

თეიმურაზ ვეფხვაძე

ანალიზური გეომეტრია და უმაღლესი ალგებრა

თბილისი

I ნაწილი

შემაჯობი და კოორდინატები

§1. მიმართება სიმრავლეზე. ექვივალენტობის მიმართება. ექვივალენტობის კლასები

A და B სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი არის სიმრავლე, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით:

$$A \times B = \{(x, y), x \in A, y \in B\}.$$

მაშასადამე, დეკარტული ნამრავლი a და b ელემენტებისაგან შედგენილი დალაგებული წყვილების სიმრავლეა. a და b -ს ეწოდება (a, b) წყვილის კომპონენტები.

თუ $A = B$, მაშინ გვაქვს დეკარტული ნამრავლი: $A \times A = \{(x, y), x \in A, y \in A\}$.

თუ A და B სასრული სიმრავლეებია, A შედგება m ელემენტებისაგან, B შედგება n ელემენტებისაგან, მაშინ ცხადია, $A \times B$ -ს ელემენტების რაოდენობა არის $m \cdot n$.

მიმართება სიმრავლეზე. ვიტყვით, რომ A სიმრავლეზე მოცემულია R მიმართება, თუ მითითებულია $A \times A$ სიმრავლის R ქვესიმრავლე, $R \subset A \times A$. თუ $(x, y) \in R$, მაშინ ვიტყვით, რომ x არის R მიმართებაში y -თან და ვწერთ: xRy . მაგალითად, თუ A სიმრავლე სიბრტყეზე წრფეების სიმრავლეა, მაშინ ამ სიმრავლეზე პარალელურობის მიმართება პარალელურ წრფეთა წყვილების მოცემით განისაზღვრება, რომელიც $A \times A$ სიმრავლის რაღაც ქვესიმრავლე იქნება.

რაიმე A სიმრავლეზე განსაზღვრულ R მიმართებას შეიძლება ჰქონდეს შემდეგი თვისებები:

1. რეფლექსურობის; ყოველი $x \in A$ ელემენტისთვის გვაქვს: xRx
2. სიმეტრიულობის: თუ გვაქვს xRy , მაშინ აქედან გამომდინარეობს yRx .
3. ტრანზიტულობის: xRy და yRz -დან გამომდინარეობს xRz .

თუ სიმრავლეზე განსაზღვრულია R მიმართება, რომელსაც აქვს რეფლექსურობის, სიმეტრიულობის და ტრანზიტულობის თვისებები, მაშინ ასეთ R მიმართებას ეწოდება **ექვივალენტობის** მიმართება. ამ შემთხვევაში სიმრავლე იყოფა კლასებად – ურთიერთარაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად, რომელთა გაერთიანება მოცემული სიმრავლეა. ამ კლასებს **ექვივალენტობის კლასები** ეწოდება.

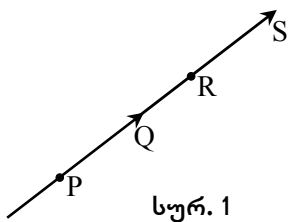
მაგალითი 1. თუ სიბრტყეზე მოცემულია პარალელობის მიმართება, ამასთანავე, მივიჩნევთ, რომ ყოველი წრფე თავისი თავის პარალელურად ითვლება, მაშინ პარალელურობის მიმართება ექვივალენტობის მიმართებაა და წრფეების სიმრავლე იყოფა პარალელურ წრფეთა კლასებად.

მაგალითი 2. მთელ რიცხვთა Z სიმრავლეზე „შედარების“ (სადარობის) მიმართება ასე განვსაზღვროთ: მოცემულია რაიმე m რიცხვი. R მიმართება ასე განვსაზღვროთ: xRy , თუ $x \equiv y \pmod{m}$, ანუ x და y -ს m -ზე გაყოფისას ერთი და იგივე ნაშთები აქვს. მაშინ ეს მიმართება ექვივალენტობის მიმართებაა და მთელ რიცხვთა სიმრავლე იყოფა ექვივალენტობის კლასებად, ანუ ნაშთთა კლასებად, გვექნება m კლასი, რომელთა წარმომადგენლებია $0, 1, 2, \dots, m-1$.

§2. ვექტორი. კოლინეარული და კომპლანარული ვექტორები

სიგრძის ორი P და Q წერტილისგან შედგენილი დალაგებული წყვილი განსაზღვრავს მიმართულ მონაკვეთს, რომელსაც ასე ჩავწერთ: \overrightarrow{PQ} . P წერტილს ვუწოდოთ მიმართული მონაკვეთის სათავე, Q -ს – ბოლო. ნულოვანი მიმართული მონაკვეთი ვუწოდოთ ისეთ მიმართულ მონაკვეთს, რომლის სათავე და ბოლოს ერთმანეთს ემთხვევა: $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ (აქ P ნებისმიერი წერტილია), AB მონაკვეთის სიგრძეს ვუწოდოთ \overrightarrow{AB} მიმართული მონაკვეთის სიგრძე და ასე აღვნიშნოთ: $|\overrightarrow{AB}|$.

მიმართულ მონაკვეთა სიმრავლეში შემოვიღოთ მიმართება: ვიტყვი, რომ \overrightarrow{PQ} ექვივალენტურია \overrightarrow{RS} მიმართული მონაკვეთის, თუ სრულდება შემდეგი სამი პირობიდან ერთ-ერთი:



1. $P=R, Q=S$.

2. თუ $P \neq R$ და R, S წერტილები ეკუთვნის PQ წრფეს, მაშინ S წერტილი R წერტილის იმავე მხარესაა, რომელ მხარესაც არის Q წერტილი P -ს მიმართ. ამასთანავე, $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{RS}|$ (სურ. 1).

3. P, Q, R, S ოთხი სხვადასხვა წერტილია, რომელთაგან არცერთი 3 ერთ წრფეს არ ეკუთვნის; წრფეები PQ და RS პარალელური, ამასთანავე წრფეებიც PR და QS პარალელურია.

მიმართულ მონაკვეთთა ექვივალენტობა ასე ჩავწერთ: $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$. ამ მიმართებას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. რეფლექსურობის: $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{PQ}$.

2. სიმეტრიულობის: თუ $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$, მაშინ $\overrightarrow{RS} \sim \overrightarrow{PQ}$.

3. ტრანზიტულობის: თუ $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$ და $\overrightarrow{RS} \sim \overrightarrow{TV}$, მაშინ $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{TV}$.

მასაშადამე, ეს მიმართება ექვივალენტობის მიმართებაა, ამიტომ მიმართულ მონაკვეთთა სიმრავლე დაიყოფა ექვივალენტობის კლასებად. თითოეული ექვივალენტობის კლასი ახალი მათემატიკური ობიექტია. მას ვუწოდებთ ვექტორს. თუ ვექტორს ასე აღვნიშნავთ: \vec{P} , მაშინ ჩანაწერი: $\vec{P} = \overrightarrow{AB}$ ნიშნავს, რომ \overrightarrow{AB} მიმართული მონაკვეთი \vec{P} ვექტორის კლასს ეკუთვნის, ამ კლასის ერთ-ერთი წარმომადგენელია. \overrightarrow{AB} მიმართული მონაკვეთის მითითება ნიშნავს \vec{P} ვექტორით განსაზღვრული კლასის ერთ-ერთი წარმომადგენლის დასახელებას. ამ ფაქტს ასეც აღვნიშნავთ: \vec{P} ვექტორი მოდებულია A წერტილზე და ვწერთ: $\vec{P} = \overrightarrow{AB}$. თუ $\vec{P} = \overrightarrow{AB}$, მაშინ \overrightarrow{AB} მიმართული მონაკვეთის სიგრძეს ეწოდება \vec{P} ვექტორის სიგრძე. თუ $|\vec{P}|=1$, მაშინ \vec{P} ვექტორს ეწოდება ერთეულოვანი ვექტორი.

ნულოვანი ვექტორი არის ნულოვან მიმართულ მონაკვეთთა კლასი, მას ასე აღვნიშნავთ: $\vec{0}$ მაშასადამე, $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$. მისი სიგრძე ნულია, მიმართულება არ არის განსაზღვრული.

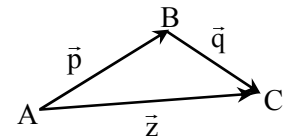
კოლინეარული ვექტორები. ვექტორებს ეწოდება კოლინეარული, თუ ისინი ერთი და იმავე წრფეზე მდებარე მიმართული მონაკვეთებით შეიძლება წარმოვადგინოთ.

კომპლანარული ვექტორები. ვექტორებს ეწოდება კომპლანარული, თუ ისინი ერთი და იმავე სიბრტყეზე მდებარე მიმართული მონაკვეთებით შეიძლება წარმოვადგინოთ.

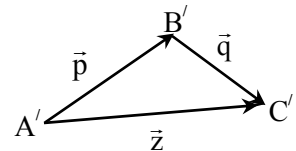
§3. ვექტორების შეკრება

ვთქვათ, $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$. მოვდეთ B წერტილში \vec{q} ვექტორი, $\vec{q} = \overrightarrow{BC}$, მაშინ $\vec{z} = \overrightarrow{AC}$ -ს ეწოდება \vec{p} და \vec{q} -ს ჯამი.

$$\vec{z} = \vec{p} + \vec{q}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$



თუ \vec{p} ვექტორს მოვდებთ სხვა A' წერტილზე, $\vec{p} = \overrightarrow{A'B'}$, $\vec{q} = \overrightarrow{B'C'}$, მაშინ $\overrightarrow{A'C'}$ მიმართული მონაკვეთი, ცხადია, იმავე \vec{z} ვექტორს განსაზღვრავს (\overrightarrow{AC} და $\overrightarrow{A'C'}$ ექვივალენტური მიმართული მონაკვეთებია).



ვთქვათ, $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$, მაშინ, ცხადია, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$, ვწერთ: $\overrightarrow{BA} = -\vec{p}$.

შეკრების თვისებები:

1. ნებისმიერი \vec{p} და \vec{q} ვექტორებისთვის არსებობს ერთადერთი \vec{z} ვექტორი: $\vec{z} = \vec{p} + \vec{q}$.

2. $\vec{p} + \vec{q} = \vec{q} + \vec{p}$ (შეკრების კომუტაციურობა).

3. $(\vec{p} + \vec{q}) + \vec{z} = \vec{p} + (\vec{q} + \vec{z})$ (შეკრების ასოციაციურობა).

4. $\vec{p} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{p} = \vec{p}$ (შეკრების ნეიტრალური ელემენტის არსებობა).

5. ყოველი \vec{p} -სთვის არსებობს ერთადერთი ვექტორი $-\vec{p}$ ისეთი, რომ

$$\vec{p} + (-\vec{p}) = \vec{0} \quad (\text{მოპირდაპირე ვექტორის არსებობა}).$$

ასოციაციურობის თვისება საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ სამი და მეტი ვექტორის ჯამი.

მაგალითად,

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{p}_1 + (\vec{p}_2 + \vec{p}_3) = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) + \vec{p}_3.$$

ვექტორის რიცხვზე გამრავლება. \vec{p} ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება $\vec{z} = \lambda \vec{p}$ ვექტორს, რომელიც ასე განისაზღვრება: თუ $\lambda > 0$, $\vec{p} \neq \vec{0}$, $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$, მაშინ

$\lambda \vec{p} = \overrightarrow{AC}$, სადაც $|\overrightarrow{AC}| = |\lambda| |\vec{p}|$ და C და B წერტილები ერთი და იმავე წრფეზე A წერტილის ერთ მხარესაა. თუ $\lambda < 0$, მაშინ C და B წერტილები A წერტილის სხვადასხვა მხარესაა, $|\overrightarrow{AC}| = \lambda |\overrightarrow{AB}|$. თუ $\lambda = 0$, მაშინ $0 \cdot \vec{p} = \vec{0}$, თუ $\vec{p} = \vec{0}$, მაშინ $\lambda \vec{p} = \vec{0}$.

რიცხვზე გამრავლების თვისებები

1. ნებისმიერი \vec{p} ვექტორისთვის და ნებისმიერ λ რიცხვისთვის არსებობს ერთადერთი ვექტორი \vec{z} ისეთი, რომ $\vec{z} = \lambda \vec{p}$.

2. ნებისმიერი λ_1 და λ_2 რიცხვებისა და \vec{p} ვექტორისთვის

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{p} = \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{p}, \quad (\lambda_1 \lambda_2) \vec{p} = \lambda_1 (\lambda_2 \vec{p}).$$

3. ნებისმიერი \vec{p}_1 და \vec{p}_2 ვექტორებისა და λ რიცხვისთვის

$$\lambda(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \lambda \vec{p}_1 + \lambda \vec{p}_2.$$

4. $1 \cdot \vec{p} = \vec{p}$ ნებისმიერი \vec{p} ვექტორისთვის.

ვექტორებზე მოქმედებების თვისებების გამოყენებით შეიძლება განვსაზღვროთ გამოსახულება:

$$\lambda_1 \vec{p}_1 + \lambda_2 \vec{p}_2 + \dots + \lambda_k \vec{p}_k,$$

რომელსაც $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_k$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია ეწოდება.

ვექტორს $\vec{p} + (-\vec{q})$ ეწოდება \vec{p} და \vec{q} -ს სხვაობა, მას ასე აღვნიშნავთ: $\vec{p} - \vec{q}$.

თეორემა 1 (ვექტორთა კოლინეარობის პირობა). \vec{p} ვექტორი კოლინეარულია \vec{q} ვექტორის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს λ რიცხვი ისეთი, რომ $\vec{p} = \lambda \vec{q}$.

დამტკიცება. განსაზღვრების თანახმად, $\vec{p} = \lambda \vec{q}$ კოლინეარულია \vec{q} ვექტორის.

ვთქვათ, $\vec{p} \neq \vec{0}$ და \vec{p} კოლინეარულია \vec{q} ვექტორის. მოვდეთ ეს ვექტორები ერთ წერტილში, განსაზღვრების თანახმად, თუ $\vec{q} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{p} = \overrightarrow{AC}$ მაშინ A, B და C ერთ წრფეს ეკუთვნის. ცხადია, არსებობს λ რიცხვი ისეთი, რომ $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$. სადაც $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$, თუ \overrightarrow{AB} და \overrightarrow{AC} ერთ მხარეზეა მიმართული A წერტილიდან და $\lambda = -\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$, წინააღმდეგ შემთხვევაში.

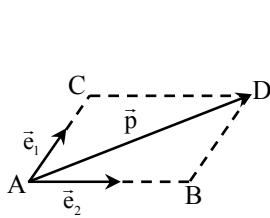
თუ $\vec{p} = \vec{0}$, მაშინ $\lambda = 0$ და $\vec{p} = \lambda \vec{q}$.

თეორემა 2. ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია ორი არაკოლინეარული ვექტორი \vec{e}_1 და \vec{e}_2 . მაშინ ყოველი \vec{p} ვექტორი მათი წრფივი კომბინაცია.

$$\vec{p} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2, \quad (1)$$

არსებობს ერთადერთი წყვილი (λ_1, λ_2) რიცხვებისა, რომლისთვისაც გვაქვს (1) ტოლობა.

დამტკიცება. თუ \vec{p} არის \vec{e}_1 ან \vec{e}_2 ვექტორის კოლინეარული, მაშინ (1) ტოლობა არის თეორემა 1-ის შედეგი.



ვთქვათ, \vec{p} არ არის კოლინეარული \vec{e}_1 ან \vec{e}_2 ვექტორს. მოვდოთ სამივე ვექტორი ერთ წერტილში. ერთ-ერთი შემთხვევა სურათზე გამოსახული. ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\vec{p} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2.$$

ყველა სხვა შემთხვევაშიც გვაქვს:

$$\vec{p} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2. \quad (2)$$

ახლა ვახვენოთ, რომ λ_1, λ_2 რიცხვების წყვილი ერთადერთია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო – გვაქვს სხვა წარმოდგენაც:

$$\vec{p} = k_1 \vec{e}_1 + k_2 \vec{e}_2. \quad (3)$$

(2) და (3)-დან გვაქვს:

$$(\lambda_1 - k_1) \vec{e}_1 = (k_2 - \lambda_2) \vec{e}_2. \quad (4)$$

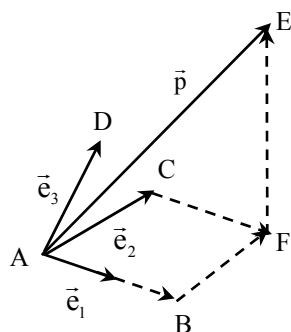
თუ $\lambda_1 \neq k_1$, მაშინ \vec{e}_1 კოლინეარული იქნება \vec{e}_2 -ის, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, $\lambda_1 = k_1$. (4)-დან $\lambda_2 = k_2$.

თეორემა 3. ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია სამი არაკომპლანარული ვექტორი $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. მაშინ ყოველი \vec{p} ვექტორი არის ამ ვექტორების წრფივკომბინაცია, \vec{p} ვექტორი ერთადერთი სახით წარმოდგინება ამ ვექტორებით:

$$\vec{p} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3. \quad (2)$$

დამტკიცება. თუ \vec{p} ვექტორი არის \vec{e}_1, \vec{e}_2 და \vec{e}_3 ვექტორებიდან რომელიმე ორი ვექტორის კომპლანარული, მაშინ (2) ტოლობა და წარმოდგენის ერთადერთობა თეორემა 2-დან გამომდინარეობს.

ვთქვათ, \vec{p} ვექტორი \vec{e}_1, \vec{e}_2 და \vec{e}_3 ვექტორებიდან არცერთი 2-ის კომპლანარული არ არის. მოვდოთ $\vec{p}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ და \vec{e}_3 A წერტილში. სურათის მიხედვით, ვწერთ:



$$\begin{aligned} \overrightarrow{FE} &= \lambda_3 \vec{e}_3 \\ \vec{p} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3. \end{aligned}$$

წარმოდგენის ერთადერთობა წინა თეორემის ანალოგიურად მტკიცდება.

დამტკიცებული თეორემებიც საფუძველზე შემოდის განსაზღვრებები: სიბრტყეზე ნებისმიერ ორ არაკოლინეარულ ვექტორს სიბრტყის ბაზისი ეწოდება. სივრცეში ნებისმიერ სამ არაკომპლანარულ ვექტორს სივრცის ბაზისი ეწოდება.

თუ \vec{e}_1, \vec{e}_2 სიბრტყის ბაზისია და $\vec{p} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ მაშინ x_1, x_2 რიცხვებს \vec{p} კოორდინატები ეწოდება \vec{e}_1, \vec{e}_2 ბაზისში; ვწერთ $\vec{p} = (x_1, x_2)$.

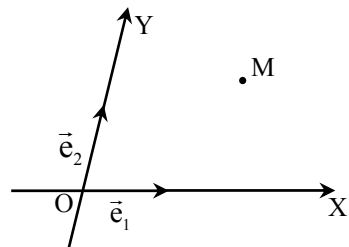
თუ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ სივრცის ბაზისია და $\vec{p} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, მაშინ x_1, x_2, x_3 რიცხვებს \vec{p} ვექტორის კოორდინატები ეწოდება. ვწერთ: $\vec{p} = (x_1, x_2, x_3)$.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ვექტორების შეკრებისას კოორდინატები იკრიბება, ვექტორის რიცხვზე გამრავლებისას რიცხვი მრავლდება კოორდინატებზე: თუ, მაგალითად, $\vec{p}_1 = (x_1, x_2, x_3), \vec{p}_2 = (y_1, y_2, y_3)$ მაშინ $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, $\lambda\vec{p}_1 = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$.

§4. კოორდინატები სიბრტყეზე და სივრცეში

სიბრტყეზე აფინური სისტემა განისაზღვრება ორი არაკოლინეარული \vec{l}_1 და \vec{l}_2 ვექტორისა და 0 წერტილის მოცემით. \vec{l}_1 პირველი ვექტორია, \vec{l}_2 – მეორე. ისინი ერთეულოვანი ვექტორებია და თითოეული მათგანი განსაზღვრავს შესაბამის ღერძს, რომლის მიმართულება ემთხვევა ვექტორის (ორტის) მიმართულებას.

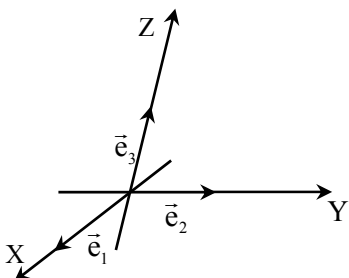
ვთქვათ, M სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია. $\vec{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, მაშინ x და y-ს ეწოდება M წერტილი, აფინური კოორდინატები: $M = (x; y)$.



თუ $A = (x_1; y_1), B = (x_2; y_2)$, მაშინ $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, მაშასადამე

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

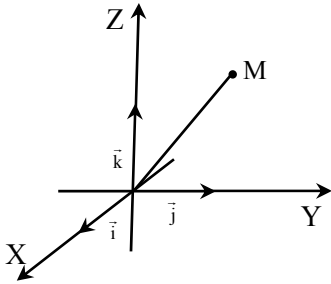
სივრცეში კოორდინატთა სისტემა განისაზღვრება სამი არაკომპლანარული ერთეულოვანი ვექტორებისა და O წერტილის მოცემით. ეს ვექტორები განსაზღვრავს სამი საკოორდინატო ღერძს, Ox, Oy და Oz.



ვთქვათ, M სივრცის ნებისმიერი წერტილია და $\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, მაშინ (x, y, z) სამეულის რიცხვებს ეწოდება M წერტილის კოორდინატები: x აბსცისაა, y – ორდინატი, z – აპლიკატი.

მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა აფინური სისტემის კერძო შემთხვევაა.

მოითხოვება, რომ ერთეულოვანი საკოორდინატო ვექტორები (ორტები) წყვილ-წყვილად პერპენდიკულარულია. ორტებს, როგორც $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -თი აღვნიშნავთ. შე-



საბამისი დერძები ორი სხვადასხვა წესით შეიძლება შევარჩიოთ. სურათზე ე.წ. მარჯვენა სისტემაა წარმოდგენილი: Oz დერძიდან რომ დავაკვირდეთ, Ox დერძის შეთავსება Oy დერძთან საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობით ხორციელდება.

თუ $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, მაშინ M წერტილის მართკუთხა კოორდინატებია x, y და z, $M = (x, y, z)$.

თუ $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, მაშინ

$$\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

ამასთანავე

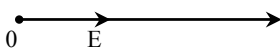
$$|\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

ამ ფორმულით ვპოულობთ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილებს შორის მანძილს. სიბრტყეზე $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წერტილებს შორის მანძილი ასე გამოითვლება:

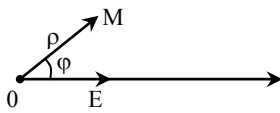
$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

პოლარული, სფერული და ცილინდრული კოორდინატები.

პოლარი კოორდინატების შემოტანა შემდეგი პირობების შესრულებით ხორციელდება: 1. მოიცემა მასშტაბი – სიგრძის ერთეული; 2. ფიქსირებულია წერტილი, რომელსაც პოლუსი ან სათავე ეწოდება; 3. განსაზღვრულია მობრუნების დადებითი (სათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულება) და უარყოფითი მიმართულება; 4. გავლებულია ნახევარწრფე (სხივი), რომლის სათავე პოლუსია. მას ეწოდება პოლარული დერძი. ნახევარწრფეზე მიმართულება მოიცემა მასზე \vec{OE} ვექტორის მოცემით (E სხივის ნებისმიერი წერტილია).



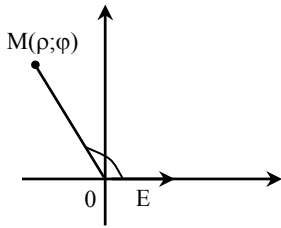
თუ ჩამოთვლილი წესების მიხედვით სიბრტყეზე მოცემულია პოლარ-კოორდინატთა სისტემა, მაშინ ყოველ M წერტილს შევუსაბამებთ ორ რიცხვს ρ და φ-ს.



ρ არის \vec{OM} ვექტორის სიგრძე, φ არის კუთხე \vec{OM} და \vec{OE} ვექტორებს შორის – ის კუთხე, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ (დადებითი მიმართულებით) \vec{OE} ვექტორი, რომ მიიღოთ \vec{OM} -ის მიმართულება.

φ კუთხეს ეწოდება M წერტილის პოლარული კუთხე, ρ-ს ეწოდება M წერტილის პოლარული რადიუსი, ρ და φ არის M წერტილის პოლარული კოორდინატები და ვწერთ: $M = (\rho; \varphi)$. ცხადია $0 \leq \varphi < 2\pi$.

თუ პოლარულ კოორდინატთა სისტემასთან ერთად მართკუთხა კოორდინატებიცაა შემოტანილი ისე, რომ Ox დერძის მიმართულება ემთხვევა პოლარული დერძის მიმართულებას და პოლუსი ემთხვევა მართკუთხა სისტემის სათავეს. მაშინ, ცხადია,

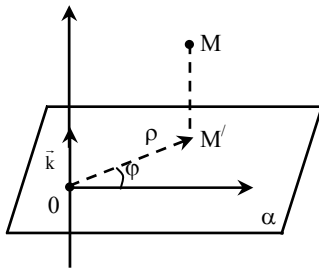


$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad x = \rho \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad y = \rho \sin \varphi$$

სადაც $(x; y)$ არის M წერტილის მართკუთხა კოორდინატა წყვილი.

ცილინდრული კოორდინატები. მოცემულია α სიბრტყე და მასზე განსაზღვრულია პოლარული კოორდინატები. მოიცემა აგრეთვე რაიმე

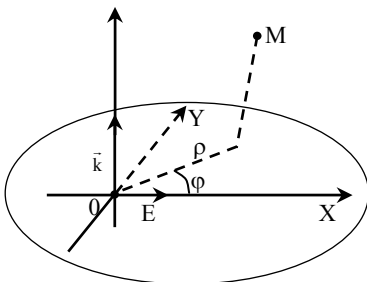


ერთეულოვანი \vec{k} ვექტორით განსაზღვრული რიცხვითი ღერძი, რომელიც გადის პოლუსზე და მართობულია სიბრტყის.

მაშინ სივრცის ყოველ M წერტილს შეუვსაბამებთ რიცხვთა სამეულს: (ρ, φ, h) , სადაც ρ , φ არის M წერტილის α სიბრტყეზე M' გეგმილის პოლარული კოორდინატები.

h რიცხვი განისაზღვრება ტოლობით: $\vec{M'M} = h\vec{k}$. ρ , φ და h -ს ეწოდება **M -ის ცილინდრული კოორდინატი.**

თუ სივრცეში ავიღებთ მართკუთხა კოორდინატა სისტემას, რომლის Ox ღერძის მიმართულება ემთხვევა პოლარული ღერძის მიმართუ-



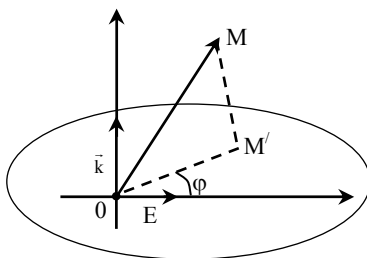
ლებას, სათავე – პოლუსს, Oz ღერძს \vec{k} ვექტორი განსაზღვრავს, M წერტილის ცილინდრული კოორდინატებია ρ , φ , h ; M წერტილის მართკუთხა კოორდინატებია x, y, z , მაშინ, ცხადია,

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

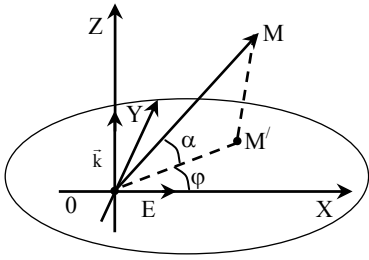
$$z = h$$

სფერული კოორდინატები. მოცემულია α სიბრტყე, მასზე პოლარული ღერძი, α სიბრტყის მართობული ღერძი, რომელიც k ვექტორით განისაზღვრება ეს ღერძი გადის O პოლუსზე. M წერტილის **სფერული** კოორდინატები ეწოდება რიცხვთა სამეულს ρ , φ , α . სადაც $\rho = |\vec{OM}|$, φ არის M -ის M' გეგმილის პოლარული კუთხე ($0 \leq \varphi < 2\pi$) ხოლო α



არის კუთხე \vec{OM} ვექტორსა და $\vec{OM'}$ ვექტორს შორის, ამასთანავე, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, როცა M და \vec{k} ვექტორის ბოლო ერთი და იმავე ნახევარსივრცეშია და $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0$, როცა M და \vec{k} ვექტორის ბოლო სხვადა-

სხვა ნახევარსივრცეშია. ρ , φ , h არის M -ის **სფერული კოორდინატები.** თუ ცილინდრული კოორდინატების ანალოგიურად ავიღებთ სივრცეში მართკუთხა კოორდინატა



სისტემას და $M=(x,y,z)$, მაშინ ადვილად დავამყარებთ კავშირს სფერულ კოორდინატებთან:

$$x = \rho \cos \alpha \cos \varphi$$

$$y = \rho \cos \alpha \sin \varphi$$

$$z = \rho \sin \alpha$$

§5. სკალარული ნამრავლი. ვექტორული ნამრავლი. ვექტორთა შერეული ნამრავლი

ვთქვათ, მოცემულია არანულოვანი ვექტორები \vec{p} და \vec{q} , მათი სკალარული ნამრავლი ეწოდება რიცხვს:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos \alpha,$$

α არის ამ ვექტორებს შორის კუთხე.

თუ \vec{p} ან \vec{q} ნულოვანი ვექტორია, მაშინ $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$.

მაშასადამე, სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია, როცა ვექტორები ურთიერთ-მართობულია, ან როცა ერთ-ერთი ნულოვანია.

თვისებები:

1. $\vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{q} \cdot \vec{p}$.

2. $(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \cdot \vec{q} = \vec{p}_1 \cdot \vec{q} + \vec{p}_2 \cdot \vec{q}$.

3. $\lambda \vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{p} \cdot \lambda \vec{q} = \lambda (\vec{p} \cdot \vec{q})$.

4. $\vec{p} \cdot \vec{p} = |\vec{p}|^2$.

ამ თვისებების გამოყენებით ვექტორების წრფივი კომბინაციები მრავალწევრების გამრავლების მსგავსად შეიძლება გავამრავლოთ. მაგალითად,

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \vec{p}_1 + \lambda_2 \vec{p}_2 + \dots + \lambda_k \vec{p}_k) \cdot (\mu_1 \vec{q}_1 + \mu_2 \vec{q}_2 + \dots + \mu_s \vec{q}_s) = \\ & = \lambda_1 \mu_1 \vec{p}_1 \cdot \vec{q}_1 + \lambda_1 \mu_2 \vec{p}_1 \cdot \vec{q}_2 + \dots + \lambda_k \mu_s \vec{p}_k \cdot \vec{q}_s. \end{aligned}$$

თუ $\vec{p} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{q} = (x_2, y_2, z_2)$, მაშინ

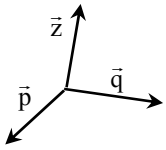
$$\vec{p} \cdot \vec{q} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (\text{სკალარული ნამრავლის გამოსახვა კოორდინატებში}).$$

ვექტორული ნამრავლი. ვთქვათ, მოცემულია ორი არანულოვანი ვექტორი \vec{p} და \vec{q} . მათი ვექტორული ნამრავლი ეწოდება \vec{z} ვექტორს, რომელიც შემდეგი პირობებით მოიცემა:

1. $|\vec{z}| = |\vec{p}| |\vec{q}| \sin \varphi$, φ არის კუთხე \vec{p} და \vec{q} ვექტორებს შორის.

თუ \vec{p} და \vec{q} არაკოლინეარული ვექტორებია მაშინ კიდევ ორი პირობა სრულდება:

2. $\vec{z} = \vec{p} \times \vec{q}$ პერპენდიკულარულია თითოეული ვექტორის (\vec{p} და \vec{q} ვექტორების):



3. \vec{p} , \vec{q} , $\vec{p} \times \vec{q}$ - მარჯვენა სამეულს ქმნის.

თუ \vec{p} ან \vec{q} ნულოვანი ვექტორია, მაშინ $\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$.

ვექტორული ნამრავლის თვისებები:

1. $\vec{p} \times \vec{q} = -\vec{q} \times \vec{p}$

2. $(\lambda \vec{p}) \times \vec{q} = \vec{p} \times (\lambda \vec{q}) = \lambda(\vec{p} \times \vec{q})$

3. $(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \times \vec{q} = \vec{p}_1 \times \vec{q} + \vec{p}_2 \times \vec{q}$

4. $\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა \vec{p} და \vec{q} კოლინეარულია, ან ერთ-ერთი ვექტორი ნულოვანი ვექტორია.

თუ \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} საკოორდინატო ღერძების ორტეზია, მაშინ, ცხადია,

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

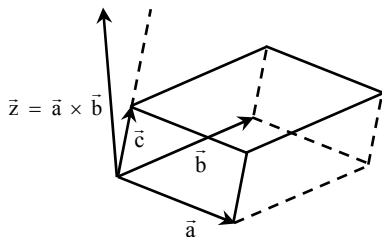
$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0} \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$$

ამ ფორმულებიდან და ვექტორული ნამრავლის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ ვექტორული ნამრავლი კოორდინატებით შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ: თუ $\vec{p} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{q} = (x_2, y_2, z_2)$, მაშინ

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

ვექტორთა შერეული ნამრავლი. \vec{a} , \vec{b} და \vec{c} ვექტორების შერეული ნამრავლი არის რიცხვი, რომელიც შემდეგი ტოლობით მოიცემა:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$



ვთქვათ, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} მარჯვენა სამეულია,

$$\vec{z} = \vec{a} \times \vec{b}$$

\vec{z} ვექტორის სიგრძე ტოლია \vec{a} და \vec{b} -ზე აგებული პარალელელოგრამის ფართობის.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{z} \cdot \vec{c} = |\vec{z}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha, \text{ რადგან } |\vec{c}| \cos \alpha \text{ არის}$$

\vec{a} , \vec{b} და \vec{c} ვექტორებზე აგებული პარალელიპედედის სიმაღლე, ამიტომ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ამ პარალელიპედედის მოცულობაა.

თუ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} მარცხვენა სამეულია, მაშინ შერეული ნამრავლი ამ მოცულობის მოპირდაპირე რიცხვია.

რადგან

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

ამიტომ სკალარული ნამრავლის კოორდინატებით წარმოდგენის ფორმულა მოგვცემს:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

მაშასადამე, თუ $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, მაშინ შერეული ნამრავლი კოორდინატებით ასე ჩაიწერება:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

§6. კოორდინატთა გარდაქმნა

ვთქვათ, აფინურ კოორდინატთა სისტემა მოიცემა ოთხეულით $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) - 0$ წერტილითა და არაკომპლანარული ვექტორებით $-\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. ამასთანავე, ვთქვათ, მოცემულია მეორე სისტემა $(0, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$, ვუწოდოთ მას ახალი სისტემა, $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ კი, პირობითად, იყოს ძველი სისტემა. ცხადია, ახალი სისტემა სავსებით განისაზღვრება თუ მოცემულია საბაზისო ვექტორების კოორდინატები:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \quad (1)$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ მატრიცა, ცხადია არაგადაგვარებულია, (1) სისტემას ერთ-

დერთი ამონახსნი აქვს $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ -ს მიმართ, რადგან $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ წრფივად დამოუკიდებელია. ვთქვათ, $\vec{OM} = (x, y, z)$ ძველ სისტემაში და $\vec{OM} = (x', y', z')$ - ახალ სისტემაში. მაშინ, ცხადია

$$\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + z'\vec{e}'_3.$$

(1)-ის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\begin{aligned}\overline{OM} &= x'(a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2 + a_{31}\overline{e}_3) + y'(a_{12}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + a_{32}\overline{e}_3) + z'(a_{13}\overline{e}_1 + a_{23}\overline{e}_2 + a_{33}\overline{e}_3) = \\ &= (a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z')\overline{e}_1 + (a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z')\overline{e}_2 + (a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z')\overline{e}_3.\end{aligned}$$

მაშასადამე

$$\begin{aligned}x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'\end{aligned}$$

ასე გმოსახება ძველი კოორდინატები ახალი კოორდინატებით, როცა იცვლება ბაზისი და არ იცვლება სისტემის სათავე.

თუ მხოლოდ სათავე იცვლება და ცნობილია, რომ $O' = (a, b, c)$, ანუ $\overline{OO'} = (a, b, c)$, მაშინ $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$.

$$\begin{aligned}x &= x' + a \\ y &= y' + b \\ z &= z' + c\end{aligned}$$

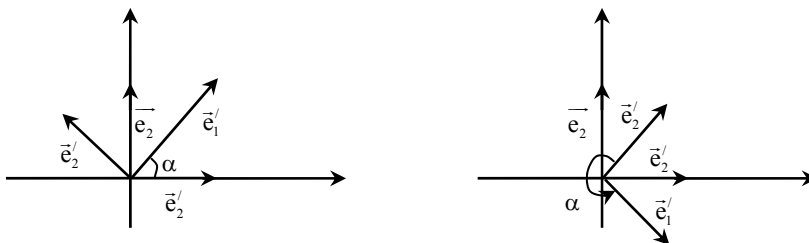
ამ შემთხვევაში (როცა ბაზისი არ იცვლება) ახალი სისტემა მიიღება ძველისაგან პარალელური გადატანით.

თუ $(O', \overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3)$ მიიღება $(O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ სისტემისგან ბაზისის ცვლილებითაც და პარალელური გადატანითაც, მაშინ კოორდინატა გარდაქმნის ფორმულები მიიღებს სახეს:

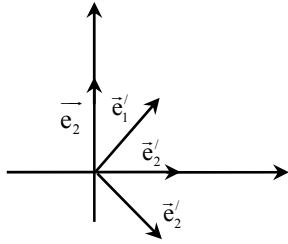
$$\begin{aligned}x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + c.\end{aligned}$$

მართკუთხა კოორდინატა სისტემის გარდაქმნა

განვიხილოთ სიბრტყის შემთხვევა. ვთქვათ, $(O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ ძველი მართკუთხა სისტემაა, $(O, \overline{e}'_1, \overline{e}'_2)$ – ახალი. მაშინ რაიმე α კუთხით მობრუნებით პირველი სისტემიდან მიიღება $(O, \overline{e}'_1, \overline{e}'_2)$ ახალი სისტემა, ან $(O, \overline{e}'_1, -\overline{e}'_2)$ სისტემა:



სურათი 1



ანუ ახალი სისტემა მიიღება α კუთხით მობრუნებით, ან მობრუნებისა და \vec{e}_1' -ის მიმართ სიმეტრიის კომპოზიციით:

მართლაც, თუ α არის კუთხე \vec{e}_1' და \vec{e}_1 ვექტორებს შორის; მაშინ $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ სისტემის მობრუნებით α კუთხით $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ შეუთავსდება $(0, \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ ან $(0, \vec{e}_1', -\vec{e}_2')$ -ს.

მაშასადამე \vec{e}_1' -ის კოორდინატებია $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, ხოლო \vec{e}_2' -ის

$$\left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right) \text{ ან } -\vec{e}_2' = \left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

ანუ

$$\vec{e}_2' = (-\sin \alpha, \cos \alpha) \text{ ან } \vec{e}_2' = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$$

ე.ი.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \det A = 1$$

ან

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \det A = -1.$$

ე.ი. როცა $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ და $(0, \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ სისტემები ერთნაირი ორიენტაციისაა კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები ასეთია:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

როცა ორიენტაცია სხვადასხვაა, მაშინ

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha - y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

A მატრიცას აქვს თვისება:

$$A \cdot A^T = E, \quad \text{ანუ} \quad A = (A^T)^{-1},$$

იგი თავისი ტრანსპონირებულის შებრუნებულია. ასეთ მატრიცას ეწოდება **ორთოგონალური** მატრიცა.

თუ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. მაშინ მისი ორთოგონალურობა გოლფასია შემდეგი ტოლობების:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

ანალოგიურად, $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ მართკუთხა სისტემიდან $(0', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ სისტემაზე გადასვლის A მატრია ორთოგონალური მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

სადაც

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{aligned}$$

ამ მატრიცის ყოველი სვეტის ელემენტების კვადრატების ჯამი $= 1$ – ეს ნიშნავს, რომ $|\vec{e}'_1| = |\vec{e}'_2| = |\vec{e}'_3| = 1$. თითოეული სვეტის ელემენტებს სხვა სვეტის ელემენტებზე ნამრავლია ჯამი $= 0$, რაც ნიშნავს, რომ სკალარული ნამრავლები: $\vec{e}'_1 \cdot \vec{e}'_2 = \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}'_3 = \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}'_3 = 0$ (ახალი ბაზისი მართკუთხაა).

ანალოგიური თვისებებისაა შებრუნებული მატრიცა, რომელიც იქნება \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 და \vec{e}'_3 -დან $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცაა. ამიტომ იგივე თვისებები აქვს სტრიქონებს.

გარდა ამისა სიბრტყის შემთხვევაში ვაჩვენებთ, რომ არსებობს α კუთხე, რომ

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \det A = 1$$

ან

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \det A = -1.$$

ალგებრული წირები და კოორდინატები

§1. პირველი და მეორე რიგის წირები და ზედაკირები

პირველი რიგის წირი სიბრტყეზე ეწოდება წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები რაიმე მართკუთხა სისტემაში აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0 \quad (1)$$

ამ განსაზღვრებაში ერთი ნიუანსია – მასში მონაწილეობს კოორდინატთა სისტემა და არ ჩანს, კოორდინატთა სხვა სისტემაშიც კვლავ (1) სახის განტოლება გვექნება თუ არა.

გავიხსენოთ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები ახალ სისტემაზე გადასვლის ერთ-ერთი შემთხვევის დროს:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + a \\y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + b\end{aligned}\quad (2)$$

(1) განტოლება ახალ სისტემაში ასე ჩაიწერება:

$$A'x' + B'y' + C' = 0, \quad (3)$$

სადაც

$$A' = A \cos \varphi + B \sin \varphi, \quad B' = -A \sin \varphi + B \cos \varphi, \quad C' = Aa + Bb + C.$$

$$A'^2 + B'^2 = (A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2 + (-A \sin \varphi + B \cos \varphi)^2 = A^2 + B^2 \neq 0.$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ახალ კოორდინატებშიც წრფივი ორუცნობიანი განტოლება გვაქვს. ანალოგიურად განიხილება მეორე შემთხვევა.

მეორე რიგის წირი სიბრტყეზე ეწოდება წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები რაღაც სისტემაში აკმაყოფილებს მეორე ხარისხის ორუცნობიანი განტოლებას:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (4)$$

სადაც A, B და C კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც ნული არ არის.

თუ გადავალთ (2) ფორმულებით განსაზღვრულ ახალ კოორდინატებზე, მივიღებთ:

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

სადაც

$$A' = A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi,$$

$$B' = -A \sin \varphi \cos \varphi + B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + C \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$C' = A \sin^2 \varphi - 2B \sin \varphi \cos \varphi + C \cos^2 \varphi.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$A'^2 + 2B'^2 + C'^2 = A^2 + 2B^2 + C^2.$$

პირველი რიგის ზედაპირი ეწოდება წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები რაღაც სისტემაში აკმაყოფილებს პირველი ხარისხის სამუცნობიან განტოლებას

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

მეორე რიგის ზედაპირი კი ეწოდება წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები რაღაც სისტემაში აკმაყოფილებს მეორე ხარისხის სამუცნობიან განტოლებას.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

სადაც $A, B, C, D, E, F,$ კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არ უდრის ნულს.

ამ განსაზღვრებების კორექტულობა ისევე განიხილება, როგორც წირების შემთხვევაში.

§2. წრფის სხვადასხვა სახის განტოლება სიბრტყეზე

ყოველ არანულოვან ვექტორს, რომელიც მოცემული წრფის პარალელურია ამ წრფის მიმართველი ვექტორი ეწოდება.

თეორემა. ვთქვათ, სიბრტყეზე, მოცემულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ყოველი წრფის განტოლებას აქვს სახე

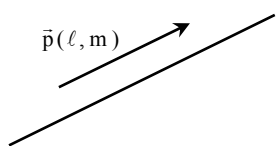
$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0. \quad (1)$$

და, პირიქით, განტოლება, რომელსაც აქვს (1) სახე და $a^2 + b^2 \neq 0$, არის წრფის განტოლება. ე.ი. წრფე პირველი რიგის წირია.

დამტკიცება. ვთქვათ, წრფე რომელიმე საკოორდინატო დერძის პარალელურია, მაგალითად, Oy დერძის და კვეთს Ox დერძს წერტილში $x=a$, მაშინ ამ წრფის განტოლებაა $x-a=0$, ეს კი (1) სახის განტოლებაა. თუ წრფე Ox დერძის პარალელურია და კვეთს Oy დერძს წერტილში, რომლის ორდინატია b , მაშინ ამ წრფის განტოლება იქნება $y-b=0$, რომელიც (1) სახისაა.

Ox დერძის განტოლებაა $y=0$, Oy დერძის განტოლებაა $x=0$.

ვთქვათ, წრფე ორდინატთა დერძის პარალელური არ არის, მაშინ მისი მიმართ-



ველი ვექტორიც $\vec{P} = (\ell, m)$ არ იქნება Oy დერძის პარალელური (არ იქნება Ox დერძის მართობული), ამიტომ $\ell \neq 0$. ამასთანავე, $\frac{m}{\ell}$ მუდმივი იქნება თუ $\vec{P}_1 = (\ell_1, m_1)$

სხვა მიმართველი ვექტორია, მაშინ ცხადია, $\frac{m}{\ell} = \frac{m_1}{\ell_1} \cdot \frac{m}{\ell}$

რიცხვს ვუწოდოთ წრფის საკუთხო კოეფიციენტი და აღვნიშნოთ იგი k ასოთი, მაშასადამე, მიმართველი

ვექტორად შეიძლება ავიღოთ $\vec{P} = (1; k)$ ვექტორი. ვთქვათ, წრფე კვეთს Oy დერძს $Q(0; b)$ წერტილში. $M(x; y)$ წერტილი მდებარეობს წრფეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vec{P} = (1; k)$ კოლონეარულია \vec{QM} ვექტორის, ანუ

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-b}{k}.$$

ამრიგად,

$$y = kx + b \quad (2)$$

ამ განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით. (2), ცხადია, არის (1) სახის.

ახლა დავამტკიცოთ შებრუნებული დებულება. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება:

$$ax + by + c = 0.$$

თუ აქ $b=0$, მაშინ მივიღებთ

$$ax = -c.$$

ეს კი ან Oy დერძის განტოლებაა, ან Ox დერძის პარალელური წრფის.

თუ $b \neq 0$, მაშინ მივიღებთ:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

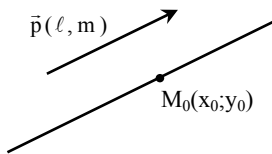
ეს განტოლება კი განსაზღვრავს წრფეს, რომლის კუთხური კოეფიციენტია $-\frac{a}{b}$ და კვეთს Oy დერძს წერტილში $Q\left(0; -\frac{c}{b}\right)$.

ცხადია, $\vec{P}(-b; a)$ არის $ax + by + c = 0$ წრფის მიმართველი ვექტორი (რადგან $k = -\frac{a}{b}$). ცხადია, $\vec{n}(a; b)$ წრფის მართობული ვექტორია, რადგან ის მართობულია $\vec{P}(-b; a)$ ვექტორის.

$\vec{n}(a; b)$ ვექტორს წრფის ნორმალური ვექტორი ეწოდება.

წრფის ვექტორული განტოლება. ცხადია, წრფე ცალსახად განისაზღვრება მიმართველი ვექტორით და წერტილით, რომელზეც ის გადის.

ვთქვათ, ეს წერტილია $M_0(x_0; y_0)$. $M(x; y)$ წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის წრფეზე, როცა $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი კოლინეარულია \vec{P} ვექტორის, ანუ მოიძებნება t რიცხვი, რომლისთვისაც $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{P}$ ეს განტოლება ასეც ჩაიწერება:



$$\vec{z} - \vec{z}_0 = t\vec{p}, \quad \vec{z} = \vec{z}_0 + t\vec{p}, \quad \vec{z} = \overrightarrow{OM}, \quad \vec{z}_0 = \overrightarrow{OM_0}.$$

აქედან მიიღება წრფის პარამეტრული განტოლება:

$$x = x_0 + t\ell,$$

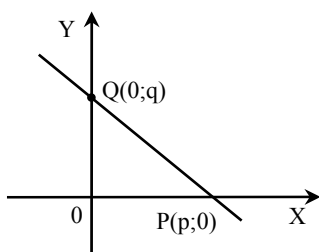
$$y = y_0 + tm,$$

t ნებისმიერი რიცხვია.

თუ $\ell \neq 0$, $m \neq 0$, მივიღებთ კანონიკურ განტოლებას

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m}.$$

თუ წრფე (x_0, y_0) წერტილის გარდა გადის $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე და $x_1 \neq x_0$, $y_1 \neq y_0$, მაშინ მიმართველ ვექტორად ავიღებთ $\vec{P}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ ვექტორს (ანუ $\overrightarrow{M_0M_1}$ ვექტორს) და ამ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება იქნება



$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

თუ წრფე კვეთს საკოორდინატო დერძებს $P(p; 0)$ და $Q(0; q)$ წერტილებში ($p \neq 0$, $q \neq 0$), მაშინ, ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლების მიხედვით, გვექნება:

$$\frac{x - p}{0 - p} = \frac{y - 0}{q - 0}, \quad \frac{x - p}{p} + \frac{y}{q} = 0.$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 - \text{წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში.}$$

§3. წრფის და სიბრტყის განტოლებები სივრცეში

ცხადია, სიბრტყე ცალსახად განისაზღვრება მისი M_0, M_1 და M_2 წერტილებით, ანუ M_0 წერტილისა და $\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}$ არაკოლინეარული ვექტორებით. ვთქვათ, $M_0 = (x_0, y_0, z_0), \overrightarrow{M_0M_1} = (a_1, b_1, c_1), \overrightarrow{M_0M_2} = (a_2, b_2, c_2)$.

$M(x, y, z)$ წერტილი ამ სიბრტყეზე ძვეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი კომპლანარულია $\overrightarrow{M_0M_1}$ და $\overrightarrow{M_0M_2}$ ვექტორების. მაშინ არსებობს t და s რიცხვები ისეთი, რომ

$$\overrightarrow{M_0M} = s\overrightarrow{M_0M_1} + t \cdot \overrightarrow{M_0M_2} \quad (1)$$

ეს სიბრტყის ვექტორული განტოლებაა. კოორდინატებში (1) ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= sa_1 + ta_2 \\ y - y_0 &= sb_1 + tb_2 \\ z - z_0 &= sc_1 + tc_2 \end{aligned} \quad (2)$$

მივიღეთ სიბრტყის „განტოლება“ პარამეტრული სახით.

(2) ტოლობები, ცხადია, ტოლფასია განტოლების:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

დეტერმინანტი ნულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ერთ-ერთი სტრიქონი სხვა სტრიქონების წრფივი კომბინაციაა.

(3) შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0), \quad (4)$$

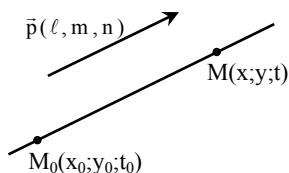
სადაც $A = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, B = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

(4) არის იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის (x_0, y_0, z_0) წერტილზე. $\vec{n}(A, B, C)$ ამ სიბრტყის მართობული ვექტორია, იგი მართობულია $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ვექტორის. $\vec{n}(A, B, C)$ ვექტორს ეწოდება სიბრტყის ნორმალური ვექტორი.

(4) შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (5)$$

სადაც $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.



(5)-ს ეწოდება სიბრტყის ზოგადი განტოლება, ყოველი სიბრტყის განტოლება (5) სახით მოიციმა და პირიქით, ყოველი (5) სახის განტოლება რაღაც სიბრტყის განტოლებაა.

ახლა, ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია წრფე, $\vec{p}(l, m, n)$ მისი მიმართეული (პარალელური) ვექტორია.

თუ წრფე გადის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე, მაშინ $M(x, y, z)$ მდებარეობს წრფეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overrightarrow{M_0M}$ კოლინეარულია \vec{p} ვექტორის, ანუ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= t\vec{p}, & x - x_0 &= lt \\ & & y - y_0 &= mt \\ & & z - z_0 &= nt \end{aligned}$$

ეს წრფის პარამეტრული განტოლებაა.

თუ $l \neq 0, m \neq 0, n \neq 0$, მაშინ აქედან მივიღებთ წრფის „კანონიკურ განტოლებას“:

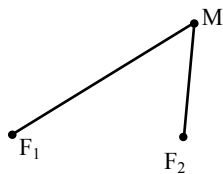
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

თუ, მაგალითად $l = 0$, მაშინ გვექნება:

$$\begin{cases} x = x_0, \\ \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \end{cases}$$

§4. მეორე რივის წირვები

ელიფსი არის წერტილთა სიმრავლე სიბრტყეზე, რომელთა მანძილების ჯამი ორ მოცემულ წერტილამდე მუდმივია და მეტია ამ წერტილებს შორის მანძილზე. მოცემულ წერტილებს ელიფსის ფოკუსები ეწოდება.



ფოკუსები აღნიშნოთ F_1 და F_2 -თი, მათ შორის მანძილი $2c$ -თი, M წერტილი ელიფსზე ძეგს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $MF_1 + MF_2$ მუდმივია, ეს მუდმივი აღნიშნოთ $2a$ -თი, $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Ox ღერძი გავატაროთ ფოკუსებზე, Oy ღერძი მათ შორის შუა წერტილზე. $M(x, y)$ წერტილი მდებარეობს ელიფსზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

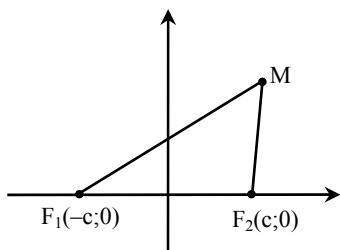
$$MF_1 + MF_2 = 2a. \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (1)$$

ამ განტოლების გამარტივებით მივიღებთ:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

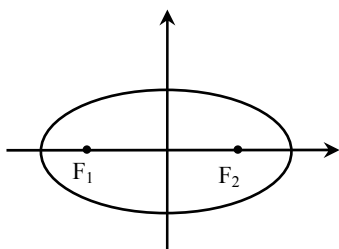
$a^2 - c^2 > 0$ შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $a^2 - c^2 = b^2$, მივიღებთ:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2y^2,$$



აქედან

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$



ჩვენ გამოვიყენოთ ელიფსის განსაზღვრება, რომელიც ექვივალენტურია (1) განტოლების. (2) კი (1)-ის შედეგია. უნდა ვაჩვენოთ, რომ (2) ექვივალენტურია (1)-ის, ანუ ელიფსის განსაზღვრების, მხოლოდ ამ შემთხვევაში შეიძლება ვთქვათ, რომ (2) ელიფსის განტოლებაა. მაშასადამე, უნდა ვაჩვენოთ, რომ (1) არის (2)-ის შედეგი.

ვთქვათ, $M(x;y)$ -ის კოორდინატები აკმაყოფილებს (2)-ს. ანუ $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, მაგრამ $b^2 = a^2 - c^2$, ანუ

$$y^2 = a^2 - c^2 - (a^2 - c^2) \frac{x^2}{a^2} = a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2}{a^2} x^2.$$

ამასთანავე $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, მაშასადამე,

$$MF_1 = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2}{a^2} x^2}$$

$$MF_1 = \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2} x^2}$$

$$MF_1 = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a} x\right)^2}$$

(2)-ს მიხედვით, $|x| \leq a$, ამასთანავე, $\frac{c}{a} < 1$ ამიტომ $\left|\frac{c}{a} x\right| < a$

ამიტომ

$$MF_1 = a + \frac{c}{a} x \quad (3)$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$MF_2 = a - \frac{c}{a} x$$

ამიტომ $MF_1 + MF_2 = 2a$.

ამრიგად, (2)-ის შედეგი არის (1).

ამრიგად, (2) ელიფსის განტოლებაა. მას ეწოდება, ელიფსის **კანონიკური განტოლება**. ელიფსი სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების და კოორდინატთა სათავის მიმართ.

განვიხილოთ წრეწირი

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

ვთქვათ, სიბრტყის გარდაქმნა მოიცემა ფორმულებით:

$$\begin{aligned} x &= x' & x' &= x \\ y &= \frac{a}{b}y' & \text{ანუ} & y' &= \frac{b}{a}y \end{aligned} \quad (4)$$

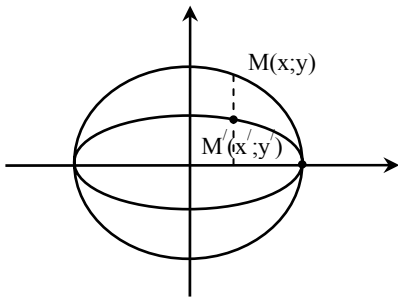
ამ გარდაქმნას **კუმშვა** ეწოდება. ამ გარდაქმნით

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

წრეწირი აისახება

$$(x')^2 + \frac{a^2}{b^2}(y')^2 = a^2 \quad \text{ელიფსზე, ანუ}$$

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \quad \text{ელიფსზე.}$$

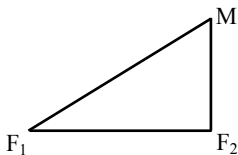


ე.ი. ელიფსი მიიღება წრეწირისაგან კუმშვით:

რიცხვს $e = \frac{c}{a}$ ეწოდება ელიფსის ექსცენტრის-ტეტი. მაშასადამე, $M(x,y)$ წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილებია:

$$MF_1 = a + ex, \quad MF_2 = a - ex.$$

ჰიპერბოლა ეწოდება წერტილთა სიმრავლეს სიბრტყეზე, რომელთა მანძილების სხვაობის მოდული ორ მოცემულ წერტილამდე მუდმივი სიდიდეა. ამ წერტილებს ჰიპერბოლის ფოკუსები ეწოდება. აღნიშნოთ ისინი F_1 და F_2 -ით, მუდმივი სიდიდე იყოს $2a$. მაშასადამე, $|MF_1 - MF_2| = 2a$, ანუ $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$.



კოორდინატა სისტემა ისევე შევარჩიოთ, როგორც ელიფსის შემთხვევაში. მაშინ გვქვია:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (1)$$

(1)-ის გამარტივებით, მივიღებთ:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad (2)$$

მივიღებთ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

მაშასადამე, (3) არის (1)-ის შედეგი: თუ $M(x,y)$ წერტილი ჰიპერბოლოზეა, მაშინ (x,y) აკმაყოფილებს (3)-ს. ახლა, ვთქვათ, M წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს (3)-ს, ვახევნოთ, რომ ეს რიცხვები (1)-ს აკმაყოფილებს.

მართლაც,

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (3)\text{-დან}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{c^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{c^2}{a^2}x^2 - x^2 - c^2 + a^2$$

$$MF_1 = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 - x^2 - c^2 + a^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2}$$

ე.ი.

$$MF_1 = \pm\left(\frac{c}{a}x + a\right)$$

ანალოგიურად

$$MF_2 = \pm\left(\frac{c}{a}x + a\right) \quad (4)$$

რადგან $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ამიტომ $x^2 \geq a^2$, $x \geq a$ ან $x \leq -a$.

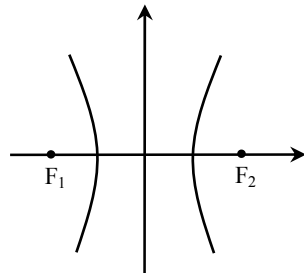
თუ $x \geq a$, მაშინ (3) და (4) ტოლობებში უნდა ავიღოთ „+“ ნიშანი, თუ $x \leq -a$, მაშინ ორივეგან უნდა ავიღოთ „-“ ნიშანი.

ამიტომ ორივე შემთხვევაში, გვაქვს.

$$|MF_1 - MF_2| = \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x + a = 2a.$$

მაშასადამე, (1) არის (3)-ის შედეგი - (3) ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლებაა.

ჰიპერბოლა ორი ნაწილისაგან შედგება:

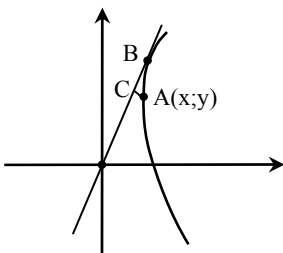


ჰიპერბოლის ასიმპტოტებია წრფეები: $y = \frac{b}{a}x$ და $y = -\frac{b}{a}x$. ისინი სიბრტყეს ოთხ

ნაწილად ჰყოფს, რომელთაგან 2-ში ჰიპერბოლაა მოთავსებული. ჰიპერბოლის წერტილებსა და შესაბამის ასიმპტოტას შორის მანძილი ნულისაგან მისწრაფვის, როცა წერტილის აბსცისა უსასრულოდ იზრდება.

მაგალითად, განვიხილოთ ჰიპერბოლის მარჯვენა შტო

და შესაბამის ასიმპტოტა, $y = \frac{b}{a}x$ წრფე.



ცხადია, თუ $A(x;y)$ ძევეს ჰიპერბოლაზე, მაშინ $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. თუ B წერტილის კოორდინატებია (x,y) , მაშინ, ცხადია,

$$y_1 = \frac{b}{a}x.$$

მაშასადამე,

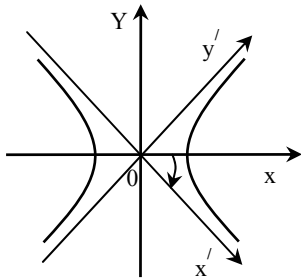
$$AB = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $AB \rightarrow 0$, როცა $x \rightarrow \infty$, მაშინ, ცხადია

$$AC \rightarrow 0, \text{ როცა } x \rightarrow \infty.$$

ტოლფერდა ჰიპერბოლა და მისი განტოლება. ტოლფერდა ჰიპერბოლა ეწოდება ჰიპერბოლას, რომელიც ნახევარდერძები $-a$ და b რიცხვები ტოლია.

ტოლფერდა ჰიპერბოლის განტოლებაა:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ ანუ } x^2 - y^2 = a^2$$

მისი ასიმპტოტებია წრფეები: $y = x$ და $y = -x$ განვიხილოთ კოორდინატთა სისტემა $x'Oy'$, რომელიც მიიღება xOy სისტემისგან $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ კუთხით მობრუნებით.

მაშინ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები მიიღებს

სახეს:

$$x = x' \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - y' \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = x' \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - y' \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

მაშინ $x^2 - y^2 = a^2$ განტოლებიდან მივიღებთ

$$\left(x' \frac{1}{\sqrt{2}} + y' \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(-x' \frac{1}{\sqrt{2}} + y' \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2$$

აქედან მივიღებთ:

$$x'y' = \frac{a^2}{2}$$

ანუ

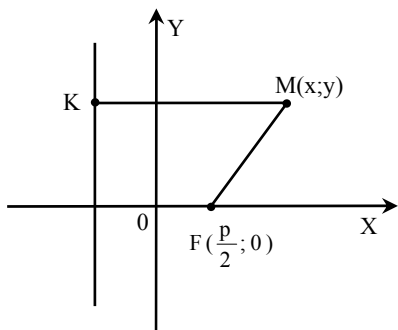
$$x'y' = k.$$

თუ ცვლადებისთვის x, y აღნიშვნებს დავუბრუნდებით, მივიღებთ:

$$xy = k,$$

მისთვის Ox და Oy ღერძები ასიმპტოტებია.

პარაბოლა ეწოდება იმ წერტილთა სიმრავლეს სიბრტყეზე, რომელთაგან თითოეული ტოლი მანძილითაა დაშორებული მოცემული წერტილიდან და მოცემული წრფიდან.



ანუ

წრფეს ეწოდება პარაბოლის დირექტრისა, წერტილს – ფოკუსი.

Ox ღერძი გაგატაროთ ფოკუსზე დირექტრისის მართობულად, Oy ღერძი – მათ შორის შუა წერტილზე. ფოკუსიდან დირექტრისამდე მანძილი აღვნიშნოთ p-თი. M(x;y) წერტილი მდებარეობს პარაბოლაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა M-დან მანძილი დირექტრისამდე და ფოკუსამდე ტოლია:

$$MF = MK \quad (1)$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

აქედან მივიღებთ:

$$y^2 = 2px \quad (2)$$

(2) არის (1)-ის შედეგი.

თუ M(x;y)-ის კოორდინატები აკმაყოფილებს (2) პირობას, მაშინ $y^2 = 2px$, ხოლო

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2} \quad (x \geq 0)$$

ე.ი. (1) არის (2)-ის შედეგი.

$y^2 = 2px$ პარაბოლის კანონიკური განტოლებაა. ამ განტოლების მიხედვით შეიძლება ვიმსჯელოთ პარაბოლის ფორმაზე და მდებარეობაზე. მაგალითად, ცხადია $x \geq 0$. მისი სიმეტრიის ღერძი Ox ღერძია (სურ. 1).

თუ კოორდინატთა სისტემას სხვანაირად შევარჩევთ – განტოლებას სხვა სახე ექნება.

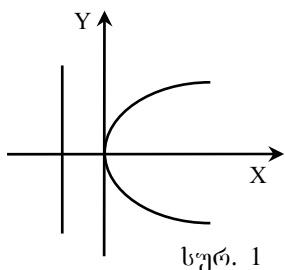
მაგალითად, თუ პარაბოლა ისეა განლაგებული, როგორც სურ. 2-ზეა გამოსახული, მაშინ მისი განტოლება იქნება $x^2 = 2py$.

სურ. 3-ზე აქ წარმოდგენილია პარაბოლა, რომლის განტოლება ასე ჩაიწერება: $y^2 = -2px$ ($p > 0$).

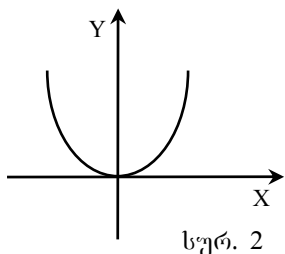
სურ. 4-ზე გამოსახული პარაბოლის განტოლებაა $x^2 = -2px$ ($p > 0$).

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) განტოლებით მოიცემა პარაბოლა, რომლის სიმეტრის ღერძია $x = -\frac{b}{2a}$ წრფე და რომლის წვე-

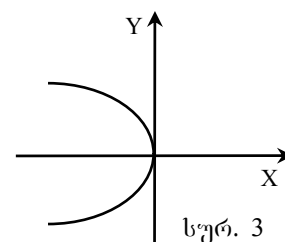
როა $O\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.



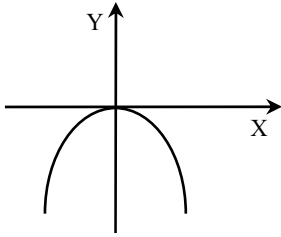
სურ. 1



სურ. 2



სურ. 3



სურ. 4

მართლაც,

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

განვიხილოთ პარალელური გადატანა:

$$x = x' - \frac{b}{2a}$$

$$y = y' + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

მაშინ მივიღებთ:

$$y' = a(x')^2$$

$$(x')^2 = \frac{1}{a}y'$$

თუ $\frac{1}{a} = 2p$, მივიღებთ

$$(x')^2 = 2py'.$$

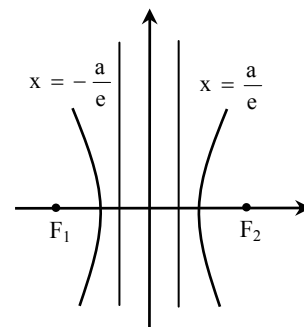
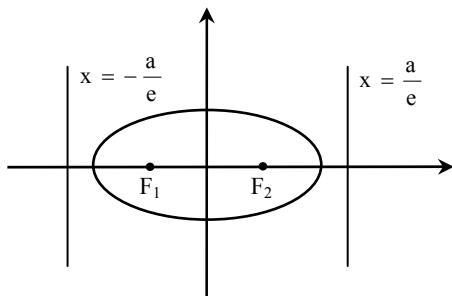
ეს პარაბოლის განტოლებაა, მისი სიმეტრიის ღერძი ახალი Oy' ღერძია.

ელიფსისა და ჰიპერბოლის დირექტრისები.

ელიფსის ექსცენტრისიტეტი რიცხვი: $e = \frac{c}{a}$, $e < 1$. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი

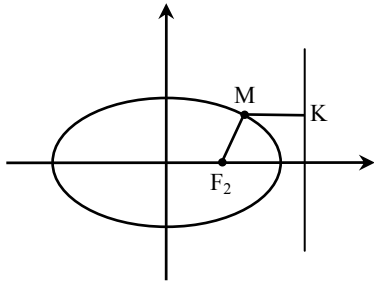
რცხვი: $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$.

დირექტრისების განტოლებებია $x = \frac{a}{e}$ და $x = -\frac{a}{e}$.



$x = -\frac{a}{e}$ არის F_1 -ის შესაბამისი დირექტრისაა, $x = \frac{a}{e}$ არის F_2 -ის შესაბამისი დირექტრისა.

თეორემა. ელიფსის ან ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსამდე და შესაბამის დირექტრისამდე მანძილების შეფარდება ექსცენტრისიტეტის ტოლია.



განვიხილოთ ელიფსის შემთხვევა; ავიღოთ მარჯვენა ფოკუსი: $F_2(c;0)$ და შესაბამისი დირექტრისა $x = \frac{a}{e}$.

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ

$$MF_2 = a - ex.$$

ახლა ვიპოვოთ დირექტრისამდე მანძილი: MK.

ცხადია

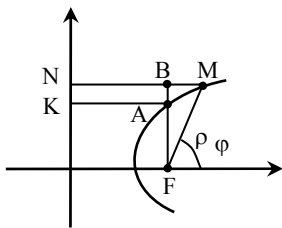
$$MK = \left| x - \frac{a}{e} \right| = \left| \frac{ex - a}{e} \right| = \frac{a - ex}{e}.$$

ე.ი.

$$\frac{MF_2}{MK} = e.$$

ჰიპერბოლის შემთხვევა ანალოგიურად განიხილება.

მეორე რიგის წირთა განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში



განვიხილოთ პოლარულ კოორდინატთა სისტემა, რომლის პოლუსი ერთ-ერთ ფოკუსშია (პარაბოლის შემთხვევაში ფოკუსი ერთადერთია). პოლარული ღერძი იყოს დირექტრისის მართობული და მიმართული იყოს მისგან შესაბამისი ფოკუსისკენ. გავავლოთ ფოკუსზე, წრფე, რომელიც პარალელურია დირექტრისის. ვთქვათ, ის კვეთს წირს A წერტილში. აღვნიშნოთ: $FA = p$ (პარაბოლისთვის p შემთხვევას მის პარამეტრს).

$$MF = \rho$$

მანძილი დირექტრისამდე:

$$MN = MB + BN$$

B არის AF და MN-ის გადაკვეთის წერტილი. ცხადია, $AK = BN$.

ვიცით, რომ

$$\frac{AF}{AK} = e, \quad \text{ანუ} \quad \frac{p}{AK} = e, \quad AK = \frac{p}{e}.$$

მაშასადამე,

$$MN = \rho \cos \phi + \frac{p}{e}$$

მაგრამ $\frac{\rho}{MN} = e$.

ე.ი. $\rho = e(\rho \cos \varphi + \frac{p}{e})$

$$\rho - \rho e \cos \varphi = p$$

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}.$$

ეს არის ელიფსის, ჰიპერბოლის და პარაბოლის განტოლება პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში.

მეორე რიგის წირები და ზედაპირები

მეორე რიგის წირი ვუწოდეთ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები გარკვეულ სისტემაში აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

ამასთანავე, აღვნიშნოთ, რომ ეს ცნება (მეორე რიგის წირის) არ არის დამოკიდებული სისტემის შერჩევაზე.

განვიხილოთ ახალი სისტემა, რომელიც მიიღება ძველისაგან φ კუთხით მობრუნების შედეგად:

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

ჩავსვათ (1)-ში, მივიღებთ განტოლებას x' და y' -ის მიმართ:

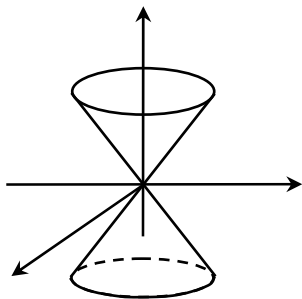
$$(A')^2 + 2B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = D \quad (2)$$

ამასთანავე, გვაქვს

$$2B' = -2A \cos \varphi \sin \varphi + 2C \cos \varphi \sin \varphi - 2B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

მეორე რიგის კონუსური ზედაპირი ეწოდება ზედაპირს, რომელსაც გარკვეულ Oxyz კოორდინატთა სისტემაში შეესაბამება განტოლება:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (2)$$



თუ $a = b$, მაშინ იგი ასეც ჩაიწერება:

$$x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0 \quad (3)$$

ეს ზედაპირი მიიღება Oz ღერძის გარშემო წრფის ბრუნვით.

$z = h$ სიბრტყით კვეთაში მიიღება წრეწირი:

$$x^2 + y^2 = k^2 h^2$$

ელიფსოიდი ეწოდება ზედაპირს, რომელსაც გარკვეულ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში შეესაბამება განტოლება:

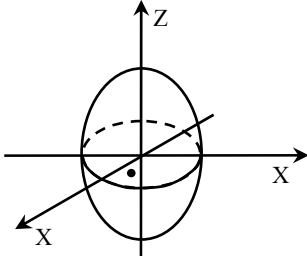
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

სადაც a, b, c დადებითი რიცხვებია.

განვიხილოთ შემთხვევა: $a=b$. მაშინ გვაქვს:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



იგი მიიღება

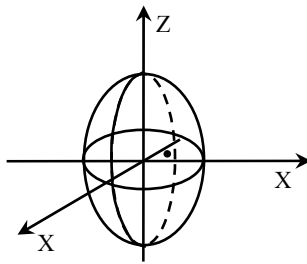
$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

ელიფსის ბრუნვით Oz ღერძის გარშემო.

ახლა ზოგადი შემთხვევა განვიხილოთ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

მისი კვეთა Oxy სიბრტყით (ანუ $z=0$ სიბრტყით) არის ელიფსი:



$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

ანალოგიურად, $x=0$ და $y=0$ სიბრტყეებით კვეთისას მივიღებთ ელიფსებს.

ახლა განვიხილოთ კვეთა $z=h$ სიბრტყით, რომელიც პარალელურია Oxy სიბრტყის:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z = h. \end{cases}$$

თუ $|h| < c$, მაშინ $1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$ და კვეთაში მიიღება ელიფსი:

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1.$$

თუ $|h| = c$, კვეთაში წერტილები მიიღება: $(0,0,c)$ და $(0,0,-c)$.

თუ $|h| > c$, მაშინ კვეთაში ცარიელი სიმრავლე „მიიღება“.

ანალოგიურად განვიხილება კვეთები $x=h$ და $y=h$ სიბრტყეებით.

a , b და c -ს ჰქვია ელიფსოიდის ნახევარღერძები. თუ $a = b = c$, მიიღება სფერო:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

ჰიპერბოლოიდები

ცალკადაა ჰიპერბოლოიდი ეწოდება ზედაპირს, რომელსაც გარკვეულ კოორდინატთა სისტემაში შეესაბამება განტოლება:

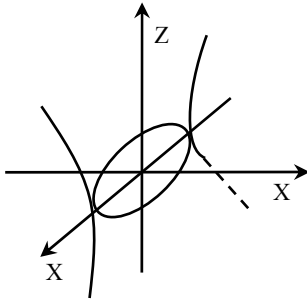
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1)$$

სადაც a, b, c დადებითი რიცხვებია.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა: $a = b$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

ამ განტოლებით მოიცემა ზედაპირი, რომელიც მიიღება



$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

ჰიპერბოლის ბრუნვით Oz ღერძის გარშემო.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

მისი კვეთა Oxy სიბრტყით არის ელიფსი:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყით კვეთაში მიიღება ელიფსი:

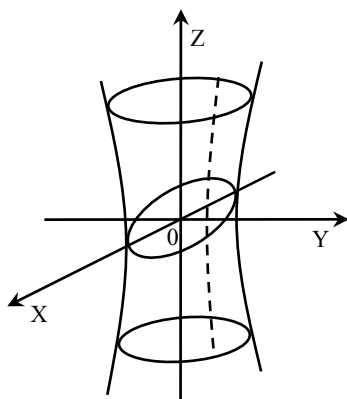
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Oxz სიბრტყით კვეთაში მიიღება ჰიპერბოლა

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Oyz სიბრტყით კვეთაში მიიღება ჰიპერბოლა:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0. \end{cases}$$



ორკალთა ჰიპერბოლოიდი ეწოდება ზედაპირს, რომელსაც გარკვეულ სისტემაში შეესაბამება განტოლება

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

a, b, c დადებითი რიცხვებია.

განვიხილოთ ამ ზედაპირის კვეთები:

ა) Oyz სიბრტყით ($x = 0$):

$$\begin{cases} -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0. \end{cases}$$

ამ სისტემას არა აქვს ამონახსნი, კვეთა არა გვაქვს.

ბ) Oyz სიბრტყის პარალელური სიბრტყით:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1 \\ x = h. \end{cases}$$

კვეთაში მიიღება ელიფსი, როცა $|h| > a$.

გ) Oxy სიბრტყით კვეთაში

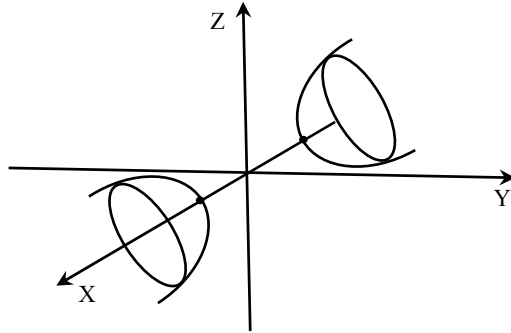
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

მიიღება ჰიპერბოლა.

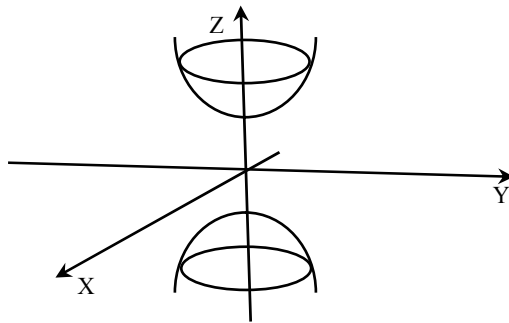
დ) Oxz სიბრტყით კვეთა:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

მიიღება ჰიპერბოლა



შეგნიშნოთ, რომ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, ანუ $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ განტოლებითაც ორკალთა ჰიპერბოლოიდი მოიცემა.



ელიფსური პარაბოლოიდი არის ზედაპირი, რომელიც გარკვეულ კოორდინატთა სისტემაში მოიცემა განტოლებით:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0.$$

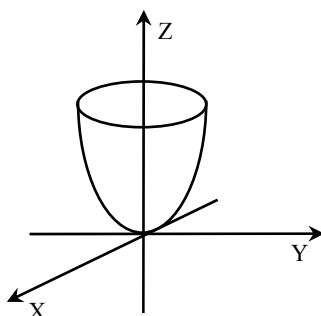
თუ $p = q$, მივიღებთ

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

იგი მიიღება

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$$

პარაბოლის ბრუნვით Oz ღერძის გარშემო.



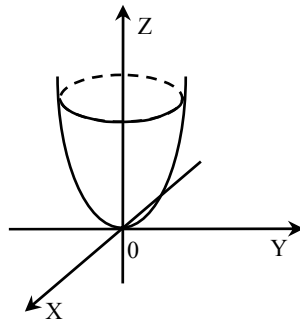
ახლა, ვთქვათ $p \neq q$, გვაქვს,

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

ამ შემთხვევაში კი Oxy სიბრტყით კვეთაში წერტილი მიიღება. თუ $z=h$, მაშინ გვაქვს:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h. \end{cases}$$

თუ $h < 0$, მაშინ კვეთა არ მიიღება. თუ $h > 0$ კვეთაში ელიფსი მიიღება. h -ის ზრდასთან ერთად ელიფსის ნახევარღერძები იზრდება.



$y = h$ სიბრტყით კვეთაში მიიღება პარაბოლა:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} = 2z - \frac{h^2}{q} \\ y = h. \end{cases}$$

იგი მიიღება

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} = 2z \\ y = 0 \end{cases}$$

პარაბოლისაგან პარაბოლური გადატანით (Oxz -ის პარაბოლურად).

ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი ეწოდება ზედაპირს, რომელიც გარკვეულ კოორდინატთა სისტემაში მოიცემა განტოლებით:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0.$$

განვიხილოთ კვეთა $z=h$ სიბრტყით:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2hp} - \frac{y^2}{2hq} = 1 \\ z = h \end{cases},$$

$$\text{თუ } h=0 \quad \text{ანუ } \begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ანუ } \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ანუ } \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

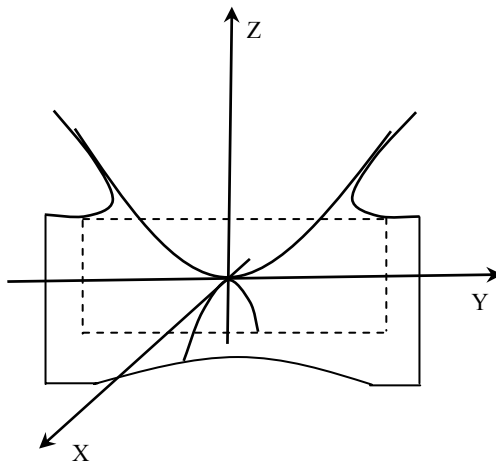
ე.ი. როცა $z = 0$, კვეთაში ურთიერთგადასაკვეთი წრფეები მიიღება;

თუ $h > 0$, მიიღება ჰიპერბოლა:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(\sqrt{2hp})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2hq})^2} = 1 \\ z = h \end{cases}$$

ჰიპერბოლის ნამდვილი ნახევარღერძია $\sqrt{2ph}$.

თუ $h < 0$, კვლავ ჰიპერბოლა მიიღება:



ახლა განვიხილოთ Oxz -ის პარალელური სიბრტყეებით კვეთა: $y = m$ სიბრტყით კვეთა.

თუ $m = 0$, მიიღება პარაბოლა

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$$

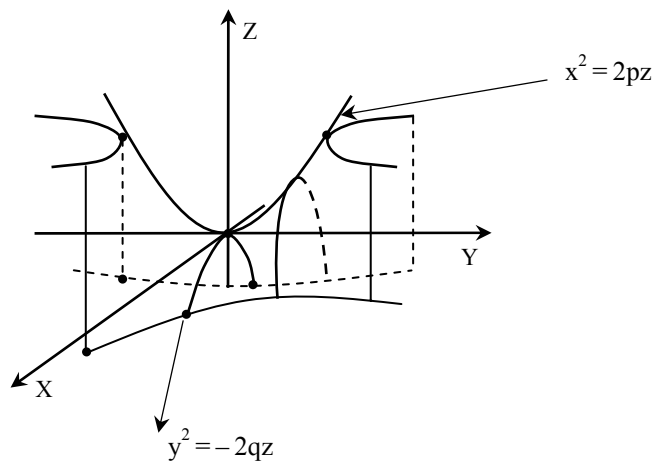
თუ $m \neq 0$, მიიღება პარაბოლები:

$$x^2 = 2p\left(z + \frac{m^2}{2q}\right).$$

ხოლო $x = n$ სიბრტყეებით კვეთისას მიიღება პარაბოლები:

$$\begin{cases} y^2 = -2q\left(z + \frac{n^2}{2p}\right), \\ x = n \end{cases} \quad \text{თუ } n = 0 \quad \begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0. \end{cases}$$

საბოლოოდ ასეთი სურათი გვექნება:



II ნაწილი

ბინარული ალგებრული ოპერაცია G სიმრავლეზე ეწოდება ასახვას:

$$f : G \times G \rightarrow G ,$$

ანუ $(x, y) \rightarrow z$, შეიძლება დავწეროთ: $f(x, y) = z$, ან შეიძლება ასე დავწეროთ: $xfy = z$.

წყვილს: $\langle G; f \rangle$ – ეწოდება ჯგუფი, თუ f ოპერაციას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. f ასოციაციურია, ანუ ნებისმიერი a, b, c ელემენტებისთვის G -დან

$$f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c)).$$

შეიძლება ასეც ჩავწეროთ:

$$(afb)fc = af(bfc)$$

2. არსებობს ნეიტრალური ელემენტი e , ანუ ისეთი e ელემენტი, რომ G -ს ყოველი a ელემენტისთვის

$$f(e, a) = f(a, e) = a \quad (efa = afe = a).$$

3. ყოველი a ელემენტისთვის G -დან არსებობს სიმეტრიული (შებრუნებული, მოპირდაპირე) ელემენტი, ანუ ისეთი b ელემენტი, რომლისთვისაც

$$f(a, b) = f(b, a) = e.$$

f ოპერაციას ეწოდება ჯგუფის ოპერაცია, G სიმრავლის ელემენტებს ეწოდება ჯგუფის ელემენტები.

მაშასადამე, ჯგუფი არის წყვილი, რომელიც შედგება G სიმრავლისა და მასზე განსაზღვრული f ოპერაციისგან, რომელსაც აქვს სამი თვისება (ჩამოთვლილია ზემოთ).

მაშასადამე, სიმრავლეზე ოპერაციის მოცემა ნიშნავს ასახვის მოცემას, რომელიც სიმრავლის ელემენტების ნებისმიერ წყვილს (დალაგებულ წყვილს) უსაბამებს ამავე სიმრავლის ელემენტს.

ჯგუფის ოპერაციისთვის სხვადასხვა აღნიშვნებს იყენებენ. ეს ოპერაცია აღვნიშნოთ $+$ ან \cdot სიმბოლოებით. მაგალითად, წყვილი $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$ არის ჯგუფი.

თუ P დადებითი ნამდვილი რიცხვთა სიმრავლეა, მაშინ სტრუქტურა $\langle P; \cdot \rangle$ არის ჯგუფი.

ჯგუფის თვისებები. ყოველ ჯგუფში ნეიტრალური ელემენტი ერთადერთია.

ჯგუფის ოპერაციისთვის გამრავლების სიმბოლო გამოვიყენოთ (ამ სიმბოლოს, როგორც წესი, არც კი ჩავწერთ ხოლმე) და ვაჩვენოთ, რომ ნეიტრალური ელემენტი ერთადერთია: ვთქვათ, e და e' ორი ნეიტრალური ელემენტია, მაშინ

$$e = e \cdot e' = e' \quad \text{ე.ი.} \quad e = e'.$$

ჯგუფში ყოველი ელემენტისთვის არსებობს ერთადერთი სიმეტრიული. a -ს სიმეტრიული აღვნიშნოთ a^{-1} -ით. ვთქვათ გვაქვს მეორე სიმეტრიულიც – b . მაშინ

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e ,$$

$$a \cdot b = b \cdot a = e .$$

ამრიგად,

$$a^{-1} = a^{-1} \cdot e = a^{-1}(a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a)b = e \cdot b = b.$$

ყოველ ჯგუფში შეიძლება გაყოფის შესრულება, ანუ ნებისმიერი a და b -სთვის, მოიძებნება x და y ისეთი, რომ

$$ax = b \quad \text{და} \quad ya = b.$$

მართლაც,

$$ax = b \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}b \Rightarrow e \cdot x = a^{-1}b \Rightarrow x = a^{-1}b,$$

მეორეს მხრივ $a(a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1})b = b$.

ანალოგიურად, მეორე განტოლებისთვისაც მივიღებთ ერთადერთ y -ს, $y = ba^{-1}$.

ნებისმიერ ჯგუფში შეიძლება განვახორციელოთ შეკვეცა მარცხნიდან ან მარჯვნიდან:

$$\text{თუ } a \cdot u = a \cdot v, \text{ მაშინ } u = v$$

და

$$\text{თუ } z \cdot a = s \cdot a, \text{ მაშინ } z = s.$$

ნებისმიერ ჯგუფში ასოციაციურობის თვისების განზოგადოებით ვღებულობთ: ყოველ ნამრაველში ფრჩხილების დასმა ნებისმიერ ადგილას შეიძლება.

სამი თანამამრავლის შემთხვევა ასოციაციურობის თვისებაა:

$$a(bc) = (ab)c.$$

ოთხი თანამამრავლის შემთხვევაში გვაქვს:

$$a(b(cd)) = a((bc)d) = (ab)(cd) = (a/bc)d = ((a,b)c)d.$$

შეგვიძლია განვიხილოთ ტოლი თანამამრავლების ნამრავლი, ანუ ხარისხი:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-ჯერ}}$$

ამასთანავე,

$$a^1 = a, \quad a^0 = e \quad \text{და} \quad a^{-n} = (a^{-1})^n.$$

შეიძლება შევამოწმოთ მთელი ხარისხის თვისებები.

a ელემენტის რიგი ეწოდება უმცირესეს დადებით d რიცხვს, რომლისთვისაც

$$a^d = e$$

თუ a -ს ყველა ხარისხი განსხვავებულია, მაშინ ასეთი d არ არსებობს და ამ a -ს ეწოდება **უსასრულო რიგის ელემენტი**.

ქვეჯგუფი. $\langle H, h \rangle$ სტრუქტურას ეწოდება $\langle G, g \rangle$ ჯგუფის ქვეჯგუფი, თუ $H \subset G$ და h და g ოპერაციები ერთმანეთს ემთხვევა H სიმრავლეზე.

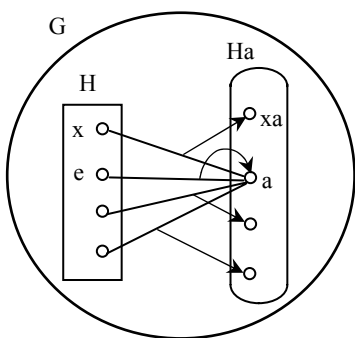
$\langle H, h \rangle$, არის ქვეჯგუფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა H არის G -ს ქვესიმრავლე, რომელზეც შესრულებულია ჯგუფის სამი პირობა (ასოციაციურობა, ნეიტრალურის არსებობა, სიმეტრიულის არსებობა).

მაგალითები. 1. განვიხილოთ $\langle Z, + \rangle$ ჯგუფი/მთელ რიცხვთა სიმრავლე შეკრების მიმართ. ქვეჯგუფებია. ა) ლუწ რიცხვთა სიმრავლე; ბ) სიმრავლე, რომელიც მხოლოდ ნულისაგან შედგება.

2. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე. შეკრების მიმართ ქვეჯგუფებია: ა) $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$, ბ) მთელ რიცხვთა სიმრავლის ქვეჯგუფები, გ) რაციონალური რიცხვებია, რომლებიც წარმოიღვინება კენტმნიშვნელიანი წილადებით.

3. ნულისაგან განსხვავებულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე გამრავლების მიმართ. ქვეჯგუფებია: ა) დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე გამრავლების მიმართ, ბ) ნულისაგან განსხვავებულ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე გამრავლების მიმართ, გ) სიმრავლე, რომლის ელემენტებია მხოლოდ -1 და 1 (გამრავლების მიმართ).

ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი



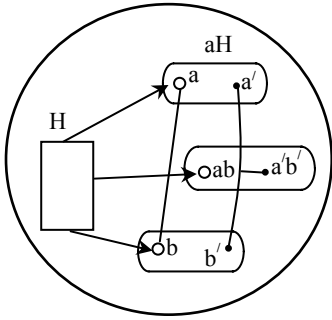
ვთქვათ, G ნებისმიერი ჯგუფია, H – მისი ქვეჯგუფი. შევარჩიოთ G -ში ელემენტი a და შევადგინოთ ყველა შესაძლო ნამრავლი xa , x არის H -ს ნებისმიერი ელემენტი, ამ ნამრავლების სიმრავლეს ასე აღვნიშნავთ Ha . მას ეწოდება G ჯგუფის მარჯვენა მოსაზღვრე კლასები H ქვეჯგუფის მიმართ.

ax ელემენტების სიმრავლეს, სადაც x არის H -ს ნებისმიერი ელემენტი, a არის G -ს ფიქსირებული ელემენტი, ეწოდება მარცხენა მოსაზღვრე კლასი G ჯგუფისა H ქვეჯგუფის მიმართ. ჯგუფის ყოველ ელემენტი ეკუთვნის ზუსტად ერთ მარჯვენა მოსაზღვრე (მარცხენა მოსაზღვრე) კლასს.

თუ ჯგუფი კომუტაციურია, მაშინ xa და ax ელემენტები ტოლია – მარცხენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლე ემთხვევა, მარჯვენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლეს.

განვიხილოთ, მაგალითად, მთელ რიცხვთა ადიციური ჯგუფი (მთელ რიცხვთა ჯგუფი შეკრების მიმართ). ქვეჯგუფი H იყოს ლუწო რიცხვთა სიმრავლე. H -ს მიმართ მოსაზღვრე კლასს მივიღებთ, როცა განვიხილავთ $a+x$ სახის ელემენტების სიმრავლეს, a არის \mathbb{Z} -ის ფიქსირებული ელემენტი, x არის ნებისმიერი ლუწო რიცხვი. ორი შემთხვევა გვაქვს: a ლუწოა, ან a კენტია. თუ a ლუწოა მაშინ მოსაზღვრე კლასი შეიცავს ყველა ლუწო რიცხვს, თუ a კენტია, მოსაზღვრე კლასი შეიცავს კენტ რიცხვებს. ახლა განვიხილოთ $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$ ჯგუფი, და ქვეჯგუფი – 3 -ის ჯერადების სიმრავლე: $H = 3 \cdot \mathbb{Z}$. მოსაზღვრე კლასი, რომელიც შეიცავს 0 -ს ემთხვევა H ქვეჯგუფს. აღვნიშნოთ იგი $\bar{0}$. ის მოსაზღვრე კლასი, რომელიც შეიცავს 1 -ს, შედგება რიცხვებისგან, რომელიც მიიღება 1 -ისადმი 3 -ის ჯერადების მიმატებით. აღვნიშნოთ იგი $\bar{1}$ -თი. მოსაზღვრე კლასი, რომელსაც ეკუთვნის 2 , არის კლასი, რომელიც 3 -ზე გაყოფისას იძლევა ნაშთს 2 -ს, $\bar{2}$. მაშასადამე, იმ კითხვაზე პასუხის გასაცემად, რომელ კლასს ეკუთვნის ორი რიცხვის ჯამი, დამოკიდებულია არა ამ რიცხვებზე, არამედ იმ ნაშთებზე, რომლებიც მიიღება მათი 3 -ზე გაყოფისას.

G ჯგუფის H ქვეჯგუფს ეწოდება **ნორმალური** გამყოფი (ინვარიანტული ქვეჯგუფი), თუ ნებისმიერი ორი aH და bH მოსაზღვრე კლასისთვის $a'b'$ ნამრავლი, სადაც $a' \in aH$, $b' \in bH$, ყოველთვის ეკუთვნის მოსაზღვრე კლასს: abH .



კომუტაციურ ჯგუფებში, ყოველი ჯგუფი არის ნორმალური გამყოფი.

H ქვეჯგუფი, საზოგადოდ, არის ნორმალური გამყოფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი მარცხენა მოსაზღვრე კლასი ემთხვევა, რომელიმე მარჯვენა მოსაზღვრე კლასს.

ანუ G-ს ნებისმიერი a ელემენტისთვის aH და Ha კლასები ერთმანეთს ემთხვევა (სხვას ვერ დაემთხვევა); ანუ H-ში ყველა x-სთვის უნდა არსებობდეს ისეთი z ამ სიმრავლიდან, რომ $ax = za$, ანუ $z = axa^{-1}$, ანუ H ნორმალური გამყოფია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი a-სთვის G-დან ნებისმიერი x-სთვის H-დან $axa^{-1} \in H$.

ნორმალურ ქვეჯგუფს ასეთი განმარტებაც შეიძლება მივცეთ:

H ნორმალური ქვეჯგუფია G-სი მაშინ და **მხოლოდ** მაშინ, როცა aH-ის და bH-ის ელემენტების ნამრავლისაგან შედგენილი სიმრავლე არის $ab \cdot H$. მაშასადამე, მარცხენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლეში შეიძლება შემოვიტანოთ ოპერაცია, აქ aH-ის სიმეტრიული იქნება $a^{-1}H$, ნეიტრალური ელემენტი იქნება H. (G, f) ჯგუფის მარცხენა მოსაზღვრე კლასებისგან შედგენილ ჯგუფს H ქვეჯგუფის მიმართ მოცემული ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი ეწოდება და ასე აღინიშნება: G/H.

მაგალითი: Z – მთელ რიცხვთა სიმრავლეა, H 3-ის ჯერადების სიმრავლეა. ფაქტორ-ჯგუფი არსებობს, რადგან H ნორმალური გამყოფია (Z არის კომუტაციური ჯგუფი).

აქ მოსაზღვრე კლასებია: $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$. აქ შეიძლება განვმარტოთ შეკრების ოპერაცია:

$$\begin{array}{lll} \bar{0} + \bar{1} = \bar{1} & \bar{1} + \bar{2} = \bar{0} & \bar{2} + \bar{2} = \bar{1} \\ \bar{0} + \bar{2} = \bar{2} & \bar{1} + \bar{1} = \bar{0} & \end{array}$$

ეს ოპერაცია კომუტაციურია.

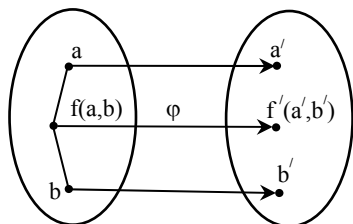
ჯგუფთა იზომორფიზმი

ვიტყვი, რომ $\langle G; f \rangle$ ჯგუფი იზომორფულია $\langle G'; f' \rangle$ ჯგუფის, თუ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ϕ G-სა და G'-ს შორის ისეთი, რომ, თუ $\phi(a) = a'$, $\phi(b) = b'$ მაშინ

$$\phi(f(a; b)) = f'(a'; b') \quad (\phi(afb) = a'f'b').$$

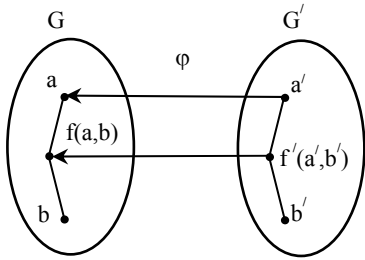
ამ შემთხვევაში ვწერთ:

$$G \cong G'$$



ჰომომორფიზმი (G, f) ჯგუფის $\langle G', f' \rangle$ ჯგუფში ეწოდება ისეთ ϕ ასახვას, რომლისთვისაც გვაქვს:

$$\phi(f(a, b)) = f'(a', b'),$$



სადაც $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$.

თუ ჯგუფის ოპერაციებს ორივე ჯგუფში ერთნაირად ჩავწერთ, მაშინ შეიძლება მოკლეთ ასე ჩავწეროთ:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

ვთქვათ H არის G -ს ნორმალური ქვეჯგუფი. მაშინ G/H ფაქტორ-ჯგუფის ელემენტები მოსაზღვრე კლასებია H ქვეჯგუფის მიმართ. ყოველ ელემენტს შევუსაბამოთ შესაბამისი მოსაზღვრე კლასი. გვექნება ასახვა: $\varphi: G \rightarrow G/H$, ისეთი, რომ $\varphi(a) = aH$.

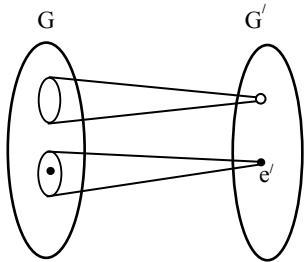
ამასთანავე,

$$\varphi(ab) = aH \cdot bH = abH \quad (H \text{ ნორმალური გამყოფია}).$$

ეს φ ასახვა არის იზომორფიზმი.

მნიშვნელოვანია ჰომომორფიზმის შემდეგი ორი თვისება: თუ φ არის ჰომომორფიზმი G ჯგუფია G' ჯგუფში, მაშინ

$\varphi(e) = e'$ (e არის G -ს ნეიტრალური, e' არის G' -ის ნეიტრალური ელემენტი).



φ ჰომომორფიზმის დროს ყველა იმ ელემენტის სიმრავლე G -დან, რომლებიც აისახება e' -ში, ქმნის ჯგუფს. მათ შორისაა e ელემენტი რადგან $\varphi(e) = e'$. ეს ჯგუფი არის G -ს ნორმალური ქვეჯგუფი და მას ეწოდება φ ჰომომორფიზმის ბირთვი: $\text{Ker}\varphi$. G -ს ყველა სახეების სიმრავლე (მნიშვნელობათა სიმრავლე) აღვნიშნოთ $\text{Im}\varphi$ -თი.

თეორემა ჰომომორფიზმის შესახებ.

თუ $\varphi: G \rightarrow G'$ ნებისმიერი ჰომომორფიზმია, მაშინ არსებობს იზომორფიზმი

$$\psi: (G / \text{Ker}\varphi) \cong \text{Im}\varphi,$$

რომლის დროსაც გვაქვს:

$$\psi(a \cdot \text{Ker}\varphi) = a.$$

რგოლი. ვთქვათ, K სიმრავლეზე ორი ალგებრული ოპერაციაა განსაზღვრული, ე.ი. გვაქვს ალგებრული სტრუქტურა ორი ოპერაციით: $\langle K; +; \cdot \rangle$. ამასთანავე, ვთქვათ, $\langle K; + \rangle$ სტრუქტურა კომუტაციური ჯგუფია, მეორე ოპერაციას კი აქვს დისტრიბუციულობის თვისება: ნებისმიერი სამი a, b და c -სთვის $(a+b)c = ac+bc$. თუ მეორე ოპერაციას („გამრავლების“ ოპერაციას) აქვს კომუტაციურობის თვისება, მაშინ რგოლს ეწოდება კომუტაციური რგოლი.

მაგალითი 1. მთელ რიცხვთა რგოლი: $\{Z; +; \cdot\}$.

მაგალითი 2. ლუწო რიცხვთა რგოლი, ეს რგოლი, ისევე, როგორც მთელ რიცხვთა რგოლი ასოციაციური რგოლია, გამრავლების ოპერაციას აქვს ასოციაციურობის თვისება. ეს რგოლი კომუტაციური რგოლია.

მაგალითი 3. რაციონალურ რიცხვთა რგოლი კომუტაციური რგოლია.

მაგალითი 4. მრავალწევრთა რგოლი მთელი კოეფიციენტებით.

გამოსახულებას

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

სადაც a_0, a_1, \dots, a_n მთელი რიცხვებია ეწოდება **მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი**.

ვიტყვი, რომ $f(x)=g(x)$, სადაც $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx$, თუ $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1$, ... ეს ტოლობები სრულდება მანამ, სანამ არსებობს კოეფიციენტები a_i და b_i . თუ a_i ან b_i არ გვაქვს, მაშინ მეორე მრავალწევრის კოეფიციენტი იმავე ნომრით ან არ არსებობს ან ნულია. მაგალითად, $2 + 3x$ და $2 + 3x + 0x^2$ მრავალწევრები ტოლია.

$f(x) + g(x) = h(x)$ ეწოდება მრავალწევრს:

$$f(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

ვიგულისხმეთ, რომ $n \geq k$ და $g(x)$ -ის კოეფიციენტები, რომელთა ნომერი შეიძლება იყოს k -ზე მეტი, ნულია.

შეკრების მიმართ მრავალწევრები ქმნის კომუტაციურ ჯგუფს.

ნამრავლი $f(x) \cdot g(x) = k(x)$ ეწოდება მრავალწევრს:

$$k(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 \dots + a_n b_k x^{n+k}.$$

გამრავლების ოპერაცია ასოციაციურია და კომუტაციურია. ამასთანავე, გამრავლებისა და შეკრების ოპერაციები ერთმანეთთან დაკავშირებულია დისტრიბუციულობის წესით. მაშასადამე, მრავალწევრები მთელი კოეფიციენტებით კომუტაციური რგოლია.

მაგალითი 5. რაციონალურკოეფიციენტებიანი მრავალწევრების რგოლი.

მაგალითი 6. ნამდვილკოეფიციენტებიან მრავალწევრთა რგოლი.

მაგალითი 7. მრავალწევრები კომპლექსური კოეფიციენტებით ქმნის რგოლს.

შეკრების ნეიტრალური ელემენტი 0 იმავე თვისებისაა ნებისმიერ რგოლში, რა თვისებაც მას აქვს მთელ რიცხვთა რგოლში: ნებისმიერი ელემენტის ნამრავლთა 0-ზე არის 0. მართლაც $b = b + 0$, მაშინ $ab = a(b + 0)$, $ab = ab + a \cdot 0$, აქედან $a \cdot 0 = 0$.

თუმცა, ნებისმიერ რგოლს შეიძლება ჰქონდეს განსხვავებული თვისებებიც. მაგალითად, ნაშთთა კლასები მოდულით 6, რომელსაც ასე ჩავწერთ: $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$ არის რგოლი და აქ გვაქვს:

$$\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}.$$

ე.ი. არანულოვანი ელემენტების ნამრავლი ნულოვანი ელემენტია.

თუ რგოლის ორი არანულოვანი ელემენტის ნამრავლი ნულია, მაშინ ამ ელემენტებს ნულის გამყოფები ეწოდება. თუ რგოლში არ არის ნულის გამყოფები, ასეთ რგოლს ეწოდება უნულგამყოფო რგოლი.

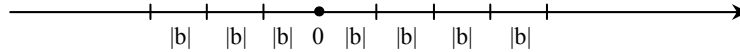
მთელ რიცხვთა რგოლი, მრავალწევრთა რგოლი უნულგამყოფო რგოლებია. უნულგამყოფო კომუტაციურ რგოლს ეწოდება **მთელობის არე**. თუ რგოლში არსებობს გამრავლების ოპერაციის ნეიტრალური ელემენტი, ასეთ რგოლს ეწოდება რგოლი ერთეულით.

ვთქვათ, გვაქვს ასოციაციური რგოლი ერთეულით და ყოველი ნულისაგან განსხვავებული ელემენტისთვის არსებობს მისი შებრუნებული, ასეთ რგოლს ტანი ეწო-

დება. თუ ტანი კომპუტაციურიცაა, მაშინ ასეთ ტანს ველი ეწოდება. მაშასადამე, ველი არის კომპუტაციური, სოციაციური რგოლი, ერთეულით, რომლის ყოველ ელემენტს აქვს შებრუნებული. ველში არ არსებობს ნულის გამყოფები.

მაგალითები: ნამდვილ რიცხვთა ველი, კომპლექსურ რიცხვთა ველი.

ნაშთიანი გაყოფა. ჯერ განვიხილოთ ნაშთიანი გაყოფა მთელ რიცხვთა სიმრავლეში.



ვთქვათ, $b \neq 0$. გადავზომოთ რიცხვთა ღერძზე მარჯვნივ და მარცხნივ b -ს ჯერადი რიცხვები. a რიცხვის შესაბამისი წერტილი რომელიმე მონაკვეთში მოხვდება (სიგრძით $|b|$). ვთქვათ, qb უდიდესია b -ს ჯერადებს შორის, რომელიც არ აღემატება a -ს (q შეიძლება უარყოფითაც იყოს). მაშინ $a - bq$ ან ნულია, ან დადებითი რიცხვია და ნაკლებია $|b|$ -ზე.

აღენიშნოთ: $a - bq = r$.

მაშასადამე, ყოველი a და b -სთვის ($b \neq 0$) არსებობს წყვილი q და r რიცხვებისა, რომ

$$a = bq + r, \text{ სადაც } 0 \leq r < |b|.$$

ამასთანავე, შეიძლება ჩვენება, რომ q და r წყვილი ერთადერთია.

განვიხილოთ ახლა მრავალწევრები. მრავალწევრის კოეფიციენტები იყოს რაიმე ველის ელემენტები.

ვთქვათ, მოცემულია ორი მრავალწევრი:

$$f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 5 \quad \text{და} \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$

ვიპოვოთ განაყოფი: $3x^5 : x^3 = 3x^2$.

ავაგოთ ახალი მრავალწევრი:

$$f_1(x) = f(x) - 3x^2g(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 5.$$

გავიმეოროთ იგივე $f_1(x)$ და $g(x)$ -სთვის და ავაგოთ $f_2(x)$; $x^4 : x^3 = x$.

$$f_2(x) = f_1(x) - xg(x) = -4x^3 + 6x^2 + 3x + 5.$$

გავაგრძელოთ პროცესი: $-4x^3 : x^3 = -4$

$$f_3(x) = f_2(x) - (-4)g(x) = 10x^2 + 11x - 7.$$

მაშინ გვაქვს:

$$\begin{aligned} 10x^2 + 11x - 7 &= f_2(x) - (-4)g(x) = f_1(x) - xg(x) - (-4)g(x) = f_1(x) - (x - 4)g(x) = \\ &= f(x) - 3x^2g(x) - (x - 4)g(x) = f(x) - (3x^2 + x - 4)g(x) \end{aligned}$$

ანუ

$$f(x) = (3x^2 + x - 4)g(x) + (10x^2 + 11x - 7).$$

მაშასადამე,

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

სადაც $r(x)$ -ის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$ -ის ხარისხზე.

მაშასადამე, გაყოფას ვაგრძელებთ მანამ, სანამ არ მივიღებთ მრავალწევრს, რომლის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$ -ის ხარისხზე, ან ნულის ტოლ მრავალწევრს მივიღებთ.

თეორემა ნაშთიანი გაყოფის შესახებ. თუ მოცემულია ორი მრავალწევრი $f(x)$ და $g(x)$, მაშინ არსებობს ერთადერთი წყვილი $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრებისა, რომელთათვისაც გვაქვს:

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad (1)$$

სადაც $r(x)$ -ის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$ -ის ხარისხზე, ან $r(x) = 0$.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_s, \quad g(x) = b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + \dots + b.$$

თუ $n < s$, მაშინ შეიძლება დავწეროთ:

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + f(x),$$

სადაც $f(x)$ -ის ხარისხი n ნაკლებია $g(x)$ -ის s ხარისხზე.

ახლა, ვთქვათ, $n \geq s$. განვიხილოთ მრავალწევრი

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_n} g(x) \cdot x^{n-s}.$$

მისი ხარისხი აღენიშნოთ n_1 -ით. ცხადია, $n_1 < n$. მისი უფროსი წევრის კოეფიციენტი იყოს a_{n_1} . თუ $n_1 \geq s$, მაშინ განვიხილოთ მრავალწევრი:

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{a_{n_1}}{b_n} g(x) \cdot x^{n_1-s}.$$

ამ მრავალწევრის ხარისხი იყოს n_2 . მაშინ $n_2 < n$. თუ $n_2 \geq s$ ვიხილავთ მრავალწევრს:

$$f_3(x) = f_2(x) - \frac{a_{n_2}}{b_n} g(x) \cdot x^{n_2-s},$$

სადაც a_{n_2} არის $f_2(x)$ -ის უფროსი წევრის კოეფიციენტი.

ცხადია, $n > n_1 > n_2 > n_3$, სადაც n_3 არის $f_3(x)$ -ის ხარისხი. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, აუცილებლად მივიღებთ $f_k(x)$ მრავალწევრს, რომლის n_k ხარისხი ნაკლები იქნება s -ზე:

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - \frac{a_{n_{k-1}}}{b_n} g(x) \cdot x^{n_{k-1}-s},$$

მიღებული ტოლობების შეკრებით მივიღებთ:

$$f(x) - \left[\frac{a_n}{b_s} x^{n-s} + \frac{a_{n_1}}{b_s} x^{n_1-s} + \dots + \frac{a_{n_{k-1}}}{b_s} x^{n_{k-1}-s} \right] g(x) = f_k(x);$$

მაშასადამე

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \text{ სადაც}$$

$$q(x) = \frac{a_n}{b_s} x^{n-s} + \frac{a_{n_1}}{b_s} x^{n_1-s} + \dots + \frac{a_{n_{k-1}}}{b_s} x^{n_{k-1}-s}, \quad r(x) = f_k(x);$$

მაშასადამე, $r(x)$ -ის ხარისხი ნაკლებია s -ზე.

ახლა დავამტკიცოთ ერთადერთობა. ვთქვათ, კიდევ გვაქვს მრავალწევრთა წყვილი $\overline{q(x)}$ და $\overline{r(x)}$, რომელთათვისაც

$$f(x) = g(x)\overline{q(x)} + \overline{z(x)} \quad (2)$$

(1) და (2)-დან

$$g(x)[q(x) - \overline{q(x)}] = \overline{r(x)} - r(x).$$

თუ $q(x) - \overline{q(x)} \neq 0$, მაშინ $\overline{r(x)} - r(x)$ -ის ხარისხი ნაკლებია s -ზე, ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომი მრავალწევრის ხარისხი კი არ არის ნაკლები s -ზე. ამიტომ $q(x) = \overline{q(x)}$. აქედან $\overline{r(x)} = r(x)$.

ადგილი დასამტკიცებელია გაყოფადობის თვისებები:

1) თუ $h(x)$ არის $g(x)$ -ის გამყოფი, $g(x)$ არის $f(x)$ -ის გამყოფი, მაშინ $h(x)$ არის $f(x)$ -ის გამყოფი.

2) თუ $\varphi(x)$ არის $f(x)$ და $g(x)$ -ის გამყოფი, მაშინ $\varphi(x)$ არის $f(x) \pm g(x)$ მრავალწევრის გამყოფი.

3) თუ $\varphi(x)$ არის $f(x)$ -ის გამყოფი, $g(x)$ ნებისმიერი მრავალწევრია, მაშინ $\varphi(x)$ არის $f(x) \cdot g(x)$ -ის გამყოფი.

4) ნული ხარისხის მრავალწევრი ნებისმიერი მრავალწევრის გამყოფია.

5) თუ $\varphi(x)$ არის $f(x)$ -ის გამყოფი, $c \neq 0$, მაშინ $c\varphi(x)$ არის $f(x)$ -ის გამყოფი.

6) თუ $c \neq 0$, მაშინ $f(x)$ -ის გამყოფი, რომელსაც იგივე ხარისხი აქვს, რაც $f(x)$ -ს, არის $cf(x)$.

ორი მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფი

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება მრავალწევრს, რომელიც არის ამ მრავალწევრების საერთო გამყოფი და ნებისმიერი საერთო გამყოფი მისი გამყოფია.

თუ ამ პროცესს გაავარძლებთ, მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

$$d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x).$$

თუ ამ ტოლობაში $u(x)$ -ის ხარისხი მეტი იქნება $g(x)$ -ის ხარისხზე, მაშინ გამოვიყენებთ ნაშთიან გაყოფას:

$$u(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

სადაც $r(x)$ -ის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$ -ის ხარისხზე.

ამრიგად,

$$d(x) = f(x)r(x) + g(x)(v(x) + f(x)q(x)).$$

აქ $v(x) + f(x)q(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $f(x)$ -ის ხარისხზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში $d(x)$ -ის ხარისხი მეტი იქნება (ან ტოლი) $f(x)g(x)$ -ის ხარისხზე, რაც შეუძლებელია.

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებს ეწოდება ურთიერთმარტივი, თუ მათი უდიდესი საერთო გამყოფი 1-ის ტოლია

$f(x)$ და $g(x)$ ურთიერთმარტივია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრები, რომელთათვისაც

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1.$$

თუ $\varphi(x)$ არის $f(x)g(x)$ -ის გამყოფი და $\varphi(x)$ თანამარტივია $f(x)$ -თან, მაშინ $g(x)$ იყოფა $\varphi(x)$ -ზე.

მართლაც

$$\varphi(x) \cdot u(x) + f(x)v(x) = 1$$

$$\varphi(x)u(x)g(x) + f(x) \cdot g(x)v(x) = g(x).$$

აქედან ჩანს, რომ $\varphi(x)$ არის $g(x)$ -ის გამყოფი.

მრავალწევრის დაშლა დაუყვანად მრავალწევრების ნამრავლად

ვთქვათ, $p(x)$ არის n -ური ხარისხის მრავალწევრი, მისი კოეფიციენტები P ველის ელემენტებია. $p(x)$ -ს ეწოდება P ველზე დაუყვანადი მრავალწევრი, თუ $p(x)$ -ის გამყოფია მხოლოდ P ველის ნებისმიერი ნულოვანისგან განსხვავებული ელემენტი, ან თვით $f(x)$ მრავალწევრის ნამრავლი ასეთ ელემენტზე. სხვა მრავალწევრი, რომლის კოეფიციენტები P ველიდანაა, არ არის გამყოფი $p(x)$ -ის.

მაგალითი. $x^2 - 2$ მრავალწევრი რაციონალურ რიცხვთა ველზე დაუყვანადი მრავალწევრია. მაგრამ იგი დაყვანადი მრავალწევრია ნამდვილ რიცხვთა ველზე:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

ყოველი პირველი ხარისხის მრავალწევრი, ცხადია, დაუყვანადი მრავალწევრია.

თუ $p(x)$ დაუყვანადია, მაშინ, ცხადია, $cp(x)$ ($c \neq 0$) დაუყვანადია. შევთანხმდეთ: დაუყვანადი მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი იყოს 1-ის ტოლი.

თეორემა. ვთქვათ, $f(x)$ ნებისმიერი მრავალწევრია P ველზე, $p(x)$ დაუყვანადი მრავალწევრია. თუ $p(x)$ არ არის $f(x)$ -ის გამყოფი, მაშინ $f(x)$ და $p(x)$ ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია.

დამტკიცება. ვთქვათ, უსგ $(f(x), p(x))=d(x)$. $d(x)$ გამყოფია $p(x)$ -ის, $p(x)$ დაუყვანადია, ამიტომ $d(x)=cp(x)$, ან $d(x)=c$. პირველ შემთხვევაში $f(x)$ იყოფა $p(x)$ -ზე, მეორე შემთხვევაში $f(x)$ და $p(x)$ ურთიერთმარტივია.

მთელ რიცხვთა რგოლის ანალოგიურად, მრავალწევრთა რგოლში გვაქვს მრავალწევრის დაშლა დაუყვანად მრავალწევრებად, რომლებიც მარტივი რიცხვების როლს თამაშობს:

ყოველი $f(x)$ მრავალწევრი შეიძლება ერთადერთი სახით წარმოვადგინოთ, შემდეგი სახით:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_s(x),$$

სადაც $p_2(x)\dots p_s(x)$ დაუყვანადი მრავალწევრებია. ერთადერთობა ასე გვესმის: თუ გვაქვს მეორე დაშლა:

$$f(x) = q_1(x)q_2(x)\dots q_t(x),$$

მაშინ შეიძლება ინდექსები ისე შევცვალოთ (თუ არის ამის საჭიროება), რომ

$$s = t \text{ და } p_1(x) = q_1(x), p_2(x) = q_2(x), \dots, p_s(x) = q_t(x).$$

დებულება ადვილად მტკიცდება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

$f(x)$ -ს გაშლაში რაიმე დაუყვანადი მრავალწევრი შეიძლება რამდენჯერმე შეგვხვდეს, ამიტომ გაშლა შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$f(x) = a_n q_1^{n_1}(x) q_2^{n_2}(x) \dots q_s^{n_s}(x),$$

სადაც a_n $f(x)$ -ის უფროსი წევრის კოეფიციენტი, $q_1(x), q_2(x), \dots, q_s(x)$ განსხვავებული დაუყვანადი მრავალწევრებია.

მრავალწევრის ფესვი

ვთქვათ, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ არის n -ური ხარისხი მრავალწევრი P ველზე. $f(x)$ მრავალწევრის მნიშვნელობა, როცა $x=c$ ($c \in P$) ეწოდება P ველის ელემენტს:

$$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0.$$

თუ $f(c) = 0$, მაშინ c -ს ეწოდება მრავალწევრის ნული.

ბეზუს თეორემა. $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა $(x - \alpha)$ -ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α არის $f(x)$ -ის ნული.

დამტკიცება. ცხადია,

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r,$$

r არ არის დამოკიდებული x -ზე.

აქედან

$$r = f(\alpha).$$

მაშასადამე, თუ $f(x)$ იყოფა $(x - \alpha)$ -ზე, ანუ $r=0$, მაშინ $f(\alpha)=0$ და α არის $f(x)$ -ის ნული. თუ α არის $f(x)$ -ის ნული, მაშინ $f(\alpha)=0$ და $r=f(\alpha)=0$, ე.ი. $f(x)$ იყოფა $(x - \alpha)$ -ზე.

აღგებრის ძირითადი თეორემა. ყოველ მრავალწევრს, რომლის ხარისხი არ არის ნაკლები 1-ზე, კომპლექსურ რიცხვთა ველზე აქვს ერთი მაინც ნული.

შედეგი. თუ $f(x)$ არის n -ური ხარისხის მრავალწევრი კომპლექსურ რიცხვთა ველზე, მაშინ არსებობს რიცხვები $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (რომელთაგან ზოგიერთი შეიძლება ტოლი იყოს), რომ

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

დამტკიცება. აღგებრის ძირითადი თეორემის თანახმად, $f(x)$ -ს აქვს ნული, ვთქვათ, ის არის α_1 , მაშინ

$$f(x) = (x - \alpha_1)f_1(x).$$

თუ $f_1(x)$ -ის ხარისხი არ არის ნაკლები 1-ზე, მას ექნება ნული. მაშასადამე

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)f_2(x).$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ დასამტკიცებელს.

ტოლი თანამამრავლების ხარისხის სახით ჩაწერის შემდეგ მივიღებთ ტოლობას:

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_s)^{k_s}.$$

ამ ჩანაწერში $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ განსხვავებული რიცხვებია.

$f(x)$ იყოფა $(x - \alpha_i)^{k_i}$ -ზე და არ იყოფა $(x - \alpha_i)^{k_i+1}$ -ზე ($i=1, 2, \dots, s$). k_i რიცხვს ჰქვია α_i ნულის ჯერადობა.

III ნაწილი

მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტი

ორი კვადრატული მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი ამ მატრიცების დეტერმინანტების ნამრავლის ტოლია.

დავამტკიცოთ დებულება მეორე რიგის მატრიცების შემთხვევაში. ვთქვათ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{მაშინ}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

განვიხილოთ მატრიცა:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

მაშინ

$$\begin{aligned} \det C &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ -1 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \\ &= a_{12} \cdot a_{22} \cdot \det B - a_{12} \cdot a_{21} \cdot \det B = \det B \cdot \det A. \end{aligned}$$

ახლა სხვა ხერხით გამოვთვალოთ $\det C$. ამისთვის მესამე სვეტს მივუმატოთ პირველი, გამრავლებული b_{11} -ზე და მეორე, გამრავლებული b_{21} -ზე, მეოთხე სვეტს მივუმატოთ პირველი, გამრავლებული b_{12} -ზე და მეორე, გამრავლებული b_{22} -ზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \det C &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{22} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \det(AB) \end{aligned}$$

ე.ი. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

შებრუნებული მატრიცა

კვადრატულ მატრიცას ეწოდება არაგადაგვარებული, თუ მისი დეტერმინანტი არ უდრის ნულს. თუ კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტი ნულია, მაშინ ასეთ მატრიცას ეწოდება გადაგვარებული.

A მატრიცის შებრუნებული ეწოდება, ისეთ B მატრიცას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას.

$$A \cdot B = B \cdot A = E,$$

სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

იმისათვის, რომ A მატრიცას ჰქონდეს შებრუნებული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის იყოს არაგადგვარებული.

დამტკიცება: ვთქვათ, არსებობს A მატრიცის შებრუნებული B მატრიცა, მაშინ

$$A \cdot B = E.$$

აქედან

$$\det(A \cdot B) = \det E$$

$$\det A \cdot \det B = 1$$

ე.ი.

$$\det A \neq 0$$

ვთქვათ, A მატრიცა არაგადგვარებული მატრიცაა. ავაგოთ მატრიცა:

$$\frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

სადაც $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{nn}$ არის A მატრიცაში $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{nn}$ ელემენტების ალგებრული დამატებები.

მატრიცას

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ეწოდება A მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა. ვაჩვენოთ, რომ A მატრიცის შებრუნებული ასე მოიძებნა:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C,$$

სადაც C არის A-ს მიკავშირებული მატრიცა.

მართლაც,

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ შებრუნებული ერთადერთია. ვთქვათ, B სხვა შებრუნებულია, მაშინ $A \cdot B = E$, აქედან $(A^{-1}A) \cdot B = A^{-1}E$, $B = A^{-1}E$ ე.ი. $B = A^{-1}$.

მატრიცის რანგი. ვთქვათ მოცემულია $m \times n$ მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ვიტყვი, რომ A მატრიცის რანგი არის r რიცხვი, თუ არსებობს A მატრიცაში r რიგის მინორი, რომელიც ნული არ არის, ხოლო ყველა უფრო მაღალი რიგის მინორი ნულის ტოლია. ცხადია,

ა) $0 \leq r \leq \min(m, n)$

ბ) $r=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A ნულურია.

გ) თუ A არის n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა, მაშინ $r=n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\det A \neq 0$.

რანგის განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს: თუ მატრიცაში k-ური რიგის მინორებიდან ერთი მაინც ნული არ არის და $k+1$ რიგის მინორები ყველა ნულია, მაშინ უფრო მაღალი რიგის მინორებელი ნულია და მატრიცის რანგი არის k.

მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნები ვუწოდოთ შემდეგ ოპერაციებს:

1) ტრანსპონირებას; 2) ორი სტრიქონის, ან ორი სვეტის ტრანსპოზიცია; 3) რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ყველა ელემენტის ერთი და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე გამრავლებას; 4) რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებისადმი სხვა სტრიქონი ან სვეტის ელემენტების ერთი და იმავე რიცხვზე ნამრავლების მიმატება.

ადვილი საჩვენებელია, რომ პირველია სამი ელემენტარული გარდაქმნით მატრიცის რანგი არ იცვლება. ახლა ვაჩვენოთ, რომ მეოთხე ოპერაციითაც არ იცვლება რანგი. ვთქვათ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{li} & \dots & a_{lk} & \dots & a_{ln} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

გამოყოფილია ორი სვეტი (i-ური და k-ური). მე-4 ელემენტარული გარდაქმნით მიიღება მატრიცა

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{li} + ca_{lk} & \dots & a_{lk} & \dots & a_{ln} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + ca_{2k} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} + ca_{mk} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ვთქვათ, A მატრიცის რანგი არის r , ვაჩვენოთ, რომ B -ს რანგი $\leq r$. ე.ი. B -ში r -ზე მეტი რიგის მინორი ყველა ნულია. ცხადია, B -ს ის მინორი, რომლის რიგი r -ზე მეტია და არ შეიცავს i -ურ სვეტს, მაშინ ის იგივეა, რაც შესაბამისი მინორი A -ში, ე.ი. ნულის ტოლია. B -ს ის მინორიც, რომლის რიგი r -ზე მეტია შეიცავს i -ურ სვეტსაც და k -ურ სვეტსაც, ნულია. თუ B -ს მინორი, რომლის რიგი r -ზე მეტია შეიცავს i -ურ სვეტს და არ შეიცავს k -ურ სვეტს, მაშინ მას ასე წარმოვადგენთ: $D_1 + D_2$, სადაც D_1 ტოლია A მატრიცის შესაბამისი მინორის და ის ნულია, D_2 კი განსხვავდება A მატრიცის შესაბამისი მინორისგან რიცხვითი მამრავლით და ისიც ნულია.

ამრიგად, B მატრიცის რანგი არ აღემატება A მატრიცის რანგს $r(B) \leq r(A)$.

მაგრამ A მატრიცაც მიიღება B -სგან ანალოგიური ელემენტარული გარდაქმნით, ამიტომ

$$r(B) \leq r(A)$$

ე.ი.

$$r(B) = r(A).$$

ძირითადი თეორემა მატრიცის რანგის შესახებ თუ მატრიცის რანგი არის r , მაშინ ამ მატრიცში არსებობს r სტრიქონი (ვექტორ-სტრიქონი) ან r სვეტი (ვექტორ-სვეტი), რომელიც წრფივად დამოუკიდებელია და ყოველი სტრიქონი ან სვეტი მათი წრფივი კომბინაციაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, A მატრიცის რანგი არის r . მაშინ არსებობს r რიგის მინორი, რომელიც ნული არ არის და ყველა უფრო მაღალი რიგის მინორი ნულია. შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ეს r რიგის მინორი A მატრიცის მარცხენა ზემო კუთხეშია. ვაჩვენოთ, რომ პირველი r სტრიქონი წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო ყველა სხვა სტრიქონი მათი წრფივი კომბინაციაა.

დავუშვათ, რომ პირველი r სტრიქონი წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ მათგან ერთ-ერთი სხვების წრფივი კომბინაციაა, ვთქვათ ეს ერთ-ერთი არის r -სტრიქონი, $\bar{x}_r = \lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_{r-1} \bar{x}_{r-1}$.

თუ ამ r რიგის მინორში, რომელიც ნული არ არის ბოლო სტრიქონს გამოვაკლებთ პირველს, გამრავლებულს λ_1 -ზე, მეორე სტრიქონს, გამრავლებულს λ_2 -ზე და ა.შ. წინა სტრიქონს გამრავლებულს λ_{r-1} -ზე, მაშინ ამ სტრიქონში ყველა ელემენტი ნული იქნება, მინორი არ შეიცვლება და იგი ნული იქნება, რაც შეუძლებელია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყველა სხვა სტრიქონი პირველი r სტრიქონის წრფივი კომბინაციაა.

განვიხილოთ $r+1$ რიგის დეტერმინანტი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1\ell} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2\ell} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{r\ell} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{k\ell} \end{vmatrix}$$

თუ $\ell \leq r$, ცხადია, იგი ნულია.

თუ $\ell > r$, მაშინ იგი $(r+1)$ რიგის მინორია და მაშინაც ნულია. ე.ი. მისი გაშლა ბოლო სვეტის მიხედვით $= 0$.

$$a_{1\ell}A_1 + a_{2\ell}A_2 + \dots + a_{r\ell}A_r + a_{k\ell}A_{r+1} = 0$$

ცხადია, $A_{r+1} \neq 0$, რადგან ემთხვევა r რიგის მინორს, ამიტომ აქედან

$$a_{k\ell} = \lambda_1 a_{1\ell} + \lambda_2 a_{2\ell} + \dots + \lambda_r a_{r\ell}, \quad \ell = 1, \dots, n.$$

ანუ

$$\begin{aligned} a_{k1} &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_r a_{r1} \\ a_{k2} &= \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_r a_{r2} \\ &\dots \\ a_{kn} &= \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_r a_{rn} \end{aligned}$$

ეს ნიშნავს, რომ k -ური სტრიქონი არის პირველი r სტრიქონის წრფივი კომბინაცია,

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა. კრონეკერ-კაპელის თეორემა

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომელიც შეიცავს m განტოლებას, უცნობების რიცხვი არის n .

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

თუ $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ ჩასმის შემდეგ მივიღებთ ჭეშმარიტ ტოლობებს, მაშინ (c_1, c_2, \dots, c_n) -ს ეწოდება სისტემას ამონახსნი.

თუ სისტემას ერთი მაინც ამონახსნი აქვს, მაშინ მას ეწოდება თავსებადი, თუ არა აქვს ამონახსნი, მაშინ მას ეწოდება არათავსებადი. სისტემას ეწოდება განსაზღვრული, თუ მას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ეწოდება განუზღვრელი, თუ მას აქვს უამრავი ამონახსნი.

სისტემის მატრიცა ეწოდება მატრიცას:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

სისტემის გაფართოებული მატრიცა ეწოდება მატრიცას:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

და

$$1) f^{-1}(\vec{x}' + \vec{y}') = f^{-1}(\vec{x}') + f^{-1}(\vec{y}'), \quad \vec{x}' \in M', \quad \vec{y}' \in M'.$$

$$2) f^{-1}(\alpha \vec{x}') = \alpha f^{-1}(\vec{x}'), \quad \vec{x}' \in M'.$$

თეორემა იზომორფიზმის შესახებ. M ვექტორული სივრცე იზომორფულია M' -ის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა M და M' -ის განზომილებები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ, n არის M და M' -ს განზომილება. მათი ბაზისები იყოს: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ და $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$.

ვთქვათ,

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n \in M$$

განვიხილოთ ასახვა: $f: \vec{x} \rightarrow \vec{x}'$, სადაც $\vec{x}' = \lambda_1 \vec{e}'_1 + \lambda_2 \vec{e}'_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}'_n$.

ცხადია, $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

$$f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x}).$$

ე.ი. M იზომორფულია M' -ის.

ახლა, ვთქვათ M იზომორფულია M' -ის. ვაჩვენოთ, რომ მაშინ მათი განზომილებები ტოლია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, M -ის განზომილებაა n , M' -ის – m და $m \neq n$. შევნიშნოთ, რომ M -ის ნულოვან ვექტორს შეესაბამება M' -ის ნულოვანი ვექტორი, რადგან

$$f(\vec{x} + \vec{0}) = f(\vec{x}) + f(\vec{0}) = f(\vec{x})$$

$$\text{ე.ი. } f(\vec{0}) = \vec{0}'.$$

გარდა ამისა, ცხადია

$$f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2) + \dots + \lambda_k f(\vec{x}_k).$$

ამიტომ, თუ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ბაზისია M -ში, მაშინ თუ $k > n$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ წრფივად დამოკიდებულია, ე.ი. არსებობს $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს, რომ გვაქვს

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}$$

აქედან

$$\lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2) + \dots + \lambda_k f(\vec{x}_k) = f(\vec{0}) = \vec{0}' \in M'.$$

ე.ი. $f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), \dots, f(\vec{x}_k)$ წრფივად დამოკიდებულია M' -ში. ამიტომ M' -ს განზომილება $m \leq n$. ანალოგიურად მივიღებთ: $n \leq m$. ე.ი. $n = m$.

აფინური სივრცე

ვთქვათ, მოცემულია M ვექტორული სივრცე P ველზე და T სიმრავლე, რომლის ელემენტებს ვუწოდოთ წერტილები. T სიმრავლის ყოველ ორ P და Q წერტილს შევუსაბამოთ – ერთადერთი ვექტორი $\vec{x} \in M$. ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ: $\vec{x} = \overrightarrow{PQ}$. ვთქვათ, ამ შესაბამისობას აქვს თვისებები:

1) ყოველი P წერტილისა და \vec{x} ვექტორისთვის არსებობს, ერთადერთი Q წერტილი ისეთი, რომ (P,Q) წყვილს შეესაბამება \vec{x} ვექტორი: $\vec{x} = \overrightarrow{PQ}$

2) ნებისმიერი სამი P, Q და S წერტილისთვის გვაქვს:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}.$$

მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია A აფინური სივრცე. A-ს ელემენტი არის სიმრავლე M-ის ვექტორებისა და T-ს წერტილებისა.

A აფინურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიანი, თუ M ვექტორული სივრცე არის n-განზომილებიანი.

ამრიგად, A აფინური სივრცე არის ვექტორებისა და წერტილების სიმრავლე. ნებისმიერი \vec{x} ვექტორი შეიძლება „მოვლოთ“ ნებისმიერ P წერტილში, რაც იმას ნიშნავს, რომ ყოველი P წერტილისთვის არსებობს ერთადერთი Q, რომ $\overrightarrow{PQ} = \vec{x}$.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

1) თუ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, მაშინ $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$. მართლაც,

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}$$

2) $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{NN}$, მართლაც

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MN}$$

$\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{NN}$ ნულოვანი ვექტორია.

3) \overrightarrow{MN} -ის მოპირდაპირე არის \overrightarrow{NM} , მართლაც $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM}$.

აფინურ სივრცეში შეიძლება შემოვიღოთ კოორდინატები. ვთქვათ, $0 \in A$. 0 არის აფინური სივრცის რაიმე წერტილი. ვუწოდოთ მას კოორდინატა სათავე. მაშინ ყოველი \vec{x} ვექტორისთვის არსებობს ერთადერთი X წერტილი, რომლისთვისაც გვაქვს:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{x}.$$

ვთქვათ, A-ს ვექტორები $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ შესაბამისი ვექტორული სივრცის ბაზისია. მაშინ \vec{x} ვექტორს შეესაბამება კოორდინატები მოცემულ ბაზისში:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

მაშინ ვიტყვით, რომ X წერტილის კოორდინატები არის x_1, x_2, \dots, x_n და ვწერთ:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ამასთანავე, კოორდინატა სისტემა ვუწოდოთ ერთობლიობას: $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

ვთქვათ, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, მაშინ

$$\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY}.$$

ანუ

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n).$$

ვექტორულ სივრცეთა წრფივი ასახვა

ვთქვათ, L და M ორი ვექტორული სივრცეა. ასახავს

$$f : L \rightarrow M.$$

ეწოდება წრფივი ასახვა, თუ

1) $f(\alpha \vec{a}) = \alpha f(\vec{a})$; 2) $f(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = f(\vec{a}_1) + f(\vec{a}_2)$.

აქედან მიიღება, რომ

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{a}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(\vec{a}_i)$$

ასახავს $f : L \rightarrow L$ ეწოდება L -ზე განსაზღვრული წრფივი ოპერატორი.

მაგალითი 1. ნულოვანი ასახვა: $f : L \rightarrow M$, როცა $f(\vec{a}) = \vec{0} + M$, ყოველი $\vec{a} \in L$.

მაგალითი 2. იგივეური ასახვა:

$$f : L \rightarrow L, f(\vec{a}) = \vec{a}, \text{ ყოველი } \vec{a} \in L.$$

მაგალითი 3. ჰომოთეტია:

$$f : L \rightarrow L, f(\vec{a}) = \alpha \vec{a} \text{ ყოველი } \vec{a} \in L.$$

თუ $\alpha = 0$, მიიღება ნულოვანი ასახვა.

თუ $\alpha = 1$, მიიღება იგივეური ასახვა.

წრფივი ასახვის მატრიცა

ვთქვათ მოცემულია წრფივი ასახვა: $R^n \rightarrow R^m$

R^n -ის ბაზისი იყოს $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$,

R^m -ის ბაზისი იყოს $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_m$.

ვთქვათ, ცნობილია $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$ -ს კოორდინატები R^m -ში.

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= \alpha_{11} \vec{e}'_1 + \alpha_{21} \vec{e}'_2 + \dots + \alpha_{m1} \vec{e}'_m \\ f(\vec{e}_2) &= \alpha_{12} \vec{e}'_1 + \alpha_{22} \vec{e}'_2 + \dots + \alpha_{m2} \vec{e}'_m \\ &\dots \\ f(\vec{e}_n) &= \alpha_{1n} \vec{e}'_1 + \alpha_{2n} \vec{e}'_2 + \dots + \alpha_{mn} \vec{e}'_m \end{aligned} \tag{1}$$

განვიხილოთ მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

ამ მატრიცის სვეტებით $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$ ვექტორებია წარმოდგენილი.

დამტკიცება. ვთქვათ, f არაგადაგვარებულია, ტოლობა $f(\vec{x}) = \vec{0}$ ასე ჩაიწერება

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_n &= 0 \end{aligned}$$

ამ სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დეტერმინანტი ნული არ არის, ე.ი. როცა A მატრიცა არაგადაგვარებულია.

მოქმედებები წრფივ ასახვებზე

ვთქვათ, $f_1 : R^n \rightarrow R^m$, $f_2 : R^n \rightarrow R^m$, მაშინ მათი ჯამი ეწოდება f ასახვას: $f = f_1 + f_2$, თუ ყოველი $\vec{x} \in R^n$, $f(\vec{x}) = f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x})$ ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ f_1 -ის მატრიცა არის A , f_2 -ს მატრიცა არის B , მაშინ f -ის მატრიცა იქნება $A+B$, რადგან $f(\vec{e}_i) = f_1(\vec{e}_i) + f_2(\vec{e}_i)$.

ვთქვათ, მოცემულია წრფივი ასახვა: $f : R^n \rightarrow R^m$, მისი მატრიცაა A . α რიცხვის ნამრავლი f -ზე ასე განისაზღვრება:

ყოველი \vec{x} -სთვის, $(\alpha f)(\vec{x}) = \alpha(f(\vec{x}))$. αf -ის მატრიცა, ცხადია, იქნება αA მატრიცა.

ვთქვათ, მოცემულია ორი წრფივი ასახვა: $f : R^m \rightarrow R^\ell$, $g : R^n \rightarrow R^m$. მათი ნამრავლი (კომპოზიცია) ეწოდება ასახვას $h = f \cdot g$, თუ ყოველი $\vec{x} \in R^n$,

$$(f \cdot g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})).$$

თუ f -ის მატრიცა არის A (მას აქვს ℓ სტრიქონი და m სვეტი), g -ს მატრიცა არის B (m სტრიქონი და n სვეტი), მაშინ

$f \cdot g$ -ს მატრიცა

არის $A \cdot B$ (ℓ სტრიქონითა და m სვეტით). შეიძლება ასეც დავწეროთ

$$A_{\ell \cdot m} \cdot B_{m \cdot n} = C_{\ell \cdot n}, \quad \underline{C = AB}$$

კერძოდ, თუ f წრფივი ოპერატორია და მისი მატრიცაა A , g წრფივი ოპერატორია და მისი მატრიცაა B , ე.ი.

$f : R^n \rightarrow R^n$, $g : R^n \rightarrow R^n$, მაშინ

$f \cdot g$ წრფივი ოპერატორია და მის მატრიცაა $A \cdot B$.

ვთქვათ, f არაგადაგვარებული წრფივი ოპერატორია, მაშინ როგორც დავამტკიცეთ, მისი მატრიცა არაგადაგვარებული მატრიცაა. ასეთი f წრფივი ოპერატორისთვის არსებობს შებრუნებული წრფივი ოპერატორი f^{-1} ისეთი, რომ $f^{-1} \cdot f = f \cdot f^{-1}$ იგივეური ასახვაა. f^{-1} -ის მატრიცა კი A მატრიცის შებრუნებულია ($f \cdot f^{-1}$ -ის მატრიცა ერთეულოვანი მატრიცაა).

ახალ ბაზისზე გადასვლა. ვთქვათ, f წრფივი ოპერატორის მატრიცაა $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ბაზისში არის A . ხოლო $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ ბაზისში არის B . $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ბაზისი და $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა იყოს C , ანუ

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \dots + c_{n1}\vec{e}_n \\ &\vdots \\ \vec{e}'_n &= c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \dots + c_{nn}\vec{e}_n \end{aligned}$$

ცხადია, C მატრიცა არაგადაგვარებულ მატრიცაა. ვაჩვენოთ, რომ $B = C^{-1}AC$.

განვიხილოთ h წრფივი ოპერატორი, რომლის მატრიცა $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ბაზისში არის C . მაშინ გვაქვს:

$$\begin{aligned} h(\vec{e}_1) &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \dots + c_{n1}\vec{e}_n = \vec{e}'_1 \\ &\vdots \\ h(\vec{e}_n) &= c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \dots + c_{nn}\vec{e}_n = \vec{e}'_n \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$h^{-1}(\vec{e}'_1) = \vec{e}_1, h^{-1}(\vec{e}'_2) = \vec{e}_2, \dots, h^{-1}(\vec{e}'_n) = \vec{e}_n$$

ამასთანავე,

$$\begin{aligned} f(\vec{e}'_1) &= b_{11}\vec{e}'_1 + b_{21}\vec{e}'_2 + \dots + b_{n1}\vec{e}'_n \\ &\vdots \\ f(\vec{e}'_n) &= b_{1n}\vec{e}'_1 + b_{2n}\vec{e}'_2 + \dots + b_{nn}\vec{e}'_n \end{aligned}$$

ე.ი.

$$\begin{aligned} h^{-1} \circ f(\vec{e}'_1) &= b_{11}\vec{e}_1 + b_{21}\vec{e}_2 + \dots + b_{n1}\vec{e}_n \\ &\vdots \\ h^{-1} \cdot f(\vec{e}'_n) &= b_{1n}\vec{e}_1 + b_{2n}\vec{e}_2 + \dots + b_{nn}\vec{e}_n \end{aligned}$$

აქედან

$$\begin{aligned} h^{-1} \cdot f \cdot h(\vec{e}_1) &= b_{11}\vec{e}_1 + b_{21}\vec{e}_2 + \dots + b_{n1}\vec{e}_n \\ &\vdots \\ h^{-1} \cdot f \cdot h(\vec{e}_n) &= b_{1n}\vec{e}_1 + b_{2n}\vec{e}_2 + \dots + b_{nn}\vec{e}_n \end{aligned}$$

ამრიგად, $B = CA^{-1}C$.

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ A მატრიცა B მატრიცის მსგავსია, თუ არსებობს ისეთი არაგადაგვარებულ მატრიცა C , რომ $AC = CB$, ანუ

$$C^{-1}AC = B.$$

ცხადია, თუ A მსგავსია B მატრიცის, მაშინ B არის მსგავსი A მატრიცის, რადგან

$$(C^{-1})^{-1}BC^{-1} = A.$$

A მსგავსია A მატრიცის.

მსგავსების მიმართებას ტრანზიტულობის თვისებაც აქვს.

ამასთანავე, თუ A მატრიცა მსგავსია B მატრიცის, მაშინ

$$\det(B) = \det(A), \text{ რადგან}$$

$$\det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \det A.$$

ამასთანავე, თუ A და B მსგავსი მატრიცებია, მაშინ მათი რანგები ტოლია.

ამრიგად, წრფივი ოპერატორის მატრიცის დეტერმინანტი არ არის დამოკიდებული ბაზისზე.

ინვარიანტული ქვესივრცე. წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორი და საკუთრივი მნიშვნელობა

თქვამთ, L არის n -განზომილებიანი ვექტორული სივრცე. L_1 ქვესივრცეს ეწოდება ინვარიანტული f წრფივი ოპერატორის მიმართ, თუ ყოველი $\vec{x} \in L_1$ -ისთვის, $f(\vec{x}) \in L_1$.

თუ f არის არაგადგვარებადი წრფივი ოპერატორი L -ზე და L_1 არის მისი ინვარიანტული ქვესივრცე, მაშინ L_1 არის f^{-1} -ის მიმართაც ინვარიანტული ქვესივრცე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ არის L_1 -ის ბაზისი, მაშინ $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$ სისტემაც ბაზისია, მაშასადამე ყოველი $\vec{x} \in L_1$ -ისთვის

$$\vec{x} = \alpha_1 f(\vec{e}_1) + \alpha_2 f(\vec{e}_2) + \dots + \alpha_n f(\vec{e}_n).$$

აქედან

$$f^{-1}(\vec{x}) = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n.$$

არანულოვანი \vec{x} ვექტორს ეწოდება f წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორი, თუ არსებობს ისეთი რიცხვი λ , რომ

$$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}.$$

λ -ს ეწოდება f წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა.

თუ L_1 არის f წრფივი ოპერატორის მიმართ ინვარიანტული ქვესივრცე და მისი განზომილება ერთის ტოლია, მაშინ L_1 -ის ყოველი არანულოვანი ვექტორი საკუთრივი ვექტორია. ეს არანულოვანი ვექტორი შეიძლება მივიჩნიოთ L_1 -ის ბაზისად. თუ L_1 ინვარიანტული ქვესივრცეა, მაშინ $f(\vec{x}) \in L_1$ და მაშასადამე $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.

ვთქვათ \vec{x} არის f წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორი, λ – მისი საკუთრივი მნიშვნელობა, მაშინ $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. თუ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ბაზისია, მაშინ

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

ვთქვათ, f -ის მატრიცა არის

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + \dots + a_{n1} \vec{e}_n \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ f(\vec{e}_n) &= a_{1n} \vec{e}_1 + a_{2n} \vec{e}_2 + \dots + a_{nn} \vec{e}_n. \end{aligned}$$

თუ f წრფივ ოპერატორს აქვს n წრფივი დამოუკიდებელი საკუთარი ვექტორი, მაშინ ეს ვექტორები შეიძლება ბაზისად ავიღოთ. ცხადია, მაშინ

$$f(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2, \quad \dots \quad f(\vec{e}_n) = \lambda_n \vec{e}_n.$$

ამიტომ ამ ბაზისში f -ის მატრიცა დიაგონალურია:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

რა შემთხვევაშია საკუთრივი ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელი: მტკიცდება, რომ, როცა მახასიათებელ განტოლებას n განსხვავებული ფესვი აქვს, მაშინ შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.

ვეკლიდური ვექტორული სივრცე

M ვექტორულ სივრცეზე სკალარული ნამრავლი ეწოდება ასახვას: $M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, \vec{x} და \vec{y} ვექტორების სკალარულ ნამრავლს ასე აღვნიშნავთ: $\vec{x} \cdot \vec{y}$ და მოვითხოვთ შემდეგი პირობების შესრულებას:

- 1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- 2) $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$
- 3) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

M ვექტორულ სივრცეს ეწოდება ვეკლიდური ვექტორული სივრცე, თუ შემოღებულია სკალარული ნამრავლი $\vec{x} \cdot \vec{y}$, რომელსაც აქვს თვისება:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0 \quad \text{და} \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0.$$

მაგალითი 1. ვთქვათ, $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, ანუ $\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$

$\vec{y} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, მაშინ სკალარული ნამრავლი შეიძლება ასე განვსაზღვროთ:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n.$$

შეიძლება შემოვიღოთ ვექტორის სიგრძე და კუთხე ვექტორებს შორის:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}, \quad \cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}.$$

აჩვენეთ, რომ ეს განმარტება კორექტულია, ანუ

$$\left| \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \right| \leq 1.$$

M ვექტორული ევკლიდური სივრცის $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ბაზისს ეწოდება ორთოგონალური, თუ $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$, თუ $i \neq j$. თუ გარდა ამისა $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), მაშინ ბაზისს ეწოდება ორთონორმირებული.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ყოველ ევკლიდურ ვექტორულ სივრცეში არსებობს ორთონორმირებული ბაზისი; ყოველი ბაზისიდან შეიძლება მივიღოთ ორთონორმირებული ბაზისი.

მართლაც, ვთქვათ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ბაზისია, შევარჩიოთ α რიცხვი ისე რომ $\vec{g}_2 = \vec{e}_2 + \alpha \vec{e}_1$ ორთოგონალური იყოს \vec{e}_1 -თან – $\vec{g}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_2 + \alpha \cdot \vec{e}_i \cdot \vec{e}_1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}$, თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ ორთოგონალურ ბაზისს. ვთქვათ, $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ ორთოგონალური ბაზისია, მაშინ $\frac{\vec{g}_1}{|\vec{g}_1|}, \frac{\vec{g}_2}{|\vec{g}_2|}, \dots, \frac{\vec{g}_n}{|\vec{g}_n|}$ იქნება ორთონორმირებული ბაზისი.

ორთოგონალური ოპერატორი. ორთოგონალური მატრიცა

f წრფივ ოპერატორს ეწოდება ორთოგონალური ოპერატორი M ვექტორულ სივრცეზე, თუ $f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$, ყოველი $\vec{x} \in M$ $\vec{y} \in M$.

თეორემა. თუ $|f(\vec{x})| = |\vec{x}|$, მაშინ f ორთოგონალური ოპერატორია.

დამტკიცება. პირობის თანახმად,

$$|f(\vec{x} + \vec{y})| = |\vec{x} + \vec{y}|$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) \cdot f(\vec{x} + \vec{y}) &= (f(\vec{x}) + f(\vec{y})) \cdot (f(\vec{x}) + f(\vec{y})) = \\ &= f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) + 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) + f(\vec{y}) \cdot f(\vec{y}) = \\ &= \vec{x} \cdot \vec{x} + 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) + \vec{y} \cdot \vec{y}. \end{aligned} \tag{1}$$

მაგრამ

$$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y}. \tag{2}$$

(1) და (2)-დან გვაქვს:

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y},$$

ე.ი. f ორთოგონალური ოპერატორია.

ვთქვათ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ორთონორმირებული ბაზისია; A არის f წრფივი ოპერატორის მატრიცა ამ ბაზისში, თუ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

კვადრატული ფორმა შეიძლება ასეც ჩავწეროთ

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X, \quad \text{სადაც} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

ვთქვათ, კვადრატულ ფორმაში მოვახდინეთ ცვლადთა გარდაქმნა:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{სადაც} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

მაშინ მიიღება კვადრატული ფორმა:

$$L_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}^T \\ B \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \\ B \end{bmatrix}$$

შეიძლება ჩვენება, რომ

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}^T \\ B \end{bmatrix}^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}^T B^T$$

მაშასადამე,

$$L_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = Y^T (B^T A B) Y, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას $C = B^T A B$, გვექნება

$$L_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = Y^T C Y,$$

მისი მატრიცა არის $B^T A B$.

თუ B არაგადაგვარებული მატრიცაა, მაშინ L და L_1 , კვადრატულ ფორმებს ეწოდება ექვივალენტური. ცხადია, მათი მატრიცების დეტერმინანტებს ერთნაირი ნიშანი აქვს, რადგან

$$|C| = |A| |B|^2.$$

კანონიკური კვადრატული ფორმა ეწოდება კვადრატულ ფორმას:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2$$

ყოველი კვადრატული ფორმისთვის არსებობს მისი ექვივალენტური კანონიკური კვადრატული ფორმა.

ეს დებულება შეიძლება დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით.

ამასთანავე, ყოველი კვადრატული ფორმა შეიძლება ექვივალენტური იყოს სხვადასხვა კანონიკური ფორმის, მაგრამ ყველა ამ ფორმაში დადებითი წევრების რაოდენობა ტოლია, ნულის ტოლი წევრების რაოდენობა ტოლი და უარყოფით კოეფიციენტებიანი წევრების რაოდენობა ტოლია.

კვადრატულ ფორმას ეწოდება დადებითად განსაზღვრული, თუ ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის (რომელთაგან ერთი მაინც ნული არ არის), იგი დადებითად მნიშვნელობას.

თუ კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ მისი ექვივალენტური ნებისმიერი კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია.

კვადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრულობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ყველა მისი მთავარი მინორი დადებითი იყოს:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$