რიცხვითი ანალიზი

I

(ლექციათა კურსი)

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თამაზ ვაშაყმაძე

რიცხვითი ანალიზი

I

(ლექციათა კურსი)

თბილისის
უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

წიგნი, პირველ რიგში, განკუთვნილია, როგორც ერთ-ერთი ძირითადი სახელმძღვანელო, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ბაკალავრიატის და მაგისტრატურის სტუდენტებისა და დოქტორანტებისათვის, პროფესორ-მასწავლებლებისათვის.

წიგნით სარგებლობისათვის საჭიროა მკითხველს ჰქონდეს განათლება უმაღლესი სკოლის პირველი ორი კურსის პროგრამით კალკულუსის, მათემატიკური ანალიზის, უმაღლესი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის დისციპლინებში. წარმოდგენილი მასალა განკუთვნილია აგრეთვე ფიზიკა-ტექნიკური დარგების ფართო დიაპაზონის სპეციალისტებისათვის. ამასთან ერთად, წიგნში გადმოცემული რიგი საკითხებისა ზოგიერთ შემთხვევაში უცხო ენაზე გამოცემული თანამედროვე სახელმძღვანელოების შინაარსის ნაწილს შეადგენს და პირველად ქვეყნდება ქართულ ენაზე, ხოლო ნაწილი – კლასიკური რიცხვითი ანალიზის შესაბამისი საკითხების დაზუსტება და განზოგადებაა.

რედაქტორი ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,
დოცენტი მ ა რ ი ნ ე მ ე ნ თ ე შ ა შ ვ ი ლ ი

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი დ ა ვ ი თ გ ო რ დ ე ზ ი ა ნ ი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი ჰ ა მ ლ ე ტ მ ე ლ ა ძ ე

© თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2009

ISBN 978-9941-13-127-1

შ ი ნ ა ა რ ს ი

წინასიტყვაობა

თანამედროვე კომპიუტერზე გამოთვლითი ექსპერიმენტის განხორციელების შესაძლებლობამ არსებითად დააჩქარა მეცნიერების, ტექნიკის, სოციოლოგიის, ეკონომიკის – ადამიანის მოღვაწეობის თითქმის ყველა სფეროში – მათემატიზაციის შეუქცევადი პროცესი. შესაბამისად ფართოვდება იმ სპეციალობათა არეალი, რომლისთვისაც განათლება მათემატიკის (განსაკუთრებით მისი ნაწილის – კალკულუსის) მიმართულებით მათი განვითარებისა და წარმატების აუცილებელი პირობაა. მათემატიკის დარგებში სათანადო ცოდნის საჭიროებას მივყავართ განსხვავებული ხასიათის – ცნობარებიდან მონოგრაფიებამდე – ლიტერატურისა და მათემატიკური უზრუნველყოფის ბაზების შექმნამდე.

წიგნი შედგენილია ისეთნაირად, რომ ყოველი ნაკვეთის თითქმის ყველა თავის პირველი ნახევარი გათვლილია ისეთ ჯგუფზე, რომლისთვისაც საკმარისია უმაღლესი სკოლის საწყის კურსებზე მიღებული განათლება, ხოლო მეორე ნახევარში იგივე ნაწილები გადმოცემულია გაღრმავებული სახით – ნავარაუდევი შედარებით კვალიფიციურ მკითხველზე. ამდენად, წარმოდგენილი სახელმძღვანელო, მკითხველთა განსხვავებული დონისა და პროფესიული ინტერესების, ამავე დროს ქართულ ენაზე რიგი არსებითი ნაწილების არარსებობის გამო, განკუთვნილია ფართო დიაპაზონის მომხმარებელთათვის.

გამოთვლითი მათემატიკის მიზანია წარმოადგინოს თვლის რეალური აპარატი, მისი შექმნით, სრულყოფითა და გამოყენების უნარით ერთი და მრავალგანზომილებიანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნისთვის. ამ მოსაზრებათა გადაჭრის გზაზე, განსაკუთრებით რთული სქემების შექმნისას, ამოცანათა განზომილებებს შორის განსხვავება არსებითად ზრდის და ართულებს შესაბამისი საჭირო ინფორმაციის მოცულობას როგორც რაოდენობრივი, ისე თვისებრივი მიმართულებით. ამდენად, წარმოდგენილი სახელმძღვანელო ძირითადად ეძღვნება ერთგანზომილებიანი, სივრცული ცვლადის მიმართ გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდების გადმოცემას. პარალელურად, ავტორთა ჯგუფთან ერთად მზადდება მრავალგანზომილებიანი გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდების სახელმძღვანელოც.

სახელმძღვანელო შედგება ოთხი ნაკვეთისგან, ნაკვეთი – თავებისგან, ხოლო თავი – პუნქტებისგან.

პირველი ნაკვეთის პირველ თავში გადმოცემულია (კურსის სისრულის მიზნით) განტოლებათა ამოხსნის იტერაციული ხერხები. მეორე თავი ეძღვნე-

ბა წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნის მეთოდებთან დაკავშირებულ ჩვენთვის მისაწვდომი ლიტერატურის მიმოხილვას და სათანადო წყაროების (ქართულ და სხვა ენებზე) მითითებას. ამ ნაწილში მიმოხილულია წრფივი ალგებრის რიცხვითი მეთოდები. ეს ნაწილი იმდენად ფართო მოცულობის, მრავალმხრივი და მნიშვნელოვანია თეორიისა და პრაქტიკისთვის, რომ აქ გადმოცემა აგვაცდენდა იმ მიზანს, რასაც წარმოდგენილი სახელმძღვანელო ეძღვნება.

მეორე ნაკვეთი ეძღვნება ფუნქციის მიახლოებასთან დაკავშირებული პრობლემატიკის გადმოცემას. ამ ნაწილის I თავში ძირითადად წარმოდგენილია ფუნქციის ინტერპოლების თეორია და პრაქტიკა. კლასიკური სახელმძღვანელოებისაგან განსხვავებით, ძირითადი აქცენტი კეთდება ლაგრანჟისა და ნიუტონის ფორმულებზე, რამდენადაც დღესდღეობით მნიშვნელოვანია არა სპეციალური სტრუქტურის (ფუნქციის და მისი მაღალი რიგის სხვაობების შესაბამისი ცხრილების გამოყენებაზე განპირობებული გაუსის, ნიუტონის (ცალმხრივი), სტირლინგის, ევერეტის, ბესელისა და სხვა ძალზე საინტერესო) საინტერპოლაციო ფორმულებით სარგებლობა, არამედ თვლის პროცესის ერთგვაროვნება, პარალელური და ავტომატური რეჟიმის მათემატიკური უზრუნველყოფის შექმნა, ცდომილების შეფასება განსხვავებული სიგლუვით განსაზღვრულ ფუნქციათა კლასებზე.

ამავე ნაკვეთის II თავში შეისწავლება ფუნქციის აპროქსიმაციასთან დაკავშირებული ამოცანა და ეს ნაწილი გადმოცემულია ბერნშტეინის პოლინომების გამოყენებით. განიხილება ცდომილების შეფასების საკითხები. კერძოდ, ნაჩვენებია ამ აპარატით ფუნქციათა კლასებზე კრებადობის რიგის გაუმჯობესებადობა.

II ნაკვეთის მესამე თავში გამოცემულია ერთგანზომილებიან სპლაინ-ფუნქციათა თეორიის ელემენტები, როდესაც კუბური სპლაინები იგება მომენტებითა და დახრილობებით; შესწავლილია ცდომილების შეფასება ფუნქციათა კლასებზე და ამ თეორიის გამოყენება რიცხვითი გაწარმოებისა და ინტეგრების ახალი ტიპის ფორმულების აგების მიმართულებით. მათემატიკის ეს ინტენსიურად განვითარებადი დარგი, გარდა ღრმა იდეური გარღვევისა, უმნიშვნელოვანეს ეფექტურ სათვლელ აპარატს წარმოადგენს, რომელიც ისეთი მეთოდების საფუძველია, როგორიცაა სასრულ ელემენტთა და მისი მოდიფიკაციით მიღებული მათემატიკური ფიზიკის განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდები. სპლაინ-ფუნქციათა თეორია ამავე დროს წარმოადგენს თანამედროვე კომპიუტერული გრაფიკის საფუძველს როგორც ერთგანზომილებიან, ისე მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში. ეს თავი გადმოცემულია ძირითადად ალბერგის, უოლშისა და ნილსენის მონოგრაფიისა და ენგელ-მიუგლერისა და როიტერის სახელმძღვანელოს საფუძველზე.

III ნაკვეთში გადმოცემულია რიგი რიცხვითი გაწარმოებისა და კვადრატურული ფორმულების აგებასთან დაკავშირებული, როგორც თვისებრივი, ისე კონსტრუქციული საკითხები; მოცემულია რიცხვითი გაწარმოების 3,4,5,6,7-კვანძიან ფორმულათა ცხრილი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებისათვის, ნიუტონ-კოუტსის, გაუსისა და ეილერ-მაკლორენის კვადრატურული ფორმულები ფუნქციათა კლასებზე ცდომილების შეფასებით. ამ ნაწილში ჩვენ მიერ ძირითადად გამოყენებულია გურსას, მიქელაძის, ნიკოლსკის, ენგელ-მიუგლერისა და როიტერის, ბერეზინისა და ჟიდკოვის სახელმძღვანელოები.

IV ნაკვეთი ეძღვნება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების გადმოცემას როგორც საწყისი, ისე სასაზღვრო პირობებით. ეს ნაკვეთი შეიცავს კლასიკურ შედეგებთან ერთად ამ დარგში ქართველ მათემატიკოსთა რიგ ახალ გამოკვლევებს, რომლებიც, ჩვენი აზრით, ყურადსაღებია.

ლექციათა კურსი შეესაბამება ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტი და საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის სასწავლო გეგმებისა და სილაბუსების მიხედვით „რიცხვითი ანალიზის" 2006-2009 წწ. წაკითხულ ორსემესტრიან ლექციათა ძირითადი კურსების პირველი სემესტრით გათვალისწინებულ პროგრამებს ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის სტუდენტებისა და დოქტორანტებისათვის.

ხელნაწერის მომზადების პერიოდში, კურსის შედგენისას, ვიყენებდი კოლეგათა: რ. ბოჭორიშვილის, დ. გორდეზიანის, ჰ. მელაძის, ჯ. როგავას, თ. ჯანგველაძის, მაგისტრანტების: რ. ჩიკაშუას, დ. არაბიძის, ლ. აბზიანიძის ხელნაწერებს, სახელმძღვანელოებს, სილაბუსების ტექსტებსა და პროგრამათა პაკეტებს. ამ მიმართულებით ჩემთვის მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის ოთხშაბათის სემინარებმა. ზემოთქმული სრულ უფლებას მაძლევს ზემოჩამოთვლილ კოლეგებთან ერთად მადლიერებით მოვიხსენიო: ვ. ჭავჭანიძის, პ. რიჩის, ვ. მაკაროვის, თ. მეუნარგიას, გ. ახალაიას, ნ. ავაზაშვილის, გ. ჯაიანის, ა. პაპუკაშვილის, მ. წიკლაურის, მ. მენთეშაშვილის, ნ. მჭედლიშვილის, გ. გელაძის, რ. ჯანჯღავას, კ. ფურცელაძის ღრმა კოლეგიალობა და სითბო და ჩემი ოჯახის წევრების: მეუღლის – ნონა ვასილიევა-ვაშაყმაძის, შვილების – დიანასა და ეკას და ჩემი დის – თამრიკოს მოთმინება და თანადგომა, რომელთა გარეშე არა მარტო წიგნს, ჩემს არსებობასაც მრავალი კითხვის ნიშანი გაუჩნდებოდა.

ნ ა კ ვ ე თ ი I

ალგებრის გამოთვლითი მეთოდები

თავი I. განტოლებათა ფესვების გამოთვლა

1.1. მხებთა მეთოდი

ვიგულისხმოთ, რომ $y = f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე $x \in [a,b]$ შუალედში და ჩვენს ამოცანას შეადგენს შესაბამისი

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

განტოლების ნამდვილი ფესვების პოვნა, ანუ $f(x)$ ფუნქციის ნულების განსაზღვრა.

დავუშვათ, რომ (1) განტოლების ფესვი არსებობს და იგი მოთავსებულია რაიმე შუალედის შიგნით.

როგორც ცნობილია, (1) განტოლების ფესვების პოვნა ზუსტი მეთოდებით ხორციელდება $f(x)$ ფუნქციათა მეტად ვიწრო კლასისთვის (ზუსტი მეთოდები ნაწილობრივ გადმოცემულია საშუალო სკოლისა და უმაღლესი ალგებრის სათანადო სახელმძღვანელოებსა და ცნობარებში).

ამდენად, (1) განტოლების ამონახსნის პოვნის ძირითადი მეთოდი ფესვთან თანდათან მიახლოების, ანუ იტერაციის პროცესია. ამისათვის დავუშვათ, რომ (1) ეკვივალენტურია

$$f(x) = x - \varphi(x) = 0$$

წარმოდგენისა და იტერაციული პროცესი განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), (n = 1,2,\ldots), \tag{2}$$

რომლის ამონახსნი იკრიბება, n-ის ზრდასთან ერთად, (1) განტოლების ამონახსნისკენ, რომელსაც ξ-თი აღვნიშნავთ.

ფესვის პოვნის მიზნით, ქვემოთ დავადგინოთ საკმარისი პირობები, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს $\varphi(x)$ ფუნქცია.

ჩავთვალოთ, რომ (2) იტერაციული პროცესი კრებადია ანუ $x_n \to \xi$, როდესაც $n \to \infty$, ანუ (2) ტოლობაში ზღვარზე გადასვლა გვაძლევს $\xi = \varphi(\xi)$, ანუ $x = \xi$ უნდა იყოს (1)-ისა და

$$x = \varphi(x) \tag{3}$$

საერთო ამონახსნი.

ამასთან დაკავშირებით, იტერაციული პროცესის ასაგებად (1) გადავწეროთ (3) სახით. ამგვარი წარმოდგენა, ცხადია, შესაძლებელია განხორციელდეს მრავალნაირად.

ასე, მაგალითად, თუ განვიხილავთ უმარტივეს მაგალითს

$$f(x) = x^2 - a = 0,$$

მაშინ

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right) \tag{4}$$

წარმოდგენასთან ერთად, შესაძლებელია, ვისარგებლოთ

$$x_n = \frac{a}{x_{n-1}} \quad , \; x_n = 2x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}} \tag{5}$$

სქემებით[1].

ადვილია ჩვენება, რომ არც (5_1) და არც (5_2) სქემა არ გვაძლევს სასურველ შედეგს.

მართლაც, (5_1) გვაძლევს, თუ

$$x_0 \neq 0\,,\; x_1 = \frac{a}{x_0}\,,\; x_2 = x_0\,,\; x_3 = \frac{a}{x_0}\,,\; x_4 = x_0\,, \cdots$$

(5_2) პროცესი გვაძლევს (გარკვეულობისთვის დავუშვათ $x_0 > a > 1$)

$$x_1 = 2x_0 - \frac{a}{x_0}.$$

რადგან $x_0 > a$, $\frac{a}{x_0} < 1$, ამიტომ $\forall n$-სთვის

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}} > x_{n-1} + x_{n-1} - 1 > x_{n-1}\,,$$

ე. ი. მიმდევრობა ზრდადია და არ არის შემოსაზღვრული($\xi = \sqrt{a} < a < x_0$!).

ქვემოთ დავადგინოთ $\varphi(x)$ ფუნქციის ის თვისებები, რომელიც გავლენას ახდენს კრებადობის პროცესზე. $x_n \to \xi \;\; (n \to \infty)$ ნიშნავს, რომ $|x_n - \xi|$ n-ის ზრდასთან ერთად მცირდება. ამიტომ, თუ დავუშვებთ, რომ

$$|x_n - \xi| \leq q|x_{n-1} - \xi|\,, q < 1, \tag{6}$$

მაშინ ცხადია, რომ $|x_n - \xi|$ მცირდება, როგორც გეომეტრიული პროგრესია q მნიშვნელით, ე. ი. ადგილი ექნება კრებადობას. (2)-ისა და (3)-ის სხვაობა (6)-ის გათვალისწინებით გვაძლევს

$$|\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi)| = |x_n - \xi| \leq q|x_{n-1} - \xi|. \tag{7}$$

რადგან ξ ფესვი უცნობია, (7) პირობის უშუალოდ შემოწმება შეუძლებელია და საჭიროა, იგი შეიცვალოს სხვა, უფრო ძლიერი პირობით. ზემოთ ჩვენ ჩავთვალეთ, რომ ფესვი ძევს რომელიღაც ინტერვალში, რომელიც $[a,b]$-ში შედის. თუ ამ ინტერვალის ნებისმიერი x', x'' წყვილისთვის დავუშვებთ, რომ სრულდება (7)-ის ანლოგიური პირობა

[1] მაგალითი აღებულია ვ. დიაჩენკოს „Основные понятия вычислительной математики", М., Наука, 1977, სახელმძღვანელოდან.

$$|\varphi(x'')-\varphi(x')|\le q|x''-x'|, q<1, \tag{8}$$

მაშინ სრულდება (7)-იც (x', x''-ის ნებისმიერობის გამო!).

$x=\varphi(x)$ ასახვას, რომელიც აკმაყოფილებს (8) უტოლობას, ეწოდება კუმშვით ასახვა (იგი კუმშავს $[x', x'']$ შუალედს, გარკვეულობისათვის ჩავთვალოთ, რომ $x'<x''$). ადვილია ჩვენება იმისა, რომ (8) პირობა საკმარისია (2) პროცესის კრებადობისთვის. მართლაც:

$$|x_n-x_{n-1}|=|\varphi(x_{n-1})-\varphi(x_{n-2})|\le q|x_{n-1}-x_{n-2}|\le q^2|x_{n-2}-x_{n-3}|\le\cdots\le q^n|x_1-x_0|,$$
$$q<1.$$

q სიდიდის შესაფასებლად ჩვეულებრივ ვიყენებთ ფორმულას

$$q=\max_x|\varphi'(x)|, \tag{9}$$

სადაც მაქსიმუმი აიღება იმ შუალედში, სადაც ξ ფესვი ლოკალიზებულია.

$\varphi(x)$ ფუნქციის არჩევის ხარისხი, ცხადია, უნდა შეფასდეს კრებადობის სიჩქარით. ამ აზრით უმჯობესია ის, რომელიც გვაძლევს q-ს შედარებით მცირე მნიშვნელობას.

დავუშვათ, $\varphi(x)$ ისეთია, რომ $f(x)=0$ და $\varphi(x)-x=0$ განტოლებებს, როგორც ზემოთ, აქვთ საერთო ფესვი ξ. მაშინ, თუ ეს ფესვი ჯერადი არაა, $f'(\xi)\ne 0$ და ξ-ს გარკვეულ ქვეშუალედში $f(x)$ ფუნქციას სხვა ნული არ აქვს. ამიტომ ამ ქვეშუალედში

$$\frac{\varphi(x)-x}{f(x)}=r(x)$$

ფუნქცია შემოსაზღვრულია. ყოველ $\varphi(x)$-ს შეესაბამება $r(x)$ და პირიქით, ყოველი $r(x)$ განსაზღვრავს

$$\varphi(x)=x+r(x)f(x) \tag{10}$$

ფუნქციას.

ჩვენი ამოცანაა ისეთი $\varphi(x)$-ის პოვნა, რომლისთვისაც $|\varphi'(x)|$ მინიმალურია (q-ს გამო). გავაწარმოოთ (10):

$$\varphi'(x)=1+r(x)f'(x)+r'(x)f(x).$$

ξ-ის მიდამოში $f(x)$ მცირე სიდიდეა. ამიტომ, თუ უკანასკნელ შესაკრებს უკუვაგდებთ, მივიღებთ

$$r(x)=-\frac{1}{f'(x)}.$$

ამგვარად, (10)-თან მიმართებაში, უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{11}$$

(11) გამოსახულებით განსაზღვრულ

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \tag{12}$$

იტერაციულ პროცესს ეწოდება ნიუტონის მეთოდი.

ამგვარად, თუ $r(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$, მაშინ

$$r'(x) = \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

ამიტომ

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} f(x) = \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} f(x) \to 0,$$

როდესაც $x \to \xi$.

(12) ფორმულა შეიძლება აიგოს სხვა გზითაც. მართლაც, თუ $f(x) = 0$ განტოლებას შევცვლით წრფის მონაკვეთით, რომელიც გადის $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ და $(x,0)$ წერტილებზე, $f'(x_{n-1})$ დახრილობით, გვექნება

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) \Rightarrow x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

ნიუტონის მეთოდით სარგებლობა მიზანშეწონილია ფესვის საკმარისად მცირე მიდამოში, რადგან $f(x)$ მცირე სიდიდეა. ამიტომ კონკრეტულ გამოთვლებში უმჯობესია ფესვი ლოკალიზებულ იქნეს შედარებით მარტივი და უხეში მეთოდით, ხოლო შემდეგ მაღალი სიზუსტის მისაღწევად გამოვიყენოთ ნიუტონის მეთოდი.

ზემოთ განსაზღვრული ნიუტონის ანუ მხებთა მეთოდი შეიძლება გადავიტანოთ არაწრფივ განტოლებათა სისტემისთვის.

განვიხილოთ m განტოლება m უცნობით.

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \ i = 1,2,\ldots,m. \tag{13}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m), \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

მაშინ (13) შეიძლება გადავწეროთ

$$f(x) = 0, \tag{14}$$

ვექტორული ფორმით, რომელიც ემთხვევა (1) გამოსახულებას. ამის გამო ზემოთქმული შესაძლებელია გადავიტანოთ (14) სისტემისთვის. ცხადია, გასათვალისწინებელია (14)-ში შემავალი სიდიდეების ვექტორული ხასიათი და ამიტომ გამოყენებულ აღნიშვნებს უნდა მივცეთ სათანადო აზრი.

სკალარული სიდიდეების შესაფასებლად გამოვიყენოთ მისი მოდული, ხოლო ვექტორისთვის – მისი ნორმა. ნორმას განვსაზღვრავთ, როგორც კომპონენტთა მოდულების მაქსიმუმს:

$$\|x\| = \max_i |x_i|. \tag{15}$$

ცხადია, თუ ვექტორის ნორმა ნულია, ეს ნიშნავს, რომ ყველა მისი კომპონენტი ნულის ტოლია.
გადავწეროთ (14) (3)-ის ანალოგიური სახით

$$x = \varphi(x)\,, \tag{16}$$

სადაც $\varphi = \left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\right)$.
(16)-დან განვსაზღვროთ იტერაციული პროცესი, რომლის კრებადობის პირობაა (16) ასახვის კუმშვადობა, ანუ

$$\left\|\varphi(x'') - \varphi(x')\right\| \le q\left\|x'' - x'\right\|,\ \ q < 1\,. \tag{17}$$

შევაფასოთ q სიდიდე. განვიხილოთ $\varphi_i(x)$ ფუნქციები მონაკვეთზე, რომელიც აერთებს x' და x'' წერტილებს. მივიღებთ

$$\psi(s) = \varphi_i\left(x' + s\left(x'' - x'\right)\right) \tag{18}$$

ფუნქციას s სკალარული არგუმენტით. x' და x'' წერტილებს შეესაბამებათ $s = 0$ და $s = 1$ მნიშვნელობები. ცხადია, გვაქვს ტოლობა

$$\varphi_i\left(x''\right) - \varphi_i\left(x'\right) = \psi(1) - \psi(0) = \psi'\left(\tilde{s}\right),\ \ 0 \le \tilde{s} \le 1\,. \tag{19}$$

გავაწარმოოთ (18) s-ით. მივიღებთ:

$$\psi'(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{d\left(x'_k + s\left(x''_k - x'_k\right)\right)}{ds} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\left(x''_k - x'_k\right),$$

ამიტომ (19)-დან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა

$$\left|\varphi_i\left(x''\right) - \varphi_i\left(x'\right)\right| \le \max_x \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right| \left\|x'' - x'\right\|. \tag{20}$$

$\varphi'(x)$-ის როლს, ცხადია, ასრულებს მატრიცა, რომლის ელემენტებია $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული ვექტორ-არგუმენტით. თუ ამ მატრიცის ნორმას განვსაზღვრავთ როგორც

$$\left\|\varphi'\right\| = \max_i \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right|, \tag{21}$$

მაშინ (17) უტოლობიდან განსაზღვრული q-ს შესაფასებლად, როგორც (20)-დან გამომდინარეობს, ვისარგებლოთ

$$q = \max_x \left\|\varphi'(x)\right\| \tag{22}$$

ტოლობით, რაც ანზოგადებს (9)-ს ვექტორული შემთხვევისთვის.
$\varphi(x)$ სიდიდის აგება შესაძლებელია (10)-ის ანალოგიურად:

$$\varphi(x) = x + r(x)\,f(x)\,, \tag{23}$$

სადაც $r(x)$ ნებისმიერი მატრიცა-ფუნქციაა. როდესაც

$$r(x) = -\left(f'(x)\right)^{-1}, \tag{24}$$

სადაც $\left(f'(x)\right)^{-1}$ მატრიცა

$$f' = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right\}$$

წარმოებულებიდან შედგენილი მატრიცის შებრუნებულია, მივიღებთ ნიუტონის მეთოდს.

ავაგოთ ნიუტონის სქემის მოხერხებული (გამოთვლებისთვის) სახე. ამისათვის ვაჩვენოთ, რომ $\varphi'(x) = 0$, როდესაც $x = \xi$. მართლაც, თუ (23)-ს გავაწარმოებთ (24)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\varphi'(x) = I + r'(x) f(x) + r(x) f'(x) = I + r'(x) f(x) + \left(-f'(x)\right)^{-1} f'(x) = r'(x) f'(x)\Big|_{x=3} = 0$$

.

რადგან

$$x_n - \varphi(x_{n-1}) = 0. \quad x_n = x_{n-1} + r(x_{n-1}) f(x_{n-1}) \Rightarrow \left(-f'(x)\right)^{-1} f(x_{n-1}) = x_n - x_{n-1}.$$

ეს ტოლობა გავამრავლოთ $\left(f'(x)\right)^{-1}$-ზე, საიდანაც მივიღებთ

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0.$$

ამგვარად, x_n-ის საპოვნელად საჭიროა $f'(x_{n-1})$ მატრიცის შებრუნება. ეს პროცესი შეიძლება ძალზე შრომატევადი აღმოჩნდეს, როდესაც m საკმარისად დიდი რიცხვია. ამიტომ ნიუტონის მეთოდი გამოიყენება, როდესაც $x_n - x_{n-1}$ საკმარისად მცირეა და 2-3 იტერაცია განაპირობებს სიზუსტის აწევას.

1.2. ქორდათა მეთოდი

დავუბრუნდეთ (1) განტოლებას. დავუშვათ, რომ $[a,b]$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია მეორე რიგამდე ჩათვლით და სეგმენტის ბოლოებზე იღებს საპირისპირო ნიშნებს:

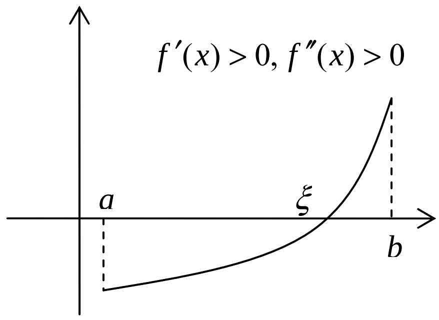
$$f(a) f(b) < 0.$$

ამ პირობის და კოშის თეორემის ძალით $f(x)$ $[a,b]$-ში ერთხელ მაინც გახდება ნულის ტოლი.

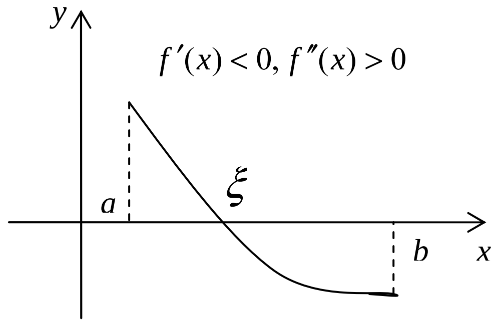
ჩავთვალოთ, რომ $f'(x)$ $[a,b]$-ზე ნიშანგანსაზღვრულია. ამიტომ $x = \xi$ ერთადერთია. მართლაც, თუ წარმოებული ნიშანს ინარჩუნებს, მაშინ ფუნქცია მკაცრად მონოტონურია, რაც ნიშნავს, რომ

$f(x) > 0$ (ან $f(x) < 0$), როცა $\xi > x$, ან $f(x) < 0$ (ან $f(x) > 0$), როცა $\xi < x$.

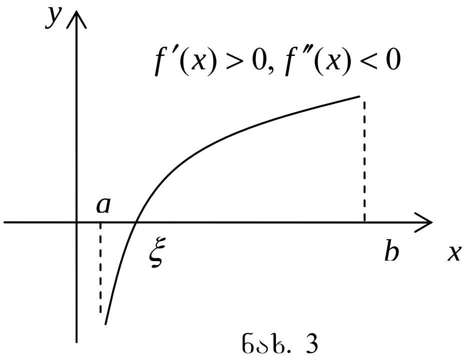
გარდა ზემოთქმულისა, დავუშვათ, რომ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული $f''(x)$ $[a,b]$-ში ინარჩუნებს ნიშანს. გავიხსენოთ, რომ, თუ $f''(x) > 0$, $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია, ხოლო $f''(x) < 0$ შემთხვევაში – ამოზნექილი. ამგვარად, თუ $f(x)$ აკმაყოფილებს ზემოჩამოთვლილ პირობებს, გვაქვს 4 შესაძლო შემთხვევა:



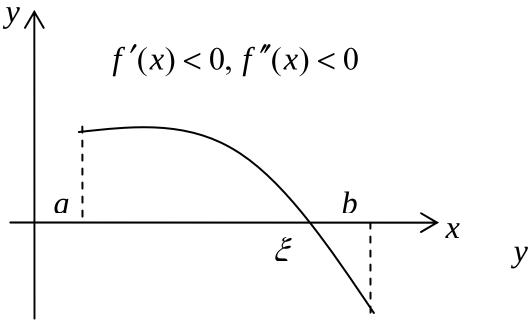
ნახ. 1



ნახ. 2



ნახ. 3



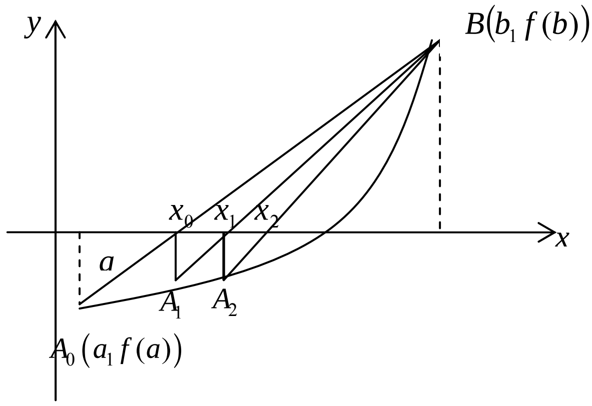
ნახ. 4

ქვემოთ დაწვრილებით შევისწავლით მხოლოდ პირველ შემთხვევას, რადგან: მეოთხე შემთხვევა დაიყვანება პირველზე გამოსავალი განტოლების (-1)-ზე გამრავლებით; მესამე შემთხვევა დაიყვანება მეორეზე (1)-განტოლების (-1)-ზე გამრავლებით; თავის მხრივ, მეორე დაიყვანება პირველ შემთხვევაზე, თუ $f(x)=0$-ის ნაცვლად განვიხილავთ $f(-x)=0$ განტოლებას.

ამგვარად, შევისწავლოთ (1) განტოლების ამონახსნის აგების საკითხი, როდესაც

$$f(a)<0\,,\;\; f(b)>0\,,\;\; f'(x)>0\,,\;\; f''(x)>0\,,\;\; x\in[a,b]\,. \qquad (*)$$

$f(x)=0$ განტოლების ფესვი ვიპოვოთ მიმდევრობითი მიახლოების სპეციალური მეთოდით, რომელსაც ქორდათა (ყალბი დაშვების) მეთოდს ვუწოდებთ.



ნახ. 5

მეთოდი განისაზღვრება შემდეგნაირად: A_0 და B წერტილებს ვაერთებთ წრფის მონაკვეთით (რომელიც $f(x)$-ისთვის ქორდაა). Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ x_1-ით. x_1-დან აღვმართოთ მართობი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაკვეთამდე. გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ A_1-ით. A_1-სა და B-ს შორის გავატაროთ წრფის მონაკვეთი და Ox ღერძთან მისი გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ x_2-ით და ა. შ. ქვემოთ ვაჩვენოთ, რომ (*) პირობებში $\{x_k\}$ მიმდევრობა კრებადია $x=\xi$ ფესვისკენ.

A_0B წრფის განტოლებას, ცხადია, აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}, \tag{2.1}$$

რომლის გადაკვეთის წერტილი Ox ღერძთან მიიღება, როდესაც $y=0$. გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ x_1-ით და $a=x_0$. ამრიგად, (2.1)-დან გვაქვს:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f(b)-f(a)}(b-x_0).$$

რადგან $A_1=A_1(x_1,f(x_1))$ ძევს $f(x)$-ზე, A_1B წრფის განტოლება იქნება:

$$\frac{x-x_1}{b-x_1}=\frac{y-f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}\Rightarrow x_2=x_1-\ \frac{f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}(b-x_1).$$

გავაგრძელოთ ეს პროცესი. ინდუქციით გვექნება:

$$x_k=x_{k-1}-\frac{f(x_{k-1})}{f(b)-f(x_{k-1})}(b-x_{k-1})\quad k=1,2,\ldots \tag{2.2}$$

ვაჩვენოთ, რომ $\{x_k\}$ მიმდევრობა, როდესაც შესრულებულია (*) პირობები, ზრდადია. მართლაც, თუ რომელიმე ნომრისთვის $f(x_{k-1})=0$, მაშინ $x_k=x_{k-1}$ და ა. შ. $x_k=x_{k+1}=x_{k+2}=\cdots$ და ფესვის ერთადერთობის გამო პროცესი

წყდება და ამგვარად $\xi = x_{k-1}$. თუ $f(x_{k-1}) < 0$ $\forall k$-სთვის, მაშინ (2.2)-ის მარჯვენა მხარეში მაკლები უარყოფითია და ამიტომ $x_k > x_{k-1}$ $\forall k$-სთვის. ამასთან ერთად ცხადია, რომ $\{x_k\}$ ზრდადი შემოსაზღვრული (აჩვენეთ) მიმდევრობაა, რომელსაც აქვს ზღვარი (ანალიზის ერთ-ერთი თეორემის ძალით). აღვნიშნოთ იგი x^*-ით:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$

(2.2) ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე. $f(x)$-ის უწყვეტობის გამო სამართლიანი იქნება ტოლობა:

$$x^* = x^* - \frac{f\left(x^*\right)}{f(b) - f\left(x^*\right)}\left(b - x^*\right) \Rightarrow f\left(x^*\right) = 0.$$

რადგან ξ ერთადერთია, $x^* = \xi$. მიმდევრობის კრებადობა დამტკიცებულია.

შევაფასოთ მეთოდის კრებადობის სიჩქარე. რადგან $f(\xi) = 0$, (2.2)-დან გვაქვს:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1}) - f(\xi)}{f(b) - f(x_{k-1})}(b - x_{k-1})$$

საიდანაც ლაგრანჟის სასრული ნაზრდის ფორმულის ძალით გვაქვს:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{(x_{k-1} - \xi) f'(\xi_{k-1})}{(b - x_{k-1}) f'(\eta_{k-1})}(b - x_{k-1}) = x_{k-1} - \frac{f'(\xi_{k-1})}{f'(\eta_{k-1})}(x_{k-1} - \xi) \tag{2.3}$$

$$\left(x_{k-1} \le \xi_{k-1} \le \xi,\ x_{k-1} \le \eta_{k-1} \le b\right).$$

(2.3)-დან გამომდინარეობს შემდეგი:

$$\left|x_{k-1} - \xi\right| = \left|x_k - x_{k-1}\right| \left|\frac{f'(\eta_{k-1})}{f'(\xi_{k-1})}\right| \tag{2.4}$$

დავუშვათ,

$$0 < m = \min_x \left|f'(x)\right|,\ \ M = \max_x \left|f'(x)\right|. \tag{2.5}$$

მაშინ (2.4)-დან გვაქვს:

$$\left|x_{k-1} - \xi\right| \le \left|x_k - x_{k-1}\right| \frac{M}{m}. \tag{2.6}$$

ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ $\dfrac{M}{m}$ სიდიდე ყოველი $f(x)$-სთვის ფიქსირებული სიდიდეა და იგი არაა დამოკიდებული საიტერაციო პროცესზე. ამასთან, x_k მიმდევრობა რიცხვთა ღერძის სისრულის გამო – ფუნდამენტურია. ამიტომ

$$\left|x_k - x_{k-1}\right| \le \varepsilon \frac{m}{M},\ \text{როცა}\ \ k > k_0\left(\varepsilon \frac{m}{M}\right).$$

ამის გამო (2.6)-დან გამომდინარეობს: $\left|x_k - \xi\right| \le \varepsilon$, რაც კრებადობაა.

კომენტარები და ლიტერატურული მითითებები

როგორც წინასიტყვაობაში აღვნიშნეთ, სახელმძღვანელო განკუთვნილია განსხვავებული დონის მკითხველთათვის.
უცხო ენების მცოდნე მკითხველთათვის მოიპოვება უმდიდრესი ლიტერატურა, სადაც განტოლების (ან განტოლებათა სისტემის) ფესვის პოვნის და წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდებია გადმოცემული.
როგორც მომდევნო ნაკვეთებში, ამ ნაწილშიც ძალზე სასარგებლო სახელმძღვანელოდ მიგვაჩნია *G.Engeln-Müllges, F.Reutter. Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit C-Programmen, BIWissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/ Zürich, 1990.*
ციტირებული სახელმძღვანელო მნიშვნელოვანია არა მარტო სათანადო მასალის მისაწვდომად გადმოცემით, არამედ აქვე წარმოდგენილი რიცხვითი ალგორითმებისათვის შესაბამისი პროგრამებით.
ქვემოთ მოვიყვანთ ქართულ ენაზე შექმნილი სახელმძღვანელოდან – *ჰ.მელაძე, მ.მენთეშაშვილი, ნ.მჭედლიშვილი, რ.სხირტლაძე. გამოთვლითი მათემატიკის საფუძვლები, თბ. უნივ. გამომც-ბა, თბილისი, 2003 ([მელაძე 1])* საკითხების ჩამონათვალს, რომელიც აღნიშნულ თემატიკას შეეხება:
არაწრფივ განტოლებათა (განტოლებათა სისტემის) მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდები და პრაქტიკული ხასიათის მითითებები. მათ შორის ბისექციის (დიხოტომიის), მარტივი იტერაციის, ნიუტონის და ნიუტონის მოდიფირებული, მკვეთთა (ქორდათა), ჰიბრიდული, კრებადობის მაღალი რიგის მქონე იტერაციული (ჩებიშევის, კენიგის, აგრეთვე გრეფე-ლობაჩევსკის, მიულერის, ბაუჰაუზენის) მეთოდები. აღსანიშნავია აგრეთვე შალვა მიქელაძის შესანიშნავი მონოგრაფია: *შ. მიქელაძე. რიცხვითი განტოლებების ამოხსნა, თბილისი, მეცნიერება, 1965 (რუსულ ენაზე).* ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნადობის პრობლემებთან დაკავშირებით [მელაძე 1] შრომაში განხილული და შესწავლილია შემდეგი ნაკვეთები: წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პირდაპირი, მათ შორის გაუსის თანდათანობითი გამორიცხვის მეთოდი, კვადრატულ ფესვთა მეთოდი, იტერაციული, მათ შორის ორშრიანი, მარტივი, იაკობის, ზეიდელის, ზედა რელაქსაციის, ვარიაციული მეთოდები. ამავე სახელმძღვანელოში განხილულია პრობლემატიკა, დაკავშირებული მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობების გამოთვლასთან. უკანასკნელ პრობლემასთან დაკავშირებით უნდა აღვნიშნოთ, რომ ჩვენ მიერ *T.Vashakmadze.The Theory of Anisotropic Elastic Plates, Kluwer Acad. Publ. 1999 [Vasha 1,ch.2.]* განვითარებულია შეშფოთების (პუანკარე-ლიაპუნოვის) თეორიის ალტერნატიული მეთოდი, რომელიც რეალიზებულია ალგებრულ განტოლებათა სისტემისთვის და საკუთრივ მნიშვნელობათა განსაზღვრის ამოცანისთვის, როდესაც შესაბამისი მატრიცები, ე. წ. სავსე მატრიცებია.
როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ამ კურსში არაა წარმოდგენილი წრფივი ალგებრის რიცხვითი მეთოდები ორი მიზეზით:

ა) ამ მიმართულებით ქართულ ენაზე გამოქვეყნებული სახელმძღვანელო [მელაძე 1] სავსებით მისაწვდომია და განკუთვნილია სხვადასხვა დონის მკითხველისათვის.
ბ) რიცხვითი ანალიზის ეს დარგი ისწავლებოდა ჩვენს უნივერსიტეტში1957-2006წწ, როგორც ერთ-ერთი ძირითადი კურსი მათემატიკის მიმართულების ფაკულტეტებზე და ნაშრომის [მელაძე 1] პარალელურად ფუნქციონირებდა თ. ვაშაყმაძის ლექციათა კურსი „წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების კვლევისა და მიახლოებით ამოხსნის თანამედროვე მეთოდები“ ხელნაწერის სახით, რომელიც იკითხებოდა გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტზე 1994-2006წწ.

ნ ა კ ვ ე თ ი II

ფუნქციის მიახლოების თეორია

თავი 1. ინტერპოლების თეორია და პრაქტიკა

1.0.შესავალი. წრფივი და არაწრფივი აპროქსიმაცია

განვიხილოთ უწყვეტი $[a,b]$-ში $f(x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქციები. $\Phi(x)\in C[a,b]$ ნიშნავს, რომ Φ უწყვეტი ფუნქციაა, როდესაც $x\in[a,b]$. გარდა ამისა, ვგულისხმობთ, რომ Φ დამოკიდებულია c_0, c_1, $\ldots$, c_n თავისუფალ პარა-მეტრებზე:

$$\Phi(x) := \Phi(x, c_0, c_1, \ldots, c_n) = \Phi(x, c), \;\; c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T .$$

ჩვენი მიზანია, შევარჩიოთ c ვექტორი ისეთნაირად, რომ f და Φ - ორ ფუნქციას შორის განსხვავება გარკვეული აზრით მინიმალური იყოს.

წარმოიშობა ორი სახის პრობლემა:

1. ვიპოვოთ ისეთი Φ ფუნქცია (ავაგოთ კონსტრუქციულად), რომელიც გარკვეული აზრით უახლოვდება $f(x)$-ს $[a,b]$ შუალედის ნებისმიერ წერტილზე, ან მიახლოვება ხორციელდება რაიმე განსხვავებული აზრით. ამგვარად აგებულ Φ-ს უწოდებენ მააპროქსიმირებელ (*f*-ის მიმართ) ფუნქციას.

2. ვიპოვოთ ისეთი$\Phi(x)$, რომელიც გაივლის $(x_i, f(x_i)) = M_i$, $i = 0,1,2,\ldots,n$ წერტილებზე. $f(x_i)$ ნიშნავს $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობას x_i წერტილ-ში, $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$.ამგვარად აგებულ Φ-ს ეწოდება მაინტერ-პოლებელი ფუნქცია ან ინტერპოლანტი.

იმის მიხედვით, თუ როგორი სახისაა Φ ფუნქცია, ასხვავებენ ფუნქციის მიახლოების წრფივ და არაწრფივ ამოცანებს. მაგალითად, თუ Φ წარ-მოიდგინება ასეთნაირად:

$$\Phi(x,c) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(n) + \cdots + c_n\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\,, \qquad (0.1)$$

ხოლო $\varphi_k(x)\in C[a,b]$ ფუნქციათა რაიმე განსაზღვრული სისტემაა, მაგა-ლითად:

$\varphi_k(x) = x^k$, ან $\varphi_k(x) = \cos kx$ $k = 0,1,\dots,n$.

(0.1) წარმოდგენას ეწოდება წრფივი ფორმა (c პარამეტრების მიმართ). მაგალითად, გამოსახულება

$$\Phi_1(x, c_0, c_1, c_2, c_3) = c_0 + c_1 e^{2x} + c_2 \ln x + c_3 (x^2 + 1)$$

არის წრფივი, ხოლო

$$\Phi_2(x, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) = c_0 \cosh(c_1 x) + c_2 e^{c_3 (x - 2c_4)^3}$$

წარმოდგენა – არაწრფივი ფორმა.

1.1. ლაგრანჟისა და ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულები

დავუშვათ, $y = f(x)$ მოცემულია დისკრეტულ სიმრავლეზე (ვთქვათ, ცხრილით):

x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f_0 = f(x_0)$	f_1	$\cdots$	f_n

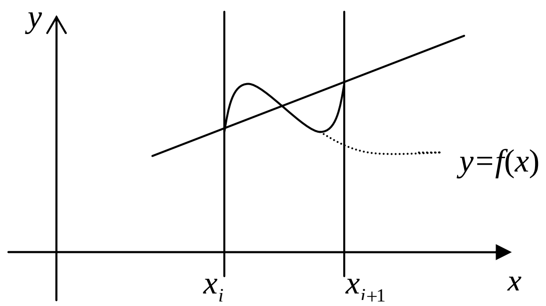
ამოცანა მდგომარეობს $f(x)$-ის მნიშვნელობის პოვნაში, როდესაც $x \neq x_i$, $i = 0,1,\dots,n$. თუ x_i საკმარისად ახლოსაა x-სთან ან x_i წარმოადგენს x-ის მიახლოებით მნიშვნელობას, შეიძლება ჩავთვალოთ, $f(x) \approx f_i$. ამ მიახლოების ცდომილება შეიძლება უხეშად ასეთნაირად შეფასდეს:

$$f(x) - f_i \approx f'(x)(x - x_i).$$

თუ $(x_i, f(x_i))$ და $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ წერტილები ცნობილია, მაშინ $x \in [x_i, x_{i+1}]$ შუალედში შესაძლებელია $f(x)$ ფუნქციას მივუახლოვდეთ შემდეგი სახით

$$f(x) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i).$$

გრაფიკულად, იხ. ნახ. 1:



ნახ. 1

ამგვარად, იკვეთება $y = f(x)$ ფუნქციის მიახლოების იდეა ისეთი მაინ-ტერპოლებელი პოლინომებით, ანუ ისეთი მრავალწევრებით, რომლებიც მოცემულ წერტილებში მოცემული ფუნქციის ტოლ მნიშვნელობებს იღებს.
ჩვენი მიზანი იქნება, ვიპოვოთ $n+1$ (განსხვავებულ) წერტილზე გამავალი პოლინომი; ამასთან, ეს წერტილებია: $M_i = (x_i, f(x_i))$.
დავუშვათ, საძიებელ პოლინომს აქვს სახე:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad , \qquad (1.1)$$

პირობით

$$f_n(x_i) = P_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_n x_i^n \quad (i = 0,1,\ldots,n). \qquad (1.2)$$

როგორც შესავალში აღვნიშნეთ, ფუნქციათა კლასი პოლინომებისა

$$\Phi(x,a) = \Phi(x, a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

განისაზღვრება $n+1$ პარამეტრის სიზუსტით. (1.2) გამოსახულება არის საძიებელი a_i კოეფიციენტებით წარმოდგენის ერთ-ერთი წრფივი ფორმა.
ვაჩვენოთ, რომ (1.2) სისტემიდან ცალსახად განისაზღვრება საძიებელი პარამეტრები. მართლაც, (1.2) წარმოადგენს წრფივ ალგებრულ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას, რომლის დეტერმინანტი $\neq 0$. ამის დასამტკიცებლად შევისწავლოთ:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x_0, & x_0^2, & \ldots, & x_0^n \\ 1 & x_1, & x_1^2, & \ldots, & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n, & x_n^2, & \ldots, & x_n^n \end{vmatrix}.$$

$W = W[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ დეტერმინანტს ვანდერმონდის დეტერმინანტი ეწოდება. როგორც ცნობილია, $W \neq 0$. მართლაც[1],თუ პირველ სტრიქონს გამოვაკლებთ დანარჩენებს და დავშლით I სვეტის მიხედვით, მივიღებთ:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 \\ 0 & x_3 - x_0 & x_3^2 - x_0^2 & x_3^3 - x_0^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 \\ x_3 - x_0 & x_3^2 - x_0^2 & x_3^3 - x_0^3 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2 \\ 1 & x_2 + x_0 & x_2^2 + x_2 x_0 + x_0^2 \\ 1 & x_3 + x_0 & x_3^2 + x_3 x_0 + x_0^2 \end{vmatrix}$$

მიღებული დეტერმინანტი დავშალოთ მე-2 სვეტის მიმართ ორ დეტერმინანტად: W_1, W_2. ცხადია, $W_2 = 0$, რადგან მას 2 ერთნაირი სვეტი ექნება.

[1] სიმარტივისა და თვალსაჩინოებისთვის ავიღეთ 4 კვანძი. ცხადია, ქვემოთ მოყვანილი მსჯელობა ზოგად ხასიათს ატარებს და ამის გამო დამტკიცების სქემა $\forall n$-სთვის სამართლიანია.

ასევე, თუ W_1 წარმოვადგენთ სამი დეტერმინანტის სახით, გვექნება: $W_{13} = W_{12} = 0$; W_{11} არის W-ს ტიპის მესამე რიგის დეტერმინანტი, არაა დამოკიდებული x_0 კვანძზე. იგი ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის გამოყენებით ანალოგიურად ითვლება და მიიყვანება W-ს ტიპის მეორე რიგის W_{22} დეტერმინანტის გამოთვლაზე:

$$W = \prod_{i=1}^{3}(x_i - x_0)(W_1 + W_2) = \prod_{i=1}^{3}(x_i - x_0)(W_{11} + W_{12} + W_{13})$$

$$= \prod_{i=1}^{3}(x_i - x_0)W_{11} = \prod_{\substack{i=1,2,3 \\ j=2,3}}(x_i - x_0)(x_j - x_1)W_{22} = \cdots = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

$\forall n$-თვის ზემოთ ჩატარებული სქემის გამოყენებისას გასათვალისწინებელია შემდეგი იგივეობა: $x_i^k - x_j^k = (x_i - x_j)(x_i^{k-1} + x_i^{k-2}x_j + \ldots + x_i x_j^{k-2} + x_j^{k-1})$,

$i > j, k \geq 1$

როგორც ადვილი მისახვედრია, საძიებელი პოლინომი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$P_n(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + \cdots$$

$$+ f_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x-x_n)} + \cdots$$

$$+ f_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})} \quad . \tag{1.3}$$

დამატება 1 . ვაჩვენოთ (1.3)-ის სამართლიანობა უშუალოდ. ამისთვის (1.2) სისტემიდან ვიპოვოთ a_i სიდიდეები. კრამერის წესის თანახმად გვექნება:

$$a_i = \frac{\Delta_{i+1}}{W[x_0, x_1, \ldots, x_n]} \quad \left(i = \overline{0,n}\right), \tag{A.1}$$

სადაც Δ_{i+1} მიიღება $W[x_0, x_1, \ldots, x_n]$-გან მასში $i+1$-ის სვეტის ამოშლითა და მის მაგივრად $(f_0, f_1, \ldots, f_n)^T$ სვეტის ჩასმით. თუ (A.1)-ს ჩავსვამთ (1.1)-ში, გვექნება:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i \cdot \frac{\Delta_{i+1}}{W[x_0, x_1, \ldots, x_n]} \tag{A.2}$$

Δ_{i+1} დავშალოთ $i+1$ სვეტის მიხედვით:

$$\Delta_{i+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{i-1} & f(x_0) & x_0^{i+1} & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & f(x_0) & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & f(x_n) & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{n} A_{i+1k+1} f(x_k) \qquad (A.3)$$

სადაც A_{i+1k+1} Δ_{i+1} დეტერმინანტის n რიგის $k+1$ სტრიქონისა და $i+1$ სვეტის $f(x_k)$ ელემენტის ალგებრული დამატებაა. თუ (A.3)-ს ჩავსვამთ (A.2)-ში, მივიღებთ:

$$P_n(x) = \frac{1}{\prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)} \sum_{i=0}^{n} x^i \cdot \sum_{k=0}^{n} A_{i+1k+1} f(x_k) \qquad (A.4)$$

(A.4)-ში გადავანაცვლოთ აჯამვის ინდექსები (დავუკვირდეთ, თუ რა ჯამი იქნება $f(x_k)$-სთან).

$$\sum_{i=0}^{n} x^i \sum_{k=0}^{n} A_{i+1k+1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \sum_{i=0}^{n} x^i A_{i+1k+1} .$$

ვაჩვენოთ, რომ $\forall f(x_k)$ მდგომი ჯამი უდრის ვანდერმონდის ტიპის დეტერმინანტს

$$W_{k+1} = W[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n],$$

რომლის სტრიქონები ემთხვევა ვანდერმონდის დეტერმინანტს, გარდა $k+1$ სტრიქონისა, რომელიც $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ ვექტორია და ასეთი დეტერმინანტი დაშლილია $k+1$ სტრიქონის ელემენტების მიხედვით. მართლაც, $\forall i,k$-თვის $A_{i+1,k+1}$ არის $k+1$ სტრიქონისა და $i+1$ სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტის ალგებრული დამატება, რაც იგივეა, რომ $A_{i+1,k+1}$ ელემენტები ადგენს $n+1$ რიგის მატრიცას. ამიტომ x^i-ზე $A_{i+1,k+1}$-ს გამრავლება და აჯამვა მოგვცემს W_{k+1}-ს. ამის გამო

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{W[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n]}{\prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)} f(x_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod\limits_{i>j(i\neq k, j\neq k)}(x_i - x_j) \prod\limits_{i<k}(x - x_i) \prod\limits_{i>k}(x_i - x)}{\prod\limits_{i>j(i\neq k, j\neq k)}(x_i - x_j) \prod\limits_{i<k}(x_k - x_i) \prod\limits_{i>k}(x_i - x_j)} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} f(x_k) .$$

(1.3) მრავალწევრი, რომელიც $n+1$ განსაზღვრულ წერტილზე გადის, იწოდება ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომად. $\{x_i, i = 0,1,2,\ldots,n\}$ წერტილები – ინტერპოლაციის კვანძებად, $\{h_i = x_{i+1} - x_i ; i = 0,1,2,\ldots,n-1\}$ სიდიდე-

ბი – ინტერპოლაციის ბიჯებად. ამასთან, თუ $h_i = h = \mathrm{const}$, $x_i = ih$, $i = 0,1,2,\ldots,n$, ვამბობთ, რომ (1.3)-ით ხორციელდება ინტერპოლება თანაბრად დაშორებული კვანძებით. $[x_0, x_n]$ შუალედი (დახურული) ინტერპოლების შუალედია.

განვიხილოთ $n+1$ რიგის სპეციალური სახის

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

პოლინომი და n-ური რიგის

$$l_n^{(k)}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n),$$

პოლინომი. ადვილია, ვაჩვენოთ, რომ

$$l_n^{(k)}(x_k) = \omega'_{n+1}(x_k) \quad \text{და} \quad l_n^{(k)}(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)},$$

(გავიხსენოთ n თანამამრავლისგან შედგენილი ნამრავლის წარმოებული).

ამ ტერმინებში $P_n(x)$ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი მიიღებს

$$P_n(x) = \omega_{n+1}(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{f_k}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}, \tag{1.4}$$

სახეს. ადვილია იმის ჩვენება, რომ $P_n(x)$-ის x^n შემცველი წევრის კოეფიციენტი, თუ მას a_n-ით აღვნიშნავთ, გამოითვლება ასე:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f_k}{l_n^{(k)}(x_k)}. \tag{1.5}$$

მაინტერპოლებელი პოლინომის (1.3) სახით წარმოდგენა, როგორც ზემოთქმული პროცედურიდანაც გამომდინარეობს, არ წარმოადგენს $P_n(x)$-ის ერთადერთ ფორმას. მართლაც, თუ $\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)}$ პოლინომებს x-ის ხარისხების მიხედვით დავალაგებთ და ასეთნაირად მიღებული პოლინომის კოეფიციენტებს გამოვთვლით, მივიღებთ (1.1) წარმოდგენას.

შესაძლებელია საინტერპოლაციო $P_n(x)$ პოლინომის ასეთნაირი წარმოდგენაც:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + A_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}). \tag{1.6}$$

შევნიშნოთ, რომ (1.6)-ში x_n კვანძი ცხადად არ მონაწილეობს და (1.6)-ის ეკვივალენტური გამოსახულება, ცხადია, შეიძლება ყველა შესაძლო n კვანძის საშუალებით გამოიწეროს.

ცხადია, რომ, თუ (1.6) ტოლობაში ჩავსვამთ $x = x_k$ $(k = 0,1,2,\ldots,n)$, მივიღებთ შემდეგ რეკურენტულ დამოკიდებულებებს:

$$
\begin{cases}
A_0 = f_0, \\
A_0 + A_1(x_1 - x_0) = f_1, \\
A_0 + A_1(x_1 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A_0 + A_1(x_n - x_0) + A_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + A_n(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1}) = f_n
\end{cases}
\tag{1.7}
$$

(1.7)-დან ყველა A_k კოეფიციენტი ისაზღვრება ცალსახად.

ვაჩვენოთ, რომ (1.5)-ის გამოყენებით A_k $(k = 0,1,2,\dots,n)$ მარტივად გამოითვლება.

მართლაც, თუ a_m წარმოადგენს m-ური რიგის საინტერპოლაციო პოლინომის x^m-თან მდგომ კოეფიციენტს (და (1.6)-ს *ასეთი სახე აქვს ყოველი* $m \le n$-სთვის), მაშინ (1.5)-ის ძალით $\forall m$-სთვის (1.6) წარმოდგენის გამო $A_m = a_m$

$$
A_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{f_k}{l_m^{(k)}(x_k)}, \quad m = 0,1,2,\dots,n, \tag{1.8}
$$

(1.6) ფორმით ჩაწერილ პოლინომს ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულა ეწოდება. იგი იმითაა საინტერესო, რომ პირველ $(m+1)$ შესაკრებთა ჯამი წარმოადგენს m-ური ხარისხის საინტერპოლაციო პოლინომს, რომელიც პირველ $(m+1)$ ცხრილურ მონაცემს იყენებს.

ლაგრანჟისა და ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულებით წარმოდგენისას მათ შორის განსხვავება, გარდა ფორმისა, მდგომარეობს იმაში, რომ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულაში k-დან $(k+1)$ რიგის პოლინომზე გადასვლა ყველა კოეფიციენტის ხელახლა გადათვლას იწვევს, მაშინ, როდესაც, ნიუტონის სახე პირველ k რიგის წევრს უცვლელად ტოვებს და უმატებს $(k+1)$ რიგის წევრს: $A_{k+1}\prod_{j=0}^{k}(x - x_j)$; ხდება მხოლოდ A_{k+1} წევრის გამოთვლა!

შევნიშნოთ, რომ $(m+1)$ კვანძს $(m < n)$ ვირჩევთ იმის მიხედვით, თუ რომელი წერტილის მახლობლად გვსურს $f(x)$-ის გამოთვლა. ამიტომ პრაქტიკული მიზნებისთვის, თუ ჩვენი პრობლემა $f(x)$-ის ტაბულირებაა, მაშინ ნიუტონის ფორმულა შედარებით ხელსაყრელია, ვიდრე ლაგრანჟისა. მეორე მხრივ, თუ სხვადასხვა ფუნქციათა ტაბულირებაა საჭირო (იცვლება $f(x)$), მაშინ, ცხადია, ლაგრანჟის წარმოდგენა უფრო ხელსაყრელია, რადგან კოეფიციენტები დამოკიდებული არაა $f(x)$-ის სახეზე.

1.2. ინტერპოლაციის ცდომილება

განვიხილოთ $f(x)-P_n(x)$ სხვაობა და იგი აღვნიშნოთ $R_n(x)$-ით:

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x). \qquad (*)$$

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. *თუ* $[x_0,x_n]\subset[a,b]$ *და* $f(x)$ *უწყვეტად წარმოებადია* $[a,b]$-*ზე* $(n+1)$ *რიგამდე ჩათვლით, მაშინ*

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\ \ \xi=\xi(x,x_0,x_1,\ldots,x_n)\in[a,b]. \qquad (1.9)$$

დამტკიცება. ვეძებოთ ნაშთითი წევრი $R_n(x)$ შემდეგი სახით

$$R_n(x)=K(x)\omega_{n+1}(x). \qquad (1.10)$$

ნაშთითი წევრის (1.10) სახით წარმოდგენა სამართლიანია, რადგან $P_n(x_k)=$ $=f_k$, ანუ $P_n(x)$ მაინტერპოლირებელი პოლინომია. $K(x)$-ის დასადგენად განვიხილოთ

$$\varphi(z,x)=f(z)-P_n(z)-K(x)\omega_{n+1}(z) \qquad (1.11)$$

ფუნქცია. (1.11)-ში ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(z;x)$ არის z-ის ფუნქცია, ხოლო x – ფიქსირებული პარამეტრი, ამასთან ვიხილავთ, როდესაც $z\in[a,b]$. ცხადია, რომ

$$\varphi(x_k,x)=f(x_k)-P_n(x_k)-K(x)\omega_{n+1}(x_k)=0,\ (k=0,1,2,\ldots,n).$$

გარდა ამისა, თუ $z=x, x\neq x_k$ (1.10)-დან გვაქვს, რომ $\varphi(x,x)=0$ და ამის გამო

$$K(x)=\frac{f(x)-P_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}.$$

ამგვარად, $\varphi(z;x)$ ფუნქციას აქვს $n+2$ ნული: x, x_0, x_1, …, x_n.

გავიხსენოთ **როლის თეორემა**: თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$-ში, $f(a)=f(b)$, იგი წარმოებადია (a,b)-ში, მაშინ ამ შუალედში არსებობს ერთი წერტილი მაინც, განსხვავებული a-სა და b-საგან, სადაც $f(x)$-ის წარმოებული ნულის ტოლია.

დავუბრუნდეთ $\varphi(z,x)$ ფუნქციას. რადგან $\varphi(z,x)=0$ $z=x,x_0,x_1,\ldots,x_n$ წერტილებში, ამიტომ $\varphi'(z,x)$ ფუნქციას ექნება $n+1$ ნული $z\in[a,b]$ ყოველი ფიქსირებული x-სთვის, $\varphi''(z,x)$-ს ექნება n ნული და ა. შ. $\varphi_z^{(n+1)}(z,x)$ ფუნქციას ექნება ერთი ნული მაინც, რომელიც აღვნიშნოთ -$\xi\in(a,b)$. ამგვარად:

$$\varphi_z^{(n+1)}(z;x)\Big|_{z=\xi}=f^{(n+1)}(\xi)-P_n^{(n+1)}(\xi)-K(x)\frac{d^{n+1}\omega_{n+1}(z)}{dz^{(n+1)}}\Bigg|_{z=\xi}=0,$$

საიდანაც, იმის გამო, რომ $\xi \ne x_k$, x,

$$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)-P_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

მაგრამ $P_n^{(n+1)}(z)\equiv 0$ (იგი n ხარისხის პოლინომია!). ამიტომ

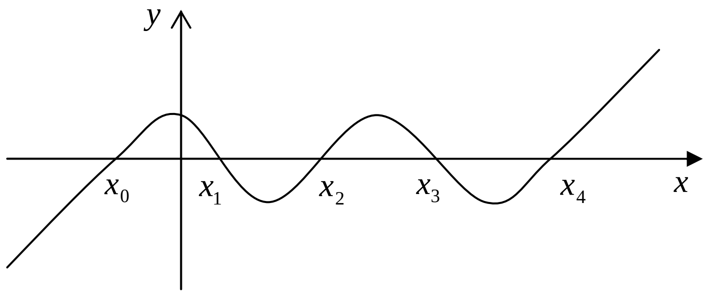
$$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

(შევნიშნოთ, რომ ξ არის x, x_0 , x_1, … , x_n წერტილების უცხადო ფუნქცია). თეორემა დამტკიცებულია.

(1.9)-დან მარტივად გამომდინარეობს:

$$\left|R_n(x)\right|\le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|,\ \ M_{n+1}=\max_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|. \tag{1.12}$$

$R_n(x)$-ის მახასიათებლები არის ფუნქციის $(n+1)$ რიგის წარმოებულის სიდიდე და $\omega_{n+1}(x)$ ყოფაქცევა. მაგ., $n=4$-სთვის $\omega_5(x)$ გრაფიკი შემდეგი სახისაა:



ნახ. 2

ცხადია, n-ის ზრდასთან ერთად $[x_0,x_n]$ შუალედის გარეთ $\left|\omega_{n+1}(x)\right|$ იზრდება, როგორც ხარისხოვანი ფუნქცია. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ, თუ გვსურს, $f(x)$ გამოვთვალოთ $x\overline{\in}[x_0,x_n]$-ისთვის, გვაქვს ექსტრაპოლაციის პროცესი.

შემოვიღოთ განმარტება: ვიტყვით, რომ შეფასება (1.12) ზუსტია, თუ $\exists$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს $(n+1)$ რიგის წარმოებული და მისთვის (1.12) უტოლობა გადაიქცევა ტოლობად. ასეთი სახის შეფასებებს გაუმჯობესებად უტოლობებს უწოდებენ.

მაგალითი 1. $f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+\cdots+A_{n-1}(x-x_0)\cdots(x-x_{n-2})$

$$+A_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})+A_{n+1}(x-x_0)\cdots(x-x_n),$$

ხოლო

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}A_{k-1}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})=\sum_{k=0}^{n}A_k\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i),\qquad \prod_{i=0}^{-1}(x-x_i)=1$$

მაშინ

$$f(x)-P_n(x)=R_n(x)=A_{n+1}(x-x_0)\cdots(x-x_n)=A_{n+1}\omega_{n+1}(x),$$

$$|R_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|=\frac{(n+1)!|A_{n+1}|}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|=|A_{n+1}||\omega_{n+1}(x)|$$

$$|R_n(x)|=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|.$$

მაგალითი 2. დავუშვათ, $f(x)=P_n(x)+M_{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, $M_{n+1}\geq 0$, მაშინ

$$|f(x)-P_n(x)|=|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\right|;\quad f^{(n+1)}(\xi)=M_{n+1}\cdot 1$$

ამიტომ

$$|f(x)-P_n(x)|=|R_n(x)|=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|.$$

მაგალითი 3. შევაფასოთ $\ln 100{,}5$ სიდიდის მიახლოება ლაგრანჟის ფორმულით, თუ ცნობილია $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$ სიდიდეები.
ჩვენს შემთხვევაში

$$f(x)=\ln x,\ n=3,\ x_0=100,x_1=101,x_2=102,\ x_3=103,\ f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4},$$

$$M_4=\frac{6}{100^4}.$$

$$|\ln 100{,}5-P_3(x)|\leq\frac{6}{10^8\cdot 4!}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5=10^{-9}\cdot 2{,}34375,$$

ამგვარად,

$$|R_4(x;\ln x)|\leq 2{,}34375\cdot 10^{-9}.$$

მაგალითი 4. როგორი სიზუსტით შეიძლება გამოვითვალოთ $\sin 5^\circ$ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულით, თუ ცნობილია

$$\sin 0^\circ,\ \sin 30^\circ,\ \sin 45^\circ,\ \sin 60^\circ$$

სიდიდეები. ჩვენს შემთხვევაში

$$f(x)=\sin x,\ n=3,\ a=x_0=0,\ x_3=\frac{\pi}{3}.\ f^{(4)}(x)=\sin x.$$

ამიტომ

$$M_4=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$|\sin 5^\circ-P_3(x)|=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{4!}\left(\frac{5\pi}{180}-0\right)\left(\frac{5\pi}{180}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{5\pi}{180}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{180}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{4!}\frac{\pi^4}{36}\left|\left(-\frac{5}{36}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{11}{36}\right)\right|=\frac{5.11\pi^4\sqrt{3}}{3^2\cdot 36^3\cdot 4!}\approx 0{,}000928.$$

მაგალითი 5. გამოთვალეთ ჯამი $S_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^p L_i(x) \quad \left(p = 0,1,\ldots,n,n+1\right).$

ცხადია, $\forall 0 \le p \le n$ (A-1)-ის ძალით, $a_i = 0 \quad \left(i = 0,1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,n\right)$, რადგან Δ_{i+1} დეტერმინანტებს ორი ერთნაირი სვეტი ექნებათ. $a_p = 1$, რადგან ამ შემთხვევაში ვანდერმონდის დეტერმინანტიდან ამოშლილი სვეტი ემთხვევა (1.2) სისტემის მარჯვენა მხარეს მდგომ სვეტ-ვექტორს.

ამრიგად,

$$S_p = x^p \quad \left(p = 0,1,2,\ldots,n\right).$$

დავუშვათ, $p = n+1$, ამ შემთხვევაში ნაშთითი წევრი

$$R_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot \frac{\left.\left(x^{n+1}\right)^{(n+1)}\right|_{x=\xi}}{(n+1)!} = \omega_{n+1}(x),$$

რადგან

$$S_{n+1}(x) = x^{n+1} - \omega_{n+1}(x).$$

1.3. ეიტკენის სქემა

იმ შემთხვევაში, თუ x_k კვანძები საზოგადოდ არ არის თანაბრად დაშორებული და საკმარისია ავაგოთ არა $P_n(x)$-ლაგრანჟის პოლინომი, არამედ ვიპოვოთ მისი მნიშვნელობები წინასწარ განაზღვრულ ფიქსირებულ წერტილებში, მაშინ ხელსაყრელია, რომ ვისარგებლოთ ეიტკენის საინტერპოლაციო სქემით. ამ სქემის მიხედვით, საინტერპოლაციო პოლინომის სიდიდის პოვნა x რომელიმე გარკვეული მნიშვნელობისთვის ხორციელდება მიმდევრობითი ერთგვაროვანი პროცესით.

განვიხილოთ გამოსახულება:

$$P_{01}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix},$$

რომელიც x-ის მიმართ I ხარისხის პოლინომია. ცხადია, რომ, თუ ზედა ტოლობაში დავუშვებთ $x = x_i, i = 0,1$, მივიღებთ $P_{01}(x_i) = y_i$. ასევე,

$$P_{0i}(x) = \frac{1}{x_i - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_i & x_i - x \end{vmatrix}, \; i = 1,2,\ldots,n$$

სიდიდეებით განისაზღვრება მეორე რიგის:

$$P_{01i}(x) = \begin{vmatrix} P_{01} & x_1 - x \\ P_{0i} & x_i - x \end{vmatrix}, \; i = 2,3,\ldots,n,$$

პოლინომები, რომელიც საინტერპოლაციო მრავალწევრია, ხოლო კვანძების შერჩევა შესაძლებელია ჩვენი მიზნების შესაბამისად. ეს პროცესი შეიძლება გაგრძელდეს:

$$P_{012\ldots(k-1)ki}(x)=\frac{1}{x_i-x_k}\begin{vmatrix}P_{012\ldots k}(x) & x_k-x\\ P_{012\ldots(k-1)i}(x) & x_i-x\end{vmatrix}. \qquad k<n.$$

ცხადია, როდესაც $k=n$, ზემოთ მოცემული პროცესი ლაგრანჟის საინტერპოლაციო $P_n(x)$ პოლინომის მიმდევრობით აგების სქემაა.

1.4. ინტერპოლების კვანძების არჩევის შესახებ

როგორც ვნახეთ, $f(x)$ ფუნქციის $P_n(x)$-დან გადახრა ხასიათდება $f^{(n+1)}(x)$ და $\omega_n(x)$ სიდიდეებით. თუ პირველი სიდიდის მიმართ შეგვიძლია დავადგინოთ მისი ცვლილებების საზღვრები, მეორე სიდიდის რაიმე აზრით ოპტიმალური შეფასება დამოკიდებულია x_i კვანძების განაწილებაზე.

დავსვათ ასეთი **ამოცანა**:

როგორ უნდა ავირჩიოთ x_i *კვანძები ისეთნაირად, რომ* $\sup\limits_{x\in[a,b]}|\omega_n(x)|$ *იყოს უმცირესი.*

ამ ამოცანის გადასაჭრელად გამოვიყენოთ ჩებიშევის პოლინომების რიგი თვისებებისა, რომლებიც მომდევნო ტექსტში წარმოდგენილია პეტიტით.

ჩებიშევის I გვარის პოლინომები – $T_n(x)$ – განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x), \qquad |x|\le 1. \qquad \text{(ჩბ. 1)}$$

$$n=0:\ T_0(x)=1.$$

$$n=1:\ T_1(x)=\cos(\arccos x)=x,$$

$$n=2:T_2(x)=\cos(2\arccos x)=2\cos^2\arccos x-1=2x^2-1.$$

შემდეგ, $\forall n$-სთვის გამოვიყენოთ იგივეობა $(\vartheta=\arccos x)$:

$$T_n(x)=\cos(n+1)\vartheta=2\cos\vartheta\cos n\vartheta-\cos(n-1)\vartheta, \qquad \text{(ჩბ. 2)}$$

რადგან

$$\cos(n+1)\vartheta+\cos(n-1)\vartheta=2\cos\frac{n+1+n-1}{2}\vartheta\cos\frac{n+1-(n-1)}{2}\vartheta=2\cos n\vartheta\cos\vartheta.$$

მაშინ (ჩბ. 2)-დან გვაქვს:

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x). \qquad \text{(ჩბ. 3)}$$

ამგვარად, $T_{n+1}(x)$ ნამდვილად წარმოადგენს $n+1$ რიგის მრავალწევრს x-ის მიმართ. თუ $T_n(x)$-ისათვის გამოვიყენებთ (ჩბ.3)-ში იმავე სახის რეკურენტულ დამოკიდებულებას და ა. შ. $T_{n+1}(x)$-ში x^{n+1} სიდიდესთან კოეფიციენტი 2^n-ის ტოლი იქნება. (ჩბ. 3)-დან კერძოდ გვაქვს:

$$T_3(x)=2x\cdot T_2(x)-T_1(x)=2x\left(2x^2-1\right)-x=4x^3-3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$
. . . .

სამართლიანია შემდეგი

ლემა: $T_n(x)$ *პოლინომს* $(-1,1)$ *შუალედში აქვს n ნული.*

მართლაც,
$$\cos(n\arccos x) = 0, \quad x \in (-1,1)$$
განტოლებიდან გვაქვს:
$$n\arccos x = (2m+1)\frac{\pi}{2}, \quad \cos\frac{(2m+1)\pi}{2n} = x.$$
თუ m-ს მივანიჭებთ მნიშვნელობებს $m = 0,1,2,\ldots,n-1$, მივიღებთ n სხვადასხვა ნულს.
$$x_m = \cos\frac{(2m+1)\pi}{2n} \quad (m = 0,1,2,\ldots,n-1), \; -1 < x_{n-1} < x_{n-2} < \cdots < x_0 < 1,$$
რადგან, თუ აღვნიშნავთ $\frac{\pi}{2n} = \delta_n$, მაშინ $0 < (2m+1)\delta_n < \pi$.

დავამტკიცოთ, რომ $M = \max\limits_{n\in[-1,1]}\left|T_n(x)\right| = 1$. მართლაც, $n+1$ წერტილში:
$$\xi_m = \cos\frac{m\pi}{n}, (m = 0,1,\ldots,n), 0 = \frac{0\cdot\pi}{n} < \frac{\pi}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n}\pi < \pi,$$
$$T_n(\xi_m) = \cos(n\arccos\xi_m) = \cos\left(n\cdot\frac{m\pi}{n}\right) = (-1)^m \Rightarrow M = 1.$$

დავუბრუნდეთ ნაშთითი წევრისთვის ოპტიმალური შეფასების ამოცანას. გავიხსენოთ, რომ $\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ და x^n-თან კოეფიციენტი 1-ის ტოლია. ამიტომ, თუ x_0, x_1, …, x_{n-1}-ს ავარჩევთ, როგორც $T_n(x)$-ის ნულებს, ცხადია, გვექნება
$$\omega_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x).$$
ამიტომ
$$\sup_{[-1,1]}\left|\omega_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}\sup_{[-1,1]}\left|T_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$
ვაჩვენოთ, რომ $\forall\, Q_n(x)$ პოლინომისთვის, რომლის x^n-სთან მდგომი კოეფიციენტი 1-ის ტოლია,
$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|Q_n(x)\right| \ge \frac{1}{2^{n-1}}.$$
დავუშვათ საწინააღმდეგო:

$$\sup_{[-1,1]}|Q_n(x)| < \frac{1}{2^{n-1}} .$$

ცხადია, რომ $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) - Q_n(x)$ იქნება არა უმეტეს $(n-1)$ ხარისხის პოლინომი, რომელიც

$$\xi_m = \cos\frac{m\pi}{n} \quad (m = 0,1,2,\dots,n),$$

წერტილებში იღებს მიმდევრობით დადებით და უარყოფით მნიშვნელობებს. ამიტომ მას $[-1,1]$-ში უნდა ჰქონდეს ერთმანეთისგან განსხვავებული n ნული, რაც შეუძლებელია, თუ $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) - Q_n(x)$ იგივურად ნულის ტოლი არ არის. განვიხილოთ $[-1,1]$ შუალედი. მაშინ $\omega_n(x)$-ს ფუნქციას n-ური რიგის პოლინომთა კლასში ექნება უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობა $\sup|\omega_n(x)|$ სიდიდისთვის, თუ ინტერპოლების კვანძებად ჩებიშევის მრავალწევრის ნულებს ავირჩევთ. ამ შემთხვევაში $f(x) - P_n(x)$-ისთვის გვექნება შემდეგი ოპტიმალური შეფასება:

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!} .$$

თუ ინტერპოლება ხორციელდება ნებისმიერ $[a,b]$ შუალედში, მაშინ ცვლადის წრფივი გარდაქმნით

$$x = \frac{1}{2}\left[(b-a)z + (b+a)\right], \quad z = \frac{1}{b-a}[2x - b - a],$$

$[a,b]$ გადადის $[-1,1]$-ში. $T_n(z)$-ის ნულები

$$z_m = \cos\frac{(2m+1)\pi}{2n}$$

გადავა

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\frac{(2m+1)\pi}{2n} + (b+a)\right]$$

წერტილებში.

$$f(x) - P_n(x) = f\left[\frac{1}{2}(b-a)z + (b+a)\right] - P_n\left[\frac{1}{2}(b-a)z + (b+a)\right] = F(z) - \overline{P_n}(z) .$$

ამგვარად,

$$\left|F(z) - \overline{P_n}(z)\right| \le \frac{\left|F^{(n+1)}(z)\right|}{2^n(n+1)!}$$

მაგრამ

$$F'(z)=\frac{dF}{dz}=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dz}=f'(x)\cdot\frac{1}{2}(b-a),$$

$$F''(z)=\frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2=\frac{1}{2^2}(b-a)^2 f''(x),$$

. . . .

$$F^{(n+1)}(z)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}f^{(n+1)}(x).$$

$$\max_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|=M_{n+1}$$

საბოლოოდ

$$\left|F(z)-\overline{P_n}(z)\right|=\left|F(z)-\overline{P}_n(z)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!2^{2n+1}}(b-a)^{n+1}.$$

ზემოთ მოყვანილი შეფასებები საუკეთესოა ინტერპოლების შუალედში. აქ ძირითადად გამოვიყენეთ, რომ $\overline{T_n}(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ ფუნქცია ნულისაგან *უმცირესადაა* გადახრილი ყველა მრავალწევრთან შედარებით, რომლის კოეფიციენტები უმაღლესი ხარისხის შემცველ წევრთან 1-ის ტოლია.

1.5. გაყოფილი სხვაობები და მათი ზოგიერთი გამოყენება

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$[x_ix_k]:=\frac{y_i-y_k}{x_i-x_k},[x_ix_kx_n]:=\frac{[x_ix_k]-[x_kx_n]}{x_i-x_n},\ [x_ix_kx_nx_m]:=\frac{[x_ix_kx_n]-[x_kx_nx_m]}{x_i-x_m},... \qquad (5.1)$$

და ვუწოდოთ შესაბამისად პირველი, მეორე და ა. შ. რიგის გაყოფილი სხვაობები.

ვაჩვენოთ შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა (იხ. (1.6)):

$$
\begin{aligned}
A_0&=y_0,\\
A_1&=[x_1x_0]=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\\
A_2&=[x_2x_1x_0]=\frac{[x_2x_1]-[x_1x_0]}{x_2-x_0},\\
A_3&=[x_3x_2x_1x_0]=\frac{[x_3x_2x_1]-[x_2x_1x_0]}{x_3-x_0},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
A_n&=[x_nx_{n-1}\dots x_2x_1x_0]=\frac{[x_nx_{n-1}\dots x_2x_1]-[x_{n-1}x_{n-2}\dots x_1x_0]}{x_n-x_0}
\end{aligned}
\qquad (5.2)
$$

(5.2)-ის დამტკიცებისას, პირველი ტოლობა ცხადია. რადგან $P_n(x_i)=y_i$, $i=0,1,\dots,n$, თუ (1.6)-ში დავუშვებთ $x=x_0$ და $x=x_1$, გვექნება

$$y_0 = A_0,$$
$$y_1 = A_0 + A_1(x_1-x_0),$$

საიდანაც

$$A_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=[x_1x_0].$$

თუ გამოვიყენებთ ტოლობას

$$y_2 = A_0 + A_1(x_2-x_0)+A_2(x_2-x_0)(x_2-x_1),$$

გვექნება

$$\begin{aligned} y_2-y_1 &= [x_1x_0][(x_2-x_0)-(x_1-x_0)]+A_2(x_2-x_0)(x_2-x_1),\\ &=[x_1x_0](x_2-x_1)+A_2(x_2-x_0)(x_2-x_1). \end{aligned}$$

თუ გავყოფთ x_2-x_1-ზე, გვექნება

$$A_2\cdot(x_2-x_0)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-[x_1x_0]=[x_2x_1]-[x_1x_0],$$

ანუ

$$A_2=\frac{[x_2x_1]-[x_1x_0]}{x_2-x_0}=[x_2x_1x_0].$$

დავუშვათ,

$$A_k=[x_kx_{k-1}\dots x_0]=\frac{[x_kx_{k-1}\dots x_1]-[x_{k-1}x_{k-2}\dots x_0]}{x_k-x_0},\ \ \forall k.$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$A_{k+1}=[x_{k+1}x_k\dots x_0]. \tag{5.3}$$

(1.6)-დან, დაშვების გამო

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{k}[x_ix_{i-1}\dots x_0]\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)+A_{k+1}\omega_{k+1}(x)+\dots+A_n\omega_{n+1}(x). \tag{5.4}$$

(5.3)-ის დამტკიცებამდე შევნიშნოთ, რომ გაყოფილი სხვაობის ოპერაცია წრფივი ოპერაციაა და, ამასთან, იგი პოლინომზე მოქმედებისას მის ხარისხს ერთი ერთეულით ამცირებს.

მართლაც, თუ

$$f(x)=\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

მაშინ

$$[xx_0]_{\omega_{n+1}(x)} = \frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{x-x_0} = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i),$$

ასევე

$$[xx_0x_1]_{\omega_{n+1}(x)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)-(x-x_0)\prod_{i=2}^{n}(x-x_i)}{x_0-x_1} =$$

$$= \frac{\prod_{i=2}^{n}(x-x_i)(x-x_1-x+x_0)}{x_0-x_1} = \prod_{i=2}^{n}(x-x_i)$$

თუ ახლა (5.4)-ს მოვდებთ $k+1$-ჯერ გაყოფილი სხვაობის ოპერაციას, მივიღებთ

$$[xx_kx_{k-1}\cdots x_0]_{P_n(x)} = A_{k+1}\cdot 1 + A_{k+2}[xx_k\cdots x_0]_{\omega_{k+2}(x)} + \cdots + A_n[xx_k\cdots x_0]_{\omega_{n+1}(x)}.$$

თუ უკანასკნელ ტოლობაში დავუშვებთ, რომ $x = x_{k+1}$, მივიღებთ

$$A_{k+1} = [x_{k+1}x_k\cdots x_0],$$

რადგან

$$[xx_i\cdots x_0]_{\omega_i(x_{k+1})} = 0 \quad \forall i > k+1.$$

მაგალითები. ქვემოთ განვიხილოთ რიგი სავარჯიშოებისა, როდესაც $f(x)$ ფუნქციას $x\in[x_0,x_1]$ შუალედში ვუახლოვდებით სხვადასხვა რიგის პოლინომებით; ამასთან ერთად შევაფასოთ ცდომილება.

1) $f(x)\approx P_1(x) = f_0 + \frac{f_1-f_0}{h}(x-x_0)$; $x_1 - x_0 = h$.

$$R_1(x) = \frac{f^{(2)}(\xi')}{2}(x-x_0)(x-x_1),\ |R_1(x)| \le \frac{M_2}{8}h^2,$$

რადგან

$$\max_{[x_0x_1]}|\omega_2(x)| = \max|(x-x_0)(x-x_1)| \le \frac{h^2}{4}.$$

2) $f(x)\approx P_2(x) = l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1)+l_2(x)f(x_2)$

$$= f_0 + \frac{f_1-f_0}{h}(x-x_0) + \frac{f_2-2f_1+f_0}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1),$$

ვისარგებლოთ ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულით,სადაც

$$A_m = \sum_{k=0}^{m}\frac{f_k}{l_m^{(k)}(x_k)} \quad (m = 0,1,2,\ldots,n),$$

$$l_m^{(k)}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_m)$$

$$f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1).$$

$$A_0 = f(x_0)\,,\;\; A_1 = \frac{f(x_1) - A_0}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h}\,,$$

$$A_2 = \frac{1}{2h^2}\left[f_2 - f_1\frac{2h}{h} - f_0 \right] = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}\,.$$

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi')}{6}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,,\;\; |R_2(x)| \le \frac{M_3}{9\sqrt{3}}.h^3 \approx \frac{M_3}{15}h^3\,.$$

მართლაც,

$$\left((x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\right)' = 3x^2 - 6(x_0 + h)x + 3x_0 + 6x_0h + 2h^2 = 0\,.$$

$$x = \frac{3(x_0 + h) \pm \sqrt{9(x_0 + h)^2 - 9{x_0}^2 - 18x_0h - 6h^2}}{3}\,,\;\; \xi_{1,2} = \frac{3(x_0 + h) \pm h\sqrt{3}}{3}\,.$$

$$P_2''(x) = 6x - 6(x_0 + h),$$

$$P_2''(\xi_1) = 2h\sqrt{3} > 0\,, P_2''(\xi_2) = -2h\sqrt{3} < 0\,.\omega_3(\xi_2) = -\frac{2h^3\sqrt{3}}{9}\,.$$

3) ვიპოვოთ ჩებიშევის კვანძები, ავაგოთ ნიუტონის მეორე რიგის საინტერპოლაციო პოლინომი და შევაფასოთ ნაშთითი წევრი, თუ $a = 0$, $b = h$.

$$f(x) = P_2(x) + \frac{f'''(\xi)}{3!}\prod_{k=0}^{2}(x - x_k).\;\; 0 \le x \le h\,,\; T_3(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{h}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{6}\right),\quad x_1 = \frac{h}{2},\quad x_2 = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right),$$

$$P_2(x) = y_0 + \frac{4\sqrt{3}}{3h}(y_0 - y_1)(x - x_0) + \frac{8}{3h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)(x - x_0)(x - x_1)\,,$$

$$\left|\prod_{k=0}^{2}(x - x_k)\right| = \frac{h^3}{8}\left|\left(z - \cos\frac{\pi}{6}\right)z\left(z + \cos\frac{\pi}{6}\right)\right|,\;\; -1 \le z \le 1.\;\; \left|z\left(z^2 - \frac{3}{4}\right)\right| \le \frac{1}{4}\,,$$

$$|R_3(x; f)| \le \frac{M_3}{192}h^3\,.$$

1.6. საშუალო კვადრატული მიახლოება

განვიხილოთ მიახლოების (ინტერპოლებისგან განსხვავებული) მეთოდი. ვგულისხმობთ, რომ $y = f(x)$ მოცემულია ცხრილის სახით $\{f_i;\, i = 0,1,2,\ldots,n\}$ x_i წერტილებში.

ვეძებოთ $f(x)$ მიახლოებით შემდეგი სახით

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m,$$

რომ პოლინომისა და მოცემული ფუნქციის $x = x_i$ წერტილებში სხვაობათა კვადრატების ჯამი მინიმალური იყოს.

ამგვარად,

$$\min \delta(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} \rho_i \left[P_m(x_i) - f_i\right]^2 \quad \rho_i \geq 0 \tag{6.1}$$

ცხადია, თუ $m = n, \forall i \quad \rho_i = 1, P_n(x)\big|_{x=x_{i_i}} = f_i$, გვაქვს ინტერპოლების ამოცანა და $\delta \equiv 0$.

უნდა აღინიშნოს, რომ (6.1) (ან გაცილებით ზოგადი ფუნქციონალების) მინიმიზაციის ამოცანა შეადგენს, პირველ რიგში, ფუნქციის მიახლოების ერთ-ერთ ძალზე განვითარებულ და მნიშვნელოვან თანამედროვე დარგს. საწყის წყაროებად შეიძლება ისარგებლოთ ციტირებული ლიტერატურით.

თავი 2. ფუნქციის აპროქსიმაციის ამოცანა

2.1 აპროქსიმაციის ამოცანა. ცდომილების შეფასება ფუნქციათა კლასებზე

როგორც შესავალ ლექციაში იყო აღნიშნული, გარდა მაინტერპოლებელი ფუნქციებისა, შეიძლება, $[a,b]$ შუალედში მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას მივუახლოვდეთ განსხვავებული $\varphi(x)$ ფუნქციით ისეთნაირად, რომ სხვაობა $f(x)-\varphi(x)$ (გარკვეული აზრით) $\forall x\in[a,b]$ არ აღემატებოდეს წინასწარ დასახელებულ სიზუსტეს.

მაგალითად, ვთქვათ, საჭიროა, გამოვთვალოთ $y=\sin x$ მრავალჯერ, როდესაც $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-7}$ სიზუსტით. თუ $\sin x$-ს გავშლით ხარისხოვან მწკრივად პირველი ხუთი წევრის შენარჩუნებით, გვექნება:

$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\right)\right|\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^{11}\frac{1}{11!}<0{,}2\cdot10^{-8}.$$

ამიტომ, მოცემული სიზუსტით $\sin x$-ის მაგივრად შესაძლებელია ავიღოთ

$$\varphi(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$$

ფუნქცია, რომლის გამოთვლა სიძნელეს აღარ წარმოადგენს.

შემდეგი ეტაპია $\varphi(x)$-ის ისეთნაირად შეცვლა არაუმეტს მე-7 ხარისხის პოლინომით, რომ უზრუნველყოფილ იყოს თვლის ε სიზუსტე.

ამისთვის გამოვიყენოთ ჩებიშევის პოლინომები. როგორც ცნობილია (შესაძლებელია ვისარგებლოთ (ჩბ.3) რეკურენტული დამოკიდებულებით):

$$T_9(x)=256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x.$$

აქედან

$$\left|\frac{1}{2^8}T_9(x)\right|=\left|x^9-\frac{9}{4}x^7+\frac{27}{16}x^5-\frac{15}{32}x^3+\frac{9}{256}x\right|\le\frac{1}{2^8}.$$

თუ $\varphi(x)$-ის გამოსახულებაში x^9-ს შევცვლით $\dfrac{9}{4}x^7-\dfrac{27}{16}x^5+\dfrac{15}{32}x^3-\dfrac{9}{256}x$ პოლინომით, მივიღებთ

$$\varphi_1(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{1}{9!}\left(-\frac{9}{256}x+\frac{15}{32}x^3-\frac{27}{16}x^5+\frac{9}{4}x^7\right).$$

განვიხილოთ $\varphi(x)-\varphi_1(x)$ სხვაობა. აშკარაა, რომ

$$|\varphi(x)-\varphi_1(x)|\le\frac{1}{9!}\cdot\frac{1}{2^8}\approx0{,}11\cdot10^{-7}.$$

ამ შეფასების გამო, $\sin x$-ის განსხვავება $\varphi_1(x)$-სგან, როდესაც $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, არ აღემატება $0{,}2 \cdot 10^{-8} + 0{,}11 \cdot 10^{-7} = 0{,}13 \cdot 10^{7} < 0{,}5 \cdot 10^{-7}$, რითაც სიზუსტის მიმართ ჩვენი მოთხოვნა კმაყოფილდება.

ქვემოთ შემოვიფარგლებით $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციის ალგებრული პოლი- ნომით მიახლოების საკითხის შესწავლით.

ამისთვის დავამტკიცოთ სათანადო თეორემა, რომელიც კ. ვაიერშტრასის სა- ხელს ატარებს.

თეორემა. *თუ* $f(x) \in C[a,b]$, *მაშინ* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ *ისეთი* $P(x)$ *პოლინომი, რომ* $\forall x \in [a,b]$*-სთვის ადგილი აქვს უტოლობას*

$$\left| f(x) - P(x) \right| < \varepsilon .$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . დავიწყოთ რიგ იგივეობათა სამართლიანობის ჩვენებით:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x), \tag{2}$$

სადაც

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

(1) ფორმულა გამომდინარეობს

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

ბინომიალური ფორმულიდან, თუ მასში დავუშვებთ $a = x$, $b = 1-x$.

(2)-ის დასამტკიცებლად მისი მარცხენა მხარე დავშალოთ სამ შესაკრებად:

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - 2nx \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$+ n^2 x^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} .$$

მესამე შესაკრები, (1) იგივეობის გამო, $n^2 x^2$-ის ტოლია. მეორე შესაკრებისთვის გვაქვს

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j-1)!} x^{j+1} (1-x)^{n-j-1}$$

,

$k-1 = j$ შეცვლით

$$S_2 = nx\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)}x^j(1-x)^{n-1-j} = nx,$$

რადგან (1) სამართლიანია $\forall n$-სთვის.

S_1-თვის, თუ $k = j+1$, გვაქვს:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n}k^2\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\frac{n!}{j!(n-j-1)!}x^{j+1}(1-x)^{n-j-1}$$

$$= nx\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!}x^j(1-x)^{n-j-1}$$

$$= nx\left\{\sum_{j=0}^{n-1}j\frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!}x^j(1-x)^{n-j-1} + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!}x^j(1-x)^{n-j-1}\right\}$$

$$= nx\left\{\sum_{j=0}^{n-1}jC_{n-1}^{j}x^j(1-x)^{n-j-1} + 1\right\} = nx[(n-1)x+1] = n^2x^2 - nx^2 + nx$$

ამგვარად,

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k} = n^2x^2 - nx^2 + nx - 2n^2x^2 + n^2x^2 = nx(1-x).$$

(2) იგივეობა დამტკიცებულია.

(2) იგივეობიდან, როდესაც $0 \le x \le 1$, გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა

$$0 \le \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k} \le \frac{n}{4}, \tag{3}$$

რადგან $0 \le x(1-x) \le \frac{1}{4}$.

ახლა დავუშვათ, რომ მოცემულია რაიმე დადებითი δ რიცხვი. განვიხილოთ k-ს ისეთი მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც სრულდება უტოლობა

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \delta \quad (0 \le x \le 1). \tag{4}$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\sum{}' C_n^kx^k(1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n\delta^2}, \tag{5}$$

სადაც $\sum'$ აღნიშნავს აჯამვას ისეთი k-სთვის, რომელიც აკმაყოფილებს (4) უტოლობას. მართლაც, (4)-დან გვაქვს

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \ge 1.$$

ამიტომ, (3) ძალით, გვექნება

$$\sum{}' C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \sum{}' \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n^2\delta^2}\sum{}' (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\le \frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{n^2\delta^2}\frac{n}{4} = \frac{1}{4n\delta^2}.$$

ამის შემდეგ გადავიდეთ ვაიერშტრასის თეორემის დამტკიცებაზე. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $[a,b]$ ემთხვევა $[0,1]$-ს. წინააღმდეგ შემთხვევაში $x = a + t(b-a) \;\Rightarrow\; t = \dfrac{x-a}{b-a}$ გარდაქმნით $t \in [0,1]$, როდესაც $x \in [a,b]$.

განვიხილოთ მრავალწევრები.

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \tag{6}$$

რომლებიც შემოყვანილი იყო ს. ბერნშტეინის მიერ.

ვაჩვენოთ, რომ საკმარისად დიდი n-სთვის $B_n(x)$ აკმაყოფილებს თეორემის პირობებს.

(1) იგივეობისა და (6) ძალით

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{7}$$

$f(x)$-ფუნქციის $[0,1]$-ზე თანაბრად უწყვეტობის გამო ნებისმიერი $x', x'' \in [0,1]$, მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$, რომ

$$\left| f(x') - f(x'') \right| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

თუ $|x' - x''| < \delta$.

დავუშვათ, $\forall x \in [0,1]$ ფიქსირებული წერტილია. დავყოთ (7) ჯამი ორ ასეთ შესაკრებად:

$$S_1 = \sum{}' \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \tag{8}$$

სადაც $\sum'$ ისეთი ჯამია, რომლისთვისაც $\left|\dfrac{k}{n} - x\right| \ge \delta$, და

$$S_2 = \sum{}'' \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

(9)

სადაც $\sum''$ აღნიშნავს აჯამვას k-ს დანარჩენი მნიშვნელობებისთვის. შევადაროთ თითოეული ჯამი.

S_1-სთვის, თუ ჩავთვლით, რომ $M = \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$, (5) უტოლობის ძალით გვაქვს:

$$|S_1| \le \Sigma'\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le 2M\Sigma' C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le 2M\frac{n}{4n^2\delta^2} = \frac{M}{2n\delta^2}.. \quad (10)$$

S_2 ჯამისთვის გვაქვს

$$|S_2| \le \Sigma''\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < \frac{\varepsilon}{2}\Sigma'' C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11)$$

ავარჩიოთ ახლა n საკმარისად დიდი, ისეთი, რომ შესრულდეს (ფიქსირებული δ-სთვის) $\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. მაშინ (10) და (11) უტოლობებიდან გვაქვს

$$|B_n(x) - f(x)| \le |S_1| + |S_2| < \frac{M}{2n\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ ბერნშტეინის პოლინომების დახმარებით ფუნქციათა კლასებზე შესაძლებელია მიახლოების რიგის განსაზღვრა.

ა) თუ $f(x)$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას $L \ge 0$ მუდმივით, მაშინ

$$|B_n(x) - f(x)| \le \frac{L}{2\sqrt{n}} .$$

მართლაც,

$$|B_n(x) - f(x)| \le \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1]$$

ლიპშიცის პირობით

$$|B_n(x) - f(x)| \le L\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n} - x\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} .$$

შვარცის უტოლობის ძალით:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \le \sqrt{\sum a_k^2}\sqrt{\sum b_k^2} ,$$

თუ $a_k = \left|\frac{k}{n} - x\right|\sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}$, $b_k = \sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}$, გვექნება

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n} - x\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \sqrt{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} .$$

(1) იგივეობისა და (3) უტოლობის ძალით, მარჯვენა მხარე არ აღემატება $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$-ს. ამიტომ $\forall x \in [0,1]$-სთვის გვაქვს

$$\Delta_n\left(f, B_n\right)=\left|B_n(x)-f(x)\right| \leq \frac{L}{2\sqrt{n}}. \tag{12}$$

სამართლიანია შემდეგი.

თეორემა. *თუ* $f(x) \in C^{(2)}[0,1]$, *მაშინ*

$$\Delta_n\left(f, B_n\right)=\left|B_n(x)-f(x)\right| \leq \frac{M_2}{2n} x(1-x), \quad M_2=\max_{x\in[0,1]}\left|f''(x)\right|. \tag{13}$$

მართლაც,

$$B_n(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right] C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

ტეილორის ფორმულით

$$B_n(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}-x\right) f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 f''\left(\xi_k\right)\right] C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} f''\left(\xi_k\right)\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}, \quad \xi_k \in\left[x, \frac{k}{n}\right] \vee\left[\frac{k}{n}, x\right].$$

$$B_n(x)-f(x) \leq \frac{1}{2} M_2 \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{1}{2n^2} M_2 \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

ადრე მიღებული უტოლობის ძალით (იხ.(3) უტოლობის დამტკიცების სქემა), გვაქვს:

$$B_n(x)-f(x) \leq \frac{M_2}{2n} x(1-x).$$

(13) უტოლობა დამტკიცებულია.

ვაჩვენოთ, რომ (13)-ის გაუმჯობესება არ შეიძლება. ამისთვის საკმარისია, განვიხილოთ ფუნქციათა კლასი, რომლისთვისაც მისი მესამე რიგის წარმოებულები მუდმივია ანუ $f(x)$ მესამე ხარისხის პოლინომია.

$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3. \tag{14}$$

(14) წარმოდგენის გამოყენებით, რადგან ტეილორის ფორმულა ზუსტია მესამე რიგის პოლინომისთვის; გვაქვს

$$f\left(\frac{k}{n}\right)=f(x)+\left(\frac{k}{n}-x\right) f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 f''(x)+\frac{1}{6}\left(\frac{k}{n}-x\right)^3 f'''(x),$$

ამასთან

$$f'''(x)=f'''\left(\frac{k}{n}\right)=6d=\text{const}.$$

ცხადია, ჩვენს შემთხვევაში

$$B_n(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}-x\right)f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 f''(x)+\frac{1}{6}\left(\frac{k}{n}-x\right)^3 f'''(x)\right]C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

(13) შეფასების გამოყენებით გვაქვს:

$$B_n(x)-f(x)=\frac{f''(x)}{2n}x(1-x)+\frac{1}{6n^3}f'''(x)\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^3 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}, \tag{15}$$

(შევნიშნოთ, რომ $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{1}{n}(nx-nx)=0\Big)$.

(15) ფორმულის მარჯვენა მხარეში შემავალი ჯამი, ბინომის გამოყენებით, დავშალოთ ოთხ შესაკრებად ისეთნაირად, რომ S_1-ს შეესაბამებოდეს ჯამში k^3-ის შემცველი წევრი, S_2-ს – k^2-ის, S_3-ს – k-ს შემცველი, ხოლო

$$S_4=n^3x^3\sum_{k=0}^{n}kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}=n^3x^3.$$

ადრე მიღებული ფორმულების გამოყენებით,

$$S_2=3\left(n^3x^3-n^2x^3+n^2x^2\right),\ S_3=3n^3x^3.$$

S_1-სთვის გვაქვს

$$S_1=\sum_{k=0}^{n}k^3\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k^2\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=nx\sum_{k=1}^{n}k^2\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=nx\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^2\frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!}x^j(1-x)^{n-j-1}$$

$$=nx\left[\sum_{j=0}^{n-1}j^2\frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!}x^j(1-x)^{n-j+1}+2\sum_{j=0}^{n}j\frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!}x^j(1-x)^{n-j-1}+1\right]$$

$$=nx\left[(n-1)^2x^2-(n-1)x^2+(n-1)x+2(n-1)x+1\right]$$

$$=nx\left[(n-1)^2x^2-(n-1)x^2+3(n-1)x+1\right].$$

ამრიგად, (15)-ის მარჯვენა მხარეში შემავალი ჯამისთვის გვექნება:

$$\frac{1}{6n^3}f'''(x)\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^3C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{1}{6n^3}f'''(x)\left[S_1-S_2+S_3-S_4\right]$$

$$=\frac{1}{6n^3}f'''(x)\Big(n^3x^3-3n^2x^3+2nx^3+3n^2x^2-3nx^2+nx$$

$$-3n^3x^3+3n^2x^3-3n^2x^2+3n^3x^3-n^3x^3\Big)=\frac{1}{6n^2}f'''(x)\left[2x^3-3x^2+x\right]$$

$$=\frac{2}{6n^2}f'''(x)x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=-\frac{f'''(x)}{3n^2}x(1-x)\left(\frac{1}{2}-x\right).$$

საბოლოოდ:

$$B_n(x)-f(x)=\frac{1}{2n}\frac{1}{2}f''(x)x(1-x)-\frac{1}{3n^2}f'''(x)x(1-x)\left(\frac{1}{2}-x\right). \qquad (16)$$

(16) შეფასება მიუთითებს იმაზე, რომ, თუ $f''(x)$ იგივურად ნულის ტოლი არ არის, $\Delta(f_i B_n)=|B_n(x)-f(x)|$ გადახრის რიგი $\frac{1}{n}$-ზე უკეთესი ვერ იქნება.

შევისწავლოთ $B_n(x)$-ის წარმოებულის ყოფაქცევა. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა: *თუ* $f(x)\in C^1[0,1]$, *მაშინ* $B_n'(x)$ *თანაბრად კრებადია* $f'(x)$ *ფუნქციისკენ, როდესაც* $n\to\infty$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა .

$$B_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)C_n^{k+1}(k+1)x^k(1-x)^{n-k-1}-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}.$$

გვაქვს

$$(k+1)C_n^{k+1}=(k+1)\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{(n-k)n!}{k!(n-k)!}=(n-k)C_n^k=\frac{(n-k)n(n-1)!}{k!(n-k)(n-k-1)!}=nC_{n-1}^k.$$

ამის გამო

$$B_n'(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-k-1}.$$

სასრული ნაზრდის ფორმულის ძალით:

$$B_n'(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(z_k^{(n)}\right)\left[\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right]C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k-1}{n}\right)C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left[f'\left(z_k^{(n)}\right)-f'\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-k-1},\quad \left(\frac{k}{n}<z_k^{(n)}<\frac{k+1}{n}\right). \qquad (17)$$

უკანასკნელი ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები წარმოადგენს ბერნშტეინის $n-1$ რიგის პოლინომს $f'(x)$-ისთვის და იგი თანაბრად კრებადია [0,1]-ში.

შემდეგ, რადგან

$$\frac{k}{n}<z_k^{(n)}<\frac{k+1}{n},\ \frac{k}{n}<\frac{k}{n-1}<\frac{k+1}{n}\quad (n>k\geq 1)$$

და

$$\left|z_k^{(n)} - \frac{k}{n-1}\right| < \frac{1}{n}.$$

(17) ფორმულის მეორე შესაკრებისთვის, $f'(x)$-ის თანაბარი უწყვეტობის გამო, მისი უწყვეტობის მოდული, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და ყველა n-სთვის, დაწყებული $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$-დან, ნაკლებია ε-ზე.

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. *თუ $f'(x)$ $[0,1]$ შუალედში აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას L_1 მუდმივით, მაშინ $B_n'(x)$ პოლინომით მისწრაფების რიგი (12) უტოლობის ძალით $n^{-\frac{1}{2}}$-ია.*

თავი 3. სპლაინ-ფუნქციათა თეორიის ელემენტები

3.1. შესავალი. კუბური სპლაინები მომენტებითა და დახრილობებით

რიცხვითი ანალიზის ლექციათა კურსის ამ ნაკვეთში გადმოცემულია სპლაინ-ფუნქციათა თეორიის ელემენტები და მისი გამოყენება ფუნქციის წარმოებულისა და განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის შედარებით ახალი (კლასიკურისაგან განსხვავებული) ალგორითმებით. სპლაინ-ფუნქციათა თეორია წარმოადგენს ფუნქციათა მიახლოების თეორიის უახლეს მნიშვნელოვან და ძალზე ინტენსიურად განვითარებად დარგს. თეორიისა და პრაქტიკის მრავალი ამოცანასათვის სპლაინ-ფუნქციები გაცილებით ბუნებრივ აპარატს წარმოადგენს, ვიდრე პოლინომები. კერძოდ, ერთი და მრავალგანზომილებიანი სპლაინები ფართოდ გამოიყენება დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი ინტეგრებისათვის, თანამედროვე კომპიუტერებისათვის მათემატიკური ბაზის შექმნასა და, მათ შორის, კომპიუტერულ გრაფიკაში.

ქვემოთ გადმოცემული ძირითადად ემთხვევა რიცხვითი ანალიზის თანამედროვე კურსებში წარმოდგენილ შესაბამის მასალას სპლაინ-ფუნქციათა თეორიიდან და იგი გადმოცემულია შემდეგი სახელმძღვანელოების საფუძველზე:

1. J.H.Ahlberg, E.N.Nilson, J.L.Walsh. The Theory of Splains and Their Applications, Acad. Press: N.-Y./L, 1967, (Chapters 1-2).
2. G.Engeln-Müllges, F.Reutter. Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit C-Programmen, B.I, Wissenschaftsverlag, Manheim/Wien/Zürich, 1990, (Parts 10, 11, pages 204-240, 546-570). L

ავაგოთ $y = f(x)$ ფუნქციის მახლობელი მრუდი, რომელიც წარმოადგენს კუბური პოლინომებისგან შემდგარ მაინტორპოლებელ ტეხილს (პარაბოლების – მესამე რიგის პოლინომებისგან შემდგარს).

ჩავთვალოთ, რომ $y = f(x)$ განსაზღვრულია $a \le x \le b$. დავყოთ $[a,b]$ N ნაწილად შემდეგნაირად:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b.$$

ამასთან ერთად ვიგულისხმოთ, რომ ცნობილია ასევე შესაბამისი ორდინატები:

$$Y : y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

საძიებელია ფუნქცია $S_\Delta(Y;x)$ (ამავე ფუნქციისთვის გამოვიყენებთ აღნიშვნებს: $S_\Delta(x)$, $S_{\Delta,Y}(x)$ ან $S_{\Delta,Y}$), რომელიც უწყვეტია $[a,b]$-ზე თავის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებთან ერთად და ყოველ $x_{j-1} \le x \le x_j$

$(j = 1,2,\dots,N)$ მონაკვეთზე მესამე რიგის პოლინომს ემთხვევა. ამასთან ვთვლით, რომ სრულდება ინტერპოლების პირობა:

$$S_\Delta(Y; x_j) = y_j \quad (j = 0,1,2,\dots,N).$$

$S_\Delta(Y; x)$ -ს უწოდებენ მაინტორპოლებელ სპლაინს Δ ბადის მიმართ. სპლაინი იწოდება პერიოდულად (პერიოდით $b - a$), თუ

$$S_\Delta^{(p)}(a+0) = S_\Delta^{(p)}(b-0) \quad (p = 0,1,2).$$

შემოვიღოთ შემდეგი სიდიდეები:

$$S_\Delta^{//}(x_j) = M_j \quad (j = 0,1,2,\dots,N), \quad h_j = x_j - x_{j-1}.$$

ყოველ $(x_{j-1} \le x \le x_j)$ შუალედზე $S_\Delta^{//}(x)$ იქნება წრფივი ფუნქცია. ამიტომ

$$S_\Delta''(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{h_j} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{h_j}. \tag{1.1}$$

(1.1), ცხადია, 2-კვანძიან ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულას წარმოადგენს.

თუ (1.1) ტოლობას ვაინტეგრებთ ორჯერ და დავითვლით ინტეგრირების მუდმივებს, მივიღებთ:

$$S_\Delta(x) = M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + c_{1,j}x + c_{2,j}; \tag{A.1}$$

$c_{1,j}$ და $c_{2,j}$ განისაზღვრება შემდეგი პირობებიდან

$$x = x_{j-1}: \qquad c_{1,j}x_{j-1} + c_{2,j} = M_{j-1}\frac{(x_{j-1} - x_j)^3}{6h_j} + y_{j-1} = -\frac{h_j^2}{6}M_{j-1} + y_{j-1}$$

$$x = x_j: \qquad c_{1,j}x_j + c_{2,j} = M_j\frac{(x_{j-1} - x_j)^3}{6h_j} + y_j = -\frac{h_j^2}{6}M_j + y_j \tag{A.2}$$

$c_{1,j}$ და $c_{2,j}$ ვიპოვოთ (A.2) სისტემებიდან და ჩავსვათ (A.1)-ში.

$$c_{1,j} = \frac{1}{h_j}\left[(y_j - y_{j-1}) - \frac{h_j^2}{6}(M_j - M_{j-1})\right],$$

$$c_{2,j} = -\frac{1}{h_j}\left[(x_{j-1}y_j - x_j y_{j-1}) + \frac{h_j^2}{6}(x_j M_{j-1} - x_{j-1}M_j)\right] \tag{A.3}$$

დავაჯგუფოთ y_j, y_{j-1}, M_j და M_{j-1}-თან მდგომი კოეფიციენტები, გვექნება

$$c_{1,j}x + c_{2,j} = \frac{1}{h_j}\left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right)(x - x_{j-1}) + \frac{1}{h_j}\left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6}\right)(x_j - x).$$

საბოლოოდ (A.1) მიიღებს სახეს:

$$S_\Delta(x)=M_{j-1}\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}+M_j\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}+\left(y_{j-1}-\frac{M_{j-1}h_j^2}{6}\right)\frac{x_j-x}{h_j}+$$

$$+\left(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x-x_{j-1}}{h_j}, \qquad (1.2)$$

ამ ფორმულის გაწარმოებით მივიღებთ:

$$S'_\Delta(x)=-M_{j-1}\frac{\left(x_j-x\right)^2}{2h_j}+M_j\frac{\left(x-x_{j-1}\right)^2}{2h_j}+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}-\frac{M_j-M_{j-1}}{6}h_j. \qquad (1.3)$$

ცხადია, რომ $S_\Delta(x)$ და $S''_\Delta(x)$ უწყვეტია $[a,b]$-ზე (ინტერპოლებისა და M_j სიდიდეების განმარტების გამო!). იმისთვის, რომ $S_\Delta(x)$ ფუნქცია უწყვეტი იყოს $[a,b]$-ზე პირველი რიგის წარმოებულთან ერთად, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$S'_\Delta\left(x_j-0\right)=S'_\Delta\left(x_j+0\right) \quad (j=1,2,\ldots,N-1) \qquad (A.4)$$

პირობები შესრულდეს, სადაც, მაგალითად, $S_\Delta(a+0)$ ნიშნავს ცალმხრივ ზღვარს მარჯვნიდან. გამოვითვალოთ $S'_\Delta\left(x_j-0\right)$ და $S'_\Delta\left(x_j+0\right)$. ამისთვის გამოვიყენოთ (1.3) ტოლობა. $S'_\Delta\left(x_j-0\right)$ გამოითვლება (1.3)-ში $x=x_j$ უშუალო ჩასმით. $S'_\Delta\left(x_j+0\right)$ შეიძლება დავითვალოთ, თუ (1.3)-ში ჩავსვამთ $x=x_{j-1}$ და ინდექსს გავადიდებთ 1-ით, ან (1.3) გადავწერთ $\left(x_j,x_{j+1}\right)$ შუალედისათვის და შემდეგ დავუშვათ $x=x_j$.

ამგვარად, გვექნება:

$$S'_\Delta\left(x_j-0\right)=\frac{h_j}{6}M_{j-1}+\frac{h_j}{3}M_j+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}. \qquad (4.a)$$

$$S'_\Delta(x_{j-1}+0)=-\frac{h_j}{3}M_{j-1}-\frac{h_j}{6}M_j+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j},$$

საიდანაც

$$S'_\Delta(x_j+0)=-\frac{h_{j+1}}{3}M_j-\frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}. \qquad (4.b)$$

(4.a) და (4.b) ტოლობები (A.3)-ის გათვალისწინებით გვაძლევს:

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1}+\frac{h_j}{3}M_j+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}=-\frac{h_{j+1}}{3}M_j-\frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}},$$

ანუ

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1}+\frac{h_j+h_{j+1}}{3}M_j+\frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}=\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}. \qquad (1.5)$$

ამგვარად, მივიღეთ $N-1$ წრფივი განტოლება $M_j\ (j=0,1,\ldots,N)$ $N+1$ უცნობით. იმისთვის, რომ (1.5)-დან ცალსახად განისაზღვროს M_j, საჭიროა კიდევ ორი დამატებითი პირობა. ამ საკითხს ქვემოთ განვიხილავთ.

პერიოდულ შემთხვევაში, ცხადია, (1.5) ტოლობა სრულდება $j=N$ ინდექსისთვის, რადგან (A.4) პირობა ამ შემთხვევისთვის მიიღებს სახეს:

$$S'_\Delta(x_N-0)=S'_\Delta(x_N+0)=S'_\Delta(x_0+0),$$

ამასთან, $y_N=y_0$, $M_N=M_0$, $y_{N+1}=y_1$, $M_{N+1}=M_1$, $h_{N+1}=h_1$. ამგვარად, როდესაც $j=N$, (1.5) მიიღებს სახეს:

$$\frac{h_N}{6}M_{N-1}+\frac{h_1+h_N}{3}M_N+\frac{h_1}{6}M_1=\frac{y_1-y_N}{\underline{h_1}}-\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}. \tag{1.5$_N$}$$

ამავე დროს $j=1$-ისთვის (1.5) გადაიწერება ასეთნაირად:

$$\frac{h_1}{6}M_N+\frac{h_1+h_2}{3}M_1+\frac{h_2}{6}M_2=\frac{y_2-y_1}{\underline{h_2}}-\frac{y_1-y_N}{h_1}. \tag{1.5$_1$}$$

(მივაქციოთ ყურადღება ხაზგასმულ წევრებს, რომლებსაც ქვემოთ გამოვიყენებთ!).

დავუბრუნდეთ არაპერიოდული შემთხვევის განხილვას. თუ, მაგალითად, ჩავთვლით, რომ მოცემულია მეორე რიგის წარმოებულები y_0'' და y_N'', მაშინ დამატებითი პირობები გადაიწერება ასე:

$$M_0=y_0'',\ M_N=y_N''. \tag{B.1}$$

თუ ჩავთვლით, რომ შუალედის ბოლოებზე ცნობილია y_0', y_N' სიდიდეები, მაშინ (4.a) და (4.b) ფორმულები, როგორც ცალმხრივი წარმოებულები ($a=x_0$-ისთვის – მარჯვნიდან, ხოლო $x_N=b$-სთვის – მარცხნიდან) გვაძლევს:

$$y_0'=S'_\Delta(a+0)=-\frac{h_1}{3}M_0-\frac{h_1}{6}M_1-\frac{y_1-y_0}{h_1},$$

$$y_N'=S'_\Delta(b-0)=\frac{h_N}{6}M_{N-1}+\frac{h_N}{3}M_N+\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}.$$

უკანასკნელი ფორმულები გადავწეროთ ასე:

$$2M_0+M_1=\frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-y_0'\right), \tag{B.2}$$

$$M_{N-1}+2M_N=\frac{6}{h_N}\left(y_N'-\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right).$$

განვიხილოთ ასეთი ტოლობები:

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0 .$$

$$\mu_N M_{N-1} + 2M_N = d_N . \tag{1.6}$$

ცხადია, ეს ტოლობები აერთიანებს (B.1) და (B.2) პირობებს. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ

$$\lambda_0 = \mu_N = 0 ,\ d_0 = 2y_0'',\ \ d_N = 2y_N'' ,$$

მივიღებთ (B.1) პირობებს. როდესაც

$$\lambda_0 = \mu_N = 1 ,\ d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0' \right),\ d_N = \frac{6}{h_N}\left(y_N' - \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} \right),$$

მივიღებთ (B.2)-ს.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} ,\ \mu_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} = 1 - \lambda_j ;\ (j = 1,2,\ldots,N-1) ,$$

მაშინ (1.5) (ძირითადი ტოლობები!) გადმოიწერება შემდეგნაირად:

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = 6\frac{\dfrac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \dfrac{y_j - y_{j-1}}{h_j}}{h_j + h_{j+1}} . \tag{1.7}$$

ამგვარად, (1.6) და (1.7) განტოლებები, რომლებიც წარმოადგენენ $N+1$ განტოლებას ამდენივე უცნობით, შეიძლება გადავწეროთ მატრიცული სახით:

$$AM = d ,$$

ანუ

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & \lambda_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} , \tag{1.8}$$

სადაც d_j $(j = 1,2,\ldots,N-1)$ სიდიდეებით აღნიშნულია (1.7) ტოლობათა მარჯვენა მხარეები:

$$6\frac{\dfrac{(y_{j+1} - y_j)}{h_{j+1}} - \dfrac{(y_j - y_{j-1})}{h_j}}{h_j + h_{j+1}} = d_j .$$

პერიოდულ შემთხვევებში მივიღებთ (1.5_1)-ისა და (1.5_N)-ის გათვალისწინებით:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & \lambda_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ \lambda_N & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}, \qquad (1.9)$$

სადაც (გავიხსენოთ)

$$M_0 = M_N, \ \lambda_N = \frac{h_1}{h_N + h_1}, \ \mu_N = \frac{h_N}{h_N + h_1}.$$

სანამ (1.8) და (1.9) სისტემების ამოხსნადობის და ამონახსნის ეფექტურად აგების საკითხების შესწავლაზე გადავიდოდეთ, ავაგოთ სპლაინი, როდესაც პარამეტრებად M_j სიდიდეების (ე. წ. „მომენტების“) ნაცვლად გამოიყენება $m_j = S'_\Delta(x_j)$ დახრილობები.

ამგვარად, ყოველ $\lfloor x_{j-1}, x_j \rfloor$ შუალედში კუბური პოლინომის ასაგებად გამოიყენება შემდეგი პარამეტრები: y_{j-1}, y_j, m_{j-1} და m_j: ორდინატები და დახრილობები.

ქვემოთ ვაგებთ ანალოგიურ სისტემებს, როდესაც $M = (M_0, \ldots, M_N)^T$ მომენტების ნაცვლად აიღება, როგორც ბაზისი, დახრილობები: $m_j = S'_\Delta(x_j; f)$-სიდიდეები.

ცხადია, რომ, თუ $\{y_{j-1}, y_j;\ m_{j-1}, m_j\}$ პარამეტრებით ავაგებთ მესამე რიგის მაინტერპოლებელ პოლინომს

$$S_\Delta(x; f) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad x_{j-1} \le x \le x_j, \qquad (d.1)$$

სადაც a, b, c, d j-ზე დამოკიდებული რიცხვებია, გვექნება:

$$ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d = y_i \quad (i = j-1, j),$$

$$3ax_i^2 + 2bx_x + c = m_i \quad (i = j-1, j), \qquad (d.2)$$

თუ (d.2) სისტემას ამოვხსნით a, b, c, d კოეფიციენტების მიმართ, ჩავსვამთ მათ (d.1)-ში, აიგება (x_{j-1}, x_j) შუალედში განსაზღვრული კუბური სპლაინი, რომელსაც ექნება სახე:

$$S_\Delta(x; f) = H_1(x)m_{j-1} + H_2(x)m_j + H_3(x)y_{j-1} + H_4(x)y_j$$

$$H_1(x_i) = H'_1(x_j) = 0, \quad H'_1(x_{j-1}) = 1; \ H_3(x_j) = H'_3(x_i) = 0,, \ H_3(x_{j-1}) = 1,$$

$$H_2(x_i) = H_2'(x_{j-1}) = 0,, \quad H_2'(x_j) = 1; \quad H_4(x_{j-1}) = H_4'(x_i) = 0, \quad H_4(x_j) = 1 \qquad \text{(d.3)}$$

$$(i = j-1, j).$$

ზემოთ მოცემული თვისებები $H_i(x)$ $(i = 1,2,3,4)$ ფუნქციებს ცალსახად განსაზღვრავს და მათ აქვთ შემდეგი სახე:

$$H_1(x) = \frac{(x_j - x)^2 (x - x_{j-1})}{h_j^2}, \quad H_2(x) = -\frac{(x - x_{j-1})^2 (x_j - x)}{h_j^2}. \qquad \text{(d.4)}$$

$$H_3(x) = \frac{(x_j - x)^2 [2(x - x_{j-1}) + h_j]}{h_j^3}, \quad H_4(x) = \frac{(x - x_{j-1})^2 [2(x_j - x) + h_j]}{h_j^3}.$$

სავარჯიშო 1. *ავაგოთ, მაგალითად,* $H_4(x)$. *ცხადია,*

$$H_4(x) = (x - x_{j-1})^2 (ax + b), \quad H_4'(x) = 2(x - x_{j-1})(ax + b) + a(x - x_{j-1})^2,$$

ანუ $(d \cdot 4)_4$*-ის ძალით*

$$H_4'(x_j) = 2h_j(ax_j + b) + h_j^2 \cdot a = 0, H_4(x_j) = h_j^{\,2}(ax_j + b) = 1.$$

$$ah_j = -2(ax_j + b), \quad ax_j + b = -\frac{ah_j}{2}, \quad -h_j^2 \cdot \frac{ah_j}{2} = 1. \quad a = -\frac{2}{h_j^3}$$

$$2h_j b = -h_j^2 \cdot a - 2h_j a x_j = \frac{2}{h_j^3}(h_j^2 + 2h_j \cdot x_j), \quad b = \frac{1}{h_j^3}(h_j + 2x_j)$$

$$H_4(x) = (x - x_{j-1})^2 \left[-\frac{2x}{h_j^3} + \frac{1}{h_j^3}(h_j + 2x_j) \right] = \frac{1}{h_i^3}(x - x_{j-1})^2 \left[2(x_j - x) + h_j \right].$$

ანალოგიურად,

$$H_3(x) = (x_j - x)^2 (ax + b), \quad H_3'(x) = -2(x_j - x)(ax + b) + (x_j - x)^2 \cdot a$$

$$H_3'(x_{j-1}) = 0 = h_j^2 \cdot a - 2h_j(ax_{j-1} + b), \quad H_3(x_{j-1}) = 1 = h_j^2(ax_{j-1} + b) = \frac{ah_j^3}{2}, \quad a = \frac{2}{h_j^3},$$

$$b = \frac{ah_j}{2} - ax_{j-1} = \frac{2}{h_j^3}\left(\frac{h_j}{2} - x_{j-1}\right), \quad H_3(x) = \frac{1}{h_j^3}(x_j - x)^2 [2(x - x_{j-1}) + h_j].$$

სავარჯიშო 2. *ავაგოთ* $H_1(x)$. *მისთვის* x_j *ორჯერადი ნულია, ხოლო* x_{j-1} – *ერთჯერადი. ამიტომ ცხადია,*

$$H_1(x) = (x_j - x)^2 (x - x_{j-1}) \cdot a.$$

პირობა $H_1'(x_{j-1}) = 1$ *გვაძლევს, რომ*

$$a \cdot (x_j - x_{j-1})^2 = 1, \quad a = \frac{1}{h_j^2}.$$

ასევე:

$$H_2'(x_j) = 1 = -ah_j^2, \quad a = -\frac{1}{h_j^2}.$$

საბოლოოდ:

$$H_1(x) = \frac{\left(x_j - x\right)^2\left(x - x_{j-1}\right)}{h_j^2}, \; H_2(x) = -\frac{\left(x - x_{j-1}\right)^2\left(x_j - x\right)}{h_j^2}.$$

ამგვარად:

$$S_\Delta(x) = m_{j-1}\frac{(x_j - x)^2(x - x_{j-1})}{h_j^2} - m_j\frac{(x - x_{j-1})^2(x_j - x)}{h_j^2}$$

$$+ y_{j-1}\frac{(x_j - x)^2[2(x - x_{j-1}) + h_j]}{h_j^3} + y_j\frac{(x - x_{j-1})^2[2(x_j - x) + h_j]}{h_j^3}. \qquad (1.10)$$

გაგახსენებთ, რომ (1.10) წარმოადგენს შარლ ერმიტის საინტერპოლაციო ფორმულის კერძო შემთხვევას: ორ კვანძით წერტილში მოცემული ორდინატებითა და დახრილობებით.

შევნიშნოთ, რომ (1.10) შესაძლებელია აიგოს სხვა გზითაც, მაგრამ მეთოდოლოგიური ერთიანობისთვის ქვემოთ გადმოვცემთ ხერხს, რომელიც სპლაინის მომენტებით აგებისას გამოვიყენეთ.

ვეძებოთ სპლაინის რიგის წარმოებული, როგორც კვადრატული პოლინომი

$$S_\Delta'\left(x\right) = ax^2 + bx + c, \quad S_\Delta'(x_i) = m_i, \quad (i = j-1, j).$$

ინტეგრებით გვაქვს:

$$y_{j+1} - y_j = a\frac{x_j^3 - x_{j-1}^3}{3} + b\frac{x_j^2 - x_{j-1}^2}{2} + c\left(x_j - x_{j-1}\right).$$

ბოლო სამი განტოლებიდან მარტივად ისაზღვრება a, b, c *რიცხვები* $\left\{y_i, m_i, i = j-1, j\right\}$ *სიდიდეებით.*

საბოლოოდ, (d.1)-დან d *განისაზღვრება უშუალოდ.*

(1.10)-ის გაწარმოებით მივიღებთ

$$S_\Delta'(x) = m_{j-1}\frac{\left(x_j - x\right)\left(2x_{j-1} + x_j - 3x\right)}{h_j^2} - m_j\frac{\left(x - x_{j-1}\right)\left(2x_j + x_{j-1} - 3x\right)}{h_j^2}$$

$$+ \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j^3}\cdot 6\left(x_j - x\right)\left(x - x_{j-1}\right). \qquad (1.11)$$

აქედან გვაქვს

$$S_\Delta''(x) = -2m_{j-1}\frac{2x_j + x_{j-1} - 3x}{h_j^2} - 2m_j\frac{2x_{j-1} + x_j - 3x}{h_j^2} + 6\frac{y_j - y_{j-1}}{h_j^3}(x_j + x_{j-1} - 2x). \qquad (1.12)$$

საიდანაც

$$S''_\Delta\left(x_j-0\right)=\frac{2m_{j-1}}{h_j}+\frac{4m_j}{h_j}-6\cdot\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j^2}, \tag{1.13$_1$}$$

$$S''_\Delta(x_{j-1}+0)=-\frac{4m_{j-1}}{h_j}-\frac{2m_j}{h_j}+6\cdot\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j^2},$$

ანუ, თუ ქვედა ტოლობაში $j-1$-ს შევცვლით j-ით, გვექნება:

$$S''_\Delta\left(x_j+0\right)=-\frac{4m_j}{h_{j+1}}-\frac{2m_{j+1}}{h_{j+1}}+6\cdot\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}^2}. \tag{1.13$_2$}$$

თუ გამოვიყენებთ პირობას, რომ მეორე რიგის წარმოებულები უწყვეტია კვანძით წერტილებშიც

$$S''_\Delta\left(x_j-0;f\right)=S''_\Delta\left(x_j+0;f\right),$$

(1.13$_1$) და (1.13$_2$) გვაძლევს:

$$\frac{1}{h_j}m_{j-1}+2\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)m_j+\frac{1}{h_{j+1}}m_{j+1}=3\cdot\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}^2}+3\cdot\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j^2}. \tag{1.14}$$

ან, თუ ვისარგებლებთ λ_j და μ_j რიცხვებით, როგორც ზემოთ, (1.14) გვაძლევს:

$$\lambda_j m_{j-1}+2m_j+\mu_j m_{j+1}=3\lambda_j\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}+3\mu_j\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}. \tag{1.15}$$

დავუბრუნდეთ სასაზღვრო პირობების საკითხს, ანუ (1.15) სისტემით განსაზღვრულ ტოლობებს. როგორც მომენტების შემთხვევაში, (1.15) სამართლიანია, როდესაც $j=1,2,\dots,N-1$. პერიოდულ შემთხვევაში (1.15) გავავრცელოთ $j=N$-ისთვისაც. პერიოდულობის გამო $m_0=m_N$, $m_1=m_{N+1}$, $y_0=y_N$, $y_1=y_{N+1}$, $h_1=h_{N+1}$. ამიტომ (1.15) განტოლების ძალით, როდესაც $j=N$, გვექნება:

$$\lambda_N m_{N-1}+2m_N+\mu_N m_{N+1}=3\lambda_N\cdot\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}+3\mu_N\cdot\frac{y_1-y_N}{h_{N+1}}.$$

ეს განტოლება უნდა მივუერთოთ (1.15)-ს. ამავე დროს, როდესაც $j=1$, (1.15) გვაძლევს:

$$\lambda_1 m_N+2m_1+\mu_1 m_2=3\lambda_1\cdot\frac{y_1-y_N}{h_1^2}+3\mu_1\cdot\frac{y_2-y_1}{h_2^2}. \tag{1.15$_1$}$$

როგორც ადრე, არაპერიოდულ შემთხვევაში, ან ცნობილია დახრილობების წრფივი კომბინაციები $x_0=a$ და $x_N=b$ წერტილებში, ან თვით დახრილობები. ეს პირობები ზოგადად შეიძლება ჩაიწეროს ერთიანი სახით:

$$2m_0+\mu_0 m_1=c_0,\ \lambda_N m_{N-1}+2m_N=c_N. \tag{d.5}$$

ამის შედეგად (1.15) და (d.5) ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & \mu_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1} & 2 & \mu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ m_{N-2} \\ m_{N-1} \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}, \tag{1.16}$$

სადაც

$$c_j = 3\lambda_j \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + 3\mu_j \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} \quad (j = 1,2,\ldots,N-1).$$

პერიოდულ შემთხვევაში მეორე რიგის წარმოებულთა ტოლობა ჩავწეროთ $x = x_N$ წერტილისთვის. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $m_0 = m_N$, $m_1 = m_{N+1}$, $y_0 = y_N$, $y_1 = y_{N+1}$, $h_1 = h_{N+1}$ და ა. შ., მივიღებთ

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & \mu_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1} & 2 & \mu_{N-1} \\ \mu_N & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ m_{N-2} \\ m_{N-1} \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}. \tag{1.17}$$

გამოვწეროთ c_1 და c_N:

$$c_1 = 3\lambda_1 \frac{y_1 - y_N}{h_1} + 3\mu_1 \frac{y_2 - y_1}{h_2}, \; c_N = 3\lambda_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} + 3\mu_N \frac{y_1 - y_N}{h_1}.$$

გადავწეროთ (1.16) და (1.17) სიმოკლისთვის მატრიცული ფორმით $Bm = c$, სადაც B კვადრატული მატრიცაა, ხოლო m საძიებელი და c ცნობილი ვექ-ტორებია. თვალსაჩინოებისთვის გამოვწეროთ სასაზღვრო პირობები როგორც მომენტების, ისე დახრილობების შესაბამისი შემთხვევებისთვის. გვაქვს: როდესაც $x = a$, $x = b$

$$(i)\quad 2M_0+M_1=\frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-y_0'\right),\quad M_{N-1}+2M_N=\frac{6}{h_N}\left(y_N'-\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right),$$

$$(ii)\quad 2M_0=2y_0'',\qquad 2M_N=2y_N'', \tag{1.18}$$

$$(iii)\quad 2M_0+\lambda_0 M_1=d_0,\qquad \mu_N M_{N-1}+2M_N=d_N,$$

$$(i)\quad 2m_0=2y_0',\qquad 2m_N=2y_N'$$

$$(ii)\quad 2m_0+m_1=3\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{h_1}{2}y_0'',\quad m_{N-1}+2m_N=3\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}+\frac{h_N}{2}y_N'', \tag{1.19}$$

$$(iii)\; 2m_0+\mu_0 m_1=c_0,\qquad \lambda_N m_{N-1}+2m_N=c_N.$$

სასაზღვრო პირობათა ეს ორი სიმრავლე ერთმანეთის ეკვივალენტურია. როდესაც

$$\mu_0=\frac{4(1-\lambda_0)}{4-\lambda_0},\qquad \lambda_N=\frac{4(1-\mu_N)}{4-\mu_N}, \tag{d.7}$$

$$c_0=-\frac{d_0 h_1}{4-\lambda_0}+6\frac{2-\lambda_0}{4-\lambda_0}\;\frac{y_1-y_0}{h_1},\quad c_N=\frac{d_N h_N}{4-\mu_N}+6\frac{2-\mu_N}{4-\mu_N}\;\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}.$$

მაგალითად, $(1.19)_3$-ს მივცეთ, როდესაც $x=a$, $(1.18)_3$-ის სახე. ამისთვის გამოვსახოთ $2m_0+\mu_0 m-c_0$ სიდიდე M_0-ითა და M_1-ით. (1.4)-დან გვაქვს:

$$m_0=-\frac{h_1}{3}M_0-\frac{h_1}{6}M_1+\frac{y_1-y_0}{h_1},\qquad m_1=\frac{h_1}{3}M_0+\frac{h_1}{6}M_1+\frac{y_1-y_0}{h_1}.$$

შევადგინოთ

$$2m_0+\mu_0 m_1-c_0=-\frac{2h_1}{3}M_0-\frac{2h_1}{6}M_1+\frac{2(y_1-y_0)}{h_1}$$

$$+\mu_0\cdot\frac{h_1}{6}M_0+\mu_0\frac{h_1}{3}M_1+\mu_0\frac{y_1-y_0}{h_1}-c_0=0,$$

$$\frac{h_1}{6}(\mu_0-4)M_0+\frac{h_1}{3}(\mu_0-1)M_1+(2+\mu_0)\frac{y_1-y_0}{h_1}-c_0=0,$$

რომელიც ასე გადაიწერება:

$$2M_0+\frac{2h_1}{3}\frac{\mu_0-1}{\frac{h_1}{6}(\mu_0-4)}M_1+\frac{2(2+\mu_0)}{\frac{h_1}{6}(\mu_0-4)}\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{2c_0}{\frac{h_1}{6}(\mu_0-4)}=2M_0+\lambda_0 M_1-d_0.$$

$$\frac{4(\mu_0-1)}{\mu_0-4}=\lambda_0,\;\; \lambda_0=\frac{4(\mu_0-1)}{\mu_0-4}\Rightarrow \lambda_0\mu_0-4\lambda_0=4\mu_0-4.$$

$$(\lambda_0-4)\mu_0=4\lambda_0-4.\;\; \mu_0=\frac{4(\lambda_0-1)}{\lambda_0-4}=\frac{4(1-\lambda_0)}{4-\lambda_0}.$$

ნათელია, რომ $AM = d$, $Bm = c$ სისტემებს აქვთ ერთნაირი სტრუქტურა ამოხსნადობის თვალსაზრისით როგორც პერიოდული, ისე არაპერიოდული შემთხვევებისთვის. პერიოდულ შემთხვევებში მატრიცებს ეწოდებათ ციკლური, ხოლო არაპერიოდულ შემთხვევაში – იაკობის. (1.8) და (1.16) სისტემების ამოხსნა ფაქტიურად ემთხვევა გაუსის მეთოდს, როდესაც მთავარი ელემენტი $a_{ij} = b_{ij} = 2$.

განვიხილოთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$
\begin{aligned}
&b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1,\\
&a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2,\\
&a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1},\\
&a_n x_n + b_n x_n = d_n,
\end{aligned}
\qquad (c.1)
$$

რომლის კერძო შემთხვევებია (1.8) და (1.16) (არაპერიოდული შემთხვევები). ამოვხსნათ (c.1) შემდეგნაირად: პირველი განტოლებიდან განვსაზღვროთ x_1 უცნობი x_2-ის საშუალებით. შემდეგ (c.1$_2$)-ში (მეორე განტოლებაში) ჩავსვათ x_1-ის მაგივრად მისი გამოსახულება, მიღებული (c.1$_1$)-დან. გარდაქმნილი განტოლებიდან ამოვხსნათ x_2, როგორც x_3-სა და მარჯვენა მხარის ფუნქცია. მიღებული განტოლება გამოვიყენოთ (c.1$_3$)-ში და გავითვალისწინოთ (c.1$_4$)-ში და ა. შ. x_{n-1} უცნობი განვსაზღვროთ (c.1$_{n-1}$) განტოლებიდან და გამოვსახოთ იგი x_n-ით და ცნობილი წევრებით. ამგვარად მიღებული გამოსახულება გავითვალისწინოთ უკანასკნელ (c.1$_n$) განტოლებაში, საიდანაც ვიპოვით x_n-ს. თუ იგი განსაზღვრებადია, მაშინ თანმიმდევრობით ვიპოვით x_{n-1}, x_{n-2}, …, x_2 და x_1-ს. მითითებული პროცედურა განსაზღვრავს ალგორითმს, რომელიც ორი ნაწილისგან შედგება: პირდაპირი სვლა – კოეფიციენტების თვლა, ხოლო უკუსვლა – უცნობთა გამოთვლა.

ამგვარად, განვსაზღვროთ სიდიდეები, რომელიც პირდაპირი სვლით მიიღება $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

$$
p_k = a_k q_{k-1} + b_k \quad (q_0 = 0), \quad q_k = -\frac{c_k}{p_k}, \quad u_k = \frac{d_k - a_k u_{k-1}}{p_k} \quad (u_0 = 0) \qquad (1.20)
$$

(ამ სქემაში ვგულისხმობთ, რომ a_j, b_j, c_j და d_j სიდიდეები მოცემულია და წარმოადგენს საწყის ინფორმაციას). x_1-ის, x_2-ის, …, x_{n-1}-ის

გამორიცხვა მეორე, მესამე და ა. შ. n-ური განტოლებიდან გვაძლევს ეკვივალენტურ სისტემას:

$$x_1 = q_1 x_2 + u_1 \qquad \left(q_1 = -\frac{c_1}{p_1}, \;\; p_1 = a_1 q_0 + b_1 = b_1, \;\; u_1 = \frac{d_1}{b_1} \right)$$

$$x_k = q_k x_{k+1} + u_k \quad (k = 2,3,\ldots,n-1)\,, \qquad (c.2)$$

$$x_n = u_n\,,$$

საიდანაც თანდათანობით განისაზღვრება x_n, x_{n-1}, $\ldots$, x_2, x_1.

ამოხსნადობისა და თვლის მდგრადობის საკითხებს, რომლებიც დაკავშირებულია (1.20) და (c.2) პროცესებთან, შევისწავლით ოდნავ მოგვიანებით. ქვემოთ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც A და B ციკლური მატრიცებია. ამ შემთხვევაში (c.1)-ის ნაცვლად გვექნება:

$$\begin{aligned} & b_1 x_1 + c_1 x_2 + a_1 x_n = d_1, \\ & a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1}, \\ & c_n x_1 + a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n \end{aligned} \qquad (1.21)$$

(1.21)-ის მიმართ განვახორციელოთ ამოხსნის იგივე პროცედურა, როგორც (c.1)-ისთვის. განსხვავება იქნება იმაში, რომ პირველივე ნაბიჯიდან x_n სიდიდე შევა მარჯვენა მხარეებში: (1.21$_1$)-დან – ცხადად, (1.21$_2$)-დან – x_1-ის საშუალებით, (1.21$_3$)-დან – x_2-ის საშუალებითა და ა. შ. მოდიფიცირებული (1.21$_{n-1}$)-დან, რადგან x_{n-2} წინა ტოლობიდან განისაზღვრება, როგორც x_{n-1}-ის, x_n-ისა და მარჯვენა მხარეთა წრფივი ფუნქცია, x_{n-1} გამოისახება x_n-ითა და მარჯვენა მხარით. ამ ტოლობების გათვალისწინება (1.21$_{n-1}$) მოდიფიცირებულ განტოლებაში x_{n-2}-ს განსაზღვრავს, როგორც მხოლოდ x_n-ისა და ცნობილი წევრების კომბინაციას. შემდგომ, x_{n-2}-ის გათვალისწინებით იგივე სტრუქტურა ექნება x_{n-3}-ს და ა. შ. x_1-ს.

(1.21$_n$) განტოლებაში x_1 და x_{n-1}-ის გათვალისწინებით (როგორც x_n-ისა და ცნობილი წევრების კომბინაცია) x_n-ის მიმართ გვაძლევს ერთ განტოლებას ერთი უცნობით და თუ მას აქვს ამოხსნა, ვიპოვით x_n-ს. x_n-ის საშუალებით ვიპოვით დანარჩენ x_i $(i = 1,2,\ldots,n-1)$.

თვალი მივადევნოთ x_n-ის კოეფიციენტებს თითოეულ გარდაქმნილ ტოლობა-ში. თუ x_n-ის კოეფიციენტს k-ური განტოლებიდან აღვნიშნავთ, s_k-თი, ცხადია გვექნება:

$$s_1 = -\frac{a_1.1}{b_1} = -\frac{a_1 s_0}{b_1}, (s_0 = 1),$$

$$s_2 = -\frac{a_2 \cdot s_1}{p_2}, \ (p_2 = q_1 a_2 + b_2) \tag{1.22}$$

და ა. შ.

$$s_k = -\frac{a_k s_{k-1}}{p_k}.$$

ამის შედეგად (1.21) სისტემის პირველი $(n-1)$ განტოლება ასეთნაირად გადაიწერება:

$$x_k = q_k x_{k+1} + s_k x_n + u_k \quad (k = 1,2,\ldots,n-1). \tag{c.3}$$

(c.2)-ისგან განსხვავებით, გასათვალისწინებელია x_n-ის გავლენაც.

გამოვიყენოთ (c.3) თანმიმდევრობით $(n-1)$-დან 1-მდე. ამ პროცესმა უნდა მოგვცეს $\forall k \ (k = 1, 2, ..., n-1)$-თვის

$$x_k = t_k x_n + v_k \quad (k = 1,2,\ldots,n-1) \quad (x_{k+1} = t_{k+1} x_n + v_{k+1}!). \tag{1.23}$$

რადგან, როდესაც $k = n$, (1.23) იგივეობად უნდა იქცეს, გვაქვს: $t_n = 1$, $v_n = 0$. (c3)-ში (1.23)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$t_k x_n + v_k = q_k (t_{k+1} x_n + v_{k+1}) + s_k x_n + u_k,$$

საიდანაც

$$t_k = q_k t_{k+1} + s_k, \quad v_k = q_k v_{k+1} + u_k \quad (k = 1,2,\ldots,n-1). \tag{c.4}$$

(c.4) წარმოადგენს რეკურენტულ დამოკიდებულებას, რადგან t_n და v_n ცნობილია. t_k და v_k განისაზღვრება (c.4)-დან, როგორც ადრე, უკუ პროცე-სით. ვგულისხმობთ, რომ q_k, u_k და s_k მიიღება პირდაპირი სვლით.

ამგვარად, (1.23)-ში განისაზღვრა ყველა t_k და v_k კოეფიციენტი. მისი გამო-ყენება (1.21_n)-ში გვაძლევს:

$$c_n (t_1 x_n + v_1) + a_n (t_{n-1} x_v + v_{n-1}) + b_n x_n = d_n,$$

რომლის ამოხსნა x_n-ის მიმართ განსაზღვრავს ამ უცნობს. x_n-ის საშუა-ლებით (1.23)-დან ვიპოვოთ x_k $(k = 1,2,\ldots,n-1)$.

ხაზი გავუსვათ, რომ (C.1) და (1.21) სისტემების ამოხსნადობისა და აგებული შესაბამისი პროცედურების მდგრადობის (თვლის) საკითხები შეისწავლება დაწვრილებით შემდგომ ლექციებში.

შევისწავლოთ საკითხი, თუ რა რაოდენობის არითმეტიკული ოპერაცია უნდა ჩატარდეს, რომ (C.1) და (1.21) სისტემები ამოიხსნას. (C.1)-ისთვის ყოველი ფიქსირებული k-სთვის p_k, q_k და u_k სიდიდეების საპოვნელად საჭიროა 4 ოპერაცია (გამრავლება ან გაყოფა), ხოლო x_k-ს პოვნა (C.2)-დან საჭიროებს 1 ოპერაციას. ამგვარად (C.2)-ით განსაზღვრული პროცესი $\approx n$-ის პირველი ხარისხის რიგისაა. იგივე რიგის ოპერაციათა რაოდენობაა საჭირო (1.21)-ის ამოსახსნელად, თუკი გამოვიყენებთ ზემოთ განსაზღვრულ ალგორითმს: s_k, t_k და v_k სიდიდეების თვლა საჭიროებს ყოველი k-სთვის 3 გამრავლებასა და 1 გაყოფას, ანუ ოპერაციათა $\approx n$ რიგს. (1.23) საჭიროებს 1 გამრავლებას, ანუ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ვექტორი განისაზღვრება საბოლოოდ $0(n)$, ე. ი. n-ის პირველი ხარისხის რიგის არითმეტიკულ ოპერაციას, სადაც n განტოლებათა რაოდე-ნობაა.

თუ a_k, b_k და c_k კოეფიციენტები მუდმივებია, (1.20) გვაქვს:

$$p_k = aq_{k-1} + b, \ q_k = -\frac{c}{p_k},$$

ანუ

$$p_k = -\frac{ac}{p_{k-1}} + b.$$

თუ p_k-ს განვსაზღვრავთ, როგორც ორი სიდიდის ფარდობას:

$$p_k = \frac{h_k}{h_{k-1}},$$

მაშინ

$$\frac{h_k}{h_{k-1}} = -\frac{ac}{\frac{h_{k-1}}{h_{k-2}}} + b \Rightarrow h_k - bh_{k-1} + ach_{k-2} = 0.$$

ამგვარად, h_k წარმოადგენს II რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი, სხვაობიანი განტოლების ამონახსნს, რომელიც ადვილად იგება.

ვაჩვენოთ, რომ წინა ლექციებში წარმოდგენილი ალგორითმები სამარ-თლიანია იმ შემთხვევაში, თუ (1.8) და (1.16) სისტემებში

$$\max(|\lambda_0|, |\mu_N|, |\mu_0|, |\lambda_N|) < 2. \tag{1}$$

რაც შეეხება დანარჩენ სასაზღვრო პირობებს, მათთვის მთავარი დიაგონალის ელემენტი დომინანტია. ამგვარად $\forall\ i = 0,1,2,\ldots,N$-სთვის სრულდება დიაგონალის ჭარბობის კრიტერიუმი.

3.2. სპლაინების არსებობა, ერთადერთობა, საუკეთესო მიახლოება

შევისწავლოთ ამგვარად ამოხსნადობის საკითხი (1.8) და (1.16) ტიპის სისტემებისთვის. ამისთვის გამოვიყენოთ ადამარის ლემა. იგი ასე ყალიბდება: **ადამარის ლემა** (კრიტერიუმი): თუ $A = \left|a_{ik}\right|_1^n$ მატრიცისთვის სამართლიანია

$$H_i = \left|a_{ii}\right| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{H}$$

n უტოლობა, მაშინ A მატრიცა გადაუგვარებელია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ, A მატრიცა გადაგვარებულია. მაშინ $\det A = |A| = 0$. ამ შემთხვევაში

$$Ax = 0, \ \text{ანუ} \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \quad (i = \overline{1,n})$$

ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას ექნება არანულოვანი ამონახსნიც $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ისეთი, რომ იარსებებს მაქსიმალური ელემენტი თვისებით

$$\left|x_k\right| > 0.$$

(თუ ასეთი $k \le n$ მეტია ერთზე, მაშინ ვიღებთ ნებისმიერიდან ერთ-ერთს).

k-ური განტოლებიდან გვაქვს:

$$\left|a_{kk} x_k\right| = \left|a_{kk}\right|\left|x_k\right| = \left|-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j\right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \left|a_{kj}\right|\left|x_j\right| \le \left|x_k\right| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \left|a_{kj}\right|.$$

$\left|x_k\right|$-ზე შეკვეცით გვაქვს

$$\left|a_{kk}\right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \left|a_{kj}\right|,$$

რაც $H_i > 0$ პირობას ეწინააღმდეგება. ამიტომ ადამარის თეორემა დამტკიცებულია.

პირობები $H_i > 0$ ნიშნავს, რომ დიაგონალური ელემენტის მოდული $\left|a_{ii}\right|$ აღემატება (მკაცრად) i-ური სტრიქონის ყველა დანარჩენი ელემენტების მოდულების ჯამს. ასეთი ელემენტი იწოდება დომინანტად (თავისი შესაბამისი

სტრიქონისთვის), ხოლო ადამარის კრიტერიუმი ითხოვს, რომ ყველა დია-გონალური ელემენტი იყოს დომინანტი.

სამართლიანია აგრეთვე შემდეგი (შედარებით ზოგადი) თეორემა.

თეორემა. *თუ A მატრიცა არ არის დაშლადი და სრულდება ადამარის კრიტერიუმი სუსტი აზრით,*

$$H_i = |a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \geq 0\,, \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

ხოლო მკაცრი უტოლობა სრულდება რომელიმე ერთი მაინც ფიქსირებული ინდექსისთვის, მაშინ A მატრიცი გადაუგვარებელია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ, როგორც ზემოთ, რომ A გადაგვარებულია. მაშინ x_1, x_2, …, x_n რიცხვებიდან ავარჩიოთ მაქსიმალური ელემენტი $|x_k|$, რომელიც ყველა დანარჩენს აღემატება. შესაძლებელია სამი შემთხვევა: ასეთი ელემენტი ერთია, ასეთი ელემენტების რაოდენობა $p < n$ რიცხვია და $p = n$. განვიხილოთ პირველი 2 შემთხვევა: $1 \leq p < n$. გადავნომროთ მაქ-სიმალურმოდულიანი ელემენტები ისეთნაირად, რომ ისინი შეადგენდნენ პირველ p კომპონენტს:

$$|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_p| > |x_j| \quad (j = p+1,\ldots,n)$$

(ეს პროცესი ხორციელდება მარტივად A მატრიცის სტრიქონებისა და სვე-ტების გადანაცვლებით, გამოწვეული x_j სიდიდეების ახალი გადანომვრით!). ამის გამო გვაქვს:

$$a_{kk}x_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq k}}^{n} a_{kj}x_j \quad (k = 1,2,\ldots,p)\,,$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ:

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| \qquad (k = 1,2,\ldots,p)\,,$$

თუ ამ პირობას შევადარებთ პირობას, რომ $H_i \geq 0$ $\forall\, i$-სთვის, მაშინ გვექ-ნება:

$$|a_{kk}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\,, \quad (k = 1,2,\ldots,p)$$

$$|a_{kk}||x_k| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} |a_{kj}||x_k| + \sum_{j=p+1}^{n} |a_{kj}||x_j|\,, \quad (k = 1,2,\ldots,p)$$

დავუშვათ, $\sum_{j=p+1}^{n}\left|a_{kj}\right| \neq 0$, მაშინ უკანასკნელი უტოლობა გვაძლევს:

$$\left|a_{kk}\right|\left|x_k\right| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\left|a_{kj}\right|\left|x_k\right| + \sum_{j=p+1}^{n}\left|a_{kj}\right|\left|x_j\right| < \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\left|a_{kj}\right|\left|x_k\right| + \sum_{j=p+1}^{n}\left|a_{kj}\right|\left|x_k\right|,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $H_k < 0,$ რაც შეუძლებელია. ამიტომ

$$\sum_{j=p+1}^{n}\left|a_{kj}\right| = 0 \quad (k = p+1,\ldots,n),$$

რაც ნიშნავს, რომ A-ს აქვს სახე:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \Theta \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

Θ აქვს p სტრიქონი, როგორც A_1-ს და $n-p$ სვეტი, როგორც A_4 მატრიცას, რაც ნიშნავს, რომ A დაშლადია.

ამგვარად, როდესაც $1 \leq p < n$, A მატრიცა დაშლადია. ვთქვათ, $p = n$, მაშინ $H_i = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$, ე. ი. ყველა i-სთვის ადამარის შესუსტებული კრიტერიუმი გადადის ტოლობაში, რაც ეწინააღმდეგება პირობას, რომ H_i რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისგან. ამგვარად, თეორემა დამტკიცებულია.

დავუბრუნდეთ (1.8) და (1.16) სისტემებს. მათთვის სრულდება ადამარის კრიტერიუმი (მკაცრი აზრით), რადგან პირობები

$$H_i > 0 \quad \forall i$$

კმაყოფილდება, თუ სასაზღვრო პირობების კოეფიციენტებისათვის (d.1) უტოლობა დაცულია. გავიხსენოთ (1.8) და (1.16) სტრუქტურა. (1.16)-ისთვის

$$a_{ii} = 2, \quad a_{ij-1} + a_{ij+1} = 1 \quad (i = 1,2,\ldots,N).$$

(1.8)-ისთვის

$$a_{ii} = 2, \; a_{ij-1} + a_{ij+1} = 1 \; (i = 1,2,\ldots,N-1).$$

$$a_{00} = 2, \quad a_{NN} = 2.$$

ხოლო დანარჩენი a_{01} და a_{NN-1} უდრის ან 0-ს $(1.18)_2$ და $(1.19)_1$-ის შემთხვევაში, უდრის 1-ს, როდესაც პირობები ემთხვევა $(1.18)_1$-სა და $(1.19)_2$-ს და არის λ_0, μ_N $(2.18)_3$-ის შემთხვევაში და μ_0 და λ_N $(2.19)_3$-ისთვის. (d.1)-ის გამო აქაც შესრულებულია დიაგონალური ელემენტის ჭარბობის (მკაცრი აზრით) კრიტერიუმები.

(1.8) და (1.16) სისტემები წარმოადგენს განტოლებებს M_j და m_j (მომენ-ტებისა და დახრილობების) მიმართ. დავსვათ ასეთი საკითხი: ყოველთვის არ-სებობს თუ არა სპლაინი, რომ m_j და M_j განსაზღვრული იყოს ნების-მიერად?! ზემოთ მოცემული კრიტერიუმები გვაძლევდა პასუხს, რომ M_j და m_j რიცხვები მოიცემა ცალსახად მარჯვენა მხარეებით. დავსვათ შებრუ-ნებული ამოცანა: რამდენად თავისუფალია M და m მრავალსახეობები?!

განვიხილოთ პერიოდული შემთხვევა, როდესაც გვაქვს (1.5) განტოლებები (პერიოდული შემთხვევა):

$$\frac{h_i}{6}M_{j-1}+\frac{h_j+h_{j+1}}{3}M_j+\frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}=\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}\quad (j=1,2,\ldots,N). \qquad (1.5)$$

ამასთან გავიხსენოთ, რომ $M_N=M_0$, $M_{N+1}=M_1$, $y_N=y_0$, $y_{N+1}=y_1$, $h_{N+1}=h_1$.

(1.5)-დან, როდესაც $j=1$, N მარჯვენა მხარეებს აქვთ სახე:

$$d_1=\frac{y_2-y_1}{h_2}-\frac{y_1-y_N}{h_1},\quad d_N=\frac{y_1-y_N}{h_1}-\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}.$$

ამის გათვალისწინებით, (1.5) ტოლობების მარჯვენა მხარეთა ჯამი უდრის 0-ს, რადგან, თუ $j\neq 1$ N-ისგან, $\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}$ შედის j და $j-1$ განტოლებაში სხვადასხვა ნიშნით, ხოლო შესაკრები $\frac{y_1-y_N}{h_1}$ შედის პირველ და N-ურ განტოლებაში ასევე სხვადასხვა ნიშნით, ამიტომ მარცხენა მხარეთა შეკრება მოგვცემს:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(h_j+h_{j+1}\right)M_j=0. \qquad (c.1)$$

მართლაც, გამოვთვალოთ კოეფიციენტები M_j-თან:

$M_1:\frac{h_1+h_2}{3}$ (პირველი განტოლებიდან) $+\frac{h_2}{6}$ (მეორე განტოლებიდან) $+\frac{h_1}{6}$ (n-ურიდან) $=\frac{h_1+h_2}{2}$.

$$M_N:\frac{h_1}{6}(\mathrm{I})+\frac{h_N+h_1}{3}(N\text{-დან})+\frac{h_N}{6}(N-1\text{-დან})=\frac{h_N+h_{N+1}}{2}\quad (h_1=h_{N+1})$$

$$M_j:\frac{h_1}{6}(j-1\text{-დან})+\frac{h_j+h_{j+1}}{3}(j\text{-ურიდან})+\frac{h_{j+1}}{6}(j+1\text{-დან})=\frac{h_j+h_{j+1}}{2}.$$

ამგვარად, (c.1) პირობები წარმოადგენს აუცილებელ პირობებს, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს (1.5) სისტემის ამონახსნი.

აღვნიშნოთ (1.5)-ის მარჯვენა მხარეები φ_j-თი. მაშინ (c.1)-ის თანახმად

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j = 0 .$$

დავუშვათ,

$$\frac{y_1 - y_N}{h_1} = c ,$$

აშკარაა:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{j-1} = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{y_1 - y_N}{h_1} ,$$

ანუ

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} = c + \varphi_1 + \cdots + \varphi_{j-1} \quad (j = 2,3,\ldots,N) , \tag{c.2}$$

ამავე დროს

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j = 0 \Rightarrow c = c + \sum_{j=1}^{N} \varphi_j \Rightarrow \frac{y_1 - y_N}{h_1} = c .$$

(c.2)-დან, $y_1 = y_N + h_1 c$ ტოლობის დამატებით, გვაქვს:

$$\begin{aligned} & y_1 = y_N + h_1 c \\ & y_2 = y_1 + h_2(c + \varphi_1) \\ & y_3 = y_2 + h_3(c + \varphi_1 + \varphi_2), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & y_N = y_{N-1} + h_N(c + \varphi_1 + \ldots + \varphi_{N-1}) \end{aligned} \tag{c.3}$$

(c.3) სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია (განტოლებათა შეკრება გვაძლევს ნულოვან სტრიქონს). ამიტომ კრონეკერ-კაპელის თეორემის თანახმად მარჯვენა მხარეთა ჯამი უნდა იყოს ნულის ტოლი, რომ გაფართოებული მატრიცის რანგი დაემთხვეს სისტემის მატრიცის რანგს. ამიტომ

$$(h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_N)c = -[h_2\varphi_1 + h_3(\varphi_1 + \varphi_2) + \cdots + h_N(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{N-1})],$$

$$(b-a)c = -\sum_{j=2}^{N} h_j(\varphi_1 + \cdots + \varphi_{j-1}) \Rightarrow c = \frac{1}{a-b}\sum_{j=2}^{N} h_j(\varphi_1 + \ldots + \varphi_{j-1}) .$$

ამგვარად, c გამოისახება φ_j-თი, ანუ M_j-ის საშუალებით. თვით სისტემა (c.3)-დან, რადგან იგი თავსებადი სისტემაა, შესაძლებელია, ავიღოთ ნებისმიერი $N-1$ განტოლება (მაგალითად, 1, …, $N-1$). მაშინ ნებისმიერ პარამეტრად გამოდგება y_N.

არაპერიოდულ შემთხვევაში M_j რიცხვებს, ცხადია, შეზღუდვა არ ედებათ.

ვნახოთ, როგორი სურათია, როდესაც ვიხილავთ პერიოდულ სპლაინს დახრილობებით.

ამისთვის განვიხილოთ (1.14) ტოლობები:

$$\frac{1}{h_j}m_{j-1}+2\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)m_j+\frac{1}{h_{j+1}}m_{j+1}=3\frac{y_j-y_{j-1}}{h_1^2}+3\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}^2}\quad (j=1,2,\dots,N).$$

ამასთან გავიხსენოთ $m_0=m_N$, $y_0=y_N$.

როგორც მომენტების შემთხვევაში, შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\frac{y_1-y_N}{h_1^2}=c \quad . \tag{a .1}$$

(1.14)-ის მარჯვენა მხარეები აღვნიშნოთ $3\psi_j$-თი. ცხადია,

$$\psi_1=\frac{y_1-y_N}{h_1^2}+\frac{y_2-y_1}{h_1^2}\Rightarrow\frac{y_2-y_1}{h_1^2}=\psi_1-c.$$

ასევე

$$\psi_2=\frac{y_2-y_1}{h_2^2}+\frac{y_3-y_2}{h_3^2}\Rightarrow\frac{y_3-y_2}{h_3^2}=\psi_2-\frac{y_2-y_1}{h_2^2}=\psi_2-\psi_1+c \tag{a .2}$$

ინდუქციით მტკიცდება, რომ

$$\psi_{N-1}=\frac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}^2}+\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N^2}\Rightarrow\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N^2}=\psi_{N-1}-\frac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}^2}\Rightarrow$$

$$\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N^2}=\psi_{N-1}-\psi_{N-2}+\cdots+(-1)^{N-2}\psi_1+(-1)^{N-1}c\,.$$

$$\frac{y_1-y_N}{h_1^2}=\psi_N-\psi_{N-1}+\cdots+(-1)^{N-1}\psi_1+(-1)^N c\,.$$

მაგრამ (a .1)-ის ძალით:

$$\psi_N-\psi_{N-1}+\cdots(-1)^{N-1}\psi_1+(-1)^N c=c \tag{a .3}$$

გამოვსახოთ ყოველი ψ_j m-ების საშუალებით (1.14)-დან და შევიტანოთ (a .3)- ში.

m_1: კოეფიციენტი (ψ_1-დან + ψ_2-დან + ψ_N-დან)

$$\frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{h_1}+\frac{2}{h_2}\right)(-1)^{N-1}+\frac{1}{h_2}(-1)^{N-2}+\frac{1}{h_1}\right]=\frac{1}{3}\left[(-1)^{N-1}\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right)+\frac{1}{h_1}(-1)^{N-1}+\frac{1}{h_1}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[(-1)^{N-1}\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right)+\frac{1}{h_1}(1-(-1)^N)\right].$$

m_N -თან: $\frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{h_N}+\frac{2}{h_1}\right)-\frac{1}{h_N}+(-1)^{N-1}+\frac{1}{h_1}\right]=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{h_N}+\frac{1}{h_1}\right)+\frac{1}{h_1}(1-(-1)^N)\right].$

$m_j:\frac{1}{3}\left[(-1)^{N-j}\left(\frac{2}{h_j}+\frac{2}{h_{j+1}}\right)+(-1)^{N-j-1}\cdot\frac{1}{h_j}+(-1)^{N-j+1}\cdot\frac{1}{h_{j+1}}\right]=\frac{1}{3}\left[(-1)^{N-j}\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)\right].$

საბოლოოდ, (a .3) მიიღებს სახეს (m-ის ტერმინებში):

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{N}(-1)^j\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)m_j-(1-(-1)^N)\frac{m_1+m_N}{h_1}\right)=c\left[(-1)^N-1\right].$$

განვიხილოთ (a.1)+(a.2) სისტემა (a.1,2). მისი დეტერმინანტი, თუ უცნობებად ჩავთვლით y_j რიცხვებს, ნულის ტოლია. (a.1,2)-ის თვისებადობისთვის, თავის მხრივ, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$c\left(h_1^2-h_2^2+\cdots+(-1)^{N-1}h_N^2\right)$$
$$=-\left[h_2^2\psi_1+h_3^2(\psi_2-\psi_1)+\cdots+h_N^2\left(\psi_N-\psi_{N-1}+\cdots+(-1)^{N-2}\psi_1\right)\right], \qquad (a.4)$$

შემოვისაზღვროთ შემთხვევით, როდესაც $h_1=h_2=\cdots=h_N=h$ თანაბარი ბადეა. როდესაც $N=2s+1$, მაშინ (a.4) გვაძლევს:

$$c\left(h^2-h^2+h^2+\cdots+(-1)^{2s}h^2\right)=-h^2\left[\psi_1+\psi_2-\psi_1+\psi_3-\psi_2+\psi_1+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\psi_{2s-1}-\psi_{2s-2}+\cdots-\psi_2+\psi_1\right)+\left(\psi_{2s}-\psi_{2s-1}+\cdots+\psi_2-\psi_1\right)\right]$$
$$h^2c=-h^2\left[\psi_1+(\psi_2-\psi_1)+\cdots+\left(\psi_{2s-2}-\psi_{2s-3}+\cdots+\psi_2-\psi_1\right)+\psi_{2s}\right]$$
$$=-h^2\left[\psi_2+\psi_4+\cdots+\psi_{2s}\right].$$
$$c=-\psi_2-\psi_4-\cdots-\psi_{2s}. \qquad (a.5)$$

(a.3)-დან გვაქვს:

$$2c=\psi_{2s+1}-\psi_{2s}+\cdots-\psi_2+\psi_1 \ \Rightarrow \qquad (a.6)$$

(a.5)-ის გათვალისწინებით

$$\psi_1+\psi_3+\cdots+\psi_{2s+1}=2c-c=c. \qquad (a.7)$$

$$\psi_2+\psi_4+\cdots+\psi_{2s}=-c,\ \Rightarrow\ \sum_{j=1}^{2s}\psi_1=0. \qquad (a.8)$$

ვთქვათ, $N=2s$, მაშინ (a.3)-დან გვექნება:

$$\psi_{2s}-\psi_{2s-1}+\cdots+\psi_3-\psi_2+\psi_1=c-c=0\,,$$

ანუ

$$\psi_1+\psi_3+\cdots+\psi_{2s-1}=\psi_2+\psi_4+\cdots+\psi_{2s}\,. \qquad (a.9)$$

$(a.4)$-დან

$$c_1\left(h^2-h^2+h^2-\cdots+h^2(-1)^{2s-1}\right)$$

$$=-h^2\left[\left(\psi_1+(\psi_2-\psi_1\right)+\left(\psi_3-\psi_2+\psi_1\right)+\cdots+\left(\psi_{2s-1}-\psi_{2s-2}+\cdots-\psi_2+\psi_1\right)\right]$$

$$=-h^2\left(\psi_1+\psi_3+\cdots+\psi_{2s-1}\right)=0\,,$$

ანუ $\psi_1+\psi_3+\cdots+\psi_{2s-1}=0$. მაგრამ (a .9)-ის ძალით, $\psi_2+\psi_4+\cdots+\psi_{2s}=0$, ან N-ის ტერმინებში:

$$3\left(\psi_1+\psi_3+\cdots+\psi_{N-1}\right)=3\left(\psi_2+\psi_4+\cdots+\psi_N\right)=0\,.$$

m-ის ტერმინებში:

$$3\left(\psi_1+\psi_3+\cdots+\psi_{N-1}\right)=\frac{4}{h}\left(m_1+m_3+\cdots+m_{N-1}\right)+\frac{2}{h}\left(m_2+m_4+\cdots+m_N\right)=0\,.$$

ასევე:

$$3\left(\psi_2+\psi_4+\cdots+\psi_N\right)=\frac{4}{h}\left(m_2+m_4+\cdots+m_N\right)+\frac{2}{h}\left(m_1+m_3+\cdots+m_{N-1}\right)=0\,.$$

თუ აღვნიშნავთ

$$m_1+m_3+\cdots+m_{N-1}=x\,,\ \ m_2+m_4+\cdots+m_N=y\,,$$

ბოლო ორი სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{array}{l}2x=y=0,\\ x+2y=0,\end{array}\quad\Rightarrow\quad x=y=0\,,$$

ანუ

$$m_1+m_2+\cdots+m_{N-1}=0\,,\ \ m_2+m_3+\cdots+m_N=0$$

არის დამატებითი დამოკიდებულება, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს პერიოდული სპლაინის დახრილობები.

განვიხილოთ ექსტრემალური ამოცანა, საიდანაც გამოჩნდება იმ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის როლი, რომელსაც აკმაყოფილებს $M=\left(M_0,M_1,\ldots,M_N\right)$ მომენტები არაპერიოდულ შემთხვევაში

$$2M_0+M_1=\frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-y_0'\right), \qquad (a.1)$$

$$M_{N-1}+2M_N=\frac{6}{h_N}\left(y_N'-\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right)$$

სასაზღვრო პირობით, ან $M=(M_1,M_2,\ldots,M_N)^T \Rightarrow M_0=M_N$ პერიოდულ შემთხვევაში.

დავუშვათ, მოცემულია Δ დაყოფა, $f_j=f(x_j)$. აღვნიშნოთ $S_\Delta(f,x)$ პერიოდული ან არაპერიოდული ((a.1) სასაზღვრო პირობებით) მაინტერპოლებელი სპლაინი. ამგვარად

$$S_\Delta\left(f;x_j\right)=S_\Delta\left(f_j;x_j\right)=f_j.$$

დავუშვათ, $S_\Delta(x)$ ნებისმიერი კუბური სპლაინია. განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$E=\int_a^b [f''(x)-S''_\Delta(x)]^2\,dx. \tag{a.2}$$

E ასახავს $f''(x)$ ფუნქციის მიახლოების ზომას $S''_\Delta(x)$-ით $[a,b]$-ზე. დავუშვათ, $M_j=S''_\Delta(x_j)$. M_j რიცხვები წარმოადგენს ნებისმიერ რიცხვებს $-\infty<M_j<+\infty \quad \forall j$. ამგვარად, $S_\Delta(x)$ განისაზღვრება, როგორც კლასი ფუნქციებისა.

გავითვალისწინოთ, რომ $M_j=S''_\Delta(x)$ და გადავწეროთ (a.2) ჩვენთვის მოსახერხებელი ფორმით. ამგვარად ($x_0=a$, $x_N=b$):

$$E=\int_a^b [f''(x)]^2\,dx-2\int_a^b f''(x)S''_\Delta dx+\int_a^b [S''_\Delta(x)]^2\,dx$$

$$=\int_a^b [f''(x)]^2\,dx-2\sum_{j=0}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f''(x)S''_n(x)dx+\sum_{j=0}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}[S''_n(x)]^2\,dx$$

$$=\int_a^b [f''(x)]^2dx-2\sum_{j=0}^{N-1}\left\{[f'(x)S''_\Delta(x)]_{x=x_j}^{x=x_{j+1}}-\int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)S'''_\Delta(x)dx\right\}+\int_a^b [S''_\Delta(x)]^2dx$$

$$=\int_a^b [f''(x)]^2dx-2\sum_{j=0}^{N-1}(f'_{j+1}M_{j+1}-f'_jM_j)+2\sum_{j=0}^{N-1}(f_{j+1}-f_j)\frac{M_{j+1}-M_j}{h_{j+1}}+\sum_{j=0}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}[S''_\Delta(x)]^2dx$$

აღვნიშნოთ სიმარტივისათვის $x_j=\alpha$, $x_{j+1}=\beta$, $\beta-\alpha=h$ და გამოვთვალოთ

$$\int_\alpha^\beta [S''_\Delta(x)]^2\,dx=\int_\alpha^\beta\left(M_j\frac{\beta-x}{h}+M_{j+1}\frac{x-\alpha}{h}\right)^2dx$$

$$=M_j^2\frac{1}{h^2}\left[-\frac{(\beta-x)^3}{3}\right]_\alpha^\beta+2M_jM_{j+1}\frac{1}{h^2}\int_\alpha^\beta(\beta-x)(x-\alpha)dx+M_{j+1}^2\left.\frac{(x-\alpha)^3}{3h^2}\right|_\alpha^\beta$$

$$=\frac{h}{3}M_j^2+\frac{h}{3}M_jM_{j+1}+\frac{h}{3}M_{j+1}^2,$$

რადგან

$$\int_\alpha^\beta (\beta - x)(x-\alpha)ds = (\beta - x)\frac{(x-\alpha)^2}{2}\Bigg|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \frac{(x-\alpha)^2}{2}dx = \frac{h^3}{6}.$$

საბოლოოდ

$$E = \int_a^b [f''(x)]^2 dx - 2\sum_{j=0}^{N-1}\left(f'_{j+1}M_{j+1} - f'_j M_j\right) + 2\sum_{j=0}^{N-1}\left(f_{j+1} - f_j\right)\frac{M_{j+1}-M_j}{h_{j+1}}$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}\frac{h_{j+1}}{3}\left(M_j^2 + M_jM_{j+1} + M_{j+1}^2\right) \qquad (1)$$

(1)-ში იგულისხმება, რომ $f'_0 = f'_N$, $M_0 = M_N$, $f_0 = f_N$, თუ f და S_Δ ფუნქციები პერიოდულია პერიოდით $(b-a)$.

ჩვენი მიზანია (1) ფუნქციონალისთვის სტაციონარული წერტილის განსაზღვრა. ამისთვის აუცილებელი პირობაა

$$\frac{\partial E}{\partial M_j} = 0 \quad (j = 0,1,2,\ldots,N)$$

არაპერიოდულ შემთხვევაში და

$$\frac{\partial E}{\partial M_j} = 0 \quad (j = 1,2,\ldots,N),\ M_0 = M_N$$

პერიოდული შემთხვევისთვის.

არაპერიოდულ შემთხვევაში (1)-დან გამომდინარეობს:

$$\frac{\partial E}{\partial M_0} = \frac{h_1}{3}\left\{2M_0 + M_1 - \frac{6}{h_1}\left[\left(f_1 - f_0\right) - f'_0\right]\right\} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial M_k} = 2\left\{\frac{h_{k+1}}{3}M_k + \frac{h_{k+1}}{6}M_{k+1} + \frac{h_k}{6}M_k + \frac{h_k}{6}M_{k-1}\right\} \qquad (2)$$

$$-2\left(\frac{f_{k+1}-f_k}{h_{k+1}} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k}\right) = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,N-1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial M_N} = \frac{h_N}{3}\left\{M_{N-1} + 2M_N - \frac{6}{h_N}\left(f'_N - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N}\right)\right\} = 0.$$

პერიოდულ შემთხვევაში (რადგან $f'_N = f'_0$, $M_N = M_0$)

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left(f'_{j+1}M_{j+1} - f'_jM_j\right) = 0,$$

ამიტომ

$$\frac{\partial E}{\partial M_k} = 2\left\{\frac{h_k}{6}M_{k-1} + \frac{h_k + h_{k+1}}{3}M_k + \frac{h_{k+1}}{6}M_{k+1} - \left(\frac{f_{k+1}-f_k}{h_{k+1}} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k}\right)\right\} = 0 \qquad (2_1)$$

$(k = 1,2,\ldots,N)$.

ამგვარად, პერიოდულ შემთხვევაში სტაციონარული წერტილი არსებობს, თუ შესრულებულია (2_1), და – არაპერიოდულში, თუ სრულდება (2) ($(a.1)$) სა-საზღვრო პირობებით. მაგრამ ეს განტოლებათა სისტემები იგივეა, რაც ადრე განხილული (1.8) (1.18*i*) პირობებით და (1.9) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები შესაბამისად არაპერიოდული და პერიოდული შემ-თხვევებისთვის, რომელთა ერთადერთი ამონახსნები იყო მაინერპოლებელი სპლაინები.

ვაჩვენოთ, რომ ეს წერტილი მინიმუმის წერტილია. აღვნიშნოთ $\left(\overline{M}_0,\overline{M}_1,\dots,\overline{M}_N\right)^T$ და $\left(\overline{M}_1,\overline{M}_2,\dots,\overline{M}_N\right)^T$ (2) სისტემის ამონახსნები არაპე-რიოდული და პერიოდული შემთხვევებისთვის. ამასთან $S_\Delta\left(f;x_j\right)=f_j$, რადგან (2) სრულდება $\overline{M}_j$ სისტემისთვის, ჩავსვათ მასში $M_j=\overline{M}_j$ და მიღებული სიდიდეები გავამრავლოთ $-M_0$, $-M_1$, …, $-M_N$ შესაბამისად. ასეთნაირი ტოლობები (ფაქტიურად ნულები) მივუმატოთ (1) ტოლობას. მივიღებთ:

$$E=\int_a^b[f''(x)]^2dx-2\sum_{j=1}^{N}(f_j'M_j-f_{j-1}'M_{j-1})+2\sum_{j=1}^{N}(f_j-f_{j-1})\frac{M_j-M_{j-1}}{h_j}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{h_j}{3}\left(M_{j-1}^2+M_{j-1}M_j+M_j^2\right)-\frac{h_1}{3}\left[2\overline{M}_0M_0+\overline{M}_1M_0-\frac{6}{h_1}\left(\frac{f_1-f_0}{h_1}-f_0'\right)M_0\right]$$

$$-\frac{h_N}{3}\left[\overline{M_{N-1}}\ M_N+2\overline{M_N}\ M_N-\frac{6}{h_N}\left(f_N'-\frac{f_N-f_{N-1}}{h_N}\right)M_N\right]$$

$$-2\sum_{j=1}^{N-1}\left[\left(\frac{h_j}{6}\overline{M}_{j-1}+\frac{h_j+h_{j+1}}{3}\overline{M}_j+\frac{h_{j+1}}{6}\overline{M}_{j+1}\right)M_j-\left(\frac{f_{j+1}-f_j}{h_{j+1}}-\frac{f_j-f_{j-1}}{h_j}\right)M_j\right]$$

$$=\int_a^b[f''(x)]^2dx$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{h_j}{3}\left[M_{j-1}^2+M_{j-1}M_j+M_j^2-2M_{j-1}\bar{M}_{j-1}-M_{j-1}\bar{M}_j-M_j\bar{M}_{j-1}-2M_j\bar{M}_j\right].$$

მართლაც, გამოვთვალოთ კოეფიციენტები f_j, f_0' და f_N' სიდიდეებთან

$$f_0':\left[+2M_0-\frac{h_1}{3}\frac{6}{h_1}M_0\right]=0.\quad f_N':\left[-2M_N-\frac{h_N}{3}\frac{6}{h_N}M_N\right]=0.$$

f_j' სიდიდეები არ შევა, რადგან $\sum_{j=0}^{N}\left(f_j'M_j-f_{j-1}'M_{j-1}\right)=f_N'M_N-f_0'M_0$

$$\frac{f_1 - f_0}{h_1}: \qquad 2(M_1 - M_0) + 2M_0 - 2M_1 = 0\,.$$

$$\frac{f_N - f_{N-1}}{h_N}: \qquad 2(M_N - M_{N-1}) - 2M_N + 2M_{N-1} = 0\,.$$

$$\frac{f_{k+1} - f_k}{h_{k+1}}: \qquad 2M_k - 2M_{k+1} + 2(M_{k+1} - M_k) = 0\,.$$

ამგვარად

$$E = \int_a^b [f''(x)]^2 dx + \sum_{j=0}^{N} \frac{h_j}{3} \Big[M_{j-1}^2 + M_{j-1}M_j + M_j^2 - 2M_{j-1}\overline{M}_{j-1}$$

$$- M_{j-1}\overline{M}_j - M_j\overline{M}_{j-1} - 2M_j\overline{M}_j \Big]$$

$$= \int_a^b [f''(x)]^2 dx + \sum_{j=0}^{N} \frac{h_j}{3} \Big[\left(M_{j-1} - \overline{M}_{j-1}\right)^2 + \left(M_j - \overline{M}_j\right)^2$$

$$+ M_{j-1}M_j - M_{j-1}\overline{M}_j - M_j\overline{M}_{j-1} - \overline{M}_{j-1}^2 - \overline{M}_j^2 \Big]$$

$$= \int_a^b [f''(x)]^2 dx + \sum_{j=0}^{N} \frac{h_j}{3} \Big[\left(M_{j-1} - \overline{M}_{j-1}\right)^2 + \left(M_j - \overline{M}_j\right)^2$$

$$+ \left(M_{j-1} - \overline{M}_{j-1}\right)\left(M_j - \overline{M}_j\right) - \overline{M}_{j-1}^2 - \overline{M}_{j-1}\overline{M}_j - \overline{M}_j^2 \Big]$$

$$= \int_a^b [f''(x)]^2 dx + \sum_{j=0}^{N} \frac{h_j}{3} \Big[\left(M_{j-1} - \overline{M}_{j-1}\right)^2 + \left(M_{j-1} - \overline{M}_{j-1}\right)\left(M_j - \overline{M}_j\right)$$

$$+ \left(M_j - \overline{M}_j\right)^2 \Big] - \sum_{j=1}^{N} \frac{h_j}{3} \left(\overline{M}_{j-1}^2 + \overline{M}_{j-1}\overline{M}_j + \overline{M}_j^2 \right).$$

პირველი და მესამე შესაკრები M_j სიდიდეებზე არაა დამოკიდებული; რაც შეეხება მეორე შესაკრებს, იგი არაუარყოფითია, რადგან, თუ აღვნიშნავთ $a = M_{j-1} - \overline{M}_{j-1}$, $b = M_j - \overline{M}_j$, ცხადია, რომ

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0\,.$$

ამიტომ E ფუნქციონალი მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, თუ $M_j = \overline{M}_j$, ანუ $S''_\Delta(x) = S''_\Delta(f;x)$, ე. ი., თუ $S_\Delta(x)$ მაინტერპოლებელი სპლაინია.

3.3. კრებადობა

ჩვენს მიზანს შეადგენს, შევისწავლოთ სპლაინ-ფუნქციებით კრებადობის საკითხები. კრებადობის საკითხები უკავშირდება M და m სიდიდეებისთვის აგებულ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი მატრიცების შესწავლას და მათთვის ზოგიერთი თვისების დადგენას.

დავუშვათ, B n რიგის კვადრატული მატრიცაა და $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ ელემენტის ნორმა შემდეგნაირად განვსაზღვროთ:

$$\|x\| = \max|x_i|.$$

ვიპოვოთ ამ ნორმის B მატრიცის ინდუცირებული ნორმა. განვიხილოთ წრფივი გარდაქმნა, განსაზღვრული B მატრიცით:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \quad (1 \le i \le n).$$

აქედან ვისარგებლოთ ოპერატორის ნორმის განმარტებით:

$$\|y\| = \max_i |y_i| = \max_i \left|\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j\right| \le \|x\| \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$\|B\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \sup_{x\ne 0} \frac{\|y\|}{\|x\|} \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|.$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ უტოლობაში შესაძლებელია ტოლობაც, ე. ი. უტოლობა გაუმჯობესებადია. მართლაც, დავუშვათ, რომ $\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$ მაქსიმალურ მნიშვნელობას იღებს, როდესაც $i = i_0$.

განვიხილოთ

$$x_j = \begin{cases} 1, & b_{i_0 j} \ge 0 \\ -1 & b_{i_0 j} < 0, \end{cases}$$

მაშინ

$$\|y\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |b_{i_0 j}| = \sum_{j=1}^{n} b_{i_0 j} x_j = \|x\| \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$$

$$\|B\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|.$$

ამგვარად, თუ A აღნიშნავს (1.8) ან (1.9) სისტემების შესაბამის მატრიცას, ამასთან, თუ $|\lambda_0|$ და $|\mu_N|$ ნაკლებია 2-ზე, მაშინ არაპერიოდულ შემთხვევებში გვაქვს

$$\left\|A^{-1}\right\| \le \max\left[(2-\lambda_0)^{-1}, (2-\mu_N)^{-1}, 1\right], \tag{3.1}$$

ხოლო პერიოდულ შემთხვევაში

$$\left\|A^{-1}\right\| \le 1. \tag{3.2}$$

დახრილობებისთვის განსაზღვრული სისტემებისთვის, თუ შესაბამისი მატრიცაა B, მაშინ $|\mu_0| < 2$ და $|\lambda_N| < 2$

$$\left\|B^{-1}\right\| \le \max\left[(2-\mu_0)^{-1}, (2-\lambda_N)^{-1}, 1\right] \tag{3.3}$$

(არაპერიოდულ შემთხვევაში),

$$\left\|B^{-1}\right\| \le 1$$

(პერიოდული შემთხვევისთვის).

კრებადობის საკითხი ან ცდომილების შეფასების პროცესი შეისწავლება, ჩვეულებრივ, როდესაც სათანადო პარამეტრი ქმნის პროცესს. ასეთნაირად ავირჩიოთ ბიჯი, რომლის შესაბამისი დაყოფათა რიცხვი ქმნის მიმდევრობას. ამგვარად, განვიხილოთ ბადეთა მიმდევრობა:

$$\Delta_k : a = x_{k0} < x_{k1} < \ldots < x_{kN_k} = b. \tag{3.4}$$

დავუშვათ

$$h_{kj} = x_{kj} - x_{kj-1}, \tag{3.5}$$

განვსაზღვროთ Δ_k ბადის ნორმა:

$$\|\Delta_k\| = \max_{1 \le j \le N_k}\left(h_{kj}\right) \tag{3.6}$$

(ზემოთ მოტანილ აღნიშვნებში k თამაშობს მიმდევრობის ნომრის როლს, ხოლო N_k – წერტილთა რაოდენობას ყოველი k-სთვის).

განიხილება $\{\Delta_k\}$ ბადეთა ისეთი მიმდევრობები, რომელთათვის $\|\Delta_k\| \to 0$, როდესაც $k \to \infty$. ასევე ვიგულისხმოთ, რომ ბადისათვის შესრულებულია ე.წ. არალაკუნარობის პირობა

$$\Delta_k = \max_{1 \le j \le N_k} \frac{\|\Delta_k\|}{h_{kj}} \le \beta < \infty. \tag{3.7}$$

(დაყოფა ხორციელდება თანაბრად $[a,b]$-სთვის $h_{kj} \to 0 \quad \forall k > j, \quad k \to \infty$).

სამართლიანია შემდეგი თეორემა კრებადობის შესახებ.

თეორემა 3.1.

დავუშვათ, რომ $[a,b]$ შუალედში მოცემულია უწყვეტი პერიოდული ფუნქცია $f(x)$ და ბადეთა Δ_k მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.7) პირობას და

$$\lim_{k \to \infty} \|\Delta_k\| = 0.$$

თუ $S_{\Delta_k}(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის მაინტერპოლებელი პერიოდული სპლაინი Δ_k ბადის კვანძებში, მაშინ

$$f(x) - S_{\Delta k}(x) = o\left(\|1\|\right), \tag{3.8}$$

თანაბრად x*-ის მიმართ* $[a,b]$*-ზე.*

თუ $f(x)$ *აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას* $\alpha(0 < \alpha \le 1)$ *რიგით, მაშინ*

$$f(x) - S_{\Delta k}(x) = O\left(\|A_k\|^{a}\right) \tag{3.9}$$

თანაბრად x*-ის მიმართ* $[a,b]$*-ში.*

არაპერიოდულ შემთხვევაში, თუ $S_{\Delta_k}(x)$ *მაინტერპოლებელი სპლაინი აკმაყოფილებს (1.18iii)-ტიპის სასაზღვრო პირობებსა და*

$$\sup\max(|\lambda_{k0}|, |\mu_{kNk}|) < 2; \qquad \|\Delta_k\|^2 (|d_{k0}| + |d_{kNk}|) \to 0$$

შეზღუდვებს, როდესაც $k \to \infty$, *მაშინ სამართლიანია* (3.8).

ამის გარდა, თუ $f(x)$ *ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას* α *რიგით,* $(0 < \alpha \le 1)$ *მაშინ სამართლიანია* (3.9), *თუ მიმდევრობა*

$$\|\Delta_k\|^{2-\alpha}\left(|d_{k0}| + |d_{kNk}|\right)$$

შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. თუ (1.2) ფორმულის ორივე მხარეს გამოვაკლებთ $f(x)$-ს, მაშინ $x_{j-1} < x < x_j \quad (j = 1,2,\dots,N)$-ისთვის სამართლიანია შემდეგი:

$$S_\Delta(x) - f(x) = M_{j-1}\frac{(x_j - x)\left[(x_j - x)^2 - h_j^2\right]}{6h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})\left[(x - x_{j-1})^2 - h_j^2\right]}{6h_j}$$

$$+\left(\frac{f_j + f_{j-1}}{2} - f(x)\right) - \left(f_j - f_{j-1}\right)\frac{x_j + x_{j-1} - 2x}{2h_j}, \tag{3.10}$$

სადაც ჩანაწერის შემოკლებისა და სიმარტივისთვის გამოტოვებულია k. მაგალითად, $x_{kj} - x$ ნაცვლად არის $x_j - x$ და ა. შ.

აღვნიშნოთ A_{ij}^{-1}-ით A^{-1} მატრიცის ელემენტები (ვიხილავთ (1.8) სისტემას). მაშინ

$$M_j = 6\sum_{i=1}^{N-1} A_{ji}^{-1}\frac{(f_{i+1} - f_i)/h_{i+1} - (f_i - f_{i-1})/h_i}{h_i + h_{i+1}} + A_{j0}^{-1}d_0 + A_{jN}^{-1}d_N. \tag{a.1}$$

დავუშვათ, $\omega(\delta, f)$ აღნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის მოდულს $[a,b]$-ზე:

$$\sup|f(x) - f(t)| = \omega(\delta, f), \quad |x - t| < \delta, \quad x,t \in [a,b].$$

ვაჩვენოთ, რომ (3.10) ტოლობებში M_{j-1} და M_j-თან მდგომი კოეფიციენტები არ აღემატება $\frac{h_j^2}{\sqrt{3^5}}$ -ს.

მართლაც, თუ აღვნიშნავთ

$$u(x)=\frac{1}{6h_j}(x_j-x)\left[(x_j-x)^2-h_j^2\right],$$

ცხადია, $u(x_{j-1})=u(x_j)=0$. რადგან $h_j^2\ge(x_j-x)^2$, ამიტომ $u(x)\le 0$, $x_{j-1}\le x\le x_j$.

გამოვთვალოთ

$$u'(x)=\frac{1}{6h_j}\left[h_j^2-(x_j-x)^2+(x_j-x)\cdot 2(x_j-x)(-1)\right]=\frac{1}{6h_j}\left[h_j^2-3(x_j-x)^2\right],$$

$$u'(x)=0\Rightarrow 3(x_j-x)^2=h_j^2.$$

$x=x_j-\frac{1}{\sqrt{3}}h_j$ მინიმუმის წერტილია

$$u\left(x_j-\frac{1}{\sqrt{3}}h_j\right)=\frac{1}{6h_j}\frac{1}{\sqrt{3}}h_j\cdot\left(\frac{1}{3}h_j^2-h_j\right)=h_j^2\frac{2}{\sqrt{3}\cdot 3\cdot 6}=\frac{h_j^2}{3^{\frac{5}{2}}}>0.$$

ანალოგიურად ვღებულობთ მეორე კოეფიციენტისათვის (x_{j-1} და x_j იცვლის ადგილებს):

შევაფასოთ $\frac{1}{6}h_j^2\left|d_j\right|$ $\left(j=\overline{1,N}-1\right)$: სიდიდეები:

$$h_j^2\frac{\dfrac{(f_{j+1}-f_j)}{h_{i+1}}-\dfrac{(f_j-f_{j-1})}{h_j}}{h_j+h_{j+1}}\le\omega\left(\|\Delta\|,f\right)\cdot h_j^2\frac{\dfrac{1}{h_{j+1}}+\dfrac{1}{h_j}}{h_j+h_{j+1}}\le\beta^2\omega\left(\|\Delta\|,f\right). \tag{3.11}$$

ამის გამო $(a.1)$-დან გამომდინარეობს (არაპერიოდულ შემთხვევაში):

$$h_j^2\left(\left|M_{j-1}\right|+\left|M_j\right|\right)=h_j^2\left(\left|\sum_{i=1}^{N-1}A_{ji}^{-1}d_i+A_{j0}^{-1}d_0+A_{jN}^{-1}d_N\right|+\left|\sum_{i=1}^{N-1}A_{j-1i}^{-1}d_i+A_{j-10}^{-1}d_0+A_{j-1N}^{-1}d_N\right|\right)$$

$$\le 2\max_i\sum_{i=1}^{N-1}\left|A_{ji}^{-1}\right|\left\{6\beta^2\omega\left(\|\Delta\|,f\right)+\|\Delta\|^2\left(\left|d_0\right|+\left|d_N\right|\right)\right\}$$

$$=2\left\|A^{-1}\right\|\left\{6\beta^2\omega\left(\|\Delta\|,f\right)+\|\Delta\|^2\left(\left|d_0\right|+\left|d_N\right|\right)\right\} \tag{3.12}$$

პერიოდულ შემთხვევაში $(a.1)$-ის მაგივრად გვექნება:

$$M_j = \sum_{i=1}^{N} A_{ji}^{-1} d_i \,, \qquad (a.2)$$

ამიტომ

$$h_j^2 \left(\left| M_{j-1} \right| + \left| M_j \right| \right) \le 2 \left\| A^{-1} \right\| 6\beta^2 \omega\left(\left\| \Delta \right\|, f \right) \le 12\beta^2 \omega\left(\left\| \Delta \right\|, f \right)$$

(3.10), (3.12)-ის ძალით

$$\left| S_\Delta(x) - f(x) \right| = \left| \left(\frac{f_j - f(x)}{2} + \frac{f_{j-1} - f(x)}{2} \right) - \frac{f_j - f_{j-1}}{2h_j} (x_j + x_{j-1} - 2x) \right.$$

$$\left. + M_{j-1} \frac{\left(x_j - x\right)\left[\left(x_j - x\right)^2 - h_j^2\right]}{6h_j} + M_j \frac{\left(x - x_{j-1}\right)\left[\left(x - x_{j-1}\right)^2 - h_j^2\right]}{6h_j} \right|$$

$$\le \frac{3}{2} \omega\left(\left\| \Delta \right\|, f \right) + \frac{2}{3^{\frac{5}{2}}} \left\| A^{-1} \right\| \left\{ 6\beta^2 \omega\left(\left\| \Delta \right\|, f \right) + \left\| \Delta^2 \right\| \left(\left| d_0 \right| + \left| d_N \right| \right) \right\}$$

(არაპერიოდული შემთხვევა!).

პერიოდულ შემთხვევაში

$$\left| S_\Delta(x) - f(x) \right| \le \frac{3}{2} \omega\left(\left\| \Delta \right\|, f \right) + \frac{12}{3^{5/2}} \beta^2 \omega\left(\left\| \Delta \right\|, f \right) = \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3^{\frac{3}{2}}} \beta^2 \right) \omega\left(\left\| \Delta \right\|, f \right).$$

მაგრამ $\omega\left(\left\| \Delta \right\|, f \right) \to 0$, როდესაც $\left(\left\| \Delta \right\| \right) \to 0$.

ამგვარად (3.8) დამტკიცებულია.

(3.9)-ის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ ლიფშიცის პირობა, ანუ

$$\left| f(x) - f(x') \right| \le K \left| x - x^1 \right|^\alpha,$$

სადაც K-ს ეწოდება ლიფშიცის მუდმივა და α-ს მაჩვენებელი, ანუ რიგი.

ამგვარად, $\left| \omega\left(\left\| \Delta \right\|, f \right) \right| \le K \; \left\| \Delta \right\|^\alpha$, $\left| x - x^1 \right| \le \left\| \Delta \right\|$ პირობის გამოყენებით გვექნება

$$\left| S_\Delta(x) - f(x) \right| \le \left\{ \frac{12}{3^{\frac{5}{2}}} \left\| A^{-1} \right\| 6K\beta^2 + \left\| \Delta \right\|^{2-\alpha} \left(\left| d_0 \right| + \left| d_N \right| \right) + \frac{3}{2} K \right\} \left\| \Delta \right\|^\alpha$$

(არაპერიოდული შემთხვევა),

$$\left| S_\Delta(x) - f(x) \right| \le \left(\frac{12}{3^{\frac{5}{2}}} \left\| A^{-1} \right\| K\beta^2 + \frac{3}{2} K \right) \left\| \Delta \right\|^\alpha$$

თანაბრად $\forall x \in [a,b]$.

ზემოთ შესწავლილ იქნა ცდომილების შეფასების საკითხი, როდესაც $f(x)$-ის მააპროქსიმირებელ აპარატად არჩეული იყო კუბური სპლაინები მომენ-ტებით.
საინტერპოლაციო სპლაინის შემთხვევაში დახრილობებით, სამართლიანია ასეთი თეორემა:

თეორემა 3.2. *დავუშვათ, რომ* $[a,b]$ *მონაკვეთზე მოცემულია* Δ_k *ბადეთა მიმ-დევრობა, ისეთი, რომ* $\|\Delta_k\| \to 0$, *როდესაც* $k \to \infty$ *და* $f(x) \in C^1[a,b]$. *თუ საინტერპოლაციო სპლაინი* S_{Δ_k} *აკმაყოფილებს* (1.19*i*) *სასაზღვრო პირობებს, ანუ* $2m_0 = 2y_0'$ *და* $2m_N = 2y_N'$, *ან იგი პერიოდულია* $f(x)$ *ფუნქციასთან ერ-თად, მაშინ*

$$f^{(p)}(x) - S_{\Delta k}^{(p)}(x) = o\left(\|\Delta_k\|^{1-p}\right) \qquad (p = 0,1) \tag{3.13}$$

თანაბრად $x \in [a,b]$*-ს მიმართ.*
თუ $f(x)$ *აკმაყოფილებს* $[a,b]$*-ზე ლიფშიცის პირობას* α $(0 < \alpha \le 1)$ *რიგით, მაშინ*

$$f^{(p)}(x) - S_{\Delta k}^{p}(x) = \mathrm{O}\left(\|\Delta_k\|^{1+\alpha-p}\right) \qquad (p = 0,1) \tag{3.14}$$

დამტკიცება. დავუშვათ, არაპერიოდულ შემთხვევაში $m_k = \left(m_{k0}, m_{k1}, \ldots, m_{kN_k}\right)^T$, $c_k = \left(c_{k0}, c_{k1}, \ldots, c_{kN_k}\right)^T$, $f_k = \left(f_{k0}, f_{k1}, \ldots, f_{kN_k}\right)^T$. პერიოდულ შემთხვევაში გან-ვიხილავთ ამავე ვექტორებს პირველი კომპონენტების გარეშე. მოცემული Δ_k ბადისთვის აღვნიშნოთ B_k სიმბოლოთი (1.16) ((1.19*i*) პირობებით) ან (1.17) სისტემათა შესაბამისი მატრიცები. ამასთან, (1.19*i*) პირობა ასეთნაირად გადავწეროთ:

$$3m_{k0} = 3f'(a) \equiv c_{k0}, \quad 3m_{kN_k} = 3f'(b) \equiv c_{kN_k}.$$

მაშინ სამართლიანია წარმოდგენა:

$$B_k\left(m_k - \frac{1}{3}c_k\right) = \left(I_k - \frac{1}{3}b_k\right)c_k, \tag{3.15}$$

სადაც I_k არის $N_k + 1$ ან N_k რიგის ერთეულოვანი მატრიცაა. შევნიშნოთ, რომ $B_k m_k = I_k c_k$ და $-\frac{1}{3}B_k c_k = -\frac{1}{3}B_k c_k$ ტოლობათა შეკრებით მივიღებთ (3.15)-ს.
არაპერიოდულ შემთხვევაში (3.15)-ის მარჯვენა მხარე მიიღებს ასეთ სახეს:

I სტრიქონი: $c_{k0}-\frac{1}{3}3\cdot c_{k0}=0,$

II სტრიქონი: $c_{k1}-\frac{1}{3}\lambda_1\cdot c_{k0}-2\cdot\frac{1}{3}c_{k1}-\frac{1}{3}\mu_1 c_{k2}=\frac{1}{3}\left(\lambda_1\left(c_{k1}-c_{k0}\right)-\mu_1\left(c_{k2}-c_{k1}\right)\right),$

$j+1$ სტრიქონი:

$c_{kj}-\frac{1}{3}\lambda_1\cdot c_{kj-1}-\frac{2}{3}c_{kj}-\frac{1}{3}\mu_j c_{kj+1}=\frac{1}{3}\left(\lambda_j\left(c_{kj}-c_{k\,j-1}\right)-\mu_j\left(c_{kj+1}-c_{kj}\right)\right)$

N_k-1 სტრიქონი: $c_{kN_k-1}-\frac{1}{3}\lambda_{N_k-1}c_{kN_k-2}-\frac{1}{3}\cdot 2c_{kN_k-1}-\frac{1}{3}\mu_{N_k-1}c_{kN_k}$

$=\frac{1}{3}\left(\lambda_{N_k-1}\left(c_{kN_k-1}-c_{kN_k-2}\right)-\mu_{N_k-1}\left(c_{kN_k}-c_{kN_k-1}\right)\right),$

ანუ

$$\left(I_k-\frac{1}{3}B_k\right)c_k=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\ \lambda_1\left(c_{k1}-c_{k0}\right)-\mu_1\left(c_{k2}-c_{k1}\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_{N_k-1}\left(c_{kN_k-1}-c_{kN_k-2}\right)-\mu_{N\,k-1}\left(c_{kN_k}-c_{kN_k-1}\right)\\ 0\end{bmatrix}$$

პერიოდულ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\left(I_k-\frac{1}{3}B_k\right)c_k=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\lambda_1\left(c_{k1}-c_{kN_k}\right)-\mu_1\left(c_{k2}-c_{k1}\right)\\ \lambda_2\left(c_{k2}-c_{k1}\right)-\mu_2\left(c_{k3}-c_{k2}\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_{N_k}\left(c_{kN_k}-c_{kN_k-1}\right)-\mu_{N_k}\left(c_{k1}-c_{kN_k}\right)\end{bmatrix}$$

თითოეული ამ ვექტორის ნორმა არ აღემატება $\omega\left(3\|\Delta_k\|,f'\right)\le 3\omega\left(\|\Delta_k\|,f'\right).$

მართლაც, თუ

$$\delta=\delta_1+\delta_2,\omega(\delta;f)=\sup_{|x-t|<\delta}\left|f(x)-f(t)\right|.$$

მაშინ

$$\exists x_0,\left|x-x_0\right|<\delta_1,\left|x_0-t\right|<\delta_2.$$

ამიტომ

$$\omega(\delta;f)=\sup_{|x-t|<\delta}\left|f(x)-f(t)\right|$$

$$= \sup_{|x-t|<\delta} |f(x) - f(x_0) + f(x_0) - f(t)| \le \sup_{|x-t|<\delta} [|f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(t)|]$$

$$\le \sup_{|x-t|<\delta_1} |f(x) - f(t)| + \sup_{|x-t|<\delta_2} |f(x) - f(t)| = \omega(\delta_1; f) + \omega(\delta_2; f).$$

ამის შედეგად

$$\left|\lambda_j (c_{kj} - c_{kj-1}) - \mu_j (c_{kj+1} - c_{kj})\right| \le (\lambda_j + \mu_j)\omega(3\|\Delta_k\|, f'(x)).$$

სხვაობა ორ მომდევნო c_{kj}-სა და c_{kj-1} შორის შევაფასოთ ასეთნაირად:

$$\left|\lambda_j (c_{kj} - c_{kj-1}) - \mu_j (c_{kj+1} - c_{kj})\right| \le (\lambda_j + \mu_j)\omega(3\|\Delta_k\|, f'(x)).$$

ამის შედეგად (3.15)-დან

$$\left\| m_k - \frac{1}{3} c_k \right\| \le \left\| B_k^{-1} \right\| \cdot 3\omega(\|\Delta_k\|, f') \le 3\omega(\|\Delta_k\|, f').$$

შემდეგ, პერიოდულ შემთხვევაში, ყოველი $\frac{1}{3} c_{kj}$-თვის სამართლიანია საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

$$\frac{1}{3} c_{kj} = f'(\xi_{kj}) \quad \xi_{kj} \in [x_{kj-1}, x_{kj}].$$

იგივეა სამართლიანი არაპერიოდული შემთხვევისთვის, როდესაც $1 \le j \le N_{k-1}$ და $c_{k0} = 3f'(a)$, $c_{kN_k} = 3f'(b)$. ამიტომ

$$\|m_k - f_k'\| \le 4\omega(\|\Delta_k\|, f').$$

(1.11)-დან გამომდინარეობს (k-ზე დამოკიდებულება სიმარტივისთვის გამოვტოვეთ):

$$S_\Delta'(x) - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} = m_{j-1} \frac{(x_j - x)(2x_{j-1} + x_j - 3x)}{h_j^2} - m_j \frac{(x - x_{j-1})(2x_j + x_{j-1} - 3x)}{h_j^2}$$

$$+ \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j^2} \cdot 6(x_j - x)(x - x_{j-1}) - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}, \tag{3.16}$$

რომლის მარჯვენა მხრიდან შევადგინოთ $m_i - f_i'$ $(i = j-1, j)$ სხვაობები; ამასთან ერთად მარცხენა მხარეს დავუმატოთ და გამოვაკლოთ f_i', გამოვიყენოთ შეფასება:

$f'(x) - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \le \omega(h_j, f')$ და უტოლობა $|a| - |b| \le |a-b| \le c$, $|a| \le c + |b|$. მაშინ (3.16) გვაძლევს

$$|f'(x) - S_\Delta'(x)| \le \frac{21}{2} \omega(\|\Delta\|, f'),$$

კერძოდ, თუ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას α რიგით, მაშინ

$$\left| f'(x) - S'_\Delta(x) \right| \le \frac{21}{2} K \|\Delta\|^\alpha .$$

რადგან $S_\Delta(x)$ სპლაინი მაინტერპოლებელია $f(x)$-სთვის Δ ბადის კვანძებში, მაშინ $\lfloor x_{j-1}, x_j \rfloor$-ზე გვაქვს წარმოდგენა

$$\left| f(x) - S_\Delta(x) \right| = \left| \int_t^x [\, f'(x) - S'_\Delta(x)]\, dx \right| \le \frac{21}{4} \|\Delta\| \omega\left(\|\Delta\|, f'\right),$$

სადაც t აღნიშნავს x-თან $\lfloor x_{j-1}, x_j \rfloor$ შუალედის უახლოეს კვანძს. თეორემა დამტკიცებულია.

(3.16)-დან გამომდინარეობს:

$$\left| S'_\Delta(x) - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right| = \left| \left[\frac{3}{h_j^2} \left(x - \frac{x_{j-1} + x_j}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \right.$$

$$\times \left[\left(m_{j-1} - f'_{j-1} \right) + \left(m_j - f'_j \right) + \left(f'_{j-1} + f'_j - 2 \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right) \right]$$

$$\left. + \frac{1}{h_j} \left((x - \frac{x_j + x_{j-1}}{2} \right) \left[\left(m_j - f'_j \right) - \left(m_{j-1} - f'_{j-1} \right) + \left(f'_j - f'_{j-1} \right) \right| \right.$$

$$\le \frac{19}{2} \omega\left(\|\Delta\|, f'\right). \tag{3.17}$$

შევნიშნოთ, რომ (3.17)-ში $\dfrac{f_j - f_{j-1}}{h_j}$-თან და (3.15) მარჯვენა მხარეში $\dfrac{f_j - f_{j-1}}{h_j}$ გამოსახულებასთან (ერთი და იგივე) წევრებთან მდგომი კოეფიციენტებია შესაბამისად.

$$-2\left[\frac{3}{h_j^2} \left(x - \frac{x_{j-1} + x_j}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \text{ და } \frac{6}{h_j^2} \left(x_j - x \right)\left(x - x_{j-1} \right) - 1,$$

რომლებიც ტოლია. მართლაც,

$$\frac{6}{h_j^2} \left[\frac{\left(x_{j-1} + x_j \right)^2}{4} - x_{j-1} x_j \right] = \frac{6}{4h_j^2} \left(-4x_{j-1}x_j + 2x_{j-1}x_j + x_{j-1}^2 + x_j^2 \right) = \frac{3}{2}.$$

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.3. დავუშვათ, $[a,b]$ *მონაკვეთზე მოცემულია* $f(x) \in C^3[a,b]$ *ფუნქცია და* $\{\Delta_k\}$ *ბადეთა მიმდევრობა აკმაყოფილებს არალაკუნარობის (3.7) პირობას და* $\|\Delta_k\| \to 0$, *როდესაც* $k \to \infty$.

მაშინ $S_{\Delta_k}(x)$ *მაინტერპოლებელი სპლაინისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს* $(1.18i)$ *ან* $(1.18ii)$ *სასაზღვრო პირობებს, ან პერიოდულია (თუ* $f(x)$ *პერიოდულია), სამართლიანია შეფასება:*

$$f^{(p)}(x)-S^{(p)}{}_{\Delta_k}(x)=o\left(\|\Delta_k\|^{3-p}\right),\ \ p=0,1,2,3$$

თანაბრად $x\in[a,b]$ *მიმართ.*

თუ $f'''(x)$ *აკმაყოფილებს* $[a,b]$*-ზე* $\alpha(0<\alpha\le 1)$ *რიგით ლიფშიცის პირობას, მაშინ*

$$f^{(p)}(x)-S^{(p)}{}_{\Delta_k}(x)=o\left(\|\Delta_k\|^{3+\alpha-p}\right),\ \ p=0,1,2,3$$

თანაბრად $x\in[a,b]$ *მიმართ*

კომენტარები და ლიტერატურული მითითებანი

სპლაინ-ფუნქციათა თეორიის ელემეტების გამოცემასათან დაკავშირებით შენიშვნები სათანადო წყაროების მითითებით მოცემულია ამ თავის დასაწყისში. დამატებით აღვნიშნავთ, რომ ქართულ ენაზე ანალოგიური მასალა პირველად გამოქვეყნდა სახელმძღვანელოში *ჰ. მელაძე, მ. მენთეშაშვილი, ნ. სხირტლაძე „გამოთვლითი მათემატიკის საფუძვლები“, ნაწილი II, თსუ, 2005.*

ამავე წიგნში გადმოცემულია პირველ 2 თავში განხილული საკითხები, რომლებიც რიცხვითი ანალიზის კლასიკურ ნაწილებს წარმოადგენს; დიდი მოცულობის ლიტერატურული მითითებაა მოყვანილი ზემოთ ციტირებული ენგელნ-მიუგლერისა და როიტერის გერმანულენოვან სახელმძღვანელოში.

განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია ამ მიმართულებით ქართულ ენაზე პირველი დასტამბული სახელმძღვანელო: *შ. მიქელაძე. ინტერპოლების თეორია და პრაქტიკა, მეცნიერება, 1946.*

ნ ა კ ვ ე თ ი III

რიცხვითი გაწარმოება და ინტეგრება

თავი 1. რიცხვითი გაწარმოება

ჩვეულებრივ, რიცხვითი გაწარმოების ოპერაციას მივმართავთ იმ შემთხვევაში, როდესაც $y=f(x)$ ფუნქცია, რომლის წარმოებულის პოვნაა საჭირო, მოცემულია ცხრილით, ან რთული სახის ანალიზური გამოსახულებით, რომლით სარგებლობა უკავშირდება ტექნიკური, რიგ შემთხვევებში, გადაულახავი ხასიათის სიძნელეებს.

ასეთ შემთხვევებში ვსარგებლობთ წინა ნაკვეთში განვითარებული აპარატით; საინტერპოლაციო ან მააპროქსიმირებელი პროცესებით, ან სპლაინ-ფუნქციებით. საინტერპოლაციო პოლინომებით სარგებლობისას ცდომილება ისაზღვრება ბუნებრივად, ნაშთითი წევრის შესაბამისი რიგის წარმოებულის ყოფაქცევით და ეს პრობლემა დამატებით გამოკვლევებს საჭიროებს. ფუნქციის სიმცირე ყოველთვის არ განაპირობებს მისი წარმოებულის სიმცირეს. გარდა ამისა, რიცხვითი გაწარმოების პროცესი შესაძლებელია აღმოჩნდეს არამდგრადი, სხვა სიტყვებით, ცხრილით ფუნქციის მოცემისას, ვთქვათ, დამრგვალების შედეგად, ზუსტი მნიშვნელობისაგან მცირე გადახრას, რიცხვითი გაწარმოების ფორმულით სარგებლობისას, არ მოჰყვეს წარმოებულის მცირე გადახრა. ამ სურათის აღსაწერად, გამოვიყენოთ უმარტივესი ფორმულა:

$$y'(x_i)=\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right)/h+f''(\xi)h/2.$$

ჩავთვალოთ, რომ ფუნქციის ზუსტ და f_i-მიახლოებით მნიშვნელობებს შორის სხვაობა არ აღემატება $\delta>0$ სიდიდეს. შევაფასოთ:

$$\Delta=\left|y'(x_i)-\left(f_{i+1}-f_i\right)/h\right|$$

$$=\left|\left[y'(x_i)-\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right)/h\right]+\left[\left(f(x_{i+1})-f_{i+1}\right)/h\right]-\left(f(x_i)-f_i\right)/h\right|\le$$

$$\le\left|y'(x_i)-\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right)/h\right|+$$

$$+\left|\left[\left(f(x_{i+1})-f_{i+1}\right)/h\right]\right|+\left|\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right)/h\right|\le M_2h/2+\frac{2\delta}{h}.$$

ცხადია, თუ $h\cong\delta$, მაშინ $\Delta=O(1)$, რაც განხილული კონკრეტული შემთხვევისათვის ნიშნავს პროცესის არამდგრადობას.

რიცხვითი გაწარმოების უმარტივეს ფორმულებს მოვიყვანთ მომდევნო ნაკვეთის პირველი თავის 1.1 პუნქტში, I რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის შესწავლისას. რიგი სქემებისა მოყვა-

ნილია ამავე ნაწილის მომდევნო პუნქტში, ხოლო სპლაინ-ფუნქციებით რიცხვითი გაწარმოების ფორმულები გადმოცემულია ამ თავის 1.2 პუნქტში. ჩვენი აზრით, რიცხვითი გაწარმოების ფორმულათა საყურადღებო კლასს წარმოადგენს IV ნაკვეთის 13.2 პუნქტში წარმოდგენილი (Q) ფორმულები, გამოსახული ორი ორდინატითა და მომენტებით.

1.1 რიცხვითი გაწარმოების ფორმულათა ცხრილი

ქვემოთ მოგვყავს პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებისათვის რიცხვითი გაწარმოების ფორმულათა ცხრილი თანაბრადდაშორებული კვანძებისათვის. შემოღებულია აღნიშვნები: ბიჯი - h, $x_i = ih$, $y(x_i) = y_i$, $y^{(\alpha)}(x_i) = y_i^{(\alpha)}$, $\alpha = 1,2$.

ინტერპო-ლების კვანძთა რიცხვი	y_i', y_i'' -ის წარმოდგენა	ნაშთითი წევრი $(\xi, \xi_1, \xi_2) \in [x_0, x_n]$
1	2	3
3	$y_0' = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2)$	$\frac{h^2}{3} f'''(\xi)$
	$y_1' = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2)$	$-\frac{h^2}{6} f'''(\xi)$
	$y_2' = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2)$	$\frac{h^2}{3} f'''(\xi)$
	$y_0'' = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$	$-hf'''(\xi_1) + \frac{h^2}{6} f^{(4)}(\xi_2)$
	$y_1'' = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$	$-\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$
	$y_2'' = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$	$hf'''(\xi_1) + \frac{h^2}{6} f^{(4)}(\xi_2)$
4	$y_0' = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3)$	$-\frac{h^3}{4} f^{(4)}(\xi)$
	$y_1' = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3)$	$\frac{h^3}{12} f^{(4)}(\xi)$
	$y_2' = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3)$	$-\frac{h^3}{12} f^{(4)}(\xi)$
	$y_3' = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3)$	$\frac{h^3}{4} f^{(4)}(\xi)$

1	2	3
	$y_0'' = \frac{1}{6h^2}(12y_0 - 30y_1 + 24y_2 - 6y_3)$	$\frac{11}{12}h^2 f^{(4)}(\xi_1) - \frac{h^3}{10} f^{(5)}(\xi_2)$
	$y_1'' = \frac{1}{6h^2}(6y_0 - 12y_1 + 6y_2)$	$-\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_1) + \frac{h^3}{30} f^{(5)}(\xi_2)$
	$y_2'' = \frac{1}{6h^2}(6y_1 - 12y_2 + 6y_3)$	$-\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_1) + \frac{h^3}{30} f^{(5)}(\xi_2)$
	$y_3'' = \frac{1}{6h^2}(-6y_0 + 24y_1 - 30y_2 + 12y_3)$	$\frac{11}{12}h^2 f^{(4)}(\xi_1) + \frac{h^3}{10} f^{(5)}(\xi_2)$
	$y_0' = \frac{1}{12h}(-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4)$	$\frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi)$
	$y_1' = \frac{1}{12h}(-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4)$	$-\frac{h^4}{20} f^{(5)}(\xi)$
	$y_2' = \frac{1}{12h}(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4)$	$\frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$
	$y_3' = \frac{1}{12h}(-y_0 + 6y_1 + 18y_2 + 10y_3 + 3y_4)$	$-\frac{h^4}{20} f^{(5)}(\xi)$
	$y_4' = \frac{1}{12h}(3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4)$	$\frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi)$
	$y_0'' = \frac{1}{24h^2}(70y_0 - 208y_1 + 228y_2 - 112y_3 + 22y_4$	$-\frac{5}{6}h^3 f^{(5)}(\xi_1) + \frac{h^4}{15} f^{(6)}(\xi_2)$
	$y_1'' = \frac{1}{24h^2}(22y_0 - 40y_1 + 12y_2 + 8y_3 - 2y_4)$	$\frac{h^3}{12} f^{(5)}(\xi_1) - \frac{h^4}{60} f^{(6)}(\xi_2)$
5	$y_2'' = \frac{1}{24h^2}(-2y_0 + 32y_1 - 60y_2 + 32y_3 - 2y_4)$	$\frac{h^4}{90} f^{(6)}(\xi_1)$
	$y_3'' = \frac{1}{24h^2}(-2y_0 + 8y_1 + 12y_2 - 40y_3 + 22y_4)$	$-\frac{h^3}{12} f^{(5)}(\xi_1) - \frac{h^4}{60} f^{(6)}(\xi_2)$
	$y_4'' = \frac{1}{24h^2}(22y_0 - 112y_1 + 228y_2 - 208y_3 + 70y_4$	$\frac{5}{6}h^3 f^{(5)}(\xi_1) + \frac{h^4}{15} f^{(6)}(\xi_2)$

1	2	3
6	$y'_0 = \frac{1}{60h}(-137y_0 + 300y_1 - 300y_2 + 200y_3 - 75y_4 + 12y_5)$ $y'_1 = \frac{1}{60h}(-12y_0 - 65y_1 + 120y_2 - 60y_3 + 20y_4 - 3y_5)$ $y'_2 = \frac{1}{60h}(3y_0 - 30y_1 - 20y_2 + 60y_3 - 15y_4 + 2y_5)$ $y'_3 = \frac{1}{60h}(-2y_0 + 15y_1 - 60y_2 + 20y_3 + 30y_4 - 3y_5)$ $y'_4 = \frac{1}{60h}(3y_0 - 20y_1 + 60y_2 - 120y_3 + 65y_4 + 12y_5)$ $y'_5 = \frac{1}{60h}(-12y_0 + 75y_1 - 200y_2 + 300y_3 - 300y_4 + 137y_5)$	$-\frac{h^5}{6} f^{(6)}(\xi)$ $\frac{h^5}{30} f^{(6)}(\xi)$ $-\frac{h^5}{60} f^{(6)}(\xi)$ $\frac{h^5}{60} f^{(6)}(\xi)$ $-\frac{h^5}{30} f^{(6)}(\xi)$ $\frac{h^5}{6} f^{(6)}(\xi)$
7	$y'_0 = \frac{1}{60h}(-147y_0 + 360y_1 - 450y_2 + 400y_3 - 225y_4 + 72y_5 - 10y_6)$ $y'_1 = \frac{1}{60h}(-10y_0 - 77y_1 + 150y_2 - 100y_3 + 50y_4 - 15y_5 + 2y_6)$ $y'_2 = \frac{1}{60h}(2y_0 - 24y_1 - 35y_2 + 80y_3 - 30y_4 + 8y_5 - y_6)$ $y'_3 = \frac{1}{60h}(-y_0 + 9y_1 - 45y_2 + 45y_4 - 9y_5 + y_6)$ $y'_4 = \frac{1}{60h}(y_0 - 8y_1 + 30y_2 - 80y_3 + 35y_4 + 24y_5 - 2y_6)$ $y'_5 = \frac{1}{60h}(-2y_0 + 15y_1 - 50y_2 + 100y_3 - 150y_4 + 77y_5 + 10y_6)$ $y'_6 = \frac{1}{60h}(10y_0 - 72y_1 + 225y_2 - 400y_3 + 450y_4 - 360y_5 + 147y_6)$	$\frac{h^6}{7} f^{(7)}(\xi)$ $-\frac{h^6}{42} f^{(7)}(\xi)$ $\frac{h^6}{105} f^{(7)}(\xi)$ $-\frac{h^6}{140} f^{(7)}(\xi)$ $\frac{h^6}{105} f^{(7)}(\xi)$ $-\frac{h^6}{42} f^{(7)}(\xi)$ $\frac{h^6}{7} f^{(7)}(\xi)$

1.2. მიახლოებითი დიფერენცირება სპლაინებით

სპლაინ-ფუნქციათა გამოყენების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი სფეროა რიცხვითი გაწარმოება და ინტეგრება.

ქვემოთ მოვიყვანთ რიცხვითი გაწარმოების რამდენიმე ეფექტურ ფორმულას, დაფუძნებულს სპლაინ-ფუნქციათა ზემოთ გადმოცემულ თეორიაზე.

1. პერიოდული სპლაინის (1.15) წარმოდგენიდან უშუალოდ გვაქვს:

$$m_i = 3\sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\beta}_{ij}^{-1} \left[\lambda_1 \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} + \mu_j \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}}\right], \tag{5.1}$$

ხოლო არაპერიოდული სპლაინისთვის –

$$m_i = \beta_{i0}^{-1} c_0 + 3\sum_{j=1}^{N-1} \beta_{ij}^{-1} \left[\lambda_1 \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} + \mu_j \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}}\right] + \beta_{jN}^{-1} c_N \tag{5.2}$$

გავიხსენოთ, რომ $\tilde{\beta}_{ij}^{-1}$ და β_{ij}^{-1} B მატრიცის შებრუნებული მატრიცის ელემენტია.

თანაბარი ბადის შემთხვევაში შესაძლებელია β_{ij}^{-1} ელემენტები გამოთვლილ იქნეს ეფექტურად. ამ შემთხვევაში (5.2) ტოლფასია შემდეგი გამოსახულების (ამ შემთხვევაში $\lambda_i = \mu_i = \frac{1}{2}$):

$$m_i = \beta_{i0}^{-1}\left(c_0 - \frac{3}{2h} f_1\right) - \frac{3}{2h}\beta_{i1}^{-1} f_0 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{3}{2h}\left(\beta_{ij}^{-1} - \beta_{ij+1}^{-1}\right) f_j$$

$$+ \frac{3}{2h}\beta_{iN-1} f_N + \beta_{iN}^{-1}\left(\frac{3}{2h} f_{N-1} + c_N\right) \tag{5.3}$$

იმის მიხედვით, თუ როგორი სასაზღვრო (დამატებითი) პირობებია, β_{ij}^{-1} სხვადასხვაა. თუ გვაქვს (i) შემთხვევა, მაშინ

$$\beta_{ij}^{-1} = \frac{\sigma^{j-1}\left(1+\sigma^{2i}\right)\left(1+\sigma^{2N-2}\right)}{(2+\sigma)\left(1-\sigma^{2N}\right)} \quad (0 < i \le j < N),$$

$$\beta_{iN}^{-1} = \frac{\sigma^{N-1}\left(1+\sigma^{2i}\right)}{(2+\sigma)\left(1-\sigma^{2N}\right)} \quad (0 < i \le N),$$

$$\beta_{0j}^{-1} = \frac{2\sigma^{j}\left(1+\sigma^{2N-2}\right)}{(2+\sigma)\left(1-\sigma^{2N}\right)} \quad (0 < i < N),$$

$$\beta_{0N}^{-1} = \frac{2\sigma^{N}}{(2+\sigma)\left(1-\sigma^{2N}\right)}.$$

თუ გვაქვს (ii) სასაზღვრო პირობები, მაშინ

$$\beta_{ij}^{-1} = \frac{\sigma^{j-1}\left(1-\sigma^{2i}\right)\left(1-\sigma^{2N-2}\right)}{(2+\sigma)\left(1-\sigma^{2N}\right)} \quad (0 < i \le j < N),$$

$$\beta_{iN}^{-1} = \frac{\sigma^{N-1}\left(1-\sigma^{2i}\right)}{2\left(1-\sigma^{2N}\right)} \ (0 < i \le N), \ \beta_{iN}^{-1} = 0 \ \ (0 < j \le N).$$

ამ ფორმულებში

$$\sigma = \sqrt{\frac{s}{r}}, \ \ r = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \ s = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

პერიოდული შემთხვევისთვის

$$\widetilde{\beta}_{ij}^{-1} = \frac{\sigma^{N-|j-1|} + \sigma^{|2|j-i}}{(2+\sigma)\left(1-\sigma^{N}\right)}.$$

თავი 2. რიცხვითი ინტეგრება

2.1. ზოგადი მოსაზრებანი[1)]

თუ მოცემული ფუნქციის პირველყოფილის ანალიზური სახის განსაზღვრა რთულია ან შეუძლებელი, მაშინ

$$J = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელად (ან შესაფასებლად) იყენებენ მიახლოებით მეთოდებს, რომელიც ინტეგრალს გარკვეული სიზუსტით გვაძლევს.

ერთ-ერთი მეთოდი, რომელიც J-ს მიახლოებით სიდიდეებს გვაძლევს, არის უტოლობათა მეთოდი, რომლის გამოყენება ზევრადაა დამოკიდებული $f(x)$-ის სტრუქტურასა და მომხმარებლის მათემატიკურ დონეზე.

დავუშვათ, რომ $f(x)$ განსაზღვრულია $[a,b]$ და ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x), \tag{2}$$

სადაც $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ რაიმე ცნობილი ფუნქციებია. (2)-დან გვაქვს:

$$\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \psi(x)dx .$$

თუ $\varphi(x)$-ისა და $\psi(x)$-ის პირველყოფილი ცნობილია, მაშინ J-სთვის მივიღებთ ორ საზღვარს, რომელთა შორისაა მოცემული ინტეგრალის მნიშვნელობა. განვიხილოთ, მაგალითად,

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{3}$$

ინტეგრალი. ცხადია, გვაქვს

$$\sqrt{1-x^4} = \sqrt{1-x^2}\ \ \sqrt{1+x^2},$$

თუ $x \in [0,1]$, მაშინ $1 \le \sqrt{1+x^2} \le \sqrt{2}$. ამიტომ (3)-ისთვის სამართლიანია

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \le J \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} .$$

რადგან $\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, ამიტომ (3)-ისთვის გვაქვს:

[1)] იხ. ედუარდ გურსა. მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტომი I, ნაკვეთი I, V., თავი: "ინტეგრალთა მიახლოებით გამოთვლა" (ინგლისურ და რუსულ ენებზე).

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \le J = \int_0^1 (1-x^4)^{-\frac{1}{2}} dx \le \frac{\pi}{2}.$$

მოყვანილი მსჯელობა დამახასიათებელია უტოლობათა მეთოდისთვის, მაგ-რამ შესაძლებელია ამ მეთოდიკის სრულყოფა. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ შედარებით ზუსტ უტოლობას

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \ge 1 - \frac{1}{2}x^2 \text{ (ბინომის ძალით),}$$

რაც ტეილორის ფორმულითაც მტკიცდება (თუ შემოვიფარგლებით ორი წევრით), (3)-ისთვის გვაქვს:

$$\int_0^1 (1-x^4)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 \left[(1-x^2)(1+x^2)\right]^{-\frac{1}{2}} dx \ge \int_0^1 \frac{1-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

ამგვარად, მივიღეთ უფრო ზუსტი საზღვრები:

$$\frac{3}{8}\pi \le J \le \frac{\pi}{2}.$$

შედარებით მძლავრი მეთოდია ქვემოთ მოყვანილი ხერხი, რომლის მიხედვით ჯერ ძირითად შუალედს ვყოფთ ქვეშუალედებად და შემდგომ თითოეული შესაკრებისთვის ვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულებს.

სიმარტივისთვის დავუშვათ, რომ $f(x)$ ზრდადია $[a,b]$-ში. დავყოთ $[a,b]$ თანაბარ ნაწილებად $b-a=nh$. ასეთ შემთხვევაში ინტეგრალის მნიშ-ვნელობა მოთავსებული იქნება შემდეგ ორ ჯამს შორის:

$$s = h\left[f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a+(n-1)h)\right],$$

$$S = h\left[f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+nh)\right]. \ a+nh=b.$$

ცხადია, თუ აღვნიშნავთ $2\sigma = s+S$, მაშინ

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sigma\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)dx - h\frac{f(a+ih) + f(a+(i+1)h)}{2}\right| < S - s = \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right]$$

.

σ სიდიდის ყოველი შესაკრები – $\frac{h}{2}\left[f(a+ih) + f(a+(a+i)h)\right]$ – წარმოად-გენს ტრაპეციის ფართობს, მოთავსებულს ორ მეზობელ ორდინატს შორის h სიმაღლით.

განვიხილოთ

$$J=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}, \quad f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $n=4, h=\frac{1}{4}$.

$$\frac{S+s}{2}=\frac{1}{4}\frac{1}{2}\left[f(0)+2f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[1+\frac{32}{17}+\frac{8}{5}+\frac{32}{25}+\frac{1}{2}\right]=0{,}78279.$$

$$\frac{\pi}{4}-0{,}78279=\frac{3{,}141532-3{,}13116}{4}=\frac{0{,}010473}{4}.$$

$\pi\approx 3{,}13116$. ცდომილებაა $\approx 0{,}01$. რადგან $s<f(x)<S$, ამიტომ

$$s-\frac{S+s}{2}<f(x)-\frac{S+s}{2}<S-\frac{S+s}{2}; \quad |f(x)-\sigma|<\frac{S-s}{2};$$

$$\frac{S-s}{2}=\frac{1}{2\cdot 4}\left|\frac{1}{1+1}-\frac{1}{1}\right|=\frac{1}{16}.$$

$\frac{1}{16}=0{,}0625$ – შეფასება უხეშია. სინამდვილეში ცდომილება არ აღემატება 0,0105-ს.

2.2. განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა საინტერპოლაციო პოლინომებით

დავუშვათ, $[a,b]$ დაყოფილია n ნაწილად. აღვნიშნოთ M_0, M_1, $\ldots$, M_n-ით წერტილები, აღებული $y=f(x)$ მრუდზე. თუ $M_0=(x_0,y_0),\ldots,$ $M_n=(x_n,y_n)$ და x_i, $i=0,1,\ldots,n$ ინტერპოლაციის კვანძებია, მაშინ

$$P_n(x)=y_0\ell_0(x)+y_1\ell_1(x)+\cdots+y_n\ell_n(x)$$

ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომია. რადგან (გავიხსენოთ):

$$\ell_i(x)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{x-x_k}{x_i-x_k} \tag{2.1}$$

ამიტომ

$$\int_a^b P_n(x)dx=\sum_{i=0}^{n}y_i\int_a^b \ell_i(x)dx. \tag{2.2}$$

განვსაზღვროთ კვანძები ϑ_i რიცხვების დახმარებით შემდეგნაირად:

$$x_0 = a+\vartheta_0(b-a),\ x_1 = a+\vartheta_1(b-a),\ \dots,\ x_n = a+\vartheta_n(b-a),$$
$$0\le\vartheta_0<\vartheta_1<\dots<\vartheta_{n-1}<\vartheta_n\le 1.$$

(2.2) ინტეგრალში გარდავქმნათ ცვლადი: $x = a+t(b-a)$, $t_i=\vartheta_i$. მაშინ

$$\int_a^b \ell_i(x)dx = \int_0^1 \prod_{\substack{k=0\\ i\ne k}}^n \frac{a+t(b-a)-a-t_k(b-a)}{a+t_i(b-a)-a-t_k(b-a)}(b-a)dt = (b-a)\int_0^1 \prod_{\substack{k=0\\ i\ne k}}^n \frac{t-t_k}{t_i-t_k}dt = (b-a)p_i$$
.

მაშინ (2.2)-დან გვექნება:

$$\int_a^b P_n(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^n p_i y_i\ . \tag{2.3}$$

ამრიგად, თუ (a,b) დავყოფთ ქვეშუალედებად ისე, რომ ის $(0,1)$ შუალედის პროპორციული იქნება, მაშინ ϑ_0, ϑ_1, …, ϑ_n რიცხვები, რომლებსაც კვანძები ეწოდებათ, და p_i კოეფიციენტები, რომლებსაც წონები ეწოდებათ, არაა დამოკიდებული $f(x)$-ზე და ისინი ინვარიანტებს წარმოადგენენ. ამის შემდეგ, (2.3)-ის ფუნქციონირებისთვის საჭიროა $y_i = f(x_i)$ რიცხვების განსაზღვრა.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები:

1. $n=1 .\vartheta_0 = 0, \vartheta_1 = h = 1$,

$$\ell_0(t) = \frac{t-\vartheta_1}{\vartheta_0-\vartheta_1},$$

$$\ell_1(t) = \frac{t-\vartheta_0}{\vartheta_1-\vartheta_0}, p_0 = p_{0,1} = \int_0^1 \frac{t-h}{0-h}dt = -\frac{1}{h}\frac{(t-h)^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}, p_{1,1} = \int_0^1 \frac{t}{1}dt = \frac{1}{2}.$$

$$J = \int_a^b P_1(x)dx = (b-a)\left(p_{0,1}y_0 + p_{1,1}y_1\right) = \frac{b-a}{2}\left(y_0+y_1\right) \tag{2.4}$$

(2.4) ეწოდება ტრაპეციის ფორმულა.

2. $n=2 .\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_1 = \frac{1}{2}$, $\vartheta_2 = 1$.

$$\ell_0(t) = \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)}{\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)},\ \ell_1(t) = \frac{(t-0)(t-1)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)},\ \ell_2(t) = \frac{(t-0)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)};$$

$$k_{0,2} = 2\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)dt = \frac{1}{6},\ k_{1,2} = 4\int_0^1 t-(1-t)dt = \frac{4}{6},\ k_{2,2} = 2\int_0^1 t\left(t-\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{6}.$$

ამგვარად

$$J = \int_a^b P_2(n)dx = \frac{b-a}{6}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right). \qquad \text{(Sm)}$$

3. $n = 3$, $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_1 = \frac{1}{3}$, $\vartheta_2 = \frac{2}{3}$, $\vartheta_3 = 1$.

$$J = \frac{3(b-a)}{8}\left(\frac{1}{3}y_0 + y_1 + y_2 + \frac{1}{3}y_3\right) \quad \left(\frac{3}{8}\text{-ის ფორმულა}\right)$$

4. $n = 4$, $\vartheta i = \frac{1}{4}i$, $i = 0,1,2.3,4$, $J = \frac{b-a}{90}\left(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4\right)$.

მაგალითად, ამ შემთხვევაში

$$p_{2,4} = \int_0^1 \frac{(t-0)\left(t-\frac{1}{4}\right)\left(t-\frac{3}{4}\right)(t-1)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}dt = 64\int_0^1 t\left(t-\frac{1}{4}\right)\left(t-\frac{3}{4}\right)(t-1)dt$$

$$= 64\left[\frac{t^5}{5} - \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+1\right)\frac{t^4}{4} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{16}\right)\frac{t^3}{3} - \frac{3}{16}\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 64\cdot\frac{90-50-45}{3\cdot 5\cdot 32} = \frac{12}{90}.$$

ზემოთ მოყვანილი ფორმულები იწოდება ნიუტონ-კოუტსის (Cotes) ფორმულე-ბად.

5. დავუბრუნდეთ პუნქტ 1.5-ში მესამე მაგალითს.

$$a = 0, b = h, x_0 = \frac{h}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right), x_1 = \frac{h}{2}, x_2 = \frac{h}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right).$$

ამ შემთხვევაში კვადრატულ ფორმულას ჩებიშევის პოლინომის კვანძებით აქვს სახე

$$J_{Ts,3} = \frac{h}{9}\left(2y_0 + 5y_1 + 2y_2\right) \qquad (Ts,3)$$

შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული ფორმულა წარმოადგენს კლენშოუ-კურტისის ტიპის ფორმულას, რომელიც 3 კვანძისთვის ემთხვევა სიმპსონის ფორმულას. $(Ts,3)$ ღია ტიპისაა, ამასთან განსხვავებულია მათგან კვანძებითა და წონებით, რადგან კლენშოუ-კურტისის ანუ სიმპსონის ფორმულა ჩაკეტილი ტიპისაა.

ქვემოთ ვაჩვენებთ, რომ ნაშთითი წევრი:

$$E_{Ts,3} = [f;0,h] = O\left(h^5\right).$$

განვიხილოთ ზემოთ მოცემული ფორმულების შესაბამისი, შედარებით რთული – შედგენილი – კვადრატურული ფორმულები. კერძოდ, თუ საინტეგრო შუალედი დაყოფილია $2n$ ნაწილად, ყოველი ქვეშუალედისთვის სიგრძით $2h$, ვსარგებლობთ, მაგალითად, (Sm) ან ტრაპეციის მარტივი

ფორმულით. ასეთი ფორმულების ასაგებად დავუშვათ, რომ y_0, y_1, …, y_{2n} ორდინატებია. გავიხსენოთ, რომ, როდესაც (a,b)-დან გადავდივართ $(0,1)$-ზე, კვადრატურულ ფორმულას გაუჩნდება თანამამრავლი $(b-a)$. თუ $(0,1)$-დან გადავალთ $(0,2h)$-ზე ან $((2n-2)h,2nh)$ ქვეშუალედზე, გაჩნდება თანამამრავლი $2h$. (Sm)-ის ტიპის ყოველი წონის მნიშვნელობა იქნება $\frac{1}{6},\frac{4}{6},\frac{1}{6}$. ამის შედეგად სიმპსონის შედგენილ ფორმულას ექნება სახე:

$$J=\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6n}\left[y_0+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})+y_{2n}\right]. \qquad (Sm')$$

სავარჯიშო. გამოიყენეთ მართკუთხედების და ტრაპეციის (ერთი კვანძით) ფორმულები:

$$J=\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)\,,\ \ J=\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b) \quad \text{და}$$

$$J=\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

შესაბამისი შედგენილი ფორმულების მისაღებად.

2.3. ნიუტონ-კოუტსის ფორმულების ნაშთითი წევრის შეფასება

თუ ვისარგებლებთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულით:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x;f)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i), \qquad (3.1)$$

მაშინ კვადრატურული ფორმულის ცდომილება

$$E(f;a,b)=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}\left[\xi(x_1,x_0,\ldots,x_n)\right]\omega_{n+1}(x)dx\,, \qquad (3.2)$$

სადაც

$$\xi=\xi(x_1,x_0,\ldots,x_n),\ \ \omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

მარტივ შემთხვევაში, როდესაც $\omega_{n+1}(x)\ge 0$ ან $\omega_{n+1}(x)\le 0$,

$$E(f;a,b)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi^*)\int_a^b \omega_{n+1}(x)dx\,,\ \ \xi^*\in[a,b].$$

განვიხილოთ, როგორც წინა ლექციაში, კერძო შემთხვევები.

1. $n=1$, $[a,b]=[0,h]$, $a=0$, $b=h$, $x_0=0$, $x_1=h=b$. (იხ. (3.2)):

$$E[f;0,h]=\frac{1}{2!}f^{(2)}(\xi^*)\int_0^h x(x-h)dx=-\frac{h^3}{12}f^{(2)}(\xi^*).$$

2. $n=0$, $a=0$, $b=h$, $x_0=\dfrac{h}{2}$. (სპეციალური შემთხვევა)

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(\xi).$$

$$\int_0^h f(x)dx=\int_o^h[f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)]dx+\int_0^h\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(\xi(x,x_0))dx,$$

$$\int_0^h f(x)dx=hf\left(\frac{h}{2}\right)+\frac{x-\frac{h}{2}}{2}f'(x_0)\Big|_0^h+E(f;0;h)=hf\left(\frac{h}{2}\right)+E_{Gs,1}(f;0,h). \tag{3.3}$$

(3.3)-ის ნაშთითი წევრია

$$E_{Gs,1}(f;0,h)=\frac{1}{2}\int_0^h\left(x-\frac{h}{2}\right)^2 f''(\xi)dx=f''(\xi^*)\cdot\frac{1}{2}\frac{\left(x-\frac{h}{2}\right)^3}{3}\Bigg|_0^h=\frac{h^3}{24}f''(\xi^*),\ \ \xi^*\in[0,1].$$

შევნიშნოთ, რომ ეს შემთხვევა არაა ნიუტონ-კოუტსის ფორმულებიდან გამომდინარე შედეგი.

$$\int_0^h f(x)dx\approx hf\left(\frac{h}{2}\right)$$

ფორმულას ეწოდება ტრაპეციის ღია ტიპის კვადრატურული ფორმულა ან გაუსის კვადრატურული ფორმულა 1 კვანძით.

3. სიმპსონის ფორმულის ნაშთითი წევრი.

$n=2$, $a=0$, $b=h$, $x_0=0$, $x_1=\dfrac{h}{2}$, $x_2=h$. ამ შემთხვევაში, როგორც ვნახეთ, კვადრატურული ფორმულა იყო:

$$J=\frac{h}{6}[y_0+4y_1+y_2].$$

დავუშვათ, რომ $H_3(x)$ არის მესამე რიგის პოლინომი, რომლის ინტერპოლანტი ლაგრანჟის მეორე რიგის $P_2(x)$ პოლინომია. ამის გამო სამართლიანია წარმოდგენა:.

$$H_3(x)=P_2(x)+A\prod_{k=o}^{2}(x-x_k).,\ \ \forall A=\text{const}.$$

განვიხილოთ $\forall f(x)$ ფუნქცია, რომელსაც მეოთხე რიგამდე ჩათვლით განსახილველ შუალედში აქვს უწყვეტი წარმოებულები. დავუშვათ,

$$f(x)=H_3(x)+R_4[f;x].$$

შევარჩიოთ $H_3(x)$ ისე, რომ იგი იყოს $f(x)$-ის ინტერპოლანტი და შეს-რულდეს პირობა: $f'(0{,}5h)=H_3'(0{,}5h)$. ამისთვის საკმარისია A სიდიდის სათანადოდ შერჩევა, რაც განაპირობებს ნაშთითი წევრის სახეს:

$$R_4[f;x]=K(x)\left(x-\frac{h}{2}\right)\prod_{k=o}^{2}(x-x_k).$$

შემდეგ ნაწილში, გაუსის კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრის შესწავლისას, დაწვრილებით განვიხილავთ უფრო ზოგად შემთხვევას, როდე-საც ყველა კვანძი ორჯერადია. აქ, განსახილველ შემთხვევაში გვაქვს:

$$R_4[f;x]=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(x-\frac{h}{2}\right)\prod_{k=o}^{2}(x-x_k). \qquad (1)$$

გამოვთვალოთ ნაშთითი წევრი:.

$$E_{Sm}[f;0,h]=\frac{-1}{4!}\int_0^h f^{(4)}(\xi)x\left(x-\frac{h}{2}\right)^2(h-x)dx=-\left(\frac{h}{2}\right)^5\cdot\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi).$$

საბოლოოდ,

$$\int_0^h f(x)dx=\frac{h}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{h}{2}\right)+f(x)\right]-\frac{h^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$$

და

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6}\left[f(x)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{(b-a)^5}{2880}\cdot f^{(4)}(\xi). \qquad (2)$$

შევაფასოთ შედგენილი სიმპსონის ფორმულის ნაშთითი წევრი (იხ. (Sm') ფორმულა). აღვნიშნოთ ნაშთითი წევრი $E_{m,2}(f;a,b)$, სადაც m აღნიშნავს ინტერვალთა რაოდენობას, ხოლო $n=2$ პოლინომის რიგს.

$$E_{m,2}(f;a,b)=\sum_{i=1}^{m}E_{i,2}(f;a+(i-1)h,a+ih)=\sum_{i=1}^{m}E_{i,2}[f;i],\ (mh=b-a).$$

(2)-ის ძალით

$$E_{1,2}[f,i]=-\frac{(b-a)^5}{m^5}f^{(4)}(\xi_i)\frac{1}{2880},\quad \sum_{i=1}^{m}E_{i,2}[f,i]=-\frac{(b-a)^5}{m^5}\cdot\frac{1}{2880}\sum_{i=1}^{m}f^{(4)}(\xi_i).$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემით: $\sum_{i=1}^{m}f^{(4)}(\xi_i)=mf^{(4)}(\xi)$.

საბოლოოდ სიმპსონის შედგენილი ფორმულის ნაშთით წევრს აქვს სახე:

$$E_{m,2}(f;a,b)=-\frac{1}{2880}\frac{(b-a)^5}{m^4}f^{(4)}(\xi).$$

4. შევაფასოთ კვადრატურული ფორმულის

$$J_{Ts,3} = \frac{h}{9}\left(2y_0 + 5y_1 + 2y_2\right)$$

ნაშთითი წევრი. ვისარგებლოთ სიმპსონის ფორმულისთვის ჩატარებული სქე-მით. კვანძების მიმართ სიმეტრიულობის გამო ინტეგრალი $\prod_{i=o}^{2}\left(x - x_i\right)$ ფუნ-ქციიდან ნულის ტოლია. $H_3(x)$ ინტერპოლანტის შემოყვანით ინტერ-პოლაციის ნაშთით წევრს ექნება ანალოგიური სახე იმ განსხვავებით, რომ მარტივი ნულები იქნება x_0, x_2, ხოლო $x_1 = 0.5h$ – ორჯერადი ნული. ამრიგად:

$$R_{Ts,3}[f;0,h] = \frac{1}{4!}\int_0^h f^{(4)}(\xi)(x - 0.5h)\prod_{i=0}^{2}(x - x_i)dx,$$

საიდანაც, იმის გამო, რომ x_i ჩებიშევის პირველი გვარის მესამე ხარისხის პოლინომის ნულებია, ნაშთითი წევრისთვის სამართლიანია შეფასება:

$$\left|E_{Ts,3}[f;0,h]\right| \le \frac{1}{3072}h^5 M_4.$$

5. კვადრატურულ ფორმულათა საინტერესო კლასს წარმოადგენს კლენშოუ-კურტისის მიერ აგებული დახურული ტიპის კვადრატული ფორმულა (იხ. C.W. Clanshaw, A.R. Curtis, Numerishe Mathematick, 2,1960, 197-205)), რომელშიც კვანძებად გამოყენებული იყო

$x_k = \cos(k\pi/n)$, $k = 0(1)n$:

$$I(f;-1,1) = \int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k) + E[f;-1,1], \qquad (1a)$$

წონები მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$A_k^{(n)} = A_n^{(n)} = \frac{1}{n^2 - 1}, A_k^{(n)} = 2\frac{n^2 - 1 - (-1)^k}{n(n^2 - 1)} - \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n/2 - 1}\frac{\cos(2ik\pi/n)}{4j^2 - 1}, \; k = 1(1)n - 1, \qquad (2)$$

$(1a)$-გან განსხვავებით, თუ კვანძებად ავირჩევთ ჩებიშევის I გვარის $T_{n+1}(x)$ პოლინომის ნულებს: $x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}$, $k = 1(1)(n+1)$, მაშინ (1) ტიპის ფორ-მულა იქნება ღია ტიპის

$$I_{Ts}[f;-1,1] = \sum_{k=0}^{n} nB_k^{(n)} f(x_k) + E_{Ts}[f;-1,1], \qquad (1b)$$

$$B_k^{(n)} = \int_{-1}^{+1} \frac{T_{n+1}(x)}{(x-x_k)T_{n+1}(x_k)} dx \, , T_{n+1}(x_k) = 0 \, , k = 0(1)n \tag{3}$$

აშკარაა, რომ ($1a$) კვადრატურული ფორმულები ნიუტონ-კოუტსის ტიპისაა და (2)-ით გამოსახული $A_k^{(n)}$ წონების ნიშანგანსაზღვრულობის საკითხი ღია პრობლემაა. ამდენად, ($1a$)-ით სარგებლობის უპირატესობის დამტკიცება თანაბრადდაშორებული კვანძების მქონე ნიუტონ-კოუტსის ფორმულებთან შედარებით სათუოა, გარდა პრაქტიკული ხასიათის თვალსაჩინო შემთხვევებისა.

მეორე მხრივ, წონების ნიშანგანსაზღვრულობა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია კვადრატურული პროცესების კრებადობისა და კოშის ამოცანების რიცხვითი ინტეგრების პრობლემების შესწავლისას.

ამგვარად, არსებითია ($1b$)-ით განსაზღვრული $B_k^{(n)}$ წონების ნიშანგანსაზღვრულობის გამოკვლევა. ამ მიმართულებით, სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

<u>თეორემა 1.</u> თუ x_k კვანძები $T_{n+1}(x)=0$ განტოლების ფესვებია, მაშინ $B_k^{(n)} > 0$.

დამტკიცება. ვისარგებლოთ ქრისტოფელ-დარბუს იგივეობით (მაგ. Dunham Jackson, Fourier series and orthogonal polynomials, 1941)

$$(t-x)\sum_{k=o}^{n} P_k(t)P_k(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}}[P_{n+1}(t)P_n(x) - P_n(t)P_{n+1}(x)] \, , \tag{4}$$

სადაც $P_k(x)$ აღნიშნულია ნებისმიერი წონით განსაზღვრული პოლინომები, a_n/a_{n+1} ფარდობა განისაზღვრება ამ პოლინომებისათვის რეკურენტული დამოკიდებულებისაგან. ჩებიშევის I გვარის $T_n(x)$ პოლინომებისათვის, რომლებიც ორთოგონალურია $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ წონით, (4) გადადის შემდეგ იგივეობაში

$$\sum_{k=o}^{n} T_k(t)T_k(x) = \frac{1}{2}\frac{T_{n+1}(t)T_n(x) - T_n(t)T_{n+1}(x)}{t-x} \, . \tag{4'}$$

თუ დავუშვებთ, რომ $t = x_k$, $T_{n+1}(x_k) = 0$ და $(4')$-ს ვაინტეგრებთ (-1,1) შუალედში, მივიღებთ

$$B_k^{(n)} = \int_{-1}^{+1} \frac{T_{n+1}(x)}{(x-x_t)T'_{n+1}(x_k)}dx = \frac{2}{T'_{n+1}(x_k)T_n(x_k)} \sum_{i=0}^{n} T_i(x_k) \int_{-1}^{+1} T_i(x)dx \,. \tag{5}$$

შევისწავლოთ (5)-ის მარჯვენა მხარეში შემავალი წევრები.

$T'_{n+1}(x_k)$ -თვის გვაქვს:

$$T'_{n+1}(x_k) = +\frac{n+1}{\sqrt{1-x^2}} \sin[(n+1)\arccos x] \Big|_{x=x_k}$$

$$= +\frac{n+1}{\sqrt{1-x_k^2}} \sin((2k-1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^{k-1} \frac{n+1}{\sqrt{1-x_k^2}} \tag{6a}$$

$T_n(n)$ პოლინომები, როგორც ცნობილია, აკმაყოფილებენ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \,. \tag{7}$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა: $k < \frac{n}{2} + 1$, $\quad k > \frac{n}{2} + 1$.

პირველი შემთხვევისათვის გვაქვს $2k-1 < n \Rightarrow \frac{2k-1}{n+1} < 1$, ამიტომ

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{n+1}\frac{\pi}{2} > 0 \,, \; k < \frac{n}{2} + 1 \tag{6b}$$

მეორე შემთხვევისათვის, $2k-1 > n \Rightarrow 2k-1 \geq n+1$, მაგრამ, რადგან $k \leq n$, ამიტომ

$2k+1 \leq 2n-1 < 2n+2 \qquad \frac{2k-1}{2(n+1)} < 1$; $\frac{2k-1}{n+1} > 1$, ამის გამო მეორე შემთხვევისათვის

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{n+1}\frac{\pi}{2} < 0 \,, \; (k > \frac{n}{2} + 1) \tag{6c}$$

დავუბრუნდეთ პირველ შემთხვევას: $0 < x_k < 1$. გვაქვს

$$T_{n-1}(x_k) = \cos[(n-1)\frac{2k-1}{n+1}\frac{\pi}{2}] = \cos[(1-\frac{2}{n+1})(k-\frac{1}{2})\pi]$$

$$= \cos[k\pi - (\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{n+1})\pi] = (-1)^k \cos[(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{n+1})\pi = (-1)^{k+1} \sin\frac{2k-1}{n+1}\pi \,,$$

რადგან $\sin\frac{2k-1}{n+1}\pi > 0$, ამიტომ (7) ტოლობიდან გვაქვს:

$$sign\{x_k T_n(x_k)\} = sign(T_{n-1}(x_k)) = (-1)^{k+1} \Rightarrow signT_n(x_k) = (-1)^{k+1}$$

განვიხილოთ $-1 < x_k < 0$ შემთხვევა. ანალოგიურად,

$$T_{n-1}(x_k) = \cos[k\pi - (\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{n+1})\pi] = (-1)^{k+1} \sin\frac{2k-1}{n+1}\pi .$$

რადგან $\frac{2k-1}{n+1} > 1$, ამიტომ $\sin\frac{2k-1}{n+1}\pi < 0$.

ამის გამო,

$$sign\{x_k T_n(x_k)\} = sign\{T_{n-1}(x_k)\} = (-1)^{k+2} \Rightarrow sign\{T_n(x_k)\} = (-1)^{k+3} = (-1)^{k+1}$$

ამგვარად, ორივე შემთხვევაში,

$$sign\{T'_{n+1}(x_k)T_n(x_k)\} = (-1)^{2k+2} = 1 > 0 \qquad (6e)$$

დავუშვათ, $x_k = 0$, ასეთ შემთხვევაში, $T_{n+1}(0) = 0 \Rightarrow n = 2s$ და $T_{n-1}(0) = 0$.

ამის გამო, $T_{n-1}(x) = xQ_{n-2}(x)$, $Q_{n-2}(0) \neq 0$, ამიტომ

$$\sin g\{Q_{n-2}(0)\} = \sin g\{T_n(0)\} = (-1)^{k+1} \qquad (6f)$$

დავუბრუნდეთ (5)-ს და გამოვითვალოთ:

$$J\,[i;1] = \int_{-1}^{+1} T_i(x)dx = \int_0^{\pi} \cos it \sin t dt \quad (i = 0(1)n)$$

$$J\,[0;1] = -\cos t \ \Big|_0^{\pi} = 2\,, J[1,1] = 0, \qquad (8a)$$

$$J\,[i;1] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin(i+1)t - \sin(i-1)t)dt = -\frac{1}{2}\frac{\cos(i+1)t}{i+1} + \frac{1}{2}\frac{\cos(i-1)t}{i-1} \ \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i-1}) - \frac{1}{2}\frac{(-1)^{i+1}}{i+1} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^{i-1}}{i-1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{i-1-i-1}{i^2-1} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^i[i-1-i-1]}{i^2-1} = \frac{-1}{i^2-1}[1+(-1)^i] \quad i \geq 2 \ . \qquad (8b)$$

ამგვარად, (5)-დან (8)-ის ძალით გამომდინარეობს:

$$\sum_{i=0}^{n} T_i(x_k)\int_{-1}^{+1} T_i(x)dx$$

$$= 2 - 2\sum_{i\geq 2(2)}^{n} \frac{1}{i^2-1}T_i(x_k) = 2(1 - \sum_{i\geq 2(2)}^{n}\frac{1}{i^2-1}\cos[i\arccos(\cos\frac{2k-1}{2(n+1)}\pi)] =$$

$$= 2(1 - \sum_{i\geq 2(2)}^{n}\frac{1}{i^2-1}\cos\frac{i(2k-1)}{2(n+1)}\pi)\,.$$

(9)

შევაფასოთ

$$S_n = \sum_{i\geq 2(2)}^{n} \frac{1}{i^2-1}\cos[i\arccos(\cos\frac{2k-1}{2(n+1)}\pi)], \quad n \leq 2s+1$$

.

$$S_n \leq \sum_{i=2(2)}^{2s} \frac{1}{i^2-1}\cdot 1 = \frac{1}{2}\sum_{i=2(2)}^{n}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{2}(\sum_{i=2(2)}^{2s}\frac{1}{i-1} - \sum_{i=2(2)}^{2s}\frac{1}{i+1})$$

$$= \frac{1}{2}(\sum_{1(2)}^{2s-1}\frac{1}{j} - \sum_{3(2)}^{2s+1}\frac{1}{j} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1} - \frac{1}{2s+1}) = \frac{1}{2}\frac{2s+1-1}{2s+1} = \frac{s}{2s+1} < \frac{1}{2}.$$

$$B_k^{(n)} = \frac{2}{T'_{n+1}(x_k)T_n(x_k)}\sum_{i=0}^{n} T_i(x_k)\int_{-1}^{+1} T_i(x)dx$$

.

$$= \frac{2\sin x_k}{(n+1)\sin x_k}\cdot(1\cdot 2 - \sum_{i\geq 2(2)}^{n}\frac{2}{i^2-1}\cos[i\arccos(\cos\frac{2k-1}{2(n+1)}\pi)])$$

$$B_k^{(n)} > \frac{4}{n+1}(1 - \sum_{i\geq 2(2)}^{\infty}\frac{1}{i^2-1})$$

.

$$= \frac{4}{n+1}[1-\frac{1}{2}(\sum_{i\geq 2(2)}^{\infty}\frac{1}{i-1} - \sum_{i\geq 2(2)}^{\infty}\frac{1}{i+1})] = \frac{4}{n+1}(1-\frac{1}{2}) = \frac{2}{n+1} > 0.$$

როდესაც კვადრატურული ფორმულების კვანძებად გამოყენებულია ჩებიშევის პირველი გვარის პოლინომის ფესვები, ზემოთ განხილული მეოთხე მაგა-ლითის ანალოგიურად სამი კვაძისათვის, მაგისტრანტ ლ. აბზიანიძის მიერ გამოთვლილ იქნა შესაბამისი წონები, როდესაც $n = 4,5,...,11$. კვანძები და წონები განსაზღვრულია $x \in [0.1]$.

ქვემოთ ცხრილში მოყვანილია p კოეფიციენტების მნიშვნელობები $n = 4,5,6,7,8,9,10,11$-სათვის. გამოთვლები ჩატარებულია შემდეგი ფორმულე-ბის გამოყენებით.

$$p_k = \int_0^1 \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{t-t_i}{t_k-t_i}dt \; ; \quad k = \overline{1,n},$$

სადაც $t_i = \dfrac{x_i+1}{2}$; $i = \overline{1,n}.$ და x_i არის n-ური რიგის ჩებიშევის პოლინომის i-ური ფესვი და გამოითვლება ფორმულით $x_i = \cos\left(\dfrac{2i-1}{2n}\pi\right).$

	n=4	n=5	n=6	n=7
p_1	0.132148869802242	0.0838906142333418	0.0593305106906179	0.0433580903633612
p_2	0.367851130197758	0.262776052433325	0.188888888888889	0.143915697394346
p_3	0.367851130197758	0.306666666666667	0.251780600420493	0.199120770065422
p_4	0.132148869802242	0.262776052433325	0.251780600420493	0.227210884353742
p_5		0.0838906142333418	0.188888888888889	0.199120770065422
p_6			0.0593305106906179	0.143915697394346
p_7				0.0433580903633612

	n=8	n=9	n=10	n=11
p_1	0.0334914728492949	0.0263683249549534	0.0214695597870654	0.0176988582802572
p_2	0.111493966507289	0.0895943562610229	0.0729374596886955	0.0608477669520386
p_3	0.162076259532262	0.132018611270502	0.11015873015873	0.0924416242945135
p_4	0.192938301111154	0.165422587584068	0.140439609331938	0.120994808076864
p_5	0.192938301111154	0.173192239858907	0.154994641033571	0.13624729789941
p_6	0.162076259532262	0.165422587584068	0.154994641033571	0.143539288993834
p_7	0.111493966507289	0.132018611270502	0.140439609331938	0.13624729789941
p_8	0.0334914728492949	0.0895943562610229	0.11015873015873	0.120994808076864
p_9		0.0263683249549534	0.0729374596886955	0.0924416242945135
p_{10}			0.0214695597870654	0.0608477669520386
p_{11}				0.0176988582802572

2.4. კვადრატურული ფორმულების მიახლოების ზუსტი შეფასება

ჩვენ მიერ ზემოთ შესწავლილ იქნა კვადრატურული ფორმულების ნაშთითი წევრების შეფასების საკითხი იმ შემთხვევებისათვის, როდესაც ყოველი კონკრეტული კვადრატურული ფორმულისათვის დასაშვებ ფუნქციათა კლასის სიგლუვის რიგი განისაზღვრებოდა იმ პოლინომთა მაქსიმალური ხარისხით, რომლებისთვისაც აღებული კვადრატურული ფორმულა იყო ზუსტი. მაგალითად, ტრაპეციის ერთ- და ორკვანძიანი ფორმულებისათვის მაქსიმალური რიგი ორის ტოლია, ხოლო სიმპსონის ფორმულისათვის – ოთხის.

საინტერესოა შემდეგი პრობლემის შესწავლა: როგორია კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრის სახე, როდესაც ფუნქციათა კლასის სიგლუვის რიგი მაქსიმალურად დასაშვებ რიგზე ნაკლებია? ანუ, თუ ეს შესაძლებელია, შევაფასოთ კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრი განსხვავებული სიგლუვით განპირობებულ ფუნქციათა კლასებზე.

ცხადია, ცნობილი იყო, რომ შედგენილი კვადრატურული ფორმულები დადებითი წონებით დარბუს ჯამების კონკრეტული სახით განხორციელებაა და

რიმანის ინტეგრალის არსებობის საკითხში არავითარ ახალ ინფორმაციას არ იძლევა. მაგრამ საინტერესოა ზემოთ დასმული პრობლემის გადაჭრა ფუნქციათა ისეთი სიმრავლეებისათვის, რომლებიც ინტეგრებად ფუნქციათა ქვესიმრავლეა და შეიცავს აღებული კვადრატურული ფორმულისათვის სიგლუვის მაქსიმალური რიგით განსაზღვრულ ფუნქციათა სიმრავლეს, რომელთაც ვუწოდოთ ფუნქციათა საშუალედო კლასები.

ზემოთ დასმული პრობლემის სისტემატური ხასიათის შესწავლა უკავშირდება, პირველ რიგში, არტურ სარდის სახელს და შესაბამისი გამოკვლევები გადმოცემულია მისივე შრომებში. მომდევნო პერიოდში (1960-1980 წწ.) აღნიშნული პრობლემატიკის მიმართულებით აღსანიშნავია მრავალი გამოჩენილი მათემატიკოსის მოღვაწეობა, მათ შორის ა. კოლმოგოროვისა და ს. ნიკოლსკის, ქვემოთ მოყვანილი გადმოცემულია ს. ნიკოლსკის სახელმძღვანელოს: „კვადრატული ფორმულები“, მოსკოვი, ნაუკა, 1987 წ. (რუსულ ენაზე) მიხედვით.

1. ფუნქციათა კლასები. ქვემოთ შემოვიყვანთ ფუნქციათა საშუალედო კლასებს.

განვიხილოთ ისეთი $f(x)$ ფუნქციები, რომლებიც $[a,b]$ შუალედში უწყვეტია და აქვს უბან-უბან უწყვეტი პირველი რიგის წარმოებული. ასეთ კლასს აღვნიშნავთ $W^{(1)}(M;a,b)$ სახით, თუ $|f'(x)| \le M$.

თუ ფუნქციათა კლასს $[a,b]$-ზე აქვს $(r-1)$ რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები, ხოლო r რიგის წარმოებული უბნობრივ უწყვეტია და იგი შემოსაზღვრულია M_r რიცხვით, მაშინ ასეთ კლასს აღვნიშნავთ $W^{(r)}(M_r;a,b)$ სიმბოლოთი.

თუ დავუშვებთ, რომ r (როგორც ზემოთ) მთელი არაუარყოფითი რიცხვია, $0<\alpha\le 1$,მაშინ $W^{(r)}H^{(\alpha)}(M;a,b)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $[a,b]$-ზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციათა კლასი, რომელთა r რიგის წარმოებულები ნებისმიერი $x,x'\in[a,b]$ აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას:

$$\left|f^{(r)}(x)-f^{(r)}(x')\right|\le M|x-x'|^{\alpha}.$$

აღვნიშნოთ $W^{(r)}H^{(\alpha)}(a,b)$-ით (M-ის გარეშე) ყველა იმ ფუნქციათა კლასი, რომლის ყოველი ელემენტი რომელიმე M-თვის ეკუთვნის $W^{(r)}H^{(\alpha)}(M;a,b)$-ს.

ასეთნაირად განსაზღვრული $W^{(r)}H^{(\alpha)}(a,b)$ კლასები იძლევა უწყვეტ და წარმოებად ფუნქციათა გარკვეულ კლასიფიკაციას. $r+\alpha$ სიდიდის გაზრდა იწვევს $f(x)$ ფუნქციის, თუ იგი ეკუთვნის $W^{(r)}H^{(\alpha)}(a,b)$-ს, დიფერენციალური თვისებე-

ბის გაუმჯობესებას. კერძოდ, თუ $r_1+\alpha_1<r_2+\alpha_2$, მაშინ $W^{(r_1)}H^{(\alpha_1)}(a,b) \supset W^{(r_2)}H^{(\alpha_2)}(a,b)$.

ზემოთ განსაზღვრული $W^{(r)}H^{(\alpha)}(a,b)$ ფუნქციათა კლასის განზოგადებას წარმოადგენს $W^{(r)}H_{\omega}(a,b)$ ფუნქციათა კლასი, თუ $f^{(r)}(x)$ ფუნქცია, როდესაც $x,x'\in[a,b]$, აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$\left|f^{(r)}(x)-f^{(r)}(x')\right|\le\omega(x-x') \quad , \ \omega(\delta)=\max\left|f^{(r)}(x)-f^{(r)}(x')\right|, |x-x'|\le\delta ,$$

როგორც ცნობილია, $\omega(\delta)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტობის მოდული.

ცხადია, რომ $W^{(r)}H^{(\alpha)}(M;a,b)$ ფუნქციათა კლასი დაემთხვევა $W^{(r)}H_{\omega}(a,b)$ კლასს, თუ $\omega(x)=Mx^{\delta}$.

2. ტეილორის ფორმულა. ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)\in W^{(r)}(M;a,b)$. ასეთ შემთხვევაში, სამართლიანია წარმოდგენა:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{1}{(r-1)!}\int_a^x(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt . \tag{2.1}$$

(2.1) წარმოადგენს ტეილორის ერთ-ერთ ფორმულას, რომლისთვისაც ნაშთითი წევრი წარმოდგენილია ინტეგრალური სახით. იგი მტკიცდება მარტივად ნაშთითი წევრისათვის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის თანდათანობითი r-ჯერ გამოყენებით. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $K_r(u)=\{u^{r-1},u\ge 0;0,u<0\}$,

მაშინ ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრი მიიღებს სახეს:

$$R_r(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^x(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)d \ =\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b K_r(x-t)f^{(r)}(t)d \quad . \tag{2.2}$$

3. კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრის შეფასება ფუნქციათა კლასებზე. განვიხილოთ ნებისმიერი კვადრატურული ფორმულა:

$$\int_a^b f(x)dx\approx L(f)=\sum_0^{m-1}p_k f(x_k), \tag{3.1}$$

განსაზღვრული p_k წონებითა და $a\le x_0<x_1<\ldots<x_{m-1}\le b$ კვანძებით.

ჩავთვალოთ, რომ (3.1) ზუსტია ყველა $r-1$ ხარისხის პოლინომებისათვის.

ასეთ შემთხვევაში, თუ $f(x)\in W^{(r)}(M;a,b)$, შევაფასოთ (3.1) წარმოდგენის სიზუსტე. იმის გამო, რომ (3.1) ზუსტია ნებისმიერი $P_{r-1}(x)$ $r-1$ რიგის პოლინომებისათვის, დირიხლეს ფორმულის გამოყენებით, სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\int_a^b f(x)dx - L(f) = \int_a P_{r-1}(x)dx - L(P_{r-1}) + \int_a^b R_r(x)dx - L(R_r) = \int_a^b R_r(x)dx - L(R_r)$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b\int_a^b K_r(x-t)f^{(r)}(t)dtdx - \frac{1}{(r-1)!}\sum_0^{m-1} p_k \int_a^b K_r(x_k-t)f^{(r)}(t)dt$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b\left[\int_t^b (x-t)^{r-1}dx \ \ -\sum_0^{m-1} p_k K_r(x_k-t)\right]f^{(r)}(t)dt$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b\left[\frac{(b-t)^r}{r} - \sum_0^{m-1} p_k K_r(x_k-t)\right]f^{(r)}(t)dt \qquad (3.2)$$

ამგვარად, თუ განვიხილავთ

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{(b-t)^r}{r} - \sum_0^{m-1} p_k K_r(x_k-t)\right], \qquad (3.3)$$

ფუნქციას, კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრისათვის, როდესაც $f(x)\in W^{(r)}(M;a,b)$, სამართლიანია შემდეგი ზუსტი წარმოდგენა:

$$\int_a^b f(x)dx - L(f) = \int_a^b F_r(t)f^{(r)}(t)dt. \qquad (3.4)$$

4. ზოგიერთი კვადრატურული ფორმულის რიცხვითი მუდმივები. დავუშვათ, რომ (3.4)-ში $a=0, b=1$, მაშინ (3.3) მიიღებს სახეს:

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{(1-t)^r}{r} - \sum_0^{m-1} p_k K_r(x_k-t)\right].$$

განვიხილოთ შემდეგი გამოსახულება:

$$c_r = \int_0^1 |F_r(t)|dt = \max\left|\int_0^1 f(x)dx - L(f)\right|, f\in W^{(r)}(1;01),$$

c_r-ტიპის რიცხვები – ფუნქციათა კლასისათვის აბსოლუტური კონსტანტები – შემოყვანილი იყო არტურ სარდის მიერ და მათ სარდის რიცხვებს უწოდებენ.

ვაჩვენოთ, რომ

$$\max\left|\int_0^1 f(x)dx - L(f)\right| = Mc_r, \quad f \in W^{(r)}(M;01).$$

მართლაც, უკანასკნელ გამოსახულებაში ტოლობა მიიღწევა, როდესაც $f^{(r)}(x) = MsignF_r(x)$.

1. მართკუთხედების ფორმულა

ამ შემთხვევაში $m=1, p_0=1, x_0=0.5$, რადგან მართკუთხედების (ანუ გაუსის ერთი კვანძით) წესი ზუსტია წრფივი ფუნქციისათვის, ამიტომ ზემოთ გად-მოცემული სამართლიანია,
როდესაც $r=1,2$.

$$c_1 = \int_0^1 \left|(1-t) - K_1(0.5-t)\right|dt = \int_0^{0.5}\left|(1-t)-1\right|dt + \int_{0.5}^1 (1-t)dt = 0.25,$$

$$c_2 = \int_0^{0.5}\left|\frac{(1-t)^2}{2} - (0.5-t)\right|dt + \int_{0.5}^1 \frac{(1-t)^2}{2}dt = \frac{1}{24}.$$

2.სიმპსონის ფორმულა

ამ შემთხვევაში $m=3, p_0=p_2=1/6, p_1=2/3, x_0=0, x_1=0.5, x_2=1, r=1,2,3,4.$

$$c_1 = \int_0^1\left|\frac{1-t}{1} - 1/6K_1(-t) - 2/3K_1(0.5-t) - 1/6K_1(1-t)\right|dt =$$
$$= 5/36, c_2 = 1/81, c_3 = 1/576, c_4 = 1/2880$$

2.5. გაუსის კვადრატურული ფორმულები

ნიუტონ-კოუტსის ფორმულები, რადგან მათი აგება დამოკიდებული იყო კოეფიციენტების (ანუ წონების) შერჩევაზე, ხოლო კვანძები წინასწარ იყო დასახელებული (ფიქსირებული), ყველა n რიგის პოლინომისთვის ზუსტი იყო. ქვემოთ შევარჩიოთ წონები და კვანძები ისეთნაირად, რომ შესაბამისი კვადრატურული ფორმულა ზუსტი იყოს მაქსიმალურად მაღალი ხარისხის პოლინომისთვის. ამ პრობლემის გადასაჭრელად განვიხილოთ ფუნქციონალის

$$J = \int_{-1}^{+1} l_n^2(x)dx = \int_{-1}^{+1}\left(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0\right)^2 dx \qquad (5.1)$$

მინიმიზაციის პრობლემა a_k კოეფიციენტის მიმართ.

ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა გვაძლევს:

$$\frac{\partial J}{\partial a_k}=\frac{\partial}{\partial a_k}\int_{-1}^{+1} l_n^2(x)dx=2\int_{-1}^{+1} x^k l_n(x)dx=0\,. \tag{5.2}$$

ამგვარად, ასეთი პოლინომის არსებობისთვის აუცილებელია $\forall n$-სთვის იგი იყოს ორთოგონალური ყოველი პოლინომისა, რომლის ხარისხი ნაკლებია n-ზე.

ვიგულისხმოთ, რომ ასეთი პოლინომი არსებობს და ავაგოთ ისეთი კვადრატურული ფორმულები, რომლის კვანძები $l_{m+1}(x)$ $(m+1)$ ხარისხის პოლინომის ნულებია. ნულები აღვნიშნოთ

$$-1<x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m<1\,.$$

ასეთ შემთხვევაში კვადრატურული ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{m} p_k f\left(x_k\right),$$

სადაც p_k წონებია და

$$p_k=\int_{-1}^{+1} q_m^{(k)}(x)dx\,,\ \ q_m^{(k)}(x)=\frac{l_{m+1}(x)-l_{m+1}\left(x_k\right)}{\left(x-x_k\right)l'_{m+1}\left(x_k\right)}\,,\ \ \left(l_{m+1}\left(x_k\right)=0!\right) \tag{5.3}$$

$$l_{m+1}(x)=\prod_{k=0}^{m}\left(x-x_k\right).$$

ვაჩვენოთ შემდეგი დებულების სამართლიანობა:

თუ $f(x)$ $(2m+1)$ *რიგის პოლინომია, მაშინ სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა:*

$$f(x)-\sum_{k=0}^{m}\frac{l_{m+1}(x)-l_{m+1}\left(x_k\right)}{\left(x-x_k\right)l'_{m+1}\left(x_k\right)}f\left(x_k\right)=l_{m+1}(x)S(x)\,, \tag{5.4}$$

სადაც $S(x)$ *არა უმეტეს* m *ხარისხის პოლინომია.*

მართლაც, მარჯვენა მხარეში მაკლები მაინტერპოლებელი პოლინომია, ხოლო მარცხენა მხარე უნაშთოდ იყოფა $l_{m+1}(x)$-ზე, რადგან, $x=x_i$ მისივე ნულია. ამიტომ $S(x)$ განაყოფი ვერ იქნება m-ზე მაღალი ხარისხის პოლინომი, რადგან $f(x)$-ის ხარისხი არ აღემატება $2m+1$-ს.

ჩავთვალოთ, რომ $l_{m+1}(x)$-ისთვის სრულდება (5.2) პირობები. ამის გამო

$$\int_{-1}^{+1} l_{m+1}(x)S(x)dx=0\,, \tag{5.2$'$}$$

რომლის გათვალისწინებით (5.4)-დან გვაქვს:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} p_k f\left(x_k\right). \tag{5.5}$$

ამგვარად, დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება: თუ x_k არის $m+1$ რიგის პოლინომის ნულები და p_k არჩეულია (5.3)-ის მიხედვით, მაშინ (5.5) წარმოდგენა იგივეობაა $\forall\, 2m+1$ რიგის პოლინომისთვის. დასამტკიცებელი დაგვრჩა $l_{m+1}(x)$-ის არსებობა. დავუბრუნდეთ კვლავ აღნიშვნას $m+1=n$. ამიტომ, თუ შესრულებულია (5.2), გვაქვს:

$$J_1 = \int_{-1}^{+1} l_n(x)p(x)dx = 0 \quad \forall p(x),\ \deg p(x) < n, \tag{5.2′}$$

ვეძებოთ $l_n(x)$ პოლინომი შემდეგი სახით

$$l_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} R_{2n}(x), \tag{5.6}$$

სადაც $R_{2n}(x)$ საძიებელი პოლინომია

(5.6) ტოლობის დაშვება, ცხადია, ზოგადობას არ ზღუდავს. ასეთი $R_{2n}(x)$ აიგება $l_n(x)$-ის n-ჯერ ინტეგრებით. რადგან $R_{2n}(x)$ განისაზღვრება $(n-1)$ რიგის პოლინომის სიზუსტით, ავარჩიოთ იგი ისეთნაირად, რომ

$$R_{2n}^{(i)}(-1) = 0 \quad (i = 0,1,2,\ldots,n-1). \tag{5.7}$$

გამოვთვალოთ J_1, როდესაც $l_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} R_{2n}(x)$-ის ტოლია. ნაწილობითი ინტეგრებით გვაქვს:

$$\int_{-1}^{+1} p(x)\frac{d^n}{dx^n} R_{2n}(x)dx = p(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} R_{2n}(x)\Bigg|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} p'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} R_{2n}(x)dx$$
$$= \left[\, p(x)R_{2n}^{(n-1)}(x) - p'(x)R_{2n}^{(n-2)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1} p^{(n-1)}(x)R_{2n}^{(0)}(x)\right]_{-1}^{+1},$$

(5.7)-ის ძალით, უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს:

$$J_1 = p(1)R_{2n}^{(n-1)}(1) - p'(1)R_{2n}^{(n-2)}(1) + \cdots + (-1)^{n-1} p^{(n-1)}(1)R_{2n}(+1) = 0. \tag{5.8}$$

$p(x)$ პოლინომის ნებისმიერობის გამო, (5.8) იგივეობის შესრულებისთვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$R_{2n}^{(i)}(+1) = 0 \quad (i = 0,1,2,\ldots,n-1). \tag{5.9}$$

ამგვარად, (5.2)-ის დასამტკიცებლად საკმარისია ისეთი პოლინომის აგება, რომელიც აკმაყოფილებს (5.7) და (5.9) პირობებს. მაგრამ ასეთი პოლინომია

$$R_{2n}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x+1)^n(x-1)^n \times c_n$$

(ნებისმიერი $c_n = \text{const}$). ამასთან, $R_{2n}(x)$ პოლინომს x^n-თან უნდა ჰქონდეს კოეფიციენტი 1. ამიტომ შევარჩიოთ c.

გვაქვს:

$$\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n)} = 2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)x^n + \cdots,$$

ამიტომ, თუ ავირჩევთ $c_n^{-1} = \binom{n}{2n}$, მაშინ $l_n(x)$ მიიღებს სახეს:

$$l_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n. \qquad (5.10)$$

პოლინომთა კლასს, განსაზღვრულს (5.10) ტოლობით (მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით), ეწოდებათ ლეჟანდრის პოლინომები, ხოლო (5.5) ტოლობით განსაზღვრულ ფორმულას – გაუსის კვადრატურული ფორმულა.

შევნიშნოთ, რომ (5.5) ფორმულა არის კერძო შემთხვევა გაუსის კვადრატურული ფორმულებისა, რომელთაც აქვთ სახე:

$$\int_{-1}^{+1}\rho(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} p_k[\rho]f\left(x_k\right) + E[f;-1,1], \qquad (5.5')$$

სადაც $\rho(x)\ge 0$ ცნობილი წონითი ფუნქციაა.

რამდენადაც (5.9) ზუსტია ნებისმიერი $(2m+1)$ რიგის პოლინომისთვის, ამიტომ (5.4)-ის გათვალისწინებით $\forall f(x)\in C^{(2m+2)}[-1,1]$ სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m}\prod_{\substack{i=0\\ i\ne k}}^{m}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}f\left(x_k\right) + l_{m+1}(x)S(x) + R_{2m+2}[f;x]. \qquad (5.11)$$

ვიპოვოთ R_{2m+2}-ისა და გაუსის ფორმულის ნაშთითი წევრის სახე.

(5.11) გამოსახულების მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომია, მეორე შესაკრებისთვის $x = x_i\left(i=\overline{0,m}\right)$ კვანძები – ნულები, $S(x)$ – ნებისმიერი არა უმეტეს m-ური რიგის მრავალწევრი. თუ (5.11)-ს გადავწერთ ეკვივალენტური სახით:

$$f(x) = H_{2m+1}(x) + R_{2m+2}[f;x].$$

ავაგოთ $S(x)$ ისეთნაირად, რომ შესრულდეს პირობები:

$$f\left(x_i\right) = H_{2m+1}\left(x_i\right),\quad f'\left(x_i\right) = H'_{2m+1}\left(x_i\right)\quad \left(i=\overline{0,m}\right). \qquad (5.12)$$

შევნიშნოთ, რომ აქედან პირველი წყება ფორმულებისა ავტომატურად სრულდება ინტერპოლების პირობების გამო. (5.12)-ის გამო (5.11)-დან გამომდინარეობს, რომ ნაშთითი წევრისთვის სამართლიანია წარმოდგენა:

$$R_{2m+2}[f;x] = K(x)\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)^2 ,$$

სადაც $K(x)$ ექვემდებარება განსაზღვრას.

ისევე, როგორც ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის ნაშთითი წევრის განსაზღვრისას, განვიხილოთ

$$F(z;x) = f(z) - H_{2m+1}(z) - K(x)\prod_{i=0}^{m}(z-x_i)^2 ,$$

x პარამეტრზე დამოკიდებული ფუნქცია. ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ $x \neq x_i : \forall i$. ასეთ შემთხვევაში $F(z;x)$-ს ექნება $2m+3$ ნული: აქედან x_i $\left(i=\overline{0,m}\right)$ ორჯერადი და $z=x$. F'-ს ექნება $2m+2$ ნული: აქედან $z=x_i$ – ერთჯერადი, ხოლო $m+1$ x_i-სა და x-სგან განსხვავებული (როლის თეორემის გამო) ნული, F'' ფუნქცია ნულის ტოლი გახდება $2m+1$ წერტილში და ა. შ. $F^{(2m+1)}$-ს ექნება $2m+3-2m-1=2$ ნული, $F^{(2m+2)}(z;x)$ ფუნქციას – 1 ნული. ამიტომ

$$F^{(2m+2)} = f^{(2m+2)} - 0 - K(x)(2m+2)!$$

თუ $F^{(2m+2)}(z;x)$-ის ნულს აღვნიშნავთ $z=\xi$, უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$K(x) = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \quad (-1<\xi<1)$$

ანუ

$$f(x) = H_{2m+1}(x) + \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!}\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)^2 . \tag{5.13}$$

თუ უკანასკნელ ტოლობას $(-1,+1)$ შუალედში ვაინტეგრებთ, გვექნება:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} p_k f(x_k) + \int_{-1}^{+1}\frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!}\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)^2 dx . \tag{5.14}$$

გავამარტივოთ

$$E_{2m+2}[f] = \int_{-1}^{+1} R_{2m+2}[f;x]dx = \int_{-1}^{+1}\frac{f^{(2m+2)}\left(\xi\left(x,x_0,\ldots,x_m\right)\right)}{(2m+2)!}\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)^2 dx ,$$

(5.2)-ისა და (5.10)-ის ძალით $\omega_{m+1}^2(x) \geq 0$. ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით:

$$E_{2m+2}[f] = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!}\int_{-1}^{+1}\omega_{m+1}^2(x)dx \quad |-1<\xi<1|. \tag{5.15}$$

(5.2)-ისა და (5.10)-ის ძალით (დროებით $m+1=n$) და ნაწილობითი ინტეგრებით:

$$J_3 = \int_{-1}^{+1}\omega_n^2(x)dx = \left(\frac{n!}{2n!}\right)^2\int_{-1}^{+1}\underbrace{\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n}_{u}\cdot\underbrace{\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n dx}_{dv}$$

$$= c_n^2\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\Bigg|_{-1}^{+1} - c_n^2\int_{-1}^{+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^2-1\right)^n\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n dx$$ [1)]

ცხადია, პირველი შესაკრები ნულის ტოლია, რადგან $\left(x^2-1\right)^n$-ის $(n-1)$-ჯერ გაწარმოებით მიღებული წევრი შეიცავს $\left(x^2-1\right)$ თანამამრავლს. კვლავ ნაწილობითი ინტეგრებით

$$c_n^{-2}J_3 = (-1)\left[\frac{d^{n+1}\left(x^2-1\right)^n}{dx^{n+1}}\cdot\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2-1\right)^n\Bigg|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n+2)}\cdot\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n-2)}dx\right]$$

$$= (-1)^2\left[\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n+2)}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n-3)}\Bigg|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n+3)}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n-3)}dx\right]$$

$$= \cdots = (-1)^k\int_{-1}^{+1}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n+k)}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n-k)}dx = \cdots = (-1)^n\int_{-1}^{+1}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(2n)}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n-n)}dx$$

$$= (-1)^n(2n)!\int_{-1}^{+1}\left(x^2-1\right)^n dx.$$

თავის მხრივ, ნაწილობითი ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$J_4 = \int_{-1}^{+1}\left(x^2-1\right)^n dx = \int_{-1}^{+1}(x+1)^n(x-1)^n dx = -n\int_{-1}^{+1}\frac{(x+1)^{n+1}(x-1)^{n-1}}{n+1}dx$$

$$= \cdots = (-1)^n n!\int_{-1}^{+1}\frac{(x+1)^{2n}}{(n+1)\cdots 2n}dx = (-1)^n\frac{[(n!)]^2\cdot 2^{2n+1}}{2n(2n+1)},$$

ამიტომ

$$J_3 = (-1)^n\frac{(n!)^2}{[(2n!)]^2}(2n!)(-1)^n\frac{(n!)^2\,2^{2n+1}}{(2n!)(2n+1)}$$

და

[1)] $dv = \left(x^2-1\right)^{(n)}dx \quad v = \left(x^2-1\right)^{(n-1)}$ ერთ-ერთი პირველყოფილია

$$E_{2m+2}[f]=\frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!}\frac{[(m+1)!]^4\cdot 2^{2m+3}}{[(2m+2)!]^2(2m+3)}=\frac{[(m+1)!]^4\cdot 2^{2m+3}}{[(2m+2)!]^3(2m+3)}f^{(2m+2)}(\xi).$$

შევნიშნოთ, რომ, თუ ინტეგრება ხორციელდება (a,b) შუალედში, მაშინ საინტეგრო ცვლადის გარდაქმნით

$$t=\frac{2x-(a+b)}{b-a},\ \ x=\frac{1}{2}\big((a+b)+t(b-a)\big),$$

$$\omega_{m+1}^2(x)=\prod_{i=0}^{m}\left(x-x_i\right)^2=\prod_{k=0}^{m}\frac{1}{2}\left[t(b-a)+(a+b)-t_i(b-a)-(a+b)\right]^2=\frac{(b-a)^{2m+2}}{2^{2m+2}}\cdot\prod_{i=0}^{m}(t-t_i)^2,$$

$$E_{2m+2}[f;a,b]=\frac{[(m+1)!]^4(b-a)^{2m+3}}{[(2m+2)!]^3(2m+3)}f^{(2m+2)}(\xi),\ \ \xi\in(a,b).$$

გამოვყოთ ზოგიერთი შედეგი:

1) რადგან გაუსის კვადრატურული ფორმულა ზუსტია $2m+1$ ხარისხის პოლინომისთვის, ამიტომ იგი ზუსტია

$$l_{m+1}^{(k)}(x)=\frac{\omega_{m+1}(x)}{\left(x-x_k\right)}$$

პოლინომისთვის. ამის გამო

$$\int_{-1}^{+1}\left[l_{m+1}^{(k)}(x)\right]^2dx=\sum_{i=0}^{m}p_i\left[\frac{\omega_{m+1}(x)}{\left(x-x_k\right)}\right]_{x=x_i}^2=p_k\left[l_{m+1}^{(k)}\left(x_k\right)\right]^2,$$

საიდანაც გამომდინარეობს p_k წონების დადებითობა.

2) გამოვთვალოთ ცხადად p_k წონები. ჩავთვალოთ, რომ $p_n(x)$ არის ლეჟანდრის პოლინომი თვისებით $p_n(-1)=(-1)^n$. ასეთ შემთხვევაში ადგილი აქვს ქრისტოფელის იგივეობას:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2}p_k(t)p_k(x)=\frac{n+1}{2}\ \frac{p_{n+1}(x)p_n(x)-p_n(t)p_{n+1}(x)}{t-x}.$$

თუ აღნიშნულ იგივეობას ვაინტეგრებთ x-ით და t-ს მაგივრად ჩავსვამთ $p_n(x)$ პოლინომის ერთ-ერთ ნულს, მივიღებთ

$$1=-\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{p_{n+1}(x_k)p_n(x)}{(x-x_k)}dx=$$

$$=-\frac{n+1}{2}p_{n+1}(x_k)p_n'(x_k)\int_{-1}^{+1}\frac{p_n(x)}{(x-x_k)p_n'(x_k)}dx.$$

თუ ვისარგებლებთ (5.3) ფორმულით, მივიღებთ

$$p_k = -\frac{2}{(n+1)\,p_{n+1}(x_k)\,p_n'(x_k)}\,.$$

რეკურენტული დამოკიდებულებიდან

$$(n+1)\,p_{n+1}(x) = (2n+1)xp_n(x) - np_{n-1}(x) \Rightarrow$$

$$(n+1)\,p_{n+1}(x_k) = -np_{n-1}(x_k)$$

ამიტომ p_k-თვის გვექნება შემდეგი გამოსახულება:

$$p_k = \frac{2}{np_{n-1}(x_k)\,p_n'(x_k)} \qquad (k = 1,2,...,n)\,.$$

3) p_k წონების გამოსათვლელად, გარდა (5.3) ფორმულებისა, ადგილი აქვს შემდეგ ცხად წარმოდგენებს[1)]

$$p_k = \frac{[(m+1)!]^4\, 2^{2m+3}}{[(2m+2)!]^2 \left(1 - x_k^2\right)\omega_{m+1}'^2(x_k)}\,,$$

$$p_k = \frac{2}{(m+2)!\,p_{m+1}(x_k)\,p_m(x)} = \frac{2\left(1-x_k^2\right)}{(m+1)!\left[\,p_m(x_k)\right]^2} = \frac{2}{np_m(x_k)\,p_{m+1}(x_k)}$$

$p_m(x) = \dfrac{1}{2^m m!}\left[\left(x^2-1\right)^m\right]^{(m)}$ ლეჟანდრის ორთოგონალური მრავალწევრებია.

4) შევნიშნოთ: იმისთვის, რომ გაუსის კვადრატურული ფორმულის შესაბამისი პროცესი $L(f)$, როდესაც $m \to \infty$, იკრიბებოდეს $\int\limits_{-1}^{+1} f(x)dx$-სკენ $\forall f(x)$ $[a,b]$-ზე უწყვეტი ფუნქციისთვის, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერი მრავალწევრისთვის ადგილი ჰქონდეს კრებადობას.

5) მსჯელობის სისრულისთვის, დავამტკიცოთ ლეჟანდრის პოლინომის (მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით) ერთადერთობა. ამისთვის ვაჩვენოთ, რომ, თუ შესრულებულია (5.2) ან (5.2') პირობები, მაშინ $l_{m+1}(x_i) = 0 \quad (i = 0,1,2,\ldots,m)$.

დავუშვათ წინააღმდეგი. ვთქვათ, $l_{m+1}(x)$ ფუნქციას აქვს $k < m+1$ ნული და ეს ნულებია $(i = 1,2,\ldots,k)$. ავირჩიოთ $S(x)$ პოლინომი (5.2')-დან, როგორც $S(x) = \prod\limits_{i=1}^{k}(x - x_i)$. აქედან ცხადია, $l_{m+1}(x)S(x)$ პოლინომი $[-1,1]$-ში ნიშანგანსაზღვრულია, რის გამოც (5.2) პირობა არ შესრულდება.

---

1) დაწვრილებით იხ., მაგ., Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чесноков. Численные методы в задачах и упражнениях, Изд. ВШ, 2000.

2.6. ეილერ-მაკლორენის ტიპის ფორმულები

ამ ნაწილში განვიხილავთ ტიპიურ მაგალითებს ისეთი კვადრატურული ფორმულების აგებისას, რომლებიც, ფუნქციის მნიშვნელობათა გარდა, იყენებს ფუნქციის სხვადასხვა რიგის წარმოებულების სიდიდეებსაც.

კვადრატურული ფორმულების აგების შესახებ კუბური სპლაინ-ფუნქციების გამოყენებით. მეორე თავში მიღებული ფორმულები კუბური სპლაინებისთვის უშუალოდ შეიძლება გამოვიყენოთ კვადრატურული ფორმულების ასაგებად, როგორც მომენტების, ისე დახრილობების შემთხვევაში.
ქვემოთ მოვიყვანთ ერთ ტიპიურ ფორმულას, როდესაც კვადრატურული ფორმულა იგება მეორე თავის (1.2) ფორმულის საფუძველზე. რაც შეეხება დახრილობების შემცველ სპლაინებს, მათ არ მოვიყვანთ იმის გამო, რომ ეილერ-მაკლორენის ფორმულა სწორედ ასეთი სტრუქტურისაა.
ამგვარად, მეორე თავის (1.2)-ით განსაზღვრული გამოსახულების ინტეგრებით (x_{j-1}, x_j) შუალედში გვაქვს:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} S_\Delta(x;f)dx = h_j \frac{f_{j-1}+f_j}{2} - h_j^3 \frac{M_{j-1}+M_j}{24}, \tag{6.1}$$

რომელიც ზუსტია მეორე ხარისხის პოლინომებისთვის.
(6.1)-დან ადვილად მიიღება:

$$\int_a^b S_\Delta(x;f)dx = \sum_{j=1}^N h_j \frac{f_{j-1}+f_j}{2} - \frac{1}{24}\sum_{j=1}^N h_j^3 \frac{M_{j-1}+M_j}{24} h_j^3 \,. \tag{6.2}$$

პერიოდულ შემთხვევაში (6.2)-დან გამომდინარეობს ტრაპეციის წესი, რამდენადაც $M_1 + M_2 + \cdots + M_n = 0$ და ამიტომ (6.2) ფორმულაში თანაბარი ბადის შემთხვევაში M_i-ის შემცველი შესაკრები განულდება.

ეილერ-მაკლორენის ფორმულა. როგორც უკვე ითქვა, ეილერ-მაკლორენის ტიპის ფორმულები ფუნქციის მნიშვნელობებთან ერთად შეიცავენ წარმოებულების მნიშვნელობებსაც. გადმოცემის მთლიანობისთვის ასეთი კვადრატურული ფორმულების ასაგებად გამოვიყენოთ სპლაინები დახრილობებით, თუ m_j სიდიდეებს შევცვლით $f'(x_j)$ სიდიდეებით.

ვისარგებლოთ ნაკვეთი II-ის თავი II-ის (1.10) ფორმულებით და $S_\Delta(x)$ აღვნიშნოთ $H_3(x)$-ით. ამგვარად გვაქვს: $x_{j-1} = a$, $x_j = b$, $m_{j-1} = y'(a)$, $m_j = y'(b)$

$$H_3(x) = y'(a)\frac{(b-x)^2(x-a)}{(b-a)^2} - y'(b)\frac{(x-a)^2(b-x)}{(b-a)^2}$$

$$+\, y(a)\frac{(b-x)^2\left[2(x-a)+b-a\right]}{(b-a)^3}+y(b)\frac{(x-a)^2\left[2(b-x)+b-a\right]}{(b-a)^3}, \tag{6.3}$$

$$f(x)=H_3(x)+R_4[x;f],\;\; R_4[x;f]=(x-a)^2(b-x)^2\,\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}. \tag{6.4}$$

თუ ვაინტეგრებთ (6.4)-ს, როგორც ადრე გავაკეთეთ ნიუტონ-კოუტსის ფორმულების მიღებისას, მაგ., $y(a)$-თან კოეფიციენტი იქნება:

$$\int_a^b \frac{(b-x)\left[2(x-a)+b-a\right]}{(b-a)^3}dx=\frac{1}{2}(b-a),$$

ასევე დაითვლება კოეფიციენტები $y(b)$, $y'(a)$ და $y'(l)$-თან. ამის შედეგად მივიღებთ:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]+\frac{1}{12}(b-a)^2\left[f'(a)-f'(b)\right]$$

$$+\frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(\xi)(x-a)^2(x-b)^2\,dx \tag{6.5}$$

რადგან $(x-a)^2(x-b)^2\geq 0$, ნაშთითი წევრის შეფასებისთვის გვაქვს:

$$E_{E-M}[f;a,b]=\frac{1}{4!}\int_a^b f^{(4)}(\xi)(x-a)^2(x-b)^2\,dx=\frac{(b-a)^5}{720}\,f^{(4)}(\xi_1),\;\; \xi,\xi_1\in(a,b).$$

(6.5) ფორმულიდან, თუ (a,b)-ს გავყოფთ 4 ნაწილად და თითოეული ქვეშუალედისთვის გამოვიყენებთ (6.5)-ს, მივიღებთ ($b-a=nh$)

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)dx=\frac{1}{2}h\left[f(a)+2\big(f(a+h)+\cdots+f(b-h)\big)+f(b)\right]$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{12}h^2\left[f'(a+ih)-f'\big(a+(i+1)h\big)\right]+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^5}{720}\,f^{(4)}(\xi_i)$$

$$=\frac{1}{2}h\left[f(a)+2\big(f(a+h)+\cdots+f(a+(n-1)h)\big)+f(b)\right]$$

$$+\frac{1}{12}h^2\left[f'(a)-f'(b)\right]+\frac{h^4(b-a)}{720}. \tag{6.6}$$

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ ეილერ-მაკლორენის ფორმულის ზოგადი სახე, რომელიც მიიღება, თუ $f^{(4)}(x)$ ფუნქციისთვის გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას და გამოვითვლით შესაბამის (გარდაქმნილ) ნაშთით წევრს. ამის შედეგად ეილერ-მაკლორენის ფორმულას ექნება ასეთი სახე:

$$\int_0^h f(x)dx=\frac{h}{2}\left[f(0)+f(h)\right]+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{B_{2j}}{(2j)!}h^{2j}\left(f^{(2j-1)}(0)-f^{(2j-1)}(h)\right)$$

$$-\frac{B_{2n}}{(2n)!}h^{2n+1}f^{(2n)}(\xi)\,,\ \ \xi\in(0,h)\,,$$

სადაც

$$B_0=1\,,\ B_1=-\frac{1}{2}\,,\ B_2=\frac{1}{6}\,,\ B_4=-\frac{1}{30}\,,\ B_6=\frac{1}{42}\,,\ \cdots,\ \ B_{2j+1}=0\ \ (j>1)\,.$$

ბერნულის რიცხვები და პოლინომები B_n და $B_n(t)$ აკმაყოფილებენ შემდეგ რეკურენტულ დამოკიდებულებებს:

$$B_n=B_n(0)\,.\ \ B_0=1\,.$$

$$B_n(t+1)=B_n(t)+nt^{n-1}\,,\ \ B_0(t)=1\,,\ \ B_1(t)=t-\frac{1}{2}\,.$$

(დეტალები ბერნულის რიცხვებისა და პოლინომების შესახებ იხ., მაგ., И. Березин, Н. Жидков, Методы вычислений, т. 5, М: ФМ, 1959, გვ. 284-297).

კომენტარები და ლიტერატურული მითითებანი

თავი I. „რიცხვითი გაწარმოება“ საცნობარო-გამოყენებითი ხასიათის ნაწილია და მასში ძირითადად გადმოცემულია პირველი და მეორე რიგის წარმოებულთა ანალოგები თანაბარი ბიჯისათვის. ძირითად წყაროებად ვუთითებთ: შ. მიქელაძის [1946], ჰ. მელაძის, მ. მენთეშაშვილის, ნ. სხირტლაძის [2005], ვ. კოსარევის: „12 ლექცია გამოთვლით მათემატიკაში“, თსუ, 2003 - ქართულ, გ. ენგელ-მიუგლერისა და ფ. როიტერის [1990] – გერმანულ, ი. ბერეზინისა და ნ. ჟიდკოვის [1959, ტ. I] – რუსულ, ჯ. ალბერგის, ე. ნილსონისა და ჯ. უოლშის [1967] – ინგლისურ ენებზე გამოქვეყნებულ სახელმძღვანელოებს.

თავი II. „რიცხვითი ინტეგრება“ გადმოცემულია საკმაოდ დეტალურად, კომენტარები და ლიტერატურული მითითებანი მოყვანილია ტექსტშივე სათანადო ადგილას.

ნ ა კ ვ ე თ ი IV

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები

თავი 1. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

1.1. ჩვეულებრივი I რიგის დიფერენციალური განტოლება საწყისი პირობებით. ეილერისა და ეილერ-კოშის მოდიფიცირებული რიცხვითი მეთოდები

ქვემოთ განვიხილავთ პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისთვის კოშის ამოცანის ამოხსნის მეთოდებს რიცხვითი ანალიზის გამოყენებით.

განვიხილოთ

$$\frac{dy}{dx} - f\big(x, y(x)\big) = 0\,, \;\; a < x < b\,, \;\; y(a) = y_a\,, \tag{1}$$

სადაც $y = y(x)$ საძიებელი ფუნქციაა, $f(x, y)$ – ორი ცვლადის ფუნქცია, ხოლო y_a – მოცემული რიცხვი.

ვიგულისხმოთ, რომ $f(x, y)$ განსაზღვრულია მართკუთხედში $\{a \le x < b, -M \le y < M\}$, უწყვეტია ორივე ცვლადის მიმართ, ხოლო მეორე ცვლადის (ე.ი. y-ის) მიმართ აქვს კერძო წარმოებული $\forall x \in (a, b)$. როგორც ცნობილია, ამ შემთხვევაში (1)-ს აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ჩვენ ვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც $f(x, y)$-ს აქვს $\dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y$ წარმოებული, თუმცა (1)-ის ამოხსნადობისთვის საკმარისია, როგორც ცნობილია, რიცხვითი f ფუნქცია აკმაყოფილებდეს ლიპშიცის პირობას მეორე ცვლადის მიმართ.

რიცხვითი ალგორითმების აგების ერთ-ერთი მიდგომა ემყარება ამოცანის დისკრეტიზაციას. ამისთვის $[a, b]$ შუალედს ვყოფთ სასრული რაოდენობის ქვეშუალედებად და ყოველი ქვეშუალედის კიდურა წერტილებს ვუწოდებთ კვანძით წერტილებს, ხოლო ამ წერტილების ერთობლიობას – ბადურ არეს. ამგვარად

$$\omega^{(n)} = \{x_k = a + h_k\,, \;\; k = 0,1,2,\ldots,K, \;\; Kh = b - a\}$$

არის ბადური არე, h ინტეგრების ან ბადის ბიჯი, ხოლო x_k – კვანძები. აღვნიშნოთ:

$$y^{(n)} = \{y_k, \ k = 0,1,\ldots,K\} \ –$$

(1) ამოცანის ამონახსნის საძიებელი მიახლოებითი მნიშვნელობების ერთობლიობა კვანძით წერტილებში:

$$[y]^{(n)} = \{y(x_k), \ k = 0,1,2,\ldots,K\} \ –$$

(1) ამოცანის ამონახსნის ზუსტ მნიშვნელობათა ერთობლიობა ბადის კვანძებში (ყურადღება მივაქციოთ, რომ საზოგადოდ $y_k \neq y(x_k)$).

$y^{(n)}$-ითა და $f^{(n)}$-ით განსაზღვრულ ერთობლიობას ვუწოდოთ ბადური ფუნქციები. ცხადია, $y^{(n)}$ ერთი ცვლადის ბადური ფუნქციაა, ხოლო $f^{(n)}$ განსაზღვრულია $\{x_k, y_k\}$ წერტილების ერთობლიობაზე, ანუ მართკუთხედის კვანძით წერტილებში.

შემოვიყვანოთ რიცხვითი ამონახსნის ცდომილება

$$\delta^{(n)} = y^{(n)} - [y]^{(n)} = \{y_k - y(x_k), \ k = 0,1,\ldots,K\}$$

თუ შევქმნით $(K+1)$ განზომილებიან სივრცეს (ეს სხვადასხვა გზით შეიძლება) და შემოვიყვანთ შესაბამის ნორმას, ანუ $\left\|\delta^{(n)}\right\|$ (ასეთნაირი მახასიათებელია, მაგალითად,

$$\left\|\delta^{(n)}\right\| = \max_k |y_k - y(x_k)|),$$

მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ ასეთნაირ რიცხვს ახასიათებს შემდეგი თვისებები:

1) $\left\|\delta^{(n)}\right\| \geq 0$,

2) $\left\|c\delta^{(n)}\right\| = |c|\left\|\delta^{(n)}\right\|$, თუ c რაიმე ნამდვილი რიცხვია,

3) $\left\|\delta_1^{(n)} + \delta_2^{(n)}\right\| \leq \left\|\delta_1^{(n)}\right\| + \left\|\delta_2^{(n)}\right\|$,

სადაც δ_1 შეესაბამება რაიმე ერთ-ერთ ბადურ ფუნქციას, ხოლო δ_2 – მეორეს.

შემოვიღოთ ასეთნაირი განსაზღვრება: ვიტყვით, რომ რიცხვითი ამონახსნი კრებადია ზუსტისკენ $(y_k \to y(x_k))$, თუ $\left\|\delta^{(n)}\right\| \to 0$, როდესაც $n \to 0$. ასევე ვიტყვით, რომ მეთოდი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ $y(x)$, არის p რიგის სიზუსტის, თუ

$$\left\|\delta^{(n)}\right\| \leq ch^p \ \ (c \geq 0 \ \ h\text{-ისგან დამოუკიდებელი მუდმივია}).$$

ზემოთ მოყვანილ შეზღუდვებში, რომელსაც $f(x \cdot y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებდა, (1) ეკვივალენტურია ვოლტერას შემდეგი მეორე გვარის არაწრფივი ინტეგრალური განტოლებისა

$$y(x) = y(t) + \int_t^x f(\tau, y(\tau))d\tau \quad (a \le t \le x \le b), \quad y(a) = y_a . \qquad (2)$$

(2) საზოგადოდ არის საფუძველი ისეთი ალგორითმების აგებისა, რომელსაც რიცხვით ანალიზში სხვაობიანი სქემები ეწოდება. ეს ტერმინი იმითაცაა განპირობებული, რომ სათანადო სქემები აიგება, თუ $y'(x)$-ს შევცვლით რიცხვითი გაწარმოების ფორმულებით, ანუ წარმოებულებს შევცვლით გაყოფილი სხვაობებით.

ამგვარად, თუ (1)-ში შემავალ წარმოებულს შევცვლით ყოველი ცალმხრივი (მარჯვენა) სხვაობით, ან (2)-ში ავირჩევთ $x = x_{k+1}$, $t = x_k$, ხოლო ინტეგრალს შევცვლით მართკუთხედის (მარცხენა) კვადრატურული ფორმულით, მივიღებთ სქემას, რომელსაც ეილერის მეთოდი ეწოდება

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0,1,2,\ldots,K-1, \quad y_0 = y_a . \qquad (3)$$

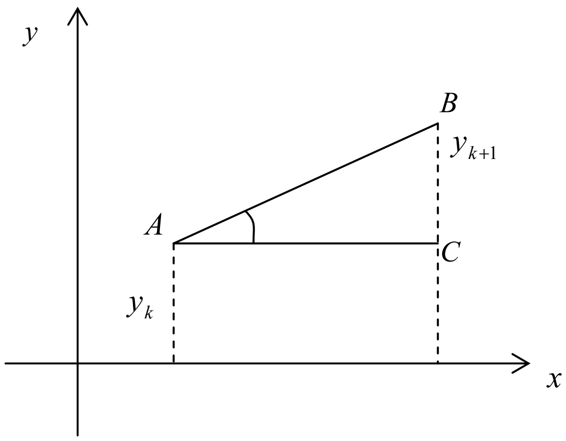
როგორც აღვნიშნეთ, (3) სქემა მიიღება (1)-დან, თუ გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + (x_{k+1} - x_k)y'(x_k) + \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2!} y''(\xi_k), \quad x_k \le \xi_k \le x_{k+1}$$
$$(x_{k+1} - x_k = 1), \qquad (4)$$

უკუვაგდებთ ნაშთით წევრს

$$r_2 = \frac{h^2}{2!} y''(\xi),$$

ხოლო $y'(x_k)$-ს შევცვლით (1)-ის მარჯვენა მხარით – $f(x_k, y_k)$-ით. ადვილი სანახავია, რომ (3) (x_k, x_{k+1}) შუალედში აღწერს ტეხილს:

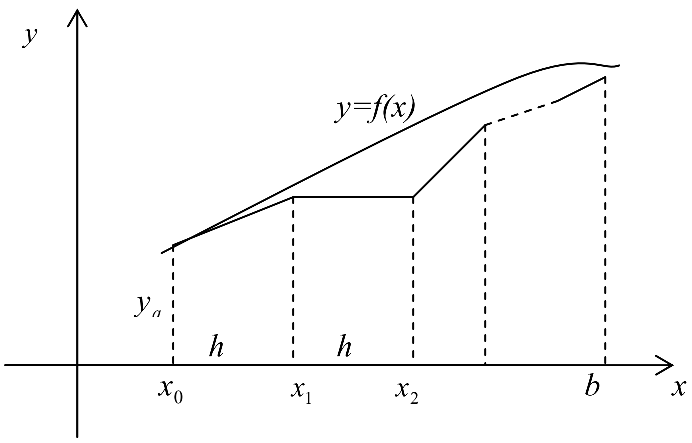


ნახ. 1

AB წრფის განტოლებაა

$$y_{k+1} - y_k = h\,\mathrm{tg}\,BAC = hf(x_k, y_k).$$

ამგვარად, თუ $\mathrm{tg}\,BAC$-ს გავუტოლებთ $f(x_k, y_k)$ რიცხვს და პროცესს დავიწყებთ $x = a$-დან, გვექნება შემდეგი სახის გრაფიკი:



ნახ. 2

ამგვარად, (3) სქემის გეომეტრიული ინტერპრეტაციაა $f(x)$-ის მიახლოება ტეხილით, წრფის მონაკვეთებით.

(4)-ის საშუალებით (3) გამოსახულების ზუსტი ანალოგი შემდეგნაირად გამოიყურება:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k), \;\; y(a) = y_a. \tag{5}$$

ეილერის მეთოდი ეწოდება სქემასაც, რომელიც (1)-დან მიიღება, თუ წარმოებულს შევცვლით მარცხენა სხვაობით

$$y_k - y_{k-1} = hf(x_k, y_k), \;\; k = 1,2,\ldots,K, \;\; y(a) = y_0 = y_a. \tag{6}$$

(5)-ის ანალოგიური გამოსახულება ამ შემთხვევისთვის, ცხადია, შემდეგია:

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + hf(x_k, y(x_k)) - \frac{h^2}{2} y''(\eta_k), \;\; x_{k-1} \le \eta_k \le x_k, \;\; y_0 = y_a.$$

(6)-ით, ცხადია, შესაძლებელია, გამოვთვალოთ ყოველი მომდევნო y_k. ამისთვის საჭიროა, ამოიხსნას ერთუცნობიანი (საზოგადოდ არაწრფივი) განტოლება. ვაჩვენოთ, რომ, თუ $f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულის $\max\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ შემოსაზღვრულია, საკმარისად მცირე h-ისთვის (6)-ით განსაზღვრულ განტოლებას $\forall k$-სთვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი. მართლაც, თუ (6)-ს იტერაციის წესით ამოვხსნით, ასეთნაირი პროცესით ავაგებთ მისივე ამონახსნებს. ჩავთვალოთ, რომ y_{k+1} და x_k მოცემული სიდიდეებია, h – პარამეტრია.

აღვნიშნოთ $y_{k,n}$ სიდიდით (6) განტოლების n-ური იტერაციით აგებული სიდიდე და (6) ასეთნაირად გადავწეროთ:

$$y_{k,n+1} - y_{k-1} = hf\left(x_k, y_{k-1,n}\right), \; y_{k,0} = y_{k-1}. \tag{7}$$

შევაფასოთ

$$y_{k,n+1} - y_{k,n} = \left[y_{k-1} + hf\left(x_k, y_{k,n}\right)\right] - \left[y_{k-1} + hf\left(x_k, y_{k,n-1}\right)\right] = h\left(f\left(x_k, y_{k,n}\right) - f\left(x_k, y_{k,n-1}\right)\right).$$

აქედან სასრული ნაზრდის ფორმულის ძალით გვექნება:

$$y_{k,n+1} - y_{k,n} = h\left(y_{k,n} - y_{k,n-1}\right)f'_y\left(x_k - \xi_{k,n}\right), \; \left(y_{k,n-1} \le \xi_{k,n} \le y_{k,n} \text{ ან } y_{k,n} \le \xi_{k,n} \le y_{k,n-1}\right),$$

$$y_{k,n+1} - y_{k,n} = \left(y_{k,n-1} - y_{k,n-2}\right)h^2 f'_y\left(x_k, \xi_{k,n}\right)f'_y\left(x_k, \xi_{k,n-1}\right) = \cdots$$

$$= \left(y_{k,1} - y_{k,0}\right)h^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_k, \xi_{k,i}\right),$$

$$\left(y_{k,i-1} \le \xi_{k,i} \le y_{k,i} \text{ ან } y_{k,i} \le \xi_{k,i} \le y_{k,i-1}\right) \; \left(\text{აქ } f'_y = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right).$$

h-ის სიმცირისა და f_y-ის შემოსაზღვრულობის გამო, თუ დავუშვებთ, რომ

$$\left|hf'_y\left(x_k, \xi_{k,i}\right)\right| \le q < 1. \tag{8}$$

მაშინ

$$\left|y_{k,n+1} - y_{k,n}\right| \le \left|y_{k,1} - y_{k,0}\right| q^n,$$

რაც ნიშნავს, რომ (7) პროცესი კრებადია და მას ერთადერთი ამონახსნი აქვს, თუ სამართლიანია (8) დამოკიდებულება.

ზემოთ მოყვანილი სქემებიდან ბუნებრივად გამომდინარეობს მიღებული შედეგების იმედიანობის პრობლემა. ჯერჯერობით ჩავთვალოთ, რომ $y^{(n)}$-ის მისაღებად საჭირო გამოთვლები ზუსტად ტარდება (მაგალითად, დამრგვალების ცდომილების გარეშე) და შევისწავლოთ საკითხი: მიღებული შედეგები რამდენად ახლოს იქნება (1) ამოცანის ნამდვილ ამონახსნთან. ამგვარად შევისწავლოთ საკითხი, თუ რამდენად ახლოსაა y_k სიდიდე $y\left(x_k\right)$-სთან ანუ შევაფასოთ ცდომილება $\delta_k = y_k - y\left(x_k\right) \; \forall k$-სთვის.

პირველად განვიხილოთ ცხადი სქემა. (3) ტოლობას გამოვაკლოთ (5):

$$\delta_{k+1} = \delta_k + h\left[f\left(x_k, y_k\right) - f\left(x_k, y\left(x_k\right)\right)\right] - \frac{h^2}{2} y''\left(\xi_k\right). \tag{9}$$

(9) ტოლობის მარჯვენა მხარეში შედის საძიებელი ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული y''. (1) განტოლებიდან გვაქვს

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(f\left(x, y(x)\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f.$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ

$$|f| < c_1, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le c_2, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le c_3,$$

სადაც c_i სასრული რიცხვებია,

ყველა დასაშვები $(x, y) \in R$ გვექნება

$$|y''| \le c_2 + c_1 c_3 = c_4 .$$

ამავე დროს (9)-დან გვაქვს, რომ, თუ

$\left|h((x_k, y_k) - f(x_k, y(x_k))\right| \le hc_3\delta_k$,

$$\delta_{k+1} = \delta_k + h\delta_k f_y'(x_k, \eta_k) - \frac{h^2}{2} y''(\xi_k) \quad \eta_k \in (y_k, y(x_k))$$

ანუ

$$|\delta_{k+1}| \le (1 + hc_3)\delta_k + \frac{h^2}{2} c_4 .$$

აქედან

$$|\delta_{k+1}| \le (1 + hc_3)\left[(1 + hc_3)\delta_{k-1} + \frac{h^2}{2} c_4\right] + \frac{h^2}{2} c_4$$

$$\le (1 + hc_3)2\delta_{k-1} + \frac{h^2}{2} c_4\left((1 + hc_3)^0 + (1 + hc_3)^1\right)$$

$$\le (1 + hc_3)^3 \delta_{k-2} + \frac{h^2}{2} c_4\left((1 + hc_3)^0 + (1 + hc_3)^1 + (1 + hc_3)^2\right) \le \cdots$$

$$\le (1 + hc_3)^{k+1}|\delta_0| + \frac{h^2}{2} c_4 \sum_{m=0}^{k} (1 + hc_3)^m .$$

შევაფასოთ $(c_3 \ne 0)$

$$(1 + hc_3)^{k+1} = (1 + hc_3)^{\frac{x_{k+1}}{h}} = (1 + hc_3)^{\frac{1}{hc_3} \cdot c_3 x_{k+1}} \le e^{c_3 x_{k+1}} \le e^{c_3(b-a)},$$

$$\sum_{m=0}^{k} (1 + hc_3)^m = \frac{(1 + hc_3)^{k+1} - 1}{1 + hc_3 - 1} = \frac{e^{c_3(b-a)} - 1}{hc_3},$$

$$\frac{h^2}{2} c_4 \cdot \frac{e^{c_3(b-a)} - 1}{hc_3} = h\frac{c_4\left(e^{c_3(b-a)} - 1\right)}{c_3 c_4} = hc_5 .$$

ამგვარად $|\delta_{k+1}|$-ისთვის გვექნება:

$$|\delta_{k+1}| \le e^{c_3(b-a)}|\delta_0| + hc_5$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $|\delta_0| = c_6 h \quad (c_6 \ge 0)$, უკანასკნელი უტოლობიდან

$$|\delta_{k+1}| \le c_7 h$$

ანუ

$$\|\delta_{k+1}\| \le c_7 h \quad \forall\, k = 0,1,2,\ldots,K\,.$$

ამგვარად, ეილერის (ცხადი) მეთოდი კრებადია პირველი რიგის სიზუსტით.

ეილერ-კოშის მოდიფიცირებული მეთოდი. გადავწეროთ (1) შემდეგი სახით:

$$\frac{dy\left(x_k + \frac{1}{2}h\right)}{dx} = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} + O\left(h^2\right) = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\right).$$

თუ ნაშთით წევრს უკუვაგდებთ, გვექნება

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+\frac{1}{2}}\right). \tag{2.1}$$

$y_{k+\frac{1}{2}}$ გამოვთვალოთ ეილერის (ცხადი) მეთოდით:

$$y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k),\; y_0 = y_a. \tag{2.2}$$

თუ (2.2)-ს ჩავსვამთ (2.1)-ში, გვექნება

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}(x_k, y_k)\right),\; y_0 = y_a\,. \tag{2.3}$$

ვაჩვენოთ, რომ (2.3) ამოცანა ახდენს (1) ამოცანის აპროქსიმაციას h-ის მიმართ მეორე რიგის სიზუსტით. ამ მიზნით განვიხილოთ სხვაობა (რომელსაც ვუწოდოთ აპროქსიმაციის ცდომილება):

$$\psi_k = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - f\left(x_k + \frac{h}{2},\, y(x_k) + \frac{h}{2}(x_k,\, y(x_k))\right)$$

$$= \frac{y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) + O\left(h^3\right) - y(x_k)}{h} - f\left(x_k + \frac{h}{2},\, y(x_k) + \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k))\right)$$

$$= f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2}\frac{d}{dx} y'(x)\Big|_{x=x_k} + O\left(h^2\right) - f\left(x_k + \frac{h}{2},\, y(x_k) + \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k))\right)$$

$$= f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2}\frac{d}{dx} f(x, y(x))\Big|_{\substack{x=x_k x=x_k \\ y=y(x_k)}} + O\left(h^2\right) - f(x_k, y(x_k)) - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y(x_k)}}$$

$$-\frac{h}{2} f(x_k, y(x_k)) \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y(x_k)}} + O\left(h^2\right) = \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y(x_k)}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y(x_k)}}\right) - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y(x_k)}}$$

$$-\frac{h}{2} f\left(x_k, y\left(x_k\right)\right) \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y(x_k)}} +$$

$$+O\left(h^2\right) = \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_{kk} \\ y=y(x_k)}} \cdot f\left(x_k, y\left(x_k\right)\right) - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y(x_k)}} f\left(x_k, y\left(x_k\right)\right) + O\left(h^2\right)$$

$$\psi_k = O\left(h^2\right).$$

დებულება დამტკიცებულია.

1.2. კოშის ამოცანის ამოხსნის მრავალწერტილოვანი რუნგე-კუტასა და ადამსის ტიპის მეთოდები

მრავალწერტილოვანი მეთოდების შესახებ. კოშის ამოცანის ამოხსნის მრავალწერტილოვანი მეთოდები ხასიათდება იმით, რომ გამოსათვლელი ამონახსნის მნიშვნელობა მიმდინარე კვანძში დამოკიდებულია არა მხოლოდ წინა (ერთ) კვანძში ცნობილ მონაცემებზე, როგორც ეილერის ცხად სქემებში, არამედ რამდენიმეზე. ფორმალურად ასეთი სქემის მიღება შეიძლება, თუ

$$y'(x) = f\left(x_k, y(x_k)\right) \tag{1}$$

გამოსახულებაში წარმოებულს შევცვლით რიცხვითი გაწარმოების ფორმულით, რომელიც დამოკიდებულია ორზე მეტ კვანძზე, ხოლო $f\left(x_k, y(x_k)\right) = F(x)$-ს მივუახლოვდებით საინტერპოლაციო ფორმულით.

მაგალითად, თუ $x_{k-i} = x_k + ih$, $i = 1,2,3$, მაშინ

$$y_3'\left(x_k\right) = \frac{1}{6h}\left(-2y_{k-3} + 9y_{k-2} - 12y_{k-1} + 11y_k\right) + \frac{h^3}{4}y^{(4)}\left(\xi_k\right).$$

მეორე მხრივ, თუ გამოვიყენებთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულას 3 კვანძით $x_{k-3} = x_k - 3h$, x_{k-2} და x_{k-1}, $F(x)$-ისთვის გვექნება $\left(x_{k\pm i} = x_k + ih\right)$:

$$P_3(x) = \frac{(t+2)(t+1)}{(-3+2)(-3+1)}F\left(x_{k-3}\right) + \frac{(t+3)(t+1)}{(-2+3)(-2+1)}F\left(x_{k-2}\right) +$$

$$+\frac{(t+3)(t+2)}{(-1+3)(-1+2)}F\left(x_{k-1}\right) + O\left(h^3\right)$$

$$F\left(x_k\right) \approx P_3\left(x_k\right) = \frac{2}{+2}F\left(x_{k-3}\right) + \frac{3}{-1}F\left(x_{k-2}\right) + \frac{6}{2}F\left(x_{k-1}\right).$$

მაშინ (1) შეიძლება ასეთნაირად შევცვალოთ:

$$\frac{1}{6h}\left[11y_k - 12y_{k-1} + 9y_{k-2} - 2y_{k-3}\right] + O\left(h^3\right)$$

$$= 3f\left(x_{k-1}, y\left(x_{k-1}\right)\right) - 3f\left(x_{k-2}, y\left(x_{k-2}\right)\right) + f\left(x_{k-3}, y\left(x_{k-3}\right)\right) + O\left(h^3\right),$$

ანუ

$$11y_k - 12y_{k-1} + 9y_{k-2} - 2y_{k-3} = 6h\left[3f_{k-1} - 3f_{k-2} + f_{k-3}\right] + O\left(h^3\right).$$

უკანასკნელ გამოსახულებაში ჯერჯერობით $y_i = y\left(x_i\right)$.

მრავალწერტილოვან სქემას ჩვენს შემთხვევაში ექნება სახე:

$$11\bar{y}_k - 12\bar{y}_{k-1} + 9\bar{y}_{k-2} - 2\bar{y}_{k-3} = 6h\left(3\bar{f}_{k-1} - 3\bar{f}_{k-2} + \bar{f}_{k-3}\right), \ x = x_k . \ t = 0 . \qquad (2)$$

(2) გამოსახულებაში $\bar{y}_k$ ნიშნავს $y(x_k)$ მიახლოებას, ხოლო $\bar{f}_k = f(x_k, \bar{y}_k)$ ნიშნავს – $f(x_k, y(x_k))$-ის მიახლოებას $O(h^3)$ სიდიდის უკუგდების შედეგად.
(2) ფორმულა წარმოადგენს მრავალწერტილოვან ცხად სქემას. ზოგადად (2) ტიპის სქემები შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_m y_{k-m} = h\left(b_0 f_k + b_1 f_{k-1} + \cdots + b_l f_{k-l}\right). \qquad (3)$$

(3) სქემაში ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $a_0 = 1$. (3) სქემას ეწოდება ცხადი, თუ $b_0 = 0$ და არაცხადი, თუ $b_0 \neq 0$.
ზემოთ განხილულ შემთხვევაში $m = 3$, $l = 3$, $b_0 = 0$.
თუ $a_0 = -a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_m = 0$, მაშინ (3)-ს ადამსის სქემებს უწოდებენ.
ადამსის სქემები ადვილად აიგება, თუ (1)-ს (x_{k-1}, x_k) შუალედში ვაინტეგრებთ და

$$J = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x, y(x))dx \text{-ს}$$

გამოვთვლით, მაგალითად, ნიუტონ-კოუტსის $l+1$ კვანძიანი ფორმულით.
(2) და (3) ტიპის სქემების განხორციელებას ხელს უშლის ის გარემოება, რომ ცხრილის გასაფართოებლად საჭიროა ე. წ. საწყისი ცხრილის ცოდნა $\{y_i\}$ $i = 0,1,2,\ldots,s$ $s = \max\{m-1, l-1\}$. ერთ-ერთი ხერხი, რომლის გამოყენებითაც შეიძლება ეს სიძნელე მოიხსნას, მდგომარეობს ტეილორის ფორმულის გამოყენებაში. დავუშვათ, საჭიროა, გამოვთვალოთ $y(x_i)$ $i < s$ საჭირო სიზუსტით. ტეილორის ფორმულა გვაძლევს:

$$y(x_i) = y(x_0) + (x_i - x_0)y'(x_0) + \frac{(x_i - x_0)^2}{2} y''(x_0) + \cdots +$$

$$+ \frac{(x_i - x_0)^p}{p!} y^{(p)}(x_0) + O\left((x_i - x_0)^{p+1}\right).$$

p განისაზღვრება (2) ან (3) სქემებთან შეთანხმებით.
ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $y^{(i)}(x_0)$ $(0 \le i \le p)$ შეიძლება გამოვსახოთ $f(x, y(x))$ ფუნქციის კერძო წარმოებულებითა და f ფუნქციის ხარისხებით. მართლაც,

$$y'(x_0) = f(x_0, \, y(x_0)).$$

$$\frac{d}{dx} y'(x)\bigg|_{x=x_0} = \frac{d}{dx} f(x, y(x))\bigg|_{x=x_0} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) f(x_0, y_0)$$

$$y'''(x)=\frac{d}{dx}y''(x)=\frac{d}{dx}\left[f_x(x,y)+f_y(x,y)\cdot f(x,y)\right]=$$
$$=f_{xx}+2f_{xy}\cdot f+f_{yy}\cdot f^2+f_xf_y+f_y^2\cdot f \tag{4}$$

და ა. შ. (ამ გამოსახულებებში $f_x=\frac{\partial f(x\cdot y)}{\partial x},\ f_y=\frac{\partial f}{\partial x}\Big)$.

i-ური რიგის წარმოებული გამოითვლება შემდეგი ოპერატორის განხილვით:

$$A\cdot[u]=\left(\frac{\partial}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x)=\sum_{k=0}^{m}c_m^k\frac{\partial^m\left(u(x)\right)}{\partial x^{m-k}\partial y^k}$$

(4)-ის შემდგომი გაწარმოება გვიჩვენებს, რომ, თუ რომელიმე წარმოებული, ვთქვათ, $\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^{m-k}\partial y^k}$ გავაწარმოვეთ y-ით, რთული ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის წესის გამო გვექნება

$$\frac{\partial^{m+1}f(x,y)}{\partial x^{m-k}\partial y^{k+1}}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x^{m-k}\partial y^{k+1}}\cdot f\,,$$

რაც ნიშნავს, რომ $\forall i$-სთვის $y^{(i)}(x_0)$ გამოითვლება f-ის კერძო წარმოებულებითა და f-ით.

რუნგე-კუტას მეთოდების შესახებ. მრავალწერტილოვანი მეთოდებისგან განსხვავებით, იმ მეთოდებიდან, რომელიც არ საჭიროებს საწყისი ცხრილის გაფართოებას და აქვს მეორე რიგზე მაღალი სიზუსტე ბიჯის მიმართ, გამოვყოფთ რუნგე-კუტას მეთოდს. ეს მეთოდი თავისი სტრუქტურით მრავალწერტილოვანია, მაგრამ პარამეტრებს ახალ წერტილებში წინა მონაცემებით ითვლის.

გავიხსენოთ ეილერის მარტივი და დაზუსტებული მეთოდები:

$$y_{k+1}=y_k+hf\left(x_k,y_k\right),$$

$$y_{k+1}=y_k+\frac{1}{2}h\left[f\left(x_{k+1},y_k+hf\left(x_k,y_k\right)\right)+f\left(x_k,y_k\right)\right].$$

როგორც პირველი, ისე მეორე სქემა ცხადი ტიპისაა. მათი გაერთიანება ფორმალურად შეიძლება ასეთნაირად:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=\alpha f\left(x_k,y_k\right)+\beta f\left(x_k+\gamma h,y_k+\delta hf\left(x_k,y_k\right)\right) \tag{1.1}$$

ცხადია, როდესაც $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=1$, $\delta=1$, მიიღება ეილერის დაზუსტებული სქემა, ხოლო, როდესაც $\alpha=1$, $\beta=\gamma=\delta=0$, (1.1) გვაძლევს ეილერის ცხად (უმარტივეს) სქემას.

შევარჩიოთ α, β, γ და δ ისეთნაირად, რომ (1.1) გვაძლევდეს დიფერენციალური განტოლების აპროქსიმაციას მეორე რიგის სიზუსტით (ვგულისხმობთ, რომ ფუნქციას აქვს იმ რიგის წარმოებულები, რომლებიც შესაბამისი გარდაქმნებისთვის დაგვჭირდება).

როგორც ზემოთ, ψ_k აპროქსიმაცია განვსაზღვროთ ასეთნაირად:

$$\psi_k = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - \alpha f(x_k, y(x_k)) - \beta f(x_k + \gamma h, y_k + \delta h f(x_k, y(x_k))). \qquad (1.2)$$

(1.1) მიიღება, თუ $y(x_k)$-ს შევცვლით y_k-თი. (1.2)-ში ვისარგებლოთ ტეილორის ფორმულით:

$$\frac{y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{1}{2}y''(x_k) + O(h^3) - y(x_k)}{h} - \alpha f(x_k, y(x_k)) - \beta f(x_k, y(x_k)) - \beta\gamma h \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_k\\ y=y_k}}$$

$$- \beta\delta h f(x_k, y(x_k)) \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_k\\ y=y_k}} = f(x_k, y_k) + \frac{h}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} f\right]_{\substack{x=x_k\\ y=y_k}} - (\alpha+\beta) f(x_k, y(x_k))$$

$$- \beta\gamma h \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} - \beta\delta h f(x_k, y(x_k)) \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial y} + O(h^2).$$

იმისთვის, რომ $\psi_k = O(h^2)$, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$1 = \alpha + \beta, \ \beta\gamma = \frac{1}{2}, \ \beta\delta = \frac{1}{2},$$

საიდანაც

$$\alpha = 1 - \beta, \ \gamma = \delta = \frac{1}{2\beta} \quad \forall \beta \neq 0.$$

ამგვარად (1.1) მიიღებს სახეს:

$$y_{k+1} = y_k + (1-\beta) h f(x_k, y_k) + \beta f\left(x_k + \frac{1}{2\beta}h, y_k + \frac{1}{2\beta} h f(x_k, y_k)\right) \qquad (1.1')_\beta$$

თუ გავიხსენებთ, რომ

$$\psi_k = \frac{1}{h}\frac{h^3}{6}\bar{y}'''(\xi) - \beta\left[\frac{(\gamma h)^2}{2}\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} + 2\frac{\gamma h \cdot \delta h f(x_k, y(x_k))}{2}\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} + \frac{[\delta h f(x_k, y(x_k))]^2}{2}\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}\right],$$

სადაც ხაზი მიუთითებს, რომ წარმოებულები გამოითვლება $(x_k, y(x_k))$ წერტილის მიდამოში. მაგრამ

$$y^m = (y'')' = \left[(y')'\right]' = \left[\frac{d}{dx} f\right]' = \frac{d}{dx}\left[f_x + f_y \cdot f\right] \cdot f^2$$

$$= f_{xx} + f_{xy} \cdot f + f_{xy} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_x f_y + f_y^2 f,$$

ამიტომ

$$\psi_k = \frac{h^2}{6}\left[\bar{f}_{xx} + 2\bar{f}\bar{f}_{xy} + \bar{f}_{yy}\cdot f^2\right] + \frac{h^2}{6}\left[\bar{f}_x\bar{f}_y + \bar{f}_y^2 f\right]$$

$$-\beta h^2 \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\beta^2}\bar{f}_{xx} + 2\cdot\frac{1}{4\beta^2} f\cdot\bar{f}_{xy} + \frac{1}{4\beta^2} f^2\bar{f}_{yy}\right]$$

$$= \frac{h^2}{6}\left[\bar{f}_{xx} + 2\bar{f}\bar{f}_{xy} + \bar{f}_{yy}f^2\right] + \frac{h^2}{6}\left[\bar{f}_x\bar{f}_y + \bar{f}_y^2 f\right] - \frac{1}{8\beta}h^2\left[\bar{f}_{xx} + 2f\cdot\bar{f}_{xy} + f^2\bar{f}_{yy}\right].$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ, $\psi_k = O(h^2)$, რაც ნებისმიერი $f(x,y)$-სთვის შეუძლებელია, თუ არ არის შესრულებული პირობები

$$\beta = \frac{4}{3},\ \ f_x f_y + f_y^2 f = O(h).$$

როგორც ვხედავთ, ჩვენ ზემოთ ავაგეთ რუნგე-კუტას მეორე რიგის სიზუსტის ფორმულები. მეოთხე რიგის სიზუსტის რუნგე-კუტას ფორმულებს აქვთ სახე:

$$y_{i+1} = y_i + h_i\left\{\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right\},$$

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i\cdot k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i\cdot k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = f(x_i + h_i,\ y_i + h_i k_3).$$

ასეთივე ფორმით, თუ $(1.1')_\beta$ გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$y_{i+1} = y_i + h[(1-\beta)k_1 + \beta k_2],$$

$$k_1 = f(x_i, y_i),\ \ k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2\beta}h,\ y_i + \frac{h}{2\beta}k_1\right).$$

$m = 3$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h_i[k_1 + 4k_2 + k_3],$$

$$k_1 = f(x_i, y_i),\ \ k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h_i,\ y_i + \frac{1}{2}k_1\right),\ \ k_3 = f(x_i + h_i,\ y_i - k_1 + 2k_2).$$

სისტემისთვის:

$$y'(x) = f(x,\ y(x),\ z(x)) \quad y(a) = y_0$$

$$z'(x) = g(x,\ y(x),\ z(x)) \quad z(a) = z_0$$

$$\Delta y_0 = y(x_1) - y(x_0) = \frac{1}{6}h[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4],$$

$$\Delta z_0 = x(z_1) - x(z_0) = \frac{1}{6}h[l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4]$$

$$k_1 = f(x_0, y_0), \qquad l_1 = hg_0$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right), \qquad l_2 = hg\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right), \qquad l_3 = g\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3), \qquad l_4 = g(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3).$$

1.3. გაუს-ჰერმიტის მეთოდი

ქვემოთ განვიხილავთ (1) ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის ახალსხვაობიან მეთოდს. იგი ეფუძნება კარლ გაუსის კვადრატულ ფორმულათა თეორიის და შარლ ჰერმიტის საინტერპოლაციო პროცესის გამოყენებას. ასეთნაირი მიდგომა განაპირობებს ადამსის ტიპის სხვაობიანი მეთოდების დაფუძნებას კრებადობისა და მდგრადობის საკითხების გამოკვლევის ჩათვლით.

მეთოდის საილუსტრაციოდ დეტალურად ვიხილავთ მეექვსე რიგის სიზუსტის სქემებს. ნებისმიერი სიზუსტის სქემის განხილვისას პარალელურად შევისწავლით გამოთვლითი ხასიათის პროცედურას. გაუს-ჰერმიტის მეთოდის გადმოცემისას ვისარგებლებთ 3 კვანძიანი კვადრატული ფორმულითა და ჰერმიტის 3 წერტილოვანი ჯერადი საინტერპოლაციო ფორმულით, როდესაც ჩონჩხს (პარამეტრებს) შეადგენს ფუნქციისა და მათი პირველი რიგის წარმოებულთა მნიშვნელობები. გადმოცემის გამარტივების მიზნით და ზოგადობის შეუზღუდავად ჩავთვალოთ, რომ (1)-ში $a = 0, b = l$.

1. გაუსის კვადრატული ფორმულა 3 კვანძით (-1,1) შუალედის შემთხვევაში, როგორც ვნახეთ III ნაკვეთში, ხასიათდება შემდეგი მონაცემებით:

$$l_3(x) = 0 \Rightarrow \; x_0 = -\sqrt{0.6} \quad x_1 = 0, x_2 = \sqrt{0.6} \;, \; p_0 = p_2 = \frac{5}{9}, \; p_1 = \frac{8}{9}.$$

ნაშთითი წევრი ფუნქციათა კლასებისათვის გამოწერილია მაგალითად ნიკოლსკის, სარდის მონოგრაფიებში. ქვემოთ ჩავთვალოთ, რომ $f(x) \in \mathrm{C}^{(6)}[0,1]$. მაშინ ნაშთითი წევრი (იხ. გაუსის კვ. ფორმულები)

$$E_{G_S,2}[f;-1,1] = \frac{1}{15750} f^{(6)}(\xi), \qquad E_{G_S,2}[f;0,h] = \frac{h^7}{504000} f^{(6)}(\xi).$$

$$\int_0^h f(x)dx = \frac{h}{18}[5f(x_{0,0}) + 8f(x_{0,1}) + 9f(x_{0,2})] + E_{G_S,2}[f,0,h]], \qquad (3.1)$$

$$x_{0,0} = \frac{h}{2}\left(1-\sqrt{0.6}\right), \qquad x_{0,1} = \frac{h}{2}, \quad x_{0,2} = \frac{h}{2}\left(1+\sqrt{0.6}\right) \qquad (3.2)$$

სადაც კვანძების ინდექსებიდან პირველი მიუთითებს ქვეშუალედის ნომერს, ხოლო მეორე – კვანძის ნომერს.

$(0,l)$ შუალედისთვის განვიხილოთ შემდეგი დისკრეტული არე (ბადე):

$\omega_h[0,l] = \{x_{0,0}, x_{0,1}, x_{0,2}; x_{1,0}, x_{1,1}, x_{1,2}, ..., x_{2n,0}, x_{2n,1}, x_{2n,2}\}$,

სადაც $x_{k,i} = x_{0,k} + k\dfrac{h}{2}$ (k=0,1,…,2n; i=0,1,2), $l = nh$

ჰერმიტის 3-კვანძიან ორჯერად საინტერპოლაციო ფორმულას (ორდინატებითა და დახრილობებით) აქვს შემდეგი სახე:

$$f(t) = H_5(t) + R[f;t] = \sum_{i=0}^{2}\{y_i(1 - \frac{\varpi_3''(t_i)}{\varpi_3'(t_i)}(t - t_i)) + (t-t_i)y_i'\}L_{2i}^2(t) + \frac{\omega_3^2(t)}{6!}f^{(6)}(\xi),$$

$$(a \le t \le b) \qquad (3.3)$$

სადაც $\omega_3(t) = \prod_{i=0}^{2}(t-t_i), \qquad t \in (a,b), \qquad a < t_0 < t_1 < t_2 < b.$

მარტივი გამოთვლებით:

$$\frac{\omega_3''(t_i)}{\omega_n'(t_i)} = \frac{2[3x - x_0 - x_1 - x_2]}{(x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_1)(x-x_2)} \Bigg|_{x = x_i}$$

$$\frac{\omega_{n+1}''(t_i)}{\omega_{n+1}'(t_i)} = \frac{2[nx - x_0 - x_1 - ..... - x_n]}{\sum\limits_{i,s=0}^{n}\prod\limits_{\substack{j=0,\\ s\neq s}}^{n}(x-x_j)} \Bigg|_{x = x_i}.$$

უშუალო გამოთვლებით ადვილი საჩვენებელია, რომ მართლაც (3.3) კვანძით წერტილებში აკმაყოფილებს ინტერპოლების პირობებს:

$$H_5(t_i) = y(t_i)L_{2i}^2(t_i) = y_i, \qquad L_{2i}(t_j) = 0, \quad i \neq j$$

$$H_5'(t_i) = (-y_i\frac{2\sum\limits_{i\neq j}(t_i - t_j)}{\prod\limits_{i\neq j}(t_i - t_{j)}} + y_i') + [y_i(1 - \frac{2\sum\limits_{i\neq j}(t_i - t_j)}{\prod\limits_{i\neq j}(t_i - t_j)}.0 + 0.y_i')]2L_{.2i}(x_i)L_{2i}'(x_i),$$

$$2L'_{2i}(x_i) = 2(\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{2}\frac{x-x_i}{x_i-x_j})' = 2\frac{\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)}{\prod_{i\neq j}(x_i-x_j)}.$$

ამიტომ $H'_5(x_i) = y'_i$.

გამოვთვალოთ $\omega_{n+1}(t)$ და $\frac{\omega''_{n+1}(t_i)}{\omega'_{n+1}(t_i)}$ სიდიდეები, როდესაც ცვლადი ექვემდებარება გადატანას: t=x+a.

$$\omega_{n+1}(t) = \omega_{n+1}(x+a) = \prod_i (x+a-x_i-a) = \omega_{n+1}(x)$$

$$\omega'_{n+1}(t) = [\frac{d}{dx}\omega_{n+1}(t)]_{t=x+a} = \frac{d}{dx}\omega_{n+1}(x+a)\frac{dx}{dt} = \omega'_{n+1}(x).$$

$$\omega''_{n+1}(t) = \omega''_{n+1}(x).$$

$$L_{ni}(t) = \prod_{i\neq j}\frac{t+t_j}{t_i-t_j} = \prod_{i\neq j}\frac{x+a-x_j-a}{x_i+a-x_j-a} = L_{ni}(x).$$

$$H_5(x) = [y(x_{0,0}+k\frac{h}{2})(1-\frac{\omega''_3(t_0)}{\omega'_3(t_0)})(t\ -t_0)+(t-t_0)y'(x_{0,0}+k\frac{h}{2})]L^2_{20}(t) +$$

$$+ y(x_{0,1}+k\frac{h}{2})(1-\frac{\omega''_3(t_1)}{\omega'_3(t_{2)}})(t-t_1)+(t-t_1)y'(x_{0,1}+k\frac{h}{2})]L^2_{21}(t) +$$

$$+ y(x_{0,2}+k\frac{h}{2})(1-\frac{\omega''_3(t_2)}{\omega'_3(t_2)})(t-t_2)+(t-t_2)*y'(x_{0,2}+k\frac{h}{2})]L^2_{22}(t)$$

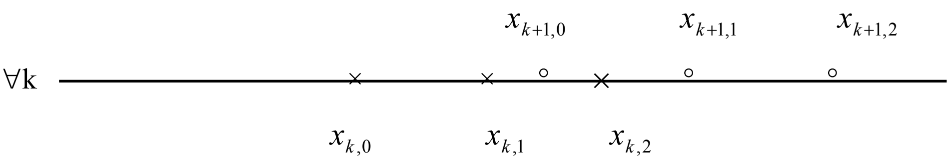
$$x_{k,1} \le x \le x_{k+2,1}$$

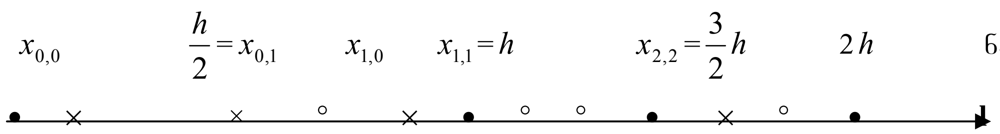
თუ $H_5(x)$ განისაზღვრება $(k\frac{h}{2};(k+2)\frac{h}{2})$ შუალედში, მაშინ (3.3) საინტერპოლაციო ფორმულით, ორდინატები მომდევნო შუალედის კვანძით წერტილებში გამოითვლება – ცნობილი სიდიდეები გამრავლებული $\frac{h}{2}$ სიდიდეზე.

$\frac{\omega''_3(t_i)}{\omega'_3(t_i)}$ და $L_{ni}(t_i)$ სიდიდეები პროპორციულად დაყოფილი ბადისათვის წარმოადგენს ინვარიანტებს.

ამგვარად, კოშის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი გაუს-ჰერმიტის მეექვსე რიგის სიზუსტის ფორმულებისათვის განისაზღვრება შემდეგნაირად: ვუშვებთ, რომ [0,l] შუალედი შეცვლილია $\omega_h[0;l]$ ბადით: $x_{k,i}$ კვანძითი

წერტილებია. ვიგულისხმოთ, რომ ე. წ. საწყისი ცხრილი, ანუ $x_{0,0}, x_{0,1}, x_{0,2}$ წერტილების შესაბამისი ორდინატები ცნობილია (ეს შესაძლებელია განხორციელდეს მრავალნაირად. იტერაციის ხერხით ეს პროცედურა ფაქტიურად განხორციელებულია ეილერის არაცხადი სქემის შესწავლისას). შემდეგ ვსარგებლობთ ჰერმიტის ორჯერადი საინტერპოლაციო ფორმულით, როდესაც კვანძებია $x_{o,i}\,(i=0,1,2)$. მისი საშუალებით ვითვლით ორდინატებს $x_{1,0}, x_{1,2}$ კვანძებში. გეომეტრიულად კვანძების განაწილება მოცემულია ნახ. 1-ზე (ჯვრით აღნიშნულია ინტერპოლების კვანძები $(x_{k,1}, x_{k+2,1})$ შუალედისათვის).





ნახ.1

$x_{0,i}$ ნახაზზე განსაზღვრულია ჯვრით. განვიხილოთ წერტილები $x_{1,0}=x_{0,0}+\frac{h}{2}$ (აღნიშნულია რგოლით). $x_{1,2}=x_{0,2}+\frac{h}{2}$ (აღნიშნული რგოლით) ორდინატები ამ წერტილში განვსაზღვროთ ჰერმიტის ფორმულით, გამოწერილი (0;h)-ის მიმართ $x_{0,0}, x_{0,1}=\frac{h}{2}, x_{0,2}$ კვანძებისათვის. $x=x_{1,1}=h$ წერტილში y(h) ვიპოვოთ გაუსის (3.1) ფორმულით (ნაშთით წევრების უკუგდებით!)

ქვემოთ მოცემული ფორმულით, თუ ორდინატი ცნობილია, გამოვთვალოთ დახრილობების მიახლოებითი მნიშვნელობები (თუმცა ეს შეიძლება ჰერმიტის ფორმულითაც):

$$\bar{y}'(x_{1,i}) = f(x_{1,i};\bar{y}_{1,i}) \qquad i=0,1,2.$$

ამგვარად $x_{1,i}$ წერტილებში ცნობილია $\bar{y}_{1,i}^{(\alpha)}$ $(\alpha=0,1)$ რიცხვები. ჰერმიტის ფორმულით ვიპოვით $\bar{y}_{2,0}$ და $\bar{y}_{2,2}$ სიდიდეებს, ხოლო $x_{2,1}$ კვანძის შესაბამის ორდინატს განვსაზღვრავთ გაუსის ფორმულით. შემდეგ გამოვთვლით კვლავ

$$\bar{y}'(x_{2,i}) = f(x_{2,i};\bar{y}_{2,i}) \qquad i=0,1,2$$

სიდიდეებს, რომელთა დახმარებით ვიპოვით $\bar{y}(x_{3,1})$ და ასე შემდეგ.

ჰერმიტის ფორმულით სარგებლობისას $x_{2,0}, x_{2,1}, x_{2,2}$ კვანძებისათვის გავაგრძელებთ პროცესს $\bar{y}(x_{3,0})$ და $\bar{y}(x_{3,2})$ სიდიდეთა განსაზღვრისათვის, ხოლო $\bar{y}(x_{3,1})$-სთვის ვისარგებლებთ გაუსის ფორმულით და ა. შ. ჩავთვალოთ, რომ ცნობილია მიახლოებით ორდინატები და დახრილობები $x_{k,0}, x_{k,1}, x_{k,2}$ წერტილებში. მათი საშუალებით გამოვწერთ ჰერმიტის ფორმულას და უკანასკნელის გამოყენებით ვიპოვით შესაბამის მნიშვნელობებს $x_{k+1,0}$ და $x_{k+1,2}$ წერტილებში, ხოლო $\bar{y}(x_{k+1,1})$ ორდინატს განვსაზღვრავთ გაუსის ფორმულით. ამგვარად, მიახლოებით ვიპოვით ორდინატებს $x_{k+1,i}$ წერტილებში. დახრილობები განისაზღვრება პირობიდან

$$\tilde{y}'_{(x)} = f(x, \tilde{y}(x))$$

ამ პროცესის შედეგად (3.3) ფორმულების პარალელურად ვსარგებლობთ გაუსის შემდეგი ფორმულებით:

$$\bar{y}(x_{k,1)} = y(0) + \int_0^{x_{k,1}} f(x, \bar{y}(x)dx = y(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{x_{j,1}}^{x_{j+1,1}} f(x, \bar{y}(x)dx =$$

$$y(0) + \frac{h}{18}\sum_{j=0}^{k-1}(5f(x_{j,0}; \bar{y}_{j,0}) + 8f(x_{j,1}; y_{j,1}) + 5f(x_{j,2}; \bar{y}_{j,2})) + \sum_{j=0}^{k-1} E_{G_{s},2}[f; x_{j,1}; x_{j+1,1}] \tag{3.4}$$

ამგვარად, ზემოთ განსაზღვრული სქემა წარმოდგება ჰერმიტის ლოკალური h-ის მიმართ მეექვსე რიგის სიზუსტის ფორმულით და გაუსის გლობალური კვადრატული (3.4) პროცესით, რომლის სიზუსტე k-ს ზრდასთან ერთად იკლებს 1-ით და საბოლოოდ სიზუსტე h-ის მიმართ მეექვსე რიგისა იქნება. მდგრადობის პირობა ავტომატურად სრულდება, რადგან მახასიათებელი განტოლების როგორც ლოკალურ, ისე გლობალურ შემთხვევაში ყველა ფესვი მარტივია და მოდულით 1-ის ტოლია. ასეთ შემთხვევაში როგორც ცნობილია, სამართლიანია დალკვისტის შედეგები მდგრადობის შესახებ (იხ. მაგ., ი. ბერეზინისა და ნ. ჟიდკოვის სახელმძღვანელო „გამოთვლების მეთოდები“, II ტომი).

კრებადობა გამომდინარეობს შემდეგ, ქვემოთ განსაზღვრულ აპრიორულ შეფასებათა საფუძველზე.

ცენტრალური $x_{k,1}$ კვანძებისათვის აპრიორული შეფასება გამომდინარეობს (3.4) ფორმულების ძალით. მართლაც,

$$|\, y(x_{k,1})| \le \max_i |\, y(x_{0,i})| + l \max_j |\, f(x_j; y(x_j)| + \frac{h^6 l}{504000} f^{(6)}(\xi),$$

p_i წონების დადებითობის გამო.

არაცენტრალური კვანძებისათვის სამართლიანია წარმოდგენა:

$$y(x_{k,i}) = y(x_{k,1}) + \int_{x_{k,1}}^{x_{k,i}} f(x)dx \Rightarrow$$

$$y(x_{0,i}) = y(0) + \int_{0}^{x_{0,1}} f(x)dx, y(x_{k,2}) = y(x_{k,1}) + \int_{x_{k,1}}^{x_{k,2}} f(x)dx$$

საიდანაც

$$y(x_{k,i}) = y(x_{0,i}) + \int_{x_{0,i}}^{x_{k,i}} f(x)dx = y(x_{0,i}) + \int_{0}^{x_{(k+1),1}} - \int_{0}^{x_{0,i}} + \int_{x_{k,i}}^{x_{(k+1),1}} =$$

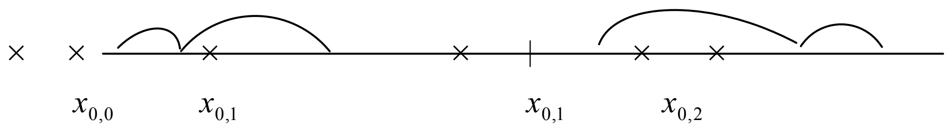
$$y(x_{o,i}) + \frac{h}{18}\sum_{j=0}^{k-1}[5f(x_{j,0}) + 8f(x_{j,1}) + 5f(x_{j,2})] + 0(h) + \sum_{j=0}^{k-1} E_{G_{s,2}}[f; x_{j,1}; x_{j+1,1}].$$

ამის გამო,

$$| y(x_{k,i}) | \le \max_{(s,j)} | f(x_{s,j}; y(x_{s,j})| + Mh + \frac{h^6 l}{504000} f^{(6)}(\xi, y(\xi))|,$$
$$M = \max|f(x,y)|.$$

რადგან

$$|-\int_{0}^{x_{0,i}} fdx - \int_{x_{k,i}}^{x_{k+1,1}} fdx | \le Mx_{0,i} + M(h - x_{0,i}) = Mh \qquad \text{i=0,2}$$



დავუბრუნდეთ ზოგადი შემთხვევის განხილვას. დავუშვათ, (3.1)-ის მაგივრად ვსარგებლობთ გაუსის ფორმულით, როდესაც კვანძთა რიცხვი m+1-ია და ჰერმიტის 2-ჯერადი $m+1$ კვანძიანი საინტერპოლაციო ფორმულით. ადვილი სანახავია, რომ თვლის სქემა მეორდება, თუ ჩავთვლით, რომ საწყისი ცხრილი განსაზღვრულია $x_{0,i}$ (i=0,1,2...,m) წერტილებში. გაუსის ფორმულის ნაშთითი წევრის შეფასება წარმოებულთა მაქსიმალურად დასაშვებ კლასში $0(h^{2m+3})$ სიდიდეა, ხოლო ჰერმიტის ფორმულებისთვის – $0(h^{2m+2})$ (უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ბადის ბიჯის მიმართ შეთანხმებული რიგი მიიღება, თუ საინტერპოლაციო პროცესში განსაზღვრულ წარმოდგენებში დასაშვები ფუნქცია იგივე კლასისაა, რაც კვადრატურულ პროცესში). (3.5) და (3.6)

ტიპის აპრიორული შეფასებები ავტომატურად კმაყოფილდება გაუსის კვადრატურულ ფორმულებში შემავალი წონების დადებითობის გამო $\forall m \geq 0$. განვსაზღვროთ ამონახსნის ასაგებად საჭირო არითმეტიკულ ოპერაციათა რაოდენობა. ყოველ ეტაპზე საჭიროა 3-ჯერ (ზოგადად (m+1)-ჯერ) $f(x,y)$ ფუნქციის გამოთვლა. კვადრატურული ფორმულებით სარგებლობა საჭიროებს $f(x,y)$ ფუნქციის $\frac{5h}{18}$ და $\frac{8h}{18}$ რიცხვებზე (ზოგადად p_k წონებზე $k=\overline{0,m}$) 2-ჯერ ($(m+1)/2$-ჯერ გამრავლებას). ჰერმიტისა და გაუსის ფორმულებში შემავალი კოეფიციენტები დამოუკიდებელია k-სგან და თვლის პროცესი წარმოადგენს ერთგვაროვან პროცესს 8 (ზოგადად- 5(m+1)/2) გამრავლებით, რაც სადარია არა მარტო ეილერის დაზუსტებულ სქემასთან (რადგან m=0 შემთხვევა ეილერის დაზუსტებული სქემაა), არამედ უმჯობესია, ვიდრე რუნგე-კუტას მესამე რიგის სქემები, როდესაც $m \leq 5$.
იმ შემთხვევაში, როდესაც m=0, გაუსის ფორმულა

$$y(1)-y(0)=\int_0^h f(x)dx=\frac{h}{2}f\left(\frac{h}{2},y\left(\frac{h}{2}\right)\right)+O\left(h^3\right)\ , \tag{3.5}$$

ტრაპეციის ღია ტიპის ფორმულაა, ხოლო ჰერმიტის $H_1(x)$ პოლინომს აქვს სახე:

$$f(x)=H_1(x)+R_2[f,x]=(y_0+(x-x_0)y_0^{'}))L^2{}_{0,0}(x_0)+\frac{h^2}{6}f^{(2)}(\xi),L_{0,0}\left(x_0\right)=1$$

რაც ტეილორის ფორმულაა და დაზუსტება ხორციელდება

$$\widetilde{y}_2=\widetilde{y}_0+h\widetilde{y}_0^{'} \qquad (\widetilde{y}_{i+1}=\widetilde{y}_i+h\widetilde{y}_i)$$

ტიპის ფორმულით, რომელიც (3.5)-თან ერთად ეილერ-კოშის დაზუსტებული მეორე რიგის სქემაა.
ქვემოთ გადმოცემული იქნება რიგი განზოგადებებისა, რომელიც უშუალოდ გამომდინარეობს ზემოთ მოცემული გაუს-ჰერმიტის სქემისაგან.

ლობატოს კვადრატურული პროცესის გამოყენების შესახებ. ლობატოს კვადრატურული ფორმულები ჩაკეტილი ტიპისაა და (-1,1) შუალედისათვის ლეჟანდრის m რიგის პოლინომის ფესვებთან ერთად ვაჩვენოთ, რომ ლობატოს კვადრატურული ფორმულის წონები დადებითი რიცხვებია.

ამისათვის ავაგოთ ორ $M(\pm 1,f(\pm 1))$ წერტილზე გამავალი ფუნქცია:

$$Q\ (x)=f(-1)\frac{1-x}{2}+f(1)\frac{1+x}{2}\ \ ,$$

და გამოსავალი ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ასე:

$$J[f]=\int_{-1}^{1}Q\ (x)dx+\int_{-1}^{1}(f(x)-Q(x))\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=f(-1)+f(1)+\sum_{k=1}^{m}p_k\sqrt{1-x_k{}^2}\,(f_k-Q_k)+$$

$$+E_{Gs,m-1}\left[p(x)(f-Q);-1,1\right],p(x)=\sqrt{1-x^2}, \qquad (3.6)$$

(3.6) ძირითადი ნაწილი წარმოადგენს ჰერმიტის კვადრატურულ ფორმულას, სადაც ლეჟანდრის პოლინომის ნაცვლად აღებულია ორთოგონალური $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ წონით პოლინომები, რომლებიც, როგორც ცნობილია, ჩებიშევის I გვარის $2^{1-m}\,T_m(x)$ პოლინომებია, $p_k=\dfrac{\pi}{m}$, $x_k=\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2m}$, $k=1,2,...,m$.

აშკარაა, კერძო შემთხვევებში, როდესაც $m=0,1$ (3.6) ტრაპეციისა და სიმპსონის ფორმულებია.

ჰერმიტის ფორმულის გამოყენება პირველ შემთხვევაში შეესაბამება ეილერ-კოშის უცხადო სქემას, ხოლო $m=1$-სათვის ჰერმიტის მესამე რიგის პოლინომის გამოყენება, როდესაც კვანძებად ავირჩევთ

$$x_{k,0}=0+k\frac{h}{2},x_{k,1}=(k+1)\frac{h}{2},x_{k,2}=(k+2)\frac{h}{2}$$

აბსცისებს (ამასთან, $x_{k,1}$- როგორც ორჯერადს), მივიღებთ სქემას, რომელიც მეოთხე რიგის სიზუსტის მილნის ალგორითმის სახის სქემაა და სიმპსონის წესი გამოიყენება კვლავ, როგორც დამაზუსტებელი ფორმულა. სქემათა კლასი მიიღება კვანძებისა და კვანძით წერტილებში მოცემული ორდინატებისა და დახრილობების ვარიაციით.

დავუშვათ,

$$Q(x)=-0.5x(1-x)f(-1)+\left(1-x^2\right)f(0)+0.5x(1+x)f(1).$$

ამ დროს (3.6) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$J[f]=\frac{2}{6}[f(-1)+4f(0)+f(1)]+\sum_{k=1}^{m}p_k(f_k-Q_k)+E_{Gs,m-1}[q(f-Q);-1,1]. \qquad (3.7)$$

სადაც $1/q(x)$-რაიმე წონითი ფუნქციაა.

1.4. საწყისი ცხრილის აგების ოპერაციულ-იტერაციული მეთოდი

დავუბრუნდეთ საწყისი ცხრილის განსაზღვრის საკითხს. როგორც ლიტერატურიდანაა ცნობილი, არსებობს ცხრილის შედგენის სამი მეთოდი:

1) ტეილორის ფორმულის გამოყენებით,

2)რუნგე-კუტას ტიპის მეთოდების საშუალებით,
3)იტერაციულ-ოპერატორული მეთოდით.

1. ტეილორის ფორმულით საწყისი ცხრილის შედგენის მეთოდი, გადმოცემული მაგ., ა. კრილოვისა [1956,1][1] და ი. ბერეზინისა და ნ. ჟიდკოვის[1959,1] სახელმძღვანელოებში. ამ მეთოდის უარყოფითი მხარე ჩვენი შემთხვევისათვის მდგომარეობს იმაში, რომ მაღალი რიგის წარმოებულთა გამოთვლა, როგორც ცნობილია, არაკორექტული ამოცანაა. გარდა ამისა, ამ მეთოდით სარგებლობა განაპირობებს $f(x, y(x))$ ფუნქციაზე აშკარა არსებითი ხასიათის როგორც სტრუქტურული, ისე თვისობრივი ხასიათის შეზღუდვებს.
2. რუნგე-კუტას ფორმულებით საწყისი სქემის შედგენა
რუნგე-კუტას ტიპის სქემით სარგებლობისას უნდა აღინიშნოს, რომ საწყისი ცხრილის ცოდნა $x_{0,0}, x_{0,1}, x_{0,2}$ წერტილებში h-ის მიმართ მეექვსე რიგის სიზუსტით, საჭიროებს რუნგე-კუტას ექვსწერტილოვან (მეექვსე რიგის) სქემების გამოყენებას (იხ. დეტალები G. Engeln-Műllges, F.Reutters [1990,1]). რაც შეეხება საწყისი ცხრილის შედგენას $x_{0,i}$ წერტილებში $O(h^{2m})$ სიზუსტით ($i=\overline{0,m}$), ამისათვის საჭიროა $2m$ წერტილოვანი რუნგე-კუტას სქემის გამოყენება. ამასთან, ორივე შემთხვევაში, ორდინატები ისაზღვრება $x_i = ih$ $i = 1,2,...$ წერტილებში და არა $x_{0,i}$ წერტილებში. ცხრილის გაგრძელებისათვის, ამ წერტილებში შესაბამისი ორდინატების განსაზღვრა $O\left(h^{2m+2}\right)$სიზუსტით საჭიროებს ლაგრანჟის 2m+1 რიგის საინტერპოლაციო პოლინომებით სარგებლობას.
3. იტერაციულ-ოპერაციული მეთოდი (არაწრფივ ვოლტერას II გვარის ინტეგრალურ განტოლებებზე ან არაწრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე მიყვანის ხერხი)
აშკარაა, რომ (1) ამოცანა ტოლფასია ვოლტერას მეორე გვარის არაწრფივი შემდეგი განტოლებისა:

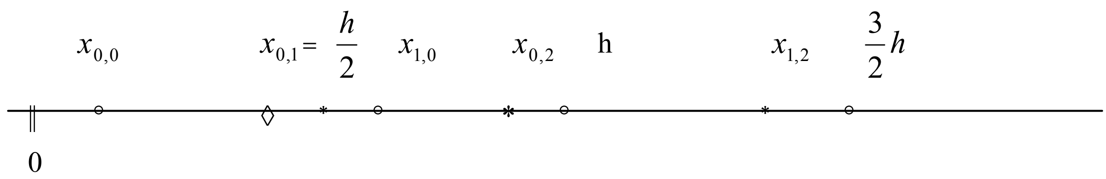
$$y(x) = y(0) + \int_0^x f(x, y(x)dx \qquad (3.8)$$

ამ განტოლების ამოხსნა შესაძლებელია იტერაციის მეთოდით $y^{[0]}(x)$ საწყისი ფუნქციის დასახელებით.[2] შესაბამისი ფუნქციონალური მწკრივი კრებადია $\forall l < +\infty$, მით უმეტეს, როდესაც $x < mh$ (h-ბიჯი) – მცირეა. ამდენად, საწყისი ცხრილის განსაზღვრა ინტეგრალურ განტოლებათა

[1] А. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях, Тостсхиздат., 1951.
[2] F. Tricomi. Integral equations, New York, 1957.

ხერხით არავითარ თეორიულ სიძნელეს არ შეიცავს. პრაქტიკული რეალიზაცია წარმოშობს მრავალ პრობლემატურ საკითხს, რომელიც შეიძლება გადაჭრილ იქნეს, თუ (3.8) მივიყვანთ არაწრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე და შევისწავლით როგორც თეორიული ხასიათის, ისე რიცხვითი რეალიზაციისას წამოჭრილ საკითხებს. ამ ნაწილს გადმოვცემთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც მოითხოვება საწყისი ცხრილის შედგენა $x_{0,0}, x_{0,1}, x_{0,2}$ ($x_{0,0}, x_{0,1}, \ldots, x_{0,m}$) წერტილებისათვის ბიჯის ბადის მიმართ მეექვსე (ან ზოგად შემთხვევაში 2m+2) სიზუსტით. ქვემოთ გადმოცემული ეყრდნობა მაგ., ნ. ბახვალოვის [1973,1] (თავი VIII, §2) მიერ გადმოცემულ მეთოდიკას და წარმოადგენს მის მოდიფიკაციას გაუსის კვანძებისათვის.

ამგვარად, საჭიროა ავაგოთ საწყისი ცხრილი, როდესაც კვანძებია $x_{0,i}$ – ლეჟანდრის პოლინომის ნულები, გადათვლილი (0,h) შუალედისათვის. განვიხილოთ $x = 0$ წერტილის მიდამოში კვანძითი წერტილების შემდეგი განაწილება:



ნახ. 2

განვიხილოთ წერტილები:

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_1 = x_{0,0}, \quad \vartheta_2 = \frac{h}{2} - x_{0.0}, \quad \vartheta_3 = x_{0,1}, \quad \vartheta_4 = x_{1,0}, \quad \vartheta_5 = x_{0,2}$$

ვაინტეგროთ (1) განტოლება $(0, \vartheta)$ (j=1,2,3) შუალედში.

$$y(\vartheta_j) - y(0) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_j} y'(x)dx$$

და $y'(x)$ შევცვალოთ მეექვსე რიგის საინტერპოლაციო ფორმულით ϑ_j ($j = \overline{0,5}$) კვანძებით:

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{5} \prod_{j \neq k} \frac{x - \vartheta_j}{\vartheta_k - \vartheta_j} y'(\vartheta_k) + y'(\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_5; x) \prod_{i=0}^{5} (x - \vartheta_i) = P_5(x) + R_6[y'; x] \quad (3.9)$$

$$y(\vartheta_j) - y(0) = h \sum_{k=0}^{5} c_{jk} y'(\vartheta_k) + E_j'[y'; 0; \vartheta_j] \quad (3.10)$$

სადაც

$$c_{jk} = \frac{1}{h}\int_0^{\vartheta_j} L_k(x)dx\,, \qquad E_j[y^{'}(x);0;\vartheta_j] = \int_0^{\vartheta_i} \mathrm{r}_6(x)dx \tag{3.11}$$

როგორც ცნობილია $[\vartheta_0, \vartheta_1, ..., \vartheta_5; x]_{f=y'(x)}$ სიდიდისთვის ცნობილია შეფასება:

$$|\, y'(\vartheta_0, \vartheta_1, ..., \vartheta_5; x)| \le \max_{[0,\vartheta_j]} \frac{|\, y^{(7)}(x)\,|}{6!};$$

(1) ამოცანიდან გვაქვს:

$$y(\vartheta_j) = y(\vartheta_3) + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_j} y'(x)dx \quad , \qquad (j=4,5,6),$$

საიდანაც (1)-ის გამოყენებით გვაქვს:

$$y(\vartheta_{j+1}) - y(\vartheta_3) = h\sum_{k=0}^{5} c_{jk}\, y^{'}(\vartheta_k) + E^{'}_{j+3}[y^{'};\vartheta_3;\vartheta_{j+3}] \quad . \tag{3.10′}$$

რადგან

$$\int_{\vartheta_3}^{\vartheta_{3+j}} L_k(x)dx = \int_0^{\vartheta_j} L_k(t)dt\,.$$

ამიტომ $y(\vartheta_j)$ სიდიდეების მიახლოებით მნიშვნელობად მივიღოთ შემდეგი სისტემის ამონახსნი:

$$\mathrm{y_j} = \mathrm{y}(0) + h\sum_{k=0}^{5} c_{jk} f(\vartheta_k; y(\vartheta_k))$$

$$y_{3+j} = y_3 + h\sum_{k=0}^{5} c_{jk} f(\vartheta_k; y(\vartheta_k)) = \mathrm{y}(0) + h\sum_{k=0}^{5} (c_{3k} + C_{jk} f(\vartheta_k; y(\vartheta_k))$$

თუ გამოვიყენებთ ცნობილ მეთოდიკას (იხ. მაგალითად [ნ. ბახვალოვი, [75,1]]), $\underset{j}{\varepsilon} = y_i - y(\vartheta_i)$ სიდიდეებისათვის მივიღებთ:

$$\max|\,\varepsilon_i\,| \le \frac{1}{1-cLh} M_7 h^7\,,$$

სადაც $c = \max\limits_i \sum_{k=0}^{5} |\, c_{ik}\,|$, $\quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L, \left|E_j\right| \le M_7 h^7 c_5$

$$\left|\omega_6(x)\right| = \left|\prod_{\vartheta=0}^{5}(x-\vartheta_i)\right| \le c_5 h, \qquad h = \max_i(\vartheta_{i+1} - \vartheta_i)$$

ზემოთ მოყვანილი სქემა, ცხადია, სამართლიანია $\forall m \ge 0$. საწყის კვანძებად ამ შემთხვევაში გვექნება (თუ გარკვეულობისათვის დავუშვებთ, რომ $m = 2s+1)$:

$$0 = \vartheta_0,\ x_{0,0} = \vartheta_1,\ \ x_{0,1} = \vartheta_2, \dots,\ x_{0,s} = \vartheta_{s+1}\ ,$$

$$x_{s+1} = \frac{h}{2} = \vartheta_{s+2}, x_{0,s+2} = \vartheta_{s+3}, \dots,\ x_{0,2s+1} = \vartheta_{2s+2}\,.$$

ლაგრანჟის ფორმულით

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{2s+1} L_k(x) y'(\vartheta_k) + O(h^{2s+1})\ \ .$$

შესაძლებელია გამოვიყენოთ ასეთი სქემაც: წარმოვადგინოთ $y'(x)$ ორჯერადი ჰერმიტის ფორმულით, როდესაც კვანძთა რაოდენობა არის $m+1$. როგორც ცნობილია, $y'' = f_x + f_y f$. ამიტომ

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{s} \sum_{\alpha=1}^{2} L_{2m+1,k,\alpha}(x) y^{(\alpha)}(\vartheta_k) + \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \left(\prod_{k=0}^{m} (x - \vartheta_k)^2 \right)$$

ამის შედეგად (5.12) მიიღებს სახეს

$$y(\vartheta_i) - y(0) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha=0}^{1} c_{jk,\alpha} y^{(\alpha)}(\vartheta_k) + O(h^{2m+3})\,.$$

ამგვარად, თუ $f(x)$-ის კერძო წარმოებულები შესაძლებელია გამოვითვალოთ საკმარისი სიზუსტით, მაშინ ამ სქემით საწყისი ცხრილის შედგენისათვის საჭიროა მხოლოდ $s+1$ წერტილი.

ანალოგიურად, შესაძლებელია ჰერმიტის ასიმეტრიული ფორმულების გამოყენებაც იმის მიხედვით, თუ რამდენი შედარებით მარტივი (გამოთვლების თვალსაზრისით) ინფორმაციაა მოცემული

$y(x)$ საძიებელ ფუნქციაზე 0-ის საკმარისად ახლო მიდამოში. მაგალითად, მეექვსე რიგის სიზუსტის მიღწევა შესაძლებელია $y^{(i)}(0), i =$ $= 0,1,2, y(x_{0.0}), y(x_{0,2})$ პარამეტრების საშუალებით.

1.5. ორთოგონალურ პოლინომთა გამოთვლის მეთოდი

ამ ნაწილში მოვიყვანთ ორთოგონალური (მათ შორის ლეჟანდრის, ლაგერისა და ჩებიშევის) პოლინომების გამოთვლის მაღალი(10^4) რიგის 200-მდე ნიშნის სიზუსტის, ლიტერატურაში მოცემულიდან განსხვავებულ, შედარებით ახალ ალგორითმებს. იდეური მხარე აღებულია პაროდის შრომების მიხედვით, როდესაც რეკურენტული დამოკიდებულება ორთოგონალურ პოლინომებს შორის გამოიყენება როგორც სამდიაგონალური მატრიცის საკუთრივი რიცხვების პოვნის ობიექტი, ხოლო საკუთრივი და სინგულარული რიცხვების

პოვნისათვის ვისარგებლებთ ჯ.უილკინსონის მონოგრაფიაში[1] განვითარებული სქემების მოდიფიცირებული ალგორითმებით.
ალგორითმთან ერთად მოვიყვანთ სტანდარტულ რეალიზებულ და ექსპლოატაციაში შეყვანილ პროგრამათა პაკეტს, რომელიც შექმნილია რ. ჩიკაშუასთან ერთად.

აღვნიშნოთ $P_n(x)$-ით ლეჟანდრის n-ური რიგის პოლინომი. როგორც ცნობილია, ლეჟანდრის პოლინომები აკმაყოფილებენ შემდეგ რეკურენტულ თანაფარდობას:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad P_0(x) = 0, \quad n = \overline{0,\infty} \tag{1}$$

გადავწეროთ ეს ფორმულა შემდეგნაირად:

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x) \quad , \tag{2}$$

(2) ტოლობის ორივე მხარეს გამოვაკლოთ $(2n+1)P_n(x)$, მივიღებთ:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)(x-1)P_n(x), \quad n = \overline{0,\infty}$$

$$\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) - P_n(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x) = (x-1)P_n(x) \tag{3}$$

დავუშვათ, რომ $\bar{x}$ არის $P_{N+1}(x)$ პოლინომის ერთ-ერთი ფესვი, ანუ $P_{N+1}(\bar{x}) = 0$. ამოვწეროთ (3) ტოლობები, როცა $x = \bar{x}$ და $n = \overline{0,N}$. ამასთან ერთად გავითვალისწინოთ, რომ $P_{N+1}(\bar{x}) = 0$, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} P_1(\bar{x}) - P_0(\bar{x}) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= (\bar{x}-1)P_0(\bar{x}) \\ \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(\bar{x}) &= (\bar{x}-1)P_n(\bar{x}) \\ -P_N(\bar{x}) + \frac{N}{2N+1}P_{N-1}(\bar{x}) &= (\bar{x}-1)P_N(\bar{x}) \end{aligned} \tag{4}$$

თუ აღვნიშნავთ $\lambda = (\bar{x}-1)$ და გადავწერთ (4) სისტემას მატრიცულად, მივიღებთ:

$$A\vec{P}(\bar{x}) = \lambda\vec{P}(\bar{x}) \quad ,$$

სადაც

$$\vec{P}(\bar{x}) = (P_0(\bar{x}), P_1(\bar{x}), \ldots, P_N(\bar{x}))^T .$$

A მატრიცა არის სამდიაგონალური. თუ a_{ij}-თი აღვნიშნავთ A მატრიცის (i,j) ელემენტს, მაშინ გვექნება:

[1] J. Wilkinson, The Algebraic Eiqenvalne Problem, Clarendon Press. Oxford, 1965.

$$a_{ii} = -1,\ \ i = \overline{0, N}\ \ ,\ a_{i,i+1} = \frac{i+1}{2i+1},\ \ i = \overline{0, N-1}\ \ ,\ a_{i,i-1} = \frac{i}{2i+1}, \qquad i = \overline{1, N} \tag{5}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ლეჟანდრის $N+1$ რიგის პოლინომის ფესვების პოვნის ამოცანა მიდის სამდიაგონალური A მატრიცის საკუთრივი რიცხვების პოვნის ამოცანაზე, რადგან, თუ $\bar{x}$ წარმოადგენს $P_{N+1}(x)$ პოლინომის ფესვს, მაშინ $\lambda = \bar{x} - 1$ წარმოადგენს A მატრიცის საკუთრივ რიცხვს და პირიქით. ამგვარად, $P_{N+1}(x)$-ს გააჩნია $N+1$ რაოდენობის ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვი, რომელიც უკავშირდება A მატ-რიცის საკუთრივი რიცხვების განსაზღვრას და მათ შორის ურთიერთ-ცალსახა თანადობაა $\lambda = \bar{x} - 1$ ფორმულის სახით.

განვიხილოთ A მატრიცის საკუთრივი რიცხვების პოვნის პრობლემა. ამოვწეროთ $(A - \lambda I)$ მატრიცის n-ური რიგის მთავარი მინორი:

$$\begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{01} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2.n-3} & a_{n-2,n-2}-\lambda & a_{n-1.n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1.n-2} & a_{n-1,n-1}-\lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{nn} - \lambda) \begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{01} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1n-1}-\lambda \end{vmatrix} - \tag{6}$$

$$- a_{n-1,n} a_{n,n-1} \begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{01} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2}-\lambda \end{vmatrix}$$

აღვნიშნოთ $(A-\lambda I)$ მატრიცის n რიგის მთავარი მინორი $f_n(\lambda)$-თი. მაშინ (6)-დან გამომდინარეობს:

$$f_n(\lambda) = (a_{nn} - \lambda) f_{n-1}(\lambda) - a_{n-1,n} a_{n,n-1} f_{n-2}(\lambda), \quad n = \overline{1,N} \tag{7}$$

$$f_0(\lambda) = 1, \qquad f_1(\lambda) = a_{00} - \lambda \ .$$

თუ (5) ფორმულებს ჩავსვამთ (7)-ში, მივიღებთ:

$$f_n(\lambda) = -(1+\lambda) f_{n-1}(\lambda) - \frac{n}{2n+1}\frac{n}{2n-1} f_{n-2}(\lambda) \tag{8}$$

$$f_0(\lambda) = 1, \quad f_1(\lambda) = -1-\lambda, \quad n = \overline{1,N}$$

(8) ფორმულით განსაზღვრული $f_N(\lambda)$ წარმოადგენს A მატრიცის მახასიათებელი განტოლების მნიშვნელობას λ წერტილში, ანუ $f_N(\lambda) = \det(A-\lambda I)$.

რადგან ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ $f_N(\lambda)$, ამიტომ $f_N(\lambda)=0$ განტოლების ამოსახსნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ მკვეთთა მეთოდი

$$\lambda_{k+1} = \frac{\lambda_{k-1} f_N(\lambda_k) - \lambda_k f_N(\lambda_{k-1})}{f_N(\lambda_k) - f_N(\lambda_{k-1})} \tag{9}$$

ამისათვის საჭიროა დავასახელოთ λ_0 და λ_1.

როგორც ვიცით, A მატრიცის $\overline{\lambda}$ საკუთრივ რიცხვს შეესაბამება $\overline{x} = \overline{\lambda} - 1$ $P_{N+1}(x)$ პოლინომის ფესვი. გავიხსენოთ ლეჟანდრის პოლინომების ერთ-ერთი ასიმპტოტური გამოსახულება.[1]

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cos\left((n+\frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + O(n^{-\frac{3}{2}}),$$

სადაც $0 < \varepsilon < \varphi < \pi - \varepsilon$, ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. მოვითხოვოთ, რომ $\cos\left((n+\frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, მაშინ $P_n(\cos\varphi) \approx 0$.თუ

$$\cos\left((n+\frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \frac{2n+1}{2}\varphi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + i\pi, \ \varphi = \frac{4i+3}{4n+2}\pi, \qquad i = \overline{0, n-1}$$

დავუშვათ, რომ $n = N+1$. მივიღებთ:

[1] G. Szegö. Orthogonal Polynomials. New York City, 1959.

$$\varphi = \frac{4i+3}{4N+6}\pi \qquad i = \overline{0,N}\,, \quad P_{N+1}\left(\cos\frac{4i+3}{4N+6}\pi\right) \approx 0$$

ე.ი. $\cos\dfrac{4i+3}{4N+6}\pi$ წარმოადგენს $P_{N+1}(x)$ პოლინომის i-ური ფესვის საწყის მიახლოებას. აქედან გამომდინარე, $\lambda_1 = \cos\dfrac{4i+3}{4N+6}\pi - 1$ და $\lambda_0 = \lambda_1 + \dfrac{1}{N^2}$, $i = \overline{0,N}$ იქნება A მატრიცის i-ური ფესვის საწყისი მიახლოებები. მკვეთთა მეთოდით შეგვიძლია ვიპოვოთ A მატრიცის ყველა საკუთრივი რიცხვი, რომლებზეც ერთის დამატებით მივიღებთ $P_{N+1}(x)$ პოლინომის ფესვებს.

აღვნიშნოთ $P_n(x)$ პოლინომის i-ური ფესვი x_i^n-ით, მაშინ

$$P_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}\frac{2i+1}{i+1}(x - x_i^n)\,.$$

როგორც ცნობილია, ლეჟანდრის პოლინომთა მიმდევრობა $\{P_n(x)\}$ წარმოადგენს ორთოგონალურ სისტემას $[-1,1]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \tag{10}$$

ამიტომ ზემოთ მოყვანილი ალგორითმის სიზუსტის შესამოწმებლად ვიყენებთ (10) პირობას.

თავის მხრივ, (10) ინტეგრალის დასათვლელად ვიყენებთ გაუსის კვადრატურულ ფორმულას

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} p_k^N f(x_k^N), \tag{11}$$

სადაც x_k^N არის ლეჟანდრის N-ური რიგის პოლინომის ფესვი, p_k^N-წონები. p_k^N გამოითვლება ერთ-ერთი შემდეგი ფორმულით (იხ. ნაწილი II, პუნქტი 2.3):

$$p_k^N = \frac{2}{(1-(x_k^N)^2)(P_N'(x_k^N))^2}\ , \qquad P_N'(x_x^N) = \frac{2k+1}{k+1}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{N-1}\frac{2i+1}{i+1}(x_k^N - x_i^N)\,. \tag{12}$$

1.6. დანართი 1.

იაკობის პოლინომების გამოთვლის პროგრამათა პაკეტი

```
static class JacobiClass
{
    private static double[] Namr;
    private static double Eps = 1E-14;

    private struct pdp
    {
        public double p;
        public double Dp;
    }

    public static double[] Jacobi(double Alpha, long n, double Accuracy)
    {
        Eps = Accuracy;
        Namr = new double[n + 2];
        int i = 0;
        for (i = 2; i <= n; i++)
        {
            Namr[i] = A3(i - 2, i - 1, n, Alpha) * A3(i - 1, i - 2, n, Alpha);
        }

        double[] Roots = new double[n];

        if (n == 1)
        {
            Roots[0] = 0;
        }
        else
        {
            double x0 = 0;
            for (i = 0; i <= (n + 1) / 2 - 1; i += 1)
            {
                x0 = FirstApproximation(i, n, Alpha) - 1;
                Roots[i] = Newton(x0, n) + 1;
                Roots[n - i - 1] = -Roots[i];
            }
        }
        return Roots;
    }

    private static double Newton(double x0, long n)
    {

        double x1 = 0;
        double x2 = 0;
```

```
        pdp pd = default(pdp);

        x1 = x0;
        do
        {
            pd = Wilkinson(n, x1);
            x2 = x1 - pd.p / pd.Dp;
            if (System.Math.Abs(x2 - x1) < Eps) break;
            x1 = x2;
        }
        while (true);

        return x2;
    }

    private static pdp Wilkinson(long n, double X)
    {
        pdp Res = default(pdp);
        double p2 = 0;
        double p1 = 0;
        double p0 = 0;
        double dp2 = 0;
        double dp1 = 0;
        double dp0 = 0;
        long i = 0;

        p0 = 1;
        p1 = -1 - X;
        dp0 = 0;
        dp1 = -1;
        for (i = 2; i <= n; i++)
        {
            p2 = (-1 - X) * p1 - Namr[i] * p0;
            dp2 = (-1 - X) * dp1 - Namr[i] * dp0 - p1;
            p0 = p1;
            p1 = p2;
            dp0 = dp1;
            dp1 = dp2;
        }
        Res.Dp = dp2;
        Res.p = p2;
        return Res;
    }

    private static double A3(long i, long j, long n, double Alpha)
    {
        if (j == i) return -1;
        if (j == i - 1) return (i + Alpha) / (2 * i + 2 * Alpha + 1);
        if (j == i + 1)
        {
            if (i == 0)
```

```
            {
               return 1 / (1 + Alpha);
            }
            else
            {
               return (i + 1) * (i + 2 * Alpha + 1) / (2 * i + 2 * Alpha + 1) / (i + Alpha + 1);
            }
         }
         return 1;
      }

      private static double FirstApproximation(long i, long n, double Alp)
      {
         return System.Math.Cos(System.Math.PI * (4 * i + 2 * Alp + 3) / (4 * n + 4 * Alp + 2));
      }
   }
```

ქვეპროგრამის გამოყენება:

```
double[] Roots = JacobiClass.Jacobi(0.5, 10, 0.00000000001);
```

სადაც:

0.5 არის ალფა, 10 არის პოლინომის რიგი, 0.00000000001 სიზუსტე.

თავი 2. ერთგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები II რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის

2.1. შესავალი. ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა. კლასიკური სხვაობიანი მეთოდები

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის კოშის ამოცანებთან ერთად განიხილება ისეთი ამოცანებიც, როდესაც საძიებელი ინტეგრალი (დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი) ან რაიმე სხვა სახის დამოკიდებულება (ვთქვათ, წრფივი კომბინაცია ამონახსნსა და მის წარმოებულთა შორის) მოცემულია ორ ან ორზე მეტ წერტილში. ასეთი სახის ამოცანებს ეწოდებათ სასაზღვრო ამოცანები. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის. სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა და ამოხსნის მეთოდების შექმნა შეადგენს მათემატიკის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს მიმართულებას. იგი ვითარდებოდა და ვითარდება ღრმად და ინტენსიურად.
რიცხვითი ანალიზის უმნიშვნელოვანესი პრობლემატიკაა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ეფექტური სათვლელი სქემების შექმნა, გამოკვლევა და მიახლოებითი ამონახსნის მოსაძებნად აგებულ სქემათა რიცხვითი რეალიზაცია თანამედროვე ტექნიკის გამოყენებით. ისტორიულად ქართველ მეცნიერთა შორის ამ მიმართულებით აღსანიშნავია შ. მიქელაძის პიონერული შრომები, მათ შორის Ш. Микеладзе. Новые методы интегрирования дифференцииальных уравнений и их приложения к задачам теории упругости, Гостехиздат, 1951.
განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია თემურ ჯანგველაძის შესანიშნავი სახელმძღვანელო „ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდები", თბილისის უნივერსიტეტის გამ-ბა, 2005 ([ჯანგვ. 20005]). გარდა უმდიდრესი ლიტერატურული წყაროებისა, აქ გადმოცემულია კოშისა და სასაზღვრო ამოცანების მიახლოებით ამოხსნის მრავალი მეთოდი, მათ შორისაა ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის უმარტივესი (ბიჯის მიმართ მეორე რიგის სიზუსტის) სასრულსხვაობიანი მეთოდები მეორე რიგის ჩვეულებრივი წრფივი და არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის.
ქვემოთ მოცემული იქნება ამ მეთოდების არსებითი დაზუსტება და განზოგადება. რაც შეეხება სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის უმარტივეს სხვაობიან ხერხებს, აქ მოვიყვანთ მათზე ზუსტ ციტირებას [ჯანგვ. 2005] წიგნიდან, რამდენადაც იგი ქართველი მკითხველებისათვის მეტად მისაწვდომია და სათანადო ნაწილი შესანიშნავადაა გადმოცემული. ამდენად, ამ ნაწილში გადმოცემული მასალის გარჩევამდე, მკითხველისათვის უმჯობესი იქნება ([ჯანგვ.

2005] ნაშრომიდან შესაბამისი ნაწილის ღრმად გაცნობა. შრომაში [ჯანგვ. 2005] თავი IV, პარაგრ. 2-4, გვ. 159-175) განიხილება შემდეგი ორი კლასის ამოცანა:

$$(py')' - qy = f(x), y(0) = y(1) = 0, p > 0, q \geq 0\ ,$$

$$y'' = f(x, y(x)), y(o) - k_1 y'(0) = 0, y(1) + k_2 y'(1) = 0, k_i \geq 0, \max\left|f_y\right| < 8\ ,$$

რომლებიც ამოხსნილია სასრულსხვაობიანი მეთოდით, თუ წარმოებულებს შევცვლით სამწერტილოვანი სიმეტრიული სქემით (იხ. აგრეთვე ნაკვეთ III-ის პუნქტ 1.2-ში მოყვანილი ცხრილი). შესწავლილია სქემათა ამოხსნადობის, მიახლოებითი ამონახსნის ზუსტი ამონახსნისკენ კრებადობის, მდგრადობის საკითხები.

უცხო ენაზე გამოქვეყნებული ლიტერატურული წყაროებიდან გარკვეულ მიმოხილვას ვაკეთებთ 13.2 პუნქტის დასაწყისში. მათ უნდა დაემატოს არაერთხელ ზემოთ ციტირებული ენგელნ-მიუგლერისა და როიტერის სახელმძღვანელო.

ქვემოთ გადმოცემული იქნება ჩვეულებრივი II რიგის დიფერენციალური განტოლებებისათვის ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანების ბიჯის მიმართ მაღალი რიგის სიზუსტის კრებადი რიცხვითი სქემები, რომლებიც წარმოადგენს კლასიკური სქემების განზოგადებასა და დაზუსტებას.

ამონახსნის საკმარისად გლუვ ფუნქციათა კლასებზე კრებადობის რიგი $(p-1)$ ტოლია, როდესაც $y(x) \in C^{(p+1)}(0,1)$, ხოლო, როდესაც ამონახსნი ეკუთვნის $W^{(r)}(M_r;0,1)$ $(r < p+1)$ ფუნქციათა კლასს, მაშინ კრებადობის რიგი $r-1$ ტოლია, მაგრამ თავისუფალი კვანძების საშუალებით შესაძლებელია არტურ სარდის ტიპის აბსოლუტური მუდმივების ოპტიმალურად შერჩევა, ისევე, როგორც ეს ხდება კვადრატურულ ფორმულების თეორიაში ნაშთითი წევრებისათვის ზუსტი შეფასებების მიღებისას (იხ. ნაკვეთი III,თავი 2, პ.3). ამასთან ერთად მტკიცდება, რომ მიახლოებითი ამონახსნის ასაგებად საჭირო არითმეტიკულ ოპერაციათა რიცხვი წრფივი ამოცანებისათვის $O(n)$-ის, ხოლო არაწრფივი ამოცანების შემთხვევაში $O(n \ln n)$ რიგისაა.

სანამ რიცხვითი ალგორითმების აგებასა და გამოკვლევაზე გადავიდოდეთ, აქვე განვიხილოთ ზოგიერთი საკითხი, დაკავშირებული სათანადო სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხებთან.

სასაზღვრო ამოცანები, განპირობებული ერთადერთი ამონახსნის არსებობის საკმარისი პირობებით და დაკავშირებული რიცხვითი ანალიზის თემატიკასთან, შეიძლება დავყოთ ორ კლასად: პირველი – როდესაც შესაბამისი ოპერატორი მონოტონური ტიპისაა და ცალსახად ამოხსნადობას უზრუნველყოფს მაქსიმუმის პრინციპი; მეორე – როდესაც სასაზღვრო ამოცანის შესაბამისი ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორი კუმშვითი ასახვისაა. მეორე

კლასის მეთოდთა შორის ფართოდ გავრცელებული და ეფექტურია ვალე-პუსენის ტიპის მეთოდები. იხ. მაგალითად, შესანიშნავი მონოგრაფია: Дж. Сансоне. Обыкновеные дифференциальные уравнения, М.: ИЛ, т. I, гл. IV, п. 1, 1953.

ამ მეთოდების საშუალებით იგება დიფერენციალური განტოლების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი ალგებრული განტოლება, რომლის დადებითი ამონახსნი განსაზღვრავს იმ შუალედის სიგრძეს, სადაც სათანადო სასაზღვრო ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

ქვემოთ მოვიყვანთ ვალე-პუსენის ტიპის პირობებისან განსხვავებულ ამონახსნის არსებობის საკმარის პირობებს ორწერტილოვანი ამოცანისათვის მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში. ეს პირობები სასაზღვრო ამოცანათა ქვეკლასისათვის აუცილებელიცაა. ამ მიმართულებით სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა:

ვთქვათ, მოცემულია სასაზღვრო ამოცანა:

$$y''(x)-q(x)y(x)=0\,, \tag{*}$$

$$y(x_1)=y(x_2)=0\,,q(x)=q(-x)\,.$$

მაშინ სასაზღვრო ამოცანის ერთადერთი ამონახსნის არსებობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ (*) განტოლების ამონახსნი $Y_1(x)>0$*,*

როდესაც $Y_1^{(i)}(x_1)=\delta_{i0}\,,i=0{,}1\quad x_1<x<x_2\,,\forall x_1,x_2\,,$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. საკმარისობა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $x_1\le 0\le x_2$. დავუშვათ, $Y_1(x)>0, Y_2(x)$ (*) განტოლების ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნია, მაშინ (*) ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმით: $y(x)=c_1Y_1(x)+c_2Y_2(x)$. ამ ტოლობიდან c_1,c_2 განისაზღვრება ცალსახად, თუ $\Delta=Y_1(x_1)Y_2(x_2)-Y_2(x_1)Y_1(x_2)\neq 0$.

განვიხილოთ ვრონსკიანი

$$W[Y_1(x),Y_2(x)]=1, x\in[x_1,x_2].$$

ცხადია,

$$\Delta=Y_1(x_1)Y_1(x_2)\left[\frac{Y_2(x_2)}{Y_1(x_2)}-\frac{Y_2(x)}{Y_1(x_1)}\right]=\frac{(x_2-x_1)Y_1(x_1)Y_1(x_2)W\left[Y_1(\xi),Y_2(\xi)\right]}{Y_1^2(\xi)}\neq 0\,.$$

აუცილებლობა. დავუშვათ, რომ $Y_1(t)=0$, მაშინ $Y_1(x)$ ფუნქციის - ვოლტერას II გვარის ინტეგრალური განტოლებით წარმოდგენიდან, $q(x)$ ფუნქციის ლუწობის გამო, $Y_1(-t)=0$. ახლა, თუ დავუშვებთ $x_1=-t,x_2=t$, სასაზღვრო ამოცანას, საზოგადოდ, ერთადერთი ამოხსნა აღარ ექნება.

13.2. ვაშაყმაძის [1999] მონოგრაფიის III თავის პ.13 თანახმად, წარმოდგენილ ნაშრომში განვიხილავთ არაწრფივ მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენცია-ლური განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის რიცხვით მეთოდს

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \qquad (0 < x < 1), \tag{13.1}$$

$$y(0) = \alpha, \qquad y(1) = \beta. \tag{13.2}$$

აქ და ქვემოთ, შედარებისა და ბეჭდვის ცდომილების აცდენის მიზნით, ფორმულათა ნომრები ემთხვევა ზემოთ ციტირებული მონოგრაფიის მე-13 პუნქტს.

ცალკე განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც (13.1) განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$y''(x) = f(x, y(x)) \qquad (0 < x < 1), \tag{13.3}$$

სადაც $f(x, y)$ ფუნქცია y-ის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $L < 8$ მუდმივით. როგორც პიკარის (E.Picard.Lessons sur quelques problėms aux limites de la therie des equations differentialles. Gautier-Villars, Paris, 1930) შრომიდანაა ცნობილი, ეს საკმარისი პირობაა (13.3), (13.2) ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობისათვის.

(13.1), (13.2) ამოცანაში ვუშვებთ, რომ

$$\frac{1}{4}(L + L') < 1, \tag{13.4}$$

სადაც

$$L = \max_x < \left| f_y \right|, \qquad L' = \max_x \left| f_{y'} \right|, \qquad (-\infty \le y, y' \le \infty).$$

როგორც შემდგომ დავინახავთ, (13.4) უტოლობა საკმარისი პირობაა (13.1), (13.2) ამოცანის ერთადერთი ამონახსნის არსებობისათვის.

(13.3), (13.2) და (13.1), (13.2) ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის ანალიზი მრავალი ავტორის შრომაშია განხორციელებული.

(13.3), (13.2) ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ ლიტერატურის დეტა-ლური სია შეგიძლიათ იხილოთ ჰენრიჩის მონოგრაფიაში (P.Henrici. Discrete variable methods for ordinary differential equations, J. Wiley&Sons inc., 1962). მონოგ-რაფიიდან ჩანს, რომ მიახლოებითი ამოხსნის პოვნის რიცხვითი მეთოდის კრებადობის სიჩქარე არ აღემატება ბადის ბიჯის მეოთხე რიგს.

(13.1) დიფერენციალური განტოლება, უფრო ზოგადი ნიუტონის ტიპის-სასაზღვრო პირობებით, დამუშავებულია შროდერის მიერ: I.J. Schröder Angev. Math. Mach. v. 36, p. 319-331, v.37, p. 443-455, 1957.

(იხ. აგრეთვე ზემოთ ციტირებული ბერეზინი, ჟიდკოვი [1959], სადაც გადმო-ცემულია შროდერის შრომის გამარტივებული ვარიანტი და ჩატარებულია რიცხვითი ანალიზი). ამ ნაშრომიდან ჩანს, რომ (13.2) სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში რიცხვითი მეთოდების კრებადობის რიგია ბადის ბიჯის მეორე

რიგი. უნდა გამოვყოთ აგრეთვე ფოქსის (L.Fox. The numarical solutions of two-point boundary value problems in ordinary differential equations, Oxford, University Press, 1957) მონოგრაფია, რომელიც ორწერტილიან სასაზღვრო ამოცანებს ეძღვნება. ამ მონოგრაფიებში მოყვანილია (13.1), (13.2) ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის პოვნის მეთოდები ცდომილებისა და გამოთვლითი პროცესის კრებადობის შეფასების გარეშე.

ამ ნაწილში გამოთვლით სქემებს ვაგებთ ახალი კვადრატული ფორმულების, ე. წ. $(P)-(Q)$ ფორმულების საფუძველზე. ამ აპარატის საშუალებით ვაგებთ (13.1),(13.2) ამოცანის მიახლოებით ამოხსნასა და მის წარმოებულს. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ეს ფორმულები იკრიბება (13.1), (13.2) ამოცანის ზუსტი ამონახსნისაკენ და მისი წარმოებულისაკენ და რომ, თუ $y(x)\in C^{(p+1)}[0,1]$, მაშინ კრებადობის რიგია $(p-1)$ ბადის ბიჯის მიმართ.

2.2. (P) და (Q) ფორმულები

განვიხილოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულა

$$y(x)=\sum_{i=1}^{p}L_i(x)y(x_i)+R_{p-1}(x_i), \tag{13.5}$$

სადაც $0\le x_1<x_2<....<x_p\le 1,$ და

$$L_i(x)=\prod_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{p}\frac{x-x_k}{x_i-x_k},R_{p-1}(x)=y(x,x_1,...,x_p)\prod(x-x_k).$$

(13.5) ტოლობის ორჯერ გაწარმოების შედეგად ვღებულობთ

$$y''(x)=\sum_{i=1}^{p}L_i''(x)y(x_i)+y(x,x_1,...,x_p)\frac{d^2}{dx^2}\prod_{j=1}^{p}(x-x_j)+$$

$$+2y(x,x,x_1,....,x_p)\frac{d}{dx}\prod_{j=1}^{p}(x-x_j)+$$

$$+2y(x,x,x,x_1,....,x_p)\prod_{j=1}^{p}(x-x_j).$$

ამ გამოსახულებიდან თუ დავუშვებთ, რომ $x=x_i(i=\overline{2,p-1})$, მივიღებთ

$$y''(x_i)=\sum_{j=1}^{p}A_{ij}y(x_j)+R''_{p-1}(x_i)\quad(p\ge 3, i=2,...,p-1), \tag{13.6}$$

სადაც $A_{ij}=L_j''(x_i)\ (i=1,2,...,p-1,p)$, ხოლო ნაშთითი წევრისათვის ადგილი ექნება შემდეგ შეფასებას

$$\left|R''_{p-1}(x_i)\right|\le\frac{c_1M_p}{p!}h^{p-2}+\frac{c_2M_{p+1}}{(p+1)!}h^{p-1}\qquad(i=2,3,...,p-1) \tag{13.7}$$

$$h = \max_{1 \le i \le p-1} (x_{i+1} - x_{pi}).$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $p = 2s + 1$ და $x_{s+i} - x_i = x_{2s+2-i} - x_{s-i}$, $(i = \overline{1, s})$, (13.7) უტოლობას $R''_{p-1}(x_{s+1})$-ისათვის აქვს სახე

$$\left| R''_{p-1}(x_{s+1}) \right| \le \frac{c_2 M_{p+1}}{(p+1)!} h^{p-1} \tag{13.8}$$

M_p და M_{p+1} ასოებით, შესაბამისად, $y^{(p)}(x)$ და $y^{(p+1)}(x)$ ფუნქციების აბსოლუტური მნიშვნელობების ზედა საზღვარია აღნიშნული $0 \le x \le 1$ მონაკვეთზე, ხოლო (13.7), (13.8) გამოსახულებებში c_1 და c_2 მუდმივებია, რომლებიც არაა დამოკიდებული x_i $(i = \overline{1, p})$ წერტილების განაწილებაზე. იოლად შეგვიძლია მათი გამოთვლა $y(x_i)$, $(i = 1,2,..., p)$ მნიშვნელობების განსასაზღვრავად, (13.6) გამოსახულებიდან ვამტკიცებთ შემდეგ ლემას.

ლემა 13.1. (13.6) სისტემის დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან

$$\det\{A_{ij}\}_2^{p-1} \ne 0$$

დამტკიცება. სანამ გადავიდოდეთ ლემის დამტკიცებაზე. გავიხსენოთ, რომ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი და მაკლორენის ფორმულები განსხვავებულად ჩაიწერებიან პოლინომებისათვის, მაგრამ მათი დაყვანა ერთმანეთზე მარტივია, რასაც ქვემოთ განვახორციელებთ. გარდა ამისა, რადგან $\det\{A_{ij}\}_2^{p-1}$ არაა დამოკიდებული $y(x)$ ფუნქციაზე, დავუშვებთ, რომ იგი არის $(p-1)$ ხარისხის პოლინომი.

თუ მაკლორენის ფორმულას გავაწარმოებთ ორჯერ და ჩავსვამთ $x = x_i$, გვექნება

$$y^{(k)}(0) = \sum_{j=2}^{p-1} \beta_{kj} y''(x_j) \qquad (k = 2,3,...., p-1) \tag{13.9}$$

სადაც

$$\det\{\beta_{kj}\}_2^{p-1} = \frac{\prod_{k=2}^{p-1} (k-2)!}{W(x_2, x_3,..., x_{p-1})},$$

W ვანდერმონდის დეტერმინანტია. (13.9) გამოსახულების მაკლორენის ფორმულაში ჩასმით ვიღებთ

$$y(x_i) - y(0) - x_i y'(0) = \sum_{k=2}^{p-1} \frac{x_p^k}{k!} \sum_{j=2}^{p-1} \beta_{kj} y''(x_j) \qquad (i = 2,3,....p-1),$$

$$y(x_p)-y(0)-x_p y'(0)=\sum \frac{x_p^k}{k!}\sum \beta_{kj} y''(x_j).$$

ბოლო ტოლობებიდან ადვილად ვიღებთ შემდეგს

$$y(x_i)-\frac{x_p-x_i}{x_p}y(0)-\frac{x_i}{x_p}y(x_p)=\sum_{k=2}^{p-1}\frac{x_p x_i^k-x_i x_p^k}{x_p^k!}\sum_{j=2}^{p-1}\beta_{kj}y''(x_j)$$

$$(i=2,3,\ldots,p-1) \tag{13.10}$$

თუ (13.10) სისტემის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, მაშინ (13.10) ტოლობიდან მიღებული y''_{p-1}-ის გამოსახულება (13.6) გამოსახულების ეკვი-ვალენტურია ნაშთითი წევრის გარეშე. (13.10) სისტემის დეტერმინანტი შეიძლება შემდეგნაირად გამოისახოს

$$\Delta=\left\{x_p^{p-2}\begin{vmatrix} x_2^2 \ldots\ldots x_2^{p-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{p-1}^2 \ldots\ldots x_{p-1}^{p-1}\end{vmatrix}-x_p^{p-1}\begin{vmatrix} x_2 x_2^3 \ldots\ldots x_2^{p-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{p-1} x_{p-1}^3 \ldots\ldots x_{p-1}^{p-1}\end{vmatrix}+\ldots\ldots+(-1)^{p-2}x_p^{2p-4}\begin{vmatrix} x_2 \ldots\ldots x_2^{p-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{p-1} \ldots\ldots x_{p-1}^{p-2}\end{vmatrix}\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{(p-1)!(p-2)!W\left[x_2,\ldots,x_{p-1}\right]}$$

$$=\frac{(-1)^{\blacklozenge p-2}W[x_2,\ldots\ldots,x_p]}{(p-1)!(p-2)!W[x_2,\ldots\ldots,x_{p-1}]}=\frac{(-1)^{p-2}\prod_{i=2}^{p-1}x_i\prod_{i=2}^{p-1}(x_p-x_i)}{(p-1)!(p-2)!}\neq 0,$$

საიდანაც $\quad \det\{A_{ij}\}_2^{p-1}=\dfrac{1}{\Delta}$.

აქედან გამომდინარე, ლემა დამტკიცებულია.

(13.10) და ამ ლემიდან (13.6) განტოლება მოგვცემს

$$y(x_i)=\frac{x_p-x_i}{x_p}y(0)+\frac{x_i}{x_p}y(x_p)+\sum_{j=2}^{p-1}b_{ij}\left(y''(x_j)-R''_{p-1}(x_j)\right), \tag{13.11}$$

$$(i=2,3,\ldots\ldots,p-1).$$

რადგანაც b_{ij} რიცხვები არაა დამოკიდებული $y(x)$-ზე, და თუ დავუშვებთ, რომ $y(x)=x^2$, მაშინ (13.1) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\sum_{j=2}^{p-1}b_{ij}=\frac{x_i(x_i-x_p)}{2}<0, \qquad (i=2,3,\ldots\ldots,p-1). \tag{13.12}$$

თუ $x_i = x_p - x_{p+1-i}, i = 1,...,\frac{p+1}{2}$ x_i და x_p წერტილების სიმეტრიულობის გამო, (13.12) ფორმულებიდან ვასკვნით, რომ

$$b_{ij} = b_{p+1-i,p+1-j} \qquad (i,j = 2,3,.....,\frac{p+1}{2}). \tag{13.13}$$

შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას

$$\left|\sum_{j=2}^{2s} b_{s+1,j} R''_{p-1}(x_j)\right| \le \frac{c_3 M_{p+1}}{(p+1)!} h^{p+1}, \qquad 13.14)$$

სადაც c_3 მუდმივი დამოუკიდებელია h-სა და M_{p+1}-საგან. იგი დამოკიდებულია p-ზე და $x_i, i = 1,2,.....,2s+1$, წერტილების განაწილებაზე. ტეილორის ფორმულიდან, (13.12), (13.13) ტოლობებიდან, როცა $p = 2s+1$ და x_i წერტილები სიმეტრიულია x_{s+1}-ის მიმართ, (13.11) ფორმულის ნაშთითი წევრისათვის, როდესაც $i = s+1$, მიიღება (13.4) უტოლობა.

(13.11) ფორმულებს ვუწოდებთ (P) ფორმულებს. ისინი ნაშთითი წევრების გარეშე სპეციალური სპლაინის ტიპის კვადრატული ფორმულებია. საინტერესოა, რომ, როდესაც (13.11)-ში $i = s+1, s = (p-1)/2, x_j = (j-1)h$, იგი ემთხვევა შ. მიქელაძის ერთ-ერთ ცნობილ ფორმულას ნაშთითი წევრების განსხვავებული ფორმით. აღვნიშნოთ, რომ b_{ij} კოეფიციენტები შეიძლება ვიპოვოთ სხვა გზით, ალგებრულ განტოლებათ სისტემის ამოხსნის გარეშე. მართლაც, თუ $y''(x)$ ფუნქციას

$$y(x) = \frac{x_p - x}{x_p} y(0) + \frac{x}{x_p} y(x_p) + \frac{1}{x_p}\left(x_p \int_0^x dx \int_0^x y''(x)dx - x \int_0^{x_p} dx \int_0^x y''(x)dx \right)$$

იგივეობაში შევცვლით საინტერპოლაციო ფორმულით

$$y''(x) = \sum_{j=2}^{p-1} l_j(x) y''(x_i) + r_{p-3}, \tag{13.15}$$

სადაც

$$l_j(x) = \prod_{\substack{i=2 \\ i \ne j}}^{p-1} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad r_{p-3}(x) = y''(x, x_2, ..., x_{p-1}) \prod_{i=2}^{p-1} (x - x_i),$$

(P) ფორმულების ერთადერთობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$b_{ij} = \frac{1}{x_p}\left(x_p \int_0^{x_i} dx \int_0^x l_j(t)dt - x_i \int_0^{x_p} dx \int_0^x l_j(t)dt \right), \tag{13.16}$$

$$-\sum_{j=2}^{p-1} b_{ij} R''(x_i) = \frac{1}{x_p}\left(x_p \int_0^{x_i} dx \int_0^x r_{p-3}(t)dt - x_i \int_0^{x_p} dx \int_0^x r_{p-3}(t)dt \right), \qquad (i = 2,3,......, p-1).$$

(P)-ფორმულების ანალოგიურად შეგვიძლია გამოვსახოთ $y'(x_i), (i = \overline{1, p})$ სიდიდეები ე.წ. „მომენტებით“ – $y''(x_j)$, $y(x_1)$ და $y(x_p)$ ორდინატებით, თუ ვისარგებლებთ იგივეობით:

$$y'(x) = \frac{1}{x_p}[y(x_p) - y(0)] - \frac{1}{x_p}\int_0^{x_p} dt \int_x^t y''(t)dt ,$$

საიდანაც (13.15)-ის ძალით,

$$y'(x) = \frac{1}{x_p}[y(x_p) - y(0)] - \frac{1}{x_p}\sum_{j=2}^{p-1} c_{ij} y''(x_j) - \frac{1}{x_p}\int_0^{x_p} dx \int_0^x r_{p-3}(t)dt, \qquad 13.17)$$

$$(i = 1,2,......, p).$$

სადაც

$$c_{ij} = \int_0^{x_p} dx \int_{x_i}^x l_j(t)dt, \qquad (j = 2,3,......, p-1). \qquad (13.18)$$

(13.17) გამოსახულებებს ვუწოდებთ (Q) ფორმულებს. თუ (13.17)-ში დავუშვებთ, რომ $y(x) = x^2$, მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^{p} c_{ij} = -\frac{x_i^2 - (x_p - x_i)^2}{2} \qquad (13.19)$$

როცა $x_i = x_p - x_{p+1-i}$, $i = \overline{1, \frac{p+1}{2}}$ კოეფიციენტები აკმაყოფილებს პირობებს

$$c_{ij} = -c_{p+1-i,\, p+1-j} \qquad (j = 2,3,......,\left[\frac{p+1}{2}\right]) \qquad (13.20)$$

(13.16) და (13.18) გამოსახულებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს (13.13) და (13.20) ტოლობები.

2.3. სასაზღვრო ამოცანა კვაზიწრფივი განტოლებისათვის

(13.3)-(13.2) ამოცანის რიცხვითი ამონახსნისათვის ვაგებთ არაწრფივ ალგორითმს, რომლის მთავარ ნაწილს შეადგენს გამოსახულება ნიშან განსაზღვრული კოეფიციენტებით. ამ მიზნის განსახორციელებლად ვიყენებთ (P) ფორმულებს.

ადვილი დასანახია, რომ, როცა $x_i = (i-1)h$, $i = \overline{1, 2k+1,}$, $p = 2s+1$, $h = 1/2ks$, (P)- ფორმულები შეგვიძლია გადავწეროთ ასეთნაირად:

$$y_{(t-1)s+i} = \frac{2s-(i-1)}{2s} y_{(t-1)s+1} + \frac{i-1}{2s} y_{(t+1)s+1} + \sum_{j=2}^{2s} b_{ij} \Phi_{(t-1)s+j} \tag{13.21}$$

$$(t = 1,2,.....,2k-2, \quad i = 2,3,.....,s+1; \; t = 2k-1, i = 2,3,.....,s)$$

სადაც $\quad y(x_{ts+i}) = y_{ts+i}, \quad y''(x_{ts+j}) - R''_{p-1}(x_{ts+j}) = \Phi_{ts+j}$

როდესაც $i = s+1$, გვაქვს:

$$y_{ts+1} = \frac{1}{2} y_{(t-1)s+1} + \frac{1}{2} y_{(t+1)s+1} + \sum_{j=2}^{2s} b_{s+i,j} \Phi_{(t-1)s+j} \tag{13.22}$$

გადავწეროთ (13.22) ქვესისტემა სხვა სახით. ამისათვის (13.22) სისტემის ყოველი t-ური და $(2k-t)$-ური განტოლებები გავამრავლოთ t/k-ზე. ამ გზით მიღებული განტოლებების შეკრების შედეგად მივიღებთ:

$$y_{ks+1} = \frac{1}{2} y(0) + \frac{1}{2} y(1) + \sigma_{ks+1} \tag{13.23}$$

სადაც

$$\sigma_{ks+1} = \sum_{t=1}^{k-1} t \sum_{j=2}^{2s} b_{s+1,j} \Phi_{(t-1)s+j} + k \sum_{j=2}^{2s} b_{s+1,j} \Phi_{(t-1)s+j} + \sum_{t=1}^{k-1} t \sum_{j=2}^{2s} b_{s+1,j} \Phi_{(2k-1-t)s+j}. \tag{13.24}$$

დავუშვათ $1 \le s \le 3$. თანაბარი ბიჯისათვის უშუალო გამოთვლებით $b_{s+1,j} \le 0$, $j = \overline{2,2s}, (s = 4, b_{55} > 0)$. (13.12) უტოლობიდან გვაქვს

$$\sum_{j=2}^{p-1} b_{ij} = -\frac{h^2 (i-1)(p-1)}{2} \ge -\frac{(p-1)^2 h^2}{8} \quad , \; (i = 2,3,....,2s) \tag{13.25}$$

რადგან $(i-1)(p-1)$ ხდება მაქსიმალური, როცა $i = s+1, p = 2s+1$.

(13.24) ტოლობიდან და (13.25) უტოლობიდან გვაქვს

$$\sigma_{ks+1} = -1/8\Phi(\xi) \tag{13.26}$$

სადაც $\Phi(\xi)$ აღნიშნავს საშუალო მნიშვნელობას $\Phi_i \; (i = 2,3,......,2ks)$ რიცხვების მინიმუმსა და მაქსიმუმს შორის.

აქედან გამომდინარე, (13.23) ფორმულის საშუალებით, y_{ks+1} სიდიდეები წარმოადგენს სასაზღვრო და $\Phi(x) = y''(x) - R''_{p-1(x)}$ – ფუნქციის მნიშვნელობების წრფივ ფორმას.

ანალოგიურად (13.23) ფორმულებისა, ნებისმიერი y_{ts+1} $(t = 1,2,...k-1, \quad k+1,....,$ $2k-1)$ შეგვიძლია ჩავწეროთ (13.23) სახის გამოსახულებების საშუალებით. მართლაც, როდესაც $t \in [1, k-1]$, (13.22) გამოსახულებებიდან ავიღოთ პირველი t განტოლება. მათგან პირველი გავამრავლოთ $1/t$-ზე, მეორე $2/t$-ზე და ა.შ. ბოლო გავამრავლოთ $t/t = 1$-ზე, მათი შეკრების შედეგად უშუალოდ მივიღებთ:

$$y_{ts+1} = \frac{t}{t+1} y_{(t+1)s+1} + \frac{1}{(t+1)} y(0) + \Sigma^{[t]} \tag{13.27}$$

სადაც

$$\Sigma^{[t]} = \frac{2}{t+1} \sum_{r=1}^{t} r \sum_{j=2}^{2s} b_{s+1,j} \Phi_{(2s-1)s+j} = \frac{t}{8k^2} \Phi(\xi_t) \quad (t = 1,2,......,k-1) \tag{13.28}$$

ამის შემდეგ (13.23) და (13.27) გვაძლევს y_{ts+1} და $y(0)$, $y(1)$ და Φ_i, $(i = \overline{2,2ks})$-ის შორის საძიებელ დამოკიდებულებებს:

$$y_{ts+1} = \frac{2k-t}{2k} y(0) + \frac{t}{2k} y(1) + \sigma_{ts+1} \qquad (t = 1,2,....,k-1) \tag{13.29}$$

სადაც

$$\sigma_{ts+1} = \frac{t}{k} \sigma_{ks+1} + \frac{t}{k-1} \Sigma^{[k-1]} + ... + \frac{t}{|t+1|} \Sigma^{[t+1]} + \Sigma^{[t]} \tag{13.30}$$

ბოლო გამოსახულებიდან (13.28)-ის გამოყენებით ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{k-t} \frac{t}{k-i} \Sigma^{[k-1]} = -\frac{(k-1)t}{8k^2} \Phi(\xi) = -\frac{(k-1)t}{k^2} \sigma_{ks+1}^{I}.$$

(13.26) და (13.27)-ის გამოყენებით ამ გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს

$$\sigma_{ts+1} + 1 = \left[1 - \frac{(k-t)^2}{k^2} \right] \sigma_{ks+1}^{II} \qquad (t = 1,2,....,k-1).$$

σ_{ks+1}^{I} და σ_{ks+1}^{II} ჯამებისათვის გვაქვს (13.26)-ის ანალოგიური ტოლობები. როდესაც $t \in [k+1, 2k-1]$ (13.29)-ის ანალოგიურად, სამართლიანია

$$y_{(2k-t)s+1} = \frac{2k-t}{2k} y(1) + \frac{t}{2k} y(0) + \sigma_{(2k-t)s+1}, \ (t = 1,2,...,k-1) \tag{13.31}$$

სადაც

$$\sigma_{(2k-t)s+1} = \frac{t}{k} \sigma_{ks+1} + \frac{t}{k-1} \Sigma^{[k+1]} + ... + \frac{1}{k+1} \sigma^{[2k-(t+1)]} + \Sigma^{[2k-t]},$$

$$\Sigma^{[2k-t]} = \frac{2}{t+1} \sum_{r=1}^{t} r \sum_{j=2}^{2s} b_{s+1,j} \Phi_{(2k-t-1)s+j} = \frac{t}{8k^2} \Phi(\xi_{2k-t}),$$

$$\sum_{i=1}^{k-t} \frac{t}{k-i} \Sigma^{[2k-i]} = -\frac{(k-t)t}{k^2} \sigma_{ks+1}^{III},$$

$$\sigma_{(2k-t)s+1} = \left[1 - \left(\frac{k-t}{k} \right)^2 \right] \sigma_{ks+1}^{IV} \qquad (t = 1,2,....,k-1).$$

(13.23), (13.29) და (13.31) გამოსახულებების გაერთიანება გვაძლევს ერთიან წარმოდგენას:

$$y_{ts+1}=\frac{2k-t}{2k}y(0)+\frac{t}{2k}y(1)+\sigma_{ts+1},\quad (t=1,2,.....,2k-1) \qquad (13.32),$$

სადაც

$$\sigma_{ts+1}=\left[1-\left(\frac{k-t}{k}\right)^2\right]\sigma^t_{ks+1},\ (t=1,2,.....,2k-1) \qquad (13.33)$$

($\sigma^{III}_{ks+1},\sigma^{IV}_{ks+1},\sigma^t_{ks+1}$ სიდიდეებისათვის სამართლიანია (13.26)-ის ანალოგიური წარმოდგენა).

(13.32) სისტემა (13.22) ქვესისტემის ეკვივალენტურია. ავაგოთ (13.32)-ის ტიპის ფორმულები დანარჩენი $y_{(t-1)s+i}$ $(i\neq s+1)$-სათვის. (13.21)-დან (13.32)-ის საშუალებით ვიღებთ

$$y_{(t-1)s+i}=\frac{2ks-st+s-i+1}{2ks}y(0)+\frac{st-s+i-1}{2ks}y(1)+\sigma_{(t-1)s+i} \qquad (13.34)$$

სადაც

$$\sigma_{(t-1)s+i}=\frac{i-1}{2s}\sigma_{(t+1)s+i}+\frac{2s-(i+1)}{2s}\sigma_{(t-1)s+1}+\sum_{j=2}^{2s}b_{ij}\Phi_{(t-1)s+j} \qquad (13.35)$$

(13.34) და (13.35) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ ყოველ წერტილში $y(x)$ გამოისახება (13.2) სასაზღვრო სიდიდეებითა და ჯამებით. ჯამების ძირითად ნაწილს გააჩნია უარყოფითი კოეფიციენტები.

თუ $\Phi=1$, (13.33) და (13.25) ტოლობები გვაძლევს

$$\left|\sigma_{ts+1}\right|<\left|\sigma_{ks+1}\right|\le\frac{1}{8}$$

$$\left|\sigma_{(t-1)s+i}\right|<\frac{1}{8}\max_i\{1,1-h^2(4s^2-\gamma_i)\}=\frac{1}{8}, \qquad (13.36)$$

$(j=(t-1)s+i=2,3,....,2ks;\ t=1,2,....,2k-2\ ,i=2,3,...,s;\ t=2k-1$,
$t=1,2,...s,s+2,...,2s$), სადაც

$$\gamma_i=\gamma_{p+1-i}=\frac{1}{h^2}\sum_{j=2}^{2s}\left|b_{ij}\right|,\qquad (i=2,3,...s) \qquad (13.34)$$

სისტემა (13.3), (13.2) სასაზღვრო ამოცანის ეკვივალენტურია, თუ $y''(x)$-ის ნაცვლად ჩავსვამთ $f(x,y(x))$.

ნაშთითი წევრის უკუგდებით (13.34) გვაძლევს არაწრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, სადაც უცნობებია $\overline{y_i}=y_i-\eta_i$, $i=\overline{2,2ks}.$ აქ η_i-ებით აღნიშნულია ის ცდომილება, რომელსაც ვიღებთ ნაშთითი წევრის უგულებელყოფით.

აქედან გამომდინარე, გვაქვს

$$\overline{y}_{(t-1)s+i} == \frac{2ks-st+s-i+1}{2ks}y(0)+\frac{st-s+i-1}{2ks}y(1)+\overline{\sigma}_{(t-1)s+i} \qquad (13.37)$$

$$(t=1,2,....,2k-2 \text{ და } i=2,3,...,s+1; \quad t=2k-1 \text{ და } i=2,3,...,2s;)$$

სადაც $\overline{\sigma}_{ts+1}$ მიიღება თუ σ_{ts+1}-ში ნაშთით წევრს უკუვაგდებთ.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ (13.36) უტოლობები სრულდება, როდესაც $p=3,5,7$ და $x_i=(i-1)h, \quad i=1,2,.....,2ks+1$.

ქვემოთ ვაჩვენებთ, რომ (13.34)-ის ანალოგიური ფორმულების მიღება შეგვიძლია იგივე (13.36) შეფასებებით. ყოველი $p\geq 3$-სთვის, თუ ბადეს შევარჩევთ გარკვეული წესით.

ამის საჩვენებლად, უპირველეს ყოვლისა, უნდა ავაგოთ (13.22) ფორმის ფორმულა არადადებითი კოეფიციენტებით. აგრეთვე უნდა მოვძებნოთ (0,1) ინტერვალის ისეთი დანაწილება, რომელიც საშუალებას მოგვცემს ზემოთქმული ფორმულა ჩავწეროთ ქვეინტერვალის ყოველი ცენტრალური წერტილისათვის. მაშინ ცხადია, რომ ასეთი ფორმულების სიმრავლის გადაწერა შეგვიძლია (13.32) ფორმით.

ამ მიზნისათვის ვიყენებთ შემდეგ იგივეობას:

$$y(x_{s+2})=\frac{1}{2}y(0)+\frac{1}{2}y(x_{p+2})-\frac{1}{2}\int_0^{x_{s+2}}ty''(t)dt-\frac{1}{2}\int_{x_{s+2}}^{x_{p+2}}(x_{p+2}-t)y''(t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}[y(0)+y(x_{p-2})]-\frac{1}{2}\int_0^{x_{s+2}}t[y''(t)+y''(x_{p+2}-t)]dt,$$

სადაც $\quad p=2s+1, \qquad 2x_{s+2}=2x_{p+2}\leq 1.$

თუ უკანასკნელ გამოსახულებაში ინტეგრალს შევცვლით გაუსის კვადრატული ფორმულით s აბსცისით, მაშინ მივიღებთ

$$y(x_{s+2})=\frac{1}{2}[y(0)+y(x_{p+2})]+\sum_{j=2}^{2s+2}b^*_{s+2,j}y''(x_j)+r_{p+1}(x_{s+2}) \qquad (13.38)$$

სადაც რიცხვები $b^*_{s+2,j}=b^*_{s+2,2s+4-j}<0, \quad (j=\overline{2,s+1})$ მიღებულია [-1,1] ინტერვალისათვის გამოთვლილი გაუსის კოეფიციენტების $\frac{1}{4}x_{s+2}x_j$-ზე$(j=\overline{2,s+1})$ გამრავლებით; ნაშთითი წევრისათვის გვაქვს

$$\left|r_{p+1}(x_{s+2})\right|\leq\frac{C_3^*M_{p+1}}{(p+1)!}h_1^{p+1} \qquad (13.39)$$

(13.39)-ში C_3^* მუდმივაა, რომელიც დამოკიდებულია p-ზე და x_i-ზე $(i=\overline{1,p+2})$ და $\quad h_1=\max\limits_{1\leq i\leq s+1}\left|(x_{i+1}-x_i)\right|$.

(13.38)-ში $x_j \quad (j=\overline{2,s-1})$ კვანძები s-ური რიგის ლეჟანდრის პოლინომის ნულებია, რომელიც განმარტებულია $(0,x_{s+2})$ ინტერვალზე და რომლის $x_j,\, j=s+3,...,2s+2$ ნულები ეკუთვნის (x_{s+2},x_{2s+3}) ინტერვალს.

თუ (0,1) ინტერვალს დავყოფთ k-რაოდენობა ქვეინტერვალად და გამოვიყენებთ (13.38) ფორმულას, მივიღებთ

$$y_{t(s+1)+1}=\frac{1}{2}y_{(t-1)(s+1)+1}+\frac{1}{2}y_{(t+1)(s+1)+1}+\sum_{j=2}^{2s+2}b^*_{s+2,j}\Phi_{(t-1)(s+1)+j}\quad (t=\overline{1,2k-1}). \qquad (13.40)$$

(13.22) და (13.40) ფორმულები ერთნაირი სტრუქტურისაა, განსხვავება ისაა, რომ (13.22)-ში ბადე თანაბარია, ხოლო (13.40)-ში – სპეციალური. მაშასადამე (13.40) ფორმულებს შეგვიძლია მივცეთ (13.32) ფორმულების ანალოგიური სახე.

თუ გამოვიყენებთ (P) ფორმულებს და დავუშვებთ, რომ ყოველი ქვეინტერვალის $x_{t(s+1)+i}$, $(t=\overline{0,2k-1}, i=\overline{2,s+2})$ წერტილები არჩეულია ზემოთ მითითებული წესით, ანუ, მოკლედ, გაუსის ბადის კვანძებია, გვექნება

$$y_{(t-1)(s+1)+i}=(1-kx_i)y_{(t-1)(s+1)+1}+kx_iy_{(t+1)(s+1)+1}+{\sum_{j=2}^{2s+2}}' b^*_{ij}\Phi_{(t-1)(s+1)+j}=$$

$$=(1-kx_i)y_{(t-1)(s+1)+1}+kx_iy_{(t+1)(s+1)+1}+{\sum_{j=2}^{2s+2}}' b^*_{ij}y_{(t-1)(s+1)+j}-{\sum_{j=2}^{2s+2}}' b^*_{ij}R''_{p-1}(x_{(t-1)(s+1)+j},$$

$$(t=1,2,...,2k-2 \text{ და } i=2,3,....,s+1;\quad t=2k-1 \text{ და }$$
$$i=2,3,...,s+1,s+3,....,2s+2).$$

აქაც და შემდგომაც მარცხენა მხარეში ჯამის სიმბოლოსთან შტრიხი ნიშნავს, რომ აჯამვისას რომელიმე ორი (უმჯობესია სიმეტრიული) ინდექსი გამოიტოვება.

უკანასკნელი სისტემისა და (13.32)-ის ანალოგიური ფორმულების დახმარებით, რომელიც (13.40) სისტემის მოდიფიცირებითაა აგებული, სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა:

$$y_{(t-1)(s+1)+i}=\alpha_{(t-1)(s+1)+i}y(0)+\beta_{(t-1)(s+1)+i}y(1)+\sigma^*_{(t-1)(s+i)+i}, \qquad (13.41)$$
$$(t=1,2,...,2k-2\,, i=2,3,....,s+2;\quad t=2k-1\,,\; i=2,s,....,2s+2),$$

სადაც

$$\alpha_{(t-1)(s+1)+i}=\frac{2k-2kx_i-t+1}{2k},\qquad \beta_{(t-1)(s+1)+i}=\frac{2kx_i+t-1}{2k}.$$

$\sigma^*_{t(s+1)+i}$-ისათვის, რომლებსაც იგივე აგებულება აქვთ, რაც σ_{ts+i}-ს, გვაქვს

$$\left|\sigma^*_{t(s+1)+i}\right|=\frac{1}{8}\max\{1,1-\frac{1}{4k^2}(1-\gamma^*_i)\},\quad (\Phi\equiv 1).\quad (j=2,3,...,2k(s+1)), \qquad (13.42)$$

სადაც

$$\gamma_i^* = 4k^2 \sum_{j=2}^{2s+2} \left| b_{ij}^* \right|.$$

(13.41) სქემაში ნაშთითი წევრების უკუგდების შედეგად მივიღებთ:

$$\overline{y}_{(t-1)(s+1)+i} = \alpha_{(t-1)(s+1)+i} y(0) + \beta_{(t-1)(s+1)+i} y(1) + \overline{\sigma}^*_{(t-1)(s+1)+i}\,. \tag{13.43}$$

ამგვარად ავაგეთ გამოსახულება, რომლის მთავარ (არაწრფივ) ნაწილს აქვს არადადებითი კოეფიციენტები. თანაბარი ბადის შემთხვევაში ეს წარმოდგენა სამართლიანია, როდესაც $p = 3,5,7$; გაუსის ბადის შემთხვევაში მთავარი ნაწილის კოეფიციენტებს ერთნაირი ნიშანი აქვს ყოველი კენტი $p \ge 3$-სთვის. (13.37) და (13.43) არაწრფივი ალგორითმების, აგრეთვე σ-ჯამების, R_p'' და r_{p+1}-ის სიდიდეებისათვის მიღებული შეფასებების დახმარებით შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 13.1. *ვთქვათ, სრულდება შემდეგი პირობები:* $L < 8$ *და* $y(x) \in C^{(p+1)}[0,1]$.

მაშინ:

1. (13.37) და (13.43) სისტემებს გააჩნია ერთადერთი ამოხსნა $\bar{y}_{\bar{i}}$*-ის მიმართ და მისი მიღება შეიძლება მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით;*

2. როგორც თანაბარი ბადის $(p = 3,5,7)$, *ასევე გაუსის* $(p = 2s+1 \ge 3)$ *დანაწილების შემთხვევაში მიახლოებითი ამოხსნა იკრიბება (13.3),(13.32) ამოცანის ზუსტი ამოხსნისაკენ* $(p-1)$ *რიგით* h*-ისა და* h_1*-ის მიმართ.*

დამტკიცება. თეორემის პირველი ნაწილის დასამტკიცებლად საკმარისია იმის ჩვენება, რომ (13.37) და (13.43) არაწრფივი ალგორითმების შესაბამისი σ და σ^* ოპერატორები არიან კუმშვითი ოპერატორები. σ-სათვის ეს გამომდინარეობს (13.36)-დან, ხოლო σ^*-ისათვის (13.42)-დან, თუ შევნიშნავთ, რომ $L < 8$ პირობისა და k-ს სათანადო შერჩევით

$$8 - L\max\{1, 1 - \frac{1}{4k^2}(1 - \gamma_i^*)\} = 8 - L^* > 0$$

შევაფასოთ ცდომილება. ჯერ განვიხილოთ თანაბარი ბადის შემთხვევა. გამოვაკლოთ ტოლობები (13.37) (13.34)-ს. (13.8), (13.14) ფორმულებისა და σ_i $(i = \overline{2,2ks})$ სიდიდეებისათვის მიღებული გამოსახულებების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\max\left|\eta_i\right| \le \frac{C_4 M_{p+1}}{(8-L)(p+1)!} h^{p-1} \qquad (p = 3,5,7) \tag{13.44}$$

გაუსის ბადის შემთხვევაში ცდომილების შეფასებისათვის სამართლიანია იგივე სქემა: (13.41) ტოლობებს ვაკლებთ (13.43), ვითვალისწინებთ (13.8), (13.12), (13.39) ფორმულებსა და σ_i^* - $(i=\overline{2,2k(s+1)})$ სიდიდეებისათვის აგებულ გამოსახულებებს. ამის შედეგად მივიღებთ

$$\max|\eta_i| \le \frac{C_5 M_{p+1}}{(8-L^*)(p+1)!} h_1^{\,p-1} \qquad (p \ge 3) \qquad (13.44')$$

თუ (13.44) და $(13.44')$ უტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $k \to \infty$, ამით თეორემა 13.1 დამტკიცება სრულდება, რადგან C_4 და C_5 არ არის დამოკიდებული k-ზე.

თუ $y_i^{[n]}$ აღვნიშნავთ (13.37), (13.43) ამოცანების ამონახსნების n-ურ მიახლოებას იტერაციული მეთოდით, n აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$n \le \frac{(p-1)\ln h^{-1} + |\ln(1-\vartheta)|}{|\ln\vartheta|},$$

სადაც $\vartheta = L/8$, თანაბარი ბადისათვის, $\vartheta = L^*/8$ გაუსის ბადისათვის, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ

$$\left|y_i - y_i^{[n]}\right| \le \left[\frac{C_4 M_{p+1}}{(8-L)(p+1)!} + 1\right] h^{p-1} \qquad (p=3,5,7; i=2,3,......,2ks),$$

$$\left|y_i - y_i^{[n]}\right| \le \left[\frac{C_5 M_{p+1}}{(8-L^*)(p+1)!} + 1\right] h_1^{p-1} \qquad (p=2s+1; i=2,3,....,2k(s+1)).$$

2.4. სასაზღვრო ამოცანა არაწრფივი განტოლებისათვის

ვთქვათ მოცემულია [0,1] ინტერვალის თანაბარი $(p=3,5,7)$ ან გაუსის $(2s+1 \ge 3)$ დანაწილება; ვისარგებლოთ (13.34) და (13.40) ფორმულებით და $y''(x)$ შევცვალოთ (13.1) დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარით $f(x, y(x), \; y'(x))$:

$$y_{(t-1)z+i} = \alpha_{(t-1)z+i}\, y(0) + \beta_{(t-1)z+i}\, y(1) + \sigma_{(t-1)z+i} \qquad (13.45)$$

$$(t=1,2,....,2k-2 \quad \text{და} \quad i=2,3,...,r+1; \qquad t=2k-1 \quad \text{და} \quad i=2,3,....,2z)$$

სადაც

$$z = \begin{cases} s, & \text{თანაბარი ბადის შემთხვევაში} \\ s+1, & \text{გაუსის ბადის შემთხვევაში} \end{cases}$$

მაშინ (Q) ფორმულებს $[x_{(k-1)z+1} x_{(k+1)z+1}]$ ქვესეგმენტისათვის ექნება სახე:

$$y'_{(k-1)z+i} = k[y_{(k+1)z+1} - y_{(k-1)z+1}] - k'\sum C_{ij} y''_{(k-1)z+j} - \rho_{p-3,(k-1)z+i}, \tag{13.46}$$

სადაც

$$\rho_{p-3,(k-1)z+i} = k\int\limits_{x_{(k-1)z+1}}^{x_{(k+1)z+1}} dx \int\limits_{x_{(k-1)z+i}}^{x} y''(x, x_{(k-1)z+2},..., x_{(k+1)z-1}, x_{(k+1)z}) \prod_{j=2}^{2z} (x - x_{(k-1)z+j}) dx.$$

(13.46) ფორმულა შეიცავს $y_{(k+1)z+1} - y_{(k-1)z+1}$ სხვაობას. ამ სხვაობის გამოთვლა (13.45) ფორმულიდან (ყურადღება მივაქციოთ $\sigma_{(k+1)z+1}$ და $\sigma_{(k-1)z+1}$ ჯამებს) გვაძლევს

$$\begin{aligned} y_{(k+1)z+1} - y_{(k-1)z+1} &= \frac{1}{k}[y(1) - y(0)] + (\Sigma^{[k+1]} - \Sigma^{[k-1]}) = \\ &= \frac{1}{k}[y(1) - y(0)] + \frac{2}{k}\sum_{r=1}^{k-1} r \sum_{j=2}^{2z} b_{z+1,j}\left[\Phi_{(2k-r-1)z+j} - \Phi_{(r-1)z+j}\right] \end{aligned} \tag{13.47}$$

$\Sigma^{[k+1]} - \Sigma^{[k-1]}$ სხვაობისათვის გვაქვს

$$\frac{2}{k}\sum_{r=1}^{k-1} r \sum_{j=2}^{2z} b_{z+1,j}\left[\Phi_{(2k-r-1)z+j} - \Phi_{(r-1)z+j}\right] = -\frac{k-1}{8k^2}[\Phi_{2k-i} - \Phi i] \tag{13.48}$$

სადაც Φ_{2k-t} და Φ_t შესაბამისად მოთავსებული არის Φ_{2ks-i} და Φ_i $(i = \overline{2, kz-1})$ რიცხვებს შორის.

$$\begin{aligned} y_{(k-1)z+i} &= y(1) - y(0) + 2\sum_{r=1}^{k-1} r \sum_{j=2}^{2z} b_{z+1,j}\left[\Phi_{(2s-r-1)z+j} - \Phi_{(r-1)z+j}\right] \\ &- k'\sum_{j=2}^{2z} c_{ij} y''_{(k-1)z+j} - \rho_{p-3,(k-1)z+i}, i = 1,2,...,2z+1. \end{aligned} \tag{13.49}$$

ქვემოთ (13.45) და (13.49) ფორმულებს გამოვიყენებთ (13.1)-(13.2) ამოცანის ამოსახსნელად. ამასთან ერთად განვიხილოთ კოშის შემდეგი ამოცანები:

$$y'_1(x) = f(x, \lambda(x), y_1(x)), \qquad l_1 \le x \le 1, \tag{13.50}$$

$$y_1(l_1) = \gamma \;,$$

$$y'_1(x) = f(x, \mu(x), y_1(x)), \qquad l_2 \ge x \ge 0, \tag{13.51}$$

$$y_1(l_2) = \delta \,,$$

სადაც შემოტანილია შემდეგი აღნიშვნები: $x_{(k-1)z+1} = l_1, x_{k-1)z+1} = l_2, y'(x) = y_1(x)$. $\lambda(x)$ და $\mu(x)$ ფუნქციებსა და γ, δ რიცხვებს განვსაზღვრავთ ქვემოთ.

თუ (13.45) და (13.49) სისტემებში უკუვაგდებთ ნაშთით წევრებს და გამოვიყენებთ (13.1) განტოლებას, მივიღებთ

$$\bar{y}_{(t-1)z+i} = \alpha_{(t-1)z+i}\, y(0) + \beta_{(t-1)z+i}\, y(1) + \bar{\sigma}_{(t-1)z+i} \tag{13.52}$$

$$y'_{(k-1)z+i} = y(1) - y(0) + 2\sum_{r=1}^{k-1} r \sum_{j=2}^{2s} b_{z+1,j}\left[f_{(2s-r-1)z+j} - f_{(r-1)z+j} \right] -$$

$$-k'\sum_{j=2}^{2z} c_{ij}\, \bar{f}_{(k-1)z+j}, i = 1,2,...,2z+1 \tag{13.53}$$

სადაც $\bar{f}_i = f(x_i, \bar{y}(x_i), \bar{y}'(x_i))$.

განვიხილოთ (13.52), (13.53), (13.50) და (13.51) გამოსახულებათა ერთობლიობა, რომლებიც წარმოადგენს (13.1), (13.2) ამოცანის არაწრფივ ანალოგს. მიახლოებითი ამოხსნა $\bar{y}_i = y_{i-} - \eta_i$ და მისი წარმოებული $\bar{y}'_i = y'_{i-} - \eta'_i$, სადაც η_i და η'_i ცდომილებებია, შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი გზით. (13.52) და (13.53) განტოლებებით განვსაზღვროთ ნულოვანი მიახლოება: $y_i^{[0]}(i = \overline{2,2ks})$ და $y_i'^{[0]}(i = \overline{(k-1)z+1,(k+1)z+1})$; (13.50) და (13.51)-ში შემდეგი დაშვებით

$$\lambda(x_i) = \lambda_i = y_i^{[0]} \qquad (l_1 \le x_i \le 1), \quad \gamma = y'^{[0]}(l_1)$$

$$\mu(x_i) = \mu_i = y_i^{[0]} \qquad (l_2 \ge x_i \ge 0), \quad \delta = y'^{[0]}(l_2),$$

ვხსნით კოშის ორ ამოცანას რომელიმე ცნობილი მდგრადი მეთოდით (ამ მიმართულებით იხ. ქვემოთ სათანადო შენიშვნები), რომლის დახმარებითაც განვსაზღვრავთ $y_i'^{[0]}$ $(i = 2,....,(k-1)z, \ (k+1)z+1,....,2kz)$ სიდიდეებს.

რამდენადაც გვაქვს ნულოვანი აპროქსიმაცია $y_i^{[0]}$ და $y_i'^{[0]}$, $i = 2,.....,2kz$. (13.52) და (13.53) სისტემების მეშვეობით შეგვიძლია მივიღოთ $y^{[1]}{}_i$ $i = 2,.....,2kz$ და $y_i'^{[1]}$ $i = (\overline{(k-1)z+1,(k+1)z+1})$. (13.50) და (13.51) ამოცანებიდან იმ დაშვებით, რომ

$$\lambda(x_i) = \lambda_i = y_i^{[1]} \qquad (l_1 \le x_i \le 1), \quad \gamma = y'^{[1]}(l_1),$$

$$\mu(x_i) = \mu_i = y_i'^{[1]} \qquad (l_2 \ge x_i \ge 0), \quad \delta = y'^{[1]}(l_2),$$

შეგვიძლია ვიპოვოთ $y_i'^{[1]}$, $(i = 2,....,(k-1)z,(k+1)z+1,....,2kz)$.

ამ პროცესის გაგრძელებით მიმდევრობით ვპოულობთ $y_i^{[m]}$ და $y_i'^{[m]}$, $m = 2,3.....$

ადვილი დასანახია, რომ $y_i^{[m]}$ და $y_i'^{[m]}$ იკრიბება $\bar{y}$ და $\bar{y}'_i$-საკენ, თუ არაწრფივი სქემის შესაბამისი ოპერატორი არის კუმშვითი. (13.52) და (13.53) განტოლებისათვის ამ პირობის მიღება ადვილად შეიძლება წინა 13.2 პუნქტში $\sigma_{(t-1)z+i}$-სთვის მიღებული შეფასებებიდან, (13.19), (13.48) და (13.4) ფორ-

მულებიდან: (13.50) და (13.51) კოშის ამოცანისათვის, თავის მხრივ, სამართლიანია კაჩიოპოლი-ბანახის პრინციპი.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ (13.50) და (13.51) ამოცანების ამოხსნა შეგვიძლია საკმაოდ ზუსტად (ანუ ცდომილებით $O(h_{z-s}^{p-1}$), სადაც $h_0 = h$),რადგან (13.53) ფორმულები გვაძლევენ უცნობი ინტეგრალის მნიშვნელობებს საწყისი სეგმენტის $2z+1$ კვანძით წერტილში.

არაწრფივი ანალოგის ამოხსნის ერთადერთობიდან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა

$$\max|\eta_i| \le C_{z-s+c} M_{p+1} h_{z-s}^{p-1} \tag{13.54}$$

$$\max|\eta_i'| \le (C'_{z-s+c} M_p + C''_{z-s+6} M_{p+1}) h_{2-sp}^{p-1} \qquad (i = 1,2,....,2kz+1) \tag{13.55}$$

სადაც C_{z-s+6}, C'_{z-s6} და C''_{z-s+c} k-სა M-საგან დამოუკიდებელი არაუარყოფითი სიდიდეებია.

თუ ქვესეგმენტთა რიცხვი $k \to \infty$, მაშინ (13.54) და (13.55) უტოლობებიდან გამომდინარეობს ზემოთქმული პროცესის კრებადობა.

ახლა გავაკეთებთ რამდენიმე შენიშვნას (13.50) და (13.51) ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ მრავალბიჯიანი მეთოდით (ჰენრიჩი [1962]).

(13.50) ამოცანისათვის უნდა გამოვიყენოთ მდგრადი ფორმულები, ხოლო (13.51) ამოცანისათვის „წმინდა არამდგრადი ფორმულები“, ანუ რომლის მახასიათებელ მრავალწევრს აქვს ფესვები მოდულით ≥ 1-ზე, ხოლო ჯერადი ფესვები მოდულით მეტია ერთზე.

ზემოთქმულის საფუძველზე სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 13.2. *ვთქვათ (13.1) და (13.2) ამოცანისათვის სრულდება პირობები (13.4) და* $y(x) \in C^{p+1}[0,1]$. *მაშინ*

1) *(13.1)-(13.2) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი;*
2) *არაწრფივ ანალოგს აქვს ერთადერთი ამონახსნი და იგი მიიღება მიმდევრობითი მიახლოების კრებადი პროცესის შედეგად;*
3) *როგორც თანაბარი* $(p = 3,5,7)$, *ასევე გაუსის ბადის შემთხვევაში* $(2s+1 = p \ge 3)$ *არაწრფივი ანალოგის ამოხსნის კრებადობის რიგი (13.1)- (13.2) ამოცანის ზუსტი ამოხსნისა და მისი წარმოებულისაკენ არის* $(p-1)$ h*-ის და* h_1*-ის მიმართ შესაბამისად.*

ზემოთ მოყვანილი ალგორითმის საშუალებით ადვილად მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 13.3. *ვთქვათ სრულდება ლიფშიცის პირობა:*

$$|f(x,y,y') - f(x,z,z')| \le L|y-z| + L'|y'-z'|,\ L + L' < 4$$

მაშინ (13.1)-(13.2) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამოხსნა, რომელიც იგება იტერაციული მეთოდით.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია (P) და (Q) ფორმულების ანალოგიური გამოსახულებების აგება შემთხვევისათვის, როცა $y \in C^{(2)}[0,1]$. მართლაც, თუ $2kz+1 = n+1, h = y_n$, მაშინ ტეილორის ფორმულიდან გვექნება

$$y_i = \frac{1}{2}y_{i-1} + \frac{1}{2}y_{i+1} - \frac{h^2}{4}\left[y''_{i+1} - y''_{i-1}\right] + \frac{h^2}{4}r_i \qquad (13.56)$$

$$y'_i = \frac{1}{2h}\left[y_{i+1} - y_{i-1}\right] - \frac{h^2}{2}\left[y''_{i+1} - y''_{i-1}\right] + \frac{h^2}{2}r'_i \qquad (i = 2,3,\ldots) \qquad (13.57)$$

სადაც

$$|r_i| = \left|(y''_{i+1} - y''(\xi_{i+1})) + (y''_{i-1} - y''(\xi_{i-1}))\right| < \varepsilon_i,$$

$$|r'_i| = \left|(y''_{i+1} - y''(\xi_{i+1})) - (y''_{i-1} - y''(\xi_{i-1}))\right| < \varepsilon'_i$$

$$x \le \xi_{i+1} \le x_{i+1} \quad , \quad x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$$

(13.56) გამოსახულება შეესაბამება (P) ფორმულებს, ხოლო (13.57) – (Q) ფორმულებს, კრებადობას განაპირობებს ლიფშიცის პირობა.

აღვნიშნოთ, რომ, როცა (13.3)-ში $f(x, y(x)) = q(x)y(x) + f(x)$, მაშინ (P) და (Q) ფორმულებით ხდება ჩვეულებრივი სასრულსხვაობიანი სქემის განზოგადება. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 13.4. *ვთქვათ ბადური არე თანაბარია და დიფერენციალური განტოლების კოეფიციენტები* $q(x) \ge 0,\ f(x) \in C^{(p-1)}[0,1], (p \ge 2),$ *მაშინ* (P) *ფორმულების გამოყენება გვაძლევს ალგორითმს, რომლითაც მიახლოებითი ამოხსნის კრებადობის რიგი წრფივი ამოცანის ზუსტი ამონახსნისაკენ არის* $(p-1)$ *ბიჯის მიმართ.*

2.5. განზოგადებული ფაქტორიზაციის მეთოდი

თ. ვაშაყმაძის [1999] მონოგრაფიის III თავის პ.14 თანახმად, ქვემოთ სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის

$$-(Au + qu) = \frac{d}{dt}(k(t)u'(t)) - q(t)u(t) = f(t) \qquad (k > 0, q \ge 0) \qquad (14.1)$$

$$u(0) - k_1 u'(0) = \alpha, \qquad u(1) + k_l u'(1) = \beta \qquad (k_1 \ge 0, k_2 \ge 0) \qquad (14.2)$$

წარმოგიდგენთ უცნობი $u(t)$ ფუნქციის სიგლუვის რიგზე დამოკიდებულ ნებისმიერი სიზუსტის მეთოდს.

წინასწარ მოვიყვანთ დამხმარე ფორმულებს. ისინი 13.1 ნაწილის (P) და (Q) ფორმულების განზოგადებას წარმოადგენენ. ჩვენ ვთვლით, რომ

$$u(t) \in C^{p+1}(0,1),\ p = 2s+1.$$

(P) ფორმულებს აქვთ შემდეგი ფორმა (აღნიშვნები აქაც და შემდეგაც იქნება აღებული წინა 13 პუნქტიდან):

$$u(t_i) = \alpha_i^{p,1}(k)u(t_i) + \beta_i^{p,1}(k)u(t_{i+s}) - \sum_{j=2}^{2s} b_{ij}^{p,1} K(t_j)\left[Au(t_j) - R_{p-1}(t_i)\right],\ i = 1,2,...p, \quad (14.3)$$

სადაც

$$\alpha_i^{p,1}(k) = \left(\int_{t_1}^{t_p} k^{-1}(t)dt\right)^{-1} \int_{t_i}^{t_p} k^{-1}(t)dt\,, \qquad \beta_i^{p,1}(k) = 1 - \alpha_i^{p,1}(k)\,.$$

(Q) ფორმულები კი ასეა წარმოდგენილი:

$$u'(t_i) = \gamma_i^{p,1}(k)\left[u(t_p) - u(t_1)\right] + \sum C_{ij}^{p,1} k(t_j)Au(t_j) + \int_{\tau_1}^{\tau_p} dt \int_{\tau_i}^{t} k(t)Ar_{p-3}(t)dt, \quad (14.4)$$

$$i = 1,2,..., p$$

სადაც

$$\tau_i = \int_{\tau_i}^{t_p} k^{-1}(t)dt, \qquad \gamma_i^{p-1}(k) = \left(k(t_i)\int k^{-1}(t)dt\right)^{-1}$$

$b_{i,j}^{p,1}$ და $c_{i,j}^{p,1}$ კოეფიციენტები შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$b_{ij}^{p,1}(\tau) = \frac{1}{\tau_p - \tau_1}\left[(\tau_p - \tau_1)\int_{\tau_1}^{\tau_i} dt \int l_j(t)dt - (\tau_i - \tau_1)\int_{\tau_1}^{\tau_i} dt \int_{\tau_1}^{t} l_j(t)dt\right],$$

$$(i, j) = 2,3,......, p-1 \quad (14.5)$$

$$c_{i,j}^{P,1} = \int_{\tau_1}^{\tau_i} dt \int_{\tau_1}^{t} l_j(t)dt\,, \quad (i = \overline{1, p},\ j = \overline{2, p-1})$$

$$l_j(t) = \prod_{\substack{i=2 \\ j \neq i}}^{p-1} \frac{t - t_i}{t_j - t_i}\,.$$

ω_n-ით აღვნიშნოთ ბადური არე, რომელიც ასეა განმარტებული:

$$\omega_n = \{0 = t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1} = 1; h_i = t_i - t_{i-1}\}.$$

ω_n ბადის საზღვრისპირა წერტილებს ვუწოდებთ იმ t_i კვანძებს, რომელთათვისაც $i \le s+1$ ან $i \ge n-s+1$.

$$u(t_i) = \alpha_i^{i+s,1}(k)u(0) + \beta_i^{i+s,1}(k)u(t_{i+s}) - \sum_{j=2}^{2s} b_{ij}^{i+s,1} K(t_j)Au(t_j) + O(h^{2s+1}), \qquad i \le s+1$$

$$u(t_i)=\alpha_i^{n+1,i-s}(k)u(t_{i-s})+\beta_i^{n+1,i-s}(k)u(1)-\sum_{j=2}^{2s}b_{ij}^{n+1,i-s}K(t_j)Au(t_j)+O(h^{2s+1}),\quad (14.6)$$

$$i\ge n-s+1$$

(14.4) და (14.6) თანადობები შემდეგი გამოსახულებების მიღების საშუალებას გვაძლევს:

$$u(t_i)=\frac{\alpha_i}{1+k_1\gamma_1}\left[u(0)-k_1u'(0)\right]+\frac{\beta_i+k_1\gamma_1}{1+k_1\gamma_1}u(t_{i+s})-$$

$$-\sum\left(b_{ij}-\frac{k_1\gamma_1}{1+k_1\gamma_1}c_{ij}\right)k(t_j)+O(h^{2s+1}),\ i\le s+1,\quad (14.7)$$

$$u(t_i)=\frac{\beta_i}{1+k_2\gamma_{n+1}}\left[u(1)+k_lu'(1)\right]+\frac{\alpha_i+k_2\gamma_{n+1}}{1+k_2\gamma_{n+1}}u(t_{i-s})-$$

$$-\sum_{j=n-2s-1}^{n}\left(b_{ij}-\frac{k_2\beta_i\gamma_{n+11}}{1+k_2\gamma_{n+1}}c_{n+1,j}\right)k(t_j)Au(t_i)+O(h^{2s+1)}),\quad i\ge n-s+1.$$

აქაც და შემდგომაც კოეფიციენტების ზედა ინდექსებს და მათ ფუნქციაზე დამოკიდებულებებს აღარ დავწერთ. დამატებით შემოტანილია აღნიშვნა $h=\max_i(t_{i+1}-t_i)$.

(14.7) ფორმულების მნიშვნელოვანი თვისებაა ის, რომ მარჯვენა მხარეში მონაწილეობს საწყისი მონაცემები ((14.3) პირობებიდან). ცხადია, (14.7) ტიპის ფორმულების მიახლოება საშუალებას გვაძლევს განვაზოგადოდ პირობები. ვთქვათ, $t_i-t_{i-j}=t_{i+j}-t_i \quad (s+2\le i\le n-s)$, მაშინ (14.3)ფორმულის ნაშთითი წევრი გვაძლევს შეფასების საშუალებას [იხ. 13.1):

$$\left|\sum_{j=i-s+1}^{i+s-1}b_{ij}k(t_j)AR_{p-1}(t_j)\right|<c_1M_{p+1}h^{p+1},\qquad M_{p+1}=\max_{(0,1)}\left|u^{(p+1)}(t)\right|.$$

შიგა კვანძებისათვის $t_i\in w_n$ (14.3) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს:

$$u(t_i)=\alpha_iu(t_{i-s})+\beta_iu(t_{i+s})-\sum_{j=i-s+1}^{i+s-1}b_{i,j}k(t_j)Au(t_j)+O(h^{2s+2}).\quad (14.8)$$

თუ (14.8) ფორმულაში Au გამოსახულებას შევცვლით $qu+f$-გამოსახულებით და უკუვაგდებთ ნაშთით წევრს, მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, რომლის ამოხსნასაც u_i-თი აღვნიშნავთ $(i=2,3,......,n)$. ამ სისტემის შესაბამისი მატრიცა მულტიდიაგონალურია და დამოკიდებულია s-ზე. ასეთი სისტემის ამოსახსნელად განზოგადებულია ფაქტორიზაციის მეთოდი.

2.6. არაწრფივი შემთხვევა ნიუტონის სასაზღვრო პირობებით

ჩვენ განვიხილავთ არაწრფივ სასაზღვრო ამოცანას:

$$u''(x) = f(x,u(x),u'(x)), \quad 0 < x < 1, -M < u,u' < M \tag{15.1}$$

$$k_1 u(0) = u'(0) = \alpha, \qquad k_2 u(1) + u'(1) = \beta, \qquad k_1^2 + k_2^2 > 0 \tag{15.2}$$

(P) და (Q) ფორმულების დახმარებით ამ ნაწილში ავაგებთ ერთპარამეტრიან გამოთვლით სქემებს, რომლებიც (15.1), (15.2) არაწრფივი ამოცანის ტოლფასი იქნება.

ვთქვათ მოცემულია თანაბარი ან გაუსის (13.2 ნაწილში შემოტანილი აზრით) დანაწილება [0,1] სეგმენტისა. ჩვენ გამოვიყენებთ ფორმულებს ცენტრალური კვანძებისათვის, x_{tz+1}:

$$u_{tz+1} = \frac{1}{2}u_{(t-1)z+1} + \frac{1}{2}u_{(t+1)z+1} + A_t, \qquad t = \overline{2,k-2}, \tag{15.3}$$

სადაც

$$A_t = \sum_{j=2}^{2z} b_{z+1,j} y''_{(t-1)z+j} + O\left(h_{z-s}^{p+1}\right) .$$

ამ ფორმულას დავუკავშირებთ (14.7)-ის მსგავს ფორმულას:

$$u_{z+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{k+k_2}(k_1 u(0) - u'(0)) + \frac{1}{2}\frac{2k+k_1}{k+k_1}u_{2z+1} + A_1 \quad ,$$

$$u_{(2k-1)z+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{k+k_2}(k_2 u(1) - u'(1)) + \frac{2k+k_2}{2(k+k_2)}u_{(2k-2)z+1} + A_{2k-1} \quad , \tag{15.4}$$

სადაც

$$A_i = \sum_{j=2}^{2z}(b_{z+1,j} - k^2 \frac{x_{z+1}}{k+k_1}c_{1,j})u''_j + O\left(h_{z-s}^{p+1}\right)$$

$$A_{2k-1} = \sum_{i=2(k-1)z+2}^{2kz}\left(b_{z+1,j} - k^2 \frac{x_{z+1}}{k+k_2}c_{2z+1}\right)u''_j + O\left(h_{z-s}^{p+1}\right)$$

(15.3) მრავლდება შესაბამის უცნობ $\alpha_i \quad (i = \overline{1,2k-1})$ რიცხვებზე და ისინი შეირჩევა ისე, რომ სრულდებოდეს თანადობები:

$$u_{kz+1} = \frac{2+k_2}{2(k_1+k_2+k_1k_2)}\alpha + \frac{2+k}{2(k_1+k_2+k_1k_2)}\beta + \sigma_{kz+1} \quad , \tag{15.5}$$

$$\sigma_{kz+1} = (k_1+k_2+k_1k_2)^{-1}\left[(2+k_1)(k+k_1)A_1 + (2+k_2)\sum_{i=2}^{k-1}(2k+ik_1)A_i + \right.$$

$$\left. +k(2+k_1)(k_2+2)A_k + (2+k_1)\sum_{i=2}^{k-1}(2k+ik_2)A_{2k-i} + (2+k_1)(k+k_1)A_{2k-1}\right]$$

$$u_{tz+1} = (2k+(t+1)k_1)^{-1}\alpha + (2k+(t+1)k_1)^{-1}(2k+tk_1)y_{(t+1)z+1} + \Sigma^{[t]},$$

$$t = \overline{1,k-1}$$

სადაც

$$\Sigma^{[t]} = 2(2k+(t+1)k_1)^{-1}\left[(k+k_1)A_1+\sum_{i=2}^{t}(2k+ik_1)A_i\right],$$

$$u_{(2k-t)z+1} = \frac{\beta}{2k+(t+1)k_2}+\frac{2k+k_1}{2k+(t+1)k_1}u_{(2k-t+1)z+1}+\Sigma^{[2k-t}\quad,\qquad t=\overline{1,k-1}$$

სადაც $\Sigma^{[2k-t]} = \dfrac{2}{2k+(t+1)k_2}\left[(k_1+k_2)A_{2k-1}+\sum\limits_{i=2}^{t}(2k+ik_2)A_{i2k-i}\right],\quad t=\overline{1,2k-1}$

(15.5) გამოსახულებიდან გარკვეული გამოთვლების შემდეგ გამომდინარეობს

$$u_{tz+1} = \frac{2k+(2k-t)k_2}{2k(k_1+k_2+k_1k_2)}\alpha+\frac{2k+tk_1}{2k(k_1+k_2+k_1k_2)}\beta+\sigma_{tz+1},\quad t=\overline{1,2k-1},\qquad (15.6)$$

სადაც

$$\sigma_{tz+1} = \frac{2k+tk_1}{2k+kk_1}\sigma_{kz+1}+\sum_{j=t}^{k-1}\frac{2k-tk_1}{2k+jk_1}\Sigma^{[j]},$$

$$\sigma_{(2k-1)z+1} = \frac{2k+tk_2}{2k+kk_2}\sigma_{kz+1}+\sum_{j=t}^{k-1}\frac{2k+tk_2}{2k+jk_2}\Sigma^{[2k-j]}$$

(14.3) და (15.6) გამოყენებით, ადვილად შეგვიძლია (15.6)-ის მსგავსი გამოსახულების მიღება $x_{(t-1)z+i},(i\neq z)$ კვანძის შემთხვევაში:

$$u_{(t-1)z+i} = \frac{2k+(2k-2kx_i-t+1)k_2}{2k(k_1+k_2+k_1k_2)}\alpha+\frac{2k+(2kx_i+t-1)}{2k(k_1+k_2+k_1k_2)}\beta+\sigma_{(t-1)z+1},\qquad (15.5\text{ა})$$

სადაც

$$\sigma_{(t-1)z+i} = (1-kx_i)\sigma_{(t-1)z+1}+kx_i\sigma_{(t+1)z+1}+\sum_{=2}^{2s}B_{ij}\Phi_{(t-1)z+n},\quad (t=\overline{2,2k-1}, i=\overline{2,z+1})$$

თუ გამოვიყენებთ შემდეგი ტიპის ფორმულებს

$$u_i = k\frac{x_{2z+1}-x_i}{k+k_1}\alpha+k\frac{1+x_ik_1}{k+k_1}y_{2z+1}+\sum_{j=2}^{2s}\left(b_{ij}-k^2\frac{x_{2z+1}-x_i}{k+k_1}c_{ij}\right)u''_j+O(h^p_{z-s})$$

და

$$u_{2kz+1-i} = k\frac{x_{2z+1}}{k+k_2}\beta+k\frac{1+x_ik_2}{k+k_2}y_{(2k-1)z+1}+$$

$$+\sum_{j=2(k-1)z+2}^{2s}\left(b_{2z+2,j}+k^2\frac{x_{2z+1}-x_i}{k+k_2}c_{2z+1j}\right)u''_j+O(h^p_{z-s})$$

სასზღვრისპირა წერტილებისათვის x_i და $1-x_i$ $(i=\overline{2,z})$ უკანასკნელი ფორმულის ანალოგიურად გვექნება:

$$u_i = \frac{1+(1-x_i)k_2}{k_1+k_2+k_1k_2}\alpha+\frac{1+x_ik_1}{k_1+k_2+k_1k_2}\beta+\sigma_i\quad,\qquad (15.5\text{ბ})$$

$$u_{2kz+1-i}=\frac{1+x_ik_2}{2(k_1+k_2+k_1k_2)}\alpha+\frac{1+(1-x_i)k_1}{2(k_1+k_2+k_1k_2)}\beta+\sigma_{2kz+1-i},$$

სადაც

$$\sigma_i=\frac{k+x_ikk_1}{k+k_1}\sigma_{2z+1}+\sum_{j=2}^{2z}\left(b_{ij}-k_2\,\frac{x_{2z+1}-x_i}{k+k_1}c_{ij}\right)y''_j+O(h^p_{z-s}),$$

$$\sigma_{2kz+1-i}=\frac{k+x_ikk_2}{k+k_2}\sigma_{2(k-1)z+1}+\sum_{j=2(k-1)z+2}^{2kz}\left(b_{2z+2-i,j}+k^2\;\frac{x_{2z+1}-x_i}{k+k_2}c_{2z+1,j}\right)y''_j+O(h^p_{z-s}).$$

ამიტომაც ჩვენ დავაკავშირებთ (15.5ა) და (15.5ბ) ფორმულებს (15.5) გამოსახულებებთან და ვუწოდებთ ასეთ ფორმულათა სამრავლეს (15.5) ტიპის ფორმულებს.

(15.5 ფორმულები გრინის ფუნქციის სხვაობიან ანალოგს წარმოადგენენ. რაიმე ხარისხით უცნობი ორდინატების მიმართ (შეადარეთ ბერეზინ-ჟიდკოვს [1958] ან შროდერს [1957]). (15.5)-ს დავუმატოთ პირველი რიგის წარმოებულის მიმართ სხვაობიანი ფორმულები იმ შემთხვევაში, თუ მარჯვენა მხარეში მდგომი ფუნქცია f დამოკიდებულია $u'(x)-ze.$

ცხადია, რომ ამ მიზნებისათვის რიცხვითი დიფერენცირების ფორმულების გამოყენება არაა მოხერხებული. მაგრამ, თუ უპირატესობას მივანიჭებთ განზოგადებულ (Q) ფორმულებს (14.4) $x_{(i-1)z+i}$ $\quad(i=\overline{1,2z+1})$ და (15.6)-დან x_t $(t=k-1,k+1)$ წერტილებისათვის, u' და σ' სიდიდეებისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$u'_{(k-1)z+1}=\frac{k_1\beta-k_2\alpha}{k_1+k_2+k_1k_2}+\sigma'_{(k-1)z+i}[f],\qquad(15.7)$$

სადაც

$$\sigma'_{(k-1)z+i}=\frac{2}{(k_1+k_2+k_1k_2)}\Big\{k_1\Big[(2+k_{21})A_k+\sum_{i=2}^{k-1}(2k+ik_2)A_{2k-i}+(k+k_2)A_{2k-1}\ \Big]-$$

$$-k_2\left[\frac{1}{2}k(2+k_1)A_k+\sum_{i=2}^{k-1}(2k+ik_1)A_i+(k+k_1)A_1\right]\Bigg\}-k\sum_{j=2}^{2z}c_{ij}y''_{(k-1)z+j}+O(h^{p-1})$$

ერთპარამეტრიანი სქემის აგება დასრულებული იქნება, თუ (15.6) და (15.7)-ის ტიპის გამოსახულებებს დავუკავშირებთ კოშის (საწყის) ამოცანებს:

$$u'_1(x)=f(x,\lambda(x),u_1(x)),\qquad l_1\le x\le 1,$$

$$u_1(l_1)=\gamma,\qquad l_1=x_{(k-1)z+1},$$

$$u'_1(x)=f(x,\mu(x),u_1(x)),\qquad l_2\ge x\ge 0,$$

$$u_1(l_2)=\delta,\qquad l_2=x_{(k+1)z+1}.$$

ახლა ვუბრუნდებით (15.1)-(15.2) ამოცანის შესწავლას და განვიხილოთ შემდეგი სიდიდეები:

$$w_1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4(k_1 + k_2 + k_1k_2 - 2)}\left(4 + k_1 + k_2 + \frac{(k_2 - k_1)^2}{2(k_1 + k_2 + k_1k_2)}\right)$$

$$w_2 = \frac{1}{2(k_1 + k_2 + k_1k_2)}(k_1k_2 + 2\max\{k_1, k_2\}), \tag{15.8}$$

$$w_2' = \frac{1}{2} - \frac{k_1k_2}{4(k_1 + k_2 + k_1k_2)},$$

$$w = \max\{w_2, w_2'\}.$$

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 15.1. *ვთქვათ $f(x,u(x),u'(x))$ უწყვეტია x-ის მიმართ, აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას u და u'-ის მიმართ შესაბამისად L და L' მუდმივებით; დამატებით, დავუშვათ, სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან:*

$$w(L + L') < 1,$$

$$w_1L + w_2L' < 1. \tag{15.9}$$

მაშინ საწყის ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამოხსნა, რომლის აგებაც შეიძლება იტერაციული მეთოდით.

ამ თეორემის დამტკიცება (13.2) და(13.3) თეორემების დამტკიცების სქემის ანალოგიურია.

ახლა (15.6) და (15.7) ტიპის ფორმულებში, თუ უკუვაგდებთ ნაშთით წევრს, მივიღებ გამოსახულებებს, რომლის მეშვეობითაც ვაგებთ საწყის ცხრილს. კოშის ამოცანას შევცვლით მრავალბიჯიანი მეთოდებით (იხ. ჰენრიჩი [1962]). მიღებულ სისტემას ვუწოდებთ სხვაობიან სქემას.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 15.2. *ვთქვათ (15.1)-(15.2) ამოცანისათვის (15.9) პირობებიდან სრულდება ერთ-ერთი, მაშინ:*

1) *სხვაობიან სქემას გააჩნია ერთადერთი ამოხსნა და იტერაციული მეთოდი კრებადია;*
2) *როგორც თანაბარი $(p = 3,5,7)$, ასევე გაუსის $(p \geq 3)$ დანაწილების შემთხვევაში ალგებრული ამოცანის ამოხსნის (15.01)-(15.2) ამოცანის ამოხსნისაკენ კრებადობის რიგი არის $(p-1)$ h-ის მიმართ.*

ამ თეორემის დამტკიცება ანალოგიურია 13.2. თეორემის დამტკიცებისა.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

თეორემა 15.3. *არითმეტიკულ ოპერაციათა რიცხვი, რომელიც საჭიროა $\bar{u}(x)$ მიახლოებითი ამონახსნისა და მისი წარმოებულის $\bar{u}'(x)$ გამოსათვლელად, $k\ln k$ რიგისაა.*

ამ თეორემის დამტკიცება σ_{tz+1} ჯამის სპეციალურ თვისებას ემყარება. თუ გამოვთვლით σ_{kz+1}, მაშინ σ_{tz+1}-ც გამოთვლილია ნებისმიერი $t \neq k$-თვის, რადგანაც σ_{kz+1} ჯამი შეიცავს მას, როგორც ქვეჯამს.

2.7. რიცხვითი რეალიზაცია. მაგალითები[1]

ვიხილავთ II რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანას, როდესაც განტოლების მთავარი ნაწილი თვით-შეუღლებული –

$$Au(t)-q(t)\cdot u(t)=\frac{d}{dt}\left(k(t)\cdot\frac{du(t)}{dt}\right)-q(t)\cdot u(t)=f(t),\quad k(t)>0,q(t)\geq 0,\quad t\in(0,1) \quad (1)$$

$$k(t)>0,q(t)\geq 0,$$

ხოლო სასაზღვრო პირობები ნიუტონის სახითაა მოცემული

$$k_1u(0)-u'(0)=\alpha,\quad k_2u(1)+u'(1)=\beta,\quad k_1\geq 0,k_2\geq 0 \quad (2)$$

ვთვლით, რომ

$$\omega_h=\left\{0=t_1,t_2,...,t_n,t_{n+1}=1,t_i=h\cdot(i-1),h=\frac{1}{n}\right\}.$$

ზემოთ განხილული (იხ. პ.პ. 14,15) მეთოდიკის გამოყენებით შესაბამის მრავალწერტილოვან სხვაობიან სქემას აქვს შემდეგი სახე:

$$u_{i+m}=\alpha_{i+m}^{p+m,1+m}(k)\times u_{1+m}+\beta_{i+m}^{p+m,1+m}(k)\times u_{p+m}+$$
$$+\sum_{j=2}^{p-1}\left(f_{j+m}+q_{j+m}\cdot u_{j+m}\right)\times\left(\gamma_{i+m,j+m}(k)-\beta_{i+m}^{p+m,1+m}(k)\times\gamma_{p+m,j+m}(k)\right) \quad (3)$$

$\alpha_{i+m}^{p+m,1+m}(k)$, $\beta_{i+m}^{p+m,1+m}(k)$, $\gamma_{i+m,j+m}(k)$ პარამეტრები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\alpha_{i+m}^{p+m,1+m}(k)=\frac{\int_{t_{i+m}}^{t_{p+m}}\frac{dx}{k(x)}}{\int_{t_{1+m}}^{t_{p+m}}\frac{dx}{k(x)}},\quad \beta_{i+m}^{p+m,1+m}(k)=\frac{\int_{t_{1+m}}^{t_{i+m}}\frac{dx}{k(x)}}{\int_{t_{1+m}}^{t_{p+m}}\frac{dx}{k(x)}},$$

$$\gamma_{i+m,j+m}(k)=\int_{t_{1+m}}^{t_{i+m}}\frac{1}{k(x)}\int_0^x l_{j+m}(\tau)d\tau dx\quad, \quad (4)$$

სადაც $l_{j+m}(t)=\omega_{j+m}(t)/\left(t-t_{j+m}\right)\omega'_{j+m}\left(t_{j+m}\right),\quad \omega_{j+m}(t)=\prod_{i=1}^{j+m}(t-t_i)$.

[1] სამუშაო შესრულებულია დ. არაბიძესთან ერთად.

(3) სქემის რიცხვითი რეალიზაცია შესაბამისი ქვემოთ მოყვანილი პროგრამათა პაკეტის გამოყენებით ხორციელდება $p=5$-სთვის. (3) სქემაში ინდექსები იცვლება შემდეგნაირად: პირველი დამოკიდებულებისათვის აღებულია $m=0$, $i=2$; მომდევნო $n-3$ დამოკიდებულებისათვის: $i=3$, $m=0,1,...,n-4$; ბოლო $(n-1)$-ე სხვაობიანი განტოლებისათვის: $m=n-4$, $i=4$. (3) სქემის შესაბამისი მატრიცა 5 დიაგონალურია. (3) სქემაში კოეფიციენტები 4 ინდექსზეა დამოკიდებული. შესაძლებელია, რომ მას მიეცეს დაპროგრამებისთვის მოსახერხებელი სახე, რისთვისაც საკმარისია შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$q_2 b_{2,0,2} - 1 \equiv c_2$, $q_3 b_{2,0,3} \equiv d_2$,

$q_4 b_{2,0,4} \equiv e_2$, $\beta_{2,0} \equiv X$, $-\left(f_2 b_{2,0,2} + f_3 b_{2,0,3} + f_4 b_{2,0,4}\right) - \alpha \times \left(\alpha_{2,0}\right) \equiv g_2$

$q_2 b_{3,0,2} \equiv b_3$, $q_3 b_{3,0,3} - 1 \equiv c_3$,

$q_4 b_{3,0,4} \equiv d_3$, $\beta_{3,0} \equiv e_3$, $-\left(f_2 b_{3,0,2} + f_3 b_{3,0,3} + f_4 b_{3,0,4}\right) - \alpha \times \left(\alpha_{3,0}\right) \equiv g_3$,

$\alpha_{3,i-3} \equiv a_i$, $q_{i-1} b_{3,i-3,2} \equiv b_i$,

$q_i b_{3,i-3,3} - 1 \equiv c_i$, $q_{i+1} b_{3,i-3,4} \equiv d_i$, $\beta_{3,i-3} \equiv e_i$,

$-\left(f_{2+m} b_{3,m,2} + f_{3+m} b_{3,m,3} + f_{4+m} b_{3,m,4}\right) \equiv g_i \ i = 4,...,n-2$

$\alpha_{3,n-4} \equiv a_{n-1}$, $q_{n-2} b_{3,n-4,2} \equiv b_{n-1}$,

$q_{n-1} b_{3,n-4,3} - 1 \equiv c_{n-1}$, $q_n b_{3,n-4,4} \equiv d_{n-1}$,

$-\left(f_{n-2} b_{3,n-4,2} + f_{n-1} b_{3,n-4,3} + f_n b_{3,n-4,4}\right) - \beta \times \left(\beta_{3,n-4}\right) \equiv g_{n-1}$

$\alpha_{4,n-4} \equiv Y$, $q_{n-2} b_{4,n-4,2} \equiv a_n$,

$q_{n-1} b_{4,n-4,3} \equiv b_n$, $q_n b_{4,n-4,4} - 1 \equiv c_n$,

$-\left(f_{n-2} b_{4,n-4,2} + f_{n-1} b_{4,n-4,3} + f_n b_{4,n-4,4}\right) - \beta \times \left(\beta_{4,n-4}\right) \equiv g_n$,

სადაც

$$\alpha_{i,m} = \alpha_{i+m}^{5+m,1+m}(k), \qquad \beta_{i,m} = \beta_{i+m}^{5+m,1+m}(k),$$

$$b_{i,m,j} = \gamma_{i+m,j+m}(k) - \beta_{i+m}^{5+m,1+m}(k) \times \gamma_{5+m,j+m}(k),$$

ამგვარად (3) სისტემა გადაიწერება შემდეგნაირად

$$u_2 \times c_2 + u_3 \times d_2 + u_4 \times e_2 + u_5 \times X = g_2$$

$$u_2 \times b_3 + u_3 \times c_3 + u_4 \times d_3 + u_5 \times e_3 = g_3$$

$$u_{i-2} \times a_i + u_{i-1} \times b_i + u_i \times c_i + u_{i+1} \times d_i + u_{i+2} \times e_i = g_i, \ i = 4,...,n-2 \qquad (5)$$

$$u_{n-3} \times a_{n-1} + u_{n-2} \times b_{n-1} + u_{n-1} \times c_{n-1} + u_n \times d_{n-1} = g_{n-1}$$

$$u_{n-3} \times Y + u_{n-2} \times a_n + u_{n-1} \times b_n + u_n \times c_n = g_n,$$

ანუ

$$\begin{pmatrix} c_2 & d_2 & e_2 & X & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & b_5 & c_5 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & c_{n-2} & d_{n-2} & e_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & Y & a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \cdot \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ \cdot \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix} \equiv Tu = g \qquad (6)$$

პროგრამათა პაკეტი, წარმოდგენილი დანართის სახით, შედგება 3 ძირითადი ნაწილისაგან.

პირველი ნაწილის შემომავალი პარამეტრები $k(t),\ q(t),\ f(t)$ წარმოდგენილია ფუნქციების სახით, $\alpha,\ \beta$ და n – *income.in* ფაილით. $\{\alpha_{i,m},\ \beta_{i,m}\},\ b_{i,m,j}$ – კოეფიციენტები და T მატრიცა ინახება შესაბამისად *alfabeta.out*, *bimj.out*, *abcdef.out* ფაილებში.

პაკეტის მეორე ნაწილი – ხორციელდება T მატრიცის შებრუნება ფაქტორიზაციის მეთოდით, ფორმირდება $u = T^{-1}g$ და იგი ინახება *amo.out* ფაილში ცხრილის სახით.

პაკეტის მესამე ნაწილის შემომავალი პარამეტრია ცხრილის სახით წარმოდგენილი ამონახსნი. თუ ტესტი იმგვარია, რომ ცნობილია ზუსტი ამონახსნიც, მაშინ მიმართვით იგება მიახლოებით და ზუსტ ამონახსნთა გრაფიკები, ხორციელდება მათი შედარება.

პაკეტის პირველი ორი ნაწილი შესრულებულია „Turbo Pascal 7.0“-ზე, ხოლო მესამე – „Matlab 6.5“-ზე.

ალგორითმებისა და პროგრამული პაკეტის ცალკეული ნაწილებისა და მთლიანობაში მათი სწორად ფუნქციონირების შემოწმების მიზნით განხილულია სათანადოდ შერჩეული 4 ტესტური ამოცანა. თვლის შედეგები წარმოიდგინება ცხრილების სახით. პირველ ორ ამოცანაში დაყოფათა რაოდენობა $n = 10$. მესამესა და მეოთხეში $n = 100$; შესაბამისი ცხრილი ასახავს ცდომილების მაქსიმალურ მნიშვნელობებს.

(4) კოეფიციენტების თვლა ხორციელდება სიმპსონის შედგენილი ფორმულით, რითაც (1)-(2) ამოცანისათვის (4) სქემით აპროქსიმაცია არ უხეშდება.

ტესტური ამოცანა1: $k(t) = 1,\ q(t) = \dfrac{1}{1 + t + t^2},\ f(t) = 1,\ \alpha = 1, \beta = 3.$

მიახლოებითი ამონახსნი	ზუსტი ამონახსნი $u(t)=1+t+t^2$	სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა
u[1]=1.00000000000	1.00000000000	0.00000000000
u[2]=1.11000000000	1.11000000000	0.00000000000
u[3]=1.24000000000	1.23999999999	0.00000000000
u[4]=1.38999999999	1.38999999999	0.00000000000
u[5]=1.56000000000	1.55999999999	0.00000000000
u[6]=1.75000000000	1.75000000000	0.00000000000
u[7]=1.96000000000	1.96000000000	0.00000000000
u[8]=2.19000000000	2.18999999999	0.00000000000
u[9]=2.44000000000	2.43999999999	0.00000000000
u[10]=2.71000000000	2.70999999999	0.00000000000
u[11]=3.00000000000	3.00000000000	0.00000000000

ტესტური ამოცანა 2: $k(t)=e^{-t}$, $q(t)=e^t$, $f(t)=e^{2t}$, $\alpha=-1$, $\beta=-2.71828182845905$. შევნიშნოთ, რომ ასეთი წონისათვის (1) განტოლების მთავარი ნაწილი იგივურად ნულად იქცევა.

მიახლოებითი ამონახსნი	ზუსტი ამონახსნი $u(t)=-e^t$	სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა
u[1]=-1.00000000000	-1.00000000000	0.00000000000
u[2]=-1.10517091807	-1.10517091807	0.00000000000
u[3]=-1.22140275815	-1.22140275815	0.00000000000
u[4]=-1.34985880757	-1.34985880757	0.00000000000
u[5]=-1.49182469763	-1.49182469764	0.00000000000
u[6]=-1.64872127070	-1.64872127069	0.00000000000
u[7]=-1.82211880038	-1.82211880039	0.00000000000
u[8]=-2.01375270747	-2.01375270746	0.00000000000
u[9]=-2.22554092848	-2.22554092849	0.00000000000
u[10]=-2.45960311115	-2.45960311115	0.00000000000
u[11]=-2.71828182845	-2.71828182845	0.00000000000

ტესტური ამოცანა 3: $k(t)=e^t+1$, $q(t)=2e^t$, $f(t)=e^t$, $\alpha=1$, $\beta=2.71828182845905$.

მიახლოებითი ამონახსნი	ზუსტი ამონახსნი $u(t)=e^t$	სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა
u[45]=1.552707223242318	1.552707218512296	0.000000004730022
u[46]=1.568312188474860	1.568312185489049	0.000000002985811
u[47]=1.584073989871795	1.584073984993665	0.000000004878129
u[48]=1.599994196340424	1.599994193216844	0.000000003123580
u[49]=1.616074407260080	1.616074402192680	0.000000005067400
u[50]=1.632316223236235	1.632316219955101	0.000000003281135
u[51]=1.648721275844155	1.648721270699752	0.000000005144403
u[52]=1.665291198428359	1.665291194945894	0.000000003482465
u[53]=1.682027654962565	1.682027649700103	0.000000005262461
u[54]=1.698932312379518	1.698932308618168	0.000000003761350
u[55]=1.716006867592892	1.716006862185168	0.000000005407724

ტესტური ამოცანა 4: $k(t)=e^t$, $q(t)=\dfrac{6t^5e^t}{1+t^6}$, $f(t)=30t^4e^t$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

მიახლოებითი ამონახსნი	ზუსტი ამონახსნი $u(t)=1+t^6$	სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა
u[45]=1.007256387950061	1.007256313856487	0.000000074093574
u[46]=1.008303795066679	1.008303765624078	0.000000029442601
u[47]=1.009474372613156	1.009474296895860	0.000000075717296
u[48]=1.010779244732708	1.010779215328512	0.000000029404197
u[49]=1.012230667687513	1.012230590464242	0.000000077223271
u[50]=1.013841316482845	1.013841287200194	0.000000029282652
u[51]=1.015625078545637	1.015625000000000	0.000000078545637
u[52]=1.017596316912697	1.017596287800188	0.000000029112508
u[53]=1.019770689413416	1.019770609664192	0.000000079749223
u[54]=1.022164389940897	1.022164361129398	0.000000028811498
u[55]=1.024794992102479	1.024794911296340	0.000000080806139

შენიშვნა. კომენტარები და ლიტერატურული მითითებანი ამ ნაკვეთს არ ერთვის.

2.8. დანართი 2
პროგრამათა პაკეტი

I ნაწილი

```
program mag1;
uses crt;
var aa,bb,cc,dd:text;
    n,i,m,j:integer;
    alfa,beta,h,X,Y:real;
    alfaIM,betaIM:array[2..4,0..100] of real;
    bIMJ:array[2..4,0..100,2..4] of real;
    t:array [1..100] of real;
    s:string;

function k(t:real):real;
begin
     k:=exp(t)+1;
end;

function q(t:real):real;
begin
     q:=2*exp(t);
end;

function f(t:real):real;
begin
     f:=exp(t);
end;

function intK(i,j:integer;h:real):real;
var s:real;
    l:integer;
begin
     s:=0;
     for l:=i to j-1 do
          s:=s+(1/k(h*(m+l-1))+ 4*1/k(h*(m+l))+1/k(h*(m+l)));
     intK:=s*h/6;
end;

function intKL(i,m,j:integer;h:real):real;
var s,t:real;
    l:integer;
delta, lambda, sigma:array[2..100] of real;
begin
 delta[2+m]:=-(2*m+5);     delta[3+m]:=-(2*m+4);     delta[4+m]:=-(2*m+3);
lambda[2+m]:=(m+2)*(m+3); lambda[3+m]:=(m+1)*(m+3); lambda[4+m]:=(m+1)*(m+2);
 sigma[2+m]:=2;           sigma[3+m]:=-1;           sigma[4+m]:=2;
     s:=0;
     for l:=1+m to i+m-1 do
```

```
    begin
    t:=(l-1)*h;
s:=s+(1/k(t))*((t*t*t/3+delta[j+m]*h*t*t/2+lambda[j+m]*h*h*t)/(sigma[j+m]*h*h));
    t:=(l-1/2)*h;
s:=s+4*(1/k(t))*((t*t*t/3+delta[j+m]*h*t*t/2+lambda[j+m]*h*h*t)/(sigma[j+m]*h*h));
    t:=l*h;
s:=s+(1/k(t))*((t*t*t/3+delta[j+m]*h*t*t/2+lambda[j+m]*h*h*t)/(sigma[j+m]*h*h));
    end;
    intKL:=s*h/6;
end;


begin
    clrscr;
    assign(aa,'income.in');
    assign(bb,'alfabeta.out');
    assign(cc,'bimj.out');
    assign(dd,'abcdef.out');

    reset(aa);
    readln(aa,s);
    val(copy(s,3,length(s)-2),alfa,i); n:=trunc(alfa);
    readln(aa,s);
    val(copy(s,6,length(s)-5),alfa,i);
    readln(aa,s);
    val(copy(s,6,length(s)-5),beta,i);
    close(aa);
    h:=1/n;
    for m:=0 to n-4 do
       for i:=2 to 4 do
          begin
             alfaIM[i,m]:=intK(i,5,h)/intK(1,5,h);
             betaIM[i,m]:=intK(1,i,h)/intK(1,5,h);
          end;
    for m:=0 to n-4 do
       for i:=2 to 4 do
          for j:=2 to 4 do
             bIMJ[i,m,j]:=intKL(i,m,j,h)-betaIM[i,m]*intKL(5,m,j,h);

    rewrite(bb);
    writeln(bb,alfaIM[2,0]:0:12,' ',betaIM[2,0]:0:12,' ',alfaIM[2,0]+betaIM[2,0]:0:12);
    for m:=0 to n-4 do
    writeln(bb,alfaIM[3,m]:0:12,' ',betaIM[3,m]:0:12,' ',alfaIM[3,m]+betaIM[3,m]:0:12);
    writeln(bb,alfaIM[4,n-4]:0:12,' ',betaIM[4,n-4]:0:12,' ',alfaIM[4,n-4]+betaIM[4,n-
4]:0:12);
    close(bb);

    rewrite(cc);
    writeln(cc,bIMJ[2,0,2]:0:12,' ',bIMJ[2,0,3]:0:12,' ',bIMJ[2,0,4]:0:12);
    for m:=0 to n-4 do
    writeln(cc,bIMJ[3,m,2]:0:12,' ',bIMJ[3,m,3]:0:12,' ',bIMJ[3,m,4]:0:12);
```

```
    write(cc,bIMJ[4,n-4,2]:0:12,' ',bIMJ[4,n-4,3]:0:12,' ',bIMJ[4,n-4,4]:0:12);
    close(cc);

    for i:=1 to n do t[i]:=(i-1)*h;

    rewrite(dd);
    write(dd,q(t[2])*bIMJ[2,0,2]-1:0:12,' ',q(t[3])*bIMJ[2,0,3]:0:12,' ');
    write(dd,q(t[4])*bIMJ[2,0,4]:0:12,' ',betaIM[2,0]:0:12,' ');
    writeln(dd,-(f(t[2])*bIMJ[2,0,2]+f(t[3])*bIMJ[2,0,3]+f(t[4])*bIMJ[2,0,4])-
alfa*alfaIM[2,0]:0:12);

    write(dd,q(t[2])*bIMJ[3,0,2]:0:12,' ',q(t[3])*bIMJ[3,0,3]-1:0:12,' ');
    write(dd,q(t[4])*bIMJ[3,0,4]:0:12,' ',betaIM[3,0]:0:12,' ');
    writeln(dd,-(f(t[2])*bIMJ[3,0,2]+f(t[3])*bIMJ[3,0,3]+f(t[4])*bIMJ[3,0,4])-
alfa*alfaIM[3,0]:0:12);

    for m:=1 to n-5 do
    begin
    write(dd,alfaIM[3,m]:0:12,' ',q(t[2+m])*bIMJ[3,m,2]:0:12,' ',q(t[3+m])*bIMJ[3,m,3]-
1:0:12,' ');
    write(dd,q(t[4+m])*bIMJ[3,m,4]:0:12,' ',betaIM[3,m]:0:12,' ');
    writeln(dd,-
(f(t[2+m])*bIMJ[3,m,2]+f(t[3+m])*bIMJ[3,m,3]+f(t[4+m])*bIMJ[3,m,4]):0:12);
    end;

    write(dd,alfaIM[3,n-4]:0:12,' ',q(t[n-2])*bIMJ[3,n-4,2]:0:12,' ',q(t[n-1])*bIMJ[3,n-4,3]-
1:0:12,' ');
    write(dd,q(t[n])*bIMJ[3,n-4,4]:0:12,' ');
    writeln(dd,-(f(t[n-2])*bIMJ[3,n-4,2]+f(t[n-1])*bIMJ[3,n-4,3]+f(t[n])*bIMJ[3,n-4,4])-
beta*betaIM[3,n-4]:0:12,' ');

    write(dd,alfaIM[4,n-4]:0:12,' ',q(t[n-2])*bIMJ[4,n-4,2]:0:12,' ',q(t[n-1])*bIMJ[4,n-
4,3]:0:12,' ');
    write(dd,q(t[n])*bIMJ[4,n-4,4]-1:0:12,' ');
    writeln(dd,-(f(t[n-2])*bIMJ[4,n-4,2]+f(t[n-1])*bIMJ[4,n-4,3]+f(t[n])*bIMJ[4,n-4,4])-
beta*betaIM[4,n-4]:0:12,' ');

    close(dd);
    writeln(sin(1)*exp(1):5:20);
    writeln(alfa,' ',beta);
    write(n);
end.
```

II ნაწილი

```
program mag2;
uses crt;
var aa,bb,cc,dd:text;
   a,b,c,d,e,g,u:array[2..100] of Extended;
   al,be,ga,ep:array[3..105] of Extended;
```

```
    alS,beS,gaS,deS,epS:array[4..105] of Extended;
    X,Y,alfa,beta,koe:Extended;
    n,i:integer;
    s:string;

function uu(t:real):real;
begin
     uu:=exp(t);
end;

begin
     clrscr;
     assign(aa,'income.in');
     assign(bb,'abcdef.out');
     assign(cc,'albegaep.out');
     assign(dd,'amo.txt');

     reset(aa);
     readln(aa,s);
     val(copy(s,3,length(s)-2),alfa,i); n:=trunc(alfa);
     readln(aa,s);
     val(copy(s,6,length(s)-5),alfa,i);
     readln(aa,s);
     val(copy(s,6,length(s)-5),beta,i);
     close(aa);

     a[2]:=0; a[3]:=0; b[2]:=0;
     d[n]:=0; e[n]:=0; e[n-1]:=0;

     reset(bb);
     readln(bb,c[2],d[2],e[2],X,g[2]);
     readln(bb,b[3],c[3],d[3],e[3],g[3]);
     for i:=4 to n-2 do
     readln(bb,a[i],b[i],c[i],d[i],e[i],g[i]);
     readln(bb,a[n-1],b[n-1],c[n-1],d[n-1],g[n-1]);
     readln(bb,Y,a[n],b[n],c[n],g[n]);
     close(bb);

     al[3]:=b[3]*d[2]-c[2]*c[3];
     be[3]:=b[3]*e[2]-c[2]*d[3];
     ga[3]:=b[3]   *X-c[2]*e[3];
     ep[3]:=b[3]*g[2]-c[2]*g[3];

     alS[4]:=a[4]*d[2]-c[2]*b[4];
     beS[4]:=a[4]*e[2]-c[2]*c[4];
     gaS[4]:=a[4]   *X-c[2]*d[4];
     deS[4]:=        -c[2]*e[4];
     epS[4]:=a[4]*g[2]-c[2]*g[4];
```

```
    for i:=3 to n-1 do
      begin
        if i=n-2 then
          begin
            a[n]:=Y*be[n-3]-al[n-3]*a[n];
            b[n]:=Y*ga[n-3]-al[n-3]*b[n];
            c[n]:=        -al[n-3]*c[n];
            g[n]:=Y*ep[n-3]-al[n-3]*g[n];
          end;

        al[i+1]:=(alS[i+1]*be[i]-al[i]*beS[i+1])*(koe);
        be[i+1]:=(alS[i+1]*ga[i]-al[i]*gaS[i+1])*(koe);
        ga[i+1]:=(             -al[i]*deS[i+1])*(koe);
        ep[i+1]:=(alS[i+1]*ep[i]-al[i]*epS[i+1])*(koe);

        alS[i+2]:=(a[i+2]*be[i]-al[i]*b[i+2])*(1);
        beS[i+2]:=(a[i+2]*ga[i]-al[i]*c[i+2])*(1);
        gaS[i+2]:=(            -al[i]*d[i+2])*(1);
        deS[i+2]:=(            -al[i]*e[i+2])*(1);
        epS[i+2]:=(a[i+2]*ep[i]-al[i]*g[i+2])*(1);

      end;

    rewrite(cc);
    writeln(cc,c[2]:0:12,' ',d[2]:0:12,' ',e[2]:0:12,' ',X:0:12,' ',g[2]:0:12);
    for i:=3 to n do
    writeln(cc,al[i]:0:12,' ',be[i]:0:12,' ',ga[i]:0:12,' ',ep[i]:0:12);
    close(cc);

    for i:=n downto 3 do
    u[i]:=(ep[i]-be[i]*u[i+1]-ga[i]*u[i+2])/al[i];
    u[2]:=(g[2]-d[2]*u[3]-e[2]*u[4]-X*u[5])/c[2];

    rewrite(dd);
    for i:=2 to n do
    write(dd,u[i]:0:12,' ');
    writeln(dd,beta:0:12);
    for i:=1 to n do
    write(dd,uu(i/n):0:12,' ');
    close(dd);
end.
```

III ნაწილი

```
U=load('amo.out failis misamarti');
X=.01:.01:1;
plot(X,U).
```

გამომცემლობის რედაქტორი მარინე ვარამაშვილი
გარეკანის დიზაინი თინათინ ჩირინაშვილი
კომპ. უზრუნველყოფა ნათია დვალი

0128, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
0128, Tbilisi, 14, I. Chavchavadze Av.
www.press.tsu.ge (25-14-32)