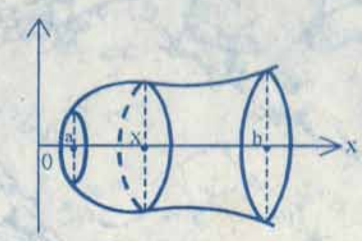
...მბერ დავითაძე

მათემატიკური ანალიზი

I ნაწილი



$$v = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელობის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ჯუმბერ დავითაძე

მათემატიკური ანალიზი

I ნაწილი

ფუნქცია-წარმოებული-ინტეგრალი

*რეკომენდებულია გამოსაცემად ბათუმის
შოთა რუსთაველის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის მეთოდსაბჭოს მიერ*

ქ. ბათუმი
2002 წელი

რედაქტორი:

ჯონდო გვაზავა - საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის წამყვანი მეცნიერ-თანამშრომელი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი.

რეცენზენტები:

1. *გურამ ყორყოლიანი* - საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის უფროსი მეცნიერ-მუშაკი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი.
2. *შოთა მახარაძე* - ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის კათედრის დოცენტი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი.

რედაქტორისაგან

ჯუმბერ დავითაძის დამხმარე სახელმძღავნელო „მათემატიკური ანალიზი, პირველი ნაწილი, ფუნქცია-წარმოებული-ინტეგრალი“ წარმოადგენს სახელმძღვანელოს მათემატიკური ანალიზის საფუძვლებში, რომელიც სასარგებლო იქნება უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკისა და ასევე ტექნიკური დარგების სტუდენტებისათვის. მასალის გადმოცემისას ავტორი მისდევს ტრადიციულ გზას - ნამდვილი რიცხვებისათვის სიმრავლეთა თეორია, ფუნქცია, მიმდევრობა, ფუნქციათა ზღვარი, უწყვეტი და წარმოებადი ფუნქციები, დიფერენციალური აღრიცხვა, განუსაზღვრელი და განსაზღვრული ინტეგრალები. ყოველივე ეს გადმოცემულია გამართული ქართულით, დაყოფილია რვა თავად და შეზავებულია მრავალი საინტერესო ნიუანსით, რაც ავტორმა მრავალი ათეული წლის მანძილზე გაწეული პედაგოგიური მოღვაწეობის პროცესში დაგროვილი გამოცდილების საფუძველზე შეიმუშავა. აღსანიშნავია, რომ ნაშრომში მომზადებულია ნიადაგი მრავალი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაზე გადასასვლელად.

მასალის უკეთ ათვისების მიზნით და მეტი თვალსაჩინოებისათვის მოტანილი მაგალითები და სავარჯიშოები ოპტიმალურად და გემოვნებით არის შერჩეული.

ყურადღების ღირსია მოკლე ისტორიული ექსკურსიც, სახელმძღვანელოს დასასრულს რომ აქვს დართული.

მიუხედავად იმისა, რომ ქართულ ენაზე მათემატიკური ანალიზის კურსი საკმაოდ მოგვეპოვება, სარეცენზიო ნაშრომის გამოცემა მაინც მიზანშეწონილად და აუცილებლადაც მიმაჩნია მრავალი მოტივით. მათ შორის თუნდაც იმით, რომ ადრე გამოცემული სახელმძღვნელოები ბიბლიოგრაფიული იშვიათობაა და სტუდენტთა უმრავლესობას მის შესაძენად ხელი არ მიუწვდება.

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

მათემატიკური ანალიზი (შემოკლებით მათანალიზი) უნივერსიტეტში მათემატიკის სპეციალობაზე ისწავლება ოთხი სემესტრის, ხოლო ფიზიკის სპეციალობაზე სამი სემესტრის განმავლობაში. ეს საგანი ერთ-ერთი ძირითადი შემადგენელი ნაწილია უმაღლესი მათემატიკისა, რომელიც ისწავლება უნივერსიტეტისა და სხვა უმაღლესი სასწავლებლების სხვადასხვა სპეციალობებზე.

მათემატიკურ ანალიზში შეისწავლება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ერთი და მრავალი ცვლადების ფუნქციები, მათი დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, მწკრივები, ველის თეორიის ელემენტები და სხვა.

ამ საგანს დიდი გამოყენება აქვს გამოთვლით ტექნიკაში, ინფორმატიკაში, ალბათობის თეორიაში, ფუნქციათა თეორიაში, ფუნქციონალურ ანალიზში, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში, დიფერენციალურ და ინტეგრალურ განტოლებებში, მათემატიკური ფიზიკის განტოლებებში და სხვა. ყველა ჩამოთვლილი საგანი საუნივერსიტეტოა.

მათემატიკური ანალიზი ძირითადად შეიქმნა XVII-XVIII საუკუნეებში მას შემდეგ, რაც ამ საგანში სერიოზული მეცნიერული ნაშრომები შექმნეს დიდმა კორიფეებმა (მათ გვარებს თანდათანობით გავეცნობით).

დიდი ფიზიკოსები ნიუტონი, ჰიუგენსი, პასკალი და მრავალი სხვა ფიზიკის კანონების შესწავლისას იყენებდნენ მათემატიკური ანალიზის მეთოდებს.

ამ საგანს ადრე უწოდებდნენ „უსასრულოდ მცირეთა ანალიზს“. სიტყვა „Analysis“ ნიშნავს გამოკვლევას, დაშლას, დანაწევრებას. ამ

საგნის არსში სტუდენტები თანდათანობით ჩაწვდებიან სწავლის პერიოდში.

მათემატიკური ანალიზის როლზე და მის ამოცანებზე ნათელ წარმოდგენას იძლევა დიდი ფრანგი მათემატიკოსის ჟან ბატისტ ჟოზეფ ფურიეს (1768-1830) აზრი.

„მათემატიკური ანალიზი ადამიანის გონების ის განსაკუთრებული გამოვლინებაა, წუთისოფელს რომ გვიხანძლივებს და ამძაფრებს ჩვენს შეგრძნებას. არსებითად მნიშვნელოვანია, რომ მათემატიკური ანალიზი მრავალფეროვან მოვლენათა ახსნის ერთსა და იმავე გზას მიჰყვება, გვაძლევს მას ერთიანი ენით თითქოს იმისათვის, რომ წარმოაჩინოს სამყაროს აგებულების მთლიანობა და სისადავე და კიდევ ერთხელ დაგვანახოს ბუნების ჭეშმარიტი კანონების მარადიულობა“.

თავი I

ნამდვილი რიცხვი

1. სიმბოლიკა, რომელიც გამოიყენება მათანალიზში

მათემატიკურ ანალიზში ისე, როგორც სხვა საგნებში, ფართოდ გამოიყენება სიმბოლოები, ლათინური ანბანი Aa, Bb, Cc, Dd,..., Uu, Vv, Ww, Xx, Yy, Zz, ბერძნული ალფავიტი α, β, γ, δ, Δ, ε, μ, ν, ω, ... ξ, η, ζ. მათემატიკაში გამოიყენება ისეთი სიმბოლოებიც, რომლებიც იხმარება ერთი, ან რამდენიმე სიტყვის ნაცვლად. ასეთებია:

$\forall$ - ნებისმიერი, ყველა, ყოველი, როგორიც გინდ იყოს (ზოგადობის ქვანტორი, ე.წ. ლოგიკური ოპერატორი),

$\exists$ - არსებობს, არსებობს ისეთი, მოიძებნება (არსებობის ქვანტორი),

$\Rightarrow$ - გამომდინარეობს, მაშინ, $\Leftrightarrow$ - ეკვივალენტურია, იგივეა რაც, ტოლფასია, $\to$ - მიისწრაფვის, $\equiv$ - იგივურია, $\in$, $\ni$ - მიეკუთვნება, ეკუთვნის, შედის, $\subset$, $\supset$ - ნაწილია, შედის, ქვესიმავლეა (ჩართვის სიმბოლოები), $\bigcup$ - გაერთიანება, ანუ ჯამი, $\bigcap$ - გადაკვეთა, თანაკვეთა, $\setminus$, $-$ - სხვაობა, კავშირი Λ - და, კავშირი V- ან, ∞ - უსასრულობა და მრავალი სხვა.

ჩანაწერი

„თუ $\forall\varepsilon \in R^{+}$ – თვის $\exists m \in N$, $\forall n > m : |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$"

სიტყვიერად ასე გამოითქმება,

„თუ ნებისმიერი ეპსილონ დადებითი რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი m, რომ როცა $\forall n > m$, სრულდება უტოლობა $|a_n - a| < \varepsilon$, მაშინ ეს გამონათქვამი ტოლფასია იმისა, რომ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a."$$

2. სიმრავლეების შესახებ

სიმრავლე არ განიმარტება, იგი პირველადი ცნებაა. მასზე შეიძლება ვიქონიოთ წარმოდგენა, ან დავახასიათოთ მასში შემავალი ელემენტებით. ჩვენ ძირითადად საქმე გვექნება რიცხვთა და ფუნქციათა სიმრავლეებთან. სიმრავლეებს აღნიშნავენ ლათინური დიდი ასოებით A, B, C, D,..., ხოლო მათ ელემენტებს - პატარა ასოებით - a, b, c, d,...,; $a \in A$, ანუ $A \ni a$ ნიშნავს, რომ a ეკუთვნის A -ს. $b \overline{\in} A$, ანუ $b \notin A$ ნიშნავს, რომ b არ მიეკუთვნება A -ს. $A \subset B$, ანუ $B \supset A$ ნიშნავს, რომ A ქვესიმრავლეა B -სი. ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა. სიმრავლეებზე განიხილება შემდეგი მოქმედებანი: გაერთიანება ანუ ჯამი, გადაკვეთა ანუ თანაკვეთა, სხვაობა და სიმეტრიული სხვაობა.

$A \bigcup B = C$, ე. ი. $(a \in C) \Leftrightarrow (a \in A) V (a \in B)$;

$A \bigcap B = C$, ე. ი. $(a \in C) \Leftrightarrow (a \in A) \Lambda (a \in B)$;

$A - B = C$, ე. ი. $(a \in C) \Leftrightarrow (a \in A) \Lambda (a \overline{\in} B)$.

ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს და ჩართვებს:

1. $A \subset A$;
2. $A \bigcup B = B \bigcup A$;
3. $A \bigcap B = B \bigcap A$;
4. $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$;
5. $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$;
6. $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$;
7. $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (B \bigcup C)$;
8. თუ $A - B = C$, მაშინ შეიძლება არ შესრულდეს ტოლობა
$$A = B \bigcup C.$$
9. თუ $(A \subset B) \Lambda (B \subset A)$, მაშინ $A = B$.

შევნიშნოთ, რომ 2, 3, 4, 5, 6 თვისებების ანალოგიური

სრულდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, ხოლო მე -7 თვისების ანალოგიური არ სრულდება. მე-6 თვისებიდან მიიღება მე-7, თუ სიმბოლოს $\cup$- ს შევცვლით $\cap$ - ით, ხოლო $\cap$ -ს შეცვლით $\cup$-ით და პირიქით.

3. რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების ათწილადური წარმოდგენა

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა $N=\{1, 2, ..., n, ...\}$, მთელ რიცხვთა სიმრავლეა $Z=\{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$. $\frac{m}{n}$ სახის რიცხვს, სადაც n ნატურალურია, ხოლო m-მთელი, რაციონალური რიცხვი ეწოდება. ყოველი რაციონალური რიცხვი წარმოიდგინება უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით და პირიქით. ასეთ წარმოდგენაში ციფრს, ან ციფრებს, რომლებიც მეორდება უსასრულოდ, პერიოდი ჰქვია. მაგალითად, $\frac{1}{2}=0{,}5=0{,}5000..=0{,}5(0)$. შევთანხმდეთ და პერიოდში ნული არ დავწეროთ; $\frac{2}{3}=0{,}66...=0,(6)$; $\frac{5}{12}=0{,}41666...=0{,}41(6)$, სიმოკლისათვის პერიოდი ფრჩხილებში იწერება. ამრიგად, $\frac{m}{n}$ წილადი რომ გადავაქციოთ ათწილადად საჭიროა მრიცხველი გავყოთ მნიშვნელზე.

როგორ გადავაქციოთ ათწილადი წილადად? თუ ათწილადი სასრულია, მაშინ იგი ისე ჩავწეროთ, როგორც ვკითხულობთ; მაგ, $3.5=3\frac{5}{10}=3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$; $-4{,}125=-4\frac{125}{1000}=-4\frac{1}{8}=\frac{-33}{8}$.

თუ ათწილადში პერიოდი იწყება მძიმის შემდეგ, მაშინ პერიოდში მოთავსებული რიცხვი დავწეროთ მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელად დავწეროთ იმდენი 9-ნი, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში; მაგ,

$4,(5)=4\frac{5}{9}$; $7,(23)=7\frac{23}{99}$; $0,(1973)=\frac{1973}{9999}$ და ა.შ. თუ პერიოდულ ათწილადში მძიმესა და პერიოდს შორის ციფრებია, მაშინ ასეთი პერიოდული ათწილადი არის წილადი, რომლის მრიცხველია მეორე პერიოდამდე დაწერილ რიცხვსა და პირველ პერიოდამდე დაწერილ რიცხვს შორის სხვაობა, ხოლო მნიშვნელი შეიცავს იმდენ 9-ს, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში და მას მიწერილი იმდენი ნული, რამდენი ციფრიცაა მძიმესა და პერიოდს შორის (მთელი გადადის მთელად); მაგ, $0{,}58(3)=\frac{583-58}{900}=\frac{525}{900}=\frac{7}{12}$. ეს წესი გამომდინარეობს უსასრულო კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულიდან. მართლაც

$$0{,}58(3)=0{,}583333\ ...=\frac{58}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10\,000}+\ ...=\frac{58}{100}+\frac{\frac{3}{1000}}{1-\frac{1}{10}}=$$

$$=\frac{58}{100}+\frac{3}{900}=\frac{58\cdot 9+3}{900}=\frac{58\cdot(10-1)+3}{900}=\frac{583-58}{900}=\frac{7}{12};$$

ანალოგიურად $24{,}476(3598)=24\frac{4763598-476}{9999000}=24\frac{2381561}{4999500}$.

ამრიგად, ყოველი რაციონალური რიცხვი ჩაიწერება სასრულ, ან უსასრულო პერიოდულ ათწილადად და პირიქით. მაშინ რა იქნება უსასრულო არაპერიოდული ათწილადები? *უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს, რომელიც შეუძლებელია იყოს რაციონალური რიცხვი, ირაციონალური რიცხვი ეწოდება.*

მაგ,

$$0,6464464446444446444446...;\quad 7,2822882228882222...$$

ირაციონალური რიცხვებია. ასევე ირაციონალური რიცხვებია[1] $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \pi, e$ და ა.შ. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს აღნიშნავენ I სიმბოლოთი. ირაციონალურ და რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეებს ერთად ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ჰქვია და აღინიშნება R-ით, ან R^1-ით. ცხადია $Q \subset R,\ I \subset R,\ Q \cup I = R,\ Q \cap I = \varnothing$.

4. ნამდვილი რიცხვი როგორც მიმდევრობა

ცნობილია ნამდვილი რიცხვის შესწავლის ორი თეორია აქსიომატური და კონსტრუქციული. პირველი მათგანით ნამდვილი რიცხვი არის ის ობიექტი, რომელიც გარკვეულ აქსიომებს აკმაყოფილებს. ჩვენ ავირჩევთ მეორე თეორიას. არსებობს ნამდვილი რიცხვის შესწავლის ვეიერშტრასის, დედეკინდის და კანტორის თეორიები. ნამდვილი რიცხვის განმარტება მიმდევრობით უფრო ბუნებრივია და ახლოსაა საშუალო სკოლის მათემატიკასთან, ვიდრე სხვა განმარტებები.

ნამდვილი რიცხვი ეწოდება მთელ რიცხვთა ისეთ მიმდევრობას, რომელიც არაა სტაციონარული მიმდევრობა პერიოდით 9, პირველი რიცხვი ნებისმიერი მთელი რიცხვია, ხოლო ყველა დანარჩენი $\theta = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *სიმრავლიდან აიღება.*

---

[1] ირაციონალური რიცხვები "რაოდენობის" თვალსაზრისით უფრო მეტია, ვიდრე რაციონალური რიცხვები.

მაშასადამე ნამდვილი რიცხვი განვსაზღვრეთ როგორც $N_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ სიმრავლის ისეთი f ასახვა მთელ რიცხვთა სიმრავლეში, რომელიც შემდეგ ორ პირობას აკმაყოფილებს

1) $\forall n \in N : f(n) \in \theta,\ f(0) \in Z$;

2) თუ $f(n)$ სტაციონარული მიმდევრობაა,[1] მაშინ $f(n) = 9$[2] არ შეიძლება შესრულდეს უსასრულო რაოდენობა n- სათვის.

ნამდვილი რიცხვი ასე დაიწერება $x = x_0, x_1 x_2 ...$, $x_0 \in Z,\ x_1, x_2, ... \in \theta$. შევთანხმდეთ და $x_1 x_2 ...$ არ გამოვყოთ მძიმეებით. ასეთნაირად განმარტებულ ნამდვილ რიცხვზე იტყვიან, რომ იგი ჩაწერილია ათწილადის სახით. რიცხვი 0 ასე ჩაიწერება $0 = 0,00...$, მთელი რიცხვი K-ასე $K = K,00...$ ნამდვილ რიცხვს $a = a_0, a_1 a_2\ 00...$ ასე ჩავწერეთ $a_0, a_1 a_2$ (ნულებს აღარ მივუწერთ); ნამდვილ რიცხვს $a_0, a_1 a_2 ... a_m a'_1 a'_2 ... a'_n a'_1 a'_2 ... a'_n ...$ მოკლედ ასე ჩავწერთ $a = a_0, a_1 a_2 ... a_m (a'_1 a'_2 ... a'_n)$. *ფრჩხილებში მოთავსებულ რიცხვს, რომელიც უსასრულოდ მეორდება, პერიოდი ჰქვია.* ამრიგად, *ნამდვილი რიცხვი შეიძლება იყოს პერიოდული ათწილადი, რომელიც რაციონალური რიცხვია და არაპერიოდული ათწილადი, რომელსაც ირაციონალური რიცხვი ეწოდება.*

შევნიშნოთ, რომ საშუალო სკოლის მათემატიკის სახელმძღვანელოში მოცემულია წარმოდგენა ირაციონალურ რიცხვზე. დამტკიცებულია, რომ არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი უდრის 2-ს, ე.ი. $\sqrt{2}$, რომლის კვადრატი 2-ია, არაა

---

[1] მიმდევრობას ჰქვია სტაციონარული, თუ მისი წევრები ერთი და იგივეა. მაგ: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 5, 5, ...$

[2] თუ $f(n) = 9$, მაშინ 9-ის წინ ციფრი გაიზრდება ერთით, დანარჩენი ნულებია. მაგ: $3,4799... = 3,4800...$

რაციონალური რიცხვი. $\sqrt{2}$ არის იმ კვადრატის დიაგონალი, რომლის გვერდია ერთეული სიგრძის მონაკვეთი. ცხადია, არარაციონალური და მაშასადამე ირაციონალური რიცხვები იქნება $r\sqrt{2}, \forall r \in Q, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, e, \pi, \ldots$.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება R -ით. $R \setminus Q$ -ს ეწოდება ირაციონალურ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და აღინიშნება I სიმბოლოთი. ამ სიმრავლის ყოველ ელემენტს ჰქვია ირაციონალური რიცხვი.

ნამდვილი რიცხვის განმარტებაში უარყოფითი შეიძლება იყოს მთელი ნაწილი, წილადი ნაწილი დადებითია. $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$ ნამდვილი რიცხვის მოპირდაპირე იქნება $b = b_0, b_1 b_2 \ldots$, სადაც $b_0 = -(a_0 + 1)$, $b_1 = 9 - a_1$, $b_2 = 9 - a_2, \ldots$ რაციონალურ რიცხვს $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n 00 \ldots$ ჰქვია $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots$ ნამდვილი რიცხვის n- რი მიახლოება. თუ $*$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ რომელიმე არითმეტიკულ ოპერაციას, მაშინ მოქმედებანი ნამდვილ რიცხვებზე ასე განიმარტება

$$
\begin{aligned}
& a_0, a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots * b_0, b_1 b_2 \ldots b_n b_{n+1} \ldots = \\
& = \lim_{n \to \infty} (a_0, a_1 a_2 \ldots a_n 00 \ldots * b_0, b_1 b_2 \ldots b_n 00 \ldots),
\end{aligned}
$$

გაყოფის შემთხვევაში $b \neq 0$.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე მკვრივია: $\forall x \neq y, \exists c \in R : x < c < y$, როცა $x < y$.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე დალაგებულია: $\forall x, y, z$ -თვის ან $x = y$, ან $x < y$, ან $x > y$; თუ $x < y$ და $y < z$, მაშინ $x < z$. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის სხვა თვისებებს ქვემოთ მივუთითებთ.

5. ნამდვილი რიცხვი როგორც განკვეთის ელემენტი. ირაციონალური რიცხვის განმარტება

რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე გავყოთ ორ ქვესიმრავლედ A და B ქვესიმრავლეებად, რომლებსაც ვუწოდოთ კლასები, ისე რომ შესრულდეს შემდეგი ორი პირობა:

1. არც ერთი კლასი ცარიელი არაა, ყოველი რაციონალური რიცხვი ეკუთვნის ერთ და მხოლოდ ერთ კლასს, $A \cup B = Q$.

2. A კლასის ყოველი ელემენტი ნაკლებია B კლასის ნებისმიერ ელემენტზე.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ასეთ გაყოფას ეწოდება ამ სიმრავლის განკვეთა ანუ დედეკინდის განკვეთა. A -ს ეწოდება განკვეთის ქვედა კლასი, B -ს - განკვეთის ზედა კლასი. განკვეთა აღინიშნება $A|B$ სიმბოლოთი. მაგალითები:

1). A კლასში მოვათავსოთ რიცხვი 3 და მასზე ნაკლები ყველა რაციონალური რიცხვი. დანარჩენი რაციონალური რიცხვები მოვათავსოთ B კლასში. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ასეთი გაყოფა არის განკვეთა, რადგანაც სრულდება განკვეთის ორივე პირობა. A კლასში არის უდიდესი ელემენტი 3, B კლასში არ იქნება უმცირესი ელემენტი. მართლაც, ვთქვათ, B კლასში არის უმცირესი ელემენტი β. ცხადია $3 < \beta$. მაგრამ 3-სა და β-ს შორის არსებობს უამრავი რაციონალური რიცხვები[1], რომლებიც ჩვენი დაშვებით (რომ B კლასში უმცირესია β) არცერთ კლასში არ მოთავსდება, რაც შეუძლებელია; მაშასადამე B კლასში შეუძლებელია არსებობდეს უმცირესი რიცხვი.

---

[1] თუ $a \neq b$ და $a < b$, მაშინ $a < \frac{a+b}{2} < b \Rightarrow a$ და b -ს შორის უამრავი რიცხვებია.

2). B კლასში მოვათავსოთ 3 და მასზე მეტი რაციონალური რიცხვები, დანარჩენი რაციონალური რიცხვები მოვათავსოთ A კლასში. მივიღეთ $A|B$ განკვეთა. B კლასში უმცირესი ელემენტია 3. პირველი მაგალითის ანალოგიურად დამტკიცება, რომ A კლასში არ არსებობს უდიდესი ელემენტი.

3). A კლასში მოვათავსოთ ყველა უარყოფითი რაციონალური რიცხვი, 0 და ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატები ნაკლებია 2-ზე, დანარჩენი რაციონალური რიცხვები მოვათავსოთ B კლასში. მივიღეთ განკვეთა $A|B$. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ არც A კლასშია უდიდესი რიცხვი და არც B კლასში უმცირესი რიცხვი[1] (ეს განკვეთა განსაზღვრავს გამკვეთ ანუ გამმიჯნავ ობიექტს, კერძოდ $\sqrt{2}$-ს, რომელიც ირაციონალური რიცხვია). ამრიგად რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველი განკვეთა შეიძლება იყოს ორი გვარის:

I. ან ქვედა კლასშია უდიდესი რიცხვი და მაშასადამე ზედა კლასში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი, ან ზედა კლასშია უმცირესი რიცხვი და მაშასადამე ქვედა კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი (რიცხვი და ელემენტი გაიგივებულია).

II. არც ქვედა კლასშია უდიდესი რიცხვი და არც ზედა კლასში უმცირესი რიცხვი.

მეორე გვარის განკვეთას რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში შევუსაბამოთ გარკვეული ობიექტი, A და B კლასების გამმიჯნავი ობიექტი, რომელსაც ირაციონალური

---

[1] ამის მტკიცება იხილეთ რეკომენდირებულ ლიტერატურაში მაგ. № 1.

რიცხვი ეწოდება. ეს რიცხვი მეტია A კლასის ყოველ რიცხვზე და ნაკლებია B კლასის ნებისმიერ რიცხვზე.

ამრიგად, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველი განკვეთა განსაზღვრავს ან რაციონალურ რიცხვს, როგორც ეს მოცემულია პირველ და მეორე მაგალითში, ან ირაციონალურ რიცხვს, როგორც ამას ადასტურებს მესამე მაგალითი. ეს ფაქტი იმაზე მიუთითებს, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში გვაქვს ე.წ. "ხვრელები". ეს "ხვრელები" სწორედ ირაციონალური რიცხვებია. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება I სიმბოლოთი. რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებთა სიმრავლეების გაერთიანებას ჰქვია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და აღინიშნება R-ით, $R = Q \cup I$, $Q \cap I = \varnothing$. ნამდვილი რიცხვის ასეთნაირი განმარტება ეკუთვნის გამოჩენილ გერმანელ მათემატიკოსს დედეკინდს (1831 - 1916).

განკვეთის მეშვეობით შეიძლება განვმარტოთ მეტნაკლებობა და არითმეტიკული მოქმედებანი ნამდვილ რიცხვებზე (დაინტერესებულ პირებს შეუძლიათ ამ საკითხების გაცნობა რეკომენდირებულ ლიტერატურაში).

ახლა დავამტკიცოთ დედეკინდის თეორემა, რომელიც ცნობილია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობის დედეკინდის პრინციპის სახელწოდებით, ანუ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობის აქსიომის სახელწოდებით. *ყოველი განკვეთა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში პირველი გვარისაა: ან ქვედა კლასშია უდიდესი რიცხვი (და მაშასადამე ზედა კლასში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი), ან ზედა კლასშია უმცირესი რიცხვი (და მაშასადამე ქვედა კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი).*

დამტკიცება: ვთქვათ $x|y$ არის განკვეთა R-ში. A იყოს x-ში შემავალი ყველა რაციონალური რიცხვი, B იყოს y-ში შემავალი ყველა რაციონალური რიცხვი. $A|B$ არის განკვეთა

Q-ში. ამ განკვეთით განსაზღვრული რიცხვი იყოს α, რომელიც ეკუთვნის ან X-ს, ან Y-ს. თუ $\alpha \in X$, მაშინ იგი უდიდესია X-ში (Y-ში არ იქნება უმცირესი), ხოლო თუ $\alpha \in y$, მაშინ იგი უმცირესია Y-ში (X-ში არ იქნება უდიდესი). მართლაც, ვთქვათ $\alpha \in x$ და $\beta > \alpha$. მოვძებნოთ რაციონალური რიცხვი r, მოთავსებული α-სა და β-ს შორის $\alpha < r < \beta$ (ასეთი r რიცხვები უამრავია)[1]. ცხადია $r \in B$ და მაშასადამე $r \in Y$. რადგან $\beta > r$, ამიტომ $\beta \in Y$. ამრიგად α-ზე მეტი ყოველი რიცხვი ეკუთვნის Y-ს, ე.ი. α არის X კლასში უდიდესი რიცხვი. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ თუ $\alpha \in Y$, მაშინ α არის უმცირესი რიცხვი Y-ში. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ გამკვეთი α რიცხვი ახდენს ქვედა და ზედა კლასების გამიჯვნას. თუ α არ შედის არც A-ში და არც B-ში (ე.ი. იგი ირაციონალურია), მაშინ A-სა და B-ს შორის არსებობს სიცარიელე ანუ "ხვრელი". ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში კი ასეთი "ხვრელები" არ არსებობს. ამიტომ იტყვიან, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე უწყვეტი სიმრავლეა (ამ სიმრავლეში ჭეშმარიტია დედეკინდის თეორემა). რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არაა უწყვეტი. ამ თვისებით განსხვავდება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლისაგან.

---

[1] მაგ. ვთქვათ $\alpha = 3{,}4545545554\ldots, \beta = 3{,}4545545564555545555554\ldots$, ცხადია, $\alpha < \beta$. r რიცხვად გამოდგება, მაგალითად, $r = 3{,}4545545554(5)$.

6. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ძირითადი თვისებები (აქსიომები)

შევთანხმდეთ, ყოველთვის რომ არ მივუთითოთ, რიცხვების ქვეშ ვიგულისხმოთ ნამდვილი რიცხვები.

I. როგორიც გინდ იყოს a და b რიცხვები, არსებობს ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც ამ რიცხვების ჯამი ეწოდება და $a+b$ სიმბოლოთი აღინიშნება (ნებისმიერი ორი ნამდვილი რიცხვის ჯამი ნამდვილი რიცხვია).

II. $\forall a, b: a+b=b+a$ (შეკრების კომუტაციურობა).

III. $\forall a, b, c: (a+b)+c=a+(b+c)$ (შეკრების ასოციაციურობა)

IV. არსებობს ისეთი რიცხვი, რომელიც 0 სიმბოლოთი აღინიშნება, რომ $\forall a: a+0=a$. ამ სიმბოლოს ნული[1] ეწოდება.

V. როგორიც გინდ იყოს a, არსებობს მისთვის ისეთი რიცხვი, რომელსაც a-ს მოპირდაპირე ეწოდება და $-a$-თი აღინიშნება, რომ $a+(-a)=0$.

VI. როგორიც გინდ იყოს a და b რიცხვები, არსებობს ერთადერთი რიცხვი, რომელსაც ამ რიცხვების ნამრავლი ეწოდება და ab სიმბოლოთი აღინიშნება (ნებისმიერი ორი ნამდვილი რიცხვის ნამრავლი ნამდვილი რიცხვია).

VII. $\forall a, b: ab=ba$ (ნამრავლის კომუტაციურობა).

VIII. $\forall a, b, c: (ab)c=a(bc)$ (ნამრავლის ასოციაციურობა).

IX. $\forall a, b: a(b+c)=ab+ac$ (დისტრიბუციულობა).

X. არსებობს ისეთი რიცხვი, რომელსაც აღნიშნავენ 1-ით და რომელსაც ერთეული ჰქვია, რომ $1 \cdot a = a$.

---

[1] ნულს ნოლიც ჰქვია

XI. $1 \neq 0$.

XII. ყოველი ნულისაგან განსხვავებული a რიცხვისათვის, არსებობს ისეთი რიცხვი, რომელიც აღინიშნება a^{-1}-ით, რომ $aa^{-1}=1$. ამ რიცხვს a-ს შებრუნებული ეწოდება.

XIII. $\forall a, b: a=b$, ან $a<b$, ან $a>b$. ამასთან ამ სამი გამონათქვამიდან ერთი აუცილებლად ჭეშმარიტია და დანარჩენი ორი მცდარი.

XIV. $\forall a, b, c: (a<b \wedge b<c) \Rightarrow (a<c)$.

XV. $\forall a, b, c: (a<b) \Rightarrow (a+c<b+c)$.

XVI. $\forall a, b, c: (a<b \wedge c>0) \Rightarrow (ac<bc)$.

XVII. $\forall a: \exists n \in Z: a<n$ (არქიმედის აქსიომა).

XVIII. ყოველი განკვეთა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში პირველი გვარისაა (უწყვეტობის აქსიომა).

I-V აქსიომებს შეკრების აქსიომები ჰქვია. I აქსიომა ნიშნავს, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ჩაკეტილია შეკრების ოპერაციის მიმართ, ნაბისმიერი ორი ნამდვილი რიცხვის ჯამი ნამდვილი რიცხვია. ასევე VI აქსიომა ნიშნავს, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ჩაკეტილია გამრავლების ოპერაციის მიმართ. VI-XII აქსიომებს გამრავლების აქსიომები ჰქვია, XIII-XVI აქსიომებს ეწოდება დალაგების აქსიომები, XVII აქსიომა არქიმედის აქსიომაა. XVIII აქსიომას უწყვეტობის აქსიომა ჰქვია.

შევნიშნოთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში სრულდება I-XVII აქსიომები, ხოლო XVIII აქსიომა არ სრულდება. ამ აქსიომით განსხვავდება Q სიმრავლე R სიმრავლისაგან.

I-XVIII აქსიომებს განიხილავენ როგორც ნამდვილ რიცხვთა სისტემის აქსიომებს. ეს აქსიომები საწყისი გამონათქვამებია, რომელთა ლოგიკურ შედეგებს ვიკვლევთ შემდეგ. ჩვეულებრივ I-XVIII აქსიომებს შემოკლებით ასე განმარტავენ:

ნამდვლი რიცხვები ქმნიან არქიმედის სრულ (სავსე) დალაგებულ ველს.

ნამდვილი რიცხვის ზემოთ მოცემული წარმოდგენა ემყარება კონსტრუქციულ თეორიას. არსებობს მისი წარმოდგენის აქსიომატური თეორიაც. ამ თეორიის მიხედვით ნამდვილი რიცხვი შემოაქვთ აქსიომატურად. განიხილავენ ობიექტთა ისეთ სიმრავლეს, რომელშიც ჭეშმარიტია I-XVIII გამონათქვამები. ამ სიმრავლეს უწოდებენ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, ხოლო მის ელემენტს - ნამდვილ რიცხვს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. დაასახელეთ სიმრავლეები და მათი ქვესიმრავლეები.
2. შეადგინეთ სასრული სიმრავლის ქვესიმრავლეები. რამდენი ქვესიმრავლის შედგენა შეიძლება?
3. დაასახელეთ გეომეტრიული ფიგურების სიმრავლეები.
4. დაასახელეთ უსასრულო სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლეები.
5. გადააქციეთ ათწილადებად

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{10}, \frac{1}{100}, \frac{17}{20}, \frac{2}{7}, \frac{15}{12}, \frac{17}{11}, \frac{8}{15}, \ 4\frac{1}{3}, 5\frac{3}{16}, \frac{1}{60}, 1\frac{16}{27}, -5\frac{2}{21}, -\frac{17}{9}.$$

მიღებული ათწილადები გადააქციეთ წილადებად.

6. გადააქციეთ წილადებად 0,5; 0,5000; 0,00010013; $-0,375$; 5,868668666; 15,164(25); $-7,652(9873)$; 4,727227222722227222227...

7. როგორი სახის წილადები გადაიქცევა სასრულ ათწილადებად და პერიოდულ ათწილადებად? ასეთი გადაქცევა იქნება თუ არა დამოკიდებული მნიშვნელზე? მრიცხველზე?

8. უარყოფითი ათწილადები დაწერეთ ისე, რომ წილადი ნაწილები იყოს დადებითი. იპოვეთ მათი მოპირდაპირე რიცხვები.

9. დაასახელეთ უსასრულო არაპერიოდული ათწილადები და იპოვეთ მათი მიახლოებები.

10. იპოვეთ ათწილადი სახით მოცემული რაციონალური რიცხვების, რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების, ირაციონალური რიცხვების ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი, განაყოფი.

11. მოახდინეთ განკვეთა N, Z, Q, I და R სიმრავლეებში. რომელი გვარის განკვეთებს მიიღებთ? რა შემთხვევაში მიიღება განკვეთა, რომლის ქვედა კლასშია უდიდესი ელემენტი და ამავე დროს ზედა კლასში - უმცირესი?

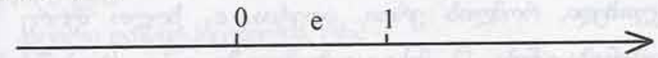
12. დაასახელეთ ორი რაციონალური რიცხვი, რაციონალური და ირაციონალური რიცხვი, ორი ირაციონალური რიცხვი და იპოვეთ მათ შორის მოთავსებული რაციონალური რიცხვები, ირაციონალური რიცხვები.

13. შეადარეთ ერთმანეთს $a = 5,343443444344443...$, $b = 5,3434434443(4)$, $c = 5,34344344434444534444434444443...$

14. როგორი რიცხვი მიიღება (რაციონალური თუ ირაციონალური), თუ შევასრულებთ არითმეტიკულ ოპერაციებს რაციონალურ რიცხვებზე, ირაციონალურ რიცხვებზე, ირაციონალურ და რაციონალურ რიცხვებზე?

7. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და რიცხვითი ღერძი

ავიღოთ რომელიმე წრფე და მასზე ნაბისმიერი წერტილები 0 და 1. 0 იყოს საწყისი წერტილი, ანუ სათავე. ამ წრფეზე ავირჩიოთ მიმართულება 0-დან 1-კენ. ამ მონაკვეთს ვუწოდოთ მასშტაბის ერთეული და აღვნიშნოთ e-თი. მისი სიგრძე მივიღოთ ერთეულად $|e| = 1$.



წრფეს, რომელზედაც არჩეულია მიმართულება და მასშტაბის ერთეული, რიცხვითი ღერძი ჰქვია.

რაციონალურ რიცხვს $\frac{a}{b}$ შევუსაბამოთ რიცხვით ღერძზე წერტილი შემდეგნაირად: ერთეული e დავყოთ b ტოლ ნაწილად. თითოეული ამ ნაწილითაგანი იქნება $\frac{1}{b}$. ეს უკანასკნელი a-ჯერ გადავზომოთ 0-ის მარჯვნივ, თუ $a > 0$ და ნულის მარცხნივ, თუ $a < 0$. ამ გზით ყოველ რაციონალურ რიცხვს რიცხვით ღერძზე შეესაბამება ერთადერთი წერტილი. ასეთ წეტილს ჰქვია რაციონალური წერტილი. ამ რიცხვს ვუწოდოთ წერტილის კოორდინატი. მაგალითად, თუ A წერტილს შეესაბამება 8, მაშინ ეს რიცხვი A-ს კოორდინატია და წერენ A(8). შემდეგში რაციონალურ რიცხვს გავაიგივებთ შესაბამის რაციონალურ წერტილთან რიცხვით ღერძზე. ამრიგად რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ეკვივალენტურია რიცხვითი ღერძის რაციონალურ წერტილთა სიმრავლისა[1].

[1] A და B სიმრავლეებს ეწოდება ეკვივალენტური, თუ ერთი სიმრავლის ყოველ ელემენტს რაიმე წესით შეესაბამება მეორე სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი და პირიქით; ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ $A \sim B$. მაგალითად $N \sim Z \sim Q$.

ირაციონალურ რიცხვებს რიცხვით ღერძზე შეესაბამებიან არარაციონალური წერტილები, რომლებსაც ირაციონალურ წერტილებს ვუწოდებთ. ირაციონალურ რიცხვებს $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ შევუსაბამოთ რიცხვით ღერძზე წერტილები შემდეგნაირად: სათავიდან გადავზომოთ იმ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა, რომლის კათეტებია e. მიღებული წერტილი იქნება $\sqrt{2}$. ახლა ავიღოთ მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ერთი კათეტია e, ხოლო მეორე $\sqrt{2}$. ჰიპოტენუზა იქნება $\sqrt{3}$. მისი გადაზომვით მივიღებთ $\sqrt{3}$-ის შესაბამის წერტილს. თუ ერთი კათეტი იქნება e, მეორე კათეტი იქნება 2, მაშინ ჰიპოტენუზა იქნება $\sqrt{5}$. ამ ჰიპოტენუზის გადაზომვით მივიღებთ $\sqrt{5}$ და ა.შ. ამრიგად ყოველ ნამდვილ რიცხვს რიცხვით ღერძზე შეესაბამება ერთადერთი წერტილი და პირიქით; ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და რიცხვითი ღერძის წერტილთა სიმრავლე ეკვივალენტური სიმრავლეებია. შემდეგში ნამდვილ რიცხვს და რიცხვითი ღერძის წერტილს გავაიგივებთ, თუ ეს წერტილი შეესაბამება მოცემულ ნამდვილ რიცხვს.

8. რიცხვის მოდული და მისი თვისებები. ბერნულის უტოლობა

ნამდვილი a რიცხვის მოდული, ანუ აბსოლუტური სიდიდე ეწოდება -a და a რიცხვებიდან არაუარყოფითს და იგი $|a|$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

მაშასადამე,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{თუ } a \geq 0 \\ -a, & \text{თუ } a < 0 \end{cases}.$$

განმარტების თანახმად

$|2{,}125783783\ldots| = 2{,}125783783\ldots$, $\quad |0{,}00\ldots| = 0{,}00\ldots$,

$|\overline{5},14300\ldots| = 4{,}85700\ldots$. ამრიგად, ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვის მოდული დადებითია, ნულის მოდული უდრის ნულს.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$|a| = |-a|; \qquad -|a| \leq a \leq |a|. \qquad (1)$$

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ ჯერ $a \geq 0$, მაშინ $|a| = a \Lambda |-a| = a$, ხოლო თუ $a < 0$, მაშინ $|a| = -a \Lambda |-a| = -a$. მოდული გეომეტრიულად გამოსახავს მანძილს რიცხვითი ღერძის სათავიდან ამ წერტილამდე. ჩამოვაყალიბოთ მოდულის თვისებები

1. $\forall a \in R \Lambda 0 < \forall \varepsilon \in R: \ |a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a < \varepsilon$

$$(\forall \varepsilon \leq 0, \quad \exists a \in R : |a| < \varepsilon; \quad \forall \varepsilon \in R^{-} \Lambda \forall a \in R : |a| > \varepsilon).$$

დამტკიცება. თუ $|a| < \varepsilon$ უტოლობას გავამრავლებთ -1-ზე, მივიღებთ $-|a| > -\varepsilon$. ახლა თუ მიღებულ უტოლობას და (1) უტოლობას გამოვიყენებთ, მივიღებთ:

$$-\varepsilon < -|a| \leq a \leq |a| < \varepsilon, \text{ ე. ი. } -\varepsilon < a < \varepsilon.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი უტოლობა

$\forall a \in R \Lambda 0 < \forall \varepsilon \in R : |a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $a^2 < \varepsilon^2 \Leftrightarrow |a| < \varepsilon$; $a^2 > \varepsilon^2 \Leftrightarrow |a| > \varepsilon$. ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი თვისებები

2. $\forall a \in R \Lambda 0 < \forall \varepsilon \in R: |a| > \varepsilon \Leftrightarrow a < -\varepsilon \vee a > \varepsilon,$

$|a| \geq \varepsilon \Leftrightarrow a \leq -\varepsilon \vee a \geq \varepsilon.$

3. $\forall a_1, a_2, \ldots a_n \in R: |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$

4. $\forall a, b \in R: |a-b| \geq |a| - |b| \wedge |a-b| \geq |b| - |a| \wedge |a-b| \geq ||a| - |b||.$

5. $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in R: |a_1 \cdot a_2 \ldots a_n| = |a_1||a_2|\ldots|a_n|.$

6. $\forall a, b \in R: \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \ b \neq 0.$

ახლა დავამტკიცოთ ბერნულის უტოლობა

$$\forall n \in N \Lambda -1 < \forall h \in R: \ (1+h)^n \geq 1 + nh.$$

გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი[1]. უტოლობა სამართლიანია, როცა $n = 1$. დავუშვათ იგი სამართლიანია $n = k$-თვის,

ე.ი. $$(1+h)^k \geq 1 + kh$$

და დავმტკიცოთ მისი სამართლიანობა $n = k+1$- თვის.

$$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) \geq (1+kh)(1+h) = 1 + (k+1)h + kh^2 \geq$$

$\geq 1 + (k+1)h$, რადგან $kh^2 \geq 0$. უტოლობა დამტკიცებულია.

---

[1] მათემატკური ინდუქციის მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს: თუ რაიმე დებულება ჭეშმარიტია $K_0 \geq 1$- თვის და იმ დაშვებიდან, რომ იგი ჭეშმარიტია $K > K_0$ - თვის, გამომდინარეობს მისი ჭეშმარიტება $K+1$- თვის, მაშინ ეს დებულება ჭეშმარიტია ნებისმიერი ნატურალური n - თვის. მაგ. დავამტკიცოთ, რომ არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრი $a_n = a_1 + (n-1)d$. $n = 1$- თვის $a_1 = a_1$. დავუშვათ, ფორმულა ჭეშმარიტია $n = K$ - თვის. ე.ი $a_K = a_1 + (K-1)d$, დავამტკიცოთ მისი ჭეშმარიტება $K+1$- თვის: $a_{K+1} = a_K + d = a_1 + (K-1)d + d = a_1 + Kd$, ე.ი. ფორმულა ჭეშმარიტია ნებისმიერი ნატურალური n – თვის.

9. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეები - რიცხვითი შუალედები. ნამდვილ რიცხვთა გაფართოებული სიმრავლე

ვთქვათ, a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია და $a < b$. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$]a, b[\equiv (a, b) \equiv \{x \in R : a < x < b\},$

$[a, b] \equiv \{x \in R : a \leq x \leq b\}, \ ]a, b] \equiv (a, b] \equiv \{x \in R : a < x \leq b\},$

$[a, b[\equiv [a, b) \equiv \{x \in R : a \leq x < b\}.$

$]a, b[$-ს ეწოდება ინტერვალი, $[a, b]$-ს - სეგმენტი, $]a, b]$ და $[a, b[$-ს - ნახევარინტერვალები, პირველს - ჩაკეტილი მარჯვნიდან, მეორეს - ჩაკეტილი მარცხნიდან. თუ მსჯელობაში არ აქვს მნიშვნელობა ლაპარაკია სეგმენტზე, ინტერვალზე, თუ ნახევარინტერვალზე, მაშინ ვიხმართ ტერმინს „შუალედი" და აღნიშვნას $<a, b>$. მაშასადამე

$<a, b> \equiv \ ]a, b[\vee [a, b] \vee [a, b[\vee \ ]a, b].$ $b - a$-ს ეწოდება $<a, b>$-ის სიგრძე.

ვთქვათ, a რაიმე ნამდვილი რიცხვია. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$]a, +\infty) \equiv \{x \in R : x > a\}; \ [a, +\infty) \equiv \{x \in R : x \geq a\}; \ (-\infty, a) \equiv$
$\equiv \{x \in R : x < a\};$

$(-\infty, a] \equiv \{x \in R : x \leq a\}, \ R^+ \equiv (0, +\infty), \ R_0{}^+ = [0, +\infty),$

$R^- \equiv (-\infty, 0) \ \ R_0^- \equiv (-\infty, 0]; \ R \equiv (-\infty, +\infty).$

მათ უსასრულო შუალედები ჰქვია.

a ნამდვილი რიცხვის მიდამო ეწოდება a რიცხვის შემცველ ყოველ ინტერვალს; $(a-\varepsilon, \ a+\varepsilon)$ ინტერვალს ეწოდება a წერტილის ε მიდამო და აღინიშნება $u(a, \varepsilon)$, ან $u_\varepsilon(a)$ სიმბოლოთი.

ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში გავაერთიანოთ ორი სიმბოლო $-\infty$ და $+\infty$ და აღვნიშნოთ $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$, რომელსაც ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა გაფართოებული სიმრავლე. ამასთან თვლიან, რომ

1) $\forall x \in R: -\infty < x,\ x < +\infty,\ -\infty < +\infty$;

2) $\forall x \in R: x + \infty = +\infty,\ x - \infty = -\infty,\ x(+\infty) = +\infty$, თუ $x > 0$ და

$$x(+\infty) = -\infty, \text{ თუ } x < 0;\ x(-\infty) = -\infty, \text{ თუ } x > 0 \text{ და}$$

$$x(-\infty) = +\infty, \text{ თუ } x < 0,\ x:(+\infty) = 0;\ x:(-\infty) = 0.$$

სავარჯიშოები

1. როგორ გაყოფთ მასშტაბის ერთეულს 2, 3, 4, 5,... ტოლ ნაწილებად? (გამოიყენეთ თალესის თეორემა).

2. რიცხვით ღერძზე იპოვეთ წერტილები: $\frac{2}{3}$; $\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$; $-4,(5)$; $\frac{\sqrt{2}}{3} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $3\sqrt{2}$; $4 + \sqrt{2}$; $5 \pm \sqrt{3}$; $0,(8) \times 3\sqrt{5}$.

3. რიცხვით ღერძზე ნებისმიერად აიღეთ წერტილები და იპოვეთ მათი კოორდინატები.

4. რა რიცხვი იქნება $\frac{|a|}{a}$, თუ $a \neq 0$; $a|a|$; $a \pm |a|$. რა ნიშნისაა $a|a||a||a|$?

5. იპოვეთ $|\overline{1},143143...|$, $|-8,515115111511115...|$. შეადარეთ

ერთმანეთს $|\overline{16},9945(8012476)|$ და $15,0054(1987523)$.

6. ამოხსენით განტოლებები და უტოლობები

$|3x - 9| = 3$; $|3x - 9| = 3$; $(2x - 7)^2 = 9$; $|x + 3| + 4|x - 1| = 8$,

$|x + 5| - |5 - x| - 3|x - 8| \le 30$; $|4 - \sqrt{x}| \ge -5$; $|4 - 3x| = -2$;

$|3x^2 + 5x - 2| = 3x^2 + 5x - 2$; $|\sin x| = \sin x + 2$.

7. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\forall n \in N: 0 \le a < \frac{1}{n}$, მაშინ $a = 0$.

8. დავუშვათ a რიცხვისათვის, მოიძებნება ისეთი $n \in N$ რომ $an \in Z$. როგორია a?

9. რა შემთხვევაში აქვს ადგილი ტოლობას

$|a + b| = |a| + |b|$; $|a - b| = |a| - |b|$?

10. ამოხსენით უტოლობები: $|x| > x + 5$; $|x^2 - 1| > 3$; $|1 - 5x| \le 1$;

$|x + 3| - |x - 1| < 2$; $|x| > |x + 1|$; $|x^2 + 3x - 4| \le 4 - 3x - x^2$;

$(x - 8)^2 \ge 16$; $|x + 3|x|| \le 4x$.

10. სიმრავლის შემოსაზღვრულობა. მისი ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრები

ნამდვილ რიცხვთა A ქვესიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული ქვემოდან, თუ მოიძებნება ისეთი რიცხვი α, რომ A-ს ყოველი ელემენტი არაა ნაკლები α-ზე, ე.ი. $\forall x \in A: x \ge \alpha$. ასეთ α-ს ეწოდება A-ს ქვედა საზღვარი, ანუ მინორანტი. ცხადია α-ზე

ნაკლები ყველა რიცხვი მინორანტია. თუ სიმრავლეს არ გააჩნია ქვედა საზღვარი, მაშინ მას ეწოდება ქვემოდან შემოუსაზღვრელი. მაგალითად სიმრავლე N შემოსაზღვრულია ქვემოდან $\forall n \in N : n \geq 1$. მის ქვედა საზღვრად გამოდგება $(-\infty, 1]$ ნახევარინტერვალის ნებისმიერი ელემენტი. მთელ, რაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეები შემოუსაზღვრელია ქვემოდან. სიმრავლის ქვემოდან შემოსაზღვრულობა გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ მოიძებნება ისეთი ინტერვალი $(\alpha, +\infty)$, რომელშიც შედის ეს სიმრავლე, ე.ი. $A \subset (\alpha, +\infty)$.

A სიმრავლეს ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ მოიძებნება ისეთი β რიცხვი, რომ A-ს ნებისმიერი ელემენტი არ აღემატება β-ს, ე.ი. $\forall x \in A : x \leq \beta$. ასეთ β-ს ეწოდება A-ს ზედა საზღვარი, ანუ მაჟორანტი. ცხადია β-ზე მეტი რიცხვი აგრეთვე მისი მაჟორანტია.

თუ სიმრავლეს არ გააჩნია ზედა საზღვარი, მაშინ მას ზემოდან შემოუსაზღვრელი სიმრავლე ჰქვია.

მაგალითად, უარყოფით რიცხვთა სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოდან, რადგან მისი არცერთი ელემენტი არ აღემატება დადებით რიცხვს. N, Q, R ზემოდან შემოუსაზღვრელი სიმრავლეებია. A სიმრავლის ზემოდან შემოსაზღვრულობა გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ მოიძებნება ისეთი ინტერვალი $(-\infty, \beta)$, რომელშიც შედის A სიმრავლე, ე.ი. $A \subset (-\infty, \beta)$.

სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ იგი შემოსაზღვრულია როგორც ქვემოდან, ისე ზემოდან. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ მოიძებნება ისეთი სეგმენტი $[a, b]$, რომელიც შეიცავს ამ სიმრავლეს. მაგალითად ნებისმიერი $<a, b>$ შუალედის წერტილთა სიმრავლე (a და b სასრული რიცხვებია) შემოსაზღვრული სიმრავლეა. სიმრავლის შემოსაზღვრულობა მეორენაირად ასე განიმარტება: A სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ

მოიძებნება ისეთი M დადებითი რიცხვი, რომ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x ელემენტისათვის $|x| \leq M$, ანუ $-M \leq x \leq M$, ე.ი. $x \in [-M, M]$. სიმრავლეები Z, Q, I, R შემოუსაზღვრელია. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერ შემოსაზღვრულ სიმრავლეში შეიძლება არსებობდეს უმცირესი და უდიდესი ელემენტები, ან ასეთი ელემენტები არ არსებობდეს. მაგალითად $[a, b]$ ნებისმიერ სეგმენტში, როგორც რიცხვთა სიმრავლეში, არსებობს უმცირესი ელემენტი და ეს ელემენტია a, არსებობს აგრეთვე მასში უდიდესი ელემენტი b; ხოლო (a, b) ინტერვალში არ არსებობს არც უმცირესი და არც უდიდესი ელემენტი. A სიმრავლის ზედა საზღვართა სიმრავლე აღინიშნება C_+A სიმბოლოთი, ქვედა საზღვართა სიმრავლე C_-A-თი ცხადია $C_-N = (-\infty, 1]$, C_+N არ არსებობს.

A სიმრავლის ქვედა საზღვართა შორის უდიდესს ეწოდება ამ სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი და $\inf A$ სიმბოლოთი აღინიშნება. A სიმრავლის ზედა საზღვართა შორის უმცირესს ეწოდება ამ სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი და $\sup A$ სიმბოლოთი აღინიშნება (inf-ინფიმუმ, sup-სუპრემუმ). ადვილი მისახვედრია, რომ $\forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup A$. თუ A სიმრავლე შემოუსაზღვრელია ქვემოდან, მაშინ წერენ $\inf A = -\infty$, ხოლო თუ შემოუსაზღვრელია ზემოდან, მაშინ $\sup A = +\infty$.

ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრების მეორენაირი განმარტება:

m-ს ეწოდება A სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი, თუ:

1) $\forall x \in A : x \geq m$;

2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_1 \in A : x_1 < m + \varepsilon$.

M-ს ეწოდება A სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი თუ:

1) $\forall x \in A : x \le M$;

2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x^1 \in A :\ x^1 > M - \varepsilon$.

თეორემა. თუ ნამდვილ რიცხვთა არაცარიელი სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოდან, მაშინ მას აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი, ხოლო თუ შემოსაზღვრულია ქვემოდან, მაშინ მას აქვს ზუსტი ქვედა საზღვარი. მაშასადამე შემოსაზღვრულ ნამდვილ რიცხვთა არაცარიელ სიმრავლეს აქვს ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრები[1)].

დამტკიცება. ვთქვათ $A \subset R$, $A \ne \varnothing$ და A შემოსაზღვრულია ზემოდან, ე.ი. არსებობს ისეთი ნამდვილი რიცხვი β, რომ $\forall x \in A,\ x \le \beta$.

აღვნიშნოთ ყველა ასეთი β რიცხვების სიმრავლე A-ით. დავამტკიცოთ, რომ არსებობს $\sup A$. ჩვენ მივუთითებთ $\sup A$-ს აგების ალგორითმს. (ვისარგებლოთ ნამდვილი რიცხვის როგორც მიმდევრობის განმარტებით). A სიმრავლის ყოველი x ელემენტი ასე ჩაიწერება

$$x = x_0,\ x_1\ x_2 \ldots$$

განვიხილოთ ყველა x_0 წერტილთა სიმრავლე და იგი β_0-ით აღვნიშნოთ. მაშასადამე $\beta_0 = \{x_0 :\ x_0,\ x_1\ x_2 \ldots \in A\}$. იგი მთელ რიცხვთა ქვესიმრავლეა და შემოსაზღვრული ზემოდან (მაგალითად A^+-ის ნებისმიერი ელემენტის მთელი ნაწილია β_0-ის ზედა საზღვარი), ამიტომ არსებობს $\sup \beta_0 \in \beta_0$, აღვნიშნოთ ეს რიცხვი b_0-ით, $b_0 = \sup \beta_0$. განვიხილოთ ახლა A-ს იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომელთა მთელი ნაწილია b_0. აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე A_1-ით. მაშასადამე $A_1 = \{b_0,\ x_1 x_2 \ldots\}$.

[1)] ეს თეორემა შეიძლება მივიღოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობის აქსიომად, რომლის საფუძველზე დედეკინდის აქსიომა შეიძლება დამტკიცდეს როგორც თეორემა. ამის შესახებ ქვემოთაც მივუთითებთ.

ცხადია $A_1 \ne \varnothing$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $B_1 = \{x_1 : b_0, x_1 x_2 \ldots \in A_1\}$. ცხადია $B_1 \subset \theta$, ამიტომ არსებობს B_1-ის ზუსტი ზედა საზღვარი; აღვნიშნოთ იგი b_1-ით. ცხადია $b_1 \in B_1$. აღვნიშნოთ ახლა A_2-ით A_1-ის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც ასე იწერება $b_0,\ b_1 x_2 x_3 \ldots$, მაშასადამე $A_2 = \{b_0,\ b_1 x_2 x_3 \ldots\}$. ცხადია $A_2 \ne \varnothing$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $B_2 = \{x_2 : b_0,\ b_1 x_2 x_3 \ldots\}$. $B_2 \subset \theta$, ამიტომ არსებობს მისი ზუსტი ზედა საზღვარი. აღვნიშნოთ იგი b_2. ცხადია $b_2 \in B_2$. განვიხილოთ ახლა $A_3 = \{b_0,\ b_1 b_2 x_3 \ldots\}$ და შემოვიღოთ აღნიშვნა $B_3 = \{x_3 : b_0,\ b_1 b_2 x_3 \ldots \in A_3\}$. ვთქვათ $b_3 = \sup B_3$ და ა.შ. ეს პროცესი უსასრულოდ გავაგრძელოთ; მივიღებთ ნამდვილ რიცხვს $b = b_0,\ b_1 b_2 \ldots$, რომელიც A სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარია. ეს გამომდინარეობს ამ რიცხვის აგების ალგორითმიდან. მართლაც. ცხადია $b \in A^+$, რადგანაც იგი არაა ნაკლები A-ს არცერთ ელემენტზე. ვაჩვენოთ, რომ b უმცირესია A^+-ში. დავუშვათ წინააღმდეგი. ვთქვათ, $b \ne \sup A$. მაშინ $b > \sup A$. ამიტომ მოიძებნება A-ს ისეთი ზედა საზღვარი $\beta = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots$, რომელიც ნაკლებია b-ზე. რადგან $b_0, b_1 b_2 \ldots > \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots$, ამიტომაც რომელიღაც K-ურ ადგილზე $b_k > \beta_k$, თუ წინა ათწილადი ნაწილები ტოლია. განვიხილოთ $b_0, b_1 b_2 \ldots b_k x_{k+1} x_{k+2} \ldots$, რომელიც მეტია β-ზე, ე.ი. მოვძებნეთ A-ს ისეთი ელემენტი, რომელიც β-ს აღემატება. ამიტომ β არ ყოფილა ზედა საზღვარი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს იმას, რომ b არის A-ს ზუსტი ზედა საზღვარი. შევნიშნოთ, რომ თუ b იქნება სტაციონარული მიმდევრობა უსასრულო რაოდენობის 9-ით, მაშინ იგი ასე ჩაიწერება $b = b_0,\ b_1 b_2 \ldots b_{k-1}\ 99 \ldots$,

რომელიც ტოლია $b = b_0, b_1 b_2 \ldots (b_{k-1} + 1)00\ldots$. ეს უკანასკნელი A-ს ზუსტი ზედა საზღვარია, რაც მტკიცდება წინა შემთხვევის ანალოგიურად. ამრიგად, თეორემა დამტკიცდა ზუსტი ზედა საზღვრისათვის. ასევე დამტკიცდება თეორემა არაცარიელი ქვემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვრის არსებობაზე.

ᲡᲐᲕᲐᲠᲯᲘᲨᲝᲔᲑᲘ

1. დაასახელეთ სასრული სიმრავლეები და მათი საზღვრები.

2. რა შემთხვევაში ეკუთვნის სიმრავლის ზუსტი საზღვრები ამავე სიმრავლეს?

3. იპოვეთ $\inf A$ და $\sup A$, თუ

ა) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$;

ბ) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \ldots, \frac{1}{n}, n \ldots\right\}$;

გ) A არის $<a, b>$ შუალედის რაციონალურ (ირაციონალურ) წერტილთა სიმრავლე.

ᲗᲐᲕᲘ II

1. ᲛᲣᲓᲛᲘᲕᲘ ᲓᲐ ᲪᲕᲚᲐᲓᲘ ᲡᲘᲓᲘᲓᲔᲔᲑᲘ.

მათემატიკაში განიხილავენ მუდმივ, ცვლად, ვექტორულ და სკალარულ სიდიდეებს. *სიდიდეს ეწოდება მუდმივი, თუ იგი ამოცანის პირობებში ინარჩუნებს ერთ და იგივე გარკვეულ რიცხვით მნიშვნელობას.* მაგალითად ნებისმიერი წრეწირის სიგრძის შეფარდება მისი დიამეტრის სიგრძესთან ყოველთვის მუდმივია და უდის π. წრეწირის დიამეტრზე დაყრდნობილი ჩახაზული ნებისმიერი კუთხის სიდიდე 90^0-ია. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180^0-ია. მუდმივი სიდიდეებია სინათლის სიჩქარე სიცარიელეში, სიმძიმის ძალის აჩქარება g და ა.შ.

ცვლადი სიდიდეების მაგალითებია ატმოსფერული წნევა, ჰაერის ტემპერატურა, სხეულის სიჩქარე და აჩქარება, დენის ბატარიის ზომები, მატარებლის რელსების ამა თუ იმ მონაკვეთის სიგრძე, ფიგურის ფართობი და მოცულობა, თუ შევცვლით მათ ელემენტებს, კუთხეებს, გვერდებს. არსებობს ორი სახის მუდმივი სიდიდე აბსოლუტურად მუდმივები და პარამეტრები.

სიდიდეს ეწოდება აბსოლუტურად მუდმივი, თუ იგი არ იცვლის მნიშვნელობას არცერთი პირობების შეცვლისას. მაგალითად π რიცხვი, ნეპერის რიცხვი e, სამკუთხედის კუთხეების ჯამი და ა.შ.

პარამეტრი ეწოდება ისეთ სიდიდეს, რომელიც მოცემული ამოცანების პირობებში ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას, მაგრამ თუ შეიცვლება ამოცანის პირობები, მაშინ იგი მიიღებს სხვა მუდმივ მნიშვნელობას. მაგალითად თანაბარი მოძრაობის განტოლებაში $S = vt$, t და S ცვლადებია, v მუდმივია, რომელიც სხვადასხვა მოძრავი სხეულისათვის სხვადასხვაა. მათემატიკური ქანქარის

რხევის პერიოდის განტოლებაში $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ ℓ და T ცვლადებია, π და 2 აბსოლუტური მუდმივებია, ხოლო g-სიმძიმის ძალის აჩქარება პარამეტრია.

სკალარულია სიდიდე, რომელიც ღებულობს მხოლოდ და მხოლოდ რიცხვით მნიშვნელობებს. იგი შეიძლება იყოს ცვლადიც და მუდმივიც. მაგალითად ტემპერატურა, მასა, მოცულობა, სიმკვრივე და ა.შ. სკალარული სიდიდეებია.

სიდიდეს ეწოდება ვექტორული, თუ იგი ხასიათდება ორი მონაცემით რიცხვითი მნიშვნელობით და მიმართულებით. მაგალითად სიჩქარე, აჩქარება, მიზიდულობის ძალა და სხვა ვექტორული სიდიდეებია.

ძირითადად ჩვენ განვიხილავთ მუდმივ და ცვლად სიდიდეებს. შევთანხმდეთ და ცვლადი სიდიდეები ავღნიშნოთ x, y, z, u, v, w და ა.შ. x ცვლადი სიდიდის ყოველ კონკრეტულ მნიშვნელობას $x_0, x_1, \ldots$ ჰქვია მისი ფიქსირებული მნიშვნელობები. მუდმივი სიდიდეები აღინიშნება $a, b, c, d, \ldots$

2. ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია. ფუნქციის ანალიზური განსაზღვრა

დავუშვათ, A და B ნამდვილ რიცხვთა არაცარიელი ქვესიმრავლეებია. x იყოს A სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი, ე.ი. $\forall x \in A$, ხოლო $y - B$ სიმრავლის ზოგადი ელემენტი, $\forall y \in B$. ამ აზრით x და y ცვლადებია.

განმარტება. თუ ყოველ x-ს A სიმრავლიდან რომელიმე f წესით შეესაბამება ერთი გარკვეული y ელემენტი B-დან, მაშინ იტყვიან, რომ y არის x ცვლადის ცალსახა ფუნქცია და

წერენ

$$y = f(x), \text{ ან ასე } x \to f(x). \qquad (1)$$

x ეწოდება დამოუკიდებელი ცვლადი, ანუ არგუმენტი; y-ს – დამოკიდებული ცვლადი, ანუ ფუნქცია. f არის შესაბამისობის წესი: იმ მოქმედებათა თანმიმდევრობა, რომლებიც უნდა შევასრულოთ x-ზე, რომ მივიღოთ y. $f(x)$-ს ეწოდება ფუნქციის მნიშვნელობა x წერტილში. ამ შემთხვევაში, იტყვიან რომ x და y ერთმანეთთან არიან ფუნქციონალურ ანუ ფუნქციურ დამოკიდებულებაში.

ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელშიც იცვლება არგუმენტი მოცემულ (1) ფუნქციაში, ეწოდება ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე და აღინიშნება $D(y)$-ით, ან $D(f)$-ით. ხოლო ყველა იმ y წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც მიიღება (1) ფორმულიდან, როცა x მიიღებს ყველა მნიშვნელობას $D(y)$-ში, ეწოდება ამ ფუნქციის ცვლილების არე, ანუ მნიშვნელობათა სიმრავლე და იგი აღინიშნება $E(y)$-ით. ამრიგად,

$$D(y) = \{x \in A: \ y = f(x)\},$$
$$E(y) = \{y \in B: \ y = f(x)\}.$$

ამრიგად, ფუნქციის მოცემისათვის საჭიროა მოცემული იყოს ორი რამ: 1). სიმრავლეები, რომლებშიც იცვლებიან არგუმენტი და ფუნქცია; 2). შესაბამისობის f წესი. ფაქტიურად ფუნქცია არის გარკვეული $(x, f(x))$ წყვილთა სიმრავლე.

მაგალითი, $[-5; 10]$ სეგმენტზე განვსაზღვროთ ფუნქცია ასე

$$y = f(x) = x^2 - 4x + 3. \qquad (2)$$

განსაზღვრის არე $[-5; 10]$ სეგმენტია. ცვლილების არე ნამდვილ რიცხვთა ქვესიმრავლეა, რომლის დადგენა მარტივად შეიძლება. მოცემული ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა არის y-ის მნიშვნელობა,

როცა $x=2$ და აღინიშნება ასე $f(2)=y_{x=2}=-1$. მოცემული ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა არის $f(10)=63$. ამრიგად მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე სეგმენტია $[-1;\ 63]$ (იხილეთ საშუალო სკოლიდან კვადრატული ფუნქციის გამოკვლევა).

რა იქნება ამ შემთხვევაში f? ე.ი. y-ის მისაღებად რა მოქმედებები უნდა ვაწარმოოთ x-ზე? I. x ავიყვანოთ კვადრატში, მივიღებთ x^2-ს. II. x გავამრავლოთ -4-ზე, მივიღებთ $-4x$. III. x^2, $-4x$ და 3 შევკრიბოთ. მიღებული რიცხვი იქნება სწორედ y. მოქმედებათა ეს ერთობლიობა არის f. შეიძლება ნაცვლად f-სა დავწეროთ F, φ, Φ, g; არაა სავალდებულო არგუმენტი ავღნიშნოთ x-ით, ხოლო ფუნქცია y-ით. შეიძლება მათ ნაცვლად ავიღოთ შესაბამისად t და s (როგორც ეს ფიზიკაშია მიღებული), ან სულ სხვა სიმბოლოები.

რიგ შემთხვევებში ფუნქციას თვლიან მოცემულად, თუ დასახელებულია $D(f)$ – განსაზღვრის არე და შესაბამისობის წესი. ამ შემთხვევაში ჩვენ უნდა ვიპოვოთ $E(f)$, რომელიც შეიძლება დავადგინოთ ფუნქციის გამოკვლევით.

მაგალითად,

1) $[-5;\ 10]$ სეგმენტზე განვსაზღვროთ ფუნქცია ასე $y=x^2$. ადვილი მისახვედრია, რომ $E(f)=[0,\ 100]$.

2) $[5;\ 10]$-ზე განსაზღვრული $y=x^2$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[25;\ 100]$.

3) $[-5;\ -1]$-ზე განსაზღვრული $y=x^2$-ის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[1,\ 25]$.

4) Z სიმრავლეზე განსაზღვრული $y=x^2$-ის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $N_0=\{0, 1, 4, 9, \ldots\}$.

5) $[-7;\ 8]$-ზე განსაზღვრული $y=3x+2$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[-19, 26]$.

6) $[-4, 15]$-ზე განსაზღვრული $y=-5x+10$ ფუნქციის $E(f)=[-65, 30]$.

პრაქტიკული თვალსაზრისით ფუნქცია მოიცემა მხოლოდ ფორმულით, არაა დასახელებული $D(y)$ და $E(y)$, რომლებიც უნდა დავადგინოთ ჩვენ თვითონ.

მაგალითად, $$y=\sqrt{3x-6}+\frac{1}{x}+2. \tag{3}$$

ეს გამოსახულება არაა ფუნქცია. თუ გვინდა რომ იგი იყოს ფუნქცია (და ამას მოითხოვენ სწორედ), მაშინ, საჭიროა, დავადგინოთ $D(y)$ და $E(y)$. $E(y)$ უნდა ვიპოვოთ მაშინ, თუ დიდ სირთულეებთან არ გვექნება საქმე. ამრიგად გამოსახულება (3) რომ იყოს ფუნქცია, საჭიროა შესრულდეს შემდეგი პირობები $x \neq 0$ და $3x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. ამრიგად $D(y)=[2;+\infty)$. ადვილი მისახვედრია, რომ $E(y)=[2{,}5;\ +\infty)$.

ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარეობს შემდეგი:

1). შეიძლება განსხვავებულ x-ებს შეესაბამებოდეს განსხვავებული y-ბი.

მაგალითად, $y=kx+b$, $y=\frac{k}{x}$, $y=a^x$, $y=\log_a x$ ფუნქციები ასეთი სახისაა.

2). რამდენიმე x შეიძლება შეესაბამებოდეს ერთიდაიგივე y.

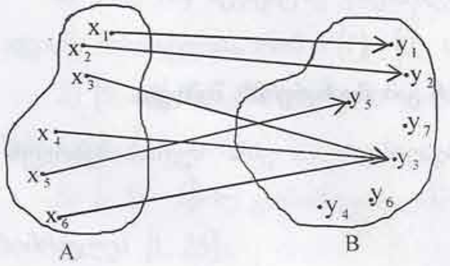
მაგალითად,

ა) $y=x^2$ ფუნქციაში ყოველ x და $-x$-ს შეესაბამება ერთი y;

ბ) $y=\sin x$ ფუნქციაში x-ის უამრავ მნიშვნელობებს შეესაბამება ერთი y.

მაგალითად, როცა $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$, ანუ $x=\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}+\pi, -\frac{\pi}{6}-\pi, \frac{\pi}{6}+2\pi, \frac{\pi}{6}-2\pi,\ldots$ შეესაბამება $\frac{1}{2}$. განხილულიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ ერთდაიგივე x-ს არ შეესაბამება სხვადასხვა y.

თვალსაჩინოების მიზნით ფუნქციას გამოსახავენ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეების საშუალებით შემდეგნაირად:



ე. ი. x_1-ს შეესაბამება y_1; x_2-ს - - - - - - y_2; x_3, x_4, x_6 - - - - - - y_3; ხოლო x_5 შეესაბამება y_5;

A სიმრავლის ყოველი ელემენტიდან გამოდის ერთი ისარი, B-ს ყოველ წერტილზე მიდის ერთი ან ერთზე მეტი ისარი. შეიძლება შესაბამისი ელემენტები ჩავწეროთ წყვილების სახით (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)... შეიძლება ყველა x-ს შეესაბამებოდეს ერთადერთი y.

მაგალითად, $y=c$ ფუნქციაში, თუმცა x არ ჩანს, მაგრამ $\forall x\in R$ - თვის y არის ერთი და იგივე c, ფაქტიურად ეს არის (x, c) წერტილთა სიმრავლე.

ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს ნაწილ-ნაწილ ე.ი. განსაზღვრის არე დანაწილდეს ისე, რომ თითოეულში ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს სხვადასხვა სახე.

მაგალითები 1). $$y=\begin{cases} 5x-2, & \text{როცა } x\in(-\infty, 4) \quad (ა) \\ x^2, & \text{როცა } x\in[4, 11] \quad (ბ) \\ \frac{1}{x}, & \text{როცა } x\in(11, 30] \quad (გ) \end{cases}$$

ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ასე უნდა დავადგინოთ:

ა) -ს მიხედვით $E(y)$-ის ნაწილია $(-\infty, 18)$.

ბ) -ს მიხედვით — $[16, 121]$ სეგმენტი, გ)-ს მიხედვით კი $\left[\frac{1}{30}, \frac{1}{11}\right)$. ამრიგად მოცემული ფუნქციისათვის $D(y)=(-\infty, 30]$, $E(y)=(-\infty, 121]$. მოცემული ფუნქციისათვის დამახასიათებელია ის, რომ განსაზღვრის არის ერთ ნაწილზე განსხვავებულ x-ებს

შესაბამება განსხვავებული y-ბი, მეორე შემთხვევაში განსხვავებულ x-ებს შეესაბამება ერთი და იგივე y. მნიშვნელობათა სიმრავლის ასეთი ნაწილია $\left[\frac{1}{30}, \frac{1}{11}\right] \cup [16, 18]$.

2).

$$y = \begin{cases} 1, & \text{როცა } x > 0 \\ 0, & \text{როცა } x = 0 \\ -1, & \text{როცა } x < 0 \end{cases}$$

$D(y) = R$, $E(y) = \{-1, 0, 1\}$. ამ ფუნქციას აღნიშნავენ $y = \operatorname{sign} x$-ით, იკითხება: „$x$ – ის ნიშანი“,

ანუ y უდრის სიგნუმ x-ს.

ეს ფუნქცია ასეც შეიძლება ჩავწეროთ

$$y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{როცა } x \neq 0 \\ 0, & \text{როცა } x = 0. \end{cases}$$

თუ $D(y), E(y) \subset R$, მაშინ ფუნქციას ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქცია ჰქვია. ჩვენ სწორედ ასეთ ფუნქციებს განვიხილავთ.

ცხადია, ფუნქცია არის სიმრავლის ასახვა სიმრავლეზე.

ვთქვათ $y = f(x)$-ის განსაზღვრის არეა $D(y)$, ცვლილების არე $E(y)$. იტყვიან, რომ მოცემული ფუნქცია $D(y)$ სიმრავლეს ასახავს $E(y)$ სიმრავლეზე და წერენ

$f : D(y) \to E(y)$, ან ასე $D(y) \xrightarrow{f} E(y)$, ან კიდევ ასე $f(D) = E$.

ამრიგად, ფუნქციას ასახვასაც უწოდებენ, უფრო ზუსტად კი ფუნქცია არის სიმრავლის ასახვა სიმრავლეზე.

მაგალითად,

$[-3, 7] \xrightarrow{\text{ელემენტის კვადრატში აყვანა}} [0, 49]$ (f არის x-ის კვადრატში აყვანა). ეს არის $y = x^2$ ფუნქცია, რომლის $D(y) = [-3, 7]$, ხოლო $E(y) = [0, 49]$.

მოცემულ ფუნქციაში y-ს ჰქვია x-ის სახე, ხოლო ყველა იმ x, რომელსაც შეესაბამება ერთადერთი y, არის y-ის წინასახე და აღინიშნება $f^{-}(y)$-ით. ამრიგად $D = f^{-}(E)$. f^{-}-ის ნაცვლად ზოგჯერ წერენ f^{-1}.

3. ფუნქცია, როგორც მიმართება

ჯერ განვმარტოთ სიმრავლეთა პირდაპირი, ანუ დეკარტული ნამრავლი. ვთქვათ, A და B ნებისმიერი სიმრავლეებია. მათგან შევადგინოთ (a, b) სახის წყვილები ისე, რომ $a \in A$ და $b \in B$. ყველა ასეთი წყვილების სიმრავლეს ეწოდება A და B სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი და აღინიშნება $A \times B$ სიმბოლოთი. ამრიგად, თანახმად განმარტებისა $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

მაგალითად,

თუ $A = \{2, 7\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, მაშინ

$A \times B = \{(2; 3), (2; 4), (2; 5), (7; 3), (7; 4), (7; 5)\}$.

a-ს ეწოდება (a, b) წყვილის პირველი კომპონენტი, ხოლო b-ს – მეორე კომპონენტი.

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $A = \varnothing$, ან $B = \varnothing$, მაშინ $A \times B = \varnothing$ და პირიქით. $A \times B$ ნამრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ეწოდება შესაბამისობა, ანუ მიმართება A და B

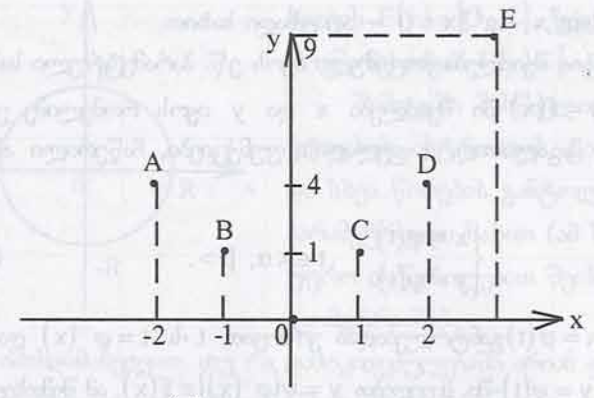
სიმრავლეებს შორის. ვთქვათ, $G \subset A \times B$. G-ს ეწოდება ფუნქციონალური მიმართება, თუ იგი არ შეიცავს წყვილებს ერთი და იგივე პირველი და განსხვავებული მეორე კომპონენტებით. ასეთ მიმართებას ეწოდება ფუნქცია. ამრიგად, $X \times Y$ ნამრავლის G ქვესიმრავლეს ეწოდება X სიმრავლის ასახვა Y-სიმრავლეში, თუ $\forall x \in X, \exists y \in Y : (x, y) \in G$, ე.ი.

$\forall x_1 \in X \wedge \forall y \in Y \wedge \forall y' \in Y : ((x_1, y) \in G \wedge (x_1, y') \in G \Rightarrow (y = y'))$.

ე.ი. ამ შემთხვევაში G არის ფუნქცია: $G : X \to Y$, ზედა მაგალითში ასეთი წყვილებია $(2; 3), (7; 3)$ ან $(2; 4), (7; 5)$. $y = f(x)$ ფუნქცია შეიძლება ჩავწეროთ წყვილთა სიმრავლის სახით $\{(x, f(x), x \in D(y)\}$ (ჩავთვალოთ, რომ განსხვავებულ ინდექსიანი რიცხვები იყოს განსხვავებულები). ფუნქციაში შეიძლება გვქონდეს წყვილები $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3), \ldots;$ შეიძლება აგრეთვე ასეთი წყვილებიც $(x_1, y_1); (x_2, y_1); (x_3, y_1), \ldots;$, მაგრამ შეუძლებელია ფუნქციაში გვქონდეს $(x_1, y_1); (x_1, y_2); (x_1, y_3), \ldots$ წყვილები; გამომდინარე აქედან შეიძლება ფუნქცია, როგორც ნამდვილ რიცხვთა წყვილების სიმრავლე, გამოვსახოთ სიბრტყეზე წერტილებით. ასეთი წერტილების სიმრავლეს ეწოდება მოცემული ფუნქციის გრაფიკი.

მაგალითად, $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული $y = x^2$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\{0, 1, 4, 9\}$. წყვილთა სიმრავლე კი ასეთი იქნება $\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0) (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$.

სიბრტყეზე გვექნება წერტილები A, B, O, C, D, E



ფუნქცია $y = f(x)$ არის განტოლება, რომელიც აკავშირებს x-ს და y-ს. ასეთი სახის ფუნქციას ეწოდება ცხადი ფუნქცია. ეს ფუნქცია შეიძლება ჩავწეროთ ასეც $y - f(x) = 0$, ან უფრო ზოგადად $F(x, y) = 0$. (4)

ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ ფუნქცია მოცემულია არაცხადი სახით. შევნიშნოთ, რომ (4) განტოლება შეიძლება ყოველთვის არ იყოს ფუნქცია. მაგალითად $9x^2 - 4y + 7x + \cos x - 3 = 0$ განტოლება ფუნქციაა და ჩაიწერება ასე $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{4}$. ხოლო განტოლება $y^2 + 2 - \sin x = 0$ არაა ფუნქცია, რადგანაც $y = \pm\sqrt{\sin x - 2}$ არაა ნამდვილი ფუნქცია.

იტყვიან, რომ ფუნქცია მოცემულია ცხადი სახით, თუ იგი ჩაიწერება $y = f(x)$ სახით და არაცხადი სახით თუ იგი ჩაიწერება $F(x, y) = 0$ სახით. ასეთი ფუნქციები შეისწავლება მეორე კურსზე.

მაგალითად, $y = 5\sin x - \lg x + x^3 - 1$ ცხადი სახითაა, ხოლო

$9x - 4y + 8\sin^3 x - tg^2 3x = 0$ – არაცხადი სახით.

ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს ე.წ. პარამეტრული სახით, კერძოდ $y = f(x)$-ში შეიძლება x და y იყოს რომელიმე ერთი ცვლადის, მაგალითად, t-ცვლადის ფუნქციები, ჩაწერილი ასეთი სახით

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in <\alpha,\ \beta>. \qquad (5)$$

თუ $x = \varphi(t)$ განტოლებიდან ვიპოვით t-ს $t = \varphi^{-}(x)$ და მას შევიტანთ $y = \psi(t)$-ში, მივიღებთ $y = \psi(\varphi^{-}(x)) \equiv F(x)$. ამ შემთხვევაში t-ს ეწოდება პარამეტრი. ფუნქციას, ჩაწერილს (5) სახით ჰქვია პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქცია. მაგალითად,

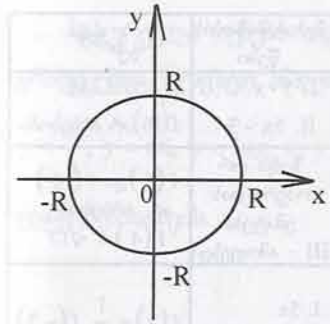
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad t \in [0,\ 2\pi]. \qquad (6)$$

ეს არის წრეწირის განტოლება, ჩაწერილი პარამეტრული სახით, R რადიუსია. (6) ტოლობები ავიყვანოთ კვადრატში და შევკრიბოთ წევრობრივ, მივიღებთ

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

მივიღეთ R რადიუსიანი წრეწირის განტოლება არაცხადი სახით. იმისათვის, რომ ჩავწეროთ ეს განტოლება ფუნქციის სახით,საჭიროა მთლიანი წრეწირი გავყოთ ზედა და ქვედა ნახევარწრეწირებად, (დიამეტრი ძევს $0x$ ღერძზე), მაშინ ზედა ნახევარწრეწირის განტოლება იქნება $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, ხოლო ქვედა ნახევარწრეწირისა – $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $[-R, R]$, ზედა ნახევარწრეწირი-



სათვის $E(y) = [O,\ R]$, ქვედა ნახევარწრეწირისათვის $E(y) = [-R,\ O]$.

შემდეგში შესწავლილი იქნება ელიფსის, ასტროიდის, ციკლოიდის და სხვა წირების განტოლებები პარამეტრული სახით (ამ საკითხებს უფრო დაწვრილებით შეისწავლით გეომეტრიაში).

იმისდამიხედვით, თუ რა დამოკიდებულებაში არიან ფუნქციაში x და y ცვლადები, მათი განსაზღვრის და ცვლილების არეები ერთმანეთთან, განიხილავენ ე.წ. სურექციულ, ინექციურ და ბიექციურ ფუნქციებს.

თუ f არის M სიმრავლის ისეთი ასახვა N სიმრავლეზე („ზე“ ასახვა), რომ $f(M) = N$, მაშინ ასეთ ასახვას უწოდებენ სურექციულს; თუ $f(M) \subset N$, მაშინ იტყვიან რომ f არის M-ის ასახვა N-ში („ში“ ასახვა), თუ ყოველი განსხვავებული x_1 და x_2-თვის M-დან მათი სახეები $y_1 = f(x_1)$ და $y_2 = f(x_2)$ ასევე განსხვავებულია, მაშინ f-ს ეწოდება ინექციური. თუ ასახვა სურექციულიცაა და ინექციურიც, მაშინ მას ბიექციურ ასახვას უწოდებენ.

მაგალითად, ფუნქცია $y = 2 - 3x$, განსაზღვრული $[-4; 5]$ სეგმენტზე, სურექციულია, მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[-13; 14]$. იგი ამავე დროს ინექციურია და, მაშასადამე, ბიექციურიც.

ახლა მოვიყვანოთ ფუნქციათა რამდენიმე მაგალითი ცხრილის სახით.

$y=f(x)$	$D(y)$	$E(y)$	შესაბამისობის წესი	შენიშვნა
1) $y=5x-3$	$[-10,\ 15]$	$[-53,\ 72]$	I. $5\cdot x$ II. $5x-3$	$f(-7)=-38$ $f(16)$ არ არსებობს
2) $y=\sqrt{5x-3}$	$[1,\ 8)$	$[\sqrt{2},\ \sqrt{37})$	ზედა ორ ოპერაციას ემატება III - ამოფესვა	$f(0)$ და $f(10)$ არ არსებობს $f(4)=\sqrt{17}$
3) $y=\dfrac{1}{5x-3}$	$(1,\ 6]$	$\left[\dfrac{1}{27},\ \dfrac{1}{2}\right)$	I. $5x$ II. $5x-3$ III. $1:(5x-3)$	$f(2)=\dfrac{1}{7}$, $f(-2)$ არ არსებობს
$y=\dfrac{1}{5x-3}$	$\{-2,-1;0,5\}$	$\left\{-\dfrac{1}{13};\ -\dfrac{1}{8};\ -\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{22}\right\}$		
4) $y=x^2-8x+7$	$(-\infty,\ \infty)$	$[-9,\ +\infty)$	$x^2,\ -8x$	$f(4)=-9$
$y=x^2-8x+7$	$\{-2,-1,0,3,10\}$	$\{-8,7,16,27\}$	x^2-8x+7	$f(1)$ არ არსებობს
5) $y=\sqrt{x^2-8x+7}$	$(-\infty,1]\cup[7;+\infty)$	$[0;\ +\infty)$	ზედა მოქმედებებიდან ფესვია ამოღებული	$f(-3)=\sqrt{40}$ $f(4)$ არ არსებობს
6) $y=\dfrac{1}{x^2-8x+7}$	$x\neq 1,\ x\neq 7$ $(-\infty,1)\cup(1,7)\cup$ $\cup(7,+\infty)$	$\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{9}\right]\cup$ $\cup(0;\ +\infty)$	1 იყოფა 5) - ზე	$f(0)=\dfrac{1}{7}$, $f(1)$ და $f(7)$ არ არსებობს

ჩაწერეთ ანალოგიური ცხრილის სახით

7) $y=-3x+8$

8) $y=\sqrt{-x^2+x-10}$

9) $\dfrac{1}{x^2-3x-10}$

10) $y=ax^2+bx+c$

11) $y=\sin x+\sqrt{x+2}-\dfrac{4}{x}$

12) $y=\sqrt{2^x}-\dfrac{3}{\log_2 x}$

13) $y=1+\sqrt{\lg\cos 2\pi x}$

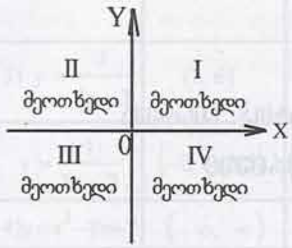
14) $y=\sqrt{x+8}+\sqrt{9-x}$

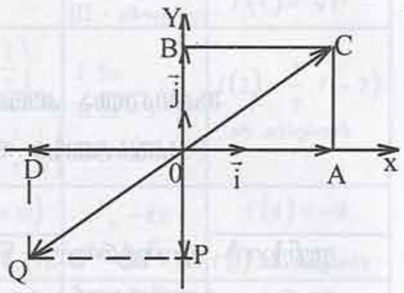
სასურველი იქნება აგოთ ყველა ჩამოთვლილი ფუნქციების გრაფიკებიც. შეავსეთ ანალოგიური ცხრილი $y=\mathrm{ctg}x$, $y=kx+b$, $y=\dfrac{k}{x}$, $y=ax$, $y=\log_a x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$ ფუნქციებისათვის.

4. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე და სივრცეში

ფუნქციის გეომეტრიული წარმოდგენისათვის სარგებლობენ კოორდინატთა სისტემებით. სიბრტყეზე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, ანუ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ეწოდება ორი ურთიერთმართობი ისეთი წრფეების ერთობლიობას, რომლებზედაც გარკვეული წესით აღებულია მიმართულება და მასშტაბის ერთეულები. (სიმარტივისათვის და თვალსაჩინოებისათვის მიზანშეწონილია ერთი წრფე იყოს ჰორიზონტალური, მეორე — ვერტიკალური). მათი გადაკვეთის O წერტილს ჰქვია სათავე. ამ წრფეებით სიბრტყე იყოფა ოთხ ნაწილად - მეოთხედებად. OX ღერძს ეწოდება აბსცისთა ღერძი, OY-ს კი — ორდინატთა ღერძი. ორივეს ერთად-საკოორდინატო ღერძები. OX ღერძზე ავიღოთ ერთეული სიგრძის ვექტორი O-დან მარჯვნივ და იგი აღვნიშნოთ $\vec{i}$-ით, ხოლო OY-ზე ავიღოთ ანალოგიური $\vec{j}$ ვექტორი. $\vec{i}$ და $\vec{j}$

ერთეულოვანი ვექტორებია. მათ საბაზისო ვექტორები, ანუ ბაზა ჰქვია. OX ღერძზე ნებისმიერი ვექტორი შეიძლება გამოვსახოთ-წარმოვადგინოთ $\vec{i}$-ის საშუალებით. ასევე OY ღერძზე ნებისმიერი ვექტორი წარმოვადგინოთ $\vec{j}$ ვექტორის საშუალებით.





მაგალითად, თუ OX ღერძზე O-ის მარჯვნივ გადავზომავთ $\vec{i}$ ვექტორს 3-ჯერ, მაშინ $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}$. 3 იქნება A წერტილის კოორდინატი OX ღერძზე. ანალოგიურად, თუ $\vec{j}$ ვექტორს გადავზომავთ 2-ჯერ OY ღერძზე O წერტილის ზემოთ, მივიღებთ $\overrightarrow{OB}=2\vec{j}$. 2 არის B-ს კოორდინატი OY ღერძზე. შევკრიბოთ ეს ორი ვექტორი (უფრო დაწვრილებით ვექტორული აღრიცხვა შეისწავლება ანალიზურ გეომეტრიაში), მივიღებთ $\overrightarrow{OC}$ ვექტორს, ე.ი. $\overrightarrow{OC}=3\vec{i}+2\vec{j}$, 3 და 2-ს ჰქვია C წერტილის კოორდინატები და წერენ $C(3;2)$[1], 3 არის აბსცისა, 2 – ორდინატი. თუ $\vec{i}$-ს გადავზომავთ O-დან მოპირდაპირე მხარეს, მაგალითად 5-ჯერ, მაშინ მივიღებთ $\overrightarrow{OD}$ ვექტორს $\overrightarrow{OD}=-5\vec{i}$.

[1] 3 და 2-ს ჰქვია $\overline{OC}$ ვექტორის კოორდინატებიც.

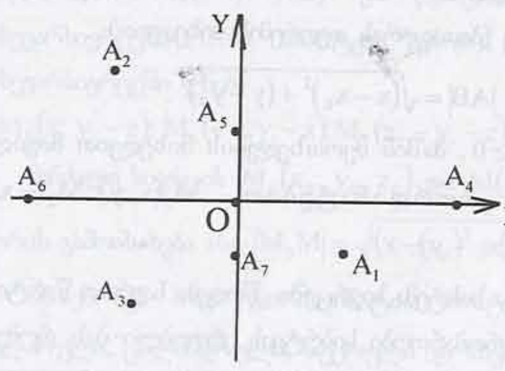
ანალოგიურად თუ $\vec{j}$-ს გადავზომავთ O წერტილის ქვემოთ, მაგალითად 4-ჯერ მივიღებთ $\overrightarrow{OP}=-4\vec{j}$. მათი ჯამი იქნება: $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OP}=-5\vec{i}-4\vec{j}$. Q წერტილის კოორდინატებია -5 და -4. ამ შემთხვევაში წერენ $Q(-5;-4)$. შეიძლება შევასრულოთ შებრუნებული მოქმედებებიც. ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი წერტილი, დავაგეგმილოთ იგი საკოორდინატო ღერძებზე, ვიპოვოთ მიღებული გეგმილების კოორდინატები. ამრიგად, კოორდინატთა სისტემაში განიხილება ორი ამოცანა:

1). მოცემული კოორდინატებით ვიპოვოთ წერტილები

2). მოცემული წერტილებით ვიპოვოთ მათი კოორდინატები.

თუ მასშტაბის ერთეული 1 სმ სიგრძისაა, მივიღებთ,

$$A_1(2;-1),\ A_2(-4;3),\ A_3(-2;-3),\ A_4(5;0),$$
$$A_5(0;2),\ A_6(-8;0),\ A_7(0;-1),\ O(0;0).$$

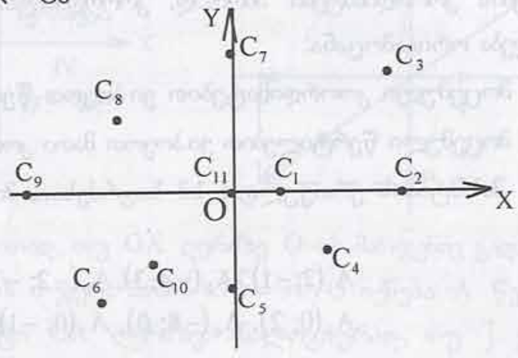


სავარჯიშოები

1) იპოვეთ წერტილები სიბრტყეზე

$B_1(0,0)$; $B_2(-3, 5)$; $B_3(-2, -1)$; $B_4(4, 1)$; $B_5(7, -1)$; $B_6(0, 2)$, $B_7(-3, 0)$; $B_8(0, -6)$; $B_9(5, 0)$

2) ქვემოთ მოცემულ სისტემაში მოცემულია წერტილები. იპოვეთ მათი კოორდინატები.



მანძილი სიბრტყეზე $A(x_0, y_0)$ და $B(x, y)$ წერტილებს შორის განისაზღვრება ასე (პითაგორას თეორემის მიხედვით)

$$|AB| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

თუ $x \geq 0, y \geq 0$, მაშინ მეოთხედების მიხედვით მივიღებთ წერტილებს კოორდინატებით $M_1(x, y)$; $M_2(-x, y)$; $M_3(-x, -y)$; $M_4(x, -y)$.

კოორდინატთა სისტემა სივრცეში ეწოდება საერთო წერტილის მქონე სამი ურთიერთმართობი სიბრტყის ერთობლიობას, რომელთა გადაკვეთის წრფეებზე გარკვეული წესით აღებულია ერთეულოვანი

ვექტორები $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. ამით ფაქტიურად OX, OY და OZ ღერძებზე აღებულია მიმართულებები. ავიღოთ სივრცეში ნებისმიერი M წერტილი. დავაგეგმილოთ იგი XOY სიბრტყეზე. M_0-ის კოორდინატები XOY სიბრტყეზე იყოს x_0, y_0. ამის შემდეგ გამოვსახოთ $\overline{M_0M}$-ვექტორი $\vec{k}$ ერთეულოვანი ვექტორით. ვთქვათ $\overline{M_0M} = Z_0\vec{k}$. მაშინ M წერტილის კოორდინატები იქნება x_0, y_0, z_0 და ვწერთ $M(x_0, y_0, z_0)$. ცხადია, რომ $\overline{OM} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$. ხოლო $\overline{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. M_0-ის, როგორც სივრცის წერტილის, კოორდინატებია $M_0(x_0, y_0, 0)$. შეიძლება განვიხილოთ შებრუნებული ამოცანაც სიბრტყის შემთხვევის ანალოგიურად.

ადვილი მისახვედრია, რომ საკოორდინატო სიბრტყეებით მთელი სივრცე 8 ნაწილად – 8 ოქტანტად იყოფა. ვთქვათ x, y, z დადებითი რიცხვებია, მაშინ ყოველ ოქტანტაში წერტილები ასე ჩაიწერება (ინდექსი აღნიშნავს ნომერს) $M_1(x, y, z)$; $M_2(-x, y, z)$; $M_3(x, -y, z)$; $M_4(-x, -y, z)$. ეს წერტილები იქნება ზედა ნახევარსივრცეში (OXY სიბრტყის ზემოთ). ანალოგიურად ქვედა ნახევარსივრცეში იქნება

$M_5(x, y, -z)$; $M_6(-x, y, -z)$; $M_7(x, -y, -z)$; $M_8(-x, -y, -z)$.

მანძილი სივრცის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ და $M(x, y, z)$ წერტილებს შორის გამოისახება ასე $|M_0M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

არსებობენ სხვა კოორდინატთა სისტემები, როგორიცაა პოლარული, ცილინდრული, სფერული და სხვა.

5. ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲘᲡ ᲛᲝᲪᲔᲛᲘᲡ ᲮᲔᲠᲮᲔᲑᲘ

ფუნქციის მოცემის ხერხებია ანალიზური, ცხრიილური, გრაფიკული, სიტყვიერი და პროგრამული.

ფუნქციის მოცემა *ანალიზური* ხერხით ნიშნავს, რომ იგი მოცემულია ფორმულით $y=f(x)$ სახით. ამის მაგალითები უკვე განვიხილეთ წინა პარაგრაფში.

$$y=\sqrt{1-x^2};\ y=ax^2+bx+c;\ \ y=1+\sqrt{\lg\cos 2\pi x};$$

$$y=x\sin\frac{1}{x};\ \ y=x^2\sin\frac{1}{x};\ \ y=x^x;\ \ y=\sin(\sin x);\ \ y=x^3\sqrt{x\sqrt{x}}$$

ფუნქციებში არ ვასახელებთ განსაზღვრის არეებს. ასეთ შემთხვევებში, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მიღებულია, ისინი განვსაზღვროთ ისეთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, რომელთათვისაც სრულდება ორი პირობა 1. მოცემულ ფორმულას აქვს აზრი ამ სიმრავლეში, (მას ვუწოდებთ განსაზღვრის არეს). 2. ყოველი რიცხვისათვის ამ სიმრავლიდან ვღებულობთ ფორმულის მიხედვით ერთ ნამდვილ რიცხვს. გამოთვლების საბოლოო შედეგი მოცემული x-თვის განსაზღვრის არიდან არის ფუნქციის მნიშვნელობა ამ წერტილში;

$f(x)=\dfrac{x+|x|}{\sqrt{1-x^2}}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-1,\ 1)$.

$x<-1$-თვის ფუნქციის მრიცხველი ღებულობს ნულის ტოლ მნიშვნელობას, მაგრამ ასეთ x-ბს ვერ ავიღებთ, რადგანაც ამ წერტილებში ფუნქცია არაა განსაზღვრული. მაშასადამე განსაზღვრის

არე უნდა იყოს ნამდვილ რიცხვთა ისეთი ქვესიმრავლე, ან ისეთ ქვესიმრავლეთა გაერთიანება, რომლებშიც აღებული რიცხვისათვის ფუნქციის ყველა შემადგენელი ნაწილი ისეთია, რომელზედაც ამ ფუნქციას აზრი აქვს, მისი ყველა ნაწილი უნდა გვაძლევდეს ნამდვილ რიცხვებს. ჩვენს მაგალითში $x<-1$ რიცხვებისათვის $\sqrt{1-x^2}$ არ გვაძლევს ნამდვილ რიცხვებს, თუმცა მრიცხველი $x+|x|$ ხდება ნული.

ფუნქციის მოცემა *ცხრილური* ხერხით ნიშნავს x და y-თვის კონკრეტული შესაბამისი წყვილების მოცემას, რაც ასე ჩაიწერება

$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \hline y & y_1 & y_2 & y_3 & \dots \end{array}$. ე.ი x_1-ს შეესაბამება y_1, x_2-ს შეესაბამება y_2 და ა.შ. ასეთი წყვილების მიღება შეიძლება სხვადასხვა ცდების დროს. ამის მაგალითებაა ოთხნიშნა მათემატიკური ცხრილები, რიცხვთა კვადრატების, კუბების, ფესვების, ლოგარითმების, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცხრილები და ა. შ. ასეთი ცხრილები შეიძლება მივიღოთ კალკულატორებზე, პეგმ-ზე, რომლებსაც ახასიათებს გამოთვლების სისწრაფე და საკმაო დიდი სიზუსტე. მაგრამ ამათი თავისებურება ისაა, რომ წინასწარ ვიღებთ ფუნქციას და შემდეგ მანქანას ვაძლევთ ბრძანებას მოგვცეს ცხრილი. მაგრამ თუ არ ვიცით ფუნქცია და ვიცით მხოლოდ სასრული რაოდენობის შესაბამისი წყვილები $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)\dots$? ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ეს წყვილები სიბრტყის წერტილებია, რომელთა პოვნა ადვილია, მაგრამ შესაბამისი

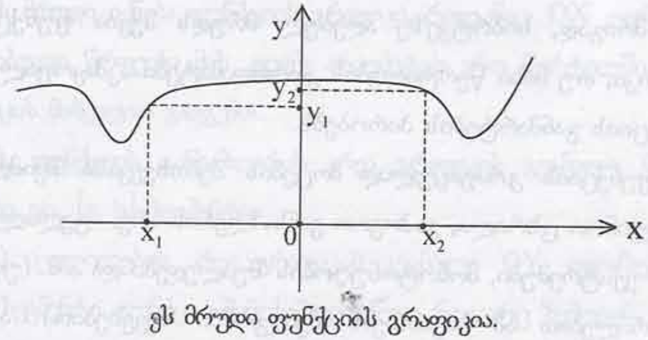
ფუნქციის მიღება, რომელიც ასეთ წყვილებს გვაძლევს, არაა ადვილი საქმე. თუმცა არსებობს გარკვეული მეთოდები ასეთ შემთხვევაში შესაბამისი ფუნქციის მოძებნისათვის (ასეთია ინტერპოლირების ამოცანები); შევნიშნოთ, რომ წყვილები უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქციის განმარტების მოთხოვნებს.

ფუნქციის *გრაფიკული* მოცემა ძალიან გავრცელებულია. მაგალითად მეტროლოგიაში გამოიყენება თვითჩამწერი ხელსაწყოები. ისინი გამოსახავენ მრუდებს, რომლებიც გამოსახავს წნევასა და დროს შორის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას გრაფიკულად (ბაროგრამები). გრაფიკულად გამოსახავენ აგრეთვე რკინიგზის ტრანსპორტზე მატარებლების მოძრაობას, ზღვებსა და ოკეანეებში გემების მოძრაობას, ამა თუ იმ საწარმოებში იყენებენ წარმოებადი პროცესების გრაფიკებს და სხვა.

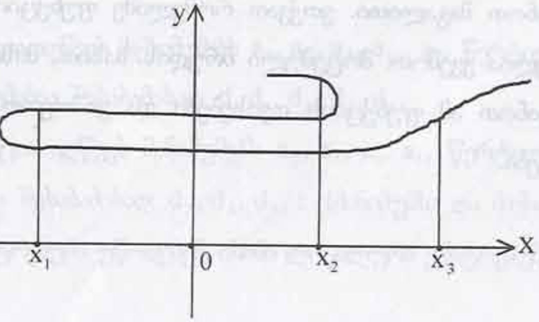
ფუნქციის გრაფიკულ ხერხს, ისე როგორც ცხრილურს, აქვს ღირსებებიც და ნაკლოვანებებიც. ღირსებაა თვალსაჩინოება, ხოლო ნაკლი — არასიზუსტე.

ფუნქცია მოცემულია გრაფიკულად ნიშნავს. სიბრტყეზე მოცემულია მრუდი, რომელიც შეიძლება იყოს რომელიმე ფუნქციის გრაფიკი, ან არ იყოს ფუნქციის გრაფიკი. ეს დამოკიდებულია მრუდის ფორმაზე. ფუნქციის გრაფიკულად მოცემის მაგალითს წარმოადგენს კარდიოგრამა, ოსცილოგრაფის მონაცემები. ფუნქციის გრაფიკი ისე უნდა იყოს სიბრტყეზე განლაგებული საკოორდინატო ღერძების მიმართ, რომ

შესრულებული იყოს ფუნქციის განმარტების პირობები. ე.ი. ყოველი x-თვის მოიძებნოს ერთი y და ორ განსხვავებულ y-ს არ უნდა შეესაბამებოდეს ერთი x. მეორენაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემულ მრუდს OX ღერძის მართობული წრფეები ამ მრუდს არ უნდა კვეთდეს ერთზე მეტ წერტილში. ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ განსაზღვრის არედან x-ის შესაბამისი y იქნება ამ x წერტილიდან აღმართული პერპენდიკულარის სიდიდე (დადებითი, თუ მრუდი OX ღერძის ზემოთაა და უარყოფითი, თუ ეს მრუდი OX ღერძის ქვემოთაა) მრუდის გადაკვეთამდე.



ეს მრუდი ფუნქციის გრაფიკია.

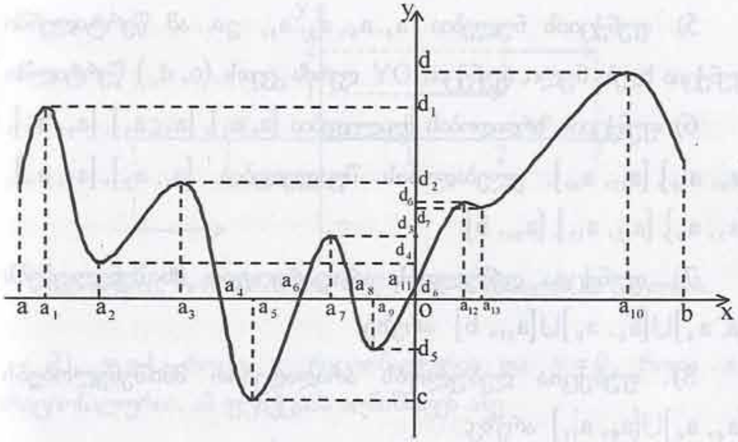


ეს მრუდი არაა ფუნქციის გრაფიკი, რადგან x_1-ს შეესაბამება ორი y, x_2-ს კი — სამი y, თუმცა x_3-ს შეესაბამება ერთი y.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის მოცემის ანალიზურ ხერხს აქვს გარკვეული უპირატესობა სხვა ხერხებთან შედარებით და აქვს ნაკლიც. ზოგჯერ არ ხერხდება ფუნქციის ზუსტი მნიშვნელობის გამოთვლა. ასე მაგალითად, $y=\frac{\sqrt{x^3+7}}{\cos\sin x}$ ფუნქციაში ნებისმიერი x-ის შესაბამისი y შეიძლება ვიპოვოთ მიახლოებით. არც ისე მარტივია ამ ფუნქციის სხვა თვისებების დადგენაც.

ამრიგად, სიბრტყეზე აღებულ მრუდს ჰქვია ფუნქციის გრაფიკი, თუ მისი წერტილების კოორდინატები აკმაყოფილებენ ფუნქციის განმარტების პირობებს.

ფუნქციის *გრაფიკულად* მოცემის შემთხვევაში შეიძლება შევადგინოთ ცხრილი, ვიპოვოთ განსაზღვრის არე, ცვლილების არე, ექსტრემუმი, მონოტონურობის შუალედები და ა.შ. (უფრო დაწვრილებით ამ საკითხებს შემდგომში შევეხებით). ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ რომელიმე ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია ქვემოთ. მოცემული მრუდის სახით, მისი მიხედვით დავადგინოთ ამ ფუნქციის თვისებები და ვიპოვოთ ზოგიერთი სიდიდეები.



ეს მრუდი იქნება ფუნქციის გრაფიკი, რადგანაც OX ღერძის მართობული წრფეები მას კვეთს არაუმეტეს ერთ წერტილში. ამ გრაფიკის მიხედვით ვადგენთ:

1). ფუნქციის განსაზღვრის არეა გრაფიკის გეგმილი OX ღერძზე ე.ი. $[a, b]$ სეგმენტი.

2). ცვლილების არეა გრაფიკის გეგმილი OY ღერძზე — $[c, d]$ სეგმენტი. ფუნქცია შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან.

3). ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმებს $a_1, a_3, a_7, a_{10}, a_{12}$ წერტილებში და ეს მაქსიმუმებია შესაბამისად d, d_1, d_2, d_3, d_6.

4). ფუნქცია აღწევს მინიმუმებს a_2, a_5, a_9, a_{13} წერტილებში. ეს მინიმუმებია შესაბამისად d_7, d_4, d_5, c (მინიმუმსა და მაქსიმუმს ფუნქციის ექსტრემუმს უწოდებენ, ისინი ლოკალური ექსტრემუმებია).

5). ფუნქციის ნულებია a_4, a_6, a_8, a_{11} ე.ი. ამ წერტილებში ფუნქცია ხდება ნული, ფუნქცია OY ღერძს კვეთს $(0, d_6)$ წერტილში.

6). ფუნქციის ზრდადობის შუალედებია $[a, a_1], [a_2, a_3], [a_5, a_7], [a_9, a_{12}], [a_{13}, a_{10}]$. კლებადობის შუალედებია $[a_1, a_2], [a_3, a_5], [a_7, a_9], [a_{12}, a_{13}], [a_{10}, b]$.

7). ფუნქცია ღებულობს არაუარყოფით მნიშვნელობებს $[a, a_4]\cup[a_6, a_8]\cup[a_{11}, b]$ არეზე;

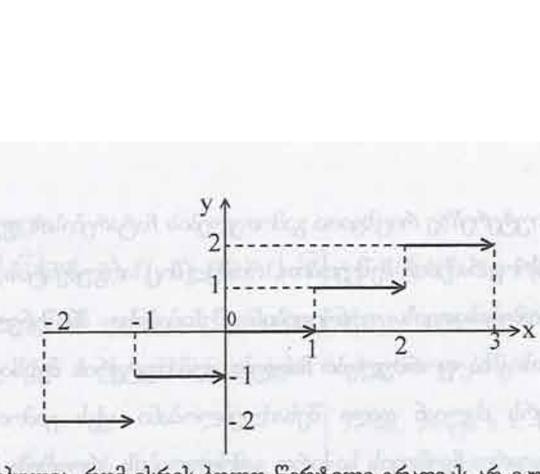
8). ფუნქცია ღებულობს არადადებით მნიშვნელობებს $[a_4, a_6]\cup[a_8, a_{11}]$ არეზე;

9). ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა მთელ განსაზღვრის არეზეა d, ხოლო უმცირესი მნიშვნელობა c.

10). ასეთი ფუნქციის სხვა მნიშვნელოვან თვისებებს ამოზნექილობა-ჩაზნექილობას, სიგლუვეს, უწყვეტობას და სხვას დავადგენთ ქვემოთ.

ფუნქციის მოცემა *სიტყვიერად* ნიშნავს მის მოცემას ამა თუ იმ სიტყვიერი აღწერის მეშვეობით.

მაგალითად 1). y არის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება ნამდვილ x რიცხვს. ეს ფუნქცია აღინიშნება ასე $y=[x]$. იკითხება „y უდრის „ანტე" x-ს, ანუ y უდრის x-ის მთელ ნაწილს". ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty; +\infty)$, ცვლილების არეა ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე. მაგალითად $[5,3]=5$; $[-4,7]=-5$. ცხადია, $[x]=n$, თუ $n \le x \le n+1$, $[\pi]=3$, $[x+m]=[x]+m$, თუ m მთელია. $y=[x]$ გრაფიკი ასე გამოისახება



მიღებულია, რომ ისრის ბოლო წერტილი გრაფიკს არ ეკუთვნის.

2). $y=1$, როცა x რაციონალურია და $y=0$, როცა x ირაციონალურია. ამ ფუნქციას აღნიშნავენ ასე

$$y=\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია}\\ 0, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია.}\end{cases}$$

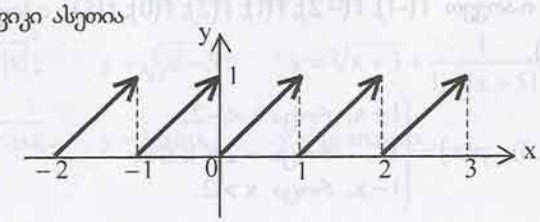
ცხადია, $\chi(2,3)=1$, $\chi(\sqrt{2})=0$, $\chi(\pi)=0$, $\chi(-3)=1$.

ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty, +\infty)$, ხოლო ცვლილების არეა $\{0, 1\}$. ამ ფუნქციას დირიხლეს ფუნქცია ჰქვია. მისი გრაფიკის დახაზვა შეუძლებელია (ყოველი რიცხვის ნებისმიერ მცირე მიდამოში არსებობენ უსასრულოდ მრავალი როგორც რაციონალური, ისე ირაციონალური რიცხვები, მათი „რაოდენობა" იმდენია, რამდენი რიცხვიცაა მთელ $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალზე).

3). $y=\{x\}$ – x-ის წილად ნაწილს $y=\{x\}=x-[x]$. ცხადია,

$$\{5,\ 3\}=0{,}3 \quad \{-4,\ 7\}=0{,}3.$$

მისი გრაფიკი ასეთია



კომპიუტერებზე რიცხვითი გამოთვლების ჩატარებისას ფუნქციები მოიცემა *პროგრამების* მეშვეობით, რომელშიც არგუმენტის საჭირო მნიშვნელობებისათვის ფუნქციების შესაბამისი მნიშვნელობების გამოთვლის მზა ფორმულები ჩაიდება კომპიუტერის მეხსიერებაში. კომპიუტერს ძალიან დიდი შესაძლებლობანი აქვს გამოთვლების მხრივ. მთავარია ჩვენთვის საჭირო გამოთვლების პროგრამა სწორად იყოს შედგენილი და შეესაბამებოდეს იმ ენას, რომელზედაც ვაწარმოებთ გამოთვლებს. ამ წესით შეიძლება ამოიხსნას ნებისმიერი განტოლება, დაიხაზოს ფუნქციის გრაფიკი და ა. შ.

სავარჯიშოები

1). $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-7x+10}$.

გამოთვალეთ $f(-2)$; $f(0)$; $f(3)$; $f\left(\dfrac{1}{5}\right)$; $f(2,\ 7)$. აქვს თუ არა აზრი $f(2)$; $f(5)$; $3f(6)$ - $7f(-1)$. იპოვეთ $D(f)$.

2). $f(x)=|x|-x$.

იპოვეთ $f(-1)$; $f(-2)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(0)$; $f(5)$; იპოვეთ $D(f)$ და $E(f)$.

3). $\varphi(x)=\begin{cases} 1+x, & \text{როცა } x<-2; \\ x^2, & \text{როცა } -2\le x\le 2; \\ 1-x, & \text{როცა } x>2. \end{cases}$

იპოვეთ

$f(\sqrt{3})$, $f(-3)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(\sqrt{5})$, $f(-10)$, $f(-2)$, $f(17)$.

იპოვეთ ამ ფუნქციის განსაზღვრის და ცვლილების არეები. იპოვეთ ისეთი x-ების მნიშვნელობები, რომელთა y-ები ერთიდაიგივეა.

4). არის თუ არა ფუნქცია $y=\begin{cases} 3-4x, & \text{როცა } x<-3; \\ x^2, & \text{როცა } 0<x\le 3; \\ 1, & \text{როცა } x>4. \end{cases}$

პასუხი დაასაბუთეთ. დადებითი პასუხის შემთხვევაში იპოვეთ $D(f)$ და $E(f)$. ააგეთ გრაფიკი.

5). არის თუ არა ფუნქცია

$y=\begin{cases} 3-4x, & \text{როცა } x<-3; \\ x^2, & \text{როცა } x>-5; \\ 2x, & \text{როცა } x<10. \end{cases}$ პასუხი დაასაბუთეთ.

6). იპოვეთ განსაზღვრის არეები ფუნქციებისა

$y=\sqrt[4]{2-x^4}$, $\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $\quad y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$,

$y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$, $\quad y=\sqrt{x^2-8x+15}$, $\quad y=\sqrt[3]{-x^2+x-6}$,

$y=\sqrt{1-|x|}$, $\quad y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2-9}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-16}}$, $\quad y=\sqrt{[x]-x}$,

$y=\sqrt{1-|x|}$, $\quad y=\sqrt{|x|-5}$, $\quad y=\sqrt[3]{x+3}+\dfrac{1}{\lg(4x+5)}$,

$y=\sqrt{\lg\cos x}$, $\quad y=\lg\sin x$, $\quad y=\lg\arcsin x$,

$y=\arcsin(2x-3)$, $y=\arccos\dfrac{x-2}{5-x}$, $y=\arccos\dfrac{1}{\sin x}$,

$y=\arcsin(|x|-3)$.

7). $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[1;4]$ სეგმენტზე. რა იქნება განსაზღვრის არეები ფუნქციებისა

$$f(x^2),\ f(x-2),\ f(2x),\ f\left(\frac{x}{2}\right),\ f(x^3),\ f\left(\frac{1}{x}\right).$$

როგორი აქნება მათი განსაზღვრის არეები, თუ $f(x)$-ის განსაზღვრის არეებად ავიღებთ $[-5,8]$?, $(-3,\ 10]$?

8). მოიყვანეთ ისეთი ფუნქციების მაგალითები, რომლებიც განსაზღვრულია ა). რიცხვთა ღერძის ყველა წერტილზე. გარდა $x=0,\ x=-1,\ x=2$-სა ბ). $[-1,1]$, გ). $(-5,5)$, დ). $(-7,7]$, ე). მხოლოდ ერთ წერტილზე, მაგალითად $x=8$ წერტილზე.

9). ააგეთ გრაფიკები ფუნქციებისა

$y=-5x+3$, $y=-5x-3$, $y=5x+3$, $y=5x-3$,

$y=x^2-7x+10$, $y=|x-2|$, $y=-|x+5|$, $y=|x|+x$,

$$y=2-|x|,\quad y=\begin{cases}0, & \text{როცა } x=1\\ -2, & \text{როცა } x=2\\ 5, & \text{როცა } x=3\end{cases},$$

$y=|\lg x|$, $y=e^{-x}$, $y=\arccos\cos x$, $y=\sin x+|\sin x|$,

$y=|\mathrm{tg}x|$, $y=|\mathrm{arctg}x|$, $y=x^2\,\mathrm{sign}x$, $y=\dfrac{1}{[x]}$, $y=[x-[x]]$.

10). გამოთვალეთ $\chi(|x|)$, $\chi(\chi(x))$, $\chi\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$, $\chi(\sqrt{2}-7{,}2)$,

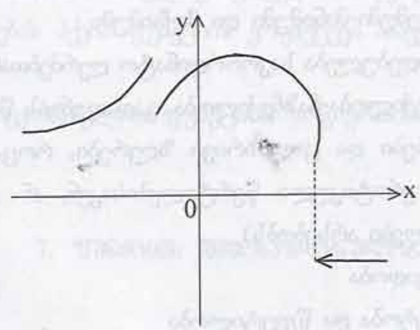
$\chi\left((3\sqrt{2}-\pi)^2-\pi^2+6\pi\sqrt{2}\right)$, χ -დირიხლეს ფუნქციაა.

11). ფუნქცია მოცემულია ცხრილურად

x	0	1	-1	-2	2	3	-3	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	π	e
y	0	1	1	4	4	9	9	5	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{64}$	π^2	e^2

რას იტყვით ამ ფუნქციის შესახებ მისი განსაზღვრის არეზე, ცვლილებების არეზე, გრაფიკზე და ა.შ.

12). მოცემულია რომელიღაც ფუნქციის გრაფიკი



იპოვეთ $D(y)$, $E(y)$ და მისი რამდენიმე მნიშვნელობა, ჩამოთვალეთ დამახასიათებელი თვისებები.

6. ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲘᲡ ᲫᲘᲠᲘᲗᲐᲓᲘ ᲗᲕᲘᲡᲔᲑᲔᲑᲘ
ᲨᲔᲡᲐᲕᲐᲚᲘ

ფუნქციის შესწავლა, ანუ გამოკვლევა ნიშნავს მისი თვისებების დადგენას, როგორიცაა:

1. განსაზღვრის და ცვლილების არეები (თუ ისინი წინასწარ არაა მოცემული)

2. შემოსაზღვრულობა

3. მონოტონურობა-ზრდადობა და კლებადობა

4. ლუწ-კენტოვნება

5. პერიოდულობა

6. ნიშან-მუდმივობა-განსაზღვრის არის იმ ქვესიმრავლეების დადგენა, რომლებშიც $y>0$ და $y<0$.

7. ექსტრემუმი-მინიმუმი და მაქსიმუმი

8. დამოკიდებულება საკოორდინატო ღერძებთან

9. ამოზნექილობა-ჩაზნექილობა, გადაღუნვის წერტილები

10. ზღვრები და ცალმხრივი ზღვრები, როცა არგუმენტი მიისწრაფვის კრიტიკული წერტილებისაკენ, ან $\pm\infty$-კენ (თუ ასეთი წერტილები არსებობს)

11. შექცევადობა

12. უწყვეტობა და წყვეტილობა

13. ცნობილ ფუნქციასთან დაკავშირება (მაგალითად, $(f(x))^{-1}$ შეისწავლება $f(x)$-ით)

14. ასიმპტოტები

15. დამატებითი წერტილების პოვნა

16. მიღებული შედეგებით სქემის შედგენა

17. მიღებული მონაცემებით გრაფიკის აგება.

ყველა ამ საკითხების შესწავლას წითელ ზოლად გასდევს ფუნქციის განსაზღვრის არის ელემენტებსა და მის მნიშვნელობათა სიმრავლის ელემენტებს შორის დამოკიდებულების დადგენა.

ჩამოთვლილი თვისებებიდან ზოგიერთი მათგანი დადგინდება ელემენტარული მეთოდებით მხოლოდ საშუალო სკოლის ცოდნის ბაზაზე, ძირითადად კი ფუნქცია შეისწავლება დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდებით. შევნიშნოთ, რომ ზოგიერთ ფუნქციას შეიძლება არ გააჩნდეს ჩამოთვლილი თვისებებიდან რომელიმე მათგანი. ასე მაგალითად $\sqrt{x}$, $\log_a x$ ფუნქციების ლუწ-კენტოვნებაზე არ ლაპარაკობენ, რადგანაც მათი განსაზღვრის არეები არაა სიმეტრული სათავის მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ რომელიმე შუალედში, ან წერტილში ფუნქციის რაიმე თვისებას ჰქვია ფუნქციის ყოფაქცევა ამავე შუალედში, ან წერტილში.

ახლა შევისწავლოთ ფუნქციის ზოგიერთი თვისება.

7. ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲘᲡ ᲨᲔᲛᲝᲡᲐᲖᲦᲕᲠᲣᲚᲝᲑᲐ

ფუნქციის შემოსაზღვრულობა (ქვემოდან შემოსაზღვრულობა, ზემოდან შემოსაზღვრულობა და შემოსაზღვრულობა) განიმარტება მისი მნიშვნელობათა სიმრავლის შემოსაზღვრულობით. ამიტომ ამ საკითხზე დაწვრილებით აღარ შევჩერდებით: დავკმაყოფილდებით

$E(f)=\{f(x): x \to f(x)\}$ სიმრავლის ზოგადი თვისებების დადგენით. ვიტყვით, რომ $f(x)$ შემოსაზღვრულია ქვემოდან, თუ $\exists A \in R,\ \forall x \in D(y): f(x) \geq A$. გრაფიკულად ეს იმას ნიშნავს, რომ ასეთი ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია $y=A$ წრფის ზემოთ. ფუნქცია შემოსაზღვრულია ზემოდან, ნიშნავს, რომ, $\exists B \in R,\ \forall x \in D(y): f(x) \leq B$. ამ შემთხვევაში ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია $y=B$ წრფის ქვემოთ. ვიტყვით, რომ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, თუ იგი შემოსაზღვრულია როგორც ქვემოდან, ისე ზემოდან, რაც გეომეტრიულად იმას ნიშნავს, რომ არსებობს OX ღერძის ისეთი პარალელური წრფეები $y=A$ და $y=B$, რომელთა შორის მოთავსებულია მოცემული ფუნქციის გრაფიკი; ფუნქციის შემოსაზღვრულობას ასეც განმარტავენ: $f(x)$ შემოსაზღვრულია, თუ $\exists M>0,\ \forall x \in D(y): |f(x)| \leq M$. ეს უტოლობა ტოლფასია ორმაგი უტოლობისა $-M \leq f(x) \leq M$. ფუნქციის შემოსაზღვრულობის განმარტების დროს ხმარობენ ასეთ ტერმინსაც „ფუნქცია შემოსაზღვრულია განსაზღვრის არეზე". ისედაც ცხადია, რომ, როცა ვლაპარაკობთ $f(x)$-ზე, x-ები აიღება $D(f)$-დან[1)]. ამრიგად, აქ ლაპარაკია ფუნქციის თვისებებზე მისი განსაზღვრის არეზე და არა განსაზღვრის არის ნაწილზე. თუ მოცემულ განმარტებებში ხსენებული A არ მოიძებნება, მაშინ ფუნქციას ეწოდება ქვემოდან შემოუსაზღვრელი. ანალოგიურად,

[1)] შეიძლება ვილაპარაკოთ ფუნქციის ყოფაქცევაზე მისი განსაზღვრის არის ნაწილზეც.

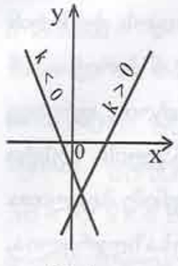
თუ ხსენებული B არ მოიძებნება, მაშინ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია ზემოდან. ფუნქცია შეიძლება იყოს ქვემოდან შემოსაზღვრული და ზემოდან შემოუსაზღვრელი, ან პირიქით, ან საერთოდ შემოუსაზღვრელი. შეიძლება განვმარტოთ აგრეთვე $\inf f, \sup f$ როგორც f-ის მნიშვნელობათა სიმრავლის ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრები. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი.

1. წრფივი ფუნქცია $y=kx+b$ შემოუსაზღვრელია. (ნახ. 1) $E(y)=R$.

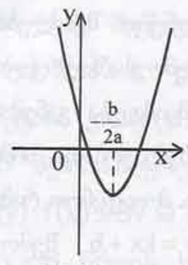
2. კვადრატული ფუნქცია $y=ax^2+bx+c$ შემოსაზღვრულია ქვემოდან და არაა შემოსაზღვრული ზემოდან, როცა $a>0$; ხოლო შემოსაზღვრულია ზემოდან და არაა შემოსაზღვრული ქვემოდან, როცა $a<0$ (ნახ. 2, 3). $E(y)=\left(\frac{4ac-b^2}{4a},\ +\infty\right)$, როცა $a>0$ და $E(y)=\left(-\infty,\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, როცა $a<0$.

3. მაჩვენებლიანი ფუნქცია $y=a^x$ შემოსაზღვრულია ქვემოდან და არაა შემოსაზღვრული ზემოდან (ნახ. 4), $E(y)=(0,+\infty)$.

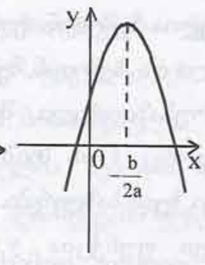
4. ლოგარითმული ფუნქცია $y=\log_a x$, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $y=\mathrm{tg}x,\ y=\mathrm{ctg}x,\ y=[x]$ შემოუსაზღვრელი ფუნქციებია, (ნახ. 5, 6, 7, 8). ლაპარაკია აღნიშნული ფუნქციების მთელს განსაზღვრის არეზე), მათი $E(y)=(-\infty,+\infty)$, გარდა უკანასკნელი ფუნქციისა.



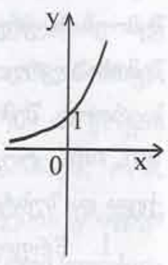
ნახ. 1



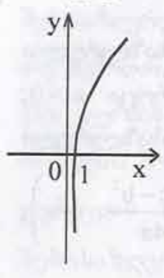
ნახ. 2



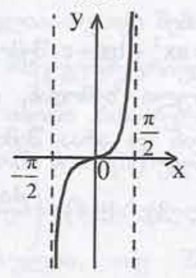
ნახ. 3



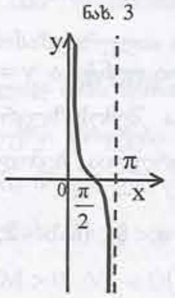
ნახ. 4



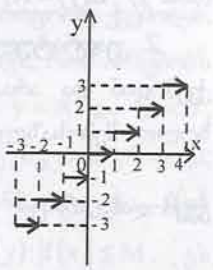
ნახ. 5



ნახ. 6

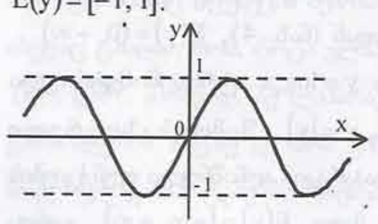


ნახ. 7

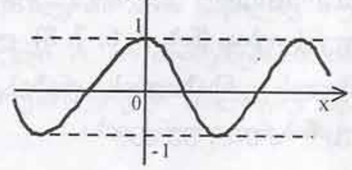


ნახ. 8

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $y=\sin x$ (ნახ. 9) და $y=\cos x$ (ნახ. 10) შემოსაზღვრული ფუნქციებია. მათი $E(y)=[-1,1]$.



ნახ. 9



ნახ. 10

6. ფუნქციები დირიხლეს, $y=c$, $y=\operatorname{sign}x$, $y=\{x\}$ აგრეთვე შემოსაზღვრული ფუნქციებია.

8. მონოტონური ფუნქციები

ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია $<a,b>$-ზე, თუ ნებისმიერი x_1 და x_2-თვის ამ შუალედიდან, როცა $x_1<x_2$, მაშინ სრულდება უტოლობა $f(x_1)<f(x_2)$ (არაა გამორიცხული ტოლობაც. ცხადია, ფუნქცია ზრდადი იქნება თუ $\forall x_1>x_2$-თვის $f(x_1)>f(x_2)$).

$f(x)$-ს ეწოდება კლებადი $<a,b>$ შუალედზე, თუ $\forall x_1<x_2 \in <a,b>$ სრულდება უტოლობა $f(x_1)>f(x_2)$ (აქაც არაა გამორიცხული ტოლობა, ცხადია აგრეთვე, რომ ფუნქცია იქნება კლებადი, თუ $\forall x_1>x_2$-თვის $f(x_1)<f(x_2)$). დასაშვებია, რომ $<a,b>\subset D(f)$, ე.ი. ფუნქცია შეიძლება არ იყოს ზრდადი და კლებადი $D(y)$-ზე, მაგრამ მის ქვესიმრავლეზე იყოს როგორც ზრდადი, ისე კლებადი. ზრდად და კლებად ფუნქციებს მონოტონური ფუნქციები ჰქვია. ზრდად ფუნქციას არაკლებად ფუნქციას, ხოლო კლებადს არაზრდად ფუნქციასაც უწოდებენ; განიმარტება ე.წ. მკაცრად მონოტონური და არამკაცრად მონოტონური ფუნქციებიც. ასე მაგალითად ფუნქციები $y=c$ და $y=\sqrt{\lg\cos 2\pi x}$ არაზრდადიცაა და არაკლებადიც. შეიძლება ფუნქცია განსაზღვრის

არეზე არ იყოს არც ზრდადი და არც კლებადი, მაგრამ განსაზღვრის არე შეიძლება დავყოთ ისეთ ნაწილებად, თითოეულ რომელთაგანზეც ეს ფუნქცია იქნება ზრდადი და კლებადი. ასეთ ფუნქციებს უბან-უბან მონოტონური ფუნქციები ჰქვია. შეიძლება ფუნქცია მთელს განსაზღვრის არეზე, ან განსაზღვრის არის არც ერთ ნაწილზე (ქვესიმრავლეზე) არ იყოს მონოტონური. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითები.

1. $y = kx + b$, როცა $k > 0$ ზრდადია R-ზე. მართლაც, ვთქვათ $\forall x_1 < x_2 \in R$, მაშინ $y_1 - y_2 = kx_1 + b - (kx_2 - b) = k(x_1 - x_2) < 0$. ე.ი. $y_1 < y_2$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ როცა $k < 0$ წრფივი ფუნქცია კლებადია (იხ. ნახ. 1).

2. $y = a^x$, $y = \log_a x$, როცა $a > 1$, ზრდადი ფუნქციებია, ხოლო როცა $0 < a < 1$, კლებადი ფუნქციებია.

3. $y = x^2$ განსაზღვრის არეზე არც ზრდადია და არც კლებადი, მაგრამ ცალ-ცალკე $(-\infty, 0)$-ზე კლებადია, ხოლო $(0, +\infty)$-ზე ზრდადი. მართლაც $\forall x_1 < x_2 \in (-\infty, 0)$ $x_1^2 > x_2^2$, ხოლო $\forall x_1 < x_2 \in (0, +\infty)$ $x_1^2 < x_2^2$.

4. $y = \sin x$ ფუნქცია განსაზღვრის R არეზე არც ზრდადია და არც კლებადი. მაგრამ R შეიძლება დავყოთ ისეთ ნაწილებად, რომლებშიც იგი იქნება ზრდადი და კლებადი; ზრდადია $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ ყოველ ცალკეულ შუალედში $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ხოლო $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right]$ ცალკეულ

შუალედში კლებადია. აქ ყურადღება უნდა მივაქციოთ სიტყვებს „ცალკეულ შუალედებს“. საქმე იმაშია, რომ $y = \sin x$ გაერთიანებულ შუალედებში, როგორც ერთ მთლიან არეზე $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ არ არის ზრდადი. ასევე არაა კლებადი $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right]$ არეზე. ანალოგიურად, $y = \mathrm{tg}x$ ზრდადია ცალკეულ შუალედში $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $y = \mathrm{ctg}x$ კლებადია ცალკეულ შუალედში $(\pi k, \pi + \pi k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

5. $y = ax^2 + bx + c$, როცა $a < 0$, ზრდადია $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$-ზე, $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$-ზე კი კლებადია, ხოლო როცა $a > 0$, მაშინ კლებადია $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, ზრდადია $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ (იხ. ნახ. 2, 3).

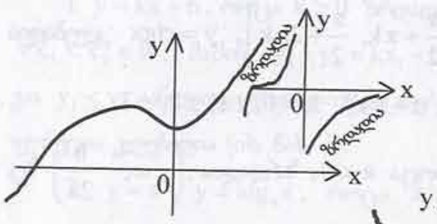
6. $y = \left[\frac{1}{x}\right]$ $(0, 1]$-ზე კლებადია, $(1, +\infty)$ შუალედზე ეს ფუნქცია 0-ის ტოლია, შეიძლება ვთქვათ, რომ იგი არაზრდადია, არაკლებადია.

7. დირიხლეს ფუნქცია $\chi(x)$ არც ზრდადია და არც კლებადი მთელს განსაზღვრის არეზე.

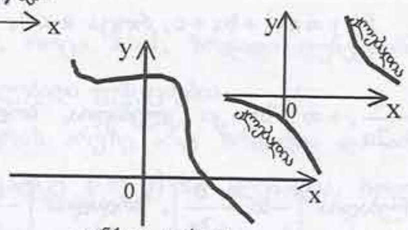
ფუნქციის ზრდადობა გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ როცა არგუმენტები იზრდება, მაშინ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობებიც

იზრდება. ეს იმას ნიშნავს, რომ როცა აბსცისთა ღერძზე „ვმოძრაობთ" მარცხნიდან მარჯვნივ, მაშინ ფუნქციის გრაფიკი მიემართება ქვემოდან ზემოთ, - ქვედა მარცხენა კუთხიდან ზედა მარცხენა კუთხისაკენ (ასეთი გამოთქმა პირობითია).

კლებადი ფუნქციის შემთხვევაში კი პირიქით, როცა არგუმენტები იზრდება, ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები მცირდება, ე.ი. გრაფიკი ეშვება ზემოდან ქვემოთ (დააკვირდით მოცემულ გრაფიკებსაც).



ფუნქცია ზრდადია



ფუნქცია კლებადია

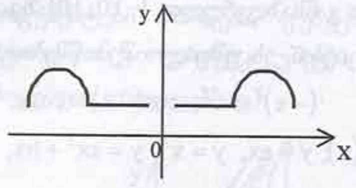
9. ლუწი და კენტი ფუნქციები

ნამდვილ რიცხვთა ქვესიმრავლეს D-ს ეწოდება სიმეტრული სათავის მიმართ, ან უბრალოდ სიმეტრული, თუ x და $-x$ ერთდროულად მიეკუთვნება D-ს. მაგალითად $<-a, a>$, $(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$, $(-\infty, \infty)$ სიმეტრული არეებია.

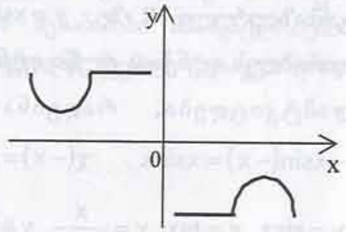
ვიტყვით, რომ სიმეტრულ არეზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ლუწია, თუ $\forall x \in D$-თვის $f(-x)=f(x)$ და კენტია, თუ $f(-x)=-f(x)$. მაგალითად $y=ax^2+b$ – განსაზღვრული R-ზე, $y=\sqrt{1-x^2}$ – განსაზღვრული $[-1,1]$-ზე, $y=\cos x$ – განსაზღვრული R-ზე, $y=x\sin x$ განსაზღვრული $[-10,10]$-ზე, დირიხლეს ფუნქცია ლუწი ფუნქციებია. ეს უშუალო შემოწმებით დამტკიცდება, რადგანაც $(-x)^2=x^2$, $\cos(-x)=\cos x$, $-x\sin(-x)=x\sin x$. $\chi(-x)=\chi(x)$; $y=ax$, $y=x^3$, $y=ax^3+bx$, $y=\sin x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\dfrac{x}{\cos x}$, $y=x^2\mathrm{ctg}x$ კენტი ფუნქციებია;

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკი ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრულია, რადგანაც, თუ $(x, f(x))$ ლუწი ფუნქციის გრაფიკის წერტილია, მაშინ $(-x, f(x))$ ამავე გრაფიკის წერტილი იქნება. ადვილი მისახვედრია, რომ ეს წერტილები სიმეტრულია ორდინატთა ღერძის მიმართ. კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრულია კოორდინატთა სათავის მიმართ. მართლაც, რადგანაც თუ $(x, f(x))$ მოცემული ფუნქციის გრაფიკის წერტილია, მაშინ წერტილი $(-x, -f(x))$ ამავე გრაფიკის წერტილი იქნება. ეს ორივე წერტილი სიმეტრულია კოორდინატთა სისტემის სათავის მიმართ. ამრიგად, ლუწი ფუნქციის ასაგებად საკმარისია იგი ავაგოთ რომელიმე ნახევარსიბრტყეში, ან $x>0$-თვის, ან $x<0$ და მეორე ნახევარსიბრტყეში გრაფიკის ეს ნაწილი გადავიტანოთ სიმეტრულად ორდინატთა ღერძის მიმართ. ასევე კენტი ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ იგი $x>0$-თვის, ან $x<0$-თვის და შემდეგ გრაფიკის ეს ნაწილი სიმეტრულად გადავიტანოთ

0 წერტილის მიმართ. ასე მივიღებთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკს მთელს განსაზღვრის არეზე. გრაფიკის შედგენის დროს საჭიროა ყურადღების მიქცევა იმაზე, რომ ზუსტად იქნეს დაცული განმარტების მოთხოვნები.



ლუწი ფუნქციის გრაფიკი



კენტი ფუნქციის გრაფიკი

თუ დავაკვირდებით $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციების გრაფიკებს, მათზე შევნიშნავთ ამ პირობების შესრულებას. ფუნქცია შეიძლება იყოს არც ლუწი და არც კენტი.

მაგალითად, $y = [x]$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \sin x + \cos x$, $y = a^x$ არც ლუწია და არც კენტი; ხოლო $y = \sqrt{x}$, $y = \log_a x$ ფუნქციების ლუწ-კენტობაზე საერთოდ არ შეიძლება ლაპარაკი, რადგანაც მათი განსაზღვრის არეები არაა სიმეტრიული. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ სიმეტრიულ არეზე განსაზღვრული ფუნქცია $f(x)$ წარმოიდგინება ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამის სახით ასე

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

მართლაც, I შესაკრები ლუწია, რადგანაც თუ პირველ

მრიცხველში x-ს შევცვლით $-x$-ით, მივიღებთ იგივე მრიცხველს $f(x) + f(-x) = f(-x) + f(x)$, ხოლო თუ მეორე წილადის მრიცხველში x შევცვლით $-x$-ით, მივიღებთ მის მოპირდაპირეს

$$f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)).$$

უშუალო შემოწმებით დამტკიცდება ლუწი და კენტი ფუნქციების შემდეგი თვისებები:

1. ორი ლუწი ფუნქციის ჯამი და სხვაობა ლუწი ფუნქციაა.
2. ორი კენტი ფუნქციის ჯამი და სხვაობა კენტი ფუნქციაა.
3. ორი ლუწი ან ორი კენტი ფუნქციის ნამრავლი, ან განაყოფი (როცა გამყოფი $\neq 0$) ლუწი ფუნქციაა, იგულისხმება, რომ ყველა შემთხვევაში მოცემული ფუნქციები განსაზღვრული უნდა იყოს ერთიდაიგივე სიმეტრიულ არეზე. ასევე შევნიშნოთ, რომ თუ ლუწი, ან კენტი ფუნქცია $x > 0$ არეზე ზრდადია, მაშინ $x < 0$-თვის ლუწი ფუნქცია კლებადია, ხოლო კენტი ფუნქცია – ზრდადი და პირიქით.

10. პერიოდული ფუნქციები

D არეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, თუ არსებობს ისეთი $\ell \neq 0$ რიცხვი, რომ $\forall x \in D$-თვის $f(x + \ell) = f(x)$. ℓ-ს ეწოდება $f(x)$-ის პერიოდი, ცხადია $x + \ell \in D$. შევნიშნოთ, რომ $x - \ell, x \pm 2\ell, x \pm 3\ell, \ldots x \pm k\ell, \ldots$ წერტილები მიეკუთვნებიან D-ს და $-\ell, \pm 2\ell, \pm 3\ell, \ldots$ აგრეთვე იქნებიან მოცემული

ფუნქციის პერიოდები. მართლაც, $f(x)=f((x-\ell)+\ell)=f(x-\ell)$, ე.ი.

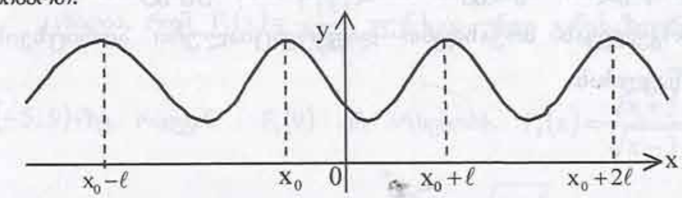
$$f(x)=f(x-\ell);\ f(x+2\ell)=f((x+\ell)+\ell)=f(x+\ell)=f(x);$$

$$f(x-2\ell)=f((x-\ell)-\ell)=f(x-\ell)=f(x), \quad \text{ე.ი.} \quad f(x-2\ell)=f(x).$$

ამრიგად, თუ ℓ არის $f(x)$-ის პერიოდი, მაშინ მისი პერიოდები იქნება $k\ell$, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია $k \in Z$, ნულისაგან განსხვავებული. აქედან გამომდინარეობს, რომ პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრის არეში x-თან ერთად შედის $x+k\ell,\ k\in Z$. პერიოდებიდან უმცირეს დადებით რიცხვს ჰქვია ძირითადი პერიოდი, ანუ მინიმალური პერიოდი. მაგალითად $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციების ძირითადი პერიოდია 2π, დანარჩენი პერიოდებია $2\pi k,\ k\in Z$. მართლაც, $\sin(x+2\pi k)=\sin x$, ასევე $\cos(x+2\pi k)=\cos x$. $\operatorname{tg}x$ და $\operatorname{ctg}x$ ფუნქციების პერიოდებია πk, მათი ძირითადი პერიოდია π. მუდმივი ფუნქცია პერიოდულია, ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი მისი პერიოდია. მართლაც $f(x)=c=f(x+\alpha),\ \alpha\in R$. ცხადია, ამ ფუნქციას ძირითადი პერიოდი არ აქვს. დირიხლეს ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდია ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი. მართლაც თუ x ირაციონალურია და r რაციონალური, მაშინ $x+r$ ირაციონალურია, ხოლო თუ x რაციონალურია, მაშინ $x+r$ რაციონაალური იქნება, ამიტომ $\chi(x+r)=\chi(x)$; ადვილი მისახვედრია, რომ ირაციონალური რიცხვი არ იქნება ამ ფუნქციის პერიოდი. დირიხლეს ფუნქციასაც არა აქვს ძირითადი პერიოდი, რადგან ვერ დავასახელებთ უმცირეს დადებით პერიოდს.

საკმარისია პერიოდული ფუნქციების ყოფაქცევის შესწავლა

$[x_0,\ x_0+\ell]$ მონაკვეთზე, რადგანაც მათი ყოფაქცევა განსაზღვრის არის სხვა ნაწილზე, კერძოდ ℓ სიგრძის სხვა მონაკვეთზე, პერიოდულობის გამო, ისეთივე იქნება, როგორც იმავე $[x_0,\ x_0+\ell]$ სეგმენტზე. ამით ადვილდება პერიოდული ფუნქციების გრაფიკების აგება. საკმარისია დავხაზოთ გრაფიკი ნებისმიერ ℓ სიგრძის შუალედზე და შემდეგ მოვახდინოთ გრაფიკის ამ ნაწილის პარალელური გადატანა OX ღერძის გასწვრივ $\pm\ell,\ \pm2\ell,\ \pm3\ell,\ldots$ მანძილით, როგორც ეს მითითებულია 1 ნახაზზე, ასე მაგალითად $y=\sin x$ გრაფიკის ასაგებად საკმარისია მისი გრაფიკის აგება $[0,\ 2\pi]$ მონაკვეთზე, დანარჩენ 2π სიგრძის მონაკვეთზე ეს აგებული გრაფიკი პარალელურად გადაიტანება OX ღერძის მიმართ.



ნახ. 1

ასევე მიიღება $y=\cos x$-ის გრაფიკი. $\operatorname{tg}x$ და $\operatorname{ctg}x$-ის გრაფიკები კი π სიგრძის შუალედზე აიგება, დანარჩენ შუალედებში ანალოგიურად გადაიტანება ox ღერძის გასწვრივ.

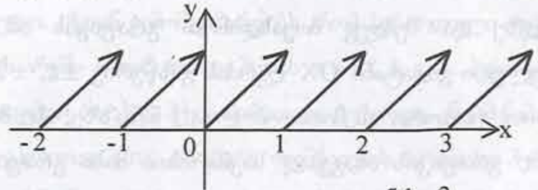
მოვიყვანოთ მაგალითები.

1. $y=\{x\}=x-[x]$ ფუნქციისათვის ნებისმიერი მთელი რიცხვი

მისი პერიოდია. მართლაც

$$\{x+m\}=(x+m)-[x+m]=x+m-([x]+m)=x-[x]=\{x\},$$ (იხ. ნახ. 2).

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ სხვა ნებისმიერი არამთელი რიცხვები არ იქნება მისი პერიოდი. ამრიგად, $\{x\}$ ფუნქციის ძირითადი პერიოდია 1.



ნახ. 2

შესავალში ჩამოთვლილი ფუნქციის სხვა თვისებებს შევისწავლით შემდეგში თანდათანობით. ფუნქციის მთლიან გამოკვლევას მოვახდენთ დიფერენციალური აღრიცხვის შესწავლისას.

11. მოქმედებანი ფუნქციებზე

ორი, ან სასრული რაოდენობის ფუნქციებზე მოქმედებების ქვეშ ვგულისხმობთ მათ შეკრებას, გამოკლებას, გამრავლებას და გაყოფას. ფუნქციებზე შეიძლება განვიხილოთ სხვა ალგებრული მოქმედებანიც, როგორიცაა ახარისხება, ამოფესვა და სხვა. ვიდრე დავიწყებდეთ ფუნქციებზე მოქმედებებს, საჭიროა წინასწარ დავადგინოთ, მათი საერთო განსაზღვრის არე. ასე მაგალითად, $f_1(x)=\sqrt{x^2-25}$ და

$f_2(x)=\sqrt{9-x^2}$ ფუნქციებზე მოქმედებებს აზრი არ ექნება, რადგანაც მათი განსაზღვრის არეებს $D(f_1)=(-\infty,-5)\cup[5,+\infty)$, $D(f_2)=[-3,3]$ არ აქვს საერთო ნაწილი.

შევთანხმდეთ, რომ მოცემული ფუნქციების მოქმედებათა შედეგად მიღებული ფუნქცია უნდა განვსაზღვროთ მოცემული ფუნქციების განსაზღვრის არეების საერთო ნაწილზე[1]. განვიხილოთ მაგალითი. თუ $f_1(x)=\sqrt{x+5}$, $D(f_1)=[-5,+\infty)$ და $f_2(x)=\sqrt{9-x}$, $D(f_2)=[-\infty,9]$, მაშინ $F_1(x)=f_1(x)\pm f_2(x)$, $F_2(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$ ფუნქციები უნდა განვსაზღვროთ $[-5,9]$ სეგმენტზე, რომელზედაც აღებული ყოველი x_0-თვის

$$F_1(x_0)=f_1(x_0)\pm f_2(x_0),\quad F_2(x_0)=f_1(x_0)\cdot f_2(x_0).$$

ცხადია, რომ $F_3(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ფუნქცია უნდა განვსაზღვროთ $[-5,9)$-ზე, რადგან $F_3(9)$ არ არსებობს. $F_4(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-3}}$-ის განსაზღვრის არეა $(3,+\infty)$, ხოლო $F_5(x)=\sqrt{\dfrac{x+5}{x-3}}$ ფუნქციისა კი $(-\infty,5]\cup(3,+\infty)$.

ამასთან დაკავშირებით განიხილება ფუნქციის გავრცელებისა და შეზღუდვის ცნებები, რომლებსაც აქ არ განვიხილავთ (იხ. თ. გეგელიას „მათემატიკის სპეციალური კურსი", თავი II, გვ. 50, თბილისი 1977).

---

[1] ფაქტიურად ამით ვახდენთ ფუნქციათა შეზღუდვა – გავრცელებას.

შემოვიღოთ განმარტებები.

1). ორ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციას ეწოდება ტოლი, თუ მათ აქვს ერთი და იგივე არაცარიელი განსაზღვრის არე და მათი რიცხვითი მნიშვნელობები არგუმენტის ერთი და იგივე მნიშვნელობისათვის ტოლია. ასე მაგალითად ფუნქციები $f(x)=2\lg x$ და $\varphi(x)=\lg x^2$, განსაზღვრული $(0,+\infty)$-ზე, ტოლი ფუნქციებია $f(x)=\varphi(x)$ $\forall x\in(0,+\infty)$-თვის. მაგრამ ფუნქციები

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1},\quad D(f)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty) \text{ და}$$

$\varphi(x)=x^2+x+1$, $D(\varphi)=R$ არაა ტოლი, რადგან $\varphi(1)=3$, მაშინ როდესაც $f(1)$ არ არსებობს. მაგრამ თუ მათ განვსაზღვრავთ $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, მაშინ ასეთ შემთხვევაში $f(x)=\varphi(x)$. $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

2). $f_1(x)$ და $f_2(x)$, განსაზღვრული $D\neq\varnothing$ არეზე, ფუნქციების ჯამი, სხაობა, ნამრავლი და განაყოფი განიმარტება შესაბამისად $F_1(x)=f_1(x)+f_2(x)$, $F_2(x)=f_1(x)-f_2(x)$, $F_3(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$, $F_4(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ (ამ უკანასკნელ შემთხვევაში $f_2(x)\neq 0$), ე.ი. $\forall x_0\in D$-თვის $F_1(x_0)=f_1(x_0)+f_2(x_0)$, $F_2(x_0)=f_1(x_0)-f_2(x_0)$, $F_3(x_0)=f_1(x_0)\cdot f_2(x_0)$, $F_4(x_0)=\dfrac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}$. ცხადია, რომ ფუნქციათა მოქმედების შედეგად მიიღება ახალი ფუნქცია.

ფუნქციათა ჯამისა და სხვაობის შემთხვევაში მიღებული ახალი ფუნქციის გრაფიკი მარტივად მიიღება მოცემული ფუნქციების გრაფიკებისაგან შესაბამისი ორდინატების შეკრებითა და გამოკლებით.

12. რთული ფუნქცია

ვთქვათ მოცემულია $y=f(U)$ (1), რომლის განსაზღვრის არეა D, ცვლილების არე E, შეიძლება განვიხილოთ ახალი ფუნქცია $u=\varphi(x)$ (2) განსაზღვრული D_1-ზე, მნიშვნელობათა სიმრავლით E_1. (1) ფუნქციაში არგუმენტია U, ხოლო (2)-ში U არის ფუნქცია - დამოკიდებული ცვლადი, მარტივად რომ ვთქვათ y დამოკიდებულია U-ზე, U-კი x-ზე. ხომ არ შეიძლება ვთქვათ, რომ y საბოლოოდ დამოკიდებულია x-ზე? დადებითი პასუხის შემთხვევაში y იქნება ფუნქციის ფუნქცია.

განმარტება. თუ (1) და (2) ფუნქციები დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან ისე, რომ $E_1\subset D$, მაშინ y-ს ეწოდება x-ის რთული ფუნქცია, ანუ ფუნქციის ფუნქცია და შეიძლება დავწეროთ $y=F(x)$ (3). თანახმად ფუნქციის განმარტებისა $\forall x_0\in D_1$ შეესაბამება ერთი გარკვეული U_0 E_1-ში და რადგან $E_1\subset D$, ამიტომ ასეთ U_0-ს შეესაბამება ერთი გარკვეული y_0 E-ში. ამრიგად, მოცემულ x_0-ს შეესაბამება y_0. ეს დამოკიდებულება $\forall x$-თვის შეიძლება ჩავწეროთ ასეც $y=f(\varphi(x))$, (4) რომლის განსაზღვრის არეა D_1-ის ქვესიმრავლე. ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ $f(\varphi(x))$ მიღებულია ორი $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციის სუპერპოზიციით, ანუ ზედდებით.

მაგალითად, $y=\sqrt{U+5}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $[-5,\infty)$, ხოლო $U=x^2$-ის მნიშვნელობათა არეა $[0,+\infty)$. რადგან $[0,+\infty)\subset[-5,+\infty)$, ამიტომ y იქნება x-ის რთული ფუნქცია და შეიძლება დავწეროთ $y=\sqrt{x^2+5}$, რომლის $D(y)=R$ თუ

განმარტებაში მოთხოვნილი პირობა $E_1 \subset D$ არ სრულდება, მაშინ ცხადია შეუძლებელია ვილაპარაკოთ რთულ ფუნქციაზე. ასე მაგალითად

ფუნქცია $y=\sqrt{U-2}$, განსაზღვრული $[2,+\infty)$ და ფუნქცია $U=\sin x$ $[-1,1]$ მნიშვნელობათა სიმრავლით ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი ფუნქციებია და არავითარი კავშირი არ შეიძლება იყოს მათ შორის. მართლაც, მექანიკური ჩასმით $U=\sin x$-ისა $y=\sqrt{U-2}$ ფუნქციაში მივიღებთ $y=\sqrt{\sin x-2}$, რომელიც არაა ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია.

რთულ ფუნქციას ფუნქციათა კომპოზიცია, ანუ სუპერფუნქცია ჰქვია. შეიძლება განვიხილოთ რთული ფუნქცია სამი, ოთხი და ა.შ. ფუნქციათა დაკავშირებით. მაგალითად, თუ ერთის მხრივ $y=f(V), D(f)=D_1$, მეორეს მხრივ $V=\varphi(U), D(V)=D_2$ (4) და $E(V)=E_1$, მესამეს მხრივ $U=\Psi(x), D(U)=D_3, E(U)=E_2$, ფუნქციები ისეთია, რომ $E_2 \subset D_2$ და $E_1 \subset D_1$, მაშინ y იქნება x-ის რთული ფუნქცია, რომელიც ჩაიწერება ასე $y=f(\varphi(\Psi(x)))$ (5). ცხადია, ამ უკანასკნელი რთული ფუნქციის განსაზღვრის არეა D_3. ფუნქცია $y=2^{\sin\sqrt[3]{x}}$ შეიძლება განვიხილოთ შემდეგი ფუნქციების სუპერპოზიციით მიღებული ფუნქცია: $\sqrt[3]{x}, \sin\sqrt[3]{x}, 2^{\sin\sqrt[3]{x}}$. ფაქტიურად (5) ჩანაწერი მიუთითებს იმ მოქმედებათა თანმიმდევრობას, რომლებიც უნდა ვაწარმოოთ „საბოლოო“ არგუმენტზე x-ზე, რომ მივიღოთ y.

ცხადია, რომ „მექანიკური“ სუპერპოზიცია, ანუ ფუნქციის ფუნქციაში „მექანიკური ჩასმა“ შეუძლებელია, თუ წინასწარ

არ დავადგინეთ ასეთი სუპერპოზიციის პირობები, რომლებიც გულისხმობს განსაზღვრის და ცვლილების არეებს შორის გარკვეულ ჩართვებს.

მაგალითად $y=\lg t$ და $t=2\sin x-3$ ფუნქციები არ განსაზღვრავენ რთულ ფუნქციას, რადგანაც $\lg(2\sin x-3)$ არაა ნამდვილ ფუნქცია, $2\sin x-3$ ყოველთვის უარყოფითია.

13. შექცეული ფუნქცია

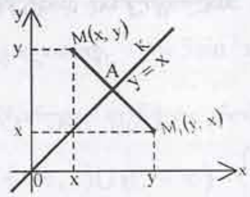
ვთქვათ $y=f(x)$ (1) ფუნაციის განსაზღვრის არეა D, ცვლილების არე E. ფუნქციის განმარტების თანახმად $\forall x \in D$ შეესაბამება ერთი გარკვეული y E-ში. ამ განმარტების მიხედვით გვაქვს შემდეგი სახის ფუნქციები 1). ერთ x-ს შეესაბამება ერთი y, ე.ი. თუ პირველი კომპონენტები განსხვავებულია, მაშინ განსხვავებულია მეორე კომპონენტებიც. 2). რამდენიმე პირველ კომპონენტებს შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი y. ორივე შემთხვევისათვის უამრავი მაგალითების მოყვანა შეიძლება. I სახის ფუნქციებია წრფივი, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული. II სახისა კი – კვადრატული, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. თუმცა მეორე სახის ფუნქციების განსაზღვრის არეები შეიძლება დავყოთ ისეთ ნაწილებად, რომ თითოეულ ცალკეულ ნაწილში ფუნქცია იყოს I სახის. I სახის ფუნქციას, როგორც ვიცით, ინექცია ვუწოდეთ. ასეთ ფუნქციაში y არის x-ის ფუნქცია, მაშინ ცხადია, რომ x იქნება y-ის ფუნქციაც, რადგანაც ამ შემთხვევაში ყოველ y-ს შესაბამისობის იგივე წესით, რომელიც ფუნქციაშია მოცემული, შეესაბამება ერთადერთი x. ფუნქციის განმარტების

თანახმად ამ შემთხვევაში x იქნება y-ის ფუნქცია $x=\varphi(y)$ (2). შესაბამისობის წესები f და φ გარკვეულ დამოკიდებულებაში არიან ერთმანეთთან, ცხადია f არ ემთხვევა φ-ს. მაშ რა კავშირია f-სა და φ-ს შორის? მარტივად შეიძლება ვთქვათ, რომ x და y-ს შორის ასეთი დამოკიდებულების შემთხვევაში $y=f(x)$ განტოლებიდან ცალსახად ამოიხსნება x y-ის მიმართ, ე.ი. $x=\varphi(y)$. ცხადია პირიქითაც ასეთ ფუნქციებს ჰქვია ურთიერთშექცეული ფუნქციები. $x=\varphi(y)$-ს ქვია $y=f(x)$-ის შექცეული და პირიქით. თუ $y=f(x)$-ის განსაზღვრის არეა D, ცვლილების არე E, ე.ი. $x\in D$, $y\in E$, მაშინ $x=\varphi(y)$ ფუნქციაში არგუმენტია y, ფუნქცია x; ამიტომ ამ უკანასკნელ ფუნქციაში E იქნება განსაზღვრის არე, ხოლო D – ცვლილების არე; ურთიერთშექცეული ფუნქციების განსაზღვრის და ცვლილების არეები როლებს იცვლიან.

მაგალითად $y=3x+1$ ფუნქცია, განსაზღვრული $[-3, 5]$, მნიშვნელობათა არე $[-8, 16]$ აკმაყოფილებს შექცევის პირობებს. ამიტომ მისი შექცეულია $x=\frac{y-1}{3}$, განსაზღვრის არე $[-8, 16]$, ე.ი. $y\in[-8, 16]$, ცვლილების არე კი $[-3, 5]$, რომელზედაც იცვლება x. ასეთ შემთხვევაში თუ წერტილი (x, y) პირველ ფუნქციას ეკუთვნის, მაშინ (y, x) ეკუთვნის მის შექცეულს. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში OY ღერძი აბსცისთა ღერძია, ხოლო OX ორდინატთა ღერძი. ასეთ შემთხვევაში $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი და $x=\varphi(y)$ ფუნქციის გრაფიკი ერთი და იგივეა, მხოლოდ ღერძებს ეცვლება სახელწოდება.

მაგრამ მოუხერხებელია, რომ აბსცისთა ღერძი იყოს წინა ორდინატთა ღერძი და პირიქით. რადგან პრაქტიკაში მიღებულია, რომ ფუნქცია იყოს y, არგუმენტი კი x, ამიტომ $y=f(x)$ ფუნქციის შექცეულ ფუნქციაში $x=\varphi(y)$-ში არგუმენტი y კვლავ x-ით აღვნიშნოთ, ფუნქცია კი y-ით. ე.ი. ნაცვლად $x=\varphi(y)$-სა განვიხილავთ $y=\varphi(x)$ ფუნქციას, რომელსაც უწოდებენ სწორედ $y=f(x)$-ის შექცეულს. $f(x)$-ის შექცეულს f^{-1}-თაც აღნიშნავენ ე.ი. $y=f^{-1}(x)$. განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ შეიძლება ისეთი ფუნქციების შექცევა, რომლებიც არიან მონოტონური, ზრდადი ან კლებადი. ზემოთქმულიდან გამომდინარე მივიღეთ შექცევადი ფუნქციის შექცეულის მოძებნის მარტივი წესი: რომ ვიპოვოთ შექცევადი $y=f(x)$ ფუნქციის შექცეული, ამისათვის ამ ფუნქციაში x და y-ს შევუცვალოთ ადგილები და მიღებული ტოლობიდან ამოვხსნათ y.

მაგალითად $y=9x-4$ ფუნქციის შექცეულის მოსაძებნად განვიხილოთ განტოლება $x=9y-4$, საიდანაც ამოვხსნათ y. ამრიგად $y=9x-4$ და $y=\frac{x+4}{9}$ ურთიერთშექცეული ფუნქციებია. ცხადია ამ შემთხვევაში საკოორდინატო ღერძები როლებს არ იცვლიან. შექცეული ფუნქციის ასეთი განმარტება გვაძლევს შექცეული ფუნქციის



გრაფიკის აგების წესს. ადვილი საჩვენებელია, რომ წერტილები (x, y) და (y, x) ერთიდაიგივე კოორდინატთა სისტემაში სიმეტრული წერტილებია $y=x$ წრფის მიმართ ($y=x$ არის I და III საკოორდინატო კუთხეების

ბისექტრისები). ეს ნახაზიდანაც ჩანს $MM_1 \perp OK$ და $AM = AM_1$.

ამრიგად, რომ მივიღოთ ურთიერთშექცეული ფუნქციებიდან ერთ-ერთის გრაფიკი, როცა ვიცით რომელიმე მათგანის გრაფიკი, საკმარისია ეს გრაფიკი გადავიტანოთ $y = x$ წრფის მიმართ სიმეტრიულად. ამ წესს ექვემდებარება ურთიერთშექცეული $y = a^x$ და $y = \log_a x$ ფუნქციების გრაფიკები. შემდეგში უფრო ვრცლად გავეცნობით სხვა ფუნქციების შექცევის საკითხებს, კერძოდ შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს. ახლა ჩამოვაყალიბოთ

თეორემა. ყოველ მონოტონურ $y = f(x)$ ფუნქციას D არეზე გააჩნია შექცეული ფუნქცია, რომელიც აგრეთვე მონოტონურია (ზრდადი ფუნქციის შექცეული ზრდადია, კლებადის შექცეული – კლებადი). სხვა სიტყვებით: თუ $f: X \to Y$, მაშინ f^{-1} მაშინ და მხოლოდ მაშინაა ფუნქცია, თუ f არის ინექციური და სურექციული ასახვა, ე.ი. f ბიექციაა.

დამტკიცება. ვთქვათ $y = f(x)$ ფუნქცია ზრდადია, ხოლო $x = \varphi(y)$ მისი შექცეული ფუნქციაა. ვაჩვენოთ, რომ როცა $y_1 < y_2$, მაშინ $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$. ავიღოთ $x_1 = \varphi(y_1)$, $x_2 = \varphi(y_2)$. ცხადია $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ და რადგან $y_1 < y_2$ ამიტომ $f(x_1) < f(x_2)$. ამ უტოლობას ადგილი აქვს მაშინ, როცა $x_1 < x_2$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$. ანალოგიურად დამტკიცდება თეორემა კლებადი ფუნქციისათვის.

14. ელემენტარული ფუნქციები და მათი კლასიფიკაცია

განვიხილოთ ფუნქცია, წარმოდგენილი ანალიზურად ცხადი, ან არაცხადი სახით $y = f(x)$ სახით, ან $F(x, y) = 0$ სახით.

პრაქტიკული თვალსაზრისით, მიზანშეწონილი იქნება ასეთი ფუნქციები დავანაწილოთ გარკვეულ კლასებად იმ მათემატიკური ოპერაციების ბუნებისა და რიცხვის მიხედვით, რომელთა გამოყენებაც საჭიროა ფუნქციის ანალიზური წარმოდგენის დროს.

ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები ეწოდება ფუნქციებს მუდმივს $y = c$, ხარისხოვანს $y = x^{\alpha} (\alpha \in R)$, მაჩვენებლიანს $y = a^x (\alpha > 0, a \neq 1)$, ლოგარითმულს $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$, ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$, შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$, $y = |x| = \sqrt{x^2}$. *ყოველ ფუნქციას, რომელიც მოიცემა ძირითად ელემენტარულ ფუნქციებზე სასრული არითმეტიკური ოპერაციებით, ამოფესვით და სუპერპოზიციით, ეწოდება, უბრალოდ, ელემენტარული ფუნქცია.* ელემენტარული ფუნქციის განსაზღვრის არედ მიღებულია ყველა იმ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რომელთათვისაც ფორმულას აქვს აზრი, ე.ი. ამ სიმრავლიდან აღებული არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის მიიღება ნამდვილი რიცხვი.

მაგალითად, $y = 5\sin^2 x + \dfrac{6}{x^3\sqrt{x^2 - 1}} + \cos^3 \mathrm{tg}^2 x + 3$ არის ელემენტარული ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა

$$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty) - \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}.$$

დირიხლეს ფუნქცია $\chi(x)$, $y = [x]$, $y = \{x\}$, $y = \mathrm{sign}x$ არაელემენტარული ფუნქციებია.

ელემენტარული ფუნქციები იყოფა შემდეგ კლასებად:

1. *მრავალწევრები (პოლინომები).* მრავალწევრი, ანუ მთელი ფუნქცია ჰქვია $y = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ სახის ფუნქციას, სადაც a_i მუდმივებია, $i = 0, 1, 2, ..., n$. *თუ* $a_n \neq 0$, *მაშინ* n*-ს ეწოდება მოცემული მრავალწევრის ხარისხი. პირველი და მეორე ხარისხის მრავალწევრები იქნება წრფივი და კვადრატული ფუნქციები.*

2. *რაციონალური ფუნქციები (რაციონალური წილადები).* *რაციონალური ფუნქცია ეწოდება* $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *სახის ფუნქციას, სადაც* $P(x)$ *და* $Q(x)$ *ნებისმიერი ხარისხის მრავალწევრებია. (მრავალწევრის ხარისხი სასრული რიცხვია). რაციონალურ ფუნქციას ეწოდება წესიერი, თუ მრიცხველის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში რაციონალური ფუნქცია არაწესიერია.* ამ შემთხვევაში მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით (გაყოფა კუთხით) გამოიყოფა პოლინომი, რის შედეგად მოცემული რაციონალური ფუნქცია წარმოიდგინება პოლინომისა და წესიერი რაციონალური ფუნქციის ჯამის სახით. თუ რაციონალურ ფუნქციაში მრიცხველიც და მნიშვნელიც პირველი ხარისხის მრავალწევრებია (წრფივი ფუნქციებია), მაშინ რაციონალურ ფუნქციას წილად-წრფივი ფუნქცია ჰქვია.

ცხადია, რომ მრავალწევრთა კლასი შედის რაციონალურ ფუნქციათა კლასში.

3. *ირაციონალური ფუნქციები.* *ირაციონალური ფუნქციები*

ეწოდება ფუნქციებს, რომლებიც მიიღება სასრული რაოდენობის რაციონალური ფუნქციების და რაციონალურ მაჩვენებლიანი ხარისხოვანი ფუნქციების სუპერპოზიციით, და ოთხი არითმეტიკული მოქმედებით.

მაგალითად, $y = \sqrt[15]{(x-8)^3(x^4 + \sqrt[3]{x} - 8)} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} + x^2 + x^3 - x^4}{10 - \sqrt[6]{x^5} + x^2}$ ირაციონალური ფუნქციაა.

4. *ტრანსცენდენტული ფუნქციები.* *ელემენტარული ფუნქციებს, რომლებიც არაა რაციონალური და ირაციონალური, ტრანსცენდენტული ფუნქციები ჰქვია. მაგალითად, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული, ტრიგონომეტრიული, შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ტრანცენდენტული ფუნქციებია.*

ზოგჯერ პოლინომებს, რაციონალურ და ირაციონალურ ფუნქციებს ერთად უწოდებენ ალგებრულ ფუნქციათა კლასს, რომელიც შეიძლება ასეც განვმარტოთ: ჯერ განვმარტოთ მრავალწევრი ორი x და y ცვლადების მიმართ. $f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება მრავალწევრი x და y ცვლადები მიმართ, თუ იგი წარმოიდგინება ax^my^n სახის წევრთა ჯამად, a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, m და n — არაუარყოფითი მთელი რიცხვები. თუ x და y-ს შორის არსებულ ფუნქციონალურ დამოკიდებულების გამომსახველ განტოლებას შეიძლება მიეცეს $f(x, y) = 0$ სახე, მაშინ ამბობენ, რომ y არის x-ის ალგებრული ფუნქცია. ადვილი მისახვედრია, რომ განტოლება $f(x, y) = 0$ შეიძლება განსაზღვრავდეს y-ს როგორც პოლინომს, რაციონალურ, ან ირაციონალურ ფუნქციას. არაალგებრულ ფუნქციას ტრანსცენდენტული ფუნქცია ეწოდება. ამრიგად ყველა ელემენტარული ფუნქციები შეიძლება დავყოთ ალგებრულ და არაალგებრულ (ტრანსცენდენტულ) ფუნქციათა კლასებად.

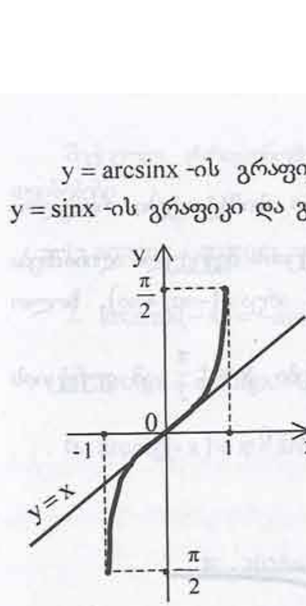
15. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში საკმაოდ დაწვრილებით განიხილება უმეტესი ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები. ახლა ჩვენ განვიხილავთ შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx და ე.წ. ჰიპერბოლურ ფუნქციებს.

1. $y = \arcsin x$. წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ, რომ $y = \sin x$ ფუნქცია უბან-უბან მონოტონურია, მისი განსაზღვრის არეები შეიძლება დავყოთ ზრდადობის შუალედებად $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$, $\left[-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right]$,... და კლებადობის შუალედებად $\left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, $\left[\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$,... ამიტომ შეიძლება განვიხილოთ $\sin x$-ის შექცეული თითოეულ ამ შუალედებში. ჩვენ მხოლოდ ზრდადობის ერთ შუალედს ავიღებთ, კერძოდ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-ს; ამ შუალედში $\sin x$ ერთხელ ღებულობს თავის მნიშვნელობას $[-1, 1]$-დან, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\forall x_1 \neq x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-თვის $\sin x_1 \neq \sin x_2$, ამიტომ შეგვიძლია განვიხილოთ $y = \sin x$-ის შექცეული, რომელსაც აღვნიშნავთ $y = \arcsin x$-ით. მისი განსაზღვრის არეა $[-1, 1]$, ხოლო ცვლილების არე $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ფუნქცია ზრდადია.

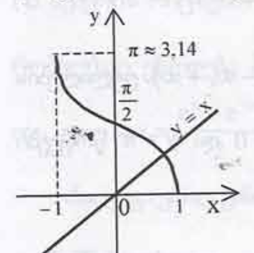
$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ (იხ. გრაფიკი ნახ. 1).

$y = \arcsin x$-ის გრაფიკის მისაღებად შეიძლებოდა აგვეღო $y = \sin x$-ის გრაფიკი და გადაგვეტანა იგი $y = x$ წრფის სიმეტრიულად. აქვე შევნიშნოთ, რომ გრაფიკის ასაგებად საჭიროა გათვალისწინებულ იქნას $y = \sin x$ და $y = x$ შორის დამოკიდებულება 0-ის მახლობლობაში, სადაც $\sin x < x$, ე.ი. $y = \sin x$-ის გრაფიკი $y = x$-ის გრაფიკის ქვემოთაა, გარდა ამისა $\frac{\pi}{2}$ დაახლოებით არის მასშტაბის ერთეულის 1,57 ნაწილი (ამიტომაა $\sin x$-ის გრაფიკი „გაწელილი“ OX ღერძის გასწვრივ).



ნახ. 1

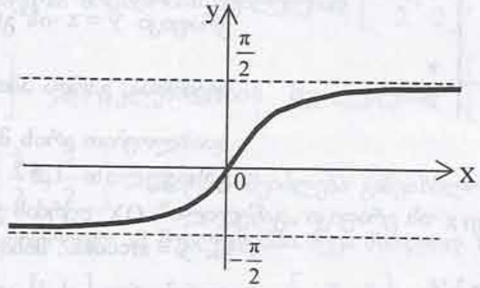
2. $y = \arccos x$. მისი განსაზღვრის არეა $[-1, 1]$, ცვლილების არე – $[0, \pi]$. ფუნქცია კლებადია, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos 1 = 0$ (იხ. გრაფიკი ნახ. 2). შეიძლებოდა გაგვეხილა მონოტონურობის სხვა შუალედები, მაგალითად ზრდადობის შუალედი $[-\pi, 0]$.



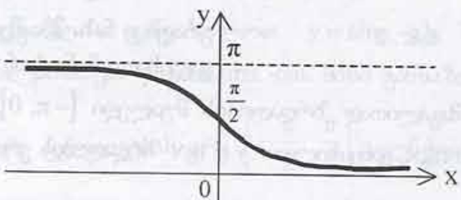
ნახ. 2

3. $y = \operatorname{arctg} x$. განვიხილოთ $y = \operatorname{tg} x$ ზრდადობის ერთი შუალედი $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(-\infty, +\infty)$; წრფეები

$x=\pm\frac{\pi}{2}$ არის ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტები, რომელთა ცნებას მოგვიანებით გავეცნობით. ამ ფუნქციის შექცეული აღინიშნება $y=\text{arctg}x$-ით, რომლის განსაზღვრის არეა $(-\infty,+\infty)$, ხოლო ცვლილების არე – $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. წრფეები $y=\pm\frac{\pi}{2}$ ამ ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტებია. $\text{arctg}0=0$.



4. $y=\text{arcctg}x$. მისი განსაზღვრის არეა $(-\infty,+\infty)$. ცვლილების არე $(0,\pi)$; იგი კლებადია, $\text{arcctg}0=\frac{\pi}{2}$. $y=0$ და $y=\pi$ წრფეები ჰორიზონტალური ასიმპტოტებია.



შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს გააჩნია შემდეგი თვისებები

1. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\quad(-1\le x\le 1)$;
2. $\arcsin x(-x)=-\arcsin x$; 3. $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$;
4. $\text{arctg}x+\text{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$; 5. $\text{arctg}(-x)=-\text{arctg}x$;
6. $\text{arcctg}(-x)=\pi-\text{arcctg}x$.

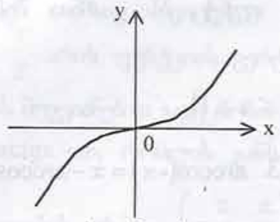
16. ჰიპერბოლური ფუნქციები

განვიხილოთ მაჩვენებლიანი ფუნქციებიდან $y=e^x$ და $y=e^{-x}$ (e ნეპერის რიცხვია) მიღებული ახალი ფუნქციები $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, რომელსაც ეწოდება ჰიპერბოლური სინუსი და აღინიშნება $\text{sh}x$-ით, ე.ი. $\text{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

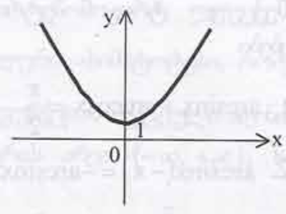
ანალოგიურად განიმარტება ჰიპერბოლური კოსინუსი, რომელიც აღინიშნება $\text{ch}x$-ით, და $\text{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,

ჰიპერბოლური ტანგესი $\text{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}$,

ჰიპერბოლური კოტანგესი $\text{cth}x=\frac{\text{ch}x}{\text{sh}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.



$y = shx$ -ის გრაფიკი



$y = chx$ -ის გრაფიკი

ჰიპერბოლური ფუნქციების განსაზღვრის არეების, ცვლილების არეების და ზოგიერთი სხვა თვისებების დადგენას ვანდობთ მკითხველს. დაწვრილებით ჰიპერბოლურ ფუნქციებს შევისწავლით დიფერენციალური აღრიცხვის შესწავლის შემდეგ.

სავარჯიშოები

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ როცა მოვითხოვთ ფუნქციის რაიმე თვისების დადგენას, ვგულისხმობთ ამ თვისების დადგენას მისი განსაზღვრის არეზე.

1. დაამტკიცეთ, რომ $y = -\frac{1}{x^2}$ შემოსაზღვრულია ზემოდან, ხოლო $y = \frac{1}{x^2}$ შემოსაზღვრულია ქვემოდან. იპოვეთ მათი ცვლილების არეები.

2. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქციები $y = \frac{1}{2+x^2}$, $y = \frac{x}{x^2+1}$ შემოსაზღვრული ფუნქციებია. იპოვეთ მათი ცვლილების არეები.

3. დაამტკიცეთ, რომ $y = 3x^2 + 4x - 7$ შემოსაზღვრულია ქვემოდან, ხოლო $y = -x^2 + x - 5$ შემოსაზღვრულია ზემოდან. იპოვეთ მათი ცვლილების არეები.

4. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია $y = 4x - 3$ ზრდადია, ხოლო $y = -3x + 8$ – კლებადი.

5. არიან თუ არა მონოტონური, ან უბან-უბან მონოტონური $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \sqrt{x^2-1}$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2-x-42}$, $y = -x^2-4$, $y = -x^2+9$, $y = x^2+4$ ფუნქციები. იპოვეთ მათი მონოტონურობის შუალედები.

6. დაადგინეთ ლუწ-კენტოვნება ფუნქციებისა

$$y = 3x^2 + 4x^3,\ y = \frac{a^x - a^{-x}}{2},\ y = \frac{a^x + a^{-x}}{2},\ y = 3tg4x - 2\sin 8x,$$

$$y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + 4\sqrt[3]{(1+x)^2},\ y = 3x^2 - 5|x|,\ y = \frac{(1+2^x)^2}{2^x},\ \chi(x).$$

7. იქნება თუ არა ფუნქციები $y = \sqrt{\lg\sin x}$, $y = 4 - 3tg\frac{x}{2}$, $y = 5\sin\frac{3}{4}x - 9\cos\frac{2}{3}x$ პერიოდული. იპოვეთ მათი ძირითადი პერიოდები და სხვა პერიოდები.

8. არიან თუ არა შემდეგი ფუნქციები ტოლი $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ და $g(x) = \sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+3}$, $f(x) = x$ და $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$, $f(x) = \lg(x-1)(x-2)$ და და $g(x) = \lg(x-1) + \lg(x-2)$.

9. მოცემულია $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$, $g(x) = 1 - x$. იპოვეთ

$$f(f(x)),\ f(g(x)),\ g(g(x)),\ g(f(x)),\ \frac{1}{f(x)},\ f\left(\frac{1}{f(x)}\right),\ g^{-1}(g(x)),\ f(g(f(x))).$$

10. ქვემოთ მოცემული ფუნქციებიდან რომელს გააჩნია შექცეული, იპოვეთ ისინი. დაადგინეთ უბან-უბან მონოტონური ფუნქციების მონოტონურობის შუალედები და იპოვეთ მათი შექცეული ამ შუალედებში.

$y=2x-3,\ y=x^2+x-20,\ y=\frac{3x-1}{4-x},\ y=\sin 2x, y=3^{-x},\ y=5^x,\ y=\lg(-x),$

$y=\sqrt{9-x^2},\ y=\sqrt{9-x}$. ააგეთ მათი გრაფიკები.

11. იქნება თუ არა ელემენტარული შემდეგი ფუნქციები

$$y=\begin{cases}10-x, & \text{როცა } x\le 2\\ x\sin^2 x, & \text{როცა } x>2\end{cases}$$

$y=\cos^3\lg^2\arcsin\sqrt[4]{x},\quad y=\lg(3-2\cos x),\quad y=|x^2+3|+\operatorname{tg}x,$

$y=\chi(x)-4x+10,\quad y=\operatorname{arcctg}^3 5x+\operatorname{ctg}^2(1-x),\quad y=\{x\}-[x],$

$y=\sin x-|\sin x|,\ x^2+y^2=4,\quad 5x^3y^2-3xy+x^2-3x+1=0.$

12. $f(x)=3x^2-4x+1,\ g(x)=2-x,$, ორივე მათგანი განსაზღვრული N სიმრავლეზე. დაასახელეთ მათი ყველა ის თვისებები, რომლებიც მოითხოვება 1-11 სავარჯიშოებში. ააგეთ გრაფიკები.

შეეცადეთ გამოიკვლიოთ 1-12 სავარჯიშოებში ჩამოთვლილი ფუნქციებიდან ზოგიერთი მათგანი და ააგეთ გრაფიკები.

თავი III

1. თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები. მიმდევრობა

ნამდვილი რიცხვები, რომლებსაც უკვე ვიცნობთ, საინტერესო ბუნებისანი არიან. მაგალითად ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში N-ში არსებობს უმცირესი რიცხვი 1, უდიდესი რიცხვი რომ არ არსებობს, ამას ასე დავასაბუთებთ. ვთქვათ K არის უდიდესი ნატურალური რიცხვი. ცხადია $K+1, K+2,\ldots$ აგრეთვე ნატურალური რიცხვებია, რომლებიც მეტია K-ზე ე.ი. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში შეიძლება დავასახელოთ ნებისმიერ რაგინდ დიდ რიცხვზე მეტი რიცხვი. ეს სიმრავლე უსასრულოა. N-ში სრულდება რიცხვთა სიმრავლის ზოგიერთი თვისება 18 თვისებიდან (სასურველი იქნება მკითხველმა თვითონ ჩამოაყალიბოს ეს თვისებები). უფრო მეტი თვისებები აქვს მთელ რიცხვთა სიმრავლეს Z-ს, ვიდრე N-ს და კიდევ უფრო მეტი Q-ს, I-ს, ვიდრე Z-ს.

$R=(-\infty,+\infty)$ სიმრავლეს გააჩნია ყველა 18-ვე თვისება. Q-სა და I სიმრავლეში არ სრულდება უწყვეტობის აქსიომა. ამრიგად სიმრავლეებს N, Z, Q, I, R აქვს როგორც საერთო, ისე განსხვავებული თვისებები. მათ ბევრი სხვა საინტერესო თვისებები გააჩნია.

მაგალითად Q, I, R სიმრავლეებში ნებისმიერ ორ რიცხვს შორის, რაც არ უნდა მცირე იყოს მათ შორის განსხვავება, არსებობს უამრავი რიცხვები; გარდა ამისა ამ სიმრავლეებში ვერ დაასახელებთ ნებისმიერი რიცხვის „პირველ“ მეზობელს. ე.ი. თუ ვიტყვით, რომ α-ს I „მეზობელია“ β, მაშინ $\alpha<\beta$, ან $\alpha>\beta$. მტკიცდება, რომ ასეთ მეზობელ α და β-ს შორის არსებობს იმდენი რიცხვი,

რამდენი რიცხვიცაა მთელ R-ში - $(-\infty, +\infty)$-ზე. ასევე ნებისმიერი (a, b) ინტერვალში არ არსებობს არც უმცირესი და არც უდიდესი რიცხვები. უსასრულო სიმრავლეებში ვერ ვილაპარაკებთ მათი ელემენტების რაოდენობაზე. მაგრამ ბუნებრივად იბადება კითხვა, მაინც რა დამოკიდებულებაა N, Z, Q, I, R სიმრავლეებს შორის ე.წ. ელემენტთა „რაოდენობის" თვალსაზრისით? ბუნებრივია, რომ N-ში ყველაზე ნაკლები „რაოდენობის" რიცხვებია, ვიდრე R-ში.

მაშ, როგორ შევადაროთ ამ მხრივ ორი სიმრავლე?

ბუნებრივია, ორი სასრული სიმრავლე შეიძლება შევადაროთ ერთმანეთს ელემენტების რაოდენობის მიხედვით. მაგალითად, თუ A-სიმრავლეში 1000 ნატურალური რიცხვია, ხოლო B-ში 1000 ირაციონალური რიცხვი, მაშინ, ცხადია, შეიძლება ვთქვათ, რომ A და B სიმრავლეებში ერთნაირი რაოდენობის ელემენტებია. ამ გზით შეიძლება შევადაროთ ნებისმიერი სასრული ორი სიმრავლე. ჩვენ ამ შემთხვევაში არ გვაინტერესებს სიმრავლეებში შემავალი ელემენტების სხვა თვისებები, გარდა მათში ელემენტების რაოდენობისა.

ორი სიმრავლის შესადარებლად იყენებენ სიმრავლეების ეკვივალენტობის და არაეკვივალენტობის ცნებებს. სიმრავლეთა შედარების მარტივ წესს პატარა ბავშვებიც კი იყენებენ, როცა უნდათ თანაბრად გაინაწილონ, მაგალითად კანფეტები. ერთ-ერთი ბავშვთაგანი ითავებს ამ საქმეს. ერთ ბავშვს მისცემს ერთ კანფეტს, მეორეს-მეორე კანფეტს და ა.შ. როცა ყველა ბავშვი მიიღებს თითო კანფეტს, შემდეგ დაიწყება მეორედ ჩამორიგება და ა.შ. ამ შემთხვევაში თვითონ ბავშვებს ექნება წარმოდგენა ორი სიმრავლის ურთიერთობაზე, ერთის მხრივ ბავშვების სიმრავლეზე, მეორეს მხრივ კანფეტების სიმრავლეზე.

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ გადასანომრავია რაიმე საგნები მოცემულ სიმრავლეში. მოსახერხებელია საგნები აღვნიშნოთ სიმბოლოებით, რომლებსაც მიეწერება ნომრები, ინდექსები. მაგალითად

მოცემული რაიმე სიმრავლის ერთ-ერთი ელემენტი აღვნიშნოთ a_1-ით, მისგან განსხვავებული მეორე ელემენტი — a_2-ით, მათგან განსხვავებული მესამე ელემენტი — a_3-ით და ა.შ. ამ წესით ხდება გარკვეული შესაბამისობა ანუ გადათვლა-გადანომრვა მოცემული სიმრავლის ელემენტებისა და მისი წარმოდგენა $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ელემენტებით; ასეთმა გადანომრვამ შეიძლება ამოწუროს მოცემული სიმრავლის ყველა ელემენტი და შეიძლება არა.

როგორც წესი, სიმრავლის ელემენტები შეიძლება გადავნომროთ ნატურალური რიცხვებით (არსებობს სხვა გადანომრვაც). მაგალითად საარჩევნო სიაში მოქალაქეები გადანომრებიან ნატურალური რიცხვებით. როცა იტყვიან საარჩევნო უბანში 1352 ამომრჩეველიაო, ეს იმას ნიშნავს, რომ 1352 ამომრჩეველს მიწერილი აქვს თავ-თავისი ნომერი, რომელიც ცხადია ნატურალური რიცხვია. სიმრავლეების ელემენტების რაოდენობის თვალსაზრისით შესაბამისობის ეს წესი შეიძლება გამოვიყენოთ, როგორც სასრულ, ისე უსასრულო სიმრავლეებზე.

როცა A და B სიმრავლეებში ხდება ისეთი შესაბამისობა, რომ ერთი სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება მეორე სიმრავლეში ერთადერთი ელემენტი და პირიქით, გინდ სასრული იყოს ეს სიმრავლეები და გინდ უსასრულო, მაშინ იტყვიან, რომ ისინი ეკვივალენტური სიმრავლეებია და წერენ $A \sim B$. ადვილი დასამტკიცებელია

1. თუ $A \sim B$, მაშინ $B \sim A$.

2. თუ $A \sim B$ და $B \sim C$, მაშინ $A \sim C$.

სასრულ სიმრავლეებში ეკვივალენტურობა ნიშნავს მათში ელემენტების თანაბარ რაოდენობას. უსასრულო სიმრავლეების შედარება შეიძლება ელემენტების დაწყვილებით.

ეკვივალენტურ სიმრავლეებზე იტყვიან, რომ ისინი ტოლსიმძლავრიანია. ამრიგად სასრულ სიმრავლეში სიმძლავრე ნიშნავს მისი ელემენტების რაოდენობას. ადვილი მისახვედრია, რომ ნატურალურ

რიცხვთა სიმრავლე და მისი ეკვივალენტური სიმრავლეები უსასრულო სიმრავლეებიდან ყველაზე მცირე სიმძლავრის სიმრავლეები არიან.

განმარტება. *ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურ სიმრავლეს ეწოდება თვლადი სიმრავლე.* .

ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ ასეთი სიმრავლეები თვლადი სიმძლავრისანი არიან. თვლად სიმძლავრეს აღნიშნავენ $\aleph_0$-ალეფნულით (ებრაულ ალფავიტში პირველი ასო) და წერენ $\overline{N} = \aleph_0$-სიმრავლის თავზე ხაზი აღნიშნავს ამ სიმრავლის სიმძლავრეს (არ ავურიოთ ეს აღნიშვნა სიმრავლის ჩაკეტვაში). ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

1. სიმრავლე, რომლის ყველა ელემენტი გადაინომრება ყველა ნატურალური რიცხვებით, თვლადია.

მაგალითად, თუ $A = \{a_1, a_2, \dots a_n, \dots\}$, მაშინ A იქნება თვლადი. მართლაც, თუ $\forall n \in N$ შევუსაბამებთ a_n-ს და პირიქით, მაშინ N და A იქნება ეკვივალენტური სიმრავლეები.

2. დავამტკიცოთ, რომ N სიმრავლე და ყველა ლუწ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ერთნაირი სიმძლავრისაა. ე.ი. ლუწ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $N_{ლ} = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$ თვლადია. მართლაც, თუ ამ სიმრავლეებში შესაბამისობის წესი იქნება ასეთი: $\forall n \in N$ შევუსაბამობთ $2n \in N_{ლ}$, ე.ი. $n \to 2n$ და პირიქით $\forall 2n$-ს შევუსაბამობთ n, $2n \to n$. ამრიგად, მივიღებთ $n \to 2n$ და $2n \to n$. შემოკლებით ეს შესაბამისობები ასე ჩაიწერება $n \leftrightarrow 2n$.

უსასრულო სიმრავლეს ეს თვისება გააჩნია. იგი იქნება თავისი ქვესიმრავლის ეკვივალენტური. ამრიგად $N \sim N_{ლ}$, ე.ი. $\overline{N_{ლ}} = \aleph_0$. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თვლადი სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლე თვლადია.

სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო, თუ იგი თავისი ქვესიმრავლის ეკვივალენტურია. თვლადი სიმრავლეების სასრული, ან თვლადი გაერთიანება თვლადია. ე.ი., თუ სიმრავლეები $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ ცალ-ცალკე თვლადია, მაშინ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ თვლადი იქნება.

სასრული სიმრავლისა და თვლადი სიმრავლის გაერთიანება თვლადია. თვლადი სიმრავლიდან სასრული სიმრავლის გამოკლებით, ან დამატებით მიღებული სიმრავლე თვლადია.

ადვილად მტკიცდება, რომ Z და Q სიმრავლეები თვლადია.

მტკიცდება მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა:

$[0, 1]$ სეგმენტის წერტილთა სიმრავლე არათვლადია.

$[0, 1]$ სეგმენტის წერტილთა სიმრავლესა და მის ეკვივალენტურ ყველა სიმრავლეს უწოდებენ კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეებს. ამ სიმძლავრეს აღნიშნავენ $\aleph$-ალეფით. ცხადია $\aleph_0 < \aleph$. მტკიცდება, რომ I, R, ნებისმიერი სეგმენტის, ინტერვალის, ნახევარინტერვალის წერტილთა სიმრავლეები კონტინუუმის სიმძლავრისაა, ე.ი. $\overline{I} = \overline{R} = \overline{<a, b>} = \aleph$. ბუნებრივად დაისმება ასეთი კითხვაც: არსებობს თუ არა სიმრავლე, რომლის სიმძლავრე მოთავსებულია $\aleph_0$-სა $\aleph$-ს შორის? ან კიდევ, არსებობს თუ არა კონტინუუმზე მაღალი სიმძლავრის სიმრავლე? ეს საკითხები უფრო დაწვრილებით შეისწავლება ფუნქციათა თეორიაში.

2. მიმდევრობის განმარტება და მისი თვისებები

განმარტება. *ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ ნამდვილ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს, ჩაწერილს შემდეგი თანმიმდევრობით $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots,$ (1) ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა.*

ცხადია, ეს მიმდევრობა, როგორც სიმრავლე, თვლადია, $n \leftrightarrow f(n)$. ჩაწერის გამარტივების მიზნით, შემოვიღოთ აღნიშვნა $f(n)=a_n, \forall n \in N.$. მაშინ მიმდევრობა (1) ასე ჩაიწერება $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (2) ეს მიმდევრობა იკითხება ასე: „a_1, a_2 და ა.შ. a_n და ა.შ. უსასრულოდ“. შემოკლებით ეს მიმდევრობა შეიძლება აღვნიშნოთ $(a_n)_{n\in N}$-ით, ან უბრალოდ (a_n)-ით, ან კიდევ $\{a_n\}$-ით.

a_1-ს ჰქვია მიმდევრობის პირველი წევრი, a_2-ს – მეორე წევრი, ..., a_n-ს ჰქვია ზოგადი, ანუ n-ური წევრი, ან კიდევ მე-n-ე წევრი.

მიმდევრობა შეიძლება ასეც განვმარტოთ:

თუ ყოველ n ნატურალურ რიცხვს რაიმე წესით შეესაბამება ერთი გარკვეული რიცხვი a_n, მაშინ იტყვიან, რომ რიცხვთა ერთობლიობა $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ არის მიმდევრობა.

მიმდევრობის წევრები, გარდა რიცხვებისა შეიძლება იყოს ფუნქციები, ვექტორები, რიცხვთა შუალედები და ა.შ. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობებს.

თუ მიმდევრობაში $f(n)=a$ ე.ი. $a, a, \dots, a, \dots$, მაშინ ასეთ მიმდევრობას ეწოდება მუდმივი, ანუ სტაციონარული მიმდევრობა.

თუ (a_n) მიმდევრობის ზოგადი წევრი a_n მოცემულია ფორმულით $a_n = f(n)$, მაშინ მიმდევრობა ჩაიწერება (2) სახით.

მაგალითად, თუ $a_n = \frac{n}{2n-1}$, მაშინ მივიღებთ მიმდევრობას

$$1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \dots.$$

შეიძლება მოცემული იყოს მიმდევრობის რამდენიმე წევრი, დაწყებული პირველიდან, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს დავწეროთ ზოგადი წევრი;

მაგალითად, 1, 4, 9, 16, 25,... მოსალოდნელია, რომ ამ მიმდევრობის ზოგადი წევრი იყოს $a_n = n^2$, რაც არაა აუცილებელი, შეიძლება ეს მიმდევრობა ასეთიც იყოს 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 52, 55, 58, 61,... ადვილი მისახვედრია, რომ ამ შემთხვევაში ეს მიმდევრობა, როგორც ფუნქცია, შეიძლება ასე დავწეროთ

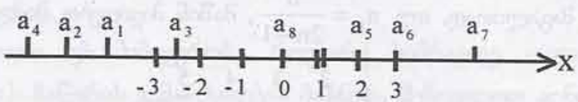
$$f(n)=\begin{cases} n^2, \text{ როცა } n=1,2,\dots,7 \\ 28+3n, \ n=8,9,\dots \end{cases}$$

შეიძლება მიმდევრობაში წევრები უსასრულოდ მეორდებოდეს. მაგალითად,

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \ldots;\ 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{5}, \ldots;$$

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots;\ 2; 0, 2, 0, 2, 0, \ldots,\ 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots.$$

მიმდევრობის წევრები, როგორც ნამდვილი რიცხვები, შეიძლება რიცხვით ღერძზე გამოვსახოთ წერტილებით, მაშინ ცხადია გვექნება წერტილთა მიმდევრობა



რადგანაც მიმდევრობა ფუნქციის კერძო შემთხვევაა, ამიტომ მიმდევრობის მოცემა შეიძლება ანალიზურად ე.ი. ფორმულით $a_n = f(n)$, ან ფორმულებით. f არის ის წესი, რომლითაც $\forall n$-თვის ვპოულობთ a_n-ს. ამიტომაც (a_n) მიმდევრობას უწოდებენ ცვლად სიდიდესაც, ან უბრალოდ ცვლადს. უმეტეს შემთხვევაში მიმდევრობა მოცემულია ანალიზური ხერხით. მიმდევრობა შეიძლება მოცემულ იყოს სიტყვიერი ხერხითაც.

მაგალითად, $\sqrt{2}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობები სიზუსტით 1-მდე, 0,1-მდე, 0,01-მდე ნაკლებობით, და ა.შ. მოგვცემს მიმდევრობას 1; 1,4; 1,41; 1,414;..., ამ მიმდევრობის ზოგადი წევრის დაწერა შეუძლებელია, თუმცა მისი შედგენის წესი მოცემულია სიტყვებით „n-ური წევრის მისაღებად საჭიროა 2-დან ამოვიღოთ კვადრატული ფესვი სიზუსტით $\frac{1}{10^n}$-დე ნაკლებობით“. მაგრამ ვერ ვიტყვით, რა იქნება ამ მიმდევრობაში, მაგალითად, მეასე წევრი. განვიხილოთ ანალოგიური მაგალითი $\frac{5}{7}$-თვის, რომლისთვისაც გვექნება მიმდევრობა 0; 0,7; 0,71; 0,7142; 0,71428; 0,714287.... აქაც არაა მოცემული

მე-n-ე წევრი, თუმცა მისი მოცემა შეიძლება. შეგვიძლია ვიპოვოთ მოცემულ მიმდევრობაში ნებისმიერი წევრი რადგანაც $\frac{5}{7}$ არის უსასრულო პერიოდული ათწილადი 0,(714285). მისი 63-ე წევრი იქნება 4.

არსებობს აგრეთვე მიმდევრობის მოცემის სხვა ხერხები. ერთ-ერთი მათგანია მიმდევრობის ზოგადი წევრის მოცემა ე.წ. რეკურენტული ფორმულით, ანუ დაყვანის ფორმულით. ეს არის ფორმულა, რომლითაც მიიღება უკვე მიღებული $X_1, X_2, \ldots, X_n$ წევრებით შემდეგი X_{n+1} წევრი. ამასთანავე წინასწარ მოცემულია მიმდევრობის პირველი წევრები, რომლებიც ქმნიან ე.წ. „საწყის პირობებს“. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

1. $X_{n+1} = X_n + d$, d მუდმივია, საწყისი მონაცემით $X_1 = a$, გვაძლევს მიმდევრობას $a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots,\ a + (n-1)\,d, \ldots$ (არითმეტიკული პროგრესია).

2. $\frac{X_{n+1}}{X_n} = q$, q მუდმივია, საწყისი მონაცემით $X_1 = b$, მივიღებთ მიმდევრობას $b, bq, bq^2, \ldots, bq^{n-1}, \ldots$ (გეომეტრიული პროგრესია).

3. $X_{n+1} = X_n + X_{n-1}$, საწყისი მონაცემებით $X_1 = 0, X_2 = 1$, მივიღებთ მიმდევრობას 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89;..., რომლებსაც უწოდებენ „ფიბონაჩის რიცხვებს“. ისინი საკმაო სიზუსტით ემორჩილებიან „ოქროს კვეთის“ წესს.

ნებისმიერი მიმდევრობიდან შეიძლება გარკვეული წესით მივიღოთ ახალი მიმდევრობები, რომლებსაც მოცემული მიმდევრობის ქვემიმდევრობები, ანუ კერძო მიმდევრობები ჰქვია.

მაგალითად, (a_n) მიმდევრობიდან შეიძლება შევადგინოთ ლუწ ინდექსიანი მიმდევრობა (a_{2n}), კენტ-ინდექსიანი მიმდევრობა

(a_{2n-1}), 5-ის ჯერად ინდექსიანი მიმდევრობა (a_{5n}) და ა.შ. ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი მიმდევრობიდან გამოიყოფა უამრავი ქვემიმდევრობები, ასე მაგალითად,

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობები იქნება

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots; 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots;$$
$$\frac{1}{7}, \frac{1}{14}, \frac{1}{21}, \ldots, \frac{1}{7n}, \ldots, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots;$$

(a_n) მიმდევრობიდან შეიძლება დავწეროთ ქვემიმდევრობები ზოგადი სახით, $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots a_{n_k}, \ldots$, რომლის წევრები აიღება იმ რიგით, როგორი თანმიმდევრობითაცაა ისინი მოცემულ მიმდევრობაში. ამ მიმდევრობაში იცვლება n_k-ს ინდექსი k.

3. მიმდევრობის სახეები

განიხილება შემდეგი სახის მიმდევრობები: მონოტონური, შემოსაზღვრული და შემოუსაზღვრელი, რომლებიც განიმარტებიან შესაბამისი ფუნქციების მონოტონურობისა და შემოსაზღვრულობის განმარტებათა მიხედვით, რადგანაც მიმდევრობა ფუნქციის კერძო შემთხვევაა.

(X_n) მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ ნებისმიერი n-თვის სრულდება უტოლობები $X_n < X_{n+1}$. ამ შემთხვევაში, ცხადია, ნებისმიერი n და m-თვის, როცა $n < m$, $X_n < X_m$. მაგალითად ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა, ლუწ ნატურალურ რიცხვთა

მიმდევრობა, $\left(\frac{n}{n+1}\right)$, (3^n) მიმდევრობები ზრდადია. მართლაც. ცხადია, $n < n+1$; $2n < 2(n+1)$; $2n-1 < 2(n+1)-1$. დავამტკიცოთ, რომ $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ ზრდადია. მართლაც განვიხილოთ სხვაობა:

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1+1} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0; \text{ ე.ი.}$$

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}.$$

(3^n) რომ ზრდადია, ასე დავამტკიცოთ.

$\frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1$ ე. ი. $3^n < 3^{n+1}$.

თუ ნებისმიერი n-თვის $X_n > X_{n+1}$ და მაშასადამე $X_n > X_m$, როცა $n > m$, მაშინ (X_n) მიმდევრობა კლებადია.

განიმარტება აგრეთვე არაკლებადი და არაზრდადი მიმდევრობებიც, როცა განმარტებაში ნაცვლად $<$, გვექნება $\leq$ და ნაცვლად $>$ გვექნება $\geq$.

ზრდად და კლებად მიმდევრობებს მონოტონური მიმდევრობები ჰქვია. მიმდევრობა შეიძლება იყოს არც ზრდადი და არც კლებადი, მაგალითად, მიმდევრობები 1, -1, 1, -1, ...; 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...; $(2+(-1)^n)$; $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \ldots$ არ არიან მონოტონური მიმდევრობები.

(X_n) მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ $\exists k > 0, \forall n:$ $|X_n| \leq k$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $-k \leq X_n \leq k$, ე.ი. ამ შემთხვევაში

არსებობს ისეთი სეგმენტი $[-k,\ k]$, რომელიც შეიცავს მოცემული მიმდევრობის ყველა წევრს.

ვიტყვით, რომ (X_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზემოდან, თუ $\exists M \in R,\ \forall n : X_n \le M$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ მიმდევრობის ყველა წევრი მოთავსებულია M წერტილის მარცხნივ. თუ ასეთი M არ მოიძებნება, მაშინ მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოუსაზღვრელი.

ვიტყვით, რომ (X_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ქვემოდან, თუ $\exists m \in R,\ \forall n : X_n \ge m$, ე.ი. მიმდევრობის ყველა წევრი მოთავსებულია რიცხვთა ღერძზე m წერტილის მარჯვნივ, თუ ასეთი m არ მოიძებნება, მაშინ მიმდევრობას ეწოდება ქვემოდან შემოუსაზღვრელი. ვგულისხმობთ, რომ მიმდევრობების წევრები წარმოქმნილია რიცხვთა ღერძის წერტილების მიმდევრობათა სახით (ნამდვილ რიცხვს ვაიგივებთ რიცხვთა ღერძის შესაბამის წერტილთან). მოვიყვანოთ მაგალითები. ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა, ლუწ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ქვემოდან, ზემოდან არაა შემოსაზღვრული. მართლაც, ყოველი ნატურალური რიცხვი ≥ 1, რაც ნიშნავს მათ შემოსაზღვრულობას ქვემოდან. მაგრამ ვერ მოვძებნით ისეთ რიცხვს, რომელზედაც ნაკლები იქნება ყველა ნატურალური რიცხვი; რაც იმას ნიშნავს, რომ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა, ლუწ და კენტ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობები შემოუსაზღვრელია ზემოდან. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ უარყოფით მთელ რიცხვთა მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზემოდან, ქვემოდან შემოუსაზღვრელია. მატრივად დამტკიცდება, რომ მიმდევრობები $\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{n}{n+1}\right), \left(\frac{2^n}{2^n+1}\right)$, $\left(2+(-1)^n\right), \left(1+(-1)^n\right)$, შემოსაზღვრული მიმდევრობებია.

$\left(\frac{2^n}{2^n+1}\right)$ შემოსაზღვრულია ქვემოდან იმიტომ, რომ იგი დადებით რიცხვთა მიმდევრობაა (მისი ყოველი წევრი მეტია 0-ზე); რადგანაც $2^n < 2^n + 1$, ამიტომ $\frac{2^n}{2^n+1} < 1$ წესიერი წილადია და იგი ყოველთვის ნაკლებია 1-ზე ე.ი. $\frac{2^n}{2^n+1} < 1\ \ \forall n$-თვის და მაშასადამე $\left(\frac{2^n}{2^n+1}\right)$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზემოდანაც. ცხადია, რომ თუ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია როგორც ქვემოდან, ისე ზემოდან, მაშინ იგი შემოსაზღვრული მიმდევრობაა და პირიქით. მიმდევრობა იქნება შემოუსაზღვრელი, თუ იგი არც ზემოდან და არც ქვემოდან არ არის შემოსაზღვრული.

მაგალითად, მთელ რიცხვთა მიმდევრობა ... -2, -1, 0, 1, 2, ...; $(-1)^n \cdot n$; $\left(\frac{(3n^2-n+1)(-1)^n}{9n-1}\right)$ შემოუსაზღვრელი მიმდევრობებია.

4. მიმდევრობის ზღვარი

განმარტება. ვიტყვით, რომ (a_n) მიმდევრობის ზღვარი არის a. თუ ნებისმიერი ε დადებითი რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი m ნატურალური რიცხვი, რომ ყოველი n-თვის, როცა $n > m$, სრულდება უტოლობა

$|a_n - a| < \varepsilon$ (1) და ამ ფაქტს სიმბოლურად ასე ჩავწერთ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \qquad (2)$$

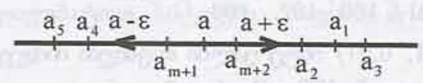
იკითხება: „ლიმეს a_n-სა, როცა n მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, უდრის a-ს“. ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ (a_n) მიმდევრობა იკრიბება a-საკენ და ასეც წერენ $a_n \to a$, როცა $n \to \infty$ (ℓim არის ლათინური სიტყვა $\ell imes$ ე.ი. „ზღვრის“ შემოკლება). განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ (1) უტოლობას აკმაყოფილებს მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული m ნომრიდან. ეს წევრებია $a_{m+1}, a_{m+2},\ldots$ მიმდევრობის დანარჩენი სასრული რაოდენობის წევრები $a_1, a_2, \ldots, a_m$ არ აკმაყოფილებს (1) უტოლობას. რაც შეეხება ε-ს: როცა ვამბობთ, რომ ნებისმიერი დადებითი ε-თვისო, იგულისხმება, რომ იგი შეიძლება იყოს დადებითი რიცხვი, როგორც მცირე, რაგინდ მცირე, ისე დიდი რიცხვიც. სიტყვები „ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება m“, ნიშნავს, რომ m დამოკიდებულია ε-ზე, ამიტომ განმარტებაში m-ის ნაცვლად ზოგჯერ წერენ $m(\varepsilon)$-ს. ზოგიერთ შემთხვევაში m შეიძლება იყოს ნულიც. ცხადია, ნაცვლად $|a_n - a| < \varepsilon$ უტოლობისა შეიძლება დავწეროთ უტოლობა $|a - a_n| < \varepsilon$. მიმდევრობის ზღვრის განმარტება სიმბოლურად ასე ჩაიწერება

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0), (\exists m \in N), (\forall n > m): |a_n - a| < \varepsilon.$$

(a_n) მიმდევრობის ზღვარი არის a ნიშნავს, რომ n-ის ზრდასთან ერთად მიმდევრობის წევრები უფრო და უფრო უახლოვდებიან a-ს და $a_n - a$ სხვაობის მოდული $|a_n - a|$ ხდება რაგინდ მცირე რიცხვი, გარკვეული ნომრიდან დაწყებული. $|a_n - a|$ არის მანძილი a_n წერტილიდან a-მდე.

განვიხილოთ მიმდევრობის ზღვრის გეომეტრიული შინაარსი. (1) უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობისა:

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \qquad (3)$$ ე.ი. მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული m ნომრიდან, $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ მოთავსებულია $a - \varepsilon$ და $a + \varepsilon$ რიცხვებს შორის, ანუ მიმდევრობის ყველა ეს წევრები მიეკუთვნება $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ინტერვალს. ამ ინტერვალის გარეთ თავსდება სასრული რაოდენობის წევრები $a_1, a_2, \ldots, a_m$.



განვიხილოთ მაგალითი. დავამტკიცოთ, რომ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ მიმდევრობის ზღვარია 0. მართლაც ვთქვათ, ε რომელიმე დადებითი რიცხვია. ამ მიმდევრობისათვის დავწეროთ (1)-ის ანალოგიური უტოლობა

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \qquad (4) \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

ამრიგად მე-(4) უტოლობა სრულდება ყოველი ისეთი n-თვის, რომლებიც მეტია $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$-ზე. ამრიგად მოვძებნეთ m, რომელიც უდრის $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$-ს. მთელი ნაწილი ავიღეთ იმიტომ, რომ $\frac{1}{\varepsilon}$ შეიძლება იყოს შერეული რიცხვი. მივცეთ ε-ს კონკრეტული მნიშვნელობები. ვთქვათ $\varepsilon = 0,1$, მაშინ $\frac{1}{\varepsilon} = 10$ ე.ი. $m = 10$ და მაშასადამე, მე-(4) უტოლობა

სრულდება $n=11,12,\ldots$-თვის, მართლაც $\frac{1}{11}<0,1; \frac{1}{12}<0,1,\ldots$ ე.ი. მეათე ნომრიდან დაწყებული, მოცემული მიმდევრობის ყველა წევრი $<\frac{1}{10}$. ამრიგად $(-0,1;\ 0,1)$ ინტერვალში თავსდება ყველა წევრი, დაწებული მე-10 ნომრიდან. ვთქვათ ახლა $\varepsilon=0,01$, მაშინ $m=100$, ე.ი. მე-(4) უტოლობა სრულდება მოცემული მიმდევრობის 100-ე წევრიდან დაწყებული ყველა წევრისათვის. მართლაც, $\frac{1}{101}<\frac{1}{100}, \frac{1}{102}<\frac{1}{100}$ და ა.შ.

ე.ი. $(-0,01,\ 0,01)$ ინტერვალში თავსდება მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული მე-100-ე წევრიდან.

თუ ε-ად ავიღებთ 0,001, მაშინ $m=1000$. ახლა ვთქვათ $\varepsilon=0,017$. მაშინ, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ

$m=\left[\frac{1}{0,017}\right]=\left[\frac{1000}{17}\right]=58$, ე.ი. მოცემული მიმდევრობის წევრები $\frac{1}{59},\frac{1}{60},\ldots$ ნაკლებია 0,017-ზე.

ვთქვათ ახლა $\varepsilon=2$, მაშინ $m=\left[\frac{1}{2}\right]=0$, ე.ი. მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული პირველიდან, <2.

თუ დავუკვირდებით ამ მსჯელობას, შევნიშნავთ, რომ როცა $\varepsilon=0,1$, მაშინ $m=10$; როცა $\varepsilon=0,01$, მაშინ $m=100$; ხოლო როცა $\varepsilon=2$, მაშინ $m=0$, ე.ი. როცა ვამცირებთ ε-ს, მაშინ m დიდდება და პირიქით. ეს ბუნებრივია, რადგანაც ε-ის შემცირებით ინტერვალი $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ უფრო და უფრო პატარავდება, რის გამოც

ამ ინტერვალის შიგნით მიმდევრობის შედარებით „ნაკლები" რაოდენობის წევრები თავსდება:

თუ (-0,1; 0,1) ინტერვალში მოთავსდება მოცემული მიმდევრობის ყველა წევრი დაწყებული მეათედან, (-0, 01; 0, 01) ინტერვალში კი მოთავსდება ამ მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული 100 წევრიდან. ამის გამო მიმდევრობის ზღვრის განმარტებაში, როცა (1) უტოლობა სრულდება ნებისმიერი მცირე დადებითი ε რიცხვისათვის, მაშინ დიდი ε-თვის ეს უტოლობა მითუმეტეს შესრულდება; მაშასადამე ზღვრის განმარტებაში სიტყვებს „ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის" შეიძლება დავუმატოთ სიტყვები „რაგინდ მცირეც არ უნდა იყოს იგი".

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. მართლაც, თანახმად (1) უტოლობისა, გვექნება

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon \quad (5)\Rightarrow \frac{1}{n+1}<\varepsilon \Rightarrow n>-1+\frac{1}{\varepsilon},$$ ამრიგად

მოვძებნეთ ისეთი $m=\left[-1+\frac{1}{\varepsilon}\right]$, რომ $\forall n>m$-თვის, სრულდება (5) უტოლობა. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{kn}{n+1}=k$, მართლაც $\left|\frac{kn}{n+1}-k\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{|k|}{n+1}<\varepsilon$, ე.ი. $m=\left[\frac{|k|}{\varepsilon}-1\right]$.

თუ მიმდევრობის ზღვრის განმარტებაში არ არსებობს ისეთი a, რომ შესრულდეს (1) უტოლობა, მაშინ მიმდევრობას არ ექნება ზღვარი ან მისი ზღვარი იქნება ∞, $-\infty$, ან $+\infty$.

თუ მიმდევრობას გააჩნია სასრული ზღვარი, მაშინ მას

ეწოდება კრებადი; წინააღმდეგ შემთხვევაში - განშლადი, ე.ი. განშლადია, როცა ზღვარი არის უსასრულობა, ან იგი არ არსებობს.

ვიტყვით, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, თუ $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, როგორი დიდი რიცხვიც არ უნდა იყოს იგი, მოიძებნება ისეთი m, რომ როცა $n > m$, სრულდება უტოლობა $a_n > \varepsilon$. (6)

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, თუ ზემოთ მოცემულ განმარტებაში (6)-ე უტოლობა შეიცვლება უტოლობით $a_n < -\varepsilon$ და $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, თუ (6)-ე უტოლობა შეიცვლება უტოლობით $|a_n| > \varepsilon$.

შეიძლება მიმდევრობას საერთოდ არ გააჩნდეს ზღვარი, მათ შორის არც უსასრულობები.

მაგალითად, მიმდევრობებს 0, 1, 0, 1, 0, 1,...; 1, 2, 1, 2,...; $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4},\ldots$ არ გააჩნიათ არც სასრული და არც უსასრულო ზღვრები. შევნიშნოთ, რომ მუდმივი მიმდევრობის ზღვარი უდრის ამავე მუდმივს. ე.ი. $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ თუ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, ეს გამომდინარეობს $\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a| < \varepsilon$ უტოლობიდან. პირიქით კი არა.

მაგალითად, 1, -1, 1, -1,... მიმდევრობას ზღვარი არ გააჩნია, მაშინ როცა $|a_n| = 1$, მიმდევრობის ზღვარია 1.

შენიშვნა. იმის გამო, რომ ზღვრის განმარტებაში ფიგურირებს ε და m, ამიტომ შემდეგში ნაცვლად ზღვრის განმარტების ჩაწერისა ვისარგებლებთ შემოკლებული ჩანაწერით ზღვარი „ε - m“ ენაზე. ასე მაგალითად ჩანაწერი $\left(\frac{1}{n}\right)$ მიმდევრობის ზღვარი

„ε - m“ ენაზე უდრის 0-ს ნიშნავს, რომ „$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in N, \forall n > m : \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$“. შემდეგ – როგორც ტექსტშია.

შემოვიტანოთ განმარტება, რომ თუ რა შემთხვევაში არ არის a რიცხვი (a_n) მიმდევრობის ზღვარი.

ვიტყვით, რომ a რიცხვი არ არის (a_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ მოიძებნება ისეთი $\varepsilon > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი ნატურალური n-თვის არსებობს ისეთი ნატურალური m_n (დამოკიდებული n-ზე), რომ როცა $m_n > n$, სრულდება უტოლობა. $|a_{m_n} - a| \ge \varepsilon$.

ლოგიკურ სიმბოლოებში ეს ასე ჩაიწერება

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ne a \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in N)(\exists m > n) : |a_m - a| \ge \varepsilon.$$

სავარჯიშოები

1. დაწერეთ მიმდევრობები, თუ მათი ზოგადი წევრებია:

$$a_n = \frac{2 + (-1)^n}{3},\ b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n},\ X_n = \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 5},$$

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2n+1} & \text{ლუწი } n - \text{თვის} \\ 2^n + 1 & \text{კენტი } n - \text{თვის} \end{cases},\ y_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n + \alpha\right).$$

დაადგინეთ მათი შემოსაზღვრულობა და მონოტონურობა.

2. მოცემულია მიმდევრობა 1; 2,2; 3; 4,4; 5; 6,6;... არაკლებადია, ხოლო $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4},...$ არაზრდადია, რატომ?

3. იქნება თუ არა შემოსაზღვრული, ან შემოუსაზღვრელი ქვემოდან, ან შემოსაზღვრული ზემოდან, თუ მიმდევრობების ზოგადი წევრებია

$$a_n = \frac{2n}{n-1},\ b_n = \frac{1-(-1)^n}{2},\ C_n = \frac{3^n - 2^n}{6^n},\ d_n = \frac{n^2}{n+1}.$$

4. გამომდინარე განმარტებიდან ე.ი. „$\varepsilon - m$“ ენაზე დაამტკიცეთ, რ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0,\ \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2},\ \lim_{n \to \infty} \frac{3n}{2n-1} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0,\ \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+1}{4n+10000} = \infty.$$

5. მოცემულია მიმდევრობა $1, 3, 5, 7, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}, ...$ დაამტკიცეთ, რომ მისი ზღვარია $\frac{1}{2}$.

6. აჩვენეთ შემდეგი ტოლობების ჭეშმარიტება

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{n+1} = 5,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n+1} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1-(-1)^n}{2}$$

არ არსებობს, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+...+n}{n^2} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3} = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ არ არსებობს.

5. მიმდევრობის ზღვრის თვისებები

თეორემა 1. მიმდევრობას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ერთი ზღვარი.

დამტკიცება. დავუშვათ თეორემის საწინააღმდეგო. ვთქვათ (a_n) მიმდევრობას აქვს ორი ზღვარი a და b, $a \neq b$, ე.ი. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (1) და $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. (2) „$\varepsilon - m_1$“ ენაზე (1) ტოლობა ნიშნავს

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

ანალოგიურად „$\varepsilon - m_2$“ ენაზე (2) ტოლობა ნიშნავს

$$|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

ავიღოთ $m =$ უდ$\{m_1, m_2\}$, მაშინ როგორც (3), ისე (4) უტოლობები მითუმეტეს შესრულდება $n > m$-თვის. განვიხილოთ $|a-b|$, რომელიც მუდმივია $\neq 0$ და შევაფასოთ იგი მოცემული (3) და (4) უტოლობების მიხედვით.

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

მაშასადამე, $|a-b| < \varepsilon$. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ε

რაგინდ მცირე რიცხვია და იგი შეიძლება ავიღოთ $|a-b|$-ზე ნაკლებიც, ამიტომ $|a-b|<\varepsilon$ უტოლობა, მაშინ შესრულდება, როცა $a=b$. მაშასადამე, შეუძლებელია მიმდევრობას ჰქონდეს ორი ზღვარი. თეორემა დამტკიცებულია.

მარტივად დამტკიცდება, რომ თუ მიმდევრობა (a_n) კრებადია a-საკენ, მაშინ მისი ყოველი ქვემიმდევრობა (a_{n_k}) კრებადი იქნება იმავე a-საკენ.

თეორემა 2. ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

მართლაც, ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; მაშინ „$\varepsilon$-$m$" ენაზე ეს ნიშნავს, რომ $|a_n|-|a| \le |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| < |a| + \varepsilon$, ეს უტოლობა სრულდება ყოველი $n > m$-თვის. ავიღოთ $M = \text{უდ}\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_m|, |a|+\varepsilon\}$, მაშინ ცხადია $\forall n$-თვის $a_n \le M$. თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ შეიძლება არ იყოს ჭეშმარიტი ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა. თუ მოვიყვანთ ისეთი შემოსაზღვრული მიმდევრობის მაგალითს, რომელიც არაა კრებადი, ამით დამტკიცდება შებრუნებული თეორემის არაჭეშმარიტება. მიმდევრობა 1,0,1,0,... შემოსაზღვრულია, მაგრამ არაა კრებადი. თუმცა მისი ქვემიმდევრობა 1,1,... კრებადის 1-საკენ, ხოლო მეორე ქვემიმდვრობა 0,0,... კრებადია 0-კენ.

თეორემა 3. თუ მოცემულია სამი მიმდევრობა $(a_n), (b_n), (c_n)$, $\forall n$-თვის დაწყებული გარკვეული ნომრიდან სრულდება უტოლობები: $a_n \le b_n \le c_n$ და $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, (5) მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

მართლაც, (5) ტოლობებიდან „ε-m"-ენაზე მივიღებთ უტოლობებს $a-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a+\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon < b_n < a+\varepsilon$, რაც

იმას ნიშნავს, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

ამ თეორემას საშუალედო ცვლადის ზღვრის თეორემას უწოდებენ. მარტივი დასამტკიცებელია მიმდევრობის ზღვრის შემდეგი თვისებები:

1. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ და $a \le b$, მაშინ გარკვეული ნომრიდან დაწყებული $a_n \le b_n$ და პირიქით. აქ შესაძლოა $a_n < b_n$ მაგრამ $a=b$. მაგალითად $\forall k>0$-თვის $2n+k>n$, ამიტომ $\dfrac{1}{2n+k} < \dfrac{1}{n} \cdot \left(\dfrac{1}{2n+k}\right)$ და $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ მიმდევრობების ზღვარია 0.

2. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = a$ და $a_n \le Z_n \le Y_n$ დაწყებული გარკვეული ნომრიდან, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = a$.

6. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები (მიმდევრობები). კავშირი მათ შორის

(X_n) მიმდევრობას, ანუ X_n ცვლადს ეწოდება უსასრულოდ მცირე სიდიდე, ან უსასრულოდ მცირე, თუ $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$.

„$\varepsilon - m$" ენაზე ეს ნიშნავს, რომ $|X_n - 0| < \varepsilon$, ე.ი. $|X_n| < \varepsilon$, ანუ $-\varepsilon < X_n < \varepsilon$. ე.ი. უსასრულოდ მცირე სიდიდე შეიძლება რაგინდ ახლოს იყოს 0-თან. მაგალითად $\dfrac{1}{n}, \dfrac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}, \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}, q^n$, როცა $|q|<1$, უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია. შევნიშნოთ, რომ უსასულოდ მცირე სიდიდე ცვლადია და იგი არ უნდა გავაიგივოთ ძალიან მცირე მუდმივ რიცხვთან. მაგალითად

$\frac{1}{10^{10}}$ მცირე რიცხვია, მაგრამ მუდმივია; $\frac{(-1)^n}{n}$ კი როგორც ცვლადი, შეიძლება გახდეს დასახელებულ რიცხვზე ნაკლები, როცა $n \to \infty$ და ცხადია მისი მნიშვნელობები უსასრულოდ იცვლება. ასე, რომ ამ ცვლადის მნიშვნელობები ძალიან „ახლოს“არიან ნულთან, თანაც არ ხდებიან 0-ის ტოლი, იგი უსასრულოდ მცირეა.

დავამტკიცოთ უსასრულოდ მცირეთა ზოგიერთი თვისება

1. სასრულო რაოდენობის უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა ალგებრული ჯამი და ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა.

2. მუდმივისა და უსასრულოდ მცირე სიდიდის ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა.

3. შემოსაზღვრული სიდიდისა და უსასრულოდ მცირე სიდიდის ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა.

მართლაც, ვთქვათ $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n), \dots, (\delta_n)$ (მათი რაოდენობა იყოს k) უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია.

„$\varepsilon - m$“ ენაზე ეს იმას ნიშნავს, რომ $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{k}, |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{k}, \dots, |\delta_n| < \frac{\varepsilon}{k}$ (ყველასათვის საერთო ε ავიღოთ), მაშინ

$$|\alpha_n \pm \beta_n \pm \gamma_n \pm \dots \pm \delta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| + \dots + |\delta_n| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon}{k} + \dots + \frac{\varepsilon}{k}}_{k\text{ ჯერ}} = \varepsilon \quad (1)$$

შევნიშნოთ, რომ შეგვეძლოთ აგვეღო არა $\frac{\varepsilon}{k}$ არამედ უბრალოდ ε, მაშინ (1) უტოლობის მარჯვენა მხარეში გვექნებოდა $k\varepsilon$, რომელიც შეიძლება გახდეს რაგინდ მცირე

(ε ნაცვლად შეგვეძლო აგვეღო $\frac{\varepsilon}{k}$).

b_n სიდიდეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ $\forall n$-თვის $\exists M > 0$ რიცხვი, რომ $|b_n| \le M$. ახლა უკვე გასაგებია, თუ რატომ იქნება შემოსაზღვრული და უსასრულოდ მცირეს ნამრავლი უსასრულოდ მცირე.

X_n სიდიდეს ეწოდება უსასრულოდ დიდი სიდიდე, ან უსასრულოდ დიდი, თუ $\lim_{n \to \infty} X_n = \infty$.

„$\varepsilon - m$“ ენაზე ეს იმას ნიშნავს, რომ $|X_n| > \varepsilon$. შეიძლება განვმარტოთ უარყოფითი უსასრულოდ დიდი და დადებითი უსასრულოდ დიდი სიდიდეები. მაგალითად სიდიდეები $n, n^2, -2n-1, (-1)^n \cdot n, 2^n, (-1)^n \cdot 5^n, \frac{1-n^2}{n}, \dots$ უსასრულოდ დიდი სიდიდეებია, ყველა მათგანის ზღვარია $+\infty, -\infty$, ან ∞.

შევნიშნოთ, რომ თუ α_n სიდიდე უსასრულოდ მცირეა, მაშინ მისი შებრუნებული $\frac{1}{\alpha_n}$ იქნება უსასრულოდ დიდი და პირიქით. ეს გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობიდან; თუ $|\alpha_n| < \varepsilon$, მაშინ $\left|\frac{1}{\alpha_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$. თუ ε რაგინდ მცირეა, $\frac{1}{\varepsilon}$ იქნება რაგინდ დიდი. მიღებულია უსასრულოდ მცირეს აღნიშვნა $\circ$ პატარათი, უსასრულო დიდისა ∞-თი, შემოსაზღვრულისა 0 დიდით.

აქ ყურადღება უნდა მივაქციოთ შემდეგ გარემოებას: უსასრულოდ მცირეთა რაოდენობა, როცა ვიხილავთ მათ ჯამს,

უნდა იყოს სასრული რაოდენობის, რადგანაც უსასრულო რაოდენობის უსასრულოდ მცირეთა ჯამი შეიძლება იყოს სასრული რიცხვი, უსასრულოდ მცირე, ან უსასრულოდ დიდიც. მოვიყვანოთ მაგალითები. $\frac{1}{n}$ ავიღოთ n-ჯერ და n მივასწრაფოთ ∞-კენ, მივიღებთ $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1$; ახლა ავიღოთ $\frac{1}{n}$ n^2-ჯერ, მივიღებთ $\frac{1}{n}\cdot n^2=n\to\infty$; ახლა ავიღოთ $\frac{1}{(2n+1)^2}$ უსასრულოდ მცირე $2n+1$-ჯერ, მივიღებთ $\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot(2n+1)=\frac{1}{2n+1}\to 0$. ეს მაგალითები იმაზე მიუთითებს, რომ როცა ვიხილავთ უსასრულოდ მცირეთა ალგებრულ ჯამს, არსებითია მათი რაოდენობა იყოს სასრული. ხოლო უსასრულოდ მცირეთა ნამრავლის შემთხვევაში მათი რაოდენობა შეიძლება იყოს უსასრულოც. რაც შეეხება უსასრულოდ მცირეთა განაყოფს, აქ ზოგადად ვერაფერს ვიტყვით, რადგანაც ეს განაყოფი შეიძლება იყოს სასრული რიცხვი, უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდიც. $\frac{0}{0}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ის, რომ გვაქვს უსასრულოდ მცირეთა განაყოფი და არა 0 გაყოფილი 0-ზე, რასაც არ აქვს აზრი, ე.ი. თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ და $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$, მაშინ შეფარდებას $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ აღვნიშნავთ სწორედ $\frac{0}{0}$ სიმბოლოთი. ანალოგიურად განიხილება უსასრულოდ დიდი სიდიდეების

განაყოფი, რომელიც აღინიშნება $\frac{\infty}{\infty}$ სიმბოლოთი, რომელიც ასევე შეიძლება იყოს სასრული რიცხვი, უსასრულოდ მცირე, ან უსასრულოდ დიდი. ამიტომაა რომ`მათ განუზღვრელობებს უწოდებენ. ასეთივე განუზღვრელობებია $1^\infty, 0^\infty, \infty^0, \infty-\infty$. $0\cdot\infty$ ნიშნავს, რომ გვაქვს უსასრულოდ მცირესა და უსასრულოდ დიდის ნამრავლი. ანალოგიურად განიმარტება დანარჩენი განუზღვრელობანი. აღნიშნული განუზღვრელობების ამოხსნას, ე.ი. საბოლოო შედეგის დადგენას ამ განუზღვრელობათა გახსნას უწოდებენ. ჯერ-ჯერობით ეს გახსნა უნდა მოვახდინოთ ელემენტარული გარდაქმნებით. შემდეგში დიფერენციალური აღრიცხვის შესწავლისას უფრო დაწვრილებით შევეხებით ამ საკითხებს.

ახლა დავამტკიცოთ მნიშვნელოვანი თეორემა.

თუ (a_n) მიმდევრობის ზღვარია a, მაშინ (a_n-a) უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, და პირიქით. ამ თეორემას ასეც გამოთქვამენ: ცვლადი სიდიდე თავისი ზღვრისაგან განსხვავდება უსასრულოდ მცირე სიდიდით და წერენ $a_n=a+\alpha$, სადაც α უსასრულოდ მცირე სიდიდეა.

დამტკიცება. ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. „$\varepsilon-m$“-ენაზე ეს იმას ნიშნავს, რომ $|a_n-a|<\varepsilon$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (a_n-a) მიმდევრობა უსასრულოდ მცირეა. ცხადია პირიქითაც. თუ $|a_n-a|<\varepsilon$, მაშინ თანახმად ზღვრის განმარტებისა $a_n\to a$. ამრიგად თეორემა შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ: იმისათვის, რომ $a_n\to a$, აუცილებელია და საკმარისი, რომ a_n-a იყოს უსასრულოდ მცირე სიდიდე, როცა $n\to\infty$.

აქვე შემოვიტანოთ რამდენიმე განმარტება.

α_n და β_n უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს ეწოდება ეკვივალენტური თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=1$ და წერენ $\alpha_n\sim\beta_n$, როცა $n\to\infty$.

α_n-ს ეწოდება უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე, ვიდრე β_n უსასულოდ მცირე სიდიდე, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=0$ და წერენ $\alpha_n=\circ(\beta_n)$.

α_n ეწოდება უფრო დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე, ვიდრე β_n, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=\infty$.

α_n და β_n უსასრულოდ მცირეებს ეწოდება ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეები, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=c\neq 0$ და წერენ $\alpha_n=O(\beta_n)$.

7. არითმეტიკული მოქმედებანი კრებად მიმდევრობაზე

ვთქვათ, მოცემულია ორი კრებადი მიმდევრობა (X_n) და (Y_n), რომელთა შესაბამისი ზღვრებია a და b. ამ მიმდევრობათა ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და განაყოფი ეწოდება მიმდევრობებს

$$(X_n+Y_n),\quad (X_n-Y_n),\quad (X_nY_n),\quad \left(\frac{X_n}{Y_n}\right), \qquad (1)$$

ამ უკანასკნელში $Y_n\neq 0$, $b\neq 0$.

თეორემა. თუ $X_n\to a$ და $Y_n\to b$, მაშინ კრებადი იქნება (1) მიმდევრობები და $X_n\pm Y_n\to a\pm b$, $X_nY_n\to ab$, $\frac{X_n}{Y_n}\to\frac{a}{b}$, როცა $n\to\infty$.

დამტკიცება. თუ გამოვიყენებთ ზღვრისა და უსასრულოდ მცირე სიდიდეების თვისებებს, მივიღებთ $X_n=a+\alpha$, $Y_n=b+\beta$, სადაც α და β უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია. მაშინ

$$X_n\pm Y_n=a+\alpha\pm(b\pm\beta)=a\pm b+(\alpha\pm\beta)=a\pm b+\gamma$$
$$X_nY_n=(a+\alpha)(b+\beta)=ab+(a\beta+b\alpha+\alpha\beta)=ab+\delta$$
$$\frac{X_n}{Y_n}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}=\frac{ab+\alpha b-ab-a\beta}{b(b+\beta)}=\frac{\alpha b-a\beta}{b(b+\beta)}=\eta;\quad \text{ე.ი.}$$
$$\frac{X_n}{Y_n}=\frac{a}{b}+\eta,$$

სადაც γ,δ,η უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ შეიძლება მიმდევრობათა ჯამი იყოს კრებადი, მაგრამ შესაკრები მიმდევრობები არ იყოს კრებადი. მაგალითად,

$X_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$, $Y_n=(-1)^{n+1}+\frac{1}{n}$ მიმდევრობები არაა კრებადი, მაგრამ მათი ჯამი $X_n+Y_n=\frac{2}{n}$ კრებადია 0-კენ.

დამტკიცებული თეორემის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითები.

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{cn}{dn+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{c}{d+\frac{k}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}c}{\lim\limits_{n\to\infty}d+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n}}=\frac{c}{d}$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}-\frac{5n}{n-2}+\frac{3n}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}-\lim_{n\to\infty}5\cdot$$
$$\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-2}+\lim_{n\to\infty}3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=0-5\cdot1+3\cdot1=-2;$$
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}\to1.$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{cn^2+dn+e}{pn^2+qn+e}=\lim_{n\to\infty}\frac{c+\frac{d}{n}+\frac{e}{n^2}}{p+\frac{q}{n}+\frac{e}{n^2}}=\frac{c+0+0}{p+0+0}=\frac{c}{p}$$

4. ვთქვათ $X_n\to-3$, მაშინ
$$\lim_{n\to\infty}\frac{7X_n^2-3X_n+8}{9X_n^2-6X_n+1000}=\frac{7\cdot9+3\cdot3+8}{9\cdot9+6\cdot3+1000}=\frac{80}{1099}.$$

8. მონოტონური მიმდევრობის კრებადობა

თეორემა მონოტონური მიმდევრობის კრებადობის შესახებ. ყოველი ზრდადი ზემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია; ასევე კლებადი ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია, ე.ი. ყოველი მონოტონური შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია.

დამტკიცება. დავუშვათ, მიმდევრობა (x_n) ზრდადია (არაკლებადია) და ზემოდან შემოსაზღვრული. ე.ი. გარკვეული ნომრიდან დაწყებული, $\exists\, m \quad \forall n>m: x_m\le x_n \Rightarrow x_m\le x_n\le x_{n+1}\le$ $\le x_{n+2}\le\ldots$ და $\exists M\in R$, რომ $\forall n$-თვის $x_n\le M$, რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზემოდან. მოცემული მიმდევრობა განვიხილოთ როგორც სიმრავლე $A=\{x_1, x_2,\ldots, x_n,\ldots\}$, რომელიც ასევე შემოსაზღვრულია ზემოდან; გამოვიყენოთ თეორემა ზემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვრის არსებობაზე. ვთქვათ $\sup A=a$. (1), ცხადია, $x_n\le a$. ზუსტი ზედა საზღვრის განმარტების მიხედვით (1) ტოლობა ნიშნავს, $\forall\varepsilon>0$ რიცხვისათვის $\exists x_k\in A$, რომ
$$a-\varepsilon<x_k\Rightarrow a-\varepsilon<x_k\le x_{k+1}\le x_{k+2}\le\ldots\le a<a+\varepsilon.$$
ამრიგად, მოცემული მიმდევრობის ყოველი წევრი, დაწყებული x_k-დან, მოთავსებულია $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ ინტერვალზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. ანალოგიურად დამტკიცდება თეორემა კლებადი ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობისათვის. დამტკიცებული თეორემა შეიძლება მიღებული იქნას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობის აქსიომად.

შევნიშნოთ, რომ თუ მიმდევრობა მონოტონურია, მაგრამ შემოუსაზღვრელი, მაშინ მისი ზღვარია ან $-\infty$, ან $+\infty$.

9. ნეპერის რიცხვი

განვიხილოთ მიმდევრობა $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in N}$:

$$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს მიმდევრობა კრებადია. განვიხილოთ დამხმარე მიმდევრობა, (Y_n), $Y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, რომელიც მოცემულ მიმდევრობასთან დაკავშირებულია ასე

$$Y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot Y_n=X_n\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad X_n=\frac{Y_n}{1+\frac{1}{n}}.$$

დავამტკიცოთ, რომ (Y_n) მიმდევრობა კრებადია, მაშინ ცხადია კრებადი იქნება (X_n) და $\lim\limits_{n\to\infty} X_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} Y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ მიმდევრობა (Y_n) კლებადია (არაზრდადია).

განვიხილოთ შეფარდება

$$\frac{Y_n}{Y_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\left(\frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}. \qquad (1)$$

ცხადია, $\frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)}=1+\frac{1}{n\,(n+2)}$. გამოვიყენოთ ბერნულის უტოლობა (1)-ში, მივიღებთ

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n\,(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}\geq \qquad (2)$$
$$\geq\left(1+(n+2)\frac{1}{n\,(n+2)}\right)\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1+n}{n}\cdot\frac{n}{1+n}=1$$

ე.ი. $\frac{Y_n}{Y_{n+1}}\geq 1$ მაშასადამე $Y_n\geq Y_{n+1}$. ამრიგად (Y_n) მიმდევრობა არაზრდადია, ცხადია, ქვემოდან შემოსაზღვრულიც, ამიტომ ეს მიმდევრობა კრებადია და მაშასადამე კრებადია (X_n) მიმდევრობაც. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $2\leq X_n<3$, $\forall n\in N$. ამ მიმდევრობის ზღვარს აღნიშნავენ e ასოთი. ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty} X_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

e-ს უწოდებენ ნეპერის რიცხვს. მტკიცდება, რომ იგი ირაციონალური რიცხვია და უდრის 2,718281828459045... (იხ. ФИХТ. I ტომი).

ამ რიცხვს გამოყენება აქვს მათემატიკურ ანალიზში, კერძოდ, განიხილება ლოგარითმები ფუძით e, $\log_e a$, რომელიც აღინიშნება $\ell n\,a$-თი და მას ნატურალურ ლოგარითმს უწოდებენ; ცხადია, $\ell g\,a=\frac{\ell n\,a}{\ell n\,10}$, $\ell n\,a=\frac{\ell g\,a}{\ell g\,e}$. რიცხვს $\frac{1}{\ell n\,10}=\ell g\,e=0{,}434294\ldots$ ათობით ლოგარითმის ნატურალურ ლოგარითმზე გადასვლის მოდული

ჰქვია. ე.ი. $\ell g\, a = 0{,}434294\ldots \cdot \ell n\, a$. e რიცხვზე გვექნება საუბარი ქვემოთაც.

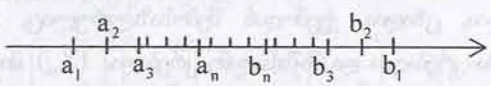
10. ჩალაგებული (მომჭიმავი) სეგმენტების პრინციპი

სეგმენტთა მიმდევრობას

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots \qquad (1)$$

ეწოდება ჩალაგებული, თუ ყოველი წინა სეგმენტი შეიცავს მომდევნოს, ე.ი.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$



ამ შემთხვევაში $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots$, $\forall n$-თვის $a_n < b_1$, (2)

$$b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge \ldots, \quad \forall n\text{-თვის } b_n > a_1. \qquad (3)$$

თუ ამასთანავე $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, მაშინ სეგმენტთა (1) მიმდევრობას ეწოდება მომჭიმავი სეგმენტები.

თეორემა. (მომჭიმავი სეგმენტების პრინციპი). ჩალაგებულ მომჭიმავ სეგმენტთა მიმდევრობას აქვს ერთადერთი წერტილი, რომელიც მიეკუთვნება ყველა სეგმენტს, ე.ი. არსებობს ერთადერთი c წერტილი ისეთი, რომ $\forall n$-თვის $a_n < c < b_n$.

დამტკიცება. (2) მიმდევრობას, როგორც ზრდად ზემოდან შემოსაზღვრულ მიმდევრობას, გააჩნია ზღვარი.

მოცემულობის თანახმად $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. ვთქვათ ეს ზღვარია c. ცხადია $a_n \le c \le b_n$ $\forall n$-თვის. ამრიგად c მიეკუთვნება ყველა

სეგმენტს. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითად, სეგმენტთა მიმდევრობა

$$[1, 3], \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right], \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right], \ldots, \left[2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right], \ldots$$

ჩალაგებული მომჭიმავი სეგმენტთა მიმდევრობაა, რადგანაც

$$1 < \frac{3}{2} < \frac{5}{3} < \ldots < 2 - \frac{1}{n} < \ldots \quad 3 > \frac{5}{2} > \frac{7}{3} > \ldots > 2 + \frac{1}{n} > \ldots$$

და $$\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n} - \left(2 - \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0,$$

ამიტომ მათ გააჩნია ერთადერთი საერთო წერტილი 2.

შენიშვნები. შესაძლებელია სეგმენტთა მიმდევრობა იყოს ჩალაგებული, მაგრამ არ იყოს მომჭიმავი, ე.ი. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \ne 0$ და $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$, მაშინ ცხადია, $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le \alpha$, $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge \ldots \ge \beta$, ამასთანავე $\alpha < \beta$. ამრიგად

$a_1 \le a_2 \le \ldots \le \alpha < \beta \le \ldots \le b_2 \le b_1$ ე.ი. $[\alpha, \beta]$ სეგმენტი მიეკუთვნება ყველა სეგმენტს.

ინტერვალთა, ან ნახევარინტევრალთა ჩალაგებულ მომჭიმავ მიმდევრობას შეიძლება არ გააჩნდეს წერტილი, რომელიც მიეკუთვნება ყველა მათგანს. მაგალითად ჩალაგებულ ინტევრალთა მიმდევრობას $(0, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{3}\right), \ldots, \left(0, \frac{1}{n}\right), \ldots$ არ აქვს საერთო წერტილი. ეს მიმდევრობა მოიჭიმება 0-საკენ, რომელიც არც ერთ ინტერვალს არ მიეკუთვნება.

დამტკიცებული თეორემა შეიძლება მივიღოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობის აქსიომადაც.

11. ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემა

წინა პარაგრაფში დავამტკიცეთ, რომ ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაგრამ შემოსაზღვრული მიმდევრობა შეიძლება არ იყოს კრებადი. ამის დასადასტურებლად ადრე მოყვანილი იყო მაგალითები, აღნიშნული იყო აგრეთვე, რომ ნებისმიერი მიმდევრობიდან შეიძლება გამოიყოს უამრავი ქვემიმდევრობები, რომელთა შორის შეიძლება იყოს კრებადი. ამ საკითხებს ეხება სწორედ ბოლცანო-ვეიერშტრასის

თეორემა. ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა, ხოლო ყოველი შემოუსაზღვრელი მიმდევრობიდან შეიძლება გამოიყოს უსასრულოდ დიდი ქვემიმდევრობა, რომლის ზღვარი შეიძლება იყოს $-\infty$, ან $+\infty$.

დამტკიცება. ვთქვათ, (X_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მაშინ არსებობს ისეთი სეგმენტი $[a, b]$, რომელიც შეიცავს მოცემული მიმდევრობის ყველა წევრს. გავყოთ ეს სეგმენტი ორ ტოლ ნაწილად, რომელთაგან ერთი მაინც შეიცავს მოცემული მიმდევრობის უსასრულო რაოდენობის წევრებს. აღვნიშნოთ ასეთი სეგმენტი $[a_1, b_1]$-ით და მასში შემავალი მიმდევრობის ერთ-ერთი წევრი X_{n_1}-ით, $[a_1, b_1]$ სეგმენტი გავყოთ ორ ტოლ ნაწილად და ის ნაწილი, რომელიც შეიცავს მოცემული მიმდევრობის უსასრულო რაოდენობის წევრებს, აღვნიშნოთ $[a_2, b_2]$-ით, ამ სეგმენტში ავიღოთ მიმდევრობის წევრი X_{n_2}, განსხვავებული X_{n_1}-გან, $n_2 > n_1$ და ა.შ. ეს პროცესი გავაგრძელოთ უსასრულოდ. მივიღებთ სეგმენტთა მიმდევრობას $([a_k, b_k])$, თითოეული რომელთაგანიც შეიცავს მოცემული მიმდევრობის X_{n_k} წევრებს $k = 1, 2, \ldots$, ამასთანავე $k_1 < k_2$-თვის $n_{k_1} < n_{k_2}$. მივიღეთ (X_{n_k}) ქვემიმდევრობა. დავამტკიცოთ მისი

კრებადობა. ცხადია, რომ სეგმენტთა მიმდევრობა $([a_k, b_k])$ ჩალაგებული მომჭიმავი სეგმენტთა მიმდევრობაა, $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^n} \to 0$, როცა $n \to \infty$, $a_k \le X_{n_k} \le b_k$ და რადგან $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$, ამიტომ $\lim\limits_{k\to\infty} X_{n_k} = c$. ამრიგად, მოცემული (X_n) მიმდევრობიდან მიღებული (X_{n_k}) ქვემიმდევრობა კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია შემოსაზღვრული მიმდევრობისათვის.

თუ (X_n) შემოუსაზღვრელი მიმდევრობაა, მაშინ იგი შემოუსაზღვრელია ან ქვემოდან, ან ზემოდან, ან ორივე მხრიდან. ვთქვათ იგი შემოუსაზღვრელია ზემოდან, მაშინ შეიძლება შევარჩიოთ (X_{n_k}) მიმდევრობა ისეთი, რომ $X_{n_k} > k$, მაშინ ცხადია $\lim\limits_{k\to\infty} X_{n_k} = +\infty$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ თუ მოცემული მიმდევრობა შემოუსაზღვრელია ქვემოდან, მაშინ შეიძლება მისგან შევადგინოთ ქვემიმდევრობა მაგალითად (X_{n_i}), რომელიც იკრიბება $-\infty$-კენ. თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია. მაგალითად, $1, -1, 1, -1, \ldots$ მიმდევრობა განშლადია. მისი ქვემიმდევრობები $1, 1, \ldots; -1, -1, \ldots$ კრებადია და მათი ზღვრებია 1 და -1; $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots$ შემოუსაზღვრელია. მისი ქვემიმდევრობა $1, 2, 3, \ldots$ კრებადია $+\infty$-კენ.

შემოვიღოთ განმარტება. მოცემული მიმდევრობის ქვემიმდევრობის სასრული, ან უსასრულო ზღვარს ეწოდება ამ მიმდევრობის კერძო, ანუ ნაწილობითი ზღვარი. ამის გამოყენებით ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემა შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

ყოველი მიმდევრობა აქვს ერთი მაინც კერძო სასრული, ან უსასრულო ზღვარი, ამასთანავე ეს ზღვარი სასრულია, თუ მოცემული მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

დამტკიცებული თეორემა შეიძლება გამოდგეს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობის აქსიომადაც.

12. მიმდევრობის კრებადობის კოშის კრიტერიუმი – აუცილებელი და საკმარისი პირობა

განმარტება. ვიტყვით, რომ (X_n) მიმდევრობა აკმაყოფილებს კოშის პირობას, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი P_ε ნატურალური რიცხვი, რომ ყოველი $n>P_\varepsilon$, $m>P_\varepsilon$, სრულდება უტოლობა

$$|X_n-X_m|<\varepsilon. \qquad (1)$$

ასეთ მიმდევრობას უწოდებენ კოშის მიმდევრობას, ანუ ფუნდამენტურ მიმდევრობას. შევნიშნოთ, რომ (1) უტოლობა შეიძლება შევცვალოთ უტოლობით $|X_{n+p}-X_n|<\varepsilon$.

თეორემა (კოშის კრიტერიუმი). (X_n) მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი აკმაყოფილებდეს კოშის პირობას.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა, რომელიც ჩამოყალიბდება აუცილებელი და საკმარისი პირობით, უნდა დამტკიცდეს ასე: ჯერ დამტკიცდეს საკმარისობა და შემდეგ აუცილებლობა, ან პირიქით. ამით თეორემა მთლიანად იქნება დამტკიცებული.

ჯერ დავამტკიცოთ თეორემის აუცილებლობა. ვთქვათ მოცემული (X_n) მიმდევრობა კრებადია და მისი ზღვარია a.

ვაჩვენოთ, რომ იგი დააკმაყოფილებს (1) უტოლობას. ეს "$\varepsilon-P_\varepsilon$" ენაზე ნიშნავს: $|X_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, როცა $n>P_\varepsilon$, ცხადია $|X_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, როცა $m>P_\varepsilon$. ამ უტოლობების გამოყენებით მივიღებთ

$$|X_n-X_m|=|X_n-a+a-X_m|\le|X_n-a|+|a-X_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ე.ი. $$|X_n-X_m|<\varepsilon.$$

ამით აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის საკმარისობა. ვთქვათ, სრულდება (1) უტოლობა, როცა $n>P_\varepsilon$ და $m>P_\varepsilon$. დავამტკიცოთ, რომ მოცემული მიმდევრობა კრებადია. ჯერ დავამტკიცოთ მისი შემოსაზღვრულობა. დავაფიქსიროთ $m=m_0$, $\varepsilon=1$, მაშინ $|X_n-X_{m_0}|<1$, რის გამოც (X_n) იქნება შემოსაზღვრული. (იხ. კრებადი მიმდევრობის შემოსაზღვრულობის დამტკიცება). ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემის თანახმად მისგან გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა (X_{n_k}). ვთქვათ $\lim\limits_{k\to\infty}X_{n_k}=a$, რაც "$\varepsilon-p'_\varepsilon$" ენაზე ნიშნავს $|X_{n_k}-a|<\varepsilon$. ავიღოთ $q_\varepsilon=\max\{p_\varepsilon, p'_\varepsilon\}$, მივიღებთ, როცა $n>q_\varepsilon$, $n_k>q_\varepsilon$,

$$|X_n-a|=|(X_n-X_{n_k})+(X_{n_k}-a)|\le|X_n-X_{n_k}|+|X_{n_k}-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

თუ ε-ის ნაცვლად ავიღებთ $\frac{\varepsilon}{2}$-ს, მივიღებთ $|X_n-a|<\varepsilon$, რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული მიმდევრობა კრებადია. ამით საკმარისობა დამტკიცებულია, და მაშასადამე თეორემაც მთლიანად დამტკიცებულია. დამტკიცებული თეორემა

მიგვანიშნებს იმაზე, რომ მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ გარკვეული ნომრიდან დაწყებული მიმდევრობის წევრებს შორის განსხვავება იყოს რაგინდ მცირე რიცხვი.

13. სიმრავლის ზღვარითი წერტილები

a წერტილს ეწოდება რიცხვთა E სიმრავლის ზღვარითი, ანუ დაგროვების წერტილი, თუ მისი ნებისმიერი მიდამო $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ შეიცავს მოცემული სიმრავლის უსასრულო რაოდენობის წერტილებს, როგორი მცირეც არ უნდა იყოს ε. ეს წერტილი შეიძლება ეკუთვნოდეს E-ს და შეიძლება არ ეკუთვნოდეს მას. E-ს ისეთ b წერტილს, რომელიც არ არის ზღვარითი წერტილი, ეწოდება E-ს იზოლირებული წერტილი. განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ სასრულ სიმრავლეს ზღვარითი წერტილები არ გააჩნია. რიცხვთა მიმდევრობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სიმრავლე, ამიტომ შეიძლება ვისაუბროთ მიმდევრობის ზღვარით წერტილებზე. მიმდევრობის ზღვრის განმარტებიდან უშუალოდ მომდინარეობს, რომ მისი ზღვარი არის ამავე მიმდევრობის ზღვარითი წერტილიც. მაგალითად, $\left(\frac{1}{n}\right)$ მიმდევრობის ზღვარითი წერტილია 0, მისი ზღვარიც 0-ია, $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ მიმდევრობის ზღვარითი წერტილია 1 და ზღვარიც 1-ია; $\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$. მიმდევრობას

გააჩნია ორი ზღვარითი წერტილი 0 და 1. იგი განშლადი მიმდევრობაა. $1, -1, 1, -1, \ldots$ მიმდევრობის ზღვარითი წერტილებია -1 და 1. ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობას ზღვარითი წერტილი არ გააჩნია (გაფართოებულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ზღვარით წერტილებად შეიძლება მივიჩნიოთ როგორც $-\infty$, ისე $+\infty$).

მიმდევრობის ზღვრის არსებობის ზოგიერთი თეორემა შეიძლება ჩამოყალიბდეს მისი ზღვარითი წერტილების მიხედვით. ეს თეორემებია

1. (X_n) მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი იყოს შემოსაზღვრული და გააჩნდეს ერთადერთი ზღვარითი წერტილი.

2. როგორიც არ უნდა იყოს მიმდევრობის ზღვარითი წერტილი a, ამ მიმდევრობიდან გამოიყოფა ქვემიმდევრობები, კრებადნი a-კენ.

3. ყოველ შემოსაზღვრულ მიმდევრობას გააჩნია ერთი მაინც ზღვარითი წერტილი (ბოლცანო - ვეიერშტრასის თეორემა). უფრო ზოგადად ეს თეორემა ასე ჩამოყალიბდება. ყოველ უსასრულო შემოსაზღვრულ სიმრავლეს გააჩნია ერთი მაინც ზღვარითი წერტილი.

შემოუსაზღვრულ სიმრავლეს შეიძლება გააჩნდეს სასრული ზღვარითი წერტილი. მაგ. $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \ldots$ მიმდევრობის ზღვარითი წერტილია 0.

შევნიშნოთ რომ მიმდევრობის ზღვრის თვისებები, შეიძლება დამტკიცდეს მისი ზღვარითი წერტილების თვისებების გამოყენებითაც.

სავარჯიშოები

1. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, როცა $|q| < 1$ და $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, როცა $q > 1$, q მუდმივია.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10000 - n^2}{n} = -\infty$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n} = \infty$, თუ $q > 1$.

4. ვთქვათ, $X_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\,(n+1)}$. დაამტკიცეთ რომ $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 1$.

5. მოძებნეთ ზღვარითი წერილები მიმდევრობისა $1, \dfrac{1}{2}, 1\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, 1\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, 1\dfrac{1}{8}, \ldots$

6. მტკიცდება შტოლცის თეორემა. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = +\infty$ და (Y_n) მიმდევრობა ზრდადია, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{Y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n - X_{n-1}}{Y_n - Y_{n-1}}$. ამ თეორემის გამოყენებით დაამტკიცეთ

ა) თუ (a_n) კრებადია a-კენ, მაშინ კრებადი იქნება $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ და მისი ზღვარი იქნება აგრეთვე a;

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{k+1} = \dfrac{1}{k+1}$.

7. დაამტკიცეთ, რომ $< a, b >$ შუალედის ზღვარით წერტილთა

სიმრავლეა $[a, b]$.

8. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{q}{n}\right)^{\frac{n}{k}} = e^{\frac{q}{k}}$.

თავი IV

ფუნქციის ზღვარი

1. ფუნქციის ზღვრის კოშის და ჰეინეს განმარტებები

განმარტება. ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მისი განსაზღვრის არის დაგროვების x_0 წერტილზე. (x_0 წერტილში) არის A, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი x-სათვის, როცა $0 < |x - x_0| < \delta$. (1) სრულდება უტოლობა $|f(x) - A| < \varepsilon$ (2) და ვწერთ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ (3) (იკითხება „ლიმეს $f(x)$-სა, როცა $x \to x_0$-კენ, უდრის A-ს").

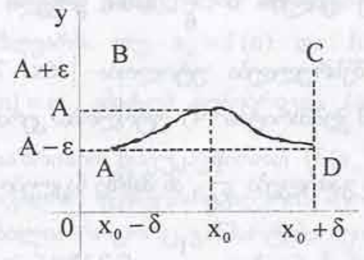
სიმბოლურად ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0), (\exists \delta > 0), (\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

ამ განმარტებას უწოდებენ ფუნქციის ზღვრის განმარტებას კოშის მიხედვით (კოშის აზრით).

ზღვრის ამ განმარტებაში (1) უტოლობა ნიშნავს, რომ $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{x_0\}$, ე.ი. $x \neq x_0$. ამ შემთხვევაში შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ორ გარემოებას. პირველი - $f(x)$ არაა განსაზღვრული x_0 წერტილზე, მაგრამ ეს წერტილი $D(x)$-ის დაგროვების წერტილია, მეორე - $f(x)$ განსაზღვრულია x_0 წერტილზე, მაგრამ $x \neq x_0$. ზღვრის განმარტებიდან ჩანს, რომ δ დამოკიდებულია ε-ზე, ამიტომ ხშირად δ-ს ნაცვლად წერენ δ_ε, ან $\delta(\varepsilon)$. (2) უტოლობა ტოლფასია

$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ ორმაგი უტოლობისა. მაშასადამე (1) და (2) უტოლობებით x და $f(x)$ დაკავშირებულია ასე: როცა x იცვლება $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) - \{x_0\}$ არეში, შესაბამისად $f(x)$ იცვლება $(A - \varepsilon,\ A + \varepsilon)$ ინტერვალზე. ეს გარემოება გრაფიკულად შეიძლება გამოვსახოთ ასე



ისრები მიუთითებს იმაზე, რომ x_0 წერტილზე ფუნქცია არაა განსაზღვრული. თუ აღვნიშნავთ $u^0(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ და $(A - \varepsilon, A + \varepsilon) = u(A, \varepsilon)$, მაშინ ზღვარი ასეც შეიძლება განვმარტოთ: A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ყოველ $u(A, \varepsilon)$ მიდამოსათვის არსებობს ისეთი $u^0(x_0, \delta)$, რომ $f(u^0(x_0, \delta)) \subset u(A, \varepsilon)$. ამაში მდგომარეობს ფუნქციის ზღვრის გეომეტრიული შინაარსი.

ადვილი მისახვედრია რომ ε-ის შემცირებით შესაბამისად მცირდება δ-ც. შევნიშნოთ რომ (2) უტოლობა შეიძლება შესრულდეს დიდი ε რიცხვებისათვის, მაგრამ არ შესრულდეს მცირე ε-ბისათვის. ამიტომ ზღვრის განმარტებაში იგულისხმება, რომ ε შეიძლება იყოს რაგინდ მცირე რიცხვი.

მაგალითი. დავუშვათ $f(x) = 6x - 7$. დავამტკიცოთ, რომ

$\lim\limits_{x\to 2}(6x-7)=5$. (4). ამისათვის $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის უნდა შესრულდეს უტოლობა

$$|(6x-7)-5|<\varepsilon \Leftrightarrow 6|x-2|<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{6}.$$

ამრიგად, თუ ავიღებთ $\delta < \frac{\varepsilon}{6}$, მაშინ ყოველი x-თვის, როცა $0<|x-2|<\delta$, შესრულდება უტოლობა $|(6x-7)-5|<\varepsilon$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ჭეშმარიტია (4) უტოლობა. კერძოდ თუ $\varepsilon = 0,1$, მაშინ δ რიცხვად გამოდგება $\frac{1}{60}$, ან მასზე ნაკლები რიცხვი; ხოლო თუ $\varepsilon = 0,01$, მაშინ δ რიცხვია $\frac{1}{600}$, ან მასზე ნაკლები. შევნიშნოთ რომ ფუნქცია $f(x)=6x-7$ განსაზღვრულია $x=2$ წერტილზეც, რომელზედაც მისი მნიშვნელობა უდრის 5-ს. აქ არ უნდა ვიგულისხმოთ, რომ თითქოს x-ის ნაცვლად ჩავსვით 2.

შემდეგ განვიხილავთ, თუ რა კავშირშია ერთმანეთთან ფუნქციის ზღვარი და მნიშვნელობა წერტილში.

მაგალითი. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} 6x-7, & \text{როცა } x\neq 2 \\ 10, & \text{როცა } x=2, \end{cases} \quad (5) \qquad f(x)=6x-7,\ x\neq 2 \quad (6)$$

მე-(5) შემთხვევაში მოცემული ფუნქცია განსაზღვრულია $x=2$ წერტილზე და ამ წერტილზე მისი მნიშვნელობაა 10. მე-(6) შემთხვევაში ფუნქცია არაა განსაზღვრული 2 წერტილზე, თუმცა ეს წერტილი არის $D(f)$-ის დაგროვების წერტილი ამ ორივე ფუნქციის ზღვარია 5 $x_0=2$ წერტილზე.

ფუნქციის ზღვრის კოშის განმარტებას მეორენაირად უწოდებენ ზღვრის განმარტებას „$\varepsilon-\delta$" ენაზე. შემდეგში ხშირად ვისარგებლებთ ამ „ენით".

შენიშვნა. თუ x_0 არაა $D(f)$-ის ზღვარითი წერტილი, მაშინ ასეთ წერტილში ფუნქციის ზღვარი არ განიმარტება.

ფუნქციის ზღვარი გარკვეულად შეიძლება დავუკავშიროთ მიმდევრობის ზღვარს. თუ $a_n=f(n)$ და $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, მაშინ ცხადია $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=a$. ამიტომ ბუნებრივია (a_n) მიმდევრობა ზღვრის თვალსაზრისით დავუკავშიროთ $(f(a_n))$ მიმდევრობას.

ახლა შემოვიღოთ ფუნქციის ზღვრის მეორე განმარტება, რომელიც ცნობილია როგორც განმარტება ჰეინეს აზრით, ანუ მიმდევრობის „ენით".

განმარტება. ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მისი $D(f)$-ის დაგროვების x_0 წერტილზე (ჰეინეს აზრით) არის A, თუ x_0-სკენ კრებადი ნებისმიერი $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ მიმდევრობის შესაბამისი ფუნქციის მნიშვნელობათა მიმდევრობა $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ იკრიბება A-კენ, ე.ი. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ ტოლობა და ვწერთ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\forall n\in N$-თვის $x_n \in D(f)$.

ამ განმარტებაში x_0-კენ კრებადი არგუმენტის (x_n) მიმდევრობის ნებისმიერობა ნიშნავს, რომ შეიძლება განვიხილოთ ერთი x_0-სკენ კრებადი უსასრულო რაოდენობის მიმდევრობები, რომელთა წევრები მოცემული $f(x)$ ფუნქციის არგუმენტებია. განვიხილოთ ეს განმარტება ზემოთ შესწავლილ მაგალითზე.

განვიხილოთ 2-სკენ კრებადი არგუმენტის მიმდევრობები.

$$\left(\frac{2n}{n+1}\right), \left(\frac{2n-1}{n+1}\right), \left(\frac{2n^2+n-1}{n^2+3n-2}\right), \left(\frac{5-6n}{4-3n}\right), \ldots,$$

მაშინ $f(x)=6x-7$ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობათა მიმდევრობები იქნება

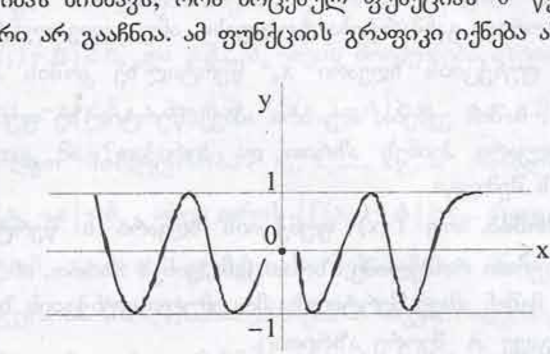
$$\left(\frac{5n-7}{n+1}\right), \left(\frac{5n+13}{n+1}\right), \left(\frac{5n^2-15n+8}{n^2+3n-2}\right), \left(\frac{2-15n}{4-3n}\right), \ldots.$$

როგორც ვხედავთ ყველა ეს მიმდევრობა იკრიბება 5-სკენ.

აუცილებელია, რომ განმარტებაში ხსენებული ყველა (x_n) მიმდევრობის ელემენტები შედიოდეს მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეში.

შევნიშნოთ, რომ თუ a-კენ კრებადი ერთი რომელიმე (x_n') მიმდევრობის შესაბამისი $f(x_n')$ მიმდევრობა არაა კრებადი, ან არსებობს ისეთი ორი (x_n') და (x_n'') მიმდევრობა, რომლებიც კრებადია x_0-სკენ, მაგრამ შესაბამის $(f(x_n'))$ და $(f(x_n''))$ მიმდევრობებს აქვს განსხვავებული ზღვრები, მაშინ, თანახმად განმარტებისა, $f(x)$ ფუნქციას არ გააჩნია ზღვარი x_0 წერტილში. მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ და არგუმენტთა მიმდევრობა, რომელთა ზოგადი წევრებია $x_n=\frac{1}{\pi n}$ და $x_n'=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, ცხადია $x_n\to 0$, $x_n'\to 0$, როცა $n\to\infty$, მაგრამ $f(x_n)=\sin\pi n\to 0$, $f(x_n')=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\to 1$.

რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემულ ფუნქციას 0 წერტილზე ზღვარი არ გააჩნია. ამ ფუნქციის გრაფიკი იქნება ასეთი



ცხადია, რომ მიმდევრობის ზღვრის არსებობაზე და სიდიდეზე გავლენას არ ახდენს მიმდევრობების სასრული რაოდენობის წევრები, რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ $(f(x_n))$, $n=1,2,\ldots$ მიმდევრობის ზღვარია A, მაშინ $(f(x_n))$, $n=k,k+1,\ldots$, მიმდევრობის ზღვარიც იქნება იგივე A. ე.ი. მიმდევრობის ზღვარის კრებადობაზე და ზღვრის სიდიდეზე გავლენას არ ახდენს მისთვის სასრული რაოდენობის წევრების როგორც ჩამოშორება, ასევე მიერთება. მაგალითად $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ მიმდევრობის ზღვარია 0, იგივე ზღვარი აქვს $\frac{1}{100},\frac{1}{101},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ $(n\geq 100)$ მიმდევრობას. ამ აზრით იტყვიან, რომ წერტილში ფუნქციის ზღვრის არსებობის თვისება არის ამ ფუნქციის ლოკალური თვისება. ფუნქციის ზღვრის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ შეუძლებელია ფუნქციას ერთიდაიგივე წერტილზე ჰქონდეს განსხვავებული ზღვრები. ე.ი. ფუნქციას წერტილზე შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ერთი ზღვარი.

ბუნებრივად იბადება კითხვა: არის თუ არა ფუნქციის ზღვრის ორივე განმარტება ტოლფასი, ანუ ეკვივალენტური? ე.ი. თუ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილზე კოშის აზრით არის A, მაშინ ექნება, თუ არა ამავე წერტილზე ფუნქციას იგივე ზღვარი ჰეინეს აზრით და პირიქით? ამ კითხვაზე პასუხობს შემდეგი

თეორემა. თუ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილზე არის A ერთი რომელიმე აზრით (ან ჰეინეს აზრით, ან კოშის აზრით), მაშინ ამავე წერტილზე მოცემული ფუნქციის ზღვარი იქნება იგივე A მეორე აზრითაც.

დამტკიცება. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილზე ჰეინეს აზრით არის A. დავამტკიცოთ, რომ კოშის აზრითაც ამ ფუნქციის ზღვარი იქნება A. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ A არ არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილზე კოშის აზრით. ეს იმას ნიშნავს, რომ არა ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი $\delta>0$, რომ უტოლობა $0<|x-a|<\delta$ იწვევდეს $|f(x)-A|<\varepsilon$ უტოლობას, ე.ი. არსებობს ისეთი ფიქსირებული $\varepsilon_0>0$, რომ როგორი მცირე δ-ც არ უნდა ავიღოთ, ყოველთვის მოიძებნება ერთი მაინც x (განსხვავებული a-გან) ისეთი, რომ $0<|x-a|<\delta$, მაგრამ $|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$. განვიხილოთ დადებით რიცხვთა (δ_n) მიმდევრობა კრებადი 0-კენ, მაგალითად $(\delta_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ მიმდევრობა. მაშინ δ_1-თვის მოიძებნება ისეთი x_1, რომ $0<|x_1-a|<\delta_1$, მაგრამ $|f(x_1)-A|\ge\varepsilon_0$. ანალოგიურად

δ_2-თვის მოიძებნება ისეთი x_2, რომ $0<|x_2-a|<\delta_2$, მაგრამ $|f(x_2)-A|\ge\varepsilon_0$ და ა.შ., δ_n-თვის მოიძებნება ისეთი x_n, რომ $0<|x_n-a|<\delta_n$, მაგრამ $|f(x_n)-A|\ge\varepsilon_0$ და ა.შ. ამრიგად მივიღეთ მიმდევრობა $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ რომლისთვისაც $0<|x_n-a|<\delta_n$, ამავე დროს $|f(x_n)-A|\ge\varepsilon_0$. რადგან $\delta_n\to 0$, ამიტომ $x_n\to a$, ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობათა მიმდევრობა $(f(x_n))$ არ იკრიბება A-სკენ, რადგანაც ახლახან დამტკიცებულის თანახმად $|f(x_n)-A|\ge\varepsilon_0$. ამრიგად ჩვენი დაშვება, რომ $f(x)$ ზღვარი არ არის A, შეუძლებელია, ე.ი. თუ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში ჰეინეს აზრით არის A, მაშინ კოშის აზრითაც ამავე a წერტილში მისი ზღვარი იქნება A. ახლა დავამტკიცოთ დამტკიცებულის შებრუნებული **თეორემა.**

თუ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში კოშის აზრით არის A, მაშინ ჰეინეს აზრითაც ამავე a წერტილში მისი ზღვარი იქნება იგივე A.

ვთქვათ, $\varepsilon>0$ რიცხვი მოცემული რიცხვია. მაშინ ასეთი ε-თვის მოიძებნება ისეთი $\delta>0$, რომ როცა $0<|x-a|<\delta$, (7) სრულდება უტოლობა $|f(x)-A|<\varepsilon$ (8). ავიღოთ $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არიდან ნებისმიერი $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ (9) მიმდევრობა, რომელიც იკრიბება a-კენ. (ამასთან ყველა $x_n\neq a$). რადგანაც $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, ამიტომ რომელიმე δ-სათვის მოიძებნება ისეთი m ნომერი, რომ როცა $n>m$ სრულდება

უტოლობა $0<|x_n-a|<\delta$ ე.ი. x_n რიცხვებისათვის სრულდება (1) უტოლობა და მაშასადამე მასთან ერთად შესრულდება (2) უტოლობაც, $|f(x_n)-A|<\varepsilon$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (9) მიმდევრობის შესაბამისი $(f(x_n))$ მიმდევრობა იკრიბება A-კენ. რადგან (9) მიმდევრობა ნებისმირია და ასეთი მიმდევრობისთვის $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, ამიტომ მოცემული ფუნქციის ზღვარი $x=a$ წერტილზე არის A ჰეინეს აზრითაც. ამით დამტკიცდა რომ თუ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილზე კოშის აზრით არის A, მაშინ ამ ფუნქციის ზღვარი იმავე a წერტილზე იქნება იგივე A ჰეინეს აზრითაც.

ამით ფუნქციის ზღვრის ორივე განმარტების ეკვივალენტობა დამტკიცებულია. ეს თეორემა საშუალებას გვაძლევს შემდეგში გამოვიყენოთ ის განმარტება, რომელიც იქნება უფრო მოსახერხებელი ფუნქციის ამა თუ იმ თვისების დადგენისათვის.

2. ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები

ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილზე მარცხნიდან არის A, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ ყოველი x-თვის, როცა $a-\delta<x<a$ (ე.ი. $x\to a$ ისე, რომ ყოველთვის რჩება a-ს მარცხნივ), სრულდება უტოლობა $|f(x)-A|<\varepsilon$ დავწერთ $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$ და ამ ზღვარს აღნიშნავენ $f(a-0)$-ით. ანალოგიურად განიმარტება ფუნქციის ზღვარი წერტილში მარჯვნიდანაც. ვიტყვით რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი

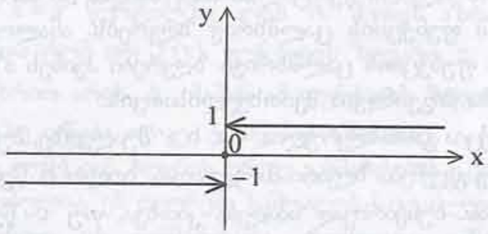
მარჯვნიდან a წერტილზე არის A, თუ $\forall\varepsilon>0$ რიცხვისათვის, $\exists\delta>0$ რიცხვი, რომ ყოველი x-თვის, როცა $a<x<a+\delta$ (ე.ი. როცა $x\to a$, ისე რომ ყოველთვის რჩება a-ს მარჯვნივ), სრულდება უტოლობა $|f(x)-A|<\varepsilon$ და ვწერთ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$, რომელსაც აღნიშნავენ $f(a+0)$-ით. $f(0+0)$ და $f(0-0)$ აღნიშნავენ $f(0+)$ და $f(0-)$-ით.

ფუნქციის ზღვარს წერტილში მარცხნიდან და მარჯვნიდან უწოდებენ ამ ფუნქციის ცალმხრივ ზღვრებს. ანალოგიურად განიმარტება ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები ჰეინეს აზრითაც. ამის გაკეთება მიგვინდვია მკითხველისათვის.

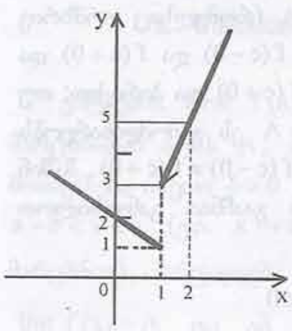
თუ ფუნქცია განსაზღვრულია $<a, b>$ შუალედზე, ბუნებრივია a წერტილზე გვექნება ზღვარი მარჯვნიდან, ხოლო b წერტილზე – მარცხნიდან. ბუნებრივად იბადება კითხვა, თუ c წერტილი არის $D(f)$-ს შიგა წერტილი, მაგალითაც $D(f)$ არის $<a, b>$ შუალედი, ე.ი. $a<c<b$, მაშინ რა კავშირში იქნება ამ c წერტილზე ფუნქციის ზღვარი და ცალმხრივი ზღვრები? ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$ (რომელსაც ორმხრივ ზღვარსაც უწოდებენ), მაშინ არსებობს $f(c-0)$ და $f(c+0)$ და ადგილი აქვს ტოლობას $A=f(c-0)=f(c+0)$ და პირიქით: თუ $f(c-0)=f(c+0)=A$. მაშინ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$ ეს გამომდინარეობს უშუალოდ ზღვრის განმარტებიდან. თუ $f(c-0)\neq f(c+0)$, მაშინ ფუნქციას c წერტილზე ზღვარი არ გააჩნია. განვიხილოთ მაგალითები.

$$1).\ f(x)=\operatorname{sign} x=\begin{cases}-1, & \text{როცა } x<0\\ 0, & \text{როცა } x=0\\ 1, & \text{როცა } x>0.\end{cases}$$

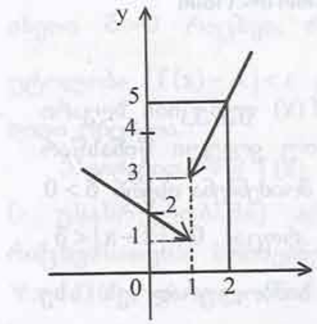
ცხადია, $f(0-)=-1$, $f(0+)=1$, რაც იმას ნიშნავს, რომ 0 წერტილზე მოცემული ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნია. სხვა ნებისმიერ წერტილებში, ცხადია, ფუნქციას ექნება ზღვრები. მაგალითად $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=1$. ამრიგად ამ ფუნქციის ჩანაწერიდან გამომდინარეობს, რომ სპეციალურად შესასწავლია ზღვრები 0 წერტილში. ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე



2). $f(x)=\begin{cases} 2-x, & \text{როცა } x\le 1 \\ 2x+1, & \text{როცა } x>1. \end{cases}$



შევისწავლოთ ფუნქციის ყოფაქცევა $x=1$ წერტილში. $f(1-0)=1$, $f(1+0)=3$ ე.ი. მოცემულ ფუნქციას $x=1$ წერტილზე ზღვარი არ გააჩნია. დანარჩენ წერტილებში ფუნქციას ზღვრები აქვს (მკითხველს ვანდობთ გამოთვალოს ამ ფუნქციის ზღვრები $x=-2$, $x=0$, $x=3$ წერტილებში).



3). $f(x)=\begin{cases} 2-x, & \text{როცა } x<1 \\ 2x+1, & \text{როცა } x>1 \end{cases}$. ამ შემთხვევაშიც $f(1-0)=1$, $f(1+0)=3$ (ეს ფუნქცია არაა განსაზღვრული $x=1$ წერტილზე).

4). დირიხლეს ფუნქციას $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{როცა, } x \text{ რაციონალურია} \\ 0, & \text{როცა, } x \text{ ირაციონალურია} \end{cases}$ არც ერთ წერტილში არ გააჩნია ზღვარი. მართლაც მოსალოდნელია რომ, თუ ამ ფუნქციას ექნება ზღვარი, იგი უნდა იყოს 1, ან 0. სხვა ზღვრის არსებობა გამორიცხულია. ზღვრის განმარტების გამოყენებით გვექნება $|f(x)-1|=\begin{cases} 0, & \text{როცა, } x \text{ რაციონალურია} \\ 1, & \text{როცა, } x \text{ ირაციონალურია.} \end{cases}$

$$|f(x)-0|=\begin{cases} 1, & \text{როცა, } x \text{ რაციონალურია} \\ 0, & \text{როცა, } x \text{ ირაციონალურია.} \end{cases}$$

ამრიგად, არც ერთ წერტილში ამ ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნია (წერტილის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს როგორც რაციონალურ, ისე ირაციონალურ წერტილებს). დირიხლეს ფუნქცია ასეც იწერება $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{m\to+\infty}(\cos 2\pi n!x)^{2m}\right)$.

შენიშვნა. სხვაობას $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნახტომი x_0 წერტილში და აღინიშნება $\delta f(x_0)$-ით, მაგალითად, $\delta(\operatorname{sign} 0)=2$.

3. ფუნქციის ზღვარი უსასრულობის შემთხვევაში

განმარტებები 1. ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილზე არის უსასრულობა, თუ ყოველი წინასწარ დასახელებული $M>0$ რიცხვისათვის, მოიძებნება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $\forall x\in D(f)$ -ისათვის, როცა $0<|x-a|<\delta$, სრულდება უტოლობა $|f(x)|>M$. სიმბოლურად ეს ასე ჩაიწერება $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, ან კიდევ ასე, როცა $x\to a$, მაშინ $f(x)\to\infty$ (M რაგინდ დიდი რიცხვია).

2. ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილზე არის პლუს უსასრულობა, თუ ნებისმიერი $M>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $\forall x\in D(f)$ -სათვის, როცა $0<|x-a|<\delta$, სრულდება უტოლობა $f(x)>M$. ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$, ანუ როცა $x\to a$, მაშინ $f(x)\to+\infty$.

3. ვიტყვით რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილზე არის მინუს უსასრულობა, თუ ნებისმიერი $M>0$ რიცხვისათვის, მოიძებნება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $\forall x\in D(f)$ -სათვის, როცა $0<|x-a|<\delta$, სრულდება უტოლობა $f(x)<-M$ და ვწერთ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$. ანალოგიურად განიმარტება უსასრულო ზღვრები ჰეინეს აზრითაც.

4. ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი უსასრულობაში არის A, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება

ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ ყოველი $|x|>\delta$, სრულდება უტოლობა $|f(x)-A|<\varepsilon$ და ვწერთ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, δ რაგინდ დიდი რიცხვია.

5. ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი + უსასრულობაში (- უსასრულობაში) არის A, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $\forall x\in D(f)$, როცა $x>\delta$ $(x<-\delta)$, სრულდება უტოლობა $|f(x)-A|<\varepsilon$ და ვწერთ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}f(x)=A$. შეიძლება განმარტებული იქნეს შემდეგი ზღვრები:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, 2. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, 3. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$,

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$, 5. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 6. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, 9. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

მკითხველს ვანდობთ ამ ზღვრების განმარტებების ჩამოყალიბებას. შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის ზღვარი, როცა არგუმენტი $\to+\infty$, ანალოგიურია მიმდევრობის ზღვრისა $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)$ -სა. აქ აღარ ვჩერდებით ფუნქციის ზღვრების ამგვარი განმარტებების გეომეტრიულ შინაარსზე. მივიყვანოთ ზოგიერთი მაგალითი საშუალო სკოლის მათემატიკიდან.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}+\infty, & \text{როცა } 0<a<1\\ 0, & \text{როცა } a>1\end{cases}$ 2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg}x=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}0. & \text{როცა } 0<a<1\\ +\infty, & \text{როცა } a>1\end{cases}$ 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}x=+\infty$

$$5.\ \lim_{x\to 0+} \log_a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{როცა } 0<a<1 \\ -\infty, & \text{როცა } a>1 \end{cases} \qquad 6.\ \lim_{x\to 0-} \operatorname{ctg} x = -\infty$$

$$7.\ \lim_{x\to +\infty} \log_a^x = \begin{cases} -\infty, & \text{როცა } 0<a<1 \\ +\infty, & \text{როცა } a>1 \end{cases} \qquad 8.\ \lim_{x\to 0+} \operatorname{ctg} x = +\infty$$

შევნიშნოთ, რომ n-რი ხარისხის მრავალწევრს ყოველ სასრულ წერტილში აქვს სასრული ზღვარი, ხოლო ზღვარი $-\infty$ $(+\infty)$ წერტილში აქვს $-\infty$ $(+\infty)$, თუ n კენტია (თუ n ლუწია), ხოლო $+\infty$ წერტილში მისი ზღვარია $+\infty$. ყველა ეს შემთხვევა ეხება იმას, როცა უმაღლესი ხარისხის კოეფიციენტები დადებითია.

ცხადია, ფუნქციის ზღვარზე უსასრულო შორეულ წერტილში მაშინ შეიძლება ლაპარაკი, თუ ეს ფუნქცია განსაზღვრულია ამ წერტილის მიდამოში, ხოლო მისი ზღვარია $-\infty$, $+\infty$ ან ∞ იმისდა მიხედვით არის თუ არა ეს წერტილები მისი ცვლილების არის ზღვარითი წერტილები. შევთანხმდეთ და წერტილის ქვეშ ვიგულისხმოთ რიცხვი x_0, ან ერთ-ერთი შემდეგი სიმბოლოდან x_0+0, x_0-0, ∞, $-\infty$, $+\infty$.

4. ფუნქციის ზღვრის თვისებები

1. თუ $f(x)$ ფუნქციას მოცემულ x_0 წერტილში აქვს სასრული ზღვარი, მაშინ მოიძებნება $\overset{0}{u}(x_0, \delta)$ მიდამო, რომელშიც ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია. მართლაც, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ "$\varepsilon-\delta$" ენაზე ნიშნავს, რომ $|f(x)-A|<\varepsilon \Leftrightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$, $\forall x\in \overset{0}{u}(x_0, \delta)$. რაც

იმას ნიშნავს, რომ ყოველი ასეთი x-თვის $f(x)\in(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$, რაც ფუნქციის შემოსაზღვრულობას ნიშნავს $\overset{0}{u}(x_0, \delta)$ მიდამოში.

2. თუ $f(x)$ ფუნქციის სასრული ზღვარი x_0 წერტილში განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ არსებობს $\overset{0}{u}(x_0, \delta)$ მიდამო, რომელშიც ფუნქციას იგივე ნიშანი აქვს, რაც მის ზღვარს. მართლაც, ვთქვათ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. $A>0$ დავუშვათ $\varepsilon = A$, მაშინ "$\varepsilon-\delta$" ენაზე გვექნება $A-A<f(x)<2A$. ე.ი. $0<f(x)<2A$. ამრიგად, თუ $A>0$, მაშინ $\exists \overset{0}{u}(x_0, \delta)$, რომელშიც $f(x)>0$.

3. მიმდევრობის ზღვრის ჰეინეს განმარტებების გამოყენებით მარტივად დამტკიცდება შემდეგი თვისებები. თუ $f(x)=c$, სადაც c მუდმივია, მაშინ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.

4. თუ $f(x)\geq A$, $x\in \overset{0}{u}(x_0, \delta)$ და არსებობს სასრული, ან გარკვეული ნიშნის უსასრულო ზღვარი, მაშინ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq A$.

5. თუ $\varphi(x)\leq f(x)\leq g(x)$, $x\in \overset{0}{u}(x_0, \delta)$ და არსებობენ სასრული, ან გარკვეული ნიშნის უსასრულო ზღვრები $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, მაშინ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

6. თუ არსებობს სასრული ზღვრები $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ (1) და $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ (2), მაშინ არსებობს ზღვრები ფუნქციებისა

$f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0,\ B \neq 0)$ და ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\lim_{x \to x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = \lim_{x \to x_0} c_1 f(x) + \lim_{x \to x_0} c_2 g(x) = c_1 A + c_2 B,$$

c_1 და c_2 მუდმივებია;

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = AB.$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (g(x) \neq 0,\ B \neq 0).$$

დავამტკიცოთ ერთ-ერთი თვისება. ზღვრის ჰეინეს განმარტებით (1) და (2) ტოლობები ნიშნავს, რომ როცა $x_n \to x_0$, მაშინ $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$ და $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = B$, ამიტომ

$$\lim_{x \to x_0} (c_1 f(x) + c_2 f(x)) = \lim_{n \to \infty} (c_1 f(x_n) + c_2 g(x_n)) = c_1 A + c_2 B.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება დანარჩენი თვისებებიც. განვიხილოთ მაგალითი.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt[3]{11-x} - 2}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt[3]{11-x} - 2\right)\left(\sqrt[3]{(11-x)^2} + 2\sqrt[3]{11-x} + 4\right)}{(x-3)\left(\sqrt[3]{(11-x)^2} + 2\sqrt[3]{11-x+4}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{11-x-8}{(x-3)\left(\sqrt[3]{(11-x)^2} + 2\sqrt[3]{11-x} + 4\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-1}{\sqrt[3]{(11-x)^2} + 2\sqrt[3]{11-x} + 4} = -\frac{1}{12}.$$

5. რთული ფუნქციის ზღვარი

თეორემა. ვთქვათ, $f(u)$ და $u = \varphi(x)$ D_1 და D არეზე განსაზღვრული რთული ფუნქციაა. $y = f(\varphi(x)) \equiv F(x)$ (1)

და

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$, $\forall x \in \overset{0}{u}(x_0, \delta)$-თვის $\varphi(x) \neq u_0$, (2)

2. u_0 არის D_1-ის ზღვარითი წერტილი $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$,

(3) მაშინ x_0 წერტილში არსებობს (1) ფუნქციის ზღვარი და $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = A$.

დამტკიცება. (3)-დან "$\varepsilon - \delta$" ენაზე ვწერთ $|f(u) - A| < \varepsilon$, (4) (2)-დან $\delta' > 0$-თვის $\exists \delta > 0$, რომ "$\delta' - \delta$" ენაზე $|\varphi(x) - u_0| < \delta'$. (5) ამრიგად (5) და (4)-დან $|F(x) - A| < \varepsilon$. ე.ი. $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = A$, ანუ $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = A$. ჩვენ განვიხილეთ შემთხვევა, როცა A სასრულია. ანალოგიურად განიხილება შემთხვევა, როცა A უდრის რომელიმე ნიშნის უსასრულობას.

ეს თეორემა ცნობილია ზღვარში ცვლადის შეცვლის, ანუ ჩასმის ხერხის სახელწოდებით.

მაგალითი. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$. აღვნიშნოთ $u = \dfrac{\pi}{2} - x$, მაშინ

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2}.$$

შემდეგში ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

შენიშვნა. ამ თეორემის გამოყენებით გამოითვლება მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქციის ზღვარიც.

6. უსასრულოდ მცირე და დიდი ფუნქციები. განუზღვრელობები

ეს საკითხები მიმდევრობებში განვიხილეთ. ანალოგიურად განიხილება უსასრულოდ მცირე და დიდი ფუნქციები წერტილის მიდამოში. ასე მაგალითად, ვიტყვით, რომ $\alpha(x)$ ფუნქცია არის უსასრულოდ მცირე (დიდი) x_0 წერტილის მიდამოში. თუ $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0\ \ (\infty)$. მიმდევრობის ანალოგიურად მტკიცდება, რომ

თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, მაშინ $\exists \overset{0}{u}(x_0,\delta)$ ისეთი, რომ $\forall x\in \overset{0}{u}(x_0,\delta)$-თვის $f(x)=A+\alpha(x)$, სადაც $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირე სიდიდეა. ამრიგად ფუნქცია$_0$ თავისი ზღვრისაგან განსხვავდება უსუსრულოდ მცირე სიდიდით $u(x_0,\delta)$ მიდამოში. უსასრულოდ მცირე ფუნქციას აღნიშნავენ $\circ(x)$-ით, უბრალოდ $\circ$-ით, უსასრულოდ დიდს ∞-თი. ამიტომ ჩანაწერების სიმოკლისათვის ვისარგებლებთ სიმბოლური ჩანაწერებით

$$\frac{a}{+0}=+\infty,\ \frac{a}{-0}=-\infty,\ \frac{a}{0}=\infty,\ \frac{a}{+\infty}=+0,\ \frac{a}{-\infty}=-0,\ \frac{a}{\infty}=0,\ a>0.$$

სადაც $+0$ არის დადებითი უსასრულოდ მცირეა, -0 აურყოფითი უსასრულოდ მცირეა.

შევნიშნოთ, რომ უსასრულოდ მცირეთა შეფარდების ზღვის გამოსათვლელად შეიძლება ერთ-ერთი, ან ორივე შევცვალოთ

შესაბამისი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირე სიდიდით. მაგალითად,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\operatorname{tg}(4-x^2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{4-x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(2-x)(2+x)}=\frac{1}{4}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\sin x\sim x$, $\operatorname{tg}x\sim x$, როცა $x\in(-\delta,\delta)$. შემდეგისათვის ვისარგებლებთ აღნიშვნებით $f(x)=\circ(\varphi(x))$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, ხოლო $f(x)=0(\varphi(x))$ ნიშნავს, რომ $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ შემოსაზღვრულია x წერტილის მიდამოში.

უსასრულოდ მცირე და დიდ ფუნქციებს გააჩნია ის თვისებები, რაც უსასრულოდ მცირე და დიდ სიდიდეებს მიმდევრობებში. ამიტომ უფრო დაწერილებით ამ საკითხზე აქ აღარ შევჩერდებით. ბუნებრივია, ფუნქციებშიც განიხილება განუზღვრელობები: $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^{\infty},\ 0^{\infty},\infty^{0}$, რომელთა გახსნა შეიძლება შესაბამისი მიმდევრობების ანალოგიურად.

7. მონოტონური ფუნქციის ზღვრის არსებობა და ფუნქციის ზღვრის არსებობის კოშის კრიტერიუმი

თეორემა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია სასრულ, ან უსასრულო (a,b) ინტერვალზე, მაშინ $x=b$ წერტილზე არსებობს ზღვარი მარცხნიდან და $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$, ხოლო

a წერტილზე – ზღვარი მარჯვნიდან და $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{x\in(a,\,b)} f(x)$.

თუ თეორემის პირობებში f ფუნქცია შემოსაზღვრულია ზემოდან, მაშინ $x=b$ წერტილზე არსებობს სასრული ზღვარი მარცხნიდან, თუ f შემოუსაზღვრულია ზემოდან, მაშინ $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$. ანალოგიურად, თუ f შემოსაზღვრულია ქვემოდან, მაშინ $x=a$ წერტილზე არსებობს სასრული ზღვარი მარჯვნიდან, ხოლო თუ f შემოუსაზღვრელია ქვემოდან, მაშინ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$ ანალოგიური თვისებები აქვს კლებად ფუნქციებს. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ f მონოტონურია (a, b) ინტერვალზე და $x_0 \in (a, b)$, მაშინ ამ წერტილზე არსებობს სასრული ცალმხრივი ზღვრები $f(x_0-0)$ და $f(x_0+0)$. შეიძლება ისინი იყონ ერთმანეთის ტოლი ან განსხვავებული. ამ თვისების დამტკიცებას ვანდობთ მკითხველს.

რაც შეეხება ფუნქციის ზღვრის არსებობის კოშის კრიტერიუმს. იგი ანალოგიურია მიმდევრობის ზღვრის კოშის კრიტერიუმისა. ამიტომ დაუმტკიცებლად ჩამოვაყალიბოთ ეს კრიტერიუმი.

იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციას ჰქონდეს სასრული ზღვარი x_0 წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნებოდეს ისეთი $\overset{0}{u}(x_0, \delta)$ მიდამო, რომ ყოველი x' და x''-სათვის ამ მიდამოდან, შესრულდეს უტოლობა $\left|f(x'') - f(x')\right| < \varepsilon$. ცხადია $0 < |x'-x| < \delta$ და $0 < |x''-x| < \delta$.

ეს კრიტერიუმი იმას ნიშნავს, რომ თუ ფუნქციას x_0 წერტილზე გააჩნია ზღვარი, მაშინ მოიძებნება $\overset{0}{u}(x_0, \delta)$ ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოდან აღებული ნებისმიერ წერტილებზე მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობათა სხვაობა რაგინდ მცირეა.

8. ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ზღვარი

ზღვრის განმარტებით და გარკვეული გარდაქმნების გამოყენებით შეიძლება დამტკიცდეს ზოგიერთი ფუნქციის შემდეგი ზღვრების ჭეშმარიტება (მათი დამტკიცება იხილეთ ოთხი ავტორის „მათემატიკური ანალიზის“ პირველ ტომში). ეს ზღვრებია:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ 2. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ 5. $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ 6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ 8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ 10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ 11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^\gamma-1}{x} = \gamma$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^k} = 0$ 13. როცა $a>1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^k} = +\infty$.

ამ ფორმულების დამტკიცება შეიძლება მარტივად დიფერენციალური აღრიცხვის გამოყენებით (ლოპიტალის წესი, რომელსაც განვიხილავთ ქვემოთ).

სავარჯიშოები

1. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{x\to 1}(5-6x)=-1$.

2. გამოთვალეთ $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{თუ, } x\neq 0 \\ 1, & \text{თუ, } x=0 \end{cases}$ ფუნქციის ზღვრები $0, -1, 2$ წერტილებში.

3. გამოთვალეთ ცალმხრივი ზღვრები $f(x)=\begin{cases} 3x^2+x-1, & x\geq 2 \\ 4-10x, & x<2 \end{cases}$ ფუნქციისა რამოდენიმე წერტილში.

4. იპოვეთ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)^3}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

5. იპოვეთ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x}{6x^2+4x-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^r}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^5-3x^2+\dfrac{2}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\left(\dfrac{6x^2}{x^4-1}-\dfrac{1}{5-2x^2}\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(2x+3)(4x-9)}{(6x-1)(7x+2)(8x+3)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-3x+3}\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{7x^2-22x+3}$, $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$.

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-5x+6)}{x^2-7x+10}$, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{tg}(x^2-8x+15)}{x^2-9x+18}$.

13. გამოთვალეთ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების ზღვრები ე.წ. კრიტიკულ წერტილებში და $-\infty, +\infty, \infty$ წერტილებში.

14. შეადარეთ ერთმანეთს მიმდევრობისა და ფუნქციის ზღვრის თვისებები.

15. დაასახელეთ ფუნქციები, რომლებსაც წერტილებში გააჩნიათ სხვადასხვა ცალმხრივი ზღვრები.

16. შეიძლება თუ არა ორ ფუნქციას წერტილში ზღვარი არ გააჩნდეს, მაგრამ მათ ჯამს, სხვაობას, ნამრავლსა და განაყოფს ჰქონდეს ზღვარი.

17. ვთქვათ, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty, +\infty$, ან ∞, მაშინ წრფე $x=a$ იქნება, თუ არა ამ ფუნქციის ასიმპტოტი?

თავი V

უწყვეტი ფუნქციები

1. ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში და სიმრავლეზე

უწყვეტობის კოშის განმარტება, ანუ განმარტება „$\varepsilon-\delta$“ ენაზე.

ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია a წერტილზე, თუ

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \qquad (1)$$

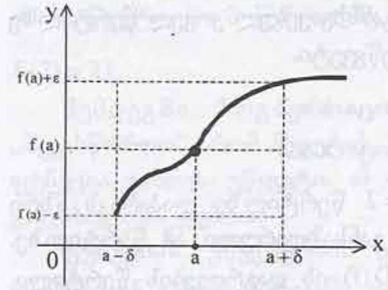
ე.ი. ფუნქცია უწყვეტია წერტილზე, თუ ფუნქციის ზღვარი ამ წერტილზე უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას ამავე წერტილზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $\forall x$-თვის, როცა $|x-a| < \delta$, (2) სრულდება უტოლობა

$|f(x)-f(a)| < \varepsilon.$ (3)

(2) უტოლობა ტოლფასია ორმაგი უტოლობისა $a-\delta < x < a+\delta$. ინტერვალი $(a-\delta,\ a+\delta)$ აღვნიშნოთ $u(a,\delta)$ სიმბოლოთი. (3) უტოლობა ტოლფასია ორმაგი უტოლობისა $f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$. ინტერვალი $(f(a)-\varepsilon,\ f(a)+\varepsilon)$ აღინიშნება $u(f(a),\varepsilon)$ სიმბოლოთი. ამრიგად $f(x)$ უწყვეტია a წერტილზე, თუ $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის $\exists \delta > 0$, რომ ყოველი $x \in u(a,\delta)$-თვის $f(x) \in u(f(a),\varepsilon)$ (იხილე გრაფიკი).

წერტილი $(a, f(a))$ ძევს ფუნქციის გრაფიკზე. უწყვეტობის განმარტებიდან გამომდინარეობს:

1. წერტილი, რომელზედაც განისაზღვრება ფუნქციის



უწყვეტობა, მიეკუთვნება ფუნქციის განსაზღვრის არეს, წინააღმდეგ შემთხვევაში $f(a)$-ს აზრი არ ექნება. ამავე დროს a უნდა იყოს $D(f)$-ის დაგროვების წერტილი.

2. ფუნქციის ზღვარი a წერტილზე ტოლი უნდა იყოს ფუნქციის მნიშვნელობისა ამავე წერტილზე. ამრიგად, ფუნქციის ზღვარი წერტილზე და უწყვეტობა ამავე წერტილზე ერთმანეთთან გარკვეულ კავშირში არიან. მათ აქვთ როგორც საერთო, ისე განსხვავებული ნიშნები. იმედია ამ კავშირს მკითხველი თავად გაარკვევს.

განვიხილოთ მაგალითები.

1. $f(x) = x$ ფუნქცია, განსაზღვრული $(-\infty, +\infty) = R$ ინტერვალზე, უწყვეტია ამ ინტერვალის ყოველ წერტილზე. მართლაც, ვთქვათ ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია და $\forall a$ ეკუთვნის მოცემულ ინტერვალს. ვაჩვენოთ, რომ $\lim_{x\to a} x = a$. მაშინ უნდა შესრულდეს უტოლობა $|x-a| < \varepsilon$. (4)

ამრიგად, თუ ავიღებთ $0 < \delta < \varepsilon$, მაშინ ყოველი $a-\delta < x < a+\delta$-თვის სრულდება (4) უტოლობა, ე.ი. $f(x)$ უწყვეტია ყოველ x წერტილზე.

2. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1, & \text{როცა } x \ge 2 \\ 4 - 10x, & \text{როცა } x < 2 \end{cases}$

ფუნქცია, განსაზღვრული R-ზე, არაა უწყვეტი $x = 2$ წერტილზე, რადგანაც ამ წერტილზე მას ზღვარი არ გააჩნია.

თუმცა $f(2)=9$, სხვა 2-დან განსხვავებულ ყოველ წერტილზე მოცემული ფუნქცია იქნება უწყვეტი.

$$3.\quad f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+1, & \text{როცა } x>2\\ 4-10x, & \text{როცა } x<2\end{cases}$$

ფუნქციის უწყვეტობაზე $x=2$ წერტილზე ლაპარაკს აზრი არ აქვს, რადგან იგი არაა განსაზღვრული ამ წერტილზე. თუმცა ეს წერტილი არის $D(f)$-ის დაგროვების წერტილი. ზოგ შემთხვევაში ასეთ წერტილს წყვეტის წერტილსაც უწოდებენ. სხვა დანარჩენ წერტილებში მოცემული ფუნქცია უწყვეტია.

$$4.\quad f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+1, & \text{როცა } x>2\\ 10x-11, & \text{როცა } x\le 2\end{cases}$$

უწყვეტია $x=2$ წერტილზე (და ყველა სხვა წერტილშიც), რადგან $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=9=f(2)$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f(2-0)=f(2+0)=f(2)$.

$$5.\quad f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+1, & \text{როცა } x>2\\ 10x-11, & \text{როცა } x<2\end{cases}$$

ფუნქცია არაა უწყვეტი $x=2$ წერტილზე, რადგანაც არაა განსაზღვრული ამ წერტილზე, თუმცა მას ამ წერტილზე ზღვარი აქვს. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=9$, რადგანაც $f(2-0)=f(2+0)=9$.

$$6.\quad f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+1, & \text{როცა } x>2\\ 10x-11, & \text{როცა } x<2\\ 21, & \text{როცა } x=2\end{cases}$$

არაა უწყვეტი $x=2$ წერტილზე, რადგანაც $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=9\neq f(2)$, $f(2)=21$.

შემდეგში ზოგიერთი ფუნქცია შეიძლება ისე „შევასწოროთ“, რომ წყვეტის წერტილზე „შესწორებული“ ფუნქცია გახდეს უწყვეტი. ამ ფაქტს უფრო დაწვრილებით განვიხილავთ ქვემოთ.

ფუნქციის უწყვეტობის განმარტებიდან და ზღვრის თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $f(x)$ უწყვეტია $x=a$ წერტილზე, მაშინ $f(a-0)=f(a+0)=f(a)$ და პირიქით.

ფუნქციის უწყვეტობის კოშის განმარტებიდან როგორც შედეგი, შეიძლება მივიღოთ მეორე განმარტება. ვუწოდოთ $x-a$-ს არგუმენტის ნაზრდი a წერტილში და იგი აღვნიშნოთ Δx-ით. Δx არის არგუმენტის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა და არა Δ-ს ნამრავლი x-ზე, ე.ი. $\Delta x=x-a$, მაშინ $x=a+\Delta x$ და $f(x)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$, რომელსაც ეწოდება $f(x)$-ის ნაზრდი a წერტილზე და აღინიშნება Δy-ით. ე.ი. $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)=f(x)-f(a)$. ცხადია, რომ როცა $x\to a$, მაშინ $\Delta x\to 0$ ე.ი. ამ შემთხვევაში Δx უსასრულოდ მცირე სიდიდეა. იმის გამო, რომ ε შეიძლება იყოს რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვი, ამიტომ ამ ფუნქციის a წერტილზე უწყვეტობის შემთხვევაში $f(x)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(x)$ იქნება აგრეთვე უსასრულოდ მცირე სიდიდე თანახმად (3) უტოლობისა. ამრიგად (2) და (3) უტოლობების გამოყენებით ფუნქციის უწყვეტობა $x=a$ წერტილში კოშის აზრით მეორენაირად შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ.

ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია a წერტილზე, თუ ამ წერტილზე არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი. ამრიგად

უწყვეტი ფუნქციის ძირითადი დამახასიათებელი თვისება ის არის, რომ როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ ფუნქციის ნაზრდიც ნულისაკენ მიისწრაფვის. შემდეგში ხშირად გამოვიყენებთ უწყვეტობის ამ თვისებას.

არსებობს ფუნქციის უწყვეტობის მესამე განმარტება, რომელიც ცნობილია უწყვეტობის ჰეინეს განმარტების, ანუ მიმდევრობის „ენით“ განმარტების სახელწოდებით. ბუნებრივია, ეს განმარტება უკავშირდება ფუნქციის ზღვრის ჰეინეს განმარტებას.

ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x=a$ წერტილზე, თუ a-კენ კრებადი ნებისმიერი $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (5) მიმდევრობის შესაბამისი ფუნქციის მნიშვნელობათა მიმდევრობა $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \ldots$, იკრიბება $f(a)$-სკენ, ე.ი. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$-დან გამომდინარეობს ტოლობა $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. (6)

ცხადია, (5) მიმდევრობის წევრები აღებულია $D(f)$-დან და ასეთი მიმდევრობები შეიძლება იყოს უამრავი რაოდენობის, ოღონდ ყველა ისინი უნდა იკრიბებოდნენ ერთიდაიგივე a-კენ.

(6) ტოლობა შეიძლება ასეც ჩავწეროთ. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$.

შეიძლება მარტივად დამტკიცდეს, რომ ფუნქციის უწყვეტობის კოშის და ჰეინეს განმარტებები ეკვივალენტური განმარტებებია. ამის დამტკიცება შეიძლება ფუნქციის ზღვრების განმარტებათა ეკვივალენტობის დამტკიცების ანალოგიურად.

ვიტყვით, რომ $f(x)$ უწყვეტია განსაზღვრის არეზე, თუ იგი უწყვეტია ამ არის ყოველ წერტილზე. მივუთითოთ ფუნქციის უწყვეტობაზე მთელს არეზე, თუ მისი განსაზღვრის არეა $<a, b>$ შუალედი: თუ $f(x)$-ის განსაზღვრის არეა (a, b) ინტერვალი, მაშინ a და b წერტილებზე მისი

უწყვეტობა არ განიხილება, რადგანაც ამ წერტილებზე ფუნქცია არაა განსაზღვრული. თუ $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $[a, b]$, მაშინ შეიძლება განვმარტოთ უწყვეტობა a წერტილზე მარჯვნიდან, ხოლო b წერტილზე კი – მარცხნიდან.

a წერტილზე $f(x)$ უწყვეტია, თუ $f(a+0) = f(a)$. ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ $f(x)$ უწყვეტია a წერტილზე მარჯვნიდან, ხოლო b წერტილზე უწყვეტია, თუ $f(b-0) = f(b)$ ე.ი. $f(x)$ უწყვეტია b წერტილზე მარცხნიდან.

ცხადია, შეიძლება ფუნქციის ცალმხრივ უწყვეტობაზე ლაპარაკი განსაზღვრის არის შიგა წერტილზეც (წერტილს ქვია რაიმე არის შიგა წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც მთლიანად შედის ამ არეში).

მაგალითი. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1, & \text{როცა } x \geq 2 \\ 4 - 10x, & \text{როცა } x < 2 \end{cases}$

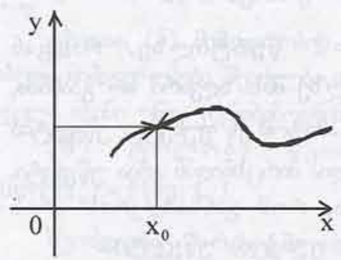
ფუნქცია არაა უწყვეტი $x=2$ წერტილზე, რადგან $f(2-0) \neq f(2+0)$, ე.ი. ამ წერტილზე მას ზღვარი არ გააჩნია, მაგრამ რადგან $f(2+0) = f(2) = 9$, ამიტომ ეს ფუნქცია უწყვეტია $x=2$ წერტილზე მარჯვნიდან, ცხადია მარცხნიდან არაა უწყვეტი. $f(2-0) = -16 \neq f(2)$. ცხადია, რომ განსაზღვრის არის სხვა დანარჩენ წერტილებში ეს ფუნქცია უწყვეტია.

თუ $f(x)$ ფუნქცია არა უწყვეტი მისი განსაზღვრის არის x_0 წერტილზე, მაშინ ვიტყვით, რომ ეს ფუნქცია ამ წერტილზე განიცდის წყვეტას, ანუ იგი ამ წერტილზე წყვეტილია. x_0-ს ამ შემთხვევასი წყვეტის წერტილსაც უწოდებენ. გრაფიკულად ეს ნიშნავს, რომ წერტილი $(x_0, f(x_0))$ ან არ ეკუთვნის „ძირითად“ გრაფიკს, ან ეკუთვნის, მაგრამ გრაფიკის სხვა ნაწილისაგან გამოყოფილია ისრით (იხილე ქვემოთ მოცემული ნახაზები).

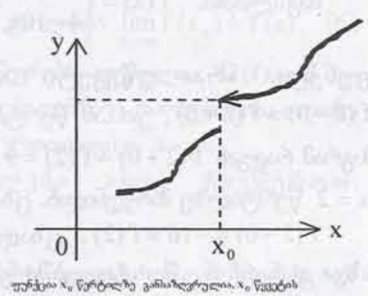
(ერთი სიტყვით გრაფიკის დახაზვისას წყვეტის წერტილზე ხელის აუღებლად ვერ „გავივლით“, ანუ გრაფიკს ხელის აუღებლად ვერ დავხაზავთ. ეს ტერმინი ეკუთვნის აწ განსვენებულ მათემატიკური ანალიზის ცნობილ დიდ სპეციალისტს, ჩემს მასწავლებელს ბ-ნ გ. ე. ხუხუნაიშვილს).

ცხადია, თუ ფუნქციას წერტილზე ზღვარი არ გააჩნია, მაშინ ამ წერტილზე შეუძლებელია იგი იყოს უწყვეტი. შეიძლება მოვიყვანოთ უამრავი მაგალითები წყვეტილი ფუნქციებისა, თუნდაც ისეთი, რომლებიც განხილული იყო ზღვრების განხილვისას. მაგალითად $y = \operatorname{sign} x$, $y = [x]$, $y = \{x\}$. წყვეტილი ფუნქციებია გარკვეულ წერტილებში, დირიხლეს ფუნქცია კი წყვეტილია განსაზღვრის არის ყოველ წერტილში.

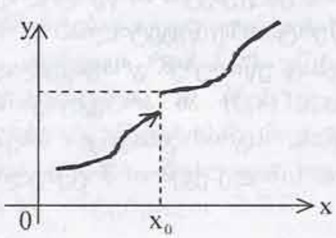
ზემოაღნიშნული მომენტები გრაფიკულად შეიძლება ასე გამოვსახოთ:



x_0 წყვეტის წერტილია, მაგრამ $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, ფუნქცია x_0 – ზე არაა განსაზღვრული, $f(x_0)$ არ არსებობს



ფუნქცია x_0 წერტილზე განსაზღვრულია, x_0 წყვეტის წერტილია, მაგრამ უწყვეტია ამ წერტილზე მარცხნიდან, მარჯვნიდან კი წყვეტილია $f(x_0-0) = f(x_0)$, $f(x_0+0) \neq f(x_0)$



ფუნქცია x_0 – ზე განსაზღვრულია, მაგრამ ეს x_0 წყვეტის წერტილია, ფუნქცია უწყვეტია ამ წერტილზე მარჯვნიდან, მარცხნიდან წყვეტილია $f(x_0-0) \neq f(x_0)$, $f(x_0+0) = f(x_0)$

მივუთითოთ ერთ მნიშვნელოვან გარემოებაზე. ფუნქცია შეიძლება იყოს წყვეტილი ცალკეულ წერტილებში, რომელთა რაოდენობა სასრულია ან თვლადი, მაგრამ მისი განსაზღვრის არე შეიძლება დაიყოს ისეთ ნაწილებად თითოეულ რომელთაგანშიც იგი იქნება უწყვეტი. მაგალითად $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა გაერთიანება ინტერვალებისა $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in z$. ეს ფუნქცია არაა განსაზღვრული ინტერვალების ბოლო წერტილებში და მაშასადამე, ასეთ წერტილებში იგი წყვეტილია. ამრიგად $y = \operatorname{tg} x$ არაა უწყვეტი განსაზღვრის არეზე (ყველა ინტერვალების გაერთიანებაზე), მაგრამ ცალკეულ ინტერ

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right), \ldots, \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right) -$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია. ანალოგიურად $y = \operatorname{ctg} x$ არაა უწყვეტი განსაზღვრის არეზე, მაგრამ ცალკე ინტერვალებში $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$,..., $(-\pi, 0)$, $(-2\pi, -\pi)$ იგი უწყვეტია. სასურველია ინტერვალის ბოლოებზე თვითონ მკითხველმა იპოვოს ცალმხრივი ზღვრები.

2. ფუნქციის წყვეტის წერტილები და ცალმხრივი უწყვეტობა

განმარტება. ვთქვათ, $f(x)$ განსაზღვრულია (a, b) ინტერვალზე, გარდა, შესაძლოა, $x_0 \in (a, b)$ წერტილისა. x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, თუ $f(x)$ არაა განსაზღვრული x_0 წერტილზე, ან განსაზღვრულია ამ წერტილზე, მაგრამ არ არის ამ წერტილზე უწყვეტი.

მაგალითები: 1. $f(x) = y = \operatorname{sign} x$ (1)

ფუნქცია არაა უწყვეტი $x=0$ წერტილზე, რადგანაც $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign} x$ არ არსებობს, თუმცა იგი განსაზღვრულია 0 წერტილზე.

2. $$f(x)=\begin{cases} 5x-3, & \text{როცა } x<2 \\ x^2+3, & \text{როცა } x>2 \\ 10, & \text{როცა } x=2 \end{cases} \qquad (2)$$

ეს ფუნქცია $x=2$ წერტილზე წყვეტილია, რადგან $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7 \neq f(2)$.

3. $f(x) = \{x\}$, (3)

განსაზღვრული $[0, 2]$ სეგმენტზე, წყვეტილია $x=1$ წერტილზე, რადგან ამ წერტილზე მას ზღვარი არ გააჩნია.

4. $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{როცა } x\neq 0 \\ 0, & \text{როცა } x=0. \end{cases} \qquad (4)$$

რადგან $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, ამიტომ ეს ფუნქცია განიცდის წყვეტას 0 წერტილზე. (სასურველია, ამ ფუნქციების გრაფიკები აგოს თვითონ მკითხველმა).

გავარკვიოთ ახლა ფუნქციის წერტილში უწყვეტობის კავშირი ცალმხრივ ზღვრებთან. ჯერ შევნიშნოთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, მაშინ $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$. ამიტომ, ბუნებრივია, x_0 იქნება წყვეტის წერტილი, თუ ამ უკანასკნელი ტოლობებიდან ერთი

მაინც დარღვეულია.

განმარტება. თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი და არსებობს სასრული ცალმხრივი ზღვრები $f(x_0-0)$ და $f(x_0+0)$, მაშინ x_0-ს ეწოდება პირველი გვარის წყვეტის წერტილი. სხვაობას $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ ეწოდება მოცემული ფუნქციის ნახტომი x_0 წერტილში. თუ $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, მაშინ x_0-ს ეწოდება აცილებადი წყვეტის წერტილი. სიტყვა აცილებადი ნიშნავს, რომ მოცემული ფუნქცია შეიძლება „ცოტათი" შევცვალოთ ისეთი ფუნქციით (გვაქვს კი შეცვლის უფლება?), რომ მიღებული ფუნქცია გახდეს უწყვეტი ამ წერტილში. მე-(2) მაგალითში $x=2$ წერტილი აცილებადი წყვეტის წერტილია. ამაში დავრწმუნდებით, თუ ამ ფუნქციაში $f(2)=10$ ტოლობას, შევცვლით $f(2)=7$ ტოლობით ან ფუნქციას ჩავწერთ ასე

$$f(x)=\begin{cases} 5x-3, & \text{როცა } x\le 2 \\ x^2+3, & \text{როცა } x>2, \end{cases} \qquad (5)$$

ან ასე
$$f(x)=\begin{cases} 5x-3, & \text{როცა } x<2 \\ x^2+3, & \text{როცა } x\ge 2 \end{cases} \qquad (6)$$

ასევე (4) ფუნქცია გახდება უწყვეტი, თუ მასში დავუშვებთ $f(0)=1$. წყვეტის აცილება არ შეიძლება (1) და (3) მაგალითებში, რადგანაც მითითებულ წერტილებში მათი ცალმხრივი ზღვრები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან. ამრიგად, აცილებადი წყვეტის წერტილის შემთხვევაში $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ და იმ დაშვებით, რომ $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$, ავიცილებთ წყვეტას. ასე ავიცილეთ წყვეტა (2) და (4) მაგალითებში. ცხადია, წყვეტის

აცილება არ შეიძლება იმ შემთხვევაში, როცა $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$.

$f(x)$ ფუნქციის წყვეტის ისეთ წერტილს, რომელიც არ არის პირველი გვარის, ეწოდება მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში ფუნქციას ამ წერტილში არ გააჩნია ზღვარი, ან იგი უსასრულობის ტოლია. მაგალითად $f(x)=\frac{1}{x}$ და $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ფუნქციებს $x_0=0$ წერტილში გააჩნია მეორე გვარის წყვეტა. დირიხლეს ფუნქციას აქვს მეორე გვარის წყვეტა ყოველ წერტილში.

თუ გავიხსენებთ მონოტონური ფუნქციის ზღვრის თვისებებს, შევნიშნავთ, რომ ასეთ ფუნქციას ექნება მხოლოდ პირველი გვარის წყვეტა.

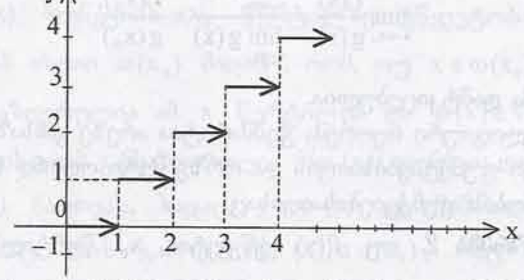
ახლა განვმარტოთ ფუნქციის ცალმხრივი უწყვეტობა.

ვიტყვით, რომ $f(x)$ განსაზღვრული $(\alpha, x_0]$ შუალედზე, უწყვეტია მარცხნიდან x_0 წერტილზე, თუ $f(x_0-0)=f(x_0)$.

ვიტყვით, რომ $f(x)$, განსაზღვრული $[a, b)$ შუალედზე, უწყვეტია მარჯვნიდან a წერტილზე, თუ $f(a+0)=f(a)$. თუ $f(x)$ განსაზღვრულია (a, b) ინტერვალზე, მაშინ ცხადია ამ ინტერვალის ბოლო წერტილზე იგი არ იქნება უწყვეტი (არ არსებობს არც $f(a)$, არც $f(b)$).

ადვილი მისახვედრია, რომ ფუნქცია $y=[x]$ (x-ის მთელი ნაწილი) უწყვეტია მარჯვნიდან $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$ წერტილებში, ხოლო ამავე წერტილებში მარცხნიდან წყვეტილია.

სხვა წერტილებში ეს ფუნქცია უწყვეტია. ამრიგად ეს ფუნქცია ყოველ წერტილში უწყვეტია მარჯვნიდან. ამ ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე:



(ისრების ბოლო წერტილები გრაფიკს არ ეკუთვნის).

3. წერტილში უწყვეტი ფუნქციის თვისებები

თეორემა 1. თუ f და g ფუნქციები უწყვეტია x_0 წერტილში, მაშინ ფუნქციები cf (c მუდმივია), $f \pm g$, fg და $\frac{f}{g}$, როცა $g(x_0) \neq 0$, აგრეთვე უწყვეტი ფუნქციებია ამავე წერტილში.

დამტკიცება. რადგან f და g უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ და $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$. თუ გამოვიყენებთ ფუნქციის ზღვრის თვისებებს, მივიღებთ

$$\lim_{x\to x_0} cf(x)=c\lim_{x\to x_0} f(x)=cf(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)+g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიური თეორემა ჭეშმარიტია არეზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციებისათვის და ორზე მეტი ოღონდ სასრული რაოდენობის ფუნქციებისათვისაც.

თეორემა 2. თუ $f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილზე, მაშინ არსებობს ისეთი $u(x_0,\delta)$ მიდამო, რომელზედაც ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია.

მართლაც. ტოლობა $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ „$\varepsilon-\delta$“ ენაზე ნიშნავს, რომ $\forall x\in u(x_0,\delta)$-თვის $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ შემოსაზღვრულია $u(x_0,\delta)$ მიდამოზე.

თეორემა 3 (რთული ფუნქციის უწყვეტობაზე ანუ ზღვარზე გადასვლა უწყვეტი ფუნქციის ნიშნის ქვეშ).

თუ $y=\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ხოლო $f(y)$ ფუნქცია უწყვეტია $y_0=\varphi(x_0)$ წერტილში, მაშინ რთული ფუნქცია $f(\varphi(x))$ უწყვეტია x_0 წერტილში $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right)$.

ვთქვათ, $z_0=f(y_0)$, ხოლო z_0 წერტილის მიდამო $u(z_0)$ ფიქსირებულია. მაშინ f ფუნქციის y_0 წერტილში

უწყვეტობის გამო, არსებობს y_0-ის ისეთი $v(y_0)$ მიდამო, რომ თუ $y\in v(y_0)$, (1)

მაშინ f განსაზღვრულია ამ y წერტილში და $f(y)\in u(z_0)$. (2)

$\varphi(x)$ ფუნქციის x_0 წერტილზე უწყვეტობის გამო არსებობს ისეთი $\omega(x_0)$ მიდამო, რომ, თუ $x\in\omega(x_0)$, მაშინ φ განსაზღვრულია ამ x წერტილში და $\varphi(x)\in v(y_0)$. ამ წერტილისათვის განსაზღვრულია $f(\varphi(x))$ ფუნქცია და ადგილი აქვს (1) ჩართვას, სადაც $y=\varphi(x)$ და მაშასადამე (2) ჩართვასაც, რის გამოც $f(\varphi(x))\in u(z_0)$, რაც ნიშნავს მოცემული რთული ფუნქციის უწყვეტობას.

ამრიგად, $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right)=f(\varphi(x_0))$.

თეორემა 4 (შექცეული ფუნქციის უწყვეტობა).

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, უწყვეტია და მკაცრად მონოტონური (მკაცრად ზრდადი, ან მკაცრად კლებადი) ამ სეგმენტზე, მაშინ შექცეული ფუნქცია f^{-1} მკაცრად მონოტონურია და უწყვეტი ამავე სეგმენტზე. (ამ თეორემის დამტკიცებას ვანდობთ მკითხველს).

4. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის თვისებები

ვიტყვით, რომ E სიმრავლეზე განსაზღვრული f ფუნქცია მიაღწევს თავის ზედა საზღვარს $\beta = \sup f$, თუ არსებობს ისეთი $x_1 \in E$, რომ $f(x_1) = \beta$. ასევე, f მიაღწევს ქვედა საზღვარს $\alpha = \inf f$, თუ არსებობს ისეთი $x_2 \in E$, რომ $f(x_2) = \alpha$.

თეორემა 1 (ვაიერშტრასი). სეგმენტზე ყოველი უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრულია და ამ სეგმენტზე აღწევს თავის როგორც ქვედა საზღვარს, ისე თავის ზედა საზღვარს.

დამტკიცება. ვთქვათ $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$.

M, როგორც ყველა ზედა საზღვარი არაცარიელი სიმრავლისა, შეიძლება იყოს სასრული, ან $+\infty$. ვაჩვენოთ, რომ $M < +\infty$ და არსებობს ისეთი $x_0 \in [a, b]$ წერტილი, რომ $f(x_0) = M$.

შევარჩიოთ ისეთი (a_n) მიმდევრობა რომ

$$\lim a_n = M, \quad a_n < M, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ზედა საზღვრის განმარტების მიხედვით ყოველი a_n-თვის არსებობს ისეთი $x_n \in [a, b]$, რომ

$$f(x_n) > a_n. \tag{1}$$

მეორეს მხრივ

$$f(x) \le M. \tag{2}$$

მიმდევრობა (x_n) შემოსაზღვრულია $a \le x_n \le b$, $\forall n$-თვის, ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემის თანახმად ამ მიმდევრობიდან გამოიყოფა ისეთი (x_{n_k}) ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია,

ვთქვათ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$.

რამდენადაც $a \le x_{n_k} \le b$, $k = 1, 2, \ldots$, ამიტომ $a \le x_0 \le b$ (1) და (2) უტოლობების გამო ჭეშმარიტია უტოლობები

$$a_{n_k} < f(x_{n_k}) \le M. \quad \text{ამრიგად,} \quad \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

f ფუნქციის უწყვეტობის გამო, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ ე.ი. $M = f(x_0)$. ამრიგად M სასრულია და იგი ტოლია $f(x_0)$-სა. თეორემა დამტკიცებულია ზედა საზღვრისათვის. ანალოგიურად დამტკიცდება თეორემა ქვედა საზღვრისათვის. დამტკიცებული თეორემის ჭეშმარიტებისათვის მოთხოვნა, იმისა, რომ ფუნქცია იყოს უწყვეტი სეგმენტზე არსებითია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ინტერვალზე უწყვეტ ფუნქციას არ გააჩნია ეს თვისება. მართლაც ფუნქცია $y = \frac{1}{x}$, განსაზღვრული $(0, 1)$ ინტერვალზე, უწყვეტია, მაგრამ შემოუსაზღვრელია; ფუნქცია $y = x$ განსაზღვრული $(-\infty, +\infty)$-ზე უწყვეტია, მაგრამ არაა შემოსაზღვრული. ფუნქცია $y = x$, განსაზღვრული (a, b) ინტერვალზე უწყვეტია და შემოსაზღვრული, მაგრამ არ აღწევს თავის ზედა და თავის ქვედა საზღვრებს.

თეორემა 2 (ბოლცანო-კოში). თუ ფუნქცია f უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $f(a) = A$, $f(b) = B$, მაშინ ყოველი c-თვის, $A < c < B$, არსებობს ისეთი $\xi \in [a, b]$ წერტილი, რომ $f(\xi) = c$ ე.ი. მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქცია ღებულობს ყველა მნიშვნელობას მის ნებისმიერ ორ მნიშვნელობას შორის.

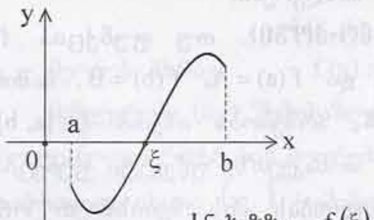
ვთქვათ, $f(a)=A<B=f(b)$ და $A<c<B$. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი x_0 წერტილით ორ ტოლ სეგმენტად $[a, x_0]$, $[x_0, b]$. მაშინ, თუ $f(x_0)=c$, საძიებელი $\xi=x_0$ ნაპოვნია, ხოლო როცა $f(x_0)\neq c$, მაშინ ერთ-ერთი სეგმენტის ბოლოებზე f ფუნქცია მიიღებს მნიშვნელობებს, რომლებიც ძევს c რიცხვიდან სხვადასხვა მხარეს. აღვნიშნოთ ეს სეგმენტი $[a_1, b_1]$-ით და იგი კვლავ გავყოთ ორ ტოლ ნაწილად და ა.შ. ამის შედეგად შესაძლოა სასრული ნაბიჯის შემდეგ მივიდეთ ξ წერტილამდე, რომელშიც $f(\xi)=c$, ან მივიღებთ ჩალაგებულ სეგმენტთა $([a_n, b_n])$ მიმდევრობას, რომლისათვისაც $\forall n$-თვის $f(a_n)<c<f(b_n)$. ჩალაგებული ქრობადი მონაკვეთების პრინციპის ძალით და f ფუნქციის უწყვეტობის გამო

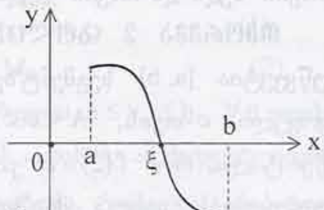
$$\xi=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n \quad \text{და} \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n)\leq c\leq \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

ამრიგად, $f(\xi)=c$. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. თუ ფუნქცია უწყვეტია სეგმენტზე და მის ბოლოებზე ღებულობს სხვადასხვა ნიშნის მნიშვნელობებს, მაშინ ამ სეგმენტზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი წერტილი, რომელშიც ფუნქცია ხდება ნული.

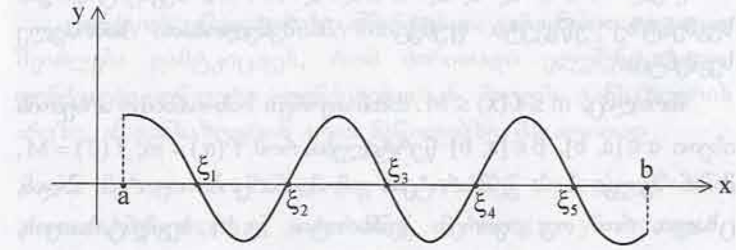
ეს შედეგი შეიძლება გამოვსახოთ ნახაზით





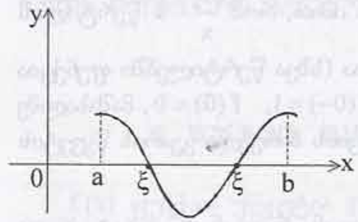
I ნახაზზე $f(\xi)=0$

II ნახაზზე $f(\xi)=0$

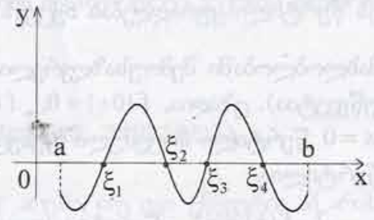


აქ $f(a)>0$, $f(b)<0$ და $f(\xi_1)=0$, $f(\xi_2)=0$, $f(\xi_3)=0$, $f(\xi_4)=0$, $f(\xi_5)=0$.

არაა გამორიცხული ის, რომ უწყვეტი ფუნქცია სეგმენტის ბოლოებზე ღებულობდეს ერთნაირ ნიშნის მნიშვნელობებს, მაგრამ შეიძლება იგი რომელიმე წერტილებში ხდებოდეს ნული. აქაც მოვიშველოთ ნახაზი.



აქ $f(a)>0$, $f(b)>0$, $f(\xi)=0$



აქ $f(a)<0$, $f(b)<0$, მაგრამ $f(\xi_1)=0$, $f(\xi_2)=0$, $f(\xi_3)=0$, $f(\xi_4)=0$

2. თუ f ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $m=\inf\limits_{[a,b]} f$, $M=\sup\limits_{[a,b]} f$, მაშინ ეს ფუნქცია მიიღებს ყველა

მნიშვნელობას მხოლოდ და მხოლოდ $[m, M]$ სეგმენტზე. ე.ი. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე სეგმენტია.

მართლაც, $m \le f(x) \le M$. მაშინ თეორემა 1-ის თანახმად არსებობს ისეთი $\alpha \in [a, b]$, $\beta \in [a, b]$ წერტილები, რომ $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$, მაშინ შედეგი 2-ის ჭეშმარიტება გამომდინარეობს თეორემა 2-დან. ცხადია, რომ თუ თეორემა ჭეშმარიტია $[a, b]$ სეგმენტისათვის, მაშინ ეს თეორემა ჭეშმარიტი იქნება $[c, d]$ ქვესეგმენტისათვის $a < c < d < b$. განვიხილოთ მაგალითები.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & \text{როცა } x \ne 0 \\ 0, & \text{როცა } x = 0. \end{cases}$

გამოვიკვლიოთ უწყვეტობაზე $x = 0$ წერტილში, რადგანაც ეს წერტილი ყურადღებას იქცევს იმით, რომ $\dfrac{1}{x}$ 0 წერტილის მახლობლობაში შემოუსაზღვრელია (სხვა წერტილებში ფუნქცია უწყვეტია). ცხადია, $f(0+) = 0$, $f(0-) = 1$, $f(0) = 0$, მაშასადამე $x = 0$ წერტილი მოცემული ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილია.

2. $f(x) = x^n$ უწყვეტია ყველგან, რადგან $x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n\text{-ჯერ}}$ და

$$\lim_{x \to x_0} x^n = \lim_{x \to x_0} x \cdot \lim_{x \to x_0} x \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to x_0} x = x_0 \cdot x_0 \cdot \ldots \cdot x_0 = x_0^n.$$

3. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{როცა } -1 \le x \le 0 \\ -x, & \text{როცა } 0 < x \le 1. \end{cases}$ აქ $f(0-) = 1$, $f(0+) = 0$,

ეს ფუნქცია წყვეტილია 0 წერტილზე, მაგრამ მას გააჩნია

უდიდესი მნიშვნელობა 1 და უმცირესი მნიშვნელობა -1.

ფუნქციის უწყვეტობის განმარტებათა გამოყენებით ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები უწყვეტი ფუნქციებია ან მთელს განსაზღვრის არეზე, ან განსაზღვრის არის ნაწილებზე. მაგალითად

$y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \sqrt{x}$, $y = a^x$, $y = \log_a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

უწყვეტი ფუნქციებია მთელს განსაზღვრის არეზე. ხოლო ფუნქციები 1) $y = \dfrac{k}{x}$ უწყვეტია ცალკე $(-\infty, 0)$ ინტერვალში და ცალკე $(0, +\infty)$ ინტერვალში. 2) $y = \operatorname{tg} x$ უწყვეტია ცალკეულ ინტერვალში $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$ ცალკეული k-თვის. 3) $y = \operatorname{ctg} x$ ასევე უწყვეტია ცალკეულ ინტერვალებში $(\pi k, \pi(k+1))$ ცალკეული k-თვის. ამ ფუნქციების უწყვეტობის შესახებ ადრეც გვქონდა საუბარი.

5. ფუნქციის თანაბარი უწყვეტობა

$f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია g არეში, თუ იგი უწყვეტია ამ არის ყოველ წერტილში. ეს იმას ნიშნავს, რომ g-ს ნებისმიერ x წერტილში $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის $\exists \delta > 0$, რომ ყოველი $x' \in g$-თვის, როცა $|x' - x| < \delta$ სრულდება უტოლობა $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. ცხადია რომ δ დამოკიდებულია ε-ზე. სხვადასხვა $x \in g$ წერტილებში δ შეიძლება იყოს სხვადასხვა ერთი და იგივე ε-თვის. შესაძლებელია, რომ სხვადასხვა x-თვის ერთი და იგივე ε-ის შესაბამისი δ მნიშვნელობათა შორის არ იყოს უმცირესი. ასეთი უმცირესი δ რომ

არსებობდეს, მაშინ $f(x)$ ფუნქციისაგან უნდა მოვითხოვოთ უფრო მკაცრი პირობა, ვიდრე უწყვეტობა. ეს პირობა არის ფუნქციის თანაბარი უწყვეტობა.

განმარტება. g არეში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება თანაბრად უწყვეტი, თუ $\forall\varepsilon>0$ რიცხვისათვის $\exists\delta>0$ რიცხვი, რომ ყოველი x' და x'' თვის g არეში, როცა $|x'-x''|<\delta$, სრულდება უტოლობა $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

მაგალითად, $f(x)=x$ თანაბრად უწყვეტია $(-\infty,+\infty)$-ზე, აქ δ რიცხვად გამოდგება ε. ე.ი. $\delta=\varepsilon$. ცხადია რომ, თუ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია g-ში, მაშინ იგი უწყვეტიცაა ამ არეში; მაგრამ პირიქით გამონათქვამს შეიძლება არ ჰქონდეს ადგილი. მაგალითად, $f(x)=\frac{1}{x}$, განსაზღვრული $(0,1]$ ნახევარ ინტერვალზე, უწყვეტია, მართლაც $(0,1]$-დან ავიღოთ x და $x'=x+\Delta x$, მაშინ

$$\left|f(x')-f(x)\right|=\left|\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{\Delta x}{x^2+x\Delta x}\right|\to 0,$$

როცა $\Delta x\to 0$ ე.ი. $\frac{1}{x}$ უწყვეტია $(0,1]$-ზე. ახლა ვაჩვენოთ, რომ იგი არაა თანაბრად უწყვეტი $(0,1]$-ზე. ამ შუალედიდან ავიღოთ x' და $x''=x'+\Delta x$, მაშინ $\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x'+\Delta x}\right|=\left|\frac{\Delta x}{x'^2+x'\Delta x}\right|$. ცხადია, როცა Δx რაგინდ მცირეა, მაგრამ უკვე არჩეული, ხოლო როცა $x'\to 0$, მაშინ $\left|\frac{\Delta x}{x'^2+x'\Delta x}\right|$ შემოუსაზღვრელად იზრდება. ე.ი. მიუხედავად

იმისა, რომ $|x'-x''|<\delta$, სრულდება უტოლობა $\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|>\varepsilon$, ე.ი. $f(x)=\frac{1}{x}$ ფუნქცია არაა თანაბრად უწყვეტი განხილულ არეზე.

ბუნებრივად იბადება კითხვა. რა პირობებში იქნება $f(x)$ თანაბრად უწყვეტი განსაზღვრის არეზე? ამ კითხვას პასუხობს კანტორის თეორემა.

$[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ამავე სეგმენტზე.

თეორემა დავამტკიცოთ წინააღმდეგობის დაშვების გზით. ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტია $[a,b]$-ზე, მაგრამ არაა თანაბრად უწყვეტი ამავე სეგმენტზე. რაც იმას ნიშნავს, რომ არსებობს $\varepsilon_0>0$ რიცხვი, რომ როგორი მცირეც არ უნდა იყოს δ, ყოველთვის მოიძებნება x' და x'' $[a,b]$-დან რომ $|x'-x''|<\delta$, მაგრამ

$$\left|f(x')-f(x'')\right|\ge\varepsilon_0. \qquad (1)$$

ახლა δ რიცხვებად ავიღოთ $1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots$, მაშინ ყოველი $\delta=\frac{1}{n}$-თვის მოიძებნება x'_n და x''_n $[a,b]$-დან, რომელთათვისაც $|x'_n-x''_n|<\frac{1}{n}$, თუმცა $\left|f(x'_n)-f(x''_n)\right|\ge\varepsilon_0$. განვიხილოთ $[a,b]$-დან წერტილთა მიმდევრობები (x'_n) და (x''_n), რომლებიც შემოსაზღვრულია. ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემის ძალით ამ მიმდევრობიდან გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობები. (x'_{n_k}) და (x''_{n_k}),

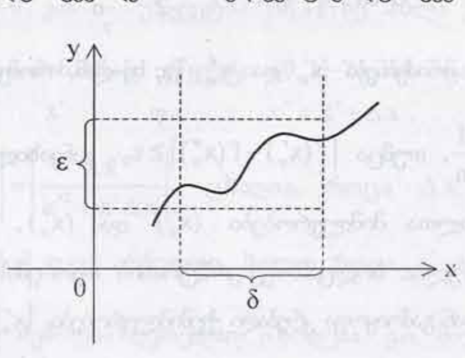
რომელთა ზღვრებია α. ეს α მიეკუთვნება $[a, b]$-ს. $f(x)$-ის უწყვეტობის გამო $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x'_{n_k}\right)=\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x''_{n_k}\right)=f(\alpha)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\exists m \in N$ ისეთი, რომ როცა $n_k > m$ სრულდება უტოლობები $\left|f\left(x'_{n_k}\right)-f(\alpha)\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}$ და $\left|f\left(x''_{n_k}\right)-f(\alpha)\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}$, მაშინ

$$\left|f\left(x'_{n_k}\right)-f\left(x''_{n_k}\right)\right|=\left|\left(f\left(x'_{n_k}\right)-f(\alpha)\right)+\left(f(\alpha)-f\left(x''_{n_k}\right)\right)\right|\le$$

$$\le\left|f\left(x'_{n_k}\right)-f(\alpha)\right|+\left|f\left(x''_{n_k}\right)-f(\alpha)\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\varepsilon_0 .$$

ამრიგად ყოველი $n_k > m$, გვექნება $\left|f\left(x'_{n_k}\right)-f\left(x''_{n_k}\right)\right|<\varepsilon_0$. რაც (1) უტოლობას ეწინააღმდეგება. ამრიგად ჩვენი დაშვება, რომ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია არაა თანაბრად უწყვეტი, შეუძლებელია. თეორემა დამტკიცებულია. დამტკიცებული თეორემის გეომეტრიული შინაარსი ასეთია:

მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ავიღოთ ნებისმიერი მართკუთხედი, რომლის ფუძის სიგრძეა δ, ხოლო სიგანის სიგრძე კი ε. თუ $f(x)$ თანაბრად უწყვეტია $[a, b]$-ზე, მაშინ მისი გრაფიკი, რომელიც მოთავსებულია ამ მართკუთხედში, გადაკვეთს არა ჰორიზონტალურ გვერდებს, არამედ ვერტიკალურ გვერდებს.



სავარჯიშოები

1. დაამტკიცეთ, რომ $y=\sin x$ ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$-ზე.

2. გამოიკვლიეთ უწყვეტობაზე შემდეგი ფუნქციები გრაფიკების აგებით

ა). $y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{როცა } x\neq 0 \\ 0, & \text{როცა } x=0, \end{cases}$ ბ). $y=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{როცა } x\neq 0 \\ 2, & \text{როცა } x=0, \end{cases}$

გ). $y=\begin{cases} 3+x^2, & \text{როცა } x\le 0 \\ \frac{\sin 3x}{x}, & \text{როცა } x>0, \end{cases}$ დ). $y=\begin{cases} x+1, & \text{როცა } x\ge 3 \\ 4-x, & \text{როცა } x<3, \end{cases}$

ე). $y=\begin{cases} 3x, & \text{როცა } x\le x<1 \\ 2x-1, & \text{როცა } 1\le x\le 2 \\ 7-2x, & \text{როცა } x>2, \end{cases}$ ვ). $y=\begin{cases} e^{-x}, & \text{როცა } x\neq 0 \\ 0, & \text{როცა } x=0, \end{cases}$

ზ) $y=\begin{cases} x, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია} \\ -x, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია}. \end{cases}$

3. გამოიკვლიეთ თანაბრად უწყვეტობაზე

ა). $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $[1, 2]$ სეგმენტზე

ბ). $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ $(0, 1)$ ინტერვალზე

გ). იქნება თუ არა თანახმად უწყვეტი $y=\frac{1}{x}$ ფუნქცია. განსაზღვრული $[1, 5]$ სეგმენტზე? $(1, 5)$ ინტერვალზე? $[1, 5)$ და $(1, 5]$ ნახევარინტერვალებზე?

თავი VI

ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

წინა თავებში ჩვენ შევისწავლეთ ფუნქცია, მისი ზღვარი, უწყვეტობა და ძირითადი თვისებები. მოკლედ რომ ვთქვათ, ელემენტარული მეთოდებით შევისწავლეთ ფუნქციის „ყოფაქცევა“ წერტილში, მის მიდამოში და შუალედზე. ფუნქციის ექსტრემუმის, მონოტონურობის და სხვა თვისებების დადგენა და მისი გრაფიკის აგება აქამდე განხილული მეთოდებით უმეტეს შემთხვევაში საკმაოდ რთული და შრომატევადია. ასე მაგალითად, შედარებით მარტივი $f(x)=\dfrac{x^3-3x-2}{x+1}$ ფუნქციის თვისებების დადგენა და გრაფიკის აგება საკმაოდ ძნელია.

ფუნქციის ასეთი და სხვა თვისებების დადგენა, მატერიალური წერტილის სიჩქარის და აჩქარების პოვნა, თუ ცნობილია მისი მოძრაობის კანონი, გაცილებით მარტივია წარმოებულის გამოყენებით. ასევე წარმოებულის საშუალებით გაცილებით მარტივდება ზღვრების გამოთვლისას განუზღვრელობათა გახსნა, ფუნქციის გრაფიკის ნებისმიერ წერტილზე გამავალი მხებების განტოლებათა დაწერა, მიახლოებითი გამოთვლები და ა. შ. სწორედ ამგვარი საკითხების შესწავლას ეძღვნება ეს თავი.

1. ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქცია, განსაზღვრული x_0 წერტილის რომელიმე $u(x_0)$ მიდამოში. Δx-ით აღვნიშნოთ

$x-x_0$, რომელსაც ვუწოდოთ არგუმენტის ნაზრდი. ე.ი. $\Delta x=x-x_0$, ანუ $x=x_0+\Delta x$. ცხადია, x უნდა ეკუთვნოდეს $u(x_0)$-ს, $f(x)-f(x_0)$-ს, ანუ რაც იგივეა $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი x_0 წერტილში და აღინიშნება $\Delta f(x_0)$-ით, ან კიდევ Δy-ით, ე.ი.

$$\Delta y\equiv\Delta f(x_0)\equiv f(x)-f(x_0)\equiv f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

(სამი ხაზი ნიშნავს ერთი სიდიდის მეორე სიდიდით აღნიშვნას).

განმარტება. $f(x)$ ფუნქციის x_0 წერტილში ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მისწრაფვის ნულისაკენ, ეწოდება ამ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში და აღინიშნება $f'(x_0)$-ით (ეფ პრიმ x_0), ან y'-ით. განმარტების თანახმად

$$y'=f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

იგულისხმება, რომ ეს ზღვარი არსებობს, სასრული რიცხვია და არაა დამოკიდებული Δx-ის ნულისაკენ მისწრაფების წესზე. Δx შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი რიცხვი. y'-ის ნაცვლად შეიძლება დავწეროთ $y'\big|_{x=x_0}$, რომელიც აღნიშნავს წარმოებულის მნიშვნელობას x_0 წერტილში. ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში (x_0 წერტილზე), ან კიდევ — მას გააჩნია წარმოებული ამ წერტილში. განმარტებიდან გამომდინარეობს: რომ დავადგინოთ არის თუ არა $f(x)$ წარმოებადი x_0 წერტილში, საჭიროა ამ ფუნქციისათვის გამოვთვალოთ (1)

ზღვარი. განვიხილოთ მაგალითები.

1. $f(x)=x^3$, განსაზღვრული $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე. ვიპოვოთ $f'(x_0)$. ჯერ დავწეროთ $f(x)$-ის ნაზრდი

$$\Delta f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\Delta x+3x_0\Delta x^2+\Delta x^3.$$

ფუნქციის ეს ნაზრდი გავყოთ Δx-ზე და განვიხილოთ მიღებული შეფარდების ზღვარი, როცა $\Delta x\to 0$, მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2\right)=3x_0^2.$$

ამრიგად, $\left(x^3\right)'_{x_0}=3x_0^2$. x_0-ის ნებისმიერობის გამო შეიძლება დავწეროთ $\left(x^3\right)'=3x^2$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\left(x^3-5x^2+7x-4\right)'=3x^2-10x+7.$$

შემდეგში ნაცვლად x_0-სა ავიღებთ x-ს. ფუნქციის განსაზღვრის არიდან.

2. $y=c$ – მუდმივს. ცხადია $\Delta y=c-c=0$ ამიტომ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, ე.ი. $c'=0$. მუდმივის წარმოებული 0-ია.

შემდეგ მაგალითებში გამოყენებული იქნება შესანიშნავი ზღვრები და უწყვეტ ფუნქციაში ფუნქციის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის წესი.

3. $y=\sin x$, $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\cdot 1=\cos x.$$

ამრიგად, $(\sin x)'=\cos x$. ანალოგიურად გამოითვლება $\cos x$-ის წარმოებული და მიიღება

4. $(\cos x)'=-\sin x$.

5. $y=a^x$, $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a$$

(a^x მუდმივია Δx-ის მიმართ). ამრიგად, $(a^x)'=a^x\ln a$, თუ $a=e$ - ნეპერის რიცხვს, მაშინ $\left(e^x\right)'=e^x$. ეს უკანასკნელი ტოლობა იმითაა მნიშვნელოვანი, რომ e^x-ის წარმოებული ემთხვევა თავისთავს. ამ და სხვა მოხერხებულობისათვის აიღება მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები e-ს ფუძით, რაც გაცილებით ამარტივებს გამოთვლებს.

6. $y=x^n$, $n\in N$. გამოვიყენოთ ნიუტონის ბინომის ფორმულა ამ ფუნქციის ნაზრდის მისაღებად.

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots+\Delta x^n.$$

მარტივი გამოთვლების შედეგად მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1},\quad \text{ე.ი. } (x^n)'=nx^{n-1}.$$

იგივე ფორმულა იქნება ძალაში, თუ ნაცვლად n ნატურალური რიცხვისა, ავიღებთ ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვს α-ს, ე.ი. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$. ასე მაგალითად,

$$x' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^{10})' = 10x^9, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2},$$

$$\left(\frac{1}{x^5}\right)' = -\frac{5}{x^6}, \quad \left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$\left(\frac{x^{15}\sqrt[10]{x^7}}{\sqrt[15]{x^{11}}}\right)' = \left(x^{15+\frac{7}{10}-\frac{11}{15}}\right)' = \left(x^{\frac{449}{30}}\right)' = \frac{449}{30}\cdot x^{\frac{219}{30}}.$$

ე.ი. მივიღეთ გაწარმოების შემდეგი ფორმულები:

$$c' = 0, \ (\sin x)' = \cos x, \ (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \ (e^x)' = e^x, \ (x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (2)$$

ამრიგად, ფუნქციის წარმოებულის მისაღებად შევასრულეთ მოქმედება – ოპერაცია $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. ამ ოპერაციას გაწარმოება ჰქვია. მიღებულია, რომ მოქმედებებს შეკრებას, გამოკლებას, გამრავლებას, გაყოფას, ამოფესვას, ახარისხებას, გალოგარითმებას, პოტენცირებას და გაწარმოებას უწოდონ მათემატიკური ოპერაციები, ასე მაგალითად, თუ ვახდენთ შეკრებას, ან გამოკლებას, მაშინ იტყვიან, რომ ვასრულებთ შეკრების, ან გამოკლების ოპერაციებს და ა.შ. ცხადია, ეს ოპერაციები მათემატიკური მოქმედებებია. მათემატიკური ოპერაცია დაკავშირებულია ოპერატორთან, რომელიც აღნიშნავს ამა თუ იმ სიდიდეზე შესასრულებელ მოქმედებას. პირობით $\frac{d}{dx}$-ს ვუწოდოთ გაწარმოების

ოპერატორი, რადგან იგი მის შემდეგ დაწერილი ფუნქციის გაწარმოებას ნიშნავს. მაგალითად, $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$, $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ და სხვა (ოპერატორები და მათი თვისებები უფრო დეტალურად შეისწავლება მაღალ კურსებზე).

შესაძლოა, ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარი იყოს $-\infty$, ან $+\infty$, ე.ი. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, ან $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, მაშინ იტყვიან, რომ x_0 წერტილში არსებობს უსასრულო წარმოებული შესაბამისად $-\infty$-ის, ან $+\infty$-ის ტოლი. შემდეგში, როცა ვიტყვით „ფუნქციას აქვს წარმოებული“, ვიგულისხმებთ სასრულ წარმოებულს, თუ საწინააღმდეგო არ არის ნათქვამი.

აქვე შეიძლება განვმარტოთ ცალმხრივი წარმოებულები, ანუ მარცხენა და მარჯვენა წარმოებულები. თუ $\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, მაშინ მას უწოდებენ მარცხენა წარმოებულს x_0 წერტილში და აღნიშნავენ $f'_-(x_0)$-ით, ანალოგიურად $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$-ს უწოდებენ მარჯვენა წარმოებულს x_0 წერტილში და აღნიშნავენ $f'_+(x_0)$-ით.

შემდეგ პარაგრაფში დავამტკიცებთ, რომ $|x|$-ის 0 წერტილში მარცხენა წარმოებულია -1. მარჯვენა წარმოებული კი 1. ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია რომელიმე შუალედზე, თუ იგი

წარმოებადია ამ შუალედის ყოველ წერტილზე. ასე მაგალითად, თუ ფუნქცია წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ეს ნიშნავს, რომ იგი წარმოებადია ამ სეგმენტის ყოველ შიგა წერტილზე, ხოლო a წერტილზე მას აქვს მარჯვენა წარმოებული, b წერტილზე - მარცხენა წარმოებული. ცალმხრივი ზღვრების თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ შუალედზე წარმოებადი ფუნქციის ყოველ შიგა წერტილზე ცალმხრივი წარმოებულები ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. აღვნიშნოთ $f'(x)$-ით $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $\forall x \in D(f)$-ზე. როგორც ვხედავთ, $f'(x)$ კვლავ x-ის ფუნქციაა, ამიტომ შეიძლება ვიპოვოთ მისი წარმოებული, ე.ი. წარმოებულის წარმოებული $(f'(x))'$, რომელსაც შევისწავლით ქვემოთ.

ბუნებრივად იბადება კითხვა: იცვლება თუ არა $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე მისი გაწარმოებისას. ე.ი. რა დამოკიდებულებაშია $D(f(x))$ $D(f'(x))$-თან. ამ კითხვაზე პასუხი უნდა იქნეს გაცემული კონკრეტული მაგალითების მიხედვით. მაგალითად $f(x) = \sqrt{x}$-ის $D(f) = [0, +\infty]$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$-ის $D(f') = (0, +\infty)$. ე.ი. $x = 0$ წერტილი არ შედის $D(f')$-ში. ჩვენ შემდეგ დავამტკიცებთ, რომ

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (3)$$

$\ln x$ განსაზღვრულია $(0, +\infty)$, ხოლო, ცალკე აღებული $\frac{1}{x}$ განსაზღვრულია $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ არეზე, ამიტომ ბუნებრივია, (3) ტოლობა განვიხილოთ $(0, +\infty)$ ინტერვალზე; შევნიშნოთ,

რომ $\ln|x|$ და $\frac{1}{x}$ ფუნქციების განსაზღვრის არეები ერთმანეთს ემთხვევა.

ფუნქციის წარმოებულს y'-ს მეორენაირად აღნიშნავენ $\frac{dy}{dx}$-ით (იკითხება „დე იგრეკი დე იქსით" და არა dy შეფარდებული dx-თან). როცა y არის გარკვეული სახის ალგებრული ჯამი, ნამრავლი, ან განაყოფი, მაშინ მიღებულია $\frac{dy}{dx}$-ის ჩაწერა $\frac{d}{dx}(y)$ სახით. მაგალითად, თუ $y = 5^x - \sin x + x^{15} - 4$, მაშინ უმჯობესია გაწარმოება ჩავწეროთ ასე $\frac{d}{dx}(5^x - \sin x + x^{15} - 4)$. ცხადია ეს გაწარმოება შეიძლება ჩავწეროთ ასეც $(5^x - \sin x + x^{15} - 4)'$. $\frac{dy}{dx}$ წარმოებულის აღნიშვნა ბუნებრივად უკავშირდება წარმოებულის განმარტებას. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$-ის საბოლოო შედეგია $\frac{dy}{dx}$ (შემდეგში ვაჩვენოთ, რომ იგი არის dy-ის შეფარდება dx-თან).

2. კავშირი ფუნქციის წარმოებადობასა და უწყვეტობას შორის

როგორც ვნახეთ, ფუნქციის წარმოებულის განმარტება დაკავშირებულია გარკვეული სახის ზღვრის გამოთვლასთან,

ამიტომ ბუნებრივია ფუნქციის წარმოებული დავუკავშიროთ მის უწყვეტობას. დავამტკიცოთ, რომ ყოველი წარმოებადი ფუნქცია წერტილში, ან არეზე უწყვეტია ამავე წერტილში, ან არეზე.

მართლაც, ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილზე. მაშინ არსებობს ამ ფუნქციის x_0 წერტილში ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარი, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ, ე.ი.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \qquad (1)$$

ზღვრის თვისების გამოყენებით (1) ტოლობიდან დაიწერება ტოლობა

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha, \qquad (2)$$

სადაც α უსასრულოდ მცირე სიდიდეა Δx-თან შედარებით. (2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x. \qquad (3)$$

როცა $\Delta x \to 0$, მაშინ $f'(x_0)\Delta x \to 0$ და $\alpha \Delta x \to 0$, ე.ი. (3) ტოლობის მარჯვენა მხარე $\to 0$ და, მაშასადამე, მარცხენა მხარე Δy-იც $\to 0$. ე.ი. წარმოებად ფუნქციაში არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი, რაც იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილზე. x_0-ის ნებისმიერობის გამო შეიძლება დავასკვნათ, რომ რაიმე არეზე წარმოებადი ფუნქცია იქნება უწყვეტი ამავე არეზე.

პირიქით შეიძლება ასე არ იყოს. უწყვეტი ფუნქცია

შეიძლება არ იყოს წარმოებადი. მოვიყვანოთ მაგალითი

$$f(x) = |x|.$$

ვიპოვოთ ამ ფუნქციის ნაზრდი $x_0 = 0$ წერტილში. მივიღებთ

$$\Delta f = f(0+\Delta x) - f(0) = f(\Delta x) - 0 = |\Delta x|, \quad f(0) = 0.$$

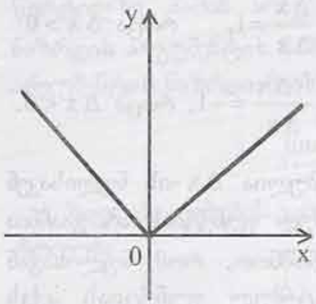
ცხადია, რომ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1, & \text{როცა } \Delta x > 0 \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, & \text{როცა } \Delta x < 0. \end{cases}$

ამრიგად, ეს ზღვარი დამოკიდებულია Δx-ის ნულისაკენ მისწრაფების წესზე, ამიტომ მოცემულ ფუნქციას არ გააჩნია წარმოებული 0 წერტილში. შევნიშნოთ, რომ ნულისაგან განსხვავებულ წერტილებში მოცემულ ფუნქციას აქვს წარმოებულები; ცხადია $(|x|)' = x' = 1$, როცა $x > 0$, $(|x|)' = (-x)' = -1$, როცა $x < 0$. ამრიგად $|x|' = \operatorname{sign} x$. რომ $f(x) = |x|$ ფუნქციას 0 წერტილში არ აქვს წარმოებული ეს გეომეტრიულად იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ფუნქციის გრაფიკის (0, 0) წერტილზე (კოორდინატთა სათავეზე) არ არსებობს ამ ფუნქციის გრაფიკის მხები (იხ. ნახ. 1. ამ საკითხს ქვემოთ განვიხილავთ).

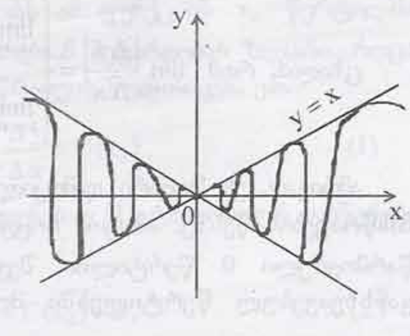
ახლა განვიხილოთ მაგალითი ისეთი უწყვეტი ფუნქციისა, რომელსაც წერტილში არ აქვს ცალმხრივი წარმოებულები. ასეთი ფუნქციაა

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{როცა } x\neq 0\\ 0, & \text{როცა } x=0.\end{cases}$$

ავაგოთ გრაფიკი (იხ. ნახ. 2).



ნახ. 1



ნახ. 2

ამ ფუნქციის ნაზრდი $x=0$ წერტილში იქნება $\Delta y=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}$. ცხადია $|\Delta y|\le|\Delta x|$, ამიტომ ეს ფუნქცია უწყვეტია $x_0=0$ წერტილზე. რადგან $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$ და $\sin\frac{1}{\Delta x}$ არ აქვს ზღვარი არც მარცხნიდან, არც მარჯვნიდან, ამიტომ მოცემულ ფუნქციას 0 წერტილში არ აქვს ცალმხრივი წარმოებულებიც.

შეიძლება ბევრი ისეთი უწყვეტი ფუნქციების მაგალითების მოყვანა, რომლებსაც არ გააჩნია წარმოებულები რამდენიმე

წერტილში. მაგალითად, $y=|\sin x|$ ფუნქცია $x=\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\dots$, წერტილებში არაა წარმოებადი. თუმცა ამ წერტილებში აქვს ცალმხრივი წარმოებულები, რომლებიც უდრის -1-ს და 1-ს.

$y=5|x+3|+2|x-4|$ არაა წარმოებადი -3 და 4 წერტილებში, $y=\sqrt[3]{x^2}$ არაა წარმოებადი 0 წერტილში.

ბუნებრივად იბადება კითხვა: არსებობს თუ არა ისეთი უწყვეტი ფუნქციები, რომლებსაც არცერთ წერტილში არ აქვთ წარმოებულები? ცნობილია ასეთი ფუნქციების მაგალითები. ერთ-ერთი მათგანია

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cos\left(15^{k}\pi x\right),$$

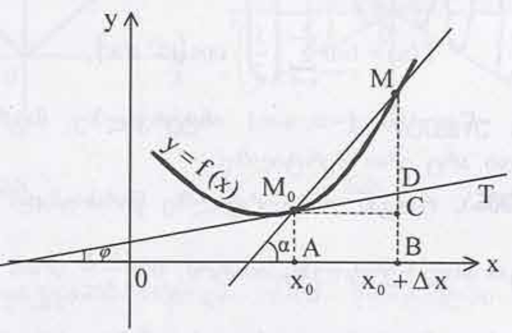
რომელიც უწყვეტია $(-\infty,+\infty)$ ინტერვალზე, მაგრამ არაა წარმოებადი არც ერთ წერტილზე.

შენიშვნა. რადგან x_0 წერტილზე წარმოებადი ფუნქცია უწყვეტიცაა ამავე წერტილზე, ამიტომ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ არის $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა, რომელიც როგორც ვნახეთ $f'(x_0)$-ია.

3. ფუნქციის წარმოებულის გეომეტრიული და ფიზიკური შინაარსი (ამოცანები, რომლებსაც მივყავართ ფუნქციის წარმოებულის ცნებამდე)

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილზე, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. მონაცემები, რომლებიც ამ ფუნქციის

წარმოებულის ფორმულაში გამოვიყენეთ, გადავიტანოთ მის გრაფიკზე. ავიღოთ გრაფიკზე ფიქსირებული წერტილი $M_0(x_0, y_0)$ და გავავლოთ ამ წერტილზე M_0M მკვეთი. ამ მკვეთის მიერ შედგენილი კუთხე OX ღერძის დადებით მიმართებასთან აღვნიშნოთ α-თი. ვთქვათ, $M \to M_0$ ისე, რომ იგი ყოველთვის რჩება გრაფიკზე. მაშინ სხვადასხვა მკვეთებს, რომლებიც OX ღერძთან შეადგენენ სხვადასხვა M-თვის მივიღებთ სხვადასხვა კუთხეებს; ცხადია, მაშინ $\Delta x \to 0$. ასეთ შემთხვევაში მკვეთის ზღვრულ მდებარეობას უწოდებენ მოცემული ფუნქციის გრაფიკის მხებს M_0 წერტილში.



ჩვენს ნახაზზე M_0T არის მხები, რომელიც OX ღერძთან ადგენს გარკვეულ φ კუთხეს. როცა $M \to M_0$, მაშინ $\alpha \to \varphi$. ვგულისხმობთ, რომ მხები არაა მართობული OX ღერძის; ამ შემთხვევაში ასეთ მხებს დახრილი მხები ჰქვია. წარმოდგენილი ნახაზის მიხედვით გვაქვს

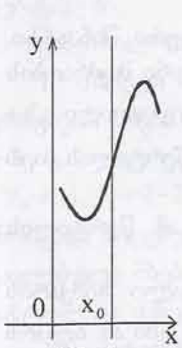
$$f(x_0) = AM_0, \quad f(x_0 + \Delta x) = BM, \quad \Delta f(x_0) = MC,$$

$$M_0C = \Delta x, \quad \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{MC}{M_0C} = \operatorname{tg}\alpha,$$

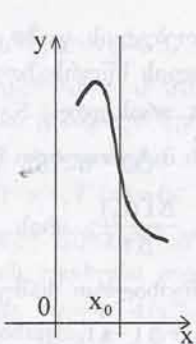
ამიტომ $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (M \to M_0)}} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \alpha\right) = \operatorname{tg}\varphi.$$

მაშასადამე $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$. აქ გამოვიყენეთ $\operatorname{tg}\alpha$-ს უწყვეტობა.

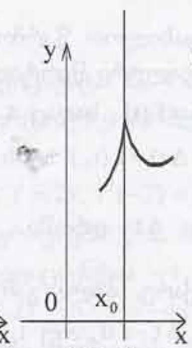
არაა გამორიცხული ვერტიკალური მხებების არსებობაც, დავწეროთ M_0M მკვეთის განტოლება $y = y_0 + k(\Delta x)(x - x_0)$, სადაც $k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. გავყოთ ეს განტოლება $k(\Delta x)$-ზე, მივიღებთ $\frac{y}{k(\Delta x)} = \frac{y_0}{k(\Delta x)} + (x - x_0)$. საიდანაც, როცა $\lim_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$ მივიღებთ $x - x_0 = 0$. ამრიგად $x = x_0$ წრფე იქნება მოცემული ფუნქციის გრაფიკის (x_0, y_0) წერტილზე გამავალი ვერტიკალური მხების განტოლება. ეს ფაქტი გრაფიკულად ასე გამოისახება.



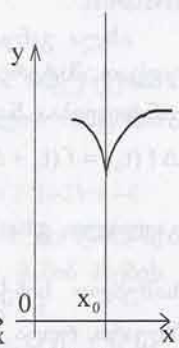
ნახ. 1



ნახ. 2



ნახ. 3



ნახ. 4

ნახაზ 1-ზე $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$. ნახაზ 2-ზე $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$.

შესაძლოა აგრეთვე $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ და არ იყოს განსაზღვრული ნიშნით, ე.ი. $-\infty$-ით ან $+\infty$-ით. ეს შემთხვევა გრაფიკულად გამოისახება ნახაზებზე 3 და 4. ამრიგად, როცა $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, ყოველთვის არსებობს ვერტიკალური მხები ფუნქციის გრაფიკის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე. ასე რომ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილზე გეომეტრიულად გამოსახავს მოცემული ფუნქციის გრაფიკის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე გავლებული მხების მიერ ox ღერძის დადებითი მიმართულებით შედგენილი კუთხის ტანგენსს, რომელსაც მხების კუთხური კოეფიციენტი ჰქვია და აღინიშნება k-თი ე.ი. $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. ამაში მდგომარეობს ფუნქციის წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი.

ახლა განვიხილოთ წარმოებულის ფიზიკური შინაარსი. ვთქვათ, მატერიალური წერტილის სწორხაზოვანი მოძრაობის განტოლებაა $S = f(t)$, სადაც t არის დრო, S - გავლილი გზა. $\Delta f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ არის მატერიალური წერტილის მიერ გავლილი გზა Δt დროში. $\dfrac{\Delta f(t_0)}{\Delta t}$ არის ამ წერტილის საშუალო სიჩქარე, ახლა განვიხილოთ საშუალო სიჩქარის ზღვარი, როცა $\Delta t \to 0$, ანუ $t_0 + \Delta t \to t_0$. ფიზიკაში ამ ზღვარს უწოდებენ t_0 მომენტში მყის სიჩქარეს, რომელიც აღნიშნავს იმას, თუ რა სიჩქარით გაირბინა მატერიალურმა წერტილმა

t_0 მომენტში. ამრიგად $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0) = v(t_0) \equiv \dfrac{dS}{dt}\Big|_{t=t_0}$ არის მატერიალური წერტილის მყისი სიჩქარე t_0 მომენტში. ამაში მდგომარეობს წარმოებულის ფიზიკური შინაარსი.

ამრიგად, განვიხილეთ ორი ამოცანა. 1. ფუნქციის გრაფიკის მოცემულ წერტილზე მხების გავლება. 2. მატერიალური წერტილის სწორხაზობრივი მოძრაობისას დროის მოცემულ მომენტში სიჩქარის პოვნა. ეს ის ამოცანებია, რომლებსაც მივყავართ ფუნქციის წარმოებულის ცნებამდე. არსებობს სხვა ასეთი ტიპის ამოცანები, როგორიცაა დადგენა ფუნქციის მონოტონურობისა, ექსტრემუმისა, სხეულის გათბობის პროცესში მიღებული სითბოს ცვლილების სიჩქარისა და ა.შ.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის წარმოებული წერტილში არის ამ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე ამავე წერტილში.

განვიხილოთ მაგალითები.

1. იპოვეთ კუთხური კოეფიციენტი $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის მხებისა, გამავალი წერტილზე, რომლის აბსცისაა -2, ე.ი. $x_0 = -2$. ვიპოვოთ

$y_0 = y\big|_{x=-2} = (-2)^2 = 4, \; f'(x) = (x^2)' = 2x, \; f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4.$

ამრიგად, მოცემული ფუნქციის გრაფიკის $(-2, 4)$ წერტილზე გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტია -4. მაშინ მხების განტოლება იქნება $y = 4 - 4(x+2)$ ე.ი. $y = -4x - 4$.

2. მატერიალური წერტილი მოძრაობს $S = 2t^2 + 3t - 1$ კანონით, გზა იზომება სანტიმეტრებში. იპოვეთ მისი სიჩქარე $t_0 = 3$ წმ მომენტში, ე.ი. მესამე წამში.

$$v(t) = S' = 4t + 3, \quad v(3) = 4 \cdot 3 + 3 = 15 \;\; (\text{სმ/წმ}).$$

4. ფუნქციის გრაფიკის მხები და ნორმალი

როგორც აღვნიშნეთ, $f'(x_0)$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის (x_0, y_0) წერტილზე გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი k. ე.ი. ვიცით წერტილი, რომელზედაც გადის მხები და მისი კუთხური კოეფიციენტი, ამიტომ მხების განტოლება დაიწერება ასე

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0), \qquad y_0=f(x_0).$$

მაშასადამე, მხების განტოლება საბოლოოდ ასე დაიწერება.

$$y=y_0+f'(x_0)(x-x_0). \qquad (1)$$

იგულისხმება, რომ $f'(x_0)$ სასრული რიცხვია. (1) განტოლება დახრილი მხების განტოლებაა, როცა ე.ი. მხები არაა მართობული ox ღერძის.

წრფეს, რომელიც გადის მხების გრაფიკთან შეხების წერტილზე ამ მხების მართობულად, ეწოდება ფუნქციის გრაფიკის ნორმალი.

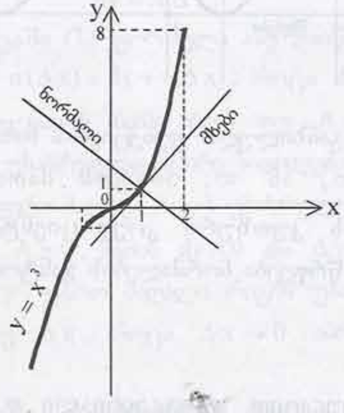
რადგან მხების კუთხური კოეფიციენტია $f'(x_0)$, ამიტომ ნორმალის კუთხური კოეფიციენტი იქნება $-\frac{1}{f'(x_0)}$, ამრიგად $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის (x_0, y_0) წერტილზე გავლებული ნორმალის განტოლებაა

$$y=y_0-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (2)$$

$f'(x_0)\neq 0$ (მხები არაა ox ღერძის პარალელური). არაა გამორიცხული, რომ მხები იყოს ox ღერძის პარალელური; მაშინ ნორმალი იქნება ამ ღერძის მართობული, რომლის განტოლება იქნება $x=x_0$.

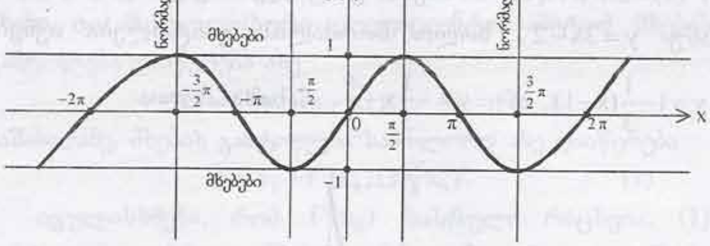
განვიხილოთ მაგალითები.

1. დავწეროთ $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკის $(1, 1)$ წერტილზე გამავალი მხების და ნორმალის განტოლებები, $f'(x)=3x^2$, $f'(1)=3$. მხების განტოლება იქნება $y=1+3(x-1)$, ანუ $y=3x-2$, ხოლო ნორმალის განტოლება იქნება $y=1-\frac{1}{3}(x-1)$, ანუ $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$. ნახაზი ასეთია



2. ვიპოვოთ $y=\sin x$-ის გრაფიკის მხები და ნორმალი $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in Z)$ წერტილებში. ცხადია $y'=\cos x$. რადგან $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=0$, ამიტომ მოცემული $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის მხებები იმ წერტილებში, რომელთა აბსცისებია $\frac{\pi}{2}+\pi k$, იქნებიან ox ღეძის პარალელური, ნორმალის

განტოლებები კი – წრფეები $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$. გრაფიკულად მივიღებთ



3. § 3-ში განხილული ფუნქციების ნახაზების მიხედვით $f'(x_0)=+\infty, -\infty$, ან ∞, ამიტომ მათი ნორმალების განტოლებების კუთხური კოეფიციენტები 0-ია. ე.ი. $y=y_0=f(x_0)$ წრფეები ნორმალების განტოლებებია.

5. ფუნქციის დიფერენციალი და მისი გამოყენება მიახლოებით გამოთვლებში

განმარტება. x_0 წერტილის რომელიმე მიდამოში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი ამ წერტილში, თუ მისი ნაზრდი ამავე წერტილში $\Delta y \equiv f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$ წარმოიდგინება ასე

$$\Delta y = A\Delta x+\alpha(\Delta x), \qquad (1)$$

სადაც A არაა დამოკიდებული Δx-ზე, ხოლო $\alpha(\Delta x)$

დამოკიდებულია Δx-ზე, ისე რომ, როცა $\Delta x \to 0$, მაშინ $\alpha(\Delta x)\to 0$. ამიტომ მიღებულია აღნიშვნა $\alpha(\Delta x)=\circ(\Delta x)$, როცა $\Delta x\to 0$. $A\Delta x$ წრფივი ფუნქციაა, ანუ მოცემული ფუნქციის ნაზრდის მთავარი ნაწილია Δx-ის მიმართ. მას x_0 წერტილში მოცემული ფუნქციის დიფერენციალი ეწოდება და აღინიშნება dy, ან $df(x_0)$ სიმბოლოთი; ე.ი. განმარტების თანახმად

$$dy = A\Delta x. \qquad (2)$$

ამ შემთხვევაში (1) ფორმულა ასე დაიწერება

$$\Delta y = dy+\alpha(\Delta x) = dy + \circ(\Delta x), \text{ როცა } \Delta x\to 0. \qquad (3)$$

ამ წარმოდგენიდან ჩანს, რომ თუ $A\neq 0$, Δy და dy ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია Δx-ის მიმართ, ხოლო $\circ(\Delta x)$ უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, ვიდრე dy. თუ $A=0$, მაშინ $dy=0$ და $\Delta y=\circ(\Delta x)$, ე.ი. ამ შემთხვევაში Δy უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, ვიდრე Δx, როცა $\Delta x\to 0$ ამრიგად, შეიძლება დავწეროთ

$$\Delta y \approx dy. \qquad (4)$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა გამოიყენება მიახლოებით გამოთვლებში, რომელზედაც შევჩერდებით ქვემოთ. თუ ავღნიშნავთ $\Delta x = dx$, მაშინ დიფერენციალი ასე ჩაიწერება $dy = Adx$, ამრიგად dx იგივეა რაც არგუმენტის ნაზრდი Δx.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა, რომელიც ამყარებს კავშირს წარმოებადობასა და დიფერენცირებადობას შორის.

იმისათვის, რომ $f(x)$ იყოს დიფერენცირებადი რომელიმე x_0 წერტილში. აუცილებელია და საკმარისი,

რომ იგი ამ წერტილში იყოს წარმოებადი; ამასთან

$$dy = f'(x_0)\,dx\,. \qquad (5)$$

აუცილებლობის დამტკიცება. ვთქვათ $f(x)$ დიფერენცირებადია x_0 წერტილში, ე.ი. $\Delta y = A\Delta x + \circ(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$, მაშინ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} A + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\circ(\Delta x) = A$. ამრიგად $f'(x_0) = A$. ამით ფუნქციის წარმოებადობა დამტკიცებულია. ამ შემთხვევაში $dy = f'(x_0)\,dx$.

საკმარისობის დამტკიცება. დავუშვათ, $f(x)$ წარმოებადია x_0 წერტილში. მაშინ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x =$$
$$= f'(x_0)\,dx + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ დიფერეცირებადია. ამით საკმარისობა და თეორემაც მთლიანად დამტკიცებულია.

ამრიგად, (2) ფორმულაში $A = f'(x_0)$ და მაშასადამე $dy = f'(x_0)\,dx$. შეიძლება დავწეროთ ზოგადად $dy = f'(x)\,dx$.

დამტკიცებული თეორემის ძალით შეიძლება დავასკვნათ, რომ ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობა და წარმოებადობა ერთი და იგივეა. (ამიტომაც ტერმინი დიფერენციალური აღრიცხვა ნიშნავს აღრიცხვას წარმოებულებით).

განვიხილოთ მაგალითები.

$$d\sin x = \cos x\,dx, \quad d5^x = 5^x \ln 5dx, \quad dx^6 = 6x^5dx\,.$$

(5) ფორმულიდან მივიღებთ $y' = \dfrac{dy}{dx}$, (6) ე.ი.

ფუნქციის წარმოებული მეორენაირად არის ფუნქციის დიფერენციალისა და არგუმენტის დიფერენციალის შეფარდება. ასე, რომ $y' = \dfrac{d}{dx}(y) = \dfrac{dy}{dx}$, როგორც ადრე აღვნიშნეთ $\dfrac{d}{dx}$ არის x-ით გაწარმოების ოპერატორი. (6) ფორმულით კი წარმოებული განიმარტება როგორც შეფარდება dy-სა dx-თან.

ახლა გავეცნოთ დიფერენციალის გეომეტრიულ შინაარსს. ვისარგებლოთ § 3-ის ნახაზით. რადგანაც $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\varphi$, ხოლო $dx = \Delta x = M_0C$, ამიტომ მართკუთხა სამკუთხედ M_0DC-ში $f'(x_0)\,dx = \mathrm{tg}\,\varphi \cdot M_0C = CD$. ე.ი. გეომეტრიულად ფუნქციის დიფერენციალი x_0 წერტილში არის მოცემული ფუნქციის გრაფიკის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე გავლებული მხების ორდინატის ნაზრდი, როცა ox ღერძის x_0 წერტილიდან გადავდივართ $x_0 + \Delta x$ წერტილზე. იმავე ნახაზის მიხედვით $\Delta y = CM$, რომელიც განსხვავდება dy-გან DM-ით. კურიოზად არ უნდა მოგვეჩვენოს, რომ DM მეტია CD-ზე ე.ი. განსხვავება Δy-სა და dy-ს შორის არც თუ ისე მცირეა. მაგრამ არა. როცა $\Delta x \to 0$, მაშინ $x_0 + \Delta x \to x_0$ და განსხვავება Δy-სა და dy-ს შორის მცირდება; მაშინ DM გაცილებით უფრო მცირე ხდება, ვიდრე CD.

ახლა განვიხილოთ დიფერენციალის გამოყენება მიახლოებით გამოთვლებში. გამოვიყენოთ (4) ფორმულა.

$$\Delta y \approx dy\,, \quad \text{ანუ} \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \Rightarrow$$
$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x\,. \qquad (7)$$

განვიხილოთ მაგალითები. გამოვთვალოთ მოახლოებით

1. $\sqrt[5]{(28,6)^4}$ და 2. $e^{0.7}$. e-ნეპერის რიცხვია.

1). განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=\sqrt[5]{x^4}$ $f'(x)=\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$.

გამოვიყენოთ (7) ფორმულა. ავიღოთ $x_0=32$, $\Delta x=-3,4$. მაშინ

$$f(x_0+\Delta x)=\sqrt[5]{(32-3,4)^4}\approx\sqrt[5]{32^4}+\frac{4}{5\sqrt[5]{32}}\cdot(-3,4)=$$

$$=16-\frac{13,6}{10}=14,64$$

2. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=e^x$, $x_0=0$, $\Delta x=0,7$.

$$f(x_0+\Delta x)=e^{0+0.7}\approx e^0+e^0\cdot 0,7=1+0,7=1,7.$$

6. ᲒᲐᲬᲐᲠᲛᲝᲔᲑᲘᲡ ᲓᲐ ᲓᲘᲤᲔᲠᲔᲜᲪᲘᲠᲔᲑᲘᲡ ᲬᲔᲡᲔᲑᲘ

1. ორი წარმოებადი ფუნქციის ჯამი წარმოებადია და მისი წარმოებული უდრის შესაკრებთა წარმოებულების ჯამს.

მართლაც, ვთქვათ $y_1=f_1(x)$ და $y_2=f_2(x)$ ფუნქციები წარმოებადია x წერტილზე. დავამტკიცოთ, რომ

$$(y_1+y_2)'=y_1'+y_2'. \qquad (1)$$

განვიხილოთ

$$\Delta(y_1+y_2)=\Delta\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=\left(f_1(x+\Delta x)+f_2(x+\Delta x)\right)-$$
$$-\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=\left(f_1(x+\Delta x)-f_1(x)\right)+\left(f_2(x+\Delta x)-f_2(x)\right)=$$
$$=\Delta f_1(x)+\Delta f_2(x).$$

გამოვთვალოთ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(y_1+y_2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_1(x)+\Delta f_2(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x}+$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}=f_1'(x)+f_2'(x)$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

მაგალითად,

$$\left(x^{10}+\sin x\right)'=10x^9+\cos x.$$

2. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ ორი წარმოებადი ფუნქციის სხვაობა წარმოებადია და მისი წარმოებული უდრის შესაბამისად წარმოებულების სხვაობას ე.ი.

$$(y_1-y_2)'=y_1'-y_2'. \qquad (2)$$

მაგალითად,

$$\left(x^4-x^3\right)'=4x^3-3x^2,$$

გაწარმოების ეს წესები შეიძლება განვაზოგადოთ ნებისმიერი სასრული რაოდენობის წარმოებადი ფუნქციების მიმართაც. ამ შემთხვევაში უშუალოდ წარმოებულის განმარტების გამოყენებით მივიღებთ

$$\left(f_1(x)+f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x)\right)'=f_1'(x)\pm f_2'(x)\pm\ldots\pm f_n'(x). \qquad (3)$$

3. ორი წარმოებადი ფუნქციის ნამრავლი წარმოებადია და მისი წარმოებული უდრის პირველი თანამამრავლის წარმოებული გამრავლებული მეორეზე, პლუს მეორე თანამამრავლის წარმოებული გამრავლებული პირველზე, ე.ი.

$$(y_1\cdot y_2)'=y_1'\,y_2+y_2'\,y_1. \qquad (4)$$

მართლაც. ვთქვათ, $y_1=f_1(x)$ და $y_2=f_2(x)$ ფუნქციები წარმოებადია x წერტილზე. $\Delta f_1=f_1(x+\Delta x)-f_1(x)\Rightarrow$

$$f_1(x+\Delta x)=f_1(x)+\Delta f_1, \text{ ანალოგიურად}$$

$$f_2(x+\Delta x)=f_2(x)+\Delta f_2.$$

ამ ტოლობების გამოყენებით მივიღებთ

$$\Delta\left(f_1(x)f_2(x)\right)=f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x)-f_1(x)f_2(x)=\left(f_1(x)+\Delta f_1\right)\cdot$$
$$\cdot\left(f_2(x)+\Delta f_2\right)-f_1(x)f_2(x)=f_1(x)\Delta f_2+f_2(x)\Delta f_1+\Delta f_1\Delta f_2.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(f_1(x)f_2(x)\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_1(x)\Delta f_2}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_2(x)\Delta f_1}{\Delta x}+$$
$$+\lim\frac{\Delta f_1\Delta f_2}{\Delta x}=f_1(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_2}{\Delta x}+f_2(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_1}{\Delta x}+$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_1}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f_2=f_1(x)f_2'(x)+f_2(x)f_1'(x)+$$
$$+f_1'(x)\cdot 0=f_1'(x)f_2(x)+f_2'(x)f_1'(x),$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

აქ გამოყენებული იყო წარმოებადი ფუნქციის უწყვეტობა და ზღვრის თვისება მუდმივი თანამამრავლის ზღვრის ნიშნის გარეთ გატანის შესახებ,

$f_1(x)$ და $f_2(x)$ მუდმივებია Δx-ის მიმართ.

მაგალითი $y=\sin x\cdot 7^x$, $y'=(\sin x)'\cdot 7^x+(7^x)'\cdot\sin x=$

$$=\cos x\cdot 7^x+7^x\ln 7\cdot\sin x.$$

გაწარმოების ეს წესი შეიძლება განვაზოგადოთ სასრული რაოდენობის წარმოებადი ფუნქციების ნამრავლის წარმოებულის გამოსათვლელად. მაგალითად, $(y_1y_2y_3)'=(y_1\cdot(y_2\cdot y_3))'=y_1'(y_2\cdot y_3)+$
$+(y_2\cdot y_3)'\cdot y_1=y_1'y_2y_3+y_2'y_3y_1+y_3'y_2y_1.$

ასევე $(y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdot\ldots\cdot y_n)'=y_1'y_2y_3\ldots y_n+y_2'y_1y_3\ldots y_n+\ldots+y_n'y_1y_2\ldots y_{n-1}.$

შედეგი. მუდმივი თანამამრავლი წარმოებულის ნიშნის გარეთ გაიტანება. მართლაც, $(cy)'=c'y+y'c=cy'$, ე.ი. $(cy)'=cy', c=\text{const}, c'=0.$

მაგალითი.

$$y=\left(7\sin x-3^x+4\arcsin\frac{\pi}{8}\right)\left(4\cos x+8^x+9\sin x-\sqrt{5}\right)$$
$$y'=\left(7\cos x-3^x\ln 3+0\right)\left(4\cos x+8^x+9\sin x-\sqrt{5}\right)+$$
$$+\left(-4\sin x+8^x\ln 8+9\cos x-0\right)\left(7\sin x-3^x+4\arcsin\frac{\pi}{8}\right).$$

4. ორი წარმოებადი ფუნქციის განაყოფი წარმოებადია და ამ განაყოფის წარმოებული უდრის გასაყოფის წარმოებული გამრავლებული გამყოფზე, მინუს გამყოფის წარმოებული გამრავლებული გასაყოფზე, ეს სხვაობა შეფარდებული გამყოფის კვადრატზე, ე.ი.

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)'=\frac{y_1'y_2-y_2'y_1}{y_2^2},\quad y_2\neq 0. \tag{5}$$

თუ გამოვიყენებთ ზემოთ გამოყენებულ ტოლობებს, მივიღებთ

$$\Delta\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)=\frac{f_1(x+\Delta x)}{f_2(x+\Delta x)}-\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_1(x)+\Delta f_1}{f_2(x)+\Delta f_2}-$$
$$-\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\Delta f_1\cdot f_2(x)-\Delta f_2\cdot f_1(x)}{f_2^2(x)+f_2(x)\Delta f_2}.$$

მიღებული წილადი გავყოთ Δx-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta x\to 0$, მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta f_1}{\Delta x}\cdot f_2(x)-\dfrac{\Delta f_2}{\Delta x}\cdot f_1(x)}{f_2^2(x)+f_2(x)\Delta f_2}=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_2'(x)f_1(x)}{f_2^2(x)}.$$

$f_2(x)\neq 0$, რაც უნდა დაგვემკიცებინა. ამ ფორმულის მისაღებად გამოყენებული იყო ფუნქციის ზღვრის და უწყვეტობის თვისებები

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f_1=0,\quad \lim_{\Delta x\to 0}f_2(x)=f_2(x) \qquad \text{და ა.შ.}$$

განვიხილოთ მაგალითები.

1. $$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. $$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

ამრიგად, მივიღეთ გაწარმოების ახალი ფორმულები

$$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad (\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

(1)-(5) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ დიფერენცირების წესებს დიფერენცირებადი ფუნქციების ჯამის, სხვაობის, ნამრავლის და განაყოფის მიმართ.

1) $d(y_1+y_2)=(y_1+y_2)'\,dx=y_1'\,dx+y_2'\,dx=dy_1+dy_2$.

2) $d(y_1-y_2)=(y_1-y_2)'\,dx=y_1'\,dx-y_2'\,dx=dy_1-dy_2$.

3) $d(y_1\cdot y_2)=(y_1\cdot y_2)'\,dx=(y_1'\,y_2+y_2'\,y_1)dx=y_2\,y_1'\,dx+$
$+y_1\,y_2'\,dx=dy_1\cdot y_2+dy_2\cdot y_1$.

4) $$d\left(\frac{y_1}{y_2}\right)=\left(\frac{y_1}{y_2}\right)'dx=\frac{y_1'\,y_2-y_2'\,y'}{y_2^2}dx=\frac{y_2\,y_1'\,dx-y_1\,y_2'\,dx}{y_2^2}=$$
$$=\frac{dy_1\cdot y_2-dy_2\cdot y_1}{y_2^2}.$$

7. შექცეული ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, $y=f(x)$, განსაზღვრული $u(x_0)$ მიდამოში, შექცევადია და მისი შექცეულია $x=f^{-1}(y)$. f და f^{-1} ურთიერთშექცეული ფუნქციებია. დავამტკიცოთ თეორემა

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და მკაცრად მონოტონური $u(x_0)$ მიდამოში, ამასთანავე არსებობს მისი წარმოებული და ეს წარმოებული არ უდრის ნულს x_0 წერტილზე, მაშინ $x=f^{-1}(y)$ წარმოებადია $y_0=f(x_0)$ წერტილში და $\dfrac{d}{dy}\left(f^{-1}(y_0)\right)=\dfrac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}$,

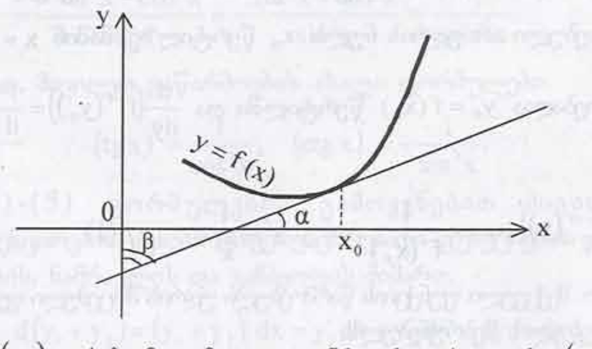
ე.ი. $$\left(f^{-1}(y)\right)'_{y=y_0}=\frac{1}{f'(x_0)},\ \text{ანუ}\ y'=\frac{1}{x'}. \qquad (1)$$

ე.ი. შექცეული ფუნქციის წარმოებული უდრის მოცემული ფუნქციის წარმოებულის შებრუნებულს.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$, მაშინ $\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ (2). როცა $\Delta x \to 0$, მაშინ $\Delta y \to 0$. მოცემულობის თანახმად არსებობს $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$. ამის გამო არსებობს (2) ტოლობის მარჯვენა მხარის ზღვარიც, ე.ი. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)}$.

თანახმად წარმოებულის აღნიშვნისა $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=x'\big|_{y=y_0}=\left(f^{-1}(y_0)\right)'$.

ამრიგად, $\frac{d}{dy}f^{-1}(y_0)=\frac{1}{\frac{d}{dx}f'(x_0)}$. თეორემა დამტკიცებულია. ამ თეორემის გეომეტრიული არსი ასეთია:



$f'(x_0)$ არის მოცემული ფუნქციის გრაფიკის (x_0, y_0) წერტილზე გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი

$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$. მისი შექცეული ფუნქციის $x=f^{-1}(y)$ გრაფიკი იგივე იქნება, მხოლოდ მისი კუთხური კოეფიციენტი იქნება $\operatorname{tg}\beta$, სადაც β არის მხების მიერ შედგენილი კუთხე oy ღერძთან; ე.ი. $\frac{d}{dy}f^{-1}(y_0)=\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\left(90^0-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{f'(x_0)}$

(როგორც ვიცით, თუ $x=f^{-1}(y)$ -ში x და y-ს შევუცვლით ადგილებს, მაშინ გვექნება ამ უკანასკნელი ფუნქციის გრაფიკი მოცემულის სიმეტრულად $y=x$ ბისექტრისის მიმართ). შევნიშნოთ, რომ თუ $f'(x_0)=0$, მაშინ $f^{-1}(y)$-ს ექნება უსასრულო წარმოებული y_0 წერტილში. თუ პირობით დავუშვებთ, რომ $\frac{1}{0}=\infty$, მაშინ ფორმულა (1) იქნება ჭეშმარიტი ამ შემთხვევაშიც.

განვიხილოთ მაგალითები.

1) $y=\arcsin x \quad x\in|-1,1|$, $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. ეს არის შექცეული $x=\sin y$ ფუნქციისა. (1) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

2) $\left(\arccos x\right)'=\frac{1}{(\cos y)'}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) $\left(\operatorname{arctg} x\right)'=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$.

4) $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

5) $y = \log_a x, \ \ x = a^y \quad (\log_a x) = \dfrac{1}{(a^y)'} = \dfrac{1}{a^y \ln a} = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{1}{x}\log_a e,$

კერძო შემთხვევაში, როცა $a = e$, მივიღებთ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

ამრიგად, მივიღეთ გაწარმოების ახალი ფორმულები

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x}\log_a e, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

8. რთული ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი. დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა

ა). დავუშვათ, რომ y არის x-ის რთული ფუნქცია

$$y \equiv \Phi(x) = f(\varphi(x)), \tag{1}$$

ე.ი. $y = f(u)$ და $u = \varphi(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ რთული ფუნქციის პირობებს. დავამტკიცოთ თეორემა.

თუ $y = f(u)$ წარმოებადია u_0 წერტილზე, ხოლო $u = \varphi(x)$ წარმოებადია x_0 წერტილზე, მაშინ რთული ფუნქცია (1) წარმოებადია x_0 წერტილზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$y'\big|_{x=x_0} = \Phi'(x_0) = f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0). \tag{2}$$

ეს ფორმულა შეიძლება ასეც დავწეროთ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \tag{2^1}$$

$y = f(u)$-ს წარმოებადობის გამო მისი ნაზრდი დაიწერება ასე

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \varepsilon(\Delta y)\Delta y. \tag{3}$$

იმის გამო, რომ $u = \varphi(x)$ წარმოებადია x_0 წერტილზე, ამიტომ

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u' = \varphi'(x_0). \tag{4}$$

(3) ტოლობა გავყოთ Δx და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$, (4) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\varepsilon(\Delta y)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$$

$y'\big|_{x_0} = f'(u_0)u'\big|_{x_0}$, ანუ $y'\big|_{x_0} = f'(u_0)u'(x_0)$, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

შეიძლება რთული ფუნქცია „ჯაჭვურად" იყოს დაკავშირებული ფუნქციებთან. მაგალითად, თუ $y = f(u_1)$, $u_1 = \varphi_1(u_2)$, $u_2 = \varphi_2(u_3)$, $u_3 = \varphi_3(x)$ ფუნქციები ისეთ კავშირშია, რომ y არის x-ის რთული ფუნქცია, ე.ი. $y = f(\varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(x))))$. მაშინ (2^1) ფორმულის განზოგადოებით მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du_1}\cdot\frac{du_1}{du_2}\cdot\frac{du_2}{du_3}\cdot\frac{du_3}{dx}.$$

განვიხილოთ მაგალითები.

1. $y = \sin 3x$. აღვნიშნოთ $u = 3x$, მაშინ $y = \sin u$. გამოვიყენოთ (2) ფორმულა, მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot 3=3\cos 3x \quad \text{ე.ი.} \quad (\sin 3x)'=\cos 3x\cdot 3$$

2) $y=\sin^5 3x$ ალვნიშნოთ $y=u_1^5,\ u_1=\sin u_2,\ u_2=3x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du_1}\cdot\frac{du_1}{du_2}\cdot\frac{du_2}{dx}=5u_1^4\cdot\cos u_2\cdot 3=15\sin^4 3x\cdot\cos 3x\,,\ \text{ე.ი.}$$

$$(\sin^5 3x)'=5\sin^4 3x\cdot\cos 3x\cdot 3.$$

3. $y=7^{\sin^5 3x}$

$$y'=7^{\sin^5 3x}\ln 7\cdot 5\sin^4 3x\cdot\cos 3x\cdot 3=15\cdot 7^{\sin^5 3x}\sin^4 3x\cdot\cos 3x\cdot\ln 7.$$

4. $y=\sin^4 \mathrm{tg}^5\ln^3\cos^2 x$

$$y'=4\sin^3\mathrm{tg}^5\ln^3\cos^2 x\cdot\cos\mathrm{tg}^5\ln^3\cos^2 x\cdot 5\mathrm{tg}^4\ln^3\cos^2 x\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\cos^2\ln^3\cos^2 x}\cdot 3\ln^2\cos^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x).$$

მიღებულის გამარტივება მიგვინდვია მკითხველისათვის.

5. $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x},\quad y'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$

6. $y=|f(x)|,\quad y'=\begin{cases} f'(x), & \text{თუ } f(x)\ge 0 \\ -f'(x), & \text{თუ } f(x)<0 \end{cases}=f'(x)\,\mathrm{sign}\, f(x).$

7. $y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|,\quad y'=\frac{1}{2a}\cdot\frac{\mathrm{sign}\,\frac{x-a}{x+a}}{\left|\frac{x-a}{x+a}\right|}\cdot\left(\frac{x-a}{x+a}\right)'=$

$$=\frac{1}{2a}\cdot\frac{x+a}{x-a}\cdot\frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2}=\frac{1}{x^2-a^2}.$$

8. $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|,\quad y'=\frac{\mathrm{sign}\left(x+\sqrt{x^2+A}\right)}{\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+A}\right)'=$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}.$$

ბ). ახლა გადავიდეთ რთული ფუნქციის დიფერენცირებაზე.

განვიხილოთ $y=f(u)$ და $u=\varphi(x)$ ფუნქციები ისე, რომ y იყოს x-ის რთული ფუნქცია. ე.ი. $y=f(\varphi(x))$, რომლის წარმოებული $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$. მივიღებთ $dy=f'(u_0)\varphi'(x_0)dx$. რადგან $\varphi'(x_0)dx=d\varphi=du$ ამიტომ $dy=f'(u)du$.

მიღებულ ფორმულაში du არის u-ს დიფერენციალი და არა ნაზრდი. ამრიგად მივიღეთ, რომ რთული ფუნქციის დიფერენციალი გამოისახება იგივე ფორმულით, როგორი ფორმულითაც გამოისახება დიფერენციალი ჩვეულებრივ არართული ფუნქციის შემთხვევაში. დიფერენციალის ამ ფორმულას (ფორმას) უწოდებენ დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობას (მუდმივობას), ე.ი. თუ $y=f(u)$ არართული ფუნქციაა, მაშინ

$$dy=f'(u)du.$$

რომელშიც du არის Δu-არგუმენტის ნაზრდი. ხოლო, თუ თავის მხრივ, u არის x-ის ფუნქცია, როგორც ზემოთ ვნახეთ, ამ უკანასკნელ შემთხვევაში du არის $u=\varphi(x)$-ის დიფერენციალი და არა ნაზრდი Δu. ჩვენ შევთანხმდით ზემოთ და დამოუკიდებელი ცვლადის ნაზრდი Δx ალვნიშნეთ dx-ით. აქაც du არის Δu არართული ფუნქციის შემთხვევაში, ხოლო რთული ფუნქციის შემთხვევაში

du არის u-ს დიფერენციალი, იმიტომ რომ u არის x-ის ფუნქცია. აქედან გამომდინარე შეიძლება პირდაპირ გამოვთვალოთ ფუნქციის დიფერენციალი. მაგალითად $d\sin u = \cos u du$, $d5^u = 5^u \ln 5 du$.

დიფერენცირების წესები იგივეა რაც გაწარმოების წესები. მაგალითად $d(u \pm v) = du \pm dv$, $d(u \cdot v) = vdu + udv$ და ა.შ.

გ). რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით გავაწარმოოთ ე.წ. ხარისხოვან-მაჩვენებლიანი ფუნქცია $y = (u(x))^{v(x)}$, $u(x) > 0$. ეს ფუნქცია ასე წარმოვადგინოთ

$$y = e^{v\ln u} \Rightarrow y' = e^{v\ln u} \cdot (v\ln u)' = u^v \left(v'\ln u + v \cdot \frac{1}{u} u' \right) =$$

$$= u^v \cdot v'\ln u + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

მივიღეთ,

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

ამრიგად ხარისხოვან-მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული შედგება ორი შესაკრებისაგან, რომელთაგან ერთ-ერთია მოცემული ფუნქციის, როგორც მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული, მეორე მათგანია მოცემული ფუნქციის, როგორც ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული. განვიხილოთ მაგალითი

$$\left((\sin x)^{\operatorname{arctg} x}\right)' = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x} \cdot \ln \sin x \cdot \frac{1}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x (\sin x)^{\operatorname{arctg} x - 1} \cdot \cos x$$

შევნიშნოთ რომ ხარისხოვან-მაჩვენებლიანი ფუნქცია შეიძლება ჯერ გავალოგარითმოთ და შემდეგ გავაწარმოოთ, როგორც რთული ფუნქცია: $y = u^v$ გავალოგარითმოთ $\ln y = \ln u^v = v \ln u$. ეს ტოლობა გავაწარმოოთ (გავითვალისწინოთ, რომ $\ln y$ არის x-ის რთული ფუნქცია).

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} u' \quad \text{აქედან}$$

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} u' \right) = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.$$

დ). გალოგარითმების წესით შეიძლება გავაწარმოოთ ისეთი საკმაოდ რთული ფუნქციები, რომლებიც შეიცავენ ფუნქციათა ნამრავლებს, განაყოფებს და სხვა. მაგალითი. ვთქვათ,

$$y = \sqrt[10]{\frac{x^{11}(x^7 + x - 1)^3}{\sqrt[17]{(5 + x - x^2)^8}}}.$$

გავალოგარითმოთ,

$$\ln y = \frac{11}{10} \ln x + \frac{3}{10} \ln(x^7 + x - 1) - \frac{8}{170} \ln(5 + x - x^2).$$

გავაწარმოოთ.

$$\frac{1}{y} y' = \frac{11}{10x} + \frac{3(7x^6 + 1)}{10(x^7 + x - 1)} - \frac{4(1 - 2x)}{85(5 + x - x^2)}. \text{ აქედან}$$

$$y' = \sqrt[10]{\frac{x^{11}(x^7 + x - 1)^3}{\sqrt[17]{(5 + x - x^2)^8}}} \cdot \left(\frac{11}{10x} + \frac{3(7x^6 + 1)}{10(x^7 + x - 1)} - \frac{4(1 - 2x)}{85(5 + x - x^2)} \right).$$

შევნიშნოთ, რომ ნაცვლად $\ln y$-სა უნდა აგველო $\ln|y|$, მაგრამ ჩავთვალეთ, რომ $y > 0$.

ე). რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით შეიძლება გამოვთვალოთ არაცხადი ფუნქციის $F(x, y) = 0$ წარმოებული. მივიღებთ $F'_x + F'_y \cdot y' = 0$ აქედან $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$. F'_x

აღნიშნავს, რომ F გაწარმოებულია x-ით, ხოლო y ჩათვლილია მუდმივად, F'_y ნიშნავს რომ F გაწარმოებულია y-ით, ხოლო x ჩათვლილია მუდმივად (ანალოგიურ საკითხს შევისწავლით უფრო დეტალურად შემდეგში). მაგალითად $x^2+y^2=a^2$ გავაწარმოოთ $2x+2yy'=0$ აქედან $y'=-\frac{x}{y}$.

ვ). განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა ფუნქცია მოცემულია რამდენიმე ფორმულით. ამ შემთხვევაში წარმოებული უნდა გამოვთვალოთ უშუალოდ წარმოებულის განმარტების გამოყენებით. მაგალითად

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{როცა } x\neq 0 \\ 0, & \text{როცა } x=0. \end{cases}$$

როცა $x\neq 0$ გავაწარმოოთ მოცემული ფუნქცია ჩვეულებრივად $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$; $x=0$ წერტილში ფუნქცია გავაწარმოოთ განმარტების გამოყენებით

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0 \quad (\sin\frac{1}{x} \text{ შემოსაზღვრულია}).$$

ამრიგად, მოცემული ფუნქცია წარმოებადია $(-\infty,+\infty)$ ინტერვალზე. ე.ი. $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & \text{როცა } x\neq 0 \\ 0, & \text{როცა } x=0. \end{cases}$

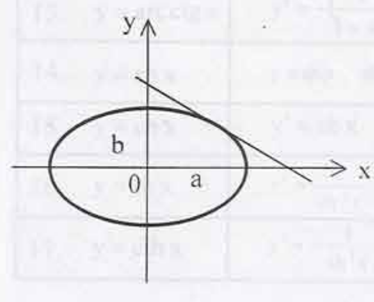
ზ). ახლა განვიხილოთ პარამეტრული ფუნქციის წარმოებული. ვთქვათ, $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t\in[\alpha,\ \beta]$ ფუნქცია

მოცემულია პარამეტრული სახით. დავუშვათ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ წარმოებადი ფუნქციებია t წერტილში. გამოვთვალოთ მოცემული ფუნქციის, როგორც x-ის ფუნქციის წარმოებული. განმარტების მიხედვით

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y'_t}{x'_y}.$$

ინდექსად ნიშნაკები x და t შესაბამისად ნიშნავს წარმოებულს x-ით (t ჩათვლილია მუდმივად) და t-თი (x ჩათვლილია მუდმივად). მაგალითად $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ $t\in[0,\ 2\pi]$. ვიპოვოთ წარმოებული $t=\frac{\pi}{4}$ წერტილში.

$y'\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{b\cos\frac{\pi}{4}}{-a\sin\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{b}{a}$. მოცემული ფუნქციის გრაფიკი ელიფსია.



მისი მხების კუთხური კოეფიციენტი $t=\frac{\pi}{4}$ წერტილში უდრის $-\frac{b}{a}$.

თ). ახლა გამოვთვალოთ ჰიპერბოლური ფუნქციების წარმოებულები.

1. $(\mathrm{sh}x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}x$.

2. $(\mathrm{ch}x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}x$.

3. $(\mathrm{th}x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} =$

$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$$

4. $(\mathrm{cth}x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = \dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} =$

$$= \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2} = -\frac{1}{\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$$

9. ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულების ცხრილი და გაწარმოების წესები

1.	$y = x^\alpha$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\quad \alpha \in R,\ x \in R$
2.	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$ $\quad a \in R^+,\ x \in R$
3.	$y = e^x$	$y' = e^x$, e ნეპერის რიცხვია, $x \in R$
4.	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x\ln a} = \dfrac{1}{x}\log_a e$ $\quad a \in R^+,\ a \neq 1,\ x \in R^+$
5.	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$ $\quad \ln x = \log_e x,\ \ x \in R^+$
6.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$ $\quad x \in R$
7.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$ $\quad x \in R$
8.	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad x \in R - \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\right\}$
9.	$y = \mathrm{ctg}\, x$	$y' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\quad x \in R - \{\pi k,\ k \in Z\}$
10.	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \in]-1;1[$
11.	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \in]-1;1[$
12.	$y = \mathrm{arc\,tg}\, x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad x \in R$
13.	$y = \mathrm{arc\,ctg}\, x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad x \in R$
14.	$y = \mathrm{sh}\, x$	$y = \mathrm{ch}\, x$ $\quad \mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in R$
15.	$y = \mathrm{ch}\, x$	$y' = \mathrm{sh}\, x$ $\quad x \in R$
16.	$y = \mathrm{th}\, x$	$y' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ $\quad x \in R$
17.	$y = \mathrm{cth}\, x$	$y' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$ $\quad x \in R - \{0\}$

18. $y=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$	$y'=\frac{1}{x^2-a^2}$ $x\in R-\{a,-a\}$, ფიქსირებული $a\in R$
19. $y=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+A}\right\rvert$	$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}$ $x\in R$, როცა $A>0$ და $x\in R^+$, როცა $A\le 0$
20. $y=x^x$	$y'=x^x(\ln x+1)$ $x\in R^+$
21. $y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$
22. $y=uv$	$y'=u'v+v'u$
23. $y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, $v\neq 0$

შენიშვნები. 1. თუ $y=f(u)$ და $u=\varphi(x)$, მაშინ $y'=f'(u)\cdot u'$ და $dy=f'(u)\,du$

2. ზემოთ მოცემულ ცრხილში x არგუმენტია, α და a – პარამეტრები.

10. მაღალი რიგის წარმოებულები

როგორც ცნობილია, განსაზღვრის არის x წერტილზე წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $f'(x)$ გამოითვლება ფორმულით

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

$f'(x)$ ეწოდება მოცემული ფუნქციის პირველი წარმოებული, ანუ პირველი რიგის წარმოებული. მოცემულ მომენტში x ფიქსირებულია, მაგრამ თუ $f(x)$ წარმოებადია განსაზღვრის არეზე, მაშინ x ცვლადია და იცვლება ამავე არეზე, ან მის ნაწილზე ასე, რომ $f'(x)$ კვლავ არის x-ის ფუნქცია. ამიტომ

შეიძლება ვისაუბროთ $f'(x)$-ის წარმოებულზე, ანუ წარმოებულის წარმოებულზე, რომელსაც ეწოდება მეორე წარმოებული, ანუ მეორე რიგის წარმოებული და აღინიშნება $f''(x)$-ით, ანუ $\frac{d^2f}{dx^2}$ (იკითხება დე ორი f დე x ორჯერ). წარმოებულის განმარტების მიხედვით (1) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f'(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

ანალოგიურად განიმარტება მესამე, მეოთხე, ..., მე-n-ე რიგის წარმოებულები. n-რი რიგის წარმოებული აღინიშნება $f^{(n)}(x)$-ით და განიმარტება ასე

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

შენიშვნა. თუ წარმოებულის რიგს ალვნიშნავთ არაბული რიცხვებით, მაშინ იგი უნდა ჩავსვათ ფრჩხილებში; მაგალითად $y^{(5)}$ (და არა y^5, რომელიც აღნიშნავს y-ს მე-5 ხარისხში) არის მე-5 რიგის წარმოებული. წარმოებულების რიგი შეიძლება ალვნიშნოთ რომაული რიცხვებით, რომლებიც ფრჩხილებში არ ჩაისმება, მაგალითად y^{V}-ნიშნავს მე-5 რიგის წარმოებულს. $y^{(0)}$-ით, ან y^0-ით აღინიშნება ნულოვანი რიგის წარმოებული, რომელიც აღნიშნავს თვით y ფუნქციას $(f(x))^0\equiv f(x)$;

$y^{(2)}, y^{(3)},\ldots, y^{(n)}$ ეწოდება მაღალი რიგის წარმოებულები. ყველაფერი, რაც აქამდე ვთქვით, გადაიტანება ცალმხრივ წარმოებულებზეც.

ახლა შემოვიღოთ ერთი განმარტება:

ფუნქციას ეწოდება n-ჯერ უწყვეტად წარმოებადი (დიფერენცირებადი) რომელიმე შუალედზე, თუ ამ შუალედის ყოველ წერტილზე მას აქვს უწყვეტი წარმოებულები n-რიგამდე ჩათვლით (ფუნქციის უწყვეტად წარმოებადობა ნიშნავს, რომ მისი გრაფიკის ყოველ წერტილზე გაივლება მხები, რომელიც იცვლება უწყვეტად, როცა წერტილი უწყვეტად მოძრაობს გრაფიკზე).

განვიხილოთ მაგალითები.

1. $y = x^5 - 3x^3 + 2x - 9,\ y' = 5x^4 - 9x^2 + 2,\ y'' = 20x^3 - 18x,$

$$y''' = 60x^2 - 18,\ y^{IV} = 120x,\ y^{V} = 120,\ y^{VI} = y^{VII} = \ldots = 0.$$

2. $y = \sin x,\ y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x,\ y^{IV} = \sin x, \ldots$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right),\ n = 1, 2, \ldots$$

ანალოგიურად მივიღებთ

3. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right)$ 4. $y = e^x,\quad y^{(n)} = e^x$

5. $y = a^x,\quad y^{(n)} = a^x \ln^n a$ 6. $y = y_1 \pm y_2,\ y^{(n)} = y_1^{(n)} \pm y_2^{(n)}$

7. $y = u \cdot v,\ y' = u'v + v'u,$

$$y'' = u''v + u'v' + v''u + v'u' = u''v + 2u'v' + v''u \equiv (u+v)^{(2)},$$

რომელსაც ფორმალურად ვუწოდოთ სიმბოლური კვადრატი, რადგანაც იგი ფორმით წაგავს ორწევრის კვადრატს. ამის მიხედვით

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \ldots$$

$$y^{(n)} = (u+v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

ცხადია $(cy)^{(n)} = cy^{(n)}$, c-მუდმივია.

11. მაღალი რიგის დიფერენციალები

როგორც ცნობილია, $y = f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი მისი განსაზღვრის არის x წერტილში ფორმულით ასე გამოისახება

$$dy = f'(x)\,dx. \qquad (1)$$

dy-ს უწოდებენ პირველი რიგის დიფერენციალს. პირველი რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს ეწოდება II რიგის დიფერენციალი და აღინიშნება d^2y-ით ე.ი.

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)'\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

ე.ი. $d^2y = f''(x)\,dx^2 \equiv y''\,dx^2$ (იკითხება „დე ორი y უდრის იგრეკ ორი პრიმ dx კვადრატს“). ანალოგიურად დაიწერება $d^3y = y'''\,dx^3, \ldots$, n-რი რიგის დიფერენციალი აღინიშნება d^ny-ით და $d^ny = d(d^{n-1}y) = y^{(n)}dx^n$. ჩვენ განვიხილეთ შემთხვევა, როცა $y = f(x)$ ჩვეულებრივი (არართული) ფუნქციაა. რთული ფუნქციის შემთხვევას აქ არ ვიხილავთ.

მაგალითი.

$y = \sin x,\ dy = \cos x\,dx,\ d^2y = -\sin x\,dx^2,\ d^3y = -\cos x\,dx^3$ და ა.შ.

სავარჯიშოები

1. განმარტების გამოყენებით იპოვეთ წარმოებულები ფუნქციებისა

$$\sqrt{x},\ \frac{1}{x},\ \sqrt[3]{x},\ x,\ x^2,\ x^4,\ \frac{1}{x^2},\ \frac{1}{\sqrt{x}},\ 7x^3 + 4x^2 - 8x + \ln 4.$$

2. გაწარმოების ფორმულების და წესების გამოყენებით გამოთვალეთ წარმოებულები და დიფერენციალები

ა). $y=x^6\left(x^8-x+\sqrt{7}\right)^9$, ბ). $y=\dfrac{9x^3-4x^2+\ln 7}{x^5+8x^3+\operatorname{tg}3^0}$,

გ). $y=5x^9\cos^3 7x-10x^4\operatorname{tg}^2 9x\operatorname{ctg}^3 7x-\sqrt{2}$,

დ). $y=\ln^3 x-9\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{x}{\sqrt[8]{x^4-3x}}$, ე). $y=x^x$,

ვ) $y=x^{\operatorname{ctg}^3 4x}$, ზ). $y=|x|\ln|x|$, თ). $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-12}\right)$,

ი). $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$,

კ). $y=\sqrt[19]{\dfrac{x^{10}\sqrt[6]{(x-3)^5}}{\sqrt[8]{(2-x-x^2)^7}}}\cdot\operatorname{arctg}^3 x$,

ლ). $y=\arcsin\ln^3\operatorname{tg}^2\cos^5\sin^2 x$,

მ). $y=5^{\cos^4\frac{1}{x^7}}-\dfrac{\sqrt[9]{x^8}}{x^4\sqrt[20]{x^{17}}}+\dfrac{3}{x^5\sqrt[8]{x^3}}$,

ნ). $y=(\cos 3x)^{\arcsin 8x}+(\operatorname{tg}^2 5x)^{\ln^3 9x}$, ო). $y=\operatorname{sign}x-\dfrac{|x|}{x}+|x|^{|x|}$.

3. დიფერენციალის გამოყენებით გამოთვალეთ $\dfrac{5}{\sqrt[7]{(125{,}6)^5}}$, $\sin 5$, 8^0.

4. იპოვეთ y^{V}, $d^5 y$, თუ $y=\sin x\, e^x$, $y=\ln(1+x)$.

12. დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემები (საშუალო მნიშვნელობის თეორემები)

ამ პარაგრაფში დამტკიცებული იქნება წარმოებადი ფუნქციების წარმოებულების, გამომდინარე აქედან კი თვით ფუნქციების თვისებები წერტილში და არეზე. ჩვეულებრივ, გარდა წრფივისა, ფუნქციის გრაფიკი გარკვეული მრუდია, რომელსაც მის მხებებთან ერთად გარკვეული დამოკიდებულება აქვს საკოორდინატო ღერძებთან; მხები შეიძლება იყოს საკოორდინატო ღერძების პარალელური, ქორდის პარალელური და სხვა. მხებების მდებარეობა გარკვეულ წარმოდგენას იძლევა ფუნქციის გრაფიკზე. წარმოებულებით დადგინდება გრაფიკის ფორმა (მოყვანილობა) და სხვა მრავალი თვისებები.

ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას $x=x_0$ წერტილზე გააჩნია წარმოებული ფართე აზრით, თუ ეს წარმოებული სასრულია, ან უსასრულობა.

ახლა დავამტკიცოთ ფერმას, როლის ლაგრანჟისა და კოშის თეორემები, რომლებსაც საშუალო მნიშვნელობის თეორემებს უწოდებენ.

თეორემა 1 (ფერმა). თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რომელიმე $u(x_0)$ მიდამოში, აღწევს ამ წერტილზე უდიდეს (მაქსიმალურ), ან უმცირეს (მინიმალურ) მნიშვნელობას და ამ წერტილზე წარმოებადია ფართე აზრით, მაშინ ეს წარმოებული უდრის ნულს.

ვიტყვით, რომ $f(x)$ აღწევს უდიდეს მნიშვნელობას x_0 წერტილზე, თუ მოიძებნება ისეთი $u(x_0)$, რომ $\forall x\in u(x_0)$-თვის $f(x)-f(x_0)\le 0$, ანუ $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0$, $x=x_0+\Delta x$, ხოლო როცა $f(x)-f(x_0)\ge 0$, მაშინ ეს ფუნქცია აღწევს უმცირეს მნიშვნელობას ამავე წერტილზე.

თეორემა დავამტკიცოთ უდიდესი მნიშვნელობისათვის. წარმოებულის განმარტების მიხედვით გვაქვს

$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. (1) აღვნიშნოთ $A=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Δx-ის მიმართ განვიხილოთ ორი შემთხვევა

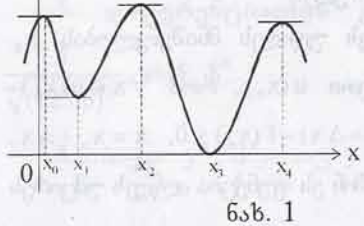
1) $\Delta x>0$, მაშინ $A\le 0$. (2)

2) $\Delta x<0$, მაშინ $A\ge 0$. (3).

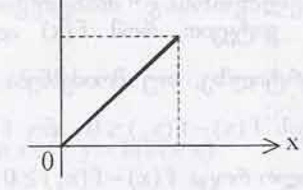
ზღვრის თვისებების გამოყენებით ამ უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\lim_{\Delta x\to 0} A=0$ ე.ი. $f'(x_0)=0$. თეორემა დამტკიცებულია უდიდესი მნიშვნელობისათვის. ანალოგიურად დამტკიცდება თეორემა უმცირესი მნიშვნელობისათვის.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი ასეთია:

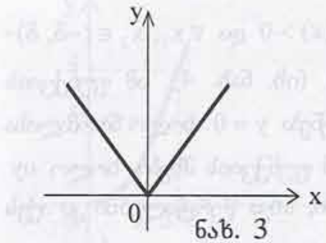
რადგან $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$ და $f'(x_0)=0$, ამიტომ $\operatorname{tg}\alpha=0$ ე.ი. $\alpha=0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის გრაფიკის $(x_0, f(x_0))$ წერტილში გავლებული მხები OX ღერძთან ადგენს 0-ის ტოლ კუთხეს ე.ი. ეს მხები პარალელურია OX ღერძის, ან ემთხვევა ამ ღერძს. ეს ფაქტი გრაფიკულად ასე გამოისახება (იხ. ნახ. 1). ვუშვებთ, რომ თეორემის პირობებს აკმაყოფილებს x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 წერტილები.



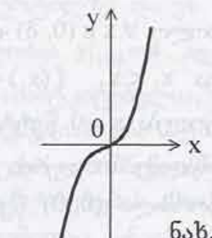
ნახ. 1



ნახ. 2



ნახ. 3



ნახ. 4

შენიშვნები. 1. $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება ღებულობდეს უდიდეს, ან უმცირეს მნიშვნელობებს $x=x_0$ წერტილზე ამ წერტილის ცალმხრივ მიდამოებში მის მნიშვნელობებთან შედარებით და გაჩნდეს ცალმხრივი წარმოებულები ამ წერტილში, მაგრამ ეს წარმოებულები შეიძლება არ უდრიდეს ნულს. მაგალითად $f(x)=x$, განსაზღვრულია $[0, 1]$ სეგმენტზე. $x=0$ წერტილზე აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას, $x=1$ წერტილზე კი მაქსიმალურ მნიშვნელობას, მაგრამ ამ წერტილში ცალმხრივი წარმოებული უდრის 1-ს და არა 0-ს (იხ. ნახ. 2).

2. შეიძლება ფუნქცია x_0 წერტილზე აღწევდეს უდიდეს, ან უმცირეს მნიშვნელობებს, მაგრამ წარმოებული ამ წერტილზე არ არსებობდეს. მაგალითად ფუნქცია $y=|x|$. $x=0$ წერტილზე აღწევს უმცირესს მნიშვნელობას, მაგრამ ამ წერტილზე არ გააჩნია წარმოებული (იხ. ნახ. 3).

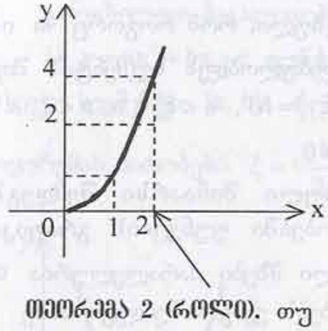
3. ფუნქციის წარმოებული წერტილზე შეიძლება უდრიდეს ნულს, მაგრამ იგი ამ წერტილზე არ აღწევდეს ექსტრემუმს. მაგალითად, $y=x^3$ ფუნქციისათვის $y'=3x^2=0$ განტოლების ფესვია $x=0$, მაგრამ ეს წერტილი არაა ექსტრემუმის წერტილი. ამ წერტილზე მოცემული ფუნქცია ზრდადია. $\forall x\in[-\delta, 0]$-თვის

$f(x) < 0$, ხოლო $\forall x \in (0, \delta)$-თვის $f(x) > 0$ და $\forall x_1, x_2 \in (-\delta, \delta)$-თვის, როცა $x_1 < x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$ (იხ. ნახ. 4). ამ ფუნქციის მხების განტოლება $x = 0$ წერტილში იქნება $y = 0$. ხოლო ნორმალისა $x = 0$. მაშასადამე, ox ღერძი არის ამ ფუნქციის მხები, ხოლო oy ღერძი კი ნორმალი (0, 0) წერტილში, სხვა წერტილებში კი აქვს დახრილი მხებები. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილია $y' = 2ax + b = 0$ განტოლების ამონახსნი $x = -\dfrac{b}{2a}$. ფუნქციებს $y = \sin x$, $y = \cos x$ აქვთ ექსტრემუმები $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ და $x = \pi k$ $(k \in z)$ წერტილებში შესაბამისად; $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციებს ექსტრემუმი არ გააჩნიათ (გამოვრიცხავთ უსასრულო წარმოებულებს).

4. ფერმას თეორემა საშუალებას იძლევა ფუნქციის ექსტრემუმი ვეძებოთ $f'(x) = 0$ განტოლების ფესვებში, ან ისეთ წერტილებში, რომლებშიც მას წარმოებული არ აქვს. თუ ფუნქცია განსაზღვრულია სეგმენტზე, მაშინ ფუნქცია ცალკე უნდა იქნეს შესწავლილი ამ სეგმენტის ბოლოებზე. თუ ფუნქცია რამდენიმე ფორმულითაა მოცემული, მაშინ საჭიროა მისი შესწავლა, გარდა ჩვეულებრივი წერტილებისა, ე.წ. „განსაკუთრებულ“ წერტილებში, ე.ი. ისეთ წერტილებში, რომლებზედაც ერთი ფორმულა გადადის მეორეში. მაგალითისათვის განვიხილოთ ფუნქცია

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{როცა } x \le 2 \\ 2 - x, & \text{როცა } x > 2. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია აღწევს უდიდეს მნიშვნელობას $x = 2$



წერტილზე და ეს მნიშვნელობაა $y|_{x=2} = 4$. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ამ ფუნქციას არა აქვს წარმოებული აღნიშნულ წერტილზე, (ექსტრემუმის ამოცანებს ქვემოთაც განვიხილავთ).

თეორემა 2 (როლი). თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, წარმოებადია (a, b) ინტერვალზე მაინც ფართე აზრით და ღებულობს ერთნაირ მნიშვნელობებს ამ სეგმენტის ბოლოებზე, ე.ი. $f(a) = f(b)$, მაშინ მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი $a < \xi < b$, რომ $f'(\xi) = 0$.

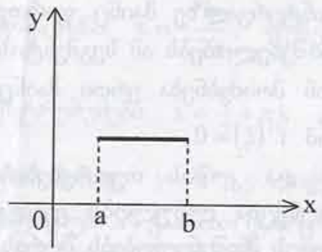
დამტკიცება. ვეიერშტრასის და კოშის თეორემების თანახმად სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია ღებულობს ყველა მნიშვნელობას მის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს შორის. აღვნიშნოთ m-ით და M-ით შესაბამისად მოცემული ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები $[a, b]$ სეგმენტზე. მაშინ $m \le f(x) \le M$, ყოველი x-თვის $[a, b]$ სეგმენტიდან. განვიხილოთ ორი შემთხვევა. 1) $m = M$ და 2) $m \ne M$.

პირველ შემთხვევაში $f(x)$ მუდმივია, ამიტომ $f'(x) = 0$, ξ წერტილად გამოდგება $[a, b]$-ის ყოველი წერტილი.

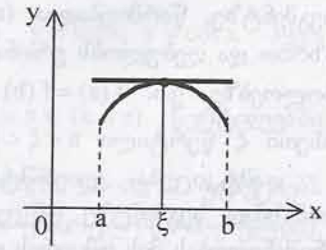
მეორე შემთხვევაში, როცა $m \ne M$ და $f(a) = f(b)$ თანახმად თეორემისა, $f(x)$ ღებულობს m და M მნიშვნელობებიდან ერთ-ერთს სეგმენტის შიგა წერტილზე. ვთქვათ $f(\xi) = M$, $a < \xi < b$, მაშინ ფერმას თეორემის მიხედვით $f'(\xi) = 0$. შესაძლოა $f(\xi) = m$, $a < \xi < b$, მაშინ იმავე თეორემის

ძალით $f'(\xi)=0$. არაა გამორიცხული, რომ როგორც m ისე M მნიშვნელობებს ფუნქცია ღებულობდეს სეგმენტის შიგა წერტილებში. $f(\xi_1)=m$ და $f(\xi_2)=M$, $a<\xi_1<b$, $a<\xi_2<b$, მაშინ ცხადია $f'(\xi_1)=0,\ f'(\xi_2)=0$.

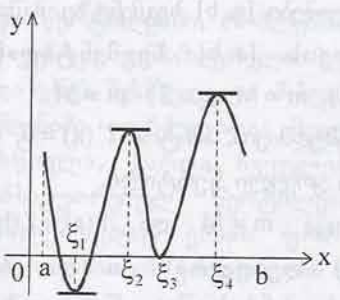
ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს. თეორემის პირობებში ფუნქციის გრაფიკის $(\xi, f(\xi))$ წერტილზე გავლებული მხები პარალელურია ox ღერძის, ან ემთხვევა მას. ნახაზებს ექნება შემდეგი სახე



$f(a)=f(b)=c,\ f'(x)=0$

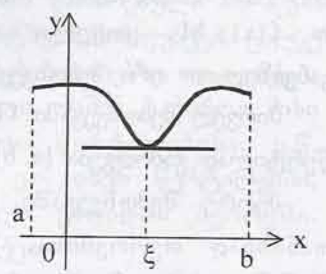


$f'(\xi)=0,\ f(\xi)=M$



$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=f'(\xi_4)=0$

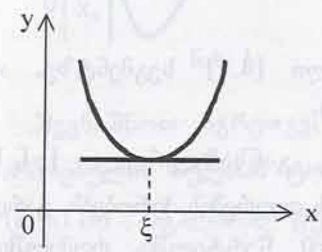
$f(\xi_1)=m,\ f(\xi_4)=M$

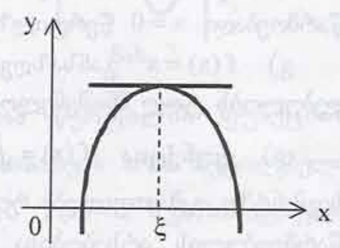


$f'(\xi)=0,\ \ f(\xi)=m$

განვიხილოთ მაგალითები საშუალო სკოლის კურსიდან.

1) $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციისათვის ყოველთვის მოიძებნება ისეთი სეგმენტი [a, b], რომ მისთვის შესრულდეს როლის თეორემის პირობები. $\xi=-\dfrac{b}{2a}$.





ξ იქნება [a, b]-ის შუა წერტილი, წრფე $x=-\dfrac{b}{2a}$ სიმეტრიის ღერძია.

2) $y=\sin x$. ფუნქცია 2π სიგრძის ყოველ მონაკვეთზე ღებულობს ტოლ მნიშვნელობებს. ასეთ მონაკვეთზე არსებობს ორი ისეთი წერტილი, რომლებზედაც $f(x_1)=1,\ f(x_2)=-1$, ამიტომ $f'(x_1)=0,\ f'(x_2)=0$.

ანალოგიური თვისება აქვს $y=\cos x$ ფუნქციას.

3) ფუნქციები $y=a^x,\ y=\log_a^x,\ y=\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{ctg} x$ არ აკმაყოფილებენ თეორემის ყველა პირობას (რომელს?), ამიტომ მათთვის როლის თეორემა არ სრულდება. შევნიშნოთ რომ მონოტონური ფუნქციებისათვის ტოლობა $f(a)=f(b)$ არ სრულდება (თუ ეს ფუნქცია არაა მუდმივი).

განვიხილოთ ფუნქციები

ა) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ როცა } 0 \le x < 1 \\ 0, \text{ როცა } x=1. \end{cases}$

ეს ფუნქცია არაა უწყვეტი $x=1$ წერტილზე.

ბ) $f(x)=|x|$, განსაზღვრული $[-1, 1]$ სეგმენტზე, არაა წარმოებადი $x=0$ წერტილზე.

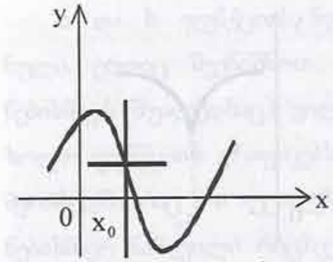
გ) $f(x)=x$ განსაზღვრული $[0, 1]$ სეგმენტზე, არ ღებულობს ტოლ მნიშვნელობებს.

დ) ფუნქცია $f(x)=\sqrt{|x|}$, განსაზღვრული $[-1, 1]$ სეგმენტზე, აკმაყოფილებს როლის თეორემის პირობებს, გარდა წარმოებულის არსებობისა $x=0$ წერტილში, რომელშიც

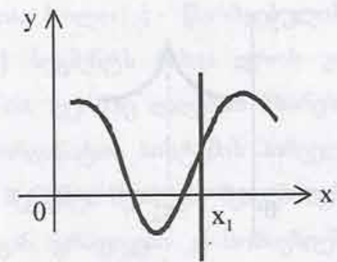
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty.$$

ყველა ამ ოთხივე ფუნქციისათვის არ არსებობს წერტილი, რომელზედაც წარმოებული გახდება ნული. მათთვის არ სრულდება თეორემის ერთ-ერთი პირობა.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ როლის თეორემის პირობები $[a, b]$ სეგმენტზე შეიძლება შეიცავდეს ისეთ წერტილებს, რომლებშიც ფუნქციას აქვს უსასრულო წარმოებული $-\infty$, ან $+\infty$ (იხ. ნახ. 1 და ნახ. 2). ამ ნახაზებზე მოცემული ფუნქციისათვის $f'(x_0)=-\infty$, $f'(x_1)=+\infty$. შეიძლება მათთვის მოიძებნოს ამ წერტილების შემცველი ისეთი სეგმენტები, რომლებზედაც დაკმაყოფილდება როლის თეორემის პირობები. ამიტომაც თეორემაში მოითხოვება წარმოებულის არსებობა ფართე აზრით.

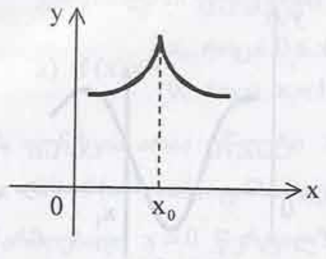


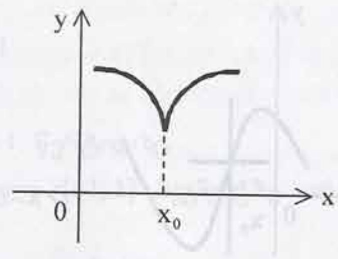
ნახ. 1



ნახ. 2

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ წერტილში ფუნქციის წარმოებულის ნულთან ტოლობისათვის არაა აუცილებელი $f(a)=f(b)$. მაგალითად ფუნქცია $f(x)=x^2$ განსაზღვრული $[-1, 3]$ სეგმენტზე აკმაყოფილებს პირობას $f(-1)=1$, $f(3)=9$ ე.ი. $f(-1) \neq f(3)$, მაგრამ ამ სეგმენტის შიგა წერტილზე, კერძოდ $x=0$ წერტილზე, მისი წარმოებული $f'(x)=2x$ ტოლია ნულის (თუმცა $[-1, 3]$-ის ქვესეგმენტზე $[-1, 1]$-ზე მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას, ამიტომაც $\xi=0$ წერტილზე $f'(\xi)=0$). ერთიც შევნიშნოთ, რომ ქვემოთ მოცემული ნახაზების მიხედვით $f'(x_0)$ შეიძლება უდრიდეს ∞-ს (– ან, + ნიშნების გარეშე), ხოლო შესაბამისი ფუნქციისათვის $f(a)=f(b)$ და ეს ფუნქცია იყოს უწყვეტი $[a, b]$ სეგმენტზე, მაგრამ მისთვის არ არსებობს ისეთი ξ, რომ $f'(\xi)=0$.

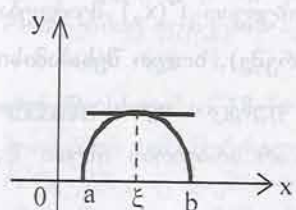




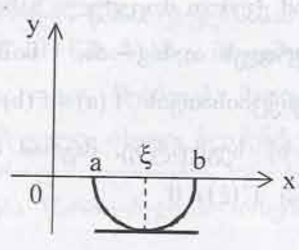
როლის თეორემიდან შედეგის სახით გამომდინარეობს:

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რომელიმე მონაკვეთზე, რომლის ბოლოებზე ღებულობს 0-ის ტოლ მნიშვნელობებს და წარმოებადია ამ მონაკვეთის შიგა წერტილებზე, მაშინ მოიძებნება ისეთი შიგა წერტილი, რომელზედაც წარმოებული ხდება ნულის ტოლი. ე.ი. წარმოებადი ფუნქციის ორ ნულს შორის ყოველთვის არსებობს ერთი მაინც ნული მისი წარმოებულისა. ეს ფაქტი გრაფიკულად გამოსახულია ნახ. 3 და ნახ. 4-ზე.

მაგალითად, თუ $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის ნულებია x_1 და x_2, მაშინ $\xi=-\frac{b}{2a}$ და $x_1<\xi<x_2$, $\xi=\frac{x_2-x_1}{2}$.



ნახ. 3



ნახ. 4

$f(a)=f(b)=0,\ f'(\xi)=0,\ \xi=\frac{b-a}{2}$

a და b ფუნქციის ნულებია, ხოლო ξ- წარმოებულის ნული. ერთიც შევნიშნოთ. [a, b] სეგმენტს (სხვა დროს კი ნებისმიერ შუალედსაც) ვიღებთ OX ღერძზე დადებით მხარეს, ხოლო ფუნქციის გრაფიკებს კოორდინატთა სისტემის პირველ მეოთხედში, რაც არა აუცილებელი. სეგმენტი შეიძლება შედგებოდეს ნებისმიერ ნამდვილი რიცხვებისაგან, გრაფიკები კი მოთავსდეს ნებისმიერ მეოთხედში. მაგალითად ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკები ყველა მეოთხედში გადის.

როგორც ვნახეთ, როლის თეორემის ძალით ერთი ξ აუცილებლად არსებობს, შეიძლება არსებობდეს რამდენიმე ასეთი ξ. მაგალითად $y=\sin x$-თვის $\xi=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in z$, რომელთა სიმრავლე თვლადია. ადვილი მისახვედრია რომ მკაცრად მონოტონური ფუნქციისათვის როლის თეორემა არ სრულდება. ასეთი ფუნქციების მაგალითებია $y=a^x$, $y=\log_a^x$, $y=\mathrm{tg}\,x$, $y=\mathrm{ctg}\,x$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$ და ა.შ.

ადვილი მისახვედრია, რომ ფერმას თეორემა როლის თეორემის კერძო შემთხვევაა.

თეორემა 3 (ლაგრანჟი). თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და წარმოებადი ფართე აზრით (a, b) ინტერვალზე მაინც, მაშინ ამ ინტერვალზე მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. (1)

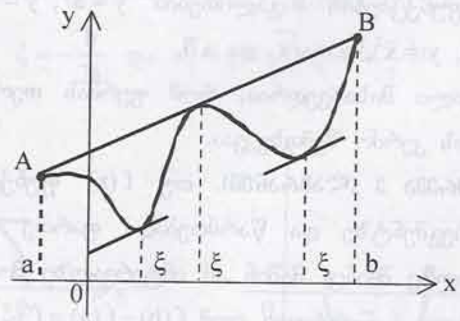
დამტკიცება. განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. ადვილი მისახვედრია, რომ $F(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, რადგან მის მისაღებად უწყვეტ მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას ემატება წრფივი ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია. უშუალო ჩასმით მივიღებთ $F(a) = 0,\ F(b) = 0$. ამრიგად $F(x)$ აკმაყოფილებს როლის თეორემის პირობებს $[a, b]$ სეგმენტზე. ამიტომ (a, b) ინტერვალზე მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი ξ, რომ $F'(\xi) = 0$.

ჩვენს შემთხვევაში $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, საიდანაც მივიღებთ

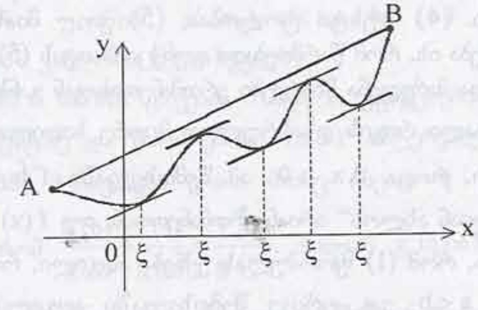
$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$ აქედან კი

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad (2)$$



ანუ $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. თეორემა დამტკიცებულია. განვიხილოთ ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი. $f'(\xi)$

არის მოცემული $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $(\xi, f(\xi))$ წერტილზე გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი $\operatorname{tg}\varphi$. გავავლოთ $A(a, f(a))$ და $B(b, f(b))$ წერტილზე AB ქორდა. ცხადია რომ $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg}\alpha$. ამრიგად, (2) ტოლობის ძალით $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha$. ე.ი. AB ქორდა და $(\xi, f(\xi))$ წერტილებზე გავლებული მხებები ერთმანეთის პარალელურია მათი კუთხური კოეფიციენტების ტოლობის გამო. მაშასადამე ლაგრანჟის თეორემის პირობებში მოცემული ფუნქციის გრაფიკზე იარსებებს ერთი მაინც ისეთი წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები ქორდის პარალელურია. შეიძლება გრაფიკზე არსებობდეს რამდენიმე ასეთი წერტილი. მოვიშველიოთ ნახაზი



შევნიშნოთ, რომ ყველა ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტობის არეში აკმაყოფილებს ლაგრანჟის თეორემას.

ადვილი მისახვედრია, რომ როლის თეორემა ლაგრანჟის თეორემის კერძო შემთხვევაა.

როგორც ვთქვით $a < \xi < b$. დავუშვათ $\frac{\xi - a}{b - a} = \theta,\ 0 < \theta < 1$, მაშინ $\xi = a + \theta(b - a)$, ამიტომ (1) ფორმულა შეიძლება

ჩავწეროთ ასეც

$$f(b)-f(a)=f'\left(a+\theta\,(b-a)\right)(b-a). \qquad (3)$$

აღვნიშნოთ $a=x$, $b-a=\Delta x$, ე.ი. $b=a+\Delta x=x+\Delta x$. მაშინ (3) ფორმულა ასე გადაიწერება.

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'\left(x+\theta\Delta x\right)\Delta x, \quad 0<\theta<1. \qquad (4)$$

ფორმულებს (1), (2), (3) უწოდებენ ლაგრანჟის სასრული ნაზრდის ფორმულებს, ან უბრალოდ, სასრული ნაზრდის ფორმულებს. ξ-ს საშუალო წერტილი ჰქვია. ამიტომ ფერმას, როლის, ლაგრანჟის და კოშის თეორემებს საშუალო მნიშვნელობის თეორემებსაც უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის დიფერენციალის განხილვისას ჩვენ დავწერეთ ე.წ. მიახლოების ფორმულა $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$ (5). შევადაროთ (4) და (5) ფორმლები. (4) ზუსტი ტოლობაა, (5) კი – მიახლოებითი. ამით აიხსნება ის, რომ წარმოებადი ფუნქციისათვის (5) ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდით Δx-თან შედარებით, როცა $\Delta x\to 0$. ამ შემთხვევაში $f'\left(x+\theta\Delta x\right)$ და $f'(x)$ „ძალიან ახლოს" არიან ერთმანეთთან, თუ $f(x)$ უწყვეტია. შევნიშნოთ, რომ (1) ფორმულას ექნება ადგილი, როცა $a>b$, ან როცა $a<b$ ე.ი. ორივე შემთხვევაში ადგილი აქვს (1) ფორმულას.

შენიშვნები. 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია სასრულ, ან უსასრულო შუალედზე, წარმოებადია ამ შუალედის ყოველ შიგა წერტილზე და ეს წარმოებული უდრის ნულს, მაშინ $f(x)$ იქნება მუდმივი მოცემულ შუალედზე, იგულისხმება ამ ფუნქციის ცალმხრივი უწყვეტობა შუალედის ბოლოებზე.

მართლაც, ნებისმიერ $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე სრულდება ტოლობა $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$ ე.ი. $f(x_2)=f(x_1)$. x_1-ისა და x_2-ის ნებისმიერობის გამო $f(x)\equiv c$.

2. თუ f და g აკმაყოფილებს ლაგრანჟის თეორემის პირობებს და $f'=g'$, მაშინ $f-g=c$. მართლაც ვთქვათ $F=f-g$, მაშინ $F'=f'-g'=0\Rightarrow F=c$ ე.ი. $f-g=c$, c ნებისმიერი მუდმივია. ამ თვისების გამოყენებით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$\operatorname{arctg} x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c \quad \text{და} \quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\operatorname{arctg} x+c.$$

3. თუ $\varphi(x)$ აკმაყოფილებს ლაგრანჟის თეორემის პირობებს (a, b) ინტერვალზე და არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi'(x)$, მაშინ ეს ზღვარი უდრის $\varphi'(x_0)$, $a<x_0<b$ (ამ შედეგის დამტკიცებას ვანდობთ მკითხველს).

თეორემა 4 (კოში). ვთქვათ, f და g ფუნქციები უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და წარმოებადი (a, b) ინტერვალზე მაინც, $g'\neq 0$, მაშინ მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, $a<\xi<b$, რომ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. რადგან $g'(\xi)\neq 0$, ამიტომ $g(b)-g(a)$ არ იქნება ნულის ტოლი გამომდინარე ლაგრანჟის თეორემიდან.

დამტკიცება. განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right).$$

$F(x)$ აკმაყოფილებს იგივე პირობებს, რასაც $f(x)$ მოცემულ

სეგმენტზე. გარდა ამისა $F(a)=F(b)=0$, ე.ი. $F(x)$ აკმაყოფილებს როლის თეორემის პირობებს; ამიტომ მოიძებნება ისეთი ξ, რომ $0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)$, საიდანაც მივიღებთ დასამტკიცებელ ფორმულას. თეორემა დამტკიცებულია. ადვილი მისახვედრია, რომ ლაგრანჟის თეორემა კოშის თეორემის კერძო შემთხვევაა. მართლაც, თუ დავუშვებთ $g(x)\equiv x$, მაშინ მივიღებთ ლაგრანჟის ფორმულას.

ახლა გავაკეთოთ მოკლე ისტორიული ექსკურსი. როგორც ვნახეთ, ფერმას თეორემის გამოყენებით დამტკიცდა როლის თეორემა, ლაგრანჟის თეორემის დამტკიცებისას გამოვიყენეთ როლის თეორემა და ბოლოს კოშის თეორემის დამტკიცებისას გამოვიყენეთ იგივე როლის თეორემა, მაგრამ ლაგრანჟის თეორემის განზოგადოებაა კოშის თეორემა. ამრიგად მივიღეთ ასეთი „ჯაჭვი": ფერმა $\rightarrow$ როლი $\rightarrow$ ლაგრანჟი $\rightarrow$ კოში. ახლა დავაკვირდეთ ამ მეცნიერების ცხოვრებისა და მოღვაწეობის პერიოდებს, რომლებიც ასევე „ჯაჭვურად" არიან დაკავშირებული ერთმანეთთან. ფერმა (1601-1665) $\rightarrow$ როლი (1652-1719) $\rightarrow$ ლაგრანჟი (1736-1813) $\rightarrow$ კოში (1789-1857) (იქნებ კოშის თეორემაც განზოგადდეს!).

დამტკიცებულ თეორემებში ერთი მაინც ξ მუდამ არსებობს. შეიძლება არსებობდეს რამდენიმე ξ. როგორ ვიპოვოთ ეს ξ? ბუნებრივია იგი მოიძებნება შესაბამისი $f'(\xi)=0$ განტოლების ამოხსნით. მაგალითად $y=\sin x$-თვის $[0,\pi]$ სეგმენტზე ξ წერტილის მოსაძებნად ამოვხსნათ $(\sin x)'=0$ ანუ $\cos x=0$. ამ განტოლების ამონახსნისა $x=\frac{\pi}{2}$ ე.ი. $\xi=\frac{\pi}{2}$, რომელზედაც

$\sin\xi=1$; სინუსოიდის $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ წერტილზე გავლებული მხები OX ღერძის პარალელურია.

სავარჯიშოები

1. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x-1$ აკმაყოფილებს ფერმას, როლის და ლაგრანჟის თეორემების პირობებს. იპოვეთ ისეთი $[a,b]$ და ξ, რომელზედაც $f'(\xi)=0$.

2. აჩვენეთ, რომ ფუნქცია $f(x)=x^3-4x^2-11x+30$ აკმაყოფილებს როლის თეორემის პირობებს $[-3,2]$ და $[2,5]$ სეგმენტებზე. იპოვეთ ξ. რამდენი ასეთი ξ იარსებებს?

3. შეამოწმენთ ფერმას, როლის, ლაგრანჟის თეორემები $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციისათვის. a-ს მიმართ განიხილეთ შემთხვევები $a>0$, $a<0$. მონახეთ სეგმენტები, რომელზედაც სრულდება როლის და ლაგრანჟის თეორემები. გამოსახეთ გრაფიკულად ყველა შემთხვევა. ანალოგიურად განიხილეთ ფუნქცია $f(x)=\frac{x^4}{2}-x^2$ $[-2,2]$ სეგმენტზე.

4. შეამოწმეთ სამივე თეორემა ფუნქციებისათვის $y=-|x|$, $1-|x|$ $[-1,1]$ სეგმენტზე. ააგეთ მათი გრაფიკები.

5. აჩვენეთ, რომ $f(x)=x^2-4x+3$ ფუნქციის ფესვებს შორის მოთავსებულია მისი წარმოებულის ფესვი. რა

დამოკიდებულებაშია ეს ფესვი ფუნქციის ფესვებთან?

6. აჩვენეთ რომ $x^3-3x^2+6x+1=0$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი (გამოიყენეთ წარმოებული და ფერმას თეორემა).

7. $f(x)=(x-3)(x+1)(x+5)$ ფუნქციისათვის იპოვეთ $f'(x)=0$ განტოლების ფესვები წარმოებულის მოძებნის გარეშე. შეამოწმეთ მისთვის ფერმას, როლის, ლაგრანჟის თეორემების პირობები. იპოვეთ შესაბამისი სეგმენტები და ξ წერტილები, რომლებშიც $f'(\xi)=0$.

8. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)=x^3-x$ ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის პირობებს $[-1, 0]$ და $[0, 1]$ სეგმენტებზე. იპოვეთ ξ რიცხვები.

9. შესრულდება თუ არა როლის თეორემის პირობები $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ ფუნქციისათვის $[-1, 1]$ სეგმენტზე?

10. შეამოწმეთ ლაგრანჟის თეორემის ჭეშმარიტება აღნიშნულ სეგმენტზე და იპოვეთ შესაბამისი ξ, თუ

1. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $\left[\dfrac{1}{2},\ 2\right]$ სეგმენტზე.

2. $f(x)=\sqrt{x}$ $[1,\ 4]$ სეგმენტზე.

11. დაწერეთ კოშის ფორმულა $f(x)=x^2+2$ და $g(x)=x^3-1$ ფუნქციებისათვის $[1,\ 2]$ სეგმენტზე და იპოვეთ ξ.

12. თუ $f'(x)=0$ განტოლებას არა აქვს ნამდვილი ფესვი, მაშინ $f(x)$ დააკმაყოფილებს თუ არა ლაგრანჟის თეორემას?

13. განუზღვრელობათა გახსნა ლოპიტალის წესით

ფუნქციის ზღვრის შესწავლისას განვიხილეთ $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty-\infty$, $1^\infty, 0^\infty, \infty^0, 0\cdot\infty, 0^0$, სახის განუზღვრელობები, სიმბოლო 0 ნიშნავს, რომ გვაქვს ფუნქცია $f(x)$, განსაზღვრული a წერტილის მიდამოში, ისეთი რომ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, ანალოგიურად განიხილება სიმბოლოები ∞ და 1. $\dfrac{0}{0}$ ნიშნავს ისეთი ორი ფუნქციის შეფარდების ზღვარს $x=a$ წერტილში, როცა ორივე მათგანის ზღვარია 0. ანალოგიურად განიხილება დანარჩენი განუზღვრელობები. გამოვთვალოთ ასეთი სახის ზღვრები, ე.ი. ვიპოვოთ ზღვრების შედეგები, ნიშნავს „გავხსნათ“ ეს განუზღვრელობები. ხშირ შემთხვევაში მათი „გახსნა“ ელემენტარული ხერხებით რთულია, ზოგჯერ კი შეუძლებელიც. მაშინ როცა წარმოებულის, კერძოდ ფერმას, როლის, ლაგრანჟის და კოშის თეორემების გამოყენებით ეს ამოცანა გაცილებით მარტივად ამოიხსნება. სწორედ ამაში მდგომარეობს ე.წ. ლოპიტალის წესი.

თეორემა 1 (ლოპიტალი). დავუშვათ, 1). $f(x)$ და $g(x)$ განსაზღვრული არიან $[a, b]$ შუალედში, 2). $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, 3). არსებობს სასრული წარმოებულები $f'(a)$ და $g'(a)$, მაშინ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

დამტკიცება. რადგანაც $f'(a)$ და $g'(a)$ სასრულია, ამიტომ

$f(x)$ და $g(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია a წერტილზე. ე.ი. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) = 0$, ამიტომ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $x \to a$ მივიღებთ, რომ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$. თუ $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = 0$ და $\lim\limits_{x\to a} g'(x) = 0$, მაშინ გამოვიყენებთ თეორემას $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$-თვის, ე.ი. თეორემა 1-ს ვიყენებთ განმეორებით, მივიღებთ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ და ა.შ. $g''(x) \neq 0$,... ვგულისხმობთ, რომ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს გაჩნიათ მაღალი წარმოებულები საჭირო რიგამდე. განვიხილოთ მაგალითები.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}x}{\ln(e-x)+2x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{2(\ln(e-x)+2x-1))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{2\left(-\dfrac{1}{e-x}+2\right)} = \frac{e}{2e-1}.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{2x - e^x + e^{-x}}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{2 - e^x - e^{-x}}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^x + e^{-x}}{-\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-e^x - e^{-x}}{-\cos x} = 2.$$

შენიშვნები. 1. შესაძლოა, $f(x)$ და $g(x)$ აკმაყოფილებდეს თეორემა 1-ის პირობებს $(a, b]$ ნახევარინტერვალზე, მაშინ შეიძლება $f(x)$ და $g(x)$ განვსაზღვროთ a წერტილზე შემდეგნაირად $f(a) = g(a) = 0$, რის გამოც $f(x)$ და $g(x)$ უკვე იქნებიან განსაზღვრული $[a, b]$ სეგმენტზე და თეორემა 1 იქნება მართებული ამ შემთხვევაშიც.

2. შესაძლოა, $f(x)$ და $g(x)$ განსაზღვრული იყოს $[c, +\infty]$ სეგმენტზე, მაშინ მარტივად დამტკიცდება, რომ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

თეორემა 1-ის ანალოგიურ თეორემას აქვს ადგილი $\dfrac{\infty}{\infty}$ სახის განუზღვრელობის შემთხვევაში. მართებულია შემდეგი

თეორემა 2. დავუშვათ. 1). $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია $(a, b]$ შუალედში, 2). $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, 3) $(a, b]$ შუალედზე არსებობენ სასრული წარმოებულები $f'(x)$ და $g'(x)$, $g'(x) \neq 0$, მაშინ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (ამ თეორემის დამტკიცებას ვანდობთ მკითხველს).

განვიხილოთ მაგალითები.

1. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n} = 0, \quad n \in N.$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \ldots = \lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^x (\ln a)^n} = 0, \quad a > 1, \; n \in N.$$

ყურადღება მივაქციოთ ერთ გარემოებას. შესაძლოა

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ არ არსებობდეს, ხოლო $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ არსებობდეს, მაგალითად

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1. \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0,$$

რადგანაც $\sin x$ შემოსაზღვრულია. აქ შეუძლებელია გამოვიყენოთ თეორემა 2. რადგან $\frac{(x+\sin x)'}{x'}=1+\cos x$, რომლის ზღვარი, როცა $x\to+\infty$ არ არსებობს. მაშასადამე ლოპიტალის თეორემები გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა არსებობს $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

გადავიდეთ დანარჩენი განუზღვრელობის გახსნაზე.

1). $\infty-\infty$ სახის განუზღვრელობის გახსნისათვის საჭიროა წინასწარ მოვახდინოთ გარდაქმნები. ვთქვათ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$. ამ შემთხვევაში $f(x)-g(x)=$

$$=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}.$$ ეს კი $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობაა.

განვიხილოთ მაგალითი.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

2). $0\cdot\infty$ სახის განუზღვრელობა შეიძლება ასე გარდავქმნათ

$0\cdot\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}$, ან ასე $0\cdot\infty=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}$. ამით დავედით უკვე განხილულ შემთხვევებზე.

განვიხილოთ მაგალითი.

$$\lim_{x\to0+}\left(x^n\ln x\right)=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{x^{-n}}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}}{-n\,x^{-n-1}}=\lim_{x\to0+}\frac{x^n}{-n}=0,\quad n\in N.$$

3). $1^\infty, 0^0, \infty^0, 0^\infty$ განუზღვრელობათა გახსნისათვის საჭიროა ეს გამოსახულებები წინასწარ გავალოგარითმოთ. განვიხილოთ ერთი მაგალითი.

$\lim\limits_{x\to0+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$. ეს 0^0 სახის განუზღვრელობაა. აღვნიშნოთ

$y=x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$, გავალოგარითმოთ $\ln y=\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$. მივიღეთ $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუზღვრელობა. ლოპიტალის წესის გამოყენებით მივიღებთ

$$\lim_{x\to0+}\ln y=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}=\lim_{x\to0+}\frac{e^x-1}{xe^x}=\lim_{x\to0+}\frac{e^x}{e^x+xe^x}=1.$$

ამრიგად, $\lim\limits_{x\to0+}\ln y=1$, აქედან $\lim\limits_{x\to0+}y=e^1=e$. ამრიგად

$\lim\limits_{x\to0+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=e$ (შევნიშნოთ რომ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. ამრიგად e არის როგორც 0^0 სახის, ისე 1^∞ სახის განუზღვრელობა, ახლა უკვე განსაზღვრული). ანალოგიურად გამოითვლება დანარჩენი განუზღვრელობები $0^0, \infty^0, 0^\infty$.

სავარჯიშოები

გამოთვალეთ ზღვრები

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e-x)+x-1}{e^x-e^{-x}}$, 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$,

3). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2x-\dfrac{1}{x^2}\right)$, 4). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$,

5). $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$, 6). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x^2)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}$,

7). $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$, 8). $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-x-2}\right)$,

9). $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)^{x-2}$, 10). $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{5}{x^2+x+4}\right)^{x^2-25}$.

14. ტეილორის და მაკლორენის ფორმულები და მათი გამოყენება მიახლოებით გამოთვლებში

განვიხილოთ ამოცანა. ვთქვათ, f ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს n-რი რიგის წარმოებულები. დავადგინოთ, არსებობს თუ არა ისეთი $p_n(x)$ მრავალწევრი, რომ

$$f(x)=p_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right),\quad x\to x_0 \qquad (1)$$ და

$$f(x_0)=p_n(x_0),\ f'(x_0)=p_n'(x_0),\dots,\ f^{(n)}(x_0)=p_n^{(n)}(x_0). \qquad (2)$$

ვეძებოთ ეს მრავალწევრი შემდეგი სახით

$$p_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+A_3(x-x_0)^3+\dots+A_n(x-x_0)^n. \qquad (3)$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $p_n(x_0)=A_0$. ჩავსვათ (1) ფორმულაში, მივიღებთ $A_0=f(x_0)$. გავაწარმოოთ (3) ტოლობა და ჩავსვათ მიღებულში $x=x_0$ მივიღებთ

$$p_n'(x)=A_1+2A_2(x-x_0)+3A_3(x-x_0)^2+\dots+nA_n(x-x_0)^{n-1},$$

$p_n'(x_0)=A_1$ ე.ი. $A_1=f'(x_0)$. კვლავ გავაწარმოოთ (3) და ჩავსვათ $x=x_0$, მივიღებთ $p_n''(x)=2A_2+3\cdot 2A_3(x-x_0)+\dots+n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$,

$p_n''(x_0)=2A_2,\ 2A_2=f''(x_0)$, აქედან $A_2=\dfrac{f''(x_0)}{2}=\dfrac{f''(x_0)}{1\cdot 2}=\dfrac{f''(x_0)}{2!}$

და ა.შ. ზოგადად კი გვექნება

$$A_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k=0,1,2,\dots,n.$$ ამ შემთხვევაში

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

თუ უკანასკნელს შევიტანთ (1)-ში, მივიღებთ

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right).$$

ავღნიშნოთ $f(x)-p_n(x)=r_n(x)$ და შევაფასოთ იგი. (2)-დან ვღებულობთ $r_n(x_0)=f(x_0)-p_n(x_0)=0$, $r_n'(x_0)=f'(x_0)-p_n'(x_0)=0,\dots,$ $r_n^{(n)}(x_0)=0$. გამოვიყენოთ ლოპიტალის წესი n-ჯერ

$\dfrac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$-თვის, როცა $x \to x_0$. მივიღებთ

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{n!}=0 \quad \text{ე.ი.}$$

$r_n(x_0)=\circ\left((x-x_0)^n\right),\ x \to x_0$. გავიხსენოთ, რომ $\circ$ აღნიშნავს მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეს $(x-x_0)^n$-თან შედარებით, როცა $x \to x_0$.

ამრიგად დავამტკიცეთ თეორემა (ტეილორის (1685-1731))

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (a, b) ინტერვალზე და ამ ინტერვალის x_0 წერტილზე გააჩნია წარმოებულები n რიგამდე ჩათვლით, მაშინ, როცა $x \to x_0$,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\circ\left((x-x_0)^n\right),$$

ანუ
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\circ\left((x-x_0)^n\right). \tag{4}$$

შევნიშნოთ, რომ (a, b) ინტერვალის ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტი, x_0 კი ამ სეგმენტიდან, რომლის ბოლოებზე გვექნება ცალმხრივი წარმოებულები, როცა $x_0=a$ ან $x_0=b$. (4) ფორმულას ეწოდება ტეილორის ფორმულა პეანოს ნაშთით. ამ ფორმულის მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობს, რომ ფუნქცია, რომელიც თეორემის პირობებს აკმაყოფილებს

x_0 წერტილში, შეიძლება შევცვალოთ ტეილორის მრავალწევრით ამავე წერტილის მიდამოში.

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x),\ p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

მრავალწევრს ჰქვია ტეილორის მრავალწევრი, რომელიც ითვლება მოცემული ფუნქციის მოცემული წერტილის მიდამოში საუკეთესო მიახლოებად.

(4) ფორმულა შეიძლება ჩავწეროთ სხვა ფორმით. ამისათვის აღვნიშნოთ $x-x_0=\Delta x,\ f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$, მივიღებთ

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\circ(\Delta x^n).$$

თუ გამოვიყენებთ ფუნქციის დიფერენციალს და გავიხსენებთ კავშირს ფუნქციის ნაზრდსა და დიფერენციალს შორის, მაშინ შეიძლება დავწეროთ შემდეგი ტოლობა

$$\Delta y=dy+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\circ(\Delta x^n).$$

როგორც ჩანს, $\dfrac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+0(\Delta x^n)$ არის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდე ვიდრე Δx, როცა $\Delta x \to 0$.

განვიხილოთ (4) ფორმულის კერძო შემთხვევა. თუ $f(x)$ აკმაყოფილებს ტეილორის თეორემის პირობებს $x_0=0$ წერტილში, მაშინ (4)-ში შეიძლება ჩავსვათ $x_0=0$, მივიღებთ

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\circ(x^n). \tag{5}$$

ამ ფორმულას მაკლორენის (1698-1746) ფორმულა ჰქვია.

ახლა განვიხილოთ ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის ტეილორის (მაკლორენის) ფორმულები.

1). $f(x)=\sin x,\quad f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right),$

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi}{2}n=\begin{cases}0, & \text{როცა } n \text{ ლუწია}\\ 1, & \text{როცა } n=4k+1\\ -1, & \text{როცა } n=4k+3\end{cases}$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (5) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\circ(x^{2n+2}). \qquad (6)$$

2). $f(x)=\cos x,\quad f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}n\right),$

$$f^{(n)}(0)=\cos\frac{\pi}{2}n=\begin{cases}0, & \text{როცა } n \text{ კენტია}\\ 1, & \text{როცა } n=4k\\ -1, & \text{როცა } n=4k+2.\end{cases}$$

იგივე მე-(5) ფორმულით მივიღებთ

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\circ(x^{2n+1}). \qquad (7)$$

შენიშვნა. (6) და (7) ფორმულებში იგულისხმება, რომ x გამოსახულია რადიანებში. ასე მაგალითად ვთქვათ $x=10^0$, რადგან $1^0=\frac{\pi}{180}$ რადიანს, ამიტომ $10^0=\frac{\pi}{180}\cdot 10$ რადიანს $=\frac{\pi}{18}$ რადიანს $\approx 0{,}174$ რადიანს ე.ი. თუ $x=10^0$ მაშინ (6)

და (7) ფორმულებში ნაცვლად x-სა უნდა ჩავსვათ 0,174.

3). $f(x)=e^x,\ f^{(n)}(x)=e^x,\ f^{(n)}(0)=e^0=1$ ამიტომ

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\circ(x^n). \qquad (8)$$

აქედან მივიღებთ

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\circ\left((-x)^n\right). \qquad (9)$$

მე-(8) და მე-(9) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\circ(x^{2n+2}) \qquad (10)$$

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\circ(x^{2n+1}) \qquad (11)$$

(ფუნქციას e^x უწოდებენ ექსპონენციალურ ფუნქციას და წერენ $e^x=\exp x$). ანალოგიურად მივიღებთ

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n). \qquad (12)$$

ამ ფორმულაში α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, გამოთვლების მიზნით შეიძლება x შევცვალოთ $-x$-ით, ან $\pm x^2$-ით და ა.შ.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\circ(x^n),\quad n=1,2,\ldots \qquad (13)$$

ფორმულები (6) — (13) გამოიყენება მიახლოებით გამოთვლებში. განვიხილოთ მაგალითები. ვიპოვოთ მიახლოებითი

მნიშვნელობა

1). $\sin 10^0$-სა . როგორც ვნახეთ $10^0 = 0,174$ რადიანს, ამიტომ (6) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\sin 10^0 \approx \sin 0,174 = 0,174 - \frac{1}{3!}(0,174)^3 + \frac{1}{5!}(0,174)^5 - \ldots \approx 0,174 .$$

ოთხნიშნა მათემატიკური ცხრილით კი $\sin 10^0 = 0,1736$. შევნიშნოთ, რომ $\sin 10^0$-ის გამოსათვლელ ფორმულაში ავიღეთ პირველი შესაკრები, რადგან მეორე და მითუმეტეს დანარჩენი შესაკრებები საკმაოდ მცირეა და ამიტომ ისინი უგულებელვყავით.

2). ვიპოვოთ e-ს მნიშვნელობა. ამისათვის მე-(8) ფორმულაში ჩავსვათ $x = 1$-ს, მივიღებთ

$$e^1 = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \qquad (14)$$

გამოვთვალოთ e-ს რამდენიმე მიახლოებითი მნიშვნელობა. ავიღოთ (14) ტოლობაში სამი შესაკრები, მივიღებთ $e \approx 2 + 0,5 + 0,166 = 2,666$ ახლა ავიღოთ ამავე (14) ტოლობაში ხუთი შესაკრები.

$e \approx 2,666 + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2,715$. ცხადია, რაც უფრო მეტ შესაკრებებს ავიღებთ (14) ტოლობაში, მით უფრო უკეთეს მიახლოებას მივიღებთ. როგორც ცნობილია, $e = 2,718281828459045\ldots$ იგივე (14) ფორმულის გამოყენებით დამტკიცდება, რომ e ირაციონალურია.

3). გამოვთვალოთ $\frac{1}{\sqrt[8]{272^7}}$. ვისარგებლოთ (12) ფორმულით, $\alpha = -\frac{7}{8}$.

$$\frac{1}{\sqrt[8]{272^7}} = (256+16)^{-\frac{7}{8}} = 256^{-\frac{7}{8}}\left(1+\frac{1}{16}\right)^{-\frac{7}{8}} = 2^{-7}\left(1 - \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{2!}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{105}{64}\left(\frac{1}{16}\right)^2 - \frac{105}{6}\cdot\frac{23}{512}\left(\frac{1}{16}\right)^3 + \ldots\right) = \frac{1}{128} - \frac{7}{2^{14}} + \frac{105}{2^{15}} - \ldots .$$

თუ ამ ფორმულაში ავიღებთ პირველ შესაკრებს, მივიღებთ მიახლოებით მნიშვნელობას

$$\frac{1}{\sqrt[8]{272^7}} \approx \frac{1}{128} \approx 0,0078 .$$

შევნიშნოთ, რომ დღემდე ცნობილი მათემატიკური ცხრილები მიღებულია სწორედ (6) - (13) და მათი ანალოგიური ფორმულების გამოყენებით.

ეს ფორმულები გამოიყენება აგრეთვე კომპიუტერულ გამოთვლებში.

მიახლოებითი გამოთვლებისას ერთ-ერთი ძირითადი საკითხია აბსოლუტური ცდომილების დადგენა.

ცნობილია ტეილორის მეორენაირი ფორმულაც.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

სადაც $\qquad 0 < \theta < 1 \qquad (15)$

უკანასკნელ შესაკრებს ჰქვია ნაშთი ლაგრანჟის ფორმით და აღინიშნება $r_n(x)$-ით. (15) ფორმულიდან მიიღება მიახლოებითი ფორმულა

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

გამომდინარე აქედან აბსოლუტური ცდომილება უდრის

$|r_n(x)|$. თუ $f(x)$-ის $n+1$ რიგის წარმოებული მოდულით არ აღემატება M-ს, მაშინ

$$|r_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$r_n(x)$-ის ასეთი შეფასებით, შეიძლება შევაფასოთ ცდომილებანი $\sin x, e^x, (1+x)^\alpha$ ფუნქციების ტეილორის ფორმულების გამოყენებისას მიახლოებით გამოთვლებში.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ტეილორის ფორმულა შეიძლება გამოყენებული იქნეს განუზღვრელობათა გახსნაში.

სავარჯიშოები

1. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+o(x^2),\ \sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2),\ \operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+o(x^{2n}),\ \operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\ e^{\sin x}=$$

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\ e^{\operatorname{tg}x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\cdot$$

$$\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\ 0<\theta<1.$$

2. წარმოადგინეთ მაკლორენის ფორმულით

$$\ln\cos x,\ \ln\frac{\sin x}{x},\ e^{x^2},\ \sin x^2,\ \operatorname{tg}x^2.$$

3. გამოთვალეთ მიახლოებით

$$\sqrt[10]{e},\ e^{-0,03},\ \sin 18^0,\ \cos 9^0,\ \ln 2,\ \sqrt[6]{61^5}.$$

4. წარმოადგინეთ $f(x)=3-4x^2+2x^3-x^5$, $(x-1)$-ის ხარისხების მიხედვით და გამოთვალეთ $f(1{,}04)$, $f(0{,}97)$.

15. ფუნქციის გამოკვლევა

1. ფუნქციის მონოტონურობის ნიშანი

გავიხსენოთ (a, b) ინტერვალზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულების, ზრდადობისა და კლებადობის (მონოტონურობის) განმარტებები, ამ განმარტებათა გეომეტრიული შინაარსი და მაგალითები. შევნიშნოთ, რომ არგუმენტის ნაზრდი Δx შეიძლება იყოს, როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი. თუ $\Delta x>0$, მაშინ $x+\Delta x>x$, ხოლო თუ $\Delta x<0$, მაშინ $x+\Delta x<x$. ახლა დავამტკიცოთ თეორემა, რომლითაც შეიძლება დავადგინოთ განსაზღვრის არეზე მოცემული წარმოებადი ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის არეები.

თეორემა. (a, b) ინტერვალზე განსაზღვრული წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციის ზრდადობისათვის (კლებადობისათვის) აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი წარმოებული იყოს არაუარყოფითი, $f'(x)\ge 0$ ამავე ინტერვალზე (არადადებითი, $f'(x)\le 0$).

თუ მთელს ინტერვალზე $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, მაშინ $f(x)$ მკაცრად ზრდადია (მკაცრად კლებადია) ამავე ინტერვალზე.

აუცილებლობა. ვთქვათ $f(x)$ ზრდადია (a, b) ინტერვალზე. მაშინ ნებისმიერი $x \in (a, b)$-თვის, როცა $\Delta x > 0$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$. ამ შემთხვევაში $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$; როცა $\Delta x < 0$, მაშინ $\Delta y \leq 0$ და $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, რის გამოც $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$;

ანალოგიურად დამტკიცდება თეორემის აუცილებლობა კლებადი ფუნქციისათვის.

საკმარისობა. დავუშვათ $a < x_1 < x_2 < b$, ე.ი. $x_2 - x_1 > 0$, გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ფორმულა ნებისმიერი $[x_1, x_2]$ სეგმენტისათვის (a, b)-დან.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \text{სადაც} \quad x_1 < \xi < x_2.$$

როცა $f'(\xi) \geq 0$, მაშინ $f(x_2) \geq f(x_1)$ ე.ი. $f(x)$ ზრდადია. ანალოგიურად, როცა $f'(\xi) \leq 0$, მაშინ $f(x_2) \leq f(x_1)$ ე.ი. $f(x)$ კლებადია. ამით საკმარისობაც და მაშასადამე თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია. თუ $f'(x) > 0$, მაშინ $f(x)$ მკაცრად ზრდადია, ხოლო თუ $f'(x) < 0$, მაშინ $f(x)$ მკაცრად კლებადია.

განვიხილოთ მაგალითი. დავუშვათ მოცემულია ფუნქცია

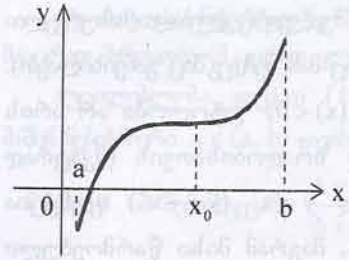
$$y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 2, \quad \text{განსაზღვრული} \quad (-\infty, +\infty)$$

ინტერვალზე. ვიპოვოთ მისი ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები: $y' = x^2 - 6x + 5$. $y' \geq 0$ უტოლობის ამონახსნია $x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$, ე.ი. მოცემული ფუნქცია ცალკეულ

შუალედებზე ზრდადია, ხოლო $[1, 5]$ შუალედზე–კლებადი (სასურველია ამ ფუნქციის დამახსოვრება, რადგანაც მას შემდეგშიც განვიხილავთ).

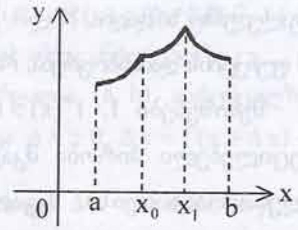
შენიშვნები 1. $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ უტოლობა არ არის აუცილებელი პირობა მკაცრად ზრადობისათვის (მკაცრად კლებადობისათვის). მაგალითად $y = x^3$ $(y = -x^3)$ ფუნქცია მკაცრად ზრდადია (კლებადია), მაგრამ მისი წარმოებული $x = 0$ წერტილში ნულია.

თეორემა მართებულია ისეთი უწყვეტი ფუნქციებისათვისაც, რომლებსაც არა აქვთ წარმოებული სასრული რაოდენობის წერტილებში. მაგალითად, ფუნქციას $y = |x|$, განსაზღვრულს $[-1, 1]$ სეგმენტზე, $x = 0$ წერტილში არ აქვთ წარმოებული. იგი მკაცრად კლებადია $(-1, 0)$ ინტერვალზე და ზრდადია $(0, 1)$ ინტერვალზე. დამტკიცებული თეორემა მართებულია, მაშინაც, როცა სასრული რაოდენობის წერტილებში ფუნქციის წარმოებული ნულია. გამომდინარე აქედან შეიძლება გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა: თუ ფუნქცია უწყვეტია რომელიმე ინტერვალზე და ამ ინტერვალზე გააჩნია დადებითი (უარყოფითი) წარმოებული, შესაძლოა გარდა სასრული რაოდენობის წერტილებისა, რომლებშიც წარმოებული ნულია ან არ არსებობს, მაშინ ეს ფუნქცია მკაცრად ზრდადია (მკაცრად კლებადია) მოცემულ ინტერვალზე. ეს ფაქტი გრაფიკულად შეიძლება ასე გამოვსახოთ.

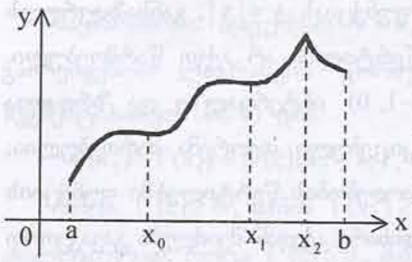


$f'(x_0)=0$

$f(x)$ მკაცრად ზრდადია



$f'(x_0)$ და $f'(x_1)$ არ არსებობს. ფუნქცია მკაცრად ზრდადია (a, x_1) ინტერვალზე და კლებადია (x_1, b) ინტერვალზე.



$f'(x_0)=0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_2)$ არ არსებობს. ფუნქცია მკაცრად ზრდადია (a, x_2) ინტერვალზე და კლებადია (x_2, b) ინტერვალზე.

2. მთელს განსაზღვრის არეზე ფუნქცია შეიძლება არ იყოს მონოტონური - არც ზრდადი და არც კლებადი, მაგრამ ეს არე შეიძლება დავყოთ ისეთ ნაწილებად, თითოეულ რომელთაგანშიც ცალ-ცალკე ფუნქცია იქნება მონოტონური. მაგალითად, ზემოთ განხილული ფუნქცია $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე არაა მონოტონური, მაგრამ ცალკე $(-\infty, 1)$, ცალკე $(5, +\infty)$ ინტერვალზე ზრდადია, ხოლო $(1, 5)$ ინტერვალზე კლებადია (ანალოგიურ მაგალითებზე ადრეც გვქონდა საუბარი).

სავარჯიშო

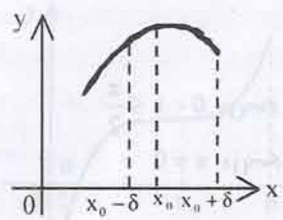
დაამტკიცეთ, რომ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{როცა } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{როცა } x=0\end{cases}$

ფუნქცია წარმოებადია $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე (მაშასადამე უწყვეტიც) და მკაცრად კლებადი.

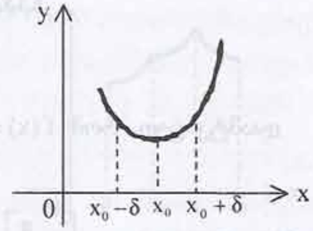
2. ფუნქციის ექსტრემუმი

განმარტება. ვიტყვით, რომ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი (მინიმუმის წერტილი), თუ მოიძებნება ამ წერტილის ისეთი $u(x_0, \delta)$ მიდამო, რომ ყოველი $x=x_0+\Delta x$-თვის ამ მიდამოდან, სრულდება უტოლობა

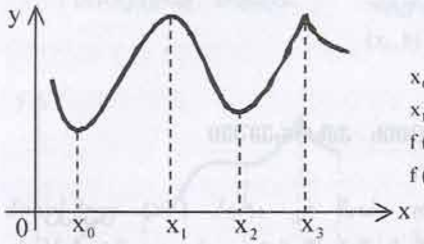
$f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$ $\quad (f(x_0+\Delta x)\ge f(x_0))$. თუ ამ განმარტებაში ტოლობას გამოვრიცხავთ, მაშინ x_0-ს ჰქვია მკაცრი მაქსიმუმის (მკაცრი მინიმუმის) წერტილი. ცხადია, რომ თუ x_0 მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილია, მაშინ $f(x_0)$-ს ეწოდება მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმი (მინიმუმი). ფუნქციის მინიმუმსა და მაქსიმუმს ეწოდება ექსტრემუმი. ექსტრემუმობა ფუნქციის ლოკალური თვისებაა, რაც იმას ნიშნავს, რომ მას შეიძლება ჰქონდეს რამდენიმე ექსტრემუმი-მინიმუმებიც და მაქსიმუმებიც. მოვიშველოთ ნახაზი.



x_0 მაქსიმუმის წერტილია.
$f(x_0)$ მაქსიმუმია.



x_0 მინიმუმის წერტილია.
$f(x_0)$ მინიმუმია.



x_0 და x_2 მინიმუმების წერტილებია.
x_1 და x_3 მაქსიმუმების წერტილებია.
$f(x_0)$ და $f(x_2)$ მინიმუმებია.
$f(x_1)$ და $f(x_3)$ მაქსიმუმებია.

შევნიშნოთ, რომ თუ x_0 მკაცრი ექსტრემუმის წერტილია, მაშინ ფუნქციის ნაზრდი Δy ნიშანს არ იცვლის x_0 წერტილზე გადასვლისას, ანუ Δx-ის ნიშნის შეცვლისას (x_0 წერტილზე გადასვლა ნიშნავს, რომ x იცვლება x_0-ის მარცხნიდან და გადადის მის მარჯვნივ), $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$-ს, როცა $\Delta x<0$ და როცა $\Delta x>0$, აქვს ერთი და იგივე ნიშანი. ეს ფაქტებიც კარგად ჩანს ჩვენს ნახაზებზე.

თეორემა 1 (ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა). თუ x_0 არის ამ წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ ან $f'(x_0)=0$, ან

$f'(x_0)$ არ არსებობს. მართლაც, თუ x_0 ექსტრემუმის წერტილია, მაშინ ამ წერტილზე იგი აღწევს ან უმცირეს, ან უდიდეს მნიშვნელობას რომელიმე $u(x_0, \delta)$ მიდამოში. თუ ფუნქცია ამ წერტილზე წარმოებადიცაა, მაშინ ფერმას თეორემის თანახმად $f'(x_0)=0$.

$f'(x_0)$-ის ნულთან ტოლობა არაა საკმარისი ექსტრემუმის არსებობისათვის. მაგალითად $f(x)=x^3$ ფუნქციისათვის $f'(0)=0$, მაგრამ იგი 0 წერტილზე არ აღწევს ექსტრემუმს.

ფუნქცია შეიძლება აღწევდეს ექსტრემუმს ისეთ x_0 წერტილში, სადაც $f'(x_0)$ არ არსებობს. მაგალითად ასეთი ფუნქციაა $y=|x|$, რომელიც $x=0$ წერტილში აღწევს მინიმუმს და ამ წერტილში მას წარმოებული არ გააჩნია.

ცხადია, რომ თუ x_0 მაქსიმუმის წერტილია $f(x)$-თვის, მაშინ $\exists\delta>0$, რომ იგი $(x_0-\delta, x_0)$ ინტერვალზე მკაცრად ზრდადია, ხოლო $(x_0, x_0+\delta)$ ინტერვალზე – მკაცრად კლებადი. პირიქით, თუ x_0 მინიმუმის წერტილია, მაშინ ეს ფუნქცია მკაცრად კლებადია $(x_0-\delta, x_0)$ ინტერვალზე, ხოლო $(x_0, x_0+\delta)$ ინტერვალზე – მკაცრად ზრდადი. ეს უკანასკნელი პირობები არის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები, რომლებიც ფუნქციის წარმოებულის საშუალებით შეიძლება ჩამოყალიბდეს თეორემის სახით.

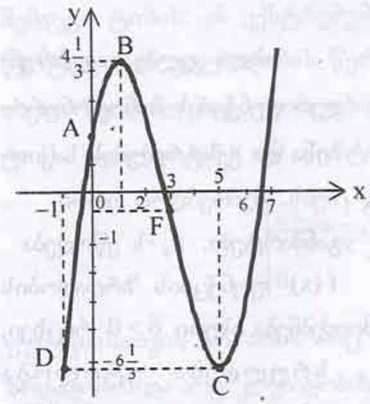
თეორემა 2 (ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობების შესახებ). თუ $f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილზე, წარმოებადია ამ წერტილის მიდამოში, შესაძლოა გარდა ამავე

წერტილისა, წარმოებული ნიშანს იცვლის ამ წერტილზე გავლისას დადებითიდან უარყოფითზე, მაშინ x_0 არის მაქსიმუმის წერტილი, ხოლო თუ ამ წერტილზე გავლისას წარმოებული ნიშანს იცვლის უარყოფითიდან დადებითზე, მაშინ ეს წერტილი მინიმუმის წერტილია.

ამ თეორემის მართებულობა ცხადია, რადგან თუ $f'(x)$ ნიშანს იცვლის დადებითიდან უარყოფითზე ამ წერტილზე გავლისას, მაშინ მოიძებნება ისეთი $(x_0-\delta,\ x_0)$ მიდამო, რომელშიც მოცემული ფუნქცია მკაცრად ზრდადია, ხოლო $(x_0,\ x_0+\delta)$ მიდამოზე – მკაცრად კლებადი ე.ი. x_0 მაქსიმუმის წერტილია, ანალოგიურად დამტკიცდება თეორემა მინიმუმის შემთხვევაში. განვიხილოთ „ჩვენი“ მაგალითი $y=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+2$. რადგანაც ამ ფუნქციის წარმოებული $x=1$ წერტილზე გავლისას ნიშანს იცვლის დადებითიდან უარყოფითზე $(-\infty,1)$ ინტერვალზე წარმოებული დადებითია, ხოლო $(1,5)$ ინტერვალზე უარყოფითი, ამიტომ $x=1$ მაქსიმუმის წერტილია, ახლა უკვე ადვილი მისახვედრია, რომ $x=5$ არის მინიმუმის წერტილი.

$$Y_{max}=\frac{1}{3}-3+5+2=4\frac{1}{3};\ Y_{min}=\frac{1}{3}\cdot 125-3\cdot 25+25+2=-6\frac{1}{3}.$$

ჩვენ ეს ფუნქცია უკვე განვიხილეთ მონოტონურობაზე და ექსტრემუმზე, ამავე დროს ვიცით, რომ იგი უწყვეტია ყველგან და წარმოებადიც. ამ მონაცემებით შეიძლება გავაკეთოთ მისი გრაფიკის მონახაზი. ამისათვის დავაფიქსიროთ ის, რომ $B\left(1;4\frac{1}{3}\right)$ და $C\left(5;-6\frac{1}{3}\right)$ მოცემული ფუნქციის გრაფიკის წერტილებია.

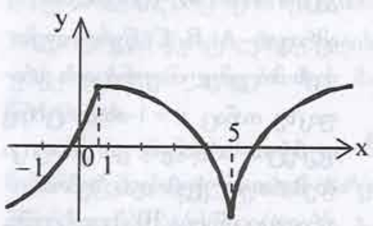


B და C წერტილებზე გავლებული მხებები OX ღერძის პარალელურია.

ცხადია რომ გრაფიკი OY ღერძს კვეთს $A(0,2)$ წერტილში. ამრიგად A, B, C წერტილები ძევს მოცემული ფუნქციის გრაფიკზე, თანაც $x=1$-ის მარცხნივ ფუნქცია ზრდადია, ე.ი. გრაფიკი მიემართება ქვემოდან ზემოთ. გრაფიკი იწყება III მეოთხედში, რადგანაც თუ დავუშვებთ, რომ $x=-1$, მაშინ $y=-6\frac{1}{3}$. ე.ი. გრაფიკი გადის $D\left(-1,-6\frac{1}{3}\right)$ წერტილზე, რომელიც III მეოთხედის წერტილია. ვიპოვოთ სხვა დამატებითი წერტილი. მაგალითად $y(3)=-1$ ე.ი. გრაფიკი გადის $E(3,-1)$ წერტილზეც. გრაფიკს დაახლოებით ექნება ნახაზზე მითითებული ფორმა. როგორც გრაფიკიდან ჩანს მოცემული ფუნქციის ნულებიდან ე.ი. $f(x)=0$ განტოლების პირველი ფესვი მოთავსებულია -1 და 0-ს შორის, მეორე ფესვი მოთავსებულია 2-სა და 3-ს შორის, ხოლო მესამე ფესვი 5-ზე მეტია (აჩვენეთ რომ მესამე ფესვი მოთავსებულია 6-სა და 7-ს შორის სასურველია მკითხველმა ამ წესით იპოვოს ნულების უფრო „უკეთესი“ მიახლოებები).

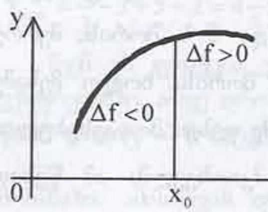
ყურადღება მივაქციოთ გრაფიკის ფორმას. იქნებ მიღებული პირობებით გრაფიკს აქვს ამ ნახაზზე მითითებული

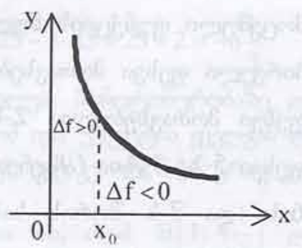
ფორმა (იხ. გვ. 285).



ახლა კვლავ დავუბრუნდეთ ფუნქციის მონოტონურობისა და ექსტრემუმის საკითხებს. შემოვიღოთ ერთი განმარტება. x_0-ს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზრდადობის (კლებადობის) წერტილი, თუ მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ როცა $x_0 - \delta < x < x_0$, სრულდება უტოლობა $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, ხოლო როცა $x_0 < x < x_0 + \delta$, მაშინ $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$.

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის წერტილებს ის თვისება აქვთ, რომ ამ წერტილზე გავლისას ფუნქციის ნაზრდი იცვლის ნიშანს „-“ დან „+“-ზე ზრდადობის წერტილში და „+“დან „−“ზე კლებადობის შემთხვევაში. ეს ფაქტი ნახაზზე ასე გამოისახება





არ უნდა ვიფიქროთ, რომ თუ ფუნქცია განსაზღვრულია ინტერვალზე, მაშინ ამ ინტერვალის ყოველი წერტილი არის

შემდეგი ტიპის: ან ექსტრემუმის წერტილი, ან ზრდადობის წერტილი, ან კლებადობის წერტილი. შეიძლება არსებობდეს ისეთი წერტილებიც, რომლებიც არ მიეკუთვნებიან არც ერთ ტიპს. მაგალითად $x = 0$ წერტილი

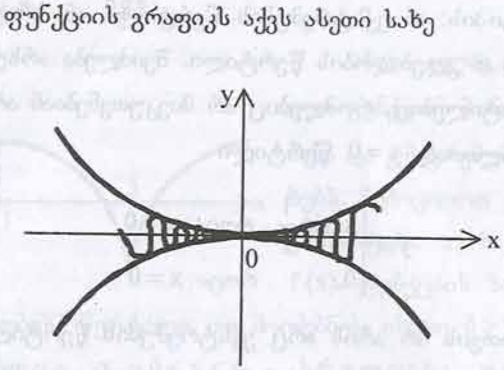
$$y = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \text{როცა } x \neq 0 \\ 0, & \text{როცა } x = 0 \end{cases}$$

ფუნქციისათვის არ არის არც ექსტრემუმის წერტილი, არც ზრდადობის და არც კლებადობის წერტილი. ცხადია, ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალზე, წარმოებადია ყველგან, გარდა $x = 0$ წერტილისა. მართლაც

$$y' = \begin{cases} 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & \text{როცა } x \neq 0 \\ 0, & \text{როცა } x = 0. \end{cases}$$

$x = 0$ წერტილში y' განიცდის II გვარის წყვეტას, რადგანაც $\cos\dfrac{1}{x}$-ს ამ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია. ამავე დროს, ეს შესაკრებია, როცა იგი იცვლება -1 -დან 1-მდე, $x = 0$ წერტილის ნებისმიერ ცალმხრივ არეში (ან 0-ის მარცხნივ, ან 0-ის მარჯვნივ) უსასრულო რიცხვჯერ იცვლის ნიშანს. ამრიგად $x = 0$ წერტილის ნებისმიერ მცირე ცალმხრივ არეებში მოცემული ფუნქციის წარმოებულიც იცვლის ნიშანს.

ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ასეთი სახე



(დავიმახსოვროთ: წერტილს, რომელზედაც ფუნქცია განსაზღვრულია და ამ წერტილზე მისი წარმოებული 0-ია, ან არ არსებობს, ეწოდება ამ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი. ასეთ წერტილებზე ფუნქცია შეიძლება აღწევდეს ექსტრემუმს და შეიძლება არა).

სავარჯიშო

შედარების გზით გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე ფუნქციები $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+5$, $y=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}$.

3. ექსტრემუმის დადგენა მაღალი რიგის წარმოებულებით

თეორემა. თუ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულები x_0 წერტილში აკმაყოფილებენ პირობებს $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ და n ლუწი რიცხვია, მაშინ x_0 ექსტრემუმის წერტილია: მაქსიმუმისა, როცა $f^{(n)}(x_0)<0$ და მინიმუმისა როცა $f^{(n)}(x_0)>0$; ხოლო როცა n კენტია, ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, თუ x_0 ექსტრემუმის წერტილია, მაშინ მოიძებნება ამ წერტილის ისეთი $u(x_0, \delta)$ მიდამო, რომელშიც ფუნქციის ნაზრდი $f(x_0+h)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$ ნიშანს არ იცვლის.

დავწეროთ ტეილორის ფორმულა $f(x)$-თვის x_0 წერტილში და გავითვალისწინოთ თეორემის პირობები. მაშინ ამ ფორმულაში დარჩება უკანასკნელი n-რი შესაკრები და ამის გამო მივიღებთ

$$\Delta f(x_0)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h), \text{ სადაც } 0<\theta<1.$$

ვიგულისხმოთ, რომ ფუნქციას აქვს n-რი რიგის უწყვეტი წარმოებული ე.ი. $f^{(n)}(x)$ უწყვეტია x_0-ის გარკვეულ მიდამოში. ამიტომ $f^{(n)}(x_0+\theta h)$ და $f^{(n)}(x_0)$ ექნება ერთნაირი ნიშანი. გამომდინარე აქედან, $\Delta f(x_0)$-ის ნიშანი ემთხვევა $\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$-ის ნიშანს. ცხადია, თუ n ლუწია, მაშინ $\frac{h^n}{n!}$

დადებითია, რის გამოც $\Delta f(x_0)$-ის და $f^{(n)}(x_0)$ ნიშნები ერთნაირია. ამიტომ ცხადია, რომ როცა $f^{(n)}(x_0)<0$, მაშინ x_0 მაქსიმუმის წერტილია. ხოლო როცა $f^{(n)}x_0>0$, მაშინ x_0 მინიმუმის წერტილია. მარტივად დამტკიცდება, რომ როცა n კენტია, მაშინ $\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)$-ის ნიშანი გაურკვეველია და ამიტომ x_0 წერტილში მოცემულ ფუნქციას ექსტრემუმი არ ექნება. თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ მაგალითი. $y=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+2$. მისი კრიტიკული წერტილებია $x=1$ და $x=5$. ვიპოვოთ მისი მაღალი რიგის, კერძოდ II რიგის წარმოებული. $y''=2x-6$. ცხადია $y''_{x=1}<0$, $y''_{x=5}>0$ ე.ი. $x=1$ მაქსიმუმის წერტილია, $x=5$ მინიმუმის წერტილი. მარტივად მტკიცდება, რომ $y=x^3$, $y=x^5$ ფუნქციებს ექსტრემუმები არ გააჩნია. ახლა დავამტკიცოთ, რომ ფუნქციას $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ აქვს ექსტრემუმი. მართლაც, ვიპოვოთ მისი მაღალი რიგის წარმოებულები.

$$y'=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$

$$y''=12ax^2+6bx+2c$$

$$y'''=24ax+6b$$

$$y^{IV}=24a\neq 0$$

და ამიტომ მოცემულ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი, კერძოდ მაქსიმუმი, როცა $a<0$ და მინიმუმი, როცა $a>0$.

4. ფუნქციის ამოზნექილობა. ჩაზნექილობა და გადაღუნვის წერტილები

ვთქვათ, $f(x)$ განსაზღვრულია (a, b) ინტრვალზე და $a<x_1<x_2<b$. ავიღოთ ამ ფუნქციის გრაფიკზე ორი წერტილი $A(x_1, f(x_1))$ და $B(x_2, f(x_2))$. ამ წერტილებზე გავლებული წრფის განტოლება ასეთია

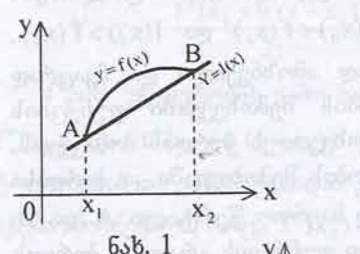
$$\frac{Y-y_1}{f(x_2)-f(x_1)}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

საიდანაც $$Y=\frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}\equiv l(x),$$

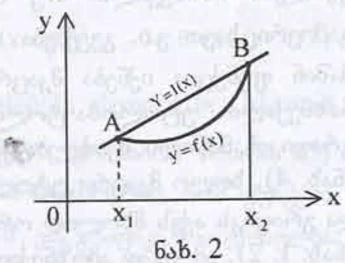
სადაც x, Y არის წრფის მიმდინარე წერტილის კოორდინატები, (x, y) კი ფუნქციის მიმდინარე წერტილია. ცხადია, რომ

$$l(x_1)=Y_{x=x_1}=f(x_1), \qquad l(x_2)=Y_{x=x_2}=f(x_2).$$

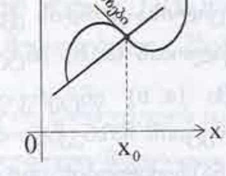
ყოველივე ეს გრაფიკულად ასე გამოისახება



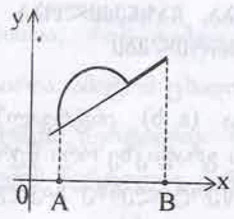
ნახ. 1



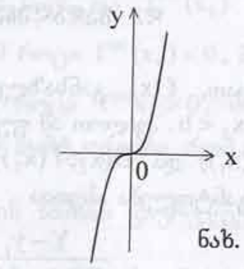
ნახ. 2



ნახ. 3



ნახ. 4



ნახ. 5

განმარტება. $f(x)$ ფუნქციას, განსაზღვრულს (a, b) ინტრვალზე, ეწოდება ამოზნექილი, თუ ყოველი x_1 და x_2-თვის $a < x_1 < x_2 < b$ და ყოველი $x_0 \in (x_1, x_2)$ სრულდება უტოლობა $l(x_0) \le f(x_0)$, ანუ $Y \le y$ (ნახ. 1), თუ იმავე პირობებში $l(x_0) \ge f(x_0)$, ანუ $Y \ge y$ (ნახ. 2), მაშინ ფუნქციას ეწოდება ჩაზნექილი. თუ ამ უტოლობებში ტოლობებს გამოვრიცხავთ ე.ი. გვექნება $l(x_0) < f(x_0)$ და $l(x_0) > f(x_0)$, მაშინ ფუნქცია იქნება მკაცრად ამოზნექილი და მკაცრად ჩაზნექილი. უტოლობა-ტოლობის შემთხვევაში ფუნქციის გრაფიკის ნაწილი შეიძლება ემთხვეოდეს ქორდის მონაკვეთს, (ნახ. 4), ხოლო მკაცრი უტოლობის შემთხვევაში კი ქორდასა და გრაფიკს აქვს მხოლოდ ორი საერთო წერტილი A და B (ნახ. 1, 2), ამრიგად ამოზნექილი ფუნქციის გრაფიკი ქორდის ზემოთაა, ხოლო ჩაზნექილისა-ქორდის ქვემოთ.

ფუნქციის ამოზნექილობას (a, b) ინტერვალზე შეესაბამება ნახ. 1. ამ შემთხვევაში (a, b) ინტერვალს ამოზნექილობის ინტერვალი ჰქვია; ფუნქციის ჩაზნექილობას შეესაბამება ნახ. 2, (a, b) ინტერვალს ჩაზნექილობის ინტერვალი ჰქვია.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის საკმარისი პირობების შესახებ.

თეორემა. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და ორჯერ წარმოებადი (a, b) ინტერვალზე, მაშინ იგი ამ ინტერვალზე ამოზნექილია, როცა $f''(x) < 0$ და ჩაზნექილია, როცა $f''(x) > 0$.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $f(x)$ ამოზნექილია, მაშინ $-f(x)$ იქნება ჩაზნექილი და პირიქით.

თეორემის დამტკიცება. დავწეროთ ტეილორის ფორმულა $f(x)$ ფუნქციისათვის. შევჩერდეთ II რიგის წარმოებულზე.

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2. \quad (1)$$

$(x_0, f(x_0))$ წერტილზე მხების განტოლება იქნება

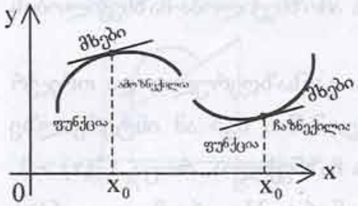
$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2)$$

მე-(2) ტოლობას გამოვაკლოთ (1), მივიღებთ

$$Y - y = -\frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2 \qquad 0 < \theta < 1. \quad (3)$$

f''-ის უწყვეტობის გამო იარსებებს ისეთი $U(x_0, \delta)$, რომ $f''(x_0)$ და $f''(x_0 + \theta(x - x_0))$ ექნება ერთნაირი ნიშანი. (3) ტოლობიდან და განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია იქნება ამოზნექილი, როცა $f''(x_0) < 0$, ე.ი. გრაფიკი მოთავსებულია მხების ქვემოთ, ხოლო როცა $f''(x_0) > 0$, მაშინ ფუნქცია ჩაზნექილია, გრაფიკი მოთავსებულია მხების ზემოთ. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ რომ მეორე წარმოებულის ნიშანმუდმივობის პირობა საკმარისია და არა აუცილებელი. მაგალითად $y = x^4$ მკაცრად

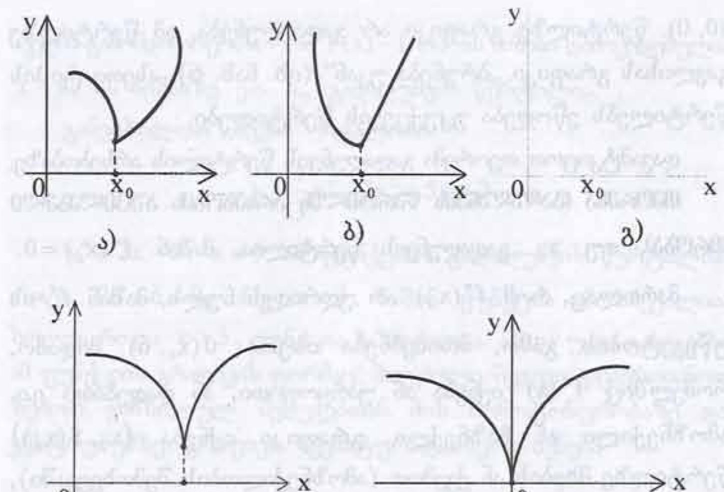


ჩაზნექილია $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე, მაგრამ მისი II წარმოებული $y'' = 12x^2$ ნული ხდება $x = 0$ წერტილში.

განმარტება. ვთქვათ $f(x)$ წარმოებადია x_0 წერტილზე და $Y = L(x)$ არის ამ ფუნქციის გრაფიკის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება. თუ $f(x) - L(x)$ სხვაობა ნიშანს იცვლის x_0 წერტილზე გავლისას, მაშინ x_0-ს ეწოდება მოცემული ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის გრაფიკი $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე გავლებული მხების ერთ მხარეს ამოზნექილია, ხოლო მეორე მხარეს ჩაზნექილი (იხ. ნახ. 3). თუ x_0 ფუნქციის გადაღუნვის წერტილია, მაშინ $(x_0, f(x_0))$ წერტილს ჰქვია ამ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი.

მაგალითად $f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x$; როცა $x < 0$, მაშინ $f''(x) < 0$, ე.ი. $(-\infty; 0)$ ინტერვალზე ეს ფუნქცია ამოზნექილია; ხოლო როცა $x > 0$, მაშინ $f''(x) > 0$. ე.ი. $(0, +\infty)$ ინტერვალზე ფუნქცია ჩაზნექილია (იხ. ნახ. 5). 0-მისი გადაღუნვის წერტილია (ox ღერძი ამ ფუნქციის მხებია, გავლებული გრაფიკის (0, 0) წერტილზე).

შევნიშნოთ, რომ შეიძლება ფუნქციის გრაფიკის წერტილის ერთ მხარეს ეს ფუნქცია ამოზნექილი იყოს, მეორე მხარეს - ჩაზნექილი, ან ორივე მხარეს ამოზნექილი, ან ორივე მხარეს ჩაზნექილი, მაგრამ ეს წერტილი არ იყოს გადაღუნვის წერტილი. მივმართოთ ნახაზებს ა), ბ), გ), დ).



დ)

ნახ. 6

ამ ნახაზების მიხედვით x_0 არცერთ შემთხვევაში არ არის გადაღუნვის წერტილი. განვიხილოთ მაგალითი. $y = \sqrt[3]{x^2}$,

$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$. ცხადია ყოველ $x \neq 0$ წერტილში $y'' < 0$, ე.ი. ფუნქცია მკაცრად ამოზნექილია, როგორც $(-\infty, 0)$ ინტერვალზე, ისე $(0, +\infty)$ ინტერვალზე; ყოველ x-თვის $f(x) > f(0)$. $x = 0$ წერტილში არსებობს ამ ფუნქციის ვერტიკალური მხები oy ღერძი, რომლის განტოლებაა $x = 0$, ე.ი. ამ მხების განტოლება არ იწერება $Y = L(x)$ სახით, გამომდინარე აქედან $x = 0$ წერტილი არაა გადაღუნვის წერტილი,

(0, 0) წერტილზე გრაფიკი არ გადაიღუნება, ამ წერტილზე გავლისას გრაფიკი „ბრუნება უკან“ (იხ. ნახ. 6). ასეთი ტიპის წერტილებს ეწოდება უკუქცევის წერტილები.

დავამტკიცოთ თეორემა გადაღუნვის წერტილის არსებობაზე.

თეორემა (გადაღუნვის წერტილის არსებობის აუცილებელი პირობა). თუ x_0 გადაღუნვის წერტილია, მაშინ $f''(x_0)=0$.

მართლაც, რომ $f''(x_0)$ არ უდრიდეს ნულს, მაშინ f''-ის უწყვეტობის გამო, მოიძებნება ისეთი $u(x_0,\delta)$ მიდამო, რომელშიც $f''(x)$ იქნება ან უარყოფითი, ან დადებითი ე.ი. ამოზნექილი ან ჩაზნექლი. გრაფიკი იქნება $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე მხების ან ქვემოთ (ამოზნექილობის შემთხვევაში), ან ზემოთ (ჩაზნექილობის შემთხვევაში), ამიტომ x_0 არ იქნება გადაღუნვის წერტილი, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

არსებობს გადაღუნვის წერტილების არსებობის საკმარისი პირობები.

1). თუ ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციის II რიგის წარმოებული ნიშანს იცვლის x_0 წერტილზე გავლისას, მაშინ x_0 გადაღუნვის წერტილია. ამ შემთხვევაში ცხადია, $Y-y$ იცვლის ნიშანს (იხ. ნახ. 3).

2). თუ $f''(x_0)=0$ და $f'''(x_0)\neq 0$, მაშინ x_0 გადაღუნვის წერტილია. მართლაც. თუ ტეილორის ფორმულაში შევჩერდებით III რიგის წარმოებულზე მივიღებთ

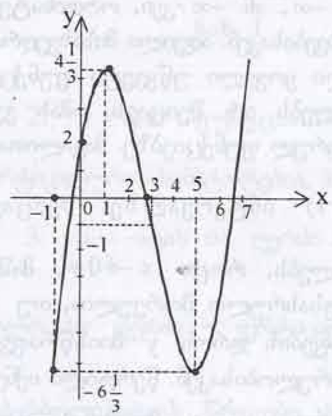
$$f(x)-L(x)=\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\circ\left((x-x_0)^3\right).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)-L(x)$-ის ნიშანი დამოკიდებულია $x-x_0$-ის ნიშანზე. ე.ი. x_0 გადაღუნვის წერტილია.

განვიხილოთ „ჩვენი“ მაგალითი.

$$y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+2.$$

$y''=2x-6$. $x=3$ ამ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილია; როცა $2x-6<0$, ანუ $x<3$, მაშინ ფუნქცია ამოზნექილია; ხოლო, როცა $x>3$, ფუნქცია ჩაზნექილია. ახლა უკვე გასაგებია ამ ფუნქციის გრაფიკის ფორმაც; მიღებული შედეგი გავაერთიანოთ ზემოთ განხილულ შედეგებთან მის მონოტონურობაზე და ექსტრემუმზე. გრაფიკი სქემატურად ასეთი იქნება



$f(3)=-1$

$x=3$ გადაღუნვის წერტილია.

ამით $y=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+2$ ფუნქციის გრაფიკის აგება დასრულებულია.

ახლა უკვე გასაგებია, თუ რატომ არ აქვს მოცემული ფუნქციის გრაფიკს 274-ე გვერდზე მითითებული ფორმა.

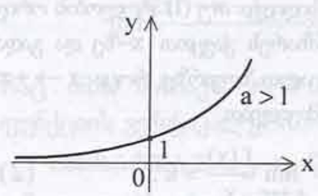
5. ფუნქციის ასიმპტოტები

ვიტყვით, რომ $M(x, y)$ წერტილი $y = f(x)$ ფუნქციის უსასრულო შორეული წერტილია, თუ მისი კოორდინატებიდან ერთ-ერთი, ან ორივე უსასრულოდ დიდი რიცხვებია ე.ი. ან $x \to +\infty$, ან $x \to -\infty$, ან $y \to +\infty$, ან $y \to -\infty$. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის გრაფიკის შტო მიემართება უსასრულობისაკენ რომელიმე მხარეს. მაგალითად; $y = kx + b$, $y = a^x$, $y = \log_a^x$ ფუნქციები შეიცავენ უსასრულო შორეულ წერტილებს, თუ $k > 0$, $a > 1$ და $x \to +\infty$, მაშინ $y \to +\infty$, ხოლო $y = \sin x$ და $y = \cos x$ ფუნქციები შეიცავენ აგრეთვე უსასრულო შორეულ წერტილებს, როცა მათი აბსცისები მიისწრაფვის $-\infty$, ან $+\infty$-კენ, ორდინატები კი მიისწრაფვიან სასრული რიცხვებისაკენ. ადვილი მისახვედრია, რომ სეგმენტზე განსაზღვრული ყოველი უწყვეტი ფუნქცია უსასრულო შორეულ წერტილებს არ შეიცავს, ამას ვერ ვიტყვით ინტერვალზე განსაზღვრულ ფუნქციებზე. მაგალითად, $y = \frac{1}{x}$, განსაზღვრული $(0, 1)$ ინტერვალზე, შეიცავს უსასრულო შორეულ წერტილებს, როცა $x \to 0+$, მაშინ $y \to +\infty$. ამრიგად, წერტილი უსასრულო შორეულია, თუ x-ის უსასრულობისაკენ მისწრაფების დროს y მიისწრაფვის სასრული რიცხვისაკენ, ან უსასრულობისაკენ. წერტილი იქნება უსასრულო შორეული მაშინაც, როცა $x \to x_0$, ხოლო $y \to +\infty$, ან $-\infty$-კენ.

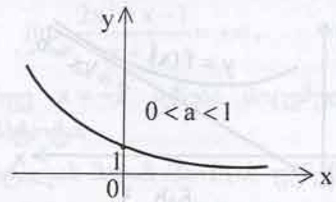
განმარტება 1. ვთქვათ მოცემულია $y = f(x)$, რომლის გრაფიკის (წირის) შტო მიემართება უსასრულობისაკენ რომელიმე მხარეს. თუ მანძილი წირის უსასრულო შორეული

წერტილიდან (წერტილიდან, რომელიც მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ) რომელიმე განსაზღვრულ წრფემდე მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ ასეთ წრფეს ეწოდება მოცემული წირის ასიმპტოტი.

მაგალითები 1. $y = a^x$ ფუნქციისათვის $y = 0$ წრფე (ox ღერძი) ჰორიზონტალური ასიმპტოტია (იხ. ნახ. 1 და 2).



ნახ. 1



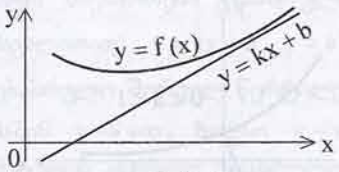
ნახ. 2

2. $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციისათვის წრფეები $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ვერტიკალური ასიმპტოტებია, $k \in Z$.

3. $y = \frac{1}{x}$-თვის ox ღერძი ჰორიზონტალური ასიმპტოტია, ხოლო oy ღერძი – ვერტიკალური ასიმპტოტი. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ჰიპერბოლისათვის წრფეები $y = \pm\frac{b}{a}x$ არიან ასიმპტოტები, რომლებიც არ არიან არც ჰორიზონტალური და არც ვერტიკალური ასიმპტოტები, მათ დახრილი ასიმპტოტები ჰქვია (მკითხველისათვის მიგვინდვია $y = \operatorname{arc\,tg} x$ და $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ ფუნქციების ასიმპტოტების დადგენა).

ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი (ფუნქციის ასიმპტოტი) მიუთითებს იმაზე, რომ როცა $x \to +\infty$, ან $x \to -\infty$ ფუნქციის ყოფაქცევა „თითქმის“ ისეთივეა, როგორც ასიმპტოტისა. გრაფიკულად ეს ფაქტი შეიძლება ნახ. 3-ით გამოვსახოთ; ამრიგად როცა $x \to +\infty$,

$$f(x) = kx + b + \alpha, \qquad (1)$$



ნახ. 3

სადაც α უსასრულოდ მცირე სიდიდეა. თუ (1) ტოლობის ორივე მხარეს გავყოთ x-ზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა $x \to +\infty$, მივიღებთ

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \qquad (2)$$

როცა k უკვე ვიცით, მაშინ იმავე (1) ფორმულიდან b ასე გამოითვლება

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right). \qquad (3)$$

ამრიგად, თუ $y = f(x)$ ფუნქციას გააჩნია ასიმპტოტი $y = kx + b$, მაშინ k და b გამოითვლებიან (2) და (3) ფორმულებით. პირიქით. თუ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (kx + b) \right) = 0$, მაშინ $y = kx + b$ წრფე ასიმპტოტია. ასეთ ასიმპტოტს დახრილი ასიმპტოტი ჰქვია.

განვიხილოთ მაგალითი.

$y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x + 3}$. (2) და (3) ფორმულების გამოყენებით

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 3x} = 2,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{x + 3} - 2x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x - 1}{x + 3} = -5.$$

ამრიგად, მოცემულ ფუნქციას გააჩნია დახრილი ასიმპტოტი და მისი განტოლებაა

$$y = 2x - 5.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\lim_{3-0} \frac{2x^2 + x - 1}{x + 3} = -\infty, \quad \lim_{x \to -3+0} \frac{2x^2 + x - 1}{x + 3} = +\infty,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ წრფე $x = -3$ იქნება მოცემული ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

განმარტება 2. თუ x_0 წერტილის მიდამოში $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ერთ-ერთს მაინც შემდეგი ტოლობებიდან

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$, ან $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, მაშინ წრფეს $x = x_0$ ეწოდება მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი. საზოგადოდ $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია, რაციონალურ ფუნქციას ექნება ვერტიკალური ასიმპტოტი $x = x_0$, თუ $Q(x_0) = 0$, ხოლო $P(x_0) \neq 0$. შევნიშნოთ, რომ მრავალწევრს, გარდა წრფივი ფუნქციისა, ასიმპტოტი არ გააჩნია. ასე, რომ $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4, \ldots,$ $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ ფუნქციებს ასიმპტოტები არ გააჩნია. წრფის ასიმპტოტი თავისთავს ემთხვევა.

6. ფუნქციის გრაფიკის აგება

ერთხელ კიდევ მივუთითოთ იმაზე, თუ რა უნდა ვიცოდეთ, რომ ავაგოთ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. ამისათვის საჭიროა წინასწარ დავადგინოთ ამ ფუნქციისათვის შემდეგი:

1. განსაზღვრის არე, უწყვეტობის არე, წყვეტის წერტილები.

2. I და II რიგის წარმოებულების ნულები (კრიტიკული და გადაღუნვის წერტილები), უკუქცევის წერტილები და ისეთი წერტილები, რომლებშიც ეს წარმოებულები არ არსებობენ, ან უდრის უსასრულობას.

3. მონოტონურობის შუალედები და ექსტრემუმები.

4. ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები.

5. ასიმპტოტები (დახრილი, ჰორიზონტალური და ვერტიკალური).

6. სხვა დამატებითი წერტილები. მაგალითად, ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. თუ ფუნქცია განსაზღვრულია სეგმენტზე, საჭიროა მოიძებნოს ფუნქციის მნიშვნელობები სეგმენტის ბოლოებზე, ხოლო თუ განსაზღვრულია ინტერვალზე, საჭიროა გამოთვლილ იქნას ცალმხრივი ზღვრები ინტერვალის ბოლოებზე. შეიძლება დადგენილ იქნას ლუწ-კენტოვნება, შემოსაზღვრულობა.. თუ ფუნქცია განსაზღვრულია უსასრულო შუალედზე, საჭიროა გამოთვლილ იქნას ამ ფუნქციის ზღვრები, როცა $x \to -\infty$ და $x \to +\infty$.

7. შედგენილ იქნას მიღებული მონაცემების ცხრილი, რომელშიც მითითებული იქნება ზემოთ ჩამოყალიბებული შედეგები და მნიშვნელოვანი წერტილები.

ამის შემდეგ მიღებული მონაცემების მიხედვით ავაგოთ გრაფიკი.

განვიხილოთ მაგალითი.

$$y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 2}.$$

1. განსაზღვრის არეა $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

2. მოცემული ფუნქციის ნულებია 1 და 4, ამიტომ მისი გრაფიკი გადის წერტილებზე $(1, 0), (4, 0)$; ფუნქციის გრაფიკი oy ღერძს კვეთს $(0, 2)$ წერტილში.

3. $y' = \frac{x^2 + 4x - 14}{(x+2)^2}$. ე.ი. ფუნქცია ყველგან წარმოებადია გარდა $x = -2$-სა.

$$y'' = \frac{36}{(x+2)^3}.$$

წარმოებულის ნულებია $x_1 \approx -6{,}2$ და $x_2 \approx 2{,}2$. y'' არ ხდება ნული. (ე.ი. გრაფიკს არ აქვს გადაღუნვის წერტილი). ფუნქცია ზრდადია ცალკე $(-\infty, -6{,}2)$ ცალკე $(2{,}2, +\infty)$ არეებზე კლებადია $(-6{,}2; -2), (-2; 2{,}2)$ არეზე. $x = -6{,}2$ წერტილზე ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს $y_{max} \approx -17{,}4$, ხოლო $x = 2{,}2$ წერტილზე აღწევს მინიმუმს $y_{min} \approx -0{,}5$. ე.ი. მაქსიმუმია $-17{,}4$ და მინიმუმი $-0{,}5$ (მაქსიმუმი ნაკლებია მინიმუმზე, ამიტომ იტყვიან, რომ ექსტრემუმი ლოკალური ხასიათისაა).

4. ფუნქცია ამოზნექილია $(-\infty, -2)$ ინტერვალზე, რადგან ამ ინტერვალზე $y'' < 0$ და ჩაზნექილია $(-2, +\infty)$ ინტერვალზე, რადგანაც ამ ინტერვალზე $y'' > 0$. აქედან გამომდინარე ფუნქციის ცვლილების არეა $(-\infty; -17{,}4) \cup (-0{,}5; +\infty)$.

5. ვიპოვოთ ასიმპტოტი

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+4}{x^2+2x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+4}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x+4}{x+2}=-7;$$

ამრიგად $y=x-7$ დახრილი ასიმპტოტია, ხოლო $x=-2$ – ვერტიკალური ასიმპტოტი. რადგანაც

$$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to2-}\frac{x^2-5x+4}{x^2+2}=-\infty \quad \text{და}$$

$$\lim_{x\to-2-}\frac{x^2-5x+4}{x+2}=+\infty.$$

6. ახლა ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკსა და ასიმპტოტს შორის დამოკიდებულება; აღვნიშნოთ ასიმპტოტის ორდინატი $Y_{ას}$. თუ $y-Y_{ას}>0$, მაშინ შესაბამის არეზე ფუნქციის ასიმპტოტი გრაფიკის ქვემოთაა, ხოლო თუ $y-Y_{ას}<0$, მაშინ ფუნქციის ასიმპტოტი გრაფიკის ზემოთაა.

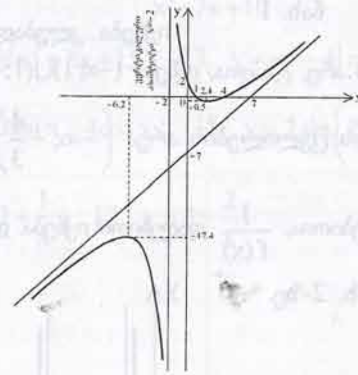
$$y-Y_{ას}=\frac{x^2-5x+4}{x^2+2}-(x-7)=\frac{14}{x+2},\quad y-Y_{ას}>0,$$

როცა $x>-2$ ე.ი.
ფუნქციის გრაფიკი დახრილი ასიმპტოტის ზემოთაა $(-2,+\infty)$ ინტერვალზე, ხოლო $(-\infty,-2)$ ინტერვალზე გრაფიკი ასიმპტოტის ქვემოთაა.

ამ მონაცემებით შევადგინოთ ცხრილი.

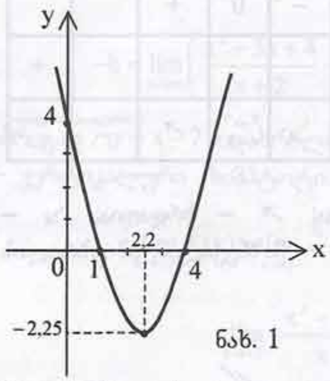
x	$D(y)=(-\infty;-2)\cup\cup(-2;+\infty)$	$(-\infty;-6.2)$	-6.2	$(-6.2;-2)$	$(-2;2.2)$	2.2	$(2.2;+\infty)$	$(-\infty;-2)$	$(-2;+\infty)$
y'		+	0	–	–	0	+		
y''								–	+
y	$E(y)=(-\infty;-17.4)\cup\cup(-0.5;+\infty)$	↗	$y_{max}==-17.4$	↘	↘	$y_{min}==-0.5$	↗	ამოზნექილია ∩	ჩაზნექილია ∪

(სიმბოლოების დანიშნულება: ↗ – ზრდადია, ↘ – კლებადია, ∩ – ამოზნექილია, ∪ – ჩაზნექილია. ამ ცხრილის გამოყენებით ავაგოთ გრაფიკი



შენიშვნა. რიგ შემთხვევებში შეიძლება ფუნქციის გრაფიკის აგება წარმოებულის გამოყენების გარეშე ელემენტარული მეთოდებით ე.წ. გრაფიკების დეფორმაციის, ან სხვა უფრო მარტივი მეთოდებით. ასე მაგალითად, თუ ვიცით $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, მაშინ მარტივად აიგება $y=a+bf(cx+d)$, $\frac{1}{f(x)}$, $\sqrt{f(x)}$, $f(|x|)$, $|f(x)|$

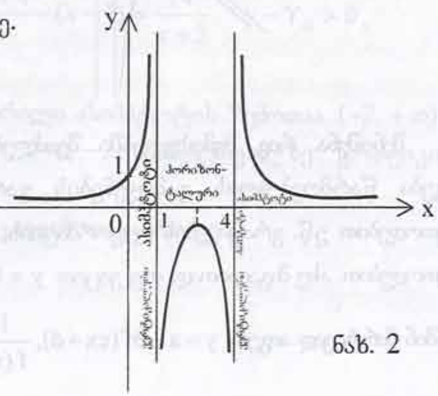
ფუნქციების გრაფიკები. მაგალითად, $y = x^2 - 5x + 4$ ფუნქციის გრაფიკი პარაბოლაა (იხ. ნახ. 1).



ნახ. 1

ამ გრაფიკისაგან ადვილად მიიღება $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 4}$ ფუნქციის გრაფიკი, გავითვალისწინოთ, რომ ამ ფუნქციისათვის $x = 1$ და $x = 4$ არის ვერტიკალური ასიმპტოტები; იქ, სადაც $f(x)$ ზრდადია, $\frac{1}{f(x)}$ იქნება კლებადი და პირიქით. მისი განსაზღვრის არე, ცხადია, იქნება $(-\infty;1)\cup(1;4)\cup(4;+\infty)$.

ამ ფუნქციის ცვლილების არეა $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)\cup(0; +\infty)$. იქ, სადაც $f(x)$ დადებითია, $\frac{1}{f(x)}$ დადებითი იქნება. და ა.შ. გრაფიკი გამოსახულია ნახ. 2-ზე.



ნახ. 2

სავარჯიშოები

გამოიკვლიეთ ფუნქციები

1. $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$; 2. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 3. $y = \frac{1 - \ln x}{x}$;

4. $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$; 5. $y = x^3 - 6x^2$; 6. $y = 3x^2 - x^3$;

7. $y = \frac{x^3 - 3x - 2}{x + 1}$; 8. $y = x^2 \ln x$; 9. $y = \sqrt[3]{x}$;

10. $y = x^x$; 11. $y = \frac{1}{x^2 - 7x + 10}$;

12. $y = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$; 13. $y = x^2 - 4|x| + 3$;

14. $y = 3\sin x - 4\cos x$; 15. $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$;

16. $y = 2 + \frac{1}{x}$; 17. $y = 3 - \frac{2}{x}$.

თავი VII

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

1. პირველადი ფუნქცია და მისი თვისებები

$F(x)$ ფუნქციას, განსაზღვრულს $<a, b>$ შუალედზე, ეწოდება $f(x)$-ის პირველადი, თუ $F(x)$-ის წარმოებული უდრის $f(x)$-ს ამავე შუალედზე,

ე.ი.
$$F'(x) = f(x). \qquad (1)$$

მაგალითად, $\sin x$ არის პირველადი $\cos x$-ის, რადგანაც $(\sin x)' = \cos x$.

რომელი ფუნქციაა პირველადი $\sin x$-ის?

ე.ი. რა უნდა გავაწარმოოთ, რომ მივიღოთ $\sin x$?

პასუხი. $-\cos x$, რადგანაც $(-\cos x)' = \sin x$, $\sin x$-ის პირვალადებია აგრეთვე $-\cos x + 7, -\cos x - \sqrt[3]{5}, -\cos x + \cos 10$, $-\cos x + c$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია. შეიძლება შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

$F(x)$ – პირველადი	$f(x) = F'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos x + c,\ c \in R$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x - 5$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
?	$5^x \ln 5$
$5^x / \ln 5$	?
?	$7x^6$
$\frac{x^9}{9} + c$	?
?	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 3$	$\sqrt{x}$
$\ln x + \frac{1}{3}$	?
?	$\ln x$
$\operatorname{arc\,tg} x + c$	$\frac{1}{1 + x^2}$

დააკვირდით, თუ როგორ მიიღება მარცხენა მხარიდან მარჯვენა და პირიქით. სასურველია, მკითხველმა ამ ცხრილს დაუმატოს ახალი მაგალითები და კითხვითი ნიშნების ადგილზე ჩაწეროს შესაბამისი ფუნქციები.

ზოგჯერ პირველად ფუნქციას პირველყოფილსაც უწოდებენ.

ახლა განვიხილოთ პირველადი ფუნქციის თვისებები.

1. თუ $F(x)$ პირველადია $f(x)$-ის, ე.ი. $F'(x) = f(x)$, მაშინ $F(x) + c$ იქნება აგრეთვე $f(x)$-ის პირველადი, c ნებისმიერი მუდმივია. მართლაც.

$$(F(x) + c)' = F'(x) + c' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

2. ერთი და იმავე ფუნქციის პირველადები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მუდმივით.

თანახმად პირველი თვისებისა, თუ ფუნქციას გააჩნია პირველადი, მაშინ მას გააჩნია პირველადების უსასრულო სიმრავლე, ე.ი. თუ $F(x)$ პირველადია $f(x)$-ის, მაშინ $F(x) + c$ იქნება აგრეთვე პირველადები. თუ c-ს მივცემთ ნებისმიერ მნიშვნელობებს $-\infty$-დან $+\infty$-მდე, ამით მივიღებთ უამრავი პირველადების სიმრავლეს. დავამტკიცოთ მეორე თვისება.

ვთქვათ, $f(x)$-ის პირველადებია $F(x)$ და $\varphi(x)$. ე.ი. $F'(x) = f(x)$ და $\varphi'(x) = f(x)$. აქედან გამომდინარეობს
$F'(x) - \varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow (F(x) - \varphi(x))' = 0 \Rightarrow F(x) - \varphi(x) = c$. რ.დ.გ.

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ პირველადები შემდეგი ფუნქციებისა

$$x^7, \quad 5x^3+9x-3, \quad \cos 3x, \quad \sin kx, \quad \ell nx+2,$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}-x+5, \quad \frac{1}{\sin^2 4x}, \quad 5x.$$

2. რომელი ფუნქციების პირველადებია

$$\sin^3 9x, \quad \cos 2x-5, \quad \mathrm{tg}^3 7x-\sqrt{2}, \quad \mathrm{ctg}^4 7-x^4-7x,$$

$$\cos^3 x^2+\sin^4\frac{1}{x}, \quad \sin 8x+\ell n\,\mathrm{tg}\, 6x\ ?$$

2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ცნება

ვთქვათ, $f(x)$-ის პირველადია $F(x)$, მაშინ $f(x)$-ის ყველა პირველადი იქნება $F(x)+c$.

$f(x)$-ის ყველა პირველადების სიმრავლეს $F(x)+c$-ს ეწოდება $f(x)$-ის განუსაზღვრელი ინტეგრალი და აღინიშნება $\int f(x)\,dx$ სიმბოლოთი. იკითხება: განუსაზღვრელი ინტეგრალი ეფ იქს დე იქსიდან, ან, უბრალოდ, ინტეგრალი $f(x)\,dx$-დან.

განმარტების თანახმად

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c \Leftrightarrow (F(x)+c)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x),$$

ანუ
$$d(F(x)+c) = f(x)\,dx.$$

მაგალითად $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$, რადგან $-\cos x + c$-ს წარმოებული არის $\sin x$.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + c, \quad \int \mathrm{tg}\, x\,dx = -\ell n|\cos x| + c,$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ell n|x| + c, \quad \int \ell nx\,dx = x\ell nx - x + c.$$

სავარჯიშოები

1. შეამოწმეთ

ა). $\int (x^5+7x^6-9)\,dx = \frac{1}{6}x^6 + x^7 - 9x + 8$;

ბ). $\int \ell^{\sin x}\cos x\,dx = \ell^{\sin x} - \sqrt{91}$; გ). $\int \frac{dx}{x\ell nx} = \ell n\|\ell n|x|\| + c$;

დ). $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{5}\arcsin^5 x + 3$.

2. ჩასვით ფუნქცია ფრჩხილებში.

ა) $\int (\quad)\,dx = \sin^5\sqrt{x} - 3\mathrm{tg}\, x + c$;

ბ) $\int (\quad)\,dx = \sin^3 x^4 - \cos^2\frac{1}{x^3} + 3$.

3. განუსაზღვრელი ინტეგრალების ცხრილი

1. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\ \alpha\neq-1,\ x\in R_0^{+}$ $\quad \int x^{\alpha}dx=\begin{cases}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c, \text{ როცა } \alpha\neq-1\\ \ell n|x|+c, \text{ როცა } \alpha=-1\end{cases}$

2. $\int\frac{1}{x}dx=\ell n|x|+c,\ x\in R-\{0\}$; 3. $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ell na}+c,\ x\in R$;

4. $\int e^{x}dx=e^{x}+c,\ x\in R$; 5. $\int \sin x\,dx=-\cos x+c,\ x\in R$;

6. $\int \cos x dx=\sin x+c,\ x\in R$;

7. $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x+c,\ x\in R-\left\{\frac{\pi}{2}\pi k,\ k\in z\right\}$;

8. $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg}x+c,\ x\in R-\{\pi k,\ k\in z\}$;

9. $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c,\ x\in(-1;1)$;

10. $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x+c,\ x\in R$;

11. $\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ell n\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c,\ x\in R-\{-1,1\}$;

12. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx=\ell n\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+c,\ x\in R,\ k\neq0$;

13. $\int \operatorname{tg}x dx=-\ell n|\cos x|+c,\ x\in R-\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in z\right\}$;

14. $\int \operatorname{ctg}x dx=\ell n|\sin x|+c,\ x\in R-\{\pi k,\ k\in z\}$;

15. $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+c,\ x\in(-a,\ a)$;

16. $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c,\ x\in R,\ a\neq0$;

17. $\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ell n\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c,\ x\in R-\{-a,a\},\ a\neq0$;

18. $\int\frac{1}{\sin x}dx=\ell n\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c,\ x\in R-\{\pi k,\ k\in z\}$;

19. $\int\frac{1}{\cos x}dx=\ell n\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+c,\ x\in R-\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in z\right\}$;

20. $\int \ell nx dx=x\ell nx-x+c,\ x>0,\ x\neq1$;

21. $\int \operatorname{sh}x dx=\operatorname{ch}x+c,\ x\in R$;

22. $\int \operatorname{ch}x dx=\operatorname{sh}x+c,\ x\in R$;

23. $\int\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}dx=\operatorname{th}x+c,\ x\in R$;

24. $\int\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}dx=-\operatorname{cth}x+c,\ x\in R-\{0\}$;

25. $\int \operatorname{th}x dx=\ell n\operatorname{ch}x+c,\ x\in R$;

26. $\int \operatorname{cth}x dx=\ell n|\operatorname{ch}x|+c,\ x\in R-\{0\}$;

27. $\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ell n\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c,\ x\in R$;

28. $\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+c,\ x\in[-1,1]$;

29. $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ell n\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+c,\ x\in R,\ a\neq 0$;

30. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c,\ x\in[-a,\ a]$;

31. $\int \arcsin x dx = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c,\ x\in[-1,\ 1]$;

32. $\int \arccos x dx = x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c,\ x\in[-1,\ 1]$;

33. $\int \mathrm{arctg} x dx = x\,\mathrm{arctg} x-\frac{1}{2}\ell n\left(1+x^2\right)+c,\ x\in R$;

34. $\int \mathrm{arcctg} x dx = x\,\mathrm{arcctg} x+\frac{1}{2}\ell n\left(1+x^2\right)+c,\ x\in R$;

35. $\int\frac{\sqrt[\ell]{x^m}\sqrt[n]{x^p}}{\sqrt[q]{x^r}\sqrt[s]{x^t}}dx=\int x^{\frac{m}{\ell}+\frac{p}{n}-\frac{r}{q}-\frac{t}{s}}dx=\int x^{\beta}dx=\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}+c,\ \beta\neq-1,$

სადაც $\ell, m, n, p, q, r, s, t\in Z, \beta=\frac{m}{\ell}+\frac{p}{n}-\frac{r}{q}-\frac{t}{s},\quad x\in R-\{0\}$;

36. $$\int|x|dx=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+c, & \text{როცა } x\geq 0\\ & x\in R\\ -\frac{x^2}{2}+c, & \text{როცა } x<0.\end{cases}$$

მკითხველს ვანდობთ ამ ცხრილის სისწორის შემოწმებას და ტოლობის ორივე ნაწილისათვის საერთო განსაზღვრის არის დადგენას.

შენიშვნები 1. როგორც განმარტებიდან ჩანს, ფუნქციიდან განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლა, ანუ ინტეგრება გაწარმოების შებრუნებული ამოცანაა.

2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლას ინტეგრება ჰქვია.

3. არ არსებობს განუსაზღვრელი ინტაგრალების გამოთვლის ერთიანი ხერხი. ყოველ ინტეგრალს უნდა მივუდგეთ ინდივიდუალურად. ამ საკითხებს უფრო დაწვრილებით ქვემოთ განვიხილავთ.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

ცხრილის გამოყენებით გამოთვალეთ განუსაზღვრელი ინტაგრალები

$$\int\frac{1}{x^2}dx,\ \int\frac{1}{x^{10}}dx,\ \int\sqrt[7]{x^6}\,dx,\ \int\frac{x^3\sqrt[11]{x^{10}}}{\sqrt[17]{x^{14}}}dx,\ \int\frac{\sqrt[12]{x^5}\,\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[84]{x^{43}}}dx,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[20]{x^{19}}},\ \int 7^x dx,\ \int\frac{dx}{9-x^2},\ \int\frac{dx}{9+x^2},\ \int\frac{dx}{5-x^2},\ \int\frac{dx}{7+x^2},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}},\ \int(\sin^2x+\cos^2x)dx,\ \int \mathrm{tg}\,x\cos x\,dx,\ \int\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\cos x}dx,$$

$$\int\frac{dx}{96x^3},\ \int\frac{dx}{37\sqrt{x}}.$$

4. განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებები

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$. დამტკიცება.

ვთქვათ, $f(x)$-ის ყველა პირველადებია $F(x)+c$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $(F(x)+c)'=f(x)$

ე.ი. $$\int f(x)\,dx=F(x)+c.$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა.

თუ ფუნქციები ტოლია, მაშინ მათი წარმოებულებიც ტოლი

იქნება, ე.ი. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+c)' = f(x)$.

თუ განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებული არის ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, მაშინ მისი დიფერენციალი იქნება ინტეგრალქვეშა გამოსახულება. ამრიგად მივიღეთ

2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი თვისებები:

3. სასრული რაოდენობის ფუნქციათა ჯამის ინტეგრალი უდრის შესაკრებთა ინტეგრალების ჯამს.

$$\int (f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx \cdot$$

4. $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

სავარჯიშოები

1. დაამტკიცეთ

$$\int\left(5\cos x + 7\operatorname{tg}x - \frac{2}{4-x^2}\right)dx = 5\sin x - 7\ell n|\cos x| -$$

$$-\frac{1}{2}\ell n\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + c.$$

2. გამოთვალეთ

$$\int\left(\frac{5^x}{\ell n 5} - 5^x \ell n 5 + \frac{3}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{7}{\sqrt{x^2+4}} + 3\right)dx.$$

3. შეამოწმეთ:

$$\int\left(\frac{1}{x\,\ell n^3 x} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x} + 3\right)dx = -\frac{1}{2\,\ell n^2 x} - \frac{9}{8}x\sqrt[3]{x} + 3x + 72,$$

4. $\int x^x(\ell n x + 1)\,dx = x^x + c$.

5. განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლა

1. უშუალო ინტეგრება

ზოგიერთი სახის ინტეგრალის გამოსათვლელად საკმარისია გამოვიყენოთ ინტეგრალის თვისებები, როგორიცაა ჯამის ინტეგრალი უდრის შესაკრებთა ინტეგრალების ჯამს და მუდმივი თანამამრავლი ინტეგრალის ნიშნის გარეთ გატანება.

მაგალითი

$$\int\left(5 + x^7 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{3}{4-x^2} + \frac{5}{9+x^2} - \frac{2}{\sqrt{x^2+3}} - 6\cos x - \frac{3}{\sin^2 x} +\right.$$

$$\left. + 4^x - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} - 9\operatorname{tg}x\right)dx = 5\int dx + \int x^7\,dx - \int x^{\frac{3}{4}}\,dx + 3\int\frac{dx}{4-x^2} +$$

$$+5\int\frac{dx}{9+x^2} - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} - 6\int\cos x\,dx - 3\int\frac{dx}{\sin^2 x} + \int 4^x\,dx -$$

$$-\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} - 9\int\operatorname{tg}x\,dx = 5x + \frac{x^8}{8} - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + \frac{3}{4}\ell n\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} -$$

$$-2\ell n\left|x + \sqrt{x^2+3}\right| - 6\sin x + 3\operatorname{ctg}x + \frac{4^x}{\ell n 4} - \arcsin\frac{x}{5} + 9\ell n|\cos x| + c.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

გამოთვალეთ

1. $\int (x^{10} - 6x^3 + 5\sin x + 7^x - 2)\,dx$.

2. $\int \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{4}{\sqrt{3-x^2}} - \frac{4}{\sqrt{x^2+16}} - \frac{8}{5-x^2} + \frac{6}{5+x^2} - \operatorname{tg} x \right) dx$.

3. $\int \left(\frac{2}{3x-1} + 4^x - \frac{8}{\sqrt{x^2-8}} - x^3 \sqrt[5]{x^2} + \frac{x}{\sqrt[7]{x^3}} \right) dx$.

4. $\int \left(\frac{x^5 \sqrt[20]{x^{11}}}{\sqrt[10]{x^3}} + \frac{2}{x^7} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} + \frac{4\sqrt{x}}{5\sqrt[8]{x^7}} - \frac{3}{x^{12}} + \frac{x^5}{\sqrt[6]{x^5}} - 3\sin x + \right.$

$+ 4\cos x + 7\operatorname{tg} x + 8\operatorname{ctg} x + \frac{9}{49-x^2} - \frac{10}{49+x^2} - \frac{2}{\sqrt{49-x^2}} +$

$\left. + \frac{5}{\sqrt{49+x^2}} + \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} - \frac{12}{\cos x} - \frac{13}{\sin x} + 2 \right) dx$.

2. ინტეგრალის გამოთვლა დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ შეტანით

შევნიშნოთ შემდეგი:

1. ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ინტეგრების ცვლადზე. ე.ი. $\int f(x)\,dx$ და $\int f(t)\,dt$ ერთნაირი ფუნქციებია, პირველში x ცვლადით, მეორეში t-თი.

2. თუ $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, მაშინ $\int f(k(x))\,dk(x) = F(k(x)) + c$, ე.ი. x-ის ნაცვლად ვწერთ $k(x)$.

მაგალითები

1. $\int \cos 7x\, d\,7x = \sin 7x + c$;

2. $\int \cos 7x\, dx = \frac{1}{7}\int \cos 7x\, d\,7x = \frac{1}{7}\sin 7x + c$;

3. $\int \cos 15x\, dx = \frac{1}{15}\int \cos 15x\, d\,15x = \frac{1}{15}\sin 15x + c$;

4. $\int \frac{dx}{\cos^2 9x} = \frac{1}{9}\operatorname{tg} 9x + c$; 5. $\int e^{10x} dx = \frac{1}{10} e^{10x} + c$;

6. $\int e^{\sin x} \cos x\, dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + c$;

7. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = e^{\operatorname{tg} x} + c$;

8. $\int \operatorname{tg} 14x\, dx = \frac{1}{14}\int \operatorname{tg} 14x\, d\,14x = -\frac{1}{14}\ell n|\cos 14x| + c$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

გამოთვალეთ

1. $\int \left(\operatorname{tg} 8x - \frac{5}{\cos^2 6x} + 4\cos 12x - 7^{6x} + \frac{2}{(3x-1)^3} + \frac{1}{(2-5x)^{10}} \right) dx$;

2. $\int \left(e^{\cos x} \sin x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} + \frac{5^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{x\,\ell n^3 x} - 2 \right) dx$;

3. $\int \frac{x^3 dx}{1+x^4}$;   4. $\int \sqrt[10]{\sin^7 x} \cos x \, dx$;   5. $\int \frac{\ell n^5 x}{x} dx$;

6. $\int \frac{\sqrt[15]{\operatorname{arc\,tg}^8 x}}{1+x^2} dx$;   7. $\int \frac{60x^2}{\sqrt{15-8x^3}} dx$;

8. $\int \frac{x^{10} dx}{19\sqrt[4]{3-2x^{11}}}$;   9. $\int \frac{5\,dx}{8\sqrt[20]{1-17x}}$.

ამ წესით ინტეგრალის გამოთვლას ჰქვია ინტეგრალის გამოთვლა დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ შეტანით. ზოგადად ეს წესი ასეც ჩამოყალიბდება.

თუ $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, ე.ი. $(F(x)+c)' = f(x)$, მაშინ

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + c.$$

მართლაც, $(F(\varphi(x))+c)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \equiv f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

ეს წესი ჩასმის ხერხის კერძო შემთხვევაა.

3. განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლა ჩასმის ხერხით

ვთქვათ, $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, ე.ი. $(F(x)+c)' = f(x)$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = d\varphi(t) \equiv \varphi'(t)\,dt$. ამ შემთხვევაში $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \equiv F(\varphi(t)) + c$.

შემოწმება.

$$(F(\varphi(t))+c)' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

მაშინ აქედან ცხადია, რომ

$$d(F(\varphi(t))+c) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = f(x)\,dx.$$ რ.დ.გ.

მაგალითი. გამოვთვალოთ $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x = a\sin t$, მაშინ $dx = d(a\sin t) = a\cos t\,dt$ მივიღებთ

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \sqrt{a^2-(a\sin t)^2}\, a\cos t\,dt = a\int \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}a\cos t\,dt =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t\,dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\,dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t + c\right), \quad \cos t \ge 0.$$

შენიშვნა: აღნიშვნა, ანუ ჩასმა $x = \varphi(t)$ უნდა იყოს ისეთი, რომ მოცემული ინტეგრალი დაყვანილი იქნას უფრო მარტივ ინტეგრალზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში მოცემული ინტეგრალი გართულდება.

სავარჯიშოები

გამოთვალეთ ინტეგრალები

$\int \frac{dx}{5x-3}$, $\int \frac{dx}{ax+b}$, $\int (5x-7)^{10} dx$, $\int (3-100x)^{15} dx$,

$\int \frac{dx}{(6x+5)^2}$, $\int \cos 9x\,dx$, $\int \frac{dx}{(10x+2)^{20}}$, $\int \sin bx\,dx$,

$\int e^{7x} dx$, $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$, $\int \frac{\sqrt[8]{\operatorname{arctg}^5 x}}{1+x^2} dx$, $\int \frac{dx}{x-\ell ns}$.

$\int \frac{\operatorname{tg}^{10} x}{\cos^2 x} dx$, $\int \cos^{17} x \sin x\,dx$, $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$,

3. $\int \frac{x^3dx}{1+x^4}$; 4. $\int \sqrt[10]{\sin^7 x}\cos x\,dx$; 5. $\int \frac{\ell n^5 x}{x}dx$;

6. $\int \frac{\sqrt[15]{\operatorname{arctg}^8 x}}{1+x^2}dx$; 7. $\int \frac{60x^2}{\sqrt{15-8x^3}}dx$;

8. $\int \frac{x^{10}dx}{19\sqrt[4]{3-2x^{11}}}$; 9. $\int \frac{5dx}{8\sqrt[20]{1-17x}}$.

ამ წესით ინტეგრალის გამოთვლას ჰქვია ინტეგრალის გამოთვლა დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ შეტანით. ზოგადად ეს წესი ასეც ჩამოყალიბდება.

თუ $\int f(x)dx = F(x)+c$, ე.ი. $(F(x)+c)' = f(x)$, მაშინ

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x))+c.$$

მართლაც, $(F(\varphi(x))+c)' = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) \equiv f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

ეს წესი ჩასმის ხერხის კერძო შემთხვევაა.

3. განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლა ჩასმის ხერხით

ვთქვათ, $\int f(x)dx = F(x)+c$, ე.ი. $(F(x)+c)' = f(x)$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=\varphi(t) \Rightarrow dx = d\varphi(t) \equiv \varphi'(t)dt$. ამ შემთხვევაში $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \equiv F(\varphi(t))+c$.

შემოწმება.

$$(F(\varphi(t))+c)' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

მაშინ აქედან ცხადია, რომ

$$d(F(\varphi(t))+c) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = f(x)dx.$$ რ.დ.გ.

მაგალითი. გამოვთვალოთ $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x = a\sin t$, მაშინ $dx = d(a\sin t) = a\cos t\,dt$ მივიღებთ

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \sqrt{a^2-(a\sin t)^2}\,a\cos t\,dt = a\int\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}a\cos t dt =$$

$$= a^2\int\cos^2 t\,dt = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int\cos 2t\,dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t + c\right), \quad \cos t \geq 0.$$

შენიშვნა: აღნიშვნა, ანუ ჩასმა $x=\varphi(t)$ უნდა იყოს ისეთი, რომ მოცემული ინტეგრალი დაყვანილი იქნას უფრო მარტივ ინტეგრალზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში მოცემული ინტეგრალი გართულდება.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

გამოთვალეთ ინტეგრალები

$\int\frac{dx}{5x-3}$, $\int\frac{dx}{ax+b}$, $\int(5x-7)^{10}dx$, $\int(3-100x)^{15}dx$,
$\int\frac{dx}{(6x+5)^2}$, $\int\cos 9x\,dx$, $\int\frac{dx}{(10x+2)^{20}}$, $\int\sin bx\,dx$,
$\int e^{7x}dx$, $\int\frac{3^{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}dx$, $\int\frac{\sqrt[8]{\operatorname{arctg}^5 x}}{1+x^2}dx$, $\int\frac{dx}{x-\ell ns}$,
$\int\frac{\operatorname{tg}^{10}x}{\cos^2 x}dx$, $\int\cos^{17}x\sin x\,dx$, $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$,

$$\int \sqrt[17]{(4-8x)^3}\,dx,\quad \int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x},\quad \int \frac{\ell n^k x\,dx}{x},$$

$$\int \frac{xdx}{1+x^4},\quad \int \frac{x^3dx}{1-x^8},\quad \int \frac{\ell^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx,\quad \int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}dx,\quad \int \frac{dx}{\sin 40},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 7 - x},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{4+\cos 1}},\quad \int \frac{15\ell n 3}{17x^2 \sin 14}dx.$$

4. ნაწილობითი ინტეგრება

დავამტკიცოთ, რომ

$$\int udv = uv - \int vdu\,. \qquad (1)$$

გავიხსენოთ ნამრავლის დიფერენციალის ფორმულა

$$d(uv) = vdu + udv\,. \qquad (2)$$

მოვახდინოთ ამ ტოლობის ინტეგრება

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv\,,$$

საიდანაც $\quad uv = \int vdu + \int udv\,.$

აქედან მივიღებთ

$$\int udv = uv - \int vdu\,.$ რ.დ.გ.$$

მაგალითი.

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c.$$

აღვნიშნოთ $x = u$, $\cos x\,dx = dv$, მაშინ $du = dx$, $\int \cos x\,dx = \int dv$, $\sin x = v$

შემოწმება. $(x\sin x + \cos x + c)' = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$

შენიშვნა. $\int d(uv) = uv + c$. ჩვენ ეს მუდმივი აღარ დავწერეთ, რადგან ისინი შევუერთეთ დანარჩენ ინტეგრალებს.

ამ ფორმულის გამოყენებისას საჭიროა მოხერხებული აღნიშვნების შემოღება, წინააღმდეგ შემთხვევაში ინტეგრალი გართულდება. ზემოთ განხილულ მაგალითში აღნიშვნები $\cos x = u$, $xdx = dv$ ინტეგრალს გაართულებდა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

გამოთვალეთ

1. $\int x\sin x\,dx$; 2. $\int x^2\cos x\,dx$; 3. $\int x e^x dx$;

4. $\int x^4 \ell nx\,dx$; 5. $\int x^3 \ell n\,x\,dx$; 6. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$;

7. $\int (x+x^2)\sin x\,dx$; 8. $\int (\sin x + x)e^x dx$; 9. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$;

10. $\int \sin x\,e^x dx$; 11. $\int \cos x\,e^x dx$; 12. $\int x \arcsin x\,dx$;

13. $\int x^3 \sin x \, dx$;   14. $\int (\sin x + \cos x)\, dx$;

15. $\int (\cos x - \sin x) e^x dx$.

6. რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

1. უმარტივესი რაციონალური წილადების ინტეგრება

x ცვლადის მიმართ მრავალწევრი ეწოდება გამოსახულებას

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \equiv p_n(x), \tag{1}$$

სადაც a_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ ნამდვილი ფიქსირებული რიცხვებია, ცვლადის უმაღლესი ხარისხის მაჩვენებელი არის n, რომელსაც უწოდებენ მრავალწევრის ხარისხს $n \in N$.

ამრიგად, მრავალწევრის ხარისხი ეწოდება მასში შემავალი ცვლადის უმაღლესი ხარისხის მაჩვენებელს. მაგალითად, $2x - 3$ არის I ხარისხის, $7x^2 - x^3$ - III ხარისხის მრავალწევრები.

ორი მრავალწევრის შეფარდებას რაციონალური ფუნქცია ჰქვია და აღინიშნება $R(x)$-ით, ე.ი.

$$R(x) = \frac{p(x)}{Q(x)}, \tag{2}$$

სადაც $Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + bm$ m-ური ხარისხისაა. თუ $n < m$, მაშინ მრავალწევრს ეწოდება წესიერი, ხოლო თუ $n \ge m$, მაშინ მრავალწევრს ეწოდება არაწესიერი.

თუ მრავალწევრი არაწესიერია, მაშინ შეიძლება გამოვყოთ მთელი ნაწილი მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფის შედეგად.

ვთქვათ, $p(x)$-ის $Q(x)$-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული განაყოფია $M(x)$, ხოლო ნაშთი — $r(x)$, მაშინ

$$\frac{p(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}. \tag{3}$$

$r(x)$-ის ხარისხი $Q(x)$-ის ხარისხზე ნაკლები იქნება, მაშასადამე $\frac{r(x)}{Q(x)}$ წესიერია; თუ შევიტანთ (3)-ს (2)-ში მივიღებთ:

$$R(x) = M(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}.$$

ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\int R(x)\, dx = \int M(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx.$$

$M(x)$ არის მრავალწევრი ანუ მთელი ფუნქცია.

ამ ტოლობაში $\int M(x)\, dx$ ადვილი გამოსათვლელია, ამრიგად საკითხი დადის წესიერი რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებაზე.

ვიდრე გადავიდოდეთ წესიერი რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებაზე, განვიხილოთ ე.წ. უმარტივესი რაციონალური წილადები და მათი ინტეგრება.

უმარტივესი რაციონალური წილადებია

1. $\frac{A}{x+a}$,   2. $\frac{A}{(x+a)^n}$,

3. $\frac{Ax+B}{x^2+2px+q}$,   4. $\frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^n}$ $n \in N$.

იგულისხმება, რომ $x^2 + 2px + q$ არ დაიშლება წრფივ

მამრავლებად ნამდვილ რიცხვთა არეში. ე.ი. მისი დისკრიმინანტი $p^2-q<0$, ანუ $q-p^2>0$. აღვნიშნოთ $q-p^2=a^2$.

მოვახდინოთ თითოეული მათგანის ინტეგრება

1. $\int \frac{A}{x+a}dx = A\,\ell n\,|x+a|+c$;

2. $\int \frac{A}{(x+a)^n}dx = A\int (x+a)^{-n}\,d(x+a) =$

$$= \frac{A}{-n+1}(x+a)^{-n+1}+c = \frac{A}{(1-n)\,(x+a)^{n-1}}+c.$$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}dx = \int \frac{Ax+B}{(x+p)^2+q-p^2}dx =$

$$= \int \frac{Ax+B}{(x+p)^2+a^2}dx = \int \frac{A(t-p)+B}{t^2+a^2}dt =$$

$$= A\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + (B-AP)\int \frac{dt}{a^2+t^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ell n(t^2+a^2) + \frac{B-AP}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{a}+c =$$

$$= \frac{A}{2}\ell n(x^2+2px+q) + \frac{B-AP}{a\sqrt{q-p^2}}\,\mathrm{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}.$$

აღვნიშნოთ
$x+p=t$
$x=t-p$
$dx=dt$.

მეოთხე უმარტივესი წილადის ინტეგრებისათვის გამოვიყენოთ მე-3-ს გარდაქმნები, მივიღებთ

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^n}dx = \int \frac{A(t-p)+B}{(t^2+a^2)^n}dt = \qquad (7)$

$$= A\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + (B-AP)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} =$$

$$= \frac{A}{2(1-n)\,(t^2+a^2)^{n-1}} + (B-AP)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

რადგანაც $\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2) = \frac{1}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-n+1}}{-n+1}+c$.

გამოვთვალოთ (7) ტოლობის ბოლო ინტეგრალი ე.წ. რეკურენტული ფორმულით. (ფორმულას ეწოდება რეკურენტული, თუ ყოველი n-ის შემთხვევა დაიყვანება $(n-1)$ შემთხვევაზე, $(n-1)$ შემთხვევა დაიყვანება $(n-2)$-ზე და ა.შ. ვიდრე არ მივალთ $n=1$-მდე).

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{a^2}\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}}_{I_{n-1}} -$$

$$-\frac{1}{a^2}\int t\cdot\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{t}{2a^2(1-n)(t^2+a^2)^{n+1}} +$$

$$+\frac{1}{2a^2(1-n)}I_{n-1} = \frac{t}{2a^2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + I_{n-1}\frac{2-2n+1}{2a^2(1-n)} =$$

$$= \frac{1}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{3+2n}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1}.$$

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{2\,(1-n)\,(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2\,(1-n)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} \qquad (8)$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{2a^2\,(n-1)\,(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{3-2n}{2a^2\,(1-n)}I_{n-1}. \qquad (9)$$

ამ ფორმულას ჰქვია რეკურენტული ფორმულა.

შენიშვნა. თუ I_{n-1}-ის მიმართ კვლავ გამოვიყენებთ (9) ფორმულას, მაშინ გადავალთ I_{n-2}-ზე; თუ მიღებულში კვლავ

გამოვიყენებთ (9) ფორმულას გადავალთ I_{n-3}-ზე და ა.შ., ვიდრე არ მივიღებთ I_1-ს,

$$I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + c.$$

ამით მე-4 წილადის ინტეგრება დამთავრებული იქნება.

განვიხილოთ მაგალითები.

1. $$\int \frac{dx}{(x-2)^4} = \int (x-2)^{-4}\, d(x-2) = \frac{(x-2)^{-4+1}}{-4+1} + c = -\frac{1}{3(x-2)^3} + c;$$

2. $$\int \frac{dx}{x^2-5x+41} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + 41 - \frac{25}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{139}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{139}{4}} = \frac{2}{\sqrt{139}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{139}} + c = \frac{2}{\sqrt{139}}\operatorname{arctg}\frac{2x-5}{\sqrt{139}} + c.$$

აღვნიშნოთ
$x - \frac{5}{2} = t$
$x = t + \frac{5}{2}$
$dx = dt.$

3. $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2} = \int \frac{x\,dx}{((x+2)^2+9)^2} = \int \frac{(t-2)\,dt}{(t^2+9)^2} = \int \frac{t\,dt}{(t^2+9)^2} - 2\int \frac{dt}{(t^2+9)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\int (t^2+9)^{-2}\, d(t^2+9) - 2I_2 =$$
$$= -\frac{1}{2(t^2+9)} - 2I_2 = -\frac{1}{2(x^2+4x+13)} -$$
$$-2\left(\frac{1}{2\cdot 13(2-1)(t^2+a^2} + \frac{3+2\cdot 2}{2\cdot 13(1-2)} \cdot\right.$$

აღვნიშნოთ
$x + 2 = t$
$x = t - 2$
$dx = dt$

$$\left.\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{13}}\right) + c = -\frac{1}{2(x^2+4x+13)} -$$
$$-\frac{1}{13(x^2+4x+13)} + \frac{7}{\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{13}} + c =$$
$$= -\frac{15}{26(x^2+4x+13)} + \frac{7}{\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{13}} + c.$$

ვისარგებლეთ I_n-ის ფორმულით, როცა $n = 2$.

სავარჯიშოები

გამოთვალეთ ინტეგრალები

$$\int \frac{dx}{x+5},\quad \int \frac{dx}{9x-2},\quad \int \frac{dx}{(x+1)^5},\quad \int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+6x+25},\quad \int \frac{(4x+5)\,dx}{(x^2+6x+25)^3},$$

$$\int \left(\frac{4}{x-8} + \frac{3}{2x+7} - \frac{5}{(x-2)^{10}} + \frac{3x+9}{x^2-8x+25}\right) dx.$$

2. წესიერი რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

დავუშვათ,

$$R(x) = \frac{p(x)}{Q(x)} \qquad (1)$$

წესიერი რაციონალური ფუნქციაა, სადაც

$$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m.$$

როგორც ალგებრიდან არის ცნობილი, რაციონალური ფუნქცია

დაიშლება უმარტივესი რაციონალური წილადების ჯამის სახით და ეს დაშლა ერთადერთია. თუ, მაგალითად,

$$Q(x)=(x-a)^k(x-b)^{\ell}(x-c)^2(x-d)(x^2+px+q)^s,$$

მაშინ

$$\frac{p(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\frac{A_3}{(x-a)^{k-2}}+\dots+\frac{A_k}{x-a}+ \qquad (2)$$

$$+\frac{B_1}{(x-b)^{\ell}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\ell-1}}+\dots+\frac{B_{\ell}}{x-b}+\frac{D_1}{(x-c)^2}+\frac{D_2}{x-c}+\frac{D_3}{x-d}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^s}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{s-1}}+\dots+\frac{M_sx+N_s}{x^2+px+q}{}^{1)},$$

სადაც

$A_1, A_2,\dots, A_k, B_1, B_2,\dots B_{\ell}, D_1, D_2, D_3, M_1, N_1, M_2, N_2,\dots, M_s, N_s$ მუდმივები ჯერჯერობით უცნობი კოეფიციენტები, ანუ განუზღვრელი კოეფიციენტებია.

რაციონალური ფუნქციის წარმოდგენას (2) ფორმულით ეწოდება რაციონალური ფუნქციის გაშლა უმარტივესი რაციონალური წილადების ჯამის სახით განუზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით.

წარმოვიდგინოთ, რომ ზემოთ ხსენებული კოეფიციენტები ცნობილია; ცხადია ამ შემთხვევაში (2) ტოლობის მარჯვენა მხარეში თითოეული წილადი არის უმარტივესი რაციონალური წილადი, რომელთა ინტეგრებაც ჩვენთვის უკვე ცნობილია. ამრიგად, საკითხი დადის განუზღვრელი კოეფიციენტების გამოთვლაზე. ისინი შემდეგნაირად გამოითვლებიან: გავაერთმნიშვნელიანოთ (2) ტოლობის მარჯვენა მხარე; ცხადია,

---

1) x^2+px+q სამწევრი არ იშლება წრფივ მამრავლებად ე.ი. მისი $D<0$

რომ საერთო მნიშვნელი იქნება $Q(x)$ მრავალწევრი. მრიცხველში კი მივიღებთ გარკვეულ მრავალწევრს, რომლის ხარისხიც არ აღემატება $Q(x)$-ის ხარისხს, აღვნიშნოთ ეს მრავალწევრი $T(x)$-ით. მასში შევა ჩვენი საძიებელი კოეფიციენტებიც. მივიღებთ რაციონალურ ფუნქციას, რომელიც იგივურად ტოლია (1) ფუნქციისა. ე.ი.

$$\frac{p(x)}{Q(x)}\equiv\frac{T(x)}{Q(x)}. \qquad (3)$$

(3) იგივეობიდან გამომდინარე $p(x)\equiv T(x)$ [1]; შესაბამისი კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ არაერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას განუზღვრელი კოეფიციენტების მიმართ. ვიპოვით ამ კოეფიციენტებს მიღებული სისტემიდან, შევიტანთ, რა მათ მნიშვნელობებს (2) ტოლობაში, მივიღებთ უმარტივესი რაციონალური წილადების ინტეგრალებს, რომელთა გამოთვლა უკვე ვიცით.

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx.$$

ამოვწეროთ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია და გავშალოთ იგი უმარტივესი რაციონალური წილადების ჯამად.

---

1) როგორც ცნობილია, ორი მრავალწევრი იგივურად ტოლია, თუ ტოლია შესაბამისად ერთი და იგივე ხარისხებიანი ცვლადების წინ მდგომი კოეფიციენტები. მაგალითად, თუ $a_1x^3+a_2x^2+3\equiv b_1x^4+b_2x^3+b_3x^2+b_4x+b_5$, მაშინ $b_1=b_4=0$, $b_2=a_1$, $b_3=a_2$, $b_5=3$.

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1}. \qquad (4)$$

(4) ტოლობის გაერთმნიშვნელიანებითა და მრიცხველების გატოლებით მივიღებთ

$$x^2+3x-2 \equiv (A+M_2)x^4 + (2A+N_2)x^3 + (3A+M_1)x^2 +$$
$$+(2A+N_1-M_1-M_2)x + (A-N_1-N_2).$$

მიღებული იგივური ტოლობიდან გამომდინარე უცნობი კოეფიციენტების მიმართ ვწერთ სისტემას, რომელიც მიიღება ერთნაირი ხარისხების წინ მდგომი კოეფიციენტების გატოლებით

$$\begin{cases} A=M_2=0 \\ 2A+N_2=0 \\ 3A+M_1=1 \\ 2A+N_1-M_2-M_1=3 \\ A-N_1-N_2=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} N_2=-2A \\ M_2=-A \\ M_1=1-3A \\ N_2=4-6A \\ A-4+6A+2A=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\dfrac{9}{2} \\ M_1=\dfrac{1}{3} \\ N_1=\dfrac{8}{3} \\ M_2=-\dfrac{2}{9} \\ N_2=-\dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

კოეფიციენტის მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (4)-ში მივიღებთ

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{9}{2(x-1)} + \frac{x+8}{3(x^2+x+1)^2} - \frac{2(x+2)}{9(x^2+x+1)}.$$

მაშინ ცხადია

$$\int\frac{(x^2+3x-2)dx}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int\frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}dx -$$
$$-\frac{2}{9}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{2}{9}\ell n|x-1| - \frac{1}{9}\ell n|x^2+x+1| +$$
$$+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + c = \frac{1}{9}\ell n\left|\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right| +$$
$$+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{x}} + \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + c.$$

სავარჯიშოები

გამოთვალეთ

1. $\displaystyle\int\frac{x^5-x^4+3x^2+8}{(x+2)^2(x-1)^3(x+4)(x^2+2x+5)^2(x^2-4x+13)^3}dx$;

2. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{x^3-1}$; 3. $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^3+1}$; 4. $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^4+1}$; 5. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{x^4-1}$;

6. $\displaystyle\int\frac{x^5dx}{(x^2+2x+5)^2}$; 7. $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x+1)^2(x-3)}$; 8. $\displaystyle\int\frac{x^{10}dx}{(x+5)^3}$.

7. ზოგადი სახის ირაციონალობის ინტეგრება

განვიხილოთ გამოსახულება, რომელიც მიიღება x-ზე და $\sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_3]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[r_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ $(ad-bc\neq 0)$ სიდიდეებზე ოთხი არითმეტიკული მოქმედების შედეგად. მიღებული ირაციონალური გამოსახულება აღვნიშნოთ R სიმბოლოთი

$$R\left(x, \sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[r_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right).$$

განვიხილოთ ამ გამოსახულების ინტეგრალი

$$\int R\left(x, \sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[r_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx. \qquad (1)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t, \qquad (2)$$

სადაც r არის საერთო მნიშვნელი $r_1, r_2, \dots, r_k$ რაციონალური რიცხვებისა.

(2) აღნიშვნიდან ცხადია, რომ $\frac{ax+b}{cx+d} = t^r$, აქედან გამომდინარე $x = \frac{dt^r - b}{a - ct^r}$, მიღებული წილადი რაციონალური ფუნქციაა t ცვლადის მიმართ; ვიპოვოთ dx.

$$dt = \frac{drt^{r-1}(a-ct^r) + crt^{r-1}(dt^r - b)}{(a-ct^r)^2} dt.$$

(2) აღნიშვნის თანახმად $\sqrt[r_i]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ გამოსახულება ტოლი იქნება t^s სახის გამოსახულებისა, სადაც s ნატურალური რიცხვია.

თუ x-ისა და dx-ის მნიშვნელობებს შევიტანთ (1) ინტეგრალში, მივიღებთ t-ს მიმართ რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალს, რომლის ამოხსნის ხერხებიც ჩვენთვის უკვე ცნობილია.

შევნიშნოთ, რომ (1) სახის ინტეგრალში შეიძლება წილადები $\frac{ax+b}{cx+d}$ იყოს ნატურალურ ხარისხში. ამ შემთხვევაშიც გამოიყენება იგივე ჩასმა.

მაგალითი. გამოვთვალოთ $\int \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} dx$.

მივიღებთ

$$\int \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} dx = \int \frac{t^3+t^6}{t^2-t^3} 6t^5 dt =$$
$$= -6\int \frac{t^9+t^6}{t-1} dt = -6\int \Big(t^8+t^7+t^6+$$
$$+2t^5+2t^4+2t^3+2t^2+2t+2+$$
$$+\frac{2}{x-1}\Big) dt = -6\int t^8 dt - 6\int t^7 dt -$$
$$-6\int t^6 dt - 12\int t^5 dt - 12\int t^5 dt -$$
$$-12\int t^4 dt - 12\int t^3 dt - 12\int t dt -$$
$$-12\int dt - 12\int \frac{dt}{t-1} = -\frac{2}{3}t^9 - \frac{3}{4}t^8 -$$
$$-\frac{6}{7}t^7 - 2t^6 - \frac{12}{5}t^5 - 3t^4 - 4t^3 - 6t^2 -$$
$$-12t - 12\ln|t-1| + c, \text{ სადაც } t = \sqrt[6]{x}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$\sqrt[6]{x} = t$, მაშინ $x = t^6$

$dx = 6t^5$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$.

მიღებული სიდიდეები შევიტანოთ მოცემულ ინტეგრალში.

$$\frac{t^9+t^6}{t-1} = t^8+t^7+t^6+2t^5+$$
$$+2t^4+2t^3+2t+2+\frac{2}{t-1}.$$

სავარჯიშოები

გამოთვალეთ ინტეგრალები

1. $\int \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$, 2. $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}dx$, 3. $\int \frac{x+1}{\sqrt{\frac{2x-1}{3x+5}}}dx$;

4. $\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}dx$, 5. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+4}dx$, 6. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x}}$.

8. კვადრატული ირაციონალობის ინტეგრება (ეილერის ჩასმები)

განვიხილოთ გამოსახულება, რომელიც მიიღება x და $\sqrt{ax^2+bx+c}$ გამოსახულებებზე ოთხი არითმეტიკული მოქმედების შედეგად. მიღებული გამოსახულება აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$-ით.

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ინტეგრალის გამოთვლისათვის გამოიყენება შემდეგი სამი სახის ჩასმა, რომელთაც ეილერის ჩასმები ჰქვია. სამი ჩასმიდან თითოეული გამოიყენება ცალკეული შემთხვევისათვის. კერძოდ,

ა) როცა $a>0$, მაშინ გამოიყენება ეილერის პირველი ჩასმა.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x\pm t.$$

ბ) როცა $c>0$ – გამოიყენება ეილერის მეორე ჩასმა

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}.$$

გ) როცა ax^2+bx+c სამწევრი იშლება წრფივ მამრავლებად $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, გამოიყენება ეილერის მესამე ჩასმა, კერძოდ $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=(x-x_1)t$.

აღებულ ჩასმებში ტოლობის ორივე მხარის კვადრატში ახარისხების შემდეგ გამოვთვლით x-ისა და dx-ის მნიშვნელობებს, ჩავსვამთ რა მათ მოცემულ ინტეგრალში, მივიღებთ ჩვენთვის უკვე ცნობილი რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალს, რომლის გამოთვლაც ვიცით.

განვიხილოთ მაგალითი $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$.

გამოვიყენოთ ეილერის I ჩასმა.

$$\sqrt{x^2+2x+2}=x-t \Rightarrow x^2+2x+2=x^2-2xt+t^2$$

$$x=\frac{t^2-2}{2(1+t)}, \qquad dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt.$$

$$\sqrt{x^2+2x+2}=-\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)} \qquad t=x-\sqrt{x^2+2x+2},$$

მიღებული სიდიდეების მოცემულ ინტეგრალში ჩასმით მივიღებთ

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}=-\int \frac{2(1+t)}{t^2-2}\cdot\frac{2(1+t)}{t^2+2t+2}\cdot\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt=$$

$$=-2\int \frac{dt}{t^2-2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ell n\left|\frac{x-\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{2}}{x-\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{2}}\right|+c.$$

სავარჯიშოები

გამოთვალეთ ინტეგრალები

1. $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$, 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$, 3. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-6}}dx$,

4. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$, 5. $\int\frac{dx}{x\sqrt{-x^2-4x+13}}$,

6. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2x-15}}$.

9. ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა ინტეგრება

განვიხილოთ გამოსახულება, რომელიც მიიღება $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციებზე არითმეტიკული მოქმედებების შედეგად. იგი $R(\sin x, \cos x)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. განვიხილოთ მიღებული გამოსახულების ინტეგრალი

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx. \qquad (1)$$

ზოგად შემთხვევაში შეიძლება გამოყენებული იქნას ე.წ. უნივერსალური ჩასმა

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, \qquad (2)$$

საიდანაც $x=2\operatorname{arctg}t$, ხოლო $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

შევიტანთ რა (2) ჩასმის შედეგად მიღებულ $\sin x$ და $\cos x$-ის მნიშვნელობებს (1) ინტეგრალში, მივიღებთ რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალს

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

მაგალითები.

1. $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{1-t^2}=\ell n\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+c=\ell n\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+c;$

2. $\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}}=\int dt=t+c=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c.$

გამოთვალეთ ინტეგრალები

1. $\int\frac{dx}{\sin x}$, 2. $\int\frac{\sin x+2}{\cos x-1}dx$, 3. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$,

4. $\int\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin 2x}dx$.

ახლა განვიხილოთ ისეთი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ინტეგრალები, რომელთა გამოთვლას სჭირდება სხვადასხვა ხელოვნური ხერხების გამოყენება. არაა სავალდებულო გამოყენებული იქნას უნივერსალური ჩასმა. ხშირად, ასეთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს უწოდებენ.

განვიხილოთ ინტეგრალი $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, სადაც m და n ნატურალური რიცხვებია.

განვიხილოთ მოცემული ინტეგრალისათვის ცალკეული შემთხვევები.

1. ვთქვათ, m და n რიცხვებიდან ერთ-ერთი კენტია. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ n კენტი რიცხვია, ე.ი. $n = 2k+1$, მაშინ

$$\int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x\, dx = \int \sin^m x\,(1-\sin^2 x)^k\, d\sin x.$$

ცხადია, მიღებული ინტეგრალი ადვილად გამოითვლება.

მაგალითი.

$$\int \sin^6 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^6 x\,(1-\sin^2 x)\, d\sin x =$$

$$= \int \sin^6 x\, d\sin x - \int \sin^8 x\, d\sin x = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + c.$$

2. m და n ლუწი რიცხვებია, ე.ი. $m = 2k$ და $n = 2p$. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2p} x\, dx = \int (\sin^2 x)^k (\cos^2 x)^p\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^p dx.$$

ამ ფორმულით $\sin x$-ისა და $\cos x$-ის ხარისხები $2k$ და $2p$-დან დაიწია k და p ხარისხებამდე.

ამრიგად, $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ ინტეგრალის გამოთვლისას

მიღებულ ინტეგრალში ლუწი ხარისხების მაჩვენებლების შემთხვევაში ხარისხების მაჩვენებლებს კვლავ დავწევთ, ხოლო კენტი ხარისხების მაჩვენებლების შემთხვევაში გამოვიყენებთ ზემოთ განხილულ პირველ შემთხვევას.

ახლა განვიხილოთ ინტეგრალები, რომლებშიც ინტეგრალქვეშა ფუნქციები წარმოადგენენ $\sin ax$, $\sin bx$, ან $\cos ax$, $\cos bx$ ფუნქციათა ნამრავლებს.

1) $$\int \sin ax \cdot \sin bx\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)\, dx =$$

$$= \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + c.$$

2) $$\int \cos ax \cdot \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos(a-b)x + \cos(a+b)x)\, dx =$$

$$= \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)x} + c.$$

3) $$\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)\, dx =$$

$$= -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + c.$$

განვიხილოთ მაგალითი

$$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3}{5}x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin\frac{11}{10}x - \sin\frac{x}{10}\right) dx =$$

$$= -\frac{5}{11}\cos\frac{11}{10}x + 5\cos\frac{1}{10}x + c.$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები

$\int \sin^4 x\, dx$, $\int \cos^4 x\, dx$, $\int \cos^3 x\, dx$, $\int \sin^4 x \cos^6 x\, dx$, $\int \sin^7 x \cos^4 x\, dx$.

10. დიფერენციალური ბინომის ინტეგრება

$x^m(a+bx^n)^p$ სახის გამოსახულებას, სადაც m, n და p რაციონალური რიცხვებია, ეწოდება დიფერენციალური ბინომი, ანუ ბინომური დიფერენციალი, ხოლო ინტეგრალს

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx \qquad (1)$$

ეწოდება დიფერენციალური ბინომის ინტეგრალი.

a და b კოეფიციენტები გავლენას არ ახდენენ ბინომური დიფერენციალის ინტეგრების სირთულეზე. არსებითი მნიშვნელობა m, n, p პარამეტრების რიცხვით მნიშვნელობებს აქვს. იმ შემთხვევაში, როცა m, n, p რიცხვებიდან რომელიმე მაინც ირაციონალურია, ბინომური დიფერენციალი წარმოადგენს უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციას. თუ m, n, p რაციონალური რიცხვებია, მაშინ არსებობს სამი შემთხვევა, როცა (1) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში გამოითვლება.

თეორემა. თუ m, n, p რაციონალური რიცხვები აკმაყოფილებენ ერთ-ერთს შემდეგი სამი პირობიდან 1). p – მთელია, 2). $\frac{m+1}{n}$ მთელია, 3). $\frac{m+1}{n}+p$ მთელია, მაშინ ბინომური დიფერენციალის ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში გამოითვლება (ჩებიშევის თეორემა).

განვიხილოთ ცალკეული შემთხვევები.

1) p მთელია. ვთქვათ m და n რიცხვები შემდეგი სახის წილადებია $m=\frac{r_1}{S_1}$. $n=\frac{r_2}{S_2}$. თუ S არის S_1 და S_2 რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი, ასეთ შემთხვევაში

$x^{\frac{1}{S}}=t$ სახის ჩასმა მიგვიყვანს რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებაზე.

მაგალითი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int x^{\frac{2}{5}}\left(a+bx^{\frac{3}{7}}\right)^{-1}dx$.

მოცემულ ინტეგრალში $x^{\frac{1}{35}}=t$ ჩასმით მივიღებთ

$x^{\frac{2}{5}}=t^{14},\ x^{\frac{3}{7}}=t^{15},\ x=t^{35},\ dx=35t^{34}dt,$

$$\int x^{\frac{3}{5}}\left(a+bx^{\frac{3}{7}}\right)^{-1}dx=\int t^{14}(a+bt^{15})^{-1}\cdot 35t^{34}dt=35\int t^{48}(a+bt^{15})^{-1}dt.$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალი.

2) ვთქვათ, $\frac{m+1}{n}$ მთელი რიცხვია, ხოლო $p=\frac{r}{S}$, სადაც r მთელია, S ნატურალური. შემოვიღოთ აღნიშვნა $(a+bx^n)^{\frac{1}{S}}=t$, მაშინ ცხადია, რომ

$$(a+bx^n)^p=t^r,\quad a+bx^n=t^S,\quad x^n=\frac{1}{b}(t^S-a),\quad x=b^{-\frac{1}{n}}(t^S-a)^{\frac{1}{n}},$$

$dx=\frac{b^{-\frac{1}{n}}}{n}\cdot S(t^S-a)^{\frac{1}{n}-1}dt$, ხოლო $x^m=b^{-\frac{m}{n}}(t^S-a)^{\frac{m}{n}}$. მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ მოცემულ ინტეგრალში, მივიღებთ:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{S\cdot b^{-\frac{m+1}{n}}}{n}\int t^{r+S-1}(t^S-a)^{\frac{m+1}{n}-1}dt. \qquad (1)$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარეში ინტეგრალი აღებულია ისევ ბინომური დიფერენციალიდან, რომელშიც p რიცხვის როლს ასრულებს $\frac{m+1}{n}-1$ რიცხვი. ხოლო r და S მთელი რიცხვებია, ამიტომ (1) ინტეგრალი ამოიხსნება ელემენტარულ ფუნქციებში, როცა $\frac{m+1}{n}-1$ მთელია, ე.ი. როცა $\frac{m+1}{n}$ მთელია.

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int x^3(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}dx$. მოცემულ მაგალითში $m=3,\ n=2,\ p=\frac{-2}{3}$, $\frac{m+1}{n}=2-$ მთელია. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}=z$, აქედან $(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}=z^2,\ x=(z^{-3}-1)^{\frac{1}{2}}$, ხოლო $dx=\frac{-3z^2dz}{2(z^{-3}-1)^{\frac{1}{2}}}$. შევიტანოთ რა მიღებულ მნიშვნელობებს მოცემულ ინტეგრალში, მივიღებთ

$$\int x^3(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{(z^{-3}-1)^{\frac{3}{2}}z^4}{(z^{-3}-1)^{\frac{1}{2}}}dz=-\frac{3}{2}\int(z^{-3}-1)z^4\,dz=$$

$$=-\frac{3}{2}\int(z-z^4)dz=-\frac{3}{4}z^2+\frac{3}{10}z^5+c,$$

სადაც $z=(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}$.

3) ვთქვათ, $\frac{m+1}{n}+p$ მთელი რიცხვია. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^S$, სადაც S წარმოადგენს $p=\frac{r}{s}$ წილადის მნიშვნელს

$$x=a^{\frac{1}{n}}(t^S-b)^{-\frac{1}{n}},\quad x^m=a^{\frac{m}{n}}(t^S-b)^{\frac{m}{n}},\quad x^n=a(t^S-b)^{-1},$$

$$dx=\frac{-a^{\frac{1}{n}}}{n}\cdot S(t^S-b)^{-\frac{1}{n}-1}t^{S-1}\,dt.$$

$(a+bx^n)^p=(a\cdot t^S(t^S-b)^{-1})^p=a^p\cdot t^r(t^S-b)^{-p}$. ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობები ბინომურ დიფერენციალში, მივიღებთ

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{a^{\frac{m+1}{n}}\cdot S}{n}\cdot\int(t^S-b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)^{-1}}\cdot t^{r+S-1}\,dt.$$

მიღებული ინტეგრალი მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ იქნება მოცემული ინტეგრალის გამარტივება, როცა $\frac{m+1}{n}+p$ მთელი რიცხვია.

მაგალითი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}=\int x^{-2}(2+x^3)^{-\frac{5}{3}}dx,\quad \frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{3}-\frac{5}{3}=-2$$

მთელია.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{2+x^3}{x^3}=t^3$, აქედან

$$x=2^{\frac{1}{3}}(t^3-1)^{-\frac{1}{3}}\qquad x^{-2}=2^{-\frac{3}{2}}(t^3-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$(2+x^3)^{-\frac{5}{3}}=(t^3\cdot 2(t^3-1)^{-1})^{-\frac{5}{3}}=2^{-\frac{5}{3}}\cdot t^{-5}(t^3-1)^{\frac{5}{3}}$$

$$dx=-2^{\frac{1}{3}}t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}dt$$

$$\int\frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}=-2^{-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}\int t^{-3}(t^3-1)^{\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}}dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\int t^{-3}(t^3-1)\,dt=-\frac{t}{4}-\frac{1}{8t^2}+c,$$

სადაც $t=\sqrt{\dfrac{2+x^3}{x^3}}$.

დიდმა რუსმა მათემატიკოსმა ჩებიშევმა დაამტკიცა, რომ მხოლოდ ზემოთ განხილულ სამ შემთხვევაში შეიძლება დიფერენციალური ბინომის ინტეგრება ელემენტარულ ფუნქციებში. სხვა შემთხვევაში მისი ინტეგრება შეუძლებელია. ინტეგრება მითუმეტეს შეუძლებელი იქნება, როცა m, n და p-დან ერთი მაინც ირაციონალურია.

მაგალითი. $\int x^{\frac{4}{5}}\left(1+3x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{4}}dx$-ში $m=\dfrac{4}{5}$, $n=\dfrac{2}{5}$, $p=\dfrac{3}{4}$, p არაა მთელი. $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{9}{2}$ არაა მთელი, $\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{21}{4}$ არაა მთელი. ე.ი. მოცემული ინტეგრალი არ გამოითვლება ელემენტარულ ფუნქციებში.

გამოთვალეთ

1. $\int\sqrt[3]{x^2}\left(3-4\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{7}}dx$, 2. $\int x^{-\frac{4}{5}}\left(1+3x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{4}}dx$,

3. $\int x^3\left(2-x^2\right)^{\frac{4}{5}}dx$, 4. $\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}$,

5. $\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$, 6. $\int x^7\sqrt{1+x^4}\,dx$.

11. ᲖᲝᲒᲘᲔᲠᲗᲘ ᲢᲠᲐᲜᲡᲪᲔᲜᲓᲔᲜᲢᲣᲚᲘ ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲘᲡ ᲘᲜᲢᲔᲒᲠᲔᲑᲐ

განვიხილოთ ინტეგრალები

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\ \int e^{ax}\sin bx\,dx,\ \int x^n\cos ax\,dx,\ \int x^n\sin ax\,dx,$$

$$\int x^n e^{ax}dx,\ \int x^n\arcsin x\,dx,\ \int x^n\arccos x\,dx,$$

$$\int x^n\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,\ \int x^n\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx,\ \int x^n\ell nx\,dx$$

(n არაუარყოფითი მთელი რიცხვია). ამ ინტეგრალების გამოსათვლელად გამოიყენება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა (ზოგიერთისათვის – განმეორებით).

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვთვალოთ

$$I\equiv\int e^{ax}\sin bx\,dx \qquad (1)$$

ავღნიშნოთ $e^{ax}=u$, $\sin bx\,dx=dv$. აქედან $ae^{ax}dx=du$, $-b^{-1}\cos bx=v$. ჩავსვათ ინტეგრალში

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=-ab^{-1}e^{ax}\cos bx+ab^{-1}\int e^{ax}\cos bx\,dx. \qquad (2)$$

მიღებულ ინტეგრალში კვლავ გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა. $e^{ax}=u$, $\cos bx\,dx=dv$, აქედან

$ae^{ax}dx = du$, $b^{-1}\sin bx = v$, მაშინ (2)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = b^{-1}e^{ax}\sin bx - ab^{-1}\int e^{ax}\sin bx\,dx =$$

$$= b^{-1}e^{ax}\sin bx - ab^{-1}I.$$

მიღებული ჩავსვათ (1)-ში, გვექნება

$$I = -ab^{-1}e^{ax}\cos bx - ab^{-2}e^{ax}\sin bx - ab^{-2}I.$$

აქედან მივიღებთ

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \left(1+ab^{-2}\right)^{-1}\left(-ab^{-1}e^{ax}\cos bx - ab^{-2}e^{ax}\sin bx\right).$$

ანალოგიურად გამოითვლება $\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

ინტეგრალებში $\int x^n\cos ax\,dx$, $\int x^n\sin ax\,dx$, $\int x^n e^{ax}dx$ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებისას u-თი უნდა აღვნიშნოთ x^n, დანარჩენი უკვე გასაგებია. ფორმულის n-ჯერ გამოყენებით მივიღებთ პასუხს.

ზემოთ განხილულ დანარჩენ ინტეგრალებში უნდა შემოვიღოთ აღნიშვნა $dv = x^n dx$. რაც შეეხება ინტეგრალს $\int R(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)\,dx$. მის გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ ჩასმა

$u = \mathrm{th}\dfrac{x}{2}$, მაშინ $\mathrm{sh}x = \dfrac{2u}{1-u^2}$, $\mathrm{ch}x = \dfrac{1+u^2}{1-u^2}$, $dx = \dfrac{2du}{1-u^2}$. თუ მიღებულ ფორმულებს შევიტანთ მოცემულ ინტეგრალში, u-ს მიმართ მივიღებთ რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალს.

$\int \mathrm{sh}^m x\,\mathrm{ch}^n x\,dx$ ინტეგრალი გამოითვლება ჩასმით $u = \mathrm{ch}x$. მივიღებთ ბინომის ინტეგრალს.

12. ინტეგრალები. რომლებიც არ გამოითვლებიან ელემენტარულ ფუნქციებში

ყოველთვის არ ხერხდება განუსაზღვრელი ინტეგრალების გამოთვლა იმ ხერხებით, რაც დღემდეა ცნობილი. ამ შემთხვევაში იტყვიან რომ ასეთი ინტეგრალები არ გამოისახებიან ელემენტარულ ფუნქციებში. ეს იმას არ ნიშნავს, რომ თითქოს ასეთ ინტეგრალებში ინტეგრალქვეშა ფუნქციებს არ გააჩნდეთ პირველადები. შემდეგ თავში ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ყველა უწყვეტი ფუნქცია, განსაზღვრული სეგმენტზე, ინტეგრებადია. აი ზოგიერთი მათგანი

$$\int\frac{e^x}{x^n}dx,\ \int\frac{\sin x}{x^n}dx,\ \int\frac{\cos x}{x^n}dx\ (n\in N),\ \int e^{-x^2}dx,\ \int R\left(x,\sqrt{p(x)}\right)dx,$$

სადაც $p(x)$ არის მესამე, ან მეოთხე ხარისხის მრავალწევრი.

დასკვნა. როგორც დავინახეთ ინტეგრება – განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლა გაწარმოების შებრუნებული ამოცანაა; განუსაზღვრელი ინტეგრალები ფართედ გამოიყენება განსაზღვრულ ინტეგრალებში.

შენიშვნა. ცხადია, რომ ცხრილიდან დაწყებული ყველა განუსაზღვრელი ინტეგრალი ფუნქციაა. ტოლობას $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ ადგილი აქვს $f(x)$-სა და $F(x)$-ის განსაზღვრის საერთო არეზე. მაგალითად $\int\frac{1}{x}dx$-ში $\frac{1}{x}$-ის განსაზღვრის არეა $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$, ამიტომ პასუხში ვწერთ $\ln|x|+c$; $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ინტეგრალში $x\neq\pm1$, ამიტომ $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ ტოლობაში $x\in(-1;1)$, მაშინ, როდესაც $\arcsin x$-ის განსაზღვრის არეა $[-1, 1]$ სეგმენტი. მკითხველმა ამ კუთხით უნდა შეხედოს მიღებულ პასუხებს.

თავი VIII

განსაზღვრული ინტეგრალები

ხშირ შემთხვევებში პრაქტიკაში დაისმება მთელი რიგი ამოცანებისა, რომლებიც დაკავშირებული არიან ფუნქციასა და მის დიფერენციალურ აღრიცხვასთან. ასეთი ამოცანებია გარკვეული წირით შემოსაზღვრული ფიგურისა და ამ წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობების გამოთვლა, წირის სიგრძის გამოთვლა, ბრუნვითი სხეულის მოცულობის გამოთვლა, წირის და ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრისა და ინერციის მომენტების გამოთვლა და ა.შ.

ყველა ამ ამოცანების ამოხსნას მივყავართ განსაზღვრულ ინტეგრალებამდე. დავიწყოთ ერთი მარტივი ამოცანის განხილვით.

1. მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოთვლა

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსიდან ცნობილია მარტივი ბრტყელი ფიგურების სამკუთხედის, ოთხკუთხედების, ნებისმიერი მრავალკუთხედის, წრის ფართობების გამოთვლის ხერხები.

ბუნებრივად იბადება კითხვა, როგორ გამოვთვალოთ ნებისმიერი ბრტყელი ფიგურის ფართობი?

ფიგურას ეწოდება ბრტყელი, თუ იგი მთლიანად თავსდება სიბრტყეზე.

პირველ რიგში პასუხი უნდა გაეცეს კითხვებს: 1). რა გვესმის ფართობის ქვეშ? 2). როგორ გამოვთვალოთ ამა თუ იმ ფიგურის ფართობი?

რაიმე სიდიდის გაზომვა ნიშნავს გარკვეული წესით მსგავსი

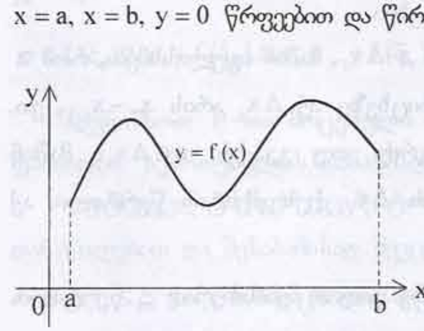
სიდიდეების შედარებას. წინასწარ მოცემული უნდა გვქონდეს საზომი ერთეულები, როგორიცაა 1მ, 1კვ.მ., 1^0 და ა.შ.

კვადრატი, რომლის გვერდია 1მ, მივიღოთ ფართობის საზომ ერთეულად და ეს ფართობი აღვნიშნოთ $1მ^2$-ით, რომელსაც ერთი კვადრატული მეტრი ჰქვია. გავზომოთ რომელიმე ბრტყელი ფიგურის ფართობი ნიშნავს იმის დადგენას, თუ რამდენი ასეთი კვადრატი, ან მისი ნაწილები თავსდება მოცემულ ფიგურაში. ფიგურის ფართობი შეიძლება გაიზომოს $მმ^2$-ით, $კმ^2$-ით და ა.შ. ცხადია, შეიძლება მოცემულ ფიგურაში საკმაოდ "მჭიდროდ" ჩავხაზოთ მრავალკუთხედი და ვიპოვოთ ამ უკანასკნელის ფართობი, რომელიც იქნება მოცემული ფიგურის ფართობი მიახლოებით. მაგრამ რა იქნება ზუსტი ფართობი მოცემული ფიგურისა? ამ კითხვაზე პასუხს ახლავე გავცემთ.

განვიხილოთ არა მთლად ნებისმიერი ბრტყელი ფიგურა (შემდეგ ასეთსაც განვიხილავთ), არამედ ე.წ. მრუდწირული ტრაპეცია.

ჩვენ ვიხილავთ ფიგურებს, რომლებსაც გარკვეული დამოკიდებულება აქვთ კოორდინატთა სისტემასთან, რათა ანალიზურად (ფორმულებში) ჩავწეროთ გასაზომი სიდიდეები.

ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა (xoy). ფიგურას, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=a,\ x=b,\ y=0$ წრფეებით და წირით, რომლის განტოლებაა $y=f(x)\geq 0$, $a\leq x\leq b$, ეწოდება მრუდწირული ტრაპეცია. (ჯერ-ჯერობით ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე). ვიპოვოთ მისი ფართობი. ამისათვის გამოვიყენოთ ყველაზე



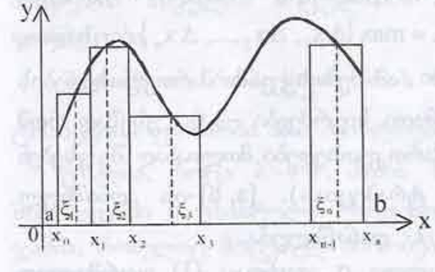
მარტივი წესი. მოცემულ მრუდწირულ ტრაპეციაში გარკვეულნაირად ჩავხაზოთ მართკუთხედები, შემდეგ ვიპოვოთ ამ მრავალკუთხედების ფართობთა ჯამი, მიღებული რიცხვი მივიღოთ მოცემული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობად მიახლოებით. თუ ჩახაზული მართკუთხედების რიცხვს გავზრდით თანდათან, მივიღებთ უფრო და უფრო "უკეთესს" ფართობს, ანუ უფრო და უფრო მიუახლოვდებით მოცემული ფიგურის ზუსტ ფართობს.

მოცემულ მრუდწირულ ტრაპეციაში მართკუთხედები ჩავხაზოთ ასეთი წესით: დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ წერტილებით $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ ქვესეგმენტებად, რომლებიც აღვნიშნოთ შესაბამისად $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ სიმბოლოებით, ე.ი. $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, თუ i-ს მივცემთ მნიშვნელობას $i = 1$, მივიღებთ $\Delta x_1 = [x_0, x_1]$ პირველ ქვესეგმენტს, თუ დავუშვებთ $i = 2$, მივიღებთ $\Delta x_2 = [x_1, x_2]$ ქვესეგმენტს და ა.შ. ამიტომ ვუწოდოთ Δx_i-ს ზოგადი, ანუ i-ური ქვესეგმენტი. Δx_i ქვესეგმენტის სიგრძეა $x_i - x_{i-1}$, რომელიც იგივე Δx_i სიმბოლოთი აღვნიშნოთ, $\Delta x_i \geq 0$, ე.ი. Δx_i არის ქვესეგმენტიც და მისი სიგრძეც. შემდეგში ჩანაწერებით მივხვდებით, თუ როდისაა ქვესეგმენტი და როდისაა რიცხვი.

მაგალითად, თუ გვაქვს $a \cdot \Delta x_i$, მაშინ იგულისხმება, რომ a რიცხვი მრავლდება Δx_i რიცხვზე. აქ Δx_i არის $x_i - x_{i-1}$, ე.ი. i-ური ქვესეგმენტის სიგრძე. თუ გვაქვს $a \in \Delta x_i$, მაშინ იგულისხმება, რომ a არის Δx_i ქვესეგმენტის წერტილი. აქ Δx_i ქვესეგმენტია.

ყოველ Δx_i ქვესეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერად ξ_i წერტილი,

$\xi_i \in \Delta x_i$, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \cdot [a, b]$. სეგმენტის დაყოფის x_{i-1}, ξ_i, x_i წერტილებიდან აღვმართოთ მართობები გრაფიკის გადაკვეთამდე და განვიხილოთ მართკუთხედები, რომელთა ფუძეებია Δx_i ქვესეგმენტები, ხოლო სიმაღლეები $f(\xi_i)$ რიცხვები $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. როგორც ვხედავთ ამ წესით მოცემულ მრუდწირულ ტრაპეციაში ჩაიხაზება მართკუთხედები, რომლებიც შედგებიან მრუდწირული ტრაპეციის ნაწილებისაგან და იმ ნაწილებისაგან, რომლებიც არ შედიან მრუდწირულ ტრაპეციაში. ცხადია, შეიძლება მართკუთხედებიდან ზოგიერთი მთლიანად შედიოდეს მოცემულ ფიგურაში. აქ არსებითია, რომ მართკუთხედების ზედა ფუძეებს აქვს საერთო წერტილები მოცემულ წირთან. ამ წესით ჩახაზული მართკუთხედების ერთობლიობას საფეხურებრივი ფიგურა ჰქვია. ასეთი მართკუთხედების ფართობთა ჯამი აღვნიშნოთ σ (სიგმა) სიმბოლოთი. ცხადია $\sigma \geq 0$, როგორც დადებითი (არაუარყოფითი) რიცხვების ჯამი და



$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n \equiv \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \quad (1)$$

აღვნიშნოთ P-თი მოცემული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი. ზემოთქმულის თანახმად $P \approx \sigma$.

თუ შევცვლით $[a, b]$ სეგმენტის წინა დანაწილებას ახალი დანაწილებით და შესაბამისად შევცვლით ξ_i წერტილებს ისე, რომ $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, მაშინ ცხადია, მივიღებთ სხვა σ-ს, რომელიც

განსხვავდება წინა σ-გან. ამ გზით შეიძლება მივიღოთ σ რიცხვებისაგან შედგენილი არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აღვნიშნოთ $\{\sigma\}$ სიმბოლოთი.

აღვნიშნოთ λ (ლამბდა, ანუ ლამდა) სიმბოლოთი უდიდესი ქვესეგმენტის სიგრძე $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$. ცხადია, როცა $\lambda \to 0$, მაშინ $n \to \infty$, ამ შემთხვევაში მართკუთხედების ფუძეები მცირდებიან და მათი სიგრძეები $\to 0$ (უხეშად რომ ვთქვათ, ამ შემთხვევაში მართკუთხედები მთლიანად შეავსებენ მოცემულ მრუდწირულ ტრაპეციას). $[a, b]$-ის აღნიშნულ დანაწილებას ვუწოდოთ λ *დანაწილება.*

ავიღოთ ერთი გარკვეული σ, თუნდაც (1) ფორმულით ჩაწერილი და განვმარტოთ მოცემული ფიგურის ფართობი.

მრუდწირული ტრაპეციის ფართობად მიღებულია ზემოთ განხილული წესით მასში ჩახაზული მართკუთხედების ფართობთა ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \to 0$. *იგულისხმება, რომ ეს ზღვარი არაა დამოკიდებული არც* $[a, b]$ *სეგმენტის დანაწილების წესზე და არც* ξ_i *წერტილების შერჩევაზე.* მაშასადამე

$$p = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i . \qquad (2)$$

როცა $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ სასრული რიცხვია, მაშინ იტყვიან, რომ მოცემული ფიგურა ფართობადია.

ქვემოთ $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$-ს ვუწოდებთ განსაზღვრულ ინტეგრალს და აღვნიშნავთ $\int_a^b f(x)\,dx$ სიმბოლოთი, რომელიც გეომეტრიულად გამოსახავს მოცემული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს.

ამრიგად, მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოთვლის ამოცანამ მიგვიყვანა σ-ს ზღვრის გამოთვლაზე.

(2) სახის გამოსახულების ანალოგიურ გამოსახულებაზე მიიყვანება წრის სიგრძის, ბრუნვითი ზედაპირის ფართობის, ბრუნვითი სხეულის მოცულობის და ა.შ. გამოსათვლელი ფორმულები.

შევნიშნოთ, რომ $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ არის მოცემულ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი არა მიახლოებით, არამედ ზუსტად.

ცხადია, როცა $\lambda \to 0$, მაშინ $f(\xi_i)\Delta x_i \to 0$, $n \to \infty$, ამ შემთხვევაში σ უსასრულო რაოდენობის უსასრულო მცირეთა ჯამია, რომელიც მოცემულ პირობებში გარკვეული რიცხვია, განსხვავებული ნულისაგან.

შენიშვნა. ფართობი განვმარტოთ მეორენაირად. თუ $\inf\{\sigma\} = \sup\{\sigma\} = I$, მაშინ იტყვიან, რომ მოცემული ფიგურა ფართობადია და ამ საერთო საზღვარს უწოდებენ მის ფართობს. ფაქტიურად $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ არის $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \right)$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$ ისე, რომ $\lambda \to 0$, ფიგურის ფართობადობის შემთხვევაში მტკიცდება, რომ $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ და I ერთიდაიგივე რიცხვია. შეიძლებოდა $\{\sigma\}$ სიმრავლიდან აგველო ნებისმიერი მიმდევრობა (σ_n) $n=1,2,\ldots$ და ინტეგრალი გაგვემარტა როგორც ამ მიმდევრობის ზღვარი (თუ დავუკვირდებით ფართობის განმარტებას, შევნიშნავთ, რომ ასეც მოხდა).

2. განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტება

განვიხილოთ [a, b] სეგმენტზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული ფუნქცია $y=f(x)$. განვიხილოთ ამ სეგმენტის λ დანაწილება წინა პარაგრაფის მიხედვით. ე.ი. დავყოთ ეს სეგმენტი $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ წერტილების საშუალებით Δx_i ქვესეგმენტებად. მათი სიგრძე აღვნიშნოთ ამავე Δx_i სიმბოლოთი. ავიღოთ Δx_i სეგმენტზე ნებისმიერად ξ_i წერტილი $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$. განვიხილოთ $f(\xi_i)\Delta x_i$ ნამრავლთა ჯამი $\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. ამ ჯამს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის რიმანის ინტეგრალური ჯამი [a, b] სეგმენტზე.

განმარტება. [a, b] სეგმენტზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქციის რიმანის ინტეგრალური ჯამის ზღვარს, როცა Δx_i ქვესეგმენტთა შორის უდიდესი ქვესეგმენტის სიგრძე $\lambda\to 0$ და ეს ზღვარი არ არის დამოკიდებული არც [a, b] სეგმენტის დანაწილების წესზე და არც ξ_i წერტილების შერჩევაზე, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი [a, b] სეგმენტზე და იგი აღინიშნება $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ სიმბოლოთი და იკითხება ასე "განსაზღვრული ინტეგრალი a-დან b-მდე $f(x)\,dx$-დან."

$f(x)$-ს ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, x - ინტეგრების ცვლადი, ხოლო $f(x)\,dx$-ს ინტეგრალქვეშა გამოსახულება, [a, b] სეგმენტს კი ინტეგრების (საინტეგრაციო) არე. როცა განსაზღვრებაში ვახსენებთ ზღვარს, ბუნებრივია იგულისხმება, რომ იგი არსებობს და სასრული რიცხვია. ასეთ შემთხვევაში იტყვიან, რომ ფუნქცია ინტეგრებადია [a, b] სეგმენტზე. თუ არ არსებობს აღნიშნული ზღვარი, ან ეს ზღვარი უდრის უსასრულობას, მაშინ იტყვიან, რომ $f(x)$ ფუნქცია არ არის ინტეგრებადი [a, b] სეგმენტზე.

ამრიგად განმარტების მიხედვით გვაქვს

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,, \qquad (1)$$

სადაც λ არის [a, b] სეგმენტის დანაწილებაში უდიდესი ქვესეგმენტის სიგრძე.

ზღვრის განმარტების გამოყენებით მეორენაირად განსაზღვრული ინტეგრალი "$\varepsilon-\delta$" ენაზე ასე განიმარტება.

I რიცხვს ეწოდება [a, b] სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი, თუ ნებისმიერი ε დადებითი რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta(\varepsilon)$ დადებითი რიცხვი, რომ როგორიც არ უნდა იყოს [a, b] სეგმენტის λ დანაწილება და $\xi_i\in\Delta x_i$ წერტილების შერჩევა, როცა $\lambda<\delta(\varepsilon)$, სრულდება უტოლობა

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon,$$ რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I.$$

ცხადია, რომ ინტეგრალის ეს ორივე განმარტება ეკვივალენტური

განმარტებებია. ამ შემთხვევაში I აღინიშნება $\int_a^b f(x)\,dx$ სიმბოლოთი. შეიძლებოდა განსაზღვრული ინტეგრალი გაგვემარტა როგორც $\{\sigma\}$ სიმრავლიდან აღებული ნებისმიერი მიმდევრობის ზღვარი.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$ გეომეტრიულად გამოსახავს იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია ქვემოდან $[a, b]$ სეგმენტით გვერდებიდან $x = a$, $x = b$ წრფეებით, ხოლო ზემოდან $y = f(x)$ წირით, თუ $f(x) \geq 0$.

ზემოთქმული წესით განმარტებულ ინტეგრალს უწოდებენ რიმანის ინტეგრალს და აღნიშნავენ $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ სიმბოლოთი, რათა განასხვაონ რიმანის ინტეგრალი სხვა ინტეგრალისაგან (სტილტიესის, დანჟუას ინტეგრალებისაგან, რომლებიც შეისწავლება მაღალ კურსებზე). ჯერ-ჯერობით ჩვენ მხოლოდ რიმანის ინტეგრალს განვიხილავთ წინსართის გარეშე.

3. დარბუს ქვედა და ზედა ჯამები. ქვედა და ზედა ინტეგრალები

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $y = f(x)$ ფუნქცია და ამ სეგმენტის λ დანაწილება ისე, როგორც ზემოთ გავაკეთეთ. განვიხილოთ $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ ქვესეგმენტი. ამ სეგმენტზე $f(x)$

ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა იყოს M_i, ხოლო უმცირესი m_i, ნებისმიერად ავიღოთ $\xi_i \in \Delta x_i$ წერტილი, მაშინ ცხადია $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, რის გამოც, $m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$. ვცვალოთ $i = 1, 2, \ldots, n$ და მიღებული უტოლობები წევრობრივ შევკრიბოთ. მივიღებთ

$$\sum_{i=-1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \qquad (1)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები $s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$,

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

ხოლო
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

s გამოსახულებას უწოდებენ დარბუს ქვედა ჯამს, S კი დარბუს ზედა ჯამს, ხოლო σ სიდიდეს რიმანის ინტეგრალურ ჯამს. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ $s \leq \sigma \leq S$ (2). თუ გადავალთ (1) უტოლობაში ზღვარზე როცა $\lambda \to 0$, მივიღებთ:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

ავღნიშნოთ $\underline{I} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, ხოლო

$$\bar{I} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$ [1].

$\underline{I}$ ეწოდება დარბუს ქვედა ინტეგრალი, ხოლო $\overline{I}$ ზედა ინტეგრალი, ხოლო I სიდიდეს, როგორც ადრე ვთქვით, რიმანის ინტეგრალი. (2) უტოლობის მიხედვით ცხადია, რომ $\underline{I} \le I \le \overline{I}$.

იბადება კითხვა, არსებობს თუ არა I? ე.ი. არსებობს, თუ არა მოცემული $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე? ამ კითხვაზე პასუხის გაცემისათვის წინასწარ განვიხილოთ დარბუს ჯამების თვისებები.

1). ვთქვათ მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტის რომელიმე დანაწილება და შედგენილია ამ დანაწილებისათვის s, S და σ სიდიდეები. თუ მოცემულ დანაწილებას დავუმატებთ დაყოფის ახალ წერტილებს, მაშინ ქვედა ჯამი არ შემცირდება, ხოლო ზედა ჯამი არ გაიზრდება.[2] ეს თვისება დავამტკიცოთ ქვედა ჯამისათვის. ანალოგიურად დამტკიცდება იგი ზედა ჯამისათვისაც.

ვთქვათ, მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება. ამ დანაწილებისათვის ავაგოთ s, დავუმატოდ $[a, b]$ სეგმენტის ამ დანაწილებას ერთი η წერტილი, რომელიც მოთავსებული

---

[1] ყოველ დანაწილებას შეესაბამება s, S და σ სიდიდეები. სხვა დანაწილებისათვის ისინი სხვადასხვა იქნებიან. ამიტომ შეიძლება მიღებული იქნას ასეთი ჯამების სიმრავლე და შესაძლებელია ლაპარაკი ამ სიმრავლეების ზუსტ ქვედა და ზუსტ ზედა საზღვრებზე გამომდინარე აქედან ინტეგრალი ზოგჯერ განმარტებულია $\{\sigma\}$ სიმრავლის ზუსტი საზღვრების მიხედვით.

[2] მაშასადამე ქვედა ჯამები ქმნიან ზრდად მიმდევრობას, თუ თანდათანობით გავზრდით $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილების რიცხვს, ხოლო ზედა ჯამები ქმნიან კლებად მიმდევრობას.

იქნება Δx_i სეგმენტზე. ასეთი დანაწილების შესაბამისი ჯამი აღვნიშნოთ $s(\eta)$-თი. ასეთ შემთხვევაში გვექნება ტოლობები

$$s = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_{i-1} \Delta x_{i-1} + m_i \Delta x_i + \ldots + m_n \Delta x_n$$

$$s_\eta = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_{i-1} \Delta x_{i-1} + m_\eta (x_\eta - x_{i-1}) +$$
$$+ \overline{m}_\eta (x_i - \eta) + m_{i+1} \Delta x_{i+1} + \ldots + m_n \Delta x_n,$$

სადაც m_η არის მოცემული ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა $[x_{i-1}, \eta]$ სეგმენტზე, $\overline{m}_\eta$ არის მოცემული ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა $[\eta, x_i]$ სეგმენტზე, ხოლო m_i არის მოცემული ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა Δx_i სეგმენტზე. s და s_η განსხვავდებიან შესაბამისად $m_i \Delta x_i$ და $m_\eta (x_\eta - x_{i-1}) + \overline{m}_\eta (x_i - \eta)$ შესაკრებებით.

ცხადია, რომ $m_i \le m_\eta$ და $m_i \le \overline{m}_\eta$. ამ უტოლობებიდან გამომდინარე s_η-ში მოთავსებული განსხვავებული შესაკრებები მეტი იქნება s-ში მოთავსებულ შესაბამის განსხვავებულ შესაკრებზე. მაშასადამე $s_\eta \ge s$. ე.ი. დაყოფის ახალი წერტილის დამატებით ქვედა ჯამი არ შემცირდება. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ ასეთ შემთხვევაში ზედა ჯამი არ გაიზრდება.

2). ერთი და იმავე სეგმენტის რომელიმე დანაწილების შესაბამისი ქვედა ჯამი არ აღემატება ამავე სეგმენტის სხვა დანაწილების ზედა ჯამს.

დამტკიცება. ვთქვათ დანაწილების შესაბამისი დარბუს ქვედა და ზედა ჯამებია s_1 და S_1. $s_1 \le S_1$. განვიხილოთ სხვა დანაწილება, რომლის შესაბამისი დარბუს ჯამები იყოს s_2 და S_2, $s_2 \le S_2$. დავამტკიცოთ, რომ $s_1 \le S_2$ და $s_2 \le S_1$.

განვიხილოთ მესამე დანაწილება, რომელიც მიიღება პირველი დანაწილებისაგან მეორე დანაწილების წერტილთა დამატებით. მესამე დანაწილების ჯამები იყოს s_3 და S_3. ცხადია, რომ $s_3 \le S_3$. ვინაიდან მესამე დანაწილებას ვიხილავთ, როგორც დანაწილებას, მიღებულს I დანაწილებიდან II დანაწილების დამატებით, ამიტომ ცხადია, რომ $s_1 \le s_3 \le S_3$, შესაბამისად $S_1 \ge S_3$. ე.ი.

$$s_1 \le s_3 \le S_3 \le S_1. \qquad (3)$$

ახლა განვიხილოთ მესამე დანაწილება მიღებული II დანაწილებისაგან პირველი დანაწილების დამატებით. ცხადია მივიღებთ $s_2 \le s_3 \le S_3 \le S_2$ (4)

(3) უტოლობიდან გვაქვს $s_3 \le S_1$. თუ ამ პირობას გავითვალისწინებთ (4) უტოლობაში, მივიღებთ $s_2 \le S_1$, ანალოგიურად მივიღებთ უტოლობას $s_1 \le S_2$.

4. ფუნქციის ინტეგრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

თეორემა. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს ინტეგრებადი $[a, b]$ სეგმენტზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0, \qquad (1)$$

სადაც λ არის $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებაში უდიდესი ქვესეგმენტის სიგრძე, s - დარბუს ქვედა ჯამი, S - დარბუს ზედა ჯამი.

ეს თეორემა შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ.

$[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი $\delta(\varepsilon)$ დადებითი რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ დანაწილებისათვის და ξ_i წერტილების შერჩევისათვის, როცა $\lambda < \delta$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას $S - s < \varepsilon$.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადია, ე.ი. არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ და ეს ზღვარი არ არის დამოკიდებული არც სეგმენტის დანაწილების წესზე და არც ξ_i წერტილის შერჩევაზე. ამიტომ ξ_i წერტილებად შეიძლება ავიღოთ ისეთი წერტილები, რომელთათვისაც $f(\xi_i) = m_i$ და $f(\xi_i') = M_i$, სადაც m_i არის $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა Δx_i ქვესეგმენტზე, ხოლო M_i კი $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა ამავე ქვესეგმენტზე. ამ შემთხვევაში $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda \to 0} s$, როცა $f(\xi_i) = m_i$; ხოლო $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda \to 0} S$, როცა $f(\xi_i') = M_i$, რადგანაც $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. მიღებული ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{\lambda \to 0} S - \lim\limits_{\lambda \to 0} s = 0$, ე.ი. $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$. ამით დამტკიცებულია თეორემის აუცილებლობა.

ახლა დავამტკიცოთ საკმარისობა.

ვთქვათ, ადგილი აქვს (1) ტოლობას $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$.

დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. (1) ტოლობა ნიშნავს, რომ $\lim\limits_{\lambda\to 0} S = \lim\limits_{\lambda\to 0} s$. როგორც ვიცით s, σ და S სიდიდეებს შორის არსებობს დამოკიდებულება $s \le \sigma \le S$. თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, მივიღებთ $\lim\limits_{\lambda\to 0} s = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0} S$. ცხადია ამ ტოლობას ადგილი აქვს სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილებისა და წერტილთა ნებისმიერი შერჩევისათვის. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ არსებობს $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma$ და იგი სასრული რიცხვია. ე.ი. მოცემული ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. ამით დამტკიცდა თეორემის საკმარისობა და მთლიანად თეორემაც.

5. ᲡᲔᲒᲛᲔᲜᲢᲖᲔ ᲣᲬᲧᲕᲔᲢᲘ ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲘᲡ ᲘᲜᲢᲔᲒᲠᲔᲑᲐᲓᲝᲑᲐ (ᲘᲜᲢᲔᲒᲠᲔᲑᲐᲓᲝᲑᲘᲡ ᲡᲐᲙᲛᲐᲠᲘᲡᲘ ᲞᲘᲠᲝᲑᲐ)

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ. $[a, b]$ სეგმენტზე ყოველი უწყვეტი ფუნქცია ამ სეგმენტზე ინტეგრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტია. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$. როგორც ვიცით

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i \,. \qquad (1)$$

დავუშვათ, რომ $f(\xi_i)=m_i$ და $f(\bar{\xi}_i)=M_i$. "$\varepsilon-\delta$" ენაზე $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო $\left|f(\xi_i)-f(\bar{\xi}_i)\right|<\varepsilon$, როცა $\left|\xi_i-\bar{\xi}_i\right|<\delta$. რადგან λ არის $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებაში უდიდესი ქვესეგმენტის სიგრძე, ამიტომ $\lambda<\delta$ უტოლობა ნიშნავს, რომ $\left|\xi_i-\bar{\xi}_i\right|<\delta$. (1) ტოლობიდან მივიღებთ

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon\,(b-a). \qquad (2)$$

რადგან ε რაგინდ მცირე რიცხვია, ამიტომ $\varepsilon\,(b-a)$ აგრეთვე რაგინდ მცირე რიცხვი იქნება (ნაცვლად ε-სა თავიდან შეგვეძლო აგვეღო $\frac{\varepsilon}{b-a}$), ამიტომ (2) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$.

თეორემა დამტკიცებულია.

6. ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲘᲡ ᲘᲜᲢᲔᲒᲠᲔᲑᲐᲓᲝᲑᲘᲡ ᲐᲣᲪᲘᲚᲔᲑᲔᲚᲘ ᲞᲘᲠᲝᲑᲐ ᲓᲐ ᲬᲧᲕᲔᲢᲘᲚᲘ ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲘᲡ ᲘᲜᲢᲔᲒᲠᲔᲑᲐᲓᲝᲑᲐ

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ. $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქციის ინტეგრებისათვის აუცილებელია, რომ ეს ფუნქცია იყოს შემოსაზღვრული. (ფუნქციის შემოსაზღვრულობა არ არის ინტეგრებადობის საკმარისი პირობა, რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქცია შეიძლება იყოს შემოსაზღვრული, მაგრამ არ იყოს ინტეგრებადი, ამის მაგალითს ქვემოთ მოვიყვანთ).

დამტკიცება. დავუშვათ თეორემის საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ შეიძლება ამ ფუნქციის რიმანის ინტეგრალური ჯამი ისე შევადგინოთ, რომ ამ ჯამს არ გააჩნდეს სასრული ზღვარი და მაშასადამე,

ფუნქცია არ იქნება ინტეგრებადი. ე.ი. ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის აუცილებელია, რომ ეს ფუნქცია იყოს შემოსაზღვრული. ეს პირობა არ არის ინტეგრებადობის საკმარისი პირობა. ამის დასამტკიცებლად საკმარისი იქნება მოვიყვანოთ მაგალითი ისეთი შემოსაზღვრული ფუნქციისა, რომელიც არ არის ინტეგრებადი.

დავამტკიცოთ, რომ დირიხლეს ფუნქცია არ არის ინტეგრებადი ნებისმიერი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუმცა იგი ამ სეგმენტზე შემოსაზღვრულია.

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია}\\ 0, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია}\end{cases}$$

დირიხლეს ფუნქციაა.

დავწეროთ რიმანის ინტეგრალური ჯამი ამ ფუნქციისათვის

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\begin{cases}b-a, & \text{როცა } \xi_i \text{ რაციონალურია}\\ 0, & \text{როცა } \xi_i \text{ ირაციონალურია.}\end{cases}$$

გამომდინარე აქედან, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ დამოკიდებულია ξ_i წერტილების შერჩევაზე. ამიტომ იგი არ იქნება ინტეგრებადი.

თეორემა. თუ $f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე გააჩნია წყვეტის წერტილთა სასრული რაოდენობა და წყვეტის წერტილებზე ღებულობს სასრულ მნიშვნელობებს, მაშინ იგი ამ სეგმენტზე ინტეგრებადია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგი: $[a, b]$ სეგმენტზე ყოველი მონოტონური ფუნქცია ინტეგრებადია (რადგანაც მონოტონურ ფუნქციას მხოლოდ I გვარის წყვეტის წერტილები გააჩნია, ამიტომ იგი ამ წერტილებში მიიღებს სასრულ მნიშვნელობებს. ასეთ წერტილებში მას სასრული ცალმხრივი ზღვრები გააჩნია).

თეორემის დამტკიცება. დავუშვათ, $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია წყვეტის ერთი წერტილი და იგი მოცემული ფუნქციის სასრული წყვეტის წერტილია. წყვეტის ეს წერტილი აღვნიშნოთ c-თი და დავუშვათ $c\in\Delta x_i$.

განვიხილოთ მოცემული ფუნქციის რიმანის ინტეგრალური ჯამი

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \tag{1}$$

ვთქვათ რომელიმე ξ_i წერტილი ემთხვევა c წერტილს $\xi_i=c$, მაშინ $f(c)$ იქნება სასრული რიცხვი. იმის გამო, რომ $\lambda\to 0$, $f(c)\Delta x_i$ შესაკრები $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ ზღვაზე გავლენას არ მოახდენს. ამით დამტკიცდა, რომ $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ ზღვარი არ იქნება დამოკიდებული დაყოფის წერტილთა შერჩევაზე. დავამტკიცოთ, რომ იგივე ზღვარი არ იქნება დამოკიდებული არც სეგმენტის დანაწილების წესზე.

თუ c დაყოფის ერთ-ერთი წერტილია, მაშინ

$$c\in\Delta x_i=[x_{i-1}, x_i]=[x_{i-1}, c]\cup[c, x_i].$$

ცხადია, რომ ამ ორი ქვესეგმენტის სიგრძეთა ჯამი Δx_i სეგმენტის სიგრძის ტოლია. ამიტომ, როცა $\Delta x_i\to 0$, მაშინ თითოეული ამ ქვესეგმენტის სიგრძეც მიისწრაფვის ნულისკენ.

ამრიგად, სეგმენტის დანაწილებაში წყვეტის წერტილის შერჩევა რიმანის ინტეგრალური ჯამის ზღვარზე გავლენას არ ახდენს.

ანალოგიურად დამტკიცდება თეორემა, როცა $f(x)$ ფუნქციას ექნება არა მხოლოდ ერთი, არამედ სასრული რაოდენობის სასრული წყვეტის წერტილები.

თეორემა დამტკიცებულია. შედეგის მართებულობაც ცხადია.

დამტკიცებული თეორემის ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი *თეორემა. თუ* $f(x)$ *უბან-უბან უწყვეტია* $[a, b]$ *სეგმენტზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია ამავე სეგმენტზე.*

განმარტება. ვიტყვით, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან უწყვეტია ამავე სეგმენტზე, თუ ეს სეგმენტი შეიძლება დავყოთ ისეთ $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ ქვესეგმენტებად, რომ მოცემული ფუნქცია იქნება უწყვეტი ყოველ (x_{i-1}, x_i) ინტერვალზე, ხოლო ინტერვალის ბოლოებზე მას ექნება ცალმხრივი სასრული ზღვრები.

7. განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები

სანამ უშუალოდ გადავიდოდეთ განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებების განხილვაზე, გავიხსენოთ განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტება

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i . \qquad (1)$$

ახლა ჩამოვაყალიბოთ თვისებები.

$$1.\ \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

$$2.\ \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx .$$

მართლაც, განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ზემოთ განხილული λ დანაწილება $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ წერტილებით, λ ამ დანაწილებაში $\underset{x_0}{\overset{a}{|}} \text{—} \underset{x_1}{|} \text{—} \underset{x_2}{|} \ldots \underset{x_{n-1}}{|} \text{—} \underset{x_n}{\overset{b}{|}}$ უდიდესი ქვესეგმენტის სიგრძეა.

როცა ლაპარაკია $\int_b^a f(x)\,dx$ ინტეგრალზე, ამ შემთხვევაში უნდა განვიხილოთ $[b, a]$ სეგმენტის დანაწილება, რადგან $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, იგი ინტეგრებადი იქნება იგივე $[b, a]$ სეგმენტზეც. თუ დანაწილების წერტილებს იგივეს დავტოვებთ, წერტილების დასახელებას კი შევცვლით $a = x'_n < x'_{n-1} < \ldots < x'_2 < x'_1 = b$.

$\underset{x_1}{\overset{a = x'_n}{|}} \text{—} \underset{x_2}{\overset{x'_{n-1}}{|}} \text{—} \underset{x_{n-1}}{\overset{x'_2}{|}} \text{—} \underset{x_n}{\overset{x'_1 = b}{|}}$ ამ შემთხვევაში λ იგივე დარჩა.

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x'_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x'_i - x'_{i-1}) =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_{i-1} - x_i) = -\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= -\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad \text{რ.დ.გ.}$$

ამ თვისებიდან მიიღება I თვისებაც. მართლაც, ახლახან დამტკიცებულ ტოლობაში $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ დავუშვათ,

$b=a$. მივიღებთ $\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx$ აქედან მივიღებთ

$2\int_a^a f(x)\,dx = 0$ ე.ი. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

3. თუ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ინტეგრებადი იქნება $c\cdot f(x)$ ფუნქციაც და ადგილი ექნება ტოლობას $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივაა.

მართლაც, თუ შევადგენთ $c\cdot f(x)$ ფუნქციის რიმანის ინტეგრალურ ჯამს, მაშინ მისთვის σ-ს წარმოდგენაში თითოეულ შესაკრებს თანამამრავლად ექნება c მუდმივი, გამომდინარე აქედან მივიღებთ

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} c\cdot f(\xi_i)\Delta x_i = c\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx.$$

4. თუ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მათი ჯამიც და სხვაობაც იქნება ინტეგრებადი ამავე სეგმენტზე და ადგილი ექნება ტოლობას

$$\int_a^b \big(f_1(x)\pm f_2(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

დამტკიცება. შევადგინოთ რიმანის ინტეგრალური ჯამი $f_1(x)\pm f_2(x)$ ფუნქციისათვის

$$\sum_{i=1}^{n}\big(f_1(\xi_i)\pm f_2(\xi_i)\big)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i.$$

მიღებულ ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\lambda\to 0$. მივიღებთ

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big(f_1(\xi_i)\pm f_2(\xi_i)\big)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\int_a^b \big(f_1(x)\pm f_2(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

მესამე და მეოთხე თვისებები შეიძლება გავაერთიანოთ ასე

$$\int_a^b \big(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\big)dx = c_1\int_a^b f_1(x)\,dx + c_2\int_a^b f_2(x)\,dx$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

ეს თვისებები შესრულდება ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ინტეგრებადი ფუნქციებისათვისაც. კერძოდ, თუ $f_1(x), f_2(x),\dots, f_k(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტებზე, მაშინ ინტეგრებადი იქნება მათი წრფივი კომბინაცია $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_k f_k(x)$ და ადგილი ექნება ტოლობას

$$\int_a^b \big(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_k f_k(x)\big)dx = c_1\int_a^b f_1(x) + {}$$
$$+ c_2\int_a^b f_2(x)\,dx + \dots + c_k\int_a^b f_k(x)\,dx,$$

სადაც $c_1, c_2, \dots, c_k$ ნებისმიერი მუდმივებია.

შევნიშნოთ, რომ ეს თვისება შეიძლება არ შესრულდეს უსასრულო რაოდენობის (თვლადი რაოდენობის) ინტეგრებადი

ფუნქციებისათვის.

5. თუ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი ინტეგრებადი იქნება $[a, b]$ სეგმენტზე და ადგილი ექნება ტოლობას

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{და პირიქით.}$$

ამ თვისების დამტკიცება შეიძლება ზემოთ დამტკიცებული თვისებების ანალოგიურად. დავუშვათ $a < c < b$. შევადგინოთ რიმანის ინტეგრალური ჯამები $f(x)$ ფუნქციისათვის $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ სეგმენტებზე $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$. ვინაიდან დაყოფის წერტილების შერჩევას არა აქვს არსებითი მნიშვნელობა, ამიტომ შეიძლება დავწეროთ ტოლობა $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a < b < c$.

ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx. \quad \text{აქედან მივიღებთ}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{საიდანაც მივიღებთ}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

ეს თვისება შეიძლება განვაზოგადოთ შემდეგნაირად

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_k}^b f(x)\,dx \quad \text{და პირიქით.}$$

იგულისხმება, რომ $f(x)$ ინტეგრებადია ცალ-ცალკე $[a, a_1]$, $[a_1, a_2]$,..., $[a_k, b]$ სეგმენტებზე.

6. თუ $a \le b$ და $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამავე სეგმენტზე ინტეგრებადი იქნება $|f(x)|$ და $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

დამტკიცება. ცხადია, რომ $\big||f(\xi)| - |f(\eta)|\big| \le |f(\xi) - f(\eta)|$ და

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| = \lim_{\lambda \to 0}\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le$$

$$\le \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i = \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad \Delta x_i > 0 \qquad \text{რ.დ.გ.}$$

ნებისმიერი a და b-თვის (შეიძლება $a \ge b$) გვექნება

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

7. თუ $f(x) \ge 0$ და $a \le b$, ამასთან $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a. b]$ სეგმენტზე, მაშინ $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x) \ge 0$ და $\Delta x_i > 0$, ამიტომ რიმანის

ინტეგრალური ჯამიც არაუარყოფითი იქნება $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$. ზღვრის თვისების თანახმად $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$, ანუ $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ რ.დ.გ.

8. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე $f(x) \le \varphi(x)$, $a \le b$, მაშინ $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx$.

დამტკიცება. $[a, b]$ სეგმენტის λ დანაწილებისათვის $f(x) \le \varphi(x)$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta x_i .$$

თუ მოცემულ უტოლობაში გადავალთ ზღვაზე, როცა $\lambda \to 0$, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx .$$

9. $\int_a^b dx = b-a$. მართლაც, თუ რიმანის ინტეგრალურ ჯამში დავუშვებთ $f(x) \equiv 1$, მაშინ $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b-a$.

ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი თვისებები

10. თუ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი იქნება ინტეგრებადი ამ სეგმენტის ნებისმიერ ქვესეგმენტზეც.

11. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამავე სეგმენტზე ინტეგრებადი იქნება $f(x)\cdot g(x)$.

12. თუ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და $|f(x)|$-ის ქვედა საზღვარი $[a, b]$-ზე დადებითია, მაშინ $\frac{1}{f(x)}$ ინტეგრებადი იქნება ამავე სეგმენტზე.

ამ თვისების გამოყენებით შედეგის სახით დამტკიცდება, რომ თუ $f(x)$ აკმაყოფილებს მე-12 თვისებას და $g(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამავე სეგმენტზე ინტეგრებადი იქნება $\frac{g(x)}{f(x)}$.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრული ინტეგრალი არაა დამოკიდებული ინტეგრების ცვლადზე, ე.ი.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi .$$

8. საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა განსაზღვრულ ინტეგრალში

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო ამავე სეგმენტზე ინტეგრებადი $\varphi(x)$ ფუნქცია ნიშანს ინარჩუნებს (ან დადებითია, ან უარყოფითი), მაშინ ამ სეგმენტზე მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (1)$$

დამტკიცება. რადგან $f(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ იგი მიაღწევს თავის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს m-სა და M-ს და მიიღებს ყველა მნიშვნელობას მათ შორის, ე.ი. $m \le f(x) \le M$. გავამრავლოთ ეს უტოლობა $\varphi(x) \ge 0$-ზე, მივიღებთ $m\varphi(x) \le f(x)\varphi(x) \le M\varphi(x)$. ამ უტოლობის ინტეგრებით გვექნება $m\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \le M\int_a^b \varphi(x)\,dx$,

აქედან გამომდინარეობს, რომ $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \le M$. რადგან ამ უტოლობაში წილადი $\dfrac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx}$ მოთავსებულია m და

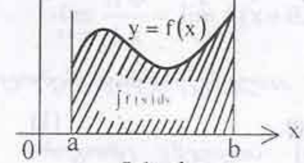
M-ს შორის და $f(x)$ ღებულობს ყველა მნიშვნელობას მათ შორის, ამიტომ $[a, b]$ სეგმენტზე იარსებებს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ აღნიშნული წილადი ტოლი იქნება $f(\xi)$-ს, ე.ი.

$$\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} = f(\xi).$$

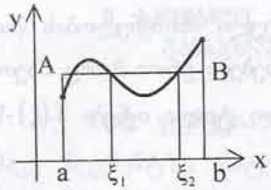
აქედან ვღებულობთ $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx$. თეორემა დამტკიცებულია.

დავუშვათ, (1) ფორმულაში $\varphi(x) \equiv 1$, მაშინ მივიღებთ $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.

გამოვარკვიოთ ამ ტოლობის გეომეტრიული შინაარსი. როგორც ვიცით, $\int_a^b f(x)\,dx$ არის იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x = a$, $x = b$ წრფეებით, $[a, b]$ სეგმენტითა (ანუ $y = 0$ წრფით) და წირით, რომლის განტოლებაა $y = f(x)$, თუ $f(x) \ge 0$ (იხ. ნახ. 1), ხოლო $f(\xi)(b-a)$ არის იმ მართკუთხედის ფართობი, რომლის ფუძეა $[a. b]$ სეგმენტი. სიმაღლე – $f(\xi)$. ამრიგად, მოცემული მრუდწირული



ნახ. 1



ნახ. 2

ტრაპეციის ფართობი უდრის ABba მართკუთხედის ფართობს. ნახაზი 2-ის მიხედვით ξ წერტილად გამოდგება ξ_1 და ξ_2. ცხადია, მრუდწირულ ტრაპეციას და მარკუთხედს საერთო აქვთ [a, b] სეგმენტი და $f(\xi)$ – $f(x)$-ის მნიშვნელობა ξ წერტილში.

9. განსაზღვრული ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით (პირველადის არსებობა)

როცა განსაზღვრული ინტეგრალის ქვედა და ზედა საზღვრები მუდმივი რიცხვებია, მაშინ ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$ მუდმივი რიცხვი იქნება, რომლის სიდიდე დამოკიდებულია მხოლოდ a და b -ზე.

განსაზღვრული ინტეგრალი საინტეგრო ცვლადზე არ არის დამოკიდებული, ამიტომ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$. დავუშვათ $a \le x \le b$ და განვიხილოთ ინტეგრალი $\int_a^x f(t)\,dt$, რომელიც იქნება x -ის ფუნქცია. აღვნიშნოთ

$$\Phi(x) \equiv \int_a^x f(t)\,dt\,. \tag{1}$$

თეორემა. თუ $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა [a, b] სეგმენტზე, მაშინ $\int_a^x f(t)\,dt$ წარმოებადია, როგორც x -ის ფუნქცია და მისი წარმოებული უდრის ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობას ზედა საზღვარზე, ე.ი.

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x), \tag{2}$$

ანუ

$$\Phi'(x) = f(x)\,. \tag{2`}$$

დამტკიცება. არგუმენტს x -ს მივცეთ ნაზრდი Δx და განვსაზღვროთ $\Phi(x)$ ფუნქციის ნაზარდი.

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^a f(t)\,dt +$$

$$+ \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(x+\theta\Delta x)(x+\Delta x - x) = f(x+\theta\Delta x)\Delta x.$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$\Delta\Phi(x) = f(x+\theta\Delta x)\Delta x, \text{ სადაც } 0<\theta<1\,.$$

გავყოთ ეს ტოლობა Δx-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$, მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\theta\Delta x) = f(x), \text{ ე.ი. } \Phi'(x) = f(x)\,.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

როგორც ვხედავთ, $\int_a^x f(t)\,dt$ არის $f(x)$ -ის ერთ-ერთი

პირველადი.

დამტკიცებული თეორემიდან აგრეთვე გამომდინარეობს, რომ ყოველ უწყვეტ ფუნქციას სეგმენტზე აქვს პირველადი, ამიტომ დამტკიცებულ თეორემას უწოდებენ თეორემას პირველადების არსებობის შესახებ.

შენიშვნები. 1. თეორემის დამტკიცებისას გამოვიყენეთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა განსაზღვრულ ინტეგრალში და უწყვეტ ფუნქციაში ფუნქციის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის წესი.

2. როგორც ვხედავთ, ჩვენ გავეცანით ახალ ორ მათემატიკურ ოპერაციას - ინტეგრებას განუსაზღვრელს (გაწარმოების შებრუნებულს) და განსაზღვრულს.

10. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა (ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა)

როგორ გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$? ბუნებრივია, ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ მისი განმარტება, ე.ი. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. მაგრამ ამ ზღვრის გამოთვლა ნებისმიერი ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციისათვის ძალიან შრომატევადია და თითქმის შეუძლებელიც. ასე მაგალითად,

$$\int_{\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i^3}{\sqrt{1-\xi_i^8}}\Delta x_i$$

გამოთვლა არც თუ ისე ადვილია. ამიტომ ისმება კითხვა: ხომ არ არსებობს ისეთი ხერხი, რომლითაც ეს ინტეგრალი და საერთოდ ნებისმიერი განსაზღვრული ინტეგრალი გამოითვლება მარტივად და შედარებით სწრაფად? ამ კითხვაზე პასუხი დადებითია, თუ შესაბამისი განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int f(x)\,dx$ გამოითვლება ელემენტარულ ფუნქციებში.

თეორემა (ნიუტონ-ლეიბნიცის).

თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველადი, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b,$$

ანუ
$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_a^b$$

(ამ ფორმულით აშკარად ჩანს განუსაზღვრელი ინტეგრალების კავშირი განსაზღვრულ ინტეგრალებთან).

თეორემის დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$-ის პირველადია $F(x)$. წინა პარაგრაფის თეორემის თანახმად, $f(x)$ ფუნქციის პირველადი იქნება აგრეთვე $\int_a^x f(t)\,dt$. ამ შემთხვევაში

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c, \tag{1}$$

თანახმად პირველადების თვისებისა.

(1) ტოლობაში დავუშვათ $x=a$ და გავითვალისწინოთ ტოლობა $\int_a^a f(t)\,dt = 0$, მაშინ (1) ტოლობიდან მივიღებთ

$F(a)=0+c$, საიდანაც $F(a)=c$. ამ შემთხვევაში (1) ტოლობა ასეთი იქნება $\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)$. ამ ტოლობაში დავუშვათ $x=b$, მაშინ გვექნება $\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$.

თუ t ცვლადს შევცვლით x-ით, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$. $F(b)-F(a)$ აღვნიშნოთ $F(x)\Big|_a^b$ სიმბოლოთი, რომელიც ასე იკითხება „$F(x)$ ჩასმა a-დან b-მდე“. ამრიგად, $\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=\left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$ ($F(x)$-თან მუდმივ შესაკრებს აღარ ვწერთ). თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ მაგალითები.

1. $\int_1^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_1^2=\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{15}{4}$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos x-7\sin 4x+1)\,dx=\left(3\sin x+\frac{7}{4}\cos 4x+x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$

$$=3\sin\frac{\pi}{2}+\frac{7}{4}\cos 2\pi+\frac{\pi}{2}-3\sin 0-\frac{7}{4}\cos 0-0=3+\frac{\pi}{2}.$$

3. $\int_{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{2}}}^{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}=\frac{1}{4}\arcsin x^4\Big|_{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{2}}}^{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{24}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

გამოთვალეთ

1. $\int_0^1\left(5x^4-12x^3+6x^2-8x+5\right)dx$.

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(3\sin 4x-3\cos 8x-7)\,dx$.

3. $\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{\ell n^3x}{x}+6\ell nx-\frac{1}{e}+5\right)dx$.

4. $\int_0^1\left(\frac{x^3}{1+x^4}-\sqrt{5x-1}+\frac{3}{x+1}-5\right)dx$.

5. $\int_0^1\left(\frac{3x^2}{\sin^3 2}-3\operatorname{tg}^2 51\cdot 5^{x-5}\sin 1\operatorname{ctg} 7+8\right)dx$.

11. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით

გავიხსენოთ ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა. თუ $F(x)$ არის პირველადი $f(x)$ ფუნქციისა, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \qquad (1)$$

ვთქვათ, u და v $[a,b]$ სეგმენტზე წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ, ცხადია, რომ $d(uv)=udv+vdu$. ეს კი ნიშნავს, რომ uv არის პირველადი $udv+vdu$ ფუნქციისა, მაშინ თანახმად (1) ფორმულისა, მივიღებთ

$$\int_a^b (udv+vdu)=(uv)\Big|_a^b.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu. \qquad (2)$$

ფორმულა (2) წარმოადგენს განსაზღვრულ ინტეგრალში ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას.

შევნიშნოთ, რომ u და dv აღნიშვნები უნდა იყოს მოხერხებული (მისადაგი), თორემ მოცემული ინტეგრალი გართულდება.

განვიხილოთ მაგალითები.

გამოვთვალოთ

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1.$$

$u=x,\ \cos x\,dx=dv,$ მაშინ $du=dx$, $v=\int\cos x\,dx=\sin x$

შენიშვნა. რომ შემოგველო აღნიშვნები $\cos x=u,\ xdx=dv$, მაშინ მოცემული ინტეგრალი უფრო გართულდებოდა.

2. $$\int_1^e x^2\ell nx\,dx=\frac{x^3}{3}\ell nx\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e\frac{x^3}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ell nx\Big|_1^e-\frac{1}{9}x^3\Big|_1^e=\frac{e^3}{3}\ell ne-\frac{1^3}{3}\ell n1-\frac{1}{9}e^3+\frac{1}{9}\cdot1^3=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}.$$

$u=\ell nx,\ dv=x^2dx$, $du=\frac{dx}{x},\ v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}$

სავარჯიშოები

გამოთვალეთ

1. $\int_0^1(4x^3+6x^2-8x+4)dx$.
2. $\int_1^4\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(5\sin x+2\cos 6x-1)dx$.

4. $$\int_{\alpha}^{\beta}\left(x^4-\frac{x}{\sqrt[5]{x^3}}+5^x-\frac{3}{4-x^2}+\frac{8}{4+x^2}-\frac{10}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}+\right.$$

$$+\frac{4}{\cos^2 7x}+\frac{3}{\sin^2 8x}+\frac{5}{\sin 10x}-\frac{2}{\cos 6x}+5\sin 3x-4\cos 12x-$$

$$\left.-5\,\mathrm{tg}\,2x+\frac{1}{x^4\sqrt[5]{x^3}}+6\,\mathrm{ctg}\,7x+\frac{2}{x^{12}}-3\sqrt{x}+7\right)dx.$$

იპოვეთ α და β-ს დასაშვები მნიშვნელობებიც.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin x\,dx$.   6. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} x^2\cos x\,dx$.   7. $\int_e^{e^2} x^4\ell nx\,dx$.

8. $\int_0^1 xe^x\,dx$.   9. $\int_0^1 \mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$.

10. $\int_{-10}^{10}\left(x\cos x-5x^3+x^2\sin x\right)dx$.

12. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ჩასმის ხერხით

თეორემა. ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ $x=\varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, ამასთანავე $a\le\varphi(t)\le b$, როცა $\alpha\le t\le\beta$ და $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, მაშინ

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\ . \qquad (1)$$

დამტკიცება. თეორემის პირობებში $f(x)$ ფუნქცია t-ს რთული ფუნქციაა, რადგანაც $\varphi(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე შედის $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეში. განვიხილოთ t ცვლადის ორი ფუნქცია

$$F(t)=\int_a^{\varphi(t)} f(x)\,dx \qquad (2)$$

და
$$\Phi(t)=\int_{\alpha}^{t} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \qquad (3)$$

ცხადია, რომ $F(t)$ ფუნქცია დამოკიდებულია φ ცვლადზე, ხოლო φ თავის მხრივ დამოკიდებულია t-ზე ე.ი. F არის t ცვლადის რთული ფუნქცია. $F(t)$ და $\Phi(t)$ ცვლადი ზედა საზღვრის მქონე ინტეგრალებია. ამიტომ (2) და (3) ტოლობების გაწარმოებით მივიღებთ

$$F'(t)=F'(\varphi)\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

$$\Phi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $F(t)$ და $\Phi(t)$ ფუნქციების წარმოებულები ერთმანეთის ტოლია. ამიტომ $F(t)=\Phi(t)+c$ (ერთ და იგივე ფუნქციის პირველადები ერთმანეთისაგან მუდმივით განსხვავდება).

ჩავსვათ ამ ტოლობაში $F(t)$ და $\Phi(t)$-ს მნიშნელობები, (2) და (3)-ს მიხედვით მივიღებთ

$$\int_a^{\varphi(t)} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{t} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt+c \qquad (4)$$

დავუშვათ $t=\alpha$, მაშინ (4) ტოლობიდან მივიღებთ, $c=0$, რადგან $\varphi(\alpha)=a$. ამრიგად, (4) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\int_a^{\varphi(t)} f(x)\,dx = \int_\alpha^t f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \,. \qquad (5)$$

მიღებულ (5) ტოლობაში დავუშვათ $t=\beta$ და გავითვალისწინოთ ის, რომ $\varphi(\beta)=b$, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \,.$$

მივიღეთ დასამტკიცებელი (1) ფორმულა (ჩასმა უნდა იყოს მისადაგი, რომ ინტეგრალი არ გართულდეს).

შენიშვნა. ცხადია შეიძლებოდა $\int_a^b f(x)\,dx$ გამოგვეთვალა პირდაპირ შესაბამისი განუსაზღვრელი ინტეგრალით, ე.ი. შეიძლებოდა გამოგვეთვალა განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int f(x)\,dx$ და შემდეგ მოგვეხდინა ჩასმა. მაგრამ (1) ფორმულით მოცემული ინტეგრალი დავიყვანეთ ახალ ინტეგრალზე, შესაძლოა უფრო მარტივზე, როგორც ეს ხდება ხოლმე.

განვიხილოთ მაგალითი.

გამოვთვალოთ

$$\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25-25\sin^2 t}\,5\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 25\cos^2 t\,dt = \frac{25}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{25}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{25}{4}\pi.$$

ავღნიშნოთ

$x = 5\sin t$

$dx = 5\cos t\,dt$

როცა $x=0$, მაშინ $t=0$

როცა $x=5$, მაშინ $t=\frac{\pi}{2}$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

გამოთვალეთ

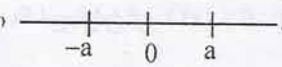
1. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. 2. $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$.

3. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}$. 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$. 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

6. $\int_0^1 |x-1|\,dx$. 7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right)dx$.

8. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

13. განსაზღვრული ინტეგრალი ლუწი და კენტი ფუნქციებიდან სიმეტრიული საზღვრების შემთხვევაში

დავუშვათ, $f(x)$ $[-a, a]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ინტეგრებადი ფუნქციაა. ცხადია, $[-a, a]=[-a, 0]\cup[0, a]$. ქვესეგმენტები $[-a, 0]$ და $[0, a]$, ასევე $-a$ და a რიცხვები სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ , $a>0$.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{როცა } f(x) \text{ ლუწია} \\ 0, & \text{როცა } f(x) \text{ კენტია.} \end{cases} \tag{1}$$

ცხადია, რომ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$. (2)

ამ ტოლობის პირველი შესაკრები, ჩასმით $x=-t,\ dx=-dt$, ასე დაიწერება

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \begin{cases} \int_{0}^{a} f(t)\,dt, & \text{თუ } f \text{ ლუწია} \\ -\int_{0}^{a} f(t)\,dt, & \text{თუ } f \text{ კენტია.} \end{cases}$$

მიღებული ტოლობები გავითვალისწინოთ (2)-ში.

ვთქვათ, $f(x)$ ლუწია, მაშინ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

ვთქვათ, ახლა $f(x)$ კენტია, მაშინ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

მივიღეთ დასამტკიცებელი (1) ტოლობა.

განვიხილოთ მაგალითები.

1. $\int_{-10}^{10} \frac{x^3\cos^2 7x\, \mathrm{tg}^4 2x}{\sqrt{1+x^2+5x^4}}\,dx = 0$. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია.

ამ ინტეგრალის გამოთვლა ალბათ შეუძლებელი იქნებოდა, რომ არ გამოგვეყენებინა (1) ფორმულა.

$$\int_{-1}^{1} \left(51x^5 + 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 17x + 3\right)dx =$$

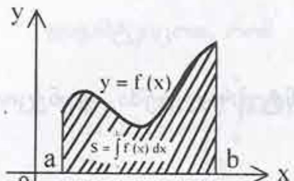
$$= 2\int_{0}^{1} \left(5x^4 + 6x^2 + 3\right)dx = 2\left(1+2+3\right) = 12, \quad \text{რადგანაც}$$

$\int_{-1}^{1} \left(51x^5 - 12x^3 - 17x\right)dx = 0$, როგორც ინტეგრალი კენტი ფუნქციიდან.

14. ᲒᲐᲜᲡᲐᲖᲦᲕᲠᲣᲚᲘ ᲘᲜᲢᲔᲒᲠᲐᲚᲘᲡ ᲖᲝᲒᲘᲔᲠᲗᲘ ᲒᲐᲛᲝᲧᲔᲜᲔᲑᲐ

1. ᲤᲐᲠᲗᲝᲑᲘᲡ ᲒᲐᲛᲝᲗᲕᲚᲐ ᲒᲐᲜᲡᲐᲖᲦᲕᲠᲣᲚᲘ ᲘᲜᲢᲔᲒᲠᲐᲚᲘᲡ ᲒᲐᲛᲝᲧᲔᲜᲔᲑᲘᲗ

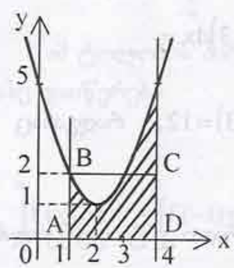
გავიხსენოთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა. როგორც ვიცით თუ $y = f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე $f(x) \ge 0$, მაშინ ინტეგრალი $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ გამოსახავს იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც



შემოსაზღვრულია წრფეებით $y=0,\ x=a,\ x=b$ და წირით $y=f(x)$, ე.ი.

$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვთვალოთ ფართობი არისა, რომელიც



შემოსაზღვრულია $x=1,\ x=4,\ y=0$ წრფეებით და პარაბოლით $y=x^2-4x+5$. ამ პარაბოლის შტოები მიმართულია ზემოთ. მისი წვერო ძევს (2;1) წერტილზე. ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$S=\int_1^4\left(x^2-4x+5\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x\right)\Big|_1^4=$$

$$=\frac{64}{3}-32+20-\frac{1}{3}+2-5=6\ (\text{კვ.ერთ}).$$

აქ ერთ საინტერესო ფაქტზე მივუთითოთ. მოვნახოთ მართკუთხედი, რომლის ფართობი ამ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს უდრის. რადგან მართკუთხედის ფუძის სიგრძეა 3 ერთეული, ფართობი კი 6 კვ. ერთ, ამიტომ საძიებელი მართკუთხედის სიმაღლე იქნება 2 ერთეული. ეს არის ABCD მართკუთხედი.

გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა განსაზღვრულ ინტერგალში

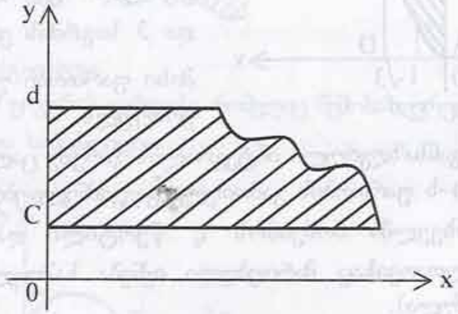
$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)\,(b-a).$$

ჩავსვათ ჩვენი მონაცემები

$6=\left(\xi^2-4\xi+5\right)\cdot 3$ ანუ $\xi^2-4\xi+3=0$, აქედან $\xi_1=1,\ \xi_2=3$. ამრიგად, არსებობს ორი ξ, რომლებიც მოცემულ ფორმულას ხდის მართებულს.

შევნიშნოთ, რომ განხილულ ამოცანაში საინტეგრო ცვლადს წარმოადგენდა x. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა საინტეგრო ცვლადი იქნება y. ვთქვათ, ფიგურა შემოსაზღვრულია $x=0,\ y=c,\ y=d$ წრფეებით და $x=\varphi(y)$ წირით. მოცემული ფიგურის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_c^d \varphi(y)\,dy.$$



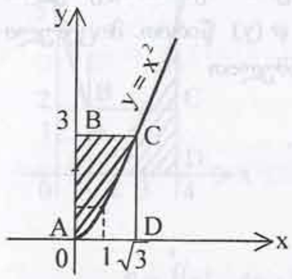
მაგალითად, გამოვთვალოთ ფართობი ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=0,\ y=3,\ x=0$ და $x=\sqrt{y}$ წირებით.

$$S=\int_0^3\sqrt{y}\,dy=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{2}{3}\sqrt{27}=2\sqrt{3}\quad(\text{კვ.ერთ.})$$

ე.ი. საძიებელი ფართობია $S_{ABC}=2\sqrt{3}$. (კვ. ერთ.).

$x=\sqrt{y}$ განტოლებიდან $y=x^2$, როცა $y=3$, მაშინ $x=\sqrt{3}$, როცა $y=0$, მაშინ $x=0$. ვიპოვოთ ACD ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=0,\ x=0,\ x=\sqrt{3}$ და $y=x^2$ წირებით.

$$S_{ACD}=\int_0^{\sqrt{3}}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}-0=\sqrt{3} \quad (\text{კვ. ერთ.}).$$



ცხადია, ფართობი ABCD მართკუთხედისა იქნება $2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ (კვ. ერთ.) ამ მართკუთხედის ფართობი ასეც გამოითვლება. რადგან მართკუთხედის გვერდები უდრის $\sqrt{3}$ და 3 სიგრძის ერთეულს, ამიტომ მისი ფართობი უდრის $3\sqrt{3}$ კვ. ერთეულს.

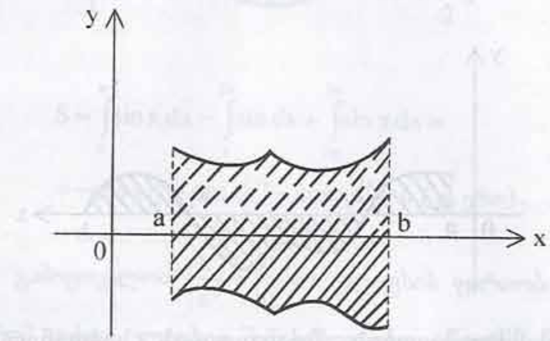
განსაზღვრული ინტეგრალის გარეშე ცალ-ცალკე ABC და ACD-ს ფართობის გამოთვლა გაგვიძნელდებოდა. (სასურველია მკითხველმა მოძებნოს ξ წერტილი და მართკუთხედი, როელთათვისაც მართებული იქნება საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა).

ახლა გამოვთვალოთ ბრტყელი ფიგურის ფართობი სხვადასხვა შემთხვევაში.

1. დავუშვათ ბრტყელი ფიგურა მოთავსებულია OX ღერძის ქვემოთ, ე.ი. $f(x)\le 0$. ვიპოვოთ ფიგურა, რომელიც სიმეტრიული იქნება OX ღერძის მიმართ და გავითვალისწინოთ, რომ ასეთი

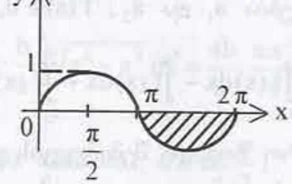
სიმეტრიული ფიგურები ტოლდიდია. მივიღებთ მრუდწირულ ტრაპეციას, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=a,\ x=b,\ y=0$ წრფეებით და წირით, რომლის განტოლებაა $y=-f(x)\ge 0$, მაშინ საძიებელი ფიგურის ფართობი ასე გამოითვლება

$$S=\int_a^b(-f(x))\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx\equiv\int_a^b|f(x)|\,dx,\quad \text{როცა}\quad a<b.$$



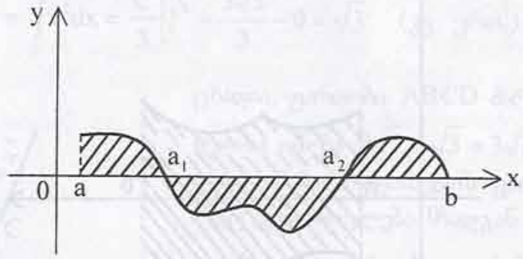
განვიხილოთ მაგალითი.

გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $[\pi;2\pi]$ სეგმენტითა და სინუსოიდით.



$$S=-\int_\pi^{2\pi}\sin x\,dx=\cos x\Big|_\pi^{2\pi}=2 \quad (\text{კვ. ერთ.})$$

2. დავუშვათ, განსახილველი ფიგურა ისეთია, რომ მისი ერთი ნაწილი მოთავსებულია ox ღერძის ზემოთ, ხოლო მეორე ნაწილი კი მის ქვემოთ. ე.ი. f (x) ფუნქცია საინტეგრაციო [a, b] სეგმენტზე ნიშანს იცვლის. ასეთ შემთხვევაში [a, b] სეგმენტი უნდა დავყოთ ისეთ ქვესეგმენტებად, რომ თითოეულ მათგანში f (x) ფუნქცია ნიშანს ინარჩუნებდეს.

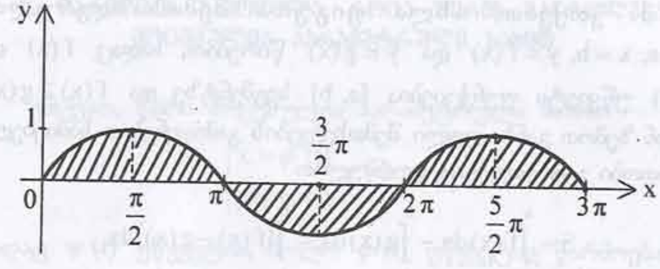


ნიშანმუდმივობის შუალედების საპოვნელად კი ჩვეულებრივად ვიპოვოთ მოცემული წირის ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები, ე.ი. ამოვხსნათ განტოლება $f(x)=0$. საძიებელი ფართობი ტოლი იქნება ცალკეული ქვესეგმენტის შესაბამისი ფიგურების ფართობთა ჯამისა. ვთქვათ $f(x)=0$ განტოლების ფესვებია a_1 და a_2, $f(a)\geq 0$, $f(b)\geq 0$, მაშინ

$$S=\int_a^{a_1} f(x)\,dx-\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx+\int_{a_2}^{b} f(x)\,dx.$$

შეიძლება უფრო ზოგადი შემთხვევის განხილვაც.

მაგალითები. ა). გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\sin x$ წირით, $0\leq x\leq 3\pi$.



$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin dx+\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx=$$

$$=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}-\cos x\Big|_{2\pi}^{3\pi}=6\ (\text{კვ.ერთ}).$$

ბ) გამოვთვალოთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის ფართობი (უფრო უკეთ რომ ვთქვათ, ელიფსით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი).

მისი განტოლებიდან $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. + აიღება ელიფსის ზედა ნაწილისათვის, − კი ქვედა ნაწილისათვის. რადგან ელიფსი სიმეტრიულია კოორდინატთა ღერძების მიმართ, ამიტომ ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=4\cdot\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\pi ab$$

(გამოვიყენეთ ჩასმა $x=a\sin t,\ 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$).

ამრიგად, ელიფსის ფართობი $S=\pi ab$, როცა $a=b=R$, მაშინ ელიფსი R რადიუსიან წრედ გადაიქცევა, და მივიღებთ

$$S=\pi RR=\pi R^2.$$

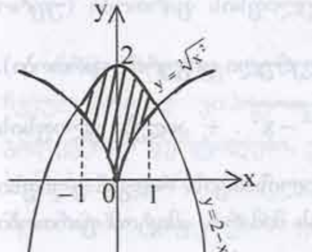
3. ვთქვათ, ახლა ფიგურა შემოსაზღვრულია $x = a, x = b, y = f(x)$ და $y = g(x)$ წირებით, სადაც $f(x)$ და $g(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე და $f(x) \geq g(x)$. მაშინ ზემოთ განხილული შემთხვევების გამოყენებით საძიებელი ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx.$$

მაგალითი.

გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = 2 - x^2$, $y = \sqrt[3]{x^2}$ წირებით.

ავაგოთ მოცემული წირები და ვიპოვოთ საძიებელი ფიგურა. მოვძებნოთ ინტეგრების საზღვრები. ამისათვის საჭიროა ვიპოვოთ მოცემული წირების გადაკვეთის წერტილების აბსცისები. ამ მიზნით ამოვხსნათ განტოლება $2 - x^2 = \sqrt[3]{x^2}$. მისი ფესვებია $x_1 = -1$ და $x_2 = 1$. როგორც ვხედავთ, ეს ფიგურა შემოსაზღვრულია $x = -1, x = 1$ წრფეებით და წირებით $y = 2 - x^2$, $y = \sqrt[3]{x^2}$, $2 - x^2 \geq \sqrt[3]{x^2}$.



ამრიგად,

$$S = \int_{-1}^{1}\left(2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)dx = 2\int_0^1\left(2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)dx =$$

$$= 2\left(2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) = \frac{32}{15} \quad (\text{კვ} \cdot \text{ერთ})$$

2. ფართობის გამოთვლა, როცა წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

ვთქვათ, წირი მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

სადაც $\psi(t)$ უწყვეტია, ხოლო $\varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. გარდა ამისა, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. დავამტკიცოთ, რომ $x = a, x = b$ წრფეებით, OX ღერძითა და მოცემული წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2}$$

თუ (1) სისტემიდან გამოვრიცხავთ t ცვლადს, მივიღებთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $y = f(x)$ ფუნქციას, ეს განტოლება იქნება მოცემული წირის განტოლება ცხადი სახით. ასეთ შემთხვევაში მოცემული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

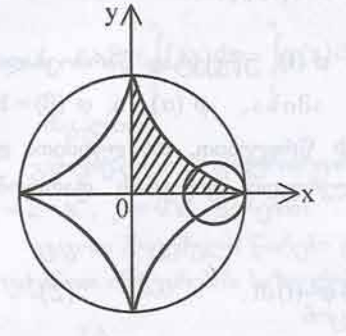
$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx.$$

მიღებულ ინტეგრალში $x = \varphi(t)$ ჩასმით და ჩასმის ხერხით განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის ფორმულით მიიღება (2) ფორმულა.

განვიხილოთ მაგალითი. 1. ვიპოვოთ ასტროიდით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

ასტროიდა ეწოდება წირს, რომელიც მიიღება R

რადიუსიანი წრეწირის შიგნით $\frac{R}{4}$ რადიუსიანი წრეწირის ფიქსირებული წერტილის ტრაექტორიით პატარა წრეწირის ბრუნვისას დიდი წრეწირის შიგნით. ასტროიდის განტოლება



$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0;\, 2\pi].$$

რადგან ასტროიდა სიმეტრიულია კოორდინატთა ღერძების მიმართ, ამიტომ საძიებელი ფართობი ასე გამოვთვალოთ

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} R\sin^3 t\,(R\cos^3 t)'\,dt = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} R\sin^3 t\, 3R\cos^2 t\sin t\,dt =$$

$$= 12R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = 12R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 2t\right)(1-\cos 2t)\,dt = \frac{3}{2}R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot(1-\cos 2t)\,dt = \frac{3}{2}R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 4t\cos 2t\right)\cdot$$

$$\cdot\, dt = \frac{3}{2}R^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi R^2,$$

რადგან $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,$

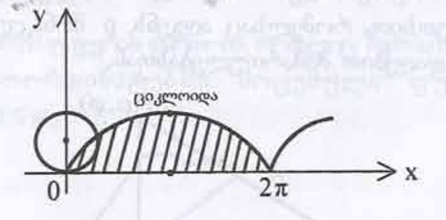
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t\,dt = \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t+\cos 6t)\,dt = \left(\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{12}\sin 6t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

ამრიგად, ასტროიდით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი $= \frac{3}{8}\pi R^2$ (ასტროიდის განტოლება მართკუთხა კოორდინატებში ასე იწერება $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{R^2}$).

2. ვიპოვოთ ციკლოიდის ერთი რკალითა და OX ღერძით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

ციკლოიდა მიიღება R რადიუსიანი წრეწირის ფიქსირებული წერტილის ტრაექტორიით, როცა ეს წრეწირი OX ღერძზე გორავს.



მისი განტოლება ასეთია

$$\begin{cases} x = R(t-\sin t) \\ y = R(1-\cos t) \end{cases} \quad t \in [0;\, 2\pi].$$

$$S=\int_0^{2\pi} R(1-\cos t)R(1-\cos t)dt = R^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

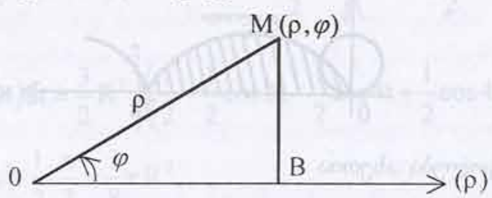
$$= R^2\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi = 3\pi R^2$$

(ციკლოიდის განტოლება მართკუთხა კოორდინატებში ასე იწერება $x = R\arccos\frac{R-y}{R} - \sqrt{2Ry-y^2}$).

3. ფართობი პოლარულ კოორდინატებში

სიბრტყეზე გარდა მართკუთხა კოორდინატთა სისტემისა განიხილება პოლარულ კოორდინატთა სისტემა, რომელშიც წერტილის მდებარეობა ცალსახად განისაზღვრება პოლარული კოორდინატებით. პოლარულ კოორდინატებს წარმოადგენენ ρ და φ სიდიდეები, სადაც $0 \le \rho \le \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

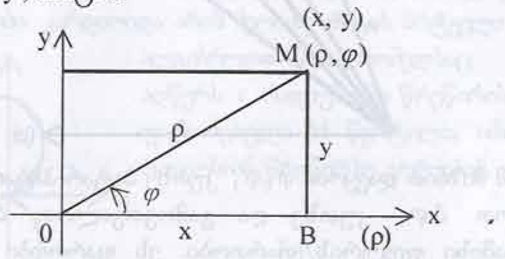
სიბრტყეზე ავიღოთ სხივი. საწყის წერტილს ვუწოდოთ პოლუსი, ხოლო თვით სხივს პოლარული ღერძი. წერტილის მდებარეობა განვსაზღვროთ მანძილით პოლუსიდან წერტილამდე და φ კუთხით, რომელსაც ადგენს ρ მონაკვეთი პოლარული ღერძის დადებით მიმართულებასთან.



შეიძლება დავამყაროთ კავშირი მართკუთხა და პოლარულ კოორდინატებს შორის. ავაგოთ მართკუთხა კოორდინატთა

სისტემა ისე, რომ პოლარული ღერძი დაემთხვეს ox ღერძს, ხოლო პოლუსი - მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავეს.

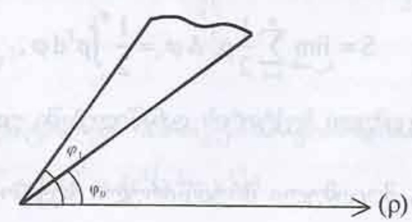
M წერტილის მდებარეობა თითოეული სისტემის მიმართ შესაბამისად განისაზღვრება კოორდინატებით $M(x, y)$ და $M(\rho, \varphi)$. ცხადია, OMB მართკუთხა სამკუთხედიდან $OB = x$, $MB = y$, ამიტომ



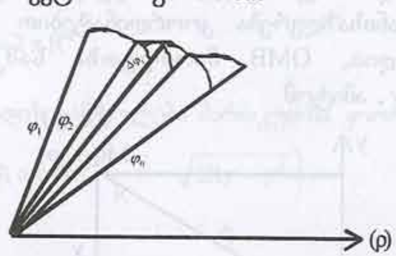
$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases} \quad \text{საიდანაც}$$

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{cases}$$

განვიხილოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია პოლარულ კოორდინატებში მოცემული ფუნქციით $\rho=f(\varphi)$ $\varphi_0\le\varphi\le\varphi_1$



ვთქვათ, ფიგურა შემოსაზღვრულია $\varphi=\varphi_0$, $\varphi=\varphi_1$ სხივებითა და $\rho=f(\varphi)$ წირით. გამოვთვალოთ მოცემული მრუდწირული სექტორის ფართობი.



ამ მიზნით დავყოთ $\varphi_0\varphi_1$ კუთხე პატარ-პატარა კუთხეებად. ავიღოთ $\Delta\varphi_i$ კუთხე და გამოვთვალოთ $\Delta\varphi_i$ კუთხის შესაბამისი ფიგურის ფართობი. ეს ფართობი მიახლოებით შევცვალოთ წრიული სექტორის ფართობით. ცხადია, ამ წრიული სექტორის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S_i=\frac{1}{2}\rho_i\rho_i\sin\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\varphi_i,\text{ როცა } \Delta\varphi_i \text{ მცირეა}$$

$$(\sin\Delta\varphi_i\approx\Delta\varphi_i).$$

მოცემული მრუდწირული სექტორის ფართობად მივიღოთ მასში ჩახაზული პატარ-პატარა წრიული სექტორების ფართობთა ჯამის ზღვარი, როცა λ_φ - დაყოფის უდიდესი კუთხის სიდიდე მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამ განმარტების მიხედვით მოცემული მრუდწირული სექტორის ფართობი იქნება

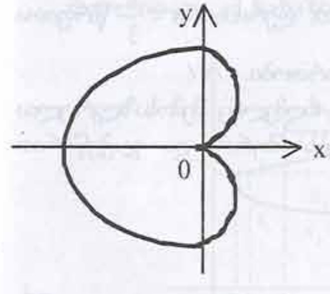
$$S=\lim_{\lambda_\varphi\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\rho^2 d\varphi,$$

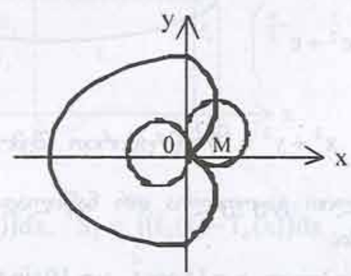
სადაც λ_φ მოცემული სექტორის დანაწილებაში უდიდესი კუთხის სიდიდეა.

ამრიგად, მოცემული მრუდწირული სექტორის ფართობი

გამოითვლება ფორმულით $S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\rho^2 d\varphi$ (ალბათ, მკითხველი შენიშნავს ანალოგიას მრუდწირული ტრაპეციის ფართობისა და მრუდწირული სექტორის ფართობის განმარტებებს შორის).

გამოვთვალოთ $\rho=2r(1-\cos\varphi)$ კარდიოიდით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი. კარდიოიდა არის მეოთხე რიგის ბრტყელი ალგებრული წირი, რომელსაც აღწერს r რადიუსიანი წრეწირის ფიქსირებული M წერტილი, იმავე რადიუსიან წრეწირზე გორვისას.





რადგან მოცემული ფიგურა სიმეტრიულია პოლარული ღერძის მიმართ, ამიტომ

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}4r^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi=4r^2\int_0^{\pi}\left(1-2\cos\varphi+\frac{1+\cos^2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$
$$=4r^2\cdot\frac{3}{2}\pi=6\pi r^2$$

(კარდიოიდის განტოლება მართკუთხა კოორდინატებში ასე იწერება $\left(x^2+y^2+2rx\right)^2=4r^2\left(x^2+y^2\right)$).

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. გამოთვალეთ R რადიუსიანი წრის ფართობი.

2. იპოვეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ox ღერძით, $x = 1$, $x = e$ წრფეებით და $y = \frac{1}{x}$ ჰიპერბოლით.

3. ფიგურა შემოსაზღვრულია ox ღერძით, $x = \frac{\pi}{3}$ წრფითა და ტანგენსოიდით. იპოვეთ მისი ფართობი.

4. იპოვეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x = a$ წრფით, ox და oy ღერძებს შორის და ჯაჭვწირით $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

5. $x^2 + y^2 = 16$ წრეწირით შემოსაზღვრული არე $y = \frac{x^2}{2}$ პარაბოლით გაყოფილია ორ ნაწილად. იპოვეთ ორივე ნაწილის ფართობი.

6. იპოვეთ $x = 15\cos t$, $y = 10\sin t$ წირით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

7. იპოვეთ $r = ae^{\varphi}$ ლოგარითმული ხვიით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი, სადაც $-\pi \le \varphi \le \pi$.

8. იპოვეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = x^2 - 4x$ წირითა და $y = 2x - 5$ წრფით.

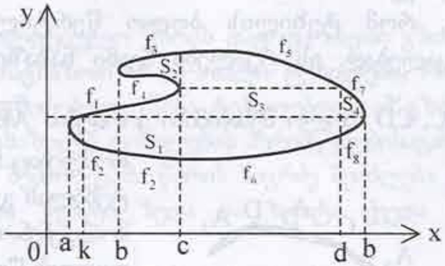
9. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = x^2 + 4x - 3$ და $y = -x^2 - 2x + 5$ პარაბოლებით.

ყველა შემთხვევაში გამოხაზეთ ფიგურები.

4. ბრტყელი ფიგურის ფართობი ზოგად შემთხვევაში

ვთქვათ ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია ისეთი, წირით, რომლის განტოლება $y = f(x)$ სახით არ დაიწერება. ასეთ შემთხვევაში ეს ფიგურა უნდა დავყოთ ისეთ ნაწილებად, რომ თითოეულ ნაწილზე შეიძლებოდეს უკვე განხილული შემთხვევების გამოყენება.

მაგალითად, ამ ნახაზის მიხედვით გვექნება



$$S_1 = \int_a^c (f_1(x) - f_2(x))dx, \quad S_2 = \int_b^c (f_3(x) - f_4(x))dx,$$

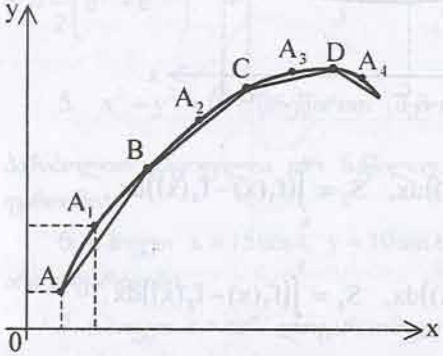
$$S_3 = \int_c^d (f_5(x) - f_6(x))dx, \quad S_4 = \int_d^b (f_7(x) - f_8(x))dx.$$

ცხადია, რომ $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

5. წირის რკალის სიგრძის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალით. რკალის დიფერენციალი

ვთქვათ, მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტად წარმოებადი $y = f(x)$ ფუნქცია, რომლის გრაფიკი წარმოადგენს გლუვ წირს. ეს ისეთი წირია, რომლის ყოველ წერტილზე გაივლება მხები. ვიპოვოთ ამ წირის სიგრძე. ამ მიზნით მასში ჩავხაზოთ ისეთი ტეხილი, რომლის ბოლოები ამავე წირზე ძევს.

ცხადია, რომ ტეხილის ბოლო წერტილებით წირი დაიყოფა რკალებად. ეს რკალები ჩვენი ნახაზის მიხედვით არის $\breve{AB}, \breve{BC}, \breve{CD}$ ხოლო შესაბამისი ქორდებია $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD},\ldots,$



რომლებიც ჩახაზული ტეხილის გვერდებს წარმოადგენენ. თუ წირის დაყოფის წერტილებს შორის დავუმატებთ დაყოფის ახალ წერტილებს, თითოს მაინც, მაშინ მივიღებთ ახალ ტეხილს. ამ გზით მიიღება ტეხილების მიმდევრობა. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ტეხილის გვერდების სიგრძეები მისწრაფვიან ნულისაკენ. აღვნიშნოთ ჩახაზული ტეხილების პერიმეტრები $P_1, P_2,\ldots, P_n,\ldots$; თუ $P_1 = \overline{AB}+\overline{BC}+\ldots$ მაშინ $P_2 = \overline{AA_1}+\overline{A_1B}+\overline{BA_2}+\overline{A_2C}+\ldots$. ადვილი მისახვედრია, რომ $P_1 < P_2 < \ldots < P_n < \ldots$

მოცემული წირის სიგრძე განვმარტოთ როგორც ზღვარი

(P_n) მიმდევრობისა, როცა $n \to \infty$. აღვნიშნოთ λ-თი ნებისმიერი ჩახაზული ტეხილის უდიდესი გვერდის სიგრძე, ხოლო ℓ-ით წირის სიგრძე. განმარტების თანახმად

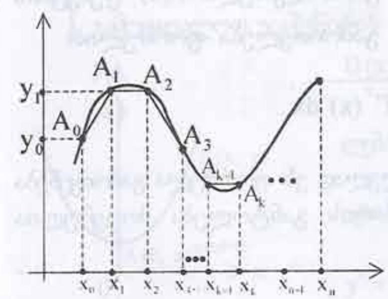
$$\ell = \lim_{n\to\infty} P_n . \qquad (1)$$

თუ ეს ზღვარი არსებობს, სასრული რიცხვია და არაა დამოკიდებული წირის რკალებად დაყოფის წესზე და დაყოფის ახალი წერტილების დამატებაზე, მაშინ იტყვიან რომ მოცემული წირი გაწრფევადია და მისი სიგრძე ℓ განიმარტება (1) ტოლობით.

არაა სავალდებულო წირის დაყოფა ასეთი გზით. შეიძლება ნებისმიერად ჩავხაზოთ ახალ-ახალი ტეხილები, რომლებიც არ იქნებიან დაკავშირებული წინა ტეხილებთან. ამ გზით შეიძლება შევადგინოთ ჩახაზული ტეხილების პერიმეტრებისაგან შედგენილი სიმრავლე. ამ შემთხვევაში წირის სიგრძე შეიძლება განვმარტოთ ამ სიმრავლის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრების გამოყენებით.

ახლა გამოვიყვანოთ წირის სიგრძის ფორმულა. ამისათვის ვიპოვოთ მოცემული წირის დაყოფის წერტილების კოორდინატები.

ვთქვათ, წირის დაყოფის წერტილების აბსცისებია $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, ხოლო ორდინატები $y_0, y_1, y_2,\ldots, y_n$.



მოვიშველიოთ ნახაზი. განვიხილოთ Δx_k ქვესეგმენტის შესაბამისი რკალი და ქორდა-ტეხილის გვერდი. გამოვთვალოთ ამ ქორდის სიგრძე ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულისა და ლაგრანჟის თეორემის გამოყენებით, მივიღებთ

$$r_k = |A_{k-1} - A_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} =$$
$$= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} =$$
$$= \sqrt{\Delta x_k^2 + f'^2(\xi_k)\Delta x_k^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,$$

სადაც $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$. მაშინ ცხადია, რომ ამ რომელიმე ტეხილის პერიმეტრი

$$P = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k .$$

მიღებული ჯამი წარმოადგენს $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ ფუნქციის რიმანის ინტეგრალურ ჯამს $[a, b]$ სეგმენტზე. გამოვიყენოთ (1) ფორმულა და განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტება, მივიღებთ

$$\ell = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx .$$

ჩვენ დავუშვათ, რომ $f(x)$ უწყვეტად წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ფუნქცია $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ იქნება ინტეგრებადი ამავე სეგმენტზე.

ამრიგად, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის - წირის სიგრძე ℓ გამოითვლება ფორმულით

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx . \qquad (2)$$

წირის სიგრძის გამოსათვლელად ეს ფორმულა გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა ამ წირის განტოლება მოცემულია ცხადი $y = f(x)$ სახით.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

ამ შემთხვევაში გამოვიყენოთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულა

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad dx = \varphi'(t)\,dt .$$

მიღებული ტოლობების გათვალისწინებით (2) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

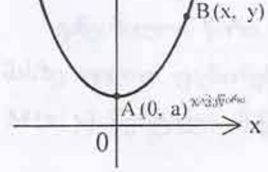
$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt . \qquad (3)$$

ანალოგიურად გამოითვლება წირის სირგძე, თუ მისი განტოლება ჩაწერილია პოლარულ კოორდინატებში $\rho = f(\theta)$ სახით, $\varphi_0 \le \theta \le T$, მაშინ

$$\ell = \int_{\varphi_0}^{T} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta . \qquad (4)$$

განვიხილოთ მაგალითები.

1. გამოვთვალოთ ჯაჭვწირის სიგრძე $A(0, a)$ წერტილიდან $B(x, y)$ წერტილამდე. მისი განტოლება $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. ვისარგებლოთ (2) ფორმულით.



$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \text{ მაშინ}$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

$$\ell=\frac{1}{2}\int_0^x\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),\ \ x\in R,\ x<\infty.$$

2. გამოვთვალოთ ციკლოიდის ერთი რკალის სიგრძე

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

ცხადია, $\begin{cases}x'_t=a(1-\cos t)\\ y'_t=a\sin t.\end{cases}$

(3) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

3. მე-4 ფორმულის გამოყენებით ვიპოვოთ კარდიოდის სიგრძე, თუ მისი განტოლებაა $\rho=a(1-\cos\theta)$. ox ღერძის მიმართ მისი სემეტრიულობის გამო

$$\ell=2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=2\left(-4a\cos\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=8a.$$

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ ასტროიდის, წრეწირის და ელიფსის სიგრძეები.

2. იპოვეთ სიგრძე $y=\frac{x^2}{2}-1$ პარაბოლის რკალისა, რომელსაც მოჰკვეთს ox ღერძი.

3. იპოვეთ $y=\ell nx$ წირის რკალის სიგრძე, როცა $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

ახლა ვიპოვოთ რკალის დიფერენციალი $d\ell(x)$.

თუ წირის საწყისი წერტილია $(a, f(a))$, ხოლო ბოლო წერტილი $(x, f(x))$, მაშინ მისი სიგრძე $\ell(x)=\int_a^x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$.

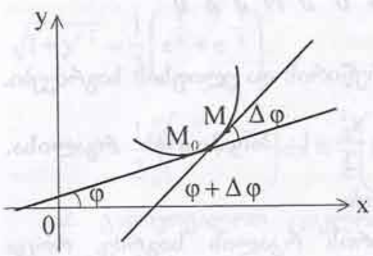
ესაა განსაზღვრული ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით. აქედან მივიღებთ

$$d\ell(x)=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

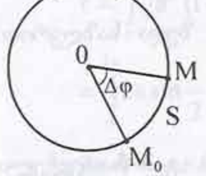
რომელიც არის რკალის დიფერენციალის გამოსათვლელი ფორმულა.

6. წირის სიმრუდე

განვიხილოთ წირი, რომლის განტოლებაა $y=f(x)$. $a\le x\le b$ მასზე ავიღოთ ფიქსირებული $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი და ცვლადი $M(x, y)$ წერტილი. ამ წერტილებზე გავავლოთ მხებები. მათ შორის



კუთხე აღვნიშნოთ $\Delta\varphi$-ით, ხოლო M_0M რკალის სიგრძე $\Delta\ell(x)$-ით. შეფარდებას $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\ell}$ ეწოდება M_0M რკალის საშუალო სიმრუდე. ამ ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ წრეწირის სიმრუდე. $k=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta S}=\dfrac{\frac{\Delta S}{R}}{\Delta S}=\dfrac{1}{R}$. ამრიგად R რადიუსიანი წრეწირის სიმრუდე მუდმივია და უდრის $\dfrac{1}{R}$.



განმარტება. M_0M რკალის საშუალო სიმრუდის ზღვარს, როცა $M\to M_0$, ეწოდება რკალის სიმრუდე M_0 წერტილში და აღინიშნება k-თი, ე.ი.

$$k=\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta\ell}=\frac{d\varphi}{d\ell}. \tag{1}$$

როგორც ცნობილია, $f'(x_0)=\operatorname{tg}\varphi$, აქედან $\varphi=\operatorname{arctg} f'(x)$, $d\varphi=\dfrac{f''(x)}{1+f'^2(x)}dx$. თუ გამოვიყენებთ რკალის დიფერენციალისა და (1) ფორმულებს, მივიღებთ

$$k=\frac{f''(x)}{\left(1+f'^2(x)\right)\sqrt{1+f'^2(x)}}=\frac{f''(x)}{\left(1+f'^2(x)\right)^{3/2}}. \tag{2}$$

თუ წირის განტოლება ჩაწერილია პარამეტრული სახით, მაშინ (2) ფორმულაში შესაბამისი მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ

$$k=\frac{\psi''(t)\,\varphi'(t)-\varphi''(t)\,\psi'(t)}{\left(\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\right)^{3/2}}; \tag{3}$$

ხოლო თუ წირის განტოლება ჩაწერილია პოლარულ კოორდინატებში, მაშინ

$$k=\frac{f'(\theta)+2f'^2(\theta)-f''(\theta)\sin\theta}{\left(f^2(\theta)+f'^2(\theta)\right)^{3/2}}. \tag{4}$$

განვიხილოთ მაგალითი.

ვიპოვოთ ელიფსის სიმრუდე $A(-a,0)$, $B(0,b)$, $C(a,0)$; $D(0,-b)$ წერტილებში. ელიფსის განტოლება პარამეტრული სახით ასეთია

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}\quad t\in[0,2\pi].$$ a და b დიდი და მცირე ნახევარღერძებია.

$$\begin{cases} x'_t=-a\sin t \\ y'_t=a\cos t. \end{cases}$$ (3) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$k=\frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}.$$

$A(-a,0)$ წერტილისათვის $t=\pi$, მაშინ $k=\dfrac{ab}{b^3}=\dfrac{a}{b^2}$.

$B(0,b)$ წერტილისათვის $t=\dfrac{\pi}{2}$, მაშინ $k=\dfrac{ab}{a^3}=\dfrac{b}{a^2}$.

$C(a,0)$ წერტილისათვის $t=0$, $k=\dfrac{a}{b^2}$.

$D(0; -b)$ წერტილისავის $t=\dfrac{3}{2}\pi$, $k=\dfrac{b}{a^2}$; ამრიგად A და C წერტილებში, ასევე B და D წერტილებში ელიფსს ერთნაირი სიმრუდე აქვს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. იპოვეთ ასტროიდის სიმრუდე $t=\dfrac{\pi}{4}$ და ციკლოიდის სიმრუდე $t=\dfrac{\pi}{2}$-თვის.

2. იპოვეთ კუბური პარაბოლის $6y=x^3$ სიმრუდე $(0; 6)$ და $\left(1; \dfrac{1}{6}\right)$ წერტილებში.

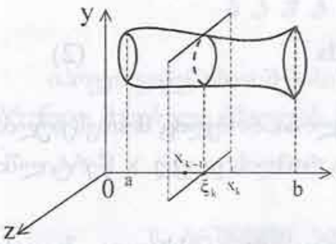
7. მოცულობის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალით

განვიხილოთ ორი ამოცანა.

1. მოცულობის გამოთვლა კვეთის ფართობით

2. ბრუნვითი სხეულის მოცულობის გამოთვლა

ვთქვათ, მოცემულია სივრცეში სხეული, რომელიც შემოსაზღვრულია გარკვეული ჩაკეტილი ზედაპირით. მოცემულ კოორდინატთა სისტემაში სხეულის ox ღერძის მართობული



სიბრტყეებით გადაკვეთისას მიღებული კვეთის ფართობი იქნება x-ის ფუნქცია. აღვნიშნოთ იგი $S(x)$-ით. დავუშვათ, სხეული მოთავსებულია $x=a$ და $x=b$ სიბრტყეებს შორის. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის λ დანაწილება და მოცემული სხეულის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია $x=x_{k-1}$ და $x=x_k$ სიბრტყეებს შორის. მის მოცულობად მიახლოებით მივიღოთ $S(\xi_k)\Delta x_k$, სადაც $S(\xi_k)$ არის იმ კვეთის ფართობი, რომელიც მიიღება მოცემული სხეულისა და $x=\xi_k$ სიბრტყის გადაკვეთაში. ცხადია რომ გავლებულ სიბრტყეებს შორის მოთავსებული სხეულის ნაწილი, საზოგადოდ არასტანდარტული. (არც ცილინდრი, არც პრიზმა და ა. შ.) ფიგურაა. მის მოცულობად მივიღოთ იმ ცილინდრის მოცულობა, რომლის ფუძის ფართობია $S(\xi_k)$, ხოლო სიმაღლე Δx_k.

ბუნებრივია შემდეგი განმარტება. მოცემული სხეულის მოცულობად მიღებულია მასში ჩახაზული ისეთი ცილინდრების მოცულობათა ჯამის ზღვარი, რომელთა ფუძეების ფართობია $S(\xi_1), S(\xi_2),\dots,$ ხოლო სიმაღლეები $\Delta x_1, \Delta x_2,\dots$

ამრიგად, სხეულის მოცულობა

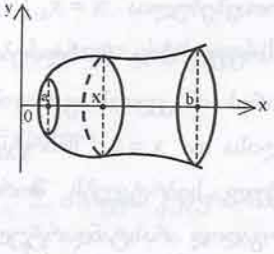
$$v=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k. \tag{1}$$

განმარტების მიხედვით (1) ფორმულა მოგვცემს განსაზღვრულ ინტეგრალს და მივიღებთ ფორმულას

$$v = \int_a^b S(x)\,dx\,. \qquad (2)$$

ეს არის ისეთი სხეულის მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია $x = a$, $x = b$ სიბრტყეებს შორის და რომლის ყოველ x წერტილში კვეთის ფართობია $S(x)$.

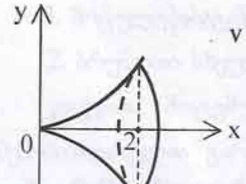
განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა სხეული მიიღება მრუდწირული ტრაპეციის ბრუნვით OX ღერძის გარშემო. ამ



შემთხვევაში (რადგან გრაფიკის ყოველი წერტილი OX ღერძის გარშემო ბრუნვისას შემოწერს წრეწირს) კვეთის ფართობი $S(x) = \pi\,(f(x))^2$. მაშინ მიღებული სხეულის მოცუ-ლობა (2) ფორმულის მიხედვით იქნება

$$v = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx\,. \qquad (3)$$

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ მოცემული მრუდწირული ტრაპეცია, რომელიც შემოსაზღვრულია $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ წრფეებით და $y = x^2$ პარაბოლით, ბრუნავს OX ღერძის გარშემო. მიღებული სხეულის მოცულობა გამოითვლება (3) ფორმულით.



$$v = \pi \int_0^2 (x^2)^2\,dx = \frac{\pi x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5} \quad \text{(კუბ. ერთ.)}.$$

სავარჯიშო

იპოვეთ ჯაჭვწირით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა, თუ $-a \le x \le a$.

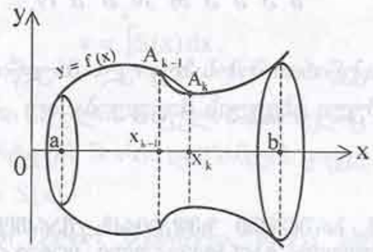
8. ბრუნვითი ზედაპირის ფართობის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალით

დავუშვათ, რომ $y = f(x)$, $a \le x \le b$ წირი ბრუნავს OX ღერძის გარშემო ისე, რომ ყოველი წერტილი შემოსწერდეს წრეწირს. ამ წირის ბრუნვით მიღებულ ზედაპირს ჰქვია ბრუნვითი ზედაპირი. ვიპოვოთ მისი ფართობი $S_{ბრ}$. ამ მიზნით განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის λ დანაწილება. ყოველ Δx_k ქვესეგმენტს შეესაბამება $A_{k-1}A_k$ რკალი, $A_{k-1}(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $A_k(x_k, f(x_k))$. ამ რკალის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობად მიახლოებით მივიღოთ $A_{k-1}A_k$ ქორდის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი S_k. ქორდა შემოსწერს ან კონუსს, ან ცილინდრს, ან წაკვეთილ კონუსს (წაკვეთილი კონუსის კერძო შემთხვევაა კონუსი და ცილინდრი). ადვილი მისახვედრია, რომ $\overline{A_{k-1}A_k}$-ს ბრუნვით მიღებული ზედაპირის (იგი ზოგად შემთხვევაში იქნება წაკვეთილი კონუსი) ფართობი

$$S_k = \frac{2\pi f(x_{k-1}) + 2\pi f(x_k)}{2} \cdot \overline{A_{k-1}A_k} = 2\pi f(\xi_k')\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k\,.$$

ξ_k', ξ_k მიეკუთვნება Δx_k სეგმენტს. საძიებელი ფართობი - მოცემული წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი ასე განიმარტება

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S_k\,. \qquad (1)$$



როგორც ვხედავთ, $\sum_{k=1}^{n} S_k$ არის $2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ ფუნქციის რიმანის ინტეგრალური ჯამი. ამიტომ (1) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\, dx . \qquad (2)$$

ეს ფორმულა გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა წირის განტოლება მოცემულია ცხადი $y = f(x)$ სახით.

თუ წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით, ან პოლარულ კოორდინატებში, მაშინ (2) ფორმულიდან მივიღებთ

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\, dt , \qquad (3)$$

$$S = 2\pi \int_{\varphi_0}^{T} \rho \sin\theta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\theta .$$

ანალოგიურად მიიღება ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი, როცა წირი ბრუნავს oy ღერძის გარშემო.

განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ r რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართობი. სფერო მიიღება ნახევარწრეწის ბრუნვით,

კერძოდ $y = \sqrt{r^2 - x^2}\,(-r \le x \le r)$-ის ბრუნვით ox ღერძის გარშემო. ვისარგებლოთ (2) ფორმულით. ცხადია,

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r}{f(x)} .$$

(2) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$S = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2 .$$

შეიძლებოდა გამოგვეყენებინა (3) ფორმულაც.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. გამოთვალეთ ჯაჭვწირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი, $-a \le x \le a$.

2. გამოთვალეთ ციკლოიდის ერთი რკალის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

3. გამოთვალეთ კარდიოიდის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გამოყენება მექანიკაში

9. სიმძიმის ცენტრი

განვიხილოთ სამი ამოცანა 1. ბრტყელი წირის სიმძიმის ცენტრი 2. ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრი 3. ინერციის მომენტი (ბრტყელი ფიგურის ქვეშ იგულისხმება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელიც შემოსაზღვრულია უწყვეტი წირით, ან უწყვეტი წირებით. მაგალითად წრე, კონცენტრირებული წრეწირებით შემოსაზღვრული არე და ა.შ. ბრტყელი ფიგურებია).

ჯერ განვმარტოთ სიმძიმის ცენტრი. $A_1, A_2, \dots, A_n$ მატერიალურ წერტილთა სიმძიმის ცენტრი ეწოდება ისეთ წერტილს, რომელზედაც გადის ყველა ამ წერტილებზე თანაბრად მოდებული სიმძიმის ძალები. მაგალითად ნებისმიერი სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი მისი მედიანების გადაკვეთის წერტილია. წრისა და წრეწირის ცენტრები მათი სიმძიმის ცენტრებია. მექანიკაში მატერიალურ წერტილს უწოდებენ ისეთ წერტილს, რომელსაც გააჩნია მასა. მატერიალურ წერტილებად შეიძლება ჩავთვალოთ პლანეტები, ვარსკვლავები, $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებაში Δx_k ქვესეგმენტები, ბრტყელი ფიგურის დანაწილებაში ΔS_k ნაწილები და სხვა. აღვნიშნოთ A_k-თი m_k მასის მქონე k-რი მატერიალური წერტილი, A_k-ს კოორდინატები იყოს x_k და y_k. სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები აღვნიშნოთ X_c და Y_c-თი; მექანიკიდან ცნობილია სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულები

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad Y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} \tag{1}$$

ცხადია, რომ ესა თუ ის ფიგურა (წირი ან ბრტყელი ფიგურა) შედგება უსასრულო რაოდენობის წერტილებისაგან. ასეთ შემთხვევაში მოცემული ფიგურა უნდა დავყოთ სასრული რაოდენობის ნაწილებად. თითოეულ რომელთაგანს ჩავთვლით მატერიალურ წერტილად; დავწეროთ ამ სისტემის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, შემდეგ გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\lambda \to 0$ (λ უდიდესი ნაწილის დიამეტრია. ბრტყელი ფიგურის დიამეტრი ეწოდება მის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილებიდან უდიდესს).

10. ბრტყელი წირის სიმძიმის ცენტრი (პაპი - გულდინის პირველი თეორემა)

ვთქვათ, მოცემულია წირი განტოლებით $y = f(x)$, $a \le x \le b$. განვიხილოთ $[a, b]$-ის λ დანაწილება. ყოველ Δx_k ქვესეგმენტს შეესაბამება რკალი Δl_k, რომელიც მივიღოთ მატერიალურ წერტილად. მისი სიგრძე იქნება $\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k$, მასა გამოითვლება ფორმულით

$$m_k = \rho(\xi'_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k .$$

ξ'_k და $\xi_k \in \Delta x_k$, ρ სიმკვრივეა.

ვცვალოთ $k = 1, 2, \dots, n$, შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები (1) ფორმულებში და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\lambda \to 0$, მივიღებთ საბოლოოდ,

$$X_c=\frac{\int\limits_a^b x\rho(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx},\quad Y_c=\frac{\int\limits_a^b y\rho(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$$

(X_c და Y_c-ს ზღვარი იგივე სიმბოლოებითაა აღნიშნული).

თუ მიღებულ ფორმულებში დავუშვებთ, რომ სიმკრივე $\rho=c=$ მუდმივს, მაშინ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების გამოსათვლელ ფორმულებს ექნება შემდეგი სახე

$$X_c\frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx},\quad Y_c=\frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}\equiv\frac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}. \quad (2)$$

მიღებულ ფორმულებში მნიშვნელები მოცემული წირის სიგრძეა ℓ, ამიტომ (2) ფორმულები შეიძლება ასე დავწეროთ

$$X_c=\frac{1}{\ell}\int\limits_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,\quad Y_c=\frac{1}{\ell}\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

მიღებული ტოლობები გავამრავლოთ $2\pi\ell$-ზე, მივიღებთ

$$2\pi X_c\ell=2\pi\int\limits_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,\ 2\pi Y_c\ell=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \quad (3)$$

მე (3) ფორმულაში $2\pi Y_c\ell$ არის მოცემული წირის სიგრძისა და იმ წრეწირის სიგრძის ნამრავლი, რომლის რადიუსია მოცემული წირის სიმძიმის ცენტრის ორდინატი, ხოლო მარჯვენა მხარე არის მოცემული წირის ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი. ამრიგად დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა (პაპპი - გულდინის პირველი თეორემა). ox ღერძის გარშემო $y=f(x)$, $a\le x\le b$, წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი უდრის ამ წირის სიგრძისა და იმ წრეწირის სიგრძის ნამრავლს, რომლის რადიუსია ამავე წირის სიმძიმის ცენტრის ორდინატი (წირი არ უნდა კვეთდეს ox ღერძს).

ეს თეორემა პირველად ჩამოაყალიბა ბერძენმა მათემატიკოსმა პაპპმა, ჩვენი წელთაღრიცხვის III საუკუნეში, 1635 წელს კი – დაამტკიცა შვეიცარიელმა მათემატიკოსმა გულდინმა (1577-1643).

განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ R რადიუსიანი ნახევარწრეწირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები. დავუშვათ წრეწირის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია და ნახევარწრეწირი ეყრდნობა ox ღერძს. ნახევარწრეწირის სიმეტრიულობის გამო, სიმძიმის ცენტრის აბსცისა X_c მოთავსდება oy ღერძზე. ე.ი. $X_c=0$ (ამას ფორმულითაც მივიღებდით). ვიპოვოთ Y_c. გამოვიყენოთ გულდინის პირველი თეორემა. ნახევარწრეწირი შემოწერს სფეროს, რომლის ფართობია $4\pi R^2$. ნახევარწრეწირის სიგრძეა πR. მაშინ გულდინის თეორემის მიხედვით

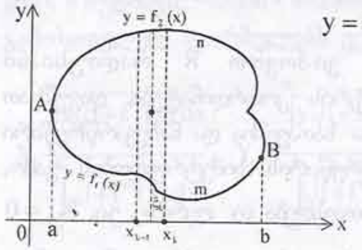
$$2\pi Y_c\pi R=4\pi R^2,\ \text{აქედან}\ Y_c=\frac{2R}{\pi}\approx 0{,}7R.$$

ამრიგად, საძიებელი სიმძიმის ცენტრია $\left(0,\frac{2R}{\pi}\right)$.

შენიშვნა. გულდინის თეორემა შეიძლება ჩამოყალიბდეს იმ შემთხვევისთვისაც, როცა მოცემული წირი ბრუნავს oy ღერძის გარშემო.

11. ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრი (პაპი – გულდინის მეორე თეორემა)

მექანიკაში ბრტყელ ფიგურას უწოდებენ ძალიან თხელ ფირფიტას, რომლის სისქე უგულვებელყოფილია. განვიხილოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ისეთი ფიგურა, რომელიც მოთავსებულია $x=a$ და $x=b$ წრფეებს შორის. მისი შემომსაზღვრელი კონტური A და B წერტილებით იყოფა ორ წირად, რომელთა განტოლებები იყოს



$$y=f_1(x) \text{ და } y=f_2(x),\ a \le x \le b.$$

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის λ დანაწილება და დაყოფის წერტილებიდან გავავლოთ OX ღერძის მართობული წრფეები. განვიხილოთ მოცემული ფიგურის ის ზოლი, რომელიც მოთავსებულია $x=x_{k-1}$ და $x=x_k$ წრფეებს შორის. თუ ფიგურა ერთგვაროვანია (სიმკვრივე ერთი და იგივეა ყოველ წერტილში), მაშინ ამ ზოლის სიმძიმის ცენტრი იქნება მისი შუა წერტილი $\left(\xi_k, \frac{1}{2}f(\xi_k)\right)$, ხოლო

$$m_k=\rho(\xi_k')\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\Delta x_k \equiv \rho(\xi_k')f(\xi_k)\Delta x_k .$$

დავუშვათ $\rho(x)$ მუდმივია, მაშინ (1) ფორმულებში შესაბამისი მნიშვნელობების ჩასმით და შემდეგ ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$X_c=\frac{1}{S}\int_a^b x f(x)dx; \qquad Y_c=\frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)dx, \qquad (4)$$

სადაც S მოცემული ფიგურის ფართობია.

მიღებული (4) ფორმულებში მეორე ფორმულა გავამრავლოთ $2\pi S$-ზე. მივიღებთ

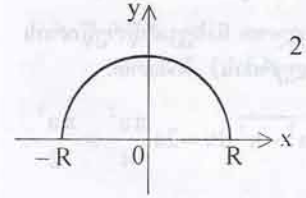
$$2\pi Y_c S=\pi\int_a^b f^2(x)dx . \qquad (5)$$

ამ ფორმულის მარცხენა მხარეში $2\pi Y_c$ არის იმ წრეწირის სიგრძე, რომლის რადიუსია მოცემული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის ორდინატი, S - მისი ფართობი, ხოლო მარჯვენა მხარე არის იმ ბრუნვითი სხეულის მოცულობა, რომელიც მიღებულია მოცემული ფიგურის ბრუნვით OX ღერძის გარშემო. იგულისხმება, რომ ფიგურა არ კვეთს OX ღერძს. ამრიგად დავამტკიცეთ *პაპი - გულდინის მეორე თეორემა.*

ბრტყელი ფიგურის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა ტოლია ამ ფიგურის ფართობისა და იმ წრეწირის სიგრძის ნამრავლისა, რომლის რადიუსია მოცემული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის ორდინატი, თუ ფიგურა არ კვეთს OX ღერძს.

შევნიშნოთ, რომ ანალოგიურად დამტკიცდება თეორემა, როცა ფიგურა ბრუნავს OY ღერძის გარშემო.

განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ ნახევარწრის სიმძიმის ცენტრი, თუ იგი შემოსაზღვრულია OX ღერძით, $x=-R$ და $x=R$ წრფეებითა და ნახევარწრეწირით. ცხადია $X_c=0$. (5) ფორმულის მიხედვით



$$2\pi Y_c\cdot\frac{\pi R^2}{2}=\frac{4}{3}\pi R^3, \text{ აქედან } Y_c=\frac{4R}{3\pi}$$

ამრიგად, ნახევარწრის სიმძიმის ცენტრია $\left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$ წერტილი.

12. ინერციის მომენტი

რომელიმე ℓ ღერძის მიმართ m მასის მქონე მატერიალური წერტილის ინერციის მომენტი I_ℓ ეწოდება მისი მასისა და ამ წერტილიდან ღერძამდე მანძილის r-ის კვადრატის ნამრავლს. ე.ი. $I_\ell = m r^2$. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის

$$I_\ell = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 .$$

თუ ℓ ღერძად ავიღებთ ox ღერძს, ან oy ღერძს, მაშინ მივიღებთ

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2, \quad I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2 ,$$

ხოლო $I_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right)$ ეწოდება ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ. ზემოთ მოცემული გამოთვლების ანალოგიურად საბოლოოდ მივიღებთ $y = f(x)$ წირის ინერციის მომენტებს

$$I_x = \int_a^b y^2 \sqrt{1+y'^2}\, dx, \; I_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1+y'^2}\, dx, \; I_0 = \int_a^b (x^2+y^2)\sqrt{1+y'^2}\, dx .$$

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვთვალოთ ნახევარწრეწირის ინერციის მომენტი დიამეტრის (ox ღერძის) მიმართ.

$$I_x = \int_{-a}^{a} y^2 \sqrt{1+y'^2}\, dx = 2\int_0^a y^2 \frac{a}{y} dx = 2a\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx = 2a\frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi a^3}{2} .$$

ანალოგიურად გამოითვლება I_y და I_0.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. იპოვეთ ox ღერძის ზემოთ მოთავსებული $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ჰიპერციკლოიდის (ასტროიდის) და ელიფსის სიმძიმის ცენტრები. ინტერესმოკლებული არ იქნება, იპოვოთ მთლიანი წრეწირის, ელიფსის, ასტროიდის, კარდიოიდის როგორც წირების ისე შესაბამისი ბრტყელი ფიგურების სიმძიმის ცენტრები.

2. იპოვეთ ჯაჭვწირის სიმძიმის ცენტრი, თუ $-a \le x \le a$.

3. ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია $x = 0$, $x = \pi$ წრფეებით და $y = \sin x$ წირით. იპოვეთ მისი სიმძიმის ცენტრი.

4. გამოთვალეთ ციკლოიდის ერთი რკალის ინერციის მომენტი ox ღერძის მიმართ.

15. არასაკუთრივი ინტეგრალები

აქამდე ვიხილავდით ისეთ განსაზღვრულ ინტეგრალებს $[a, b]$ სეგმენტზე, რომლებშიც ინტეგრალქვეშა ფუნქციები იყო შემოსაზღვრული, ხოლო a და b-სასრული რიცხვები. ასეთ ინტეგრალებს საკუთრივი ინტეგრალები ჰქვია.

არის შემთხვევები, როცა ინტეგრების არე შემოუსაზღვრელია, ან შემოუსაზღვრელია ინტეგრალქვეშა ფუნქცია რომელიმე წერტილის მიდამოში. ასეთი ინტეგრალები რიმანის აზრით არ არსებობენ. თუ შემოვიღებთ ასეთი ინტეგრალების გამოთვლის წესებს, მაშინ ისინი შეიძლება არსებობდეს და შეიძლება არ არსებობდეს. რა თქმა უნდა, ასეთი ინეგრალების შესწავლა იქნება რიმანის ინტეგრალის განზოგადოება.

ეს პარაგრაფი სწორედ ასეთი ინტეგრალების შესწავლას ეძღვნება.

1. ინტეგრალები უსასრულო არეზე (I გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალები)

განმარტება. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a; +\infty)$ ნახევარსეგმენტზე და ინტეგრებადია მის ნებისმიერ სასრულ $[a, t]$ ნაწილზე, $a < t < +\infty$.

განვიხილოთ განსაზღვრული ინტეგრალი $[a, t]$ სეგმენტზე. t ცვლადისათვის ასეთი ინტეგრალი იქნება ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით. ავღნიშნოთ იგი $\Phi(t)$-თი,

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)\,dx. \qquad (1)$$

ამ ინტეგრალთან ერთად განვიხილოთ სიმბოლო

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad (2)$$

რომელსაც ეწოდება I გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a; +\infty)$ ნახევარსეგმენტზე.

ცხადია, რომ როცა $t \to \infty$, მაშინ (1) ინტეგრალი გადაიქცევა (2) ინტეგრალად. ამიტომ, ბუნებრივია, (2) გამოსახულების სიდიდედ (მნიშვნელობად) მივიღოთ (1)-ის ზღვარი, როცა $t \to +\infty$. ამრიგად, განვიხილოთ

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx. \qquad (3)$$

თუ ეს ზღვარი არსებობს და იგი სასრული რიცხვია, მაშინ იტყვიან, რომ (2) არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია, ამ ზღვარს უწოდებენ მის მნიშვნელობას და წერენ

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ $f(x)$ ინტეგრებადია არასაკუთრივი აზრით. იმ ფაქტს, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია, ასეც აღნიშნავენ

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty.$$

თუ (3) ზღვარი არ არსებობს, ან ეს ზღვარი უდრის უსასრულობას, მაშინ იტყვიან, რომ (2) არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია. ასეთ ინტეგრალს არ მიეწერება არავითარი რიცხვითი მნიშვნელობა.

ანალოგიურად განიმარტება არასაკუთრივი ინტეგრალები

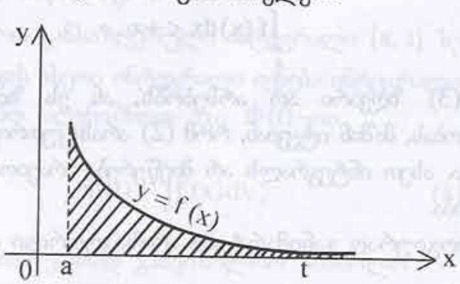
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{და} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx. \text{ კერძოდ}$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{y \to -\infty} \int_{y}^{a} f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{y \to -\infty} \int_{y}^{a} f(x)\,dx + \lim_{z \to +\infty} \int_{a}^{z} f(x)\,dx.$$

არასაკუთრივი ინტეგრალების გეომეტრიული შინაარსი საკუთრივი ინტეგრალების გეომეტრიული შინაარსის ანალოგიურია თუ $f(x)$ არაუარყოფითი ფუნქციაა $[a; +\infty)$ ნახევარსეგმენტზე, მაშინ $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ არის იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x = a$, $y = 0$ წრფეებით და $y = f(x)$ წირით, თუ $x = 0$ წრფე ამ წირის ასიმპტოტია. იგულისხმება, რომ (2) ინტეგრალი კ რ ე ბ ა დ ი ა. დაშტრიხულ ფიგურას უსასრულო ზოლიანი მრუდწირული ტრაპეცია ვუწოდოთ, იგი მარჯვენა მხრიდან შემოუსაზღვრელია, თუმცა $+\infty$-ში გრაფიკი და OX ღერძი „თითქმის ეხება" ერთმანეთს.

თუ ეს ინტეგრალი განშლადია მაშინ აღნიშნული ფიგურის ფართობი ან $+\infty$-ა, ან არ გამოითვლება.

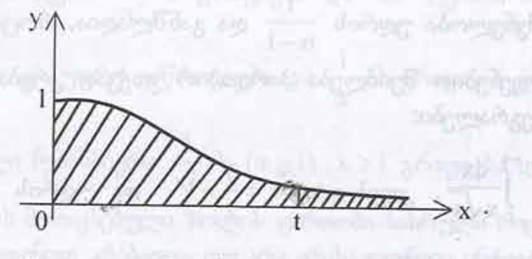


განვიხილოთ მაგალითები.

1. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$-ში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ უწყვეტია ნებისმიერ $[0, t]$ სეგმენტზე, $0 < t < +\infty$. ამიტომ იგი ამ სეგმენტზე ინტეგრებადიც იქნება და მივიღებთ

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \to +\infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \to +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{0}^{t} = \lim_{t \to \infty} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

ამრიგად, მოცემული არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეცია ფართობადია და მისი ფართობია $\frac{\pi}{2}$. ნახაზს ექნება შემდეგი სახე



2. დავადგინოთ, თუ რა შემთხვევაში იქნება კრებადი არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$. ცხადია, რომ როცა $\alpha < 0$, ინტეგრალი განშლადი იქნება.

განმარტების მიხედვით

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-\alpha}dx=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^t\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1}{-\alpha+1}\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{როცა } \alpha<1\\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{როცა } \alpha>1.\end{cases}$$

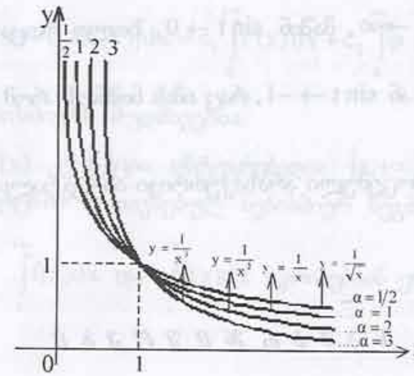
დავუშვათ, $\alpha=1$, მაშინ გვექნება

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to+\infty}(\ell n\, t-\ell n 1)=+\infty.$$

ამრიგად მივიღეთ, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha>1$, მისი მნიშვნელობა უდრის $\frac{1}{\alpha-1}$ და განშლადია, როცა $\alpha\le 1$. ამის გამოყენებით შეიძლება პირდაპირ ვთქვათ კრებადია თუ არა ინტეგრალები:

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$, კლებადია $\alpha=\frac{3}{2}>1$ და უდრის 2-ს, ხოლო ინტეგრალი $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ განშლადია, $\alpha=\frac{2}{3}<1$. ანალოგიურად დამტკიცდება $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^\alpha}$ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობა და განშლადობა.

განვიხილოთ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$-ს გეომეტრიული შინაარსი.



ამ ნახაზის მიხედვითაც ჩანს,რომ როცა $\alpha>1$ და იგი თანდათან იზრდება, $\frac{1}{x^\alpha}$-ს გრაფიკსა და OX ღერძს შორის ზოლი უფრო და უფრო ვიწროვდება. ე.ი. $\frac{1}{x}$-ის გრაფიკის ქვემოთ მოთავსებული ნებისმიერი $\frac{1}{x^\alpha}$-ს $(\alpha>1)$ $x\ge 1$ გრაფიკსა და OX ღერძს შორის მოთავსებული ზოლის ფართობი სასრული რიცხვია.

3. დავადგინოთ კრებადია, თუ არა არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{\frac{\pi}{6}}^{+\infty}\cos x\,dx$. გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{6}}^{t}\cos x\,dx=\lim_{t\to+\infty}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\sin t-\frac{1}{2}\right).$$

ეს ზღვარი არ არსებობს მაგალითად, თუ დავუშვებთ, რომ

$t=2\pi k$ და $k\to\infty$, მაშინ $\sin t\to 0$, ხოლო როცა $t=\frac{\pi}{2}+\pi k$, მაშინ $\sin t\to 1$ ან $\sin t\to -1$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\lim\limits_{t\to+\infty}\sin t$ არ არსებობს.

ამრიგად, მოცემული არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია.

სავარჯიშოები

დაადგინეთ კლებადია, თუ განშლადი შემდეგი არასაკუთრივი ინტეგრალები:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2},\quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2}},\quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}},\quad \int_0^{+\infty}e^{ax}dx,\quad \int_0^{+\infty}\sin x\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{x}},\quad \int_{-\infty}^{0}\cos x\,dx,\quad \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{a^2+x^2},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{ax}\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\operatorname{tg}x\,dx.$$

ახლა ჩამოვაყალიბოთ არასაკუთრივი ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება.

1. თუ არასაკუთრივი ინტეგრალები $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ კრებადია, მაშინ კრებადია $\int_a^{+\infty}(c_1 f(x)+c_2\varphi(x))dx$ არასაკუთრივი ინტეგრალიც და

$$\int_a^{+\infty}(c_1 f(x)+c_2\varphi(x))dx=c_1\int_a^{+\infty}f(x)\,dx+c_2\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx,$$

c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

2. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a;+\infty)$ და $[c;+\infty)$ ნახევარსეგმენტებში მოთავსებულ ნებისმიერ სეგმენტზე, მაშინ ინტეგრალები $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ და $\int_c^{+\infty}f(x)dx$ იკრიბებიან ერთდროულად და

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^{c}f(x)dx+\int_c^{+\infty}f(x)dx.$$

3. თუ $f(x)$ არაუარყოფითია და ინტეგრებადი $[a;+\infty)$ ნახევარსეგმენტზე, მაშინ $\int_a^{+\infty}f(x)dx\ge 0$.

აქედან გამომდინარეობს შედეგი. თუ $f(x)\ge g(x)$ $[a;+\infty)$ ნახევარსეგმენტზე და მათი არასაკუთრივი ინტეგრალები კრებადია, მაშინ

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx\ge\int_a^{+\infty}g(x)dx.$$

ეს თვისებები დამტკიცდება უშუალოდ არასაკუთრივ ინტეგრალის განმარტების გამოყენებით. მაგალითად, თუ

$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ კრებადია, ე.ი.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx\text{, მაშინ, ცხადია,}$$

$$\int_a^{+\infty} c\,f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t c\,f(x)\,dx = c\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx = c\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2. I გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალების კრებადობის ზოგიერთი ნიშანი

არასაკუთრივი ინტეგრალის $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ კრებადობა დავიყვანეთ $\int_a^t f(x)dx$ ინტეგრალის ზღვრის გამოთვლაზე. თუ $f(x)$-ის პირველადი $[a;+\infty)$ ნახევარსეგმენტზე არის $F(x)$, მაშინ ცხადია

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(F(t)-F(a)\right).$$

როგორც ცნობილია, ყოველთვის არ ხერხდება პირველადის მოძებნა (იხ. პარაგრაფი 11) ამ შემთხვევაში უნდა მივმართოთ სხვა ხერხებს, რომელთაგან ერთ-ერთი უმარტივესი ხერხია ე.წ. შედარების ნიშანი. ეს ნიშანი თეორემის სახით ასე ჩამოყალიბდება.

თუ $a_0 \ge a$ რიცხვისათვის და $x \ge a_0$-თვის სრულდება უტოლობა $f(x) \le k\varphi(x)$ (k რომელიმე დადებითი რიცხვია), მაშინ $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ კრებადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

ინტეგრალის კრებადობა; ხოლო თუ $\varphi(x) \ge k f(x)$-თვის $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ განშლადია, მაშინ განშლადი იქნება $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ (ვგულისხმობთ, რომ $f(x)$ და $\varphi(x)$ არაუარყოფითი ფუნქციებია).

თეორემა მარტივად დამტკიცდება, თუ ავიღებთ განსაზღვრულ ინტეგრალს ცვლადი ზედა საზღვრით $f(x)$ ფუნქციიისათვის. $\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$. თეორემის პირობებით $\int_a^t f(x)dx \le k\int_a^t \varphi(x)dx$, ამ უტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას. თეორემის მეორე ნაწილიც მარტივად დამტკიცდება.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შედეგები.

1. თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ $(0 \le k < +\infty)$, მაშინ $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობა იწვევს $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობასაც.

2. თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ $(0 < k \le +\infty)$, მაშინ $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ ინტეგრალის განშლადობიდან გამომდინარეობს

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ინტეგრალის განშლადობა.

3. თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=k \quad (0<k<+\infty)$, მაშინ ინტეგრალები $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ და $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლადი.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. დავადგინოთ კრებადობა $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$-სა. ცხადია, რომ $-x^2\le -2x+1$, ამიტომ $e^{-x^2}\le e^{-2x+1}$. ჯერ დავადგინოთ $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x+1}dx$ ინტეგრალის კრებადობა.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x+1}dx=\lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^{t} e^{-2x+1}dx=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2t+1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

ამრიგად გვექნება $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\le\frac{1}{2}$, ე.ი. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ კრებადია (მტკიცდება რომ ეს ინტეგრალი $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$-ის ტოლია).

2. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{\ell n\, x}$. ჯერ გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ell n\, x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ell n\, x}=+\infty$

და $\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ განშლადია, ამიტომ განშლადი იქნება მოცემული ინტეგრალიც.

3. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3\sqrt{x+x^3}}$ იქნება კრებადი, რადგანაც კრებადია $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$, ხოლო $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^5+1}}$ იქნება განშლადი, რადგანაც განშლადია $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$.

დამტკიცებული თეორემა და შედეგები მართებული იქნება

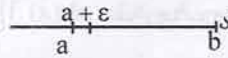
$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \text{ და } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ ინტეგრალებისთვისაც.}$$

II გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალები

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა საინტეგრო $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შემოუსაზღვრელია ან a წერტილზე, ან b წერტილზე, ან c წერტილზე, $a<c<b$. შესაძლოა ფუნქცია შემოუსაზღვრელი იყოს $c_1, c_2, \dots, c_k$ წერტილებზე, რომლებიც მიეკუთვნებიან ამ სეგმენტს.

განმარტება. $x=a$ წერტილს ეწოდება $(a, b]$ ნახევარსეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის განკუთრი წერტილი, თუ იგი ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a+\varepsilon, b]$ სეგმენტზე

$0<\varepsilon<b-a$ და არაა შემოსაზღვრული $x=a$ წერტილის მარჯვენა მიდამოში.



ანალოგიურად განიმარტება $x=b$ წერტილის განსაკუთრებულობა, როცა $f(x)$ შემოუსაზღვრელია b-ს მარცხენა მიდამოში და ინტეგრებადია $[a, b-\varepsilon]$ სეგმენტზე. ε ნებისმიერია. $[a, b]$-ის შიგა c წერტილზე განსაკუთრებულობა ორივე შემთხვევას მოიცავს, რადგანაც

$$[a, b]=[a, c]\cup[c, b].$$

იმ შემთხვევაში, როცა $x=a$ განკუთრი წერტილია, მაშინ სიმბოლო $\int_a^b f(x)\,dx$ (ეს ინტეგრალი რიმანის აზრით არ არსებობს) ასე განიმარტება $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$.

თუ ეს ზღვარი არსებობს და სასრული რიცხვია, მაშინ ინტეგრალს $\int_a^b f(x)\,dx$ უწოდებენ II გვარის არასაკუთრივ ინტეგრალს და ამ ზღვარს უწოდებენ მოცემული არასაკუთრივი ინტეგრალის მნიშვნელობას. ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ ეს ინტეგრალი კრებადია. წინააღმდეგ შემთხვევაში არასაკუთრივ ინტეგრალს ქვია განშლადი. ე.ი. ეს ინტეგრალი განშლადია, როცა ზღვარი არ არსებობს ან უდრის უსასრულობას.

ანალოგიურად განიმარტება $\int_a^b f(x)\,dx$, როცა $x=b$ განკუთრი წერტილია

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

როცა $x=c$, $a<c<b$, განკუთრია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\eta\to 0}\int_{c+\eta}^b f(x)\,dx.$$

ხოლო, როცა $[a, b]$-ის შიგა წერტილები (სასრული რაოდენობის) $c_1<c_2<\ldots<c_k$ განკუთრი წერტილებია, მაშინ

$$\int_a^b=\int_a^{c_1}+\int_{c_1}^{c_2}+\ldots+\int_{c_k}^b.$$

შესაკრები ინტეგრალები განხილული ინტეგრალებიდან რომელიმე მათგანის ანალოგიურია.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$. როცა $\alpha>0$, მაშინ ინტეგრალი არასაკუთრივია, ხოლო როცა $\alpha<0$ ინტეგრალი საკუთრივია. განმარტების მიხედვით

$$\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{როცა } \alpha<1\\ +\infty, & \text{როცა } \alpha>1\end{cases}$$

როცა $\alpha=1$ მაშინ $\int_0^1\frac{dx}{x}=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ell n\,\varepsilon=+\infty$.

ამრიგად $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha<1$ და განშლადია,

როცა $\alpha \geq 1$. ამ ინტეგრალის გეომეტრიული შინაარსი გვ. 377-ზე პარაგრაფ 1-ის ნახაზის შესაბამისად განისაზღვრება.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha < 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \geq 1$. ამის მიხედვით შეიძლება პირდაპირ დავადგინოთ, რომ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$ ინტეგრალები კრებადია, ხოლო $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^3}$, $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ ინტეგრალები კი – განშლადი. ზოგად შემთხვევაში შეიძლება დამტკიცდეს, რომ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ და $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ ინტეგრალები კრებადია, როცა $\alpha < 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \geq 1$.

ახლა დავადგინოთ II გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალების კრებადობის ნიშანი, ე.წ. შედარების ნიშანი. I გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალების კრებადობის ნიშნის ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი

თეორემა (შედარების ნიშანი). თუ $a \leq x < b$-თვის მართებულია უტოლობა $f(x) \leq k\varphi(x)$, სადაც $k > 0$, მაშინ $\int_a^b \varphi(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^b f(x)dx$-ის კრებადობა. ხოლო თუ $f(x) \geq k\varphi(x)$ $(k > 0)$, მაშინ $\int_a^b \varphi(x)dx$ განშლადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^b f(x)dx$-ის განშლადობა.

განვიხილოთ მაგალითები.

დავადგინოთ კრებადია, თუ განშლადი არასაკუთრივი ინტეგრალები.

1. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sin^2 x}dx$. რადგან $\frac{e^x}{\sin^2 x} > \frac{1}{\sin^2 x}$ და $\lim \int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$ განშლადია, ამიტომ განშლადი იქნება მოცემული ინტეგრალიც.

2. $\int_0^1 \sqrt[3]{\ell n\, x}\, dx$. რადგან $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\ell n\, x}}{\sqrt[3]{x}} = 0$ და $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ კრებადია, ამიტომ კრებადი იქნება მოცემული ინტეგრალიც.

3. $\int_0^1 \frac{dx}{x - \sin x}$ განშლადია, რადგანაც $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$ ინტეგრალი განშლადია და

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x - \sin x} : \frac{1}{x^3}\right) = 6.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

დაამტკიცეთ კრებადია, თუ განშლადი შემდეგი არასაკუთრივი ინტეგრალები

$$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}}, \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}}\,dx, \quad \int_1^\infty \frac{\ell n\,(1+x^2)}{x}dx, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$$

16. მიახლოებითი ინტეგრება

იმ შემთხვევაში, როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველადი არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში, მაშინ შეუძლებელია ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულის გამოყენება განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელად. ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა შეუძლებელია გამოვიყენოთ იმ შემთხვევაშიც, როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია მიღებულია ცდის შედეგად და იგი გამოსახულია ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილით, ან გრაფიკით, როგორც ხდება ხოლმე ეს ტექნიკაში. ამ შემთხვევაში, ბუნებრივია, ასეთი განსაზღვრული ინტეგრალები გამოვთვალოთ მიახლოებით. ამისათვის არსებობს რამდენიმე ხერხი. ესენია მართკუთხედების, ტრაპეციების, პარაბოლების, მწკრივების, ინტეგრალში საშუალო მნიშვნელობის ფორმულების გამოყენების ხერხები. ეს ხერხები ეყრდნობა განსაზღვრული იმტეგრალის განმარტებას. როგორც ცნობილია, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი არის ამ ფუნქციის რიმანის ინტეგრალური ჯამის ზღვარი. ამიტომ ეს ინტეგრალი რიმანის ინტეგრალური ჯამისაგან განსხვავდება უსასრულოდ მცირე სიდიდით (თუ შესაკრებთა რიცხვი საკმაოდ დიდია). ამრიგად, თუ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, შეიძლება დავწეროთ მიახლოებითი ფირმულა. ამ შემთხვევაში რიმანის ინტეგრალური ჯამის ზღვარი არ იქნება დამოკიდებული არც $[a, b]$-ის დანაწილების წესზე და არც ξ_k წერტილების შერჩევაზე. ამიტომ სეგმენტის დანაწილებას და წერტილების შერჩევას მოვახდენთ ჩვენთვის მოხერხებული ფორმით.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n . \qquad (1)$$

განვიხილოთ მართკუთხედების ხერხი

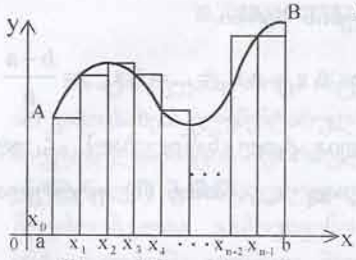
(1) ფორმულაში დავუშვათ $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$ (ე.ი. $[a, b]$ სეგმენტი დაყოფილია ტოლ ნაწილებად). ξ_1-ად ავიღოთ x_0. ξ_2-ად – $x_1, \ldots, \xi_n$-ად x_{n-1}, მაშინ (1) ფორმულა ასე დაიწერება

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right) = \frac{b-a}{n}\left(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}\right). \qquad (2)$$

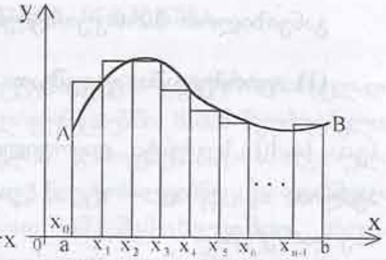
ახლა (1) ფორმულაში ξ_1-ად ავიღოთ x_1, ξ_2-ად x_2 და ა.შ. ξ_n-ად – x_n, მაშინ მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right) = \frac{b-a}{n}\left(y_1+y_2+\ldots+y_n\right) \qquad (3)$$

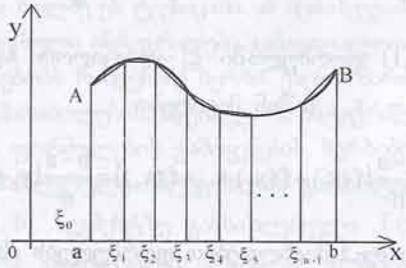
მე-2 და მე-3 მიახლოებით ფორმულებს *მართკუთხედების ფორმულები ჰქვია.* როცა $f(x) \ge 0$, მაშინ ამ ფორმულებში მარჯვენა მხარეები მრუდწირულ ტრაპეციაში ჩახაზული მართკუთხედების ფართობთა ჯამია (ჩახაზული მართკუთხედების სიმრავლეს - საფეხურებრივი ფიგურა ჰქვია). ამრიგად, როგორც (2), ისე (3) ფორმულებით aABb მრუდწირული ტრაპეციების ფართობები მათში ჩახაზული მართკუთხედების ფართობების ჯამით იცვლება.



(2) ფორმულისათვის



(3) ფორმულისათვის



(4) ფორმულისათვის

ტრაპეციის ხერხი. შევკრიბოთ (2) და (3) ტოლობები და მიღებულში გამოვთვალოთ $\int_a^b f(x)dx$. მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right). \qquad (4)$$

ამ შემთხვევაში მიღებული ფორმულის მარჯვენა მხარეში თითოეული შესაკრები ტრაპეციის ფართობია.

პარაბოლების ხერხი (სიმპსონის ფორმულა). $[a, b]$ სეგმენტი დაყოფილია $2n$ ტოლ ნაწილად. ფორმულას ასეთი

სახე აქვს. (ვწერთ გამოყვანის გარეშე)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left((y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+y_5+...+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+...+y_{2n-2})\right).$$

ბუნებრივად ისმება კითხვა. მიახლოებაცაა და მიახლოებაც, როგორია იგი? ე.ი. ესა თუ ის მიახლოება „უახლოესია", თუ საკმაოდ „უშორესი" ზუსტი მნიშვნელობისაგან? ყოველ მიახლოებით გამოთვლას მაშინ აქვს გარკვეული ფასი, როცა მას თან ახლავს დაშვებული ცდომილების შეფასებაც. ამიტომ ზემოთ მიღებული ფორმულები პრაქტიკულად მაშინ გამოიყენება, როცა მოცემული n-თვის მიღებულია ცდომილების შეფასების ხერხი. ეს ხერხი საშუალებას უნდა გვაძლევდეს $[a, b]$ სეგმენტის იმდენ ნაწილად დაყოფას, რომ გარანტირებული გვქონდეს მიახლოებითი გამოთვლის სიზუსტის მოთხოვნის ხარისხი.შეფასება კი ასე უნდა მოხდეს. უნდა შევაფასოთ მოცემულ ინტეგრალსა და მიახლოებით მნიშვნელობას შორის სხვაობის მოდული, რომელსაც ინტეგრალის აბსოლუტურ ცდომილებას უწოდებენ. აღვნიშნოთ იგი R_n-ით. დავუშვათ $|f(x)| \le M$, ყოველი $x \in [a, b]$-თვის. მაშინ

$$|R_n| = \left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n y_{k-1}\Delta x\right| = \left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-f(x_{k-1}))dx \le\right.$$

$$\le \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(\xi_k)(x-x_{k-1})|dx \le M\sum_{k=1}^n \left|\frac{(x-x_k)^2}{2}\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k}\right| =$$

$$= \frac{M}{2}\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 = \frac{M}{2}n\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

ამრიგად, $|R_n| \le \frac{M(b-a)^2}{2n}$.

ცხადია, როცა $n \to \infty$, მაშინ $R_n \to 0$. თუ დავუშვებთ, რომ $|R_n|$ ნაკლები იყოს ნებისმიერ დადებით ε-ზე, ე.ი. $\frac{M(b-a)^2}{2n} < \varepsilon$, მაშინ $n > \frac{M(b-a)^2}{2\varepsilon}$.

ეს იმას ნიშნავს, რომ $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის მითითებული ε სიზუსტით გამოსათვლელად საკმარისია [a, b] სეგმენტი დავყოთ ისეთ n ნაწილად, რომლისთვისაც $n > \frac{M(b-a)^2}{2\varepsilon}$.

ტრაპეციის ფორმულის შემთხვევაში საძიებელი სიზუსტისათვის

$$n > \sqrt{\frac{M(b-a)}{12\varepsilon}},$$

სადაც M არის $f''(x)$-ის უდიდესი მნიშვნელობა [a, b] სეგმენტზე;

სიმპსონის ფორმულის შემთხვევაში $|R_n| \le \frac{M(b-a)^5}{180(2n)^4}$, სადაც M არის $f^{IV}(x)$-ის უდიდესი მნიშვნელობა [a, b] სეგმენტზე.

განვიხილოთ მაგალითი.

გამოვთვალოთ

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$. ცხადია, რომ ინტეგრალის ზუსტი

მნიშვნელობაა $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785\ 398\ 163\ 3974...$ ახლა გამოვთვალოთ იგივე ინტეგრალი მიახლოებითი ფორმულებით. ამისათვის დავყოთ [0, 1] სეგმენტი 10 ტოლ ნაწილად და ვიპოვოთ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ფუნქციის მნიშვნელობები დაყოფის ყოველ წერტილში. მივიღებთ

$f(0)=1;\ \ f(0,1)=0{,}99;\ \ f(0,2)=0{,}96;\ \ f(0,3)=0{,}92;$
$f(0,4)=0{,}86;\ \ f(0,5)=0{,}8;\ \ f(0,6)=0{,}74;\ \ f(0,7)=0{,}67;$
$f(0,8)=0{,}61;\ \ f(0,9)=0{,}55;\ \ f(1)=0{,}5.$

ჯერ ვისარგებლოთ (2) ფორმულით. მივიღებთ

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}(1+0{,}99+0{,}96+\ldots+0{,}55)=0{,}81.$$

მე-3 ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}(0{,}99+0{,}96+\ldots+0{,}5)=0{,}76.$$

მე-4 ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0{,}782...$$

სიმპსონის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{30}\big(1+0{,}5+4(0{,}99+0{,}92+0{,}8+0{,}67+0{,}55)+$$
$$+2(0{,}96+0{,}86+0{,}74+0{,}61)\big)=0{,}785.$$

შევადაროთ აბსოლუტური ცდომილებები სიზუსტით მეასედამდე. მართკუთხედების ფორმულების შემთხვევაში $R_n < 0,81-0,78=0,03$. და $R_n < 0,78-0,76=0,02$. პარაბოლების ფორმულის შემთხვევაში $|R_n| \le 0,785-0,785=0$ სიზუსტით მეათასედამდე.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

გამოვთვალეთ მიახლოებით შემდეგი ინტეგრალები

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3},\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4},\ \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}},\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int_0^{10} x^2dx,\ \int_1^7 \frac{e^x}{x}dx$$

აიღეთ $n=6$ და $n=10$

დასკვნის სახით აღვნიშნავთ, რომ განსაზღვრულ ინტეგრალებს დიდი გამოყენება აქვს მთელი რიგი ამოცანების ამოხსნაში. დასაწყისში განვიხილეთ ერთი ამოცანა, რომელსაც მივყავართ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებამდე. ეს იყო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოთვლა. ახლა უკვე ცხადია, რომ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებაზე და მის გამოყენებაზე მივყავართ ისეთ ამოცანებს, როგორიცაა წირის სიგრძის, ბრუნვითი სხეულის მოცულობისა და მისი ზედაპირის ფართობის, წირისა და ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრების გამოთვლა და სხვა.

თავი IX

მოკლე ისტორიული მიმოხილვა

როგორ შეიქმნებოდა მსოფლიოს შვიდი საოცრება, სხვა მრავალი ხელოვნების ბრწყინვალე ნიმუშები და გრანდიოზული ნაგებობანი, რომ არ სცოდნოდათ მაშინ ზუსტი მათემატიკური გამოანგარიშებანი და გამოთვლები. საოცარია ისიც, რომ ყველა ნაკეთობა, მცირე იქნებოდა იგი თუ დიდი, მკაცრად ემორჩილებოდა „ოქროს კვეთის" წესს.

ისტორია ადამიანით იწყება, მაგრამ სამყაროში არსებული ობიექტური კანონები და მოვლენები მისი წარმოშობისთანავე ხორციელდებოდა. პლანეტები დედამიწის ჩათვლით (აღარ ვამბობთ გალაქტიკებზე) მკაცრად ემორჩილებოდა მოძრაობის კანონებს, ადგილი ჰქონდა მსოფლიო მიზიდულობას, სიმძიმის ძალის აჩქარებას და მრავალ სხვა კანონებს, მაგრამ ადამიანს რამდენიმე მილიონი წელი დასჭირდა იმისათვის, რომ ეს კანონები ჩამოეყალიბებინა და ნაწერის სახით მოეცა დღევანდელი კაცობრიობისათვის. პითაგორელებმა მართკუთხა სამკუთხედების თვისებები 26 საუკუნის წინ ჩამოაყალიბეს, განა მანამდე არ არსებობდა ასეთი სამკუთხედები? არქიმედემ სითხეში ჩაძირულ სხეულზე მოქმედი ამომგდები ძალა შენიშნა მესამე საუკუნეში ჩვენს წელთაღრიცხვამდე, მსოფლიო მიზიდულობის კანონი კი აგერ სამი საუკუნის წინ აღმოაჩინეს. განა მანამდე არ არსებობდა არქიმედედ წოდებული კანონიცა და მსოფლიო მიზიდულობის კანონიც? დღევანდელი კაცობრიობა ორმოციოდე საუკუნის ნაწერებს, გამოთვლებს, ფორმულებს, ისტორიულ ცნობებს თუ იცნობს. რა ვთქვათ მანამდე არსებული ცივილიზაციის გონებრივ განვითარებაზე? ადამიანის არსებობა რამდენიმე მილიონ წელს ითვლის. ბუნებრივად იბადება კითხვა

ნუთუ არ არსებობდა ადრე ჩვენზე უკეთესი თუ არა, ჩვენნაირი მაინც ცივილიზაცია?

 აბა როგორ ავხსნათ ის უჩვეულო და ფანტასტიკური ნაგებობები, რომლებსაც აქა-იქ ვხვდებით და დღემდე რჩება ამოუხსნელი?

მათემატიკის ისტორიაში ცნობილია ფაქტები, თუ როდის წარმოიშვა რიცხვები, თვლის სხვადასხვა სისტემები (დღემდე ცნობილია თვლის 307 სისტემა, მათგან 146 იყო ათობითი, 106 ხუთობითი და ხუთობით-ათობითი, დანარჩენი ოცობითი და ხუთობით-ოცობითი), ერმიტაჟში ინახება XVII საუკუნის (ჩვ. წ-მდე) ძველი ბაბილონური ცხრილი, გეომეტრიული ფიგურების და ორნამენტების გამოსახულებანი ხეზე, ქვაზე, პაპირუსზე და სხვა. თანდათანობით ადამიანმა იაზროვნა, რომ საჭირო იყო ზრუნვა ცხოვრების ელემენტარული პირობების შექმნაზე და მათ გაუმჯობესებაზე. უფრო დიდი ამოცანების წინაშე დადგნენ უძველესი ადამიანები, რომლებიც ცხოვრობდნენ სუბტროპიკულ და ზომიერ ზოლებში. ადამიანის გონება მივიდა იქამდე, რომ უნდა შექმნილიყო ნაწერები სხვადასხვა სახით, რათა ყველა მიღწევა მათემატიკაში და არა მარტო მათემატიკაში გადაეცემოდა მომავალ თაობებს. ევკლიდის (365-300) „საწყისებმა" ეს ამოცანა იმ დროისათვის ბრწყინვალედ შეასრულა. ყველაფერი ეს კი განაპირობა პლატონის (429-348) და არისტოტელეს (384-322) სკოლებმა.

„საწყისების" მეხუთე წიგნში გადმოცემულია ფართობებისა და მოცულობების ფორმულები და ამოცანები ამოხსნებით.

ეჭვს არ იწვევს ის, რომ მათემატიკის წარმოშობა არითმეტიკით დაიწყო. შემდეგ წარმოიშვა გეომეტრია და ალგებრა თითქმის ერთდროულად ძველ საბერძნეთში, ჩინეთში, ბაბილონში, ეგვიპტეში, ინდოეთში. ანტიკური საზოგადოების დაცემიდან მეცნიერებამ თანდათან გადაინაცვლა ახლო აღმოსავლეთში და ევროპაში.

მათემატიკის განვითარებაზე გავლენა მოახდინა მიწათმოქმედების განვითარებამ, ნავიგაციამ, ვაჭრობამ, მრეწველობამ, სამხედრო და საინჟინრო საქმემ, ფილოსოფიამ, ფიზიკამ და ასტრონომიამ. ჰიდროდინამიკის შესწავლამ გამოიწვია ფუნქციათა თეორიის წარმოშობა, მიწათმოქმედებამ-გეოგრაფიის, ელექტრომაგნეტიზმმა - დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის, კარტეზიანობამ (დეკარტის თეორია) - მექანიკის, სქოლასტიკამ - მათემატიკური ანალიზის და ეს ხდება მეთექვსმეტე საუკუნის ბოლოს. თეორიული მათემატიკის პარალელურად წარმოიშვა გამოყენებითი მათემატიკა, რომელიც სწავლობს მექანიკისა და ფიზიკის კანონებს, უფრო მეტიც, ბიოლოგიურ და ეკონომიურ კანონებსაც კი. თანდათანობით მზადდებოდა მათემატიკის განვითარების ნიადაგი.

გალილეი (1564-1642), კეპლერი (1571-1640), პასკალი (1588-1651), დეკარტი (1596-1650), კავალიერი (1598-1647), გულდინი (1577-1643), ფერმა (1601-1665), ტორიჩელი (1608-1647), ჰიუგენსი (1629-1695), ნიუტონი (1643-1727), ლეიბნიცი (1646-1716), ჰუკი (1635-1703), ლოპიტალი (1661-1704), ტეილორი (1685-1731), მაკლორენი (1698-1746) ის გიგანტი მეცნიერებია, რომლებმაც გააკეთეს დიდი აღმოჩენები ფიზიკასა და მათემატიკაში მეთექვსმეტე საუკუნის მიწურულიდან მეთვრამეტე საუკუნის პირველ ნახევრამდე. ეს იყო რენესანსის ის პერიოდი, როცა მეცნიერების ყველა დარგი ფრთებს შლიდა და ხორცს ისხამდა. ამას ხელს უწყობდა სახელმწიფო მმართველობის დიდი ყურადღება მეცნიერების განვითარების საქმეში; შეიქმნა ლონდონის სამეფო საზოგადოება, პარიზის მეცნიერებათა აკადემია, დაარსდა მრავალი უნივერსიტეტი მოწინავე ცივილიზებულ სახელმწიფოებში. მაგალითად, ბაზელის (შვეიცარია) უნივერსიტეტი დაარსდა 1263 წელს.

ბევრმა არამათემატიკურმა ფაქტორმა, მაგალითად ვასკო

და გამას და კოლუმბის მოგზაურობებმა, სტიმული მისცა მათემატიკის კიდევ უფრო სწრაფ აღმავლობას. საოკეანო ცურვის უშიშროების უზრუნველყოფა შეუძლებელი იყო მათემატიკური აპარატის გამოყენების გარეშე. დაიწყო მეცნიერთა ერთობლივი მუშაობა, რამაც განაპირობა მთვარისა და იუპიტერის თანამგზავრების მოძრაობის შესწავლა. ჰიუგენსის გამოკვლევებმა ქანქარიან საათებზე და ნიუტონის ამოცანამ ორ სხეულზე განაპირობა მათემატიკაში ახალი ოპერაციების - წარმოებულისა და ინტეგრალის შემოღება. ნიუტონის შრომებმა ეილერი (1707-1783) მიიყვანა სამი სხეულის ამოცანის ერთ შემთხვევაზე, კერძოდ მთვარის მოძრაობის გამოკვლევაზე. ამან მოითხოვა მათემატიკაში ახალი საკითხების შესწავლა და მათი დამუშავება. გამოკვლევებმა კარტოგრაფიაში, დრეკადობის თეორიაში, ნავიგაციაში, მექანიკაში და ასტროლოგიაში ფრთები შეასხეს ამ ეპოქის მათემატიკას, კერძოდ მათემატიკურ ანალიზს. ახალი გამოკვლევები და მიღწევები ახალ იდეებს ბადებდა; ზედიზედ ხდება არაერთი მათემატიკური გამოგონებანი. ამან გამოიწვია მათემატიკოსთა საკმაოდ დიდი არმიის შექმნა.

XVII-XVIII და შემდგომი საუკუნეები მათემატიკის აყვავების ხანა იყო, თუმცა შიგადაშიგ ადგილი ჰქონდა მეცნიერების განვითარების შეფერხებას, რასაც იწვევდა გაუთავებელი ომები. მაგრამ ადამიანის აზრის და გენიის შეფერხება შეუძლებელი გახდა. ცხოვრებისათვის მძიმე პერიოდში შეიქმნა ალბერტ ეინშტეინის (1879-1955) ფარდობითობის თეორია, ელექტრონული გამომთვლელი მანქანები, ატომური და წყალბადის ფეთქებადი ნივთიერებანი, კოსმოსის დაპყრობის თეორია, მისი პრაქტიკული განხორციელება და მრავალი სხვა.

დავუბრუნდეთ წინა პერიოდს.

მესამე ხარისხის განტოლებები $x^3+px=q$, $x^3+q=px$, $x^3=px+q$, p და q დადებითი რიცხვებია, შესწავლილი იქნა

(მაგრამ არ გამოუქვეყნებია) ბოლონიის მათემატიკოსის პროფესორის სციპიონ დელ ფეროს (1456-1526) მიერ. ტარტალიამ (ნიშნავს „ენაბლუს“) გამოაქვეყნა იგივე ნაშრომი 1535 წელს. ცნობილია, რომ ეს ნაშრომი მიითვისა კარდანომ (1501-1576), რამაც გამოწვია დავა ორ მათემატიკოსს შორის. დღესდღეობით $x^3+px-q=0$ განტოლების ამოხსნის ფორმულა ცნობილია კარდანო-ტარტალიას (უფრო უკეთესი იქნებოდა ტარტალია-კარდანოს) ფორმულის სახელწოდებით

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}-\frac{q}{2}}.$$

1593 წელს ბელგიელმა მათემატიკოსმა ანდრიენ ვან რომენმა მათემატიკოსების კამათში გამოწვევის მიზნით შეადგინა 45-ე ხარისხის განტოლება

$$x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-12300x^{39}+\ldots-3795x^3+45x=A$$

მანვე მიუთითა ამ განტოლების ერთ ამონახსნზე

$$x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}.$$

ვიეტმა (1540-1603) მიუთითა ამ განტოლების 23 ამონახსნზე $\sin\left(\frac{\varphi}{45}+n\cdot 8^0\right)$ სახით, უარყოფითი ფესვები ამოაგდო. მანვე იპოვა $\frac{2}{\pi}$-ს მნიშვნელობა. $\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}$. 1614 წელს გამოგონილ იქნა ლოგარითმები შოტლანდიელი მათემატიკოსის ნეპერის (1550-1617) მიერ.

1630-1660 წლებში მათემატიკოსები დაკავებული იყვნენ ალგებრული წირების შესწავლით, კერძოდ ისეთი წირების შესწავლით, რომელთა განტოლებებია $a^m y^n=b^n x^m$. ამასთან

ერთად გამოჩნდა არაალგებრული წირები, მაგალითად ციკლოიდა (რულეტი), ასტროიდა და სხვა. საფუძველი ეყრება ანალიზს. 1638 წელს ფერმამ მიიღო ექსტრემუმების პოვნის მეთოდი მარტივ ალგებრულ განტოლებებში ცვლადის ცვლის გზით. ეს მეთოდი გადატანილი იქნა უფრო რთულ ალგებრულ წირებზე ამსტერდამელი ბურგომისტრის იოჰან გუდდეს (1628-1704) მიერ 1658 წელს. მაშინვე სცადეს წირისადმი მხების გავლება, მოცულობისა და სიმძიმის ცენტრის გამოთვლა, მაგრამ რთული ფორმით. ნიუტონმა უკვე შემოიღო x და y-ის მცირე სიდიდეების აღნიშვნა dx და dy-ით და დაუშვა ტოლობა

$$(x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx.$$

პასკალმა გამოიყენა ეს და ისარგებლა გამოსახულებით, რომელშიც შედიოდა მცირე სიდიდეები, ხოლო უფრო მაღალი რიგის მცირეები უკუაგდო. მან ალტაცებით გამოიყენა ნიუტონის ჯერ კიდევ სადაო ზემოთ მოცემული ტოლობა. იგი ეყრდნობა არა უფრო ლოგიკას, არამედ ინტუიციას. ამით პასკალმა ზღვარი დაუდო ეპისკოპოს ბერკლის (1685-1753) კრიტიკას ნიუტონის მიმართ. მათემატიკოსებს არ ჰქონდათ ერთიანი სამეცნიერო ცენტრი, მხოლოდ მიმოწერით კმაყოფილდებოდნენ და აცნობდნენ ერთმანეთს თავიანთ გამოკვლევებსა და იდეებს. მარიენ მერიესთან (1588-1648) მიმოწერა ჰქონდათ დეკარტს, ფერმას, დეზარგს (1591-1661), პასკალს და მრავალ სხვას. ასეთმა ურთიერთობამ სწორედ საჭირო გახადა აკადემიების შექმნა. პირველი აკადემია ჩამოყალიბდა ნეაპოლში 1560 წ, შემდეგ რომში 1603 წ, შეიქმნა ლონდონის სამეფო საზოგადოება 1662 წ, საფრანგეთის აკადემია 1666 წელს.

სამეფო საზოგადოების დამაარსებელი იყო ვალისი (1616-1703), საფრანგეთის აკადემიის პირველ წევრებში შედიოდა ჰიუგენსი. 1655 წელს ვალისმა გამოსცა ძალიან საყურადღებო წიგნი „უსასრულოთა არითმეტიკა“, კავალერი უშვებს წიგნს „განუყოფელთა გეომეტრია“ („Геометрия неделимых“). ვალისს

უნდოდა გამოეყენებინა არა ძველი გეომეტრია (მანამდე არსებული), არამედ ახალი „არითმეტიკა“ (ალგებრა), ვალისი პირველი იყო მათემატიკოსთა შორის, რომელთანაც ალგებრა ახლებურად გადაიზარდა ანალიზში. ვალისმა შემოიღო უსასრულო მწკრივები და უსასრულო ნამრავლები. მან პირველმა შემოიღო სიმბოლო ∞, ნაცვლად $\frac{1}{0}$-სა. (ის ამტკიცებდა, რომ $-1 > \infty$). მან მიიღო აგრეთვე $\frac{\pi}{2}$-ის ფორმულა

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots}.$$

ამ დროისათვის ყურადსაღებია ის ფაქტი, რომ უდიდესი მოაზროვნეები ეძებდნენ „ზოგად მეთოდს“ სამყაროს შესაცნობად, ამიტომაც მიმართავდნენ ისინი მათემატიკას. ამ მიზეზით მაშინდელი ფილოსოფოსები იყვნენ მათემატიკოსები და, პირიქით. ჰიუგენსი იყო არა მარტო გამოჩენილი ფიზიკოსი, არამედ ასტრონომიც, მან პირველმა შექმნა სინათლის ტალღური თეორია და გამოარკვია, რომ სატურნს აქვს რგოლი.

ჰიუგენსის წიგნმა „ქანქარიანი საათები“ დიდი გავლენა მოახდინა ნიუტონზე. ნიუტონამდე და ლეიბნიცამდე ვალისის „არითმეტიკასთან“ ერთად ჰიუგენსის ეს წიგნი წარმოადგენს ანალიზს უფრო განვითარებული ფორმით.ვალისისა და ჰიუგენსის მიმოწერებში და წიგნებში ვხვდებით ახალ აღმოჩენებს წირების განწრფევადობაზე, კვადრატურებზე, მომვლებზე. ჰიუგენსმა გამოიკვლია ტრაქტრისა, ლოგარითმული წირი, ჯაჭვწირი და დაადგინა, რომ ციკლოიდა ტაუტოქრონული წირია. ჰიუგენსი დიდად აფასებდა ლეიბნიცის გამოკვლევებს, ვალისი კი სარგებლობდა ნიუტონის აღნიშვნებით. ამ დროიდან საფუძველი ჩაეყარა ალბათობის თეორიას ფერმასა და პასკალის მიერ.

ნიუტონი - ლეიბნიცი
დიფერენციალებისა და ინტეგრალების ზოგადი მეთოდი

(ისინი ურთიერთ შექცეული პროცესებია) შეიძლებოდა აღმოჩენილიყო მხოლოდ იმ ადამიანების მიერ, რომლებიც ფლობდნენ როგორც ბერძნებისა და კავალერის გეომეტრიულ მეთოდებს, ისე დეკარტისა და ვალისის ალგებრულ მეთოდებს. ასეთი ადამიანები უნდა გამოჩენილიყვნენ 1660 წლის შემდეგ. ისინი იყვნენ ნიუტონი და ლეიბნიცი. ისინი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად აკეთებდნენ თავიანთ აღმოჩენებს. ნიუტონმა პირველმა გამოიგონა ანალიზი (1665-1666) წლებში, ლეიბნიცმა კი (1673-1676) წლებში. ლეიბნიცმა მისი შედეგები გამოაქვეყნა 1684-1686 წლებში, ნიუტონმა — უფრო გვიან. ცნობილია რომ ლეიბნიცის სკოლა იყო უფრო ძლიერი, ვიდრე ნიუტონისა. 1687 წელს ნიუტონმა გამოაქვეყნა წიგნი „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური პრინციპები", რომელშიც გადმოცემულია მექანიკის აქსიომატიკური აგება, მიზიდულობის კანონი და მთვარის მოძრაობა დედამიწის გარშემო. ნიუტონმა მათემატიკური სიმკაცრით გამოიყვანა კეპლერის პლანეტების მოძრაობის კანონი. ამოხსნა რა ბირთვების მიზიდულობის კანონი, იგი მივიდა პოტენციალის თეორიამდე. ნიუტონი მთლიანად ფლობდა ანალიზს, რომელსაც იგი უწოდებდა ფლიუქსიათა თეორიას. ნაყოფიერი იყო ნიუტონისათვის 1665-1666 წლები, როცა მან ძირითადი შედეგები მიიღო. მან ფლიუქცია მჭიდროდ დაუკავშირა უსასრულო მწკრივებს ვალისის „არითმეტიკიდან", განაზოგადა ბინომიალური თეორია წილადურ და უარყოფით მაჩვენებლიან შემთხვევებში, ამით განაზოგადა ბინომიალური მწკრივი. 1736 წელს მისი სიკვდილის შემდეგ გამოდის მისი წიგნი „ფლიუქსიათა მეთოდი". v, x, y, z ცვლადებს ნიუტონი უწოდებდა „ფლიუენტებს", სიჩქარეებს იგი უწოდებდა ფლიუქსებს და აღნიშნავდა იგივე ასოებით, ოღონდ თავზე წერტილებით $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; უსასრულოდ მცირეს უწოდებდა „ფლიუქსიების მომენტებს" და აღნიშნავდა $\dot{v}_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, სადაც 0 იყო უსასრულოდ მცირე სიდიდის აღმნიშვნელი. „ვთქვათ, მოცემულია განტოლება $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ -წერს ნიუტონი. ჩავსვათ $x + x_0$ ნაცვლად x-სა, $y + y_0$-ნაცვლად y-სა და ა.შ., მიღებულში უკუვაგდოთ II და III ხარისხიანი წევრები წერტილებით (მაგ. $\dot{x}\dot{x}$. $\dot{y}^3$....), მივიღებთ

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0"$$

(ეს კი მოცემული განტოლების წარმოებულია). ნიუტონი წარმოებულს უწოდებდა სიჩქარეს. ეს კი მოითხოვდა ზღვარზე გადასვლას. მან შეისწავლა კონუსური კვეთები და მესამე რიგის წირები, რომლებიც დაჰყო 72 სახედ, ყოველი კუბური წირი მიიღება $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ „განშლადი პარაბოლებისაგან" ერთი სიბრტყის მეორეზე ცენტრალური დაგეგმილებისას. იპოვა $x^3 - 2x - 5 = 0$ განტოლების ფესვი მიახლოებით $x \approx 2.09455147$. ნიუტონი მისი შედეგების გამოქვეყნებაზე თავს იკავებდა. 1665-1666 წლებში მიღებული შედეგები-მსოფლიო მიზიდულობის კანონი გამოსაცემად გადასცა 1688 წელს. მისი „ზოგადი არითმეტიკა", წაკითხული ლექციების სახით 1673-დან 1683 წლამდე, გამოსაცემად გადასცა 1707 წელს, 1669 წელს დაწერილი ნაშრომი მწკრივებზე გამოაქვეყნა 1711 წელს. „ფლიუქსიათა მეთოდი" მეცნიერებმა გაიცნეს მისი სიკვდილის შემდეგ 1736 წელს.

პასკალის შემდეგ გამომთვლელი მანქანა გამოიგონა ლეიბნიცმა, იგი მივიდა ორობითის ძრავის იდეამდე. იგი არის მათემატიკური სიმბოლოების დამფუძნებელი, საფუძველი ჩაუყარა ანალიზს. მისი ძირითადი გამოგონებები მოხდა 1673-1676 წლებში. მასზე დიდი გავლენა იქონია ჰიუგენსმა, დეკარტმა და პასკალმა. იგი იცნობდა ნიუტონის მეთოდებს. ნიუტონის მიდგომა იყო კინემატიკური,

ლეიბნიცისა-გეომეტრიული. იგი აზროვნებდა „მახასიათებელი სამკუთხედების“ ტერმინებში (dx, dy, ds), რომლებიც ადრე გამოიყენა პასკალმა და ბაროუმ (1630-1677).

პირველად ანალიზის საწყისები ლეიბნიცის მიერ გამოიცა 1684 წელს მათემატიკურ ჟურნალში, რომელიც მან დაარსა 1682 წელს, სათაურით „ახალი მეთოდი მაქსიმუმებისა და მინიმუმებისათვის, ასევე მხებებისათვის, რომელთათვის არაა დაბრკოლება წილადური და ირაციონალური რიცხვები და ამისათვის აღრიცხვის განსაკუთრებული სახე“. სტატიაში მოცემული ჰქონდა სიმბოლოები dx, dy და გაწარმოების წესები $d(uv)=udv+vdu$ -ს ჩათვლით. ასევე ექსტრემალური მნიშვნელობისათვის $dy=0$ პირობა, ხოლო გადაღუნვის წერტილებისათვის $d^2y=0$ პირობა. ამ სტატიას მოჰყვა მეორე სტატია 1686 წელს ინტეგრალური აღრიცხვის წესებით, შემოიღო ინტეგრალის სიმბოლო $\int$, დაწერა ციკლოიდის განტოლება

$$y=\sqrt{2x-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$ სახით.

ამ სტატიამ დიდი გამოხმაურება ჰპოვა მეცნიერებში. 1687 წელს ლეიბნიცს შეუერთდნენ ძმები ბერნულები იაკობი (1654-1705), იოჰანი (1667-1748). 1700 წლამდე ამ სამეულმა შექმნა ანალიზის ძირითადი კურსი ვარიაციათა აღრიცხვის ჩათვლით. 1696 წელს გამოჩნდა ანალიზის პირველი სახელმძღვანელო. იგი დაწერა ლოპიტალმა - იოჰან ბერნულის მოწაფემ; ამ სახელმძღვანელოს სახელწოდება იყო „უსასრულოდ მცირეთა ანალიზი“. მასში გადმოცემული იყო მისი მასწავლებლის ლექციები დიფერენციალურ აღრიცხვაში. ამ წიგნში მოცემული იყო ე. წ. „ლოპიტალის წესიც“. ლეიბნიცს ეკუთვნის შემდეგი ტერმინებისა და სიმბოლოების შემოღება: „დიფერენციალური აღრიცხვა“, „ინტეგრალური აღრიცხვა“, „=“, „:“, „ფუნქცია“, „კოორდინატები“. მწკრივებს

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots,\quad \operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$$

ლეიბნიცის მწკრივები ჰქვია, თუმცა პირველად მას არ გამოუგონია (არის მოსაზრება, რომ ეს მწკრივები პირველად შეისწავლა ჯეიმს გრეგორიმ (1638-1675)). ჩამოყალიბებული დებულებებისა და ფორმულებისადმი არამკაცრმა დამოკიდებულებამ გამოიწვია კრიტიკა მეცნიერების მხრიდან (ბერკლი), მაგრამ კრიტიკოსები შორს იყვნენ მკაცრი დაფუძნებისაგან, თუმცა ამ კრიტიკამ გამოაცოცხლა მეცნიერები კონსტრუქციული მუშაობისათვის, რაც გონებამახვილურად შენიშნა ბერკლიმ. ამით მთავრდება XVII საუკუნე და იწყება XVIII საუკუნე.

ეს საუკუნე ხასიათდება ყველა მეცნიერების და მათ შორის მათემატიკის განვითარების აღმავლობით. ისე როგორც XVII-მ, ასევე XVIII საუკუნემ შვა დიდი გიგანტი-მათემატიკოსები ლეიბნიცი, ძმები იაკობ და იოჰან ბერნულები, ეილერი (1707-1783), ლაგრანჟი (1736-1813), ლაპლასი (1749-1827). მათთან ერთად მუშაობდნენ კლერო (1713-1765), მოპერტიუნი (1698-1759), დალამბერი (1717-1783), დანიელ ბერნული (1700-1784). მათემატიკოსების მუშაობა ძირითადად წარიმართა პარიზის, ბერლინის და პეტერბურგის აკადემიებში. ბერნულების შედეგებს ვხვდებით თანამედროვე დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის სახელმძღვანელოებში, ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებში. იაკობ ბერნულიმ პირველად გამოიყენა პოლარული კოორდინატები, გამოიკვლია ჯაჭვწირი (რომელიც ადრე განიხილა ჰიუგენსმა და სხვებმა), ლემნისკატები და ლოგარითმული სპირალები. მანვე გამოიკვლია იზოპერიმეტრული ფიგურები; ამ გამოკვლევამ იგი მიიყვანა ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანებზე. ლოგარითმულმა სპირალმა იმდენად აღაფრთოვანა იაკობი, რომ ანდერძიც კი დატოვა, რომ ეს წირი ამოეკვეთათ მისი საფლავის ქვაზე წარწერით „Изменившись, возникаю такой же.“ ანდერძი

შეუსრულეს. იაკობი იკვლევდა აგრეთვე ალბათობის თეორიის საკითხებს („ბერნულის თეორია", ბინომური განაწილება), პასკალის სამკუთხედის გამოყენებით მან შეადგინა რიცხვები, რომლებიც დღესდღეობით ცნობილია „ბერნულის რიცხვების" სახელწოდებით. არანაკლები მუშაობა შეასრულა იოჰან ბერნულიმ, რომელმაც შეისწავლა ბრახისტროქრონის ამოცანა ვარიაციათა აღრიცხვიდან. ამ ამოცანის ამონახსნია ციკლოიდა. ძმებმა ბერნულებმა გამოიკვლიეს აგრეთვე ზედაპირზე გეოდეზური წირები. იოჰანს ჰყავდა ორი შვილი ნიკოლაი (1695-1726) და დანიელი (1700-1784), რომლებიც მიიწვიეს პეტრე დიდის ახლად დაარსებულ ქალაქში პეტერბურგში. მათი შრომები ცნობილია „პეტერბურგული ამოცანის" (ალბათობის თეორიაში) და „ჰიდროდინამიკის" სახელწოდებით (ისინი მალე გადავიდნენ ბაზელში). დალამბერთან და ეილერთან ერთად დანიელმა შეისწავლა სიმის რხევების თეორია. დანიელის ბიძამ და მამამ განავითარეს ჩვეულებრივ დიფგანტოლებათა თეორია, დანიელი კი ითვლება კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის პიონერად. საინტერესოა ბერნულების გენეალოგია

ნიკოლაი ბერნული (1623-1708)

იაკობი (1654-1705)
«ვარაუდთა ხელოვნება»

იოჰან (1667-1748)
«ბრაქისტოქრონი»

ნიკოლაი (1695-1726)
«პეტერბურგული ამოცანა»

დანიელი (1700-1784)
«ჰიდროდინამიკა»

ეილერი

მათემატიკურ მეცნიერებაში დიდი მოვლენა იყო ლეონარდ ეილერი, რომელმაც ბევრი რამ გააკეთა თეორიულ და გამოყენებით მათემატიკაში. თუმცა მან 1735 წელს დაკარგა ერთი თვალი, 1766 წ. მეორე თვალიც, მაგრამ ერთი წუთითაც არ შეუჩერებია მეცნიერული მუშაობა. მის სიცოცხლეში გამოვიდა მისი 530 წიგნი და სტატია. მისი სიკვდილის შემდეგ პეტერბურგის აკადემიამ გააგრძელა მისი ხელნაწერების გამოცემა 47 წლის განმავლობაში, სულ მთლიანად გამოიცა ეილერის 886 წიგნი და სტატია. დიდად საყურადღებოა მისი წიგნი „შესავალი უსასრულოთა ანალიზში" (გამოიცა 1748 წელს), რომელშიც სხვა საკითხებთან ერთად მოცემულია მთელი ის ტრიგონომეტრია, რომელიც დღეისათვის არის ჩვენთვის ცნობილი. ლაგრანჟი, ლაპლასი და გაუსი (1777-1855) ერთი წუთითაც არ წყვეტდნენ ურთიერთობას ეილერთან. ეილერმა დაამუშავა მწკრივები, მოგვცა e^x, $\sin x$, $\cos x$ -ის მწკრივები და ფორმულა $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (რომელიც სხვადასხვა ფორმით შეისწავლა იოჰან ბერნულიმ). ეილერის „შესავალში" გამოკვლეულია წირები და ზედაპირები მათი განტოლებების მიხედვით, ამიტომ ეს წიგნი, თამამად შეიძლება ითქვას, წარმოადგენს ანალიზური გეომეტრიის სახელმძღვანელოს. ამავე წიგნში მოცემულია ე.წ. ძეტა ფუნქცია და მისი კავშირი მარტივ რიცხვებთან. ეილერის მეორე არანაკლებ მნიშვნელოვანი წიგნია „დიფერენციალური აღრიცხვა", რომელიც გამოიცა 1755 წელს, ამას მოჰყვა „ინტეგრალური აღრიცხვა". ამ წიგნში, გარდა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვისა, მოცემულია ტეილორის თეორემა მისი მრავალი გამოყენებით, ეილერის შეჯამების ფორმულა და ეილერის ინტეგრალები. 1736 წელს ეილერმა გამოსცა „მყარი სხეულების მოძრაობის თეორია", რომელშიც განხილულია განტოლება ისეთი სხეულისათვის, რომელიც ბრუნავს წერტილის გარშემო. 1770 წელს გამოსცა „სრული შესავალი

ალგებრაში“, მასში გადმოცემული მასალა დაყვანილია მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებათა თეორიამდე, 1744 წელს გამოცემულ იქნა ეილერის თხზულება „მრუდი წირების მეთოდი, რომლებსაც გააჩნია მაქსიმუმების და მინიმუმების თვისებები“. მასში გადმოცემულია ვარიაციათა აღრიცხვა, ეილერის განტოლებები და მრავალი გამოყენებანი. მოცემულია ფორმულა $V+F-E=2$, V-წვეროების რიცხვია, F-წახნაგების, E-წიბოების რიცხვი (ეს ფორმულა ცნობილი იყო დეკარტისათვისაც). ეილერი სტატიებსა და სახელმძღვანელოებს წერდა გასაგები ენით, საკმაოდ მკაცრი, მაგრამ ადვილად გასაგები მტკიცებებით. მან მოგვცა ფორმულა

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ell n\, n\right)=0{,}577216\ldots,$$

რომელსაც ეილერის მუდმივი ჰქვია. ეილერმა შრომები დაწერა ასტრონომიაში, კერძოდ „პლანეტებისა და კომეტების მოძრაობის თეორია“. მას აქვს დაწერილი აგრეთვე შრომები ჰიდრავლიკაში, გემთმშენებლობაში, არტილერიაში, ფიზიკაში, მუსიკაში, ფილოსოფიაში, ბუნებათმცოდნეობაში, კარტოგრაფიაში, საზღვაო საქმეში. დღეს ჩვენ მათემატიკაში ვსარგებლობთ ეილერის აღნიშვნებით.

ძალიან დიდ შეფასებას აძლევდნენ ეილერს ლაპლასი, გაუსი, რიმანი (1826-1866). ლაპლასი ამბობდა „იკითხეთ ეილერი იგი ჩვენი მასწავლებელთა მასწავლებელია“. ბრმა ეილერს ეხმაურებოდნენ მისი შვილი და დისშვილი ფუსი (1755-1826), ლექსელი (1740-1781), შუბერტი (1758-1828).

დიდ მათემატიკოსთა შორის მოიხსენება ჟოზეფ ლუი ლაგრანჟი, რომლის შრომები ეხებოდა დინამიკის ამოცანებს, სამი სხეულის ამოცანას (შეიძლება მოიძებნოს სამი სხეულის ისეთი საწყისი მდებარეობა, როცა ორბიტები იქნება მსგავსი ელიფსები, შემოწერილი ერთი და იგივე პერიოდში). 1767 წელს მან გამოსცა მემუარი „რიცხვით განტოლებათა ამოხსნების შესახებ“,

1788 წელს - „ანალიზური მექანიკა“, 1797 წელს „ანალიზურ ფუნქციათა თეორია“, 1801 წელს — „ლექციები ფუნქციათა აღრიცხვაში“.

პიერ სიმონ ლაპლასი (1749-1827) იმ დიდ მათემატიკოსთა რიცხვს მიეკუთვნება, რომლებიც მუშაობდნენ ალბათობათა თეორიაში, ციურ მექანიკაში და სხვა. ცნობილია მისი განტოლება

$$U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=0,$$

რომლის ამოხსნას მივყავართ „პოტენციალის თეორიამდე“. „ციური მექანიკა“ თავს უყრის ნიუტონის, კლეროს, დალამბერის, ეილერის, ლაგრანჟის და ლაპლასის შრომებს, დედამიწის ფიგურის თეორიაში, მთვარის თეორიაში, სამი სხეულის ამოცანაში, პლანეტების შეშფოთების თეორიაში, მზის სისტემის მდგრადობის თეორიაში.

ერთ-ერთი მათემატიკოსი აღნიშნავდა „ხუთი გეომეტრი კლერო, ეილერი, დალამბერი, ლაგრანჟი და ლაპლასი ის მათემატიკოსებია, რომლებმაც გაიყვეს ის ,სამყარო რომლის არსებობა აღმოაჩინა ნიუტონმა, ისინი ბაძავდნენ მას, ყველა მიმართულებით შეიჭრენ ახალ სამყაროში, რომელიც მანამდე იყო მიუწვდომელი“.

მეცხრამეტე საუკუნე

ნოყიერი ნიადაგი მოამზადა XVIII საუკუნემ მომავალი XIX საუკუნის მეცნიერებისათვის. მათემატიკა თანდათანობით შლის ფრთებს. ამ საუკუნეს დიდი მეცნიერული წარმატებებით და მომავალში ბევრი სიახლეებით ხვდება კარლ ფრიდრიხ გაუსი. მას დიდ მათემატიკოსად ჩამოყალიბებაში დაეხმარა ენციკლოპედიური ცოდნა თეორიულ და გამოყენებითი მათემატიკაში, ფიზიკაში, ასტრონომიაში, გეოდეზიაში, ალბათობის თეორიაში პოტენციალთა თეორიაში და სხვა. მან პირველმა

დაამტკიცა „ლეჟანდრის ძირითადი თეორემა", შეისწავლა კომპლექსური ინტეგრალი, კვადრატული ფორმები. ძირითადი მისი შედეგები გადმოსცა დისერტაციაში „არითმეტიკული გამოკვლევები", გაუსი გატაცებული იყო ასტრონომიით, შეისწავლა პლანეტა ცერერა, აღმოაჩინა მეორე ასტეროიდი პალადა, გამოსცა წიგნი „ციური სხეულების მოძრაობის თეორია". დაწერა მნიშვნელოვანი შრომები ნებისმიერი ელიფსოიდების მიზიდულობაზე, მექანიკურ კვადრატურებზე, საუკუნო შეშფოთებებზე, ჰიპერგეომეტრიულ მწკრივებზე, კომპლექსურ რიცხვებზე, ყოველივე ამან გამოიწვია დიდი რაოდენობით ფუნქციების განხილვა, მრუდწირული კოორდინატების შემოღება; სიცოცხლის ბოლო წლები გაუსმა მიუძღვნა მათემატიკას, ელიფსურ ფუნქციებს და არაევკლიდურ გეომეტრიას.

გაუსის გვერდით იხსენიებენ ადრიენ მარი ლეჟანდრს (1752-1833), რომლის შრომები მიძღვნილია რიცხვთა თეორიისადმი. მან შეისწავლა ახალი ტიპის ფუნქციები, რომლებიც ცნობილია „ლეჟანდრის ფუნქციების" სახელწოდებით, გამოაქვეყნა შრომები ელიფსურ და ეილერის ინტეგრალებში, ინტეგრალურ აღრიცხვაში, დაწერა წიგნი „გეომეტრიის საფუძვლები".

დიდია გეომეტრიის განვითარების საქმეში გასპარ მონჟის (1746-1818) როლი, განსაკუთრებით მხაზველობით გეომეტრიაში. მან თავი მოუყარა თავისი დროის ცნობილ მათემატიკოსებს პარიზის პოლიტექნიკურ სკოლაში, რომლის დირექტორიც თვითონ იყო. ამ სკოლაში გარდა ლაგრანჟისა და მონჟისა მუშაობდნენ სიმეონ პუასონი (1781-1840), ჟოზეფ ფურიე (1768-1830), ოგიუსტენ კოში (1789-1857), რომლებიც მუშაობდნენ მათემატიკის გამოყენებაზე მექანიკასა და ფიზიკაში, მათ ბევრი რამ აღმოაჩინეს თეორიულ მათემატიკაში, დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში, დრეკადობის თეორიაში, პოტენციალთა თეორიაში. პუასონის განტოლებამ

$\Delta v = 4\pi\rho$, ისე როგორც ლაპლასის განტოლებამ $\Delta v = 0$, გამოიწვია ბევრი მათემატიკური მასალის დამუშავება მათემატიკური ფიზიკის განტოლებებში. ცნობილია პუასონის შრომები ალბათობის თეორიაში. ფურიემ დაამუშავა და გამოსცა წიგნად „სითბოს ანალიტიკური თეორია", რომელშიც შეისწავლა განტოლება $\Delta u = ku_t$. ცნობილია ფურიეს მეთოდები ტრიგონომეტრიულ მწკრივებში, შეისწავლა მწკრივი $\sum A_n \cos nax + B_n \sin nax$ და მისი გამოყენება კერძო წარმოებულებიან განტოლებებში სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისას. ცნობილია ფურიეს გარდაქმნის ფორმულები, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება დიფერენციალურ და ინტეგრალურ განტოლებებში. შემდეგში ეს მეთოდი განავითარა პიერ გუსტავ ლეჟენ დირიხლემ (1805-1859) და ბერნარდ რიმანმა.

დიდი შრომა გასწია კოშიმ მათემატიკური ანალიზის, როგორც მეცნიერების მკაცრად და სრულყოფილად ჩამოყალიბებაში, ოპტიკაში, მექანიკაში ლუის ნავიესთან (1785-1836) ერთად. იგი ითვლება დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ფუძემდებლად; დიდი პოპულარობა მოუტანა მას გამოკვლევებმა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში, რომელიც ფართოდ გამოიყენება ჰიდრო და აეროდინამიკაში. დიდი გამოხმაურება გამოიწვია მათემატიკოსებში მისმა წიგნმა „მემუარი განსაზღვრულ ინტეგრალებზე, რომლებიც აღებულია წარმოსახვით საზღვრებზე". დაამტკიცა თეორემა, რომელიც ცნობილია კოშის თეორემის სახელწოდებით და რომლის მიხედვითაც ყოველი რეგულარული $f(z)$ ფუნქცია $z = z_0$ წერტილის მიდამოში შეიძლება გაიშალოს მწკრივად. ამ მომენტში გაუსმა გამოაქვეყნა კომპლექსური რიცხვების არითმეტიკული თეორემა. კოშის მეთოდი გამომდინარე მისი თეორემიდან განავითარა ლორანმა (1813-1854). ამ დროისათვის

დამახასიათებელია მათემატიკური დებულებების მკაცრი ჩამოყალიბება და დამტკიცება ყოველგვარი გაუგებრობის და გართულების გარეშე; ამ საქმეში კოშისთან და გაუსთან ერთად დიდი შრომა გასწიეს ნილს ჰენრიხ აბელიმ (1802-1829) და ბერნარდ ბოლცანომ (1781-1848). კოშის და გაუსის მიმდევრები იყვნენ კარლ თეოდორ ვილჰელმ ვეიერშტრასი (1815-1897) და გეორგ კანტორი (1845-1918). კოშიმ 1821 წელს დაწერა სახელმძღვანელო „ანალიზის კურსი“, რომელიც დღევანდელი ანალიზის სახელმძღვანელოს წარმოადგენს. კოშიმ გამოიყენა ზღვრის დალამბერისეული განმარტება, რათა განემარტა ფუნქციის წარმოებული, გამოეთვალა ზღვარი $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, როცა $\alpha \to 0$; მან განმარტა აგრეთვე უსასრულოდ მცირე სიდიდე და ჩამოაყალიბა, რომ Δx და Δy არიან უსასრულოდ მცირე სიდიდეები. ფუნქციის წარმოებულს აღნიშნავს y'-ით, ანუ $f'(x)$-ით და ამ წარმოებულს განმარტავს, როგორც $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ შეფარდების ზღვარს, როცა $i \to 0$. შემდეგ წერს, რომ $i = \alpha h$, სადაც α უსასრულოდ მცირეა, ხოლო h სასრული რიცხვი,

$$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i} h,$$

h-ს უწოდებს დიფერენციალს და აღნიშნავს

$$dy = d\,f(x) = h\,f'(x); \quad dx = h.$$

1836 წელს კოშიმ პირველად დაამტკიცა თეორემა დიფერენციალური განტოლების და ასეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნების არსებობაზე.

მათემატიკურ მეცნიერებაში ახალი ვარსკვლავები ამობრწყინდნენ ევარისტ გალუას (1811-1832) და ნილს ჰენრიხ აბელის სახით. მათ

დიდი როლი ითამაშეს ჯგუფთა თეორიაში (გალუა) და მწკრივთა თეორიაში (აბელი). 1830 წელს დაიბეჭდა გალუას სამი მემუარი 1. „ერთ-ერთი მემუარის ანალიზი განტოლებების ალგებრულად ამოხსნის შესახებ“ 2. „შენიშვნა რიცხვითი განტოლებების ამოხსნის შესახებ“ 3. „მემუარი რიცხვთა თეორიაში“. გალუამ მემუარი „განტოლებების ზოგადი ამოხსნის ერთ-ერთი საკითხის შესახებ“ გადასცა პუასონს, რომელმაც მემუარს უწოდა გაუგებარი და უკანვე დაუბრუნა. ამით შეურაცხყოფილმა გალუამ მათემატიკას თავი მიანება და მთლიანად გადავიდა პოლიტიკაში. მაგრამ აღმოჩნდა, რომ გალუას შრომებში იყო დიდი აღმოჩენები ჯგუფთა თეორიაში, ალგებრულ განტოლებათა თეორიაში. გალუას თეორია დიდი მოვლენა იყო მათემატიკაში. ფელიქს კლეინი (1849-1925) ასე ახასიათებს 20 წლის ასაკში დაღუპულ გალუას „დახლოებით 1830 წელს საფრანგეთში მათემატიკურ ჰორიზონტზე მოულოდნელად აკაშკაშდა ახალი ვარსკვლავი და მეტეორის მსგავსად სწრაფად ჩაქრა“. გალუა კი დარწმუნებული იყო მისი თეორიის სისწორეში.მან სიკვდილის წინ 1832 წლის 29 მაისს მეგობარს მისწერა: „იმედი მაქვს აღმოჩნდებიან ადამიანები, რომლებიც ამ ქაოსის გაშიფვრაში სარგებლობას ნახავენ“, იგი გარდაიცვალა 31 მაისს. გალუამ გადატრიალება მოახდინა მათემატიკაში. მისი ჯგუფის ცნება ფართოდ შეიჭრა თანამედროვე მათემატიკის ყველა დარგში და ძირფესვიანად შეცვალა მისი სახე. გალუამ სიცოცხლეში თავისი ნაშრომების მხოლოდ ნაწილის გამოქვეყნება მოასწრო უწყვეტ წილადებზე, ამ ნაშრომში დაამტკიცა თეორემა:„თუ რომელიმე ხარისხის განტოლების ერთ-ერთი ფესვი წარმოადგენს წმინდა პერიოდულ წილადს, მაშინ განტოლებას აუცილებლად აქვს მეორე პერიოდული ფესვი, რომელიც მიიღება უარყოფითი ერთეულის გაყოფით უწყვეტ წილადზე“. გალუას ჰქონდა ახალი იდეები ინტეგრალებზე ერთი ცვლადის ალგებრული ფუნქციებიდან. ამ ინტეგრალებს ახლა აბელის ინტეგრალები ჰქვია. 1844 წლიდან კოშიმ დაიწყო გალუას შრომების ბეჭდვა, რამაც

გამოიწვია მათემატიკოსების დიდი აღფრთოვანება და ინტერესი ამ შრომებისადმი.

გალუას გვერდით იყო ამ ეპოქის მეორე გენიალური მათემატიკოსი ნილს ჰენრიხ აბელი. 22 წლის ასაკში მან დაამტკიცა, რომ მეხუთე ხარისხის ზოგადი განტოლება რადიკალებში არ ამოიხსნება. მისი შრომები ეძღვნება მწკრივებს, ელიფსურ ფუნქციებს, ინტეგრალებს, რომლებსაც დღეს აბელის ინტეგრალები და აბელის ფუნქციები ჰქვია. მის შრომებს დიდი ინტერესით ბეჭდავდნენ ცნობილ მათემატიკურ ჟურნალებში მისივე სიცოცხლეში. გალუას და აბელის იდეები მჭიდროდ არის დაკავშირებული ერთმანეთთან.

შემდეგი დიდი მათემატიკოსი იყო კარლ გუსტავ იაკობ იაკობი (1804-1851), რომლის ნაშრომმა „ელიფსურ ფუნქციათა თეორიის ახალი საფუძვლები“ დიდი ინტერესი გამოიწვია მათემატიკოსთა შორის. მან აგო ე.წ. თეტა ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრა მწკრივებით, ორმაგპერიოდული ფუნქციები snu, cnu და dnu, რომლებიც თეტა-ფუნქციების შეფარდებაა. გადაწყვიტა საკითხი იმაზე, რომ შეიძლება შევაქციოთ ჰიპერელიფსური ინტეგრალები, ისე როგორც შესაძლებელი გახდა ელიფსური ინტეგრალების შექცევა, რის შედეგად მიიღება ელიფსური ფუნქციები.

ამ დროისათვის გამოქვეყნდა შრომები სინათლის ტალღურ თეორიაში. ამ შრომების ავტორი იყო ვილიამ როუენ ჰამილტონი (1805-1865). მან ოპტიკასა და დინამიკაში გამოიყენა აგრეთვე ვარიაციული აღრიცხვა.

XIX საუკუნის დიდ მათემატიკოსთა რიცხვს მიეკუთვნებიან პიერ გუსტავ ლეჟენ დირიხლე, ნიკოლოზ ივანეს ძე ლობაჩევსკი (1792-1856), გეორგ კანტორი (1845-1918), ოსტროგრადსკი (1801-1862), ბუნიაკოვსკი (1804-1889), ჩებიშევი (1821-1894), სილვესტრი (1814-1897), ფელიკს კლეინი (1849-1925), მარიუს სოფუს ლი (1842-1899), სტილტიესი (1856-1894), პუანკარე (1854-1912) და სხვები.

XX საუკუნის ცნობილი მათემატიკოსები იყვნენ ჟორდანი (1838-1922), დინი (1845-1918), პეანო (1858-1922), ლებეგი (1875-1941), ბორელი (1871-1956), დანჟუა (1884), ბერი (1879-1932), ლუზინი (1883-1950), იუნგი (1863-1942), ბერნშტეინი (1880-1968), პიკარი (1858-1941), ცერმელო (1871-1953), კოლმოგოროვი (1903), სტეკლოვი (1864-1926), ჰილბერტი (1862-1943), კარტანი (1869-1951), ვეილი (1885-1955), ბანახი (1892-1945), გელფონდი (1906-1968), კრილოვი (1879-1955), ვინერი (1895-1964) და მრავალი სხვა.

ამ მეცნიერთა ზოგიერთ გამოკვლევებს სტუდენტები იცნობენ თეორემებისა და ფორმულების სახით.

ასეთია ძალიან მოკლე ისტორია ისეთი მნიშვნელოვანი და ფენომენალური მეცნიერებისა, როგორიცაა მათემატიკა. ამ ჩანაწერებში ძირითადად აქცენტი გადაგვქონდა ანალიზის საკითხებზე. თუმცა საკითხების სრული წარმოდგენისათვის აუცილებელი იყო ერთიანობაში გაგვეხილა მეცნიერთა შრომები, რამეთუ თუ ალგებრის, გეომეტრიის, ალბათობათა თეორიის და სხვა დარგების მნიშვნელოვანი ამოცანები თავის დროზე შესწავლილი იყო ანალიზის მეთოდებით. განტოლებები და უტოლებები (როგორი სახისაც უნდა იყოს ისინი) დაკავშირებულია წირებთან და ზედაპირებთან, რომლებიც ძირითადად დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის გამოყენებით შეისწავლება. ეს ზერელე ნათქვამი ბევრს არაფერს გვეუბნება, ამიტომ მივმართავთ დ.ი. სტროიკის სიტყვებს: „История математики - не только история развития понятий, но одна из частей истории человеческой деятельности, в которой отражается борьба человека с природой, при том не абстрактного человека, а человека как члена общества.

Однако большинство историков математики рассматривают её почти исключительно как историю идей, понятий, переходящих от одного математика к другому, который их далее развивает. Галилей появлял на Кавальери, Кавальери - на Торричелли, Торричелли - на Паскаля, Паскаль - на Лейбница, а Лейбниц - на братьев Бернулли"... Следует по возможности проверять утверждения автора, обращаясь к оригиналам. По многим причинам это является правильным положением. При изучении таких авторов, как Евклид, Диофант, Декарт, Лаплас, Гаусс или Риман, не следует ограничиваться только цитатами из исторических книг, в которых описаны их труды. В подлинниках Евклида и Гаусса содержится такая же живительная сила, как и в подлинниках Шекспира; у Архимеда, у Ферма, у Якоби можно найти стольже великолепнные места, как у Горация или Эмерсона" (ემერსონი (1803-1882) იყო ამერიკელი კრიტიკოსი, პოეტი და მორალისტი).

ბოლოსიტყვაობის მაგიერ

გასრულდა მათემატიკური ანალიზის პირველი ნაწილი-ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა. თქვენ უკვე შეგექმნათ გარკვეული წარმოდგენა ამ საგანზე. მტკიცება არ უნდა იმას, რომ ამ საგნის ყოველი საკითხი ჯაჭვის რგოლებივითაა ასხმული ერთმანეთზე და ნებისმიერი თემა დაკავშირებულია თითქმის მთელ გავლილ მასალასთან. განსაზღვრული ინტეგრალი შეისწავლება განუსაზღვრელი ინტეგრალით, ზღვრითა და წარმოებულით; თავის მხრივ წარმოებული შეისწავლება ზღვრითა და უწყვეტობით. ყველაფერი ეს კი თავს იყრის ნამდვილ რიცხვებთან და ფუნქციებთან. ანალიზის მეორე ნაწილში შეისწავლება ისეთი საკითხები, რომლებიც პირველი ნაწილის ბუნებრივი გაგრძელებაა-კერძოდ, მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, მწკრივთა თეორია. ანალიზის კურსში გავეცანით ისეთ ამოცანებს (მათი ნაწილი ჯერ კიდევ ჩვენს წელთაღრიცხვამდე იყო დასმული:პითაგორა -VI საუკუნე ჩვ. წ-მდე, არქიმედი-(287-212) III საუკუნე ჩვ. წ-მდე), რომლებიც მხოლოდ მათემატიკური ანალიზის მეთოდებით ამოიხსნება. მათემატიკურ ანალიზს, როგორც მეცნიერებას, საფუძველი ჩაეყარა გალილეის, კეპლერის და დეკარტის შრომებზე დაყრდნობით XVII საუკუნის დასაწყისიდან (ფერმა, ნიუტონი, ლეიბნიცი, როლი, ბერნულები, ეილერი, ლაგრანჟი, ფურიე, კოში, აბელი, ვეირშტრასი, ოსტროგრაფსკი, დედეკინდი, ჩებიშევი). ოთხი საუკუნის მანძილზე მათემატიკურმა ანალიზმა მიიღო საკმაოდ დასრულებული და სრულყოფილი სახე. უშუალოდ ამ საგნის გამოყენებით შეისწავლება დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებები, ფუნქციონალური ანალიზი, ნამდვილი და კომპლექსური ცვლადების ფუნქციათა თეორიები, გამოთვლითი მათემატიკა, ალბათობის თეორია, დიფერენციალური გეომეტრია, რიცხვითი მეთოდები, ტენზორული ანალიზი და სხვა. ამ საგნებს სტუდენტები შეისწავლიან მაღალ კურსებზე.

ავტორი

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ა. ხარაძე, ვ. ჭელიძე, ბ.ხვედელიძე, ი. ქარცივაძე. მათემატიკური ანალიზის კურსი. I-II ტ. თბილისი, 1961, 1963.

2. ვ. ჭელიძე, ე. წითლანაძე. მათემატიკური ანალიზის კურსი. I, IIტ. თბილისი, 1983.

3. ი. ქარცივაძე. მათემატიკური ანალიზი. თბილისი, 1981.

4. დ. ვაშაკიძე. მათემატიკური ანალიზის კურსი. I-II-III ტ. თბილისი, 1975-1978.

5. Кудрявцев Л.Б. Курс математического анализа. I-II т. Москва,1981.

6. Никольский С.М. Курс математического анализа. I-II т. Москва, 1990.

7. Рудин У. Основы математического анализа. I, II т. Москва, 1966.

8. Зорич В.А. Математический анализ, I-II т, Москва, 1981, 1984.

9. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. I-II т. Москва, 1966, 1968.

10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления I-II т, Москва, 1966.

11. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. Москва, 1966.

12. Фролов Н.А. Дифференциальное и интегральное исчисление. Москва, 1955.

13. Стефан Банах. Дифференциальное и интегральное исчисление. Москва, 1966.

14. Смирнов В.И. Курс высшей матиматики. т. I. Москва, 1974.

15. Толстов Г.П. Курс математического анализа. Москва, 1954.

16. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики. Москва, 1971.

17. Немицкий В., Слудская М., Черкасов А. Курс математического анализа. т. I. Москва, 1957.

18. გეგელია თ. გ. მათემატიკის სპეციალური კურსი. ნაწ. I-X. თბილისი 1977.

19. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. I-II т. Москва, 1970.

20. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, 1976.

21. Липман Берс. Математический анализ. I-II т. Москва, 1975.

22. დავითაძე ჯ. ნამდვილი რიცხვის სწავლებისათვის მათემატიკური ანალიზის კურსში (მეთოდური მითითებანი), თბილისი, 1984.

23. დავითაძე ჯ. პირველი ლექციები მათემატიკურ ანალიზში (ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე) ბათუმი, 2000.

24. Задачи и упражнения по математическому анализу под редакцией Демидовича. Москва, 1980.

25. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. часть I-II. Москва, 1974.

26. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики, Москва, 1978.

27. დ. ცხაკაია მათემატიკის ისტორია. თბილისი 1965.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

რედაქტორისაგან 3
შესავალი 4

თავი I
ნამდვილი რიცხვი

1. სიმბოლიკა, რომელიც გამოიყენება მათანალიზში 6
2. სიმრავლეების შესახებ 7
3. რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების ათწილადური წარმოდგენა 8
4. ნამდვილი რიცხვი როგორც მიმდევრობა 10
5. ნამდვილი რიცხვი როგორც განკვეთის ელემენტი. ირაციონალური რიცხვის განმარტება 13
6. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ძირითადი თვისებები. (აქსიომები) 17
7. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და რიცხვითი ღერძი 21
8. რიცხვის მოდული და მისი თვისებები. ბერნულის უტოლობა. 22
9. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეები-რიცხვითი შუალედები. ნამდვილ რიცხვთა გაფართოებული სიმრავლე. 25
10. სიმრავლის შემოსაზღვრულობა. მისი ზუსტი ქვედა და ზედა საზღვრები. 27

თავი II
ფუნქცია

1. მუდმივი და ცვლადი სიდიდეები. 33
2. ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია. ფუნქციის ანალიზური განსაზღვრა. 34
3. ფუნქცია, როგორც მიმართება. 41

4. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე და სივრცეში 47
5. ფუნქციის მოცემის ხერხები 52
6. ფუნქციის ძირითადი თვისებები. შესავალი 64
7 ფუნქციის შემოსაზღვრულობა 65
8. მონოტონური ფუნქციები 69
9. ლუწი და კენტი ფუნქციები 72
10. პერიოდული ფუნქციები 75
11. მოქმედებანი ფუნქციებზე 78
12. რთული ფუნქცია 81
13. შექცეული ფუნქცია 83
14. ელემენტარული ფუნქციები და მათი კლასიფიკაცია 87
15. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები 90
16. ჰიპერბოლური ფუნქციები 93

თავი III
მიმდევრობები

1. თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები. მიმდევრობა 97
2. მიმდევრობის განმარტება და მისი თვისებები 102
3. მიმდევრობის სახეები 106
4. მიმდევრობის ზღვარი 109
5. მიმდევრობის ზღვრის თვისებები 117
6. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები (მიმდევრობები). კავშირი მათ შორის 119
7. არითმეტიკული მოქმედებანი კრებად მიმდევრობებზე 124
8. მონოტონური მიმდევრობის კრებადობა 127
9. ნეპერის რიცხვი 128
10. ჩალაგებული (მომჭიდავი) სეგმენტების პრინციპი 130

11. ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემა 132
12. მიმდევრობის კრებადობის კოშის კრიტერიუმი-
აუცილებელი და საკმარისი პირობები 134
13. სიმრავლის ზღვარითი წერტილები 136

თავი IV
ფუნქციის ზღვარი

1. ფუნქციის ზღვარის კოშის და ჰაინეს განმარტებები 140
2. ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები 148
3. ფუნქციის ზღვარი უსასრულობის შემთხვევაში 152
4. ფუნქციის ზღვრის თვისებები 154
5. რთული ფუნქციის ზღვარი 157
6. უსასრულოდ მცირე და დიდი ფუნქციები
განუზღვრელობები 158
7. მონოტონური ფუნქციების ზღვრების არსებობა და
ფუნქციის ზღვრის არსებობის კოშის
კრიტერიუმი 159
8. ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ზღვარი 161

თავი V
უწყვეტი ფუნქციები

1. ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში და სიმრავლეზე 164
2. ფუნქციის წყვეტის წერტილები და ცალმხრივი
უწყვეტობა 171
3. წერტილში უწყვეტი ფუნქციის თვისებები 175
4. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის თვისებები 178
5. ფუნქციის თანაბარი უწყვეტობა 183

თავი VI
ერთი ცვლადის ფუნქციის
დიფერენციალური აღრიცხვა

1. ფუნქციის წარმოებული 188
2. კავშირი ფუნქციის წარმოებადობასა და
უწყვეტობას შორის 195
3. ფუნქციის წარმოებულის გეომეტრიული და
ფიზიკური შინაარსი (ამოცანები, რომლებსაც
მივყავართ ფუნქციის წარმოებულის ცნებამდე) ... 199
4. ფუნქციის გრაფიკის მხები და ნორმალი 204
5. ფუნქციის დიფერენციალი და მისი გამოყენება
მიახლოებით გამოთვლებში 206
6. გაწარმოების და დიფერენცირების წესები 210
7. შექცეული ფუნქციის წარმოებული 215
8. რთული ფუნქციის წარმოებული და დიფერენ-
ციალი. დიფერენციალის ფორმის
ინვარიანტობა 218
9. ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულების
ცხრილი და გაწარმოების წესები 227
10. მაღალი რიგის წარმოებულები 228
11. მაღალი რიგის დიფერენციალები 231
12. დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი თეორე-
მები (საშუალო მნიშვნელობის თეორემები) 233
13. განუზღვრელობათა გახსნა ლოპიტალის წესით 251
14. ტეილორის და მაკლორენის ფორმულები და
მათი გამოყენება მიახლოებით გამოთვლებში 256
15. ფუნქციის გამოკვლევა 265
1. ფუნქციის მონოტუნორობის ნიშანი 265
2. ფუნქციის ექსტრემუმი 269
3. ექსტრემუმის დადგენა მაღალი რიგის წარმოებულებით 277
4. ფუნქციის ამოზნექილობა, ჩაზნექილობა და
გადაღუნვის წერტილები 279

5. ფუნქციის ასიმპტოტები 286
6. ფუნქციის გრაფიკის აგება 290

თავი VII
განუსაზღვრელი ინტეგრალი

1. პირველადი ფუნქცია და მისი თვისებები 296
2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ცნება 298
3. განუსაზღვრელი ინტეგრალების ცხრილი 300
4. განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებები 303
5. განუსაზღვრელი ინტეგრალების გამოთვლა 305
1. უშუალო ინტეგრება 305
2. ინტეგრალის გამოთვლა დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ შეტანით 306
3. განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლა ჩასმის ხერხით 308
4. ნაწილობითი ინტეგრება 310
6. რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება 312
1. უმარტივესი რაციონალური წილადების ინტეგრება 312
2. წესიერი რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება 317
7. ზოგადი სახის ირაციონალობის ინტეგრება 322
8. კვადრატული ირაციონალობის ინტეგრება (ეილერის ჩასმები) 324
9. ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა ინტეგრება 326
10. დიფერენციალური ბინომის ინტეგრება 330
11. ზოგიერთი ტრანსცენდენტული ფუნქციის ინტეგრება 335
12. ინტეგრალები, რომლებიც არ გამოითვლებიან ელემენტარულ ფუნქციებში 337

თავი VIII
განსაზღვრული ინტეგრალი

1. მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოთვლა 338
2. განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტება 344

3. დარბუს ქვედა და ზედა ჯამები. ქვედა და ზედა ინტეგრალები 346
4. ფუნქციის ინტეგრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა 350
5. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის ინტეგრებადობა. (ინტეგრებადობის საკმარისი პირობა) 352
6. ფუნქციის ინტეგრებადობის აუცილებელი პირობა და წყვეტილი ფუნქციის ინტეგრებადობა 353
7. განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები 356
8. საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა განსაზღვრულ ინტეგრალში 364
9. განსაზღვრული ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით (პირველადის არსებობა) 366
10. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა (ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა) 368
11. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით 372
12. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ჩასმის ხერხით 374
13. განსაზღვრული ინტეგრალი ლუწი და კენტი ფუნქციებიდან სიმეტრიული საზღვრების შემთხვევაში 377
14. განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გამოყენება 339
1. ფართობის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით 379
2. ფართობის გამოთვლა, როცა წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით 387
3. ფართობი პოლარულ კოორდინატებში 390
4. ბრტყელი ფიგურის ფართობი ზოგად შემთხვევაში 395
5. წირის რკალის სიგრძის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალით. რკალის დიფერენციალი 396

6. წირის სიმრუდე 401
7. მოცულობის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალით 404
8. ბრუნვითი ზედაპირის ფართობის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალით 407
9. სიმძიმის ცენტრი 410
10. ბრტყელი წირის სიმძიმის ცენტრი (პაპპ-გულდინის პირველი თეორემა) 411
11. ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრი (პაპპ-გულდინის მეორე თეორემა) 414
12. ინერციის მომენტი 416
15. არასაკუთრივი ინტეგრალები 418
1. ინტეგრალები უსასრულო არეზე (I გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალები) 418
2. I გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალების კრებადობის ზოგიერთი ნიშანი 426
3. II გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალები 429
16. მიახლოებითი ინტეგრება 434

თავი IX

მოკლე ისტორიული მიმოხილვა 441
ბოლოსიტყვაობის მაგიერ 463
გამოყენებული ლიტერატურა 466

Давитадзе Джумбер Биналович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
часть I

ФУНКЦИЯ – ПРОИЗВОДНАЯ – ИНТЕГРАЛ
(на грузинском языке)

ტექნიკური რედაქტორი მირანდა პატიეშვილი
ოპერატორი ეკატერინე კრასოტკინი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 25.01.2002
ქაღალდის ზომა 60X84 1/16
ფიზიკური თაბახი 29,625
შეკვ. №3
ტირაჟი 200

ფასი სახელშეკრულებო

წიგნი აიწყო და დაკაბადონდა კომპიუტერულ ცენტრ შ.პ.ს. „აქსიომაში"

დაიბეჭდა ს.ს. „გამომცემლობა აჭარის" პოლიგრაფიულ ცენტრში, ბათუმი, კოსტავას, 5