მარიამ ავალიშვილი ♦ გია ავალიშვილი

რაოდენობრივი კვლევის მეთოდები

საქართველოს უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი – 2011

მარიამ ავალიშვილი ♦ გია ავალიშვილი

რაოდენობრივი კვლევის მეთოდები

საქართველოს უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი – 2011

ᲨᲘᲜᲐᲐᲠᲡᲘ

I თავი

სიმრავლეთა თეორიის და კომბინატორიკის ელემენტები

§ 1. სიმრავლე. მოქმედებები სიმრავლეებზე

სიმრავლე წარმოადგენს განსხვავებულ ობიექტთა ერთობლიობას, რომელიც შედგენილია გარკვეული წესის მიხედვით. ნებისმიერი ობიექტისათვის შესაძლებელია იმის დადგენა არის თუ არა ის ამ სიმრავლის ელემენტი.

სიმრავლის შემადგენელ ობიექტებს ***სიმრავლის ელემენტები*** ეწოდება. თუ სიმრავლეს ელემენტები არ გააჩნია, მაშინ მას ***ცარიელი სიმრავლე*** ეწოდება და აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. მაგალითად, შეგვიძლია განვიხილოთ უნივერსიტეტის სტუდენტთა სიმრავლე, რომლის ელემენტებს წარმოადგენენ უნივერსიტეტის სტუდენტები, ან ბიბლიოთეკის მიერ უკანასკნელი ერთი თვის განმავლობაში შეძენილი წიგნების სიმრავლე, რომლის ელემენტები იქნება წიგნები და სხვა.

ვინაიდან სიმრავლის ელემენტები განსხვავებულია, ამიტომ სიმრავლის დახასიათებისას მის შემადგენელ ელემენტებს არ ვიმეორებთ, ე.ი. თუ სიმრავლე შედგება რიცხვებისაგან 1, 2, და 3, ჩვენ შესაბამისი სიმრავლის ჩასაწერად გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნას $\{1,2,3\}$ და არა $\{1,2,3,2\}$ ან $\{1,2,3,3,3,3,3\}$ და ა.შ. ანალოგიურად, თუ ვიხილავთ აუდიტორიაში სტუდენტების სახელების სიმრავლეს, მაშინ შედეგად შეიძლება მივიღოთ შემდეგი სიმრავლე {*ეთერი, ნიკოლოზი, პავლე, დავითი, მაია, თამარი, ეკატერინე, ლია, აკაკი*}, რომელიც შედგება 9 ელემენტისაგან, მაგრამ რეალურად აუდიტორიაში შეიძლება იყოს უფრო მეტი სტუდენტი, მაგალითად, 12 სტუდენტი. რაც იმას ნიშნავს, რომ ზოგიერთ სტუდენტებს აქვთ ერთი და იგივე სახელი, მაგრამ სტუდენტების სახელების სიმრავლის განხილვისას ჩვენ მათ ორჯერ ან უფრო მეტჯერ არ ვიმეორებთ. აგრეთვე შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან სიმრავლე არის ობიექტთა ერთობლიობა, ამიტომ სიმრავლის ჩანაწერში ელემენტთა რიგს მნიშვნელობა არ აქვს. მაგალითად, $\{1,2,3\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}$ წარმოადგენენ ერთი და იმავე სიმრავლეს.

სიმრავლეების აღსანიშნავად, როგორც წესი, იყენებენ დიდ ლათინურ ასოებს $A, B, C, ...$, ხოლო მისი ელემენტებისათვის კი პატარა ლათინურ ასოებს $a, b, c, ...$. იმ ფაქტს, რომ a ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს ასე აღნიშნავენ $a \in A$, ხოლო თუ a ელემენტი არ არის A სიმრავლის ელემენტი, მაშინ წერენ $a \notin A$. სიმრავლის დასახასიათებლად უნდა შეგვეძლოს ნებისმიერი ობიექტისათვის იმის დადგენა ეკუთვნის ის სიმრავლეს თუ არა. აქედან გამომდინარე, სიმრავლე შეიძლება განვსაზღვროთ მისი ყველა ელემენტის ჩამოთვლით, რაც შესაძლებელია, მხოლოდ ელემენტების სასრული რაოდენობის შემთხვევაში, ან უნდა მივუთითოთ რაიმე თვისება, რომლის მიხედვით შევძლებთ იმის ცალსახად დადგენას ეკუთვნის თუ არა ობიექტი სიმრავლეს. თუ ამ თვისებას ავღნიშნავთ $\mathscr{P}$ ასოთი, ხოლო იმ ფაქტს, რომ a ობიექტს აქვს აღნიშნული თვისება $\mathscr{P}(a)$ სიმბოლოთი, მაშინ იმ ობიექტების A სიმრავლე, რომელთაც აქვთ $\mathscr{P}$ თვისება ასე ჩაიწერება $A = \{a \mid \mathscr{P}(a)\}$. მაგალითად, $x^2 - 4x + 3 = 0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება ასე გამოვსახოთ

$$A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1,3\}.$$

განვიხილოთ ნებისმიერი ორი A და B სიმრავლე. A და B სიმრავლეებს ეწოდებათ ტოლი, თუ ისინი ერთი და იგივე ელემენტებისაგან შედგება და ამას ასე ჩაწერენ $A = B$.

თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლეს, მაშინ ვიტყვით, რომ A სიმრავლე არის B სიმრავლის ***ქვესიმრავლე***, რაც ასე ჩაიწერება $A \subseteq B$. თუ $A \subseteq B$ და $A \neq B$, მაშინ ამბობენ, რომ A სიმრავლე არის B სიმრავლის ***მკაცრი ქვესიმრავლე*** და წერენ $A \subset B$. ე.ი., თუ A არის B-ს მკაცრი ქვესიმრავლე, მაშინ A სიმრავლის ყველა ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლეს, მაგრამ B სიმრავლეში არსებობს ისეთი ელემენტი, რომე-

ლიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს. მაგალითად, თუ $A=\{a,b,c\}$ და $B=\{a,b,c,d\}$, მაშინ $A\subset B$, ვინაიდან B სიმრავლეს ეკუთვნის ელემენტი d, რომელიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს. ცარიელი სიმრავლე არის ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლე, ე.ი. $\varnothing\subseteq A$ ნებისმიერი A სიმრავლისათვის. იმ ფაქტს, რომ A სიმრავლე არ არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე ასე ჩაწერენ $A\not\subset B$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $A\subseteq B$ და $A\supseteq B$, მაშინ $A=B$. მართლაც, $A\subseteq B$ ნიშნავს, რომ A სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის B-ს და ამავე დროს $A\supseteq B$ ნიშნავს B სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს. აქედან გამომდინარე, A და B სიმრავლეები შედგება ერთი და იგივე ელემენტებისაგან ანუ A და B სიმრავლეები ტოლია. მაგალითად, $(x-1)^2=0$ განტოლების ფესვთა სიმრავლე ტოლია $\dfrac{x+1}{2}=1$ განტოლების ფესვთა სიმრავლის.

<u>ამოცანა 1.1.</u> ვთქვათ $A=\{1,3,5,a,b\}$, $B=\{b,a,3\}$, $C=\{1,7,a,8,b\}$. განსაზღვრეთ რომელი სიმრავლე რომელი სიმრავლის ქვესიმრავლეა.

<u>ამოხსნა.</u> განვიხილოთ A, B და C სიმრავლეები. მათი ელემენტების შედარებით ვღებულობთ, რომ B სიმრავლის ყველა ელემენტი ამავე დროს არის A სიმრავლის ელემენტიც, ე.ი., $B\subset A$. C სიმრავლე არ არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე, რადგან C-ში არის ელემენტები 7, 8, რომლებიც არ ეკუთვნიან A-ს. ამავე დროს არც A სიმრავლე არ არის C სიმრავლის ქვესიმრავლე, რადგან A-ს ელემენტები 3 და 5 არ ეკუთვნიან C. ანალოგიურად შეიძლება დავასკვნათ, რომ არც B სიმრავლეა C სიმრავლის ქვესიმრავლე და არც C სიმრავლეა B სიმრავლის ქვესიმრავლე.

განვიხილოთ რამოდენიმე ძირითადი ოპერაცია სიმრავლეებზე: თანაკვეთა, გაერთიანება, სხვაობა, დამატება და ნამრავლი.

A და B სიმრავლეების ***თანაკვეთა*** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შედგება ყველა იმ ელემენტისაგან, რომლებიც ეკუთვნიან როგორც A სიმრავლეს, ასევე B სიმრავლეს და აღინიშნება $A\cap B$ სიმბოლოთი. ე.ი. $A\cap B=\{a\,|\,a\in A$ და $a\in B\}$.

A და B სიმრავლეების ***გაერთიანება*** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შედგება ყველა იმ ელემენტისაგან, რომლებიც ეკუთვნიან ან A სიმრავლეს ან B სიმრავლეს და აღინიშნება $A\cup B$ სიმბოლოთი, ე.ი. $A\cup B=\{a\,|\,a\in A$ ან $a\in B\}$.

სიმრავლეთა გაერთიანების და თანაკვეთის ნიშნები შემოტანილი იყო იტალიელი მათემატიკოსის ჯუზეპე პეანოს (1858-1932) მიერ, ხოლო ჩართვის ნიშანი $\subset$ კი შემოტანილი იყო ე. შრედერის (1841-1902) მიერ.

<u>ამოცანა 1.2.</u> ვთქვათ $A=\{1,3,5,8\}$, $B=\{3,5,7\}$ და $C=\{2,4,6,8\}$. იპოვეთ $A\cap B$, $A\cup B$ და $B\cap(A\cup C)$.

<u>ამოხსნა.</u> თანაკვეთის და გაერთიანების ოპერაციების განმარტების გამოყენებით მივიღებთ, რომ $A\cap B=\{1,3,5,8\}\cap\{3,5,7\}=\{3,5\}$, $A\cup B=\{1,3,5,8\}\cup\{3,5,7\}=\{1,3,5,7,8\}$. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $B\cap(A\cup C)$, ჯერ უნდა ვიპოვოთ $A\cup C=\{1,2,3,4,5,6,8\}$ და შემდეგ განვსაზღვროთ $B\cap(A\cup C)=\{3,5\}$.

A და B სიმრავლეების ***სხვაობა*** აღინიშნება $A\setminus B$ სიმბოლოთი და წარმოადგენს ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნიან A სიმრავლეს და არ ეკუთვნიან B სიმრავლეს. ე.ი. $A\setminus B=\{a\,|\,a\in A$ და $a\notin B\}$.

<u>ამოცანა 1.3.</u> ვთქვათ $A=\{3,5,a,b\}$ და $B=\{3,c,d,7\}$. განსაზღვრეთ $A\setminus B$ და $B\setminus A$.

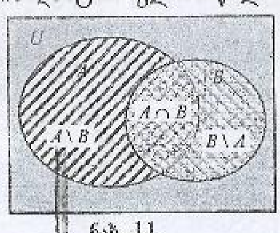
<u>ამოხსნა.</u> იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $A\setminus B$ უნდა ამოვწეროთ A სიმრავლის ის ელემენტები, რომლებიც არ ეკუთვნიან B სიმრავლეს. ეს ელემენტებია $5,a,b$. აქედან გამომდინარე, $A\setminus B=\{5,a,b\}$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $B\setminus A=\{c,d,7\}$.

უნივერსალური სიმრავლე ეწოდება ყველა შესასწავლ ობიექტთა სიმრავლეს. მას U სიმბოლოთი ავღნიშნავთ. უნივერსალური სიმრავლის და სხვაობის ოპერაციის გამოყენებით განისაზღვრება სიმრავლის დამატება, რომელიც შედგება კონკრეტული ამოცანის შესაბამის სიმრავლეში არ მოხვედრილი ელემენტებისაგან. A სიმრავლის ***დამატება*** ეწოდება U უნივერსალური სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც არ ეკუთვნიან A სიმრავლეს და აღინიშნება $\overline{A}$ სიმბოლოთი. ე.ი. $\overline{A}=\{x \mid x\in U$ და $x\notin A\}$. შევნიშნოთ, რომ $A\cup\overline{A}=U$ და $A\cap\overline{A}=\varnothing$.

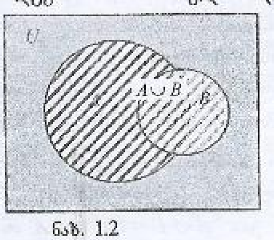
<u>ამოცანა 1.4.</u> ვთქვათ უნივერსალური სიმრავლეა $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ხოლო A სიმრავლე კი მოცემულია შემდეგი სახით $A=\{1,3,5,7,9\}$. იპოვეთ A სიმრავლის დამატება.

<u>ამოხსნა.</u> განმარტების თანახმად უნდა ამოვიწეროთ U უნივერსალური სიმრავლის ის ელემენტები, რომლებიც არ ეკუთვნიან A სიმრავლეს, ეს ელემენტებია $2,4,6,8$. აქედან გამომდინარე, A სიმრავლის დამატებაა $\overline{A}=\{2,4,6,8\}$.

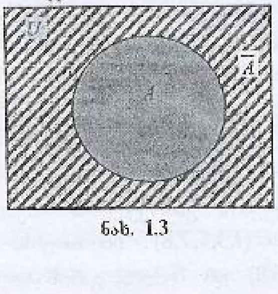
სხვადასხვა ობიექტებისაგან შემდგარი სიმრავლეების თვალსაჩინო გეომეტრიული ინტერპრეტაციისათვის მოსახერხებელია სიმრავლეების გამოსახვა სიბრტყეზე წრეების, მართკუთხედების ან სხვა ფიგურების საშუალებით, რაც მნიშვნელოვნად აადვილებს სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულების აღქმას. სიმრავლეების ზემოაღნიშნულ გრაფიკულ წარმოდგენას ***ვენის დიაგრამა*** ეწოდება. ვენის დიაგრამა შეგვიძლია გამოვიყენოთ სიმრავლეების თანაკვეთის, გაერთიანების და დამატების ილუსტრირებისათვის. ნახ. 1.1-1.3-ზე A და B სიმრავლეები გამოსახულია წრეებით, ხოლო უნივერსალური სიმრავლე კი მართკუთხედით. ნახ. 1.1-ზე გამოსახულია A და B სიმრავლეების თანაკვეთა და სხვაობები. ნახ. 1.2-ზე დაშტრიხულია A და B სიმრავლეების გაერთიანება, ხოლო ნახ. 1.3-ზე კი უნივერსალური U სიმრავლის დაშტრიხული ნაწილი წარმოადგენს A სიმრავლის დამატებას.



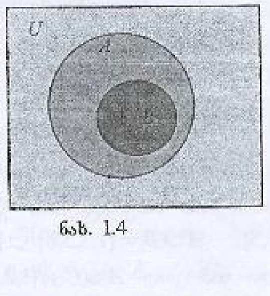
ნახ. 1.1



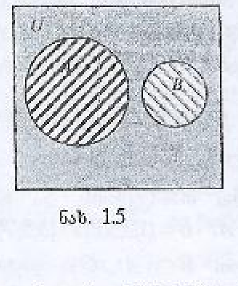
ნახ. 1.2



ნახ. 1.3



ნახ. 1.4



ნახ. 1.5

თუ B სიმრავლე არის A სიმრავლის მკაცრი ქვესიმრავლე, ე.ი. $B\subset A$, მაშინ შესაბამისი ვენის დიაგრამა მიიღებს ნახ. 1.4-ზე მოყვანილ სახეს. თუ A და B სიმრავლეებს არ გააჩნიათ საერთო ელემენტი, ე.ი. $A\cap B=\varnothing$, მაშინ A და B სიმრავლეებს ეწოდებათ ***თანაუკვეთი*** სიმრავლეები და ვენის დიაგრამის საშუალებით ისინი გამოსახულია ნახ. 1.5-ზე.

სიმრავლეებზე ზემომოყვანილი ოპერაციები აკმაყოფილებენ გარკვეულ თვისებებს, რომლებიც უშუალოდ გამომდინარეობენ ამ ოპერაციების განმარტებებიდან. სახელდობრ, ნებისმიერი A, B და C სიმრავლეებისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

1. $A\cup B=B\cup A$;
2. $A\cap B=B\cap A$;

3. $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$;
4. $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$;
5. $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$;
6. $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$;
7. $A\cup A = A$;
8. $A\cap A = A$;
9. $A\setminus B = A$ სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A\cap B = \varnothing$;
10. $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$;
11. $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$.

სიმრავლეებზე გაერთიანების, თანაკვეთის, სხვაობის და დამატების ოპერაციებთან ერთად ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ოპერაციას წარმოადგენს სიმრავლეთა პირდაპირი ანუ დეკარტული ნამრავლი. აღნიშნული ოპერაცია გამოიყენება სხვადასხვა რეალური ობიექტებისაგან შემდგარი სიმრავლეების აღწერისათვის, რომლებსაც გააჩნიათ რამოდენიმე მახასიათებელი.

A და B სიმრავლეების ***პირდაპირი ანუ დეკარტული ნამრავლი*** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შედგება დალაგებული (a,b) წყვილებისაგან, სადაც წყვილის პირველი ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს, ხოლო მეორე კი B სიმრავლეს, ე.ი. $a\in A$, $b\in B$ და წყვილში ელემენტების მიმდევრობას აქვს მნიშვნელობა ანუ თუ $a\neq b$, მაშინ $(a,b)\neq(b,a)$. სიმრავლეთა პირდაპირი ნამრავლი აღინიშნება $A\times B$ სიმბოლოთი და მისი განმარტების თანახმად $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A$ და $b\in B\}$. ანალოგიურად განიმარტება სამი და უფრო მეტი სიმრავლის პირდაპირი ნამრავლი. საზოგადოდ, A_1, A_2, A_3, ..., A_n სიმრავლეების პირდაპირი ნამრავლი $A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times A_n$ წარმოადგენს დალაგებული $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$ n-ეულების სიმრავლეს, სადაც პირველი ელემენტი ეკუთვნის A_1, მეორე ეკუთვნის A_2, და ა.შ. უკანასკნელი ელემენტი ეკუთვნის A_n, ე.ი. $A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times\ \times A_n=\{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)\,|\,a_1\in A_1$ და $a_2\in A_2$, ... , $a_n\in A_n\}$. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი A სიმრავლისათვის $\varnothing\times A = A\times\varnothing = \varnothing$.

სიმრავლეთა პირდაპირი ნამრავლი გამოიყენება ისეთი ობიექტების აღწერისას, რომელთათვისაც ჩვენ გვაინტერესებს ერთდროულად რამოდენიმე მახასიათებლის ცოდნა. მაგალითად, გვინდა აღვწეროთ მაღაზიაში გასაყიდად გამოტანილი მაისურების სიმრავლე. ვთქვათ მაისურების შესახებ გვაინტერესებს მხოლოდ მათი ფერი და ზომა. ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ მაღაზიაში წარმოდგენილია შავი, ლურჯი და მწვანე მაისურები, რომელთა ზომებია M, L და XL. მოყვანილ შემთხვევაში ყველა მაისურების სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ ფერების სიმრავლის {შავი, ლურჯი, მწვანე} და ზომების სიმრავლის {M,L,XL} პირდაპირი ნამრავლის სახით: {(შავი, M), (ლურჯი, M), (მწვანე, M), (შავი, L), (ლურჯი, L), (მწვანე, L), (შავი, XL), (ლურჯი, XL), (მწვანე, XL)}. როგორც წესი რეალურ ობიექტებს ახასიათებს მრავალი თვისება, ამიტომ მათი აღწერისას ხშირად აუცილებელია რამდენიმე სიმრავლის პირდაპირი ნამრავლის განხილვა.

სიმრავლეთა პირდაპირი ანუ დეკარტული ნამრავლის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მაგალითს წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლის თავის თავზე დეკარტული ნამრავლი ანუ $\mathbf{R}^2$. აღნიშნული სიმრავლის საშუალებით შეიძლება აღვწეროთ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, რომელზეც შემოღებულია დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა.

თუ A სიმრავლე შეიცავს ელემენტების სასრულ რაოდენობას, მაშინ მას ***სასრული*** სიმრავლე ეწოდება და მისი ელემენტების რაოდენობა $n(A)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მაგალითად, თუ $A=\{1,2,\ldots,25\}$, მაშინ $n(A)=25$. ვინაიდან ცარიელ სიმრავლეს ელემენტები არ გააჩნია ამიტომ $n(\varnothing)=0$. განვიხილოთ სამი ელემენტისაგან შემდგარი სიმრავლე $A=\{a,b,c\}$. ამოვწეროთ $A=\{a,b,c\}$ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე:

ნული ელემენტიანი ქვესიმრავლე	ერთ ელემენტიანი ქვესიმრავლეები	ორ ელემენტიანი ქვესიმრავლეები	სამ ელემენტიანი ქვესიმრავლე
$\varnothing$	$\{a\},\{b\},\{c\}$	$\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$

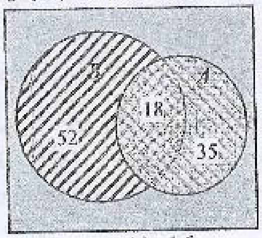
როგორც ვხედავთ სამ ელემენტიან A სიმრავლეს გააჩნია $8=2^3$ ქვესიმრავლე. აღნიშნული კანონზომიერება შეიძლება განვაზოგადოთ ნებისმიერი სასრული სიმრავლისათვის. სახელდობრ, თუ A სიმრავლე შედგება n-ელემენტისაგან, მაშინ მას გააჩნია 2^n ქვესიმრავლე. მაგალითად, ხუთ ელემენტიან სიმრავლეს $A=\{a,b,c,d,e\}$ გააჩნია $2^5=32$ ქვესიმრავლე.

ამოცანა 1.5. 100 სტუდენტის გამოკითხვის შედეგად დადგინდა, რომ 35 სტუდენტმა აირჩია უმაღლესი მათემატიკის საგანი, 52 სტუდენტმა საოფისე კომპიუტერული პროგრამები, ხოლო 18 სტუდენტმა კი აირჩია ორივე საგანი.

ა) რამდენმა სტუდენტმა აირჩია უმაღლესი მათემატიკის ან საოფისე კომპიუტერული პროგრამების საგანი?

ბ) რამდენ სტუდენტს არ აურჩევია არც ერთი საგანი?

ამოხსნა. A-თი აღვნიშნოთ იმ სტუდენტთა სიმრავლე, რომლებმაც აირჩიეს უმაღლესი მათემატიკის საგანი, ხოლო B-თი კი იმ სტუდენტთა სიმრავლე, რომლებმაც აირჩიეს საოფისე კომპიუტერული პროგრამები, მაშინ $n(A)=35$, $n(B)=52$, $n(A\cap B)=18$. გამოვიყენოთ ვენის დიაგრამა ამ ამოცანის ამოსახსნელად (ნახ. 1.6).



ნახ. 1.6

ა) ვინაიდან $n(A\cap B)=18$, ამიტომ A და B სიმრავლეების საერთო ნაწილში იქნება 18 ელემენტი, ხოლო წრის დანარჩენ ნაწილში, რომელიც გამოსახავს A-ს იქნება 35-18=17 ელემენტი. ანალოგიურად, B სიმრავლის თანაკვეთის გარეთ დარჩენილ ნაწილში იქნება 52-18=34 ელემენტი. აქედან დავასკვნით, რომ უმაღლესი მათემატიკა ან საოფისე კომპიუტერული პროგრამები აურჩევია 17+18+34=69 სტუდენტს.

ბ) ვინაიდან სულ იყო 100 სტუდენტი, რომელთა შორის 69 სტუდენტმა აირჩია უმაღლესი მათემატიკა ან საოფისე კომპიუტერული პროგრამები, ამიტომ 100-69=31 სტუდენტს არ აურჩევია არც ერთი საგანი.

შევნიშნოთ, რომ ამოცანა 1.5-ის ამოხსნაში მოყვანილი მსჯელობა წარმოადგენს ორი სასრული სიმრავლისათვის ზოგადი კანონზომიერების კერძო შემთხვევას. მართლაც, განვიხილოთ ორი სასრული A და B სიმრავლე. თუ დავითვლით A და B სიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობებს და შევკრებთ მიღებულ სიდიდეებს, მაშინ ის ელემენტები, რომლებიც ეკუთვნიან როგორც A-ს ასევე B-ს, ე.ი. ეკუთვნიან $A\cap B$-ს, ჩათვლილი აღმოჩნდება ორჯერ. აქედან გამომდინარე, იმისათვის, რომ დავითვალოთ იმ ელემენტთა რაოდენობა რომლებიც ეკუთვნიან ან A სიმრავლეს ან B სიმრავლეს, ანუ დავითვალოთ $n(A\cup B)$, ჩვენ $n(A)+n(B)$-ს უნდა გამოვაკლოთ $A\cap B$-ში არსებული ელემენტების რაოდენობა. ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1.1. თუ A და B სასრული სიმრავლეებია, მაშინ

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \quad (1.1)$$

მიღებული ფორმულის გამოყენებით, ამოცანა 1.5-ის პირობებში ჩვენ გვექნება $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 35 + 52 - 18 = 69$, ე.ი. 69 სტუდენტმა აირჩია უმაღლესი მათემატიკის ან საოფისე კომპიუტერული პროგრამების საგანი.

(1.1) ფორმულის კერძო შემთხვევას მივიღებთ მაშინ, როცა $A \cap B = \varnothing$. ამ შემთხვევაში $n(A \cap B) = 0$ და სამართლიანია

თეორემა 1.2. თუ A და B თანაუკვეთი სასრული სიმრავლეებია, მაშინ

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B). \quad (1.2)$$

ფორმულა (1.2) შეიძლება განზოგადდეს თანაუკვეთი სიმრავლეების ნებისმიერი რაოდენობისთვის.

თეორემა 1.3. თუ $A_1, A_2, \dots, A_k$ სასრული სიმრავლეებია, რომელთაგან ნებისმიერი ორი სიმრავლე თანაუკვეთია, მაშინ

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_k). \quad (1.3)$$

თეორემა 1.1-ის ანალოგიური თეორემა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა გვაქვს ნებისმიერი სამი სასრული A, B და C სიმრავლე. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.4. თუ A, B და C სასრული სიმრავლეებია, მაშინ

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $(A \cup B) \cap C$ და $(A \cup C) \cap (B \cup C)$, თუ
   ა) $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{1,5,6,7\}$ და $C = \{1,2,4,6,8,9\}$;
   ბ) $A = \{3,6,4,9\}$, $B = \{1,5,8,9,10\}$ და $C = \{-1,-5,7,8\}$;
   გ) $A = \{3,-5,-2,1\}$, $B = \{3,-2,0,7,8\}$ და $C = \{-5,-2,6,7,8\}$;
   დ) $A = \{-1,4,8,9\}$, $B = \{-2,0,6,9\}$ და $C = \{0,-5,8,2,5\}$.
2. იპოვეთ $A \cup B$, $A \cap C$ და $(A \cap B) \cup C$, თუ
   ა) $A =$ {ყვითელი, ლურჯი, მწვანე, ირემი, ციყვი, კურდღელი},
   $B =$ {მწვანე, ციყვი, მატარებელი}, $C =$ {ლურჯი, აქლემი, კურდღელი, მელია, ლომი};
   ბ) $A = \{a, b, c, d, -5, -7, 8\}$, $B = \{b, c, -7, 0,$ წითელი$\}$, $C =$ {ლომი, თაგვი, a, b, -7, 0, f}.
3. დაადგინეთ რომელი სიმრავლე რომელი სიმრავლის ქვესიმრავლეა
   ა) $A =$ {ფორთოხალი, ვაშლი, ქლიავი, ატამი}, $B =$ {ქლიავი, ბროწეული, ალუბალი},
   $C =$ {ვაშლი, ატამი};
   ბ) $A =$ {ირემი, ჯიხვი, სპილო, მაიმუნი, ლომი}, $B =$ {ირემი, მაიმუნი, ჯიხვი, ლომი}
   $C =$ {ჯიხვი, სპილო, დათვი};
   გ) $A =$ {წრე, კუბი, მართკუთხედი, a, b},
   $B =$ {წრე, კუბი, მართკუთხედი, სამკუთხედი, a, b, c, d},
   $C =$ {კუბი, წრე, სფერო, პირამიდა, f, g};
   დ) $A = \{-1,-5,0,5,-8\}$, $B = \{-1,-6,-5,-8\}$, $C = \{-3,5,0\}$.

4. იპოვეთ A სიმრავლის დამატება $\bar{A}$, თუ

ა) $A=\{$მერცხალი, ტორორლა, ხოხობი, კოდალა$\}$,

$U=\{$მერცხალი, ტოროლა, კოდალა, არწივი, შაშვი, მტრედი, თოლია, ხოხობი$\}$;

ბ) $A=\{$ქედანი, მწყერი, დათვი$\}$,

$U=\{$ქედანი, მწყერი, დათვი, ირემი, ლომი, ფოცხვერი$\}$;

გ) $A=\{-5, a, b, 7,9\}$, $U=\{-5,-3, a, b, 5, 7, 6, 10, 12\}$.

5. ვთქვათ, უნივერსალური სიმრავლე $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ხოლო $A=\{1,3,4,5,9\}$, $B=\{2,4,6,7,8\}$ და $C=\{1,3,4,6\}$, იპოვეთ

ა) $\overline{A}$, $\overline{C}$, $\overline{A\cap B}$;

ბ) $\overline{B\cup C}$, $\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{B}\cap\overline{C}$;

გ) $\overline{A\cap\overline{C}}$, $\overline{A\cup B\cup C}$, $\overline{A\cap B\cap C}$, $\overline{\overline{B}\cup C}$.

6. ამოწერეთ $A=\{a,b,c,d\}$ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეები.

7. ვთქვათ A და B სასრული სიმრავლეებია.

ა) იპოვეთ $n(A\cup B)$, თუ $n(A)=15$, $n(B)=20$ და $n(A\cap B)=10$;

ბ) იპოვეთ $n(A\cap B)$, თუ $n(A)=30$, $n(B)=40$ და $n(A\cup B)=45$;

გ) იპოვეთ $n(A)$, თუ $n(A\cup B)=60$, $n(A\cap B)=40$ და $n(A)=n(B)$;

დ) იპოვეთ $n(B)$, თუ $n(A\cup B)=50$, $n(A\cap B)=10$ და $n(A)=20$.

8. 500 ადამიანის გამოკითხვის შედეგად, დადგინდა, რომ მომავალ თვეში 200 აპირებს საყოფაცხოვრებო ტექნიკის შეძენას, 150 აპირებს მანქანის ყიდვას, ხოლო 25 ადამიანმა განაცხადა, რომ ისინი აპირებენ როგორც საყოფაცხოვრებო ტექნიკის ასევე მანქანის შეძენას. რამდენი ადამიანი არ აპირებს შეიძინოს არც საყოფაცხოვრებო ტექნიკა და არც მანქანა? რამდენი ადამიანი აპირებს მხოლოდ მანქანის შეძენას?

9. სტუდენტთა გამოკითხვის შედეგად დადგინდა, რომ ზაფხულის სემესტრის განმავლობაში 200 სტუდენტი აპირებს შეისწავლოს უმაღლესი მათემატიკის საგანი, 150 სტუდენტი აპირებს შეისწავლოს ეკონომიკის საგანი, 75 სტუდენტი აპირებს შეისწავლოს ორივე საგანი, ხოლო 275 სტუდენტი კი არ აპირებს არც უმაღლესი მათემატიკის და არც ეკონომიკის შესწავლას. რამდენი სტუდენტი მონაწილეობდა გამოკითხვაში?

10. 100 ინვესტორის გამოკითხვის შედეგად დადგინდა, რომ 40 ინვესტორი ფლობს წილს IBM-ში, 40 ფლობს წილს HP-ში, 45 ფლობს წილს Samsung-ში, 20 ფლობს წილს როგორც IBM-ში, ასევე Samsung-ში, 15 ფლობს წილს HP-ში და Samsung-ში, 20 ფლობს წილს IBM-სა და HP-ში, ხოლო 5 ინვესტორი კი ფლობს წილს სამივე კომპანიაში.

ა) რამდენ ინვესტორს არ აქვს წილი არც ერთ კომპანიაში?

ბ) რამდენ ინვესტორს აქვს წილი მხოლოდ IBM-ში?

გ) რამდენ ინვესტორს არ აქვს წილი არც IBM-ში და არც Samsung-ში?

დ) რამდენ ინვესტორს აქვს წილი ან IBM-ში ან HP-ში, მაგრამ არ აქვს წილი Samsung-ში?

11. იპოვეთ შემდეგი სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი $A\times B$ და $B\times A$

ა) $A=\{a.f.g,5\}$ და $B=\{-1,2,-3\}$

ბ) $A=\{$I კურსი, II კურსი, III კურსი$\}$ და $B=\{$ბიზნესი, მარკე- ტინგი, მენეჯმენტი$\}$

გ) $A=\{-3,-5,10\}$ და $B=\{-2,a,c\}$

12. იპოვეთ $A\setminus B$, $B\setminus C$, $C\setminus B$ და $A\setminus C$, თუ

ა) $A=\{-2,-5,-1,5,8,10,20,25\}$, $B=\{-3,5,10,-15\}$ და $C=\{-2,-5,-8,15,18\}$

ბ) $A=\{-2,-10,-15,20,15,-5,-25\}$, $B=\{15,100,120,150,200\}$ და $C=\{5,10,-5,15,100,150\}$

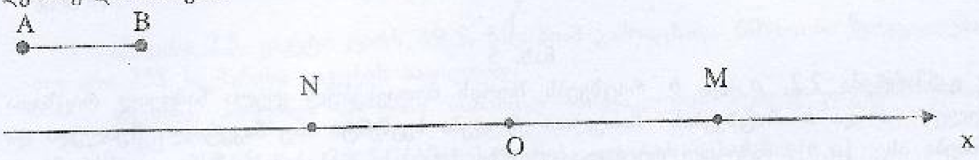
§ 2. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, რიცხვის მოდული და მისი ძირითადი თვისებები, შუალედი და ინტერვალი, პროცენტი

განვიხილოთ რაიმე წრფე და ავიღოთ მასზე ფიქსირებული O წერტილი. ეს წერტილი წრფეს ყოფს ორ ნაწილად. წრფეზე ერთ-ერთი მიმართულება მივიღოთ დადებით მიმართულებად, რომელიც მასზედ აღვნიშნოთ ისრით, ხოლო მოპირდაპირე მიმართულება კი მივიღოთ უარყოფითად (ნახ. 1).

ნახ. 1

წრფეს, რომელზედაც არჩეულია ისრით ნაჩვენები დადებითი მიმართულება, ეწოდება ღერძი, ხოლო O წერტილს კი – სათავე.

ავიღოთ ღერძი და სიგრძის საზომ ერთეულად ავირჩიოთ AB მონაკვეთის სიგრძე (ნახ. 2). ვაწარმოოთ ამ მონაკვეთით გადაზომვა აღებულ ღერძზე O სათავიდან, მაშინ შეგვიძლია ყოველ ნამდვილ რიცხვს შევუსაბამოთ ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი ღერძზე და პირიქით.

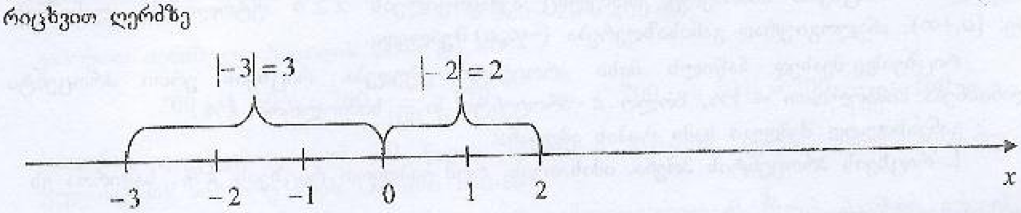


ნახ. 2

ამრიგად, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი ღერძზე, ამასთან ისე, რომ ღერძის ყოველი წერტილი ერთადერთ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება. ამგვარად, დავამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა რიცხვთა სიმრავლესა და ღერძის ყველა წერტილის სიმრავლეს შორის.

ღერძს, რომლის ყოველ წერტილს ზემოაღნიშნული წესით შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი, რიცხვითი ღერძი ეწოდება. აღვნიშნოთ ეს ღერძი Ox-ით.

ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისათვის, მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა გეომეტრიულად აღიწერება, როგორც მანძილი კოორდინატთა სათავიდან ამ წერტილამდე რიცხვით ღერძზე



თუ a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა (მოდული) აღინიშნება სიმბოლოთი $|a|$. განმარტების ძალით

$$|a|=\begin{cases} a, & a\ge 0\\ -a, & a<0. \end{cases}$$

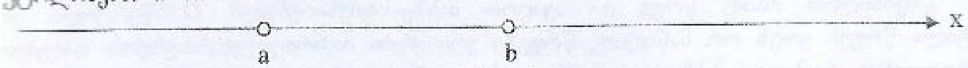
რიცხვის მოდულს აქვს შემდეგი თვისებები:

$$|a|=|-a|; \quad |a\pm b|\le |a|+|b|; \quad |a-b|\ge |a|-|b|;$$

$$|ab|=|a|\cdot|b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}, \quad (b\ne 0).$$

ვთქვათ, a და b ორი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია და $a<b$.

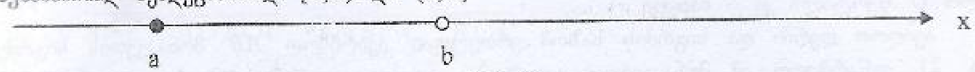
განმარტება 2.1. a და b რიცხვებს შორის მოთავსებულ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, ღია შუალედი ანუ ინტერვალი ეწოდება და აღინიშნება ასე (a,b) (ნახ. 3). ამრიგად, შუალედი არის ყველა იმ x რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს: $a < x < b$.



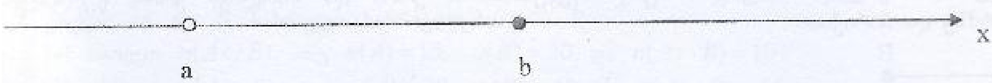
ნახ. 3

რიცხვთა ღერძზე (a,b)-ს შეესაბამება მონაკვეთი, რომლის ბოლო წერტილებია a და b და რომლებიც არ ეკუთვნიან ამ მონაკვეთს.

ყველა იმ x ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს $a \le x < b$ (ნახ. 4) ან $a < x \le b$ (ნახ. 5) ეწოდება **ნახევარსეგმენტი** და აღინიშნება შესაბამისად შემდეგნაირად: $[a,b)$ და $(a,b]$

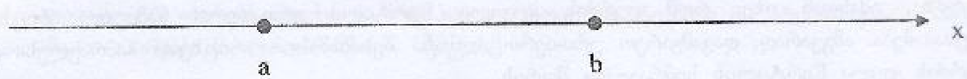


ნახ. 4



ნახ. 5

განმარტება 2.2. a და b რიცხვებს შორის მოთავსებულ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს a და b რიცხვების ჩათვლით ეწოდება **სეგმენტი** ანუ **ჩაკეტილი შუალედი** და აღინიშნება ასე: $[a,b]$. ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე $[a,b]$-ს შეესაბამება მონაკვეთი, რომლის ბოლო წერტილებია a და b და რომლებიც ეკუთვნიან ამ მონაკვეთს. ამრიგად, სეგმენტი არის ყველა იმ x რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს: $a \le x \le b$



ნახ. 6

შუალედი შეიძლება იყოს უსასრულო. მაგალითად, ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (ანუ რიცხვთა მთელი ღერძი) უსასრულო შუალედია, რომელიც აღინიშნება ასე: $(-\infty,+\infty)$. ყველა დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე იქნება უსასრულო შუალედი: $(0,+\infty)$, ხოლო ყველა ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $x \ge a$ უტოლობას, აღინიშნება ასე: $[a,+\infty)$. ანალოგიურად განისაზღვრება $(-\infty,a)$ შუალედი.

რიცხვის მეასედ ნაწილს მისი პროცენტი ეწოდება. რიცხვის ერთი პროცენტი აღინიშნება სიმბოლოთი $-$ 1%, ხოლო k პროცენტი კი $-$ სიმბოლოთი $k\%$.

განვიხილოთ შემდეგი სამი ტიპის ამოცანა:

1. რიცხვის პროცენტის პოვნა. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რიცხვის $k\%$, საჭიროა ეს რიცხვი გავამრავლოთ $\dfrac{k}{100}$-ზე.

ამოცანა 2.1. იპოვეთ 50-ის 36%.

ამოხსნა. განმარტების თანახმად 50-ის 36% ტოლია $50 \cdot \dfrac{36}{100} = 50 \cdot \dfrac{9}{25} = 2 \cdot 9 = 18.$.

2. რიცხვის პოვნა მისი პროცენტის საშუალებით. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რომელი რიცხვის $k\%-$ს წარმოადგენს მოცემული რიცხვი, საჭიროა იგი გავამრავლოთ $\dfrac{100}{k}-$ზე.

ამოცანა 2.2. რიცხვის 24% არის 36. იპოვეთ ეს რიცხვი

ამოხსნა. განმარტების თანახმად გვექნება $36 \cdot \dfrac{100}{24} = 3 \cdot \dfrac{100}{2} = 150$. ე. ი. საძიებელი რიცხვი ყოფილა 150.

3. ორი რიცხვის პროცენტული ფარდობა. იმისათვის, რომ დავადგინოთ ერთი რიცხვი მეორის რამდენ პროცენტს შეადგენს, საჭიროა მათი ფარდობა გავამრავლოთ 100-ზე.

ამოცანა 2.3. იპოვეთ 50–ის რამდენი პროცენტია 12.

ამოხსნა. განმარტების თანახმად

$$\frac{12}{50}\cdot 100 = 24\,.$$

ე. ი. 12 ყოფილა 50–ის 24%.

ამოცანა 2.4. საქონლის ფასი თავდაპირველად შეამცირეს 20%-ით, ხოლო შემდეგ ეს ახალი ფასი შეამცირეს კვლავ 15%-ით. სულ რამდენი პროცენტით შემცირდა საქონლის ფასი?

ამოხსნა. ვთქვათ საქონლის თავდაპირველი ფასი იყო x ლარი, ფასის შემცირების შემდეგ მისი ფასი ტოლი იქნებოდა $x - x\cdot\frac{20}{100} = 0{,}8x$ ლარის, ხოლო ფასის კიდევ ერთხელ შემცირების შემდეგ კი $0{,}8x - 0{,}8x\cdot\frac{15}{100} = 0{,}68x$. მაშასადამე, მივიღეთ, რომ საქონლის ფასი შემცირდა $x - 0{,}68x = 0{,}32x$ ლარით და $\frac{0{,}32x}{x}\cdot 100\% = 32\%$-ით.

ამოცანა 2.5. ჟაკეტი ღირს 49 $, მაღაზიამ გამოაცხადა 60%-იანი ფასდაკლება. იქნება თუ არა 25$ საკმარისი ჟაკეტის საყიდლად?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად ფასდაკლების შემდეგ ჟაკეტის ფასი იქნება $49 - 49\cdot\frac{60}{100} = 19{,}6\$$, ე.ი. 25 $ საკმარისი იქნება ჟაკეტის შესაძენად.

ამოცანა 2.6. ცნობილია, რომ ადამიანის ვარჯიშის დროს მისი გულისცემის სიხშირე იზრდება. უსაფრთხო ვარჯიშად ითვლება ისეთი ვარჯიში, რომლის დროსაც გულისცემის სიხშირე არის გულისცემის მაქსიმალური სიხშირის 60%-დან 80%-მდე. მაქსიმალური გულისცემის სიხშირე კი გამოითვლება შემდეგნაირად 220-ს უნდა გამოვაკლოთ ადამიანის ასაკი. გამოიკვლიეთ რა შემთხვევაშია

ა) 20 წლის ადამიანის ვარჯიში უსაფრთხო

ბ) 6 წლის ბავშვის ვარჯიში უსაფრთხო

ამოხსნა. ა) ჯერ გამოვითვალოთ გულისცემის მაქსიმალური სიხშირე 20 წლის ადამიანისთვის, რომელიც ტოლი იქნება

$$220 - 20 = 200\text{-ის},$$

ვიპოვოთ აღნიშული სიდიდის 60% და 80%

$$200\text{-ის } 60\% = 200\cdot\frac{60}{100} = 120 \qquad \text{და} \qquad 200\text{-ის } 80\% = 200\cdot\frac{80}{100} = 160$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ 20 წლის ადამიანის ვარჯიში იქნება უსაფრთხო, თუ მისი გულისცემის სიხშირე არის 120-დან 160-მდე

ბ) ა) პუნქტის ანალოგიურად ჯერ გამოვითვალოთ 6 წლის ბავშვის გულისცემის მაქსიმალური სიხშირე

$$220 - 6 = 214\,,$$

ვიპოვოთ აღნიშნული სიდიდის 60% და 80%

$$214\text{-ის } 60\% = 214\cdot\frac{60}{100} = 128{,}4 \approx 129 \qquad \text{და} \qquad 214\text{-ის } 80\% = 214\cdot\frac{80}{100} = 171{,}2 \approx 171.$$

მაშასადამე 6 წლის ბავშვის ვარჯიში იქნება უსაფრთხო, თუ მისი გულისცემის სიხშირე არის 120-დან 171-მდე.

სავარჯიშოები

1. დახაზეთ რიცხვითი ღერძი და აღნიშნეთ მასზე წერტილები: ა) $A(9)$; ბ) $B(-3)$; $C(6)$;
2. რიცხვით ღერძზე იპოვეთ ისეთი წერტილები, რომლებიც 8-ის ტოლი მანძილით იქნება დაშორებული -7 წერტილიდან.
3. გამოიანგარიშეთ: ა) $-|-10|+|-8|$; ბ) $(-6+|-12|)(8-|-10|)$
4. იპოვეთ ყველა უარყოფითი მთელი რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია (-9,+9) შუალედში
5. იპოვეთ ყველა არაუარყოფითი მთელი რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია (-6,+6) შუალედში
6. იპოვეთ ყველა უარყოფითი მთელი რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია [-11,+11] სეგმენტში
7. იპოვეთ ყველა დადებითი მთელი რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია (-7,+7) შუალედში
8. იპოვეთ ყველა უარყოფითი მთელი რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია [-12,+6) ნახევარსეგმენტში
9. იპოვეთ ყველა დადებითი მთელი რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია (-8,+11] ნახევარსეგმენტში
10. ჭეშმარიტია თუ არა დამოკიდებულებები:
    ა) $-|-x|=|x|$ ბ) $|-(-x)|=|x|$.
11. გამოთვალეთ:
    ა) 90–ის 12%; ბ) 86–ის 5%; გ) 120–ის 35%; დ) 60–ის 15%.
12. განსაზღვრეთ რომელია მეტი?
    ა) 105–ის 15% თუ 15–ის 105%;
    ბ) 820–ის 26% თუ 260–ის 82%
13. იპოვეთ რიცხვი, რომლის 20% არის: 12; 18; 1,5; 6,4; 12,5; 2,54.
14. იპოვეთ რიცხვი, თუ მისი: ა) 24% შეადგენს 72-ს; ბ) 72% შეადგენს 180-ს;
15. 15–ის რამდენ პროცენტს შეადგენს: 12; 135; 150; 300; 1260.
16. 200 სტუდენტიდან 11 არის ცაცია, სტუდენტების რამდენი პროცენტია ცაცია?
17. სტუდენტმა სწორად უპასუხა 20 კითხვიდან 15-ს, კითხვების რამდენ პროცენტს გასცა სწორად პასუხი სტუდენტმა?
18. ექიმმა გამოიკვლია მძიმედ დაავადებული 100 პაციენტი, მისი პაციენტების 34% დაიღუპა 6 წლის ასაკამდე, ხოლო 41% დაიღუპა სანამ გახდებოდა 26 წლის. პაციენტების რა ნაწილმა იცოცხლა 26 წელი ან უფრო მეტი?
19. მაღაზიამ აზორციელებს 75% სეზონურ ფასდაკლებას სპორტულ ტანსაცმელზე. რა ეღირება სპორტული ტანსაცლელი ფასდაკლების შემდეგ, თუ ფასდაკლებამდე ის ღირდა 40 ლარი.
20. მაღაზია ახორციელებს 30%-იან ფასდაკლებას. იპოვეთ რა თანხას დაზოგავს მომხმარებელი, თუ შეიძენს
    ა) მაისურს, რომელიც ფასდაკლებამდე ღირდა 17 ლარი
    ბ) ჟაკეტს, რომელიც ფასდაკლებამდე ღირდა 129 ლარი

§ 3. კომბინატორიკის ელემენტები. ნიუტონის ბინომური ფორმულა

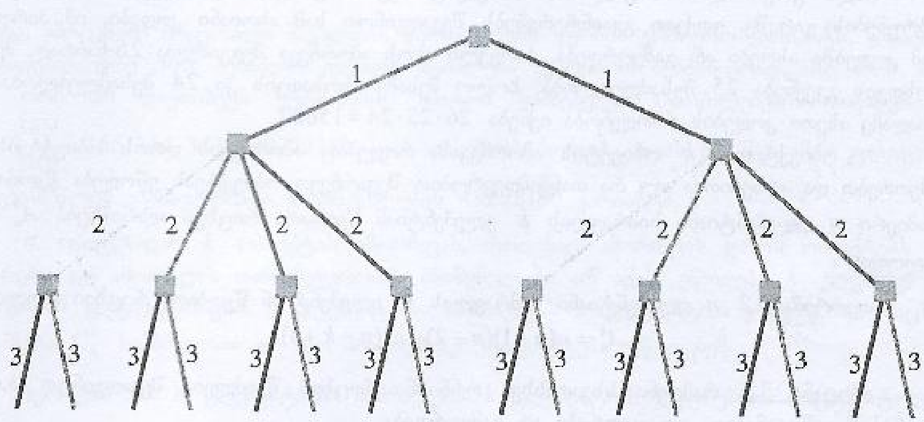
კომბინატორიკა წარმოადგენს მათემატიკის ერთ-ერთ მიმართულებას, რომელიც ემსახურება სხვადასხვა წესით მოცემული სასრული სიმრავლეების ელემენტების დათვლის მეთოდების შემუშავებას და სათანადო ფორმულების დადგენას. ვიდრე განვიხილავდეთ კომბინატორიკის ძირითად ცნებებს და სათანადო ფორმულებს, ამოვხსნათ კომბინატორიკის შემდეგი ამოცანა.

ამოცანა 3.1. რესტორნის სტანდარტული სადილის მენიუ შედგება სამი ნაწილისაგან: პირველი არის წვნიანი ან სალათი, მეორე არის მოხარშული ქათამი, შემწვარი ხორცი, კუჭმაჭი ან შემწვარი თევზი, ხოლო მესამე კი დესერტია, რომელშიც შედის ნაყინი ან ნამცხვარი. რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება შევუკვეთოთ სადილი?

ამოხსნა. ასეთი სადილის შეკვეთა გულისხმობს სამი სხვადასხვა გადაწყვეტილების მიღებას პირველის, მეორის და დესერტის არჩევისას:

პირველი (1)	მეორე (2)	დესერტი (3)
2 შესაძლებლობა	4 შესაძლებლობა	2 შესაძლებლობა

ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ხისებრი დიაგრამა,



რომელიც გვიჩვენებს, რომ პირველის ნებისმიერი არჩევანისათვის, მეორე შეგვიძლია ავირჩიოთ ოთხნაირად და პირველის და მეორის $2 \cdot 4 = 8$ არჩევანიდან თითოეულისათვის გვაქვს დესერტის 2 არჩევანი. ე.ი. სულ გვაქვს $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ შესაძლებლობა.

შევისწავლოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა, როცა გვაქვს n ობიექტი, რომელთაგან გვინდა ამოვირჩიოთ r ობიექტი. განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

ა) ყველა ობიექტი არის განსხვავებული და ამორჩევის დროს გამეორება შესაძლებელია, ე.ი. ერთი და იგივე ობიექტი შეიძლება ამოვირჩიოთ რამოდენიმეჯერ. რეალურად ეს ნიშნავს, რომ თითოეული ობიექტის შერჩევისას მას უკან ვაბრუნებთ, რაც საშუალებას გვაძლევს ერთი და იგივე ობიექტი შევარჩიოთ მრავალჯერ. შერჩევის ამ მეთოდს ეწოდება შერჩევა დაბრუნებით.

ბ) ყველა ობიექტი არის განსხვავებული და ამორჩევის დროს ობიექტებს არ ვიმეორებთ. ამ შემთხვევაში ობიექტის შერჩევისას ის უკან არ ბრუნდება, რაც გამორიცხავს ერთი და იგივე ობიექტის ორჯერ შერჩევას. ამ ტიპის შერჩევებს ეწოდებათ შერჩევა დაბრუნების გარეშე.

შევნიშნოთ, რომ შერჩევები ზემოთმოყვანილი თავისებურებების გარდა შეიძლება განსხვავდებოდნენ ობიექტების შერჩევის მიმდევრობით ანუ ობიექტების შერჩევის თითოეული

შეთიოდისათვის შეიძლება მნიშვნელობა ჰქონდეს ობიექტების შერჩევის თანმიმდევრობას და შეიძლება თანმიმდევრობას მნიშვნელობა არ ჰქონდეს.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა, რომელიც შეესაბამება შერჩევის ა) შემთხვევას.

<u>ამოცანა 3.2.</u> საერთაშორისო საფრენოსნო გადაზიდვების ასოციაცია თითოეულ აეროპორტს მისი ადგილმდებარეობის მიხედვით ანიჭებს სამ ასოიან კოდებს. მაგალითად, თბილისის კოდი არის TBS. დავუშვათ, რომ ამ კოდების შედგენისას დასაშვებია ლათინური ანბანის ასოების გამეორება. რამდენი აეროპორტის კოდი შეიძლება შევადგინოთ მოყვანილი ხერხით?

<u>ამოხსნა.</u> ვინაიდან ლათინურ ანბანში არის 26 ასო, ამიტომ სამ ასოიანი კოდის შედგენისას უნდა გავითვალისწინოთ, რომ პირველ, მეორე და მესამე ადგილზე შეიძლება დავწეროთ ნებისმიერი ასო 26-დან. ამიტომ ასეთი კოდების რაოდენობა იქნება

$$26\cdot 26\cdot 26=26^3=17576$$

აქედან გამომდინარე, შესაძლებელია 17576 აეროპორტის კოდის შედგენა.

საზოგადოდ n ობიექტის შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.1. n განსხვავებული ობიექტიდან r ობიექტი შეიძლება შევარჩიოთ n^r ხერხით, როდესაც ამორჩევის დროს ობიექტები შეიძლება გამეორდეს და არსებითია ობიექტების შერჩევის თანმიმდევრობა.

ახლა განვიხილოთ მაგალითი, რომელიც შეესაბამება ბ) შემთხვევას ანუ შერჩევას დაბრუნების გარეშე. ვთქვათ გვაინტერესებს შევადგინოთ სამ ასოიანი კოდები, იმ პირობით, რომ კოდებში ასოები არ გამეორდება. პირველი ასოს ამორჩევა შეგვიძლია 26-ნაირად, მეორე ასოსთვის გვექნება 25 შესაძლებლობა, ხოლო მესამე ასოსათვის კი 24 შესაძლებლობა. მაშასადამე ასეთი კოდების რაოდენობა იქნება $26\cdot 25\cdot 24=15600$.

n ობიექტიდან k ობიექტის ამორჩევას, როდესაც ამორჩევის დროს ობიექტებს არ ვიმეორებთ და არსებითია თუ რა თანმიმდევრობით შევარჩევთ ობიექტებს ეწოდება *წყობა*. ნებისმიერი n ელემენტიანი სიმრავლის k ელემენტიან წყობათა რიცხვი აღინიშნება A_n^k სიმბოლოთი.

თეორემა 3.2. n ელემენტიანი სიმრავლის k ელემენტიან წყობათა რიცხვი ტოლია

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

<u>ამოცანა 3.3.</u> რამდენი სხვადასხვა ორნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ 3,4,5,6 ციფრების გამოყენებით, თუ ციფრები არ გამეორდება.

<u>ამოხსნა.</u> მოცემული ოთხი ციფრიდან შეიძლება შევადგინოთ $A_4^2=4\cdot 3=12$ სხვადასხვა წყობა, ე.ი. მოცემული ციფრებიდან შეიძლება შევადგინოთ 12 სხვადასხვა ორნიშნა რიცხვი.

შევნიშნოთ, რომ n-ელემენტიანი სიმრავლის n ელემენტიან წყობათა რიცხვი ტოლია $A_n^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1=n!$, სადაც $n!$-ით აღინიშნება 1-დან n-მდე ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი და ეწოდება n ფაქტორიალი. იგულისხმება, რომ $0!=1$. შევნიშნოთ, რომ n ელემენტიანი სიმრავლის n ელემენტიან წყობათა რიცხვი ტოლია n ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების გადანაცვლებათა რიცხვის. ამრიგად, n განსხვავებული ელემენტის თანმიმდევრობით დალაგების ვარიანტების რაოდენობა ტოლია $n!$-ის.

<u>ამოცანა 3.4.</u> რამდენი სხვადასხვა გზით შეიძლება განთავსდეს 5 ადამიანი რიგში?

<u>ამოხსნა.</u> ვინაიდან 5 ადამიანი განსხვავებულია და როდესაც ერთი ადამიანი იქნება რიგში რომელიმე ადგილას, ის ამავე დროს ვერ იქნება რიგში სხვა ადგილზეც, ამიტომ რიგში ადამიანების განთავსების ვარიანტების რაოდენობა ტოლია 5 ელემენტიანი სიმრავლის 5 ელემენტიან წყობათა რიცხვის, ე.ი. $5!=120$.

n ელემენტიანი სიმრავლის k ელემენტიან წყობათა რიცხვის A_n^k გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულა

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

<u>ამოცანა 3.5.</u> გამოთვალეთ

ა) A_7^3; ბ) A_6^1; გ) A_{52}^2.

<u>ამოხსნა.</u> ზემოთმოყვანილი ფორმულის თანახმად გვექნება

ა) $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!} = 210.$

ბ) $A_6^1 = \frac{6!}{(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = \frac{6\cdot 5!}{5!} = 6.$

გ) $A_{52}^2 = \frac{52!}{50!} = \frac{52\cdot 51\cdot 50!}{50!} = 2652.$

<u>ამოცანა 3.6.</u> ცნობილია, რომ სოფოს, თეას და მარიამის დაბადების დღეები არის წლის განსხვავებულ დღეებში. რამდენი სხვადასხვა ვარიანტით შეიძლება განაწილდეს მათი დაბადების დღეები წლის განმავლობაში, თუ ვიგულისხმებთ, რომ წელიწადი შედგება 365 დღისაგან.

<u>ამოხსნა.</u> ამოცანაში მოყვანილი მაგალითი წარმოადგენს წყობის ერთ-ერთ ვარიანტს, ვინაიდან 3 დაბადების დღე 365 შესაძლო დღიდან შეიძლება ავირჩიოთ ნებისმიერად, ისე რომ არც ერთი ორი არ დაემთხვეს ერთმანეთს. ამიტომ საძიებელი განაწილებების რაოდენობაა $A_{365}^3 = \frac{365!}{362!} = 365\cdot 364\cdot 363 = 48228180.$ ე.ი. არსებობს სოფოს, თეას და მარიამის დაბადების დღეების წლის განმავლობაში გადანაწილების 48228180 ვარიანტი.

n ობიექტიდან k ობიექტის ამორჩევას, როდესაც ამორჩევის დროს ობიექტებს არ ვიმეორებთ და ამორჩევის თანმიმდევრობას მნიშვნელობა არ აქვს, ეწოდება ***k* ელემენტიანი ჯუფთება *n* ელემენტისაგან**. n ელემენტიანი სიმრავლის k ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი აღინიშნება C_n^k სიმბოლოთი და მათ ბინომურ კოეფიციენტებს უწოდებენ.

თეორემა 3.3. n ელემენტიანი სიმრავლის k ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი ტოლია

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

<u>ამოცანა 3.7.</u> იპოვეთ:

ა) C_3^1 ბ) C_6^3 გ) C_n^n დ) C_n^0

<u>ამოხსნა.</u> თეორემა 3.3-ის ძალით

ა) $C_3^1 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3.$

ბ) $C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!\,3!} = 20.$

გ) $C_n^n = \frac{n!}{n!\,0!} = 1.$

დ) $C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1.$

ჯუფთებათა რიცხვის გამოსათვლელი ფორმულიდან გამომდინარეობს n ელემენტიანი სიმრავლის k ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვის შემდეგი თვისებები:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

მართლაც,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^{n-k},$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} +$$

$$+ \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k-1)!(n-k)(k+1)} = C_{n+1}^{k+1}.$$

ამოცანა 3.8. საგამოცდო კომისია შედგება სამი წევრისაგან, რამდენი ასეთი კომისიის შედგენა შეიძლება შვიდი ლექტორისაგან?

ამოხსნა. ვინაიდან სულ არის 7 ლექტორი და უნდა ავირჩიოთ სამწევრიანი კომისიები, სადაც არ აქვს მნიშვნელობა ლექტორების არჩევის მიმდევრობას, ამიტომ ყველა შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა არის ჯუფთება

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4!\,3!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{6} = 35.$$

ამოცანა 3.9. იპოვეთ ამოზნექილი n-კუთხა მრავალკუთხედის დიაგონალების რაოდენობა.

ამოხსნა. ამოზნექილი მრავალკუთხედის დიაგონალი წარმოადგენს მის ერთ გვერდთან არამდებარე ორი წვეროს შემაერთებელ მონაკვეთს. მრავალკუთხედის წვეროები ქმნიან სიბრტყის n წერტილისაგან შემდგარ ისეთ სიმრავლეს, რომლის არც ერთი სამეული ერთ წრფეზე არ მდებარეობს. თუ ამ წერტილებს შევაერთებთ ყველა შესაძლო ხერხით, მაშინ მივიღებთ C_n^2 მონაკვეთს. ამ მონაკვეთებიდან n მონაკვეთი არის მრავალკუთხედის გვერდი. მაშასადამე, ამოზნექილი n-კუთხედის დიაგონალების რიცხვი ტოლია:

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

ამოცანა 3.10. რამდენი სხვადასხვა კომისია შეიძლება შევადგინოთ ისე, რომ კომისიის შემადგენლობაში შევიდეს ფაკულტეტის 2 პროფესორი და 3 სტუდენტი, თუ ამ კომისიაში ყოფნა სურს ფაკულტეტის 6 წევრს და 10 სტუდენტს?

ამოხსნა. ეს ამოცანა გავყოთ ორ ნაწილად. პირველი — რამდენი ხერხით შეგვიძლია კომისიაში შესაყვანი ფაკულტეტის პროფესორების შერჩევა. ეს რაოდენობა უდრის C_6^2. მეორე — რამდენი ხერხით შეგვიძლია კომისიაში შესაყვანი სტუდენტების შერჩევა, რაც C_{10}^3-ის ტოლია. ვინაიდან კომისიაში უნდა შედიოდეს 2 პროფესორი და 3 სტუდენტი, ამიტომ პროფესორების შერჩევის თითოეული ვარიანტი უნდა დავაწყვილოთ სტუდენტების შერჩევის ვარიანტებთან რის შედეგად მივიღებთ, რომ კომისიის შედგენის ყველა შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა ტოლი იქნება $C_6^2 \cdot C_{10}^3$ ნამრავლის, ე.ი. სულ კომისიის შედგენის ვარიანტების რაოდენობაა:

$$C_6^2 \cdot C_{10}^3 = \frac{6!}{4!\,2!}\cdot\frac{10!}{7!\,3!} = \frac{6\cdot5\cdot4!}{4!\,2!}\cdot\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7!}{7!\,3!} = 1800.$$

ამოცანა 3.11. რამდენი სიტყვა შეიძლება შევადგინოთ სიტყვა "ანბანი"-ს ასოებისაგან, თუ სიტყვის ქვეშ ვიგულისხმებთ ასოების ნებისმიერ თანმიმდევრობას?

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ სიტყვა "ანბანი" შედგება 6 ასოსაგან და ამიტომ თითოეული სიტყვა შემდგარი იქნება 6 ასოსაგან, რომელთაგან ორი არის "ა", ორი არის "ნ", ერთი არის "ბ" და ერთი არის "ი". სიტყვის შედგენა გულისხმობს ყველა ასოსათვის სათანადო პოზიციის შერჩევას. ორი "ა"-თვის პოზიციის შერჩევა შეიძლება C_6^2 გზით, დაგვრჩება 4 ცარიელი ადგილი, ამიტომ ორი "ნ"-თვის პოზიციის შერჩევა შეიძლება C_4^2 ხერხით, დაგვრჩება 2 თავისუფალი ადგილი, ამიტომ ერთი "ბ"-თვის პოზიციის შერჩევა შეიძლება C_2^1 ხერხით, ხოლო ერთი "ი"-თვის კი C_1^1 ხერხით, ამიტომ შეიძლება შევადგინოთ

$$C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{6!}{2!\,4!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{1!}{1!\,0!} = \frac{6!}{2!\,2!\,1!\,1!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2! \cdot 2} = 180$$

სიტყვა.

უკანასკნელ ამოცანაში მოყვანილი მსჯელობა შეიძლება გავავრცელოთ უფრო ზოგად შემთხვევაშიც, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.4. ვთქვათ მოცემული გვაქვს n ობიექტი, რომელთაგან n_1 არის პირველი სახეობის, n_2 არის მეორე სახეობის, და ა.შ. n_k არის k-ური სახეობის. მაშინ ამ n ობიექტის სხვადასხვა თანმიმდევრობით დალაგების ანუ გადანაცვლებათა რიცხვი ტოლია

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!},$$

სადაც $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

ამოცანა 3.12. რამდენი სხვადასხვა სახით შეიძლება განვალაგოთ დროშები მწკრივში, თუ მათგან 4 არის თეთრი, 3 არის ლურჯი და 1 არის წითელი.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში ჩვენ გვაინტერესებს 8 ელემენტიანი სიმრავლის გადანაცვლებათა რიცხვი, რომელთაგან ოთხი არის თეთრი, სამი არის ლურჯი, ხოლო ერთი კი არის წითელი ფერის დროშა. მოყვანილი თეორემა 2.4-ის ძალით დროშების სხვადასხვა სახით განლაგების რაოდენობა ტოლია $\frac{8!}{4!\,3!\,1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!\,3!\,1!} = 280$.

ბინომური C_n^k კოეფიციენტების თვისებების გამოყენებით ფრანგი მათემატიკოსის ბლეზ პასკალის (1623-1662) მიერ აგებული იყო სამკუთხოვანი ცხრილი

$$\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 \\
C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5 \\
C_6^0 \quad C_6^1 \quad C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4 \quad C_6^5 \quad C_6^6 \\
\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot
\end{array}$$

რომლის ყოველ მომდევნო სტრიქონში მოთავსებული რიცხვები, პირველი და ბოლო რიცხვების გარდა, წარმოადგენენ წინა სტრიქონის მასთან ყველაზე ახლოს მოთავსებული ორი ბინომური კოეფიციენტის ჯამს. თუ ბინომური კოეფიციენტების ნაცვლად ჩავსვამთ მათ მნიშვნელობებს მივიღებთ შემდეგ სამკუთხოვან ცხრილს

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1\\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1\\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & &
\end{array}
$$

რომელსაც პასკალის სამკუთხედს უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ პასკალის სამკუთხედში ნებისმიერი სტრიქონის თითოეული ელემენტი მიიღება წინა სტრიქონის უახლოესი ელემენტების შეკრებით. მართლაც,

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

პასკალის სამკუთხედი არის ჯუფთების ანუ ბინომური C_n^k კოეფიციენტების ძალიან საინტერესო გეომეტრიული წარმოდგენა, თუმცა პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით ის არც ისე მოსახერხებელია, ვინაიდან იმისათვის, რომ გავიგოთ, მაგალითად, C_{12}^5-ის მნიშვნელობა ჩვენ უნდა ავაგოთ 13 სტრიქონიანი პასკალის სამკუთხედი.

ახლა შევეხოთ ბინომური კოეფიციენტების გამოყენებას ორი შესაკრებისაგან შემდგარი გამოსახულების ხარისხში აყვანის ფორმულებში. როგორც ცნობილია, ნებისმიერი ორი a და b რიცხვებისათვის $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ და $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. შევნიშნოთ, რომ ანალოგიური ფორმულები მიიღება იმ შემთხვევაშიც, როცა ვიხილავთ $(a+b)$-ს ნებისმიერ ნატურალურ n ხარისხში. სახელდობრ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.5. ნებისმიერი a და b რიცხვებისათვის და ნებისმიერი $n \in \mathbf{N}$ რიცხვისათვის

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n, \tag{3.1}$$

სადაც $C_n^0,\ C_n^1, \ldots,\ C_n^n$ წარმოადგენენ ბინომურ კოეფიციენტებს.

(3.1) ფორმულას ნიუტონის ბინომური ფორმულა ეწოდება. აღნიშნული ფორმულა შეიძლება აგრეთვე ჩავწეროთ შემდეგი შემოკლებული სახით $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

<u>ამოცანა 3.13.</u> იპოვეთ $(a+b)^5$ გამოსახულება a და b საშუალებით.

<u>ამოხსნა.</u> გამოვიყენოთ ნიუტონის ბინომური ფორმულა, რომლის თანახმად

$$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 ab^4 + C_5^5 b^5 =$$
$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

რადგან $C_5^0 = C_5^5 = 1,\ \ C_5^1 = C_5^4 = 5,\ \ C_5^2 = C_5^3 = 10.$

<u>ამოცანა 3.14.</u> იპოვეთ $(2a-3b)^4$ გამოსახულება a და b საშუალებით.

<u>ამოხსნა.</u> ნიუტონის ბინომური ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$(2a-3b)^4 = (2a+(-3b))^4 = C_4^0(2a)^4 + C_4^1(2a)^3(-3b) +$$
$$+ C_4^2(2a)^2(-3b)^2 + C_4^3(2a)(-3b)^3 + C_4^4(-3b)^4 = C_4^0(2a)^4 -$$
$$- C_4^1(2a)^3(3b) + C_4^2(2a)^2(3b)^2 - C_4^3(2a)\ (3b)^3 + C_4^4(3b)^4 =$$
$$= 16a^4 - 96a^3 b + 216a^2 b^2 - 216ab^3 + 81b^4,$$

სადაც გამოვიყენეთ ბინომური კოეფიციენტების სათანადო მნიშვნელობები $C_4^0 = C_4^4 = 1$, $C_4^1 = C_4^3 = 4,\ \ C_4^2 = 6$.

სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ: ა) A_5^3 ბ) C_4^2 გ) A_4^3 დ) A_6^3 ე) C_5^3 ვ) C_6^3.

2. დათოს აქვს 5 პერანგი და 3 ჰალსტუხი, რამდენი სხვადასხვა გზით შეუძლია მას პერანგის და ჰალსტუხის შერჩევა?

3. რამდენი ორ ასოიანი კოდის შედგენა შეიძლება ასოებიდან A, B, C, D?

4. რამდენი ორ ასოიანი კოდის შედგენა შეიძლება ასოებიდან A, B, C, D, E?

5. რამდენი სხვადასხვა სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება ციფრებიდან 2, 4, 6, ისე რომ ციფრები არ გამეორდეს?

6. რამდენი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება ციფრებიდან 0, 3, 5, ისე რომ ციფრები არ გამეორდეს?

7. რამდენი სხვადასხვა შესაძლებლობაა რიგში 4 ადამიანის განთავსების?

8. რამდენი სამ ასოიანი კოდის შედგენა შეიძლება ასოებიდან A, B, C, D, E, თუ ყოველი ასო შეიძლება გამოვიყენოთ არაუმეტეს ერთხელ?

9. რამდენი სხვადასხვა გუნდი შეიძლება შევადგინოთ 7 სტუდენტისაგან, თუ გუნდი შედგება 4 სტუდენტისაგან?

10. რამდენი შესაძლო პასუხი შეიძლება მივიღოთ ათი კითხვის შემცველ ტესტზე, თუ შესაძლო პასუხებია "კი" ან "არა"?

11. რამდენი ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ ციფრებიდან 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

12. რამდენი სხვადასხვა სტუდენტური გუნდი შეიძლება შევადგინოთ 4 ბიჭისა და 8 გოგონასაგან, თუ თითოეულ გუნდში უნდა შედიოდეს 2 ბიჭი და 3 გოგონა?

13. ყუთში არის 15 წითელი და 10 თეთრი ბურთი. ამოარჩიეს 5 ბურთი, რომლებიც გადაიტანეს მეორე ყუთში, რამდენი ხერხით შეიძლება ავირჩიოთ ეს 5 ბურთი, 25 ბურთიდან, თუ
ა) ხუთივე ბურთი წითელია;
ბ) სამი ბურთი არის წითელი და ორი არის თეთრი;
გ) ოთხი ბურთი მაინც არის წითელი.

14. რამდენი სიტყვა შეიძლება შევადგინოთ სიტყვა "ბიზნესი"-ს ასოებისაგან, თუ სიტყვაში ვიგულისხმებთ ასოების ნებისმიერ ნაკრებს.

15. გამოთვალეთ $(a-2b)^5$ გამოსახულება.

16. გამოთვალეთ $(a+b)^6$ გამოსახულება.

17. იპოვეთ x^3-ის კოეფიციენტი $(2x+1)^{12}$-ის გაშლაში.

18. იპოვეთ x^5-ის კოეფიციენტი $(3x-2)^9$ გაშლაში.

19. იპოვეთ x^4-ის კოეფიციენტი $\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$-ის გაშლაში.

20. იპოვეთ x^2-ის კოეფიციენტი $\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^{8}$-ის გაშლაში.

21. გამოთვალეთ
ა) $\dfrac{(n+1)!}{3!(n-1)!}$ ბ) $\dfrac{(n+4)!}{2(n+2)!}$ გ) $\dfrac{(n+3)!}{2(n+1)!}$

22. საიუველირო მაღაზიათა ქსელს აქვს 8 მაღაზია ქუთაისში, 12 თბილისში და 10 ბათუმში. მაღაზიათა ქსელის მენეჯერმა გადაწყვიტა დახუროს 2 მაღაზია ქუთაისში, 5 თბილისში და 3 ბათუმში. რამდენი სხვადასხვა გზით შეიძლება ეს განხორციელდეს?

23. იპოვეთ n, თუ

ა) $5A_n^2 = 6C_n^4$ ბ) $A_n^3 = 16C_n^2$

თავი 2. რიცხვითი მიმდევრობები

§ 4. მიმდევრობები, მონოტონური და შემოსაზღვრული მიმდევრობები, მიმდევრობის ზღვარი

§ 4.1 მიმდევრობები, მონოტონური და შემოსაზღვრული მიმდევრობები

განმარტება. თუ ყოველ ნატურალურ n რიცხვს, გარკვეული წესით შეესაბამება რაიმე ნამდვილი რიცხვი x_n მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობა:

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots, \qquad (4.1.1)$$

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ რიცხვებს ეწოდებათ (4.1.1) მიმდევრობის წევრები, ხოლო x_n-ს კი მიმდევრობის ზოგადი წევრი. ხშირად (4.1.1) მიმდევრობას მოკლედ ასე აღნიშნავენ $\{x_n\}$. ზოგადი წევრის მოცემით ნათელი წარმოდგენა გვექმნება მიმდევრობის ყოველ წევრზე და, მაშასადამე მთელ მიმდევრობაზე.

განმარტება. თუ პირველი n ნატურალური რიცხვიდან თითოეულს გარკვეული წესით შეესაბამება რაიმე ნამდვილი რიცხვი x_n მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა სასრული მიმდევრობა:

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n,$$

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ რიცხვებს ეწოდებათ მიმდევრობის წევრები.

<u>მაგალითი 4.1.1.</u> თუ $x_n = \frac{1}{n}$, მაშინ შესაბამისი მიმდევრობა იქნება

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \qquad (4.1.2)$$

<u>მაგალითი 4.1.2.</u> თუ $x_n = \frac{1}{2^n}$, მაშინ მიმდევრობა იქნება

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots \qquad (4.1.3)$$

<u>მაგალითი 4.1.3.</u> თუ $x_n = \frac{n}{n+1}$, მაშინ გვექნება

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots \qquad (4.1.4)$$

<u>ამოცანა 4.1.1.</u> იპოვეთ შემდეგი მიმდევრობის პირველი 5 წევრი

ა) $a_n = n^2 + 1$

ბ) $a_n = 2^n$

<u>ამოხსნა.</u> ა) იმისათვის, რომ ვიპოვოთ პირველი 5 წევრი n-ის მაგივრად მიმდევრობით ჩავსვათ 1, 2, 3, 4 და 5. მაშასადამე მივიღებთ, რომ

$a_1 = 1^2 + 1 = 2$ $\qquad a_3 = 3^2 + 1 = 10$ $\qquad a_5 = 5^2 + 1 = 26$

$a_2 = 2^2 + 1 = 5$ $\qquad a_4 = 4^2 + 1 = 17$

მაშასადამე ამ მიმდევრობის პირველი ხუთი წევრია 2, 5, 10, 17 და 26

ბ) ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$a_1 = 2^1 = 2$ $\qquad a_3 = 2^3 = 8$ $\qquad a_5 = 2^5 = 32$

$a_2 = 2^2 = 4$ $\qquad a_4 = 2^4 = 16$

<u>ამოცანა 4.1.2.</u> იპოვეთ $a_n = 5n - 1$ მიმდევრობის მე-12 და 25-ე წევრები

<u>ამოხსნა.</u> ამოცანის პირობის თანახმად მივიღებთ, რომ

$$a_{12} = 5 \cdot 12 - 1 = 59 \text{ და } a_{25} = 5 \cdot 25 - 1 = 124.$$

<u>ამოცანა 4.1.3.</u> იპოვეთ შემდეგი მიმდევრობის ზოგადი წევრები

ა) $3, 4, 5, 6, \ldots$ $\qquad$ ბ) $5, -25, 125, -625, \ldots$

<u>ამოხსნა.</u> ა) ვინაიდან აღნიშნული მიმდევრობის წევრები არის ერთმანეთის მიდევნო მთელი რიცხვები, ამიტომ ეს მიმდევრობა შეიძლება ჩაიწეროს ან

$$a_n = n, \quad n \geq 3 \qquad \text{ან} \qquad b_n = n + 2 \quad \text{სახით.}$$

ბ) აღნიშნულ მიმდევრობაზე დაკვირვებით დავასკვნით, რომ მისი თითოეული წევრი არის 5-ის და -1-ის შესაბამისი ხარისხების ნამრავლი

$$5 = (-1)^0 5^1 = a_1$$

$$-25 = (-1)^1 5^2 = a_2$$

$$125 = (-1)^2 5^3 = a_3$$

$$-625 = (-1)^3 5^4 = a_4,$$

მაშასადამე ზოგადი წევრი აღიწერება ფორმულით

$$a_n = (-1)^{n-1} 5^n.$$

ამრიგად, თუ ცნობილია რიცხვთა მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა, მაშინ ცნობილია ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი და შეგვიძლია ამოვიწეროთ ამ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი. მაგრამ, ზოგადი წევრის ფორმულის მოცემა არაა აუცილებელი მიმდევრობის ასაგებად. შეიძლება დავასახელოთ მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრის ფორმულა არაა მოცემული. მაგალითად, განვიხილოთ მიმდევრობა, რომლის პირველი ორი წევრია 0 და 1, ხოლო ყოველი შემდეგი უდრის ორი წინა წევრის ჯამს:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \, (n > 2) \qquad (4.1.5)$$

ასეთი მიმდევრობაა

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

რომელსაც ფიბონაჩის რიცხვთა მიმდევრობა ეწოდება, ხოლო მის წევრებს ფიბონაჩის რიცხვები ეწოდება.

ფორმულებს, რომელთა საშუალებითაც მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი გამოისახება თავისი წინა წევრების საშუალებით რეკურენტული ფორმულები ეწოდება. მაგალითად (4.1.5) ფორმულა.

(4.1.1) მიმდევრობას ეწოდება **ზრდადი** მიმდევრობა, თუ ყოველი n-თვის $x_{n+1} \geq x_n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, ხოლო მიმდევრობა **კლებადია** თუ $x_{n+1} \leq x_n$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. მიმდევრობას ეწოდება **არაზრდადი** მიმდევრობა თუ $x_{n+1} \leq x_n$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ და **არაკლებადი** თუ $x_{n+1} \geq x_n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. არაზრდად და არაკლებად მიმდევრობებს ეწოდებათ **მონოტონური** მიმდევრობები. მაგალითად: რიცხვთა (4.1.4) მიმდევრობა ზრდადია, ხოლო (4.1.2) და (4.1.3) მიმდევრობები კლებადი მიმდევრობებია.

$\{x_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **ზემოდან შემოსაზღვრული**, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ $x_n \leq M$ ყველა ნატურალური n-თვის. მიმდევრობას ეწოდება **ქვემოდან შემოსაზღვრული**, თუ არსებობს ისეთი m რიცხვი, რომ $x_n \geq m$ ყველა ნატურალური n-

თვის. მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ იგი შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ასევე ქვემოდან, ე. ი. თუ არსებობს ისეთი M და m რიცხვები, რომ $m \le x_n \le M$ ყოველი ნატურალური n-თვის. ამ შემთხვევაში M რიცხვს ეწოდება $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზედა საზღვარი, ხოლო m-ს კი ქვედა საზღვარი.

$\{x_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება შემოუსაზღვრელი, თუ ნებისმიერი დადებითი A რიცხვისათვის მოიძებნება ამ მიმდევრობის ისეთი x_n ელემენტი, რომ ადგილი ექნება უტოლობას $|x_n| > A$.

მაგალითად (4.1.4) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ვინაიდან ყველა ნატურალური n-თვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$0 < \frac{n}{n+1} < 1;$$

ხოლო მიმდევრობა $2, 2^2, 2^3, \cdots$ კი შემოუსაზღვრელია.

§ 4.2 მიმდევრობის ზღვარი

განვიხილოთ მიმდევრობა $\{x_n\}$, ანუ

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots \qquad (4.2.1)$$

<u>განმარტება.</u> a რიცხვს ეწოდება $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისთვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ როცა } n > N. \qquad (4.2.2)$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ (4.2.1) მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ.

იმ ფაქტს, რომ a არის $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, სიმბოლურად ასე აღნიშნავენ:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

ან კიდევ $x_n \to a$, როცა $n \to \infty$.

თუ შევამცირებთ ε-ს, მაშინ შესაბამისი N რიცხვი როგორც წესი იზრდება. გამონაკლისს წარმოადგენს ის შემთხვევა, როცა $\{x_n\}$ მიმდევრობა მუდმივია, ე.ი. n-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $x_n = a$, მაშინ ზღვრის განმარტების ძალით $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. ამ შემთხვევაში (4.2.2) დამოკიდებულებაში მონაწილე N რიცხვად გამოდგება ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი. (4.2.2) უტოლობა იგივეა, რაც შემდეგი უტოლობა

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \qquad \text{როცა } n > N.$$

მაშასადამე, როგორიც უნდა იყოს $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ შუალედი, მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ (4.2.1) მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული x_{N+1}-დან მოთავსდება $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ შუალედის შიგნით. ე.ი. ამ შუალედის გარეთ მიმდევრობის მხოლოდ სასრული რაოდენობის წევრები შეიძლება დარჩეს.

ისეთ მიმდევრობას, რომელიც კრებადი არ არის, განშლადი მიმდევრობა ეწოდება.

§ 4.3 ზღვრის ძირითადი თვისებები

ახლა ვისარგებლოთ ზღვრის ზემოთ მოყვანილი განმარტებით და მოვიყვანოთ ძირითადი თეორემები მიმდევრობების ზღვრების შესახებ დამტკიცების გარეშე.

თეორემა 4.3.1. თუ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობებს აქვს ზღვარი, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ და $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, მაშინ ზღვარი ექნება მათ ჯამსაც და ჯამის ზღვარი ტოლი იქნება შესაკრებების ზღვართა ჯამისა. ე. ი. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

თეორემა 4.3.2 თუ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობებს აქვს ზღვარი, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ და $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, მაშინ ზღვარი ექნება მათ ნამრავლსაც და ნამრავლის ზღვარი ტოლი იქნება თანამამრავლთა ზღვრების ნამრავლისა. ე. ი. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

შედეგი 4.3.1. თუ c რაიმე მუდმივია და $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \lim_{n\to\infty} x_n = c \cdot a$$

შედეგი 4.3.2. თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობას აქვს ზღვარი, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, მაშინ მიმდევრობის მთელი დადებითი ხარისხის ზღვარი უდრის ამ მიმდევრობის ზღვრის ამავე ხარისხს.

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k = a^k$$

თეორემა 4.3.3. თუ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობებს აქვს ზღვარი, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ და $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, $b \neq 0$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

თეორემა 4.3.4 ვთქვათ მოცემულია კრებადი მიმდევრობები $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $x_n \leq y_n \leq z_n$, ამასთან $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, მაშინ $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

აღნიშნულ თეორემაზე დაყრდნობით განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა

ამოცანა 4.3.1. აჩვენეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

ამოხსნა. განვიხილოთ $n > 2$ და შევნიშნოთ, რომ

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-1)n}{n\cdot n\cdot n\cdots n\cdot n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n} < \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}\cdots\frac{n}{n} < \frac{1}{n}.$$

მაშინ ზღვარზე გადასვლით, იმის გათვალისწინებით რომ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, მივიღებთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $n!$ უფრო ნელა იზრდება, ვიდრე n^n როცა $n \to \infty$.

ამოცანა 4.3.2. იპოვეთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3 - 4n^2 + 11n + 8}{5n^3 + 22n^2 - 6n + 12}$$

ამოხსნა. აღნიშნული ზღვრის მოსაძებნად წილადის მრიცხველიც და მნიშვნელიც უნდა გავყოთ n–ის უმაღლეს ხარისხზე, ე.ი. n^3–ზე, მაშინ მივიღებთ რომ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3 - 4n^2 + 11n + 8}{5n^3 + 22n^2 - 6n + 12} = \lim_{n\to\infty}\frac{7 - \frac{4}{n} + \frac{11}{n^2} + \frac{8}{n^3}}{5 + \frac{22}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{12}{n^3}} = \frac{7 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n} - \frac{11}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right)}{5 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{22}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{12}{n^3}\right)} = \frac{7}{5}.$$

ამოცანა 4.3.3. იპოვეთ ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^4-14n^2+13n+5}{5n^4+2n^2-7n+2}$.

ამოხსნა. წინა ამოცანის ანალოგიურად აღნიშნული ზღვრის მოსაძებნად წილადის მრიცხველიც და მნიშვნელიც გავყოთ n—ის უმაღლეს ხარისხზე, ე.ი. n^4—ზე

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^4-14n^2+13n+5}{5n^4+2n^2-7n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{10-\dfrac{14}{n^2}+\dfrac{13}{n^3}+\dfrac{5}{n^4}}{5+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{7}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}=\frac{10}{5}=2.$$

ახლა ვთქვათ, რომ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ განშლადი მიმდევრობებია, მაშინ რა შეიძლება ითქვას მათი ჯამის შესახებ? ამ შემთხვევაში ჯამი შეიძლება იყოს კრებადი და შეიძლება იყოს განშლადი. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები:

ა) მიმდევრობები:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\dots,(-1)^n,\dots$$

$$1,\ -1,\ 1,\dots,(-1)^{n+1},\dots$$

განშლადი მიმდევრობებია, ხოლო მათი ჯამი:

$$0,\ 0,\ 0,\dots,\ 0,\ \dots$$

ნულისკენ კრებადი მიმდევრობაა.

ბ) მიმდევრობები

$$-1,\ 1,\ -1,\dots,(-1)^n,\dots$$

$$-2,\ 2,\ -2,\ \dots,\ (-1)^n 2,\dots$$

განშლადი მიმდევრობებია, ხოლო მათი ჯამი

$$-3,\ 3,\ -3,\dots,(-1)^n 3,\dots$$

აგრეთვე განშლადი მიმდევრობაა.

ასევე, მტკიცდება, რომ კრებადი და განშლადი მიმდევრობების ჯამი განშლადი მიმდევრობაა.

სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ მიმდევრობის პირველი ხუთი წევრი, რომელიც შემდეგი ფორმულითაა მოცემული:

ა) $x_n=5+2n$ ბ) $x_n=(-1)^{n+1}$

გ) $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{3}$ დ) $x_n=\dfrac{2n-1}{5+n}$

2. იპოვეთ შემდეგი მიმდევრობის პირველი ხუთი წევრი

ა) $a_n=2n+3$ დ) $a_n=4n-3$

ბ) $a_n=\dfrac{n+2}{n+1}$ ე) $a_n=\dfrac{2n+1}{2n}$

გ) $a_n=(-3)^{n+1}$ ვ) $a_n=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

3. მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით $x_n=2n+1$. იპოვეთ მიმდევრობის წევრი, რომლის ნომერია:

ა) 6; ბ) 9; გ) $k-1$; დ) $k+1$

4. მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით $x_n=n^2+1$. იპოვეთ:

ა) x_{20}; ბ) x_{100}; გ) x_{k-1}

5. იპოვეთ მოცემული მიმდევრობების ზოგადი წევრის ფორმულა:

ა) 1, 3, 5, 7, ..., ბ) 2, 4, 6, 8,..., გ) 1, 4, 9, 16, ...,

6. იპოვეთ შემდეგი მიმდევრობის ზოგადი წევრი

ა) 3, 6, 9, 12,.... ბ) 1, -2, 4, -8,...

7. იპოვეთ მიმდევრობის პირველი ექვსი წევრი, თუ

ა) $a_1=1, \quad a_{n+1}=a_n+2$; ბ) $x_1=4, \quad x_{n+1}=\frac{1}{5}n$;

გ) $x_1=2, \quad x_{n+1}=2x_n+3$;

8. არის თუ არა მონოტონური მიმდევრობა, რომელიც შემდეგი ფორმულითაა მოცემული:

ა) $x_n=7-n$; ბ) $x_n=|3-n|$; გ) $x_n=2-\frac{1}{n}$;

9. გამოიკვლიეთ, მოცემული მიმდევრობებიდან რომელია შემოსაზღვრული და რომელი არა:

ა) $x_n=3n+1$; ბ) $x_n=\frac{3n+1}{n}$; გ) $x_n=3n^2-2$

10. მოიყვანეთ ისეთი მიმდევრობის მაგალითი, რომელიც:

ა) შემოსაზღვრული იქნება ზემოდან, მაგრამ არ იქნება შემოსაზღვრული ქვემოდან;

ბ) შემოსაზღვრული იქნება ქვემოდან, მაგრამ არ იქნება შემოსაზღვრული ზემოდან;

11. მოიყვანეთ ისეთი მიმდევრობის მაგალითი, რომელიც არც ზემოდანაა შემოსაზღვრული და არც ქვემოდან.

12. იპოვეთ ზღვარი:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n^3-3n^2-2n+19}{3n^3+7n^2-12n+18}$ ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3-3n^2-2n+9}{2n^3+7n^2-12n+8}$ გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{14n^3-10n^2-12n+7}{2n^3+17n^2-2n+3}$

§5. არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიები, მათი ზოგადი წევრისა და წევრთა ჯამის გამოსათვლელი ფორმულები

§ 5.1 არითმეტიკული პროგრესია

განმარტება. რიცხვით მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორიდან, მიიღება წინა წევრისათვის ერთი და იმავე რიცხვის მიმატებით, არითმეტიკული პროგრესია ეწოდება.

როგორც განმარტებიდან ჩანს, არითმეტიკული პროგრესიის ნებისმიერი წევრისა და მისი წინა წევრის სხვაობა ერთი და იმავე რიცხვის ტოლია. ე.ი. თუ

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

არითმეტიკული პროგრესიაა, მაშინ

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots$$

ამ რიცხვს არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა ეწოდება და d ასოთი აღინიშნება.

<u>მაგალითი 5.1.1.</u> ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა

$$1, \ 2, \ 3, \ \dots,$$

არითმეტიკული პროგრესიაა რომლისთვისაც $d=1$

<u>მაგალითი 5.1.2.</u> მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $a_n=2n$, ასევე არითმეტიკული პროგრესიაა

$$2, \ 4, \ 6, \ 8, \ \dots,$$

რომლისთვისაც $d=2$.

მაგალითი 5.1.3. მიმდევრობა 100, 95, 90, ..., 10, 5 არითმეტიკული პროგრესიაა, რომელიც შეიცავს სასრული რაოდენობის წევრებს. ამ პროგრესიისათვის $d=-5$.

ცხადია, რომ თუ $d>0$, მაშინ არითმეტიკული პროგრესია ზრდადია, თუ $d<0$ კლებადია, ხოლო თუ $d=0$, მაშინ პროგრესია მუდმივ მიმდევრობას წარმოადგენს.

ვთქვათ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიაა, რომლის სხვაობა არის d, მაშინ არითმეტიკული პროგრესიის განმარტების თანახმად გვექნება, რომ

$$a_2=a_1+d$$
$$a_3=a_2+d=a_1+d+d=a_1+2d$$
$$a_4=a_3+d=a_1+2d+d=a_1+3d$$
$$a_5=a_4+d=a_1+3d+d=a_1+4d$$

საიდანაც ზოგადი წევრისათვის მივიღებთ

$$a_n=a_{n-1}+d=a_1+d(n-2)+d=a_1+d(n-1)$$

ე.ი. მივიღეთ, რომ

$$a_n=a_1+d(n-1). \qquad (5.1)$$

ამ ფორმულას არითმეტიკული პროგრესიის n-ური ანუ ზოგადი წევრის ფორმულა ეწოდება.

აღნიშნული ფორმულის გამოყენებით განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა

ამოცანა 5.1.1. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია 2, 6, 10, ... იპოვეთ a_{12} და a_{14} წევრები.

ამოხსნა. ჩვენ შემთხვევაში $a_1=2$, $d=4$ ამიტომ თუ ვისარგებლებთ ზოგადი წევრის ფორმულით მივიღებთ:

$$a_{12}=a_1+11d=2+11\cdot 4=2+44=46.$$
$$a_{14}=a_1+13d=2+13\cdot d=2+13\cdot 4=54.$$

ამოცანა 5.1.2. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა, თუ

$$a_1=2, \quad a_{10}=92$$

ამოხსნა. კვლავ ვისარგებლოთ ზოგადი წევრის ფორმულით, საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$d=\frac{a_n-a_1}{n-1}=\frac{92-2}{9}=10.$$

ამოცანა 5.1.3. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი, თუ $a_3=13$ და $a_{10}=62$.

ამოხსნა. (5.1) ფორმულის თანახმად გვექნება, რომ

$$a_3=a_1+2d \qquad \text{და} \qquad a_{10}=a_1+9d,$$

რისი გათვალისწინებითაც მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} a_1+2d=13 \\ a_1+9d=62 \end{cases}$$

თუ აღნიშნული სისტემის მეორე განტოლებას გამოვაკლებთ პირველ განტოლებას მივიღებთ, რომ

$$7d=49, \quad \text{ე.ი.} \quad d=7 \quad \text{და} \quad a_1=13-14=-1.$$

შევნიშნოთ, რომ არითმეტიკულ პროგრესიას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

ა) არითმეტიკული პროგრესიის ნებისმიერი წევრი, დაწყებული მეორიდან, მისი წინა და მომდევნო წევრების საშუალო არითმეტიკულის ტოლია.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}.$$

ბ) სასრული არითმეტიკული პროგრესიის ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებულ წევრთა ჯამი ამ პროგრესიისათვის მუდმივი სიდიდეა და უდრის პირველი და ბოლო წევრების ჯამს.

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n .$$

ამ ორი თვისების გამოყენებით ადვილად მიიღება არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულა

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

თუ ამ ფორმულაში გავითვალისწინებთ არითმეტიკული პროგრესიის n-ური წევრის ფორმულას მივიღებთ

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

<u>ამოცანა 5.1.3.</u> იპოვეთ 2, 5, . . . , არითმეტიკული პროგრესიის პირველი 10 წევრის ჯამი.

<u>ამოხსნა.</u> ჩვენ შემთხვევაში $a_1 = 2, \quad d = 3, \quad n = 10$. ამიტომ გვექნება

$$S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (2 \cdot 2 + 9 \cdot 3) \cdot 5 = 31 \cdot 5 = 155 .$$

<u>ამოცანა 5.1.4.</u> იპოვეთ შემდეგი არითმეტიკული პროგრესიის

$$1, 2, 3, \ldots, 99, 100.$$

წევრთა ჯამი.

<u>ამოხსნა.</u> ჩვენ შემთხვევაში $a_1 = 1,\ d = 1, n = 100$, ამიტომ ამ შემთხვევაში უმჯობესია გამოვიყენოთ ფორმულა

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n .$$

ამიტომ გვექნება

$$S_{100} = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 101 \cdot 50 = 5050 .$$

§ 5.2 გეომეტრიული პროგრესია

განმარტება. რიცხვით მიმდევრობას, რომლის პირველი წევრი განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრის ერთსა და იმავე ნულისაგან განსხვავებული რიცხვზე გამრავლებით, **გეომეტრიული პროგრესია** ეწოდება.

როგორც განმარტებიდან ჩანს, გეომეტრიული პროგრესიის ნებისმიერი წევრის შეფარდება მის წინა წევრთან ერთი და იმავე რიცხვის ტოლია, ე. ი. თუ

$$b_1, b_2, b_3, \cdots b_n, \cdots$$

გეომეტრიული პროგრესიაა, მაშინ

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \cdots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \cdots$$

ამ რიცხვს გეომეტრიული პროგრესიის **მნიშვნელი** ეწოდება და q ასოთი აღინიშნება.

თუ $q > 0\ (q \neq 1)$, მაშინ გეომეტრიული პროგრესია მონოტონურია, (კერძოდ, თუ $0 < q < 1$ კლებადია, ხოლო თუ $q > 1$ ზრდადია), ხოლო თუ $q < 0$ პროგრესია არც ზრდადია და არც კლებადი, ხოლო თუ $q = 1$, მაშინ პროგრესია მუდმივ მიმდევრობას წარმოადგენს.

<u>მაგალითი 5.2.1</u> რიცხვითი მიმდევრობა, რომელიც მოცემულია ფორმულით

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

წარმოადგენს კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

რომლისთვისაც $q = \frac{1}{2}$.

<u>მაგალითი 5.2.2.</u> განვიხილოთ მიმდევრობა რომლის ზოგადი წევრია

$$b_n = 3^n.$$

ეს მიმდევრობა ზრდადი გეომეტრიული პროგრესიაა, რომლისთვისაც $q = 3$.

<u>მაგალითი 5.2.3.</u> მიმდევრობა

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots,\ 2, \ldots,$$

მუდმივ მიმდევრობას წარმოადგენს, ის შეიძლება განვიხილოთ როგორც გეომეტრიული პროგრესია, რომლისთვისაც $q = 1$.

ვთქვათ (b_n) გეომეტრიული პროგრესიაა, რომლის მნიშვნელია q, მაშინ გეომეტრიული პროგრესიის განსაზღვრების თანახმად

$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_3 = b_2 q = b_1 q \cdot q = b_1 q^2$$
$$b_4 = b_3 q = b_1 q^2 \cdot q = b_1 q^3$$
$$b_5 = b_4 q = b_1 q^3 \cdot q = b_1 q^4$$

საიდანაც ზოგადი წევრისათვის მივიღებთ

$$b_n = b_{n-1} \cdot q = b_1 q^{n-2} q = b_1 q^{n-1}.$$

ე.ი. მივიღებთ, რომ

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

ამ ფორმულას გეომეტრიული პროგრესიის n-ური ანუ ზოგადი წევრის ფორმულა ეწოდება.

აღნიშნულ ფორმულაზე დაყრდნობით განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა

<u>ამოცანა 5.2.1.</u> ვიპოვოთ

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$$

გეომეტრიული პროგრესიის მე-5 წევრი.

<u>ამოხსნა.</u> ჩვენ შემთხვევაში $b_1 = 1, q = \frac{1}{2}$, $n = 5$, ამიტომ თუ ვისარგებლებთ ზოგადი წევრის ფორმულით მივიღებთ:

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

<u>ამოცანა 5.2.2.</u> გეომეტრიული პროგრესიის მე-6 წევრი უდრის 64, პირველი წევრი 2-ის ტოლია იპოვეთ პროგრესიის მნიშვნელი.

<u>ამოხსნა.</u> ვისარგებლოთ ზოგადი წევრის ფორმულით:

$$b_6 = b_1 \cdot q^5 \Rightarrow 64 = 2 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = 32$$

საიდანაც თავის მხრივ მიიღება, რომ $q = 2$.

გეომეტრიულ პროგრესიას გააჩნია შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება:

დადებითწევრებიანი გეომეტრიული პროგრესიის ნებისმიერი წევრი დაწყებული მეორედან, მისი წინა და მომდევნო წევრების საშუალო გეომეტრიულის ტოლია. ე. ი.

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

აღვნიშნოთ (b_n) გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი S_n-ით, ე. ი.

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n.$$

მტკიცდება, რომ

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$$

ამოცანა 5.2.3. იპოვეთ ჯამი $1+2+2^2+\cdots+2^{10}$

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში გვაქვს გეომეტრიული პროგრესია, რომლისთვისაც $b_1 = 1,\ q = 2,\ n = 11$, ვისარგებლოთ გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის ფორმულით, მაშინ მივიღებთ, რომ:

$$S_{11} = \frac{b_1(q^{11}-1)}{q-1} = \frac{1\cdot(2^{11}-1)}{2-1} = 2^{11}-1.$$

§ 5.3 უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი, როცა $|q|<1$

ვთქვათ q არის (b_n) გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი და $|q|<1$, როგორც ცნობილია, ამ პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი გამოითვლება ფორმულით

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, როცა $|q|<1$, გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 q^n}{1-q}\right) = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{b_1}{1-q}.$$

ამრიგად,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

ამ ზღვარს უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი ეწოდება და S ასოთი აღინიშნება ე. ი.

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \qquad (5.3.1)$$

ამოცანა 5.3.1. იპოვეთ ჯამი

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში გვაქვს უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი, რომლისთვისაც $b_1 = 1,\quad q = \frac{1}{2}$. ამიტომ თუ გამოვიყენებთ (5.3.1) ფორმულას მივიღებთ:

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

ამოცანა 5.3.2. იპოვეთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი, რომლის პირველი წევრი უდრის 66-ს, ხოლო პროგრესიის ჯამი კი 110-ს.

ამოხსნა. თუ ვისარგებლებთ (5.3.1) ფორმულით გვექნება:

$$110 = \frac{66}{1-q}.$$

აქედან ადვილად მიიღება, რომ

$$1 - q = \frac{66}{110} = \frac{3}{5} \quad \text{ე.ი.} \quad q = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. განმარტეთ არითმეტიკული პროგრესია
2. მოიყვანეთ არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრისა და პირველი n წევრის ჯამის გამოსათვლელი ფორმულები.
3. განმარტეთ გეომეტრიული პროგრესია.
4. მოიყვანეთ გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრისა და პირველი n წევრის ჯამის გამოსათვლელი ფორმულები
5. მოიყვანეთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის $(|q|<1)$ ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა.

სავარჯიშოები

1. გაარკვიეთ შემდეგი მიმდევრობებიდან რომელია არითმეტიკული და რომელი გეომეტრიული

ა) -11, -16, -21, ... გ) 2, -4, 8, ...

ბ) 1, 4, 9, ... დ) 512, 256, 128, ...

2. იპოვეთ შემდეგი არითმეტიკული პროგრესიის მე-10, მე-12 და n-ური წევრები:

ა) 7,10,13,16,... ბ) 9,11,13,15,... გ) 2,6,10,14,...

3. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი და სხვაობა თუ:

ა) $a_6=24,\quad a_{10}=44$ ბ) $a_5=26,\quad a_{12}=75$ გ) $a_4=-9,\quad a_9=-29$

4. იპოვეთ შემდეგი არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრი

ა) 1, 5, 9, 13, ... ბ) 5, 2, -1, -4, ...

5. იპოვეთ შემდეგი არითმეტიკული პროგრესიის 50-ე წევრი.

3, 7, 11, 15, ...

6. იპოვეთ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა და წევრთა ჯამი, თუ:

ა) $a_1=2,\quad a_n=149,\quad n=50$ ბ) $a_1=7,\quad a_n=433,\quad n=214;$

გ) $a_1=-10,\quad a_n=-20,\quad n=6.$

7. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი და სხვაობა, თუ:

ა) $\begin{cases} a_1+a_7=42 \\ a_{10}-a_3=21; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} a_2+a_3+a_4=3 \\ a_2\cdot a_4=-8; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} a_7-a_3=8 \\ a_2\cdot a_7=75; \end{cases}$

8. იპოვეთ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი, თუ:

ა) $a_n=3n-1;$ ბ) $a_n=2n-7;$ გ) $a_n=5n+1.$

9. ამოხსენით განტოლება:

ა) $1+3+5+...+(x-10)=400$ ბ) $1+3+5+...+x=441;$

გ) $1+7+13+...+x=280;$

10. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი, თუ:

ა) $b_1=15;\quad b_2=18;$ ბ) $b_4=40;\quad b_5=50;$ გ) $b_7=-60;\quad b_8=-120$

11. იპოვეთ (b_n) გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი, მე-6, და მე-7 წევრები, თუ:

ა) $b_2=\frac{1}{6},\quad b_5=\frac{1}{48};$ ბ) $b_3=-18,\quad b_5=-162;$ გ) $b_5=24,\quad b_8=3.$

12. იპოვეთ (b_n) გეომეტრიული პროგრესიის პირველი ხუთი წევრის ჯამი, თუ:

ა) $b_1 = 4, \quad q = \frac{1}{2}$; ბ) $b_1 = -4, \quad q = -2$; გ) $b_1 = \frac{1}{2}, \quad q = 3$;

13. იპოვეთ შემდეგი გეომეტრიული პროგრესიის პირველი შვიდი წევრის ჯამი:

ა) $1, 3, 9, 27, \ldots$ ბ) $1, -2, 4, -8, \ldots$

14. იპოვეთ ჯამი:

ა) $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^6$; ბ) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{1024}$; გ) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{100}$;

15. განსაზღვრეთ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი და მნიშვნელი, თუ:

$$\begin{cases} b_5 - b_1 = 15, \\ b_4 - b_2 = 6; \end{cases}$$

16. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99} = 0$, ბ) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100} = 0$;

17. იპოვეთ მოცემული უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი:

ა) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$, ბ) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$, გ) $5, 3, \frac{9}{5}, \frac{27}{5}, \ldots$

18. იპოვეთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის მესამე წევრი, თუ ცნობილია, რომ ამ პროგრესიის ჯამი უდრის $1\frac{3}{5}$, ხოლო მეორე წევრი ტოლია $-\frac{1}{2}$.

თავი 3. ფუნქციები და მათი ძირითადი სახეები

§ 6. ფუნქციის ცნება. შექცეული ფუნქცია, ზრდადი და კლებადი ფუნქციები

ფუნქცია წარმოადგენს მათემატიკის ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან ცნებას, რომელიც ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა დარგში. ფუნქციები ასახავენ შესასწავლი რეალური ობიექტის მახასიათებელი პარამეტრების ერთმანეთზე დამოკიდებულებას და აქედან გამომდინარე შესაძლებელია სათანადო დასკვნების გამოტანა ობიექტის შესახებ.

შემოვიტანოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის რაიმე (a,b) ინტერვალზე მოცემული ფუნქციის ცნება. თუ (a,b) ინტერვალის ყოველ $x \in (a,b)$ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი y, მაშინ (a,b) ინტერვალში y წარმოადგენს x-ის ***ფუნქციას***. ფუნქციას აღნიშნავენ შემდეგი სახით $y = f(x)$ და x უწოდებენ ***არგუმენტს*** ან ***დამოუკიდებელ ცვლადს***, ხოლო y კი ***ფუნქციას*** ან ***დამოკიდებულ ცვლადს***. არგუმენტის დასაშვები ცვლილების ინტერვალს ეწოდება ფუნქციის ***განსაზღვრის არე*** და აღინიშნება $\mathcal{D}(f)$ სიმბოლოთი. იმ სიმრავლეს, რომლის მნიშვნელობებს ღებულობს დამოკიდებული y ცვლადი ეწოდება ***მნიშვნელობათა სიმრავლე*** და აღინიშნება $E(f)$ სიმბოლოთი.

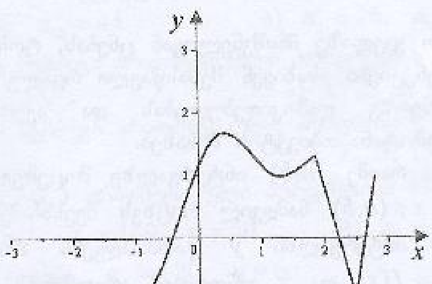
შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია შეიძლება განისაზღვროს არა მხოლოდ ნამდვილ რიცხვთა ინტერვალზე არამედ სხვა ნებისმიერ სიმრავლეზე და შეიძლება გამოყენებული იქნას სრულიად განსხვავებული ბუნების ობიექტებს შორის კავშირის აღწერისათვის. ფუნქციის ძირითადი თვისება მდგომარეობს იმაში, რომ ერთ-ერთი ცვლადის, რომელსაც დამოუკიდებელ ცვლადს უწოდებენ, ყოველ მნიშვნელობას უნდა შეესაბამებოდეს დამოკიდებული ცვლადის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა ანუ x-ის ერთ მნიშვნელობას უნდა შეესაბამებოდეს y ერთი მნიშვნელობა და არ შეიძლება შეესაბამებოდეს ორი ან მეტი მნიშვნელობა. ამავე დროს სხვადასხვა x-ის მნიშვნელობებს, მაგალითად, $x = 1$ და $x = 2$, შეიძლება შეესაბამებოდეს y-ის ერთი და იგივე მნიშვნელობა, მაგალითად, $y = 3$.

მოვიყვანოთ ფუნქციის უფრო ზოგადი განმარტება. ვთქვათ X და Y ნებისმიერი სიმრავლეებია. რაიმე f წესს, რომლის მიხედვით X სიმრავლის ელემენტს $x \in X$ შეესაბამება Y სიმრავლის ელემენტი $y \in Y$ ეწოდება ***ფუნქცია*** განსაზღვრული X სიმრავლეზე მნიშვნელობებით Y სიმრავლეში. X სიმრავლეს ეწოდება ფუნქციის ***განსაზღვრის არე*** ე.ი. $\mathscr{D}(f) = X$. განსაზღვრის არის ზოგად ელემენტს ეწოდება ***არგუმენტი*** ან ***დამოუკიდებელი ცვლადი.*** არგუმენტის კონკრეტული x_0 მნიშვნელობის შესაბამის $y_0 \in Y$ ეწოდება ***ფუნქციის მნიშვნელობა*** x_0 ***ელემენტზე*** ან ***ფუნქციის მნიშვნელობა არგუმენტის*** $x = x_0$ ***მნიშვნელობისათვის*** და აღინიშნება $f(x_0)$ სიმბოლოთი. არგუმენტის ცვლილებასას საზოგადოდ იცვლება $y = f(x) \in Y$ მნიშვნელობაც. ამიტომ $y = f(x)$ უწოდებენ ***დამოკიდებულ ცვლადს.*** ფუნქციის ყველა მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომელსაც ის მიიღებს განსაზღვრის X არის ელემენტებზე ეწოდება ***ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.*** ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეა $E(f) \subset \mathbb{R}$ ***ნამდვილი ფუნქცია*** ეწოდება.

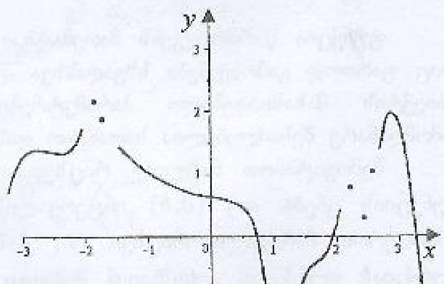
ორ f_1 და f_2 ფუნქციას ეწოდება ტოლი თუ მათ აქვთ ერთი და იგივე განსაზღვრის არე X და ნებისმიერი $x \in X$-თვის f_1 და f_2 ფუნქციების მნიშვნელობები ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. $f_1(x) = f_2(x)$, ნებისმიერი $x \in X$.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციის თვალსაჩინო წარმოდგენისათვის გამოიყენება ***ფუნქციის გრაფიკი,*** რომელიც წარმოადგენს საკოორდინატო სიბრტყის იმ (x, y) წერტილთა სიმრავლეს, სადაც $x \in \mathscr{D}(f)$ და $y = f(x)$. განტოლებას $y = f(x)$ ზოგჯერ ***გრაფიკის განტოლებას*** უწოდებენ.

ფუნქციის გრაფიკს შეიძლება ჰქონდეს რაიმე უწყვეტი წირის ფორმა, რომელიც შედგება მრუდი და სწორი ნაწილებისაგან (იხ. ნახ. 1) ან შეიძლება შედგებოდეს რამოდენიმე ერთმანეთისაგან დაშორებული ნაწილისაგან, მათ შორის იზოლირებული წერტილებისაგან (იხ. ნახ. 2).

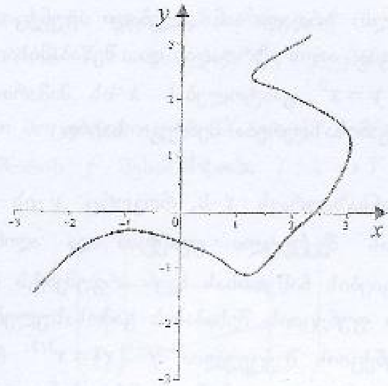


ნახ. 1.



ნახ. 2.

მაგრამ უნდა აღინიშნოს, რომ ნებისმიერი წირი არ იქნება ფუნქციის გრაფიკი. ფუნქციის განმარტების ძალით არგუმენტის თითოეულ მნიშვნელობას განსაზღვრის არიდან შეესაბამება ფუნქციის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა ანუ განსაზღვრის არიდან აღებულ x-ის თითოეულ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის გრაფიკს არ შეიძლება ეკუთვნოდეს ორი წერტილი რომლებსაც აქვთ ერთი და იგივე აბსცისა. მაგალითად, ნახ. 3-ზე მოყვანილი წირი არ შეიძლება იყოს ფუნქციის გრაფიკი



ნახ. 3.

ფუნქციას ეწოდება *ურთიერთცალსახა*, თუ არგუმენტის განსხვავებულ მნიშვნელობებს შეესაბამება ფუნქციის განსხვავებული მნიშვნელობები, ე.ი. $f(x_1) \neq f(x_2)$, ნებისმიერი $x_1 \neq x_2$ განსაზღვრის არიდან ანუ თუ $f(x_1) = f(x_2)$, მაშინ $x_1 = x_2$.

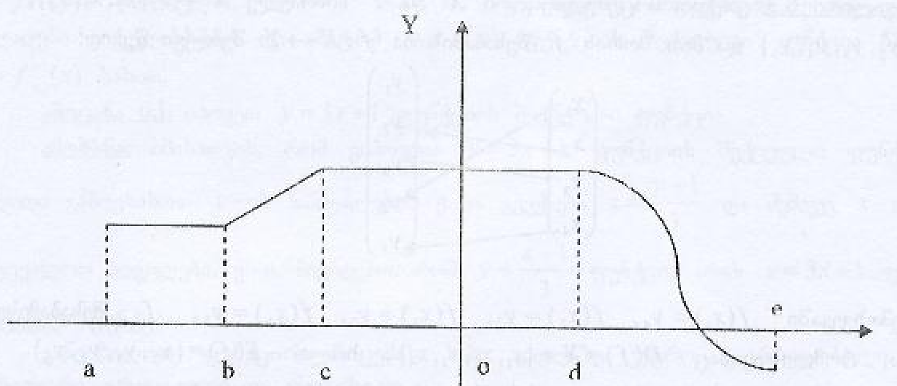
განსაზღვრება. f ფუნქციას ეწოდება ზრდადი რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1 < x_2$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა: $f(x_1) < f(x_2)$.

განსაზღვრება. f ფუნქციას ეწოდება კლებადი რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1 < x_2$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა: $f(x_1) > f(x_2)$.

<u>მაგალითი 6.1.</u> $y = x^2$ ფუნქცია კლებადია $(-\infty, 0]$ შუალედში და ზრდადია $[0, +\infty)$ შუალედში.

<u>მაგალითი 6.2.</u> $y = x^3$ ფუნქცია ზრდადია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში.

<u>განსაზღვრება.</u> ფუნქციას ეწოდება არაკლებადი რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1 < x_2$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა: $f(x_1) \leq f(x_2)$, ხოლო არაზრდადი, თუ $f(x_1) \geq f(x_2)$.



ნახ. 4

მე-4 ნახაზზე გამოსახული გრაფიკით მოცემული ფუნქცია არაკლებადია $[a, d]$ შუალედში, ზრდადია $[b, c]$-ში, არაზრდადია $[c, e]$-ში და კლებადია $[d, e]$-ში.

არაზრდად და არაკლებად ფუნქციებს მონოტონური ფუნქციები ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი ზრდადი ან კლებადი ფუნქცია არის ურთიერთცალსახა. მაგალითად, $f(x)=x^3$ ფუნქცია არის ზრდადი და შესაბამისად წარმოადგენს ურთიერთცალსახა ფუნქციას. ამიტომ $y=x^3$ განტოლებას x-ის მიმართ ყოველი y-თვის გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და ის განისაზღვრება შემდეგი სახით

$$x=y^{1/3}.$$

უკანასკნელი გამოსახულება განსაზღვრავს x-ს, როგორც y-ის ფუნქციას და ამ ფუნქციას ეწოდება $f(x)=x^3$ ფუნქციის ***შექცეული ფუნქცია*** და აღინიშნება f^{-1} სიმბოლოთი. ამრიგად, $f^{-1}(y)=y^{1/3}$. ფუნქციების ჩაწერისას ჩვენ არგუმენტს ჩვეულებრივ აღვნიშნავთ x ასოთი, ამიტომ თუ შექცეული ფუნქციის შესაბამის გამოსახულებაში შევცვლით y-ს x-ით მივიღებთ, რომ $f(x)=x^3$ ფუნქციის შექცეულია $f^{-1}(x)=x^{1/3}$. მოყვანილი მსჯელობა შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერი ურთიერთცალსახა ფუნქციებისათვის.

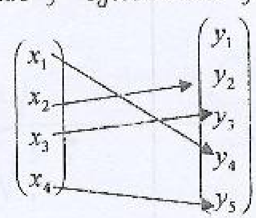
ვთქვათ $f(x)$ წარმოადგენს ურთიერთცალსახა ფუნქციას. ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა $E(f)$ სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის მოიძებნება ერთადერთი y მნიშვნელობა განსაზღვრის არიდან $y \in \mathscr{D}(f)$ ისეთი, რომ

$$f(y)=x. \tag{6.1}$$

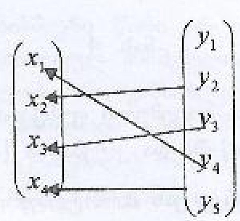
ფუნქციას, რომელიც მნიშვნელობათა $E(f)$ სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეუსაბამებს განსაზღვრის არის $y \in \mathscr{D}(f)$ ელემენტს ისე, რომ სრულდება (6.1) ტოლობა ეწოდება f ფუნქციის ***შექცეული ფუნქცია*** და აღინიშნება f^{-1} სიმბოლოთი. $f^{-1}(x)$ არის ის ერთადერთი მნიშვნელობა მნიშვნელობათა სიმრავლიდან, რომლისთვისაც სრულდება $f(f^{-1}(x))=x$ ტოლობა. შექცეული f^{-1} ფუნქციის განსაზღვრის არე ემთხვევა f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს $\mathscr{D}(f^{-1})=E(f)$, ხოლო f^{-1}-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე კი ემთხვევა f ფუნქციის განსაზღვრის არეს $E(f^{-1})=\mathscr{D}(f)$.

აღნიშნულ განმარტებაზე დაყრდნობით განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა:

<u>მაგალითი 6.3.</u> ვთქვათ მოცემულია ორი X და Y სიმრავლე $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$ და მათ შორის f შესაბამისობა $f:X\to Y$ შემდეგი წესით:

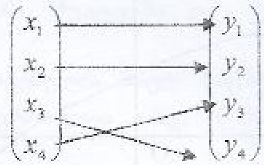


ჩვენ შემთხვევაში $f(x_1)=y_4$, $f(x_2)=y_2$, $f(x_3)=y_3$, $f(x_4)=y_5$, f შესაბამისობა ფუნქციაა, რომლისთვისაც $D(f)=X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, ხოლო $E(f)=\{y_2,y_3,y_4,y_5\}$. f შესაბამისობის შექცეულ შესაბამისობას $f^{-1}:Y\to X$ ექნება შემდეგი სახე:



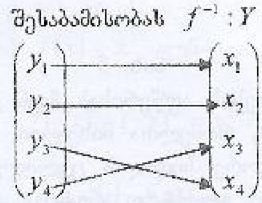
f^{-1} შესაბამისობა არ წარმოადგენს ფუნქციას, რადგანაც ის არ აკმაყოფილებს ფუნქციის განსაზღვრებას, იმის გამო, რომ Y სიმრავლის y_1 ელემენტს არ შეესაბამება არცერთი ელემენტი X სიმრავლიდან.

<u>მაგალითი 6.4.</u> ვთქვათ მოცემულია ორი X და Y სიმრავლე $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ და მათ შორის f შესაბამისობა $f: X \to Y$ შემდეგი წესით:



მოცემული f შესაბამისობა ფუნქციაა, რომლისთვისაც $D(f)=X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, ხოლო $E(f)=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

f შესაბამისობის შექცეულ შესაბამისობას $f^{-1}: Y \to X$ ექნება შემდეგი სახე:



f^{-1} შესაბამისობა წარმოადგენს ფუნქციას, ამასთან f და f^{-1} ურთიერთშექცეული ფუნქციებია.

ზრდადი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია ზრდადია, ხოლო კლებადის კი კლებადი.

ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე რიცხვითი სიმრავლეებია, რიცხვითი ფუნქცია ეწოდება.

თუ $y=f(x)$ ფუნქცია შექცევადია, მაშინ მის შექცეულ ფუნქციას აქვს სახე $x=f^{-1}(y)$. მიღებულია, რომ f და f^{-1} ფუნქციების არგუმენტად ერთი და იგივე ცვლადები ვიგულისხმოთ და ამიტომ $y=f(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია ჩაიწერება $y=f^{-1}(x)$ სახით.

<u>ამოცანა 6.1.</u> იპოვეთ $y=3x+1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია

<u>ამოხსნა.</u> იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $y=3x+1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, x ცვლადი გამოვსახოთ y–ის საშუალებით ე. ი. გვექნება $x=\dfrac{y-1}{3}$ და შემდეგ x და y–ს შევუცვალოთ ადგილები, ე. ი. მივიღებთ, რომ $y=\dfrac{x-1}{3}$ ფუნქცია არის $y=3x+1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

განვიხილოთ ფუნქციის მოცემის სამი ყველაზე უფრო გავრცელებული ხერხი: ცხრილური, გრაფიკული და ანალიზური.

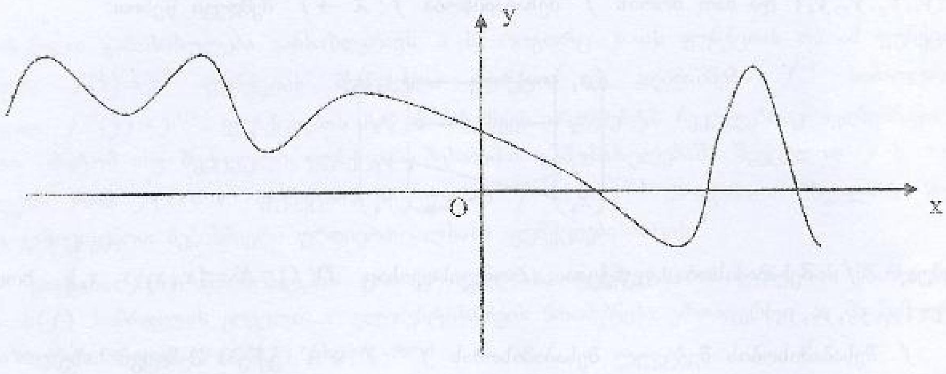
ვთქვათ y ფუნქცია მოცემულია რაიმე $f(x)$ გამოსახულების საშუალებით, მაგალითად $y=x^2$ ან $y=\sin x$ და ა. შ. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ფუნქცია მოცემულია ანალიზური სახით.

მაგალითად,

$$y=2x+5, \qquad y=\frac{2x+7}{\sqrt{x+4}} \qquad f(x)=\begin{cases} x^3+2, x \ge 2 \\ 2x, x<2 \end{cases}$$

ფუნქციები მოცემულია ანალიზურად.

ანალიზური ხერხის გარდა პრაქტიკაში ხშირად ხმარობენ ფუნქციის განსაზღვრის გრაფიკულ ხერხს, ეს ხერხი მიზანშეწონილია მაშინ, როცა ფუნქციის განსაზღვრა ანალიზურად საკმარისად ძნელია, მაგ. ნახ. 5



ნახ. 5

გარდა ამისა მრავალი პროცესის აღწერისას ჩვენ ვხმარობთ ხელსაწყოებს, რომელთა მეშვეობითაც ვღებულობთ მრუდებს, რომელთა მიხედვით შეგვიძლია ვიმსჯელოთ რომელიმე სიდიდის ცვლილების ხასიათზე მეორე სიდიდის ცვლილებასთან დაკავშირებით. მაგალითად მედიცინაში ფართოდ გამოიყენება ელექტროკარდიოგრაფი. ამ ხელსაწყოს საშუალებით შეიძლება ელექტროკარდიოგრამების მიღება — ანუ მიიღება მრუდები, რომლებიც გულის კუნთში წარმოშობილი იმპულსების ცვლილებას ასახავენ. ასეთი მრუდები შესაძლებლობას იძლევა სწორი დასკვნა გავაკეთოთ გულის მუშაობის შესახებ.

ზოგიერთი პროცესის შესწავლისას აგრეთვე სასარგებლოა ფუნქციის განსაზღვრის ცხრილური ხერხის გამოყენება. მაგალითად მეტეოროლოგები ადგენენ დედამიწის სხვადასხვა წერტილში მოსული ნალექების ცხრილებს. დედამიწის ეს სხვადასხვა წერტილი ამ შემთხვევაში "არგუმენტის მნიშვნელობათა" როლს ასრულებს, ხოლო ნალექების რაოდენობა კი "ფუნქციის მნიშვნელობათა" როლს.

თუ ფუნქცია მოცემულია ფორმულით და არ არის მითითებული განსაზღვრის არე, მაშინ იგულისხმება, რომ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა, არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლისთვისაც ფორმულას აზრი აქვს.

მაგალითად, $y=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y)=(0,+\infty)$, ხოლო $y=\frac{2}{x+1}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე კი არის $D(y)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

<u>განსაზღვრება.</u> f ფუნქციას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x რიცხვისათვის:

$$f(x)\le M.$$

<u>განსაზღვრება.</u> f ფუნქციას ეწოდება ქვემოდან შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი m რიცხვი, რომ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x რიცხვისათვის:

$$f(x)\ge m.$$

<u>განსაზღვრება.</u> f ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლეზე იგი შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ასევე ქვემოდან.

თუ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, მაშინ მას ამ სიმრავლეზე შემოუსაზღვრელი ფუნქცია ეწოდება.

__მაგალითი 6.5.__ ფუნქცია $y=\frac{1}{2+x^2}$ შემოსაზღვრულია მთელ ღერძზე, რადგან $0<\frac{1}{2+x^2}\le\frac{1}{2}$

__მაგალითი 6.6.__ ფუნქცია $y=\frac{2}{x}$ შემოუსაზღვრელია განსაზღვრის არეში, თუმცა იგი ზემოდან შემოსაზღვრულია $(-\infty,0)$ შუალედში და ქვემოდან შემოსაზღვრულია $(0,+\infty)$ შუალედში.

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია მთელ რიცხვით ღერძზე ან რაიმე მონაკვეთზე, რომელიც სათავის მიმართ სიმეტრიულია (მაგ. $(-a,a)$ შუალედში, სადაც a რაიმე დადებითი ნამდვილი რიცხვია).

__განსაზღვრება.__ f ფუნქციას ეწოდება ლუწი ფუნქცია თუ ყოველი x არგუმენტისათვის იგი აკმაყოფილებს პირობას:

$$f(-x)=f(x)$$

შევნიშნოთ, რომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ.

__ამოცანა 6.2.__ აჩვენეთ, რომ $f(x)=x^2$ ფუნქცია ლუწია.

__ამოხსნა.__ მართლაც

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x).$$

ე.ი. $f(x)$ ფუნქცია ლუწია.

__ამოცანა 6.3.__ აჩვენეთ, რომ $f(x)=|x|$ ფუნქცია ლუწია

__ამოხსნა.__ მართლაც

$$f(-x)=|-x|=|x|=f(x).$$

ე.ი. $f(x)$ ფუნქცია ლუწია.

__განსაზღვრება.__ f ფუნქციას ეწოდება კენტი ფუნქცია თუ ყოველი x არგუმენტისათვის იგი აკმაყოფილებს პირობას:

$$f(-x)=-f(x).$$

__ამოცანა 6.4.__ აჩვენეთ, რომ $f(x)=x^3$ ფუნქცია კენტია.

__ამოხსნა.__ მართლაც

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x).$$

ე.ი. $f(x)$ ფუნქცია კენტია.

__ამოცანა 6.5.__ აჩვენეთ, რომ $f(x)=\frac{x}{|x|},(x\ne 0)$ ფუნქცია კენტია.

__ამოხსნა.__ მართლაც

$$f(-x)=\frac{-x}{|-x|}=-\frac{x}{|x|}=-f(x).$$

ე.ი. $f(x)$ ფუნქცია კენტია.

ზემოთ მოყვანილი განმარტებებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ლუწი ფუნქცია სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ, ხოლო კენტი ფუნქციები სიმეტრიული არიან კოორდინატთა სათავის მიმართ.

ფუნქცია შეიძლება არც კენტი იყოს და არც ლუწი. მაგალითად, ასეთი ფუნქციის მაგალითია ფუნქცია $f(x)=x^2+x^3$, რომელიც არც კენტია და არც ლუწია.

მართლაც,

$$f(-x)=(-x)^2+(-x)^3=x^2-x^3.$$

როგორც ვხედავთ $f(x)$ ფუნქციისათვის არ შესრულდა არც $f(-x)=f(x)$ პირობა და არც $f(-x)=-f(x)$ პირობა, ამიტომ იგი არც ლუწია და არც კენტი.

განსაზღვრება. f ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, ეწოდება პერიოდული ფუნქცია, თუ არსებობს ისეთი $T \neq 0$ მუდმივი რიცხვი, რომ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის ადგილი ექნება ტოლობას:

$$f(x+T)=f(x).$$

T რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის პერიოდი.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. განმარტეთ ფუნქცია, ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.
2. განმარტეთ მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.
3. ჩამოაყალიბეთ ფუნქციის მოცემის ხერხები.
4. როგორ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი? კლებადი? არაზრდადი? არაკლებადი?
5. როგორ ფუნქციას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული? ქვემოდან შემოსაზღვრული? შემოსაზღვრული?
6. განმარტეთ ლუწი და კენტი ფუნქციები.
7. განმარტეთ პერიოდული ფუნქცია.

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების შექცეული ფუნქციები:

ა) $y=5x-8$ ბ) $y=\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}$ გ) $y=\frac{3}{5}x-\frac{4}{3}$

2. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არე:

ა) $y=3x^2-5x+8$ ბ) $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-2}$ გ) $y=\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$

დ) $y=\frac{2}{x}+5x$ ე) $y=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ვ) $y=2^x+\frac{1}{x+1}$

ზ) $y=3^{\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt[3]{x-3}}{\sqrt{x+1}}$

3. დაადგინეთ შემდეგი ფუნქციების ლუწ-კენტოვნება:

ა) $y=2x+3$ ბ) $y=x+|x|$ გ) $y=x\cdot|x|$ დ) $y=x^2\cdot|x|$

ე) $y=x^5+x^3$ ვ) $y=x^2+x^4$ ზ) $y=x^5+x^7$

4. იპოვეთ შემდეგი მნიშვნელობები $f(5)$, $f(1-x)$, $f(-3)$ და $f(3)-f(6)$, თუ

ა) $f(x)=x^2-1$ გ) $f(x)=-2x^2+5$

ბ) $f(x)=x^3+1$ დ) $f(x)=5x+10$

5. დაადგინეთ შემდეგი შესაბამისობებიდან რომელი წარმოადგენს ფუქციას

ა) $3 \to 1$, $5 \to -1$, $6 \to 5$

ბ) $7 \to -1$, $8 \to -5$, $8 \to -8$, $10 \to -8$

გ) $-2 \to 6$, $-1 \to 6$, $-6 \to 6$, $-9 \to 6$

დ) $3 \to 5$, $6 \to 5$, $7 \to 7$, $15 \to 7$

§ 7. წრფივი, კვადრატული, ხარისხოვანი ფუნქციები და მათი გრაფიკები

§ 7.1 წრფივი ფუნქცია

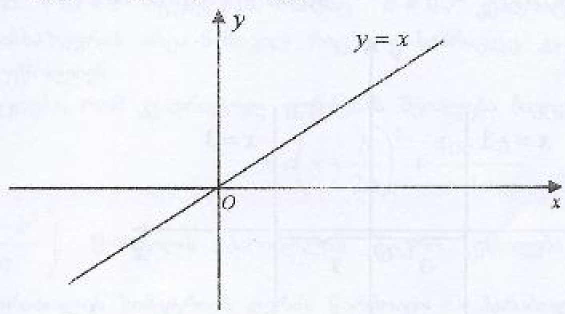
$y=kx+b$ სახის ფუნქციას, სადაც k და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, წრფივი ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე. k რიცხვს წრფის **კუთხური კოეფიციენტი** ეწოდება.

თუ $k=0$, მაშინ წრფივი ფუნქცია მიიღებს სახეს $y=b$, ე.ი. ამ შემთხვევაში ის მუდმივი ფუნქციაა.

მტკიცდება, რომ როცა $k>0$, მაშინ ფუნქცია ზრდადია, ხოლო როცა $k<0$ ფუნქცია კლებადია.

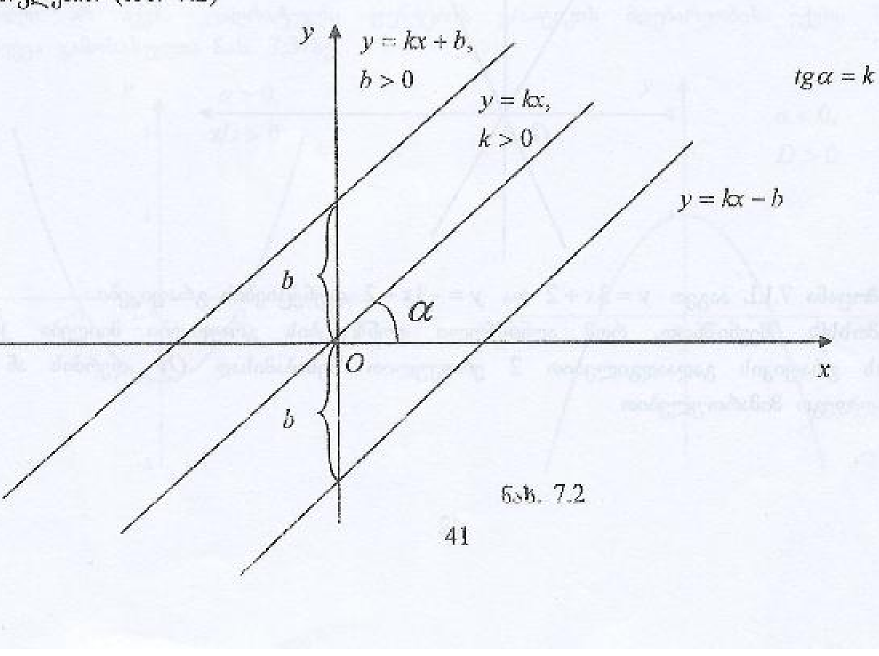
ამრიგად, თუ $k \neq 0$, $y=kx+b$ ფუნქცია მონოტონურია.

$y=kx$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს კოორდინატთა სათავეზე გამავალ წრფეს, რომლის დახრის კუთხეს განსაზღვრავს k კოეფიციენტი, რომელსაც წრფის კუთხური კოეფიციენტი ეწოდება. თუ $k=1$, მაშინ ფუნქცია მიიღებს სახეს $y=x$. ამ ფუნქციის გრაფიკი (იხ. ნახ. 7.1) არის წრფე, რომელიც I და III საკოორდინატო სიბრტყეების კუთხეების ბისექტრისათა გაერთიანებას წარმოადგენს.



ნახ. 7.1

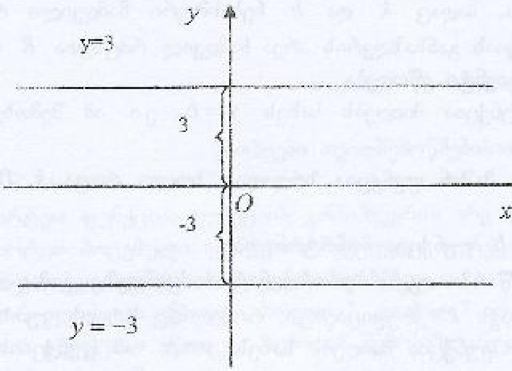
იმ შემთხვევაში, როცა b განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ თუ $b>0$, $y=kx+b$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=kx$ ფუნქციის გრაფიკის b მანძილზე პარალელური გადატანით OY ღერძის მიმართულებით, ხოლო თუ $b<0$, მაშინ $y=kx$ ფუნქციის გრაფიკის $|b|$ მანძილზე პარალელური გადატანით OY ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 7.2)



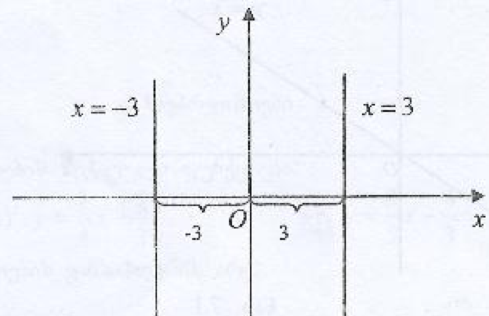
ნახ. 7.2

ვინაიდან $y=kx+b$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს წრფეს, ამიტომ მის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ გრაფიკის ორი წერტილი (მაგალითად, ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები) და მათზე გავავლოთ წრფე.

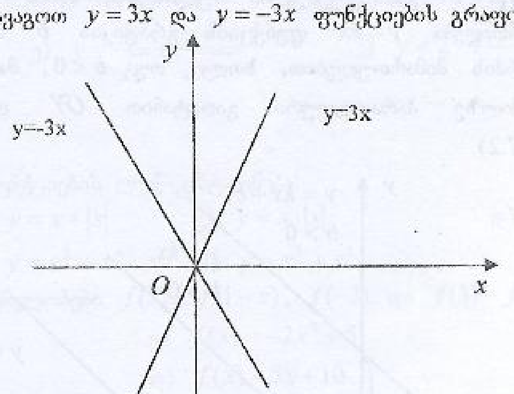
მაგალითი 7.1.1. ავაგოთ $y=3$ და $y=-3$ ფუნქციების გრაფიკები.



მაგალითი 7.1.2. ავაგოთ $x=3$ და $x=-3$ ფუნქციების გრაფიკები.

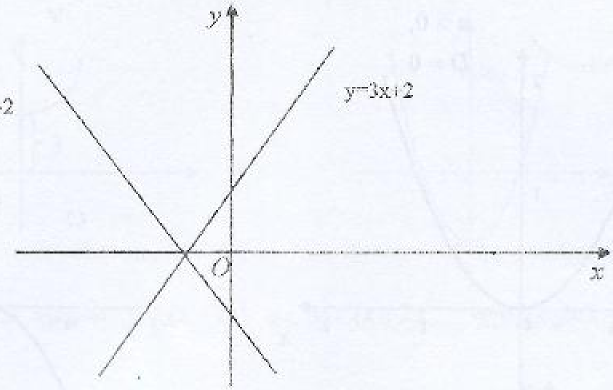


მაგალითი 7.1.3. ავაგოთ $y=3x$ და $y=-3x$ ფუნქციების გრაფიკები.



ამოცანა 7.1.1. ააგეთ $y=3x+2$ და $y=-3x-2$ ფუნქციების გრაფიკები.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული ფუნქციების გრაფიკები მიიღება $y=3x$ ფუნქციის გრაფიკის გადაადგილებით 2 ერთეულით შესაბამისად Oy ღერძის ან მისი საწინააღმდეგო მიმართულებით



§7.2 კვადრატული ფუნქცია

$y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციას, სადაც $a \neq 0$, **კვადრატული ფუნქცია** ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკს **პარაბოლას** უწოდებენ.

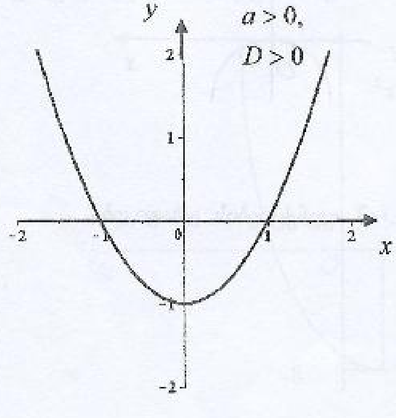
მტკიცდება, რომ კვადრატულ ფუნქციას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

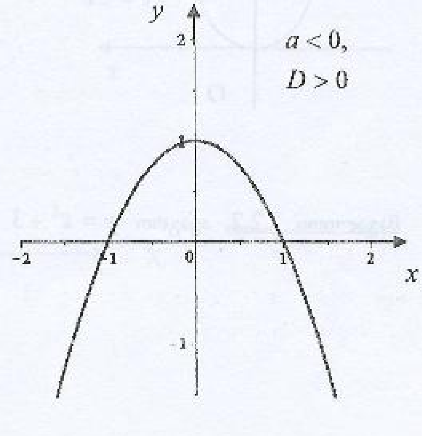
$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

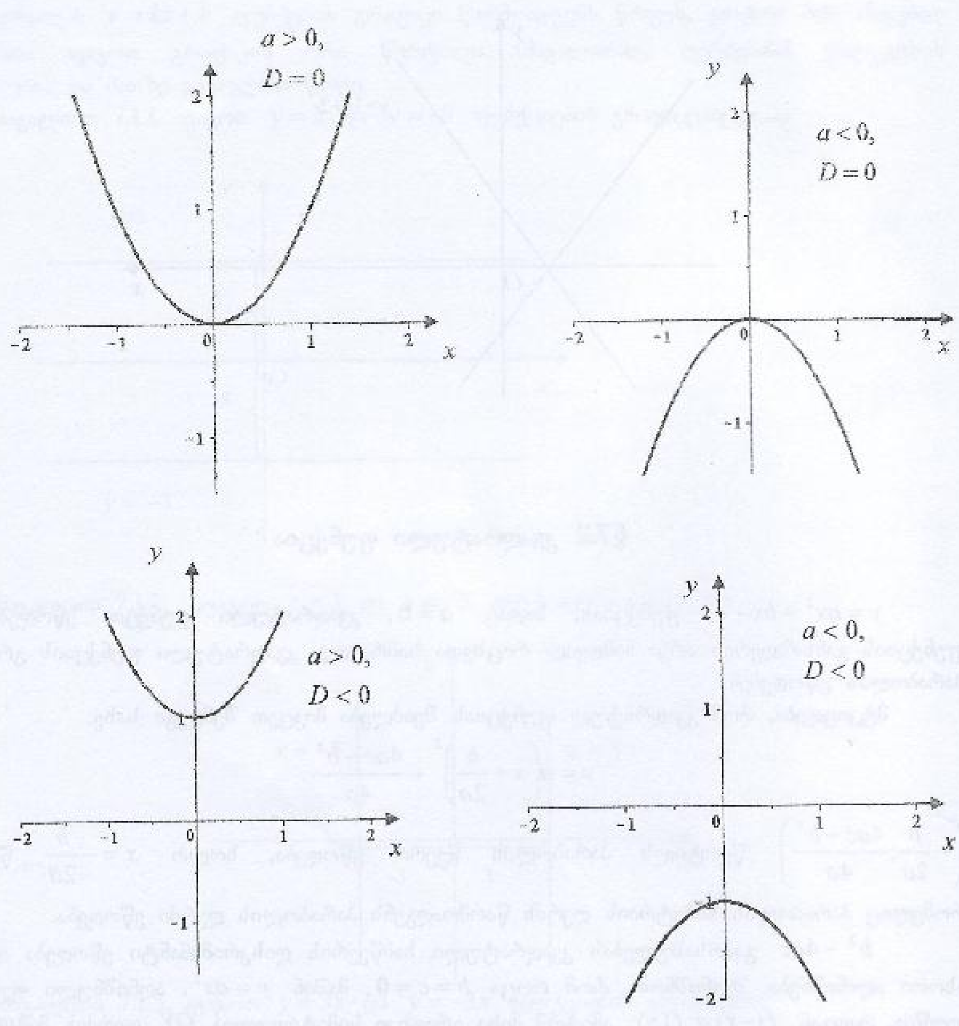
$\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ წერტილს პარაბოლის წვერო ეწოდება, ხოლო $x = -\frac{b}{2a}$ წრფეს, რომელიც პარაბოლის სიმეტრიის ღერძს წარმოადგენს პარაბოლის ღერძი ეწოდება.

$b^2 - 4ac$ გამოსახულებას კვადრატული სამწევრის **დისკრიმინანტი** ეწოდება და D ასოთი აღინიშნება. შევნიშნოთ, რომ როცა $b = c = 0$, მაშინ $y = ax^2$. აღნიშნული ფუნქცია ლუწია, რადგან $f(-x) = f(x)$. ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ როცა $a > 0$, პარაბოლის შტოები ზემოთაა მიმართული, ხოლო როცა $a < 0$ კი ქვემოთ. აგრეთვე, თუ $D > 0$, პარაბოლა ორ წერტილში კვეთს Ox ღერძს, თუ $D = 0$ იგი ეხება Ox ღერძს, ხოლო თუ $D < 0$, მაშინ მას Ox ღერძთან საერთო წერტილი არ აქვს. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის მდებარეობის ექვსი შესაძლო შემთხვევა გამოსახულია ნახ. 7.3-ზე.

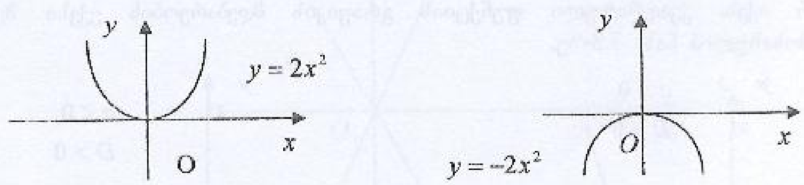




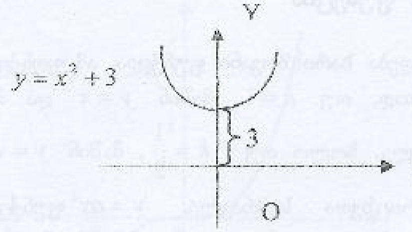


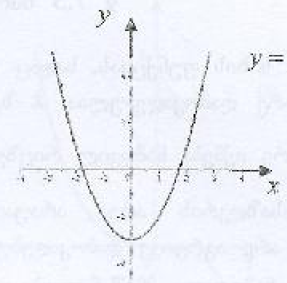
ნახ. 7.3

<u>მაგალითი 7.2.1.</u> ავაგოთ $y = 2x^2$ და $y = -2x^2$ ფუნქციების გრაფიკები

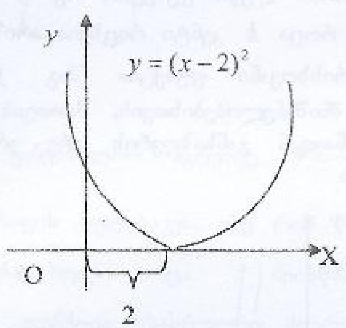


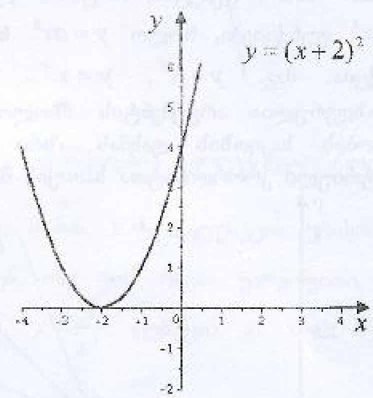
<u>მაგალითი 7.2.2.</u> ავაგოთ $y = x^2 + 3$ და $y = x^2 - 3$ ფუნქციების გრაფიკები





მაგალითი 7.2.3 ააგეთ $y=(x-2)^2$ და $y=(x+2)^2$ ფუნქციების გრაფიკები





ამოცანა 7.2.1. ააგეთ $y=2x^2-4x-6$ ფუნქციის გრაფიკი

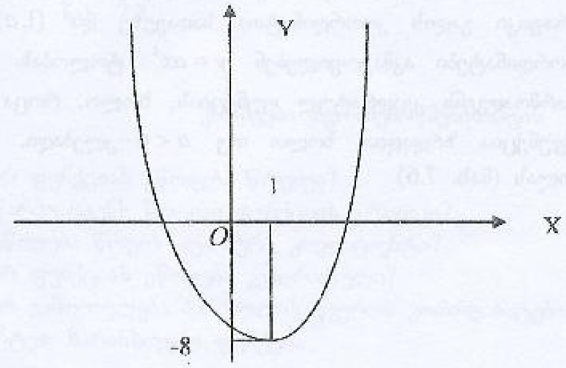
ამოხსნა. ვიპოვოთ პარაბოლის წვეროს კოორდინატები $\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ფორმულის გამოყენებით, მაშინ მივიღებთ

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\cdot 2}=1; \qquad \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot 2(-6)-(-4)^2}{4\cdot 2}=\frac{-64}{8}=-8.$$

ამგვარად პარაბოლის წვერო გადის წერტილში $M(1;-8)$. რადგან პირველი კოეფიციენტი $a=2>0$, ამიტომ პარაბოლის შტოები მიმართულია ზემოთ. პარაბოლის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები მოიცემა შემდეგი სახით

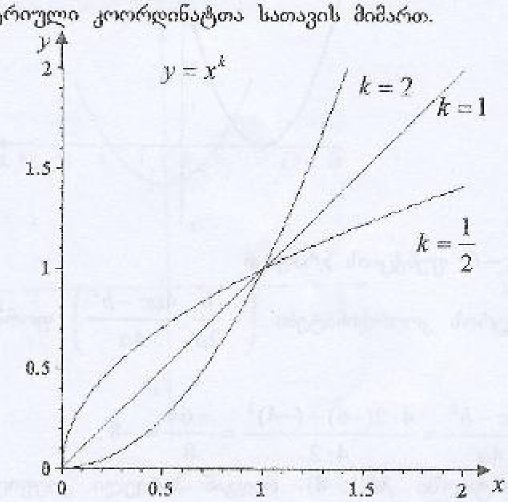
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{და} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

ე.ი. გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე;

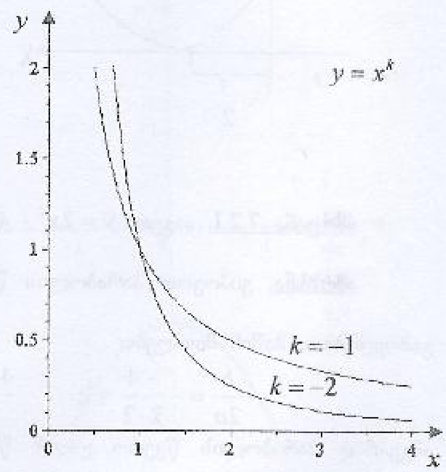


§ 7.3 ხარისხოვანი ფუნქცია

$y=ax^k$ სახის ფუნქციას, სადაც $a\neq 0$ ეწოდება ხარისხოვანი ფუნქცია. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე დამოკიდებულია k-ზე, მაგალითად, თუ $k=1$, მაშინ $y=x$ და მისი განსაზღვრის არე იქნება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო თუ $k=\frac{1}{2}$, მაშინ $y=\sqrt{x}$, და მისი განსაზღვრის არეა არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლე. $y=ax^k$ ფუნქციის ცვალებადობის არე აგრეთვე დამოკიდებულია k-ზე. მაგალითად $y=x$ ფუნქციას შეუძლია მიიღოს ყველა ნამდვილი მნიშვნელობა, ხოლო $y=x^2$ ფუნქციას მხოლოდ არაუარყოფითი მნიშვნელობები. ხარისხოვან ფუნქციათა შორის არიან ლუწი და კენტი ფუნქციებიც, მაგ. $y=ax^k$ სახის ფუნქცია, როცა k ლუწი რიცხვია არის ლუწი ფუნქცია, მაგ. $y=x^2$ და $y=x^4$ ფუნქციები, ხოლო $y=ax^k$ სახის ფუნქცია, როცა k კენტი რიცხვია არის კენტი ფუნქცია, მაგ. $y=x^3$, $y=x^{-3}$. ზოგიერთი ხარისხოვანი ფუნქცია (მაგ. $y=\sqrt{x}$) განსაზღვრულია არგუმენტის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებისთვის, მათთვის ლუწ-კენტობის საკითხის დასმას აზრი არ აქვს, ვინაიდან განსაზღვრის არე არ არის სიმეტრიული კოორდინატთა სათავის მიმართ.



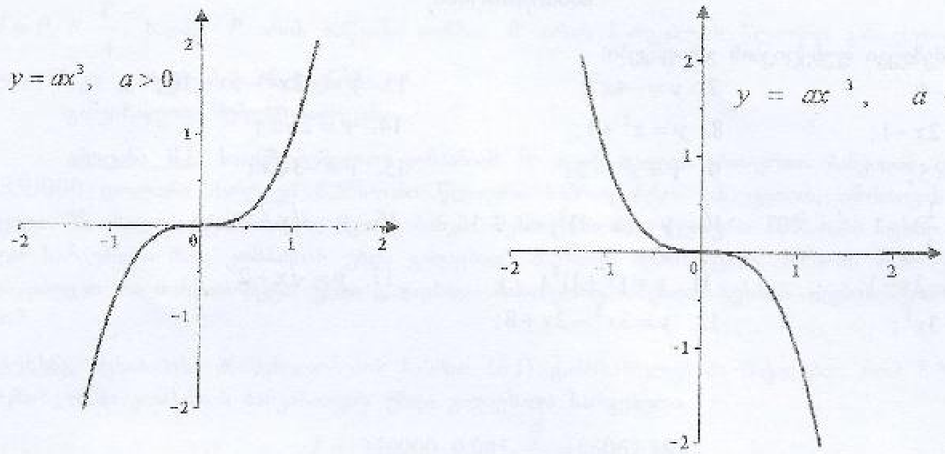
ნახ. 7.4



ნახ. 7.5

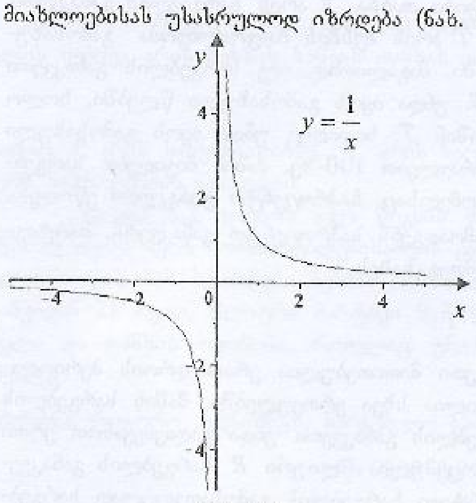
თუ k დადებითი რიცხვია და $x>0$, მაშინ $y=x^k$ ხარისხოვანი ფუნქცია მონოტონურად იზრდება (ნახ. 7.4), ხოლო თუ k უარყოფითია და $x>0$, მაშინ ფუნქცია $y=x^k$ მონოტონურად კლებადია. (ნახ. 7.5)

შევნიშნოთ, რომ a-სა და k-ს ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის $y=ax^k$ ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე და $(1,a)$ წერტილზე, რადგან ამ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ $y=ax^k$ ტოლობას. როცა $k=2$, მაშინ $y=ax^k$ ფუნქცია წარმოადგენს კვადრატულ ფუნქციას, ხოლო, როცა $k=3$, მაშინ $y=ax^3$. თუ $a>0$ ეს ფუნქცია ზრდადია, ხოლო თუ $a<0$–კლებადი. მისი გრაფიკი წარმოადგენს კუბურ პარაბოლას (ნახ. 7.6)

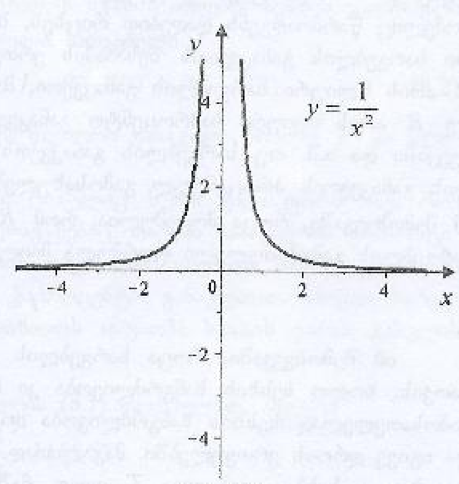


ნახ. 7.6

განვიხილოთ აგრეთვე $y=\frac{1}{x}$ და $y=\frac{1}{x^2}$ ფუნქციების ყოფაქცევა. როცა x მიისწრაფის ნულისაკენ, ისე რომ რჩება დადებითი, მაშინ $y=\frac{1}{x}$ ფუნქცია უსასრულოდ იზრდება, ხოლო როცა x მიისწრაფის ნულისაკენ, ისე რომ რჩება უარყოფითი, მაშინ $y=\frac{1}{x}$ ფუნქცია უსასრულოდ მცირდება (ნახ. 7.7). $y=\frac{1}{x^2}$ ფუნქცია კი x-ის ნულთან მიახლოებისას უსასრულოდ იზრდება (ნახ. 7.8).



ნახ. 7.7



ნახ. 7.8

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. როგორ ფუნქციას ეწოდება წრფივი?
2. რას წარმოადგენს წრფივი ფუნქციის გრაფიკი?
3. რას ეწოდება წრფის კუთხური კოეფიციენტი?
4. როგორ ფუნქციას ეწოდება კვადრატული?
5. როგორ გამოითვლება პარაბოლის წვეროს კოორდინატები?
6. განმარტეთ ხარისხოვანი ფუნქცია

სავარჯიშოები

ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:

1. $y=-4$;
2. $y=2x-1$;
3. $x=5$;
4. $y=\frac{1}{2}x+1$
5. $y=-2x-1$;
6. $y=3x^2$;
7. $y=-4x^2$;
8. $y=x^2+1$;
9. $y=x^2-2$;
10. $y=(x-1)^2$;
11. $y=(x+1)^2$;
12. $y=3x^2-2x+8$;
13. $y=-2x^2-5x+10$;
14. $y=2\sqrt{x}$;
15. $y=-3\sqrt{x}$;
16. $y=\sqrt{x-1}$;
17. $y=\sqrt{x+2}$.

თავი 4. ფინანსური მათემატიკის ზოგიერთი საკითხი

§ 8. სარგებლის მარტივი განაკვეთი

სარგებელი მარტივი განაკვეთით ანუ მარტივი სარგებელი არის სესხის სარგებელი, რომელიც აიღება საწყისი თანხიდან სესხის მთელი პერიოდის განმავლობაში და გამოითვლება შემდეგნაირად

$$I=P\cdot R\cdot T \tag{8.1}$$

სადაც I არის ***მარტივი სარგებელი***, P არის ***საწყისი თანხა***, R არის ***სარგებლის განაკვეთი***, რომელიც წარმოადგენს დადებით რიცხვს, ხოლო T არის ***სესხის ხანგრძლივობა*** გამოსახული სარგებლის განაკვეთის შესაბამის ერთეულებში. მაგალითად, თუ სარგებლის განაკვეთი R არის წლიური სარგებლის განაკვეთი, მაშინ T უნდა იყოს გამოსახული წლებში, ხოლო თუ R არის თვიური საპროცენტო განაკვეთი, მაშინ T სიდიდეც უნდა იყოს გამოსახული თვეებში და ა.შ. თუ სარგებლის განაკვეთს გავამრავლებთ 100-ზე, მაშინ მივიღებთ სარგებლის განაკვეთის პროცენტულ გამოსახულებას, რომელსაც ***საპროცენტო განაკვეთი*** ეწოდება. იმ შემთხვევაში, როცა მოცემულია, რომ R^* წარმოადგენს საპროცენტო განაკვეთს, მარტივი სარგებლის გამოსათვლელი ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$I=P\cdot\frac{R^*}{100}\cdot T.$$

იმ შემთხვევაში, როცა სარგებლის განაკვეთი მითითებულია ერთი დროის პერიოდისათვის, ხოლო სესხის ხანგრძლივობა კი მოყვანილია სხვა ერთეულებში, მაშინ სარგებლის გამოსათვლელად სესხის ხანგრძლივობა და სარგებლის განაკვეთი უნდა გადავიყვანოთ ერთი და იგივე დროის ერთეულებში. მაგალითად, თუ მოცემულია წლიური R სარგებლის განაკვეთი, ხოლო სესხი აღებულია T თვით, მაშინ მარტივი სარგებლის გამოსათვლელად სარგებლის წლიური R განაკვეთით, T უნდა გავყოთ 12-ზე და მიღებული სიდიდე უკვე იქნება დროის პერიოდი გამოსახული წლის ნაწილებში. ამის შემდეგ უნდა გამოვიყენოთ სარგებლის გამოსათვლელი ფორმულა (8.1), ე.ი. თუ სესხის ხანგრძლივობა გამოსახულია თვეებში, ხოლო სარგებლის განაკვეთი კი არის წლიური, მაშინ მარტივი სარგებელი გამოითვლება შემდეგი ფორმულის გამოყენებით $I=P\cdot R\cdot\frac{T}{12}$, სადაც P არის საწყისი თანხა, R არის სარგებლის წლიური განაკვეთი, ხოლო T კი თვეების რაოდენობა. იმ შემთხვევაში, როცა სესხის ხანგრძლივობა გამოსახულია კვარტლებში, ხოლო სარგებლის განაკვეთი კი არის წლიური, მაშინ მარტივი სარგებელი გამოითვლება შემდეგი ფორმულის გამოყენებით

$I = P \cdot R \cdot \frac{T}{4}$, სადაც P არის საწყისი თანხა, R არის სარგებლის წლიური განაკვეთი, ხოლო T კი კვარტლების რაოდენობა.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

<u>ამოცანა 8.1.</u> საავტომობილო კომპანიამ 9 თვის ვადით ერთ-ერთი ბანკიდან ისესხა 1350000 დოლარი მარტივი 8,5%-იანი წლიური საპროცენტო განაკვეთით, იმისათვის რომ ეყიდა 75 ახალი ავტომობილი, მეორე ბანკმა შესთავაზა მას წლიური 10%-იანი სესხი. იპოვეთ სარგებელი რაც კომპანიას უნდა გადაეხადა 8,5%-ის შემთხვევაში, 10%-ის შემთხვევაში და იპოვეთ რა თანხით მეტი უნდა გადაეხადა მას მეორე ბანკიდან სესხის აღების შემთხვევაში?

<u>ამოხსნა.</u> შესაბამისი მნიშვნელობების ჩასმით (8.1) გამოსახულებაში მივიღებთ, რომ 8.5%-ის შემთხვევაში კომპანიას ბანკისათვის უნდა გადაეხადა სარგებელი

$$I = 1350000 \cdot 0,085 \cdot \frac{9}{12} = 86062,5\$.$$

შევნიშნოთ, რომ საპროცენტო სარგებელი გამოსახულია ათწილადებში. მეორე ბანკის შემთხვევაში 10%-იანი საპროცენტო განაკვეთით კომპანიას უნდა გადაეხადა

$$I = 1350000 \cdot 0,1 \cdot \frac{9}{12} = 101250\$.$$

ე.ი. კომპანიას სესხი რომ აეღო მეორე ბანკში, მაშინ მას უნდა გადაეხადა

$$101250 - 86062,5 = 15187,5$$

დოლარით მეტი.

თანხის ოდენობა M, რომელიც უნდა გადაიხადოს სესხის ამღებმა სესხის ვადის გასვლის შემდეგ არის სესხის საწყის თანხას დამატებული სარგებელი

$$M = P + I = P + PRT = P(1 + RT), \qquad (8.2)$$

სადაც P არის საწყისი თანხა, R არის სარგებლის წლიური განაკვეთი, ხოლო T კი წლიური საპროცენტო განაკვეთი.

<u>ამოცანა 8.2.</u> დავითს აქვს წიგნის მაღაზია, რომელიც სურს გადააკეთოს ისე, რომ შესაძლებელი იყოს მომხმარებლებისათვის ყავის შეთავაზებაც. თავისი ჩანაფიქრის განხორციელებისათვის მას სჭირდება სესხი 7200$ დოლარის ოდენობით. დავითმა ისესხა ეს თანხა ბანკიდან 21 თვით, წლიური მარტივი 9,25%-იანი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ სარგებელი და თანხის ოდენობა, რომელიც უნდა გადაიხადოს დავითმა სესხის ვადის გასვლის შემდეგ.

<u>ამოხსნა.</u> როგორც ავღნიშნეთ, სარგებელი გამოითვლება (8.1) ფორმულით, ამიტომ

$$I = 7200 \cdot 0,0925 \cdot \frac{21}{12} = 1165,5\$.$$

აქედან გამომდინარე, თანხის ოდენობა, რომელიც უნდა გადაიხადოს დავითმა ამ ვადის გასვლის შემდეგ ტოლი იქნება

$$M = P + I = 7200 + 1165,5 = 8365,5\$.$$

ამოცანა 8.1-ში და ამოცანა 8.2-ში ჩვენ განვიხილეთ ის შემთხვევები, როცა სესხის ხანგრძლივობა გამოსახული იყო თვეებში. მაგრამ ხშირად სესხი გაიცემა დღეების გარკვეული რაოდენობით ანუ სესხის პერიოდი გამოსახულია დღეებში. კერძოდ, 120 დღით, ან გარკვეულ დღემდე, მაგალითად, 20 მაისამდე და ა. შ. ამ შემთხვევაში სარგებლის გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ ცხრილი 1, რომელიც მოცემულია დანართში.

ვიგულისხმოთ, რომ წელიწადი არ არის ნაკიანი, ე.ი. შედგება 365 დღისაგან, მაშინ თუ გვინდა დავითვალოთ რამდენი დღეა 11 ივნისიდან 25 დეკემბრამდე, ცხრილში მოვძებნით 11 ივნისს, რომელიც არის წლის 162 დღე და 25 დეკემბერს, რომელიც არის 359 დღე.

ამიტომ 11 ივნისიდან 25 დეკემბრამდე არის $359-162=197$ დღე. იმ შემთხვევაში, როცა სესხის პერიოდი გამოსახულია დღეებში, ხოლო R კი წარმოადგენს სარგებლის წლიურ განაკვეთს, მარტივი სარგებელი გამოითვლება $I=PRT$ ფორმულის გამოყენებით, სადაც T სესხის ხანგრძლივობა გამოითვლება შემდეგნაირად

$$T=\frac{\text{სესხის ხანგრძლივობა გამოსახული დღეებში}}{\text{დღეების რაოდენობა წლის განმავლობაში}}.$$

შევნიშნოთ, რომ სესხის აღებისას ის დღე, როდესაც სესხი აიღება დღეების რაოდენობაში არ ითვლება, მაგრამ ითვლება ის დღე როდესაც ხდება სესხის დაფარვა.

იმ შემთხვევაში, როცა სესხის პერიოდი გამოსახულია დღეებში შეიძლება განვასხვავოთ ორი ტიპის სარგებელი: ზუსტი და ჩვეულებრივი. ***ზუსტი სარგებლის*** გამოთვლისას იყენებენ წელიწადის განმავლობაში დღეების ზუსტ რაოდენობას 365-ს ან ნაკიანი წელიწადის შემთხვევაში 366-ს. ***ჩვეულებრივი ანუ ე.წ. საბანკო სარგებლის*** გამოთვლისას გულისხმობენ, რომ წელიწადი შედგება 360 დღისაგან. ადრე, სანამ კალკულატორები და კომპიუტერები ფართოდ გავრცელდებოდა, ბანკები როგორც წესი იყენებდნენ ჩვეულებრივ სარგებელს. ამჟამად კი ბევრი სახელმწიფო სტრუქტურა, ფედერალური რეზერვები და ბანკები იყენებენ ზუსტ სარგებელს, თუმცა ზოგიერთი ბანკი და ფინანსური დაწესებულება ჯერ კიდევ იყენებს 360 დღეს წელიწადის დღეების რაოდენობის ნაცვლად. შემდგომში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ წელიწადში დღეების რაოდენობა 365-ის ტოლია, როცა გამოვიყენებთ ზუსტ სარგებელს, ხოლო ჩვეულებრივი სარგებლის შემთხვევაში კი ჩავთვლით, რომ წელიწადი შედგება 360 დღისაგან.

განვიხილოთ ამოცანა ჩვეულებრივი სარგებლის გამოყენებაზე.

<u>ამოცანა 8.3.</u> 10 მარტს მეწარმემ აიღო სესხი 80000$ ერთ-ერთ ბანკში ჩვეულებრივი (საბანკო) სარგებლით წლიური მარტივი 10,5%-იანი საპროცენტო განაკვეთით 180 დღით. იპოვეთ სესხის გადახდის თარიღი და თანხის რაოდენობა, რომელიც უნდა გადაიხადოს მეწარმემ.

<u>ამოხსნა.</u> სესხის გადახდის თარიღის დასადგენად შევნიშნოთ, რომ 10 მარტი არის წლის 69 დღე, ამიტომ გადახდის თარიღი იქნება წლის 249 დღე. ე.ი მეწარმემ ვალი უნდა გადაიხადოს 6 სექტემბერს. რაც შეეხება თანხის რაოდენობას, რომელიც უნდა გადაიხადოს მეწარმემ ის ტოლი იქნება

$$80000+80000\cdot\frac{10,5}{100}\cdot\frac{180}{360}=80000+4200=84200\$.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ წინა ამოცანაში სესხი გაცემულია ზუსტი სარგებლით, მაშინ სარგებელი გამოითვლება შემდეგი წესით

$$80000\cdot\frac{10,5}{100}\cdot\frac{180}{365}=4200\cdot0,493=4142,47\$,$$

მარტივი სარგებლის გამოსათვლელი ძირითადი (3.1) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ცნობილია სარგებლის განაკვეთი, სესხის ხანგრძლივობა და სარგებელი, მაშინ საწყისი თანხა შეიძლება გამოვიანგარიშოთ შემდეგი ფორმულით

$$P=\frac{I}{RT} \tag{8.3}$$

სადაც I არის მარტივი სარგებელი, P არის საწყისი თანხა, R არის სარგებლის წლიური განაკვეთი, ხოლო T არის სესხის ხანგრძლივობა გამოსახული წლებში.

<u>ამოცანა 8.4.</u> სამშენებლო კომპანიამ აიღო ბანკიდან სესხი ჩვეულებრივი (საბანკო) სარგებლით 10%-იანი მარტივი საპროცენტო განაკვეთით 54 დღით. იპოვეთ საწყისი თანხა, რომელიც იძლევა 780$ მარტივ სარგებელს.

<u>ამოხსნა.</u> მართლაც, (3.3) ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ საწყისი თანხის ოდენობას

$$P = \frac{780\$}{0{,}1 \times \dfrac{54}{360}} = 52000\$.$$

<u>ამოცანა 8.5.</u> ტარიელმა აიღო სესხი 2 თებერვალს კოლეჯში სწავლის საფასურის გადასახდელად. ის აპირებს სესხის სარგებლის გადახდას 15 აპრილს, ვინაიდან მან ამ პერიოდში უნდა აიღოს სახელმწიფო სტიპენდია. ამ სესხისათვის მარტივი ჩვეულებრივი სარგებელი 10,5% საპროცენტო განაკვეთით შეადგენს 37,8$. იპოვეთ საწყისი თანხა.

<u>ამოხსნა.</u> შევნიშნოთ, რომ 2 თებერვლიდან 15 აპრილამდე არის 72 დღე, ამიტომ $T = \frac{72}{360}$ და (8.3) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ საწყისი თანხა ტოლია

$$P = \frac{37{,}8\$}{0{,}105 \cdot \dfrac{72}{360}} = 1800\$.$$

(8.1) ფორმულიდან მიიღება სარგებლის განაკვეთის გამოსათვლელი ფორმულაც

$$R = \frac{I}{PT}. \tag{8.4}$$

თუ გამოვიყენებთ M-ისათვის (8.2) ფორმულას მივიღებთ R-ის გამოსახულებას M-ის საშუალებით $R = \frac{M - P}{PT}$.

<u>ამოცანა 8.6.</u> სტუდენტმა ერთ-ერთ ბანკში გახსნა ანაბარი 45 დღით, რომელზეც მოათავსა 2500$. იპოვეთ მარტივი საპროცენტო განაკვეთი, თუ ჩვეულებრივი სარგებელი შეადგენს 37,5$.

<u>ამოხსნა.</u> თუ გამოვიყენებთ (8.4) ფორმულას, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$R = \frac{37{,}5}{2500 \cdot \dfrac{45}{360}} = 0{,}12 .$$

ე.ი. მივიღებთ, რომ საპროცენტო განაკვეთი ტოლია $0{,}12 \cdot 100\% = 12\%$-ის.

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა გვაინტერესებს სესხის ხანგრძლივობის განსაზღვრა (8.1) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ ის შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულის საშუალებით

$$T = \frac{I}{PR}$$

სადაც T არის სესხის ხანგრძლივობა გამოსახული წლებში, ხოლო R წარმოადგენს სარგებლის წლიურ განაკვეთს. (8.2) ფორმულის გამოყენებით მიიღება T-ს გამოსახულება M-ის საშუალებით $T = \frac{M - P}{PR}$. თუ სესხი აღებულია წლიური ჩვეულებრივი (საბანკო) სარგებლით, მაშინ დღეებში სესხის ხანგრძლივობის განსასაზღვრავად გვექნება ფორმულა

$$T \text{ დღეებში} = \frac{I}{PR} \cdot 360 ,$$

ხოლო თუ სესხი აღებულია წლიური ზუსტი სარგებლით და წელი არ არის ნაკიანი, მაშინ

$$T \text{ დღეებში} = \frac{I}{PR} \cdot 365 .$$

ანალოგიურად, სესხის ხანგრძლივობის განსასაზღვრავად თვეებში, გვექნება შემდეგი ფორმულა

$$T \text{ თვეებში} = \frac{I}{PR} \cdot 12.$$

ზემომოყვანილი (8.2) ფორმულის გამოყენებით საბოლოო M თანხის მიხედვით შესაძლებელია ვიპოვოთ საწყისი თანხა P. აღნიშნულ პროცესს ეწოდება ***დისკონტირება***. მარტივი სარგებლის შემთხვევაში საწყისი თანხა გამოითვლება (8.2) ფორმულის გამოყენებით

$$P = \frac{M}{1+RT},$$

სადაც M არის საბოლოო თანხა, R არის სარგებლის განაკვეთი, ხოლო T კი სესხის ხანგრძლივობა. $\frac{M}{1+RT}$ სიდიდეს ეწოდება M თანხის დისკონტირებული სიდიდე, ხოლო სხვაობას $M-P$ კი ეწოდება ***დისკონტი***. აქედან გამომდინარე, დისკონტი და სარგებელი წარმოადგენენ ერთი და იგივე I სიდიდეს. როგორც წესი, I სიდიდეს უწოდებენ სარგებელს როცა მოცემულია საწყისი თანხა, ხოლო თუ ცნობილია მხოლოდ საბოლოო თანხა, მაშინ მას უწოდებენ დისკონტს.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა

<u>ამოცანა 8.7.</u> რა თანხა უნდა შეიტანოს სტუდენტმა ბანკში 10%-იანი მარტივი საპროცენტო განაკვეთით 10 თვით, რომ ვადის გასვლის შემდეგ დაუგროვდეს 5000 ლარი?

<u>ამოხსნა.</u> ზემოთ მოყვანილი ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ საწყისი თანხა, რომელიც უნდა შეიტანოს სტუდენტმა ანაბარზე გამოითვლება შემდეგნაირად

$$P = \frac{5000}{1+\frac{10}{12}\cdot\frac{10}{100}} \approx 4616,805 \text{ ლარი.}$$

შევნიშნოთ, რომ საწყისი თანხა არის თანხა, რომელსაც დებიტორი (მევალე) იღებს კრედიტორისგან (მოვალისგან). დებიტორი კრედიტორს უბრუნებს საწყის თანხას და უმატებს სარგებელს. სესხი ***მარტივი დისკონტირებული განაკვეთით*** წარმოადგენს ისეთ სესხს, როდესაც სესხის გაცემისას ანუ საწყის თანხაში თავიდანვე იგულისხმება სარგებელი. ამ შემთხვევაში დებიტორი იღებს კრედიტორისაგან გადასახდელ თანხას გამოკლებული სარგებელი ანუ დისკონტი, ე.ი.

$$P = M - B \tag{8.5}$$

სადაც P არის სესხის საწყისი თანხა, M არის გადასახდელი თანხა და B არის დისკონტი, რომელიც უდრის $B = M \cdot D \cdot T$, D არის ***დისკონტირებული განაკვეთი***, ხოლო T კი წარმოადგენს სესხის ხანგრძლივობას.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

<u>ამოცანა 8.8.</u> დავითმა აიღო სესხი მარტივი 9%-იანი დისკონტირებული საპროცენტო განაკვეთით 10 თვით და ბანკს გადაუხადა 35000\$. იპოვეთ დისკონტი და სესხის საწყისი თანხა.

<u>ამოხსნა.</u> შევნიშნოთ, რომ (8.5) ფორმულის გამოყენებით $B = 35000\$ \cdot 0,09 \cdot \frac{5}{6} = 2625\$$, ამიტომ $P = 35000\$ - 2625\$ = 32375\$$. მაშასადამე, საბანკო დისკონტი ტოლია 2625\$, ხოლო სესხის მოცულობა კი შეადგენს 32375\$-ს.

იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია სესხის მოცულობა, რომელიც აღებულია მარტივი დისკონტირებული განაკვეთით, გადასახდელი თანხის გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულა

$$M = \frac{P}{1-DT} \tag{8.6}$$

სადაც P არის სესხის საწყისი თანხა, M არის გადასახდელი თანხის ოდენობა, T არის სესხის ხანგრძლივობა, D – წლიური დისკონტირებული განაკვეთია. თუ სესხის T ხანგრძლივობა გამოსახულია თვეებში, მაშინ უკანასკნელი ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს $M = \frac{P}{1-DT/12}$, ხოლო თუ გამოსახულია დღეებში, მაშინ გადასახდელი თანხის გამოსა-

ვლელად გვექნება $M = \frac{P}{1 - DT/360}$, როცა იყენებენ ჩვეულებრივ სარგებელს და $M = \frac{P}{1 - DT/365}$, როცა იყენებენ ზუსტ სარგებელს. (8.6) ფორმულიდან მიიღება D-ს და T-ს გამოსათვლელი ფორმულები

$$D = \frac{M - P}{MT} \quad \text{და} \quad T = \frac{M - P}{MD},$$

სადაც P არის სესხის საწყისი თანხა, M არის გადასახდელი თანხის ოდენობა, T არის სესხის ხანგრძლივობა, D — წლიური დისკონტირებული განაკვეთია.

<u>ამოცანა 8.9</u>. ჯონს სჭირდებოდა 4000$ 180 დღით ოფისის შესაღებად. ამ სამუშაოს შესასრულებლად ბანკი თანახმაა მისცეს სესხი ჩვეულებრივი სარგებლით 10%-იანი მარტივი დისკონტირებული საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ გადასახდელი თანხა.

<u>ამოხსნა.</u> გამოვიყენოთ (8.6) ფორმულა, საიდანაც მივიღებთ, რომ გადასახდელი თანხის ოდენობა ტოლია

$$M = \frac{4000}{1 - \frac{180}{360} \cdot 0{,}1} = 4210{,}53\$.$$

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ მარტივი სარგებლით გაცემულ სესხთან დაკავშირებული საკითხები და აღვნიშნეთ, რომ დროის ზრდასთან ერთად საწყისი თანხა, რომელიც გაცემულია სესხად იზრდება. საპირისპირო თვისება აქვს ამორტიზაციის ანუ ეკონომიკური საქმიანობისას გამოყენებული საშუალებების ცვეთის პროცესს. სახელდობრ, დროის გასვლასთან ერთად საწარმოში გამოყენებული დანადგარები და სხვა ძირითადი საშუალებები განიცდიან ცვეთას, რაც იწვევს მათი ღირებულების კლებას.

განვიხილოთ ამორტიზაციის აღრიცხვის წრფივი მეთოდი, როცა დროის გარკვეული პერიოდის, მაგალითად, ყოველი წლის, შემდეგ ძირითადი საშუალებების საწყისი ღირებულება P_0 მცირდება A სიდიდით. მაშინ T წლის შემდეგ ძირითადი საშუალებების ღირებულება შემცირდება AT სიდიდით და ტოლი იქნება $P_1 = P_0 - AT$. იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია რამდენი პროცენტით ან რამდენჯერ მცირდება ყოველი წლის შემდეგ ძირითადი საშუალებების ღირებულება, მაშინ T წლის შემდეგ ძირითადი საშუალებების ღირებულება გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$P_1 = P_0 - P_0 R_A T = P_0(1 - R_A T), \tag{8.7}$$

სადაც P_0 არის ძირითადი საშუალებების საწყისი ღირებულება, R_A არის ***ცვეთის ანუ ამორტიზაციის კოეფიციენტი***, რომელიც იცვლება 0-დან 1-მდე, ხოლო T კი წარმოადგენს ამორტიზაციის პერიოდს. თუ ამორტიზაცია ხასიათდება ძირითადი საშუალებების კლების პროცენტული მახასიათებლით R_A^*, მაშინ T დროის შემდეგ ძირითადი საშუალებების ღირებულება შემცირდება $P_0 \frac{R_A^*}{100} T$ სიდიდით და ტოლი იქნება

$$P_1 = P_0 - P_0 \frac{R_A^*}{100} T = P_0\left(1 - \frac{R_A^*}{100} T\right). \tag{8.8}$$

შევნიშნოთ, რომ (8.7) ფორმულა ემთხვევა მარტივი სარგებლით გაცემული სესხის მთლიანად გადასახდელი თანხის გამოსათვლელ (8.2) ფორმულას თუ ვიგულისხმებთ, რომ სარგებლის განაკვეთმა შეიძლება მიიღოს უარყოფითი მნიშვნელობები. ე.ი. ამორტიზაციის პროცესისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ მარტივი განაკვეთით გაცემული სესხის განხილვისას მოყვანილი ფორმულები უარყოფითი სარგებლის განაკვეთით. კერძოდ, თუ ცნობილია ძირითადი ფონდების საწყისი და საბოლოო ღირებულება, მაშინ ამორტიზაციის კოეფიციენტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$R_A = \frac{P_0 - P_1}{P_0 T},$$

ხოლო დროის T პერიოდის განმავლობაში ამორტიზაციის ანარიცხების ჯამი, რომელსაც *ამორტიზაციის ფონდი ეწოდება*, უდრის $S = TP_0 R_A$. უკანასკნელი ფორმულიდან მიიღება P_0-ის და T-ს გამოსახულებები $T = \frac{P_0 - P_1}{R_A P_0}$ და $P_0 = \frac{P_1}{1 - R_A T}$.

ამოცანა 8.10. საწარმოს მიერ შეძენილი ჩარხების საერთო ღირებულება შეადგენს 1000000$. დროის გასვლასთან ერთად მათი ღირებულება მცირდება მუდმივი სიდიდით, რომელიც წელიწადში შეადგენს მათი საწყისი ღირებულების 5%. განსაზღვრეთ რამდენი დოლარით შემცირდა საწარმოს მიერ შეძენილი ჩარხების ღირებულება 30 თვის შემდეგ.

ამოხსნა. ამოცანაში მოყვანილი დროის პერიოდი გამოსახულია თვეებში, ხოლო ამორტიზაციის კოეფიციენტი კი წელიწადში. ისევე როგორც მარტივი სარგებლის შემთხვევაში დროის პერიოდი უნდა გამოვსახოთ წლებში, ე.ი. 30 უნდა გავყოთ 12-ზე რის შედეგად მივიღებთ, რომ დროის პერიოდი უდრის T=30/12=2,5 წელს. ყოველწლიურად ჩარხების ღირებულება მცირდება 5% პროცენტით, ე.ი. 2,5 წლის შემდეგ ჩარხების ღირებულება შემცირდება $TP_0 R_A = 2,5 \cdot 1000000 \cdot \frac{5}{100} = 125000\$$-ით.

სამომხმარებლო ფასების ინდექსი ყოველწლიურად გამოითვლება ამერიკის შეერთებულ შტატებში და ხშირად განიხილება, როგორც ცხოვრების საფასურის მახასიათებელი ინდექსი. მისი მიზანია დაახასიათოს საშუალო ცვლილება ფასებში ერთი წლიდან მეორე წლამდე ზოგადად ყველა სახის სამომხმარებლო ნაწარმზე და მომსახურებაზე. სამომხმარებლო ფასების ინდექსი საშუალებას იძლევა შეფასდეს ინფლაციის მაჩვენებელი. კერძოდ, ***ინფლაციის დონე*** განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით

$$R_I = \frac{CPI_2 - CPI_1}{CPI_1} \cdot 100\%,$$

რომელიც გვიჩვენებს პირველ წელს არსებულ სამომხმარებლო ინდექსთან CPI_1 შედარებით რამდენი პროცენტით გაიზარდა სამომხმარებლო ინდექსი CPI_2 მეორე წელს.

ამოცანა 8.11. ვთქვათ ინფლაციის მაჩვენებელი წლის განმავლობაში შეადგენს 4,8%.
ა) იპოვეთ ინფლაციის ზეგავლენა ოჯახზე, რომლის წლიური დანახარჯი სამომხმარებლო ნაწარმზე შეადგენდა 19800$.
ბ) რა იქნება ჯამური ეფექტი ოჯახზე, რომლის წევრების ხელფასები გაიზრდება 2%-ით?

ამოხსნა. ჯერ განვიხილოთ ამოცანის ა) პუნქტი. ვინაიდან ინფლაციის მაჩვენებელი არის 4,8%, ამიტომ ოჯახის მიერ სამომხმარებლო ნაწარმზე გადასახდელი თანხა გაიზრდება $19800\$ \times 0,048 = 950,4\$$-ით. აქედან გამომდინარე იგივე პროდუქტები და მომსახურება ოჯახს დაუჯდება

$$19800\$ + 950,4\$ = 20750,4\$.$$

ახლა განვიხილოთ ამოცანის ბ) პუნქტი. ოჯახის შემოსავალი გაიზარდა 2%-ით, ანუ თუ ვიგულისხმებთ, რომ ინფლაციამდე ოჯახის შემოსავალი მთლიანად იხარჯებოდა სამომხმარებლო ნაწარმის შეძენაზე და შეადგენდა 19800$, იგი გაიზარდა $19800\$ \times 0,02 = 396\$$-ით. ე.ი. გაზრდის შემდეგ ოჯახის შემოსავალი გახდება 19800$+396$=20196$. აღნიშნულის გათვალისწინებით მიუხედავად იმისა, რომ ოჯახის წევრების ხელფასები გაიზარდა, ინფლაციის მაჩვენებელი აღმოჩნდა უფრო დიდი და ამიტომ ინფლაციის შედეგად ოჯახმა დაკარგა

$$20750,4\$ - 20196\$ = 554,4\$.$$

სავარჯიშოები

1. მსხვილმა საავტომობილო კომპანიამ ახალი ადგილობრივი სააგენტოს გასახსნელად ბანკიდან 9 თვის ვადით ისესხა 2000000$ მარტივი $9\frac{1}{2}$%-იანი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ მარტივი სარგებელი და თანხის სიდიდე, რომელიც უნდა გადაიხადოს კომპანიამ ვადის გასვლის შემდეგ.

2. ნიუ-იორკის ბანკმა ჩიკაგოს ბანკიდან 90 დღით ისესხა 25000000$ ჩვეულებრივი სარგებლით მარტივი 9%-იანი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ მარტივი სარგებელი და თანხის სიდიდე, რომელიც უნდა გადაიხადოს ბანკმა ვადის გასვლის შემდეგ.

3. მექსიკის ერთ-ერთმა სამშენებლო კომპანიამ ისესხა 300000 პესო მარტივი 18%-იანი საპროცენტო განაკვეთით 90 დღით. იგივე თანხა მას რომ აეღო სესხად რამოდენიმე წლის წინ, მაშინ საპროცენტო განაკვეთი იქნებოდა 35%. იპოვეთ განსხვავება მარტივ სარგებლებს შორის ამ ორი საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში.

4. სოფომ თავისი ყვავილების მაღაზიის წინ შადრევნის და თევზებისთვის აუზის ასაგებად ისესხა 6850$ ჩვეულებრივი სარგებლით მარტივი $9\frac{1}{4}$%-იანი საპროცენტო განაკვეთით. მან მოაწერა ხელი 90 დღიან კონტრაქტს 5 ივლისს. იპოვეთ თარიღი, თუ როდის უნდა გადაიხადოს სოფომ სესხი და ვადის გასვლის შემდეგ გადასახდელი თანხა.

5. 15 ოქტომბერს IBM-მა ისესხა 45000000$ მარტივი 8%-იანი საპროცენტო განაკვეთით სან-ფრანცისკოს ბანკიდან და დათანხ-მდა გადაეხადა სესხი 120 დღეში ჩვეულებრივი სარგებლით. იპოვეთ თარიღი, თუ როდის უნდა გადაიხადოს IBM-მა სესხი და თანხის სიდიდე, რაც უნდა გადაიხადოს IBM-მა.

6. დავითის ქონებრივი გადასახადი შეადგენს 683,21$ და მას ეს გადასახადი უნდა გადაეხადა 15 აპრილამდე, მან კი გადაიხადა 23 ივლისს. სახელმწიფო გადაუხდელ გადასახადზე უმატებს ჯარიმას 9,3% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ გადასახდელი ჯარიმა ზუსტი სარგებლით.

7. 5 იანვარს ელენემ გადაიხადა საშემოსავლო გადასახადი, რომელიც უნდა გადაეხადა წინა წლის 15 სექტემბერს. ჯარიმა შეადგენს გადაუხდელი გადასახადის 2100$-ის 11%-ს მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ გადასახდელი ჯარიმა ზუსტი სარგებლით.

8. სახანძრო სამსახურმა შენობის კეთილმოწყობისათვის 31 იანვარს აიღო სესხი 48000$. სახანძრო სამსახურმა სესხი აიღო 8 თვით ჩვეულებრივი სარგებლით მარტივი 8,75%-იანი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ თარიღი როდის უნდა გადაიხადოს სახანძრო სამსახურმა სესხი და ვადის გასვლის შემდეგ გადასახდელი თანხა.

9. ნოემბრის ბოლო დღეს კომპანიამ მისცა სესხი 1600$ თავის თანამშრომელს 3 თვით 10%-იანი მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ თარიღი თუ როდის უნდა გადაიხადოს თანამშრომელმა სესხი და ვადის გასვლის შემდეგ გადასახდელი თანხა.

10. თეამ გახსნა ბანკში ანაბარი, რომლის მარტივმა სარგებელმა 9 თვეში შეადგინა 196,88$ მარტივი 3,5% საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ რა თანხა შეიტანა ბანკში თეამ?

11. ერთ-ერთმა ბანკმა მიიღო 12250$ შემოსავალი ფულის მოკლევადიანი 45 დღიანი დაბანდებიდან ინვესტიციაში ჩვეულებრივი სარგებლით 5,6% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ დაბანდებული თანხის სიდიდე.

12. ჯონმა ფასიან ქაღალდებში დააბანდა 3600$ ჩვეულებრივი სარგებლით მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ საპროცენტო განაკვეთი, თუ მან მიიღო 237,5$ შემოსავალი 250 დღეში.

13. პოლიციის დეპარტამენტმა ისესხა 120000$ 135 დღით ახალი აღჭურვილობის შესაძენად. იპოვეთ საპროცენტო განაკვეთი, თუ მარტივი ჩვეულებრივი სარგებელი შეადგენს 4050$.

14. საავტომობილო კომპანიამ მიიღო 69,46$ შემოსავალი ანაბრიდან, რომელზეც მოათავსა 9400$ ჩვეულებრივი სარგებლით მარტივი 3,5% საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ რამდენი დღით იყო გახსნილი ანაბარი.

15. რამდენი ხნით უნდა შეიტანოს დეპოზიტზე კომპანიამ 7500$ მარტივი 6%-იანი საპროცენტო განაკვეთით, იმისათვის რომ მიიღოს 243,75$ შემოსავალი.

16. ტარიელმა დეპოზიტზე შეიტანა 6272,73$, საიდანაც 320 დღეში აიღო 223,03$ მარტივი ჩვეულებრივი სარგებელი. იპოვეთ საპროცენტო განაკვეთი.

17. სამშენებლო კომპანიას სამი კოტეჯის ასაშენებლად სჭირდება სესხი 220000$ ერთი წლით. მათ შეუძლიათ აიღონ სესხი სარგებლის მარტივი განაკვეთით ორი ბანკიდან, პირველი ბანკი ითხოვს სარგებელს 23650$, მაშინ როცა მეორე ბანკი ითხოვს სარგებელს 25000$. იპოვეთ საპროცენტო განაკვეთი თითოეული ბანკის შემთხვევაში.

18. ინგლისელმა ბიზნესმენმა ინგლისის ერთ-ერთ ბანკთან ხელი მოაწერა კონტრაქტს 10%-იანი დისკონტირებული საპროცენტო განაკვეთით ჩვეულებრივი სარგებლით, რომლის თანახმად მას გადასახდელი აქვს 40000£. იპოვეთ სესხის ხანგრძლივობა თუ სესხის სიდიდე შეადგენს 38833,33£-ს.

19. იაპონიის ერთ-ერთი დიდი ხიდი მიწისძვრის შედეგად დაზიანდა. ფირმას, რომელიც აწარმოებს მის შეკეთებას სჭირდება 165000 იაპონური იენი 30 დღით, იმისათვის რომ გადაიხადოს მუშების ხელფასი და იყიდოს საჭირო მასალა. ბანკი აძლევს მას სესხს 8% დისკონტირებული საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ გადასახდელი თანხის სიდიდე ჩვეულებრივი სარგებლის შემთხვევაში.

20. ფირმის წარმომადგენელმა ხელი მოაწერა კონტრაქტს, რომლის მიხედვით ის აიღებს 4713,54$-ს 12,5% დისკონტირებული საპროცენტო განაკვეთით, ხოლო გადასახდელი თანხა შეადგენს 5000$ ჩვეულებრივი სარგებლით. იპოვეთ კონტრაქტის ხანგრძლივობა დღეებში.

21. ოჯახის წლიური შემოსავალი შეადგენს 26500$-ს, მათი ხელფასი გაიზარდა 3%-ით, მაშინ როცა ინფლაციამ წლის განმავლობაში შეადგინა 4,5%. განსაზღვრეთ რამდენად დაზარალდა ან პირიქით გაიუმჯობესა ოჯახმა მდგომარეობა.

§ 9. სარგებლის რთული განაკვეთი

წინა პარაგრაფში ჩვენ გავეცანით მარტივი სარგებლით თანხის დაბანდების საკითხებს, როცა სარგებელი გამოითვლება საწყისი თანხიდან სესხის მთელი პერიოდის განმავლობაში. სესხები მარტივი სარგებლით ჩვეულებრივ წარმოადგენენ მოკლევადიან სესხებს, რომლებსაც იხდიან ერთი წლის ან უფრო მცირე დროის განმავლობაში. როგორც წესი ბანკები მოკლევადიანი პერიოდით ბიზნესმენებსა და ფიზიკურ პირებზე გასცემენ სესხებს მარტივი სარგებლით. სარგებლის გამოთვლის განსხვავებული წესი გამოიყენება სახსრების რთული განაკვეთით დაბანდების შემთხვევაში, როდესაც სარგებელი გამოითვლება მიმდინარე თანხიდან ანუ საწყისი თანხის და დროის მიმდინარე მომენტისათვის სარგებლის ჯამიდან.

რთული განაკვეთით თანხის დაბანდებისას დროის მთელი ინტერვალი იყოფა პერიოდებად, რომელთა ბოლოსაც ხდება თანხის დამატება. მაგალითად, დროის პერიოდი შეიძლება იყოს წელი, კვარტალი, თვე, კვირა და სხვა. რთული განაკვეთით დაბანდებისას ყოველი პერიოდის ბოლოს მიმდინარე თანხას ემატება მისი გარკვეული პროცენტი. ვთქვათ საწყისი თანხა P დაბანდებულია რთული R განაკვეთით. მაშინ პირველი პერიოდის ბოლოს P თანხის ნაცვლად გვექნება $P_1 = P + PR = P(1+R)$. მეორე პერიოდის ბოლოს თანხის გამოსათ-

ვლელად პირველი პერიოდის ბოლოს დაგროვილ თანხას უნდა დავუმატოთ მისი R ნაწილი, ე.ი. მეორე პერიოდის ბოლოს გვექნება $P_2 = P_1 + P_1R = P_1(1+R) = P(1+R)^2$. ანალოგიურად, მესამე პერიოდის ბოლოს დაგროვილი თანხა გამოითვლება მეორე პერიოდის ბოლოს დაგროვილი თანხის მიხედვით და ტოლი იქნება $P_3 = P_2 + P_2R = P_2(1+R) = P(1+R)^3$. აქედან გამომდინარე, n პერიოდის შემდეგ დაგროვილი თანხა უდრის

$$M = P(1+R)^n \tag{9.1}$$

სადაც P არის საწყისი თანხა, R არის სარგებლის განაკვეთი, n არის რთული განაკვეთით სარგებლის დარიცხვის პერიოდების რაოდენობა, M არის ვადის ბოლოს დაგროვილი თანხის ოდენობა, ხოლო სარგებელი რთული განაკვეთით დაბანდების შემთხვევაში კი შეადგენს

$$I = M - P = P((1+R)^n - 1).$$

იმ შემთხვევაში, როცა სარგებლის R განაკვეთის ნაცვლად მოცემულია საპროცენტო განაკვეთი R^*, რომელიც მიიღება R-ის 100-ზე გამრავლებით $R^* = R \cdot 100$, რთული განაკვეთით დაბანდებული თანხის რაოდენობა n პერიოდის შემდეგ გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$M = P\left(1 + \frac{R^*}{100}\right)^n.$$

<u>ამოცანა 9.1.</u> ქეთიმ ბანკში ანაბარზე 5 წლით შეიტანა 100000\$ სარგებლის რთული განაკვეთით. რა თანხა დაუგროვდება ქეთის ვადის ბოლოს, თუ საპროცენტო განაკვეთი შეადგენს წლიურ 11%?

<u>**ამოხსნა.**</u> მოყვანილი ამოცანის შემთხვევაში საწყისი თანხაა $P = 100000$, საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი სარგებლის წლიური განაკვეთია $R = 0{,}11$, ვინაიდან თანხა ანაბარზე შეტანილია 5 წლით, ამიტომ დარიცხვის პერიოდების რაოდენობა ტოლია $n = 5$. ამიტომ (9.1) ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$M = 100000 \cdot (1 + 0.11)^5 \approx 100000 \cdot 1{,}68506 = 168506\$.$$

ამრიგად, საწყისი თანხა 100000\$ ხუთი წლის შემდეგ 11% საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში გაიზრდება 168506\$-მდე.

სარგებლის რთული განაკვეთით დაბანდებული თანხების გამოთვლისას სისტემატურად გვიწევს $(1+R)^n$ სიდიდის გამოთვლა სხვადასხვა R და n-ის მნიშვნელობებისათვის. ამ სიდიდის გამოთვლა შესაძლებელია კომპიუტერის, კალკულატორის გამოყენებით ან შეიძლება გამოყენებული იყოს ცხრილი 2 და ცხრილი 3, რომლებიც მოყვანილია დანართში, რომლის ზედა სვეტები შეესაბამება სხვადასხვა საპროცენტო განაკვეთებს, ხოლო სტრიქონები კი დარიცხვების პერიოდების სხვადასხვა რაოდენობას.

რთული განაკვეთის შემთხვევაში დაგროვილი თანხის გამოსათვლელი (9.1) ფორმულიდან მიიღება საწყისი P თანხის, სარგებლის R განაკვეთის და პერიოდების n რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულები. კერძოდ, თუ ცნობილია დაგროვილი M თანხა, სარგებლის R განაკვეთი და პერიოდების რაოდენობა, მაშინ საწყისი თანხა, რომელიც უნდა იქნეს დაბანდებული გამოითვლება შემდეგი ფორმულის მიხედვით

$$P = \frac{M}{(1+R)^n} \quad \text{ან} \quad P = \frac{M}{(1+R^*/100)^n}. \tag{9.2}$$

უკანასკნელი ფორმულები საშუალებას იძლევიან საწყისი თანხა გამოვთვალოთ საბოლოო თანხის მიხედვით. წინა პარაგრაფში მარტივი სარგებლის განხილვისას ჩვენ ამ პროცესს უწოდეთ დისკონტირება. აქედან გამომდინარე, რთული განაკვეთის შემთხვევაში M თანხის ***დისკონტირებული მნიშვნელობა*** განისაზღვრება (9.2) ფორმულით, ხოლო ***დისკონტი***, რომელიც ემთხვევა სარგებელს, მოიცემა შემდეგი ფორმულით $D = M - P$. შევნიშნოთ, რომ თანხის დისკონტირებული მნიშვნელობის გამოსათვლელ (9.2) ფორმულაში მონაწილე $1/(1+R)^n$ კოეფიციენტები წარმოადგენენ ცხრილ 2 და ცხრილი 3-ში მოყვანილი სიდიდეების შებრუნებულ რიცხვებს.

ამოცანა 9.2. მეწარმე აპირებს გააფართოოს თავისი რესტორანი და ამისთვის მას 3 წლის შემდეგ დასჭირდება სპეციალური მაცივრის ყიდვა, რომელიც ღირს 12000\$. რა თანხა უნდა შეიტანოს მეწარმემ ანაბარზე წლიური რთული 5%-იანი საპროცენტო განაკვეთით, რომ 3 წლის შემდეგ ამ ანაბარზე დაგროვილი თანხის გამოყენებით მან შესძლოს მაცივრის შეძენა?

ამოხსნა. ანაბარზე შესატანი თანხის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ (9.2) ფორმულა, რომელშიც $M = 12000\$$, $n = 3$ და $R = 0,05$, გვექნება

$$\frac{12000}{(1+0,05)^3} = \frac{12000}{1,15763} \approx 10366\$.$$

ე.ი. იმისათვის, რომ მეწარმემ შესძლოს 12000\$ მაცივრის ყიდვა სამი წლის შემდეგ, მან საკმარისია ანაბარზე შეიტანოს მხოლოდ 10366\$.

იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია საწყისი და დაგროვილი თანხები და დარიცხვის პერიოდების რაოდენობა, (9.1) ტოლობიდან გვექნება

$$R = \sqrt[n]{\frac{M}{P}} - 1 \quad \text{ან} \quad R^* = \left(\sqrt[n]{\frac{M}{P}} - 1\right) \cdot 100 . \qquad (9.3)$$

უკანასკნელი ფორმულა ხშირად გამოიყენება ეკონომიკური ანალიზის დროს, რათა განისაზღვროს შესასწავლი ეკონომიკური ობიექტის ზრდის საშუალო ტემპი.

ამოცანა 9.3. ბაზარზე მზარდი კონკურენციის პირობებში საწარმოს ხელმძღვანელობამ გადაწყვიტა, რომ 3 წლის განმავლობაში საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის მოცულობა გაზარდოს 72,8%. რამდენი პროცენტით უნდა გაიზარდოს საწარმოს მიერ ყოველწლიურად გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა იმისათვის, რომ შესრულდეს საწარმოს ხელმძღვანელობის მიერ დასახული გეგმა?

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ თუ საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა ყოველწლიურად იზრდება ერთი და იგივე პროცენტით, მაშინ წლების მიხედვით პროდუქციის მოცულობა განისაზღვრება იმავე ფორმულებით, რაც რთული განაკვეთის შემთხვევაში. ვთქვათ საწარმო თავდაპირველად აწარმოებს P მოცულობის პროდუქციას. სამი წლის შემდეგ მან უნდა გამოუშვას $0,728P$-ით მეტი პროდუქცია, ანუ $M = P + 0,728P = 1,728P$ მოცულობის პროდუქცია. ყოველწლიურად პროდუქციის ზრდის საშუალო მაჩვენებლის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ (9.3) ფორმულა, რომლის თანახმად

$$R = \sqrt[3]{\frac{1,728P}{P}} - 1 = \sqrt[3]{1,728} - 1 = 1,2 - 1 = 0,2 .$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ სამი წლის შემდეგ საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის მოცულობა გაიზარდოს 72,8%, ყოველწლიურად გამოშვებული პროდუქციის მოცულობა უნდა გაიზარდოს 20%-ით.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ დარიცხვის პერიოდების რაოდენობა, რათა საწყისი P თანხის საშუალებით დაგროვდეს M თანხა სარგებლის რთული R განაკვეთის შემთხვევაში, გამოვიყენოთ (9.1) ტოლობა და გავალოგარითმოთ მისი ორივე მხარე

$$\lg M = \lg P + \lg(1+R)^n = \lg P + n\lg(1+R),$$

საიდანაც გვექნება

$$n = \frac{\lg M - \lg P}{\lg(1+R)} \quad \text{ან} \quad n = \frac{\lg M - \lg P}{\lg(1+R^*/100)} . \qquad (9.4)$$

შევნიშნოთ, რომ (9.4) ფორმულის მიხედვით განსაზღვრული სიდიდე $\dfrac{\lg M - \lg P}{\lg(1+R)}$ შეიძლება არ იყოს ნატურალური რიცხვი. ამ შემთხვევაში თუ ავიღებთ ამ რიცხვთან უახლოეს მასზე დიდ ნატურალურ რიცხვს n_1, მაშინ n_1 პერიოდის შემდეგ დაგროვილი თანხა გადააჭარბებს

M, ხოლო n_1-1 პერიოდი კი არ იქნება საკმარისი M თანხის დასაგროვებლად, ე.ი. n_1 პერიოდი იქნება პერიოდების მინიმალური რაოდენობა, რომელიც უზრუნველყოფს M თანხის დაგროვებას.

<u>ამოცანა 9.4.</u> მანანამ ბანკში ანაბარზე შეიტანა 5000$ რთული წლიური 9%-იანი საპროცენტო განაკვეთით. განსაზღვრეთ მინიმუმ რამდენი წლის შემდეგ დაუგროვდება მანანას ანაბარზე 8000$ ან მეტი თანხა.

<u>ამოხსნა.</u> ვინაიდან თანხა შეტანილია წლიური რთული 9%-იანი საპროცენტო განაკვეთით, ამიტომ დარიცხვის პერიოდების განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ (9.4) ფორმულა

$$n=\frac{\lg 8000-\lg 5000}{\lg(1+0{,}09)}=\frac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}09}\approx 5{,}45389\,.$$

ანაბარზე ხუთი წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა ტოლი იქნება $5000(1+0{,}09)^5=7693{,}12\$$, ხოლო ექვსი წლის შემდეგ ანაბარზე დაგროვდება $5000(1+0{,}09)^6=8385{,}5\$$. ე.ი. ხუთი წლის შემდეგ ანაბარზე დაგროვილი თანხა იქნება 8000$ ნაკლები, ხოლო შემდეგი პერიოდის ბოლოს ანუ ექვსი წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა გადააჭარბებს 8000$.

ზემომოყვანილ მაგალითებში ჩვენ განვიხილეთ თანხის დაბანდების მაგალითები რთული წლიური განაკვეთით, როცა დარიცხვა ხდება წელიწადში ერთხელ. უნდა ავღნიშნოთ, რომ დარიცხვა შეიძლება მოხდეს წელიწადში რამოდენიმეჯერ, მაგალითად ყოველკვარტალურად, ყოველთვიურად და ა.შ., და ამ შემთხვევაში დაგროვილი თანხა უნდა გამოვთვალოთ როგორც რთული განაკვეთით დაგროვილი თანხა უფრო მცირე დარიცხვის პერიოდით. სახელდობრ, ვთქვათ თანხა დაბანდებულია წლიური რთული R განაკვეთით და დარიცხვა ხდება წელიწადში m-ჯერ. ამ შემთხვევაში წლის $\frac{1}{m}$ ნაწილს შეესაბამება სარგებლის განაკვეთი $\frac{R}{m}$ და ამიტომ თუ საწყისი თანხა იყო P, მაშინ წლის $\frac{1}{m}$ ნაწილის შემდეგ დაგროვდება $P\left(1+\frac{R}{m}\right)$ თანხა, წლის $\frac{2}{m}$ ნაწილის შემდეგ დაგროვდება $P\left(1+\frac{R}{m}\right)^2$ თანხა და ა.შ. რადგან წელიწადი შედგება დარიცხვის m პერიოდისაგან, ამიტომ 1 წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა ტოლი იქნება $P\left(1+\frac{R}{m}\right)^m$, ხოლო n წლის შემდეგ კი დაგროვილი თანხა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$M=P\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn}. \tag{9.5}$$

იმ შემთხვევაში, როცა დარიცხვა ხდება ყოველკვარტალურად ანუ სამ თვეში ერთხელ, მაშინ $m=4$, თუ დარიცხვა ხდება ყოველთვიურად, მაშინ $m=12$, ხოლო იმ შემთხვევაში, როცა დარიცხვა ხდება ყოველდღიურად გულისხმობენ, რომ $m=365$.

შევნიშნოთ, რომ როდესაც მითითებულია წლიური განაკვეთი, მაგრამ დარიცხვა ხდება უფრო ხშირად, მაგალითად ყოველთვიურად, რეალურად თანხა დაბანდებულია რთული განაკვეთით ყოველთვიური დარიცხვით ან სათანადო სიხშირით, ხოლო განაკვეთის სიდიდე განისაზღვრება როგორც წლიური განაკვეთის განაყოფი 12-ზე ან წელიწადში შესაბამისი პერიოდების რაოდენობაზე.

<u>ამოცანა 9.5.</u> ამერიკის საინვესტიციო ბანკი იძლევა სარგებელს ყოველწლიური 7%-იანი რთული საპროცენტო განაკვეთით ნახევარწლიანი დარიცხვით. ვთქვათ საინვესტიციო ბანკში შეტანილია 2500$. იპოვეთ დაგროვილი თანხა 2 წლის შემდეგ და სარგებელი.

<u>ამოხსნა.</u> შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან წლიური საპროცენტო განაკვეთი 7%-ის ტოლია, ამიტომ ყოველ ნახევარწელიწადში მიმდინარე თანხას დაერიცხება 3,5%. ამასთან შევნიშნოთ, რომ 1

წლის განმავლობაში დარიცხვა მოხდება ორჯერ, ხოლო 2 წლის განმავლობაში კი ოთხჯერ, ამიტომ $mn = 4$, ხოლო $\frac{R}{m} = 0{,}035$. ამიტომ (9.5) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$M = 2500 \times (1 + 0{,}035)^4 = 2500\$ \times (1{,}035)^4 \approx 2868{,}81\$.$$

აქედან გამომდინარე, თანხის ბანკში შეტანის შედეგად მიღებული სარგებელი ტოლი იქნება

$$I = 2868{,}81\$ - 2500\$ = 368{,}81\$.$$

<u>ამოცანა 9.6.</u> ჯონიმ მემკვიდრეობით მიიღო 15000$, რომელიც შეიტანა საპენსიო ანაბარზე რთული საპროცენტო განაკვეთით ნახევარწლიანი დარიცხვით. რისი ტოლი იქნება დაგროვილი თანხა 25 წლის შემდეგ, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია

ა) 6% ბ) 8% გ) 10%

<u>ამოხსნა.</u> ვინაიდან ყოველწლიურად დარიცხვა მოხდება ორჯერ, ამიტომ 25 წელიწადში დარიცხვა მოხდება 50-ჯერ. ამოცანის ა) პუნქტის შემთხვევაში ნახევარწლიანი პერიოდით დარიცხვის რთული განაკვეთი იქნება $\frac{R}{m} = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03$, ბ) პუნქტის შემთხვევაში $\frac{R}{m} = 0{,}04$, ხოლო გ) პუნქტის შემთხვევაში კი $\frac{R}{m} = 0{,}05$. ამიტომ თითოეულ შემთხვევაში დაგროვილი თანხა შესაბამისად ტოლი იქნება

ა) $M = 15000\$ \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{50} \approx 15000\$ \cdot 4{,}383906 \approx 65758{,}59\$$.

ბ) $M = 15000\$ \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{50} \approx 15000\$ \cdot 7{,}106683 \approx 106600{,}25\$$.

გ) $M = 15000\$ \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{50} \approx 15000\$ \cdot 11{,}4673998 \approx 172011\$$.

<u>ამოცანა 9.7.</u> ტარიელმა მიიღო 12500$ თავისი უძრავი ქონების ნაწილის გაყიდვით. მას სურს ახალი ავტომობილის ყიდვა, მაგრამ გადაწყვიტა დაიცადოს 60 დღე ვიდრე გამოვა ახალი მოდელი. დროის ამ პერიოდის მანძილზე ტარიელმა გადაწყვიტა შეიტანოს თანხა შემნახველ ანაბარზე რთული წლიური 3,5% საპროცენტო განაკვეთით ყოველდღიური დარიცხვით 60 დღის განმავლობაში. იპოვეთ თანხა, რომელიც დაემატება საწყის თანხას ამ პერიოდის გასვლის შემდეგ.

<u>ამოხსნა.</u> ვინაიდან დარიცხვა ხდება ყოველდღიურად, ამიტომ $m = 365$, ხოლო ყოველდღიური დარიცხვის რთული განაკვეთი კი უდრის $0{,}035/365$. აქედან გამომდინარე, 60 დღის განმავლობაში დაგროვილი თანხა ტოლია

$$12500\$ \times (1 + 0{,}035/365)^{60} \approx 12500\$ \times 1{,}005769705 \approx 12572{,}12\$.$$

ე.ი. 60 დღის განმავლობაში დაგროვილი სარგებლის სიდიდე

$$12572{,}12\$ - 12500\$ = 72{,}12\$.$$

ახლა კი განვიხილოთ სხვადასხვა პერიოდით დაბანდებული თანხების შესაბამისი დაგროვილი თანხების გამოთვლის რამოდენიმე მაგალითი. ამ ტიპის ამოცანები ხშირად წარმოიშვება რეალური სიტუაციების ანალიზისას.

<u>ამოცანა 9.8.</u> დავითი არის კერძო გამომძიებელი, რომელიც დაზოგილ თანხას ინახავს შემნახველ ანაბარზე. 10 იანვარს მან შეიტანა 2463$ წლიური რთული 3,5% საპროცენტო განაკვეთით ყოველდღიური დარიცხვით. 18 თებერვალს მან დაამატა 1320$, ხოლო 3 მარტს კი 840$. იპოვეთ 10 აპრილისათვის დაგროვილი სარგებელი.

<u>ამოხსნა.</u> დავითმა სამჯერ შეიტანა თანხა და 10 აპრილისათვის ამ თანხების შემნახველ ანაბარზე ყოფნის დრო არის განსხვავებული. დავითვალოთ თითოეული თანხის შესაბამისი დაგ-

როვილი თანხა ცალ-ცალკე 10 იანვრიდან 10 აპრილამდე არის 90 დღე, ამიტომ შესაბამი-სი დაგროვილი თანხა იქნება

$$2463\$ \cdot (1+0{,}035/365)^{90} \approx 2463\$ \cdot 1{,}008667 \approx 2484{,}35\$.$$

18 თებერვალს შეტანილი თანხა დეპოზიტზე იქნება 51 დღე, ამიტომ შესაბამისი დაგროვილი თანხა ტოლი იქნება

$$1320\$ \cdot (1+0{,}035/365)^{51} \approx 1320\$ \cdot 1{,}0049 \approx 1326{,}47\,,$$

ხოლო 3 მარტს შეტანილი თანხა კი დეპოზიტზე იქნება 38 დღე და მისი საშუალებით დაგროვდება შემდეგი თანხა

$$840\$ \cdot (1+0{,}035/365)^{38} \approx 840\$ \cdot 1{,}00365 \approx 843{,}07\$.$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ სარგებელი 10 აპრილისათვის საჭიროა მთელ დაგროვილ თანხას გამოვაკლოთ მთელი შეტანილი თანხა, რის შედეგად მივიღებთ

$$2484{,}35\$ + 1326{,}47\$ + 843{,}07\$ - (2463\$ + 1320\$ + 840\$) = 30{,}89\$.$$

<u>ამოცანა 9.9.</u> მეწარმეს შეაქვს ბანკში თანხა ანაბარზე, იმ პირობით, რომ შეეძლოს ნებისმიერ დროს ნებისმიერი თანხის გატანა. 20 ივლისს მან გახსნა ანაბარი და შეიტანა 24800\$. 29 აგვისტოს მეწარმემ ოფისის შესაკეთებლად გამოიტანა 3800\$, 29 სექტემბერს კი 8200\$. იპოვეთ რა თანხა დაუგროვდება მეწარმეს 1 ოქტომბრისათვის, თუ ანაბარზე წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია 3,5% ყოველდღიური დარიცხვით?

<u>ამოხსნა.</u> შევნიშნოთ, რომ 24800\$-3800\$-8200\$=12800\$ იქნება ანაბარზე 20 ივლისიდან 1 ოქტომბრამდე ანუ 73 დღე, ამიტომ ამ თანხიდან დაგროვილი თანხა ტოლი იქნება

$$12800\$ \cdot (1+0{,}035/365)^{73} \approx 12800\$ \cdot 1{,}007024 \approx 12889{,}91\$\,,$$

ხოლო სარგებელი კი უდრის

$$12889{,}91\$ - 12800\$ = 89{,}91\$.$$

ვინაიდან 3800\$ იყო ანაბარზე 20 ივლისიდან 29 აგვისტომდე, ე.ი. 40 დღე, ამიტომ დაგროვილი თანხა ტოლი იქნება

$$3800\$ \cdot (1+0{,}035/365)^{40} \approx 3800\$ \cdot 1{,}0038427 \approx 3814{,}6\$\,,$$

ხოლო სარგებელი კი

$$3814{,}6\$ - 3800\$ = 14{,}6\$.$$

8200\$ ანაბარზე იყო 20 ივლისიდან 29 სექტემბრამდე, ე.ი. 71 დღე, ამიტომ შესაბამისი დაგროვილი თანხა იქნება

$$8200\$ \cdot (1+0{,}035/365)^{71} \approx 8200\$ \cdot 1{,}00683 \approx 8256{,}01\$\,,$$

ხოლო სარგებელი კი ტოლი იქნება

$$8256{,}01\$ - 8200\$ = 56{,}01\$.$$

ე.ი. ანაბრიდან მიღებული მთლიანი სარგებელი შეადგენს $89{,}91\$ + 14{,}6\$ + 56{,}01\$ = 160{,}52\$$, ხოლო მთლიანი დაგროვილი თანხა ანაბარზე უდრის

$$24800\$ + 160{,}52\$ - (3800\$ + 8200\$) = 12960{,}52\$.$$

წინა პარაგრაფში ჩვენ შევეხეთ საწარმოში დანადგარების ცვეთასთან დაკავშირებულ საკითხებს და განვიხილეთ ამორტიზაციის აღრიცხვის წრფივი მეთოდი. ცვეთის ანუ ამორტიზაციის აღრიცხვის განსხვავებულ მიდგომას წარმოადგენს ***დეგრესიული მეთოდი***, რომელიც ეფუძნება ყოველ პერიოდში ძირითადი ფონდების მიმდინარე ღირებულებების მუდმივი ნაწილის ჩამოკლებას.

ვთქვათ ყოველი პერიოდის, მაგალითად, წლის ან კვარტლის ბოლოს, ძირითადი ფონდების ღირებულებას აკლდება მათი R_A ნაწილი, სადაც R_A წარმოადგენს რიცხვს 0-დან 1-მდე. ამ R_A სიდიდეს ეწოდება ***ამორტიზაციის კოეფიციენტი***. ამიტომ თუ ძირითადი საშუალებების საწყისი ღირებულება ტოლია P_0, მაშინ პირველი პერიოდის შემდეგ ის ტოლი გახდება

$$P_1 = P_0 - P_0 R_A = P_0(1 - R_A).$$

მეორე პერიოდის ბოლოს ძირითადი საშუალებების ღირებულება ტოლი იქნება

$$P_2 = P_1 - P_1 R_A = P_1(1 - R_A) = P_0(1 - R_A)^2.$$

ანალოგიურად, n პერიოდის შემდეგ ძირითადი საშუალებების ღირებულება ტოლი იქნება

$$P_n = P_{n-1} - P_{n-1} R_A = P_{n-1}(1 - R_A) = P_0(1 - R_A)^n. \qquad (9.6)$$

ე.ი. ამორტიზაციის შემთხვევაში ძირითადი საშუალებების ღირებულება იცვლება იმავე წესით, რაც რთული სარგებლის დარიცხვისას, იმ განსხვავებით, რომ სარგებლის R განაკვეთი შეცვლილია უარყოფითი $-R_A$ სიდიდით. (9.6) ფორმულიდან შეიძლება განვსაზღვროთ ამორტიზაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა, როცა ცნობილია ძირითადი საშუალებების საწყისი და საბოლოო ღირებულება,

$$R_A = 1 - \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}}. \qquad (9.7)$$

ამავე დროს, i-ურ წელს ყოველწლიური ამორტიზაციის ანარიცხი ტოლი იქნება

$$A_i = P_{i-1} R_A = P_0(1 - R_A)^{i-1} R_A,$$

ხოლო i-ურ წელს ამორტიზაციის ფონდი ანუ ამორტიზაციის შედეგად ძირითადი საშუალებების ღირებულებების შემცირების მოცულობა უდრის

$$S_i = P_0 - P_i = P_0 - P_0(1 - R_A)^i = P_0(1 - (1 - R_A)^i).$$

აღსანიშნავია, რომ ამორტიზაციის აღრიცხვისას ზოგჯერ გამოიყენება შერეული მეთოდი ანუ ძირითადი საშუალებების საწყის და საბოლოო ღირებულებებს შორის სხვაობის გარკვეული ნაწილისათვის გამოიყენება ამორტიზაციის აღრიცხვის დეგრესიული მეთოდი, ხოლო დანარჩენი ნაწილისათვის კი იყენებენ ამორტიზაციის აღრიცხვის წრფივ მეთოდს.

<u>ამოცანა 9.10.</u> საწარმოს ძირითადი ფონდების ამორტიზაციის პერიოდი შეადგენს 8 წელს, ამასთან პირველი ოთხი წლის განმავლობაში გამოიყენება ამორტიზაციის აღრიცხვის დეგრესიული მეთოდი 0,25 ამორტიზაციის კოეფიციენტით, ხოლო მომდევნო წლებში კი იყენებენ წრფივი ამორტიზაციის მეთოდს. იპოვეთ თითოეულ წელს საამორტიზაციო ანარიცხები, თუ მათი საწყისი ღირებულებაა 100000$, ხოლო საბოლოო ღირებულება კი შეადგენს 10000$.

<u>ამოხსნა.</u> პირველი ოთხი წლის მანძილზე იყენებენ ამორტიზაციის აღრიცხვის დეგრესიულ მეთოდს, ამიტომ პირველი წლის შემდეგ საამორტიზაციო ანარიცხების ღირებულება იქნება $100000 \cdot 0{,}25 = 25000\$$ და ძირითადი ფონდების ღირებულება ტოლია 75000$. ორი წლის შემდეგ საამორტიზაციო ანარიცხები იქნება $75000\$ \cdot 0{,}25 = 18750\$$ და ძირითადი ფონდების ღირებულებაა 75000-18750=56250$. მესამე წლის შემდეგ საამორტიზაციო ანარიცხები უდრის $56250\$ \cdot 0{,}25 = 14062{,}5\$$ და ძირითადი ფონდების ღირებულებაა 56250$-14062,5$=42187,5$. მეოთხე წლის შემდეგ კი ამორტიზაციის ანარიცხები შეადგენენ $42187{,}5\$ \cdot 0{,}25 \approx 10546{,}875\$$, ხოლო ძირითადი ფონდების ღირებულება კი ტოლია 31640,625$. ვინაიდან ძირითადი საშუალებების საბოლოო ღირებულება შეადგენს 10000$, ამიტომ მომდევნო ოთხი წლის შესაბამისი ამორტიზაციის აღრიცხვის წრფივი მეთოდის შესაბამისი ამორტიზაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა იქნება $\frac{31640{,}625 - 10000}{4} \approx 5410{,}156$, რომელიც ემთხვევა წლიურ საამორტიზაციო ანარიცხებს.

სავარჯიშოები

1. ახსენით განსხვავება მარტივ და რთულ განაკვეთებს შორის.

2. ტარიელმა შეიტანა ანაბარზე 8500$ რთული წლიური 5%-იანი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ 6 წელიწადში დაგროვილი თანხის ოდენობა და სარგებელი, თუ დარიცხვა ხდება ყოველ ნახევარ წელიწადში.

3. კომპანიამ შეიტანა ანაბარზე 42000$ 6%-იანი წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით ყოველკვარტალური დარიცხვით. იპოვეთ ერთი წლის შემდეგ დაგროვილი თანხის ოდენობა და სარგებელი.

$M = P \cdot 1 + \frac{R}{n}$

4. ბიზნესმენმა გადაწყვიტა დააბანდოს 25000$ ერთი წლით. მას შეუძლია ასესხოს ეს თანხა 10%-იანი მარტივი საპროცენტო განაკვეთით თავის პარტნიორს ან შეუძლია დააბანდოს თანხა 8%-იანი რთული საპროცენტო განაკვეთით ყოველკვარტალური დარიცხვით. რა თანხით მეტს გადაუხდის ბიზნესმენს ბანკი ვიდრე თავისი პარტნიორი?

5. ამერიკის ერთ-ერთ ბანკს აქვს 850000$, რომელიც მას შეუძლია გაასესხოს 9 თვით. ბანკს შეუძლია გაასესხოს ეს თანხა ადგილობრივ კონტრაქტორზე 12%-იანი მარტივი საპროცენტო განაკვეთით ან მას შეუძლია გაასესხოს ეს თანხა მცირე ბიზნესში 12%-იანი რთული საპროცენტო განაკვეთით ყოველთვიური დარიცხვით. რა თანხით მეტ თანხას აიღებს ეს ბანკი ფულის მცირე ბიზნესში დაბანდებით?

6. მეწარმეს აქვს 25000$, რომელიც შეუძლია დააბანდოს 6%-იანი რთული საპროცენტო განაკვეთით ნახევარწლიური დარიცხვით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა თუ ის დააბანდებს ამ თანხას ა) 2 წლით? ბ) 8 წლით? იპოვეთ დამატებით დაგროვილი თანხა გრძელვადიანი დაბანდების შემთხვევაში?

7. მესაკუთრემ გაყიდა თავისი ბინა და აქვს 18000$ საინვესტიციო თანხა. მას სურს დააბანდოს ეს თანხა წლიური რთული 8%-იანი საპროცენტო სარგებლით ყოველკვარტალური დარიცხვით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა ა) 3 წლის შემდეგ; ბ) 9 წლის შემდეგ; იპოვეთ დამატებით დაგროვილი თანხა გრძელვადიანი დაბანდების შემთხვევაში.

8. ოჯახმა გადაწყვიტა განქორწინება, რაც მეუღლისთვის ითვალისწინებს ბავშვის კოლეჯში სწავლის საფასურის გადახდას 40000$-ის ოდენობით. რა თანხა უნდა შეიტანოს მეუღლემ ანაბარზე 6%-იანი წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით ნახევარწლიური დარიცხვით, რომ ოთხი წლის შემდეგ შეძლოს ამ თანხის გადახდა?

9. დაადგინეთ რა არის უფრო მომგებიანი თანხის დაბანდება 8%-იანი წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით ყოველთვიური დარიცხვით, თუ 8%-იანი წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთით?

10. თეამ 1 აპრილს შეიტანა ანაბარზე 2530$, შემდეგ მან 8 მაისს კიდევ შეიტანა 150$ და 24 მაისს კი 580$. იპოვეთ 30 ივნისისათვის დაგროვილი თანხა და სარგებელი ამ დროისათვის, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთი შეადგენს 3,5%-ს ყოველდღიური დარიცხვით.

თავი 5. მონაცემთა სტატისტიკური ანალიზი

§ 10. მონაცემების სახეები და მათი გრაფიკული ანალიზის მეთოდები

სტატისტიკა წარმოადგენს მეცნიერების დარგს, რომელიც იკვლევს მონაცემების შეგროვების, დამუშავების, ანალიზის და პუბლიკაციის პრობლემებს სხვადასხვა დარგში წარმოქმნილი ამოცანების გადასაწყვეტად რეკომენდაციების შემუშავების მიზნით.

მონაცემის ქვეშ იგულისხმება ობიექტის რაოდენობრივი ან თვისებრივი მახასიათებლის დაკვირვებული მნიშვნელობა. თავდაპირველ მონაცემებს, რომლებიც არ არის დამუშავებული ან რაიმე აზრით დალაგებული, დაჯგუფებული, **ნედლი** ან **დაუმუშავებელი მონაცემები** ეწოდება.

მონაცემების შეგროვების, დალაგების, დაჯგუფების და კრებსითი მიმოხილვის მეთოდოლოგია შეადგენს ***აღწერით ანუ დესკრიფციულ სტატისტიკას***.

აღწერითი სტატისტიკის მიზანს წარმოადგენს იმ მეთოდების დამუშავება, რომლებიც ემსახურება მონაცემების შეგროვებას, მოხერხებული ფორმით წარმოდგენას და სხვადასხვა რიცხვითი მახასიათებლებით აღწერას.

მონაცემების მოპოვების მეთოდები შეიძლება დავყოთ ოთხ დიდ ჯგუფად:

1. მონაცემების შეგროვება გამოკითხვის ჩატარებით;
2. მონაცემების მისაღებად სათანადო ექსპერიმენტის ჩატარება;
3. მონაცემების შეგროვება დაკვირვებით;
4. უკვე არსებული და გამოქვეყნებული მონაცემების გამოყენება.

პირველი სამი მეთოდით შეგროვილ მონაცემებს ეწოდებათ პირველადი მონაცემები, ხოლო უკანასკნელი მეთოდით კი მეორადი მონაცემები.

გამოკითხვის ჩატარების პროცესი მოიცავს შემდეგ ექვს ძირითადი ეტაპს:

- გამოკითხვის მიზნის და ამოცანების განსაზღვრა;
- ადამიანთა იმ კატეგორიის განსაზღვრა ვისი აზრის გამოკითხვაც გვაინტერესებს;
- კითხვარის შექმნა;
- კითხვარის წინასწარი ტესტირების ჩატარება;
- გამოსაკითხ პირთა რაოდენობის და მათი შერჩევის მეთოდის განსაზღვრა;
- გამოსაკითხი პირების შერჩევა და გამოკითხვის ჩატარება.

თავისი სტრუქტურის მიხედვით კითხვები შეიძლება დავყოთ ორ ჯგუფად:

- **დახურულ ბოლოიანი** კითხვები, როცა რესპონდენტმა პასუხი უნდა აირჩიოს რამოდენიმე სავარაუდო პასუხიდან;
- **ღია ბოლოიანი** კითხვები, როცა რესპონდენტს აქვს სრული თავისუფლება და შეუძლია მიუთითოს ნებისმიერი წინადადება.

გამოკითხვის ჩატარებისას სარგებლობენ სატელეფონო და წერილობითი გამოკითხვით, პირადი ინტერვიუთი და სხვა. პირადი ინტერვიუ შეიძლება იყოს სტრუქტურიზებული, როცა ყველა კითხვა წინასწარ არის განსაზღვრული, ან არასტრუქტურიზებული, რომელიც იწყება ერთი ან რამოდენიმე ზოგადი კითხვით და მომდევნო კითხვები დამოკიდებულია რესპონდენტის პასუხებზე.

ექსპერიმენტი წარმოადგენს პროცესს, რომელიც იძლევა მონაცემებს და მკვლევარს შეუძლია აკონტროლოს დასაკვირვებელი ერთეულები. ექსპერიმენტის განმსაზღვრელია **ექსპერიმენტის გეგმა**, რაც არის იმ ქმედებათა თანმიმდევრობა, რომლებიც უნდა განხორციელდეს საინტერესო პარამეტრების განსაზღვრისათვის. ექსპერიმენტის ჩატარებისას ხდება ერთი ან რამოდენიმე პარამეტრის შეცვლა ისე, რომ განისაზღვროს მათი ზეგავლენა გამოსაკვლევ პარამეტრებზე.

დაკვირვება წარმოადგენს მონაცემების შეგროვების მეთოდს, როცა ობიექტებზე შეიძლება ჩატარდეს დაკვირვება და მონაცემები გროვდება დაკვირვების პროცესის

მსვლელობის დროს. აღნიშნული მეთოდი გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა შესაძლებელია უშუალოდ დავაკვირდეთ გამოსაკვლევ ობიექტებს.

შეგროვილი მონაცემების გამოყენებისას ერთ-ერთ მნიშვნელოვან პრობლემას წარმოადგენს **ჩანაცვლება**, რაც გულისხმობს რეალური სურათის დამახინჯებას და შეიძლება გახდეს არასწორი დასკვნების მიღების საფუძველი.

არსებობს ჩანაცვლების გამომწვევი ბევრი სხვადასხვა მიზეზი. მაგალითად, ჩანაცვლება შეიძლება გამოწვეული იყოს გამოკითხვის დროს **უპასუხოდ დარჩენილი კითხვარების** დიდი რაოდენობით; მონაცემების შეგროვებისას დაკვირვებულ მნიშვნელობათა **შერჩევის მეთოდით გამოწვეული ჩანაცვლება; გაზომვის ცდომილება;** დამკვირვებლის **სუბიექტური აღქმით გამოწვეული ჩანაცვლება.**

პოპულაცია არის შესასწავლი ობიექტების კონკრეტული მახასიათებლის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა ერთობლიობა. პოპულაციის ელემენტთა რაოდენობას **პოპულაციის მოცულობა** ეწოდება.

შერჩევა არის პოპულაციის რაიმე ნაწილი. შერჩევაში ელემენტთა რაოდენობას **შერჩევის მოცულობა** ეწოდება.

იმ ობიექტთა ერთობლიობას, რომელთა თვისებების შესწავლა გვაინტერესებს ეწოდება **პოპულაციის ბაზისი**. პოპულაციის ბაზისის შერჩევა დამოკიდებულია იმაზე თუ რომელი ობიექტების შესწავლა გვაინტერესებს.

პოპულაციის ბაზისს შეადგენენ **პოპულაციის ელემენტარული ერთეულები**, ე.ი. ის ობიექტები, რომელთა გარკვეული მახასიათებლის მნიშვნელობები შეადგენენ პოპულაციას.

შერჩევას ეწოდება **წარმომადგენლობითი** ანუ **რეპრეზენტირებული**, თუ ის კარგად ასახავს პოპულაციის პროპორციებს. შერჩევას შეიძლება ახლდეს ცდომილება, რაც გამოიხატება წარმომადგენლობითი შერჩევიდან გადახრაში.

მაგალითი 10.1. კომპანიის ფინანსური დოკუმენტაციის აუდიტის ჩატარების წინ აუდიტორულმა ფირმამ უნდა განსაზღვროს შესამოწმებელი ანგარიშსწორების დოკუმენტების რაოდენობა. წინათ, როცა კომპანიების ზომა იყო არც ისე დიდი, აუდიტორები ამოწმებდნენ ყველა ანგარიშსწორების დოკუმენტს. ეს ახლაც ხორციელდება ზოგიერთი აუდიტის მიერ, მაგრამ კომპანიების ზომა და სირთულე ხშირად აიძულებს აუდიტორებს შეარჩიონ ანგარიშსწორების დოკუმენტების ნაწილი შემოწმებისათვის.

ვთქვათ ფინანსური აუდიტის ერთ-ერთ ნაწილს შეადგენს დებიტორული დავალიანების ანგარიშსწორების დოკუმენტების შემოწმება. ამ შემთხვევაში, განმარტების თანახმად, პოპულაციას წარმოადგენს ყველა დებიტორთან ანგარიშსწორების არსებული დოკუმენტების ერთობლიობა. ამ დოკუმენტების მთლიანი სია შეადგენს **პოპულაციის ბაზისს**. თუ ხდება მთელი პოპულაციის შემოწმება, მაშინ ამბობენ, რომ ხორციელდება აღწერა. მაგრამ წარმოვიდგინოთ, რომ დებიტორებთან ანგარიშსწორების დოკუმენტების რაოდენობა ძალიან დიდია. მაშინ აუდიტორული ფირმა ირჩევს ანგარიშსწორების დოკუმენტების მხოლოდ ნაწილს, ანუ **შერჩევას**. აუდიტორები იყენებენ შერჩევიდან მიღებულ შედეგებს მთელი პოპულაციის შესახებ დასკვნების გასაკეთებლად. თუ შემოწმებისას დადგინდა, რომ შერჩეული დოკუმენტები კარგია, მაშინ აუდიტორი ასკვნის, რომ მთელი პოპულაციის დოკუმენტებიც არის ნორმალური.

შერჩევას აქვს რამოდენიმე უპირატესობა აღწერასთან შედარებით. აღწერის ჩატარება მოითხოვს გაცილებით მეტ დროს და სახსრებს ვიდრე შერჩევა. თუ შესამოწმებელია ძალიან დიდი რაოდენობის ანგარიშსწორების დოკუმენტი, რომლებიც თითოეული ცალ-ცალკე უნდა შემოწმდეს, მაშინ აღწერის დროს მიღებულ მონაცემებში შეიძლება იყოს უფრო მეტი შეცდომა, ვიდრე შერჩევაში, რადგან მცირე რაოდენობის დოკუმენტების ანალიზი უფრო დაზღვეულია ადამიანური შეცდომებისაგან.

ზემოაღნიშნულის გარდა არის შემთხვევები, როცა ობიექტთა მთელი ერთობლიობის გარკვეული მახასიათებლის შემოწმებას უბრალოდ არ აქვს აზრი. მაგალითად, გვაინტერესებს ასანთის კოლოფებში მოთავსებული ღეროების ხარისხის შემოწმება. თუკი, ჩვენ განვიხილავთ თითოეულ ღეროს და მოვინდომებთ მათი ხარისხის შემოწმებას, მაშინ შემოწმების ბოლოს

მივიღებთ ცარიელ ყუთს, ვინაიდან ყველა ღერო იქნება გატეხილი. აქედან გამომდინარე, ამ შემთხვევაში ასანთის ღეროების ხარისხის შესამოწმებლად აუცილებელია ასანთის კოლოფებიდან შეირჩეს გარკვეული რაოდენობა, შემოწმდეს ამ კოლოფებში მოთავსებული ასანთის ღეროების ხარისხი და ამის საფუძველზე გაკეთდეს დასკვნა მთელი პარტიის შესახებ.

მთელი პოპულაციის საშუალებით გამოთვლილ რიცხვით მახასიათებელს ეწოდება **პარამეტრი**.

რიცხვით მახასიათებელს გამოთვლილს შერჩევის მონაცემების მიხედვით ეწოდება **სტატისტიკა**.

მაგალითად, თუ აუდიტორულმა ფირმამ შეამოწმა ყველა ფინანსური დოკუმენტი, მაშინ სწორი დოკუმენტების წილი იქნება პარამეტრი, ვინაიდან მისი გამოთვლა ხდება მთელი პოპულაციისათვის. თუკი აუდიტორებმა განიხილეს შერჩევა პოპულაციიდან, მაშინ სწორი დოკუმენტების წილი შერჩევაში წარმოადგენს სტატისტიკას.

შერჩევის გამოყოფის მეთოდები შეიძლება დაიყოს ორ ჯგუფად: **არაშემთხვევითი** შერჩევის მეთოდები და **შემთხვევითი** შერჩევის მეთოდები. შემთხვევითი შერჩევის მეთოდები ექვემდებარება ალბათობის თეორიის მეთოდებით შესწავლას, ხოლო არაშემთხვევითი კი ეფუძნება სხვადასხვა მოსაზრებებს და არა შემთხვევით პროცესებს და შესაბამისად მათთვის ზუსტი მათემატიკური თეორია არ არსებობს.

არაშემთხვევითი შერჩევის მეთოდების მაგალითებია **მისაწვდომი** შერჩევა, როცა შერჩევა იფარგლება პოპულაციის მხოლოდ მისაწვდომი ნაწილით; **მიზანმიმართული შერჩევა**, როცა მცირე მაგრამ არაერთგვაროვანი პოპულაციის გამოსაკვლევად ათვალიერებენ მთელ პოპულაციას და ირჩევენ ტიპობრივი ერთეულების მცირე რაოდენობას, ე.ი. ისეთ ერთეულებს, რომლებიც ასახავენ პოპულაციის ძირითად თავისებურებებს.

შემთხვევითი შერჩევის მეთოდები წარმოადგენენ შერჩევის გამოყოფის ისეთ მეთოდებს, როდესაც პოპულაციის თითოეული ელემენტისათვის განსაზღვრულია შერჩევაში მოხვედრის შანსი.

შემთხვევითი შერჩევის ძირითადი მეთოდებია:

- **მარტივი** შემთხვევითი შერჩევა, რომელიც წარმოადგენს შერჩევის ისეთ გეგმას, როცა პოპულაციის ყოველი ელემენტის შერჩევაში მოხვედრის შანსი ერთნაირია. შერჩევა შეიძლება იყოს დაბრუნებით ან დაბრუნების გარეშე.

- **სისტემატური** შემთხვევითი შერჩევა, როდესაც შემთხვევით ვირჩევთ მხოლოდ პირველ ელემენტს 1-დან k-მდე, ხოლო შემდეგ შერჩევაში შეგვყავს ყოველი მომდევნო k ბიჯით დაშორებული ელემენტი. k რიცხვი განისაზღვრება მთელი პოპულაციის და გამოსაყოფი შერჩევის ელემენტთა რაოდენობების შეფარდების მიხედვით.

- **განშრევებული** ანუ **სტრატიფიცირებული** შემთხვევითი შერჩევა, რომელიც ეფუძნება პოპულაციის დაყოფას თანაუკვეთ ჯგუფებად, რომლებსაც შრეები ეწოდებათ. შრეები ისე უნდა შეირჩეს, რომ პოპულაციის მახასიათებელი, რომლის დადგენაც გვაინტერესებს, თითოეულ შრეში იყოს შეძლებისამებრ ერთნაირი. შემთხვევითი შერჩევის გამოყოფა ისე უნდა მოხდეს, რომ ამ ჯგუფების პროპორციები შერჩევაში ისეთივე იყოს როგორც მთელ პოპულაციაში. შერჩევის ელემენტების არჩევა შრიდან ხდება მარტივი შემთხვევითი შერჩევის მეთოდის გამოყენებით.

- **კლასტერული** შერჩევა, რომლის მიხედვით პოპულაცია იყოფა თანაუკვეთ ჯგუფებად ანუ კლასტერებად, რომლებიც დამოუკიდებლად განიხილება როგორც მცირე პოპულაციები. ჯერ ხდება კლასტერების მარტივი შემთხვევითი შერჩევა, ხოლო შემდეგ შერჩეული კლასტერებიდან ელემენტების გამოსაყოფად გამოიყენება შემთხვევითი შერჩევის რომელიმე მეთოდი. შერჩეულ კლასტერებს **პირველადი კლასტერები** ეწოდებათ.

მონაცემების ანალიზის ჩატარებისას ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ფაქტორს წარმოადგენს მონაცემების თვისებები. იმის მიხედვით თუ რა თავისებურებები აქვთ მონაცემებს მათზე

შესაძლებელია ჩატარდეს სათანადო სირთულის ანალიზი. მონაცემები მათი ტიპების მიხედვით შეიძლება დაიყოს შემდეგ ჯგუფებად:

* **თვისებრივი მონაცემები;**
* **რაოდენობრივი მონაცემები;**
* **დროითი მწკრივი ანუ დროზე დამოკიდებული მონაცემები;**
* **მყისიერი მონაცემები;**
* **დისკრეტული მონაცემები;**
* **უწყვეტი მონაცემები.**

მონაცემები, რომლებიც ახასიათებენ ელემენტარული ერთეულების ისეთ თვისებას, რომლისთვისაც შესაძლებელია მხოლოდ იმის დადგენა თუ რომელ კატეგორიას მიეკუთვნება ობიექტი, **თვისებრივი, ატრიბუტული ან კატეგორიზებული მონაცემები** ეწოდებათ. მაგალითად, თვისებრივი მონაცემები მიიღება, როცა რესპონდენტებს სთხოვენ შეაფასონ თავიანთი განათლების დონე და სავარაუდო პასუხებია: "ძალიან კარგი", "კარგი", "საშუალო", "ცუდი" და "ძალიან ცუდი". თვისებრივ მონაცემებს მივიღებთ იმ შემთხვევაშიც, როცა გვაინტერესებს თუ რომელ ფერს ანიჭებენ უპირატესობას რესპონდენტები. ამ შემთხვევაში სავარაუდო პასუხებია: "წითელი", "ყვითელი", "მწვანე", "ლურჯი", "ყავისფერი". თვისებრივი მონაცემების შემთხვევაში სავარაუდო პასუხებს შეიძლება შეუსაბამოთ რიცხვები 1,2,3,4,5 და ა.შ., მაგრამ მონაცემები მაინც იქნება თვისებრივი, რადგან რიცხვები არ ატარებენ შინაარსობრივ დატვირთვას და უბრალოდ წარმოადგენენ კოდებს.

მონაცემებს, რომლებიც ყველაზე სრულფასოვნად გამოიხატება რიცხვების საშუალებით **რაოდენობრივი მონაცემები** ეწოდებათ. ამ ტიპის მონაცემები მიიღება ოჯახში სულადობის გამოკითხვისას, უნივერსიტეტის ჯგუფებში სტუდენტების რაოდენობების განხილვისას, სხვადასხვა ობიექტების სიგრძეების, სიგანეების, წონების და სხვა მსგავსი მახასიათებლების განსაზღვრისას.

თუ გვაინტერესებს რაიმე მახასიათებლის დროში ცვლილების თავისებურებები, მაშინ შესაბამისი მონაცემები ქმნიან ე.წ. **დროით მწკრივს**. ე.ი. დროითი მწკრივი წარმოადგენს დროის მომენტების მიხედვით დალაგებულ მონაცემთა ერთობლიობას.

თუ გვაინტერესებს მახასიათებლის მნიშვნელობები დროის რომელიმე კონკრეტული მომენტისათვის, მაშინ შესაბამის მონაცემებს **მყისიერი მონაცემები** ეწოდებათ.

მაგალითად, თუ შეგროვილია სტუდენტების მიერ სემესტრის ბოლოს სხვადასხვა საგნებში მიღებული ქულები, მაშინ შეგროვილი მონაცემები წარმოადგენენ მყისიერ მონაცემებს. თუკი ჩვენ გვაინტერესებს წლების მიხედვით ერთ-ერთი სტუდენტის მიერ მიღებული საშუალო ქულების ცვლილება, მაშინ შეგროვილი მონაცემები წარმოადგენენ დროით მწკრივს.

შეგროვილი მონაცემები, მათ მიერ მიღებული მნიშვნელობების რაოდენობის მიხედვით, შეიძლება დავყოთ **დისკრეტულ და უწყვეტ** მონაცემებად.

დისკრეტული მონაცემები წარმოადგენენ ისეთი მახასიათებლების აღმწერ მონაცემებს, რომლებმაც შეიძლება მიიღონ მხოლოდ ცალკეული იზოლირებული მნიშვნელობები.

უწყვეტი მონაცემები აღწერენ მახასიათებლებს, რომლებმაც შეიძლება მიიღონ ნებისმიერი რიცხვის ტოლი მნიშვნელობა რაიმე საზღვრებში.

დისკრეტული მონაცემების მაგალითებია: ოჯახის წევრთა რაოდენობა, ფირმის ოფისების რაოდენობა, ოთახების რაოდენობა ბინებში, მაღაზიებში თანამშრომლების რაოდენობა და სხვა. დისკრეტულ მონაცემებს აგრეთვე შეიძლება მივაკუთვნოთ თვისებრივი მონაცემები, თუ თითოეულ კატეგორიას პირობითად შევუსაბამებთ რაიმე რიცხვს. უწყვეტი მონაცემების მაგალითებია სიმაღლე, სიცოცხლის ხანგრძლივობა, ვალუტის კურსი, პროდუქტის ფასი და სხვა. თუმცა ზოგიერთ შემთხვევაში გარკვეული სიზუსტით გაზომვისას უწყვეტი მონაცემებიც შეიძლება ჩაითვალოს დისკრეტულად, მაგალითად, წონა, თანხა, სიგრძე და სხვა.

მონაცემები მათზე შესაძლებელი მოქმედებების და მათი ანალიზის საშუალებების მიხედვით იყოფა შემდეგ დონეებად, რომლებსაც გაზომვის დონეები ეწოდება:

- ნომინალური ანუ სახელდებითი მონაცემები, რომელთაც გააჩნიათ გაზომვის ყველაზე დაბალი დონე. ისინი შეესაბამებიან ისეთ მახასიათებლებს, რომლებმაც შეიძლება მიიღონ რამოდენიმე მნიშვნელობა და თითოეული მნიშვნელობისათვის ობიექტი ხვდება ერთ-ერთ კლასში. ამ კლასების იდენტიფიკაციისათვის ხშირად რიცხვებს იყენებენ. ამ ტიპის მონაცემებს შეესაბამება სახელდების სკალა. მაგალითად, კითხვარში შეტანილია კითხვა ოჯახური მდგომარეობის შესახებ, რომლის სავარაუდო პასუხებია: 1 — დაოჯახებული; 2 — დაუოჯახებელი; 3 — გაცილებული; 4 — ქვრივი. ამ კითხვის შესაბამისი შეგროვილი მონაცემები წარმოადგენენ ნომინალურ მონაცემებს.
- რიგობრივი მონაცემები გაზომვის თვალსაზრისით წარმოადგენენ უფრო მაღალი დონის მონაცემებს, რადგან ამ შემთხვევაში შესაძლებელია დაწესდეს რიგი ობიექტებს შორის თუმცა შეუძლებელია იმის განსაზღვრა, რამდენით ან რამდენჯერ აღემატება ერთი ობიექტი მეორეს ამ თვისების მიხედვით. ამ მონაცემებს შეესაბამება რიგის სკალა. მაგალითად, ბანკში სესხის მოთხოვნისას სააპლიკაციო ფორმაზე ივსება შემოსავლების დონის აღმნიშვნელი უჯრა, სადაც კოდი (1) შეესაბამება შემოსავლებს 1000$-მდე, კოდი (2) შემოსავლებს 1000$-დან 5000$-მდე და კოდი (3) შემოსავლებს 5000$ ზემოთ. ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს რიგობრივ მონაცემებთან, რადგან მაღალი კოდი შეესაბამება მაღალ შემოსავლებს.
- ინტერვალური მონაცემები წარმოადგენენ ისეთ მონაცემებს, რომელთაც გააჩნიათ რიგობრივი მონაცემების თვისებები და ამავე დროს შეიძლება ზუსტად გაიზომოს განსხვავება ორ მონაცემს შორის. ამ მონაცემებს შეესაბამება ინტერვალური სკალა. ინტერვალური მონაცემების მაგალითს წარმოადგენს თერმომეტრიდან აღებული მონაცემები ცელსიუსის სკალის მიხედვით.
- ფარდობითი მონაცემები, წარმოადგენენ მონაცემებს, რომელთაც აქვთ ინტერვალური მონაცემების ყველა თვისება და ამავე დროს აქვთ ნულოვანი წერტილი, რომელიც ნიშნავს გასაზომი თვისების არ არსებობას. ამ ტიპის მონაცემებს შეესაბამება გაზომვის ფარდობითი სკალა, რომელიც არის გაზომვის ყველაზე მაღალი დონე. ფარდობითი სკალით გაზომვის შემთხვევაში შესაძლებელია განისაზღვროს, თუ რამდენჯერ მეტად ან ნაკლებად აქვს გამოხატული ესა თუ ის თვისება ერთ ობიექტს ვიდრე მეორეს. მაგალითად, გაყიდული პროდუქციის წონა წარმოადგენს ფარდობით მონაცემს, რადგან ის იზომება გრამებში ან კილოგრამებში და აქვს ერთადერთი ნულოვანი წერტილი — წონა ნულის ტოლია ნიშნავს, რომ პროდუქტი არ არსებობს.

შევნიშნოთ, რომ ტემპერატურა გაზომილი ცელსიუსის სკალით წარმოადგენს ინერვალურ მონაცემს, მაგრამ არა ფარდობითს, ვინაიდან ნული გრადუსი ცელსიუსის სკალით არ ნიშნავს ტემპერატურის არ არსებობს. მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ტემპერატურა გაზომილია კელვინის სკალით ($T^0K=T^0C+273.15^0C$), მაშინ ნული გრადუსი კელვინის სკალით ანუ აბსოლუტური ნული ნიშნავს ტემპერატურის არ არსებობას.

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ მონაცემების სახეები და მათი შეგროვების მეთოდები. მაგრამ მხოლოდ მონაცემები საკმარისი არ არის იმისათვის, რომ მივიღოთ პასუხები ჩვენთვის საინტერესო კითხვებზე. ამ მიმართულებით ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ნაბიჯს წარმოადგენს ე.წ. სიხშირეთა განაწილების აგება.

სიხშირეთა განაწილება წარმოადგენს მონაცემების თანაუკვეთ კატეგორიებად ან კლასებად დაყოფის შედეგად თითოეულ კატეგორიაში ან კლასში მოხვედრილ მონაცემთა რაოდენობების ერთობლიობას. თანაუკვეთი კატეგორიები ან კლასები და მონაცემების შესაბამისი რაოდენობები როგორც წესი წარმოიდგინება ცხრილის სახით.

კატეგორიაში ან კლასში მოხვედრილ მონაცემთა რაოდენობას სიხშირე ეწოდება.

ფარდობითი სიხშირე წარმოადგენს კატეგორიაში მოხვედრილი მონაცემების სიხშირის შეფარდებას მონაცემთა მთელ რაოდენობასთან. ფარდობითი სიხშირე შეიძლება გამოვსახოთ პროცენტებში, თუ მას გავამრავლებთ 100, ე.ი.

$$\text{ფარდობითი სიხშირე} = \frac{f_i}{n} \quad \text{ან} \quad \text{ფარდობითი სიხშირე} = \frac{f_i}{n} * 100,$$

სადაც f_i წარმოადგენს i-ურ კატეგორიაში ან კლასში მოხვედრილ მონაცემთა რაოდენობას, $n = f_1 + f_2 + ... + f_k$ არის მონაცემთა საერთო რაოდენობა, k – კატეგორიების ან კლასების რაოდენობაა.

დისკრეტული მონაცემებისათვის სიხშირეთა ან ფარდობით სიხშირეთა განაწილების აგება მოიცავს შემდეგ ეტაპებს:

1. უნდა ჩამოიწეროს გამოსაკვლევი მახასიათებლის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა. თუ მონაცემები რაოდენობრივია, მაშინ შესაძლო მნიშვნელობები უნდა დალაგდეს ზრდის მიხედვით;
2. მახასიათებლის თითოეული შესაძლო მნიშვნელობისათვის შესაბამისი მონაცემების რაოდენობის დათვლა და მიღებული რიცხვების ჩაწერა სვეტში, რომელიც წარმოადგენს სიხშირეების სვეტს;
3. სიხშირეთა განაწილებიდან ფარდობით სიხშირეთა განაწილების მისაღებად თითოეული სიხშირე იყოფა მონაცემების საერთო რაოდენობაზე და მნიშვნელობები იწერება სვეტში, რომელიც წარმოადგენს ფარდობით სიხშირეთა სვეტს.

მონაცემებს, რომლებიც დალაგებულია ზრდის ან კლების მიხედვით, მონაცემთა დალაგებული მწკრივი ან ვარიაციული მწკრივი ეწოდება.

მაგალითი 10.2. ერთ-ერთი გაზეთის გამომცემელმა გადაწყვიტა დაადგინოს ორი ქალაქიდან, სადაც იყიდება მისი გაზეთები, რომელში უფრო მეტი პოპულარობით სარგებლობს გაზეთი. გაზეთი გამოდის ყოველ დღე. აღნიშნული საკითხის შესასწავლად მან ჩაატარა გამოკითხვა თითოეულ ქალაქში. პირველ ქალაქში გამოიკითხა 157, ხოლო მეორე ქალაქში კი 330 რესპონდენტი. თითოეულ რესპონდენტს უსვამდნენ ერთ კითხვას: კვირაში რამდენჯერ იძენთ გაზეთს? სავარაუდო პასუხები იყო: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, რაც ნიშნავდა იმას, რომ რესპონდენტი გაზეთს არ იძენდა, იძენდა ერთხელ, ორჯერ, სამჯერ, ოთხჯერ, ხუთჯერ, ექვსჯერ და შვიდჯერ. თითოეული შესაძლო მნიშვნელობისათვის დათვლილი იყო იმ რესპონდენტების რაოდენობა, რომლებიც შესაბამისი სიხშირით ყიდულობდნენ გაზეთს. მიღებული მონაცემები მოყვანილია შემდეგ ცხრილებში:

ქალაქი I	
დღეების რაოდენობა	სიხშირე
0	35
1	21
2	24
3	22
4	31
5	13
6	6
7	5
საერთო რაოდენობა	157

ქალაქი II	
დღეების რაოდენობა	სიხშირე
0	187
1	62
2	34
3	19
4	14
5	7
6	3
7	4
საერთო რაოდენობა	330

აღნიშნული ცხრილები წარმოადგენენ სიხშირეთა განაწილებას შესაბამისად პირველი და მეორე ქალაქებისათვის. იმისათვის, რომ გაზეთის მეპატრონემ შესძლოს მისთვის საინტერესო კითხვაზე პასუხის გაცემა უნდა მოხდეს შესაბამისი სიხშირეების შედარება. ორივე ქალაქში გამოკითხული პირების რაოდენობა ერთნაირი რომ ყოფილიყო, მაშინ შესაბამის სიხშირეებს პირდაპირ შევადარებდით, მაგრამ ვინაიდან ისინი განსხვავებულია, ამიტომ აუცილებელია თითოეული კატეგორიის შესაბამისი სიხშირის პროცენტული წილის განსაზღვრა, ანუ ფარდობით სიხშირეთა განაწილების აგება. ამისათვის, სიხშირეები უნდა გავყოთ მონაცემთა მთლიან რაოდენობაზე, რის შედეგად მივიღებთ.

	ქალაქი I		ქალაქი II	
დღეების რაოდენობა	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე
0	35	35/157=0.223	187	187/330=0.567
1	21	21/157=0.134	62	62/330=0.188
2	24	24/157=0.153	34	34/330=0.103
3	22	22/157=0.140	19	19/330=0.058
4	31	31/157=0.197	14	14/330=0.042
5	13	13/157=0.083	7	7/330=0.021
6	6	6/157=0.038	3	3/330=0.009
7	5	5/157=0.032	4	4/330=0.012
საერთო რაოდენობა	157	1.00	330	1.00

აგებული ფარდობით სიხშირეთა განაწილებების შედარება საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ პირველ ქალაქში გაზეთი სავარაუდოდ არის უფრო პოპულარული.

განხილულ მაგალითში ჩვენთვის საინტერესო ცვლადი ღებულობდა ცალკეულ მნიშვნელობებს ანუ შეგროვილი მონაცემები წარმოადგენდნენ დისკრეტულ მონაცემებს. განვიხილოთ სიხშირეთა განაწილების აგების საკითხები უწყვეტი მონაცემებისათვის.

უწყვეტი მონაცემებისათვის სიხშირეთა განაწილების ასაგებად უწყვეტი მონაცემების შესაბამისი შესაძლო მნიშვნელობები ჯერ უნდა დაიყოს კლასებად. უწყვეტი მონაცემების კლასებად დაყოფისას უნდა შესრულდეს შემდეგი ოთხი პირობა:

1. კლასები უნდა იყვნენ **ურთიერთგამომრიცხავი**, ე.ი. თითოეული მონაცემი შეიძლება აღმოჩნდეს მხოლოდ ერთ კლასში.
2. კლასების ერთობლიობა უნდა მოიცავდეს **ყველა შესაძლო მონაცემს**.
3. სასურველია კლასებს ჰქონდეთ **ერთნაირი სიგანე**, ე.ი. სხვაობა კლასის ზედა საზღვარსა და მის უმცირეს შესაძლო მნიშვნელობას შორის უნდა იყოს ერთნაირი ყველა კლასისათვის.
4. თუ შესაძლებელია თავიდან უნდა იქნეს აცილებული **ცარიელი კლასები**, ე.ი. ისეთი კლასები, რომლებიც არ შეიცავენ მონაცემებს. ამის მიზეზი შეიძლება იყოს კლასების სიგანის სიმცირე.

კლასის სიგანე წარმოადგენს სხვაობას კლასის ზედა საზღვარსა და უმცირეს შესაძლო მნიშვნელობას შორის.

უწყვეტი მონაცემებისათვის სიხშირეთა ან ფარდობით სიხშირეთა განაწილების აგება მოიცავს შემდეგ ეტაპებს:

1. **კლასების რაოდენობის განსაზღვრა.** რეკომენდირებულია 4-7 კლასი, როცა მონაცემების რაოდენობა 50-ზე ნაკლებია; 6-10 კლასი, როცა მონაცემების რაოდენობაა 50-100-მდე; 7-12 კლასი, როცა მონაცემების რაოდენობაა 100-250-მდე; 10-20 კლასი, როცა მონაცემების რაოდენობა 250-ზე მეტია. კლასების რაოდენობის განსაზღვრისათვის ზოგჯერ გამოიყენება ე.წ. **სტეჯესის წესი**, რომელიც მონაცემთა n რაოდენობისათვის იძლევა კლასების სავარაუდო რაოდენობას

$$\text{კლასების რაოდენობა} \approx 1 + 3.322\ \log_{10}(n).$$

თუ ავიღებთ კლასების ძალიან დიდ რაოდენობას, მაშინ მონაცემთა სიმრავლე შეიძლება იმდენ ნაწილად დაიყოს, რომ შედეგად მივიღოთ მონაცემთა საწყისი სიმრავლის მსგავსი სიმრავლე, ხოლო კლასების რაოდენობის სიმცირემ შეიძლება გამოიწვიოს ინფორმაციის დაკარგვა.

2. **კლასების სიგანეების დადგენა.**

ტოლი კლასების შემთხვევაში კლასის უმცირესი სიგანე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\text{კლასის სიგანე} = \frac{\text{უდიდესი მნიშვნელობა - უმცირესი მნიშვნელობა}}{\text{კლასების რაოდენობა}}.$$

3. თითოეული კლასის საზღვრების დადგენა, ე.ი. კლასების უდიდესი და უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობების დადგენა. კლასები უნდა იყვნენ ურთიერთგამომრიცხავი და მოიცავდნენ ყველა მონაცემს.
4. თითოეულ კლასში მოხვედრილი მონაცემების რაოდენობის დათვლა, რის შედეგად მივიღებთ სიხშირეთა განაწილებას.
5. ფარდობითი სიხშირეთა განაწილების მისაღებად თითოეული კლასის შესაბამისი სიხშირე უნდა გავყოთ მონაცემთა საერთო რაოდენობაზე.

დაგროვილ სიხშირეთა განაწილება წარმოადგენს იმ მონაცემთა რაოდენობების ერთობლიობას, რომლებიც სიხშირეთა განაწილების შესაბამისი კლასების ზედა შესაძლო მნიშვნელობებზე ნაკლები ან ტოლია.

დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა განაწილება მიიღება დაგროვილ სიხშირეთა განაწილებიდან თუ შესაბამის მონაცემთა რაოდენობებს გავყოფთ მონაცემთა მთელ რაოდენობაზე.

სიხშირეთა ჰისტოგრამა წარმოადგენს სიხშირეთა განაწილების გრაფიკულ წარმოდგენას, რომელიც შედგება ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაზომილი კლასების შესაბამისი ინტერვალებისაგან, ვერტიკალურ ღერძზე გამოსახული სიხშირეებისა და მართკუთხედებისაგან, რომელთა ერთი გვერდია კლასის შესაბამისი ინტერვალი, ხოლო სიმაღლე კი კლასში მოხვედრილ მონაცემთა სიხშირის ტოლია.

ჰისტოგრამები აგრეთვე გამოიყენება ფარდობით სიხშირეთა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა განაწილებების გრაფიკული წარმოდგენისათვის.

ოგივა წარმოადგენს დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა გრაფიკულ წარმოდგენას, რომელიც აიგება ისევე როგორც ჰისტოგრამა იმ განსხვავებით, რომ მართკუთხედების ნაცვლად კლასების შესაბამისი ინტერვალების ზედა ბოლოებზე თითოეული კლასის შესაბამისი დაგროვილი ფარდობითი სიხშირის ტოლ სიმაღლეზე დასმულია წერტილები და ისინი თანმიმდევრობით შეერთებულია მონაკვეთებით.

მაგალითი 10.3. მაღაზიების ქსელის მენეჯერმა გადაწყვიტა შეისწავლოს მაღაზიების დღიური შემოსავლები. ამ მიზნით მან შემთხვევით შეარჩია 20 მაღაზია და ჩაიწერა მათი დღიური მოგებები, რომელთაც აქვთ შემდეგი სახე: 240, 350, 170, 210, 245, 370, 260, 460, 585, 300, 320, 135, 122, 387, 411, 433, 444, 277, 535, 277. მოყვანილ მონაცემებზე დაყრდნობით ავაგოთ სიხშირეთა, ფარდობით სიხშირეთა, დაგროვილ სიხშირეთა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა განაწილებები, ავაგოთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა და ოგივა.

იმისათვის, რომ ავაგოთ სიხშირეთა განაწილება შეგროვილი მონაცემები ჯერ უნდა დავალაგოთ ზრდადობით, ე.ი. მივიღოთ მონაცემთა დალაგებული მწკრივი, რომელსაც ამ შემთხვევაში ექნება შემდეგი სახე: 122, 135, 170, 210, 240, 245, 260, 277, 277, 300, 320, 350, 370, 387, 411, 433, 444, 460, 535, 585.

შემდეგ უნდა განისაზღვროს კლასების რაოდენობა. სტეჯსის წესის თანახმად კლასების რაოდენობა მიახლოებით ტოლი იქნება $1+3.322\lg(20)\approx5.322$ და ამიტომ სიხშირეთა განაწილების ასაგებად ავიღებთ 5 კლასს.

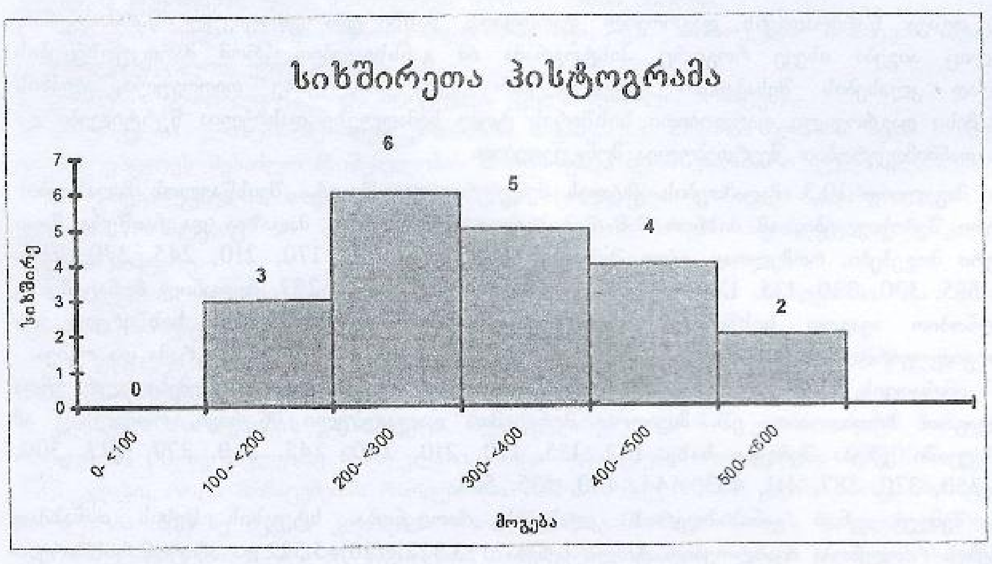
კლასების სიგანეების დასადგენად მონაცემების ცვლილების მთელი დიაპაზონი იყოფა 5 ნაწილად, რომელთა საშუალო სიგრძე არის $(585-122)/5=92.6$. ვინაიდან სასურველია, რომ კლასების საზღვრები იყოს მთელი რიცხვები, რომელთათვისაც მარტივია შინაარსობრივი ინტერპრეტაცია, ამიტომ ავიღებთ 100-ის ტოლი სიგანის კლასებს.

აღნიშნულზე დაყრდნობით ბუნებრივად მივიღებთ კლასების საზღვრებს, რომლებიც იქნება 100-დან 200-მდე; 200-დან 300-მდე; 300-დან 400-მდე; 400-დან 500-მდე და 500-დან 600-მდე.

იმის შემდეგ რაც აგებულია კლასები უკვე შესაძლებელია დავითვალოთ თითოეულ კლასში მოხვედრილი მონაცემების რაოდენობა, რაც მოგვცემს სიხშირეთა განაწილებას. მასზე დაყრდნობით კი შესაძლებელია ფარდობით სიხშირეთა, დაგროვილ სიხშირეთა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა განაწილებების აგება. აღნიშნული განაწილებები მოყვანილია შემდეგ ცხრილში:

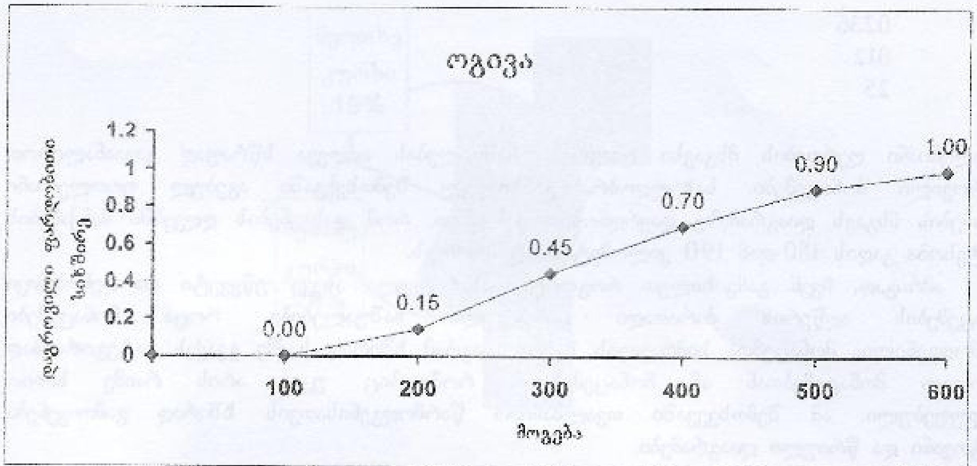
კლასები	სიხშირეები	ფარდობითი სიხშირეები	დაგროვილი სიხშირეები	დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეები
100 <200	3	3/20=0.15	3	0.15
200 <300	6	6/20=0.30	9	0.45
300 <400	5	5/20=0.25	14	0.70
400 <500	4	4/20=0.20	18	0.90
500 <600	2	2/20=0.10	20	1.00
	Σ=20	Σ=1.00		

სიხშირეთა განაწილება წარმოდგენილი ცხრილის სახით იძლევა კრებსით ინფორმაციას მონაცემების შესახებ, რაც კლასების დიდი რაოდენობის შემთხვევაში ართულებს მის ანალიზს. ამიტომ ხშირად უფრო მოსახერხებელია სიხშირეთა განაწილების გრაფიკული წარმოდგენა, რომელსაც ჰისტოგრამა ეწოდება. ჰისტოგრამის ასაგებად აბსცისათა ღერძზე უნდა გადავზომოთ კლასების შესაბამისი ინტერვალები და თითოეულ ინტერვალზე ავაგოთ იმ სიმაღლის მართკუთხედი რისი ტოლიც არის ამ კლასის შესაბამისი სიხშირე. ჩვენს მიერ განხილულ შემთხვევაში სიხშირეთა ჰისტოგრამას ექნება სახე:



სიხშირეთა განაწილების მსგავსად შეიძლება აიგოს ფარდობით სიხშირეთა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამები, რომელთათვისაც მართკუთხედების სიმაღლეები იქნება შესაბამისად ფარდობითი სიხშირეების და დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეების ტოლი.

დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა განაწილებაზე დაყრდნობით აიგება ოგივა, რომელსაც აქვს სახე:



რაოდენობრივი მონაცემების ანალიზის კიდევ ერთ გრაფიკულ საშუალებას წარმოადგენს ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა, რაც გულისხმობს მონაცემების შესაბამისი რიცხვებიდან ათობითი ნიშნის გამოყოფას (ფოთლები) და დანარჩენი ნიშნების შესაბამისი განსხვავებული რიცხვების ზრდის მიხედვით ჩაწერას თითოჯერ ზემოდან ქვემოთ ვერტიკალურად (ვერტიკალური ღერო), ხოლო შემდეგ, ვერტიკალურ ღეროზე დატანილი პირველი რამოდენიმე საერთო ათობითი ნიშნის გვერდით, ამ რიცხვების ბოლო ათობითი ნიშნების ჰორიზონტალურად ჩაწერას ზრდადობით (ჰორიზონტალური ღერო). ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა ჰგავს ჰისტოგრამას, მაგრამ მისგან განსხვავებით, მონაცემები არ იკარგება.

მაგალითი 10.4. მანქანების გაქირავების კომპანიის მენეჯერმა უნდა გაანალიზოს დასვენების დღეებში გაქირავებული მანქანების მიერ გავლილი მანძილები. ამისათვის მან შემთხვევით შეარჩია 70 მანქანა და მათთვის ჩაიწერა დასვენების დღეს გავლილი მანძილები: 144, 153, 157, 159, 159, 162, 162, 163, 166, 167, 167, 169, 169, 172, 176, 176, 179, 180, 180, 181, 182, 185, 185, 185, 186, 186, 187, 187, 187, 188, 188, 188, 189, 189, 189, 190, 191, 191, 192, 193, 193, 193, 194, 195, 196, 197, 201, 201, 202, 203, 210, 210, 211, 220, 221, 230, 231, 232, 233, 240, 240, 250, 252, 253, 256, 260, 261, 262, 272, 275.

ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამის ასაგებად ვგულისხმობთ, რომ ღეროებია ათეულების რაოდენობა, ხოლო ფოთოლი კი ერთეულების რაოდენობა. ე.ი., მონაცემში 153, 15 იქნება ღერო, ხოლო 3 კი ფოთოლი. თუ ღეროების შესაბამის სიდიდეებს ჩამოვწერთ ვერტიკალურად ზრდადობის მიხედვით და გვერდზე მიუწერთ შესაბამის ფოთლებს მივიღებთ ფოთლებიანი ღეროების მსგავს დიაგრამას:

14	4
15	3799
16	22367799
17	2669
18	001255566777888999
19	01123334567
20	1123
21	001
22	01
23	0123
24	00

25 0236
26 012
27 25

ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა საშუალებას იძლევა სწრაფად გავაანალიზოთ შეგროვილი მონაცემები. სახელდობრ, განხილულ შემთხვევაში აგებულ ფოთლებიანი ღეროების მსგავს დიაგრამაზე დაყრდნობით ვასკვნით, რომ დასვენების დღეებში მანქანების უმეტესობა გადის 180-დან 190 კილომეტრამდე მანძილს.

ამრიგად, ჩვენ განვიხილეთ როგორც დისკრეტული ასევე უწყვეტი რაოდენობრივი მონაცემების აღწერის ძირითადი გრაფიკული საშუალებები, როცა მონაცემები წარმოდგენილია მონაცემთა სიმრავლის სახით. მაგრამ ხშირად საქმე გვაქვს კატეგორიებად დაყოფილ მონაცემებთან ან მონაცემებთან, რომლებიც უკვე არის რაიმე სახით დაჯგუფებული. ამ შემთხვევაში თვალსაჩინო წარმოდგენისათვის ხშირად გამოიყენება **სვეტოვანი და წრიული დიაგრამები**.

სვეტოვანი დიაგრამა არის კატეგორიებად დაყოფილი ანუ ატრიბუტული მონაცემების გრაფიკული წარმოდგენის საშუალება, როცა მართკუთხედი ან სვეტი შეესაბამება თითოეულ კატეგორიას. თითოეული სვეტის სიმაღლე შესაბამისი მონაცემების სიხშირის, მონაცემთა მთელ სიმრავლეში მათი წილის ან მონაცემებთან დაკავშირებული რაიმე სხვა მახასიათებლის მნიშვნელობის ტოლია. სვეტი შეიძლება იყოს **ვერტიკალური** ან **ჰორიზონტალური**. ყველა სვეტი შეიძლება იყოს ერთი ფერის ან მათ შეიძლება გააჩნდეთ სხვადასხვა ფერი კატეგორიების მიხედვით. ერთ სვეტოვან დიაგრამაზე შეიძლება გამოვსახოთ რამოდენიმე მახასიათებლის შესაბამისი მონაცემების გრაფიკული წარმოდგენები.

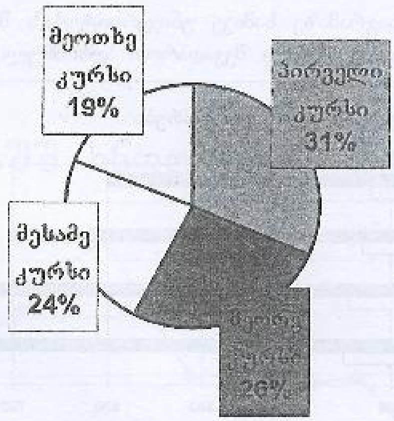
სვეტოვან დიაგრამას, რომლის სვეტები დალაგებულია მარცხნიდან მარჯვნივ სიმაღლეების კლების მიხედვით, **პარეტოს დიაგრამა** ეწოდება.

მონაცემების წრეზე გრაფიკულად წარმოდგენის საშუალებას **წრიული დიაგრამა** ეწოდება. ამ შემთხვევაში წრე იყოფა სექტორებად, რომელთა ზომა შესასწავლი მახასიათებლის თითოეული კატეგორიის შესაბამისი მნიშვნელობის პროპორციულია და ამავე დროს სექტორების ზომები ისეთებია, რომ ისინი სრულად ავსებენ წრეს.

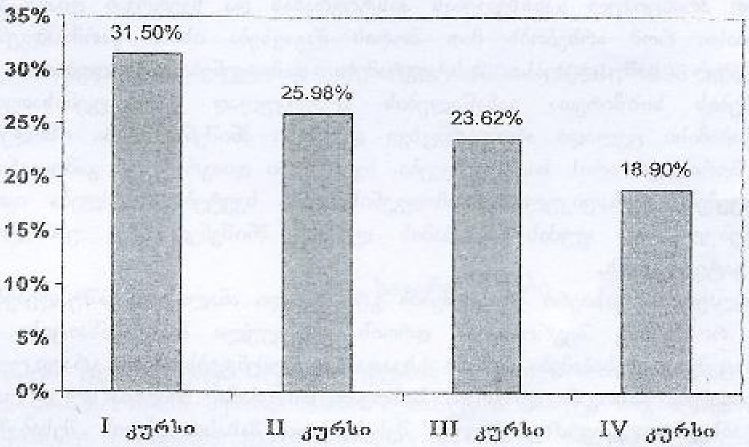
მაგალითი 10.5. უნივერსიტეტებში კურსების მიხედვით სტუდენტების რაოდენობების გასაანალიზებლად მოსახერხებელია წრიული დიაგრამის გამოყენება. სახელდობრ, თუ კურსების მიხედვით სტუდენტების რაოდენობებია

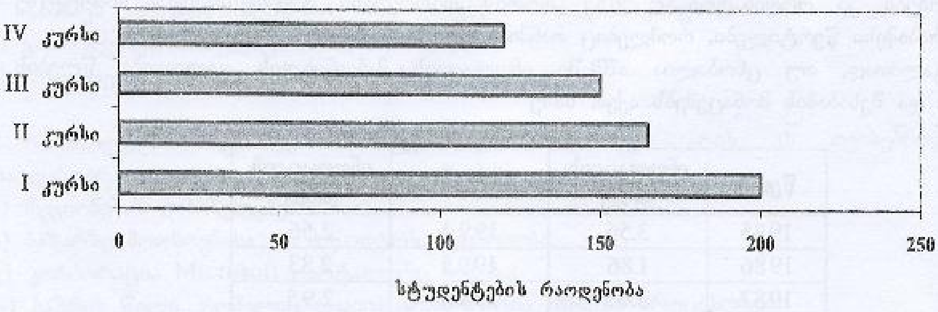
კურსი	სტუდენტების რაოდენობა	პროცენტული წილი
I	200	31.50
II	165	25.98
III	150	23.62
IV	120	18.90
სულ	635	100

მაშინ შესაბამის წრიულ დიაგრამას ექნება სახე:



აღნიშნული მონაცემები შეიძლება წარმოდგენილი იყოს სვეტოვანი დიაგრამის სახითაც

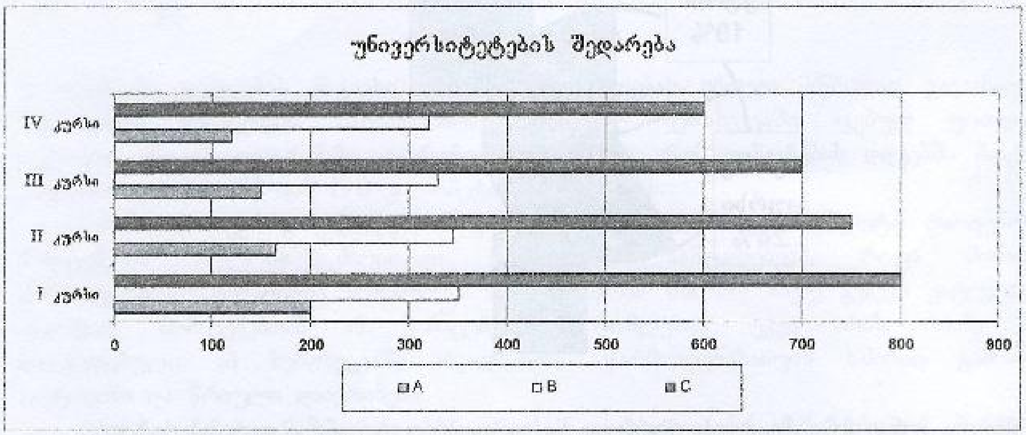




სვეტოვანი დიაგრამების საშუალებით შესაძლებელია რამოდენიმე უნივერსიტეტის შედარება. კერძოდ, თუ ცნობილია სამ უნივერსიტეტში სტუდენტების რაოდენობები კურსების მიხედვით

კურსი	უნივერსიტეტი A	უნივერსიტეტი B	უნივერსიტეტი C
I	200	350	800
II	165	345	750
III	150	330	700
IV	120	320	600

მაშინ ერთი და იგივე სვეტოვან დიაგრამაზე სამივე უნივერსიტეტის შესაბამისი მონაცემების გამოსახვით საშუალება გვეძლევა თვალსაჩინოდ შევადაროთ აღნიშნული უნივერსიტეტები



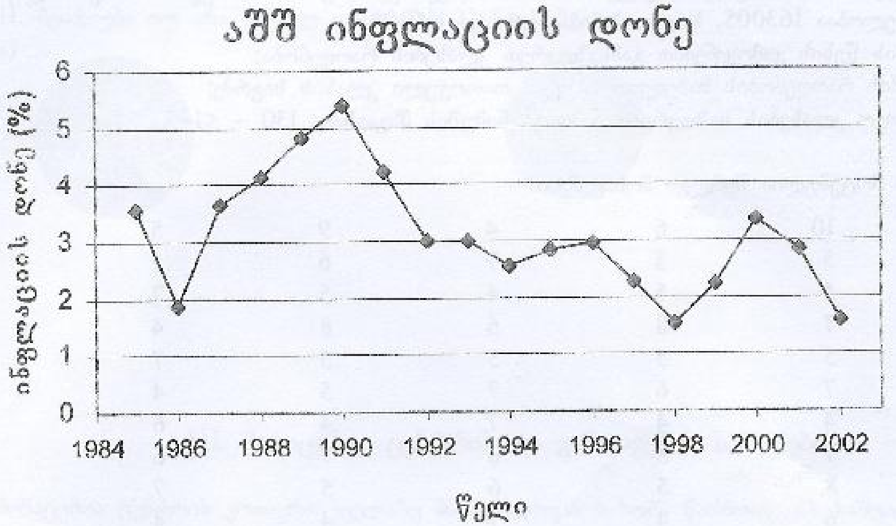
მოკლედ შევეხოთ პრინციპულ განსხვავებას ჰისტოგრამას და სვეტოვან დიაგრამას შორის. მიუხედავად იმისა, რომ არსებობს მათ შორის მსგავსება ისინი წარმოადგენენ თვისებრივად განსხვავებულ საშუალებებს. ჰისტოგრამები გამოიყენება ფარდობითი ან ინტერვალური მონაცემების სიხშირეთა განაწილების გრაფიკულად წარმოდგენისათვის. აბსცისათა ღერძის შესაბამისი ცვლადი არის რიცხვი და მისი მნიშვნელობები იზრდება. ჰისტოგრამის სვეტებს შორის არ არის სიცარიელეები. სვეტოვანი დიაგრამა კი გამოიყენება კატეგორიზებული მონაცემების გრაფიკული წარმოდგენისათვის. სვეტები შეიძლება იყოს ერთმანეთისაგან დაშორებული და ფუძის შესაბამის ღერძზე მნიშვნელობები უბრალოდ აღნიშნავენ სხვადასხვა კატეგორიებს.

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით მყისიერი მონაცემების გრაფიკული ანალიზის საშუალებებს, ანუ ისეთ მონაცემებს რომლებიც შეგროვილია დროის გარკვეული მომენტისათვის. იმ შემთხვევაში, როცა მონაცემები შეესაბამება დროის სხვადასხვა მომენტებს, მათი გრაფიკული წარმოდგენისათვის გამოიყენება ხაზოვანი დიაგრამა. ხაზოვანი დიაგრამა მიიღება თუ დროით ცვლადს გამოვსახავთ აბსცისათა ღერძზე, ხოლო შესასწავლი მახასიათებლის შესაბამის მნიშვნელობებს კი ორდინატთა ღერძზე. დროის თითოეული მომენტისათვის სიბრტყეზე ისმება შესაბამისი წერტილები, რომლებიც თანმიმდევრობით ერთდება მონაკვეთებით.

მაგალითად, თუ ცნობილია აშშ-ში ინფლაციის მაჩვენებლის ცვლილება წლების მიხედვით, და შესაბამის მონაცემებს აქვთ სახე

წელი	ინფლაციის დონე	წელი	ინფლაციის დონე
1985	3.56	1994	2.56
1986	1.86	1995	2.83
1987	3.65	1996	2.95
1988	4.14	1997	2.29
1989	4.82	1998	1.56
1990	5.40	1999	2.21
1991	4.21	2000	3.36
1992	3.01	2001	2.85
1993	2.99	2002	1.58

მაშინ ისინი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ხაზოვანი დიაგრამის სახით



სავარჯიშოები

1. სატყეო დეპარტამენტი ატარებს ქვეყნის შიგნით მოგზაურთა გამოკითხვას მგზავრობის გარემო პირობების შესახებ. ისინი შემთხვევით ირჩევენ მოგზაურებს და სთხოვენ მისცენ შეფასება 5 ბალიანი სკალით, სადაც 1 ნიშნავს ძალიან ცუდს; 2 ნიშნავს ცუდს; 3 ნიშნავს დამაკმაყოფილებელს; 4 – კარგს; 5 – ძალიან კარგს.

ა) განსაზღვრეთ პოპულაცია;

ა) მიუთითეთ შეგროვილი მონაცემების გაზომვის დონე.

2. თითოეული მოყვანილი მონაცემისათვის მიუთითეთ არის ის თვისებრივი თუ რაოდენობრივი. აგრეთვე განსაზღვრეთ გაზომვის დონე:

ა) რეგიონების დასახელებები;

ბ) ბაზარზე მოთხოვნისა და მიწოდების შეფარდება;

გ) კორპორაცია Microsoft კვარტალური მოგება;

დ) ბაზრის წილი, რომელიც უკავია კორპორაცია Intel-ის პროცესორებს.

3. მიუთითეთ ქვემომოყვანილი მონაცემებიდან რომელია დროითი მწკრივი და რომელია მყისიერი მონაცემი:

ა) გასულ წელს თქვენი შემოსავალი;

ბ) უკანასკნელი 52 კვირის განმავლობაში ამწყობი კონვეიერის მიერ ყოველკვირეულად გამოშვებული წუნდებული პროდუქციის რაოდენობა;

გ) ქალაქის მოსახლეობის რაოდენობა 1970 წელს;

დ) ბანკის კლიენტების ანგარიშების მოცულობები 1 დეკემბერს;

ე) სტუდენტების საშუალო მოსწრება 2006 წლის მეორე სემესტრში;

ვ) ყოველწლიურად ახალი სტუდენტების რაოდენობა 1970 წლიდან 2006 წლამდე.

4. მონაცემების მაქსიმალური მნიშვნელობაა 700, ხოლო მინიმალური კი 300. დაყავით მონაცემები 10 ტოლი სიგრძის კლასებად და მიუთითეთ თითოეული კლასის საზღვრები.

5. მონაცემთა სიმრავლე შედგება 200 დაკვირვებისაგან. მონაცემთა მაქსიმალური მნიშვნელობაა 16300$, ხოლო მინიმალური კი 11500$.
ა) სტეჯსის წესის გამოყენებით განსაზღვრეთ კლასების რაოდენობა;
ბ) კლასების რაოდენობის მიხედვით იპოვეთ თითოეული კლასის სიგრძე;
გ) მიუთითეთ კლასების საზღვრები შემდეგი ნიმუშის მსგავსად: 130 – <145.

6. ვთქვათ მოცემულია შემდეგი მონაცემები:

6	10	6	4	9	5
5	5	5	7	6	2
5	5	5	4	5	7
6	7	8	6	8	4
7	5	5	5	5	7
8	7	6	7	5	4
6	4	4	7	4	6
6	7	8	6	7	6
7	8	5	6	5	7
3	6	4	7	4	4

ა) სტეჯსის წესის გამოყენებით განსაზღვრეთ კლასების რაოდენობა და მიუთითეთ კლასების საზღვრები;
ბ) ააგეთ სიხშირეთა განაწილება;
გ) სიხშირეთა განაწილებაზე დაყრდნობით ააგეთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა;
დ) ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა განაწილება;
ე) ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა.

7. დაწესებულების თანამშრომელთა გამოკითხვის შემდეგ დადგინდა, რომ მათ აქვთ შემდეგი კაპიტალ-დაბანდებები: დანაზოგი ბანკში – 506 თანამშრომელს; ობლიგაცია – 86 თანამშრომელს; უძრავი ქონება – 169 თანამშრომელს; აქციები – 357 თანამშრომელს. იმისათვის, რომ თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ რომელი დაბანდების საშუალებაა ყველაზე პოპულარული ააგეთ მონაცემების შესაბამისი სვეტოვანი და წრიული დიაგრამა.
8. შემდეგი მონაცემებისათვის ააგეთ ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა:

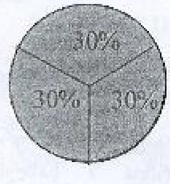
79	104	76	89	110
109	145	117	162	108
117	87	87	150	152
85	143	101	137	111
149	154	90	150	117
147	87	177	190	66
153	97	106	86	62

9. ააგეთ ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა შემდეგი მონაცემების ანალიზისათვის:

0.7	3.3	2.1	7.1
0.8	4.4	2.4	7.0
1.0	5.3	3.0	5.2
1.1	5.4	3.8	7.9
1.4	1.7	4.3	8.2
2.0	1.8	5.4	8.2
2.8	2.0	6.3	8.2

10. ამერიკაში ველოსიპედების გაყიდვების მონაცემებს აქვთ შემდეგ სახე:
1991 – 15.1 მილიონი; 1992 – 15.4 მილიონი; 1993 – 17.0 მილიონი; 1994 – 16.7 მილიონი; 1995 – 16.0 მილიონი; 1996 – 15.5 მილიონი. ააგეთ ხაზოვანი დიაგრამა.
11. შეიძლება თუ არა წრიულ დიაგრამას ჰქონდეს შემდეგი სახე

ა)



ბ)

§11. მონაცემთა ცენტრის და განლაგების საზომები

მონაცემთა ცენტრის ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვან საზომს წარმოადგენს საშუალო.

პოპულაციის საშუალო წარმოადგენს რაოდენობრივი მონაცემების შესაბამისი პოპულაციის ცენტრის საზომს, რომელიც პოპულაციის ელემენტების ჯამის მათ რაოდენობასთან შეფარდების ტოლია, ე.ი.

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N},$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_N$ – პოპულაციის განმსაზღვრელი მახასიათებლის მნიშვნელობებია, N კი წარმოადგენს პოპულაციაში მონაცემების რაოდენობას.

შერჩევითი საშუალო წარმოადგენს შერჩევის ელემენტების ჯამის შეფარდებას მათ რაოდენობასთან

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – შერჩევის ელემენტებია, n კი წარმოადგენს შერჩევის მოცულობას.

შევნიშნოთ, რომ როგორც პოპულაციის საშუალოსათვის ასევე შერჩევითი საშუალოსათვის საშუალოდან გადახრების ჯამი ნულის ტოლია, ე.ი. $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu) = 0$ პოპულაციის შემთხვევაში ან $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$ შერჩევის შემთხვევაში.

საშუალო შეიძლება ვიპოვოთ ინტერვალური და ფარდობითი მონაცემებისათვის, მაგრამ არა ნომინალური და რიგობრივი მონაცემებისათვის.

მაგალითი 11.1. ელექტროხელსაწყოებით მოვაჭრე ერთ-ერთი ფირმა აწვდის მოწყობილობებს და აქსესუარებს საავიაციო კომპანიებს. უკანასკნელი ერთი კვირის განმავლობაში საფრანგეთის ერთ-ერთმა ავიაკომპანიამ განახორციელა 10 შესყიდვა ელექტროხელსაწყოებით მოვაჭრე ფირმისაგან. გაყიდვების მენეჯერს აინტერესებს, რისი ტოლია გაყიდვების საშუალო მოცულობა.

აღნიშნული 10 შესყიდვა შეადგენს პოპულაციას, რომლის საშუალოს გამოსათვლელად უნდა განვიხილოთ შესყიდვების მოცულობები: 42000$, 23900$, 115600$, 13800$, 7900$, 41000$, 52900$, 76100$, 5800$, 33200$. შესყიდვების მოცულობები უნდა შევკრიბოთ და

გავყოთ მათ რაოდენობაზე, ე.ი. 10-ზე. აღნიშნულის შედეგად მივიღებთ პოპულაციის საშუალოს

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{42000 + 23900 + 115600 + 13800 + 7900 + 41000 + 52900 + 76100 + 5800 + 33200}{10} =$$

$$= \frac{412200}{10} = 41220.$$

ამრიგად, საფრანგეთის ავიაკომპანიის მიერ განხორციელებული შესყიდვების საშუალო ღირებულება შეადგენს 41220$.

მაგალითი 11.2. იტალიის ერთ-ერთ ქალაქში უძრავი ქონების სააგენტოს სურს დაადგინოს სახლების საშუალო ფასი. ამისათვის მან შემთხვევით შეარჩია 7 სახლი, რომელთა ფასები ტოლია: 144000$, 98000$, 204000$, 177000$, 154500$, 316000$, 100000$.

ვინაიდან უძრავი ქონების სააგენტომ არ განიხილა ყველა სახლის ფასი, ამიტომ მოყვანილი მონაცემები წარმოადგენენ შერჩევას, რომლის საშუალოს დასადგენად უნდა შევკრიბოთ აღნიშნული სიდიდეები და გავყოთ მათ რაოდენობაზე, ე.ი. 7-ზე:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{144000 + 98000 + 204000 + 177000 + 154500 + 316000 + 100000}{7} =$$

$$= \frac{1193500}{7} = 170500.$$

ე.ი. შერჩევითი საშუალო ფასი სახლზე ტოლია 170500$.

მონაცემთა სიმრავლის საშუალო წარმოადგენს სიმრავლის ცენტრის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საზომს, თუმცა მას გააჩნია ერთი ნაკლი: საშუალო მკვეთრად რეაგირებს ექსტრემალურ მნიშვნელობებზე. აღნიშნული ეფექტი ხშირად გვხვდება ბიზნესის სხვადასხვა ამოცანებში, ამიტომ მონაცემთა ცენტრის საზომად საშუალოს გამოყენებისას უნდა გვახსოვდეს, რომ ექსტრემალურმა მნიშვნელობებმა შეიძლება გამოიწვიონ საშუალოს გადახრა ჭეშმარიტი ცენტრიდან.

მაგალითი 11.3. ვთქვათ წინა მაგალითში განხილული ღირებულებების ნაცვლად იტალიაში ქალაქის სახლების ღირებულება შეადგენს: 144000$, 98000$, 204000$, 177000$, 154500$, 1000000$, 100000$, ანუ ერთ-ერთი სახლის ღირებულება 316000$ შეიცვალა 1000000$.

ისევე როგორც წინა მაგალითში, ამ შემთხვევაში ყველა მონაცემის შეკრებით და მათ რაოდენობაზე გაყოფით მივიღებთ სახლის საშუალო ფასს

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1877500}{7} \approx 268214.28$$

რაც მნიშვნელოვნად აღემატება წინა მონაცემებისათვის გამოთვლილ საშუალოს. ე.ი. ერთმა ექსტრემალურმა მონაცემმა არსებითად შეცვალა საშუალო.

მონაცემთა სიმრავლის საშუალოს გამოთვლისას შესაბამის ჯამში თითოეულ მონაცემს აქვს ერთი და იგივე წონა ანუ არც ერთს არ ენიჭება უპირატესობა დანარჩენებთან შედარებით. მაგრამ არის სიტუაციები, როცა აუცილებელია ჯამში მონაცემების შეყვანა სხვადასხვა წონით ანუ მონაცემთა ცენტრის დასადგენად საშუალოს ნაცვლად უნდა გამოვიყენოთ ე.წ. წონიანი საშუალო.

წონიანი საშუალო წარმოადგენს მონაცემების საშუალოს, რომელთაც გააჩნიათ სათანადო წონები. პოპულაციის წონიანი საშუალო ტოლია $\mu_W = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$, ხოლო შერჩევის

წონიანი საშუალო კი გამოითვლება ფორმულით $\overline{x}_W = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$, სადაც w_i — i-ური მონაცემის წონაა, x_i კი i-ური მონაცემია.

მაგალითი 11.4. ერთ-ერთ საადვოკატო ფირმას მიმართა სათხილამურო კურორტის გერმანელ ინსტრუქტორთა ჯგუფმა თხოვნით, რათა დაეცვათ მათი ინტერესები სასამართლოში. გერმანელებს მიაჩნდათ, რომ სათხილამურო კურორტის ოპერატორი კომპანია ახდენდა მათ დისკრიმინაციას და უხდიდა უფრო ნაკლებ ხელფასს ვიდრე ნორვეგიელ და ამერიკელ ინსტრუქტორებს. თავისი კლიენტის ინტერესების დასაცავად საადვოკატო ფირმამ გადაწყვიტა დაეთვალა ნორვეგიელი ინსტრუქტორების საშუალო წლიური ხელფასი. მაგრამ ვინაიდან ინსტრუქტორები მუშაობდნენ დღეების სხვადასხვა რაოდენობას სათხილამურო სეზონის მანძილზე, ამიტომ აუცილებელი იყო წონიანი საშუალოს გამოყენება.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ წონიანი საშუალო უნდა განვიხილოთ მონაცემები და დავადგინოთ თითოეული მონაცემის შესაბამისი წონა. ჩვენ შემთხვევაში, რადგან ინსტრუქტორები მუშაობდნენ დღეების სხვადასხვა რაოდენობას, ამიტომ წონას წარმოადგენს ინსტრუქტორების მიერ ნამუშევარი დღეების რაოდენობა. 7 ნორვეგიელი ინსტრუქტორის ხელფასები და ნამუშავერი დღეების რაოდენობები მოყვანილია შემდეგ ცხრილში:

ხელფასი	7800$	3900$	5300$	4000$	7200$	2300$	5100$
დღეები	50	30	40	25	60	15	50

ცხადია, რომ ინსტრუქტორების ხელფასების ჩვეულებრივი საშუალო ვერ დაახასიათებდა მათი ხელფასების პოპულაციის ცენტრს. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ წონიანი საშუალო ხელფასი, თითოეული ხელფასი უნდა გავამრავლოთ დღეების რაოდენობაზე, შევკრიბოთ მიღებული სიდიდეები და გავყოთ წონების ჯამზე, ე.ი. წონიანი საშუალო ტოლია

$$\mu_W = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} = \frac{50*7800+30*3900+40*5300+25*4000+60*7200+15*2300+50*5100}{50+30+40+25+60+15+50} =$$

$$= \frac{1540500}{270} \approx 5705.56$$

ამრიგად, ნორვეგიელი ინსტრუქტორების საშუალო ხელფასი მათ მიერ ნამუშევარი დღეების რაოდენობის გათვალისწინებით ტოლია 5705.56$.

მონაცემთა ცენტრის მეორე საზომს წარმოადგენს მედიანა, რომელიც წარმოადგენს მონაცემთა დალაგებული მწკრივის შუა მნიშვნელობას ანუ მასზე ნაკლებ მონაცემთა რაოდენობა მასზე დიდ მონაცემთა რაოდენობის ტოლია. პოპულაციის მედიანა აღინიშნება $\widetilde{\mu}$, ხოლო შერჩევის მედიანა კი M_d ან $\widetilde{x}$. ე.ი. თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ წარმოადგენს მონაცემთა დალაგებულ მწკრივს, მაშინ M_d შუა მონაცემის $x_{(n+1)/2}$ ტოლია, როცა მონაცემების რაოდენობა კენტია, ხოლო თუკი რაოდენობა ლუწია, მაშინ ორი შუა მონაცემის საშუალო არითმეტიკულის $(x_{n/2} + x_{(n/2)+1})/2$ ტოლია.

მედიანა შეიძლება ვიპოვოთ ინტერვალური და ფარდობითი მონაცემებისათვის და ზოგიერთ შემთხვევაში რიგობრივი მონაცემებისათვის.

მაგალითი 11.5. განვიხილოთ მეორე მაგალითში მოყვანილი იტალიის ქალაქის სახლების ფასები: 144000$, 98000$, 204000$, 177000$, 154500$, 316000$, 100000$.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ამ სიმრავლის მედიანა ჯერ უნდა ავაგოთ მონაცემთა დალაგებული მწკრივი, ე.ი. მონაცემები უნდა დავალაგოთ ზრდადობით

98000\$, 100000\$, 144000\$, 154500\$, 177000\$, 204000\$, 316000\$.

ვინაიდან გვაქვს შვიდი მონაცემი, ამიტომ რიგით მეოთხე მონაცემზე ნაკლები იქნება 3 მონაცემი და 3 მონაცემი იქნება მასზე მეტი. აქედან გამომდინარე განხილული სიმრავლის მედიანა ტოლია $M_d = 154500\$$.

შვიდი მონაცემის ნაცვლად, რომ გვქონოდა 8 მონაცემი (ანუ მონაცემების ლუწი რაოდენობა), მაგალითად,

144000\$, 98000\$, 204000\$, 177000\$, 154500\$, 316000\$, 100000\$, 150000\$,

მაშინ მედიანა რიგით დალაგებული მეოთხე და მეხუთე მონაცემის საშუალო არითმეტიკულის ტოლია. ამ შემთხვევაში დალაგებულ მწკრივს აქვს სახე

98000\$, 100000\$, 144000\$, 150000\$, 154500\$, 177000\$, 204000\$, 316000\$,

ხოლო მედიანა ტოლი იქნება (150000\$+154500\$)/2=152250\$.

საშუალოსაგან განსხვავებით მედიანაზე არ ახდენენ გავლენას განსაკუთრებული მონაცემები.

მაგალითი 11.6. მესამე მაგალითში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ერთ-ერთი სახლის ფასის 316000\$ შეცვლამ 1000000\$ გამოიწვია საშუალო ფასის მკვეთრი ზრდა. განვიხილოთ რა გავლენას ახდენს აღნიშნული ცვლილება მედიანაზე. ახალი ფასებია

144000\$, 98000\$, 204000\$, 177000\$, 154500\$, 1000000\$, 100000\$.

შესაბამის მონაცემთა დალაგებულ მწკრივს აქვს სახე

98000\$, 100000\$, 144000\$, 154500\$, 177000\$, 204000\$, 1000000\$.

მედიანა კი ტოლია $M_d = 154500\$$, რაც ემთხვევა მეხუთე მაგალითში გამოთვლილი მედიანის მნიშვნელობას, როცა განსაკუთრებული მნიშვნელობა არ იყო შეტანილი მონაცემებში.

მონაცემთა პოპულაციის ან შერჩევის საშუალოს და მედიანას უკავშირდება მათი **სიმეტრიულობის და ასიმეტრიულობის** ცნებები.

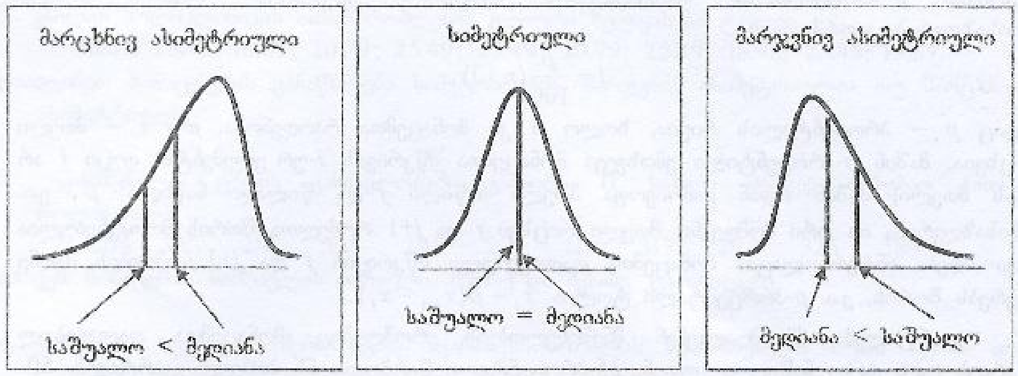
მონაცემთა განაწილებას ეწოდება **სიმეტრიული**, თუ მონაცემები თანაბრად არიან განლაგებული ცენტრის მიმართ. ამ ტიპის მონაცემებისათვის მედიანა ემთხვევა საშუალოს.

მონაცემთა განაწილებას ეწოდება **ასიმეტრიული**, თუ მონაცემები არ არიან თანაბრად განლაგებული ცენტრის მიმართ. ასიმეტრიული მონაცემებისათვის საშუალო და მედიანა ერთმანეთს არ ემთხვევა.

მონაცემთა განაწილებას ეწოდება **მარჯვნივ ასიმეტრიული** თუ მონაცემთა საშუალო მეტია მედიანაზე.

მონაცემთა განაწილებას ეწოდება **მარცხნივ ასიმეტრიული** თუ საშუალო მედიანაზე ნაკლებია.

გრაფიკულად მარცხნივ ასიმეტრიული, სიმეტრიული და მარჯვნივ ასიმეტრიული განაწილებები შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი სახით



მონაცემთა ცენტრის საზომებთან, საშუალოსთან და მედიანასთან, ერთად მონაცემთა ცენტრის დასახასიათებლად ზოგჯერ გამოიყენება მოდა.

მოდა წარმოადგენს მონაცემს, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება მონაცემთა სიმრავლეში. მონაცემთა სიმრავლეს შეიძლება ჰქონდეს ერთი მოდა ან ორი და უფრო მეტი მოდა. იმ შემთხვევაში, როცა ყველა მონაცემს აქვს ერთი და იგივე სიხშირე, მაშინ მონაცემთა სიმრავლეს მოდა არ გააჩნია.

მოდა შეიძლება ვიპოვოთ ნომინალური, რიგობრივი, ინტერვალური და ფარდობითი მონაცემებისათვის.

მაგალითი 11.7 რესტორნის მეპატრონემ გადაწყვიტა გააფართოვოს თავისი საქმიანობა და სურს რესტორნის დახურულ დარბაზს დაუმატოს მაგიდები რესტორნის მიმდებარე ბაღში. ამისათვის გადაწყდა დაედგინათ რამდენ კაცზე უნდა ყოფილიყო გათვლილი დასადგმელი მაგიდები, რომ მაქსიმალურად დაეკმაყოფილებინათ კლიენტების მოთხოვნილებები. ე.ი. რესტორნის მეპატრონეს აინტერესებდა მოდა ანუ ყველაზე ხშირად რამდენ ადამიანს სურს ერთად სადილობა.

აღნიშნული ამოცანის გადასაწყვეტად შემთხვევით შეარჩიეს კლიენტების 20 ჯგუფი, რომლებშიც ადამიანების რაოდენობები ტოლია

2, 4, 1, 2, 3, 2, 4, 2, 3, 6, 8, 4, 2, 1, 7, 4, 2, 4, 4, 3.

მოყვანილი მონაცემებიდან თითოეული მნიშვნელობისათვის განსაზღვრეს მისი სიხშირე ანუ ააგეს სიხშირეთა განაწილება

მნიშვნელობა	სიხშირე
1	2
2	6
3	3
4	6
5	0
6	1
7	1
8	1
სულ	20

აქედან გამომდინარე, მოყვანილ მონაცემებში ყველაზე ხშირად გვხვდება მნიშვნელობები 2 და 4. თითოეულის სიხშირე ტოლია 6. ამრიგად გვექნება ორი მოდა 2 და 4.

მონაცემთა დალაგებული მწკრივის **p რიგის პროცენტილი ანუ p-პროცენტილი** წარმოადგენს მნიშვნელობას, რომელიც სიმრავლეს ყოფს ორ ნაწილად ისე, რომ ამ მნიშვნელობაზე ნაკლებია მონაცემთა დაახლოებით p%, ხოლო მასზე მეტია მონაცემების დაახლოებით (100- p)%. 50-პროცენტილი წარმოადგენს მედიანას. მონაცემთა დალაგებულ

მწკრივში p-პროცენტილის მნიშვნელობის შესაბამისი ელემენტის რიგითი ნომერი განისაზღვრება ფორმულით

$$i = \frac{p}{100}(n+1),$$

სადაც p — პროცენტილის რიგია, ხოლო n კი მონაცემთა რაოდენობა. თუ i — მთელი რიცხვია, მაშინ p-პროცენტილი ემთხვევა მონაცემთა მწკრივის i-ურ ელემენტს. თუკი i არ არის მთელი, მაშინ i-დან გამოიყოფა მთელი ნაწილი j და წილადი ნაწილი β, ე.ი. განისაზღვრება ის ორი მომდევნო მთელი რიცხვი j და j+1 რომელთა შორის მოთავსებულია i და ხდება ინტერპოლაცია მონაცემთა დალაგებული მწკრივის j და j+1 ნომრების მქონე წევრებს შორის, ე.ი. p-პროცენტილი ტოლია $x_j + \beta(x_{j+1} - x_j)$.

კვარტილები წარმოადგენენ მნიშვნელობებს, რომლებიც მონაცემთა დალაგებულ მწკრივს ოთხ ტოლ ნაწილად ყოფენ. 25-პროცენტილი წარმოადგენს პირველ კვარტილს, 50-პროცენტილი მეორე კვარტილს და ის ემთხვევა მედიანას, ხოლო 75-პროცენტილი კი მესამე კვარტილს.

მაგალითი 11.8 ქალაქის ტაქსებით მომსახურების ბიზნესით დაკავებული ფირმა კლიენტებს გადასახადს ახდევინებდა დროის მიხედვით მიუხედავად მანძილისა, რომელიც იყო გასავლელი. ფირმის ხელმძღვანელობამ გადაწყვიტა შემოიღოს შეღავათები გარკვეულ მანძილებზე გადაადგილებისას. მათ განიხილეს შემთხვევით შერჩეული 30 მგზავრობის მანძილები

13.5	8.6	16.2	21.4	21.0	23.7	4.1	13.8	20.5	9.6
11.5	6.5	5.8	10.1	11.1	4.4	12.2	13.0	15.7	13.2
13.4	13.1	21.7	14.6	14.1	12.4	24.9	19.3	26.9	11.7

მოყვანილი მონაცემების 80 პროცენტილის მოსაძებნად მონაცემები დაალაგეს ზრდის მიხედვით

4.1	4.4	5.8	6.5	8.6	9.6	10.1	11.1	11.5	11.7
12.2	12.4	13.0	13.1	13.2	13.4	13.5	13.8	14.1	14.6
15.7	16.2	19.3	20.5	21.0	21.4	21.7	23.7	24.9	26.9

80-პროცენტილის ადგილმდებარეობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$i = \frac{p}{100}(n+1) = \frac{80}{100}(30+1) = 24.8.$$

ვინაიდან $i = 24.8$ არ არის მთელი რიცხვი, ამიტომ 80-პროცენტილი მიიღება ინტერპოლაციით. განიხილება სიდიდით 24-ე და 25-ე ელემენტები, ე.ი. $x_{24} = 20.5$ და $x_{25} = 21.0$, ხოლო 80-პროცენტილი კი ტოლი იქნება

20.5+0.80(21.0-20.5)=20.90.

მოყვანილ გაანგარიშებაზე დაყრდნობით ხელმძღვანელობამ გადაწყვიტა დაეწესებინა შეღავათები 20.9 კილომეტრზე მეტ მანძილზე გადაადგილების შემთხვევაში, რის შედეგად მათი ვარაუდით შეღავათით ისარგებლებდა კლიენტების დაახლოებით 20 პროცენტი.

სავარჯიშოები

1. მანქანების რაოდენობები, რომლებიც გაირეცხა სამრეცხაოში უკანასკნელი 8 დღის განმავლობაში შუადღის საათებში, ტოლია

   6 3 9 6 6 5 4 1

   იპოვეთ საშუალო, მედიანა და მოდა მოყვანილი შერჩევისათვის.

2. კბილის პოლიკლინიკის თანამშრომლების დღიური ხელფასები ტოლია

15.67; 23.45; 18.95; 20.79; 25.49; 25.49; 20.79; 25.49; 18.95; 23.45; 15.67.

დაადგინეთ მონაცემების განაწილება სიმეტრიულია, მარჯვნივ ასიმეტრიულია თუ მარცხნივ ასიმეტრიული.

3. უკანასკნელი კვირის განმავლობაში გაიყიდა 11 სახლი შემდეგ ფასებად (ათას დოლარებში)

264 305 287 325 298 271 112 317 293 325 289.

იპოვეთ მონაცემთა სიმრავლის პირველი, მეორე და მესამე კვარტილები.

4. ერთ-ერთ რეგიონში შემთხვევით შეარჩიეს ხორბლის მწარმოებელი ხუთი ფერმა და ჩაიწერეს მონაცემები დასამუშავებელი მიწის ფართობების და მოსავლის რაოდენობების შესახებ:

მოსავალი	15030	43400	10260	13200	89200
ფართობი	80	60	75	55	140

წონიანი საშუალოს გამოყენებით იპოვეთ ფერმების საშუალო მოსავალი.

5. შეგროვილია მონაცემები შემთხვევით შერჩეული სტუდენტების მიერ კვირის მანძილზე ინტერნეტის გამოყენების ხანგრძლივობების შესახებ:

5	4	3	10	8	5	2
6	9	6	9	7	6	12
9	11	10	9	7	7	6
9	9	3	7	11	5	11
7	6	4	10	7	3	5

იპოვეთ შერჩევითი საშუალო, მედიანა და მოდა.

6. ცხრილში მოყვანილი მონაცემები ასახავენ ქალაქის ერთ-ერთი წიგნის მაღაზიის მიერ შემთხვევით შერჩეული 45 დღის განმავლობაში ყოველდღიურად გაყიდული წიგნების რაოდენობებს:

17	18	19	20	16	15	17	22	16
16	19	21	15	14	17	21	19	15
19	15	15	19	18	22	13	14	17
18	21	15	13	10	13	20	12	15
21	15	16	16	14	19	15	16	13

იპოვეთ წიგნების რაოდენობა, რომელიც შეესაბამება 60 პროცენტილს?

7. ვთქვათ მოცემულია შემდეგი მონაცემები:

23	65	45	19	35	28	39	100	50	26	25	27
24	17	12	106	23	19	39	70	20	18	44	31

იპოვეთ 90-პროცენტილი.

8. გამყიდველების შესარჩევი კონკურსის ჩატარებისას კონკურსანტები ავსებენ სააპლიკაციო ფორმას, რომელშიც ათბალიან სისტემით უნდა შეაფასონ თავიანთი კომუნიკაბელურობა. განხილულია შემთხვევით შერჩეული 18 კონკურსანტის პასუხები აღნიშნულ კითხვაზე:

8	6	9	9	7	10	7	8	9
8	7	7	10	9	8	5	6	10

იპოვეთ ამ სიმრავლის პირველი, მეორე და მესამე კვარტილები.

9. შემთხვევით შერჩეული კაფე-ბარების მიერ დღის მანძილზე გაყიდული ჰამბურგერების რაოდენობებია:

142	97	105	76	90	83
123	115	92	94	73	104

მოყვანილი მონაცემებისათვის იპოვეთ საშუალო, მედიანა და მოდა.

10. სარეკლამო სააგენტოს თანამშრომლების საშუალო საათობრივი ანაზღაურება შეადგენს: 17.87\$, 19.95\$, 22.95\$, 18.74\$, 9.95\$, 11.22\$, 21.98\$, 14.52\$, 16.65\$, 14.98\$. იპოვეთ მონაცემთა სიმრავლის 37 პროცენტილი.

§12. მონაცემთა გაფანტულობის საზომები

წინა ლექციაზე განხილული მონაცემთა ცენტრის საზომები საშუალებას არ იძლევიან სრულად დავახასიათოთ მონაცემთა განლაგების თავისებურებები. მონაცემთა ორ სიმრავლეს შეიძლება ჰქონდეს ერთი და იგივე საშუალო და მედიანა მაგრამ მონაცემები არ იყოს ერთნაირად განლაგებული. მაგალითად, ვთქვათ მონაცემთა ერთ სიმრავლეს აქვს სახე: 9, 10, 11, 12, 12, 15, 15, ხოლო მეორე სიმრავლეს კი შემდეგი სახე: 1, 5, 12, 12, 16, 18, 20. მონაცემთა ორივე სიმრავლის საშუალო და მედიანა ტოლია 12, მაგრამ პირველი სიმრავლის მონაცემები აშკარად უფრო კონცენტრირებულია 12-ის მიდამოში ვიდრე მეორე სიმრავლის მონაცემები. აქედან გამომდინარე, მონაცემების განლაგების დასახასიათებლად აუცილებელია განვსაზღვროთ მონაცემების გაფანტულობის რიცხვითი მახასიათებლები.

გაბნევის დიაპაზონი წარმოადგენს მონაცემთა გაფანტულობის საზომს, რომელიც უდიდეს და უმცირეს მონაცემებს შორის სხვაობის ტოლია. მიუხედავად იმისა, რომ გაბნევის დიაპაზონის გამოთვლა მარტივია მას აქვს რამოდენიმე ნაკლი. სახელდობრ, მის გამოთვლაში მონაწილეობს მხოლოდ ორი უდიდესი და უმცირესი მონაცემი, ხოლო დანარჩენი მონაცემები მასზე არავითარ გავლენას არ ახდენენ. ამავე დროს, გაბნევის დიაპაზონზე დიდ გავლენას ახდენენ ამოვარდნილი მონაცემები. ამიტომ, გაბნევის დიაპაზონი წარმოადგენს მონაცემთა გაფანტულობის ერთ-ერთ ყველაზე სუსტ საზომს.

იმისათვის, რომ თავიდან იქნეს აცილებული ამოვარდნილი მონაცემების გავლენა გაბნევის დიაპაზონის ნაცვლად ითვლიან რიცხვით მახასიათებელს ამოვარდნილი მონაცემების გარეშე. **კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი** ახასიათებს მონაცემთა დალაგებულ მწკრივში კვარტილებს შორის მოთავსებული მონაცემების გაფანტულობას და მესამე და პირველ კვარტილებს შორის სხვაობის ტოლია

$$IQR=Q3-Q1,$$

სადაც Q3, Q1 წარმოადგენენ შესაბამისად მესამე და პირველ კვარტილებს. ცხადია, რომ გაბნევის დიაპაზონისაგან განსხვავებით კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონის გამოთვლისას ჩვენ არ ვიყენებთ უდიდის და უმცირეს მონაცემებს რაც საშუალებას იძლევა თავიდან ავიცილოთ ამოვარდნილი მონაცემების ზემოქმედება. მაგრამ მიუხედავად ამისა კვარტილთშორისი დიაპაზონიც წარმოადგენს გაფანტულობის სუსტ საზომს ვინაიდან მისი

გამოთვლისას გამოიყენება მხოლოდ ორი მონაცემი, რამაც შეიძლება გამოიწვიოს ღირებული ინფორმაციის დაკარგვა.

სტატისტიკაში გაფანტულობის ერთ-ერთ ყველაზე ფართოდ გავრცელებულ საზომს წარმოადგენს სტანდარტული გადახრა, რომელიც არის კვადრატული ფესვი დისპერსიიდან. **პოპულაციის დისპერსია** წარმოადგენს პოპულაციის საშუალოს მიმართ მონაცემთა გაფანტულობის საზომს, რომელიც მონაცემებიდან პოპულაციის საშუალომდე მანძილების კვადრატების საშუალოს ტოლია

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}$$

სადაც μ — პოპულაციის საშუალოა, N — პოპულაციის მოცულობა, ხოლო σ^2 კი აღნიშნულია პოპულაციის დისპერსია.

პოპულაციის გამოსათვლელად ზოგჯერ მოსახერხებელია გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულები

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2}{N}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2}{N} - \mu^2.$$

პოპულაციის სტანდარტული გადახრა წარმოადგენს კვადრატულ ფესვს პოპულაციის დისპერსიიდან, ე.ი.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}}.$$

მაგალითი 12.1 ვთქვათ პოპულაცია შედგება შემდეგი მონაცემებისაგან: 15\$, 25\$, 35\$, 20\$, 30\$. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ სტანდარტული გადახრა ჯერ უნდა ვიპოვოთ საშუალო

$$\mu = \frac{15+25+35+20+30}{5} = 25,$$

შემდეგ თითოეულ მონაცემს უნდა გამოვაკლოთ ნაპოვნი საშუალო, ავიყვანოთ მიღებული რიცხვები კვადრატში, შევკრიბოთ და გავყოთ მათ რაოდენობაზე (ე. ი. 5-ზე)

$$\sigma^2 = \frac{(15-25)^2+(25-25)^2+(35-25)^2+(20-25)^2+(30-25)^2}{5} = \frac{100+0+100+25+25}{5} = 50.$$

პოპულაციის სტანდარტული გადახრა ტოლია $\sigma = \sqrt{50} \approx 7.07\$$.

პოპულაციის დისპერსიის და სტანდარტული გადახრის მსგავსად მცირე მოდიფიკაციით გამოითვლება დისპერსია და სტანდარტული გადახრა შერჩევის შემთხვევაში.

შერჩევითი დისპერსია შერჩევის მონაცემებიდან შერჩევით საშუალომდე მანძილების კვადრატების საშუალოს ტოლია

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1},$$

სადაც n შერჩევის მოცულობაა, $\overline{x}$ — შერჩევითი საშუალოა, ხოლო s^2 კი აღნიშნულია შერჩევითი დისპერსია.

შერჩევითი დისპერსიის გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულები

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n-1} - \frac{n}{n-1}(\overline{x})^2.$$

შერჩევითი სტანდარტული გადახრა წარმოადგენს კვადრატულ ფესვს შერჩევითი დისპერსიიდან, ე.ი.

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

შევნიშნოთ, რომ პოპულაციის დისპერსიისაგან განსხვავებით შერჩევითი დისპერსიის გამოთვლისას მნიშვნელში გვაქვს **მონაცემთა რაოდენობას გამოკლებული ერთი**, რაც გამოწვეულია იმით, რომ თუ ჩვენ განვიხილავთ ამ სახით განსაზღვრულ დისპერსიას, მაშინ ყველა შესაძლო შერჩევისათვის გამოთვლილი დისპერსიების საშუალო დაემთხვევა პოპულაციის საშუალოს. თუკი მნიშვნელში $(n-1)$-ის ნაცვლად ავიღებდით n, მაშინ შერჩევითი დისპერსიების საშუალო იქნება უფრო მცირე ვიდრე პოპულაციის დისპერსია.

მაგალითი 12.2 ტაქსებით მომსახურების ფირმის მენეჯერმა შემთხვევით შეარჩია 10 ტაქსი და მათთვის დაითვალა ერთი დღის მანძილზე აეროპორტში მგზავრობების რაოდენობა. შეგროვილ მონაცემებს აქვთ შემდეგი სახე: I – 4; II – 7; III – 1; IV – 0; V – 5; VI – 0; VII – 3; VIII – 2; IX – 6; X – 2. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ შერჩევითი სტანდარტული გადახრა ჯერ ვპოულობთ შერჩევით საშუალოს

$$\bar{x} = \frac{4+7+1+0+5+0+3+2+6+2}{10} = 3$$

და მისი გამოყენებით შერჩევით დისპერსიას

$$s^2 = \frac{(4-3)^2+(7-3)^2+(1-3)^2+(0-3)^2+(5-3)^2+(0-3)^2+(3-3)^2+(2-3)^2+(6-3)^2+(2-3)^2}{10-1} =$$

$$= \frac{54}{9} = 6.$$

შერჩევითი სტანდარტული გადახრა ტოლი იქნება $s = \sqrt{6} \approx 2.45$. ე.ი. სტანდარტული გადახრა შეადგენს დაახლოებით 2.45 მგზავრობას.

შევნიშნოთ, რომ სტანდარტულ გადახრაზე, ისევე როგორც საშუალოზე, დიდ გავლენას ახდენს ამოვარდნილი მონაცემები და მისი მნიშვნელობა მით მეტია, რაც უფრო დიდია მონაცემების გაბნევა საშუალოს მიმართ. მაგალითად, თუ მონაცემები გაფანტულია და აქვთ სახე: 11, 12, 13, 16, 16, 17, 18, 21, მაშინ სტანდარტული გადახრა ტოლია ≈ 3.34. თუ მონაცემები კონცენტრირებულია საშუალოს გარშემო და აქვთ სახე: 14, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17, მაშინ სტანდარტული გადახრა ტოლია ≈ 0.93. თუკი მონაცემები კონცენტრირებულია ორი განსხვავებული წერტილის გარშემო და აქვთ სახე: 11, 11, 11, 12, 19, 20, 20, 20, მაშინ სტანდარტული გადახრა ტოლია ≈ 4.57.

სხვადასხვა ეკონომიკური ამოცანების შესწავლისას, კერძოდ, დაბანდების რისკის შეფასებისას ცალკე სტანდარტული გადახრის განხილვა არ იძლევა საშუალებას გავაკეთოთ სათანადო დასკვნები. რეალურად მნიშვნელოვანია მონაცემების გაფანტულობის სიდიდე საშუალოსთან შედარებით ანუ სტანდარტული გადახრის საშუალოსთან შეფარდების მნიშვნელობის განხილვა.

პოპულაციის ვარიაციის კოეფიციენტი წარმოადგენს პოპულაციის სტანდარტული გადახრის შეფარდებას პოპულაციის საშუალოსთან და გამოისახება პროცენტებში

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}100\%.$$

შერჩევითი ვარიაციის კოეფიციენტი წარმოადგენს შერჩევითი სტანდარტული გადახრის შეფარდებას შერჩევით საშუალოსთან და გამოისახება პროცენტებში

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}100\%.$$

მაგალითი 12.3 ვთქვათ თანხა უნდა დავაბანდოთ ორი A და B ტიპის აქციებიდან ერთ-ერთში. ცნობილია, რომ A ტიპის აქციების საშუალო ფასი გასულ წელს იყო $\bar{x} = 50\$$ და სტანდარტული გადახრა კი $s = 5\$$. B ტიპის აქციების საშუალო ფასი გასულ წელს იყო

$\bar{x} = 100\$$, ხოლო სტანდარტული გადახრა კი ტოლი იყო $s = 5\$$. A ტიპის აქციების ვარიაციის კოეფიციენტი ტოლია

$$CV_A = \frac{5}{50}100\% = 10\%,$$

ხოლო B ტიპის აქციების ვარიაციის კოეფიციენტი უდრის

$$CV_B = \frac{5}{100}100\% = 5\%.$$

აქედან გამომდინარე, უფრო საიმედოა თანხის დაბანდება B ტიპის აქციებში.

მონაცემების განლაგების და საშუალოს მიმართ კონცენტრაციის დახასიათებას მონაცემთა ნებისმიერი განაწილების შემთხვევაში იძლევა შემდეგი თეორემა.

ჩებიშევის თეორემა: პოპულაციის μ საშუალოდან არაუმეტეს k-ჯერ სტანდარტული გადახრის σ მანძილით დაშორებულ მონაცემთა ფარდობითი სიხშირე, ე.ი. $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ მონაკვეთში მოხვედრილ მონაცემთა რაოდენობის შეფარდება მონაცემთა მთელ N რაოდენობასთან, არანაკლებია ვიდრე $(1 - 1/k^2)$, სადაც $k \geq 1$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

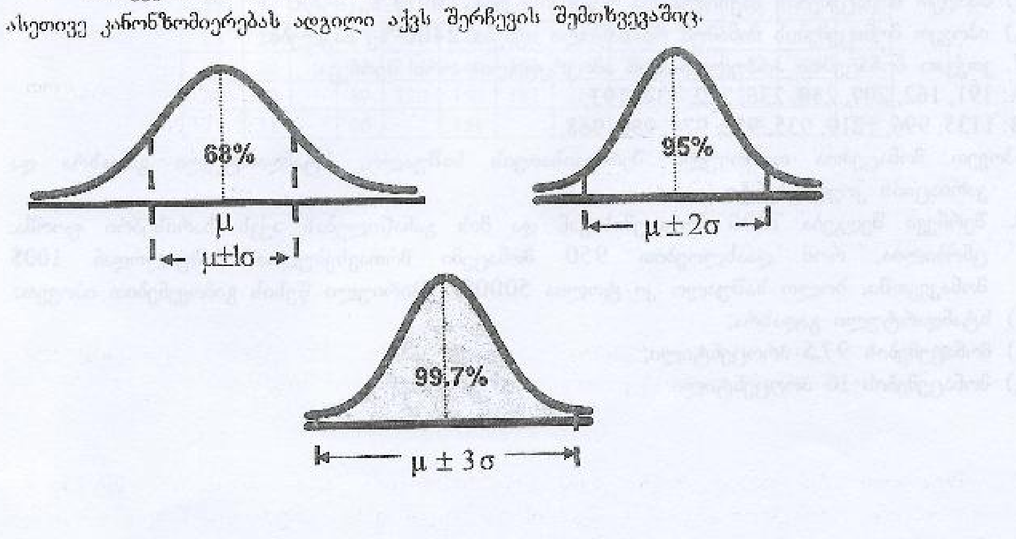
ჩებიშევის თეორემა სამართლიანია შერჩევის შემთხვევაშიც: შერჩევითი $\bar{x}$ საშუალოდან არაუმეტეს k-ჯერ შერჩევითი სტანდარტული გადახრის s მანძილით დაშორებულ მონაცემთა ფარდობითი სიხშირე, ე.ი. $[\bar{x} - ks, \bar{x} + ks]$ მონაკვეთში მოხვედრილ მონაცემთა რაოდენობის შეფარდება შერჩევაში მონაცემთა n რაოდენობასთან, არანაკლებია ვიდრე $1 - \frac{1}{k^2}$, სადაც $k \geq 1$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

ჩებიშევის თეორემის თანახმად საშუალოდან 2-ჯერ სტანდარტული გადახრის მიდამოში მოხვდება მონაცემთა 75%, ხოლო 3-ჯერ სტანდარტული გადახრის მიდამოში კი $\approx$89%.

მონაცემებისათვის, რომელთა სიხშირეთა განაწილების ჰისტოგრამას აქვს ზარისებური ფორმა, ე.ი. არის სიმეტრიული, არ არის ზემოთ ძალიან გაჭიმული და საშუალოდან ორივე მხარეს სიხშირეები სწრაფად ნულდება ანუ განაწილებას არ აქვს გრძელი ბოლოები, საშუალოდან სიმეტრიულ ინტერვალში მოხვედრილი მონაცემების რაოდენობის დასადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი ემპირიული წესი:

- მონაკვეთი $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ შეიცავს მონაცემთა დაახლოებით 68%;
- მონაკვეთი $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ შეიცავს მონაცემთა დაახლოებით 95%;
- მონაკვეთი $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ შეიცავს მონაცემთა დაახლოებით 99.7%.

ასეთივე კანონზომიერებას ადგილი აქვს შერჩევის შემთხვევაშიც.



სავარჯიშოები

1. პოპულაცია შედგება შემდეგი მონაცემებისაგან: 16, 23, 17, 24, 9, 11, 13, 15, 18, 21, 16, 23, 17, 16, 10, 14. იპოვეთ გაბნევის დიაპაზონი, დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.
2. პოპულაციიდან გამოყოფილია შერჩევა, რომელიც შედგება შემდეგი მონაცემებისაგან: 33, 42, 39, 17, 27, 32, 40, 37, 30, 35, 37, 19, 34, 37, 41, 35. იპოვეთ გაბნევის დიაპაზონი, კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი, შერჩევითი დისპერსია და შერჩევითი სტანდარტული გადახრა.
3. პოპულაცია შედგება ექვსი ოჯახიდან შეგროვილი მონაცემებისაგან, რომლებიც ახასიათებენ მათ მიერ წინა თვის განმავლობაში რესტორანში სადილის რაოდენობას: 4, 6, 9, 4, 5, 7.

ა) იპოვეთ ამ მონაცემების გაბნევის დიაპაზონი, დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.

ბ) შეიცვლება თუ არა ა) პუნქტში გამოთვლილი სიდიდეები, თუ ვიგულისხმებთ, რომ მოყვანილი მონაცემები შეესაბამებიან ოჯახების დიდი პოპულაციიდან შემთხვევით ამოკრეფილი ექვსი ოჯახის რესტორანში სადილობის ინტენსიურობას.

4. შემთხვევით შერჩეული 16 ავტომობილის სიჩქარეებია: 51, 43, 58, 67, 67, 69, 40, 52, 66, 44, 47, 41, 41, 45, 47, 41.

ა) იპოვეთ იმ მონაცემების რაოდენობა, რომლებიც მოხვდებიან საშუალოდან ერთი სტანდარტული გადახრის მიდამოში.

ბ) იპოვეთ იმ მონაცემების პროცენტული წილი მონაცემთა მთელ სიმრავლეში, რომლებიც მოთავსებულია საშუალოდან ორი სტანდარტული გადახრის მიდამოში.

გ) იპოვეთ იმ მონაცემების პროცენტული წილი მონაცემთა მთელ სიმრავლეში, რომლებიც მოთავსებულია საშუალოდან სამი სტანდარტული გადახრის მიდამოში.

5. ვთქვათ შერჩეულ მონაცემებს აქვთ შემდეგი სახე: 16, 23, 17, 24, 9, 11, 13, 15, 15, 23, 18, 16, 17.

ა) იპოვეთ შერჩევითი საშუალო და შერჩევითი სტანდარტული გადახრა.

ბ) იპოვეთ შერჩევითი ვარიაციის კოეფიციენტი.

გ) ჩებიშევის თეორემის გამოყენებით იპოვეთ ის ინტერვალი, რომელშიც ჩავარდება მონაცემების არანაკლებ 75%.

6. უცნობი განაწილების მქონე პოპულაციის საშუალო ტოლია 3000, ხოლო სტანდარტული გადახრა კი უდრის 200.

ა) იპოვეთ სულ მცირე მონაცემების რა წილი ჩავარდება 2600-დან 3400-მდე მონაკვეთში.

ბ) იპოვეთ მონაცემების მაქსიმუმ რა ნაწილი იქნება 3600-ზე მეტი.

გ) იპოვეთ მონაცემების მინიმუმ რა ნაწილი იქნება 2400-ზე ნაკლები.

7. ვთქვათ მონაცემთა პოპულაციიდან ამოკრეფილია ორი შერჩევა:

A: 191, 162, 207, 238, 236, 252, 134, 193;

B: 1135, 996, 1219, 935, 952, 974, 930, 968.

იპოვეთ მონაცემთა თითოეული შერჩევისათვის საშუალო, სტანდარტული გადახრა და ვარიაციის კოეფიციენტი.

8. შერჩევა შედგება 1000 მონაცემისაგან და მის განაწილებას აქვს ზარისებრი ფორმა. ცნობილია, რომ დაახლოებით 950 მონაცემი მოთავსებულია საშუალოდან 100$ მონაკვეთში, ხოლო საშუალო კი ტოლია 5000$. ემპირიული წესის გამოყენებით იპოვეთ:

ა) სტანდარტული გადახრა;

ბ) მონაცემების 97.5 პროცენტილი;

გ) მონაცემების 16 პროცენტილი.

ცხრილი 1

რიცხვი \ თვეები	იანვარი	თებერვალი	მარტი	აპრილი	მაისი	ივნისი	ივლისი	აგვისტო	სექტემბერი	ოქტომბერი	ნოემბერი	დეკემბერი
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

ცხრილი 2 $(1+R)^n$

n \ R	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
1	1,01000	1,02000	1,03000	1,04000	1,05000	1,06000	1,07000
2	1,02010	1,04040	1,06090	1,08160	1,10250	1,12360	1,14490
3	1,03030	1,06121	1,09273	1,12486	1,15763	1,19102	1,22504
4	1,04060	1,08243	1,12551	1,16986	1,21551	1,26248	1,31080
5	1,05101	1,10408	1,15927	1,21665	1,27628	1,33823	1,40255
6	1,06152	1,12616	1,19405	1,26532	1,34010	1,41852	1,50073
7	1,07214	1,14869	1,22987	1,31593	1,40710	1,50363	1,60578
8	1,08286	1,17166	1,26677	1,36857	1,47746	1,59385	1,71819
9	1,09369	1,19509	1,30477	1,42331	1,55133	1,68948	1,83846
10	1,10462	1,21899	1,34392	1,48024	1,62889	1,79085	1,96715
11	1,11567	1,24337	1,38423	1,53945	1,71034	1,89830	2,10485
12	1,12683	1,26824	1,42576	1,60103	1,79586	2,01220	2,25219
13	1,13809	1,29361	1,46853	1,66507	1,88565	2,13293	2,40985
14	1,14947	1,31948	1,51259	1,73168	1,97993	2,26090	2,57853
15	1,16097	1,34587	1,55797	1,80094	2,07893	2,39656	2,75903
16	1,17258	1,37279	1,60471	1,87298	2,18287	2,54035	2,95216
17	1,18430	1,40024	1,65285	1,94790	2,29202	2,69277	3,15882
18	1,19615	1,42825	1,70243	2,02582	2,40662	2,85434	3,37993
19	1,20811	1,45681	1,75351	2,10685	2,52695	3,02560	3,61653
20	1,22019	1,48595	1,80611	2,19112	2,65330	3,20714	3,86968
21	1,23239	1,51567	1,86029	2,27877	2,78596	3,39956	4,14056
22	1,24472	1,54598	1,91610	2,36992	2,92526	3,60354	4,43040
23	1,25716	1,57690	1,97359	2,46472	3,07152	3,81975	4,74053
24	1,26973	1,60844	2,03279	2,56330	3,22510	4,04893	5,07237
25	1,28243	1,64061	2,09378	2,66584	3,38635	4,29187	5,42743
26	1,29526	1,67342	2,15659	2,77247	3,55567	4,54938	5,80735
27	1,30821	1,70689	2,22129	2,88337	3,73346	4,82235	6,21387
28	1,32129	1,74102	2,28793	2,99870	3,92013	5,11169	6,64884
29	1,33450	1,77584	2,35657	3,11865	4,11614	5,41839	7,11426
30	1,34785	1,81136	2,42726	3,24340	4,32194	5,74349	7,61226
31	1,36133	1,84759	2,50008	3,37313	4,53804	6,08810	8,14511
32	1,37494	1,88454	2,57508	3,50806	4,76494	6,45339	8,71527
33	1,38869	1,92223	2,65234	3,64838	5,00319	6,84059	9,32534
34	1,40258	1,96068	2,73191	3,79432	5,25335	7,25103	9,97811
35	1,41660	1,99989	2,81386	3,94609	5,51602	7,68609	10,67658
36	1,43077	2,03989	2,89828	4,10393	5,79182	8,14725	11,42394
37	1,44508	2,08069	2,98523	4,26809	6,08141	8,63609	12,22362
38	1,45953	2,12230	3,07478	4,43881	6,38548	9,15425	13,07927
39	1,47412	2,16474	3,16703	4,61637	6,70475	9,70351	13,99482
40	1,48886	2,20804	3,26204	4,80102	7,03999	10,28572	14,97446
41	1,50375	2,25220	3,35990	4,99306	7,39199	10,90286	16,02267
42	1,51879	2,29724	3,46070	5,19278	7,76159	11,55703	17,14426
43	1,53398	2,34319	3,56452	5,40050	8,14967	12,25045	18,34435
44	1,54932	2,39005	3,67145	5,61652	8,55715	12,98548	19,62846
45	1,56481	2,43785	3,78160	5,84118	8,98501	13,76461	21,00245
46	1,58046	2,48661	3,89504	6,07482	9,43426	14,59049	22,47262
47	1,59626	2,53634	4,01190	6,31782	9,90597	15,46592	24,04571
48	1,61223	2,58707	4,13225	6,57053	10,40127	16,39387	25,72891
49	1,62835	2,63881	4,25622	6,83335	10,92133	17,37750	27,52993
50	1,64463	2,69159	4,38391	7,10668	11,46740	18,42015	29,45703
51	1,66108	2,74542	4,51542	7,39095	12,04077	19,52536	31,51902
52	1,67769	2,80033	4,65089	7,68659	12,64281	20,69689	33,72535

53	1,69447	2,85633	4,79041	7,99405	13,27495	21,93870	36,08612
54	1,71141	2,91346	4,93412	8,31381	13,93870	23,25502	38,61215
55	1,72852	2,97173	5,08215	8,64637	14,63563	24,65032	41,31500
56	1,74581	3,03117	5,23461	8,99222	15,36741	26,12934	44,20705
57	1,76327	3,09179	5,39165	9,35191	16,13578	27,69710	47,30155
58	1,78090	3,15362	5,55340	9,72599	16,94257	29,35893	50,61265
59	1,79871	3,21670	5,72000	10,11503	17,78970	31,12046	54,15554
60	1,81670	3,28103	5,89160	10,51963	18,67919	32,98769	57,94643
61	1,83486	3,34665	6,06835	10,94041	19,61315	34,96695	62,00268

ცხრილი 3 $(1+R)^n$

R / n	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12
1	1,08000	1,09000	1,10000	1,11000	1,12000
2	1,16640	1,18810	1,21000	1,23210	1,25440
3	1,25971	1,29503	1,33100	1,36763	1,40493
4	1,36049	1,41158	1,46410	1,51807	1,57352
5	1,46933	1,53862	1,61051	1,68506	1,76234
6	1,58687	1,67710	1,77156	1,87041	1,97382
7	1,71382	1,82804	1,94872	2,07616	2,21068
8	1,85093	1,99256	2,14359	2,30454	2,47596
9	1,99900	2,17189	2,35795	2,55804	2,77308
10	2,15892	2,36736	2,59374	2,83942	3,10585
11	2,33164	2,58043	2,85312	3,15176	3,47855
12	2,51817	2,81266	3,13843	3,49845	3,89598
13	2,71962	3,06580	3,45227	3,88328	4,36349
14	2,93719	3,34173	3,79750	4,31044	4,88711
15	3,17217	3,64248	4,17725	4,78459	5,47357
16	3,42594	3,97031	4,59497	5,31089	6,13039
17	3,70002	4,32763	5,05447	5,89509	6,86604
18	3,99602	4,71712	5,55992	6,54355	7,68997
19	4,31570	5,14166	6,11591	7,26334	8,61276
20	4,66096	5,60441	6,72750	8,06231	9,64629
21	5,03383	6,10881	7,40025	8,94917	10,80385
22	5,43654	6,65860	8,14027	9,93357	12,10031
23	5,87146	7,25787	8,95430	11,02627	13,55235
24	6,34118	7,91108	9,84973	12,23916	15,17863
25	6,84848	8,62308	10,83471	13,58546	17,00006
26	7,39635	9,39916	11,91818	15,07986	19,04007
27	7,98806	10,24508	13,10999	16,73865	21,32488
28	8,62711	11,16714	14,42099	18,57990	23,88387
29	9,31727	12,17218	15,86309	20,62369	26,74993
30	10,06266	13,26768	17,44940	22,89230	29,95992
31	10,86767	14,46177	19,19434	25,41045	33,55511
32	11,73708	15,76333	21,11378	28,20560	37,58173
33	12,67605	17,18203	23,22515	31,30821	42,09153
34	13,69013	18,72841	25,54767	34,75212	47,14252
35	14,78534	20,41397	28,10244	38,57485	52,79962
36	15,96817	22,25123	30,91268	42,81808	59,13557
37	17,24563	24,25384	34,00395	47,52807	66,23184
38	18,62528	26,43668	37,40434	52,75616	74,17966
39	20,11530	28,81598	41,14478	58,55934	83,08122
40	21,72452	31,40942	45,25926	65,00087	93,05097
41	23,46248	34,23627	49,78518	72,15096	104,21709

42	25,33948	37,31753	54,76370	80,08757	116,72314
43	27,36664	40,67611	60,24007	88,89720	130,72991
44	29,55597	44,33696	66,26408	98,67589	146,41750
45	31,92045	48,32729	72,89048	109,53024	163,98760
46	34,47409	52,67674	80,17953	121,57857	183,66612
47	37,23201	57,41765	88,19749	134,95221	205,70605
48	40,21057	62,58524	97,01723	149,79695	230,39078
49	43,42742	68,21791	106,71896	166,27462	258,03767
50	46,90161	74,35752	117,39085	184,56483	289,00219
51	50,65374	81,04970	129,12994	204,86696	323,68245
52	54,70604	88,34417	142,04293	227,40232	362,52435
53	59,08252	96,29514	156,24723	252,41658	406,02727
54	63,80913	104,96171	171,87195	280,18240	454,75054
55	68,91386	114,40826	189,05914	311,00247	509,32061
56	74,42696	124,70501	207,96506	345,21274	570,43908
57	80,38112	135,92846	228,76156	383,18614	638,89177
58	86,81161	148,16202	251,63772	425,33661	715,55878
59	93,75654	161,49660	276,80149	472,12364	801,42583
60	101,25706	176,03129	304,48164	524,05724	897,59693
61	109,35763	191,87411	334,92980	581,70354	1005,30857
62	118,10624	209,14278	368,42278	645,69093	1125,94559
63	127,55474	227,96563	405,26506	716,71693	1261,05906
64	137,75912	248,48253	445,79157	795,55579	1412,38615
65	148,77985	270,84596	490,37073	883,06693	1581,87249
66	160,68223	295,22210	539,40780	980,20429	1771,69719
67	173,53681	321,79209	593,34858	1088,02676	1984,30085