\frac{y(x^*+h)-y(x^*-h)}{2h}+O(h^2) \qquad (1.4)$$

განვიხილოთ შემდეგი მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ $y(x)=x^2-2, x^*=1$. გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის 1 და 2 რიგის წარმოებულების მიახლოებითი მნიშვნელობები x^* წერტილში. (1.1) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$y'(1)\approx\frac{(1+0.01)^2-1^2}{0.01}=2,01$$

ხოლო (2.3)–ის თანახმად კი გვექნება:

$$y''(1)\approx\frac{(1+0.01)^2-2+(1-0.01)^2}{(0.01)^2}=2$$

შევნიშნოთ, რომ $y'(1)=1, y''(1)=2$.

§2.2 ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულების აპროქსიმაცია სასრული სხვაობებით

კერძო წარმოებულიანი განტოლების რიცხვითი ამოხსნისათვის, ისევე როგორც ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისატვის, საჭიროა მასში შემავალი კერძო წარმოებულების შეცვლა მიახლოებითი გამოსახულებებით.

ვთქვათ მოცემულია ორი ცვლადის $u(x,t)$ ფუნქცია, რომელსაც (x^*,t^*) წერტლის რაიმე p რადიუსიან მიდამოში აქვს საკმარისი რაოდენობის კერძო წარმოებულები. ვიგულისხმოთ, რომ h და τ p –ზე ნაკლები რაიმე დადებითი რიცხვებია. მასინ ისევე როგორც ერთი ცვლადის შემთხვევაში შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{\partial u(x^*,t^*)}{\partial t}\approx\frac{u(x^*,t^*+\tau)-u(x^*,t^*)}{\tau}, \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial u(x^*,t^*)}{\partial x}\approx\frac{u(x^*+h,t^*)-u(x^*,t^*)}{h}, \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x^*,t^*)}{\partial t^2}\approx\frac{u(x^*,t^*+\tau)-2u(x^*,t^*)+(x^*,t^*-\tau)}{\tau^2}, \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u(x^*,t^*)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x^*+h,t^*) - 2u(x^*,t^*) + u(x^*-h,t^*)}{h^2}, \qquad (2.4)$$

განვიხილოთ ახლა $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ლაპლასიანის სასრულ სხვაობიანი აპროქსიმაცია. (2.3) და(2.4) ფორმულებში დაუშვებთ, რომ $h = \tau$, შევკრიბავთ და გავითვალისწინებთ მათი აპროქსიმაციის რიგს, მივიღებთ

$$\Delta u(x^*,t^*) = \frac{1}{h^2}\Big[u(x^*+h,t^*) + u(x^*-h,t^*) +$$
$$+u(x^*,t^*+h) + u(x^*,t^*-h) - 4u(x^*,t^*)\Big] + O(h^2)$$

მაშასადამე

$$\Delta u(x^*,t^*) \approx \frac{1}{h^2}\Big[u(x^*+h,t^*) + u(x^*-h,t^*) + u(x^*,t^*+h) + u(x^*,t^*-h) - 4u(x^*,t^*)\Big]$$

როგორც უკანასკნელი ფორმულიდან ჩანს, Δu ლაპლასიანის გამოსათვლელად საჭიროა $u(x,t)$ ფუნქციის მნიშვნელობის ცოდნა ხუთ წერტილში: $(x^* \pm h, t^*), (x^*, t^* \pm h), (x^*, t^*)$.

§2.3 სასრულ სხვაობათა მეთოდი

განვიხილოთ წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$y''(x) + q(x)y(x) = f(x), \qquad x \in [a,b] \qquad (3.1)$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობით

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta \qquad (3.2)$$

სადაც $q(x)$ და $f(x)$ მოცემული ნამდვილი ფუნქციებია, ხოლო α და β მოცემული ნამდვილი რიცხვები.

ამ ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის ერთ–ერთი მეთოდია სასრულ სხვაობათა მეთოდი. ამ მეთოდის ძირითადი იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $y(x)$ ამონახსნის ნაცვლად ამ ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობები საკმარისად დიდი რაოდენობის ცალკეულ წერტილებში. ბუნებრივია ველოდოთ, რომ გარკვეულ პირობებში ეს მნიშვნელობები მოგვცემენ საკმარისად სწორ ინფორმაციას ამოცანის ზუსტი ამონახსნის შესახებ.

მოცემული $[a,b]$ სეგმენტი დავყოთ n ტოლ (შევნიშნოთ, რომ სეგმენტის დაყოფა ტოლ ნაწილებად არაა სავალდებულო) ნაწილად $h=\dfrac{b-a}{n}$ ბიჯით, $x_i=ih\left(i=0,1,...n\right)$ წერტილებს ეწოდებათ ბადის წერტილები ანუ კვანძები. ამასთან x_0 და x_n სასაზღვრო კვანძებია, ხოლო $x_1,x_2,...x_{n-1}$ კი შიდა კვანძები.

(3.1) განტოლება განვიხილოთ $x_i=x_i\left(i=1,2,...n\right)$ კვანძებისათვის. თუ გავითვალისწინებთ მეორე რიგის $y''\left(x_i\right)$ წარმოებულისათვის სასრული სხვაობებით (1.3) აპროქსიმაციის ფორმულას, მაშინ (3.1) და (3.2) ამოცანა გარდაიქმნება შემდეგ სისტემად:

$$\begin{cases} y\left(x_{i-1}\right)+\left(-2+h^2q_i\right)y\left(x_i\right)+y\left(x_{i+1}\right)\approx h^2f_i \\ y\left(x_0\right)=\alpha, \qquad y\left(x_n\right)=\beta, \\ i=1,2,...n-1. \end{cases} \tag{3.3}$$

სადაც $q_i=q\left(x_i\right),\quad f_i=f\left(x_i\right)\quad \left(i=0,1,2,...,n\right)$ აქედან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თუ $y\left(x\right)$ არის (3.1), (3.2) ამოცანის ამონახსნი, მისი მნიშვნელობები კვანძებში აკმაყოფილებენ (3.3) მიახლოებით ტოლობებს.

ვთქვათ ახლა $y_0,y_1,...y_n$ რიცხვები აკმაყოფილებენ შემდეგ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} y_{i-1}+\left(-2+h^2q_i\right)y_i+y_{i+1}=h^2f_i \\ y_0=\alpha, \qquad y_0=\beta, \\ i=1,2,...n-1. \end{cases} \tag{3.4}$$

მაშინ ბუნებრივია განვიხილოთ $y_0,y_1,...y_n$ როგორც მიახლოებითი მნიშვნელობები (3.1), (3.2) სასაზღვრო ამოცანის y ამონახსნისა $x_0,x_1,...x_n$ კვანძებში ე.ი. $y\left(x_i\right)\approx y_i\quad\left(i=1,2,...,n\right)$. მაშასადამე, იმისათვის რომ მოვნახოთ $y\left(x_1\right),...,y\left(x_n\right)$–ის მიახლოებითი მნიშვნელობები საჭიროა ამოიხსნას (3.4) სისტემა. ყოველივე ზემოთთქმულთან დაკავშირებით ბუნებრივია გაირკვეს შემდეგი სამი საკითხი: 1) გააჩნია თუ არა (3.4) სისტემას ნამდვილი ამონახსნი; 2) როგორ მოვნახოთ ფაქტიურად ეს ამონახესნი; 3) კრებადია თუ არა ეს ამონახესნი. (3.1), (3.2) ამოცანის ზუსტი ამონახსნისაკენ, როცა $h\to 0$. ცხადია, რომ ეს საკითხები დაკავშირებულია $q\left(x\right)$ და $f\left(x\right)$ ფუნქციის თვისებებთან.

ილუსტრაციის სახით მოვიყვანოთ ზემოთ დასმული საკითხების გამოკვლევის მაგალითი.

ვთქვათ, $q\left(x\right)$ და $f\left(x\right)$ $[a,b]$ სეგმენტზე ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია და, გარდა ამისა, $q\left(x\right)<0$, როცა $x\in[a,b]$.

ცხადია, რომ (3.4) სისტემის მარცხენა მხარის მატრიცის ყოველ სტრიქონში დიაგონალური ელემენტის მოდული მეტია დანარჩენი ელემენტების მოდულების ჯამზე. მაშასადამე (3.4) სისტემას გააჩნია ერთადერთი ნამდვილი ამონახსნი. მისი გამოთვლა შეიძლება მაგ. გაუსის ან ზეიდელის მეთოდით. მაგრამ, რადგანაც მატრიცა სამდიაგონალურია, ამიტომ მისი ამონახსნი შეიძლება გამოთვლილი იქნას უფრო მარტივი ე.წ. გადადენის მეთოდით, რომელსაც § 2.4–ში განვიხილავთ.

რაც შეეხება (3.4) სისტემას $(y_0, y_1, ...y_n)$ ამონახსნის კრებადობას (3.1), (3.2) ამოცანის ზუსტი y ამონახსნისაკენ, იგი ამ შემთხვევაში თანაბარია და ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობას [2].

$$\max_{i=0,1,...,n} |y_i - y(x_i)| = O(h^2)$$

როცა $h \to 0$.

ხშირად (3.4) სისტემას (3.1), (3.2) სასაზღვრო ამოცანის შესაბამის სხვაობიან სასაზღვრო ამოცანას უწოდებენ, ხოლო მის $(y_0, y_1, ...y_n)$ ამონახსნს კი (3.1), (3.2) ამოცანის სხვაობიან ამონახსნს.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მ ა გ ლ ი თ ი:

ამოვხსნათ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა სასრულ–სხვაობათა მეთოდით

$$\begin{cases} y''(x) + (3+4x)\,y = x^2 + 1 & (3.5) \\ y(1) = -2; \quad y(6) = 8; \quad n = 5 & (3.6) \end{cases}$$

ჩვენ შემთხვევაში $[a,b] = [1,6]$, $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{6-1}{5} = 1$. მოვახდინოთ [1,6] შუალედის დისკრეტიზაცია წერტილებით $x_i = a + ih$ $i = 0,1,2,...n$. ჩვენს შემთხვევაში:

$$x_0 = 1 + 1.0 = 1$$
$$x_1 = 1 + 1.1 = 2$$
$$x_2 = 1 + 1.2 = 3$$
$$x_3 = 1 + 1.3 = 4$$
$$x_4 = 1 + 1.4 = 5$$
$$x_5 = 1 + 1.5 = 6$$

x_0 და x_5 არის სასაზღვრო კვანძითი წერტილები, რომლებიც ემთხვევა ჩვენი შუალედის ბოლოებს. x_1, x_2, x_3, x_4 კი შიგა კვანძითი წერტილებია.

ყოველ შიგა x_i $i = 1,2,3,4$ კვანძითი წერტილებში შევცვალოთ (3.5) განტოლება შესაბამისი სასრულ–სხვაობიანი განტოლებით და გავითვალისწინოთ (3.6) სასაზღვრო პირობა, მივიღებთ შემდეგ სასრულ–სხვაობიან სასაზღვრო ამოცანას:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{1^2} + (3 + 4x_i)\,y_i = x_i^2 + 1 & (3.7) \\ y_0 = -2; \quad y_5 = 8; & (3.8) \\ i=1,2,3,4 \end{cases}$$

(3.7)–(3.8) სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} y_{i+1} + \left(-2 + 1^2(3 + 4x_i)\right) y_i + y_{i-1} = 1^2 (x_i^2 + 1) \\ y_0 = -2; \quad y_5 = 8; \\ i=1,2,3,4 \end{cases}$$

მიღებულ სისტემაში i – პარამეტრს მივცეთ შესაბამისი მნიშვნელობანი მივიღებთ:

$$\begin{cases} y_2 + \left(-2 + 1^2\left(3 + 4.2\right)\right) y_1 + \left(-2\right) = 1^2\left(2^2 + 1\right) \\ y_3 + \left(-2 + 1^2\left(3 + 4.3\right)\right) y_2 + y_1 = 1^2\left(3^2 + 1\right) \\ y_4 + \left(-2 + 1^2\left(3 + 4.4\right)\right) y_3 + y_2 = 1^2\left(4^2 + 1\right) \\ 8 + \left(-2 + 1^2\left(3 + 4.5\right)\right) y_4 + y_3 = 1^2\left(5^2 + 1\right) \end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases} y_2 + 9y_1 \qquad = 7 \\ y_3 + 13y_2 + y_1 = 10 \\ y_4 + 17y_3 + y_2 = 17 \\ \quad 21y_4 + y_3 = 26 \end{cases} \qquad (3.9)$$

ამ სისტემის ამოხსნა ჩვენ შეგვიძლია გაუსის მეთოდით, მაგრამ იმის გამო, რომ ეს სისტემა არის სამდიაგონალური, ამიტომ უფრო მოსახერხებელია ის ამოვხსნათ სპეციალური ასეთი სისტემებისათვის ე.წ. გადადენის მეთოდით რომელიც გადმოცემული იქნება შემდეგ §–ში.

§ 2.4 გადადენის მეთოდი

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} c_1y_1 + b_1y_2 \qquad\qquad\qquad = f_1 \\ a_2y_1 + c_2y_2 + b_2y_3 \qquad\quad = f_2 \\ a_3y_2 + c_3y_3 + b_3y_4 \qquad\quad = f_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2}y_{n-3} + c_{n-2}y_{n-2} + b_{n-2}y_{n-1} = f_{n-2} \\ a_{n-1}y_{n-2} + c_{n-1}y_{n-1} \qquad\quad = f_{n-1} \end{cases} \qquad (4.1)$$

სადაც $a_2,...a_{n-1},c_1,...,c_{n-1},b_1,...,b_{n-1},f_1,...f_{n-1}$, მოცემული რიცხვებია.

ცხადია (4.1) სისტემა წარმოადგენს ზოგადი სახის სამდიაგონალურ სისტემას. ამ სისტემის ამოხსნისათვის მოვიყვანოთ გ ა დ ა დ ე ნ ი ს მ ე თ ო დ ი.

(4.1) სისტემის პირველი განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით $y_1 = -\frac{b_1}{c_1}y_2 + \frac{f_1}{c_1}$. ავღნიშნოთ $K_1 = -\frac{b_1}{c_1}, M_1 = \frac{f_1}{c_1}$ მაშინ $y_1 = K_1y_2 + M_1$ სისტემის მეორე განტოლებიდან ვღებულობთ, რომ $a_2\left(K_1y_2 + M_1\right) + c_2y_2 + b_2y_3 = f_2$ ანუ

$$y_2 = -\frac{b_2}{a_2K_1 + c_2}y_3 + \frac{f_2 - a_2M_1}{a_2K_1 + c_2}.$$

ავღნიშნოთ $K_2 = -\frac{b_2}{a_2K_1 + c_2}; M_2 = \frac{f_2 - a_2M_1}{a_2K_1 + c_2}$. მაშინ $y_2 = K_2y_3 + M_2$. ანალოგიურად სისტემის მესამე განტოლებიდან ვღებულობთ დამოკიდებულებას $y_3 = K_3y_4 + M_3$, სადაც $K_3 = -\frac{b_3}{a_3K_2 + c_3}; M_2 = \frac{f_3 - a_3M_2}{a_3K_2 + c_3}$. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ ფორმულებს

$$y_i = K_i y_{i+1} + M_i;\;\; K_i = \frac{b_i}{a_i K_{i-1} + c_i};\;\; M_i = \frac{f_i - a_i M_{i-1}}{a_i K_{i-1} + c_i};\;\; i = 2,3,...,n-2$$

K_i, M_i გამოითვლება K_{i-1}, M_{i-1}–ების საშუალებით. ე.ი. ვიცით რა K_i, M_i, მათ კი ჩვენ ვგებულობთ (4.1) სისტემის პირველი განტოლებიდან, ჩვენ შეგვიძლია თანმიმდევრობით განვსაზღვროთ $K_2, M_2, K_3, M_3, ..., K_{n-2}, M_{n-2}$ კოეფიციენტების რეკურენტულად განსაზღვრის ამ პროცესს ეწოდება გადადენის პირდაპირი სვლა.

(4.1) სისტემის ბოლო განტოლებიდან

$$y_{n-2} = K_{n-2} y_{n-1} + M_{n-2};$$

აქედან ვღებულობთ

$$\left(K_{n-2} y_{n-1} + M_{n-2}\right) a_{n-1} + c_{n-1} y_{n-1} = f_{n-1}$$

ანუ

$$y_{n-1} = \frac{f_{n-1} - a_{n-1} M_{n-2}}{a_{n-1} K_{n-2} + c_{n-1}}$$

ამგვარად, ჩვენ ვიცით რას უდრის y_{n-1}. ეხლა თანმიმდევრობით განვსაზღვრავთ $y_{n-2}, y_{n-3}, ... y_3, y_2, y_1$, ამასთან გამოვიყენოთ დამოკიდებულება $y_i = K_i y_{i+1} + M_i;$ რომელშიც K_i და M_i უკვე ცნობილია. y_1, y_2, y_{n-1}–ების პოვნის ამ პროცესს ეწოდება გადადენის უკუ სვლა. ამგვარად უცნობები ნაპოვნია, ამოცანა ამოხსნილია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი: ამოვხსნათ შემდეგი სისტემა გადადენის მეთოდით

$$\begin{cases} y_2 + 2y_1 = 8 \\ y_3 + 3y_2 + y_1 = 17 \\ y_4 + 2y_3 + y_2 = -3 \\ 3y_4 + y_3 = 0 \end{cases} \qquad (4.2)$$

(4.2) სისტემის პირველი განტოლებიდან განვსაზღვროთ y_1, y_2–ის საშუალებით

$$y_1 = -\frac{1}{2} y_2 + 4 \qquad (4.3)$$

მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ (4.2) სისტემის მეორე განტოლებაში და განვსაზღვროთ y_2, y_3–ის საშუალებით

$$y_2 = -\frac{2}{5} y_3 + \frac{26}{5} \qquad (4.4)$$

მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ (4.2) სისტემის მესამე განტოლებაში და განვსაზღვროთ y_3, y_4–ის საშუალებით, მივიღებთ

$$y_3 = \frac{5}{12} y_4 + \frac{41}{12} \qquad (4.5)$$

თუ მიღებულ მნიშვნელობას კვლავ ჩავსვამთ (4.2) სისტემის ბოლო განტოლებაში ადვილად მივიღებთ, რომ $y_4 = -1$ ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (4.5)–ში, მივიღებთ $y_3 = 3$ თავის მხრივ ამ უკანასკნელიდან (4.4)–ის გამოყენებით ვღებულობთ $y_2 = 4$ და ბოლოს (4.3) დამოკიდებულებიდან ადვილად მიიღება, რომ $y_1 = 2$.

ამგვარად საბოლოოდ მივიღებთ, რომ (4.2) სისტემის ამონახსნი ყოფილა $y = \left(y_1, y_2, y_3, y_4\right) = \left(2,4,3,-1\right)$.

§ 2.5 პუასონის განტოლებისათვის დირიხლეს ამოცანის ამოხსნა სასრულ სხვაობათა მეთოდით

განვიხილოთ პუასონის განტოლებისათვის დირიხლეს ამოცანა

$$\Delta u(x,y)=f(x,y); \quad (x,y)\in G \qquad (5.1)$$

$$uI_{\Gamma}=\varphi(x,y) \qquad (5.2)$$

სადაც f და φ ორი ცვლადის მოცემული ფუნქციებია, ხოლო G არე, კი წარმოადგენს მართკუთხედს: ე.ი. $G=\{(x,y):x\in[a_1,a_2];y\in[b_1,b_2]\}$. ამ მართკუთხედის AB გვერდი დავყოთ N ტოლ ნაწილად, ხოლო AD გვერდი კი M ტოლ ნაწილად. ბიჯები შესაბამისად ავღნიშნოთ h_1 და h_2 ე.ი. $h_1=\frac{(a_1-a_2)}{N}$, $h_2=\frac{(b_1-b_2)}{M}$. დაყოფის წერტილებზე გავატაროთ მართკუთხედის გვერდების პარალელური წრფეები. მათი გადაკვეთის წერტილებს ეწოდებათ ბადის კვანძითი წერტილები. მიღებული ბადის R შიდა არეში მოთავსებული წერტილების რაოდენობა ცხადია იქნება $(N-1)(M-1)$, ხოლო მთელი ბადის წერტილთა რაოდენობა კი $(N+1)(M+1)$;

ნებისმიერი $P(x,y)$ ფუნქციისათვის მისი $P(ih_1,jh_2)$ მნიშვნელობა $(ih_1,jh_2)(i=0,1,...N;j=0,1,...M)$ კვანძით წერტილში სიმარტივისათვის ავღნიშნოთ $P_{ij}-$ით, ხოლო თვით კვანძი კი $(i,j)-$ით.

სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის ბადური მეთოდი მდგომარეობს შემდეგში: უცნობი $u(x,y)$ ფუნქცია წარმოიდგინება თავისი u_{ij} მნიშვნელობით ბადის კვანძითი წერტილების დისკრეტულ სიმრავლეზე; დიფერენციალური გამოსახულებები, სასაზღვრო პირობები და მარჯვენა მხარეები აპროქსიმიცირდებიან სასრული სხვაობებით. ამის შემდეგ იხსნება ბადური განტოლებებით მიღებული სისტემა.

სხვაობიან სქემას ჩვენ ვუწოდებთ სხვაობიანი აპროქსიმაციისა და ბადური განტოლებების სისტემის ამონახსნის მეთოდის ერთობლიობას.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. სხვაობიან სქემას ეწოდება კრებითი, თუ ბადური განტოლებების სისტემის (u_{ij}) ამონახსნი მიისწრაფის ზუსტი (u^*_{ij}) ამონახსნისაკენ, როცა $h_1\to 0$ და $h_2\to 0$.

ყველა სხვაობიანი სქემა, რომელსაც ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთკრებადია. ამ ფაქტის დამტკიცებას ჩვენ აქ არ მოვიყვანთ.

ბადის ყოველ წერტილში (5.1) განტოლება შევცვალოთ სხვაობიანი ანალოგით. ამისათვის გამოვიყენოთ მეორე რიგის წარმოებულების სასრულ სხვაობების მიახლოებითი წარმოდგენის (2.3) და (2.4) ფორმულები შიგა კვანძითი წერტილებისათვის. მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 u(x_i,y_i)}{\partial x^2}\approx\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i,y_i)}{\partial y^2}\approx\frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{h_2^2}$$

$$i=1,2,...N-1;\ j=1,2,...M-1.$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით დირიხლეს ამოცანისათვის მივიღებთ ბადური განტოლების შემდეგ სისტემას

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h_1^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{h_2^2}=f_{ij}\,, \qquad (5.3)$$

$$u_{ij}\Big|\Gamma=\varphi_{ij} \qquad (5.4)$$

(5.3) განტოლებას აზრი აქვს მხოლოდ შიდა კვანძებისატვის, ე.ი. როცა $i\in(1,2,...N-1)$ და $j\in(1,2,...M-1)$. რაც შეეხება (5.4) განტოლებას, იგი სრულდება მხოლოდ საზღვარზე მდებარე წერტილებისათვის (ამ წერტილებისატვის $i=0$ ან $i=N$, ხოლო $j=0$ ან $j=M$) ასეთ წერტილებს კონტურის წერტილები ეწოდებათ.

ე.ი. საბოლოოდ ჩვენ მივიღეთ $(N+1)(M+1)$ განტოლებათა სისტემა $(N+1)(M+1)$ რაოდენობის უცნობების მიმართ. ჩვენს შემთხვევაში, ე.ი. როცა განიხილება პირველი სასაზღვრო ამოცანა, უკანასკნელი (5.4) განტოლებები უკვე ამოხსნილია (5.2) სასაზღვრო პირობების გამო. შევნიშნოთ, რომ სხვა სასაზღვრო ამოცანების დროს ეს ას ეარ არის. ცხადია რომ (5.3), (5.4) სისტემა შეგვიძლია ჩავწეროთ მატრიცულ–ვექტორული სახით:

$$AX=B \qquad (5.5)$$

სადაც A არის n^2–მატრიცა, ხოლო X და B კი n–განზომილებიანი ვექტორებია $\left(n=(N-1).(M-1)\right)$. (5.3), (5.4) სისტემის ჩაწერა (5.5) სახით შეიძლება სხვადასხვა გზით, იმისდა მიხედვით თუ $u_{ij}\left(i=1,2,...N-1;\, j=1,2,...M-1\right)$ უცნობებს როგორი წესით გავაერთიანებ X ვექტორში. ცხადია, A მატრიცის სახე დამოკიდებულია X ვექტორის სტრუქტურაზე.

ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $X=(x_1,...x_n)$ ვექტორის პირველი $N-1$ ელემენტია შესაბამისად $u_{11},u_{21},...,u_{N-1,1}$ უცნობები, მე–2 $N-1$ ელემენტი - $u_{12},u_{22},...,u_{N-1,2}$ უცნობები და ა. შ. ბოლო $N-1$ ელემენტი კი შესაბამისად $u_{1,M-1},u_{2,M-1},...,u_{N-1,M-1}$ უცნობებია. მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x_{i+(N-1)(j-1)}=u_{ij}\,,\left(i=1,2,...,N-1;\, j=1,2,...M-1\right).$$

ამ შემთხვევაში $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:

$$a_{ii}=-2\left(h_1^2+h_2^2\right) \qquad (i=1,2,...n),$$

$$a_{i,i+N-1}=a_{i+N-1,i}=h_1^2\left(i=1,2,...,n-N+1\right), \qquad (5.6)$$

$a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=h_2^2\left(i=1,2,...,n-1;i\neq(N-1)\,j;\, j=1,2,...,M-1\right)a_{ij}=0$ დანარჩენი i და j ინდექსებისათვის; ხოლო $B=(b_1,b_2,...,b_n)$ ვექტორს კი შემდეგი სახე:

$$b_1 = h_1^2 h_2^2 f_{11} - h_2^2 \varphi_{01} - h_1^2 \varphi_{10},$$

$$b_i = h_1^2 h_2^2 f_{i1} - h_1^2 \varphi_{i0} \qquad (i = 2,3,\dots,N-2),$$

$$b_{N-1} = h_1^2 h_2^2 f_{N-1,1} - h_2^2 \varphi_{N1} - h_1^2 \varphi_{N-1,0},$$

$$b_{(j-1)(N-1)+1} = h_1^2 h_2^2 f_{1j} - h_2^2 \varphi_{0j} \quad (j = 2,3,\dots,M-2),$$

$$b_{(j-1)(N-1)+i} = h_1^2 h_2^2 f_{ij} \quad (i = 2,3,\dots,N-2);(j = 2,3,\dots,M-2),$$

$$b_{(j-1)(N-1)+N-1} = h_1^2 h_2^2 f_{N-1j} - h_2^2 \varphi_{Nj} \quad (j = 2,3,\dots,M-2),$$

$$b_{n-(N-1)+1} = h_1^2 h_2^2 f_{1M-1} - h_2^2 \varphi_{0M-1} \text{-} h_1^2 \varphi_{1M},$$

$$b_{n-(N-1)+1} = h_1^2 h_2^2 f_{1M-1} - h_2^2 \varphi_{0M-1} \text{-} h_1^2 \varphi_{1M},$$

$$b_{n-(N-1)+1} = h_1^2 h_2^2 f_{iM-1} - h_1^2 \varphi_{iM} \,(i = 2,3,\dots,N-2),$$

$$b_{n-(N-1)+N-1} = h_1^2 h_2^2 f_{N-1M-1} - h_2^2 \varphi_{NM-1} - h_1^2 \varphi_{N-1M},$$

შევნიშნოთ, რომ A არის სიმეტრიული ლენტისებური მატრიცა. განვიხილოთ (5.5), როცა განვიხილოთ (5.5), როცა $M=3, N=4$ და $h_1 = h_2 = h$. ამ შემთხვევაში (5.3), (5.4) მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases}
u_{21} + u_{01} + u_{12} + u_{10} - 4u_{11} = h^2 f_{11} \\
u_{31} + u_{11} + u_{22} + u_{20} - 4u_{21} = h^2 f_{21} \\
u_{41} + u_{21} + u_{32} + u_{30} - 4u_{31} = h^2 f_{31} \\
u_{22} + u_{02} + u_{13} + u_{11} - 4u_{12} = h^2 f_{12} \\
u_{32} + u_{12} + u_{23} + u_{21} - 4u_{22} = h^2 f_{22} \\
u_{42} + u_{22} + u_{33} + u_{31} - 4u_{32} = h^2 f_{32} \\
u_{0j} = \varphi_{0j}, u_{4j} = \varphi_{4j} \quad (j = 1,2) \\
u_{i0} = \varphi_{0j}, u_{i3} = \varphi_{i3} \quad (i = 1,2,3)
\end{cases}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$X = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} h^2 f_{11} - \varphi_{01} - \varphi_{10} \\ h^2 f_{21} - \varphi_{20} \\ h^2 f_{31} - \varphi_{30} \\ h^2 f_{12} - \varphi_{02} - \varphi_{13} \\ h^2 f_{22} - \varphi_{23} \\ h^2 f_{32} - \varphi_{42} - \varphi_{33} \end{pmatrix}; \qquad A \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

მაშინ უკანასკნელი სისტემა ჩაიწერება (5.5) სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა მივიყვანოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე

$$\begin{cases} \Delta\upsilon = \dfrac{\partial^2\upsilon(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\upsilon(x,y)}{\partial y^2} = x^2 + y & (5.7) \\ \upsilon(x,y)\big|\varGamma = 3xy & (5.8) \\ G(x,y) = \{(x,y) : x \in [1,3], y \in [1,2.5]\} \\ M = 4; N = 3 \end{cases}$$

ჩვენ შემთხვევაში

$$[a,b] = [1,3], \quad [c,d] = [1,2.5], \quad h_1 = \frac{b-a}{M} = \frac{3-1}{4} = 0.5; \quad h_2 = \frac{2.5-1}{3} = 0.5$$

მოვახდინოთ G–არის დისკრეტული არით შეცვლა. ამისათვის [1, 3] და [1, 2.5] შვალედები შესაბამისად დავყოთ წერტილებით

$$x_i = 1 + ih_1 = 1 + 0.5i \qquad i = 0,1,2,3,4;$$

$$\mathrm{y_j} = 1\_\, jh_2 = 1 + 0.5j \qquad j = 0,1,2,3;$$

მივიღებთ შესაბამისად

$$x_0 1, x_1 = 1 + 0,5.1 = 1.5 x_2 = 1 + 2.0,5 = 2 x_3 = 1 + 0,5.3 = 2,5 x_4 = 1 + 4.0,5 = 3$$

$$y_0 = 1 y_1 = 1 + 1,5.1 = 1,5 y_2 = 1 + 2.0,5 = 2 y_3 = 1 + 3.0,5 = 2,5$$

დაყოფის წერტილებში აღვმართოთ მართობები, მათი გადაკვეთით მიიღება დისკრეტული ბადური არე

$$G_{h_1,h_2} = \left\{(x_i, y_j) : x_i 1 + 0.5i; y_j = 1 + 0.5j; i = 0,1,\ldots,4; j = 0,1,\ldots3\right\}$$

როცა $M = 0$ ან $M = 4$ ასევე $N = 0$ ან $N = 3$ ვღებულობთ სასაზღვრო კვანძით წერტილებს. ჩვენ შემთხვევაში ესენია

$$(x_0, y_0) = (1,1)(x_1, y_0) = (1.5,1), (x_2, y_0) = (2,1)(x_3, y_0) = (2.5,1)$$

$$(x_4, y_0) = (3,1)(x_4, y_1) = (3.1,5), (x_4, y_2) = (3,2)(x_4, y_3) = (3,2.5)$$

$$(x_3, y_3) = (2.5, 2.5), (x_2, y_3) = (2, 2.5), (x_1, y_3) = (1.5, 2.5)$$

$$(x_0, y_3) = (1, 2.5), (x_0, y_2) = (1,2), (x_0, y_1) = (1,1.5)$$

(5.7) განტოლებაში წარმოებულები შევცვალოთ შესაბამისი მეორე რიგის სასრული სხვაობებით და გავითვალისწინოთ (5.8) სასაზღვრო პირობა, მივიღებთ:

$$\begin{cases} \dfrac{\upsilon_{i+1j} - 2\upsilon_{ij} + \upsilon_{i-1j}}{0.5^2} + \dfrac{\upsilon_{ij+1} - 2\upsilon_{ij} + \upsilon_{ij-1}}{0.5^2} = x_i^2 + y_j & (5.9) \\ \upsilon_{ij}\,\Big|\varGamma = 3x_i y_j & (5.10) \\ i = 1,2,3; \qquad j = 1,2; \end{cases}$$

მიღებული სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\begin{cases} \upsilon_{i+1j} + \upsilon_{ij+1} - 4\upsilon_{ij} + \upsilon_{i-1j} + \upsilon_{ij-1} = 0.25\left(x_i^2 + y_j\right) \\ \upsilon_{ij}\,\Big|\varGamma = 3x_i y_j \\ i = 1,2,3; \qquad j = 1,2; \end{cases}$$

მიღებულ სასრულ სხვაობიან სასაზღვრო ამოცანაში *ი* და *ჯ* პარამეტრებს მივცეთ შესაბამისი მნიშვნელობები:

$$
\begin{array}{ll}
i=1\ j=1 & \\
i=1\ j=2 & \\
i=2\ j=1 & \\
i=2\ j=2 & \\
i=3\ j=1 & \\
i=3\ j=2 &
\end{array}
\qquad
\begin{cases}
\upsilon_{21}+\upsilon_{12}-4\upsilon_{11}+\upsilon_{01}+\upsilon_{10}=0.25\left(x_1^2+y_1\right)\\
\upsilon_{22}+\upsilon_{13}-4\upsilon_{12}+\upsilon_{02}+\upsilon_{11}=0.25\left(x_1^2+y_2\right)\\
\upsilon_{31}+\upsilon_{22}-4\upsilon_{21}+\upsilon_{11}+\upsilon_{20}=0.25\left(x_2^2+y_1\right)\\
\upsilon_{32}+\upsilon_{23}-4\upsilon_{22}+\upsilon_{12}+\upsilon_{21}=0.25\left(x_2^2+y_2\right)\\
\upsilon_{41}+\upsilon_{32}-4\upsilon_{31}+\upsilon_{21}+\upsilon_{30}=0.25\left(x_3^2+y_1\right)\\
\upsilon_{42}+\upsilon_{33}-4\upsilon_{32}+\upsilon_{22}+\upsilon_{31}=0.25\left(x_3^2+y_2\right)
\end{cases}
\qquad (5.11)
$$

მიღებულ (5.11) სისტემაში $\upsilon_{01},\upsilon_{10},\upsilon_{13},\upsilon_{02},\upsilon_{20},\upsilon_{23},\upsilon_{41},\upsilon_{30},\upsilon_{42},\upsilon_{33}-$ წარმოადგენენ საძიებელ ფუნქციებს და Γ საზღვარზე, ამიტომ ისინი ცნობილია და გამოითვლებიან (5.10) სასაზღვრო პირობით

$$
\begin{aligned}
&\upsilon_{01}=\upsilon\left(x_0,y_1\right)=3x_0.y_1=3.1.1,5=4,5\\
&\upsilon_{10}=\upsilon\left(x_1,y_0\right)=3.x_1.y_0=3.1,5.1=4,5\\
&\upsilon_{13}=\upsilon\left(x_1,y_3\right)=3x_1.y_3=3.1,5.2,5=11,25\\
&\upsilon_{02}=\upsilon\left(x_0,y_2\right)=3x_0.y_2=3.1.2=6\\
&\upsilon_{20}=\upsilon\left(x_2,y_0\right)=3x_2.y_0=3.2.1=6\\
&\upsilon_{23}=\upsilon\left(x_2,y_3\right)=3.x_2.y_3=3.2.2,5=15\\
&\upsilon_{41}=\upsilon\left(x_4,y_1\right)=3.x_4.y_1=3.3.1,5=13,5\\
&\upsilon_{30}=\upsilon\left(x_3,y_0\right)=3.x_3.y_0=3.2,5.1=7,5\\
&\upsilon_{42}=\upsilon\left(x_4,y_2\right)=3.x_4.y_2=3.3.2=18\\
&\upsilon_{33}=\upsilon\left(x_3,y_3\right)=3.x_3.y_3=3.2,5.2,5=18,75.
\end{aligned}
$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობანი და x_i და $y_i\left(i=1,2,3;\,j=1,2\right)-$ის შესაბამისი მნიშვნელობანი (5.11) სისტემაში:

$$
\begin{cases}
\upsilon_{21}+\upsilon_{12}-4\upsilon_{11}+4,5+4,5=0,25\left(1,5^2+1,5\right)\\
\upsilon_{22}+11,25-4\upsilon_{12}+6+\upsilon_{11}=0,25\left(1,5^2+2\right)\\
\upsilon_{31}+\upsilon_{22}-4\upsilon_{21}+\upsilon_{11}+6=0,25\left(2^2+1,5\right)\\
\upsilon_{32}+15-4\upsilon_{22}+\upsilon_{12}+\upsilon_{21}=0,25\left(2^2+2\right)\\
13,5+\upsilon_{32}-4\upsilon_{31}+\upsilon_{21}+7,5=0,25\left(2,5^2+1,5\right)\\
18+18,75-4\upsilon_{32}+\upsilon_{22}+\upsilon_{31}=0,25\left(2,5^2+2\right)
\end{cases}
$$

მარტივი გამოთვლების შემდეგ ვღებულობთ:

$$
\begin{cases}
\upsilon_{21}+\upsilon_{12}-4\upsilon_{11}=-8,1875\\
\upsilon_{22}+\upsilon_{11}-4\upsilon_{12}=-16,1875\\
\upsilon_{31}+\upsilon_{22}-4\upsilon_{21}+\upsilon_{11}=-4,625\\
\upsilon_{32}-4\upsilon_{22}+\upsilon_{12}+\upsilon_{21}=-13,5\\
\upsilon_{32}-4\upsilon_{31}+\upsilon_{21}=-19,0625\\
\upsilon_{22}-4\upsilon_{32}+\upsilon_{31}=-34,7875
\end{cases}
\qquad (5.12)
$$

ამგვარად მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემა $\upsilon_{11},\upsilon_{12},\upsilon_{21},\upsilon_{22},\upsilon_{31},\upsilon_{32}$ უცნობების მიმართ. ამ უცნობების პოვნით ჩვენ ვპოულობთ საძიებელი $\upsilon\left(x,y\right)$

ფუნქციის მნიშვნელობების შიგა კვანძით წერტილებში. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix};B=\begin{pmatrix} -8{,}1875 \\ -16{,}1875 \\ -4{,}625 \\ -13{,}5 \\ -19{,}0625 \\ 34{,}7875 \end{pmatrix};X=\begin{pmatrix} \upsilon_{11} \\ \upsilon_{12} \\ \upsilon_{21} \\ \upsilon_{22} \\ \upsilon_{31} \\ \upsilon_{32} \end{pmatrix}$$

მაშინ (5.12) სისტემა მიიღებს სახეს

$$AX=B$$

თ ა ვ ი 3

არაწრფივ განტოლებათა სისტემების მიახლოებითი ამოხსნები

§ 3.1. ნიუტონის მეთოდი

განვიხილოთ არაწრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} f_1\left(x_1, x_2, ... x_n\right) = 0 \\ f_2\left(x_1, x_2, ... x_n\right) = 0 \\ .... \\ f_n\left(x_1, x_2, ... x_n\right) = 0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

სადაც $f_1, f_2, ... f_n$ ნამდვილი ფუნქციებია. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right), f = \left(f_1, f_2, ..., f_n\right), 0 = \left(0, 0, ..., 0\right)$$

მაშინ (1.1) სისტემა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$f(x) = 0 \qquad (1.1')$$

(1.1') სისტემის ამოხსნისათვის ვისარგებლოთ თანმიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით.

დავუშვათ, რომ ნაპოვნი გვაქვს p-ური მიახლოება

$$x^{(p)} = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, ..., x_n^{(p)}\right),$$

(1.1') ვექტორული განტოლების ერთ-ერთი იზოლირებული $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ ფესვისა. მაშინ (1.1') განტოლრბის ზუსტი ფესვი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით.

$$x = x^p + e^p \qquad (1.2)$$

სადაც e^p - შესწორებაა (ფ ე ს ვ ი ს ნ ა ზ რ დ ი).

ჩავსვათ (1.2) განტოლება (1.1') – განტოლებაში გვექნება:

$$f(x^{(p)} + e^{(p)}) = 0$$

დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია x და $x^{(p)}$ წერტილების მომცველ რაიმე ამოზნექილ არეზე. (1.3) განტოლების მარცხენა მხარე გავშალოთ ტეილორის მწკრივად, მცირე $\varepsilon^{(p)}$ ვექტორის მიმართ და შემოვიფარგლოთ წრფივი წევრების შენარჩუნებით,

$$f\left(x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}\right) = f\left(x^{(p)}\right) + f'\left(x^{(p)}\right)\varepsilon^{(p)} = 0 \qquad (1.4)$$

(1.4) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $f'\left(x\right)$ წარმოებულის ქვეშ უნდა გვესმოდეს $f_1, f_2, ..., f_n$ ფუნქციათა სისტემის ი ა კ ო ბ ი ს მ ა ტ რ ი ც ი $x_1, x_1, ..., x_{n,}$ ცვლადების მიმართ, ე.ი.

$$f'(x)=W(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ანუ შემოკლებული ფორმით

$$f'(x)=W(x)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right],(i,j=1,2,...n).$$

იაკობის მატრიცის გამოყენებით (1.4) ფორმულა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$f\left(x^{(p)}\right)+W\left(x^{(p)}\right)\varepsilon^{(p)}=0$$

აქედან, ვიგულისხმოთ რომ მატრიცა $W\left(x^{(p)}\right)-$ არა გადაგვარებულია, მივიღებთ:

$$\varepsilon^{(p)}=-W\left(x^{(p)}\right)f\left(x^{(p)}\right).$$

შესაბამისად,

$$x^{(p+1)}=x^{(p)}-W^{-1}\left(x^{(p)}\right)f\left(x^{(p)}\right)(p=0,1,2,\ldots) \qquad (1.5)$$

(ნიუტონის მეთოდი)

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ნიუტონის მეთოდით ვიპოვოთ შემდეგი სისტემის დადებითი ამონახსნი

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x^2+y^2-4z=0 \\ 3x^2-4y+z^2=0 \end{cases}$$

საწყის მიახლოებად ავიღოთ $x_0=y_0=z_0=0,5$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$f(x)=\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ 2x^2+y^2-4z \\ 3x^2-4y+z^2 \end{bmatrix}$$

აქედან

$$f(x)=\begin{bmatrix} 0.25+0.25+0.25-1 \\ 0.50+0.25+-2.00 \\ 0.75-2.00+0.25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.00 \end{bmatrix}$$

შევადგინოთ იაკობის მატრიცა

$$W(x)=\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix}$$

გვაქვს

$$W\left(x^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -4\\ 3 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

და

$$\det W\left(x^{(0)}\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -4\\ 3 & -4 & 1\end{vmatrix}=-40$$

ვიპოვოთ შებრუნებული მატრიცა

$$W^{-1}\left(x^{(0)}\right)=-\frac{1}{40}\begin{bmatrix}-15 & -5 & -5\\ -14 & -2 & 6\\ -11 & 7 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20}\\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40}\end{bmatrix}$$

(1.5) ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ პირველ მიახლოებას

$$x^{(1)}=x^{(0)}-W^{-1}\left(x^{(0)}\right)f\left(x^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}0.5\\ 0.5\\ 0.5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20}\\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.25\\ -1.25\\ -1.00\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0.5\\ 0.5\\ 0.5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.35\\ 0\\ -0.125\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.875\\ 0.500\\ 0.375\end{bmatrix}$$

ეხლა გამოვთვალოთ მეორე მიახლოება $x^{(2)}$. გვაქვს:

$$f\left(x^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}0.875+0.500^2+0.375^2-1\\ 2.0,875^2+0.500^2-4.0,375\\ 3.0,875^2-4.0,500+0,375^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.15625\\ 0.28125\\ 0.43750\end{bmatrix}$$

და

$$W^{-1}\left(x^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}2.0,875 & 2.0,500 & 2.0,375\\ 4.0,875 & 2.0,500 & -4\\ 6.0,875 & -4 & 2.0,375\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.750 & 1 & 0.750\\ 3.500 & 1 & -4\\ 5.250 & -4 & 0.750\end{bmatrix}$$

აქედან

$$\det W\left(x^{(1)}\right)=\begin{vmatrix}1.750 & 1 & 0.750\\ 3.500 & 1 & -4\\ 5.250 & -4 & 0.750\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1.750 & 1 & 0.750\\ 1.750 & 0 & -4.750\\ 12.250 & 0 & 3.750\end{vmatrix}=-64.75$$

$$W_{-1}\left(x^{(1)}\right)=-\frac{1}{64.75}\begin{bmatrix}-15.25 & -3.75 & -0.750\\ 1.750 & 0 & -4.750\\ 12.250 & 12.25 & -1.75\end{bmatrix}$$

(1.5) ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ

$$x^{(2)} = x^{(1)} - W^{(-1)}\left(x^{(1)}\right) f\left(x^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.500 \\ 0.375 \end{bmatrix} + \frac{1}{64.75} \begin{bmatrix} -15.25 & -3.75 & -4.75 \\ -23.625 & -2.6250 & 9.625 \\ -19.25 & 12.25 & -1.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1565 \\ 0.28125 \\ 0.43750 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.500 \\ 0.375 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.08519 \\ 0.00338 \\ 0.00507 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78981 \\ 0.4662 \\ 0.3693 \end{bmatrix}$$

ანალოგიურად გამოითვლება დანარჩენი მიახლოება

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.78521 \\ 0.49662 \\ 0.3692 \end{bmatrix}, \qquad f\left(x^{(3)}\right) = \begin{bmatrix} 0.000001 \\ 0.00004 \\ 0.00003 \end{bmatrix}$$

და ა.შ.

თუ შემოვიზღუდებით მესამე მიახლოებით, მივიღებთ:

$$x = 0.7852; y = 0.4966; z = 0.369 .$$

§3.2 მარტივი იტერაციის მეთოდი

ვთქვათ მოცემული მოცემული გვაქვს სპეციალური სახის არაწრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \\ x_2 = \varphi_2\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \\ .... \\ x_n = \varphi_n\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \end{cases} \qquad (2.1)$$

სადაც $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_n$ ფუნქციები, სისტემის იზოლირებული $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ ამონახსნის რაიმე ω რაიმე მიდამოში განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციებია.

შემოვიღოთ ვექტორები

$$x = \left(x_1, x_2, ...x_n\right) \qquad \varphi(x) = \left(\varphi_1(x), ..., \varphi(x)\right)$$

მაშინ (2.1) სისტემა ჩაიწერება უფრო შემოკლებით

$$x = \varphi(x) \qquad (2.2)$$

(2.2) განტოლების $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ ვექტორ–ამონახსნის პოვნისათვის ხშირად მოსახერხებელია გამოვიყენოთ ი ტ ე რ ა ც ი ი ს მ ე თ ო დ ი

$$x^{(p+1)} = \varphi\left(x^{(p)}\right) \qquad \left(p = 0, 1, 2, ...,\right), \qquad (2.3)$$

სადაც $x^{(0)} \approx x^*$. მტკიცდება, რომ ეს პროცესი კრებადია [1]. შევნიშნოთ, რომ თუ (2.3) იტერაციული პროცესი კრებადია, მაშინ ზღვრული მნიშვნელობა

$$\xi = \lim_{p \to \infty} x^{(p)} \left(p = 0, 1, 2, ...,\right), \qquad (2.4)$$

აუცილებლად იქნება (2.2) განტოლების ამონახსნი. მართლაც, დაუშვათ, რომ (2.4) დამოკიდებულება სრულდება და გადავიდეთ (2.3) ტოლობაში ზღვარზე, როცა $p \to \infty.\varphi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვექნება

$$\lim_{p\to\infty} x^{(p+1)} = \varphi\left(\lim_{p\to\infty} x^{(p)}\right)$$

ე.ი.

$$\xi = \varphi(\xi)$$

ამგვარად, ξ არის (2.2) ვექტორული განტოლების ფესვი.

გარდა ამისა, თუ ყველა მიახლოვება $x^{(p)}\,(p = 0,1,2,\ldots)$ ეკუთვნის ϖ არეს, მაშინ x^*. ე რ თ ა დ ე რ თ ი ფესვია (2.2) სისტემის ამ არეში და ცხადია

$$\xi = x^*.$$

იტერაციის მეთოდი შეიძლება ასევე გამოყენებული იქნას ზოგადი სისტემებისათვის

$$f(x) = 0 \qquad (2.5)$$

სადაც $f(x)$–ვექტორ–ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია x^* ვექტორ–ამონახსნის ϖ იზოლირებულ მიდამოში. მაგალითად, გადავწეროთ ეს სისტემა შემდეგი სახით:

$$x = x + \Lambda f(x) = \varphi(x) \qquad (2.6)$$

გვექნება:

$$x = \varphi(x) \qquad (2.7)$$

უკანასკნელ ტოლობაში ადვილად გამოიყენება (2.3) ჩვეულებრივი იტერაციის მეთოდი.

თუ $f(x)$ ფუნქციას უწყვეტი წარმოებული $f'(x)$, მაშინ (2.6) ფორმულიდან გამომდინარეობს:

$$\varphi'(x) = E + \Lambda f'(x).$$

მტკიცდება, რომ იტერაციის პროცესი (2.7) განტოლებისათვის სწრაფად იკრიბება, როცა $\varphi'(x)$ მცირეა ნორმით. გავითვალისწინოთ ეს გარემოება და ავიღოთ Λ ისე, რომ

$$\varphi'\left(x^{(0)}\right) = E + \Lambda f'\left(x^{(0)}\right) = 0$$

აქედან, თუ $f'\left(x^{(0)}\right)$ მატრიცა არაგადაგვარებულია, გვექნება:

$$\Lambda = -\left[f'\left(x^{(0)}\right)\right]^{-1}$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $\det f'\left(x^{(0)}\right) = 0$ უნდა ავიღოთ სხვა საწყისი მიახლოება $x^{(0)}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. იტერაციის მეთოდით მიახლოებით ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^3 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.8)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. საწყის მიახლოებად მივიღოთ:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

დავუშვათ

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix}$$

გვექნება:

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 2x_2 \\ 3x_1^2 - 1 \end{bmatrix}$$

აქედან

$$f'\left(x^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 1.8 & 1 \\ 2.43 & -1 \end{bmatrix}$$

და

$$\det f'\left(x^{(0)}\right) = -1.8 - 2.43 = -4.23$$

რადგანაც $f'\left(x^{(0)}\right)$ მატრიცა არაგადაგვარებულია, ამიტომ არსებობს შებრუნებული მატრიცა

$$\left[f'\left(x^{(0)}\right)\right]^{-1} = -\frac{1}{4.23}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2.43 & 1.8 \end{bmatrix}$$

ამგვარად,

$$\Lambda = -\left[f'\left(x^{(0)}\right)\right]^{-1} = -\frac{1}{4.23}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2.43 & 1.8 \end{bmatrix}$$

დაუშვათ

$$\varphi(x) = x + \Lambda f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix}$$

მაშინ (2.8) სისტემა ექვივალენტური იქნება სტანდარტული მატრიცული განტოლებისა

$$x = \varphi(x) \qquad (2.9)$$

(2.4.) ფორმულის გამოყენებით (2.9) სისტემის ამონახსნისათვის თანმიმდევრობითი მიახლოებით ვღებულობთ:

$$x^{1} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(0)2} + x_2^{(0)2} - 1 \\ x_1^{(0)^3} - x_2^{(0)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.060 \\ 0.229 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0683 \\ -0.0630 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8317 \\ 0.5630 \end{bmatrix};$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8317 \\ 0.5630 \end{bmatrix} - \frac{1}{4.23}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.43 & -1.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.8317^2 + 0.5630^2 - 1 \\ 0.8317^3 - 0.5630 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8317 \\ 0.5630 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0049 \\ -0.0003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8268 \\ 0.5633 \end{bmatrix};$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.8268 \\ 0.5633 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0007 \\ 0.0002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8268 \\ 0.5631 \end{bmatrix};$$

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.8261 \\ 0.5631 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8261 \\ 0.5636 \end{bmatrix};$$

და ა.შ.

შემოვისაზღვროთ მეოთხე მიახლოებით, გვექნება ფესვები

$$x_1 = 0.8261; \qquad x_2 = 0.5636,$$

ამასთან

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0002 \end{bmatrix}$$

სიზუსტით 10^{-4}

თ ა ვ ი 4

პირველი რიგისდიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

§ 4.1. ეილერის მეთოდი

ვიპოვოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების

$$y = f(x, y)$$

ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0$$

ამ ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა მოვძებნოთ $[x_0, B]$ შუალედზე. დავყოთ ეს შუალედი n თანაბარ ნაწილად h ბიჯით:

$$x_{i+1} - x_i = h. \qquad h > 0, \qquad i = 0,1,\ldots n-1$$

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n \equiv B$$

$[x_0, x_1]$ შუალედზე AB ინტეგრალური წირი შევცვალოთ A წერტილში გამავალი AA_1 მხების მონაკვეთით. მხების განტოლებაა

$$y - y_0 (x - x_0) y_0;$$

$$y - y_0 = (x - x_0) f(x_0, y_0).$$

ჩავსვათ მასში x-ის ნაცვლად $x_1 = x_0 + h$, მივიღებთ $f(x)$ საძიებელი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობას x_1 წერტილში:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

$[x_1, x_2]$ შუალედზე შევცვალოთ ინტეგრალური მრუდი $A_1(x_1, y_1)$ წერტილში გამავალი მხების A_1A_2 მონაკვეთით. ამ მხების განტოლება იქნება:

$$y - y_0 = (x - x_1) y_1;$$

$$y - y_0 = (x - x_1) f(x_1, y_1).$$

ჩავსვათ მასში x-ის ნაცვლად $x_2 = x_1 + h$, მივიღებთ საძიებელი $y(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობას x_2 წერტილში:

$$y_1 + hf(x_1, y_1).$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \tag{1.1}$$

$$i = 0,1,2,\ldots,n-1$$

ამ მეთოდს ეილერის მეთოდი ეწოდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ეილერის მეთოდით ვიპოვოთ

$$\frac{dy}{dx} = xy + x^2$$

განტოლების ამონახსნი $[0,1]$ შუალედზე $h=0,1$ ბიჯით, საწყისი პირობით $x=0,$. $y=1$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ (1.1) ფორმულით

$$y_1 = y_0 + 0.1\left(x_0 y_0 + x_0^2\right) = 1$$

$$y_2 = y_1 + 0.1\left(x_1 y_1 + x_1^2\right) = 1 + 0.1\left(0,1.1 + 0,1^2\right) = 1,011$$

$$y_3 = y_2 + 0.1\left(x_2 y_2 + x_2^2\right) = 1.011 + 0.1\left(0,2.1,011 + 0,2^2\right) = 1,0352$$

$$y_4 = y_3 + 0.1\left(x_3 y_3 + x_3^2\right) = 1,0352 + 0,1\left(0,3.1,0352 + 0.3^2\right) = 1,0753$$

$$y_5 = y_4 + 0.1\left(x_4 y_4 + x_4^2\right) = 1,0753 + 0,1\left(0,4.1,0753 + 0,4^2\right)1,1343$$

$$y_6 = y_5 + 0.1\left(x_5 y_5 + x_5^2\right) = 1,1343 + 0,1\left(0,5.1,1343 + 0.5^2\right) = 1,2160$$

$$y_7 = y_6 + 0.1\left(x_6 y_6 + x_6^2\right) = 1,2160 + 0,1\left(0,6.0,1,2160 + 0.6^2\right) = 1,3250$$

$$y_8 = y_7 + 0.1\left(x_7 y_7 + x_7^2\right) = 1,3250 + 0,1\left(0,7.1,3250 + 0,7^2\right) = 1,4668$$

$$y_9 = y_8 + 0.1\left(x_8 y_8 + x_8^2\right) = 1,4668 + 0,1\left(0,8.1,4668 + 0,8^2\right) = 1,6481$$

$$y_{10} = y_9 + 0.1\left(x_9 y_9 + x_9^2\right) = 1,6481 + 0,1\left(0,9.1,6481 + 0,9^2\right) = 1,8774$$

ეილერის მეთოდი ძალიან მარტივია, მაგრამ საჭიროა ამონახსნის სიზუსტით მისაღებად ძალიან პატარა h, რომლის დროსაც პრაქტიკულად სამუშაოდროის დიდ დანახარჯს აქვს ადგილი. იგი გვაძლევს უხეშ მიახლოებას თუ h დიდია.

§4.2 რუნგე–კუტას მეთოდი

მოცემულია პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$[x_0 B]$ მონაკვეთით, h ბიჯით, $x=x_0, y=y_0$ საწყისი პირობებით. კოშის ამ ამოცანის ამოხსნა შეიძლება რუნგე–კუტას მეთოდით, რომლის ფორმულაა

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4\right),$$

სადაც

$$P_1 = hf(x_i, y_i);$$

$$p_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{P_1}{2}\right);$$

$$p_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{P_1}{2}\right);$$

$$p_4 = hf(x_i + h, y_i + P_3);$$

ამ ფორმულის ნაშთითი წევრი მეოთხე რიგისაა h ბიჯის მიმართ, ამიტომ ეს მეთოდი უფრო ეფექტურია წინა განხილულ მეთოდთან შედარებით.

თ ა ვ ი V

§ 5.1 ფუნქციათა მიახლოებითი ინტეგრება

როგორც ცნობილია თუ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და $F(x)$ არის მისი პირველადი ამ სეგმენტზე, მაშინ ნიუტონ–ლაიბნიცის ფორმულის თანახმად

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (1.1)$$

ხშირ შემთხვევაში $F(x)$ არ გამოისხება ელემენტალური ფუნქციების სასრული რაოდენობის წრფივი კომბინაციით, ამიტომ (1) ფორმულით განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა არ ხერხდება. ამასთან, პრაქტიკაში უმეტეს შემთხვევაში, $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია არა ანალიზურად არამედ ცხრილის საშუალებით, ამიტომ ფუნქციის პირველადის დადგენა შეუძლებელია. ანალოგიურ სიტუაციას აქვს ადგილი ჯერადი ინტეგრალების გამოთვლების შემთხვევაშიც. ამიტომ მნიშვნელობას იძენს განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი და კერძოდ რიცხვითი მეთოდებით გამოთვლა.

საზოგადოდ, ფუნქციათა რიცხვითი ინტეგრების ამოცანა მდგომარეობს განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობის დადგენაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის დისკრეტული მნიშვნელობებით საინტეგრო შუალედიდან.

ფორმულებს, რომელთა საშუალებით ვპოულობთ განსაზღვრული ინტეგრალის რიცხვით მნიშვნელობებს კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ს ვუწოდებთ. ანალოგიურ ფორმულებს ორჯერადი ინტეგრალებისათვის ვუწოდებთ კ უ ბ ა ტ უ რ უ ლ ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ს.

კვადრატული ფორმულების მისაღებად, $[a,b]$ საინტეგრო შუალედზე მოცემულ $y = f(x)$ ფუნქციას ცვლიან $\varphi(x)$ საინტერპოლაციო პოლიმონით და წერენ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (1.2)$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ანალიზურად, მაშინ ისმის საკითხი (1.2) ფორმულის ცდომილების შეფასების შესახებ.

მოვიყვანოთ კვადრატული ფორმულის მიღების მეთოდი ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის გამოყენებით. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის $n+1$ წერტილი $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ისეთი, რომ $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$ ვთქვათ ამ წერტილებში $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებია

$$y_i = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \qquad (1.3)$$

მოცემული y_i მნიშვნელობებით ავაგოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} \qquad (1.4)$$

სადაც

$$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$
$$\Pi'_{n+1}(x)=(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)$$

ცხადია

$$L_n(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,2,\ldots,n).$$

თუ $f(x)$ ფუნქციას შევცვლით $L_n(x)$–ით, მივიღებთ

$$\int_a^b(x)\,dx=\int_a^b L_n(x)dx+R_n[f] \qquad (1.5)$$

სადაც $R_n[f]$ წარმოადგენს (1.5) კვადრატული ფორმულის ცდომილებას ან ნაშთით წევრს. (1.5)–დან (1.4)–ის გამოყენებით მიიღება კვადრატული ფორმულა

$$\int_a^b y\,dx=\sum_{i=0}^{n}A_iy_i+R_n[f] \qquad (1.6)$$

სადაც

$$A_i=\int_a^b\frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}dx \qquad (i=0,1,2,\ldots,n) \qquad (1.7)$$

(1.6) ფორმულას უწოდებენ ჩ ა კ ე ტ ი ლ ი ტ ი პ ი ს კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ფ ო რ მ უ ლ ა ს, თუ საინტეგრო შუალედის ბოლო წერტილები საინტერპოლაციო კვანძებს წარმოადგენენ, წინააღმდეგ შემთხვევაში – ღ ი ა ტ ი პ ი ს ა ს.

შევნიშნოთ, რომ A_i კოეფიციენტების გამოსათვლელად მხედველობაში უნდა მივიღოთ:

1. ფიქსირებული საინტერპოლაციო კვანძებისათვის A_i კოეფიციენტები არ უნდა იყვნენ დამოკიდებული $f(x)$ ფუნქციაზე.
2. ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის სტრუქტურიდან გამომდინარე, პოლინომებისათვის რომელთა ხარისხიც არ აღემატება n–ს კვადრატული ფორმულა უნდა იყოს ზუსტი, ე.ი. $R_n[f]=0$. კერძოდ თუ $y=x^k\,(k=0,1,2,\ldots n)$, მაშინ $R_n[x^k]=0$ და $A_k\,(k=0,1,2,\ldots,n)$ კოეფიციენტების გამოსათვლელად მიიღება შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} I_0=\sum_{i=0}^{n}A_i \\ I_1=\sum_{i=0}^{n}A_ix_i \\ I_2=\sum_{i=0}^{n}A_ix_i^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_n=\sum_{i=0}^{n}A_ix_n^2 \end{cases} \qquad (1.8)$$

სადაც

$$I_k=\int_a^b x^k dx=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \qquad (k=0,1,2,...,n)$$

(1.8) სისტემა თავსებადია, ვინაიდან მისი დეტერმინანტი ვანდერმონდის დეტერმინანტია და განსხვავებული საინტერპოლაციო კვანძებისათვის იგი განსხვავებულია ნულისგან

$$D=\prod_{i>j}\left(x_i-x_j\right)\neq 0$$

აქედან გამომდინარე A_i $(i=0,1,2,...,n)$ კოეფიციენტები განისაზღვრებიან ცალსახად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. შევადგინოთ კვადრატული ფორმულა კვანძებგისათვის:

$$x_0=\frac{1}{3},\quad x_1=\frac{2}{3},\quad x_0=1$$

$$\int_0^1 ydx=A_0y\left(\frac{1}{3}\right)+A_1y\left(\frac{2}{3}\right)+A_2y(1) \qquad (1.9)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. (1.9) ფორმულაში ვიგულისხმოთ

$$y=x^k \qquad (k=0,1,2).$$

უშუალო გამოთვლებით მივიღებთ

$$I_0\int_0^1 dx=1, I_1\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}, I_2\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.$$

ამ მონაცემებით (1.8)–დან მიიღება A_0, A_1, A_2 კოეფიციენტების გამოსათვლელი სისტემა

$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2=1 \\ \frac{1}{3}A_0+\frac{2}{3}A_1+A_2=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{9}A_0+\frac{4}{9}A_1+A_2=\frac{1}{3} \end{cases}$$

რომლის ამოხსნაც გვაძლევს $A_0=\frac{3}{4}, A_1=0,\quad A_2=\frac{1}{4}$. მაშასადამე,

$$\int_0^1 ydx\frac{3}{4}y\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}y(1)$$

ეს კვადრატული ფორმულა ზუსტია იმ პოლინომებისათვის, რომელთა რიგი არ აღემატება $n=2$-ს.

§5.2. ნიუტონ–კოტესის კვადრატული ფორმულა

ვთქვათ გამოსათვლელია

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (2.1)$$

დავუშვათ, $[a,b]$ სეგმენტი დაყოფილია n ტოლ ნაწილად $h=\frac{b-a}{n}$ ბიჯით, სადაც

$$x_0=a, \quad x_i=x_0+ih \quad (i=1,2,...,n-1)$$

მოცემულ კვანძებში $y_i=f(x_i) \quad (i=0,1,2,...,n)$.

$y_i=f(x_i)$ ფუნქციის შეცვლა ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულით მოგვცემს (ნაშთითი წევრი უკუგდებულია)

$$\int_{x_0}^{x_n} ydx=\sum_{i=0}^{n} A_i y_i, \qquad (2.2)$$

სადაც A_i უცნობი კოეფიციენტებია.

როგორც ვიცით

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} P_i(x)y_i$$

სადაც

$$P_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{x+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{x+1})...(x_i-x_n)} \qquad (2.3)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$q=\frac{x-x_0}{h}$$

მაშინ

$$q^{[n+1]}=q(q-1)...(q-n)$$

და (2.2) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!}\frac{q^{[n-1]}}{q-i}y_i \qquad (2.4)$$

(2.1) და (2.4)–დან შეგვიძლია დავწეროთ

$$A_i=\int_{x_0}^{x_n}\frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!}\frac{q^{[n+1]}}{q-i}dx$$

ამ უკანასკნელიდან

$$q=\frac{x-x_n}{h} \qquad \text{და} \qquad dq=\frac{dx}{h}$$

გათვალისწინებით მივიღებთ

$$A_i=h\frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!}\int_0^n\frac{q^{[n+1]}}{q-i}dq \qquad (i=0,1,...,n) \qquad (2.5)$$

მივცეთ (2.5)–ს შემდეგი სახე

$$A_i=(b-a)H_i$$

სადაც

$$H_i = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!}\int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i}dq\,(i=0,1,2,...,n) \qquad (2.6)$$

H_i–ს $(i=0,1,2,...n)$ უწოდებენ კ ო ტ ე ს ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ს. (2.6)–ის თანახმად (2.1) მიიღებს სახეს

$$\int_a^b ydx = (b-a)\sum_{i=0}^n H_i y_i \qquad (2.7)$$

სადაც $h = \frac{b-a}{n}$ და $y_i = f(a+ih)(i=0,1,...n)$.

ადვილად შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ

1. $\sum_{i=0}^n H_i = 1$ (თუ (2.7)–ში ავიღებთ $a=0,\ \ b=1,\ y=1$),

2. $H_i = H_{n-i}$ (თუ (2.6) ფორმულაში n–ს შევცვლით $n-i$–თი)

(2.7) ფორმულებს (2.6) კოეფიციენტებით უწოდებენ ნ ი უ ტ ო ნ – კ ო ტ ე ს ი ს კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ს.

როცა $n=3$, (2.7) დან მიიღება

$$\int_{x_0}^{x_3} ydx = \frac{3h}{8}(y_0+3y_1+3y_2+y_3),$$

რომლის ნაშთითი წევრი მოიცემა ფორმულით

$$R = -\frac{3h^5}{80}y^{(4)}(\xi),$$

სადაც $\xi \in (x_0, x_3)$.

საზოგადოდ, ნიუტონ–კოტესის კვადრატული ფორმულის ნაშთითი წევრი დადგენილია სტეფენსენის [10] მიერ და $y=f(x)$ ფუნქციის მოთხოვნილი სიგლუვისათვის არის შემდეგი რიგის

$$R = O\left[h^{2E\left(\frac{n}{2}\right)+3}\right]$$

სადაც $E\left(\frac{n}{2}\right)$ არის $\frac{n}{2}$ წილადის მთელი ნაწილი.

§ 5.3 მართკუთხედების, ტრაპეციის და სიმპსონის კვადრატული ფორმულები

მართკუთხედების ფორმულა შეგვიძლია მივიღოთ §5.2–ის (2.6)–დან თუ მასში დავუშვებთ $n=0$ და $A_0 = x_1 - x_0 = h$. გვექნება

$$\int_{x_0}^{x_1} ydx = hy_0 + R(h), \qquad (3.1)$$

სადაც

$$R(h)=\int_{x_0}^{x_1} ydx-hy_0=\int_{x_0}^{x_{0+h}} ydx-hy_0$$

(3.1) არის მ ა რ თ კ უ თ ხ ე დ ე ბ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა.

ნაშთითი წევრის შესაფასებლად საჭიროა $y=f(x)$ ფუნქცია იყოს უწყვეტად წარმოებადი $[x_0,x_1]$ შუალედში.

ცვლადი ზედა საზღვრიანი, ინტეგრალის გაწარმოების წესის თანახმად

$$F(x)=\int_{x(x)}^{b(x)} f(t)dt$$

გამოსახულებისათვის გვექნება:

$$F(x)=f(b(x))\cdot b'(x)-f(a(x))a'(x)$$

ამიტომ ჩვენს შემთხვევაში

$$R'(h)=y(x_0+h)-y_0,\quad R''(h)=y'(x_0+h)$$

რადგან $R(0)=R'(0)=0$, ამიტომ საშუალო მნიშვნელობების თეორემის თანახმად

$$R'(h)=R'(0)+\int_0^h y'(x_0+t)dt=hy'(\xi),\qquad \xi\in(x_0,x_0+h)$$

ან

$$R(h)=R(0)+\int_0^h ty'(\xi)dt=\frac{h^2}{2}y'(\xi)$$

ე.ი.

$$R(h)=\frac{(x_1-x_0)^2}{2}y'(\xi),\qquad \xi\in(x_0,x_0+h)$$

ტრაპეციის ფორმულა მიიღება §5.2–ის (2.6)–დან თუ მასში $n=1,\quad a=x_0,\quad b=x_1$. კერძოთ, §5.2–ის (2.7)–დან

$$H_0=-\int_0^1\frac{q(q-1)}{q}dq=\frac{1}{2};\qquad H_1=\int_0^1 qdq=\frac{1}{2}$$

ამიტომ

$$\int_{x_0}^{x_1} ydx=\frac{h}{2}(y_0+y_1)+R(h)\qquad (3.3)$$

რომელსაც უწოდებენ ტ რ ა პ ე ც ი ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა ს

ნაშთითი წევრი

$$R(h)=\int_{x_0}^{x_1} ydx-\frac{h}{2}(y_0+y_1)$$

მისი შეფასების მიზნით დავუშვათ, რომ $f(x),f'(x),f''(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[x_0,x_1]$–ში. ნაშთითი წევრი ჩავწეროთ

$$R(h)=\int_{x_0}^{x_0+h} ydx-\frac{h}{2}\left(y(x_0)+y(x_0+h)\right)$$

$$R''(h)=-\frac{h}{2}y''(x_0+h)$$

რადგან

$$R(0)=0, \qquad R'(0)=0$$

ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად

$$R'(h)=R'(0)+\int_0^h R''(t)dt=-\frac{1}{2}\int_0^h ty''(x_0+t)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}y''(\xi)\int_0^h tdt=-\frac{h^2}{4}y''(\xi), \qquad \xi\in(x_0,x_0+h)$$

$$R(h)=R(0)+\int_0^h R'(t)\,dt=-\frac{h^2}{12}y''(\xi), \qquad \xi\in(x_0,x_0+h)$$

ამრიგად, საბოლოოდ

$$R(h)=-\frac{h^2}{12}y''(\xi)=-\frac{(x_1-x_0)^2}{12}y''(\xi) \tag{3.4}$$

სიმპსონის კვადრატული ფორმულა მიიღება §5.2–ის (2.6)–დან თუ ამ უკანასკნელში $n=2$, მაშინ §5.2–ის (2.7) ფორმულის მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ

$$H_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2(q-1)(q-2)\,dq=\frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}-6+4\right)=\frac{1}{6}$$

$$H_1=-\frac{1}{2}\int_0^2 q(q-2)\,dq=\frac{2}{3},$$

$$H_2=\frac{1}{2}\int_0^2 q(q-1)dq=\frac{1}{6}.$$

ამასთან, თუ დავუშვებთ, რომ $x_2-x_0=2h$, გვექნება

$$\int_{x_0}^{x_2} ydx=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+R(h) \tag{3.5}$$

სადაც

$$R(h)=\int_{x_0}^{x_2} ydx-\frac{h}{3}(y_1+4y_1+y_2)$$

ნაშთითი წევრია.

(3.3) ფორმულას ეწოდება სიმპსონის კვადრატური ფორმულა.

მოვითხოვოთ, $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x)$ ფუნქციების უწყვეტობა $[x_0,x_2]$ სეგმენტზე. ნაშთითი წევრი შევაფასოთ $[x_1-h,x_1+h]$ სიმეტრიულ შუალედში. გვაქვს

$$R(h)=\int_{x_1-h}^{x_1+h} ydx-\frac{h}{3}\big(y(x_1-h)+4y(x_1)+y(x_1+h)\big)$$

ზემოთ გამოყენებული გაწარმოების წესის თანახმად

$$R'(h)=\frac{2}{3}\left[y(x_1-h)+y(x_1+h)\right]-\frac{4}{3}y(x_1)-\frac{h}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right],$$

$$R''(h)=\frac{1}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right]-\frac{h}{3}\left[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right],$$

$$R'''(h)=-\frac{h}{3}\left[y'''(x_1+h)-y'''(x_1-h)\right]=-\frac{2h^2}{3}y^{IV}(\xi)\qquad \xi_1\in(x_1-h,x_1+h)$$

რადგან $R(0)=R'(0)=R''(0)=0$, ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად

$$R''(h)=R''(0)+\int_0^h R'''(t)dt=-\frac{2}{3}\int_0^h t^2y^{IV}(\xi_1)dt=$$

$$=-\frac{2}{3}y^{IV}(\xi)\int_0^h t^2dt=-\frac{2}{9}h^3y^{IV}(\xi),$$

$$R'(h)=R'(0)+\int_0^h R''(t)dt=-\frac{3}{9}\int_0^h t^3y^{IV}(\xi_1)dt=$$

$$=-\frac{2}{9}y^{IV}(\xi_1)\int_0^h t^3dt=\frac{1}{18}h^4y^{IV}(\xi_1),$$

$$R(h)=R(0)+\int_0^h R'(t)dt=-\frac{1}{18}\int_0^h t^4y^{IV}(\xi_1)dt=$$

$$=-\frac{1}{18}y^{IV}(\xi_1)\int_0^h t^4dt=-\frac{h^5}{90}y^{IV}(\xi),\qquad \xi\in(x_1-h,x_1+h)$$

ამრიგად, სიმპსონის ფორმულის ნაშთით წევრს ექნება სახე

$$R(h)=-\frac{h^5}{90}y^{IV}(\xi),\qquad \xi\in(x_0,x_2)\qquad (3.6)$$

იმისათვის, რომ (3.1), (3.3), (3.5) ფორმულები გამოვიყენოთ ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა $[a,b]$ სეგმენტი დავყოთ $h=\frac{b-a}{n}$ ბიჯით თანაბარ $[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ შუალედად, სადაც $a=x_0$ და $b=x_n$, თუ გვაქვს (3.1) და (3.3) ფორმულები; ხოლო $h=\frac{b-a}{2n}$ ბიჯით – $[x_{2i},x_{2i+1}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ შუალედებად, სადაც $a=x_0$ და $b=x_{2n}$, როცა საქმე გვაქვს (3.5) ფორმულასთან $[x_i,x_{i+1}]$ შუალედისათვის (3.1), (3.3) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ შესაბამისად

$$\int_a^b f(x)dx=h(y_0+y_1+\dots+y_{n-2}+y_{n-1})+R[f]$$

მ ა რ თ კ უ თ ხ ე დ ე ბ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა ს, სადაც

$$R[t]=\frac{(b-a)h^2}{2}f'(\xi),\qquad \xi\in(a,b)$$

და

$$\int_a^b f(x)dx=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\dots+y_{n-1}\right)+R[t]$$

ტ რ ა პ ე ც ი ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა ს, სადაც

$$R[f]=\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \qquad \xi\in(a,b)$$

თუ თითოეული $[x_{2i},x_{2i+2}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ შუალედისთვის გამოვიყენებთ (3.5) ფორმულას, მივიღებთ ე.წ. ს ი მ პ ს ო ნ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა ს.

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\dots y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\dots+y_{2n-2})\right]+R[f],$$

სადაც

$$R[f]=\frac{(b-a)h^4}{180}y^{IV}(\xi), \qquad \xi\in(a,b)$$

§5.4 ჩებიშევის ტიპის კვადრატული ფორმულები

ჩებიშევის ტიპის კვადრატული ფორმულებს ზოგადად აქვს სახე

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=\sum_{i=1}^{n}B_i f(t_i), \qquad (4.1)$$

სადაც B_i – მუდმივი კოეფიციენტებია, ამასთან t_i აბსცისები ისეა შერჩეული, რომ

1. $B_i\,(i=1,2,\dots n)$ კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია;
2. (4.1) კვადრატული ფორმულა ზუსტია პოლინომებისათვის, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n რიცხვს.

ამრიგად, თუ $B_1=B_2=\dots=B_n=B$ და $f(t)\equiv 1$, გვექნება

$$2=\sum_{i=1}^{n}B_i \qquad \text{ან} \quad B=\frac{2}{n}.$$

მაშასადამე, ჩებიშევის კვადრატულ ფორმულას აქვს სახე

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}f(t_i) \qquad (4.2)$$

t_i აბსცისები გამოითვლება იმ პირობით, რომ (4.1) ფორმულები ზუსტია $f(t)=t^k\,(k=0,1,2,\dots,n)$ პოლინომებისათვის. აქედან გამომდინარე (4.2) ფორმულებისათვის გვექნება

$$\begin{cases} t_1+t_2+...+t_n=0 \\ t_1^2+t_2^2+...+t_n^2=\dfrac{n}{3} \\ .... \\ t_1^n+t_2^n+...+t_n^n=\dfrac{n\left[1-\left(-1\right)^{n+1}\right]}{2\left(n+1\right)} \end{cases} \qquad (4.3)$$

საიდანაც შეიძლება განისაზღვროს $t_i\left(i=1,2,...,n\right)$. ჩებიშევმა დაამტკიცა, რომ (4.3) სისტემის ამოხსნა დაიყვანება $n-$ური ხარისხის რაღაც ალგებრული განტოლების ამოხსნაზე.

ს. ნ. ბერშტეინმა აჩვენა, რომ როცა $n=8$ და $n\geq 10$, მაშინ (4.3) სისტემას ნამდვილი ამოხსნები არ გააჩნია. ამიტომ აღნიშნულ შემთხვევებში ჩებიშევის კვადრატულ ფორმულებს აზრი არ აქვს.

მოვიყვანოთ ჩებიშევის ფორმულის t_i- აბსცისების მნიშვნელობათა ცხრილი (ცხრ. 1).

ცხრილი 1

n	i	t_i	n	i	t_i
2	1;2	$\pm 0{,}577350$	6	1;6	$\pm 0{,}866247$
3	1;3	$\pm 0{,}707107$		2;5	$\pm 0{,}422519$
	2	0		3;4	$\pm 0{,}266635$
4	1;4	$\pm 0{,}794654$	7	1;7	$\pm 0{,}883862$
	2;3	$\pm 0{,}1875592$		2;6	$\pm 0{,}529657$
5	1;5	$\pm 0{,}832498$		3;5	$\pm 0{,}323912$
	3	$\pm 0{,}374541$		4	0
		0			

მ ა გ ა ლ ი თ ი . გამოვიყენოთ ჩებიშევის კვადრატულ ფორმულა $n=3-$სათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. t_i- აბსცისების $\left(i=1,2,3\right)$ გამოსათვლელად მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} t_1+t_2+t_3=0 \\ t_1^2+t_2^2+t_3^3=1 \\ t_1^3+t_2^3+t_3^3=0 \end{cases} \qquad (4.4)$$

(4.4)–ის ამოსახსნელად შემოვიღოთ თანაფარდობები

$$\begin{cases} c_1=t_1+t_2+t_3 \\ c_2=t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3 \\ c_3=t_1t_2t_3 \end{cases} \qquad (4.5)$$

(4.5)–ის გათვალისწინებით (4.4)–დან გვექნება

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{1}{2}\left[\left(t_1+t_2+t_3\right)^2 - \left(t_1^2+t_2^2+t_3^2\right)\right] = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2} \\ c_3 = \frac{1}{6}\left[\left(t_1+t_2+t_3\right)^3 - 3\left(t_1+t_2+t_3\right)\left(t_1^2+t_2^2+t_3^2\right) + 2\left(t_1^3+t_2^3+t_3^3\right)\right] = \frac{1}{6}(0-0+0=0) \end{cases}$$

აქედან ცახადია, რომ t_i $(i=1,2,3)$ არიან $t^3 - c_1t^2 + c_2t - c_3 = 0$ ან $t^3 - \frac{1}{2}t = 0$ განტოლების ფესვები.
ამრიგად, საძიებელი აბსცისებისათვის მიიღება

$$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

და ჩებიშევის კვადრატული ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f(0) - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

გამოვიყენოთ ჩებიშევის კვადრატული ფორმულა $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალისათვის, რისთვისაც მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა

$$x = \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2}t,$$

რომელიც $[a,b]$ მონაკვეთს გადაიყვანს $[-1,1]$ მონაკვეთზე. გარდაქმნილი ინტეგრალისათვის ჩებიშევის ფორმულას ექნება სახე

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (4.6)$$

სადაც

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i \qquad (4.7)$$

და t_i $(i=1,2,3)$ – (4.3) სისტემის ფესვებია (იხ. ცხ. 1)

მ ა გ ა ლ ი თ ი . ჩებიშევის კვადრატული ფორმულით გამოვთვალოთ $I = \int_0^1 \frac{xdx}{1+x}$ ინტეგრალი $(n=5)$–სათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავღნიშნოთ $f(x) = \frac{x}{1+x}$, მაშინ

$$I = \frac{1}{5}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)\right],$$

სადაც (4.7)–ის თანახმად

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-0,83250) = 0,08375;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-0,37454) = 0,31273;$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0,5;$$

$$x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0,37454) = 0,68727;$$

$$x_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0,83250) = 0,91625.$$

გამოთვლების საბოლოო შედეგები მოცემულია ცხრილში (ცხრ. 2)

ც ხ რ ი ლ ი 2.

i	x_i	y_i
1	0,08375	0,0773
2	0,31273	0,2382
3	0.50000	0,33333
4	0,68727	0,4073
5	0,91625	0,4781
		1,5342

ამრიგად,

$$I = \frac{1}{5} \cdot 1,5342 = 0,3068$$

შედარების მიზნით მოვიყვანოთ იგივე ინტეგრალის ზუსტი მნიშვნელობა

$$I = 0,306846....$$

§5.5 გაუსის კვადრატული ფორმულა

გაუსის კვადრატული ფორმულების მისაღებად განვიხილოთ ლეჟანდრის ცნობილი პოლინომები

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2 - 1\right)^n\right] \qquad (n = 0,1,2...)$$

და მოვიყვანოთ მისი ზოგიერთი თვისება

1) $P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n \qquad (n = 0,1,2,...)$

2) $\int_{-1}^{1} P_n(x) Q_R(x) dx = 0 \quad (R < n)$, სადაც $Q_R(x)$ არის R ხარისხის ნებისმიერი პოლინომი.

3) $P_n(x)$ პოლინომს $(-1,1)$, ინტერვალში გააჩნია n განსხვავებული ნამდვილი ფესვი.

ამრიგად

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right),$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right),$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

გამოვიყვანოთ გაუსის კვადრატული ფორმულა $[-1,1]$ შუალედისათვის ($[a,b]$ სეგმენტის შემთხვევით, მარტივი გარდაქმნებით დაიყვანება ამ შემთხვევაზე).

ვთქვათ, $y = f(x)$ მოცემულია $[-1,1]$ სეგმენტზე. $t_1, t_2, ..., t_n$ აბსხისები და $A_1, A_2, ...A_n$ კოეფიციენტები შევარჩიოთ ისე, რომ კვადრატული ფორმულა

$$\int_{-1}^{1} f(t) dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \qquad (5.1)$$

იყოს ზუსტი რაც შეიძლება მაღალი ხარისხის პოლინომისათვის. ვაჩვენოთ, რომ ეს ხარისხი $2n-1$–ის ტოლია. მართლაც, რადგან t_i და A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ მოცემული მუდმივების რაოდენობაა $2n$, ისინი ცალსახად განსაძღვრავენ სწორედ $2n-1$ ხარისხის პოლინომს.

ამრიგად, (5.1) ტოლობის მართებულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი იყოს ჭეშმარიტი როცა $f(t) = 1, \quad t, t^2, ..., t^{2n-1}$.

მართლაც, თუ დავუშვებთ

$$\int_{-1}^{1} t^R dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t^R i \qquad (R = 0, 1, 2, ..., 2n-1) \qquad (5.2)$$

და

$$f(t) = \sum_{R=0}^{1n-1} c_R t^R ,$$

მივიღებთ, რომ

$$\int_{-1}^{1} f(t) dt = \sum_{R=0}^{2n-1} c_R \int_{-1}^{1} t^R dt = \sum_{R=0}^{2n-1} c_R \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^R =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{R=0}^{2n-1} c_R t_i^R = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ

$$\int_{-1}^{1} t^R dt = \frac{1-(-1)^{R+1}}{R+1} = \begin{cases} \dfrac{2}{R+1} \text{ როცა } R \text{ ლუწია,} \\ 0 \text{ როცა } R \text{ კენტია,} \end{cases}$$

ტოლობას, მაშინ შეიძლება დავასკვნათ, რომ დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად საკმარისია t_i და A_i იყვნენ შემდეგ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები (განტოლებათა რიცხვი 2_n):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i = 2 \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-2} = \dfrac{2}{2n-1} \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-1} = 0 \end{cases} \qquad (5.3)$$

მივიღეთ არაწრფივი სისტემა, რომლის ამოხსნაც დიდ სირთულეებთან არის დაკავშირებული. არსებობს ხელოვნური მეთოდი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ნაწილობრივ მაინც ავიცილოთ (5.3) სისტემის არაწრფივობასთან დაკავშირებული სირთულეები. მართლაც, განვიხილოთ პოლინომი

$$f(t) = t^k P_n(t) \qquad (k = 0,1,2,...,n-1) \qquad (5.4)$$

სადაც $P_n(t)$ – ლეჟანდრის პოლინომებია.

ვინაიდან (5.4) პოლინომების ხარისხი არ აღემატება $2n-1$ –ს, ამიტომ (5.3)–ის თანახმად (5.4)–სათვის უნდა შესრულდეს (5.1), ე.ი.

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) (k = 0,1,...,n-1) \qquad (5.5)$$

მეორე მხრივ ლეჟანდრის პოლინომების ორთოგონალობის თვისების გამო ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)\,dt = 0 \qquad \text{როცა } k < n,$$

ამიტომ

$$\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) = 0 \qquad (k = 0,1,...,n-1)$$

(5.6) ტოლობები დაკმაყოფილდება ნებისმიერი A_i–სათვის თუ დავუშვებთ რომ

$$p_n(t) = 0 \qquad (i = 1,2,...,n)$$

ამრიგად, იმისათვის რომ მივაღწიოთ (5.1) კვადრატული ფორმულის მაღალი რიგის სიზუსტეს, t_i – მნიშვნელობებად უნდა ავიღოთ ლეჟანდრის პოლინომების ნულები. როგორც ცნობილია (მესამე თვისება) ეს ნულები ნამდვილი რიცხვებია და მოთავსებულნი არიან (-1,1) შუალედში. t_i აბსცისების საშუალებით (5.3) სისტემის პირველი n განტოლებათა სისტემიდან ადვილად შეგვიძლია განვსაზღვროთ A_i $(i = 1,2,...,n)$ კოეფიციენტები. რადგან აღნიშნული ქვესისტემის დეტერმინანტი არის ვანდერმონდის დეტერმინანტი, ამიტომ როცა $t_i \neq t_j$, მაშინ

$$D = \prod_{i>j} (t_i - t_j) \neq 0$$

და A_i კოეფიციენტები ცალსახად განისაზღვრებიან.

(5.1) ფორმულებს, სადაც t_i არიან ლეჟანდრის პოლინომების ნულები და A_i $(i=1,2,...,n)$ განისაზღვრებიან (5.3) სისტემიდან, უწოდებენ გ ა უ ს ი ს კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი . გამოვიყვანოთ გაუსის კვადრატული ფორმულა სამი ორდინატის შემთხვევაში $(n=3)$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ ლეჟანდრის $P_3(t)=\frac{1}{2}(5t^2-3t)$ პოლინომის ნულები:

$$t_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}\approx-0,7746;\quad t_2=0;\quad t_3=\sqrt{\frac{3}{5}}\approx0,7746;$$

რომელთა გათვალისწინებით (5.3) სისტემიდან მივიღებთ A_1, A_2, A_3 კოეფიციენტების განმსაზღვრელ სისტემას

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1+0\cdot A_2+\sqrt{\frac{3}{5}}A_3=0 \\ \frac{3}{5}A_1+0\cdot A_2+\frac{3}{5}A_3=\frac{2}{3} \end{cases}$$

აქედან

$$A_1=A_3=\frac{5}{9},\quad A_2=\frac{8}{9}$$

ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=\frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+8f(0)+5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

გაუსის კვადრატულ ფორმულებს, გამოყენების თვალსაზრისით, აქვთ ერთგვარი ნაკლი, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ როგორც t_i აბსცისები, ისე A_i კოეფიციენტები საზოგადოდ ირაციონალური რიცხვებია. სამაგიეროდ ეს ნაკლი ნაწილობრივ კომპენსირდება აღნიშნული ფორმულების საკმაოდ დიდი სიზუსტის გამო.

გაუსის კვადრატული ფორმულის გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_a^b f(x)dx$$

თუ შემოვიღებთ $x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t$ გარდაქმნას, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt$$

ახლა გაუსის კვადრატული ფორმულის გამოყენებით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \qquad (5.8)$$

სადაც

$$x_i=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_i \quad (i=1,2,...,n) \qquad (5.9)$$

t_i – ლეჟანდრის $P_n(t)$ პოლინომების ნულებია.

ნებისმიერი n–სთვის (5.8) ფორმულის ნაშთით წევრს ექნება სახე [ ]

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{\left[(2n)!\right]^3(2n+1)} \qquad (a<\xi<b),$$

საიდანაც შეგვიძლია მივიღოთ

$$R_2 = \frac{1}{135}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi),$$

$$R_3 = \frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\xi),$$

$$R_4 = \frac{1}{3472875}\left(\frac{b-a}{2}\right)^9 f^{(9)}(\xi)$$

მოვიყვანოთ გაუსის ფორმულის ელემენტების შესაბამისი ცხრილი (ცხრ.3)

ც ხ რ ი ლ ი 3

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
0	1;2	$\mp 0{,}5773507$	1
3	2 2 3	-0,7749667 0 +0,77499667	$\frac{5}{9}=0,5555556$ $\frac{8}{9}=0,88888889$ $\frac{5}{9}=0,5555556$
4	1;4 2;3	$\mp 0{,}86113631$ $\mp 0{,}3398104$	0,34785484 0,65214516
5	1;5 2;4 3	$\mp 0{,}90617985$ $\mp 0{,}53846931$ 0	0,23692688 0,47862868 0,56888889
6	1;6 3;5 1;4	$\mp 0{,}93246951$ $\mp 0{,}66120939$ $\mp 0{,}23861919$	0,17132450 0,36076158 0,46791394
7	1;7 2;6 3;5	$\mp 0{,}04910791$ $\mp 0{,}74153119$ $\mp 0{,}40584515$	0,12948496 0,27970540 0,41795918
8	1;8 2;7 3;6 4;5	$\mp 0{,}96028986$ $\mp 0{,}79666648$ $\mp 0{,}52553242$ $\mp 0{,}18343464$	0,10122854 0,22238104 0,31370664 0,36268378

მ ა გ ა ლ ი თ ი . გაუსის კვადრატული ფორმულის გამოყენებით $n-3-$სთვის გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+2x}\,dx$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს, $a=0,\ b=1,$ მაშინ (5.9) ფორმულიდან და მე-3ცხრილიდან გვექნება

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_1=0,11270;$$

$$x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_2=0,50000;$$

$$x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_3=0,88730.$$

(5.8) ფორმულების კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ;

$$c_1=\frac{b-a}{2}A_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{18}=0,27778;$$

$$c_2=\frac{b-a}{2}A_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9}=\frac{4}{9}=0,444444;$$

$$c_3=\frac{b-a}{2}A_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{18}=0,27778.$$

აქვე მოვიყვანოთ შემდეგი გამოთვლების შესაბამისი ცხრილი (ცხრ.4)

ც ხ რ ი ლ ი 4

i	x_i	y_i	c_i	c_iy_i
6	0,11270	1,10698	0,27778	0,30747
2	0,50000	1,41421	0,44444	0,62853
3	0,88730	1,66571	0,27778	0,46270
$\sum$				1,39870

ამრიგად, საძიებელი ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობაა

$$I\approx\sum_{i=1}^{3}c_iy_i=1,39870,$$

ნაშთითი წევრი გამოითვლება ფორმულით

$$R_3=\frac{1}{15750}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\xi),\qquad \text{სადაც}\ \ \xi\in(a\ \ b).$$

რადგან

$$f(x)=\sqrt{1+2x}=(1+2x)^{1/2}$$

ამიტომ

$$f^{(6)}(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)(1+2x)^{-11/2}\cdot 2^6=$$

$$=-945(1+2x)^{-11/2}$$

აქედან

$$\max_{0\le x\le 1}\left|f^{(6)}(x)\right|=945$$

და

$$|R_3|\le\frac{945}{15750}\left(\frac{1}{2}\right)^7\approx\frac{1}{2000}$$

შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალის უშუალო გამოთვლის შედეგია

$$I=\sqrt{3}-\frac{1}{3}\approx 1,39872\,.$$

§ 5.6 ზოგიერთი შენიშვნები კვადრატულ ფორმულათა სიზუსტის შესახებ

როგორც ამ თავის წინა პარაგრაფებიდან ჩანს, ჩვენს მიერ განხილულ კვადრატურულ ფორმულებს აქვთ სახე:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R[f], \qquad (6.1)$$

სადაც $x_i \ (i=1,2,\ldots,n)$ არიან $[a \ b]$ სეგმენტიდან აღებული კვანძები, $A_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$ – კვადრატურული ფორმულების კოეფიციენტები, ხოლო $R[f]$ – ნაშთითი წევრი.

მოვიყვანოთ კვადრატურული ფორმულების სიზუსტის დამახასიათებელი ზოგიერთი ფაქტორი.

ძირითადად შემოვიფარგლებით თანაბარბიჯიანი კვადრატურული ფორმულებით. ასეთ ფორმულატე რიცხვს მიეკუთვნება მარტკუთხედების, ტრაპეციის, სიმპსონის, ნიუტონ–კოტესის ფორმულები. ამ შემთხვევაში კვადრატურულ ფორმულატე სიზუსტის რიგი აღებული, h ბიჯის მიმართ, განისაზღვრება

$$R = O\left(h^m\right), h = \frac{b-a}{n} \qquad (6.2)$$

ფორმულით, სადაც n –ინტეგრების შუალედის დაყოფის რიცხვია, ხოლო m ნატურალური რიცხვი, ნაშთითი წევრის რიგის მაჩვენებელია.

მაგალითად, ტრაპეციის ფორმულის ნაშთითი წევრია

$$R[f] = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \qquad \xi \in |ab|,$$

მისი რიგი $m=2$. სიმპსონის წევრის ნაშთითი წევრია

$$R[f] = \frac{b-a}{180} h^{(4)} f^4(\xi), \qquad \xi \in |a,b|,$$

მისი რიგი $m=4$.

კვადრატული ფორმულა მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მეტია მისი რიგი. ეს ფაქტორი განსაკუთრებით ვლინდება მაშინ, როცა ბიჯი მცირეა რაც იგივეა საინტეგრო შუალედის დაყოფის რიცხვი n დიდია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზემოთქმულიდან არ გამომდინარეობს, ის რომ ნებისმიერი კონკრეტული მაგალითისათვის მაღალი სიზუსტის მქონე კვადრატული ფორმულა უფრო ზუსტ შედეგს გვაძლევს. შეგვიძლია მოვიყვანოთ მაგალითი როცა ერთიდაიმავე რაოდენობა კვანძებისათვის და ერთიდაიმავე ბიჯის შემთხვევაში, უფრო უხეში კვადრატული ფორმულა უფრო ზუსტ შედეგს გვაძლევს. ამ ფაქტის ნათელსაყოფად განვიხილოთ

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{1} \left(-5 + 27x^2 - 15x^4\right) dx$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. უშუალო გამოთვლებით, ე.ი. ნიუტონ–ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2(-5+9-3) = 2$$

$h=1$–სათვის ტრაპეციის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$I=\frac{1}{2}f(-1)+f(0)+\frac{1}{2}f(1)=\frac{7}{2}-5+\frac{7}{2}=2$$

ხოლო იგივე ბიჯისათვის სიმპსონის ფორმულით მივიღებთ

$$I=\frac{1}{3}\left[f(-1)+4f(0)+f(1)\right]=\frac{1}{3}(7-20+7)=-2$$

ამრიგად, როგორც ვხედავთ გამოსათვლელი ინტეგრალის მნიშვნელობა მიღებული ნაკლები სიზუსტის მქონე ტრაპეციის ფორმულით არის ჭეშმარიტი იმ დროს როცა იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობა გამოთვლილი მაღალი სიზუსტის მქონე სიმპსონის მქონე ფორმულით მცდარია.

კვანძების ფიქსირებული რაოდენობისათვის კვადრატული ფორმულების სიზუსტე დიდად არის დამოკიდებული კვანძების განლაგებაზე. კვანძების არაგონივრულმა შერჩევამ შეიძლება მოგვცეს უხეში შედეგი.

საზოგადოდ, თუ ინტეგრალქვეშა $f(x)$ ფუნქციას საინტეგრო შუალედში გააჩნია დიდი რაოდენობით ნულები ასევე დიდი რაოდენობით ექსტრემუმები (ე.ი. ინტეგრალქვეშა ფუნქციის წარმოებულებს გააჩნიათ ნულები), მაშინ ეს ფაქტორები იწვევს კვადრატული ფორმულებით მიღებული შედეგების გაუარესებას. ამიტომ ინტეგრების ბიჯი h ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ იგი იყოს გაცილებით ნაკლები ფუნქციის მეზობელ ნულებს, ან მეზობელ ექსტრემუმებს შორის მანძილზე. ამ მიზნით მიზანშეწონილია მოცემული საინტეგრო $[a,b]$ შუალედი დავყოთ ისეთ მცირე $[\alpha_i,\beta_i]$ შუალედებად რომლებშიაც $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციები შეინარჩუნებენ ნიშანს და თითოეულ მიღებულ შუალედზე შერჩეული ბიჯით მოვახდინოთ ინტეგრება კვადრატული ფორმულებით. ამით შეგვიძლია მივაღწიოთ ცალკეულ შუალედებზე გამოთვლების მაღალ სიზუსტეს, რაც თავის მხრივ უზრუნველყოფს სასურველ სიზუსტეს მოცემულ $[a,b]$ შუალედზე.

კვადრატული ფორმულების სრული ცდომილების დასადგენად მხედველობაში უნდა მივიღოთ აგრეთვე მოქმედებათა ცდომილებაც. ვთქვათ, თითოეული მიახლოებითი $f(x_i)$ სიდიდის აბსოლიტური ცდომილება არ აღემატება მოცემულ ε სიდიდეს. ვიგულისხმოთ, რომ A_i კოეფიციენტები მოცემულია ზუსტად, მაშინ მოქმედებათა ცდომილება, კერძოდ შეკრების R_1 ცდომილება შეფასდება თანაფარდობით

$$R_1\le\sum_{i=1}^{n}A_i\varepsilon=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}A_i \qquad (6.3)$$

რადგან (6.1) კვადრატული ფორმულა ზუსტია $f(x)=1$ ფუნქციისათვის, ამიტომ გვექნება

$$\int_a^b dx=b-a=\sum_{i=1}^{n}A_i$$

ამიტომ, (6.3)–დან მივიღებთ

$$R_1\le(b-a)\varepsilon \qquad (6.4)$$

აქედან გამომდინარე კვადრატული ფორმულის სრული ცდომილება დამრგვალების ცდომილების გაუთვალისწინებლად, გამოისახება ფორმულით

$$R=(b-a)\varepsilon+R[f],$$

სადაც $R[f]$ კვადრატული ფორმულის ნაშთითი წევრია.

და ბოლოს შევნიშნოთ, რომ თუ $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილის სახით ე.ი. $y_i=f(x_i)$ $(i=1,2,...,n)$, მაშინ ფაქტიურად შეუძლებელია კვადრატული ფორმულის ნაშთითი წევრის დადგენა. ასეთ შემთხვევაში კვადრატული ფორმულით სარგებლობა მიზანშეწონილია შუალედებში, რომელთა ბოლოებს წარმოადგენენ კვანძები.

ამრიგად, კვადრატული ფორმულით სიზუსტის ზემოთ ჩამოთვლილი მახასიათებლები: ნაშთითი წევრის რიგი, კვანძების შერჩევა, მოქმედებათა (შეკრების) ცდომილება, დამრგვალების ცდომილება საშუალებას გვაძლევს წარმოდგენა ვიქონიოთ კვადრატული ფორმულებით მიღებულ სრულ ცდომილებაზე და აქედან გამომდინარე გამოთვლების შედეგების საიმედოობაზე.

აქ მოყვანილი დასკვნები სავსებით მართებულია კუბატურული ფორმულებისთვისაც.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. $y=f(x)$ მოცემულია ცხრილით:

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0,00	0,001	5	0,05	36,825
1	0,01	1,618	6	0,06	52,003
2	0,02	7,052	7	0,07	64,156
3	0,03	14,451	8	0,08	85,853
4	0,04	24,553	9	0,09	100,352

ა) შეადგინეთ სასრულ სხვაობათა ცხრილი მეექვსე რიგამდე ჩათვლით. გამოთვალეთ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები $x=0,00;\ 0,01;\ 0,02;\ 0,03$ წერტილებში.

ბ) გამოთვალეთ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულები $x=0,00;\ 0,01;\ 0,02;\ 0,03$ წერტილებში.

2. $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით:

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0,02	0,5000	10	2,2	12,0551
1	0,04	1,5622	11	2,4	12,8664
2	0,06	2,6431	12	2,6	13,5132
3	0,08	3,6835	13	2,8	14,2562
4	1,0	6,9004	14	3,0	15,3666
5	1,2	7,2050	15	3,2	16,4552
6	1,4	7,8022	16	3,4	17,6532
7	1,6	9,0666	17	3,6	18,2554
8	1,8	10,1288	18	3,8	19,3568
9	2,0	11,5322	19	4,0	20,5532

ა) მეხუთე რიგამდე სასრული სხვაობების გამოყენებით შევადგინოთ y'' წარმოებულის მნიშვნელობათა ცხრილი $x_k = 0,4 + 0,2k \quad (k = 1,2,\ldots,12)$ წერტილებში.

ბ) მეოთხე რიგამდე სასრული სხვაობების გამოყენებით შევადგინოთ $y''-$ის მნიშვნელობათა ცხრილი $x_k = 0,2 + 0,2k \quad (k = 1,2,\ldots,10)$ წერტილებში.

გ) გამოვთვალოთ $y'-$ის მნიშვნელობები $x_k = 0,2 + 0,2k \quad (k = 1,2,3,4)$ წერტილებში.

3. მართკუთხედების ფორმულით გამოვთვალოთ

ა) $\int_2^5 \frac{\cos x}{x} dx$, ბ) $\int_2^9 \sqrt{7x-1}\,dx$.

4. ტრაპეციის ფორმულით გამოვთვალოთ

ა) $\int_0^{1,6} \ln\left(1+x^2\right) dx$, ბ) $\int_1^{2,3} \frac{\sin x^2}{x} dx$.

5. სიმპსონის ფორმულით გამოვთვალოთ

ა) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$, ბ) $\int_2^5 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

6. ჩებიშევის კვადრატული ფორმულით გამოვთვალოთ $(n=5)$

ა) $\int_0^1 \frac{dx}{1+3x}$, ბ) $\int_1^3 \frac{xdx}{3+2x}$.

7. გაუსის კვადრატული ფორმულით გამოვთვალოთ $(n=4)$

ა) $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$, ბ) $\int_1^5 \frac{dx}{1+4x}$.

ლიტერატურა

1. Б. П. Демидович и И. А. Марон основы вычислительной математики, Москва, 1960г.

2. А. А. Самарский теория разностных схем, Москва, 1979г.

იბეჭდება ავტორთა მიერ წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას 26.02.2009. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 18.03.2009. ქაღალდის ზომა 60X84 1/8. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 4,5. ტირაჟი 100 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი ,,ტექნიკური უნივერსიტეტი'', თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant,
scripta manent