ს. თოფურია

ვ. ხოჭოლავა

ნ. მაჭარაშვილი

უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული

ნაწილი II

ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა, ნ. მაჭარაშვილი

უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული

ნაწილი II

- მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა
- ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალური აღრიცხვა
- დიფერენციალური განტოლებები

საქართველოს განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ უმაღლესი სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

პროფესორ ს. თოფურიას რედაქციით

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი - 1997

უმაღლესი მათემატიკის წინამდებარე ამოცანათა კრებული განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. იგი შედგენილია მოქმედი პროგრამის მიხედვით და მოიცავს მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვის, ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალური აღრიცხვის და ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის საკითხებს.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე უნივერსიტეტის ეკონომიკური, ბიოლოგიური, ქიმიური და სხვა ფაკულტეტების სტუდენტებსაც.

რ ე ც ე ნ ზ ე ნ ტ ე ბ ი: 1. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის უფრ. მეცნ. თანამშრომელი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

გ. ხარატიშვილი

2. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ნ. მუსხელიშვილის სახელობის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტის განყოფილების გამგე, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

ჯ. სანიკიძე

3. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის უმაღლესი მათემატიკის კათედრის დოცენტი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი

გ. ოსხაძე

ო $\frac{1602010000}{M-(602)08-97}$

ISBN 5-505-02073-9

წინასიტყვაობა

წინამდებარე "უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული" ნაწილი II შედგენილია უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში მოქმედი პროგრამის მიხედვით და მოიცავს მეორე სემესტრში პროგრამით გათვალისწინებულ მასალას.

კრებული შეიცავს მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვის, ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალური აღრიცხვის და ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის საკითხებს.

ყოველ პარაგრაფს წინ უძღვის ვრცელი შესავალი, რომელიც მოიცავს პარაგრაფში მოცემული მაგალითებისა და ამოცანების ამოხსნისათვის საჭირო თეორიულ მასალას (დამტკიცების გარეშე).

მართალია სახელმძღვანელო გამოდის "ამოცანათა კრებულის" სახელწოდებით, მაგრამ ულევანდელი მდგომარეობის გათვალისწინებით, მან გარკვეული პერიოდი შეიძლება შეასრულოს უმაღლესი მათემატიკის მოკლე კურსის დანიშნულება.

კრებულის შედგენისას გამოყენებული იყო, როგორც ქართულ ისე რუსულ ენებზე გამოცემული მათემატიკური ლიტერატურა, განკუთვნილი უმაღლესი სასწავლებლებისათვის.

მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

§1. მრავალი ცვლადის ფუნქცია, ზღვარი და უწყვეტობა

1. ევკლიდის კოორდინატული სივრცე. ვთქვათ E არის ნამდვილ რიცხვთა $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ სახის ყველა შესაძლო დალაგებული n-ეულების სიმრავლე. შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$x+y=(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n),$$
$$\lambda x=\lambda(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n).$$

E სიმრავლეს, ზემოთ მოყვანილი შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციებით ეწოდება ევკლიდის n-განზომილებიანი კოორდინატული სივრცე და აღინიშნება R^n სიმბოლოთი.

$x_1,x_2,\dots,x_n$ რიცხვებს უწოდებენ $x=x(x_1,x_2,\dots x_n)$ წერტილის კოორდინატებს.

R^n სივრცის $x=x(x_1,x_2,\dots,x_n)$ და $y=y(y_1,y_2,\dots,y_n)$ წერტილებს შორის მანძილი განისაზღვრება ფორმულით:

$$\rho(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}.$$

როცა $n=2$ ე. ი. სიბრტყის შემთხვევაში

$$\rho(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}.$$

ვთქვათ $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$ და $\delta>0$. სიმრავლეს

$$u(x,\delta)=\{y: y\in R^n, \rho(x,y)<\delta\}$$

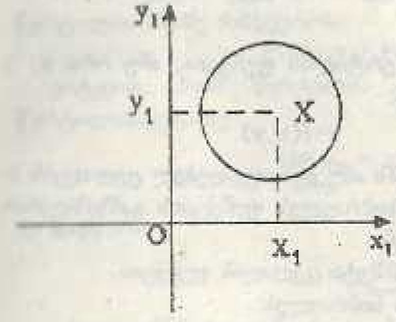
ეწოდება n-განზომილებიანი ღია ბირთვი ცენტრით $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ წერტილში და რადიუსით δ.

$u(x,\delta)$ სიმრავლეს ეწოდება $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ წერტილის სფერული მიდამო (δ-მიდამო).

როცა $n=2$, მაშინ $u(x,\delta)$ არის δ რადიუსიანი ღია წრე ცენტრით $x=(x_1,x_2)$ წერტილში (ნახ. 1).

ზოგჯერ R^2 სიბრტყის წერტილი ნაცვლად $x(x_1,x_2)$-სა უფრო მოხერხებულია აღვნიშნოთ $M(x;y)$-ით.

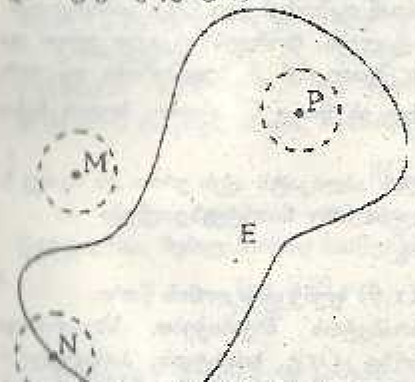
ახლა მოვიყვანოთ განსაზღვრებები, რომლებიც სიმარტივისათვის ჩამოვაყალიბოთ სიბრტყის შემთხვევაში.



ნახ. 1

სიბრტყის წერტილთა რაიმე E სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი წრე, რომელიც შეიცავს E სიმრავლის ყველა წერტილს.

P წერტილს ეწოდება $E\subset R^2$ სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ არსებობს P წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც მთლიანად E სიმრავლეს ეკუთვნის (ნახ. 2). M წერტილს ეწოდება E სიმრავლის გარე წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომლის არცერთი წერტილი არ ეკუთვნის E სიმრავლეს (ნახ. 2). N წერტილს ეწოდება E სიმრავლის საზღვრის წერტილი, თუ იგი არ არის ამ სიმრავლის არც შიგა და არც გარე წერტილი.



ნახ. 2

E სიმრავლის საზღვრის წერტილების სიმრავლეს E სიმრავლის საზღვარი ეწოდება.

სიმრავლეს, რომელიც შედგება მხოლოდ შიგა წერტილებისაგან, ღია სიმრავლე ეწოდება. მაგალითად, ამ (x,y) წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $1<x^2+y^2<4$ ღია სიმრავლეა. ეს სიმრავლე წარმოადგენს წრიულ რგოლს.

სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს ეწოდება უწყვეტი წირი, თუ ამ სიმრავლის წერტილთა x, y კოორდინატები არიან t პარამეტრის უწყვეტი ფუნქციები $x=\varphi(t)$, $y=g(t)$, $\alpha\le t\le\beta$.

ღია სიმრავლეს არე ეწოდება, თუ მისი ნებისმიერი ორი წერტილი შეიძლება შევაერთოთ ისეთი უწყვეტი წირით, რომლის ყველა წერტილი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს.

არისა და მისი საზღვრის გაერთიანებას ჩაკეტილი არე ეწოდება.

2. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ცნება.

განსაზღვრება 1. თუ სიბრტყის E სიმრავლის ყოველ $M(x,y)$ წერტილს რაიმე წესით შეესაბამება ნამდვილი z რიცხვი, მაშინ ამბობენ, რომ E

სიმრავლეზე განსაზღვრულია $M(x,y)$ წერტილის ფუნქცია, ანუ ორი x, y ცვლადის ფუნქცია და მას ასე აღნიშნავენ:

$$z=f(M) \quad \text{ან} \quad z=f(x,y).$$

x, y ცვლადებს უწოდებენ არგუმენტებს ანუ დამოუკიდებელ ცვლადებს z-ს კი დამოკიდებულ ცვლადს, ხოლო E სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არეს და მას $D(f)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

ანალოგიურად განისაზღვრება სამი და მეტი ცვლადის ფუნქცია.

$z=f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება სიმრავლეს:

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in R^3 : z = f(x,y)\},$$

რომელიც საზოგადოდ წარმოადგენს რაიმე ზედაპირს R^3-ში.

ვთქვათ, $z=f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკი არის რაიმე S ზედაპირი. S ზედაპირის შესასწავლად შეგვიძლია გამოვყოთ მისი ყველა ის წერტილი, რომლებიც ერთი და იმავე მანძილით არიან დაშორებული Oxy სიბრტყიდან. ე. ი. S ზედაპირზე გამოვყოთ ის წერტილები, რომლებსაც აქვთ ერთი და იგივე აპლიკატა $z=h$. ეს წერტილები შეადგენენ S ზედაპირისა და $z=h$ სიბრტყის გადაკვეთის წირს. აღვნიშნოთ ეს წირი C' ასოთი, ხოლო მისი გეგმილი Oxy სიბრტყეზე C-თი.

რადგანაც C' წირის ყველა წერტილის აპლიკატს აქვს ერთი და იგივე h მნიშვნელობა, ამიტომ C წირის განტოლება Oxy სიბრტყეზე იქნება

$$f(x,y)=h. \tag{1}$$

C წირს ეწოდება S ზედაპირის ან $f(x,y)$ ფუნქციის დონის წირი.

თუ (1) განტოლებაში h პარამეტრს მივანიჭებთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, მივიღებთ S ზედაპირზე Oxy სიბრტყის პარალელურ კვეთებს. ამ კვეთების მართობული გეგმილები Oxy სიბრტყეზე გვაძლევს $f(x,y)$ ფუნქციის დონის წირთა ერთობლიობას. წირთა ამ ერთობლიობის განტოლება არის (1), სადაც h განიხილება როგორც პარამეტრი.

განსაზღვრება 2. $D \subset R^n$ არეზე განსაზღვრულ n ცვლადის $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ფუნქციას ეწოდება p რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია ამ არეზე, თუ $\forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D$ წერტილისათვის და ყოველი ისეთი $t\neq 0$ რიცხვისათვის, რომლისთვისაც $(tx_1,tx_2,\ldots,tx_n)\in D$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(tx_1,tx_2,\ldots,tx_n)=t^p f(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

p რიცხვს ეწოდება ფუნქციის ერთგვაროვნების მაჩვენებელი, ის შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი.

3. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი. განვიხილოთ სიბრტყის წერტილთა რაიმე მიმდევრობა

$$P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), \ldots, P_n(x_n,y_n), \ldots \tag{2}$$

ვიტყვით, რომ წერტილთა (2) მიმდევრობა კრებადია $P_0(x_0,y_0)$ წერტილისაკენ, თუ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0,$$

და დავწერთ

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0. \tag{3}$$

ცხადია, (3) ტოლობა ტოლფასია ტოლობის

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0,$$

სადაც $\rho_n = \rho(P_0, P_n)$.

ვთქვათ $P_0(x_0,y_0)$ წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით P_0 წერტილისა, განსაზღვრულია $z=f(P)=f(x,y)$ ფუნქცია.

განსაზღვრება 3. A რიცხვს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი $P_0(x_0,y_0)$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ რიცხვი, ისეთი, რომ როცა $0<\rho(P_0,P)<\delta$, მაშინ

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

ის ფაქტი, რომ A რიცხვი არის $f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი P_0 წერტილში, შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A \quad \text{ან} \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = A.$$

ფუნქციის ზღვრის ეს განსაზღვრება ეკუთვნის კოშის. ახლა მოვიყვანოთ ფუნქციის ზღვრის მეორე განსაზღვრება, რომელიც ჰაინეს ეკუთვნის.

განსაზღვრება 4. A რიცხვს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი P_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\{P_n(x_n,y_n)\}$ მიმდევრობისათვის ($P_n\neq P_0$, $n=1,2,\ldots$), რომელიც კრებადია P_0-საკენ, ფუნქციის მნიშვნელობათა შესაბამისი $\{f(P_n)\}$ მიმდევრობა კრებადია A რიცხვისაკენ.

ფუნქციის ზღვრის ეს ორი განსაზღვრება ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

ახლა მოვიყვანოთ ფუნქციის ზღვრის ცნება, როცა $P\to\infty$.*

---

* ვიტყვით, რომ $P\to\infty$, თუ P წერტილის ერთი კოორდინატი მაინც აბსოლუტური სიდიდით მიისწრაფვის $+\infty$-კენ.

განსაზღვრება 5. A რიცხვს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $P\to\infty$ და ჩაწერთ $\lim\limits_{P\to\infty} f(P)=A$, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ როცა $\sqrt{x^2+y^2}>M$, მაშინ

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

მრავალი ცვლადის ფუნქციებისთვისაც, ერთი ცვლადის ფუნქციის ანალოგიურად, განისაზღვრება

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y)=\infty \quad \text{და} \quad \lim_{P\to\infty} f(x,y)=\infty.$$

შენიშვნა. ზოგჯერ საჭიროა ფუნქციის ზღვრის გამოთვლა ისეთ P_0 წერტილში, რომლის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს წერტილებს, რომელზედაც ფუნქცია არ არის განსაზღვრული და აგრეთვე წერტილებს, რომელზედაც ფუნქცია განსაზღვრულია. ამ შემთხვევაში ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრებაში განიხილება P_0 წერტილის მიდამოს მხოლოდ ის წერტილები, რომელზედაც ფუნქცია განსაზღვრულია.

ისევე როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, მრავალი ცვლადის ფუნქციათა ზღვრებისთვისაც ადგილი აქვს შესაბამის თეორემებს, ჯამის, ნამრავლის, ფარდობის ზღვრების შესახებ და სხვა.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2}.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ ჩასმა $x^2+y^2=t$, მაშინ $t\to0$, როცა $x\to0$ და $y\to0$, ამიტომ

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\sqrt{1+t}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-t}{t\left(1+\sqrt{1+t}\right)}=-\frac{1}{2}.$$

მაგალითი 2. ვთქვათ $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0.$$

მართლაც, $x^2+y^2\ge 2|x|\cdot|y|$ უტოლობის ძალით გვაქვს:

$$|f(x,y)-0|=\frac{|x|\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

ამიტომ თუ მოცემული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის ავიღებთ $\delta=2\varepsilon$, მაშინ იმ (x,y) წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ გვექნება:

$$|f(x,y)-0|\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\frac{\delta}{2}=\varepsilon,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0.$$

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ, რომ $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ფუნქციას $(0,0)$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

ვთქვათ $P(x,y)$ წერტილი მიისწრაფვის $P_0(0,0)$ წერტილისაკენ $y=kx$ წრფის გასწვრივ. მივიღებთ

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

შედეგი დამოკიდებულია k-ზე, ამიტომ ფუნქციას $(0,0)$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

მაგალითი 4. ვაჩვენოთ, რომ $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ ფუნქციას $(0,0)$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია, თუმცა $(0,0)$ წერტილზე გამავალი ნებისმიერი $y=kx$ წრფის გასწვრივ მას გააჩნია ზღვარი და ის უდრის ნულს.

მართლაც,

$$f(x,kx)=\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\frac{kx}{x^2+k^2}\to0,$$

როცა $x\to0$.

ახლა, ვთქვათ, $y=x^2$, მაშინ

$$f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}.$$

ე. ი.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} f(x,y)=\frac{1}{2}.$$

ამრიგად, მოცემულ ფუნქციას (0,0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

4. მრავალი ცვლადის ფუნქციის განმეორებითი ზღვრები. ვთქვათ $f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M_0(x_0,y_0)$ წერტილის რაიმე $U(M_0,\delta)$ მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით $M_0(x_0,y_0)$ წერტილისა. დავუშვათ, რომ $\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[,\ x\neq x_0$ არსებობს

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=g(x).$$

თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

მაშინ, მას ეწოდება განმეორებითი ზღვარი.

ანალოგიურად განისაზღვრება განმეორებითი ზღვარი

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

მაგალითი 5. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

როგორც (მაგალითი 3) ვნახეთ ამ ფუნქციას (0,0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია. მიუხედავად ამისა

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0.$$

მაგალითი 6. ვთქვათ $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. ცხადია, რომ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ არ არსებობს, თუმცა

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=1.$$

ეს არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელსაც გააჩნია ერთმანეთისგან არატოლი განმეორებითი ზღვრები.

მაგალითი 7. ვთქვათ

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & \text{როცა}\quad xy\neq 0,\\ 0, & \text{როცა}\quad xy=0.\end{cases}$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

რაც შეეხება განმეორებით

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)\right] \quad \text{და} \quad \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)\right]$$

ზღვრებს ისინი არ არსებობენ. ეს არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელსაც გააჩნია ზღვარი, მაგრამ არ გააჩნია არცერთი განმეორებითი ზღვარი.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითებიდან გამომდინარეობს, რომ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვრის არსებობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს განმეორებითი ზღვრების არსებობა, და პირიქით, განმეორებითი ზღვრების (უფრო მეტიც, ერთმანეთის ტოლი განმეორებითი ზღვრების) არსებობიდან არ გამომდინარეობს ფუნქციის ზღვრის არსებობა.

5. მრავალი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა. $u=f(P)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი P_0 წერტილში თუ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:

1) $f(P)$ ფუნქცია განსაზღვრულია P_0 წერტილში;

2) არსებობს $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$,

3) $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$.

$f(P)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი რაიმე D არეში, თუ იგი უწყვეტია ამ არის ყოველ წერტილში. თუ P_0 წერტილში დარღვეულია 1)-3) პირობებიდან ერთი მაინც, მაშინ P_0 წერტილს ეწოდება $f(P)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი. ამ შემთხვევაში ვიტყვით აგრეთვე, რომ $f(P)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას (წყვეტილია) P_0 წერტილში.

მოვიყვანოთ უწყვეტი და წყვეტილი ფუნქციის მაგალითები.

მაგალითი 8. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{როცა} \quad x=y=0. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია (0,0) წერტილში უწყვეტია ვინაიდან შესრულებულია 1)-3) პირობები (იხ. მაგალითი 2).

მაგალითი 9. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{როცა} \quad x=y=0. \end{cases}$$

როგორც (მაგალითი 3) ვნახეთ ამ ფუნქციას (0,0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია, ე. ი. ის ამ წერტილში განიცდის წყვეტას. Oxy სიბრტყის სხვა წერტილებში მოცემული ფუნქცია უწყვეტია (აჩვენეთ).

მრავალი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის მართებულობა.

თეორემა 1. თუ მრავალი ცვლადის ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია ამ წერტილში ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ.*

ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა საზოგადოდ მართებული არ არის. მართლაც, მაგალითი 9-ში განხილული ფუნქცია წყვეტილია (0,0) წერტილში. ვაჩვენოთ, რომ იგი ამ წერტილში უწყვეტია ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ. ცხადია

$$f(x,0)=f(0,y)=0,$$

ამიტომ

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=0=f(0,0).$$

ე. ი. $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია (0,0) წერტილში ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ.

---

*$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ წერტილში x_i ცვლადის მიმართ, თუ ერთი ცვლადის $f(x_i,x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ ფუნქცია უწყვეტია $x_i^{(0)}$ წერტილში.

6. მრავალი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციის თვისებები. ისე, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვისაც მართებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 2. რაიმე წერტილში უწყვეტი ფუნქციების ჯამი, ნამრავლი და შეფარდება (თუ ამ წერტილში მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან) აგრეთვე უწყვეტია ამ წერტილში.

თეორემა 3. თუ ფუნქცია უწყვეტია წერტილში, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ წერტილის რაიმე მიდამოში.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x^{(0)}$ წერტილში და $f(x^{(0)})\neq 0$, მაშინ არსებობს $x^{(0)}$ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში $f(x)$ ფუნქციას აქვს იგივე ნიშანი, რაც $f(x^{(0)})$-ს.

თეორემა 5. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილში, მაშინ $|f(x)|$ ფუნქციაც უწყვეტია იმავე წერტილში.

თეორემა 6. (უწყვეტ ფუნქციათა კომპოზიციის შესახებ) ვთქვათ

$$\varphi_i(x)=\varphi_i(x_1,x_2,\dots x_m),\ i=1,2,\dots,n$$

ფუნქციები უწყვეტია $x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_m^{(0)}\right)\in R^m$ წერტილში, ხოლო $f(y)=f(y_1,y_2,\dots,y_n)$ ფუნქცია უწყვეტია $y^{(0)}=(\varphi_1(x^{(0)}),\varphi_2(x^{(0)}),\dots,\varphi_n(x^{(0)}))\in R^n$ წერტილში. მაშინ რთული ფუნქცია

$$F(x)=f[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)]$$

უწყვეტია $x^{(0)}$ წერტილში.

თეორემა 7 (ვაიერშტრასის პირველი თეორემა). ჩაკეტილ არეზე უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრულია ამ არეზე.

თეორემა 8 (ვაიერშტრასის მეორე თეორემა). ჩაკეტილ არეზე უწყვეტი ფუნქცია აღწევს ამ არეზე თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს.

ამრიგად ჩაკეტილ არეზე უწყვეტ ფუნქციას ამ არეზე აქვს მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობანი.

თეორემა 9 (კოში). ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ჩაკეტილ D არეზე. თუ $x^{(1)}, x^{(2)}\in D$ და $f(x^{(1)})\neq f(x^{(2)})$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია D-ში მიიღებს ყველა მნიშვნელობას $f(x^{(1)})$ და $f(x^{(2)})$ რიცხვებს შორის.

შედეგი. ჩაკეტილ არეზე უწყვეტი ფუნქცია ამ არეში ღებულობს ყველა მნიშვნელობას, რომლებიც მოთავსებულია მის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის, ე. ი. ჩაკეტილ არეში უწყვეტი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის სეგმენტი.

1.1. გამოსახეთ წრეზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის S ფართობი, როგორც მისი x და y ფუძეების ფუნქცია.

1.2. გამოსახეთ კონუსის V მოცულობა, როგორც მისი ℓ მსახველისა და ფუძის r რადიუსის ფუნქცია.

1.3. გამოსახეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის S ფართობი, როგორც მისი ფუძის a და b გვერდებისა და პარალელეპიპედის დიაგონალის ფუძის სიბრტყესთან დახრის φ კუთხის ფუნქცია.

1.4. გამოსახეთ წესიერი წაკვეთილი ექვსკუთხა პირამიდის V მოცულობა, როგორც მისი ფუძეების x და y გვერდებისა და h სიმაღლის ფუნქცია.

1.5. იპოვეთ $f(0;1)$, $f\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ და $f\left(\frac{1}{x};-y\right)$, თუ

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

1.6. იპოვეთ $f(0;-1)$, $f\left(\frac{2\sqrt3}{3};\frac{\sqrt3}{3}\right)$ და $f(xy,-y)$, თუ

$$f(x,y)=\left(\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2.$$

იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე (NN 1.7-1.12):

1.7. 1) $z=x-\sqrt{-y}$; 2) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$;

3) $z=\sqrt{xy}$; 4) $z=\ln(x-2y)$.

1.8. 1) $z=\ln(y^2-4x+8)$; 2) $z=\sqrt{\ln(x^2+y^2)}$;

3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; 4) $z=\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{4x-y^2}}$.

1.9. 1) $z=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$; 2) $z=y\sqrt{\cos x}$;

3) $z=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$; 4) $z=\sqrt{x\sin y}$.

1.10. 1) $z=\arcsin\frac{y}{x}$; 2) $z=\operatorname{arctg}\frac{xy}{1-x^2-y^2}$;

3) $z=\arccos\frac{y-1}{x}$; 4) $z=\arccos\frac{x}{x+y}$.

1.11. 1) $z=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{9-y^2}$; 2) $z=\ln(25-x^2-y^2)+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$;

3) $z=\ln\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}$; 4) $z=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arccos(1-y)$.

1.12. 1) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$; 2) $u=\frac{1}{\sqrt x}+\frac{1}{\sqrt y}+\frac{1}{\sqrt z}$;

3) $u=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z$; 4) $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

იპოვეთ ფუნქციის დონის წირები (NN 1.13-1.15):

1.13. 1) $z=x+y$; 2) $z=x^2+y^2$; 3) $z=xy$; 4) $z=\sqrt{xy}$.

1.14. 1) $z=\frac{y}{x^2}$; 2) $z=x^2-y^2$; 3) $z=\frac{1}{x^2+2y^2}$; 4) $z=\frac{2x}{x^2+y^2}$.

1.15. 1) $z=f(y-ax)$; 2) $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$; 3) $z=f(xy)$; 4) $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

1.16. აჩვენეთ, რომ, თუ $z=f(x,y)$ არის k რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, მაშინ იგი წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$z=x^kF\left(\frac{y}{x}\right).$$

1.17. აჩვენეთ, რომ, თუ $u=f(x,y,z)$ არის k რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, მაშინ იგი წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$u=x^kF\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right).$$

გამოთვალეთ შემდეგი განმეორებითი ზღვრები (NN1.18-1.22):

1.18. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\frac{x+y}{x+y^2}$; 2) $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+y}{x+y^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}$; 4) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}$.

1.19. 1) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$;

2) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right)}{\sin y\cdot \operatorname{tg}x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\cos(x+y)-\cos(x-y)}{xy}$;

4) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x+y)-\sin(y-x)}{\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{tg}(x-y)}$.

1.20. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$; 2) $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$; 4) $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$.

1.21. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to0+}\dfrac{x^y}{1+x^y}$; 2) $\lim\limits_{y\to0+}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^y}{1+x^y}$;

3) $\lim\limits_{y\to2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{xy}-e^{2x}}{x\left(y^2-4\right)}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}(1+\sin y)^{\frac{1}{xy}}$.

1.22. 1) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1-\cos xy}{y\sin^2 x}$ $(\alpha\neq k\pi,\ \ k=\pm1;\pm2;\ldots)$;

2) $\lim\limits_{x\to\alpha}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1-\cos xy}{y\sin^2 x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1-\cos xy}{y\sin^2 x}$;

4) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos xy}{y\sin^2 x}$.

გამოთვალეთ ზღვარი (1.23-1.25):

1.23. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin xy}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to\alpha}}\dfrac{\sin xy}{x}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{4-\sqrt{yx+16}}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}(1-xy)\operatorname{tg}\dfrac{\pi xy}{2}$.

1.24. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{x^2+y^2}}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\alpha}}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\alpha}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}(1+\operatorname{tg}y)^{x^2\operatorname{ctg}y}$.

1.25. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to1}}xy\left(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2-y}\right)$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\y\to0}}\dfrac{1-\cos xy}{y\sin^2 x}$ $(\alpha\neq k\pi,\ \ k=\pm1,\pm2,\ldots)$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\alpha}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+\operatorname{tg}y)^{\frac{x^2}{y}}$.

1.26. აჩვენეთ, რომ არ არსებობს ზღვარი

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{1-(x-y)^4}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{xy}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

1.27. დაადგინეთ უწყვეტია თუ არა $f(x,y)$ ფუნქცია $(0,0)$ წერტილზე, თუ:

1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{როცა}\quad x^2+y^2\neq0,\\ 0 & \text{როცა}\quad x=y=0;\end{cases}$

2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{როცა}\quad x^2+y^2\neq0,\\ 0 & \text{როცა}\quad x=y=0;\end{cases}$

3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}, & \text{როცა}\quad x^2+y^2\neq0,\\ 0 & \text{როცა}\quad x=y=0.\end{cases}$

4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}, & \text{როცა } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{როცა } x=y=0.\end{cases}$

იპოვეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები (1.28, 1.29):

1.28. 1) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; 2) $z=\ln(x^2+y^2)$;

3) $z=\dfrac{1}{y-2x}$; 4) $z=\dfrac{y+2x^2}{y-2x^2}$.

1.29. 1) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$; 2) $z=\sin\dfrac{1}{xy}$;

3) $z=\dfrac{1}{(x+y)(y^2-x)}$; 4) $z=\dfrac{1}{(x^2+y^2-1)(x^2-y^2-1)}$

1.30. აჩვენეთ, რომ შემდეგი ფუნქციები (0,0) წერტილში უწყვეტია ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ, მაგრამ ამ წერტილში განიცდის წყვეტას როგორც ორი ცვლადის ფუნქცია:

1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{როცა } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{როცა } x=y=0;\end{cases}$

2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}, & \text{როცა } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{როცა } x=y=0.\end{cases}$

§ 2. პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალი

1. ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები და მათი გეომეტრიული შინაარსი. განვიხილოთ ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე D არეში. ვთქვათ $(x_0,y_0)\in D$. გამოსახულებებს

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$
$$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

სადაც $\Delta x=x-x_0$ და $\Delta y=y-y_0$, ეწოდება შესაბამისად $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო ნაზრდი x-ით და კერძო ნაზრდი y-ით (x_0,y_0) წერტილში.

განსაზღვრება 1. f ფუნქციის კერძო წარმოებული x ცვლადით (x_0,y_0) წერტილში ეწოდება ამ წერტილში ფუნქციის x არგუმენტით კერძო ნაზრდის x არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს (თუ ეს ზღვარი არსებობს), როდესაც არგუმენტის ნაზრდი მისწრაფვის ნულისაკენ.

(x_0,y_0) წერტილში $z=f(x,y)$ ფუნქციის x ცვლადით კერძო წარმოებულის აღსანიშნავად მიღებულია z'_x, f'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, ან $z'_x(x_0,y_0)$, $f'_x(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ სიმბოლოები. ე. ი. თანახმად განსაზღვრებისა

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული y ცვლადით (x_0,y_0) წერტილში:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებული რომელიმე ცვლადით არის ამ ფუნქციის, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის ჩვეულებრივი წარმოებული, თუ მეორე ცვლადს გაწარმოებისას ჩავთვლით, როგორც მუდმივს. ამიტომ, კერძო წარმოებულები გამოითვლება ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულებითა და წესებით.

ანალოგიურად განისაზღვრება კერძო წარმოებული სამი და მეტი ცვლადის ფუნქციებისათვის.

შენიშვნა 1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობიდან მოცემულ წერტილში არ გამომდინარეობს მისი კერძო წარმოებულების არსებობა ამ წერტილში. მაგალითად $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ფუნქცია უწყვეტია (0,0) წერტილში, მაგრამ მას ამ წერტილში კერძო წარმოებულები არ გააჩნია. მართლაც

$$\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

მაგრამ $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნია, როცა $\Delta x\to 0$. ე. ი. $f'_x(0,0)$ არ არსებობს. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $f'y(0,0)$-არ არსებობს.

შენიშვნა 2. მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულების არსებობიდან მოცემულ წერტილში არ გამომდინარეობს მისი უწყვეტობა ამ წერტილში. მართლაც,

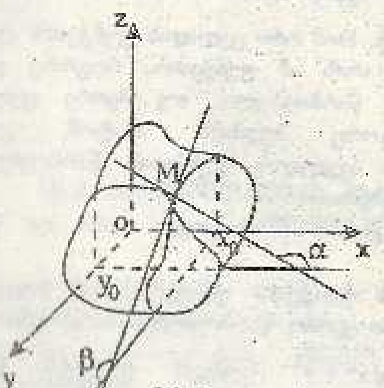
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=y=0\end{cases}$$

ფუნქცია წყვეტილია (0,0) წერტილში (§ 1, მაგალითი 9), ადვილია ჩვენება, რომ

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0.$$

ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქციის $f'_x(x_0,y_0)$ და $f'_y(x_0,y_0)$ კერძო წარმოებულების განსაზღვრების ძალით მათი გეომეტრიული შინაარსი უშუალოდ გამომდინარეობს ერთი ცვლადის ფუნქციის ჩვეულებრივი წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსიდან.

კერძოდ, გეომეტრიულად $f'_x(x_0,y_0)$ წარმოადგენს იმ კუთხის ტანგენსს, რომელსაც შეადგენს $z=f(x,y)$ ზედაპირისა და $y=y_0$ სიბრტყის გადაკვეთით მიღებული წირის $M[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ წერტილზე გავლებული მხები Ox ღერძთან (ნახ. 3), ხოლო კერძო წარმოებული $f'_y(x_0,y_0)$ წარმოადგენს იმ კუთხის ტანგენსს, რომელსაც შეადგენს $z=f(x,y)$ ზედაპირისა და $x=x_0$ სიბრტყის გადაკვეთით მიღებული წირის $M[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ წერტილზე გავლებული მხები Oy ღერძთან (ნახ. 3) ამრიგად



ნახ. 3

$$f'_x(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\alpha,\quad f'_y(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\beta.$$

ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი. განვიხილოთ ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე D არეში. ვთქვათ $(x,y)\in D$.

გამოსახულებას

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

ეწოდება $z=f(x,y)$ ფუნქციის სრული ნაზრდი (x,y) წერტილში.

განსაზღვრება 2. f ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი (x,y) წერტილში, თუ ამ წერტილში ფუნქციის სრული ნაზრდი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

სადაც A და B რაღაც რიცხვებია, რომლებიც არ არის დამოკიდებული Δx-ზე და Δy-ზე, ხოლო $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ და $\beta(\Delta x,\Delta y)$ უსასრულოდ მცირეებია, როცა $\rho\to 0$ $\left(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$.

განსაზღვრება 3. $A\Delta x+B\Delta y$ წრფივ ფუნქციას (Δx-ისა და Δy-ის მიმართ) ეწოდება f ფუნქციის პირველი რიგის სრული დიფერენციალი (x,y) წერტილში და აღინიშნება dz ან $df(x,y)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

დიფერენცირებადი $z=f(x,y)$ ფუნქციისათვის საკმარისად მცირე $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$-სათვის ადგილი აქვს მიახლოებით ტოლობას:

$$\Delta z\approx dz.$$

ე. ი.

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+df(x,y).$$

თეორემა 1. თუ f ფუნქცია დიფერენცირებადია (x,y) წერტილში, მაშინ ამ წერტილში არსებობს კერძო წარმოებულები $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$ და ადგილი აქვს ტოლობებს

$$f'_x(x,y)=A,\ f'_y(x,y)=B.$$

ამრიგად, თუ $f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x,y) წერტილზე, მაშინ

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

$$\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

მაგრამ $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნია, როცა $\Delta x \to 0$. ე. ი. $f'_x(0,0)$ არ არსებობს. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $f'_y(0,0)$-არ არსებობს.

შენიშვნა 2. მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულების არსებობიდან მოცემულ წერტილში არ გამომდინარეობს მისი უწყვეტობა ამ წერტილში. მართლაც,

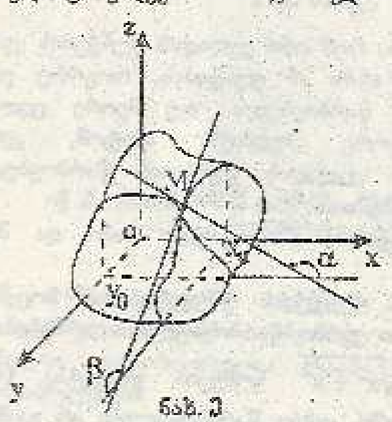
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=y\neq 0\end{cases}$$

ფუნქცია წყვეტილია (0,0) წერტილში (§ 1, მაგალითი 9), ადვილია ჩვენება, რომ

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0.$$

ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქციის $f'_x(x_0,y_0)$ და $f'_y(x_0,y_0)$ კერძო წარმოებულების განსაზღვრების ძალით მათი გეომეტრიული შინაარსი უშუალოდ გამომდინარეობს ერთი ცვლადის ფუნქციის ჩვეულებრივი წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსიდან.

კერძოდ, გეომეტრიულად $f'_x(x_0,y_0)$ წარმოადგენს იმ კუთხის ტანგენსს, რომელსაც შეადგენს $z=f(x,y)$ ზედაპირისა და $y=y_0$ სიბრტყის გადაკვეთით მიღებული წირის $M[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ წერტილზე გავლებული მხები Ox ღერძთან (ნახ. 3), ხოლო კერძო წარმოებული $f'_y(x_0,y_0)$ წარმოადგენს იმ კუთხის ტანგენსს, რომელსაც შეადგენს $z=f(x,y)$ ზედაპირისა და $x=x_0$ სიბრტყის გადაკვეთით მიღებული წირის $M[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ წერტილზე გავლებული მხები Oy ღერძთან (ნახ. 3). ამრიგად



ნახ. 3

$$f'_x(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\alpha, \quad f'_y(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\beta.$$

2. ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი. განვიხილოთ ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე D არეში. ვთქვათ $(x,y)\in D$.

გამოსახულებას

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

ეწოდება $z=f(x,y)$ ფუნქციის სრული ნაზრდი (x,y) წერტილში.

განსაზღვრება 2. f ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი (x,y) წერტილში, თუ ამ წერტილში ფუნქციის სრული ნაზრდი შეიძლება წარმოიდგინოს შემდეგი სახით

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

სადაც A და B რაღაც რიცხვებია, რომლებიც არ არის დამოკიდებული Δx-ზე და Δy-ზე, ხოლო $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ და $\beta(\Delta x,\Delta y)$ უსასრულოდ მცირეებია, როცა $\rho \to 0$ $\left(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$.

განსაზღვრება 3. $A\Delta x+B\Delta y$ წრფივ ფუნქციას (Δx-ისა და Δy-ის მიმართ) ეწოდება f ფუნქციის პირველი რიგის სრული დიფერენციალი (x,y) წერტილში და აღინიშნება dz ან $df(x,y)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

დიფერენცირებადი $z=f(x,y)$ ფუნქციისათვის საკმარისად მცირე $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$-სათვის ადგილი აქვს მიახლოებით ტოლობას:

$$\Delta z \approx dz.$$

ე. ი.

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+df(x,y).$$

თეორემა 1. თუ f ფუნქცია დიფერენცირებადია (x,y) წერტილში, მაშინ ამ წერტილში არსებობს კერძო წარმოებულები $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$ და ადგილი აქვს ტოლობებს

$$f'_x(x,y)=A, \quad f'_y(x,y)=B.$$

ამრიგად, თუ $f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x,y) წერტილზე, მაშინ

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

დამოუკიდებელი x და y ცვლადების დიფერენციალები ვუწოდოთ ამ ცვლადების ნაზრდებს: $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$. მაშინ

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

თეორემა 2. თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია რაიმე წერტილში მაშინ ის უწყვეტია ამ წერტილში.

შენიშვნა. თეორემა 1-სა და 2-ის შებრუნება საზოგადოდ არ შეიძლება. მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $(0,0)$ წერტილში და გააჩნია კერძო წარმოებულები, მაგრამ ის ამ წერტილში დიფერენცირებადი არ არის.

ამრიგად, $z=\sqrt{|xy|}$ არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა რომელიც უწყვეტია $(0,0)$ წერტილში, აქვს კერძო წარმოებულები ამ წერტილში, მაგრამ დიფერენცირებადი არ არის ამ წერტილში. ე. ი. ფუნქციის უწყვეტობა და კერძო წარმოებულების არსებობა არის დიფერენცირებადობის აუცილებელი მაგრამ არა საკმარისი პირობა.

თეორემა 3 (ფუნქციის დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობა). თუ $f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$ არსებობს $M(x,y)$ წერტილის რაიმე $u(M,\delta)$ მიდამოში და $M(x,y)$ წერტილში ისინი უწყვეტია, მაშინ ამ წერტილში $f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია.

ანალოგიურად განისაზღვრება სამი და მეტი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების კერძო წარმოებულები (NN 2.1-2.7):

2.1. 1) $z=x^3-y^2+4x^2y$; 2) $z=x^2y^3-3xy+x^2+2$;
3) $z=x^2\sqrt{y}-2\sqrt[3]{xy}$; 4) $z=y\sqrt[4]{x}-2\sqrt{xy}$.

2.2. 1) $z=\frac{y}{x}$; 2) $z=xy+\frac{x}{y}$;
3) $z=\frac{x-y}{x+y}$; 4) $z=\frac{1}{x}+\sqrt{x^2-y^2}$.

2.3. 1) $z=\sin(x^2-y)$; 2) $z=\operatorname{tg}(x+y)+\operatorname{ctg}(xy)$;
3) $z=x\sin(x+y)$; 4) $z=\cos\frac{x}{y}$.

2.4. 1) $z=\sin^2(xy)$; 2) $z=\operatorname{tg}^2\frac{x}{y^2}$;
3) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; 4) $z=\arcsin\frac{y}{x+y}$.

2.5. 1) $z=e^{-\frac{x}{y}}$; 2) $z=x^y$;
3) $z=e^{\sin\frac{x}{y}}$; 4) $z=(x^2+x)^{y^2+1}$.

2.6. 1) $z=\ln(x^2+y^2)+5^{\sin\frac{1}{xy}}$; 2) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$;
3) $z=\arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$; 4) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

2.7. 1) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; 2) $u=xy+yz+zx$;
3) $u=(xy)^z$; 4) $u=z^{xy}$.

2.8. იპოვეთ ფუნქციის კერძო წარმოებულები მითითებულ M წერტილში
1) $f(x,y)=x^2y+xy^2-2x+3y-1$, $M(3;2)$;
2) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}-e^x$, $M(1;2)$;
3) $f(x,y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$, $M(2;1)$;
4) $f(x,y)=\frac{x\cos y-y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$, $M(0;0)$;
5) $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$, $M(1;2;0)$;
6) $f(x,y,z)=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$, $M\left(0;0;\frac{\pi}{4}\right)$.

2.9. იპოვეთ $f'_x(1;1;1)+f'_y(1;1;1)+f'_z(1;1;1)$, თუ

$$f(x,y,z)=\ln(1+x+y^2+z^2).$$

2.10. გამოთვალეთ

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix},$$

თუ $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

2.11. გამოთვალეთ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & 1 \end{vmatrix},$$

თუ $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$.

2.12. გამოთვალეთ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix},$$

თუ $x=r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=r\cos\vartheta$.

აჩვენეთ, რომ ფუნქცია აკმაყოფილებს მითითებულ ტოლობას (NN2.13,2.14):

2.13. 1) $z=\ln(x^2+xy+y^2)$, $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$

2) $z=\ln(e^x+e^y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$;

3) $z=e^{\frac{x}{y^2}}$, $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$,

4) $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$, $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

2.14. 1) $u=x+\frac{x-y}{y-z}$, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$;

2) $u=(x-y)(y-z)(z-x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

იპოვეთ ფუნქციის სრული დიფერენციალი (NN2.15-2.17):

2.15. 1) $z=x^3y-xy^3$; 2) $z=\cos(xy-y^2)$;

3) $z=\ln(x^2+y^2)$; 4) $z=\sin^2x+\cos^2y$.

2.16. 1) $z=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$; 2) $z=\mathrm{tg}\frac{y^2}{x}$;

3) $z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+\mathrm{arctg}\frac{x}{y}$; 4) $z=\ln\cos\frac{x}{y}$.

2.17. 1) $u=\frac{z}{x^2+y^2}$; 2) $u=\mathrm{arctg}\frac{xy}{z^2}$;

3) $u=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^z$; 4) $u=e^{x^2+y^2}\sin^2 z$.

2.18. გამოთვალეთ ფუნქციის სრული დიფერენციალი მითითებულ M წერტილში:

1) $f(x,y)=\frac{x}{y^2}$, $M(1;1)$; 2) $f(x,y)=3^{x^2y}$, $M(1;2)$;

3) $f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}$, $M(1;1;1)$;

4) $f(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M(3;4;5)$.

2.19. იპოვეთ ფუნქციის სრული ნაზრდი და სრული დიფერენციალი M წერტილში, თუ:

1) $f(x,y)=x^2y$, $M(3;4)$, $\Delta x=1$, $\Delta y=0,5$;

2) $f(x,y)=\frac{y}{x}$, $M(2;1)$, $\Delta x=0,1$, $\Delta y=0,2$;

3) $f(x,y)=\sin(x-y)$, $M(0;0)$, $\Delta x=\frac{\pi}{3}$, $\Delta y=\frac{\pi}{6}$;

4) $f(x,y)=\ln(x^2+y)$, $M(0;1)$, $\Delta x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\Delta y=-0,5$.

2.20. იპოვეთ $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა დიფერენციალის გამოყენებით, თუ:

1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $x_0=4$, $y_0=3$, $\Delta x=0,05$, $\Delta y=0,07$;

2) $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$; $x_0=1$, $y_0=2$, $\Delta x=0,2$, $\Delta y=-0,03$;

3) $f(x,y)=x^y$, $x_0=2$, $y_0=3$, $\Delta x=0,01$, $\Delta y=0,03$;

4) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $x_0=5$, $y_0=5$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=-0{,}02$.

2.21. აჩვენეთ, რომ

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{როცა} \quad x=y=0,\end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტია, აქვს შემოსაზღვრული კერძო წარმოებულები $(0;0)$ წერტილის მიდამოში და არ არის დიფერენცირებადი $(0;0)$ წერტილში.

2.22. აჩვენეთ, რომ

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{xy}, & \text{როცა} \quad xy\neq 0,\\ 0 & \text{როცა} \quad xy=0\end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტია R^2-ზე, $f'_x(0;0)=f'_y(0;0)=0$ და $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ წყვეტილი ფუნქციებია $(0;0)$ წერტილში.

§ 3. რთული ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი

ვთქვათ რაიმე D არეში მოცემულია ორი ცვლადის ფუნქცია

$$z=f(x,y).$$

ვიგულისხმოთ, რომ x და y წარმოადგენენ ერთი t ცვლადის ფუნქციებს:

$$x=\varphi(t),\quad y=g(t),$$

რომლებიც განსაზღვრულია $]\alpha,\beta[$ შუალედში. დავუშვათ, რომ (x,y) წერტილი არ გამოდის D არიდან, როცა t იცვლება $]\alpha,\beta[$ შუალედში. ამ შემთხვევაში

$$z=f[\varphi(t),g(t)]$$

წარმოადგენს ერთი t ცვლადის რთულ ფუნქციას. მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1. ვთქვათ $x=\varphi(t)$ და $y=g(t)$ წარმოებადი ფუნქციებია t_0 წერტილში. ამასთან $x_0=\varphi(t_0)$ და $y_0=g(t_0)$. თუ $z=f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0,y_0) წერტილში, მაშინ $z=f[\varphi(t),g(t)]$ რთული ფუნქცია წარმოებადია t_0 წერტილში და იგი გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

შედეგი. თუ $z=f(x,y)$, $y=\varphi(x)$, მაშინ (1) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$\dfrac{dz}{dx}$ წარმოებულს ეწოდება z ფუნქციის სრული წარმოებული.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია

$$z=f(x,y),$$

სადაც $x=\varphi(t,\tau)$, $y=g(t,\tau)$. ამ შემთხვევაში z წარმოადგენს ორი t და τ ცვლადის რთულ ფუნქციას. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. ვთქვათ $x=\varphi(t,\tau)$ და $y=g(t,\tau)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია (t_0,τ_0) წერტილში, ხოლო $z=f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0,y_0) წერტილში, სადაც $x_0=\varphi(t_0,\tau_0)$, $y_0=g(t_0,\tau_0)$. მაშინ $z=f[\varphi(t,\tau),g(t,\tau)]$ რთული ფუნქცია დიფერენცირებადია (t_0,τ_0) წერტილში და კერძო წარმოებულები გამოითვლება ფორმულებით

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t}&=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t},\\ \frac{\partial z}{\partial \tau}&=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}.\end{aligned} \tag{2}$$

$\dfrac{\partial z}{\partial t}$ და $\dfrac{\partial z}{\partial \tau}$ წარმოებულებს ეწოდება z ფუნქციის სრული კერძო წარმოებულები.

შედეგი. ვთქვათ $u=f(x,y,z)$, სადაც $x=t$, $y=\tau$ და $z=\varphi(t,\tau)$.

თუ გავითვალისწინებთ ტოლობებს $\dfrac{\partial x}{\partial t}=1$, $\dfrac{\partial y}{\partial \tau}=1$, $\dfrac{\partial y}{\partial t}=0$, $\dfrac{\partial x}{\partial \tau}=0$, მაშინ (2) ფორმულები ჩაწერილი სამი ცვლადის ფუნქციისათვის მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \tau}.$$

აქ $\frac{\partial u}{\partial t}$ და $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ არიან $f(t,\tau,\psi(t,\tau))$ რთული ფუნქციის სრული კერძო წარმოებულები, ხოლო $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ და $\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)$ კი სამი ცვლადის $f(x,\tau,z)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულებია t და τ ცვლადებით, რომლის გამოთვლის დროს z ჩათვლილია მუდმივად.

3.1. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=e^{2x-3y}$, სადაც $x=\mathrm{tg}t$, $y=t^2-t$.

3.2. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=x^2+xy^2$, სადაც $x=e^{2t}$, $y=\sin t$.

3.3. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=\mathrm{arctg}\frac{x+1}{y}$, სადაც $x=t$, $y=e^{(1+t)^2}$.

3.4. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=x^y$, სადაც $x=\ln t$, $y=\sin t$.

3.5. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$, სადაც $x=3t^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$.

3.6. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=\cos^2(3x^2+y)$, სადაც $x=t^2$, $y=\frac{1}{t}$.

3.7. იპოვეთ $\frac{du}{dt}$, თუ $u=xyz$, სადაც $x=t^2+1$, $y=\ln t$, $z=\mathrm{tg}t$.

3.8. იპოვეთ $\frac{du}{dt}$, თუ $u=\ln(x^2+y+z)$, სადაც $x=e^t$, $y=\sin 2t$, $z=\mathrm{arctg}t$.

3.9. იპოვეთ $\frac{dz}{dx}$, თუ $z=\ln(e^x+e^y)$, სადაც $y=\frac{1}{3}x^3+x$.

3.10. იპოვეთ $\frac{dz}{dx}$, თუ $z=\mathrm{arctg}(xy)$, სადაც $y=e^x$.

3.11. იპოვეთ $\frac{dz}{dx}$, თუ $z=\arcsin\frac{x}{y}$, სადაც $y=\sqrt{x^2+1}$.

3.12. იპოვეთ $\frac{du}{dz}$, თუ $u=\mathrm{tg}(3z+2x^2-y)$, სადაც $x=\frac{1}{z}$, $y=\sqrt{z}$.

3.13. იპოვეთ $\frac{du}{dx}$, თუ $u=\frac{e^{\alpha x}(y-z)}{\alpha^2+1}$, სადაც $y=\alpha\sin x$, $z=\cos x$.

3.14. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z=x^2\ln y$, სადაც $x=\frac{v}{u}$, $y=u^2+v^2$.

3.15. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z=\frac{x^2}{y}$, სადაც $x=u-2v$, $y=v+2u$.

3.16. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial t}$ და $\frac{\partial z}{\partial \tau}$, თუ $z=\mathrm{arctg}\frac{x}{y}$, სადაც $x=t\sin\tau$, $y=t\cos\tau$.

3.17. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z=u+v^2$, სადაც $u=x^2+\sin y$, $v=\ln(x+y)$.

3.18. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial t}$ და $\frac{\partial z}{\partial \tau}$, თუ $z=e^{x-2y}$, სადაც $x=\sin t$, $y=t^3+\tau^2$.

3.19. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z=t^2\cos t\,\tau^2$, სადაც $t=\frac{x}{y}$, $\tau=xy$.

3.20. იპოვეთ $\frac{\partial u}{\partial x}$ და $\frac{\partial u}{\partial y}$, თუ $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, სადაც $z=e^{x^2-y}$.

3.21. იპოვეთ $\frac{\partial u}{\partial t}$ და $\frac{\partial u}{\partial \tau}$, თუ $u=e^{x^2-y+3z}$, სადაც $x=\ln(t+\tau)$, $y=\sin\frac{t}{\tau}$, $z=t^3-\tau^2$.

3.22. გამოსახეთ $\frac{\partial z}{\partial r}$ და $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ კერძო წარმოებულებით, თუ $z=f(x,y)$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

3.23. აჩვენეთ, რომ $\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0$ და $\frac{\partial u}{\partial \theta}=0$, თუ $u=f(x^2+y^2+z^2)$, $x=r\cos\varphi\cos\vartheta$, $y=r\cos\varphi\sin\vartheta$, $z=r\sin\varphi$.

§ 4 მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალები

1. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები. ვთქვათ $z=f(x,y)$ ფუნქციას გააჩნია კერძო $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ წარმოებულები რაიმე $D \subset R^2$ არეში. საზოგადოდ ეს კერძო წარმოებულები წარმოადგენენ x და y ცვლადის ფუნქციებს, რომლის განსაზღვრის არეა D.

განსაზღვრება 1. თუ $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციებს აქვს წარმოებული x ცვლადით (x,y) წერტილში, მაშინ მათ უწოდებენ $f(x,y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს (x,y) წერტილში და აღინიშნება შესაბამისად შემდეგი სიმბოლოებით

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x,y) = z''_{x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y) = z''_{yx}.$$

ასევე განისაზღვრება $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციების კერძო წარმოებულები y ცვლადით (x,y) წერტილში.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{y^2}.$$

მაშასადამე, ორი ცვლადის ფუნქციისათვის გვაქვს ოთხი მეორე რიგის კერძო წარმოებული. $f''_{xy}(x,y)$ და $f''_{yx}(x,y)$ მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს უწოდებენ შერეულ კერძო წარმოებულებს.

ანალოგიურად განისაზღვრება მესამე, მეოთხე და უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები. მაგალითად განსაზღვრებით

$$\frac{\partial^{n+k+1} f}{\partial y^n \partial x^{k+1}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n+k} f}{\partial y^n \partial x^k}\right).$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$z=xy^2+\sin(x+y)$$

ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

გვაქვს

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + \cos(x+y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + \cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x+y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x - \sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y - \sin(x+y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y - \sin(x+y).$$

ამ მაგალითში

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \tag{1}$$

ისმება კითხვა: მართებულია თუ არა (1) ტოლობა ნებისმიერი ფუნქციისათვის? პასუხი უარყოფითია, (1) ტოლობა საზოგადოდ მართებული არ არის. ვაჩვენოთ ეს შემდეგ მაგალითზე:

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=y=0 \end{cases}$$

ფუნქციის f''_{xy} და f''_{yx} კერძო წარმოებულები $(0,0)$ წერტილში.

გვაქვს:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y\frac{x^4+3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \quad \text{როცა} \quad x^2+y^2 \neq 0$$

და

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0.$$

ანალოგიურად

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \quad \text{როცა} \quad x^2+y^2 \neq 0$$

და

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$$

შემდეგ განსაზღვრებით

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

ე. ი.

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}.$$

ისმის კითხვა: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქცია, რომ მისი შერეული კერძო წარმოებულები იყოს ერთმანეთის ტოლი? მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულების შემთხვევაში დასმულ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1 (შვარცი). ვთქვათ $f''_{xy}(x,y)$ და $f''_{yx}(x,y)$ წარმოებულები არსებობენ $M(x_0,y_0)$ წერტილის რაიმე $u(M,\delta)$ მიდამოში. თუ ეს ფუნქციები უწყვეტია $M(x_0,y_0)$ წერტილში, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0).$$

2. მაღალი რიგის დიფერენციალები. ვთქვათ $z=f(x,y)$ ფუნქციას რაიმე D არეში აქვს ყველა რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებული n რიგამდე ჩათვლით. მაშინ როგორც ვიცით მისი დიფერენციალი გამოითვლება ფორმულით

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \tag{2}$$

აქ dx და dy შესაბამისად დამოუკიდებელი x და y ცვლადების Δx და Δy ნაზრდებია. ისინი არ არიან დამოკიდებული x და y-ზე.

$z=f(x,y)$ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი, რომელიც აღინიშნება d^2z სიმბოლოთი, ეწოდება პირველი რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს, ე. ი. განსაზღვრებით

$$d^2z = d(dz).$$

თუ გავითვალისწინებთ (2) ტოლობას, გვექნება

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial (dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial (dz)}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy\right) dx + \tag{3}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

სადაც dx^2 და dy^2-ით აღნიშნულია შესაბამისად $(dx)^2$ და $(dy)^2$.

მეორე რიგის წარმოებულების უწყვეტობის ძალით

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

ამიტომ (3) ტოლობიდან გვაქვს

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{dx^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

საზოგადოდ განსაზღვრებით n-ური რიგის დიფერენციალი ეწოდება n−1 რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს და აღინიშნება d^nz სიმბოლოთი. ადვილია ჩვენება, რომ

$$d^nz = d(d^{n-1}z) = f^{(n)}_{x^n} dx^n + n f^{(n)}_{x^{n-1}} dx^{n-1} dy + \cdots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} f^{(n)}_{x^{n-k}y^k} dx^{n-k} dy^k + \cdots + f^{(n)}_{y^n} dy^n.$$

ამ ფორმულას ჩვეულებრივ სიმბოლურად წერენ შემდეგი სახით

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f(x,y),$$

რომელიც ასე უნდა გავიგოთ: გამოსახულება, რომელიც ფრჩხილებშია მოთავსებული, ფორმალურად უნდა ავიყვანოთ n ხარისხში და შემდეგ ∂-ს ხარისხებს (რაც წარმოებულის რიგს გამოსახავს) მარჯვნივ უნდა მივუწეროთ $f(x,y)$ ან რაც იგივეა z.

4.1. 1) $z=x^3-3xy^2+x^2y-y^3$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

2) $z=xy+\frac{y}{x}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

3) $z=\ln(x^2+y)$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

4) $z=\frac{x-y}{x+y}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4.2. 1) $z=\sqrt{2xy+y^2}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

2) $z=\arcsin(xy)$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

3) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

4) $z=y^{\ln x}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4.3. 1) $z=xe^{-xy}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

2) $z=y^x$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

3) $z=\dfrac{\cos x^2}{y}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

4) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

4.4. 1) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$;

2) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$;

3) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$;

4) $u=x^{y/z}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

4.5. 1) $z=\sin xy$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$;

2) $z=\ln(x^2+y^2)$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$;

3) $u=e^{xyz}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$;

4) $u=e^{xy}\sin z$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

4.6. იპოვეთ $f''_{x^2}(3;2)$, $f''_{y^2}(3;2)$ და $f''_{xy}(3;2)$, თუ $f(x,y)=x^3y+xy^2-2x+3y-1$

4.7. იპოვეთ $f'''_{x^3}(0;1)$, $f'''_{y^3}(0;1)$, $f'''_{x^2y}(0;1)$, $f'''_{xy^2}(0;1)$, თუ $f(x,y)=e^{x^2y}$.

4.8. აჩვენეთ, რომ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, თუ:

1) $z=x^y$; 2) $z=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$; 3) $z=\cos\dfrac{y}{x}\left(\arccos\dfrac{x}{y}\right)$; 4) $z=x\sin(ax+by)$.

4.9. აჩვენეთ, რომ $f''_{xy}(0;0)\neq f''_{yx}(0;0)$, თუ

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{თუ } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{თუ } x=y=0.\end{cases}$$

იპოვეთ მითითებული რიგის დიფერენციალი (NN4.10-4.11):

4.10. 1) $z=xy^2-x^2y$, $d^2z=?$ 2) $z=\ln(x-y)$, $d^2z=?$

3) $z=e^{xy}$, $d^2z=?$ 4) $z=x\sin^2 y$, $d^2z=?$

4.11. 1) $u=xyz$, $d^2u=?$ 2) $u=e^{xyz}$, $d^2u=?$

3) $u=xy+yz+xz$, $d^2u=?$ 4) $u=\sin(x+y+z)$, $d^2u=?$

4.12. იპოვეთ $d^2f(1;2)$, თუ $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

4.13. იპოვეთ $d^2f(0;0;0)$, თუ $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-2xy+4xz+2yz$.

4.14. აჩვენეთ, რომ ფუნქცია აკმაყოფილებს მითითებულ ტოლობას

1) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\Delta z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (ლაპლასის განტოლება);

2) $z=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

3) $z=A\sin\lambda x\cdot\cos a\lambda t$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (სიმის რხევის განტოლება);

4) $z=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (სითბოგამტარობის განტოლება);

5) $u=\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

(ლაპლასის განტოლება);

6) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

§ 5. არაცხადი ფუნქციები

ვთქვათ, x და y ცვლადები დაკავშირებულია ერთმანეთთან განტოლებით

$$F(x,y)=0. \qquad (1)$$

თუ E სიმრავლეზე განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$F(x,f(x))=0, \quad \forall x \in E,$$

მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია (1) განტოლებით არაცხადი სახით. ცხადია, რომ (1) განტოლება ყოველთვის არ განსაზღვრავს არაცხად ფუნქციას. მაგრამ მართებულია შემდეგი

თეორემა 1. ვთქვათ $F(x,y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს:

1) განსაზღვრულია და აქვს უწყვეტი F'_x და F'_y კერძო წარმოებულები რაიმე $I=\left[|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\right]$ მართკუთხედზე;

2) $F(x_0,y_0)=0$,

3) $F'_y(x_0,y_0)\ne 0$,

მაშინ $F(x,y)=0$ განტოლება x_0 წერტილის რაიმე $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ $(0<\delta\le a)$ მიდამოში განსაზღვრავს ერთადერთ $y=f(x)$ ფუნქციას, ისეთს რომ $y_0=f(x_0)$. გარდა ამისა ამ ფუნქციას აღნიშნულ მიდამოში აქვს უწყვეტი წარმოებული, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \qquad (2)$$

შენიშვნა 1. თუ წინასწარ ცნობილია $F(x,y)=0$ განტოლებიდან არაცხადი $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის არსებობა, მაშინ (2) ფორმულა შეიძლება მივიღოთ $F(x,f(x))=0$ იგივეობიდან მისი ფორმალური გაწარმოებით:

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0. \qquad (3)$$

აქედან კი მიიღება (2) ფორმულა.

თუ (3) ტოლობას კიდევ გავაწარმოებთ x-ით, მივიღებთ

$$F''_{x^2}+2F''_{xy}\cdot y'+F''_{y^2}\cdot y'^2+F'_y\cdot y''=0,$$

საიდანაც

$$y''=-\frac{F''_{x^2}+2F''_{xy}\cdot y'+F''_{y^2}\cdot y'^2}{F'_y}. \qquad (4)$$

შენიშვნა 2. ერთი ცვლადის ანალოგიურად განისაზღვრება

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_m,u)=0$$

განტოლებით განსაზღვრული მრავალი ცვლადის არაცხადი ფუნქცია. მართებულია ზემოთ მოყვანილი თეორემის ანალოგიური თეორემა

თეორემა 2. ვთქვათ $F(x_1,x_2,\ldots,x_m,u)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს:

1) განსაზღვრულია და აქვს უწყვეტი $F'_{x_1},F'_{x_2},\cdots,F'_{x_m},F'_u$ კერძო წარმოებულები რაიმე $m+1$ განზომილებიან პარალელეპიპედზე ცენტრით $\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)},u^{(0)}\right)$ წერტილში;

2) $F\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)},u^{(0)}\right)=0$;

3) $F'_u\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)},u^{(0)}\right)\ne 0$.

მაშინ $F(x_1,x_2,\ldots,x_m,u)=0$ განტოლება $\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)}\right)$ წერტილის რაიმე მართკუთხოვან მიდამოში $\left\{x=(x_1,x_2,\cdots x_m): x_i^0-a_i<x_i<x_i^0+a_i,\ i=1,2,\cdots,m\right\}$ ცენტრით $\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)}\right)$ წერტილში, განსაზღვრავს ერთადერთ $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ არაცხად ფუნქციას ისეთს, რომ $u^{(0)}=f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)}\right)$. გარდა ამისა, ამ ფუნქციას $\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)}\right)$ წერტილის აღნიშნულ მიდამოში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები და

$$f'_{x_i}=-\frac{F'_{x_i}}{F'_u}, \quad i=1,2,\ldots,m.$$

მაგალითი. ვიპოვოთ $F(x,y)=x^4+xy+y^3-3=0$ განტოლებით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები, როცა $x=1$ და $y=1$.

გვაქვს -

$$F'_x=4x^3+y,\quad F'_y=x+3y^2,\quad F''_{x^2}=12x^2,\quad F''_{xy}=1,\quad F''_{y^2}=6y.$$

შემდეგ

$$F'_x(1,1)=5,\quad F'_y(1,1)=4,\quad F''_{x^2}(1,1)=12,\quad F''_{xy}(1,1)=1,\quad F''_{y^2}(1,1)=6.$$

ამრიგად (2) და (4) ტოლობების ძალით მივიღებთ

$$y'(0)=-\frac{5}{4},\quad y''(0)=-\frac{12-\frac{5}{2}+\frac{75}{8}}{4}=-\frac{151}{32}.$$

იპოვეთ მითითებული წარმოებული (NN5.1;5.2):

5.1. 1) $x^2e^{2y}-y^2e^{2x}=0$, $\dfrac{dy}{dx}=?$

2) $y\sin x-\cos(x-y)=0$, $\dfrac{dy}{dx}=?$

3) $xe^y-y+1=0$, $\dfrac{dy}{dx}=?$

4) $x+y-e^{x-y}=0$, $\dfrac{dy}{dx}=?$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

5.2. 1) $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\alpha\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=0$ $(\alpha\neq 0)$, $\dfrac{dy}{dx}=?$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

2) $x^y-y^x=0$ $(x\neq y)$, $\dfrac{dy}{dx}=?$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

3) $2x\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-y=0$, $\dfrac{dy}{dx}=?$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

4) $1+xy-\ln(e^{xy}+e^{-xy})=0$, $\dfrac{dy}{dx}=?$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

5.3. იპოვეთ ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები x_0 წერტილში:

1) $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$, $x_0=1$, $y_0=0$;

2) $x^2-xy+2y^2+x-y-1=0$, $x_0=0$, $y_0=1$;

3) $x^2+xy+y^2=3$, $x_0=1$, $y_0=1$;

4) $4^{x-y}-x-y=0$, $x_0=0$.

5.4. იპოვეთ მითითებული კერძო წარმოებულები:

1) $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=?$

3) $z^3-3xyz=a^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=?$

4) $x+y+z-e^z=0$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=?$

5.5. იპოვეთ ფუნქციის მითითებული რიგის კერძო წარმოებული M წერტილში:

1) $z^3-4xz+y^2-4=0$, $M_0(1;-2;2)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

2) $x^2+y^2-z^2-xy=0$, $M_0(-1;0;1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

3) $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$, $M_0(1;-2;1)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=?$

4) $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-1=0$, $M_0(0;1;1)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$

5.6. იპოვეთ არაცხადი ფუნქციის მითითებული რიგის დიფერენციალი:

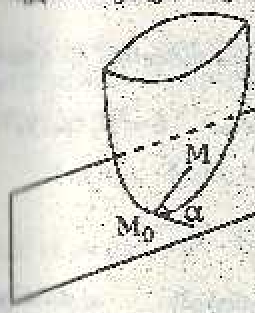
1) $z^3-3xyz=a^3$, $dz=?$ 2) $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z=1$, $dz=?$

3) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $dz=?$ $d^2z=?$ 4) $\ln z=x+y+z-1$, $dz=?$ $d^2z=?$

§ 6. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი. მიმართულებითი წარმოებული

1. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი. ორი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი. მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობისა და სრული დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსის გასარკვევად თავდაპირველად შემოვიღებთ $z=f(x,y)$ ზედაპირისადმი მოცემულ წერტილში გავლებული მხები სიბრტყის ცნებას.

ვთქვათ ზედაპირზე მოცემულია რაიმე M_0 წერტილი. განვიხილოთ ამ ზედაპირზე ნებისმიერი მეორე M წერტილი და გავავლოთ M_0M მკვეთი (ნახ. 4). თუ M წერტილი მოძრაობს ზედაპირზე, ხოლო M_0 უძრავია, მაშინ მკვეთი იცვლის თავის მდებარეობას. ზედაპირის M_0 წერტილში გავლებულ P სიბრტყეს ეწოდება მოცემული ზედაპირის მხები სიბრტყე M_0 წერტილში, თუ კუთხე P სიბრტყესა და M_0M მკვეთს შორის მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა M წერტილი მიისწრაფვის M_0-საკენ ზედაპირის გასწვრივ.



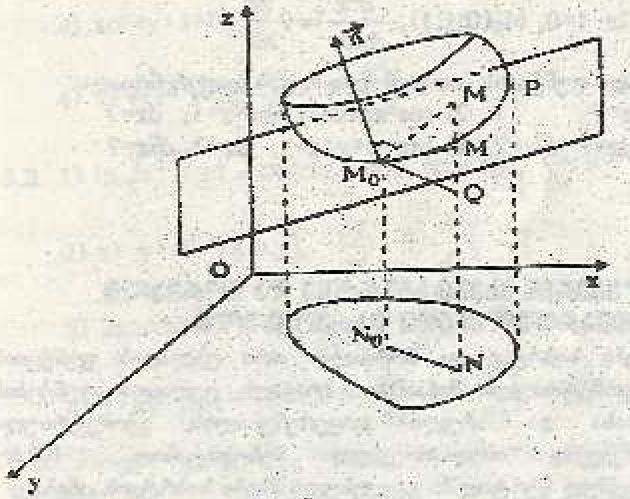
ნახ. 4

შევნიშნოთ, რომ თუ M_0 წერტილში არსებობს მხები სიბრტყე, მაშინ ცხადია, ამ სიბრტყეში მდებარეობს M_0 წერტილზე გამავალი და ზედაპირზე მდებარე ნებისმიერი წირისადმი ამავე წერტილზე გავლებული მხები წრფე.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $N_0(x_0,y_0)$ წერტილში, მაშინ $z=f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკის შესაბამის $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილში (ნახ. 5), სადაც $z_0=f(x_0,y_0)$, გააჩნია მხები სიბრტყე და მისი განტოლებაა

$$z-z_0=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0). \qquad (1)$$



ნახ. 5

ამრიგად, $z=f(x,y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობა (x_0,y_0) წერტილში გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ $z=f(x,y)$ ზედაპირს $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ წერტილში გააჩნია მხები სიბრტყე.

განსაზღვრება 1. წრფეს, რომელიც მხები სიბრტყის მართობია და გადის შეხების წერტილში, ზედაპირის ნორმალი ეწოდება.

რადგანაც ნორმალის მიმმართველი ვექტორია $\bar{n}=\{f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),\ -1\}$, ამიტომ მისი განტოლება იქნება

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

თუ ნორმალის მიმართულების კოსინუსებს აღვნიშნავთ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$-თი გვექნება

$$\cos\alpha=\frac{f'_x}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},\ \cos\beta=\frac{f'_y}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},\ \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}$$

განვიხილოთ ახლა სრული დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი. რადგანაც $z=f(x,y)$ დიფერენცირებადია $N_0(x_0,y_0)$ წერტილში, ამიტომ

$$dz=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0). \qquad (2)$$

(1) და (2) ტოლობებიდან გვაქვს

$$dz=Z-z_0,$$

სადაც $z_0=f(x_0,y_0)$, ხოლო Z არის (x_0,y_0,z_0) წერტილზე გამავალი მხები სიბრტყის აპლიკატა $N(x,y)$ წერტილზე. ე. ი. $z=f(x,y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი dz, წერტილში უდრის ამ ფუნქციის გრაფიკისადმი შესაბამის წერტილში გავლებული მხები სიბრტყის აპლიკატის ნაზრდს QM'-ს ($N_0M_0=NQ$) (ნახ. 5).

შენიშვნა. ვთქვათ ზედაპირი მოცემულია $F(x,y,z)=0$ განტოლებით. თუ F'_x, F'_y და F'_z ფუნქციები უწყვეტია $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილის რაიმე მიდამოში და $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ მაშინ ზედაპირის M_0 წერტილში გავლებული მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებებია შესაბამისად

$$\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z-z_0)=0$$

და

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}$$

შეადგინეთ მოცემული ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები M_0 წერტილში (NN6.1-6.3):

6.1. 1) $z=x^2+y^2$, $M_0(1;-2;5)$; 2) $z=2x^2-4y^2$, $M_0(2;1;4)$;

3) $z=xy$, $M_0(1;1;1)$; 4) $z=\sin x\cos y$, $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$.

6.2. 1) $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$, $M_0(3;4;-7)$. 2) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $z=e^{x\cos y}$, $M_0\left(1;\pi;\frac{1}{e}\right)$; 4) $z=\frac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$, $M_0(a;a;-a)$.

6.3. 1) $x^2+y^2+z^2=14$, $M_0(1;2;3)$;
2) $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $M_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$;

3) $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{3}=1, \quad M_0(3;2;1);$

4) $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0, \quad M_0(1;2;-1).$

6.4. იპოვეთ მანძილი კოორდინატთა სათავიდან $z=y\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{a}$ ზედაპირის $M\left(\dfrac{\pi a}{4}; a, a\right)$ წერტილში გავლებულ მხებ სიბრტყემდე.

6.5. იპოვეთ $z=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$ ზედაპირის $M\left(1;1;\dfrac{\pi}{4}\right)$ წერტილზე გავლებული ნორმალის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეები.

6.6. იპოვეთ $z=4x-xy+y^2$ ზედაპირის ის მხები სიბრტყე, რომელიც პარალელურია $4x+y+2z+9=0$ სიბრტყის.

6.7. იპოვეთ $x^2+2y^2+3z^2=21$ ზედაპირის ის მხები სიბრტყე, რომელიც პარალელურია $x+4y+6z=0$ სიბრტყის.

6.8. $x^2+y^2-z^2-2x=0$ ზედაპირზე იპოვეთ წერტილები, რომლებშიც გავლებული მხები სიბრტყეები პარალელურია საკოორდინატო სიბრტყეების.

6.9. იპოვეთ $z=xy$ ზედაპირის მხები სიბრტყე, რომელიც $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ წრფის მართობულია.

6.10. იპოვეთ $x^2-z^2-2x+6y-4=0$ ზედაპირის ის ნორმალი, რომელიც $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{4}$ წრფის პარალელურია.

6.11. იპოვეთ $x^2-y^2-3z=0$ ზედაპირის იმ მხები სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(0;0;-1)$ წერტილზე $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$ წრფის პარალელურად.

6.12. აჩვენეთ, რომ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდისადმი $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილში გავლებული მხები სიბრტყის განტოლებაა

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

6.13. იპოვეთ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდის იმ მხები სიბრტყის განტოლება, რომელიც დადებით ნახევარღერძებიდან მოჰკვეთს ტოლ მონაკვეთებს.

6.14. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდზე იპოვეთ წერტილები, რომლებშიც გავლებული ნორმალები საკოორდინატო ღერძებთან შეადგენენ ტოლ კუთხეებს.

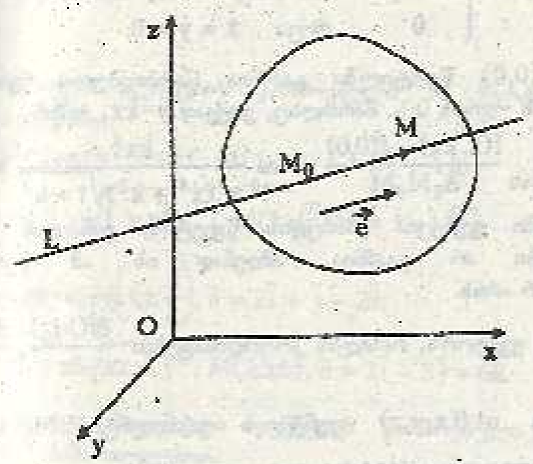
3. წარმოებული მოცემული მიმართულებით. გრადიენტი. განვიხილოთ სამი ცვლადის $u=f(x,y,z)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე $D\subset R^3$ არეში.

ავიღოთ D არეში რაიმე $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილი. ვთქვათ $\bar{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ნებისმიერი ერთეულოვანი ვექტორია. გავავლოთ M_0 წერტილში $\bar{e}$ ვექტორის პარალელური რაიმე L წრფე. $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ იყოს D არეში მოთავსებული L წრფის ნებისმიერი წერტილი (ნახ. 6ა). $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორის სიდიდე $\bar{e}$-ს მიმართ აღვნიშნოთ $\Delta_{\bar{e}}M_0M$-ით, ე. ი.

$$\Delta_{\bar{e}}M_0M=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2},$$

თუ $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორს აქვს $\bar{e}$ ვექტორის მიმართულება და

$$\Delta_{\bar{e}}M_0M=-\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2},$$



ნახ. 6 ა)

თუ $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორს აქვს $\bar{e}$-ის საწინააღმდეგო მიმართულება.

განსაზღვრება 2. ზღვარს

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\Delta_e M_0M} = \lim_{\Delta_e M_0M\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta_e M_0M}$$

თუ ის არსებობს, ეწოდება f ფუნქციის წარმოებული M_0 წერტილში ვექტორის მიმართულებით და აღინიშნება $\frac{\partial u}{\partial e}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial e}$ ან $\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial e}$ სიმბოლოებით.

თეორემა 2. თუ $u=f(x,y,z)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილში, მაშინ ამ წერტილში $f(x,y,z)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული ნებისმიერი $\bar e(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ მიმართულებით და ეს წარმოებული გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial e}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \quad (3)$$

შენიშვნა. შეიძლება ფუნქცია დიფერენცირებადი არ იყოს, მაგრამ მ ჰქონდეს წარმოებული ნებისმიერი მიმართულებით.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & \text{როცა } x\neq 0,\ y\neq 0,\\ 0 & \text{როცა } x=y=0.\end{cases}$$

ამ ფუნქციას $(0,0)$ წერტილში გააჩნია წარმოებული ნებისმიერი მიმართულებით და ის უდრის 0-ს. მართლაც, ვთქვათ $y=kx$, მაშინ

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial e}=\lim_{\Delta_e M_0M\to 0}\frac{f(x,kx)-f(0,0)}{\Delta_e M_0M}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^3(x^4+k^2)\sqrt{1+k^2}}=0.$$

$(0,0)$ წერტილში ფუნქცია განიცდის წყვეტას, ვინაიდან მას ამ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია. ამდენად ის ამ წერტილში დიფერენცირებადი არ არის.

განსაზღვრება 3. ვექტორს, რომლის კოორდინატებია $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}$, ეწოდება $u=f(x,y,z)$ ფუნქციის გრადიენტი $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილში და აღინიშნება $\operatorname{grad}f(M_0)$ სიმბოლოთი. ამრიგად

$$\operatorname{grad}f(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\bar i+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\bar j+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\bar k, \quad (4)$$

სადაც $\bar i, \bar j, \bar k$ საკოორდინატო ღერძების მგეზავები.

თუ $\bar e$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსებია $\cos\alpha$, $\cos\beta$ და $\cos\gamma$, მაშინ (3) და (4)-დან გვაქვს

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial e}=\bar e\operatorname{grad}f(M_0), \quad (5)$$

ე. ი. $f(x,y,z)$ ფუნქციის წარმოებული $\bar e$ ვექტორის მიმართულებით უდრის, ამ ვექტორისა და მოცემული ფუნქციის გრადიენტის სკალარულ ნამრავლს.

(5) ტოლობიდან გამომდინარეობს გრადიენტის შემდეგი ძირითადი თვისება: $f(x,y,z)$ ფუნქციის მნიშვნელობა ყველაზე სწრაფად იზრდება გრადიენტის მიმართულებით; ეს იმას ნიშნავს, რომ გრადიენტის მიმართულებით ფუნქციის წარმოებულს აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, ნებისმიერ სხვა მიმართულებით წარმოებულთან შედარებით.

მართლაც, თუ φ არის კუთხე $\bar e$ და $\operatorname{grad}f(M_0)$ ვექტორებს შორის, მაშინ

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial e}=|\operatorname{grad}f(M_0)|\cos\varphi.$$

აქედან ჩანს, რომ $\frac{\partial f}{\partial e}$ წარმოებულს აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, როცა $\varphi=0$, ხოლო უმცირესი, როცა $\varphi=\pi$.

6.15. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული M წერტილში $\bar e$ ვექტორის მიმართულებით:

1) $z=x^2-2xy+y^2-2x+1$, $M(1,1)$; $\bar e=3\bar i+4\bar j$;

2) $z=\ln\left(1+\sqrt{1+x^2y^2}\right)$, $M(1;\sqrt3)$, $\bar e=\bar i+\sqrt3\bar j$;

3) $u=\operatorname{tg}xyz$, $M\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$, $\bar e=2\bar i+\bar j-2\bar k$;

4) $u=x^2y-\sqrt{xz+y^2}$, $M(2;3;8)$, $\bar e=2\bar i-3\bar j+6\bar k$.

6.16. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული M წერტილში $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის მიმართულებით:

1) $z=x^3-2x^2y+xy^2+1$, $M(1;2)$, $A(1;2)$, $B(4;6)$;

2) $u=xy+yz+zx$, $M(2;1;3)$, $A(2;1;3)$, $B(5;5;15)$.

6.17. იპოვეთ $z=\ln(x^2+y^2)$ ფუნქციის წარმოებული $M(1;1)$ წერტილში პირველი საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისის მიმართულებით.

6.18. იპოვეთ $u=x^2-3yz+5$ ფუნქციის წარმოებული $M(1;2;-1)$ წერტილში იმ ვექტორის მიმართულებით, რომელიც საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს ერთიდაიგივე კუთხეებს.

6.19. იპოვეთ $u=\ln(e^x+e^y+e^z)$ ფუნქციის წარმოებული $O(0;0;0)$ წერტილში იმ ვექტორის მიმართულებით, რომელიც ox, oy და oz ღერძებთან შესაბამისად ადგენს α, β და γ კუთხეებს.

6.20. აჩვენეთ, რომ $z=x^3+3x^2+4xy+y^2$ ფუნქციის წარმოებული $M\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$ წერტილში ნებისმიერი მიმართულებით ნულის ტოლია.

6.21. აჩვენეთ, რომ $z=\frac{y^2}{x}$ ფუნქციის წარმოებული $2x^2+y^2=1$ ელიფსის ნებისმიერ წერტილში გავლებული ნორმალის მიმართულებით ნულის ტოლია.

6.22. აჩვენეთ, რომ $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ ფუნქციის წარმოებული ნებისმიერ $M(x;y;z)$ წერტილში $\overrightarrow{MO}$ (O კოორდინატთა სათავეა) ვექტორის მიმართულებით უდრის $-\frac{2u}{r}$, სადაც $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

6.23. იპოვეთ $\operatorname{grad} f$ მოცემულ M წერტილში, თუ:

1) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$, $M(2;1)$;

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$, $M(5;3)$;

3) $f(x,y,z)=xyz$, $M(1;2;3)$;

4) $f(x,y,z)=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$, $M(-4;3;4)$.

6.24. ვთქვათ $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. იპოვეთ: 1) $\operatorname{grad} r$; 2) $\operatorname{grad} r^2$; 3) $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$.

6.25. იპოვეთ $|\operatorname{grad} u|$ წერტილში $M(2;2;4)$, თუ $u=x^y-z$.

6.26. იპოვეთ $u=x^2+y^2+z^2$ ფუნქციის გრადიენტის სიგრძე და მიმართულება $M(2;-2;1)$ წერტილში.

6.27. იპოვეთ კუთხე $z=\ln\frac{y}{x}$ ფუნქციის გრადიენტებს შორის $M_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ და $M_2(1;1)$ წერტილებში.

6.28. იპოვეთ კუთხე $z=\arcsin\frac{x}{x+y}$ ფუნქციის გრადიენტებს შორის $M_1(1;1)$ და $M_2(3;4)$ წერტილებში.

6.29. იპოვეთ კუთხე $u=\sqrt{x^2+y^2}$ და $v=x-3y+\sqrt{3xy}$ ფუნქციის გრადიენტებს შორის $M(3;4)$ წერტილში.

6.30. დაამტკიცეთ ტოლობები (f და φ დიფერენცირებადი ფუნქციებია, c მუდმივია):

1) $\operatorname{grad}(f+\varphi)=\operatorname{grad} f+\operatorname{grad}\varphi$; 2) $\operatorname{grad}(c+f)=\operatorname{grad} f$;

3) $\operatorname{grad}(cf)=c\operatorname{grad} f$; 4) $\operatorname{grad}(f\varphi)=f\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{grad} f$;

5) $\operatorname{grad}(\varphi^n)=n\varphi^{n-1}\operatorname{grad}\varphi$; 6) $\operatorname{grad}[f(\varphi)]=f'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi$.

§ 7. ტეილორის ფორმულა. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

1. ტეილორის ფორმულა. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქცია.

თეორემა 1. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია $(n+1)$-ჯერ დიფერენცირებადია $M_0(x_0,y_0)$ წერტილის რაიმე $U(M_0,\delta)$ მიდამოში, მაშინ ამ მიდამოს ნებისმიერი $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ წერტილისათვის

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y), \qquad (1)$$

სადაც $\theta=\theta(\Delta x,\Delta y)$, $0<\theta<1$.

(1) ფორმულას უწოდებენ ორი ცვლადის ფუნქციის ტეილორის ფორმულას, ნაშთითი წევრით

$$r_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y). \qquad (2)$$

(2) ფორმით ჩაწერილ r_n-ს ეწოდება ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრი ლაგრანჟის სახით.

(1) ფორმულაში ნაშთითი წევრი r_n შეიძლება ჩაიწეროს ასეთი სახითაც

$$r_n=o(\rho^n), \qquad \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2};$$

მას ეწოდება ნაშთითი წევრი პეანოს სახით.

(1) ფორმულა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\Delta f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y).$$

როცა $x_0=y_0=0$, ფორმულა (1) ღებულობს სახეს

$$f(x_0,y_0)=f(0,0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(0,0)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(\theta\Delta x,\theta\Delta y). \qquad (3)$$

(3) სახით ჩაწერილ ტეილორის ფორმულას უწოდებენ მაკლორენის ფორმულას.

ტეილორის ფორმულას m ($m>2$) ცვლადის ფუნქციისათვის აქვს, ზემოთ მოყვანილის ანალოგიური სახე.

შენიშვნა. იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $n=0$ (1) ტოლობიდან მიიღება

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x+$$
$$+f'_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y, \qquad (4)$$

რომელიც წარმოადგენს ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის ცნობილ ლაგრანჟის ფორმულის (სასრული ნაზრდის შესახებ) ანალოგს ორი ცვლადის ფუნქციისათვის.

(4) ტოლობიდან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ თუ $f'_x=f'_y=0$, მაშინ $f(x,y)$ ფუნქციის სრული ნაზრდი იგივურად უდრის ნულს, ე. ი. $f(x,y)$ წარმოადგენს მუდმივს.

7.1. ტეილორის ფორმულის გამოყენებით $f(x_0+h,y_0+k)$ გაშალეთ h და k-ს ნატურალურ ხარისხებად $M(x_0,y_0)$ წერტილის მიდამოში:

1) $f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$, $M(-2;1)$;

2) $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$, $M(2;1)$;
3) $f(x,y)=x^2y$, $M(1;1)$;
4) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$, $M(1;-2)$;
5) $f(x,y)=x^3+2y^3-xy$, $M(x_0,y_0)$;
6) $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$, $M(x_0,y_0)$.

7.2. დაწერეთ f ფუნქციის მაკლორენის ფორმულით გაშლის მითითებული პირველი n_0 წევრი:

1) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $n_0=4$;
2) $f(x,y)=e^x\sin y$, $n_0=3$;
3) $f(x,y)=e^y\cos x$, $n_0=3$;
4) $f(x,y)=\cos x\cos y$, $n_0=4$.

7.3. დაწერეთ M_0 წერტილის მიდამოში f ფუნქციის ტეილორის ფორმულით გაშლის მითითებული პირველი n_0 წევრი:

1) $f(x,y)=y^x$, $M_0(1;1)$, $n_0=2$;
2) $f(x,y)=\frac{y}{x}$, $M_0(1;1)$, $n_0=3$;
3) $f(x,y)=e^{x+y}$, $M_0(1;-1)$, $n_0=3$;
4) $f(x,y,z)=\ln(xy+z^2)$, $M_0(1;1;0)$, $n_0=2$

7.4. დაწერეთ (1;1) წერტილის მიდამოში $z=x^y$ ფუნქციის ტეილორის ფორმულით გაშლის პირველი სამი წევრი და მიღებული შედეგი გამოიყენეთ $(1,1)^{1,02}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად.

7.5. დაწერეთ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ წერტილის მიდამოში $z=e^x\sin y$ ფუნქციის ტეილორის ფორმულით გაშლის პირველი სამი წევრი და მიღებული შედეგი გამოიყენეთ [illegible]$\sin 0{,}49\pi$-ს მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად.

8. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი. ვთქვათ $z=f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე D არეში.

განსაზღვრება 1. $(x_0,y_0)\in D$ წერტილს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ მოიძებნება (x_0,y_0) წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი (x,y) წერტილისათვის სრულდება უტოლობა $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ $(f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$.

ფუნქციის მნიშვნელობებს მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებში ეწოდება შესაბამისად ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი.

ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება, ხოლო თვით ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში ამ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი ან ექსტრემუმი.

თეორემა 2 (ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა). ვთქვათ $z=f(x,y)$ ფუნქციას (x_0,y_0) წერტილში აქვს ექსტრემუმი. თუ ამ წერტილში არსებობს რომელიმე სასრული კერძო წარმოებული, მაშინ ეს კერძო წარმოებული უდრის ნულს.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება გააჩნდეს იმ წერტილში, სადაც კერძო წარმოებულებიდან ერთი მაინც არ არსებობს.

მაგალითად, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ფუნქციას $(0;0)$ წერტილში კერძო წარმოებულები არ გააჩნია მაგრამ ამ წერტილში მას აქვს მინიმუმი.

უნდა აღინიშნოს, რომ წერტილში ფუნქციის ყველა კერძო წარმოებულის ნულთან ტოლობა ან არ არსებობა წარმოადგენს ექსტრემუმის არსებობის მხოლოდ აუცილებელ პირობას, ე.ი. იქიდან, რომ ფუნქციის ყოველი კერძო წარმოებული რაიმე წერტილში ნულია ან არ არსებობს, არ გამომდინარეობს, რომ ეს წერტილი ექსტრემუმის წერტილია.

განსაზღვრება 2. წერტილს, რომელშიდაც ფუნქციის ყველა კერძო წარმოებული ნულის ტოლია, ამ ფუნქციის სტაციონარული წერტილი ეწოდება.

განსაზღვრება 3. წერტილს, რომელშიდაც ფუნქციის ყოველი კერძო წარმოებული ნულია ან არ არსებობს, ამ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი ეწოდება.

მაშასადამე, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ ამ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილებს შორის.

თეორემა 3 (ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა). ვთქვათ $f(x,y)$ ფუნქციას სტაციონარული $M_0(x_0,y_0)$ წერტილის მიდამოში გააჩნია მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები და

$$\Delta(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f''_{x^2}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}=AC-B^2,$$

$$(A=f''_{x^2}(x_0,y_0),\quad C=f''_{y^2}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0)),$$

მაშინ $f(x,y)$ ფუნქციას M_0 წერტილში:

1) როცა $\Delta>0$ აქვს ექსტრემუმი, კერძოდ მაქსიმუმი, თუ $A<0$ და მინიმუმი, თუ $A>0$;

2) როცა $\Delta<0$ ექსტრემუმი არ გააჩნია.

შენიშვნა 1. თუ $AC-B^2=0$, მაშინ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს

ექსტრემუმი და შეიძლება არა, ე.ი. გვაქვს "საეჭვო" შემთხვევა, რის გამოც საჭირო ხდება დამატებითი გამოკვლევის ჩატარება.

მაგალითად, თუ $f(x,y)=x^4+y^4$, მაშინ $f'_x=4x^3$, $f'_y=4y^3$, $f''_{x^2}=12x^2$, $f''_{xy}=0$, $f''_{y^2}=12y^2$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $(0,0)$ არის სტაციონარული წერტილი და $\Delta(0,0)=AC-B^2=0$, ე.ი. საეჭვო შემთხვევაა. ცხადია, რომ $(0,0)$ წერტილზე მოცემული ფუნქცია ღებულობს მინიმუმს.

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია $f(x,y)=x^4+y^3$. წერტილი $(0,0)$ ამ ფუნქციის სტაციონარული წერტილია და $\Delta(0,0)=AC-B^2=0$, ე.ი. საეჭვო შემთხვევაა. ადვილია ჩვენება, რომ $(0,0)$ არ არის ექსტრემუმის წერტილი. მართლაც, სხვაობა $f(0,y)-f(0,0)>0$, როცა $y>0$ და $f(0,y)-f(0,0)<0$, როცა $y<0$. ამრიგად, სრული ნაზრდი $(0,0)$ წერტილში ნიშანს არ ინარჩუნებს, ე.ი. $(0,0)$ წერტილი ექსტრემუმის წერტილი არ არის.

შენიშვნა 2. თუ $\Delta>0$, მაშინ $A=f''_{x^2}(x_0,y_0)$ და $C=f''_{y^2}(x_0,y_0)$ რიცხვებს აქვთ ერთნაირი ნიშანი, ამიტომ $A>0$ ან $A<0$ პირობების ნაცვლად შეიძლება შევამოწმოთ შესაბამისად $C>0$ ან $C<0$ პირობები.

შენიშვნა 3. ადვილია ჩვენება, რომ $f(x,y)$ ფუნქციას (x_0,y_0) წერტილში გააჩნია: ა) მაქსიმუმი, თუ $df(x_0,y_0)=0$ და $d^2f(x_0,y_0)<0$, როცა $|dx|+|dy|\neq 0$; ბ) მინიმუმი, თუ $df(x_0,y_0)=0$ და $d^2f(x_0,y_0)>0$, როცა $|dx|+|dy|\neq 0$; გ) არა აქვს ექსტრემუმი, თუ d^2f ნიშანს არ ინარჩუნებს. დ) თუ $d^2f(x_0,y_0)\geq 0$ ან $d^2f(x_0,y_0)\leq 0$, ამასთან არსებობს dx და dy-ის ისეთი მნიშვნელობები $(|dx|+|dy|\neq 0,)$, რომლისთვისაც $d^2f(x_0,y_0)=0$, მაშინ $f(x,y)$ ფუნქციას (x_0,y_0) წერტილში შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი და შეიძლება არა, ე. ი. "საეჭვო" შემთხვევაა, ამიტომ საჭიროა დამატებითი გამოკვლევის ჩატარება.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ფუნქციის ექსტრემუმი

$$z=f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y.$$

ამოხსნა. ვიპოვოთ $f(x,y)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები სისტემიდან

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=6xy-12=0. \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნებია $(-1;-2)$, $(1;2)$, $(2;1)$, $(-2,-1)$, ე.ი.

სტაციონარული წერტილებია $M_1(-1;-2)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;1)$, $M_4(-2;-1)$.

გვაქვს $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x$, $B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y$, $C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x$, $\Delta f(x,y)=AC-B^2=36(x^2-y^2)$.

1) $\Delta(-1;-2)=-108<0$, ამიტომ ფუნქციას $M_1(-1;-2)$ წერტილში ექსტრემუმი არ გააჩნია.

2) $\Delta(1;2)=-108<0$, ამიტომ ფუნქციას $M_2(1;2)$ წერტილში ექსტრემუმი არ გააჩნია.

3) $\Delta(2;1)=108>0$ და $A=12>0$, ამიტომ ფუნქციას $M_3(2;1)$ წერტილში აქვს მინიმუმი $z_{min}=f(2;1)=-28$.

4) $\Delta(-2;-1)=108>0$ და $A=-12<0$, ამიტომ ფუნქციას $M_4(-2;-1)$ წერტილში აქვს მაქსიმუმი $z_{max}=f(-2;-1)=28$.

გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე ფუნქცია (NN7.6-7.15):

7.6. 1) $z=(x+1)^2+(y-2)^2$; 2) $z=(x+1)^2-(y-2)^2$;
3) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$; 4) $z=xy-x^2-y^2+2x-y$.

7.7. 1) $z=x^3+3x^2+3xy^2+3y^2-12x-12y-14$; 2) $z=x^3+y^3-3xy$;
3) $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$; 4) $z=x^3+y^3+3xy$.

7.8. 1) $z=xy^2(1-x-y)$, $(x>0,\ y>0)$; 2) $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$;
3) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$; 4) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

7.9. 1) $z=x^2y^3(6-x-y)$; 2) $z=x^3y^2(6-x-y)$, $(x>0,\ y>0)$;
3) $z=x^2-2xy^2+y^4-y^5$; 4) $z=xy^4+yx^2$.

7.10. 1) $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$, $(x>0,\ y>0)$;

2) $z=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y$, $(x>0,\ y>0)$;

3) $z=x^2-xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$; 4) $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-x^y$.

7.11. 1) $z=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8$; 2) $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$;

3) $z=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$; 4) $z=\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

7.12. 1) $z=e^{x/2}(x+y^2)$; 2) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$;
3) $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$; 4) $z=(2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;

5) $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$; 6) $z=4-\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

7.13. 1) $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$; 2) $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y$;
3) $z=xy\ln(x^2+y^2)$; 4) $z=3\ln x+xy^2-y^3$.

7.14. 1) $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$, $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right)$;

2) $z=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$, $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{4},\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$, $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right)$;

4) $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$, $(0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi)$.

7.15. 1) $u=x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z$; 2) $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$;
3) $u=x^2+y^2+z^2-yx+x-2z$; 4) $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

3. ორი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები ჩაკეტილ არეში. ვთქვათ $u=f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია R^2 სივრცის რაიმე ჩაკეტილ არეში. როგორც ვიცით ჩაკეტილ არეში უწყვეტ ფუნქციას ამ არეში აქვს უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

ცხადია, ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა ჩაკეტილ არეში შესაძლოა არ ემთხვეოდეს ამ ფუნქციის რომელიმე ლოკალურ მაქსიმუმს (მინიმუმს) ამ არეში.

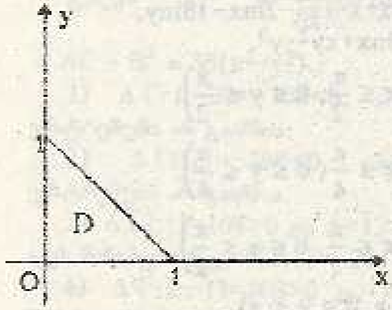
ისევე ცხადია, რომ, თუ ფუნქცია უდიდეს (უმცირეს) მნიშვნელობას ღებულობს არის შიგა წერტილში, მაშინ ეს წერტილი მისი ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილია.

ზემოთ ნათქვამიდან გამომდინარეობს ჩაკეტილ არეში უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნის შემდეგი წესი:

იმისათვის, რომ მოვძებნოთ ჩაკეტილ არეში უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა ამ არეში, საჭიროა გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები ყველა კრიტიკულ წერტილებში, აგრეთვე უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა არის საზღვარზე; გამოთვლილ მნიშვნელობებს შორის უდიდესი იქნება ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, ხოლო უმცირესი — ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა.

კერძოდ, თუ ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქციის განსაზღვრის არის საზღვარი არის უწყვეტი $x=\varphi(t)$, $y=g(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$

წირი, მაშინ ამ საზღვრის გასწვრივ $f(x,y)$ ფუნქცია არის ერთი t ცვლადის $f[\varphi(t), g(t)]$ ფუნქცია, რომლის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობის მოძებნის წესი სეგმენტზე ცნობილია.



ნახ. 6 ბ)

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $z=1-x+x^2+2y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები D ჩაკეტილ არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ წრფეებით (ნახ. 6 ბ)).

ამოხსნა. გვაქვს

$$z'_x = -1 + 2x = 0$$

$$z'_y = 2 \neq 0.$$

ე.ი. ფუნქციას სტაციონარული წერტილი არ გააჩნია.

გამოვიკვლიოთ ფუნქცია არის საზღვარზე.

1) ვთქვათ $x=0$, მაშინ $z=1+2y$, $0 \le y \le 1$. $[0;1]$ სეგმენტზე $z=1+2y$ ფუნქციას სტაციონარული წერტილი არ გააჩნია და $z(0)=1$, $z(1)=3$.

2) ვთქვათ $y=0$, მაშინ $z=1-x+x^2$, $0 \le x \le 1$. $z'_x = -1 + 2x = 0$. აქედან $x = \frac{1}{2}$, ამიტომ $z\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $z(0)=1$, $z(1)=1$.

3) ვთქვათ $x+y=1$, მაშინ $z=3-3x+x^2$, $0 \le x \le 1$, $z'_x = -3 + 2x = 0$, $x = \frac{3}{2} \notin [0;1]$, ე.ი. $[0;1]$ სეგმენტზე სტაციონარული წერტილი არ არის. $z(0)=3$, $z(1)=1$. მიღებული მნიშვნელობების შედარებიდან გვაქვს, რომ ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს $(0;1)$ წერტილზე და ეს მნიშვნელობაა 3, ხოლო უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს $(0;0)$ და $(1;0)$ წერტილებში და ეს მნიშვნელობაა 1.

იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა მითითებულ არეზე (NN 7.16-7.18):

7.16. 1) $z=x-2y-3$, $x+y \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

2) $z=1+x+2y$, $x-y \le 1$, $x \ge 0$, $y \le 0$;

3) $z=x^2+y^2-xy-x-y$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x+y \le 3$;

4) $z=x^2+2xy-4x+8y$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

7.17. 1) $z=x^2-y^2$, $x^2+y^2 \le 4$;

2) $z=x^2y$, $x^2+y^2 \le 1$;

3) $z=x^2+y^2-12x+16y$, $x^2+y^2 \le 25$;

4) $z=xy$, $x^2+y^2 \le 1$.

7.18. 1) $z=x^3+8y^3-6xy+1$, $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$;

2) $z=x^2y(4-x-y)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x+y \le 6$;

3) $z=x^2-xy+y^2$, $|x|+|y| \le 1$;

4) $z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$, $x^2+y^2 \le 4$.

7.19. 1) დადებითი a რიცხვი დაშალეთ სამ ისეთ შესაკრებად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი.

7.20. დადებითი a რიცხვი დაშალეთ ისეთ სამ თანამამრავლად, რომ მათი შებრუნებული სიდიდეების ჯამი იყოს უმცირესი.

7.21. დადებითი a რიცხვი დაშალეთ ისეთ სამ შესაკრებად, რომ მათი კვადრატების ჯამი იყოს უმცირესი.

7.22. მოცემული V მოცულობის მქონე მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის ზედაპირის ფართობი უმცირესია.

7.23. მოცემული V მოცულობის მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის თავღია ყუთებს შორის იპოვეთ ის, რომლის ზედაპირის ფართობი უმცირესია.

7.24. მოცემული პერიმეტრის მქონე სამკუთხედებიდან იპოვეთ ის სამკუთხედი, რომელსაც უდიდესი ფართობი აქვს.

7.25. იმ მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის, რომლის განზომილებების ჯამი მოცემული რიცხვია, იპოვეთ ის რომლის მოცულობა უდიდესია.

7.26. მოცემული დიაგონალის მქონე მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის მოცულობა უდიდესია.

7.27. მოცემული ზედაპირის ფართობის მქონე მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის მოცულობა უდიდესია.

7.28. $2p$ პერიმეტრის მქონე მართკუთხედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის ერთ-ერთი გვერდის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა იქნება უდიდესი.

7.29. $2p$ პერიმეტრის მქონე სამკუთხედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის ერთ-ერთი გვერდის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა იქნება უდიდესი.

7.30. R რადიუსიან ნახევარსფეროში ჩახაზულ მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის მოცულობა უდიდესია.

7.31. H სიმაღლისა და R ფუძის რადიუსის მქონე კონუსში ჩახაზულ მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის მოცულობა უდიდესია.

7.32. კონუსის l მსახველი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით. ამ კონუსში ჩახაზულ მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

7.33. მოცემული ფართობის მქონე სამკუთხედებს შორის იპოვეთ ის სამკუთხედი, რომლის პერიმეტრი უმცირესია.

7.34. მოცემული ფუძის გვერდისა და წვეროსთან მდებარე კუთხის მქონე სამკუთხედებს შორის იპოვეთ ის სამკუთხედი, რომლის: 1) პერიმეტრი უდიდესია, 2) ფართობი უდიდესია.

7.35. იპოვეთ მანძილი (1;0) წერტილიდან $4x^2+9y^2-36$ ელიფსამდე.

7.36. იპოვეთ მანძილი (−1;5) წერტილიდან $y^2=x$ პარაბოლამდე.

7.37. იპოვეთ მანძილი $y=x^2$ პარაბოლასა და $x-y=5$ წრფეს შორის.

7.38. $x^2+4y^2=4$ ელიფსზე მოცემულია $A\left(-\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$ და $B\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ წერტილები. ამავე ელიფსზე იპოვეთ ისეთი C წერტილი, რომ ABC სამკუთხედის ფართობი იყოს უდიდესი.

7.39. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსზე იპოვეთ წერტილი, რომელზედაც გავლებული ელიფსის მხები საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს უმცირესი ფართობის მქონე სამკუთხედს.

7.40. R რადიუსიან სფეროში ჩახაზულ ცილინდრებს შორის იპოვეთ ის, რომლის : 1) მოცულობა უდიდესია; 2) სრული ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

7.41. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდში ჩახაზულ მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის ის, რომლის მოცულობა უდიდესია.

4. პირობითი ექსტრემუმი. ზოგჯერ, მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნაზე ისეთი ამოცანებიც გვხვდება, როცა ფუნქციის არგუმენტები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან ერთი ან რამოდენიმე დამოკიდებულებით. ასეთ ექსტრემუმს უწოდებენ პირობით ექსტრემუმს.

ამ პუნქტში ჩვენ შევისწავლით პირობითი ექსტრემუმის პოვნის მეთოდს.

ვთქვათ, რაიმე $D\subset R^2$ არეზე მოცემულია ფუნქცია $u=\varphi(x;y)$. განვიხილოთ სიმრავლე

$$E=\{(x,y):\varphi(x,y)=0,\quad (x,y)\in D\}.$$

განტოლებას

$$\varphi(x,y)=0 \qquad (5)$$

ეწოდება ბმის განტოლება.

განსაზღვრება 4. ვთქვათ D არეზე მოცემულია $z=f(x,y)$ ფუნქცია. $M_0(x_0,y_0)$ წერტილს ეწოდება f ფუნქციის პირობითი მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი ბმის (5) განტოლების მიმართ (ან (5) პირობით), თუ მოიძებნება M_0 წერტილის ისეთი $u(M_0,\delta)$ მიდამო, რომ ყოველი $(x,y)\in u(M_0,\delta)\cap E$ წერტილისათვის სრულდება უტოლობა $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ $(f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$.

ფუნქციის მნიშვნელობებს პირობითი მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებში უწოდებენ შესაბამისად ფუნქციის პირობით მაქსიმუმს და პირობით მინიმუმს.

ფუნქციის პირობითი მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება, ხოლო თვით ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში ამ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმები.

ვიპოვოთ $z=f(x,y)$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი ბმის (5) პირობით ნიშნავს, ვიპოვოთ f ფუნქციის ჩვეულებრივი ლოკალური ექსტრემუმი E სიმრავლეზე.

ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია პირობები:

1) f და φ ფუნქციები უწყვეტად წარმოებადია რაიმე $D\subset R^2$ არეში.

2) განსახილველ $M_0(x_0;y_0)\in D$ წერტილში $\frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$.

ამ პირობებში §5-ის თეორემა 1-ის ძალით (5) განტოლება M_0 წერტილის რაიმე $u(M_0,\delta)$ მიდამოში განსაზღვრავს y-ს როგორც x ცვლადის უწყვეტად წარმოებად

$$y=g(x) \qquad (6)$$

ფუნქციას.

თუ y-ის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ $z=f(x,y)$-ში, მივიღებთ ერთი ცვლადის რთულ ფუნქციას

$$z=f(x,g(x)), \qquad (7)$$

რომელსაც აქვს უწყვეტი წარმოებული x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში. §5-ის თეორემა 1-ის (არაცხადი ფუნქციის არსებობის შესახებ) ძალით (5) და (6)

განტოლებები ეკვივალენტურია. ამიტომ გამომდინარე აქედან მართებულია შემდეგი დებულება: M_0 წერტილი არის $f(x,y)$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილი (5) ბმის განტოლებების მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x_0 არის (7) ფუნქციის ჩვეულებრივი ექსტრემუმის წერტილი.

ამრიგად, იმ შემთხვევაში, როცა (5) განტოლება ცხადად ამოიხსნება y-ის მიმართ, პირობითი ექსტრემუმის პოვნის ამოცანა დაიყვანება ერთი ცვლადის ფუნქციის ჩვეულებრივი ექსტრემუმის პოვნაზე. მაგრამ, (5) ტოლობიდან y საზოგადოდ არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში x-ის მიმართ, ამიტომ მიმართავენ პირობითი ექსტრემუმის მოძებნის სხვა მეთოდებს, რომლებიც არ მოითხოვს (5)-ის ამოხსნას y-ის მიმართ. ამ მეთოდის პოვნის დროს ნაგულისხმევი იქნება მხოლოდ $y=g(x)$ არაცხადი ფუნქციის არსებობის ფაქტი. მართებულია შემდეგი

თეორემა 4 (პირობითი ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობები). ვთქვათ $M_0(x_0,y_0)$ წერტილი არის $z=f(x,y)$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილი ბმის $\varphi(x,y)=0$ განტოლების მიმართ. თუ შესრულებულია პირობები:

1) M_0 წერტილის რაიმე მიდამოში f და φ ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები;

2) $\dfrac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$,

მაშინ არსებობს ისეთი λ რიცხვი, რომელიც x_0 და y_0-თან ერთად აკმაყოფილებს სისტემას

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

$M(x,y)$ წერტილს, რომლის x და y კოორდინატები აკმაყოფილებენ (8) სისტემას უწოდებენ პირობითი ექსტრემუმის სტაციონარულ წერტილს ბმის $\varphi(x,y)=0$ განტოლების მიმართ.

შენიშვნა. პირობითი ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ (8) სისტემის ამონახსნის წერტილებსა და იმ წერტილებს შორის, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ბმის განტოლებას, მაგრამ არ აკმაყოფილებენ თეორემა 4-ის 1) და 2) პირობებიდან ერთ-ერთს მაინც.

[illegible] აღნიშნულ წერტილებს, პირობითი ექსტრემუმის კრიტიკული წერტილები ეწოდება.

აღვნიშნოთ, რომ ყოველი კრიტიკული წერტილი საზოგადოდ არ არის ექსტრემუმის წერტილი, საჭიროა დამატებითი გამოკვლევის ჩატარება, რათა დავადგინოთ კრიტიკული წერტილებიდან რომელია ექსტრემუმის წერტილები და რომელი არა.

ამისათვის აქვე შევნიშნოთ, რომ (8) სისტემის მარცხენა მხარეები წარმოადგენს

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \tag{9}$$

ფუნქციის კერძო წარმოებულებს x, y და λ ცვლადებით.

λ რიცხვს ეწოდება ლაგრანჟის მამრავლი, ხოლო $L(x,y,\lambda)$ ფუნქციას ლაგრანჟის ფუნქცია.

ამრიგად $f(x,y)$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის ($\varphi(x,y)=0$ პირობით) სტაციონარული წერტილების პოვნის ამოცანა დაიყვანება ლაგრანჟის $L(x,y,\lambda)$ ფუნქციის ჩვეულებრივი ექსტრემუმის სტაციონარული წერტილის პოვნაზე.

დავადგინოთ ახლა პირობითი ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

$d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$-ით აღვნიშნოთ ლაგრანჟის ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი x და y ცვლადებით, გამოთვლილი (x_0,y_0) წერტილში ფიქსირებული λ_0-სათვის.

ბმის $\varphi(x,y)=0$ პირობებში $z=f(x,y)$ ფუნქციას და (9) ტოლობით განსაზღვრულ ლაგრანჟის L ფუნქციას ერთი და იგივე ექსტრემუმები გააჩნიათ (ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ $E=\{(x,y):\varphi(x,y)=0\}$ სიმრავლეზე $f(x,y)-f(x_0,y_0)=L(x,y,\lambda)-L(x_0,y_0,\lambda)$), ამიტომ თეორემა 3-ის შენიშვნა 3-ის ძალით გვაქვს შემდეგი:

თეორემა 5 (პირობითი ექსტრემუმის საკმარისი პირობები). ვთქვათ (x_0,y_0,λ_0) არის ლაგრანჟის $L(x,y,\lambda)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილი. თუ $M_0(x_0,y_0)$ წერტილის რაიმე მიდამოში f და φ ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი მეორე რიგის კერძო წარმოებულები, ამასთან $\dfrac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$; მაშინ f ფუნქციას M_0 წერტილში აქვს:

1) პირობითი მინიმუმი, თუ dx და dy ცვლადების მიმართ $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)>0$, როცა $\varphi'_x(x_0,y_0)dx + \varphi'_y(x_0,y_0)dy = 0$.

2) პირობითი მაქსიმუმი, თუ dx და dy ცვლადების მიმართ

$d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)<0$, როცა $\varphi'_x(x_0,y_0)dx+\varphi'_y(x_0,y_0)dy=0$.

3) არა აქვს პირობითი ექსტრემუმი, თუ dx და dy ცვლადების მიმართ d^2L ნიშანს არ ინარჩუნებს, როცა $\varphi'_x(x_0,y_0)dx+\varphi'_y(x_0,y_0)dy=0$.

შენიშვნა. როგორც თეორემა 5-ში აღვნიშნეთ პირობითი ექსტრემუმის საკმარისი პირობები დაკავშირებულია (8) სისტემის ყოველ (x_0,y_0,λ_0) ამონახსნებზე $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$ მეორე რიგის დიფერენციალის ნიშანზე, პირობით, რომ $dy=-\dfrac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}dx$. მაგრამ ამ პირობის გამოყენებით ადვილია შემოწმება, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$d^2L(x,y,\lambda)=\frac{dx^2}{\varphi_y'^2}\left(L''_{x^2}\cdot\varphi_y'^2-2\varphi'_x\cdot\varphi'_y\cdot L''_{xy}+L''_{y^2}\cdot\varphi_x'^2\right).$$

ამიტომ თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\Delta(x,y,\lambda)=L''_{x^2}\cdot\varphi_y'^2-2\varphi'_x\cdot\varphi'_y\cdot L''_{xy}+L''_{y^2}\cdot\varphi_x'^2, \qquad (10)$$

მაშინ $f(x,y)$ ფუნქციას (x_0,y_0) წერტილში ($\lambda=\lambda_0$-სათვის) აქვს პირობითი მინიმუმი, თუ $\Delta(x_0,y_0,\lambda_0)>0$, ხოლო პირობითი მაქსიმუმი თუ $\Delta(x_0,y_0,\lambda_0)<0$.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $z=x+2y$ ფუნქციის ექსტრემუმი იმ პირობით, რომ $x^2+y^2=5$.

ამოხსნა. შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L(x,y,\lambda)=x+2y+\lambda(x^2+y^2-5).$$

ამ ფუნქციისათვის (8) სისტემას აქვს სახე

$$\begin{cases}1+2\lambda x=0\\ 2+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნებია $x_1=-1$, $y_1=-2$, $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$ და $x_2=1$, $y_2=2$, $\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$. ადვილია შემოწმება, რომ

$$d^2L=2\lambda(dx^2+dy^2).$$

აქედან ცხადია, რომ $\lambda=\dfrac{1}{2}$-სათვის $d^2L>0$. გამომდინარე აქედან $M_1(-1;-2)$ წერტილზე ფუნქციას აქვს პირობითი მინიმუმი და $z_{min}=-5$.

$\lambda=-\dfrac{1}{2}$-სათვის $d^2L<0$, ამიტომ $M_2(1;2)$ არის პირობითი მაქსიმუმის წერტილი და $z_{max}=5$.

ახლა მოვიყვანოთ იგივე ამოცანის ამოხსნა (10) ფორმულის გამოყენებით. ჩვენს შემთხვევაში

$$\varphi(x,y)=x^2+y^2-5,\ \varphi'_x=2x,\ \varphi'_y=2y,\ L''_{x^2}=2\lambda,\ L''_{y^2}=2\lambda,\ L''_{xy}=0.$$

ამიტომ $\lambda=\dfrac{1}{2}$-სათვის $\Delta\left(-1;-2;\dfrac{1}{2}\right)=20>0$, ე.ი. $M_1(-1;-2)$ წერტილში აქვს პირობითი მინიმუმი.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $M_2(1;2)$ წერტილისათვის $\Delta\left(1;2;-\dfrac{1}{2}\right)=-20<0$. ამიტომ მოცემულ ფუნქციას $M_2(1;2)$ წერტილში აქვს პირობითი მაქსიმუმი.

იპოვეთ ფუნქციის ექსტრემუმი (NN7.42-7.44)

7.42. 1) $z=xy$, $x+y=1$ პირობით;
2) $z=xy$, $x^2+y^2=2a^2$ პირობით;
3) $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$, $x+y+3=0$ პირობით;
4) $z=xy^2$, $x+2y=1$ პირობით.

7.43. 1) $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, $x+y=2$ პირობით;
2) $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}$, $(a>0)$ პირობით;
3) $z=x^2+y^2$, $x+y=1$ პირობით;
4) $z=2x+y$, $x^2+y^2=1$ პირობით.

7.44. 1) $z=x^3+y^3$, $x+y=1$ პირობით;
2) $z=x^4+y^4$, $x+y=2$ პირობით;
3) $z=e^{xy}$, $x+y=2$ პირობით;
4) $z=\cos^2x+\cos^2y$, $y-x=\dfrac{\pi}{4}$ პირობით.

7.45. აჩვენეთ, რომ $z=(y-x^2)(y-2x^2)$ ფუნქციას $(0;0)$ წერტილში ექსტრემუმი არ გააჩნია, თუმცა ამ წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფის გასწვრივ მას გააჩნია მინიმუმი.

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§ 1 განუსაზღვრელი ინტეგრალის ცნება.

1. პირველყოფილი ფუნქცია. განუსაზღვრელი ინტეგრალი და მისი თვისებები.

დიფერენციალური აღრიცხვის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა მოცემული ფუნქციის წარმოებულის მოძებნა. მათემატიკური ანალიზის მრავალრიცხოვანი გამოყენებები (გეომეტრიაში, მექანიკაში, ფიზიკაში, ტექნიკაში) მიგვიყვანს შებრუნებულ ამოცანამდე: ვიპოვოთ ისეთი $F(x)$ ფუნქცია რომლის წარმოებული უდრის მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას.

ასეთი ამოცანაა მაგალითად მატერიალური წერტილის მოძრაობის კანონის დადგენა, როდესაც მოცემულია მისი მოძრაობის სიჩქარე ან აჩქარება.

განსაზღვრება 1. $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი $]a;b[$ შუალედზე, თუ ამ შუალედის ყოველ წერტილზე $F(x)$ წარმოებადია და $F'(x) = f(x)$.

ანალოგიურად განისაზღვრება პირველყოფილი ფუნქცია უსასრულო შუალედებზე.

$F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ $]a,b[$ შუალედის ყოველ წერტილზე $F'(x) = f(x)$ და $F'(a+) = f(a+)$, $F'(b-) = f(b-)$.

შევნიშნოთ რომ, თუ $F(x)$ წარმოადგენს მოცემული $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილს, მაშინ $F(x)+C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილს, რადგან $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$.

თეორემა. თუ $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილია $F(x)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ყველა პირველყოფილების სიმრავლეა $\{F(x) + C : C \in R\}$. ე.ი. ერთიდაიგივე ფუნქციის ორი პირველყოფილი ფუნქცია ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით.

განსაზღვრება 2. $f(x)$ ფუნქციის ყველა პირველყოფილების სიმრავლეს რაიმე შუალედზე ეწოდება განუსაზღვრელი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან ამ შუალედზე და $\int f(x)dx$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ე.ი. თუ $F(x)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილ ფუნქციას, მაშინ

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

ამასთან, ტოლობაში $f(x)$-ს ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, $f(x)dx$-ს ინტეგრალქვეშა გამოსახულება, ხოლო $\int$ - ინტეგრალის ნიშანი.

განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნის ოპერაციას (გაწარმოების შებრუნებულ ოპერაციას) ინტეგრება ეწოდება.

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა რაიმე შუალედზე განსაზღვრული ნებისმიერი ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია? ამ კითხვაზე პასუხი საზოგადოდ უარყოფითია, თუმცა მტკიცდება, რომ შუალედზე უწყვეტ ყოველ ფუნქციას გააჩნია პირველყოფილი ფუნქცია.

ვიცით, რომ ელემენტარული ფუნქციის წარმოებული არის ელემენტარული ფუნქცია. მტკიცდება, რომ ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია არ წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას. მაგალითად,

$$e^{-x^2}, \quad \sin x^2, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad \sqrt{\sin x}$$

ეს ფუნქციები თავიანთ განსაზღვრის არეში, ამიტომ მათ გააჩნიათ პირველყოფილი ფუნქციები, მაგრამ მათი პირველყოფილები არ წარმოადგენენ ელემენტარულ ფუნქციებს.

მოვიყვანოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,

2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$,

3. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad A \neq 0$,

4. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$,

5. თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

2. ძირითად განუსაზღვრელ ინტეგრალთა ცხრილი. განუსაზღვრელი ინტეგრალის განსაზღვრების ძალით, მიიღება ძირითად ინტეგრალთა შემდეგი ცხრილი:

1) $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$, 2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

3) $\int \sin x dx = -\cos x + C$, 4) $\int \cos x dx = \sin x + C$,

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, 6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,

7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, 8) $\int e^x dx = e^x + C$,

9) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, 10) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$,

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, 12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$,

13) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$, 14) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$,

15) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$, 16) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$,

17) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}\right) + C$,

18) $\int \sqrt{x^2 + a}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|\sqrt{x^2 + a} + x\right| + C$,

19) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$, 20) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$,

21) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$, 22) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

მაგალითი. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}.$$

ვინაიდან

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right),$$

ამიტომ

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები (NN8.1-8.28):

8.1. 1) $\int x^3 dx$; 2) $\int x^6 dx$; 3) $\int 3x^2 dx$; 4) $\int 4x^7 dx$.

8.2. 1) $\int (x^4 + 3x + 1)dx$; 2) $\int (3x^5 - 4x^3 + 2x - 2)dx$;

3) $\int (x^2 - 2)^2 dx$; 4) $\int (x^3 + 1)^2 dx$.

8.3. 1) $\int \frac{2}{x^2}dx$; 2) $\int \frac{3}{x^5}dx$;

3) $\int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x} + 1\right)dx$; 4) $\int \left(\frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x} - 2\right)dx$.

8.4. 1) $\int (\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} - 1)dx$; 2) $\int \left(x\sqrt{x} - 7\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x}\right)dx$;

3) $\int \left(5x^{\frac{3}{2}} - 7x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{2}} + 1\right)dx$; 4) $\int \left(x^{\frac{1}{3}} - 7x^{\frac{2}{5}} + 5x^{\frac{1}{4}} - x + 1\right)dx$.

8.5. 1) $\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; 2) $\int \left(\frac{2}{x^2\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{x\sqrt[5]{x}}\right)dx$;

3) $\int \left(3x^{-\frac{2}{5}} + x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{4}}\right)dx$; 4) $\int \left(4x^{-\frac{1}{5}} - 4x^{-\frac{3}{7}} - \frac{2}{x^3} + 1\right)dx$.

8.6. 1) $\int \sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; 2) $\int \sqrt{x^2\sqrt[3]{x}}\,dx$;

3) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$; 4) $\int \sqrt[5]{x\sqrt[4]{x\sqrt{x}}}\,dx$.

8.7. 1) $\int \frac{x^4+3x^2+2}{x^2}dx$; 2) $\int \frac{3-x+x^3}{x}dx$;

3) $\int \frac{\left(x^3+1\right)^2}{x^3}dx$; 4) $\int \frac{\left(x^2+1\right)^3}{x^2}dx$.

8.8. 1) $\int \frac{3\sqrt[3]{x}-2x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$; 2) $\int \frac{2\sqrt{x}-3x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx$;

3) $\int \frac{\left(x^3+1\right)^2}{x\sqrt[3]{x^2}}dx$; 4) $\int \frac{\left(x^2-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x^5}}dx$.

8.9. 1) $\int (3\sin x - 2\cos x + 1)dx$; 2) $\int \left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$;

3) $\int \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; 4) $\int \left(2e^x-3^x+2\cdot 5^x\right)dx$.

8.10. 1) $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$; 2) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$;

3) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$; 4) $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx$.

8.11. 1) $\int a^x e^x dx$; 2) $\int \frac{x^2e^x-x}{x^2}dx$;

3) $\int a^x\left(1-\frac{a^{-x}}{x^3}\right)dx$; 4) $\int \frac{2^x+8^x}{4^x}dx$.

8.12. 1) $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$; 2) $\int \frac{2-\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$;

3) $\int \frac{2+\cos^2 t}{1+\cos 2t}dt$; 4) $\int \frac{1-2\mathrm{tg}^2 t}{\cos^2 t}dt$.

8.13. 1) $\int \sqrt{4\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2 x}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$;

3) $\int \frac{\cos 2t}{\sin^2 t\cos^2 t}dt$; 4) $\int \frac{dt}{\sin^2 t\cos^2 t}$.

8.14. 1) $\int (3\mathrm{ch}x - 2\mathrm{sh}x)dx$; 2) $\int \left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}-\frac{4}{\mathrm{ch}^2 x}\right)dx$;

3) $\int \mathrm{th}^2 x\,dx$; 4) $\int \mathrm{cth}^2 x\,dx$.

8.15. 1) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$; 2) $\int \frac{(1-x)^2}{x(1+x^2)}dx$;

3) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$; 4) $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

8.16. 1) $\int (3x+1)^4 dx$; 2) $\int (2-x)^5 dx$;

3) $\int \sqrt[3]{1-2x}\,dx$; 4) $\int \sqrt[4]{(3x-2)^5}\,dx$.

8.17. 1) $\int \frac{dx}{(4-5x)^3}dx$; 2) $\int \frac{dx}{(2x+1)^2}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(2x-1)^3}}$.

8.18. 1) $\int \frac{dx}{2x+5}$; 2) $\int \frac{dx}{1-3x}$;

3) $\int \sin 3x\,dx$; 4) $\int \cos 2x\,dx$.

8.19. 1) $\int \sin \pi x\,dx$; 2) $\int \cos(\pi x+2)dx$;

3) $\int \cos\frac{x}{5}dx$; 4) $\int \sin\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$.

8.20. 1) $\int (\cos\alpha - \cos 2x)dx$; 2) $\int \left(\sin\frac{x+1}{3}-\cos(1-2x)\right)dx$;

3) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}}$.

8.21. 1) $\int e^{-2x}dx$; 2) $\int a^{-x}dx$;

3) $\int \left(e^{3x} - e^{-x}\right)dx$; 4) $\int \left(a^{-2x} + a^{2x}\right)dx$.

8.22. 1) $\int \operatorname{sh}(2x-1)dx$; 2) $\int \operatorname{ch}(1-3x)dx$;

3) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$; 4) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 \pi x}$.

8.23. 1) $\int \dfrac{x+2}{x+4}dx$; 2) $\int \dfrac{x-1}{2x+3}dx$;

3) $\int \dfrac{4-x}{4+x}dx$; 4) $\int \dfrac{2x-1}{1-3x}dx$.

8.24. 1) $\int \dfrac{x^2+6x+2}{x+3}dx$, 2) $\int \dfrac{6x^2+x+1}{3x-1}dx$;

3) $\int \dfrac{x^3+2}{1-2x}dx$; 4) $\int \dfrac{x^3-4x^2+1}{x+2}dx$.

8.25. 1) $\int \dfrac{x^4}{x-1}dx$; 2) $\int \dfrac{x^4+1}{x+2}dx$;

3) $\int \dfrac{x^3}{x+1}dx$; 4) $\int \dfrac{x^3-3x}{1-x}dx$.

8.26. 1) $\int \dfrac{dx}{x^2-4}$; 2) $\int \dfrac{dx}{5-x^2}$;

3) $\int \dfrac{dx}{5x^2-12}$; 4) $\int \dfrac{dx}{7-6x^2}$.

8.27. 1) $\int \dfrac{dx}{x^2+16}$; 2) $\int \dfrac{dx}{3x^2+4}$;

3) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 4) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.

8.28. 1) $\int \dfrac{x^2+2}{x^2-1}dx$; 2) $\int \dfrac{4-3x^2}{x^2-2}dx$;

3) $\int \dfrac{x^4}{x^2-4}dx$; 4) $\int \dfrac{x^4+2}{3-x^2}dx$.

§9 ცვლადის გარდაქმნის ხერხი

ხშირად ახალი დამოუკიდებელი ცვლადის შემოღებით ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შესაძლებელია მივიყვანოთ ისეთ სახეზე, რომლის ინტეგრება უფრო ადვილია. განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის ეს ხერხი ემყარება შემდეგ თეორემას:

თეორემა. ვთქვათ $x=\varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადია რაიმე T შუალედზე და X მისი მნიშვნელობათა არეა. თუ X-ზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია პირველადი ფუნქცია, მაშინ T შუალედზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\left.\int f(x)dx\right|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

(1)-ს უწოდებენ ცვლადის გარდაქმნის ფორმულას განუსაზღვრელი ინტეგრალისათვის.

შენიშვნა. (1) ტოლობა საშუალებას გვაძლევს $x=\varphi(t)$ ცვლადის გარდაქმნით $\int f(x)dx$-ის გამოთვლა დავიყვანოთ $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$-ს გამოთვლაზე და პირიქით $t=\varphi(x)$ ჩასმით $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$-ის გამოთვლა დავიყვანოთ $\int f(t)dt$-ს გამოთვლაზე, ე.ი.

$$\left.\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\right|_{t=\varphi(x)} = \int f(t)dt. \qquad (2)$$

(2) ტოლობაში ზოგჯერ ნაცვლად $t=\varphi(x)$ ჩასმისა გამოიყენება დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ ფუნქციის შეტანა, ე.ი.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x).$$

მოვიყვანოთ მაგალითები:

1. გამოვთვალოთ

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

ვთქვათ $\sqrt{x^2+a}+x=t$, მაშინ

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1\right)dx = dt,$$

ე.ი.

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t}.$$

ამიტომ გვაქვს

$$I=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

2. გამოვთვალოთ

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0).$$

მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $x=a\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. მაშინ $dx=a\cos t\,dt$, $t=\arcsin\frac{x}{a}$. ამიტომ გვაქვს

$$I=\int\sqrt{a^2\cos^2 t}\cdot a\cos t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right)+C.$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები (NN9.1-9.38):

9.1. 1) $\int\frac{dx}{x^2+4}$; 2) $\int\frac{dx}{3x^2+2}$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}}$.

9.2. 1) $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$; 2) $\int\frac{x}{4-5x^2}dx$;

3) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\int x\sqrt[5]{x^2+2}\,dx$.

9.3. 1) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$; 2) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(8x^3+27)^2}}$;

3) $\int x^4\sqrt[5]{x^5+1}\,dx$; 4) $\int\frac{x^{k-1}dx}{ax^k+b}$.

9.4. 1) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{7+x^4}}$; 2) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;

3) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2-3x^3}}$; 4) $\int x^4\sqrt[5]{1-4x^3}\,dx$.

9.5. 1) $\int x\sin(x^2+2)\,dx$; 2) $\int x^2\cos(1-3x^3)\,dx$;

3) $\int x^2e^{-x^3}dx$; 4) $\int x\cdot 3^{-2x^2}dx$.

9.6. 1) $\int\frac{3^{1/x}}{x^2}dx$; 2) $\int\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$;

3) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 4) $\int\frac{2^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

9.7. 1) $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}$; 2) $\int\frac{x^2dx}{x^6+2}$;

3) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 4) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^4}}$.

9.8. 1) $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx$; 2) $\int\frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}dx$;

3) $\int(2x^3-1)\cdot e^{x^4-2x}dx$; 4) $\int\frac{x^2+1}{x^2}\cdot 5^{x-\frac{1}{x}}dx$.

9.9. 1) $\int\frac{\ln^5 x}{x}dx$; 2) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

3) $\int\frac{dx}{x\ln x}$; 4) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{1-\ln(x-1)}}$.

9.10. 1) $\int \operatorname{tg} x\,dx$; 2) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$;

3) $\int \operatorname{ctg} 3x\,dx$; 4) $\int \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx$.

9.11. 1) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x+1}}{\cos^2 x}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[3]{1-\operatorname{tg} x}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$; 4) $\int \frac{e^{-\operatorname{ctg} 2x}}{\sin^2 2x}\,dx$.

9.12. 1) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx$; 2) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$;

3) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$; 4) $\int 3^{-\cos x}\sin x\,dx$.

9.13. 1) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$; 2) $\int 3\cos^4 x\sin 2x\,dx$;

3) $\int \frac{\sin 2x}{(1-\cos 2x)^3}\,dx$; 4) $\int \sin x\cos x\sqrt{\cos 2x}\,dx$.

9.14. 1) $\int \frac{1-\cos x}{x-\sin x}\,dx$; 2) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\,dx$;

3) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[3]{\sin x+\cos x}}\,dx$; 4) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+4\cos^2 x}}\,dx$.

9.15. 1) $\int \frac{e^x dx}{e^x+3}$; 2) $\int \frac{3^x dx}{1+3^x}$;

3) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$; 4) $\int e^x\sqrt{a-be^x}\,dx$.

9.16. 1) $\int \frac{2^x dx}{1+4^x}$; 2) $\int \frac{3^x}{\sqrt{4-9^x}}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 4) $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

9.17. 1) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$; 2) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$;

3) $\int \frac{3^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 4) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

9.18. 1) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 2) $\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx$;

3) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$; 4) $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx$.

9.19. 1) $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; 4) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}\,dx$.

9.20. 1) $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$; 2) $\int \frac{x+\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx$;

3) $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 4) $\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\,dx$.

9.21. 1) $\int \frac{dx}{\sin x}$; 2) $\int \frac{dx}{\cos x}$;

3) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

9.22. 1) $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\,dx$; 2) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$;

3) $\int \frac{x^{n/2}dx}{1-x^{n+2}}$; 4) $\int \frac{x^{n/2}dx}{\sqrt{1-x^{n+2}}}$.

9.23. 1) $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$;

3) $\int \frac{\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{ch}^2 x}\,dx$; 4) $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^6 x}\,dx$.

9.24. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$;

3) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; 4) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x+5}}$.

9.25. 1) $\int \frac{x dx}{(x-1)^3}$; 2) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx$;

3) $\int \left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4 dx$; 4) $\int \frac{x^3-3x}{(x^2-2)^5} dx$.

9.26. 1) $\int x\sqrt{3+x}\, dx$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; 4) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$.

9.27. 1) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$; 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$;

3) $\int (x-3)\sqrt{x+4}\, dx$; 4) $\int (x+4)\sqrt{x-1}\, dx$;

5) $\int \frac{x dx}{3\sqrt{x+2}+2}$; 6) $\int \frac{x dx}{4-3\sqrt{x-1}}$.

9.28. 1) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\, dx$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

3) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\, dx$; 4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

9.29. 1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$; 2) $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx$;

3) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$; 4) $\int \frac{x^5 dx}{(x^2-4)^2}$.

9.30. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} dx$.

9.31. 1) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x} dx$; 2) $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x} dx$;

3) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$; 4) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

9.32. 1) $\int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}$; 2) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$;

3) $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)} dx$; 4) $\int \ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{x^2-1}$.

9.33. 1) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$; 2) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$;

3) $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\,\sin 2x\cos 2x\, dx$;

4) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}+\operatorname{ctg} x}{\cos^2 x} dx$.

9.34. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(e^x+1)e^x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$;

3) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{e^{\sin x}-1}} dx$; 4) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$.

9.35. 1) $\int \frac{\ln\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x} dx$; 2) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx$;

3) $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{\operatorname{ch} x} dx$; 4) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

9.36. 1) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$; 2) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

3) $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6} dx$; 4) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\, dx$.

მითითება. გამოიყენეთ ჩასმა: 1) $x=\sin t$; 2) $x=a\sin t$; 3) $x=3\sin t$; 4) $x=2\sin t$.

9.37. 1) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$;

3) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$.

მითითება. გამოიყენეთ ჩასმა: 1) $x=\frac{a}{\cos t}$, $t\in[0,\pi]$, $t\neq\frac{\pi}{2}$; 2) $x=\frac{a}{t}$; 3) $x=\frac{3}{t}$; 4) $x=\frac{a}{t}$.

9.38. 1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

მითითება. გამოიყენეთ ჩასმა: 1) $x=\frac{a}{t}$; 2) $x=\frac{1}{t}$ ან $x=\operatorname{tg}t$; 3) $x=\frac{a}{t}$, $x=a\operatorname{tg}t$; 4) $x=\frac{1}{t}$ ან $x=\operatorname{tg}t$.

§ 10 ნაწილობითი ინტეგრება

თეორემა. ვთქვათ $u(x)$ და $v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია რაიმე X შუალედზე. თუ ამ შუალედზე არსებობს $\int v(x)u'(x)dx$, მაშინ არსებობს $\int u(x)v'(x)dx$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

ანუ

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (1)$$

(1) ტოლობას უწოდებენ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას. ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს $\int u\,dv$ ინტეგრალის გამოთვლა დავიყვანოთ $\int v\,du$ ინტეგრალის გამოთვლაზე, რომელიც შეიძლება უფრო ადვილად გამოსათვლელი აღმოჩნდეს, ვიდრე მოცემული ინტეგრალი.

განვიხილოთ მაგალითები ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებაზე.

$$1.\ \int x\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u=x, & dv=\sin x\,dx \\ du=dx, & v=-\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

$$2.\ \int x^2e^x dx = \begin{vmatrix} u=x^2, & dv=e^x dx \\ du=2x\,dx, & v=e^x \end{vmatrix} = x^2e^x - 2\int xe^x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u=x, & dv=e^x dx \\ du=dx, & v=e^x \end{vmatrix} = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx \quad (\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0).$$

გვაქვს

$$I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \begin{vmatrix} u=e^{\alpha x}, & dv=\cos\beta x\,dx \\ du=\alpha e^{\alpha x}dx, & v=\frac{1}{\beta}\sin\beta x \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x -$$

$$-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \begin{vmatrix} u=e^{\alpha x}, & dv=\sin\beta x\,dx \\ du=\alpha e^{\alpha x}, & v=-\frac{1}{\beta}\cos\beta x \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x +$$

$$+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

მაშასადამე

$$I=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}I,$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება:

$$I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}+C.$$

4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx$$

გვაქვს

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\left|\begin{array}{l} u=\sqrt{x^2+a},\ dv=dx \\ du=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}},\ v=x\end{array}\right|=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,dx+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

აქედან §9-ის მაგალითი 1-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

5. მივიღოთ

$$I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n},\quad n\in N,\ a\neq 0$$

ინტეგრალის გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმულა.

გვაქვს:

$$I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\left|\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n},\quad dv=dx \\ du=-\dfrac{2nx\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}},\ v=x\end{array}\right|=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+$$

$$+2n\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}-$$

$$-2na^2\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$I_{n+1}=\frac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n. \tag{2}$$

რადგან

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,$$

ამიტომ (2) ფორმულიდან მივიღებთ

$$I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები (NN10.1-10.15):

10.1. 1) $\int xe^x dx$; 2) $\int xe^{-x}dx$;

3) $\int x\cdot 3^x dx$; 4) $\int (3x-4)e^{2x}dx$.

10.2. 1) $\int x\sin 2x\,dx$; 2) $\int x\cos x\,dx$;

3) $\int x\sin 5x\,dx$; 4) $\int x\cos\frac{x}{3}dx$.

10.3. 1) $\int (2x+5)\cos 2x\,dx$; 2) $\int (1-3x)\sin 4x\,dx$;

3) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; 4) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

10.4. 1) $\int x\ln x\,dx$; 2) $\int \ln x\,dx$;

3) $\int x^n\ln x\,dx$; 4) $\int (3x+2)\ln x\,dx$.

10.5. 1) $\int (x^2-x+1)\ln x\,dx$; 2) $\int \ln(x^2+1)dx$;

3) $\int x^2\ln(1+x)dx$; 4) $\int (x^2-2x+3)\ln(x+1)dx$.

10.6. 1) $\int x\operatorname{arctg}x\,dx$; 2) $\int \operatorname{arctg}x\,dx$;

3) $\int \arcsin x\,dx$; 4) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$.

10.7. 1) $\int x\cos^2 x\,dx$; 2) $\int x\sin^2 x\,dx$;

3) $\int x\,tg^2 x\,dx$; 4) $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

10.8. 1) $\int x^2 e^{-x}dx$; 2) $\int x^2\sin x\,dx$;

3) $\int \ln^2 x\,dx$; 4) $\int x^3\sin x\,dx$.

10.9. 1) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; 2) $\int x^3 e^{-x^2}dx$;

3) $\int x^2\cos^2 x\,dx$; 4) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$.

10.10. 1) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$; 2) $\int x^5\mathrm{arctg}\,x\,dx$;

3) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$; 4) $\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

10.11. 1) $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; 2) $\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$;

3) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; 4) $\int x\arcsin x\,dx$.

10.12. 1) $\int \arcsin^2 x\,dx$; 2) $\int x\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx$;

3) $\int x^2\mathrm{arctg}\,3x\,dx$; 4) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

10.13. 1) $\int \sin x\ln tg\,x\,dx$; 2) $\int \frac{x-\sin x}{1-\cos x}dx$;

3) $\int x^2\arcsin 2x\,dx$; 4) $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx$.

10.14. 1) $\int e^x\sin x\,dx$; 2) $\int e^x\cos x\,dx$;

3) $\int \sqrt{x^2-3}\,dx$; 4) $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

10.15. 1) $\int \sin x\,ch\,x\,dx$; 2) $\int \cos x\,ch\,x\,dx$;

3) $\int \sin\ln x\,dx$; 4) $\int \cos\ln x\,dx$.

§ 11 კვადრატული სამწევრის შემცველი ზოგიერთი ინტეგრალები

1. ინტეგრალები

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{და} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (1)$$

დაიყვანებიან ცხრილის ინტეგრალებზე, კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფის გზით.

მაგალითი 1. გამოთვალეთ

$$\int \frac{dx}{2x^2-5x+4}.$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\int \frac{dx}{2x^2-5x+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\frac{5}{2}x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{16}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{7}} + C.$$

მაგალითი 2. გამოთვალეთ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-7x-4x^2}}.$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-7x-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{7}{4}x-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{81}{64}-\left(x+\frac{7}{8}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+7}{9} + C.$$

2. ინტეგრალები

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx \qquad \text{და} \qquad \int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

დაიყვანებიან (1) ინტეგრალებამდე მრიცხველში ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის $2ax+b$ წარმოებულის გამოყოფის გზით.

მაგალითი 3. გამოთვალეთ

$$\int \frac{2x-1}{5x^2+4x+1}dx.$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\int \frac{2x-1}{5x^2+4x+1}dx = \frac{1}{5}\int \frac{10x+4}{5x^2+4x+1}dx - \frac{9}{5}\int \frac{dx}{5x^2+4x+1} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d\left(5x^2+4x+1\right)}{5x^2+4x+1} - \frac{9}{25}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}\ln\left(5x^2+4x+1\right) -$$

$$-\frac{9}{5}\operatorname{arctg}(5x+2) + C.$$

3. ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{(px+q)^r\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (r=1,2).$$

ჩასმით $px+q=\frac{1}{t}$ დაიყვანება ზემოთ განხილულ ინტეგრალებამდე.

მაგალითი 4. გამოთვალეთ

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x-2}}.$$

ამოხსნა. დავუშვათ $x+1=\frac{1}{t}$, მაშინ $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. გვაქვს

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x-2}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{3t^2-6t+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2-\frac{2}{3}}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t-1+\sqrt{(t-1)^2-\frac{2}{3}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-\frac{2}{3}}-\frac{x}{x+1}\right| + C.$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები (NN11.1-11.7):

11.1. 1) $\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

3) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$; 4) $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$.

11.2. 1) $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$;

3) $\int \frac{dx}{x^2-6x}$; 4) $\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$.

11.3. 1) $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$; 2) $\int \frac{dx}{x-x^2-2,5}$;

3) $\int \frac{2dx}{2x-2x^2-5}$; 4) $\int \frac{dx}{2x^2-x-3}$.

11.4. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.

11.5. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

11.6. 1) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}$; 2) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2-x-1}$;

3) $\int \frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}$; 4) $\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18}$.

11.7. 1) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; 2) $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$;

3) $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}$; 4) $\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

§ 12 რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

რაციონალური ფუნქცია (წილადი) ეწოდება $\frac{P(x)}{Q(x)}$ სახის ფუნქციას, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია. ამ პარაგრაფში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $P(x)$ და $Q(x)$ ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია, ე.ი. მათ არა აქვთ საერთო ფესვები.

რაციონალურ წილადს ეწოდება წესიერი, თუ მრიცხველის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას არაწესიერი წილადი ეწოდება.

ცხადია, რომ ყოველი არაწესიერი წილადი, მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით, შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც მრავალწევრისა და წესიერი წილადის ჯამი.

ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ წესიერ წილადს, ამასთან ვიგულისხმებთ, რომ მნიშვნელში x-ის უმაღლესი ხარისხის კოეფიციენტი ერთის ტოლია.

განსაზღვრება. უმარტივესი წილადები ეწოდება შემდეგი სახის წილადებს:

1. $\frac{A}{x-a}$; 2. $\frac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2,3,\dots)$;

3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $(k=2,3,\dots)$,

სადაც A, M, N, a, p, q ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო x^2+px+q კვადრატულ სამწევრს აქვს კომპლექსური ფესვები (ე.ი. $p^2-4q<0$).

ცნობილია, რომ ყოველი წესიერი რაციონალური წილადი შეიძლება წარმოვადგინოთ უმარტივესი წილადების ჯამის სახით. კერძოდ, თუ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს სახე

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\times$$
$$\times(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

მაშინ ეს წილადი ასე წარმოიდგინება:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-x_1)^{k_1-1}}+\dots+\frac{A_{k_1}^{(1)}}{x-x_1}+$$
$$+\frac{A_1^{(2)}}{(x-x_2)^{k_2}}+\frac{A_2^{(2)}}{(x-x_2)^{k_2-1}}+\dots+\frac{A_{k_2}^{(2)}}{x-x_2}+$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\frac{A_1^{(r)}}{(x-x_r)^{k_r}}+\frac{A_2^{(r)}}{(x-x_r)^{k_r-1}}+\dots+\frac{A_{k_r}^{(r)}}{x-x_r}+$$
$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}}+\dots+\frac{M_{l_1}^{(1)}x+N_{l_1}^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+$$
$$+\frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}}+\frac{M_2^{(2)}x+N_2^{(2)}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2-1}}+\dots+\frac{M_{l_2}^{(2)}x+N_{l_2}^{(2)}}{x^2+p_2x+q_2}+$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+$$
$$+\frac{M_1^{(s)}x+N_1^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}+\frac{M_2^{(s)}x+N_2^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s-1}}+\dots+\frac{M_{l_s}^{(s)}x+N_{l_s}^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s},\quad(1)$$

სადაც $A_k^{(n)}$, $M_k^{(n)}$, $N_k^{(n)}$, $n=1,2,\dots$, $k=1,2,\dots$ გარკვეული რიცხვებია. ისინი შეიძლება გამოვთვალოთ კოეფიციენტთა გატოლების ხერხით, რისთვისაც საჭიროა (1) ტოლობის მარჯვენა მხარე დავიყვანოთ საერთო მნიშვნელზე და მრიცხველების x-ის ერთნაირი ხარისხის კოეფიციენტები გავუტოლოთ ერთმანეთს, რის შედეგადაც უცნობი კოეფიციენტების მიმართ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლის ამოხსნაც მოგვცემს საძიებელ კოეფიციენტებს.

ზოგ შემთხვევაში (1) დაშლის კოეფიციენტების გამოთვლა მარტივდება, თუ x ცვლადის მიმართ მიღებული ორი მრავალწევრის იგივურ ტოლობაში x-ს მივანიჭებთ სხვადასხვა კერძო რიცხვით მნიშვნელობებს და მიხედვით შევადგენთ წრფივ განტოლებათა სისტემას საძიებელი კოეფიციენტების მიმართ.

რადგან წესიერი რაციონალური წილადი წარმოიდგინება უმარტივესი წილადების ჯამის სახით, ამიტომ განუსაზღვრელი ინტეგრალი წესიერი რაციონალური წილადიდან წარმოადგენს უმარტივესი წილადების განუსაზღვრელი ინტეგრალების ჯამს.

პირველი ორი ტიპის უმარტივესი წილადების ინტეგრება მარტივია.

მესამე ტიპის უმარტივესი წილადის ინტეგრება განხილულია მეთერთმეტე პარაგრაფის მეორე პუნქტში.

მეოთხე ტიპის უმარტივესი წილადის ინტეგრება ხდება შემდეგნაირად:

$$I_k=\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\int\frac{Mx+N}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}dx.$$

დავუშვათ $t=x+\frac{p}{2}$, $\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=a$ $\left(q-\frac{p^2}{4}>0\right)$. მივიღებთ

$$I_k=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt.$$

აქედან ცხადია, რომ I_k ინტეგრალი წარმოადგენს

$$I_k'=\int\frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}\quad \text{და}\quad I_k''=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$$

ინტეგრალების წრფივ კომბინაციას. გვაქვს

$$I_k'=\frac{1}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+C,$$

ხოლო I_k'' ინტეგრალი შეგვიძლია გამოვთვალოთ §10-ის მაგალითი 5-ში მიღებული რეკურენტული ფორმულით

$$I''_{k+1}=\frac{x}{2ka^2\left(x^2+a^2\right)^k}+\frac{2k-1}{2ka^2}I_k'',$$

ამასთან

$$I_1''=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

ამრიგად მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა. ინტეგრალი ყოველი რაციონალური ფუნქციიდან თავის განსაზღვრის არეში წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას, რომელიც გამოისახება რაციონალური, არკტანგენსის და ლოგარითმული ფუნქციების წრფივი კომბინაციით.

მაგალითი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{3x^3-5x+10}{(x-1)^2\left(x^2+2x+5\right)}dx.$$

ამოხსნა. ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წესიერი რაციონალური წილადია, ხოლო მნიშვნელს აქვს ნამდვილი ორჯერადი ფესვი და მარტივი კომპლექსური ფესვები, ამიტომ იგი დაიშლება შემდეგი სახით:

$$\frac{3x^3-5x+10}{(x-1)^2\left(x^2+2x+5\right)}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+5}.$$

აქედან გვაქვს ტოლობა

$$3x^3-5x+10=A_1(x^2+2x+5)+A_2(x-1)(x^2+2x+5)+(Bx+D)(x-1)^2.$$

ამ ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეების x ცვლადის თანატოლი ხარისხების კოეფიციენტების გატოლებით და მიღებული სისტემის ამოხსნით, გვექნება

$$A_1=1,\quad A_2=0,\quad B=3,\quad D=5.$$

ამრიგად

$$\frac{3x^3-5x+10}{(x-1)^2\left(x^2+2x+5\right)}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3x+5}{x^2+2x+5}=\frac{1}{(x-1)^2}+$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+2\frac{1}{(x+1)^2+4},$$

საბოლოოდ გვაქვს

$$\int\frac{3x^3-5x+10}{(x-1)^2\left(x^2+3x+5\right)}dx=-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5)+\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები (NN12.1-12.18):

I. მნიშვნელს აქვს მხოლოდ ნამდვილი მარტივი ფესვები.

12.1. 1) $\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$; 2) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;

3) $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$; 4) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$.

12.2. 1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; 2) $\int \frac{3x-2}{x(x+1)(x-2)}dx$;

3) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$; 4) $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}dx$.

12.3. 1) $\int \frac{14-3x}{x^2-4}dx$; 2) $\int \frac{x+13}{x^2+x-6}dx$;

3) $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}dx$; 4) $\int \frac{9x-19}{2x^2-17x+21}dx$.

12.4. 1) $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$; 2) $\int \frac{2x^2-15x-9}{x^3-9x}dx$;

3) $\int \frac{x^2-18x+5}{x^3-2x^2-5x+6}dx$; 4) $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx$.

12.5. 1) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$; 2) $\int \frac{x^2dx}{x^2-3x+2}$;

3) $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}dx$; 4) $\int \frac{x^4-3x^3-18x^2+38x-17}{x^2-x-20}dx$

II. მნიშვნელს აქვს მხოლოდ ნამდვილი ფესვები, რომელთაგან ზოგიერთი ჯერადია.

12.6. 1) $\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}dx$; 2) $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$;

3) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$; 4) $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$.

12.7. 1) $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$; 2) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$;

3) $\int \frac{x^2+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$; 4) $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx$

12.8. 1) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$; 2) $\int \frac{7x^2-9}{x^4-5x^3+6x^2}dx$;

3) $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$; 4) $\int \frac{(x-1)dx}{(x-2)(x^2+x)^2}$.

12.9. 1) $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}dx$; 2) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$;

3) $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$; 4) $\int \frac{x^3-x+1}{x^6-x^5}dx$.

12.10. 1) $\int \frac{x^5+1}{x^8-x^2}dx$; 2) $\int \frac{3x^3+5x^2-25x-1}{x^3-3x+2}dx$;

3) $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}dx$; 4) $\int \frac{x^3dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$.

III. მნიშვნელს აქვს კომპლექსური მარტივი ფესვები.

12.11. 1) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; 2) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$;

3) $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-1}dx$; 4) $\int \frac{dx}{(x^2+x)(x^2+1)}$.

12.12. 1) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; 2) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$;

3) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$; 4) $\int \frac{x^2-2x-5}{x^3-x^2+2x-2}dx$.

12.13. 1) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2(x^2+2)}$;

3) $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$; 4) $\int \frac{dx}{x^4-x^3-x+1}$.

12.14. 1) $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx$; 2) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$;

3) $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$; 4) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$.

12.15. 1) $\int \frac{dx}{x^4+1}$; 2) $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6 + 1}$.

IV. მნიშვნელს აქვს კომპლექსური ფესვები, რომელთაგან ზოგიერთი ჯერადია.

12.16. 1) $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 - 4x + 1}{(x^2 + 1)^2}dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2}dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{3x + 5}{(x^2 + 2x + 2)^2}dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 12}{(x^2 - 6x + 13)^2}dx$.

12.17. 1) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1 + x)(1 + x^2)^2}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + x + 1)^2}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1 + x^2)^2}$; 4) $\displaystyle\int \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2(x^2 + 1)^2}dx$.

• **12.18.** 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(4 + x^2)^2(1 + x^2)}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + x^2)^4}$; 4) $\displaystyle\int \frac{x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^3}dx$.

§13. ზოგიერთი ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

1. წილად-წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)dx, \qquad (1)$$

სადაც $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – მუდმივი რიცხვებია და $n \in N$, $n \neq 1$. ვგულისხმობთ, რომ $\alpha\delta \neq \beta\gamma$. თუ $\alpha\delta = \beta\gamma$, მაშინ $\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ ფარდობა მუდმივი სიდიდეა და (1) ინტეგრალი წარმოადგენს ინტეგრალს რაციონალური ფუნქციიდან.

$R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$ სახის ფუნქციას უწოდებენ წილად-წრფივ ირაციონალურ ფუნქციას. (1) ინტეგრალი იხსნება ჩასმით

$$t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}.$$

მაგალითი 1. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \cdot \frac{dx}{1 - x}.$$

ამოხსნა. მოვახდინოთ ჩასმა

$$t = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}},$$

საიდანაც

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2 + 1)^2}.$$

მაშასადამე,

$$\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \cdot \frac{dx}{1 - x} = 2\int \frac{t^2dt}{t^2 + 1} = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2t - 2\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 2\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} + C.$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები (NN13.1-13.4):

13.1. 1) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x - 1}}dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$;

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5 + x)\sqrt{1 + x}}$.

13.2. 1) $\displaystyle\int \frac{1 - 2\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x + 1} + 1}{\sqrt{x + 1} - 1}dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x + 2}dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2 - x)\sqrt{1 - x}}$.

13.3. 1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x}dx$; 2) $\displaystyle\int x\sqrt[4]{x - 2}\,dx$.

3) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}dx$.

13.4. 1) $\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$; 4) $\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx$.

2. ზოგიერთი სახის წილად-წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R\left[x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_1},\dots,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_k}\right]dx, \qquad (2)$$

სადაც $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ რაციონალური არამთელი რიცხვებია, ხოლო $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ნამდვილი რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $\alpha\delta\neq\beta\gamma$. (2) ინტეგრალი იხსნება ჩასმით

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^{\lambda},$$

სადაც λ არის $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ რიცხვების საერთო მნიშვნელი.

მაგალითი 2. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{2x-1}}.$$

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ $\lambda_1=\frac{1}{2}, \lambda_2=\frac{1}{3}$ და ამიტომ $\lambda=6$. მაშასადამე საჭიროა ვისარგებლოთ ჩასმით $\sqrt[6]{2x-1}=t$. აქედან გვექნება

$$x=\frac{1}{2}(t^6+1), \quad dx=3t^5dt.$$

ამიტომ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{2x-1}}=\int\frac{3t^5}{t^3+t^2}dt=3\int\frac{t^3}{t+1}dt=$$

$$=3\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=t^3-\frac{3}{2}t^2+3t-3\ln|t+1|+C=$$

$$=\sqrt{2x-1}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x-1}+3\sqrt[6]{2x-1}-\ln\left(\sqrt[6]{2x-1}+1\right)+C.$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები (NN13.5-13.7):

13.5. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$;

3) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

13.6. 1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$; 2) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$;

3) $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; 4) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

13.7. 1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[12]{x^5}\right)^3}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^4}$.

3. კვადრატული ირაციონალობის ინტეგრება. ინტეგრალს

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \quad a\neq 0 \qquad (3)$$

უწოდებენ ინტეგრალს კვადრატული ირაციონალობიდან.

(3) ინტეგრალი ე.წ. ეილერის ჩასმებით ყოველთვის დაიყვანება ინტეგრალამდე რაციონალური ფუნქციიდან. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1. ვთქვათ ax^2+bx+c კვადრატულ სამწევრს აქვს ნამდვილი x_1 და x_2 ფესვები ($x_1<x_2$). მაშინ (3) ინტეგრალი ამოიხსნება ჩასმით

$$t=\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}$$

მაგალითი 3. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩასმა

$$t=\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}.$$

აქედან

$$x=\frac{3t^2+1}{1-t^2},\quad dx=\frac{8t}{(1-t^2)^2}dt,\quad \sqrt{x^2+2x-3}=\frac{4t}{1-t^2}.$$

მაშასადამე

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x-3}}=-\frac{8}{3}\int\frac{t}{(t-1)\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)^2}dt=$$

$$=-\frac{8}{3}\int\left(\frac{3}{16(t-1)}+\frac{9}{16\left(t+\frac{1}{3}\right)}-\frac{3}{4(t+1)}-\frac{3}{4(t+1)^2}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}+\frac{1}{3}\right)+2\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}+1\right)-$$

$$-\frac{2\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}}+C.$$

II. ვთქვათ $a>0$. ამ შემთხვევაში გამოიყენება ჩასმა:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}.$$

მაგალითი 4. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩასმა

$$\sqrt{x^2+x+1}=t-x.$$

საიდანაც

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t},\quad dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt.$$

ამიტომ

$$I=\int\frac{2(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2}dt=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2(1+2t)}+C=$$

$$=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+$$

$$+\frac{3}{2\left(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right)}+C.$$

III. ვთქვათ $c>0$, მაშინ გამოიყენება ჩასმა:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}.$$

მაგალითი 5. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩასმა

$$\sqrt{1+x-x^2}=tx-1.$$

აქედან

$$x=\frac{1+2t}{t^2+1},\quad dx=\frac{2(1-t-t^2)}{(t^2+1)^2}dt,\quad \sqrt{1+x-x^2}=\frac{t^2+t-1}{t^2+1}.$$

მაშასადამე

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}=-2\int\frac{dt}{t^2+2t+2}=-2\int\frac{dt}{1+(t+1)^2}=$$

$$=-2\operatorname{arctg}(t+1)+C=-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x-x^2}+x+1}{x}+C.$$

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ეილერის ჩასმების საშუალებით ინტეგრალის გამოთვლა, როგორც წესი, მოითხოვს შრომატევად გამოთვლებს, ამიტომ ეილერის ჩასმებს უნდა მივმართოთ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ვერ ვპოულობთ მოცემული ინტეგრალის გამოთვლის უფრო მარტივ გზას.

გამოთვალეთ ინტეგრალები (NN13.8-13.11):

13.8. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$;

3) $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$; 4) $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,dx$.

13.9. 1) $\int \frac{4x+7}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$; 2) $\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$;

3) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$; 4) $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$.

13.10. 1) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$; 2) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$;

3) $\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

13.11. 1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$; 2) $\int \frac{x^3dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$;

3) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$; 4) $\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$

4. ბინომური დიფერენციალის ინტეგრება. ინტეგრალს

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx, \qquad (4)$$

სადაც m, n, p რაციონალური რიცხვებია, ხოლო a და b ნამდვილი რიცხვები - უწოდებენ ინტეგრალს ბინომური დიფერენციალიდან.

თეორემა. თუ m, n, p რაციონალური რიცხვები აკმაყოფილებენ ერთ-ერთს შემდეგი სამი პირობიდან: 1) p მთელია, 2) $\frac{m+1}{n}$ მთელია, 3) $\frac{m+1}{n}+p$ მთელია, მაშინ ინტეგრალი ბინომური დიფერენციალიდან წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

ბინომური დიფერენციალიდან ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა მოვახდინოთ ჩასმები:

1) თუ $p \in Z$, მაშინ $x=z^s$, სადაც s არის m და n რიცხვების საერთო მნიშვნელი.

2) თუ $\frac{m+1}{n} \in Z$, მაშინ $a+bx^n=z^r$, სადაც r არის p-ს მნიშვნელი;

თუ $\frac{m+1}{n}+p \in Z$, მაშინ $ax^{-n}+b=z^r$, სადაც r არის p-ს მნიშვნელი.

შევნიშნოთ, რომ თეორემაში მოყვანილი სამი შემთხვევა ცნობილი იყო ჯერ კიდევ ნიუტონისათვის, მაგრამ მხოლოდ მეცხრამეტე საუკუნეში რუსმა მათემატიკოსმა ჩებიშევმა, რომ სხვა შემთხვევებში (4) ინტეგრალი არ წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt[10]{x^7}(1+\sqrt[5]{x^3})}$$

ამოხსნა. ცხადია

$$I=\int x^{-\frac{7}{10}}(1+x^{3/5})^{-1}dx.$$

როგორც ვხედავთ $p=-1$ მთელი რიცხვია. ამიტომ მოვახდინოთ ჩასმა

$$x=t^{10}.$$

გვაქვს

$$dx=10t^9dt, \quad x^{-\frac{7}{10}}=t^{-7}, \quad x^{3/5}=t^6.$$

მაშასადამე,

$$I=10\int \frac{t^2dt}{1+t^6}=\frac{10}{3}\int \frac{dt^3}{1+(t^3)^2}=\frac{10}{3}\operatorname{arctg}t^3+C=\frac{10}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[10]{x^3}+C.$$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int \sqrt{x}\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}dx.$$

ამოხსნა. ვინაიდან $m=\frac{1}{2}, n=-\frac{3}{2}, p=\frac{1}{4}$ და $\frac{m+1}{n}=-1$, გვაქვს მეორე შემთხვევა. მოვახდინოთ ჩასმა

$$z=\left(1-x^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

გვაქვს

$$x=\left(1-z^4\right)^{-\frac{2}{3}}, \quad dx=\frac{8}{3}\left(1-z^4\right)^{-\frac{5}{3}}z^3dz$$

ამიტომ

$$I=\frac{8}{3}\int\frac{z^4}{\left(1-z^4\right)^2}dz=\left|\begin{matrix} z=u, & \dfrac{z^3}{\left(1-z^4\right)^2}dz=dv \\ du=dz, & v=\dfrac{1}{4\left(1-z^4\right)}\end{matrix}\right|=\frac{2}{3}\cdot\frac{z}{1-z^4}-$$

$$-\frac{2}{3}\int\frac{dz}{1-z^4}=\frac{2z}{3\left(1-z^4\right)}-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{1+z^2}\right)dz=\frac{2z}{3\left(1-z^4\right)}-$$

$$-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}z+C.$$

მაგალითი 8. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

ამოხსნა. ცხადია $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$ და $\frac{m+1}{n}+p=0$ მთელი რიცხვია. ამიტომ მოვახდინოთ ჩასმა

$$t=\left(1+x^{-4}\right)^{1/4}.$$

გვაქვს

$$t^4=1+x^{-4},\quad 4t^3dt=-4x^{-5}dx,\quad x^4=\frac{1}{t^4-1}.$$

მაშასადამე

$$I=\int\frac{x^4dx}{x^5\sqrt[4]{1+x^{-4}}}=\int\frac{-t^3dt}{t(t^4-1)}=\int\frac{t^2}{1-t^4}dt=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები (NN13.12-13.18):

13.12. 1) $\int\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4dx$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}$;

3) $\int\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$; 4) $\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}$.

13.13. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(1-\sqrt[6]{x}\right)}$; 2) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{10}}$.

13.14. 1) $\int x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}dx$; 2) $\int x^5\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}dx$;

3) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$; 4) $\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

13.15. 1) $\int\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx$; 2) $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$;

3) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx$; 4) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

13.16. 1) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$;

3) $\int\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3-2\sqrt[5]{x^3}}}dx$; 4) $\int\sqrt{x^5+x^4}dx$.

13.17. 1) $\int\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$; 2) $\int\frac{\sqrt[3]{\left(1+2x^3\right)^2}}{x^6}dx$;

3) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^5}}$; 4) $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

13.18. 1) $\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$; 2) $\int\frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; 4) $\int\sqrt[3]{x-x^3}dx$.

§14 ზოგიერთი ტრანსცენდენტული ფუნქციის ინტეგრება

I. $\int \sin\alpha x\cos\beta x\,dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x\,dx$ და $\int \cos\alpha x\cos\beta x\,dx$

ინტეგრალების გამოსათვლელად საჭიროა ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ნამრავლი გარდაიქმნას ჯამად.

II. ინტეგრალი

$$\int R(\sin x,\cos x)dx \tag{1}$$

ჩასმით

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad x\in\,]-\pi,\pi[\tag{2}$$

დაიყვანება ინტეგრალამდე t-ს მიმართ რაციონალური ფუნქციიდან. ამიტომ მას უწოდებენ უნივერსალურ ჩასმას. უნივერსალური ჩასმით ინტეგრალის გამოთვლის დროს გამოიყენება ტოლობები

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{2+\cos x}.$$

ამოხსნა. მოვახდინოთ (2) ჩასმა; გვექნება

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt3}+C=\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt3}+C.$$

შევნიშნოთ, რომ არსებობს (1) ინტეგრალის ისეთი კერძო შემთხვევები, რომლებიც მისი გამოთვლა უფრო მოხერხებულია სხვა ჩასმებით. მოვიყვანოთ ასეთი შემთხვევებიდან ზოგიერთი.

I. თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია cosx-ის მიმართ, ე.ი.,

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

მაშინ გამოიყენება ჩასმა $\sin x=t$.

II. თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია sinx-ის მიმართ, ე.ი.

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

მაშინ გამოიყენება ჩასმა $\cos x=t$.

III. თუ

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x),$$

მაშინ გამოიყენება ჩასმა $\operatorname{tg}x=t$.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{\sin^2 x\cos^3 x}{2-\cos^2 x}dx.$$

ამოხსნა. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია cosx-ის მიმართ. ამიტომ გამოვიყენოთ ჩასმა $\sin x=t$. გვექნება

$$I=\int\frac{\sin^2 x(1-\sin^2 x)d\sin x}{1+\sin^2 x}=\int\frac{t^2(1-t^2)}{1+t^2}dt=-\int\frac{t^4-t^2}{1+t^2}dt=$$

$$=-\int\left(t^2-2+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=-\frac{t^3}{3}+2t-2\operatorname{arctg}t+C=-\frac{\sin^3 x}{3}+2\sin x-$$

$$-2\operatorname{arctg}(\sin x)+C.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ

$$I=\int\sin^3 x\cos^4 x\,dx.$$

ამოხსნა. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია sinx-ის მიმართ. თუ გამოვიყენებთ $\cos x=t$ ჩასმას, გვექნება

$$I=-\int(1-\cos^2 x)\cos^4 x\,d\cos x=\int(t^2-1)t^4dt=\int\left(t^6-t^4\right)dt=$$

$$=\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{\sin x+2\cos x}{\sin^2 x\cos x+4\cos^3 x}dx.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩასმა $\operatorname{tg}x=t$. თუ მრიცხველსა და მნიშვნელს გავყოფთ $\cos^3x$-ზე მივიღებთ

$$I=\int\frac{\operatorname{tg}x+2}{\operatorname{tg}^2x+4}d\operatorname{tg}x=\int\frac{t+2}{t^2+4}dt=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+4\right)+\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}^2x+4\right)+\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{2}+C.$$

III. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx, \tag{3}$$

სადაც m და n რაციონალური რიცხვებია. ცხადია, როცა m და n მთელი რიცხვებია, მაშინ ინტეგრალი წარმოადგენს (1) ინტეგრალის კერძო

შემთხვევას და მაშასადამე ის არის ელემენტარული ფუნქცია. ვთქვათ m და n წილადი რიცხვებია. წარმოვადგინოთ (3) ინტეგრალი შემდეგი სახით

$$I=\frac{1}{2}\int\left(\sin^2 x\right)^{\frac{m-1}{2}}\left(\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}d\sin^2 x=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\sin^2 x\right)^{\frac{m-1}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}d\left(\sin^2 x\right)$$

და მოვახდინოთ ჩასმა $t=\sin^2x$, მივიღებთ

$$I=\frac{1}{2}\int t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt. \qquad (4)$$

ამრიგად (3) ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება ბინომური დიფერენციალის ინტეგრებამდე. როგორც §13-ის მეხუთე პუნქტში ვნახეთ (4) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი სამი პირობიდან:

1) $\frac{n-1}{2}$ მთელი რიცხვია; 2) $\frac{m+1}{2}$ მთელი რიცხვია; 3) $\frac{m+n}{2}$ მთელი რიცხვია.

ცხადია ამ შემთხვევებს მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, როცა 1) n კენტი რიცხვია; 2) m კენტი რიცხვია; 3) n+m ლუწი რიცხვია.

გამომდინარე აქედან $\int\sqrt{\sin x}dx$ და $\int\sqrt{\cos x}dx$ არ წარმოადგენენ ელემენტარულ ფუნქციებს.

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx.$$

ამოხსნა. გვაქვს 2) შემთხვევა. გამოვიყენოთ ჩასმა $t=\cos x$. გვექნება:

$$I=-\int\frac{1-t^2}{t^{1/3}}dt=-\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{8}t^{\frac{8}{3}}+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\cos^2 x}+\frac{3}{8}\cos^2 x\sqrt[3]{\cos^2 x}+C.$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^7 x}}.$$

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $m=-\frac{1}{2}$, $n=-\frac{7}{2}$, $m+n=-4$. გამოვიყენოთ ჩასმა $tgx=t^2$. გვექნება

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{tgx\cos^8 x}}=\int(tgx)^{-\frac{1}{2}}(1+tg^2x)dtgx=2\int\left(1+t^4\right)dt=$$

$$=2\left(t+\frac{t^5}{5}\right)+C=\frac{2}{5}\sqrt{tgx}\left(5+tg^2x\right)+C.$$

IV. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R(e^x)dx. \qquad (5)$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $t=e^x$. საიდანაც $dx=\frac{dt}{t}$, ამიტომ

$$\int R(e^x)dx=\int\frac{R(t)}{t}dt=\int R_1(t)dt.$$

ე.ი. (5) ინტეგრალი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩასმა $t=e^x$. საიდანაც $dx=\frac{dt}{t}$, ამიტომ გვაქვს

$$I=\int\frac{t-1}{t(t+1)}dt=2\int\frac{dt}{t+1}-\int\frac{dt}{t}=2\ln(1+t)-\ln t+C=2\ln(1+e^x)-x+C.$$

V. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R(shx,chx)dx. \qquad (6)$$

ჩასმით

$$t=th\frac{x}{2}$$

ეს ინტეგრალი დაიყვანება ინტეგრალამდე t-ს მიმართ რაციონალური ფუნქციიდან. ამასთან გამოიყენება ტოლობები

$$shx=\frac{2t}{1-t^2},\quad chx=\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1-t^2}.$$

შევნიშნოთ, რომ ზოგჯერ (6) ინტეგრალის გამოთვლა უფრო მოსახერხებელია ჩასმებით $t=shx$ ან $t=chx$ ან $t=thx$ ანდა ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.

მაგალითი 8. გამოთვალეთ

$$I=\int ch^5 x\, sh^4 x\,dx.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩასმა $shx=t$. რადგან $ch^2x=1+sh^2x$, $chxdx=d(shx)$, ამიტომ

$$I=\int\left(1+t^2\right)^2 t^4dt=\frac{t^5}{5}+\frac{2t^7}{7}+\frac{t^9}{9}+C=sh^5x\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{7}sh^2x+\frac{1}{9}sh^4x\right)+C.$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები (NN14.1-14.30):

1. $\int \sin\alpha x\cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x\sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x\cos\beta x dx$ სახის ინტეგრალები.

14.1. 1) $\int \sin 3x\cos x dx$; 2) $\int \sin 3x\cos 5x dx$;

3) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2}{3}x dx$; 4) $\int \sin(3x+2)\cos(x-1)dx$.

14.2. 1) $\int \sin 10x\sin 15x dx$; 2) $\int \sin 2x\sin 5x dx$;

3) $\int \sin\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{5}dx$; 4) $\int \sin(5x+8)\sin(3x-7)dx$.

14.3. 1) $\int \cos 4x\cos 7x dx$; 2) $\int \cos x\cos 4x dx$;

3) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$; 4) $\int \cos(\alpha x+b)\cos(\alpha x-b)dx$.

14.4. 1) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x dx$; 2) $\int \cos x\cos 3x\cos 5x dx$;

3) $\int \cos x\cos^2 3x dx$; 4) $\int \sin^2 x\cos(3x+1)dx$.

2. $\int \sin^m x\cos^n x dx$, $(m,n\in Z)$ სახის ინტეგრალები

14.5. 1) $\int \sin^5 x\cos x dx$; 2) $\int \sin 3x\cos^6 3x dx$;

3) $\int \sin^3 x dx$; 4) $\int \cos^3 x dx$.

14.6. 1) $\int \sin^5 x dx$; 2) $\int \cos^5 x dx$;

3) $\int \sin^2 x\cos^3 x dx$; 4) $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$.

14.7. 1) $\int \sin^3\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}dx$; 2) $\int \cos^3 x\sin^8 x dx$;

3) $\int \sin^7 x dx$; 4) $\int \cos^7 x dx$.

14.8. 1) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$; 2) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$;

3) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$; 4) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$.

14.9. 1) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}dx$; 2) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$;

3) $\int tg^3 x dx$; 4) $\int tg^5 x dx$.

14.10. 1) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$.

14.11. 1) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dx$; 2) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}$.

14.12. 1) $\int \sin^4 x dx$; 2) $\int \cos^4 x dx$;

3) $\int \sin^5 x dx$; 4) $\int \cos^6 x dx$.

14.13. 1) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; 2) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$;

3) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$; 4) $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$.

14.14. 1) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; 4) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

14.15. 1) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$; 2) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$;

3) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$; 4) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$.

3. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ სახის ინტეგრალები, სადაც $R(u,v)$ არის u და v ცვლადების რაციონალური ფუნქცია.

14.16. 1) $\int \frac{dx}{2+3\cos x}$; 2) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$;

3) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; 4) $\int \frac{dx}{4-\sin x}$.

14.17. 1) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;

3) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$; 4) $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}$.

14.18. 1) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$; 2) $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$;

3) $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} dx$; 4) $\int \frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$.

14.19. 1) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$; 2) $\int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin^3 x}$;

3) $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx$; 4) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

14.20. 1) $\int \frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x} dx$; 2) $\int \frac{1+\mathrm{ctg}x}{1-\mathrm{ctg}x} dx$.

3) $\int \frac{2-\sin x}{2-\cos x} dx$; 4) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\mathrm{tg}x} dx$.

14.21. 1) $\int \frac{dx}{\cos 2x - \sin 2x} dx$; 2) $\int \frac{dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.

3) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; 4) $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

14.22. 1) $\int \frac{dx}{\sin 2x - \sin x}$; 2) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx$;

3) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2\cos x + 5} dx$; 4) $\int \frac{\sin 2x}{1+4\cos^2 x} dx$.

4. $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $(m,n \in Q)$ სახის ინტეგრალები.

14.23. 1) $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx$; 2) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}$;

3) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^5 x}} dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \sqrt{\cos^3 \frac{x}{2}}}$.

14.24. 1) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin x}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

14.25. 1) $\int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}} dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x} dx$;

3) $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{\sin 2x}}$; 4) $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin^3 2x}}$.

5. $\int R(e^x)dx$ სახის ინტეგრალები, სადაც $R(t)$ არის t ცვლადის რაციონალური ფუნქცია.

14.26. 1) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$; 2) $\int \frac{1+e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}dx$;

3) $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$; 4) $\int \frac{dx}{\left(1+e^x\right)^2}$.

14.27. 1) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$; 2) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-6e^x+13}dx$;

3) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x-5}dx$; 4) $\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}dx$.

6. $\int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)dx$ სახის ინტეგრალები, სადაც $R(u,v)$ არის u და v ცვლადების რაციონალური ფუნქცია.

14.28. 1) $\int \operatorname{sh}^2x\,dx$; 2) $\int \operatorname{ch}^2x\,dx$;

3) $\int \operatorname{sh}^3x\,dx$; 4) $\int \operatorname{ch}^3x\,dx$.

14.29. 1) $\int \operatorname{th}^2x\,dx$; 2) $\int \operatorname{cth}^2x\,dx$;

3) $\int \operatorname{th}x\,dx$; 4) $\int \operatorname{cth}x\,dx$.

14.30. 1) $\int \operatorname{sh}^3x\operatorname{ch}x\,dx$; 2) $\int \operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2x\,dx$;

3) $\int \operatorname{th}^4x\,dx$; 4) $\int \operatorname{ch}^4x\,dx$.

§15. ირაციონალური ინტეგრალები

გამოთვალეთ ინტეგრალები (NN 15.1-15.12):

15.1. 1) $\int \frac{xdx}{2x^2-x+1}$; 2) $\int \frac{x^2dx}{x^2+12x+35}$;

3) $\int \frac{x^4+3x^3-1}{x^2+2x+1}dx$; 4) $\int \frac{xdx}{x^3+8}$.

15.2. 1) $\int \frac{x^5dx}{x^3+2}$; 2) $\int \frac{x^5dx}{x^6+9x^3+8}$;

3) $\int \frac{x^3dx}{\left(x^8+1\right)^2}$; 4) $\int \frac{x^9dx}{\left(x^{10}+2x^5+2\right)^2}$.

15.3. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}$; 2) $\int \frac{3-4x}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}dx$;

3) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x^3}dx$; 4) $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$.

15.4. 1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x}+x\sqrt[4]{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\right)^2}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^5}+4\sqrt{x}}$; 4) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x+\sqrt[3]{x^4}}dx$.

15.5. 1) $\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}-\sqrt{5-x}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$; 4) $\int \frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{1+x+\sqrt[3]{(1+x)^4}}dx$.

15.6. 1) $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$; 2) $\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x^2}$;

3) $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}$; 4) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{(1+x)^2}$.

15.7. 1) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\cdot\frac{dx}{x}$;

3) $\int \sqrt{\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 4) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{\sqrt{x}-1}+\sqrt{\sqrt{x}+1}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

15.8. 1) $\int \sqrt{4x^2-4x+3}\,dx$; 2) $\int x^4\sqrt{4-x^2}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{(x-1)^5\sqrt{x^2-2x-1}}$; 4) $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

15.9. 1) $\int \frac{dx}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}$; 2) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;

3) $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x^2+x}}\,dx$; 4) $\int \frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}$.

15.10. 1) $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$; 2) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$; 4) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx$.

15.11. 1) $\int x\ln(1+x^3)\,dx$; 2) $\int x\ln(4+x^4)\,dx$;

3) $\int \ln^4 x\,dx$; 4) $\int x^3\ln^3 x\,dx$.

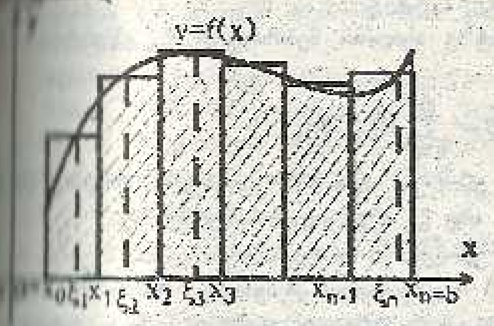
15.12. 1) $\int \sin\sqrt{x}\,dx$; 2) $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$;

3) $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$; 4) $\int xe^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი ზოგიერთი გამოყენება

§16 განსაზღვრული ინტეგრალი

1. მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოთვლა. ვთქვათ მოცემულია $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი, არაუარყოფითი $f(x)$ ფუნქცია. განვიხილოთ ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით, $x=a$ და $x=b$ წრფეებით და Ox ღერძით. ასეთ ფიგურას მრუდწირული ტრაპეცია ეწოდება (ნახ. 7). ისმის კითხვა: რას ვუწოდოთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი და როგორ გამოვთვალოთ იგი? ამ ამოცანის გადასაწყვეტად მოვიქცეთ შემდეგნაირად:



ნახ. 7

დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

მივიღებთ სეგმენტებს

$$[a,x_1],\ [x_1,x_2],\ \cdots,\ [x_{n-1},b]. \qquad (1)$$

აღვნიშნოთ λ-თი $\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n$ რიცხვებს შორის უდიდესი, სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$.

სეგმენტთა (1) სისტემას უწოდებენ $[a,b]$ სეგმენტის λ-დანაწილებას. ცხადია, რომ ყოველ λ რიცხვს შეესაბამება უამრავი λ-დანაწილება.

ყოველ $[x_{k-1},x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი $(k=1,2,\cdots,n)$ და შევადგინოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (2)$$

ცხადია ეს ჯამი უდრის მე-7 ნახაზზე დაშტრიხული მართკუთხედების ფართობთა ჯამს.

თუ არსებობს (2) ჯამის S ზღვარი, როცა $\lambda \to 0$, რომელიც არ არის დამოკიდებული არც $[a,b]$ სეგმენტის λ-დანაწილებაზე და არც წერტილების შერჩევაზე, მაშინ S სიდიდეს უწოდებენ მოცემული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს. მაშასადამე

$$S=\lim_{\lambda \to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

2. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება. ვთქვათ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b.$$

ყოველ $[x_{k-1},x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

ამ ჯამს ინტეგრალური ჯამი ეწოდება. იგი დამოკიდებულია როგორც $[a,b]$ სეგმენტის λ-დანაწილებაზე, ისე ξ_k წერტილების შერჩევაზე.

განსაზღვრება 1. I რიცხვს ეწოდება σ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \to 0$, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი, ისეთი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda<\delta$, და ნებისმიერი $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ წერტილებისათვის, მართებულია უტოლობა

$$|\sigma - I|<\varepsilon$$

და ამ ფაქტს შემდეგნაირად ჩაწერენ $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$.

განსაზღვრება 2. თუ არსებობს σ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I,$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება განსაზღვრული ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციისა $[a,b]$ სეგმენტზე და იგი

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (3)$$

სიმბოლოთი აღინიშნება. ე.ი.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda \to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

ამ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს (3) ინტეგრალი, ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე.

შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალური ჯამის ზღვრის არსებობის დადგენა და არსებობის შემთხვევაში მისი უშუალოდ გამოთვლა საზოგადოდ რთულია. ამიტომ ბუნებრივად ისმის ამოცანა: 1) რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია, რომ არსებობდეს განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$. 2) განსაზღვრული ინტეგრალის არსებობის შემთხვევაში მივიღოთ მისი გამოთვლის ეფექტური მეთოდები.

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

ზემოთ ჩვენ შემოვიყვანეთ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალის ცნება. განსაზღვრებით მივიღოთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია სასრულია a წერტილში, მაშინ

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

აგრეთვე განსაზღვრებით მივიღოთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx .$$

შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრული ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ინტეგრების ცვლადზე, ამიტომ შეგვიძლია ვწეროთ

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=\cdots$$

3. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული შინაარსი და თვისებები. გავარკვიოთ განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული შინაარსი.

მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის განსაზღვრებისა და თეორემა 1-ის ძალით გვაქვს: განსაზღვრული ინტეგრალი $[a,b]$ სეგმენტზე არაუარყოფითი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციიდან, უდრის იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით, Ox ღერძით და $x=a$, $x=b$ წრფეებით.

ჩამოვაყალიბოთ განსაზღვრული ინტეგრალის ძირითადი თვისებები:

1) თუ $[a,b]$ სეგმენტზე $f(x)=M$, სადაც M მუდმივია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = M(b-a).$$

2) თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და A მუდმივია, მაშინ $Af(x)$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx,$$

ე. ი. მუდმივი მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ განსაზღვრული ინტეგრალის ნიშნის გარეთ.

3) თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, ხოლო A და B ნებისმიერი მუდმივებია, მაშინ $Af(x)+Bg(x)$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b [Af(x)+Bg(x)]dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx.$$

ადვილია ჩვენება, რომ ეს თვისება მართებულია შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

4) თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,c]$ და $[c,b]$ სეგმენტებზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზეც და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5) თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე $f(x)\le\varphi(x)$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx.$$

შედეგი. თუ არაუარყოფითი $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

6) თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ $|f(x)|$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე და

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

7) ვთქვათ $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი არაუარყოფითი ფუნქცია. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $c\in[a,b]$ წერტილში და $f(c)>0$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

შედეგი. თუ არაუარყოფითი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის

$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

მაშინ $f(x)$ იგივეურად ნულის ტოლია $[a,b]$ სეგმენტზე.

8) რაიმე სეგმენტზე ინტეგრებადი ორი ფუნქციის ნამრავლი აგრეთვე ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

4. საშუალო მნიშვნელობის თეორემა.

თეორემა 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, ხოლო $g(x)$ ინტეგრებადი ფუნქცია ნიშანს არ იცვლის $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

შედეგი. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტზე არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

5. თეორემა უწყვეტი ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციის არსებობის შესახებ. ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. მაშინ იგი ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a,x]$ სეგმენტზე, სადაც $a \le x \le b$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

მას უწოდებენ ინტეგრალს ცვლადი ზედა საზღვრით.

სამართლიანია თეორემები:

თეორემა 3. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილ ფუნქციას. ე.ი.

$$F'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), \quad x \in [a,b].$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ განსაზღვრული ინტეგრალის უშუალოდ გამოთვლა, როგორც ინტეგრალური ჯამის ზღვრისა საზოგადოდ რთულია.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ თეორემა, უწყვეტი ფუნქციის შემთხვევაში, განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის შესახებ, რომელიც ეფექტურია, როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში.

თეორემა 4 (ნიუტონ-ლეიბნიცი). თუ $F(x)$ ფუნქცია არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის რომელიმე პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \qquad (4)$$

ამ თეორემას ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითად თეორემას უწოდებენ, ხოლო (4) ფორმულას ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა ეწოდება.

ამრიგად, უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი გამოითვლება ამავე ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალის საშუალებით.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

გვაქვს

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

16.1. გამოიყენეთ განსაზღვრული ინტეგრალის არსებობის თეორემა და განსაზღვრების საფუძველზე გამოთვალეთ ინტეგრალი.

1) $\int_0^1 (2+x)dx$; 2) $\int_1^2 x^2dx$; 3) $\int_0^1 e^x dx$; 4) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$.

ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ ინტეგრალები (16.2-16.7):

16.2. 1) $\int_0^1 x^2dx$; 2) $\int_1^4 \sqrt{x}dx$; 3) $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}$.

16.3. 1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$; 2) $\int_0^{\pi} \sin x dx$; 3) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{dx}{\cos^2 x}$; 4) $\int_0^3 e^x dx$.

16.4. 1) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\int_0^1 2^x dx$; 4) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx$.

16.5. 1) $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$; 3) $\int_0^1 \cos\frac{\pi}{3}x dx$; 4) $\int_0^{\pi^2} \sin\frac{x}{3\pi}dx$.

16.6. 1) $\int_0^1 \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; 2) $\int_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}dx$;

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

16.7. 1) $\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$; 2) $\int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}dx$; 3) $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx$; 4) $\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx$.

5. ცვლადის გარდაქმნა განსაზღვრულ ინტეგრალში. სამართლიანია თეორემა:

თეორემა 5. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, ხოლო $x=\varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე. ამასთან $a\le\varphi(t)\le b$, როცა $\alpha\le t\le\beta$ და $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{5}$$

(5) ფორმულას ეწოდება ცვლადის გარდაქმნის ფორმულა განსაზღვრულ ინტეგრალში.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx,\quad a>0.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x=a\sin t$, გვექნება, როდესაც $x=0$, მაშინ $t=0$, ხოლო, როდესაც $x=a$, მაშინ $t=\frac{\pi}{2}$. ამრიგად

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sqrt{x+1}=t$, ე.ი. $x=t^2-1$. როცა $x=3$, მაშინ $t=2$, ხოლო, როცა $x=8$, მაშინ $t=3$. გვექნება

$$I=\int_2^3\frac{t^2-1}{t}2tdt=2\int_2^3(t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3=10\frac{2}{3}.$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები ჩასმის ხერხით (NN16.8-16.17):

16.8. 1) $\int_0^2 xe^{x^2}dx$; 2) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2dx$; 3) $\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} x^2\cos x^3dx$; 4) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

16.9. 1) $\int_0^2\frac{xdx}{x^2+4}$; 2) $\int_0^1\frac{e^xdx}{1+e^{2x}}$; 3) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$; 4) $\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

16.10. 1) $\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^6}$; 2) $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$; 3) $\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$; 4) $\int_1^e\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

16.11. 1) $\int_1^e\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; 2) $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

3) $\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$; 4) $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

16.12. 1) $\int_0^1\frac{xdx}{x^2+3x+2}$; 2) $\int_0^1\frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

3) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; 4) $\int_2^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

16.13. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 xdx$; 3) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}xdx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}xdx$.

16.14. 1) $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 2) $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$;

3) $\int_1^2 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$; 4) $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$.

16.15. 1) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$; 2) $\int_{-1}^1 \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$;

3) $\int_0^4 \sqrt{x^2+9}\,dx$; 4) $\int_{-1}^0 \sqrt{x^2+2x+4}\,dx$.

16.16. 1) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$; 2) $\int_0^1 \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+1}\,dx$;

3) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$; 4) $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$.

16.17. 1) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$;

3) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$; 4) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

6. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის. მართებულია თეორემა:

თეორემა 6. თუ $u(x)$ და $v(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (6)$$

(6) ფორმულას ეწოდება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის. იგი შეიძლება მოკლედ შემდეგნაირად ჩაიწეროს

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 4. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} x = u, \sin x\,dx = dv \\ du = dx,\ v = -\cos x \end{matrix}\right| = -x\cos x\Big|_0^{\pi} +$

$$+\int_0^{\pi}\cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

მაგალითი 5. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left|\begin{matrix} \ln x = u; & \frac{dx}{\sqrt{x}} = dv \\ du = \frac{dx}{x}, & v = 2\sqrt{x} \end{matrix}\right| = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e -$

$$-2\int_1^e \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{x}\Big|_1^e = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4 = 2(2-\sqrt{e}).$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები ნაწილობითი ინტეგრების წესით (NN16.18-16.22):

16.18. 1) $\int_0^1 xe^x dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$; 3) $\int_0^1 xe^{-x}dx$; 4) $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

16.19. 1) $\int_1^e \ln x\,dx$; 2) $\int_1^2 x^2\ln x\,dx$;

3) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

16.20. 1) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$; 2) $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$;

3) $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx;$ 4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx.$

16.21. 1) $\int_0^1 \arccos x\,dx;$ 2) $\int_0^3 \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx;$

3) $\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}\,dx;$ 4) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx.$

16.22. 1) $\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx;$ 2) $\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx;$

3) $\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)\,dx;$ 4) $\int_1^{e} x^2 \ln^2 x\,dx.$

7. **ლუწი, კენტი და პერიოდული ფუნქციის ინტეგრება.** სამართლიანია ტოლობები:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{თუ } f(x) \text{ - ლუწია,} \\ 0, & \text{თუ } f(x) \text{ - კენტია.} \end{cases}$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულია, პერიოდით ℓ და ინტეგრებადია $[0,\ell]$ სეგმენტზე, მაშინ ნებისმიერი $c \in R$-ისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_c^{c+\ell} f(x)dx = \int_0^{\ell} f(x)dx.$$

16.23. აჩვენეთ, რომ, თუ $m,n \in Z$, მაშინ

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = 0, \quad m \neq n;$ 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0, \; m \neq n;$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0;$ 4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,dx = \pi.$

§17. არასაკუთრივი ინტეგრალები

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ ინტეგრალის ცნების განზოგადებას იმ შემთხვევისათვის, როცა ფუნქცია განსაზღვრულია უსასრულო შუალედზე და იმ შემთხვევისათვის, როცა ფუნქცია განსაზღვრულია სასრულ შუალედზე, მაგრამ არ არის შემოსაზღვრული ამ შუალედზე.

1. არასაკუთრივი ინტეგრალები უსასრულო საზღვრით. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,+\infty[$ შუალედზე.

განსაზღვრება 1. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx, \qquad (1)$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a,+\infty[$ შუალედზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \qquad (2)$$

ამრიგად

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx.$$

იმ შემთხვევაში, როცა (1) ზღვარი სასრულია (2) ინტეგრალს ეწოდება კრებადი, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას - ინტეგრებადი (არასაკუთრივი აზრით) $[a,+\infty[$ შუალედზე. თუ (1) ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოდ დიდია, მაშინ ამბობენ, რომ (2) ინტეგრალი განშლადია.

შენიშვნა. თუ $c>a$, მაშინ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ და $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ ინტეგრალები ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლადია.

თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია $[a,+\infty[$ შუალედზე, მაშინ

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a),$$

ამიტომ

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(a) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}, \quad (3)$$

სადაც

$$F(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} F(t).$$

$]-\infty, a]$ შუალედზე მოცემული ფუნქციისათვის არასაკუთრივი ინტეგრალი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx .$$

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty,+\infty[$ შუალედში, მაშინ მას ინტეგრებადი ეწოდება ამ შუალედში, თუ კრებადია ინტეგრალები

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx \quad \text{და} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx .$$

მათ ჯამს ეწოდება ინტეგრალი $]-\infty,+\infty[$ შუალედზე $f(x)$ ფუნქციიდან და

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx .$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} .$$

$\frac{1}{1+x^2}$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციაა $F(x)=\operatorname{arctg}x$. ცხადია, რომ $F(0)=0$, $F(+\infty)=\frac{\pi}{2}$. ამიტომ (3) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

მაგალითი 2. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$ განშლადია.

$\cos x$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციაა $\sin x$, მაგრამ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ არ არსებობს, ე.ი. $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$ განშლადია.

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, სადაც $a>0$, კრებადია, როცა $\alpha>1$ და განშლადია როცა $\alpha \le 1$.

თუ $\alpha \ne 1$, მაშინ

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^t = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{როცა} \quad \alpha < 1, \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{როცა} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

თუ $\alpha = 1$, მაშინ

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln a) = +\infty.$$

მაშასადამე $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, სადაც $a>0$, კრებადია, როცა $\alpha > 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \le 1$.

მოვიყვანოთ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის ნიშნები.

თეორემა 1. ვთქვათ $[a,+\infty[$ შუალედზე განსაზღვრული არაუარყოფითი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ უტოლობას $f(x) \le g(x)$. მაშინ

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობა და პირიქით $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ინტეგრალის განშლადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ინტეგრალის განშლადობა.

შედეგი. ვთქვათ $[a, +\infty[$ შუალედზე განსაზღვრული არაუარყოფითი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებისათვის ($g(x) \neq 0$), არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

მაშინ:

1) როცა $0 \le A < +\infty$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$-ის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობა.

2) როცა $0 < A \le +\infty$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$-ის განშლადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ინტეგრალის განშლადობა.

კერძოდ, როცა $0<A<+\infty$, მაშინ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ და $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ინტეგრალები ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლადია.

მაგალითი 4. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

კრებადია.

მართლაც

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x^2},$$

ამიტომ თეორემა 1-ის ძალით (იხ. მაგალითი 3) მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

მაგალითი 5. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2}dx$$

განშლადია.

განვიხილოთ ფუნქციები

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} \text{ და } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

მაშინ

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

რადგან $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ინტეგრალი განშლადია, ამიტომ თეორემა 1-ის შედეგის ძალით მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

მაგალითი 6. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}dx$$

კრებადია.

განვიხილოთ ფუნქციები

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}} \quad \text{და} \quad g(x) = \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$$

გვაქვს

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{5}{4}}\ln x}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+1}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}} = 0.$$

რადგან $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{5}{4}}}$ კრებადია, ამიტომ თეორემა 1-ის შედეგის ძალით მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

თეორემა 2. თუ $[0,+\infty[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და $\int_0^{+\infty}|f(x)|dx$ კრებადია, მაშინ კრებადია აგრეთვე $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ და მართებულია უტოლობა

$$\left|\int_0^{+\infty}f(x)dx\right| \le \int_0^{+\infty}|f(x)|dx.$$

შენიშვნა. მტკიცდება, რომ $\int_0^{+\infty}f(x)dx$-ის კრებადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს $\int_0^{+\infty}|f(x)|dx$-ის კრებადობა.

განსაზღვრება 2. $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ ინტეგრალს ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, როცა კრებადია $\int_0^{+\infty}|f(x)|dx$ ინტეგრალი. თუ $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ კრებადია,

ხოლო $\int_0^{+\infty}|f(x)|dx$ განშლადია, მაშინ ამბობენ, რომ $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ ინტეგრალი პირობით კრებადია.

გამოთვალეთ ინტეგრალები ან აჩვენეთ მათი განშლადობა (NN17.1-17.5):

17.1. 1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$; 4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$.

17.2. 1) $\int_1^{+\infty}e^{-3x}dx$; 2) $\int_0^{+\infty}e^{-kx}dx$; 3) $\int_0^{+\infty}\sin 2x\,dx$; 4) $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x+1}$.

17.3. 1) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$; 2) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$; 3) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$; 4) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

17.4. 1) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$; 2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$; 4) $\int_{-\infty}^{0}\frac{x+1}{x^2+1}dx$.

17.5. 1) $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$; 2) $\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx$; 3) $\int_0^{+\infty}x\sin x\,dx$; 4) $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$.

დაადგინეთ კრებადია თუ განშლადი ინტეგრალები (NN17.6-17.9):

17.6. 1) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+1}dx$; 2) $\int_1^{+\infty}\frac{x^3+2x^2+1}{x^4}dx$;

3) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$; 4) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x^2+x)}{x}dx$.

17.7. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$;

3) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$; 4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+1}$.

17.8. 1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt[3]{x}}dx$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{1+x\sqrt[3]{x}}dx$;

3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sin^2 x}$; 4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x}$.

17.9. 1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$; 2) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$; 3) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}\ln x}$; 4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}dx$.

2. არასაკუთრივი ინტეგრალები შემოუსაზღვრელი ფუნქციებიდან

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b[$ შუალედში და

$$\lim_{x\to b-} f(x)=\infty.$$

განსაზღვრება 3. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{t\to b} \int\limits_a^t f(x)dx\,, \qquad (4)$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a,b]$ შუალედზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int\limits_a^b f(x)dx\,. \qquad (5)$$

იმ შემთხვევაში, როცა (4) ზღვარი სასრულია, (5) ინტეგრალს ეწოდება კრებადი, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ინტეგრებადი (არასაკუთრივი აზრით) $[a,b]$ სეგმენტზე. თუ (4) ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოდ დიდია, მაშინ ამბობენ, რომ (5) ინტეგრალი განშლადია.

შენიშვნა. თუ $a<c<b$, მაშინ $\int\limits_a^b f(x)dx$ და $\int\limits_c^b f(x)dx$ ინტეგრალები ერთდროულად კრებადია ან განშლადია, ამასთან თუ $\int\limits_a^b f(x)dx$ კრებადია, მაშინ

$$\lim_{c\to b-} \int\limits_a^b f(x)dx=0.$$

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს პირველყოფილი $F(x)$ ფუნქცია $[a,b]$ შუალედზე, მაშინ

$$\int\limits_a^t f(x)dx=F(t)-F(a).$$

ამიტომ

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-} F(t)-F(a)=F(b-)-F(a),$$

სადაც

$$F(b-)=\lim_{t\to b-} F(t).$$

ანალოგიურად განისაზღვრება არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int\limits_a^b f(x)dx$ იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $]a,b]$ შუალედში და $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$, ე.ი.

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a+} \int\limits_t^b f(x)dx\,.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $]a,b[$ ინტერვალზე და

$$\lim_{t\to a+} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to b-} f(x)=\infty,$$

მაშინ მას ეწოდება ინტეგრებადი $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ $c \in]a,b[$-სათვის კრებადია ინტეგრალები

$$\int_a^c f(x)dx \qquad \text{და} \qquad \int_c^b f(x)dx .$$

ამ ინტეგრალების ჯამს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a,b]$ სეგმენტზე და განსაზღვრით:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

ახლა ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,c[$ და $]c,b]$ შუალედებში, ამასთან $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$ ზღვრებიდან ერთი მაინც უსასრულობაა. თუ არსებობს ინტეგრალები $\int_a^c f(x)dx$ და $\int_c^b f(x)dx$, მაშინ ჯამს

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a,b]$ სეგმენტზე და განსაზღვრით

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

მაგალითი 7. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha < 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \geq 1$.

როცა $\alpha \neq 1$, მაშინ

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_0^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{თუ} \quad \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{თუ} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

როცა $\alpha = 1$, მაშინ

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 = +\infty.$$

ამრიგად $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha < 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \geq 1$.

მაგალითი 8. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

გვაქვს

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 1-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

მაგალითი 9. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_0^1 \ln x dx$ კრებადია.

$\ln x$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა $F(x) = x\ln x - x$. ცხადია $F(1) - F(0+) = -1$, ე.ი.

$$\int_0^1 \ln x dx = -1.$$

მოვიყვანოთ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის ნიშნები.

თეორემა 3. ვთქვათ არაუარყოფითი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია $[a,b[$ შუალედში და $f(x) \leq g(x)$, $a \leq x < b$. მაშინ $\int_a^b g(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობა და პირიქით $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის განშლადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^b g(x)dx$ ინტეგრალის განშლადობა.

შედეგი. ვთქვათ არაუარყოფითი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები $(g(x)\neq 0)$ განსაზღვრულია $[a,b[$ შუალედში და არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

მაშინ:

1) როცა $0\le A<+\infty$, $\int\limits_a^b g(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\int\limits_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობა;

2) როცა $0<A\le+\infty$, $\int\limits_a^b g(x)dx$ ინტეგრალის განშლადობიდან გამომდინარეობს $\int\limits_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის განშლადობა.

კერძოდ, როცა $0<A<+\infty$, მაშინ $\int\limits_a^b f(x)dx$ და $\int\limits_a^b g(x)dx$ ინტეგრალები ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლადია.

მაგალითი 10. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_0^1\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ კრებადია.

განვიხილოთ ფუნქციები

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}\quad \text{და}\quad g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$$

გვაქვს,

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

რადგანაც $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ კრებადია, ამიტომ თეორემა 3-ის შედეგის ძალით

მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

მაგალითი 11. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_0^1\frac{dx}{1-x^2}$ განშლადია.

განვიხილოთ ფუნქციები,

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}\quad \text{და}\quad g(x)=\frac{1}{1-x}.$$

გვაქვს

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1-}\frac{1-x}{1-x^2}=\frac{1}{2}.$$

რადგანაც $\int\limits_0^1\frac{dx}{1-x}$ განშლადია, ამიტომ თეორემა 3-ის შედეგის ძალით მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

თეორემა 4. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b[$ შუალედში. თუ ინტეგრალი $\int\limits_a^b|f(x)|dx$ კრებადია, მაშინ კრებადია აგრეთვე $\int\limits_a^b f(x)dx$ ინტეგრალი და მართებულია უტოლობა

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\le\int\limits_a^b|f(x)|dx.$$

შევნიშნოთ, რომ $\int\limits_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს $\int\limits_a^b|f(x)|dx$ ინტეგრალის კრებადობა.

განსაზღვრება 4. $\int\limits_a^b f(x)dx$ ინტეგრალს ეწოდება აბსოლუტურად

კრებადი, როცა კრებადია $\int_a^b |f(x)|dx$ ინტეგრალი. თუ $\int_a^b f(x)dx$ კრებადია, ხოლო $\int_a^b |f(x)|dx$ განშლადია, მაშინ ამბობენ, რომ $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალი პირობით კრებადია.

მაგალითი 12. ვაჩვენოთ, რომ $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ აბსოლუტურად კრებადია.

განვიხილოთ ფუნქციები

$$f(x)=\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} \qquad \text{და} \qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

გვაქვს

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^{\frac{2}{3}}|\ln x|}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0+}x^{\frac{1}{6}}|\ln x|=0.$$

რადგანაც $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ ინტეგრალი კრებადია, ამიტომ თეორემა 3-ის შედეგის ძალით მოცემული ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია.

გამოთვალეთ ინტეგრალები ან აჩვენეთ მათი განშლადობა (NN17.10-17.13):

17.10. 1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$; 3) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

17.11. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}x dx$; 2) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$; 3) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$; 4) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

17.12. 1) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 2) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$; 3) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x}dx$; 4) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^a x}$.

17.13. 1) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; 2) $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}dx$; 3) $\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; 5) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$; 6) $\int_1^{+\infty} \frac{2-x^2}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx$.

დაადგინეთ კრებადია თუ განშლადი ინტეგრალები (NN17.14-17.17):

17.14. 1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$; 2) $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$;

3) $\int_0^1 \frac{x^a}{\sqrt{1-x^4}}dx$; 4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$.

17.15. 1) $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$; 2) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\ln(1+x)}$; 3) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$; 4) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$.

17.16. 1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$;

3) $\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^a}dx$; 4) $\int_0^\pi \frac{\ln\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

17.17. 1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\mathrm{arctg}x}$; 2) $\int_0^\pi \frac{\ln x}{\sqrt{\sin x}}dx$;

3) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)^3}}dx$; 4) $\int_0^\pi \frac{\ln\sin x}{x\sqrt{\sin x}}dx$.

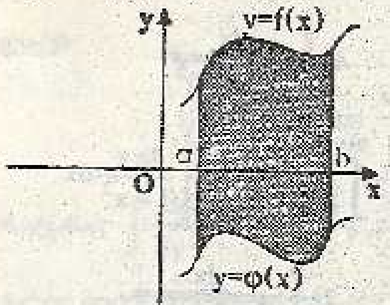
§18. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული გამოყენება

I. ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა.

1. ფართობის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში. როგორც ვიცით იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია არაუარყოფითი, უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, Ox ღერძით და $x=a$, $x=b$ წრფეებით გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ და $y=\varphi(x)$, $\varphi(x)\le f(x)$, უწყვეტ ფუნქციათა გრაფიკებით და $x=a$, $x=b$ წრფეებით (ნახ. 8) გამოითვლება ფორმულით



ნახ. 8

$$S=\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx. \qquad (1)$$

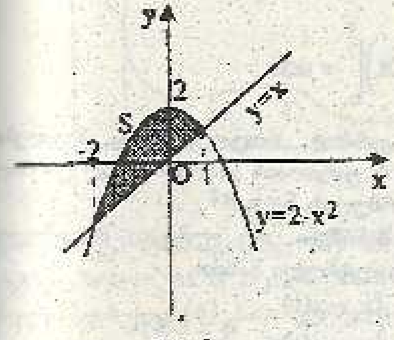
მაგალითი 1. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=2-x^2$ და $y=x$ ფუნქციათა გრაფიკებით (ნახ. 9).

ამოხსნა. თავდაპირველად ვიპოვოთ ამ ფუნქციათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილთა აბსცისები. $2-x^2=x$ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ, რომ ეს აბსცისებია $x_1=-2$ და $x_2=1$. (1) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$S=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

2. ფართობის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით. ვთქვათ მრუდწირული ტრაპეცია შემოსაზღვრულია Ox ღერძით, $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ წრფეებით და ფუნქციის გრაფიკით, რომლის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=g(t), \end{cases} \qquad (2)$$



ნახ. 9

სადაც $g(t)$ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო $\varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადია, ამასთან $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. თუ (2) სისტემიდან გამოვრიცხავთ t ცვლადს მივიღებთ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $y=g\left(\varphi^{-1}(x)\right)=f(x)$ ფუნქციას და მაშასადამე მრუდწირული ტრაპეციის S ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx.$$

თუ მიღებულ ინტეგრალში მოვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას $x=\varphi(t)$, გვექნება

$$S=\int_\alpha^\beta g(t)\varphi'(t)dt. \qquad (3)$$

(3) წარმოადგენს მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულას, როდესაც ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ

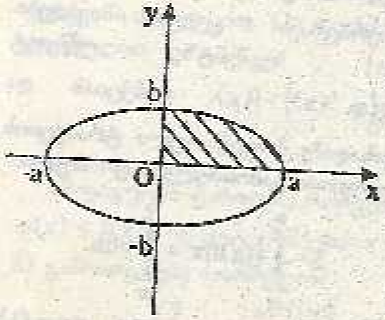
$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi,$$

ელიფსით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

ამოხსნა. რადგან ელიფსი სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ, ამიტომ საკმარისია გამოვთვალოთ, ფიგურის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია პირველ საკოორდინატო მეოთხედში (ნახ. 10). როდესაც $x=0$, მაშინ $t=\frac{\pi}{2}$, ხოლო, როდესაც $x=a$, მაშინ $t=0$. ე.ი. $\alpha=\frac{\pi}{2}$ და $\beta=0$. მაშასადამე (3) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$S=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(a\cos t)'dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt =$$

$$=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$



ნახ. 10

კერძოდ, როცა $a=b=R$, მივიღებთ წრის ფართობის გამოსათვლელ ცნობილ ფორმულას $S=\pi R^2$.

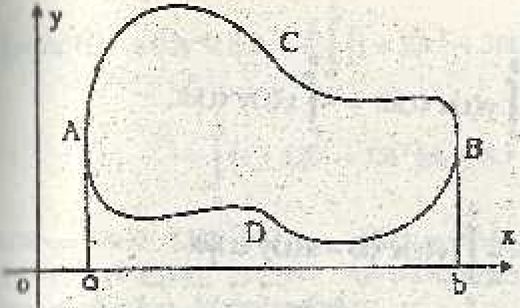
შენიშვნა. თუ ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta, \qquad (4)$$

სადაც $x(t)$ ფუნქციას $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე აქვს უწყვეტი არაუარყოფითი წარმოებული და $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, ხოლო $y(t)$ ფუნქცია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე უწყვეტია და არაუარყოფითი, მაშინ როგორც ვიცით მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება ფორმულით (იხ. (3)):

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

ახლა ვთქვათ გამოსათვლელია იმ ფიგურის ფართობი რომელიც შემოსაზღვრულია ჩაკეტილი L წირით $(x(\alpha) = x(\beta),\ y(\alpha) = y(\beta))$, რომლის განტოლება მოცემულია (4) პარამეტრული სახით. ვიგულისხმოთ, რომ L წირს Oy ღერძის პარალელური წრფეები კვეთენ არაუმეტეს ორი წერტილისა (ნახ. 11) და t-ს ცვლილებისას α-დან β-მდე $(\alpha < \beta)$ L წირი შემოსაზღვრავს არეს მისგან მარცხნივ. ვთქვათ $a=x(\alpha)=\min\limits_{[\alpha,\beta]} x(t)$, $b=\max\limits_{[\alpha,\beta]} x(t)=x(t_1)$, მაშინ მოცემული L წირის ADB რკალი არის იმ ფუნქციის გრაფიკი,



ნახ. 11

რომელიც მოცემულია აგრეთვე (4) პარამეტრული განტოლებებით $[\alpha,t_1]$ სეგმენტზე, ხოლო ACB რკალი არის იმ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც მოცემულია აგრეთვე (4) პარამეტრული განტოლებებით $[t_1,\beta]$ სეგმენტზე; მაშინ ცხადია, მე-11 ნახაზზე გამოსახული ფიგურის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_{\beta}^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{\alpha}^{t_1} y(t)x'(t)dt = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt. \qquad (5)$$

თუ გავითვალისწინებთ

$$x(t)y(t)\Big|_{\alpha}^{\beta} = 0$$

ტოლობას და ვიგულისხმებთ, რომ $y(t)$ უწყვეტად წარმოებადია, მაშინ (5) ინტეგრალზე ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt. \qquad (6)$$

(5) და (6) ტოლობებიდან გვაქვს

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt. \qquad (7)$$

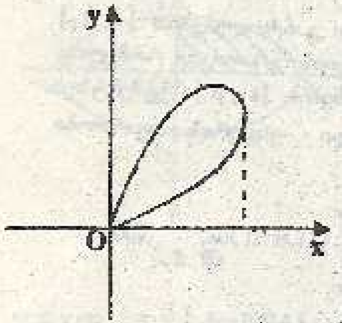
ხშირად (7) ფორმულის გამოყენებით, ჩაკეტილი წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობის გამოთვლა უფრო მარტივია ვიდრე (5) და (6) ფორმულებით.

თუ t-ს ცვლილებისას α-დან β-მდე $(\alpha < \beta)$ L წირი შემოსაზღვრავს არეს მისგან მარჯვნივ, მაშინ

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt=-\int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt,$$

ან

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[y(t)x'(t)-x(t)y'(t)\right]dt\,.$$



ნახ. 12

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი რომელიც შემოსაზღვრულია წირით (ნახ. 12)

$$\begin{cases} x=a\sin t\cos^2 t, \\ y=a\cos t\sin^2 t, \end{cases} \quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

ამოხსნა. (7) ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$S=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin t\cos^2 t\left(2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t\right)-\right.$$

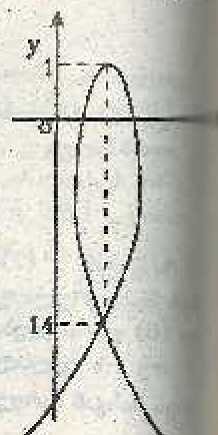
$$\left.-\cos t\sin^2 t\left(\cos^3 t-2\sin^2 t\cos t\right)\right]dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{\pi a^2}{32}.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია

$$\begin{cases} x=1+t-t^3, \\ y=1-15t^2, \end{cases}$$

წირის მარყუჟით (ნახ. 13).

ამოხსნა. $x(\alpha)=x(\beta)$ და $y(\alpha)=y(\beta)$ პირობებიდან, გვაქვს $\alpha=-1$ და $\beta=1$. ამიტომ ვღებულობთ



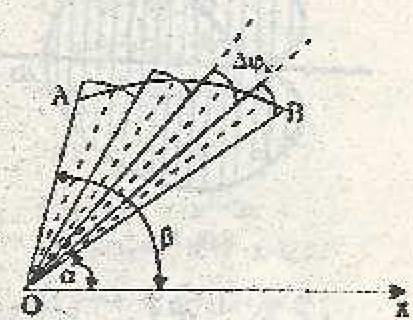
ნახ. 13

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[y(t)x'(t)-x(t)y'(t)\right]dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1+12t^2-30t^3+15t^4\right)dt=$$

$$=\int_0^1\left(1+12t^2+15t^4\right)dt=8.$$

შევნიშნოთ, რომ (5), (6) და (7) ფორმულები მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ფიგურა შემოსაზღვრულია ისეთი ჩაკეტილი წირით, რომელსაც კოორდინატთა ღერძების პარალელური წრფეები კვეთენ ორზე მეტ წერტილში.

3. ფართობის გამოთვლა პოლარულ კოორდინატებში. ვთქვათ L წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, სადაც $\rho(\varphi)$ არის $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე უწყვეტი, არაუარყოფითი ფუნქცია. ფიგურას, რომელიც შემოსაზღვრულია L წირით და ორი სხივით, რომლებიც პოლარულ ღერძთან ადგენენ α და β კუთხეებს, მრუდწირული სექტორი ეწოდება (ნახ. 14).



ნახ. 14

დავყოთ $[\alpha,\beta]$ სეგმენტი ნებისმიერად წერტილებით

$$\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\dots<\varphi_n=\beta.$$

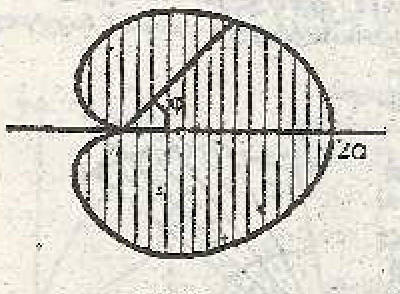
ყოველი $[\varphi_{k-1},\varphi_k]$, $k=1,2,\dots,n$ სეგმენტისათვის ავაგოთ წრიული სექტორი, რომლის რადიუსია $\rho(\xi_k)$, სადაც ξ_k არის ნებისმიერი წერტილი $[\varphi_{k-1},\varphi_k]$ სეგმენტიდან. ცხადია, ასეთ წრიულ სექტორთა ფართობების ჯამია

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho^2(\xi_k)\Delta\varphi_k, \qquad (8)$$

სადაც $\Delta\varphi_k=\varphi_k-\varphi_{k-1}$. მეორეს მხრივ (8) წარმოადგენს $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე. რადგან $\rho(\varphi)$ ფუნქცია უწყვეტია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, ამიტომ, თუ $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta\varphi_k\}$, გვაქვს

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho^2(\xi_k)\Delta\varphi_k=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

განსაზღვრებით მიღებულია, რომ მრუდწირული სექტორის ფართობი (8) ჯამის ზღვარია, როცა $\lambda \to 0$, ე.ი.



ნახ. 15

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi. \quad (9)$$

მაგალითი 5. გამოთვალეთ $\rho = a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (ნახ. 15).

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, ამიტომ თუ გამოვიყენებთ (9) ფორმულას, მივიღებთ

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\varphi+2\sin\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

გამოთვალეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (NN18.1-18.13):

18.1. 1) $y=2x^2$, $y=0$, $x=4$; 2) $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=3$;
3) $y=x^3$, $y=0$, $x=1$, $x=3$; 4) $y=x^4$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

18.2. 1) $y=\frac{10}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$; 2) $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$;
3) $y=e^{-x}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$; 4) $y=e^x$, $y=0$, $x=1$, $x=\ln 7$.

18.3. 1) $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=4$; 2) $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$;
3) $y=4\cos 2x$, $y=0$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$; 4) $y=\frac{4}{\cos^2 x}$, $y=0$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.

18.4. 1) $y=4x-x^2$, $y=0$; 2) $y=6x-x^2$, $y=0$;
3) $y=2+x-x^2$, $y=0$; 4) $y=7x-3x^2-2$, $y=0$.

18.5. 1) $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$; 2) $y=|\ln x|$, $y=0$, $x=\frac{1}{e}$, $x=e$;
3) $y=\operatorname{ch}x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$; 4) $y=\operatorname{tg}x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{3}$.

18.6. 1) $y=x$, $y=2x$, $x=4$; 2) $y=x^4$, $y=1$;
3) $y=x^2$, $y=2x$; 4) $y=x^2+4x$, $y=x+4$.

18.7. 1) $y=2x-x^2$, $y=x$; 2) $y=x^2+2x$, $y=x+2$;
3) $y=x^2-3x+4$, $y=x+1$; 4) $y=x^2+4x$, $y=x+4$.

18.8. 1) $y=x^2$, $y=2x-x^2$; 2) $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=3x-\frac{1}{2}x^2$;
3) $y=x^2-2x+2$, $y=2+4x-x^2$; 4) $y=-x^2$, $y=x^2-2x-4$.

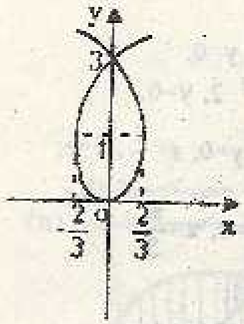
18.9. 1) $y^2=x$, $x=4$; 2) $y^2=2x+1$, $x-y-1=0$;
3) $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$, $x=0$; 4) $y^2=4-x$, $y^2=12+3x$.

18.10. 1) $y^2=3x$, $x^2=3y$; 2) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$;
3) $y=x^2$, $y=\frac{1}{3}x^3$; 4) $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x}$.

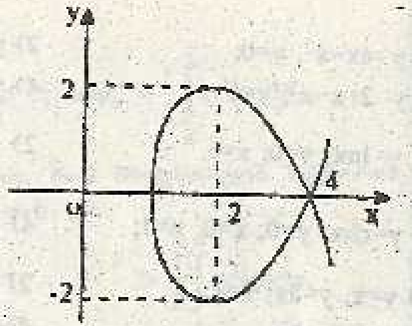
18.11. 1) $y=\frac{5}{x}$, $y=6-x$; 2) $y=\frac{6}{x}$, $y=7-x$;
3) $y=\frac{6}{x+5}$, $y=|x|$, $x\ge -2$; 4) $y=\frac{4}{x^2}$, $y=7-2x$.

18.12. 1) $y=x+1$, $y=2-x$, $y=0$; 2) $y=2-2x$, $y=x-1$, $y=2$;
3) $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{10}{3}-x$, $x\ge 1$; 4) $y=x-x^2$, $y=x\sqrt{1-x}$.

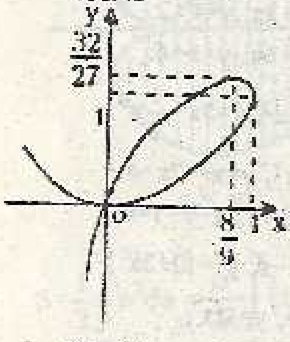
18.13. 1) $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=\frac{1}{1+x^2}$; 2) $y=\sqrt{3}x^2$, $y=\sqrt{4-x^2}$;
3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 4) $y^2+x^2=2$, $y^2=2x-1$, $x\ge\frac{1}{2}$.



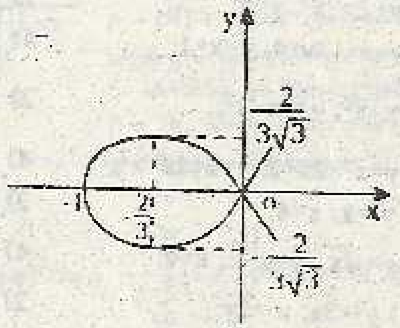
ნახ. 16



ნახ. 17



ნახ. 18



ნახ. 19

18.14. გამოთვალეთ პარამეტრული სახით მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი:

1) $\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases}$ (წრეწირი); 2) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ (ელიფსი);

3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$, (ციკლოიდა), და $y = 0$;

4) $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = b\cos^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$, (ასტროიდა);

5) $\begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t, \\ y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t, \end{cases}$ $c^2 = a^2 - b^2$, $0 \le t \le 2\pi$;

6) $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ (კარდიოიდა).

18.15. გამოთვალეთ პარამეტრული სახით მოცემული წირის მარყუჟით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი:

1) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t(3 - t^2), \\ y = t^2; \end{cases}$ (ნახ. 16); 2) $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^3 - 3t; \end{cases}$ (ნახ. 17);

3) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3; \end{cases}$ (ნახ. 18); 4) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t; \end{cases}$ (ნახ. 19).

გამოთვალეთ პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (NN18.16-18.17):

18.16. 1) $r = a\cos\varphi$ (წრეწირი);

2) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (ბერნულის ლემნისკატა), (ნახ. 20);

3) $r^2 = a^2\sin 2\varphi$ (ლემნისკატა), (ნახ. 21);

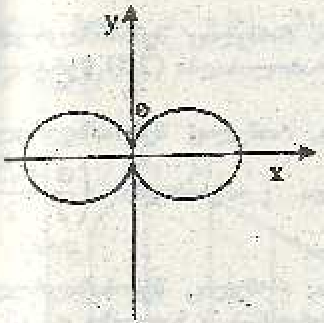
4) $r = a\sin 2\varphi$ (ოთხფოთოლა), (ნახ. 22).

18.17. 1) $r = a\sin 3\varphi$ (სამფოთოლა) (ნახ. 23);

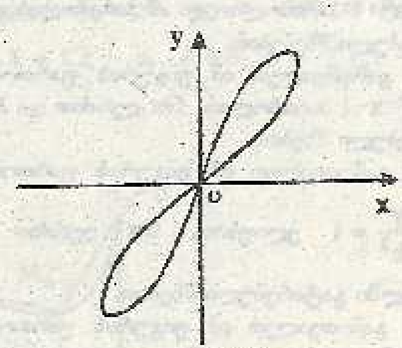
2) $r = a\cos 3\varphi$ (სამფოთოლა) (ნახ. 24);

3) $r^2 = a^2\cos 4\varphi$;

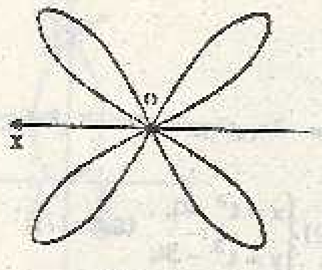
4) $r = 3 + 2\cos\varphi$.



ნახ. 20



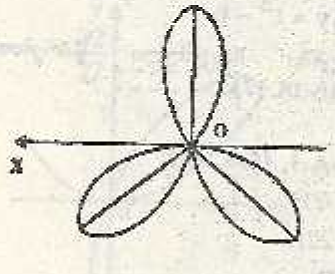
ნახ. 21



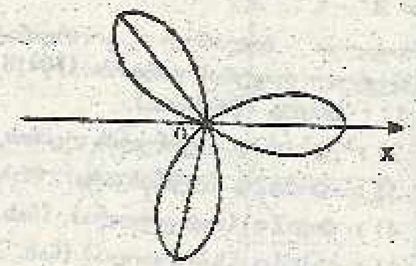
ნახ. 22

18.18. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2-2x+3$ პარაბოლით, საკოორდინატო ღერძებით და პარაბოლისადმი (3;6) წერტილში გავლებული მხებით.

18.19. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2+4x+9$ პარაბოლით და ამ პარაბოლისადმი (−3;6) და (0;9) წერტილებში გატარებული მხებებით.



ნახ. 23



ნახ. 24

18.20. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=4x-x^2+1$ პარაბოლით და ამ პარაბოლისადმი (0;1) და (3;4) წერტილებში გატარებული მხებებით.

18.21. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $(y-2)^2=x-1$ პარაბოლით, Ox ღერძით და პარაბოლისადმი (2;3) წერტილში გატარებული მხებით.

18.22. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსით, Ox ღერძით და ელიფსისადმი $\left(\frac{a}{2};\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ წერტილში გატარებული მხებით.

18.23. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2-y^2=9$ ჰიპერბოლით, Ox ღერძით და კოორდინატთა სათავეზე და (5;4) წერტილზე გამავალი წრფით.

18.24. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=(x-1)^5+1$ წირით, Ox ღერძით და ამ წირისადმი $10x-2y-5=0$ წრფის პარალელურად გავლებული მხებით.

18.25. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2$ პარაბოლით და ამ პარაბოლისადმი (1;1) წერტილში გავლებული ნორმალით.

18.26. იპოვეთ იმ ფიგურის ფართობთა შორის უმცირესი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y^2=2x$ პარაბოლით და ამ პარაბოლის ნორმალით.

18.27. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია მოცემული წირით და მისი ასიმპტოტით:

1) $y=\frac{1}{1+x^2}$; 2) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$; 3) $y^2=\frac{x^3}{2-x}$; 4) $xy^2=8-4x$;

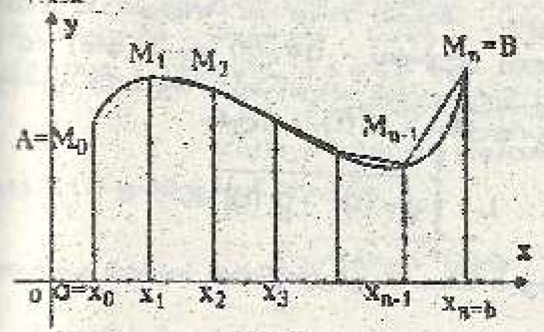
5) $y=x^2e^{-x^2}$; 6) $y^2=\frac{x^3}{2-x}$.

II წირის რკალის სიგრძე

1. რკალის სიგრძის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში. ვთქვათ ბრტყელი AB წირის განტოლება მოცემულია $y=f(x)$ სახით; სადაც $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია. დავყოთ AB წირი n ნაწილად წერტილებით (ნახ. 25)

$$A=M_0, M_1, M_2, \cdots, M_n=B.$$

თუ დაყოფის მეზობელ წერტილებს შევაერთებთ ქორდებით მივიღებთ მოცემულ წირში ჩახაზულ გარკვეულ ტეხილს. თუ σ არის ამ ტეხილის სიგრძე, ხოლო $\ell_k=|M_{k-1}M_k|$, $k=1,2,\cdots,n$, მაშინ $\sigma=\sum_{k=1}^{n}\ell_k$. ვთქვათ $\mu=\max_{1\le k\le n}\{\ell_k\}$.



ნახ. 25

განსაზღვრება. თუ არსებობს $\sigma = \sum_{k=1}^{n} \ell_k$ ჯამის ზღვარი

$$\lim_{\mu \to 0} \sigma = L,$$

მაშინ AB წირს ეწოდება წრფევადი, ხოლო L რიცხვს – AB წირის სიგრძე.

თეორემა. თუ AB წირის განტოლება მოცემულია $y=f(x)$ სახით, სადაც $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, მაშინ AB წირი წრფევადია და მისი სიგრძე L გამოითვლება ფორმულით

$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (10)$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ $y=\operatorname{ch}x$ განტოლებით მოცემული წირის რკალის სიგრძე, როცა $0 \le x \le 1$.

ამოხსნა. (10) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx=\int_0^1 \operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x\Big|_0^1=\operatorname{sh}1=\frac{e-e^{-1}}{2}=\frac{e^2-1}{2e}.$$

2. რკალის სიგრძის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით. ვთქვათ AB წირი წარმოადგენს რაიმე უწყვეტი ფუნქციის გრაფიკს, რომლის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=g(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

სადაც $\varphi(t)$ და $g(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია. რადგან $x=\varphi(t)$ მონოტონური ფუნქციაა (იხილეთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრება), ამიტომ, როცა t-ს ზრდადია $a=\varphi(\alpha)$ და $b=\varphi(\beta)$, ხოლო, როცა კლებადია – $a=\varphi(\beta)$ და $b=\varphi(\alpha)$ (a და b შესაბამისად A და B წერტილების აბსცისებია). თუ (10) ფორმულაში მოვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას $x=\varphi(t)$, მივიღებთ

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt. \qquad (11)$$

ეს არის პარამეტრული სახით მოცემული წირის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა.

(11) ფორმულა მართებულია პარამეტრული სახით მოცემული წირისათვის, თუ $\varphi(t)$ და $g(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია.

შევნიშნოთ, რომ თუ სივრცითი წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \\ z=z(t), \end{cases}$$

სადაც $x(t)$, $y(t)$ და $z(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ წირი წრფევადია და მისი სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt.$$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0 \le t \le 2\pi,$$

ციკლოიდის ერთი თაღის სიგრძე.

ამოხსნა. რადგან $x'=\varphi'(t)=a(1-\cos t)$ და $y'=g'(t)=a\sin t$, ამიტომ (11) ფორმულის ძალით

$$L=\int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

3. რკალის სიგრძის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში. ახლა ვთქვათ, AB წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში განტოლებით $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, სადაც $\rho(\varphi)$ არის $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, ამასთან A და B წერტილებს შეესაბამება φ-ს α და β მნიშვნელობები. თუ გადავალთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებზე, მაშინ მივიღებთ მოცემული წირის პარამეტრულ განტოლებებს $x=\rho(\varphi)\cos\varphi$, $y=\rho(\varphi)\sin\varphi$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ (φ – პარამეტრია). რადგან

$$x'(\varphi)=\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi,$$

$$y'(\varphi)=\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi,$$

ამიტომ (11) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi. \qquad (12)$$

მაგალითი 8. გამოთვალეთ $\rho = a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდის სიგრძე (ნახ. 15).

ამოხსნა. რადგან კარდიოიდი სიმეტრიულია პოლარული ღერძის მიმართ (12) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{[a(1+\cos\varphi)]^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

იპოვეთ წირის რკალის სიგრძე (NN18.28-18.36):

18.28. 1) $y=2x^{\frac{3}{2}},\ 0\le x\le 1;$ 2) $y=x^2,\ 0\le x\le 1;$

3) $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x},\ 0\le x\le 3;$ 4) $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}.$

18.29. 1) $y=\frac{x^2}{2}-\frac{\ln x}{4},\ 1\le x\le 3;$ 2) $y=e^x,\ 0\le x\le \ln 7;$

3) $y=\ln(x^2-1),\ 2\le x\le 5;$ 4) $y=2\sqrt{1+e^{\frac{x}{2}}},\ \ln 9\le x\le \ln 64.$

18.30. 1) $y=2\sqrt{x},\ 0\le x\le 1;$ 2) $y=\ln\sin x,\ \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3};$

3) $y=\ln\cos x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{6};$ 4) $y=\sqrt{2x-x^2},\ \frac{1}{4}\le x\le 1.$

18.31. 1) $y=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}},\ 0\le x\le 9;$ 2) $y=\mathrm{ch}\,x,\ 0\le x\le a;$

3) $x=\frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}},\ 0\le x\le 2\sqrt{3};$ 4) $x=\ln\cos y,\ 0\le y\le\frac{\pi}{3}.$

18.32. 1) $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ (ასტროიდა);

2) $\begin{cases}x=\frac{5}{2}\cos^3 t,\\ y=3\sin^3 t;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=a(3\cos t-\cos 3t),\\ y=a(3\sin t-\sin 3t),\end{cases}\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2};$

4) $\begin{cases}x=t\cos(\ln t),\\ y=t\sin(\ln t),\end{cases}\quad 1\le t\le e.$

18.33. 1) $\begin{cases}x=\cos t+t\sin t,\\ y=\sin t-t\cos t,\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi;$ 2) $\begin{cases}x=\cos^4 t,\\ y=\sin^4 t;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=\mathrm{ch}^3 t,\\ y=\mathrm{sh}^3 t,\end{cases}\quad 0\le t\le\frac{1}{2};$ 4) $\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t,\end{cases}\quad 0\le t\le 1.$

18.34. 1) $r=a\sin\varphi;$ 2) $r=2(1+\cos\varphi),\ r\le 1;$

3) $r=a(1-\sin\varphi),\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{6};$ 4) $r=a\,\mathrm{th}\frac{\varphi}{2},\ 0\le\varphi\le 2$

18.35. 1) $r=a\cos^3\frac{\varphi}{3};$ 2) $r=a\sin^4\frac{\varphi}{4};$

3) $r=a\cos^5\frac{\varphi}{5};$ 4) $r=\frac{1}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}},\ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}.$

18.36. 1) $r=a\varphi,\ 0\le\varphi\le 1;$ 2) $r=a\varphi^2,\ 0\le\varphi\le 4;$

3) $r=a\varphi^3,\ 0\le\varphi\le 4;$ 4) $r=a\varphi^4,\ 0\le\varphi\le 3.$

გამოთვალეთ სივრცითი წირის რკალის სიგრძე (NN18.37-18.38):

18.37. 1) $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\\ z=bt,\end{cases}$ (ხრახნწირი) $\quad 0\le t\le 2\pi;$

2) $\begin{cases}x=t,\\ y=t^2,\\ z=\frac{2}{3}t^3,\end{cases}\quad 0\le t\le 3;$

3) $\begin{cases} x = at^2, \\ y = a\left(t + \dfrac{1}{3}t^3\right), & 0 \le t \le \sqrt{3}; \\ z = a\left(t - \dfrac{1}{3}t^3\right), \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t}, & 0 \le t \le 1. \\ z = t\sqrt{2}, \end{cases}$

18.38. 1) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, & 0 \le t \le t_0; \\ z = e^t, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = a(1 + \cos t), \\ y = a(t - \sin t), & 0 \le t \le t; \\ z = 4a \sin \dfrac{t}{2}, \end{cases}$

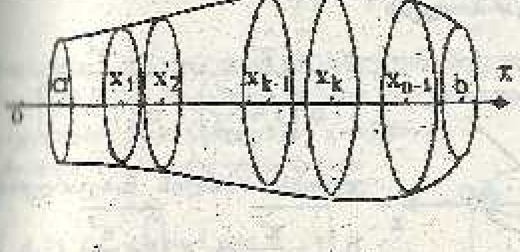
3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), & 0 \le t \le 2\pi; \\ z = 4a \cos \dfrac{t}{2}, \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}t, \\ y = b\,\mathrm{sh}t, & 0 \le t \le t_0. \\ z = at, \end{cases}$

III. სხეულის მოცულობის გამოთვლა.

1. სხეულის მოცულობის გამოთვლა განივი კვეთის ფართობების საშუალებით. ვთქვათ მოცემულია რაიმე სხეული, რომლისთვისაც ცნობილია

Ox ღერძის მართობული ნებისმიერი სიბრტყით კვეთის ფართობი (ნახ. 26).



ნახ. 26

ასეთ კვეთებს განივ კვეთებს უწოდებენ. ცხადია განივი კვეთა სავსებით განისაზღვრება სიბრტყით Ox ღერძის გადაკვეთის წერტილის აბსცისით. მაშასადამე განივი კვეთის ფართობი წარმოადგენს x-ის ფუნქციას. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $S(x)$-ით და ვიგულისხმოთ, რომ იგი ცნობილია. a და b-თი აღვნიშნოთ კიდური კვეთების შესაბამისი აბსცისები.

განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის რაიმე λ-დანაწილება. თუ დაყოფის წერტილებზე გავავლებთ Ox ღერძის მართობულ სიბრტყეებს, მაშინ სხეული დაიყოფა n ნაწილად (ნახ. 26).

ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k, \tag{13}$$

სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. ეს ჯამი უდრის იმ ცილინდრების მოცულობათა ჯამს, რომელთა ფუძის ფართობია $S(\xi_k)$, ხოლო სიმაღლე Δx_k, $k = 1, 2, \cdots, n$. თუ არსებობს (13) ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \to 0$, მაშინ ამ ზღვარს უწოდებენ სხეულის მოცულობას, ე.ი.

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k. \tag{14}$$

რადგან (13) წარმოადგენს $S(x)$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს, ამიტომ, თუ $S(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, (14)-დან გვაქვს

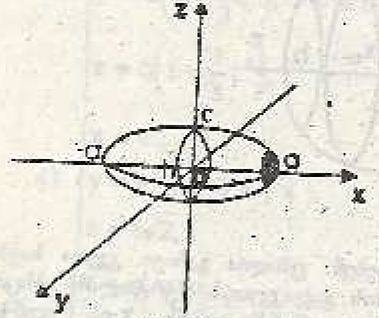
$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{15}$$

მაგალითი 9. გამოვთვალოთ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ელიფსოიდით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

ამოხსნა. ელიფსოიდის განივი კვეთა, რომლის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისაა x, წარმოადგენს



ნახ. 27

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$$

ელიფსს, რომლის ნახევარღერძებია $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ და $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ (ნახ. 27). თუ ამ ელიფსით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობს აღვნიშნავთ $S(x)$-ით, გვექნება (იხ. მაგალითი [illegible])

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

აქედან კი (15)-ის ძალით

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

კერძოდ, თუ $a=b=c=R$, მივიღებთ R-რადიუსიანი ბირთვის მოცულობის გამოსათვლელ ფორმულას

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

2) ბრუნვითი სხეულის მოცულობის გამოთვლა.

ა) ვთქვათ არაუარყოფითი $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ მრუდწირული ტრაპეცია, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, Ox ღერძით და $x=a$, $x=b$ წრფეებით. ვიპოვოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება ამ მრუდწირული ტრაპეციის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (ნახ. 28).

ამ სხეულის განივი კვეთა, რომელიც შეესაბამება $[a,b]$ სეგმენტის x წერტილს წარმოადგენს წრეს რადიუსით $f(x)$. ამიტომ კვეთის ფართობია

$$S(x)=\pi[f(x)]^2=\pi y^2.$$

(15) ფორმულის ძალით გვაქვს

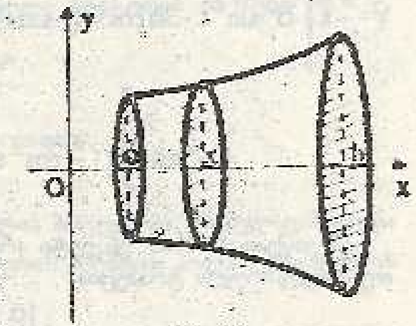
$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx=\pi\int_a^b y^2dx. \qquad (16)$$

მაგალითი 10. ვიპოვოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $[0,\pi]$ სეგმენტზე მოცემული $y=\sin x$ სინუსოიდით შექმნილი მრუდწირული ტრაპეციის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

ამოხსნა. (16) ფორმულის ძალით

$$V=\pi\int_0^\pi\sin^2x\,dx=$$

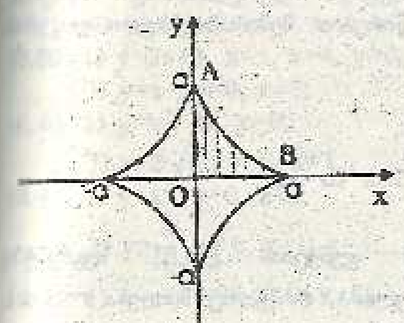
$$=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{2}.$$



ნახ. 28

ბ) ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია პარამეტრული სახით $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$. თუ $x(t)$ ფუნქციას $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე აქვს არაუარყოფითი უწყვეტი წარმოებული და $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, ხოლო $y(t)$ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, მაშინ მრუდწირული ტრაპეციის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$V=\pi\int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt.$$



ნახ. 29

თუ $x(t)$ ფუნქცია კლებადია და $x(\alpha)=b$, $x(\beta)=a$, მაშინ ზემოთ მოყვანილ პირობებში

$$V=-\pi\int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt. \qquad (17)$$

მაგალითი 11. გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $x=a\cos^3t$, $y=a\sin^3t$, $0\le t\le 2\pi$

ასტროიდის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

ამოხსნა. ასტროიდა სიმეტრიულია Ox და Oy ღერძების მიმართ, ამიტომ საძიებელი მოცულობა უდრის $2V$, სადაც V არის იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება OAB (ნახ. 29) მრუდწირული ტრაპეციის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო. (17) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$V=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt=$$

$$=-3\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)^3\cos^2 t\,d(\cos t)=\frac{16}{105}\pi a^3.$$

გ) ვთქვათ $y=f(x)$ უწყვეტი არაუარყოფითი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე. თუ მრუდწირული ტრაპეცია

$$\begin{cases} a\le x\le b, \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$$

ბრუნავს Oy ღერძის გარშემო, მაშინ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx. \qquad (18)$$

მაგალითი 12. გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $y=\frac{k^2}{x}$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ $(b>a>0)$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო.

ამოხსნა. (18) ფორმულის ძალით

$$V=2\pi\int_a^b k^2dx=2\pi k^2(b-a).$$

დ) ვთქვათ $r=r(\varphi)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე $(0\le\alpha<\beta\le\pi)$. იმ T სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r=r(\varphi)$, $\varphi=\alpha$ და $\varphi=\beta$ წირებით შემოსაზღვრული სექტორის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო, გამოითვლება ფორმულით

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi. \qquad (19)$$

შენიშვნა. ვთქვათ $r=r(\varphi)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე $\left(-\frac{\pi}{2}\le\alpha<\beta\le\frac{\pi}{2}\right)$. იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r=r(\varphi)$, $\varphi=\alpha$ და $\varphi=\beta$ წირებით შემოსაზღვრული სექტორის ბრუნვით $\varphi=\frac{\pi}{2}$ სხივის გარშემო, გამოითვლება ფორმულით

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi.$$

მაგალითი 13. გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r=a\sqrt{\sin\varphi}$ წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო.

ამოხსნა. (19) ფორმულის ძალით

$$V=\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^\pi\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\pi^2a^3.$$

გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (NN18.39-18.42):

18.39. 1) $y=2x+1$, $x=1$, $x=4$, $y=0$; 2) $y=x+3$, $y=0$, $x=0$, $x=3$;
3) $y=x^2$, $y=0$, $x=1$; 4) $y=x^2+2$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

18.40. 1) $y=x^2-2x$, $y=0$; 2) $y=x-x^2$, $y=0$;
3) $y=8\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$; 4) $y=3\sqrt{2x}$, $y=0$, $x=\sqrt{3}$.

18.41. 1) $y=x^3$, $y=0$, $x=2$; 2) $y=1-x^3$, $y=0$, $x=2$;
3) $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$; 4) $xy=5$, $y=0$, $x=1$, $x=5$.

18.42. 1) $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$; 2) $y=2^x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$;
3) $y=\sin x$, $y=0$, $-\pi\le x\le 0$; 4) $y=\cos x$, $y=0$, $-\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

18.43. 1) $y^2=2px,\ y=0,\ x=a$; 2) $xy=a^2,\ y=0,\ x=a,\ x=2a$;

3) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}},\ y=0,\ x=\frac{1}{4},\ x=1$; 4) $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}};\ y=0,\ x=a.\ (x\geq 0)$.

18.44. 1) $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a},\ y=0,\ x=0,\ x=b$; 2) $y=\sqrt{x}e^{-x},\ y=0,\ x=a$;

3) $y=\frac{\ln x}{x},\ y=0,\ x=e$. 4) $y=\sin\sqrt{x},\ y=0,\ 0\leq x\leq \pi^2$.

18.45. 1) $y=\frac{1}{2}x^2,\ 2x+2y-3=0$; 2) $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$;

3) $y=\frac{1}{x},\ y=x,\ y=0\ x=2$; 4) $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=0,\ 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$.

18.46. 1) $y=e^{-2x}-1,\ y=e^{-x}+1,\ x=0$;

2) $y=4-x^2,\ y=3x,\ y=0,\ -2\leq x\leq 0$;

3) $y=\frac{1}{4}x^2,\ y=\frac{1}{2}(x-3)^2,\ y=0$;

4) $y=\sqrt{2x},\ y=2(x-1)^{\frac{3}{2}},\ y=0$.

18.47. 1) $y^2=2x,\ y=2,\ x=0$; 2) $y=\frac{1}{x},\ y=x,\ x=3$;

3) $y=\frac{1}{4}x^2,\ y^2=4x$; 4) $y^2=2x,\ y^2=2(1-x)$.

გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო (NN18.48; 18.49):

18.48. 1) $y=e^{x^2},\ y=0,\ x=0,\ x=1$; 2) $y=\mathrm{tg}x^2,\ y=0,\ x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$;

3) $y=2x-x^2,\ y=0$; 4) $y=\sin x,\ y=0,\ 2\pi\leq x\leq 3\pi$.

18.49. 1) $2py=1-(x-2)^2,\ y=0$;

2) $y=\sin x,\ y=1,\ x=0,\ 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$;

3) $y=\cos x,\ y=1,\ 0\leq x\leq 2\pi$; 4) $y^2=4x,\ y=x$.

18.50. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით: ა) Ox ღერძის გარშემო, ბ) Oy ღერძის გარშემო:

1) $y=(x-1)(x-2),\ y=0$; 2) $y=\sin x,\ y=0,\ 0\leq x\leq\pi$;

3) $y=\arcsin x,\ y=0,\ x=1$; 4) $y=\frac{1}{1+x^2},\ y=0,\ x=0,\ x=1$;

5) $y=e^x+6,\ y=e^{2x},\ x=0$; 6) $y=x,\ y=x+\sin^2 x,\ 0\leq x\leq\pi$.

18.51. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით $y=1$ წრფის გარშემო:

1) $y=\frac{x^2}{4},\ y=1$; 2) $y=\sqrt[3]{x},\ y=\frac{1}{x},\ y=0,\ x=2$;

3) $y=\sqrt[3]{x},\ y=x^2$; 4) $y=2x^2-1,\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ y=-1,\ y=8$.

18.52. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო:

1) $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin 2t,\end{cases}\ y=0,\ 0\leq x\leq a$; 2) $\begin{cases}x=\frac{2at^2}{1+t^2},\\ y=\frac{2at^3}{1+t^2},\end{cases}\ x=a$;

3) $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x=a(1+\cos t),\\ y=a(\mathrm{tg}t+\sin t),\end{cases}\ x=\frac{3}{2}a$.

18.53. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით: ა) Ox ღერძის გარშემო, ბ) Oy ღერძის გარშემო.

1) $\begin{cases}x=a\sin t,\\ y=a\sin 2t,\end{cases}\ 0<t\leq 2\pi$; 2) $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\ y=0,\ 0\leq t\leq 2\pi$;

3) $\begin{cases}x=t^3,\\ y=t^2,\end{cases}\ y=0,\ |x|=1$; 4) $\begin{cases}x=at^2,\\ y=a\ln t,\end{cases}\ x=0,\ y=0,\ (a>0)$.

გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო (NN18.54-18.56):

18.54. 1) $r=a\varphi,\ \varphi=0,\ \varphi=\pi$; 2) $r=\sqrt[3]{\frac{\varphi}{\pi}},\ \varphi=0,\ \varphi=\pi$;

3) $r=a\sqrt[3]{\cos 3\varphi},\ \varphi=0,\ \varphi=\frac{\pi}{6}$;

4) $r=a\sqrt[3]{\cos 3\varphi},\ \varphi=\frac{7\pi}{6},\ \varphi=\frac{3\pi}{2}$.

18.55. 1) $r=a\cos^2\varphi$; 2) $r=2a\sin\varphi$; 3) $r=a\cos^3\varphi$; 4) $r=a\sin^2\varphi$.

18.56. 1) $r=ae^{\varphi},\ \varphi=0,\ \varphi=\pi$; 2) $r=a(1+\cos\varphi)$;

3) $r=2a\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi},\ \varphi=0,\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}$; 4) $r=\dfrac{p}{1+e\cos\varphi},\ \varphi=0,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}$;

5) $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$; 6) $r=a\sqrt{\sin 2\varphi}$.

განივი კვეთის ფართობების საშუალებით იპოვეთ მოცემული ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა (NN18.57-18.59):

18.57. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ z=-H,\ z=H$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{(z-H)^2}{H^2},\ z=0$;

3) $2z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2},\ z=H$;

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ \dfrac{9x^2}{a^2}+\dfrac{4y^2}{b^2}+\dfrac{16z^2}{c^2}=1$.

18.58. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ z=-H,\ z=H$;

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,\ z=H\ (H>c)$;

3) $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x+z}{a}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

4) $a^2(z^2-y^2)=x^2z^2,\ z=a$.

18.59. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \dfrac{z}{H}=\dfrac{x}{a},\ z=0$;

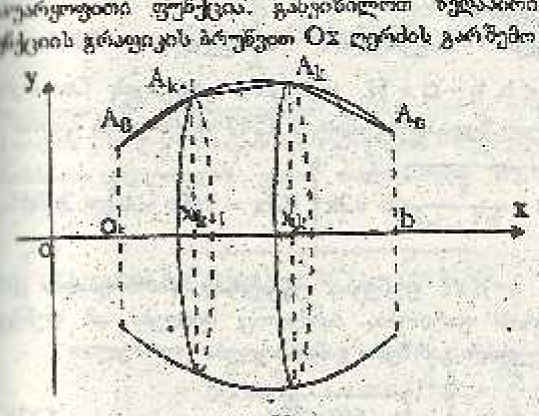
2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0,\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0\ (z\geq 0)$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

4) $\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2},\ \dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$.

IV. ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი

ვთქვათ $y=f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი, არაუარყოფითი ფუნქცია. განვიხილოთ ზედაპირი, რომელიც მიიღება ამ ფუნქციის გრაფიკის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (ნახ. 30).



ნახ. 30

განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილება

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

$A_0,A_1,\cdots,A_n$ იყოს ფუნქციის გრაფიკის შესაბამისი წერტილები. ავაგოთ ტეხილი $A_0A_1\cdots A_n$. Ox ღერძის გარშემო ამ ტეხილის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი უდრის წაკვეთილი კონუსების (ცილინდრების) გვერდითი ზედაპირების ფართობების ჯამს. ვთქვათ $\ell_k=|A_{k-1}A_k|=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\left[f(x_k)-f(x_{k-1})\right]^2}$, მაშინ ლაგრანჟის ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\ell_k=\sqrt{1+\left[f'(\xi_k)\right]^2}\,\Delta x_k,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

სადაც $x_{k-1}<\xi_k<x_k,\ \Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. ამიტომ ტეხილის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობია

$$\sum_{k=1}^{n}\pi\left[f(x_{k-1})+f(x_k)\right]\ell_k=\pi\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_{k-1})+f(x_k)\right]\cdot\sqrt{1+\left[f'(\xi_k)\right]^2}\,\Delta x_k. \quad (20)$$

განსაზღვრებით მიღებულია, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე არაუარყოფითი, უწყვეტად წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობია (20) ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda\to 0$. მტკიცდება, რომ ეს ზღვარი არსებობს და გამოითვლება ფორმულით

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \tag{21}$$

მაგალითი 14. გამოვთვალოთ R-რადიუსიანი და H სიმაღლის სფერული სარტყლის ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა. მოცემული სფერული სარტყელი წარმოადგენს $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $a\le x\le b$, $b-a=H$, ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებულ ზედაპირს. ამიტომ (21) ფორმულის ძალით

$$S=2\pi\int_a^b\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_a^b R\,dx=2\pi(b-a)=2\pi RH.$$

შენიშვნა 1. ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება ამ ფუნქციის გრაფიკის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო გამოითვლება ფორმულით

$$S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \tag{22}$$

მაგალითი 15. გამოვთვალოთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $y=\frac{1}{2}x^2$, $0\le x\le 1$ წირის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო.

ამოხსნა. (22) ფორმულის ძალით

$$S=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

შენიშვნა 2. ვთქვათ AB წირი წარმოადგენს რაიმე ფუნქციის გრაფიკს, რომლის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=g(t), \end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta,$$

სადაც $\varphi(t)$ და $g(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, ამასთან $g(t)\ge 0$. რადგანაც $\varphi(t)$ მონოტონური ფუნქციაა (იხილეთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრება), ამიტომ, როცა ის ზრდადია $a=\varphi(\alpha)$ და $b=\varphi(\beta)$, ხოლო, როცა კლებადია - $a=\varphi(\beta)$ და $b=\varphi(\alpha)$, (a და b შესაბამისად A და B წერტილების აბსცისებია). Ox ღერძის გარშემო ასეთი

წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის მისაღებად (21) ფორმულაში მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $x=\varphi(t)$. მივიღებთ

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta g(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt. \tag{23}$$

მაგალითი 16. გამოვთვალოთ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი თაღის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა. ციკლოიდის ერთი თაღისათვის $0\le t\le 2\pi$, ამიტომ (23) ფორმულის ძალით

$$S=2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2+a^2(1-\cos t)^2}\,dt=$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,dt=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

შენიშვნა 3. ვთქვათ, AB წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში განტოლებით $\rho=\rho(\varphi)$, $0\le\alpha\le\varphi\le\beta\le\pi$, სადაც $\rho(\varphi)$ არის $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია. მაშინ ასეთი წირის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელად მივიღებთ ფორმულას

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+[\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi. \tag{24}$$

მაგალითი 17. გამოვთვალოთ $\rho=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდის (ნახ. 15) პოლარული ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა. (24) ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$S=2\pi\int_0^\pi a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi\,d\varphi=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

შენიშვნა 4. ვთქვათ $r=r(\varphi)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე $\left(-\frac{\pi}{2} \le \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $r=r(\varphi)$ წირის ბრუნვით $\varphi=\frac{\pi}{2}$ სხივის გარშემო, გამოითვლება ფორმულით

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+\left[r'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi. \qquad (25)$$

მაგალითი 17. გამოვთვალოთ $r^2=2a^2\cos 2\varphi$ ლემნისკატის $\varphi=\frac{\pi}{2}$ სხივის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა. (25) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$S=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\,d\varphi = 4\sqrt{2}\cdot\pi a^2.$$

გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება მოცემული წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (NN18.60-18.62):

18.60. 1) $x^2+y^2=R^2$; 2) $y=\sqrt{x},\ 2 \le x \le 6$;

3) $y=x^3,\ 0 \le x \le 1$; 4) $y=\frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12),\ 0 \le x \le 12$.

18.61. 1) $y^2=4ax,\ 0\le x\le 3a$; 2) $y=\sin x,\ 0\le x\le \pi$;

3) $y=e^{-x},\ 0\le x\le \ln 2$; 4) $y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x,\ 0\le x\le 3$.

18.62. 1) $y^2=4+x,\ -4\le x\le 2$; 2) $2ay=a^2+x^2,\ 0\le x\le a$;

3) $x^2+(y-b)^2=a^2,\ b>a$; 4) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

18.63. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება მოცემული წირის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო

1) $4x+2\ln y=y^2,\ e^{-1}\le y\le e$; 2) $9ay^2=4x^3,\ 0\le y\le \frac{2a}{3}$;

3) $x=\operatorname{ch}y,\ \ln 2\le y\le \ln 3$; 4) $3x=4\cos y,\ -\frac{\pi}{2}\le y\le 0$

გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება პარამეტრული სახით მოცემული წირის ბრუნვით: ა) Ox ღერძის გარშემო, ბ) Oy ღერძის გარშემო (NN18.64; 18.65):

18.64. 1) $\begin{cases} x=a(3\cos t-\cos 3t), \\ y=a(3\sin t-\sin 3t), \end{cases}\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}$;

2) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\sin t, \\ y=\frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}\ 0\le t\le \pi$;

3) $\begin{cases} x=a\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right), \\ y=a\sin^2 t, \end{cases}\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}$;

4) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=2\sin t, \end{cases}\ 0\le t\le 2\pi$.

18.65. 1) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\frac{t}{3}(t^2-3), \end{cases}\ |t|\le 6$;

2) $\begin{cases} x=a(t^2+1), \\ y=\frac{at}{3}(3-t^2), \end{cases}\ |t|\le 3$;

3) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}\ 0\le t\le 2\pi$;

4) $\begin{cases} x=\sqrt{1+\sin t}, \\ y=\frac{1}{4}\cos t. \end{cases}$

18.66. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო:

1) $r=2a\sin\varphi$; 2) $r=1+\cos\varphi$; 3) $r=a+b\cos\varphi$, $(a>b)$;

4) $r=\sqrt{\cos 2\varphi},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$; 5) $r^2=a^2\sin 2\varphi$; 6) $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

ასტროიდის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

ამოხსნა. ასტროიდა სიმეტრიულია Ox და Oy ღერძების მიმართ, ამიტომ საძიებელი მოცულობა უდრის 2V, სადაც V არის იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება OAB (ნახ. 29) მრუდწირული ტრაპეციის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო. (17) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$V = -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt =$$

$$= -3\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)^3\cos^2 t\,d(\cos t) = \frac{16}{105}\pi a^3.$$

გ) ვთქვათ $y=f(x)$ უწყვეტი არაუარყოფითი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე. თუ მრუდწირული ტრაპეცია

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$

ბრუნავს Oy ღერძის გარშემო, მაშინ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx. \qquad (18)$$

მაგალითი 12. გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $y=\frac{k^2}{x}$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ $(b>a>0)$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო.

ამოხსნა. (18) ფორმულის ძალით

$$V = 2\pi\int_a^b k^2dx = 2\pi k^2(b-a).$$

დ) ვთქვათ $r=r(\varphi)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე $(0 \le \alpha < \beta \le \pi)$. იმ T სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r=r(\varphi)$, $\varphi=\alpha$ და $\varphi=\beta$ წირებით შემოსაზღვრული სექტორის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო, გამოითვლება ფორმულით

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi. \qquad (19)$$

შენიშვნა. ვთქვათ, $r=r(\varphi)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე $\left(-\frac{\pi}{2} \le \alpha < \beta \le \frac{\pi}{2}\right)$. იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r=r(\varphi)$, $\varphi=\alpha$ და $\varphi=\beta$ წირებით შემოსაზღვრული სექტორის ბრუნვით $\varphi=\frac{\pi}{2}$ სხივის გარშემო, გამოითვლება ფორმულით

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi.$$

მაგალითი 13. გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r=a\sqrt{\sin\varphi}$ წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო.

ამოხსნა. (19) ფორმულის ძალით

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\pi^2a^3.$$

გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (NN18.39-18.47):

18.39. 1) $y=2x+1$, $x=1$, $x=4$, $y=0$; 2) $y=x+3$, $y=0$, $x=0$, $x=3$;
3) $y=x^2$, $y=0$, $x=1$; 4) $y=x^2+2$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

18.40. 1) $y=x^2-2x$, $y=0$; 2) $y=x-x^2$, $y=0$;
3) $y=8\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$; 4) $y=5\sqrt{2x}$, $y=0$, $x=\sqrt{3}$.

18.41. 1) $y=x^3$, $y=0$, $x=2$; 2) $y=1-x^3$, $y=0$, $x=2$;
3) $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$; 4) $xy=5$, $y=0$, $x=1$, $x=5$.

18.42. 1) $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$; 2) $y=2^x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$;
3) $y=\sin x$, $y=0$, $-\pi \le x \le 0$; 4) $y=\cos x$, $y=0$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$.

18.43. 1) $y^2=2px,\ y=0,\ x=a;$ 2) $xy=a^2,\ y=0,\ x=a,\ x=2a;$

3) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}},\ y=0,\ x=\frac{1}{4},\ x=1;$ 4) $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}},\ y=0,\ x=a,\ (x\ge 0)$

18.44. 1) $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a},\ y=0,\ x=0,\ x=b;$ 2) $y=\sqrt{x}e^{-x},\ y=0,\ x=a;$

3) $y=\frac{\ln x}{x},\ y=0,\ x=e;$ 4) $y=\sin\sqrt{x},\ y=0,\ 0\le x\le \pi^2.$

18.45. 1) $y=\frac{1}{2}x^2,\ 2x+2y-3=0;$ 2) $y=x^2,\ y=\sqrt{x};$

3) $y=\frac{1}{x},\ y=x,\ y=0\ x=2;$ 4) $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=0,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$

18.46. 1) $y=e^{-2x}-1,\ y=e^{-x}+1,\ x=0;$

2) $y=4-x^2,\ y=3x,\ y=0,\ -2\le x\le 0;$

3) $y=\frac{1}{4}x^2,\ y=\frac{1}{2}(x-3)^2,\ y=0;$

4) $y=\sqrt{2x},\ y=2(x-1)^{\frac{3}{2}},\ y=0.$

18.47. 1) $y^2=2x,\ y=2,\ x=0;$ 2) $y=\frac{1}{x},\ y=x,\ x=3;$

3) $y=\frac{1}{4}x^2,\ y^2=4x;$ 4) $y^2=2x,\ y^2=2(1-x).$

გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო (NN18.48, 18.49):

18.48. 1) $y=e^{x^2},\ y=0,\ x=0,\ x=1;$ 2) $y=\mathrm{tg}\,x^2,\ y=0,\ x=\sqrt{\frac{\pi}{3}};$

3) $y=2x-x^2,\ y=0;$ 4) $y=\sin x,\ y=0,\ 2\pi\le x\le 3\pi.$

18.49. 1) $2py=1-(x-2)^2,\ y=0;$

2) $y=\sin x,\ y=1,\ x=0,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2};$

3) $y=\cos x,\ y=1,\ 0\le x\le 2\pi;$ 4) $y^2=4x,\ y=x.$

18.50. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით: ა) Ox ღერძის გარშემო, ბ) Oy ღერძის გარშემო:

1) $y=(x-1)(x-2),\ y=0;$ 2) $y=\sin x,\ y=0,\ 0\le x\le\pi;$

3) $y=\arcsin x,\ y=0,\ x=1;$ 4) $y=\frac{1}{1+x^2},\ y=0,\ x=0,\ x=1;$

5) $y=e^x+6,\ y=e^{2x},\ x=0;$ 6) $y=x,\ y=x+\sin^2x,\ 0\le x\le\pi.$

18.51. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით $y=1$ წრფის გარშემო:

1) $y=\frac{x^2}{4},\ y=1;$ 2) $y=\sqrt[3]{x},\ y=\frac{1}{x},\ y=0,\ x=2;$

3) $y=\sqrt[3]{x},\ y=x^2;$ 4) $y=2x^2-1,\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ y=-1,\ y=8.$

18.52. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო:

1) $\begin{cases} x=a\cos t,\\ y=a\sin 2t,\end{cases}\ y=0,\ 0\le x\le a;$ 2) $\begin{cases} x=\dfrac{2at^2}{1+t^2},\\ y=\dfrac{2at^3}{1+t^2},\end{cases}\ x=a;$

3) $\begin{cases} x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t;\end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=a(1+\cos t),\\ y=a(\mathrm{tg}\,t+\sin t),\end{cases}\ x=\frac{3}{2}a.$

18.53. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით: ა) Ox ღერძის გარშემო, ბ) Oy ღერძის გარშემო.

1) $\begin{cases} x=a\sin t,\\ y=a\sin 2t,\end{cases}\ 0<t\le 2\pi;$ 2) $\begin{cases} x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\ y=0,\ 0\le t\le 2\pi;$

3) $\begin{cases} x=t^3,\\ y=t^2,\end{cases}\ y=0,\ |x|=1;$ 4) $\begin{cases} x=at^2,\\ y=a\ln t,\end{cases}\ x=0,\ y=0,\ (a>0).$

გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო (NN18.54-18.56):

18.54. 1) $r=a\varphi,\ \varphi=0,\ \varphi=\pi;$ 2) $r=\sqrt[3]{\frac{\varphi}{\pi}},\ \varphi=0,\ \varphi=\pi;$

3) $r=a\sqrt[3]{\cos 3\varphi},\ \varphi=0,\ \varphi=\frac{\pi}{6};$

4) $r=a\sqrt[3]{\cos 3\varphi},\ \varphi=\frac{7\pi}{6},\ \varphi=\frac{3\pi}{2}.$

18.55. 1) $r=a\cos^2\varphi$; 2) $r=2a\sin\varphi$; 3) $r=a\cos^3\varphi$; 4) $r=a\sin^2\varphi$.

18.56. 1) $r=ae^{\varphi}$, $\varphi=0$, $\varphi=\pi$; 2) $r=a(1+\cos\varphi)$;

3) $r=2a\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, $\varphi=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$; 4) $r=\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$, $\varphi=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$;

5) $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$; 6) $r=a\sqrt{\sin 2\varphi}$.

განივი კვეთის ფართობების საშუალებით იპოვეთ მოცემული ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა (NN18.57-18.59):

18.57. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=-H$, $z=H$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{(z-H)^2}{H^2}$, $z=0$;

3) $2z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, $z=H$;

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\dfrac{9x^2}{a^2}+\dfrac{4y^2}{b^2}+\dfrac{16z^2}{c^2}=1$.

18.58. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $z=-H$, $z=H$;

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$, $z=H$ $(H>c)$;

3) $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x+z}{a}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

4) $a^2(z^2-y^2)=x^2z^2$, $z=a$.

18.59. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\dfrac{z}{H}=\dfrac{x}{a}$, $z=0$;

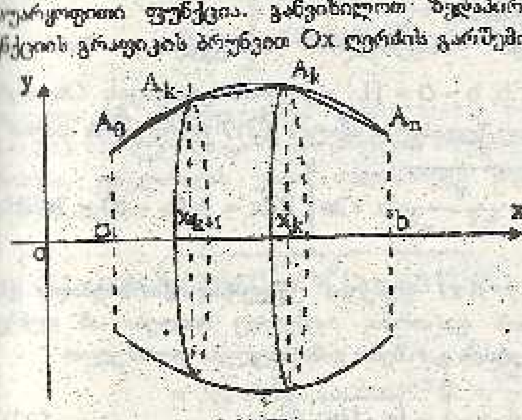
2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0$, $\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$ $(z\geq 0)$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

4) $\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, $\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$.

IV. ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი

ვთქვათ $y=f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი, არაუარყოფითი ფუნქცია. განვიხილოთ ზედაპირი, რომელიც მიიღება ამ ფუნქციის გრაფიკის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (ნახ. 30).



ნახ. 30

განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ დანაწილება

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

$A_0, A_1, \cdots, A_n$ იყოს ფუნქციის გრაფიკის შესაბამისი წერტილები. ავაგოთ ტეხილი $A_0A_1\cdots A_n$. Ox ღერძის გარშემო ამ ტეხილის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი უდრის წაკვეთილი კონუსების (ცილინდრების) გვერდითი ზედაპირების ფართობების ჯამს. ვთქვათ $\ell_k=|A_{k-1}A_k|=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2}$, მაშინ ლაგრანჟის ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\ell_k=\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

სადაც $x_{k-1}<\xi_k<x_k$, $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. ამიტომ ტეხილის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობია

$$\sum_{k=1}^{n}\pi[f(x_{k-1})+f(x_k)]\ell_k=\pi\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1})+f(x_k)]\cdot\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k. \quad (20)$$

განსაზღვრებით მიღებულია, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე არაუარყოფითი, უწყვეტად წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობია (20) ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda\to 0$. მტკიცდება, რომ ეს ზღვარი არსებობს და გამოითვლება ფორმულით

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (21)$$

მაგალითი 14. გამოვთვალოთ R რადიუსიანი და H სიმაღლის სფერული სარტყლის ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა. მოცემული სფერული სარტყელი წარმოადგენს $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $a\le x\le b$, $b-a=H$, ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებულ ზედაპირს. ამიტომ (21) ფორმულის ძალით

$$S=2\pi\int_a^b\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_a^b R\,dx=2\pi(b-a)=2\pi RH.$$

შენიშვნა 1. ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება ამ ფუნქციის გრაფიკის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო გამოითვლება ფორმულით

$$S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (22)$$

მაგალითი 15. გამოვთვალოთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $y=\frac{1}{2}x^2$, $0\le x\le 1$ წირის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო.

ამოხსნა. (22) ფორმულის ძალით

$$S=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

შენიშვნა 2. ვთქვათ AB წირი წარმოადგენს რაიმე ფუნქციის გრაფიკს, რომლის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=g(t),\end{cases}\qquad \alpha\le t\le\beta,$$

სადაც $\varphi(t)$ და $g(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, ამასთან $g(t)\ge 0$. რადგანაც $\varphi(t)$ მონოტონური ფუნქციაა (იხილეთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრება), ამიტომ, როცა ის ზრდადია $a=\varphi(\alpha)$ და $b=\varphi(\beta)$, ხოლო, როცა კლებადია - $a=\varphi(\beta)$ და $b=\varphi(\alpha)$, (a და b შესაბამისად A და B წერტილების აბსცისებია). Ox ღერძის გარშემო ასეთი

წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის მისაღებად (21) ფორმულაში მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $x=\varphi(t)$. მივიღებთ

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta g(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt. \qquad (23)$$

მაგალითი 16. გამოვთვალოთ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი თაღის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა. ციკლოიდის ერთი თაღისთვის $0\le t\le 2\pi$, ამიტომ (23) ფორმულის ძალით

$$S=2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2+a^2(1-\cos t)^2}\,dt=$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,dt=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

შენიშვნა 3. ვთქვათ, AB წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში განტოლებით $\rho=\rho(\varphi)$, $0\le\alpha\le\varphi\le\beta\le\pi$, სადაც $\rho(\varphi)$ არის $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია. მაშინ ასეთი წირის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელად მივიღებთ ფორმულას

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+[\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi. \qquad (24)$$

მაგალითი 17. გამოვთვალოთ $\rho=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდის (ნახ. 15) პოლარული ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა. (24) ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$S=2\pi\int_0^\pi a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi\,d\varphi=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

შენიშვნა 4. ვთქვათ $r=r(\varphi)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე $\left(-\frac{\pi}{2} \le \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. ამ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $r=r(\varphi)$ წირის ბრუნვით $\varphi = \frac{\pi}{2}$ სხივის გარშემო, გამოითვლება ფორმულით

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+\left[r'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi. \qquad (25)$$

მაგალითი 17. გამოვთვალოთ $r^2=2a^2\cos 2\varphi$ ლემნისკატის $\varphi = \frac{\pi}{2}$ სხივის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა. (25) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$S=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\, d\varphi = 4\sqrt{2}\cdot\pi a^2.$$

გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება მოცემული წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (NN18.60-18.62):

18.60. 1) $x^2+y^2=R^2$; 2) $y=\sqrt{x}$, $2 \le x \le 6$;

3) $y=x^3$, $0 \le x \le 1$; 4) $y=\frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12)$, $0 \le x \le 12$

18.61. 1) $y^2=4ax$, $0 \le x \le 3a$; 2) $y=\sin x$, $0 \le x \le \pi$;

3) $y=e^{-x}$, $0 \le x \le \ln 2$; 4) $y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x$, $0 \le x \le 3$.

18.62. 1) $y^2=4+x$, $-4 \le x \le 2$; 2) $2ay=a^2+x^2$, $0 \le x \le a$;

3) $x^2+(y-b)^2=a^2$, $b>a$; 4) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

18.63. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება მოცემული წირის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო

1) $4x+2\ln y=y^2$, $e^{-1} \le y \le e$; 2) $9ay^2=4x^3$, $0 \le y \le \frac{2a}{3}$;

3) $x=\operatorname{ch}y$, $\ln 2 \le y \le \ln 3$; 4) $3x=4\cos y$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le 0$.

გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება პარამეტრული სახით მოცემული წირის ბრუნვით: ა) Ox ღერძის გარშემო, ბ) Oy ღერძის გარშემო (NN18.64; 18.65):

18.64. 1) $\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t), \\ y = a(3\sin t - \sin 3t), \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

2) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\sin t, \\ y = \frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$;

3) $\begin{cases} x = a\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right), \\ y = a\sin^2 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

4) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

18.65. 1) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t}{3}(t^2 - 3), \end{cases}$ $|t| \le 6$;

2) $\begin{cases} x = a(t^2 + 1), \\ y = \frac{at}{3}(3 - t^2), \end{cases}$ $|t| \le 3$;

3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$;

4) $\begin{cases} x = \sqrt{1 + \sin t}, \\ y = \frac{1}{4}\cos t. \end{cases}$

18.66. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო:

1) $r=2a\sin\varphi$; 2) $r=1+\cos\varphi$; 3) $r=a+b\cos\varphi$, $(a>b)$;

4) $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$; 5) $r^2=a^2\sin 2\varphi$; 6) $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

§ 19. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება ფიზიკაში

1. ძალის მუშაობა. ვთქვათ მატერიალური M წერტილი მოძრაობს Ox ღერძზე $\bar{F}$ ძალის მოქმედებით, რომლის მიმართულება ემთხვევა Ox ღერძის მიმართულებას. მაშინ $\bar{F}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, როცა M წერტილი გადაადგილდება $x=a$ წერტილიდან $x=b$ წერტილამდე, გამოისახება ფორმულით

$$W=\int_a^b \bar{F}(x)dx.$$

2. მატერიალური წირის სიმძიმის ცენტრი. ვთქვათ, მატერიალური AB წირის განტოლებაა $y=f(x)$, სადაც $f(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე და წირს აქვს უწყვეტი სიმკვრივე $\rho=\rho(x)$. ასეთი მატერიალური წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით

$$x_0=\frac{\int_a^b x\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx},\qquad y_0=\frac{\int_a^b f(x)\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx} \qquad (1)$$

თუ AB ერთგვაროვანი წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=r(\varphi)$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$, სადაც $r(\varphi)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა, მაშინ სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$x_0=\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\cos\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi},\qquad y_0=\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi}.$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ არაერთგვაროვანი $y=\sqrt{r^2-x^2}$ ნახევარწრეწირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

ამოხსნა. ცხადია

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}};\qquad \sqrt{1+(y')^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

(1) ფორმულების ძალით გვაქვს

$$\xi=\frac{r\int_{-r}^{r}\frac{x\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}}{\pi r}=0$$

(ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია),

$$\eta=\frac{1}{\pi r}\int_{-r}^{r}\frac{ry\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r}dx=\frac{2r}{\pi}.$$

ამრიგად, მოცემული წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია $\xi=0,\ \eta=\frac{2r}{\pi}$.

3. ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი. განვიხილოთ თხელი მატერიალური ერთგვაროვანი ფირფიტა, რომელიც შემოსაზღვრულია უწყვეტი $y=f(x)$, $y=g(x)$ წირებით $(f(x)\ge g(x))$ და წრფეებით $x=a$, $x=b$. ასეთი მატერიალური ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულებია

$$x_0=\frac{1}{S}\int_a^b x[f(x)-g(x)]dx,\qquad y_0=\frac{1}{2S}\int_a^b\{[f(x)]^2-[g(x)]^2\}dx, \qquad (2)$$

სადაც S არის ფირფიტის ფართობი:

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx.$$

თუ სექტორი შემოსაზღვრულია $[\varphi_1,\varphi_2]$ შუალედში უწყვეტი $r=r(\varphi)$ წირითა და $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ პოლარული რადიუსებით, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით:

$$x_0=\frac{2}{3}\,\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3\cos\varphi\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\, d\varphi}, \qquad y_0=\frac{2}{3}\,\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3\sin\varphi\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\, d\varphi}.$$

ამოცანა 2. გამოვთვალოთ იმ ერთგვაროვანი ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით $y=x^2$, $y^2=8x$.

ამოხსნა. მოცემული წირების გადაკვეთის წერტილებია $(0;0)$ და $(2;4)$. აქ $f(x)=\sqrt{8x}$, $g(x)=x^2$. ადვილია ჩვენება, რომ

$$\int\limits_0^2 x\left(\sqrt{8x}-x^2\right)dx=\frac{12}{5}, \quad S=\int\limits_0^2\left(\sqrt{8x}-x^2\right)dx=\frac{8}{3},$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left[\left(\sqrt{8x}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]dx=\frac{24}{5}.$$

(2) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\xi=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{8}{3}}=\frac{9}{10}, \quad \eta=\frac{\frac{24}{5}}{\frac{8}{3}}=\frac{9}{5}.$$

19.1. რა მუშაობა უნდა დაიხარჯოს ზამბარის 5 სმ-ით გასაჭიმად, თუ მისი 1 სმ-ით გასაჭიმად საჭიროა 1 ნ ძალა.

19.2. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს სპილენძის მავთულის გასაჭიმად 1 მმ-ით, თუ მისი სიგრძეა 1 მ, ხოლო განივი კვეთის დიამეტრი 4 მმ.

19.3. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს m მასის მქონე სხეულის ასატანად დედამიწის ზედაპირიდან h სიმაღლეზე, თუ დედამიწის რადიუსია R.

19.4. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს ვერტიკალური ცილინდრის კასრიდან წყლის ამოსატუმბავად, თუ კასრის რადიუსია R, სიმაღლე კი h.

19.5. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს ნახევარსფეროს ფორმის მქონე ჭურჭლიდან წყლის ამოსატუმბად, თუ ნახევარსფეროს რადიუსია 10 მ.

19.6. 2 მ რადიუსის მქონე რკინის ბირთვი ბრუნავს თავისი დიამეტრის გარშემო $\omega=1000$ ბრ/წთ კუთხური სიჩქარით. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს ბირთვის გასაჩერებლად, თუ რკინის კუთრი წონაა 7,8 გ/სმ^3.

19.7. ელექტრული მუხტი e კოორდინატთა სათავეში მოთავსებული e_0 მუხტის მიერ მოქმედი განზიდვის ძალის მოქმედებით გადაადგილდა $(a;0)$ წერტილიდან $(b,0)$ წერტილში. გამოთვალეთ განზიდვის ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა.

19.8. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც სრულდება გაზის ადიაბატური შეკუმშვისას $v_0=8$ მ^3-დან $v_1=2$ მ^3-მდე, თუ მისი საწყისი წნევაა $p_0=10000$

19.9. რა ძალით მიიზიდავს მატერიალური წრეწირი m მასის მქონე მატერიალურ წერტილს, რომელიც მისგან დაშორებულია a მანძილით, თუ წრეწირის სიმკვრივეა μ_0.

19.10. რა ძალით მიიზიდავს r რადიუსის მქონე ერთგვაროვანი (δ_0 სიმკვრივით) წრიული ფირფიტა m მასის მქონე p წერტილს, რომელიც მდებარეობს ფირფიტის ცენტრში გამავალ მართობზე და მისგან დაშორებულია b მანძილით.

19.11. ტორიჩელის კანონის თანახმად ავზის ხვრელიდან სითხის გამოდინების სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით

$$v=c\sqrt{2gh},$$

სადაც g - თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა, h - სითხის სიმაღლე ხვრელიდან და $c=0,6$ არის ცდისეულად მიღებული პროპორციულობის კოეფიციენტი.

რა დროში დაიცლება პირამდე სავსე ცილინდრული ვერტიკალური კასრი, თუ კასრის დიამეტრი $D=1$ მ, სიმაღლე $h=2$ მ და კასრის ფსკერზე არსებული წრიული ფორმის ხვრელის დიამეტრი $d=1$ სმ.

19.12. მატერიალური წერტილის სიჩქარე - $v=te^{-0,01t}$ მ/წმ. გამოთვალეთ მატერიალური წერტილის მიერ გავლილი გზის სიგრძე მოძრაობის დაწყებიდან სრულ გაჩერებამდე.

19.13. გამოთვალეთ v_0 საწყისი სიჩქარით ვერტიკალურად ზემოთ ასროლილი სხეულის აწევის მაქსიმალური სიმაღლე, თუ მისი სიჩქარის მოძრაობის t დროზე დამოკიდებულების განტოლებაა $v=v_0-gt$, სადაც g არის თავისუფალი ვარდნის აჩქარება.

19.14. გამოთვალეთ მოცემული ერთგვაროვანი წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები:

1) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2};$ 2) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi;$

3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi;$ 4) $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}, \ -a \le x \le a$

5) $r=a(1+\cos\varphi), \ 0 \le \varphi \le \pi;$ 6) $r=ae^{\varphi}, \ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi.$

19.15. გამოთვალეთ მოცემული წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ მისი სიმკვრივეა $\rho(x)$:

1) $y=x^2, \ x \in [-1;1], \ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}};$

2) $y = \frac{1}{x}, \ x \in [1;2], \ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}.$

გამოთვალეთ მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ერთგვაროვანი ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები (NN19.16; 19.17):

19.16. 1) $y=x^2, \ y=\sqrt{x};$ 2) $y^2=\frac{x^3}{a}, \ x=a, \ y=0, \ a>0, \ y \ge 0;$

3) $y=\sin x, \ y=0, \ 0 \le x \le \pi;$ 4) $y=\frac{2}{\pi}x, \ y=\sin x, \ y=0.$

19.17. 1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, \ x=0, \ y=0;$ 2) $y^2=2x; \ x+y=4;$

3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi, \ y=0;$

4) $r=a(1+\cos\varphi).$

დიფერენციალური განტოლებები

ამოცანები, რომლებსაც მივყავართ დიფერენციალური განტოლებების ცნებამდე

ამოცანა 1. ვიპოვოთ დედამიწაზე ვარდნილი m მასის მქონე სხეულის სიჩქარის მოძრაობის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ ცნობილია, რომ სხეულზე ვარდნის დროს სიმძიმის ძალასთან ერთად მოქმედებს მოძრაობის საწინააღმდეგოდ მიმართული ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც სიჩქარის პროპორციულია.

ამოხსნა. ნიუტონის II კანონის თანახმად

$$m\frac{dV}{dt} = F,$$

სადაც $\frac{dV}{dt}$ წარმოადგენს სხეულის აჩქარებას, ხოლო F არის ძალა, რომელიც სხეულზე მოქმედებს მოძრაობის მიმართულებით. ცხადია, რომ F არის ტოლი სხეულზე მოქმედი სიმძიმის ძალისა და ჰაერის წინააღმდეგობის ძალის სხვაობის (რადგან ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა მიმართულია მოძრაობის საწინააღმდეგოდ). ამრიგად

$$m\frac{dV}{dt} = mg - kV. \qquad (1)$$

მივიღეთ განტოლება, რომელშიც უცნობ სიდიდეს წარმოადგენს $V=V(t)$ ფუნქცია. ამასთანავე განტოლებაში შედის მისი $\frac{dV}{dt}$ წარმოებული. ასეთი სახის განტოლებას დიფერენციალური განტოლება ეწოდება. ე.ი. (1) განტოლება არის დიფერენციალური განტოლება.

ამოვხსნათ (1) დიფერენციალური განტოლება ნიშნავს ვიპოვოთ ისეთი $V=V(t)$ ფუნქცია, რომელიც მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში ჩასმით მას აქცევს იგივეობად.

ადვილია ჩვენება, რომ ნებისმიერი C რიცხვისათვის

$$V(t)=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k} \qquad (2)$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს (1) განტოლებას.

ამრიგად (1) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა. ბუნებრივია ვიკითხოთ - ამ სიმრავლიდან რომელი გამოხატავს ჭეშმარიტ დამოკიდებულებას კონკრეტული ვარდნის შემთხვევაში სხეულის სიჩქარესა და ვარდნის ხანგრძლივობას შორის?

იმისათვის, რომ მივიღოთ ამ კითხვაზე პასუხი, საჭიროა ვიცოდეთ ვარდნილი სხეულის მოძრაობის შესახებ რაიმე დამატებითი ინფორმაცია, მაგალითად, სხეულის სიჩქარე დროის რაიმე მომენტში. ვთქვათ, როდესაც $t=0$, მაშინ $V=V_0$. თუ დროისა და სიჩქარის ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (2) ტოლობაში, მივიღებთ $V_0=C+\frac{mg}{k}$, საიდანაც $C=V_0-\frac{mg}{k}$. ამრიგად, ამ შემთხვევაში დამოკიდებულებას ვარდნილი სხეულის სიჩქარესა და ვარდნის ხანგრძლივობას შორის ამყარებს ფუნქცია

$$V=\left(V_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}+\frac{mg}{k}.$$

ამოცანა 2. (პირველი გვარის ქიმიური რეაქცია). ვიპოვოთ პირველი გვარის ქიმიური რეაქციის დროს რეაქციაში შესული ნივთიერების რაოდენობის რეაქციის მიმდინარეობის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ ცნობილია, რომ დროის $t=0$ მომენტში ქიმიურ რეაქციაში შემავალი ნივთიერების მასაა m_0.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ Δm-ით ნივთიერების მასის ის ნაწილი, რომელიც შევიდა რეაქციაში დროის t მომენტიდან $t+\Delta t$ მომენტამდე. ზღვარი $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{dm}{dt}$ ეწოდება ქიმიური რეაქციის სიჩქარე t მომენტში. ცნობილია, რომ პირველი გვარის ქიმიური რეაქციის სიჩქარე დროის t მომენტში პირდაპირპროპორციულია იმ ნივთიერების რაოდენობისა, რომელიც ამ მომენტში არ არის შესული რეაქციაში. ამიტომ ამოცანის პირობის თანახმად გვექნება:

$$\frac{dm}{dt}=k(m_0-m),$$

სადაც, $m=m(t)$ არის რეაქციაში შესული ნივთიერების რაოდენობა დროის t მომენტში.

მივიღეთ დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს შემდეგი ფუნქციები

$$m=m_0-Ce^{-kt}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $m=0$, როცა $t=0$, მივიღებთ, რომ $C=m_0$. საბოლოოდ გვექნება

$$m=m_0\left(1-e^{-kt}\right).$$

ვინაიდან t-ს ზრდასთან ერთად მაჩვენებლიანი ფუნქცია e^{-kt} უსასრულოდ მცირდება, ამიტომ გარკვეული დროის შემდეგ იგი გახდება იმდენად მცირე, რომ m თითქმის არ განსხვავდება m_0-გან და რეაქცია პრაქტიკულად შეწყდება.

§ 20. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

1. ძირითადი ცნებები.

განსაზღვრება 1. განტოლებას რაიმე უცნობი ფუნქციის მიმართ, რომელიც შეიცავს ამ ფუნქციის ერთ რომელიმე წარმოებულს მაინც, დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.

თუ უცნობი ფუნქცია ერთ ცვლადზეა დამოკიდებული, დიფერენციალურ განტოლებას ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება, ხოლო, თუ რამოდენიმე ცვლადზე – კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება. მაგალითად,

$$y''+3y'=5x$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა, ხოლო

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

წარმოადგენს კერძო წარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებას. შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს.

დიფერენციალური განტოლება ზოგადი სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0. \qquad (1)$$

განსაზღვრება 2. დიფერენციალური განტოლების რიგი ეწოდება ამ განტოლებაში შემავალი უცნობი ფუნქციის წარმოებულის უმაღლეს რიგს.

მაგალითად, $y''-y'=1$ არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება, ხოლო $y'-xy^3=5x$ კი – პირველი რიგისა.

განსაზღვრება 3. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი რაიმე ინტერვალში ეწოდება ფუნქციას, რომელიც მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში ჩასმით მას აქცევს იგივეობად არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის ამ ინტერვალიდან.

ამრიგად, დიფერენციალური განტოლების ყოველ ამონახსნს შეესაბამება გარკვეული ინტერვალი. შემდგომში, იქ სადაც ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობას, ჩვენ არ მივუთითებთ ინტერვალს, რომელზედაც ფუნქცია არის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა საზოგადოდ დაკავშირებულია ინტეგრებასთან, ამიტომ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებას უწოდებენ, მის ამონახსნს – დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს, ხოლო ამონახსნის გრაფიკს კი ინტეგრალურ წირს. რადგან დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებსა

და ინტეგრალურ წირებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა. ამიტომ მათ აიგივებენ ერთმანეთთან და ხშირად გამოთქმას: მოცემული წირი არის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

განსაზღვრება 4. დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც ამოხსნილია უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ, ეწოდება ნორმალური სახის დიფერენციალური განტოლება.

საზოგადოდ, n-ური რიგის ნორმალური სახის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}).$$

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$F(x,y,y')=0.$$

თუ იგი ამოხსნილია y' წარმოებულის მიმართ, ე.ი. მოცემულია ნორმალური სახით, მაშინ ის შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$y'=f(x,y). \qquad (2)$$

(2) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.$$

დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხის დადგენა. ამ მხრივ (2) განტოლებისათვის მართებულია შემდეგი თეორემა, რომელსაც ეწოდება დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის კოშის თეორემა.

თეორემა 1. თუ $f(x,y)$ და $f'_y(x,y)$ უწყვეტი ფუნქციებია სიბრტყის რაიმე D არეში, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს $(x_0,y_0) \in D$ წერტილი, არსებობს (2) განტოლების ერთადერთი $y=\varphi(x)$ ამონახსნი x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, რომელიც აკმაყოფილებს $\varphi(x_0)=y_0$ პირობას.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ ნებისმიერი $(x_0,y_0) \in D$ წერტილისათვის არსებობს (2) განტოლების ერთადერთი ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის (x_0,y_0) წერტილში.

თეორემა 1-დან გამომდინარეობს, რომ (2) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა, რადგან D არის განსხვავებულ (x_0,y_0) და (x_0,y_1) წერტილებს $(y_0 \neq y_1)$ განსხვავებული ამონახსნები შეესაბამება.

პირობას, რომ $y(x_0)=y_0$, ეწოდება საწყისი პირობა. მას ხშირად შემდეგნაირად ჩაწერენ

$$y|_{x=x_0}=y_0.$$

ამოცანას, ვიპოვოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(x_0)=y_0$ საწყის პირობას, ეწოდება

კოშის ამოცანა. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია (x_0,y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში აკმაყოფილებს თეორემა 1-ის პირობებს, მაშინ როგორც ეს აღნიშნული თეორემიდან გამომდინარეობს, კოშის ამოცანას (2) განტოლებისათვის გააჩნია ამონახსნი და იგი ერთადერთია.

განსაზღვრება 5. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ანუ ზოგადი ინტეგრალი ეწოდება $y=\varphi(x,C)$ ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია ნებისმიერ C მუდმივზე და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) C-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გარკვეული სიმრავლიდან, $y=\varphi(x,C)$ ფუნქცია არის მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

ბ) ნებისმიერი საწყისი $y(x_0)=y_0$ პირობისათვის, სადაც (x_0,y_0) ეკუთვნის (x,y)-ის ცვლილების იმ არეს, რომელშიც შესრულებულია არსებობის და ერთადერთობის თეორემის პირობები, შეიძლება ვიპოვოთ $C=C_0$ ისეთი მნიშვნელობა, რომ $y=\varphi(x,C_0)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობას.

ზოგ შემთხვევაში დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ არაცხადი სახით: $\Phi(x,y,C)=0$, რომელიც y-ის მიმართ ელემენტარულ ფუნქციებში შეიძლება საზოგადოდ არ ამოიხსნას.

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან მასში C მუდმივის რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობის ჩასმით, ეწოდება მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

დაადგინეთ არე რომელზედაც შესრულებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობები (NN20.1; 20.2):

20.1. 1) $y'=x^2-y^2$; 2) $y'=\dfrac{x}{y}$; 3) $y'=xy+e^{-y}$; 4) $y'=\dfrac{y}{y-x}$.

20.2. 1) $y'=\sqrt{1-y^2}$; 2) $y'=\sqrt{x-y}$;

3) $y'=\sqrt{x^2-y}-x$; 4) $y'=1+tgy$.

20.3. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს მითითებული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს:

1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$, $xy'+y=\cos x$;

2) $y=x(c-\ln|x|)$, $(x-y)dx+xdy=0$;

3) $y=\sin x-1+ce^{-\sin x}$, $\quad y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$;

4) $y=ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^{x}$, $\quad y'+2y=e^{x}$.

20.4. წირთა ერთპარამეტრიანი ოჯახიდან გამოყავით წირი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ პირობას:

1) $y=x+ce^{y}$, $y(1)=0$; 2) $x^2+y^2=\ln cx^2$, $y(1)=1$;

3) $1+2cy+c^2x^2=0$, $y(0)=-\frac{1}{2}$; 4) $y(1-cx)=1$, $y(1)=\frac{1}{2}$.

20.5. შეადგინეთ დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამონახსნს წარმოადგენს მოცემულ წირთა ოჯახის ყოველი წირი.

1) $x^2+y^2=2cx$, 2) $y^2=2cx$; 3) $x^3=c(x^2-y^2)$; 4) $y=\sin(x+c)$

§ 2. დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით.

განსაზღვრება 6. დიფერენციალურ განტოლებას

$$f_1(x)dx+f_2(y)dy=0 \qquad (3)$$

სადაც $f_1(x)$ და $f_2(y)$ შესაბამისად x და y ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია, ეწოდება დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით.

(3) განტოლების ზოგადი ინტეგრალია

$$\int f_1(x)dx+\int f_2(y)dy=C.$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$\frac{dx}{1+x}+\frac{ydy}{1+y^2}=0$$

დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(0)=1$ საწყის პირობას.

ამოხსნა. ვაინტეგროთ მოცემული განტოლება. მივიღებთ ზოგად ინტეგრალს

$$\int\frac{dx}{1+x}+\int\frac{ydy}{1+y^2}=C,$$

ანუ

$$\ln|1+x|+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C.$$

ჩავსვათ ამ ტოლობაში $x=0$, $y=1$. გვექნება

$$C=\frac{1}{2}\ln 2.$$

ამრიგად, საძიებელი კერძო ამონახსნია

$$\ln|1+x|+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln 2$$

განსაზღვრება 7. დიფერენციალურ განტოლებას

$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0, \qquad (4)$$

სადაც $f_1(x)$, $f_2(x)$ და $g_1(y)$, $g_2(y)$ შესაბამისად x და y ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია, ეწოდება დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით.

ვიგულისხმოთ, რომ $g_1(y)f_2(x)\neq 0$ და გავყოთ (4) განტოლება ამ ნამრავლზე, მივიღებთ:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0.$$

ეს განტოლება წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით. მისი ინტეგრებით მიიღება (4) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=C. \qquad (5)$$

თუ $g_1(y)=0$, როცა $y=y_0$, მაშინ (5) ზოგად ამონახსნთან ერთად (4) განტოლების ამონახსნია აგრეთვე $y=y_0$ ფუნქცია.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $xy^2dx-(1+x^2)\ln y\,dy=0$ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ამოხსნა. განტოლება გავყოთ $y^2(1+x^2)$ გამოსახულებაზე. გვექნება

$$\frac{xdx}{1+x^2}-\frac{\ln y\,dy}{y^2}=0.$$

ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}-\int\frac{\ln y}{y^2}dy=C,$$

ანუ

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{y}(\ln y+1)=C.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ვთქვათ $y\neq 0$. მაშინ გვექნება $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$. ამ ტოლობის

ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+\ln C_1 \quad (C_1>0).$$

აქედან გვაქვს

$$\ln|y|=\ln C_1|x|,$$

ანუ $y=Cx$, სადაც C ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი მუდმივია.

შევნიშნოთ, რომ $y=0$ ფუნქცია აგრეთვე მოცემული განტოლების ამონახსნია.

ამრიგად მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y=Cx$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

ამოხსენით განტოლებები (NN20.6-20.12):

20.6. 1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{3y^2+1}$; 2) $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$;

3) $(1+y^2)dx+xydy=0$; 4) $xydx+(x+1)dy=0$.

20.7. 1) $\sqrt{y^2+1}\,dx=xydy$; 2) $y'\mathrm{tg}x=y$;

3) $y'=e^{x+y}$; 4) $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$.

20.8. 1) $xydx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$; 2) $ye^{2x}dx+(1+e^{2x})dy=0$;

3) $x^2y^2y'+1=y$; 4) $(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0$.

20.9. 1) $2x\sqrt{1-y^2}=y'(1+x^2)$; 2) $y'+\dfrac{x\sin x}{y\cos y}=0$;

3) $y'-xy^2=2xy$; 4) $xy'+2y=xyy'$.

20.10. 1) $e^{-s}\left(1+\dfrac{ds}{dt}\right)=1$; 2) $x\dfrac{dx}{dt}+t=1$;

3) $(t^2-xt^2)\dfrac{dx}{dt}+x^2+x^2t=0$; 4) $\varphi^2dr+(r-a)d\varphi=0$.

20.11. 1) $2x^2yy'+y^2=2$; 2) $3e^x\mathrm{tg}ydx+\dfrac{2-e^x}{\cos^2y}dy=0$;

3) $y'+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}$;

4) $(1+y)(e^xdx-e^{2y}dy)-(1+y^2)dy=0$.

20.12. 1) $y'=\sin(x-y)$; 2) $y'=\dfrac{1}{2x+y}$;

3) $y'=(x-y)^2+1$; 4) $y'-y=2x-3$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობას (NN20.13-20.14):

20.13. 1) $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\quad y(0)=1$;

2) $y'\mathrm{ctg}x+y=2,\quad y(0)=-1$;

3) $xy'+y=y^2,\quad y(1)=\dfrac{1}{2}$;

4) $(1+e^x)yy'=e^x,\quad y(0)=1$.

20.14. 1) $y'\sin x=y\ln y,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$;

2) $(xy^2+x)dy+(x^2y-y)dx=0,\quad y(1)=1$;

3) $y'=(2y+1)\mathrm{ctg}x,\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$;

4) $3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}\,dx=0,\quad y(0)=\sqrt{2}$.

3. ერთგვაროვანი და მასზე დაყვანადი განტოლებები.

განსაზღვრება 8. ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება n-ური რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ, თუ ნებისმიერი $\lambda\neq0$ რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y).$$

მაგალითად, $f(x,y)=x^2+y^2$ არის მეორე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, ხოლო $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ კი - პირველი რიგის. მართლაც პირველ მაგალითში $f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+(\lambda y)^2=\lambda^2(x^2+y^2)=\lambda^2f(x,y)$, მეორეში კი - $f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3}=\lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}=\lambda f(x,y)$.

განსაზღვრება 9. პირველი რიგის

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{6}$$

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ $f(x,y)$ არის 0-რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ.

ერთგვაროვანი განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით. პირობის თანახმად $f(\lambda x, \lambda y)=f(x,y)$. თუ ამ ტოლობაში ავიღებთ $\lambda=\frac{1}{x}$, გვექნება

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

მოვახდინოთ ჩასმა $y=ux$. მაშინ $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. ამის გათვალისწინებით (6) განტოლება მიიღებს სახეს

$$u+x\frac{du}{dx}=f(1,u),$$

ანუ

$$\left(f(1,u)-u\right)dx-x\,du=0.$$

მივიღეთ განტოლება განცალებადი ცვლადებით.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ამოხსნა. $\frac{x+y}{x-y}$ არის 0-რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია. გამოვიყენოთ ჩასმა $y=ux$, მაშინ $dy=udx+xdu$. მივიღებთ:

$$\frac{udx+xdu}{dx}=\frac{1+u}{1-u}.$$

აქედან გვაქვს

$$x(1-u)du-(1+u^2)dx=0;$$

ანუ

$$\frac{(1-u)du}{1+u^2}-\frac{dx}{x}=0.$$

უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრებით გვექნება

$$\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln C|x|, \quad C>0.$$

თუ ჩავსვამთ $u=\frac{y}{x}$, მივიღებთ

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln C|x|.$$

შენიშვნა. $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ განტოლება იქნება ერთგვაროვანი, თუ $M(x,y)$ და $N(x,y)$ ერთი და იმავე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ ერთი და იმავე რიგის ორი ერთგვაროვანი ფუნქციის შეფარდება ნულოვანი რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციაა.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ

$$xydx-(x^2+y^2)dy=0$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(0)=1$ საწყის პირობას.

ამოხსნა. რადგან xy და x^2+y^2 ფუნქციები მეორე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია, ამიტომ ეს განტოლება არის ერთგვაროვანი. გამოვიყენოთ ჩასმა $y=ux$. მაშინ $dy=udx+xdu$ და გვექნება

$$x^2udx-x^2(1+u^2)(udx+xdu)=0$$

ანუ

$$x(1+u^2)du+u^3dx=0.$$

ცვლადთა განცალების შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{dx}{x}+\frac{1+u^2}{u^3}du=0.$$

აქედან

$$\ln C|ux|=\frac{1}{2u^2}.$$

თუ ჩავსვამთ $u=\frac{y}{x}$, გვექნება

$$\ln C|y|=\frac{x^2}{2y^2}.$$

საწყისი პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ $C=1$, ე.ი. საძებნი ამონახსნია

$$\ln|y|=\frac{x^2}{2y^2}.$$

ახლა განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

როცა $\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$, მაშინ (7) განტოლება $x=u+h$, $y=v+k$ ცვლადთა გარდაქმნით დაიყვანება ერთგვაროვან განტოლებაზე. ხოლო იმ შემთხვევაში, როცა $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\lambda$, მაშინ (7) განტოლება $z=ax+by$ ჩასმით მიიყვანება განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით.

მაგალითი 6. ვიპოვოთ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-5}{-x+y+3}$$

განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ამოხსნა. ვთქვათ $x=u+h$, $y=v+k$. მაშინ $dy=dv$, $dx=du$ და გვექნება

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+v+h+k-5}{-u+v-h+k+3}.$$

შევარჩიოთ h და k ისე, რომ

$$\begin{cases} h+k-5=0, \\ -h+k+3=0. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $k=1$, $h=4$. მივიღებთ ერთგვაროვან განტოლებას

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+v}{-u+v}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $v=zu$. მაშინ $\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du}$ და გვექნება

$$z+u\frac{dz}{du}=\frac{z+1}{z-1}.$$

მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება:

$$\frac{(z-1)dz}{1+2z-z^2}-\frac{du}{u}=0.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+2z-z^2\right|-\ln|u|=-\frac{1}{2}\ln C_1, \quad C_1>0.$$

ანუ

$$u^2(1+2z-z^2)=C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. რადგან $z=\frac{v}{u}$, ამიტომ

$$u^2+2uv-v^2=C.$$

დავუბრუნდეთ საწყის x და y ცვლადებს. მივიღებთ ზოგად ინტეგრალს

$$(x-4)^2+2(x-4)(y-1)-(y-1)^2=C.$$

მაგალითი 7. ვიპოვოთ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y-3}{4x-2y+1}$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $y(0)=$

ამოხსნა. რადგან $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{-3}{1}$, ეს განტოლება $z=2x-y$ ჩასმით დაიყვანება განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით. მართლაც, ამ შემთხვევაში $\frac{dy}{dx}=2-\frac{dz}{dx}$ და განტოლება მიიღებს სახეს

$$2-\frac{dz}{dx}=\frac{z-3}{2z+1}$$

ან

$$\frac{2z+1}{3z+5}dz-dx=0.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ

$$\frac{2}{3}z-\frac{7}{9}\ln|3z+5|-x=C.$$

თუ ჩავსვამთ $z=2x-y$, გვექნება

$$\frac{2}{3}(2x-y)-\frac{7}{9}\ln|6x-3y+5|-x=C.$$

აქედან საწყისი პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$C=\frac{7}{9}\ln 5.$$

ამოხსენით განტოლება (NN20.15-20.19):

20.15. 1) $y'=\frac{y}{x}-1$; 2) $y'=-\frac{x+y}{x}$;

3) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$; 4) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$.

20.16. 1) $(x+2y)dx-xdy=0$; 2) $xdy-ydx=ydy$;

3) $(x-y)dx+(x+y)dy=0$; 4) $(x-y)dx+xdy=0$.

20.17. 1) $y'=\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}$; 2) $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$;

3) $y'=\frac{x-y}{x+y}$; 4) $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$.

20.18. 1) $(x-y)ydx-x^2dy=0$; 2) $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$;

3) $(3y^2+3xy+x^2)dx-(x^2+2xy)dy=0$;

4) $(4x^2+3xy+y^2)dx+(4y^2+3xy+x^2)dy=0$.

20.19. 1) $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$; 2) $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}$;

3) $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$; 4) $x - y\cos\dfrac{y}{x} + xy'\cos\dfrac{y}{x} = 0$

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობას (NN20.20;20.21):

20.20. 1) $y' = 3\dfrac{y}{x} + 2$, $y(1) = 0$; 2) $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$, $y(1) = 0$

3) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$, $y(1) = 0$;

4) $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0$, $y(0) = 1$.

20.21. 1) $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$;

2) $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$, $y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$;

3) $(xy' - y)\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} = x$, $y(1) = 0$;

4) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$, $y(-1) = 1$.

ამოხსენით განტოლება (NN20.22; 20.23):

20.22. 1) $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$;

2) $(y+2)dx-(2x+y-4)dy=0$;

3) $(2x-y+4)dy+(x-2y+5)dx=0$;

4) $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$.

20.23. 1) $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$;

2) $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$;

3) $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$;

4) $(x+y)dx+(x-y-2)dy=0$.

4. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება.

განსაზღვრება 10. პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება წრფივი, თუ იგი წრფივია უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულის მიმართ.

პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{8}$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე ინტერვალში. როდესაც $Q(x) = 0$, მაშინ (8) განტოლებას ეწოდება წრფივი ერთგვაროვანი, წინააღმდეგ შემთხვევაში - არაერთგვაროვანი.

(8) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right). \tag{9}$$

მაგალითი 8. ვიპოვოთ

$$y' - y\,\mathrm{tg}x = \sin x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $P(x)=-\mathrm{tg}x$, $Q(x)=\sin x$. (9) ფორმულის თანახმად ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = e^{\int \mathrm{tg}x dx}\left(C + \int \sin x e^{-\int \mathrm{tg}x dx}dx\right) = e^{-\ln|\cos x|}\left(C + \int \sin x e^{\ln|\cos x|}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{|\cos x|}\left(C + \frac{1}{2}\mathrm{sign}(\cos x)\int \sin 2x dx\right) = \frac{1}{|\cos x|}\left(C - \frac{1}{4}\mathrm{sign}(\cos x)\cdot\cos 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos x}\left(C - \frac{1}{4}\cos 2x\right).$$

ამოხსენით განტოლება (NN20.24-20.29):

20.24. 1) $y' - \dfrac{y}{x} = x$; 2) $y' - \dfrac{2y}{x} = 2x^3$;

3) $y' + y = e^{-x}$; 4) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

20.25. 1) $y' + y\,\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$; 2) $y' - xy = (1+x)e^{-x}$;

3) $y' - 4x^3y = 4(x^3+1)e^{-4x}$; 4) $y' - y = \dfrac{e^x}{x}$.

20.26. 1) $y' - \dfrac{ny}{x} = e^x x^n$; 2) $y' + ay = e^{mx}$;

3) $xy' - 2y = x^3\cos x$; 4) $y' - \dfrac{2x-1}{x^2}y = 2$.

20.27. 1) $(2x+1)y' = 4x+2y$; 2) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$;

3) $y' + 2y = 4x$; 4) $y' + y = \cos x$.

20.28. 1) $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$; 2) $y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x$;

3) $y = x(y' - x\cos x)$; 4) $(xy' - 1)\ln x = 2y$.

20.29.* 1) $(x+y^2)dy = ydx$; 2) $(2e^y - x)y' = 1$;

3) $y' = \frac{y}{3x - y^2}$; 4) $(1-2xy)y' = y(y-1)$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობას (NN20.30-20.32):

20.30. 1) $y' - y\,\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$;

2) $xy' + 2y = 3x$, $y(-2) = 0$;

3) $y' = 2y + e^x - x$, $y(0) = \frac{1}{4}$;

4) $y' - y\,\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos^3 x}$, $y(0) = 0$.

20.31. 1) $y'\cos x - y\sin x = 2x$, $y(0) = 0$;

2) $y' + y\cos x = \sin x\cos x$, $y(0) = 1$;

3) $t^2\frac{ds}{dt} = 2ts - 3$, $s(-1) = 1$;

4) $t(1+t^2)ds = (s + st^2 - t^2)dt$, $s(1) = -\frac{\pi}{4}$.

20.32. 1) $y' = \frac{y}{x + y^2}$, $y(0) = 1$;

2) $y^2dx - (2xy+3)dy = 0$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$;

3) $(1+y^2)dx = \left(\sqrt{1+y^2}\sin y - xy\right)dy$, $y(0) = \pi$;

4) $y^2dx + (xy+1)dy = 0$, $y(0) = e$.

5. ბერნულის განტოლება. განტოლებას

* ეს განტოლებები წრფივია x-ისა და $\frac{dx}{dy}$-ის მიმართ.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

სადაც $n \neq 0$ და $n \neq 1$, ეწოდება ბერნულის განტოლება (როცა $n=0$ იგი წარმოადგენს წრფივ განტოლებას, ხოლო როცა $n=1$ – განტოლებას განცალებადი ცვლადებით).

$z = y^{1-n}$ ჩასმით ბერნულის განტოლება დაიყვანება წრფივ განტოლებაზე.

მაგალითი 9. ამოხსენით განტოლება

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2y^2.$$

ამოხსნა. განტოლების ორივე მხარე გავყოთ y^2-ზე. მივიღებთ

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = x^2.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{1}{y} = z$. მაშინ $-\frac{y'}{y^2} = z'$ და გვექნება

$$z' + \frac{1}{x}z = -x^2.$$

აქედან

$$z = e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(C + \int(-x^2)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right) = \frac{1}{|x|}\left(C - \frac{\mathrm{sign}x}{4}x^4\right) = \frac{1}{x}\left(C - \frac{x^4}{4}\right).$$

საბოლოოდ

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x}\left(C - \frac{x^4}{4}\right).$$

შევნიშნოთ, რომ $y=0$ აგრეთვე მოცემული განტოლების ამონახსნია.

ამოხსენით განტოლება (NN20.33-20.36):

20.33. 1) $y' + 2y = y^2e^x$; 2) $3y' + y = \frac{1}{y^2}$;

3) $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$; 4) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}$.

20.34. 1) $y' + 2xy = 2x^3y^3$; 2) $y' - y\,\mathrm{tg}x = -y^2\cos x$;

3) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$; 4) $y' = y\,\mathrm{ctg}x + \frac{y^3}{\sin x}$.

20.35. 1) $y'+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y}$; 2) $xy'+y=y^2\ln x$;

3) $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$; 4) $y'-2ye^x=2\sqrt{ye^x}$

20.36. 1) $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{2y}-\dfrac{1}{2x}$; 2) $y'x^3\sin y=xy'-2y$;

3) $y'=\dfrac{2x}{x^2\cos y+\sin 2y}$; 4) $(2x^2y\ln y-x)y'=y$.

6. განტოლება სრულ დიფერენციალებში. განტოლებას

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (10)$$

ეწოდება განტოლება სრულ დიფერენციალებში, თუ ამ განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს რაიმე $u(x,y)$ ორი ცვლადის ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, ე.ი.

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y).$$

ამ შემთხვევაში (10) განტოლება მიიღებს სახეს

$$du(x,y)=0.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ (10) განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$u(x,y)=C.$$

მაგალითად, ადვილია შემოწმება, რომ

$$2xydx+(x^2y-2y)dy=0$$

განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს $u(x,y)=x^2y-y^2$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. ამიტომ ეს განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$d(x^2y-y^2)=0,$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ ზოგად ინტეგრალს

$$x^2y-y^2=C.$$

ბუნებრივად ისმება კითხვა: რა პირობებში იქნება (10) განტოლების მარცხენა მხარე $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ რაიმე $u(x,y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი და როგორ უნდა ვიპოვოთ იგი? პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. თუ $M(x,y)$ და $N(x,y)$ ფუნქციები და მათი $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ და $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ კერძო წარმოებულები უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე D არეში, მაშინ: 1) იმისათვის რომ გამოსახულება $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ წარმოადგენდეს რაიმე $u(x,y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს D არეში, აუცილებელია და საკმარისია, რომ D არის ყოველ წერტილში ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (11)$$

2) თუ შესრულებულია (11) ტოლობა, $u(x,y)$ გამოითვლება ტოლობით

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}N(x_0,t)dt, \qquad (12)$$

სადაც (x_0,y_0) არის D-ს რაიმე წერტილი.

მაგალითი 10. ვიპოვოთ

$$(3x^2y+y^2)dx+(x^3+2xy)dy=0$$

განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ამოხსნა. პირველ რიგში შევამოწმოთ (11) პირობა. გვაქვს

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2+2y.$$

ე.ი. $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$. მაშასადამე, მოცემული განტოლება წარმოადგენს განტოლებას სრულ დიფერენციალებში. ამიტომ (12) ფორმულის თანახმად მივიღებთ (ავიღოთ $x_0=y_0=0$):

$$u(x,y)=\int_0^x(3t^2y+y^2)dt=\left(t^3y+ty^2\right)\Big|_0^x=x^3y+xy^2.$$

ამრიგად მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$x^3y+xy^2=C.$$

ამოხსენით განტოლებები (NN20.37-20.41):

20.37. 1) $(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$;

2) $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$;

3) $(3x^2+2y)dx+(2x-3)dy=0$;

4) $(10xy-8y+1)dx+(5x^2-8x+3)dy=0$.

20.38. 1) $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0$;

2) $(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=0$;

3) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$;

4) $(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0$.

20.39. 1) $\dfrac{x\,dy}{x^2+y^2}=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx;$

2) $x\,dx+y\,dy=\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2};$

3) $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy=0;$

4) $\left(4-\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx+\dfrac{2y}{x}dy=0.$

20.40. 1) $3x^2e^y dx+(x^3e^y-1)dy=0;$

2) $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0;$

3) $3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy;$

4) $\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0.$

20.41. 1) $(x\cos 2y+1)dx-x^2\sin 2y\,dy=0;$

2) $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 x\,dy=0;$

3) $2x\cos^2 y\,dx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0;$

4) $(\sin xy+xy\cos xy)dx+x^2\cos xy\,dy=0.$

20.42. იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობას:

1) $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0,\quad y(1)=1;$

2) $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0,\quad y(1)=0;$

3) $\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi;$

4) $\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0,\quad y(0)=2.$

7. განსაკუთრებული ამონახსნი. განტოლებები რომლებიც არ არის ამოხსნილი წარმოებულის მიმართ. D არის წერტილს, რომელშიც დარღვეულია კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა, ეწოდება დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული წერტილი.

$y'=f(x,y)$ განტოლების ამონახსნს (ინტეგრალურ წირს), რომლის ყველ წერტილში დარღვეულია კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა, ეწოდება ამ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი (განსაკუთრებული ინტეგრალური წირი). განსაკუთრებული ამონახსნი არ მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან C მუდმივის არცერთი მნიშვნელობისათვის ($C-\pm\infty$-ის ჩათვლით).

განსაზღვრება 11. რაიმე წირს ეწოდება ერთპარამეტრიან წირთა ოჯახის მომვლები, თუ იგი ყოველ თავის წერტილში ეხება წირთა მოცემული ოჯახის რომელიმე წირს, ამასთანავე ეს წირი ამ ოჯახის ყოველ წირს ეხება და ფიქსირებულ წირთან მისი შეხების წერტილი ერთადერთია.

მაგალითად განვიხილოთ $(x-c)^2+y^2=R^2$ განტოლება, სადაც c არის პარამეტრი. ეს განტოლება ყოველი ფიქსირებული c-თვის განსაზღვრავს წრეწირს, რომლის ცენტრი $(c;0)$ წერტილში მდებარეობს და რადიუსია R. მიტომ ამ განტოლებით განსაზღვრული წირთა ოჯახი იქნება ყველა იმ R-რადიუსიან წრეწირთა სიმრავლე, რომელთა ცენტრი Ox ღერძზე მდებარეობს. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ ოჯახის მომვლებებია $y=R$ და $y=-R$ წრფეები.

მოცემული დიფერენციალური განტოლების $y=\varphi(x,c)$ ზოგად ამონახსნთა ან $\Phi(x,y,c)=0$ ზოგად ინტეგრალთა ოჯახის მომვლები წარმოადგენს განსაკუთრებულ ინტეგრალურ წირს. წირთა ოჯახის მომვლების განტოლება მიიღება

$$\begin{cases}\varphi(x,c)=y\\ \varphi_c'(x,c)=0\end{cases}\quad \text{ან}\quad \begin{cases}\Phi(x,y,c)=0\\ \Phi_c'(x,y,c)=0\end{cases}\qquad (13)$$

სისტემიდან c-ს გამორიცხვით, თუ ეს შესაძლებელია. ამასთან უნდა შემოწმდეს, რომ ამ გზით მიღებული ფუნქცია წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს.

მაგალითი 11. ვიპოვოთ

$$y'=\sqrt{1-y^2}$$

განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი.

ამოხსნა. ადვილია შემოწმება, რომ მისი ზოგადი ამონახსნია

$y=\sin(x+c),\ |x+c|\le\dfrac{\pi}{2}.$

შევადგინოთ განტოლებათა (13) სისტემა

$$\begin{cases} \sin(x+c)=y, \\ \cos(x+c)=0, \end{cases} \qquad |x+c|\le\frac{\pi}{2}.$$

ამ სისტემიდან c-ს გამორიცხვით მივიღებთ, რომ $y=\pm 1$, რომელიც ასევე წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს და არ მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან c-ს არცერთი მნიშვნელობისათვის. ე.ი. ის მოცემული განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნია.

ახლა განვიხილოთ ისეთი დიფერენციალური განტოლებები რომლებიც არ არის ამოხსნილი წარმოებულის მიმართ, კერძოდ განვიხილოთ ისეთი განტოლებები, რომლებიც ამოხსნილია უცნობი ფუნქციის ან არგუმენტის მიმართ. ე.ი. განვიხილოთ განტოლებები

$$y=f(x,y') \tag{14}$$

და

$$x=f(y,y'). \tag{15}$$

ჯერ განვიხილოთ (14) განტოლება. შემოვიტანოთ დამხმარე პარამეტრი $p=y'$. მაშინ (14) განტოლება მიიღებს სახეს

$$y=f(x,p). \tag{16}$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x-ით. გვექნება

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \tag{17}$$

(17) განტოლებიდან მიიღება ნორმალური სახის დიფერენციალური განტოლება $\frac{dp}{dx}$-ის მიმართ. მისი ზოგადი ამონახსნი (16) განტოლებასთან ერთად გვაძლევს (14) განტოლების ზოგად ამონახსნს პარამეტრული სახით.

მაგალითი 12. ამოვხსნათ განტოლება

$$y=y'^2+xy'-x.$$

ამოხსნა. შემოვიტანოთ პარამეტრი $p=y'$. მაშინ

$$y=p2+x(p-1) \tag{18}$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x-ით. მივიღებთ

$$p=2p\frac{dp}{dx}+p-1+x\frac{dp}{dx},$$

ანუ

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{2p+x}.$$

უკანასკნელი განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{dx}{dp}=x+2p.$$

ეს განტოლება წრფივია. მისი ზოგადი ამონახსნია

$$x=ce^p-2(p+1). \tag{19}$$

თუ x-ის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (18)-ში, მივიღებთ

$$y=ce^p(p-1)-p^2+2. \tag{20}$$

(19) და (20) ტოლობები წარმოადგენს მოცემული განტოლების ზოგად ამონახსნს პარამეტრული სახით.

ახლა განვიხილოთ (15) განტოლება. შემოვიტანოთ პარამეტრი $p=y'$. მივიღებთ

$$x=f(x,p). \tag{21}$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა y-ით; გვექნება

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}. \tag{22}$$

(21) და (22) განტოლებებიდან ისევე, როგორც (14) განტოლების შემთხვევაში, ვღებულობთ (15) განტოლების ზოგად ამონახსნს პარამეტრული სახით.

მაგალითი 13. ამოვხსნათ განტოლება

$$x=y'^2+\frac{y}{y'}.$$

ამოხსნა. დავუშვათ $p=y'$. მივიღებთ

$$x=p^2+\frac{y}{p}. \tag{23}$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა y-ით. გვექნება

$$\frac{1}{p}=2p\frac{dp}{dy}+\frac{1}{p}-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy},$$

ანუ

$$\frac{dp}{dy}\left(2p-\frac{y}{p^2}\right)=0.$$

აქედან

$$p_1=c \quad (c\neq 0) \text{ და } p_2=\sqrt[3]{\frac{1}{2}y}.$$

ჩავსვათ p-ს ეს მნიშვნელობები (23)-ში, მივიღებთ

$$y=cx-c^3 \text{ და } y=\frac{2}{3\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}.$$

ახლა განვიხილოთ (14) განტოლების ის კერძო შემთხვევა, როდესაც ის წრფივია x და y ცვლადების მიმართ

$$y=\varphi(y')x+g(y'). \qquad (24)$$

ამ განტოლებას ლაგრანჟის განტოლებას უწოდებენ.

ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(y')\neq y'$ ($\varphi(y')=y'$ შემთხვევას განვიხილავთ ქვემოთ). აღვნიშნოთ $y'=p$. მაშინ (24) განტოლებიდან გვექნება

$$y=\varphi(p)x+g(p). \qquad (25)$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x-ით, მივიღებთ

$$p=\varphi(p)+x\varphi'(p)\frac{dp}{dx}+g'(p)\frac{dp}{dx}.$$

აქედან გვაქვს

$$(p-\varphi(p))\frac{dx}{dp}=x\varphi'(p)+g'(p).$$

რადგან $\varphi(p)-p\neq 0$, ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\frac{dx}{dp}-\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x=\frac{g'(p)}{p-\varphi(p)}.$$

მივიღეთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება x ცვლადისა და მისი $\frac{dx}{dp}$ წარმოებულის მიმართ. ვთქვათ მისი ზოგადი ამონახსნია

$$\Phi(x,p,c)=0. \qquad (26)$$

(26) ტოლობა (25) ტოლობასთან ერთად წარმოადგენს ლაგრანჟის განტოლების ზოგად ამონახსნს პარამეტრული სახით.

ლაგრანჟის განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნია

$$y=x\varphi(p_0)+g(p_0), \qquad (27)$$

სადაც p_0 არის $\varphi(p)=p$ განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი.

მაგალითი 14. ვიპოვოთ ლაგრანჟის

$$y=xy'^2+y'$$

განტოლების ზოგადი და კერძო ამონახსნები.

ამოხსნა. ვთქვათ $y'=p$, მაშინ $y=xp^2+p$. გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x-ით, მივიღებთ

$$p=p^2+2xp\frac{dp}{dx}+\frac{dp}{dx},$$

საიდანაც

$$\frac{dx}{dp}=x\cdot\frac{2}{1-p}+\frac{1}{p-p^2}.$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$x=\frac{1}{(1-p)^2}\left(C+\ln|p|-p\right).$$

ამრიგად მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\begin{cases} x=\dfrac{C+\ln|p|-p}{(1-p)^2} \\ y=\dfrac{(C+\ln|p|-p)p^2}{(1-p)^2}+p. \end{cases}$$

რადგან $p^2=p$ განტოლების ფესვებია $p_1=0$ და $p_2=1$, ამიტომ (27) ფორმულის ძალით მოცემული განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნებია: $y=0$ და $y=x+1$.

იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც $\varphi(p)=p$, (25) განტოლებას უწოდებენ კლეროს განტოლებას. ე.ი. კლეროს განტოლებაა

$$y=xp+g(p) \qquad (28)$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x ცვლადით, გვექნება

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+g'(p)\frac{dp}{dx},$$

საიდანაც

$$\frac{dp}{dx}(x+g'(p))=0.$$

აქედან $\frac{dp}{dx}=0$, ან $x+g'(p)=0$. $\frac{dp}{dx}=0$ განტოლებიდან ვღებულობთ, რომ $p=C$. თუ p-ს მნიშვნელობას ჩავსვამთ (28) ტოლობაში, მივიღებთ კლეროს განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$y=Cx+g(C), \qquad (29)$$

რომელიც წარმოადგენს წრფეთა ერთობლიობას.

ახლა, $x+g'(p)=0$ განტოლება (28) განტოლებასთან ერთად გვაძლევს კლეროს განტოლების ამონახსნს პარამეტრული სახით:

$$\begin{cases} x = -g'(p), \\ y = -pg'(p) + g(p) \end{cases} \qquad (30)$$

ეს ამონახსნი არ მიიღება კლეროს განტოლების ზოგადი ამონახსნიდან C-ს არავითარი მნიშვნელობისათვის, რადგან იგი არ არის წრფივი ფუნქცია. ეს არის განსაკუთრებული ამონახსნი.

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $y = y'x + \frac{1}{y'}$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი და განსაკუთრებული ამონახსნი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y'=p$. (29) ფორმულის თანახმად განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=cx+\frac{1}{c}.$$

განსაკუთრებული ამონახსნი ვიპოვოთ (30) ფორმულის გამოყენებით. რადგან ჩვენ შემთხვევაში $g'(p) = -\frac{1}{p^2}$, ამიტომ განსაკუთრებული ამონახსნი იქნება

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2}, \\ y = \frac{2}{p}. \end{cases}$$

თუ ამ სისტემიდან გამოვრიცხავთ p პარამეტრს, გვექნება $y^2=4x$. ამრიგად, ზოგადი ამონახსნი არის $y=cx+\frac{1}{c}$ ერთპარამეტრიან წრფეთა ოჯახი, ხოლო განსაკუთრებული ამონახსნია $y^2=4x$ პარაბოლა, რომელიც ცხადია არ მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან c-ს არავითარი მნიშვნელობისათვის.

20.43. იპოვეთ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი თუ ცნობილია მისი ზოგადი ამონახსნი (სადაც ის მითითებულია)

1) $y' = \frac{2\sqrt{y}}{x}$; 2) $y' = 4x\sqrt{y-1}$;

3) $xy'^2+2xy'-y=0$, $(y-c)^2=4cx$;

4) $y=y'^2-xy'+\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{x^2}{2}+Cx+C^2$.

ამოხსენით განტოლება (NN20.44; 20.45):

20.44. 1) $y=y'^2+4y'^3$; 2) $y=y'^2e^{y'}$;

3) $y=y'^2+2\ln y'$; 4) $y=(y'-1)e^{y'}$.

20.45. 1) $x=y'^3+y'$; 2) $x=y'\cos y'$;

3) $x=\sin y'+\ln y'$; 4) $y'(x-\ln y')=1$.

20.46. ამოხსენით კლეროს განტოლებები

1) $y=xy'+y'$; 2) $y=xy'+y'^2$; 3) $y=xy'-\frac{1}{y'}$; 4) $y=xy'+\frac{1}{2y'}$.

20.47. ამოხსენით ლაგრანჟის განტოლება.

1) $y=2xy'+\frac{1}{y'}$; 2) $y=2xy'+\ln y'$;

3) $y=2xy'+\sin y'$; 4) $y=\frac{3}{2}xy'+e^{y'}$.

8. სხვადასხვა განტოლებები.

ამოხსენით განტოლებები (NN20.48-20.52):

20.48. 1) $(xy^2-x)dx+(y+xy)dy=0$; 2) $\frac{y-xy'}{x+yy'}=2$;

3) $y'=\frac{y^2+xy-x^2}{y^2}$; 4) $(1-x^2)y'-2xy^2=xy$.

20.49. 1) $y'(y^2-x)=y$; 2) $(x+y)^2y'=1$;

3) $(x+y)\,y'=y$; 4) $y'=\frac{1}{x-y^2}$.

20.50. 1) $yy'+y^2\mathrm{ctg}x=\cos x$; 2) $(x\cos y+\sin 2y)\,y'=1$;

3) $y(y-xy')=\sqrt{x^4+y^4}$; 4) $(e^y+2xy)dx+(e^y+x)xdy=0$.

20.51. 1) $x\ln\frac{x}{y}dy-ydx=0$; 2) $2(x-y^2)dy=ydx$;

3) $xy'+y=xy^2\ln x$; 4) $xy'=e^y+2y'$.

20.52. 1) $xy'=2\sqrt{y}\cos x-2y$; 2) $y'=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$;

3) $x(x+1)(y'-1)=y$; 4) $\left(x-y\sin\frac{y}{x}\right)dx+x\sin\frac{y}{x}dy=0$.

§ 21. ამოცანები პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების გამოყენებაზე

21.1. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომელიც გადის M(2;3) წერტილზე და აქვს ის თვისება, რომ მის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების მონაკვეთი, რომელიც კოორდინატთა ღერძებს შორის არის მოთავსებული, შეხების წერტილით შუაზე იყოფა.

21.2. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომელიც გადის M(2;0) წერტილზე და მის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია შეხების წერტილსა და ორდინატთა ღერძს შორის, არის ორის ტოლი.

21.3. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომლის ნებისმიერ წერტილში გავლებული ნორმალის მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია წირის წერტილსა და აბსცისთა ღერძს შორის, მუდმივია და a-ს ტოლია.

21.4. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომლის ნებისმიერ წერტილში გავლებული ნორმალის მიერ Ox ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის ფარდობა შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორთან a-ს ტოლია.

21.5. იპოვეთ M(1;0) წერტილზე გამავალი წირის განტოლება, თუ ამ წირის ნორმალის მიერ აბსცისთა ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის სიგრძე 2-ით მეტია იმ წერტილის აბსცისაზე, რომელშიაც გავლებულია ნორმალი.

21.6. . იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომლის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების მიერ ორდინატთა ღერძზე მოკვეთილი მონაკვეთის სიგრძის კვადრატი ტოლია შეხების წერტილის კოორდინატების ნამრავლის.

21.7. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში და რომლის ყველა ნორმალი იკვეთება მოცემულ $M(x_0;y_0)$ წერტილში.

21.8. იპოვეთ წირის განტოლება, თუ იგი გადის M(1;1) წერტილში და ამ წირის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხები აბსცისთა ღერძზე ჩამოჭრის მონაკვეთს, რომლის სიგრძე ამავე მხების კოორდინატთა ღერძებს შორის მოთავსებული მონაკვეთის სიგრძის ტოლია.

21.9. იპოვეთ წირის განტოლება, თუ იგი გადის კოორდინატთა სათავეში და ამ წირის ნებისმიერ წერტილში გავლებული ნორმალის მონაკვეთი, რომელიც მოთავსებულია საძიებელ წირსა და აბსცისთა ღერძს შორის, $2y^2=x$ პარაბოლით შუაზე იყოფა.

21.10. რეზერვუარში მოთავსებულია 100 ლ მარილხსნარი, რომელიც შეიცავს 10 კგ გახსნილ მარილს. ყოველ წუთში რეზერვუარიდან გამოდის 2 ლ მარილხსნარი და ჩადის 3 ლ სუფთა წყალი. რამდენი მარილი დარჩება რეზერვუარში 1 სთ-ის შემდეგ, თუ მარილის კონცენტრაცია დროის ნებისმიერ მომენტში მთელ რეზერვუარში ერთნაირია?

21.11. ჭურჭელი, რომლის მოცულობა a ლიტრია, ავსებულია მარილხსნარით. დროის ყოველ მომენტში ჭურჭელში ჩადის b ლიტრი წყალი და გამოდის ამდენივე ხსნარი. განსაზღვრეთ, რა კანონის მიხედვით იცვლება მარილის რაოდენობა ჭურჭელში.

21.12. ჰუკის კანონის თანახმად, ℓ სიგრძის ელასტიური ღერო F ძალის მოქმედებით ღებულობს წაგრძელებას, რომელიც პროპორციულია F ძალისა და ღეროს ℓ სიგრძისა ($\Delta\ell=k\ell F$, $k=const$). იპოვეთ, რამდენით წაგრძელდება ℓ სიგრძის ღერო, რომელიც ვერტიკალურად არის დაკიდებული ერთი ბოლოთი, თუ მისი წონა არის P.

21.13. სითხეში, წრიულ მბრუნავ დისკზე მოქმედი ხახუნის ძალა პროპორციულია ბრუნვის კუთხური სიჩქარის. იპოვეთ დისკის ბრუნვის კუთხური სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ 100 ბრ/წთ კუთხური სიჩქარით მბრუნავი დისკის კუთხური სიჩქარე 1 წთ-ის გავლის შემდეგ გახდება 60 ბრ/წთ.

21.14. სხეულის ვერტიკალურად ქვემოთ ვარდნისას ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია ვარდნილი სხეულის სიჩქარისა. იპოვეთ v_0 საწყისი სიჩქარით ვერტიკალურად ვარდნილი სხეულის დროზე დამოკიდებულების კანონი.

21.15. მოტორიანი ნავი მოძრაობს $v=10$ კმ/სთ სიჩქარით. რაღაც მომენტში გამორთეს ძრავი და ძრავის გამორთვიდან 20 წმ-ის შემდეგ ნავის სიჩქარე შემცირდა $v_1=6$ კმ/სთ-მდე. ჩათვალეთ, რომ ნავის მოძრაობისადმი წყლის წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია ნავის სიჩქარისა და იპოვეთ ნავის სიჩქარე 2 წთ-ის შემდეგ ძრავის გამორთვიდან.

21.16. m მასის მქონე მატერიალური წერტილი მოძრაობს წრფივად. მასზე მოქმედებს ძალა, რომელიც პროპორციულია მოძრაობის დროის კუბისა (პროპორციულობის კოეფიციენტია k) და უკუპროპორციულია სიჩქარის მოძრაობის დროზე ნამრავლისა (პროპორციულობის კოეფიციენტია k_1). იპოვეთ მატერიალური წერტილის სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ მისი საწყისი სიჩქარეა v_0.

21.17. ტყვია ხვდება $h=0,1$ მ სისქის ძელს $v_0=200$ მ/წმ სიჩქარით და გამოდის ძელიდან $v_1=80$ მ/წმ სიჩქარით. ჩათვალეთ, რომ ტყვიის მოძრაობისას ძელში მასზე მოქმედი წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია ტყვიის სიჩქარის კვადრატის და იპოვეთ დრო, რომელიც ტყვიამ მოანდომა ძელის გახვრეტას.

21.18. ძაბვა ელექტრული წრედის უბნის ბოლოებზე და წრედის წინაღობა თანაბრად იცვლება 1 წთ-ის განმავლობაში შესაბამისად ნულიდან 120 ვ-მდე და ნულიდან 120 ომამდე. წრედის ინდუქციურობაა 1 ჰენრი, დენის ძალა დროის საწყის მომენტში I_0. იპოვეთ დამოკიდებულება დენის ძალასა და დროს შორის.

21.19. მავთულიანი კოჭა ჩართულია ელექტრულ წრედში. 10 წამის განმავლობაში ძაბვა კოჭის ბოლოებზე შეიცვალა $E_0=2$ ვ-დან $E_1=1$ ვ-მდე. როგორი იქნება დენის ძალა კოჭაში მეათე წამის ბოლოს, თუ ცდის დაწყებისას მისი მნიშვნელობა იყო $16\frac{2}{3}$ ა? კოჭას წინააღმდეგობაა $R=0.01$ ომი, ინდუქციურობა კი 0,1 ჰენრი.

21.20. იპოვეთ დენის ძალა კოჭაში დროის t მომენტში, თუ მისი წინააღმდეგობაა R, ინდუქციურობა L, დენის საწყისი მნიშვნელობა I_0, ხოლო ელექტრომამოძრავებელი ძალა კოჭაში იცვლება $e=\varepsilon_0 \sin \omega t$ კანონით.

§ 22. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

1. ძირითადი ცნებები. დიფერენციალურ განტოლებებს, რომელთა რიგი ერთზე მეტია, ეწოდება მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები. n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots, y', y, x) = 0. \tag{1}$$

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ n-ური რიგის ნორმალური სახის დიფერენციალურ განტოლებებს, რომელთა ზოგადი სახეა

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

ისევე, როგორც პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი როგორც ქვემოთ ვნახავთ, დამოკიდებულია მუდმივებზე. ამიტომ ზოგადი ამონახსნიდან რაიმე კერძო ამონახსნის გამოყოფისათვის საჭიროა დიფერენციალურ განტოლებასთან ერთად რაიმე დამატებითი პირობები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ განვსაზღვროთ ზოგად ამონახსნში შემავალი მუდმივები. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის ასეთი პირობას წარმოადგენდა ამონახსნის მნიშვნელობის დაფიქსირება რომელიმე წერტილში - $y_0=f(x_0)$. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის ასეთი პირობები სხვადასხვაგვარად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ. მაგალითად, მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი როგორც ქვემოთ ვნახავთ, დამოკიდებულია ორ მუდმივზე და მათი მოძებნისათვის საჭიროა ორი პირობა. ასეთი პირობები შეიძლება იყოს ამონახსნის მნიშვნელობების დაფიქსირება ორ სხვადასხვა წერტილში ან

ერთსა და იმავე წერტილში ამონახსნისა და მისი წარმოებულის მნიშვნელობების ცოდნა. ამ ორი ხერხიდან უფრო მეტად გავრცელებულია მეორე. კერძოდ, ის უფრო მოხერხებულია მექანიკის იმ ამოცანების ამოხსნისათვის, რომლებიც დაკავშირებულია სხეულის მოძრაობის განტოლების პოვნასთან. ამ შემთხვევაში მოცემულია სხეულის საწყისი კოორდინატი (ფუნქციის მნიშვნელობა) და საწყისი სიჩქარე (ფუნქციის წარმოებული). ამიტომ პირობებს $y_0=y(x_0)$ და $y_0' = y'(x_0)$ უწოდებენ საწყის პირობებს.

პირობებს

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{3}$$

ეწოდება საწყისი პირობები n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის.

ამოცანას, ვიპოვოთ n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (3) საწყის პირობებს, ეწოდება კოშის ამოცანა.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თუ f ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ უწყვეტი ფუნქციებია $n+1$ განზომილებიანი სივრცის რაიმე Ω არეში, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}) \in \Omega$ წერტილი, არსებობს (2) განტოლების ერთადერთი $y=\varphi(x)$ ამონახსნი x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, რომელიც აკმაყოფილებს (3) საწყის პირობებს.

თეორემა 1-დან გამომდინარეობს, რომ თუ $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}) \in \Omega$, მაშინ კოშის ამოცანას (3) საწყისი პირობებით გააჩნია ამონახსნი და იგი ერთადერთია. ამიტომ თეორემა 1-ს უწოდებენ თეორემას კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ.

განსაზღვრება 1. n-ური რიგის (2) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ანუ ზოგადი ინტეგრალი ეწოდება $y=y(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია n ნებისმიერ მუდმივზე და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) $y=y(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ ფუნქცია არის (2) განტოლების ამონახსნი $C_1, C_2, \cdots, C_n$ მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გარკვეული სიმრავლიდან.

ბ) მოცემული (3) საწყისი პირობებისათვის $c_1, c_2, \cdots, c_n$ მუდმივები შეგვიძლია შევარჩიოთ ისე, რომ $y=y(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (3) საწყის პირობებს (იგულისხმება, რომ $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}) \in \Omega$).

ზოგ შემთხვევაში n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ არაცხადი სახით: $\Phi(x,y,c_1,c_2,\cdots,c_n)=0$, რომელიც y-ის მიმართ ელემენტარულ ფუნქციებში შეიძლება საზოგადოდ არ ამოიხსნას.

ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან $c_1, c_2, \cdots, c_n$ მუდმივების რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობებისათვის, ეწოდება მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

22.1. დაადგინეთ არე რომელზედაც შესრულებულია ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის პირობები:

1) $y'' = \sin y' + e^{-x^2 y}$; 2) $y'' = x + \sqrt{x^2 - y'}$;

3) $y'' = y' \ln y'$; 4) $y'' = \sqrt{y}$.

22.2. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს მითითებული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს:

1) $y=C_1x+C_2$, $y''=0$; 2) $y=\ln\dfrac{1}{x+C_1}+C_2$, $y''=y'^2$;

3) $y=x(\sin x-\cos x)$, $y''+y=2(\sin x+\cos x)$;

4) $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3$, $xy'''=2$;

5) $y=\dfrac{1}{2}(x^2+1)$, $1+y'^2=2yy''$;

6) $e^{\frac{1}{2}y}\sin(C_1x+C_2)=\sqrt{2}C_1$, $y''=e^y$.

2. განტოლებები რომლებიც ამოიხსნებიან რიგის დაწევით.

ზოგ შემთხვევაში შესაძლებელია, მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის დაყვანა უფრო დაბალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნამდე ანუ განტოლების რიგის დაწევა. განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა.

I. $y^{(n)}=f(x)$.

ამ განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + c_1 = g_1(x) + c_1, \qquad (4)$$

სადაც x_0 რაიმე ფიქსირებული რიცხვია ამონახსნის არსებობის შუალედიდან, ხოლო c_1 მუდმივია. (4)-დან გვაქვს

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + c_1(x-x_0) + c_2 = g_2(x) + c_1(x-x_0) + c_2.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$y = \int_{x_0}^{x} g_{n-1}(t)dt + \frac{c_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + c_n.$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(0)=2$, $y'(0)=0$ საწყის პირობებს.

ამოხსნა. ინტეგრებით მივიღებთ

$$y' = \operatorname{tg}x + c_1, \quad y = -\ln|\cos x| + c_1x + c_2.$$

შევარჩიოთ ის ამონახსნი რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს. გვაქვს

$$\begin{cases} -\ln|\cos 0| + 0\cdot c_1 + c_2 = 2 \\ \operatorname{tg}0 + c_1 = 0. \end{cases}$$

აქედან $c_1=0$, $c_2=2$. ე.ი. საძებნი ამონახსნია

$$y = -\ln|\cos x| + 2$$

II. ვთქვათ (1) განტოლების მარცხენა მხარე ცხადი სახით არ შეიცავს y-ს, ე.ი. განტოლებას აქვს სახე

$$F(x, y', \cdots, y^{(n)}) = 0. \qquad (5)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $z(x)=y'(x)$. მაშინ $z'=y'', \cdots, z^{(n-1)}=y^{(n)}$ და (5) განტოლება მიიღებს სახეს

$$F(x, z, z', \cdots, z^{(n-1)}) = 0.$$

მივიღეთ $(n-1)$ რიგის დიფერენციალური განტოლება. თუ $z=z(x,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1})$ არის ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი (იგი

დამოკიდებულია n-1 მუდმივზე), მაშინ (5) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=\int_{x_0}^{x} z(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1})dt+c_n.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $y''=1+(y')^2$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y'=z$. მაშინ მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს

$$z'=1+z^2.$$

ცვლადთა განცალებით მივიღებთ

$$\frac{dz}{1+z^2}=dx, \quad x+c_1=\int\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arctg} z.$$

ე.ი.

$$z=\operatorname{tg}(x+c_1).$$

რადგან $z=y'$, ამიტომ $dy=\operatorname{tg}(x+c_1)dx$ და $y=-\ln|\cos(x+c_1)|+c_2$.

III. ვთქვათ (1) განტოლების მარჯვენა მხარე ცხადი სახით არ შეიცავს x-ს, ე.ი. აქვს სახე

$$F(y,y',y'')=0. \qquad (7)$$

ვიგულისხმოთ, რომ ამ განტოლებაში y არის დამოუკიდებელი ცვლადი, y' - კი საძიებელი ფუნქცია. აღვნიშნოთ $y'=z(y)$. მაშინ

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz(y)}{dx}=\frac{dz(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z'_y\cdot z.$$

თუ y ფუნქციის წარმოებულების ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (7) განტოლებაში, z ფუნქციის მიმართ მივიღებთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ $yy''-y'^2=0$ განტოლება.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y'=z(y)$, მაშინ

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz(y)}{dx}=z'_y\cdot z.$$

ამ მნიშვნელობების ჩასმით მოცემულ განტოლებაში მივიღებთ

$$yzz'_y-z^2=0.$$

აქედან $z=0$ ან $y\frac{dz}{dy}-z=0$. ტოლობიდან $z=0$ გვაქვს $y=c$, რომელიც

აგრეთვე წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსნს.

ვთქვათ, $z\neq 0$, მაშინ $y\frac{dz}{dy}-z=0$ განტოლებიდან გვაქვს

$$\frac{dz}{z}=\frac{dy}{y},$$

საიდან

$$z=c_1y.$$

რადგან $z=\frac{dy}{dx}$, ამიტომ გვაქვს

$$\frac{dy}{dx}=c_1y,$$

საიდანაც

$$\ln\left|\frac{y}{c_2}\right|=c_1x,$$

ანუ

$$y=c_2e^{c_1x}.$$

ამოხსენით განტოლებები (NN22.3-22.11):

22.3. 1) $y''=x+\sin x$; 2) $y''=\frac{1}{x}$; 3) $y''=\frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $y''=\frac{1}{1+x^2}$.

22.4. 1) $y'''=\frac{\ln x}{x^2}$; 2) $y'''=\cos 2x$; 3) $y'''=x+\cos x$; 4) $y'''=2x\ln x$.

22.5. 1) $xy''=y'$; 2) $y''+2xy'^2=0$; 3) $x^2y''=y'^2$; 4) $y''=1-y'^2$.

22.6. 1) $xy''=(1+2x^2)y'$; 2) $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$; 3) $x\ln x\cdot y''=y'$; 4) $xy''=y'+x^2$.

22.7. 1) $xy''-y'=x\sin\frac{y'}{x}$; 2) $(1-x^2)y''+xy'-2=0$; 3) $x^3y''+x^2y'-1=0$; 4) $y''-2\operatorname{ctg}x\cdot y'=\sin^3 x$.

22.8. 1) $y''' = (y'')^2$; 2) $y''' = \sqrt{1-(y'')^2}$;

3) $xy''' - y'' = 0$; 4) $y''' = 2(y'' - 1)\mathrm{ctg}x$;

5) $xy''' + y'' = 1 + x$; 6) $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$.

22.9. 1) $yy'' = y'^2$; 2) $y'' = -\dfrac{1}{2y^3}$;

3) $yy'' = y^2y' + y'^2$; 4) $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

22.10. 1) $y^3y'' = 1$; 2) $yy'' - y'(1 + y') = 0$;

3) $y''\mathrm{tg}y = 2y'^2$; 4) $(y - 1)y'' = 2y'^2$.

22.11. 1) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$. 2) $yy'' = y'^2 - y'^3$;

3) $2yy'' = y^2 + y'^2$; 4) $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობებს (NN22.12-22.15):

22.12. 1) $y''' = \dfrac{6}{x^3}$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 1$;

2) $y'' = 4\cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

3) $y''' = e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$;

4) $y'' = xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

22.13. 1) $xy'' = y'$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 1$;

2) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;

3) $xy'' + xy'^2 = y'$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$;

4) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.

22.14. 1) $xy'' = \sqrt{1 + y'^2}$, $y(1) = 0$, $y(e^2) = 1$;

2) $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

3) $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right)$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = 1$;

4) $y''(1 + \ln x) + \dfrac{1}{x}y' = 2 + \ln x$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = 1$.

22.15. 1) $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$;

2) $2yy'' - y'^2 = 0$, $y(-1) = 4$, $y'(-1) = 1$;

3) $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

4) $yy'' = y'^2 - y'^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

3. წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებები.

განსაზღვრება. 2. n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება n-ური რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება, თუ იგი წრფივია უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მიმართ, ე.ი. აქვს შემდეგი სახე

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=f(x). \qquad (8)$$

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ისეთ განტოლებებს, რომელშიც $a_0(x)\equiv 1$.

თუ $f(x)\not\equiv 0$, (8) განტოლებას ეწოდება არაერთგვაროვანი, ხოლო თუ $f(x)\equiv 0$, ე.ი. (8) განტოლებას აქვს სახე

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=0, \qquad (9)$$

ეწოდება ერთგვაროვანი. (9) განტოლებას ეწოდება (8) არაერთგვაროვანი განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება.

განსაზღვრება 3. $y_1, y_2,\dots,y_m$ ფუნქციების წრფივი კომბინაცია ეწოდება $c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_my_m$ სახის ჯამს სადაც $c_1,c_2,\dots,c_m$ რაიმე მუდმივებია.

განსაზღვრება 4. $y_1, y_2,\dots,y_m$ ფუნქციებს ეწოდება წრფივად დამოკიდებული E სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი $c_1,c_2,\dots,c_m$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და E სიმრავლეზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_my_m\equiv 0. \qquad (10)$$

თუ (10) ტოლობა სრულდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $c_1=c_2=\dots=c_m=0$, მაშინ $y_1, y_2,\dots,y_m$ ფუნქციებს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი E სიმრავლეზე.

შევნიშნოთ, რომ y_1 და y_2 ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\dfrac{y_1}{y_2}\ne \mathrm{const}$.

მაგალითად, $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელი

ფუნქციები $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე, ხოლო $\arcsin x$ და $\arccos x-\frac{\pi}{2}$ ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულია ამავე სეგმენტზე.

თეორემა 2. თუ $y_1, y_2, \dots, y_n$ ფუნქციები წარმოადგენენ (9) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს, მაშინ ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n,$$

სადაც $c_1, c_2, \dots, c_n$ ნებისმიერი მუდმივებია.

თეორემა 3. თუ $y_1(x)$ არის მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$$

დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი, მაშინ

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int a_1(x)dx}dx \qquad (11)$$

ფუნქცია აგრეთვე არის ამ განტოლების ამონახსნი, ხოლო

$$y=y_1(x)\left(C_1+C_2\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int a_1(x)dx}dx\right)$$

მისი ზოგადი ამონახსნია.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი $]-1,1[$ ინტერვალში.

ამოხსნა. უშუალოდ შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ $y_1=x$ არის მოცემული განტოლების ამონახსნი.

რადგან ჩვენ შემთხვევაში $a_1(x)=-\frac{2x}{1-x^2}$, (11) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$y_2=x\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}dx=x\int\frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2}dx=x\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}=$$

$$=x\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2(1-x)}+\frac{1}{2(1+x)}\right)dx=x\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right).$$

ამრიგად ზოგადი ამონახსნი $]-1,1[$ ინტერვალში იქნება

$$y=C_1x+C_2\left(\frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x}-1\right).$$

შეისწავლეთ ფუნქციათა სისტემის წრფივად დამოკიდებულების საკითხი (NN22.16-22.18):

22.16. 1) $x+2,\ x-2$; 2) $1,\ x,\ x^2$;
3) $6x+9,\ 8x+12$; 4) $4-x,\ 2x+3,\ 6x+8$.

22.17. 1) $x,\ \ln x$; 2) $e^{-x},\ xe^{-x}$;
3) $\sin 2x,\ \sin x\cos x$; 4) $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x$.

22.18. 1) $\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x$; 2) $1,\ \sin x,\ \cos 2x$;
3) $x,\ 0,\ e^x$; 4) $\operatorname{sh}x,\ \operatorname{ch}x,\ 2e^x-1,\ 3e^x+5$.

იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი თუ ცნობილია მისი ერთი კერძო ამონახსნი (NN22.19-22.22):

22.19. 1) $x^2(x+1)y''-2y=0,\quad y_1=1+\frac{1}{x}$;

2) $xy''+2y'+xy=0,\quad y_1=\frac{\sin x}{x}$.

22.20. 1) $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0,\quad y_1=x$;

2) $\left(x^2+1\right)y''-2xy'+2y=0,\quad y_1=x$.

22.21. 1) $xy''+2y'-xy=0,\quad y_1=\frac{e^x}{x}$;

2) $y''-2\left(1+\operatorname{tg}^2x\right)y=0,\quad y_1=\operatorname{tg}x$.

22.22. 1) $\left(e^x+1\right)y''-2y'-e^xy=0,\quad y_1=e^x-1$;

2) $y''-y'\operatorname{tg}x+2y=0,\quad y_1=\sin x$.

4. წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლებები. განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x). \qquad (12)$$

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4. წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების $\bar{y}$ ზოგადი ამონახსნისა და მოცემული განტოლების რაიმე y^* კერძო ამონახსნის ჯამს. ე.ი. ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y=\bar{y}+y^*.$$

არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნის მოძებნისათვის სასარგებლოა შემდეგი თეორემა.

შენიშვნა 5. თუ არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ორი ფუნქციის ჯამს, ე.ი.

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x),$$

მაშინ ამ განტოლების კერძო ამონახსნია $y^* = y_1^* + y_2^*$, სადაც y_1^* და y_2^* არის შესაბამისად შემდეგი განტოლებების

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x),$$

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x)$$

კერძო ამონახსნი.

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როდესაც ცნობილია (12) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების რაიმე ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, მაშინ (12) განტოლების კერძო ამონახსნის შეგვიძლია ვიპოვოთ მათი საშუალებით ე.წ. მუდმივთა ვარიაციის მეთოდის გამოყენებით. გავეცნოთ ამ მეთოდს.

ვთქვათ y_1 და y_2 ფუნქციები

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. (12) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

სადაც $c_1(x)$ და $c_2(x)$ ფუნქციები განისაზღვრებიან შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0, \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ

$$y'' - \frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x^2} = x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ $y_1 = x$ და $y_2 = x^2$ ფუნქციები მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნებია. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\bar{y} = c_1x + c_2x^2.$$

მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^* = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2,$$

სადაც $c_1(x)$ და $c_2(x)$ აკმაყოფილებენ სისტემას

$$\begin{cases} xc_1'(x) + x^2c_2'(x) = 0, \\ c_1'(x) + 2xc_2'(x) = x. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $c_1'(x) = -x$ და $c_2'(x) = 1$, საიდანაც $c_1 = -\frac{x^2}{2}$, $c_2 = x$. ე.ი. მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნია

$$y^* = -\frac{x^2}{2}x + x \cdot x^2 = \frac{x^3}{2}.$$

ამრიგად განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = c_1x + c_2x^2 + \frac{x^3}{2},$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

22.23. იპოვეთ არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ ცნობილია შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები:

1) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}$, $y_1 = \frac{\sin x}{x}$, $y_2 = \frac{\cos x}{x}$;

2) $xy'' + 2y' + xy = x$, $y_1 = \frac{\sin x}{x}$, $y_2 = \frac{\cos x}{x}$;

3) $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x$, $y_1 = \frac{1}{x+1}$, $y_2 = \frac{1}{x-1}$;

4) $\operatorname{ctg}x \cdot y'' + 2y' + (2\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)y = \cos^2 x$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = x\cos x$.

22.24. იპოვეთ არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ ცნობილია შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი:

1) $x^2y'' - 6xy' + 12y = 3x$, $y_1 = x^3$;

2) $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$, $y_1 = \frac{1}{x}$;

3) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2e^x$, $y_1 = e^x$;

4) $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3)$, $y_1 = x^2$.

5. წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებები.

I. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება.

განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

$$y'' + a_1 y' + a_2 = 0, \qquad (13)$$

სადაც a_1 და a_2 მუდმივი რიცხვებია. ასეთ განტოლებას მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება ეწოდება.

როგორც ვიცით (იხ. თეორემა 2) (13) განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად საკმარისია ვიპოვოთ მისი წრფივად დამოუკიდებელი ორი ამონახსნი. ვეძებოთ (13) განტოლების კერძო ამონახსნი შემდეგი სახით

$$y=e^{kx}, \text{ სადაც } k=\text{const};$$

მაშინ

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

თუ y ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (13) განტოლებაში, მივიღებთ

$$e^{kx}(k^2+a_1k+a_2)=0.$$

რადგან $e^{kx} \neq 0$, გვექნება

$$k^2+a_1k+a_2=0. \qquad (14)$$

ამრიგად, თუ k არის (14) განტოლების ფესვი, მაშინ e^{kx} იქნება (13) განტოლების ამონახსნი. (14) განტოლებას ეწოდება (13) განტოლების მახასიათებელი განტოლება. (14) განტოლება არის კვადრატული განტოლება. მას გააჩნია ორი ფესვი ჯერადობის გათვალისწინებით. განვიხილოთ შემთხვევები.

1. (14) განტოლებას აქვს ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვები k_1 და k_2 $(k_1 \neq k_2)$. მაშინ e^{k_1x} და e^{k_2x} ფუნქციები იქნება (13) განტოლების ამონახსნები. ამასთან ეს ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია. ამიტომ ამ შემთხვევაში (13) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1 e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}.$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $y'' + 5y' - 6y = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2+5k-6=0,$$

რომლის ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-6$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1e^x+c_2e^{-6x}.$$

2. მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ორჯერადი ფესვი $k_1=k_2=r$; მაშინ $y_1=e^{rx}$ ფუნქცია იქნება (13) განტოლების ამონახსნი. მტკიცდება, რომ ამ შემთხვევაში მეორე კერძო ამონახსნი იქნება

$$y_2=xe^{rx}.$$

რადგან y_1 და y_2 წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია, (13) განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნება სახე

$$y=e^{rx}(c_1+c_2x).$$

მაგალითი 7. ვიპოვოთ

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2+4k+4=0.$$

მისი ფესვია $k=-2$, ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=e^{-2x}(c_1x+c_2).$$

3. (14) განტოლებას გააჩნია კომპლექსური ფესვები $\alpha \pm \beta i$. ამ შემთხვევაში წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნებია

$$y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x \quad \text{და} \quad y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

ამიტომ (13) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x).$$

მაგალითი 8. ვიპოვოთ $y'' + 4y' + 13y = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2+4k+13=0,$$

რომელსაც გააჩნია კომპლექსური ფესვები $k_1=2+3i$, $k_2=2-3i$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=e^{2x}(c_1\cos3x+c_2\sin3x).$$

II. n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება.

განვიხილოთ n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=0. \qquad (15)$$

(15) განტოლების ზოგად ამონახსნს ვპოულობთ ისევე, როგორც მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში:

1) უნდა შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\dots+a_n=0.$$

2) ვიპოვოთ მახასიათებელი განტოლების ფესვები.

3) განტოლების ფესვების საშუალებით ვპოულობთ (15) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს შემდეგი წესის თანახმად:

ა) ყოველ ნამდვილ მარტივ k ფესვს შეესაბამება კერძო ამონახსნი e^{kx}.

ბ) ყოველ r ჯერად ნამდვილ k ფესვს შეესაბამება r ცალი კერძო ამონახსნი - $e^{kx}, xe^{kx}, \dots, x^{r-1}e^{kx}$.

გ) ყოველ მარტივ კომპლექსურ ფესვთა წყვილს $k^{(1)} = \alpha + i\beta$,

$k^{(2)} = \alpha - i\beta$ შეესაბამება ორი კერძო ამონახსნი $e^{\alpha x}\cos\beta x$ და $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

დ) ყოველ μ-ჯერად კომპლექსურ ფესვთა წყვილს $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ შეესაბამება 2μ კერძო ამონახსნი

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \dots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \dots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

ასეთი წესით შედგენილი კერძო ამონახსნთა სისტემა იქნება წრფივად დამოუკიდებელი. ამასთან სისტემაში იქნება ზუსტად n ცალი ამონახსნი. ამ ფუნქციათა წრფივი კომბინაცია იქნება ზოგადი ამონახსნი.

მაგალითი 9. ვიპოვოთ

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^3 - 3k^2 - k + 3 = 0.$$

ამ განტოლების ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=3$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{3x}.$$

მაგალითი 10. ვიპოვოთ

$$y''' + 3y'' - 4y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^3 + 3k^2 - 4 = 0,$$

რომლის ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-2$. ამასთან -2 არის ორჯერადი ფესვი. ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x}.$$

მაგალითი 11. ვიპოვოთ

$$y^{IV} - y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^4 - 1 = 0.$$

მისი ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=i$, $k_4=-i$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x.$$

მაგალითი 12. ვიპოვოთ

$$y^{V} + 2y^{IV} - 8y'' - 12y' - 8y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^5 + 2k^4 - 8k^2 - 12k - 8 = 0.$$

ამ განტოლების ფესვებია $k_1=2$, $k_2=-1+i$, $k_3=-1-i$, ამასთან k_2 და k_3 ორჯერადი ფესვებია. ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}\cos x + c_3xe^{-x}\cos x + c_4e^{-x}\sin x + c_5xe^{-x}\sin x.$$

იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი (NN22.25-22.30):

22.25. 1) $y'' - 5y' + 6y = 0$; 2) $y'' + 3y' - 4y = 0$;
3) $y'' + 3y' = 0$; 4) $2y'' + 5y' - 7y = 0$.

22.26. 1) $y'' - 16y = 0$; 2) $y'' - 6y' + 9y = 0$;
3) $y'' + 4y' + 4y = 0$; 4) $4y'' + 4y' + y = 0$.

22.27. 1) $y'' + y = 0$; 2) $4y'' + 9y = 0$;
3) $y'' - 6y' + 13y = 0$; 4) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

22.28. 1) $y''' - 4y'' + 3y' = 0$; 2) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$;
3) $y''' - 2y'' + y' = 0$; 4) $y''' - 3y' - 2y = 0$.

22.29. 1) $y''' - 8y = 0$; 2) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$;
3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; 4) $y''' - 3y' + 2y = 0$.

22.30. 1) $y^{IV} - 16y = 0$; 2) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$;
3) $y^{IV} + 3y'' - 4y = 0$; 4) $y^{IV} - 8y''' + 22y'' - 24y' + 9y = 0$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობებს (NN22.31-22.33):

22.31. 1) $y'' - 5y' + 4y = 0,\quad y(0) = 5,\quad y'(0) = 8$;
2) $y'' + 2y' = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$;
3) $y'' - y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y(2\pi) = 1$;
4) $y'' - 2y' + y = 0,\quad y(2) = 1,\quad y'(2) = -2$.

22.32. 1) $y''' - y' = 0,\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = -1,\quad y''(0) = 1$;
2) $y''' + y' = 0,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 0,\quad y''(0) = -1$;
3) $y^{IV} - y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 1,\quad y''(0) = 1,\quad y'''(0) = 1$;
4) $y^{V} - y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1,\ y^{IV}(0) = 2$.

22.33. 1) $y'' + 4y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 2$;
2) $y'' + y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha$;

3) $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = e^{\pi};$

4) $y'' + \pi^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

III. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება.

განვიხილოთ განტოლება

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{16}$$

სადაც a_1 და a_2 მუდმივებია.

როგორც ვიცით (იხ. თეორემა 4) (16) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე $y=\bar{y}+y^*$, სადაც $\bar{y}$ არის (16) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო y^* კი (16) განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნი.

(16) განტოლების კერძო ამონახსნი შეგვიძლია ვიპოვოთ მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით (იხ. პუნქტი 4). მაგრამ მუდმივკოეფიციენტებიანი (16) განტოლების კერძო ამონახსნის პოვნა ზოგ შემთხვევაში უფრო მოხერხებულია სხვა გზით, ე.წ. "განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით". განვიხილოთ ეს შემთხვევები.

1) ვთქვათ (16) განტოლების მარჯვენა მხარეს აქვს სახე

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}, \tag{17}$$

სადაც $P_n(x)$ არის n-ური რიგის მრავალწევრი. შესაძლებელია სამი შემთხვევა.

ა) ვთქვათ α რიცხვი არ არის

$$k^2+a_1k+a_2=0$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვი. ამ შემთხვევაში (16) განტოლების კერძო ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$y^*=(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_n)e^{\alpha x}=Q_n(x)e^{\alpha x},$$

სადაც $A_0, A_1, \dots, A_n$ ჯერჯერობით უცნობი რიცხვებია. ეს რიცხვები უნდა ვიპოვოთ იმ პირობით, რომ y^* დააკმაყოფილებს (16) განტოლებას.

ბ) ვთქვათ α რიცხვი არის მახასიათებელი განტოლების მარტივი ფესვი, ე.ი. $\alpha^2+a_1\alpha+a_2=0$ და $2\alpha+a_1\neq 0$. ამ შემთხვევაში y^* ფუნქციას ვეძებთ

$$y^*=xQ_n(x)e^{\alpha x}$$

სახით.

გ) α რიცხვი არის მახასიათებელი განტოლების ორჯერადი ფესვი. ე.ი. ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\alpha^2+a_1\alpha+a_2=0, \; 2\alpha+a_1=0.$$

ამ შემთხვევაში y^* ფუნქციას ვეძებთ

$$y^*=x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$$

სახით.

შენიშვნა. როცა $\alpha=0$, მაშინ (17) ტოლობით განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია არის n-ური რიგის მრავალწევრი. ამიტომ როცა 0 არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნს ვეძებთ $y^*=Q_n(x)$ სახით. ხოლო თუ 0 არის მახასიათებელი განტოლების ℓ ჯერადი ფესვი ($\ell=1$, $\ell=2$), მაშინ კერძო ამონახსნს ვეძებთ $y^*=x^{\ell}Q_n(x)$ სახით.

მაგალითი 15. ვიპოვოთ

$$y'' + y' - 6y = x^2 + 3$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\bar{y}=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}.$$

რადგან რიცხვი 0 არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, ამიტომ y^* ფუნქცია ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=Ax^2+Bx+C.$$

მაშინ $y^{*\prime} = 2Ax + B$, $y^{*\prime\prime} = 2A$. მოცემულ განტოლებაში y^* ფუნქციისა და მისი წარმოებულების ჩასმით მივიღებთ

$$2A+(2Ax+B)-6(Ax^2+Bx+C)=x^2+3,$$

ანუ

$$-6Ax^2+(2A-6B)x+(2A+B-6C)=x^2+3.$$

ორივე მხარეში მდგომი x-ის ერთნაირი ხარისხის კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} -6A = 1, \\ 2A - 6B = 0, \\ 2A + B - 6C = 3. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $A=-\frac{1}{6}, B=-\frac{1}{18}, C=-\frac{61}{108}$. ამრიგად

$$y^*=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{18}x-\frac{61}{108}$$

და ზოგადი ამონახსნი იქნება $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{18}x-\frac{61}{108}$.

მაგალითი 14. ვიპოვოთ

$$y'' + 3y' = 1 - 2x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მოცემული განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა $k^2+3k=0$, რომლის ფესვებია $k_1=0$, $k_2=-3$. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\bar{y} = c_1 + c_2 e^{-3x}.$$

რადგან $k=0$ მახასიათებელი განტოლების ფესვია, კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^* = x(Ax+B) = Ax^2+Bx.$$

მაშინ $y^{*\prime} = 2Ax + B$, $y^{*\prime\prime} = 2A$. განტოლებაში ჩასმით გვექნება

$$2A+6Ax+3B=1-2x.$$

კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{5}{9}$. ამიტომ არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნია

$$y^* = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{9}x.$$

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = c_1 + c_2e^{-3x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{9}x.$$

მაგალითი 15. ვიპოვოთ

$$y'' - 9y = (x+1)e^{3x}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\bar{y} = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}.$$

რადგან $\alpha = 3$ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^* = x(Ax+B)e^{3x} = (Ax^2+Bx)e^{3x},$$

მაშინ

$$y^{*\prime} = (2Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx)e^{3x},$$

$$y^{*\prime\prime} = 2Ae^{3x} + 6(2Ax + B)e^{3x} + 9(Ax^2 + Bx)e^{3x}.$$

განტოლებაში ჩასმით და e^{3x}-ზე შეკვეცით მივიღებთ

$$2A+6(2Ax+B)+9(Ax^2+Bx)-9(Ax^2+Bx)=x+1,$$

ანუ

$$2A+12Ax+6B=x+1.$$

საიდან

$$A = \frac{1}{12}, \quad B = \frac{5}{36},$$

ე.ი.

$$y^* = \left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{5}{36}x\right)e^{3x}.$$

ამრიგად განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + \left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{5}{36}x\right)e^{3x}.$$

მაგალითი 16. ვიპოვოთ

$$y'' - 4y' - 5y = x + e^{-x}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\bar{y} = c_1e^{-x} + c_2e^{5x}.$$

არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ $y^* = y_1^* + y_2^*$ სახით, სადაც y_1^* არის $y'' - 4y' - 5y = x$ განტოლების კერძო ამონახსნი, ხოლო y_2^* არის $y'' - 4y' - 5y = e^{-x}$ განტოლების კერძო ამონახსნი. ადვილად მივიღებთ, რომ $y_1^* = -\frac{1}{5}x + \frac{4}{25}$ და $y_2^* = -\frac{1}{6}xe^{-x}$. ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = \bar{y} + y_1^* + y_2^* = c_1e^{-x} + c_2e^{5x} - \frac{1}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{1}{6}xe^{-x}.$$

2) ვთქვათ (16) განტოლების მარჯვენა მხარეს აქვს სახე

$$f(x) = (P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}, \qquad (18)$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია.

ამ შემთხვევაში y^* ფუნქციას ვეძებთ შემდეგი სახით:

ა) თუ $\alpha + i\beta$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ

$$y^* = [u(x)\cos\beta x + v(x)\sin\beta x]e^{\alpha x},$$

სადაც $u(x)$ და $v(x)$ არის ერთიდაიგივე რიგის მრავალწევრები, რომელთა ხარისხი $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრის ხარისხებს შორის უდიდესის ტოლია.

ბ) თუ $\alpha + i\beta$ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ

$$y^* = x[u(x)\cos\beta x + v(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}.$$

ბოლოს განვიხილოთ (18)-ის ერთი კერძო შემთხვევა, როდესაც ფუნქციას აქვს სახე

$$f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x,$$

ე.ი. როდესაც $P(x)=M$, $Q(x)=N$, $\alpha=0$.

ამ შემთხვევაში, როდესაც $i\beta$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$y^*=A\cos\beta x+B\sin\beta x,$$

ხოლო თუ $i\beta$ მახასიათებელი განტოლების ფესვია, მაშინ

$$y^*=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$

სახით.

მაგალითი 17. ვიპოვოთ

$$y''+2y'+5y=2\cos x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლებაა $k^2+2k+5=0$. მისი ფესვებია $k_1=-1+2i$, $k_2=-1-2i$, ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\bar{y}=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x).$$

არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=A\cos x+B\sin x.$$

მაშინ $y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x$, $y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$, განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$-A\cos x-B\sin x-2A\sin x+2B\cos x+5A\cos x+5B\sin x=2\cos x$$

ანუ

$$(4A+2B)\cos x+(-2A+4B)\sin x=2\cos x.$$

განტოლების ორივე მხარეში $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციის კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ $A=\frac{2}{5}$, $B=\frac{1}{5}$.

მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

მაგალითი 18. ამოვხსნათ განტოლება

$$y''+9y=\cos 3x.$$

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $\pm 3i$ ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\bar{y}=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x.$$

კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=x(A\cos 3x+B\sin 3x).$$

მაშინ

$$y^{*\prime}=A\cos 3x+B\sin 3x+x(-3A\sin 3x+3B\cos 3x),$$

$$y^{*\prime\prime}=-6(A\sin 3x-B\cos 3x)+x(-9A\cos 3x-9B\sin 3x).$$

განტოლებაში ჩასმით გვექნება

$$-6A\sin 3x+6B\cos 3x=\cos 3x.$$

კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ $A=0$, $B=\frac{1}{6}$.

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{x}{6}\sin 3x.$$

მაგალითი 19. ამოვხსნათ განტოლება

$$y''-y=3e^{2x}\cos x.$$

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლებაა $k^2-1=0$. მისი ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-1$. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\bar{y}=c_1e^x+c_2e^{-x}.$$

რადგან კომპლექსური რიცხვი $2+i$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ

$$y^*=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$$

სახით.

განტოლებაში ჩასმით და მსგავსი წევრების შეკრებით მივიღებთ

$$(2A+4B)e^{2x}\cos x+(-4A+2B)e^{2x}\sin x=3e^{2x}\cos x.$$

კოეფიციენტების გატოლებით გვექნება

$$2A+4B=3, \qquad 4A+2B=0.$$

აქედან $A=\frac{3}{10}$, $B=\frac{3}{5}$. ე.ი. კერძო ამონახსნია

$$y^*=e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x\right),$$

ხოლო ზოგადი ამონახსნი

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x\right).$$

IV. n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება.

განვიხილოთ განტოლება

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=f(x) \qquad (19)$$

ამ განტოლების y^* კერძო ამონახსნის "განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით" მოძებნა განვიხილოთ შემდეგი ფუნქციებისათვის:

1) ვთქვათ

$$f(x)=P_m(x)\,e^{\alpha x},$$

სადაც $P_m(x)$ არის m-ური რიგის მრავალწევრი. თუ α არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=Q_m(x)\,e^{\alpha x},$$

სადაც $Q_m(x)$ არის m-ური რიგის მრავალწევრი.

იმ შემთხვევაში როდესაც α მახასიათებელი განტოლების ℓ-ჯერადი ფესვია, კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$y^*=x^{\ell}\,Q_m(x)\,e^{\alpha x}$$

სახით.

2) ვთქვათ

$$f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x.$$

მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$y^*=A\cos\beta x+B\sin\beta x$$

სახით, თუ $i\beta$ კომპლექსური რიცხვი არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი და

$$y^*=x^{\mu}\,(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$

სახით, თუ $i\beta$ არის მახასიათებელი განტოლების μ ჯერადობის კომპლექსური ფესვი.

3) ვთქვათ

$$f(x)=[P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x]e^{\alpha x},$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია.

თუ $\alpha+i\beta$ კომპლექსური რიცხვი არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$y^*=[u(x)\cos\beta x+v(x)\sin\beta x]e^{\alpha x},$$

სახით, სადაც $u(x)$ და $v(x)$ ერთი და იმავე რიგის მრავალწევრებია, რომელთა რიგი $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრების რიგებს შორის უდიდესის ტოლია.

თუ $\alpha+i\beta$ არის მახასიათებელი განტოლების μ ჯერადობის ფესვი, y^* უნდა ვეძებოთ

$$y^*=x^{\mu}\,[u(x)\cos\beta x+v(x)\sin\beta x]e^{\alpha x},$$

სახით.

მაგალითი 20. ვიპოვოთ

$$y^{IV}-y=x^2+x-1$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=i$, $x_4=-i$. ამიტომ მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\bar{y}=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x.$$

კერძო ამონახსნი ვეძებოთ

$$y^*=Ax^2+Bx+C$$

სახით. მაშინ $(y^*)^{IV}=0$ და განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$-Ax^2-Bx-C=x^2+x-1.$$

აქედან $A=-1$, $B=-1$, $C=1$. ამრიგად მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x-x^2-x+1.$$

მაგალითი 21. ვიპოვოთ

$$y^{IV}-3y''+2y=xe^x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლება

$$k^4-3k^2+2=0.$$

მისი ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=\sqrt{2}$, $k_4=-\sqrt{2}$. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\bar{y}=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{\sqrt{2}x}+c_4e^{-\sqrt{2}x}.$$

რადგან $\alpha=1$ მახასიათებელი განტოლების ფესვია, არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ

$$y^*=x(Ax+B)e^x=(Ax^2+Bx)e^x$$

სახით. გვაქვს

$y^{*\prime}=(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x,$

$y^{*\prime\prime}=(2Ax+B)e^x+2Ae^x+(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x,$

$y^{*\prime\prime\prime}=(4Ax+2B)e^x+4Ae^x+2Ae^x+(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x,$

$y^{*IV}=(4Ax+2B)e^x+4Ae^x+6Ae^x+(2Ax+B)e^x+2Ae^x+$

$$+(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x=(8Ax+4B)e^x+12Ae^x+(Ax^2+Bx)e^x$$

განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$e^x[8Ax+4B+12A+Ax^2+Bx-12Ax-6B-6A-3Ax^2-3Bx+2Ax^2+2Bx]=xe^x,$$

ანუ

$$-4Ax-2B+6A=x.$$

აქედან კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ $A=-\frac{1}{4}$, $B=-\frac{3}{4}$. ამრიგად, ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{\sqrt{2}x}+c_4e^{-\sqrt{2}x}-\frac{1}{4}\left(x^2+3x\right)e^x.$$

მაგალითი 22. ვიპოვოთ

$$y^{IV}-y=5\cos x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=i$, $k_4=-i$. ამიტომ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\bar{y}=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x.$$

რადგან i არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნს ვეძებთ

$$y^*=x(A\cos x+B\sin x)$$

სახით. განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$4A\sin x-4B\cos x=5\cos x.$$

აქედან $A=0$, $B=-\frac{5}{4}$. ე.ი.

$$y^*=-\frac{5}{4}x\sin x.$$

ამრიგად მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x-\frac{5}{4}x\sin x.$$

იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი (NN22.34-22.48):

22.34. 1) $y''-5y'+6y=6x+1$; 2) $y''+y'-2y=6x^2$;
3) $y''+2y'+y=-2$; 4) $y''-y'-12y=12$

22.35. 1) $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$;
2) $y''-4y'+5y=10x^2-16x-1$;

3) $y''-2y'+y=x^3$; 4) $y''+4y=4x^3-14x+4$.

22.36. 1) $y''+8y'=8x$; 2) $y''-3y'=6$;
3) $7y''-y'=14x$; 4) $y''-2y'=x^2-1$;

22.37. 1) $y''-2y'-3y=e^{4x}$; 2) $y''-y=e^{-x}$;
3) $y''+4y'+4y=25e^{3x}$; 4) $y''+9y=-39e^{2x}$.

22.38. 1) $y''+4y'+4y=xe^{2x}$; 2) $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$;
3) $y''-5y'+4y=4x^2e^{2x}$; 4) $y''-3y'+2y=(x^2+x)e^{3x}$.

22.39. 1) $y''+4y'+3y=9e^{-3x}$; 2) $y''+y'-2y=3xe^x$;
3) $y''+4y'+4y=8e^{-2x}$; 4) $y''-2y'+y=6xe^x$.

22.40. 1) $y''-3y'+2y=\sin x$; 2) $y''+16y=-15\cos x$;
3) $y''-2y'=12\cos 3x-21\sin 3x$;
4) $y''-2y'+2y=-\sin x-3\cos x$.

22.41. 1) $4y''+8y'=x\sin x$; 2) $y''-3y'+2y=x\cos x$;
3) $y''-4y=\left(2-5x^2\right)\sin x+4x\cos x$;
4) $y''-y'=\left(x^2-4x\right)\sin x+\left(2-2x-x^2\right)\cos x$.

22.42. 1) $y''-y'=e^x\sin x$; 2) $y''+2y'=4e^x(\sin x+\cos x)$;
3) $2y''+5y'=100xe^{-x}\cos x$; 4) $y''+2y'+y=x^2e^{-x}\cos x$.

22.43. 1) $y''+y=4x\cos x$; 2) $y''+y=\cos x$;
3) $y''+y=x^2\sin x$; 4) $y''+4y=4(\sin 2x+\cos 2x)$.

22.44. 1) $y''+4y'+5y=10e^{-2x}\cos x$;
2) $y''-4y'+5y=e^{2x}(\sin x+2\cos x)$;
3) $y''-6y'+10y=2(\sin x+x\cos x)e^{3x}$;
4) $y''+2y'+2y=(2\cos x-4x\sin x)e^{-x}$.

22.45. 1) $y''-y=2e^x-x^2$; 2) $y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}$;
3) $y''+2y'+2y=(5x+4)e^x+e^{-x}$;
4) $y''+2y'+5y=4e^{-x}+17\sin 2x$.

22.46. 1) $y''+4y=\cos^2 x$; 2) $y''-4y'+4y=\sin x\cos 2x$;

3) $y'' - 2y' + y = \sin x + \operatorname{sh} x$; 4) $y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^{x}$.

22.47. 1) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$; 2) $y''' - 2y'' = 16 - 24x$;

3) $y^{IV} - 81y = 27e^{-3x}$; 4) $y''' + 8y = e^{-2x}$.

22.48. 1) $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x$; 2) $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$;

3) $y''' + 2y'' + y' = 2x + e^x$; 4) $y^{V} + y''' = x + 2e^{-x}$.

იპოვეთ განტოლებების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ პირობებს (NN22.49-22.51):

22.49. 1) $y'' - y = 4e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

2) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3{,}2$;

3) $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

4) $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1$, $y(0) = \frac{1}{8}$, $y'(0) = 1$.

22.50. 1) $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

2) $y''' - y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$;

3) $y''' - y' = 6 - 3x^2$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$;

4) $y^{IV} - y = 8e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 1$.

22.51. 1) $y'' + 4y = x$, $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;

2) $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

3) $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$;

4) $y'' + y = 2x - \pi$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით ამოხსენით განტოლებები (NN22.52; 22.53):

22.52. 1) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$; 2) $y'' - 2y' + y = \frac{e}{x}$;

3) $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$; 4) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

22.53. 1) $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$; 2) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$;

3) $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$; 4) $y''' + y'' = \frac{x - 1}{x^2}$.

§ 23. ამოცანები მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებების გამოყენებაზე

23.1. იპოვეთ m მასის მქონე მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლება, თუ იგი მოძრაობს წრფივად და მასზე მოქმედებს ძალა, რომელიც პროპორციულია სხეულის მოძრაობის დროისა. პროპორციულობის კოეფიციენტია k.

23.2. იპოვეთ ვერტიკალურად ვარდნილი სხეულის მოძრაობის განტოლება, თუ ვარდნის დროს მასზე სიმძიმის ძალასთან ერთად მოქმედებს ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც პროპორციულია სხეულის სიჩქარის კვადრატისა. პროპორციულობის კოეფიციენტია k.

23.3. m მასის მქონე სხეული მოძრაობს A წერტილისაკენ წრფივად რომელიღაც ძალის მოქმედებით, რომელიც პროპორციულია მოცემულ სხეულსა და A წერტილს შორის მანძილისა. დროის საწყის $t=0$ მომენტში მანძილი სხეულსა და A წერტილს შორის არის S_0, სხეულის სიჩქარე არის ნული, ხოლო მასზე მოქმედი ძალა F_0.

იპოვეთ სხეულსა და A წერტილს შორის მანძილის დროზე დამოკიდებულების კანონი.

23.4. m მასის მქონე სხეული მოძრაობს წრფივად A წერტილიდან B წერტილისაკენ F ძალის მოქმედებით. მოძრაობის დროს სხეულზე მოქმედებს წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც პროპორციულია სხეულსა და B წერტილს შორის მანძილისა და დროის საწყის მომენტში (A წერტილში) არის f_0-ის ტოლი ($f_0<F$). სხეულის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია. რა დრო დასჭირდება სხეულს AB მანძილის გასავლელად, თუ $AB=a$.

23.5. სხეული, რომლის მასაა 200 გ, ჩამოკიდებულია ზამბარაზე. ზამბარა გაჭიმეს 2 სმ-ით და გაუშვეს ხელი. მოძრაობის დროს სხეულზე მოქმედებს გარემოს წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც სხეულის სიჩქარის პროპორციულია. ამასთან იგი ტოლია 0,1 გ-ის, როდესაც სხეულის სიჩქარე 1 სმ/წმ. ზამბარაში აღძრული დრეკადობის ძალა მისი 2 სმ-ით წაგრძელების დროს 10 გ-ია. იპოვეთ ზამბარაზე დაკიდებული სხეულის მოძრაობის განტოლება.

23.6. სხეული, რომლის წონაა $P=4$ კგ, ჩამოკიდებულია ზამბარაზე და ჭიმავს ზამბარას 1 სმ-ით. იპოვეთ ზამბარის მოძრაობის განტოლება, თუ ზამბარის ზედა ბოლო ასრულებს ჰარმონიულ რხევას, რომლის განტოლებაა $y=2\sin 30t$. სხეულის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია.

23.7. ცილინდრული ფორმის ხის ძელი ($S=100$ სმ², $h=20$ სმ, $\rho = 0{,}5$ გ/სმ³) მთლიანად ჩაძირულია წყალში. ძელი გაათავისუფლეს და მან

დაიწყო წყლის ზედაპირზე ამოსვლა. ჩათვალეთ, რომ ძელზე მოქმედი გარემოს წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია ძელის ჩაძირული ნაწილის სიგრძისა და დაადგინეთ როგორი უნდა იყოს პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომ წყლის ზედაპირზე პირველი ამოსვლისას წყლის ზემოთ ამოვიდეს ძელის სიგრძის ნახევარი. იპოვეთ ძელის ჩაძირული ნაწილის სიგრძის დროზე დამოკიდებულების კანონი.

23.8. იპოვეთ იმ სხეულის მოძრაობის განტოლება, რომელიც ასროლილია ვერტიკალურად ზემოთ $v_0=1$ მ/წმ სიჩქარით. რამდენი წამის შემდეგ მიაღწევს სხეული უმაღლეს მდებარეობას?

§ 24. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები

1) ძირითადი ცნებები. განვიხილოთ შემდეგი სახის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (1)$$

დიფერენციალურ განტოლებათა ასეთ სისტემას ეწოდება ნორმალური სისტემა.

განსაზღვრება 1. (1) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი რაიმე ინტერვალში ეწოდება $y_1=\varphi_1(x), \dots, y_n=\varphi_n(x)$ ფუნქციათა სისტემას, რომლებიც მოცემულ განტოლებათა სისტემაში ჩასმით ყოველ განტოლებას აქცევს იგივეობად არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობისათვის ამ ინტერვალიდან.

ყოველი n-ური რიგის ნორმალური სახის დიფერენციალური განტოლება

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

შეიძლება დავიყვანოთ (1) სახის სისტემაზე. პირიქით, (1) სახის სისტემა, უმეტეს შემთხვევაში, დაიყვანება n-ური რიგის (2) სახის განტოლებაზე, რომლის ამოხსნის საშუალებით შეიძლება ვიპოვოთ მოცემული სისტემის ამონახსნი.

მაგალითი 1. დაიყვანეთ

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 4y_1 + y_2 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემა მეორე რიგის განტოლებაზე და იპოვეთ მოცემული სისტემის ამონახსნი.

ამოხსნა. სისტემის პირველი განტოლებიდან გვაქვს $y_2=y_1-y_1'$, საიდანაც $y_2'=y_1'-y_1''$. y_2 და y_2'-ის ჩასმით სისტემის მეორე განტოლებაში მივიღებთ $y_1''-2y_1'-3y_1=0$. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y_1=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}.$$

აქედან $y_2=y_1-y_1'$ ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$y_2=2c_1e^{-x}-2c_2e^{3x}.$$

ამრიგად, ნებისმიერი c_1 და c_2 მუდმივებისათვის ფუნქციათა სისტემა

$$y_1=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$$
$$y_2=2c_1e^{-x}-2c_2e^{3x}$$

არის მოცემული სისტემის ამონახსნი.

პირობებს

$$y_1(x_0)=y_1^0, \quad y_2(x_0)=y_2^0, \dots, y_n(x_0)=y_n^0, \qquad (3)$$

სადაც $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ მოცემული რიცხვებია, ეწოდება საწყისი პირობები (1) სისტემისათვის.

ამოცანას, ვიპოვოთ (1) სისტემის ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (3) საწყის პირობებს, ეწოდება კოშის ამოცანა.

თეორემა. ვთქვათ (1) სისტემის $f_1, f_2, \dots, f_n$ ფუნქციები და მათი $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j=1, \dots, n)$ კერძო წარმოებულები უწყვეტი ფუნქციებია $n+1$ განზომილებიანი სივრცის რაიმე Ω არეში. მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)\in\Omega$ წერტილი არსებობს (1) სისტემის ერთადერთი ამონახსნი, x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, რომელიც აკმაყოფილებს (3) საწყის პირობებს.

განსაზღვრება 2. (1) სისტემის ზოგადი ამონახსნი ეწოდება

$$y_i=y_i(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \qquad i=1, 2, \dots, n$$

ფუნქციათა სისტემას, რომელიც დამოკიდებულია n ნებისმიერ მუდმივზე და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) $y_i=y_i(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$ ფუნქციები არის (1) სისტემის ამონახსნი $c_1,c_2,\dots,c_n$ მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის გარკვეული სიმრავლიდან.

ბ) მოცემული (3) საწყისი პირობებისათვის $c_1,c_2,\dots,c_n$ მუდმივები ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ $y_i=y_i(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$ ფუნქციათა სისტემა დააკმაყოფილებს (3) საწყის პირობებს (იგულისხმება, რომ $(x_0,y_1^0,\dots,y_n^0)\in\Omega$).

ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან $c_1,c_2,\dots,c_n$ მუდმივების რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობებისათვის, ეწოდება მოცემული სისტემის კერძო ამონახსნი.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+y_2-x,\\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx}=y_1+2y_2-2x\end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: $y_1(0)=1$, $y_2(0)=2$.

ამოხსნა. გავაწარმოოთ სისტემის პირველი განტოლება

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=2\frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}-1.$$

ჩავსვათ ამ განტოლებაში $\frac{dy_2}{dx}$-ის მნიშვნელობა სისტემის მეორე განტოლებიდან. მივიღებთ

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=2\frac{dy_1}{dx}+y_1+2y_2-2x-1.$$

შევიტანოთ ამ განტოლებაში y_2-ის მნიშვნელობა, რომელსაც განვსაზღვრავთ სისტემის პირველი განტოლებიდან. გვექნება

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}-4\frac{dy_1}{dx}+3y_1=-1.$$

მივიღეთ y_1-ის მიმართ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ამონახსნია

$$y_1=C_1e^x+C_2e^{3x}-\frac{1}{3}.$$

რადგან $y_2=y_1'-2y_1+x$, ამიტომ

$$y_2=-C_1e^x+C_2e^{3x}+x+\frac{2}{3}.$$

საწყისი პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ $C_1=0$, $C_2=\frac{4}{3}$ და საბოლოოდ გვექნება

$$y_1=\frac{4}{3}e^{3x}-\frac{1}{3},\quad y_2=\frac{4}{3}e^{3x}+x+\frac{2}{3}.$$

2. მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემა. ამ პუნქტში სიმარტივისათვის განვიხილავთ ორუცნობიან შემდეგი სახის წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=a_{11}y_1+a_{12}y_2,\\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx}=a_{21}y_1+a_{22}y_2,\end{cases}\tag{4}$$

სადაც a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} მუდმივი რიცხვებია, ხოლო $y_1(x)$ და $y_2(x)$ საძიებელი ფუნქციებია. ამ სახის სისტემას ეწოდება მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა.

როგორც ზემოთ მივუთითეთ, (4) სისტემა შეიძლება ამოვხსნათ მისი დაყვანით მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებაზე, რომელიც ასეთი სისტემისათვის იქნება წრფივი. მაგრამ არსებობს (4) სისტემის ამოხსნის სხვა მეთოდიც, რომელიც ემყარება შემდეგ ფაქტს:

თუ (4) სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია $y_1^{(1)}$, $y_1^{(2)}$ და $y_2^{(1)}$, $y_2^{(2)}$, მაშინ ამ სისტემის ზოგადი ამონახსნია

$$y_1=C_1y_1^{(1)}+C_2y_1^{(2)},$$
$$y_2=C_1y_2^{(1)}+C_2y_2^{(2)},$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

მოვიყვანოთ ეს მეთოდი:

1) უნდა შევადგინოთ (4) სისტემის მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix}a_{11}-k & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-k\end{vmatrix}=0.\tag{5}$$

2) ვიპოვოთ მახასიათებელი განტოლების ფესვები.

3) შევადგინოთ სისტემა

$$\begin{cases}(a_{11}-k)\alpha_1+a_{12}\alpha_2=0\\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-k)\alpha_2=0\end{cases}\tag{6}$$

4) მახასიათებელი (5) განტოლების ფესვების საშუალებით ვიპოვოთ (4) სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები შემდეგი წესის მიხედვით:

ა) ვთქვათ მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ნამდვილი მარტივი k_1 და k_2 ფესვები. k_1 ფესვისათვის (6) სისტემას ექნება არანულოვანი ამონახსნი $\alpha_1^{(1)}$ და $\alpha_2^{(1)}$, ამიტომ $y_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^{k_1x}$ და $y_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^{k_1x}$ იქნება (4) სისტემის k_1 ფესვის შესაბამისი ამონახსნი. ანალოგიურად k_2 ფესვის შესაბამისი ამონახსნი იქნება $y_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{k_2x}$ და $y_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{k_2x}$. ამიტომ ამ შემთხვევაში სისტემის ზოგადი ამონახსნია

$$\begin{cases} y_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{k_1x} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{k_2x} \\ y_2 = C_1\alpha_2^{(1)}e^{k_1x} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{k_2x}. \end{cases}$$

ბ) ვთქვათ მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია კომპლექსური ფესვები. ამ შემთხვევაში $y_i^{(j)}$ კომპლექსური კერძო ამონახსნების ნაცვლად უნდა ავიღოთ მათი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები.

გ) ვთქვათ მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ჯერადი ფესვები $k_1=k_2=r$. ამ შემთხვევაში (4) სისტემის ამონახსნს, რომელიც ამ ფესვს შეესაბამება, აქვს სახე

$$\begin{cases} y_1(x) = \left(\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}x\right)e^{rx} \\ y_2(x) = \left(\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}x\right)e^{rx}, \end{cases} \qquad (7)$$

სადაც α_{ij} კოეფიციენტები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად: (7) ტოლობით განსაზღვრული y_1 და y_2 უნდა ჩავსვათ (4) სისტემაში და სისტემის ყოველ განტოლებაში ერთმანეთს გავუტოლოთ x-ის ერთნაირი ხარისხის კოეფიციენტები. მივიღებთ განტოლებათა სისტემას $\alpha_i^{(j)}$ კოეფიციენტების მიმართ.

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 3. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ $k^2-5k+4=0$. მისი ფესვებია $k_1=1$, $k_2=4$.

შევადგინოთ (6) სისტემა k_1 ფესვისათვის. მივიღებთ

$$\begin{cases} (2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0, \\ \alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} = 0. \end{cases}$$

აქედან $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$. ავიღოთ $\alpha_1^{(1)} = 1$, მაშინ $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}$. ამიტომ ამ ფესვის შესაბამისი კერძო ამონახსნი იქნება

$$y_1^{(1)}=e^x, \qquad y_2^{(1)}=-\frac{1}{2}e^x.$$

ახლა (6) სისტემა შევადგინოთ $k=4$ ფესვისათვის. გვექნება

$$\begin{cases} -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0, \\ \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

აქედან $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$. ავიღოთ $\alpha_1^{(2)} = 1$. მაშინ $\alpha_2^{(2)} = 1$. მივიღებთ ამონახსნს

$$y_1^{(2)}=e^{4x}, \qquad y_2^{(2)}=e^{4x}.$$

საბოლოოდ მოცემული სისტემის ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y_1=c_1e^x+c_2e^{4x},$$

$$y_2=-\frac{1}{2}c_1e^x + c_2e^{4x}.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -7y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 - 5y_2 \end{cases}$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} 7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$$

ანუ

$$k^2+12k+37=0.$$

მისი ფესვებია $k_1=-6+i$, $k_2=-6-i$. k_1-ის ჩასმით (6) სისტემაში მივიღებთ (ავიღოთ $\alpha_1^{(1)} = 1$) $\alpha_1^{(1)} = 1, \alpha_2^{(1)} = 1+i$. ამიტომ მოცემული სისტემის კომპლექსური ამონახსნი იქნება

$$y_1^{(1)}=e^{(-6+i)x}, \qquad y_2^{(1)}=(1+i)e^{(-6+i)x}. \qquad (8)$$

თუ $k_2=-6-i$ ჩავსვამთ (6) სისტემაში, გვექნება $\alpha_1^{(2)} = 1$, $\alpha_2^{(2)} = 1-i$. მივიღებთ კიდევ ერთ კომპლექსურ ამონახსნს

$$y_1^{(2)}=e^{(-6-i)x}, \qquad y_2^{(2)}=(1-i)e^{(-6-i)x}. \qquad (9)$$

გადავწეროთ (8) ამონახსნი შემდეგნაირად

$$y_1^{(1)}=e^{-6x}\cos x+ie^{-6x}\sin x,$$

$$y_2^{(1)}=e^{-6x}(\cos x-\sin x)+ie^{-6x}(\cos x+\sin x).$$

ანალოგიურად (9)-ს მივცეთ სახე

$$y_1^{(2)}=e^{-6x}\cos x-ie^{-6x}\sin x,$$

$$y_2^{(2)}=e^{-6x}(\cos x-\sin x)-ie^{-6x}(\cos x+\sin x).$$

ავიღოთ ცალ-ცალკე მიღებული ამონახსნების ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, რომლებიც, როგორც აღვნიშნეთ აგრეთვე იქნებიან მოცემული სისტემის ამონახსნები. გვექნება

$$\bar{y}_1^{(1)}=e^{-6x}\cos x, \qquad \bar{y}_2^{(1)}=e^{-6x}(\cos x-\sin x),$$

$$\bar{y}_1^{(2)}=e^{-6x}\sin x, \qquad \bar{y}_2^{(2)}=e^{-6x}(\cos x+\sin x).$$

ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y_1=c_1e^{-6x}\cos x+c_2e^{-6x}\sin x,$$

$$y_2=c_1e^{-6x}(\cos x-\sin x)+c_2e^{-6x}(\cos x+\sin x).$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} y_1'=2y_1-y_2 \\ y_2'=4y_1+6y_2 \end{cases}$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მოცემული სისტემის მახასიათებელი განტოლებაა

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 4 & 6-k \end{vmatrix}=(k-4)^2=0.$$

ამრიგად, $k=4$ არის მახასიათებელი განტოლების ორჯერადი ფესვი, ვეძებოთ სისტემის ამონახსნი შემდეგი სახით

$$y_1(x)=(\alpha_1+\beta_1x)e^{4x},$$

$$y_2(x)=(\alpha_2+\beta_2x)e^{4x}.$$

თუ y_1 და y_2 ფუნქციების ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ მოცემულ სისტემაში და შევკვეცავთ e^{4x}-ზე, მივიღებთ

$$\begin{cases} \beta_1+4\alpha_1+4\beta_1x=2\alpha_1-\alpha_2+(2\beta_1-\beta_2)x, \\ \beta_2+4\alpha_2+4\beta_2x=4\alpha_1+6\alpha_2+(4\beta_1+6\beta_2)x. \end{cases}$$

გავუტოლოთ x-ის ერთნაირი ხარისხის კოეფიციენტები ერთმანეთს, გვექნება

$$\begin{cases} 2\alpha_1+\alpha_2+\beta_1=0 \\ 4\alpha_1+2\alpha_2-\beta_2=0 \\ 2\beta_1+\beta_2=0 \\ 2\beta_1+\beta_2=0. \end{cases}$$

ეს სისტემა ტოლფასია შემდეგი სისტემის

$$\begin{cases} 2\alpha_1+\alpha_2+\beta_1=0 \\ 2\beta_1+\beta_2=0. \end{cases}$$

აქედან

$$\begin{cases} \alpha_2=-(2\alpha_1+\beta_1) \\ \beta_2=-2\beta_1. \end{cases} \qquad (10)$$

დავუშვათ $\alpha_1=1, \beta_1=0$, მაშინ (10)-დან მივიღებთ $\alpha_2=-2, \beta_2=0$. შესაბამისი ამონახსნი იქნება

$$y_1^{(1)}=e^{4x}, \qquad y_2^{(1)}=-2e^{4x}. \qquad (11)$$

ახლა ვთქვათ, $\alpha_1=0, \beta_1=1$ მაშინ $\alpha_2=-1, \beta_2=-2$ შესაბამისი ამონახსნია

$$y_1^{(2)}=xe^{4x}, \qquad y_2^{(2)}=-(1+2x)e^{4x}. \qquad (12)$$

(11) და (12) ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ მოცემული სისტემის ზოგადი ამონახსნია

$$y_1=(c_1+c_2x)e^{4x},$$

$$y_2=-(2c_1+c_2+2c_2x)e^{4x}.$$

როდესაც მოცემულია სამი და სამზე მეტი უცნობიანი წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემა მისი ამოხსნა ხდება ორუცნობიანი სისტემის ამოხსნის ანალოგიურად. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითი.

მაგალითი 6. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} y_1'=y_2+y_3 \\ y_2'=y_1+y_3 \\ y_3'=y_1+y_2 \end{cases}$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = -k^3 + 3k + 2 = 0.$$

მას აქვს ერთი მარტივი ფესვი $k_1=2$ და ორჯერადი ფესვი $k_2=-1$. $k_1=2$ ფესვისათვის (6) სისტემა მიიღებს სახეს

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

აქედან

$$\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1 \\ \alpha_3 = \alpha_1 \end{cases}$$

ავიღოთ $\alpha_1=1$. მაშინ $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$. ამიტომ $k_1=2$ ფესვის შესაბამისი კერძო ამონახსნი იქნება

$$y_1^{(1)}=e^{2x}, \qquad y_2^{(1)}=e^{2x}, \qquad y_3^{(1)}=e^{2x}. \qquad (13)$$

$k_2=-1$ ფესვის შემთხვევაში (6) სისტემის თანახმად გვექნება

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

აქედან $\alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$. ჯერ ავიღოთ $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$. მაშინ $\alpha_3 = -1$ და შესაბამისი ამონახსნი იქნება

$$y_1^{(2)}=e^{-x}, \qquad y_2^{(2)}=0, \qquad y_3^{(2)}=-e^{-x}. \qquad (14)$$

თუ ავიღებთ $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$, მაშინ $\alpha_3 = -1$ და გვექნება ამონახსნი

$$y_1^{(3)}=0, \qquad y_2^{(3)}=e^{-x}, \qquad y_3^{(3)}=-e^{-x}. \qquad (15)$$

(13), (14), (15) ტოლობებიდან მივიღებთ ზოგად ამონახსნს

$$\begin{cases} y_1 = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} \\ y_2 = c_1e^{2x} + c_3e^{-x} \\ y_3 = c_1e^{2x} - c_2e^{-x} - c_3e^{-x}. \end{cases}$$

ამოცანათა კრებულში არგუმენტის აღსანიშნავად ნაცვლად x-ისა გამოიყენება t ცვლადს, ხოლო უცნობი y_1, y_2, y_3 ფუნქციების აღსანიშნავად გამოიყენება შესაბამისად x, y, z სიმბოლოებს.

24.1. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქციები წარმოადგენენ მითითებულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნს:

1) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2}, \\ y = t\ln t; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2tx^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y+t}{t}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t, \\ y = 2e^t; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^{t-x}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2e^x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = t - e^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y-1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = (x-t)y^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}, \\ y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$

ამოხსენით მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (NN25.2-25.4):

24.2. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

24.3. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y \end{cases}$

24.4. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$

იპოვეთ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ პირობებს (NN24.5,24.6):

24.5. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y; \end{cases}$ $x(0)=-1, \quad y(0)=2;$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y; \end{cases}$ $x(0)=1, \quad y(0)=1;$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y; \end{cases}$ $x(0)=0, \quad y(0)=0;$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 2x; \end{cases}$ $x(0)=0, \quad y(0)=-1.$

24.6. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$ $x(0)=0, \quad y(0)=1;$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x; \end{cases}$ $x(0)=-1, \quad y(0)=-2;$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z; \end{cases}$ $x(0)=0, \ y(0)=3, \ z(0)=2;$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 2z - 3x; \end{cases}$ $x(0)=0, \ y(0)=0, \ z(0)=1.$

3. მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივ განტოლებათა არაერთგვაროვანი სისტემა. განვიხილოთ ორუცნობიანი მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივ განტოლებათა არაერთგვაროვანი სისტემა

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(x). \end{cases} \tag{16}$$

ამ სისტემის ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$\begin{cases} y_1 = \overline{y}_1 + y_1^* \\ y_2 = \overline{y}_2 + y_2^*, \end{cases}$$

სადაც $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$ (16) სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნია, ხოლო y_1^*, y_2^* (16) სისტემის რაიმე კერძო ამონახსნია.

მაგალითი 7. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + x^2 \\ y_2' = y_1 + e^x \end{cases}$$

არაერთგვაროვანი სისტემის კერძო ამონახსნი.

ამოხსნა. მოცემული სისტემის

$$\begin{vmatrix} -k & -1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = 0$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $k=\pm i$. ამიტომ სისტემის კერძო ამონახსნს ვეძებთ სახით

$$\begin{cases} y_1 = A_1x^2 + B_1x + C_1 + D_1e^x \\ y_2 = A_2x^2 + B_2x + C_2 + D_2e^x. \end{cases}$$

თუ y_1 და y_2-ის ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ მოცემულ სისტემაში, მივიღებთ

$$\begin{cases} 2A_1x + B_1 + D_1e^x = -A_2x^2 - B_2x - C_2 - D_2e^x + x^2 \\ 2A_1x + B_2 + D_2e^x = A_1x^2 + B_1x + C_1 + D_1e^x + e^x. \end{cases}$$

აქედან კოეფიციენტთა გატოლებით მიღებული სისტემის ამონახსნია $A_1=B_2=C_1=0$, $A_2=1$, $B_1=2$, $C_2=-2$, $D_2=\frac{1}{2}$, $D_1=-\frac{1}{2}$.

საძიებელი კერძო ამონახსნია

$$\begin{cases} y_1 = 2x - \frac{1}{2}e^x \\ y_2 = x^2 - 2 + \frac{1}{2}e^x. \end{cases}$$

ამოხსენით მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (NN24.7-24.9):

24.7. 1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 2e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + t^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 5\cos t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

24.8. 1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x + 1, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = x + \cos t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y + \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y + \cos t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \cos t, \\ 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = -3x + \sin t. \end{cases}$

24.9. 1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - e^t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y + e^{2t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 5\sin t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + 16te^t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$

24.10. იპოვეთ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობებს.

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 5\cos t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}$ $x(0)=-1,$ $y(0)=-2;$

2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 7te^{-t} - 3, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y - 1, \end{cases}$ $x(0)=\frac{13}{4},$ $y(0)=\frac{3}{4};$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y + 4t - 1, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + t, \end{cases}$ $x(0)=0,$ $y(0)=0;$

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x - y + e^t, \end{cases}$ $x(0)=1,$ $y(0)=1.$

პასუხები

§ 1

1.1. $s=\frac{x+y}{2}\sqrt{xy}$. 1.2. $v=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{c^2-r^2}$. 1.3. $s=2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}$ [illegible] $v=\frac{\sqrt{3}}{2}h\left(x^2+xy+y^2\right)$. 1.5. $f(0;1)=0$, $f\left(-1;\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{5}$, $f\left(\frac{1}{x};-y\right)=-\frac{2xy}{1+x^2y^2}$. 1.6. $f(0;-1)=1$, $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=4$, $f(xy;-y)=\left(\frac{\operatorname{arctg} y(x-1)}{\operatorname{arctg} y(x+1)}\right)^2$. 1.7. 1) ნახევარსიბრტყე $y\le 0$; 2) წრე $x^2+y^2\le R^2$; 3) კვადრატი და მასზე [illegible] წერტილების სიმრავლე; 4) ნახევარსიბრტყე $y<\frac{x}{2}$. 1.8. 1) $y^2>4x-8$; 2) $x^2+y^2\ge 1$; 3) [illegible] ნახევარსიბრტყე და $y=x^2$ პარაბოლის შიგნით მოთავსებული სიბრტყის ნაწილი [illegible] წერტილების სიმრავლე; 4) $y^2=4x$ პარაბოლის შიგნით მოთავსებული $x^2+y^2<1$ წრის [illegible] წერტილების სიმრავლე. 1.9. 1) მთელი სიბრტყე გარდა $x+y=k$ $(k\in z)$ წრფეებისა; 2) ზოლები $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in z$; 3) $x^2+y^2\le 1$ წრისა და $2k\le x^2+y^2\le 2k+1$ $(k\in N)$ წრიული რგოლების გაერთიანება; 4) ზოლები $x\ge 0$, $2k\pi<y<\pi+2k\pi$ და $x<0$, $2k\pi-\pi<y<2k\pi$ $(k\in z)$. 1.10. 1) $y=x$ და $y=-x$ წრფეებით შემოსაზღვრული [illegible] კუთხეები გარდა წრფეთა გადაკვეთის წერტილისა: $-x\le y\le x$ $(x>0)$, $x\le y\le -x$ $(x<0)$; 2) მთელი სიბრტყე გარდა $x^2+y^2=1$ წრეწირის წერტილებისა; 3) $y=1+x$ და $y=1-x$ წრფეებით შემოსაზღვრული [illegible] კუთხეები გარდა წრფეთა გადაკვეთის წერტილისა $1-x\le y\le 1+x$ $(x>0)$, $1+x\le y\le 1-x$ $(x<0)$; 4) $y=0$ და $y=-2x$ წრფეებით შემოსაზღვრული [illegible] კუთხეები გარდა წრფეთა გადაკვეთის წერტილისა. 1.11. 1) $x=\pm 2$ და $y=\pm 3$ წრფეებით შემოსაზღვრული მართკუთხედი; 2) რგოლი $9<x^2+y^2<25$; 3) მთელი სიბრტყე გარდა $(x+1)^2+y^2\le 1$ და $(x-1)^2+y^2\le 1$ წრეების წერტილებისა; 4) $x=-y^2$, [illegible] და $y=2$ წრფით შემოსაზღვრული [illegible] წერტილები. 1.12. 1) $x^2+y^2+z^2\le R^2$ ბირთვი; 2) [illegible] $x>0$, $y>0$, $z>0$; 3) [illegible] $(0,0)$ $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$, $-1\le z\le 1$; 4) $x^2+y^2-z^2=0$ [illegible] გარდა [illegible]. 1.13. 1) $x+y=h$ $(h\in R)$ პარალელური წრფეები; 2) $x^2+y^2=h^2$ კონცენტრული წრეწირები; 3) $xy=h$ ჰიპერბოლები; 4) [illegible] $xy=h^2$ ჰიპერბოლები. 1.14. 1) $y=hx^2$ პარაბოლები [illegible]; 2) $x^2-y^2=h$ [illegible] ჰიპერბოლები; 3) $hx^2+2hy^2=1$ $(h>0)$ ელიფსები; 4) წრეწირები, [illegible] წერტილისა და [illegible] გარდა. 1.15. 1) $y=ax+h$ წრფეების თანაკვეთა f ფუნქციის განსაზღვრის არესთან; 2) $x^2-y^2=h^2$ წრეწირების თანაკვეთა f ფუნქციის განსაზღვრის არესთან; 3) $xy=h$ [illegible] თანაკვეთა f ფუნქციის განსაზღვრის არესთან; 4) $y=hx$ წრფეების თანაკვეთა f ფუნქციის განსაზღვრის არესთან; 1.18. 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) -1. 1.19. 1) 0; 2) 1; 3) -2; 4) 1. 1.20. 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) 1. 1.21. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 1. 1.22. 1) 0; 2) 0;

3) 0; 4) არ არსებობს. 1.23. 1) 1; 2) a; 3) -8; 4) $\frac{2}{\pi}$. 1.24. 1) e^2; 2) 1; 3) e^a; 4) e. 1.25. 1) 1; 2) 0; 3) e; 4) 1. 1.27. 1) უწყვეტია; 2) წყვეტილია; 3) უწყვეტია; 4) წყვეტილია. 1.28. 1) $(0;0)$; 2) $(0;0)$ 3) $y=2x$ წრფის წერტილები; 4) $y=2x^2$ პარაბოლის წერტილები. 1.29. 1) $x^2+y^2=1$ წრეწირის წერტილები; 2) საკოორდინატო ღერძების წერტილები; 3) $y=-x$ წრფისა და $x=y^2$ პარაბოლის წერტილები; 4) $x^2+y^2=1$ წრეწირისა და $x^2-y^2=1$ ჰიპერბოლის წერტილები.

§ 2

2.1. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+8xy$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y+4x^2$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3-3y+2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2-3x$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sqrt{y}-\frac{2\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{2\sqrt{y}}-\frac{2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{4\sqrt[4]{x^3}}-\sqrt{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt[4]{x}-\sqrt{\frac{x}{y}}$. 2.2. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}+\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. 2.3. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos(x^2-y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\cos(x^2-y)$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\cos^2(x+y)}-\frac{y}{\sin^2(xy)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=\frac{1}{\cos^2(x+y)}-\frac{x}{\sin^2(xy)}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(x+y)$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}$. 2.4. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3y\sin^2 xy\cdot\cos xy$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3x\sin^2 xy\cos xy$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{y^2}}{y^2\cos^2\frac{x}{y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-4x\operatorname{tg}\frac{x}{y^2}}{y^3\cos^2\frac{x}{y^2}}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=-\frac{y}{|x+y|\cdot\sqrt{x^2+2xy}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{|x+y|\sqrt{x^2+2xy}}$. 2.5. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=\left(y^2-1\right)(2x+1)\left(x^2+x\right)^{y^2-2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2y\left(x^2+x\right)^{y^2-1}\ln\left(x^2+x\right)$. 2.6. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}-$ $-\frac{1}{x^2y}\cdot 5^{\sin\frac{1}{xy}}\cdot\cos\frac{1}{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{1}{xy^2}5^{\sin\frac{1}{xy}}\cdot\cos\frac{1}{xy}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|\left(x^4-y^4\right)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|\left(x^4-y^4\right)}$

4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$. 2.7. 1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 2) $\frac{\partial u}{\partial x} = y+z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x+z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = x+y$; 3) $\frac{\partial u}{\partial x} = yz(xy)^{z-1}$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = xz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \ln(xy)$; 4) $\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot z^{xy} \ln z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot z^{xy} \ln z$,

$\frac{\partial u}{\partial z} = xy \cdot z^{xy-1}$. 2.8. 1) $f'_x(3,2) = 56$, $f'_y(3,2) = 42$; 2) $f'_x(1,2) = e(2e^4-1)$, $f'_y(1,2) = 4e^5$;

3) $f'_x(2,1) = \frac{1}{2}$, $f'_y(1,2) = 0$; 4) $f'_x(0,0) = 1$, $f'_y(0,0) = -1$; 5) $f'_x(1,2,0) = 1$, $f'_y(1,2,0) = \frac{1}{2}$,

$f'_z(1,2,0) = \frac{1}{2}$; 6) $f'_x\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right) = f'_y\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $f'_z\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 2.9. $\frac{3}{2}$; 2.10. r; 2.11. r;

2.12. $-r^2\sin\theta$. 2.15. 1) $dz = (3x^2y-y^3)dx + (x^3-3xy^2)dy$; 2) $dz = -\sin(xy-y^2)(ydx+(x-2y)dy)$; 3) $dz = \frac{2}{x^2+y^2}(xdx+ydy)$; 4) $dz = \sin 2x dx - \sin 2y dy$. 2.16. 1)

$dz = \frac{1}{x+y}\left(dx - \frac{x}{y}dy\right)$; 2) $dz = \frac{y}{x^2\cos^2\frac{y}{x}}(2xdy - ydx)$; 3) $dz = 0$; 4)

$dz = \frac{1}{y^2}\operatorname{tg}\frac{x}{y}(xdy - ydx)$. 2.17. 1) $du = \frac{\left(x^2+y^2\right)dz - 2z(xdx+ydy)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 2)

$du = \frac{z^2}{x^2y^2+z^4}\left(ydx + xdy - \frac{2xy}{z}dz\right)$; 3) $du = \left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z-1} \times$

$\times \left[\left(y+\frac{1}{y}\right)zdx + \left(1-\frac{1}{y^2}\right)xzdy + \left(xy+\frac{x}{y}\right)\ln\left(xy+\frac{x}{y}\right)dz\right]$; 4) $du =$

$= e^{x^2+y^2}\left(2x\sin^2 zdx + 2y\sin^2 zdy + \sin 2zdz\right)$. 2.18. 1) $df(1;1) = dx - 2dy$; 2) $df(1;2) = -9(4dx+dy)$; 3) $df(1;1;1) = dx - dy$; 4) $df(3;4;5) = \frac{1}{25}(5dz-3dx-4dy)$. 2.19. 1) $\Delta f = 36$, $df = 26{,}5$; 2) $\Delta f = \frac{1}{14}$, $df = 0{,}075$; 3) $\Delta f = \frac{1}{2}$, $df = \frac{\pi}{6}$; 4) $\Delta f = 0$, $df = -\frac{1}{2}$. 2.20. 1) 5,08; 2) 2.95; 3) 6.29; 4) 0,788.

§ 3

3.1. $\frac{dz}{dt} = e^{2x-3y}\left(\frac{2}{\cos^2 t} - 6t + 3\right)$. 3.2. $\frac{dz}{dt} = e^{2t}\left(4e^{2t} + 2\sin^2 t + \sin 2t\right)$. 3.3. $\frac{dz}{dt} =$

$= \frac{1-2(x+1)^2}{y^2+(1+x)^2}e^{(1+x)^2}$. 3.4. $\frac{dz}{dt} = x^y\left(\frac{y}{xt} + \ln x\cos t\right)$. 3.5. $\frac{dz}{dt} = \frac{t}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\left(6 - \frac{x}{2y^2}\right)$.

3.6. $\frac{dz}{dt} = 3\cos^2\left(3x^2+y\right)\sin\left(3x^2+y\right)\left(\frac{1}{t^2} - 12t^3\right)$. 3.7.

$\frac{du}{dt} = 2t\ln t\operatorname{tg}t + \frac{\left(t^2+1\right)\operatorname{tg}t}{t} + \frac{\left(t^2+1\right)\ln t}{\cos^2 t}$. 3.8. $\frac{du}{dt} = \frac{2xe^t}{x^2+y+z} + \frac{2\cos 2t}{x^2+y+z} +$

$+ \frac{2\operatorname{arctg}t}{\left(1+t^2\right)\left(x^2+y+z\right)}$. 3.9. $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x + e^y\left(x^2+1\right)}{e^x+e^y}$. 3.10. $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$. 3.11.

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$. 3.12. $\frac{du}{dz} = \left(3 - \frac{4}{z^3} - \frac{1}{2\sqrt{z}}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(3z+\frac{2}{z^2}-\sqrt{z}\right)\right)$. 3.13. $\frac{du}{dx} = e^{ax}\sin x$.

3.14. $\frac{\partial z}{\partial u} = 2x\left(\frac{ux}{y} - \frac{v\ln y}{u^2}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 2x\left(\frac{\ln y}{u} + \frac{xv}{y}\right)$. 3.15. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial v} =$

$= -\frac{x}{y}\left(1+\frac{x}{y}\right)$. 3.16. $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$. 3.17. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2v}{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + \frac{2v}{x+y}$.

3.18. $\frac{\partial z}{\partial t} = e^{x-2y}(\cos t - 6t^2)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -4xe^{x-2y}$. 3.19. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{t}{y}\left(2\cos tx^2 - tx^2\sin tx^2\right) -$

$-2t^3xy\sin tx^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y^3}\left(tx^2\sin tx^2 - 2\cos tx^2\right) - 2t^3x\sin tx^2$. 3.20. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+2xz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 3.21. $\frac{\partial u}{\partial t} = e^{x^2-y+3x}\left(\frac{2x}{t+x} - \frac{1}{t}\cos\frac{t}{x} + 6t\right)$. $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2-y+3x}\left(\frac{2x}{t+x} +\right.$

$\left.+ \frac{t}{x^2}\cos\frac{t}{x} - 6x\right)$. 3.22. $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = r\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial x}\sin\varphi\right)$.

§ 4

4.1. 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6x - 6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x - 6y$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{x^2}$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 4)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$; 4.2. 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{xy}{(2x+y^2)^{3/2}}$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\ln y\cdot(\ln y+1)}{x^2}e^{\ln x\cdot\ln y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\ln x\cdot\ln y+1}{xy}e^{\ln x\cdot\ln y}$. 4.3. 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^3e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = x(xy-2)e^{-xy}$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2}$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y^x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2}$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2\cos x^2}{y^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{2x\sin x^2}{y2}$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$. 4.4. 1) $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$; 2) $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{y(x-z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-2xz)^3}}$; 3) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = -\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right)$; 4) $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{yu\ln x}{z^4}\cdot(2z+y\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{(z+y\ln x)u}{xz^2}$. 4.5. 1) $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} = -x^2y\cos xy - 2x\sin xy$; 2) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = \frac{6y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$; 3) $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = (x^2y^2z^2+3xyz+1)e^{xyz}$; 4) $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = (1+xy)e^{xy}\cos z$. 4.6. $f'''_{x^3}(3;2) = 36$, $f'''_{y^3}(3;2) = 6$, $f'''_{xy^2}(3;2) = 31$. 4.7. $f'''_{x^3}(0;1) = 0$, $f'''_{y^3}(0;1) = 0$, $f'''_{x^2y}(0;1) = 2$, $f'''_{xy^2}(0;1) = 0$. 4.10. 1) $d^2z = -2y\,dx^2+4(y-x)dxdy+2x\,dy^2$; 2) $d^2z = -\frac{(dx-dy)^2}{(x-y)^2}$; 3) $d^2z = e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dxdy]$; 4) $d^2z = 2\sin 2y\,dxdy+2x\cos 2y\,dy^2$. 4.11. 1) $d^2u = 2(xdydz+ydxdz+zdxdy)$; 2) $d^2u = e^{xyz}(yzdx+zxdy+xydz)^2+2(zdxdy+xdydz+ydxdz)$; 3) $d^2u = 2(dxdy+dxdz+dydz)$; 4) $d^2u = -\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$. 4.12. $d^2f(1;2) = 6dx^2+2dxdy+4{,}5dy^2$. 4.13. $d^2f(0;0;0) = 2dx^2+4dy^2-6dz^2-4dxdy+8dxdz+4dydz$.

§ 5

5.1. 1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2e^{2x}-xe^{2y}}{x^2e^{2y}-ye^{2x}}$; 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$; 3) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{2-y}$; 4) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+y+1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$. 5.2. 1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+ay}{ax-y}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3}$;

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2[y(1-\ln x)^2-2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2]}{x^4(1-\ln y)^3}$; 3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; 4) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$. 5.3. 1) $y'(1)=3$, $y''(1)=8$; 2) $y'(0)=0$, $y''(0) = -\frac{2}{3}$; 3) $y'(1)=-1$, $y''(1) = -\frac{2}{3}$; 4) $y'(0) = \frac{\ln 2-1}{\ln 2+1}$, $y''(0) = \frac{8\ln^2 2}{(\ln 2+1)^3}$. 5.4. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2-yz}{xy-z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y+z-1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$. 5.5. 1) $\frac{\partial z(1;-2)}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial z(1;-2)}{\partial y} = \frac{1}{2}$; 2) $\frac{\partial z(-1;0)}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial z(-1;0)}{\partial y} = \frac{1}{2}$; 3) $\frac{\partial^2 z(1;-2)}{\partial x^2} = -\frac{2}{5}$, $\frac{\partial^2 z(1;-2)}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{5}$, $\frac{\partial^2 z(1;-2)}{\partial y^2} = -\frac{394}{125}$; 4) $\frac{\partial^2 z(0;1)}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{2}$. 5.6. 1) $dz = \frac{yz}{z^2-xy}dx+\frac{xz}{z^2-xy}dy$; 2) $dz = -\frac{\sin 2x\,dx+\sin 2y\,dy}{\sin 2z}$; 3) $dz = -\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy$, $d^2z = \frac{y^2-u^2}{z^3}dx^2-\frac{2xy}{z^3}dxdy$; 4) $dz = \frac{z}{1-z}(dx+dy)$, $d^2z = \frac{z}{(1-z)^3}(dx+dy)^2$.

§ 6

6.1. 1) $2x-4y-z-5=0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$; 2) $8x-8y-z=4$, $\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-1}$; 3) $x+y-z-1=0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$; 4) $x-y-2z+1=0$, $\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-2}$. 6.2. 1) $17x+11y+5z=60$, $\frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}$; 2) $x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{2}}{2}$; 3) $x+ez-2=0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-\pi}{0} = \frac{z-1/e}{e}$; 4) $z+a=0$.

$\begin{cases} x = a, \\ y = a. \end{cases}$ 6.3. 1) $x+2y+3z-14=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$; 2) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-R=0$, $\frac{x-R\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y-R\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{z-R}{0}$; 3) $2x+3y+6z-18$, $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{6}$; 4) $x+11y+5z-18=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$. 6.4. $\frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$. 6.5. $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{6}}$. 6.6. $4x+y+2z-78=0$. 6.7. $x+4y+6z=\pm 21$. 6.8. $(1;\pm 1;0)$ წერტილებზე გადამავალი მხები სიბრტყეები პარალელურია oxz სიბრტყის; $(0;0;0)$ და $(2;0;0)$ წერტილებზე გადამავალი მხები სიბრტყეები კი პარალელურია oyz სიბრტყის; ზედაპირზე არ არის წერტილი, რომელზეც გადამავალი მხები სიბრტყე პარალელური იქნება oxy სიბრტყის. 6.9. $2x+y-z-2=0$. 6.10. $\frac{x-2}{1}=\frac{3y-10}{9}=\frac{z+4}{4}$. 6.11. $x-2y-3z=3$. 6.13. $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 6.14. $\left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ \pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$. 6.15. 1) $-\frac{3}{5}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$; 4) $\frac{11}{7}$. 6.16. 1) 1; 2) $\frac{68}{13}$. 6.17. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 6.18. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. 6.19. $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}$. 6.23. 1) $9\bar{i}-3\bar{j}$; 2) $\frac{1}{4}\left(5\bar{i}-3\bar{j}\right)$; 3) $6\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$; 4) $\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}$. 6.24. 1) $\frac{\bar{r}}{r}$; 2) $2\bar{r}$; 3) $-\frac{\bar{r}}{r^3}$. 6.25. $\sqrt{17+16\ln^2 2}$. 6.26. $|\operatorname{grad}u|=6$, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$. 6.27. $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$. 6.28. $\cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{3}}$. 6.29. $\cos\varphi=-\frac{12}{5\sqrt{145}}$.

§ 7

7.1. 1) $f(-2+h,1+k)=1-h^2+2hk+3k^2$; 2) $f(2+h,1+k)=12+15h+6h^2+3hk-6k^2+h^3-2k^3$; 3) $f(1+h,1+k)=1+2h+k+h^2+2hk+h^2k$; 4) $f(1+h,-2+k)=5+2h^2-hk-k^2$; 5) $f(x_0+h,y_0+k)=x_0^3+2y_0^3-x_0y_0+(3x_0^2-y_0)h+(6y_0^2-x_0)k+3x_0h^2-hk+6y_0k^2+h^3+2k^3$; 6) $f(x_0+h,y_0+k)=ax_0^2+2bx_0y_0+cy_0^2+(2ax_0+by_0)h+2(bx_0+cy_0)k+ah^2+2bhk+ck$. 7.2. 1) $1-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{8}\left(x^2+y^2\right)^2$; 2) $y+xy+\frac{3x^2y-y^3}{3!}$; 3) $1+y+\frac{1}{2!}(y^2-x^2)+\frac{1}{3!}(y^3-3x^2y)$; 4) $1-\frac{1}{2!}(x^2+y^2)+\frac{1}{4!}(x^4+6x^2y^2+y^4)$. 7.3. 1) $1+(y-1)+(x-1)(y-1)$; 2) $1+(x-1)+(y-1)+(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(x-1)^3+(x-1)^2(y-1)$; 3) $1+[(x-1)+(y+1)]+\frac{1}{2!}[(x-1)+(y+1)]^2+\frac{1}{3!}[(x-1)+(y+1)]^3$; 4) $[(x-1)+(y-1)]-\frac{1}{2!}[(x-1)^2+(y-1)^2]+z^2$. 7.4. $1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)$, $(1{,}1)^{1{,}02}\approx 1{,}1021$. 7.5. $1+h+\frac{1}{2}(h^2-k^2)+\frac{1}{6}(h^3-3hk^2)$, $e^{0{,}1}\sin 0{,}49\pi\approx 1{,}1051$. 7.6. 1) $Z_{min}=Z(-1;2)=0$; 2) სტაციონარული წერტილია $(-1,2)$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია; 3) $Z_{min}=Z(0;3)=-9$; 4) $Z_{max}=Z(1;0)=1$. 7.7. 1) $Z_{min}=Z(1;1)=-28$, $Z_{max}=Z(-3;-1)=28$, $(0;2)$ და $(-2;-2)$ სტაციონარული წერტილებია; 2) $Z_{min}=Z(1;1)=-1$, $(0;0)$ სტაციონარული წერტილია; 3) სტაციონარული წერტილია $\left(2;-\frac{2}{3}\right)$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია; 4) $Z_{max}=Z(-1;-1)=1$, $(0;0)$ სტაციონარული წერტილია. 7.8. 1) $Z_{max}=Z\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{64}$; 2) $Z_{min}=Z(-1;-1)=-2$, $Z_{min}=Z(1;1)=-2$, $(0;0)$ სტაციონარული წერტილია; 3) $Z_{min}=Z(0;0)=0$, $\left(-\frac{5}{3};0\right)$, $(1;4)$, $(1;-4)$ სტაციონარული წერტილებია. 4) $Z_{min}=Z(-\sqrt{2};\sqrt{2})=Z(\sqrt{2};-\sqrt{2})=-8$, $(0;0)$ სტაციონარული წერტილია. 7.9. 1) $Z_{max}=Z(2;3)=108$; $Z_{min}=Z(0;y)=0$, $(0<y<6)$, $Z_{max}=Z(0;y)=0$ $(-\infty<y<0,\ 6<y<\infty)$; 2) $Z_{max}=Z(3;2)=108$; 3) სტაციონარული წერტილია $(0;0)$, ექსტრემუმი არა აქვს; 4) სტაციონარული წერტილია $(0;0)$, ექსტრემუმი არა აქვს. 7.10. 1) $Z_{min}=Z(5;2)=30$; 2) $Z_{min}=Z(4;2)=6$; 3) $Z_{min}=Z(1;1)=3$; 4) $Z_{max}=Z(-1;-1)=-1$. 7.11. 1) $Z_{min}=Z(2;4)=0$; 2) $Z_{max}=Z(4;4)=13$; 3) $Z_{max}=Z\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=Z\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$; $Z_{min}=Z\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=Z\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $Z_{max}=Z(1;-1)=\sqrt{3}$. 7.12. 1) $Z_{min}=Z(-2;0)=-\frac{2}{e}$; 2) $Z_{min}=Z\left(\frac{1}{2};-1\right)=-\frac{e}{2}$; 3) $Z_{max}=Z(-4;-2)=\frac{8}{e^2}$, $(0;0)$ სტაციონარული წერტილია. 4) $Z_{min}=Z(0;0)=0$, $Z_{max}=Z(1;0)=Z(-1;0)=\frac{2}{e}$; 5) $Z_{max}=Z(0;0)=1$; 6) $Z_{max}=Z(0;0)=4$; 7.13. 1) $Z_{min}=Z(1;2)=7-10\ln 2$; 2) $Z_{min}=Z(1;3)=10-18\ln 3$; 3) $Z_{min}=Z\left(\frac{1}{\sqrt{2e}};\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=Z\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}};-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=-\frac{1}{2e}$, $Z_{max}=Z\left(\frac{1}{\sqrt{2e}};-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=Z\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}};\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=\frac{1}{2e}$, $(0;\pm 1)$, $(\pm 1;0)$ – სტაციონარული წერტილებია; 4) სტაციონარული წერტილია $\left(-\frac{3\sqrt[3]{2}}{2};-\sqrt[3]{2}\right)$, ექსტრემუმი არა აქვს. 7.14. 1) $Z_{max}=Z\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 2) $Z_{max}=Z\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$. 3) $Z_{max}=Z\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$; 4) $Z_{min}=Z\left(\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $Z_{max}=Z\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. 7.15. 1) $U_{min}=U(2;-3;1)=-14$; 2) $U_{min}=U(-1;-2;3)=-14$; 3) $U_{min}=U\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)=-\frac{4}{3}$; 4) $U_{min}=U(24;-144;-1)=-6913$. 7.16. 1) უმცირესი მნიშვნელობა -2,

უმცირესი მნიშვნელობა -5; 2) უდიდესი მნიშვნელობა 2, უმცირესი მნიშვნელობა -1; 3) უდიდესი მნიშვნელობა 6, უმცირესი მნიშვნელობა -1; 4) უდიდესი მნიშვნელობა 17, უმცირესი მნიშვნელობა -3; 7.17. 1) უდიდესი მნიშვნელობა 4, უმცირესი მნიშვნელობა -4, 2) უდიდესი მნიშვნელობა $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, უმცირესი მნიშვნელობა $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$; 3) უდიდესი მნიშვნელობა 125, უმცირესი მნიშვნელობა -75; 4) უდიდესი მნიშვნელობა $\frac{1}{2}$, უმცირესი მნიშვნელობა $-\frac{1}{2}$. 7.18. 1) უდიდესი მნიშვნელობა $9+4\sqrt{2}$, უმცირესი მნიშვნელობა -11; 2) უდიდესი მნიშვნელობა 4, უმცირესი მნიშვნელობა -64; 3) უდიდესი მნიშვნელობა 1, უმცირესი მნიშვნელობა 0; 4) უდიდესი მნიშვნელობა $\frac{3}{e}$, უმცირესი მნიშვნელობა 0. 7.19. $\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}$. 7.20. $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a}$. 7.21. $\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}$. 7.22. კუბი, რომლის წიბოს სიგრძეა $\sqrt[3]{v}$. 7.23. ფუძის განზომილებებია $\sqrt[3]{2v}$, $\sqrt[3]{2v}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2v}$. 7.24. ტოლგვერდა სამკუთხედი. 7.25. კუბი. 7.26. კუბი. 7.27. კუბი. 7.28. მართკუთხედის გვერდებია $\frac{2p}{3}$ და $\frac{p}{3}$. 7.29. სამკუთხედის გვერდებია $\frac{3p}{4}, \frac{3p}{4}$ და $\frac{p}{2}$. 7.30. მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოებია $\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}$ და $\frac{R}{\sqrt{3}}$. 7.31. მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოებია $\frac{2\sqrt{2}R}{3}, \frac{2\sqrt{2}R}{3}$ და $\frac{H}{3}$. 7.32. თუ $\alpha \geq \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, მაშინ უდიდესი ზედაპირის ფართობი აქვს პარალელეპიპედს, რომლის სიმაღლე $H=l\sin\alpha\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}$, ხოლო ფუძე კვადრატია; თუ $0<\alpha<\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, მაშინ $H=0$. 7.33. ტოლგვერდა. 7.34. 1) მოცემული კუთხის მქონე ტოლფერდა სამკუთხედი; 2) მოცემული ფუძის მქონე ტოლფერდა სამკუთხედი. 7.35. $\frac{4}{\sqrt{5}}$. 7.36. $\sqrt{20}$. 7.37. $\frac{19\sqrt{2}}{8}$. 7.38. $C\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$. 7.39. $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$. 7.40. 1) ცილინდრის ფუძის რადიუსია $\frac{R\sqrt{6}}{3}$, სიმაღლე $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$; 2) ცილინდრის ფუძის რადიუსია $\frac{R}{2}\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}$, სიმაღლე $R\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}$. 7.41. პარალელეპიპედის წიბოებია $\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}$. 7.42. 1) $Z_{min}=Z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$; 2) $Z_{max}=Z(a;a)=Z(-a;-a)=a^2$, $Z_{min}=Z(a;-a)=Z(-a;a)=-a^2$; 3) $Z_{min}=Z\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{4}$; 4) $Z_{min}=Z(1;1)=0$, $Z_{max}=Z\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$. 7.43. $Z_{min}=Z(1;1)=-2$; 2) $Z_{max}=Z(a\sqrt{2};a\sqrt{2})=$

$=\frac{\sqrt{2}}{a}$, $Z_{min}=Z(-a\sqrt{2};-a\sqrt{2})=-\frac{\sqrt{2}}{a}$; 3) $Z_{min}=Z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$; 4) $Z_{min}=Z\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\sqrt{5}$; $Z_{max}=Z\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}$. 7.44. 1) $Z_{min}=Z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$; 2) $Z_{min}=Z(1;1)=2$; 3) $Z_{max}=Z(1;1)=e$; 4) $Z_{max}=Z\left(\frac{7}{8}\pi+k\pi;\frac{9}{8}\pi+k\pi\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $Z_{min}=Z\left(\frac{3}{8}\pi+k\pi;\frac{5}{8}\pi+k\pi\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

§ 8

8.1. 1) $\frac{1}{4}x^4+C$; 2) $\frac{1}{7}x^7+C$; 3) x^3+C; 4) $\frac{1}{2}x^8+C$. 8.2. 1) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x+C$; 2) $\frac{x^6}{2}-x^4+x^3-2x+C$; 3) $\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+4x+C$; 4) $\frac{x^7}{7}+\frac{x^4}{4}+x+C$. 8.3. 1) $-\frac{2}{x}+C$; 2) $-\frac{3}{4x^4}+C$; 3) $-\frac{1}{2x^2}-2\ln|x|+x+C$; 4) $-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}+\ln|x|-2x+C$. 8.4. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}-x+C$; 2) $\frac{2}{3}x^2\sqrt{x}-4x\sqrt[4]{x^3}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+C$; 3) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-3x^2\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$; 4) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{x^2}+4x\sqrt[4]{x}-\frac{1}{2}x^2+x+C$. 8.5. 1) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{9}{\sqrt[3]{x}}+\frac{10}{3}\sqrt[5]{x^3}+C$; 2) $-\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}-12\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C$; 3) $5\sqrt[5]{x^3}-\frac{2}{\sqrt{x}}-4\sqrt[4]{x}+C$; 4) $5\sqrt[5]{x^4}-7\sqrt[7]{x^4}+\frac{1}{x^2}+x+C$; 8.6. 1) $\frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+C$; 2) $\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C$; 3) $\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7}+C$; 4) $\frac{24}{35}x\sqrt[24]{x^{11}}+C$. 8.7. 1) $\frac{1}{3}x^3+3x-\frac{2}{x}+C$; 2) $3\ln|x|-x+\frac{x^3}{3}+C$; 3) $\frac{x^4}{4}-2x-\frac{1}{2x^2}+C$; 4) $\frac{x^5}{5}+x^3+3x-\frac{1}{x}+C$; 8.8. 1) $\frac{36}{13}x\sqrt[12]{x}-\frac{5}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C$; 2) $\frac{12}{7}x\sqrt[12]{x}-\frac{9}{7}x^2\sqrt[3]{x}+C$; 3) $\frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x}+\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x}-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+C$; 4) $\frac{4}{17}x^4\sqrt[4]{x}-\frac{3}{5}x^3\sqrt[3]{x}+\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C$. 8.9. 1) $-3\cos x-2\sin x+x+C$, 2) $-2\operatorname{ctg}x-3\operatorname{tg}x+C$, 3) $\operatorname{arctg}x-2\arcsin x+C$; 4) $2e^x-\frac{3^x}{\ln 3}+2\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+C$. 8.10. 1) $\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$; 2) $\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$; 3) $\operatorname{tg}x-x+C$; 4) $-\operatorname{ctg}x-x+C$. 8.11. 1) $\frac{a^x e^x}{1+\ln a}+C$; 2) $e^x-\ln|x|+C$; 3) $\frac{a^x}{\ln a}+\frac{1}{2x^2}+C$; 4) $\frac{2^x-2^{-x}}{\ln 2}+C$. 8.12. 1) $x-\cos x+C$; 2) $2\operatorname{tg}x-\sin x+C$; 3) $\operatorname{tg}t+\frac{t}{2}+C$; 4) $\operatorname{tg}t-2\operatorname{ctg}t+C$. 8.13. 1) $x+\sin x+C$; 2) $\operatorname{tg}x+C$; 3) $-\operatorname{ctg}t-\operatorname{tg}t+C$, 4) $\operatorname{tg}t-$

$-\mathrm{ctg}\,t + C$. 8.14. 1) $3\,\mathrm{sh}\,x - 2\,\mathrm{ch}\,x + C$; 2) $-\mathrm{cth}\,x - 4\,\mathrm{th}\,x + C$; 3) $x - \mathrm{th}\,x + C$; 4) $x - \mathrm{cth}\,x + C$. 8.15. 1) $\ln|x| + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C$; 2) $\ln|x| - 2\,\mathrm{arctg}\,x + C$; 3) $-\frac{1}{x} + \mathrm{arctg}\,x + C$; 4) $-\frac{2}{x} + \mathrm{arctg}\,x + C$. 8.16. 1) $\frac{(3x+1)^5}{15} + C$; 2) $-\frac{(2-x)^6}{6} + C$; 3) $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1-2x)^4} + C$; 4) $\frac{7}{36}\sqrt[7]{(3x-2)^{12}} + C$. 8.17. 1) $\frac{1}{10(1-5x)^2} + C$; 2) $-\frac{1}{2(2x+1)} + C$; 3) $-\frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + C$. 4) $\frac{5}{4}\sqrt[5]{(2x-1)^2} + C$. 8.18. 1) $\frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$; 2) $-\frac{1}{3}\ln|1-3x| + C$; 3) $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$; 4) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$. 8.19. 1) $-\frac{1}{\pi}\cos \pi x + C$; 2) $\frac{1}{\pi}\sin(\pi x + 2) + C$; 3) $3\sin\frac{x}{3} + C$; 4) $-2\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right) + C$. 8.20. 1) $x\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin 2x + C$; 2) $-3\cos\frac{x+1}{3} + \frac{1}{2}\sin(1-2x) + C$; 3) $\frac{1}{4}\mathrm{tg}\,4x + C$; 4) $-3\,\mathrm{ctg}\frac{x}{3} + C$. 8.21. 1) $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$; 2) $-\frac{a^{-x}}{\ln a} + C$; 3) $\frac{1}{3}e^{3x} + e^{-x} + C$; 4) $\frac{a^{2x}}{2\ln a} - \frac{a^{-2x}}{2\ln a} + C$. 8.22. 1) $\frac{1}{2}\mathrm{ch}(2x-1) + C$; 2) $-\frac{1}{3}\mathrm{sh}(1-3x) + C$; 3) $2\,\mathrm{th}\frac{x}{2} + C$; 4) $-\frac{1}{\pi}\mathrm{cth}\,\pi x + C$. 8.23. 1) $x - 2\ln|x+4| + C$; 2) $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\ln|2x-1| + C$; 3) $8\ln|x+1| - x + C$; 4) $\frac{1}{9}\ln|1-3x| - \frac{2}{3}x + C$. 8.24. 1) $\frac{x^2}{2} + 3x - 7\ln|x+3| + C$; 2) $x^2 + x + \frac{2}{3}\ln|3x-1| + C$; 3) $C - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{8} - \frac{1}{8}x - \frac{17}{16}\ln|1-2x|$; 4) $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 12x - 23\ln|x+2| + C$. 8.25. 1) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x-1| + C$; 2) $\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 8x + 17\ln|x+2| + C$; 3) $\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + C$; 4) $C - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|1-x|$. 8.26. 1) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}}\right| + C$; 3) $\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x - 2\sqrt{3}}{\sqrt{5}x + 2\sqrt{3}}\right| + C$; 4) $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{7}}{2x-\sqrt{7}}\right| + C$. 8.27. 1) $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{x}{4} + C$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2} + C$; 3) $\arcsin\frac{x}{2} + C$; 4) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{3}x}{3} + C$. 8.28. 1) $x - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$; 2) $C - 3x - \ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$; 3) $\frac{x^3}{3} + 4x + 4\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$; 4) $C - \frac{x^3}{3} - 3x - \frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|$

§ 9

9.1. 1) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2} + C$; 2) $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}x}{2} + C$; 3) $\arcsin\frac{x}{3} + C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{10}x}{5} + C$. 9.2. 1) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$; 2) $-\frac{1}{10}\ln|4-5x^2| + C$; 3) $-\sqrt{1-x^2} + C$; 4) $\frac{5}{12}\sqrt[5]{(x^2+2)^6} + C$. 9.3. 1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+x^3)^4} + C$; 2) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27} + C$; 3) $\frac{1}{6}\sqrt[3]{(x^3+1)^6} + C$; 4) $\frac{1}{ak}\ln|ax^k+b| + C$. 9.4. 1) $\frac{1}{2}\sqrt{7+x^4} + C$; 2) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2} + C$; 3) $-\frac{2}{9}\sqrt{2-3x^3} + C$; 4) $-\frac{3}{80}\sqrt[3]{(1-4x^5)^4} + C$. 9.5. 1) $-\frac{1}{2}\cos(x^2+2) + C$; 2) $\frac{1}{9}\sin(3x^3-1) + C$; 3) $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$; 4) $\frac{3^{-7x^2}}{4\ln 2} + C$. 9.6. 1) $-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{\ln 3} + C$; 2) $\frac{1}{2e^{1/x^2}} + C$; 3) $2e^{\sqrt{x}} + C$; 4) $\frac{3\cdot 2^{\sqrt[3]{x}}}{\ln 2} + C$. 9.7. 1) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x^2 + C$; 2) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x^3}{\sqrt{2}} + C$; 3) $\frac{1}{4}\arcsin x^4 + C$. 4) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{4} + C$. 9.8. 1) $\ln(x^2-3x+8) + C$; 2) $\sqrt{3x^2-5x+6} + C$; 3) $\frac{1}{2}e^{x^2-2x} + C$; 4) $\frac{5^{x-\frac{1}{x}}}{\ln 5} + C$. 9.9. 1) $\frac{1}{4}\ln^4 x + C$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C$; 3) $\ln|\ln|x|| + C$; 4) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-\ln(x-1))^2} + C$. 9.10. 1) $-\ln|\cos x| + C$; 2) $\ln|\sin x| + C$; 3) $\frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C$; 4) $-2\ln|\cos x| + C$. 9.11. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{(\mathrm{tg}\,x+1)^3} + C$; 2) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-\mathrm{tg}\,x)^2} + C$; 3) $-2\sqrt{\mathrm{ctg}\,x} + C$; 4) $\frac{1}{2}e^{-\mathrm{ctg}\,2x} + C$. 9.12. 1) $\frac{1}{\cos^3 x} + C$; 2) $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$; 3) $e^{\sin x} + C$; 4) $\frac{3^{-\cos x}}{\ln 3} + C$. 9.13. 1) $3\sqrt[3]{\sin x} + C$; 2) $-\cos^6 x + C$; 3) $-\frac{1}{16\sin^4 x} + C$; 4) $-\frac{1}{6}\sqrt{\cos^3 2x} + C$. 9.14. 1) $\ln|x - \sin x| + C$; 2) $\ln|\sin x - \cos x| + C$; 3) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{1+\sin 2x} + C$; 4) $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x + 3} + C$. 9.15. 1) $\ln(e^x+3) + C$; 2) $\frac{\ln(1+3^x)}{\ln 3} + C$; 3) $\ln(e^x+e^{-x}) + C$; 4) $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-be^x)^3} + C$. 9.16. 1) $\frac{1}{\ln 2}\mathrm{arctg}\,2^x + C$; 2) $\frac{1}{\ln 3}\arcsin\frac{3^x}{2} + C$; 3) $\mathrm{arctg}\,e^x + C$; 4) $x - \ln(e^x+1) + C$. 9.17. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{(\mathrm{arctg}\,x)^3} + C$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3} + C$; 3) $\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{\arcsin x} + C$; 4) $\ln|\mathrm{arctg}\,x| + C$.

9.18. 1) $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$; 2) $\frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$; 3) $\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + C$. 9.19. 1) $\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$; 2) $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + C$; 3) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$; 4) $\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right) + C$. 9.20. 1) $-\frac{1}{9}\left(\sqrt{1-9x^2} + (\arccos 3x)^3\right) + C$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x + \frac{1}{4}(\operatorname{arctg}2x)^2 + C$; 3) $-2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3} + C$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg}e^x)^3} + C$. 9.21. 1) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$; 2) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x) + C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right) + C$. 9.22. 1) $\frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right| + C$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}\right) + C$; 3) $-\frac{1}{n+2}\ln\left|\frac{x^{n/2}-1}{x^{n/2}+1}\right| + C$; 4) $\frac{2}{n+2}\arcsin\left(x^{\frac{n}{2}+1}\right) + C$. 9.23. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}x + \sqrt{\operatorname{ch}2x}\right) + C$; 2) $3\sqrt[3]{\operatorname{th}x} + C$; 3) $\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}^2 x - \ln(1+\operatorname{ch}^2 x)\right) + C$; 4) $\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{th}^5 x + C$. 9.24. 1) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$; 2) $\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right| + C$; 3) $\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right) + C$; 4) $\ln\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 5}\right) + C$. 9.25. 1) $C - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2}$; 2) $C - \frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}$; 3) $C - \frac{1}{15}(x^3+2)^{-5}$; 4) $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x^2-2)^4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(x^2-2)^3} + C$. 9.26. 1) $\frac{2}{5}(x-2)\sqrt{(3+x)^3} + C$; 2) $2\left(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\right) + C$; 3) $2\left(\sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})\right) + C$; 4) $2\left(\frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})\right) + C$. 9.27. 1) $\frac{2}{35}\sqrt{x-1}(5x^3+6x^2+8x+6) + C$; 2) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$; 3) $\frac{2}{15}(x+4)(3x-23)\sqrt{x+4} + C$; 4) $\frac{2}{15}(x-1)(3x+22)\sqrt{x-1} + C$; 5) $\frac{1}{9}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{x+2}{9} - \frac{14}{27}\sqrt{x+2} + \frac{28}{81}\ln(3\sqrt{x+2}+2) + C$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^3} - \frac{2}{3}(x-1) + \frac{16}{9}\sqrt{x-1} + \frac{64}{27}\ln\left|\sqrt{x-1} - \frac{4}{3}\right| + C$. 9.28. 1) $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-1)^5} + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C$; 2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C$; 3) $-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{4/3} + C$; 4)

$-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2} + C$. 9.29. 1) $-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x} + C$; 2) $-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{5/3} + C$; 3) $C - \frac{2}{3}\sqrt[3]{a^3-x^3}(2a^3+x^3)$; 4) $\frac{x^2-4}{2} + \frac{8}{x^2-4} + 4\ln|x^2-4| + C$. 9.30. 1) $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + \ln(1+\sqrt[4]{x}) + C$; 2) $x + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right| + C$; 3) $3\sqrt[3]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right| + C$; 4) $\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right) + C$. 9.31. 1) $2\sqrt{1+\ln x} - \ln|\ln x| + 2\ln\left|\sqrt{1+\ln x}-1\right| + C$; 2) $\ln x - \ln 2\cdot\ln|\ln x + 2\ln 2| + C$; 3) $\ln|\ln\ln x| + C$; 4) $\frac{2}{3}(\ln x - 2)\sqrt{1+\ln x} + C$. 9.32. 1) $-\frac{1}{2}\ln\left|1-\ln^2 x\right| + C$; 2) $\ln^2\operatorname{tg}x + C$; 3) $-\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right) + C$; 4) $-\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x} + C$. 9.33. 1) $\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} - 2\sqrt{\cos x} + C$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}\right| + C$; 3) $\frac{2}{5}\left(3 - 2\cos^2 x\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}\right) + C$; 4) $e^{\operatorname{tg}x} + \ln|\operatorname{tg}x| + C$. 9.34. 1) $-2\sqrt{e^{-x}+1} + C$; 2) $-\arcsin(e^{-x}) + C$; 3) $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^{\sin x}-1} + C$; 4) $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + C$. 9.35. 1) $-\frac{1}{2}\ln^2\arccos x + C$; 2) $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2 + C$; 3) $(\operatorname{arctg}e^x)^2 + C$; 4) $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C$. 5) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C$. 9.36. 1) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C$; 2) $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$; 3) $-\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5} + C$; 4) $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + C$. 9.37. 1) $\sqrt{x^2-a^2} - |a|\arccos\left|\frac{a}{x}\right| + C$; 2) $-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{|x|} + C$; 3) $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$; 4) $-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$. 9.38. 1) $-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x} + C$; 2) $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + C$; 3) $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$; 4) $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}} + C$.

§ 10

10.1. 1) xe^x-e^x+C; 2) $-(x+1)e^{-x}+C$; 3) $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$; 4) $\frac{e^{2x}}{4}(6x-11)+C$.
10.2. 1) $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$; 2) $x\sin x+\cos x+C$; 3) $C-\frac{1}{5}\left(x\cos 5x-\frac{1}{5}\sin 5x\right)$; 4) $3x\sin\frac{x}{3}+9\cos\frac{x}{3}+C$. 10.3. 1) $\frac{1}{2}\left[(2x+5)\sin 2x+\cos 2x\right]+C$; 2) $\frac{3x-1}{4}\cos 4x-\frac{3}{16}\sin 4x+C$; 3) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$; 4) $\ln|\sin x|-x\operatorname{ctg}x+C$. 10.4. 1) $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$; 2) $x\ln x-x+C$; 3) $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x-\frac{1}{\alpha+1}\right)+C$ при $\alpha\neq-1$; $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$ при $\alpha=-1$. 4) $\left(\frac{3x^2}{2}+2x\right)\ln x-\frac{3x^2}{4}-2x+C$. 10.5. 1) $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C$; 2) $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$; 3) $\frac{x^3+1}{3}\ln(x+1)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C$; 4) $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x+\frac{13}{3}\right)\ln(x+1)-\frac{x^3}{9}+\frac{2}{3}x^2-\frac{13}{3}x+C$. 10.6. 1) $\frac{-x+(x^2+1)\operatorname{arctg}x}{2}+C$; 2) $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; 3) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 4) $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$. 10.7. 1) $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$; 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$; 3) $x\operatorname{tg}x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C$; 4) $\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+C$. 10.8. 1) $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$; 2) $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$; 3) $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$; 4) $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C$. 10.9. 1) $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$; 2) $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C$; 3) $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C$; 4) $-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)+C$. 10.10. 1) $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$; 2) $\frac{x^4-1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{4}+C$; 3) $2\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\right)+C$; 4) $-x-\sqrt{1-x^2}\arccos x+C$. 10.11. 1) $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(1+x^2)}+C$; 3) $\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}+C$; 4) $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$. 10.12. 1) $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$; 2) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}^2 x-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; 3) $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}3x-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{162}\ln(9x^2+1)+C$; 4) $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$. 10.13. 1) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\cos x\ln\operatorname{tg}x+C$; 2) $-x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C$; 3) $\frac{x^3}{3}\arcsin 2x+\frac{2x^2+1}{36}\sqrt{1-4x^2}+C$; 4) $4\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\frac{x}{2}+C$. 10.14. 1) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)e^x+C$; 2) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^x+C$; 3) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-3}-\frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$; 4) $\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$. 10.15. 1) $\frac{1}{2}(\sin x\operatorname{sh}x-\cos x\operatorname{ch}x)+C$; 2) $\frac{1}{2}(\cos x\operatorname{sh}x+\sin x\operatorname{ch}x)+C$; 3) $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$; 4) $\frac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x)+C$.

§ 11

11.1. 1) 1) $\frac{1}{2-x}+C$; 2) $\operatorname{arctg}(x+1)+C$; 3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+1)+C$; 4) $\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C$. 11.2. 1) $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$; 2) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C$; 3) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-6}{x}\right|+C$; 4) $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3x+5}{1-3x}\right|+C$. 11.3. 1) $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x-11}{\sqrt{11}}+C$; 2) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{1-2x}{3}+C$; 3) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{1-2x}{3}+C$; 4) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+C$. 11.4. 1) $\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C$; 2) $\arcsin(x-1)+C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$; 4) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$. 11.5. 1) $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$; 2) $\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+C$; 3) $\frac{1}{3}\ln\left(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}\right)+C$; 4) $\ln\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right)+C$. 11.6. 1) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)+\operatorname{arctg}(x+1)+C$; 2) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$; 3) $\frac{3}{8}\left[\ln\left(4x^2-4x+17\right)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}\right]+C$; 4) $\frac{29}{45}\operatorname{arctg}\frac{5x+3}{9}-\frac{3}{10}\ln\left(5x^2+6x+18\right)+C$. 11.7. 1) $\sqrt{x^2+2x+2}+2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$; 2) $-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$; 3) $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+$

$+\frac{13}{9}\ln\left(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right)+C$; 4) $-3\sqrt{6x-x^2-8}+13\arcsin(x-3)+C$.

§ 12

12.1. 1) $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$; 3) $\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$. 4) $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$. 12.2. 1) $\frac{1}{12}\ln\frac{|(x-1)(x+3)^3|}{(x+2)^4}+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3(x-2)^2}{(x+1)^5}\right|+C$; 3) $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^3}{(x+3)^7}\right|+C$; 4) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right|+C$. 12.3. 1) $\ln\frac{(x-2)^2}{|(x+2)^5|}+C$; 2) $\ln\frac{|(x-2)^3|}{(x+3)^2}+C$; 3) $\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{10}\ln|2x+1|+C$; 4) $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+4\ln|x-7|+C$. 12.4. 1) $-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C$; 2) $\ln\frac{|x(x+3)^3|}{(x-3)^2}+C$; 3) $\ln\left|\frac{(x-1)^2(x+2)^3}{(x-3)^4}\right|+C$; 4) $\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x-2)(x+2)^2}\right|+C$. 12.5. 1) $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$; 2) $x+\ln\frac{(x-2)^4}{|x-1|}+C$; 3) $\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{2}\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$; 4) $\frac{x^3}{3}-x^2+\ln\left|\frac{x+4}{(x-5)^3}\right|+C$. 12.6. 1) $\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln|(x+1)(x-1)^3|+C$; 2) $-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C$; 3) $-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 4) $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C$. 12.7. 1) $\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$; 2) $-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$; 3) $-\frac{1}{(x-1)^2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$; 4) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-3)}{x}\right|+C$. 12.8. 1) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+C$; 2) $\frac{3}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+20\ln|x-3|-\frac{47}{4}\ln|x-2|+C$; 3) $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+C$; 4) $-\frac{1}{2x}-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{36}\ln\left|\frac{(x-2)(x+1)^{44}}{x^{45}}\right|+C$. 12.9. 1) $-\frac{x}{(x^2-1)^2}+C$; 2) $\frac{16-21x-6x^2}{250(x-2)(x+3)^2}-\frac{3}{625}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C$; 3) $-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$; 4) $\frac{1}{4x^4}+\ln|x-1|+C$. 12.10.

1) $x-\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$; 2) $3x+5\ln|x+2|-\frac{6}{x+1}+C$; 3) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C$. 4) $\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{1}{8}\ln|(x-1)^{31}(x+1)|+C$. 12.11. 1) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+C$; 3) $\frac{1}{4}\ln|(x-1)^3(x+1)|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$; 4) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. 12.12. 1) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; 3) $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$; 4) $\frac{3}{2}\ln(x^2+2)-2\ln|x-1|+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. 12.13. 1) $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C$; 2) $-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 3) $-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^7}{x^2+2x+2}-\frac{8}{25}\operatorname{arctg}(x+1)+C$; 4) $\frac{1}{3(1-x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. 12.14. 1) $\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; 2) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$; 3) $\operatorname{arctg}x-\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+C$; 4) $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. 12.15. 1) $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$; 2) $-\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; 3) $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3+C$. 12.16. 1) $\frac{5}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+C$; 2) $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{\ln(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 3) $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)+C$; 4) $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C$. 12.17. 1) $\frac{x-1}{4(1+x^2)}+\frac{1}{8}\ln\frac{1+x^2}{(1+x)^2}+C$; 2) $2\ln|x+1|+\frac{x+2}{2(x^2+x+1)}$

$+\frac{5}{3\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}-\frac12\ln\left(x^2+x+1\right)+C$; 3) $\frac{3x^2+2}{2x\left(x^2+1\right)}-\frac32\operatorname{arctg}x+C$; 4) $-\frac{3x^2-x}{4(x-1)\left(x^2+1\right)}+\frac14\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac14\operatorname{arctg}x+C$. 12.18. 1) $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{7}{288}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{24\left(x^2+4\right)}+C$; 2) $\frac{x\left(3x^2+5\right)}{8\left(x^2+1\right)^2}+\frac38\operatorname{arctg}x+C$; 3) $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48\left(1+x^2\right)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg}x+C$; 4) $\frac38\operatorname{arctg}(x+1)+\frac38\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x}{4\left(x^2+2x+2\right)^2}+C$.

§ 13

13.1. 1) $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right]+C$; 2) $2\sqrt x-2\ln\left(1+\sqrt x\right)+C$; 3) $x-2\sqrt x+2\ln\left(\sqrt x+1\right)+C$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2}+C$. 13.2. 1) $2\sqrt x-x-\ln\left(2\sqrt x+1\right)+C$; 2) $x+4\sqrt{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C$; 3) $2\sqrt x-2\sqrt2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac x2}+C$; 4) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$. 13.3. 1) $2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$; 2) $\frac{4}{45}(x-2)(5x+8)\sqrt[4]{x-2}+C$; 3) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac12\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$; 4) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$. 13.4. 1) $\ln\left|1+3\sqrt[3]x\right|+C$; 2) $\frac13\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}+\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt3}+\frac{2t}{t^3-1}+C$, $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$; 3) $\ln\left|\frac{\sqrt[4]x-1}{\sqrt[4]x+1}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt[4]x+C$; 4) $\frac x2\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)-\frac12\ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|+C$. 13.5. 1) $2\sqrt x-3\sqrt[3]x+6\sqrt[6]x-6\ln\left(1+\sqrt[6]x\right)+C$; 2) $\frac43\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right)+C$; 3) $\frac67x\sqrt[6]x-\frac65\sqrt[6]{x^5}-\frac32\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt x+3\sqrt[3]x-6\sqrt[6]x-3\ln\left|1+\sqrt[3]x\right|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]x+C$; 4) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$. 13.6. 1) $6\left[\frac19(x+1)^{3/2}-\frac18(x+1)^{4/3}+\frac17(x+1)^{7/6}-\frac16(x+1)+\frac15(x+1)^{5/6}-\frac14(x+1)^{2/3}\right]+C$; 2) $\ln\frac{x}{\left(1+\sqrt[10]x\right)^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]x}-\frac{5}{\sqrt[5]x}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C$; 3) $\frac65\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt x+6\sqrt[6]x-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]x+$

$+C$; 4) $\frac67x\sqrt[6]x-\frac43\sqrt[4]{x^3}+C$. 13.7. 1) $4t-2t^2-4\ln|t+1|+C$, $t=\sqrt[4]{5-x}$; 2) $\frac{2}{\left(1+\sqrt[4]x\right)^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]x}+C$; 3) $-\frac32\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$; 4) $\frac{3t}{t^2+1}+3\operatorname{arctg}t+C$, $t=\sqrt[6]x$. 13.8. 1) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}+C$; 2) $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$; 3) $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}+C$; 4) $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7}-8\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}\right|+C$. 13.9. 1) $-4\sqrt{3-2x-x^2}+3\arcsin\frac{x+1}{2}+C$; 2) $-\sqrt{2-x-x^2}+\frac72\arcsin\frac{2x+1}{3}+C$; 3) $-\frac12\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}+C$; 4) $-\frac12(3x-10)\sqrt{3-2x-x^2}+14\arcsin\frac{x+1}{2}+C$. 13.10. 1) $2\ln\left|x-\sqrt{x^2-x+1}\right|-\frac{3}{2\left(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\right)}-\frac32\ln\left|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\right|+C$; 2) $\left(\frac{x^3}{4}-\frac{7x^2}{6}+\frac{95x}{24}-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{35}{8}\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)+C$; 3) $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$; 4) $\ln\frac{x}{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}+C$. 13.11. 1) $\ln\left|1-\frac{x}{1+\sqrt{1-2x+x^2}}\right|-2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}+C$; 2) $-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\arcsin\frac{\sqrt2x}{x+1}+C$; 3) $\frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt2}+C$; 4) $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt3}+\frac{\sqrt2}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt2(x-1)}-\frac{1}{\sqrt6}\ln\frac{\sqrt6+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt6-\sqrt{2+2x-x^2}}+C$. 13.12. 1) $\frac23x\sqrt x+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]x+\frac85x^2\sqrt x+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C$; 2) $-\frac{3}{\sqrt[3]x+1}+C$; 3) $\frac65x^{5/6}-4x^{1/2}+18x^{1/6}+\frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}}-21\operatorname{arctg}x^{1/6}+C$; 4) $3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]x}{1+\sqrt[3]x}\right|+\frac{2\sqrt[3]x+3}{2\left(1+\sqrt[3]x\right)^2}\right]+C$. 13.13. 1) $6x^{1/6}+3x^{1/3}+2x^{1/2}+6\ln\left|x^{1/6}-1\right|+C$; 2) $\frac65x^{5/6}-4x^{1/2}+18x^{1/6}+3x^{1/6}\left(1+x^{1/3}\right)^{-1}-21\operatorname{arctg}x^{1/6}+C$; 3) $-\frac32\left(1+x^{1/3}\right)^{-2}+C$; 4) $\frac49\left(1+x^{1/4}\right)^{-9}-\frac12\left(1+x^{1/4}\right)^{-8}+C$. 13.14. 1) $\frac{3}{11}(x+1)^{11/3}-\frac34(x+1)^{8/3}+$

$\frac{3}{5}(x+1)^{5/3}+C$; 2) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$; 3) $\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2+1}-1\right)-$ $-\frac{1}{4}\ln\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C$; 4) $\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+$ $+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}+C$. 13.15. 1) $\frac{12}{13}\left(1+x^{1/4}\right)^{13/3}-\frac{18}{5}\left(1+x^{1/4}\right)^{10/3}+$ $+\frac{36}{7}\left(1+x^{1/4}\right)^{7/3}-3\left(1+x^{1/4}\right)^{4/3}+C$; 2) $\frac{6}{7}\left(1+x^{1/3}\right)^{7/2}-\frac{18}{15}\left(1+x^{1/3}\right)^{5/2}+$ $+6x^{1/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{1/2}+C$; 3) $6u+2\ln\frac{u-1}{\sqrt{u^2+u+1}}-2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C,\ u=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$; 4) $\frac{1}{5}\ln\frac{|u-1|}{\sqrt{u^2+u+1}}+\frac{\sqrt{3}}{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+2u}{\sqrt{3}}+C,\ u=\sqrt[3]{1+x^5}$. 13.16. 1) $\frac{12}{7}\left(1+x^{1/4}\right)^{7/3}-$ $3\left(1+x^{1/4}\right)^{4/3}+C$; 2) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}+C$; 3) $\frac{5}{18}z^3-\frac{5}{2}z+C$, $z=\sqrt{3-2\sqrt[5]{x^3}}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)+C$. 13.17. 1) $-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}}\right|+C$; 2) $-\frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^5}}{2x^5}+C$; 3) $-\frac{3x^3+4}{8x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}+C$; 4) $-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}+C$. 13.18. 1) $-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}+C$; 2) $\frac{z^5}{5}-\frac{2z^3}{3}+z+C,\ z=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; 3) $\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,\ t=\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x}$; 4) $\frac{t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{12}\ln\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}-$ $-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C,\ t=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

§ 14

14.1. 1) $-\frac{1}{8}(\cos 4x+2\cos 2x)+C$; 2) $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$; 3) $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x+C$; 4) $-\frac{1}{8}\cos(4x+1)-\frac{1}{4}\cos(2x+3)+C$. 14.2. 1) $-\frac{1}{50}\sin 25x+\frac{1}{10}\sin 5x+C$; 2) $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C$; 3) $\frac{15}{22}\left(11\sin\frac{x}{15}-\sin\frac{11x}{15}\right)+C$; 4) $\frac{1}{4}\sin(2x+15)-\frac{1}{16}\sin(8x+1)+C$. 14.3. 1) $\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{22}\sin 11x+C$; 2) $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{6}\sin 3x+C$; 3) $\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+C$; 4) $\frac{1}{4a}\sin 2ax+\frac{x}{2}\cos 2bx+C$. 14.4. 1) $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$; 2) $\frac{1}{36}\sin 9x+\frac{1}{28}\sin 7x+\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin x+C$; 3) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{28}\sin 7x+C$; 4) $\frac{1}{6}\sin(3x+1)-\frac{1}{4}\sin(x+1)-\frac{1}{20}\sin(5x+1)+C$. 14.5. 1) $\frac{1}{6}\sin^6 x+C$; 2) $-\frac{1}{27}\cos^9 3x+C$; 3) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$; 4) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$. 14.6. 1) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$; 2) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$; 3) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$; 4) $\frac{1}{15}\cos^3 x\left(3\cos^2 x-5\right)+C$. 14.7. 1) $\frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2}+C$; 2) $\frac{1}{9}\sin^9 x-\frac{1}{11}\sin^{11}x+C$; 3) $-\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$; 4) $\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$. 14.8. 1) $-\frac{1}{\sin x}+C$; 2) $\frac{1}{\cos x}+C$; 3) $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$; 4) $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$. 14.9. 1) $\frac{1}{2\cos^2 x}+2\ln|\cos x|-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$; 2) $\cos x+\frac{2}{\cos x}+C$; 3) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$; 4) $\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C$. 14.10. 1) $\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C$; 2) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$; 3) $\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}+C$; 4) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x+\ln|\mathrm{tg}\,x|+C$. 14.11. 1) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$; 2) $\frac{3}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{3}{2}\cos x-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}+C$; 3) $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; 4) $\frac{3}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+C$. 14.12. 1) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 2) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 3) $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$; 4) $\frac{15}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+$

$+\frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$; 14.13. 1) $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$; 2) $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x +$
$+\frac{1}{48}\sin^3 2x + C$; 3) $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$; 4) $\frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\sin 4x +$
$+\frac{1}{1024}\sin 8x + C$. 14.14. 1) $-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3x - \mathrm{ctg}x + C$; 2) $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3x + \mathrm{tg}x + C$; 3) $-\mathrm{ctg}x -$
$-\frac{2}{3}\mathrm{ctg}^3x - \frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5x + C$; 4) $\mathrm{tg}x + \frac{2}{3}\mathrm{tg}^3x + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5x + C$. 14.15. 1) $\mathrm{tg}x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{3}{2}x + C$;
2) $\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3x + C$; 3) $\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3x + C$; 4) $\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5x + C$. 14.16. 1) $\frac{1}{\sqrt5}\ln\left|\frac{\sqrt5+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt5-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right| +$
$+C$; 2) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{2-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right| + C$; 3) $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{5\mathrm{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right)+C$; 4) $\frac{2}{\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\left(\frac{4\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{15}}\right)+C$.
14.17. 1) $\frac{\sqrt2}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$; 2) $\ln\left|1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; 3) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1\right)+C$; 4)
$-\frac{2}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+3}+C$. 14.18. 1) $x-\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C$; 2) $\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}x+C$; 3) $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$;
4) $\frac{1}{4}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+C$. 14.19. 1) $\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C$; 2) $\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| -$
$-\frac{1}{4}\mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}+C$; 3) $-\frac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\frac{4}{5\sqrt5}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\mathrm{arctg}2}{2}\right)\right|+C$; 4) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-$
$-\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$. 14.20. 1) $\ln|\cos x-\sin x|+C$; 2) $\ln|\sin x-\cos x|+C$; 3) $\ln(2+$
$+\cos x)+\frac{4}{\sqrt3}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt3}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C$; 4) $\frac{1}{4}\cos x(\cos x-\sin x)+\frac{1}{4}\ln|\cos x-\sin x|+C$. 14.21.
1) $\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}x+1+\sqrt2}{\mathrm{tg}x+1-\sqrt2}\right|+C$; 2) $-\frac{2}{\sqrt3}\mathrm{arctg}\left(\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt3}\right)-\frac{1}{\sqrt2}\mathrm{arctg}\left(\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt2}\right)+C$; 3)
$\frac{1}{\sqrt2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt2\,\mathrm{tg}x\right)+C$; 4) $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}(3\mathrm{tg}x)+C$. 14.22. 1) $-\frac{1}{4}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; 2)
$-\frac{1}{2(1-\cos x)^2}+C$; 3) $-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\cos x-1}{2}\right)+C$; 4) $-\frac{1}{4}\ln\left(1+4\cos^2x\right)+C$. 14.23. 1)

$-\frac{3}{80}\sqrt[3]{\cos^4x}\left(20-16\cos^2x+5\cos^4x\right)+C$; 2) $\frac{3\left(5+\cos^2x\right)}{5\sqrt[3]{\cos x}}+C$; 3)
$\frac{5}{12}\left(\cos^2x-6\right)\sqrt[5]{\cos^2x}+C$; 4) $\frac{4}{\sqrt[4]{\cos\frac{x}{2}}}+2\mathrm{arctg}\sqrt[4]{\cos\frac{x}{2}}-\ln\frac{1+\sqrt[4]{\cos\frac{x}{2}}}{1-\sqrt[4]{\cos\frac{x}{2}}}+C$. 14.24. 1)
$\frac{5}{28}\sqrt[5]{\sin^4x}\left(7-2\sin^2x\right)+C$; 2) $\frac{1}{4}\ln\frac{(1-\sin x)\left(1+\sqrt[3]{\sin x}\right)^3}{(1+\sin x)\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)^3}+\frac{\sqrt3}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[3]{\sin^2x}-1}{\sqrt3\sqrt[3]{\sin x}}+C$;
3) $2\sqrt{\mathrm{tg}x}+C$; 4) $4\sqrt[4]{\mathrm{tg}x}+C$. 14.25. 1) $\frac{2}{5}\sqrt{\mathrm{tg}^5x}+C$; 2) $-\frac{4\sqrt2}{5}\sqrt{\mathrm{ctg}^5x}+C$; 3)
$\frac{1}{5}\sqrt{2\mathrm{tg}x}\left(5+\mathrm{tg}^2x\right)+C$; 4) $\frac{\mathrm{tg}^2x-5}{3\sqrt{2\mathrm{tg}x}}+C$. 14.26. 1) $e^x-\ln(1+e^x)+C$; 2) $x+\frac{1+e^x}{2}+C$; 3)
$\frac{1}{m\sqrt{ab}}\mathrm{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+C$; 4) $x+\frac{1}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right)+C$. 14.27. 1) $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln\left|e^x-1\right|+$
$+\frac{1}{6}\ln\left(e^x+2\right)+C$; 2) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{e^x-3}{2}+C$; 3) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$; 4) $x+\frac{8}{1+e^{x/4}}+C$.
14.28. 1) $\frac{1}{4}\mathrm{sh}2x-\frac{x}{2}+C$; 2) $\frac{1}{4}\mathrm{ch}2x+\frac{x}{2}+C$; 3) $\frac{1}{3}\mathrm{ch}^3x-\mathrm{ch}x+C$; 4) $\frac{1}{3}\mathrm{sh}^3x+\mathrm{sh}x+$
$+C$. 14.29. 1) $x-\mathrm{th}x+C$; 2) $x-\mathrm{cth}x+C$; 3) $\ln|\mathrm{ch}x|+C$; 4) $\ln|\mathrm{sh}x|+C$. 14.30. 1)
$\frac{1}{4}\mathrm{sh}^4x+C$; 2) $-\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\mathrm{ch}4x+C$; 3) $x-\mathrm{th}x-\frac{1}{3}\mathrm{th}^3x+C$; 4) $x-\mathrm{cth}x-\frac{1}{3}\mathrm{cth}^3x+C$.

§ 15

15.1. 1) $\frac{1}{4}\ln\left(2x^2-x+1\right)+\frac{1}{2\sqrt7}\mathrm{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt7}+C$; 2) $x+\frac{25}{2}\ln|x+5|-\frac{49}{2}\ln|x+7|+$
$+C$; 3) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x+\frac{3}{x+1}+5\ln|x+1|+C$; 4) $\frac{1}{12}\ln\frac{x^2-2x+4}{(x+2)^2}+\frac{1}{2\sqrt3}\mathrm{arctg}\frac{x-1}{\sqrt3}+C$.
15.2. 1) $\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\ln\left|x^3+2\right|+C$; 2) $\frac{1}{21}\left(8\ln\left|x^3+8\right|-\ln\left|x^3+1\right|\right)+C$; 3) $\frac{1}{8}\Big(\frac{x^4}{x^8+1}+$
$+\mathrm{arctg}x^4\Big)+C$; 4) $-\frac{1}{10}\left(\frac{x^5+2}{x^{10}+2x^5+2}+\mathrm{arctg}\left(x^5+1\right)\right)+C$. 15.3. 1) $2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-$
$-\frac{8}{\sqrt3}\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt3}+C$; 2) $\frac{x\left(3+2\sqrt{x}\right)}{1-2\sqrt{x}}+C$; 3) $-\frac{1}{x}-\frac{4}{3x\sqrt{x}}-\frac{1}{2x^2}+C$; 4) $\sqrt{2x}-$

$-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5}+C$. 15.4. 1) $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)\right)+C$; 2) $\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+C$; 3) $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{2}\right)+C$; 4) $6\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. 15.5. 1) $\ln\frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+2\sqrt{x+1}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}}+C$; 2) $-2\left(\sqrt[4]{5-x}-1\right)^2-4\ln\left(1+\sqrt[4]{5-x}\right)+C$; 3) $\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+2\ln\left|1-\sqrt[4]{2x-1}\right|+C$; 4) $\ln(1+x)-3\ln\left(1+\sqrt[3]{1+x}\right)-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{1+x}+C$.

15.6. 1) $-\frac{\ln\left(1+x+x^2\right)}{1+x}-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C$; 2) $\arccos\frac{1}{|x|}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$; 3) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$; 4) $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$. 15.7. 1) $2\sqrt{x}+8\sqrt{1+\sqrt{x}}+8\ln\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\right)+C$; 2) $3\left(\ln\sqrt[3]{|x|}-\ln\left(1+\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}\right)-\arcsin\sqrt[3]{x}\right)+C$; 3) $2(\sqrt[4]{x}-2)\sqrt{\sqrt{x}-1}+2\ln\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)+C$; 4) $\sqrt{x^2-x}-x-\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)+C$. 15.8. 1) $\frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-3x+3}\right)+C$; 2) $\left(\frac{x^5}{6}-\frac{x^3}{6}-x\right)\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2}+C$; 3) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{(x-1)^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{\sqrt{2}}\right)+C$; 4) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$. 15.9. 1) $\frac{3t^2-1}{6t^3}+C$, бунда $t=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$; 2) $\frac{3}{2+4t}+2\ln t-\frac{3}{2}\ln(1+2t)+C$, бунда $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$; 3) $-\frac{1}{2}(1+x)^2+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x^2+x}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$; 4) $2\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x}+\ln\left|2\sqrt{1+x+x^2}+1+2x\right|+C$. 15.10. 1) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}+C$; 2) $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C$; 3) $-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}-\frac{t^5}{10}+C$, бунда $t=\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{|t-1|}-t+C$, бунда $t=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$. 15.11. 1) $\frac{1}{2}x^2\ln\left(1+x^3\right)-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; 2) $-x^2+\frac{x^2}{2}\ln\left(4+x^4\right)+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4}+C$; 3) $\left(\ln^4 x-4\ln^3 x+12\ln^2 x-24\ln x+24\right)x+C$; 4) $\frac{1}{4}x^4\left(\ln^3 x-\frac{3}{4}\ln^2 x+\frac{3}{8}\ln x-\frac{3}{32}\right)+C$. 15.12. 1) $2\left(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)+C$; 2) $3\left(\left(2-\sqrt[3]{x^2}\right)\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}\right)+C$; 3) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)+C$; 4) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120\right)+C$.

§ 16

16.1. 1) $\frac{25}{2}$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $e-1$; 4) $\frac{1}{2}$. 16.2. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{14}{3}$; 3) $\frac{9}{2}$; 4) $-\frac{3}{8}$. 16.3. 1) $\ln 2$; 2) 2; 3) 1; 4) e^3-1. 16.4. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{1}{\ln 2}$; 4) $\frac{45}{4}$. 16.5. 1) $\frac{\ln 3}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; 4) $\frac{3}{2}\pi$. 16.6. 1) $\frac{19}{15}$; 2) $3\frac{57}{64}$; 3) π; 4) $\frac{\pi}{4}$. 16.7. 1) $1-\ln 2$; 2) $2-\ln 5$; 3) $\frac{5}{6}-\ln 2$; 4) $\frac{11}{2}+7\ln 2$. 16.8. 1) $\frac{e^4-1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 1. 16.9. 1) $\frac{1}{2}\ln 2$; 2) $\ln\frac{9}{8}$; 3) $\frac{5\pi^2}{288}$; 4) $\frac{\pi}{6}$. 16.10. 1) $\frac{\pi}{12}$; 2) $\ln 2$; 3) $\frac{1}{2}\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$; 4) $\sin 1$. 16.11. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $4-2\ln 3$; 3) $7-2\ln 2$; 4) $2-\ln 2$. 16.12. 1) $\ln\frac{9}{8}$; 2) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$; 3) $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\pi}{6}$. 16.13. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{5\sqrt{2}}{12}$; 3) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; 4) $\frac{1}{2}\ln 2$. 16.14. 1) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$; 2) $\frac{8191}{26}$; 3) $-\frac{468}{7}$; 4) $\frac{29}{270}$. 16.15. 1) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) π; 3) $10+\ln 3$; 4) $1+\frac{3}{4}\ln 3$. 16.16. 1) $2-\frac{\pi}{2}$; 2) $2\operatorname{arctg} e+\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}$; 3) $4-\pi$; 4) $\frac{1}{5}\ln 112$. 16.17. 1) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $1-\frac{\pi}{4}$; 4) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. 16.18. 1) 1; 2) $\frac{\pi}{2}-1$; 3) $1-\frac{2}{e}$; 4) $2\ln 2-\frac{3}{4}$. 16.19. 1) 1; 2) $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$; 3) $\pi\sqrt{2}-4$; 4) $\frac{1}{18}\left(3\pi\sqrt{3}-9\ln 3\right)$. 16.20. 1) $\pi-2$; 2) 4π; 3) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. 16.21. 1) 1; 2) $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}+1$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\pi^2-6\pi$. 16.22. 1) $\frac{e^\pi+1}{2}$; 2) $\frac{e^{\pi^2}-1}{2}$; 3) $\frac{e^\pi+1}{2}$; 4) $\frac{1}{27}\left(5e^3-2\right)$.

§ 17

17.1. 1) 1; 2) განშლადია; 3) განშლადია; 4) $\frac{\pi}{4}$. 17.2. 1) $\frac{1}{3e^3}$; 2) $\frac{1}{k}$, როცა $k>0$; განშლადია როცა $k \le 0$. 3) განშლადია; 4) განშლადია. 17.3. 1) $\frac{1}{2}$; 2) განშლადია; 3) განშლადია; 4) განშლადია. 17.4. 1) $\frac{\pi^2}{8}$; 2) $\frac{2}{3}\ln 2$; 3) π; 4) განშლადია. 17.5. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) განშლადია; 4) 2. 17.6. 1) კრებადია; 2) განშლადია; 3) კრებადია; 4) განშლადია; 17.7. 1) კრებადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია; 4) განშლადია. 17.8. 1) განშლადია; 2) კრებადია; 3) განშლადია; 4) განშლადია. 17.9. 1)–4) კრებადია, როცა $\alpha > 1$, განშლადია როცა $\alpha \le 1$. 17.10. 1) 2; 2) განშლადია; 3) 1; 4) $\frac{6}{3}$. 17.11. 1) განშლადია; 2) $\frac{1}{e}$; 3) განშლადია 4) π. 17.12. 1) 2; 2) განშლადია, 3) განშლადია; 4) $\frac{1}{1-\alpha}$, როცა $\alpha<1$; განშლადია, როცა $\alpha \ge 1$. 17.13. 1) განშლადია; 2) განშლადია; 3) $\frac{16}{3}$; 4) π; 5) 0; 6) 0. 17.14. 1) კრებადია; 2) კრებადია, 3) კრებადია, როცა $\alpha > -1$; განშლადია, როცა $\alpha \le -1$. 4) განშლადია. 17.15. 1) განშლადია; 2) განშლადია; 3) კრებადია; 4) კრებადია. 17.16. 1) კრებადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია, როცა $\alpha < 3$, განშლადია, როცა $\alpha \ge 3$; 4) კრებადია; 17.17. 1) კრებადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია; 4) განშლადია.

§ 18

18.1. 1) $-\frac{128}{3}$; 2) $4\ln 3$; 3) 20; 4) 6.2. 18.2. 1) 5; 2) 1; 3) $1-\frac{1}{e}$; 4) 6. 18.3. 1) $\frac{15}{\ln 2}$; 2) 2; 3) 2; 4) 4. 18.4. 1) $\frac{32}{3}$; 2) 36; 3) $\frac{31}{6}$; 4) $\frac{91}{54}$. 18.5. 1) 1; 2) $\frac{2(e-1)}{e}$; 3) $\frac{e^2-1}{2e}$; 4) $\ln 2$. 18.6. 1) 8; 2) $\frac{8}{5}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $20\frac{5}{6}$. 18.7. 1) 1) 1; 2) $\frac{9}{2}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{125}{6}$. 18.8. 1) $\frac{1}{3}$; 2) 8; 3) 9; 4) 9. 18.9. 1) $\frac{16}{3}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{16}{3}$; 4) $\frac{32\sqrt{5}}{3}$. 18.10. 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{9}{4}$; 4) $\frac{5}{12}$. 18.11. 1) $12-5\ln 5$; 2) $\frac{35-12\ln 6}{2}$; 3) $6\ln 2-2{,}5$; 4) $\frac{1}{2}$. 18.12. 1) $\frac{9}{4}$; 2) 3; 3) $\frac{20}{9}-\ln 3$; 4) 0,1. 18.14. 1) πr^2; 2) 20π; 3) $3\pi a^2$; 4) $\frac{3}{8}\pi ab$; 5) $\frac{3\pi}{8ab}\left(a^2-b^2\right)^2$; 6) $6\pi a^2$. 18.15. 1) $\frac{8\sqrt{3}}{5}$; 2) $\frac{24\sqrt{3}}{5}$; 3) $\frac{8}{15}$; 4) $\frac{8}{15}$. 18.16. 1) $\frac{\pi a^2}{4}$; 2) a^2; 3) a^2; 4) $\frac{\pi a^2}{2}$. 18.17. 1) $\frac{\pi a^2}{4}$; 2) $\frac{\pi a^2}{4}$; 3) a^2; 4) 11π. 18.18. 1) $\frac{9}{2}$. 18.19. $\frac{9}{4}$. 18.20. 3) $\frac{9}{4}$. 18.21. 9. 18.22. $\frac{ab}{6}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$. 18.23. $\frac{9}{2}\ln 3$. 18.24. $\frac{8}{5}$. 18.25. $\frac{125}{48}$; 18.26. $\frac{16}{3}$; 18.27.

1) π; 2) 2; 3) 3π; 4) 4π; 5) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; 6) 5π. 18.28. 1) 74; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 18.29. 1) $4+\frac{1}{4}\ln 3$; 2) $4\sqrt{2}+\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$; 3) $3+\ln 2$; 4) $3\left(1+\ln\frac{3}{2}\right)$. 18.30. 1) $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; 2) $\ln 3$; 3) $\frac{1}{2}\ln 3$; 4) $\arcsin\frac{3}{4}$. 18.31. 1) $\frac{232}{15}$; 2) $\operatorname{sh} a$; 3) $\frac{14}{3}$; 4) $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. 18.32. 1) $6a$; 2) 14; 3) $6a$; 4) $\sqrt{2}(e-1)$. 18.33. 1) $2\pi^2 a$; 2) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; 3) $\frac{(\operatorname{ch}1)^{3/2}-1}{2}$; 4) $\sqrt{2}(e-1)$. 18.34. 1) πa; 2) $8\left(2-\sqrt{3}\right)$; 3) $2a$; 4) $(2+\operatorname{ch}1)a$. 18.35. 1) $\frac{3\pi a}{2}$; 2) $\frac{16}{3}a$; 3) $\frac{15}{8}\pi a$; 4) $\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$. 18.36. 1) $\frac{a}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$; 2) $\frac{8a}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$; 3) $\frac{a}{2}\left(20-\frac{81}{4}\ln 3\right)$; 4) $\frac{1422a}{15}$. 18.37. 1) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$; 2) 2π; 3) $2a\sqrt{6}$; 4) $e-e^{-1}$. 18.38. 1) $\sqrt{3}\left(e^t-1\right)$; 2) $2a$; 3) $8\sqrt{2}a$; 4) $\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sh}t_0$. 18.39. 1) 117π; 2) 63π; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $\frac{83}{15}\pi$. 18.40. 1) $\frac{16}{15}\pi$; 2) $\frac{\pi}{30}$; 3) 32π; 4) 75π. 18.41. 1) $\frac{128}{7}\pi$; 2) $\frac{163}{14}\pi$; 3) 12π; 4) 20π. 18.42. 1) $\frac{e^2-1}{2}\pi$; 2) $\frac{6}{\ln 2}\pi$; 3) $\frac{\pi^2}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2}$. 18.43. 1) $pa^2\pi$; 2) $\frac{1}{2}\pi a^3$; 3) π; 4) $\frac{3}{7}\pi ab^2$. 18.44. 1) $\frac{\pi a^2}{2}\left(b+\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right)$; 2) $\frac{\pi}{4}\left[1-e^{-2a}(1+2a)\right]$; 3) $\pi\left(2-\frac{5}{e}\right)$; 4) $\frac{\pi^2}{2}$. 18.45. 1) $\frac{272}{15}\pi$; 2) $\frac{3}{10}\pi$; 3) $\frac{5}{6}\pi$; 4) $\frac{\pi(\pi-2)}{4}$. 18.46. 1) $\frac{11}{4}\pi$; 2) $\frac{138}{5}\pi$; 3) $\frac{3}{20}\pi$; 4) 3π. 18.47. 1) 4π; 2) 8π; 3) $\frac{96}{5}\pi$; 4) $\frac{\pi}{2}$. 18.48. 1) $\pi(e-1)$; 2) $\pi\ln 2$; 3) $\frac{8}{3}\pi$; 4) $16\pi^2$. 18.49. 1) $\frac{8\pi}{3p}$; 2) $\frac{\pi}{4}\left(\pi^2-8\right)$; 3) $4\pi^3$; 4) $\frac{128}{15}\pi$. 18.50. 1) ა) $\frac{\pi}{30}$; ბ) $\frac{\pi}{2}$; 2) ა) $\frac{\pi^2}{2}$; ბ) $2\pi^2$; 3) ა) $\frac{\pi}{4}\left(\pi^2-8\right)$, ბ) $\frac{\pi^2}{4}$; 4) ა) $\frac{\pi+2}{8}$; ბ) $\pi\ln 2$. 5) ა) $4\pi(2+9\ln 3)$, ბ) $3\pi(2\ln 3-1)\ln 3$; 6) ა) $\frac{\pi^3}{3}+\frac{3\pi^2}{8}$; ბ) $\frac{\pi^3}{2}$. 18.51. 1) $\frac{32\pi}{15}$; 2) $\frac{2\pi}{5}(1+5\ln 2)$; 3) $\frac{13}{30}\pi$; 4) $\frac{433}{15}\pi$. 18.52. 1) $\frac{8}{15}\pi a^3$; 2) $\frac{8\pi a^3}{3}(3\ln 2-2)$; 3) $\frac{32\pi}{105}$; 4) $\frac{\pi a^3}{24}(24\ln 4-1)$. 18.53. 1) ა) $\frac{8}{15}\pi a^3$, ბ) $\frac{1}{2}\pi^2a^3$ 2) ა) $5\pi^2a^3$, ბ) $6\pi^3a^3$; 3) ა) $\frac{6}{7}\pi$, ბ) $\frac{3}{4}\pi$; 4) ა) $\frac{\pi a^3}{2}$, ბ) $\frac{\pi a^3}{4}$. 18.54. 1) $\frac{3a^3}{3}\left(\frac{\pi}{4}-6\pi^2\right)$; 2) $\frac{2}{3}\pi$; 3)

$\frac{\pi a^3}{24}$. 4) $\frac{3}{8}\pi a^3$. 18.55. 1) $\frac{4}{21}\pi a^3$; 2) $2\pi^2 a^3$; 3) $\frac{\pi a^3}{15}$; 4) $\frac{64}{105}\pi a^3$. 18.56. 1) $\frac{\pi a^3}{15}\left(e^{3\pi}+1\right)$; 2) $\frac{8}{3}\pi a^3$; 3) $\frac{\pi a^3}{4}(51-64\ln 2)$; 4) $\frac{\pi(2+e)}{3(1+e)^2}p^3$; 5) $\frac{\pi a^3}{12}\left[3\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-2\right]$; 6) $\frac{\pi a^3}{4}$. 18.57. 1) $2\pi abH$; 2) $\frac{1}{3}\pi abH$; 3) πabH^2; 4) $\frac{23}{18}\pi abc$. 18.58. 1) $\frac{2\pi abH}{3c^2}\left(H^2+3c^2\right)$; 2) $\frac{\pi ab}{3c^2}(H+c)^2(H+2c)$; 3) $\frac{4}{15}a^3$; 4) $\frac{\pi a^3}{2}$. 18.59. 1) $\frac{2}{3}abH$; 2) $\frac{4}{3}abc$; 3) $\frac{16}{3}abc$; 4) $\frac{1}{6}\pi abc$. 18.60. 1) $4\pi R^2$; 2) $\frac{49\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$; 4) 48π.

18.61. 1) $\frac{56}{3}\pi a^2$; 2) $2\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$; 3) $\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{4}-\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}\right)\pi$; 4) $\frac{\pi}{8}(\operatorname{sh}12+12)$.

18.62. 1) $\frac{62}{3}\pi$; 2) $\frac{\pi a^2}{8}\left[3\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\sqrt{2}\right]$; 3) $4\pi^2 ab$; 4) $\frac{12}{5}\pi a^2$. 18.63. 1) $\frac{\pi}{8}\left(\operatorname{sh}4-4e^{-2}\right)$; 2) $\frac{16}{15}\pi a^2\left(\sqrt{2}+1\right)$; 3) $\frac{\pi}{144}(185+144\ln 1{,}5)$; 4) $\frac{\pi}{9}(20+9\ln 3)$. 18.64. 1) ა) $18\pi^2a^2$; ბ) $24\pi a^2$; 2) ა) $\frac{\pi}{2}$; ბ) $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$; 3) ა) $\frac{4}{3}\pi a^2$; ბ) $\frac{2}{3}\pi a^2(3\pi-4)$; 4) ა) $8\pi+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$; ბ) $2\pi+\frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}}$. 18.65. 1) ა) 12π; ბ) $\frac{\sqrt{6}}{15}\pi$; 2) ა) $3\pi a^2$; ბ) $\frac{96\sqrt{3}}{5}\pi a^2$; 3) ა) $\frac{64}{3}\pi a^2$; ბ) $16\pi^2a^2$; 4) ა) $\frac{\pi}{2}$; ბ) $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$. 18.66. 1) $4\pi^2a^2$; 2) $\frac{32}{5}\pi$; 3) $4\pi a^2\left(1+\frac{2}{3}\cos^2\alpha-\frac{1}{15}\cos^4\alpha\right)$, $\alpha=\arccos\frac{b}{a}$; 4) $2\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$; 5) $4\pi a^2$; 6) $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

§ 19

19.1. 0,125 ჯ. 19.2. 0,024 ჯ. 19.3. $mg\frac{Rh}{R+h}$. 19.4. $\frac{1}{2}\pi R^2h$ ჯ. 19.5. $25\cdot10^5\pi$ ჯ. 19.6. $A=\frac{m}{5}R^2w^2=23\cdot10^7$ ჯ. 19.7. $\varepsilon e\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$. 19.8. $A=\int_{v_0}^{v_1}\frac{P_0v_0^{k}}{v^k}dv=\frac{P_0v_0}{k-1}\left[\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}-1\right]$, სადაც $k=1{,}4$. 19.9. $F=2k\frac{m\mu_0}{a}$. (k არის გრავიტაციული მუდმივა). 19.10. $F=2\pi km\delta_0\left(1-\frac{b}{\sqrt{r^2+b^2}}\right)$. ($k$ არის გრავიტაციული მუდმივა). 19.11. $t\approx3$ სთ. 19.12. $s=10^4$ მ. 19.13. $\frac{v_0^2}{2g}$. 19.14. 1) $x_c=\frac{2a}{\pi}$, $y_c=\frac{2a}{\pi}$; 2) $x_c=0$, $y_c=\frac{2}{5}a$; 3) $x_c=\pi a$, $y_c=\frac{4}{3}a$; 4) $x_c=0$, $y_c=\frac{a}{4}\frac{2+\operatorname{sh}2}{\operatorname{sh}1}$; 5) $x_c=y_c=\frac{4}{5}a$; 6) $x_c=-\frac{a}{5}\cdot\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$, $y_c=\frac{a}{5}\cdot\frac{e^{2\pi}-e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$. 19.15. 1) $\left(0;\frac{1}{3}\right)$; 2) $\left(\ln 4;\frac{3}{4}\right)$. 19.16. 1) $x_c=y_c=\frac{9}{20}$; 2) $x_c=\frac{5a}{7}$, $y_c=\frac{5a}{16}$; 3) $x_c=\frac{\pi}{2}$, $y_c=\frac{\pi}{8}$; 4) $x_c=\frac{\pi^2+12\pi-12}{3(\pi+4)}$, $y_c=\frac{5}{6}a(\pi+4)$. 19.17. 1) $x_c=y_c=\frac{a}{5}$; 2) $x_c=\frac{16}{5}$, $y_c=-1$; 3) $x_c=\pi a$, $y_c=\frac{5}{6}a$; 4) $\varphi_c=0$, $r_c=\frac{5}{6}a$.

§ 20

20.1. 1) oxy [illegible]; 2) $y=0$; 3) oxy [illegible]; 4) $y=x$. 20.2. $\{(x,y);\ -\infty<x<+\infty,\ -1<y<1\}$; 2) $y<x$; 3) $y<x^2$; 4) $y\neq\frac{2n+1}{2}\pi$, $n\in Z$. 20.4. 1) $y=x-e^y$; 2) $x^2+y^2=2+\ln x^2$; 3) $x^2+2y+1=0$; 4) $y(1+x)=1$. 20.5. 1) $y^2-x^2=2xyy'$; 2) $y-2xy'=0$; 3) $3y^2-x^2=2xyy'$; 4) $x^2+y'^2=1$. 20.6. 1) 1) $y^2+y-x^2=C$; 2) $x+y=C(1-xy)$; 3) $x^2(1+y^2)=C$; 4) $y=C(x+1)e^{-x}$; $x=-1$. 20.7. 1) $\ln|x|=C+\sqrt{y^2+1}$; 2) $y=C\sin x$; 3) $e^x+e^{-y}=C$; 4) $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$. 20.8. 1) $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$, $x=\pm1$; 2) $Cy=\sqrt{1+e^{2x}}$; 3) $\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+C$, $y=1$; 4) $\sqrt{1+x^2}e^{\operatorname{arctg}y}=C$. 20.9. 1) $y=\sin[C+\ln(1+x^2)]$; 2) $y\sin y+\cos y-x\cos x+\sin x=C$; 3) $\left(Ce^{-x^2}-1\right)y=2$, $y=0$; 4) $x^2y=Ce^y$. 20.10. 1) $e^{-s}=1+Ce^t$; 2) $x^2+t^2-2t=C$; 3) $\frac{x+t}{xt}+\ln\frac{x}{t}=C$; 4) $r=Ce^{\varphi}+a$. 20.11. 1) $y^2-2=Ce^{1/x}$; 2) $\operatorname{tg}y-C\left(2-e^x\right)^3=0$; 3) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right|=C-2\sin\frac{x}{2}$; 4) $e^x-\frac{1}{2}e^{2y}-2\ln|1+y|-\frac{(y-1)^2}{2}=C$, $y=-1$. 20.12. 1) $x+C=\operatorname{ctg}\left(\frac{y-x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $4x+2y+1=Ce^{2y}$; 3) $y=x-\frac{1}{x-C}$; 4) $2x+y-1=Ce^x$. 20.13. 1) $y\left(\ln\left|1-x^2\right|+1\right)=1$; 2) $y=2-3\cos x$; 3) $y(1+x)=1$; 4) $y=\sqrt{1+2\ln\frac{1+e^x}{2}}$. 20.14. 1) $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; 2) $\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\ln\left|\frac{y}{x}\right|=1$; 3) $y=2\sin^2x-\frac{1}{2}$; 4) $3\sqrt{2-y^2}+\operatorname{arctg}x=6$. 20.15. 1) $y=x\ln\frac{|C|}{|x|}$; 2) $y=\frac{C}{x}-\frac{x}{2}$; 3) $y=\pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$.

4) $\ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$. 20.16. 1) $x+y=Cx^2$, $x=0$; 2) $\ln|y| + \frac{x}{y} = C$; 3) $\ln\left(x^2+y^2\right) = C - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; 4) $xe^{y/x} = C$. 20.17. 1) $y = x\left(2\operatorname{arctg}Cx + \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$; 2) $y=2x\operatorname{arctg}Cx$; 3) $y^2+2xy-x^2=C$; 4) $y-2x=Cx^2(y+x)$. 20.18. 1) $x=Ce^{x/y}$, $y=0$; 2) $x(y-x)=Cy$, $y=0$; 3) $(x+y)^2=Cx^3e^{-\frac{x}{x+y}}$; 4) $(x^2+y^2)^3(x-y)^2=C$. 20.19. 1) $\sin\frac{y}{x} = Cx$; 2) $\ln|Cx| = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{x}\right|\right)$, $y = xe^{2\pi k}$, $k\in Z$; 3) $\ln\frac{x+y}{x} = Cx$; 4) $\sin\frac{y}{x} = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$.

20.20. 1) $y=x^3-x$; 2) $x\ln x = 2\sqrt{xy}$; 3) $\sqrt{\frac{y}{x}} + \ln x = 0$; 4) $y^3 = y^2 - x^2$. 20.21. 1) $y = xe^{1-x}$; 2) $y = xe^{-\frac{x}{2}}$; 3) $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; 4) $y = \frac{2x}{1-3x^2}$. 20.22. 1) $x^2-xy+y^2+x-y=C$; 2) $x+y-1 = C(y+2)^2$; 3) $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$; 4) $(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$, $y=x+1$. 20.23. 1) $2x+y-1=Ce^{2y-x}$; 2) $x+2y+3\ln|x+y-2| = C$; 3) $y^2-2xy-x^2-8y+4x=C$; 4) $y^2-2xy-x^2+4y=C$.

20.24. 1) $y=Cx+x^2$; 2) $y=Cx^2+x^4$; 3) $y=e^{x}(C+x)$; 4) $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$. 20.25. 1) $y=\sin x+C\cos x$; 2) $y=Ce^{x^2/2}-e^{-x}$; 3) $y=Ce^{x^4}-e^{-4x}$; 4) $y=e^{x}(C+\ln|x|)$. 20.26. 1) $y=x^n(C+e^x)$; 2) თუ $m\neq-a$, $y=Ce^{-ax}+\frac{e^{mx}}{m+a}$; თუ $m=-a$, მაშინ $y=(C+x)e^{mx}$; 3) $y=x^2(C+\sin x)$; 4) $y=x^2\left(Ce^{\frac{1}{x}}+2\right)$. 20.27. 1) $y=1+(2x+1)(C+\ln|2x+1|)$; 2) $y=(x+C)(1+x^2)$; 3) $y=Ce^{-2x}+2x-1$; 4) $y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$. 20.28. 1) $y=C(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)^4$; 2) $y=(C+x^3)\ln x$; 3) $y=x(C+\sin x)$; 4) $y=(C\ln x-1)\ln x$. 20.29. 1) $x=y^2+Cy$, $y=0$; 2) $x=e^y+Ce^{-y}$; 3) $x=Cy^3+y^2$, $y=0$; 4) $(y-1)^2x=y-\ln Cy$, $y=0$, $y=1$. 20.30. 1) $y=\frac{x}{\cos x}$; 2) $y=\frac{8}{x^2}+x$; 3) $y=e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$; 4) $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$. 20.31. 1) $y=\frac{x^2}{\cos x}$; 2) $y=2e^{-\sin x}+\sin x-1$; 3) $s=2t^2+\frac{1}{t}$; 4) $s=-t\operatorname{arctg}t$. 20.32. 1) $x=\frac{1}{2}y(y^2-1)$; 2) $x=\frac{y^2}{4}-\frac{1}{y}$; 3) $x\sqrt{1+y^2}+\cos y+1=0$; 4) $xy=1-\ln|y|$. 20.33. 1) $y(e^x+Ce^{2x})=1$, $y=0$; 2) $y^3=1+Ce^{-x}$; 3) $y=x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)^2$; 4) $y=x\sqrt{2x+C}$. 20.34. 1)

$\frac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$; 2) $y(x+C)=\frac{1}{\cos x}$; 3) $y^2=x^2-1+C\sqrt{|x^2-1|}$; 4) $y=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+C}}$. 20.35. 1) $y=e^{-2x^2}\left(C+\frac{1}{2}x^2\right)^2$; 2) $y=\frac{1}{1+Cx+\ln x}$; 3) $x^4y^2(C+2e^x)=1$, $y=0$; 4) $\sqrt{y}+1=Ce^{\sqrt{x}}$. 20.36. 1) $x^2=y\ln\frac{C}{y}$; 2) $y=x^2(C-\cos y)$, $y=0$; 3) $x^2=Ce^{\sin y}-2(\sin y+1)$; 4) $xy(C-\ln^2y)=1$. 20.37. 1) $x^2+xy+y^2=C$; 2) $\frac{x^2}{2}+xy+y^2=C$; 3) $x^3+2xy-3y=C$; 4) $5x^2y-8xy+x+3y=C$. 20.38. 1) $\frac{x^3}{3}+xy^2+x^2=C$; 2) $x^4+2x^2y^2+y^4=C$; 3) $x^3+3x^2y^2+y^4=C$; 4) $x^2+x^3y-y^3=C$. 20.39. 1) $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$; 2) $x^2+y^2-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$; 3) $x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=C$; 4) $4x^2+y^2=Cx$. 20.40. 1) $x^3e^y-y=C$; 2) $y+xe^{-y}=C$; 3) $x^3+x^3\ln y-y^2=C$; 4) $x^2+ye^{\frac{x}{y}}=C$. 20.41. 1) $\frac{1}{2}x^2\cos 2y+x=C$; 2) $x-y^2\cos^2x=C$; 3) $x^2\cos^2y+y^2=C$; 4) $x\sin xy=C$. 20.42. 1) $y=x$; 2) $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=1$; 3) $x\sin y-y\cos x+\ln|xy|=\ln\frac{\pi^2}{2}$; 4) $\frac{x^2}{2}+ye^{x/y}=2$. 20.43. 1) $y=0$; 2) $y=1$; 3) $y=-x$; 4) $y=\frac{1}{4}x^2$. 20.44. 1) $x=2p+6p^2+C$, $y=p^2+4p^3$; $y=0$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 2) $x=e^p+pe^p+C$, $y=p^2e^p$; $y=0$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 3) $x=2p-\frac{2}{p}+C$, $y=p^2+2\ln p$; 4) $x=e^p+C$, $y=(p-1)e^p$; $y=-1$ განსაკუთრებული ამონახსნია. 20.45. 1) $x=p^3+p$, $4y=3p^4+2p^2+C$; 2) $x=p\cos p$, $y=p^2\cos p-p\sin p-\cos p+C$; 3) $x=\sin p+\ln p$, $y=p\sin p+\cos p+p+C$; 4) $x=\frac{2p}{p^2-1}$, $y=\frac{2}{p^2-1}-\ln|p^2-1|+C$. 20.46. 1) $y=Cx+C$; 2) $y=Cx+C^2$, $y=-\frac{x^2}{4}$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 3) $y=Cx-\frac{1}{C}$; $y^2=-4x$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 4) $y=Cx+\frac{1}{2C}$; $y^2=2x$ განსაკუთრებული ამონახსნია. 20.47. 1) $x=\frac{1}{p^2}(\ln|p|+C)$, $y=2px+\frac{1}{p}$; 2) $x=\frac{C}{p^2}-\frac{1}{p}$, $y=\ln p+\frac{2C}{p}-2$; 3) $x=\frac{C}{p^2}-\frac{\cos p}{p^2}-\frac{\sin p}{p}$; $y=\frac{2C}{p}-\frac{2\cos p}{p}-\sin p$; $y=0$; 4) $x=\frac{C}{p^3}-2e^p\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^3}\right)$, $y=\frac{3C}{2p^2}-2e^p\left(1-\frac{3}{p}+\frac{3}{p^2}\right)$; $y=1$. 20.48. 1) $y^2=1+C(x+1)^2e^{-2x}$, $x=-1$; 2) $\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$;

3) $\frac{2x}{x-y}+\ln|x+y|+3\ln|y-x|=C$; 4) $y\left(C\sqrt{|x^2-1|}-2\right)=1$, $y=0$. 20.49. 1) $y^3-3xy=C$; 2) $x+y=tg(y-C)$; 3) $\ln|y|=\frac{x}{y}+C$, $y=0$; 4) $x=Ce^y+y^2+2y+2$. 20.50. 1) $3y^2=2\sin x+\frac{C}{\sin^2 x}$; 2) $x=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y)$; 3) $y^2+\sqrt{x^4+y^4}=C$; 4) $x(e^y+xy)=C$. 20.51. 1) $x=ye^{Cy+1}$; 2) $x=y^2(C-2\ln|y|)$, $y=0$; 3) $xy\left(C-\frac{1}{2}\ln^2 x\right)=1$; 4) $e^{-y}+\ln C(x-2)=0$. 20.52. 1) $x\sqrt{y}=\sin x+C$, $y=0$; 2) $y=xe^{Cx}$; 3) $(x+1)y=x^2\ln Cx$; 4) $\ln|x|-\cos\frac{y}{x}=C$.

§ 21

21.1. $y=\frac{6}{x}$. 21.2. $y=\sqrt{4-x^2}+2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|$. 21.3. $(x-C)^2+y^2=a^2$. 21.4. $x^2+y^2=a^2(x-C)^2$. 21.5. $y^2=4(x-1)$ და $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$. 21.6. $x=Ce^{\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}}$. 21.7. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=x_0^2+y_0^2$. 21.8. $x^2+y^2=2y$. 21.9. $y^2=2x+1-e^{2x}$. 21.10. $\approx 3,9$ წ. 21.11. $x=Ce^{-\frac{kt}{a}}$, სადაც x არის ბაქტერიის რაოდენობა მომენტში t მომენტისათვის. 21.12. $\Delta l=\frac{1}{2}klp$; დიფერენციალური განტოლებაა $dl=kp\frac{l-x}{x}dx$. 21.13. $m=100\left(\frac{3}{5}\right)^t$ მგ/წთ. 21.14. $v=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}$, სადაც k წინააღმდეგობის კოეფიციენტია. 21.15. 0,467 კმ/წმ. 21.16. $v=(v_0+b)e^{-at^2}+b(at^2-1)$, სადაც $a=\frac{k_1}{2m}$, $b=\frac{2km}{k_1^2}$. 21.17. 0,00082 წმ. 21.18. $I=1+(I_0-1)e^{-t^2}$. 21.19. 8,03 ა. 21.20. $I=\frac{\mathcal{E}_0}{R^2+\omega^2L^2}\left[\omega Le^{-\frac{Rt}{L}}+R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t\right]$.

§ 22

22.1. 1) ყველა x, y, y' -სათვის; 2) $y'<x^2$; 3) $y'>0$; 4) $v>0$. 22.3. 1) $y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$; 2) $y=x\ln|x|+C_1x+C_2$; 3) $y=-\ln|\cos x|+C_1x+C_2$; 4) $y=(C_1+\operatorname{arctg}x)x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_2$. 22.4. 1) $y=-\frac{x}{2}\ln^2 x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$; 2) $-\frac{1}{8}\sin 2x+C_1x^2+C_2x+C_3$; 3) $y=\frac{x^4}{24}-\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$; 4) $y=\frac{1}{12}x^4\ln x-\frac{13}{144}x^4+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$. 22.5. 1) $y=C_1x^2+C_2$; 2) $y=\frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{x-C_1}{x+C_1}\right|+C_2$, როცა $C_1>0$; $y=\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{x}{C_1}+C_2$ როცა $C_1<0$; $y=C-\frac{1}{x}$. 3) $C_1x-C_1^2y=\ln|C_1x+1|+C_2$, $2y=x^2+C$, $y=C_2$; 4) $y=\ln\left|e^{2x}+C_1\right|-x+C_2$. 22.6. 1) $y=C_1e^{x^2}+C_2$; 2) $y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x-\frac{1}{C_1}\right)+C_2$, $y=\frac{1}{2}ex^2+C$; 3) $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$; 4) $y=\frac{x^3}{3}+C_1x_2+C_2$. 22.7. 1) $C_1^2y=\left(C_1^2x^2+1\right)\operatorname{arctg}C_1x-C_1x+C_2$, $2y=k\pi x^2+C$, $k\in Z$; 2) $y=C_1\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+x^2+C_2$, $y=C_1\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+x^2+C_2$; 3) $y=\frac{1}{x}+C_1\ln|x|+C_2$; 4) $y=-\frac{1}{3}\sin^3 x+C_1\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)+C_2$; 22.8. 1) $y=C_3-(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x$, $y=C_1x+C_2$; 2) $y=C_3+C_2x-\sin(x+C_1)$; 3) $y=C_1x^3+C_2x+C_3$; 4) $2y=C_1\cos 2x+(1+2C_1)x^2+C_2x+C_3$. 5) $\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$. 6) $y=\pm\sin(C_1+x)+C_2x+C_3$; 22.9. 1) $y=C_1e^{C_2x}$; 2) $1+C_1y^2=\left(C_2+\frac{C_1x}{\sqrt{2}}\right)^2$; 3) $x=\frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|+C_2$, $y=C$; 4) $x=\pm\frac{2}{3}\left(\sqrt{y}-2C_1\right)\times\sqrt{\sqrt{y}+C_1}+C_2$. 22.10. 1) $\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2+1}=C_2\pm x$; 2) $y=C_2e^{C_1x}+\frac{1}{C_1}$; 3) $\operatorname{ctg}y=C_2+C_1x$; 4) $y=1+\frac{1}{C_1x+C_2}$. 22.11. 1) $y=\frac{C_2}{\cos^2(x+C_1)}$; 2) $y+C_1\ln|y|=x+C_2$, $y=C$; 3) $y=C_1\left(1\pm ch(x+C_2)\right)$; 4) $e^y+C_1=(x+C_2)^2$. 22.12. 1) $y=3\ln x-2x^2-6x+6$; 2) $y=1-\cos 2x$; 3) $y=-e^{-x}+\frac{x^2}{2}-x+1$; 4) $y=(x-2)e^x+x+3$. 22.13. 1) $y=\frac{1}{2}x^2$; 2) $y=x^3+3x$; 3) $y=2+\ln\frac{x^2}{4}$; 4) $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\frac{16}{5}$. 22.14. 1) $y=\frac{x^2-1}{2(e^2-1)}-\frac{e^2-1}{4}\ln|x|$; 2) $y=2\ln|x+1|-x+1$; 3) $y=\frac{1}{2}x^2$; 4) $\frac{1}{2}x^2$. 22.15. 1) $y=\frac{4}{(x+4)^2}$; 2) $y=\frac{1}{16}(x+9)^2$; 3) $y=-\ln|x-1|$; 4) $y-x=2\ln|y|$. 22.16. 1) წრფივად დამოუკიდებელია; 2) წრფივად დამოუკიდებელია; 3) წრფივად დამოკიდებულია; 4) წრფივად დამოკიდებულია. 22.17. 1) წრფივად დამოუკიდებელია; 2) წრფივად დამოუკიდებელია; 3) წრფივად

დამოუკიდებელია; 4) წრფივად დამოუკიდებელია. **22.18.** 1) წრფივად დამოუკიდებელია; 2) წრფივად დამოუკიდებელია; 3) წრფივად დამოუკიდებელია; 4) წრფივად დამოუკიდებელია. **22.19.** 1) $y=C_1\left(1+\frac{1}{x}\right)+C_2\left(\frac{x}{2}+1-\frac{x+1}{x}\ln|x+1|\right)$. 2) $y=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}$. **22.20.** 1) $y=C_1x+C_2\left(\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1\right)$. 2) $y=C_1x+C_2(x^2-1)$. **22.21.** 1) $xy=C_1e^x+C_2e^{-x}$; 2) $y=C_1\mathrm{tg}x+C_2(1+x\mathrm{tg}x)$. **22.22.** 1) $y=C_1(e^x-1)+\frac{C_2}{e^x+1}$; 2) $y=C_1\sin x+C_2\left(2-\sin x\cdot\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$. **22.23.** 1) $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}+\frac{1}{x}$; 2) $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}-1$; 3) $y=C_1\frac{1}{x+1}+\frac{C_2}{x-1}+x$; 4) $y=C_1\cos x+C_2x\cos x-\sin x\cos x$.

22.24. 1) $y=C_1x^2+C_2x^4+\frac{x}{2}$; 2) $y=\frac{C_1}{x}+C_2x^3+x^4$; 3) $y=C_1x+\left(C_2-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x$; 4) $y=C_1x^2+C_2(2x-1)+x^3$. **22.25.** 1) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$; 2) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-6x}$; 3) $y=C_1+C_2e^{-3x}$; 4) $y=C_1x+C_2e^{-\frac{7}{2}x}$. **22.26.** 1) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}$; 2) $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$; 4) $(C_1+C_2x)e^{-\frac{x}{2}}$. **22.27.** 1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$; 2) $y=C_1\cos\frac{3}{2}x+C_2\sin\frac{3}{2}x$; 3) $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; 4) $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. **22.28.** 1) $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{2x}$; 2) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$; 3) $y=C_1+(C_2+C_3x)e^x$; 4) $y=C_1e^{2x}+(C_2+C_3x)e^{-x}$. **22.29.** 1) $y=C_1e^{2x}+e^{-x}\left(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x\right)$; 2) $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$; 3) $y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)$; 4) $y=e^x(C_1+C_2x)+C_3e^{-2x}$. **22.30.** 1) $y=(C_1+C_2x)e^{4x}+(C_3+C_4x)e^{-4x}$; 2) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$; 3) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$; 4) $y=(C_1+C_2x)e^{x}+(C_3+C_4x)e^{3x}$. **22.31.** 1) $y=4e^x+e^{4x}$; 2) $y=1$; 3) $y=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}2\pi}$; 4) $y=(7-3x)e^{x-2}$. **22.32.** 1) $y=2+e^{-x}$; 2) $y=1+\cos x$; 3) $y=e^x$; 4) $y=e^x+\cos x-2$. **22.33.** 1) $y=\sin 2x$; 2) $y=\alpha\sin x$; 3) $y=-e^x\sin x$; 4) $y=C\sin\pi x$. **22.34.** 1) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+x+1$; 2) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-3(x^2+x+1{,}5)$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}-2$; 4) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}-1$. **22.35.** 1) $(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$; 2) $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+2x^2-1$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{x}+x^3+6x^2+18x+24$; 4) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x^3-2x+1$. **22.36.** 1) $y=C_1+C_2e^{-8x}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{8}$; 2) $y=C_1+C_2e^{3x}-2x$; 3) $y=C_1+C_2e^{\frac{x}{7}}-7x^2-98x$; 4) $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}$. **22.37.** 1) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{5}e^{4x}$; 2) $y=C_1e^x+\left(C_2-\frac{x}{2}\right)e^{-x}$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+e^{3x}$; 4) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-3e^{2x}$. **22.38.** 1) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{32}\right)e^{2x}$; 2) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^x$; 3) $y=C_1e^x+C_2e^{4x}-(2x^2-2x+3)e^{2x}$;

4) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right)e^{3x}$. **22.39.** 1) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}-\frac{9}{2}xe^{-3x}$; 2) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)e^x$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+4x^2e^{-2x}$; 4) $y=(C_1+C_2x+x^3)e^x$. **22.40.** 1) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x$; 2) $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+\cos x$; 3) $y=C_1+C_2e^{2x}+\sin 3x-3\cos 3x$; 4) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)-\sin x-\cos x$. **22.41.** 1) $y=C_1+C_2e^{-2x}+\left(\frac{7}{50}-\frac{x}{20}\right)\sin x-\left(\frac{x}{10}+\frac{1}{50}\right)\cos x$; 2) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(0{,}1x-0{,}12)\cos x-(0{,}3x+0{,}34)\sin x$; 3) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+x^2\sin x$; 4) $y=C_1+C_2e^x+x^2\cos x$. **22.42.** 1) $y=C_1+C_2e^x-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^x$; 2) $y=C_1+C_2e^{-2x}+\frac{1}{5}(6\sin x-2\cos x)e^x$; 3) $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+e^{-x}\left[(10x+18)\sin x-(20x+1)\cos x\right]$; 4) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+[(6-x^2)\cos x+4x\sin x]e^{-x}$. **22.43.** 1) $y=C_1\sin x+C_2\cos x+x\cos x+x^2\sin x$; 2) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$; 3) $y=\left(C_1+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\cos x+\left(C_2+\frac{x^2}{4}\right)\sin x$; 4) $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x+x(\sin 2x-\cos 2x)$. **22.44.** 1) $y=(C_1\sin x+C_2\cos x)e^{-2x}+5xe^{-2x}\sin x$; 2) $y=\left(C_1\sin x+C_2\cos x+x\sin x-\frac{x}{2}\cos x\right)e^{2x}$; 3) $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{2x}+x^2e^{2x}\sin x$; 4) $y=(C_1\cos x+C_2\sin x+x^2\cos x)e^{-x}$. **22.45.** 1) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x+x^2+2$; 2) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}-\frac{x}{3}e^{4x}-\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{-x}$; 3) $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{-x}+xe^{x}+e^{-x}$; 4) $(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}+e^{-x}-4\cos 2x+\sin 2x$. **22.46.** 1) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{8}(1+x\sin 2x)$; 2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{169}\left(6\cos 3x-\frac{5}{2}\sin 3x\right)-\frac{1}{50}(3\sin x+4\cos x)$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{x^2}{4}e^x+\frac{1}{8}e^{-x}$; 4) $y=C_1+C_2e^{-x}+xe^{-x}+\frac{1}{2}e^x+\frac{x^3}{3}-x^2+2x$. **22.47.** 1) $y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{x^3}{6}\right)e^x$; 2) $y=C_1+C_2x+C_3e^{2x}+2x^3-x^2$; 3) $y=C_1e^{3x}+\left(C_2-\frac{x}{4}\right)e^{-3x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$; 4) $y=\left(C_1+\frac{x}{12}\right)e^{-2x}+\left(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x\right)e^x$. **22.48.** 1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x-\frac{x^2}{2}\cos x$; 2) $y=C_1+C_2x+$

$+(C_3+x)e^{-x}+x^3-3x^2$; 3) $y=C_1+(C_2+C_3x)e^x+x^2+4x+\frac{x^2}{2}e^x$; 4) $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos x+C_5\sin x+\frac{x^4}{24}-e^{-x}$. 22.49. 1) $y=2xe^x-\sin x$; 2) $y=e^x(0,16\cos 3x+0,28\sin 3x)+x^2+2,2x+0,84$; 3) $y=\cos 2x+\frac{1}{3}(\sin x+\sin 2x)$; 4) $y=\frac{4x+1}{8}e^{2x}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}$. 22.50. 1) $y=4-3e^{-x}+e^{-2x}$; 2) $y=e^x-e^{-x}+x^2$; 3) $y=e^x+x^3$; 4) $y=2xe^x$. 22.51. 1) $y=\frac{x}{4}+\cos 2x+\frac{2x}{16}\sin 2x$; 2) $y=1-\sin x-\cos x$; 3) ამონახსნი არა აქვს; 4) $y=2x-\pi+\pi\cos x+C\sin x$. 22.52. 1) $y=(C_1-x)\cos x+(C_2+\ln|\sin x|)\sin x$; 2) $y=(C_1+C_2x)e^x+xe^x\ln|x|$; 3) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{\cos 2x}{2\cos x}$; 4) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+xe^{-x}\ln|x|$. 22.53. 1) $y=C_1e^x+C_2+(e^x+1)\ln(1+e^{-x})$; 2) $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$; 3) $y=C_1e^x+C_2-\cos e^x$; 4) $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+x\ln|x|$

§ 23

23.1. $S=\frac{m}{k}\left[\sqrt{\left(\frac{2k}{m}t+C\right)^3}-\sqrt{C^3}\right]$ 23.2. $S=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\left(t\sqrt{g\frac{k}{m}}\right)$. 23.3. $x=x_0\cos\sqrt{\frac{F_0}{S_0m}}t$.

23.4. $t=\sqrt{\frac{Cm}{f_0}}\ln\frac{F+\sqrt{f_0(2F-f_0)}}{F-f_0}$. $x=e^{-0,245t}[2\cos 156,6t+0,00313\sin 156,6t]$. 23.6. $x=\frac{2h\sin 30t-60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t}{g-900}$ სმ, სადაც $g=981$ სმ/წმ². 23.7. $k=\frac{100}{3}\frac{ბ}{სმ}$, $x=5[3+\cos(6,16t)]$. 23.8. $y=y_0+100t-490,5t^2$, $t\approx 0,1$ წმ.

§ 24

24.2. 1) $x=C_1\cos t+C_2\sin t$, $y=-C_1\sin t+C_2\cos t$; 2) $x=2C_1e^{2t}-4C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}$; 3) $x=C_1+C_2e^t$, $y=C_1$; 4) $x=(C_1+C_2t)e^{-2t}$, $y=(C_2-C_1-C_2t)e^{-2t}$. 24.3. 1) $x=e^t(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$, $y=e^t(C_1\sin 3t-C_2\cos 3t)$; 2) $x=C_1e^t+C_2e^{3t}$, $y=-C_1e^t+3C_2e^{3t}$; 3) $x=e^{-2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$, $y=e^{-2t}((C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t)$; 4) $x=(C_1+3C_2t)e^{2t}$, $y=(C_2-C_1-3C_2t)e^{2t}$. 24.4. 1) $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $y=C_1e^{-t}-3C_3e^{-t}$, $z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}$; 2) $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}+C_3e^{-2t}$, $y=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}-C_3e^{-2t}$, $z=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}$; 3) $x=-2C_1e^t-8C_2e^{2t}-3C_3e^{3t}$, $y=C_1e^t+3C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$, $z=2C_1e^t+7C_2e^{2t}+3C_3e^{3t}$; 4) $x=C_1+3C_2e^{2t}$, $y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}$. 24.5. 1) $x=e^t-2e^{2t}$, $y=-e^t+3e^{2t}$; 2) $x=e^{4t}$, $y=e^{4t}$; 3) $x=0$, $y=0$; 4) $x=e^{2t}-e^{3t}$, $y=e^{2t}-2e^{3t}$. 24.6. 1) $x=-5e^{2t}\sin t$, $y=e^{2t}(\cos t-2\sin t)$; 2) $x=-(t+1)e^{3t}$, $y=-(t+2)e^{3t}$; 3) $x=e^{2t}-e^{3t}$, $y=2e^t+e^{2t}$, $z=2e^t+e^{2t}-e^{3t}$; 4) $x=1-e^{-t}$, $y=1-e^{-t}$, $z=2e^{-t}-1$. 24.7. 1) $x=C_1\cos t+C_2\sin t+1$, $y=-C_1\sin t+C_2\cos t$; 2) $x=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$, $y=C_1\sin 2t-C_2\cos 2t+1$; 3) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+te^t-t^2-2$, $y=C_1e^t-C_2e^{-t}+(t-1)e^t-2t$; 4) $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}-2\sin t-\cos t$, $y=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+\sin t-3\cos t$. 24.8. 1) $x=C_1+2C_2te^t-3$, $y=(C_1+C_2+2C_2t)e^t-2$; 2) $x=-C_1\sin t+(C_2-1)\cos t$, $y=C_1\cos t+C_2\sin t$; 3) $x=C_1+C_2t+2\sin t$, $y=-2C_1-C_2(2t+1)-3\sin t-$

$-2\cos t$; 4) $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}-\frac{t^2}{2}$, $y=-C_1e^{2t}+4C_2e^{-3t}+t^2+t$. 24.9. 1) $x=C_1e^{2t}+C_2+e^t$, $y=C_1e^{2t}-C_2-e^t$; 2) $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{3t}-\frac{3}{2}e^t+2te^{2t}$, $y=-C_1e^{2t}-C_2e^{3t}+\frac{1}{2}e^t-(t+1)e^{2t}$; 3) $x=C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}-\cos t+3\sin t$, $y=-C_1e^{-t}+C_2e^{2t}+2\cos t-\sin t$; 4) $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-(12t+13)e^t$, $y=C_1e^{2t}-2C_2e^{-3t}-(8t+6)e^t$. 24.10. 1) $x=e^{-t}-e^{-2t}-2\sin t-\cos t$, $y=-e^{-t}-2e^{-2t}+\sin t+\cos t$; 2) $x=e^{2t}(\cos t-\sin t)+\left(\frac{5}{4}+3t\right)e^{-t}+1$, $y=-e^{2t}(\sin t+\cos t)+\left(\frac{3}{4}+t\right)e^{-t}+1$; 3) $x=-t$, $y=0$; 4) $x=e^t$, $y=e^t$.

სარჩევი

მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი ზოგიერთი გამოყენება

დიფერენციალური განტოლებები

რედაქტორი ნ. გვანცელაძე
სამხატვრო რედაქტორი გ. ზაკალაშვილი
ტექნიკური რედაქტორი შ. ამირანაშვილი
კორექტორი ნ. ქაფიანიძე

სგ 5370

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 21.01.97წ. ქაღალდის ზომა 60 × 84
საბეჭდი ქაღალდი N1. ნაბეჭდი თაბახი 17,75. საღებავგატარება 17
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 15,63.

ტირაჟი 1000

წიგნი გამოდის ავტორის ხარჯით
ფასი შეთანხმებით

გამომცემლობა "განათლება", თბილისი. გ. ჩუბინაშვილის ქ. N

1997