საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გ.ფანცულაია, ზ.ქვათაძე, გ.გიორგაძე

ალბათობის თეორია და
მათემატიკური სტატისტიკა

დამტკიცებულია სტუ-ს სარედაქციო
საგამომცემლო საბჭოს მიერ
სახელმძღვანელოდ

თბილისი
2007

უაკ 519.21+519.22/25

სახელმძღვანელო წარმოადგენს სტუ-ის მათემატიკის დეპარტამენტის "მათემატიკური ანალიზის" მიმართულების თანამშრომლების გოგი ფანცულაიას, ზურაბ ქვათაძისა და გივი გიორგაძის მიერ საქართველოს სხვადასხვა უმაღლეს სასწავლებლებში ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში 1987-2007 წწ. წაკითხული ლექციების სრულ კურსს. მასში აღწერილია EXCEL-ის პაკეტის ის ძირითადი სტატისტიკური პროგრამები, რომლებითაც აღჭურვილია თანამედროვე თაობის კომპიუტერები და რომელთა გამოყენებაც უცილობლად დიდ როლს თამაშობს სხვადასხვა შემთხვევითი პროცესების მათემატიკურ მოდელირებაში.

სახელმძღვანელო ძირითადად განკუთვნილია სტუ-ის სამთო-გეოლოგიური და სატრანსპორტო-მანქანათმშენებლობის ფაკულტე-ტის ორსაფეხურიანი სწავლების ფორმის (ბაკალავრიატი, მაგის-ტრატურა) სტუდენტებისათვის, თუმცა მისით სარგებლობა ასეთივე წარმატებით შეუძლიათ აგრეთვე უმაღლესი სასწავლებლების მექანიკა-მათემატიკის, კიბერნეტიკის, ინფორმატიკის, ფიზიკის, ეკონომიკური 120205, 60412, სამშენებლო, ქიმიური, და სხვა სპეციალობის ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის სტუდენტებსაც.

რეცენზენტი –ფ.მ. მეცნიერებათა კანდიდატი

მ.ნადარეიშვილი

ISBN978-99940-956-8-1

წინასიტყვაობა

თანამედროვე ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა წარმოადგენს მათემატიკის საინტერესო და მეტად მნიშვნელოვან ნაწილს, რომელსაც აქვს დიდი მიღწევები და მჭიდრო კავშირები როგორც მათემატიკის კლასიკურ ნაწილებთან (გეომეტრია, მათემატიკური ანალიზი, ფუნქციონალური ანალიზი), ასევე მის სხვადასხვა განშტოებებთან (შემთხვევით პროცესთა თეორია, ერგოდულობის თეორია, დინამიურ სისტემათა თეორია, და სხვა). ამ მიმართულებათა განვითარება ძირითადად უკავშირდება როგორც სტატისტიკური მექანიკის, სტატისტიკური ფიზიკის, სტატისტიკური რადიოტექნიკის, ასევე რთული სისტემების ამოცანებს, რომლებიც ითვალისწინებენ შემთხვევით ზემოქმედებასა და ქაოსურ ზეგავლენას. ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის საწყისებთან იდგნენ გამოჩენილი მათემატიკოსები: ი.ბერნული, ა.მუავრი, პ.ლაპლასი, ს.პუასონი, ა.კოში, გ.კანტორი, ვ.ბუნიაკოვსკი, ფ.ბორელი, ა.ლებეგი, კ.კრამერი, რ.ფიშერი და სხვები. მეცნიერებს შორის დიდი ხნის განმავლობაში არსებული პოლემიკის საკითხი, რომელიც შეეხებოდა ალბათობის თეორიის მათემატიკასთან მიმართების დადგენას და რომელიც შესული იყო დავით ჰილბერტის მიერ 1900 წელს დასმული მათემატიკის უმნიშვნელოვანეს გადაუჭრელ პრობლემათა სიაში, გადაწყვეტილ იქნა რუსი მეცნიერის ა.კოლმოგოროვის მიერ 1933 წელს, რომელმაც მოგვცა ალბათობის თეორიის მკაცრი აქსიომატიკური დაფუძნება.

აღნიშნული სახელმძღვანელო შედგება ორი ნაწილისაგან: ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა.

პირველი ნაწილის თემატიკის შედგენისას გამოყენებულია ალბათობის თეორიის აქსიომატიკური დაფუძნების კოლმოგოროვისეული კონცეფცია, რომლის თანახმადაც აქსიომების სახით დახასიათებულია ზოგადი ალბათური სივრცეები და მათი შემადგენელი კომპონენტები.

პირველი ნაწილის ძირითადი მიზანია დაინტერესებულ მკითხველს დაეხმაროს იმ ძირითადი უნარ-ჩვევების შეძენაში, რომელიც საჭიროა სხვადასხვა(სოციალური, ეკონომიკური, ბიოლოგიური, მექანიკური, ფიზიკური, სამთო-გეოლოგიური და ა.შ.) შემთხვევითი პროცესების აღმწერი მათემატიკური მოდელების (ე.ი. ალბათური სივრცეების) ასაგებად და მათი მახასიათებელი თვისებების შესასწავლად. ამ მიმართულებით საყურადღებოა პირვე-

ლი თავის ბოლო პარაგრაფები, კერძოდ § 1.12 – § 1.15 , სადაც განხილულია ისეთი მათემატიკური მოდელების გამოყენება, როგორიცაა მარკოვის ჯაჭვები, ბროუნის მოძრაობის პროცესი და სხვა.

პირველი ნაწილი შედგება თხუთმეტი პარაგრაფისაგან. ყოველ პარაგრაფს თან ახლავს სავარჯიშოები ტესტების სახით, რომელთა ამოხსნა დაეხმარება სტუდენტს ალბათობის თეორიის წარმოდგენილი ელემენტების ღრმა გააზრებასა და ათვისებაში.

მეორე ნაწილში გადმოცემულია მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები და მათი ზოგიერთი გამოყენება მეცნიერების ისეთ სხვადასხვა დარგში, როგორიცაა ეკონომიკა, სამთო-გეოლოგია, კავშირგაბმულობა, ენერგეტიკა და სხვა. განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა სტატისტიკური მეთოდების გამოყენებას ჰიდროგეოლოგიასა და საინჟინრო გეოლოგიაში,რაც გამოწვეულია გეოქიმიური, პალეონტოლოგიური და პეტროგრაფიული გამოკვლევების ინტენსივობის გაზრდით. მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები საშუალებას იძლევა ამდაგვარი კვლევებისას მიღებული სტატისტიკური მონაცემების სისტემატიზაციისა და მათი დამუშავების შესაძლებლობას, რაც გულისხმობს ამ მონაცემებიდან მაქსიმალური ინფორმაციისა და რაიმე აზრით ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღებას.

კომპიუტერული სისტემების ფართო გამოყენებამ შესაძლებელი გახადა სტატისტიკური ამოცანების დასმა და გადაჭრა პრაქტიკულად გეოლოგიის ყველა დარგისათვის. ამ მიმართულებით მეტად დიდ შენაძენს წარმოადგენს პროფესორ მ.შაორშაძის მიერ 1980 წელს გეოლოგიური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის ქართულ ენაზე გამოცემული სახელმძღვანელო -" მათემატიკური სტატისტიკა გეოლოგიაში"(პროფესორ გვანჯი მანიას რედაქტორობით). აღნიშნული სახელმძღვანელოც მიზნად ისახავს იმავე ამოცანებსშეუმუშაოს სამთო-გეოლოგიური ფაკულტეტის სტუდენტებს მათსავე დარგში ჩატარებული კვლევებისას მიღებული მონაცემების სტატისტიკური დამუშავების უნარ-ჩვევები. სახელმძღვანელოში განხილულია *Excel*-ის სტატისტიკური ფუნქციები მონაცემთა სტატისტიკური დამუშავების პროცედურის ჩასატარებლად.

მეორე ნაწილი შედგება ათი პარაგრაფისაგან. მასში გადმოცემული მეთოდები საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ სტატისტიკური ამოცანების ხუთი ტიპი, რომლებსაც ხშირად ვხვდებით სამთო-გეოლოგიური კვლევისას:

1) ერთობლიობაში გასაზომი ნიშნების საშუალო მნიშვნელობების შეფასება (მაგალითად, პლაჟის ქვიშის საშუალო ზომის შეფასება, კვარცის საშუალო შემცველობის შეფასება გრანიტულ სხეულში, ფთორის საშუალო შემცველობის შეფასება მიწისქვეშა წყლებში და ა.შ.);

2) გასაზომი ნიშნების ცვალებადობის მახასიათებლების შეფასება (მაგალითად, პლაჟის ზედაპირის დახრის კუთხის დამოკიდებულება ტალღის სიმაღლეზე და პერიოდზე, მარცვლების დიამეტრზე, ქარის მიმართულებასა და ძალაზე და ა.შ.);

3) გასაზომ ნიშნებს შორის გეოლოგიურად მნიშვნელოვანი განსხვავებების გამოვლენა (მაგალითად,როგორ შევადაროთ ორი შესასწავლი უბნის საინჟინრო-გეოლოგიური პირობები);

4) გასაზომ ნიშნებს შორის სტატისტიკური კორელაციის შეფასება და

ერთი ნიშნის მიხედვით მეორის წინასწარმეტყველება(მაგალითად, მადნის წყლებში იშვიათი ელემენტების ასოციაციის შესწავლა, როცა მათ შორის რაიმე კავშირის შესახებ არაფერია ცნობილი) ;

5) გასაზომი ნიშნის ცვალებადობის სისტემატური შემადგენელის გამოთვლა (ტრენდი) ერთობლიობის მახასიათებლის აგეგმვისას (მაგალითად, ნიშნის ცვალებადობის შესწავლა ფართზე, რომელიც კომპიუტერული სისტემების გამოყენებასთან ერთად სულ უფრო და უფრო დიდ გამოყენებას პოულობს გეოლოგიური რუკების ანალიზისას).

ამგვარად, მეორე ნაწილის ძირითადი ამოცანაა მკითხველს შეასწავლოს ზოგიერთი სტატისტიკური მეთოდი და $EXCEL$-ის პაკეტის იმ ძირითადი პროგრამების გამოყენება, რომლებითაც აღჭურვილია თანამედროვე თაობის კომპიუტერები და რომლებიც უცილობლად დიდ როლს თამაშობენ სხვადასხვა შემთხვევითი პროცესების მათემატიკურ მოდელირებაში.

ნაწილი I.
ალბათობის თეორია

§ 1.1 კოლმოგოროვის აქსიომატიკა

ვთქვათ, Ω არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო $\mathcal{P}(\Omega)$ - კი Ω -ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი.

განსაზღვრება 1. ვთქვათ, $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(1 \leq k \leq n)$. $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ სიმრავლეთა სასრული ოჯახის გაერთიანება აღინიშნება $\cup_{k=1}^{n} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\cup_{k=1}^{n} A_k = \{x | x \in A_1 \bigvee \cdots \bigvee x \in A_n\},$$

სადაც $\bigvee$ აღნიშნავს დიზიუნქციის სიმბოლოს.

განსაზღვრება 2. ვთქვათ, $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(k \in N)$. სიმრავლეთა უსასრულო $(A_k)_{k\in N}$ ოჯახის გაერთიანება აღინიშნება $\cup_{k\in N} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\cup_{k\in N} A_k = \{x | x \in A_1 \bigvee x \in A_2 \bigvee \cdots\}.$$

განსაზღვრება 3. ვთქვათ, $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(1 \leq k \leq n)$. სიმრავლეთა სასრული $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ ოჯახის თანაკვეთა აღინიშნება $\cap_{k=1}^{n} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\cap_{k=1}^{n} A_k = \{x | x \in A_1 \bigwedge \cdots \bigwedge x \in A_n\},$$

სადაც $\bigwedge$ აღნიშნავს კონიუნქციის სიმბოლოს.

განსაზღვრება 4. ვთქვათ, $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(k \in N)$. სიმრავლეთა უსასრულო $(A_k)_{k\in N}$ ოჯახის თანაკვეთა აღინიშნება $\cap_{k\in N} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\cap_{k\in N} A_k = \{x | x \in A_1 \bigwedge x \in A_2 \bigwedge \cdots\}.$$

განსაზღვრება 5. ვთქვათ, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. A და B სიმრავლეების სხვაობა აღინიშნება $A \setminus B$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$A \setminus B = \{x | x \in A \ \bigwedge x \notin B\}.$$

შენიშვნა 1.მართებულია დე მორგანის ორადულობის შემდეგი ფორმულები:

1) $\Omega \setminus \cup_{k=1}^{n} A_k = \cap_{k=1}^{n}(\Omega \setminus A_k)$;
2) $\Omega \setminus \cup_{k \in N} A_k = \cap_{k \in N}(\Omega \setminus A_k)$;
3) $\Omega \setminus \cap_{k=1}^{n} A_k = \cup_{k=1}^{n}(\Omega \setminus A_k)$;
4) $\Omega \setminus \cap_{k \in N} A_k = \cup_{k \in N}(\Omega \setminus A_k)$.

განსაზღვრება 6. Ω -სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\mathcal{A}$ კლასს ეწოდება ალგებრა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:
1) $\Omega \in \mathcal{A}$;
2) თუ $A, B \in \mathcal{A}$, მაშინ $A \cup B \in \mathcal{A}$ და $A \cap B \in \mathcal{A}$;
3) თუ $A \in \mathcal{A}$, მაშინ $\Omega \setminus A \in \Omega$.

შენიშვნა 2. 2) პირობაში საკმარისია მოვითხოვოთ $A \cup B \in \mathcal{A}$ და $A \cap B \in \mathcal{A}$ პირობებიდან მხოლოდ ერთ-ერთის მართებულობა, ვინაიდან, შენიშვნა 1-ში მოცემული 1) და 2) ფორმულების ძალით მართებულია შემდეგი სიმრავლურ-თეორიული ტოლობები:

$$A \cup B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)),$$

$$A \cap B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)).$$

შენიშვნა 3. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრა მის ქვესიმრავლეთა ისეთი კლასია, რომელიც შეიცავს Ω -ს და ჩაკეტილია სასრული რაოდენობა სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციების " $\cap, \cup, \setminus$ " მიმართ.

განსაზღვრება 7. Ω-სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\mathcal{F}$-კლასს ეწოდება σ-ალგებრა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:
1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
2) თუ $A_k \in \mathcal{F}$ $(k \in N)$, მაშინ $\cup_{k \in N} A_k \in \mathcal{F}$ და $\cap_{k \in N} A_k \in \mathcal{F}$;
3) თუ $A \in \mathcal{F}$, მაშინ $\Omega \setminus A \in \Omega$.

შენიშვნა 4. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა მის ქვესიმრავლეთა ისეთი კლასია, რომელიც შეიცავს Ω-ს და ჩაკეტილია თვლადი რაოდენობა სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციების " $\cap, \cup, \setminus$ " მიმართ.

განსაზღვრება 8. Ω-სიმრავლის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობა, თუ მისთვის სრულდება პირობები:

1) ყოველი $A \in \mathcal{F}$ ელემენტისათვის $P(A) \geq 0$ (ალბათობის არაუარყოფითობის თვისება);

2) $P(\Omega) = 1$ (ალბათობის ნორმირების თვისება);

3) თუ $(A_k)_{k \in N}$ $\mathcal{F}$-კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ელემენტთა მიმდევრობაა, მაშინ $P(\cup_{k \in N} A_k) = \sum_{k \in N} P(A_k)$ (ალბათობის თვლადად ადიტიურობის თვისება).

კოლმოგოროვის [1] **აქსიომატიკა.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ სამეულს, სადაც

[1]კოლმოგოროვი ანდრო ნიკოლოზის ძე [12(25).4.1903 ტამბოვი-25.10.1987 მოსკოვი] რუსი მათემატიკოსი, სსრკ-ის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი (1939), მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი. 1933 წელს პირველმა განიხილა ალბათობის თეორიის აქსიომატიკური დაფუძნების მათემატიკური კონცეფცია.

1) Ω -არაცარიელი სიმრავლეა,

2) $\mathcal{F}$ - Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა σ -ალგებრაა,

3) P არის $\mathcal{F}$ კლასზე განსაზღვრული ალბათობა,

ეწოდება ალბათური სივრცე.

ამასთან, Ω სიმრავლეს ეწოდება ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე; ყოველ $\omega \in \Omega$ წერტილს ეწოდება ელემენტარული ხდომილობა; $\mathcal{F}$ კლასის ყოველ ელემენტს ეწოდება ხდომილობა; $\emptyset$ -სიმრავლეს ეწოდება შეუძლებელი ხდომილობა; Ω სიმრავლეს ეწოდება აუცილებელი ხდომილობა; ყოველი A ხდომილობისათვის $\overline{A} = \Omega \setminus A$ ხდომილობას ეწოდება მისი საწინააღმდეგო ხდომილობა; A და B ხდომილობების ნამრავლი AB ეწოდება ხდომილობას $A \cap B$; A და B ხდომილობებს ეწოდება არათავსებადი, თუ ხდომილობა AB არის შეუძლებელი ხდომილობა; არათავსებადი A და B ხდომილობების ჯამი $A+B$ ეწოდება $A \cup B$ ხდომილობას; ყოველი A ხდომილობისთვის $P(A)$ რიცხვს ეწოდება A ხდომილობის ალბათობა.

განსაზღვრება 9. წყვილ-წყვილად არათავსებად $(A_k)_{k \in N}$ ხდომილობათა ოჯახის ჯამი აღინიშნება $\sum_{k \in N} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება ტოლობით

$$\sum_{k \in N} A_k = \cup_{k \in N} A_k.$$

შენიშვნა 5. ჯამისა და ნამრავლის სიმრავლურ-თეორიულ ოპერაციებს, მსგავსად ჯამისა და ნამრავლის რიცხვითი ოპერაციებისა, გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1) $A+B = B+A$, $AB = BA$ (ჯამისა და ნამრავლის კომუტაციურობის თვისებები);

2) $(A+B)+C = A+(B+C)$, $(AB)C = A(BC)$ (ჯამისა და ნამრავლის ასოციაციურობის თვისებები);

3) $(A+B)C = AC+BC$, $C(A+B) = CA+CB$, $C(\sum_{k \in N} A_k) = \sum_{k \in N} CA_k$, $(\sum_{k \in N} A_k)C = \sum_{k \in N} A_k C$ (დისტრიბუციულობის თვისება ჯამისა ნამრავლის მიმართ).

ლემა 1. *ვთქვათ, $(A_k)_{1 \le k \le n}$ არის სასრული Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა სასრული ოჯახი და $\#(\cdot)$ აღნიშნავს სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას. მაშინ*

$$\#(\cup_{1 \le k \le n} A_k) = \sum_i \#(A_i) - \sum_{i,j} \#(A_i \cap A_j) +$$

$$\sum_{i,j,k} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} A_1 \cap \cdots \cap A_n,$$

სადაც ინდექსები $i, j, k, \cdots$ არიან განსხვავებულები.

ტესტები

1.1.1. ვთქვათ, $A_k=[\frac{k+1}{k+2},1]$ $(k\in N)$. მაშინ

1) $\cap_{4\le k\le 10}A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{1}{2},1]$, ბ) $]\frac{11}{12},1]$, გ) $[\frac{11}{12},1]$, დ) $[\frac{1}{2},1]$;

2) $\cup_{3\le k\le 10}A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{4}{5},1]$, ბ) $[\frac{3}{4},1]$, გ) $[\frac{2}{3},1]$, დ) $[\frac{5}{6},1]$;

3) $\cup_{2\le k\le 10}A_k\setminus\cap_{1\le k\le 10}A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{3}{4},\frac{11}{12}[$, ბ) $[\frac{4}{5},\frac{12}{13}[$, გ) $[\frac{4}{5},1[$, დ) $[\frac{5}{6},1[$;

4) $\cap_{k\in N}A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $\{1\}$, ბ) $\{0\}$, გ) $\{\emptyset\}$, დ) $[0,1]$;

5) $\cup_{k\in N}A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{4}{5},1]$, ბ) $[\frac{3}{4},1]$, გ) $[\frac{2}{3},1]$, დ) $[\frac{5}{6},1]$;

6) $\cup_{k\in N}A_k\setminus\cap_{k\in N}A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{3}{4},1[$, ბ) $[\frac{2}{3},1[$, გ) $[\frac{4}{5},1[$, დ) $[\frac{5}{6},1[$.

1.1.2. ვთქვათ, $A_k=[\frac{k-3}{3k},\frac{2k+3}{3k}]$ $(k\in N)$. მაშინ

1) $\cap_{5\le k\le 10}A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{8}{33},\frac{25}{33}]$, ბ) $[\frac{7}{30},\frac{23}{30}]$, გ) $[\frac{2}{15},\frac{13}{15}]$, დ) $[\frac{1}{12},\frac{11}{12}]$;

2) $\cup_{10\le k\le 20}A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{8}{33},\frac{25}{33}]$, ბ) $[\frac{7}{30},\frac{23}{30}]$, გ) $[\frac{2}{15},\frac{13}{15}]$, დ) $[\frac{1}{12},\frac{11}{12}]$;

3) $\cap_{k\in N}A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{8}{33},\frac{25}{33}]$, ბ) $[\frac{1}{3},\frac{3}{4}]$, გ) $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, დ) $[\frac{1}{12},\frac{11}{12}]$;

4) $[0,1]\setminus\cap_{k\in N}A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[0,1]\setminus[0,\frac{1}{3}]\cup]\frac{3}{4};1[$, ბ) $[0,\frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3};1]$, გ) $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, დ) $[\frac{1}{12},\frac{11}{12}]$.

1.1.3*. ვთქვათ, θ დადებითი რიცხვია, ამასთან θ და π არ არიან რაციონალურად თანაზომადები, ე.ი. არ არსებობენ ისეთი ნატურალური რიცხვები k და m, რომ შესრულდეს ტოლობა $\theta=\frac{k}{m}\pi$. ვთქვათ, Δ სიმრავლე განსაზღვრულია შემდეგი პირობით

$$\Delta=\{(x,y)|-1<x<1,\ -1<y<1\}.$$

A_n-ით აღვნიშნოთ Δ სიმრავლის საკოორდინატო სიბრტყის სათავის გარშემო საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით $n\theta$ კუთხით შემობრუნების შედეგად მიღებული სიმრავლე. მაშინ

1) $\cap_{k\in N}A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$, ბ) $\{(x,y)|x^2+y^2\le 2\}$,

გ) $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$, დ) $\{(x,y)|x^2+y^2<2\}$;

2) $\cup_{k\in N}A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$, ბ) $\{(x,y)|x^2+y^2\le 2\}$,

გ) $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$, დ) $\{(x,y)|x^2+y^2<2\}$.

1.1.4. ვთქვათ, $\Omega=\{0;1\}$. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა

1) ალგებრა არის

ა) $\{\{0\},\{0;1\}\}$, ბ) $\{\{0\};\{0;1\};\emptyset\}$,

გ) $\{\{0\};\{1\};\{0;1\};\emptyset\}$; დ) $\{\{1\},\{0;1\}\}$;

2) σ-ალგებრა არის

ა) $\{\{0\},\{0;1\}\}$, ბ) $\{\{0\};\{0;1\};\emptyset\}$,

გ) $\{\{0\};\{1\};\{0;1\};\emptyset\}$; დ) $\{\{1\},\{0;1\}\}$.

1.1.5. ვთქვათ, $\Omega = [0,1[$.

1) მის ქვესიმრავლეთა ალგებრას წარმოადგენს

ა) $\{X|X \subset [0,1[$, X წარმოიდგინება მარცხნიდან ღია და მარჯვნიდან ჩაკეტილი თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებით $\}$,

ბ) $\{X|X \subset [0,1[$, X წარმოიდგინება მარცხნიდან ჩაკეტილი და მარჯვნიდან ღია თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებით $\}$,

გ) $\{X|X \subset [0,1[$, X წარმოიდგინება ორივე მხრიდან ჩაკეტილი თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებით $\}$,

დ) $\{X|X \subset [0,1[$, X წარმოიდგინება ორივე მხრიდან ღია თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებით $\}$;

2) ვთქვათ, $\mathcal{A} = \{X|X \subset [0,1[$, X წარმოიდგინება მარცხნიდან ჩაკეტილი და მარჯვნიდან ღია თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებით $\}$.

მაშინ $\mathcal{A}$

ა) არ არის ალგებრა, ბ) არის σ-ალგებრა, გ) არის σ-ალგებრა, მაგრამ არ არის ალგებრა, დ) არის ალგებრა, მაგრამ არ არის σ-ალგებრა.

§ 1.2. ალბათობის თვისებები

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ არის ალბათური სივრცე. P ალბათობას გააჩნია შემდეგი თვისებები.

თვისება 1. $P(\emptyset) = 0$.

დამტკიცება. $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$ წარმოდგენის მართებულობისა და P ალბათობის თვლადად-ადიტიურობის თვისების გამო ვღებულობთ

$$P(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} nP(\emptyset).$$

P ფუნქციის სასრულობის გამო $P(\emptyset) \in R$. ამიტომ ზემოთ მოყვანილი ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $P(\emptyset) = 0$.

თვისება 2 (სასრულად–ადიტიურობის თვისება). თუ $(A_k)_{1\le k\le n}$ არის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ხდომილობების სასრული მიმდევრობა, მაშინ

$$P(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

დამტკიცება. ყოველი $k > n$ ნატურალური რიცხვისათვის დაუშვათ $A_k = \emptyset$. მაშინ თვისება 1-ისა და P ალბათობის თვლადად-ადიტიურობის თვისების გამო ვღებულობთ

$$P(\cup_{k=1}^{n} A_k) = P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

თვისება 3. ყოველი $A \in \mathcal{F}$ ელემენტისათვის მართებულია ტოლობა

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

დამტკიცება. $\Omega = A + \overline{A}$ წარმოდგენის მართებულობის, P ალბათობის ნორმირებისა და სასრულად-ადიტიურობის თვისებებიდან ვღებულობთ

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}),$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

თვისება 4. ვთქვათ, $A, B \in \mathcal{F}$ და $A \subseteq B$, მაშინ $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$.

დამტკიცება. $B = A + (B \setminus A)$ წარმოდგენის მართებულობისა და P ალბათობის სასრულად-ადიტიურობის თვისებიდან ვღებულობთ $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$.

თვისება 5. ვთქვათ, $A, B \in \mathcal{F}$ და $A \subseteq B$, მაშინ $P(A) \le P(B)$.

დამტკიცება. მე-4 თვისების გამო ვღებულობთ $P(B) = P(A)+P(B\setminus A)$. აქედან $P(A) = P(B) - P(B \setminus A) \leq P(B)$.

თვისება 6. ვთქვათ, $A, B \in \mathcal{F}$, მაშინ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

დამტკიცება. $A \cup B = (A \setminus B) + AB + (B \setminus A)$ წარმოდგენის მართებულობიდან და P ალბათობის სასრულად-ადიტიურობის თვისებიდან ვღებულობთ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

თვისება 7. ვთქვათ, $A, B \in \mathcal{F}$, მაშინ

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

დამტკიცება. მე-6 თვისების გამო გვაქვს

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

აქედან ვღებულობთ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A) + P(B).$$

თვისება 8 (უწყვეტობა ზემოდან). ვთქვათ, $(A_n)_{n\in N}$ არის ხდომილობათა კლებადი მიმდევრობა, ე.ი.

$$(\forall n)(n \in N \rightarrow A_{n+1} \subseteq A_n).$$

მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$P(\cap_{n\in N} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

დამტკიცება. ყოველი ნატურალური $n \in N$ რიცხვისათვის მართებულია შემდეგი წარმოდგენა

$$A_n = \cap_{k\in N} A_k + (A_n \setminus A_{n+1}) + (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) + \cdots .$$

ამიტომ, ალბათობის თვლადად ადიტიურობის თვისების გამო ვღებულობთ:

$$P(A_n) - P(\cap_{k\in N} A_k) = \sum_{p=1}^{\infty} P(A_{n+p} \setminus A_{n+p+1}).$$

შევნიშნოთ, რომ ჯამი $\sum_{p=1}^{\infty} P(A_{n+p} \setminus A_{n+p+1})$ წარმოადგენს აბსოლუტურად კრებადი $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \setminus A_{n+1})$ მწკრივის n-ურ ნაშთს. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობის ძალით ვღებულობთ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{\infty} P(A_{n+p} \setminus A_{n+p+1}) = 0.$$

ამ პირობის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\lim_{n\to\infty}(P(A_n) - P(\cap_{k\in N} A_k)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) - P(\cap_{k\in N} A_k) = 0,$$

ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cap_{k\in N} A_k).$$

თვისება 9 (უწყვეტობა ქვემოდან). ვთქვათ, $(B_n)_{n\in N}$ არის ხდომილობათა ზრდადი მიმდევრობა, ე.ი.

$$(\forall n)(n \in N \to B_n \subseteq B_{n+1}).$$

მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$P(\cup_{n\in N} B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

დამტკიცება. $\cup_{n\in N} B_n$ ხდომილობისათვის მართებულია წარმოდგენა

$$\cup_{n\in N} B_n = B_1 + (B_2 \setminus B_1) + \cdots + (B_{k+1} \setminus B_k) + \cdots.$$

ალბათობის თვლადად-ადიტიურობის თვისებიდან ვღებულობთ

$$P(\cup_{n\in N} B_n) = P(B_1) + P(B_2 \setminus B_1) + \cdots + P(B_{k+1} \setminus B_k) + \cdots.$$

მე-4 თვისების გამო ვღებულობთ

$$P(B_{k+1}) = P(B_k) + P(B_{k+1} \setminus B_k).$$

თუ ამ ტოლობიდან განვსაზღვრავთ $P(B_{k+1} \setminus B_k)$-ს და მის მნიშვნელობას შევიტანთ წინა ტოლობაში, მივიღებთ

$$P(\cup_{n\in N} B_n) = P(B_1) + (P(B_2) - P(B_1)) + \cdots + (P(B_{k+1}) - P(B_k)) + \cdots.$$

ტოლობის მარჯვნივ მდგომი მწკრივი კრებადია. ამასთან მისი პირველი n წევრის S_n ჯამისათვის მართებულია ტოლობა

$$S_n = P(B_n).$$

ამიტომ, მწკრივის ჯამის განსაზღვრიდან ვღებულობთ

$$P(\cup_{n\in N} B_n) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

ტესტები

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცეა.

1.2.1. თუ A ხდომილების ალბათობა ტოლია $0,95$, მაშინ $P(\overline{A})$ ტოლია

ა) $0,56$, ბ) $0,55$, გ) $0,05$, დ) $0,03$.

1.2.2. ვთქვათ, $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$, $P(A) = 0,65$ და $P(B) = 0,68$. მაშინ $P(B \setminus A)$ ტოლია

ა) $0,02$, ბ) $0,03$, გ) $0,04$, დ) $0,05$.

1.2.3. ვთქვათ, $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0,35$, $P(B) = 0,45$ და $P(A \cup B) = 0,75$. მაშინ $P(A \cap B)$ ტოლია

ა) $0,02$, ბ) $0,03$, გ) $0,04$, დ) $0,05$.

1.2.4. ვთქვათ, $(A_n)_{n \in N}$ არის ხდომილობათა კლებადი მიმდევრობა და $P(\cap_{n \in N} A_n) = 0,89$. მაშინ $\lim_{n \to \infty} P(\overline{A_n})$ ტოლია

ა) $0,11$, ბ) $0,12$, გ) $0,13$, დ) $0,14$.

1.2.5. ვთქვათ, $(A_n)_{n \in N}$ არის ხდომილობათა კლებადი მიმდევრობა და $P(A_n) = \frac{n+1}{3n}$. მაშინ $P(\cap_{n \in N} A_n)$ ტოლია

ა) $\frac{1}{2}$, ბ) $\frac{1}{3}$, გ) $\frac{1}{4}$, დ) $\frac{1}{5}$.

1.2.6. ვთქვათ, $(A_n)_{n \in N}$ არის ხდომილობათა ზრდადი მიმდევრობა და $P(\cup_{n \in N} A_n) = 0,89$. მაშინ $\lim_{n \to \infty} P(\overline{A_n})$ ტოლია

ა) $0,11$, ბ) $0,12$, გ) $0,13$, დ) $0,14$.

1.2.7. ვთქვათ, $(A_n)_{n \in N}$ არის ხდომილობათა ზრდადი მიმდევრობა და $P(A_n) = \frac{n-1}{3n}$. მაშინ $P(\cup_{n \in N} A_n)$ ტოლია

ა) $\frac{1}{2}$, ბ) $\frac{1}{3}$, გ) $\frac{1}{4}$, დ) $\frac{1}{5}$.

§ 1.3. ალბათურ სივრცეთა მაგალითები

1. კლასიკური ალბათური სივრცე. ვთქვათ, Ω არის n-ელემენტიანი სიმრავლე, ე.ი. $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$. $\mathcal{F}$-ით აღვნიშნოთ Ω სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი. განვსაზღვროთ $\mathcal{F}$ კლასზე P რიცხვითი ფუნქცია შემდეგი თანაფარდობით

$$(\forall A)(A \in \mathcal{F} \to P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}),$$

სადაც $|\cdot|$ აღნიშნავს სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას.

ადვილი საჩვენებელია, რომ სამეული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ წარმოადგენს ალბათურ სივრცეს. მას ეწოდება კლასიკური ალბათური სივრცე, ხოლო P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება კლასიკური ალბათობა.

განსაზღვრება 1. $\omega \in \Omega$ ელემენტარულ ხდომილობას ეწოდება A ხდომილობის ხელშემწყობი, თუ $\omega \in A$.

კლასიკური ალბათობის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს A ხდომილობის კლასიკური ალბათობის გამოსათვლელი შემდეგი წესი:

A ხდომილობის კლასიკური ალბათობა ტოლია წილადის, რომლის მრიცხველია A ხდომილობის ყველა ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა, ხოლო მნიშვნელია ყველა შესაძლო ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა.

2. გეომეტრიული ალბათური სივრცე. ვთქვათ, Ω არის ევკლიდეს n-განზომილებიანი R^n სივრცის რაიმე დადებითი ბორელის [2] b_n ზომის მქონე ქვესიმრავლე (იხ. §1.5.3, მაგალითი 3). $\mathcal{F}$ იყოს Ω სიმრავლის ყველა ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი. $\mathcal{F}$ კლასზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგი თანაფარდობით:

$$(\forall A)(A \in \mathcal{F} \to P(A) = \frac{b_n(A)}{b_n(\Omega)}).$$

ასეთნაირად განსაზღვრულ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიან Ω სივრცესთან ასოცირებული გეომეტრიული ალბათური სივრცე, ხოლო P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება n-განზომილებიანი გეომეტრიული ალბათობა, განსაზღვრული Ω სივრცეზე.

იმ შემთხვევაში, როცა წერტილი ვარდება Ω სიმრავლეში და მისი ამ სიმრავლის ბორელის აზრით ზომად ნებისმიერ ქვესიმრავლეში ჩავარდნის ალბათობა ამ სიმრავლის b_n-ბორელის ზომის პირდაპირპროპორციულია,

[2]ბორელი ფელიქსი ედუარდი ჟიუსტენ (*Borel Felix Eduard Justion Emil*)(7.01. 1871 სენტ-აფრიკა--3.03.1956. პარიზი)-ფრანგი მათემატიკოსი, პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1921), პარიზის უნივერსიტეტის პროფესორი (1909-1941). ჩაუყარა საფუძველი თანამედროვე მათემატიკური ანალიზის რამოდენიმე მიმდინარეობას (განშლადი მწკრივები, ანალიზური ფუნქციის განზოგადება, სიმრავლის ზომა, დიოფანტური მიახლოებები და სხვა.)

გამოიყენება Ω სივრცეზე განსაზღვრული გეომეტრიული ალბათობის გამოსათვლელი შემდეგი წესი:

დადებითი ბორელის ზომის მქონე $\Omega \subset R^n$ სიმრავლის ბორელის აზრით ზომად $A \subset \Omega$ ქვესიმრავლეში ჩავარდნის ალბათობა ტოლია წილადის, რომლის მრიცხველია A სიმრავლის ბორელის b_n ზომა, ხოლო მნიშვნელია Ω სიმრავლის ბორელის b_n ზომა.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური მოდელის შედგენაზე.

მაგალითი 1.

დავუშვათ, რომ საველე მუშაობისას აღებულია 100 კენჭი. ცხრილში მოცემულია მათი კლასიფიკაცია ფერის მიხედვით

ფერი	რაოდენობა
ყავისფერი	852
შავი	93
მწვანე	55
სულ	1000

გეოლოგმა ჩაყარა კენჭები ზურგჩანთაში და გადაწყვიტა ალალბედზე ამოიღოს კენჭი. რას უდრის ალბათობა იმისა რომ ამოღებული კენჭი იქნება ყავისფერი?

ექსპერიმენტი - ზურგჩანთიდან კენჭის შემთხვევითი ამოღება

ამოცანა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგი იქნება ყავისფერი კენჭი.

ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური მოდელის აგება. ვინაიდან ექსპერიმენტის შედეგი ელემენტარული ხდომილობაა, ამიტომ ყველა ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცეს ექნება შემდეგი სახე:

$$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \cdots \omega_{1000}\}.$$

$\mathcal{F}$ σ-ალგებრის როლში განვიხილოთ Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი.

P-თი აღვნიშნოთ კლასიკური ალბათობა, განსაზღვრული პირობით

$$(\forall A)(A \in \mathcal{F} \rightarrow P(A) = \frac{|A|}{1000}).$$

ასეთნაირად აგებული სამეული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ წარმოადგენს ექსპერიმენტის აღმწერ ალბათურ მოდელს.

ამოცანის ამოხსნა. ყავისფერი კენჭის ამოღებას შეესაბამება ხდომილობა B, რომლის რაოდენობა $|B|$ ტოლია 852-ის.

P ალბათობის განსაზღვრიდან ვღებულობთ:

$$P(B) = \frac{|B|}{1000} = \frac{852}{1000} = 0,852;$$

დასკვნა. ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგი იქნება ყავისფერი კენჭი, ტოლია $0,852$.

მაგალითი 2.

ექსპერიმენტი - ერთი კამათლის შემთხვევითი გაგორება.

ამოცანა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგი იქნება ლუწი ციფრი.

ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური მოდელის აგება. ვინაიდან ექსპერიმენტის შედეგი ელემენტარული ხდომილობაა, ამიტომ ყველა ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცეს ექნება შემდეგი სახე:

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

$\mathcal{F}$ σ-ალგებრის როლში განვიხილოთ Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი. ცხადია, რომ

$$\mathcal{F} = \{\emptyset; \{1\}; \cdots \{6\}; \{1; 2\}; \cdots \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}\}.$$

P-თი აღვნიშნოთ კლასიკური ალბათობა, განსაზღვრული პირობით

$$(\forall A)(A \in \mathcal{F} \to P(A) = \frac{|A|}{6}).$$

ასეთნაირად აგებული სამეული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ წარმოადგენს ექსპერიმენტის აღმწერ ალბათურ მოდელს.

ამოცანის ამოხსნა. ერთი კამათლის გაგორებისას ლუწი ციფრის მოსვლას შეესაბამება ხდომილობა B, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$B = \{2; 4; 6\}.$$

P ალბათობის განსაზღვრიდან ვღებულობთ:

$$P(B) = \frac{|B|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

დასკვნა. ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგი იქნება ლუწი ციფრი, ტოლია $\frac{1}{2}$.

მაგალითი 3.

ესპერიმენტი - 36 კარტიანი დასტიდან 3 კარტის შემთხვევითი ამოღება.

ამოცანა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგი იქნება კარტების ისეთი სამეული, რომელშიც ერთი კარტი იქნება ტუზი.

ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური მოდელის აგება. ვინაიდან ექსპერიმენტის შედეგი - " 36 კარტიანი დასტიდან შემთხვევით ამოღებული

3 კარტი " - ელემენტარული ხდომილობაა, ამიტომ Ω სივრცე იქნება კარტების ყველა შესაძლო სამეულების სიმრავლე. Ω სივრცის ელემენტთა რაოდენობა ტოლია 36 ელემენტიან სიმრავლეში ყველა განსხვავებულ 3 ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობის, ე.ი.

$$|\Omega| = C_{36}^3.$$

$\mathcal{F}$ σ-ალგებრის როლში განვიხილოთ Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი. P-თი აღვნიშნოთ კლასიკური ალბათობა, განსაზღვრული პირობით

$$(\forall A)(A \in \mathcal{F} \to P(A) = \frac{|A|}{C_{36}^3}).$$

ასეთნაირად აგებული სამეული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ წარმოადგენს 36 კარტიანი დასტიდან 3 კარტის შემთხვევითი ამოღების ექსპერიმენტის აღმწერ ალბათურ მოდელს.

ამოცანის ამოხსნა. 36 კარტიანი დასტიდან 3 კარტის შემთხვევითი ამოღებისას მხოლოდ ერთი ტუზის მოსვლას შეესაბამება Ω სივრცის ისეთი სამეულების სიმრავლე A, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ ერთ ტუზს. ყოველი ასეთი სამეულის მიღება შეიძლება შემდეგნაირად: 1 კარტს ვირჩევთ ტუზების კომპლექტიდან, რომლის განხორციელების C_4^1 შესაძლებლობაა, ხოლო დანარჩენ ორ კარტს ვირჩევთ დანარჩენი 32 კარტიდან, რომლის განხორციელების C_{32}^2 შესაძლებლობაა. ამიტომ $C_4^1 \cdot C_{32}^2$ ემთხვევა A სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას.

P ალბათობის განსაზღვრის საფუძველზე ვღებულობთ

$$P(A) = \frac{|A|}{C_{36}^3} = \frac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}.$$

დასკვნა. ალბათობა იმისა, რომ 36 კარტიანი დასტიდან შემთხვევით ამოღებულ 3 კარტში 1 კარტი იქნება ტუზი, ტოლია $\frac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}$.

მაგალითი 4.

ექსპერიმენტი. სიბრტყეზე გავლებულია პარალელური წრფეები ისე, რომ მანძილი ორ მეზობელ წრფეს შორის $2a$-ს ტოლია. მასზე შემთხვევითად აგდებენ $2l$ სიგრძის ნემსს. ამასთან $2l < 2a$, რაც გამორიცხავს ნემსის მიერ ორი პარალელური ხაზის ერთდროულად გადაკვეთის შესაძლებლობას.

ამოცანა (ბიუფონი [3]). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სიბრტყეზე შემთხვევითად დაგდებული ნემსი გადაკვეთს რომელიმე პარალელურ ხაზს.

[3] ბიუფონი გეორგ ლუი ლეკლერკი (*Buffon Georges Louis Leclerc*) (7.9.1707 მონბარი-16.4.1788 პარიზი) ფრანგი ექსპერიმენტატორი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის საპატიო წევრი (1776), პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1733). პირველი, ვინც მუშაობდა გეომეტრიულ ალბათობასთან დაკავშირებულ ამოცანებზე.

ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური მოდელის აგება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ სიბრტყე აღჭურვილია მართკუთხა კოორდინატთა XOY სისტემით, ხოლო წრფეები პარალელურია OX რიცხვითი ღერძისა. შევნიშნოთ რომ ექსპერიმენტის შესაძლო შედეგი ნემსის გარკვეული მდებარეობაა სიბრტყეზე, რომელიც შეიძლება დახასიათდეს ცალსახად (რომელიმე პარალელური ხაზის გადაკვეთასთან მიმართებაში) რიცხვითი სიდიდეებით x და φ, სადაც x არის მანძილი ნემსის შუა წერტილიდან უახლოეს წრფემდე, ხოლო φ არის კუთხე ნემსსა (რომელიც განხილულია როგორც ვექტორი, მიმართულებით ნემსის ყუნწიდან მის წვერომდე) და OX ღერძის დადებით მიმართულებას შორის.

ცხადია, რომ x და φ აკმაყოფილებენ პირობებს $0 \le x \le a, 0 \le \varphi \le \pi$. ამგვარად

$$\Omega = [0;\pi] \times [0;a] = \{(\varphi;x) : 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le x \le a\}.$$

$\mathcal{F}$ იყოს Ω სიმრავლის ყველა ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი. $\mathcal{F}$ კლასზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგი თანაფარდობით:

$$(\forall A)(A \in \mathcal{F} \to P(A) = \frac{b_2(A)}{b_2(\Omega)}).$$

ასეთნაირად განსაზღვრული სამეული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ წარმოადგენს სიბრტყეზე ნემსის შემთხვევითი დაგდების ექსპერიმენტის აღმწერ ალბათურ მოდელს.

ამოცანის ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ სიბრტყეზე ნემსის შემთხვევითი დაგდებისას მის მიერ რომელიმე პარალელური ხაზის გადაკვეთას შეესაბამება B_0 ხდომილობა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$B_0 = \{(\varphi, x)|\ \ 0 \le \varphi \le \pi,\ \ 0 \le x \le l\sin\varphi\}.$$

P ალბათობის განსაზღვრის ძალით, ვღებულობთ

$$P(B_0) = \frac{b_2(B)}{a \cdot \pi} = \frac{\int_0^\pi l \sin\varphi d\varphi}{a \cdot \pi} = \frac{2l}{a\pi}.$$

დასკვნა. ალბათობა იმისა, რომ სიბრტყეზე შემთხვევითად დაგდებული ნემსი გადაკვეთს რომელიმე პარალელურ ხაზს, ტოლია $\frac{2l}{a\pi}$.

ტესტები

1.3.1. ყუთში არის 5 თეთრი და 10 შავი ბურთულა. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითად ამოღებული ბურთულა იქნება შავი, ტოლია

ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{2}{3}$, გ) $\frac{1}{5}$, დ) $\frac{1}{6}$.

1.3.2. ყუთში არის 7 თეთრი და 13 წითელი ბურთულა. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითად ამოღებული 3 ბურთულიდან 2 ბურთულა იქნება წითელი, ტოლია

ა) $\frac{C_{13}^2 \cdot C_7^1}{C_{20}^3}$, ბ) $\frac{C_{13}^1 \cdot C_7^2}{C_{20}^3}$, გ) $\frac{C_{13}^2 \cdot C_7^2}{C_{20}^3}$, დ) $\frac{C_{13}^1 \cdot C_7^1}{C_{20}^3}$.

1.3.3. აგორებენ ორ კამათელს. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათლებზე მოსულ ციფრთა ჯამი არ აღემატება 8-ს, ტოლია

ა) $\frac{13}{18}$, ბ) $\frac{5}{6}$, გ) $\frac{1}{5}$, დ) $\frac{1}{6}$.

1.3.4. ჯგუფში არის 17 სტუდენტი. მათ შორის 8 ვაჟია. გათამაშებულია 7 ბილეთი. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ ბილეთების მფლობელებს შორის 4 ვაჟია, ტოლია

ა) $\frac{C_{13}^2 \cdot C_7^2}{C_{15}^7}$, ბ)$\frac{C_8^1 \cdot C_7^2}{C_{17}^7}$, გ) $\frac{C_8^4 \cdot C_9^3}{C_{17}^7}$, დ) $\frac{C_{13}^1 \cdot C_7^1}{C_{25}^7}$.

1.3.5. კუბი, რომლის ყველა წახნაგი შეღებილია, დაყოფილია ათას თანატოლ კუბად. მიღებული კუბები არეულია ერთმანეთში. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებულ კუბს

1) ექნება სამი შეღებილი წახნაგი, ტოლია

ა) $\frac{1}{1000}$, ბ) $\frac{1}{125}$, გ) $\frac{1}{250}$, დ) $\frac{1}{400}$;

2) ექნება ორი შეღებილი წახნაგი, ტოლია

ა) $\frac{12}{124}$, ბ) $\frac{11}{120}$, გ) $\frac{12}{125}$, დ) $\frac{9}{125}$;

3) ექნება ერთი შეღებილი წახნაგი, ტოლია

ა) $\frac{54}{250}$, ბ) $\frac{43}{145}$, გ) $\frac{48}{125}$, დ) $\frac{243}{250}$;

4) არ ექნება შეღებილი წახნაგი, ტოლია

ა) $\frac{8}{250}$, ბ) $\frac{64}{125}$, გ) $\frac{4}{165}$, დ) $\frac{23}{250}$.

1.3.6. 10 ქალისა და 10 მამაკაცისაგან შედგენილი ჯგუფი შემთხვევით იყოფა ორ ტოლ ნაწილად. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ ორივე ნაწილში მამაკაცები და ქალები იქნებიან თანაბარი რაოდენობით, ტოლია

ა) $\frac{(C_{10}^5)^2}{C_{20}^{10}}$, ბ) $\frac{C_{10}^5}{C_{20}^{10}}$, გ) $\frac{(C_{10}^5)^3}{C_{20}^{10}}$, დ) $\frac{C_{10}^5}{C_{20}^5}$.

1.3.7. გვაქვს ხუთი მონაკვეთი, რომელთა სიგრძეებია 1, 3, 4, 7 და 9. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული სამი მონაკვეთისაგან შეიძლება სამკუთხედის შედგენა, ტოლია

ა) $\frac{3}{C_5^3}$, ბ) $\frac{2}{C_5^3}$, გ) $\frac{4}{C_5^3}$, დ) $\frac{5}{C_5^3}$.

1.3.8. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას

1) მოსული ქულების ჯამი ხუთს არ აღემატება, ტოლია

ა) $\frac{7}{36}$, ბ) $\frac{5}{18}$, გ) $\frac{1}{4}$, დ) $\frac{3}{9}$;

2) ერთ-ერთზე მაინც მოვა ხუთი ქულა, ტოლია
ა) $\frac{7}{36}$, ბ) $\frac{8}{36}$, გ) $\frac{11}{36}$, დ) $\frac{3}{19}$;
3) მხოლოდ ერთ კამათელზე მოვა ხუთი ქულა, ტოლია
ა) $\frac{7}{36}$, ბ) $\frac{5}{18}$, გ) $\frac{10}{36}$, დ) $\frac{12}{19}$;
4) მოსულ ქულათა ჯამი 3-ის ჯერადია, ტოლია
ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{2}{5}$, გ) $\frac{1}{6}$, დ) $\frac{2}{9}$;
5) მოსულ ქულათა სხვაობის მოდული 3-ის ტოლია, ტოლია
ა) $\frac{1}{6}$, ბ) $\frac{2}{5}$, გ) $\frac{2}{6}$, დ) $\frac{2}{5}$;
6) მოსულ ქულათა ნამრავლი მარტივია, ტოლია
ა) $\frac{5}{36}$, ბ) $\frac{7}{36}$, გ) $\frac{11}{36}$, დ) $\frac{2}{36}$.

1.3.9. წერტილი ვარდება კვადრატში, რომელშიც ჩახაზულია წრე. გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ წერტილი არ ჩავარდება წრეში, ტოლია
ა) $1-\frac{\pi}{3}$, ბ) $1-\frac{\pi}{4}$, გ) $1-\frac{\pi}{5}$, დ) $1-\frac{\pi}{6}$.

1.3.10. ქარიშხალმა დააზიანა სატელეფონო ხაზი 160-ე და 290-ე კილომეტრებს შორის. ალბათობა იმისა, რომ დაზიანება მოხდა სატელეფონო ხაზის მე-200-ედან მე-240-ე კმ-ს შორის, ტოლია
ა) $\frac{1}{13}$, ბ) $\frac{2}{13}$, გ) $\frac{4}{13}$, დ) $\frac{5}{13}$.

1.3.11. R რადიუსიანი წრის ცენტრიდან d მანძილზე $(d > R)$ აღებულია A წერტილი. ალბათობა იმისა, რომ A წერტილზე შემთხვევით გავლებული
1) წრფე წრეს გადაკვეთს, ტოლია
ა) $\frac{2\ \arcsin(\frac{R}{d})}{\pi}$, ბ) $\frac{3\ arcsin(\frac{R}{d})}{\pi}$, გ) $\frac{arcsin(\frac{R}{d})}{\pi}$, დ) $\frac{2\ arcsin(\frac{2R}{d})}{\pi}$;
2) სხივი წრეს გადაკვეთს, ტოლია
ა) $\frac{2arcsin(\frac{R}{d})}{\pi}$, ბ) $\frac{3arcsin(\frac{R}{d})}{\pi}$, გ) $\frac{arcsin(\frac{R}{d})}{\pi}$, დ) $\frac{2arcsin(\frac{2R}{d})}{\pi}$.

1.3.12. შემთხვევით ირჩევენ წერტილს კუბიდან, რომელშიც ჩახაზულია ბირთვი. გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ წერტილი არ არის შერჩეული ბირთვიდან, ტოლია
ა) $1-\frac{\pi}{3}$, ბ) $1-\frac{\pi}{4}$, გ) $1-\frac{\pi}{5}$, დ) $1-\frac{\pi}{6}$.

1.3.13. შემთხვევით ირჩევენ წერტილს ბირთვიდან, რომელშიც ჩახაზულია კუბი. გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ წერტილი არ არის შერჩეული კუბიდან, ტოლია
ა) $1-\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$, ბ) $1-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$, გ) $1-\frac{\sqrt{3}}{5\pi}$, დ) $1-\frac{\sqrt{3}}{6\pi}$.

1.3.14. შემთხვევით ირჩევენ წერტილს ტეტრაედრიდან, რომელშიც ჩახაზულია ბირთვი. გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ წერტილი არ არის შერჩეული ბირთვიდან, ტოლია
ა) $1-\frac{5\pi\sqrt{2}}{48}$, ბ) $\frac{5\pi\sqrt{2}}{45}$, გ) $1-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$, დ) $1-\frac{5\pi\sqrt{2}}{80}$.

1.3.15. შემთხვევით ირჩევენ წერტილს ბირთვიდან, რომელშიც ჩახაზულია ტეტრაედრი. გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ წერტილი არ არის შერჩეული ტეტრაედრიდან, ტოლია
ა) $1-\frac{12\sqrt{3}}{45\pi}$, ბ) $1-\frac{2\sqrt{3}}{9\pi}$, გ) $1-\frac{12\sqrt{3}}{47\pi}$, დ) $1-\frac{12\sqrt{3}}{43\pi}$.

1.3.16. შემთხვევით ირჩევენ M წერტილს Δ კვადრატიდან, რომელიც საკოორდინატო XOY სიბრტყეზე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Delta = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ M წერტილის (x, y) კოორდინატები დააკმაყოფილებენ პირობას

$$x + y \geq \frac{1}{2},$$

ტოლია

ა) $\frac{3}{6}$, ბ) $\frac{3}{4}$, გ) $\frac{3}{5}$, დ) $\frac{5}{6}$.

1.3.17. შემთხვევით ირჩევენ M წერტილს Δ კვადრატიდან, რომელიც საკოორდინატო OXY სიბრტყეზე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Delta = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ M წერტილის (x, y) კოორდინატები დააკმაყოფილებენ პირობას

$$\sin(x) \leq y \leq x,$$

ტოლია

ა) $1 - \frac{1}{4\pi^2}$, ბ) $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}$, გ) $1 - \frac{1}{5\pi^2}$, დ) $1 - \frac{1}{6\pi^2}$.

1.3.18. შემთხვევით ირჩევენ M წერტილს Δ კუბიდან, რომელიც საკოორდინატო $OXYZ$ სივრცეში განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Delta = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ M წერტილის (x, y, z) კოორდინატები დააკმაყოფილებენ პირობებს

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4},\ x + y + z \geq \frac{1}{2},$$

ტოლია

ა) $\frac{\pi - 1}{48}$, ბ) $\frac{4\pi - 1}{24}$, გ) $\frac{\pi - 2}{50}$, დ) $\frac{\pi + 2}{50}$.

1.3.19. ორი სტუდენტი უნდა შეხვდეს ერთმანეთს დათქმულ ადგილას 12სთ.-დან 13 სთ.-მდე. შეხვედრის ადგილზე პირველად მისული ელოდება მეორეს არა უმეტეს 20 წუთისა. ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტები შეხვდებიან ერთმანეთს დროის აღნიშნულ ინტერვალში, ტოლია

ა) $\frac{5}{9}$, ბ) $\frac{5}{8}$, გ) $\frac{5}{7}$, დ) $\frac{6}{7}$.

1.3.20. სტუდენტს დაგეგმილი აქვს ბანკიდან ფულის გამოტანა. მოსალოდნელია, რომ იგი ბანკში მივა 14 სთ. 15 წთ-იდან 14 სთ. 25 წთ-მდე. ცნობილია ისიც, რომ მძარცველებს დაგეგმილი აქვთ ბანკზე თავდასხმა დროის

იმავე შუალედში. ცნობილია, რომ ფულის გამოსატანად სტუდენტს სჭირდება 4 წთ და იგივე დროა საჭირო ყაჩაღებისთვის. ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი აღმოჩნდება ბანკში გაძარცვის მომენტში, ტოლია

ა) $\frac{1}{10}$, ბ) $\frac{1}{11}$, გ) $\frac{16}{25}$, დ) $\frac{1}{6}$.

1.3.21. R რადიუსიან წრეწირზე შემთხვევითად ირჩევენ A, B და C წერტილებს. ალბათობა იმისა, რომ სამკუთხედი ABC მახვილკუთხაა, ტოლია

ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{1}{4}$, გ) $\frac{1}{5}$, დ) $\frac{1}{6}$.

1.3.22. l სიგრძის AB მონაკვეთზე აღებულია ორი წერტილი C და D. ალბათობა იმისა რომ მიღებული სამი მონაკვეთისაგან სამკუთხედი აიგება, ტოლია

ა) $\frac{1}{4}$, ბ) $\frac{1}{5}$, გ) $\frac{1}{6}$, დ) $\frac{1}{7}$.

1.3.23. შემთხვევით ირჩევენ M წერტილს Δ კვადრატიდან, რომელიც საკოორდინატო OPQ სიბრტყეზე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Delta = \{(p, q) : 0 \leq p \leq 1,\ 0 \leq q \leq 1\}.$$

გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ $x^2 + px + q = 0$ განტოლების ფესვები ნამდვილი რიცხვები იქნება, სადაც (p, q) წარმოადგენს M წერტილის კოორდინატებს, ტოლია

ა) $\frac{1}{12}$, ბ) $\frac{1}{13}$, გ) $\frac{1}{5}$, დ) $\frac{1}{6}$.

1.3.24. M წერტილს შემთხვევით ირჩევენ R რადიუსიანი ბირთვიდან. ალბათობა იმისა, რომ M წერტილის ρ დაშორება ბირთვის ცენტრიდან დააკმაყოფილებს პირობას $\frac{R}{2} < \rho < \frac{2R}{3}$, ტოლია

ა) $\frac{7}{27}$, ბ) $\frac{1}{4}$, გ) $\frac{37}{216}$, დ) $\frac{8}{29}$.

§ 1.4. სრული ალბათობისა და ბაიესის ფორმულები

ვთქვათ, მოცემულია $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცე.

განვიხილოთ დადებითი ალბათობის მქონე რაიმე B ხდომილობა.

განვსაზღვროთ $P(\cdot \mid B)$ რიცხვითი ფუნქცია $\mathcal{F}$ σ-ალგებრაზე შემდეგი თანაფარდობით:

$$(\forall X)(X \in \mathcal{F} \rightarrow P(X|B) = \frac{P(X \cap B)}{P(B)}).$$

ასეთნაირად განსაზღვრულ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება პირობითი ალბათობა B-ს პირობით, ხოლო რიცხვს $P(X|B)$ ეწოდება X ხდომილობის პირობითი ალბათობა B-ს პირობით.

თეორემა 1. თუ $B \in \mathcal{F}$ და $P(B) > 0$, მაშინ პირობითი ალბათობა $P(\cdot \mid B)$ წარმოადგენს ალბათობას.

დამტკიცება. ალბათობის განსაზღვრის ძალით, $P(\cdot \mid B)$ რიცხვითი ფუნქციისათვის უნდა სრულდებოდეს შემდეგი პირობები:

1) ყოველი $A \in \mathcal{F}$ ელემენტისათვის $P(A|B) \geq 0$;

2) $P(\Omega|B) = 1$;

3) თუ $(A_k)_{k \in N}$ $\mathcal{F}$-კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ელემენტთა მიმდევრობაა, მაშინ

$$P(\cup_{k \in N} A_k|B) = \sum_{k \in N} P(A_k|B).$$

1) პირობის მართებულობა გამომდინარეობს $P(\,\cdot \mid B)$ ფუნქციის განსაზღვრიდან და P ალბათობის არაუარყოფითობიდან. მართლაც,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0.$$

2) პირობის მართებულობა გამომდინარეობს შემდეგი თანაფარდობიდან

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

3) პირობის მართებულობა გამომდინარეობს P ალბათობის თვლადად ადიტიურობის თვისებიდან და იმ ელემენტარული ფაქტიდან, რომ თუ $(A_n)_{n \in N}$ ხდომილობები არათავსებადია, მაშინ $(A_n \cap B)_{n \in N}$ ხდომილობებიც არათავსებადია. მართლაც,

$$P(\cup_{n \in N} A_n|B) = \frac{P((\cup_{n \in N} A_n) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\cup_{n \in N}(A_n \cap B))}{P(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{n \in N} P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n \in N} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n \in N} P(A_n \mid B)$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. თუ $P(B) > 0$, მაშინ $P(\overline{B}|B) = 0$.

დამტკიცება.

$$P(\overline{B}|B) = \frac{P(\overline{B} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0.$$

განსაზღვრება 1. A და B ხდომილობებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ მათთვის სრულდება პირობა

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

მაგალითი 1. ვთქვათ, $\Omega = \{(x,y) : x \in [0;1], y \in [0;1]\}$.

$\mathcal{F}$ კლასის როლში განვიხილოთ ერთეულოვანი Ω კვადრატის ყველა ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი (იხ.§1.5.3, მაგალითი 3). P ალბათობის როლში განვიხილოთ ბორელის კლასიკური ზომა b_2. მაშინ ხდომილობები

$$A = \{(x,y) : x \in [0; \frac{1}{2}], y \in [0;1]\},$$

$$B = \{(x,y) : x \in [0;1], y \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]\}$$

დამოუკიდებელი ხდომილობებია.

მართლაც,

$$P(A \cap B) = b_2(A \cap B) = b_2(\{(x,y) : x \in [0; \frac{1}{2}], y \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

მეორეს მხრივ,

$$P(A) \cdot P(B) = b_2(A) \cdot b_2(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

ამგვარად, მივიღეთ

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

რაც A და B ხდომილობების დამოუკიდებლობას ნიშნავს.

თეორემა 3. თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია და $P(B) > 0$, მაშინ $P(A|B) = P(A)$.

დამტკიცება. პირობითი ალბათობის განსაზღვრის გამო გვაქვს

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

A და B ხდომილობათა დამოუკიდებლობის გამო $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. ამიტომ, საბოლოოდ ვღებულობთ

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1. თეორემა 3 უნდა გავიგოთ შემდეგნაირად: თუ A და B ხდომი- ლობები დამოუკიდებელია და $P(B) > 0$, მაშინ B ხდომილობის მოხდენა ან არ მოხდენა არავითარ გავლენას არ ახდენს A ხდომილობის ალბათობაზე.

თეორემა 4. თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ დამოუკიდებელია აგრეთვე $\overline{A}$ და B ხდომილობებიც.

დამტკიცება.

$$P(\overline{A}\cap B)=P((\Omega\setminus A)\cap B)=P((\Omega\cap B)\setminus(A\cap B))=$$
$$=P(B\setminus(A\cap B))=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)\cdot P(B)=$$
$$=P(B)(1-P(A))=P(B)\cdot P(\overline{A}).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 2.

ექსპერიმენტი - ორი კამათლის შემთხვევითი გაგორება.

ამოცანა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას მოსული ციფრების ჯამი უდრის 8-ს, თუ ცნობილია, რომ კამათლებზე მოსული ციფრების ჯამი ლუწია.

ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური სივრცის აგება. იმის გამო, რომ ექსპერიმენტის ყოველი შესაძლო შედეგი ელემენტარული ხდომილობაა, ამიტომ ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცეს ექნება შემდეგი სახე

$$\Omega=\{(x,y):x\in N,y\in N,\ 1\leq x\leq 6,\ 1\leq y\leq 6\},$$

სადაც x და y აღნიშნავს შესაბამისად, პირველ და მეორე კამათელზე მოსულ ქულას.

$\mathcal{F}$-ით აღვნიშნოთ Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი, ხოლო P-ს როლში განვიხილოთ კლასიკური ალბათობა. ამით ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური სივრცე $(\Omega,\mathcal{F},P)$ აგებულია.

ამოცანის ამოხსნა. A-თი აღვნიშნოთ Ω სივრცის ის ქვესიმრავლე, რომელსაც შეესაბამება ხდომილობა:

" ორი კამათლის გაგორებისას მოსულ ციფრთა ჯამი უდრის 8-ს ".

მაშინ, A სიმრავლე შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$A=\{\ (6;2);\ (5;3);\ (4;4);\ (3;5);\ (2;6)\ \}.$$

B-თი აღვნიშნოთ Ω სივრცის ის ქვესიმრავლე, რომელიც შეესაბამება ხდომილობას:

" ორი კამათლის გაგორებისას მოსულ ციფრთა ჯამი ლუწია ".

მართებულია შემდეგი წარმოდგენა

$$B=\{(1;1);\ (1;3);\ (2;2);\ (3;1);\ (1;5);\ (2;4);\ (3;3);(4;4);\ (5;1);$$
$$(6;2);\ (5;3);(4;4);\ (3;5);\ (2;6);\ (6;4);\ (5;5);\ (4;6);(6;6)\ \}$$

შევნიშნოთ, რომ $A\cap B=A$. აქედან, კლასიკური ალბათობისა და პირობითი ალბათობის განსაზღვრის გამო ვღებულობთ:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{5}{36}:\frac{18}{36}=\frac{5}{18}.$$

დასკვნა. ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას კამათ-მოსულ ციფრთა ჯამი უდრის 8-ს, იმ პირობით, რომ ორი კამათლის გაგორე-ბისას მოსულ ციფრთა ჯამი ლუწია, უდრის $\frac{5}{18}$.

განსაზღვრება 2. ვთქვათ, $J \subseteq N$. $(A_i)_{i \in J}$ ხდომილობათა მიმდევ-რობას ეწოდება ხდომილობათა სრული სისტემა, თუ მისთვის სრულდება პირობები:

1) $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i, j \in J, i \neq j$,
2) $(\forall j)(j \in J \rightarrow P(A_j) > 0)$,
3) $\cup_{j \in J} A_j = \Omega$.

თეორემა 5. ვთქვათ, $J \subseteq N$ და $(A_j)_{j \in J}$ ხდომილობათა სრული სის-ტემაა. Ω სივრცის ყოველი B ხდომილობისათვის მართებულია ფორმულა

$$P(B) = \sum_{j \in J} P(B|A_j) \cdot P(A_j),$$

რომელსაც სრული ალბათობის ფორმულა ეწოდება.

დამტკიცება. მართებულია შემდეგი წარმოდგენა

$$B = \cup_{j \in J}(B \cap A_j),$$

სადაც $(B \cap A_j)_{j \in J}$ წყვილ-წყვილად არათავსებად ხდომილობათა მიმდე-ვრობაა .

მართლაც,

$$B = B \cap \Omega = B \cap (\cup_{j \in J} A_j) = \cup_{j \in J}(B \cap A_j).$$

ამიტომ, ალბათობის თვლადად ადიტიურობის თვისების გამო ვღებულობთ

$$P(B) = \sum_{j \in J} P(B \cap A_j).$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი j $(j \in J)$ ნატურალური რიცხვისათვის მართებუ-ლია ტოლობა

$$P(B|A_j) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(A_j)},$$

საიდანაც

$$P(B \cap A_j) = P(A_j) \cdot P(B|A_j).$$

ამ ტოლობის გამოყენებით საბოლოოდ ვღებულობთ

$$P(B) = \sum_{j \in J} P(B \cap A_j) = \sum_{j \in J} P(A_j) \cdot P(B|A_j).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 3.

ექსპერიმენტი. I ყუთში არის 3 თეთრი და 3 შავი, II ყუთში -3 თეთრი და 4 შავი, ხოლო III ყუთში 4 თეთრი და 1 შავი ბურთულა. ექსპერიმენტი მდგომარეობს ყუთის შემთხვევით არჩევასა და ამ ყუთიდან ბურთის შემთხვევით ამოღებაში.

ამოცანა. ვიპოვოთ თეთრი ბურთულის ამოღების ალბათობა, თუ ყუთების შერჩევის ალბათობები ტოლია.

ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური სივრცის აგება. იმის გამო, რომ ექსპერიმენტის შედეგი წარმოადგენს შემთხვევით შერჩეულ ბურთულას, ამიტომ Ω წარმოადგენს 18 ელემენტარული ხდომილობის ერთობლიობას. A_i-თი აღვნიშნოთ i-ურ ყუთში მოთავსებულ ბურთულათა ერთობლიობა. ამოცანის პირობის თანახმად, $(A_i)_{1 \le i \le 3}$ ხდომილობები ტოლალბათურებია.

განვსაზღვროთ P ალბათობა შემდეგი თანაფარდობით:

$$(\forall A)(A \subseteq \Omega \to P(A) = \frac{1}{3}(\frac{|A \cap A_1|}{|A_1|} + \frac{|A \cap A_2|}{|A_2|} + \frac{|A \cap A_3|}{|A_3|})).$$

ამით ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური მოდელი $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ აგებულია, თუ დავუშვებთ $\mathcal{F} = \{A : A \subseteq \Omega\}$.

ამოცანის ამოხსნა. თუ B-თი აღვნიშნავთ თეთრი ბურთულების ერთობლიობას, მაშინ

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{57}{105}.$$

დასკვნა 2. განხილულ ექსპერიმენტში თეთრი ბურთულას შერჩევის ალბათობა ტოლია $\frac{57}{105}$.

შენიშვნა. შევნიშნოთ, რომ $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$ და

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} = \frac{|B \cap A_i|}{|A_i|} \quad (1 \le i \le 3).$$

ამიტომ, B ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა წარმოადგენს სრული ალბათობის ფორმულას.

მაგალითი 4.

ესპერიმენტი. k-ცალი ($k \in N$) ბაქტერიის წარმოქმნის ალბათობაა $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ($\lambda > 0$). წარმოქმნილი ბაქტერიის გარემოს პირობებთან ადაპტაციის ალბათობა p-ს ($0 < p < 1$) ტოლია.

ამოცანა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ზუსტად n ცალი ($n \in N$) ბაქტერია გაივლის ადაპტაციის პროცესს.

ამოხსნა. A_k-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა იმისა, რომ წარმოიქმნება k ცალი ბაქტერია ($k \in N$). შევნიშნოთ, რომ $(A_k)_{k \in N}$ წარმოადგენს ხდომილობათა სრულ სისტემას. B_n-ით აღვნიშნოთ ხდომილობა, რომელიც შეესაბამება n ცალი ბაქტერიის მიერ ადაპტაციის პროცესის გავლას ($n \in N$) . შევნიშნოთ, რომ $P(B_n|A_k) = 0$, როცა $k \le n-1$. თუ $k \ge n$, მაშინ $P(B_n|A_k) = C_k^n p^n (1-p)^{k-n}$. ამ ფაქტების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$P(B_n) = \sum_{k \in N} P(A_k) P(B_n|A_k) = \sum_{k=n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} C_k^n p^n (1-p)^{k-n} =$$

$$= \sum_{k=n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{k!}{n! \cdot (k-n)!} p^n (1-p)^{k-n} =$$

$$= \frac{(p\lambda)^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{k=n} \frac{\lambda^{k-n}}{\cdot (k-n)!} (1-p)^{k-n} = \frac{(p\lambda)^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{k=n} \frac{(\lambda \cdot (1-p))^{k-n}}{\cdot (k-n)!} =$$

$= \frac{(p\lambda)^n}{n!} e^{-\lambda} e^{\lambda \cdot (1-p)} = \frac{(p\lambda)^n}{n!} e^{-p \cdot \lambda}$.

დასკვნა. ალბათობა იმისა, რომ ზუსტად n ცალი ბაქტერია გაივლის ადაპტაციის პროცესს ($n \in N$), ტოლია $\frac{(p\lambda)^n}{n!} e^{-p \cdot \lambda}$.

თეორემა 6. ვთქვათ, $J \subseteq N$ და $(A_j)_{j \in J}$ ხდომილობათა სრული სისტემაა. დადებითი ალბათობის მქონე ყოველი B ხდომილობისათვის მართებულია ტოლობა

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{j \in J} P(A_j) P(B|A_j)} \ (i \in J),$$

რომელსაც ბაიესის [4]ფორმულა ეწოდება.

დამტკიცება. სრული ალბათობის ფორმულისა და პირობითი ალბათობის განსაზღვრის საფუძველზე ვღებულობთ

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{j \in J} P(A_j) P(B|A_j)} \ (i \in J).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 5. მაგალითი 3-ში განხილული ექსპერიმენტის შემთხვევაში აღმოჩნდა, რომ შემთხვევით შერჩეული ბურთულა თეთრია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს ბურთულა შერჩეულია პირველი ყუთიდან.

ამოხსნა.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} : \frac{57}{105} = \frac{2}{9}.$$

[4]ბაიესი თომასი (*Bayes Thomas*)(1702, ლონდონი-4.4.1761, ტანბრიჯი)-ინგლისელი მათემატიკოსი, ლონდონის სამეფო საზოგადოების წევრი (1742), ძირითადი შრომები ალბათობის თეორიაში (ბაიესის თეორემა, გამოქვ.1763).

მაგალითი 6. (ამოცანა მოთამაშის გაკოტრების შესახებ). განვიხილოთ მონეტის აგდებასთან დაკავშირებული თამაში, როცა მოთამაშე ირჩევს ან "გერბს" ან "საფასურს", რის შემდეგაც ხდება მონეტის აგდება. თუ მოვა მონეტის ის მხარე, რომელიც აირჩია მოთამაშემ, მაშინ ის იგებს 1 ლარს, წინააღმდეგ შემთხვევაში აგებს ფულის იგივე რაოდენობას. ვიგულისხმოთ, რომ მოთამაშის საწყისი კაპიტალი შეადგენს x ლარს და ის მიზნად ისახავს ფულის არსებული კაპიტალის a ერთეულამდე მიყვანას ($x < a$). თამაში გრძელდება მანამ, სანამ ის არ დააგროვებს a ლარს ან სანამ სრულად არ გაკოტრდება. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოთამაშე საბოლოოდ გაკოტრდება ისე, რომ ვერ დააგროვებს მისთვის სასურველ კაპიტალს?

ამოხსნა.

აღვნიშნოთ $p(x)$-ით ალბათობა მოთამაშის გაკოტრებისა, როცა მას გააჩნია x ლარი. მაშინ ერთი ნაბიჯის შემდგომ მოგების შემთხვევაში მოთამაშის გაკოტრების ალბათობა იქნება $p(x+1)$, ხოლო წაგების შემთხვევაში ერთი ნაბიჯის შემდგომ გაკოტრების ალბათობა იქნება $p(x-1)$. აღვნიშნოთ B_1-ით ხდომილობა, რომელიც მდგომარეობს მოთამაშის მიერ პირველ ნაბიჯზე თამაშის მოგებაში, ხოლო B_2-ით ხდომილობა, რომელიც შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა მოთამაშე აგებს თამაშს პირველ ნაბიჯზე. A იყოს ხდომილობა, რომელიც შეესაბამება მოთამაშის გაკოტრებას. მაშინ

$$P(A|B_1) = p(x+1), \ P(A|B_2) = p(x-1).$$

ცხადია, რომ (B_1, B_2) ხდომილობათა სრული სისტემაა და მონეტის სიმეტრიულობის გამო შეგვიძლია დავწეროთ $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$.

სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად ვღებულობთ განტოლებას

$$p(x) = \frac{1}{2}[p(x+1) + p(x-1)].$$

ამასთან, $p(0) = 1$, $p(a) = 0$. უშუალო შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ მიღებული განტოლების ამონახსნია წრფივი ფუნქცია

$$p(x) = c_1 + c_2 x,$$

რომლის კოეფიციენტები განისაზღვრებიან სასაზღვრო პირობებიდან

$$p(0) = c_1 = 1, \ p(a) = c_1 + c_2 a = 0,$$

საიდანაც საბოლოოდ ვღებულობთ x საწყისი კაპიტალის შემთხვევაში მოთამაშის გაკოტრების $p(x)$ ალბათობისათვის შემდეგ გამოსახულებას

$$p(x) = 1 - \frac{x}{a}, \ 0 \le x \le a.$$

შევნიშნოთ, რომ რაც უფრო დიდია a (ე.ი. რაც უფრო დიდი კაპიტალის დაგროვება უნდა მოთამაშეს), მით უფრო დიდია გაკოტრების ალბათობა.

მაგალითი 7 (ამოცანა ნადავლის განაწილების შესახებ). თოფიდან ერთი გასროლისას ნადირის მოკვლის ალბათობა პირველი მონადირისათ-

ვის ტოლია 0,8, ხოლო მეორე მონადირისათვის კი - 0,7. ორივე მონადირემ გაისროლა ერთდროულად, რის შედეგაც მხოლოდ ერთი ტყვიით იქნა მოკლული ნადირი, რომლის წონამ შეადგინა 190 კგ. როგორ უნდა მოხდეს მონადირეებს შორის ნადავლის განაწილება?

ამოხსნა. B-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა, რომელიც შეესაბამება შემთხვევას, როცა გაისროლა ორივე მონადირემ და ნადირი მოკლულ იქნა მხოლოდ ერთ-ერთის მიერ. A_1-ით აღვნიშნოთ პირველი მონადირის მიერ ნადირის მოკვლის ხდომილობა, ხოლო A_2-ით კი მეორე მონადირის მიერ ნადირის მოკვლის ხდომილობა. ბაიესის ფორმულის თანახმად ვღებულობთ

$$P(A_1|B) = \frac{0,3 \cdot 0,8}{0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7} = \frac{12}{19},$$

$$P(A_2|B) = \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7} = \frac{7}{19}.$$

ამის გამო, პირველ მონადირეს ეკუთვნის $P(A_1|B) \cdot 190 = 120$ (კგ), ხოლო მეორეს კი-$P(A_2|B) \cdot 190 = 70$ (კგ).

ამოცანა 8. საველე სამუშაოებიდან დაბრუნების შემდეგ ვახდენთ დანალექი ქანების ნიმუშების კლასიფიკაციას ორი ნიშნის მოხედვით- დანალექი ქანების ტიპებისა და მარცვლოვანების მოხედვით. ეს კლასიფიკაცია ჩაიწერება შემდეგ ცხრილში:

ქანები	B_1	B_2	B_3	B_4	სულ
არკოზები	320	150	130	50	650
გრაუვაკები	50	500	450	100	1100
კვარციდები	80	100	20	50	250
სულ	450	750	600	200	2000

სადაც

B_1 აღნიშნავს უხეშ მარცვლოვანებას, B_2 აღნიშნავს საშუალო მარცვლოვანებას, B_3 აღნიშნავს წვრილმარცვლოვანებას და B_4 აღნიშნავს მეტად წვრილმარცვლოვანებას.

შემთხვევით შეირჩა ქანი, საიდანაც შემთხვევით ამოღებულ იქნა მარცვალი.

1) ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ქანიდან შემთხვევით ამოღებული მარცვალი არის უხეში.

2) მარცვალი აღმოჩნდა მეტად წვრილმარცვლოვანი . ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მარცვალი ამოღებულია კვარციტებიდან.

ამოხსნა. ცხადია, რომ B_1, B_2, B_3, B_4 წარმომადგენელთა სრული სისტემაა. მარცვლების გაერთიანება აღვნიშნოთ B-თი. ცხადია, რომ

$$\Omega = B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

არკოზების ქანის ტიპი ავღნიშნოთ A_1-ით, გრაუვაკების ქანის ტიპი ავღნიშნოთ A_2-ით და კვარციტების ქანის ტიპი ავღნიშნოთ A_3-ით. ცხადია, რომ

A_1, A_2, A_3 წარმომადგენელთა სრული სისტემაა. ქანების ტიპების გაერთიანება აღვნიშნოთ A-თი. ასევე ცხადია, რომ

$$\Omega = A = A_1 + A_2 + A_3.$$

მართებულია შემდეგი ფორმულები

$$P(A_1) = \frac{650}{2000} = 0,325; \qquad P(A_2) = \frac{1100}{2000} = 0,550; \; P(A_3) = \frac{250}{2000} = 0,125;$$

ანალოგიურად ვღებულობთ

$$P(B_1) = \frac{450}{2000} = 0,225; \qquad P(B_2) = \frac{750}{2000} = 0,375;$$

$$P(B_3) = \frac{600}{2000} = 0,300; \qquad P(B_4) = \frac{200}{2000} = 0,100;$$

თუ ვისარგებლებთ ფორმულით $P(A_iB_j) = \frac{|A_iB_j|}{|\Omega|}$, სადაც $1 \leq i \leq 3; 1 \leq j \leq 4$, მივიღებთ შემდეგ ცხრილს

A_i & B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	ჯამი
A_1	0,160	0,073	0,065	0,025	0,325
A_2	0,025	0,250	0,225	0,050	0,550
A_3	0,040	0,050	0,010	0,025	0,125
ჯამი	0,225	0,375	0,300	0,100	1,000

1) ალბათობა იმისა, რომ ქანიდან შემთხვევით ამოღებული მარცვალი არის უხეში, გამოითვლება სრული ალბათობის ფორმულით შემდეგნაირად

$$P(B_1) = P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_1|A_2) + P(A_3)P(B_1|A_3) =$$

$$\frac{650}{2000} \times \frac{320}{650} + \frac{1100}{2000} \times \frac{50}{1100} + \frac{250}{2000} \times \frac{80}{250} = 0,225$$

2) ვიცით, რომ მარცვალი აღმოჩნდა მეტად წვრილმარცვლოვანი. ალბათობა იმისა, რომ მარცვალი ამოღებულია კვარციტებიდან, ბაიესის ფორმულით გამოითვლება შემდეგნაირად

$$P(A_3|B_4) = \frac{P(B_4 \cap A_3)}{P(B_4)} =$$

$$\frac{P(B_4|A_3) \times P(A_3)}{P(B_4|A_1) \times P(A_1) + P(B_4|A_2) \times P(A_2) + P(B_4|A_3) \times P(A_3)} = \frac{0,025}{0,100} = 0,25.$$

ტესტები

1.4.1. ორი მსროლელი სამიზნეს ესვრის თითოჯერ. სამიზნის დაზიანების ალბათობა პირველი მსროლელისათვის არის $0,9$, ხოლო მეორე მსროლელისათვის $0,7$. ალბათობა იმისა, რომ ორივე მსროლელი ერთდროულად დააზიანებს სამიზნეს, ტოლია

ა) $0,42$, ბ) $0,63$, გ) $0,54$, დ) $0,36$.

1.4.2. ქალაქ თბილისისათვის უნალექო დღეების რაოდენობა ივნისში ტოლია 25-ის. ალბათობა იმისა, რომ ივნისის პირველი ორი დღე იქნება უნალექო, ტოლია

ა) $\frac{5}{87}$, ბ) $\frac{20}{29}$, გ) $\frac{19}{29}$, დ) $\frac{18}{29}$.

1.4.3. ირჩევენ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ორ A და B წერტილს Δ სიმრავლიდან, სადაც

$$\Delta = \{(x,y) : x \in [0,1],\ y \in [0,1]\}.$$

g, f ფუნქციები განისაზღვრებიან შესაბამისად შემდეგი ფორმულების საშუალებით

$$g((x,y)) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x^2+y^2 \le \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{თუ } x^2+y^2 > \frac{1}{4}, \end{cases}$$

$$f((x,y)) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x+y \le \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{თუ } x+y > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

ალბათობა იმისა, რომ $g(A)+f(B)=1$, ტოლია

ა) $\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}$, ბ) $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$, გ) $\frac{8}{9}-\frac{\pi}{16}$, დ) $1-\frac{\pi}{8}$.

1.4.4. სათამაშო კარტის კომპლექტიდან (36 კარტი) შემთხვევით შეარჩიეს 10 კარტი. 10 კარტიანი კომპლექტიდან შემთხვევით ამოღებული კარტი აღმოჩნდა ტუზი. პირველად ამოღებული კარტი უკან ჩააბრუნეს. ალბათობა იმისა, რომ იმავე ათი კარტიდან მეორედ ამოღებული კარტი ტუზი იქნება, ტოლია

ა) $\frac{C_3^0 C_{32}^9}{C_{35}^9}\cdot 0,1 + \frac{C_3^1 C_{32}^8}{C_{35}^9}\cdot 0,2 + \frac{C_3^2 C_{32}^7}{C_{35}^9}\cdot 0,3 + \frac{C_3^3 C_{32}^6}{C_{35}^9}\cdot 0,4$,

ბ) $\frac{C_3^0 C_{32}^9}{C_{35}^9}\cdot 0,1 + \frac{C_3^1 C_{32}^8}{C_{35}^9}\cdot 0,2 + \frac{C_3^2 C_{32}^7}{C_{35}^9}\cdot 0,2 + \frac{C_3^3 C_{32}^6}{C_{35}^9}\cdot 0,3$.

1.4.5. მოცემულია სამი ყუთი თეთრი და შავი ბურთების შემდეგი შემადგენლობით

ყუთი	შავი ბურთულა	თეთრი ბურთულა
I	2	3
II	3	2
III	1	4

შემთხვევით შეირჩა ყუთი, საიდანაც შემთხვევით ამოღებულ იქნა ბურთულა.

1) ალბათობა იმისა, რომ ბურთულა თეთრია, ტოლია

ა) $0,4$, ბ) $0,6$, გ) $0,7$, დ) $0,8$;

2) ბურთულა აღმოჩნდა თეთრი. ალბათობა იმისა, რომ ბურთულა ამოღებულია I ყუთიდან, ტოლია

ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{1}{4}$, გ) $\frac{1}{5}$, დ) $\frac{1}{6}$.

1.4.6. I ქარხანაში დამზადებულია 100 დეტალი, ხოლო II ქარხანაში იმავე ტი პის 200 დეტალი. I ქარხანაში სტანდარტული დეტალის დამზადების ალბათობა ტოლია -$0,9$, ხოლო II ქარხანაში კი - $0,8$.

1) არასტანდარტული დეტალების დამზადებით მიყენებულმა ზარალმა შეადგინა 3000 ლარი. მეორე ქარხნის ადმინისტრაციამ არასტანდარტული დეტალების დამზადების გამო უნდა გადაიხადოს ჯარიმა

ა) 2400 ლარი, ბ) 2300 ლარი, გ) 2000 ლარი, დ) 1600 ლარი;

2) სტანდარტული დეტალების რეალიზაციით მიღებულმა მოგებამ შეადგინა 5000 ლარი. I ქარხნის წილმა ამ მოგებიდან (გამოსახული ლარებში) შეადგინა

ა) 1800, ბ) 1700, გ) 1400, დ) 3000 .

1.4.7. მოთამაშე ირჩევს ან "გერბს" ან "საფასურს", რის შემდეგაც ხდება მონეტის აგდება. თუ მოვა მონეტის ის მხარე, რომელიც აირჩია მოთამაშემ, მაშინ ის იგებს 1 ლარს, წინააღმდეგ შემთხვევაში აგებს ფულის იგივე რაოდენობას. მოთამაშის საწყისი კაპიტალი შეადგენს 1000 ლარს და ის მიზნად ისახავს ფულის არსებული კაპიტალის 2000 ერთეულამდე მიყვანას. თამაში გრძელდება მანამ, სანამ ის არ დააგროვებს 2000 ლარს ან სანამ სრულად არ გაკოტრდება. ალბათობა იმისა, რომ მოთამაშე დააგროვებს მისთვის სასურველ კაპიტალს, ტოლია

ა) $0,4$, ბ) $0,5$, გ) $0,6$, დ) $0,7$.

1.4.8. k-წევრიანი ($k \in N$) ბაქტერიების ოჯახის წარმოქმნის ალბათობაა $\frac{0,3^k}{k!}e^{-0,3}$ ($k \in N$). წარმოქმნილი ბაქტერიის გარემოს პირობებთან ადაპტაციის ალბათობა $0,1$-ის ტოლია.

1) ალბათობა იმისა, რომ მხოლოდ 5 ბაქტერია გაივლის ადაპტაციის პროცესს, ტოლია

ა) $\frac{0,03^5}{5!}e^{-0,03}$, ბ) $\frac{0,04^5}{5!}e^{-0,04}$, გ) $\frac{0,05^5}{5!}e^{-0,05}$, დ) $\frac{0,06^5}{5!}e^{-0,06}$;

2) შემთხვევით შერჩეულ ბაქტერიაზე დაკვირვებამ გვიჩვენა, რომ მას გავლილი ჰქონდა ადაპტაციის პროცესი. ალბათობა იმისა, რომ ის არის გადარჩენილი 6-წევრიანი ბაქტერიების ოჯახის წარმომადგენელი, ტოლია

ა) $\frac{0,03^6}{6!} : (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,03^k}{k \cdot k!}e^{-0,03})$, ბ) $\frac{0,03^6}{6 \cdot 6!} : (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,03^k}{k \cdot k!}e^{-0,03})$.

§ 1.5. ალბათურ სივრცეთა აგების კარათეოდორის [5]მეთოდი

ვთქვათ, Ω არის არაცარიელი სიმრავლე და F მის ქვესიმრავლეთა რაიმე კლასია. მართებულია შემდეგი დამხმარე დებულება.

ლემა 1. არსებობს Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა $\sigma(F)$, რომელიც შეიცავს F კლასს და არის მინიმალური ჩართვის თვალსაზრისით იმ σ -ალგებრებს შორის, რომლებიც შეიცავენ F-ს.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $(\mathcal{F}_j)_{j\in J}$-ით Ω-ს ქვესიმრავლეთა ყველა იმ σ-ალგებრების ოჯახი, რომლებიც შეიცავენ F კლასს და კლასი $\sigma(F)$ განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\sigma(F) = \cap_{j\in J}\mathcal{F}_j.$$

ვაჩვენოთ, რომ $\sigma(F)$ არის σ-ალგებრა. მართლაც,

1) $\Omega \in \sigma(F)$, ვინაიდან ყოველი $j \in J$ ინდექსისათვის $\Omega \in \mathcal{F}_j$.

2) ვთქვათ, $(A_k)_{k\in N}$ არის $\sigma(F)$ კლასის ელემენტთა მიმდევრობა. იმის გამო, რომ ყოველი $j \in J$ ინდექსისათვის ის არის აგრეთვე $\mathcal{F}_j$ კლასის ელემენტთა მიმდევრობაც, ყოველი $j \in J$ ინდექსისათვის ვღებულობთ $\cap_{k\in N}A_k \in \mathcal{F}_j$ და $\cup_{k\in N}A_k \in \mathcal{F}_j$, რაც ნიშნავს რომ $\cap_{k\in N}A_k \in \cap_{j\in J}\mathcal{F}_j = \sigma(F)$ და $\cup_{k\in N}A_k \in \cap_{j\in J}\mathcal{F}_j = \sigma(F)$.

3) თუ $A \in \sigma(F)$, მაშინ ყოველი $j \in J$ ინდექსისათვის $\overline{A} \in \mathcal{F}_j$, რაც ნიშნავს რომ $\overline{A} \in \cap_{j\in J}\mathcal{F}_j = \sigma(F)$.

დავუშვათ, რომ $\sigma(F)$ არ არის F კლასის შემცველი ჩართვის თვალსაზრისით მინიმალური σ-ალგებრა. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს σ-ალგებრა $\mathcal{F}^*$, ისეთი, რომ სრულდება პირობები:

1) $F \subset \mathcal{F}^*$,

2) $\mathcal{F}^* \subset \sigma(F)$ და $\sigma(F) \setminus \mathcal{F}^* \neq \emptyset$.

$(\mathcal{F}_j)_{j\in J}$ ოჯახის განსაზღვრის გამო იარსებებს ისეთი ინდექსი $j_0 \in J$, რომ $\mathcal{F}_{j_0} = \mathcal{F}^*$. აქედან ვღებულობთ, რომ $\sigma(F) \subset \mathcal{F}^*$, რაც ეწინააღმდეგება 2) პირობას. მიღებულია წინააღმდეგობა, რაც გამოწვეულია ჩვენი დაშვებით, რომ $\sigma(F)$ არ არის F კლასის შემცველი ჩართვის თვალსაზრისით მინიმალური σ-ალგებრა.

ლემა 1 დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 1. ვთქვათ, მოცემულია Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა ორი კლასი S_1 და S_2. ამასთან, $S_1 \subset S_2$. P_1 და P_2 იყოს შესაბამისად S_1 და S_2 კლასზე განსაზღვრული რიცხვითი ფუნქციები. P_2 რიცხვით ფუნქციას

[5] კარათეოდორი კონსტანტინე (*Caratheodory Constantin*) (13.9.1873, ბერლინი-2.2.1950,მიუნჰენი)-გერმანელი მათემატიკოსი. მიუნჰენის უნივერსიტეტის პროფესორი (1924-39),1933 წლიდან ათენის უნივერსიტეტის ლექტორია. ძირითადი შრომები ზომის თეორიაში, ვარიაციულ აღრიცხვაში, კონფორმულ ასახვათა თეორიაში. 1909 წელს მის მიერ იქნა აგებული თერმოდინამიკის საფუძვლების აქსიომატიკა.

ეწოდება P_1 რიცხვითი ფუნქციის გაგრძელება, თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$(\forall X)(X \in S_1 \to P_2(X) = P_1(X)).$$

განსაზღვრება 2. ვთქვათ, $\mathcal{A}$ არის არაცარიელი Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრა. $\mathcal{A}$ კლასზე განსაზღვრულ P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1) ყოველი $A \in \mathcal{A}$ ელემენტისათვის $P(A) \geq 0$,

2) $P(\Omega) = 1$,

3) თუ $(A_k)_{k\in N}$ $\mathcal{A}$-კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ელემენტთა ისეთი მიმდევრობაა, რომ $\cup_{k\in N} A_k \in \mathcal{A}$, მაშინ

$$P(\cup_{k\in N} A_k) = \sum_{k\in N} P(A_k).$$

ალბათური სივრცეების აგების ზოგადი მეთოდი მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1 (კარათეოდორი). ვთქვათ, P არის $\mathcal{A}$ ალგებრაზე განსაზღვრული ალბათობა. მაშინ არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას, ამასთან $\overline{P}$ ალბათობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$(\forall B)(B \in \sigma(\mathcal{A}) \to \overline{P}(B) = \inf\{ \sum_{k\in N} P(A_k) | (\forall k)(k \in N \to A_k \in \sigma(\mathcal{A}))$$

$$\& \ B \subseteq \cup_{k\in N} A_k \ \}.$$

შენიშვნა 1. თეორემა 1 მოგვყავს დამტკიცების გარეშე. დაინტერესებულთ შეუძლიათ გაეცნონ მოცემული ფაქტის დამტკიცებას [8] ნაშრომში.

ქვევით ჩვენ განვიხილავთ თეორემა 1-ის გამოყენებებს სხვადასხვა ალბათური სივრცეების ასაგებად.

§ 1.5.1. ბორელის კლასიკური b_1 ზომის აგება $[0, 1]$ ინტერვალზე

$\mathcal{A}$-თი აღვნიშნოთ $[0, 1]$ ინტერვალის ყველა ისეთ ქვესიმრავლეთა კლასი, რომლიც ელემენტები წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი ინტერვალების (ე.ი. $[a_k, b_k[$, $[a_k, b_k]$, $]a_k, b_k[$, $]a_k, b_k]$ სახის სიმრავლეების) სასრული ოჯახის გაერთიანების სახით. ადვილი საჩვენებელია, რომ აღნიშნული კლასი წარმოადგენს $[0, 1]$ სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრას. ზემოთაღნიშნული სახის ინტერვალებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P([a_k, b_k[) = P([a_k, b_k]) = P(]a_k, b_k[) = P(]a_k, b_k]) = b_k - a_k$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ამდაგვარად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას $\mathcal{A}$ კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathcal{A})$ კლასს ეწოდება $[0,1]$ ინტერვალის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $\mathcal{B}([0,1])$ სიმბოლოთი, ხოლო მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრული ერთ-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომა და აღინიშნება b_1 სიმბოლოთი.

სამეულს $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),b_1)$-ს ეწოდება $[0,1]$ სიმრავლესთან ასოცირებული ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე.

§ 1.5.2. R ღერძზე ბორელის ალბათური ზომების განსაზღვრა

ვთქვათ, $F : R \to [0,1]$ არის ყოველ წერტილში მარჯვნიდან უწყვეტი ისეთი არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \ \& \ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $F(-\infty) = 0$ და $F(+\infty) = 1$.

ვთქვათ, $\Omega = R \cup \{+\infty\}$.

$\mathcal{A}$-თი აღვნიშნოთ Ω სივრცის ყველა იმ ქვესიმრავლეთა კლასი, რომლებიც წარმოიდგინებიან მარცხნიდან ღია და მარჯვნიდან ჩაკეტილი თანაუკვეთი ინტერვალების სასრულო ოჯახის გაერთიანებით, ე.ი.

$$\mathcal{A} = \{A | A = \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i]\},$$

სადაც $-\infty \le a_i < b_i \le \infty$ $(1 \le i \le n)$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ აღნიშნული კლასი წარმოადგენს Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრას. ზემოთაღნიშნული სახის ინტერვალებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$P(]a_i, b_i]) = F(b_i) - F(a_i)$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია იმავე სახის თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებაზე. ამდაგვარად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას $\mathcal{A}$ კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathcal{A})\cap R$ კლასს ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $\mathcal{B}(R)$ სიმბოლოთი, ხოლო P_F რიცხვით ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall X)(X \in \mathcal{B}(R) \to P_F(X) = \overline{P}(X)),$$

ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე F ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა.

მაგალითი 1. ვთქვათ, ფუნქცია F არის განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall x)(x \in R \to F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\ ).$$

ვთქვათ, P არის F ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება 1-განზომილებიან ევკლიდეს R სივრცესთან ასოცირებული 1-განზომილებიანი გაუსის კანონიკური ალბათური სივრცე. P რიცხვით ფუნ- ქციას ეწოდება 1-განზომილებიან ევკლიდეს R სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის კანონიკური 1-განზომილებიანი ალბათური ზომა და აღინიშნება Γ_1-ით.

§ 1.5.3. ალბათობათა სასრული ოჯახის ნამრავლის განსაზღვრა

ვთქვათ, $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ $(1 \le i \le n)$ წარმოადგენს ალბათურ სივრცეთა სასრულ ოჯახს.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნა.

$$\prod_{i=1}^{n} \Omega_i = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n) \mid \omega_1 \in \Omega_1, \cdots, \omega_n \in \Omega_n\}.$$

$A \subseteq \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ სიმრავლეს ვუწოდოთ ცილინდრული სიმრავლე, თუ მისთვის მართებულია წარმოდგენა

$$B = \prod_{i=1}^{n} B_i,$$

სადაც $B_i \in \mathcal{F}_i$ $(1 \le i \le n)$.

$\mathcal{A}$-ით აღვნიშნოთ კლასი $\prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეებისა, რომლებიც წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებით. შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{A}$ წარმოადგენს $\prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრას.

ზემოთაღნიშნული სახის ცილინდრულ სიმრავლეებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P(\prod_{i=1}^{n} B_i) = \prod_{i=1}^{n} P_i(B_i)$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ამდაგვარად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას $\mathcal{A}$ კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც

წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathcal{A})$ კლასს ეწოდება σ-ალგებრების $(\mathcal{F}_i)_{1\le i\le n}$ სასრული ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{1\le i\le n}\mathcal{F}_i$-ით. მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობათა $(P_i)_{1\le i\le n}$ სასრული ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i=1}^n P_i$-ით.

$(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i, \prod_{i=1}^n P_i)$ სამეულს ეწოდება $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{1\le i\le n}$ ალბათურ სივრცეთა ოჯახის ნამრავლი.

შენიშვნა 1. განვიხილოთ n-დამოუკიდებელი ცდა - ეს ცდათა ისეთი მიმდევრობაა, როცა ყოველი ცდის შედეგი გავლებას არ ახდენს მომდევნო ცდის შედეგზე.

ვიგულისხმოთ, რომ i-ური $(1\le i\le n)$ ცდა აღიწერება $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ ალბათური სივრცით. მაშინ n დამოუკიდებელი ცდის აღმწერი ალბათური სივრცე იქნება $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i, \prod_{i=1}^n P_i)$.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი 1 (ბერნულის [6] ალბათური ზომა). ვთქვათ, ყოველი i $(1\le i\le n)$ რიცხვისათვის

$$\Omega_i=\{0,1\},\ \mathcal{F}_i=\{A|A\subseteq \Omega_i\},\ P_i(\{1\})=p,$$

სადაც $0<p<1$.

ალბათურ სივრცეთა ნამრავლს

$$(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i, \prod_{i=1}^n P_i)$$

ეწოდება ბერნულის n-განზომილებიანი კლასიკური ალბათური სივრცე, ხოლო $\prod_{i=1}^n P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ბერნულის n-განზომილებიანი ალბათური ზომა.

თუ განვიხილავთ A_k სიმრავლეს, განსაზღვრულს შემდეგნაირად

$$A_k=\{(\omega_1,\cdots,\omega_n)|(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in\prod_{i=1}^n \Omega_i\ \&\ \sum_{i=1}^n \omega_i=k\},$$

მაშინ ალბათურ ზომათა კონსტრუქციიდან გამომდინარე ვღებულობთ

$$(\forall(\omega_1,\cdots,\omega_n))((\omega_1,\cdots,\omega_n)\in A_k\to\prod_{i=1}^n P_i((\omega_1,\cdots,\omega_n))=p^k(1-p)^{n-k}).$$

ამიტომ $\prod_{i=1}^n P_i(A_k)=|A_k|p^k(1-p)^{n-k}$, სადაც $|\cdot|$ აღნიშნავს სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $|A_k|=C_n^k$, სადაც C_n^k აღნიშნავს n-ელემენტიან სიმრავლეში ყველა განსხვავებულ k-ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობას.

---

[6] იაკობ ბერნული (27.12.1654, ბაზელი-16.8.1705იქვე)-შვეიცარელი მათემატიკოსი, ბაზელის უნივერსიტეტის პროფესორი (1687 წლიდან). ნაშრომში "*Arsconjectandi*" (*Basileqe*, 1713) დაამტკიცა ე.წ. ბერნულის თეორემა - დიდ რიცხვთა კანონის მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა.

ლიტერატურაში $\prod_{i=1}^{n} P_i(A_k)$ სიდიდეს აღნიშნავენ $P_n(k)$ სიმბოლოთი, რომელიც აღნიშნავს n-დამოუკიდებელ ორ $\{0,1\}$-მნიშვნელობიან ცდაში $\{1\}$ ხდომილობის k-ჯერ მოხდენის ალბათობას, იმ პირობით, რომ ცალკეულ ცდაში $\{1\}$ ხდომილობის მოხდენის ალბათობა p-ს ტოლია. თუ $\{0\}$ ხდომილობის მოხდენის ალბათობას აღვნიშნავთ q-თი, მაშინ მივიღებთ

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \ (1 \leq k \leq n),$$

რომელსაც ბერნულის ფორმულა ეწოდება.

k_0 ნატურალურ რიცხვს $[0,n]$ შუალედიდან ეწოდება უალბათესი რიცხვი, თუ სრულდება პირობა

$$P(k_0) = \max_{0 \leq k \leq n} P_n(k).$$

ის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$k_0 = \begin{cases} [(1+n)p], & \text{თუ } (1+n)p \notin Z; \\ (1+n)p \text{ და } (1+n)p - 1, & \text{თუ } (1+n)p \in Z, \end{cases}$$

სადაც $[\cdot\,]$ აღნიშნავს ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს.

მაგალითი 2 (n-განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათური ზომა).

ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{1 \leq i \leq n}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:

ა) $\Omega_i = \{x_1, \cdots, x_k\}$ $(1 \leq i \leq n)$,

ბ) $\mathcal{F}_i$ წარმოადგენს Ω_i სივრცის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასს $(1 \leq i \leq n)$,

გ) $P_i(\{x_j\}) = p_j > 0, \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq k, \ \sum_{j=1}^{k} p_j = 1$.

მაშინ $(\prod_{i=1}^{n} \Omega_i, \prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i, \prod_{i=1}^{n} P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათური სივრცე, ხოლო $\prod_{i=1}^{n} P_i$ რიცხვით ფუნქციას - n-განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათობა.

თუ განვიხილავთ $A_n(n_1, \cdots, n_k)$ სიმრავლეს, განსაზღვრულს შემდეგნაირად

$$A_n(n_1, \cdots, n_k) = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n) | (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \prod_{i=1}^{n} \Omega_i \ \&$$

$$|\{i : \omega_i = x_p\}| = n_p, \ 1 \leq p \leq k\},$$

მაშინ ალბათურ ზომათა ნამრავლის კონსტრუქციიდან გამომდინარე

$$(\forall (\omega_1, \cdots, \omega_n))((\omega_1, \cdots, \omega_n) \in A_n(n_1, \cdots, n_k) \rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n} P_i((\omega_1, \cdots, \omega_n)) = p_1^{n_1} \times \cdots \times p_k^{n_k}).$$

ამიტომ $\prod_{i=1}^{n} P_i(A_n(n_1, \cdots, n_k)) = |A_n(n_1, \cdots, n_k)| \times p_1^{n_1} \times \cdots \times p_k^{n_k}$, სადაც $|\cdot|$ აღნიშნავს სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $|A_n(n_1, \cdots, n_k)| = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$.

$\prod_{i=1}^{n} P_i(A_n(n_1, \cdots, n_k))$ სიდიდეს აღნიშნავენ $P_n(n_1, \cdots, n_k)$-ით, რომელიც აღნიშნავს n-დამოუკიდებელ $\{x_1, \cdots, x_k\}$-მნიშვნელობიან ცდაში x_1 ხდომილობის n_1-ჯერ, $\cdots$, x_k ხდომილობის n_k-ჯერ მოხდენის ალბათობას, იმ პირობით, რომ ცალკეულ ცდაში x_i ხდომილობის მოხდენის ალბათობა p_i-ს ტოლია $(1 \le i \le k)$. ამგვარად, ჩვენს მიერ მიღებულია შემდეგი ფორმულა

$$P_n(n_1, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!} \times p_1^{n_1} \times \cdots \times p_k^{n_k},$$

რომელსაც n-განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა ეწოდება.

მაგალითი 3 ($[0,1]^n$-სა და R^n-ზე განსაზღვრული n-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომები).

ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{1 \le i \le n}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:

ა) $\Omega_i = [0,1]$ $(1 \le i \le n)$,

ბ) $\mathcal{F}_i = \mathcal{B}([0,1])$ $(1 \le i \le n)$,

გ) $P_i = b_1$, $(1 \ \le i \le n)$.

მაშინ $(\prod_{i=1}^{n} \Omega_i, \prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i, \prod_{i=1}^{n} P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიან $[0,1]^n$ კუბთან ასოცირებული n-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე. $\prod_{i=1}^{n} P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება n-განზომილებიან $[0,1]^n$ კუბზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა.

b_n-ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall X)(X \in B(R^n) \to b_n(X) = \sum_{h \in Z^n} \prod_{i=1}^{n} P_i([0,1[^n \cap (X - h))),$$

ეწოდება n-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომა, განსაზღვრული R^n-ზე.

მაგალითი 4. ვთქვათ, ფუნქციათა $(F_i)_{1 \le i \le n}$ ოჯახი არის განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall i)(\forall x)(1 \le i \le n \ \& \ x \in R \to F_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \ ).$$

ვთქვათ, P_i არის F_i ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ $(\prod_{1 \le i \le n} \Omega_i, \prod_{i \in N} \mathcal{F}_i, \prod_{i \in N} P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიან R^n სივრცესთან ასოცირებული n-განზომილებიანი გაუსის კანონიკური ალბათური სივრცე.

$\prod_{1 \le i \le n} P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება n-განზომილებიან ევკლიდეს R^n სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის კანონიკური n-განზომილებიანი ალბათური ზომა და აღინიშნება Γ_n-ით.

§ 1.5.4. ალბათობათა უსასრული ოჯახის ნამრავლის განსაზღვრა

ვთქვათ, $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{i\in I}$ ალბათურ სივრცეთა უსასრულო ოჯახია. შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნა.

$$\prod_{i\in I}\Omega_i = \{(\omega_i)_{i\in I} \ : \ \omega_i \in \Omega_i, i \in I\}.$$

$A \subseteq \prod_{i\in I}\Omega_i$ სიმრავლეს ვუწოდოთ ცილინდრული სიმრავლე, თუ მისთვის არსებობს ინდექსთა სასრული $(i_k)_{1\le k\le n}$ მიმდევრობა და $(\mathcal{F}_{i_k})_{1\le k\le n}$ σ-ალგებრების ისეთი ელემენტები $(B_{i_k})_{1\le k\le n}$, რომ მართებულია წარმოდგენა

$$B = \{(\omega_i)_{i\in I} \ : \ (\omega_i \in \Omega_i, i \in I \setminus \cup_{k=1}^{n}\{i_k\} \ ) \ \& \ (\omega_i \in B_i, i \in \cup_{k=1}^{n}\{i_k\}) \ \}.$$

$\mathcal{A}$-თი აღვნიშნოთ კლასი $\prod_{i\in I}\Omega_i$ სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეებისა, რომლებიც წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებით. შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{A}$ წარმოადგენს $\prod_{i\in I}\Omega_i$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრას.

ზემოთაღნიშნული სახის ცილინდრულ სიმრავლეებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P(B) = \prod_{k=1}^{n} P_{i_k}(B_{i_k})$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ამდაგვარად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას $\mathcal{A}$ კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathcal{A})$ კლასს ეწოდება σ-ალგებრების $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ უსასრულო ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$-ით. მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობათა $(P_i)_{i\in I}$ უსასრულო ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i\in I}P_i$-ით.

სამეულს $(\prod_{i\in I}\Omega_i, \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i, \prod_{i\in I}P_i)$ ეწოდება $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{i\in I}$ ალბათურ სივრცეთა ოჯახის ნამრავლი.

შენიშვნა 1. განვიხილოთ დამოუკიდებელი ცდების უსასრულო მიმდევრობა - ეს ცდათა ისეთი უსასრულო მიმდევრობაა, როცა ყოველი ცდის შედეგი გავლენას არ ახდენს მომდევნო ცდის შედეგზე.

ვიგულისხმოთ, რომ i-ური $(i \in I)$ ცდა აღიწერება $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ ალბათური სივრცით. მაშინ დამოუკიდებელი ცდების აღმწერი ალბათური სივრცე იქნება

$$(\prod_{i\in I}\Omega_i, \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i, \prod_{i\in I}P_i).$$

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. ვთქვათ, ყოველი $i \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის

$$\Omega_i = \{0,1\},\ \mathcal{F}_i = \{A | A \subseteq \Omega_i\},\ P_i(\{1\}) = p,$$

სადაც $0 < p < 1$.

ალბათურ სივრცეთა ნამრავლს

$$(\prod_{i \in N} \Omega_i, \prod_{i \in N} \mathcal{F}_i, \prod_{i \in N} P_i)$$

ეწოდება ბერნულის უსასრულო განზომილებიანი კლასიკური ალბათური სივრცე, ხოლო $\prod_{i \in N} P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ბერნულის უსასრულო განზომილებიანი ალბათური ზომა.

მაგალითი 2 (უსასრულო განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათური ზომა). ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{i \in N}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:

ა) $\Omega_i = \{x_1, \cdots, x_k\}$ $(i \in N)$,

ბ) $\mathcal{F}_i$ წარმოადგენს Ω_i სივრცის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასს $(i \in N)$,

გ) $P_i(\{x_j\}) = p_j > 0,\ i \in N,\ 1 \le j \le k,\ \sum_{j=1}^{k} p_j = 1$.

მაშინ $(\prod_{i \in N} \Omega_i, \prod_{i \in N} \mathcal{F}_i, \prod_{i \in N} P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება უსასრულო-განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათური სივრცე, ხოლო $\prod_{i \in N} P_i$ რიცხვით ფუნქციას უსასრულო-განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათობა.

მაგალითი 3 (უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბზე განსაზღვრული უსასრულო-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა).

ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{i \in N}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:

ა) $\Omega_i = [0,1]$ $(i \in N)$,

ბ) $\mathcal{F}_i = \mathcal{B}([0,1])$ $(i \in N)$,

გ) $P_i = b_1$ $(i \in N)$.

მაშინ, $(\prod_{i \in N} \Omega_i, \prod_{i \in N} \mathcal{F}_i, \prod_{i \in N} P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბთან ასოცირებული უსასრულო-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე. $\prod_{i \in N} P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა და აღინიშნება b_N-ით.

მაგალითი 4. ვთქვათ, ფუნქციათა $(F_i)_{i \in N}$ ოჯახი არის განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall i)(\forall x)(i \in N \ \&\ x \in R \to F_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\ ).$$

ვთქვათ, P_i არის F_i ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ $(\prod_{i \in N} \Omega_i, \prod_{i \in N} \mathcal{F}_i, \prod_{i \in N} P_i)$

ალბათურ სივრცეს ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან R^N სივრცესთან ასოცირებული უსასრულო-განზომილებიანი გაუსის კანონიკური ალბათური სივრცე. $\prod_{i \in N} P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან R^N სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის კანონიკური ალბათური ზომა და აღინიშნება Γ_N-ით.

ტესტები

1.5.1. ბაზრის ტერიტორიაზე განლაგებულია 10000 ჯიხური. თითოეული ჯიხურის მეპატრონე ყოველ კვარტალში $0,5$-ის ტოლი ალბათობით ნახულობს მოგებას 500 ლარის ოდენობით და იგივე ალბათობით ნახულობს ზარალს 200 ლარის ოდენობით. ჯიხურების იმ მეპატრონეთა რაოდენობა, რომლებიც წლის ბოლოსათვის

1) იზარალებენ 800 ლარის ოდენობით, ტოლია
ა) 625, ბ) 670, გ) 450, დ) 700;
2) იზარალებენ 100 ლარის ოდენობით, ტოლია
ა) 2500, ბ) 3000, გ) 2000, დ) 3500;
3) მიიღებენ მოგებას 600 ლარის ოდენობით, ტოლია
ა) 3750, ბ) 3650, გ) 3600, დ) 3400;
4) მიიღებენ მოგებას 1300 ლარის ოდენობით, ტოლია
ა) 2500, ბ) 2000, გ) 3000, დ) 1500;
5) მიიღებენ მოგებას 2000 ლარის ოდენობით, ტოლია
ა) 625, ბ) 650, გ) 600, დ) 550.

1.5.2. საბითუმო ბაზა ამარაგებს 20 მაღაზიას. ყოველი მათგანისაგან დამოუკიდებლად მოსალოდნელია შემდეგი დღისათვის განაცხადის მიღება $0,5$-ის ტოლი ალბათობით.

1) დღის განმავლობაში შეკვეთათა უალბათესი რიცხვი ტოლია
ა) 10, ბ) 11, გ) 12, დ) 13;
2) უალბათესი მნიშვნელობის ალბათობა ტოლია
ა) $C_{20}^{10}\frac{1}{2^{20}}$, ბ) $C_{20}^{10}\frac{1}{2^{10}}$, გ) $C_{20}^{10}\frac{1}{2^{30}}$, დ) $C_{20}^{5}\frac{1}{2^{20}}$.

1.5.3. მოცემულია სამი უჯრედი გადანომრილი რიცხვებით 1-დან 3-მდე. ვიგულისხმოთ, რომ ნაწილაკის პირველ მდგომარეობაში მოხვედრის ალბათობაა $0,3$, ხოლო მეორე მდგომარეობაში მოხვედრის ალბათობაა $0,4$. ალბათობა იმისა, რომ მოცემული ექვსი ნაწილაკიდან 3 აღმოჩნდება პირველ უჯრაში, 2 აღმოჩნდება მეორე უჯრაში, ხოლო დანარჩენი ნაწილაკები აღმოჩნდებიან მესამე უჯრაში, ტოლია

ა) $\frac{3!}{3!2!1!}0,3^4 0,4^2$, $b)$ $\frac{4!}{3!2!1!}0,3^4 0,4^2$, $g)$ $\frac{5!}{3!2!1!}0,3^4 0,4^2$, $d)$ $\frac{6!}{3!2!1!}0,3^4 0,4^2$.

§ 1.6. შემთხვევითი სიდიდეები

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ არის ალბათური სივრცე.

განსაზღვრება 1. ასახვას $\xi : \Omega \to R$ ეწოდება შემთხვევითი სიდიდე, თუ სრულდება შემდეგი პირობა

$$(\forall x)(x \in R \to \{\omega : \omega \in \Omega,\ \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}).$$

მაგალითი 1. ყოველი $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევითი სიდიდე შეიძლება განხილულ იქნას როგორც ერთეულოვანი წონის მქონე რაიმე Ω ფხვნილის R ღერძზე მიმოპნევის გარკვეული წესი, რომლის თანახმადაც ფხვნილის ყოველი $\omega \in \Omega$ ნაწილაკი მიმოიპნევა R ღერძის იმ წერტილზე, რომლის კოორდინატია $\xi(\omega)$.

განსაზღვრება 2. ფუნქციას $I_A : \Omega \to R$ $(A \subset \Omega)$, განსაზღვრულს პირობით

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } \omega \in A \\ 0, & \text{თუ } \omega \in \overline{A} \end{cases},$$

ეწოდება A სიმრავლის ინდიკატორი.

თეორემა 1. ვთქვათ, $A \subset \Omega$, მაშინ I_A შემთხვევითი სიდიდეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \in \mathcal{F}$.

დამტკიცება. თეორემა 1-ის მართებულობა ტრივიალურად გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობიდან

$$\{\omega : I_A(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{თუ } x \le 0, \\ \overline{A}, & \text{თუ } 0 < x \le 1, \\ \Omega, & \text{თუ } 1 < x. \end{cases}$$

განსაზღვრება 3. $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, თუ მოიძებნება ისეთი არათავსებადი ხდომილობების $(A_k)_{k \in N}$ ოჯახი და ნამდვილ რიცხვთა ისეთი $(x_k)_{k \in N}$ მიმდევრობა, რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:

1) $(\forall k)(k \in N \to x_k \in R, A_k \in \mathcal{F})$,
2) $\cup_{k \in N} A_k = \Omega$,
3) $\xi(\omega) = \sum_{k \in N} x_k I_{A_k}(\omega),\ \omega \in \Omega$.

განსაზღვრება 4. $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, თუ მოიძებნება ისეთი არათავსებადი ხდომილობების $(A_k)_{1 \le k \le n}$ ოჯახი და ნამდვილ რიცხვთა ისეთი $(x_k)_{1 \le k \le n}$ მიმდევრობა, რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:

1) $(\forall k)(1 \le k \le n \to x_k \in R, A_k \in \mathcal{F})$;
2) $\cup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$;
3) $\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}(\omega),\ \omega \in \Omega$.

განსაზღვრება 5. შემთხვევით სიდიდეთა $(\xi_k)_{k\in N}$ მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ სრულდება პირობა

$$(\forall n)(\forall\omega)(n \in N, \omega \in \Omega \to \xi_n(\omega) \le \xi_{n+1}(\omega)).$$

დადებითი შემთხვევითი სიდიდეების სტრუქტურის შესახებ გარკვეულ ინფორმაციას იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. ყოველი დადებითი $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევითი სიდიდისათვის მოიძებნება დადებით მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი $(\xi_k)_{k\in N}$ მიმდევრობა, რომ შესრულდება ტოლობა

$$(\forall\omega)(\omega \in \Omega \to \xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)).$$

დამტკიცება. ყოველი ნატურალური $n \in N$ რიცხვისათვის განვსაზღვროთ შემთხვევითი სიდიდე შემდეგი პირობით:

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot I_{\{y: y\in\Omega, \frac{k-1}{2^n} \le \xi(y) < \frac{k}{2^n}\}}(\omega) + n \cdot I_{\{y: y\in\Omega, \xi(y)\ge n\}}(\omega).$$

უშუალოდ მოწმდება, რომ

$$(\forall n)(n \in N \to\ \xi_n(\omega) \le \xi_{n+1}(\omega))$$

და

$$(\forall\omega)(\omega \in \Omega \to \xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. ყოველი $\eta : \Omega \to R$ შემთხვევითი სიდიდისათვის მოიძებნება მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი $(\eta_k)_{k\in N}$ მიმდევრობა, რომ შესრულდება ტოლობა

$$(\forall\omega)(\omega \in \Omega \to \eta(\omega) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega)).$$

დამტკიცება. ყოველი $\eta : \Omega \to R$ შემთხვევითი სიდიდისათვის მართებულია წარმოდგენა $\eta = \eta^+ + \eta^-$, სადაც
$\eta^+(\omega) = \max\{\eta(\omega), 0\}$ და $\eta^-(\omega) = \min\{\eta(\omega), 0\}$.

თეორემა 2-ის ძალით, η^+ და $-\eta^-$ შემთხვევითი სიდიდეებისათვის მოიძებნება შესაბამისად მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი $(\eta_k^+)_{k\in N}$ და $(\eta_k^-)_{k\in N}$ მიმდევრობები, რომ

$$(\forall\omega)(\omega \in \Omega \to \lim_{k\to\infty} \eta_k^+(\omega) = \eta^+(\omega),\ \ \lim_{k\to\infty} \eta_k^-(\omega) = -\eta^-(\omega)).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $(\eta_n)_{n\in N} = (\eta_n^+ - \eta_n^-)_{n\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა წარმოადგენს მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას, რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$(\forall\omega)(\omega \in \Omega \to \eta(\omega) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega)).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ტესტები

1.6.1. ვთქვათ, ξ და η არიან დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები, რომელთათვისაც მართებულია წარმოდგენები

$$\xi(\omega) = \sum_{k\in N} x_k I_{A_k}(\omega), \quad \eta(\omega) = \sum_{m\in N} y_m I_{B_m}(\omega) \ (\ \omega \in \Omega).$$

მაშინ

1) $\xi + \eta$ შემთხვევითი სიდიდისათვის და $\omega \in \Omega$-სთვის მართებულია ტოლობა

ა) $(\xi+\eta)(\omega) = \sum_{k\in N}\sum_{m\in N}(x_k+y_m)I_{A_k\cap B_m}(\omega)$,

ბ) $(\xi+\eta)(\omega) = \sum_{k\in N}\sum_{m\in N} x_k y_m I_{A_k\cap B_m}(\omega)$;

2) $\xi \cdot \eta$ შემთხვევითი სიდიდისათვის და $\omega \in \Omega$-სთვის მართებულია ტოლობა

ა) $(\xi\cdot\eta)(\omega) = \sum_{k\in N}\sum_{m\in N}(x_k+y_m)I_{A_k\cap B_m}(\omega)$,

ბ) $(\xi\cdot\eta)(\omega) = \sum_{k\in N}\sum_{m\in N} x_k y_m I_{A_k\cap B_m}(\omega)$;

3) თუ $g : R \to R$ არის ზომადი ფუნქცია, მაშინ $g(\xi)$ შემთხვევითი სიდიდეა და

ა) $g(\xi)(\omega) = \sum_{k\in N} g(x_k) I_{A_k}(\omega)$,

ბ) $g(\xi)(\omega) = \sum_{k\in N} g^{-1}(x_k) I_{A_k}(\omega)$;

4) მართებულია შემდეგი ფორმულა

ა) $\sin(\xi)(\omega) = \sum_{k\in N} \sin(x_k) I_{A_k}(\omega)$,

ბ) $\sin(\xi)(\omega) = \sum_{k\in N} \arcsin(x_k) I_{A_k}(\omega)$.

1.6.2. ვთქვათ, $(A_k)_{k\in N}$ არის ხდომილობათა მიმდევრობა, ხოლო ξ არის შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

1)

$$ა)\ \xi^{-1}(\cup_{k\in N}A_k)=\cup_{k\in N}\xi^{-1}(A_k),$$

$$ბ)\ \xi^{-1}(\cup_{k\in N}A_k)=\cap_{k\in N}\xi^{-1}(A_k);$$

2)

$$ა)\ \xi^{-1}(\cap_{k\in N}A_k)=\cap_{k\in N}\xi^{-1}(A_k),$$

$$ბ)\ \xi^{-1}(\cap_{k\in N}A_k)=\cup_{k\in N}\xi^{-1}(A_k);$$

3)

$$ა)\ \Omega\setminus\xi^{-1}(A_k)=\xi^{-1}(\Omega\setminus A_k),$$

$$ბ)\ \Omega\setminus\xi^{-1}(A_k)=\xi^{-1}(A_k).$$

1.6.3.

1) თუ $|\xi|$ არის შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ

ა) ξ არის შემთხვევითი სიდიდე,

ბ) ξ შესაძლოა არ იყოს შემთხვევითი სიდიდე;

2) თუ ξ შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ

ა) ξ^+ არის შემთხვევითი სიდიდე,

ბ) ξ^+ შესაძლოა არ იყოს შემთხვევითი სიდიდე;

3) ვთქვათ, ξ და η არიან შემთხვევითი სიდიდეები და A არის ხდომილობა. თუ $\Theta(\omega)=\xi(\omega)I_A(\omega)+\eta(\omega)I_{\overline{A}}(\omega)$ $(\omega\in\Omega)$, მაშინ

ა) Θ არის შემთხვევითი სიდიდე,

ბ) Θ შესაძლოა არ იყოს შემთხვევითი სიდიდე.

§ 1.7. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცეა.

განსაზღვრება 1. $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ეწოდება F_ξ ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall x)(x \in \overline{R} \to F_\xi(x) = P(\{\omega : \xi(\omega) \leq x\})),$$

სადაც $\overline{R} = \{-\infty\} \cup R \cup \{+\infty\}$.

გავეცნოთ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის ზოგიერთ თვისებას.

თეორემა 1. $F_\xi(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$.

დამტკიცება. განვიხილოთ $+\infty$-სკენ კრებად ნამდვილ რიცხვთა $(x_k)_{k \in N}$ ზრდადი მიმდევრობა. შევნიშნოთ, რომ ერთი მხრივ

$$\{\omega : \xi(\omega) \leq x_k\} \subseteq \{\omega : \xi(\omega) \leq x_{k+1}\} \ (k \in N).$$

მეორეს მხრივ, $\cup_{k \in N} \{\omega : \xi(\omega) \leq x_k\} = \Omega$. ამიტომ ალბათობის ქვევიდან უწყვეტობის თვისების გამო, ვღებულობთ

$$\lim_{k \to \infty} P(\{\omega : \xi(\omega) \leq x_k\}) = P(\cup_{k \in N} \{\omega : \xi(\omega) \leq x_k\}) = P(\Omega) = 1,$$

ე.ი. $\lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$.

შევნიშნოთ, რომ $F_\xi(+\infty) = P(\{\omega : \xi(\omega) \leq +\infty\}) = P(\Omega) = 1$. საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$F_\xi(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. $F_\xi(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ

$$F_\xi(-\infty) = P(\{\omega : \xi(\omega) \leq -\infty\}) = P(\emptyset) = 0.$$

განვიხილოთ $-\infty$-სკენ კრებად ნამდვილ რიცხვთა კლებადი მიმდევრობა. ადვილი შესამჩნევია, რომ სრულდება პირობები:

1) $\{\omega : \xi(\omega) \leq x_{k+1}\} \subseteq \{\omega : \xi(\omega) \leq x_k\} \ (k \in N)$,

2) $\cap_{k \in N} \{\omega : \xi(\omega) \leq x_k\} = \emptyset$.

ამიტომ, P ალბათობის ზემოდან უწყვეტობის თვისების გამო, ვღებულობთ

$$\lim_{k \to \infty} P(\{\omega : \xi(\omega) \leq x_k\}) = P(\cap_{k \in N} \{\omega : \xi(\omega) \leq x_k\}) = P(\emptyset) = 0,$$

ე.ი.

$$\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = F_\xi(-\infty) = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. განაწილების $F_\xi(x)$ ფუნქცია ზრდადი ფუნქციაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x_1 < x_2$. ვაჩვენოთ შემდეგი არამკაცრი უტოლობის $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$ მართებულობა. მართლაც, შემდეგი ჩართვის

$$\{\omega : \xi(\omega) \le x_1\} \subseteq \{\omega : \xi(\omega) \le x_2\}$$

მართებულობისა და ალბათობის მონოტონურობის თვისების გამო (იხ. § 1.2, თვისება 5) ვღებულობთ

$$P(\{\omega : \xi(\omega) \le x_1\}) \le P(\{\omega : \xi(\omega) \le x_2\}),$$

რაც თავის მხრივ $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$ პირობის ექვივალენტურია.
თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. განაწილების $F_\xi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია მარჯვნიდან, ე.ი. ყოველი $(x_k)_{k\in N}$ მიმდევრობისათვის, რომლისთვისაც სრულდება პირობები $x_k > x$ $(k \in N)$ და $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, ასევე სრულდება შემდეგი პირობა

$$\lim_{k\to\infty} F_\xi(x_k) = F_\xi(x).$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $(x_k)_{k\in N}$ კლებადი მიმდევრობაა. მაშინ

$$\{\omega : \xi(\omega) \le x\} = \cap_{k\in N}\{\omega : \xi(\omega) \le x_k\},$$

$$\{\omega : \xi(\omega) \le x_{k+1}\} \subseteq \{\omega : \xi(\omega) \le x_k\} \ (k \in N).$$

ამიტომ, P ალბათობის ზემოდან უწყვეტობის თვისების გამო ვღებულობთ

$$\lim_{k\to\infty} P(\{\omega : \xi(\omega) \le x_k\}) = P(\cap_{k\in N}\{\omega : \xi(\omega) \le x_k\}) = P(\{\omega : \xi(\omega) \le x\}),$$

რაც თავის მხრივ $\lim_{k\to\infty} F_\xi(x_k) = F_\xi(x)$ პირობის ექვივალენტურია.
თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, ξ არის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი. მისთვის მოიძებნება არათავსებადი ხდომილობების $(A_k)_{k\in N}$ ოჯახი და ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა $(x_k)_{k\in N}$, რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:
1) $(\forall k)(k \in N \to x_k \in R,\ A_k \in \mathcal{F})$,
2) $\cup_{k\in N} A_k = \Omega$,
3) $\xi(\omega) = \sum_{k\in N} x_k I_{A_k}(\omega),\ \omega \in \Omega$.
მაშინ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$F_\xi(x) = \sum_{x_k \le x} P(A_k).$$

შევნიშნოთ, რომ დისკრეტული შემთხვევითი ξ სიდიდის განაწილების ფუნქციის ასაგებად არაა აუცილებელი იმის ცოდნა, თუ რა მნიშვნელობებს ღებულობს ის Ω სივრცის ω წერტილებზე. ამისათვის საკმარისია ვიცოდეთ შესაძლო მნიშვნელობათა ალბათობები, რომელიც მოიცემა შემდეგი სქემის საშუალებით

ξ	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

,

სადაც $(\forall k)(k \in N \to p_k = P(A_k))$.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი 1 (პუასონის[7] განაწილება). $\xi : \Omega \to R$ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეს

$$\xi(\omega) = \sum_{n \in N} n \cdot I_{A_n}(\omega)\ (\omega \in \Omega)$$

ეწოდება $\lambda\,(\lambda > 0)$ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, თუ სრულდება პირობა

$$P(A_n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\ (n \in N),$$

ე.ი.

$$P(\{\omega : \xi(\omega) = n\}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\ (n \in N).$$

λ-პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების $F(x, \lambda)$ ფუნქცია მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$F(x, \lambda) = \sum_{n \le x} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\ (x \in R).$$

შენიშვნა 1. λ-პარამეტრიანი პუასონის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობების ალბათობებსა და განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობებს ითვლის $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $POISSON$(იხ.გვ.208 ან 214).

მაგალითი 2 (ჰიპერგეომეტრიული განაწილება). $\xi : \Omega \to R$ მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეს

$$\xi(\omega) = \sum_{k=0}^{m} k \cdot I_{A_k}(\omega)\ (\omega \in \Omega),$$

[7] პუასონი სიმეონ დენისი (*Poisson Semion Denis*) (21.6.1781, ლუარის დეპ, პიტივიო - 25.4.1840, პარიზი)-ფრანგი მექანიკოსი, ფიზიკოსი, მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის საპატიო წევრი (1826), პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1812).

სადაც

$$P(A_n) = \frac{C_a^k \times C_{A-a}^{n-k}}{C_A^n},$$

$$0 < n \leq A,\ 0 < a < A,\ 0 \leq k \leq min(a, n) = m,$$

ეწოდება (n, a, A)-პარამეტრებიანი ჰიპერგეომეტრიული წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე.

(n, a, A)-პარამეტრებიანი ჰიპერგეომეტრიული წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია აღინიშნება $F_{(n,a,A)}$ სიმბოლოთი და გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$F_{(n,a,A)}(x) = \sum_{k \leq x} \frac{C_a^k \times C_{A-a}^{n-k}}{C_A^n}.$$

შენიშვნა 2. (n, a, A)-პარამეტრებიანი ჰიპერგეომეტრიული წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის შესაძლო მნიშვნელობებს ითვლის $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია

$$HYPERGEOMDIST(k; n; a; A).$$

მაგალითი 3 (გეომეტრიული განაწილება). $\xi : \Omega \to R$ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეს

$$\xi(\omega) = \sum_{n \in N} n \cdot I_{A_n}(\omega)\ (\omega \in \Omega)$$

ეწოდება q $(0 < q < 1)$ პარამეტრიანი გეომეტრიული კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, თუ სრულდება პირობა:

$$P(A_n) = (1 - q)q^{n-1}\ (n \in N),$$

ე.ი.

$$P(\{\omega : \xi(\omega) = n\}) = (1 - q)q^{n-1}\ (n \in N).$$

q-პარამეტრიანი გეომეტრიული კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია F_q მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$F_q(x) = \sum_{n \leq x} (1 - q)q^{n-1}\ (x \in R).$$

მაგალითი 4 (ლეიბნიცის[8] განაწილება). $\xi : \Omega \to R$ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეს

$$\xi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot I_{A_n}(\omega) \ (\omega \in \Omega)$$

ეწოდება ლეიბნიცის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, თუ სრულდება პირობა:

$$P(A_n) = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \ (n \in N),$$

ე.ი.

$$P(\{\omega : \xi(\omega) = n\}) = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \ (n \in N).$$

ლეიბნიცის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების F ფუნქცია მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$F(x) = \sum_{n \le x} \frac{1}{n \cdot (n+1)} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{თუ } \ x < 1 \\ 1 - \frac{1}{[x]+1}, & \text{თუ } \ x \ge 1 \end{cases},$$

სადაც $[x]$ აღნიშნავს x ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს.

მაგალითი 5 (ბინომური განაწილება). მარტივ დისკრეტულ

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} k I_{A_k}(\omega) \ \ (\omega \in \Omega).$$

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება (n,p)-პარამეტრიანი ბინომური წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, თუ

$$P(A_k) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

სადაც ნამდვილი რიცხვი p აკმაყოფილებს პირობას $0 < p < 1$, ხოლო მთელი რიცხვი k აკმაყოფილებს $0 \le k \le n$ პირობას, ე.ი.

$$P(\{\omega : \xi(\omega) = k\}) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}.$$

[8] ლეიბნიცი გოტფრიდ ვილჰელმ (*Leibniz Gottfried Wilhelm*) (1.7.1646, ლეიპციგი,-14.11.1716, განოვერი)-გერმანელი მათემატიკოსი, ფიზიკოსი და გამომგონებელი, იურისტი, ისტორიკოსი, ენათმეცნიერი, ლონდონის სამეფო საზოგადოების წევრი (1673), პარიზის აკადემიის წევრი (1700), პირველმა შეიმუშავა რაციონალური წილადების ინტეგრირება (1702-03), დაადგინა ნიშანცვლადი მწკრივის კრებადობის ზოგიერთი საკმარისი პირობა (1682).

(n,p) პარამეტრიანი ბინომური წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია აღინიშნება $F_n(x,p)$ სიმბოლოთი და გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$F_n(x,p) = \sum_{k \le x} C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}.$$

შენიშვნა 1. $(1,p)$-პარამეტრიან ბინომური წესით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ აგრეთვე p-პარამეტრიან ბერნულის წესით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდესაც. მტკიცდება, რომ (n,p)-პარამეტრიანი ბინომური წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე შეიძლება წარმოვადგინოთ n-ცალი დამოუკიდებელი p- პარამეტრიანი ბერნულის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის ჯამის სახით .

შენიშვნა 3. (n,p)-პარამეტრებიანი ბინომური წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო ალბათობებსა და განაწილების ფუნქციის შესაძლო მნიშვნელობებს ითვლის $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $BINOMDIST$(იხ.გვ.209 ან 213)).

განსაზღვრება 2. შემთხვევით $\xi : \Omega \to R$ სიდიდეს ეწოდება აბსოლუტურად უწყვეტი [9] შემთხვევითი სიდიდე, თუ მოიძებნება ისეთი არაუარყოფითი $f_\xi : R \to R^+$ ფუნქცია, რომ შესრულდება პირობა

$$(\forall x)(x \in R \to F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx),$$

სადაც $R^+ = [0, +\infty[$.

$f_\xi(x)$ $(x \in R)$ ფუნქციას ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

თეორემა 5. ვთქვათ, $f_\xi : R \to R$ არის $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია. მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1.$$

დამტკიცება. $\lim_{L\to+\infty} F_\xi(L) = 1$, ამიტომ $\lim_{L\to+\infty} \int_{-\infty}^{L} f_\xi(x)dx = 1$, რაც ნიშნავს $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$ ტოლობის მართებულობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6. ვთქვათ, F_ξ არის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, მაშინ ყოველი x და y $(x < y)$ ნამდვილი რიცხვებისთვის მართებულია ტოლობა

$$P(\{\omega : x < \xi(\omega) \le y\}) = F_\xi(y) - F_\xi(x),$$

[9] შევნიშნოთ, რომ აბსოლუტურად უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე განისაზღვრება ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის ლებეგის აზრით ნულზომად ქვესიმრავლეზე მნიშვნელობებამდე სიზუსტით; ხოლო რაც შეეხება ლებეგის აზრით ნულზომადობის ცნებას, ის მდგომარეობს შემდეგში: $X \subset R$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ლებეგის აზრით ნულზომადი თუ ყოველი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ღია ინტერვალთა ისეთი $(]a_k, b_k[)_{k\in N}$ მიმდევრობა, რომ $X \subset \cup_{k\in N}]a_k, b_k[$ და $\sum_{k\in N}(b_k - a_k) < \epsilon$.

ამასთან, თუ ξ აბსოლუტურად უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეა და f_ξ მისი განაწილების სიმკვრივეა, მაშინ

$$P(\{\omega : x < \xi(\omega) \le y\}) = \int_x^y f_\xi(s)ds.$$

დამტკიცება.

$$P(\{\omega : x < \xi(\omega) \le y\}) = P(\{\omega : \xi(\omega) \le y\} \setminus \{\omega : \xi(\omega) \le x\}) =$$

$$= P(\{\omega : \xi(\omega) \le y\}) - P(\{\omega : \xi(\omega) \le x\}) = F_\xi(y) - F_\xi(x).$$

თუ $F_\xi(t) = \int_{-\infty}^t f_\xi(s)ds$, მაშინ

$$F_\xi(y) - F_\xi(x) = \int_{-\infty}^y f_\xi(s)ds - \int_{-\infty}^x f_\xi(s)ds = \int_x^y f_\xi(s)ds.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 5. მარტივი ξ შემთხვევითი სიდიდის რაიმე ინტერვალში მოხვედრის ალბათობას ითვლის $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $PROB$(იხ. გვ.210 ან 215).

შენიშვნა 6. თუ f_ξ და F_ξ არიან შესაბამისად უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე და განაწილების ფუნქცია, მაშინ თითქმის ყველგან R-ზე

$$\frac{dF_\xi(x)}{dx} = f_\xi(x),$$

ე.ი. $\{x : x \in R, \frac{dF_\xi(x)}{dx} \neq f_\xi(x)$ ან $\frac{dF_\xi(x)}{dx}$ არ არსებობს$\}$ არის ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის ლებეგის აზრით ნულზომადი ქვესიმრავლე.

მაგალითი 6 (ნორმალური განაწილება). აბსოლუტურად უწყვეტ $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება (m, σ^2) $(m \in R,\ \sigma > 0)$ პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე , თუ მართებულია ტოლობა

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ (x \in R).$$

(m, σ^2)-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე და განაწილების ფუნქცია აღინიშნება შესაბამისად $\phi_{(m,\sigma^2)}$ და $\Phi_{(m,\sigma^2)}$ სიმბოლოებით, ე.ი.

$$\phi_{(m,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ (x \in R),$$

$$\Phi_{(m,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \ (t \in R).$$

როცა $m = 0$ და $\sigma = 1$, მაშინ მათთვის მიღებულია შესაბამისად აღნიშვნები ϕ და Φ, ე.ი. $\phi = \phi_{(0,1)}$ და $\Phi = \Phi_{(0,1)}$. ამასთან, ϕ-ს ეწოდება

სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივე, ხოლო Φ ფუნქციას ეწოდება სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია.

შენიშვნა 7. (m,σ^2)-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემ-

თხვევითი სიდიდის სიმკვრივესა და განაწილების ფუნქციის მნიშვნელო-ბებს ითვლის $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $NORMDIST$(იხ.გვ.209 ან 214).

მაგალითი 7. (თანაბარი განაწილება). აბსოლუტურად უწყვეტ $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება თანაბრად განაწილებული $[a,b]$ $(a < b)$ ინტერვალზე , თუ მართებულია ტოლობა

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{თუ } x \in [a,b]; \\ 0, & \text{თუ } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

$[a,b]$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწი-ლების ფუნქცია მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{თუ } x \in [a,b]; \\ 1, & \text{თუ } x > b. \end{cases}$$

მაგალითი 8 (კოშის [10] განაწილება). აბსოლუტურად უწყვეტ $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება განაწილებული კოშის კანონით, თუ

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \ (x \in R).$$

მისი განაწილების ფუნქცია მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg(x) \ (x \in R).$$

მაგალითი 9 (მაჩვენებლიანი განაწილება). აბსოლუტურად უწყვეტ $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება λ-პარამეტრიანი მაჩვენებლიანი წესით განაწილებილი შემთხვევითი სიდიდე , თუ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{თუ } x \geq 0; \\ 0, & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

მაჩვენებლიანი წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილე-ბის ფუნქცია F_ξ მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{თუ } x \geq 0; \\ 0, & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

[10] კოში ავგუსტინე ლუი (*Cauch Augustin Louis*) (21.8.1789, პარიზი - 23.5.1857,სო) -ფრანგი მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის საპატიო წევრი (1831), პარიზის მეც-ნიერებათა აკადემიის წევრი (1816).

შენიშვნა 8. λ-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივესა და განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობებს ითვლის $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $EXPONDIST$(იხ.გვ. 209 ან 213).

მაგალითი 10. ვთქვათ, ξ არის (m, σ^2)-პარამეტრებიანი ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე. e^{ξ} შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას ეწოდება ლოგნორმალური განაწილება და აღინიშნება $logN(x, m, \sigma^2)$ $(x \in R)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ $logN(x, m, \sigma^2) = 0$, როცა $x \leq 0$. ღოცა $x > 0$, მაშინ

$$F_{e^{\xi}}(x) = logN(x, m, \sigma^2) = P(\{\omega : e^{\xi(\omega)} \leq x\}) = P(\{\omega : \xi(\omega) \leq \ln(x)\}) =$$

$$P(\{\omega : \frac{\xi(\omega) - m}{\sigma} \leq \frac{\ln(x) - m}{\sigma}\}) = \Phi(\frac{\ln(x) - m}{\sigma}).$$

შენიშვნა 6-ის ძალით ვღებულობთ, რომ

$$f_{e^{\xi}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma}\phi(\frac{\ln(x)-m}{\sigma}), & \text{თუ } x \geq 0 \\ 0, & \text{თუ } x < 0 \end{cases}$$

შენიშვნა 9. ლოგნორმალური განაწილების კანონს გეოლოგიაში ერთ-ერთი უმთავრესი ადგილი უჭირავს. ამ კანონითაა განაწილებული დანალექ ქანებში მარცვლების ზომა, დანალექი ქანების სიმძლავრე, დანალექი ქანების ფილტრაციის კოეფიციენტი, ქანებსა და მიწისქვეშა წყლებში მიკროელემენტები და სხვა. ამ წესით არიან განაწილებული ისეთი შემთხვევითი სიდიდეები, რომელთა მნიშვნელობები მიიღება მცირე შეცდომათა დიდი რაოდენობის გამრავლების შედეგად, ანალოგიურად ნორმალური განაწილების კანონისა, რომელიც მიიღება შეცდომათა დიდი რაოდენობის შეკრების შედეგად.

შენიშვნა 10. (m, σ^2)-პარამეტრებიანი ლოგნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობას ითვლის $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია

$$LOGNORMDIST(x; m, \sigma^2).$$

მაგალითად,$LOGNORMDIST(5; 5; 5) = 0,248850137$;

ხოლო p დონის კვანტილს ითვლის ფუნქცია $LOGINV(p; m, \sigma^2)$; მაგალითად, $LOGINV(0,248850137; 5, 5) = 5$.

მაგალითი 11 (ვეიბულის განაწილება). ξ შემთხვევითი სიდიდეს ეწოდება განაწილებული ვეიბულის წესით (α, β) $(\alpha, \beta > 0)$ პარამეტრებით, თუ მისი განაწილების ფუნქციას აქვს სახე

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{x}{\beta})^{\alpha}}, & \text{თუ } x \geq 0 \\ 0, & \text{თუ } x < 0 \end{cases}$$

შენიშვნა 6-ის ძალით ვღებულობთ

$$f_\xi(x) = F_\xi^{'}(x) = \begin{cases} \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, & \text{თუ } x \geq 0 \\ 0, & \text{თუ } x < 0 \end{cases}$$

მაგალითი 12 (სინგულარული განაწილება). განვიხილოთ ინტერვალი $[0,1]$ და განვსაზღვროთ მასზე ფუნქცია შემდეგი სქემის საშუალებით, რომელიც ეკუთვნის გ.კანტორს. [11]

დავყოთ ინტერვალი $[0,1]$ სამ ტოლ ნაწილად და განვსაზღვროთ ფუნქცია

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{თუ } x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\\ 0, & \text{თუ } x = 0 \\ 1, & \text{თუ } x = 1 \end{cases}$$

$[0,1]$ ინტერვალის სხვა წერტილებში წრფივი ინტერპოლაციის საშუალებით .

შემდგომ, ყოველი შემდეგი $[0, \frac{1}{3}]$ და $[\frac{2}{3}, 1]$ ინტერვალი კვლავ დავყოთ სამ ტოლ ნაწილად და განვსაზღვროთ ფუნქცია

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{თუ } x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\\ \frac{1}{4}, & \text{თუ } x \in]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\\ \frac{3}{4}, & \text{თუ } x \in]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[\\ 0, & \text{თუ } x = 0 \\ 1, & \text{თუ } x = 1 \end{cases}$$

$[0,1]$ ინტერვალის სხვა წერტილებში წრფივი ინტერპოლაციის საშუალებით .

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ $(F_n)_{n\in N}$ ფუნქციათა მიმდევრობას, რომელიც კრებადია $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრული კონკრეტული უწყვეტი F ფუნქციისაკენ, რომლის ზრდის წერტილთა [12] სიმრავლე წარმოადგენს ლებეგის აზრით ნულზომად სიმრავლეს. მართლაც, როგორც ჩანს $(F_n)_{n\in N}$ ფუნქციათა აგების კონსტრუქციიდან, ლებეგის ზომა

$$]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[,\ ]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[,\ ]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[, \cdots$$

[11] კანტორი გიორგი (*Cantor Georg*) (19.2.(3.3).1845 პეტერბურგი-6.1.1918 გალე)-გერმანელი მათემატიკოსი, გალეს უნივერსიტეტის პროფესორი (1879-1913). მას ეკუთვნის უსასრულო სიმრავლეთა და ტრანსფინიტურ რიცხვთა თეორიების დამუშავება. 1874 წელს მან დაამტკიცა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის არათვლადობა. 1897 წელს ის წყვეტს მეცნიერულ შემოქმედებას. კანტორის იდეებმა, რომელთაც თანამედროვეთა მხრიდან შეხვდა დიდი წინააღმდეგობა, კერძოდ ლ.კრონეკერის მხრიდან, უდიდესი გავლენა მოახდინეს მათემატიკის განვითარებაზე.

[12] x წერტილს ეწოდება უწყვეტი F ფუნქციის ზრდის წერტილი, თუ ყოველი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის $F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon) > 0$.

ინტერვალთა ოჯახის გაერთიანებისა, რომელზედაც F ფუნქცია ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობებს, ტოლია

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=1.$$

F ფუნქციას უწოდებენ კანტორის ფუნქციას.

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდის კონსტრუქცია, რომლის განაწილების ფუნქციასაც წარმოადგენს კანტორის ფუნქცია F.

ვთქვათ,

$$(\Omega,\mathcal{F},P)=([0,1],\mathcal{B}([0,1]),b_1).$$

განვსაზღვროთ ფუნქციათა

$$(\xi_{\frac{k}{2^n}})_{n\in N,\ 1\le k<2^n,\ \ k\in 2N+1}=(\xi_i)_{i\in I}$$

ოჯახი შემდეგნაირად

$$\xi_{\frac{1}{2}}(\omega)=\frac{1}{3}I_{\{\frac{1}{2}\}}(\omega),\ (\omega\in\Omega),$$

$$\xi_{\frac{1}{4}}(\omega)=\frac{1}{9}I_{\{\frac{1}{4}}\}(\omega),\ (\omega\in\Omega),$$

$$\xi_{\frac{3}{4}}(\omega)=\frac{1}{9}I_{\{\frac{3}{4}\}}(\omega),\ (\omega\in\Omega),$$

$$\xi_{\frac{1}{8}}(\omega)=\frac{1}{27}I_{\{\frac{1}{8}\}}(\omega),\ (\omega\in\Omega),$$

$$\xi_{\frac{3}{8}}(\omega)=\frac{1}{27}I_{\{\frac{3}{8}\}}(\omega),\ (\omega\in\Omega),$$

$$\xi_{\frac{5}{8}}(\omega)=\frac{1}{27}I_{\{\frac{5}{8}\}}(\omega),\ (\omega\in\Omega),$$

$$\xi_{\frac{7}{8}}(\omega)=\frac{1}{27}I_{\{\frac{7}{8}\}}(\omega),\ (\omega\in\Omega),$$

და ა.შ.

განვსაზღვროთ $\xi_{Cantor}:\Omega\to R$ შემდეგნაირად

$$\xi_{Cantor}(\omega)=\sum_{i\in I,\ i\le\omega}\xi_i(\omega).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ξ_{cantor} შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ემთხვევა კანტორის F ფუნქციას.

განსაზღვრება 3. ყოველ უწყვეტ განაწილების ფუნქციას, რომლის ზრდის წერტილთა სიმრავლე წარმოადგენს ლებეგის აზრით ნულზომად სიმრავლეს, უწოდებენ სინგულარული განაწილების ფუნქციას.

თეორემა 7. ყოველი განაწილების F ფუნქციისათვის მართებულია წარმოდგენა

$$F(x) = p_1 \cdot F_1(x) + p_2 \cdot F_2(x) + p_3 \cdot F_3(x) \ (x \in R),$$

სადაც F_1, F_2, F_3 არიან შესაბამისად დისკრეტული, აბსოლუტურად უწყვეტი და სინგულარული განაწილების ფუნქციები, ხოლო p_1, p_2, p_3 ისეთი არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებია, რომ

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

თეორემა 8. ვთქვათ, F_ξ არის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია და $a > 0$, $b \in R$. მაშინ $\eta = a\xi + b$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობა

$$F_\eta(x) = F_\xi(\frac{x-b}{a}) \ (x \in \overline{R}).$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ

$$F_\eta(x) = P(\{\omega : a\xi(\omega) + b \le x\}) = P(\{\omega : \xi(\omega) \le \frac{x-b}{a}\}) = F_\xi(\frac{x-b}{a}).$$

და ბოლოს, განვიხილოთ შემდგომისათვის მეტად მნიშვნელოვანი

განსაზღვრება 4. ვთქვათ, F განაწილების ფუნქციაა და $0 < \alpha < 1$. t_α რიცხვს ეწოდება F-განაწილების α-დონის ზედა კვანტილი, თუ $F(t_\alpha = 1 - \alpha$.

ტესტები

1.7.1. მარტივი დისკრეტული $\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{4} x_k I_{A_k}(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება მოცემულია შემდეგი სქემის საშუალებით

ξ	-1	0	4	5
P	$0,2$	$0,3$	$0,1$	$0,4$

.

მაშინ

1) $F_\xi(-3)$ ტოლია

ა) $0,2$, ბ) $0,3$, გ) $0,1$, დ) 0;

2) $F_\xi(-1)$ ტოლია

ა) $0,2$, ბ) $0,3$, გ) $0,1$, დ) 0;

3) $F_\xi(-0,3)$ ტოლია

ა) $0,2$, ბ) $0,3$, გ) $0,1$, დ) 0;

4) $F_\xi(4)$ ტოლია

ა) $0,6$, ბ) $0,4$, გ) 1, დ) $0,8$;

5) $F_\xi(6)$ ტოლია

ა) $0,6$, ბ) $0,4$, გ) 1, დ) $0,8$.

1.7.2. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე

$$F_\xi(x) = \begin{cases} a, & x < 0; \\ bx, & 0 \le x < 1; \\ c, & x \ge 1. \end{cases}$$

მაშინ

ა) $a = 1, b = 0, c = 0$; ბ) $a = 0, b = 1, c = 1$;

გ) $a = 0, b = 0, c = 1$; დ) $a = 1, b = 1, c = 0$;

1.7.3. A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ცალკეულ ცდაში 0,3-ის ტოლია. მაშინ სამი დამოუკიდებელი ცდის დროს A ხდომილობის მოხდენათა ξ რიცხვის განაწილების კანონს აქვს სახე ა)

ξ	0	1	2	3
P	$0,343$	$0,441$	$0,189$	$0,027$

,

ბ)

ξ	0	1	2	3
P	$0,343$	$0,441$	$0,179$	$0,037$

.

1.7.4. მსროლელს მიზანში მოხვედრისას ეწერება 5 ქულა, ხოლო აცდენისას 2 ქულა აკლდება. ამასთან ცალკეული გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0,5. 4 გასროლისას დაგროვილ ქულათა ξ რაოდენობის განაწილების კანონს აქვს სახე

ა)

ξ	-8	-1	6	13	20
P	$0,0625$	$0,25$	$0,375$	$0,25$	$0,0625$

,

ბ)

ξ	-8	-1	6	13	20
P	$0,0625$	$0,225$	$0,375$	$0,225$	$0,0625$

.

1.7.5. პარტიაში 10 დეტალია, რომელშიც 8 სტანდარტულია. შემთხვევითად ირჩევენ 2 დეტალს. მაშინ შერჩევაში მოხვედრილ სტანდარტულ დეტალთა ξ რაოდენობის განაწილების კანონს აქვს სახე

ა)

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

,

ბ)

ξ	0	1	2
P	$\frac{2}{45}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{29}{45}$

.

1.7.6. დროის ერთეულში საქონლის ფასის 1 ერთეულით მომატების ალბათობაა 0,5, ხოლო იგივე სიდიდით ფასის დაკლების ალბათობაა 0,5. საწყისი ფასი შეადგენდა 10 ერთეულს. მაშინ დროის 4 ერთეულის შემდეგ საქონლის ξ ფასის განაწილების კანონს ექნება სახე

ა)

ξ	6	8	10	12	14
P	$0,0625$	$0,25$	$0,375$	$0,25$	$0,0625$

,

ბ)

ξ	6	8	10	12	14
P	$0,065$	$0,25$	$0,375$	$0,25$	$0,065$

.

1.7.7. ნაწილაკი იმყოფება რიცხვითი ღერძის სათავეში. დროის ერთეულში ნაწილაკის მარჯვნივ, ისევე როგორც მარცხნივ, ერთი ერთეულით გადაადგილების ალბათობაა 0,5. მაშინ დროის ოთხი ერთეულის შემდეგ ნაწილაკის ξ მდგომარეობის განაწილების კანონს ექნება სახე

ა)

ξ	-4	-2	0	2	4
P	$0,0625$	$0,25$	$0,375$	$0,25$	$0,0625$

,

ბ)

ξ	-4	-2	0	2	4
P	$0,0625$	$0,245$	$0,385$	$0,245$	$0,0625$

.

1.7.8. ξ არის $\lambda = 1$ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

1) [2,5; 5,5] ინტერვალში ξ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა ტოლია

ა) $0,306760$, ბ) $0,13455$, გ) $0,11213$, დ) $0,28111$;

2) [6,5; 7,5] ინტერვალში $3\xi + 4$ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა ტოლია

ა) $0,367879$, ბ) $0,13894$, გ) $0,13121$, დ) $0,28991$.

1.7.9. ξ არის $[3, 10]$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

1) $F_\xi(4)$ ტოლია

ა) $\frac{1}{7}$, ბ) $\frac{1}{8}$, გ) $\frac{1}{9}$, დ) $\frac{1}{10}$;

2) [2,5; 5,5] ინტერვალში ξ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა ტოლია

ა) $\frac{5}{7}$, ბ) $\frac{5}{8}$, გ) $\frac{5}{9}$, დ) $0,5$;

3) [5;10] ინტერვალში $5\xi + 5$ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა ტოლია

ა) 0, ბ) 1, გ) $0,5$, დ) $0,8$.

1.7.10. ξ არის $\lambda(\lambda > 0)$-პარამეტრით მაჩვენებლიანი წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე.

1) თუ $[0, a]$ ინტერვალში ξ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა $\frac{2}{3}$ -ის ტოლია, მაშინ

ა) $a = \frac{\ln(3)}{\lambda}$, ბ) $a = \frac{\ln(4)}{\lambda}$, გ) $a = \frac{\ln(5)}{\lambda}$, დ) $a = \frac{\ln(6)}{\lambda}$;

2) [-5;5] ინტერვალში $3\xi - 4$ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა ტოლია

ა) $1 - e^{-3\lambda}$, ბ) $1 - e^{-4\lambda}$, გ) $1 - e^{-5\lambda}$, დ) $1 - e^{-6\lambda}$.

1.7.11. ξ არის $(0, 1)$-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე.

1) თუ ξ სიდიდის $[-a, a]$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობაა 0,99, მაშინ

ა) $a = 2,37$, ბ) $a = 2,57$, გ) $a = 2,77$, დ) $a = 2,97$;

2) $3\xi + 8$ შემთხვევითი სიდიდის $(-5, 5)$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობაა

ა) $0,8413$, ბ) $0,7413$, გ) $0,6413$, დ) $0,5413$.

§ 1.8. მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცეა. ვიგულისხმოთ, რომ ξ მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა, ე.ი.

$$(\forall\omega)(\omega \in \Omega \to \xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot I_{A_k}(\omega)),$$

სადაც $x_k \in R$ $(1 \le k \le n)$ და ხდომილობათა $(A_k)_{1 \le k \le n}$ ოჯახი ისეთია, რომ მისთვის სრულდება პირობები:

1) $(\forall k)(\forall m)(1 \le k < m \le n \to A_k \cap A_m = \emptyset)$,

2) $\cup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

განსაზღვრება 1. მარტივი დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება ჯამს $\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P(A_k)$ და აღინიშნება სიმბოლოთი $M\xi$, ე.ი.

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P(A_k).$$

შენიშვნა 1. მარტივი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს ითვლის $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $SUMPRODUCT$(იხ.გვ. 209 ან 215).

ვიგულისხმოთ, რომ η ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდეა. §1.6-ში დამტკიცებული თეორემა 3-ის ძალით მოიძებნება მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი $(\eta_n)_{n\in N}$ მიმდევრობა, რომ შესრულდება

$$(\forall\omega)(\omega\in\Omega\to\eta(\omega)=\lim_{n\to\infty}\eta_n(\omega)).$$

განსაზღვრება 2. თუ არსებობს სასრული ზღვარი $\lim_{n\to\infty}M\eta_n$, მაშინ მას ეწოდება η შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და აღინიშნება სიმბოლოთი $M\eta$ (ან $\int_\Omega\eta(\omega)dP(\omega)$).

მტკიცდება, რომ თუ არსებობს სიდიდე $\lim_{n\to\infty}M\eta_n$ და ის სასრულია η-სკენ კრებადი მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ერთი მაინც მიმდევრობისათვის, მაშინ ეს ზღვარი ერთი და იგივეა η-სკენ კრებადი მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ნებისმიერი მიმდევრობისათვის, რაც ნიშნავს განსაზღვრება 2-ის კორექტულობას.

შეთანხმება. მომავალში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ შემთხვევით სიდიდეებს, რომელთა ლოდინი და კვადრატის ლოდინი სასრული რიცხვებია.

თეორემა 1. თუ აბსოლუტურად უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა f_ξ, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_\xi(x)dx.$$

განსაზღვრება 3. ξ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ეწოდება სიდიდეს $M(\xi-M\xi)^2$ და აღინიშნება სიმბოლოთი $D\xi$.

განსაზღვრება 4. სიდიდეს $\sqrt{D\xi}$ ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა.

გავეცნოთ მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის ზოგიერთ თვისებას.

თეორემა 2. ვთქვათ $\xi(\omega)=c$ $(\omega\in\Omega,\ c=const)$, მაშინ $M\xi=c$, ე.ი. $Mc=c$.

დამტკიცება. $\xi(\omega)=c\cdot I_\Omega(\omega)$. მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრის ძალით, გვექნება

$$M\xi=c\cdot P(\Omega)=c.$$

თეორემა 3. $M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$, (ე.ი., შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის მათემატიკური ლოდინი შესაკრებთა მათემატიკური ლოდინების ჯამის ტოლია).

დამტკიცება. შემთხვევით სიდიდეთა სტრუქტურის შესახებ თეორემისა და შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრის თანახმად, საკმარისია თეორემა დავამტკიცოთ მარტივი დისკრეტული შემთხვე-

ვითი სიდიდეების შემთხვევაში. ვიგულისხმოთ, რომ ξ და η მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეებია, ე.ი. მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot I_{A_k}(\omega),\ A_k \cap A_m = \emptyset,\ 1 \le k < m \le p,$$
$$\cup_{k=1}^{p} A_k = \Omega,\ x_k \in R,\ k, m, p \in N,$$
$$\eta(\omega) = \sum_{n=1}^{q} y_n \cdot I_{B_n}(\omega),\ B_k \cap B_m = \emptyset,\ 1 \le k < m \le q,$$
$$\cup_{n=1}^{q} B_n = \Omega,\ y_n \in R,\ k, m, q \in N,$$

შევნიშნოთ, რომ

$$(\xi + \eta)(\omega) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} (x_k + y_n) \cdot I_{A_k \cap B_n}(\omega)\ (\omega \in \Omega),$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$M(\xi + \eta) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} (x_k + y_n) \cdot I_{A_k \cap B_n}(\omega) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} (x_k + y_n) \cdot P(A_k \cap B_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{p} x_k \sum_{n=1}^{q} P(A_k \cap B_n) + \sum_{n=1}^{q} y_n \sum_{k=1}^{p} P(A_k \cap B_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{p} x_k P(A_k) + \sum_{n=1}^{q} y_n P(B_n) = M\xi + M\eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 5. ξ და η მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ სრულდება შემდეგი პირობა

$$P(\{\omega : \xi(\omega) = x_k,\ \eta(\omega) = y_n\}) = P(\{\omega : \xi(\omega) = x_k\}) \cdot P(\{\omega :\ \eta(\omega) = y_n\}),$$

სადაც $1 \le k \le p,\ 1 \le n \le q$.

განსაზღვრება 6. ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ სრულდება შემდეგი პირობა

$$P(\{\omega : \xi(\omega) \le x,\ \eta(\omega) \le y\}) = P(\{\omega : \xi(\omega) \le x\}) \cdot P(\{\omega :\ \eta(\omega) \le y\}),$$

სადაც $x,\ y\ \in R$.

შენიშვნა 2. ξ და η მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების შემთხვევაში განსაზღვრებები 5 და 6 ერთმანეთის ექვივალენტურია.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 4. თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ მოიძებნება დამოუკიდებელ მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი $(\xi_n)_{n\in N}$ და $(\eta_n)_{n\in N}$ მიმდევრობები, რომ შესრულდება ტოლობა:

$$(\xi\cdot\eta)(\omega)=\lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)\cdot\eta_n(\omega)\ \ (\omega\in\Omega).$$

თეორემა 5. ვთქვათ, ξ და η დამოუკიდებელი მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $M(\xi\cdot\eta)=M\xi\cdot M\eta$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ

$$(\xi\cdot\eta)(\omega)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}(x_k\cdot y_n)\cdot I_{A_k\cap B_n}(\omega)\ \ (\omega\in\Omega).$$

აქედან

$$M(\xi\cdot\eta)=M(\sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}x_k\cdot y_n\cdot I_{A_k\cap B_n})=\sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}x_k\cdot y_nP(A_k\cap B_n)=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}x_k\cdot y_nP(A_k)\cdot P(B_n)=\sum_{k=1}^{p}x_kP(A_k)\cdot\sum_{n=1}^{q}y_nP(B_n)=M\xi\cdot M\eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მე-4 და მე-5 თეორემების საშუალებით მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 6. თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$M(\xi\cdot\eta)=M\xi\cdot M\eta,$$

ე.ი. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი თანამამრავლთა მათემატიკური ლოდინების ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ თეორემა 4-ის ძალით მოიძებნება დამოუკიდებელ მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი $(\xi_n)_{n\in N}$ და $(\eta_n)_{n\in N}$ მიმდევრობები, რომ შესრულდება ტოლობა

$$(\xi\cdot\eta)(\omega)=\lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)\cdot\eta_n(\omega)\ \ (\omega\in\Omega).$$

მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრისა და მე-5 თეორემის ძალით ვღებულობთ

$$M(\xi\cdot\eta)=\lim_{n\to\infty}M\xi_n\cdot\eta_n=\lim_{n\to\infty}\big(M\xi_n\cdot M\eta_n\big)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}M\xi_n\cdot\lim_{n\to\infty}M\eta_n=M\xi\cdot M\eta.$$

განსაზღვრება 7. შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \cdots, \xi_n$ სასრულო ოჯახს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ გაფართოებულ ნამდვილ რიცხვთა $\overline{R}$ ღერძის ყოველი $(x_k)_{1 \le k \le n}$ სასრული ოჯახისათვის სრულდება პირობა

$$P(\{\omega : \xi_1(\omega) \le x_1, \cdots, \xi_n(\omega) \le x_n\}) = \prod_{k=1}^{n} P(\{\omega : \xi_k(\omega) \le x_k\}).$$

განსაზღვრება 8. შემთხვევით სიდიდეთა $(\xi_n)_{n \in N}$ ოჯახს ეწოდება დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, თუ ყოველი $n \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $(\xi_k)_{1 \le k \le n}$ ოჯახი დამოუკიდებელია.

შენიშვნა 3. მართებულია თეორემა 6-ის ანალოგი დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნებისმიერი სასრული ოჯახისათვის, ე.ი., თუ

$$(\xi_k)_{1 \le k \le n}$$

დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახია, მაშინ

$$M(\prod_{k=1}^{n} \xi_k) = \prod_{k=1}^{n} M\xi_k.$$

თეორემა 7. $M(c\xi) = cM\xi$, ე.ი. მუდმივა გამოდის მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ იგივურად c-ს ტოლი შემთხვევითი სიდიდე და ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდე არიან დამოუკიდებლები. ამიტომ, თეორემა 6-ის ძალით, ვღებულობთ

$$M(c \cdot \xi) = Mc \cdot M\xi = cM\xi.$$

თეორემა 8 (კოში-ბუნიაკოვსკის [13]უტოლობა). ყოველი ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებისათვის მართებულია უტოლობა

$$|M(\xi \cdot \eta)| \le \sqrt{M\xi^2} \cdot \sqrt{M\eta^2}.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $M(\xi + x\eta)^2$ სიდიდე. ცხადია, რომ ერთის მხრივ, ყოველი $x \in R$-სთვის $M(\xi + x\eta)^2 \ge 0$. ამიტომ x-ის მიმართ

$$M(\xi + x\eta)^2 = M\xi^2 + 2M(\xi \cdot \eta) \cdot x + M\eta^2 \cdot x^2$$

[13]ბუნიაკოვსკი ვიქტორ იაკობის ძე [4(16).12.1804 ბარე, პოდოლსკის გუბერნია - 30.11 (12.12). 1889, პეტერბურგი] - რუსი მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი (1830, ადიუქტი 1828 წლიდან) და მისივე ვიცე პრეზიდენტი (1864 წლიდან; 1889 წლის სექტემბრიდან საპატიო ვიცე-პრეზიდენტი).

კვადრატული სამწევრის დეტერმინანტი არადადებითია, ე.ი.

$$(2M(\xi\cdot\eta))^2 - 4M\eta^2\cdot M\xi^2 \le 0,$$

რაც

$$|M(\xi\cdot\eta)| \le \sqrt{M\xi^2}\cdot\sqrt{M\eta^2}$$

პირობის ექვივალენტურია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 9. ყოველი ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის მართებულია $D\xi$ დისპერსიის გამოსათვლელი შემდეგი ფორმულა

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

დამტკიცება. გავიხსენოთ დისპერსიის განსაზღვრა

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

$M\xi$ მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამო ვღებულობთ

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) =$$
$$= M\ \xi^2 - M(2\xi M\xi) + M((M\xi)^2) =$$
$$= M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2. მარტივი შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის გამოთვლა შესაძლებელია შემდეგნაირად

$$D(\xi) = SUMPRODUCT(x^21 : x^2n, P1 : Pn) - SUMPRODUCT^2(x1 : xn, P1 : Pn).$$

თეორემა 10. ყოველი ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$D\xi = \min_{a\in R} M(\xi - a)^2.$$

დამტკიცება. გამოვთვალოთ $M(\xi-a)^2$ ფუნქციის მინიმუმი. ცხადია, რომ

$$M(\xi - a)^2 = M(\xi^2 - 2a\xi + a^2) = M\xi^2 - 2M\xi a + a^2,$$

ე.ი. $M(\xi-a)^2$ წარმოადგენს a პარამეტრის მიმართ არაუარყოფით კვადრატულ სამწევრს. ამიტომ მისი მინიმუმის წერტილი $a_{\min}$ აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{dM(\xi - a)^2}{da} = -2M\xi + 2a = 0.$$

აქედან, $a_{\min} = M\xi$, ე.ი.

$$\min_{a\in R} M(\xi - a)^2 = M(\xi - a_{\min})^2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. ყოველი ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის სრულდება შემდე- გი პირობები:
1) $D\xi \geq 0$,
2) $D\xi = 0 \Leftrightarrow (\exists c)(c \in R \rightarrow P(\{\omega : \xi(\omega) = c\}) = 1)$.

დამტკიცება. ვინაიდან $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ და $(\xi - M\xi)^2 \geq 0$, ამიტომ მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრიდან უშუალოდ მიიღება თეორემის 1) ნაწილის დამტკიცება.

დავამტკიცოთ თეორემის 2) ნაწილი.

ვთქვათ, $P(\{\omega : \xi(\omega) = c\}) = 1$, მაშინ $M\xi = c$ და $M\xi^2 = c^2$. ამიტომ თეორემა 9-ის ძალით, ვღებულობთ $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = c^2 - c^2 = 0$. პირიქით, თუ $D\xi = 0$, მაშინ $M(\xi - M\xi)^2 = 0$. ე.ი. $P(\{\omega : \xi(\omega) = M\xi\}) = 1$. ამიტომ საკმარისია c მუდმივას როლში განვიხილოთ $M\xi$ სიდიდე.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 12. თუ c მუდმივაა და ξ ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ მართებულია შემდეგი პირობები:
1) $D(c\xi) = c^2 D\xi$,
2) $D(c + \xi) = D\xi$.

დამტკიცება. დისპერსიის განსაზღვრისა და თეორემა 7-ის ძალით ვღებულობთ

$$D(c\xi) = M(c\xi - M(c\xi))^2 = M(c\xi - cM\xi)^2 = M(c^2(\xi - M\xi)^2) =$$

$$= c^2 M(\xi - M\xi)^2 = c^2 D\xi.$$

ამით თეორემის 1) ნაწილი დამტკიცებულია.

$\xi + c$ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის განსაზღვრის საფუძველზე, ვღებულობთ

$$D(c + \xi) = M((c + \xi) - M(c + \xi))^2 = M(c + \xi - Mc - M\xi)^2 =$$

$$= M(c + \xi - c - M\xi)^2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 13. ვთქვათ, ξ და η არიან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები, მაშინ

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

დამტკიცება. უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ შემთხვევითი სიდიდეები $\xi - M\xi$ და $\eta - M\eta$ დამოუკიდებლებია. ამ ფაქტის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$D(\xi + \eta) = M((\xi + \eta) - M(\xi + \eta))^2 = M((\xi - M\xi) + (\eta - M\eta))^2 =$$

$$= M((\xi - M\xi)^2 + 2(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) + (\eta - M\eta)^2) =$$

$$= M(\xi - M\xi)^2 + 2M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) + M(\eta - M\eta)^2 =$$
$$= D\xi + 2M(\xi - M\xi)M(\eta - M\eta) + D\eta =$$
$$= D\xi + 2(M\xi - M(M\xi))(M\eta - M(M\eta)) + D\eta =$$
$$= D\xi + 2(M\xi - M\xi)(M\eta - M\eta) + D\eta = D\xi + D\eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 5. მართებულია თეორემა 13-ის ანალოგი დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნებისმიერი სასრული $(\xi_k)_{1\le k\le n}$ ოჯახისათვის, კერძოდ

$$D\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k.$$

მართებულია შემდეგი

თეორემა 14. ვთქვათ, F_ξ არის აბსოლუტურად უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, მაშინ დისპერსიის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს შემდეგი სახე

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx.$$

განვიხილოთ შემთხვევით სიდიდეთა მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის გამოთვლის ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი 1 (პუასონის განაწილება). ვთქვათ,

$$\xi(\omega) = \sum_{n\in N} n \cdot I_{A_n}(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

არის λ ($\lambda > 0$) პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.

$$P(A_n) = P(\{\omega : \xi(\omega) = n\}) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \quad (n \in N).$$

მაშინ

$$M\xi = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} =$$
$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^{n-1}}{n!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = \lambda.$$

მეორეს მხრივ,

$$M\xi^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} +$$

$$+ \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda = \lambda(1+\lambda).$$

მე-9 თეორემის ძალით ვღებულობთ

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda(1+\lambda) - \lambda^2 = \lambda.$$

მაგალითი 2 (ჰიპერგეომეტრიული განაწილება). თუ ξ არის (n, a, A) პარამეტრებიანი ჰიპერგეომეტრიული წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ

$$M(\xi) = n \times \frac{a}{A}$$

და

$$D(\xi) = n \times \frac{a}{A} n \times (1 - \frac{a}{A}) \times (1 - \frac{n-1}{a-1}).$$

მაგალითი 3 (გეომეტრიული განაწილება). ვთქვათ,

$$\xi(\omega) = \sum_{n \in N} n \cdot I_{A_n}(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

q-პარამეტრიანი გეომეტრიული კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა $(0 < q < 1)$, ე.ი.

$$P(A_n) = P(\{\omega : \xi(\omega) = n\}) = (1-q)q^{n-1} \quad (n \in N).$$

მაშინ

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-q)q^{n-1} = (1-q) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = (1-q)(\sum_{n=1}^{\infty} q^n)' = (1-q)(\frac{1}{1-q})' =$$

$$= (1-q) \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q}.$$

მეორეს მხრივ,

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-q)q^{k-1} = (1-q) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k \cdot kq^{k-1}) = (1-q) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (kq^k)' =$$

$$= (1-q) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (kq^{k-1} \cdot q)' = (1-q) \cdot \big[(\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1})' q + \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}\big] =$$

$$= (1-q)\Big[\frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2}\Big] = \frac{2q}{(1-q)^2} + \frac{1}{(1-q)}.$$

ამიტომ

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2q}{(1-q)^2} + \frac{1}{(1-q)} - \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

მაგალითი 4. (ლეიბნიცის განაწილება). ვთქვათ,

$$\xi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot I_{A_n}(\omega) \ (\omega \in \Omega)$$

არის ლეიბნიცის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.

$$P(A_n) = P(\{\omega : \xi(\omega) = n\}) = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \quad (n \in N).$$

მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} = +\infty.$$

ამგვარად, ლეიბნიცის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისათვის მათემატიკური ლოდინი $M\xi$ (შესაბამისად, მათემატიკური დისპერსია $D\xi$) არ არის განსაზღვრული.

მაგალითი 5 (ბინომური განაწილება). ვთქვათ,

$$\xi(\omega) = \sum_{k=0}^{n} k I_{A_k}(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

არის (n,p)-პარამეტრებიანი ბინომური წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.

$$P(A_k) = P(\{\omega : \xi(\omega) = k\}) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k},$$

სადაც ნამდვილი რიცხვი p აკმაყოფილებს პირობას $0 < p < 1$, ხოლო მთელი რიცხვი k აკმაყოფილებს $0 \le k \le n$ პირობას.

მაშინ

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= n \cdot p \sum_{k-1=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= n \cdot p \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{s!((n-1)-s)!} \cdot p^s (1-p)^{(n-1)-s} =$$

$$= n \cdot p \sum_{s=0}^{n-1} C_{n-1}^s \cdot p^s (1-p)^{(n-1)-s} = n \cdot p.$$

შენიშვნა 5. ვთქვათ, η არის p პარამეტრიანი ბერნულის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.

$$\eta(\omega) = 0 \cdot I_{A_0}(\omega) + 1 \cdot I_{A_1}(\omega) \quad (\omega \in \Omega),$$

სადაც

$$P(A_0) = P(\{\omega : \eta(\omega) = 0\}) = 1 - p, \; P(A_1) = P(\{\omega : \eta(\omega) = 1\}) = p.$$

მაშინ

$$M\eta = 0 \cdot P(\{\omega : \eta(\omega) = 0\}) + 1 \cdot P(\{\omega : \eta(\omega) = 1\}) = 1 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

მეორეს მხრივ,

$$P(\{\omega : \eta^2(\omega) = 0\}) = 1 - p, \; P(\{\omega : \eta^2(\omega) = 1\}) = p,$$

ამიტომ

$$M(\eta^2) = 0 \cdot P(\{\omega : \eta^2(\omega) = 0\}) + 1 \cdot P(\{\omega : \eta^2(\omega) = 1\}) = 1 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

საბოლოოდ ვღებულობთ

$$D(\eta) = M\eta^2 - (M\eta)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

იმის გამო, რომ (n,p)-პარამეტრებიანი ბინომური წესით განაწილებული შემთხ- ვევითი სიდიდე ξ წარმოდგება n ცალი დამოუკიდებელი p პარამეტრიანი ბერნულის წესით განაწილებული $(\xi_k)_{1 \le k \le n}$ შემთხვევითი სიდიდის ჯამის სახით და p-პარამეტრიანი ბერნულის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი p-ს ტოლია, თეორემა 3-ის ძალით ვღებულობთ

$$M\xi = M(\sum_{k=1}^{n} \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} M\xi_k = np.$$

მე-13 თეორემის შენიშვნის ძალით მივიღებთ

$$D\xi = D(\sum_{k=1}^{n} \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k = np(1-p).$$

მაგალითი 5 (ნორმალური განაწილება). ვთქვათ, $\xi : \Omega \to R$ არის (m, σ^2)-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე $(m \in R, \sigma > 0)$, ე.ი.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in R).$$

მაშინ, თეორემა 1-ის ძალით, ვღებულობთ

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m) \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{m}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz + m = m.$$

დისპერსიის გამოსათვლელი ფორმულის ძალით ვღებულობთ

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f_\xi(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz,$$

სადაც $z = x - m$.

აქედან, $t = \frac{z}{\sigma}$ ჩასმის შედეგად მივიღებთ

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2,$$

ვინაიდან

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dz = \sqrt{2\pi}.$$

მაგალითი 6 (თანაბარი განაწილება). ვთქვათ, $\xi : \Omega \to R$ არის $[a,b]$ $(a < b)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{თუ } x \in [a,b] \\ 0, & \text{თუ } x \notin [a,b] \end{cases}.$$

მაშინ

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

მეორეს მხრივ,

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

აქედან, მე-9 თეორემის ძალით, ვღებულობთ

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

მაგალითი 7 (კოშის განაწილება). ვთქვათ, $\xi : \Omega \to R$ არის კოშის კანონით განაწილებული შემთხვევით სიდიდე, ე.ი.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (x \in R).$$

შევნიშნოთ, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$$

არ არსებობს, საიდანაც ვასკვნით რომ კოშის კანონით განაწილებული შემთხვევით სიდიდეს მათემატიკური ლოდინი არ გააჩნია (თუმცა განაწილების სიმკვრივის ლუწობიდან გამომდინარე მოსალოდნელი იყო, რომ მისი მათემატიკური ლოდინი ყოფილიყო ნულის ტოლი).

მაგალითი 8 (მაჩვენებლიანი განაწილება). ვთქვათ, $\xi : \Omega \to R$ არის λ-პარამეტრიანი მაჩვენებლიანი წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{თუ } x \geq 0; \\ 0, & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

მაშინ

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx =$$

$$= \lambda\big(-\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x}\big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\big) = \lambda\big(-\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\lambda}\frac{l}{e^{\lambda l}} + \frac{1}{\lambda^2}\big) =$$

$$= \lambda\big(-\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda e^{\lambda l}} + \frac{1}{\lambda^2}\big) = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

ანალოგიური გამოთვლებით მივიღებთ, რომ

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx - (M\xi)^2 = \lambda\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda} x dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

მაგალითი 9(ლოგნორმალური განაწილება). თუ ξ არის (m, σ^2) პარამეტრებიანი ლოგნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ

$$M(\xi) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$$

და

$$D(\xi) = e^{2m+2\sigma^2} - e^{2m+\sigma^2}.$$

მაგალითი 10(ვეიბულის განაწილება). თუ ξ არის (α, β) პარამეტრებიანი ვეიბულის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ

$$M(\xi) = \beta\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}),$$

და

$$D(\xi) = \beta^2\{\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\alpha})\}.$$

მაგალითი 11 (სინგულარული განაწილება). განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე ξ_{Cantor}, განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ზომით აღჭურვილ $[0,1]$ ინტერვალზე.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\int_0^1 \xi_{Cantor}(y)dy + \int_0^1 F(x)dx = 1,$$

სადაც F აღნიშნავს $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრულ კანტორის ფუნქციას.

ამიტომ

$$M\xi_{Cantor} = \int_0^1 \xi_{Cantor}(y)dy = 1 - \int_0^1 F(x)dx.$$

შევნიშნოთ, რომ $\Delta_1 = \{(x,y) : x \in [0,1], 0 \le y \le F(x)\}$ სიმრავლის $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ წერტილის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ π კუთხით შემობრუნების შედეგად მიღებული Δ_2 სიმრავლისათვის სრულდება შემდეგი პირობები:

ა) $b_2(\Delta_1 \cap \Delta_2) = 0$,

ბ) $b_2(\Delta_1) = b_2(\Delta_2)$,

გ) $\Delta_1 \cup \Delta_2 = [0,1] \times [0,1]$.

ამიტომ $b_2(\Delta_1) = b_2(\Delta_2) = \frac{1}{2}$, საიდანაც ვღებულობთ

$$M\xi_{Cantor} = 1 - \int_0^1 F(x)dx = 1 - b_2(\Delta_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ახლა გამოვითვალოთ $D(\xi_{Cantor})$. შევნიშნოთ, რომ $\pi M\xi^2_{Cantor}$ წარმოადგენს $0Y$ ღერძის გარშემო Δ_2 ფიგურის ბრუნვით მიღებული სხეულის

მოცულობას, რომელიც რიცხობრივად ტოლია $[0,1]\times[0,1]$ ფიგურისა და შემდეგი

$$[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\times[0,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{9},\frac{2}{9}]\times[0,\frac{1}{4}]\cup[\frac{7}{9},\frac{8}{9}]\times[0,\frac{3,}{4}]\cup\cdots$$

სიმრავლის $0Y$ ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობათა სხვაობას. ამიტომ

$$M\xi^2_{Cantor}=1-[\frac{1}{2}((\frac{2}{3})^2-(\frac{1}{3})^2)+\frac{1}{4}((\frac{2}{9})^2-(\frac{1}{9})^2)+$$
$$\frac{3}{4}((\frac{8}{9})^2-(\frac{7}{9})^2)+\cdots].$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ

$$D\xi^2_{Cantor}=M\xi^2_{Cantor}-(M\xi_{Cantor})^2=\frac{3}{4}-[\frac{1}{2}((\frac{2}{3})^2-(\frac{1}{3})^2)+\frac{1}{4}((\frac{2}{9})^2-(\frac{1}{9})^2)+$$
$$\frac{3}{4}((\frac{8}{9})^2-(\frac{7}{9})^2)+\cdots].$$

შენიშვნა 7. (მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის ფიზიკური შინაარსი). ξ-თი აღვნიშნოთ ერთეულოვანი მასის მქონე ფხვნილის R ღერძზე მიმობნევის რაიმე წესი. ბუნებრივად ისმის შემდეგი კითხვა: რა ფიზიკური შინაარსია ჩადებული $M\xi$ და $D\xi$ -სიდიდეებში ?

თეორიული მექანიკის კურსიდან კარგადაა ცნობილი, რომ თუ $x_k\in R$ წერტილში მოთავსებულია p_k წონის ტვირთი $(1\le k\le n)$ და $\sum_{k=1}^n p_k=1$, მაშინ ამ წერტილებისაგან შედგენილი სისტემის სიმძიმის ცენტრი x_c გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$x_c=\sum_{k=1}^n x_k\cdot p_k.$$

თუ ერთეულოვანი მასის ნივთიერების მიმობნევა R ღერძზე დისკრეტული სიდიდეა და მისი განაწილება მოცემულია შემდეგი ცხრილის სახით

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

,

მაშინ ცხადია, რომ $M\xi=x_c$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $M\xi$ ყოფილა R ღერძზე ξ წესით მიმობნეული ერთეულოვანი მასის მქონე ფხვნილის სიმძიმის ცენტრი.

ზოგად შემთხვევაში, ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრის გამო ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $M\xi$ წარმოადგენს ერთეულოვანი მასის ნივთიერების R ღერძზე ξ წესით მიმობნეული ფხვნილის სიმძიმის ცენტრს.

მეორეს მხრივ, თუ ξ არის მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ

$$D\xi = \sum_{k=1}^{n}(x_k - M\xi)^2 p_k.$$

ამასთან, სიდიდე $D\xi$ მით უფრო დიდია, რაც უფრო დიდია $((x_k - M\xi)^2)_{1\leq k\leq n}$ მიმდევრობის ელემენტები. ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ რაც უფრო შორს არიან $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ წერტილები განლაგებული ფხვნილის $M\xi$ სიმძიმის ცენტრიდან, მით უფრო დიდია დისპერსია. პირიქითაც, რაც უფრო ახლოს არიან $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ წერტილები განლაგებული ფხვნილის $M\xi$ სიმძიმის ცენტრთან, მით უფრო მცირეა დისპერსია. კერძოდ, თუ $x_1 = \cdots = x_n = M\xi$, მაშინ $D\xi = 0$.

ამგვარად, $D\xi$ ყოფილა R-ღერძზე ξ-წესით მიმოპნეული ერთეულოვანი მასის მქონე ფხვნილის გაბნეულობის გარკვეული რიცხვითი მახასიათებელი. კერძოდ, ის გვიჩვენებს, თუ რამდენად მჭიდროდ ან მეჩხრად არიან ფხვნილის ნაწილაკები განლაგებული მისივე სიმძიმის ცენტრის გარშემო.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ξ_1 და ξ_2 შემთხვევითი სიდიდეები, სადაც

ξ_1	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

,

ξ_2	-2	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

.

მაშინ $M\xi_1 = M\xi_2 = 0$, ე.ი. ξ_1 და ξ_2 წესით მიმობნეულ ფხვნილის მასათა სიმძიმის ცენტრები ერთმანეთს ემთხვევა, მაგრამ

$$D\xi_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$D\xi_2 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

ამგვარად, R ღერძზე ξ_1 წესით მიმობნეული ერთეულოვანი მასის მქონე ფხვნილის ნაწილაკები უფრო ახლოსაა მის სიმძიმის ცენტრთან, ვიდრე ξ_2 წესით მიმოპნეული ფხვნილის ნაწილაკები. ზოგად შემთხვევაში შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის ფიზიკური შინაარსი იგივეა, რაც მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების შემთხვევაში.

ტესტები

1.8.1. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილებები მოცემულია შემდეგი სქემების საშუალებით

ξ	-1	0	1	2
P	$0,3$	$0,2$	$0,1$	$0,4$

,

η	-1	0	-2
P	$0,5$	$0,3$	$0,2$

.

მაშინ

1) $M(3\xi - 4\eta)$ ტოლია

ა) $5,3$, ბ) $5,4$, გ) $5,5$, დ) $5,6$;

2) $D(3\xi - 4\eta)$ ტოლია

ა) $20,4,3$, ბ) $21,5$, გ) $22,6$, დ) $23,7$;

1.8.2. აბსოლუტურად უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} .$$

მაშინ

1) $M(3\xi - 4)$ ტოლია

ა) 3, ბ) -3, გ) 4, დ) -4;

2) $D(\sqrt{18}\xi - 4)$ ტოლია

ა) $0,3$, ბ) $0,7$, გ) 1, დ) $1,3$.

1.8.3. ξ_1 არის $(3,25)$-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ξ_2 არის $(18,20)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ξ_3 არის $\lambda = 5$ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

1) $M(1\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3)$ ტოლია

ა) 34, ბ) 35, გ) 36, დ) 37;

2) თუ ξ_1, ξ_2, ξ_3 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $D(1\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4)$ ტოლია

ა) $25\frac{1}{3}$, ბ) $26\frac{1}{3}$, გ) $27\frac{1}{3}$, დ) $28\frac{1}{3}$.

1.8.4. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილებები მოცემულია შემდეგი სქემების საშუალებით

ξ	-1	1	2
P	$0,2$	$0,1$	$0,7$

,

η	2	3	-1
P	$0,3$	$0,3$	$0,4$

.

მაშინ

1) $\xi\eta$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას აქვს სახე

ა)

$\xi\eta$	-3	-2	-1	1	2	3	4	6
P	$0,06$	$0,34$	$0,04$	$0,08$	0.03	$0,03$	$0,21$	$0,21$

,

ბ)

$\xi\eta$	-3	-2	-1	1	2	3	4	6
P	$0,05$	$0,35$	$0,03$	$0,09$	0.03	$0,02$	$0,22$	$0,21$

.

2) $\xi + \eta$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას აქვს სახე

ა)

$\xi+\eta$	-2	0	1	2	3	4	5
P	$0,08$	$0,04$	$0,34$	$0,06$	0.03	$0,24$	$0,21$

,

ბ)

$\xi+\eta$	-2	0	1	2	3	4	5
P	$0,06$	$0,06$	$0,34$	$0,06$	0.02	$0,25$	$0,21$

.

§ 1.9. რიცხვითი მახასიათებლები

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცეა. ξ და η არიან ისეთი შემთხვევითი სიდიდეები, რომ სრულდება პირობები:
$0 < D\xi < \infty$ და $0 < D\eta < \infty$.

განსაზღვრება 1. $\rho(\xi,\eta)$ სიდიდეს, განსაზღვრულს პირობით

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}},$$

ეწოდება კორელაციის კოეფიციენტი ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს შორის.

შენიშვნა 1. ξ და η მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეებს შორის კორელაციის კოეფიციენტის გამოსათვლელად გამოიყენება $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $CORREL$(იხ.გვ.210 ან 213).

მართებულია შემდეგი

თეორემა 1. ვთქვათ, ξ და η ისეთი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომ $0 < D\xi < \infty$ და $0 < D\eta < \infty$. მაშინ $|\rho(\xi,\eta)| \leq 1$.

დამტკიცება.

$$0 \leq D(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \pm \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}) = M(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \pm \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}})^2 = 2 \pm 2\rho(\xi,\eta),$$

საიდანაც ვღებულობთ $|\rho(\xi,\eta)| \leq 1$.

თეორემა 2. თუ ξ და η ისეთი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომ $0 < D\xi < \infty$ და $0 < D\eta < \infty$, მაშინ $|\rho(\xi,\eta)| = 0$.

დამტკიცება. ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობიდან გამომდინარეობს $\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$ და $\frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}$ შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებ-

ლობაც. დამოუკიდებელ შემთხვევითი სიდიდეების ნამრავლის ლოდინის თვისების ძალით ვღებულობთ

$$\rho = M\Big[\Big(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\Big)\cdot\Big(\frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\Big)\Big] =$$

$$= M\Big(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\Big)\cdot M\Big(\frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\Big) = 0.$$

მაგალითი 1. აქვე შევნიშნოთ, რომ თეორემა 2-ის შებრუნებული დებულება საზოგადოდ არაა მართებული, ე.ი. შესაძლებელია ისეთი ξ და η არადამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების აგება, რომ $0 < D\xi < \infty$, $0 < D\eta < \infty$ და $\rho(\xi,\eta) = 0$. მართლაც, ვთქვათ

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0;1], \mathcal{B}([0;1]), b_1).$$

ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები განვსაზღვროთ შემდეგი თანაფარდობით:

$$\xi(\omega) = 4\cdot I_{[0,\frac{1}{4}[}(\omega) + 0_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}[}(\omega) - 4_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}[}(\omega) + 0_{[\frac{3}{4},1]}(\omega),$$

$$\eta(\omega) = 0\cdot I_{[0,\frac{1}{4}[}(\omega) + 4_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}[}(\omega) + 0_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}[}(\omega) - 4_{[\frac{3}{4},1]}(\omega).$$

შევნიშნოთ, რომ

$$M\xi = M\eta = 0,\ D\xi = D\eta = 8$$

და

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} =$$

$$= \frac{M\xi\eta}{8} = \frac{M0}{8} = 0.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ξ და η არ არიან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები. მართლაც,

$$P(\{\omega : \xi < 3,\ \eta < 3\}) = \frac{1}{2},$$

$$P(\{\omega : \xi < 3\}) = \frac{3}{4},\ P(\{\omega : \eta < 3\}) = \frac{3}{4},$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ

$$P(\{\omega : \xi < 3, \eta < 3\}) \neq P(\{\omega : \xi < 3\})\cdot P(\{\omega : \eta < 3\}).$$

თეორემა 3. თეორემა 1-ის პირობებში $|\rho(\xi,\eta)| = 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი ნამდვილი რიცხვები $a \neq 0$ და b, რომ

$$P(\{\omega : \eta(\omega) = a\xi(\omega) + b\}) = 1.$$

დამტკიცება.

საკმარისობა. ვთქვათ,

$$P(\{\omega : \eta(\omega) = a\xi(\omega) + b\}) = 1.$$

აღვნიშნოთ $M\xi = \alpha$ და $\sqrt{D\xi} = \beta$. მაშინ

$$\rho(\xi,\eta) = M\frac{\xi-\alpha}{\beta}\cdot\frac{a\xi+b-a\alpha-b}{|a|\beta} = sign(a).$$

აუცილებლობა. დავუშვათ, რომ $\Big|\rho(\xi,\eta)\Big| = 1$. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\rho(\xi,\eta) = 1$. მაშინ

$$D\Big(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\Big) = 2(1-\rho(\xi,\eta)) = 0.$$

დისპერსიის თვისების ძალით კონკრეტული $c \in R$ რიცხვისათვის ვღებულობთ

$$P\Big(\{\omega : \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}} = c\}\Big) = 1,$$

საიდანაც

$$P\Big(\{\omega : \xi(\omega) = \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}\cdot\eta(\omega) - \sqrt{D\xi}\Big(\frac{M\eta}{\sqrt{D\eta}} - c\Big) + M\xi\}\Big) = 1.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\rho(\xi,\eta) = -1$, ვღებულობთ

$$D\Big(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} + \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\Big) = 2(1+\rho(\xi,\eta)) = 0.$$

ანალოგიურად, დისპერსიის თვისების ძალით ვასკვნით ისეთი $d \in R$ რიცხვის არსებობას, რომ

$$P\Big(\{\omega : \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} + \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}} = d\}\Big) = 1,$$

ე.ი.

$$P\Big(\{\omega : \xi(\omega) = -\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}\cdot\eta(\omega) + \sqrt{D\xi}\frac{M\eta}{\sqrt{D\eta}} + d\sqrt{D\xi} + M\xi\}\Big) = 1.$$

შენიშვნა 2. კორელაციის კოეფიციენტი ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის დამოკიდებულების ხარისხის რაოდენობრივი მახასიათებელია. სასარგებლოა მისი, როგორც ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის "კუთხის" კოსინუსად წარმოდგენა. მართლაც, ვინაიდან $|\rho(\xi,\eta)| \leq 1$, ამიტომ $[0,\pi]$ ინტერვალიდან მოიძებნება ერთადერთი რიცხვი ϕ, ისეთი, რომ $\cos\phi =$

$\rho(\xi,\eta)$. სწორედ ამ ϕ რიცხვს უწოდებენ კუთხეს ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებს შორის და აღნიშნავენ $\widehat{(\xi,\eta)}$ სიმბოლოთი. ე.ი. $\widehat{(\xi,\eta)} = arccos(\rho(\xi,\eta))$. ამ ტერმინებში საინტერესოა თეორემა 2-ისა და თეორემა 3-ის შემდეგი ინტერპრეტაციები: თუ ξ და η ისეთი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომ $0 < D\xi < \infty$ და $0 < D\eta < \infty$, მაშინ ისინი ორთოგონალურებია, ე.ი. $\widehat{(\xi,\eta)} = \frac{\pi}{2}$.

თუ $\widehat{(\xi,\eta)}$ ტოლია 0-ის ან π-სი, მაშინ η შემთხვევითი სიდიდე P-თითქმის ყველა ω წერტილისათვის წარმოადგენს ξ შემთხვევითი სიდიდისა და მუდმივი ერთეულოვანი ფუნქციის წრფივ კომბინაციას.

მაგალითი 2. განვიხილოთ გადამცემი მოწყობილობა. ξ-თი აღვნიშნოთ გადასაცემი სიგნალი. ხარვეზების გამო მიმღები ღებულობს სიდიდეს $\eta(\omega) = \alpha\xi(\omega) + \Delta(\omega)$, სადაც α გაძლიერების კოეფიციენტია, ხოლო $\Delta(\omega)$ არის ხარვეზი. ვიგულისხმოთ, რომ შემთხვევითი სიდიდეები Δ და ξ არიან დამოუკიდებლები. ამასთან $M\xi = a, D\xi = 1$, ხოლო $M\Delta = 0$, $D\Delta = \sigma^2$. თუ დავითვლით კორელაციის კოეფიციენტს ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს შორის, მივიღებთ

$$\rho(\xi,\eta) = M\Big((\xi - a)\cdot\frac{\alpha\xi + \Delta - a\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\sigma^2}}\Big) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\sigma^2}}.$$

თუ σ არის მცირე α სიდიდესთან მიმართებით, მაშინ $\rho(\xi,\eta)$ ახლოსაა 1-თან და თეორემა 3-ის ძალით, შესაძლებელია η-ს საშუალებით ξ შემთხვევითი სიდიდის აღდგენა.

განვიხილოთ შემთხვევით სიდიდეთა სხვა რიცხვითი მახასიათებლები.

განსაზღვრება 2. ξ შემთხვევითი სიდიდის k-ური რიგის $(k \in N)$ მომენტი ეწოდება სიდიდეს $M\xi^k$ და აღინიშნება α_k სიმბოლოთი, ე.ი.

$$\alpha_k = M\xi^k \ (k \in N).$$

განსაზღვრება 3. სიდიდეს $M(\xi - M\xi)^k$ $(k \in N)$ ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის k-ური რიგის ცენტრალური მომენტი და აღინიშნება μ_k სიმბოლოთი, ე.ი.

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k \ (k \in N).$$

შენიშვნა 3. შევნიშნოთ, რომ დისპერსია $D\xi$ არის მეორე რიგის ცენტრალური მომენტი.

ვთქვათ, მოცემულია შემთხვევით სიდიდეთა სასრული ოჯახი $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$.

განსაზღვრება 4. სიდიდეს

$$M\xi_1^{k_1}\cdots\xi_n^{k_n}$$

ეწოდება $k_1+\cdots+k_n$ რიგის შერეული მომენტი და აღინიშნება $\alpha_{(k_1,\cdots,k_n)}$ სიმბოლოთი, ე.ი.

$$\alpha_{(k_1,\cdots,k_n)} = M\xi_1^{k_1}\cdots\xi_n^{k_n} \quad (k_1,\cdots,k_n \in N).$$

განსაზღვრება 5. სიდიდეს

$$M(\xi_1 - M\xi_1)^{k_1}\cdots(\xi_n - M\xi_n)^{k_n}$$

ეწოდება $k_1+\cdots+k_n$ რიგის ცენტრალური მომენტი და აღინიშნება $\mu_{(k_1,\cdots,k_n)}$ სიმბოლოთი, ე.ი.

$$\mu_{(k_1,\cdots,k_n)} = M(\xi_1 - M\xi_1)^{k_1}\cdots(\xi_n - M\xi_n)^{k_n} \ (k_1,\cdots,k_n \in N).$$

განსაზღვრება 6. ξ შემთხვევითი სიდიდის ასიმეტრიის კოეფიციენტი ეწოდება $\frac{\mu_3}{\sigma^3}$ რიცხვს და აღინიშნება A_s სიმბოლოთი, ე.ი.

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

შენიშვნა 4. მარტივი დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის ასიმეტრიის კოეფიციენტის გამოსათვლელად გამოიყენება $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $KURT$. თუ გვაქვს ξ სემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები $x_1,\cdots,x_n$, მაშინ $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $KURT(x1:xn)$ იძლევა ξ შემთხვევითი სიდიდის ასიმეტრიის კოეფიციენტის გარკვეულ მიახლოებას. მაგალითად, $KURT(\{-1;-3;-80;-80\}) = -5,990143738$.

განსაზღვრება 7. ξ შემთხვევითი სიდიდის ექსცესი ეწოდება $\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$ რიცხვს და აღინიშნება E_x სიმბოლოთი, ე.ი.

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

შენიშვნა 5.მარტივი დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის ექსცესის გამოსათვლელად გამოიყენება $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $SKEW$. თუ გვაქვს ξ სემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები $x_1,\cdots,x_n$, მაშინ $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $SKEW(x1:xn)$ იძლევა ξ შემთხვევითი სიდიდის ექსცესის გარკვეულ მიახლოებას. მაგალითად,

$$SKEW(\{-1;-1;3;-3\}) = -0,17456105.$$

განსაზღვრება 8. თუ F_ξ არის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, მაშინ ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა ეწოდება ისეთ γ რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება პირობები:

$$F_\xi(\gamma-0) \le \frac{1}{2} \quad , \quad F_\xi(\gamma+0) \ge \frac{1}{2},$$

სადაც $F_\xi(\gamma-0)$ და $F_\xi(\gamma+0)$ აღნიშნავენ შესაბამისად F_ξ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრებს γ წერტილში.

შენიშვნა 6 მარტივი დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანას ითვლის $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $MEDIAN$. თუ ξ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები $x_1,\cdots,x_n$ დალაგებულია ზრდის მიხედვით, მაშინ მედიანა არის x_{k+1}, როცა $n=2k+1$, და $=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$, როცა $n=2k$. მაგალითად, $MEDIAN\{6;7;100\}=7$.

განსაზღვრება 9. დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის მოდა ეწოდება მის იმ შესაძლო მნიშვნელობას, რომლის შესაბამისი ალბათობა არის უდიდესი.

განსაზღვრება 10. აბსოლუტურად უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის მოდა ეწოდება მისი განაწილების სიმკვრივის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილს.

შენიშვნა 7. მარტივი დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის მოდის გამოსათვლელად გამოიყენება $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $MODE$. ის იძლევა ξ სემთხვევითი სიდიდის უმცირესი მოდის გარკვეულ მიახლოებას. მაგალითად, $MODE\{7;11;6;11;18;18\}=7$.

განსაზღვრება 11. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება უნიმოდალური, თუ მას გააჩნია ერთადერთი მოდა. წინააღმდეგ შემთხვევაში შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება პოლიმოდალური.

ტესტები

1.9.1. ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F},P)=([0,1],\mathcal{B}([0,1]),b_1)$. ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები განსაზღვრულია შემდეგი წესით

$$\xi(\omega)=\begin{cases}0, & \omega\in[\frac12,\frac34[\\ 1, & \omega\in[0,\frac12[\\ 2, & \omega\in[\frac34,1]\end{cases},$$

$$\eta(\omega)=\begin{cases}2, & \omega\in[0,\frac12[,\\ -1, & \omega\in[\frac12,0]\end{cases}.$$

მაშინ კორელაციის კოეფიციენტი $\rho(\xi,\eta)$ ტოლია

ა) $-0,2$, ბ) $-0,1$, გ) 0, დ) $0,1$.

1.9.2. მოცემულია ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება

ξ	-1	0	-1
P	$0,6$	$0,1$	$0,3$

.

მაშინ

1) $M(\xi^3)$ ტოლია

ა) $-0,1$, ბ) $-0,2$, გ) $-0,3$, დ) $-0,4$;

2) $M(\xi - M\xi)^4$ ტოლია

ა) $1,948$, ბ) $0,9481$, გ) $0,8481$, დ) $0,7481$.

1.9.3. ξ არის $(0,1)$-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

1) კენტი რიგის მომენტი α_{2k+1} ტოლია

ა) 1, ბ) 0, გ) $2k+1$, დ) $2k$;

2) მეორე რიგის ცენტრალური მომენტი μ_2 ტოლია

ა) 0, ბ) 1, გ) 2, დ) 3;

3) მედიანა γ ტოლია

ა) 0, ბ) 1, გ) 2, დ) 3;

4) მოდა ტოლია

ა) 0, ბ) 1, გ) 2, დ) 3.

1.9.4. ξ არის $(0,4)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

1) მეორე რიგის ცენტრალური მომენტი μ_2 ტოლია

ა) 6, ბ) 7, გ) 8, დ) 9;

3) მედიანა γ ტოლია

ა) 1, ბ) 2, გ) 3, დ) 4;

4) მოდა ტოლია

ა) $[0,4]$, ბ) $[0,3]$, გ) $[0,2]$, დ) $[0,1]$.

1.9.5. მოცემულია ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება

ξ	-1	2	3
P	$0,3$	$0,4$	$0,3$

.

მაშინ

1) მედიანა γ ტოლია

ა) 1, ბ) 2, გ) 3, დ) 4;

2) მოდა ტოლია

ა) -1, ბ) 2, გ) 3, დ) 4.

1.9.6. აბსოლუტურად უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

მაშინ

1) მედიანა γ ტოლია

ა) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ბ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, გ) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, დ) $\frac{\sqrt{7}}{7}$;

2) მოდა ტოლია

ა) 1, ბ) 2, გ) 3, დ) 4.

§ 1.10. შემთხვევითი ვექტორის განაწილების ფუნქცია

განვიხილოთ (Ω, F, P) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეთა $(\xi_k)_{1\le k\le n}$ მიმდევრობა.

განსაზღვრება 1. ასახვას $(\xi_1,\cdots,\xi_n):\Omega\to R^n$, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall\omega)(\omega\in\Omega\to(\xi_1,\cdots,\xi_n)(\omega)=(\xi_1(\omega),\cdots,\xi_n(\omega))),$$

ეწოდება n-განზომილებიანი შემთხვევითი ვექტორი, ანუ n-განზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე.

განსაზღვრება 2. ასახვას $F_{\xi_1,\cdots,\xi_n}:R^n\to R$, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall(x_1,\cdots,x_n))((x_1,\cdots,x_n)\in R^n\to F_{\xi_1,\cdots,\xi_n}((x_1,\cdots,x_n))=$$
$$=P(\{\omega:\xi_1<x_1,\cdots,\xi_n<x_n\})),$$

ეწოდება n-განზომილებიანი შემთხვევითი $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ ვექტორის ერთობლივი განაწილების ფუნქცია.

განსაზღვრება 3. შემთხვევით $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ ვექტორს ეწოდება დისკრეტული ტიპის, თუ ყოველი i-ური მდგენელი ξ_i დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა $(1\le i\le n)$.

ანალოგიურად განისაზღვრება აბსოლუტურად უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი ვექტორი.

ერთობლივი განაწილების $F_{\xi_1,\cdots,\xi_n}$ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

$$1.\ \lim_{x_i\to\infty,\ 1\le i\le n}F_{\xi_1,\cdots,\xi_n}((x_1,\cdots,x_n))=1,$$
$$2.\ \lim_{x_i\to-\infty,\ 1\le i\le n}F_{\xi_1,\cdots,\xi_n}((x_1,\cdots,x_n))=0.$$

განვიხილოთ $n=2$ შემთხვევაში საკოორდინატო მართკუთხედში შემთხვევითი ვექტორის ჩავარდნის ალბათობის გამოთვლის საკითხი.
მართებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1. მართებულია შემდეგი ფორმულა

$$(\forall k)(\forall x_k)(\forall y_k)(1\le k\le 2\ \&\ x_k\in R\ \&\ y_k\in R\ \&\ x_1<x_2\ \&\ y_1<y_2\to$$

$$P(\{\omega : (\xi_1, \xi_2)(\omega) \in [x_1; x_2[\times[y_1; y_2[\}) = F_{\xi_1,\xi_2}((x_2, y_2)) - F_{\xi_1,\xi_2}((x_1, y_2))+$$
$$+F_{\xi_1,\xi_2}((x_1, y_1)) - F_{\xi_1,\xi_2}((x_2, y_1)),$$

სადაც
$$[x_1; x_2[\times[y_1; y_2[= \{(x, y)|x_1 \le x < x_2,\ y_1 \le y < y_2\}.$$

დამტკიცება. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$A_{(a,b)} = \{\omega : (\xi_1, \xi_2)(\omega) \in] - \infty; a[\times] - \infty; b[\} \quad (a \in R, b \in R),$$

მაშინ

$$\{\omega : (\xi_1, \xi_2)(\omega) \in]x_1; x_2[\times]y_1; y_2[\} = (A_{(x_2,y_2)} \setminus A_{(x_2,y_1)}) \setminus (A_{(x_1,y_2)} \setminus A_{(x_1,y_1)}).$$

ამიტომ

$$P(\{\omega : (\xi_1, \xi_2)(\omega) \in]x_1; x_2[\times]y_1; y_2[\}) = P((A_{(x_2,y_2)} \setminus A_{(x_2,y_1)})) -$$
$$P((A_{(x_1,y_2)} \setminus A_{(x_1,y_1)})) = (P(A_{(x_2,y_2)}) - P(A_{(x_2,y_1)})) - (P(A_{(x_1,y_2)})-$$
$$P(A_{(x_1,y_1)})) = P(A_{(x_2,y_2)}) - P(A_{(x_2,y_1)}) - P(A_{(x_1,y_2)}) + P(A_{(x_1,y_1)}) =$$
$$F_{\xi_1,\xi_2}((x_2, y_2)) - F_{\xi_1,\xi_2}((x_2, y_1)) - F_{\xi_1,\xi_2}((x_1, y_2)) + F_{\xi_1,\xi_2}((x_1, y_1)).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ R^2 სივრცის რაიმე (x, y) წერტილი. თუ არსებობს ორმაგი ზღვარი

$$\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0} \frac{P(\{\omega : (\xi_1, \xi_2)(\omega) \in [x - \Delta x; x + \Delta x[\times]y - \Delta y; y + \Delta y[\})}{4\Delta x\Delta y},$$

მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ ორგანზომილებიანი (ξ_1, ξ_2) შემთხვევითი ვექტორის განაწილების F_{ξ_1,ξ_2} ფუნქციას (x, y) წერტილში გააჩნია სიმკვრივე $f_{\xi_1,\xi_2}(x, y)$, რომელიც რიცხობრივად ზემოთხსენებული ორმაგი ზღვრის ტოლია.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 2. თუ F_{ξ_1,ξ_2} ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი კერძო წარმოებულები (x_0, y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში, მაშინ ორგანზომილებიანი შემთხვევით ვექტორს (x_0, y_0) წერტილში გააჩნია განაწილების სიმკვრივე $f_{\xi_1,\xi_2}(x_0, y_0)$, რომელიც გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 F_{\xi_1,\xi_2}(x_0, y_0)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 F_{\xi_1,\xi_2}(x_0, y_0)}{\partial y\partial x}.$$

დამტკიცება. თეორემა 1-ის ძალით ვღებულობთ

$$P(\{\omega : (\xi_1, \xi_2)(\omega) \in [x - \Delta x; x + \Delta x[\times]y - \Delta y; y + \Delta y[\}) =$$

$$= F_{\xi_1,\xi_2}((x_0+\Delta x, y_0)) - F_{\xi_1,\xi_2}((x_0+\Delta x, y_0-\Delta y)) -$$

$$F_{\xi_1,\xi_2}((x_0-\Delta x, y_2)) + F_{\xi_1,\xi_2}((x_0-\Delta x, y_0-\Delta y)).$$

ზოგადობის შეუზღუდავად Δx-ისა და Δy -ის სიმცირის გამო შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ წერტილები $(x_0-\Delta x, y_0)$, $(x_0-\Delta x, y_0+\Delta y)$, $(x_0, y_0-\Delta y), (x_0, y_0+\Delta y)$ ეკუთვნიან (x_0, y_0) წერტილის ისეთ მიდამოს, რომელშიც F_{ξ_1,ξ_2} ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი კერძო წარმოებულები. ლაგრანჟის [14] თეორემის ძალით იარსებებს ისეთი $\theta_1 \in]0;1[$, რომ შესრულდება ტოლობა

$$[F_{\xi_1,\xi_2}((x_0+\Delta x, y_0)) - F_{\xi_1,\xi_2}((x_0+\Delta x, y_0-\Delta y))] -$$

$$[F_{\xi_1,\xi_2}((x_0-\Delta x, y_2)) - F_{\xi_1,\xi_2}((x_0-\Delta x, y_0-\Delta y))] =$$

$$= 2\Delta x \cdot \frac{\partial F_{\xi_1 \xi_2}}{\partial x}(x_0-\Delta x+2\theta_1\Delta x, y_0-\Delta y).$$

ლაგრანჟის თეორემის მეორედ გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით ისეთი $\theta_2 \in]0;1[$ რიცხვის არსებობას, რომ

$$P(\{\omega : (\xi_1,\xi_2)(\omega) \in [x-\Delta x; x+\Delta x[\times]y-\Delta y; y+\Delta y[\}) =$$

$$= 4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \frac{\partial^2 F_{\xi_1,\xi_2}}{\partial y \partial x}(x_0-\Delta x+2\theta_1\Delta x, y_0-\Delta y+2\theta_2).$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0} \frac{P(\{\omega : (\xi_1,\xi_2)(\omega) \in [x-; x+\Delta x[\times]y-\Delta y; y+[\})}{4\Delta x\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0} \frac{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \frac{\partial^2 F_{\xi_1,\xi_2}}{\partial y \partial x}(x_0-\Delta x+2\theta_1\Delta x, y_0-\Delta y+2\theta_2)}{4\Delta x\Delta y} =$$

$$= \frac{\partial^2 F_{\xi_1,\xi_2}(x_0,y_0)}{\partial y \partial x}.$$

შვარცის [15] თეორემის გამოყენება ასრულებს თეორემის დამტკიცებას.

[14] ლაგრანჟი ჟოზეფ ლუი (*Lagrange Joseph Louis*) 25.1.1736, ტურინი - 10.4.1813, პარიზი) - ფრანგი მათემატიკოსი და მექანიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის უცხოელი საპატიო წევრი (1776), პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1772). მას ეკუთვნის ანალიზის შექმნა ხარისხოვანი მწკრივების ბაზაზე, სასრული ნაზრდის ფორმულა-ლაგრანჟის ფორმულა, პირობითი ექსტრემუმების თეორიაში მამრავლთა მეთოდის შექმნა და სხვა.

[15] შვარცი კარლ გერმანი (*Schwarz Karl Hermann Amandus*) (25.1.1843, ხესმდორფი, -- 30.11.1921, ბერლინი) -- გერმანელი მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის უცხოელი წევრ-კორესპონდენტი (1897), ბერლინის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1893). ძირითადი შრომები გეომეტრიასა (სწავლობდა მინიმალურ ზედაპირებს) და კონფორმულ ასახვათა თეორიაში.

მაგალითი 1. ორგანზომილებიან შემთხვევით (ξ_1,ξ_2) ვექტორს ეწოდება ორგანზომილებიანი გაუსის შემთხვევითი ვექტორი, თუ მისი განაწილების f_{ξ_1,ξ_2} სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}\ \ (x_1,x_2\in R),$$

სადაც $a_1,a_2\in R,\sigma_1>0,\sigma_2>0$.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ ზოგიერთი თეორემა.

თეორემა 3. ვთქვათ, $D\subseteq R^2$ არის საკოორდინატო სიბრტყეზე განლაგებული რაიმე არე. ამასთან f_{ξ_1,ξ_2} არის ორგანზომილებიანი (ξ_1,ξ_2) შემთხვევითი ვექტორის განაწილების სიმკვრივე. მაშინ მართებულია შემდეგი ფორმულა

$$P(\{\omega:(\xi_1,\xi_2)(\omega)\in D\})=\int\int_D f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dxdy.$$

განსაზღვრება 4. ასახვას $g:R^n\to R$ ეწოდება ზომადი ასახვა, თუ სრულდება შემდეგი პირობა

$$(\forall x)(x\in R\to\{(x_1,\cdots,x_n):g(x_1,\cdots,x_n)<x\}\in B(R^n)).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ასახვა $g:R^n\to R$ არის ზომადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$(\forall B)(B\in\mathcal{B}(R)\to g^{-1}(B)\in\mathcal{B}(R^n)),$$

სადაც $g^{-1}(B)=\{(x_1,\cdots,x_n):g(x_1,\cdots,x_n)\in B\}$.

თეორემა 4. ვთქვათ, $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილების ფუნქციის სიმკვრივეა $f_{\xi_1,\cdots,\xi_n}$. მაშინ ნებისმიერი ზომადი $g:R^n\to R$ ასახვისა და $B\in B(R)$ ზომადი სიმრავლისათვის მართებულია ფორმულა

$$P(\{\omega:g((\xi_1,\cdots,\xi_n)(\omega))\in B\})=\int\cdots\int_{g^{-1}(B)}f_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n.$$

თეორემა 5. თუ $(\xi_k)_{1\le k\le n}$ არის დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახი, $f_{\xi_1,\cdots,\xi_n}$ არის შემთხვევითი $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ ვექტორის განაწილების ფუნქციის სიმკვრივე, f_{ξ_i} $(1\le i\le n)$ არის ξ_i შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე, მაშინ

$$f_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{1\le i\le n}f_{\xi_i}(x_i)\ \ ((x_1,\cdots,x_n)\in R^n).$$

განსაზღვრება 5. ვთქვათ, $(\xi_k)_{1\le k\le n}$ არის დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახი, ამასთან ყოველი ξ_k $(1\le k\le n)$ არის (a_k,σ_k^2)-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

$(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ შემთხვევით ვექტორს ეწოდება n-განზომილებიანი გაუსის ვექტორი და მისი განაწილების სიმკვრივეს, თეორემა 5-ის ძალით, აქვს შემდეგი სახე

$$f_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \prod_{k=1}^n \sigma_k} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - a_k)^2}{2\sigma_k^2}},$$

სადაც $(x_1, \cdots, x_n) \in R^n,\ a_1, \cdots, a_n \in R, \sigma_1 > 0, \cdots, \sigma_n > 0$.

n-განზომილებიანი გაუსის $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ ვექტორს ეწოდება n-განზომილებიანი გაუსის სტანდარტული ვექტორი, თუ

$$f_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2}} \ ((x_1, \cdots, x_n) \in R^n).$$

განსაზღვრება 6. ვთქვათ, $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ არის გაუსის შემთხვევითი ვექტორი. $P_{\xi_1,\cdots,\xi_n}$ ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall B)(B \in \mathcal{B}(R^n) \to P_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(B) = P(\{\omega : (\xi_1(\omega), \cdots, \xi_n(\omega)) \in B\}),$$

ეწოდება n-განზომილებიანი გაუსის ალბათური ზომა.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 3-ის ძალით, მართებულია შემდეგი ფორმულა

$$P_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(B) = \overbrace{\int \cdots \int_B}^{n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \prod_{k=1}^n \sigma_k} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - a_k)^2}{2\sigma_k^2}} dx_1 \cdots dx_n.$$

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი

მაგალითი 3. ვთქვათ, $\prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ არის R^n სივრცის n-განზომილებიანი პარალელეპიპედი და Γ_n არის გაუსის n-განზომილებიანი სტანდარტული ალბათური ზომა. მაშინ

$$\Gamma_n(\prod_{k=1}^n [a_k, b_k]) = \prod_{k=1}^n [\Phi(b_k) - \Phi(a_k)].$$

მაგალითი 4. ვთქვათ, V_ρ^n არის n-განზომილებიანი ρ-რადიუსიანი ბირთვი ცენტრით $O(0, \cdots, 0) \in R^n$ წერტილში. მაშინ

$$\Gamma_n(V_\rho^n) = \overbrace{\int \cdots \int_{V_\rho}}^{n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2}} dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})} \times \int_0^\rho r^{n-1} \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} dr,$$

სადაც $\Gamma(\cdot)$ მეორე გვარის ეილერის ინტეგრალია.

ვთქვათ, $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ არის გაუსის n-განზომილებიანი სტანდარტული შემთხვევითი ვექტორი.

$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების $F_{\chi_n^2}$ ფუნქციას ეწოდება χ_n^2 -განაწილება, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$F_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \leq 0, \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})} \times \int_0^{\sqrt{x}} r^{n-1} \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} dr, & \text{თუ } x > 0. \end{cases}$$

აქედან

$$f_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \leq 0, \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})} \times x^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{თუ } x > 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \leq 0, \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \times x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, & \text{თუ } x > 0. \end{cases}$$

შენიშვნა 1. ჩვენს მიერ გამოყენებული იყო შემდეგი ფაქტი ინტეგრალური თეორიიდან

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{V_\rho} f(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}) dx_1 \cdots dx_n = 2 \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \int_0^\rho r^{n-1} f(r) dr,$$

სადაც f არის V_ρ-ზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია.

შენიშვნა 2. $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფინქციის $CHIDIST$-ის საშუალებით შესაძლებელია χ_n^2 შემთხვევითი სიდის განაწილების მნიშვნელობებისა და $\Gamma_n(V_\rho^n)$ მნიშვნელობების გამოთვლა(იხ.გვ. 211 ან 213).

მაგალითი 5. ვთქვათ, $(e_k)_{1 \leq k \leq m}$ $(m \leq n)$ არის დამოუკიდებელ ნორმირებულ ვექტორთა ოჯახი R^n-ში, ხოლო $\xi_1, \cdots, \xi_m$ არის დამოუკიდებელ გაუსის სტანდარტულ ერთ-განზომილებიან შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა განსაზღვრული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათურ სივრცეზე. მაშინ μ ზომა, განსაზღვრული პირობით

$$(\forall X)(X \in \mathcal{B}(R^n) \to \mu(X) = P(\{\omega : \sum_{k=1}^{m} \xi_k(\omega) e_k \in X\})),$$

წარმოადგენს R^n სივრცეზე განსაზღვრულ გაუსის ზომას. შევნიშნოთ, რომ ზემოთ აღნიშნული წარმოდგენა მართებულია ნებისმიერი გაუსის ზომისათვის R^n-ში.

მაგალითი 6 (t_n - სტიუდენტის განაწილება). ვთქვათ, $(\xi_i)_{1\le i\le n+1}$ არის გაუსის სტანდარტულ შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებელი ოჯახი, ხოლო $g : R^{n+1} \to R$ არის ზომადი ფუნქცია, განსაზღვრული პირობით:

$$g(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \frac{x_{n+1}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}}.$$

$$X_{(n+1)}(\omega) = g(\xi_1(\omega), \cdots, \xi_{n+1}(\omega))$$

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება სტიუდენტის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე n თავისუფლების ხარისხით.

თეორემა 4-ის ძალით, ფიშერის განაწილების ფუნქციისათვის, ვღებულობთ

$$t_n(x) \equiv F_{X_{(n+1)}}(x) =$$

$$= \int_{g^{-1}([-\infty,x))}$$

ფიშერის განაწილების სიმკვრივე მოიცემა ფორმულით

$$f_{t_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 0, \\ \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \times (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, & \text{თუ } x > 0. \end{cases}$$

სასარგებლოა შევნიშნოთ, რომ $M(X_{(n+1)}) = 0$, როცა $n > 1$. დისპერსიისათვის სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$D(X_{(n+1)}) = \begin{cases} \frac{n}{n-1}, & \text{თუ } n > 2 \\ \infty, & \text{თუ } 0 < n \le 2 \end{cases}$$

შენიშვნა 4. $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $TDIST$ ითვლის სტიუდენტის t_n განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობებს(იხ. გვ. 211 ან 215).

მაგალითი 7(ფიშერის განაწილება). ვთქვათ, $(\xi_i)_{1\le i\le k_1+k_2}$ არის გაუსის სტანდარტულ შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებელი ოჯახი, ხოლო $g : R^{k_1+k_2} \to R$ არის ზომადი ფუნქცია, განსაზღვრული პირობით:

$$g(x_1, \cdots, x_{k_1+k_2}) = \frac{k_2 \sum_{i=1}^{k} {}_1 x_i^2}{k_1 \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} x_i^2}.$$

$$X_{(k_1,k_2)}(\omega) = g(\xi_1(\omega), \cdots, \xi_{k_1+k_2}(\omega))$$

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება ფიშერის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე k_1 და k_2 თავისუფლების ხარისხებით.

თეორემა 4-ის ძალით, ფიშერის განაწილების ფუნქციისათვის, ვღებულობთ

$$F(k_1, k_2)(x) \equiv F_{X(k_1,k_2)}(x) =$$

$$= \int_{g^{-1}([-\infty,x)} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{k_1+k_2}} e^{-sum_k=1^{k_1+k_2}\frac{x_k^2}{2}} dx_1 \cdots dx_{k_1+k_2}.$$

ფიშერის განაწილების სიმკვრივე მოიცემა ფორმულით

$$f_{X_{(k_1,k_2)}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 0, \\ 2(\frac{k_1}{k_2})^{\frac{k_1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\times\Gamma(\frac{k_2}{2})} x^{k_1-1}(1+\frac{k_1}{k_2}x^2)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}, & \text{თუ } x > 0. \end{cases}$$

შენიშვნა 5. $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $FDIST$ ითვლის ფიშერის განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობებს(იხ.$FDIST$, გვ.211 ან 213).

მართებულია შემდეგი

თეორემა 6. ვთქვათ, ξ_1 და ξ_2 არიან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები, f_{ξ_1} და f_{ξ_2} არიან შესაბამისად ξ_1 და ξ_2 შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების სიმკვრივეები. მაშინ შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1+\xi_2$ ჯამის განაწილების $F_{\xi_1+\xi_2}$ ფუნქციისა და განაწილების $f_{\xi_1+\xi_2}$ სიმკვრივისათვის მართებულია შემდეგი ფორმულები:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{x} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2 - x_1) dx_1,$$

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x - x_1) dx_1 =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x - x_2) f_{\xi_2}(x_2) dx_2.$$

დამტკიცება. ჯამი $\xi_1 + \xi_2$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც (ξ_1, ξ_2) შემთხვევითი ვექტორის უწყვეტი g ანასახი, სადაც $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. B სიმრავლის როლში განვიხილოთ $(-\infty, x)$ სიმრავლე. მე-4 და მე-5 თეორემების ძალით ვღებულობთ

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = P(\{\omega : \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) < x\}) = P(\{\omega : g(\xi_1, \xi_2)(\omega) < x\}) =$$

$$= \int\int_{g^{-1}((-\infty;x))} f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2) dx_1 dx_2.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$g^{-1}((-\infty; x)) = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 < x\},$$

ამიტომ

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int\int_{\{(x_1,x_2)|x_1+x_2<x\}} f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{\infty}^{x-x_1} dx_2 f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{x-x_1} d(x_1+x_2) f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{x} d\tau f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(\tau - x_1) = \int_{-\infty}^{x} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(\tau - x_1) dx_1,$$

სადაც $\tau = x_1 + x_2$.

ცხადია, რომ R ღერძის ℓ_1-თითქმის ყველა x წერტილისათვის

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \frac{dF_{\xi_1+\xi_2}(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x - x_1) dx_1.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომ ინტეგრალს ეწოდება f_1 და f_2 ფუნქციათა ნახვევი და აღინიშნება სიმბოლოთი $f_{\xi_1} * f_{\xi_2}$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $f_{\xi_1} * f_{\xi_2} = f_{\xi_2} * f_{\xi_1}$, ე.ი.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x - x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x - x_1) f_{\xi_2}(x_1) dx_1.$$

ტესტები

1.10.1. მოცემულია დისკრეტული ორგანზომილებიანი (ξ_1, ξ_2) შემთხვევითი სიდიდის განაწილება

(ξ_1,ξ_2)	$(4,3)$	$(4,10)$	$(4,12)$	$(5,3)$	$(5,12)$
P	$0,17$	$0,13$	$0,25$	$0,2$	$0,25$

.

მაშინ

1) ξ_1 შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას აქვს სახე

ა)

ξ_1	4	5
P	$0,55$	$0,45$

,

ბ)

ξ_1	4	5
P	$0,55$	$0,45$

;

2) ξ_2 შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას აქვს სახე

ა)

ξ_2	3	10	12
P	$0,37$	$0,13$	$0,5$

,

ბ)

ξ_2	3	10	12
P	$0,35$	$0,15$	$0,5$

;

3) $F_{\xi_1,\xi_2}(4,5;10,5)$ ტოლია

ა) $0,36$, ბ) $0,34$, გ) $0,32$, დ) $0,3$;

4) $P(\{\omega : (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) \in [1,5] \times [5,8]\})$ ტოლია
ა) $0,39$, ბ) $0,38$, გ) $0,37$, დ) $0,36$.

1.10.2. მოცემულია ორი დამოუკიდებელი ξ_1 და ξ_2 შემთხვევითი სიდიდის განაწილებები

ξ_1	2	3
P	0,7	0,3

,

ξ_2	-2	2
P	0,3	0,7

.

მაშინ $\xi_1 \cdot \xi_2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას აქვს სახე
ა)

$\xi_1 \cdot \xi_2$	-6	-4	4	6
P	0,08	0,22	0,48	0,22

,

ბ)

$\xi_1 \cdot \xi_2$	-6	-4	4	6
P	0,09	0,21	0,49	0,21

.

1.10.3. მოცემულია ორგანზომილებიანი (ξ_1, ξ_2) ვექტორის განაწილების ფუნქცია

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} (1-e^{-4x_1})(1-e^{-2x_2}), & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \\ 0, & x_1 < 0 \text{ ან } x_2 < 0. \end{cases}$$

მაშინ
ა)
$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 6e^{-4x_1-2x_2}, & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \\ 0, & x_1 < 0 \text{ ან } x_2 < 0, \end{cases}$$
ბ)
$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 8e^{-4x_1-2x_2}, & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \\ 0, & x_1 < 0 \text{ ან } x_2 < 0. \end{cases}$$

1.10.4. მოცემულია (ξ_1, ξ_2) შემთხვევითი ვექტორის განაწილების სიმკვრივე

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = \frac{20}{\pi^2(16+x_1^2)(25+x_2^2)} \quad ((x_1,x_2) \in R^2).$$

მაშინ
ა)
$$F_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg(\frac{x_1}{8}))((\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg(\frac{x_2}{10})),$$
ბ)
$$F_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg(\frac{x_1}{4}))((\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg(\frac{x_2}{5})).$$

1.10.5. ცნობილია, რომ $y^{''} + 5y^{'} + 6y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის თავისუფალი კოეფიციენტები არიან $(0,1)$ ინტერვალ-

ზე თანაბრად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები. ალბათობა იმისა, რომ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი $x=0$ წერტილში მიიღებს სიდიდით $0,5$-ზე მეტ მნიშვნელობას, ტოლია

ა) $0,5$, ბ) $0,75$, გ) $0,6$, დ) $0,85$.

1.10.6. ცნობილია, რომ $y^{''}+y=0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის თავისუფალი კოეფიციენტები არიან $(0,1)$-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები. ალბათობა იმისა, რომ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი $x=0$ წერტილში მიიღებს მნიშვნელობებს $(0,2)$ ინტერვალიდან, ხოლო $x=\frac{\pi}{2}$ წერტილში მიიღებს მნიშვნელობებს $(-2,1)$ ინტერვალიდან, ტოლია

ა) $0,2245785$, ბ) $0,7767678$, გ) $0,3665582$, დ) $0,8598760$.

1.10.5. ცნობილია, რომ $y^{''}-\ln 6y^{'}+\ln 2\ln 3y=0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის თავისუფალი კოეფიციენტები არიან $(0,1)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები. ალბათობა იმისა, რომ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი $x=0$ წერტილში მიიღებს სიდიდით 1-ზე ნაკლებ მნიშვნელობას, ხოლო $x=1$ წერტილში მიიღებს სიდიდით 2-ზე ნაკლებ მნიშვნელობას, ტოლია

ა) $\frac{1}{2}$, ბ) $\frac{1}{3}$, გ) $\frac{1}{4}$, დ) $\frac{1}{5}$.

§ 1.11. ჩებიშევის უტოლობა. სამი სიგმას წესი

ვთქვათ, (Ω,F,P) ალბათური სივრცეა. მართებულია შემდეგი

თეორემა 1 (ჩებიშევის [16] I უტოლობა). ყოველი დადებითი ξ შემთხვევითი სიდიდისა და ყოველი დადებითი ϵ რიცხვისათვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას

$$P(\{\omega:\xi(\omega)\geq\epsilon\})\leq\frac{M\epsilon}{\epsilon}.$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ სრულდება შემდეგი პირობა

$$M\xi=M(\xi\cdot I_{\Omega})=M(\xi\cdot I_{\{\omega:\xi(\omega)\geq\epsilon\}}+\xi\cdot I_{\{\omega:\xi(\omega)<\epsilon\}})\geq$$

$$\geq M(\xi\cdot I_{\{\omega:\xi(\omega)\geq\epsilon\}})\geq\epsilon\cdot P(\{\omega:\xi(\omega)\geq\epsilon\}).$$

[16] ჩებიშევი პაფტუნი ლევის ძე [4(16).5.1821. კალუგის ოლქის სოფ.ოკატოვო- 26.11.(8.12)1894, პეტერბურგი] - რუსი მათემატიკოსი და მექანიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი (1856), ბერლინის მეცნიერებათა აკადემიის (1871), ბოლონიის მეცნიერებათა აკადემიის (1873), პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის (1874)(1860-წევრ.კორ.) და ლონდონის სამეფო მეცნიერებათა აკადემიის (1893) საპატიო წევრი.

აქედან ვღებულობთ

$$P(\{\omega : \xi(\omega) \geq \epsilon\}) \leq \frac{M\epsilon}{\epsilon}.$$

თეორემა 2 (ჩებიშევის II უტოლობა). ყოველი η შემთხვევითი სიდიდისა და ყოველი $\sigma > 0$ რიცხვისათვის მართებულია შემდეგი უტოლობა

$$P(\{\omega : |\eta(\omega) - M\eta| \geq \sigma\}) \leq \frac{D\eta}{\sigma^2}.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\xi(\omega) = (\eta(\omega) - M\eta)^2$, $\epsilon = \sigma^2$. ჩებიშევის I უტოლობის ძალით ვღებულობთ

$$P(\{\omega : (\eta(\omega) - M\eta)^2 \geq \sigma^2\}) \leq \frac{M(\eta - M\eta)^2}{\sigma^2}.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\{\omega : (\eta(\omega) - M\eta)^2 \geq \sigma^2\} = \{\omega : |\eta(\omega) - M\eta| \geq \sigma\}.$$

აქედან, წინა უტოლობის გამოყენებით, ვღებულობთ

$$P(\{\omega : |\eta(\omega) - M\eta| \geq \sigma\}) \leq \frac{D\eta}{\sigma^2}.$$

მაგალითი 1. ვთქვათ, მთვარის ფოტოგადაღების საშუალებით ვაწარმოებთ მთვარის დიამეტრის გაზომვას. ატმოსფერული პირობების ცვალებადობის გამო, დროის განსხვავებული მომენტებისათვის გადაღებულ სურათებში მივიღებთ მთვარის დიამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებს $\xi_1, \cdots, \xi_n$. ვთქვათ, a არის მთვარის დიამეტრის მნიშვნელობა, მაშინ $|\xi_k(\omega) - a|$ იქნება k-ურ ცდაში მიღებული გაზომვის შედეგის გადახრა მთვარის დიამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობიდან $(1 \leq k \leq n)$, ხოლო $\sqrt{M(\xi_k - a)^2} = \sqrt{D\xi_k}$ იქნება საშუალო კვადრატული გადახრა. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი k-ური ცდისათვის $(1 \leq k \leq n)$ სრულდება პირობები:

a) $M\xi_k = a$,

b) $\sqrt{D\xi_k} = 1$,

g) $(\xi_k)_{1 \leq k \leq n}$ შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებლებია.

ბუნებრივია, რომ სიდიდე $J_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$ მიიღება a პარამეტრის შეფასებად. ისმის შემდეგი კითხვა:

რამდენი გაზომვა უნდა ვაწარმოოთ, რომ შესრულდეს პირობა

$$P(\{\omega : |J_n(\omega) - a| \leq 0,1\}) \geq 0,95,$$

ე.ი. გადახრა $|J_n(\omega) - a|$ იყოს $0,1$ -ზე ნაკლები ან ტოლი $0,95$-ზე მეტი ალბათობით.

ცხადია, რომ ერთის მხრივ უნდა შესრულდეს პირობა

$$P(\{\omega : |J_n(\omega) - a| > 0,1\}) \leq 0,05.$$

მეორეს მხრივ, ჩებიშევის II უტოლობის ძალით ვღებულობთ

$$P(\{\omega : |J_n(\omega) - a| > 0,1\}) \leq \frac{D(J_n)}{(0,1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k}{0,01} = \frac{\frac{1}{n^2}n}{0,01} = \frac{100}{n}.$$

თუ შევარჩევთ ისეთ უმცირეს $n = n_{ჩ}$ ნატურალურ რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა $\frac{100}{n_{ჩ}} \leq 0,05$, ის აღმოჩნდება 2000-ის ტოლი.

ამგვარად, მივიღეთ შემდეგი უტოლობა

$$P(\{\omega : |J_{2000}(\omega) - a| \leq 0,1\}) \geq 0,95.$$

ამგვარად, საჭიროა 2000 გაზომვის ჩატარება იმისათვის, რომ $0,95$-ზე მეტი ალბათობით ვიყოთ დარწმუნებული იმაში, რომ გაზომვის შედეგად მიღებული სიდიდეებისაგან შედგენილი საშუალო არითმეტიკული იყოს გადახრილი მთვარის დიამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისაგან არაუმეტეს $0,1$-ის ტოლი სიდიდისა.

თეორემა 3 (სამი სიგმას წესი). ყოველი ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის მართებულია შემდეგი უტოლობა

$$P(\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| \geq 3\sigma\}) \leq \frac{1}{9}.$$

დამტკიცება. მართლაც, ჩებიშევის II უტოლობის ძალით ვღებულობთ

$$P(\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| \geq 3\sigma\}) \leq \frac{D\xi}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}.$$

ტესტები

1.11.1. ცნობილია, რომ $D\xi = 0,001$. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით $\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| < 0,1\}$ ხდომილობის ალბათობა ფასდება ქვევიდან რიცხვით, რომელიც ტოლია

ა) $0,8$, ბ) $0,9$, გ) $0,98$, დ) $0,89$.

1.11.2. ცნობილია, რომ $D\xi = 0,004$. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით დადგენილია, რომ $P(\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| < \epsilon\}) \geq 0,9$; მაშინ ϵ ტოლია

ა) $0,1$, ბ) $0,2$, გ) $0,3$, დ) $0,4$.

1.11.3. მოცემულია დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება

ξ	$0,3$	$0,6$
P	$0,2$	$0,8$

.

ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვემოდან $\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| < \epsilon\}$ ხდომილობის ალბათობა.

ა) $0,86$, ბ) $0,87$, გ) $0,88$, დ) $0,89$.

1.11.4.ერთი დღის განმავლობაში წყლის საშუალო დანახარჯი დასახლებულ პუნქტში შეადგენს 50000 ლიტრს. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვევიდან ალბათობა იმისა, რომ პუნქტში მოცემულ დღეს წყლის დანახარჯი არ აღემატება 150 000 ლიტრს.

ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{2}{3}$, გ) $\frac{1}{4}$, დ) $\frac{1}{2}$.

1.11.5. A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ცალკეულ ცდაში ტოლია $0,7$. ν_n-ით აღვნიშნოთ n-დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვის ფარდობა n რიცხვთან. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ დამოუკიდებელ ცდათა მინიმალური რაოდენობა n, რომლისთვისაც $0,78$-ზე მეტი ალბათობით შესრულდება უტოლობა $|\nu_n - p| < 0,06$.

ა) 327, ბ) 427, გ) 527, დ) 627.

1.11.6. კამათლის 1200-ჯერ დამოუკიდებელი გაგორებისას ერთიანის მოსვლის რაოდენობა აღვნიშნოთ ξ-თი. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვემოდან $\{\omega : \xi(\omega) \leq 800\}$ ხდომილობის ალბათობა.

ა) $0,74$, ბ) $0,75$, გ) $0,76$, დ) $0,77$.

1.11.7. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვემოდან კამათლის 10 000-ჯერ დამოუკიდებელი გაგორებისას ექვსიანის ფარდობითი სიხშირის $\frac{1}{6}$-დან არაუმეტეს $0,01$ სიდიდით გადახრის ალბათობა.

ა) $0,84$, ბ) $0,85$, გ) $0,86$, დ) $0,87$.

1.11.8. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვემოდან ქვემეხიდან 600 გასროლისას სამიზნის დაზიანებათა რიცხვის 360 რიცხვიდან არაუმეტეს 20-ით გადახრის ალბათობა, თუ ცნობილია რომ ქვემეხიდან ერთი გასროლისას სამიზნის დაზიანების ალბათობაა $0,6$.

ა) $0,63$, ბ) $0,64$, გ) $0,65$, დ) $0,66$.

1.11.9. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვემოდან ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ფუნთუშის წონა არ გადააჭარბებს 90 გრამს, თუ ცნობილია რომ ფუნთუშის საშუალო წონა 50 გრამის ტოლია.

ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{4}{9}$, გ) $\frac{5}{9}$, დ) $\frac{2}{3}$.

1.11.10. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვემოდან ალბათობა იმისა, რომ ქვემეხიდან შემთხვევითი გასროლისას ჭურვის საწყისი

სიჩქარე არ გადააჭარბებს 800 მ/წმ, თუ ცნობილია რომ ჭურვის საწყისი სიჩქარის საშუალო 500 მ/წმ -ის ტოლია.

ა) $\frac{3}{7}$, ბ) $\frac{3}{8}$, გ) $\frac{1}{3}$, დ) $\frac{3}{10}$.

§ 1.12. ზღვარითი თეორემები

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ არის ალბათური სივრცეა, ხოლო $(X_k)_{k\in N}$ არის ამავე სივრცეზე განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.

განსაზღვრება 1. შემთხვევით სიდიდეთა $(X_k)_{k\in N}$ მიმდევრობას ეწოდება ალბათურად კრებადი რაიმე $a \in R$ რიცხვისაკენ, თუ ყოველი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის სრულდება პირობა:

$$\lim_{k\to\infty} P(\{\omega : |X_k(\omega) - a| < \epsilon\}) = 1.$$

$(X_k)_{k\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა ალბათური კრებადობა a რიცხვისაკენ აღინიშნება სიმბოლოთი $\lim_{k\to\infty} X_k \overset{p}{=} a$.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 1 (ჩებიშევის თეორემა). ვთქვათ, დამოუკიდებელ შემთხვევით $(X_k)_{k\in N}$ სიდიდეთა დისპერსიები ერთობლივ შემოსაზღვრულია, ე.ი.

$$(\exists c)(c \in R \to (\forall k)(k \in N \to DX_k < c)).$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} MX_k) \overset{p}{=} 0.$$

დამტკიცება. შემთხვევით სიდიდეთა $a = 0$ რიცხვისაკენ ალბათურად კრებადობის განსაზღვრის ძალით, აუცილებელია და საკმარისი ვაჩვენოთ შემდეგი პირობის მართებულობა

$$(\forall\epsilon)(\epsilon > 0 \to \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) - \sum_{k=1}^{n} MX_k) - 0| < \epsilon\}) = 1).$$

შევნიშნოთ, რომ თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$Y_n(\omega) = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) - \sum_{k=1}^{n} MX_k),$$

მაშინ

$$MY_n = M\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} MX_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k = 0,$$

$$DY_n = D(\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} MX_k)) = D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n} X_k) \leq \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n}.$$

ჩებიშევის უტოლობის ძალით გვაქვს

$$P(\{\omega : |Y_n(\omega) - MY_n| < \epsilon\}) \geq 1 - \frac{DY_n}{\epsilon^2} \geq 1 - \frac{c}{n\epsilon^2}.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, მაშინ მივიღებთ

$$P(\{\omega : |Y_n(\omega) - MY_n| < \epsilon\}) \geq 1,$$

ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} MX_k) \stackrel{p}{=} 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ თეორემა 1-ის შემდეგი შედეგი

თეორემა 2 (ბერნულის თეორემა). ვთქვათ, $(Z_k)_{k\in N}$ არის p-პარამეტრიან ბერნულის წესით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k) \stackrel{p}{=} p.$$

დამტკიცება. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა $(Z_k)_{k\in N}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს თეორემა 1-ის პირობებს. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} Z_k - \sum_{k=1}^{n} MZ_k) \stackrel{p}{=} 0.$$

ვინაიდან

$$\sum_{k=1}^{n} MZ_k = np,$$

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k - p) \stackrel{p}{=} 0,$$

რაც თავის მხრივ შემდეგი პირობის ექვივალენტურია

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Z_k \overset{p}{=} p.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. თუ f არის $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ ფუნქციათა $(Mf(\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} Z_k)))_{n\in N}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[0,1]$ ინტერვალზე $f(p)$ ფუნქციისაკენ, სადაც $(Z_k)_{k\in N}$ არის p-პარამეტრიან ბერნულის წესით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.

დამტკიცება. ყოველი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის მართებულია შემდეგ უტოლობათა ჯაჭვი

$$M|f(\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} Z_k)) - f(p)| \le M(|f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k) - f(p)| \cdot I_{\{\omega:|f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k)-f(p)|\le\epsilon\}}) +$$

$$+M(|f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k) - f(p)| \cdot I_{\{\omega:|f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k)-f(p)|>\epsilon\}}) \le \sup_{|x|\le\epsilon} |f(p+x)-f(p)| + o(n),$$

რაც ნათლად გვიჩვენებს დასამტკიცებელი დებულების მართებულობას.

შენიშვნა 1. თუ f არის $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}) = f(x)$$

ყოველი $x \in [0,1]$ რიცხვისათვის; თანაც ეს კრებადობა არის თანაბარი $[0,1]$ ინტერვალზე. უკანასკნელი თანაფარდობა არის ფუნქციათა

$$(Mf(\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} Z_k)))_{n\in N} = (\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k p^k (1-p)^{n-k})_{n\in N}$$

მიმდევრობის f ფუნქციისაკენ p-ს მიმართ $[0,1]$ ინტერვალზე თანაბარი კრებადობის სხვანაირი ჩაწერა. ამ ფაქტიდან გამომდინარეობს ვეიერშტრასის [17] ცნობილი თეორემა უწყვეტი ფუნქციის პოლინომებით მიახლოების შესახებ. ამასთან საჭირო პოლინომები აგებულია ცხადი სახით და მათ აქვთ შემდეგი სახე

$$\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (n \in N).$$

[17] ვეიერშტრასი კარლ თეოდორი (*Weierstras Karl Theodor Wilhelm*) (31.10.1815, ოსტენფილდე - 19.2.1897, ბერლინი) - გერმანელი მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის უცხოელი წევრ-კორესპონდენტი (1864) და უცხოელი საპატიო წევრი (1895). 1856 წლიდან ბერლინის უნივერსიტეტის პროფესორი. შრომები მათემატიკურ ანალიზში, ფუნქციათა თეორიაში, ვარიაციულ აღრიცხვაში, დიფერენციალურ გეომეტრიასა და წრფივ ალგებრაში.

ეს ბერშტეინის[18] პოლინომებია. თეორემა 1-ის შედეგს წარმოადგენს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4 (დიდ რიცხვთა კანონი). ვთქვათ, $(X_k)_{k \in N}$ არის ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. ამასთან $MX_k = a$ და $DX_k = \sigma^2 < \infty$; მაშინ შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკული ალბათობით კრებადია a რიცხვისაკენ, ე.ი.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \stackrel{p}{=} a.$$

დამტკიცება. შემთხვევით სიდიდეთა $(X_k)_{k \in N}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს თეორემა 1-ის პირობებს, ამიტომ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} MX_k) \stackrel{p}{=} 0.$$

მაგრამ $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} MX_k = \frac{na}{n} = a$. შევნიშნოთ, რომ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} MX_k) \stackrel{p}{=} \lim_{n \to \infty} (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - a) \stackrel{p}{=} 0.$$

უკანასკნელი ტოლობა ექვივალენტურია შემდეგი ტოლობის

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \stackrel{p}{=} a.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2. თუ $(X_k)_{k \in N}$ არის $(0, \sigma^2)$- პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, მაშინ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \stackrel{p}{=} \sigma^2.$$

შენიშვნა 3. ვთქვათ, ყოველ ცდაში A ხდომილობის მოხდენის ალბათობაა p. ν_n-ით აღვნიშნოთ n დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვის ფარდობა n რიცხვთან (მას ეწოდება A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე n ცდაში). დიდ რიცხვთა კანონის გამოყენებით ადვილია იმის ჩვენება, რომ ყოველი დადებითი ϵ რიცხვისათვის სრულდება პირობა

$$\lim_{n \to \infty} P(\{\omega : |\nu_n(\omega) - p| < \epsilon\}) = 1,$$

[18]ბერშტეინი სერგო ნატანის ძე (22.2(5,3).1880, ოდესა - 26.10.1968 მოსკოვი) - რუსი მათემატიკოსი, სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის (1929) და უკრაინის სსრ მეცნიერებათა აკადემიის (1925) აკადემიკოსი, გერმანელ მათემატიკოსთა კავშირის წევრი (1929), ფრანგული მათემატიკური საზოგადოების წევრი (1944), ალჟირის უნივერსიტეტის (1945) საპატიო დოქტორი, ბულგარეთის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1945), პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1955).

ე.ი.

$$\lim_{n\to n} \nu_n \overset{p}{=} p.$$

ტესტები

1.12.1. ვთქვათ, $(\xi_k)_{k\in N}$ არის (a,b) ინტერვალზე თანაბრად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.

1) მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \overset{p}{=} A,$$

სადაც A ტოლია

ა) $\frac{a+b}{2}$, ბ) $\frac{b-a}{2}$, გ) $\frac{a+b}{3}$, დ) $\frac{b-a}{3}$.

2) მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \overset{p}{=} B,$$

სადაც B ტოლია

ა) $\frac{(a+b)^2}{2}$, ბ) $\frac{a^2+ab+b^2}{3}$, გ) $\frac{(a+b)^3}{3}$, დ) $\frac{(b-a)}{12}$.

1.12.2. ვთქვათ, $(\xi_k)_{k\in N}$ არის $\lambda = 5$ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.

1) მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \overset{p}{=} A,$$

სადაც A ტოლია

ა) 3, ბ) 4, გ) 5, დ) 6;

2) მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \overset{p}{=} B,$$

სადაც B ტოლია

ა) 28, ბ) 29, გ) 30, დ) 31.

1.12.3. ვთქვათ, $(\xi_k)_{k\in N}$ არის p პარამეტრიანი ბერნულის წესით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. მაშინ ყოველი მთელი არანულოვანი s რიცხვისათვის

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^s \overset{p}{=} A,$$

სადაც A ტოლია

ა) p, ბ) pq, გ) p^s, დ) q^s.

1.12.4. ვთქვათ, $(\xi_k)_{k\in N}$ არის კანტორის წესით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \stackrel{p}{=} A,$$

სადაც A ტოლია

ა) $0,3$, ბ) $0,5$, გ) $0,6$, დ) $0,7$.

1.12.5. ვთქვათ, $(\xi_k)_{k\in N}$ არის $q=0,3$ პარამეტრიანი გეომეტრიული წესით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \stackrel{p}{=} A,$$

სადაც A ტოლია

ა) $\frac{29}{49}$, ბ) $\frac{30}{49}$, გ) $\frac{31}{49}$, დ) $\frac{32}{49}$.

1.12.6. ფუნქციათა $(\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})^3 C_n^k x^k (1-x)^{n-k})_{n\in N}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[0,1]$ ინტერვალზე f ფუნქციისაკენ, სადაც $f(x)$ ტოლია

ა) x^2; ბ) x^3; გ) x^4; დ) x^5;

1.12.7. ფუნქციათა $(\sum_{k=0}^{n}\sin((\frac{k}{n})^2) C_n^k x^k (1-x)^{n-k})_{n\in N}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[0,1]$ ინტერვალზე f ფუნქციისაკენ, სადაც ყოველი $x\in[0,1]$-სთვის $f(x)$ ტოლია

ა) $\sin(x^2)$, ბ) $\sin(x^3)$, გ) $\sin(x^4)$, დ) $\sin(x^4)$.

1.12.8. მოცემულია დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა $(\xi_n)_{n\in N}$ მიმდევრობა. ξ_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის საშუალებით

ξ_n	$-\sqrt{n+1}$	0	$\sqrt{n+1}$
P	$\frac{1}{n+1}$	$1-\frac{2}{n+1}$	$\frac{1}{n+1}$

.

მაშინ ასეთი მიმდევრობის მიმართ ჩებიშევის თეორემის გამოყენება

ა) შეიძლება, ბ) არ შეიძლება.

1.12.9. ვთქვათ, $(\xi_k)_{k\in N}$ არის პუასონის კანონით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, ამასთან $M(\xi_k)=k$. მაშინ ასეთი მიმდევრობის მიმართ ჩებიშევის თეორემის გამოყენება

ა) არ შეიძლება, ბ) შეიძლება.

1.12.10. მოცემულია $(\xi_k)_{k\in N}$ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, ამასთან, ξ_k $(k\in N)$ არის თანაბრად განაწილებული $[0;\sqrt{k}]$ ინტერვალზე. მაშინ ასეთი მიმდევრობის მიმართ ჩებიშევის თეორემის გამოყენება

ა) შეიძლება, ბ) არ შეიძლება.

§ 1.13. მახასიათებელ ფუნქციათა მეთოდი

განსაზღვრება 1. ვთქვათ, (Ω, F, P)-ალბათური სივრცეა. $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი Φ_ξ ფუნქცია ეწოდება $e^{it\xi} = \cos(t\xi) + i\sin(t\xi)$ კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს, ე. ი.

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} \quad (t \in R).$$

ვთქვათ, ξ შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტულია. ე. ი. მართებულია წარმოდგენა

$$\xi(\omega) = \sum_{k \in N} x_k I_{A_k}(\omega) \quad (\omega \in \Omega),$$

სადაც $(A_k)_{k \in N}$ არის თანაუკვეთ ხდომილობათა ისეთი ოჯახი, რომ

$$\bigcup_{k \in N} A_k = \Omega$$

და $(x_k)_{k \in N}$ -ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობაა. ამ შემთხვევაში

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k \in n} e^{itx_k} P(A_k) \quad (t \in R).$$

იმ შემთხვევაში, როცა ξ შემთხვევითი სიდიდე აბსოლუტურად უწყვეტია განაწილების ფუნქციის f_ξ სიმკვრივით, ვღებულობთ

$$\Phi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx \quad (t \in R).$$

როგორც ამ უკანასკნელი ფორმულიდან ჩანს, $\Phi_\xi(t)$ არის f_ξ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა. მათემატიკური ანალიზიდან ცნობილია, რომ თუ მოცემულია f_ξ ფუნქციის ფურიეს [19] გარდაქმნა Φ_ξ, მაშინ გარკვეულ პირობებში შეიძლება f_ξ ფუნქციის აღდგენა Φ_ξ-ს საშუალებით. კერძოდ,

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \Phi_\xi(t) dt \ (x \in R).$$

[19] ფურიე ჟან ბატისტი ჟოზეფი (*Fourier Jean Baptiste Joseph*)(1.3. 1768, ოსერი-16. 5. 1830, პარიზი)-ფრანგი მათემატიკოსი, პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1817), პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1829). მისი მუშაობის ძირითად სფეროს წარმოადგენდა მათემატიკური ფიზიკა. მას ეკუთვნის ცვლადთა განცალებადობის მეთოდი (ფურიეს მეთოდი), ფურიეს მწკრივებისა და ფურიეს ინტეგრალის ცნებების შემოტანა.

აღნიშნულ თანაფარდობას ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნა ეწოდება.

განვიხილოთ მახასიათებელი ფუნქციის თვისებები.

თეორემა 1. ყოველი $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევითი სიდიდისათვის

$$\Phi_\xi(0) = 1.$$

დამტკიცება. ვინაიდან $\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi}$ $(t \in R)$, ამიტომ

$$\Phi_\xi(0) = M\ 1 = 1.$$

თეორემა 2. ყოველი ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის სრულდება პირობა

$$(\forall t)(t \in R \to |\Phi_\xi(t)| \leq 1).$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ყოველი η შემთხვევითი სიდიდისათვის მართებულია პირობა

$$|M\eta| \leq M|\eta|.$$

ამიტომ

$$|\Phi_\xi(t)| = |Me^{it\xi}| \leq M|e^{it\xi}| = M1 = 1.$$

თეორემა 3. ყოველი ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის

$$\Phi_\xi(-t) = \overline{\Phi_\xi(t)}.$$

დამტკიცება.

$$\Phi_\xi(-t) = M(e^{-it\xi}) = M(\cos(-t\xi)+i\sin(-t\xi)) = M(\cos(-t\xi))+iM(\sin(-t\xi)) =$$

$$= M(\cos(t\xi)) - iM(\sin(t\xi)) = \overline{M(\cos(t\xi)) + iM(\sin(t\xi))} = \overline{Me^{it\xi}} = \overline{\Phi_\xi(t)}.$$

დაუმტკიცებლად მოგვყავს შემდეგი ორი დებულება.

თეორემა 4. ξ შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია $\Phi_\xi(t)$ თანაბრად უწყვეტია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე.

თეორემა 5 (ერთადერთობის თეორემა). განაწილების ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება თავისი მახასიათებელი ფუნქციით.

თეორემა 6. თუ ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება (ე. ი. $\xi(\omega) = a\eta(\omega) + b$ $(a \in R,\ b \in R, \omega \in \Omega)$), მაშინ

$$\Phi_\xi(t) = e^{itb}\Phi_\eta(at).$$

დამტკიცება. მართლაც,

$$\Phi_\xi(t)=\Phi_{a\eta+b}(t)=Me^{i(a\eta+b)t}=Me^{ibt}Me^{ia\eta t}=e^{itb}\Phi_\eta(at).$$

თეორემა 7. ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდის ჯამის მახასიათებელი ფუნქცია უდრის შესაკრები სიდიდეების მახასიათებელი ფუნქციების ნამრავლს.

დამტკიცება. ვთქვათ, ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. მაშინ დამოუკიდებელია აგრეთვე $e^{it\xi}$ და $e^{it\eta}$ კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდეებიც. ამიტომ მათემატიკური ლოდინის თვისების გამო ვღებულობთ

$$\Phi_{\xi+\eta}(t)=Me^{it(\xi+\eta)}=Me^{it\xi}Me^{it\eta}=\Phi_\xi(t)\cdot\Phi_\eta(t).$$

თეორემა 7 უშვებს შემდეგ განზოგადებას.

თეორემა 8. თუ $(\xi_k)_{1\le k\le n}$ არის დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახი, მაშინ

$$\Phi_{\sum_{k=1}^n\xi_k}(t)=\prod_{k=1}^n\Phi_{\xi_k}(t)\ \ (t\in R).$$

ვთქვათ, ξ არის შემთხვევითი სიდიდე, ხოლო $(\xi_k)_{k\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა.

განსაზღვრება 2. შემთხვევით სიდიდეთა $(\xi_k)_{k\in N}$ მიმდევრობას ეწოდება სუსტად კრებადი ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ, თუ $(F_{\xi_n})_{n\in N}$ მიმდევრობა კრებადია F_ξ ფუნქციისაკენ მისი უწყვეტობის ყოველ წერტილში.

დაუმტკიცებლად მოგვყავს ალბათობის თეორიიდან შემდეგი ფუნდამენტური თეორემა.

თეორემა 9. შემთხვევით სიდიდეთა $(\xi_k)_{k\in N}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მახასიათებელ ფუნქციათა $(\Phi_{\xi_n})_{n\in N}$ მიმდევრობა კრებადია Φ_ξ მახასიათებელი ფუნქციისაკენ.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი 1. ვთქვათ, ξ არის (n,p)-პარამეტრებიანი ბინომურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე. ი.

$$P(\{\omega:\xi(\omega)=k\})=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\ \ (0\le k\le n).$$

მაშინ

$$\Phi_\xi(t)=Me^{it\xi}=\sum_{k=0}^n e^{itk}\cdot C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^n C_n^k(e^{it}p)^k(1-p)^{n-k}=[pe^{it}+(1-p)]^n=(pe^{it}+q)^n,\ q=1-p.$$

მაგალითი 2. ვთქვათ, ξ არის λ-პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე. ი.

$$P(\{\omega : \xi(\omega) = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, \cdots),$$

მაშინ

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{itk}}{k!} e^{-\ \lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda e^{it} - \lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

მაგალითი 3. ვთქვათ, ξ არის $(a;b)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე. ი.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{თუ } x \in [a,b], \\ 0, & \text{თუ } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

მაშინ

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx = \int_a^b \frac{e^{itx}}{b-a} dx = \frac{1}{(b-a)it} e^{itx}\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{(b-a)it}(e^{itb} - e^{ita}).$$

მაგალითი 4. ვთქვათ, ξ არის (a, σ^2)- პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე. ი.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in R).$$

მაშინ

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

მოვახდინოთ ჩასმა $z = \frac{x-a}{\sigma} - it\sigma$. მაშინ

$$\frac{x-a}{\sigma} = z + it\sigma, \ x = a + \sigma z + it\sigma^2, \ dx = \sigma dz.$$

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$\Phi_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty - it\sigma}^{+\infty - it\sigma} e^{it(a+z\sigma+it\sigma^2) - \frac{(z+it\sigma)^2}{2}} \sigma dz =$$

$$= e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-it\sigma}^{+\infty-it\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \ (t \in R).$$

თუ გამოვიყენებთ ანალიზის კურსიდან კარგად ცნობილ ფაქტს, რომ

$$(\forall b)(b \in R \to \int_{-\infty-it\sigma}^{+\infty-it\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}),$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\Phi_\xi(t) = e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}} \quad (t \in R).$$

შენიშვნა 1. $(0,1)$-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი ξ სიდიდის მახასიათებელ Φ_ξ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$\Phi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (t \in R).$$

მაგალითი 5. ვთქვათ, ξ არის λ პარამეტრიანი მაჩვენებლიანი წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე. ი.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{თუ } x \geq 0, \\ 0, & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

მაშინ

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{itx-\lambda x} dx =$$

$$=\lambda \int_0^{+\infty} (e^{it}e^{-\lambda})^x dx = \lambda \int_0^{+\infty} (e^{it-\lambda})^x dx = \lambda \frac{(e^{it-\lambda})^x}{(it-\lambda)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

მაგალითი 6. ვთქვათ, ξ არის იგივურად c-ს ტოლი შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

$$P(\{\omega : \xi(\omega) = c\}) = 1,$$

ამიტომ

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} = Me^{itc} = e^{itc}.$$

მოვიყვანოთ მახასიათებელ ფუნქციათა მეთოდის ერთი გამოყენება.

თეორემა 10 (ლინდებერგ[20] -ლევი[21]). თუ $(\xi_k)_{k\in N}$ ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, მაშინ

$$\Big(\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - M(\sum_{k=1}^n \xi_k)}{\sqrt{D\sum_{k=1}^n \xi_k}}\Big)_{n\in N}$$

მიმდევრობა სუსტად კრებადია $(0,1)$ - პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისაკენ, ე. ი.

$$(\forall x)(x\in R \to \lim_{n\to\infty} P\big(\{\omega : \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - M(\sum_{k=1}^n \xi_k)}{\sqrt{D\sum_{k=1}^n \xi_k}} < x\}\big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\big).$$

დამტკიცება. დამტკიცება მოვიყვანოთ უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებისათვის. დავუშვათ $m = M\xi_1$, $\sigma = \sqrt{D\xi_1}$. მართებულია შემდეგ ტოლობათა ჯაჭვი

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - mn}{\sqrt{n}\sigma}}(t) = \lim_{n\to\infty}\Phi_{\sum_{k=1}^n(\frac{\xi_k-m}{\sqrt{\sigma}})\frac{1}{\sqrt{n}}}(t) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{\sum_{k=1}^n(\frac{\xi_k-m}{\sqrt{\sigma}})}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^n \Phi_{\frac{\xi_i-m}{\sigma}}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\prod_{i=1}^n \Phi_{\frac{\xi_i-m}{\sigma}}(\frac{t}{\sqrt{n}})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\sum_{i=1}^n \ln\Phi_{\frac{\xi_i-m}{\sigma}}(\frac{t}{\sqrt{n}})}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\Phi(t) = \Phi_{\frac{\xi_i-m}{\sigma}}(t)$, ხოლო $\frac{\xi_i-m}{\sigma}$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის სიმკვრივეს აღვნიშნავთ $f(t)$-თი, მაშინ

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)dx,$$

$$\Phi^{'}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx}f(x)dx,$$

$$\Phi^{''}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i^2x^2e^{itx}f(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{itx}f(x)dx.$$

[20]ლინდებერგი (*Lindeberg J.W.*)- ფინელი მათემატიკოსი. მას ეკუთვნის აღნიშნული თეორემის ე.წ. ცენტრალური ზღვარითი თეორემის დამტკიცება.

[21]ლევი პოლ პიერი (*Levy Paul Pierre*)(15.9.1889, პარიზი, - 15.12.1971, იქვე)-ფრანგი მათემატიკოსი, პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1964), პარიზის პოლიტიკური სკოლის პროფესორი 1920 წლიდან. ძირითადი შრომები ალბათობის თეორიასა და შემთხვევით პროცესთა თეორიაში, ფუნქციონალურ ანალიზში, ფუნქციათა თეორიაში, მექანიკაში. ცენტრალური ზღვარითი თეორემის დასამტკიცებლად პირველმა გამოიყენა მახასიათებელ ფუნქციათა მეთოდი.

შევნიშნოთ, რომ
$$\Phi(0)=1,$$
$$\Phi^{'}(0)=iM(\frac{\xi_i-m}{\sigma})=0,$$
$$\Phi^{''}(0)=-\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=-1.$$
მაკლორენის [22] ფორმულას პირველი სამი წევრით აქვს სახე
$$\Phi(t)=\Phi(0)+\frac{\Phi^{'}(0)}{1!}t+\frac{\Phi^{"}(0)}{2!}t^2+a(t)t^3,$$
სადაც $\lim_{t\to 0}a(t)=0$. ამიტომ გვექნება
$$\Phi(\frac{t}{\sqrt{n}})=1+0\cdot\frac{t}{\sqrt{n}}-\frac{t^2}{2n}+a(\frac{t}{\sqrt{n}})\cdot\frac{t^3}{n\sqrt{n}}.$$

ანალიზის კურსიდან კარგადაა ცნობილი, რომ $\ln(1+o(n))\approx o(n)$, როცა $o(n)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა (ე. ი. $\lim_{n\to\infty}o(n)=0$). ამიტომ საბოლოოდ ვღებულობთ
$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k-mn}{\sqrt{n}\sigma}}(t)=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln(1+0\cdot\frac{t}{\sqrt{n}}-\frac{t^2}{2n}+a(\frac{t}{\sqrt{n}})\cdot\frac{t^3}{n\sqrt{n}})}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}e^{n(-\frac{t^2}{2n}+a(\frac{t}{\sqrt{n}})\cdot\frac{t^3}{n\sqrt{n}})}=e^{\lim_{n\to\infty}(-\frac{t^2}{2}+a(\frac{t}{\sqrt{n}})\cdot\frac{t^3}{\sqrt{n}})}=e^{-\frac{t^2}{2}},$$
რაც ასრულებს თეორემის დამტკიცების პროცესს.

განვიხილოთ შემდეგი

მაგალითი 7. ვთქვათ, სრულდება პირობები:

1) ξ_k არის k-ურ ცდაში გაზომვის შედეგად მიღებული მთვარის დიამეტრი $(k\in N)$,

2) $a=M\xi_k$ $(k\in N)$ არის მთვარის დიამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა,

3) $D\xi_k=1$ $(k\in N)$,

4) გაზომვის ξ_k შედეგები წარმოადგენენ $(a,1)$-პარამეტრებიან ნორმალურად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეებს.

§1.11-ში ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით იქნა დამტკიცებული, რომ $n_{\text{ჩ}}=2000$ არის ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა
$$P(\{\omega:|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)-a|\leq 0,1\})\geq 0,95.$$

[22]მაკლორენი კოლინი (*Maclaurin Colin*) (1698, კილმოდანი, არგაილი - 14.6.1746, ედინბურგი) - შოტლანდიელი მათემატიკოსი, ლონდონის სამეფო საზოგადოების წევრი (1719).

ამასთან, ჩებიშევის უტოლობის პირდაპირი გამოყენებით შეუძლებელია უტოლობის $n_{\text{ჩ}} = 2000$-ზე ნაკლები n ამონახსნის პოვნა. იმ ფაქტის გათვალისწინებით, რომ $\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - na}{\sqrt{n}}$ არის $(0,1)$ - პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, გამოვითვალოთ ის უმცირესი ნატურალური რიცხვი $n_{\text{ც}}$, რომლისთვისაც სრულდება იგივე უტოლობა. ვღებულობთ:

$$P(\{\omega : |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega) - a| \leq 0,1\}) = P(\{\omega : |\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega) - na}{n}| \leq 0,1\}) =$$

$$= P(\{\omega : |\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega) - na}{\sqrt{n}}| \leq 0,1\sqrt{n}\}) = 1 - 2\Phi(-0,1\sqrt{n}).$$

ცხადია, $n_{\text{ც}}$-ნატურალური რიცხვი უნდა შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ ის იყოს უმცირესი ამონახსნი შემდეგი უტოლობის

$$1 - 2\Phi(-0,1\sqrt{n}) \geq 0,95.$$

ვღებულობთ

$$\Phi(-0,1\sqrt{n}) \leq \frac{1 - 0,95}{2} \Leftrightarrow \Phi(-0,1\sqrt{n}) \leq 0,025 \Leftrightarrow$$

$$-0,1\sqrt{n} \leq \Phi^{-1}(0,025) \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 100(\Phi^{-1}(0,025))^2 \Leftrightarrow$$

$$n \geq 100(1,96)^2 \Leftrightarrow n \geq 384,16 \Leftrightarrow n \geq 385.$$

აქედან ვასკვნით, რომ $n_{\text{ც}} = 385$. ამგვარად, 385 არის ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა

$$P(\{\omega : |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega) - a| \leq 0,1\}) \geq 0,95.$$

ცხადია, რომ ნატურალური რიცხვი $n_{\text{ც}} = 385$ გაცილებით ნაკლებია ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით მიღებულ $n_{\text{ჩ}} = 2000$ რიცხვზე.

შენიშვნა 2. თუ $(\xi_k)_{k \in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა სუსტად კრებადია ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ, მაშინ "საკმაოდ დიდი n-ებისათვის" ξ_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია F_{ξ_n} შეიძლება ჩაითვალოს ξ შემთხვევითი სიდიდის F_{ξ} განაწილების ფუნქციის ტოლად.

ტესტები

1.13.1. $(\xi_n)_{n\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$(\forall\omega)(\omega\in\Omega\to\xi_n(\omega)=C-\frac{1}{n}).$$

მაშინ $(\xi_n)_{n\in N}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ, სადაც ξ არის ტოლი (ალბათობით ერთი)

ა) $c-1$, ბ) c, გ) c^2, დ) $c+1$.

1.13.2. ყოველი $n\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის ξ_n იყოს $\lambda+o(n)$ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, სადაც $\lambda>0$ და $(o(n))_{n\in N}$ არის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა, მაშინ $(\xi_n)_{n\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა სუსტად კრებადია μ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისაკენ, სადაც μ ტოლია

ა) λ, ბ) λ^2, გ) $\lambda(1+\lambda)$, დ) $\lambda^2(1+\lambda)^2$.

1.13.3. ვთქვათ, $(\xi_n)_{n\in N}$ არის (a_n,b_n) ინტერვალზე თანაბრად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. ამასთან $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ და $\lim_{n\to\infty}b_n=b$. მაშინ $(\xi_n)_{n\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა სუსტად კრებადია (c,d) ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისაკენ, სადაც (c,d) ტოლია

ა) (a,b), ბ) $(\frac{b-a}{2},\frac{a+b}{2})$, გ) $(a,\frac{a+b}{2})$, დ) $(\frac{a+b}{2},b)$.

1.13.4. ვთქვათ, $(\xi_n)_{n\in N}$ არის დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. ამასთან ყოველი $k\in N$ რიცხვისათვის ξ_k არის $(\frac{1}{2^k};\frac{1}{2^{2k}})$ პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე.

მაშინ $(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)_{n\in N}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია (m,σ^2) პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისაკენ, სადაც (m,σ^2) ტოლია

ა) $(1,3)$, ბ) $(1,4)$, გ) $(1,5)$, დ) $(1,6)$.

1.13.5. (პუასონის თეორემა). ვთქვათ, $(\xi_n)_{n\in N}$ არის (n,p_n)-პარამეტრიან ბინომურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს $\lim_{n\to\infty}n\cdot p_n=\lambda>0$. მაშინ $(\xi_n)_{n\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა სუსტად კრებადია μ პარამეტრიანი პუასონის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისაკენ, სადაც

ა) $\lambda+1$, ბ) λ, გ) $\lambda-1)$, დ) λ^2.

1.13.6. ვთქვათ, $(\xi_n)_{n\in N}$ არის (a,σ^2)- პარამეტრიან ნორმალურად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. მაშინ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n})_{n\in N}$ სუსტად კრებადია m-ის ტოლი (ალბათობით ერთი) შემთხვევითი სიდიდისაკენ, სადაც m ტოლია

ა) a, ბ) a^2, გ) a^3, დ) a^4.

1.13.7. ვთქვათ, $1 \le k \le n$. მაშინ (m_k, σ_k^2)- პარამეტრებიან ნორმალურად განაწილებულ დამოუკიდებელ ξ_k შემთხვევით სიდიდეთა ჯამი $\sum_{k=1}^n \xi_k$ განაწილებულია ნორმალურად პარამეტრებით (m, σ^2), სადაც (m, σ^2) ტოლია

ა) $(\sum_{k=1}^n m_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k)$, ბ) $(\sum_{k=1}^n m_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2)$,
გ) $(\sum_{k=1}^n m_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^3)$, დ) $(\sum_{k=1}^n m_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^4)$.

1.13.8. თუ ξ არის განაწილებული ნორმალურად პარამეტრებით (m, σ^2), მაშინ $a\xi + b$ არის განაწილებული აგრეთვე ნორმალურად პარამეტრებით (c, d^2), სადაც (c, d^2) ტოლია

ა) $(b + am, a^2\sigma^2)$, ბ) $(b + am, a\sigma^2)$,
გ) $(b + am, a^2\sigma)$, დ) $(b + m, a\sigma^2)$.

1.13.9. ვთქვათ, $1 \le k \le n$. მაშინ λ_k-პარამეტრიან პუასონის კანონით განაწილებულ $(\xi_k)_{1 \le k \le n}$ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამი $\sum_{k=1}^n \xi_k$ წარმოადგენს μ-პარამეტრიან პუასონის კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს, სადაც μ ტოლია

ა) $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2$, ბ) $\sum_{k=1}^n \lambda_k$,
გ) $\sum_{k=1}^n (1 - \lambda_k)$, დ) $\sum_{k=1}^n (1 + \lambda_k)$.

1.13.10. თუ $(\xi_k)_{1 \le k \le n}$ არის (n_k, p)-პარამეტრებიან ბინომური კანონით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახი, მაშინ $\sum_{k=1}^n \xi_k$ არის (m, x)-პარამეტრებიანი ბინომური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, სადაც (m, x) ტოლია

ა) $(\sum_{k=1}^n {}_k, p)$, ბ) $(\sum_{k=1}^n {}_k, p^2)$,
გ) $(\sum_{k=1}^n {}_k^2, p^2)$, დ) $(\sum_{k=1}^n {}_k, p^3)$.

1.13.11. ξ_k არის k-ური სახის საქონელზე ერთი დღის განმავლობაში მოთხოვნათა რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს λ_k პარამეტრიან პუასონის კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს $(1 \le k \le n)$. ალბათობა იმისა, რომ ერთად ყველა ამ სახის საქონელზე მოთხოვნათა საერთო რიცხვი ერთი დღის განმავლობაში ტოლი იქნება 8-ის, იმ პირობით რომ $m = 10$, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_5 = 0,3$, $\lambda_6 = \cdots = \lambda_9 = 0,8$, $\lambda_{10} = 1,3$, ტოლია

ა) $0,345103$, ბ) $0,457778$, გ) $0,567788$, დ) $0,103258$.

1.13.12. ვთქვათ, ყოველ რეისზე ავტომანქანას საშუალოდ გადააქვს $m = 20$ ტ. ტვირთი. ვიგულისხმოთ, რომ საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma = 1$ ტონას. მაშინ

1) ალბათობა იმისა, რომ 100 რეისზე ავტომანქანის მიერ გადატანილი ტვირთის წონა, გამოსახული ტონებში, მოთავსებული იქნება $[1950; 2000]$ ინტერვალში, ტოლია

ა) $0,5$, ბ) $0,55$, გ) $0,555$, დ) $0,5555$;

2) სიდიდე, რომელსაც არ გადააჭარბებს 100 რეისზე გადატანილი ტვირთის წონა 0,95-ზე მეტი ალბათობით, ტოლია

ა) 20164, ბ) 20264, გ) 20364, დ) 20464.

1.13.13. ვაშლის საშუალო წონაა $m = 0,2$ კგ. საშუალო კვადრატული გადახრაა $\sigma = 0,02$ კგ. მაშინ

1) ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული 49 ვაშლის წონა, გამოსახული კილოგრამებში, მოთავსებულია $[9,5;10]$ ინტერვალში, ტოლია
ა) $0,44$; ბ) $0,88$; გ) $0,178$; დ) $0,356$;

2) სიდიდე, რომელსაც გადააჭარბებს შემთხვევით არჩეული 100 ვაშლის წონა 0,95-ზე მეტი ალბათობით, ტოლია
ა) $16,672$, ბ) $17,672$, გ) $18,672$, დ) $19,672$.

1.13.14. ხარატის მიერ სტანდარტული დეტალის დამზადების ალბათობაა 0,64. ალბათობა იმისა, რომ

1) 100 დეტალიდან 70 იქნება სტანდარტული, ტოლია
ა) $0,6241$, ბ) $0,7241$, გ) $0,8241$, დ) $0,9241$;

2) 100 დეტალიდან სტანდარტულ დეტალთა რაოდენობა მოთავსებული იქნება [50,65] ინტერვალში, ტოლია
ა) $0,1108$, ბ) $0,1308$, გ) $0,1508$, დ) $0,1708$.

1.13.15. ქარხანამ ბაზაში გაგზავნა 15000 ვარგისი ნაწარმი. ალბათობა იმისა, რომ ნაწარმი გაფუჭდება გზაში, არის 0,0002. მაშინ ალბათობა იმისა, რომ

1) ბაზაში მოიტანენ 3 ცალ უვარგის ნაწარმს, ტოლია
ა) $0,094042$, ბ) $0,114042$, გ) $0,134042$, დ) $0,154042$;

2) ბაზაში მოტანილ უვარგის ნაწარმთა რიცხვი მოთავსებული იქნება [2,4] ინტერვალში, ტოლია
ა) $0,414114$, ბ) $0,515115$, გ) $0,616116$, დ) $0,717117$.

§ 1.14. მარკოვის ჯაჭვები

ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათური სივრცეა. პირობითად ვისაუბროთ რაიმე ფიზიკურ სისტემაზე, რომელიც ყოველი ნაბიჯის შემდგომ იცვლის თავის ფაზურ მდგომარეობას. ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს სასრულო ან უსასრულო თვლადი რაოდენობა განსხვავებული ფაზური მდგომარეობებისა $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots$. აღვნიშნოთ $\xi_n(\omega)$-თი სისტემის მდგომარეობა n ნაბიჯის შემდგომ $(\omega\in\Omega)$. ცხადია, რომ თანამიმდევრულ გადასვლათა ჯაჭვი

$$\xi_0(\omega)\to\xi_1(\omega)\to\cdots\quad(\omega\in\Omega)$$

დამოკიდებულია შემთხვევითობის ფაქტორზე. ვიგულისხმოთ, რომ დაცულია შემდეგი კანონზომიერება: თუ რომელიმე n-ურ ნაბიჯზე სისტემა იმყოფება ϵ_i მდგომარეობაში, მაშინ წინა მდგომარეობისაგან დამოუკიდებლად ის გადადის P_{ij}-ს ტოლი ალბათობით ϵ_j მდგომარეობაში, ე. ი.

$$P_{ij}=P(\{\omega:\xi_{n+1}(\omega)=\epsilon_j\ |\xi_n(\omega)=\epsilon_i\}),i,j=1,2,\cdots.$$

ზემოთ აღწერილ მოდელს ეწოდება მარკოვის [23] ერთგვაროვანი ჯაჭვი, ხოლო P_{ij}-ს ალბათობას ეწოდება ამ ჯაჭვის გადასვლის ალბათობა. გარდა ამისა მოიცემა საწყისი მდგომარეობის განაწილებები, ე.ი.

$$P_i^{(0)} = P(\{\omega : \xi_0(\omega) = \epsilon_i\}) \ \ i = 1, 2, \cdots.$$

ბუნებრივია ისმის შემდეგი კითხვა: რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სისტემა n ნაბიჯის შემდგომ აღმოჩნდება ϵ_i-მდგომარეობაში? აღვნიშნოთ ეს ალბათობა $P_j(n)$-ით. ე. ი.

$$P_j(n) = P(\{\omega : \xi_n(\omega) = \epsilon_j\}).$$

შევნიშნოთ, რომ $n-1$ ნაბიჯის შემდეგ სისტემა აუცილებლად იქნება ϵ_k $(k = 1, 2, \cdots)$ მდგომარეობიდან ერთ-ერთში. ამასთან ϵ_k მდგომარეობაში ის აღმოჩნდება $P_k(n-1)$-ის ტოლი ალბათობით. ალბათობა იმისა, რომ ფიზიკური სისტემა n-ნაბიჯის შემდგომ აღმოჩნდება ϵ_j მდგომარეობაში იმ პირობით, რომ $n-1$ ნაბიჯის შემდგომ ის იმყოფებოდა ϵ_k მდგომარეობაში, ტოლია P_{kj} გადასვლის ალბათობისა ϵ_k-დან ϵ_j-ში. სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ

$$P(\{\omega : \xi_n(\omega) = \epsilon_j\}) =$$

$$\sum_{k\in N} P(\{\omega : \xi_n(\omega) = \epsilon_j\} | \{\omega : \xi_{n-1}(\omega) = \epsilon_k\}) \cdot P(\{\omega : \xi_{n-1}(\omega) = \epsilon_k\}).$$

ეს ტოლობა გვაძლევს შემდეგ რეკურენტულ ფორმულას $P_j(n)$ ალბათობისათვის

$$P_j(0) = P_j^{(0)}, \ \ P_j(n) = \sum_{k\in N} P_k(n-1) \cdot P_{kj} \ \ (j, n = 1, 2, \cdots).$$

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემა საწყისი მომენტისათვის იმყოფება ϵ_i ფაზურ მდგომარეობაში, საწყის განაწილებას აქვს სახე

$$P_i^{(0)} = 1, \ \ P_k^{(0)} = 0, \ \ k \neq i,$$

ხოლო $P_j(n)$ ალბათობა ემთხვევა $P_{ij}(n)$ ალბათობას, რომელიც ტოლია ϵ_i მდგომარეობიდან n ნაბიჯის შემდგომ ϵ_j მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობისა, ე. ი.

$$P_{ij}(n) = P(\{\omega : \xi_n(\omega) = \epsilon_j | \{\omega : \xi_0(\omega) = \epsilon_i\}\} \ \ (i, j = 1, 2, \cdots).$$

$P_i^{(0)} = 1$, $P_k^{(0)} = 0$ $(k \neq i)$ საწყისი განაწილების შემთხვევაში ვღებულობთ

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } i = j \\ 0, & \text{თუ } i \neq j \end{cases},$$

[23]მარკოვი ანდრია ანდრიას ძე (2(14).1856, რიაზანი-20.7.1922, პეტროგრადი) - რუსი მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1890).

$$P_{ij}(n) = \sum_{k \in N} P_{ik}(n-1) \cdot P_{kj} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\mathcal{P}(n) = (P_{ij}(n))_{i,j \in N} \ ,$$

მაშინ

$$\mathcal{P}(0) = I, \ \mathcal{P}(1) = \mathcal{P}, \ \mathcal{P}(2) = \mathcal{P}(1) \cdot \mathcal{P} = \mathcal{P}^2, \cdots,$$

სადაც I უსასრულო ერთეულოვანი მატრიცაა, $\mathcal{P}$ გადასვლის ალბათობათა მატრიცაა. ცხადია, რომ

$$\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}^n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1(შემთხვევითი ხეტიალი). განვიხილოთ შემთხვევითი ხეტიალი, რომელიც უკავშირდება ბერნულის დამოუკიდებელ ცდათა უსასრულო რაოდენობას, როცა წერტილი "ხეტიალობს" რიცხვითი ღერძის მთელმნიშვნელობიან წერტილებში, ისე, რომ თუ ის იმყოფება i-ურ მდგომარეობაში, მაშინ შემდგომ ნაბიჯზე მისი $i+1$ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა არის p-ს ტოლი $(0 < p < 1)$, ხოლო $i-1$ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა არის $q = 1 - p$-ს ტოლი. თუ აღვნიშნავთ ξ_n-ით ნაწილაკის მდგომარეობას n ნაბიჯის შემდგომ, მაშინ მიმდევრობა

$$\xi_0(\omega) \to \xi_1(\omega) \to \cdots \quad (\omega \in \Omega)$$

იქნება მარკოვის ჯაჭვი, რომლის გადასვლის ალბათობებს აქვს შემდეგი სახე

$$P_{ij} = \begin{cases} p \ , & \text{როცა } j = i+1 \\ q \ , & \text{როცა } j = i-1 \end{cases} \ .$$

ამ მოდელში სისტემას გააჩნია უსასრულო თვლადი რაოდენობა განსხვავებული ფაზური მდგომარეობისა.

მაგალითი 2. განვიხილოთ ფიზიკური სისტემა, რომელსაც გააჩნია სამი სხვადასხვა მდგომარეობა $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. $\mathcal{P}$-ერთ ნაბიჯზე გადასვლის ალბათობების მატრიცას ჰქონდეს შემდეგი სახე

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

მოცემულ მაგალითში ϵ_3 მდგომარეობა ხასიათდება იმით, რომ თუ სისტემა მოხვდა ამ მდგომარეობაში, იგი ერთის ტოლი ალბათობით რჩება

ამავე მდგომარეობაში. ასეთ მდგომარეობას მშთანთქავი მდგომარეობა ეწოდება. თუ მდგომარეობა ისეთია, რომ ფიზიკური სისტემა ერთის ტოლი ალბათობით გამოდის ამ მდგომარეობიდან, მაშინ მას ამრეკლავი მდგომარეობა ეწოდება. თუ ϵ_i მდგომარეობა მშთანთქავია, მაშინ $P_{ii}=1$, ხოლო თუ ϵ_i მდგომარეობა ამრეკლავია, მაშინ $P_{ii}=0$.

თუ ცნობილია, რომ დაკვირვების წინ სისტემა იმყოფება რომელიმე ϵ_i მდგომარეობაში $(1 \le i \le n)$, მაშინ m ნაბიჯის შემდეგ $\mathcal{P}(m)$ მატრიცის საშუალებით შეგვიძლია ვიპოვოთ სისტემის ნებისმიერ ϵ_j მდგომარეობაში m ნაბიჯის შემდეგ მოხვედრის $P_{ij}(m)$ ალბათობა. იმ შემთხვევაში, როცა სისტემის საწყისი მდგომარეობა არ არის ცნობილი, მაგრამ მოცემულია $P_i^{(0)}$ ალბათობები იმისა, რომ სისტემა საწყის მომენტში იმყოფება i-ურ მდგომარეობაში, მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია გამოვითვალოთ m ნაბიჯის შემდეგ სისტემის ნებისმიერ j-ურ მდგომარეობაში მოხვედრის $P_j(m)$ ალბათობა შემდეგი ფორმულით

$$P_j(m) = \sum_{k=1}^{n} P_k^{(0)} \cdot P_{kj}(m).$$

სტრიქონ-ვექტორს

$$P^{(0)} = (P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \cdots, P_n^{(0)})$$

ეწოდება მარკოვის ჯაჭვის საწყისი განაწილების ვექტორი, ხოლო $P_i^{(m)}$ $(1 \le i \le n)$ ალბათობებისაგან შედგენილ სტრიქონ-ვექტორს

$$\mathcal{P}^{(m)} = (P_1^{(m)}, P_2^{(m)}, \cdots, P_n^{(m)})$$

ეწოდება მარკოვის ჯაჭვის განაწილების ვექტორი m ნაბიჯის შემდეგ. ამ აღნიშვნებში ვღებულობთ

$$\mathcal{P}^{(m)} = \mathcal{P}^{(0)} \cdot \mathcal{P}(m)$$

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ მარკოვის თეორემა ზღვარითი ალბათობების შესახებ.

თეორემა 1. ვთქვათ, $(\epsilon_i)_{1 \le i \le n}$ ფიზიკური სისტემის მდგომარეობებია. თუ $m > 0$ რიცხვისათვის მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა $\mathcal{P}^{(m)}$ მატრიცის ყოველი P_{ij} ელემენტი დადებითია, მაშინ იარსებებს მუდმივ რიცხვთა ისეთი $(q_i)_{1 \le i \le n}$ მიმდევრობა, რომ ადგილი ექნება შემდეგ თანაფარდობებს

$$(\forall i)(1 \le i \le n \to \lim_{m \to \infty} P_{ij}(m) = q_j) \ \ (1 \le j \le n).$$

q_j $(1 \le j \le n)$ რიცხვები შეგვიძლია მივიჩნიოთ სისტემის j-ურ მდგომარეობაში მოხვედრის ალბათობად, როცა m საკმაოდ დიდია.

ტესტები

1.14.1. მოცემულია ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა მატრიცა

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

და საწყის ალბათობათა ვექტორი $(0,2;\ 0,5;\ 0,3)$. ორი ნაბიჯის შემდეგ სისტემის განაწილების ვექტორი ტოლია

ა) $(0,125; 0,475; 0,4)$, ბ) $(0,225; 0,475; 0,3)$,
გ) $(0,025; 0,575; 0,4)$, დ) $(0,125; 0,375; 0,5)$.

1.14.2. მოცემულია მარკოვის ერთგვაროვანი ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა მატრიცა

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

2-ბიჯიანი გადასვლის $\mathcal{P}(2)$ მატრიცას აქვს სახე

ა)

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,15 & 0,6 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix},$$

ბ)

$$\begin{pmatrix} 0,33 & 0,21 & 0,46 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,24 & 0,13 & 0,33 \end{pmatrix}.$$

1.14.3. მოცემულია მარკოვის ერთგვაროვანი ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა მატრიცა

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

მე-2 მდგომარეობიდან მე-3 მდგომარეობაში 3 ნაბიჯის შემდგომ გადასვლის ალბათობა $P_{23}(3)$ ტოლია

ა) $0,125$, ბ) $0,225$, გ) $0,54$, დ) $0,375$.

14.4. მოცემულია მარკოვის ერთგვაროვანი ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა მატრიცა

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

და საწყის ალბათობათა ვექტორი $(0,2;\ 0,8)$. ცნობილია, რომ საწყისი მდგომარეობიდან ϵ_i მდგომარეობაში 2 ნაბიჯის შემდგომ მოხვედრის ალბათობაა 0,128. მაშინ i ტოლია

ა) 1, ბ) 2.

§ 1.15. ბროუნის მოძრაობის პროცესი

განვიხილოთ ნაწილაკი, რომელიც მოთავსებულია ერთგვაროვან სითხეში. ნაწილაკი განიცდის ქაოსურ შეჯახებას სითხის მოლეკულებთან, რის შედეგადაც ის იმყოფება უწყვეტ მოუწესრიგებელ მოძრაობაში. ამ პროცესის დისკრეტულ ანალოგს წარმოადგენს შემთხვევითი ხეტიალის შემდეგი მოდელი. ნაწილაკი იცვლის თავის მდგომარეობას მხოლოდ დროის დისკრეტულ Δt-ს ჯერად მომენტებში ($\Delta t > 0$). მდგომარეობის ცვლილება წარმოებს იმგვარად, რომ თუ ნაწილაკი იმყოფება x წერტილში, მაშინ წინა ყოფაქცევისაგან დამოუკიდებლად ის გადადის ტოლი ალბათობებით მეზობელი $x + \Delta x$ და $x - \Delta x$ წერტილებიდან ერთ-ერთში. ამასთან წანაცვლება Δx ერთი და იგივეა ყველა x წერტილისათვის (აქ საუბარია მოძრავი ნაწილაკის ერთ-ერთ კოორდინატზე, ანუ სხვანაირად, ერთგანზომილებიან შემთხვევით ხეტიალზე). ზღვარში, როცა გარკვეული წესით $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, მიიღება უწყვეტი შემთხვევითი ხეტიალი, რომელიც დამახასიათებელია ბროუნის [24] მოძრაობის ფიზიკური პროცესისათვის.

აღვნიშნოთ $\xi_t(\omega)$-თი ბროუნის ნაწილაკის მდგომარეობა დროის t მომენტისათვის. ვთქვათ, დროის საწყისი $t = 0$ მომენტისათვის ნაწილაკი იმყოფება $x = 0$ მდგომარეობაში. დისკრეტული ხეტიალის შემთხვევაში t დროის განმავლობაში ის აწარმოებს $n = \frac{t}{\Delta t}$ ნაბიჯს. თუ აღვნიშნავთ $S_n(\omega)$-თი Δx-ით წანაცვლებათა რაოდენობას დადებითი მიმართულებით, მაშინ საერთო წანაცვლება დადებითი მიმართულებით შეადგენს $S_n(\omega)\cdot\Delta x$, ხოლო უარყოფითი მიმართულებით კი $(n - S_n(\omega))\cdot\Delta x$. ამგვარად, საერთო წანაცვლება $\xi_t(\omega)$ $t = n\Delta t$ დროის განმავლობაში დაკავშირებულია $S_n(\omega)$ რიცხვთან შემდეგი ტოლობით

$$\xi_t(\omega) = [S_n(\omega)\Delta x - (n - S_n(\omega))\Delta x] = (2S_n(\omega) - n)\Delta x.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\xi_0(\omega) = 0$, მაშინ

$$\xi_t(\omega) = (\xi_s(\omega) - \xi_0(\omega)) + (\xi_t(\omega) - \xi_s(\omega))$$

ყოველი s-სათვის, $0 \leq s \leq t$. ცხადია, რომ აღწერილ მოდელში შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_s - \xi_0$ და $\xi_t - \xi_s$ არიან დამოუკიდებლები. ამასთან $\xi_t - \xi_s$ ნაზრდის განაწილება ზუსტად იგივეა, რაც $\xi_{t-s} - \xi_0$-ისა. ამიტომ $\sigma^2(t) = D\xi_t$ აკმაყოფილებს თანაფარდობას

$$\sigma^2(t) = \sigma^2(s) + \sigma^2(t-s) \quad (0 \leq s \leq t).$$

[24] ბროუნი რობერტი (*Brown Robert*) (21.12.1773, მონტროზი - 10.6.1858, ლონდონი) - ინგლისელი ბოტანიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის საპატიო წევრი (1827). აღმოაჩინა ე.წ. ბროუნის მოძრაობა, რომელიც ალბათობის თეორიაში ცნობილია როგორც ვინერის პროცესი.

აქედან ჩანს, რომ $\sigma^2(t)$, როგორც t-ს ფუნქცია, t-ს ზრდასთან ერთად იცვლება წრფივად, რის გამო იარსებებს ისეთი σ^2, რომ

$$D\xi_t = \sigma^2 \cdot t.$$

σ^2 კოეფიციენტს ეწოდება დიფუზიის კოეფიციენტი. მეორე მხრივ, ადვილი მისახვედრია, რომ წანაცვლების დისპერსია t დროის განმავლობაში (ანუ სხვანაირად, $n = \frac{t}{\Delta t}$ ნაბიჯის შემდეგ) არის $D\xi_t = (\Delta x)^2 \cdot \frac{t}{\Delta t}$. საბოლოოდ ვღებულობთ შემდეგ თანაფარდობას Δx და Δt სიდიდეებს შორის

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma^2.$$

ნაწილაკის მიერ მოხდენილი გადასვლები არიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი და ამიტომ ისინი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ბერნულის ცდა "წარმატების" $p = \frac{1}{2}$ ალბათობით. მაშინ $S_n(\omega)$ ნაბიჯთა რაოდენობა დადებითი მიმართულებით იქნება "წარმატებათა" რიცხვის ტოლი ბერნულის n დამოუკიდებელ ცდაში. ამასთან დროის t მომენტისათვის ნაწილაკის $\xi_t(\omega)$ მდგომარეობა ნორმირებულ $S_n^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2S_n(\omega) - n)$ შემთხვევით სიდიდესთან დაკავშირებული იქნება შემდეგნაირად

$$\xi_t(\omega) = S_n^*(\omega)\sqrt{n}\Delta x = S_n^*(\omega)\sqrt{t}\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta t}} = S_n^*(\omega)\sigma\sqrt{t}.$$

ლინდენბერგ-ლევის თეორემის გამოყენებით ვღებულობთ(იხ. §1.13, თეორემა 10), რომ $\xi_t(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას ბროუნის მოძრაობის ზღვრული პროცესის დროს აქვს შემდეგი სახე

$$P(\{\omega : x_1 \le \frac{\xi_t(\omega)}{\sigma\sqrt{t}} \le x_2\}) = \lim_{\Delta t \to 0} P(\{\omega : x_1 \le S_n^*(\omega) \le x_2\}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega : x_1 \le \frac{S_n(\omega) - np}{\sqrt{npq}} \le x_2\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

სადაც $p = q = \frac{1}{2}$.

შენიშვნა 1. საინტერესოა იმ ფაქტის აღნიშვნა, რომ ბროუნის მოძრაობის სასრულ-განზომილებიანი განაწილებების თვისებების შესახებ თავისი მოსაზრება პირველად გამოთქვა ცნობილმა ფიზიკოსმა ალბერტ აინშტაინმა. მისი მოსაზრება მკაცრად იქნა დასაბუთებული ამერიკელი მათემატიკოსის ნორბერტ ვინერის მიერ, რომელსაც ეკუთვნის ბროუნის მოძრაობის მათემატიკური მოდელის შექმნა. მის პატივსაცემად ბროუნის მოძრაობის მათემატიკური მოდელები ლიტერატურაში მოიხსენიება როგორც ვინერის პროცესები.

ტესტები

1.15.1. საქონლის ფასის ცვლილება წარმოადგენს ბროუნის მოძრაობის პროცესს $\sigma^2 = 1$ დიფუზიის კოეფიციენტით. $t = 0$ მომენტისათვის საქონლის ფასი იყო 9-ერთეულის ტოლი. ალბათობა იმისა, რომ საქონლის ფასი $t = 9$ მომენტისათვის არ მოიმატებს, ტოლია

ა) $0,4$, ბ) $0,5$, გ) $0,6$, დ) $0,7$.

1.15.2. ბაზარზე ფერადი ტელევიზორის ფასის ცვლილება წარმოადგენს ბროუნის მოძრაობის პროცესს დიფუზიის $\sigma^2 = 1$ (ლარი /წთ.) კოეფიციენტით. დროის $t = 0$ მომენტისათვის საქონლის ფასი შეადგენდა 200 ლარს. ალბათობა იმისა, რომ დროის $t = 6$სთ. 40წთ. მომენტისათვის ტელევიზორის ფასი იქნება:

1) 190 ლარზე ნაკლები, ტოლია

ა) $0,3064$, ბ) $0,3164$, გ) $0,3264$, დ) $0,3364$;

2) 210 ლარზე მეტი, ტოლია

ა) $0,2864$, ბ) $0,3264$, გ) $0,3464$, დ) $0,3664$;

3) [185 ლარი, 205 ლარი] შუალედში, ტოლია

ა) $0,3027$, ბ) $0,3227$, გ) $0,3527$, დ) $0,3727$.

1.15.3. ბირჟაზე ფასიანი ქაღალდის ფასის ცვლილება წარმოადგენს ბროუნის მოძრაობის პროცესს დიფუზიის $\sigma^2 = 1$ კოეფიციენტით. ფირმამ დროის $t = 0$ მომენტისათვის 3000 ლარად შეიძინა A სახის ფასიანი ქაღალდი. ალბათობა იმისა, რომ

1) დროის $t = 250000$ მომენტისათვის ფირმის მიერ გაყიდული A სახის ფასიანი ქაღალდისაგან ამონაგები შეადგენს 300 ლარზე მეტ თანხას, ტოლია

ა) 0, ბ) $0,1$, გ) $0,2$, დ) $0,3$;

2) დროის $t = 900$ მომენტისათვის ფირმის მიერ A სახის ფასიანი ქაღალდის გაყიდვით მიყენებული ზარალი გადააჭარბებს 15 ლარს, ტოლია

ა) 0, ბ) 1, გ) $0,3$, დ) $0,6$.

1.15.4. B ტიპის საქონლის ფასის ცვლილება წარმოადგენს ბროუნის მოძრაობის პროცესს დიფუზიის $\sigma^2 = 1$ კოეფიციენტით. დროის $t = 0$ მომენტისათვის საქონლის ფასი შეადგენდა 50 ლარს. მომხმარებელი დაინტერესებულია იყიდოს ეს ნაწარმი 55 ლარის ფარგლებში. მაღაზია წყვეტს B ტიპის საქონლის გაყიდვას, თუ მოხდა ფასის დაცემა 41 ლარზე დაბლა. ალბათობა იმისა, რომ $t = 1\frac{2}{3}$ სთ. მომენტისათვის მაღაზიაში ყოფნისას მომხმარებელი შეიძენს B ტიპის პროდუქციას, ტოლია

ა) $0,2287$, ბ) $0,3387$, გ) $0,4487$, დ) $0,5587$.

ნაწილი 2.

მათემატიკური სტატისტიკა

§ 2.1. მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი ამოცანები და მეთოდები

იმისათვის რომ წარმოდგენა ვიქონიოთ მათემატიკური სტატისტიკის საგანზე და მის მიმართებაზე ალბათობის თეორიასთან, მოვიყვანოთ ამ დისციპლინების დამახასიათებელი ტიპიური ამოცანები ბინომური სქემის შემთხვევაში.

ალბათობის თეორიის ტიპიური ამოცანა.

მონეტას აგდებენ n -ჯერ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ცნობილია, რომ ცალკეულ ცდაში გერბის მოსვლის ალბათობა p- რიცხვის ტოლია. საძიებელია ალბათობა იმისა, რომ მონეტის n-ჯერ დამოუკიდებელი აგდებისას გერბი მოვა ზუსტად k-ჯერ.

მათემატიკური სტატისტიკის ტიპიური ამოცანა.

მონეტა ააგდეს n-ჯერ. ცდები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. ცნობილია, რომ გერბი მოვიდა k-ჯერ.

I) როგორ შევაფასოთ გერბის მოსვლის უცნობი p ალბათობა?

II) თუ $\widehat{p}$ არის p ალბათობის შეფასება, როგორია $\widehat{p}$-ს სიზუსტე?

III) როგორ შევაფასოთ ჰიპოთეზა მონეტის სიმეტრიულობის შესახებ (ე.ი. $p=\frac{1}{2}$) ?

IV) როგორ გავარჩიოთ ორი ჰიპოთეზა, მაგალითად, $p=\frac{1}{2}$ და $p=\frac{2}{3}$?

ჩამოთვლილი ალბათური და სტატისტიკური ამოცანები არაა ჯერ ფორმალიზებული, მაგრამ ზემოთაღნიშნული დისციპლინების ტიპიური ამოცანების დასმიდან ნათელია, რომ მათემატიკური სტატისტიკის ტიპიური ამოცანა გარკვეული აზრით არის ალბათობის თეორიის ტიპიური ამოცანის შებრუნებული იმ აზრით, რომ თუ ალბათობის თეორიაში მოითხოვება რთული ხდომილობის ალბათობის გამოთვლა მარტივი (ანუ ელემენტარული) ხდომილობის ალბათობის საფუძველზე, მათემატიკური სტატისტიკაში მოითხოვება რთული ხდომილობის ალბათობის შეფასების საშუალებით ელემენტარული ხდომილობის ალბათობის შეფასება.

თუ ყოველ ცდაში გერბის მოსვლის ალბათობა p რიცხვის ტოლია, მაშინ n-დამოუკიდებელი ცდის შესაბამის ალბათურ მოდელს ექნება სახე (Ω^n, F^n, P_p), სადაც

1) $\Omega^n=\{(\omega_1,\cdots,\omega_n):\omega_i=1$ თუ i -ურ ცდაში მოვიდა გერბი, ან $=0$ სხვა შემთხვევაში $\}$;

2) $F^n=\{A: A\subseteq\Omega\}$;

3) $P_p(\omega_1,\cdots,\omega_n)=p^{\sum_{i=1}^n\omega_i}\times(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n\omega_i}$.

ამ მოდელში A ხდომილობას -"n დამოუკიდებელ ცდაში გერბი მოვიდა k-ჯერ" აქვს შემდეგი სახე

$$A = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n) : \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k\}.$$

ალბათობის თეორიის კურსში (იხ. § 1.5.) ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ

$$P_p(A) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

თუ განვსაზღვრავთ შემთხვევით სიდიდეებს

$$(\forall i)(\forall(\omega_1, \cdots, \omega_n))(1 \le i \le n \ \& \ (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \Omega \to \xi_i(\omega_1, \cdots, \omega_n) = \omega_i)$$

მაშინ შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახი იქნება დამოუკიდებელი, ამასთან

$$(\forall i)(1 \le i \le n \ \to P_p(\{(\omega_1, \cdots, \omega_n) : \xi_i(\omega_1, \cdots, \omega_n) = 1\}) = p).$$

შემთხვევითი სიდიდეების შემოღება "ალბათობის თეორიის ტიპიური ამოცანის" ამოხსნას დაიყვანს

$$P_p(\{(\omega_1, \cdots, \omega_n) : \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega_1, \cdots, \omega_n) = k\})$$

რიცხვის გამოთვლაზე.

იმისათვის რომ მოხერხდეს "მათემატიკური სტატისტიკის ტიპიური ამოცანის" ფორმალიზაცია, შემოვიღოთ (ჩვენი კონკრეტული შემთხვევისათვის) შემდეგი

განსაზღვრება 1. სამეულს $(\Omega^n, F^n, (P_p)_{p \in A})(A \subseteq]0,1[)$, სადაც

ა) $\Omega^n = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n) : (\forall i)(1 \le i \le n \to \omega_i = 1 \bigvee 0)\}$,

ბ) $F^n = \{X : X \subseteq \Omega^n\}$,

გ) $(\forall p)(p \in A \to P_p((\omega_1, \cdots, \omega_n)) = p^{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} \times (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} \omega_i})$,

ეწოდება ალბათურ-სტატისტიკური მოდელი.

შევნიშნოთ, რომ I-II ამოცანებში გამოყენებად ალბათურ-სტატისტიკურ მოდელს აქვს სახე $(\Omega^n, F^n, (P_p)_{p \in A})$, სადაც $A =]0,1[$. IV ამოცანაში გამოიყენება მსგავსი მოდელი $A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$ შემთხვევისათვის.

მათემატიკურ სტატისტიკაში ელემენტარულ ხდომილობათა Ω^n სივრცეს ეწოდება n-მოცულობის შერჩევათა სივრცე და აღინიშნება სიმბოლოთი X^n. $(x_1, \cdots, x_n) \in X^n$ წერტილს უწოდებენ n-მოცულობის შერჩევას. შემთხვევით ვექტორს $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, განსაზღვრულს X^n სივრცეზე შემდეგი პირობით

$$(\forall i)(1 \le i \le n \to \xi_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i)$$

ეწოდება შემთხვევითი შერჩევა. ამგვარად, ξ_i არის შემთხვევითი სიდიდე (რომელიც შესაძლოა არ იყოს ნამდვილმნიშვნელობიანი), რომელიც i-ურ ცდას შეესაბამება, ხოლო x_i არის ის მნიშვნელობა, რომელსაც ღებულობს ξ_i შემთხვევითი სიდიდე.

მათემატიკური სტატისტიკის ტიპიური ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად.

ვთქვათ, $(P_p)_{p\in A}$ არის X^n-ზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა ოჯახი და $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ არის შემთხვევითი ვექტორი ერთნაირად განაწილებული $\xi_1,\cdots,\xi_n$ კომპონენტებით. ამასთან ცნობილია, რომ რომელიღაც უცნობი $p_0\in A$ პარამეტრისათვის

$$(\forall k)(1\le k\le n\rightarrow P(\{(x_1,\cdots,x_n):\xi_k(x_1,\cdots,x_n)=1\})=p_0).$$

საჭიროა მოხერხდეს ამა თუ იმ დასკვნის გაკეთება p_0 პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობის შესახებ.

შენიშვნა 1. ის ფაქტი, რომ $x=(x_1,\cdots,x_n)$ შერჩევა შეიძლება განხილულ იქნას როგორც შემთხვევითი $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ შერჩევის რეალიზაცია, რომლის "შემთხვევითობა" აღიწერება განაწილებით $(P_p)_{p\in A}$ ოჯახიდან, ცხადია , თავისთავად არ იგულისხმება. ჩვენ მკაფიოდ უნდა შევიგნოთ, რომ ეს მხოლოდ დაშვებაა. კონკრეტულ სიტუაციაში სავსებით შესაძლებელია, რომ $x=(x_1,\cdots,x_n)$ სიდიდის ამა თუ იმ მნიშვნელობის გამოვლენა სულაც ვერ აღიწეროს რაიმე კანონზომიერებით.

2) ამრიგად, I-IV ამოცანათა ამოსახსნელად განვიხილოთ ალბათურ-სტატისტიკური მოდელი

$$(X^n,\mathcal{F}^n,\mathcal{P}),$$

სადაც

ა) $X^n=\{(x_1,\cdots,x_n):(\forall i)(1\le i\le n\rightarrow x_i=1\bigvee x_i=0)\}$,

ბ) $\mathcal{F}^n=\{A:A\subseteq X^n\}$,

გ) $\mathcal{P}=\{P_\theta:\theta\in\Theta,\ P_\theta$ არის ალბათობა $\mathcal{F}^n$-ზე, განსაზღვრული პირობით

$$P_\theta(x_1,\cdots,x_n)=\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\times(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i},$$

ხოლო Θ არის $(0,1)$ ინტერვალის გარკვეული ქვესიმრავლე$\}$.

შენიშვნა 2. თუ განვიხილავთ ალბათურ $(X,\mathcal{F},p_\theta)(\theta\in\Theta)$ სივრცეთა ოჯახს , სადაც

ა) $X=\{0,1\}$,

ბ) $\mathcal{F}=\{\emptyset,\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$

გ) $(\forall\theta)(\theta\in\Theta\rightarrow p_\theta(\{1\})=\theta\ \&\ p_\theta(\{0\})=1-\theta)$,

მაშინ

$$(X^n,\mathcal{F}^n,\mathcal{P})=(X^n,\mathcal{F}^n,(p_\theta^n)_{\theta\in\Theta}).$$

§2.1.1. მათემატიკური სტატისტიკის I ამოცანის ამოხსნა

გავიხსენოთ, I ამოცანა მდგომარეობდა იმაში თუ როგორ შეგვეფასებინა გერბის მოსვლის უცნობი $\theta\in]0,1[$ ალბათობა n-დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგად მიღებული $(x_1,\cdots,x_n)$ შერჩევის საშუალებით. ბუნებრივია, რომ პირველ ნაბიჯზე θ-ს შეფასებად შეგვიძლია განვიხილოთ ნებისმიერი ფუნქცია $t_n:X^n\rightarrow\Theta$, სადაც $\Theta=]0,1[$.

მეორე ნაბიჯზე ჩვენ უნდა შეგვეძლოს ერთმანეთისაგან განსხვავებული შეფასებების შედარება და მათგან "საუკეთესოს" შერჩევა.

განსაზღვრება 1. $t_n : X^n \to \Theta$ შეფასებას ეწოდება θ პარამეტრის ჩაუნაცვლებელი შეფასება, თუ ყოველი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისათვისა სრულდება პირობა

$$M_\theta t_n = \theta,$$

სადაც M_θ ნიშნავს მათემატიკური ლოდინის აღებას X^n-ზე t_n ფუნქციიდან P_θ ალბათური ზომის მიმართ.

შენიშვნა 1. ჩაუნაცვლებლობა საკმაოდ ბუნებრივი მოთხოვნაა, ვინაიდან მოითხოვება რომ "საშუალოდ " ყველა შერჩევისათვის t_n შეფასებამ მოგვცეს θ-პარამეტრის ზუსტად ის მნიშვნელობა, რომელიც მართლაც გააჩნია დაკვირვებად მოვლენას.

მაგალითი 1. დავუშვათ, რომ $\nu_n = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$. ვაჩვენოთ, რომ ν_n შეფასება წარმოადგენს θ პარამეტრის ჩაუნაცვლებელ შეფასებას. მართლაც,

$$M_\theta \nu_n = \int_{X^n} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} dP_\theta(x_1, \cdots, x_n) =$$

$$\int_{X^n} \frac{\sum_{k=1}^n Pr_k(x_1, \cdots, x_n)}{n} dP_\theta(x_1, \cdots, x_n) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int_{X^n} x_k dP_\theta(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int_{X_k} x_k dp_\theta(x_k) = \frac{n\theta}{n} = \theta,$$

სადაც $X^n = \prod_{k=1}^n X_k$, $X_k = \{0, 1\}$ და $Pr_k(x_1, \cdots, x_n) = x_k$ ყოველი $k \in \{1, \cdots, n\}$ ნატურალური რიცხვისათვის.

ჩვენ გამოვიყენეთ ფუბინის თეორემის დისკრეტული ანალოგი, კერძოდ შემდეგი ტოლობა

$$\int_{X^n} x_k dP_\theta(x_1, \cdots, x_n) =$$

$$\int_{X_k} x_k dp_\theta(x_k) \times \prod_{i \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{k\}} \int_{X_i} dp_\theta(x_i) = \int_{X_k} x_k dp_\theta(x_k) = \theta.$$

შენიშვნა 2. თუ $(a_i)_{1 \le i \le n}$ ნამდვილ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობაა, რომ $\sum_{i=1}^n a_i = n$, მაშინ $\frac{\sum_{k=1}^n a_k x_k}{n}$ შეფასება ასევე იქნება ჩაუნაცვლებელი შეფასება.

განსაზღვრება 2. θ პარამეტრის ჩაუნაცვლებელ შეფასებას ეწოდება ეფექტური, თუ მისი დისპერსია არის მინიმალური θ პარამეტრის ყველა ჩაუნაცვლებელ შეფასებებს შორის.

თეორემა 1. ყოველი $n \ge 1$ ნატურალური რიცხვისათვის $\nu_n = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$ წარმოადგენს θ პარამეტრის ეფექტურ შეფასებას.

თეორემა 1-ის დამტკიცება ეყრდნობა შემდეგ დამხმარე დებულებას.

ლემა 1(რაო-კრამერის [25] უტოლობა). ვთქვათ, $L_\theta(x) = lnP_\theta(x)$ ყოველი $x \in X^n$ შერჩევისათვის. მაშინ θ პარამეტრის ყოველი ჩაუნაცვლებელი t_n შეფასებისათვის მართებულია უტოლობა

$$M_\theta(t_n - \theta)^2 \geq \frac{1}{M_\theta(\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta})^2}.$$

დამტკიცება. იმის გამო, რომ

$$P_\theta(x_1, \cdots, x_n) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \times (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i},$$

ამიტომ

$$L_\theta(x) = lnP_\theta(x) = \sum_{i=1}^n x_i ln\theta + (n - \sum_{i=1}^n x_i) ln(1-\theta)$$

და

$$\frac{\partial L_\theta(x)}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{1-\theta}(n - \sum_{i=1}^n x_i) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(1-\theta) - \theta(n - \sum_{i=1}^n x_i)}{\theta(1-\theta)} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i - \theta\sum_{i=1}^n x_i - n\theta + \theta\sum_{i=1}^n x_i}{\theta(1-\theta)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}{\theta(1-\theta)}.$$

განვიხილოთ ორი იგივეობა

$$1 = M_\theta 1, \quad \theta = M_\theta t_n,$$

რომლებიც შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$1 = \int_{X^n} 1 dP_\theta(x) = \sum_{x \in X^n} P_\theta(x), \quad \theta = \int_{X^n} t_n(x) dP_\theta(x) = \sum_{x \in X^n} t_n(x) P_\theta(x).$$

თუ იგივეობებს გავაწარმოებთ θ ცვლადით, გვექნება

$$0 = \sum_{x \in X^n} \frac{\partial P_\theta(x)}{\partial \theta} = \sum_{x \in X^n} [\frac{\partial P_\theta(x)}{\partial \theta} : P_\theta(x)] P_\theta(x) = M_\theta[\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta}],$$

$$1 = \sum_{x \in X^n} t_n(x) \frac{\partial P_\theta(x)}{\partial \theta} = M_\theta[t_n \frac{\partial L_\theta}{\partial \theta}].$$

თუ პირველი ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ θ-ზე, მაშინ მიღებული ტოლობის მეორე ტოლობიდან გამოკლება მოგვცემს

$$1 = M_\theta[(t_n - \theta)\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta}].$$

[25] კრამერი კარლ ჰარალდი (*Cramer Karl Harald*) (25.9.1893, სტოკჰოლმი)-შვეიცარელი მათემატიკოსი, მათემატიკური სტატისტიკისა და მათემატიკის პროფესორი (1929), სტოკჰოლმის უნივერსიტეტის რექტორი (1950-1958).

თუ გამოვიყენებთ კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობას, მივიღებთ

$$1 \le M_\theta (t_n - \theta)^2 M_\theta [\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta}]^2.$$

ე.ი.

$$M_\theta (t_n - \theta)^2 \ge \frac{1}{M_\theta (\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta})^2}.$$

ლემა 1 დამტკიცებულია.

შენიშვნა 3. $M_\theta (\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta})^2$ სიდიდე აღინიშნება $I_n(\theta)$ სიმბოლოთი და მას ეწოდება ფიშერის[26] ინფორმაცია უცნობი θ პარამეტრის შესახებ. ამგვარად, ჩვენს მიერ დამტკიცებულია

$$inf D_\theta t_n \ge \frac{1}{I_n(\theta)},$$

სადაც

$$L_\theta(x) = l_n(\theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \times (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i})$$

და inf აიღება ყველა ჩაუნაცვლებელიშეფასების მიმართ.

თეორემა 1–ის დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ რაო-კრამერის უტოლობაში ტოლობა მიიღწევა როცა $t_n = \nu_n$. მართლაც,

$$(\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta})^2 = (\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}{\theta(1-\theta)})^2$$

თანაფარდობის, $Pr_1, \cdots, Pr_n$ ზომად ფუნქციათა დამოუკიდებლობისა და $M_\theta(Pr_i - \theta) = 0$ $(1 \le i \le n)$ პირობის მართებულობის გამო

$$M_\theta (\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta})^2 = M_\theta (\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}{\theta(1-\theta)})^2 = M_\theta (\sum_{i=1}^n (\frac{x_i - \theta}{\theta(1-\theta)}))^2 =$$

$$M_\theta (\sum_{i=1}^n (\frac{x_i - \theta}{\theta(1-\theta)})^2 + 2 \sum_{i,j} \frac{(x_i - \theta)(x_j - \theta)}{\theta^2 (1-\theta)^2}) =$$

$$n M_\theta (\frac{Pr_1 - \theta}{\theta(1-\theta)})^2 = \frac{n}{\theta(1-\theta)}.$$

ამგვარად,

$$I_n(\theta) = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$$

და რაო-კრამერის უტოლობა ჩვენს შემთხვევაში ღებულობს სახეს

$$inf D_\theta (t_n) \ge \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

[26] ფიშერი რონალდ ეილმერი (*Fisher Ronald Aylmer*) (17.2.1890-29.7.1962)-ინგლისელი სტატისტიკოსი და გენეტიკოსი, ლონდონის სამეფო საზოგადოების წევრი (1929).

ვინაიდან $D_\theta \nu_n = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$, ამიტომ ვღებულობთ

$$D_\theta \nu_n = inf D_\theta(t_n),$$

რაც ნიშნავს ν_n შეფასების ეფექტურობას. თეორემა დამტკიცებულია.

რეზიუმე I ამოცანასთან დაკავშირებით. სტატისტიკა ν_n ყოფილა უცნობი θ პარამეტრის ჩაუნაცვლებელი და ეფექტური შეფასება და ამით პასუხი მათემატიკური სტატისტიკის I ამოცანაზე გაცემულია.

§ 2.1.2 მათემატიკური სტატისტიკის II ამოცანის ამოხსნა

როგორია უცნობი θ პარამეტრის ν_n შეფასების "სიზუსტე"?-ეს წარმოადგენს მათემატიკური სტატისტიკის II ტიპიურ ამოცანას.

ამ მიმართულებით შევნიშნოთ, რომ როცა უცნობი θ პარამეტრის შეფასებად ვიღებთ ν_n წერტილოვან შეფასებას, ჩვენ ვუშვებთ გარკვეულ შეცდომას. შეიძლება ისე მოხდეს, რომ ν_n საკმაოდ განსხვავდებოდეს θ პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისაგან. ამიტომ მიზანშეწონილია შეფასება

$$|\theta - \nu_n| < \delta$$

უტოლობის სახით წარმოდგეს, რაც შემდეგი სახით შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\theta \simeq \nu_n \pm \delta,$$

სადაც δ არის ცდომილება, რომელიც შეფასების "სიზუსტეს" ახასიათებს. გავარკვიოთ, თუ რა აზრია ჩაქსოვილი შეფასების "სიზუსტის" ცნებაში.

ჩებიშევის უტოლობის ძალით

$$P_\theta\{x|x \in X^n, |\theta - \nu_n| \geq \delta\} \leq \frac{D_\theta \nu_n}{\delta^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n\delta^2}.$$

ამიტომ ყოველი დადებითი g-სთვის

$$P_\theta\{x|x \in X^n, |\theta - \nu_n| \leq g\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}\} \geq 1 - \frac{D_\theta \nu_n}{g^2 \frac{\theta(1-\theta)}{n}} = 1 - \frac{1}{g^2}.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $g = 3$, მივიღებთ, რომ ნებისმიერ θ-სთვის 0,89 -ზე მეტი ალბათობით ადგილი აქვს

$$|\theta - \nu_n| \leq 3\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}$$

უტოლობას $(1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9} \approx 0,89)$.

რადგან $\theta(1-\theta) \leq \frac{1}{4}$, ამიტომ

$$|\theta - \nu_n| \le \frac{3}{2\sqrt{n}}$$

და ამგვარად $0,89$-ზე არანაკლები ალბათობით შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ $(\nu_n - \frac{3}{2\sqrt{n}}; \nu_n + \frac{3}{2\sqrt{n}})$ ინტერვალი შეიცავს θ-ს უცნობ მნიშვნელობას.

ამგვარად, როცა ჩვენ ვასახელებთ შეფასების სიზუსტეს, აუცილებელია იქვე აღვნიშნოთ, თუ რა ალბათობით ხდება ამ სიზუსტის უზრუნველყოფა. ამიტომ ზემოთმოყვანილი ჩანაწერის ნაცვლად მიმართავენ შემდეგ ჩანაწერს

$$\theta \simeq \nu_n \pm \delta_\gamma (100\%\gamma),$$

სადაც γ აღნიშნავს იმ ალბათობას, რომლითაც $(\nu_n - \delta_\gamma; \nu_n + \delta_\gamma)$ ინტერვალი დაფარავს θ პარამეტრს. γ რიცხვს $(\nu_n - \delta_\gamma; \nu_n + \delta_\gamma)$ ინტერვალის ნდობის კოეფიციენტი ეწოდება.

ამ ჩანაწერის გამოყენებით ვღებულობთ

$$\theta \simeq \nu_n \pm \frac{3}{2\sqrt{n}} (89\%),$$

რაც ნიშნავს რომ თუ გვაქვს N რაოდენობა n-მოცულობის შერჩევები

$$x^{(1)}, \cdots, x^{(N)},$$

მაშინ $0,89N$-ზე მეტი შერჩევისათვის

$$(\nu_n - \frac{3}{2\sqrt{n}}; \nu_n + \frac{3}{2\sqrt{n}})$$

ინტერვალი შეიცავს θ-ს უცნობ მნიშვნელობას.

ვთქვათ, t_γ არის $\frac{1-\gamma}{2}$ დონის ზედა კვანტილი, ე.ი., $\Phi(t_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2}$.

თუ გამოვიყენებთ ცენტრალურ ზღვარითი თეორემას, მაშინ საკმაოდ დიდი n ნატურალური რიცხვისათვის მივიღებთ

$$\gamma \approx p_\theta^n(\{x : x \in X^n \ \& \ \big|\frac{\sum_{i=1}^n x_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\big| \le t_\gamma\}) =$$

$$p_\theta^n(\{x : x \in X^n \ \& \ \big|\frac{n(\nu_n - \theta)}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\big| \le t_\gamma\}) =$$

$$p_\theta^n(\{x : x \in X^n \ \& \ \big|\nu_n - \theta\big| \le \frac{t_\gamma}{\sqrt{n}}\sqrt{\theta(1-\theta)}\}) \le$$

$$p_\theta^n(\{x : x \in X^n \ \& \ \big|\theta - \nu_n\big| \le \frac{t_\gamma}{2\sqrt{n}}\}) =$$

$$p_\theta^n(\{x : x \in X^n \ \& \ -\frac{t_\gamma}{2\sqrt{n}} \le \theta - \nu_n \le \frac{t_\gamma}{2\sqrt{n}}\}) =$$

$$p_\theta^n(\{x : x \in X^n \ \& \ \nu_n - \frac{t_\gamma}{2\sqrt{n}} \le \theta \le \nu_n + \frac{t_\gamma}{2\sqrt{n}}\}).$$

ამგვარად ჩვენს მიერ საკმაოდ დიდი n ნატურალური რიცხვისათვის მიღებულია შემდეგი სტოქასტური უტოლობის

$$p_\theta^n(\{x : x \in X^n \ \& \ \nu_n - \frac{t_\gamma}{2\sqrt{n}} \le \theta \le \nu_n + \frac{t_\gamma}{2\sqrt{n}}\}) \ge \gamma$$

მართებულობა, რაც მიუთითებს იმაზე, რომ საკმაოდ დიდი n ნატურალური რიცხვისათვის ინტერვალი $(\nu_n - \frac{t_\gamma}{2\sqrt{n}}; \nu_n + \frac{t_\gamma}{2\sqrt{n}})$ ინტერვალი შეიცავს θ პარამეტრს γ-ზე არანაკლები ალბათობით.

შენიშვნა 1. მათემატიკურ სტატისტიკაში

$$(\nu_n - \frac{t_\gamma}{2\sqrt{n}}; \nu_n + \frac{t_\gamma}{2\sqrt{n}})$$

ინტერვალს უწოდებენ θ პარამეტრის ინტერვალურ შეფასებას.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ განხილული I და II ამოცანები განეკუთვნებიან შეფასებათა თეორიას. ამასთან I ამოცანა ეხებოდა წერტილოვან შეფასებას, ხოლო II ამოცანა ინტერვალურ შეფასებას.

§ 2.1.3 მათემატიკური სტატისტიკის III ამოცანის ამოხსნა

III ამოცანა ყალიბდება შემდეგნაირად: ეთანხმება თუ არა დაკვირვების შედეგები $x_1, \cdots, x_n$ იმ ჰიპოთეზას, რომ ეს შედეგები ბერნულის $p = p_0$ პარამეტრიან შემთხვევით სიდიდეზე დამოუკიდებელი დაკვირვებების შედეგებია ?

ამ ჰიპოთეზას დავარქვათ H_0 ჰიპოთეზა.

ბერნულის p_0-პარამეტრიან შემთხვევითი სიდიდის შესაბამის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \ \ x \le 0 \\ q_0, & \text{თუ} \ \ x \in]0,1] \\ 1, & \text{თუ} \ \ x > 1 \end{cases},$$

სადაც $q_0 = 1 - p_0$.

შევნიშნოთ, რომ ემპირიული განაწილების ფუნქციას აქვს სახე

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \ \ x \le 0 \\ 1 - \nu_n, & \text{თუ} \ \ x \in]0,1] \\ 1, & \text{თუ} \ \ x > 1 \end{cases}$$

განვიხილოთ სიდიდე

$$c_1(\nu_n - p_0)^2 + c_2(\kappa_n - q_0)^2,$$

სადაც $\kappa_n = 1 - \nu_n$.

თუ c_1 და c_2 სიდიდეებს ისე შევარჩევთ, რომ

$$c_0 = \frac{n}{q_0}, \quad c_1 = \frac{n}{p_0},$$

მაშინ სიდიდე

$$\chi^2(1) = \frac{(\sum_{i=1}^n x_k - np_0)^2}{np_0} + \frac{(n - \sum_{i=1}^n x_k - nq_0)^2}{nq_0} = \frac{(\sum_{i=1}^n x_k - np_0)^2}{np_0 q_0}$$

საკმაოდ დიდი n ნატურალური რიცხვისათვის წარმოადგენს $\chi^2(1)$ განაწილებას 1-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხით.

t_ϵ-ით აღვნიშნოთ ისეთი რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$\int_{t_\epsilon}^{\infty} f_{\chi^2(1)}(x)dx \le \epsilon.$$

შენიშვნა 2. $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $CHIDIST(x,n)$ ითვლის $P\{\chi^2(n) > x\}$ ალბათობას, ხოლო $CHIINV(\epsilon, n)$ ითვლის ისეთ t_ϵ რიცხვს(ϵ-დონის ზედა კვანტილს), რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$P\{\chi^2(n) > t_\epsilon\} = \epsilon.$$

ამის შემდეგ განვიხილოთ სიდიდე $\chi^2(1)(x)$. თუ აღმოჩნდა, რომ $\chi^2(1)(x) \le t_\epsilon$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზა მივიღოთ, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში ის უკუვაგდოთ.

შევნიშნოთ, რომ თუ H_0 ჰიპოთეზა მართებულია, ჩვენ შესაძლოა ის მაინც უკუვაგდოთ. ამის ალბათობა არის სწორედ ϵ. პირობითი ჩაწერით თუ ვისარგებლებთ, ეს ფაქტი შეგვიძლია შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$P(\text{ხდება } H_0 - \text{ის უარყოფა} \mid H_0 \text{ არის მართებული}) \le \epsilon,$$

რაც უფრო ზუსტად შემდეგს ნიშნავს

$$P_{p_0}^n(\{x : x \in X^n \ \& \ \chi(1)^2(x) \ge t_\epsilon\}) \le \epsilon.$$

ზუსტად ასევე შეგვიძლია დავუშვათ სხვა ტიპის შეცდომა. მაგალითად, მივიღოთ H_0 ჰიპოთეზა მაშინ, როცა იგი მცდარია. ანალოგიურად ასეთი შეცდომის "ალბათობაა"

$$P(\text{ხდება } H_0 - \text{ის მიღება} \mid H_0 \text{ არის მცდარი}),$$

რომელსაც ჩვენ აზრს ვერ მივანიჭებთ, რადგან გაუგებარია, რას ნიშნავს წინადადება "H_0 ჰიპოთეზა არის მცდარი".

თუ გვაქვს ისეთი შემთხვევა, როცა "ალბათობა" აზრიანია, მაშინვე იბადება იდეა, რომ მოცემული პირობის

$$P(\text{ხდება } H_0 - \text{ის უარყოფა} \mid H_0 \text{არის მართებული}) \le \epsilon$$

დამაკმაყოფილებელ კრიტერიუმებს შორის შეირჩეს ისეთი, რომელიც

$$P(\text{ხდება } H_0 - \text{ის მიღება} \mid H_0 \text{არის მცდარი})$$

ალბათობას მიანიჭებს მინიმუმს.

უკანასკნელი ალბათობის განსაზღვრის სიძნელე იმაში მდგომარეობს, რომ არაა განსაზღვრული H_0 ჰიპოთეზის ალტერნატიული ჰიპოტეზები. მაგალითად, თუ H_0-ის ალტერნატივაა $\theta = p_1$ (H_1 ჰიპოთეზა), მაშინ

$$P(\text{ხდება } H_0 - \text{ის მიღება}|H_0\text{არის მცდარი})$$

ალბათობაში უნდა ვიგულისხმოთ

$$p_{p_1}^n(\{x : x \in X^n \ \& \ \chi^2(1)(x) < t_\epsilon\}).$$

ამგვარად, დავუშვათ, რომ გვაქვს ორი ჰიპოთეზა

$$H_0 : p = p_0,$$

$$H_1 : p = p_1 \ (p_1 > p_0).$$

როგორც უკვე აღინიშნა, ამა თუ იმ ჰიპოთეზის მართებულობის შესახებ დასკვნების გამოტანისას ჩვენ ორგვარ შეცდომას ვუშვებთ. შეცდომას, რომელსაც მაშინ ვუშვებთ, როცა უკუვაგდებთ H_0 ჰიპოთეზას, როცა ის მართებულია, პირველი გვარის შეცდომა ჰქვია. თუ H_0-ს მაშინ ვიღებთ, როცა მართებულია H_1 ჰიპოთეზა, ვუშვებთ მეორე გვარის შეცდომას. თურმე კონკრეტული ჰიპოთეზის არსებობისას თანხმობის კრიტერიუმის არჩევის განუზღვრელობა ისპობა, თუ მოვითხოვთ, რომ არა მარტო პირველი გვარის შეცდომა იყოს მცირე, არამედ მეორე გვარის შეცდომაც ამავე დროს მინიმალური აღმოჩნდეს. ხოლო თუ ალტერნატიული ჰიპოთეზა არ არსებობს, მაშინ სხვა არაფერი არ რჩება თუ არა თანხმობის კრიტერიუმის გამოყენება.

სავარჯიშოები

2.1.1. ეთანხმება თუ არა დაკვირვების შედეგები

$$(1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$$

იმ ჰიპოთეზას, რომ ეს შედეგები ბერნულის წესით $p_0 = 0,36$ პარამეტრით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეებზე დაკვირვების მნიშვნელობებია?

გამოვიყენოთ $\epsilon = 0,99$ მნიშვნელობის დონის $\chi^2(1)$ თანხმობის კრიტერიუმი.

2.1.2. მონეტის 100-ჯერ აგდებისას გერბი მოვიდა 40-ჯერ. არის თუ არა მონეტა სიმეტრიული?

გამოვიყენოთ $\epsilon = 0,99$ მნიშვნელობის დონის $\chi^2(1)$ თანხმობის კრიტერიუმი.

2.1.3. 100 დამოუკიდებელი გასროლისას სამიზნე დაზიანდა 35-ჯერ. არის თუ არა ერთი გასრილისას სამიზნეს დაზიანების p_0 ალბათობა $0,36$-ის ტოლი?

გამოვიყენოთ $\epsilon = 0,99$ მნიშვნელობის დონის $\chi^2(1)$ თანხმობის კრიტერიუმი.

§ 2.2. წერტილოვანი, ძალმოსილი და ეფექტური შეფასებები.

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცეა. განვიხილოთ ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა სასრული ოჯახი

$$X_1, \cdots, X_n.$$

ვიგულისხმოთ, რომ n დამოუკიდებელი ექსპერიმენტის ექსპერიმენტის შედეგია $x = (x_1, \cdots, x_n)$, რომელსაც ჩვენ შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც შემთხვევითი $(X_1, \cdots, X_n)$ ვექტორის რეალიზაციას, ე.ი.

$$x = (x_1, \cdots, x_n) = (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)).$$

განსაზღვრება 1. $x = (x_1, \cdots, x_n)$ ვექტორს ეწოდება n-მოცულობის შერჩევა. ვიგულისხმოთ ასევე, რომ $X_i (1 \le i \le n)$ შემთხვევითი სიდიდით წარმოქმნილი ბორელის ალბათური ზომა ეკუთვნის $(R, B(R))$ ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ზომათა $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ოჯახს, სადაც $\Theta \subset R$.

განსაზღვრება 2. სამეულს $(R^n, B(R^n), P^n_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ეწოდება ალბათურ-სტატისტიკური მოდელი.

ჩვენი დაშვების საფუძველზე, არსებობს პარამეტრი $\theta_0 \in \Theta$ ისეთი, რომ $F_{X_1}(y) (= F_{X_2}(y) = \cdots = F_{X_n}(y)) = F_{\theta_0}(y)$ ყოველი $y \in R$ ნამდვილი რიცხვისათვის.

ვიგულისხმოთ, რომ პარამეტრული ოჯახი Θ არის ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის ბორელის ქვესიმრავლე აღჭურვილი ინდუცირებული ბორელის σ-ალგებრით.

განსაზღვრება 3. ზომად ასახვას $T_n : R^n \to \Theta$ ეწოდება n-მოცულობის წერტილოვანი შეფასება ანუ სტატისტიკა.

განსაზღვრება 4. n-მოცულობის $T_n : R^n \to \Theta$ სტატისტიკას ეწოდება ჩაუნაცვლებელი, თუ $M_\theta T_n = \theta$, სადაც

$$M_\theta T_n = \int_{R^n} T_n(x_1, \cdots, x_n) dP_\theta^n(x_1, \cdots, x_n).$$

განსაზღვრება 5. n-მოცულობის $T_n : R^n \to \Theta$ სტატისტიკას ეწოდება ძალმოსილი, თუ სრულდება პირობა $\lim_{n\to\infty} M_\theta T_n = \theta$.

განსაზღვრება 6. n-მოცულობის $T_n : R^n \to \Theta$ სტატისტიკას ეწოდება ეფექტური, თუ სრულდება პირობა

$$D_\theta T_n = inf\{D_\theta T : T \in \mathcal{T}^n\},$$

სადაც

$$D_\theta T = \int_{R^n} (T(x_1, \cdots, x_n) - M_\theta T)^2 dP_\theta^n(x_1, \cdots, x_n)$$

და $\mathcal{T}^n$ აღნიშნავს θ პარამეტრის n მოცულობის ყველა ძალმოსილ სტატისტიკათა ოჯახს.

§ 2.3. საშუალოსა და დისპერსიის წერტილოვანი შეფასებები

ვთქვათ, $X_1, \cdots, X_n$ დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, რომელთა საშუალოა μ და დისპერსიაა δ^2.

განსაზღვრება 1. $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება შერჩევითი საშუალო.

თეორემა 1. $M\bar{X}_n = \mu$.
დამტკიცება.

$$M\bar{X}_n = M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n}M(\sum_{i=1}^n X_i) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n MX_i = \frac{n\mu}{n} = \mu.$$

თეორემა 2. $D\bar{X}_n = \frac{\delta^2}{n}$.

დამტკიცება.

$$D\bar{X}_n = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2} D(\sum_{i=1}^{n} X_i) =$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{n\delta^2}{n^2} = \frac{\delta^2}{n}.$$

განსაზღვრება 2.

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება შერჩევითი დისპერსია.

თეორემა 3. $M(S_n^2) = \frac{(n-1)\delta^2}{n}$.
დამტკიცება. გამოვითვალოთ $M(S_n^2)$. ვღებულობთ

$$M(S_n^2) = M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2) = \frac{1}{n} M\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2) =$$

$$M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2) =$$

$$M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}_n^2 + \bar{X}_n^2) = MX_i^2 - M\bar{X}_n^2.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$MX_i^2 = DX_i + (MX_i)^2,$$

$$M(\bar{X}_n)^2 = D\bar{X}_n + (M\bar{X}_n)^2 = \frac{\delta^2}{n} + \mu^2.$$

საბოლოოდ ვღებულობთ

$$MS_n^2 = DX_i + (MX_i)^2 - (\frac{\delta^2}{n} + \mu^2) = \delta^2 + \mu^2 - \frac{\delta^2}{n} - \mu^2 = \frac{n-1}{n}\delta^2.$$

განსაზღვრება 3.

$$S_n^{'\,2} = \frac{n}{n-1} S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება შესწორებული შერჩევითი დისპერსია.

თეორემა 4. $M(S_n'^{\,2}) = \delta^2$.

დამტკიცება.

$$M(S_n'^{\,2}) = M(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2) = \frac{1}{n-1}M(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2) =$$

$$\frac{n}{n-1}MS_n^2 = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\delta^2 = \delta^2.$$

განვიხილოთ ზემოთ დამტკიცებული თეორემების შედეგები.

შედეგი 1. ზომადი ფუნქცია $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ წარმოადგენს μ პარამეტრის ჩაუნაცვლებელ სტატისტიკას.

შედეგი 2. ზომადი ფუნქცია

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$$

წარმოადგენს σ^2 პარამეტრის ძალმოსილ სტატისტიკას.

შედეგი 3. ზომადი ფუნქცია

$$s_n'^{\,2} = \frac{n}{n-1}s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$$

წარმოადგენს σ^2 პარამეტრის ჩაუნაცვლებელ სტატისტიკას.

ამოცანა 1. საქართველოს ბელტზე დედამიწის სითბური ნაკადი გაზომილია 23 ჭაბურღილში. გაზომვის შედეგები მოყვანილია ცხრილში ($10^{-6}\frac{\text{კალ}}{\text{სმ}^2\cdot\text{წმ}}$). მონაცემები განაწილებულია ნორმალურად. ვიპოვოთ სითბური ნაკადის საშუალოსა და დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი და ძალმოსილი შეფასებები

N	სითბური ნაკადი	N	სითბური ნაკადი	N	სითბური ნაკადი
1	$0,76$	9	$0,97$	17	$1,52$
2	$1,16$	10	$0,76$	18	$0,73$
3	$0,94$	11	$0,55$	19	$0,76$
4	$1,33$	12	$0,86$	20	$0,74$
5	$0,86$	13	$1,37$	21	$0,73$
6	$1,00$	14	$1,02$	22	$0,93$
7	$1,00$	15	$0,82$	23	$0,66$
8	$0,74$	16	$0,74$		

.

ამოხსნა. $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციების $AVERAGE(x_1 : x_n)$ და $VAR(x_1 : x_n)$ გამოყენებით ვღებულობთ

$$\overline{x}_{23} = AVERAGE(x_1 : x_{23}) = 0,910869565$$

და

$$S_{23}'^2 = VAR(x_1 : x_{23}) = 0,058181028.$$

სავარჯიშოები

2.2.1. მოცემულია 10 პასუხისმგებელი მდივნის წლიური ხელფასი (ერთ ერთეულს შეესაბამება 1000 დოლარი)

$$35.0;\ 67.5;\ 51.5;\ 53;\ 38;\ 42;\ 29,5;\ 31,5;\ 46;\ 37,5.$$

ჩავთვალოთ, რომ მდივანთა ხელფასების პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული და მოვძებნოთ:

ა) საშუალო ხელფასის ჩაუნაცვლებელი და ეფექტური შეფასება(გამოვიყენოთ $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $AVERAGE(x_1 : x_n)$);

ბ) დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი და ძალმოსილი შეფასებები (გამოვიყენოთ $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციები $VAR(x_1 : x_n)$ და $VARP(x_1 : x_n)$).

2.2.2. მოცემულია 10 შემთხვევით შერჩეული ფუნთუშას წონები(გამოსახული გრამებში)

$$55.0;\ 57.5;\ 51.5;\ 53;\ 48;\ 49;\ 45,5;\ 45,4;\ 46;\ 47,5.$$

ჩავთვალოთ, რომ ფუნთუშების პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული და მოვძებნოთ:

ა) ფუნთუშას საშუალო წონის ჩაუნაცვლებელი და ეფექტური შეფასება (გამოვიყენოთ $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $AVERAGE(x_1 : x_n)$);

ბ) დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი და ძალმოსილი შეფასებები (გამოვიყენოთ $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციები $VAR(x_1 : x_n)$ და $VARP(x_1 : x_n)$).

2.2.3. სატელეფონო კომუტატორში ყოველ წუთში არასწორ შეერთებათა რაოდენობა პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა უცნობი θ ინტენსივობით. 15 წუთის განმავლობაში აფიქსირებენ არასწორ შეერთებათა რაოდენობას ყოველ წუთში. დაკვირვების შედეგებია

$$3;\ 4;\ 1:\ 2;\ 0;\ 2;\ 4;\ 3;\ 0;\ 5;\ 1;\ 1:\ 2;\ 1:\ 1.$$

რისი ტოლია θ პარამეტრის ჩაუნაცვლებელი და ეფექტური შეფასება? (გამოვიყენოთ $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $AVERAGE(x_1 : x_n)$).

2.2.4. შემთხვევით შერჩეულ ფუნთუშაში ქიშმიშების რაოდენობა პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა უცნობი θ ინტენსივობით. 15 ფუნთუშაში ქიშმიშების რაოდენობაზე დაკვირვების შედეგები შემდეგია

$$3;\ 4;\ 5:\ 3;\ 5;\ 4;\ 4;\ 3;\ 5;\ 5;\ 3;\ 7:\ 2;\ 4:\ 3.$$

რისი ტოლია θ პარამეტრის ჩაუნაცვლებელი და ეფექტური შეფასება? (გამოვიყენოთ $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $AVERAGE(x_1 : x_n)$).

§ 2.4. ინტერვალური ტიპის შეფასებები. ნდობის ინტერვალი.

პოპულაციის უცნობი საშუალოსა და დისპერსიის წერტილოვანი შეფასების როლში განიხილებოდა

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i (\text{სტ.ფუნქცია} - AVERAGE(x_1 : x_n)),$$

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 (\text{სტ.ფუნქცია} - VARP(x_1 : x_n))$$

და

$$s_n^{'\,2} = \frac{n}{n-1}s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 (\text{სტ.ფუნქცია} - VAR(x_1 : x_n))$$

სტატისტიკები. მათი მნიშვნელობები წარმოადგენენ კონკრეტულ რიცხვებს, რომლებიც განსხვავდებიან უცნობი μ და σ^2 რიცხვებისაგან და ამასთან ჩვენთვის უცნობია, თუ რამდენად დიდია ეს განსხვავება. ეს გარემოება გვიბიძგებს წერტილოვანი შეფასება-ერთი რიცხვი შევცვალოთ ინტერვალური შეფასებით-მთელი ინტერვალით, რომელიც იქნება შერჩეული იმდაგვარად, რომ მის გარეთ მოხვედრის ალბათობა იყოს მცირე.

განსაზღვრება 1. ვთქვათ, $T_n^{(1)} : R^n \to \Theta$ და $T_n^{(2)} : R^n \to \Theta$ ისეთი სტატისტიკებია, რომ $T_n^{(1)} < T_n^{(2)}$. ვთქვათ, $1-\alpha \in (0;1)$

$[T_n^{(1)}, T_n^{(2)}]$ ინტერვალს ეწოდება $1-\alpha$ დონის ინტერვალური შეფასება, თუ სრულდება შემდეგი პირობა

$$(\forall x)(\forall\theta)(x \in R^n \,\&\, \theta \in \Theta \to P_\theta(\{x : x \in R^n \,\&\, T_n^{(1)}(x) \le \theta \le T_n^{(2)}(x)\}) = 1-\alpha).$$

ამასთან,$[T_n^{(1)}, T_n^{(2)}]$ ინტერვალს ეწოდება $1-\alpha$ დონის ნდობის ინტერვალი; $T_n^{(1)}$ და $T_n^{(2)}$ სტატისტიკებს ეწოდება $1-\alpha$ დონის ნდობის ინტერვალის შესაბამისად ქვედა და ზედა საზღვრები.

თეორემა 1. ვთქვათ, მოცემულია დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა $X_1, \cdots, X_n$ მიმდევრობა (μ, σ^2) პარამეტრებით . ამასთან პარამეტრი μ უცნობია. მაშინ ინტერვალი

$$(\bar{X}_n - \frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + \frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}),$$

სადაც $z_{\frac{\alpha}{2}}$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების $\frac{\alpha}{2}$-დონის ზედა კვანტილია (ე.ი. $\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$), წარმოადგენს $1-\alpha$ დონის ინტერვალურ შეფასებას(ანუ ნდობის ინტერვალს) უცნობი μ პარამეტრისათვის.

დამტკიცება.

$$P(\{\omega : \bar{X}_n(\omega) - \frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n(\omega) + \frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\}) =$$

$$P(\{\omega : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) + \frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\}) =$$

$$P(\{\omega : \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \sigma z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n} \leq \mu n \leq \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) + \sigma z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n}\}) =$$

$$P(\{\omega : -\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n} \leq \mu n - \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \leq \sigma z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n}\}) =$$

$$P(\{\omega : -z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\mu n - \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\}) =$$

$$P(\{\omega : -z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\}) = 1 - \alpha.$$

თეორემა 1 დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1. $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $CONFIDENCE(\alpha, \sigma, n)$ ითვლის სიდიდეს $z_{\frac{\alpha}{2}}(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. ამიტომ μ-პარამეტრის $1 - \alpha$ დონის ინტერვალური შეფასება გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$(AVERAGE(x_1 : x_n) - CONFIDENCE(\alpha, \sigma, n);$$

$$AVERAGE(x_1 : x_n) + CONFIDENCE(\alpha, \sigma, n)).$$

თეორემა 2. ვთქვათ, მოცემულია დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა $X_1, \cdots, X_n$ მიმდევრობა პარამეტრებით (μ, σ^2). ამასთან პარამეტრები μ და σ^2 უცნობებია. მაშინ ინტერვალი

$$(\bar{X}_n - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n^{'}}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n^{'}}{\sqrt{n}})$$

წარმოადგენს μ პარამეტრის $1 - \alpha$ დონის ინტერვალურ შეფასებას(ანუ $1 - \alpha$ დონის ნდობის ინტერვალს), სადაც $t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ წარმოადგენენ შესაბამისად $n-1$ თავისუფლების ხარისხიანი სტიუდენტის განაწილების $\frac{\alpha}{2}$ დონის ზედა კვანტილებს.

დამტკიცება.

$$P(\{\omega : \bar{X}_n(\omega) - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n^{'}(\omega)}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n(\omega) + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n^{'}(\omega)}{\sqrt{n}}\}) =$$

$$P(\{\omega : -t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n^{'}(\omega)}{\sqrt{n}} \leq \mu - \bar{X}_n(\omega) \leq +t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n^{'}(\omega)}{\sqrt{n}}\}) =$$

$$P(\{\omega : -t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n^{'}(\omega)}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n(\omega) - \mu \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n^{'}(\omega)}{\sqrt{n}}\}) =$$

$$P(\{\omega : -t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_n(\omega) - \mu}{\frac{S_n^{'}(\omega)}{\sqrt{n}}} \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}})\}) =$$

$$= T_{n-1}(t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}) - T_{n-1}(t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha.$$

თეორემა 2 დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1. თეორემა 2-ის დამტკიცებისას ჩვენ ვისარგებლეთ შემდეგი ფაქტით: თუ $X_1, \cdots, X_n$ არიან (μ, σ^2) პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეები, მაშინ შემთხვევით სიდიდეს

$$\frac{\sqrt{n}(\sum_{k=1}^n X_k - n\mu)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k)^2)}}$$

აქვს სტიუდენტის განაწილება $n-1$ თავისუფლების ხარისხით.

შენიშვნა 2. თეორემა 2-ის პირობებში μ პარამეტრის $1-\alpha$ დონის ინტერვალური შეფასება $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციების საშუალებით გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$(AVERAGE(x_1 : x_n) - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} SQRT\{\frac{VAR(x_1 : x_n)}{n}\};$$

$$AVERAGE(x_1 : x_n) + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} SQRT\{\frac{VAR(x_1 : x_n)}{n}\}).$$

თეორემა 3. ვთქვათ, მოცემულია დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა $X_1, \cdots, X_n$ მიმდევრობა პარამეტრებით (μ, σ^2). ამასთან პარამეტრები μ და σ^2 უცნობებია. მაშინ ინტერვალი

$$[\frac{(n-1){S_n^{'}}^2}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}; \frac{(n-1){S_n^{'}}^2}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}]$$

წარმოადგენს σ^2 პარამეტრის $1-\alpha$ დონის ინტერვალურ შეფასებას(ანუ $1-\alpha$ დონის ნდობის ინტერვალს), სადაც $\chi_{n,\frac{\alpha}{2}}$ და $\chi_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$ წარმოადგენენ შესაბამისად n თავისუფლების ხარისხიანი $\chi(n)^2$ განაწილების $\frac{\alpha}{2}$ და $1-\frac{\alpha}{2}$ დონის ზედა კვანტილებს.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{(n-1){S_n^{'}}^2}{\sigma^2} = \sum_{k=1}^n (\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma})^2 = \chi(n)^2.$$

ამ ფაქტის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$P(\{\omega : \frac{(n-1){S'_n}^2(\omega)}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1){S'_n}^2(\omega)}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}\}) =$$

$$P(\{\omega : \chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(n-1){S'_n}^2(\omega)}{\sigma^2} \le \chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}\}) =$$

$$P(\{\omega : \chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}} \le \chi(n)^2 \le \chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}\}) = 1-\alpha.$$

თეორემა 3 დამტკიცებულია.

შენიშვნა 3 თეორემა 3-ის პირობებში σ^2 პარამეტრის $1-\alpha$ დონის ინტერვალური შეფასება გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\left(\frac{(n-1)VAR(x_1:x_n)}{CHIINV(\frac{\alpha}{2},n)}; \frac{(n-1)VAR(x_1:x_n)}{CHIINV(1-\frac{\alpha}{2},n)}\right)$$

ამოცანა 1. საქართველოს ბელტზე დედამიწის სითბური ნაკადი გაზომილია 23 ჭაბურღილში. გაზომვის შედეგები მოყვანილია ცხრილში ($10^{-6}\frac{\text{კალ}}{\text{სმ}^2\cdot\text{წმ}}$). მონაცემები განაწილებულია ნორმალურად. ვიპოვოთ სითბური ნაკადის საშუალოსა და დისპერსიის 0,95 დონის ინტერვალური შეფასებები

N	სითბური ნაკადი	N	სითბური ნაკადი	N	სითბური ნაკადი
1	$0,76$	9	$0,97$	17	$1,52$
2	$1,16$	10	$0,76$	18	$0,73$
3	$0,94$	11	$0,55$	19	$0,76$
4	$1,33$	12	$0,86$	20	$0,74$
5	$0,86$	13	$1,37$	21	$0,73$
6	$1,00$	14	$1,02$	22	$0,93$
7	$1,00$	15	$0,82$	23	$0,66$
8	$0,74$	16	$0,74$		

.

ამოხსნა. თეორემა 2-ის ძალით, μ პარამეტრის $1-\alpha = 1-0,5$ დონის ინტერვალური შეფასება $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციების საშუალებით გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$(AVERAGE(x_1:x_n) - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}SQRT\{\frac{VAR(x_1:x_n)}{n}\};$$

$$AVERAGE(x_1:x_n) + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}SQRT\{\frac{VAR(x_1:x_n)}{n}\}) =$$

$$= (0,80680874; 1,014930391).$$

თეორემა 3-ის ძალით, σ^2 პარამეტრის $1-\alpha = 1-0,5$ დონის ინტერვალური შეფასება გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$(\frac{(n-1)VAR(x_1:x_n)}{CHIINV(\frac{\alpha}{2},n)};\frac{(n-1)VAR(x_1:x_n)}{CHIINV(1-\frac{\alpha}{2},n)}) =$$

$$(0,047159909;0,070571862).$$

თეორემა 4. ვთქვათ, მოცემულია დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა $X_1,\cdots,X_n$ მიმდევრობა პარამეტრებით (μ,σ^2). ამასთან პარამეტრი σ^2 უცნობია. მაშინ ინტერვალი

$$[\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}};\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}]$$

წარმოადგენს σ^2 პარამეტრის $1-\alpha$ დონის ინტერვალურ შეფასებას(ანუ $1-\alpha$ დონის ნდობის ინტერვალს), სადაც $\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}$ და $\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$ წარმოადგენენ შესაბამისად n თავისუფლების ხარისხიანი $\chi^2(n)$ განაწილების $\frac{\alpha}{2}$ და $1-\frac{\alpha}{2}$ დონის ზედა კვანტილებს.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\overline{S}^2_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{n\overline{S}^2_n}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2 = \chi^2(n).$$

ამის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$P(\{\omega:\frac{\sum_{i=1}^n(X_i(\omega)-\mu)^2}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_{i=1}^n(X_i(\omega)-\mu)^2}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}\}) =$$

$$P(\{\omega:\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}} \le \sum_{i=1}^n(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2 \le \chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}\}) =$$

$$P(\{\omega:\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}} \le \chi^2(n) \le \chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}\}) = 1-\alpha.$$

თეორემა 4 დამტკიცებულია.

სავარჯიშოები

2.4.1. ერთ-ერთი დიდი უნივერსიტეტის სტუდენტებისაგან აღებულია $n = 70$ მოცულობის შერჩევა. მათი გამოკითხვის საფუძველზე დაადგინეს, რომ მათ მიერ ერთი კვირის მანძილზე საშინაო დავალებებზე დახარჯული საშუალო დრო შეადგენს $14,3$ საათს. ჩავთვალოთ, რომ $\sigma = 4$ და ავაგოთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი μ საშუალოსათვის.

2.4.2. ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეზე 9- ჯერ დაკვირვების შედეგად მიღებული შერჩევითი საშუალო $\overline{x}_9$ ტოლია $3,45$-ის. ვიპოვოთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის 90%-იანი ნდობის ინტერვალი, თუ საშუალო კვადრატული გადახრაა $\sigma = 2$.

2.4.3. ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეზე 16- ჯერ დაკვირვების შედეგად მიღებული შერჩევითი საშუალო $\overline{x}_{16}$ ტოლია $4,5$-ის. ვიპოვოთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის 95%-იანი ნდობის ინტერვალი, თუ საშუალო კვადრატული გადახრაა $\sigma = 4$.

2.4.4. ნორმალური პოპულაციიდან, რომლის დისპერსია $\sigma = 1$, აღებულია შერჩევა

$$3,5;\ 4,5;\ 3,8;\ 4,2;\ 4,3;\ 3,9;\ 4;\ 3,7;\ 4,1.$$

ავაგოთ უცნობი μ საშუალოსათვის $0,95$ დონის ინტერვალი (ე.ი., ინტერვალური შეფასება).

2.4.5. ნორმალური პოპულაციიდან, რომლის დისპერსია $\sigma = 2$, აღებულია $n = 16$ მოცულობის შერჩევა. შერჩევითი საშუალო $\overline{x}_{16} = 3,15$. ავაგოთ უცნობი μ საშუალოსათვის $0,95$ დონის ინტერვალი (ე.ი., ინტერვალური შეფასება).

2.4.6. აღწერეთ, როგორ იმოქმედებს უცნობი საშუალოსათვის აგებულ $1-\alpha$ დონის ინტერვალის სიგრძეზე :

ა) შერჩევის მოცულობის ზრდა;

ბ) სტატისტიკური გადახრის ზრდა;

2.4.7. ნორმალური პოპულაციიდან, რომლის დისპერსია $\sigma^2 = 100$, აღებულია შერჩევა

$$12;\ 8;\ 22;\ 15;\ 30;\ 6;\ 39;\ 48.$$

ააგეთ 90%- იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი μ საშუალოსათვის.

2.4.8. სადაზღვევო კომპანია ატარებს ფასების (პრემიების) კატალოგის რევიზიას. რიგით აქტუარს სურს შეაფასოს იმ მოთხოვნათა საშუალო სიდიდე, რომლებიც გამოწვეულია სახანძრო შემთხვევებით გარკვეული ტიპის

საცხოვრებელ სახლში. შერჩევის როლში აღებული იქნა ბოლო წლის ანგარიშსწორების მონაცემები. სულ წარმოდგენილი იყო 19 სახანძრო შემთხვევა, რომელთა მოთხოვნების საშუალო სიდიდე აღმოჩნდა 73249 დოლარი, შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 37246 დოლარი. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი μ საშუალოსათვის.

2.4.9. ბანკის მენეჯერს აინტერესებს შეაფასოს დეპოზიტების საშუალო მოცულობა კლიენტების გარკვეული კლასისათვის. 25 ასეთი დეპოზიტისათვის აღებული შემთხვევითი შერჩევის საშუალომ შეადგინა $\overline{x}_{25} = 6200$ აშშ დოლარი, ხოლო შესწორებული დისპერსია $S_{25}^{'2} = 2200$. ააგეთ დეპოზიტის μ საშუალოსათვის $0,95$- დონის ინტერვალური შეფასება.

2.4.10. შემთხვევითი სიდიდე ემორჩილება ნორმალური განაწილების კანონს. ააგეთ σ^2 პარამეტრისათვის $0,95$- დონის ინტერვალური შეფასება, თუ შერჩევის მოცულობაა $n = 22$, ხოლო შესწორებული დისპერსია $S_{22}^{'2} = 20,25$.

2.4.11. ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეზე 25- ჯერ დაკვირვების შედეგად მიღებული შერჩევითი საშუალო $\overline{x}_{25}$ ტოლია 5-ის. ვიპოვოთ უცნობი დისპერსიისათვის 90%-იანი ნდობის ინტერვალი, თუ მათემატიკური ლოდინი $\mu = 4,5$.

2.4.12. ნორმალური პოპულაციიდან, რომლის დისპერსია σ^2 და საშუალო უცნობია, აღებულია $n = 16$ მოცულობის შერჩევა

$$3;\ 3;5;\ 3,4;\ 3,6;\ 3;\ 2,5;\ 2,7;\ 2,8;$$

$$2,9;\ 2,5;\ 2,6;\ 2,9;\ 3,2;\ 3,3;\ 3,4;\ 3,5.$$

ა) ააგეთ μ პარამეტრისათვის $0,95$- დონის ინტერვალური შეფასება;
ბ) ააგეთ σ^2 პარამეტრისათვის $0,99$- დონის ინტერვალური შეფასება.

2.4.13. შემთხვევითი სიდიდე ემორჩილება ნორმალური განაწილების კანონს. ააგეთ σ^2 პარამეტრისათვის $0,95$- დონის ინტერვალური შეფასება, თუ შერჩევის მოცულობაა $n = 30$, ხოლო შესწორებული დისპერსია $S_{22}^{'2} = 15$

2.4.14. ნორმალური პოპულაციიდან, რომლის საშუალო $\mu = 3$, აღებულია $n = 4$ მოცულობის შერჩევა

$$2,5;\ 2,7;\ 2,8;\ 2,9.$$

ააგეთ 95%- იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი σ^2 დისპერსიისათვის.

2.4.15. ნორმალური პოპულაციიდან, რომლის საშუალო $\mu = 4$, აღებულია $n = 9$ მოცულობის შერჩევა

$$2,5;\ 2,75;\ 3;\ 2,55;\ 2,8;\ 3,5;\ 2,6;\ 2,7;\ 2,8;\ 2,9.$$

ააგეთ $0,95$ დონის ნდობის ინტერვალი უცნობი σ^2 დისპერსიისათვის.

§ 2.5. მარტივი და რთული ჰიპოთეზები.

განსაზღვრება 1. რაიმე მოსაზრებას გენერალური ერთობლიობის განაწილების ან მისი რიცხვითი მახასიათებლების შესახებ სტატისტიკური ჰიპოთეზა ეწოდება.

განსაზღვრება 2. სტატისტიკური კრიტერიუმი ეწოდება ქმედების ისეთ წესს, რომელიც საშუალებას იძლევა რეალურად ჩატარებული დაკვირვებების შედეგად მიღებული შერჩევითი მნიშვნელობების საფუძველზე შევამოწმოთ გამოთქმული მოსაზრების (ჰიპოთეზის) სამართლიანობა.

სტატისტიკურ ჰიპოთეზას H სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

განსაზღვრება 3. H ჰიპოთეზას ეწოდება მარტივი, თუ ის ცალსახად განსაზღვრავს გენერალური ერთობლიობის განაწილების კანონს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჰიპოთეზას ეწოდება რთული.

განსაზღვრება 4. ჰიპოთეზას, როცა გენერალური ერთობლიობის განაწილების ფორმა ცნობილია, მაგრამ განაწილება შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს, ეწოდება პარამეტრული ჰიპოთეზა.

მაგალითი 1. ვთქვათ, ჩვენთვის ცნობილია, რომ გენერალურ ერთობლიობის განაწილებას აქვს სახე

$$F_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{(t-\theta)^2}{2}} dt.$$

მაშინ მარტივი ჰიპოთეზაა $H : \theta = \theta_0$.

განსაზღვრება 5. სამეულს (T_n, U_0, U_1), სადაც

1) $T_n : R^n \to R$ არის ზომადი ფუნქცია ,

2) $U_0 \cap U_1 = \emptyset, U_0 \cup U_1 = R$ და $U_0 \in \mathcal{B}(R)$,

ეწოდება მარტივი H_0 ჰიპოთეზისათვის გადაწვეტილების მისაღები ტესტი ანუ კრიტერიუმი.

თუ $T_n(x_1, \cdots, x_n) \in U_0$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზა მიიღება;

თუ $T_n(x_1, \cdots, x_n) \in U_1$, მაშინ ხდება H_0 ჰიპოთეზის უარყოფა;

ამასთან U_0-ს ეწოდება H_0 ჰიპოთეზის მიღების არე, ხოლო U_1 სიმრავლეს ეწოდება H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის არე ანუ კრიტიკული არე.

T_n-ს ეწოდება კრიტერიუმის (ანუ ტესტის) სტატისტიკა.

განსაზღვრება 6. (T_n, U_0, U_1) კრიტერიუმის გამოყენებით მიღებულ გადაწყვეტილებას ეწოდება პირველი გვარის შეცდომა, თუ უარყოფილია H_0 ჰიპოთეზა მაშინ როცა ის მართებულია.

განსაზღვრება 7. $(T_n, U_0, U_1\}$ კრიტერიუმის გამოყენებით მიღებულ გადაწყვეტილებას ეწოდება მეორე გვარის შეცდომა, თუ მიღებულია H_0 ჰიპოთეზა მაშინ როცა ის არაა მართებული.

განსაზღვრება 8. $P_\theta^n(\{(x_1, \cdots, x_n) : T_n((x_1, \cdots, x_n)) \in U_1 | H_0\}) = \alpha$ სიდიდეს ეწოდება (T_n, U_0, U_1) კრიტერიუმის მნიშვნელოვნობის დონე, ე.ი., კრიტერიუმის მნიშვნელოვნობის დონე ყოფილა პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა.

განსაზღვრება 9. $P_\theta^n(\{(x_1, \cdots, x_n) : T_n((x_1, \cdots, x_n)) \in U_0 | H_1\}) = \beta$ სიდიდეს ეწოდება (T_n, U_0, U_1) კრიტერიუმის სიმძლავრე, ე.ი., კრიტერიუმის სიმძლავრე ყოფილა მეორე გვარის შეცდომის ალბათობას.

ხშირ შემთხვევებში შეუძლებელია α და β სიდიდეების ერთდროულად შემცირება. ამიტომ აფიქსირებენ პირველი გვარის შეცდომის ალბათობის რაიმე α დონეს, ანუ განიხილავენ ისეთ U_1 სახის კრიტიკულ არეებს, რომელთათვისაც

$$P(\{(x_1, \cdots, x_n) : T_n((x_1, \cdots, x_n)) \in U_1 | H_0\}) \leq \alpha,$$

და ასეთ კრიტიკულ არეებს შორის აირჩევენ ისეთს, რომლისთვისაც მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა β არის მაქსიმალური.

ამგვარად, ჰიპოტეზათა შემოწმების საფეხურები შემდეგია:

1) H_0 და H_1 ჰიპოთეზების ჩამოყალიბება;

2) კრიტერიუმის T_n სტატისტიკური ფუნქციის შერჩევა;

3) მნიშვნელოვნობის α-დონის ჩამოყალიბება და კრიტიკული არის დადგენა;

4) $x = (x_1, \cdots, x_n)$ შერჩევის საფუძველზე კრიტერიუმის სტატისტიკური ფუნქციის T_n რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლა;

5) გადაწყვეტილების მიღება: თუ $T_n \in U_0$, მაშინ ხდება H_0 ჰიპოთეზის მიღება; თუ $T_n \in U_1$, მაშინ ხდება H_1 ჰიპოთეზის მიღება.

თუ H_0 ჰიპოთეზა უარყოფილია, მაშინ ამბობენ, რომ α მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა დასკვნა: სამართლიანია H_1 ჰიპოთეზა.

§ 2.3-ში განხილული თეორემა 1-ის დამტკიცებისას გამოყენებული კონსტრუქციით მიიღება

კრიტერიუმი 1. მარტივ ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის, როდესაც σ^2 დისპერსია ცნობილია

ჰიპოთეზა: $H_0 : \mu = \mu_0$

მნიშვნელოვნობის დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა(ტესტის სტატისტიკა): $T_n(X_1,\cdots,X_n)=\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

კრიტერიუმის სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა: $T_n(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\overline{x}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

ალტერნატივა:	კრიტიკული არე U_1 (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1:\mu=\mu_1>\mu_0$	$T_n(x_1,\cdots,x_n)>z_\alpha$
$H_1:\mu=\mu_1<\mu_0$	$T_n(x_1,\cdots,x_n)<-z_\alpha$

სადაც z_α არის $N(0,1)$ განაწილების ზედა α კრიტიკული წერტილი

გადაწყვეტილება: თუ $T_n(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\overline{x}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\in U_1$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყობთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

შენიშვნა 1. აღნიშნული კრიტერიუმი გამოიყენება იმ შემთხვევაშიც, როცა პოპულაცია არ არის ნორმალურად განაწილებული, მაგრამ შერჩევის მოცულობა n მეტია 30-ზე.

ამოცანა 1. ვთქვათ, ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან, რომლის დისპერსია σ^2 ცნობილია, ამოღებულია n-მოცულობის შერჩევა. შერჩევის ელემენტები იყოს $x_1,\cdots,x_n$. წინასწარ განსაზღვრული α-მნიშვნელოვნობის დონისათვის შევამოწმოთ შემდეგი H_0 ჰიპოთეზა გენერალური ერთობლიობის მათემატიკური ლოდინის შესახებ H_1 მარჯვენა ცალმხრივი ალტერნატივის წინააღმდეგ, სადაც

$$H_0:\mu=\mu_0$$

და

$$H_1:\mu=\mu_1>\mu_0.$$

ამოხსნა. როგორც ჩვენთვის ცნობილია შერჩევითი საშუალო $\overline{X}_n$ გენერალური საშუალოს ჩაუნაცვლებელი შეფასებაა და ამიტომ კრიტერიუმის T_n სტატისტიკის როლში განვიხილოთ

$$T_n(x)=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

სტატისტიკა.

კრიტერიუმის მნიშვნელოვნობის α დონის დასადგენად უნდა შევარჩიოთ ისეთი U_0 არე, რომლისთვისაც პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა იქნება α-ს ტოლი, ე.ი.

$$P^n_{(\mu,\sigma^2)}(\{(x_1,\cdots,x_n):T_n(x_1,\cdots,x_n)\in U_1|H_0\})=\alpha.$$

U_1 კრიტიკული არე ვეძებოთ $(x_{კრ}; +\infty)$ სახით.

ამგვარად,

$$P^n_{(\mu,\sigma^2)}(\{(x_1,\cdots,x_n) : T_n(x_1,\cdots,x_n) \in U_1\}|H_0) = P^n_{(\mu,\sigma^2)}(\{(x_1,\cdots,x_n) :$$

$$\overline{X}_n \geq x_{კრ}\}|H_0) = P^n_{(\mu,\sigma^2)}(\{(x_1,\cdots,x_n) : \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq$$

$$\frac{x_{კრ} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\}) = 1 - \Phi(\frac{x_{კრ} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = \alpha.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\Phi(\frac{x_{კრ} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 1 - \alpha.$$

$$\frac{x_{კრ} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \Phi^{-1}(1-\alpha) = x_{1-\alpha}.$$

საბოლოოდ ვღებულობთ

$$x_{კრ} = x_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0,$$

სადაც $x_{1-\alpha}$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების $1-\alpha$ დონის კვანტილი, ე.ი. $\Phi(x_{1-\alpha}) = 1-\alpha$.

ახლა გამოვითვალოთ კრიტერიუმის სიმძლავრე, ე.ი. მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა. ვღებულობთ

$$P^n_{(\mu,\sigma^2)}(\{(x_1,\cdots,x_n) : \overline{x}_n \geq x_{კრ}\}|H_1) =$$

$$P^n_{(\mu,\sigma^2)}(\{(x_1,\cdots,x_n) : \frac{\overline{x}_n - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{x_{კრ} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\}) =$$

$$= 1 - \Phi(\frac{x_{კრ} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) =$$

$$= 1 - \Phi(\frac{x_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0 - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) =$$

$$= 1 - \Phi(x_{1-\alpha} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = \beta.$$

ამგვარად, ჩვენს მიერ აგებულია კრიტერიუმი

$$(\overline{x}_n, [-\infty; x_{კრ}], [x_{კრ}; +\infty[)),$$

რომლის მნიშვნელოვნობის დონე α-ს ტოლია, ხოლო სიმძლავრე

$$\beta = 1 - \Phi(x_{1-\alpha} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}).$$

შენიშვნა 2. $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია $ZTEST(x_1 : x_n : \mu_0; \sigma)$ ითვლის

$$p = P(\{\omega : Z(\omega) > \frac{\overline{X}_n(\omega) - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\})$$

ალბათობას, სადაც $Z \sim N(0;1)$. თუ $p \leq \alpha$, მაშინ α მნიშვნელოვნობის დონით ხდება H_0 ჰიპოთეზის უარყოფა.ე.ი., p არის მინიმალური მნიშვნელოვნობის დონე, რომლითაც $x_1, \cdots, x_n$ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზას უარვყობთ.

განვიხილოთ ზოგიერთი ამოცანა $EXCEL$-ის სტატისტიკური

$$ZTEST(x_1 : x_n : \mu_0; \sigma)$$

ფუნქციის გამოყენებაზე.

ამოცანა 2. ამოღებულია შერჩევა ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან. შერჩევის მოცულობაა 9. შერჩევის ელემენტებია

8; 13; 16; 7; 17; 10; 13; 15; 18.

გენერალური დისპერსია $\sigma^2 = 16$. $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით გავარჩიოთ ერთმანეთისაგან მარტივი ჰიპოთეზები

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 10$$

და

$$H_1 : \mu = \mu_1 = 15.$$

ამოხსნა. ვინაიდან $p = ZTEST(x_1 : x_9; 10; 4) = 0,012224433 < 0,05 = \alpha$. ამიტომ H_0 ჰიპოთეზას უარვყობთ, ე.ი. $\mu = \mu_1 = 15$.

ამოცანა 3. ამოღებულია $n = 16$ მოცულობის შერჩევა ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან და შერჩევის საფუძველზე გამოთვლილია შერჩევითი საშუალო $\overline{X}_{16} = 17,8$. (ვიგულისხმოთ რომ ჩვენთვის არაა ცნობილი შერჩევის ელემენტები). გენერალური ერთობლიობის დისპერსია $\sigma^2 = 49$. $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით გავარჩიოთ ერთმანეთისაგან მარტივი ჰიპოთეზები

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 16$$

და

$$H_1 : \mu = \mu_1 = 19.$$

ამოხსნა.

ჩვენ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ შერჩევის ელემენტებია

$$0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0; 284,8.$$

ვინაიდან $p = ZTEST(x_1 : x_{16}; 16; 7) = 0,15184057 > 0,05 = \alpha$, ამიტომ ვღებულობთ H_0 ჰიპოთეზას, ე.ი. $\mu = \mu_0 = 16$.

ამოცანა 4. $N(\mu, 49)$ კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობის საშუალოს შესახებ გამოთქმულია ორი ჰიპოთეზა

$$H_0 : \mu_0 = 25,$$

$$H_1 : \mu_1 = 19.$$

$\alpha = 0,01$ მნიშვნელოვნობის დონით ჰიპოთეზების შესამოწმებლად ამოღებულია $n = 64$ მოცულობის შერჩევა, რომლის საფუძველზე გამოთვლილი შერჩევითი საშუალოა $\overline{x}_{64} = 23,8$.

ა) მარტივია თუ რთული ჰიპოთეზები?

ბ) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.

გ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის სტატისტიკა და განსაზღვრეთ კრიტიკული წერტილი.

დ) როგორ განისაზღვრება კრიტიკული არე?

ე) როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?

ვ) განსაზღვრეთ p-მნიშვნელობა.

ამოხსნა

ა) ჰიპოთეზა არის მარტივი, ვინაიდან μ ცალსახად განსაზღვრავს $N(\mu, 49)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას.

ბ) ალტერნატივიდან გამომდინარე ჩვენ ვისარგებლებთ კრიტერიუმი 1-ით მარტივ ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის, როდესაც σ^2 დისპერსია ცნობილია(მარჯვენა ცალმხრივი კრიტერიუმი).

გ) კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს სახე

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

კრიტიკული წერტილი არის $z_\alpha = z_{0,01} = 2,34$. კრიტერიუმის სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობაა

$$z = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{23,8-25}{8/8} = -1,2.$$

დ) U_1 კრიტიკულ არეს აქვს სახე

$$U_1 = \{(x_1, \cdots, x_n) : z > z_\alpha\},$$

სადაც z_α არის ნორმალური განაწილების α დონის ზედა კვანტილი.

ე). იმის გამო, რომ $z = -1,2 < 2,34$, ე.ი. $z \notin U_1$, ამიტომ არა გვაქვს საფუძველი უარვყოთ H_0 ჰიპოთეზა $\mu = 25$.

ვ).

$$P = P(\omega : T_n(X_1, \cdots, X_n)(\omega) \geq -1,2) = 1 - \Phi(-1,2) = \Phi(1,2) = 0,884.$$

§ 2.3-ში განხილული თეორემა 2-ის დამტკიცებისას გამოყენებული კონსტრუქციით მიიღება

კრიტერიუმი 2. ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი

ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის, როდესაც

σ^2 დისპერსია უცნობია

ჰიპოთეზა: $H_0 : \mu = \mu_0$

მნიშვნელოვნობის დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $T_n(X_1, \cdots, X_n) = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

კრიტერიუმის სტატისტიკის დაკვირვებული
მნიშვნელობა: $T_n(x_1, \cdots, x_n)(\omega) = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{S'/\sqrt{n}}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე U_1 (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$	$t > t_{n-1,\alpha}$
$H_1 : \mu = \mu_1 < \mu_0$	$t < -t_{n-1,\alpha}$
$H_1 : \mu \neq \mu_1$	$t < -t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ ან $t > t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$

გადაწყვეტილება: თუ $T_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{S'/\sqrt{n}} \in U_1$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყობთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

ამოცანა 5. ახალი ელექტრონული ხელსაწყოს შემოწმების მიზნით, კომპანიამ გადაწყვიტა შეამოწმოს ექვსი ასეთი ხელსაწყო. ყოველი მათგანისათვის გაიზომა დრო ხელსაწყოს მწყობრიდან გამოსვლამდე, რის შედეგადაც მიღებულ იქნა შემდეგი ამონარჩევი (საათებში):

$$59,2;\ 68,3;\ 57,8;\ 56,5;\ 63,7; 57,3.$$

გვაძლევს თუ არა ეს შერჩევა საკმარის საფუძველს $\alpha = 0,05$ ნდობის დონით შემდეგი დასკვნის გასაკეთებლად: ახალი ხელსაწყოს სიცოცხლის საშუალო ხანგძლივობა აღემატება 55 საათს.

ამოხსნა.

$$\overline{x}_6 = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = 60,4667.$$

$$S_6^{'\,2} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \frac{\sum_{j=1}^{6} x_j}{6})^2 = 21,2587.$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$H_0 : \mu = 55$$

და

$$H_1 : \mu > 55.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობაა

$$T_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\overline{x}_6 - 55}{S'/\sqrt{6}} = 2,9.$$

ვინაიდან $T_n(x_1, \cdots, x_n) > t_{5;0,05} = 2,015$, ამიტომ არ გვაქვს საფუძველი უარვყოთ ჰიპოთეზა $\mu_1 > 55$.

§ 2.3-ში განხილული მე-3 და მე-4 თეორემების გამოყენებით მიიღება შემდეგი

კრიტერიუმი 3. ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი

ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის

ჰიპოთეზა: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

მნიშვნელოვნობის დონე: α

ტესტის სტატისტიკა: $T_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{nS_n^{'\,2}}{\sigma_0^2}$, როდესაც μ ცნობილია

$$T_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{(n-1){S'_n}^2}{\sigma_0^2}, \text{ როდესაც } \mu \text{ უცნობია}$$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე U_1 (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$U_1 = [\chi^2_{n,\alpha}, +\infty)$ როდესაც μ ცნობილია $U_1 = [\chi^2_{n-1,\alpha}, +\infty)$ როდესაც μ უცნობია
$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$U_1 = (0; \chi^2_{n,1-\alpha}]$ როდესაც μ ცნობილია $U_1 = [0; \chi^2_{n-1,1-\alpha}]$ როდესაც μ უცნობია
$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$U_1 = (0; \chi^2_{n,1-\alpha}] \cup [\chi^2_{n,\alpha}, +\infty)$ როდესაც μ ცნობილია $U_1 = [0; \chi^2_{n-1,1-\alpha}] \cup [\chi^2_{n-1,\alpha}, +\infty)$ როდესაც μ უცნობია

სადაც $\chi^2_{n,p}$ არის $\chi^2(n)$ განაწილების ზედა p-კრიტიკული წერტილი.

გადაწყვეტილება: თუ $T_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{S'/\sqrt{n}} \in U_1$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყობთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

ამოცანა 6. ამოღებულია $n = 24$ მოცულობის შერჩევა ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან და შერჩევის საფუძველზე გამოთვლილია შესწორებული საშუალო კვადრატული გადახრა $S'_{24} = 17,3$. $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით გავარჩიოთ ერთმანეთისაგან მარტივი ჰიპოთეზები

$$H_0 : \sigma = 15$$

და

$$H_1 : \sigma > 15.$$

ამოხსნა. ჩვენს შემთხვევაში μ უცნობია.

$$\chi^2_{23;0,05} \approx 35,1725;$$

$$T_{23}(x_1, \cdots, x_{23}) = \frac{22 \cdot 17,3^2}{225} = 29,26391.$$

ვინაიდან

$$T_{23}(x_1, \cdots, x_{23}) < \chi^2_{23;0,05},$$

ამიტომ $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

§2.1.3-ში ჩატარებული მსჯელობით მიიღება შემდეგი

კრიტერიუმი 4. ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი უცნობი p ალბათობის შესახებ ბერნულის სქემებში(დიდი მოცულობის შემთხვევაში)

ჰიპოთეზა: $H_0 : p = p_0$

მნიშვნელოვნობის დონე: α

სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა: $T_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე U_1 (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : p > p_0$	$T_n(x_1, \cdots, x_n) > z_\alpha$
$H_1 : p < p_0$	$T_n(x_1, \cdots, x_n) < -z_\alpha$
$H_1 : p \neq p_0$	$T_n(x_1, \cdots, x_n) < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ ან $T_n(x_1, \cdots, x_n) < -z_{\frac{\alpha}{2}}$

სადაც z_α არის $N(0,1)$ განაწილების ზედა α კრიტიკული წერტილი

გადაწყვეტილება: თუ $T_n(x_1, \cdots, x_n) \in U_1$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყობთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში α მნიშვნელოვნობის დონით H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

ამოცანა 7. ვთქვათ, ხარისხის კონტროლის მენეჯერს სურს გაიგოს, აღემატება თუ არა დანადგარით დამზადებული დეფექტური პაკეტების წილი 10%-ს. ამოცანის გადასაწყვეტად შერჩეული 200 პაკეტიდან 26 დეფექტური აღმოჩნდა. აქვს თუ არა საფუძველი მენეჯერს $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით ამტკიცოს, რომ ახალი დანადგარი არ აკმაყოფილებს მის მოთხოვნილებას.

ამოხსნა. ჰიპოთეზა ყალიბდება შემდეგნაირად

$$H_0 : p = 0,1$$

და

$$H_1 : p > 0,1.$$

შევნიშნოთ, რომ $n = 200$, $p_0 = 0,1$ და $\alpha = 0,05$. ნორმალური განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $z_{0,05} = 1,645$. ამიტომ კრიტიკული არე იქნება $U_1 = [1,645; +\infty)$. კრიტერიუმის სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობაა

$$T_{200}(x_1, \cdots, x_{200}) = \frac{26 - 200 \times 0,1}{\sqrt{200 \times 0,1 \times 0,9}} \approx 1,415.$$

რადგან $T_{200}(x_1, \cdots, x_{200}) = 1,415 < 1,645$, ამიტომ $T_{200}(x_1, \cdots, x_{200}) \notin U_1$. ეს ნიშნავს, რომ $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

განსაზღვრება 9. (T_n, U_0, U_1) კრიტერიუმს ეწოდება α-მნიშვნელოვნობის დონის უმძლავრესი კრიტერიუმი, თუ

$$P(\{(x_1,\cdots,x_n) : T_n(x_1,\cdots,x_n) \in U_1\}|H_0) = \alpha,$$

და

$$P(\{(x_1,\cdots,x_n) : T_n(x_1,\cdots,x_n) \in U_0\}|H_1) = \max .$$

ვიგულისხმოთ, რომ დაკვირვებადი შემთხვევითი სიდიდე არის აბსოლუტურად უწყვეტი. უმძლავრესი კრიტერიუმის აგების კონსტრუქცია მარტივი ჰიპოთეზის შემთხვევაში არის მოცემული შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1 (ნეიმან [27]-პირსონი [28]). თუ ძირითადი ჰიპოთეზა H_0 და ალტერნატული ჰიპოთეზა H_1 მარტივებია, შესაბამისად

$$H_0 \;:\; \theta = \theta_0$$

და

$$H_1 \;:\; \theta = \theta_1,$$

და თუ

$$L(x_1,\cdots,x_n,\theta_0) = \prod_{i=1}^{n} f_{\theta_0}(x_i)$$

და

$$L(x_1,\cdots,x_n,\theta_1) = \prod_{i=1}^{n} f_{\theta_1}(x_i),$$

სადაც

$$(\forall\theta)(\theta = \theta_0 \bigvee \theta_1 \to F_\xi(\theta,x) = \int_{-\infty}^{x} f_\theta(x)),$$

და ξ არის შემთხვევითი სიდიდე, რომლიდანაც აღებულია შერჩევა, მაშინ არსებობს კრიტერიუმი, რომელიც არის უმძლავრესი H_0 ჰიპოთეზისთვის H_1 ჰიპოთეზის მიმართ. კრიტიკული არე და თვითონ კრიტერიუმი განისაზღვრება უტოლობით

$$L(x_1,\cdots,x_n,\theta_1) \geq C_\alpha L(x_1,\cdots,x_n,\theta_0),$$

სადაც C_α -დადებითი რიცხვია, რომლის მნიშვნელობა დამოკიდებულია მნიშვნელოვნების α დონეზე.

[27] ნეიმანი ეჟი (*Neyman Jerzy*)-16.04.1894-5.08.1981), ამერიკელი მათემატიკოსი და სტატისტიკოსი, აშშ მეცნიერებათა აკადემიის ნაციონალური აკადემიის წევრი (1963), კალიფორნიის უნივერსიტეტის პროფესორი (1938).

[28] პირსონი ეგორ შარფი (*Peasrson Egor Sharpe*)(11.08.1895-1980)-ინგლისელი მათემატიკოსი, ლონდონის სამეფო საზოგადოების წევრი (1966), ლონდონის უნივერსიტეტის პროფესორი (1933-1960).

ამოცანა 8. ვიპოვოთ უმძლავრესი კრიტერიუმი H_0 ჰიპოთეზისათვის, რომელიც გულისხმობს, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი არის θ_0. H_1 ალტერნატივა გვეუბნება, რომ $\theta_1 \neq \theta_0$. შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ცნობილია და უდრის σ^2, ხოლო ამოკრეფის მოცულობაა n.

ამოხსნა. ვღებულობთ

$$L(x_1, \cdots, x_n, \theta_1) = \prod_{i=1}^{n} f_{\theta_1}(x_i) = (\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}),$$

$$L(x_1, \cdots, x_n, \theta_0) = \prod_{i=1}^{n} f_{\theta_0}(x_i) = (\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}).$$

ნეიმან-პირსონის თეორემის გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგ უტოლობას

$$(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2} \geq C_\alpha(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}$$

ორივე მხარის გალოგარითმებით და გარკვეული გარდაქმნებით ვღებულობთ:

$$2(\theta_1 - \theta_0)\sum_{i=1}^{n} x_i - n(\theta_1^2 - \theta_0^2) \geq 2\sigma^2 \text{ლნ} C_\alpha.$$

ვინაიდან $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}_n$, ამიტომ $\overline{x}_n$-ის მიმართ ამოხსნით ვღებულობთ

$$\overline{x}_n \geq \frac{2\sigma^2 \ln C_\alpha + n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2n(\theta_1 - \theta_0)} \equiv A, \text{თუ } \theta_1 - \theta_0 > 0$$

და

$$\overline{x}_n \leq \frac{2\sigma^2 \ln C_\alpha + n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2n(\theta_1 - \theta_0)} \equiv A, \text{თუ } \theta_1 - \theta_0 < 0$$

ამგვარად, თუ $\theta_1 > \theta_0$, მაშინ კრიტიკულ არეში მოხვდება $\overline{x}_n$ -ის ის მნიშვნელობა, რომელიც გადააჭარბებს A-ს. თუ $\theta_1 < \theta_0$,მაშინ კრიტიკულ არეში მოხვდება $\overline{X}$ -ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელიც ნაკლებია B რიცხვზე.

C_α რიცხვის განსასაზღვრავად განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

შემთხვევა I. $\theta_1 > \theta_0$

ამ შემთხვევაში ვღებულობთ

$$P_{\theta_0}^n(\{(x_1, \cdots, x_n) : \overline{x}_n \geq A\}) = \alpha.$$

ეს უკანასკნელი სტოქასტური ტოლობა ექვივალენტურია შემდეგი სტოქასტური ტოლობის

$$P_{\theta_0}^n(\{(x_1, \cdots, x_n) : \frac{\sum_{i=1}^{n} x_k - n\theta_0}{\sqrt{n}\sigma} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(A-\theta_0)\}) = 1 - \Phi(\frac{\sqrt{n}\sigma(A-\theta_0)}{\sigma}) = \alpha$$

აქედან ვღებულობთ

$$A = \theta_0 + [1 - \Phi^{-1}(1-\alpha)]\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

მეორეს მხრივ,

$$A = \frac{2\sigma^2 \ln C_\alpha + n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2n(\theta_1 - \theta_0)}.$$

ამგვარად,

$$\frac{2\sigma^2 \ln C_\alpha + n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2n(\theta_1 - \theta_0)} = \theta_0 + [1 - \Phi^{-1}(1-\alpha)]\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

აქედან ვღებულობთ

$$C_\alpha = e^{\frac{n(\theta_1-\theta_0)}{2\sigma^2}((1-\Phi^{-1}(1-\alpha))\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}+(\theta_0-\theta_1))}.$$

შემთხვევა II. $\theta_1 < \theta_0$

ამ შემთხვევაში ვღებულობთ

$$P^n_{\theta_0}(\{(x_1,\cdots,x_n) : \overline{x}_n \leq A\}) = \alpha.$$

ეს უკანასკნელი სტოქასტური ტოლობა ექვივალენტურია შემდეგი სტოქასტური ტოლობის

$$P^n_{\theta_0}(\{(x_1,\cdots,x_n) : \frac{\sum_{i=1}^n x_k - n\theta_0}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(A-\theta_0)\}) = \Phi(\frac{\sqrt{n}\sigma(A-\theta_0)}{\sigma}) = \alpha$$

აქედან ვღებულობთ

$$A = \theta_0 + \Phi^{-1}(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

მეორეს მხრივ,

$$A = \frac{2\sigma^2 \ln C_\alpha + n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2n(\theta_1 - \theta_0)}.$$

ამგვარად,

$$\frac{2\sigma^2 \ln C_\alpha + n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2n(\theta_1 - \theta_0)} = \theta_0 + \Phi^{-1}(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

აქედან ვღებულობთ

$$C_\alpha = e^{\frac{n(\theta_1-\theta_0)}{2\sigma^2}(\Phi^{-1}(\alpha)\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}+(\theta_0-\theta_1))}.$$

ამოცანა 8-ის საშუალებით ვღებულობთ ნეიმანის შემდეგ კრიტერიუმს.

კრიტერიუმი 5. ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი

ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის, როდესაც σ^2 დისპერსია ცნობილია

ჰიპოთეზა: $H_0 : \mu = \mu_0$

მნიშვნელოვნობის დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $T_n(X_1, \cdots, X_n) = \overline{X}_n$

კრიტერიუმის სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა: $T_n(x_1, \cdots, x_n)(\omega) = \overline{x}_n$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე U_1 (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : \mu = \mu_1$	$T_n(x_1, \cdots, x_n) > A$, როცა $\mu_1 > \mu_0$;
$H_1 : \mu = \mu_1$	$T_n(x_1, \cdots, x_n) < A$, როცა $\mu_1 < \mu_0$;

სადაც

$$A = \frac{2\sigma^2 \ln C_\alpha + n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2n(\theta_1 - \theta_0)},$$

$$C_\alpha = \begin{cases} e^{\frac{n(\theta_1 - \theta_0)}{2\sigma^2}((1-\Phi^{-1}(1-\alpha))\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + (\theta_0 - \theta_1))}, & \text{თუ} \ \ \mu_1 > \mu_0 \\ e^{\frac{n(\theta_1 - \theta_0)}{2\sigma^2}(\Phi^{-1}(\alpha)\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + (\theta_0 - \theta_1))}, & \text{თუ} \ \ \mu_1 < \mu_0 \end{cases},$$

გადაწყვეტილება: თუ $T_n(x_1, \cdots, x_n) \in U_1$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

სავარჯიშოები

2.5.1. ამოღებულია შერჩევა ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან. შერჩევის მოცულობაა 9. შერჩევის ელემენტებია

$$8;\ 13;\ 16;\ 7;\ 17;\ 10;\ 13;\ 15;\ 18.$$

გენერალური დისპერსია $\sigma^2 = 16$. $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით გავარჩიოთ ერთმანეთისაგან მარტივი ჰიპოთეზები

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 10$$

და

$$H_1 : \mu = \mu_1 = 15.$$

2.5.2. $N(\mu, 49)$ კანონით განაწილებული გენერალური ერთობლიობის საშუალოს შესახებ გამოთქმულია ორი ჰიპოთეზა

$$H_0 : \mu_0 = 25,$$

$$H_1 : \mu_1 = 19.$$

$\alpha = 0,01$ მნიშვნელოვნობის დონით ჰიპოთეზების შესამოწმებლად ამოღებულია $n = 64$ მოცულობის შერჩევა, რომლის საფუძველზე გამოთვლილი შერჩევითი საშუალოა $\overline{x}_{64} = 23,8$.

ა) მარტივია თუ რთული ჰიპოთეზები?

ბ) ალტერნატივიდან გამომდინარე აირჩიეთ კრიტერიუმი.

გ) გამოთვალეთ კრიტერიუმის სტატისტიკა და განსაზღვრეთ კრიტიკული წერტილი.

დ) როგორ განისაზღვრება კრიტიკული არე?

ე) როგორია თქვენი გადაწყვეტილება H_0-ის შესახებ?

ვ) განსაზღვრეთ p-მნიშვნელობა.

2.5.3 ახალი ელექტრონული ხელსაწყოს შემოწმების მიზნით, კომპანიამ გადაწყვიტა შეამოწმოს ექვსი ასეთი ხელსაწყო. ყოველი მათგანისათვის გაიზომა დრო ხელსაწყოს მწყობრიდან გამოსვლამდე, რის შედეგადაც მიღებულ იქნა შემდეგი ამონარჩევი (საათებში):

$$59,2;\ 58,3;\ 50,8;\ 56,5;\ 63,7; 57,3.$$

გვაძლევს თუ არა ეს შერჩევა საკმარის საფუძველს $\alpha = 0,05$ ნდობის დონით შემდეგი დასკვნის გასაკეთებლად: ახალი ხელსაწყოს სიცოცხლის საშუალო ხანგძლივობა აღემატება 40 საათს.

2.5.4. ვთქვათ, ხარისხის კონტროლის მენეჯერს სურს გაიგოს, აღემატება თუ არა დანადგარით დამზადებული დეფექტური პაკეტების წილი 10%-ს. ამოცანის გადასაწყვეტად შერჩეული 100 პაკეტიდან 15 დეფექტური აღმოჩნდა. აქვს თუ არა საფუძველი მენეჯერს ამტკიცოს, რომ ახალი დანადგარი არ აკმაყოფილებს მის მოთხოვნილებას.

2.5.5. გამოვიყენოთ $\alpha = 0,9772$ დონის უმძლავრესი კრიტერიუმი H_0 ჰიპოთეზისათვის H_1 ჰიპოთეზის მიმართ, თუ ამორჩევის მოცულობაა n და შერჩევითი საშუალოა $\overline{X}_n$:

1) $H_0 : \theta_0 = 1;\ H_1 : \theta_1 = 2;\ n = 9;\ \overline{X}_9 = 3;$

2) $H_0 : \theta_0 = 1;\ H_1 : \theta_1 = 2;\ n = 9;\ \overline{X}_9 = 4$

2.5.6. ამოღებულია $n = 24$ მოცულობის შერჩევა ნორმალურად განაწილებული გენერალური ერთობლიობიდან და შერჩევის საფუძველზე გამოთვლილია შესწორებული საშუალო კვადრატული გადახრა $S_{24}^{'} = 17,3$. $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით გავარჩიოთ ერთმანეთისაგან მარტივი ჰიპოთეზები

$$H_0 : \sigma = 15$$

და

$$H_1 : \sigma > 15.$$

2.5.7. α დონის უმძლავრესი კრიტერიუმისათვის H_0 ჰიპოთეზისა H_1 ჰიპოთეზის მიმართ ვიპოვოთ C_α, თუ ამორჩევის მოცულობაა n და შერჩევითი საშუალოა $\overline{X}_n$:

1) $H_0 : \theta_0 = 1$; $H_1 : \theta_1 = 2$; $n = 16$; $\overline{X}_9 = 3$; $\alpha = 0,95$;

2) $H_0 : \theta_0 = 1$; $H_1 : \theta_1 = 2$; $n = 25$; $\overline{X}_9 = 4$; $\alpha = 0,9$;

§ 2.6. კორელაციის ტიპის განსაზღვრა

ვთქვათ, 2-განზომილებიან შემთხვევით (X, Y) ვექტორზე დაკვირვების შედეგად მიღებულია n მოცულობის შერჩევა

$$(x_1, y_1), \cdots, (x_2, y_2).$$

განსაზღვრება 1. სიდიდეს

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_n)(y_i - x_n),$$

სადაც

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

და

$$\overline{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

ეწოდება შერჩევითი კორელაცია X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის და აღინიშნება $cov_n(X, Y)$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება 2. სიდიდეს

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)(y_i - \overline{x}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{x}_n)^2}}$$

ეწოდება შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის და აღინიშნება $r_n(X, Y)$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება 3. სიდიდეს

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)(y_i - \overline{x}_n)}{(n-1)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{x}_n)^2}}$$

ეწოდება შესწორებული შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის და აღინიშნება $r_n^{'}(X, Y)$ სიმბოლოთი.

შენიშვნა 1. შესწორებული შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი წარმოადგენს X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის კორელაციის კოეფიციენტის "კარგ" შეფასებას. ცხადია, რომ

$$r_n^{'}(X, Y) = \frac{n}{n-1} r_n(X, Y).$$

განსაზღვრება 3. ვიტყვით, რომ X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის
ა) არსებობს სრულყოფილი უარყოფითი კორელაცია, თუ

$$r(X,Y) = -1;$$

ბ) არსებობს ძლიერი უარყოფითი კორელაცია, თუ

$$-1 < r(X,Y) < -0,5;$$

გ) არსებობს საშუალო უარყოფითი კორელაცია, თუ

$$r(X,Y) = -0,5;$$

დ) არსებობს სუსტი უარყოფითი კორელაცია, თუ

$$-0,5 < r(X,Y) < 0;$$

ე) არ არსებობს კორელაცია, თუ

$$r(X,Y) = 0;$$

ვ) არსებობს სუსტი დადებითი კორელაცია, თუ

$$0 < r(X,Y) < 0,5;$$

ზ) არსებობს საშუალო დადებითი კორელაცია, თუ

$$r(X,Y) = 0,5;$$

თ) არსებობს ძლიერი დადებითი კორელაცია, თუ

$$0,5 < r(X,Y) < 1;$$

ი) არსებობს სრულყოფილი დადებითი კორელაცია, თუ

$$r(X,Y) = 1.$$

მაგალითი 1. ვთქვათ Y აღნიშნავს საყიდლად შეთავაზებული საქონლის რაოდენობას, ხოლო X აღნიშნავს ამ შეთავაზებების შედეგად გაყიდულ საქონელთა რაოდენობას. განვიხილოთ 10 გამყიდველი, რომელთა მუშაობის შედეგი ასახულია ცხრილში: y_i აღნიშნავს i-ური გამყიდვლის მიერ საყიდლად შეთავაზებული საქონლის რაოდენობას , ხოლო x_i აღნიშნავს i-ური გამყიდვლის შეთავაზებების შედეგად გაყიდულ საქონელთა რაოდენობას $(1 \leq i \leq 10)$.

x_i	3	2	1	2	2	1	2	3	1	1
y_i	5	6	3	4	6	5	4	6	5	6

როგორი კორელაცია არსებობს X და Y სიდიდეებს შორის?

ამოხსნა.$EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციის საშუალებით ვითვლით

$$r_n(X,Y) = CORREL(x1 : x10; y1 : y10) = 0,2672261.$$

ამგვარად

$$0 < r_n(X,Y) \approx r(X,Y) < 0,5 \ ,$$

რაც მიუთითებს იმაზე რომ აღნიშნავს საყიდლად შეთავაზებული საქონლის Y რაოდენობასა და ამ შეთავაზებების შედეგად გაყიდულ საქონელთა X რაოდენობას შორის არსებობს სუსტი დადებითი კორელაცია.

მაგალითი 2. კავკასიონის სამხრეთ ფერდზე შესწავლილია ნახშირმჟავა ჰიდროკარბონატულ-ქლორიდული ნატრიუმიანი ტიპის წყლების 34 ბუნებრივი გამოსავალი. ამ წყლებში მინერალიზაციის (გ/ლ) და ლითიუმის(მგ/ლ) შემცველობის მნიშვნელობები მოცემულია შემდეგ ცხრილში.

M_i	$6,30$	$5,30$	$7,02$	$2,20$	$4,48$	$0,70$	$11,00$	$14,10$	$14,8$
Li_i	$1,1$	$0,70$	$2,20$	$0,75$	$2,00$	$0,18$	$4,10$	$6,70$	$4,7$
M_i	$2,80$	$4,80$	$6,22$	$4,00$	$3,80$	$8,00$	$10,70$	$7,9$	$3,5$
Li_i	$0,6$	$1,00$	$1,30$	$1,5$	$0,55$	$5,2$	$3,3$	$2,5$	$0,6$
M_i	$9,10$	$17,00$	$13,60$	$6,70$	$15,60$	$24,20$	$5,00$	$11,00$	
Li_i	$6,3$	10	$10,6$	$3,0$	$12,00$	$20,5$	$0,9$	$3,00$	
M_i	$2,4$	$1,1$	$9,3$	$5,8$	5	$3,12$	$22,6$	$17,8$	
Li_i	$0,87$	$0,34$	$2,9$	$1,8$	$1,65$	$0,35$	10	5	

დავადგინოთ ლითიუმის შემცველობასა და მინერალიზაციას შორის არსებული კორელაციის სახე.

ამოხსნა. ავღნიშნოთ მინერალიზაცია X-ით და ლითიუმის შემცველობა Y-ით.

$EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციის საშუალებით ვითვლით

$$r_{34}(M,Li) = r_{34}(X,Y) = CORREL(x1 : x34; y1 : y34) = 0,879131631.$$

შევნიშნოთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტის კარგ შეფასებად ითვლება სტატისტიკა

$$\frac{n}{n-1} r_n(X,Y).$$

ვღებულობთ

$$\frac{n}{n-1} r_n(X,Y) = \frac{34}{33} \times 0,879131631 = 0,905771984.$$

ვინაიდან

$$0,5 < \frac{34}{33} r_{34}(X,Y) = 0,905771984 \approx r(X,Y) < 1,$$

ამიტომ ჩვენ ვასკვნით, რომ ლითიუმის შემცველობასა და მინერალიზაციას შორის არსებობს ძლიერი დადებითი კორელაცია.

მაგალითი 3. კავკასიონის სამხრეთ ფერდზე შესწავლილია ნახშირმჟავა ჰიდროკარბონატ-იონისა და კალიუმის შემცველობა ქლორიდული ნატრიუმიანი ტიპის წყლების 34 ბუნებრივ გამოსავალში. ამ წყლებში ჰიდროკარბონატ-იონისა და კალიუმის შემცველობის მნიშვნელობები (მგ/ლ) მოცემულია შემდეგ ცხრილში.

HCO_3	$3733,2$	$2830,4$	$3050,0$	976	2488	$3294,4$	3538
K	40	12	20	50	22	$2,2$	$44,0$
HCO_3	1586	$2464,4$	$2076,8$	2200	$1878,8$	$4587,2$	$4928,8$
K	$7,5$	$16,5$	$23,1$	$22,0$	$78,0$	$33,6$	$23,1$
HCO_3	4636	8174	$6517,8$	$3806,4$	$7539,6$	$1110,2$	2440
K	37	52	47	28	72	150	23
HCO_3	$1274,9$	$713,7$	$5075,2$	3708	4636	2537	1586
K	$8,5$	$3,7$	$30,0$	$23,0$	$59,4$	$18,7$	$7,8$
HCO_3	$3977,2$	$8199,6$	$7100,4$	$55416,8$	$5721,8$	2074	
K	$2,1$	$45,6$	$57,2$	46	$117,0$	14	

.

დავადგინოთ ჰიდროკარბონატ-იონისა და კალიუმის სემცველობებს შორის არსებული კორელაციის სახე.

ამოხსნა. ავღნიშნოთ ნახშირმჟავა ჰიდროკარბონატ-იონის შემცველობა X-ით და კალიუმის შემცველობა Y-ით.

$EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციის საშუალებით ვითვლით

$$r_{34}(HCO_3, K) = r_{34}(X, Y) = CORREL(x1 : x34; y1 : y34) = 0,268808583,$$

რომლის საშუალებითაც ვღებულობთ

$$\frac{n}{n-1} r_n(X, Y) = \frac{34}{33} 0,268808583 = 0,276954297.$$

ვინაიდან

$$0 < r(X, Y) \approx \frac{34}{33} \times r_{34}(X, Y) < 0,5,$$

ამიტომ ჩვენ ვასკვნით, რომ ამ წყლებში ჰიდროკარბონატ-იონისა და კალიუმის შემცველობას შორის არსებობს სუსტი დადებითი კორელაცია.

როცა კორელაციის კოეფიციენტი უცნობია, შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტის $r_n(X, Y)$ საშუალებით შეიძლება გაკეთდეს სტატისტიკური დასკვნები მისი მნიშვნელობების შესახებ, ე.ი., აიგოს ნდობის ინტერვალი ან შემოწმდეს ჰიპოთეზა კორელაციის კოეფიციენტის რაიმე რიცხვთან ტოლობის შესახებ.

განვიხილოთ შემდეგი ჰიპოთეზის

$$H_0 \; : \; r = 0$$

შემოწმების საკითხი ალტერნატიული

$$H_1 \ : \ r \neq 0$$

ჰიპოთეზის წინააღმდეგ.

თუ (X, Y) შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილება ნორმალურია, მაშინ H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობისას X და Y იქნებიან დამოუკიდებლები. ამიტომ სტატისტიკა

$$t = \frac{r(X,Y)\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2(X,Y)}}$$

იქნება განაწილებული სტიუდენტის კანონით $n-2$ თავისუფლების ხარისხით. ამიტომ, თუ $|t| > t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყობთ α-მნიშვნელოვნობის დონით. წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია.

მაგალითი 4(მაგალითი 1–ის გაგრძელება). დავსვათ შემდეგი კითხვა: სამართლიანია თუ არა გამყიდველთა მთელი პოპულაციისათვის ის დასკვ- ნა, რომ საქონლის შეთავაზებათა და გაყიდვათა რაოდენობებს შორის არ- სებობს კავშირი?

ამის დასადგენად განვიხილოთ შემდეგი

$$H_0 \ : \ r = 0$$

ჰიპოთეზის შემოწმების საკითხი ალტერნატიული

$$H_1 \ : \ r \neq 0$$

ჰიპოთეზის წინააღმდეგ.

მნიშვნელოვნობის დონედ დავაფიქსიროთ $\alpha = 0,05$. თავისუფლების ხარისხია $n-2 = 10-2 = 8$. სტიუდენტის განაწილების ცხრილის მეშვეობით ვპოულობთ $t_{8.0,95} = 2,306$. გამოვთვალოთ t სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა

$$t = \frac{r_{10}(X,Y)\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{10}^2(X,Y)}} = \frac{0,2672261\sqrt{8}}{\sqrt{1-0,2672261^2}} = 0,784353.$$

ვინაიდან $t = 0,784353 \in (-2,306; 2,306)$, ამიტომ $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს. სხვა სიტყვებით, ჩვენ მივიღეთ შემდეგი ინფორმაცია: საქონლის შეთავაზების რაოდენობა და გაყიდვათა რაოდენობას შორის არ არსებობს კავშირი(კორელაცია).

მაგალითი 5(მაგალითი 2-ის გაგრძელება). შევისწავლოთ საკითხი: არსებობს თუ არა კავშირი (კორელაცია) ჰიდროკარბონატულ-ქლორიდულ ნატრიუმიან წყლებში ლითიუმის შემცველობასა და მინერალიზაციას შორის. ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი

$$H_0 \ : \ r = 0$$

ჰიპოთეზის შემოწმების საკითხი ალტერნატიული

$$H_1 \ : \ r \neq 0$$

ჰიპოთეზის წინააღმდეგ.

მნიშვნელოვნობის დონედ დავაფიქსიროთ $\alpha = 0,05$. თავისუფლების ხარისხია $n-2 = 34-2 = 32$. $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციის $TINV$-ის საშუალებით ვპოულობთ $t_{32.0,95} = TINV(0,1;32) = 1,693888$. გამოვთვალოთ t სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა

$$t = \frac{r_{34}(X,Y)\sqrt{32}}{\sqrt{1-r_{32}^2(X,Y)}} = \frac{0,879131631\sqrt{32}}{\sqrt{1-0,879131631^2}} = 21,89571.$$

ვინაიდან $t = 21,89571 \notin (-1,693888; 1,693888)$, ამიტომ $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზის უარვყოფთ, ანუ სხვა სიტყვებით: ჰიდროკარბონატულ-ქლორიდულ ნატრიუმიან წყლებში ლითიუმის შემცველობასა და მინერალიზაციას შორის არსებობს კავშირი(კორელაცია).

მაგალითი 6 (მაგალითი 3-ის გაგრძელება). შევისწავლოთ შემდეგი საკითხი: არსებობს თუ არა კორელაცია ნახშირმჟავა ჰიდროკარბონატ-იონისა და კალიუმის შემცველობას შორის ქლორიდული ნატრიუმიანი ტიპის წყლებში?

ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი

$$H_0 \ : \ r = 0$$

ჰიპოთეზის შემოწმების საკითხი ალტერნატიული

$$H_1 \ : \ r \neq 0$$

ჰიპოთეზის წინააღმდეგ.

მნიშვნელოვნობის დონედ დავაფიქსიროთ $\alpha = 0,05$. თავისუფლების ხარისხია $n-2 = 34-2 = 32$. $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციის $TINV$-ის საშუალებით ვპოულობთ $t_{32.0,95} = TINV(0,1;32) = 1,693888$. გამოვთვალოთ t სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა

$$t = \frac{r_{34}(X,Y)\sqrt{32}}{\sqrt{1-r_{32}^2(X,Y)}} = \frac{0,268808583\sqrt{32}}{\sqrt{1-0,268808583^2}} = 1,578718.$$

ვინაიდან $t = 1,578718 \notin (-1,693888; 1,693888)$, ამიტომ $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით H_0 ჰიპოთეზის უარვყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ სხვა სიტყვებით: არ არსებობს კავშირი(კორელაცია) ნახშირმჟავა ჰიდროკარბონატ-იონისა და კალიუმის შემცველობას შორის ქლორიდული ნატრიუმიანი ტიპის წყლებში.

სავარჯიშოები

2.6.1. (X, Y) 2-განზომილებიან შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგად მიღებულია 10-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა

x_i	3	-2	1	-2	2	-1	2	-3	1	-1
y_i	5	-6	3	-4	6	-5	4	-6	5	-6

იპოვეთ შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი და დაადგინეთ რა კორელაცია არსებობს X და Y ფაქტორებს შორის ($r_{10}(X, Y) = 0,920701828$).

2.6.2. (X, Y) 2-განზომილებიან შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგად მიღებულია 10-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა

x_i	-3	-2	-1	-2	-2	-1	-2	-3	-1	-1
y_i	5	-6	3	-4	6	-5	4	-6	5	-6

იპოვეთ შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი და დაადგინეთ რა კორელაცია არსებობს X და Y ფაქტორებს შორის ($r_{10}(X, Y) = -0,51577922$).

2.6.3. (X, Y) 2-განზომილებიან შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგად მიღებულია 10-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა

x_i	3	2	1	2	2	1	2	3	1	1
y_i	5	-6	3	-4	6	-5	4	-6	5	-6

იპოვეთ შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი და დაადგინეთ რა კორელაცია არსებობს X და Y ფაქტორებს შორის ($r_{10}(X, Y) = 0,051577922$).

2.6.4. (X, Y) 2-განზომილებიან შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგად მიღებულია 10-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა

x_i	18	12	6	12	12	6	12	18	6	6
y_i	5	-6	3	-4	6	-5	4	-6	5	-6

იპოვეთ შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი და დაადგინეთ რა კორელაცია არსებობს X და Y ფაქტორებს შორის ($r_{10}(X, Y) = 0,051577922$).

2.6.5. (X, Y) 2-განზომილებიან შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგად მიღებულია 10-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა

x_i	18	0	6	0	12	0	12	0	6	0
y_i	5	-6	3	-4	6	-5	4	-6	5	-6

იპოვეთ შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი და დაადგინეთ რა კორელაცია არსებობს X და Y ფაქტორებს შორის ($r_{10}(X, Y) = 0,87802769$).

2.6.6. (X, Y) 2-განზომილებიან შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგად მიღებულია 10-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა

x_i	18	0	6	0	12	0	12	0	6	0
y_i	0	-6	0	-4	0	-5	0	-6	0	-6

.

იპოვეთ შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი და დაადგინეთ რა კორელაცია არსებობს X და Y ფაქტორებს შორის ($r_{10}(X,Y)=0,844971795$).

§ 2.7. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი

შემდეგ მოდელს

$$Y(x,\omega)=B_0+B_1x+\epsilon(\omega),$$

სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, ϵ არის $(0,\sigma^2)$ პარამეტრებიანი ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე, ხოლო B_0,B_1 უცნობი მუდმივი კოეფიციენტებია, ეწოდება წრფივი რეგრესიის მოდელი. ამასთან x ცვლადს უწოდებენ ამხსნელ ცვლადს ან პრედიქტორს, ანდა რეგრესორს. ხოლო ϵ-ს ეწოდება შეშფოთება("თეთრი ხმაური"), რომელსაც მოიხსენიებენ როგორც ჭეშმარიტ გადახრას ანუ შეცდომას.

ვთქვათ, Y შემთხვევით სიდიდის გრაფიკზე დაკვირვების შედეგად მიღებულია n-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა

$$(x_1,Y_1),(x_2,Y_2),\cdots,(x_n,Y_n).$$

განსაზღვრება 1. $\widehat{Y}=b_1x+b_0$ წრფივ ფუნქციას ეწოდება უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მიღებული წრფივი რეგრესიის განტოლება, თუ

$$F(b_0,b_1)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-b_1x_i)^2=\min\{\sum_{i=1}^{n}(y_i-c_0-c_1x_i)^2 : c_0\in R\ \&\ c_1\in R\}$$

$$=\min\{F(c_0,c_1) : c_0\in R\ \&\ c_1\in R\}.$$

შენიშვნა 1. $F(c_0,c_1)$ ფუნქციის მინიმუმის მოსაძებნად გავაწარმოოთ ეს ფუნქცია c_0 და c_1 ცვლადებით და გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ წრფივ განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(-1)2(y_i-c_0-c_1x_i)=0 \\ \sum_{i=1}^{n}2(-x_i)(y_0-c_0-c_1x_i)=0 \end{cases}.$$

2-ზე შეკვეცით და ცნობილი და უცნობი წევრების ტოლობის სხვადასხვა მხარეს დალაგებით მივიღებთ

$$\begin{cases} nc_0+c_1\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i \\ c_0\sum_{i=1}^{n}x_i+c_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \end{cases}.$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ

$$\begin{cases} c_1 = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ c_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \end{cases}.$$

ამგვარად,

$$\begin{cases} b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \end{cases}.$$

ამიტომ წრფივი რეგრესიის განტოლებას ექნება სახე

$$\widehat{Y}(x) = b_1 x + b_0.$$

შენიშვნა 2. $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია
ა) $INTERCEPT(y1 : yn; x1 : xn)$ ითვლის b_0-ის მნიშვნელობას;
ბ) $SLOPE(y1 : yn; x1 : xn)$ ითვლის b_1-ის მნიშვნელობას;
გ) $LINEST(y1 : yn; x1 : xn; 1)$ ითვლის b_1-ის, როცა $b_0 \neq 0$;
დ) $LINEST(y1 : yn; x1 : xn; 0)$ ითვლის b_1-ის, როცა $b_0 = 0$;
დ) $FORECAST(x; y1 : yn; x1 : xn)$ ითვლის $y = b_0 + b_1 x$ ფუნქციის მნიშვნელობას x წერტილში. ეს უკანასკნელი ბრძანება შეიძლება გამოვიყენოთ დაკვირვებადი პროცესის პროგნოზირებისათვის(გარკვეული აზრით).

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ რეგრესიის წრფის განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\widehat{Y}(x) = \overline{Y} + b_1(x - \overline{x}).$$

რეგრესიის წრფეს გააჩნია შემდეგი თვისებები:
1) $\widehat{Y}(\overline{x}) = \overline{Y}$;
2) $\sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{Y}_i) = 0$.

განსაზღვრება 1. $\widehat{Y}_i = b_0 + b_1 x_i$ $(1 \le i \le n)$ მნიშვნელობებს ეწოდება Y ცვლადის პროგნოზირებული მნიშვნელობები, ხოლო

$$e_i = Y_i - \widehat{Y}_i \ (1 \le i \le n)$$

სიდიდეებს ეწოდება ნაშთები.

მართებულია შემდეგი ე.წ. ლაგრანჟის ტოლობა

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{Y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2.$$

შენიშვნა 1. ერთის მხრივ, ცხადია, რომ

$$(Y_i - \overline{Y})_{1\le i\le n} = (Y_i - \widehat{Y}_i)_{1\le i\le n} + (\widehat{Y}_i - \overline{Y})_{1\le i\le n}.$$

მეორეს მხრივ, ლაგრანჟის ტოლობა გვეუბნება, რომ ვექტორები

$$(Y_i - \widehat{Y}_i)_{1\le i\le n}$$

და

$$(\widehat{Y}_i - \overline{Y})_{1\le i\le n}$$

არიან ორთოგონალურები.

განსაზღვრება 2. სიდიდეს

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$$

ეწოდება დაკვირვებული მნიშვნელობების მათი საშუალო მნიშვნელობებიდან გადახრების კვადრატების სრული ჯამი და აღინიშნება სიმბოლოთი SST(*total sum of squares*), რომელსაც სრულ ვარიაციას უწოდებენ. მტკიცდება, რომ

$$\frac{SST}{\sigma^2} \ \sim\ \chi^2(n-1).$$

განსაზღვრება 3. სიდიდეს

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{Y}_i)^2$$

ეწოდება ნაშთთა კვადრატების ჯამი, ანუ დაკვირვებადი მნიშვნელობების პროგნოზირებადი მნიშვნელობებიდან გადახრების კვადრატების ჯამი და აღინიშნება ასოებით SSE (”*error sum of squares*”), ე.ი.,

$$SSE = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{Y}_i)^2.$$

შევნიშნოთ, რომ $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ წარმოადგენს

$$\sum_{i=1}^{n}(\epsilon)_i^2$$

გარკვეულ შეფასებას, რომელსაც აქვს დიდი მნიშვნელობა რეგრესიის წრფის დასახასიათებლად. SSE არის სრული გაბნევის ის ნაწილი, რომელიც არ აიხსნება რეგრესიის საშუალებით. მტკიცდება, რომ

$$\frac{SSE}{\sigma^2} \ \sim\ \chi^2(n-2).$$

განსაზღვრება 5. სიდიდე

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2$$

წარმოადგენს პროგნოზირებადი მნიშვნელობების დაკვირვებადი მნიშვნელობების საშუალოდან გადახრების კვადრატების ჯამს და აღინიშნება SSR სიმბოლოთი(*regression sum of squares*). ის წარმოადგენს გაბნევის იმ ნაწილს, რომელიც ახსნილია რეგრესიის წრფით. მტკიცდება

$$\frac{SSR}{\sigma^2} \sim \chi^2(1).$$

ამგვარად

$$SST = SSE + SSR.$$

მართებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1. თუ $(\epsilon_i)_{1 \le i \le n}$ არის დამოუკიდებელ $(0; \sigma^2)$ პარამეტრიანი ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეების ოჯახი, მაშინ b_0 და b_1 არიან ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეები და
1) b_0 წარმოადგენს B_o-ის ჩაუნაცვლებელ შეფასებას;
2) b_1 წარმოადგენს B_1-ის ჩაუნაცვლებელ შეფასებას;
3) $S^2 = \frac{SSE}{n-2}$ წარმოადგენს σ^2-ის ჩაუნაცვლებელ შეფასებას;

განსაზღვრება 6. სიდიდეს

$$R_n^2 = \frac{SSR}{SST}$$

ეწოდება შერჩევითი დეტერმინაციის კოეფიციენტი.

შენიშვნა 2. მტკიცდება, რომ $R_n^2 = r_n^2$, სადაც r_n არის შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი.

თეორემა 2. ვთქვათ,

$$S_{b_0} = S^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{nSS_X}$$

და

$$S_{b_1} = S^2 \frac{1}{nSS_X}.$$

მაშინ
1) S_{b_i} წარმოადგენს B_i-ის დისპერსიის შეფასებას $(i = 0, 1)$;
2) $T_i = \frac{b_i - B_i}{S_{b_i}} \sim t(n-2)$ $(i = 0, 1)$.

შენიშვნა 3. სწორედ T_0 და T_1 სტატისტიკების მეშვეობით ხდება დასკვნების გამოტანა B_0 და B_1 პარამეტრების შესახებ.

კრიტერიუმი 1. მარტივ ჰიპოთეზათა შემოწმების ალგორითმი წრფივი რეგრესიის B_j $(j=0,1)$ კოეფიციენტის შესახებ

ჰიპოთეზა: $H_0 \ : \ B_j = B_j^0$

ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 \ : \ B_j \neq B_j^0$
მნიშვნელოვნობის დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა(ტესტის სტატისტიკა): $T_{b_j} = \frac{b_j - B_j^0}{S_{b_j}} \sim t(n-2)$

ალტერნატივა: კრიტიკული არე U_1 (H_0-ის უარყოფის არე)

$H_1 : |t_{b_j}| > t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$

გადაწყვეტილება: თუ $T_{b_j} \in U_1$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

შენიშვნა 4. B_j-ისთვის $1-\alpha$ დონის ნდობის ინტერვალს აქვს შემდეგი სახე
$(b_j + S_{b_j} t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}, b_j - S_{b_j} t_{n-2,\frac{\alpha}{2}})$.

შენიშვნა 6. წრფივი რეგრესიის ანალიზის ჩასატარებლად, ისევე როგორც მრავლობითი რეგრესიის ანალიზისას, გამოიყენება $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქცია *Tools | Data Analysis | Regression.* მისი დახასიათება მოცემულია შემდგომ პარაგრაფში.

შევისწავლოთ შემდეგი საკითხი: ღოგორ მოვახდინოთ პროგნოზირება და როგორ გავაკეთოთ სტატისტიკური დასკვნები წრფივი რეგრესიის საშუალებით?

თავისთავად
$$\widehat{Y}(x^*) = b_0 + b_1 x^*$$
არ იძლევა არანაირ ინფორმაციას, თუ რა სიზუსტით იყო შეფასებული ჭეშმარიტი რეგრესიის წრფე და რა სიზუსტით იყო პროგნოზირებული x^*-ის შესაბამისი $\widehat{Y}(x^*)$ სიდიდე. ამ ინფორმაციის მოპოვება შესაძლებელია $Y(x^*)$-სთვის საპროგნოზო ინტერვალის აგების მეშვეობით, რომელიც მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 3. შემდეგი სახის ინტერვალი
$$\Big(\widehat{Y}(x^*) - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar(x))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2} + 1};$$

$$\widehat{Y}(x^*) + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \overline(x))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2} + 1}\Big)$$

წარმოადგენს $Y(x^*)$-სთვის $1-\alpha$ დონის საპროგნოზო ინტერვალს, სადაც

$$S = \sqrt{\frac{SSE}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n(\widehat{Y}_i - \overline{Y}}{n-2}}.$$

ე.ი.

$$P(\{\omega : \widehat{Y}(x^*) - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \overline(x))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2} + 1} <$$

$$< Y(x^*;\omega) < \widehat{Y}(x^*) + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \overline(x))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2} + 1}|) = 1-\alpha.$$

შენიშვნა 6. SSE, SST და SSR სიდიდეების მნიშვნელობების პოვნა შეგვიძლია $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციის *Regression*-ის საშუალებით. მათი მნიშვნელობები მოიცემა ამონაბეჭდის ბლოკში დასახელებით $ANOVA$.

წრფივი ანალიზის ბოლო სტადიაზე უნდა ჩატარდეს ნაშთთა ანალიზი.

განსაზღვრება 7. $(e_i)_{1\le i\le n} = (Y_i - \widehat{Y}_i)_{1\le i\le n}$ სიდიდეებს, სადაც $(Y_i)_{1\le i\le n}$ არის შერჩევითი მნიშვნელობა, ხოლო $\widehat{(Y_i)}_{1\le i\le n}$ არის პროგნოზირებული მნიშვნელობები, ეწოდება ნაშთები.

შენიშვნა 7. $(e_i)_{1\le i\le n}$ შეიძლება ჩაითვალოს $(\epsilon_i)_{1\le i\le n}$ შეცდომების დაკვირვებულ მნიშვნელობებად, თუ მოდელი სწორადაა შერჩეული.

ჩვენი ძირითადი დაშვებება მდგომარეობდა შემდეგში, რომ $(\epsilon_i)_{1\le i\le n}$ იყო დამოუკიდებელ $(0,\sigma^2)$-პარამეტრიან ნორმალურ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.

ეს დაშვება მეტად მნიშვნელოვანია უცნობი რეგრესიის კოეფიციენტებისა და მოდელის ვარგისიანობის შესახებ დასკვნების გამოსატანად. თუ მოდელი სწორადაა შერჩეული, მაშინ ნაშთები უნდა ავლენდეს თვისებებს, რომლებიც დაადასტურებდა ჩვენს მიერ იღებულ დაშვებებს.

ნაშთთა ანალიზის ამოცანაა შემოწმდეს ის ძირითადი დაშვებები, რომელზედაც იყო განხორციელებული გამოთვლები. ეს ძირითადი დაშვებებია:

1) რეგრესიის მრუდი წრფეა;
2) გადახრათა ლოდინები ნულის ტოლია ყველა შერჩევისათვის;
3) გადახრათა დისპერსიები მუდმივია ყველა შერჩევიათვის;
4) გადახრები დამოუკიდებელია შერჩევის ელემენტის ნომერზე;
5) გადახრები განაწილებულია ნორმალურად.

ნაშთთა ანალიზი ხორციელდება გრაფიკულად.

დიაგნოსტიკური გრაფიკების სახეებია:

ა) **დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი.**

ვაგებთ წერტილებს $(x_i, e_i)_{1\le i\le n}$. თუ წერტილები დაახლოებით ერთნაირადაა განაწილებული OX ღერძის წერტილების გასწვრივ, უნდა ჩავთვალოთ რომ ყველა დაშვება შესრულებულია.

თუ $(\epsilon_i)_{1\le i\le n}$-ის დისპერსიები $(\sigma_i)_{1\le i\le n}$ არ არის დამოკიდებული მათ ინდექსებზე, მაშინ ნაშთები არიან განლაგებული ზოლში.

თუ დარღვეულია რეგრესიის მრუდის წრფივობის დაშვება, მაშინ ნაშთები იქნებიან განლაგებული სიმეტრიულად არაწრფივი მრუდის გასწვრივ.

თუ დარღვეულია დაშვება σ^2-ის მუდმივობის შესახებ, მაშინ $(x_i, |e_i|)_{1\le i\le n}$ არ იქნებიან "დაახლოებით" განლაგებული OX ღერძის პარალელური რაიმე წრფის გასწვრივ.

ბ) **პროგნოზირებად და რეალურ მნიშვნელობათა x–ზე დამოკიდებულების გრაფიკები.**

ვაგებთ წერტილებს $(x_i, Y_i)_{1\le i\le n}$ და $(x_i, \widehat{Y}_i)_{1\le i\le n}$. თუ პროგნოზირება კარგია, მაშინ $(Y_i - \widehat{Y}_i)_{1\le i\le n}$ სიდიდეების მოდულების მაქსიმუმი უნდა იყოს მცირე სიდიდე.

გ) **ნორმალური ალბათობის გრაფიკები $(e_i^*)_{1\le i\le n}$ სიდიდეებისათვის.**

ეს გრაფიკი საშუალებას იძლევა შემოწმდეს შეცდომების ნორმალურობის ჰიპოთეზა. მისი აგების წესი შემდეგია: უნდა მოიძებნოს სტანდარტული ნორმალური განაწილების $100(i-0,5)/n$ პროცენტული წერტილი z_i ყოველი $1 \le i \le n$ რიცხვისათვის, ე.ი.

$$z_i = \Phi^{-1}(100(i-0,5)/n).$$

ამასთან $(e_i^*)_{1\le i\le n}$ დაკვირვებული მნიშვნელობებისაგან უნდა შევადგინოთ ვარიაციული მწკრივი

$$e^*_{(1)}, \cdots, e^*_{(n)}.$$

ვინაიდან $(e_i)_{1\le i\le n}$ არიან $(\epsilon_i)_{1\le i\le n}$ დაკვირვებული მნიშვნელობები,ამიტომ თუ $\epsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$, მაშინ წერტილები $(z_i, e^*_{(i)})_{1\le i\le n}$ უნდა განლაგდნენ $y = x$ წრფის მახლობლად.

შენიშვნა 8. $(e_i)_{1\le i\le n}$ რომ ჩაითვალოს $(\epsilon_i)_{1\le i\le n}$ შეცდომების დაკვირვებულ მნიშვნელობებად ანუ რომ შემოწმდეს წრფივი რეგრესიის მოდელის ვარგისიანობა, უნდა შემოწმდეს ჰიპოთეზა $(e_i)_{1\le i\le n}$ სიდიდეების მათემატიკური ლოდინის ნულთან ტოლობის შესახებ, იმ დაშვებით რომ მათი დისპერსიები ტოლია და უცნობი.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი

მაგალითი 1. კავკასიონის სამხრეთ ფერდზე შესწავლილია ნახშირმჟავა ჰიდროკარბონატ-იონისა და კალიუმის შემცველობა ქლორიდული ნატრიუმიანი ტიპის წყლების 34 ბუნებრივ გამოსავალში. ამ წყლებში ჰიდროკარბონატ-იონისა და კალიუმის შემცველობის მნიშვნელობები (მგ/ლ) მოცემულია შემდეგ ცხრილში.

HCO_3	$3733,2$	$2830,4$	$3050,0$	976	2488	$3294,4$	3538
K	40	12	20	50	22	$2,2$	$44,0$
HCO_3	1586	$2464,4$	$2076,8$	2200	$1878,8$	$4587,2$	$4928,8$
K	$7,5$	$16,5$	$23,1$	$22,0$	$78,0$	$33,6$	$23,1$
HCO_3	4636	8174	$6517,8$	$3806,4$	$7539,6$	$1110,2$	2440
K	37	52	47	28	72	150	23
HCO_3	$1274,9$	$713,7$	$5075,2$	3708	4636	2537	1586
K	$8,5$	$3,7$	$30,0$	$23,0$	$59,4$	$18,7$	$7,8$
HCO_3	$3977,2$	$8199,6$	$7100,4$	$55416,8$	$5721,8$	2074	
K	$2,1$	$45,6$	$57,2$	46	$117,0$	14	

.

ა) ვიპოვოთ წრფივი რეგრესიის განტოლების შეფასება.

ბ) როგორი იქნება ნახშირმჟავა ჰიდროკარბონატ-იონისა შემცველობის საპროგნოზო მნიშვნელობა ერთ ლიტრა წყალში, თუ კალიუმის შემცველობა 1 ლიტრა წყალში 16 მილიგრამის ტოლია ?

გ) ავაგოთ $0,95$ დონის ნდობის ინტერვალები B_0 და B_1 კოეფიციენტებისათვის;

დ) ავაგოთ $Y(16)$-ისთვის $0,95$ დონის საპროგნოზო ინტერვალი.

ამოხსნა. Y-ით ავღნიშნოთ 1 ლიტრა წყალში HCO_3-ნახშირმჟავა ჰიდროკარბონატ-იონის შემცველობა მილიგრამებში, ხოლო X-ით ავღნიშნოთ 1 ლიტრა წყალში K-კალიუმის შემცველობა.

ა) $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციების საშუალებით ვითვლით

$$b_0 = INTERCEPT(y1 : yn; x1 : xn) = 3996,844345$$

და

$$b_1 = SLOPE(y1 : yn; x1 : xn) = 32,3494274.$$

წრფივი რეგრესიის განტოლებას აქვს სახე

$$y = 32,3494274x + 3996,844345$$

ბ) $EXCEL$-ის სტატისტიკური ფუნქციის $FORECAST$-ის საშუალებით ვითვლით

$$FORECAST(16; y1 : y34; x1 : x34) = 4514,435184.$$

ამგვარად

$$\widehat{Y}(16) = 3372,251774.$$

დასკვნა. თუ კალიუმის შემცველობა 1 ლიტრა წყალში 16 მილიგრამის ტოლია, მაშინ ნახშირმჟავა ჰიდროკარბონატ-იონისა საპროგნოზო შემცველობა ერთ ლიტრა წყალში იქნება $3372,251774$ მილიგრამი.

გ). ავაგოთ $0,95$ დონის ნდობის ინტერვალები B_0 და B_1 კოეფიციენტებისათვის;

Regression ფუნქციის ამონაბეჭდს აქვს შემდეგი სახე
SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	$0,112776$
R Square	$0,012718$
Adjusted R	$-0,01813$
Standard E	$9196,884$
Observations	34

ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance*
Regression	1	34867561	34867561	$0,412231$	$0,525413$
Residual	32	$2,71E+09$	84582680		
Total	33	$2,74E+09$			

.

	Coeff.	*St. Er*	*t*	$P-v$	*L* 95%	*U* 95%
Inter−cept	$3996,8$	$2417,1$	$1,653$	$0,108$	$-926,7$	$8920,4$
x	$32,349$	$50,384$	$0,642$	$0,525$	$-70,28$	$134,98$

.

Regression ფუნქციის ამონაბეჭდის *ANOVA*-ს ბლოკიდან ვგებულობთ, რომ

$0,95$ დონის ნდობის ინტერვალს B_0 კოეფიციენტისათვის აქვს სახე

$$(-926,706; 8920,394).$$

იგივე ამონაბედიდან ვგებულობთ, რომ $0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა ჰიპოთეზა რომ $H_0 : B_0 = 0$; უფრო მეტიც, $0,107999$ არის კრიტიკული დონე, რომელზეც ნაკლები ნებისმიერი მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა იგივე ჰიპოთეზა.

$0,95$ დონის ნდობის ინტერვალს B_1 კოეფიციენტისათვის აქვს სახე

$$(-70,2803; 134,9791).$$

იგივე ამონაბედიდან ვგებულობთ, რომ $0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა ჰიპოთეზა რომ $H_0 : B_1 = 0$; უფრო მეტიც, $0,525413$ არის კრიტიკული დონე, რომელზეც ნაკლები ნებისმიერ მნიშვნელოვნობით დონით სარწმუნოა იგივე ჰიპოთეზა.

ვინაიდან $R^2 = 0,012718$, ამიტომ ტოტალური გაბნევის მხოლოდ $0,012718$ ნაწილი იხსნება წრფივი რეგრესიის მოდელით. ამიტომ აღნიშნული მოდელის გამოყენება უვარგისია. საჭიროა სხვა მოდელის განხილვა.

დ) ავაგოთ $Y(16)$-ისთვის $0,95$ დონის საპროგნოზო ინტერვალი.

ვპოულობთ

$$S^2 = \frac{SSE}{n-2} = \frac{SSE}{32} = \frac{2710000000}{32} = 84687500.$$

$$S = \sqrt{84687500} = 9202,58116.$$

$$t_{32;0,025} = TINV(0,05;32) = 2,036931619.$$

ახლა გამოვთვალოთ

$$\overline{x} = AVERAGE(x1:x34) = 36,35294118.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = SUMPRODUCT(x1:x34;x1:x34) = 78250,96;$$

$$\widehat{Y}(16) = 4514,435184.$$

ახლა გამოვთვალოთ

$$t_{32;0,025} S \sqrt{\frac{1}{34} + \frac{16 - 36,35294118}{78250,96 - 34 \times (36,35294118)^2} + 1} = 19013,04938$$

ამგვარად, $0,95$ დონის საპროგნოზო ინტერვალს $\widehat{Y}(16)$ სიდიდისათვის ექნება შემდეგი სახე

$$(4514,435184 - 19013,04938; 4514,435184 + 19013,04938) =$$

$$= (-14498,6142; 23527,48456).$$

სავარჯიშოები

2.7.1. მიღებულია (X,Y) შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგად 20-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა

Y	$3733,2$	$2830,4$	$3050,0$	976	2488	$3294,4$	3538	4636
X	40	12	20	50	22	$2,2$	$44,0$	$59,4$
Y	1586	$2464,4$	$2076,8$	2200	$1878,8$	$4587,2$	$4928,8$	$3977,2$
X	$7,5$	$16,5$	$23,1$	$22,0$	$78,0$	$33,6$	$23,1$	$2,1$
Y	2537	1586	$8199,6$	$7100,4$				
X	$18,7$	$7,8$	$45,6$	$57,2$				

.

ვიპოვოთ
ა) წრფივი რეგრესიის განტოლება;
ბ) Y-ის მნიშვნელობა $x = 80$ წერტილში.
$(y = 16,0693569x + 2423,225056;\ \ y(80) = 3708,773608.)$

2.7.2. მიღებულია (X, Y) შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგად 20-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა

Y	$733,2$	$830,4$	$50,0$	76	488	$294,4$	538	636	537
X	40	12	20	50	22	$2,2$	$44,0$	$59,4$	$18,7$
Y	586	$464,4$	$076,8$	200	$878,8$	$587,2$	$928,8$	$977,2$	$199,6$
X	$7,5$	$16,5$	$23,1$	$22,0$	$78,0$	$33,6$	$23,1$	$2,1$	$45,6$
Y	586	$100,4$							
X	$7,8$	$57,2$							

.

ვიპოვოთ
ა) წრფივი რეგრესიის განტოლება;
ბ) Y-ის მნიშვნელობა $x = 80$ წერტილში.
$(y = -1,851252467x + 592,5706221;\ \ y(80) = 444,4704248.)$

2.7.3. მიღებულია (X, Y) შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგად 20-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა

Y	0	$830,4$	0	76	0	$294,4$	0	636	0	586
X	40	12	20	50	22	$2,2$	$44,0$	$59,4$	$18,7$	$7,8$
Y	0	$464,4$	0	200	0	$587,2$	0	$977,2$	0	$100,4$
X	$7,5$	$16,5$	$23,1$	$22,0$	$78,0$	$33,6$	$23,1$	$2,1$	$45,6$	$57,2$

.

ვიპოვოთ
ა) წრფივი რეგრესიის განტოლება;
ბ) Y-ის მნიშვნელობა $x = 80$ წერტილში.
$(y = -5,097448348x + 386,6793897;\ \ y(80) = -21,11647813.)$

2.7.4. მიღებულია (X, Y) შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგად 20-ის ტოლი მოცულობის შერჩევა

Y	1	$830,4$	2	76	3	$294,4$	4	636	5	586
X	40	12	20	50	22	$2,2$	$44,0$	$59,4$	$18,7$	$7,8$
Y	6	$464,4$	7	200	8	$587,2$	9	$977,2$	10	$100,4$
X	$7,5$	$16,5$	$23,1$	$22,0$	$78,0$	$33,6$	$23,1$	$2,1$	$45,6$	$57,2$

ვიპოვოთ
ა) წრფივი რეგრესიის განტოლება;
ბ) Y-ის მნიშვნელობა $x = 80$ წერტილში.
($y = -5,061320644x + 388,3730156$; $y(80) = -16,53263589$.)

§ 2.8. მრავლობითი წრფივი რეგრესიის მოდელი.

შემდეგ მოდელს

$$Y(x_1,\cdots,x_n,\omega) = B_0 + B_1x_1 + \cdots + B_kx_k + \epsilon(\omega),$$

სადაც $(x_1,\cdots,x_k) \in R^k$,$\epsilon :\to R\,(0,\sigma^2)$ პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია და $B_0, B_1,\cdots,B_k$ უცნობი კოეფიციენტებია, ეწოდება მრავლობითი წრფივი რეგრესიის მოდელი. ამასთან $x_1,\cdots,x_k$ ცვლადებს უწოდებენ ამხსნელ ცვლადებს ან პრედიქტორებს, ანდა რეგრესორებს. ხოლო ϵ-ს ეწოდება შეშფოთება("თეთრი ხმაური"), რომელსაც მოიხსენიებენ როგორც ჭეშმარიტ გადახრას ანუ შეცდომას.

ვთქვათ, Y სიდიდეზე R^k სივრცის სხვადასხვა წერტილებში n ცალი დაკვირვების შედეგია

$Y_1 = B_0 + B_1x_1^{(1)} + \cdots + B_kx_k^{(1)} + \epsilon_1(\omega)$,
$Y_2 = B_0 + B_1x_1^{(2)} + \cdots + B_kx_k^{(2)} + \epsilon_2(\omega)$,
$\cdots$
$Y_n = B_0 + B_1x_1^{(n)} + \cdots + B_kx_k^{(n)} + \epsilon_n(\omega)$,

სადაც $(\epsilon_k)_{1\le k\le n}$ არის დამოუკიდებელ $(0,\sigma^2)$-პარამეტრებიან ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.

განსაზღვრება 1. $y = b_0+b_1x_1+\cdots b_kx_k$ წრფივ ფუნქციას ეწოდება უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მიღებული მრავლობითი წრფივი რეგრესიის განტოლება, თუ

$$F(b_0,b_1,\cdots,b_k) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_jx_j))^2 = \min\{\sum_{i=1}^{n}(y_i - (c_0+$$

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j^{(i)}))^2 : c_0 \in R \ \& \ c_1 \in R, \cdots, c_k \in R\}$$

$$= \min\{F(c_0, c_1, \cdots, c_k) : c_0 \in R \ \& \ c_1 \in R, \cdots, c_k \in R\}.$$

შენიშვნა 1. $F(c_0, c_1, \cdots, c_k)$ ფუნქციის მინიმუმის მოსაძებნად გავაწარმოოთ ეს ფუნქცია $c_j (1 \leq j \leq k)$ ცვლადებით და გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ წრფივ განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^{(i)}) = 0 \\ -2x_1\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^{(i)}) = 0 \\ \cdots \\ -2x_k\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^{(i)}) = 0 \end{cases}.$$

მიღებული სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ $b_0, b_1, \cdots, b_k$ კოეფიციენტების მნიშვნელობებს, რომლებიც წარმოადგენენ $B_0, B_1, \cdots, B_k$ სიდიდეების უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მიღებულ შეფასებებს.

განსაზღვრება 2. R^2 სიდიდეს, განსაზღვრულს პირობით

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})},$$

სადაც

$Y_i = B_0 + B_1 x_1^{(i)} + \cdots + B_k x_k^{(i)} + \epsilon_i(\omega) \ (1 \leq i \leq n),$

$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$

$\widehat{Y}_i = b_0 + b_1 x_1^{(i)} + \cdots + b_k x_k^{(i)}$

ეწოდება დეტერმინაციის კოეფიციენტი. ის წარმოადგენს რეგრესიით ახსნილ გაბნევის წილს სრულ გაბნევაში.

მაგალითი 1. უძრავი ქონების კომპანიის აგენტს სურს განჭვრიტოს ერთი ოჯახისათვის განკუთვნილი საცხოვრებელი სახლის გასაყიდი ფასი Y. გულმოდგინე განსჯის შემდეგ მან დაასკვნა, რომ სახლის გასაყიდი ფასი Y დაკავშირებულია სახლის x_1 ფართობთან, მისი ექსპლუატაციის x_2 ხანგძლივობასთან და მისი მიწის ნაკვეთის x_3 ფართობთან. მან შეაგროვა 10 სახლისათვის მონაცემები, რომლებიც თავმოყრილია შემდეგ ცხრილში

სახლის ნომერი	Y	x_1	x_2	x_3
1	$89,5$	20.0	5.0	4.1
2	$79,9$	$14,8$	$10,0$	$6,8$
3	$83,1$	$20,5$	$8,0$	$6,3$
4	$56,9$	$12,5$	$7,0$	$5,1$
5	$66,6$	$18,0$	$8,0$	$4,2$
6	$82,5$	$14,3$	$12,0$	$8,6$
7	$126,3$	$27,5$	$1,0$	$4,9$
8	$79,3$	$16,5$	$10,0$	$6,2$
9	$119,9$	$24,3$	$2,0$	$7,5$
10	$87,6$	20.2	$8,0$	$5,1$

.

თუ გამოვიყენებთ სტატისტიკურ ფუნქციას "*regression*" აღნიშნულ ცხრილში მოცემული მონაცემების დასამუშავებლად, მივიღებთ

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	$0,96283$
R Square	$0,927041$
AdjustedR	$0,890562$
Standard	$7,061332$
Observations	10

ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance*
Regression	3	$3801,41$	$1267,137$	$25,41266$	$0,000826$
Residual	6	$299,1745$	$49,86241$		
Total	9	$4100,584$			

.

	Coeff.	*St. Error*	$t-Stat$	$P-value$	*Lower* 95%	*Upper* 95%
Inter–cept	$-3,27884$	$24,89464$	$-0,13171$	$0,89952$	$-64,1939$	$57,6362$
x_1	$3,523392$	$0,914802$	$3,851534$	$0,008445$	$1,28495$	$5,761834$
x_2	$-1,50405$	$1,269182$	$-1,18505$	$0,280801$	$-4,60963$	$1,601529$
x_3	$5,89565$	$1,748638$	$3,371566$	$0,015013$	$1,616883$	$10,17442$

.

შემდგომი ანალიზისათვის ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი მარტივად შესამოწმებელი თანაფარდობა

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{Y})^2+\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i-\overline{Y})^2.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები
$SST=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2(total\ sum\ of squares)$;
$SSE=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{Y})^2(error\ sum\ of\ squares)$;
$SSR=\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i-\overline{Y})^2(regression\ sum\ of\ squares)$.
შევნიშნოთ, რომ

1) SST არის Y-ის დაკვირვებული $(Y_i)_{1\le i\le n}$ მნიშვნელობების მათი საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრების კვადრატების სრული ჯამური სიდიდე, რომელსაც სრულ ვარიაციას უწოდებენ. ამასთან

$$\frac{SST}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$$

2) SSE არის რეგრესიის მრუდის მიმართ Y-ის მნიშვნელობების გადახრების კვადრატების გაბნევის ჯამური სიდიდე. ის არის გაბნევის ის ნაწილი, რომელიც აიხსნება რეგრესიის საშუალებით და

$$\frac{SSE}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-k-1).$$

3) SSR სრული გაბნევის ის ნაწილია, რომელიც ახსნილია რეგრესიის სიბრტყით და

$$\frac{SSR}{\sigma^2}\sim\chi^2(k).$$

განსაზღვრება 3. R^2 სიდიდეს, განსაზღვრულს პირობით

$$R^2=1-\frac{SSE}{SST}=\frac{SSR}{SST},$$

ეწოდება მრავლობითი დეტერმინაციის კოეფიციენტი.

შევნიშნოთ, რომ R^2 წარმოადგენს სრული ვარიაციის იმ წილს, რომელიც ახსნილია მრავლობითი რეგრესიის მოდელით.

განსაზღვრება 4. $adjusted\ R^2$ სიდიდეს, განსაზღვრულს პირობით

$$adjusted\ R^2=1-\frac{\frac{SSE}{(n-k-1)}}{\frac{SST}{(n-1)}}$$

ეწოდება თავისუფლების ხარისხებთან შეთანხმებული დეტერმინაციის კოეფიციენტი.

შევნიშნოთ, რომ თუ დამოუკიდებელ ცვლადთა რაოდენობა k შედარებადია n-თან, R^2-ის მნიშვნელობა შეიძლება არარეალურად დიდი გამოვიდეს და მიგვიყვანოს მცდარ დასკვნამდე. სწორედ ამ მოვლენის თავიდან აცილების მიზნით არის შემოღებული $adjusted\ R^2$ კოეფიციენტი. თუ n მნიშვნელოვნად დიდია k-სთან შედარებით, მაშინ ეს ორივე კოეფიციენტი დაახლოებით ტოლია. საზოგადოდ $adjusted\ R^2 < R^2$.

განსაზღვრება 5. r კოეფიციენტს, განსაზღვრულს პირობით

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})(\widehat{Y}_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2}},$$

ეწოდება მრავლობითი კორელაციის კოეფიციენტი.

შევნიშნოთ, რომ მრავლობითი კორელაციის კოეფიციენტი r წარმოადგენს შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტს Y და $\widehat{Y}$ შემთხვევით სიდიდეებს შორის.

მართებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1. დეტერმინაციის კოეფიციენტი R^2 შერჩევითი მრავლობითი კორელაციის კოეფიციენტის კვადრატის ტოლია, ე.ი., $R^2 = r^2$.

მრავლობითი რეგრესიის მოდელში $R^2 = 0,927041$, რაც ნიშნავს რომ სახლის ფასის ვარიაციის 92.70% აიხსნა სამი დამოუკიდებელი ცვლადით და აუხსნელი დარჩა მხოლოდ 7.30%.

მოდელის ვარგისიანობის შემოწმების პირველი ხერხი. მრავლობითი რეგრესიის ვარგისიანობის შემოწმება მდგომარეობს

$$H_0 : B_1 = B_2 = \cdots = B_k = 0$$

ჰიპოთეზის შემოწმებაში

$$H_1 : \text{ ერთი მაინც } B_i \neq 0, \quad i = 1, \cdots, k$$

ალტერნატივის წინააღმდეგ.

H_0 ჰიპოთეზის შესამოწმებლად გამოიყენება F სტატისტიკა, განსაზღვრული შემდეგი ფორმულით:

$$F = \frac{\frac{SSR}{k}}{\frac{SSE}{n-(k+1)}}.$$

შევნიშნოთ, რომ H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობისას F სტატისტიკას აქვს ფიშერის განაწილება k და $n-(k+1)$ თავისუფლების ხარისხებით:

$$F \sim F_{(k,n-(k+1))}.$$

კომპიუტერული ამონაბედის მეორე ბლოკი ($ANOVA$) წარმოადგენს დის-პერსიული ანალიზის ცხრილით განსაზღვრული სიდიდეების შემდეგ რიცხვით მნიშვნელობებს

$ANOVA$

წყარო	თავისუფ. ხარისხი df	კვად. ჯამი SS	საშუალ.კვად. მნიშვნელობა MS	$F(t)$	$P(F > f\|H_0)$
რეგრესია	k	SSR	$MSR = \frac{SSR}{k}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$	
შეცდომა	$n-k-1$	SSE	$MSE = \frac{SSE}{(n-k-1)}$		
სულ	$n-1$	SS_Y			

შენიშვნა 1. კომპიუტერული ამონაბეჭდის მეორე ბლოკში F სტატის-ტიკის რიცხვითი მნიშვნელობა $f = 25,41266$ აღნიშნულია დიდი F ასოთი.

კომპიუტერული ამონაბეჭდის მეორე ბლოკში ბოლო სვეტში მითითებუ-ლია $\alpha = P\{F > f|H_0\}$-ის რიცხვითი მნიშვნელობა $0,000826$ ანუ მითითე-ბულია მნიშვნელოვნობის ის მინიმალური დონე, რომლითაც არსებული მონაცემების საფუძველზე ხდება H_0 ჰიპოთეზის უარყოფა.

სტატისტიკური დასკვნები მოდელის პარამეტრების შესახებ. თუ H_0 ჰიპოთეზა დაწუნებულია, მაშინ ვამოწმევთ ჰიპოთეზას ცალკეული რე-გრესიის კოეფიციენტის ნულთან ტოლობის შესახებ.

ამრიგად, ყოველი j-სთვის ($j = 1, \cdots, k$) შესამოწმებელია

$$H_0 : B_j = 0$$

ჰიპოთეზა

$$H_1 : B_j \neq 0$$

ალტერნატივის წინააღმდეგ. ამ შემთხვევაში ტესტის სტატისტიკაა

$$T_{b_j} = \frac{b_j}{S_{b_j}},$$

რომელიც ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას განაწილებულია სტიუ-დენტის კანონით $n-(k+1)$ თავისუფლების ხარისხით.

ამიტომ α მნიშვნელოვნობის დონით გადაწყვეტილების მიღების წესი შემდეგია:

$$\text{უარვყოფთ } H_0 - \text{ს, თუ } |t_{bj}| > t_{n-k-1, \frac{\alpha}{2}},$$

სადაც $t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ სტიუდენტის $t(n-k-1)$ განაწილების ზედა $\frac{\alpha}{2}$ კრიტიკული მნიშვნელობაა.

$(1-\alpha)$ დონის ნდობის ინტერვალი რეგრესიის b_j კოეფიციენტებისათვის შემდეგია

$$(b_j - s_{b_j} \cdot t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}; b_j + s_{b_j} \cdot t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}),\ j = 1, \cdots, k.$$

ამონაბეჭდის მესამე ბლოკიდან ვიღებთ ინფორმაციას უცნობი რეგრესიის შეფასების შესახებ; პირველ სვეტში მოცემულია b_0, b_1, b_2, b_3 შეფასებები, მეორეში -მათი სტანდარტული გადახრები $s_{b_0}, s_{b_1}, s_{b_2}, s_{b_3}$. მე-3 სვეტში მოცემულია $T_{b_j} = \frac{b_j}{S_{b_j}} (j \in 0, 3)$ სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობები. მეოთხე სვეტში მოცემულია T_{b_j} სტატისტიკის რიცხვითი მნიშვნელობის საფუძველზე განსაზღვრული P მნიშვნელობები შესაბამისი ჰიპოთეზების შესამოწმებლად, ხოლო ბოლო ორ სვეტში მითითებულია 95%-იანი ნდობის ინტერვალები B_j-სათვის.

1. $b_0 = -3.27884$ მნიშვნელობა მიუთითებს საშუალო გასაყიდ ფასს, როცა $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ და მისი ინტერპრეტაცია აზრს მოკლებულია. $b_1 = 3.523392$ მნიშვნელობა მიუთითებს იმაზე, რომ ფართობის ყოველი დამატებითი ერთეულისათვის სახლის გასაყიდი ფასი იზრდება საშუალოდ 35233 დოლარითა და 92 ცენტით; $b_3 = -1,50405$ მიუთითებს იმაზე რომ სახლისა ექსპლუატაციის ყოველი დამატებითი წლისათვის სახლის ფასი იკლებს 15040 დოლარითა და 50 ცენტით. $b_3 = 5,89565$ კი მიუთითებს იმაზე, რომ მიწის ნაკვეთის ყოველი დამატებითი 100 კვ.მეტრისთვის სახლის ფასი იზრდება 58956 დოლარითა და 50 ცენტით (იგულისხმება, რომ გამოყოფილის გარდა ყველა დანარჩენი ფაქტორის მნიშვნელობა ფიქსირებულია).

2. კომპიუტერული ამონაბეჭდის საფუძველზე, ტესტის სტატისტიკის $T_0 = \frac{b_0}{S_{b_0}}$ დაკვირვებული მნიშვნელობაა $t_0 = -0,13171$, ხოლო P მნიშვნელობაა $0,89952$. ეს ნიშნავს, რომ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფა ხდება მნიშვნელოვნობის მხოლოდ ისეთი α დონით, რომელიც არანაკლებია $0,89952$-ზე. ვინაიდან $\alpha = 0,05 < 0,89952$, მნიშვნელოვნობის $\alpha = 0,05$ დონით მიიღება H_0 ჰიპოთეზა.

კომპიუტერული ამონაბეჭდის საფუძველზე, ტესტის სტატისტიკის $T_1 = \frac{b_1}{S_{b_1}}$ დაკვირვებული მნიშვნელობაა $t_1 = 3,851534$, ხოლო P მნიშვნელობაა $0,008445$. ეს ნიშნავს, რომ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფა ხდება მნიშვნელოვნობის მხოლოდ ისეთი α დონით, რომელიც არანაკლებია $0,008445$-ზე. მნიშვნელოვნობის $\alpha = 0,05$ დონით, ვინაიდან $\alpha = 0,05 > 0,008445$, H_0 ჰიპოთეზას უარვყობთ.

b_2-ის შემთხვევაში, მნიშვნელოვნობის $\alpha = 0,05$ დონით, ვინაიდან $\alpha = 0,05 < 0,280801$, H_0 ჰიპოთეზა მიიღება.

b_3-ის შემთხვევაში, მნიშვნელოვნობის $\alpha = 0,05$ დონით, ვინაიდან $\alpha = 0,05 > 0,015013$, ხდება H_0 ჰიპოთეზის უარყოფა H_1 ჰიპოთეზის სასარგებლოდ.

მოდელის ვარგისიანობის შემოწმების მეორე ხერხი. ვინაიდან $b_0, \cdots, b_n$ კოეფიციენტები წარმოადგენენ $B_0, \cdots, B_n$ კოეფიციენტების "კარგ" შეფასებებს, ამიტომ მოდელის ვარგისიანობის შემთხვევაში სიდიდეები

$Y_1 - b_0 + b_1 x_1^{(1)} + \cdots + b_k x_k^{(1)}$,
$Y_2 - b_0 - b_1 x_1^{(2)} - \cdots - b_k x_k^{(2)}$,
$\cdots$
$Y_n - b_0 - b_1 x_1^{(n)} - \cdots - b_k x_k^{(n)}$,

უნდა წარმოადგენდეს $(0, \sigma^2)$-პარამეტრებიან ნორმალურად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეებზე დაკვირვების შედეგებს. ვინაიდან დისპერსია σ^2 არის უცნობი, ამიტომ უნდა შემოწმდეს ჰიპოთეზა მათი მათემატიკური ლოდინების ნულთან ტოლობის შესახებ. თუ შემოწმების შედეგად აღნიშნული ჰიპოთეზა იქნება მიღებული, მაშინ ეს არგუმენტი ამაგრებს ჩვენს დაშვებას მრავლობითი წრფივი რეგრესიის მოდელის ვარგისიანობის შესახებ.

სავარჯიშოები

2.8.1. აგრონომს სურს დაადგინოს სხვადასხვა ნაკვეთის მოსავლიანობის შესწავლა. გულმოდგინე განსჯის შემდეგ მან დაასკვნა, რომ ნაკვეთის მოსავლიანობა Y დაკავშირებულია მის X_1 ფართობთან, მის ექსპლუატაციის X_2 ხანგძლივობასთან და მისი გამდიდრებისათვის გამოყენებული სხვადასხვა სასუქების X_3 რაოდენობასთან. მან შეაგროვა 10 ნაკვეთისათვის მონაცემები, რომლებიც თავმოყრილია შემდეგ ცხრილში

ნაკვეთის ნომერი	Y	x_1	x_2	x_3
1	$88,5$	21.0	5.0	6.1
2	$79,9$	$14,8$	$11,0$	$6,8$
3	$82,1$	$21,5$	$8,0$	$6,3$
4	$56,9$	$12,5$	$8,0$	$5,1$
5	$66,6$	$18,0$	$8,0$	$4,2$
6	$82,5$	$15,3$	$12,0$	$8,6$
7	$136,3$	$28,5$	$1,0$	$4,9$
8	$79,3$	$16,5$	$10,0$	$6,2$
9	$109,9$	$24,3$	$2,0$	$7,5$
10	$87,6$	24.2	$8,0$	$5,1$

.

აგრონომს აინტერესებს Y ფაქტორის X_1, X_2 და X_2 ფაქტორებზე დამოკიდებულების შესწავლა.

გამოვიყენებთ სტატისტიკურ ფუნქცია "*regression*" აღნიშნულ ცხრილში მოცემული მონაცემების დასამუშავებლად და გავაკეთოთ შესაბამისი დასკვნები.

2.8.2. აგრონომს სურს დაადგინოს სხვადასხვა ნაკვეთის მოსავლიანობა. მან დაასკვნა, რომ ნაკვეთის მოსავლიანობა Y დაკავშირებულია მის x_1

ფართობთან, მის ექსპლუატაციის x_2 ხანგძლივობასთან და წლის განმავლობაში მის გამდიდრებისათვის გამოყენებული სხვადასხვა სასუქების x_3 რაოდენობასთან. მან შეაგროვა 9 ნაკვეთისათვის მონაცემები, რომლებიც თავმოყრილია შემდეგ ცხრილში

ნაკვეთის ნომერი	Y	x_1	x_2	x_3
1	88,5	21.0	5.0	6.1
2	79,9	14,8	11,0	6,8
3	82,1	21,5	8,0	6,3
4	56,9	12,5	8,0	5,1
5	66,6	18,0	8,0	4,2
6	82,5	15,3	12,0	8,6
7	136,3	28,5	1,0	4,9
8	79,3	16,5	10,0	6,2
9	109,9	24,3	2,0	7,5

.

აგრონომს აინტერესებს Y ფაქტორის x_1, x_2 და x_2 ფაქტორებზე დამოკიდებულების შესწავლა.

გამოვიყენებთ სტატისტიკურ ფუნქცია "*regression*" აღნიშნულ ცხრილში მოცემული მონაცემების დასამუშავებლად და გავაკეთოთ შესაბამისი დასკვნები.

2.8.3. მენეჯერს აინტერესებს მესაქონლეობის Y რენტაბელობის(%-ში) ერთ სულ საქონელზე დახარჯულ x_1 საკვებსა (საკვების პირობით ერთეულებში) და ამავე საქონლისაგან მიღებულ x_2 პროდუქციაზე (გამოსახული ლარებში) დამოკიდებულების შესწავლა. მან შეაგროვა 10 სხვადასხვა მეცხოველეობის ფერმაში მონაცემები, რომლებიც თავმოყრილია შემდეგ ცხრილში

ფერმის ნომერი	Y	x_1	x_2
1	112	470	390
2	105	400	380
3	114	480	430
4	97	510	400
5	95	410	360
6	94	380	370
7	100	400	350
8	94	460	350
9	102	380	360
10	104	500	400

.

მენეჯერს აინტერესებს Y ფაქტორის X_1 და X_2 ფაქტორებზე დამოკიდებულების შესწავლა.

გამოვიყენებთ სტატისტიკურ ფუნქცია "*regression*" აღნიშნულ ცხრილში მოცემული მონაცემების დასამუშავებლად და გავაკეთოთ შესაბამისი დასკვნები.

2.8.4. შემდეგ ცხრილში შეტანილია მანქანათმშენებელი ქარხნის 10 სხვადასხვა ჩამომსხმელ საამქროში აღებული 1 ტონა ოდენობის ჩამოსხმულ

ლითონის დეტალთა Y თვითღირებულების (ლარებში), ჩამოსხმული წუნდებული დეტალების X_1 რაოდენობისა (გამოსახული %-ში) და ერთი მუშის მიერ ჩამოსხმული დეტალების X_2 რაოდენობის(ტონებში) მონაცემები.

საამქროს ნომერი	Y	x_1	x_2
1	239	$4,2$	$14,6$
2	254	$6,7$	$13,5$
3	262	$5,5$	$21,6$
4	251	$7,7$	$17,4$
5	158	$1,2$	$44,8$
6	101	$2,2$	$111,9$
7	259	$8,4$	$20,1$
8	186	$1,4$	$28,1$
9	204	$4,2$	$22,3$
10	198	$0,9$	$25,3$

.

მანქანათმშენებელი ქარხნის დირექტორს აინტერესებს Y ფაქტორის x_1 და x_2 ფაქტორებზე დამოკიდებულების შესწავლა.

გამოვიყენებთ სტატისტიკურ ფუნქცია "*regression*" აღნიშნულ ცხრილში მოცემული მონაცემების დასამუშავებლად და გავაკეთოთ შესაბამისი დასკვნები.

§ 2.9. ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი

ვთქვათ, რაიმე ფაქტორის i-ური დონისათვის y_{ij} წარმოადგენს j-ური გაზომვის მნიშვნელობას ($j = 1, \cdots, n_i$; $i = 1, \cdots, k$). i-ური დონის შესაბამისი n_i ცალი გაზომვის შედეგებს ვუწოდოთ ჯგუფი. ცხადია, რომ $n_1 + \cdots + n_k = n$.

ჩვენი დაშვების თანახმად

$$Y_{ij} = \beta_i + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \cdots, k, \ j = 1, \cdots, n_i,$$

სადაც β_i $(i = 1, \cdots, k)$ უცნობი მუდმივებია, ხოლო ϵ_{ij} დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია ნულოვანი საშუალოთი და ერთნაირი, მაგრამ უცნობი σ^2 დისპერსიით.

მონაცემების საშუალებით უნდა შემოწმდეს რთული ჰიპოთეზა

$$H_0 : \beta_1 - \beta_k = \beta_2 - \beta_k = \cdots = \beta_{k-1} - \beta_k = 0.$$

(ე.ი. ყველა β_i ერთმანეთის ტოლია, მაგრამ მათი საერთო მნიშვნელობა არაა ფიქსირებული; თუ ეს ჰიპოთეზა სამართლიანია, მაშინ ყველა n დაკვირვებას აქვს ერთი და იგივე მათემატიკური ლოდინი.)

ალტერნატივას წარმოადგენს შემდეგი წინადადება:

$H_1 : \beta_i - \beta_j$ სხვაობა განსხვავებულია ნულისაგან რომელიმე ერთი მაინც i, j წყვილისათვის.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\overline{Y}_{i*} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij},$$

$$\overline{Y}_{**} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} n_i \overline{Y}_{i*}.$$

მართებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1. ადგილი აქვს შემდეგ დისპერსიულ თანაფარდობას

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{**})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i*})^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i (Y_{i*} - \overline{Y}_{**})^2$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i*})(\overline{Y}_{i*} - \overline{Y}_{**}) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}(\overline{Y}_{i*} - \overline{Y}_{**})\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i*}) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}(\overline{Y}_{i*} - \overline{Y}_{**})(n_i\overline{Y}_{i*} - n_i\overline{Y}_{i*}) = 0.$$

ამიტომაც ვღებულობთ

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{**})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i*} + \overline{Y}_{i*} - \overline{Y}_{**})^2$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i*})^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i*})(\overline{Y}_{i*} - \overline{Y}_{**}) +$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{Y}_{i*} - \overline{Y}_{**})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i*})^2 +$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{Y}_{i*} - \overline{Y}_{**})^2.$$

თეორემა 1 დამტკიცებულია.

მოვიყვანოთ თეორემა 1-ის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. ამ მიმართულებით ჩვენ დაგვჭირდება ზოგიერთი განსაზღვრება და დამხმარე დებულება.

განსაზღვრება 1. თუ წერტილი A არის აღჭურვილი m_A მასით, მაშინ ორეულს (A, m_A) ვუწოდოთ მატერიალური წერტილი.

განსაზღვრება 2. ორი (A, m_A) და (B, m_B) წერტილების სიმძიმის ცენტრი (ბარიცენტრი) ვუწოდოთ ისეთ მესამე C წერტილს განლაგებულს $(A; B)$ მონაკვეთზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$m_A \times |AC| = m_B \times |CB|.$$

თუ მატერიალურ წერტილთა

$$(A_1, m_{A_1}), \cdots, (A_{n-1}, m_{A_{n-1}})$$

სიმრავლისათვის განსაზღვრულია მათი ბარიცენტრი C_{n-1}, მაშინ C_n განვსაზღვროთ როგორც ორი მატერიალური წერტილის $(C_{n-1}, m_{A_1} + \cdots + m_{A_{n-1}})$ და (A_n, m_{A_n}) ბარიცენტრი.

თუ C_n ბარიცენტრში მოვათავსებთ n მატერიალური წერტილის მთელ მასას $m_{A_1} + \cdots + m_{A_n}$, მაშინ ამდაგვარად მიღებულ მატერიალურ წერტილს

$$(C_n, m_{A_1} + \cdots + m_{A_n})$$

ეწოდება მოცემულ მატერიალურ წერტილთა

$$(A_1, m_{A_1}), \cdots, (A_n, m_{A_n})$$

გაერთიანება ანუ მატერიალური ცენტრი.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ ბარიცენტრის შემდეგი თვისებები:

1) მატერიალურ წერტილთა ყოველი სასრული სისტემისათვის არსებობს ბარიცენტრი;

2) ბარიცენტრის სისტემა არაა დამოკიდებული იმაზე თუ რა რიგით მოვახდენთ მატერიალური წერტილების გაერთიანებას (თეორემა ბარიცენტრის ერთადერთობის შესახებ);

3) მატერიალური წერტილების ბარიცენტრის მდგომარეობა არ შეიცვლება, თუ ზოგიერთ მატერიალურ წერტილებს შევცვლით მათი მატერიალური ცენტრით(თეორემა მატერიალური წერტილების დაჯგუფების შესაძლებლობის შესახებ).

განსაზღვრება 3. n-ცალი მატერიალური წერტილის

$$(A_1, m_{A_1}), \cdots, (A_n, m_{A_n})$$

ინერციის მომენტი S წერტილის მიმართ ეწოდება I_S სიდიდეს, განსაზღვრულს პირობით

$$I_S = m_{A_1} \times |A_1S|^2 + \cdots + m_{A_n} \times |A_nS|^2 = \sum_{k=1}^{n} m_{A_k} \times |A_kS|^2.$$

მართებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2 (ლაგრანჟი). S წერტილის მიმართ მატერიალურ წერტილთა

$$(A_1, m_{A_1}), \cdots, (A_n, m_{A_n})$$

ინერციის მომენტი I_S ტოლია ტოლია I_Z და I სიდიდეების ჯამისა, სადაც I_Z არის ინერციის მომენტი Z ბარიცენტრის მიმართ, ხოლო I არის მატერიალური ცენტრის ინერციის მომენტი S წერტილის მიმართ,ე.ი.

$$I_S = I_Z + (m_{A_1} + \cdots + m_{A_n}) \times |SZ|^2.$$

განვიხილოთ n-ცალი მატერიალური წერტილი $(Y_{ij}, \frac{1}{n_i})$ $(j = 1, \cdots, n_i;\ i = 1, \cdots, k)$.

S-ის როლში განვიხილოთ $\overline{Y}_{**}$.

Z_i-ის როლში განვიხილოთ ფაქტორის iური დონის ჯგუფის

$$(Y_{ij}, \frac{1}{n_i})\ (j = 1, \cdots, n_i)$$

მატერიალურ წერტილთა ბარიცენტრი $\overline{Y}_{i*}$.

ლაგრანჟის თეორემის თანახმად ვღებულობთ

$$\sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{**}) = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i*}) +$$

$$(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{n_i})(\overline{Y}_{**} - \overline{Y}_{i*})^2 = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i*}) + (\overline{Y}_{**} - \overline{Y}_{i*})^2.$$

მიღებული ტოლობის ორივე მხარის n_i-ზე გადამრავლებით და i-ს მიმართ აჯამვით მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{**})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i*})^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i(Y_{i*} - \overline{Y}_{**})^2,$$

რაც ემთხვევა თეორემა 1-ში მიღებულ დისპერსიულ ტოლობას.

შემოვიღოთ აღნიშვნები.

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{**})^2$$

(SST $-$ $total\ sum\ of\ squares$)

SST სიდიდე არის Y_{ij} მნიშვნელობების მათი საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრების კვადრატების ჯამური სიდიდე, რომელსაც სრული ვარიაცია ეწოდება. H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობისას $\frac{SST}{n-1}$ არის უცნობი σ^2 დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება და $\frac{SST}{\sigma^2}$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია $\chi^2(n-1)$.

სიდიდე, განსაზღვრული პირობით

$$\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i*})^2$$

არის i-ური ჯგუფის მნიშვნელობების ამავე ჯგუფის საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრების კვადრატების ჯამი -- i-ური ჯგუფის ვარიაცია.

სიდიდე SSW, განსაზღვრული პირობით

$$SSW=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i*})^2$$

არის ყოველჯი გუფის ვარიაციათა ჯამი ($sum\ of\ squares\ within\ groups$ $-$ SSW). H_0 ჰიპოთეზის მართებულობისას $\frac{SSW}{n-k}$ არის უცნობი σ^2 დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება. ამასთან $\frac{SSW}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-k)$.

სიდიდე SSB, განსაზღვრული პირობით

$$SSB=\sum_{i=1}^{k}n_i(Y_{i*}-\overline{Y}_{**})^2,$$

არის ჯგუფის საშუალო მნიშვნელობის საერთო საშუალოდან გადახრის კვადრატების ჯამი (SSB $--$ $sum\ of\ squares\ between\ groups$). H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობისას $\frac{SSB}{k-1}$ არის უცნობი σ^2 დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება და $\frac{SSB}{\sigma^2}\sim\chi^2(k-1)$.

შემოღებული აღნიშვნების გამოყენებით, თეორემა 1 ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$SST=SSW+SSB.$$

თუ დავუშვებთ, რომ უცნობი σ^2 დისპერსიის აღნიშვნელი სამი შეფასება გვაძლევს ერთნაირ რიცხვით მნიშვნელობას, მაშინ ჩვენ არ გვაქვს საფუძველი უარვყოთ H_0 ჰიპოთეზა. თუ დისპერსიების შეფასებები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან და ამასთან $\frac{SSB}{k-1}$ მნიშვნელოვნად აჭარბებს $\frac{SSW}{n-k}$-ს, მაშინ ჩვენ უნდა უარვყოთ H_0 ჰიპოთეზა, ანუ უნდა ჩავთვალოთ, რომ ზოგიერთი დონის საშუალოებს შორის მნიშვნელოვანი განსხვავებაა.

შევნიშნოთ, რომ
$$F = \frac{SSB}{k-1} / \frac{SSW}{n-k}$$
სტატისტიკას H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში აქვს ფიშერის F განაწილება $k-1$ და $n-k$ თავისუფლების ხარისხებით.

დავაფიქსიროთ მნიშვნელოვნობის α-დონე. ფიშერის განაწილების ცხრილიდან ვიპოვოთ $F_{k-1,n-k,\alpha}$ კრიტიკული წერტილი. გადაწყვეტილების მიღების წესი ასეთია: თუ F სტატისტიკის დაკვირვებული f-მნიშვნელობისათვის სრულდება პირობა
$$f > F_{k-1,n-k,\alpha},$$
მაშინ არ მივიღებთ H_0-ს. წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია.

მაგალითი 1. ცხრილში მოცემულია სამ ჩარხზე გამოჩარხული სტანდარტული დეტალების ზომების ბოლო ორი ათობითი ნიშანი. მაგალითად, ცხრილის მნიშვნელობა 83 შეესაბამება გამოჩარხული დეტალის რეალურ ზომას 6, 783, ხოლო 81 კი დეტალის რეალურ ზომას 6, 781.

	I	II	III
1	83	75	78
2	81	70	76
3	76	72	69
4	88	71	72
5	85	79	80
6	89	73	77

.

დისპერსიული ანალიზის მეთოდის გამოყენებით $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით შევამოწმოთ შემდეგი ჰიპოთეზა

H_0 : "ჩარხები არის ერთგვაროვანი."

ამოხსნა. $EXCEL$-ის $Anova : Single\ Factor$ სტატისტიკური ფუნქციის გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგ ცხრილს

Anova : Single Factor
SUMMARY

Groups	*Count*	*Sum*	*Average*	*Variance*
Column 1	6	502	83, 66667	23, 06667
Column 2	6	440	73, 33333	10, 66667
Column 3	6	452	75, 33333	16, 66667

.

ANOVA

Source of Variation	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P − value*	*F crit*
Between Groups	360, 4444	2	180, 2222	10, 72751	0, 001281	3, 682317
Within Groups	252	15	16, 8			
Total	612, 4444	17				

ჩავატაროთ აღნიშნული მონაცემების ანალიზი ჩარხების ერთგვაროვნობის შესახებ.

ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ

$$f(= F) = 10,72751$$

ხოლო ფიშერის მნიშვნელობათა ცხრილიდან ვღებულობთ

$$F_{2;15;0,05}(= F_{crit}) = 3,682317.$$

ვინაიდან

$$f(= F) = 10,72751 > 3,682317 = F_{2;15;0,05},$$

ამიტომ $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა დასკვნა : ჩარხები არაა ერთგვაროვანი.

მაგალითი 2. ერთ-ერთ პოლიმეტალურ საბადოზე მადნიანი ძარღვები დაკავშირებულია შემცველი ქანების 7 ტიპთან: 1. კვარციან პორციფირიტებთან, 2. თიხაფიქლებთან, 3. ტუფიტებთან, 4.ქვიშაქვებთან, 5.ალბიტოფირებთან, 6. კირქვებთან და 7. გრანიტებთან. იმისათვის, რომ გაირკვეს საკითხი მადნის მოცულობით წონაზე შემცველი ქანების გავლენის შესახებ, აღებულია სინჯების შვიდი სერია. ყოველ სერიაში იყო შვიდი სინჯი (თითო სერია ქანების ყველა ტიპისათვის). ამრიგად აღებულია 49 სინჯი.

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*
1.	2, 95	2, 60	2, 65	2, 55	2, 75	2, 80	2, 60
2.	2, 50	2, 95	2, 75	2, 85	2, 45	2, 50	2, 55
3.	2, 55	2, 70	2, 80	2, 60	2, 90	2, 85	2, 70
4.	2, 80	2, 90	2, 75	2, 65	3, 00	2, 95	2, 70
5.	2, 80	2, 65	2, 60	3, 10	2, 50	2, 95	2, 95
6.	2, 60	3, 25	3, 00	2, 70	3, 00	2, 90	2, 80
7.	2, 75	2, 50	3, 40	3, 10	3, 60	3, 40	3, 15

დისპერსიული ანალიზის მეთოდის გამოყენებით $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით შევამოწმოთ შემდეგი ჰიპოთეზა

H_0 : "ქანების ტიპები გავლენას არ ახდენენ მის წონაზე."

ამოხსნა.

EXCEL-ის *Anova : Single Factor* სტატისტიკური ფუნქციის გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგ ცხრილს
Anova : Single Factor
SUMMARY

Groups	*Count*	*Sum*	*Average*	*Variance*
Column 1	7	18,95	2,707143	0,02619
Column 2	7	19,55	2,792857	0,06619
Column 3	7	19,95	2,850000	0,07500
Column 4	7	19,55	2,792857	0,052857
Column 5	7	20,20	2,885714	0,148929
Column 6	7	20,35	2,907143	0,071119
Column 7	7	19,45	2,778571	0,044048

ANOVA

Source of Variation	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P − value*	*F crit*
Between Groups	0,20051	6	0,033418	0,48292	0,817257	2,323993
Within Groups	2,906429	42	0,06201			
Total	3,106939	48				

ჩავატაროთ აღნიშნული მონაცემების ანალიზი ქანების წონის იდენტურობის შესახებ.
ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ

$$f(=F) = 0,48292$$

ხოლო ფიშერის მნიშვნელობათა ცხრილიდან ვღებულობთ

$$F_{6;42;0,05}(=F_{crit}) = 2,323993.$$

ვინაიდან

$$f(=F) = 0,48292 < 2,323993 = F_{6;42;0,05},$$

ამიტომ $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა დასკვნა :
"ქანების ტიპები გავლენას არ ახდენენ მის წონაზე."

მაგალითი 3. 2006 წლის ნოემბერში შესწავლილია ნატახტარის წყალში შემდეგი მიკროელემენტების შემცველობა (მგ/კგ):

1. სპილენძი- Cu; 2. თუთია-Zn; 3. კადმიუმი-Cd; 4. რკინა - Fe; 5. მაგნიუმი-Mn; 6. კობალტი-Co; 7. ნიკელი -Ni; 8. ტყვია-Pb; 9. ლითიუმი-Li; 10. სტრონციუმი-Sc; იმისათვის, რომ გაირკვეს საკითხი წყლის მოცულობით წონაზე შემცველი მიკროელემენტების გავლენის შესახებ, აღებულია სინჯების ოცი სერია. ყოველ სერიაში იყო ათი სინჯი(თითო სერია წყლის მიკროელემენტების ყველა ტიპისათვის). ამრიგად აღებულია 200 სინჯი.

	Cu	Zn	Cd	Fe	Mn	Co	Ni	Pb	Li	Sr
1.	$5,0$	$45,0$	$3,0$	$0,0$	$6,0$	$0,0$	$2,0$	$22,0$	$3,0$	100
2.	$8,5$	$52,5$	$4,0$	$0,0$	$2,0$	$0,0$	$2,0$	$22,0$	$2,5$	60
3.	$5,0$	$55,0$	$3,0$	$8,0$	$2,0$	$0,0$	$2,0$	$14,0$	$2,0$	25
4.	$1,5$	$55,0$	$0,0$	$8,0$	$45,5$	$8,0$	$2,0$	$16,0$	$2,0$	25
5.	$1,5$	$52,5$	$0,0$	$12,0$	$2,0$	$4,0$	$3,0$	$26,0$	$3,5$	30
6.	$1,5$	$52,5$	$0,0$	$8,0$	$2,0$	$4,0$	$2,0$	$30,0$	$1,0$	30
7.	$3,0$	$57,5$	$2,0$	$8,0$	$1,35$	$4,0$	$3,0$	$32,0$	$2,5$	45
8.	$3,0$	$55,5$	$2,0$	$8,0$	$1,35$	$4,0$	$2,0$	$38,0$	$3,0$	30
9.	$4,0$	$55,5$	$2,5$	$8,0$	$2,0$	$0,0$	$2,0$	$30,0$	$3,0$	50
10.	$3,0$	$65,0$	$1,5$	$8,0$	$1,35$	$4,0$	$2,0$	$20,0$	$3,0$	45
11.	$4,0$	$55,0$	$4,5$	$8,0$	$8,0$	$2,0$	$42,0$	$4,5$	$3,0$	45
12.	$2,5$	$50,0$	$1,5$	$12,0$	$2,65$	$4,0$	$2,0$	$40,0$	$3,5$	35
13.	$3,0$	$47,0$	$1,5$	$0,0$	$45,5$	$12,0$	$6,0$	$44,0$	$3,0$	40
14.	$7,0$	$55,0$	$2,0$	$0,0$	$2,65$	$8,0$	$4,0$	$48,0$	$3,5$	65
15.	$4,0$	$55,0$	$2,0$	$8,0$	$5,55$	$0,0$	$0,0$	$2,0$	$34,0$	40
16.	$12,5$	$57,5$	$3,5$	$8,0$	$6,0$	$8,0$	$3,0$	$32,0$	$2,5$	40
17.	$4,0$	$57,5$	$2,5$	$8,0$	$21,5$	$4,0$	$2,0$	$50,0$	$3,0$	45
18.	$7,0$	$52,5$	$3,0$	$0,0$	$14,5$	$4,0$	$2,0$	$32,0$	$13,0$	35
19.	$7,0$	$50,0$	$3,0$	$8,0$	$60,5$	$12,0$	$3,0$	$34,0$	$5,5$	55
20.	$7,0$	$57,0$	$3,5$	$8,0$	$2,5$	$0,0$	$2,0$	$30,0$	$5,0$	60

.

დისპერსიული ანალიზის მეთოდის გამოყენებით $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით შევამოწმოთ შემდეგი ჰიპოთეზა

H_0 : "მიკროელემენტების ტიპები გავლენას არ ახდენენ წყლის წონაზე."

ამოხსნა.

$EXCEL$-ის $Anova : Single\ Factor$ სტატისტიკური ფუნქციის გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგ ცხრილს

Anova : Single Factor
SUMMARY

Groups	*Count*	*Sum*	*Average*	*Variance*
Cu	20	94	4,7	7,668421
Zn	20	1082,5	54,125	17,94408
Cd	20	45	2,25	1,618421
Fe	20	128	6,4	15,83158
Mn	20	234,35	11,7175	309,4219
Co	20	88	4,4	14,98947
Ni	20	50	2,5	1,0000
Pb	20	636	31,8	100,1684
Li	20	71,5	3,575	5,980921
Sr	20	900	45	302,6316

.

ANOVA

Source of Variation	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P − value*	*F crit*
Between Groups	68768,31	9	7640,924	98,30655	1,28*E* − 66	1,929426
Within Groups	14767,84	190	77,72548			
Total	83536,16	199				

ჩავატაროთ აღნიშნული მონაცემების ანალიზი წყლის წონის იდენტურობის შესახებ.

ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ

$$f(=F) = 98,30655$$

ხოლო ფიშერის მნიშვნელობათა ცხრილიდან ვღებულობთ

$$F_{9;190;0,05}(=F_{crit}) = 1,929426.$$

ვინაიდან

$$f(=F) = 98,30655 > 1,929426 = F_{9;190;0,05},$$

ამიტომ $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით სარწმუნოა დასკვნა :

"ჩვენ არანაირი საფუძველი არა გვაქვს დავასკვნათ რომ მიკროელემენტების ტიპები გავლენას არ ახდენენ წყლის წონაზე."

შენიშვნა 1. მაგალით 3-ში განხილული მონაცემები მოგვაწოდა საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის კათედრის თანამშრომლებმა უჩა ზვიადაძემ და მარინა მარდაშოვამ.

სავარჯიშოები

2.9.1. ხორბლის ერთგვაროვანი და ერთი და იგივე ფართობის ყანებში შეიტანეს სამგვარი სასუქი, ამასთან S_1 ტიპისა-5 ყანაში, S_2 ტიპისა-7 ყანაში, ხოლო S_3ტიპისა-6 ყანაში. მოსავლიანობა კილოგრამებში მოყვანილია შემდეგ ცხრილში

S_1	S_2	S_3
781	545	696
655	786	660
611	976	639
789	663	467
596	789	650
	569	380
	720	

.

დავუშვებთ რომ ეს რიცხვები Y_{ij} ნორმალურად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების რეალიზაციაა, ამასთან $MY_{ij} = \beta_i$, $DY_{ij} = \sigma^2$. შევამოწმოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$$

იმის შესახებ, რომ სასუქები საშუალოდ ერთნაირად მოქმედებენ მოსავლიანობაზე

$H_1 : \beta_2 \neq \beta_1$ ან $\beta_3 \neq \beta_1$

ალტერნატივის წინააღმდეგ $\alpha = 0,1$ მნიშვნელოვნობის დონისათვის.

2.9.2. მოსახლეობის 1000 კაციან ჯგუფებში გარკვეული ინფექციით დაავადების თავიდან აცილების მიზნით ჩაატარეს აცრები სამგვარი ტიპის ვაქცინების გამოყენებით. ამასთან S_1 ტიპისა-4 ჯგუფში, S_2 ტიპისა-7 ჯგუფში, ხოლო S_3 ტიპისა-5 ჯგუფში. დადებითი შედეგები (ვინც აიცილა ინფექციით დაავადება) ჯგუფების მიხედვით მოყვანილია შემდეგ ცხრილში

S_1	S_2	S_3
791	645	696
855	886	660
711	976	689
779	693	467
	789	690
	579	
	720	

.

დავუშვებთ რომ ეს რიცხვები Y_{ij} ნორმალურად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების რეალიზაციაა, ამასთან $MY_{ij} = \beta_i$, $DY_{ij} = \sigma^2$. შევამოწმოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$$

იმის შესახებ, რომ ვაქცინები საშუალოდ ერთნაირად მოქმედებენ ინფექციის თავიდან აცილებაზე

$H_1 : \beta_2 \neq \beta_1$ ან $\beta_3 \neq \beta_1$

ალტერნატივის წინააღმდეგ $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონისათვის.

2.9.3. ერთ-ერთ პოლიმეტარულ საბადოზე მადნიანი ძარღვები დაკავშირებულია შემცველი ქანების 4 ტიპთან: 1. კვარციან პორციფირიტებთან, 2. თიხაფიქლებთან, 3. ტუფიტებთან და 4.ქვიშაქვებთან. იმისათვის, რომ გაირკვეს საკითხი მადნის მოცულობით წონაზე შემცველი ქანების გავლენის შესახებ, აღებულია სინჯების შვიდი სერია. ყოველ სერიაში იყო ოთხი სინჯი(თითო სერია ქანების ყველა ტიპისათვის). ამრიგად აღებულია 28 სინჯი.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
1.	$2,95$	$2,60$	$2,65$	$2,55$	$2,75$	$2,80$	$2,60$
2.	$2,50$	$2,95$	$2,75$	$2,85$	$2,45$	$2,50$	$2,55$
3.	$2,55$	$2,70$	$2,80$	$2,60$	$2,90$	$2,85$	$2,70$
4.	$2,80$	$2,90$	$2,75$	$2,65$	$3,00$	$2,95$	$2,70$

.

დისპერსიული ანალიზის მეთოდის გამოყენებით $\alpha = 0,01$ მნიშვნელოვნობის დონით შევამოწმოთ შემდეგი ჰიპოთეზა

H_0 : "ქანების ტიპები გავლენას არ ახდენენ მის წონაზე."

2.9.4. ცხრილში მოცემულია სამ ჩარხზე გამოჩარხული სტანდარტული დეტალების ზომების ბოლო ორი ათობითი ნიშანი. მაგალითად, ცხრილის მნიშვნელობა 83 შეესაბამება გამოჩარხული დეტალის რეალურ ზომას $6,783$, ხოლო 81 კი დეტალის რეალურ ზომას $6,781$.

	I	II	III
1	83	75	79
2	85	81	76
3	76	73	65
4	88	71	71

.

დისპერსიული ანალიზის მეთოდის გამოყენებით $\alpha = 0,05$ მნიშვნელოვნობის დონით შევამოწმოთ შემდეგი ჰიპოთეზა

H_0 : "ჩარხები არის ერთგვაროვანი."

§ 2.10. სრული ორფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი

განვიხილოთ დისპერსიული ანალიზის ისეთი ამოცანები, რომლებშიც შედეგებზე მოქმედებს ორი ფაქტორი A და B, A ფაქტორს გააჩნია m ცალი დონე, ხოლო B-ს კი k ცალი დონე. შედეგებს განალაგებენ მართკუთხა ცხრილში. m ცალი სტრიქონი შეესაბამება A ფაქტორის დონეებს, რომლებიც გადანომრილია i ინდექსით $(1 \leq i \leq m)$. k ცალი სტრიქონი კი შეესაბამება B ფაქტორის დონეებს, რომლებიც გადანომრილია j ინდექსით $(1 \leq j \leq k)$.) i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე წარმოიქმნება მართკუთხედი, რომელსაც ვუწოდებთ (i,j)-უჯრას. ამგვარად გვექნება სულ $m \times k$ უჯრა. ყოველ უჯრაში ჩაიწერება ექსპერიმენტის ან დაკვირვების შედეგები, რომლებიც შესაბამის დონეებზეა მიღებული. ყოველ უჯრაში შეიძლება იყოს ერთი ან რამდენიმე მონაცემი. შეიძლება უჯრა იყოს ცარიელი. თუ მონაცემთა რიცხვი ყველა უჯრაში განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ანალიზს ეწოდება სრული. ჩვენ განვიხილავთ ორ შემთხვევას:

I) ყოველ უჯრაში ერთი დაკვირვებაა;

II) ყოველ უჯრაში მონაცემთა ტოლი არანულოვანი რაოდენობაა.

I) სრული ორფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი უჯრაში ერთი დაკვირვებით. როცა ყოველ უჯრაში გვაქვს ერთი დაკვირვება, მაშინ მონაცემთა ცხრილს აქვს სახე

	B	ფაქტორის	დონეები		
A ფაქტორი	B_1	B_2	$\cdots$	B_k	საშუალო
A_1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1k}	$\overline{y}_{1*}$
A_2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2k}	$\overline{y}_{2*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	y_{m1}	y_{12}	$\cdots$	y_{mk}	$\overline{y}_{m*}$
საშუალო	$\overline{y}_{*1}$	$\overline{y}_{*2}$	$\cdots$	$\overline{y}_{*k}$	

.

ამოცანის შესაბამის მოდელს აქვს სახე

$$y_{ij} = \mu + z_i + \epsilon ij, \ i = 1, \cdots, k; \ j = 1, 2, \cdots, m.$$

ამასთან, Z_i შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს i-ური დონის ეფექტს. დავუშვათ რომ სრულდება პირობები

1. Z_i და ϵ_{ij} ერთობლივად დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია;

2. $M(Z_i) = 0$, $D(Z_i) = \sigma_Z^2$ ყველა i-სთვის;

3. $M(\epsilon_{ij}) = 0$, $D(\epsilon_{ij}) = \sigma^2$ ყველა i და j-სთვის;

ცხადია, რომ

$$M(Y_{ij}) = \mu,\ D(Y_{ij}) = \sigma_Z^2 + \sigma^2.$$

ამრიგად, Y_{ij}-ის დისპერსია ორი კომპონენტისგან შედგება, რის გამოც ამ მოდელს ორ ფაქტორიანი დისპერსიული მოდელი ეწოდება.

დისპერსიული ანალიზის ცხრილს ექნება სახე

ვარიაციის წყარო	კვადრატების ჯამი	თავის. ხარისხი	საშ.კვად. გად.
ჯგუფთა შორის	$SSB = \sum_{i=1}^{k} n_i(y_{i*} - \overline{y}_{**})^2$	$k-1$	$\frac{SSB}{k-1}$
ჯგუფებში	$SSW = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij} - \overline{y}_{i*})^2$	$n-k$	$\frac{SSW}{n-k}$
სრული	$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij} - \overline{y}_{**})^2$	$n-1$	

.

H_0 ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ფაქტორების დონეებს შორის განსხვავების ეფექტი არ არსებობს, ასე ჩაიწერება

$$H_0 : \sigma_Z^2 = 0.$$

ალტერნატიულ ჰიპოთეზას ექნება სახე

$$H_0 : \sigma_Z^2 > 0.$$

აღნიშნული ჰიპოთეზების შესამოწმებელ F სტატისტიკას აქვს სახე

$$F = \frac{k(m-1)SSB}{(k-1)SSW}.$$

ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას, ამ სტატისტიკას ექნება

$$F_{(k-1,k(m-1))}$$

განაწილება. α-მნიშვნელოვნობის დონისათვის ცხრილიდან ვპოულობთ $F_{k-1,k(m-1),\alpha}$ კრიტიკულ წერტილს. თუ f დაკვირვებული მნიშვნელობისათვის სრულდება

$$f > F_{k-1,k(m-1),\alpha},$$

მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ.

შენიშვნა 1. ორფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზის ჩასატარებლად გამოიყენება ფუნქცია $Analysis/Anova : Two\ Factor\ Without\ Replication.$

განვიხილოთ შემდეგი

მაგალითი 1. ოთხმა ექსპერტმა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შეაფასა თითო-თითო ნიმუში საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის ექვსი პარტიიდან. ქვემოთ მოცემულია ექსპერტების შეფასებები (პირობით ერთეულებში). ორ ფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზის საფუძველზე დაადგინეთ, არის თუ არა მნიშვნელოვანი განსხვავება მზა პროდუქციის პარტიებს ან ექსპერტების შეფასებებს შორის

		მზა	პროდუქციის	პარტიები		
ექსპერტები	$N1$	$N2$	$N3$	$N4$	$N5$	$N6$
პირველი ექსპერტი	9	10	9	10	11	11
მეორე ექსპერტი	12	11	9	11	10	10
მესამე ექსპერტი	11	10	10	12	11	10
მეოთხე ექსპერტი	12	13	11	14	12	10

.

ამ ამოცანისათვის საინტერესო ჰიპოთეზებია

$$H_0^1 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

ე.ი. მზა პროდუქციის საშუალო ხარისხი პარტიების მიხედვით არ განსხვავდება,

H_1^1 : ერთი მაინც α_i განსხვავდება ნულისაგან (ე.ი. საშუალო ხარისხი პარტიების მიხედვით მუდმივი არაა)

და

$$H_0^2 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0,$$

ე.ი. ექსპერტთა შეფასებები ერთნაირია,

H_1^2 : ერთი მაინც β_i განსხვავდება ნულისაგან (ე.ი. მზა პროდუქციას ექსპერტები სხვადასხვანაირად აფასებენ).

ჩავატაროთ აღნიშნული მონაცემების ანალიზი. მნიშვნელოვნობის დონედ ავიღოთ $0,05$.

$Analysis/Anova : Two\,Factor\,Without\,Replication$ ფუნქციის გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგ ცხრილს

$Anova : \ Two - Factor\ Without\ Replication$

$SUMMARY$	$Count$	Sum	$Average$	$Variance$
ექსპერტი I	6	60	10	$0,8$
ექსპერტი II	6	63	$10,5$	$1,1$
ექსპერტი III	6	64	$10,66667$	$0,666667$
ექსპერტი IV	6	73	12	2
N 1	4	44	11	2
N 2	4	44	11	2
N 3	4	39	$9,75$	$0,916667$
N 4	4	47	$11,75$	$2,916667$
N 5	4	44	11	$0,666667$
N 6	4	41	$10,25$	$0,25$

.

$ANOVA$

Source of Variation	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P − value*	*F crit*
ექსპერტები	13,125	3	4,375	5	0,013373	3,287383
პროდუქციის პარტიები	9,708333	5	1,941667	2,219048	0,106361	2,901295
Error	13,125	15	0,875			
Total	35,95833	23				

.

H_0^1 ჰიპოთეზისათვის მივიღებთ $f_A = 5 > 3,287383 = F_{5;15;0,05}$, ხოლო H_0^2 ჰიპოთეზისათვის გვექნება $f_B = 2,219048 < 2,901295 = F_{3;15;0,05}$. ამრიგად, ექსპერტების შეფასებებს შორის განსხვავება მნიშვნელოვანია, ხოლო მზა პროდუქციის პარტიებს შორის განსხვავება მნიშვნელოვანი არ არის.

სავარჯიშოები

2.10.1. სამმა ექსპერტმა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შეაფასა თითოთითო ნიმუში საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის ექვსი პარტიიდან. ქვემოთ მოცემულია ექსპერტების შეფასებები (პირობით ერთეულებში). ორ ფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზის საფუძველზე დაადგინეთ, არის თუ არა მნიშვნელოვანი განსხვავება მზა პროდუქციის პარტიებს ან ექსპერტების შეფასებებს შორის

		მზა	პროდუქციის	პარტიები		
ექსპერტები	$N1$	$N2$	$N3$	$N4$	$N5$	$N6$
პირველი ექსპერტი	10	9	8	9	10	10
მეორე ექსპერტი	11	12	11	12	11	9
მესამე ექსპერტი	10	11	12	11	12	11

.

2.10.2. ხუთმა ექსპერტმა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შეაფასა თითო-თითო ნიმუში საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის ექვსი პარტიიდან. ქვემოთ მოცემულია ექსპერტების შეფასებები (პირობით ერთეულებში). ორ ფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზის საფუძველზე დაადგინეთ, არის თუ არა მნიშვნელოვანი განსხვავება მზა პროდუქციის პარტიებს ან ექსპერტების შეფასებებს შორის

		მზა	პროდუქციის	პარტიები		
ექსპერტები	$N1$	$N2$	$N3$	$N4$	$N5$	$N6$
პირველი ექსპერტი	9	11	9	10	11	11
მეორე ექსპერტი	10	11	12	11	10	10
მესამე ექსპერტი	10	10	10	11	9	11
მეოთხე ექსპერტი	12	13	10	13	12	11
მეხუთე ექსპერტი	12	13	11	10	12	11

.

ცხრილი 1 ნორმალური განაწილების ფუნქცია $\Phi(x)$ და ნორ–მალური განაწილების სიმკვრივე $\phi(x)$

x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,5000	0,34	0,3765	0,6331	0,68	0,3166	0,7517
01	3989	5040	35	3752	6368	69	3144	7549
02	3988	5080	36	3739	6406	70	3123	7580
03	3988	5120	37	3725	6443	71	3101	7611
04	3986	5160	38	3712	6480	72	3079	7642
05	3984	5199	39	3697	6517	73	3056	7673
06	3982	5239	40	3683	6557	74	3034	7703
07	3980	5279	41	3668	6591	75	3011	7734
08	3977	5319	42	3653	6628	76	2989	7764
09	3973	5359	43	3637	6664	77	2966	7794
10	3970	5398	44	3621	6700	78	2943	7823
11	3965	5438	45	3605	6736	79	2920	7852
12	3961	5478	46	3589	6772	80	2897	7881
13	3956	5517	47	3572	6808	81	2874	7910
14	3951	5557	48	3555	6844	82	2850	7939
15	3945	5596	49	3538	6879	83	2827	7967
16	3939	5636	50	3521	6915	84	2803	7995
17	3932	5675	51	3503	6950	85	2780	8023
18	3925	5714	52	3484	6985	86	2756	8051
19	3918	5753	53	3467	7016	87	2732	8078
20	3910	5793	54	3448	7054	88	2709	8106
21	3902	5832	55	3429	7088	89	2685	8133
22	3894	5871	56	3410	7123	90	2661	8159
23	3885	5910	57	3391	7157	91	2637	8186
24	3876	5948	58	3372	7190	92	2613	8212
25	3867	5987	59	3352	7224	93	2589	8238
26	3357	6026	60	3332	7257	94	2565	8264
27	3847	6064	61	3312	7291	95	2541	8289
28	3836	6103	62	3292	7324	96	2510	8315
29	3825	6141	63	3271	7357	97	2492	8340
30	3814	6179	64	3251	7389	98	2468	8365
31	3802	6217	65	3230	7422	99	2444	8389
32	3790	6265	66	3207	7454	1,00	2420	8413
33	3778	6293	67	3187	7486	1,01	2396	8438

x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$
1,02	0,2371	0,8461	1,42	0,1456	0,9222	1,82	0,0761	0,9656
03	2347	8485	43	1435	9236	83	0748	9664
04	2323	8508	44	1415	9251	84	0734	9671
05	2299	8531	45	1394	9265	85	0721	9678
06	2275	8554	46	1374	9279	86	0707	9686
07	2251	8577	47	1354	9292	87	0694	9693
08	2227	8599	48	1334	9306	88	0681	9699
09	2203	8621	49	1315	9319	89	0669	9706
10	2179	8648	50	1295	9332	90	0656	9713
11	2155	8665	51	1276	9345	91	0644	9719
12	2131	8686	52	1257	9357	92	0632	9729
13	2107	8708	53	1238	9370	93	0620	9732
14	2083	8729	54	1219	9382	94	0608	9738
15	2059	8749	55	1200	9394	95	0596	9744
16	2036	8770	56	1182	9406	96	0584	9750
17	2012	9790	57	1163	9418	97	0573	9756
18	1989	8810	58	1145	9429	98	0562	9761
19	1965	8820	59	1127	9441	99	0551	9767
20	1942	8849	60	1109	9452	2,00	0540	9772
21	1919	8869	61	1092	9463	02	0519	9783
22	1895	8888	62	1074	9474	04	0498	9793
23	1872	8907	63	1057	9484	06	0478	9803
24	1849	8925	64	1040	9495	08	0459	9812
25	1826	8944	65	1023	9505	10	0440	9821
26	1804	8962	66	1006	9515	12	0422	9830
27	1881	8980	67	0989	9525	14	0404	9838
28	1858	8997	68	0973	9535	16	0387	9846
29	1836	9015	69	0957	9545	18	0371	9854
30	1714	9032	70	0940	9554	20	0355	9861
31	1691	9049	71	0925	9564	22	0339	9868
32	1669	9066	72	0909	9573	24	0325	9868
33	1647	9082	73	0893	9583	26	0310	9881
34	1626	9099	74	0878	9591	28	0297	9887
35	1604	9115	75	0863	9599	30	0283	9893
36	1582	9131	76	0848	9608	32	0270	9898
37	1561	9147	77	0833	9616	34	0258	9904
38	1539	9162	78	0818	9625	36	0246	9909
39	1518	9177	79	0804	9633	38	0235	9913
40	1457	9192	80	0790	9641	40	0224	9918
41	1476	9207	81	0775	9649	42	0213	9922

x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$
2,44	0,0203	0,9927	2,72	0,0099	0,9967	3,00	0,0043	0,99655
46	0194	9931	74	0093	9969	10	0110	99903
48	0184	9934	76	0088	9971	20	0104	99931
50	0175	9938	78	0084	9973	30	0099	99951
52	0167	9941	80	0079	9974	40	0093	99966
54	0158	9945	82	0075	9976	50	0088	99976
56	0151	9948	84	0071	9977	60	0084	99984
58	0143	9951	86	0067	9979	70	00042	99989
60	0136	9953	88	0063	9980	80	00029	99993
62	0129	9956	90	0060	9981	90	00020	99995
64	0122	9959	92	0056	9982	4,00	00013	99996
66	0116	9961	94	0053	9984	4,50	00001	99999
68	0110	9963	96	0050	9985	5,00	00000	99999
70	0104	9965	98	0047	9986			

ცხრილი 1–ის დანართი

ცხრილი 1 შეიცავს ნორმალური განაწილების ϕ სიმკვრივისა და Φ ფუნქციის მნიშვნელობებს x არგუმენტის მნიშვნელობებისათვის [0;5] არიდან. მართებულია შემდეგი ფორმულები:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x > 5; \\ \phi(x), & \text{თუ } x \in [0;5] \ (\phi(x)\text{-ს ვპოულობთ ცხრილიდან}); \\ \phi(-x), & \text{თუ } x \in [-5;0[\ (\phi(-x)\text{-ს ვპოულობთ ცხრილიდან}); \\ 0, & \text{თუ } x < -5. \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x > 5; \\ \Phi(x), & \text{თუ } x \in [0;5] \ (\Phi(x)\text{-ს ვპოულობთ ცხრილიდან}); \\ 1-\Phi(-x), & \text{თუ } x \in [-5;0[\ (\Phi(-x)\text{-ს ვპოულობთ ცხრილიდან}); \\ 0, & \text{თუ } x < -5. \end{cases}$$

ნორმალური განაწილების ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია Φ^{-1} მოიცემა შემდეგი ფორმულის საშუალებით

$$\Phi^{-1}(a) = \begin{cases} \Phi^{-1}(a), & \text{თუ } a \in [0,5;1] \ (\Phi^{-1}(a)\text{-ს ვპოულობთ ცხრილიდან}); \\ -\Phi^{-1}(1-a), & \text{თუ } a \in]0;0,5[\ (\Phi^{-1}(1-a)\text{-ს ვპოულობთ ცხრილიდან}). \end{cases}$$

$\Phi^{-1}(a)$-ს მოსაძებნად $(0,5 < a < 1)$ $\Phi(x)$-ის მნიშვნელობათა გრაფაში ვპოულობთ a სიდიდეს და განვიხილავთ შესაბამის x_a არგუმენტს, რომელიც $\Phi^{-1}(a)$ სიდიდის ტოლია. მაგალითად, $\Phi^{-1}(0,5557) = 0,14$.

ცხრილი 2. პუასონის განაწილება $P(\{\omega : \xi_\lambda(\omega) = k\}) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$

$k\|\lambda$	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	090484	163746	222245	263120	303265	329287
2	004524	016375	033337	053626	075816	098786
3	000151	0011091	003334	007150	012636	019757
4	000004	000055	000250	000715	001580	002964
5		000002	000015	000057	000158	000356
6			000001	000004	000013	000035
7					000001	000003
$k\|\lambda$	$0,7$	$0,8$	$0,9$	$1,0$	$2,0$	$3,0$
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	347610	359463	365913	367879	270671	149361
2	121663	143785	164661	183940	270671	224043
3	028388	038343	049398	061313	180447	224042
4	004968	007669	011115	015328	090224	168031
5	000695	001227	002001	003066	036089	100819
6	000081	000165	000300	000511	012030	050409
7	000008	000019	000039	000073	003437	021604
8		000003	000004	000009	000859	008101
9				000001	000191	002701
10					000038	000810
11					000007	000221
12					000001	000055
13						000013
14						000003
15						000001
$k\|\lambda$	$4,0$	$5,0$	$6,0$	$7,0$	$8,0$	$9,0$
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	073263	033690	014873	006383	002684	001111
2	146525	084224	044618	022341	010735	004993
3	195367	140374	089235	052129	028626	014994
4	195367	175467	133853	091226	057252	033737
5	156293	175467	160623	027717	091604	060727
6	104194	146223	160623	149003	122138	091090
7	059540	104445	137677	149003	139587	117116
8	029770	065278	103258	130377	139587	131756

ცხრილი 2–ის გაგრძელება

$k \vert \lambda$	$4,0$	$5,0$	$6,0$	$7,0$	$8,0$	$9,0$
9	013231	036266	068898	101405	124077	131756
10	005292	018133	041303	070933	099262	118085
11	001925	008242	022529	045171	072190	097020
12	000642	003434	011262	026350	048127	072765
13	000197	001321	005199	014188	029616	050376
14	000056	000472	002228	007094	016924	032384
15	000015	000157	000891	003111	009026	019431
16	000004	000049	000334	001448	004513	010930
17	000001	000014	000118	000596	002124	005786
18		000004	002899	000232	000944	000944
19		000001	000012	000085	000397	001370
20			000004	000030	000159	000617
21			000001	000010	000061	000264
22				000003	000022	000108
23				000001	000008	000042
24					000003	000016
25					000001	000006
26						000002
27						000001

ცხრილი 3

χ^2_n– განაწილების ზედა α–კრიტიკული წერტილები $\chi^2_{n,\alpha}$

$n \setminus \alpha$	0,99	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	7,3778	9,2104
3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	62514	7,8147	9,3484	11,3449
4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767
5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	9,2363	11,0705	12,8325	15,0863
6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119
7	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753
8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902
9	2,0879	2,7004	3,3251	41682	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660
10	2,5582	3,2479	3,9403	4,8652	159872	18,3070	20,4832	23,2093
11	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	17,2750	19,6752	21,9200	24,7250
12	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170
13	4,1069	5,0087	5,8919	7,0415	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882
14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412
15	5,2294	6,2621	7,2609	8,5468	22,3071	24,9958	27,4884	30,5780
16	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122	23,5418	26,2962	28,8453	31,9999
17	6,4077	7,5642	8,6718	10,0852	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087
18	7,0149	8,2307	9,3904	10,8649	25,9894	28,8693	31,5264	34,8052
19	7,6327	8,9065	10,1170	11,6509	27,2036	30,1435	32,8523	36,1908
20	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426	28,4120	31,4104	34,1696	37,5663
21	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322
22	9,5425	10,9823	12,3380	14,0415	30,8133	33,9245	36,7807	40,2894
23	10,1957	11,6885	13,0905	14,8480	32,0069	35,1725	38,0756	41,6383
24	10,8563	12,4011	13,8484	15,6587	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798
25	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	34,3816	37,6525	40,6465	44,3140

ცხრილი 4

t_n- განაწილების ზედა $\alpha-$კრიტიკული წერტილები $t_{n,\alpha}$

$n \setminus \alpha$	$0,1$	$0,05$	$0,025$	$0,01$	$0,005$	$0,0025$	$0,001$
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	127,321	318,289
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,328
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,214
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,894
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421

ცხრილი 5

$F(n,m)$ განაწილების ზედა $\alpha = 0,5$ დონის კრიტიკული წერტილები $F_{n,m,\alpha}$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	199	215	224	230	234	236	238	240	241	243	243
2	18,5	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85

N	ა	ბ	გ	დ	N	ა	ბ	გ	დ	N	ა	ბ	გ	დ
1.1.1.1)			+		1.3.8.4)	+				1.5.3.				+
2)	+				5)	+				1.6.1.1)	+			
3)	+				6)		+			2)		+		
4)	+				1.3.9.		+			3)	+			
5)			+		1.3.10.			+		4)	+			
6)		+			1.3.11.1)	+				1.6.2.1)	+			
1.1.2.1)		+			2)			+		2)	+			
2)		+			1.3.12.				+	3)	+			
3)			+		1.3.14.			+		1.6.3.1)		+		
4)		+			1.3.15.		+			2)	+			
1.1.3.1)			+		1.3.16.		+			3)		+		
2)				+	1.3.17.		+			1.7.1.1)				+
1.1.4.1)			+		1.3.18	+				2)	+			
2)			+		1.3.19.	+				3)	+			
1.1.5.1)		+			1.3.20.			+		4)	+			
2)				+	1.3.21.		+			5)			+	
1.2.1.			+		1.3.22.	+				1.7.2.		+		
1.2.2.		+			1.3.23.	+				1.7.3.	+			
1.2.3.				+	1.3.24.			+		1.7.4.	+			
1.2.4.	+				1.4.1.		+			1.7.5.	+			
1.2.5.		+			1.4.2.		+			1.7.6.	+			
1.2.6.	+				1.4.3.			+		1.7.7.	+			
1.2.7.		+			1.4.4.	+				1.7.8.1)	+			
1.3.1.		+			1.4.5.1)		+			2)	+			
1.3.2.	+				2)	+				1.7.9.1)	+			
1.3.3.	+				1.4.6.1)	+				2)	+			
1.3.4.			+		2)	+				3)	+			
1.3.5.1)		+			1.4.7.		+			1.7.10.1)	+			
2)			+		1.4.8.1)	+			+	2)	+			
3)			+		2)		+			1.8.1.1)		+		
4)		+			1.5.1.1)		+			2)			+	
1.3.6.	+				2)			+		1.8.2.1)		+		
1.3.7		+			3)	+				2)			+	
1.3.8.1)		+			4)				+	1.8.3.1)				+
2)			+		1.5.2.1)	+				2)		+		
3)			+		2)		+			1.8.4.1)	+			

N	ა	ბ	გ	დ	N	ა	ბ	გ	დ	N	ა	ბ	გ	დ
1.8.4.2)	+				1.11.3		+			1.13.11.				+
1.9.1.			+		1.11.4.		+			1.13.12.1)	+			
1.9.2.1)			+		1.11.5.		+			2)	+			
2)				+	1.11.6.		+			1.13.13.1)		+		
1.9.3.1)		+			1.11.7.			+		2)			+	
2)		+			1.11.8.		+			1.13.14.1)			+	
1.9.4.	+				1.11.9.		+			2)			+	
1.9.4.1)			+		1.11.10.		+			1.13.15.1)		+		
2)		+			1.12.1.	+				2)			+	
3)	+				1.12.2.1)				+	1.14.1.		+		
1.9.5.1)		+			2)		+			1.14.2.		+		
2)			+		1.12.3.	+				1.14.3.			+	
1.9.6.1)	+				1.12.4.			+		1.14.4.	+			
2)	+				1.12.5.		+			1.15.1.		+		
1.10.1.1)			+		1.12.6.		+			1.15.2.1)			+	
3)			+		1.13.1.		+			2)		+		
4)			+		1.13.2.	+				3)			+	
1.10.2.		+			1.13.3.	+				1.15.3.1)	+			
1.10.3.		+			1.13.4.			+		2)		+		
1.10.4.					1.13.5.		+			3)			+	
1.10.5.		+			1.13.6.		+			1.15.3.1)	+			
1.10.6.			+		1.13.7.		+			2)		+		
1.10.7		+			1.13.8.	+				1.15.4				+
1.11.1.		+			1.13.9.		+							
1.11.2.		+			1.13.10.	+								

"$EXCEL$"–ის ზოგიერთი სტატისტიკური ფუნ–ქციის დახასიათება

1. $PROB(x_1 : x_n; p_1 : p_n; y_1; y_2)$. ვთქვათ "$EXCEL$"-ის A სვეტში შეტანილი გვაქვს დისკრეტული ξ სიდიდის მნიშვნელობები $x_1, \cdots, x_n$; დავუშვათ აგრეთვე რომ "$EXCEL$"-ის B-სვეტში შეტანილი გვაქვს შესაბამისი ალბათობები $p_1, \cdots, p_n$. მაშინ სტატისტიკური ფუნქცია $PROB(x_1 : x_n; p_1 : p_n; y_1; y_2)$ ითვლის შემდეგ ალბათობას

$$P(\{\omega : \omega \in \Omega \ \& \ y_1 \leq \xi \leq y_2\}).$$

მაგალითად, თუ ξ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას აქვს სახე

$A(\xi(\omega) = x_k)$	$B(= P(\{\omega : \xi(\omega) = x_k\})$
2	$0,2$
5	$0,2$
6	$0,2$
7	$0,4$

,

მაშინ ალბათობა იმისა რომ შემთხვევითი სიდიდე ξ მიიღებს მნიშვნელობას $[3,6;5]$ ინტერვალიდან, გამოითვლება შემდეგნაირად

$$PROB(A_1 : A_4; B_1 : B_4; 3,6; 5) = 0,2.$$

2. $POISSON(k; \lambda; 0)$ ითვლის იმის ალბათობას, რომ λ პარამეტრიანი პუასონის შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს k-ს ტოლ მნიშვნელობას. მაგალითად, $POISSON(0; 0,2; 0) = 0,818730753$.

3. $POISSON(k; \lambda; 1)$ითვლის იმის ალბათობას, რომ λ პარამეტრიანი პუასონის შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას $[0; k]$ ინტერვალიდან; მაგალითად,

$$POISSON(2; 0,2; 1) = 0,998851519.$$

4. $HYPERGEOMDIST(k; n; a; A)$ ითვლის შემდეგი გამოსახულების მნიშვნელობას

$$\frac{C_a^k \times C_{A-a}^{n-k}}{C_A^n}.$$

მაგალითად, $HYPERGEOMDIST(1; 4; 20; 30) = 0,087575$.

5. $BINOMDIST(k;n;p;0)$ ითვლის შემდეგ მნიშვნელობას

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

მაგალითად, $BINOMDIST(3;10;0,5;0) = 0,1171875$.

6. $BINOMDIST(k;n;p;1)$ ითვლის შემდეგ ჯამს

$$\sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

მაგალითად, $BINOMDIST(3;10;0,5;1) = 0,171875$.

7. $NORMDIST(x;m;\sigma;0)$ ითვლის შემდეგ ფუნქციას

$$\phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

მაგალითად, $NORMDIST(0;0;1;0) = 0,3989428$.

8. $NORMDIST(x;m;\sigma;1)$ ითვლის შემდეგ ინტეგრალს

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

მაგალითად, $NORMDIST(0;0;1;1) = 0,5$.

9. $EXPONDIST(x;\lambda;0)$ ითვლის $\lambda e^{-\lambda x}$ სიდიდის მნიშვნელობას, როცა $x > 0$ და $\lambda > 0$. მაგალითად, $EXPONDIST(4;3;0) = 1,84326$.

10. $EXPONDIST(x;\lambda;1)$ ითვლის $1 - e^{-\lambda x}$ მნიშვნელობას, როცა $x > 0$ და $\lambda > 0$. მაგალითად, $EXPONDIST(4;3;1) = 0,999993856$.

11. $SUMPRODUCT(x_1 : x_n; p_1 : p_n)$. ვთქვათ ”$EXCEL$”-ის A სვეტში შეტანილი გვაქვს დისკრეტული ξ სიდიდის მნიშვნელობები $x_1, \cdots, x_n$; დავუშვათ აგრეთვე რომ ”$EXCEL$”-ის B-სვეტში შეტანილი გვაქვს შესაბამისი ალბათობები $p_1, \cdots, p_n$. მაშინ $SUMPRODUCT(x_1 : x_n; p_1 : p_n)$ ითვლის ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს $M\xi$-ს.

მაგალითად, თუ ξ შემთხვევით სიდიდის განაწილებას აქვს სახე

$A(\xi(\omega) = x_k)$	$B(= P(\{\omega : \xi(\omega) = x_k\})$
2	$0,2$
5	$0,2$
6	$0,2$
7	$0,4$

,

მაშინ $M\xi = SUMPRODUCT(A_1 : A_4; B_1 : B_4;) = 5,4$.

12. $AVERAGE(x_1 : x_n)$. ვთქვათ $x_1, \cdots, x_n$ არის სასრული მათემატიკური ლოდინისა და სასრული მათემატიკური დისპერსიის მქონე შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები. მაშინ $AVERAGE(x_1 : x_n)$ ითვლის შემდეგ ჯამს $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

13. $VARP(x_1 : x_n)$.ვთქვათ $x_1, \cdots, x_n$ არის სასრული მათემატიკური ლოდინისა და სასრული მათემატიკური დისპერსიის მქონე შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები.

მაშინ $VARP(x_1 : x_n)$ ითვლის შემდეგ ჯამს $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j)^2$.

14. $VAR(x_1 : x_n)$.ვთქვათ $x_1, \cdots, x_n$ არის სასრული მათემატიკური ლოდინისა და სასრული მათემატიკური დისპერსიის მქონე შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები. მაშინ $VAR(x_1 : x_n)$ ითვლის შემდეგ ჯამს $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j)^2$.

15. $CORREL(x_1 : x_n; y_1 : y_n)$. ვთქვათ $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ არის (X, Y) შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგები, რომლის ყოველი კომპონენტი წარმოადგენს სასრული მათემატიკური ლოდინისა და სასრული მათემატიკური დისპერსიის მქონე შემთხვევით სიდიდეს. მაშინ $CORREL(x_1 : x_n; y_1 : y_n)$ ითვლის ρ_n სიდიდეს, რომელიც წარმოადგენს კორელაციის $\rho(X, Y)$ კოეფიციენტის შეფასებას.

ვემოთ A და B სვეტებში ჩვენ შეტანილი გვაქვს (X, Y) შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგები, რომლის ყოველი კომპონენტი წარმოადგენს სასრული მათემატიკური ლოდინისა და სასრული მათემატიკური დისპერსიის მქონე შემთხვევით სიდიდეს.

$A(= x_k)$	$B(= y_k\})$
7	2
11	5
6	6
7	7

,

მაშინ $\rho_4 = CORREL(A1 : A4; B1 : B4)$=-0,0695889.

16. $COVAR(x_1 : x_n; y_1 : y_n)$. ვთქვათ $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ არის (X, Y) შემთხვევით ვექტორზე დაკვირვების შედეგები, რომლის ყოველი კომპონენტი წარმოადგენს სასრული მათემატიკური ლოდინისა და სასრული მათემატიკური დისპერსიის მქონე შემთხვევით სიდიდეს. მაშინ $COVAR(x_1 : x_n; y_1 : y_n)$ ითვლის $cov_n(X, Y)$ სიდიდეს, რომელიც წარმოადგენს კოვარიაციის $cov(X, Y)$ კოეფიცვიენტის შეფასებას.

თუ ჩვენ განვიხილავთ ზემოთ განხილულ მაგალითს, მაშინ მივიღებთ $cov_4(X, Y) = COVAR(A1 : A4; B1 : B4) = -0,25$, რომელიც წარმოადგენს კოვარიაციის $cov(X, Y)$ კოეფიციენტის შეფასებას.

17. $CHIDIST(x,n)$. ვთქვათ, $X_1,\cdots,X_n$ არის დამოუკიდებელ სტანდარტულ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. მაშინ $CHIDIST(x,n)$ ითვლის შემდეგ სიდიდეს

$$P(\{\omega:\omega\in\Omega\ \&\ \chi_n^2(\omega)=\sum_{k=1}^{n}X_k^2(\omega)>x\}),$$

როცა $x\geq 0$. მაგალითად, $CHIDIST(2,10)=0,996340153$.

თუ Γ_n-ით ავღნიშნავთ სტანდარტულ n-განზომილებიან გაუსის ზომას R^n-ზე, მაშინ $1-CHIDIST(r^2,n)$ გამოითვლის მის მნიშვნელობას n-განზომილებიან $V(r,n)$ ბირთვზე, ცენტრით R^n სივრცის სათავესა და რადიუსით r. მაგალითად $\Gamma_5(V(2,5))=1-CHIDIST(2^2,5)=0,450584038$.

18. $TDIST$. სტატისტიკური ფუნქციის $TDIST(x;n;1)$ საშუალებით n თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობა x წერტილში გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$t_n(x)=1-TDIST(x;n;1).$$

მაგალითად,

$$t_4(3)=1-TDIST(3;4;1)=1-0,19970984=0,80029016.$$

n თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის $]-x;x[$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა გამოითვლება ფუნქციით $TDIST(x;n;2)$; მაგალითად,

$$TDIST(3;4;2)=0,039941968.$$

19. $FDIST$. სტატისტიკური ფუნქციის $FDIST(x;k_1;k_2)$ საშუალებით k_1 და k_2 თავისუფლების ხარისხების მქონე ფიშერის განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობა x წერტილში გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$FDIST(x;k_1;k_2).$$

მაგალითად,

$$FDIST(2;5;6)=0,211674328.$$

20. $CONFIDENCE(\alpha,\sigma,n)$. სტატისტიკურიფუნქცია $CONFIDENCE(\alpha,\sigma,n)$ ითვლის $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}$, სადაც $z_{\frac{\alpha}{2}}$ არის სტანდარტული გაუსის განაწილების $\frac{\alpha}{2}$ დონის ზედა კვანტილი. მაგალითად, $CONFIDENCE(0,25;1;10)=0,363772409$.

21. $CHIINV(\epsilon,n)$. $CHIINV(\epsilon,n)$ ითვლის ϵ–დონის ზედა t_ϵ კვანტილს, რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$P(\{\omega:\chi^2(n)>t_\epsilon\})=\epsilon.$$

მაგალითად, $CHIINV(0,25;9)=11,38874954$.

სტატისტიკური ფუნქციები	დახასიათება	გვ.
$AVERAGE(x_1 : x_n)$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	140
$BINOMDIST(k; n; p; 0)$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	54
$BINOMDIST(k; n; p; 1)$	$\sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	54
$CHIDIST(x; n)$	$P(\{\omega : \chi^2(n)(\omega) > x\})$	92
$CHIINV(p; n)$	$P(\{\omega : \chi^2(n)(\omega) > x\}) = p \to x$	134
$COMBIN(n; k)$	C_n^k	
$CONFIDENCE(\alpha; \sigma; n)$	$z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$	143
$CORREL(x_1 : x_n; y_1 : y_n)$	$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \times \sigma_Y}$	80
$COUNT(x_1 : x_n)$	n – მონაცემთა რაოდენობა	
$COVAR(x_1 : x_n; y_1 : y_n)$	$cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$	
$CRITBINOM(n; p; \alpha)$	$\alpha = \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^n - i \to k$	
$DEVSQ(x_1 : x_n)$	$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_n})^2$	
$EXPONDIST(x; \lambda; 0)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	56
$EXPONDIST(x; \lambda;)$	$1 - e^{-\lambda x}$	56
$FACT(n)$	$n!$	
$FDIST(x; k_1; k_2)$	$P(\{\omega : F_{(k_1;k_2)}(\omega) > x\})$	94
$FINV(\alpha; k_1; k_2)$	$\alpha = P(\{\omega : F_{(k_1;k_2)}(\omega) > x\}) \to x$	

,

$FORECAST(x;y_1:y_n;x_1:x_n)$	$y=b_0+b_1x$	171
$FREQUWENCY(x_1:x_n;k)$	მონაცემთა რაოდენობა რომლებიც არ აღემატება k – ს	
$GROWTH(x_1:x_n;y_1:y_n;x;0)$	$\widehat{Y}=m^x$	
$HYPGEOMDIST(k,n,a,A)$	$\frac{C_a^k C_{A-a}^{n-k}}{C_A^n}$	52
$INTERCEPT(x_1:x_n;y_1:y_n)$	b_0 – ის შეფასება	170
$KURT(x_1:x_n)$	$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x_n})^3}{ns^3}$ ასიმეტრიის კოეფიციენტი	84
$LINEST(x_1:x_n;y_1:y_n;1)$	b_1 – ის შეფასება, როცა $b_0=0$	170
$LINEST(x_1:x_n;y_1:y_n;0)$	b_1 – ის შეფასება, როცა $b_0\neq 0$	170
$MAX(x_1:x_n)$	$\max(x_1;\cdots;x_n)$	
$MIN(x_1:x_n)$	$\min(x_1;\cdots;x_n)$	
$MODE(x_1:x_n)$	მოდა	85
$NORMDIST(x,\mu,\sigma,0)$	$\phi_{(\mu,\sigma^2)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	55
$NORMDIST(x,\mu,\sigma,1)$	$\Phi_{(\mu,\sigma^2)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$	55
$NORMINV(p;\mu;\sigma)$	$p=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\to x$	
$NORMSDIST(x)$	$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}2$	
$NORMSINV(p)$	$p=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\to x$	
$PERCENTILE(x_1:x_n;p)$	$P=p\cdot 100$ – რიგის პროცენტილი	
$POISSON(k;\lambda;0)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	51
$POISSON(k;\lambda;1)$	$\sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$	51

$PROB(x_1:x_n;p_1:p_n;a;b)$	$P(\{\omega: a \le X(\omega) \le b\})$	55
$RSQ(y_1:y_n;x_1:x_n)$	R^2	174
$SKEW(x_1:x_n)$	ექსცესის კოეფიციენტი	84
$SLOPE(y_1:y_n;x_1:x_n)$	b_1-ის შეფასება	170
$SMALL(x_1:x_n)$	უმცირესი $k-$ური წევრი	
$STANDARDIZE(x;\mu;\sigma)$	$\frac{x-\mu}{\sigma}$	
$STDEV(x_1:x_n)$	$S_n^{'}$	
$STDEVP(x_1:x_n)$	S_n	
$SUMPRODUCT(x_1:x_n;p_1:p_n)$	$MX=\sum_{i=1}^n x_ip_i$	63
$TDIST(x;n;1)$	$P(\{\omega: T_{(n)}(\omega) > x\})$	93
$TDIST(x;n;2)$	$P(\{\omega: \|T_{(n)}(\omega)\| > x\})$	93
$TINV(p;n)$	$p=P(\{\omega: \|T_{(n)}(\omega)\| > x\}) \to x$	
$TREND(y_1:y_n;x_1:x_n;x;0)$	$\widehat{Y}=b_1x$	
$TREND(y_1:y_n;x_1:x_n;x;1)$	$\widehat{Y}=b_1x+b_0$	
$VAR(x_1:x_n)$	$S_n^{'2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x}_n)^2$	140
$VARP(x_1:x_n)$	$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x}_n)^2$	142
$ZTEST(x_1:x_n)$	$P(\{\omega: N(0,1)(\omega) >$	

$Tools$ / $Data$ $Analisis$-ის სტატისტიკური ფუნქციები
$Anova: \ Single \ Factor,$
$Anova: \ Two - Factor \ With \ Replication,$
$Anova: \ Two - Factor \ Without \ Replication,$
$Correlation,$
$Covariance,$
$Descriptive \ Statistics,$
$Exponential \ Smoothing,$
$F - Test \ Two - Sample \ for \ Variances,$
$Histogram,$
$Moving \ Average,$
$Random \ Number \ Generation,$
$Regression,$
$t - Test: \ Paired \ Two \ Sample \ for \ Means,$
$t - Test: \ Two \ Sample \ Assuming \ Equal \ Variances,$
$t - Test: \ Two \ Sample \ Assuming \ Unequal \ Variances$
$z - Test: \ Two \ Sample \ for \ Means.$

გამოყენებული ლიტერატურა

1. **გვანჯი მანია**, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 1976.

2. **მ.შაორშაძე**, მათემატიკური სტატისტიკა გეოლოგიაში, თბილისი, " განათლება ", 1980.

3. **თ. შერვაშიძე**, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა(ლექციების კურსი თშ-ის "ალბათობის თეორიის" სპეციალობის სტუდენტებისათვის), თბილისი, 1979.

4. **ი.სხირტლაძე, თ.ტუღუში, ა.ცივაძე, მ. ნადარეიშვილი**, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. გამომცემლობა "განათლება ", თბილისი 1990.

5. **გ.ფანცულაია**, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, ნაწილი I (ალბათობის თეორია),თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 1998.

6. **რ.ტყებუჩავა**,ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 2001.

7. **ბ.ი.არგუნოვი, მ.ბ.ბალკი**, ელემენტარული გეომეტრია, მოსკოვი, " განათლება ", 1966 წ.(რუსულად).

8. **ა.ა.ბოროვკოვი**, ალბათობის თეორია, მოსკოვი, " მეცნიერება ", 1976 წ.(რუსულად).

9. **გ.მარი, ა. მოსიძე**, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა კონსპექტი "$ESN - Tbilisi$"-ის სტუდენტებისათვის, თბილისი-2002.

10. **ნ.ლაზრიევა, მ.მანია, გ.მარი, ა.მოსიძე, ა.ტორონჯაძე, თ.ტორონჯაძე, თ.შერვაშიძე**, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათვის, ა.რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი, უმაღლესი სასწავლებელი "$ESN-Tbilisi$", ფონდი "ევრაზია", თბილისი 2000.

სარჩევი